

Stochastische Euler-Euler-PDF-Methodik für das Zwei-Fluid-Modell und Anwendung auf kavitierende Strömungen der Automobilindustrie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)

von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

angenommene

DISSERTATION

von

M.Sc. Martin R. Raquet

Tag der mündlichen Prüfung: 03.07.2019

Hauptreferent: apl.Prof. Dr.-Ing. Andreas Class

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit am Institut für Kern- und Energietechnik (IKET) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Sie wurde gefördert durch Mittel der AVL List GmbH und der AREVA Nuclear Professional School/Framatome Professional School. Ich danke für diese finanzielle Unterstützung. Teile der numerischen Berechnungen wurden auf dem Parallelrechner „bwUniCluster“ durchgeführt. Ich danke für die Bereitstellung dieser Möglichkeit im Rahmen des baden-württembergischen Konzepts „bWHPC“.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Class für die fachliche Betreuung und die Übernahme des Hauptreferats. Seine wissenschaftliche Erfahrung und seine Aufgeschlossenheit gegenüber alternativen Lösungsansätzen haben zum Erfolg der Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr. sc. techn. Thomas Koch danke ich für die Bereitschaft, den Vorsitz des Promotionsprüfungsausschusses zu übernehmen. Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer danke ich für die Übernahme des Korreferats. Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Schulenberg danke ich für die Möglichkeit, an seinem Institut meine Dissertation anzufertigen. Herrn Dr. Wilfried Edelbauer und seinem Team der AVL List GmbH danke ich für die konstruktive Zusammenarbeit im Rahmen der Modellimplementierung in AVL Fire™. Den Mitarbeitern des Instituts für Kern- und Energietechnik danke ich für die kollegiale Zusammenarbeit.

Für das Korrekturlesen der vorliegenden Arbeit und die persönliche Unterstützung während meiner Promotionszeit danke ich meiner Familie, insbesondere meiner Frau Patricia.

Teile der vorliegenden Arbeit wurden bereits in folgenden Veröffentlichungen behandelt. In den entsprechenden Kapiteln wird hierauf verwiesen.

- RAQUET, Martin; CLASS, Andreas: AREVA Nuclear Professional School, Stochastic Field Method. In: SCHULENBERG, Thomas (Hrsg.): Annual Report 2015 of the Institute for Nuclear and Energy Technologies, KIT Scientific Publishing, KIT Scientific Reports 7720, Karlsruhe, 2016
- RAQUET, Martin; CLASS, Andreas; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to two phase flow. In: KÖNKE, C. (Hrsg.); TRUNK, C. (Hrsg.): PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 17, Issue 1, Special Issue: 88th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Weimar 2017, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2017
- RAQUET, Martin; CLASS, Andreas G.; EDELBAUER, Wilfried: Poster: Stochastic Field Method: A Monte Carlo methodology to address vapor distribution in cavitating flows. In: IICR 5th Cavitation Workshop, Chania, Crete, 2017
- RAQUET, Martin; CLASS, Andreas; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to Cavitating Flows in an Injection Nozzle. In: Proceedings of the 10th Symposium on Cavitation (CAV2018), ASME, edited by Joseph Katz, Baltimore, 2018
- RAQUET, Martin R.; CLASS, Andreas G.; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to Multi-Fluid Flow. In: PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 18, Issue 1, Special Issue: 89th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), München 2018, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2018

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen. Die Stochastische Feldmethode und die zugehörige PDF-Transportgleichung wurden ursprünglich für den Bereich reaktiver Strömungen formuliert mit dem Ziel, nichtlineare Reaktionsterme zu schließen. Die Stochastische Feldmethode kann im Bereich von Zweiphasenströmungen für die Modellierung des Phasenübergangs genutzt werden. Die Formulierung der zugehörigen PDF-Transportgleichung unterscheidet sich von derjenigen für reaktive Strömungen. Da bisherige Anwendungen der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen auf Analogiebeziehungen beruhen, erfolgt in der vorliegenden Arbeit eine ausführliche Diskussion beider Bereiche. Die PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil der dispersen Phase wird für das Zwei-Fluid-Modell und für das Drift-Flux-Modell hergeleitet. Die Relation der stochastischen Felder mit einer realen Strömung wird diskutiert und mit konkurrierenden Modellen verglichen. In diesem Zusammenhang wird erörtert, wie mit der Stochastischen Feldmethode die Blasengrößenverteilung einer realen Strömung berechnet werden kann. Mehrere Implementierungsmöglichkeiten der Stochastischen Feldmethode in die kommerzielle Software AVL FireTM werden diskutiert. Zwei Varianten zur Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Quellterm der dispersen Phase aufgrund einer fluktuierenden Keimanzahl bzw. turbulenter Fluktuationen werden für das Zwei-Fluid-Modell implementiert. Sie werden anhand eines zweidimensionalen und eines dreidimensionalen Injektors aus der Automobilindustrie verifiziert und validiert. Es wird untersucht, ob mit der Variante der Stochastischen Feldmethode zur Berücksichtigung turbulenter Fluktuationen ein Mehrwert bei der Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung erzielt werden kann. Das herkömmliche Zwei-Fluid-Modell im RANS-Kontext scheitert an einer Reproduktion der experimentell nachweisbaren Intermittenz. Aufwändigere LES-Berechnungen sind erforderlich, um den Einfluss lokaler Fluktuationen und damit die intermittierend kavitierende Strömung nachzubilden. Die implementierte Variante der Stochastischen Feldmethode ist in der Lage, die Intermittenz im RANS-Kontext qualitativ nachzubilden, ohne dabei die lokalen Effekte aufzulösen. Sie erlaubt die Bewertung der Strömung in einem RANS-Kontext und vermeidet aufwändigere LES-Berechnungen. In der industriellen Praxis werden hierdurch Entwicklungszeit sowie -kosten reduziert.

Abstract

The present thesis focuses on the application of the stochastic field method to two-phase flow. The stochastic field method and the corresponding PDF transport equation were initially formulated for the field of reactive flows with the aim of closing non-linear reaction terms. The stochastic field method can be used in the field of two-phase flow to model the phase transition. The formulation of the corresponding PDF transport equation differs from that of reactive flows. Since former applications of the stochastic field method to two phase flows are based on analogy relations, a detailed discussion of both fields is performed in the present thesis. The PDF transport equation for the volume fraction of the disperse phase is derived for the Two-Fluid Model and for the Drift-Flux Model. The relation between stochastic fields and a real flow is discussed and compared to competitive models. In this context, it is analysed how the bubble size distribution in a real flow can be computed with the stochastic field method. Several possibilities of implementation of the stochastic field method into the commercial software AVL FireTM are discussed. Two variants taking into account stochastic fluctuations in the source term of the disperse phase due to a fluctuating seed number or turbulent fluctuations are implemented for the Two-Fluid Model. They are validated and verified with a two-dimensional and a three-dimensional injector from the automotive industry. It is examined whether the variant of the stochastic field method taking into account turbulent fluctuations can achieve added value when computing an intermittent cavitating flow. The conventional Two-Fluid Model in a RANS context fails to reproduce the experimentally provable intermittency. More expensive LES computations are necessary to reproduce the influence of local fluctuations and the intermittent cavitating flow. The implemented variant of the stochastic field method is able to reproduce the intermittency in a RANS context qualitatively, without resolving the local effects.

It allows the evaluation of the flow in a RANS context avoiding more expensive LES computations. As a result, both the development time and cost are reduced in the industrial practice.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Simulationen in der Produktentwicklung	1
1.2	Themeneingrenzung	3
1.3	konkurrierende Forschungsvorhaben	8
1.4	Zielsetzung der Arbeit	10
1.5	Struktur der Arbeit	11
2	Grundlagen	13
2.1	Lagrange Partikel	13
2.2	Euler-Euler-Methoden	15
2.2.1	Zwei-Fluid-Modell	16
2.2.1.1	Mittelungsoperatoren	17
2.2.1.2	Kontinuitätsgleichung	17
2.2.1.3	Modellierung des Quellterms der Kontinuitätsgleichung	17
2.2.1.4	Blasendichte	18
2.2.1.5	Druckdifferenz	19
2.2.1.6	Bestimmung der Blasengröße	19
2.2.1.7	Momentengleichung	19
2.2.1.8	Modellierung des Quellterms in der Momentengleichung	20
2.2.1.9	Verwendung alternativer Mittelungen	21
2.2.1.10	Fluktuationen im Zwei-Fluid-Modell	21
2.2.2	Drift-Flux-Modell	23
2.2.3	MUSIG-Modell	24
2.3	Lösungsverfahren des Zwei-Fluid-Modells in AVL Fire™	25
2.4	PDF-Methoden	26
2.4.1	Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten im Kontext von PDFs	26
2.4.2	PDF-Methoden in der Verbrennung	28
2.4.3	Lösung der PDF-Transportgleichung	29
2.4.3.1	Lagrange Betrachtung der samples	30
2.4.3.2	Eulersche Betrachtung der samples	31
2.5	Stochastische Prozesse	32
2.5.1	Markov-Prozess	33
2.5.2	Wiener-Prozess	33
2.5.3	Langevin-Gleichung	33
2.5.4	Fokker-Planck-Gleichung	34
2.5.5	Liouville-Gleichung	34
3	Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell	35
3.1	Interpretation von stochastischen Feldern im Zwei-Fluid-Modell	36

3.1.1	Betrachtungsweise globaler Repräsentanten	36
3.1.2	Betrachtungsweise lokaler Schwankungen	37
3.2	Approximation der PDF durch die Stochastische Feldmethode	38
3.3	Transport der PDF durch die Stochastische Feldmethode	39
3.4	Vergleich mit konkurrierenden Modellen	39
3.5	Herleitung der PDF-Transportgleichung	41
3.6	Unterschiede zur PDF-Transportgleichung für Skalargrößen im Verbrennungsbereich	53
3.6.1	Entfallen des Micromixing-Terms	53
3.6.2	Konsistenzprobleme bei Anwendung der Stochastischen Feldmethode für Skalargrößen in der Verbrennung	54
3.6.2.1	Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils durch Ensemble-Mittelung der Transportgleichungen für die samples	54
3.6.2.2	Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils durch Integration der PDF-Transportgleichung	56
3.6.3	Eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell	57
3.6.4	Entfallen des Terms der mittleren turbulenten Advektion	59
3.7	Beeinflussung aufgrund stochastischer Schwankungen im Quellterm	63
3.7.1	Schwankungen in der Blasendichte	63
3.7.2	Schwankungen in der Druckdifferenz	72
4	Numerische Berechnungen	77
4.1	Abgrenzung der verwendeten Varianten der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire TM	77
4.2	model-to-model-Verifikation und -Validierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire TM	77
4.2.1	2D Injektor	78
4.2.2	3D Injektor	82
4.2.3	Fazit zur Verifikation und Validierung	83
4.3	Verwendung der Stochastischen Feldmethode bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft	84
4.4	Approximation der PDF	87
4.5	Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung	87
4.5.1	Beschreibung des experimentellen Ergebnisses und der LES-Berechnungen aus der Literatur	88
4.5.2	Numerische Berechnung mit RANS-Methoden	91
4.5.2.1	Berechnung mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire TM	91
4.5.2.2	Berechnung mit der Stochastischen Feldmethode 2F-SFM p	92
4.5.3	Fazit zur Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung	97
5	Zusammenfassung	99
 Anhang		
A	Ableitung einer PDF aus Messwerten	103
B	Entfallen des Integrals in der Herleitung in Kapitel 3.5	107
C	Vereinfachungen in Kapitel 3.6.2.2	109
D	Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Konvektionsterm	111

E	2D Injektor: stochastische Felder	113
F	3D Injektor: stochastische Felder	115
G	intermittierend kavitierende Strömung	117
G.1	LES-Berechnungen	117
G.1.1	instantane Realisationen in der Symmetrieebene	117
G.1.2	Iso-Flächen	120
G.1.2.1	gesamtes Kavitationsgebiet	120
G.1.2.2	vergrößertes Kavitationsgebiet	123
G.1.2.3	gemitteltes Kavitationsgebiet	125
G.2	RANS-Berechnungen, 2F-SFM p	126
G.2.1	stochastische Felder zu einem Zeitpunkt	126
G.2.2	Volumenanteil der dispersen Phase zu verschiedenen Zeitpunkten	127
G.2.3	Iso-Fläche der dispersen Phase zu verschiedenen Zeitpunkten	130
H	Simulationseinstellungen	133
	Abbildungsverzeichnis	141
	Literaturverzeichnis	145

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

2F	Zwei-Fluid-Modell
2F-SFM N	Variante der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell zur Berücksichtigung von Schwankungen in N
2F-SFM p	Variante der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell zur Berücksichtigung von Schwankungen in Δp_p
const.	konstant
DF	Drift-Flux-Modell
disp.	dispers
DNS	Direkte Numerische Simulation
dt.	deutsch
engl.	englisch
Gl.	Gleichung
JPDF	Joint Probability Density Function
Kap.	Kapitel
KIT	Karlsruher Institut für Technologie
konti.	kontinuierlich
LES	Large-Eddy-Simulation
PDF	Probability Density Function
RANS	Reynolds-Averaged-Navier-Stokes
SF	stochastisches Feld
SFM	Stochastische Feldmethode
SPDE	Stochastic Partial Differential Equation
TM	unregistered Trademark
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel

griechische Zeichen

α	Volumenanteil
$\alpha_{d,max}$	maximaler Volumenanteil der dispersen Phase
$\alpha_{d,min}$	minimaler Volumenanteil der dispersen Phase
τ, τ	viskoser Spannungstensor
δ	Delta-Funktion
ε	Dissipation
ε_N	standardisierter stochastischer Fehler
Λ	vereinfachter Ausdruck bei Herleitung der PDF-Transportgleichung
λ	Wellenzahl
λ_{int}	Wellenzahl des integralen turbulenten Längenmaßstabs
λ_{Kol}	Wellenzahl des Kolmogorov-Längenmaßes
λ_p	Mittelwert der Poisson-Verteilung, in Kapitel 3.7.1 mittlere Blasenanzahl

$\lambda_{p,g}$	mittlere Blasenanzahl innerhalb V_g
$\lambda_{p,t}$	mittlere Blasenanzahl innerhalb V_t
$\lambda_{p,i}^{n_R}$	mittlere Blasenanzahl im Zellkonglomerat aus n_R Zellen
\mathcal{N}	Normalverteilung
μ	dynamische Viskosität
μ^*	effektive Viskosität
μ_n	Mittelwert der Normalverteilung
μ_t	dynamische Wirbelviskosität
μ_Y	Mittelwert von Y
ν	kinematische Viskosität
ν_t	turbulente/kinematische Wirbelviskosität
Φ	bestimmter Wert im Ereignisraum ψ
Φ_a	Massenanteil einer Spezies a
π	Kreiszahl
Ψ	Variable im Ereignisraum
ψ_i	Massenanteil einer bestimmten Spezies i
ρ	Dichte
ρ_1, ρ_2, ρ_3	Partialdichten
σ	Standardabweichung
σ_L	Konstante in der Langevin-Gleichung
σ_n	Standardabweichung der Normalverteilung
σ_p	Standardabweichung der Poisson-Verteilung
σ_Y	Standardabweichung von Y
$\sigma_{n,\cdot}$	Standardabweichung einer exemplarischen Normalverteilung
$\sigma_{p,g}$	Standardabweichung der Blasenanzahl innerhalb V_g
$\sigma_{p,t}$	Standardabweichung der Blasenanzahl innerhalb V_t
$\sigma_{p,i}^{n_R}$	Methode der Ensemble-Mittelung: Standardabweichung der Blasenanzahl nach Mittelung über n_R Repräsentanten; Methode der Zellkonglomerate: Standardabweichung der Blasenanzahl im Zellkonglomerat aus n_R Zellen
τ^T	turbulenter Spannungstensor
τ_1, τ_2, \dots	Zeitpunkte
τ_{int}	integrale Zeitskala
Θ	vereinfachter Ausdruck bei Herleitung der PDF-Transportgleichung
θ	exemplarische Größe
θ_{I_i}	Mittelwert von θ innerhalb des Bins I_i
$\underline{\Phi}$	Vektor mit Massenanteilen mehrerer Spezies
$\underline{\psi}$	Ereignisraum von $\underline{\Phi}$
ξ, ξ_k	gaußverteilte Zufallszahl mit Mittelwert 0
Indizes	
$\cdot^{(1)}, \cdot^{(2)}$	Repräsentanten einer Größe
$\cdot^{(r)}$	mögliche Ausprägung in der Realität
\cdot_0	Zugehörigkeit zum Zeitpunkt 0
\cdot_α	Zugehörigkeit zum Volumenanteil α
\cdot_{inst}	instantaner Repräsentant
\cdot_{lok}	lokaler Repräsentant
\cdot_T	Zugehörigkeit zur Größe T

\cdot_1	kontinuierliche Phase
$\cdot_{2F-SFMN-Mittelwerte}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM N und Verwendung von Mittelwerten bei der Berechnung von F_{SW}
$\cdot_{2F-SFMN-PDF}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM N und Verwendung der PDF bei der Berechnung von F_{SW}
$\cdot_{2F-SFMN}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM N
$\cdot_{2F-SFMp-Mittelwerte}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM p und Verwendung von Mittelwerten bei der Berechnung von F_{SW}
$\cdot_{2F-SFMp-PDF}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM p und Verwendung der PDF bei der Berechnung von F_{SW}
$\cdot_{2F-SFMp}$	Zugehörigkeit zur Variante 2F-SFM p
\cdot_2	disperse Phase
$\cdot_{Teil,k}$	Zugehörigkeit zum Teilvolumen k
\cdot_{Φ}	Zugehörigkeit zur Größe Φ
\cdot_a	allgemeine Größe in Kapitel 3.5
$\cdot_{T,\psi}$	Zugehörigkeit zu den Größen T und ψ
\cdot	zeitliche Ableitung
$\langle \cdot \cdot \rangle_{\rho}$	dichtegewichteter Erwartungswert
$\langle \cdot \rangle_N = \langle \cdot \rangle$	Ensemble-Mittelung mit N Werten
$\bar{\cdot}$	Mittelwert, in Kapitel 2.2.1 zeitlicher Mittelwert
$\bar{\bar{\cdot}}$	Phasenmittelung
\cdot'	Fluktuation
\cdot''	Fluktuation bei Verwendung dichtegewichteter Größen
\cdot_c	Zugehörigkeit zur kontinuierlichen Phase
\cdot_d	Zugehörigkeit zur dispersen Phase
\cdot_i	i -te räumliche Komponente
\cdot_j	j -te räumliche Komponente
\cdot_k	Zugehörigkeit zur Phase k
\cdot_m	Zugehörigkeit zur Mischung
\cdot_x	Komponente in x-Richtung
\cdot_y	Komponente in y-Richtung
\cdot_z	Komponente in z-Richtung
$\cdot_{A B}$	Zugehörigkeit zum Ereignis $A B$
\cdot_{AB}	Zugehörigkeit zum Ereignis AB
\cdot_A	Zugehörigkeit zum Ereignis A
\cdot_B	Zugehörigkeit zum Ereignis B
$\hat{\cdot}$	dichtegewichtete Mittelung

lateinische Zeichen

a	zeitabhängige Variable zur Beschreibung stochastischer Prozesse
b	zeitabhängige Variable zur Beschreibung stochastischer Prozesse
F_L	Auftriebskraft pro Volumen
F_{SW}	Strömungswiderstandskraft pro Volumen
F_{TD}	Kraft aufgrund turbulenter Dispersion pro Volumen
F_{WL}	Kraft, die verhindert, dass sich Blasen im Bereich einer vertikalen Wand aufhalten, pro Volumen
g	Beschleunigung einer Volumenkraft

J	diffusiver Massenfluss
M	Quellterm der Momentengleichung des Zwei-Fluid-Modells
P	Wahrscheinlichkeit
u	mittlere Geschwindigkeit bei Betrachtung Lagranger Partikel
U^+	Geschwindigkeit eines Lagranger Partikels
V	Geschwindigkeitsvektor von V
v	instantane Geschwindigkeit im Zwei-Fluid-Modell
v_0	Geschwindigkeit der Mischung
V_{diff}	Diffusionsgeschwindigkeit
v_r	Relativgeschwindigkeit zwischen disperser und kontinuierlicher Phase
V_{km}	diffusive Spannungen im Drift-Flux-Modell
x^+	Ort eines Lagranger Partikels
x_0	Koordinaten des Orts 0
Δp_p	Druckdifferenz zwischen disperser und kontinuierlicher Phase
ΔT_{Fluk}	Periodendauer einer Fluktuation
$\dot{m}_{c \rightarrow d}$	Massenfluss von der kontinuierlichen zur dispersen Phase
\mathcal{D}	Kennzeichnung des totalen Differentials, vgl. Gleichung (3.29)
\underline{J}^a	diffusiver Massenflussvektor der Spezies a
\underline{x}	Vektor mit Ortskoordinaten
α	Ereignisraum von α
A'''	Dichte der Phasengrenzflächen
A, B	beispielhafte Ereignisse
a_1, a_2, \dots	Messwerte zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots
a_d	mögliche Ausprägung des Volumenanteils der dispersen Phase in der Realität
A_L	Drift-Term der Langevin-Gleichung
a_n	Anteil der n -ten Größenklasse im MUSIG-Modell
b_1, b_2, \dots	Messwerte zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots
B_L	Diffusions-Term in der Langevin-Gleichung
C_0	Konstante zur Modellierung der Konstanten in der Langevin-Gleichung
c_1, c_2	Konstanten
C_D	Konstante zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft
C_E	Egler-Koeffizient
D_t	turbulenter Diffusionskoeffizient
dt	Zeitschritt
E	Energie
$e \dots, E \dots$	Zehnerpotenz bei der Exponentialdarstellung
F	Summe aller auf das Partikel wirkenden Kräfte
f	beispielhafte PDF bzw. JPDF
G	nicht-antizipierende Funktion
g	beispielhafte Funktion
H	Häufigkeit
I_1, I_2, \dots	Bins
I_{lo}	obere Intervallgrenze des Bins I_l
I_{lu}	untere Intervallgrenze des Bins I_l
k	turbulente kinetische Energie
l	ganzzahliger Wert

\log	Logarithmus zur Basis 10
M	Micromixing-Term
m	Masse eines Partikels
N	Anzahl betrachteter Repräsentanten
n	Laufindex
N'''	mittleren Blasendichte
N_0'''	stoffspezifische Konstante zur Berechnung der Blasendichte
n_a	Anzahl Spezies
n_c	Exponent im power law
n_G	Anzahl Größenklassen im MUSIG-Modell
n_R	Methode der Ensemble-Mittelung: Anzahl Repräsentanten über die die Mittelung erfolgt; Methode der Zellkonglomerate: Anzahl Zellen im Zellkonglomerat
n_t	Anzahl Teilvolumina im Gesamtvolumen
$n_{Bl,lok}$	lokale Blasenanzahl
$n_{Bl,lok}^{n_R}$	lokale Blasenanzahl nach Mittelung über n_R Repräsentanten
$n_{Bl,n_R,lok}$	lokale Blasenanzahl innerhalb des Zellkonglomerats von n_R Zellen
n_{Bl}	mittlere Blasenanzahl
P	Wahrscheinlichkeitsfunktion
p	Druck
p'	Druckkorrektur im SIMPLE-Algorithmus
p_{dyn}	mittlerer dynamischer Druck der kontinuierlichen Phase
p_{sat}	Sättigungsdampfdruck
Po	Poisson-Verteilung
Q	Quellterm der PDF-Transportgleichung, in Anhang B Hilfsfunktion
R	Fluktuationsfunktion in der SPDE
$r_{Bl,n}$	Blasenradius der Größenklasse n im MUSIG-Modell
r_{Bl}	Blasenradius
Re_b	Reynolds-Zahl der Blasen
S	Quellterm in der Kontinuitätsgleichung des Zwei-Fluid-Modells
S_a	Quellterm in der Transportgleichung einer Skalargröße
s_z	Schrittzahl
Sc_t	turbulente Schmidt-Zahl
sgn	Signum-Funktion
t, t'	Zeit
T, T_1, T_2	bestimmte Werte im Ereignisraum T^*
T^*	Variable im Ereignisraum
t_0	Zeitpunkt 0
t_{int}	Interaktionszeit
t_e	Lebenszeit des Wirbels
T_L	Konstante in der Langevin-Gleichung
t_R	Transitzeit
T_{emp}	Temperatur
U	Geschwindigkeit
U^d	Drift-Anteil der Geschwindigkeit
U^g	zufälliger Anteil der Geschwindigkeit
V	Ereignisraum von U

V_1, V_2, \dots	Nummerierung der Versuche
V_{Kongl}	Volumen des Zellkonglomerats
V_{Zelle}	Volumen einer bestimmten Rechenzelle
V_g	Gesamtvolumen
V_t	Teilvolumen
W	Wiener-Prozess
X	Zustandsgröße
x	Raumkoordinate
Y	Zufallsvariable
Z	Zufallsvariable
z	Raumkoordinate
Z_1, Z_2	Zustände
[P·]	Position in Abbildung 1.5
[S·]	Simulationseinstellung, siehe Anhang H

mathematische Symbole

\cong	fast gleich, modelliert als
\cup	Vereinigung
\in	Elementzeichen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen, inklusive 0

1 Einleitung

1.1 Simulationen in der Produktentwicklung

Die Entwicklung von Computersystemen (vgl. [145]) ermöglicht eine effiziente numerische Lösung der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen (vgl. [94]). Die Anzahl notwendiger Experimente und die damit verbundenen Kosten werden reduziert, was das Potential computergestützter Strömungsberechnung für die industrielle Praxis zeigt.

Abbildung 1.1 zeigt, wie Simulationen den Projektablauf verändert und beschleunigt haben. Auf der Abszisse sind die Zeit bzw. die Kosten aufgetragen. Die Ordinate zeigt den Reifegrad des Produkts. Zur Umsetzung einer Idee in ein serienreifes Produkt bedarf es mehrerer Schritte. Im Projektablauf ohne Simulation wird die Produktidee in einem Design präzisiert und ein Prototyp gefertigt. Ein Versuch zeigt, ob der Prototyp die geforderten Eigenschaften erfüllt. Gegebenenfalls werden Verbesserungen in einem neuen Design umgesetzt, für das ebenfalls ein Prototyp angefertigt und ein Versuch durchgeführt wird. Die Produkt-Versionen sind in Abbildung 1.1 mit „V1“, „V2“ und „V3“ gekennzeichnet. Im konkreten Anwendungsfall kann die Versionsanzahl geringer oder höher sein.

Der Projektablauf unter Verwendung von Simulationen ermöglicht eine schnelle Erprobung und gegebenenfalls Anpassung des Designs. Die Fertigung eines Prototyps und die Durchführung von Versuchen erfolgt einmalig und zu einem späteren Zeitpunkt als im Projektablauf ohne Simulation. Die erzielte Einsparung ist in Abbildung 1.1 skizziert und betrifft sowohl Zeit als auch Kosten. Neben einer Erzielung von Einsparungen ermöglichen Simulationen eine fokussierte Betrachtung und damit ein tieferes Verständnis, da einzelne Effekte, wie beispielsweise die Gravitation, eliminiert werden können.

Für eine realistische Bewertung einer Produkt-Version durch eine Simulation müssen die verwendeten Modelle hinreichend genau sein. Die Modelle sind hinsichtlich deterministischer Modelle und stochastischer Modelle zu unterscheiden (vgl. [95], S. 13). Im deterministischen Modell ist der Endzustand des Systems eindeutig bestimmt, wenn der Anfangszustand und die Modellparameter bekannt sind ([95], S. 13). Abbildung 1.2 zeigt, wie Anfangs- und Endzustand des Systems im deterministischen Modell zusammenhängen. Die Anfangs- und Endzustände sind auf einer exemplarischen Skala θ markiert. Reale Systeme sind Einflüssen ausgesetzt, die nicht vollständig verstanden sind oder nicht im Detail modelliert werden können ([7] S. 3). In einigen Fällen können solche Systeme mit deterministischen Modellen berechnet werden (vgl. [95], S. 13). Nicht vollständig verstandene oder nicht im Detail modellierte Einflüsse werden dabei nicht berücksichtigt (vgl. [95], S. 13). Die Approximation mit deterministischen Modellen stößt in der Technik zunehmend an ihre Grenzen, da reale Bedingungen nicht hinreichend genau modelliert werden (vgl. [121], S. 9).

Alternativ können stochastische Modelle verwendet werden, bei denen die nicht vollständig verstandenen oder nicht im Detail modellierten Effekte stochastisch modelliert werden (vgl. [7], S. 3). Abbildung 1.3 zeigt, wie Anfangs- und Endzustand des Systems in einem stochastischen Modell zusammenhängen. Analog zu Abbildung 1.2 sind der Anfangs- und Endzustand auf einer exemplarischen Skala θ markiert. Der Endzustand eines Systems ist im stochastischen Modell nicht eindeutig durch den Anfangszustand und die Modellparameter festgelegt (vgl. [54], S. 162). Mehrere Wiederholungen einer Simulation mit demselben Ausgangszustand und denselben Modellparametern können zu unterschiedlichen Endzuständen führen (vgl. [54], S. 162). Die Endzustände des stochastischen Modells können für eine statistische Aussage genutzt werden ([54], S. 162).

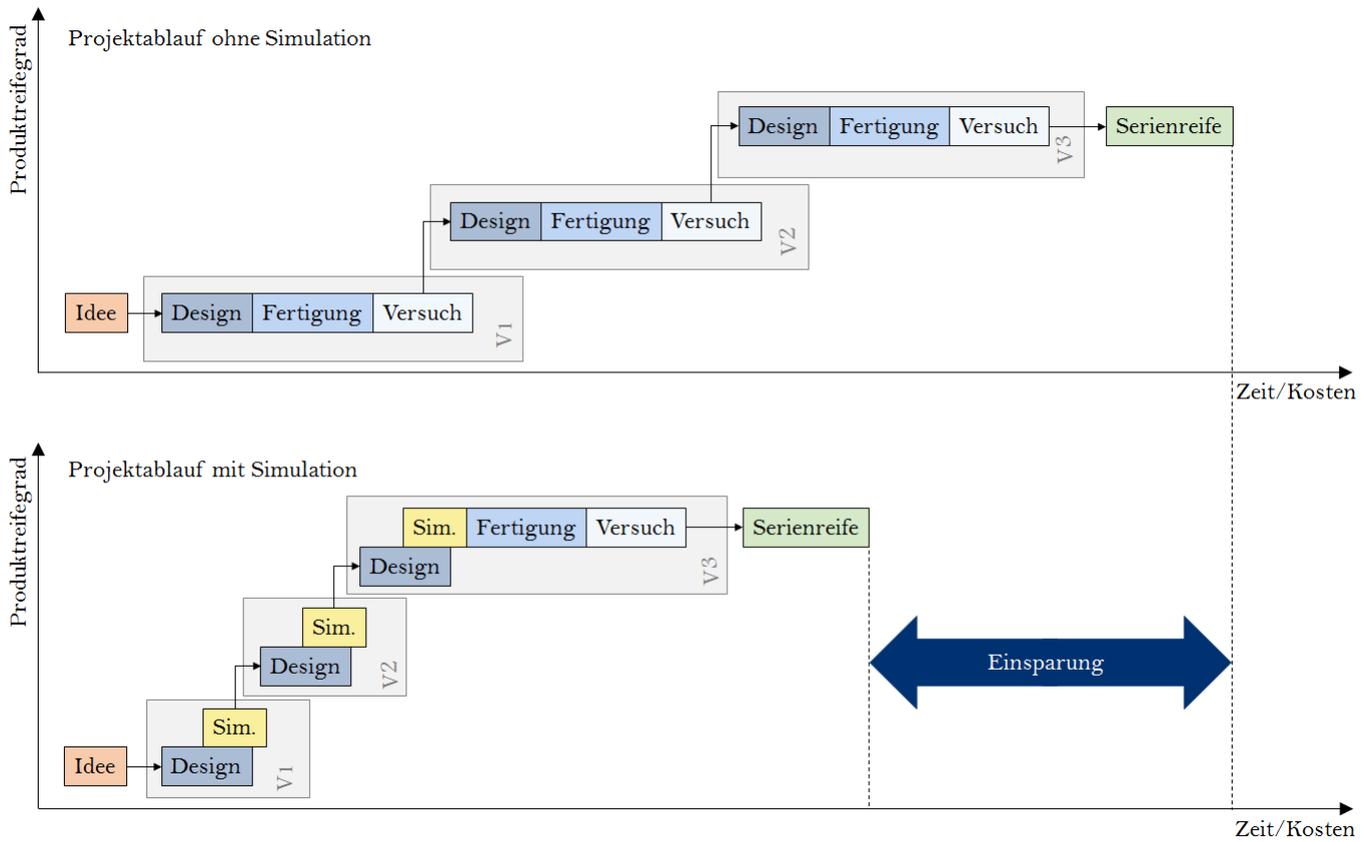


Abbildung 1.1: Der Projekttaublauf mit und ohne Simulation (vgl. [133]).

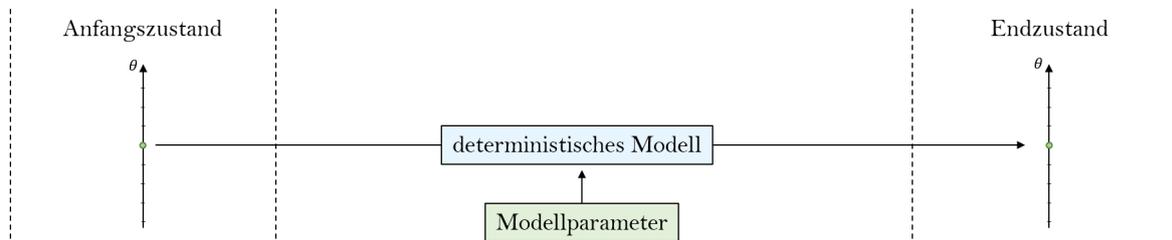


Abbildung 1.2: Prinzipskizze des deterministischen Modells: Wenn der Anfangszustand eines Systems und die Modellparameter bekannt sind, ist der Endzustand des Systems eindeutig bestimmt.

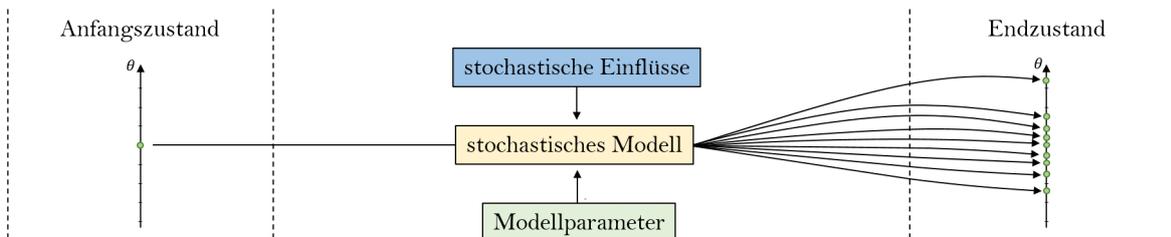


Abbildung 1.3: Prinzipskizze des stochastischen Modells: Stochastische Einflüsse werden im Modell berücksichtigt, so dass der Endzustand des Systems nicht eindeutig durch den Anfangszustand und die Modellparameter bestimmt ist.

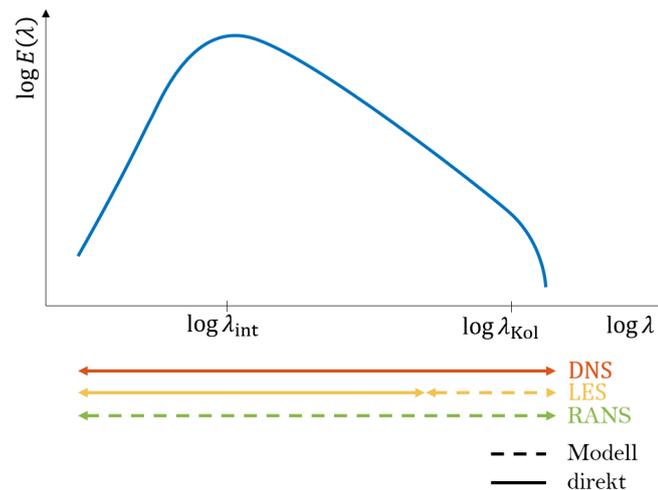


Abbildung 1.4: Skizze des Energiespektrums einer turbulenten Strömung (in Anlehnung an [100], S. 17). Durchgezogene Linien kennzeichnen den Anteil der direkt berechnet wird. Gestrichelte Linien kennzeichnen den Anteil, der eine Modellierung erfordert.

Stochastische Modelle wurden in einer Vielzahl von Bereichen verwendet. Neben der Biologie [14], der Geologie [78], den Sozialwissenschaften (vgl. [13]), den Neurowissenschaften [134], der Genetik [83] und der technischen Verbrennung [104] ist insbesondere die Finanzmathematik [65] zu nennen. In der technischen Anwendung ist die Verwendung bei der Berechnung turbulenter reaktiver Strömungen verhältnismäßig weit fortgeschritten. Andere Bereiche der Fluidmechanik sind neue Anwendungsfelder stochastischer Modelle und weisen diesbezüglich ein großes Potential auf.

1.2 Themeneingrenzung

Reale Strömungen in der Fluidmechanik sind häufig turbulent. Turbulente Strömungen sind sehr sensitiv gegenüber äußeren Einflüssen: Kleinste Veränderungen in den Rand- oder Anfangsbedingungen führen zu unterschiedlichen Strömungsfeldern (vgl. [106], S. 35). Es treten Wirbel unterschiedlicher Größe und mit unterschiedlicher kinetischer Energie auf ([100], S. 13, 17). Abbildung 1.4 zeigt eine Skizze des Energiespektrums $E(\lambda)$ einer turbulenten Strömung (vgl. [100], S. 17; [123], S. 134). Die Kennzahl λ beschreibt hierbei die Wellenzahl und ist umgekehrt proportional zur Wirbelgröße ([100], S. 17). Das Spektrum besitzt ein Maximum bei der Wellenzahl λ_{int} , der Wellenzahl des „integralen turbulenten Längenmaßstabs“ ([100], S. 17; vgl. [40], S. 68). Die Energie dissipiert bei Wellenzahlen $> \lambda_{Kol}$, wobei λ_{Kol} die Wellenzahl des sogenannten „Kolmogorov-Längenmaß(es)“ ([91], S. 578) ist (vgl. [100], S. 17,18; [91], S. 393, 578; [123], S. 131).

Bei der numerischen Berechnung turbulenter Strömungen ist zwischen drei grundlegenden Methoden zu differenzieren. Die Methoden unterscheiden sich darin, welcher Anteil des Energiespektrums berechnet und welcher modelliert wird. Sie werden im Folgenden vorgestellt und voneinander abgegrenzt. Die entsprechenden Anteile sind im Energiespektrum in Abbildung 1.4 skizziert. Die erste Methode heißt „direkte numerische Simulation“ ([123], S. 134) (DNS). Die DNS berechnet die Strömung „in allen Einzelheiten“ ([123], S. 134). Die zeitliche und räumliche Auflösung ist hinreichend klein zu wählen ([94], S. 178). Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik werden für das gesamte Energiespektrum in Abbildung 1.4 gelöst ([123], S. 134, 135). Eine Modellierung der Turbulenz ist nicht erforderlich ([123], S. 134), weshalb die Lösung als „direkt“ ([123], S. 134) bezeichnet wird. Die zweite Methode wird „Large-Eddy-Simulation“ ([91], S. 329) (LES) genannt. Die energiereichen, großen Wirbel werden analog zur DNS direkt berechnet ([91], S. 329-330). Kleine Wirbel werden nicht direkt berechnet, sondern durch sogenannte „Subgrid-Scale-Turbulenzmodelle“ ([123], S. 135) modelliert. Die „räumliche Filterweite“

([123], S. 135) definiert, ab welcher Wirbelgröße die Turbulenz direkt berechnet wird ([123], S. 135).

Die dritte Methode löst die „Reynolds-gemittelte(n)“ ([123], S. 135) Erhaltungsgleichungen (engl.: „Reynolds-Averaged-Navier-Stokes“ ([123], S. 135)) und wird RANS abgekürzt ([123], S. 135). Sie ermöglicht eine Aussage über mittlere Strömungsgrößen ([123], S. 135). Ein Strömungsproblem wird durch Mittelwerte beschrieben, beispielsweise durch den Mittelwert \overline{U}_i der Geschwindigkeitskomponente U_i (vgl. [104], S. 120). Der Einfluss der nicht aufgelösten Turbulenz wird in RANS-Simulationen durch ein Turbulenzmodell berücksichtigt ([123], S. 135). Für eine Übersicht möglicher Turbulenzmodelle sei auf [91] verwiesen. Eines davon ist das bekannte k - ϵ -Modell [73], das jeweils eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k und für die Dissipation ϵ löst.

Aufgrund des erheblichen Rechenaufwands werden DNS-Simulationen bei angewandten Strömungsproblemen selten verwendet ([123], S. 138; [94], S. 182-183). Je nach Anwendungsfall ist zu entscheiden, ob eine detailliertere Betrachtung der großen Wirbel den zusätzlichen Aufwand für eine LES-Simulation rechtfertigt. RANS-Simulationen können durch Lösen der gemittelten Erhaltungsgleichungen auf „gängigen Arbeitsplatzrechnern“ ([123], S. 137) erfolgen.

Die Verwendung von Mittelwerten ist insofern nachteilig, als die Berechnung von Funktionen, die nichtlinear von diesem Wert abhängen, ein falsches Ergebnis liefern kann. Nur für lineare Funktionen entspricht der Mittelwert der Funktionswerte stets dem Funktionswert des Mittelwerts, so dass die Verwendung des Mittelwerts keine fehlerbehaftete Berechnung liefert. Pope thematisiert diese Problematik am Beispiel der chemischen Reaktionsrate, die exponentiell von der Temperatur abhängt (vgl. [103], S. 299-300).

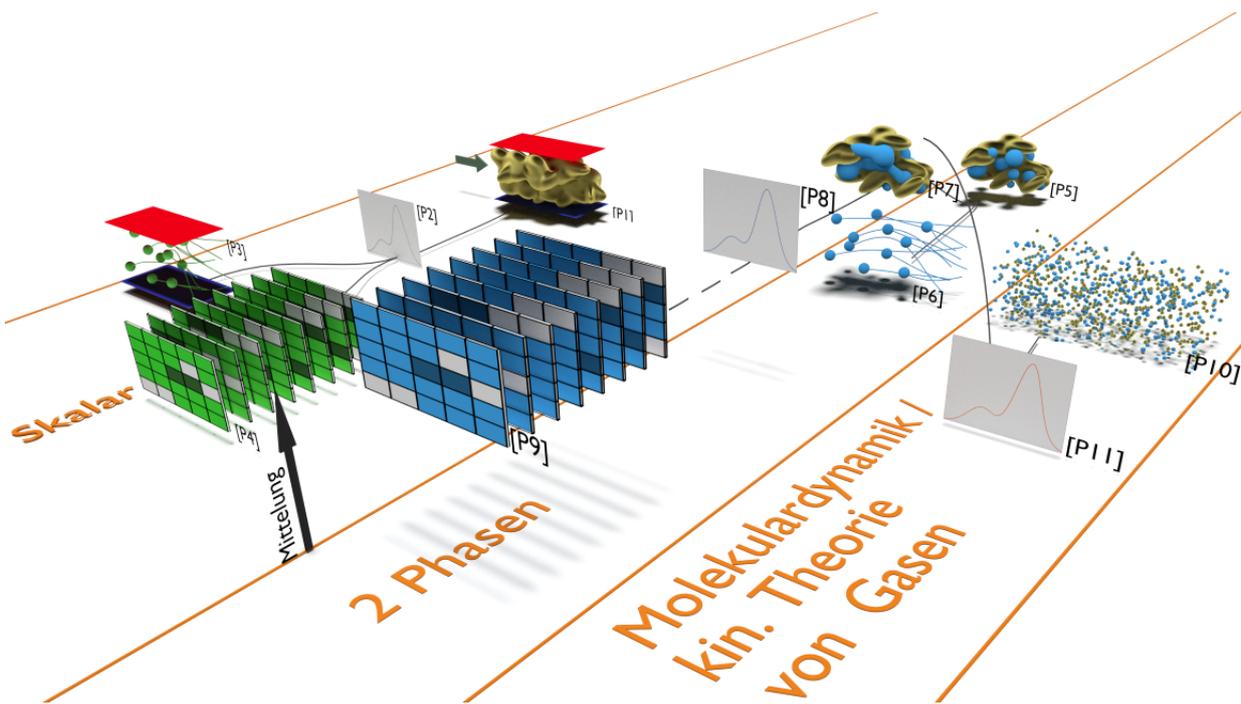


Abbildung 1.5: Überblick der für diese Arbeit wichtigsten Verfahren

Abbildung 1.5 zeigt einen Überblick der für diese Arbeit relevantesten Verfahren und wie diese zusammenhängen. Die Abbildung ist in drei Teilgebiete, den Transport einer Skalargröße, Zweiphasenströmungen und die kinetische Theorie von Gasen bzw. Molekulardynamik, eingeteilt. Zur einfacheren Referenzierung sind die Positionen in Abbildung 1.5 mit [P1], [P2], ... gekennzeichnet. Innerhalb des Kapitels 1 wird mehrfach auf die Abbildung 1.5 verwiesen. Zunächst wird als Beispiel für den Transport einer Skalargröße die Temperatur innerhalb eines Fluids betrachtet [P1]. Die Strömungsrichtung ist mit dem grünen Pfeil markiert. Die Tempera-

tur innerhalb eines Kanals mit einer beheizten Kanalwand kann mit Hilfe von RANS-Simulationen berechnet werden, wenn die Verwendung einer mittleren Temperatur als ausreichend angesehen wird. Die Möglichkeit zur Vermeidung dieser Inexaktheit bzw. Abstraktion bieten Methoden, welche die „Wahrscheinlichkeitsdichte“ ([120], S. 40) (engl.: „probability density function (PDF)“ ([106], S. 39) (vgl. [120], S. 40)) einer Größe betrachten. Zur anschaulichen Erklärung einer PDF wird im Folgenden ihre Beziehung zu Messwerten hergestellt. Eine ausführlichere Erläuterung dieser Beziehung ist in Anhang A aufgeführt. Abbildung 1.6 links zeigt 14 Messwerte der Größe θ . Der gemessene Wert ist auf der Ordinate, die jeweilige Nummer des Messwerts auf der Abszisse aufgetragen. Die Ordinate ist in regelmäßige Intervalle, sogenannte „Bins“ (vgl. [75], S. 8) I_1, I_2, I_3, \dots unterteilt. Der durchschnittliche Wert eines jeden Bins $\theta_{I_1}, \theta_{I_2}, \theta_{I_3}, \dots$ ist auf der Ordinate in Abbildung 1.6 ebenfalls markiert. Der jeweilige Bin eines jeden Messwerts ist blau gefärbt. Werden für jeden Bin die Anzahl der Markierungen aufgetragen, ergibt sich das Histogramm in Abbildung 1.6 rechts. Durch die Division der Häufigkeiten in Abbildung

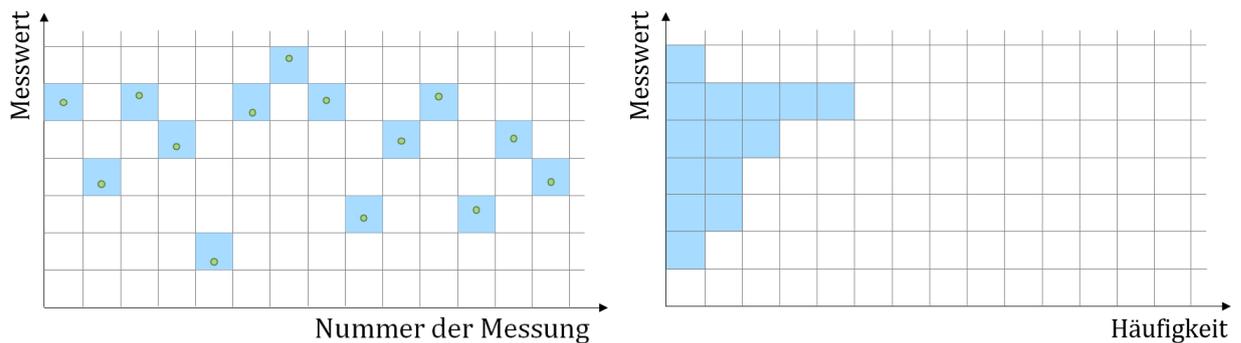


Abbildung 1.6: Grafische Veranschaulichung zur Erstellung einer Häufigkeit aus einer Messreihe

1.6 durch die gesamte Anzahl Messwerte kann die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion in Abbildung 1.7 erhalten werden (vgl. [64], S. 44). Die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion gibt für jeden Bin die Wahrscheinlichkeit an,

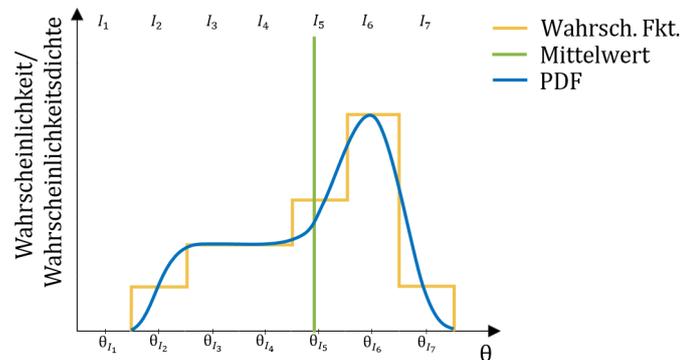


Abbildung 1.7: Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$, PDF und Mittelwert.

mit der ein bestimmter Messwert innerhalb dieses Bins auftritt. Die Wahrscheinlichkeiten können umso genauer angegeben werden, je kleiner die betrachtete Bin-Weite ist. Sind die Bin-Weiten infinitesimal klein, können die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer stetigen Funktion $f(\theta)$ bestimmt werden. Zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit ist ein Integral notwendig. Das Integral (vgl. [120], S. 40)

$$P(\theta \in I_l) = \int_{\theta}^{\theta+d\theta} f(\theta)d\theta \quad (1.1)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass sich ein Messwert im Intervall $(\theta, \theta + d\theta)$ befindet. Die Notwendigkeit eines Integrals bei der Wahrscheinlichkeitsberechnung motiviert die Namensgebung: Die stetige Funktion $f(\theta)$ wird „Wahrscheinlichkeitsdichte“ ([120], S. 40) oder PDF genannt. Eine PDF für das betrachtete Beispiel ist in Abbildung 1.7 skizziert. Der Mittelwert der diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion bzw. der stetigen PDF ist ebenfalls dargestellt. Seine Berechnung für obiges Beispiel ist in Anhang A durchgeführt.

Die Abbildungen 1.6 und 1.7 zeigen, dass die PDF mit Hilfe des Histogramms von Einzelwerten approximiert werden kann. Es sei angemerkt, dass die Division der Häufigkeiten durch die gesamte Anzahl Messwerte zur Erhaltung der diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion eine lineare Operation ist. Die Auftragung der Häufigkeiten in einem Histogramm besitzt dieselbe Form wie die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung. Die Form der PDF lässt sich durch das Histogramm in Abbildung 1.6 approximieren. Die Summe der Häufigkeiten entspricht im Gegensatz zur Summe der Wahrscheinlichkeiten nicht eins sondern der Anzahl Messwerte.

An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, dass bei einer Integration der PDF $f(\theta)$ über θ die Abhängigkeit von θ verloren geht. Ist die Information der Verteilung in θ nicht weiter von Relevanz, kann die Integration erfolgen.

Die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen zu PDFs sind in Kapitel 2.4 zusammengefasst. Für detaillierte Informationen sei auf die angegebenen Referenzen verwiesen.

Die Erhaltungsgleichungen werden bei PDF-Methoden nicht für Mittelwerte, sondern für PDFs selbst formuliert und werden PDF-Transportgleichungen genannt (vgl. Kapitel 2.4.2; [104]). Die PDF-Transportgleichung einer Skalargröße wurde für den Verbrennungsbereich in [104] aus den instantanen Erhaltungsgleichungen hergeleitet. In Abbildung 1.5 [P2] ist dies durch eine beispielhafte PDF skizziert. Aufgrund ihrer Komplexität werden die PDF-Transportgleichungen meist nicht direkt gelöst, sondern mit Hilfe sogenannter „Monte Carlo“ ([104], S. 153)-Methoden. Alternativ existiert die Schreibweise „Monte-Carlo-Methode“ (vgl. [88], S. 1). Das Vorgehen ist in Kapitel 2.4.3 genauer beschrieben. Die PDF wird dabei durch einzelne Repräsentanten approximiert ([101], S. 161). Es kann gezeigt werden, dass für unendlich viele Repräsentanten die PDF exakt nachgestellt wird ([101], S. 164). Die Transportgleichung für die einzelnen Repräsentanten ist numerisch einfach lösbar ([104], S. 153). Etabliert hat sich ein Verfahren, das die einzelnen Repräsentanten als Partikel auffasst, die sich mit der Strömung bewegen. Dieses Verfahren Lagrange Partikel ist in Kapitel 2.4.3.1 genauer beschrieben. Abbildung 1.5 [P3] zeigt beispielhafte Partikel, die aus der PDF-Transportgleichung folgen und die PDF beschreiben. Bemerkenswert ist an dieser Stelle die simultane Verwendung zweier Betrachtungsweisen der Strömungsmechanik. Das Verhalten eines Lagrange Partikels wird in einem partikelbezogenen Bezugssystem beschrieben, durch Anwendung der „Lagrange(n) Betrachtungsweise“ ([92], S. 75). Zur Veranschaulichung sei an die Sichtweise eines Beobachters gedacht, der sich auf dem Lagrange Partikel durch die Strömung bewegt. Das Strömungsfeld selbst ist in der sogenannten „Eulerschen Betrachtungsweise“ ([92], S. 75) beschrieben, die der Sichtweise eines ruhenden Beobachters entspricht (vgl. [92], S. 75). Bei der Simulation reagierender Strömungen haben sich PDF-Methoden unter Verwendung Lagrange Partikel als erfolgreich erwiesen (vgl. z.B. [102]).

Gegen Ende des vergangenen Jahrtausends wurde mit der Verwendung stochastischer Felder eine alternative Beschreibung der Repräsentanten vorgeschlagen [135]. Innerhalb dieser Arbeit wird für diese Methode in Anlehnung an den Ausdruck „stochastic field method“ (vgl. [105], S. 10; [58], S. 3079; [59], S. 514) die Bezeichnung „Stochastische Feldmethode“ verwendet. Die Stochastische Feldmethode wurde zur Beschreibung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich in [135], [119] hergeleitet. Die Repräsentanten werden nicht als Lagrange Partikel, sondern als Eulersche Felder, also ebenfalls aus der Sicht eines ruhenden Beobachters beschrieben. Durch die Verwendung derselben Betrachtungsweise für die Repräsentanten sowie das Strömungsfeld entfällt - im Gegensatz zur Verwendung Lagrange Partikel - eine Kopplung zweier unterschiedlicher Betrachtungsweisen, was eine effektive Berechnung erleichtert. Der Transport der einzelnen Repräsentanten wird durch stochastische partielle Differentialgleichungen (engl.: „stochastic partial differential equations (SPDE’s)“ ([119], S. 1)) beschrieben ([119], S. 1). Die Verwendung der Stochastischen Feldmethode erwies sich im Bereich der Verbrennung als gewinnbringend (z.B. [58], [60], [43]). Abbildung 1.5 [P4] zeigt 8 exemplarische stochastische Felder, die aus der

PDF-Transportgleichung folgen und die PDF beschreiben.

Ein Teilgebiet turbulenter Strömungen stellen turbulente Mehrphasenströmungen dar. Neben der strömenden, kontinuierlichen Phase existiert mindestens eine weitere, disperse Phase. Ein Beispiel einer Mehrphasenströmung ist eine Wasserströmung, der Sandkörnchen beigemischt sind, die von dieser Strömung mitgetragen werden. Ein weiteres Beispiel stellt eine strömende Flüssigkeit dar, in der Gasblasen mitgerissen werden. Zweiphasenströmungen sind Mehrphasenströmungen mit genau zwei Phasen. Abbildung 1.5 [P5] zeigt eine kontinuierliche (gelbe) Phase, die von Blasen der dispersen (blauen) Phase unterschiedlicher Größe durchsetzt ist. Als Beispiel sei eine kavitierende Strömung genannt, deren lokale Drücke den „Sättigungsdampfdruck“ (vgl. [38], S. 322) p_{sat} unterschreiten. Der Prozess ist in Abbildung 1.8 in einem exemplarischen Phasendiagramm skizziert. Das Fluid erfährt eine Phasenumwandlung vom flüssigen Zustand Z_1 in den gasförmigen Zustand Z_2 und liegt in Form von Blasen vor (vgl. [48], S. 291-292). Bei einer Druckerhöhung implodieren die gebildeten Blasen ([48], S. 292). Zweipha-

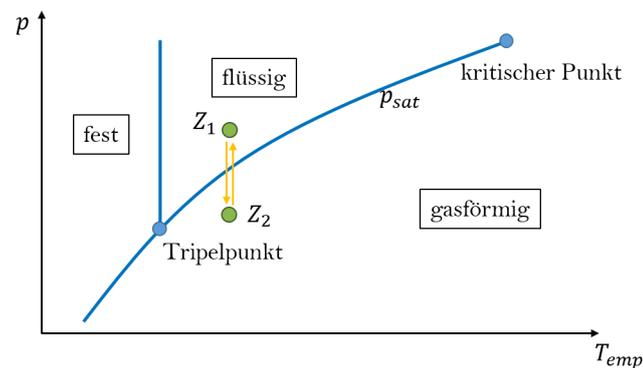


Abbildung 1.8: Kavitation in einem exemplarischen Phasendiagramm in Anlehnung an ([48], S. 292).

senströmungen können mit Hilfe Lagranger Partikel berechnet werden (vgl. [28]). In Abbildung 1.5 [P6] sind beispielhafte Lagrange Partikel zur Beschreibung der Zweiphasenströmung skizziert. Ein weiteres Modell zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen ist das „Zwei-Fluid-Modell“ (engl.: „Two-Fluid Model“ ([55], S. 155)), das die Strömung als zwei einander durchdringende Fluide beschreibt ([55], [25]). Abbildung 1.5 [P7] zeigt die Betrachtung der Zweiphasenströmung im Zwei-Fluid-Modell als zwei einander durchdringende Fluide. Es sei angemerkt, dass im Zwei-Fluid-Modell die Position einzelner Blasen bzw. die Position der beiden Phasen innerhalb einer Rechenzelle nicht bekannt ist. Das Zwei-Fluid-Modell gibt Auskunft über den Anteil der jeweiligen Phase (vgl. [55]), weshalb bei der Herleitung des Zwei-Fluid-Modells eine Mittelung notwendig ist (vgl. [55], [24], [126]). In Abbildung 1.5 ist dies durch die Einführung der vertikalen Achse „Mittelung“ berücksichtigt. Für jede Phase werden die Erhaltungsgleichungen gelöst, die über Quellterme miteinander gekoppelt sind (vgl. [55]). Kapitel 2.2.1 beschreibt die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen des Zwei-Fluid-Modells. Für eine ausführliche Diskussion sei auf die angegebenen Referenzen verwiesen. Mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells kann der mittlere Volumenanteil der beiden Phasen innerhalb jeder Rechenzelle berechnet werden.

Ein weiteres Modell zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen ist durch das „Drift-Flux-Modell“ (engl.: „Drift-Flux Model“, ([55], S. 345)) gegeben (vgl. [55], S. 345-379). Es wird in Kapitel 2.2.2 vorgestellt. Im Drift-Flux-Modell werden die Erhaltungsgleichungen nicht für jede Phase separat, sondern für die Mischung beider Phasen gelöst ([55], S. 345). Geschwindigkeitsdifferenzen beider Phasen werden durch einen zusätzlichen Term in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt (vgl. ([55], S. 347); Gleichung (2.60)). Das Drift-Flux-Modell ist in Abbildung 1.5 nicht dargestellt, wäre aber in vertikaler Richtung auf derselben Ebene wie das Zwei-Fluid-Modell [P7] anzuordnen, da es eine Mittelung erfordert (vgl. [55], S. 347). Beide Modelle können in einem LES- oder RANS-Kontext verwendet werden. Abbildung 1.9 veranschaulicht die vier Kombinationen der beiden Modelle und der beiden Kontexte zur Berechnung von Zweiphasenströmungen. Auf der Achse „Anzahl Fluide“ wird dif-

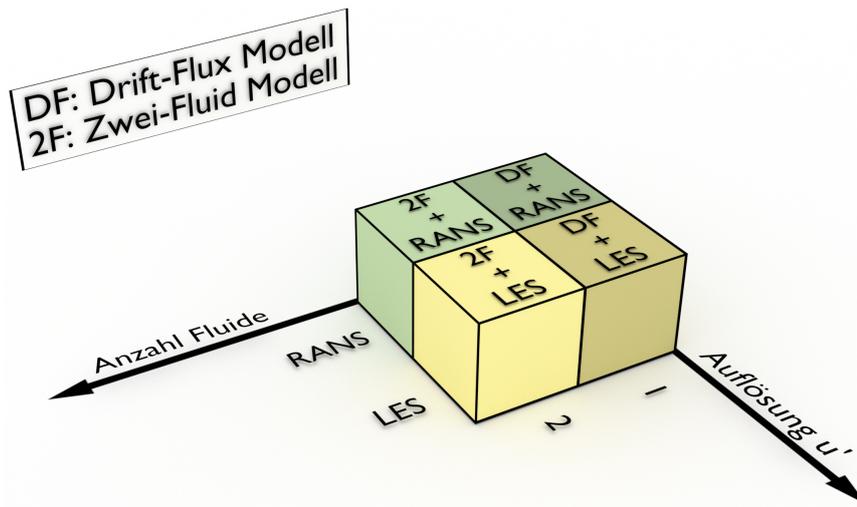


Abbildung 1.9: Modelle zur Berechnung von Zweiphasenströmungen im LES- oder RANS-Kontext.

ferenziert, ob die beiden Fluide als Mischung betrachtet werden wie im Drift-Flux-Modell, oder ob jedes Fluid analog zum Zwei-Fluid-Modell separat berechnet wird. Auf der Achse „Auflösung u' “ ist aufgetragen, ob die Geschwindigkeitsfluktuationen u' der kontinuierlichen Phase aufgelöst werden. In Abbildung 1.4 ist gezeigt, dass im LES-Kontext die Fluktuationen der großen Wirbel aufgelöst und direkt berechnet werden. RANS Simulationen lösen die Fluktuationen nicht auf, sondern betrachten Mittelwerte.

Der dritte Bereich in Abbildung 1.5 entspricht der kinetischen Theorie von Gasen bzw. der Molekulardynamik [P10]. Mit ihrer Hilfe kann die Wahrscheinlichkeitsdichte bestimmt werden, dass ein bestimmtes Partikel der dispersen Phase die Geschwindigkeit u besitzt und sich zur Zeit t am Ort x_0 befindet (vgl. [113], S. 446). In Abbildung 1.5 [P11] ist eine beispielhafte PDF abgebildet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte kann genutzt werden, um die Erhaltungsgleichungen des Zwei-Fluid-Modells herzuleiten (vgl. [113]; [11], S. 67). In Abbildung 1.5 ist dies durch die Verbindung zwischen [P11] und [P7] skizziert.

Mehrphasenströmungen weisen einen stochastischen Charakter auf (vgl. z.B. [140]; [8]). Wie im Bereich der Verbrennung wurden PDF-Methoden im Zweiphasenbereich angewendet, wobei die Repräsentanten als Lagrange Partikel umgesetzt wurden (vgl. z.B. [129]). Die Idee, die Stochastische Feldmethode aus dem Bereich der Verbrennung auf Mehrphasenströmungen anzuwenden, liegt nahe. Die grundlegende Forschungsausrichtung wurde bereits in [108] beschrieben. Vor dieser Arbeit bzw. parallel zur vorliegenden Arbeit haben sich andere Arbeiten mit dieser Thematik beschäftigt. Sie werden im folgenden Kapitel 1.3 vorgestellt.

1.3 konkurrierende Forschungsvorhaben

Innerhalb unserer Arbeitsgruppe wurde bereits eine Dissertation zur Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Mehrphasenströmungen verfasst [27]. Hierin wurde die Stochastische Feldmethode auf die kavierende Strömung innerhalb eines Strömungsbegrenzers für Kernkraftwerke angewendet (vgl. auch [26]). Die Strömung wurde durch Anwendung des Drift-Flux-Modells (vgl. Kapitel 2.2.2) in einem LES-Kontext beschrieben. Die Stochastische Feldmethode wurde in der ursprünglichen Form, wie sie für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich hergeleitet wurde ([135], [119]), zur Beschreibung des Volumenanteils der dispersen Phase genutzt.

Zur grafischen Einordnung wird die Darstellung in Abbildung 1.9 in Abbildung 1.10 um eine vertikale Achse ergänzt. Sie gibt an, in welchem Ausmaß stochastische Fluktuationen durch die Stochastische Feldmethode berücksichtigt werden. Der Würfel mit der Aufschrift „SFM+DF+LES“ repräsentiert den Beitrag der oben beschriebenen Dissertation [27]. Eine Anwendung auf einen RANS-Kontext („SFM+DF+RANS“) ist analog möglich. Die verbleibenden beiden Würfel in Abbildung 1.10 werden in Kapitel 1.4 erläutert.

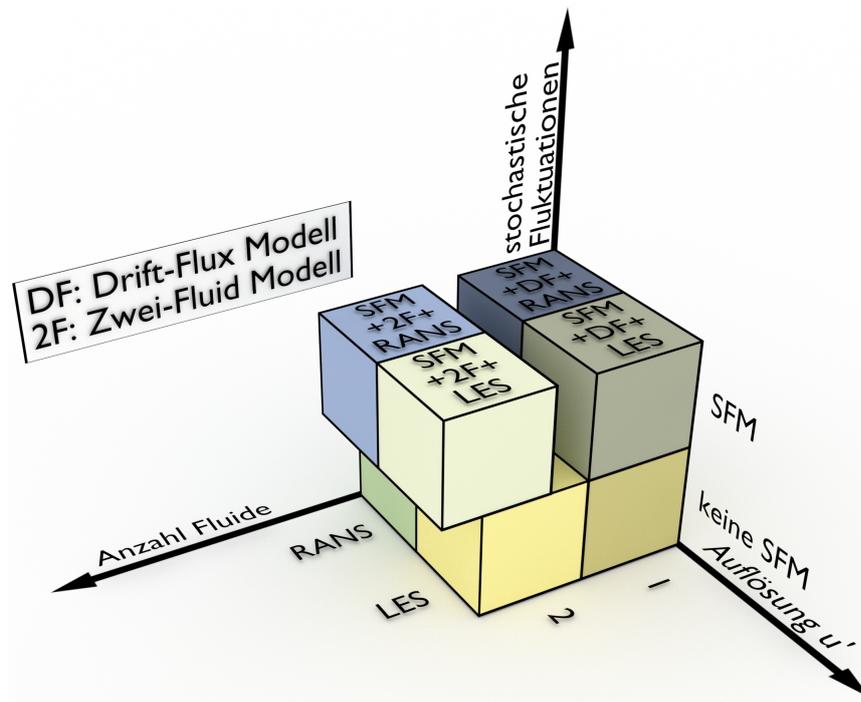


Abbildung 1.10: Modelle zur Berechnung von Zweiphasenströmungen im LES oder RANS-Kontext mit und ohne Stochastische Feldmethode (vgl. Abbildung 1.9).

Innerhalb eines anderen Forschungsprojekts des Instituts wurde die Stochastische Feldmethode bei der Berechnung von Wasserstoffblasen einer Elektrolyse genutzt [107]. Die verwendete PDF-Transportgleichung für die Masse der dispersen Phase besitzt dieselbe Form wie die PDF-Transportgleichung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich (vgl. Kapitel 2.4.3.2), weist aber zusätzlich einen zeitabhängigen Quellterm auf [18]. Es wurden die RANS-Erhaltungsgleichungen verwendet [18]. Innerhalb dieses Forschungsprojekts wurde gezeigt, dass Druckschwankungen in der kontinuierlichen Phase nicht aus akustischen Schwankungen resultieren können [18].

Zeitgleich mit dem Forschungsvorhaben der vorliegenden Arbeit befasste sich eine Forschungsgruppe der Chalmers University of Technology in Göteborg mit der Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Kavitationseffekte innerhalb einer Einspritzdüse [17]. Die Erhaltungsgleichungen für die Mischung beider Phasen wurden gelöst wie im Drift-Flux-Modell (vgl. Kapitel 2.2.2), wobei keine Mittelungen für die Geschwindigkeiten angegeben sind (vgl. [17]). Die Berechnung erfolgte in einem LES-Kontext. Die Transportgleichung der dispersen Phase ähnelt der des Drift-Flux-Modells unter Vernachlässigung einer Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Phasen (vgl. Gleichung (2.62)). Die Stochastische Feldmethode wurde in derselben Form wie für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich auf den Volumenanteil der dispersen Phase der kavitierenden Strömung übertragen - mit dem Unterschied eines entfallenden Micromixing-Terms (vgl. [17], S. 4). Die Erkenntnis eines entfallenden Micromixing-Terms erfolgte zeitgleich und unabhängig von den eigenen Überlegungen in Kapitel 3.6.1 dieser Arbeit.

Am Imperial College in London befasste sich ebenfalls eine Arbeitsgruppe mit der Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen (vgl. [89]). LES-Simulationen einer Spraybildung wurden durchgeführt. Der Volumenanteil der flüssigen Phase wurde mit Hilfe der Stochastischen Feldmethode analysiert. Die verwendete Ausgangsgleichung für den Anteil der flüssigen Phase ähnelt dem Drift-Flux-Modell unter Vernachlässigung einer Geschwindigkeitsdifferenz beider Phasen (vgl. Gleichung (2.62)). Quellterme in den Gleichungen für den Volumenanteil wurden nicht berücksichtigt (vgl. [89], S. 12, 15). Die Stochastische Feldmethode wurde in der Form

angewendet, wie sie für eine Skalargröße im Bereich der Verbrennung hergeleitet wurde ([135], [119]) - mit der Ausnahme eines entfallenden Micromixing-Terms.

1.4 Zielsetzung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit entstand am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) im Rahmen mehrerer Forschungsaufträge durch die AVL List GmbH. Das Projekt hatte als Ziel eine Implementierung der Stochastischen Feldmethode in die kommerzielle CFD-Software AVL FireTM für die Berechnung kavitierender Strömungen bei Einspritzvorgängen im Automobilbereich (vgl. [77], S. 134). Kavitierende Strömungen in Einspritzdüsen werden in der industriellen Praxis meist mit Hilfe des Zwei-Fluid-Modells berechnet [31]. RANS-Simulationen sind LES-Simulationen hinsichtlich der Rechenzeit überlegen (vgl. Kapitel 1.2). Etliche praxisrelevante Einspritzvorgänge können mit RANS-Simulationen zufriedenstellend berechnet werden. Als Beispiel seien der zweidimensionale und der dreidimensionale Injektor in den Kapiteln 4.2.1 und 4.2.2 genannt. Für eine aus Kundensicht gewinnbringende Implementierung darf die Stochastische Feldmethode nicht im Widerspruch zu bestehenden Kavitationsmodellen in AVL FireTM stehen. Entsprechend muss sie auf den zwei-/ und dreidimensionalen Injektor anwendbar sein.

Es existieren kavitierende Strömungen, die bisher nicht mit Hilfe von RANS-Simulationen berechnet werden können. Als Beispiel wird in Kapitel 4.5 eine intermittierend kavitierende Strömung behandelt. Obwohl mit Hilfe eines Experiments die Existenz von Kavitation nachgewiesen ist, liefern RANS-Simulationen keinen Hinweis auf Kavitation. Eine aufwändigere LES-Berechnung ist notwendig, um einen Hinweis auf eine kavitierende Strömung zu erhalten. Ein Modell, mit dessen Hilfe kavitierende Bereiche der intermittierend kavitierenden Strömung im Rahmen einer effektiven RANS-Simulation nachgewiesen werden können, stellt aus Kundensicht einen Fortschritt gegenüber der bisher in AVL FireTM implementierten Modelle dar.

Die Umsetzung der Stochastischen Feldmethode in AVL FireTM wurde im Laufe der Kooperation hinsichtlich dreier Faktoren bewertet und optimiert:

- Kundennutzen
- Implementierungsaufwand
- Rechen- bzw. Speicheraufwand während der Simulation

Diese drei „Einflussfaktoren“ des Projekts sind in Abbildung 1.11 im „magische(n) Dreieck“ ([72], S. 172) in Anlehnung an ([57], S. 88; vgl. [72], S. 172) dargestellt. Die Einflussfaktoren beeinflussen sich gegenseitig (vgl. [57], S. 87). Beispielsweise ist eine Optimierung der Qualität nicht unabhängig von den Anforderungen an die verfügbaren Rechen- und Speicherressourcen. Auf den Achsen „Kundennutzen“ und „geringer Rechen-/Speicheraufwand“ ist das bestehende Zwei-Fluid-Modell („2F“) exemplarisch eingetragen. Auf den Eintrag auf der dritten Achse wurde verzichtet, da das Zwei-Fluid-Modell bereits implementiert ist. Der Implementierungsaufwand ist 0, der Punkt des Zwei-Fluid-Modells befindet sich auf der Achse „geringer Implementierungsaufwand“ fern des Ursprungs. Auf zwei Achsen ist die Lösungsfindung durch einen limitierenden Wert begrenzt, der die praktische Umsetzbarkeit und Realisierbarkeit beim Kunden berücksichtigt. In Abbildung 1.11 sind zwei beispielhafte limitierende Werte skizziert. Auf der Achse „Kundennutzen“ wird die Lösungsfindung durch das bestehende Zwei-Fluid-Modell begrenzt. Die anvisierte Lösung darf das bestehende Zwei-Fluid-Modell hinsichtlich des Kundennutzens nicht unterschreiten. Die begrenzenden Punkte lassen sich zur limitierenden Lösung verbinden. Zusammenfassend muss die anvisierte Lösung einen Vorteil gegenüber dem bestehenden Zwei-Fluid-Modell aufweisen und gleichzeitig hinsichtlich Speicher-, Rechen- und Implementierungsaufwand überschaubar sein. Eine exemplarische Lösung ist in Abbildung 1.11 skizziert. Im Kontext des Projekts sind die Ziele der vorliegenden Arbeit folgendermaßen definiert:

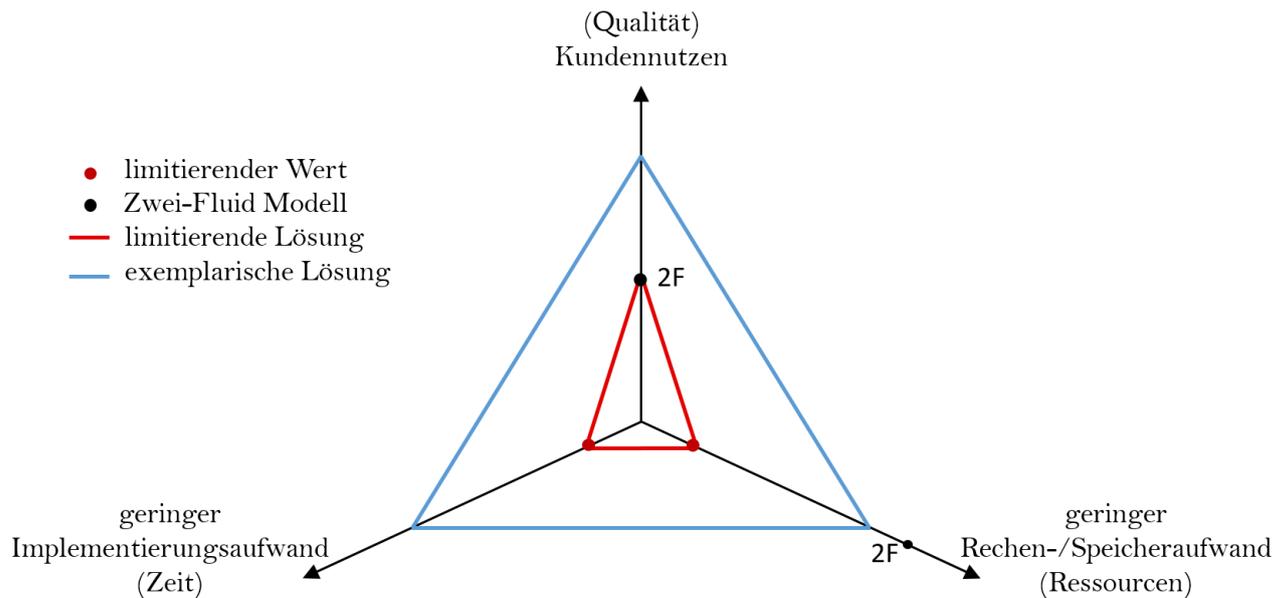


Abbildung 1.11: „Magisches Dreieck“ (vgl. ([57], S. 88), ([72], S. 172)) für die Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire™.

- Klärung der Fragestellung, ob die Stochastische Feldmethode in derselben Form, wie sie für eine Skalargröße in der Verbrennung hergeleitet wurde, auf das Zwei-Fluid-Modell angewendet werden kann.
- Formulierung einer zum Zwei-Fluid-Modell konsistenten Formulierung der Stochastischen Feldmethode. Die Formulierung soll hinsichtlich der Einflussfaktoren in Abbildung 1.11 optimiert sein.
- Implementierung der Stochastischen Feldmethode in die kommerzielle Software AVL Fire™.

Die Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf das Zwei-Fluid-Modell ist ebenfalls in Abbildung 1.10 anhand zweier Würfel dargestellt. Sie schließen die Lücke in der skizzierten Matrix möglicher Kombinationen. Innerhalb dieser Arbeit wird die Stochastische Feldmethode auf das Zwei-Fluid-Modell im Kontext von RANS-Simulationen angewandt („SFM+2F+RANS“). Die theoretischen Überlegungen betreffen das Zwei-Fluid-Modell im LES-Kontext gleichermaßen. Eine Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf das Zwei-Fluid-Modell im LES-Kontext („SFM+2F+LES“) ist möglich. Die Anwendung der Stochastischen Feldmethode für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich auf das Zwei-Fluid-Modell gestaltet sich nicht analog, da das Zwei-Fluid-Modell für Mittelwerte formuliert ist (vgl. Abbildung 1.5).

1.5 Struktur der Arbeit

Nach der Einleitung mit der Themeneingrenzung, dem Überblick über konkurrierende Arbeiten und der Zielsetzung in den Kapiteln 1.2, 1.3 und 1.4 wird innerhalb des Kapitels 1.5 die vorliegende Arbeit strukturiert. Das nachfolgende Kapitel 2 fasst die für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen in gekürzter Form zusammen. Es sei darauf hingewiesen, dass Kapitel 2 die Leistung anderer Autoren reproduziert und nicht die eigene wissenschaftliche Leistung repräsentiert. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Der interessierte Leser sei auf die angegebenen Referenzen verwiesen.

Kapitel 3 behandelt die Stochastische Feldmethode im Kontext des Zwei-Fluid-Modells. Die Stochastische Feldmethode ermöglicht die Berücksichtigung einer PDF durch die Berechnung stochastischer Felder. Wie diese Felder interpretiert werden können und welcher Bezug zur Realität besteht, wird in Kapitel 3.1 diskutiert. In den

Kapiteln 3.2 und 3.3 wird veranschaulicht, wie die PDF approximiert und transportiert werden kann. In Kapitel 3.4 erfolgt ein Vergleich mit konkurrierenden Modellen für Zweiphasenströmungen. Die formale Herleitung der PDF-Transportgleichung des Volumenanteils der dispersen Phase wird in Kapitel 3.5 für das Zwei-Fluid- und das Drift-Flux-Modell vollzogen. In Abbildung 1.5 ist dies durch [P8] sowie die Verbindung zwischen [P7] und [P8] angedeutet. Die hergeleitete PDF-Transportgleichung unterscheidet sich von der PDF-Transportgleichung für eine Skalargröße in der Verbrennung, was in Kapitel 3.6 diskutiert wird. Hierzu wird in Kapitel 3.6.1 gezeigt, dass kein Micromixing-Term in der PDF-Transportgleichung des Volumenanteils existieren kann. Kapitel 3.6.2 zeigt, dass die Unterschiede zu erwarten sind und andernfalls Konsistenzprobleme auftreten würden. Hierzu wird die Transportgleichung des mittleren Volumenanteils der dispersen Phase auf zwei Methoden abgeleitet: Durch Ensemble-Mittelung der Transportgleichung für die Repräsentanten der Stochastischen Feldmethode und durch Integration der PDF-Transportgleichung. Beide Methoden belegen, dass ein Term für die mittlere turbulente Advektion in der Stochastischen Feldmethode nicht konsistent zum verwendeten Zwei-Fluid-Modell wäre.

Eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode wird in Kapitel 3.6.3 vorgestellt. In Abbildung 1.5 ist diese Erkenntnis durch die gestrichelte Linie zwischen [P8] und [P9] gekennzeichnet, da sie auf Analogien beruht, aber nicht explizit hergeleitet wird. Kapitel 3.6.4 analysiert, warum ein Term für die mittlere turbulente Advektion in der Stochastischen Feldmethode für das Zwei-Fluid-Modell entfällt, aber bei einer Anwendung auf eine Skalargröße im Verbrennungsbereich existiert. Die Möglichkeiten für eine nach Abbildung 1.11 attraktive Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL FireTM werden in Kapitel 3.7 diskutiert. Die Implementierung der Stochastischen Feldmethode zur Berücksichtigung von stochastischen Schwankungen im Quellterm der dispersen Phase wird als besonders attraktiv eingeschätzt. Es werden zwei Typen stochastischer Schwankungen im Quellterm unterschieden: Schwankungen in der lokalen Blasenanzahl und Schwankungen im Druck aufgrund turbulenter Fluktuationen. Die Modellierung dieser Schwankungen wird in den Kapiteln 3.7.1 und 3.7.2 erläutert. Beide Modelle werden in Kapitel 4.1 voneinander abgegrenzt und in Kapitel 4.2 verifiziert und validiert. Kapitel 4.3 demonstriert, wie eine PDF bei der Berechnung nichtlinearer Funktionen verwendet werden kann. In diesem Zusammenhang wird die PDF des Volumenanteils bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft verwendet. Die Approximation der PDF des Volumenanteils wird in Kapitel 4.4 an einem Beispiel gezeigt. In Kapitel 4.5 wird das Modell zur Berücksichtigung von Schwankungen aufgrund turbulenter Fluktuationen an einer intermittierend kavitierenden Strömung getestet. Es handelt sich um einen Aufbau, bei dem eine kavitierende Strömung experimentell nachweisbar ist. Das herkömmliche Zwei-Fluid-Modell weist dagegen keine Kavitation auf. Eine aufwändige LES-Berechnung ist notwendig, um Kavitation numerisch nachzuweisen. Die Ergebnisse des selbst implementierten Modells werden mit experimentellen Ergebnissen und den Ergebnissen einer LES-Berechnung durch AVL verglichen. Kapitel 5 fasst die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen.

Nach der Einleitung und Strukturierung der vorliegenden Arbeit werden im folgenden Kapitel 2 die für das Verständnis der Arbeit nötigen Grundlagen aufgeführt.

2 Grundlagen

Die vorliegende Arbeit baut auf Erkenntnissen anderer Autoren auf. Die für das Verständnis notwendigen Grundlagen sind im Kapitel 2 zusammengefasst. Es sei darauf hingewiesen, dass Kapitel 2 keinen eigenen wissenschaftlichen Beitrag darstellt, sondern die Beiträge anderer Autoren zusammenfasst. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Der interessierte Leser sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

In der Strömungsmechanik werden mit der Lagrange- und der Eulerschen- zwei Betrachtungsweisen unterschieden ([92], S. 75). Die Eulersche Betrachtungsweise beschreibt die Strömung aus Sicht eines ortsfesten Beobachters ([92], S. 75). Zur Veranschaulichung kann die Perspektive einer am Flussufer stehenden Person herangezogen werden, die ein vorbeitreibendes Schiff beobachtet. Die Situation wird vom ruhenden Beobachter, der stehenden Person, betrachtet. Die Lagrange Betrachtungsweise beschreibt die Situation aus Sicht eines mitbewegten Bezugssystems ([92], S. 75). Im obigen Beispiel kann zur Veranschaulichung die Perspektive einer auf dem Schiff stehenden Person herangezogen werden, welche die Situation aus Sicht eines mitbewegten Bezugssystems beschreibt. Beide Betrachtungsweisen werden zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen genutzt. In den Kapiteln 2.1 und 2.2 werden Methoden vorgestellt, die die beiden Betrachtungsweisen zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen nutzen. Für eine ausführliche Diskussion sei auf die angegebenen Quellen verwiesen. Kapitel 2.3 skizziert das Lösungsverfahren der Euler-Euler Methode „Zwei-Fluid-Modell“ in der CFD-Software AVL Fire™. Die für das Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen Grundlagen zu PDFs sind in Kapitel 2.4 zusammengefasst. Kapitel 2.5 gibt eine knappe Einführung zu stochastischen Prozessen. Für eine tiefergehende Einführung sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

2.1 Lagrange Partikel

Die Methode der Lagrange Partikel nutzt die Lagrange Betrachtungsweise, um den Weg einzelner Partikel durch das Strömungsgebiet zu beschreiben. Lagrange Partikel können für die Berechnung der dispersen Phase verwendet werden (vgl. [99]). Die Bewegungsgleichungen für ein Partikel, das sich zum Zeitpunkt t_0 am Ort \mathbf{x}_0 befindet, sind ([104], S. 144) zu entnehmen. Die Beschreibung Lagrange Partikel erfolgt an dieser Stelle entsprechend. Der Ort dieses Partikels sei für eine beliebige Zeit $t \geq t_0$ analog ([104], S. 144) mit $\mathbf{x}^+(\mathbf{x}_0, t)$ bezeichnet. Die Bahn des Partikels ist damit lediglich eine Funktion des Orts \mathbf{x}_0 und der Zeit t . Die Geschwindigkeit des Partikels sei $\mathbf{U}^+(\mathbf{x}_0, t)$, wobei diese der Geschwindigkeit am Ort $\mathbf{x}^+(\mathbf{x}_0, t)$ entspricht ([104], S. 144)

$$\mathbf{U}^+(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}^+(\mathbf{x}_0, t), t). \quad (2.1)$$

Die Geschwindigkeit des Partikels ist definiert als die zeitlichen Ableitung des Orts entsprechend ([104], S. 144)

$$\mathbf{U}^+(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{x}^+(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Die zeitliche Änderung der Partikelgeschwindigkeit entspricht gemäß dem zweiten Newtonschen Gesetz (vgl. [116], S. 56) der Summe aller auf das Partikel mit der Masse m wirkenden Kräfte F ([104], S. 144; [20], S. 13-71)

$$\frac{\partial}{\partial t} U_j^+(\mathbf{x}_0, t) = \frac{F}{m}. \quad (2.3)$$

Die zu berücksichtigenden Kräfte sind abhängig vom Anwendungsfall. Ein guter Überblick der auf ein Partikel wirkenden Kräfte ist ([144], S. 3) zu entnehmen. Die Kräfte werden hierin unterteilt in Druckkraft, viskose Kraft, Trägheitskraft, Gravitationskraft, Auftriebskraft und die Kraft durch Oberflächenspannungen ([144], S. 3). Eine entsprechende Übersicht ist in Abbildung 2.1 skizziert. Die Druckkraft und die viskose Kraft bilden die Kraft, die auf die Oberfläche des Partikels wirkt ([144], S. 8). Vereinfachend kann die Oberflächenkraft eingeteilt werden in drei Anteile: Archimedische Kraft, Kraft durch einen externen Druckgradienten und eine hydrodynamische Kraft ([144], S. 8). Die hydrodynamische Kraft weist Anteile der Stokesschen Widerstandskraft, der sogenannten „added mass“ Kraft, der Basset-Kraft und der transversalen Auftriebskraft auf ([144], S. 9). Letztere enthält unter anderem auch die Magnus-Kraft ([144], S. 9). Für eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Kräfte sei auf die Literatur verwiesen. Besitzt ein Partikel mit der Masse m zum Zeitpunkt t_0 am Ort \mathbf{x}_0 die Geschwindigkeit $\mathbf{U}^+(\mathbf{x}_0, t_0)$, kann seine Geschwindigkeit $\mathbf{U}^+(\mathbf{x}_0, t)$ und seine Bahn $\mathbf{x}^+(\mathbf{x}_0, t)$ durch das Strömungsgebiet mit Hilfe der Gleichungen (2.2) und (2.3) berechnet werden ([20], S. 13-71). Ein Lagranges Partikel muss nicht zwingend ein physikalisch existierendes Partikel sein: Es kann ein unendlich kleines Fluidelement ([128], S. 2461; [104], S. 144) oder ein Konglomerat physikalisch existenter Partikel ([99] S. 1660) repräsentieren. Lagrange Partikel können zum Transport von Eigenschaften genutzt werden: Analog zu Gleichung (2.3) kann beispielsweise der Transport einer Temperatur oder einer Konzentration in Lagrange Betrachtungsweise beschrieben werden (vgl. [104], S. 144; [20], S. 13-71). Das Strömungsfeld der kontinuierlichen Phase wird durch gemittelte

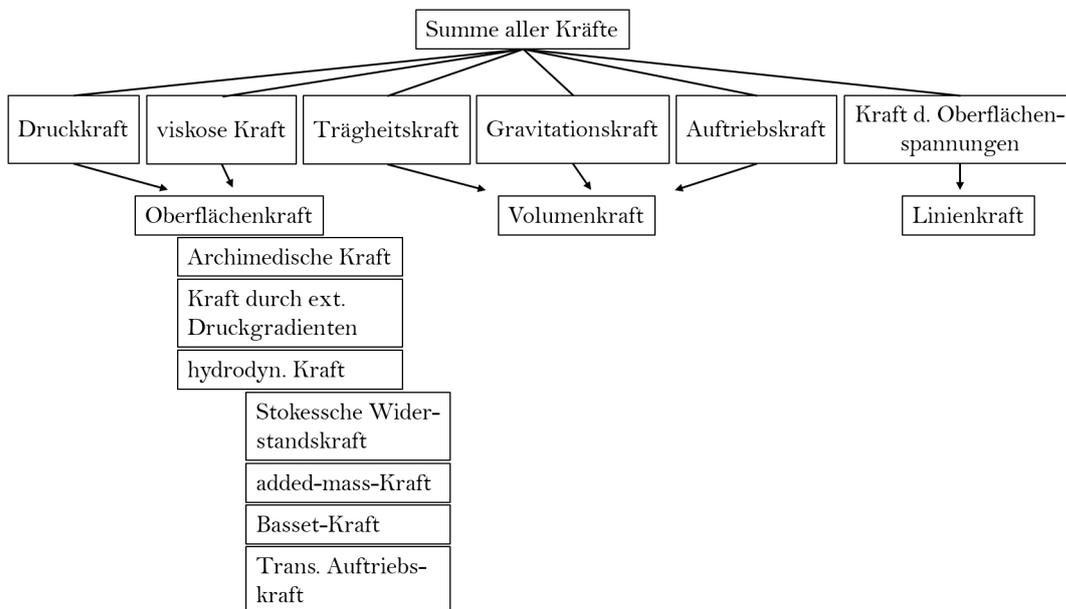


Abbildung 2.1: Übersicht der auf ein Partikel in einem Fluid wirkenden Kräfte nach ([144], S. 3-9).

Gleichungen berechnet ([99], S. 1661-1662). Die gemittelte Kontinuitätsgleichung lautet ([62], S. 40)

$$\frac{\partial \alpha_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_c \mathbf{u}_c) = 0, \tag{2.4}$$

wobei α_c den Volumenanteil und \mathbf{u}_c die mittlere Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase beschreiben (vgl. auch [99], S. 1162). Gleichung (2.4) geht davon aus, dass kein Massenaustausch zwischen der kontinuierlichen und der dispersen Phase existiert (vgl. [62], S. 35). Die entsprechende Impulsgleichung der kontinuierlichen Phase lautet ([99], S. 1162)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \alpha_c \mathbf{u}_c) + \nabla \cdot (\rho_c \alpha_c \mathbf{u}_c \mathbf{u}_c) = -\nabla p_{\text{dyn}} + \nabla \cdot (\alpha_c \mu^* \nabla \mathbf{u}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{u}_c \mu^* \nabla \mathbf{u}_c^T) - \mathbf{F}, \tag{2.5}$$

worin ρ_c und p_{dyn} für die Dichte und den mittleren dynamischen Druck der kontinuierlichen Phase stehen. Die effektive Viskosität wird mit μ^* bezeichnet und F beschreibt einen Quellterm aufgrund des Impulsaustauschs zwischen den Phasen. Für weitere Details sei auf [99] verwiesen. In der Gegenwart von Turbulenz fluktuiert die Geschwindigkeit um ihren mittleren Wert, und die Bahnlinien der Lagrangian Partikel, Trajektorien genannt, sind nicht deterministisch ([5], S. 57). Dies kann durch stochastische Modelle in den Bewegungsgleichungen für die Lagrangian Partikel berücksichtigt werden. In ([45], S. 485) wird von isotroper Turbulenz ausgegangen, wobei die instantane Geschwindigkeitsfluktuation u' durch Wirbel in der kontinuierlichen Phase entsteht. Die instantane Geschwindigkeit u setzt sich aus dem Mittelwert \bar{u} und der Fluktuation u' zusammen ([45], S. 485)

$$u = \bar{u} + u'. \quad (2.6)$$

Die Geschwindigkeitsfluktuation u' wird als gaußverteilte Zufallsvariable mit der Standardabweichung ([45], S. 485)

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}k} \quad (2.7)$$

modelliert. Hierbei ist k die zeitlich gemittelte turbulente kinetische Energie und wird mit Hilfe des „ k - ϵ “-Modells erhalten (vgl. [45], S. 483; [73]).

Die zeitlich gemittelte turbulente kinetische Energie k ist mit den turbulenten Schwankungen u'_1, u'_2, u'_3 in die drei Raumrichtungen definiert (vgl. [55], S. 340; [53], S. 65, 71)

$$k = \frac{1}{2}(\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}). \quad (2.8)$$

Der Operator $\bar{\cdot}$ kennzeichnet dabei einen zeitlichen Mittelungsoperator (vgl. Kapitel 2.2.1.1). Die Beeinflussung des Lagrangian Partikels durch die Störung u' ist um die „Interaktionszeit“ (engl.: „interaction time“ ([45], S. 485)) t_{int} zeitlich beschränkt ([45], S. 485). Sie entspricht dem Minimum aus der Lebenszeit des Wirbels t_e und der Transitzeit t_R ([45], S. 485)

$$t_{\text{int}} = \min(t_e, t_R). \quad (2.9)$$

Die Zeiten t_e und t_R sind entsprechend zu modellieren (vgl. z.B. [45], S. 485). Bei geringer Relativgeschwindigkeit zwischen Lagrangian Partikel und kontinuierlicher Phase bewegt sich das Lagrange Partikel mit dem Fluid und verbleibt innerhalb des Wirbels ([45], S. 485). Die Lebensdauer des Wirbels t_e ist dann bestimmend für das Maß der Interaktionszeit t_{int} ([45], S. 485). Ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Lagrangian Partikel und kontinuierlicher Phase hoch, verbleibt das Partikel nicht für die Lebenszeit des Wirbels t_e innerhalb des Wirbels ($t_R < t_e$) ([45], S. 485). Entsprechend ist die Transitzeit t_R bestimmend für die Interaktionszeit t_{int} ([45], S. 485). Das oben beschriebene Verfahren wird „Discrete random walk“ ([132], S. 381)- oder „Eddy Lifetime“ ([132], S. 381)-Modell genannt und ist im CFD-Code FLUENTTM verfügbar (vgl. [22], S. 709). Die Anzahl Lagrangian Partikel sollte ausreichend hoch gewählt werden, um statistische Fehler zu minimieren ([98], S. 2). Aufgrund des numerischen Aufwands ist die Methodik für praktische Anwendungen auf Fälle mit geringem Volumenanteil der Partikelphase begrenzt ([98], S. 2). Bei der industriellen Berechnung von Kavitationseffekten in Einspritzdüsen kommt Lagrangian Methoden aufgrund des rechnerischen Aufwands eine untergeordnete Rolle zu [31].

2.2 Euler-Euler-Methoden

Die detaillierte Beschreibung von Zweiphasenströmungen, z.B. auf mikroskopischer Ebene, erweist sich als schwierig ([55], S. 57). In praktischen Anwendungsfällen ist eine Berechnung auf mikroskopischer Ebene aufgrund der komplexen Phasengrenzfläche nicht möglich ([55], S. 57). In [55] wird die Herleitung eines Zwei-Fluid-Modells mit der Annahme motiviert, dass mikroskopische Details für praktische Anwendungsfälle selten

von Relevanz sind ([55], S. 57). Makroskopische Aspekte seien entscheidender ([55], S. 57). Entsprechend wird eine Mittelung der lokalen und instantanen Ereignisse durchgeführt ([55], S. 57). Im Gegensatz zur Methode Lagrange Partikel (vgl. Kap. 2.1) werden bei Euler-Euler-Methoden beide Phasen in Eulerscher Betrachtungsweise behandelt. Innerhalb der Klasse der Euler-Euler-Methoden ist zwischen mehreren Modellen zu unterscheiden. Eine detaillierte Analyse ist [55] bzw. [70] zu entnehmen. Im Folgenden wird auf das „Zwei-Fluid-Modell“, das „Drift-Flux-Modell“ und das „MUSIG-Modell“ genauer eingegangen. Für eine detailliertere Diskussion sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

Abbildung 2.2 vergleicht die Modelle anschaulich mit einer hypothetischen Realität. Der Vergleich erfolgt durch Betrachtung eines kleinen Volumens der Größe einer Rechenzelle. In der Realität treten in Zweiphasenströmungen Blasen unterschiedlicher Größe auf, die jeweils eine individuelle Geschwindigkeit besitzen (vgl. [12]). In Abbildung 2.2 ist dies durch orangene Geschwindigkeitsvektoren in den Blasenzentren skizziert. Die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase unterscheidet sich lokal von der Geschwindigkeit der dispersen Phase. Die Geschwindigkeitsvektoren der kontinuierlichen Phase sind in Abbildung 2.2 in regelmäßigen Abständen im Volumen der kontinuierlichen Phase skizziert. Die Abbildung wird in der folgenden Diskussion in den Kapiteln 2.2.1 und 2.2.2 zur Erläuterung herangezogen.

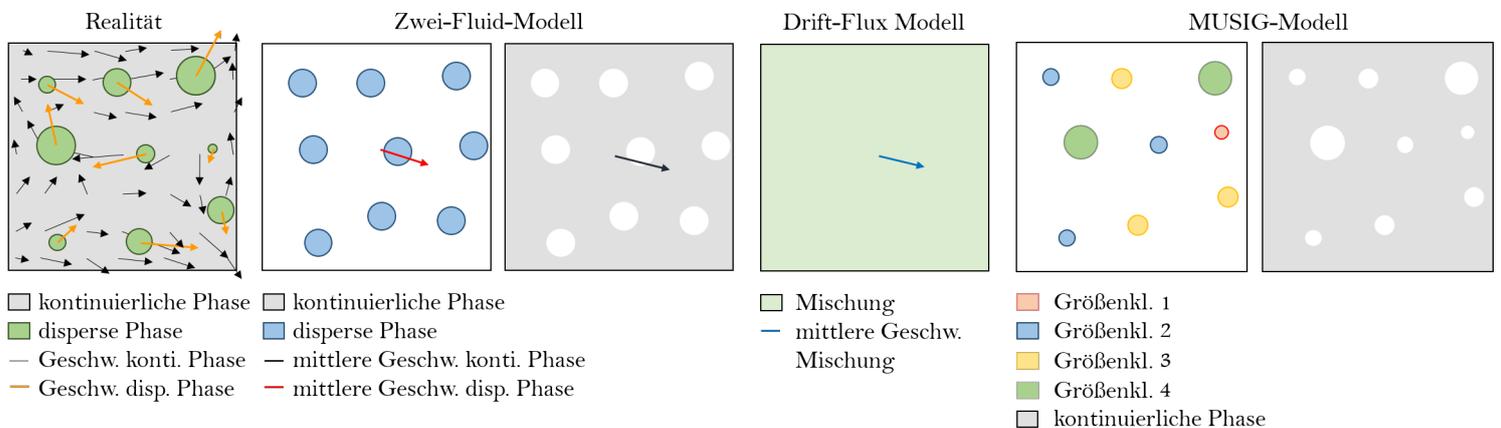


Abbildung 2.2: Betrachtung eines Volumens der Größe einer Rechenzelle: Hypothetische Blasenverteilung in der Realität und ihre Approximation im Zwei-Fluid-Modell, im Drift-Flux-Modell und im MUSIG-Modell.

2.2.1 Zwei-Fluid-Modell

Im Zwei-Fluid-Modell wird eine Zweiphasenströmung als eine Strömung zweier Fluide betrachtet, die durch Phasengrenzflächen voneinander getrennt sind ([55], S. 11). Es wird dabei angenommen, dass beide Phasen als Kontinuum beschrieben werden können ([55], S. 13). Jedes Fluid besitzt individuelle Eigenschaften, beispielsweise die mittlere Geschwindigkeit innerhalb einer Rechenzelle ([55], S. 14). In Abbildung 2.2 ist dies durch die Verwendung unterschiedlicher Geschwindigkeitsvektoren veranschaulicht. Mit einer Annahme der Blasenanzahl kann die mittlere Blasengröße berechnet werden (vgl. Gleichungen (2.23), (2.27) und (2.28)). Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden weitere Details des verwendeten Zwei-Fluid-Modells in den Kapiteln 2.2.1.1 bis 2.2.1.10 erläutert. Die Annahme, dass makroskopische Fluideigenschaften für Anwendungsfälle relevant sind, motiviert eine Mittelung ([55], S. 57). In [55] wird eine zeitliche Mittelung für die Herleitung der zeitlich gemittelten Erhaltungsgleichungen des Zwei-Fluid-Modells verwendet. In diesem Zuge werden Mittelungsoperatoren eingeführt.

2.2.1.1 Mittelungsoperatoren

Unter Annahme einer infinitesimal dünnen Phasengrenzfläche ist die Mittelung einer beliebigen Funktion g am Ort \mathbf{x}_0 zum Zeitpunkt t_0 über den Intervall Δt (vgl. [55], S. 73)

$$\bar{g}(\mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} g(\mathbf{x}_0, t_0) dt. \quad (2.10)$$

Die Zeitspanne Δt ist groß genug zu wählen, um lokale Schwankungen herauszumitteln, und klein genug, um eine Mittelung über makroskopische Unstetigkeiten zu vermeiden (vgl. [55], S. 70). Für eine detaillierte Diskussion, insbesondere die Betrachtung einer endlich dünnen Phasengrenzfläche, sei auf [55] verwiesen. Die Definition von \bar{g} als zeitliches Mittel in Gleichung (2.10) wird innerhalb des Kapitels 2.2.1 und in Gleichung (2.8) verwendet. Innerhalb der anderen Kapitel kennzeichnet \bar{g} einen unspezifizierten Mittelwert, beispielweise ist alternativ ein Mittelwert über das Volumen denkbar.

Die Phasemittelung einer beliebigen Funktion g_k der Phase k ist mit dem zeitlichen Mittelwert \bar{g}_k in Gleichung (2.10) als (vgl. [55], S. 75)

$$\overline{\overline{g}_k} = \frac{\bar{g}_k}{\alpha_k} \quad (2.11)$$

definiert. In Gleichung (2.11) ist α_k die Wahrscheinlichkeit, Phase k anzutreffen (vgl. [55], S. 73). Alternativ wird in den meisten Artikeln und entsprechend innerhalb dieser Arbeit α_k als Volumenanteil bezeichnet. Im Zwei-Fluid-Modell gilt für die Summe des Volumenanteils beider Phasen ([55], S. 73)

$$\alpha_c + \alpha_d = 1, \quad (2.12)$$

wobei die Indizes c und d die Zugehörigkeit zur kontinuierlichen und dispersen Phase kennzeichnen. Bezeichnet θ_k eine Größe pro Masseneinheit, definiert (vgl. [55], S. 75-76)

$$\hat{\theta}_k = \frac{\overline{\rho_k \theta_k}}{\bar{\rho}_k} \quad (2.13)$$

den mit der Dichte ρ_k der Phase k dichtegewichteten Mittelwert.

2.2.1.2 Kontinuitätsgleichung

Die instantane Kontinuitätsgleichung für eine Phase k ist in ([55], S. 13-15) hergeleitet und lautet

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k) = 0. \quad (2.14)$$

Durch zeitliche Mittelung kann aus Gleichung (2.14) die zeitlich gemittelte Kontinuitätsgleichung für die Phase k hergeleitet werden ([55], S. 98)

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\rho}_k \hat{\mathbf{v}}_k) = S_k. \quad (2.15)$$

In den Gleichungen (2.14) und (2.15) ist ρ_k die Dichte der Phase k , \mathbf{v}_k die entsprechende Geschwindigkeit und S_k der Quellterm.

2.2.1.3 Modellierung des Quellterms der Kontinuitätsgleichung

In AVL FireTM ist für den Quellterm S_k im sogenannten „linearen Kavitationsmodell“ (engl.: „Linear Cavitation Model“ ([2], S. 3-6)) eine Formulierung gewählt, die sich aus der „Rayleigh-Plesset-Gleichung“ ([91], S. 308)

$$r_{Bl} \frac{d^2 r_{Bl}}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dr_{Bl}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_c} (\Delta p_p), \quad (2.16)$$

mit dem Blasenradius r_{Bl} , der Dichte der kontinuierlichen Phase ρ_c und der Druckdifferenz zwischen disperser und kontinuierlicher Phase Δp_p , herleiten lässt. Die Herleitung ist in ([138], S. 2-3) beschrieben und wird im Folgenden kurz erläutert. Wird eine einzelne Blase betrachtet, kann der Massenfluss $\dot{m}_{c \rightarrow d}$ von der kontinuierlichen zur dispersen Phase in Abhängigkeit der Änderung des Blasenradius ausgedrückt werden ([138], S. 2)

$$\dot{m}_{c \rightarrow d} = 4\pi r_{Bl}^2 \rho_d \frac{dr_{Bl}}{dt}. \quad (2.17)$$

Mit der mittleren Blasendichte N''' ergibt sich als Massenfluss pro Volumen ([138], S. 3)

$$S_d = N''' \dot{m}_{c \rightarrow d} = N''' 4\pi r_{Bl}^2 \rho_d \frac{dr_{Bl}}{dt}. \quad (2.18)$$

Dieser Ausdruck für den Quellterm kann mit der vereinfachten Rayleigh-Plesset-Gleichung

$$\frac{3}{2} \left(\frac{dr_{Bl}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{\rho_c} (\Delta p_p), \quad (2.19)$$

bei welcher der Trägheitsterm in Gleichung (2.16) vernachlässigt wurde, vereinfacht werden. Unter Annahme runder Blasen und $\alpha_d = N''' \frac{4}{3} \pi r_{Bl}^3$ (vgl. Gleichungen (2.26) und (2.27)) ergibt sich für den Quellterm ([138], S. 3)

$$S_d \approx \text{sgn}(\Delta p_p) 3,95 \frac{\rho_d}{\sqrt{\rho_c}} N'''^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} |\Delta p_p|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

In Gleichung (2.20) ist sgn die Signum-Funktion ([117], S. 35)

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ +1 & \text{falls } x > 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Die Modellierung der Blasendichte N''' und der Druckdifferenz Δp_p wird in den Kapiteln 2.2.1.4 und 2.2.1.5 behandelt. Mit der Massenerhaltung kann gezeigt werden, dass die Quellterme der beiden Phasen miteinander gekoppelt sind ([55], S. 133)

$$S_d = -S_c. \quad (2.22)$$

2.2.1.4 Blasendichte

Die Blasendichte kann in AVL FireTM mit Hilfe einer eigenen Transportgleichung oder einer Näherungsfunktion bestimmt werden (vgl. [2]). Im linearen Kavitationsmodell ist sie als Funktion des Volumenanteils α formuliert ([2], S. 3-7)

$$N''' = \begin{cases} N_0''' & \text{falls } \alpha \leq 0,5 \\ 2(N_0''' - 1)(1 - \alpha) + 1 & \text{falls } \alpha > 0,5, \end{cases} \quad (2.23)$$

wobei N_0''' eine stoffspezifische Konstante ist und die Blasendichte ohne Berücksichtigung von Koaleszenzeffekten darstellt. Bei der Simulation von Injektorströmungen mit AVL FireTM wird N_0''' üblicherweise im Bereich

$$10^{10}/m^3 \leq N_0''' \leq 10^{18}/m^3 \quad (2.24)$$

gewählt [30].

2.2.1.5 Druckdifferenz

Die Druckdifferenz Δp_p in Gleichung (2.20) wird in AVL FireTM entsprechend ([2], S. 3-6, 3-7)

$$\Delta p_p = p_{\text{sat}} - \left(p - C_E \frac{2}{3} \rho_c k_c \right) \quad (2.25)$$

berechnet. In Gleichung (2.25) ist p_{sat} der Sättigungsdampfdruck des Fluids, unterhalb dessen das Fluid verdampft und Kavitation auftritt ([38], S. 322). Der Druck wird mit p gekennzeichnet (vgl. [138], S. 2). C_E ist der Egler-Koeffizient und wird fallspezifisch gewählt ([2], S. 3-6, 3-7). Die turbulente kinetische Energie der kontinuierlichen Phase ist mit k_c bezeichnet. In Gleichung (2.25) wird der Druck um einen mit C_E multiplizierten dynamischen Druck $\sim \frac{2}{3} \rho_c k_c$ verringert.

2.2.1.6 Bestimmung der Blasengröße

Innerhalb einer Rechenzelle mit dem Volumen V_{Zelle} gilt für den mittleren Volumenanteil der dispersen Phase (vgl. [2], S. 3-7)

$$\alpha_d = \frac{4}{3} \pi r_{Bl}^3 \frac{n_{Bl}}{V_{\text{Zelle}}} \quad (2.26)$$

mit der mittleren Blasenanzahl n_{Bl} innerhalb dieser Zelle und dem mittleren Blasenradius r_{Bl} . In Gleichung (2.26) wurden die einzelnen Blasen als sphärisch angenommen. Der Volumenanteil der dispersen Phase α_d innerhalb jeder Rechenzelle kann mit Gleichung (2.15) berechnet werden. Die Blasenanzahl n_{Bl} bzw. ihre Dichte

$$N''' = \frac{n_{Bl}}{V_{\text{Zelle}}} \quad (2.27)$$

kann mit Hilfe einer von α_d abhängigen Funktion (vgl. Gleichung (2.23)) oder einer Transportgleichung (vgl. [56]) modelliert werden. Für die mittlere Blasengröße r_{Bl} folgt aus Gleichung (2.26) ([2], S. 3-7)

$$r_{Bl} = \left(\frac{3\alpha_d V_{\text{Zelle}}}{4\pi n_{Bl}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.28)$$

Im Zwei-Fluid-Modell in AVL FireTM (vgl. [2], S. 3-7) wird die reale Blasengrößenverteilung durch n_{Bl} Blasen einer mittleren Blasengröße nach Gleichung (2.28) approximiert (vgl. Abbildung 2.2). Der Vergleich in Abbildung 2.2 ist insofern irreführend, als im Zwei-Fluid-Modell die Positionen der Blasen innerhalb einer Rechenzelle nicht bekannt sind.

2.2.1.7 Momentengleichung

In der Kontinuitätsgleichung (2.15) der Phase k sind die Phasenmittelung und die dichtegewichtete Mittelung aus den Gleichungen (2.11) und (2.13) auf die Dichte und die Geschwindigkeit angewendet. Beide Größen kommen auch in der Momentengleichung vor. Die Momentengleichung oder auch Impulsgleichung beschreibt den Transport der dichtegewichteten Geschwindigkeit ([55], S. 99)

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k \hat{v}_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\rho_k \hat{v}_k \hat{v}_k}) = -\nabla \cdot (\alpha_k \overline{p_k}) + \nabla \cdot (\alpha_k (\overline{\tau_k} + \tau_k^T)) + \alpha_k \overline{\rho_k \hat{g}_k} + M_k, \quad (2.29)$$

wobei p_k den Partialdruck und \hat{g}_k den Einfluss durch eine Volumenkraft der Phase k , beispielsweise der Gravitationskraft, bezeichnet. M_k ist der Quellterm des Impulses, verursacht durch den Impulsaustausch zwischen den Phasen ([55], S. 99). Der viskose Spannungstensor der Phase k ist mit τ_k und der turbulente Spannungstensor mit τ_k^T bezeichnet. Für Newtonsche Fluide besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der viskosen Schubspannung

und dem Geschwindigkeitsgradienten ([93], S. 49). Beispielsweise ist für eine eindimensionale Couette-Strömung mit Strömungsrichtung x und Orthogonale zur Wand z die viskose Schubspannung ([93], S. 49)

$$\tau = \mu \frac{dv_x}{dz} \quad (2.30)$$

mit der dynamischen Viskosität μ . In Gleichung (2.30) ist die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung mit v_x bezeichnet. Hinsichtlich der Modellierung der viskosen und der turbulenten Spannungstensoren für Zweiphasenströmungen sei auf [55] verwiesen. Es sei angemerkt, dass p_1 und p_2 der beiden Phasen voneinander abhängen. In einer statischen Betrachtungsweise gilt $p_1 = p_2$ (vgl. [55], S. 39). Für eine dynamische Analyse sei auf ([55], S. 39) verwiesen.

2.2.1.8 Modellierung des Quellterms in der Momentengleichung

In AVL FireTM ist der Quellterm in der Momentengleichung der kontinuierlichen Phase (vgl. Gleichung (2.29)) als ([2], S. 3-18)

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{F}_{SW} + \mathbf{F}_{TD} + \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{WL} \quad (2.31)$$

modelliert. Der Quellterm in Gleichung (2.31) besteht aus den vier Anteilen: Strömungswiderstandskraft, Kraft aufgrund turbulenter Dispersion, Auftriebskraft und einer Kraft, die verhindert, dass sich Blasen im Bereich einer vertikalen Wand aufhalten (vgl. [2], S. 3-18, 3-21). Für Details zur Modellierung der einzelnen Anteile sei auf die angegebene Referenz verwiesen. Auf die Strömungswiderstandskraft F_{SW} wird an dieser Stelle genauer eingegangen. Sie wird entsprechend ([2], S. 3-18)

$$\mathbf{F}_{SW} = C_D \frac{1}{8} \overline{\rho_c} A''' |\mathbf{v}_r| \mathbf{v}_r \quad (2.32)$$

modelliert. In Gleichung (2.32) ist \mathbf{v}_r die Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen ([2], S. 3-18)

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_c \quad (2.33)$$

und für die Dichte der Phasengrenzflächen A''' gilt mit dem „Cavitation Drag Model“ ([2], S. 3-18)

$$A''' = 4\pi r_{Bl}^2 N''' = (36\pi N''')^{\frac{1}{3}} \alpha_d^{\frac{2}{3}}. \quad (2.34)$$

Der letzte Schritt in Gleichung (2.34) ergibt sich mit den Gleichungen (2.27) und (2.28). Für C_D in Gleichung (2.32) gilt (vgl. [2], S. 3-19)

$$C_D = \begin{cases} \frac{192}{Re_b} (1 + 0,1 Re_b^{\frac{3}{4}}) & \text{falls } Re_b \leq 1000 \\ 0,438 & \text{falls } Re_b > 1000 \end{cases} \quad (2.35)$$

mit der Reynolds-Zahl der Blasen (vgl. [2], S. 3-19)

$$Re_b = \frac{|\mathbf{v}_r| 2r_{Bl}}{\nu_c}. \quad (2.36)$$

In Gleichung (2.36) ist ν_c die kinematische Viskosität der kontinuierlichen Phase. Es sei hervorgehoben, dass die Strömungswiderstandskraft \mathbf{F}_{SW} in Gleichung (2.32) mit der Phasengrenzfläche in Gleichung (2.34) nichtlinear vom Volumenanteil der dispersen Phase α_d abhängt. Die Blasengröße r_{Bl} in Gleichung (2.28) hängt ebenfalls nichtlinear vom Volumenanteil α_d ab. Die Reynolds-Zahl der Blase Re_b hängt in Gleichung (2.36) (linear) von der

Blasengröße ab. Die Konstante C_D in Gleichung (2.35) hängt aber erneut nichtlinear von Re_b ab. Es ist ersichtlich, dass die Strömungswiderstandskraft F_{SW} in Gleichung (2.32) mehrfach nichtlinear vom Volumenanteil α_d abhängt.

2.2.1.9 Verwendung alternativer Mittelungen

Die Kontinuitätsgleichung (2.15) und die Momentengleichung (2.29) sind für eine Phase k formuliert. Sie gelten sowohl für die kontinuierliche als auch die disperse Phase (vgl. [55]) und wurden in [55] durch eine zeitliche Mittelung hergeleitet. Alternativ können sie durch Anwendung anderer Mittelungsoperatoren hergeleitet werden. Die Ensemble-Mittelung betrachtet den Mittelwert mehrerer Realisationen, die aus ähnlichen (aber nicht identischen) Anfangsbedingungen resultieren ([25], S. 95). Zur Veranschaulichung der Ensemble-Mittelung verwendet ([104], S. 128) beispielhaft N Messwerte, die auf N scheinbar identischen Aufbauten erfasst werden: Sei Φ_i der Messwert, der aus dem i -ten Aufbau hervorgeht. Der ensemble-gemittelte Wert $\langle \Phi \rangle_N$ berechnet sich aus N Messwerten ([104], S. 128)

$$\langle \Phi \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_i. \quad (2.37)$$

Die Herleitung der Kontinuitäts- und Momentengleichung unter Verwendung der Ensemble-Mittelung ist in ([25], S.126-127) und ([55], S. 119-120) diskutiert. In ([126], S.55-58) ist die Herleitung unter Anwendung einer Mittelung über ein Volumen durchgeführt. Die gemittelten Gleichungen hängen auch nach einer der oben genannten Mittelungen noch von den Variablen ab, über die nicht gemittelt wurde ([15], S. 3). Wurde für die Herleitung der Kontinuitäts- und der Momentengleichung die Ensemble-Mittelung verwendet, sind diese noch abhängig von zwei weiteren Dimensionen: Raum und Zeit ([15], S. 3). Entsprechende Fluktuationen in diesen Dimensionen sind nicht herausgemittelt. Es sei angemerkt, dass die Kontinuitäts- bzw. die Momentengleichung auch nach einer zeitlichen Mittelung noch Fluktuationen in der Zeit aufweisen können. Die zeitliche Mittelung (vgl. Gleichung (2.10)) erfolgt über einen Zeitraum Δt , so dass Fluktuationen niedriger Frequenz mit Periodendauern $\Delta T_{\text{Fluk}} > \Delta t$ nicht herausgemittelt werden. Um nach einer ersten Mittelung Fluktuationen in einer weiteren Dimension zu eliminieren, kann eine zweite Mittelung über diese Dimension durchgeführt werden ([15], S. 3). Sie kann mit dichtegewichteten oder nicht-dichtegewichteten Größen erfolgen (vgl. Kapitel 2.2.1.10). In der Literatur wurde die zweite Mittelung im Rahmen der Fragestellung diskutiert, wie die mittlere turbulente Dispersion im Zwei-Fluid-Modell zu berücksichtigen ist (vgl. Kapitel 2.2.1.10).

2.2.1.10 Fluktuationen im Zwei-Fluid-Modell

Bei der Mittelung von Fluktuationen im Zwei-Fluid-Modell ist zwischen gewichteten- und ungewichteten Mittelwerten zu unterscheiden. In [36] werden bei der zweiten Mittelung keine dichtegewichteten bzw. phasengemittelten Größen verwendet, wodurch ein zusätzlicher Term $\overline{\alpha'_k v'_{k,i}}$ in der Kontinuitätsgleichung entsteht. Die i -te Komponente des Geschwindigkeitsvektors v_k wird dabei mit $v_{k,i}$ bezeichnet. Die Fluktuationen um die Mittelwerte $\overline{\alpha_k}$ und $\overline{v_{k,i}}$ sind mit α'_k und $v'_{k,i}$ bezeichnet. Analog zu Gleichung (2.6) ist der instantane Wert die Summe aus Mittelwert und Fluktuation

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \overline{\alpha_k} + \alpha'_k \\ v_{k,i} &= \overline{v_{k,i}} + v'_{k,i}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei für den Mittelwert einer Fluktuation gilt ([141], S. 193)

$$\overline{\alpha'_k} = \overline{v'_{k,i}} = 0. \quad (2.39)$$

Die Geschwindigkeit in Gleichung (2.38) wurde bereits in einer ersten Mittelung gemittelt. Diese Mittelung erfolgte in gewichteter Form, beispielsweise als dichtegewichtete Mittelung (vgl. Gleichung (2.13)). Streng genommen

müsste die Zerlegung in Mittelwert und Fluktuation in Gleichung (2.38) auch diese Information enthalten, z.B. (vgl. [11], S. 67)

$$\hat{v}_{k,i} = \bar{v}_{k,i} + v'_{k,i}. \quad (2.40)$$

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle die Mittelungsregeln in den Gleichungen (2.41) - (2.43) für eine Konstante c und eine Größe ζ ergänzt, ([6], S. 4)

$$\overline{\alpha_k \zeta} = \bar{\alpha}_k \bar{\zeta} \quad (2.41)$$

$$c \overline{\alpha_k} = c \bar{\alpha}_k \quad (2.42)$$

$$\overline{\alpha_k + \zeta} = \bar{\alpha}_k + \bar{\zeta}. \quad (2.43)$$

Wird der zusätzliche Term $\overline{\alpha'_k v'_{k,i}}$ aus der zweiten Mittelung mit dem „gradient-diffusion model“ ([104], S. 187) entsprechend ([15], S. 4; [19], S. 8819)

$$\overline{\alpha'_k v'_{k,i}} = -\frac{v_{t,k}}{Sc_t} \nabla \alpha \quad (2.44)$$

approximiert, enthält die Kontinuitätsgleichung einen zusätzlichen Diffusionsterm. Die turbulente oder kinematische Wirbelviskosität in Gleichung (2.44) wird mit $v_{t,k}$ bezeichnet und Sc_t ist die turbulente Schmidt-Zahl (vgl. [52], S. 429, 430).

Die zweite Mittelung der Reibungskraft in der Momentengleichung (in Gleichung (2.29) in M_k enthalten) ergibt ebenfalls einen zusätzlichen Term, wie in ([15], S. 5) gezeigt wird.

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle angemerkt, dass Fluktuationen auch bei Verwendung dichtegegewichteter Größen (vgl. Gleichung (2.13)) betrachtet werden können. Analog zu Gleichung (2.38) gilt (vgl. [141], S. 193)

$$\theta_k = \hat{\theta}_k + \theta''_k, \quad (2.45)$$

wobei θ''_k die Fluktuation darstellt und für ihr Produkt mit der Dichte gilt ([141], S. 193)

$$\overline{\rho \theta''_k} = 0. \quad (2.46)$$

Mit Gleichung (2.13) kann der Zusammenhang zwischen dichtegegewichtetem Mittelwert und nicht-dichtegegewichtetem Mittelwert bestimmt werden (vgl. [96], S. 1953)

$$\hat{\theta}_k = \frac{\overline{\rho_k \theta_k}}{\bar{\rho}_k} = \frac{\overline{(\bar{\rho}_k + \rho'_k)(\bar{\theta}_k + \theta'_k)}}{\bar{\rho}_k} = \frac{\bar{\rho}_k \bar{\theta}_k}{\bar{\rho}_k} + \frac{\overline{\rho'_k \theta'_k}}{\bar{\rho}_k} = \bar{\theta}_k + \frac{\overline{\rho'_k \theta'_k}}{\bar{\rho}_k}, \quad (2.47)$$

wobei mit Hilfe der Gleichungen (2.39) und (2.41) genutzt wurde $\overline{\bar{\rho}_k \theta'_k} = \bar{\rho}_k \bar{\theta}'_k = 0$ und $\overline{\rho'_k \bar{\theta}_k} = \bar{\rho}'_k \bar{\theta}_k = 0$. Mit den Gleichungen (2.38) und (2.45) gilt

$$\theta_k = \hat{\theta}_k + \theta''_k = \bar{\theta}_k + \theta'_k. \quad (2.48)$$

Einsetzen von Gleichung (2.47) in Gleichung (2.48) liefert die Beziehung zwischen den entsprechenden Fluktuationen (vgl. [96], S. 1953)

$$\frac{\overline{\rho'_k \theta'_k}}{\bar{\rho}_k} + \theta''_k = \theta'_k. \quad (2.49)$$

Das „gradient-diffusion model“ ([104], S. 187) entsprechend Gleichung (2.44) mit dichtegegewichteten Größen lautet (vgl. z.B. [104], S. 187)

$$\overline{\alpha''_k v''_i} = -\frac{v_{t,k}}{Sc_t} \nabla \hat{\alpha}. \quad (2.50)$$

Die Verwendung dichtegewichteter Mittelwerte oder nicht-dichtegewichteter Mittelwerte in der zweiten Mittelung beeinflusst die Kontinuitätsgleichung. Werden bei der zweiten Mittelung keine dichtegewichteten Mittelwerte verwendet, lautet die Kontinuitätsgleichung für Phase k mit der Schreibweise in Gleichung (2.40) (vgl. [11], S. 67)

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k) = S_k - \nabla \cdot (\bar{\rho}_k \alpha_k' \hat{\mathbf{v}}_k'). \quad (2.51)$$

Mit dem „gradient-diffusion model“ ([104], S. 187) in Gleichung (2.44) folgt aus Gleichung (2.51) (vgl. [11], S. 67)

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\rho}_k \bar{\mathbf{v}}_k) = S_k + \nabla \cdot \left(\bar{\rho}_k \frac{v_{t,k}}{Sc_t} \nabla \alpha_k \right), \quad (2.52)$$

wobei $\bar{\mathbf{v}}_k = \hat{\mathbf{v}}_k$ genutzt wurde.

Werden bei der zweiten Mittelung dichtegewichtete bzw. phasengemittelte Größen verwendet, enthält die Kontinuitätsgleichung keinen zusätzlichen Term ([15], S. 4; [46], S. 1948-1949). Die Form der Kontinuitätsgleichung (2.15) bleibt erhalten. Die Kontinuitätsgleichung für Phase k lautet dann mit doppelt-gemittelten Werten

$$\frac{\partial \alpha_k \bar{\rho}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \bar{\rho}_k \hat{\mathbf{v}}_k) = S_k. \quad (2.53)$$

Zur besseren Lesbarkeit wurde in Gleichung (2.53) auf die Einführung einer doppelt-gewichteten Schreibweise verzichtet. Aus Gleichung (2.53) kann für inkompressible Medien durch Division durch die Konstante $\bar{\rho}_k$ eine Transportgleichung für den Volumenanteil α_k erhalten werden (vgl. [55], S. 158)

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \hat{\mathbf{v}}_k) = \frac{S_k}{\bar{\rho}_k}. \quad (2.54)$$

Die zweite Mittelung der Momentengleichung unter Verwendung von dichtegewichteten bzw. phasengemittelten Größen wurde in ([46], S. 1948-1949) durchgeführt und entsprechende Schließungsmodelle vorgeschlagen. In ([15], S. 5) wird gezeigt, dass durch die zweite Mittelung der Reibungskraft ein zusätzlicher Term entsteht, der einen mittleren Einfluss der fluktuierenden Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase auf die disperse Phase repräsentiert und modelliert werden muss. Mehrere Möglichkeiten der Modellierung sind in ([15], S. 6-9) vorgestellt. In ([11], S. 68) ist mit Hilfe von [114] gezeigt, dass die zusätzliche Reibungskraft unter bestimmten Bedingungen auch als Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung der dispersen Phase dargestellt werden kann. Im Konvektionsterm wird dann die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase verwendet (vgl. [11], S. 68). Dichtegewichtete Variablen nach Favre ([37], S. 325) haben bereits im Bereich der Verbrennung zu vereinfachten Schreibweisen geführt ([142], S. 380). Eine Verwendung gewichteter Mittelwerte im Zwei-Fluid-Modell und der damit verbundenen Vorteile (die über eine vereinfachte Formulierung hinaus gehen) sind in ([24], S. 273-274) diskutiert.

2.2.2 Drift-Flux-Modell

Im Gegensatz zum Zwei-Fluid-Modell (vgl. Kapitel 2.2.1) betrachtet das Drift-Flux-Modell nicht beide Phasen getrennt, sondern löst die Transportgleichungen für die Mischung beider Phasen ([55], S. 345). In Abbildung 2.2 ist dies durch die Verwendung einer einheitlichen Farbe dargestellt. Die in der Realität vorkommenden Blasen (Abbildung 2.2 links) bzw. die disperse Phase werden nicht wie im Zwei-Fluid-Modell aufgelöst. Innerhalb jeder Rechenzelle wird lediglich eine Momentengleichung für die mittlere Geschwindigkeit der Mischung \mathbf{v}_m gelöst. In

Abbildung 2.2 ist dies durch die Darstellung von lediglich einem Geschwindigkeitsvektor skizziert. Die Kontinuitätsgleichung und die Momentengleichung für die Mischung sind in [55] hergeleitet und lauten ([55], S. 347)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) = 0 \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m) = -\nabla p_m + \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^T - \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k \mathbf{V}_{km} \mathbf{V}_{km} \right) + \rho_m \mathbf{g}_m + \mathbf{M}_m \quad (2.56)$$

mit der mittleren Dichte ρ_m ([55], S. 83)

$$\rho_m = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k \quad (2.57)$$

und der mittleren Geschwindigkeit des Massenzentrums der Mischung \mathbf{v}_m ([55], S. 83)

$$\mathbf{v}_m = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k \hat{\mathbf{v}}_k}{\rho_m}. \quad (2.58)$$

In den Gleichungen (2.56) - (2.58) wurden für die kontinuierliche und die disperse Phase die Indizes 1 und 2 verwendet. Der Term $-\sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k \mathbf{V}_{km} \mathbf{V}_{km}$ in Gleichung (2.56) repräsentiert die diffusiven Spannungen ([55], S. 104). Für den Quellterm \mathbf{M}_m in Gleichung (2.56) gilt mit \mathbf{M}_k aus Gleichung (2.29) ([55], S. 99)

$$\mathbf{M}_m = \sum_{k=1}^2 \mathbf{M}_k. \quad (2.59)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung der dispersen Phase kann eine Aussage über den Volumenanteil α_d getroffen werden. Die Kontinuitätsgleichung der dispersen Phase kann mit der Mischungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_m formuliert werden ([55], S. 347)

$$\frac{\partial \alpha_d \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{v}_m) = S_d - \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{V}_{dm}), \quad (2.60)$$

wobei \mathbf{V}_{dm} die Differenz der Geschwindigkeit der dispersen Phase und der Geschwindigkeit des Massenzentrums ist ([55], S. 87)

$$\mathbf{V}_{dm} = \hat{\mathbf{v}}_d - \mathbf{v}_m. \quad (2.61)$$

Die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen disperser und kontinuierlicher Phase wird in Gleichung (2.60) durch einen zusätzlichen Term $-\nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{V}_{dm})$ berücksichtigt (vgl. [55], S. 103). Wird die Geschwindigkeitsdifferenz vernachlässigt, gilt $\mathbf{V}_{dm} = 0$ und Gleichung (2.60) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \alpha_d \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{v}_m) = S_d. \quad (2.62)$$

2.2.3 MUSIG-Modell

Das MUSIG (engl.: „Multi size group“ [70]) -Modell beruht auf dem Zwei-Fluid-Modell (vgl. Kapitel 2.2.1) und berücksichtigt Blasen unterschiedlicher Größe ([70], S. 1694). In der dispersen Phase werden n_G Größenklassen unterschieden ([70], S. 1694). In Abbildung 2.2 sind die Blasen der hypothetischen Realität vier Größenklassen zugeordnet. Für jede Größenklasse gilt eine Kontinuitätsgleichung analog zum Zwei-Fluid-Modell in Gleichung (2.15) (vgl. [70], S. 1695)

$$\frac{\partial a_n \alpha_d \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (a_n \alpha_d \bar{\rho}_d \hat{\mathbf{v}}_d) = S_n, \quad (2.63)$$

wobei $a_n \alpha_d$ den Volumenanteil in der n -ten Größenklasse bezeichnet (vgl. [70], S. 1695) mit $\sum_{n=1}^{n_G} a_n = 1$ (vgl. [21], S. 3). Der Quellterm S_n beschreibt den Massenaustausch zwischen den Größenklassen und enthält Terme zur

Modellierung von Koaleszenz und Zerfallsprozessen (vgl. [70], S. 1695). Im homogenen MUSIG-Modell bewegen sich Blasen unterschiedlicher Größe mit derselben Geschwindigkeit (vgl. [70], S. 1695). Entsprechend wird eine gemeinsame Momentengleichung für alle Größenklassen gelöst ([70], S. 1695). Das inhomogene MUSIG-Modell führt zusätzlich zu den Größenklassen Geschwindigkeitsklassen ein, für die eine eigene Momentengleichung gelöst wird (vgl. [70], S. 1695). Für weitere Details sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Wird der Volumenanteil der Größenklassen $a_n \alpha_d$ mit $n = 1..n_G$ gegenüber der Blasengröße aufgetragen, kann eine Verteilung approximiert werden (vgl. [70], S. 1697). Bei der Approximation der Verteilung kann alternativ zur Blasenanzahl auch der Volumenanteil jeder Größenklasse $a_n \alpha_d$ aufgetragen werden, da beide linear voneinander abhängen (vgl. Gleichung (2.26)). Die Form der Verteilung ändert sich hierdurch nicht. In Abbildung 2.3 ist eine exemplarische Verteilung für das Beispiel in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Blasengrößen aus Abbildung 2.2 sind den Größenklassen zugeordnet. Analog zu ([70], S. 1697; [74], S. 9) ist der Volumenanteil auf der Ordinate durch den Blasendurchmesser $2r_{Bl,n}$ der jeweiligen Blasengröße dividiert. Die Massenaustauschsterme für einen Zerfallsprozess sind in Abbildung 2.3 beispielhaft skizziert. Es sei angemerkt, dass die Größenklassen vor der Simulation festzulegen sind. Eine Unterscheidung der Blasengrößen innerhalb einer Größenklasse ist im MUSIG-Modell nicht möglich.

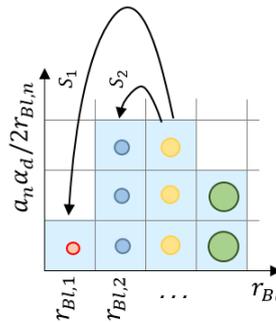


Abbildung 2.3: Blasengrößenverteilung für das Beispiel in Abbildung 2.2.

2.3 Lösungsverfahren des Zwei-Fluid-Modells in AVL Fire™

AVL Fire™ ist eine CFD-Software zur Berechnung von Strömungsproblemen - insbesondere im automobilen Bereich (vgl. [2]). Die Erhaltungsgleichungen werden mit der Finite-Volumen-Methode gelöst ([130], S. 1091), bei der das zu untersuchende Volumen in Rechenzellen unterteilt wird, in deren jeweiligem Zentrum der für diese Zelle repräsentative Wert berechnet wird ([92], S. 369-370). Das Lösungsschema des implementierten Zwei-Fluid-Modells ist ein angepasster SIMPLE-Algorithmus (engl.: „Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations“ ([94], S. 103)) (vgl. [94], S. 103-105). Für eine bessere Konvergenz werden die Momentengleichungen nach einem semi-impliziten Verfahren, wie in ([139], S. 143) erläutert, gelöst. Das Vorgehen ist in Abbildung 2.4 skizziert und wird im Folgenden beschrieben (vgl. [138], S. 4; [94], S. 103-105).

1. Die Kontinuitätsgleichung (2.53) einer jeden Phase wird gelöst, sodass α_k bekannt ist.
2. Für beide Phasen wird mit α_k und der Momentengleichung (2.29) die Geschwindigkeit \hat{v}_k unter Annahme eines Druckfelds berechnet.
3. Die errechnete Geschwindigkeit \hat{v}_k wird für beide Phasen in die Kontinuitätsgleichung (2.53) eingesetzt. Die Kontinuitätsgleichungen beider Phasen werden addiert und die Bilanz der Gesamtmasse auf Konsistenz überprüft. Aus den Inkonsistenzen der Massenbilanz werden Druckkorrekturterme p' berechnet.
4. Weitere Gleichungen des Turbulenzmodells bzw. gegebenenfalls des Kavitationsmodells werden gelöst.

Entsprechend diesem iterativen Verfahren wird die Lösung approximiert, bis die Inkonsistenz in der Massenbilanz unter einer gewählten Schranke ist. Im Lösungsprozess kann dann im nächsten Zeitschritt analog verfahren werden. Falls die Massenbilanz oberhalb der gewählten Schranke ist, wird eine erneute Iteration berechnet.

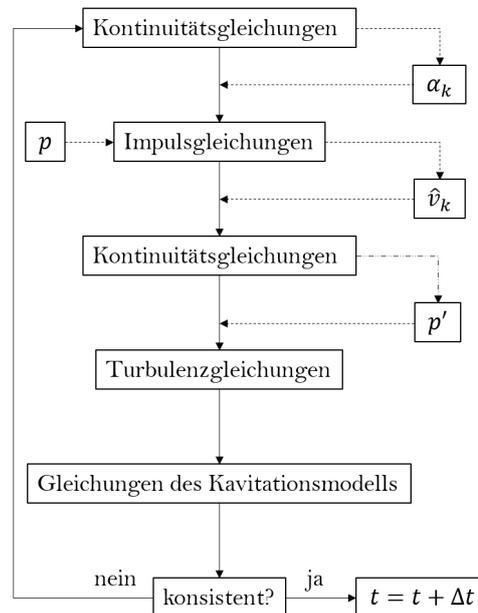


Abbildung 2.4: grafische Darstellung des angepassten SIMPLE-Algorithmus in AVL Fire™ (vgl. [138], S. 4; [94], S. 103-105).

2.4 PDF-Methoden

In Kapitel 1.2 wurde die Berechnungsmethode RANS bereits eingeführt. Sie beschreibt das Strömungsfeld mit Mittelwerten wie z.B. der mittleren Geschwindigkeit \bar{U} . Sie unterscheidet sich von der lokalen und instantanen Strömungsgeschwindigkeit U in einem Experiment, da U einen zufälligen Charakter aufweist ([106], S. 34).

Turbulente Strömungen verhalten sich sensitiv gegenüber kleinsten Änderungen der Anfangs- oder Randbedingungen ([106], S. 35). Einzelrealisierungen turbulenter Strömungen unter scheinbar identischen Bedingungen unterscheiden sich deshalb ([106], S. 34). Die Betrachtung einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl.: „probability density function (PDF)“ ([106], S. 39)) ermöglicht eine Aussage über die Auftretenswahrscheinlichkeiten dieser Unterschiede ([10], S. 442-443). In Kapitel 2.4.1 sind die grundlegenden Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen zusammengefasst.

2.4.1 Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten im Kontext von PDFs

Die Wahrscheinlichkeit P , dass eine Zufallsgröße T im Ereignisraum T^* einen Wert innerhalb des Intervalls $T_1 \leq T < T_2$ annimmt, kann durch Integration der PDF $f_T(T^*)$ berechnet werden ([104], S. 124)

$$P(T_1 \leq T < T_2) = \int_{T_1}^{T_2} f_T(T^*) dT^*. \quad (2.64)$$

Wird die PDF über den gesamten Ereignisraum integriert, ergibt sich ([104], S. 137)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(T^*) dT^* = 1. \quad (2.65)$$

Der Mittelwert oder Erwartungswert (vgl. [136], S. 46) \bar{T} der Größe T kann mit dem Integral (vgl. [104], S.129)

$$\bar{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} T^* f_T(T^*) dT^* \quad (2.66)$$

berechnet werden. Eine alternative Schreibweise für den Mittelwert \bar{T} ist $\langle T \rangle$ (vgl. [104]). Gleichung (2.66) kann allgemein für eine Funktion $g(T)$ formuliert werden ([104], S. 137)

$$\langle g(T) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(T^*) f_T(T^*) dT^*. \quad (2.67)$$

In Kapitel 1.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass eine Integration der PDF über T^* dazu führt, dass ihre Abhängigkeit von T^* verloren geht. Dies ist akzeptabel, wenn diese Information nicht weiter von Relevanz ist (vgl. Gleichung (2.65)) oder die Integration zur Berechnung eines Mittelwerts (vgl. Gleichungen (2.66) und (2.67)) verwendet wird. Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für mehrere Skalargrößen heißt „Verbund-PDF“ ([44], S. 129) (engl.: „Joint PDF“, „JPDF“ ([104], S. 141; [67], S. 603)). Sei ψ der Ereignisraum von Φ . Ist die JPDF $f_{T\Phi}(T^*, \psi)$ zweier Größen T und Φ bekannt, kann eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit $P(T^* \leq T < T^* + dT^*, \psi \leq \Phi < \psi + d\psi)$ getroffen werden (vgl. [104], S. 130)

$$P(T^* \leq T < T^* + dT^*, \psi \leq \Phi < \psi + d\psi) = f_{T\Phi}(T^*, \psi) dT^* d\psi. \quad (2.68)$$

Analog zu Gleichung (2.67) kann mit Hilfe der JPDF $f_{T\Phi}(T^*, \psi)$ der Mittelwert $\langle g(T, \Phi) \rangle$ berechnet werden

$$\langle g(T, \Phi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(T^*, \psi) f_{T\Phi}(T^*, \psi) dT^* d\psi. \quad (2.69)$$

Wenn A und B Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ sind und $P(AB)$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass A und B gleichzeitig eintreten, ist $P(A | B)$ die Wahrscheinlichkeit für Ereignis A unter der Bedingung, dass Ereignis B eingetreten ist ([104], S. 132)

$$P(A | B) = P(AB)/P(B). \quad (2.70)$$

Für die bedingte PDF $f_{A|B}$ gilt analog (vgl. [104], S. 133)

$$f_{A|B} = f_{AB}/f_B. \quad (2.71)$$

Die Ereignisse A und B sind unabhängig, falls $f_{A|B} = f_A$, so dass mit Gleichung (2.71) gilt (vgl. [104], S. 133)

$$f_{AB} = f_{A|B} f_B = f_A f_B. \quad (2.72)$$

Analog zu Gleichung (2.67) kann der bedingte Mittelwert berechnet werden, wenn die bedingte PDF $f_{T|\Phi}$ bekannt ist (vgl. [104], S. 133)

$$\langle g(T, \Phi) | \Phi = \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(T^*, \psi) f_{T|\Phi}(T^* | \psi) dT^*. \quad (2.73)$$

Der Zusammenhang zwischen dem bedingten Mittelwert in Gleichung (2.73) und dem (nicht-bedingten) Mittelwert $\langle g(T, \Phi) \rangle$ kann mit Gleichung (2.71) gezeigt werden ([104], S. 133)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Phi}(\psi) \langle g(T, \Phi) | \Phi = \psi \rangle d\psi &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\Phi}(\psi) \int_{-\infty}^{+\infty} g(T^*, \psi) f_{T|\Phi}(T^* | \psi) dT^* d\psi = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(T^*, \psi) f_{T\Phi}(T^*, \psi) dT^* d\psi = \langle g(T, \Phi) \rangle. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Die letzte Umformung in Gleichung (2.74) folgt mit Gleichung (2.69). Die Relation der Mittelwerte in Gleichung (2.74) wird in Kapitel 3.6.2.2 benötigt. Zwischen der JPDF $f_{T\Phi}$ und den PDFs f_T und f_Φ bestehen die Zusammenhänge (vgl. [104], S. 130)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{T\Phi}(T^*, \psi) d\psi = f_T \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T\Phi}(T^*, \psi) dT^* = f_\Phi. \quad (2.75)$$

Es sei angemerkt, dass für Mittelwerte gilt ([104], S. 127)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_j} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \Phi_a \rangle}{\partial x_j} \\ \left\langle \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial \langle \Phi_a \rangle}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

2.4.2 PDF-Methoden in der Verbrennung

Die Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen hat sich im Bereich der Verbrennung etabliert (vgl. z.B. [51]). Durch die exponentielle Abhängigkeit der chemischen Reaktionsrate von der Temperatur ist es nicht ausreichend, die mittlere chemische Reaktionsrate mit Mittelwerten zu berechnen (vgl. [103], S. 299-300). Alternativ kann die gesamte PDF sowie ihr Transport zur Analyse herangezogen werden (vgl. z.B. [103]). In ([104], S. 135-136) wird der Massenanteil einer Spezies a mit Φ_a bezeichnet und mehrere Massenanteile unterschiedlicher Spezies im Vektor $\underline{\Phi}$ zusammengefasst. Die Transportgleichung für die PDF dieser Massenanteile f_Φ kann aus den Erhaltungsgleichungen hergeleitet werden (vgl. [P2] in Abbildung 1.5) ([104], S. 187)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\underline{\psi}) f_\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(\underline{\psi}) \langle U_i | \underline{\psi} \rangle f_\Phi) + \frac{\partial}{\partial \psi_a} (\rho(\underline{\psi}) Q(\underline{\psi}) f_\Phi) = \frac{\partial}{\partial \psi_a} \left(\langle \frac{\partial J_i^a}{\partial x_i} | \underline{\psi} \rangle f_\Phi \right), \quad (2.77)$$

wobei t die Zeit, x_i die Raumkoordinate in i -te Richtung und U_i die entsprechende Geschwindigkeitskomponente darstellen. Der Quellterm ist mit Q gekennzeichnet. In Gleichung (2.77) beschreibt der dritte Term auf der linken Seite demnach den Einfluss durch chemische Reaktion und der Term auf der rechten Seite stellt den Transport im ψ -Raum aufgrund molekularer Durchmischung dar ([104], S. 187). Die Dichte ρ in Gleichung (2.77) hängt ausschließlich von den Massenanteilen $\underline{\Phi}$ ab und \underline{J}^a repräsentiert den diffusiven Massenflussvektor der Spezies a ([104], S. 134). Der Operator $\langle \cdot | \underline{\psi} \rangle = \langle \cdot | \underline{\Phi} = \underline{\psi} \rangle$ bezeichnet den Erwartungswert unter der Bedingung, dass die Massenanteile $\underline{\Phi}$ den Wert $\underline{\psi}$ aufweisen (vgl. [104], S. 133 und Gleichung (2.73)). Die PDF in Gleichung (2.77) gilt für jeden Punkt im Raum und in der Zeit separat (vgl. [104], S. 133-134; [106], S. 552). Sie enthält keine zusammenhängende Information über mehrere räumliche Punkte oder mehrere Zeiten, weshalb von einer „ein-Punkt-eine-Zeit-PDF“ ([44], S. 201) (engl.: „one-point one-time (...) PDF“ ([106], S. 552)) gesprochen wird (vgl. [104], S. 133-134). Die dichtegewichtete Mittelung aus Gleichung (2.13) kann auch im Zusammenhang mit PDFs angewendet werden ([104], S. 187)

$$\langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi(\underline{\psi}; \underline{x}, t) = \rho(\underline{\psi}) f_\Phi(\underline{\psi}; \underline{x}, t). \quad (2.78)$$

Mit Gleichung (2.78) kann die PDF Transportgleichung (2.77) mit dichtegewichteten Größen geschrieben werden ([104], S. 187)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{U}_i \langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi) + \frac{\partial}{\partial \psi_a} (Q(\underline{\psi}) \langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi) = \frac{\partial}{\partial \psi_a} \left(\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_i^a}{\partial x_i} | \underline{\psi} \rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i'' | \underline{\psi} \rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_\Phi). \quad (2.79)$$

Die ersten beiden Terme auf der linken Seite in Gleichung (2.79) stellen den Transport aufgrund der mittleren Geschwindigkeit \hat{U}_i dar ([104], S. 187). Der letzte Term in Gleichung (2.79) beschreibt den mittleren Einfluss turbulenter Geschwindigkeitsfluktuationen und kann mit dem Gradientenansatz modelliert werden ([104], S. 187)

$$\langle u_i'' | \underline{\psi} \rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_{\Phi} = -D_t \frac{\partial \hat{f}_{\Phi}}{\partial x_i}. \quad (2.80)$$

In Gleichung (2.80) ist D_t der turbulente Diffusionskoeffizient, für den häufig der Ansatz ([104], S. 186-187)

$$D_t = \frac{\mu_t}{Sc_t} \quad (2.81)$$

gewählt wird. Für die dynamische Wirbelviskosität μ_t gilt der Zusammenhang zur kinematischen Wirbelviskosität ν_t ([52], S. 429-430)

$$\mu_t = \rho \nu_t. \quad (2.82)$$

Die Herleitung der PDF-Transportgleichung (2.79) für skalare Größen im Verbrennungsbereich ist in ([104], S. 134-187) durchgeführt. Ausgangspunkt sind hierbei die Transportgleichungen für Masse, Impuls und für eine Skalargröße

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) &= 0 \\ \rho \frac{\partial U_j}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho g_j \\ \rho \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_i} &= -\frac{\partial J_i^a}{\partial x_i} + \rho S_a. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die Skalargleichung kann für jeden Massenanteil Φ_a formuliert werden mit $a = 1..n_a$, wobei n_a die Speziesanzahl kennzeichnet (vgl. [104], S. 134-135).¹ In den Gleichungen (2.83) kennzeichnet J^a den diffusiven Massenfluss, der ebenfalls in der PDF-Transportgleichung (2.79) enthalten ist. Aus der ein-Punkt-eine-Zeit-PDF-Transportgleichung (2.77) bzw. (2.79) können Erhaltungsgleichungen für entsprechende statistische Werte abgeleitet werden (vgl. [51], S. 252). Mit Gleichung (2.65) kann aus den Gleichungen (2.77) bzw. (2.79) durch Integration über den Ereignisraum $\underline{\psi}$ die mittlere Kontinuitätsgleichung erhalten werden ([51], S. 252). Entsprechend Gleichung (2.66) können die Gleichungen (2.77) bzw. (2.79) durch Multiplikation mit $\underline{\psi}$ und Integration über den Ereignisraum zur Herleitung der Transportgleichung der mittleren Speziesmasse genutzt werden ([51], S. 252).

2.4.3 Lösung der PDF-Transportgleichung

Zur Lösung von PDF-Transportgleichungen existieren deterministische und Monte-Carlo-Methoden, wobei erstere aufgrund sehr schwer lösbarer Integrale entfallen ([104], S. 153). Monte-Carlo-Methoden approximieren die PDF durch eine große Anzahl N „stochastischer Partikel“ (engl.: „stochastic particles“ ([104], S. 153)), deren Transportgleichung numerisch leicht lösbar ist ([104], S. 153). Sind N stochastische Partikel für den Massenanteil Φ einer Spezies mit $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(N)}$ bekannt, kann die PDF $f_{\Phi}(\underline{\psi})$ entsprechend ([104], S. 127, 153)

$$\langle \delta(\underline{\psi} - \Phi) \rangle_N \approx f_{\Phi}(\underline{\psi}) \quad (2.84)$$

¹ Es sei angemerkt, dass eine der Skalargleichungen in den Gleichungen (2.83) durch die Bedingung für die Speziesmassenbrüche $\sum_{a=1}^{n_a} \Phi_a = 1$ ersetzt werden kann. An Stelle von Speziesmassenbrüchen könnte für eine Mischung von Spezies, die jeweils als ideales Gas aufgefasst werden, auch eine Zerlegung in Partialdrücke oder Partialdichten erfolgen. Jede dieser Formulierungen ist gleichwertig und führt zu einer entsprechenden Form der PDF-Transportgleichung [18].

approximiert werden. In Gleichung (2.84) ist δ die Delta-Funktion. Der Operator $\langle \cdot \rangle_N$ kennzeichnet eine Ensemble-Mittelung ([104], S. 128)

$$\langle g(\Phi) \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(\Phi^{(n)}). \quad (2.85)$$

In Gleichung (2.85) wurde der Operator beispielhaft auf eine Funktion $g(\Phi)$ angewandt. Der Ensemble-Mittelungsoperator für die stochastischen Partikel in Gleichung (2.85) ist analog zur Ensemble-Mittelung von Messwerten in Gleichung (2.37) formuliert. Zur Veranschaulichung wird in Abbildung 2.5 die PDF einer exemplarischen Größe θ durch $N = 10$ Delta-Funktionen approximiert. Eine mögliche Interpretation ist, dass $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(N)}$ „repräsentative Werte“ (engl.: „representative values“ ([101], S. 161)) von Φ darstellen. Die stochastischen Partikel mit den Ereignissen $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(N)}$ werden daher auch als „samples“ (vgl. [90], S. 172) (dt.: Stichproben) bezeichnet. Es kann gezeigt werden, dass für $N \rightarrow \infty$ die Approximation der PDF in Gleichung (2.84) exakt ist ([101], S. 164).

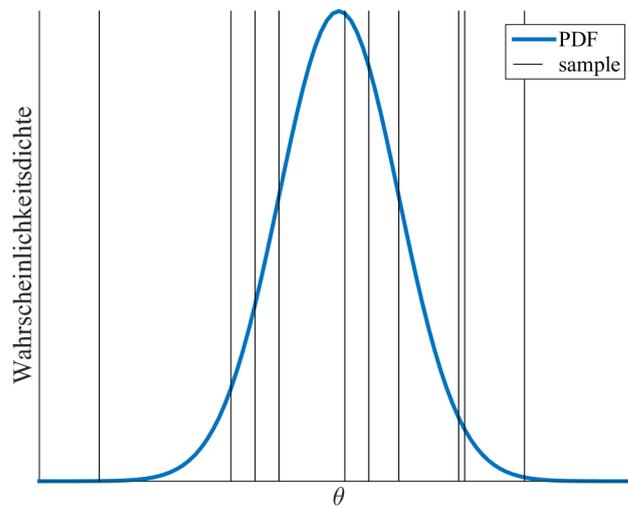


Abbildung 2.5: Approximation der PDF durch $N = 10$ samples. Für $N \rightarrow \infty$ ist diese Approximation exakt ([101], S. 164).

2.4.3.1 Lagrange Betrachtung der samples

Die samples können in Lagrange Betrachtungsweise berechnet werden. In Kapitel 2.1 wurden Lagrange Partikel bereits eingeführt. Um den Einfluss einer Geschwindigkeit mit zufälligem Charakter zu berücksichtigen, wird ein stochastischer Prozess für die Geschwindigkeit des Lagrange Partikels formuliert (vgl. [101], S. 153). Für homogene und isotrope Turbulenz kann die Geschwindigkeit mit Hilfe der „Langevin“-([106], S. 484)-Gleichung formuliert werden ([106], S. 484; vgl. Gleichung (2.101))

$$dU(t) = -U(t) \frac{dt}{T_L} + \left(\frac{2\sigma_L^2}{T_L} \right)^{1/2} dW(t), \quad (2.86)$$

mit den positiven Konstanten T_L und σ_L und dem Wiener-Prozess W (vgl. Kapitel 2.5.2). In der Langevin-Gleichung (2.86) modelliert U die Partikelgeschwindigkeit U^+ in Kapitel 2.1 (vgl. [106], S. 484). Das Minus-Zeichen auf der rechten Seite in Gleichung (2.86) resultiert aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (vgl. [116], S. 56), nach dem die Geschwindigkeitsänderung proportional zur Summe aller auf das Partikel wirkenden Kräfte ist (vgl. Gleichung (2.3)). Erfahrungsgemäß ist die Reibungskraft $\sim -U$ die bestimmende Kraft (vgl. [147], S. 4). Die Langevin-Gleichung (2.86) modelliert wie das „Discrete random walk“ ([132], S. 381)-Modell in Kapitel

2.1 turbulente Fluktuationen in der Geschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit ergibt sich aus Gleichung (2.86) ([106], S. 484)

$$U(t + \Delta t) = U(t) - U(t) \frac{\Delta t}{T_L} + \sqrt{\frac{2\sigma_L^2 \Delta t}{T_L}} \xi(t), \quad (2.87)$$

wobei $\Delta t \rightarrow 0$. In Gleichung (2.87) wurde der Wiener-Prozess durch eine gaußverteilte Zufallszahl ξ approximiert, für die gilt

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \langle \xi(t)^2 \rangle = 1 \quad (2.88)$$

und die unabhängig in der Zeit und unabhängig von der Geschwindigkeit des alten Zeitschritts ist ([106], S. 484)

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = 0, \quad \text{für } t' \neq t \quad \langle \xi(t) U(t') \rangle = 0, \quad \text{für } t' \leq t. \quad (2.89)$$

Die Geschwindigkeit U wird als gaußscher Markov-Prozess modelliert ([106], S. 485). Bei turbulenten Strömungen gilt für die Konstanten in den Gleichungen (2.86) und (2.87) ([106], S. 486)

$$\frac{2\sigma_L^2}{T_L} = C_0 \varepsilon \quad (2.90)$$

$$T_L^{-1} = \frac{3}{4} C_0 \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.91)$$

mit der turbulenten kinetischen Energie k und der Dissipation ε . Das „simplified Langevin model“ ([106], S. 489) erweitert die Langevin-Gleichung (2.86) auf inhomogene turbulente Strömungen und formuliert für die Geschwindigkeit eines stochastischen Partikels ([106], S. 489)

$$dU_i(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} dt - \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0 \right) (U_i(t) - \langle U \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon} dW_i(t). \quad (2.92)$$

In Gleichung (2.92) ist $\langle p \rangle$ der mittlere Druck. Die stochastischen Partikel können in Lagranger Betrachtungsweise gelöst werden (vgl. [23]). Die Nachteile bei der Verwendung Lagranger Partikel sind bereits in Kapitel 2.1 genannt.

2.4.3.2 Eulersche Betrachtung der samples

Eine Alternative zur Berechnung der samples als Lagrange Partikel ist die Betrachtung als stochastische Felder in Euler-Betrachtungsweise durch die Anwendung der Stochastischen Feldmethode (SFM) (vgl. [135]; Kapitel 1.2). Die stochastischen Felder werden durch stochastische partielle Differentialgleichungen (SPDEs) beschrieben. Die SPDEs für den Transport einer Skalargröße in der Verbrennung sind in [135], [119] hergeleitet. Die Herleitungen starten von der dichtegewichteten PDF-Transportgleichung für eine Skalargröße in Gleichung (2.79) (vgl. [119]) bzw. von der Schreibweise, wie sie in ([101], S. 160) dargestellt ist (vgl. [135]). Bei der Herleitung der SPDEs zur Berücksichtigung einer fluktuierenden Geschwindigkeit verfolgt [119] den Ansatz, dass die Geschwindigkeit eines samples in Euler-Betrachtungsweise in einen deterministischen Drift-Anteil U^d und einen zufälligen Anteil U^s aufgeteilt werden kann ([119], S. 3)

$$U = U^d + U^s, \quad (2.93)$$

wobei U^s gaußverteilt ist. Der Ansatz in Gleichung (2.93) ähnelt der Modellierung der Geschwindigkeitsfluktuationen in der Langevin-Gleichung (2.86). Es wird gezeigt, dass die PDF-Transportgleichung (2.79) durch N SPDEs ([119], S. 4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \hat{U}_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \sqrt{2D_i} \hat{W}_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = M(\theta; x, t) + Q(\theta) \quad (2.94)$$

in Eulerscher Betrachtungsweise approximiert werden kann. Der Micromixing-Term in Gleichung (2.94) ist mit M gekennzeichnet und beschreibt den diffusiven Massenfluss (vgl. [119], S. 2; Gleichung (2.83)). Die zeitliche Ableitung des Wiener-Prozesses ist mit \dot{W} gegeben und berücksichtigt den stochastischen Einfluss durch die turbulente Advektion (vgl. [119], S. 3,7). Gleichung (2.94) liefert in jeder Rechenzelle einen Wert für θ , weshalb von einem stochastischen Feld gesprochen wird (vgl. [119], S. 3). Jede der N SPDEs beschreibt den Transport eines samples. Werden N SPDEs entsprechend Gleichung (2.94) gelöst, ergeben sich in jeder Rechenzelle N samples $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N)}$ zur Approximation der PDF (vgl. [135], S. 159; Abbildung 2.5).

Die Verwendung Lagranger Partikel geht mit einer komplexen Kopplung von Lagranger- und Eulerscher Betrachtungsweise einher ([61], S. 1622). Diese Kopplung entfällt bei der Stochastischen Feldmethode, da nur die Eulersche Betrachtungsweise verwendet wird. Ein detaillierter Vergleich Lagranger Partikel und der Stochastischen Feldmethode ist [119] zu entnehmen. Die Stochastische Feldmethode wurde in den vergangenen Jahren erfolgreich für den Transport von Skalargrößen, wie beispielsweise dem Massenanteil einer bestimmten Spezies, bei LES-Berechnungen im Bereich der Verbrennung angewandt (vgl. z.B. [61], [58], [60]). Eine Anwendung auf die LES-Berechnung von Schadstoffbildung in Abgasströmen erfolgte ebenfalls [43], [42]. Die Anzahl stochastischer Felder N variiert hierbei zwischen 8, 16 (vgl. [60], S. 177), 12 und 18 (vgl. [42], S. 5). Der standardisierte statistische Fehler sinkt mit steigender Feldanzahl N nach dem Zentralen Grenzwertsatz (vgl. [131], S. 216-218) und kann analog zur Betrachtung der samples als Lagrange Partikel bestimmt werden ([104], S.128; vgl. [42], S. 5)

$$\varepsilon_N = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \quad (2.95)$$

In Gleichung (2.95) ist $\sigma = \sqrt{\langle(\Phi^2)\rangle}$ die Standardabweichung der samples. Die Fluktuation um den Mittelwert ist mit Φ' bezeichnet (vgl. Gleichung (2.6)).

Die Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen erscheint attraktiv, da stochastische Fluktuationen als PDFs berücksichtigt und gleichzeitig rechenintensive Lagrange Partikel vermieden werden können (vgl. Kapitel 2.1). Innerhalb unserer Forschungsgruppe wurde die Stochastische Feldmethode bereits in LES-Berechnungen von Zweiphasenströmungen verwendet [26], [107] (vgl. Kapitel 1.3). Die in Gleichung (2.94) dargestellte Form der SPDE wurde beibehalten und auf den Volumenanteil α_d der dispersen Phase angewandt

$$\frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t} + \hat{U}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} + \sqrt{2D_t} \dot{W}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (D_t \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i}) = M(\alpha_d^{(n)}; x, t) + Q(\alpha_d^{(n)}). \quad (2.96)$$

Das n -te sample von α_d ist in Gleichung (2.96) mit $\alpha_d^{(n)}$ gekennzeichnet, wobei $n = 1..N$. In [17] wird ein entsprechender Ansatz ohne einen Micromixing-Term M verfolgt. Die Existenz des Micromixing-Terms bei Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf das Zwei-Fluid-Modell wird in Kapitel 3.6.1 diskutiert. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf das in Kapitel 2.2.1 vorgestellte Zwei-Fluid-Modell im Kontext von RANS-Berechnungen diskutiert. In Kapitel 3.6.2 wird gezeigt, dass eine Verwendung von Gleichung (2.96) im Zwei-Fluid-Modell zu Konsistenzproblemen führt.

2.5 Stochastische Prozesse

Das Kapitel 2.5 behandelt die Grundlagen stochastischer Prozesse, die für ein Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind. Für eine detailliertere Behandlung sei auf [41], [68] und [50] verwiesen. Das aktuelle Kapitel baut auf die Kenntnisse zu PDFs, JPFDs sowie bedingten PDFs aus Kapitel 2.4.1 auf.

Stochastische Prozesse beschreiben Systeme, in denen eine zeitabhängige Variable $a(t)$ existiert (vgl. [41], S. 42). Werden die Messwerte von $a(t)$ zu den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3, \dots mit a_1, a_2, a_3, \dots bezeichnet, beschreibt die JPFD

$f(a_1, t_1; a_2, t_2; a_3, t_3; \dots)$ das Gesamtsystem ([41], S. 42). Seien b_1, b_2, b_3, \dots die Werte eines Prozesses $\mathbf{b}(t)$ zu den Zeitpunkten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, gilt für die bedingte JPDF $f(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots \mid b_1, \tau_1; b_2, \tau_2; \dots)$ mit Gleichung (2.71) ([41], S. 42)

$$f(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots \mid b_1, \tau_1; b_2, \tau_2; \dots) = f(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots; b_1, \tau_1; b_2, \tau_2; \dots) / f(b_1, \tau_1; b_2, \tau_2; \dots). \quad (2.97)$$

Die Definition des Markov-Prozesses baut auf die JPDF in Gleichung (2.97) auf.

2.5.1 Markov-Prozess

Für einen Markov-Prozess gilt mit der bedingten JPDF in Gleichung (2.97) ([41], S. 42-43)

$$f(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots \mid b_1, \tau_1; b_2, \tau_2; \dots) = f(a_1, t_1; a_2, t_2; \dots \mid b_1, \tau_1), \quad (2.98)$$

wobei $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots$. Der Zustand eines Markov-Prozesses hängt lediglich vom letzten Zeitschritt ab (vgl. [41], S. 43). Er ist unabhängig von den vorherigen Zeitschritten.

2.5.2 Wiener-Prozess

Der Wiener-Prozess $W(t)$ ist ein Markov-Prozess ([41], S. 66). Im Folgenden seien einige Eigenschaften des Wiener-Prozesses zusammengefasst ([50], S. 117):

- Der Startwert ist definiert als $W(t=0) = 0$ und tritt mit der Wahrscheinlichkeit $P(W(0) = 0) = 1$ ein.
- Für die Zeitpunkte t_0 bis t_n , wobei $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, sind die Zuwächse $W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ stochastisch unabhängig.
- Die Differenz des Wiener-Prozesses zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 mit $0 \leq t_1 < t_2$ folgt einer Normalverteilung, deren Varianz der zeitlichen Differenz der Argumente entspricht: $(W(t_2) - W(t_1)) \sim \mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$.

Ein „Gaußscher Random Walk“ [3] kann für eine Approximation des Wiener-Prozesses genutzt werden (vgl. [50], S. 113-116; [43], S. 1082)

$$W_{s_z \Delta t} \approx \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^{s_z} \xi_k, \quad (2.99)$$

wobei ξ_k unabhängige und standardnormalverteilte Zufallszahlen sind. Die Schrittzahl ist durch s_z gekennzeichnet. Für das Differential dW mit $\dot{W} = dW/dt$ folgt aus Gleichung (2.99)

$$dW(t) = dW_{s_z \Delta t} = \sqrt{dt} \xi_k(t). \quad (2.100)$$

Fünf beispielhafte Verläufe eines Wiener-Prozesses, approximiert nach Gleichung (2.100), sind in Abbildung 2.6 dargestellt.

2.5.3 Langevin-Gleichung

Gilt für eine Zustandsgröße $X(t)$ die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = A_L(t, X(t))dt + B_L(t, X(t))dW(t), \quad (2.101)$$

wird der Prozess als „Diffusionsprozess“ (engl.: „diffusion process“ ([86], S. 136)) bezeichnet. Die Funktionen $A_L(t, X(t))$ und $B_L(t, X(t))$ beschreiben Drift und Diffusion ([86], S. 136). Gleichung (2.101) wird als „Langevin“ ([86], S. 136)-Gleichung bezeichnet.

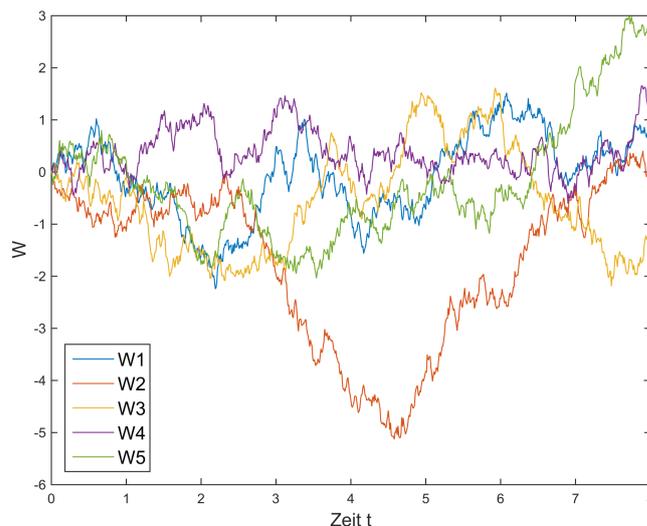


Abbildung 2.6: Fünf beispielhafte Verläufe des Wiener-Prozesses, approximiert mit dem Gaußschen Random Walk (vgl. [3]; Gl. (2.100)). Berechnet und geplottet mit MATLAB R2014b.

2.5.4 Fokker-Planck-Gleichung

Die zugehörige Transportgleichung der PDF f des Diffusionsprozesses in Gleichung (2.101) lautet (vgl. [86], S. 136-137; [118], S. 4-5)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A_L(t,x)f) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(B_L(t,x)f) \quad (2.102)$$

und wird „Fokker-Planck“ ([41], S. 118)-Gleichung genannt. Rückblickend lässt sich feststellen, dass die PDF-Transportgleichung (2.79) einer Skalargröße im Verbrennungsbereich mit dem Modell in Gleichung (2.80) eine Fokker-Planck-Gleichung mit Quellterm ist. Sie wird in ([119], S. 3) als entartete, hypoelliptische Fokker-Planck-Gleichung charakterisiert.

Für die Beziehung zwischen der Fokker-Planck-Gleichung und der quantenmechanischen Bilanzgleichung „Mastergleichung“ (vgl. [39] S. 373) sei auf ([41], S. 246) verwiesen.

2.5.5 Liouville-Gleichung

Gilt in der Langevin-Gleichung (2.101) $B_L(t, X(t)) = 0$, entfällt der Zufallsterm und ein deterministischer Prozess wird beschrieben ([124], S. 19). Die zugehörige PDF-Transportgleichung (vgl. (2.102)) ist die sogenannte „Liouville“ ([124], S. 20)-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A_L(t,x)f). \quad (2.103)$$

Wenn $A_L(t,x)$ durch zufällige Fluktuationen beeinflusst wird, ist Gleichung (2.103) eine stochastische Liouville-Gleichung (vgl. [146], S. 150). In ([146], S. 152) wird gezeigt, dass eine Mittelung der stochastischen Liouville-Gleichung, deren Koeffizienten entsprechend einer Langevin-Gleichung (2.101) fluktuieren, zu einer Fokker-Planck-Gleichung führt. Letzere enthält einen Diffusionsterm, der aus dem Drift-Term der Langevin-Gleichung resultiert (vgl. [146], S. 152).

Nach dieser kurzen Zusammenfassung der für das Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen wird in Kapitel 3 die Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf das Zwei-Fluid-Modell analysiert.

3 Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell

Der Vorteil einer Anwendung der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell sei im Folgenden beispielhaft an der Berechnung der lokalen bzw. instantanen Größe „Blasengröße“ anschaulich diskutiert. In Abbildung 2.2 wurde gezeigt, dass im herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell eine real existierende Blasengrößenverteilung durch die Betrachtung einer mittleren Blasengröße ersetzt wird. Der Einfluss lokal bzw. instantan auftretender, seltener Ereignisse, beispielsweise eine sehr große Blase, wird nicht direkt berücksichtigt. Zur Beachtung dieser seltenen Ereignisse wird eine Blasengrößenverteilung benötigt. Gleichung (2.28) zeigt den Zusammenhang zwischen dem mittleren Volumenanteil α_d und dem mittleren Blasenradius r_{Bl} . Entsprechend sind die Verteilungen der beiden Größen korreliert. Hängt ein Modell (wie beispielsweise der Quellterm in Gleichung (2.20)) direkt oder indirekt vom Blasenradius r_{Bl} bzw. dem Volumenanteil α_d ab, kann durch die Verwendung einer Verteilung an Stelle eines Mittelwerts ein genaueres Ergebnis erzielt werden. Vor allem stark nichtlineare Funktionen lassen durch die Verwendung der Verteilung an Stelle des Mittelwerts eine Verbesserung erwarten. Im Rahmen dieser Arbeit sollen nicht die Modelle für die Korrelation der einzelnen Größen verbessert werden (vgl. Gleichungen (2.23), (2.28)). Vielmehr soll analysiert werden, wie die Stochastische Feldmethode genutzt werden kann, um Schwankungen im Rahmen eines bestehenden Kavitationsmodells zu berücksichtigen.

Innerhalb des Kapitels 3 wird diskutiert, wie die Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell verwendet werden kann. Kapitel 3.1 stellt den Bezug zwischen den stochastischen Feldern und der Realität einer Zweiphasenströmung her. Kapitel 3.2 demonstriert die Approximation einer PDF durch stochastische Felder. Ihr Transport wird in Kapitel 3.3 an einem beispielhaften Term veranschaulicht. Ein Vergleich mit konkurrierenden Modellen erfolgt in Kapitel 3.4.

Bisherige Anwendungen der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenprobleme (vgl. Kapitel 1.3) erfolgten analog zur Anwendung auf eine Skalargröße im Verbrennungsbereich. Kapitel 3.5 zeigt einen ersten Ansatz für die Herleitung der PDF-Transportgleichung für das Zwei-Fluid-Modell und das Drift-Flux-Modell. Die Herleitung unterscheidet sich von derjenigen für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich (vgl. [104], S. 141-142, 187). Es wird auf die Unterschiede hingewiesen, von denen einige die Grundlage für einen weiteren wissenschaftlichen Disput bieten. Kapitel 3.6 weist auf Unterschiede der PDF-Transportgleichung für beide Bereiche hin und diskutiert diese. Es wird gezeigt, dass die Stochastische Feldmethode, wie sie für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich hergeleitet wurde, nicht analog auf das Zwei-Fluid-Modell angewendet werden kann. Hierfür wird in Kapitel 3.6.1 demonstriert, dass die Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell keinen Micromixing-Term enthalten kann. Weiterhin darf sie keinen Term für die mittlere turbulente Advektion enthalten, um konsistent zum verwendeten Zwei-Fluid-Modell zu sein. Um dies zu demonstrieren wird in Kapitel 3.6.2 angenommen, dass die PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell analog zur PDF-Transportgleichung für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich ohne Micromixing-Term formuliert werden kann. Ihre Konsistenz zum Zwei-Fluid-Modell wird durch Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils auf zwei Arten geprüft: Mit Hilfe einer Ensemble-Mittelung der SPDE und durch Integration der PDF-Transportgleichung. Beide Arten zeigen, dass die Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell keinen Term für die mittlere turbulente Advektion aufweisen darf, um konsistent zum verwendeten Zwei-Fluid-Modell zu sein. Eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode für das Zwei-Fluid-Modell wird in Kapitel 3.6.3 vorgestellt.

Die Stochastische Feldmethode soll die Berechnung von Verteilungen im Zwei-Fluid-Modell mit überschaubarem Rechenaufwand durch die Berechnung stochastischer Felder ermöglichen. Der Einfluss der in Abbildung 1.11 dar-

gestellten Faktoren ist bei der Implementierung zu beachten. Innerhalb dieser Arbeit wird die Stochastische Feldmethode zur Berechnung einer Verteilung des Volumenanteils der dispersen Phase α_d unter Berücksichtigung lokal bzw. instantan auftretender Ereignisse angewandt. Um eine störungsbehaftete Gleichung für den Volumenanteil α_d zu formulieren, muss ein Mittelungsoperator auf die instantane Kontinuitätsgleichung (2.14) angewendet werden. Gleichung (2.15) ist die Transportgleichung für den mittleren Volumenanteil α_d , wobei die zeitliche Mittelung zur Herleitung verwendet wurde. Kapitel 2.2.1.9 diskutiert, dass dieselbe Gleichung auch unter Verwendung anderer Mittelungsoperatoren erhalten werden kann. Die Transportgleichung für den mittleren Volumenanteil (2.15) ist Schwankungen ausgesetzt. Die Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Quellterm wird als besonders gewinnbringend eingeschätzt (vgl. Abbildung 1.11). In den Kapiteln 3.7.1 und 3.7.2 werden die Schwankungen im Quellterm weiter differenziert: Schwankungen im Quellterm aufgrund einer lokal bzw. instantan variierenden Blasendichte und Schwankungen aufgrund stochastischer Schwankungen in der Druckdifferenz.

3.1 Interpretation von stochastischen Feldern im Zwei-Fluid-Modell

Wird die Stochastische Feldmethode genutzt, um eine Verteilung des Volumenanteils α_d zu berechnen, enthalten die N stochastischen Felder N Volumenanteile $\alpha_d^{(1)}, \alpha_d^{(2)}, \dots, \alpha_d^{(N)}$. Die Wahl der Betrachtungsweise bestimmt den Bezug zwischen den stochastischen Feldern und real existierenden Ereignissen. Im Folgenden werden zwei mögliche Betrachtungsweisen am Beispiel des lokalen Ereignisses unterschiedlicher Blasengrößen vorgestellt.

3.1.1 Betrachtungsweise globaler Repräsentanten

Die Betrachtungsweise globaler Repräsentanten geht davon aus, dass die innerhalb einer Rechenzelle globale Größe α_d aufgrund lokaler Ereignisse schwankt. Der Grund für diese Schwankung kann das Vorkommen unterschiedlicher Blasengrößen oder anderer stochastischer Einflüsse (vgl. Kapitel 3.7) sein.

Sei die Menge aller in der Realität möglichen Volumenanteile der dispersen Phase innerhalb der betrachteten Rechenzelle

$$\left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \quad (3.1)$$

Ein stochastisches Feld $\alpha_d^{(n)}$ ist ein zufälliges Element der Menge möglicher Volumenanteile

$$\alpha_d^{(n)} \in \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \quad (3.2)$$

Die Menge der stochastischen Felder ist Teilmenge der Menge aller möglichen Volumenanteile

$$\left\{ \alpha_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge n \leq N \right\} \subseteq \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \quad (3.3)$$

und repräsentiert Stichproben der möglichen Volumenanteile. Werden N stochastische Felder berechnet, wird die Verteilung des Volumenanteils α_d innerhalb einer Rechenzelle durch die Betrachtung von N Stichproben repräsentiert. Sie entsprechen den N samples aus Kapitel 2.4.3 (vgl. Abbildung 2.5) und sind für $N = 9$ in Abbildung 3.1 oben links als neun Volumenanteile skizziert. Die Schwankungen im globalen Volumenanteil α_d innerhalb einer Rechenzelle können mit lokalen Ereignissen in Beziehung gesetzt werden. Den mittleren Volumenanteil α_d korreliert das Zwei-Fluid-Modell mit n_{Bl} Blasen gleicher Größe, wie es in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Aus jedem stochastischen Feld n und dem zugehörigen Volumenanteil $\alpha_d^{(n)}$ lässt sich mit dem Zwei-Fluid-Modell und einem geeigneten Modell zur Approximation der Blasenanzahl $n_{Bl}^{(n)}$ (beispielweise mit dem Blasendichtemodell in Gleichung (2.23)) mit Hilfe von Gleichung (2.28) eine Blasengröße $r_{Bl}^{(n)}$ ableiten. In Abbildung 3.1 oben Mitte sind die mit den neun Volumenanteilen (oben links) korrelierten Blasengrößen für $n_{Bl}^{(1)} = n_{Bl}^{(2)} = \dots = n_{Bl}^{(N)} = n_{Bl} = 9$ skizziert. Sie repräsentieren die in der Realität vorkommenden Blasengrößen (vgl. Abbildung 3.1 oben rechts).

Die stochastischen Felder werden in dieser Betrachtungsweise als Repräsentanten des globalen Volumenanteils α_d interpretiert, der aufgrund lokaler Ereignisse schwankt. Die Anwendung des bestehenden Zwei-Fluid-Modells erlaubt die Herleitung einer Verteilung für die Blasengröße aus der Verteilung des Volumenanteils α_d .

3.1.2 Betrachtungsweise lokaler Schwankungen

Die Betrachtungsweise lokaler Schwankungen nutzt die stochastischen Felder, um eine lokale Verteilung, beispielsweise die Verteilung der Blasengröße, zu beschreiben. Entsprechend muss die Verteilung von Blasenradien, beispielsweise durch experimentelle Untersuchungen, bekannt sein. Die Verteilung des Volumenanteils der stochastischen Felder kann mit Gleichung (2.28) aus der Verteilung der Blasenradien abgeleitet werden, wenn die Blasenanzahl bekannt ist oder beispielsweise durch die Gleichungen (2.23) und (2.27) approximiert wird. Abbildung 3.1 oben rechts zeigt eine hypothetische Realität innerhalb einer Rechenzelle. Zur weiteren Analyse der lokalen Ereignisse ist die Rechenzelle mit dem Volumen V_{Zelle} in n_{Bl} Teilvolumina unterteilt

$$V_{\text{Zelle}} = \sum_{r=1}^{n_{\text{Bl}}} V_{\text{Teil}}^{(r)}, \quad (3.4)$$

so dass jedes Teilvolumen $V_{\text{Teil}}^{(r)}$ genau eine Blase der Größe $r_{\text{Bl}}^{(r)}$ enthält. Die Menge aller Blasengrößen

$$\{r_{\text{Bl}}^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge r \leq n_{\text{Bl}}\} \quad (3.5)$$

repräsentiert die Blasengrößen der Realität in Abbildung 3.1 oben rechts. Im Folgenden wird das in Abbildung 3.1 oben rechts orange markierte Teilvolumen mit der Blase des Radius $r_{\text{Bl}}^{(1)}$ betrachtet. Die Blasenanzahl im Teilvolumen ist $n_{\text{Bl,Teil}}^{(1)} = 1$, so dass analog zu Gleichung (2.26) aus dem Blasenradius ein lokaler Volumenanteil berechnet werden kann

$$a_{d,\text{Teil}}^{(1)} = \frac{4}{3} \pi (r_{\text{Bl}}^{(1)})^3 \frac{1}{V_{\text{Teil}}^{(1)}}. \quad (3.6)$$

Lokale Schwankungen im Blasenradius sind Gleichung (3.6) zufolge direkt mit Schwankungen im Volumenanteil des Teilvolumens $a_{d,\text{Teil}}^{(1)}$ korreliert. Im Zwei-Fluid-Modell (vgl. Kapitel 2.2.1) wird nicht der Volumenanteil des Teilvolumens $a_{d,\text{Teil}}^{(r)}$, sondern der Volumenanteil der gesamten Rechenzelle α_d betrachtet. Zur Berücksichtigung der lokal schwankenden Volumenanteile $a_{d,\text{Teil}}^{(r)}$ wäre eine Berechnung mit kleineren Rechenzellen möglich, aufgrund des erhöhten numerischen Rechenaufwands aber nicht praktikabel. Alternativ können lokal auftretende Schwankungen in $a_{d,\text{Teil}}^{(r)}$ auf Schwankungen des Volumenanteils $a_d^{(r)}$ des gesamten Zellvolumens hochgerechnet werden. Das Zellvolumen V_{Zelle} setzt sich dann aus n_{Bl} identischen Teilvolumina mit ihren jeweiligen Blasen zusammen. Dies ist in Abbildung 3.1 oben Mitte für das näher betrachtete orangene Teilvolumen und die anderen Teilvolumina in Abbildung 3.1 oben rechts skizziert. Mit dem Volumen der dispersen Phase $V_d^{(r)}$ und Gleichung (3.6) gilt für den Volumenanteil der gesamten Rechenzelle $a_d^{(r)}$

$$a_d^{(r)} = \frac{V_d^{(r)}}{V_{\text{Zelle}}} = \frac{n_{\text{Bl}} \frac{4}{3} \pi (r_{\text{Bl}}^{(r)})^3}{n_{\text{Bl}} V_{\text{Teil}}^{(r)}} = a_{d,\text{Teil}}^{(r)}. \quad (3.7)$$

Die Menge aller Volumenanteile in der gesamten Rechenzelle

$$\{a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge r \leq n_{\text{Bl}}\} \quad (3.8)$$

ist der Menge aller Blasengrößen in Gleichung (3.5) zuzuordnen und bildet die lokalen Schwankungen der Blasengrößen ab.

Der Volumenanteil eines jeden stochastischen Felds ist ein zufälliges Element der Menge aller Volumenanteile in der gesamten Rechenzelle

$$\alpha_d^{(n)} \in \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge r \leq n_{Bl} \right\}. \quad (3.9)$$

Die Menge aller stochastischen Felder ist eine Teilmenge der Menge aller Volumenanteile, die lokale Blasengrößen repräsentieren

$$\left\{ \alpha_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge n \leq N \right\} \subseteq \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge r \leq n_{Bl} \right\}. \quad (3.10)$$

Im Beispiel in Abbildung 3.1 werden durch N Stichproben aus den stochastischen Feldern alle n_{Bl} Blasengrößen abgebildet, so dass $N = n_{Bl}$ und

$$\left\{ \alpha_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge n \leq N \right\} = \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \wedge r \leq n_{Bl} \right\} \quad (3.11)$$

gilt. Die Volumenanteile der stochastischen Felder sind in Abbildung 3.1 oben links abgebildet. In dieser Betrachtungsweise repräsentieren die Stochastischen Felder Volumenanteile, die aus lokalen Schwankungen hergeleitet werden können. Diese Betrachtungsweise wird in Kapitel 3.7.1 zur Herleitung der Schwankungen in α_d aufgrund lokal schwankender Keimanzahlen genutzt.

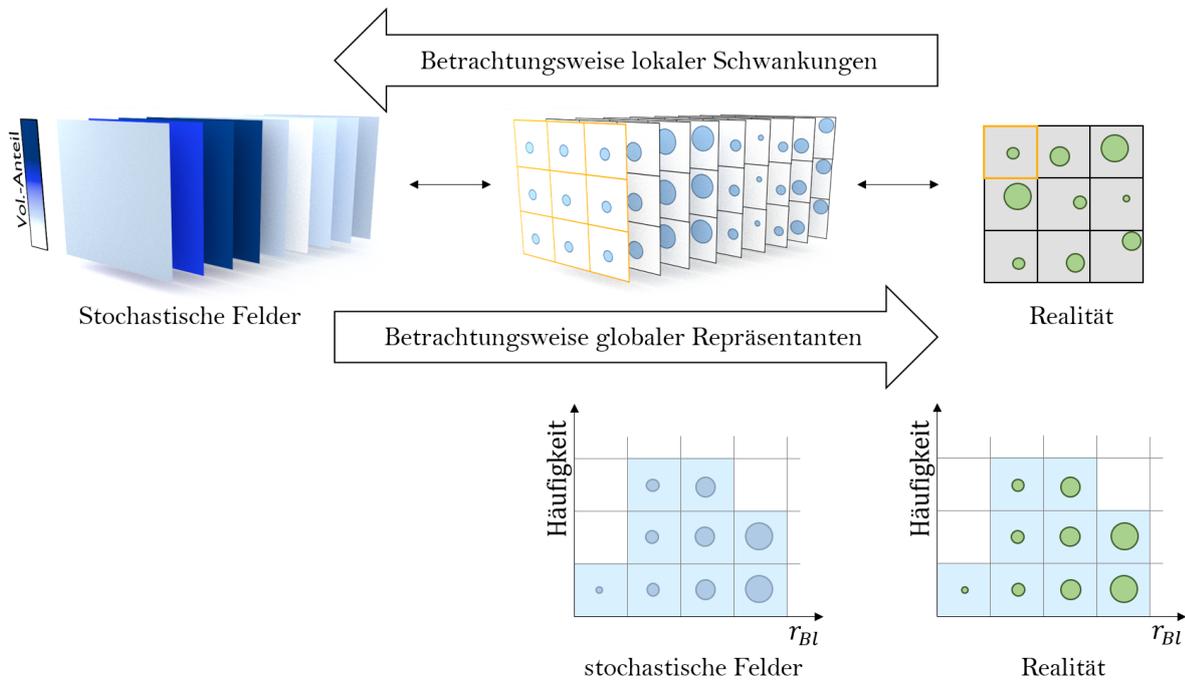


Abbildung 3.1: Grafische Veranschaulichung von Betrachtungsweisen zur Interpretation der Stochastischen Felder im Zwei-Fluid-Modell und Vergleich des Histogramms der Stochastischen Feldmethode mit dem einer hypothetischen Realität.

3.2 Approximation der PDF durch die Stochastische Feldmethode

In Kapitel 1.2 wurde mit den Abbildungen 1.6 und 1.7 am Beispiel einer Messreihe gezeigt, dass die Form einer PDF durch ein Histogramm der Messwerte approximiert werden kann. Analog kann aus einer Momentaufnahme der Realität in Abbildung 3.1 oben für die Blasenradien ein Histogramm erstellt werden. Es ist ebenfalls in Abbildung 3.1 unterhalb der Momentaufnahme dargestellt. Auf der Abszisse ist der Blasenradius aufgetragen. Analog zu Abbildung 1.6 ist sie in Bins unterteilt. Auf der Ordinate ist die Häufigkeit aufgetragen. Jedem Bin sind die entsprechenden Blasen der Momentaufnahme zugeordnet. Das Histogramm der Stochastischen Feldmethode kann

analog aus den Blasengrößen der stochastischen Felder erzeugt werden. Es ist in Abbildung 1.6 unterhalb der stochastischen Felder zu sehen und stimmt mit dem Histogramm der Realität überein. Die Stochastische Feldmethode kann also genutzt werden, um die Form der real existierenden PDF zu approximieren.

In Kapitel 3.1.2 wurde bereits festgestellt, dass im Beispiel in Abbildung 3.1 die Blasenanzahl n_{Bl} der Anzahl stochastischer Felder $N = 9$ entspricht. Damit repräsentiert jedes stochastische Feld eine Blase in der Realität (vgl. Gleichung 3.11). In realistischen Anwendungsbeispielen kann die Blasenanzahl höher sein als die realisierbare Anzahl stochastischer Felder (vgl. Gleichung (2.24)). Nicht jede in der Realität vorkommende Blase wird dann durch eines der N stochastischen Felder repräsentiert. Die stochastischen Felder repräsentieren dann lediglich eine Stichprobe der realen Blasen (vgl. Gleichung (3.10)). Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann sich das Histogramm der stochastischen Felder vom realen Histogramm unterscheiden, da es zufällige Stichproben abbildet. Im statistischen Mittel, beispielsweise durch das sukzessive Erfassen vieler stochastischer Felder, gilt $N \rightarrow \infty$ und die stochastischen Felder repräsentieren alle real existierenden Blasen

$$\left\{ \alpha_d^{(n)} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ a_d^{(r)} \mid r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}. \quad (3.12)$$

Das Histogramm der stochastischen Felder stimmt im statistischen Mittel mit dem Histogramm der Realität überein. Es approximiert die PDF des Volumenanteils α_d (vgl. Kapitel 1.2; Abbildung 3.1) und kann für eine Berechnung weiterer, von α_d abhängigen Größen, verwendet werden.

3.3 Transport der PDF durch die Stochastische Feldmethode

In Kapitel 2.4.3.2 wurde die SPDE zum Transport eines samples in einer Eulerschen Betrachtungsweise vorgestellt. Gleichung (2.96) zeigt, wie die für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich hergeleitete SPDE zur Beschreibung der PDF des Volumenanteils α_d angewendet wurde. Das Kapitel 3.3 stellt den Bezug der SPDE zur Realität durch Diskussion eines exemplarischen Terms her. Für die Analyse wird der zeitabhängige Term $\frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t}$ genauer betrachtet. Abbildung 3.2 zeigt eine hypothetische Realität zu zwei Zeitpunkten t_0 und t_1 . Die Betrachtung der hypothetischen Realität aus Sicht der Stochastischen Feldmethode ist ebenfalls in Abbildung 3.1 dargestellt. In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, dass jeder Repräsentant $\alpha_d^{(n)}$ mit einem Modell für die Blasenanzahl $n_{Bl}^{(n)}$ und mit Gleichung (2.28) einer Blasengröße $r_{Bl}^{(n)}$ zuzuordnen ist. Entsprechend sind in Abbildung 3.2 die Blasengrößen der stochastischen Felder skizziert. Die zugehörigen Blasengrößenverteilungen sind ebenfalls in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Stochastische Feldmethode kann die Veränderung der Blasengrößen der hypothetischen Realität gut abbilden. Im betrachteten Beispiel ändert sich die Blasenanzahl der Realität innerhalb der Zeitspanne $t_1 - t_0$ nicht. Einige Blasen werden größer, andere werden kleiner. Entsprechend verändern sich die Blasenradien der stochastischen Felder. Bleibt die Blasenanzahl im Zeitintervall $\Delta t = t_1 - t_0$ konstant, ist die zeitliche Variation des Volumenanteils im Term $\frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t}$ also als zeitliche Variation der Blasengrößen zu interpretieren.

3.4 Vergleich mit konkurrierenden Modellen

Abbildung 3.2 vergleicht die Sichtweise der hypothetischen Realität mehrerer Modelle zu zwei Zeitpunkten. Die Betrachtungsweisen der Stochastischen Feldmethode, des Zwei-Fluid-Modells und des MUSIG-Modells sind dargestellt. Die entsprechenden Verteilungen sind ebenfalls in Abbildung 3.2 gezeigt.

Die stochastischen Felder repräsentieren die realen Blasengrößen. Eine ausführliche Diskussion hierzu ist den Kapiteln 3.1.1, 3.2 und 3.3 zu entnehmen. Entsprechend kann die Stochastische Feldmethode die Blasengrößenverteilung der hypothetischen Realität abbilden.

Das Zwei-Fluid-Modell kennt zu beiden Zeitpunkten die mittlere Blasengröße (vgl. Kapitel 2.2.1). Mit einem Modell zur Approximation der Blasenanzahl n_{Bl} ergeben sich die Sichtweisen des Zwei-Fluid-Modells in Abbildung

3.2: Es existieren n_{Bl} Blasen derselben Größe. Entsprechend weist die Verteilung lediglich eine Blasengröße auf. Die Verteilungen des Zwei-Fluid-Modells sind in Abbildung 3.2 gestaucht dargestellt. Obwohl sich die Blasengrößenverteilung der Realität in der Zeit verändert, variiert die Blasengrößenverteilung des Zwei-Fluid-Modells nicht, da der mittlere Blasenradius und die Blasenanzahl konstant bleiben. Das Zwei-Fluid-Modell kann die reale Blasengrößenverteilung nicht abbilden. Es trifft lediglich eine Aussage über den mittleren Blasenradius.

Das MUSIG-Modell betrachtet Blasen unterschiedlicher Größenklassen. Analog zu Abbildung 2.2 sind die Größenklassen in Abbildung 3.2 farblich gekennzeichnet. Für die Blasengrößenverteilungen ist abweichend von Abbildung 2.3 die Häufigkeit auf der Ordinate aufgetragen. Die Form der Blasengrößenverteilung ändert sich durch die alternative Auftragung nicht, wie in Kapitel 2.2.3 erläutert wurde. Die Blasengrößenverteilung stimmt zu beiden Zeitpunkten gut mit der realen Blasengrößenverteilung überein. In dem behandelten Beispiel entspricht sie der Verteilung der Stochastischen Feldmethode. Das MUSIG-Modell ist damit eine Alternative zur Stochastischen Feldmethode. Es sei darauf hingewiesen, dass dies nicht im Allgemeinen gilt: Das MUSIG-Modell ermöglicht keine Unterscheidung der Blasengröße innerhalb einer Größenklasse. Die Auflösung der Blasengrößenverteilung ist durch die vor der Simulation festgelegte Breite der Größenklassen definiert. Eine Erhöhung der Auflösung kann nur durch eine erneute Simulation erfolgen. Die samples der Stochastischen Feldmethode, also die Volumenanteile $\alpha_d^{(n)}$ der stochastischen Felder, können alle reellen Werte des Intervalls $[\alpha_{d,min}, \alpha_{d,max}]$ annehmen. Im Gegensatz zum MUSIG-Modell berechnet die Stochastische Feldmethode die Blasenverteilung auf einem kontinuierlichen Wertebereich. Die Zuordnung zu diskreten Bins erfolgt erst durch die grafische Veranschaulichung (vgl. Abbildung 1.6). Hierdurch ergeben sich zwei Vorteile der Stochastischen Feldmethode gegenüber dem MUSIG-Modell:

- Die Blasengrößenverteilung der Stochastischen Feldmethode besitzt eine höhere Auflösung. Die Auflösung der grafischen Darstellung kann auch nach der Simulation verändert werden, wenn die samples der stochastischen Felder bekannt sind.
- Die Stochastische Feldmethode erfordert keine a-priori-Kenntnisse zu vorkommenden Blasengrößen.

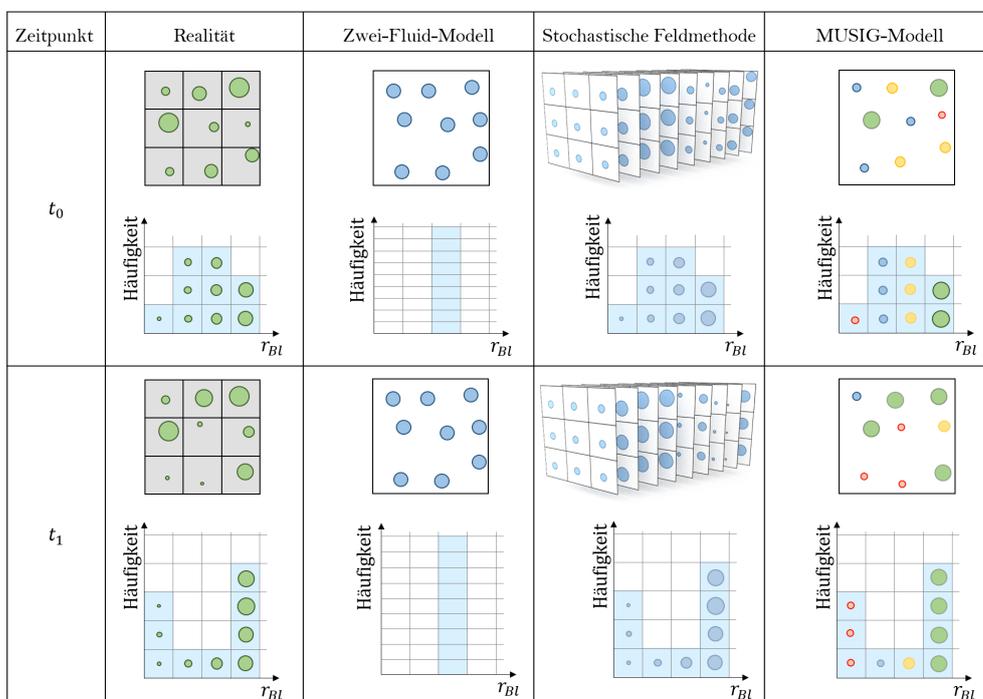


Abbildung 3.2: Methodenvergleich zur Berücksichtigung einer PDF.

3.5 Herleitung der PDF-Transportgleichung

Die ausführliche Herleitung der PDF-Transportgleichung (2.77) für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich ist in ([104], S. 141-142, 187) durchgeführt. Die folgende Herleitung verfährt analog.

Die Ausgangsgleichungen für die Herleitung der PDF-Transportgleichung für Zweiphasenströmungen werden im Folgenden vorgestellt. Für eine simultane Herleitung der PDF-Transportgleichung für das Zwei-Fluid-Modell und das Drift-Flux-Modell erfolgt die Herleitung in allgemeiner Form. Eine Spezifizierung für das Zwei-Fluid-Modell wird später vollzogen. Zunächst werden die Erhaltungsgleichungen des Zwei-Fluid-Modells aus Kapitel 2.2.1 und des Drift-Flux-Modells aus Kapitel 2.2.2 zusammengefasst und im Sinne einer allgemeinen Herleitung vereinheitlicht.

Die Kontinuitätsgleichungen der kontinuierlichen und der dispersen Phase lauten im Zwei-Fluid-Modell (vgl. Gleichungen (2.11), (2.15))

$$\frac{\partial \bar{\rho}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}_c \hat{v}_c) = S_c \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}_d \hat{v}_d) = S_d. \quad (3.14)$$

Für beide Phasengeschwindigkeiten \hat{v}_c und \hat{v}_d gilt die Momentengleichung (2.29)

$$\frac{\partial \alpha_c \bar{\rho}_c \hat{v}_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_c \bar{\rho}_c \hat{v}_c \hat{v}_c) = -\nabla (\alpha_c \bar{p}_c) + \nabla \cdot (\alpha_c (\bar{\tau}_c + \tau_c^T)) + \alpha_c \bar{\rho}_c \hat{g}_c + M_c \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_d \bar{\rho}_d \hat{v}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \hat{v}_d \hat{v}_d) = -\nabla (\alpha_d \bar{p}_d) + \nabla \cdot (\alpha_d (\bar{\tau}_d + \tau_d^T)) + \alpha_d \bar{\rho}_d \hat{g}_d + M_d \quad (3.16)$$

mit $p_c = f(p_d)$ (vgl. Kapitel 2.2.1.7; [55], S. 39). Die Transportgleichung des Volumenanteils der dispersen Phase α_d kann aus Gleichung (3.14) mit Gleichung (2.11) und Division durch $\bar{\rho}_d$ erhalten werden (vgl. Gleichung (2.54))

$$\frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \hat{v}_d) = \frac{S_d}{\bar{\rho}_d}. \quad (3.17)$$

Unter Beachtung der Vektorwertigkeit der Geschwindigkeiten enthalten die Gleichungen (3.13) - (3.16) mit \hat{v}_c , \hat{v}_d , \bar{p}_d , α_c und α_d neun Unbekannte. Mit den acht Gleichungen (3.13) - (3.16) und der Bedingung $\alpha_c + \alpha_d = 1$ aus Gleichung (2.12) ist das Gleichungssystem geschlossen.

Die Erhaltungsgleichungen des Drift-Flux-Modells lauten (vgl. Gleichungen (2.55), (2.56), (2.62))

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m) = -\nabla p_m + \nabla \cdot \left(\bar{\tau} + \tau^T - \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k \mathbf{V}_{km} \mathbf{V}_{km} \right) + \rho_m \mathbf{g}_m + M_m \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \alpha_d \bar{\rho}_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{v}_m) = S_d - \nabla \cdot (\alpha_d \bar{\rho}_d \mathbf{V}_{dm}), \quad (3.20)$$

mit der mittleren Dichte ρ_m (vgl. Gleichungen (2.57))

$$\rho_m = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \bar{\rho}_k. \quad (3.21)$$

Die Transportgleichung des Volumenanteils der dispersen Phase α_d kann aus Gleichung (3.20) durch Division durch die konstante Dichte $\overline{\rho_d}$ erhalten werden

$$\frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \mathbf{v}_m) = \frac{S_d}{\overline{\rho_d}} - \nabla \cdot (\alpha_d \mathbf{V}_{dm}). \quad (3.22)$$

Es sei beachtet, dass $\alpha_d = \alpha_2$ und $\alpha_c = \alpha_1$. Werden die Vektoren \mathbf{V}_{km} und \mathbf{V}_{dm} modelliert (vgl. [55], S. 359, 384, 395-397), enthalten die Gleichungen (3.18), (3.19), (3.21) und (3.22) mit $\rho_m, p_m, \alpha_1, \alpha_2$ und \mathbf{v}_m sieben Unbekannte. Dabei ist die Vektorwertigkeit der Geschwindigkeiten zu beachten. Das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (3.18), (3.19), (3.21) und (3.22) liefert sechs Gleichungen und ist mit der Bedingung $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ aus Gleichung (2.12) geschlossen.

Die Herleitung der PDF-Transportgleichung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich verwendet die drei Ausgangsgleichungen (2.83). Um analog zu verfahren, wird von den Erhaltungsgleichungen (3.14), (3.16) und (3.17) bzw. (3.18), (3.19) und (3.22) ausgegangen. Die für die Herleitung der PDF-Transportgleichung nicht genutzten Gleichungen gelten weiterhin. Für eine simultane Herleitung für das Zwei-Fluid-Modell und das Drift-Flux-Modell werden die folgenden allgemeinen Erhaltungsgleichungen verwendet

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_a) = S_a \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \rho_a \mathbf{v}_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_a \mathbf{v}_a) = \mathbf{\Lambda}_a \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \alpha_d}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_d \mathbf{v}_a) = S_d / \overline{\rho_d} - \nabla \cdot (\mathbf{J}_a) = \Theta_a \quad (3.25)$$

mit der allgemeinen Dichte ρ_a , der Geschwindigkeit \mathbf{v}_a und der Massenquelle S_a . Die rechte Seite der Momentengleichung wird mit $\mathbf{\Lambda}_a$ abgekürzt und die rechte Seite der Transportgleichung des Volumenanteils α_d mit Θ_a . Die Größe \mathbf{J}_a kennzeichnet den diffusiven Massenfluss. Tabelle 3.1 fasst zusammen, wie die allgemeinen Größen lauten müssen, damit die Erhaltungsgleichungen für das Zwei-Fluid-Modell oder das Drift-Flux-Modell gelten. Es ist zu beachten, dass entsprechend der Definition der Phasenmittelung in Gleichung (2.11) $\overline{\rho_d} = \overline{\rho_d} \alpha_d$ gilt.

Größe	Zwei-Fluid-Modell	Drift-Flux-Modell
ρ_a	$\overline{\rho_d}$	ρ_m
\mathbf{v}_a	$\hat{\mathbf{v}}_d$	\mathbf{v}_m
S_a	S_d	0
$\mathbf{\Lambda}_a$	$-\nabla \cdot (\alpha_d \overline{\rho_d}) + \nabla \cdot (\alpha_d (\overline{\boldsymbol{\tau}}_d + \boldsymbol{\tau}_d^T)) + \alpha_d \overline{\rho_d} \hat{\mathbf{g}}_d + \mathbf{M}_d$	$-\nabla p_m + \nabla \cdot (\overline{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}^T - \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k} \mathbf{V}_{km} \mathbf{V}_{km}) + \rho_m \mathbf{g}_m + \mathbf{M}_m$
\mathbf{J}_a	0	$\alpha_d \mathbf{V}_{dm}$

Tabelle 3.1: Größen in den allgemeinen Erhaltungsgleichungen (3.23) - (3.25) für das Zwei-Fluid-Modell und das Drift-Flux-Modell.

Ein Vergleich der Ausgangsgleichungen (3.23) - (3.25) für die Herleitung der PDF des Volumenanteils in Zweiphasenströmungen mit den Ausgangsgleichungen (2.83) für die Herleitung der PDF einer Skalargröße in der Verbrennung zeigt folgende Auffälligkeiten:

- Die Gleichungen (3.23) - (3.25) sind im Gegensatz zu denen in (2.83) für Mittelwerte formuliert. Die Notwendigkeit einer Betrachtung gemittelter Größen bei der Beschreibung einer Zweiphasenströmung im Euler-Kontext wurde bereits zu Beginn des Kapitels 2.2 behandelt (vgl. auch Abbildung 1.5).

- Die Momentengleichung (3.24) enthält im Gegensatz zur Momentengleichung (2.83) einen Quellterm \mathbf{M}_d bzw. \mathbf{M}_m . Neben der viskosen Spannung $\boldsymbol{\tau}_d$ bzw. $\boldsymbol{\tau}$ wird auch die turbulente Spannung $\alpha_d \boldsymbol{\tau}_d^T$ bzw. $\boldsymbol{\tau}^T$ betrachtet. Im Drift-Flux-Modell werden zusätzlich die diffusiven Spannungen berücksichtigt.
- Im Gegensatz zur Skalargleichung (2.83) existiert der Term für den diffusiven Massenfluss in Gleichung (3.25) nur im Drift-Flux-Modell.
- In Gleichung (3.25) wird der Nabla-Operator auf das Produkt der Geschwindigkeit und der transportierten Größe angewendet. In der skalaren Ausgangsgleichung (2.83) ist die Geschwindigkeit nicht von der Differentiation im Raum betroffen. Die Herleitung der Transportgleichung einer skalaren Größe ist in ([142], S. 626-627) ausgeführt. Es wird gezeigt, dass die Transportgleichung einer Skalargröße Φ_a ([142], S. 626)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi_a) + \nabla \cdot (\rho \Phi_a (\hat{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{V}_{\text{diff}})) = S_a \quad (3.26)$$

mit der dichtegewichteten mittleren Geschwindigkeit der Mischung $\hat{\mathbf{v}}_0$, der Diffusionsgeschwindigkeit \mathbf{V}_{diff} und dem Quellterm S_a durch Substitution der Kontinuitätsgleichung ([142], S. 625)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \hat{\mathbf{v}}_0) = 0 \quad (3.27)$$

in folgende vereinfachte Form überführt werden kann ([142], S. 626)

$$\frac{\partial \Phi_a}{\partial t} + \hat{\mathbf{v}}_0 \cdot \nabla \Phi_a = \frac{S_a}{\rho} - (\nabla \cdot (\rho \Phi_a \mathbf{V}_{\text{diff}})) / \rho. \quad (3.28)$$

Diese Vereinfachung ist bei Anwendung des Zwei-Fluid-Modells nicht auf Gleichung (3.25) übertragbar, da diese direkt von der Kontinuitätsgleichung (3.23) abhängt. Eine Substitution der Kontinuitätsgleichung führt damit nicht zu einer Vereinfachung. Der Nabla-Operator muss weiterhin auf das Produkt angewendet werden.

Im Sinne einer vereinfachten Schreibweise wird innerhalb des restlichen Kapitels 3.5 auf den Index a zur Kennzeichnung der allgemeinen Größe verzichtet. Entsprechend gilt im Folgenden $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a$; $\rho = \rho_a$; $S = S_a$; $\Lambda = \Lambda_a$; $\Theta = \Theta_a$; $\mathbf{J} = \mathbf{J}_a$. Weiterhin wird auf den Index d verzichtet, so dass $\alpha = \alpha_d$. Im Unterschied zur Herleitung in ([104], S. 141) wird das totale Differential mit der Geschwindigkeit innerhalb der Differentiation definiert

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (3.29)$$

Die allgemeinen Erhaltungsgleichungen (3.23) - (3.25) können mit dem totalen Differential in Gleichung (3.29) geschrieben werden

$$\frac{\mathfrak{D}\rho}{\mathfrak{D}t} = S \quad (3.30)$$

$$\frac{\mathfrak{D}(\rho v_j)}{\mathfrak{D}t} = \Lambda_j \quad (3.31)$$

$$\frac{\mathfrak{D}\alpha}{\mathfrak{D}t} = \Theta. \quad (3.32)$$

In Abbildung 3.3 ist das Vorgehen bei der Herleitung der PDF-Transportgleichung schematisch skizziert. Zunächst wird die JPDF f des Volumenanteils und der Geschwindigkeit hergeleitet. Anschließend wird hieraus die PDF f_α des Volumenanteils abgeleitet. Die Herleitung betrachtet den Erwartungswert $\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \rangle$ einer Funktion $g(\mathbf{v}, \alpha)$, die von der Geschwindigkeit \mathbf{v} und dem Volumenanteil α abhängt. Die Funktion $g(\mathbf{v}, \alpha)$ ist hierbei als mathematisches Hilfsmittel aufzufassen. Für die Herleitung einer JPDF der Geschwindigkeit und einer Skalargröße hat es

sich als erfolgreich erwiesen, dass diese Hilfsfunktion g ebenfalls von der Geschwindigkeit und der Skalargröße abhängt (vgl. [104], S. 141). Entsprechend wird sie als Funktion der Geschwindigkeit \mathbf{v} und des Volumenanteils α definiert. Die Erhaltungsgleichungen liefern zwei Ausdrücke für den Erwartungswert des Differentials. Der erste Ausdruck ergibt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung. Der zweite Ausdruck wird erhalten, indem die Änderungen in g durch die Änderungen in der Geschwindigkeit \mathbf{v} und dem Volumenanteil α ausgedrückt werden. Die Differenz der beiden Ausdrücke für $\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \rangle$ muss verschwinden. Es ergibt sich ein Ausdruck, wie in Abbildung 3.3 dargestellt. Der Ausdruck verschwindet für eine allgemeine Funktion g , falls der Ausdruck in den Klammern verschwindet. Es wird von einer Lösbarkeitsbeziehung gesprochen. Diese Gleichung ist die Transportgleichung der JPDF $f(\mathbf{v}, \alpha)$ der Geschwindigkeit \mathbf{v} und des Volumenanteils α . In Abbildung 3.3 ist eine beispielhafte JPDF skizziert. Eine Integration der JPDF-Transportgleichung über den Geschwindigkeitsraum ergibt die PDF f_α des Volumenanteils α (vgl. Gleichungen (2.75)). Die PDF für die beispielhafte JPDF ist in Abbildung 3.3 ebenfalls dargestellt.

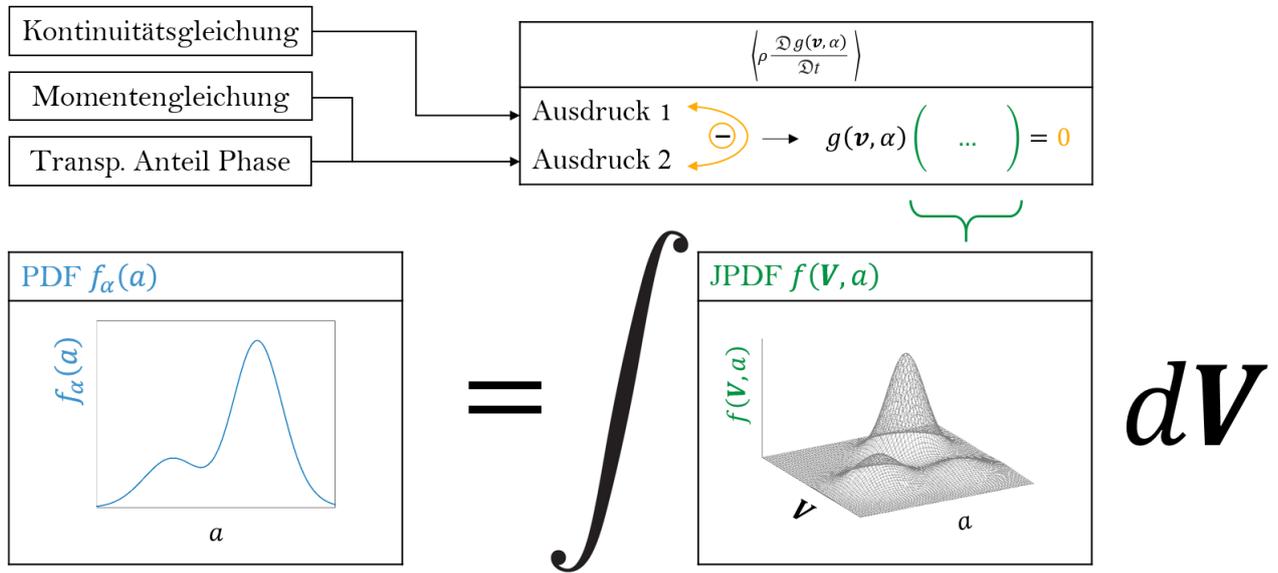


Abbildung 3.3: Vorgehen bei der Herleitung der PDF-Transportgleichung des Volumenanteils. \mathbf{V} und a kennzeichnen hierbei die Ereignisräume der Geschwindigkeit \mathbf{v} und des Volumenanteils α .

Vor der Berechnung des ersten Ausdrucks für $\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \rangle$ wird ein Ausdruck für $\rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t}$ angegeben. Mit der Produktregel ([97], S. 132) und der Definition des totalen Differentials in Gleichung (3.29) ergibt sich

$$\frac{\mathfrak{D}(\rho g)}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g v_j)}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial g}{\partial t} + g \frac{\partial \rho}{\partial t} + g v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial(g v_j)}{\partial x_j}. \quad (3.33)$$

Die Summe des ersten und des letzten Terms auf der rechten Seite in Gleichung (3.33) entspricht $\rho \frac{\mathfrak{D}g}{\mathfrak{D}t}$. Es ergibt sich aus Gleichung (3.33) für $\rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t}$

$$\rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g v_j)}{\partial x_j} - g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right). \quad (3.34)$$

Durch sinnvolles Ergänzen von Gleichung (3.34) kann diese weiter vereinfacht werden

$$\rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g v_j)}{\partial x_j} - g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - S \right) + g \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - g S. \quad (3.35)$$

In Gleichung (3.35) kann im dritten Term auf der rechten Seite der Ausdruck in den Klammern mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung vereinfacht werden. Aus der Kontinuitätsgleichung (3.23) geht mit der Produktregel ([97], S. 132) hervor

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_a \mathbf{v}_a) - S_a = \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla \rho_a + \rho_a \nabla \cdot \mathbf{v}_a - S_a = 0. \quad (3.36)$$

Einsetzen von Gleichung (3.36) in Gleichung (3.35) ergibt die vereinfachte Formulierung

$$\rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho g v_j)}{\partial x_j} + g \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - g S. \quad (3.37)$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.37) kann der erste Ausdruck für $\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \rangle$ berechnet werden. Mit der Definition des Erwartungswerts in Gleichung (2.69) und der JPDF f des Volumenanteils und der Geschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \right\rangle &= \int \int \frac{\partial(\rho g)}{\partial t} f d\mathbf{V} da + \int \int \frac{\partial(\rho g v_j)}{\partial x_j} f d\mathbf{V} da + \int \int g \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} f d\mathbf{V} da - \int \int g S f d\mathbf{V} da = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int \int \rho g f d\mathbf{V} da + \frac{\partial}{\partial x_j} \int \int \rho g v_j f d\mathbf{V} da + \int \int g \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} f d\mathbf{V} da - \int \int g S f d\mathbf{V} da = \\ &= \int \int \rho g \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V} da + \int \int \rho g v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{V} da + \int \int g \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} f d\mathbf{V} da - \int \int g S f d\mathbf{V} da = \\ &= \int \int \rho g \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V} da + \int \int \rho g v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{V} da - \int \int g S f d\mathbf{V} da = \int \int g \left(\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - S f \right) d\mathbf{V} da. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Im zweiten Schritt wurden die Vereinfachungen in den Gleichungen (2.76) verwendet. Der dritte Schritt folgt, da t und x_j unabhängig von \mathbf{V} und a sind (vgl. [71], S. 387). Entsprechend entfällt im vierten Schritt der vorletzte Term, da \mathbf{V} unabhängig von \mathbf{x} ist. Anhang B diskutiert dies detaillierter und stellt Relationen zur Literatur her.

Der zweite Ausdruck kann erhalten werden, indem die Änderungen in $g(\mathbf{v}, \alpha)$ auf die Änderungen in v_j und α bezogen werden

$$\frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial g}{\partial v_j} \frac{\mathfrak{D}v_j}{\mathfrak{D}t} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\mathfrak{D}\alpha}{\mathfrak{D}t}. \quad (3.39)$$

Die Summation über doppelt auftretende Indizes ist dabei zu beachten und wird im Folgenden vorausgesetzt (vgl. [35]). Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.39) kann mit Gleichung (3.31) vereinfacht werden. Aus Gleichung (3.31) folgt

$$v_j \frac{\mathfrak{D}\rho}{\mathfrak{D}t} + \rho \frac{\mathfrak{D}v_j}{\mathfrak{D}t} = \Lambda_j \quad (3.40)$$

$$\frac{\mathfrak{D}v_j}{\mathfrak{D}t} = \frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} \frac{\mathfrak{D}\rho}{\mathfrak{D}t}. \quad (3.41)$$

Mit den Gleichungen (3.30), (3.32) und (3.41) ergibt sich aus Gleichung (3.39) für den Erwartungswert

$$\left\langle \rho \frac{\mathfrak{D}g(\mathbf{v}, \alpha)}{\mathfrak{D}t} \right\rangle = \left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} \frac{\mathfrak{D}\rho}{\mathfrak{D}t} \right) \right\rangle + \left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial \alpha} \Theta \right\rangle = \left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \right\rangle + \left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial \alpha} \Theta \right\rangle. \quad (3.42)$$

Die beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (3.42) werden im Folgenden vereinfacht. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.42) kann analog zu Gleichung (2.74) auch als Integral über den bedingten Erwartungswert von zwei Variablen geschrieben werden

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\partial g(\mathbf{v}, \alpha)}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \right\rangle &= \int \int \left\langle \rho \frac{\partial g(\mathbf{v}, \alpha)}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f d\mathbf{V} da = \\ &= \int \int \rho \frac{\partial g(\mathbf{V}, a)}{\partial V_j} \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f d\mathbf{V} da. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der letzte Schritt in Gleichung (3.43) folgt, da $g(\mathbf{v}, \alpha)$ eine Funktion von \mathbf{v} und α ist und für $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ und $\alpha = a$ auch $\frac{\partial g(\mathbf{v}, \alpha)}{\partial v_j}$ bekannt ist (vgl. [104], S. 141). Die Produktregel ([97], S. 132) liefert

$$\begin{aligned} \int \int \frac{\partial}{\partial V_j} (\rho g(\mathbf{V}, a) \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f) d\mathbf{V} da &= \int \int \frac{\partial g(\mathbf{V}, a)}{\partial V_j} \rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f d\mathbf{V} da + \\ &+ \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f)}{\partial V_j} d\mathbf{V} da, \end{aligned} \quad (3.44)$$

womit sich Gleichung (3.43) weiter vereinfachen lässt

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\partial g(\mathbf{v}, \alpha)}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \right\rangle &= \int \int \frac{\partial}{\partial V_j} (\rho g(\mathbf{V}, a) \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f) d\mathbf{V} da - \\ &- \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f)}{\partial V_j} d\mathbf{V} da. \end{aligned} \quad (3.45)$$

In ([104], S. 142-143) wird gezeigt, dass der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.45) entfällt, falls g monoton ist für $\mathbf{V} \rightarrow \infty$ und der Erwartungswert $\left\langle \rho g \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \right\rangle$ existiert. Aus Gleichung (3.45) folgt für den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.42)

$$\left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial v_j} \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \right\rangle = - \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f)}{\partial V_j} d\mathbf{V} da. \quad (3.46)$$

Analog folgt für den zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.42)

$$\left\langle \rho \frac{\partial g}{\partial \alpha} \Theta \right\rangle = - \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \langle \Theta \middle| \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} d\mathbf{V} da. \quad (3.47)$$

Aus Gleichung (3.42) ergibt sich mit den Gleichungen (3.46) und (3.47) der zweite Ausdruck für den Erwartungswert $\langle \rho \mathcal{D}g / \mathcal{D}t \rangle$

$$\begin{aligned} \left\langle \rho \frac{\mathcal{D}g}{\mathcal{D}t} \right\rangle &= - \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f)}{\partial V_j} d\mathbf{V} da - \int \int g(\mathbf{V}, a) \frac{\partial (\rho \langle \Theta \middle| \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} d\mathbf{V} da = \\ &= - \int \int g(\mathbf{V}, a) \left(\frac{\partial (\rho \left\langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) \middle| \mathbf{V}, a \right\rangle f)}{\partial V_j} + \frac{\partial (\rho \langle \Theta \middle| \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} \right) d\mathbf{V} da. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für $\langle \rho \frac{\partial g}{\partial t} \rangle$ in den Gleichungen (3.38) und (3.48) ergibt

$$\int \int g \left(\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - S f \right) d\mathbf{V} da = - \int \int g(\mathbf{V}, a) \left(\frac{\partial(\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial V_j} + \frac{\partial(\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} \right) d\mathbf{V} da \quad (3.49)$$

bzw. umgeformt

$$\int \int g \left(\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - S f + \frac{\partial(\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial V_j} + \frac{\partial(\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} \right) d\mathbf{V} da = 0. \quad (3.50)$$

Gleichung (3.50) ist für eine beliebige Funktion $g(\mathbf{v}, \alpha)$ gültig, falls der Ausdruck in den Klammern verschwindet

$$\rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - S f + \frac{\partial(\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial V_j} + \frac{\partial(\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} = 0. \quad (3.51)$$

Gleichung (3.51) ist die allgemeine Transportgleichung der JPDF f . Für das Zwei-Fluid-Modell werden die beiden letzten Terme der linken Seite spezifiziert. Der vierte Term in Gleichung (3.51) kann mit den Ausdrücken in Tabelle 3.1 berechnet werden. Für $\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle &= \bar{\rho}_d \langle \left(\frac{1}{\bar{\rho}_d \alpha_d} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \bar{p}_d) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d (\bar{\tau}_{d,ij} + \tau_{d,ij}^T)) + \alpha_d \bar{p}_d \hat{g}_{d,j} + M_{d,j} \right) - \frac{\hat{v}_{d,j} S_d}{\alpha_d \bar{\rho}_d} \right) | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle = \\ &= \bar{\rho}_d \langle \left(\frac{1}{\bar{\rho}_d \alpha_d} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d (\bar{p}_d) + \bar{p}_d') \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d (\bar{\tau}_{d,ij} + \tau_{d,ij}^T)) + \alpha_d \bar{p}_d \hat{g}_{d,j} + M_{d,j} \right) - \frac{\hat{v}_{d,j} S_d}{\alpha_d \bar{\rho}_d} \right) | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \bar{p}_d) + \bar{p}_d \hat{g}_{d,j} + M_{d,j} + \bar{\rho}_d \langle \left(\frac{1}{\bar{\rho}_d \alpha_d} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \bar{p}_d') + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d (\bar{\tau}_{d,ij} + \tau_{d,ij}^T)) \right) - \frac{\hat{v}_{d,j} S_d}{\alpha_d \bar{\rho}_d} \right) | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle, \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei Schwankungen im mittleren Druck \bar{p}_d' mit dem Mittelwert $\langle \bar{p}_d \rangle$ und der Fluktuation \bar{p}_d' eingeführt wurden. Weiterhin wurde die Definition der phasengemittelten Dichte in Gleichung (2.11) verwendet. Im letzten Schritt in Gleichung (3.52) wurde genutzt, dass $\langle \bar{p}_d \rangle$ eine Konstante ist und \hat{g}_j mit $\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{V}}$ und $\alpha_d = a$ eindeutig bestimmt ist. Entsprechendes gilt für $M_{d,j}$. Mit Hilfe der Ausdrücke in Tabelle 3.1, Gleichung (3.25) und der Definition der phasengemittelten Dichte in Gleichung (2.11) ergibt sich für $\rho \langle \Theta | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle$ in Gleichung (3.51)

$$\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle = \bar{\rho}_d \frac{S_d}{\bar{\rho}_d} = \alpha_d S_d. \quad (3.53)$$

Mit den Ausdrücken in Tabelle 3.1, der Definition der phasengemittelten Dichte in Gleichung (2.11) sowie den Gleichungen (3.52) und (3.53) ergibt sich für die Transportgleichung (3.51) der JPDF im Zwei-Fluid-Modell

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_d \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\rho}_d \hat{V}_{d,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - S_d f + \frac{\partial}{\partial \hat{V}_{d,j}} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \langle \bar{p}_d \rangle) + \bar{p}_d \hat{g}_{d,j} + M_{d,j} + \right. \\ \left. \bar{\rho}_d \langle \left(\frac{1}{\bar{\rho}_d \alpha_d} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \bar{p}_d') + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d (\bar{\tau}_{d,ij} + \tau_{d,ij}^T)) \right) - \frac{\hat{v}_{d,j} S_d}{\alpha_d \bar{\rho}_d} \right) | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle \right) f | \hat{\mathbf{V}}, a \rangle + \frac{\partial \alpha_d S_d f}{\partial a} = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Ein Umstellen der Terme ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{\rho}_d \hat{V}_{d,j} \frac{\partial f}{\partial x_j} - S_d f + \frac{\partial}{\partial \hat{V}_{d,j}} \left(\left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \langle \bar{\rho}_d \rangle) + \bar{\rho}_d \hat{g}_{d,j} + M_{d,j} \right] f \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \hat{V}_{d,j}} \left(\bar{\rho}_d \left\langle \left(\frac{1}{\bar{\rho}_d \alpha_d} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_d \bar{\rho}_d') + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_d (\bar{\tau}_{d,ij} + \tau_{d,ij}^T)) \right) - \frac{\hat{v}_{d,j} S_d}{\alpha_d \bar{\rho}_d} \right) \middle| \hat{\mathbf{V}}, a \right\rangle f \middle| \hat{\mathbf{V}}, a \right\rangle \right) + \frac{\partial \alpha_d S_d f}{\partial a} = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Gleichung (3.55) ist die Transportgleichung der JPDF f für den Volumenanteil α und die Geschwindigkeit \hat{v}_d im Zwei-Fluid-Modell. Der Transport im physikalischen Raum wird durch die ersten drei Terme beschrieben (vgl. [104], S. 142). Der Transport im Geschwindigkeitsraum $\hat{\mathbf{V}}$ wird durch den vierten und fünften Term repräsentiert (vgl. [104], S. 142). Der letzte Term stellt den Transport im Volumenanteilsraum a dar (vgl. [104], S. 142). Da $\langle \bar{\rho}_d \rangle$, S_d und ρ_d von α_d abhängen, könnte aus Gleichung (3.55) die JPDF f bestimmt werden, wenn die bedingten Erwartungswerte im fünften Term bekannt wären (vgl. [104], S. 142).

Alternativ zur Approximation der bedingten Erwartungswerte kann aus der JPDF-Transportgleichung (3.55) die Transportgleichung der PDF des Volumenanteils f_α durch Integration über den Geschwindigkeitsraum $\hat{\mathbf{V}}$ erhalten werden. Für die Integration wird die Transportgleichung (3.51) der allgemeinen JPDF genutzt

$$\underbrace{\int \rho \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V}}_I + \underbrace{\int \rho v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{V}}_{II} + \underbrace{\int \frac{\partial (\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial v_j} d\mathbf{V}}_{III} - \underbrace{\int S f d\mathbf{V}}_{IV} + \underbrace{\int \frac{\partial (\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} d\mathbf{V}}_V = 0. \quad (3.56)$$

Die Integration über den Geschwindigkeitsraum führt dazu, dass f nicht mehr von \mathbf{v} abhängt (vgl. Kapitel 1.2). Die JPDF ist damit nur noch eine PDF von α . Unter Berücksichtigung von $\int f d\mathbf{V} = f_\alpha$ (vgl. Gleichung (2.75)) können die Terme in Gleichung (3.56) vereinfacht werden.

Term I

$$\int \rho \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V} = \rho \int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{V} = \rho \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}, \quad (3.57)$$

wobei genutzt wurde, dass ρ und t unabhängig von \mathbf{V} sind (vgl. [104], S. 134, 142, 187).

Term II

Da \mathbf{V} unabhängig von x_j und ρ ist, dürfen Differentiation und Integration vertauscht werden. Mit $f = f_\alpha f_{v|\alpha}$ (vgl. Gleichung (2.71)) gilt für den zweiten Term

$$\int \rho v_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int \rho v_j f_\alpha f_{v|\alpha} d\mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle \rho v_j | a \rangle f_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \langle v_j | a \rangle f_\alpha \right). \quad (3.58)$$

Im zweiten Schritt wurde die Beziehung der Gleichung (2.73) genutzt. Da ρ eine Funktion von α ist, kann sie im letzten Schritt aus dem Erwartungswert gezogen werden (vgl. Gleichung (3.43); [104], S. 141).

Term III

Für den dritten Term folgt mit $f(\alpha, \hat{\mathbf{v}} = -\infty) = f(\alpha, \hat{\mathbf{v}} = +\infty) = 0$ (vgl. [79], S. 7)

$$\int \frac{\partial (\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial v_j} d\mathbf{V} = \left[\rho \langle \left(\frac{\Lambda_j}{\rho} - \frac{v_j}{\rho} S \right) | \mathbf{V}, a \rangle f \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0. \quad (3.59)$$

Term IV

Der vierte Term kann mit Hilfe der Gleichung (2.73) und $f = f_\alpha f_{v|\alpha}$ (vgl. Gleichung (2.71)) vereinfacht werden

$$-\int S f d\mathbf{V} = -\int S f_\alpha f_{v|\alpha} d\mathbf{V} = -\langle S | a \rangle f_\alpha. \quad (3.60)$$

Term V

Der fünfte Term kann analog vereinfacht werden, wobei der bedingte Erwartungswert nur noch von a abhängt (vgl. Gleichung (2.74); [104], S. 142, 187).

$$\int \frac{\partial(\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f)}{\partial a} d\mathbf{V} = \int \frac{\partial(\rho \langle \Theta | \mathbf{V}, a \rangle f_\alpha f_{v|\alpha})}{\partial a} d\mathbf{V} = \frac{\partial \langle \rho \Theta | a \rangle f_\alpha}{\partial a}. \quad (3.61)$$

Mit den oben genannten Vereinfachungen ergibt sich für Gleichung (3.56)

$$\rho \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \langle v_j | a \rangle f_\alpha \right) - \langle S | \alpha = a \rangle f_\alpha + \frac{\partial \langle \rho \Theta | a \rangle f_\alpha}{\partial a} = 0. \quad (3.62)$$

Gleichung (3.62) ist die Transportgleichung der allgemeinen PDF des Volumenanteils f_α . Für das Zwei-Fluid-Modell ergibt sich entsprechend Tabelle 3.1

$$\bar{\rho}_d \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho}_d \langle \hat{v}_{d,j} | a \rangle f_\alpha \right) - \langle S_d | a \rangle f_\alpha + \frac{\partial \langle S_d | a \rangle f_\alpha}{\partial a} = 0. \quad (3.63)$$

Mit der Produktregel ([97], S. 132) können die beiden letzten Terme auf der linken Seite zusammengefasst werden

$$-\langle S_d | a \rangle f_\alpha + \langle S_d | a \rangle f_\alpha + a \frac{\partial \langle S_d | a \rangle f_\alpha}{\partial a} = a \frac{\partial \langle S_d | a \rangle f_\alpha}{\partial a}, \quad (3.64)$$

so dass sich für Gleichung (3.63) ergibt

$$\underbrace{\bar{\rho}_d \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho}_d \langle \hat{v}_{d,j} | a \rangle f_\alpha \right)}_{II} + \underbrace{a \frac{\partial \langle S_d | a \rangle f_\alpha}{\partial a}}_{III} = 0. \quad (3.65)$$

Im Drift-Flux-Modell ergibt sich für $\langle \rho \Theta | a \rangle$ entsprechend Tabelle 3.1

$$\langle \rho_m \Theta | a \rangle = \langle \rho_m (S_d / \bar{\rho}_d - \nabla \cdot (\mathbf{J}_a)) | a \rangle. \quad (3.66)$$

Die PDF-Transportgleichung (3.62) lautet im Drift-Flux-Modell mit Tabelle 3.1 und dem Ausdruck in Gleichung (3.66)

$$\rho_m \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho_m \langle v_{m,j} | a \rangle f_\alpha \right) + \frac{\partial \langle \rho_m (S_d / \bar{\rho}_d - \nabla \cdot (\mathbf{J}_a)) | a \rangle f_\alpha}{\partial a} = 0. \quad (3.67)$$

Die Form von Gleichung (3.67) entspricht der Form der PDF-Transportgleichung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich (vgl. Gleichung (2.77); [104], S. 187).

Im Folgenden wird die PDF-Transportgleichung (3.65) des Zwei-Fluid-Modells weiter vereinfacht. Sie enthält die Mittelwerte $\bar{\rho}_d$, $\hat{v}_{d,j}$ und α_d , wie sie bereits in den Gleichungen (3.14), (3.16) und (3.17) enthalten sind. Im Sinne einer einfachen Schreibweise wird im Folgenden auf den Index $_d$ verzichtet, so dass die Beziehungen $\bar{\rho} = \bar{\rho}_d$, $\hat{v}_j = \hat{v}_{d,j}$ und weiterhin $\alpha = \alpha_d$ gelten. Gleichung (3.65) kann weiter vereinfacht werden, wenn sie mit dichtegetichteten Größen geschrieben wird. Hierfür sind zunächst Terme zur Kennzeichnung der Schwankungen einzuführen. Werden mit Hilfe der Stochastischen Feldmethode Schwankungen α' im Mittelwert $\alpha = \bar{\alpha} + \alpha'$ berücksichtigt, bedingt dies gleichzeitig Schwankungen in anderen Mittelwerten, wie der mittleren Dichte $\bar{\rho} = \bar{\bar{\rho}} + \bar{\rho}'$. Der ge-

mittelte Volumenanteil ist hierbei mit $\bar{\alpha}$ und die doppelt-gemittelte Dichte mit $\bar{\bar{\rho}}$ gekennzeichnet. Entsprechend können Schwankungen für den Mittelwert der Geschwindigkeit \hat{v}_j eingeführt werden

$$\hat{v}_j = \hat{v}_j + \hat{v}_j'', \quad (3.68)$$

wobei analog zur ersten Mittelung (vgl. Gleichung (2.15)) eine dichtegewichtete Mittelung verwendet wurde. Gilt die Annahme eines inkompressiblen Fluids $\bar{\rho} = \text{const.}$ (vgl. [55], S. 46, 158, 212; [80], S. 686), sind die Schwankungen α' im Volumenanteil mit den Schwankungen in der mittleren Dichte $\bar{\rho}'$ korreliert (vgl. Gleichung (2.11))

$$\bar{\bar{\rho}} + \bar{\rho}' = \bar{\rho} = \bar{\alpha} \bar{\bar{\rho}} = (\bar{\alpha} + \alpha') \bar{\bar{\rho}} = \bar{\alpha} \bar{\bar{\rho}} + \alpha' \bar{\bar{\rho}}. \quad (3.69)$$

Ein Umstellen von Gleichung (3.69) ergibt mit den Gleichungen (2.11), (2.42) und $\bar{\bar{\rho}} = \bar{\rho}$ die Beziehung

$$\bar{\rho}' = \bar{\alpha} \bar{\bar{\rho}} + \alpha' \bar{\bar{\rho}} - \bar{\rho} = \bar{\alpha} \bar{\bar{\rho}} + \alpha' \bar{\bar{\rho}} - \bar{\rho} = \bar{\rho} - \bar{\rho} + \alpha' \bar{\bar{\rho}} = \alpha' \bar{\bar{\rho}}. \quad (3.70)$$

Vor einer Einführung der Schwankungen in die PDF-Transportgleichung (3.65) erfolgt eine ausführliche Analyse der Geschwindigkeitsfluktuationen. Abbildung 3.4 demonstriert die Einführung der dichtegewichteten Geschwindigkeit \hat{v}_j an einer exemplarischen JPDF f des Volumenanteils α und der Geschwindigkeit \hat{v} . Dargestellt ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für Kombinationen der Geschwindigkeit \hat{v}_j und der Dichte $\bar{\rho}$. Die Geschwindigkeit \hat{v}_j kann, wie in Gleichung (3.68) gezeigt, in ihren Mittelwert \hat{v}_j und eine Fluktuation \hat{v}_j'' zerlegt werden. Mögliche Fluktuationen sind in Abbildung 3.4 angedeutet. Für den Mittelwert \hat{v}_j gilt an jeder Stelle $\alpha = a$ mit der Dichte

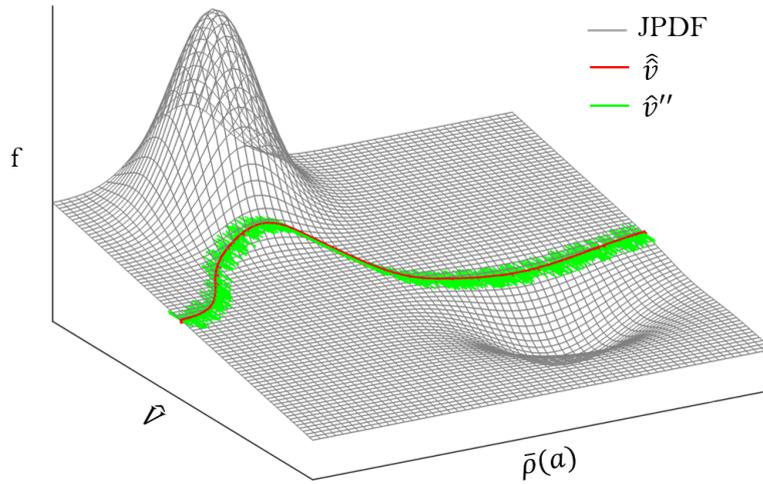


Abbildung 3.4: Dichtegewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit \hat{v}_j und der Dichte $\bar{\rho}(\alpha)$. Der Index \cdot_j wurde zur besseren Lesbarkeit nicht innerhalb der Abbildung verwendet.

$\bar{\rho}(a)$ entsprechend Gleichung (2.13) mit der Definition der Phasenmittelung in Gleichung (2.11)

$$\hat{v}_j = \frac{\bar{\bar{\rho}} \hat{v}_j}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\bar{\rho}} \alpha \hat{v}_j}{\bar{\rho} \alpha}. \quad (3.71)$$

Da \hat{v}_j im Zwei-Fluid-Modell bereits mit einer dichtegewichteten Mittelung definiert wurde (vgl. Gleichungen (2.13), (2.15)), kann \hat{v}_j als doppelt-dichtegewichtete Geschwindigkeit bezeichnet werden. Es sei hervorgehoben,

dass Gleichung (3.71) die Mittelung von \hat{v}_j an der Stelle $\bar{\rho}(\alpha)$ darstellt. Der Mittelwert \hat{v}_j ist der Mittelwert aller Geschwindigkeiten für ein bestimmtes $\bar{\rho}(\alpha)$

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(a)) = \langle \hat{v}_j | \bar{\rho}(a) \rangle. \quad (3.72)$$

In Abbildung 3.4 ist der Mittelwert $\hat{v}_j(\bar{\rho}(a))$ für alle $\bar{\rho}(a)$ rot markiert. Die Gesamtheit aller Markierungen ergibt die rote Kurve für $\hat{v}_j(\bar{\rho}(a))$. Die ungemittelte Geschwindigkeit einer bestimmten Dichte $\bar{\rho}(a)$ kann entsprechend Gleichung (3.68) in einen Mittelwert und eine Fluktuation zerlegt werden

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) = \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) + \hat{v}_j'(\bar{\rho}(\alpha)). \quad (3.73)$$

Die Anwendung des Operators $\langle \cdot | \bar{\rho}(a) \rangle$ auf Gleichung (3.73) erlaubt eine Aussage über $\langle \hat{v}_j'(\bar{\rho}(a)) | \bar{\rho}(a) \rangle$ (vgl. [67], S. 620)

$$\langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle = \langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle + \langle \hat{v}_j'(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle. \quad (3.74)$$

Die linke Seite von Gleichung (3.74) kann mit Gleichung (3.72) vereinfacht werden. Im ersten Term auf der rechten Seite in Gleichung (3.74) wird der Operator auf den Mittelwert $\hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha))$ angewandt. Der Mittelwert \hat{v}_j darf aus dem Operator gezogen werden, so dass gilt $\langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle = \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha))$. Gleichung (3.74) vereinfacht sich zu

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) = \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) + \langle \hat{v}_j'(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle. \quad (3.75)$$

Aus Gleichung (3.75) kann direkt abgelesen werden

$$\langle \hat{v}_j'(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle = 0. \quad (3.76)$$

Der Erwartungswert der dichtegewichteten Fluktuationen unter der Bedingung eines bestimmten $\bar{\rho}(\alpha)$ verschwindet demnach.

Im Zwei-Fluid-Modell besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Volumenanteil α und der Dichte $\rho(\alpha)$. Für Fluide konstanter Dichte gilt $\bar{\rho} = \text{const.}$ (vgl. [55], S. 46, 158, 212; [80], S. 686), womit Gleichung (3.71) mit der Rechenregel in Gleichung (2.42) weiter vereinfacht werden kann

$$\hat{v}_j = \frac{\bar{\rho} \overline{\alpha \hat{v}_j}}{\bar{\rho} \overline{\alpha}} = \frac{\overline{\alpha \hat{v}_j}}{\overline{\alpha}}. \quad (3.77)$$

Die dichtegewichtete Mittelung \hat{v}_j in Gleichung (3.77) kann aufgrund der Korrelation zwischen dem Volumenanteil α und der mittleren Dichte $\bar{\rho}$ in der Definition der Phasenmittelung (2.11) als eine mit dem Volumenanteil α gewichtete Mittelung geschrieben werden. Analog zur dichtegewichteten Mittelung in Gleichung (2.13), bei der die Mittelung aus Fluktuation und Dichte verschwindet (vgl. Gleichung (2.46)), ist die Mittelung aus der Fluktuation der Geschwindigkeit \hat{v}_j' und dem Volumenanteil α null

$$\overline{\hat{v}_j' \alpha} = 0. \quad (3.78)$$

Wegen der linearen Abhängigkeit der Dichte $\bar{\rho}(\alpha)$ vom Volumenanteil α (vgl. Gleichung (2.11))

$$\bar{\rho}(\alpha) \sim \alpha \quad (3.79)$$

kann der bedingte Erwartungswert der Dichte als bedingter Erwartungswert des Volumenanteils geschrieben werden

$$\langle \cdot | \bar{\rho}(a) \rangle = \langle \cdot | a \rangle. \quad (3.80)$$

Die Gleichungen (3.72) - (3.76) können erneut formuliert werden, wobei an Stelle der bedingten Erwartungswerte der Dichte $\bar{\rho}(a)$ bedingte Erwartungswerte des Volumenanteils α verwendet werden:

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(a)) = \langle \hat{v}_j | a \rangle \quad (3.81)$$

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) = \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) + \hat{v}_j''(\bar{\rho}(\alpha)) \quad (3.82)$$

$$\langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle = \langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle + \langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle \quad (3.83)$$

$$\hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) = \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) + \langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle \quad (3.84)$$

$$\langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle = 0. \quad (3.85)$$

Gleichung (3.85) kann auch verkürzt als

$$\langle \hat{v}_j'' | a \rangle = 0 \quad (3.86)$$

formuliert werden.

Nach dieser Diskussion der Fluktuationen im Zwei-Fluid-Modell kann Gleichung (3.65) in dichtegewichteten Variablen (bzw. volumenanteilgewichteten Variablen, wie in Gleichung (3.77) gezeigt) geschrieben werden. Es sei angemerkt, dass weiterhin, im Sinne einer einfachen Schreibweise, der Index \cdot_d entfällt und $\bar{\rho}_d = \bar{\rho}$, $\hat{v}_{d,j} = \hat{v}_j$, $S_d = S$ gelten. Für die entsprechenden Terme in Gleichung (3.65) ergibt sich:

Term I

Mit der Definition dichtegewichteter PDFs in Gleichung (2.78) folgt für die PDF f_α

$$\bar{\rho} \hat{f}_\alpha = \bar{\rho} f_\alpha. \quad (3.87)$$

Für den ersten Term ergibt sich damit

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial f_\alpha \bar{\rho}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho} \hat{f}_\alpha}{\partial t}. \quad (3.88)$$

Im ersten Schritt darf die Dichte $\bar{\rho}$ in die Differentiation gezogen werden, da sie lediglich von α abhängt (vgl. Gleichung (2.11); [104], S. 135, 142, 187).

Term II

Für den zweiten Term ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.83), (3.85), (3.87) und $\langle \hat{v}_j | a \rangle = \hat{v}_j$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} \langle \hat{v}_j | \alpha = a \rangle f_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{\rho} (\langle \hat{v}_j(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle + \langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}(\alpha)) | a \rangle) f_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\hat{v}_j \bar{\rho} \hat{f}_\alpha \right). \quad (3.89)$$

Term III

Der dritte Term kann mit Gleichung (3.87) umgeformt werden

$$a \frac{\partial \langle S | \alpha = a \rangle f_\alpha}{\partial a} = a \frac{\partial \langle S | a \rangle \bar{\rho} \frac{\hat{f}_\alpha}{\bar{\rho}}}{\partial a}. \quad (3.90)$$

Die PDF-Transportgleichung in Gleichung (3.65) kann unter Verwendung der Umformungen in den Gleichungen (3.88), (3.89) und (3.90) in dichtegewichteten Größen geschrieben werden

$$\frac{\partial \overline{\rho} \hat{f}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{v}_j \overline{\rho} \hat{f}_\alpha)}{\partial x_j} + a \frac{\partial (\langle S | a \rangle \overline{\rho} \frac{\hat{f}_\alpha}{\overline{\rho}})}{\partial a} = 0. \quad (3.91)$$

Gleichung (3.91) ist die Transportgleichung der PDF \hat{f}_α des Volumenanteils in dichtegewichteter Form.

3.6 Unterschiede zur PDF-Transportgleichung für Skalargrößen im Verbrennungsbereich

Die PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell in Gleichung (3.91) unterscheidet sich von der PDF-Transportgleichung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich in Gleichung (2.79). Bei einem Vergleich sind folgende Auffälligkeiten festzustellen:

- Beide Gleichungen weisen identische Formulierungen für den zeitabhängigen Term und den Konvektionsterm auf, falls $\overline{\rho} = \langle \rho \rangle$ und $\hat{v}_j = \hat{U}_i$.
- In Gleichung (3.91) enthält der Quellterm im a -Raum einen zusätzlichen Faktor $1/\overline{\rho}$. Die Quellterme in den Grundgleichungen (vgl. Gleichungen (2.83), (3.17)) unterscheiden sich bereits um diesen Faktor, so dass sich die PDF-Transportgleichungen ebenfalls um diesen unterscheiden. Der Quellterm im a -Raum enthält im Vergleich zu Gleichung (2.79) den zusätzlichen Vorfaktor a . In Gleichung (3.64) wurde gezeigt, dass er damit einen Quellterm im physikalischen Raum enthält.
- Gleichung (3.91) enthält im Gegensatz zu Gleichung (2.79) keinen Micromixing-Term, der den diffusiven Massenfluss repräsentiert (vgl. Kapitel 2.4.3.2).
- Gleichung (2.79) enthält unter Berücksichtigung von Gleichung (2.80) eine zweite Ableitung, die den Einfluss durch mittlere turbulente Advektion beschreibt. Diese ist nicht in der PDF-Transportgleichung (3.91) enthalten, so dass ihre Form damit nicht der Form der Fokker-Planck-Gleichung (2.102), sondern einer Liouville-Gleichung (2.103) mit Quelltermen entspricht. Da die Koeffizienten stochastischen Schwankungen unterliegen können (vgl. Kapitel 3.7), handelt es sich um eine stochastische Liouville-Gleichung.

Die Existenz von Unterschieden in der PDF-Transportgleichung ist nicht überraschend, da die Herleitungen in [104] und Kapitel 3.5 von unterschiedlichen Erhaltungsgleichungen ausgehen. Die beiden oben genannten aber noch nicht diskutierten Unterschiede, der entfallende Micromixing-Term und der fehlende Term der mittleren turbulenten Advektion, werden im Folgenden analysiert. In Kapitel 3.6.1 wird auf das Entfallen des Micromixing-Terms eingegangen. Kapitel 3.6.2 zeigt, dass die PDF-Transportgleichung des Volumenanteils im Zwei-Fluid-Modell nicht analog zur PDF-Transportgleichung (2.79) einer Skalargröße im Verbrennungsbereich formuliert werden kann, da ein Term für die mittlere turbulente Advektion zu Konsistenzproblemen führte. Kapitel 3.6.4 diskutiert die Ursachen für sein Entfallen im Zwei-Fluid-Modell.

3.6.1 Entfallen des Micromixing-Terms

Teile dieses Kapitels wurden bereits in [109] und [112] veröffentlicht. Könnte die Transportgleichung der PDF f_α für den Volumenanteil analog zu Gleichung (2.79) formuliert werden, lautete sie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{U}_i \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial a} (Q_\alpha(a) \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_i^a}{\partial x_i} \middle| a \right\rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i'' \middle| a \rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha), \quad (3.92)$$

und enthielte als ersten Term auf der rechten Seite einen Micromixing-Term, der den diffusiven Massenfluss beschreibt². In Gleichung (3.92) ist a der Ereignisraum der Zufallsgröße α . Ausgangspunkt für die Herleitung dieser PDF-Transportgleichung sind die Gleichungen (2.83) (vgl. [104], S. 141-142, 187). Der diffusive Massenfluss in Gleichung (3.92) resultiert aus dem diffusiven Massenfluss in der skalaren Ausgangsgleichung (2.83) (vgl. [119], S. 2; [104], S. 134-135, 141-142, 187). Die skalare Ausgangsgleichung enthält im Zwei-Fluid-Modell keinen diffusiven Massenfluss (vgl. Gleichung (3.25); Tabelle 3.1). Entsprechend kann im Zwei-Fluid-Modell die PDF-Transportgleichung des Volumenanteils keinen diffusiven Massenfluss enthalten und der Micromixing-Term entfällt. Entsprechendes gilt für die zugehörige SPDE. Ein entfallender Micromixing-Term ergibt für die PDF-Transportgleichung (3.92)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{U}_i \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial a} (Q_\alpha(a) \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha) = - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i'' | a \rangle \langle \rho \rangle \hat{f}_\alpha). \quad (3.93)$$

Für die zugehörige SPDE (2.96) ergibt sich

$$\frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t} + \hat{U}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} + \sqrt{2D_i} \dot{W}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) = Q(\alpha_d^{(n)}). \quad (3.94)$$

Parallel zur vorliegenden Arbeit wurde das Entfallen eines Micromixing-Terms ebenfalls durch [17] in einem ähnlichen Kontext herausgefunden. In ([89], S. 16) wurde ebenfalls kein Micromixing-Term verwendet.

3.6.2 Konsistenzprobleme bei Anwendung der Stochastischen Feldmethode für Skalargrößen in der Verbrennung

Innerhalb des Kapitels 3.6.2 wird gezeigt, dass es zu Konsistenzproblemen führen würde, wenn die PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell der PDF-Transportgleichung (2.79) für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich entspräche. Das Entfallen eines Micromixing-Terms (vgl. Kapitel 3.6.1) wird innerhalb des Kapitels 3.6.2 berücksichtigt. Die Inkonsistenzen können durch Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils auf zwei Methoden gezeigt werden:

- durch Ensemble-Mittelung der Transportgleichungen für die samples
- durch Integration der PDF-Transportgleichung.

Entspräche die PDF-Transportgleichung des Volumenanteils im Zwei-Fluid-Modell der PDF-Transportgleichung für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich, wäre Gleichung (3.93) die PDF-Transportgleichung und (3.94) die zugehörige SPDE. Die Information eines entfallenden Micromixing-Terms entsprechend Kapitel 3.6.1 wurde hierbei verwendet.

3.6.2.1 Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils durch Ensemble-Mittelung der Transportgleichungen für die samples

Teile dieses Kapitels wurden bereits in [109] und [112] veröffentlicht. In Gleichung (2.85) wurde der Ensemble-Mittelungsoperator $\langle \cdot \rangle_N$ bereits eingeführt. Zur einfacheren Schreibweise wird im Folgenden auf den Index verzichtet. Mit dem Ensemble-Mittelungsoperator kann innerhalb einer Rechenzelle aus N samples für den Volumenanteil $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}$ der mittlere Volumenanteil $\langle \alpha \rangle$ berechnet werden. Gleichung (2.84) zeigt, dass hierdurch eine

² Diese Analogie wurde in [26], [107] angenommen, da die SPDE des Volumenanteils analog zur SPDE einer Skalargröße in der Verbrennung formuliert wurde (vgl. Gleichungen (2.94), (2.96)).

PDF approximiert wird. Wird der Ensemble-Mittelungsoperator auf die SPDE in Gleichung (3.94) angewandt, kann die Transportgleichung des mittleren Volumenanteils hergeleitet werden

$$\left\langle \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t} + \hat{U}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} + \sqrt{2D_t} \dot{W}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} - \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \langle Q(\alpha_d^{(n)}) \rangle. \quad (3.95)$$

Da der Ensemble-Mittelungsoperator in Gleichung (2.85) mit Hilfe einer Summe definiert ist, kann dieser in Gleichung (3.95) auf jeden Summanden angewendet werden

$$\left\langle \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \hat{U}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \sqrt{2D_t} \dot{W}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \langle Q(\alpha_d^{(n)}) \rangle. \quad (3.96)$$

Zur Vereinfachung des ersten und zweiten Terms auf der linken Seite in Gleichung (3.96) können die Rechenregeln in den Gleichungen (2.76) verwendet werden. Bei der Vereinfachung des zweiten Terms kann genutzt werden, dass die Geschwindigkeit \hat{U} , mit der ein sample transportiert wird, in jedem stochastischen Feld identisch ist. Die Umformung des dritten Terms auf der linken Seite in Gleichung (3.96) erfolgt unter Berücksichtigung der Eigenschaften einer Ito-Interpretation. Hierfür muss zunächst der Begriff einer nicht-antizipierenden Funktion eingeführt werden. Sei $G(t)$ eine „nicht-antizipierende“ (engl.: „nonanticipating“ ([41], S. 86)) Funktion, die statistisch unabhängig von $W(t_1) - W(t)$ ist für zwei Zeitpunkte $t < t_1$ ([41], S. 86). Die Funktion $G(t)$ ist demnach statistisch unabhängig von dem Verhalten des Wiener-Prozesses in der Zukunft von t ([41], S. 86). Wird $G(t)$ mit $t_0 < t$ (vgl. [41], S. 83) über die Zeit integriert, gilt für die Ito-Interpretation des stochastischen Integrals ([41], S. 90)

$$\left\langle \int_{t_0}^t G(t') dW(t') \right\rangle = 0. \quad (3.97)$$

Entsprechend entfällt der dritte Term auf der linken Seite in Gleichung (3.96) mit $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ und $G(t) = \sqrt{2D_t} \frac{1}{dt} \frac{\partial \alpha_d}{\partial x_i}$, wenn Gleichung (3.96) in der Zeit gelöst wird. Anschaulicher wird das Entfallen des dritten Terms auf der linken Seite in Gleichung (3.96), wenn dW in $\dot{W} = \frac{dW}{dt}$ durch Gleichung (2.100) approximiert wird. Da für den Erwartungswert gaußverteilter Zufallszahlen gilt

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad (3.98)$$

ergibt sich für den dritten Term auf der linken Seite in Gleichung (3.96) unter der Annahme einer Unabhängigkeit von $\frac{\partial \alpha_d}{\partial x_i}$ und $\xi_i(t)$ sowie $D_t = \text{const.}$

$$\left\langle \sqrt{2D_t} \dot{W}_i \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \sqrt{2D_t} \frac{\xi_i(t)}{\sqrt{dt}} \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right\rangle = \sqrt{2D_t} \frac{\langle \xi_i(t) \rangle}{\sqrt{dt}} \left\langle \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right\rangle = 0. \quad (3.99)$$

Gleichung (3.96) kann mit oben genannten Umformungen vereinfacht werden

$$\frac{\partial \langle \alpha_d^{(n)} \rangle}{\partial t} + \hat{U}_i \frac{\partial \langle \alpha_d^{(n)} \rangle}{\partial x_i} - \left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle = \langle Q(\alpha_d^{(n)}) \rangle. \quad (3.100)$$

Gleichung (3.100) ist die Transportgleichung für den Erwartungswert der samples und muss der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils (2.54) im Zwei-Fluid-Modell entsprechen. Ein Vergleich zeigt, dass sich die beiden Gleichungen unterscheiden. Der dritte Term auf der linken Seite in Gleichung (3.100) beschreibt die mittlere turbulente Advektion und existiert in Gleichung (2.54) nicht. Im Konvektionsterm in Gleichung (3.100) ist im Gegensatz zu Gleichung (2.54) die Differentiation nicht auf die Geschwindigkeit angewandt. In ([142], S. 626-627) ist gezeigt, dass der Konvektionsterm in der Transportgleichung einer Skalargröße mit der Kontinuitätsgleichung vereinfacht werden kann. Hierbei wird ausgenutzt, dass die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung 0 entspricht.

Im Zwei-Fluid-Modell ist die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung $S_k \neq 0$ (vgl. Gleichung (2.15)), so dass diese Vereinfachung nicht anwendbar ist. Die Differenzen im Konvektionsterm und im Term für die mittlere turbulente Advektion demonstrieren, dass die Formulierung für die SPDE in Gleichung (3.94) nicht konsistent zum verwendeten Zwei-Fluid-Modell ist.

3.6.2.2 Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils durch Integration der PDF-Transportgleichung

Alternativ zur dichtegewichteten PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil der dispersen Phase α in Gleichung (3.93) kann die PDF-Transportgleichung ohne dichtegewichtete Größen formuliert werden (vgl. Gleichung (2.77); [104], S. 187)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\alpha)f_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(\alpha)\langle U_i | a \rangle f_\alpha) + \frac{\partial}{\partial a}(\rho(\alpha)Q_\alpha(a)f_\alpha) = 0. \quad (3.101)$$

Die Transportgleichung für den mittleren Volumenanteil kann, wie in Kapitel 2.4 beschrieben (vgl. Gleichung (2.66)), aus Gleichung (3.101) durch Multiplikation mit a und Integration über den Ereignisraum a hergeleitet werden

$$\underbrace{\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial t}(\rho(a)f_\alpha) da}_I + \underbrace{\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(a)\langle U_i | a \rangle f_\alpha) da}_II + \underbrace{\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial a}(\rho(a)Q_\alpha(a)f_\alpha) da}_III = 0. \quad (3.102)$$

In Kapitel 1.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass durch die Integration der PDF über a die Abhängigkeit hiervon verloren geht. Es kann eine Aussage über den mittleren Volumenanteil getroffen werden. In der folgenden Herleitung der Transportgleichung des Mittelwerts wird davon ausgegangen, dass der Volumenanteil wie eine Skalargröße behandelt werden kann. Hieraus ergeben sich im Folgenden Widersprüche. In Kapitel 3.6.4 wird auf die Unterschiede zwischen einer PDF-Transportgleichung des Volumenanteils und der PDF-Transportgleichung einer Skalargröße genauer eingegangen.

Für die Integrale in Gleichung (3.102) existieren vereinfachte Formulierungen. Sie werden im Folgenden termweise vorgestellt. Für eine ausführliche Diskussion der Vereinfachungen sei auf Anhang C verwiesen.

Term I

Gleichung (C.2) zeigt, dass für den ersten Term gilt

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial t}(\rho(a)f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial t}(\langle \alpha \rho(\alpha) \rangle). \quad (3.103)$$

Durch eine Erweiterung mit $\langle \rho \rangle$ kann der erste Term auch mit dichtegewichteten Größen geschrieben werden (vgl. Gleichung (2.13))

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial t}(\rho(a)f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \rho \rangle \frac{\langle \alpha \rho(\alpha) \rangle}{\langle \rho \rangle} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \hat{\alpha}). \quad (3.104)$$

Term II

Das Integral im zweiten Term kann mit den Vereinfachungen in Anhang C und den Gleichungen (C.4) und (C.5) entsprechend

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho(a)\langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a \rho(a) V f_{\alpha U}(a, V) dV da \quad (3.105)$$

geschrieben werden. Werden entsprechend Gleichung (2.45) Fluktuationen in a und V berücksichtigt

$$\begin{aligned} V &= \hat{V} + v'' \\ a &= \hat{a} + a'', \end{aligned} \quad (3.106)$$

folgt aus Gleichung (3.105) mit den Vereinfachungen in Anhang C weiter

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\alpha} \langle \rho \rangle \hat{U}_i) + \langle \rho \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle. \quad (3.107)$$

Term III

Der dritte Term in Gleichung (3.102) kann mit den Umformungen in Anhang C und Gleichung (C.10) vereinfacht werden

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial a} (\rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) da = -\langle \rho(\alpha) Q_\alpha(\alpha) \rangle. \quad (3.108)$$

Eine Erweiterung von Gleichung (3.108) um $\langle \rho \rangle$ führt zu einer Formulierung mit dichtegewichteten Größen (vgl. Gleichung (2.13))

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial a} (\rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) da = -\langle \rho \rangle \frac{\langle \rho(\alpha) Q_\alpha(\alpha) \rangle}{\langle \rho \rangle} = -\langle \rho \rangle \hat{Q}_\alpha(\alpha). \quad (3.109)$$

Gleichung (3.102) vereinfacht sich mit Hilfe der Gleichungen (3.104), (3.107) und (3.109) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\langle \rho \rangle \hat{\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\alpha} \langle \rho \rangle \hat{U}_i) + \langle \rho \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle - \langle \rho \rangle \hat{Q}_\alpha(\alpha) = 0. \quad (3.110)$$

Eine Division durch $\langle \rho \rangle$ ergibt für Gleichung (3.110)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\alpha} \hat{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle - \hat{Q}_\alpha(\alpha) = 0. \quad (3.111)$$

Für inkompressible Fluide (vgl. [55], S. 46, 158, 212; [80], S. 686) werden Fluktuationen in der Dichte vernachlässigt (vgl. [9], S. 107) und es gilt $\rho = \text{const.}$ ([55], S. 22). Mit Hilfe der Gleichung (2.13) ist zu sehen, dass für inkompressible Fluide $\hat{\alpha} = \alpha$. Gleichung (3.111) kann damit geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha + \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha \hat{U}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle - \hat{Q}_\alpha(\alpha) = 0. \quad (3.112)$$

Ein Vergleich von Gleichung (3.112) und der Transportgleichung (2.54) des mittleren Volumenanteils im Zwei-Fluid-Modell zeigt die Inkonsistenz. Die Gleichungen unterscheiden sich durch den dritten Term auf der linken Seite in Gleichung (3.112). Es ist der Term der mittleren turbulenten Advektion.

Kapitel 3.6.2 hat gezeigt, dass es zu Konsistenzproblemen führt, wenn die Stochastische Feldmethode für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell analog zur Stochastischen Feldmethode für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich formuliert wird. In Kapitel 3.6.3 erfolgt eine zum Zwei-Fluid-Modell konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode.

3.6.3 Eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell

In Kapitel 3.6.2 wurden Konsistenzprobleme demonstriert, wenn die Stochastische Feldmethode für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell analog zur Beschreibung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich formuliert wird. In Kapitel 3.6.2.1 erfolgte dies durch Herleitung der Transportgleichung (3.100) für den mittleren Volu-

menanteil der dispersen Phase durch Ensemble-Mittelung. Ein Vergleich zur entsprechenden Gleichung (2.54) des Zwei-Fluid-Modells zeigt, dass sich beide Gleichungen um den Term

$$\left\langle \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle \cong \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_{t,k}}{S_{c_t}} \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \right) \right\rangle \quad (3.113)$$

unterscheiden. Für die Umformung in Gleichung (3.113) wurden die Gleichungen (2.81) und (2.82) sowie die Vereinfachung $\langle \rho \rangle = \rho = \text{const.}$ genutzt. Der Term in Gleichung (3.113) entspricht der Form eines Diffusionsterms. In Kapitel 3.6.2.2 wurde die Transportgleichung des mittleren Volumenanteils (3.112) durch Integration der PDF-Transportgleichung (3.101) hergeleitet und mit der entsprechenden Gleichung (2.54) des Zwei-Fluid-Modells verglichen. Die beiden Gleichungen unterscheiden sich durch den Term

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle \cong - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v_{t,k}}{S_{c_t}} \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial x_i} \right). \quad (3.114)$$

In Gleichung (3.114) wurde das „gradient-diffusion model“ ([104], S. 187) aus Gleichung (2.50) genutzt, so dass die Form eines Diffusionsterms entsprechend Gleichung (3.113) vorliegt.

Ein Diffusionsterm wäre ebenfalls in der Kontinuitätsgleichung (2.52) des Zwei-Fluid-Modells vorhanden, wenn in der zweiten Mittelung nicht-dichtegewichtete Variablen verwendet würden (vgl. Kapitel 2.2.1.10). Er beschrieb den Effekt der mittleren turbulenten Advektion. In AVL FireTM ist das Zwei-Fluid-Modell mit der Kontinuitätsgleichung (2.15), also unter Verwendung einer dichtegewichteten Mittelung bei der zweiten Mittelung, implementiert. Die mittlere turbulente Advektion wird hierin nicht durch einen Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt, sondern durch einen zusätzlichen Term in der Momentengleichung (vgl. Kapitel 2.2.1.10). Dieser zusätzliche Term beeinflusst die Berechnung der mittleren Geschwindigkeit der dispersen Phase \hat{v}_d . Da diese in der Kontinuitätsgleichung (2.53) verwendet wird, erhält die mittlere turbulente Advektion hierin indirekt Einzug. Entsprechendes gilt für die SPDE der Stochastischen Feldmethode.

Bei der Formulierung der PDF-Transportgleichung und der SPDE ist konsistent zu dieser Formulierung des Zwei-Fluid-Modells zu verfahren. Entsprechend können sie keinen zusätzlichen Term zur Berücksichtigung der mittleren turbulenten Advektion (vgl. Gleichungen (3.93) und (3.94)) enthalten³. Die in Kapitel 3.5 hergeleitete PDF-Transportgleichung (3.91) enthält keinen Term für die mittlere turbulente Advektion und ist damit konsistent zur Kontinuitätsgleichung (2.15) des verwendeten Zwei-Fluid-Modells. Der Vollständigkeit halber ist sie in Gleichung (3.115) erneut mit der Schreibweise $\bar{\rho} = \langle \bar{\rho} \rangle$ aufgetragen

$$\frac{\partial \langle \bar{\rho} \rangle \hat{f}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{v}_j \langle \bar{\rho} \rangle \hat{f}_\alpha)}{\partial x_j} + a \frac{\partial (\langle S | a \rangle \langle \bar{\rho} \rangle \frac{\hat{f}_\alpha}{\bar{\rho}})}{\partial a} = 0. \quad (3.115)$$

Die SPDE wird analog hierzu ohne einen Term der mittleren turbulenten Advektion formuliert

$$\frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{U}_i \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} + R(\alpha_d^{(n)}) = Q(\alpha_d^{(n)}), \quad (3.116)$$

wobei eine allgemeine Fluktuation $R(\alpha_d^{(n)})$ verwendet wurde. Für

$$R(\alpha_d^{(n)}) = \sqrt{2D_t} \frac{\partial \alpha_d^{(n)}}{\partial x_i} \dot{W}_i \quad (3.117)$$

³ Würde die mittlere turbulente Advektion im Zwei-Fluid-Modell analog zu Gleichung (2.52) durch einen Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung berücksichtigt, könnte eine konsistente Formulierung der PDF-Transportgleichung bzw. der SPDE mit einem Term der mittleren turbulenten Advektion entsprechend der Gleichungen (3.93) und (3.94) erfolgen. Da in AVL FireTM die Kontinuitätsgleichung des Zwei-Fluid-Modells entsprechend Gleichung (2.15) umgesetzt ist, wird dieser Ansatz im Folgenden nicht weiter verfolgt.

entsprechen die Fluktuationen denen der ursprünglichen SPDE (vgl. (2.94)), die zur Beschreibung einer Skalargröße in der Verbrennung hergeleitet wurde. Die Wahl für $R(\alpha_d^{(n)})$ hängt von der betrachteten Fluktuation ab. In Gleichung (3.116) wurde das Differential, wie bereits in Kapitel 3.6.2.1 diskutiert, ebenfalls auf die Geschwindigkeit angewendet.

Die Gleichungen (3.115) und (3.116) beschreiben eine zur Kontinuitätsgleichung (2.15) bzw. (2.53) des Zwei-Fluid-Modells konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode. Diese Formulierung wird im Folgenden „2F-SFM“ bezeichnet. In Kapitel 3.7 werden Möglichkeiten zur Berücksichtigung stochastischer Schwankungen im 2F-SFM diskutiert. Nachdem in Kapitel 3.6.3 eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode vorgestellt sowie Alternativen aufgezeigt wurden, erfolgt im Kapitel 3.6.4 eine Diskussion der Ursache für einen entfallenden Term der mittleren turbulenten Advektion bei Verwendung dichtegewichteter Größen bei der zweiten Mittelung.

3.6.4 Entfallen des Terms der mittleren turbulenten Advektion

Nachdem in Kapitel 3.6.3 eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell präsentiert wurde, verbleibt die Frage, warum bei Verwendung dichtegewichteter Größen im 2F-SFM ein Term für die mittlere turbulente Advektion entfällt, dieser aber bei Anwendung der Stochastischen Feldmethode zur Beschreibung einer Skalargröße in der Verbrennung existiert (vgl. Gleichungen (2.79), (2.94), (3.115), (3.116)). Die Antwort ist in Kapitel 3.5 zu finden und sei an dieser Stelle erneut aufgegriffen.

Im Folgenden wird die Existenz eines Terms der mittleren turbulenten Advektion im 2F-SFM und in der PDF-Transportgleichung (2.77) einer Skalargröße diskutiert. Der Term der mittleren turbulenten Advektion geht aus dem Konvektionsterm hervor.

Im 2F-SFM kann dieser, wie bereits in Gleichung (3.89) gezeigt, mit Hilfe der Phasenmittelung in Gleichung (2.11) vereinfacht werden

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \langle \hat{v}_j | \alpha = a \rangle &= \bar{\rho} \langle (\hat{v}_j + \hat{v}_j'') | \alpha = a \rangle = \bar{\rho} (\langle \hat{v}_j | \alpha = a \rangle + \langle \hat{v}_j'' | \alpha = a \rangle) = \\ &= \bar{\rho} (\hat{v}_j + \langle \hat{v}_j'' | \alpha = a \rangle) = \hat{v}_j \bar{\rho} \alpha.\end{aligned}\quad (3.118)$$

Der letzte Schritt folgt aus dem engen Zusammenhang des Volumenanteils α und der Dichte $\bar{\rho}$: Der bedingte Erwartungswert der dichtegewichteten Geschwindigkeitsfluktuation $\langle \hat{v}_j'' | \bar{\rho}(a) \rangle$ entfällt, wie in Gleichung (3.76) gezeigt. Entsprechend entfällt auch $\langle \hat{v}_j'' | a \rangle$, da ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Volumenanteil α und der Dichte $\bar{\rho}$ besteht (vgl. Gleichungen (2.11) und (3.79)).

In der PDF-Transportgleichung (2.77) einer Skalargröße in der Verbrennung kann der bedingte Erwartungswert im Konvektionsterm ebenfalls mit einer dichtegewichteten Geschwindigkeit geschrieben werden (vgl. [104], S. 187)

$$\rho(\underline{\psi}) \langle U_i | \underline{\psi} \rangle = \rho(\underline{\psi}) \langle (\hat{U}_i + U_i'') | \underline{\psi} \rangle = \rho(\underline{\psi}) \hat{U}_i + \rho(\underline{\psi}) \langle U_i'' | \underline{\psi} \rangle. \quad (3.119)$$

Im ersten Schritt wurde die dichtegewichtete Mittelung entsprechend Gleichung (2.45) eingeführt. Im letzten Schritt wurde analog zu Gleichung (3.118) der bedingte Erwartungswert $\langle \hat{U}_i | \underline{\psi} \rangle = \hat{U}_i$ direkt angegeben. Im Unterschied zum 2F-SFM in Gleichung (3.118) bleibt der Term $\langle U_i'' | \underline{\psi} \rangle \neq 0$ erhalten, da $\underline{\Phi}$ nicht eindeutig aus der Dichte $\rho(\underline{\Phi})$ zu bestimmen ist. Dies sei im Folgenden mit der grafischen Auftragung beispielhafter JPFDs veranschaulicht.

Es gelte die in Abbildung 3.5 dargestellte JPFD der Dichte $\rho(\underline{\Phi})$ und der Geschwindigkeit U . Die Dichte ist eine Funktion der Massenanteile $\underline{\Phi}$, bspw. ([16], S. 296)

$$\rho(\underline{\Phi}) = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \quad (3.120)$$

wobei ρ_1, ρ_2, ρ_3 Partialdichten darstellen, die von Φ_1, Φ_2 und Φ_3 abhängen (vgl. [16], S. 296). Analog zu Abbildung 3.4 ist in Abbildung 3.5 die dichtegewichtete Geschwindigkeit \hat{U} eingetragen. Die zugehörigen Fluktuationen sind ebenfalls beispielhaft skizziert. Der bedingte Erwartungswert der Fluktuationen $\langle U'' | \bar{\rho}(a) \rangle$ entfällt, wie in Kapitel 3.5 bereits diskutiert wurde (vgl. Gleichung (3.76)).

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 zeigen die JPDFs der Geschwindigkeit U und der Skalargrößen ψ_1 und ψ_2 . Sie unterscheiden sich von der JPDF in Abbildung 3.5 in der rechten hinteren Ecke. Die mit der Skalargröße gewichteten mittleren Geschwindigkeiten

$$\hat{U}_{\Phi_i} = \langle U | \psi_i \rangle = \frac{\overline{U(\psi_i)\psi_i}}{\overline{\psi_i}} \quad (3.121)$$

und die zugehörigen Fluktuationen sind ebenfalls in den Abbildungen 3.6 und 3.7 skizziert. Sie unterscheiden sich von der dichtegewichteten Geschwindigkeit \hat{U} und ihren Geschwindigkeitsfluktuationen in Abbildung 3.5. Analog zur dichtegewichteten Geschwindigkeit gilt für den Erwartungswert der Fluktuationen in den Abbildungen 3.6 und 3.7

$$\langle U''_{\Phi_i} | \psi_i \rangle = 0. \quad (3.122)$$

Für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich existiert kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Dichte ρ und der Skalargröße $\underline{\psi}$: Mehrere Gemischzusammensetzungen können eine identische Dichte ergeben. Entsprechend sind die Fluktuationen in $\underline{\psi}$ nicht direkt korreliert mit Fluktuationen der Dichte ρ und für den Erwartungswert gilt

$$\langle U'' | \bar{\rho}(\underline{\psi}) \rangle \neq \langle U'' | \underline{\psi} \rangle. \quad (3.123)$$

Im Zwei-Fluid-Modell ist die Dichte $\bar{\rho}$ direkt mit dem Volumenanteil α korreliert (vgl. Gleichungen (2.11) und (3.79)). Die JPDF der Geschwindigkeit und der Dichte in Abbildung 3.5 kann linear in die JPDF der Geschwindigkeit und des Volumenanteils (nicht dargestellt) transformiert werden. Auch die Fluktuationen sind korreliert, weshalb im Zwei-Fluid-Modell gilt

$$\langle \hat{U}'' | \bar{\rho}(a) \rangle = \langle \hat{U}'' | a \rangle = 0. \quad (3.124)$$

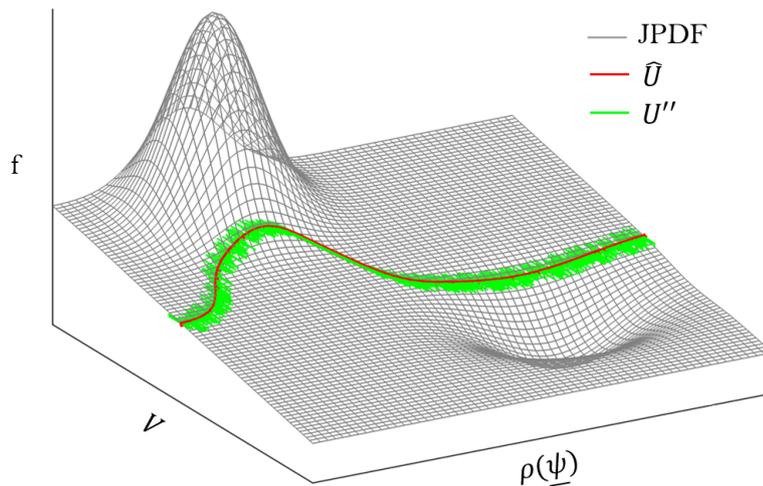
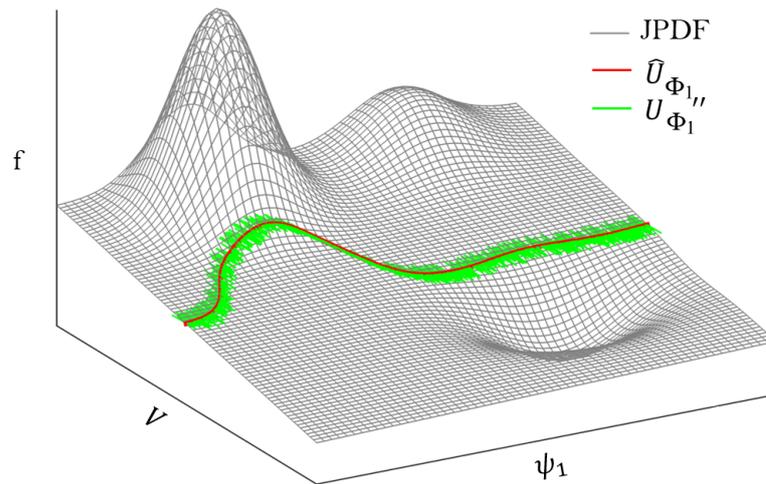
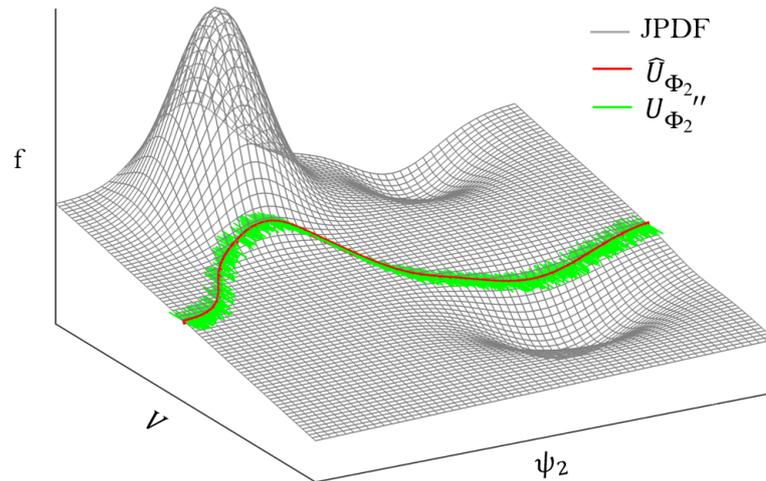


Abbildung 3.5: Dichtegewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit U und der Dichte $\bar{\rho}(\underline{\psi})$.


 Abbildung 3.6: gewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit U und der Skalargröße Φ_1 .

 Abbildung 3.7: gewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit U und der Skalargröße Φ_2 .

Der Unterschied des bedingten Erwartungswerts im Konvektionsterm kann auch mit Hilfe mathematischer Umformungen gezeigt werden. In den Gleichungen (3.72) - (3.76) wurde bereits gezeigt, dass der bedingte Erwartungswert der Fluktuation der dichtegewichteten Geschwindigkeit entfällt $\langle U''(\bar{\rho}(\alpha)) | \bar{\rho}(a) \rangle = 0$. Der Vollständigkeit halber werden die Umformungen an dieser Stelle zusammengefasst. Die dichtegewichtete Geschwindigkeit hängt von der Dichte ρ ab

$$\hat{U}(\rho) = \langle U | \rho \rangle. \quad (3.125)$$

Wird der Operator $\langle \cdot | \rho \rangle$ auf die Geschwindigkeit (vgl. Gleichung (2.45))

$$U(\rho) = \hat{U}(\rho) + U''(\rho) \quad (3.126)$$

angewandt, ergibt sich die Formulierung

$$\langle U(\rho) | \rho \rangle = \langle \hat{U}(\rho) | \rho \rangle + \langle U''(\rho) | \rho \rangle. \quad (3.127)$$

Die linke Seite in Gleichung (3.127) kann mit Gleichung (3.125) vereinfacht werden und der bedingte Erwartungswert im ersten Term auf der rechten Seite kann direkt angegeben werden (vgl. Gleichung (3.118))

$$\hat{U}(\rho) = \hat{U}(\rho) + \langle U''(\rho) | \rho \rangle. \quad (3.128)$$

Aus Gleichung (3.128) kann direkt abgelesen werden

$$\langle U''(\rho) | \rho \rangle = 0. \quad (3.129)$$

Es sei festgehalten, dass der Zusammenhang $\hat{U}(\rho) = \langle U | \rho \rangle$ aus Gleichung (3.125) genutzt wurde, so dass der bedingte Erwartungswert der Fluktuationen verschwindet $\langle U''(\rho) | \rho \rangle = 0$.

Entsprechend gilt aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen Volumenanteil und Dichte im 2F-SFM $\langle U''(\bar{\rho}) | a \rangle = 0$ bzw. wenn, wie in Kapitel 3.5, die erste Mittelung und die räumliche Richtung kenntlich gemacht werden $\langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}) | a \rangle = 0$, wie bereits in Kapitel 3.5 in den Gleichungen (3.81) - (3.86) gezeigt wurde.

Für den auf eine allgemeine Skalargröße Φ im Verbrennungsbereich bedingten Erwartungswert gelten diese Vereinfachungen nicht: Eine Anwendung des Operators $\langle \cdot | \underline{\psi} \rangle$ auf Gleichung (3.126) ergibt

$$\langle U(\rho) | \underline{\psi} \rangle = \langle \hat{U}(\rho) | \underline{\psi} \rangle + \langle U''(\rho) | \underline{\psi} \rangle, \quad (3.130)$$

was sich nicht analog zu den Gleichungen (3.127) - (3.129) vereinfachen lässt, da

$$\langle U(\rho) | \underline{\psi} \rangle \neq \langle U(\rho) | \rho \rangle = \hat{U}(\rho), \quad (3.131)$$

wenn $\underline{\psi}$ nicht direkt mit ρ korreliert ist. Entsprechend gilt für den Erwartungswert der Fluktuationen

$$\langle U''(\rho) | \underline{\psi} \rangle \neq 0. \quad (3.132)$$

Folglich existiert bei einer Beschreibung einer Skalargröße im Verbrennungsbereich ein Term der mittleren turbulenten Advektion $\langle U''(\rho) | \underline{\psi} \rangle$. Bei der Beschreibung des Volumenanteils im Zwei-Fluid-Modell entfällt der entsprechende Term $\langle U''(\bar{\rho}) | a \rangle = 0$ bzw. $\langle \hat{v}_j''(\bar{\rho}) | a \rangle = 0$.

Nachdem in Kapitel 3.6 Unterschiede der hergeleiteten PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell und der PDF-Transportgleichung für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich analysiert und diskutiert wurden, werden im folgenden Kapitel 3.7 Möglichkeiten zur Implementierung der Stochastischen Feldmethode im bestehenden Code AVL FireTM evaluiert. Mögliche Formulierungen der allgemeinen Fluktuation $R(\alpha^{(i)})$ werden in Kapitel 3.7 diskutiert. Dabei ist zu beachten, dass die Einflussfaktoren nach Abbildung 1.11 gelten.

3.7 Beeinflussung aufgrund stochastischer Schwankungen im Quellterm

Teile des Kapitels 3.7 wurden bereits in [109], [110], [111] und [112] veröffentlicht. Die Transportgleichung des Volumenanteils der dispersen Phase im Zwei-Fluid-Modell ist in Gleichung (2.54) dargestellt. Sollen mit Hilfe der Stochastischen Feldmethode Schwankungen im Volumenanteil α_d der dispersen Phase betrachtet werden, hat sich die Beeinflussung des Quellterms $\frac{S_k}{\rho_k}$ in Gleichung (2.54) aufgrund stochastischer Fluktuationen als gewinnbringend erwiesen.⁴ Eine Möglichkeit des Lösungsprozesses zur Berücksichtigung von Schwankungen im Quellterm ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Als stochastische Felder werden N Volumenanteile betrachtet, die als Lösung von N Kontinuitätsgleichungen erhalten werden. Die stochastischen Felder unterscheiden sich durch Störterme im Quellterm. Die Störterme werden in der ersten Iteration berechnet und in den folgenden erneut verwendet, um eine Konvergenz zu gewährleisten. Jedes stochastische Feld liefert in jeder Rechenzelle einen Volumenanteil $\alpha_d^{(n)}$. Für den weiteren Lösungsprozess wird der mittlere Volumenanteil α_d verwendet. Der restliche Lösungsprozess erfolgt nach dem bereits implementierten Schema (vgl. Abbildung 2.4). Eine Bewertung nach den in Abbildung 1.11 dargestellten Einflussfaktoren ergibt einen geringen Aufwand hinsichtlich Ressourcen und Implementierungsumfang. Eine schnelle Rechnung und damit eine hohe Kundenzufriedenheit wird erwartet, da lediglich N zusätzliche stochastische Felder für die disperse Phase berechnet werden. Der Einfluss auf den bereits optimierten iterativen Lösungsprozess wird als gering eingeschätzt, da die Fluktuationen keinen direkten Einfluss auf den Druck haben. Die Berücksichtigung der Schwankungen im Quellterm wird im Folgenden analysiert. Der Quellterm in Gleichung (2.20) enthält die mittlere Blasendichte N''' und die Druckdifferenz Δp_p . Die Berücksichtigung von Schwankungen in beiden Größen wird im Folgenden getrennt betrachtet.

3.7.1 Schwankungen in der Blasendichte

Bei Verwendung einer mittleren Blasendichte werden lokale Variationen der Blasenanzahl bzw. der Blasendichte N''' herausgemittelt (vgl. Gleichungen (2.20) und (2.23)). Zur weiteren Berücksichtigung dieser Fluktuationen kann die Stochastische Feldmethode verwendet werden, deren Felder in der Blasendichte variieren. Zunächst ist

⁴ Alternativ ist die Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Konvektionsterm denkbar. Stochastische Schwankungen im Konvektionsterm resultieren aus Geschwindigkeitsfluktuationen aufgrund von Turbulenz. In Kapitel 2.2.1.10 wurde die Möglichkeit einer Berücksichtigung der mittleren turbulenten Advektion als zusätzlichen Term in der Momentengleichung, wenn für die zweite Mittelung dichtegewichtete Größen verwendet werden, bereits diskutiert. Entsprechend ist auch der Einfluss von Turbulenz als zusätzliche fluktuierende Kraft in der Momentengleichung zu berücksichtigen. Die zugehörige SPDE besitzt dann nicht die Form von Gleichung (3.116), da die stochastischen Felder nicht für die Kontinuitätsgleichung, sondern für die Momentengleichung gelöst werden. Die einzelnen stochastischen Felder unterscheiden sich in einem zusätzlichen Term für die instantane Kraft des Fluids auf die disperse Phase aufgrund der Turbulenz. Dieser Term wird in der ersten Iteration berechnet und für alle weiteren Iterationen des Zeitschritts verwendet, wodurch Konvergenz weiterhin gewährleistet ist. Das Lösungsschema ist in Abbildung D.1 in Anhang D skizziert. Für jedes stochastische Feld resultiert aus der individuellen fluktuierenden Kraft ein eigenes Geschwindigkeitsfeld. Entsprechend müssen für jedes stochastische Feld alle davon abhängigen Felder (Volumenanteile α_d und α_c , Druckfeld p , ...) existieren. Der Lösungsansatz wird anhand der Einflussfaktoren in Abbildung 1.11 diskutiert. Für eine Umsetzung der Stochastischen Feldmethode im kommerziellen CFD-Code AVL Fire™ erfordert der Ansatz einen erheblichen Mehraufwand hinsichtlich der Speicherressourcen. Der Implementierungsaufwand ist ebenfalls erheblich, da weitreichende Änderungen in der Lösungsstruktur erforderlich sind. Die Berechnung eines eigenen Geschwindigkeitsfelds und eines eigenen Druckfelds für jedes stochastische Feld erfordert eine erhöhte Berechnungszeit. Eine deutlich erhöhte Berechnungszeit wird aus Kundensicht als nicht akzeptabel eingestuft. Für eine Implementierung in den kommerziellen CFD-Code AVL Fire™ wird diese Methodik im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht weiter verfolgt. Alternativ kann davon abgesehen werden, für jedes stochastische Feld der dispersen Phase entsprechende Felder der kontinuierlichen Phase und des Drucks zu berechnen, indem ein mittleres Geschwindigkeitsfeld der kontinuierlichen Phase und ein mittleres Druckfeld verwendet werden. Das alternative Lösungsverfahren ist in Abbildung D.2 in Anhang D dargestellt. Die Kontinuitätsgleichungen werden für eine mittlere Verteilung analog zur bisherigen Implementierung in AVL Fire™ gelöst (vgl. Abbildung 2.4). Für die disperse Phase wird für jedes stochastische Feld eine eigene Impulsgleichung gelöst. Die mittlere Geschwindigkeit der dispersen Phase wird aus den Repräsentanten der Geschwindigkeit berechnet. Die Impulsgleichung für die kontinuierliche Phase und die übrigen Gleichungen werden analog zur bisherigen Implementierung in AVL Fire™ gelöst (vgl. Abbildung 2.4). Die Alternative wird im Folgenden entsprechend der Einflussfaktoren in Abbildung 1.11 bewertet. Hinsichtlich Implementierungszeit und Ressourcen ist diese Methode weniger aufwändig als die in Abbildung D.1. Dennoch nimmt sie Eingriff in den Iterationsprozess, da die Geschwindigkeit der dispersen Phase \hat{v}_{disp} direkt den Fluktuationen ausgesetzt ist. Dies könnte zu Konvergenzproblemen führen, weshalb die Berücksichtigung von Fluktuationen in der Kontinuitätsgleichung der jeweiligen Phase bevorzugt wird. In Kapitel 2.2.1 wurde bereits erwähnt, dass eine zusätzliche Kraft in der Momentengleichung der dispersen Phase als Diffusionsterm in der entsprechenden Kontinuitätsgleichung geschrieben werden kann (vgl. [11], S. 68). Als Geschwindigkeit im Konvektionsterm wird dann die Geschwindigkeit der kontinuierlichen Phase verwendet. Der Einfluss dieses Diffusionsterms ist geringer als der Einfluss der stochastischen Schwankungen im Quellterm. Im Sinne eines maximalen Kundennutzens (vgl. Abbildung 1.11) werden im weiteren Verlauf Schwankungen im Quellterm analysiert (vgl. Kapitel 3.7.1, 3.7.2). Der Einfluss turbulenter Fluktuationen in der Momentengleichung bzw. als Diffusionsterm in der Kontinuitätsgleichung wird im Folgenden nicht weiter verfolgt.

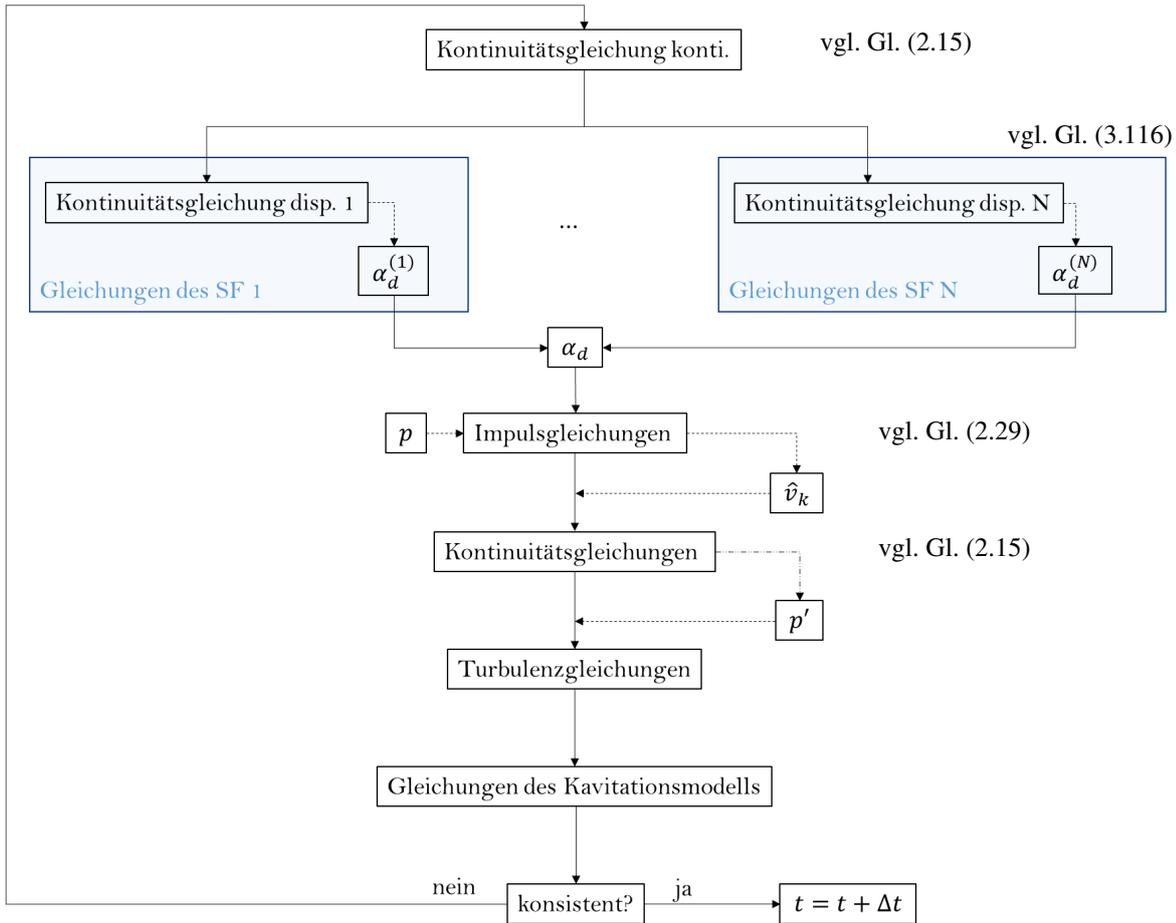


Abbildung 3.8: Mögliche Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL FireTM: Fluktuationen im Quellterm der dispersen Phase werden durch stochastische Felder berücksichtigt.

die Amplitude der stochastischen Schwankungen zu analysieren.

Hierzu wird in einem Gedankenexperiment ein Volumen $V_g = 1m^3$, bestehend aus n_t Teilvolumina mit dem Volumen V_t , betrachtet. Werden im Volumen V_g Blasen zufällig verteilt, ist die Blasenanzahl innerhalb der Teilvolumina zufällig und folgt einer Poisson-Verteilung ([81], S. 186). In Abbildung 3.9 ist das Volumen V_g beispielhaft in $n_t = 100$ Teilvolumina $V_t = 1/100 m^3$ unterteilt. Eine exemplarische Verteilung von 200 Blasen im Volumen V_g ist ebenfalls in Abbildung 3.9 dargestellt. Mit Hilfe der Poisson-Verteilung kann die Wahrscheinlichkeit für n_{Bl} Blasen innerhalb eines Volumens bestimmt werden ([76], S. 545)

$$P(n_{Bl}, \lambda_p) = \frac{(\lambda_p)^{n_{Bl}}}{n_{Bl}!} e^{-\lambda_p}. \quad (3.133)$$

In Gleichung (3.133) ist λ_p die mittlere Blasenanzahl innerhalb des Volumens. Für das Beispiel in Abbildung 3.9 ist die mittlere Blasenanzahl innerhalb eines Teilvolumens $\lambda_{p,t} = 2$, da 200 Blasen auf 100 Teilvolumina verteilt wurden. Die Varianz σ_p^2 der Poisson-Verteilung entspricht ihrem Mittelwert ([81], S. 186)

$$\sigma_p^2 = \lambda_p. \quad (3.134)$$

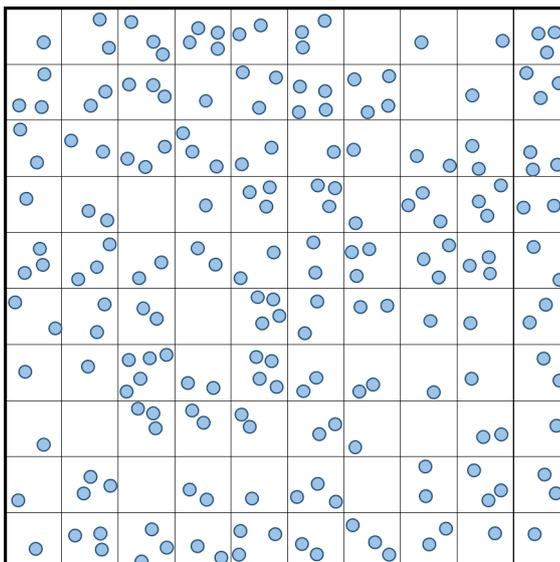


Abbildung 3.9: 200 Blasen werden zufällig auf 100 Teilvolumina verteilt: Die Blasenanzahlen in den Teilvolumina sind zufällig und folgen einer Poisson-Verteilung (vgl. [81], S. 186).

Die Standardabweichung σ_p kann aus der Varianz in Gleichung (3.134) abgeleitet werden. Für große Werte von λ_p lässt sich die Poisson-Verteilung durch eine Normalverteilung mit Mittelwert μ_n und Standardabweichung σ_n approximieren ([115], S. 190)

$$\begin{aligned}\mu_n &= \lambda_p \\ \sigma_n &= \sigma_p = \sqrt{\lambda_p}.\end{aligned}\quad (3.135)$$

Es sei angemerkt, dass hierbei eine Korrektur angewandt wird, da die kontinuierliche Normalverteilung $\mathcal{N}(\lambda_p, \sigma_n^2)$ die diskrete Poisson-Verteilung $Po(\lambda_p)$ approximiert. Für die diskrete, poissonverteilte Zufallsgröße $Z \sim Po$ und ihre normalverteilte Approximation $Y \sim \mathcal{N}$ gilt (vgl. [69], S. 41; [82], S. 76)

$$P(Z = l) = P(l - 0,5 \leq Y \leq l + 0,5). \quad (3.136)$$

Für eine Normalverteilung kann mit Hilfe der Sigma-Regeln die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass sich der Zufallswert Y innerhalb des 3σ -Intervalls befindet ([137], S. 197)

$$P(\mu_n - 3\sigma_n < Y < \mu_n + 3\sigma_n) \approx 99,73\%. \quad (3.137)$$

Mit Gleichung (3.137) kann das Intervall bestimmt werden, in dem sich die Blasenanzahl n_{Bl} mit der Wahrscheinlichkeit von 99,73% befindet.

Im Folgenden werden die Schwankungen in der Blasendichte einer Injektorströmung analysiert. Dabei werden Volumina unterschiedlicher Größe betrachtet. Sei $N_0''' = 10^{14}/m^3$ (vgl. Gleichung (2.24)), ergibt sich unter der Annahme $\alpha \leq 0,5$ mit Gleichung (2.23) für die Blasendichte $N''' = 10^{14}/m^3$. Anschaulich bedeutet dies, dass im Mittel 10^{14} Blasen pro m^3 Volumen existieren. Die mittlere Blasenanzahl im Volumen $V_g = 1m^3$ entspricht damit

$$\lambda_{p,g} = N''' 1m^3 = 10^{14} \quad (3.138)$$

und für die Standardabweichung ergibt sich mit Gleichung (3.134)

$$\sigma_{p,g} = \sqrt{10^{14}} = 10^7. \quad (3.139)$$

Analyse der Schwankungen der Blasendichte im gesamten Volumen V_g

Die mittlere Blasenanzahl $\lambda_{p,g}$ ist groß, so dass die Poisson-Verteilung durch eine Normalverteilung mit

$$\mu_{n,g} = \lambda_{p,g} = 10^{14} \quad (3.140)$$

und der Standardabweichung $\sigma_{n,g} = \sigma_{p,g} = 10^7$ approximiert werden kann. Analog zu Gleichung (3.137) kann das 3σ -Intervall bestimmt werden

$$P(10^{14} - 3 \cdot 10^7 < n_{Bl} < 10^{14} + 3 \cdot 10^7) = P(9999997 \cdot 10^7 < n_{Bl} < 10000003 \cdot 10^7) \approx 99,73\%. \quad (3.141)$$

Schwankungen der Blasenanzahl sind mit Schwankungen der Blasendichte korreliert. Da die Blasendichte linear von der Blasenanzahl abhängt, kann analog zu Gleichung (3.141) für eine instantane Blasendichte

$$N'''_{inst} = n_{Bl}/1m^3 \quad (3.142)$$

formuliert werden

$$\begin{aligned} & P((10^{14} - 3 \cdot 10^7)/m^3 < N'''_{inst} < (10^{14} + 3 \cdot 10^7)/m^3) = \\ & = P(9999997 \cdot 10^7/m^3 < N'''_{inst} < 10000003 \cdot 10^7/m^3) \approx 99,73\%. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Aus der instantanen Schwankung der Blasendichte N'''_{inst} resultiert nach Gleichung (2.20) eine instantane Schwankung des Quellterms S_{inst} . Dabei wird der Index $\cdot d$ zur Kennzeichnung der dispersen Phase im Sinne einer einfachen Schreibweise weggelassen. Es stellt sich die Frage, wie stark der instantane Quellterm schwankt, wenn Schwankungen der instantanen Blasendichte berücksichtigt werden. Die Blasendichte fließt in der Berechnung des Quellterms nichtlinear ein (vgl. Gleichung (2.20)). Mit der Wahrscheinlichkeit von 99,73% wird das Verhältnis zwischen dem Quellterm S_{inst} unter Verwendung einer instantanen Blasendichte und dem Quellterm S der mittleren Blasendichte

$$\frac{S_{inst}}{S} = \frac{(N'''_{inst})^{1/3}}{(N''')^{1/3}} = \frac{(10000003 \cdot 10^7)^{1/3}}{(10^{14})^{1/3}} = (1,00000003)^{1/3} = 1,0000001 \quad (3.144)$$

nicht überschritten. Schwankungen mit der Größenordnung $< 0,00001\%$ können vernachlässigt werden und die Verwendung eines Mittelwerts stellt einen guten Kompromiss dar. Die zusätzliche Investition in Ressourcen bei Verwendung der Stochastischen Feldmethode ist für die Berücksichtigung dieser geringen Schwankungen im Quellterm aus Kundensicht und im Hinblick auf den notwendigen Implementierungsaufwand nicht rentabel (vgl. Abbildung 1.11). Die Betrachtung von Schwankungen im Quellterm aufgrund einer schwankenden Blasenanzahl im Gesamtvolumen V_g wird im weiteren Verlauf der Arbeit nicht berücksichtigt. Im Folgenden wird untersucht, wie groß die Schwankungen sind, wenn ein Teilvolumen V_t betrachtet wird.

Analyse der Schwankungen der Blasendichte im Teilvolumen V_t

Wird V_g in n_t Teilvolumina aufgeteilt, enthält das Teilvolumen $V_t = V_g/n_t$ im Mittel

$$\lambda_{p,t} = \lambda_{p,g}/n_t = N''' 1m^3/n_t \quad (3.145)$$

Blasen. Für die Vereinfachung in Gleichung (3.145) wurde Gleichung (3.138) genutzt. Die lokale Blasenanzahl $n_{Bl,lok}$ weicht von ihrem Mittelwert

$$\bar{n}_{Bl,lok} = \lambda_{p,t} \quad (3.146)$$

ab. Für die Standardabweichung ergibt sich mit den Gleichungen (3.134) und (3.145)

$$\sigma_{p,t} = \sqrt{\lambda_{p,t}} = \sqrt{\lambda_{p,g}/n_t}. \quad (3.147)$$

Für das Verhältnis von Standardabweichung und Mittelwert ergibt sich mit den Gleichungen (3.138), (3.145) und (3.147)

$$\frac{\sigma_{p,t}}{\lambda_{p,t}} = \frac{\sqrt{\lambda_{p,t}}}{\lambda_{p,t}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{p,t}}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{p,g}/n_t}} = \frac{\sqrt{n_t}}{\sqrt{N''' 1m^3}}. \quad (3.148)$$

Mit steigendem n_t steigt auch das Verhältnis von Standardabweichung zur mittleren Blasenanzahl. Die Standardabweichung ist im Verhältnis zum Mittelwert umso größer, je kleiner das betrachtete Volumen V_t ist.

Bei der Berechnung von Injektorströmungen werden kleine Zellvolumina, beispielsweise $V_{Zelle} \approx 10^{-15} m^3$, betrachtet. Für Volumina dieser Größe ist $n_t = 10^{15}$ und mit den Gleichungen (3.138), (3.145) und (3.147) gilt für die mittlere Blasenanzahl und die Standardabweichung im Teilvolumen

$$\lambda_{p,t} = \lambda_{p,g}/10^{15} = 10^{14}/10^{15} = 0,1 \quad (3.149)$$

$$\sigma_{p,t} = \sqrt{\lambda_{p,t}} = \sqrt{0,1}. \quad (3.150)$$

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 3.10 das Histogramm von 10.000 Zufallszahlen der Poisson-Verteilung mit Mittelwert $\lambda_p = 0,1$ aufgetragen. Die Abbildung veranschaulicht, dass die Wahrscheinlichkeit, in einer Zelle

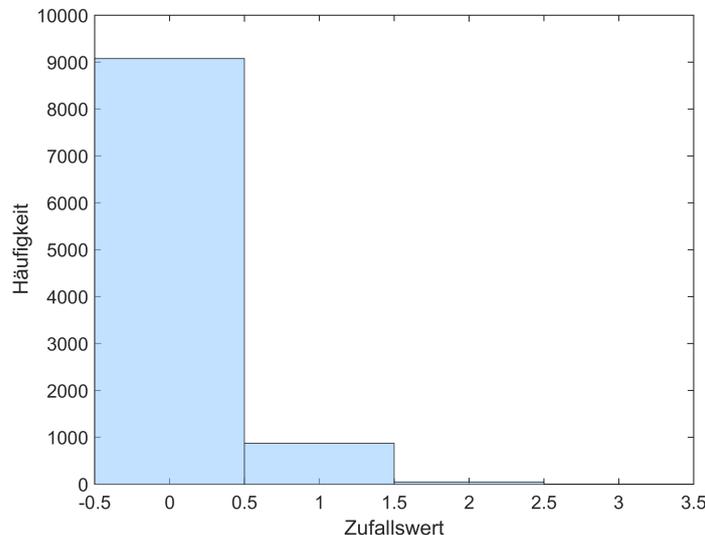


Abbildung 3.10: Histogramm einer Poisson-Verteilung mit dem Mittelwert $\lambda_p = 0,1$.

mit dem Volumen $V_{Zelle} \approx 10^{-15} m^3$ keine Blase anzutreffen, größer ist als 90%. Die lokale Blasenanzahl $n_{Bl,lok}$ beträgt damit in $> 90\%$ der Betrachtungen null. Entsprechend ist auch die lokale Blasendichte

$$N'''_{lok} = \frac{n_{Bl,lok}}{V_{Zelle}} \quad (3.151)$$

in über 90% der Betrachtungen null. In Abbildung 3.10 ist zu erkennen, dass mit ca. 8% Wahrscheinlichkeit das Volumen V_{Zelle} genau eine Blase enthält ($n_{\text{Bl,lok}} = 1$) und mit ca. 1% Wahrscheinlichkeit 2 Blasen ($n_{\text{Bl,lok}} = 2$). Die zugehörigen Blasendichten sind Tabelle 3.2 zu entnehmen. Das ebenfalls dargestellte Verhältnis der lokalen Blasendichte N_{lok}''' zur mittleren Blasendichte $N''' = 10^{14}/m^3$ zeigt, dass die lokale Blasendichte um bis zu 2000% gegenüber der mittleren Blasendichte schwankt. Entsprechend schwankt der lokale Quellterm S_{lok} (vgl. Gleichung (2.20)) um bis zu 271% des Quellterms unter Verwendung einer mittleren Blasendichte, wie die letzte Spalte in Tabelle 3.2 demonstriert.

Wahrscheinl.	$n_{\text{Bl,lok}}$	$N_{\text{lok}}''' \cdot m^3$	N_{lok}'''/N'''	$S_{\text{lok}} / S_{\text{mittel}}$
ca. 0,9	0	0	0	0
ca. 0,08	1	10^{15}	10	$(10^{15})^{1/3}/(10^{14})^{1/3} \approx 2,15$
ca. 0,01	2	$2 \cdot 10^{15}$	20	$(2 \cdot 10^{15})^{1/3}/(10^{14})^{1/3} \approx 2,71$

Tabelle 3.2: Verteilung von Blasenanzahl und Blasendichte in einer Zelle mit dem Volumen $V_{\text{Zelle}} \approx 10^{-15}m^3$ mit $N''' = 10^{14}/m^3$. Das Verhältnis aus lokaler und mittlerer Blasendichte sowie das Verhältnis der entsprechenden Quellterme sind ebenfalls dargestellt.

Die Analyse der Schwankungen in Volumina unterschiedlicher Größe zeigt: Je kleiner das betrachtete Volumen ist, desto größer sind die relativen Schwankungen in der lokalen Blasendichte und im lokalen Quellterm. Wird bei kleinen Zellvolumina eine mittlere Blasendichte verwendet, werden die natürlich vorkommenden Schwankungen in der Blasendichte vernachlässigt. Die Stochastische Feldmethode kann genutzt werden, um diese Schwankungen zu berücksichtigen. Abbildung 3.11 (links) zeigt Ausprägungen der Blasendichteverteilung innerhalb einer Rechenzelle. Dargestellt sind 100 Repräsentanten der lokalen Blasendichte im oben diskutierten Beispiel (vgl. Abbildung 3.10). In nur 10 der 100 Repräsentanten ist die Blasendichte ungleich 0. Die meisten Repräsentanten zeigen eine Ausprägung, in der die Rechenzelle keine Blase enthält. Da das Vorkommen einer Blase ein seltenes Ereignis ist, muss die Anzahl betrachteter Repräsentanten und damit die Anzahl der berechneten stochastischen Felder ausreichend hoch sein. In Tabelle 3.2 wurde gezeigt, dass starke Schwankungen in den Quelltermen mit den Schwankungen der lokalen Blasendichte einhergehen. Dies kann zu numerischer Instabilität führen. Alternativ können die Schwankungen reduziert werden, wenn an Stelle der einzelnen Repräsentanten Mittelwerte über diese betrachtet werden. In Abbildung 3.11 (Mitte) wurde eine Mittelung über jeweils 10 Repräsentanten durchgeführt. Die Zugehörigkeit eines ursprünglichen Repräsentanten (links) zum entsprechenden gemittelten Repräsentanten (Mitte) ist durch Linien skizziert. Aus den 100 ursprünglichen Repräsentanten ergeben sich 10 gemittelte Repräsentanten, deren Schwankungen geringer sind. Die Anzahl der betrachteten Repräsentanten ist geringer, was den Berechnungsaufwand reduziert. Würde in Abbildung 3.11 eine erneute Mittelung über diese gemittelten Repräsentanten erfolgen, ergäbe sich ein einzelner Repräsentant (vgl. Abbildung 3.11, rechts). Für die Interpretation der Mittelung existieren zwei Möglichkeiten:

- **Methode der Ensemble-Mittelung**

Sei n_R die Anzahl Repräsentanten, über die gemittelt wird. In Abbildung 3.11 erfolgt die erste Mittelung über jeweils $n_R = 10$ Repräsentanten (links). Die Mittelung erfolgt nach der Ensemble-Mittelung (vgl. Gleichung (2.85)). Die folgende Diskussion betrachtet der Einfachheit halber die Blasenanzahl. Aufgrund des linearen Zusammenhangs in Gleichung (2.27) kann sie analog mit Betrachtung der Blasendichte erfolgen. In obigem Beispiel in Abbildung 3.11 weist jeder Repräsentant die mittlere Blasenanzahl $\lambda_{p,t} = 0,1$ auf (vgl. Gleichung (3.149)). Jeder individuelle Repräsentant besitzt eine individuelle lokale Blasenanzahl $n_{\text{Bl,lok}}^{(n)}$, die davon abweichen kann. Die Ensemble-gemittelte lokale Blasenanzahl (Abbildung 3.11, Mitte) berechnet sich mit $n_R = 10$ Repräsentanten

$$n_{\text{Bl,lok}}^{n_R=10} = \sum_{n=1}^{10} n_{\text{Bl,lok}}^{(n)} / 10. \quad (3.152)$$

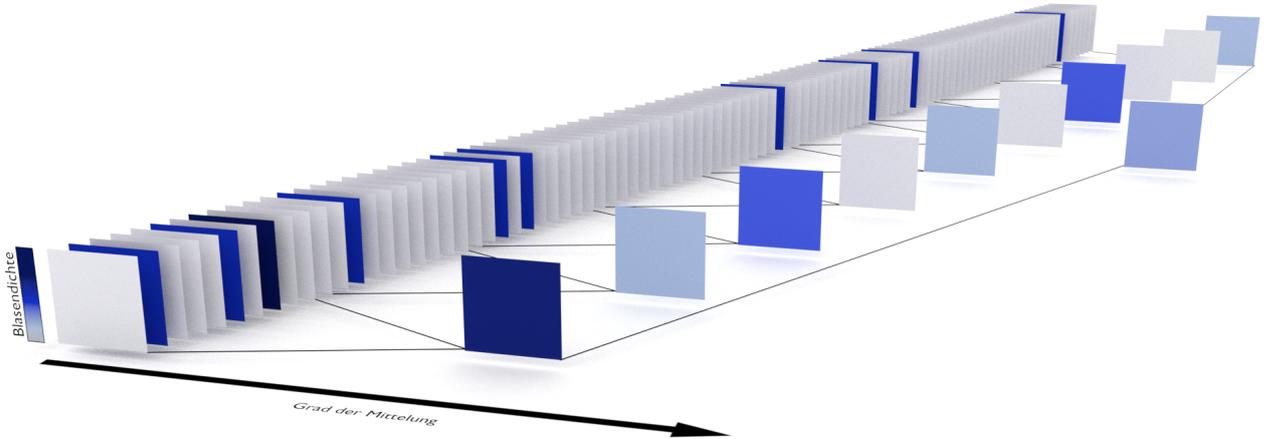


Abbildung 3.11: Blasendichteverteilung in 100 Rechenzellen (links) und Mittelung über jeweils 10 (Mitte) oder alle Repräsentanten (rechts).

Für die Schwankung der Ensemble-gemittelten lokalen Blasenanzahl $n_{Bl,lok}^{n_R=10}$ gilt ([66], S. 78)

$$\sigma_{p,t}^{n_R=10} = \frac{\sigma_{p,t}}{\sqrt{n_R}}. \quad (3.153)$$

Die Standardabweichung hat durch die Ensemble-Mittelung um den Faktor $\sqrt{n_R}$ abgenommen. Für die mittlere Blasenanzahl nach der Ensemble-Mittelung gilt weiterhin

$$\lambda_{p,t}^{n_R=10} = \lambda_{p,t} = 0, 1. \quad (3.154)$$

Das Verhältnis aus Standardabweichung $\sigma_{p,t}^{n_R=10}$ und Mittelwert $\lambda_{p,t}^{n_R=10}$ ist

$$\frac{\sigma_{p,t}^{n_R=10}}{\lambda_{p,t}^{n_R=10}} = \frac{\sigma_{p,t}}{\sqrt{n_R} \lambda_{p,t}} = \frac{\sqrt{\lambda_{p,t}}}{\sqrt{n_R} \lambda_{p,t}} = \frac{1}{\sqrt{n_R} \lambda_{p,t}}, \quad (3.155)$$

wobei Gleichung (3.150) verwendet wurde. Eine Mittelung über unendlich viele Repräsentanten liefert für die Ensemble-gemittelte lokale Blasenanzahl $n_{Bl,lok}^{n_R=\infty} = \lambda_{p,t} = 0, 1$ (vgl. im statistischen Mittel Abbildung 3.11, rechts) bzw. mit Gleichung (3.151) und $V_{Zelle} = 10^{-15} m^3$ für die lokale Blasendichte

$$N_{lok}''' = \frac{n_{Bl,lok}^{n_R=\infty}}{V_{Zelle}} = \frac{0, 1}{10^{-15} m^3} = 10^{14} / m^3 = N''' . \quad (3.156)$$

Eine Mittelung über eine unendliche Anzahl Repräsentanten führte demnach zur Verwendung einer mittleren Blasendichte N''' analog zum Zwei-Fluid-Modell in Kapitel 2.2.1 (vgl. Gleichung (2.23)).

- **Methode der Zellkonglomerate**

Jeder Repräsentant (vgl. Abbildung 3.11, links) stellt eine mögliche Ausprägung der Blasendichte innerhalb eines Zellvolumens dar. Jedem Repräsentanten der Blasendichte kann eine lokale Blasenanzahl $n_{Bl,lok}$

zugeordnet werden. Die folgende Diskussion verwendet die Blasenanzahl. Aufgrund des linearen Zusammenhangs in Gleichung (2.27) kann sie analog mit der Blasendichte erfolgen. Die mittlere Blasenanzahl jedes Repräsentanten (Abbildung 3.11, links) beträgt $\lambda_{p,t} = 0,1$ (vgl. Gleichung (3.149)). Um die Schwankungen in den Repräsentanten zu reduzieren, werden die ursprünglichen Repräsentanten einer Blasendichte innerhalb einer Rechenzellen zu größeren Konglomeraten kombiniert. Innerhalb eines Zellkonglomerats von $n_R = 10$ Repräsentanten gilt für die mittlere Blasenanzahl (vgl. Abbildung 3.11, Mitte)

$$\bar{n}_{Bl,n_R,lok} = \lambda_{p,t}^{n_R=10} = \lambda_{p,t/n_R} = n_R \lambda_{p,t} = 10 \cdot 0,1 = 1. \quad (3.157)$$

Für die Schwankung der mittleren Blasenanzahl im Zellkonglomerat der $n_R = 10$ Repräsentanten gilt unter Verwendung von Gleichung (3.150)

$$\sigma_{p,t}^{n_R=10} = \sigma_{p,t/n_R} = \sqrt{\lambda_{p,t/n_R}} = \sqrt{n_R \lambda_{p,t}} = 1. \quad (3.158)$$

Die Standardabweichung nimmt absolut gesehen mit steigender Anzahl n_R an Repräsentanten im Zellkonglomerat zu. Im Verhältnis zum Mittelwert gilt für die Standardabweichung im Zellkonglomerat

$$\frac{\sigma_{p,t}^{n_R=10}}{\lambda_{p,t}^{n_R=10}} = \frac{\sigma_{p,t/n_R}}{\lambda_{p,t/n_R}} = \frac{\sqrt{n_R \lambda_{p,t}}}{n_R \lambda_{p,t}} = \frac{1}{\sqrt{n_R \lambda_{p,t}}}, \quad (3.159)$$

sie nimmt also mit steigender Anzahl Repräsentanten n_R ab. Dieses Verhältnisses ist für beide Interpretationen identisch (vgl. Gleichung (3.155)). In der Mitte von Abbildung 3.11 sind 10 Zellkonglomerate dargestellt. Sie stellen jeweils 10 der ursprünglichen Repräsentanten dar (vgl. Abbildung 3.11, links). Werden sie zu einem einzelnen Repräsentanten zusammengefasst (vgl. Abbildung 3.11, rechts), enthält dieser im Mittel

$$\lambda_{p,t}^{n_R=10 \cdot 10} = \lambda_{p,t/(10n_R)} = 10 \cdot \lambda_{p,t/n_R} = 10 \cdot 1 = 10 \quad (3.160)$$

Blasen. Der Zusammenhang zur mittleren Blasendichte N''' wird ersichtlich bei Erhöhen der Anzahl Repräsentanten. Gälte weiterhin $n_R = 10$ und würden nicht 100, wie in Abbildung 3.11, sondern 10^{15} Repräsentanten betrachtet, die jeweils die mittlere Blasenanzahl $\lambda_{p,t} = 0,1$ aufweisen, existierten in Abbildung 3.11 (Mitte) 10^{14} Zellkonglomerate mit der mittleren Blasenanzahl $\lambda_{p,t}^{n_R=10} = \lambda_{p,t/n_R} = 1$. Würden sie erneut zu einer Repräsentation zusammengefasst, enthielte diese die mittlere Blasenanzahl

$$\lambda_{p,t}^{n_R=10 \cdot 10^{14}} = 10^{14} \cdot \lambda_{p,t}^{n_R=10} = 10^{14} \cdot 1 = 10^{14} = N''' m^3. \quad (3.161)$$

Allgemein kann zusammengefasst werden, dass eine Zelle mit dem Volumen

$$V_{Zelle} = 1m^3/n_t \quad (3.162)$$

im Mittel $\lambda_{p,t} = N''' 1m^3/n_t$ Blasen enthält. Das Konglomerat aus n_R Repräsentanten dieser Zellen beinhaltet im Mittel $\lambda_{p,t/n_R} = n_R \lambda_{p,t}$ Blasen. Für $n_R = n_t$ gilt für die mittlere Blasenanzahl

$$\lambda_{p,t/n_R} = n_R \lambda_{p,t} = n_R N''' 1m^3/n_t = N''' 1m^3. \quad (3.163)$$

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass bei der Methode der Zellkonglomerate $n_R < n_t$ zu wählen ist, um Schwankungen der lokalen Blasendichte zu berücksichtigen.

Die detaillierte Betrachtung lokal schwankender Blasenanzahlen (vgl. Abbildung 3.11, links) ist hinsichtlich zweier Aspekte keine praktikable Lösung für eine Implementierung in den kommerziellen Code AVL Fire™:

- Die Notwendigkeit einer großen Anzahl stochastischer Felder übersteigt die Verfügbarkeit von Ressourcen (vgl. Abbildung 1.11).
- Stark schwankende Quellterme sind ein Potential für numerische Instabilitäten.

Um die stochastischen Fluktuationen bei einer Berechnung zu berücksichtigen, ist eine Mittelung mit einer der oben vorgestellten Methoden notwendig (vgl. Abbildung 3.11). Es stellt sich die Frage, wie n_R zu wählen ist. Da im Allgemeinen innerhalb eines Rechengebiets Zellen mit unterschiedlichem Volumen vorhanden sind und entsprechend die Schwankungen in der Blasendichte unterschiedlich groß sind, kann dies nicht pauschal für das gesamte Rechengebiet beantwortet werden. Für jede Rechenzelle ist n_R individuell zu ermitteln. Folglich sind die Amplituden der Fluktuationen zweier Zellen mit unterschiedlichem Volumen nicht miteinander vergleichbar. Alternativ zur pauschalen Festsetzung der Anzahl n_R für alle Zellen oder einer manuellen Eingabe für jede individuelle Zelle kann mit der Methode der Zellkonglomerate und Gleichung (3.163) ein Zusammenhang zwischen der mittleren Blasenanzahl im Zellkonglomerat $\lambda_{p,t/n_R}$ und der Anzahl Repräsentanten n_R im Konglomerat hergestellt werden. Unter der Annahme, dass im Zellkonglomerat eine mittlere Blasenanzahl $\lambda_{p,n_t/n_R}$ erwünscht ist, kann mit den Gleichungen (3.162) und (3.163) die Anzahl Repräsentanten n_R im Konglomerat bestimmt werden

$$n_R = \frac{n_t \lambda_{p,t/n_R}}{N''' 1m^3} = \frac{\lambda_{p,t/n_R}}{N''' V_{Zelle}}. \quad (3.164)$$

Implementierung in AVL Fire™

Mit der Kenntnis einer mittleren Blasenanzahl im Zellkonglomerat $\lambda_{p,t/n_R}$ durch Nutzereingabe errechnet sich die Anzahl Repräsentanten n_R im Konglomerat mit Gleichung (3.164). Die lokale Blasenanzahl $n_{Bl,n_R,lok}$ im Konglomerat ist eine Poisson-verteilte Zufallsvariable

$$n_{Bl,n_R,lok} \sim Po(\sigma_{p,t/n_R}^2) \quad (3.165)$$

mit der Standardabweichung entsprechend Gleichung (3.158)

$$\sigma_{p,t/n_R} = \sqrt{n_R \lambda_{p,t}} = \sqrt{\frac{\lambda_{p,t/n_R}}{N''' V_{Zelle}} N''' 1m^3 / n_t} = \sqrt{\lambda_{p,t/n_R}}. \quad (3.166)$$

Für die Umformungen in Gleichung (3.166) wurden die Gleichungen (3.145), (3.162) und (3.164) genutzt. Für große Werte von $\lambda_{p,t/n_R}$ wird die Poisson-Verteilung durch die Normalverteilung approximiert (vgl. Gleichung (3.135)). Das Zellkonglomerat umfasst ein Volumen $V_{Kongl} = n_R V_{Zelle}$. Analog zu Gleichung (3.151) kann aus der lokalen Blasenanzahl im Konglomerat $n_{Bl,n_R,lok}^{(n)}$ die lokale Blasendichte eines stochastischen Felds

$$N_{lok}'''^{(n)} = \frac{n_{Bl,n_R,lok}^{(n)}}{V_{Kongl}} = \frac{n_{Bl,n_R,lok}^{(n)}}{n_R V_{Zelle}} = \frac{n_{Bl,n_R,lok}^{(n)} N'''}{\lambda_{p,t/n_R}} \quad (3.167)$$

berechnet werden. Der letzte Schritt in Gleichung (3.167) ergibt sich durch Einsetzen des Ausdrucks für n_R in Gleichung (3.164). Um Koaleszenzeffekte zu berücksichtigen, kann weiterhin die Abhängigkeit der Blasendichte vom Volumenanteil α_d entsprechend Gleichung (2.23) modelliert werden. Mit Gleichung (2.20) ergibt sich der lokale Quellterm des linearen Kavitationsmodells für jedes stochastische Feld

$$S_{d,lok}^{(n)} \approx \text{sgn}(\Delta p_p) 3,95 \frac{\rho_d}{\sqrt{\rho_c}} (N_{lok}'''^{(n)})^{\frac{1}{3}} \alpha^{\frac{2}{3}} |\Delta p_p|^{\frac{1}{2}}. \quad (3.168)$$

Der Quellterm aus Gleichung (3.168) wird verwendet, um analog zu Gleichung (2.53) das stochastische Feld zu berechnen. Der Quellterm in Gleichung (3.168) ist bereits die Summe aus mittlerem Quellterm und Zufallsanteil ($Q(\alpha)\overline{\rho_d}$ und $R(\alpha)\overline{\rho_d}$ in Gleichung (3.116) und (3.117)). Alternativ kann bei Berechnung des stochastischen Felds der mittlere Quellterm $Q(\alpha)$ entsprechend Gleichung (2.20) und

$$R(\alpha) = -S_{d,\text{lok}}(\alpha)/\overline{\rho_d} + Q(\alpha) = (-S_{d,\text{lok}}(\alpha) + S_d(\alpha))/\overline{\rho_d} \quad (3.169)$$

verwendet werden.

Vergleich mit dem linearen Kavitationsmodell

Die lokale Blasendichte N''''_{lok} hängt linear von der lokalen Blasenanzahl ab (vgl. Gleichung (3.167)). Für den Mittelwert aus N Repräsentanten der lokalen Blasendichte aus den stochastischen Feldern gilt mit den Gleichungen (3.157), (3.164) und (3.167)

$$\overline{N''''_{\text{lok}}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N N''''_{\text{lok}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{n_{Bl,n_R,\text{lok}}(n)}{n_R V_{\text{Zelle}}} = \frac{1}{N n_R V_{\text{Zelle}}} \sum_{n=1}^N n_{Bl,n_R,\text{lok}}(n) = \frac{\overline{n}_{Bl,n_R,\text{lok}}}{n_R V_{\text{Zelle}}} = \frac{\lambda_{p,t}/n_R}{n_R V_{\text{Zelle}}} = N'''' \quad (3.170)$$

wobei die Definition der Ensemble-Mittelung in Gleichung (2.85) genutzt wurde. Gleichung (3.170) zeigt, dass die lokale Blasendichte nach obigem Modell im Mittel der Blasendichte nach dem bestehenden linearen Kavitationsmodell entspricht (vgl. Gleichungen (2.20), (2.23), (2.24)). Da der lokale Quellterm nichtlinear von der lokalen Blasendichte abhängt (vgl. Gleichung (3.168)), gilt für den Quellterm diese Äquivalenz im Mittel nicht (vgl. Gleichung (2.20))

$$\overline{S_{d,\text{lok}}} \neq S_d \quad (3.171)$$

Wird die Stochastische Feldmethode zur Berücksichtigung von Fluktuationen in der Blasendichte verwendet, wird sich das Ergebnis von einer Simulation unter Verwendung eines mittleren Quellterms unterscheiden.

Die Stochastische Feldmethode kann weiterhin zur Berücksichtigung von Fluktuationen in der Druckdifferenz verwendet werden. Dies wird im folgenden Kapitel 3.7.2 analysiert.

3.7.2 Schwankungen in der Druckdifferenz

Die Druckdifferenz Δp_p wird im linearen Kavitationsmodell entsprechend Gleichung (2.25) berechnet. Bei der Berechnung wird k_c , die mittlere turbulente kinetische Energie der kontinuierlichen Phase des jeweiligen Zeitschritts, verwendet. Im Zwei-Fluid-Modell werden dichtegewichtete Geschwindigkeiten verwendet (vgl. Kapitel 2.2.1). Fluktuationen in der Geschwindigkeit können entsprechend Gleichung (2.45)

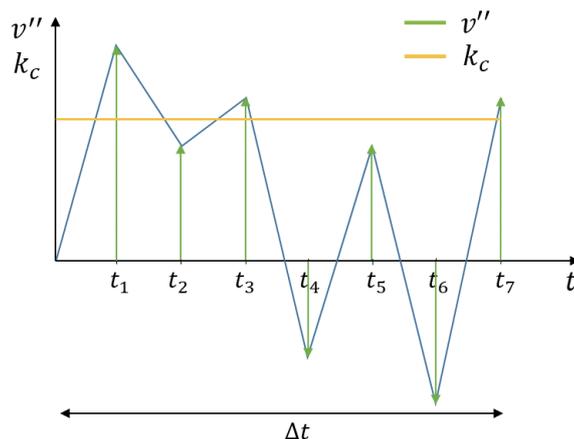
$$v''_k = v_k - \hat{v}_k \quad (3.172)$$

formuliert werden. Mit den Geschwindigkeitsfluktuationen der kontinuierlichen Phase v''_x, v''_y, v''_z in die drei Raumrichtungen ist die mittlere turbulente kinetische Energie k_c der kontinuierlichen Phase damit (vgl. [55], S. 100, 101, 178; [91], S. 312)

$$k_c = \frac{1}{2} (\widehat{v''_x{}^2} + \widehat{v''_y{}^2} + \widehat{v''_z{}^2}). \quad (3.173)$$

Für die mittlere turbulente kinetische Energie wird eine Transportgleichung gelöst, so dass k_c in jedem Zeitschritt und in jeder Rechenzelle bekannt ist. Die mittlere turbulente kinetische Energie ist der Mittelwert instantaner Repräsentanten

$$k_c = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N k_{c,\text{inst}}^{(n)} \quad (3.174)$$

Abbildung 3.12: Geschwindigkeitsfluktuationen innerhalb des Zeitschritts Δt und mittlere turbulente kinetische Energie.

In Abbildung 3.12 sind mehrere eindimensionale Geschwindigkeitsfluktuationen innerhalb des Zeitschritts Δt und die zugehörige mittlere turbulente kinetische Energie k_c dargestellt. Innerhalb des Zeitschritts Δt existieren sieben Geschwindigkeitsfluktuationen und entsprechend sieben Werte der instantanen turbulenten kinetischen Energie. Die instantanen Werte $k_{c,\text{inst}}^{(n)}$ können vom Mittelwert k_c abweichen. Sie können analog zu Gleichung (3.173) als Grenzfall eines infinitesimal kurzen Zeitintervalls $\Delta t \rightarrow 0$ bestimmt werden

$$k_{c,\text{inst}}^{(n)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} (\widehat{v_x''^2} + \widehat{v_y''^2} + \widehat{v_z''^2}) \right), \quad (3.175)$$

so dass sich lediglich eine Fluktuation $v''^{(n)}$ in jede Raumrichtung innerhalb des Zeitintervalls Δt befindet. Alternativ kann Gleichung (3.175) ohne Grenzwert und Mittelungen formuliert werden

$$k_{c,\text{inst}}^{(n)} = \frac{1}{2} \left((v_x''^{(n)})^2 + (v_y''^{(n)})^2 + (v_z''^{(n)})^2 \right). \quad (3.176)$$

Zur Berechnung einer instantanen turbulenten kinetischen Energie nach Gleichung (3.176) ist eine Konkretisierung der Geschwindigkeitsfluktuationen notwendig. Für die Modellierung wird das „Discrete random walk“ ([132], S. 381)- oder „Eddy Lifetime“ ([132], S. 381)-Modell (vgl. Kapitel 2.1) herangezogen, das sich bereits für Lagrange Partikel bewährt hat. Demnach wird eine Geschwindigkeitsfluktuation durch eine gaußverteilte Zufallszahl mit der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}k_c}$ modelliert (vgl. Gleichung (2.7)). Diese Fluktuation kann in Abhängigkeit einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen formuliert werden: Falls $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ gilt für $c_2 \neq 0$ ([127], S. 364)

$$Z = c_1 + c_2 Y \sim \mathcal{N}(c_1 + c_2 \mu_Y, c_2^2 \sigma_Y^2). \quad (3.177)$$

Mit Gleichung (3.177) und der Wahl

$$\begin{aligned} Y &= \xi_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \mu_Y &= 0 \\ \sigma_Y &= 1 \\ c_1 &= 0 \\ c_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}k_c} \end{aligned} \quad (3.178)$$

kann die Zufallsvariable v_i'' in Abhängigkeit der standardnormalverteilten Zufallsvariablen ξ_i ausgedrückt werden

$$v_i'' = Z = \sqrt{\frac{2}{3}} k_c \xi_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2}{3} k_c\right). \quad (3.179)$$

Die standardnormalverteilte Zufallszahl ξ_i in Gleichung (3.179) motiviert den Vergleich mit der Approximation des Wiener-Prozesses durch den Gaußschen Random Walk in Gleichung (2.99). Beide Formulierungen betrachten zufällige Ereignisse durch die Verwendung einer standardnormalverteilten Zufallszahl. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass es sich bei Gleichung (3.179) im Gegensatz zu Gleichung (2.99) nicht zwingend um einen Markov-Prozess handelt. Im „Discrete random walk“ ([132], S. 381)-Modell für Lagrange Partikel ist die Interaktionszeit t_{int} bestimmend für die Dauer einer Störung (vgl. Gleichung (2.9)). Bei der Verwendung des „Discrete random walk“ ([132], S. 381)-Modells innerhalb dieser Euler-Euler-Methode wird davon ausgegangen, dass die Lebenszeit t_e eines Wirbels bestimmend für diese Interaktionszeit ist. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Phasen wird also als gering angenommen (vgl. Kapitel (2.1)). Die integrale Zeitskala großer, energiereicher Wirbel ist ([100]), S. 15)

$$\tau_{\text{int}} = \frac{k_c}{\varepsilon_c} \quad (3.180)$$

mit der Dissipation der kontinuierlichen Phase ε_c . Es wird angenommen, dass alle τ_{int} Zeitintervalle eine neue Fluktuation der Geschwindigkeit auftritt. Zwischen zwei Fluktuationen nimmt die instantane turbulente kinetische Energie entsprechend dem „power law“ ([106], S. 160) ab ([106], S. 160)

$$k(t) = k_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-n_c}, \quad (3.181)$$

wobei t_0 eine beliebige Referenzzeit und k_0 die instantane turbulente kinetische Energie zu diesem Zeitpunkt ist. Die Wahl $n_c = 1,3$ hat sich als geeignet erwiesen (vgl. [106], S. 160; [84], S. 195-214). Die Größe der integralen Zeitskala großer Wirbel τ_{int} im Vergleich zum Zeitschritt dt ist bestimmend für das stochastische Verhalten. Ein Überblick ist in Tabelle 3.3 dargestellt. Abhängig vom Verhältnis τ_{int}/dt darf der vorliegende stochastische Prozess durch einen Wiener-Prozess approximiert werden. Albert Einstein hat die Einschränkung eines nicht zu kleinen Zeitschritts dt bereits für den Zufallsprozess der „Brownschen Molekularbewegung“ ([34], S. 549) festgestellt ([34], S. 556). Gilt $\tau_{\text{int}} \ll dt$, treten pro Zeitschritt viele Störungen auf. Für den Fall vieler Fluktuationen ist die Markov-Bedingung in Gleichung (2.98) erfüllt und der vorliegende stochastische Prozess kann durch einen Wiener-Prozess modelliert werden. Falls der Zeitschritt der numerischen Berechnung dt dem Wert von τ_{int} entspricht, wird in einer Rechenzelle pro Zeitschritt eine Störung berechnet. Der Zustand des aktuellen Zeitschritts hängt nur vom Zustand des vorherigen Zeitschritts ab und die Markov-Bedingung in Gleichung (2.98) ist erfüllt. Gilt für die integrale Zeitskala $\tau_{\text{int}} \gg dt$ existiert alle τ_{int}/dt Zeitschritte eine neue Störung. Entsprechend ist die Fluktuation des aktuellen Zeitschritts nicht nur abhängig vom letzten Zeitschritt, sondern vom Zeitschritt der letzten Störung und die Markov-Bedingung in Gleichung (2.98) ist nicht erfüllt. Der Zusammenhang zwischen der turbulenten kinetischen Energie zum aktuellen Zeitschritt und der turbulenten kinetischen Energie im Zeitschritt der letzten Störung ist durch Gleichung (3.181) beschrieben. Eine Modellierung des stochastischen Prozesses mit dem Wiener-Prozess ist nicht zulässig. Die Verwendung des „Discrete random walk“ ([132], S. 381)-Modells mit einer Fluktuation entsprechend Gleichung (3.179) alle τ_{int}/dt Zeitschritte stellt eine Alternative dar (vgl. [122], S. 122).

Implementierung in AVL Fire™

Die zufälligen Fluktuationen der Geschwindigkeit werden entsprechend Gleichung (3.179) berechnet. Das Verhältnis der integralen Zeitskala τ_{int} zur Zeitschrittweite dt trifft eine Aussage über die Fluktuationsanzahl innerhalb

τ_{int}	τ_{int}/dt	Markov-Bedingung erfüllt?
$\tau_{\text{int}} \ll dt$	$\gg 1$	ja
$\tau_{\text{int}} = dt$	1	ja
$\tau_{\text{int}} \gg dt$	$\ll 1$	nein

Tabelle 3.3: stochastisches Verhalten bei unterschiedlichen Verhältnissen der integralen Zeitskala τ_{int} zur Zeitschrittweite dt .

des Zeitschritts. Analog zu Tabelle 3.3 werden im Folgenden drei Möglichkeiten unterschieden:

- Für $\tau_{\text{int}} \ll dt$ treten innerhalb eines Zeitschritts viele Fluktuationen auf. Aus Gründen der numerischen Realisierbarkeit wurde die innerhalb eines Zeitschritts berechnete Fluktuationsanzahl beschränkt. Die derzeitige Implementierung sieht eine Beschränkung auf maximal zwei Fluktuationen pro Zeitschritt vor.⁵
- Für $\tau_{\text{int}} = dt$ tritt innerhalb eines Zeitschritts genau eine Fluktuation auf.
- Für $\tau_{\text{int}} \gg dt$ tritt nur alle τ_{int}/dt Zeitschritte eine Fluktuation auf. Falls keine neue Fluktuation entsteht, verfällt die turbulente kinetische Energie entsprechend Gleichung (3.181).

Aus den Geschwindigkeitsfluktuationen kann die instantane turbulente kinetische Energie am Ende des Zeitschritts eines jeden stochastischen Felds analog Gleichung (3.176)

$$k_{c,\text{inst}}^{(n)} = \frac{1}{2} \left((v_x''^{(n)})^2 + (v_y''^{(n)})^2 + (v_z''^{(n)})^2 \right) \quad (3.182)$$

berechnet werden. In Analogie zur Implementierung der Stochastischen Feldmethode in [43] und [42] wird die Fluktuation im Sinne einer besseren numerischen Stabilität beschränkt. Im unwahrscheinlichen, aber nicht ausgeschlossenen Fall einer sehr hohen Zufallszahl ξ_i ist die instantane turbulente kinetische Energie $k_{c,\text{inst}}^{(n)}$ sehr hoch, was zu numerischen Problemen führen kann. Die instantane turbulente kinetische Energie $k_{c,\text{inst}}^{(n)}$ wird auf das Zehnfache der mittleren turbulenten kinetischen Energie k_c beschränkt. Es sei darauf hingewiesen, dass hierdurch keine Beschränkung des Volumenanteils der dispersen Phase α_d erfolgt. Die instantane Druckdifferenz wird aus der instantanen turbulenten kinetischen Energie analog zu Gleichung (2.25) erhalten

$$\Delta p_{p,\text{inst}}^{(n)} = p_{\text{sat}} - \left(p - C_E \frac{2}{3} \rho_c k_{c,\text{inst}}^{(n)} \right). \quad (3.183)$$

Der instantane Quellterm kann entsprechend Gleichung (2.20) berechnet werden

$$S_{d,\text{inst}}^{(n)} \approx \text{sgn}(\Delta p_{p,\text{inst}}^{(n)}) 3,95 \frac{\rho d}{\sqrt{\rho_c}} N^{1/3} \alpha^{2/3} |\Delta p_{p,\text{inst}}^{(n)}|^{1/2}. \quad (3.184)$$

⁵ Hierdurch wird nicht berücksichtigt, dass viele aufeinander folgende Fluktuationen sich addieren und zu Extremwerten führen können. Die Summe unabhängiger normalverteilter Fluktuationen der Varianz $\sigma_{n,1}^2, \sigma_{n,2}^2, \dots, \sigma_{n,l}^2$ ist selbst eine normalverteilte Zufallsvariable mit der Varianz $\sigma_{n,\text{ges}}^2 = \sigma_{n,1}^2 + \sigma_{n,2}^2 + \dots + \sigma_{n,l}^2$ (vgl. [85], S. 81). In einem alternativen Ansatz können Extremwerte aufgrund sich summierender Fluktuationen durch eine Erhöhung der Varianz berücksichtigt werden. An Stelle von $dt/\tau_{\text{int}} = dt\epsilon_c/k_c$ Fluktuationen (vgl. Gleichung (3.180)) mit den Varianzen $\sigma_{n,1}^2 = \sigma_{n,2}^2 = \dots = \frac{2}{3}k_c$ entsprechend Gleichung (2.7) wird eine einzige Fluktuation mit der Varianz $\sigma_{n,\text{ges}}^2 = \frac{2}{3}k_c dt\epsilon_c/k_c = \frac{2}{3}dt\epsilon_c$ berechnet. Der numerische Aufwand ist überschaubar, da lediglich eine Fluktuation berechnet werden muss. Für die Fluktuation ergibt sich mit Hilfe von Gleichung (3.177) und analog zu Gleichung (3.179) $v_i' = (\frac{2}{3}dt\epsilon_c)^{1/2}\xi_i$. Die Form der Fluktuation entspricht der des „simplified Langevin model“ ([106], S. 489) in Gleichung (2.92), wenn dW entsprechend Gleichung (2.100) approximiert wird. Die Verwendung der turbulenten kinetischen Dissipation ϵ_c an Stelle der turbulenten kinetischen Energie k_c innerhalb der Varianz lässt keine grundlegend anderen Ergebnisse erwarten, da beide Größen in denselben Bereichen ihre Maximalwerte annehmen.

Der Quellterm in Gleichung (3.184) ist die Summe aus mittlerem Quellterm und Zufallsanteil (vgl. $\overline{Q\rho_d}$ und $\overline{R\rho_d}$ in den Gleichungen (3.116) und (3.117)). Alternativ kann der mittlere Quellterm S_d aus Gleichung (2.20) und der Zufallsanteil

$$R(\alpha) = (-S_{d,\text{inst}} + S_d)/\overline{\rho_d} \quad (3.185)$$

verwendet werden.

Vergleich mit dem linearen Kavitationsmodell

Für den Mittelwert einer Funktion f , die nichtlinear von der turbulenten kinetischen Energie abhängt, gilt

$$\overline{f(k_{c,\text{inst}})} \neq f(k_c) \quad (3.186)$$

mit der mittleren turbulenten kinetischen Energie aus Gleichung (3.174). Im linearen Kavitationsmodell hängt die Druckdifferenz linear von der turbulenten kinetischen Energie ab (vgl. Gleichung (2.25)). Der Quellterm hängt nichtlinear von dieser Druckdifferenz ab (vgl. Gleichung (2.20)). Der Quellterm unter Verwendung instantaner Fluktuationen in der turbulenten kinetischen Energie $S_{d,\text{inst}}^{(n)}$ in Gleichung (3.184) unterscheidet sich damit im Mittel von dem Quellterm S_d des bestehenden linearen Kavitationsmodells

$$\overline{S_{d,\text{inst}}} \neq S_d. \quad (3.187)$$

Innerhalb des Kapitels 3 wurde diskutiert, wie die stochastischen Felder im Zwei-Fluid-Modell interpretiert werden können. Es wurde demonstriert, wie die PDF durch die stochastischen Felder approximiert und transportiert wird. Die PDF-Transportgleichung des Volumenanteils der dispersen Phase wurde für das Zwei-Fluid-Modell hergeleitet. Unterschiede zur PDF-Transportgleichung einer Skalargröße in der Verbrennung wurden analysiert und diskutiert. Es wurde gezeigt, dass diese Unterschiede zu erwarten sind, da die Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell nicht analog für eine Skalargröße im Verbrennungsbereich formuliert werden kann. Eine konsistente Formulierung der Stochastischen Feldmethode für den Volumenanteil der dispersen Phase im Zwei-Fluid-Modell wurde formuliert. Mehrere Möglichkeiten für eine sinnvolle Implementierung in den kommerziellen CFD-Code AVL Fire™ wurden diskutiert. Ihre Realisierbarkeit wurde in Bezug auf die Einflussfaktoren in Abbildung 1.11 bewertet. Die Berücksichtigung von Schwankungen im Quellterm wurde als gewinnbringend herausgearbeitet und implementiert. Nach Kenntnis des Autors ist dies die erste Implementierung der Stochastischen Feldmethode innerhalb eines kommerziellen Codes. Als Ursache für die Schwankungen im Quellterm wurden zwei Einflüsse unterschieden:

- Schwankungen in der Blasendichte
- Schwankungen in der Druckdifferenz aufgrund turbulenter Fluktuationen.

Letzteres wurde durch ein Modell für Lagrange Partikel approximiert. Nach Kenntnis des Autors ist dies die erste Anwendung eines Modells aus dem Bereich Lagrange Partikel innerhalb der Stochastischen Feldmethode. Nach der Formulierung und Implementierung der theoretischen Modelle innerhalb des aktuellen Kapitels werden diese innerhalb des folgenden Kapitels 4 zur Berechnung praxisnaher Strömungen genutzt.

4 Numerische Berechnungen

Nachdem in Kapitel 3 die theoretischen Grundlagen der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell diskutiert und die Implementierungen erläutert wurden, werden diese in Kapitel 4 zur Berechnung praxisnaher Strömungen angewandt. Zur besseren Lesbarkeit sind die wichtigsten Simulationseinstellungen nicht im Fließtext enthalten, sondern in Anhang H zusammengefasst. Die Simulationsergebnisse enthalten Verweise [S1], [S2], ... auf die im Anhang aufgeführten Einstellungen. Der Aufbau des Kapitels 4 wird im Folgenden erläutert. In Kapitel 4.1 werden die in AVL FireTM implementierten Varianten definiert und voneinander abgegrenzt. Kapitel 4.2 verifiziert und validiert die implementierten Varianten der Stochastischen Feldmethode. Die Verwendung der Stochastischen Feldmethode bei der Berechnung nichtlinearer Funktionen wird in Kapitel 4.3 an einem Beispiel demonstriert. Kapitel 4.4 zeigt an einem Beispiel, wie die PDF durch die stochastischen Felder approximiert wird. In Kapitel 4.5 wird die Stochastische Feldmethode bei der Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung angewandt, zu der experimentelle Daten existieren. Die Strömung befindet sich im Grenzbereich zwischen Kavitation und keiner Kavitation: Obwohl die Experimente die Existenz von Kavitation zeigen, berechnet das herkömmliche Zwei-Fluid-Modell in AVL FireTM eine Strömung ohne Kavitation. Es wird untersucht, ob die Stochastische Feldmethode im Vergleich zum herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell eine Verbesserung zulässt. Innerhalb des Kapitels 4 wird im Sinne einer besseren Lesbarkeit der Volumenanteil der dispersen Phase α_d vereinfacht als α geschrieben.

4.1 Abgrenzung der verwendeten Varianten der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell in AVL FireTM

Die in Kapitel 3.7 beschriebenen Modelle zur Berücksichtigung von Schwankungen im Quellterm wurden in AVL FireTM implementiert. Es ist zwischen einer Berücksichtigung von Schwankungen in der Blasendichte und in der Druckdifferenz zu unterscheiden. Die in Kapitel 3.7.1 erläuterte Variante der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell zur Berücksichtigung von Schwankungen in der Blasendichte N''' wird im Folgenden „2F-SFM N“ bezeichnet. Die in Kapitel 3.7.2 beschriebene Variante der Stochastischen Feldmethode zur Berücksichtigung von Schwankungen in der Druckdifferenz Δp_p wird im Folgenden „2F-SFM p“ bezeichnet. Bei der Implementierung beider Modelle wurde das Lösungsverfahren in Abbildung 3.8 angewendet. Die stochastischen Felder liefern in jeder Rechenzelle Volumenanteile der dispersen Phase $\alpha^{(n)}$. Entsprechend der dispersen Phase α des Zwei-Fluid-Modells sind sie auf einen physikalisch sinnvollen Wertebereich $0 \leq \alpha \leq 1$ beschränkt.

4.2 model-to-model-Verifikation und -Validierung der Stochastischen Feldmethode in AVL FireTM

Teile des Kapitels 4.2 wurden bereits in [109], [110], [111] und [112] veröffentlicht. Entsprechend ([94], S. 235) wird bei der Verifikation sichergestellt, dass die Modellgleichungen korrekt gelöst werden. Die Validierung gewährleistet, dass die Realität durch die verwendeten Modellgleichungen korrekt beschrieben wird ([94], S. 234). Zur Verifikation bzw. Validierung neuer Implementierungen werden in der Literatur andere, anhand von Experimenten verifizierte und validierte Codes herangezogen (vgl. z.B. [63]). In diesem Zusammenhang wird die Formulierung „code-to-code“ [63] verwendet. Die implementierten Modelle 2F-SFM N und 2F-SFM p werden innerhalb des Kapitels 4.2 anhand bereits validierter und verifizierter Modelle in AVL FireTM verifiziert und validiert. In Anlehnung an den Ausdruck „code-to-code“ [63] wird in diesem Kapitel von einer model-to-model-Verifikation und

-Validierung gesprochen. Das in AVL FireTM implementierte Zwei-Fluid-Modell wurde bereits in [47] verifiziert. Durch vielfache Anwendung in der industriellen Praxis wurde das Zwei-Fluid-Modell für eine Anwendung auf kavitierende Strömungen in Einspritzdüsen validiert (vgl. z.B. [138], [33]). Für die Verifikation und Validierung der Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p kann das bestehende Zwei-Fluid-Modell als Referenz verwendet werden.

4.2.1 2D Injektor

Das erste Modell ist eine zweidimensionale Einspritzdüse. Abbildung 4.1 zeigt das Modell des Fluids während des Einspritzvorgangs. Es ist rotationssymmetrisch, so dass die Berechnung eines Ausschnitts genügt. Die Rotationsachse ist in Abbildung 4.1 rot gekennzeichnet. Zur Veranschaulichung ist neben dem Fluid die Ventalnadel und das Gehäuse skizziert. Die Festkörper sind geschnitten dargestellt. Der Ein- und der Ausgang sind in Abbildung 4.1 ebenfalls gekennzeichnet. Für die Zusammenfassung der wichtigsten Simulationseinstellungen sei auf [S1] in Anhang H verwiesen. Die Abbildung 4.2 zeigt das Simulationsergebnis unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells in

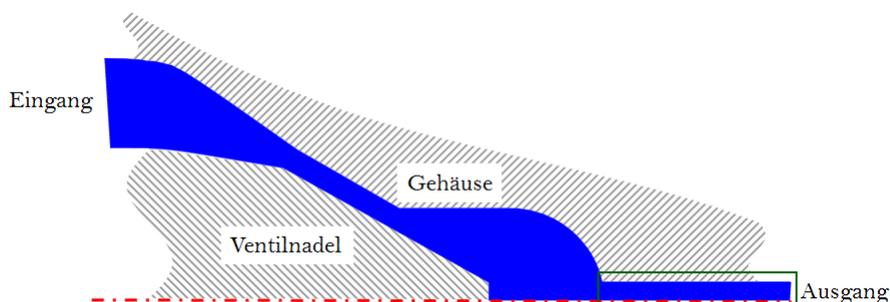


Abbildung 4.1: Modell eines zweidimensionalen Injektors im geöffneten Zustand. Die Rotationsachse ist in rot dargestellt. Der in Abbildung 4.2 vergrößerte Bereich ist grün markiert. Die Ventalnadel und das Gehäuse sind schematisch skizziert.

AVL FireTM ohne Verwendung der Stochastischen Feldmethode. Das Kavitationsgebiet ist vergrößert dargestellt. Der vergrößerte Ausschnitt ist in Abbildung 4.1 grün markiert. Der Volumenanteil der dispersen Phase α_d ist zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$ aufgetragen. Der Bereich der kavitierenden Strömung ist in Abbildung 4.2 anhand des hohen Volumenanteils α zu erkennen.

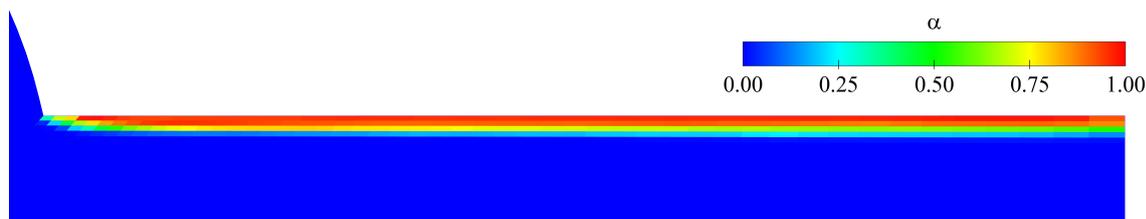


Abbildung 4.2: 2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells in AVL FireTM. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. Die grafische Auftragung erfolgte mit Enight 10.2.3(a). [S1]

2F-SFM N

Der zweidimensionale Injektor wird mit der Variante 2F-SFM N berechnet. Abbildung 4.3 zeigt den Volumenanteil der dispersen Phase im Kavitationsgebiet. Ein Vergleich mit dem Ergebnis unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne Stochastische Feldmethode (vgl. Abbildung 4.2) zeigt, dass die Variante 2F-SFM N zu einem sehr ähnlichen Ergebnis führt. Vier beispielhafte stochastische Felder sind in Abbildung E.1 in Anhang E aufgetragen. Sie zeigen Repräsentanten des Volumenanteils. Die Abbildungen 4.4 und 4.5 vergleichen die zeitliche Entwicklung des Volumenanteils der dispersen Phase in einer Rechenzelle im Zentrum und am Rand des Kavitationsgebiets.



Abbildung 4.3: 2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Modells 2F-SFM N in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}$ s. Die grafische Auftragung erfolgte mit Ensight 10.2.3(a). [S2]

Die jeweils rechte Abbildung zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der linken Darstellung. Die Volumenanteile der stochastischen Felder $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(8)}$ fluktuieren aufgrund des stochastischen Einflusses in Gleichung (3.165). Der mittlere Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMN}$ und der Volumenanteil unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne Stochastische Feldmethode α sind ebenfalls dargestellt. Die beiden Volumenanteile $\alpha_{2F-SFMN}$ und α besitzen eine ähnliche zeitliche Entwicklung. Die Differenzen sind durch zwei Ursachen zu erklären:

- Fluktuationen in den stochastischen Feldern beeinflussen den mittleren Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMN}$ und verursachen hier entsprechende Schwankungen.
- Der lokale Quellterm $S_{d,lok}^{(n)}$ hängt nichtlinear von der lokalen Blasendichte $N_{lok}^{(n)}$ ab (vgl. Gleichung (3.168)). Unterschiede zum Zwei-Fluid-Modell ohne die Stochastische Feldmethode wurden bereits am Ende des Kapitels 3.7.1 erwartet (vgl. Gleichung (3.171)).

In den Abbildungen 4.4 und 4.5 fällt auf, dass der mittlere Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMN}$ nicht immer dem Mittelwert der stochastischen Felder entspricht. Besonders deutlich ist dies in Abbildung 4.5 um den Zeitschritt 300 zu erkennen. Aus Gründen der Kontinuität wird in AVL Fire™ eine Korrektur des berechneten Volumenanteils durchgeführt. Eine Anwendung derselben Korrektur auf die stochastischen Felder, ohne diese unphysikalisch zu beschränken, erfordert einen zusätzlichen Rechenaufwand. Der zusätzliche Rechenaufwand wird vermieden im Sinne einer ressourcenschonenden Implementierung (vgl. Abbildung 1.11). In der Folge können Differenzen zwischen den Volumenanteilen der stochastischen Felder $\alpha^{(n)}$ und dem mittleren Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMN}$ bei einer Auftragung, wie in den Abbildungen 4.4 und 4.5, auftreten. Die Erhaltung der Kontinuität wird durch eine

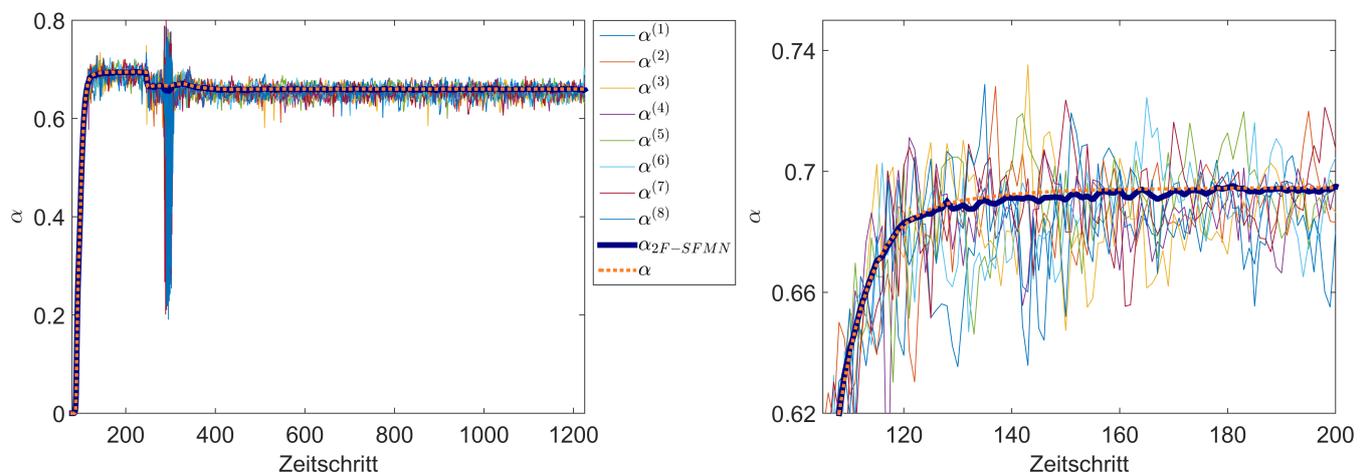


Abbildung 4.4: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM N. [S2]

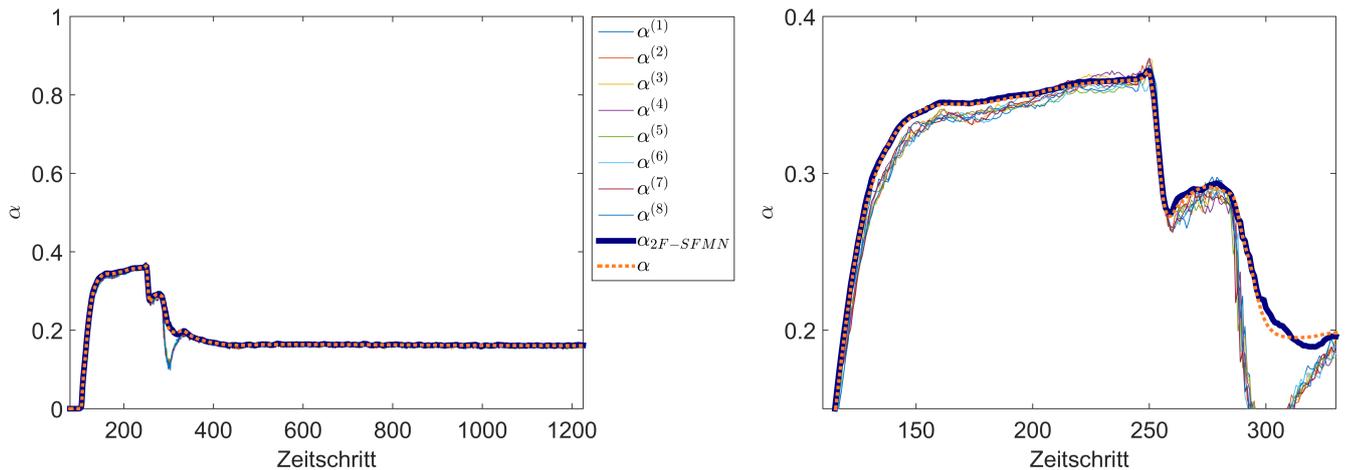


Abbildung 4.5: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM N. [S2]

Anwendung der Korrektur auf den mittleren Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMN}$ weiterhin gewährleistet. Aufgrund einer Geheimhaltungsverpflichtung kann an dieser Stelle nicht genauer auf diese Korrektur eingegangen werden.

2F-SFM p

Die kavitierende Strömung innerhalb des zweidimensionalen Injektors unter Verwendung der Variante 2F-SFM p ist in Abbildung 4.6 gezeigt. Der mittlere Volumenanteil der dispersen Phase (α_d in Abbildung 3.8) ist dargestellt. Die Strömung weist starke Ähnlichkeiten mit der Strömung in Abbildung 4.2 unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne die Stochastische Feldmethode auf. Vier beispielhafte stochastische Felder sind in Abbildung E.2 in Anhang E dargestellt. Die Abbildungen 4.7 und 4.8 vergleichen die zeitliche Entwicklung des Volumenanteils der dispersen Phase innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum und am Rand des Kavitationsgebiets. Das jeweils rechte Bild zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der linken Darstellung. Acht Volumenanteile der stochastischen Felder $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(8)}$ sind dargestellt. Die Volumenanteile schwanken um den mittleren Volumenanteil $\alpha_{2F-SFMp}$, da sie durch den stochastischen Prozess in Gleichung (3.179) beeinflusst werden. Zum Vergleich ist die zeitliche Entwicklung des Volumenanteils der dispersen Phase α unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne die Stochastische Feldmethode ebenfalls in den Abbildungen 4.7 und 4.8 aufgetragen. Der Vergleich in beiden Rechenzellen zeigt, dass die Unterschiede der Volumenanteile $\alpha_{2F-SFMp}$ und α gering sind. Die Differenzen bei Verwendung der Variante 2F-SFM p haben zwei Ursachen:

- Die stochastischen Schwankungen der Felder $\alpha^{(n)}$ bewirken stochastische Schwankungen des mittleren Volumenanteils $\alpha_{2F-SFMp}$ im Vergleich zum Volumenanteil α des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells.
- Der instantane Quellterm $S_{d,inst}^{(n)}$ hängt nichtlinear von der instantanen Druckdifferenz ab (vgl. Gleichung (3.184)). Die Abweichungen wurden am Ende des Kapitels 3.7.2 bereits erwartet (vgl. Gleichung (3.187)).



Abbildung 4.6: 2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Modells 2F-SFM p in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}$ s. Die grafische Auftragung erfolgte mit Ensiight 10.2.3(a). [S3]

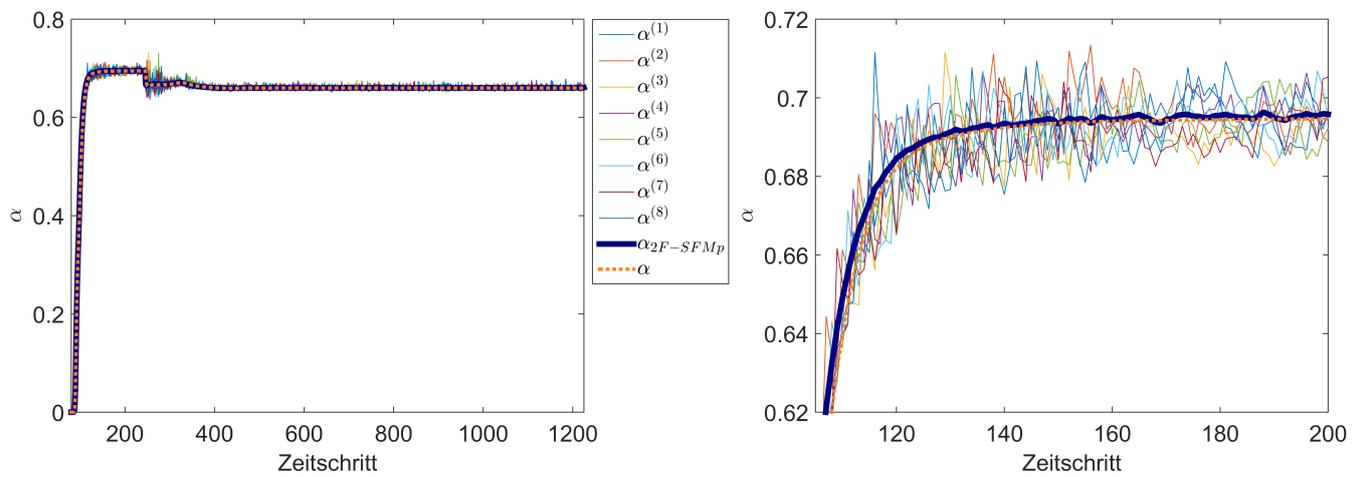


Abbildung 4.7: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM p. [S3]

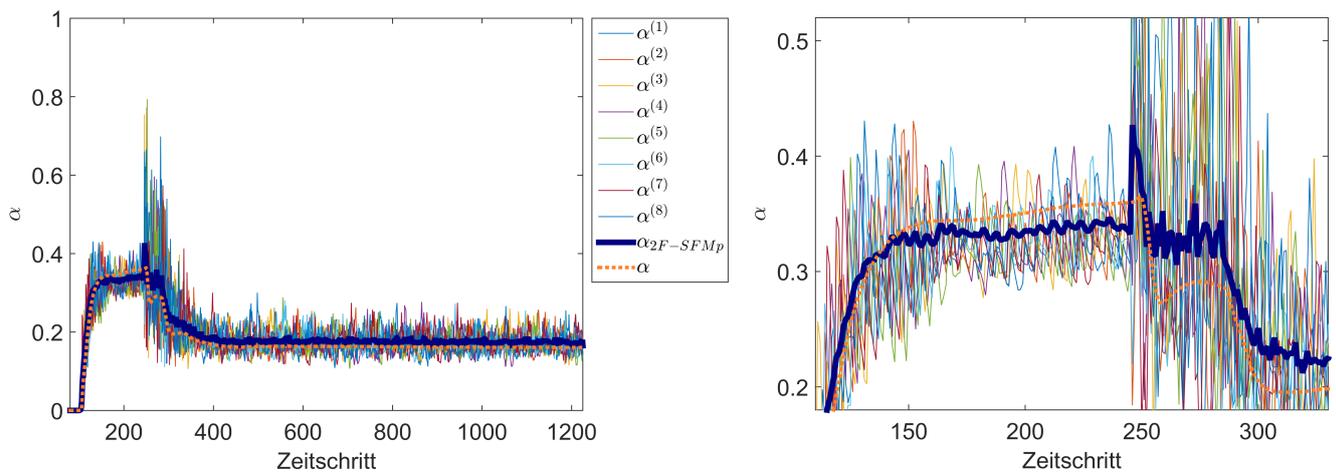


Abbildung 4.8: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM p. [S3]

4.2.2 3D Injektor

Als zweites, aufwändigeres Modell wird das Installationsbeispiel von AVL Fire™ einer dreidimensionalen Einspritzdüse betrachtet. Die für diese Arbeit wichtigsten Simulationseinstellungen sind in Kapitel H aufgeführt. Für eine detaillierte Übersicht sei auf [1] verwiesen. Durch die Betrachtung einer sich bewegenden Ventalnadel bildet die Simulation einen vollständigen Einspritzvorgang ab. Abbildung 4.11 zeigt einen Ausschnitt des rotationssymmetrischen Modells. Die Rotationsachse ist in Abbildung 4.11 in rot skizziert. Zur Veranschaulichung enthält Abbildung 4.11 die Skizzen eines beispielhaften Gehäuses sowie einer Ventalnadel. In Abbildung 4.11 sind zwei Zustände der Einspritzdüse dargestellt: links existiert kein durchgehender Spalt zwischen der Ventalnadel und dem Gehäuse. Dies repräsentiert eine geschlossene Einspritzdüse und damit eine verschwindende Strömung. In Abbildung 4.11 rechts existiert ein durchgehender Spalt zwischen der Ventalnadel und dem Gehäuse. Die Einspritzdüse ist geöffnet und Brennstoff kann vom Eingang zum Ausgang strömen. Die Abbildung 4.9 veranschaulicht das auftretende Kavitationsgebiet durch einen hohen Volumenanteil der dispersen Phase am Ausgang der Einspritzdüse, vor dem Luftraum. Der vergrößerte Bereich ist in Abbildung 4.11, rechts grün markiert. Das Ergebnis in Abbildung 4.9 wurde mit dem Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire™ ohne Stochastische Feldmethode berechnet. Es wird im Folgenden mit den Ergebnissen durch Anwendung der Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p verglichen.

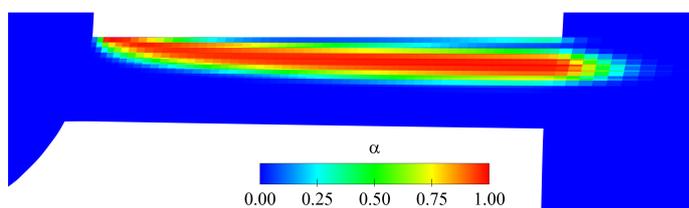


Abbildung 4.9: Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach dem Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire™ bei Kurbelwellenwinkel 210°. [S4]

2F-SFM N

Das Ergebnis bei Anwendung der Variante 2F-SFM N auf die dreidimensionale Einspritzdüse ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Der Vergleich mit Abbildung 4.9 zeigt, dass die Variante 2F-SFM N zu einem sehr ähnlichen Ergebnis führt wie das Zwei-Fluid-Modell. Mehrere stochastische Felder sind in Bild F.1 in Anhang F zu sehen. Bei Betrachtung einer Rechenzelle im Detail sind Unterschiede festzustellen.

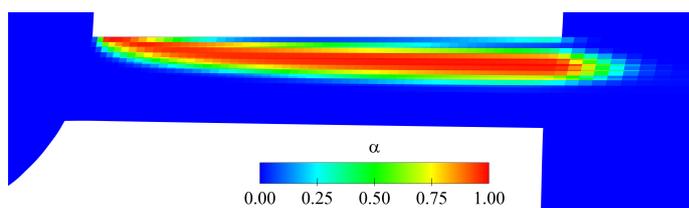


Abbildung 4.10: Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach der Variante 2F-SFM N in AVL Fire™ bei Kurbelwellenwinkel 210°. [S5]

2F-SFM p

Das Ergebnis bei Anwendung der Variante 2F-SFM p ist in Abbildung 4.12 zu sehen. Ein Vergleich mit dem Ergebnis des Zwei-Fluid-Modells ohne Stochastische Feldmethode in Abbildung 4.9 zeigt, dass diese sich sehr ähneln. Vier exemplarische stochastische Felder sind im Anhang F in Abbildung F.2 dargestellt. Sie unterscheiden sich deutlich im Volumenanteil einer jeweiligen Rechenzelle. In jedem stochastischen Feld befindet sich das Kavitationsgebiet an identischer Stelle.

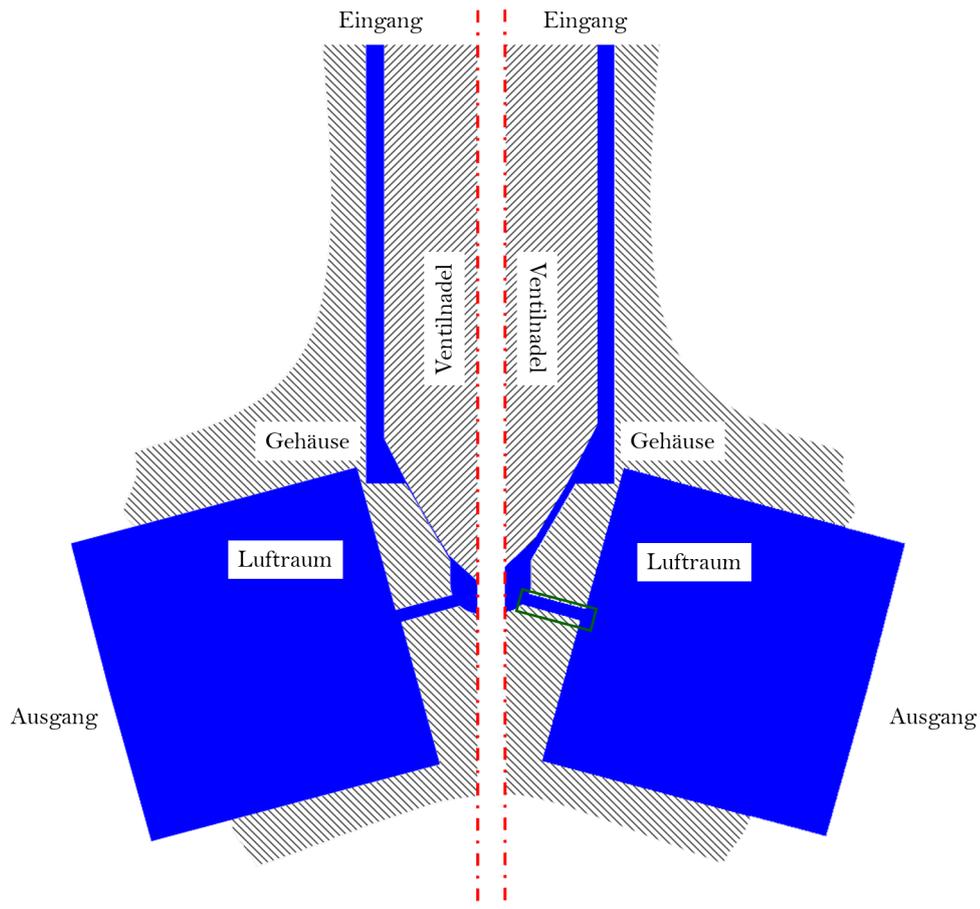


Abbildung 4.11: Schnitt eines 3D Injektors: Die Ventilnadel und das Gehäuse sind geschnitten skizziert. Die Ventilnadel öffnet und schließt den Injektor im Laufe der Simulation. Links: geschlossenes Ventil. Rechts: geöffnetes Ventil. Der in Abbildung 4.9 vergrößerte Bereich ist in der rechten Darstellung grün markiert.

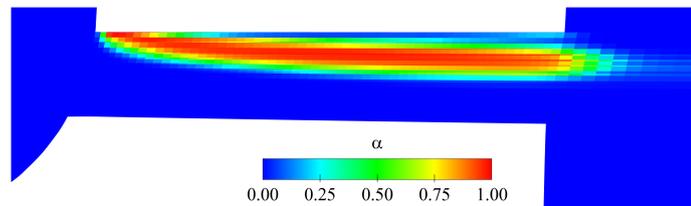


Abbildung 4.12: Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach der Variante 2F-SFM p in AVL Fire™ bei Kurbelwellenwinkel 210°. [S6]

4.2.3 Fazit zur Verifikation und Validierung

In den Kapiteln 4.2.1 und 4.2.2 wurden die Varianten der Stochastischen Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell 2F-SFM N und 2F-SFM p mit dem verifizierten und validierten Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire™ verglichen. Beide Varianten weisen lediglich geringe Unterschiede zum implementierten Zwei-Fluid-Modell auf. Sie werden im Folgenden als verifiziert erachtet. Die in den Kapiteln 4.2.1 und 4.2.2 betrachteten Beispiele sind repräsentativ für das Anwendungsgebiet kavitierender Strömungen im Automobilbereich. Das implementierte Zwei-Fluid-Modell wurde für diese Anwendung bereits validiert (vgl. z.B. [138], [33]). Die Ergebnisse der Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p entsprechen denen des Zwei-Fluid-Modells ohne Anwendung der Stochastischen Feldmethode. Im Folgenden werden die Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p daher für eine Anwendung auf kavitierende Strömungen während des Einspritzvorgangs im Automobilbereich als validiert erachtet.

Es sei hervorgehoben, dass für die Simulationen innerhalb der Kapitel 4.2.1 und 4.2.2 keine Parameterstudien durchgeführt wurden, um die Simulationseinstellungen im Sinne eines positiven Ergebnisses zu justieren. Dies weist auf die Robustheit der implementierten Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p hin: Die praxisrelevanten Ergebnisse des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells können ohne eine Justierung der Eingabeparameter reproduziert werden.

4.3 Verwendung der Stochastischen Feldmethode bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft

Die samples des Volumenanteils $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(N)}$ approximieren die PDF (vgl. Abbildung 2.5, Kapitel 3.2) und können bei der Berechnung von Funktionen genutzt werden, die nichtlinear vom Volumenanteil abhängen. Die Verwendung von Mittelwerten und die daraus resultierenden groben Approximationen werden vermieden (vgl. Kapitel 1.2, 2.4.2). Die Verwendung der PDF der Volumenanteile wird innerhalb des Kapitels 4.3 beispielhaft bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft entsprechend Gleichung (2.32) mit der Dichte der Phasengrenzflächen aus Gleichung (2.34) demonstriert. Für jeden Volumenanteil der stochastischen Felder $\alpha^{(n)}$ wird entsprechend Gleichung (2.23) eine Blasendichte $N'''^{(n)}$ berechnet⁶

$$N'''^{(n)} = \begin{cases} N_0''' & \text{falls } \alpha^{(n)} \leq 0,5 \\ 2(N_0''' - 1)(1 - \alpha^{(n)}) + 1 & \text{falls } \alpha^{(n)} > 0,5. \end{cases} \quad (4.1)$$

Analog zu den Gleichungen (2.28) und (2.34) ergibt sich für jedes sample ein Blasenradius $r_{Bl}^{(n)}$

$$r_{Bl}^{(n)} = \left(\frac{3\alpha^{(n)} V_{Zelle}}{4\pi n_{Bl}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.2)$$

und eine Dichte der Phasengrenzflächen $A'''^{(n)}$

$$A'''^{(n)} = (36\pi N'''^{(n)})^{\frac{1}{3}} (\alpha^{(n)})^{\frac{2}{3}}. \quad (4.3)$$

Die Ensemble-gemittelte Blasengröße und die Ensemble-gemittelte Phasengrenzfläche der stochastischen Felder werden mit Hilfe der Definition in Gleichung (2.85) berechnet

$$\langle r_{Bl} \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_{Bl}^{(n)} \quad \langle A''' \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A'''^{(n)} \quad (4.4)$$

und innerhalb der Gleichungen (2.32) und (2.36) an Stelle der Größen A''' und r_{Bl} verwendet. Die Approximationen durch das Verwenden eines mittleren Volumenanteils bei Berechnung der nichtlinearen Abhängigkeiten in den Gleichungen (2.28) und (2.34) an Stelle einer PDF der Volumenanteile werden hierdurch vermieden. Wird die PDF der Volumenanteile und damit auch die PDF der Blasengrenzflächendichte und der Blasengrößen richtig wiedergegeben (vgl. Kapitel 3.1), kann auch die nichtlineare Abhängigkeit der Widerstandskraft quasi exakt berücksichtigt werden. Die Approximation durch die Verwendung des mittleren Blasenradius $\langle r_{Bl} \rangle_N$ innerhalb der nichtlinearen Abhängigkeit der Reynoldszahl der Blasen Re_b in Gleichung (2.35) bleibt innerhalb der aktuellen Implementierung bestehen. Im Folgenden wird untersucht, ob die Verwendung einer PDF an Stelle eines Mittelwerts bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft innerhalb der Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p einen Einfluss auf den Volumenanteil hat. Die Simulationen der zweidimensionalen Einspritzdüse in den Abbildungen

⁶ In der Implementierung in AVL Fire™ kann die Stochastische Feldmethode innerhalb mehrerer Modelle für die Blasendichte verwendet werden. An dieser Stelle wird die Anwendung auf das in Gleichung (2.23) vorgestellte Modell demonstriert.

4.3 - 4.8 werden erneut durchgeführt, wobei die Strömungswiderstandskraft mit Hilfe der Gleichungen (4.1) - (4.4) berechnet wird.

2F-SFM N

Die Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Hilfe der PDF der Variante 2F-SFM N wird mit der Berechnung unter Verwendung eines mittleren Volumenanteils verglichen. Die Abbildungen 4.13 und 4.14 stellen den zeitlichen Verlauf des Volumenanteils $\alpha_{2F-SFMN-PDF}$ dem des Volumenanteils $\alpha_{2F-SFMN-Mittelwerte}$ gegenüber. Letzterer wurde bereits in den Abbildungen 4.4 und 4.5 gezeigt. Der Vergleich erfolgt analog zu den bisherigen Auftragungen für jeweils eine Zelle im Zentrum und am Rand des Kavitationsgebiets. Der mittlere Volumenanteil α unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne Stochastische Feldmethode ist ebenfalls dargestellt. Der Vergleich zeigt geringe Unterschiede durch die Verwendung der PDF bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft.

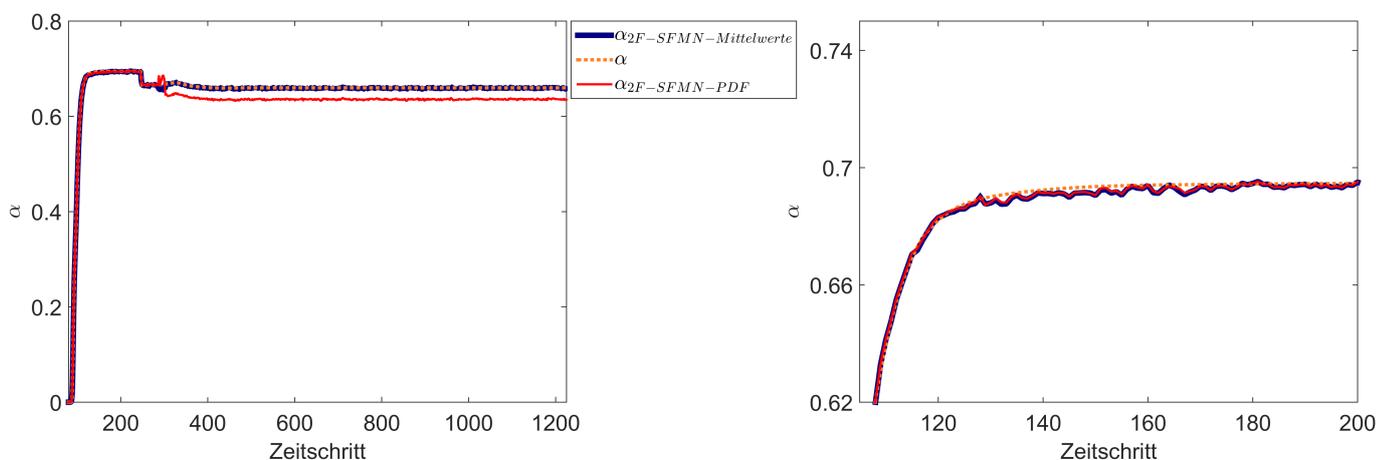


Abbildung 4.13: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM N bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil α des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S2]

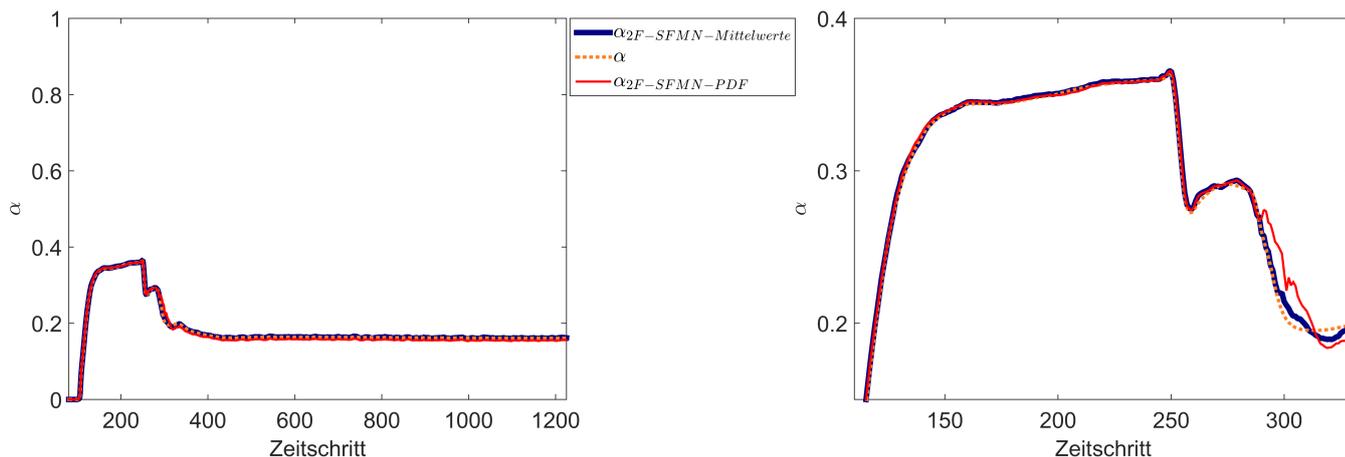


Abbildung 4.14: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM N bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil α des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S2]

2F-SFM p

Die PDF der Variante 2F-SFM p wird mit Hilfe der Gleichungen (4.1) - (4.4) zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft verwendet. Das Ergebnis wird mit der Berechnung unter Verwendung eines mittleren Volumenanteils in den Abbildungen 4.7 und 4.8 verglichen. Die Abbildungen 4.15 und 4.16 vergleichen die zeitliche Entwicklung der Volumenanteile für eine Rechenzelle im Zentrum und am Rand des Kavitationsgebiets. Der mittlere Volumenanteil α bei Verwendung des Zwei-Fluid-Modells ohne die Stochastische Feldmethode ist ebenfalls dargestellt. Der Vergleich in den Abbildungen 4.15 und 4.16 zeigt, dass kleine Unterschiede im zeitlichen Verlauf des Volumenanteils auftreten, wenn die PDF der Variante 2F-SFM p an Stelle eines mittleren Volumenanteils zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft verwendet wird.

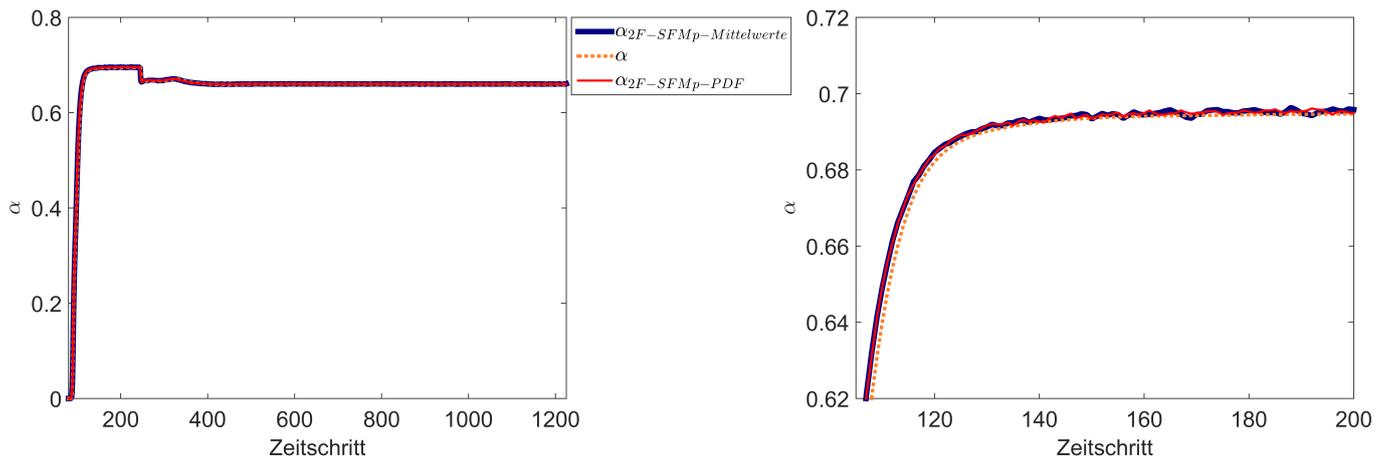


Abbildung 4.15: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM p bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S3]

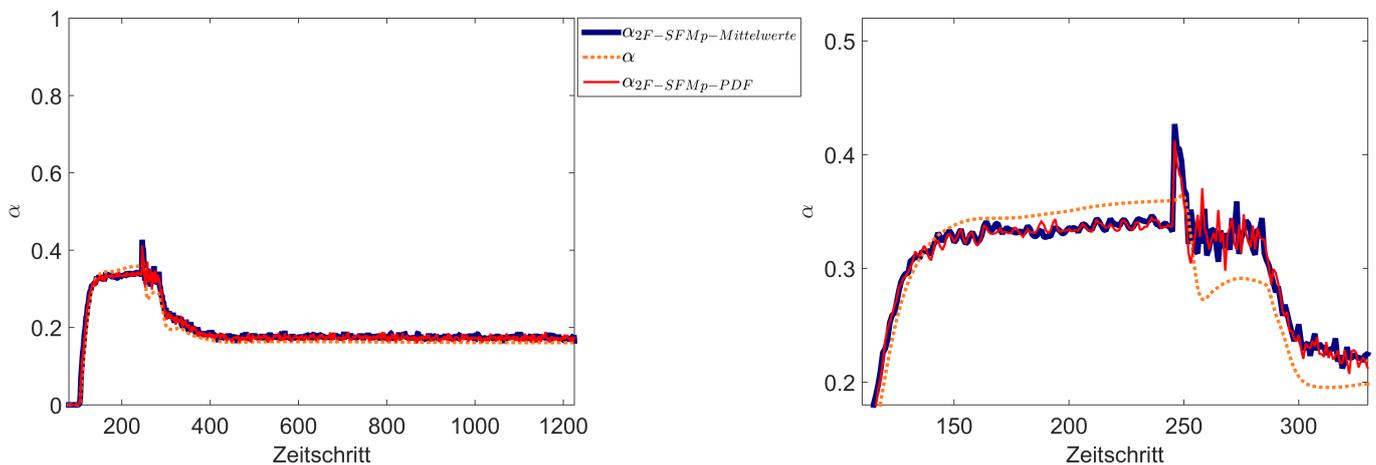


Abbildung 4.16: 2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM p bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S3]

Fazit zur Verwendung der Stochastischen Feldmethode bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft

Die Verwendung der PDF der Volumenanteile entsprechend der Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p der Stochastischen Feldmethode zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft führt zu Unterschieden im Volumenanteil. Im betrachteten Beispiel des zweidimensionalen Injektors sind diese verhältnismäßig gering. In anderen Anwendungsbeispielen könnte die Verwendung von PDFs zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft einen größeren Einfluss auf das Ergebnis besitzen. Das Erhalten eines ähnlichen Ergebnisses bei Verwendung der PDF zur Berechnung der Strömungswiderstandskraft demonstriert die Robustheit der Implementierung: Die bisherigen Anwendungsfälle des Zwei-Fluid-Modells können weiterhin mit den Varianten 2F-SFM N und 2F-SFM p der Stochastischen Feldmethode berechnet werden, wobei zusätzlich die PDF bei der Berechnung der Strömungswiderstandskraft berücksichtigt wird.

4.4 Approximation der PDF

Teile des Kapitels 4.4 wurden bereits in [109], [110], [111] und [112] veröffentlicht.

Die Werte der stochastischen Felder können analog zu Abbildung 1.6 zur Approximation einer PDF verwendet werden. Abbildung 4.17 zeigt dies am Beispiel des 2D Injektors. Die PDFs des Volumenanteils sind für mehrere Rechenzellen dargestellt.

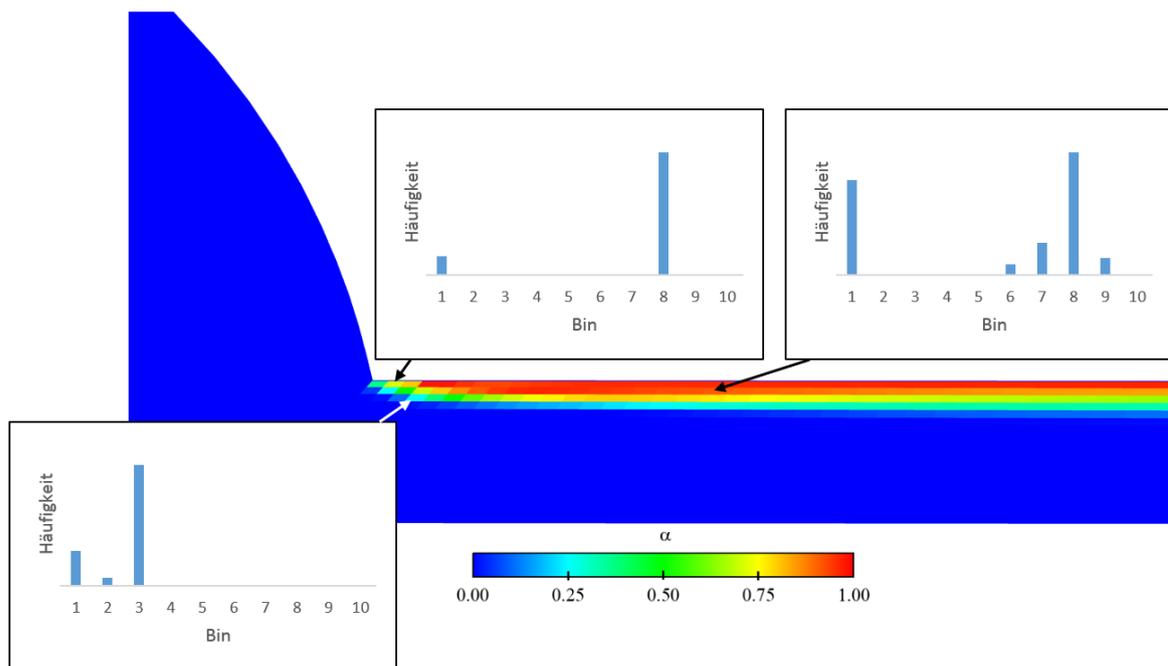


Abbildung 4.17: Approximation der PDF am Beispiel des 2D Injektors. [S7]

4.5 Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung

Nach der Verifikation und Validierung innerhalb des Kapitels 4.2, der Verwendung der PDF bei der Berechnung einer nichtlinearen vom Volumenanteil abhängigen Funktion am Beispiel der Strömungswiderstandskraft in Kapitel 4.3 sowie einer beispielhaften Approximation der PDF in Kapitel 4.4 wird innerhalb des Kapitels 4.5 ein AVL-Testfall berechnet, zu dem experimentelle Daten vorliegen. Der Testfall beschreibt eine kavitierende Strömung

durch eine Drossel des Durchmessers $295 \mu\text{m}$. Abbildung 4.18 zeigt eine Skizze der Drossel mit den wichtigsten Abmessungen. Die Strömungsrichtung ist durch einen Pfeil gekennzeichnet. Es sei darauf hingewiesen, dass Abbildung 4.18 lediglich eine Prinzipskizze darstellt und nicht maßstabsgetreu ist. Nach der Drossel befindet sich ein Auslaufgebiet, vor der Drossel ein Einlaufgebiet. In Abbildung 4.18 ist lediglich ein kleiner Teil des Einlaufgebiets skizziert. Der experimentelle Aufbau erlaubt eine Festlegung der Drücke am Ein- und Ausgang. Für eine detaillierte Beschreibung des experimentellen Aufbaus sei auf [87], [33] und [143] verwiesen. Der innerhalb dieser Arbeit betrachtete Testfall verwendet die Drücke 300 bar am Eingang und 165 bar am Ausgang und ist dem Grenzbereich zwischen Kavitation und keiner Kavitation zuzuordnen. Stochastische Fluktuationen führen zu einer intermittierend kavitierenden Zweiphasenströmung, die im Kapitel 4.5.1 anhand experimenteller Aufnahmen und LES-Berechnungen beschrieben wird.

4.5.1 Beschreibung des experimentellen Ergebnisses und der LES-Berechnungen aus der Literatur

Das Kapitel 4.5.1 fasst die experimentellen Ergebnisse aus der Literatur und die LES-Berechnungen [32], [33] zusammen und stellt nicht den eigenen wissenschaftlichen Beitrag dar.

Zur experimentellen Visualisierung des Strömungsfelds wird ein Schattenverfahren eingesetzt: Paralleles Licht wird durch die Messstrecke auf einen CCD-Chip gerichtet und dort registriert (vgl. [143], S. 2). Mit dieser Methode können Dichtegradienten analog zum Messprinzip nach Dvořák [29] aus dem Jahr 1880 visualisiert werden. In den Aufnahmen der intermittierend kavitierenden Strömung sind die Kavitationswolken als Schatten zu erkennen ([87], S. 4). Abbildung 4.18 zeigt eine Prinzipskizze des in [87] und [33] gezeigten experimentellen Ergebnisses für die Drücke 300 bar am Eingang und 165 bar am Ausgang. Ein schmaler Bereich disperser Phase ist nach der Reduktion des Strömungsquerschnitts erkennbar. Es sei erneut darauf hingewiesen, dass Abbildung 4.18 nicht maßstabsgetreu ist. Zum Experiment in Abbildung 4.18 wurden durch AVL LES-Berechnungen durchgeführt und

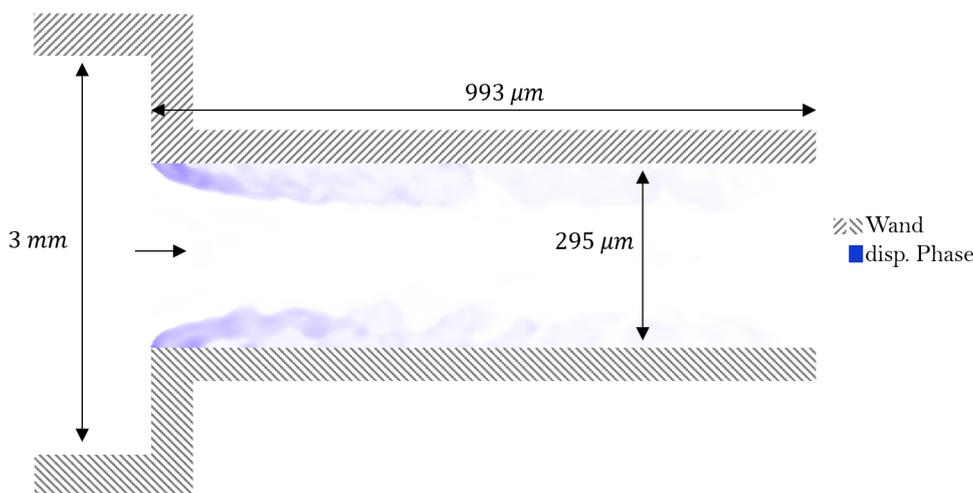


Abbildung 4.18: Skizze der experimentellen Ergebnisse in [87], [33] mit den Drücken 300 bar am Eingang und 165 bar am Ausgang.

veröffentlicht [33]. Die Ergebnisse wurden dankenswerterweise von AVL für einen Vergleich innerhalb dieser Arbeit zur Verfügung gestellt [32]. Tabelle 4.1 fasst die wichtigsten Eckdaten der LES-Berechnung zusammen. Die wichtigsten Aspekte der Ergebnisse werden im Folgenden diskutiert. Für Details hinsichtlich der LES-Berechnung sei auf [33] verwiesen.

Zeitschritt [s]	$5 \cdot 10^{-9}$
Zellanzahl	17.097.570
räumliche Auflösung [Zellanzahl]	$292 \cdot 172 \cdot 168$

Tabelle 4.1: Eckdaten der LES-Berechnung durch AVL [32] nach [33], Tabelle 2.

Auswertung auf der Symmetrieachse

Die Volumenanteile der dispersen Phase im Schnitt durch die Symmetrieachse sind für verschiedene Zeitpunkte und eine lineare Skalierung in Anhang G.1.1 dargestellt. Aus diesen instantanen Strömungsfeldern kann das zeitlich gemittelte Strömungsfeld in den Abbildungen 4.19 erzeugt werden, indem die RGB-Werte jedes Pixels der instantanen Bilder gemittelt und zu einem neuen Bild zusammengeführt werden. Abbildung 4.20 zeigt das zeitlich gemittelte Strömungsfeld unter Verwendung einer logarithmischen Skalierung. Zur Erzeugung von Abbildung 4.20 werden die RGB-Werte der Pixel in Abbildung 4.19 logarithmiert und normiert (vgl. [4]). Der Bereich der

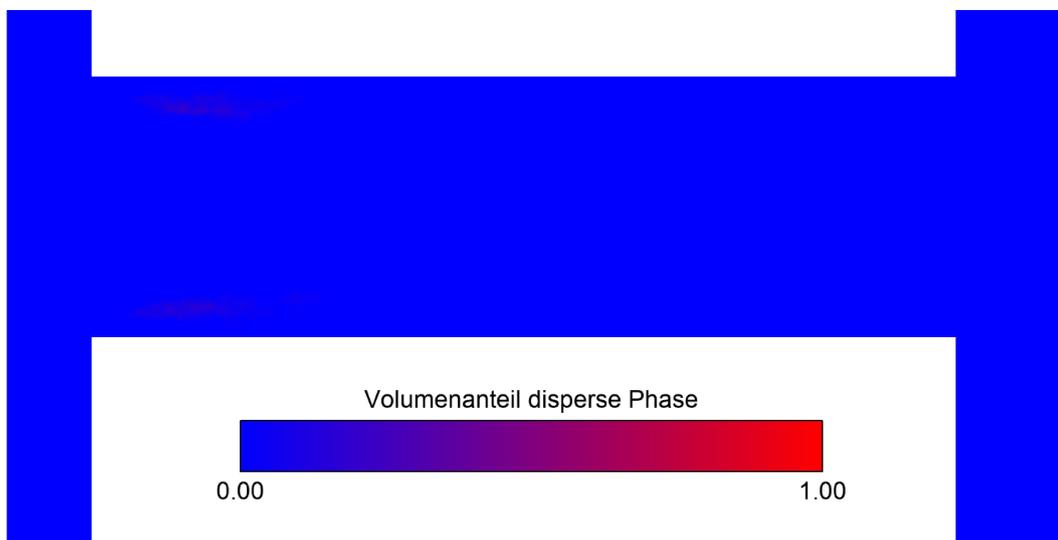


Abbildung 4.19: Mittelung der instantanen LES-Ergebnisse in Anhang G.1.1.

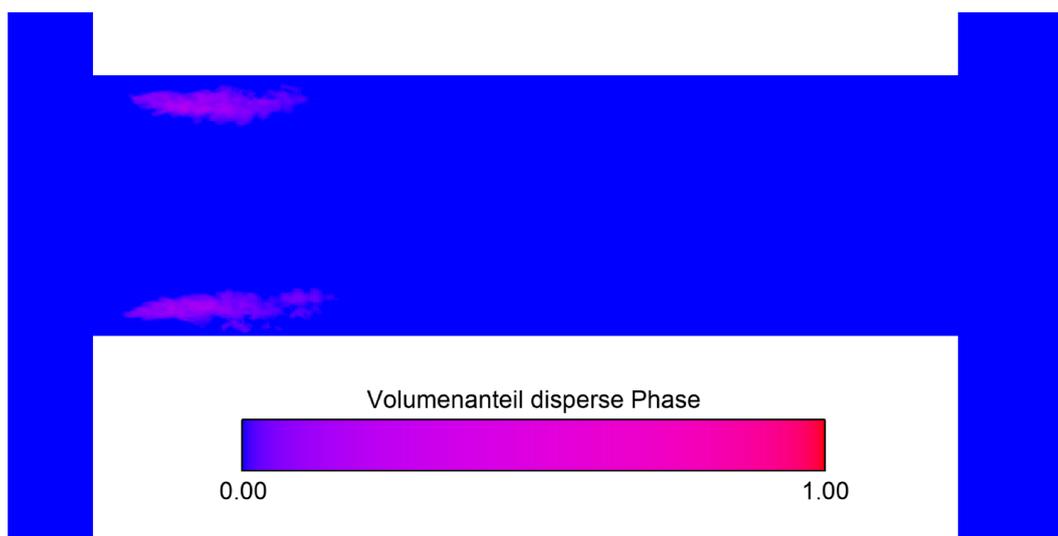


Abbildung 4.20: Mittelung der instantanen LES-Ergebnisse in Anhang G.1.1 bei Anwendung einer logarithmischen Skalierung.

dispersen Phase ist in den mittleren Strömungsfeldern schwach erkennbar. Der zeitlich gemittelte Volumenanteil im Kavitationsbereich ist gering. Für eine zuverlässige Bewertung des zeitlich gemittelten Volumenanteils sind weitere experimentelle Ergebnisse notwendig.

Die instantan auftretenden Volumenanteile (vgl. Anhang G.1.1) sind deutlich höher als der mittlere Volumenanteil; sie werden in einer zeitlich gemittelten Darstellung in den Abbildungen 4.19 und 4.20 nicht sichtbar. Die instantan auftretenden Extremwerte sind aus technischer Sicht entscheidend und können in einem Bild erfasst werden, indem für jedes Pixel der instantanen Aufnahmen in Anhang G.1.1 der maximale Rotwert und der minimale Blauwert ermittelt und zu einem neuen Bild zusammengefügt werden. Es ergibt sich das Bild der Extremwerte in Abbildung 4.21. Der Bereich, in dem Kavitation auftritt, ist deutlich zu erkennen.

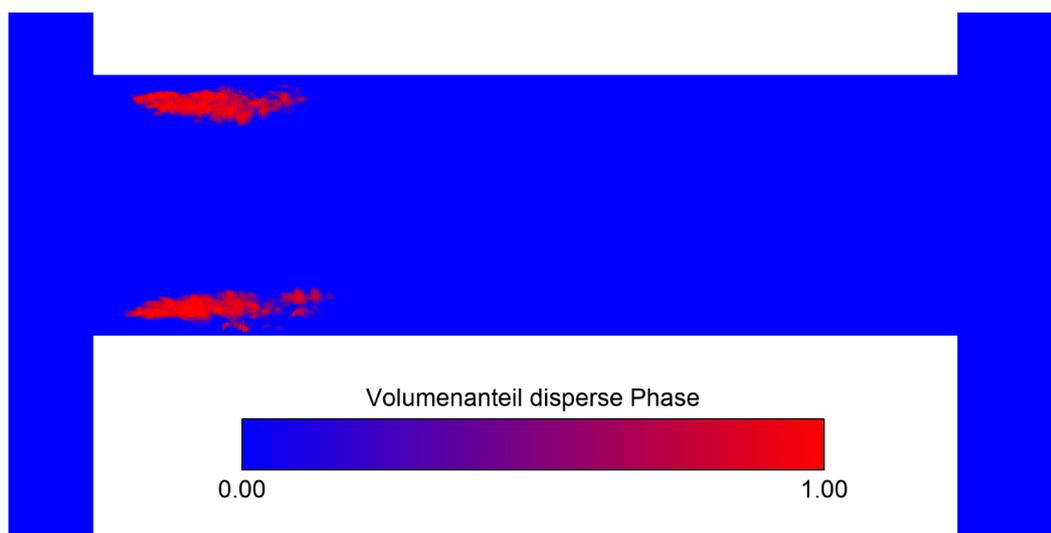


Abbildung 4.21: Extremwerte der instantanen Bilder in Anhang G.1.1.

Iso-Flächen

In [33] wurde eine Methode zur Nachbildung des experimentellen Ergebnisses in Abbildung 4.18 in einer numerischen Simulation vorgeschlagen, wonach die Iso-Flächen $\alpha = 0,5$ aufgetragen werden. In Anhang G.1.2.1 sind die entsprechenden Iso-Flächen für die Zeitpunkte in Anhang G.1.1 dargestellt. Für eine übersichtliche Darstellung sind die Begrenzungen des Strömungsgebiets lediglich durch schwarze Linien skizziert. Die Iso-Flächen ähneln der experimentellen Aufnahme in Abbildung 4.18. Diese Ähnlichkeit wurde bereits in [33] festgestellt. Anhang G.1.2.2 zeigt eine vergrößerte Darstellung der Iso-Flächen. Der vergrößerte Bereich ist in Abbildung G.1 in Anhang G.1.2.2 grün markiert.

Werden die Rotwerte der instantanen Iso-Flächen in Anhang G.1.2.1 gemittelt und zu einem neuen Bild zusammengefügt, ergibt sich das gemittelte Bild der Iso-Flächen in Abbildung 4.22. Analog zu Abbildung 4.21 erfolgt dabei eine Auswahl der dargestellten Volumenanteile: Zeigt Abbildung 4.21 die Extremwerte im Schnitt durch die Symmetrieebene zu verschiedenen Zeitpunkten, werden in Anhang G.1.2.1 mit der Auftragung einer Iso-Fläche lediglich die Stellen mit $\alpha = 0,5$ aufgetragen.

Erfolgt die Mittelung in Abbildung 4.22 nicht über alle in Anhang G.1.2.1 dargestellten Zeitpunkte, sondern lediglich über die ersten acht, ergibt sich die Ausprägung der mittleren Iso-Flächen in Abbildung 4.23. Weitere Ausprägungen können durch eine Mittelung weiterer acht instantaner Iso-Flächen in Anhang G.1.2.1 erhalten werden und sind in Anhang G.1.2.3 aufgetragen.

Fazit zu LES-Berechnungen

Das Kollektiv bestimmter Volumenanteile, seien es die Extremwerte in der Zeit in Abbildung 4.21 oder die Werte

mit $\alpha = 0,5$ im Raum in Abbildung 4.22, zeigen eine qualitativ gute Übereinstimmung mit der experimentellen Momentaufnahme in Abbildung 4.18. Für einen quantitativen Vergleich mit experimentellen Daten sind weitere instantane Ergebnisse des Experiments notwendig.

Das vergrößerte Strömungsfeld zu verschiedenen Zeitpunkten in Anhang G.1.2.2 veranschaulicht die intermittierende Charakteristik der Strömung: An einem bestimmten Punkt im Raum wird der Sättigungsdampfdruck meistens nicht unterschritten, so dass keine Kavitation auftritt. Dies veranschaulichen auch die instantanen Schnitte durch die Symmetrieebene in Anhang G.1.1. Seltene stochastische Fluktuationen können zu einer zeitweisen Unterschreitung des Sättigungsdampfdrucks und damit zu Kavitation führen. Die Blasen disperser Phase werden stromab transportiert (vgl. Anhang G.1.2.2) und zerfallen bei ansteigendem Druck. Es bleibt festzuhalten, dass die Iso-Flächen $\alpha = 0,5$ einer LES-Berechnung bei der Frage, ob in der betrachteten Strömung Kavitation auftritt, herangezogen werden können (vgl. [33]).

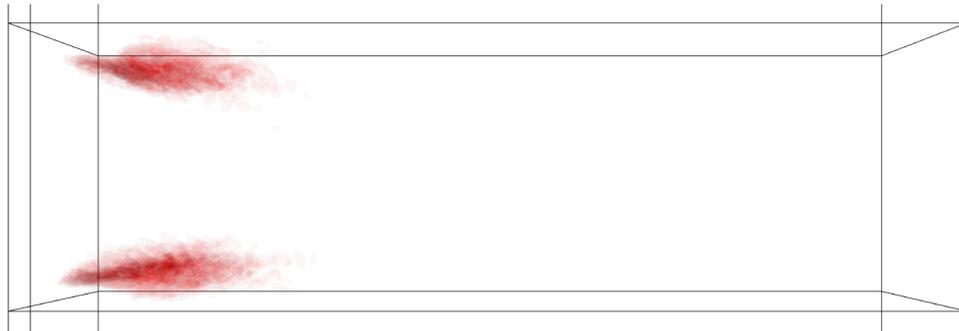


Abbildung 4.22: Mittelwert der in Anhang G.1.2.1 dargestellten Iso-Flächen.



Abbildung 4.23: Mittelwert der ersten acht Iso-Flächen in Anhang G.1.2.1.

4.5.2 Numerische Berechnung mit RANS-Methoden

Abbildung 4.24 zeigt das dreidimensionale Rechengitter im Bereich des reduzierten Strömungsdurchmessers zur numerischen Berechnung des Experiments in Abbildung 4.18 mit RANS-Methoden. Links und rechts von diesem Bereich befindet sich ein Ein- und ein Auslaufgebiet. In Abbildung 4.24 sind lediglich die angrenzenden Bereiche dargestellt.

4.5.2.1 Berechnung mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire™

Das in Abbildung 4.18 dargestellte Experiment wurde mit einer RANS-Simulation unter Verwendung des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells berechnet. Die wichtigsten Simulationseinstellungen sind [S8] in Anhang H zu entnehmen. Zur Veranschaulichung des Strömungsgebiets ist der Volumenanteil der dispersen Phase im Schnitt durch die Symmetrieebene in Abbildung 4.25 aufgetragen. Es fällt auf, dass bei Verwendung des herkömmlichen

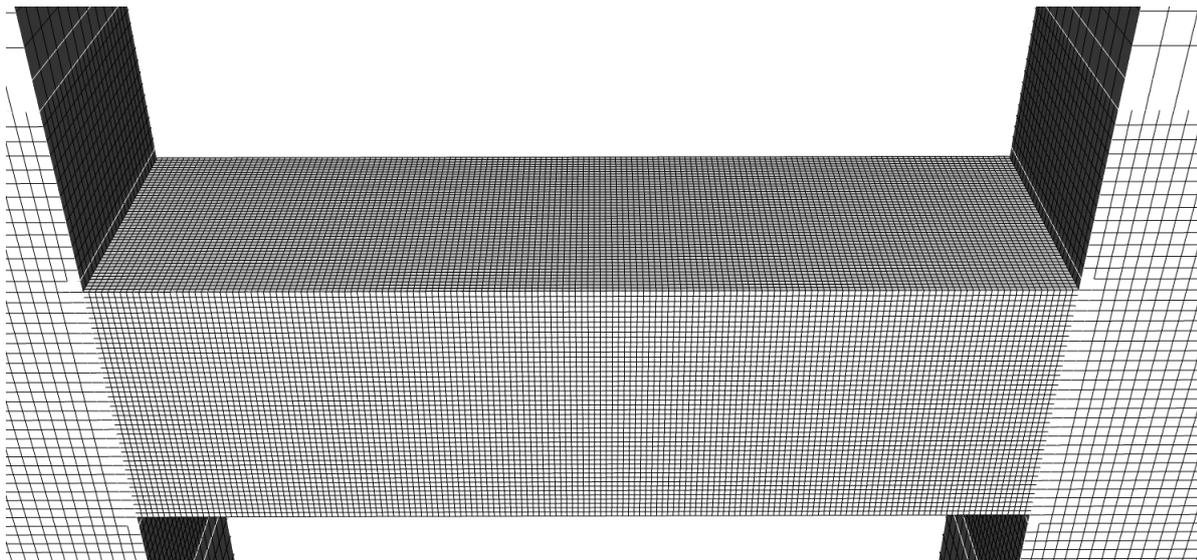


Abbildung 4.24: Rechengitter zur numerischen Berechnung des in Abbildung 4.18 skizzierten Experiments.

Zwei-Fluid-Modells in AVL FireTM keine disperse Phase existiert. Ein entsprechendes Ergebnis ist in [33] vermerkt: Das Experiment in Abbildung 4.18 wird mit einer RANS-Simulation und einer LES-Berechnung unter Verwendung des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells in AVL FireTM verglichen. Im Gegensatz zur LES-Berechnung weist die RANS-Simulation keine Kavitation auf (vgl. [33], S. 8). Als Ursache wird die mangelnde Auflösung kleiner Wirbel und der hierin auftretenden Kavitation durch RANS-Simulationen genannt (vgl. [33], S. 8).

Die mangelnde Fähigkeit zur Abbildung instantaner Fluktuationen ist nicht überraschend, da RANS-Simulationen eine Aussage über Mittelwerte treffen (vgl. Kapitel 1.2). Strömungseigenschaften wie beispielsweise die Existenz der dispersen Phase, die lokal und instantan auftreten und mit der Strömung transportiert werden, können nicht durch Modelle abgebildet werden, die auf Mittelwerten beruhen.⁷

Abbildung 4.26 ordnet die Behandlung der Druckschwankungen innerhalb einer Rechenzelle des betrachteten Beispiels in unterschiedlichen Methoden ein. In RANS-Simulationen wird der mittlere Druck betrachtet. Sein Verlauf ist in Abbildung 4.26 grün skizziert und befindet sich stets oberhalb des Sättigungsdampfdrucks p_{sat} , so dass keine Kavitation abgebildet wird. LES-Berechnungen lösen einen Teil der Wirbel mit den zugehörigen Druckschwankungen auf (vgl. Kapitel 1.2). Der fluktuierende Druck, in Abbildung 4.26 gelb dargestellt, wird berechnet. Besonders starke Wirbel bewirken besonders hohe Druckschwankungen, so dass der Druck unter den Sättigungsdampfdruck p_{sat} fällt und damit Kavitationseffekte abgebildet werden können.

4.5.2.2 Berechnung mit der Stochastischen Feldmethode 2F-SFM p

Der Einfluss instantaner Wirbel und der damit verbundenen lokalen und instantanen Druckschwankungen soll durch das Modell 2F-SFM p in einer RANS-Simulation berücksichtigt werden. Die Stochastische Feldmethode berechnet in jedem Zeitschritt stochastische Felder. In Abbildung 4.26 sind exemplarische Werte innerhalb der stochastischen Felder skizziert. Sie können als mögliche Repräsentanten des instantanen Drucks interpretiert werden. Entsprechend der Abbildungen 1.7 bzw. 2.5 approximieren die Werte der stochastischen Felder die PDF. Für den letzten Zeitschritt ist die PDF in Abbildung 4.26 aufgetragen. Die PDF ermöglicht die Berücksichtigung der Fluktuationen im Druck aufgrund von Turbulenz, so dass im Kontext einer RANS-Simulation stochastische Fluktuationen und entsprechende kavitativ Effekte berücksichtigt werden können. Abbildung 4.26 demonstriert

⁷ Dies zeigt sich auch beim Modell des Prandtlischen Mischungswegs, das ebenfalls Mittelwerte verwendet (vgl. [91], S. 141): Seine Anwendbarkeit beschränkt sich auf Strömungen mit geringer turbulenter Konvektion und geringer turbulenter Diffusion (vgl. [125], S. 277).

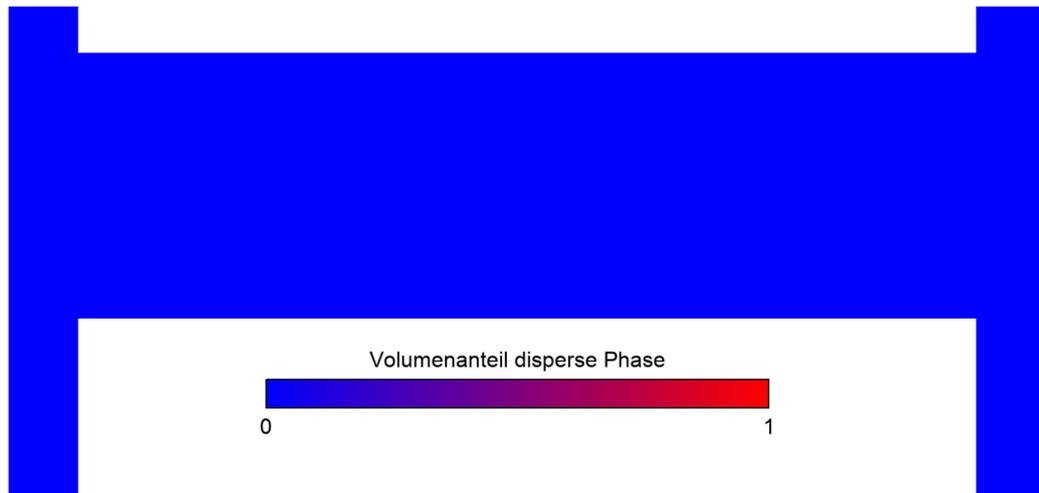


Abbildung 4.25: RANS-Simulation des Experiments in Abbildung 4.18 mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell (Momentaufnahme). [S8]

schematisch, wie instantane Fluktuationen des Drucks das Strömungsfeld beeinflussen können: Einige Repräsentanten des instantanen Drucks unterschreiten den Sättigungsdampfdruck p_{sat} und befinden sich damit im Bereich kavitativer Strömungen. Im Folgenden wird anhand eines kleinen Matlab Programms demonstriert, wie Geschwindigkeitsfluktuationen in einer Strömung Druckfluktuationen verursachen, die bei der Berechnung des Quellterms zu einer intermittierend kavitierenden Strömung führen können. Das Matlab-Programm nutzt die konstanten Eingabeparameter in Tabelle 4.2.

$N''' = 10^{-14}/m^3$	$p_{\text{sat}} = 4500Pa$	$p = 1017750Pa$	$C_E = 1,0$
$\rho_c = 825,74kg/m^3$	$\rho_d = 0,31kg/m^3$	$k = 40m^2/s^2$	$\alpha = 10^{-6}$

Tabelle 4.2: konstante Eingabeparameter zur Demonstration, wie Fluktuationen in der Geschwindigkeit zu Kavitationseffekten führen können.

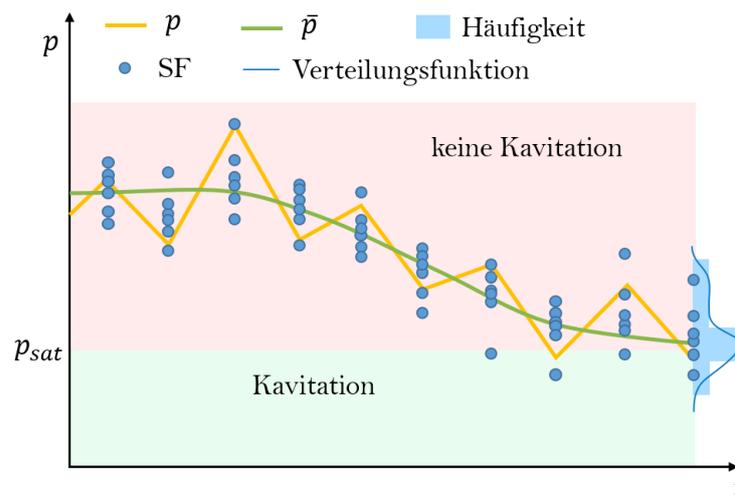


Abbildung 4.26: exemplarische Behandlung des Drucks in einer Rechenzelle des betrachteten Beispiels in Abbildung 4.18 im Rahmen einer LES- und einer RANS-Berechnung. Die Werte in den stochastischen Feldern sind ebenfalls dargestellt. Für den letzten Zeitschritt ist eine Verteilung der stochastischen Felder skizziert.

Der instantane Quellterm wird mit Hilfe der Geschwindigkeitsfluktuationen in Gleichung (3.179) unter Verwendung der Gleichungen (3.182) - (3.184) berechnet. Zur Vereinfachung wird ein eindimensionales Problem betrachtet, so dass lediglich Fluktuation in eine Raumrichtung existiert. Kavitation tritt auf, wenn der Quellterm positiv ist. Die Verteilung von 2000 zufällig ermittelten Geschwindigkeitsfluktuationen und die entsprechende Verteilung des instantanen Quellterms S_{inst} sind in den Abbildungen 4.27 und 4.28 abgebildet. In Abbildung 4.28 ist ebenfalls der Mittelwert der Verteilung $\overline{S_{inst}}$ gekennzeichnet. Er unterscheidet sich vom ebenfalls markierten Quellterm $S(\bar{k})$ bei Verwendung der mittleren turbulenten kinetischen Energie \bar{k} entsprechend dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell. Am Ende des Kapitels 3.7.2 wurde bereits diskutiert, dass der Quellterm des Zwei-Fluid-Modells in Gleichung (2.20) nichtlinear von der turbulenten kinetischen Energie abhängt. Entsprechend Gleichung (3.187) unterscheiden sich damit die beiden mittleren Quellterme. Die Verteilung in Abbildung 4.28 zeigt, dass fluktuie-

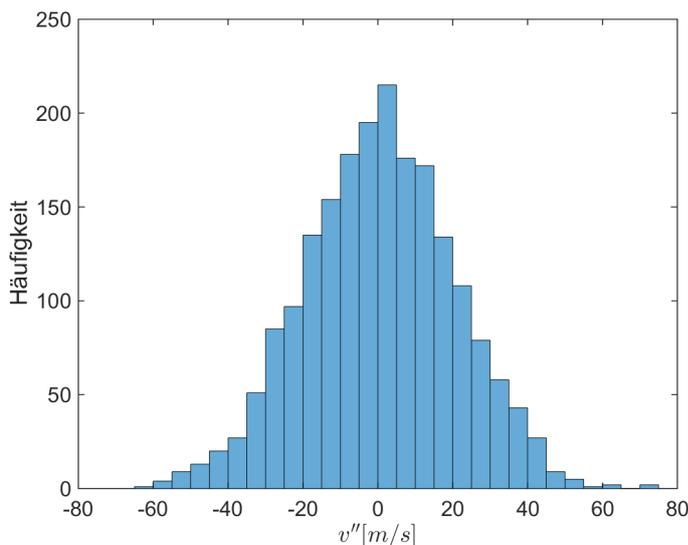


Abbildung 4.27: Verteilung von 2000 entsprechend Gleichung (3.179) zufällig ermittelten Geschwindigkeitsfluktuationen.

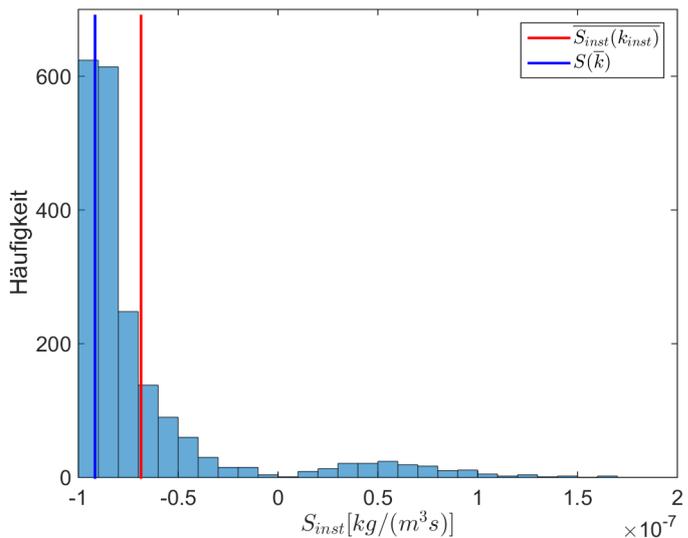


Abbildung 4.28: Verteilung des instantanen Quellterms entsprechend der Geschwindigkeitsfluktuationen in Abbildung 4.27. Der Mittelwert des instantanen Quellterms $\overline{S_{inst}}$ und der Quellterm bei Verwendung der mittleren kinetischen Energie k ist ebenfalls aufgetragen.

rende Geschwindigkeitskomponenten zu einem positiven Quellterm und damit zu Kavitation führen können. Bei Verwendung der mittleren turbulenten kinetischen Energie zur Berechnung des Quellterms werden stochastische Fluktuationen vernachlässigt und der Quellterm ist stets negativ. Das Strömungsfeld weist keine Kavitation auf.

Es stellt sich die Frage, ob mit der Variante 2F-SFM p der Einfluss der in RANS-Simulationen nicht berücksichtigten stochastischen Fluktuationen modelliert werden kann und dies analog zu den Abbildungen 4.26 und 4.28 zu kavitativen Effekten führt. Es ist zu prüfen, ob mit der Variante 2F-SFM p eine verbesserte Berechnung des Experiments in Abbildung 4.18 erzielt werden kann.

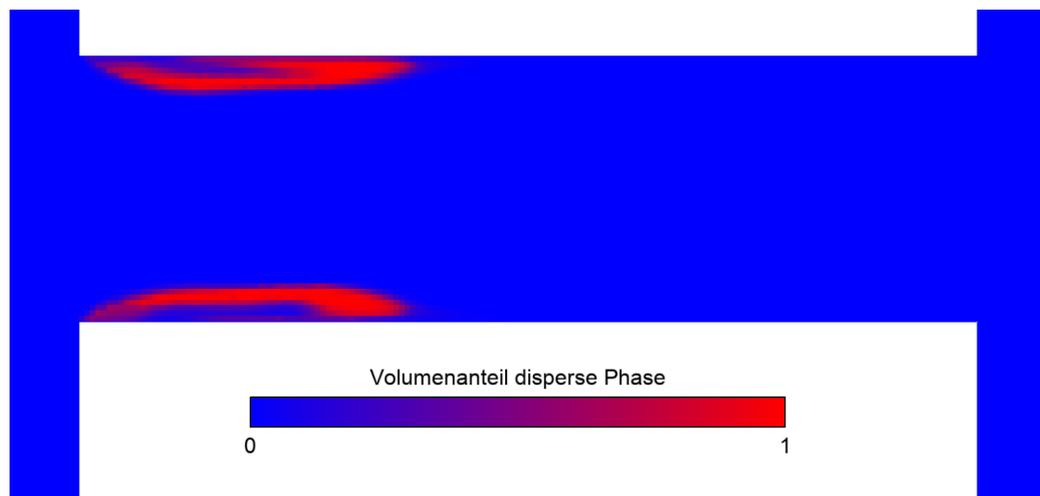


Abbildung 4.29: RANS-Simulation des Experiments in Abbildung 4.18 mit der Variante 2F-SFM p (Momentaufnahme). [S9]

Auswertung auf der Symmetrieachse

Abbildung 4.29 zeigt die Berechnung des Experiments in Abbildung 4.18 mit der Variante 2F-SFM p zu einem Zeitpunkt der RANS-Simulation. Für die wichtigsten Simulationseinstellungen sei auf [S9] in Anhang H verwiesen. Analog zu Abbildung 4.25 ist der Schnitt durch die Symmetrieebene aufgetragen. Die zugehörigen stochastischen Felder der Momentaufnahme in Abbildung 4.29 sind in Anhang G.2.1 aufgetragen. Sie können als instantane Repräsentanten des Volumenanteils interpretiert werden (vgl. Kapitel 3.1) und approximieren die PDF (vgl. Abbildung 4.30). Der Volumenanteil in Abbildung 4.29 zu einem konkreten Zeitpunkt ist ein Mittelwert dieser Repräsentanten. Der Zusammenhang des Volumenanteils $\alpha(t_0)$ zu einem Zeitpunkt t_0 und den zugehörigen stochastischen Feldern $\alpha^{(1)}(t_0)$, $\alpha^{(2)}(t_0)$, ... ist in Abbildung 4.30 skizziert. Das Strömungsfeld in der Symme-

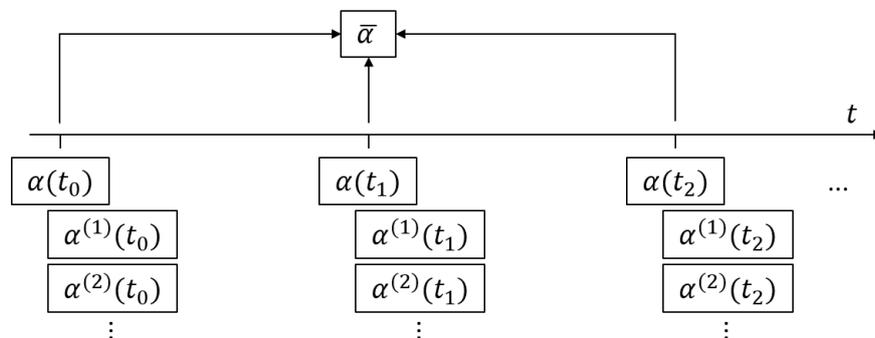


Abbildung 4.30: Zusammenhang der Volumenanteile der stochastischen Felder $\alpha^{(1)}(t)$, $\alpha^{(2)}(t)$, ..., des mittleren Volumenanteils $\alpha(t)$ zur Zeit t und des über alle Zeitpunkte gemittelten Volumenanteils $\bar{\alpha}$ einer RANS-Simulation.

triebene ist für weitere Zeitpunkte in Anhang G.2.2 aufgetragen. Jedes Strömungsfeld ist ein Mittelwert seiner zugehörigen instantanen Repräsentanten in Form der stochastischen Felder. Es ist nicht stationär, sondern unterliegt Fluktuationen, da die Geschwindigkeiten ebenfalls in der Zeit fluktuieren (vgl. Gleichung (3.179)). Der Volumenanteil zu verschiedenen Zeitpunkten in Anhang G.2.2 zeigt das intermittierende Verhalten in großen Bereichen des Strömungsfelds. Kavitation wird an Orten mit hohem Turbulenzgrad initiiert. Es entstehen Kavitationsblasen, die anschließend mit der Strömung transportiert werden. Das Strömungsfeld zu verschiedenen Zeitpunkten einer RANS-Simulation repräsentiert verschiedene Ausprägungen der gemittelten Strömung (vgl. Abbildung 2.5). Abbildung 4.31 zeigt den Mittelwert der Ausprägungen in Anhang G.2.2. Zur Bestimmung des Mittelwerts wurden die RGB-Werte der Pixel gemittelt und in einem Bild aufgetragen. Die erneute Mittelung über verschiedene Ausprägungen des mittleren Strömungsfelds ist ebenfalls in Abbildung 4.30 grafisch veranschaulicht.

Im Gegensatz zur Verwendung des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells in Abbildung 4.25 ist bei Verwendung der Variante 2F-SFM p ein Kavitationsgebiet erkennbar. Ein Vergleich zeigt, dass die in Abbildung 4.29 dargestellte Ausprägung dem experimentellen Ergebnis in Abbildung 4.18 qualitativ entspricht. Analog zu den Abbildungen 4.26 und 4.28 kann die Variante 2F-SFM p die experimentell beobachteten kavitativen Effekte in einem RANS-Kontext reproduzieren.

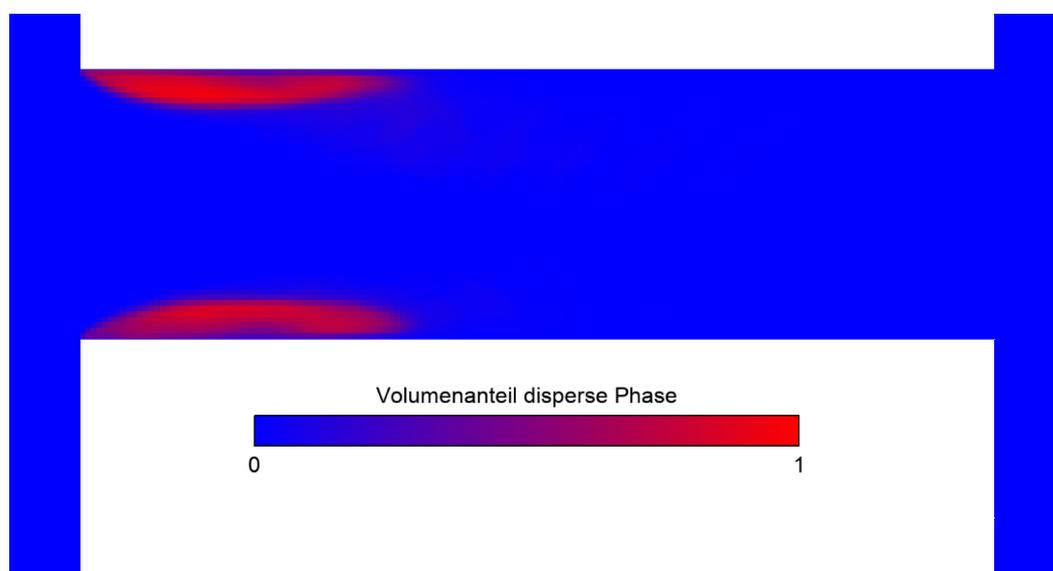


Abbildung 4.31: Mittelwert der Volumenanteile der RANS-Berechnung mit der Variante 2F-SFM p in Anhang G.2.2. [S9]

Der Vergleich der Momentaufnahme einer RANS-Simulation in Abbildung 4.29 mit dem experimentellen Ergebnis in Abbildung 4.18 ist nur bedingt zulässig, da die experimentelle Aufnahme eine instantane Momentaufnahme zeigt, eine RANS-Simulation aber eine Aussage über gemittelte Werte trifft (vgl. Kapitel 1.2). Weitere experimentelle Aufnahmen für einen Vergleich der zeitlich gemittelten Ergebnisse mit den Ergebnissen der RANS-Simulation liegen nicht vor.

Alternativ werden die LES-Berechnungen für einen Vergleich herangezogen. Die in Abbildung 4.21 dargestellten Extremwerte der LES-Berechnung sind entscheidend für die technische Bewertung kavitierender Strömungen. In der Variante 2F-SFM p müssen die Extremwerte durch die Fluktuationen der stochastischen Felder berücksichtigt werden. Ein Vergleich der störungsbehafteten Ausprägungen des mittleren Volumenanteils der Variante 2F-SFM p in Anhang G.2.2 mit den Extremwerten der LES-Berechnung in Abbildung 4.21 zeigt eine qualitativ gute Übereinstimmung.

Der über die Zeit gemittelte Volumenanteil im Schnitt durch die Symmetrieebene in Abbildung 4.31 ist bei Anwendung der Variante 2F-SFM p höher als der zeitlich gemittelte Volumenanteil der LES-Berechnung in den Abbildungen 4.19 und 4.20. Dies resultiert daraus, dass die RANS-Simulation lokal auftretende Effekte wie einzelne Blasen aufgrund der verwendeten Zellgröße nicht abbilden kann. Entsprechend kann lokale Intermittenz nicht reproduziert werden. Fluktuationen innerhalb einer Rechenzelle einer RANS-Simulation besitzen räumlich einen größeren Einfluss als Fluktuationen innerhalb einer kleineren Rechenzelle bei LES-Berechnungen. Dies führt zu einem räumlich größeren Kavitationsgebiet bei der RANS-Simulation. Es sei angemerkt, dass in LES-Berechnungen der Einfluss kleiner Wirbel modelliert wird (vgl. Kapitel 1.2). Die durch kleine Wirbel verursachten lokalen stochastischen Ereignisse werden in LES-Berechnungen nicht berücksichtigt. Eine zusätzliche Modellierung der stochastischen Ereignisse auf kleinen Skalen führt zu einer Zunahme der Kavitation.⁸

Iso-Flächen

Die Iso-Flächen $\alpha = 0,5$ bei Verwendung der Variante 2F-SFM p in einer RANS-Simulation sind für mehrere Zeitpunkte in Anhang G.2.3 aufgetragen. Sie stellen Ausprägungen der zeitlich gemittelten Iso-Flächen dar und sind mit den gemittelten Ausprägungen der LES-Berechnung in Abbildung 4.23 bzw. Anhang G.1.2.3 zu vergleichen. Sie stimmen qualitativ überein. Der Mittelwert über alle Ausprägungen ist in Abbildung 4.32 dargestellt und stimmt qualitativ mit dem Mittelwert über alle Iso-Flächen der LES-Berechnung in Abbildung 4.22 überein.

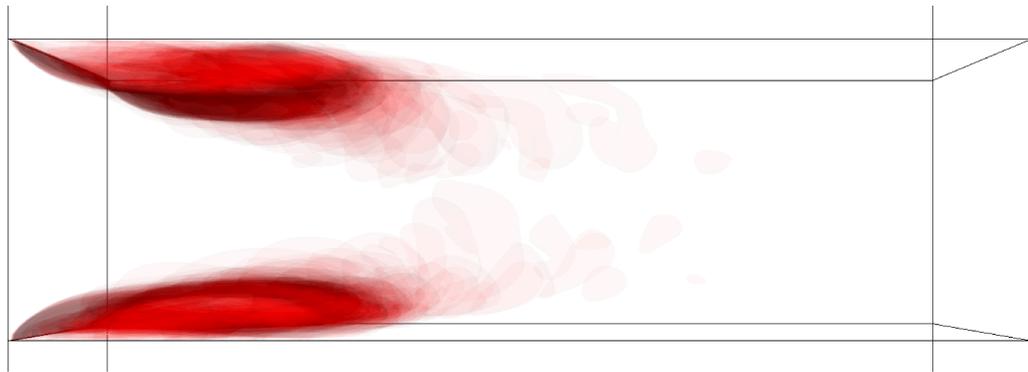


Abbildung 4.32: Mittelwert der Iso-Flächen der RANS-Simulation mit der Variante 2F-SFM p in Anhang G.2.3. [S9]

4.5.3 Fazit zur Berechnung einer intermittierend kavitierenden Strömung

Die Anwendung der Variante 2F-SFM p zeigt, dass die in der RANS-Simulation mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell nicht betrachteten instantanen und lokalen Schwankungen des Drucks aufgrund von Turbulenz mit der Variante 2F-SFM p der Stochastischen Feldmethode berücksichtigt werden können. Die instantane experimentelle Messung in Abbildung 4.18 und die Ausprägungen des gemittelten Volumenanteils der RANS-Simulation in Abbildung 4.29 bzw. Anhang G.2.2 weisen eine starke Ähnlichkeit auf.

Ein Vergleich mit LES-Berechnungen zeigt, dass die Ausprägungen der Iso-Flächen in Anhang G.2.3 qualitativ mit den Ausprägungen der LES-Berechnung in Abbildung 4.23 und Anhang G.1.2.3 übereinstimmen. Der Mittelwert aller Iso-Flächen der RANS-Simulation (vgl. Abbildung 4.32) entspricht qualitativ dem Mittelwert aller Iso-Flächen der LES-Berechnung (vgl. Abbildung 4.22).

In Kapitel 4.5.1 wurde diskutiert, dass zur Bewertung des kavitativen Verhaltens die Iso-Flächen $\alpha = 0,5$ einer LES-Berechnung betrachtet werden. Eine RANS-Simulation mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell kann

⁸ Die Stochastische Feldmethode kann zur Modellierung der stochastischen Fluktuationen in den nicht aufgelösten Längenskalen einer LES-Berechnung genutzt werden (vgl. Kapitel 1.2; [27]; [26]). Es ergibt sich die Fragestellung, ob bei LES-Berechnungen im Sinne einer effizienten Berechnung die räumliche Auflösung reduziert werden kann, wenn die nicht aufgelösten Fluktuationen durch die Stochastische Feldmethode berücksichtigt werden.

die experimentell nachgewiesene Kavitation nicht abbilden (vgl. Abbildung 4.25). Mit der Variante 2F-SFM p der Stochastischen Feldmethode kann das intermittierend kavitativ Verhalten in einem RANS-Kontext reproduziert werden. Für die Bewertung genügt dabei die Betrachtung eines Schnitts entlang der Symmetrieachse (vgl. Abbildung 4.29). Alternativ können weiterhin analog zur LES-Berechnung Iso-Flächen betrachtet werden (vgl. Anhang G.2.3).

Mit Hilfe der Variante 2F-SFM p kann ein Nutzer besser als bei Verwendung des herkömmlichen Zwei-Fluid-Modells in einem RANS-Kontext bewerten, ob Kavitation auftritt. Es ermöglicht die Berücksichtigung kavitativer Effekte, die in lokalen und instantanen Strukturen entstehen, in einem RANS-Kontext, obwohl diese selbst nicht aufgelöst werden. Die Stochastische Feldmethode mit der Variante 2F-SFM p erlaubt eine Aussage über den mittleren Volumenanteil in einer kavitierenden Strömung bei gleichzeitiger Vermeidung des Rechenaufwands einer LES-Berechnung.

5 Zusammenfassung

Zweiphasenströmungen treten in einer Vielzahl technischer Anwendungen und Produkte auf. Bei der Produktentwicklung können durch Anwendung numerischer Simulationen Einsparungen erzielt werden (vgl. Abbildung 1.1). Als Beispiel eines in der Praxis verwendeten kommerziellen Codes zur numerischen Strömungssimulation sei FireTM der AVL List GmbH genannt. Für die effiziente Berechnung von Zweiphasenströmungen wird häufig das Zwei-Fluid-Modell verwendet, das eine Aussage über Mittelwerte trifft (vgl. Kapitel 1.4, 2.2.1). Die Betrachtung von Mittelwerten anstelle stochastisch fluktuierender Größen ist mit einem numerisch beschränkten Aufwand zu realisieren, erweist sich aber als unbefriedigend, wenn sich das makroskopische Ergebnis sensitiv gegenüber stochastischen Fluktuationen verhält (vgl. Kapitel 1). Alternativ können mit stochastischen PDF-Methoden wie beispielsweise der Stochastischen Feldmethode Verteilungen einer Größe betrachtet werden. Die Stochastische Feldmethode wurde ursprünglich zur Beschreibung einer Skalargröße in der Verbrennung hergeleitet und ist im Vergleich zur Methode Lagranger Partikel numerisch weniger aufwändig (vgl. Kapitel 2.4.3.2). Erste Anwendungen der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen erfolgten durch das Herstellen von Analogiebeziehungen (vgl. Kapitel 1.3): Der Anteil disperser Phase wurde wie ein Skalar in der Verbrennung behandelt und die zugehörigen Gleichungen entsprechend formuliert.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zur weiteren Diskussion hinsichtlich Anwendungen der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen. Sie beinhaltet sowohl die Herleitung und die Diskussion grundlegender Aspekte als auch die Anwendung auf aktuelle Problemstellungen der Automobilindustrie.

Zur Festigung der theoretischen Grundlagen bei Anwendung der Stochastischen Feldmethode auf Zweiphasenströmungen wird die formale Herleitung der PDF-Transportgleichung für den Volumenanteil im Zwei-Fluid-Modell und im Drift-Flux-Modell durchgeführt. Sie ersetzt die bisherige Analogiebeziehung zu einer Skalargröße in der Verbrennung. Die Unterschiede zur Herleitung der PDF-Transportgleichung einer Skalargröße werden analysiert, diskutiert und auf die Gleichungen der stochastischen Felder angewandt, so dass ihre Formulierung konsistent zum Zwei-Fluid-Modell ist.

In diesem Zusammenhang wird gezeigt, dass die Stochastische Feldmethode im Zwei-Fluid-Modell nicht analog zur Stochastischen Feldmethode für eine Skalargröße in der Verbrennung formuliert werden kann, ohne Konsistenzprobleme zu verursachen. Dies wird durch die Herleitung der Transportgleichung des mittleren Volumenanteils auf zwei Arten gezeigt: Durch Ensemble-Mittelung der Transportgleichung der stochastischen Felder und durch Integration der entsprechenden PDF-Transportgleichung.

Ein weiterer Bestandteil zur Festigung der theoretischen Grundlagen ist die Analyse des Zusammenhangs zwischen stochastischen Feldern und Blasen der dispersen Phase in einer realen Strömung. Mehrere Interpretationsmöglichkeiten für die stochastischen Felder werden diskutiert. Die Berücksichtigung einer Blasengrößenverteilung wird schematisch mit konkurrierenden Modellen verglichen. Es wird demonstriert, wie die Stochastische Feldmethode die Berechnung einer Blasengrößenverteilung ohne Vorkenntnisse zur Blasengröße aus einer Abschätzung oder aus einem Experiment erlaubt.

Die vorliegende Arbeit wendet diese neuen theoretischen Erkenntnisse auf kavitierende Strömungen in der Automobilindustrie an. Nach Kenntnis des Autors wird die Stochastischen Feldmethode innerhalb dieser Arbeit

erstmalig zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen in einem kommerziellen Code implementiert. Mehrere Möglichkeiten einer Implementierung in AVL FireTM werden hierfür diskutiert (vgl. Kapitel 1.4, 3.7). Zwei Modelle zur Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Quellterm der dispersen Phase werden für den AVL FireTM-Nutzer als besonders gewinnbringend eingeschätzt und entsprechend implementiert. Sie ermöglichen die Berücksichtigung von Fluktuationen aufgrund einer lokal schwankenden Keimanzahl und aufgrund turbulenter Schwankungen in der kontinuierlichen Phase. Letztere bedient sich zur Modellierung der Geschwindigkeitsfluktuationen einer Methode aus dem Bereich Lagrange Partikel. Die Implementierungen erfüllen die formulierten Ziele aus Kapitel 1.4.

Beide Modelle werden mit Hilfe eines model-to-model-Vergleichs an einem zweidimensionalen und an einem dreidimensionalen Injektor aus der Automobilindustrie verifiziert und validiert (vgl. Kapitel 4.2). Sie ermöglichen dem Nutzer von AVL FireTM eine Approximation der PDF innerhalb jeder Rechenzelle in einer reinen Euler-Betrachtungsweise. Alternativ kann die mittlere PDF eines bestimmten Bereichs bestimmt werden.

Die PDF des Volumenanteils kann zur Berechnung von Funktionen verwendet werden, die nichtlinear von diesem Volumenanteil abhängen. Die Approximation durch Verwendung eines mittleren Volumenanteils kann hierdurch vermieden werden, was am Beispiel der Strömungswiderstandskraft demonstriert wird.

Es wird geprüft, ob mit dem Modell zur Berücksichtigung turbulenter Schwankungen ein Mehrwert bei der Simulation eines AVL-Testfalls einer intermittierend kavitierenden Strömung erzielt werden kann. Experimentell sind Kavitationseffekte nachweisbar. Effiziente RANS-Simulationen mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell können keine stochastischen Fluktuationen und damit keine Kavitationseffekte abbilden. Eine aufwändigere LES-Berechnung ist notwendig, um Kavitationseffekte numerisch zu reproduzieren. Die RANS-Berechnung mit Hilfe der im Rahmen dieser Arbeit implementierten Variante 2F-SFM p der Stochastischen Feldmethode weist ein ähnliches Ergebnis auf wie die experimentelle Momentaufnahme. Der Einfluss stochastischer Effekte kann berücksichtigt werden und die intermittierend kavitierende Strömung ist reproduzierbar. Für einen detaillierteren Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den numerischen Berechnungen sind weitere experimentelle Ergebnisse erforderlich. Ein Vergleich mit den von AVL durchgeführten numerischen Ergebnissen einer LES-Berechnung zeigt eine Übereinstimmung der Fluktuationen in der dispersen Phase. Mit der Variante 2F-SFM p können die zeitlich gemittelten Iso-Flächen der LES-Berechnungen in einem effizienten RANS-Kontext reproduziert werden.

Die in dieser Arbeit hergeleiteten stochastischen Modelle und deren Implementierungen erlauben dem Nutzer von AVL FireTM die Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen und eine Auftragung der PDF des Volumenanteils oder der Blasengröße in einer reinen Euler-Betrachtungsweise. Darüber hinaus können sie zur Bewertung einer intermittierend kavitierenden Strömung im RANS-Kontext genutzt werden, ohne dabei die entscheidenden lokalen und instantanen Effekte aufzulösen. Bisher notwendige, aufwändigere LES-Berechnungen können für eine Bewertung vermieden werden, wodurch der industrielle Nutzer Einsparungen hinsichtlich Zeit und Kosten erzielt.

A Ableitung einer PDF aus Messwerten

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen einer PDF und Messwerten einer Zufallsgröße demonstriert. Abbildung 1.6 veranschaulicht, wie aus einer Reihe von Messwerten einer Größe θ ein Histogramm erzeugt werden kann. Auf der linken Seite sind 14 Messwerte für θ dargestellt. Die Ordinate zeigt den gemessenen Wert. Auf der Abszisse ist die Nummer des Messwerts aufgetragen. Die Messwerte können zu verschiedenen Zeitpunkten oder durch zeitgleiche Messungen erzeugt werden. Die Achsen sind in regelmässige Intervalle unterteilt. Der Analysebereich ist hierdurch in Rechtecke unterteilt. Die Intervalle auf der Ordinate werden als „Bin“ (vgl. [75], S. 8) I_1, I_2, I_3, \dots bezeichnet. Jedem Bin I_1, I_2, I_3, \dots kann ein durchschnittlicher Wert $\theta_{I_1}, \theta_{I_2}, \theta_{I_3}, \dots$ zugeordnet werden. Zu jedem Messwert kann ein entsprechendes Quadrat im Analysebereich bestimmt werden. Das zugehörige Quadrat ist in Abbildung 1.6 blau markiert. Auf der rechten Seite in Abbildung 1.6 ist für jeden Bin die Häufigkeit eines auftretenden Messwerts aufgetragen. Abbildung A.1 stellt die Häufigkeit aus Abbildung 1.6, rechts in einem

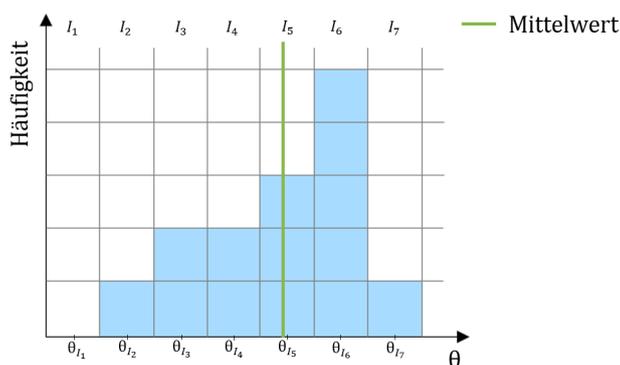


Abbildung A.1: Häufigkeiten der Messreihe aus Abbildung 1.6

gedrehten Diagramm dar. Die diskrete Häufigkeit $H(\theta)$ kann für den Messwert θ abgelesen werden

$$H(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \theta \in I_1 \\ 1 & \text{falls } \theta \in I_2 \\ 2 & \text{falls } \theta \in I_3 \\ 2 & \text{falls } \theta \in I_4 \\ 3 & \text{falls } \theta \in I_5 \\ 5 & \text{falls } \theta \in I_6 \\ 1 & \text{falls } \theta \in I_7. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Die Summe der blauen Quadrate in Abbildung A.1 entspricht dem Wert 14, der Anzahl durchgeführter Messungen. Die Anzahl der beobachteten Messungen innerhalb eines jeden Bins ist Gleichung (A.1) zu entnehmen. Die

Wahrscheinlichkeit P , dass sich ein Messwert innerhalb eines bestimmten Bins I_l befindet, kann berechnet werden (vgl. [49], S. 184)

$$P(\theta \in I_l) = \frac{\text{Anzahl beobachteter Messungen in Bin}}{\text{Anzahl durchgeführter Messungen}} = \frac{H(\theta \in I_l)}{14}. \quad (\text{A.2})$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit $H(\theta)$ wird an zwei Beispielen demonstriert. Mit Hilfe der Gleichungen (A.1) und (A.2) kann die Wahrscheinlichkeit $P((\theta \in I_1) \cup (\theta \in I_2))$ bestimmt werden, dass sich ein Messwert innerhalb der ersten beiden Bins befindet (vgl. [49], S. 187)

$$P((\theta \in I_1) \cup (\theta \in I_2)) = P(\theta \in I_1) + P(\theta \in I_2) = \frac{H(\theta \in I_1)}{14} + \frac{H(\theta \in I_2)}{14} = \frac{0+1}{14} = \frac{1}{14}. \quad (\text{A.3})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Messwert innerhalb der Bins I_1, I_2, \dots, I_7 befindet, ist trivialerweise 1

$$P(\theta \in I_{1..7}) = \sum_{l=1}^7 P(\theta \in I_l) = \sum_{l=1}^7 \frac{H(\theta \in I_l)}{14} = \frac{0+1+2+2+3+5+1}{14} = \frac{14}{14} = 1. \quad (\text{A.4})$$

Werden die Wahrscheinlichkeiten aller Bins summiert wie in Gleichung (A.4), geht die Information der Verteilung verloren. Werden die Wahrscheinlichkeiten vor der Summation mit dem jeweiligen mittleren Wert des Bins gewichtet, entspricht die Summe dem Mittelwert $\bar{\theta}$ (vgl. [49], S. 237)

$$\bar{\theta} = \sum_{l=1}^7 \theta_l P(\theta \in I_l). \quad (\text{A.5})$$

Der Mittelwert ist in Abbildung A.1 ebenfalls skizziert. Alternativ zur Betrachtung der Häufigkeiten kann aus Gleichung (A.1) mit Hilfe der Beziehung in Gleichung (A.2) die diskrete „Wahrscheinlichkeitsfunktion“ (vgl. [120], S. 40) bestimmt werden

$$P(\theta) = \frac{H(\theta)}{\text{Anzahl durchgeführter Messungen}} = H(\theta)/14 = \begin{cases} 0 & \text{falls } \theta \in I_1 \\ 1/14 & \text{falls } \theta \in I_2 \\ 1/7 & \text{falls } \theta \in I_3 \\ 1/7 & \text{falls } \theta \in I_4 \\ 3/14 & \text{falls } \theta \in I_5 \\ 5/14 & \text{falls } \theta \in I_6 \\ 1/14 & \text{falls } \theta \in I_7. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$ und ihr Mittelwert ist in Abbildung 1.7 dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Messwert innerhalb eines bestimmten Bins I_l befindet, kann in Gleichung (A.6) oder Abbildung 1.7 abgelesen werden.

Im Folgenden wird demonstriert, wie die Berechnungen in den Gleichungen (A.3) - (A.5) unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$ in Gleichung (A.6) erfolgen können. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert innerhalb zweier Bins ist, kann analog zu Gleichung (A.3) ermittelt werden

$$P((\theta \in I_1) \cup (\theta \in I_2)) = P(\theta \in I_1) + P(\theta \in I_2) = P(\theta \in I_1) + P(\theta \in I_2) = 0 + 1/14 = 1/14. \quad (\text{A.7})$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert innerhalb einer der Bins $I_{1..7}$ ist, ergibt sich analog zu Gleichung (A.4)

$$P(\theta \in I_{1..7}) = \sum_{l=1}^7 P(\theta \in I_l) = \sum_{l=1}^7 P(\theta \in I_l) = 0 + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{5}{14} + \frac{1}{14} = \frac{14}{14} = 1. \quad (\text{A.8})$$

Der Mittelwert $\bar{\theta}$ kann mit der diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$ formuliert werden

$$\bar{\theta} = \sum_{l=1}^7 \theta_l P(\theta \in I_l). \quad (\text{A.9})$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ist umso genauer, je kleiner die Intervallbreite der Bins ist. Für infinitesimal kleine Intervallbreiten werden die Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer stetigen Funktion $f(\theta)$ berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Messwert innerhalb eines der sieben Bins befindet, berechnet sich analog zur Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$ in Gleichung (A.8)

$$P(\theta \in I_{1..7}) = \int_{I_{1u}}^{I_{7o}} f(\theta) d\theta. \quad (\text{A.10})$$

Die untere bzw. obere Intervallgrenzen eines Bins I_l sind in Gleichung (A.10) mit I_{lu} und I_{lo} gekennzeichnet. Die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit erfordert ein Integral, selbst wenn das betrachtete Intervall sehr klein ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Messwert im Intervall I_l der Breite $(\theta, \theta + d\theta)$ befindet, ist (vgl. [120], S. 40)

$$P(\theta \in I_l) = \int_{\theta}^{\theta+d\theta} f(\theta) d\theta. \quad (\text{A.11})$$

Falls $f(\theta \leq \theta_{I_{1u}}) = f(\theta_{I_{7o}} \leq \theta) = 0$, gilt für Gleichung (A.10)

$$\int_{I_{1u}}^{I_{7o}} f d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f d\theta = 1. \quad (\text{A.12})$$

Es sei darauf hingewiesen, dass analog zu Gleichung (A.4) eine Integration der PDF über θ dazu führt, dass die Information der Verteilung in θ verloren geht. Eine Integration ist zulässig, falls die Information der Verteilung in θ nicht weiter betrachtet werden soll. Der Vollständigkeit halber wird die oben berechnete Wahrscheinlichkeit $P((\theta \in I_1) \cup (\theta \in I_2))$ sowie der Mittelwert mit Hilfe der PDF $f(\theta)$ berechnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Messwert innerhalb der Bins I_1 oder I_2 befindet, berechnet sich analog zu Gleichung (A.3) und mit Hilfe der Gleichung (A.11)

$$P((\theta \in I_1) \cup (\theta \in I_2)) = P(\theta \in I_1) + P(\theta \in I_2) = \int_{I_{1u}}^{I_{1o}} f(\theta) d\theta + \int_{I_{2u}}^{I_{2o}} f(\theta) d\theta = \int_{I_{1u}}^{I_{2o}} f(\theta) d\theta. \quad (\text{A.13})$$

Bei der Berechnung des Mittelwerts $\bar{\theta}$ muss beachtet werden, dass f im Gegensatz zu P innerhalb eines Bins I_l im Allgemeinen nicht konstant ist. Die Gewichtung mit dem Wert θ muss bei der Berechnung von $P(\theta \in I_l)$ erfolgen. Analog zu Gleichung (A.9) berechnet sich der Mittelwert

$$\bar{\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f d\theta. \quad (\text{A.14})$$

B Entfallen des Integrals in der Herleitung in Kapitel 3.5

In ([104], S. 141) wird für einen Vektor mit Skalargrößen $\underline{\phi}$ im Ereignisraum $\underline{\psi}$, den Geschwindigkeitsvektor \underline{U} im Ereignisraum \underline{V} , die Hilfsfunktion $Q(\underline{U}, \underline{\phi})$ und die JPDF $f(\underline{V}, \underline{\psi}; x, t)$ mit dem Vektor der Ortskoordinaten \underline{x} und der Zeit t gezeigt (vgl. [71], S. 387)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \rho(\underline{\psi}) Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} + \frac{\partial}{\partial x_j} \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} = \int \int Q(\underline{V}, \underline{\psi}) \left\{ \rho(\underline{\psi}) \frac{\partial f}{\partial t} + \rho(\underline{\psi}) V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} d\underline{V} d\underline{\psi}. \quad (\text{B.1})$$

Der Konvektionsterm wurde gemäß

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} = \int \int Q(\underline{V}, \underline{\psi}) \rho(\underline{\psi}) V_j \frac{\partial f}{\partial x_j} d\underline{V} d\underline{\psi} \quad (\text{B.2})$$

umgeformt, da die JPDF f als einzige Größe von x_j abhängt („is the only parameter written as a function of t and x in the integrand“ ([71], S. 387)). Hieraus werden im Folgenden Vereinfachungen für das Integral $\int \int \rho(\underline{\psi}) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi}$ abgeleitet.

Die Produktregel ([97], S. 132) liefert für den Term auf der linken Seite von Gleichung (B.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} &= \int \int \frac{\partial \rho(\underline{\psi})}{\partial x_j} V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} + \int \int \rho(\underline{\psi}) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} + \\ &+ \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j \frac{\partial Q(\underline{V}, \underline{\psi})}{\partial x_j} f d\underline{V} d\underline{\psi} + \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) \frac{\partial f}{\partial x_j} d\underline{V} d\underline{\psi}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Eine Subtraktion der Gleichung (B.2) von Gleichung (B.3) liefert

$$0 = \int \int \frac{\partial \rho(\underline{\psi})}{\partial x_j} V_j Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} + \int \int \rho(\underline{\psi}) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi} + \int \int \rho(\underline{\psi}) V_j \frac{\partial Q(\underline{V}, \underline{\psi})}{\partial x_j} f d\underline{V} d\underline{\psi}. \quad (\text{B.4})$$

In Gleichung (B.4) entfällt der dritte Term auf der rechten Seite, da $Q(\underline{V}, \underline{\psi})$ laut Definition nicht von x_j abhängt, womit

$$\frac{\partial Q(\underline{V}, \underline{\psi})}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Die Dichte $\rho(\underline{\phi})$ hängt ebenfalls lediglich von $\underline{\phi}$ ab („the density ... depend(s) only on the set of scalars $\underline{\phi}$ “ ([104], S. 135)). Damit entfällt der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (B.4), da

$$\frac{\partial \rho(\underline{\psi})}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Aus Gleichung (B.4) folgt mit den Gleichungen (B.5) und (B.6)

$$0 = \int \int \rho(\underline{\psi}) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} Q(\underline{V}, \underline{\psi}) f d\underline{V} d\underline{\psi}. \quad (\text{B.7})$$

In der Herleitung in Kapitel 3.5 hängt die Hilfsfunktion g ebenfalls nur von U und α ab und die Dichte ρ_a ist ebenfalls eine Funktion von α : Im Zwei-Fluid-Modell ist die Dichte $\overline{\rho_d}$ eine Funktion von α_d und der (bei inkompressiblen Fluiden (vgl. [55], S. 46, 158, 212; [80], S. 686)) Konstanten $\overline{\rho}$. Im Drift-Flux-Modell ist sie entsprechend Gleichung (2.57) $\rho_m = \alpha_d \overline{\rho_d} + \alpha_c \overline{\rho_c}$ ebenfalls eine Funktion von α_d , da ρ_m mit $\alpha_c = 1 - \alpha_d$ (vgl. Gleichung (2.12)) bei Kenntnis von α_d eindeutig bestimmt ist. Entsprechend gilt für den Term in der Herleitung in Kapitel 3.5 entsprechend Gleichung (B.7)

$$0 = \int \int \rho(a) \frac{\partial V_j}{\partial x_j} g(\mathbf{V}, a) f d\mathbf{V} da. \quad (\text{B.8})$$

C Vereinfachungen in Kapitel 3.6.2.2

Term I

Mit Hilfe der Produktregel ([97], S. 132) kann der Integrand des ersten Terms vereinfacht werden

$$a \frac{\partial}{\partial t} (\rho(a) f_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (a \rho(a) f_\alpha) - \rho(a) f_\alpha \frac{\partial a}{\partial t}. \quad (\text{C.1})$$

Da a keine Funktion von t ist (vgl. [71], S. 387), entfällt der letzte Term in Gleichung (C.1). Das erste Integral in Gleichung (3.102) kann mit Gleichung (C.1) unter Anwendung der Definition des Mittelwerts in Gleichung (2.67) mit $g(a) = a\rho(a)$ berechnet werden

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial t} (\rho(a) f_\alpha) da = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} (a \rho(a) f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 a \rho(a) f_\alpha da = \frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \rho(\alpha) \rangle. \quad (\text{C.2})$$

Da t und a keine Funktionen voneinander sind, wurde in Gleichung (C.2) analog ([71], S. 387) die Differentiation und das Integral vertauscht.

Term II

Analog zu Gleichung (C.1) gilt für den Integranden des zweiten Terms

$$a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_i} (a \rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) - \rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha \frac{\partial a}{\partial x_i}. \quad (\text{C.3})$$

Analog zu Term I entfällt der zweite Term auf der rechten Seite in Gleichung (C.3) und die Differentiation und das Integral dürfen vertauscht werden, da a und x keine Funktionen voneinander sind

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} (a \rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 a \rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha da. \quad (\text{C.4})$$

Das Integral über eine bedingte Wahrscheinlichkeit auf der rechten Seite in Gleichung (C.4) kann entsprechend der Umformung in Gleichung (2.74) mit $g(U, \alpha) = U$ vereinfacht werden, so dass sich ergibt

$$\int_0^1 a \rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha da = \int_0^1 a \rho(a) f_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} V f_{U|\alpha}(a|V) dV da = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a \rho(a) V f_{\alpha U}(a, V) dV da. \quad (\text{C.5})$$

Mit den Fluktuationen in den Gleichungen (3.106) folgt für Gleichung (3.105)

$$\begin{aligned} \int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a} \rho(a) \hat{V} f_{\alpha U}(a, V) dV da + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a'' \rho(a) v'' f_{\alpha U}(a, V) dV da + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a'' \rho(a) \hat{V} f_{\alpha U}(a, V) dV da + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a} \rho(a) V'' f_{\alpha U}(a, V) dV da. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Die letzten beiden Terme in Gleichung (C.6) entfallen nach Gleichung (2.46), da eine Mittelung des Produkts der Dichte und einer dichtegewichteten Fluktuation vorliegt. Die Definition der dichtegewichteten PDF in Gleichung (2.78) erlaubt eine vereinfachte Darstellung von Gleichung (C.6) (vgl. [104], S. 187)

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a} \langle \rho \rangle \hat{V} \hat{f}_{\alpha U}(a, V) dV da + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a'' \langle \rho \rangle v'' \hat{f}_{\alpha U}(a, V) dV da. \quad (\text{C.7})$$

Unter Anwendung der Definition des Mittelwerts in Gleichung (2.69) kann Gleichung (C.7) weiter vereinfacht werden

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho(a) \langle U_i | a \rangle f_\alpha) da = \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \hat{\alpha} \langle \rho \rangle \hat{U}_i \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' \langle \rho \rangle u_i'' \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} (\hat{\alpha} \langle \rho \rangle \hat{U}_i) + \langle \rho \rangle \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha'' u_i'' \rangle. \quad (\text{C.8})$$

Der letzte Schritt folgt, da $\hat{\alpha}$, \hat{U}_i und $\langle \rho \rangle$ Konstanten sind.

Term III

Mit Hilfe der Produktregel ([97], S. 132) kann der Integrand des dritten Terms umformuliert werden

$$a \frac{\partial}{\partial a} (\rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) = \frac{\partial}{\partial a} (a \rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) - \rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha \frac{\partial a}{\partial a}. \quad (\text{C.9})$$

Für den dritten Term in Gleichung (3.102) ergibt sich mit Gleichung (C.9)

$$\int_0^1 a \frac{\partial}{\partial a} (\rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) da = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} (a \rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha) da - \int_0^1 \rho(a) Q_\alpha(a) f_\alpha da = -\langle \rho(\alpha) Q_\alpha(\alpha) \rangle. \quad (\text{C.10})$$

In Gleichung (C.10) entfällt im letzten Schritt der erste Term auf der rechten Seite unter der Annahme $f_\alpha(0) = 0$ und $f_\alpha(1) = 0$ (vgl. [79], S. 7). Die letzte Umformung in Gleichung (C.10) erfolgt durch Anwendung der Definition des Mittelwerts in Gleichung (2.67).

D Berücksichtigung stochastischer Fluktuationen im Konvektionsterm

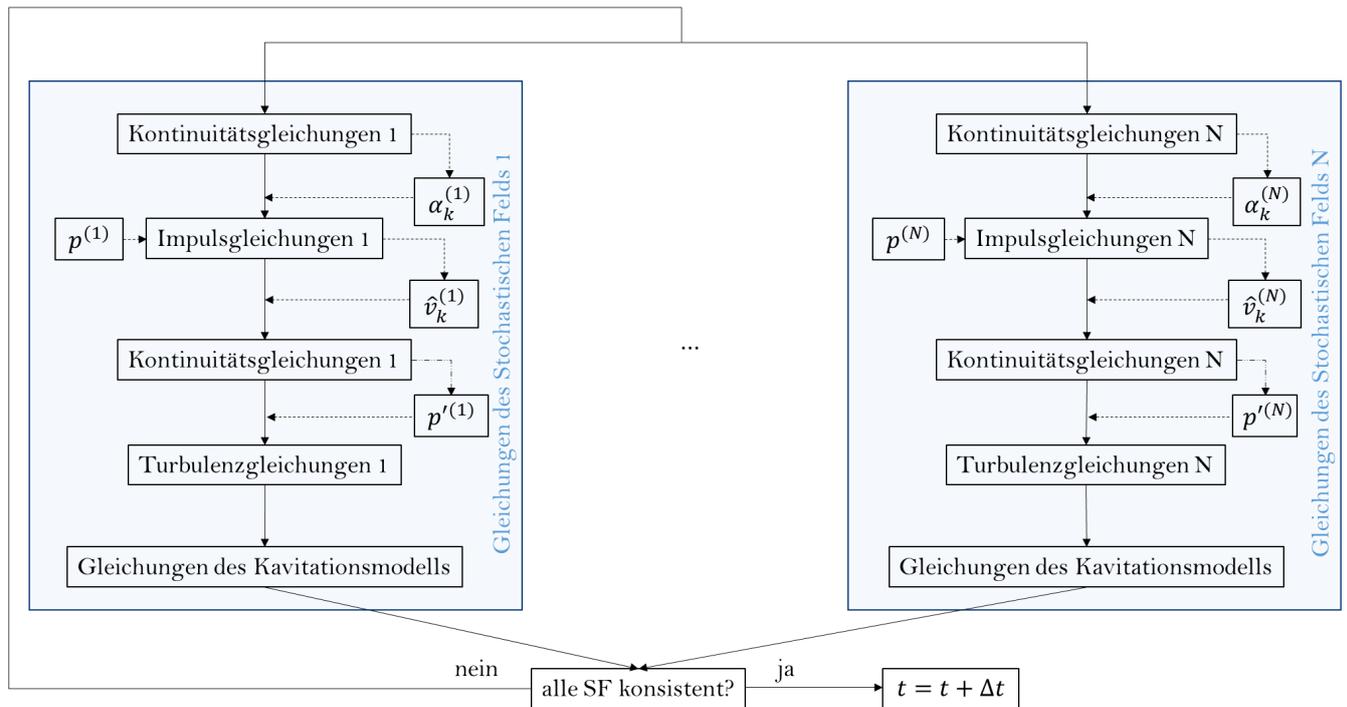


Abbildung D.1: Mögliche Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire™. Eine fluktuierende Kraft aufgrund der Turbulenz wird in den Momentengleichungen berücksichtigt (vgl. Abbildung 2.4).

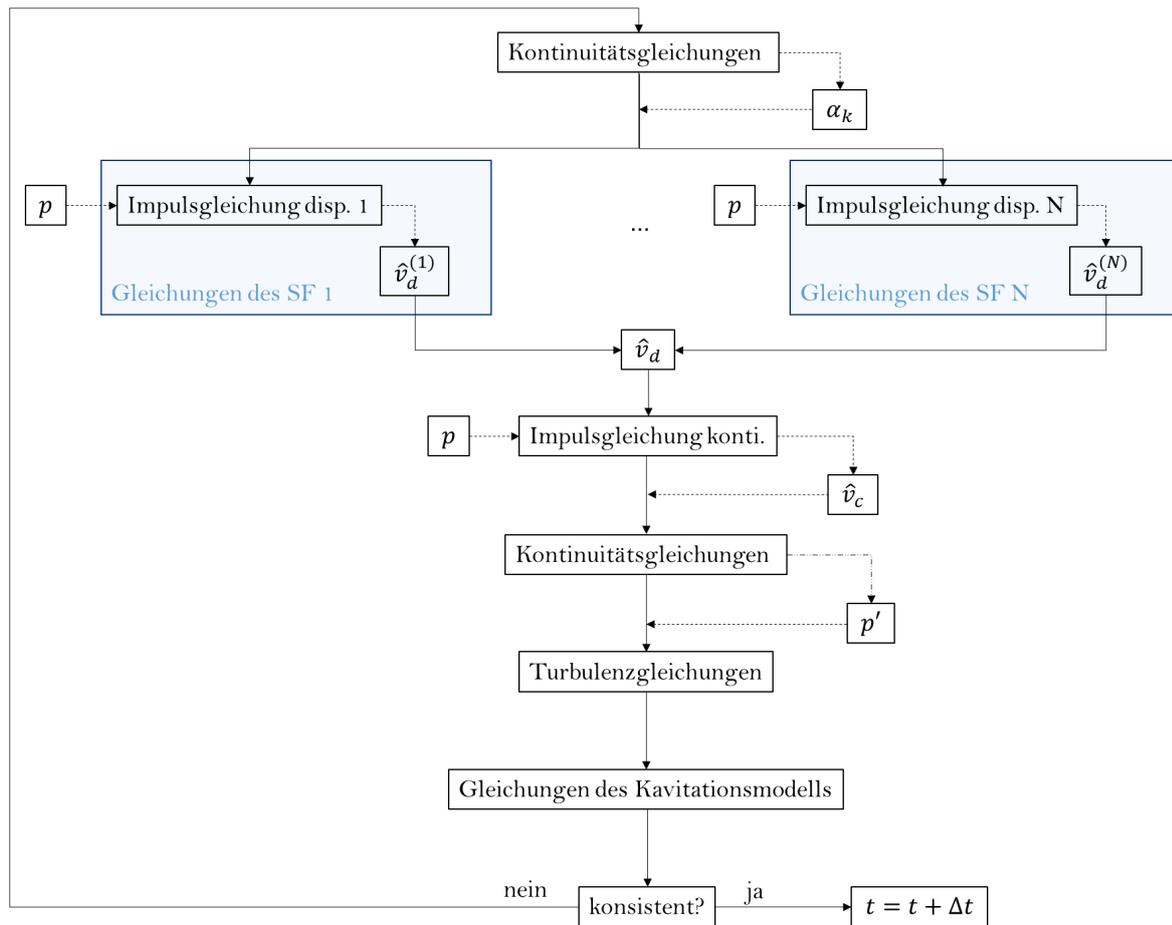


Abbildung D.2: Mögliche Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire™: Eine fluktuierende Kraft aufgrund der Turbulenz wird in den Momentengleichungen berücksichtigt (vgl. Abbildung 2.4). Im Vergleich zu Abbildung D.1 wird ein mittleres Geschwindigkeitsfeld der kontinuierlichen Phase und ein mittleres Druckfeld berechnet.

E 2D Injektor: stochastische Felder

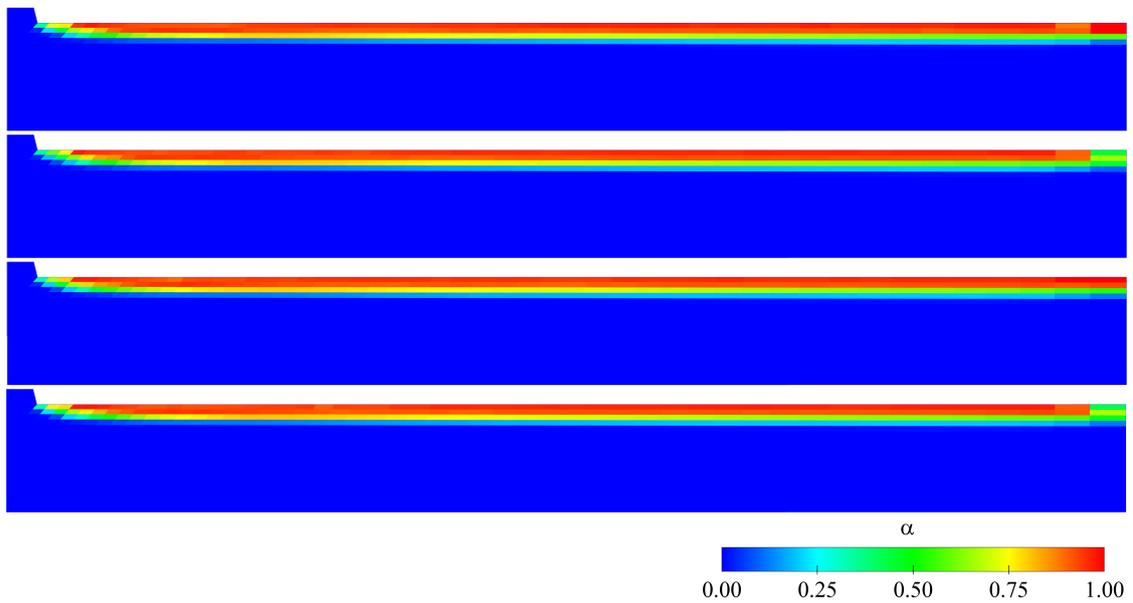


Abbildung E.1: 2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM N in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}$ s. [S2]

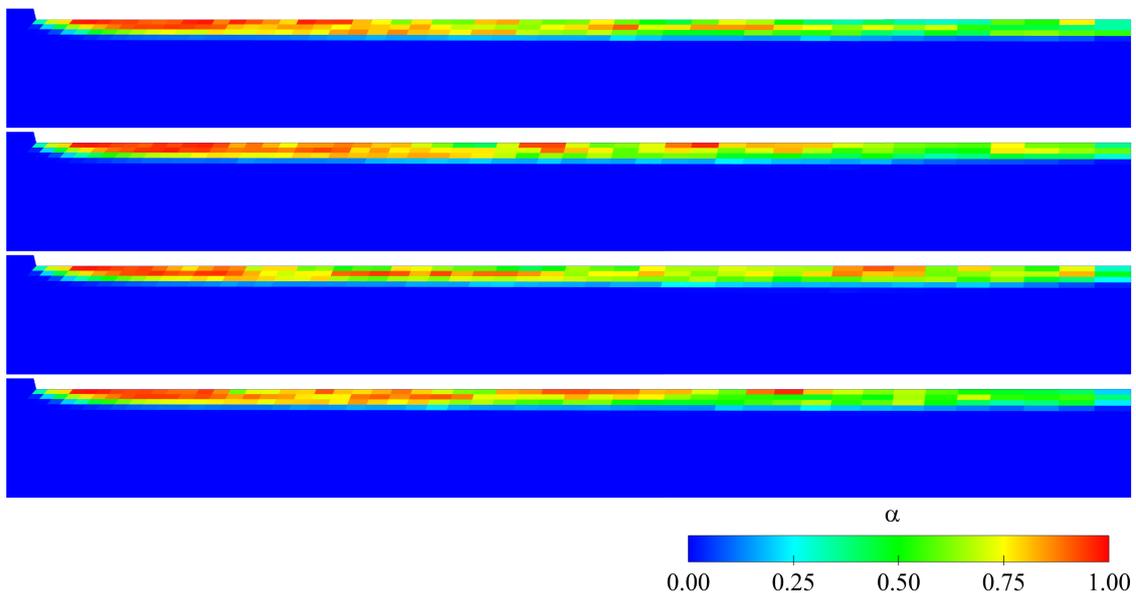


Abbildung E.2: 2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM p in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}$ s. [S3]

F 3D Injektor: stochastische Felder

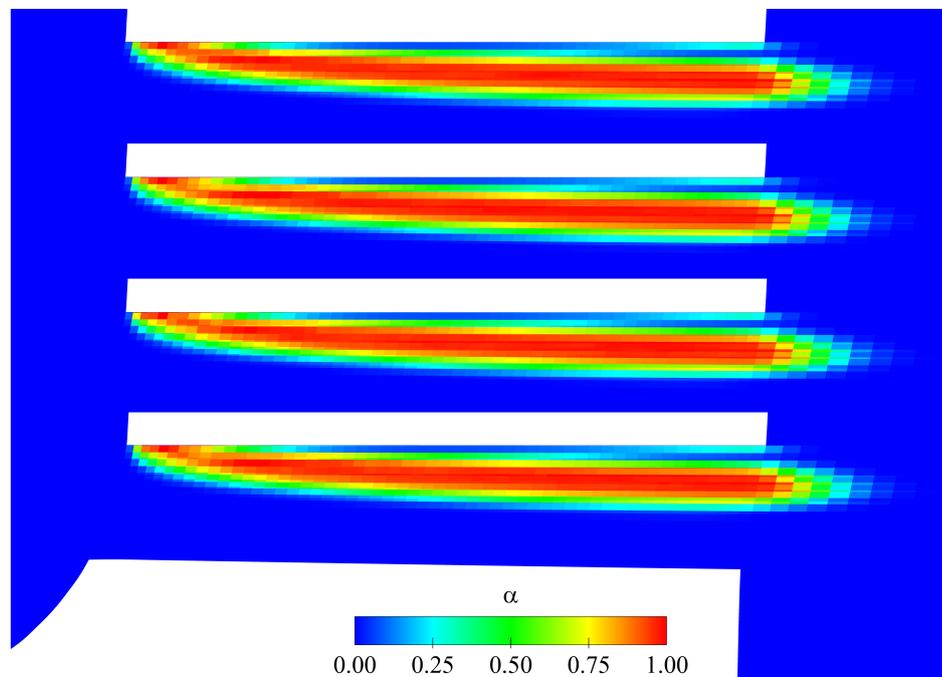


Abbildung F.1: 3D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM N in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ beim Kurbelwellenwinkel 210° . [S5]

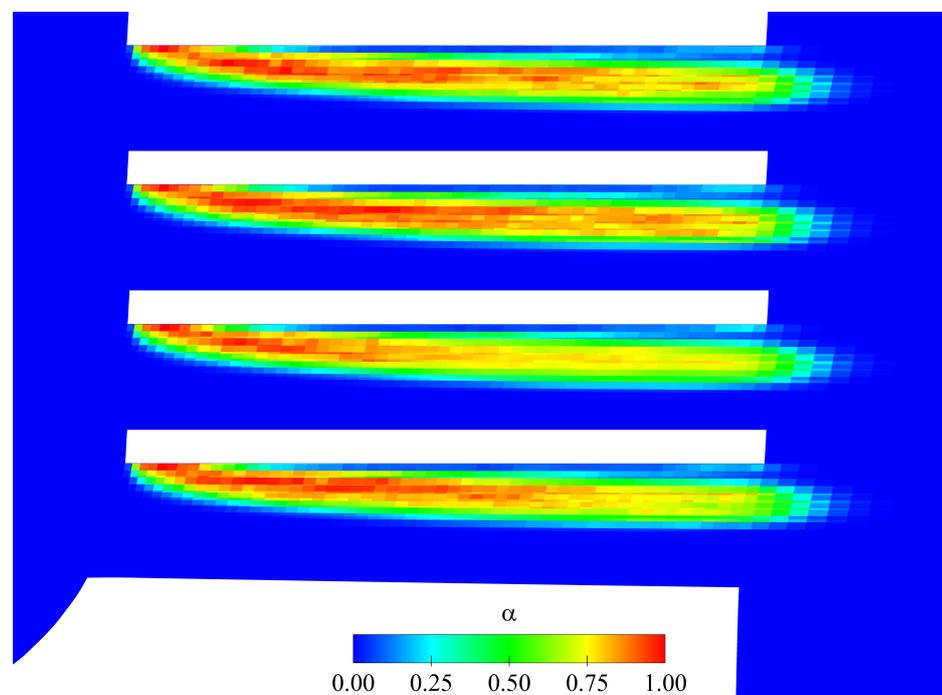


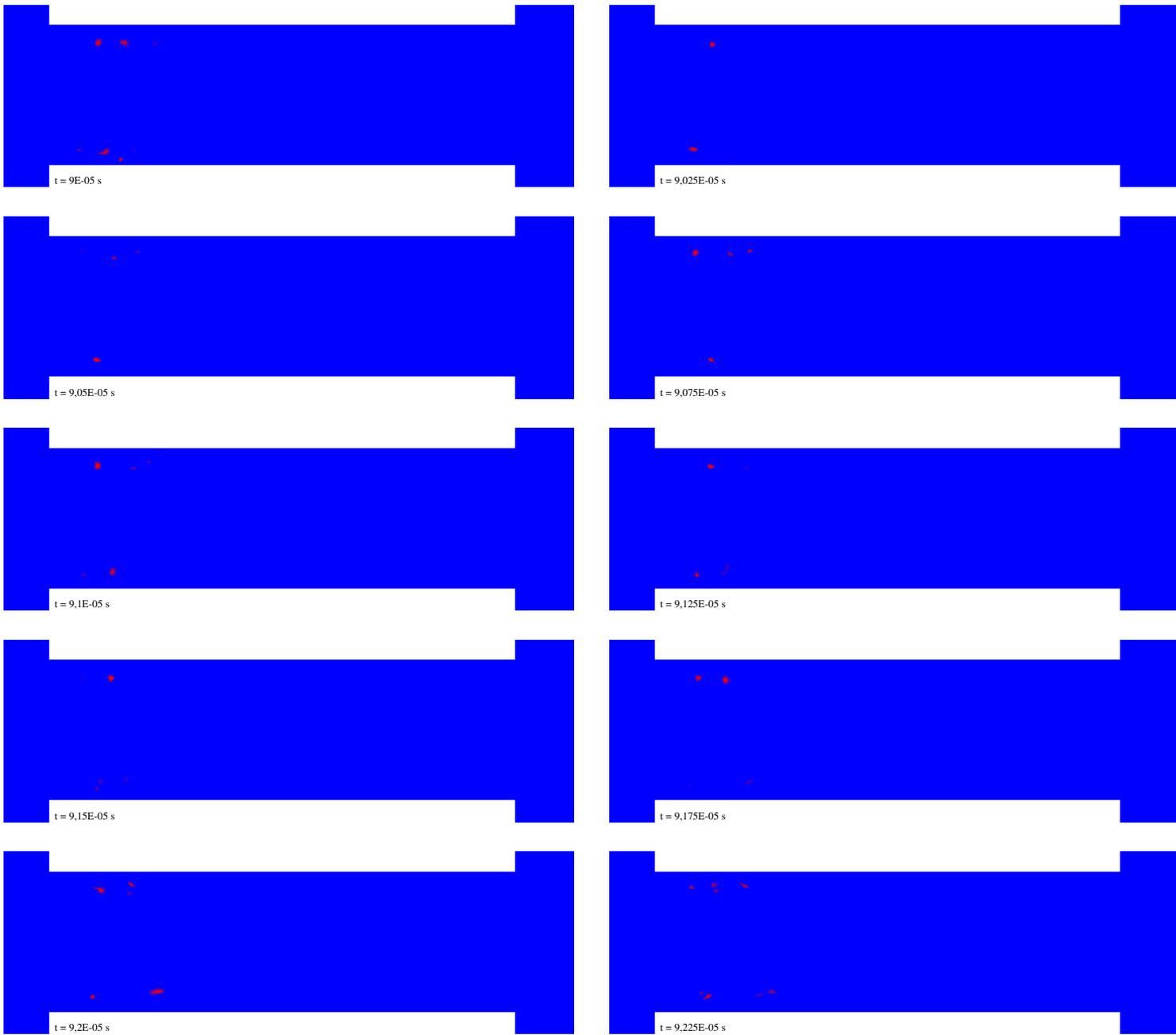
Abbildung F.2: 3D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM p in AVL Fire™. Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ beim Kurbelwellenwinkel 210° . [S6]

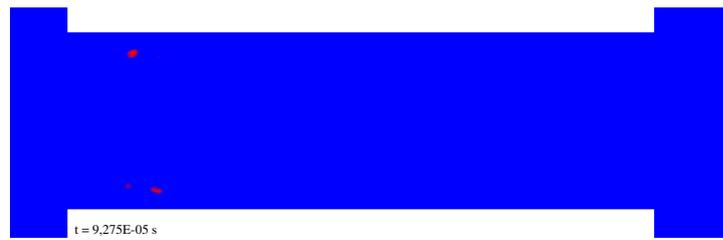
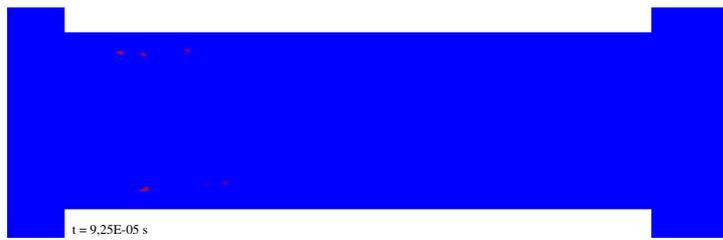
G intermittierend kavitierende Strömung

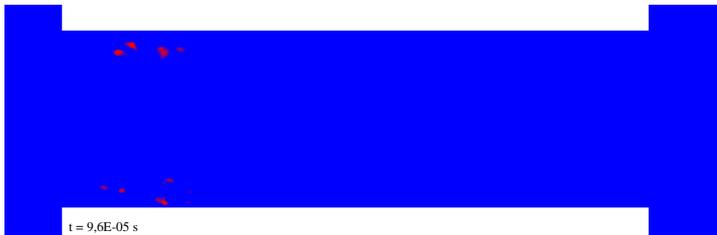
G.1 LES-Berechnungen

G.1.1 instantane Realisationen in der Symmetrieebene

Ergebnisse einer Large-Eddy-Simulation [32].



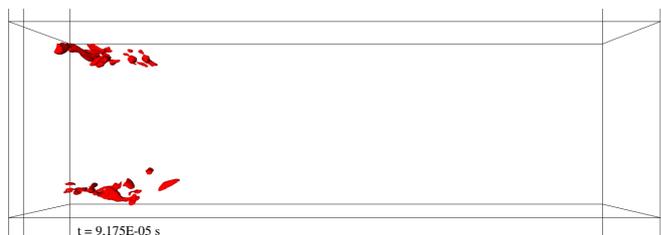


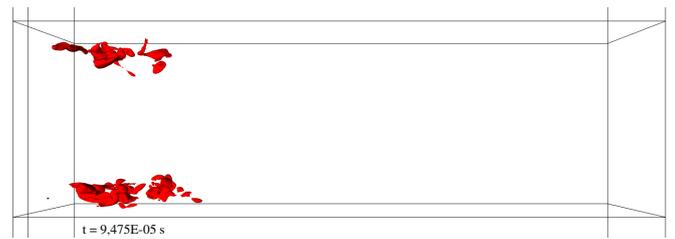
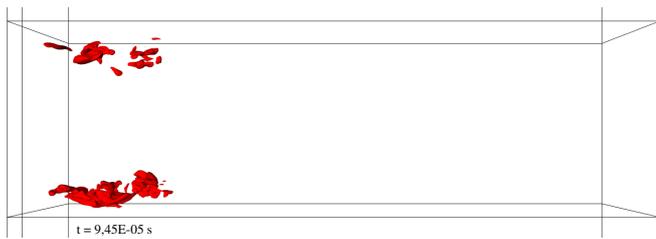
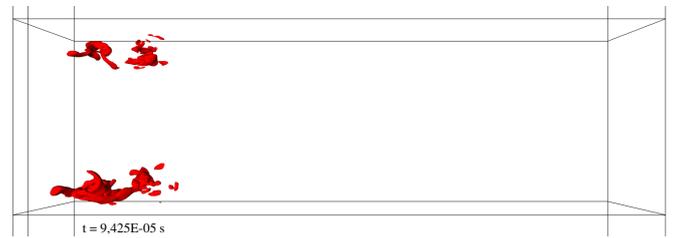
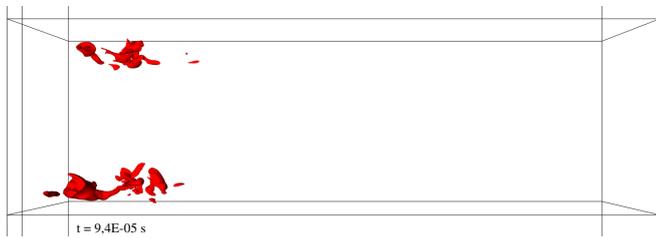
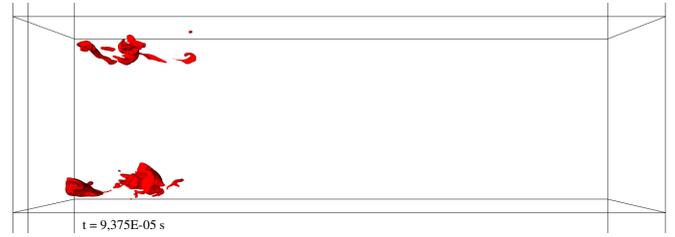
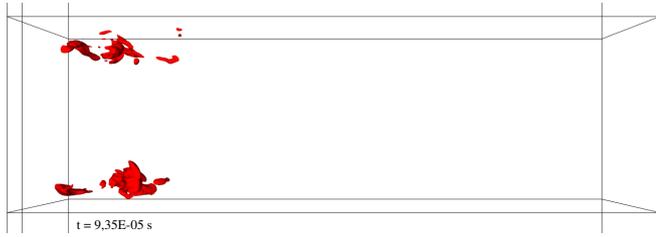


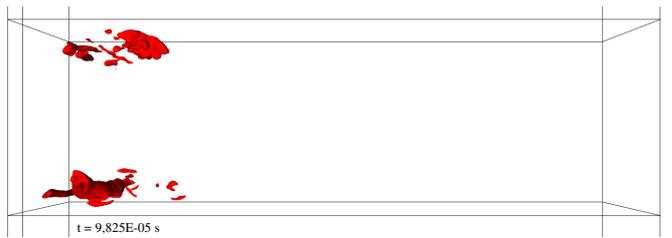
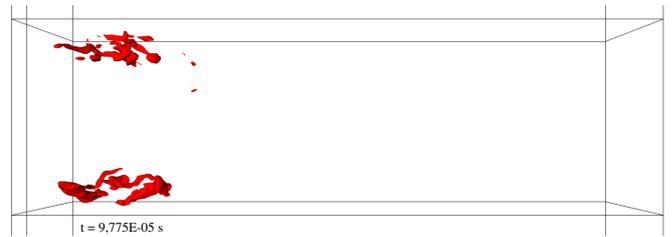
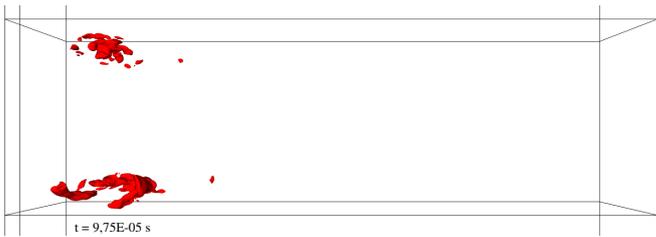
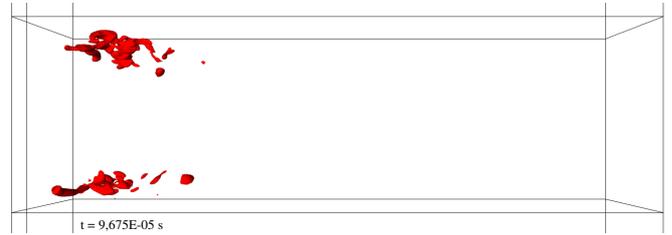
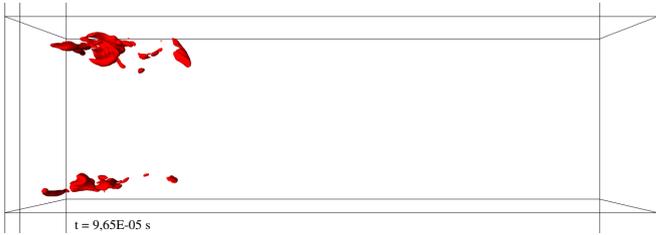
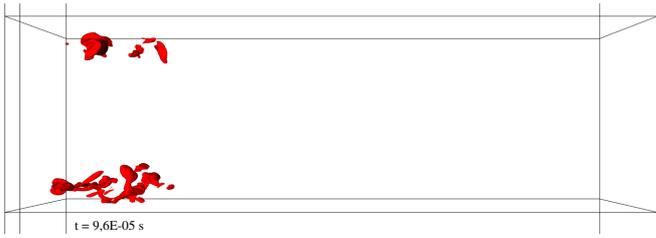
G.1.2 Iso-Flächen

Ergebnisse einer Large-Eddy Simulation [32].

G.1.2.1 gesamtes Kavitationsgebiet

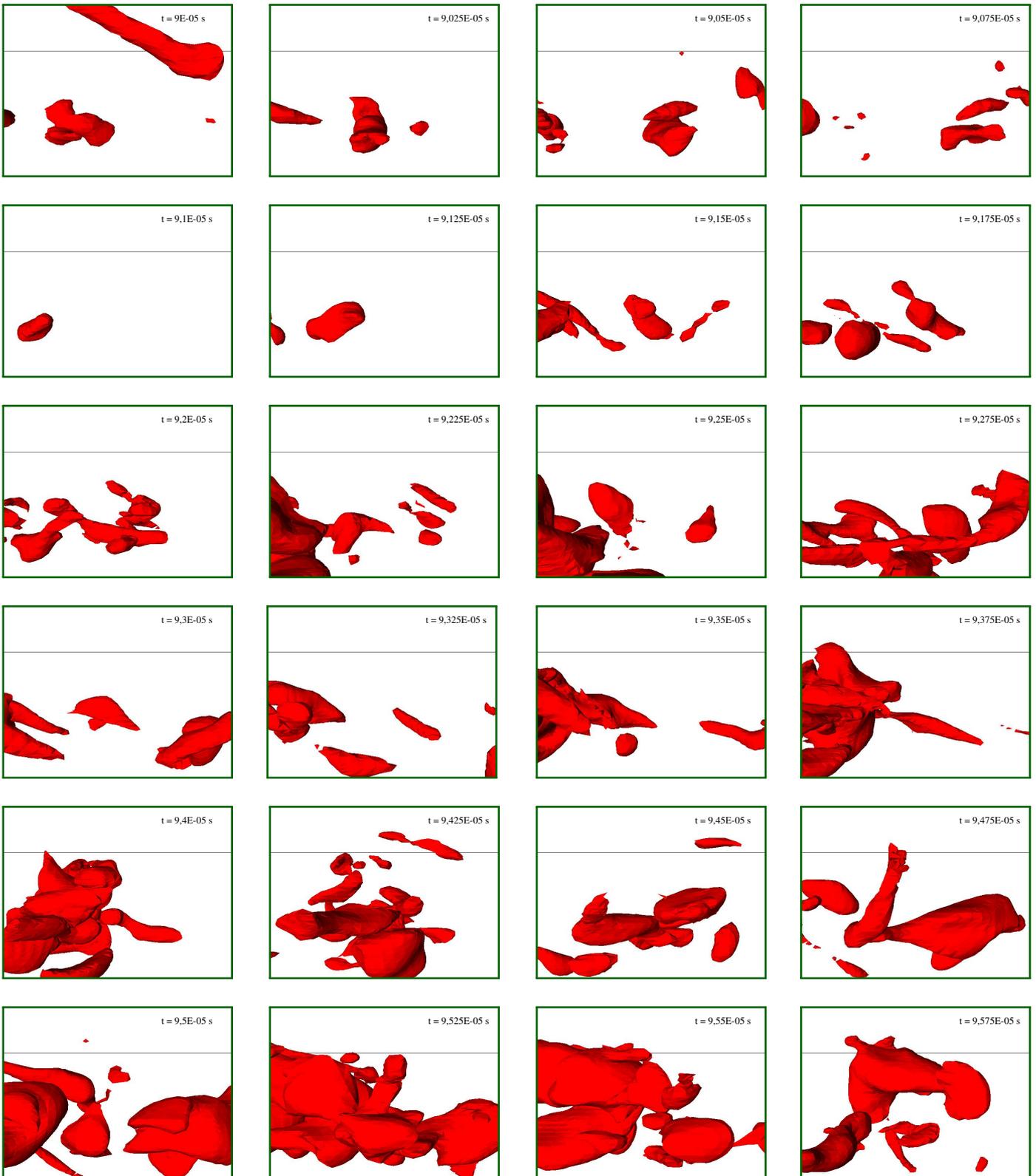






G.1.2.2 vergrößertes Kavitationsgebiet

Der vergrößerte Bereich ist in Abbildung G.1 grün umrahmt (s. Seite 124).



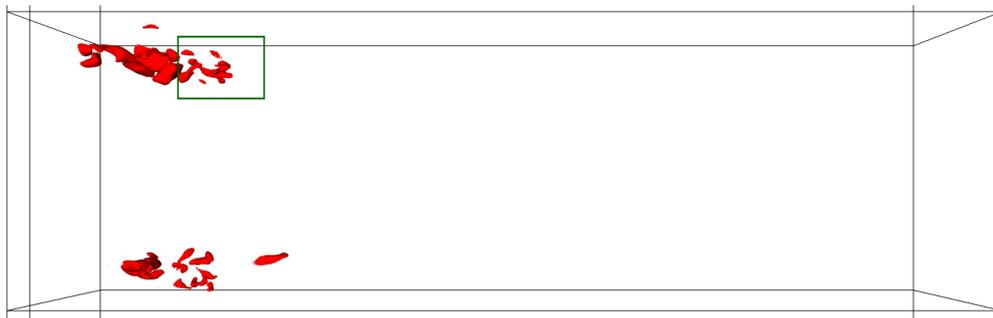
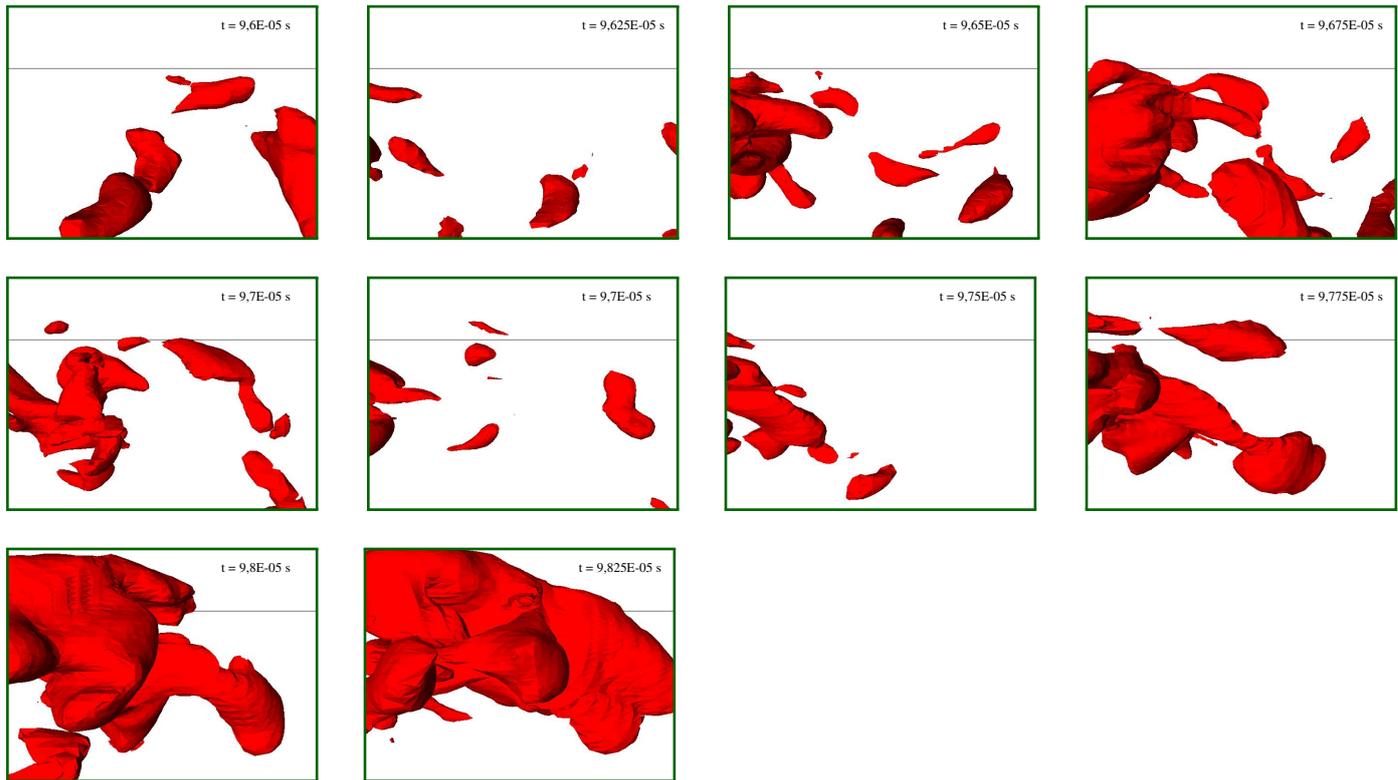
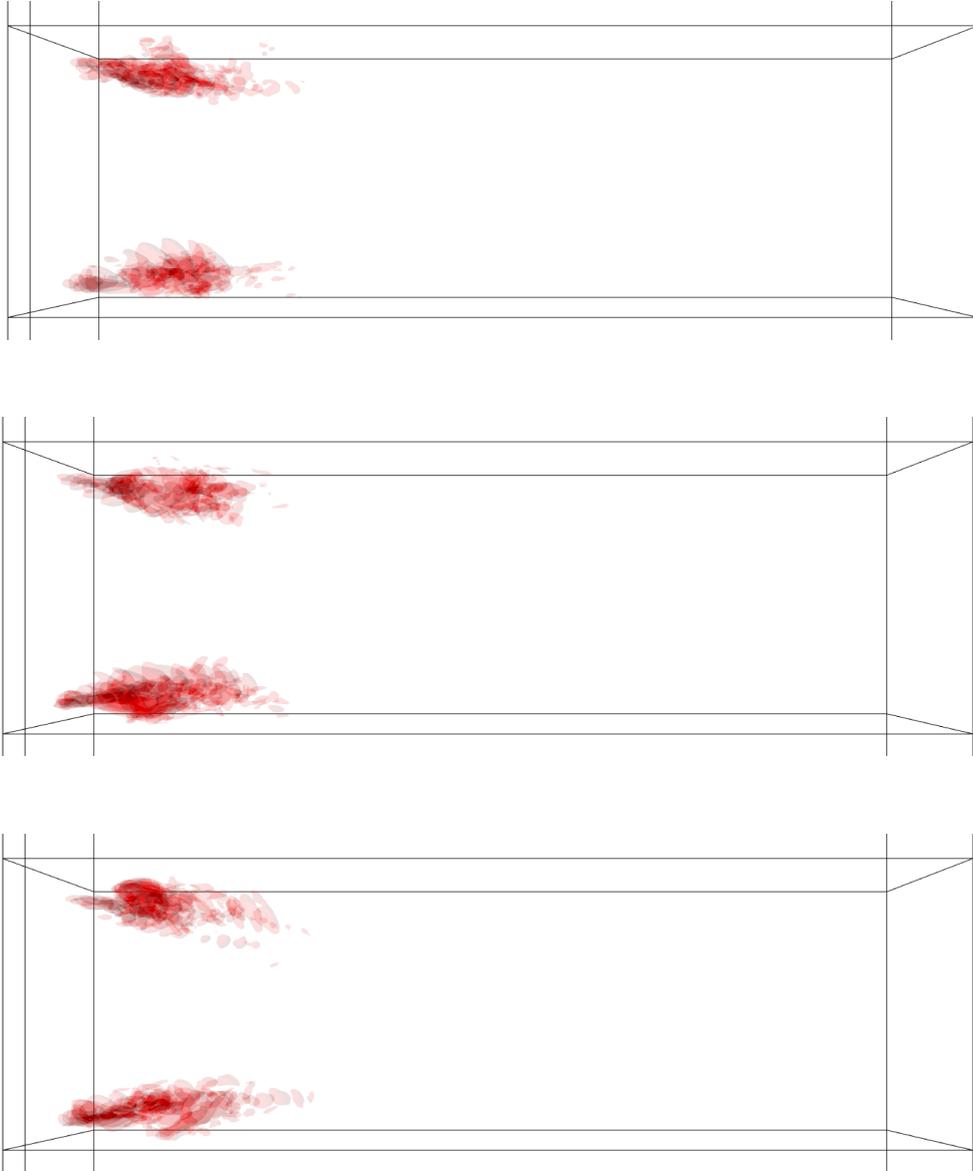


Abbildung G.1: Kennzeichnung des vergrößerten Bereichs des Kavitationsgebiets durch eine grüne Umrahmung.

G.1.2.3 gemittelttes Kavitationsgebiet

Ergebnisse einer Large-Eddy Simulation [32]. Analog zu Abbildung 4.23 wird die gemittelte Iso-Fläche durch eine Mittelung von acht instantanen Iso-Flächen in Anhang G.1.2.1 erhalten.



G.2 RANS-Berechnungen, 2F-SFM p

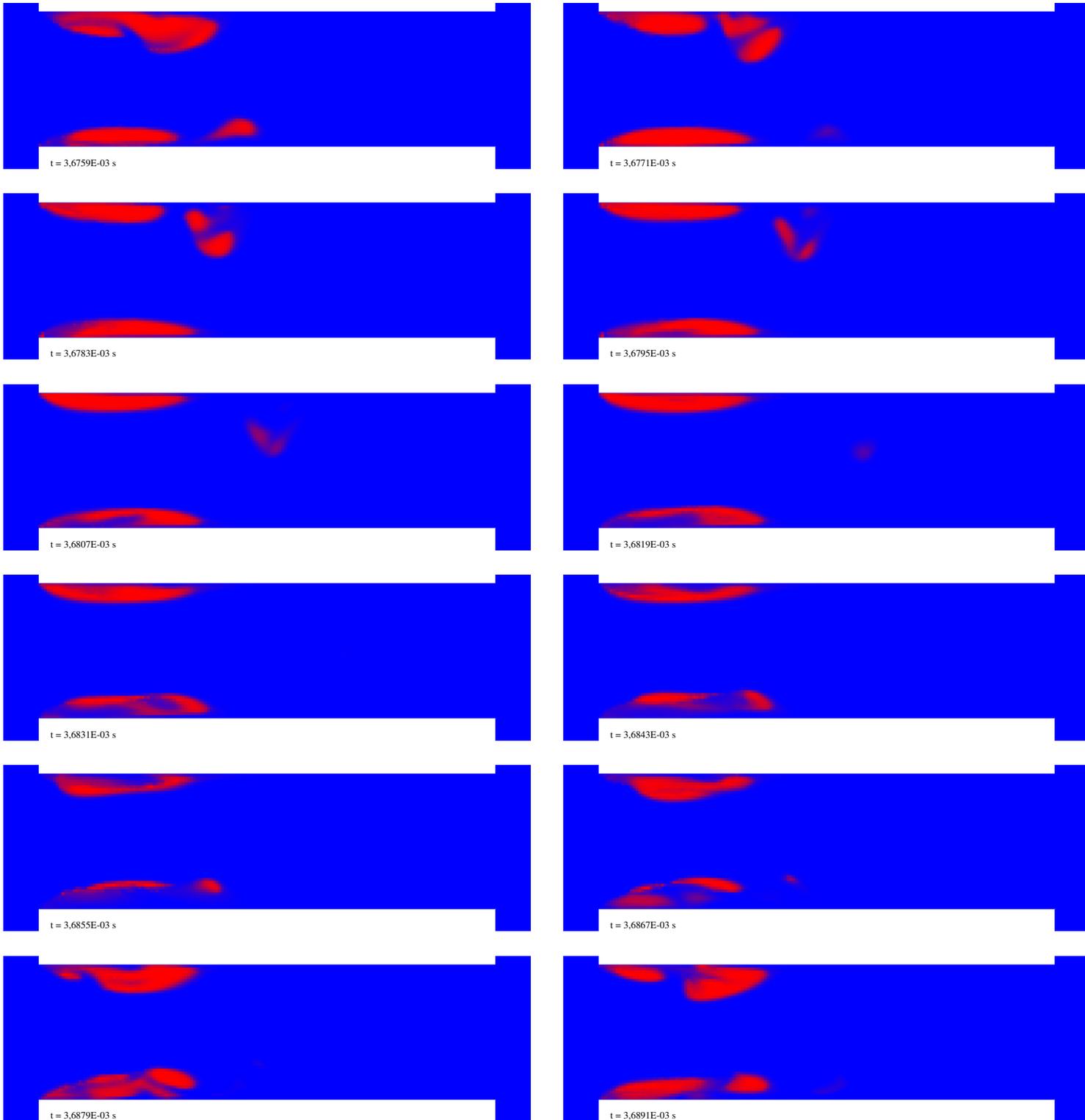
G.2.1 stochastische Felder zu einem Zeitpunkt

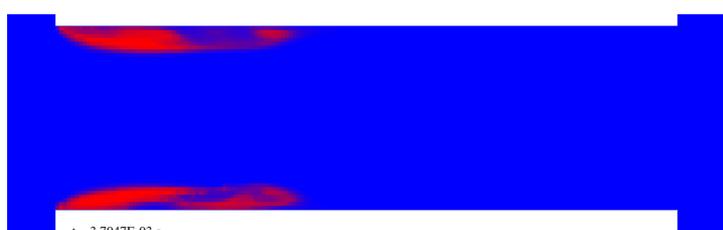
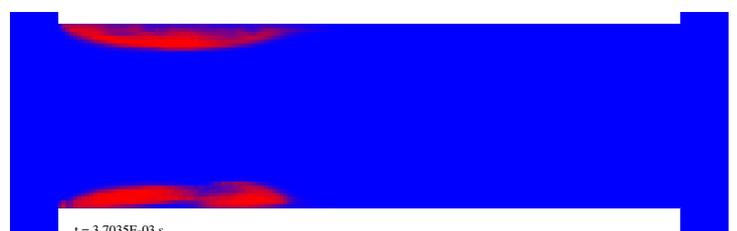
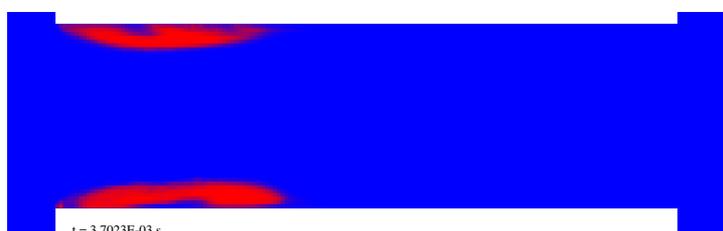
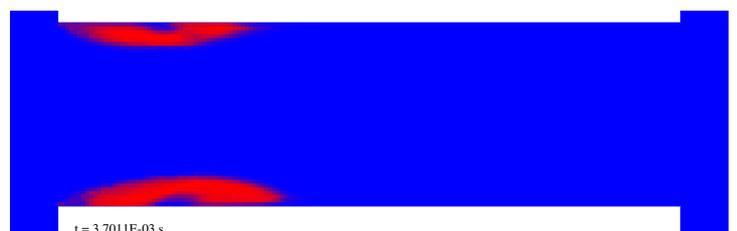
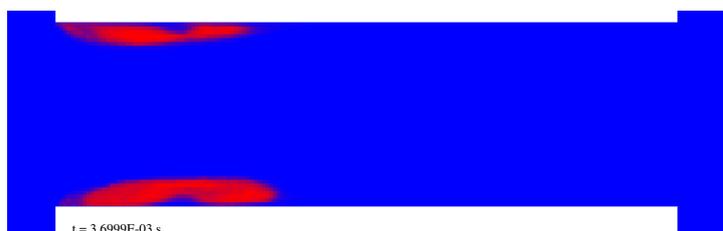
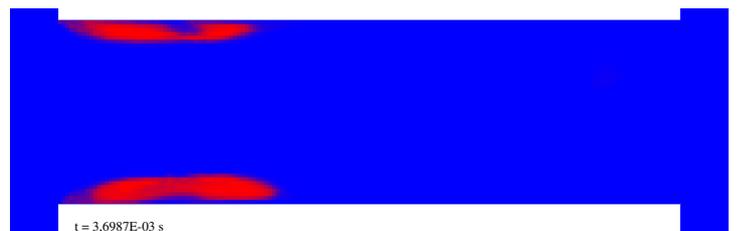
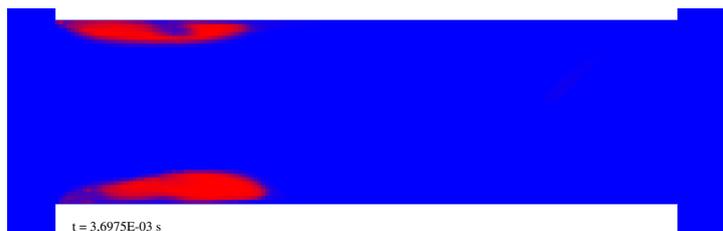
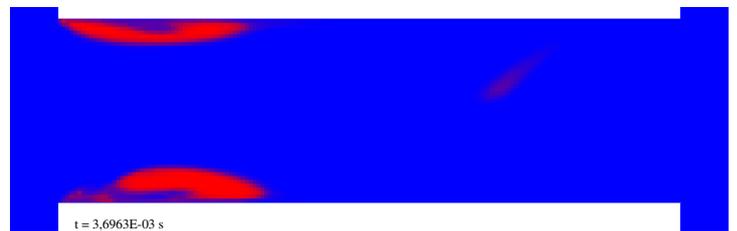
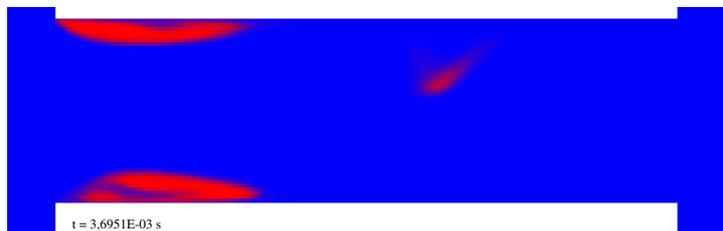
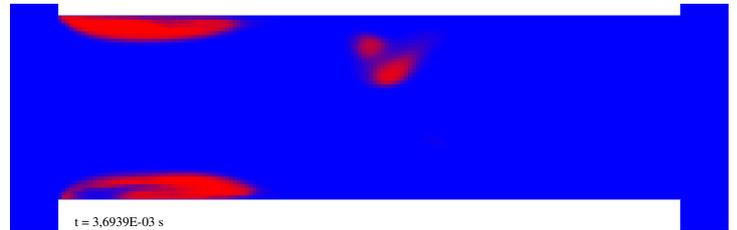
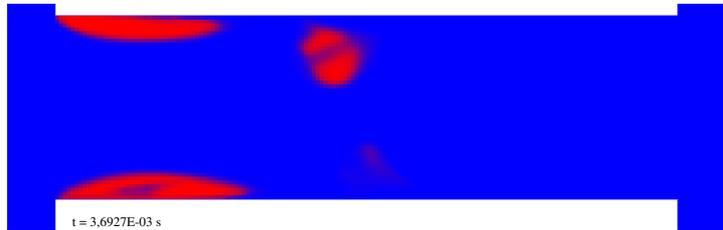
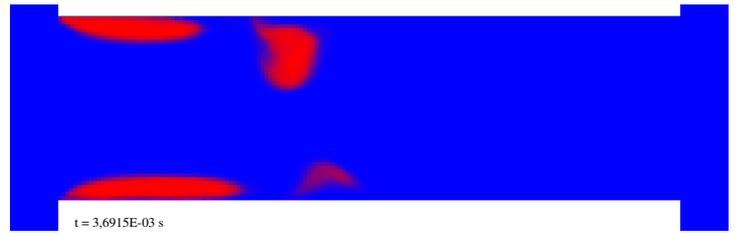
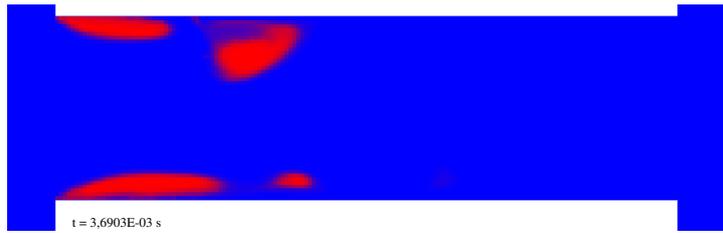
Stochastische Felder für eine RANS-Simulation mit der Variante 2F-SFM p zum in Abbildung 4.29 dargestellten Zeitpunkt.

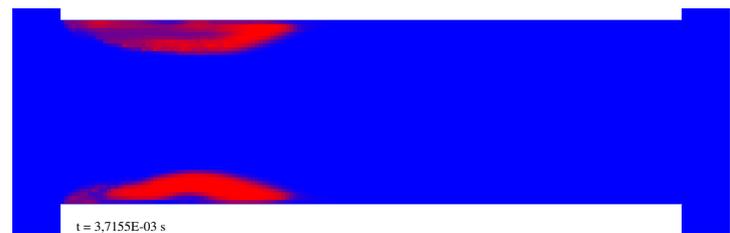
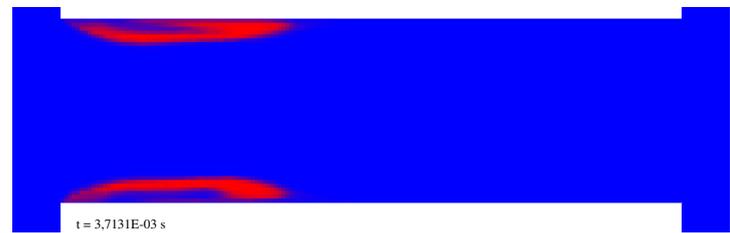
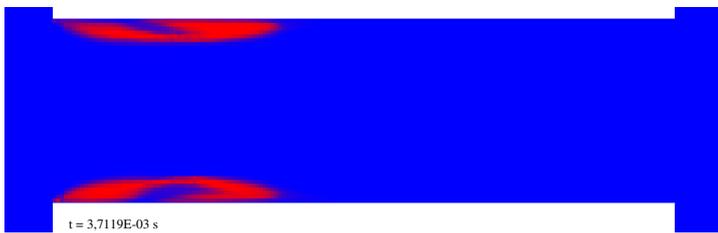
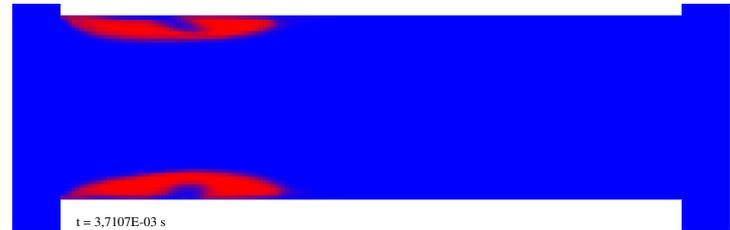
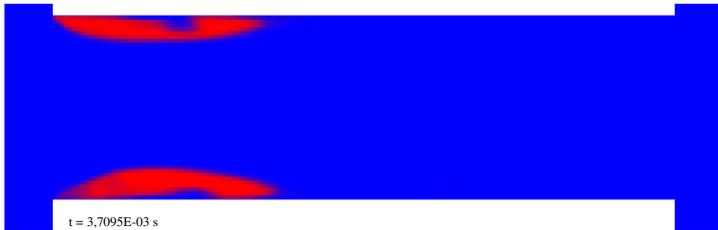
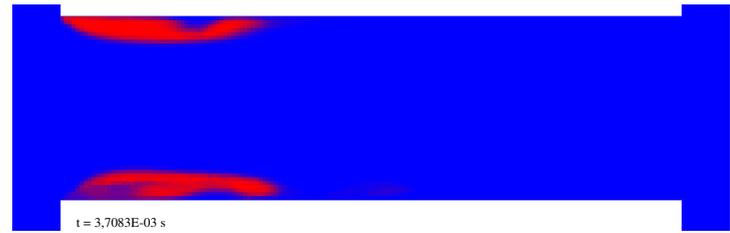
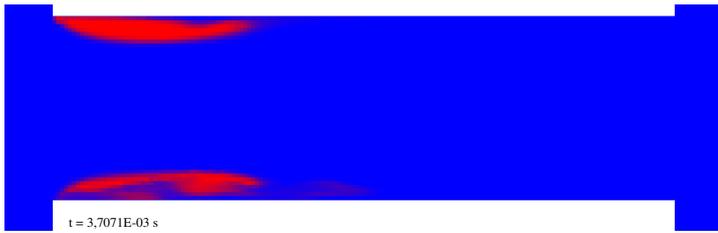


G.2.2 Volumenanteil der dispersen Phase zu verschiedenen Zeitpunkten

Volumenanteil der dispersen Phase für eine RANS-Simulation mit der Variante 2F-SFM p zu verschiedenen Zeitpunkten.

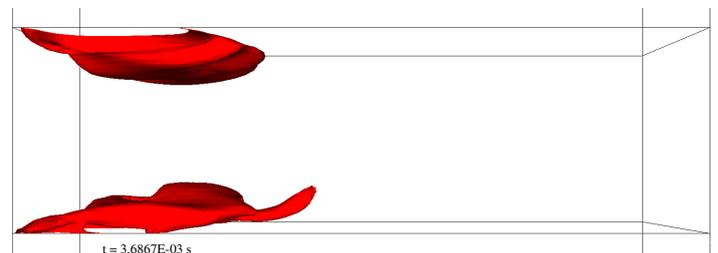
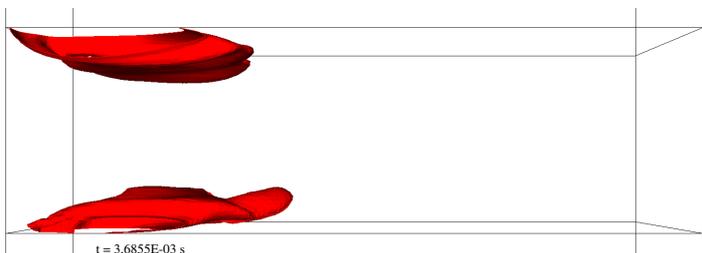
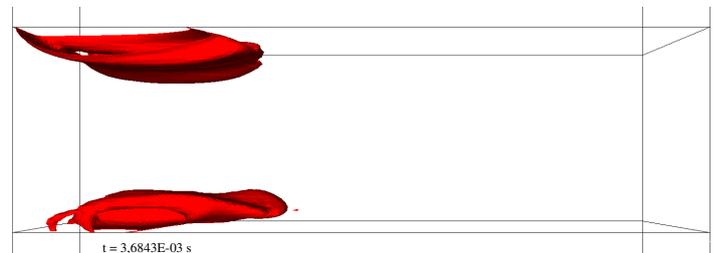
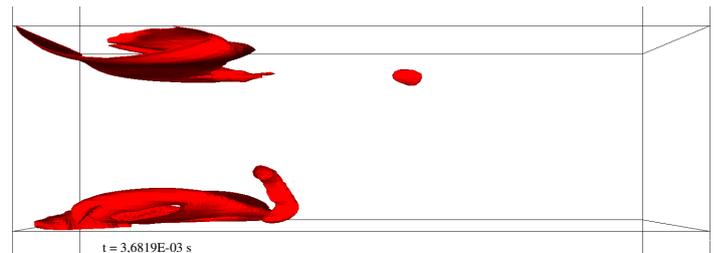
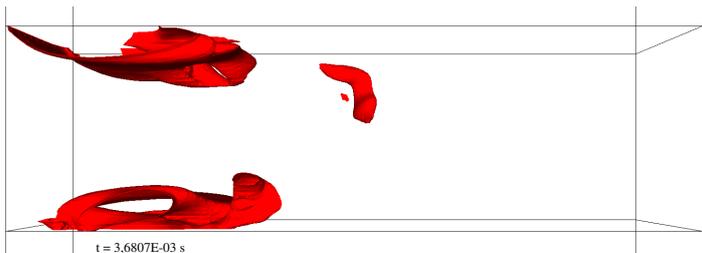
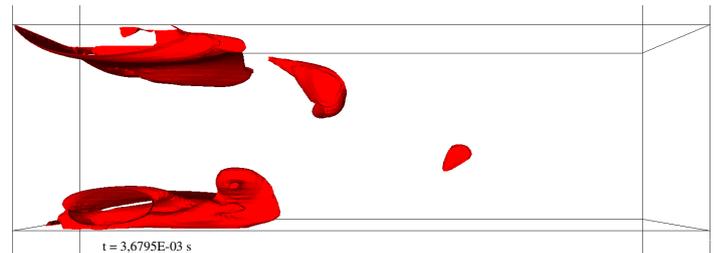
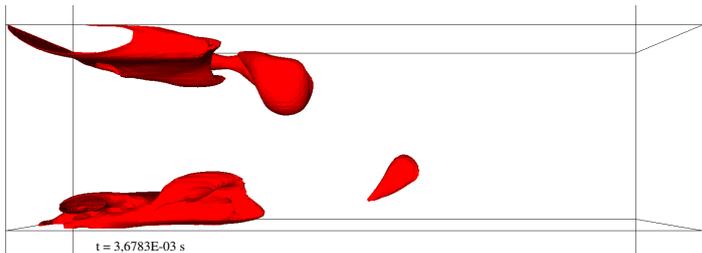
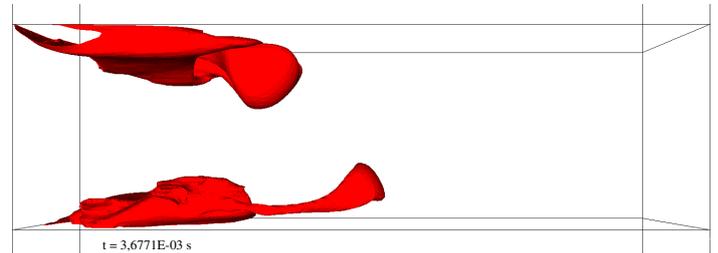
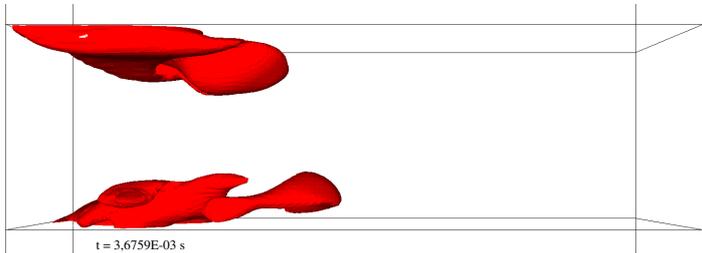


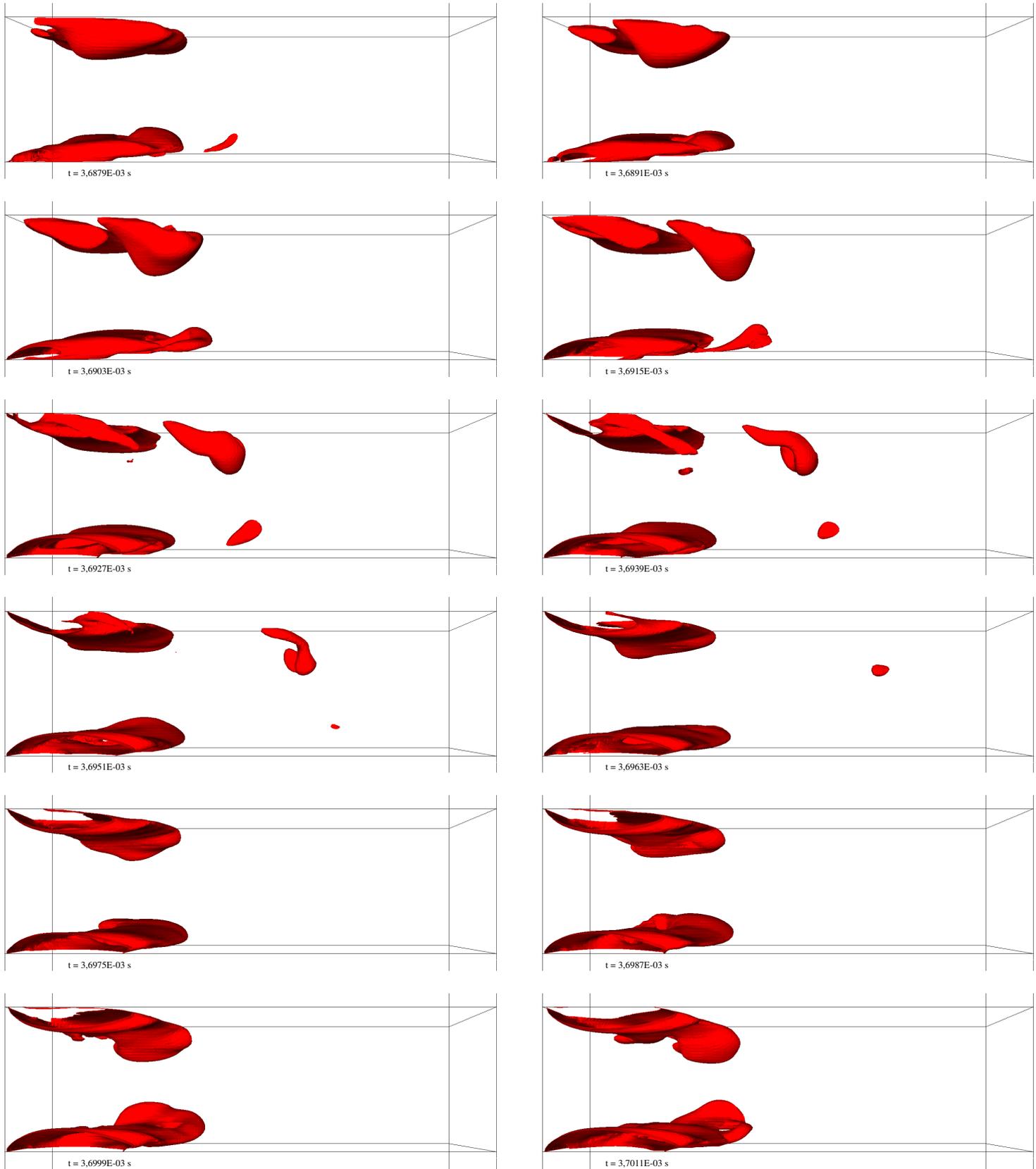


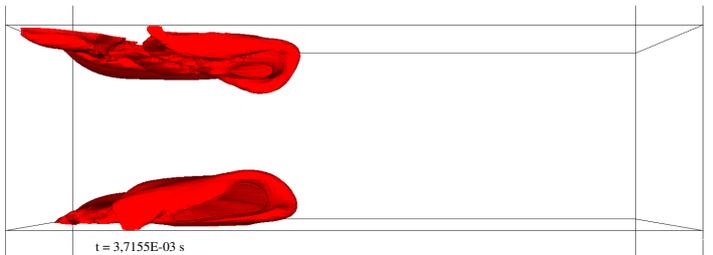
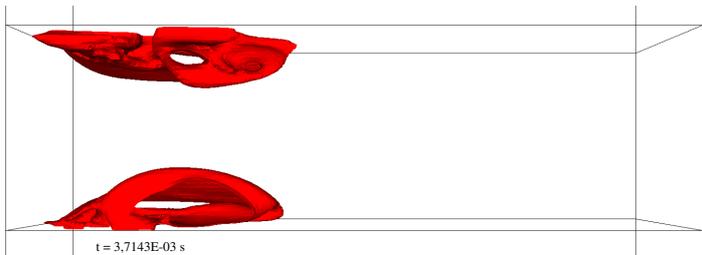
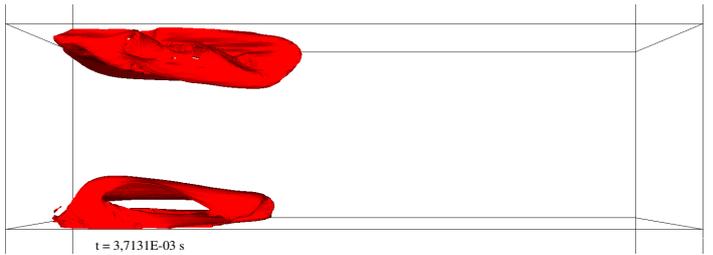
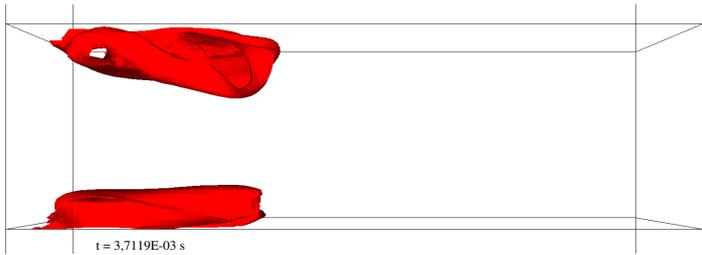
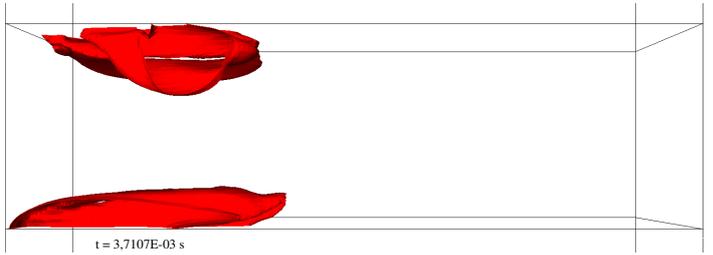
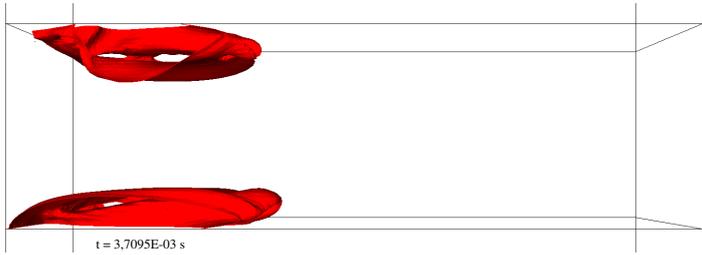
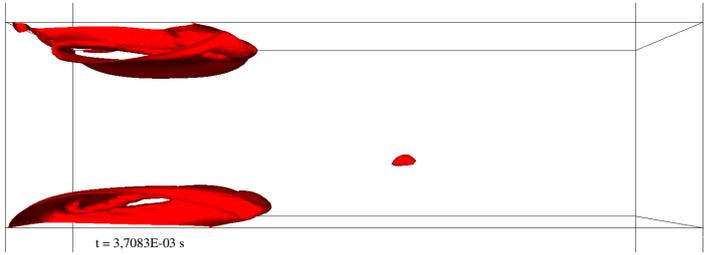
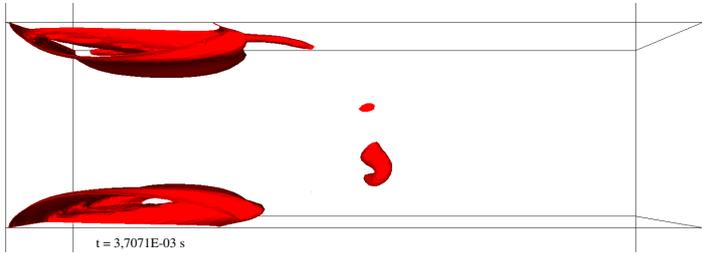
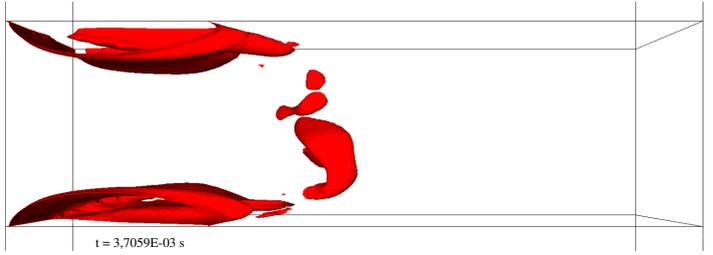
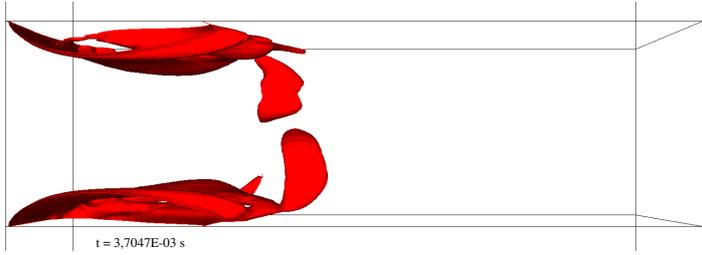
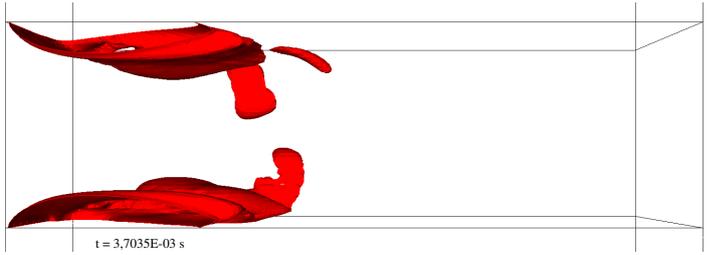
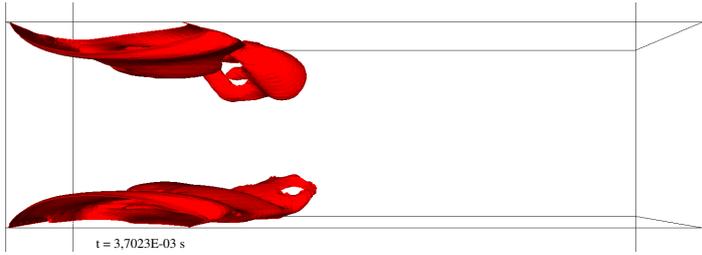


G.2.3 Iso-Fläche der dispersen Phase zu verschiedenen Zeitpunkten

Iso-Fläche $\alpha = 0,5$ der dispersen Phase für eine RANS-Simulation mit der Variante 2F-SFM p zu verschiedenen Zeitpunkten.







H Simulationseinstellungen

[S1]

AVL Fire™-Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
disperse Phase:		
Dichte	7	kg/m^3
dynamische Viskosität	$1,824E - 05$	$kg/(ms)$
kontinuierliche Phase:		
Dichte	830	kg/m^3
dynamische Viskosität	0,003	$kg/(ms)$
beide Phasen:		
Diffusionskoeffizient	0,0257	m^2/s
turbulente Schmidt Zahl	0,9	-
Eingang:		
Druck, alle Phasen	120000000	Pa
Temperatur, beide Phasen	293,15	K
Volumenanteil, disperse Phase	$1E - 06$	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	0,999999	-
turbulente kinetische Energie, beide Phasen	0,001	m^2/s^2
turbulente Dissipation, beide Phasen	0,195954	m^2/s^3
Ausgang:		
Druck, alle Phasen	2000000	Pa
Volumenanteil, disperse Phase	$1E-06$	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	0,999999	-
Anfangsbedingungen:		
Druck, alle Phasen	2000000	Pa
Volumenanteil, disperse Phase	$1E - 06$	-

Volumenanteil, kontinuierliche Phase	0,999999	-
turbulente kinetische Energie, beide Phasen	0,1	m^2/s^2
turbulente Dissipation, beide Phasen	51,9615	m^2/s^3
Geschwindigkeit, beide Phasen	0	m/s
sonstige Einstellungen:		
Turbulenzmodell	k-zeta-f	
Kompressibilität	inkompressibel	
Wandfunktion	Standard Wandfunktion	
Underrelaxationsfaktor Impuls	0,3	
Underrelaxationsfaktor Druck	0,1	
Underrelaxationsfaktor Volumenanteil/stoch. Felder	0,8	
Differenzenverfahren Impuls	MINMOD Relaxed 0,8	
Differenzenverfahren Kontinuität	zentrale Differenzen 1	
Differenzenverfahren Volumenanteil/stoch. Felder	Upwind	
Kavitationsmodell	Lineares Kavitationsmodell	
mittlere Keimanzahl	1E14	$1/m^3$
Egler-Faktor	0,3	-
Sättigungsdampfdruck	1000	Pa

Anmerkung: Das Modell und die Simulationseinstellungen des Zwei-Fluid-Modells wurden von AVL zur Verfügung gestellt.

[S2] wie [S1] mit folgenden weiteren Einstellungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
Variante der Stochastischen Feldmethode	2F-SFM N	
Anzahl stochastischer Felder	8	-
mittlere Blasenanzahl im Zellkonglomerat	7	-

[S3] wie [S1] mit folgenden weiteren Einstellungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
Variante der Stochastischen Feldmethode	2F-SFM p	
Anzahl stochastischer Felder	8	-

[S4]

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
disperse Phase:		
Dichte	7	kg/m^3
dynamische Viskosität	$1E - 05$	$kg/(ms)$
kontinuierliche Phase:		
Dichte	830	kg/m^3
dynamische Viskosität	0,00214	$kg/(ms)$
weitere Gasphase:		
Dichte	100	kg/m^3
dynamische Viskosität	$1,824E-05$	$kg/(ms)$
Eingang:		
Druck, alle Phasen	200000000	Pa
Temperatur, alle Phasen	293,15	K
Volumenanteil, disperse Phase	0	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	1	-
Volumenanteil, Luft	0	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,1	m^2/s^2
turbulente Dissipation, alle Phasen	5.19615	m^2/s^3
Ausgang:		
Druck, alle Phasen	10000000	Pa
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	1E-06	-
Volumenanteil, disperse Phase	1E-06	-

Volumenanteil, Luft	0,999998	
Anfangsbedingungen im Luftraum:		
Druck, alle Phasen	10000000	Pa
Volumenanteil, disperse Phase	0	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	0	-
Volumenanteil, Luft	1	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,1	m^2/s^2
turbulente Dissipation, alle Phasen	5,19615	m^2/s^3
Geschwindigkeit, alle Phasen	0	m/s
Anfangsbedingungen im übrigen Modell:		
Druck, alle Phasen	200000000	Pa
Volumenanteil, disperse Phase	0	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	1	-
Volumenanteil, Luft	0	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,1	m^2/s^2
turbulente Dissipation, alle Phasen	5,19615	m^2/s^3
Geschwindigkeit, alle Phasen	0	m/s
Blasendichte, kontinuierliche Phase	1,9E11	$1/m^3$
Oberflächendichte, kontinuierliche Phase	6	m^2/m^3
sonstige Einstellungen:		
Turbulenzmodell	k-zeta-f	
Kompressibilität	inkompressibel	
Impulsaustausch von Luft	homogeneous	
Wandfunktion	Hybrid Wall Treatment	
Underrelaxationsfaktor Impuls	0,4	
Underrelaxationsfaktor Druck	0,15	
Underrelaxationsfaktor Volumenanteil/stoch. Felder	0,8	
Differenzenverfahren Impuls	Upwind	
Differenzenverfahren Kontinuität	zentrale Differenzen 1	
Differenzenverfahren Volumenanteil/stoch. Felder	Upwind	

Kavitationsmodell	Lineares Kavitationsmodell	
mittlere Keimanzahl	Transportgleichung	
Egler-Faktor	1,2	-
Sättigungsdampfdruck	892	<i>Pa</i>

Anmerkung: Die Simulation entspricht einem Installationsbeispiel von AVL FireTM, vgl. [1].

[S5] wie [S4] mit folgenden weiteren Einstellungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
Variante der Stochastischen Feldmethode	2F-SFM N	
Anzahl stochastischer Felder	8	-
mittlere Blasenanzahl im Zellkonglomerat	7	-

[S6] wie [S4] mit folgenden weiteren Einstellungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190191)	
Größe	Wert	Einheit
Variante der Stochastischen Feldmethode	2F-SFM p	
Anzahl stochastischer Felder	8	-

[S7] wie [S3] mit Ausnahme der folgenden Änderungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00.229 (190237)	
---------------------------------	--------------------------------	--

[S8]

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190233)	
Größe	Wert	Einheit
disperse Phase:		
Dichte	0,31	<i>kg/m³</i>
Gas Konstante	48	<i>J/kgK</i>

spezifische Wärme	1007	J/kgK
Diffusionskoeffizient	0,0257	-
Referenztemperatur	313,15	K
turbulente Schmidt-Zahl	0,9	-
kontinuierliche Phase:		
Dichte	825,74	kg/m^3
Dichte	825,74	kg/m^3
Gas Konstante	287	J/kgK
spezifische Wärme	1007	J/kgK
Diffusionskoeffizient	0,0257	-
Referenztemperatur	293,15	K
turbulente Schmidt-Zahl	0,9	-
dynamische Viskosität	$2,8/1000 \cdot e^{(1,15E-3) \cdot p/1E5}$	$kg/(ms)$
Eingang:		
Druck, alle Phasen	300	bar
Temperatur, alle Phasen	313,15	K
Volumenanteil, disperse Phase	$1E-6$	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	0,999999	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,001	m^2/s^2
turbulente Dissipation, alle Phasen	0,025980808	m^2/s^3
Ausgang:		
Druck, alle Phasen	165	bar
Randbedingungen:		
Haftbedingung an den Wänden		
Anfangsbedingungen:		
Volumenanteil, disperse Phase	0	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	1	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,1	m^2/s^2
Druck, alle Phasen	120	bar
Temperatur, alle Phasen	313,15	K

turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,001	m^2/s^2
turbulente Längenskala, alle Phasen	0,0001	m
turbulente Dissipation, alle Phasen	0,0519615	m^2/s^3
Geschwindigkeit in Strömungsrichtung, alle Phasen	20	m/s
Anfangsbedingungen im Einlaufgebiet:		
Druck, alle Phasen	300	bar
Temperatur, alle Phasen	313,15	K
Volumenanteil, disperse Phase	0	-
Volumenanteil, kontinuierliche Phase	1	-
turbulente kinetische Energie, alle Phasen	0,001	m^2/s^2
turbulente Dissipation, alle Phasen	000519615	m^2/s^3
Geschwindigkeit in Strömungsrichtung, alle Phasen	20	m/s
sonstige Einstellungen:		
Turbulenzmodell	k-zeta-f	
Kompressibilität	Weakly Compressible	
Wandfunktion	Hybrid Wall Treatment	
Heat Transfer Wall Model	Standard Wall Function	
Underrelaxationsfaktor Impuls	0,4	
Underrelaxationsfaktor Druck	0,2	
Underrelaxationsfaktor turb. kin. Energie	0,2	
Underrelaxationsfaktor Dissipation	0,2	
Underrelaxationsfaktor Volumenanteil/stoch. Felder	0,8	
Differenzenverfahren Impuls	MINMOD Relaxed 0,9	
Differenzenverfahren Kontinuität	MINMOD Relaxed 1	
Differenzenverfahren Volumenanteil	MINMOD Relaxed 1	
Differenzenverfahren Skalar	Upwind	

Kavitationsmodell	Lineares Kavitationsmodell	
mittlere Keimanzahl	1E18	
Egler-Faktor	1,30945962668	-
Sättigungsdampfdruck	4500	<i>Pa</i>

[S9] wie [S8] mit folgenden weiteren Einstellungen

AVL Fire TM -Version	fire 2019.1.00. -3 (190233)	
Größe	Wert	Einheit
Variante der Stochastischen Feldmethode	2F-SFM p	
Anzahl stochastischer Felder	8	-

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Projektablauf mit und ohne Simulation (vgl. [133]).	2
1.2	Prinzipskizze des deterministischen Modells	2
1.3	Prinzipskizze des stochastischen Modells	2
1.4	Skizze des Energiespektrums einer turbulenten Strömung	3
1.5	Überblick der für diese Arbeit wichtigsten Verfahren	4
1.6	Grafische Veranschaulichung zur Erstellung einer Häufigkeit aus einer Messreihe	5
1.7	Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\theta)$, PDF und Mittelwert.	5
1.8	Kavitation in einem exemplarischen Phasendiagramm in Anlehnung an ([48], S. 292).	7
1.9	Modelle zur Berechnung von Zweiphasenströmungen im LES- oder RANS-Kontext.	8
1.10	Modelle zur Berechnung von Zweiphasenströmungen im LES oder RANS-Kontext mit und ohne Stochastische Feldmethode (vgl. Abbildung 1.9).	9
1.11	„Magisches Dreieck“ für die Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire TM	11
2.1	Übersicht der auf ein Partikel in einem Fluid wirkenden Kräfte nach ([144], S. 3-9).	14
2.2	Betrachtung eines Volumens der Größe einer Rechenzelle: Hypothetische Blasengrößenverteilung in der Realität und ihre Approximation im Zwei-Fluid-Modell, im Drift-Flux-Modell und im MUSIG-Modell.	16
2.3	Blasengrößenverteilung für das Beispiel in Abbildung 2.2.	25
2.4	grafische Darstellung des angepassten SIMPLE-Algorithmus in AVL Fire TM	26
2.5	Approximation der PDF durch $N = 10$ samples.	30
2.6	Fünf beispielhafte Verläufe des Wiener-Prozesses, approximiert mit dem Gaußschen Random Walk.	34
3.1	Grafische Veranschaulichung von Betrachtungsweisen zur Interpretation der Stochastischen Felder im Zwei-Fluid-Modell und Vergleich des Histogramms der Stochastischen Feldmethode mit dem einer hypothetischen Realität.	38
3.2	Methodenvergleich zur Berücksichtigung einer PDF.	40
3.3	Vorgehen bei der Herleitung der PDF-Transportgleichung des Volumenanteils. V und a kennzeichnen hierbei die Ereignisräume der Geschwindigkeit v und des Volumenanteils α	44
3.4	Dichtegewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit und der Dichte.	50
3.5	Dichtegewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit und der Dichte.	60
3.6	gewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit U und der Skalargröße Φ_1	61
3.7	gewichtete Mittelung an einer beispielhaften JPDF der Geschwindigkeit U und der Skalargröße Φ_2	61
3.8	Mögliche Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire TM : Fluktuationen im Quellterm der dispersen Phase werden durch stochastische Felder berücksichtigt.	64
3.9	200 Blasen werden zufällig auf 100 Teilvolumina verteilt: Die Blasenanzahlen in den Teilvolumina sind zufällig und folgen einer Poisson-Verteilung	65
3.10	Histogramm einer Poisson-Verteilung mit dem Mittelwert $\lambda_p = 0,1$	67
3.11	Blasendichteverteilung in 100 Rechenzellen (links) und Mittelung über jeweils 10 (Mitte) oder alle Repräsentanten (rechts).	69

3.12	Geschwindigkeitsfluktuationen innerhalb des Zeitschritts Δt und mittlere turbulente kinetische Energie.	73
4.1	Modell eines zweidimensionalen Injektors im geöffneten Zustand. Die Rotationsachse ist in rot dargestellt. Der in Abbildung 4.2 vergrößerte Bereich ist grün markiert. Die Ventalnadel und das Gehäuse sind schematisch skizziert.	78
4.2	2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Zwei-Fluid-Modells in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. Die grafische Auftragung erfolgte mit Enight 10.2.3(a). [S1]	78
4.3	2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Modells 2F-SFM N in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. Die grafische Auftragung erfolgte mit Enight 10.2.3(a). [S2]	79
4.4	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM N. [S2]	79
4.5	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM N. [S2]	80
4.6	2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung des Modells 2F-SFM p in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase α zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. Die grafische Auftragung erfolgte mit Enight 10.2.3(a). [S3]	81
4.7	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM p. [S3]	81
4.8	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets im Zwei-Fluid-Modell und in der Variante 2F-SFM p. [S3]	81
4.9	Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach dem Zwei-Fluid-Modell in AVL Fire TM bei Kurbelwellenwinkel 210° . [S4]	82
4.10	Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach der Variante 2F-SFM N in AVL Fire TM bei Kurbelwellenwinkel 210° . [S5]	82
4.11	Schnitt eines 3D Injektors: Die Ventalnadel und das Gehäuse sind geschnitten skizziert. Die Ventalnadel öffnet und schließt den Injektor im Laufe der Simulation. Links: geschlossenes Ventil. Rechts: geöffnetes Ventil. Der in Abbildung 4.9 vergrößerte Bereich ist in der rechten Darstellung grün markiert.	83
4.12	Schnitt eines 3D Injektors: Volumenanteil der dispersen Phase nach der Variante 2F-SFM p in AVL Fire TM bei Kurbelwellenwinkel 210° . [S6]	83
4.13	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM N bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil α des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S2]	85
4.14	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM N bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil α des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S2]	85
4.15	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle im Zentrum des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM p bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S3]	86

4.16	2D Injektor: Vergleich der zeitlichen Entwicklung des Volumenanteils innerhalb einer Rechenzelle am Rand des Kavitationsgebiets in der Variante 2F-SFM p bei Berechnung der Strömungswiderstandskraft mit Mittelwerten und mit einer PDF. Der Volumenanteil des Zwei-Fluid-Modells ist ebenfalls dargestellt. [S3]	86
4.17	Approximation der PDF am Beispiel des 2D Injektors. [S7]	87
4.18	Skizze der experimentellen Ergebnisse in [87], [33] mit den Drücken 300 <i>bar</i> am Eingang und 165 <i>bar</i> am Ausgang.	88
4.19	Mittelung der instantanen LES-Ergebnisse in Anhang G.1.1.	89
4.20	Mittelung der instantanen LES-Ergebnisse in Anhang G.1.1 bei Anwendung einer logarithmischen Skalierung.	89
4.21	Extremwerte der instantanen Bilder in Anhang G.1.1.	90
4.22	Mittelwert der in Anhang G.1.2.1 dargestellten Iso-Flächen.	91
4.23	Mittelwert der ersten acht Iso-Flächen in Anhang G.1.2.1.	91
4.24	Rechengitter zur numerischen Berechnung des in Abbildung 4.18 skizzierten Experiments.	92
4.25	RANS-Simulation des Experiments in Abbildung 4.18 mit dem herkömmlichen Zwei-Fluid-Modell (Momentaufnahme). [S8]	93
4.26	exemplarische Behandlung des Drucks in einer Rechenzelle des betrachteten Beispiels in Abbildung 4.18 im Rahmen einer LES- und einer RANS-Berechnung. Die Werte in den stochastischen Feldern sind ebenfalls dargestellt. Für den letzten Zeitschritt ist eine Verteilung der stochastischen Felder skizziert.	93
4.27	Verteilung von 2000 entsprechend Gleichung (3.179) zufällig ermittelten Geschwindigkeitsfluktuationen.	94
4.28	Verteilung des instantanen Quellterms entsprechend der Geschwindigkeitsfluktuationen in Abbildung 4.27. Der Mittelwert des instantanen Quellterms S_{inst} und der Quellterm bei Verwendung der mittleren kinetischen Energie k ist ebenfalls aufgetragen.	94
4.29	RANS-Simulation des Experiments in Abbildung 4.18 mit der Variante 2F-SFM p (Momentaufnahme). [S9]	95
4.30	Zusammenhang der Volumenanteile der stochastischen Felder $\alpha^{(1)}(t)$, $\alpha^{(2)}(t)$, ..., des mittleren Volumenanteils $\bar{\alpha}(t)$ zur Zeit t und des über alle Zeitpunkte gemittelten Volumenanteils $\bar{\alpha}$ einer RANS-Simulation.	95
4.31	Mittelwert der Volumenanteile der RANS-Berechnung mit der Variante 2F-SFM p in Anhang G.2.2. [S9]	96
4.32	Mittelwert der Iso-Flächen der RANS-Simulation mit der Variante 2F-SFM p in Anhang G.2.3. [S9]	97
A.1	Häufigkeiten der Messreihe aus Abbildung 1.6	103
D.1	Mögliche Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire TM : Eine fluktuierende Kraft aufgrund der Turbulenz wird in den Momentengleichungen berücksichtigt (vgl. Abbildung 2.4).	111
D.2	Mögliche, vereinfachte Implementierung der Stochastischen Feldmethode in AVL Fire TM : Eine fluktuierende Kraft aufgrund der Turbulenz wird in den Momentengleichungen berücksichtigt.	112
E.1	2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM N in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. [S2]	113
E.2	2D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM p in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ zum Zeitpunkt $t = 2e^{-4}s$. [S3]	113

F.1	3D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM N in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ beim Kurbelwellenwinkel 210°. [S5]	115
F.2	3D Injektor: Simulation der kavitierenden Strömung unter Verwendung der Variante 2F-SFM p in AVL Fire TM . Dargestellt ist der Volumenanteil der dispersen Phase in vier stochastischen Feldern $\alpha^{(n)}$ beim Kurbelwellenwinkel 210°. [S6]	115
G.1	Kennzeichnung des vergrößerten Bereichs des Kavitationsgebiets durch eine grüne Umrahmung. . . .	124

Die Abbildungen innerhalb dieser Arbeit wurden mit Hilfe der Programme paint.net v4.0.6, Microsoft Office Professional Plus 2013, Blender v2.79, EnSight 10.2 und MATLAB R2014b erzeugt. Die Arbeit wurde mit Hilfe der Software TeXnicCenter geschrieben. Zur Literaturverwaltung wurde die Software JabRef genutzt.

Literaturverzeichnis

- [1] AVL Fire™, Version 2014: Application Example: Injection Nozzle: Diesel Injector (910)
- [2] AVL Fire™, Version 2014 Eulerian Multiphase Manual
- [3] de.wikipedia.org/wiki/Wiener-Prozess, abgerufen am 23.07.2018
- [4] <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/pixlog.htm>, abgerufen am 03.04.2019
- [5] ADENIJI-FASHOLA, A. A.: Confined Turbulent Fluid-Particle Flow Modeling Using Multiple-Realization Particle Trajectory Schemes. In: *NASA Conference Publication 3006* (1988)
- [6] AUBINET, Marc ; VESALA, Timo ; PAPAIE, Dario ; AUBINET, Marc (Hrsg.) ; VESALA, Timo (Hrsg.) ; PAPAIE, Dario (Hrsg.): *Eddy Covariance: A Practical Guide to Measurement and Data Analysis*. Springer, Dordrecht, 2012
- [7] BACHAR, Mostafa (Hrsg.) ; BATZEL, Jerry (Hrsg.) ; DITLEVSEN, Susanne (Hrsg.): *Stochastic Biomathematical Models with Application to Neuronal Modeling*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013
- [8] BALACHANDAR, S. ; EATON, John K.: Turbulent Disperse Multiphase Flow. In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* (2010)
- [9] BARNDORFF-NIELSEN, Ole E. ; SCHMIEGEL, Jürgen: Ambit Processes; with Application to Turbulence and Tumour Growth. In: *Stochastic Analysis and Applications: The Abel Symposium*, 2005
- [10] BATCHELOR, G. K.: Diffusion in a Field of Homogeneous Turbulence. In: *Australian Journal of Scientific Research, Series A: Physical Sciences, vol. 2, p.437* (1949)
- [11] BERTODANO, Martin A. L.: Two fluid model for two-phase turbulent jets. In: *Nuclear Engineering and Design* 179 (1998)
- [12] BOTHE, Melanie ; CHRISTLIEB, Marc-Andreas ; HOFFMANN, Marko ; TEDJASUKMANA, Osmond ; MICHAUX, Frank ; ROLLBUSCH, Philipp ; BECKER, Marc ; SCHLÜTER, Michael: Bubble Size and Bubble Velocity Distribution in Bubble Columns under Industrial Conditions. In: *The Canadian Journal of Chemical Engineering* (2017)
- [13] BRAUN, Norman (Hrsg.) ; SAAM, Nicole J. (Hrsg.): *Handbuch Modellbildung und Simulation in den Sozialwissenschaften*. Springer VS, Wiesbaden, 2015
- [14] BRESSLOFF, Paul C.: *Stochastic Processes in Cell Biology*. Springer, Cham, Switzerland, 2014
- [15] BURNS, Alan D. ; FRANK, Thomas ; HAMILL, Ian ; SHI, Jun-Mei: The Favre Averaged Drag Model for Turbulent Dispersion in Eulerian Multi-Phase Flows. In: *5th International Conference on Multiphase Flow* (2004)
- [16] CERBE, Günter ; WILHELMS, Gernot: *Technische Thermodynamik: Theoretische Grundlagen und praktische Anwendungen*. Carl Hanser Verlag München, München, 2013
- [17] CHEN, Boxiong ; OEVERMANN, Michael: LES Investigation of ECN Spray G2 with An Eulerian Stochastic Field Cavitation Model. In: *SAE International* (2018)

- [18] CLASS, Andreas G.: *private Kommunikation*. AREVA Nuclear Professional School, Karlsruher Institut für Technologie, 2018
- [19] COMBEST, Daniel P. ; RAMACHANDRAN, Palghat A. ; DUDUKOVIC, Milorad P.: On the Gradient Diffusion Hypothesis and Passive Scalar Transport in Turbulent Flows. In: *Industrial & Engineering Chemistry Research* (2011)
- [20] CROWE, Clayton T.: *Multiphase Flow Handbook*. Taylor & Francis, Boca Raton, Fla., 2006
- [21] DARWISH, Marwan ; MOUKALLED, Fadl: Comparison of Supersonic Droplet Mixing and Evaporation Between The Multiphase, MUSIG and H-MUSIG Models. In: *6th International Conference on CFD in Oil & Gas, Metallurgical and Process Industries, SINTEF/NTNU, Trondheim NORWAY*, 2008
- [22] DEHBI, A.: A CFD model for particle dispersion in turbulent boundary layer flows. In: *Nuclear Engineering and Design* (2008)
- [23] DELARUE, B. J. ; POPE, S.B.: Application of PDF methods to compressible turbulent flows. In: *Physics of Fluids* 9 (1997)
- [24] DREW, Donald A.: A turbulent dispersion model for particles or bubbles. In: *Journal of Engineering Mathematics* 41 (2001)
- [25] DREW, Donald A. ; PASSMAN, Stephen L. ; MARSDEN, J. E. (Hrsg.) ; SIROVICH, L. (Hrsg.): *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer: Applied Mathematical Sciences 135, 1999
- [26] DUMOND, J. ; MAGAGNATO, F. ; CLASS, A.: Stochastic-field cavitation model. In: *Physics of Fluids* (2013)
- [27] DUMOND, Julien Xavier P.: *Fluidic diode for critical two-phase flows*, Forschungszentrum Karlsruhe in der Helmholtz-Gemeinschaft, Diss., 2012
- [28] DURST, F. ; MILOJEVIC, D. ; SCHÖNUNG, B.: Eulerian and Lagrangian predictions of particulate two-phase flows: a numerical study. In: *Applied Mathematical Modelling* (1984)
- [29] DVOŘÁK, V.: Ueber eine neue einfache Art der Schlierenbeobachtung. In: *Annalen der Physik* 3 (1880), S. 502–511
- [30] EDELBAUER, Dr. W.: *private Kommunikation*. AVL List GmbH, 2016
- [31] EDELBAUER, Dr. W.: *private Kommunikation*. AVL List GmbH, 2017
- [32] EDELBAUER, Dr. W.: *private Kommunikation*. AVL List GmbH, 2018
- [33] EDELBAUER, Wilfried ; STRUCL, Jure ; MOROZOV, Alexander: Large Eddy Simulation of Cavitating Throttle Flow. In: *Gourbesville P., Cunge J., Caignaert G. (eds) Advances in Hydroinformatics. Springer Water. Springer, Singapore*, 2014
- [34] EINSTEIN, Albert: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: *Annalen der Physik* 322 (1905)
- [35] EINSTEIN, Albert: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In: *Annalen der Physik, vierte Folge. Band 49*. (1916)
- [36] ELGHOBASHI, S. E. ; ABOU-ARAB, T. W.: A two-equation turbulence model for two-phase flows. In: *The Physics of Fluids* 26 (1983)
- [37] FAVRE, Alexandre J. A.: Studies in Turbulence: Formulation of the Statistical Equations of Turbulent Flows with Variable Density. In: *Gatski T.B., Speziale C.G., Sarkar S. (eds) Studies in Turbulence, Springer* (New York, NY, 1992)

- [38] FEUERRIEGEL, Uwe: *Verfahrenstechnik mit EXCEL*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2016
- [39] FLIESSBACH, Torsten: *Statistische Physik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik IV*. Springer Spektrum, Mannheim, 2018
- [40] FOKEN, Thomas: *Angewandte Meteorologie*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2016
- [41] GARDINER, C. W.: *Handbook of Stochastic Methods*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004
- [42] GARMORY, A. ; BRITTER, R. E. ; MASTORAKOS, E.: Simulation of the evolution of aircraft exhaust plumes including detailed chemistry and segregation. In: *Journal of Geophysical Research* (2007)
- [43] GARMORY, A. ; RICHARDSON, E. S. ; MASTORAKOS, E.: Micromixing effects in a reacting plume by the Stochastic Fields method. In: *Atmospheric Environment* 40 (2006)
- [44] GERLINGER, Peter: *Numerische Verbrennungssimulation: Effiziente numerische Simulation turbulenter Verbrennung*. Springer, 2005
- [45] GOSMAN, A. D. ; IOANNIDES, E.: Aspects of Computer Simulation of Liquid-Fueled Combustors. In: *AIAA Pap.; (United States)* (1981)
- [46] GOSMAN, A. D. ; LEKAKOU, C. ; POLITIS, S. ; ISSA, R. I. ; LOONEY, M. K.: Multidimensional Modeling of Turbulent Two-Phase Flows in Stirred Vessels. In: *AIChE Journal* (1992)
- [47] GREIF, David ; SAMPL, Peter ; EDELBAUER, Wilfried: Cavitating Injector Flow Simulations Considering Longitudinal and Lateral Needle Displacement. In: *International Journal of Automotive Engineering* 5 (2014)
- [48] GÜLICH, Johann F.: *Kreiselpumpen, Handbuch für Entwicklung, Anlagenplanung und Betrieb*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg 2013
- [49] HANDL, Andreas ; KUHLENKASPER, Torben ; RUHMANN, Iris (Hrsg.): *Einführung in die Statistik*. Springer Spektrum, Berlin, 2018
- [50] HASSLER, Uwe ; DETTE, Holger (Hrsg.) ; HÄRDLE, Wolfgang (Hrsg.): *Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung: Eine Einführung mit Anwendungen aus Finanzierung und Ökonomie*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007
- [51] HAWORTH, D. C.: Progress in probability density function methods for turbulent reacting flows. In: *Progress in Energy and Combustion Science* 36 (2010)
- [52] HERWIG, Heinz: *Strömungsmechanik A-Z*. Vieweg, Wiesbaden, 2004
- [53] HINZE, J. O. ; ROBERT M. DRAKE, Jr. (Hrsg.) ; KLINE, Stephen J. (Hrsg.): *Turbulence: An Introduction to Its Mechanism and Theory*. McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1959
- [54] HINZE, Thomas ; STURM, Monika ; HARTL, Rainer (Hrsg.) ; ROTH, Margit (Hrsg.): *Rechnen mit DNA: Eine Einführung in Theorie und Praxis*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München 2004
- [55] ISHII, Mamoru ; HIBIKI, Takashi: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. Springer, New York, NY, 2006
- [56] ISHII, Mamoru ; SUN, Xiaodong ; KIM, Seungjin: Modeling strategy of the source and sink terms in the two-group interfacial area transport equation. In: *Annals of Nuclear Energy* 30 (2003)
- [57] JAKOBY, Walter: *Projektmanagement für Ingenieure*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015
- [58] JONES, W. P. ; MARQUIS, A. J. ; PRASAD, V. N.: LES of a turbulent premixed swirl burner using the Eulerian stochastic field method. In: *Combustion and Flame* 159 (2012)

- [59] JONES, W. P. ; MARQUIS, A. J. ; WANG, F.: Large eddy simulation of a premixed propane turbulent bluff body flame using the Eulerian stochastic field method. In: *Fuel* (2015)
- [60] JONES, W. P. ; NAVARRO-MARTINEZ, S.: Large eddy simulation of autoignition with a subgrid probability density function method. In: *Combustion and Flame* 150 (2007)
- [61] JONES, W. P. ; PRASAD, V. N.: Large Eddy Simulation of the Sandia Flame Series (D-F) using the Eulerian stochastic field method. In: *Combustion and Flame* 157 (2010)
- [62] JOSEPH, D. D. ; LUNDGREN, T. S. ; JACKSON, R. ; SAVILLE, D. A.: Ensemble Averaged And Mixture Theory Equations For Incompressible Fluid-Particle Suspensions. In: *Int. J. Multiphase Flow* (1990)
- [63] KARIMIRAD, Madjid ; MEISSONNIER, Quentin ; GAO, Zhen ; MOAN, Togeir: Hydroelastic code-to-code comparison for a tension leg spar-type floating wind turbine. In: *Marine Structures* 24 (2011)
- [64] KESEL, Antonia B. ; JUNGE, Monika M. ; NACHTIGALL, Wener: *Einführung in die angewandte Statistik für Biowissenschaftler*. Springer Basel AG, Basel, 1999
- [65] KIJIMA, Masaaki: *Stochastic Processes with Application to Finance*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2003
- [66] KLEPPMANN, Wilhelm ; MATYAS, Kurt (Hrsg.): *Versuchsplanung: Produkte und Prozesse optimieren*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, München, Wien, 2016
- [67] KLIMENKO, A. Y. ; BILGER, R. W.: Conditional moment closure for turbulent combustion. In: *Progress in Energy and Combustion Science* 25 (1999)
- [68] KLYATSKIN, V. I.: *Stochastic Equations Through the eye of the physicist*. Elsevier, Amsterdam, 2005
- [69] KRANAT, Jayne ; GILBEY, Julian (Hrsg.): *Probability & Statistics 2 Coursebook*. Cambridge International AS & A Level Mathematics, Cambridge, 2018
- [70] KREPPER, Eckhard ; LUCAS, Dirk ; FRANK, Thomas ; PRASSER, Horst-Michael ; ZWART, Phil J.: The inhomogeneous MUSIG model for the simulation of polydisperse flows. In: *Nuclear Engineering and Design* 238 (2008)
- [71] KUO, Kenneth K. ; ACHARYA, Ragini: *Fundamental of Turbulent and Multiphase Combustion*. Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2012
- [72] KUSTER, Jürg ; HUBER, Eugen ; LIPPMANN, Robert ; SCHMID, Alphons ; SCHNEIDER, Emil ; WITSCHI, Urs ; WÜST, Roger: *Handbuch Projektmanagement*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011
- [73] LAUNDER, B. E. ; SPALDING, D. B.: *Lectures in mathematical models of turbulence*. Acad. Press, New York, 1972
- [74] LIFANTE, C. ; FRANK, T. ; BURNS, A.D. ; LUCAS, D. ; KREPPER, E.: Prediction of Polydisperse Steam Bubble Condensation in Sub-Cooled Water using the Inhomogeneous MUSIG Model. In: *Computational Fluid Dynamics (CFD) for Nuclear Reactor Safety Applications*, 2010
- [75] LYONS, Louis: *Statistics for Nuclear and Particle Physicists*. Cambridge University Press, New York, 1986
- [76] MANNING, Christopher D. ; SCHÜTZE, Hinrich: *Foundations of Statistical Natural Language Processing*. The MIT Press, Massachusetts, 2003
- [77] MERKER, Günter P. ; SCHWARZ, Christian (Hrsg.): *Grundlagen Verbrennungsmotoren: Simulation der Gemischbildung, Verbrennung, Schadstoffbildung und Aufladung*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009
- [78] MERRIAM, Daniel F. (Hrsg.): *Random processes in geology*. Springer-Verlag, New York, 1976

- [79] MEYER, Daniel W. ; JENNY, Patrick ; TCHELEPI, Hamdi A.: A joint velocity-concentration PDF method for tracer flow in heterogeneous porous media. In: *Water Resources Research* 46 (2010)
- [80] MILIOLI, Christian C. ; MILIOLI, Fernando E.: On the accuracy of two-fluid model predictions for a particular gas-solid riser flow. In: *Applied Mathematical Modelling* (2010)
- [81] MINIER, Jean-Pierre (Hrsg.) ; POZORSKI, Jacek (Hrsg.): *Particle in Wall-Bounded Turbulent Flows: Deposition, Re-Suspension and Agglomeration*. Springer, Switzerland, 2017
- [82] MITTAG, H.-J. ; RINNE, H.: *Statistical Methods of Quality Assurance*. Chapman & Hall, Hagen, 1984
- [83] MODE, Charles J. ; SLEEMAN, Candace K.: *Stochastic Processes in Genetics and Evolution*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA, 2012
- [84] MOHAMED, M. ; LARUE, J.: The decay power law in grid-generated turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* (1990)
- [85] MOHR, Richard: *Statistik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Grundlagen und Anwendung statistischer Verfahren*. expert Verlag, TAE, Kontakt & Studium, Renningen, 2008
- [86] MOREL, Christophe: *Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows*. Springer, Cham, Switzerland, 2015
- [87] MOROZOV, Alexander ; IBEN, Uwe: Experimental Analysis and Simulation of Cavitating Throttle Flow. In: *6th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics*, 2008
- [88] NAHRSTEDT, Harald: *Die Monte-Carlo-Methode: Beispiele unter Excel VBA*. Springer Vieweg, Wiesbaden 2015
- [89] NAVARRO-MARTINEZ, S.: Large Eddy Simulation of spray atomization with a probability density function method. In: *International Journal of Multiphase Flow* (2014)
- [90] NODA, S. ; JORITANI, Y. ; YAMAMURO, K.: Evaluation of a Scalar Probability Density Function Approach for Turbulent Jet Nonpremixed Flames. In: *The 5th Asian Computational Fluid Dynamics Conference* (2003)
- [91] OERTEL, Herbert jr.: *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre: Grundlagen und Phänomene*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2017
- [92] OERTEL, Herbert jr. ; BÖHLE, Martin ; REVIOL, Thomas: *Strömungsmechanik, Grundlagen - Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011
- [93] OERTEL, Herbert jr. ; BÖHLE, Martin ; REVIOL, Thomas: *Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 7. Auflage*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015
- [94] OERTEL, Herbert jr. ; LAURIEN, Eckart: *Numerische Strömungsmechanik*. Vieweg, Wiesbaden, 2018
- [95] ORTLIEB, Claus P. ; DRESKY, Caroline v. ; GASSER, Ingenuin ; GÜNZEL, Silke: *Mathematische Modellierung: Eine Einführung in zwölf Fallstudien*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013
- [96] PANDA, J. ; SEASHOLTZ, R. G.: Experimental Investigation of Reynolds and Favre Averaging in High-Speed Jets. In: *AIAA Journal* (2006)
- [97] PAPULA, Lothar: *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg, Wiesbaden, 2006
- [98] PASSALACQUA, A. ; FOX, R. O.: Multiphase CFD For Gas-Particle Flows: Beyond The Two-Fluid Model. In: *Seventh International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries, CSIRO, Melbourne, Australia* (2009)

- [99] PATANKAR, N. A. ; JOSEPH, D. D.: Modeling and numerical simulation of particulate flows by the Eulerian-Lagrangian approach. In: *International Journal of Multiphase Flow* 27 (2001)
- [100] PETERS, Norbert ; DAVIS, S. (Hrsg.) ; FREUND, L. B. (Hrsg.) ; LEIBOVICH, S. (Hrsg.) ; TVEERGAARD, V. (Hrsg.): *Turbulent Combustion*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [101] POPE, S. B.: A Monte Carlo Method for the PDF Equations of Turbulent Reactive Flow. In: *Combustion Science and Technology* (1981)
- [102] POPE, S. B.: Lagrangian PDF Methods for Turbulent Flows. In: *Annu. Rev. Fluid Mech.* (1994)
- [103] POPE, S.B.: The Probability Approach to the Modelling of Turbulent Reacting Flows. In: *Combustion and Flame* 27 (1976)
- [104] POPE, S.B.: PDF Methods for Turbulent Reactive Flows. In: *Prog. Energy Combust. Sci.* 14 (1985), S. 119–192
- [105] POPE, Stephen B.: Simple models of turbulent flows. In: *Physics of Fluids* 23 (2011)
- [106] POPE, Stephen B.: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [107] RANFT, Michael ; JORDAN, Thomas ; CLASS, Andreas: High Pressure Alkaline Electrolysis. In: *9th International Symposium Hydrogen & Energy*, 2015
- [108] RAQUET, Martin ; CLASS, Andreas: AREVA Nuclear Professional School, Stochastic Field Method. In: SCHULENBERG, Thomas (Hrsg.): *Annual Report 2015 of the Institute for Nuclear and Energy Technologies, KIT Scientific Publishing*, KIT Scientific Reports 7720, Karlsruhe, 2016
- [109] RAQUET, Martin ; CLASS, Andreas ; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to Cavitating Flows in an Injection Nozzle. In: *Proceedings of the 10th Symposium on Cavitation (CAV2018)*, ASME, edited by Joseph Katz, Baltimore, 2018
- [110] RAQUET, Martin ; CLASS, Andreas ; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to two phase flow. In: KÖNKE, C. (Hrsg.) ; TRUNK, C. (Hrsg.): *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 17, Issue 1, Special Issue: 88th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), Weimar 2017*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2017
- [111] RAQUET, Martin ; CLASS, Andreas G. ; EDELBAUER, Wilfried: Poster: Stochastic Field Method: A Monte Carlo methodology to address vapor distribution in cavitating flows. In: *IICR 5th Cavitation Workshop*, Chania, Crete, 2017
- [112] RAQUET, Martin R. ; CLASS, Andreas G. ; EDELBAUER, Wilfried: Application of the Stochastic Field Method to Multi-Fluid Flow. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 18, Issue 1, Special Issue: 89th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), München 2018*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2018
- [113] REEKS, M. W.: On a kinetic equation for the transport of pparticle in turbulent flows. In: *Physics of Fluids A* 3 (1991)
- [114] REEKS, M. W.: On the continuum equations for dispersed particle in nonuniform flows. In: *Physics of Fluids A* 4 (1992)
- [115] REES, D. G.: *Foundations of Statistics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001
- [116] RICHARD, Hans A. ; SANDER, Manuela ; ZIPSNER, Thomas (Hrsg.) ; ZANDER, Imke (Hrsg.): *Technische Mechanik. Dynamik*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2011

- [117] RICHTER, Matthias ; SANDTEN, Lektorat: U. (Hrsg.) ; HOFFMANN, Kerstin (Hrsg.): *Grundwissen Mathematik für Ingenieure*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009
- [118] RISKEN, Hannes ; HAKEN, Hermann (Hrsg.): *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984
- [119] SABEL'NIKOV, Vladimir ; SOULARD, Olivier: Rapidly decorrelating velocity-field model as a tool for solving one-point Fokker-Planck equations for probability density functions of turbulent reactive scalars. In: *Physical Review E* 72 (2005)
- [120] SACHS, Lothar: *Angewandte Statistik: Anwendungen statistischer Methoden*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1984
- [121] SCHEIDT, J. vom ; FELLEBERG, B. ; WÖHRL, U.: *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner Stuttgart, Stuttgart, 1994
- [122] SCHMID, Hans-Joachim ; VOGEL, Lutz: On the modelling of the particle dynamics in electro-hydrodynamic flow-fields: I. Comparison of Eulerian and Lagrangian modelling approach. In: *Powder Technology* 135-136 (2003)
- [123] SCHWARZE, Rüdiger: *CFD-Modellierung: Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2013
- [124] SHRIMPSON, J. S. ; HAERI, S. ; SCOTT, Stephen J.: *Statistical Treatment of Turbulent Polydisperse Particle Systems: A Non-sectional PDF Approach*. Springer, London, 2014
- [125] SIGLOCH, Herbert: *Technische Fluidmechanik*. Springer Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2014
- [126] SOO, S. L.: *Particulates and Continuum*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1989
- [127] STOCKER, Toni C. ; STEINKE, Ingo: *Statistik: Grundlagen und Methodik*. De Gruyter Oldenbourg, Berlin, Boston, 2017
- [128] STOHL, A. ; FORSTER, C. ; FRANK, A. ; SEIBERT, P. ; WOTOWA, G.: Technical note: The Lagrangian particle dispersion model FLEXPART version 6.2. In: *Atmos. Chem. Phys.* 5 (2005)
- [129] SUBRAMANIAM, Shankar: Lagrangian-Eulerian methods for multiphase flows. In: *Progress in Energy and Combustion Science* 39 (2013)
- [130] TATSCHL, Reinhard ; MERKER, G. P. (Hrsg.) ; TEICHMANN, R. (Hrsg.): *Grundlagen Verbrennungsmotoren*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2014
- [131] TENNEKES, H. ; LUMLEY, J. L.: *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, Massachusetts, 1972
- [132] TIAN, Lin ; AHMADI, Goodarz: Particle deposition in turbulent duct flows - comparisons of different model predictions. In: *Aerosol Science* (2007)
- [133] TRAGE, Sylvia: Fakten und Prognosen: Triumph digitaler Pioniere. In: *Pictures of the Future: Das Magazin für Forschung und Innovation, Siemens* (1. Oktober, 2014)
- [134] TUCKWELL, Henry C.: *Stochastic Processes in the Neurosciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Ireland, 1994
- [135] VALIÑO, Luis: A Field Monte Carlo Formulation for Calculating the Probability Density Function of a Single Scalar in a Turbulent Flow. In: *Flow, Turbulence and Combustion* 60 (1998)
- [136] VAUQUOIS, Bernard: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Friedr. Vieweg + Sohn GmbH, Verlag, Braunschweig, 1973

- [137] VIDAKOVIC, Brani ; CASELLA, G. (Hrsg.) ; FIENBERG, S. (Hrsg.) ; OLKIN, I. (Hrsg.): *Statistics for Bioengineering Sciences*. Springer, New York, Dordrecht, Heidelberg, London, 2011
- [138] WANG, De M. ; GREIF, David: progress in modeling injector cavitating flows with a multi-fluid method. In: *Proceedings of FEDSM2006: 2006 ASME Joint U.S. - European Fluids Engineering Summer Meeting*, 2006
- [139] WANG, De M. ; ISSA, Raad I. ; GOSMAN, A. D.: Numerical Prediction of Disperse Bubbly Flow in a Sudden Enlargement. In: *Proceedings of ASME FEDSM'05, 9th Int. Symp. On Gas-Liquid Two-phase Flows, Houston, Texas, USA, June 19-23, 1994*
- [140] WANG, Lian-Ping ; MAXEY, Martin R.: Settling velocity and concentration distribution of heavy pparticle in homogeneous isotropic turbulence. In: *J. Fluid Mech.* (1993)
- [141] WARNATZ, J. ; MAAS, U. ; DIBBLE, R. W.: *Combustion: Physical and Chemical Fundamental, Modeling and Simulation, Experiments, Pollutant Formation*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006
- [142] WILLIAMS, Forman A. ; MIXTER, Richard W. (Hrsg.) ; THOMPSON, Linda (Hrsg.): *Combustion Theory: The Fundamental Theory of Chemically Reacting Flow Systems, Second Edition*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Menlo Park, Calif.1985
- [143] WINKLHOFFER, E. ; KULL, E. ; KELZ, E. ; MOROZOV, A.: Comprehensive Hydraulic and Flow Field Documentation in Model Throttle Experiments under Cavitation Conditions. In: *ILASS-Europe 2001*, 2001
- [144] WÖRNER, M.: A Compact Introduction to the Numerical Modeling of Multiphase Flows. In: *Forschungszentrum Karlsruhe GmbH* (2003)
- [145] ZUSE, Konrad: *Der Computer - Mein Lebenswerk*. Springer, 2010
- [146] ZWANZIG, Robert: Rate Processes with Dynamical Disorder. In: *American Chemical Society* (1990)
- [147] ZWANZIG, Robert: *Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Oxford University Press, New York, 2001

