

Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
von der KIT-Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von
M.Sc. Martin Kupper
geb. in Landau in der Pfalz

Tag der mündlichen Prüfung:	01. August 2019
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT).

Als erstes möchte ich mich bei meinem Hauptreferenten Herrn Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann für die sehr gute Betreuung dieser Arbeit bedanken. Die vielen Diskussionen und die angenehmen Gespräche haben mir sehr weitergeholfen und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Klaus Dietmayer für die Übernahme des Korreferats und das Interesse an meiner Arbeit danken.

Außerdem gilt mein Dank allen Kolleginnen und Kollegen am IRS für die Hilfsbereitschaft, die tolle Arbeitsatmosphäre und die gegenseitige Unterstützung in den letzten Jahren. Insbesondere möchte ich mich bei Oliver Stark und Stefan Krebs für die Durchsicht der ersten Version dieser Arbeit und die vielen wertvollen Hinweise bedanken.

Im Rahmen meiner Arbeit durfte ich auch viele Studierende bei ihren Abschlussarbeiten betreuen. Die vielen Gespräche sowie die Arbeiten selbst waren mir eine große Hilfe. Ich hoffe, dass euch die Arbeiten genauso viel Freude bereitet haben wie mir. Vielen Dank, dass ihr mich unterstützt habt.

Ebenso richtet sich mein Dank an meine Kollegen bei der ITK Engineering GmbH für ihre Rücksicht, für ihr Interesse, aber auch für die spannenden Projekte, die wir in den letzten Jahren gemeinsam bearbeiten durften. Eure ermutigenden Worte und zahlreichen Tipps zu den verschiedensten Themen waren sehr hilfreich.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung aber auch für jede willkommene Ablenkung. Insbesondere möchte ich aber meinen Eltern, Edgar und Gertrud, danken. Ihr habt mich schon früh zu einem technischen Studium ermutigt und mich jederzeit in den verschiedensten Formen unterstützt. Gertrud und Annabelle, euch danke ich auch für die sprachliche Durchsicht meiner Arbeit.

Annabelle, bei dir möchte ich mich aber besonders herzlich für dein Verständnis bedanken. Du hast mich immer unterstützt und mir vor allem in den stressigen Zeiten den Rücken freigehalten. Vielen Dank dafür.

Rülzheim, im August 2019

Wir sind gleichsam Zwerge, die auf den Schultern von Riesen sitzen, um mehr und Entfernteres als diese sehen zu können - freilich nicht dank eigener scharfer Sehkraft oder Körpergröße, sondern weil die Größe der Riesen uns zu Hilfe kommt und uns emporhebt.

Bernhard von Chartres

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Verfahren zur Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batteriesystemen	5
2.1	Beschreibung der Lithium-Ionen-Batterie	5
2.1.1	Funktionsweise	5
2.1.2	Modellierung	8
2.2	Ladezustandsschätzung für die Lithium-Ionen-Batterie	14
2.2.1	Ladezustandsschätzung für die Lithium-Ionen-Zelle	14
2.2.2	Diskussion der Strukturen und der Ladezustandsschätzung für Lithium-Ionen-Batteriepacks	16
2.3	Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme	18
2.3.1	Zustandsschätzung fraktionaler Systeme	18
2.3.2	Verteilte Zustandsschätzung	22
2.4	Zusammenfassung und Forschungslücke	26
3	Fraktionale Analysis	29
3.1	Grundlagen	29
3.1.1	Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient	29
3.1.2	Short-Memory-Prinzip	34
3.1.3	Initialisierung	35
3.2	Beschreibungsarten fraktionaler Systeme	38
3.2.1	Frequenzbereichsdarstellung	38
3.2.2	Fraktionale Zustandsraumdarstellung	39
3.3	Fraktionale Kalman-Filter	45
3.3.1	Fraktionales extended Kalman-Filter	46
3.3.2	Fraktionales unscented Kalman-Filter	48
4	Batteriemodelle	53
4.1	Nichtlineares Modell für die Lithium-Ionen-Batterie	53
4.2	Batteriepackmodell	58
4.3	Stromaufteilungsmodelle	62
4.4	Abgrenzung der Effekte	66
4.5	Beobachtbarkeit der Modelle	68
5	Verteilte Kalman-Filter für fraktionale Systeme	71
5.1	Grundidee, Voraussetzungen und Notationen	72
5.2	Verteiltes fraktionales Kalman-Filter	75

5.3	Kaskadiertes fraktionales Kalman-Filter	94
5.4	Fraktionales unknown-input Kalman-Filter	106
5.5	Zusammenfassung und Diskussion der Verfahren	119
6	Ladezustandsschätzung für eine einzelne Lithium-Ionen-Batteriezele	121
6.1	Versuchsbeschreibung	121
6.2	Modellvalidierung	124
6.3	Anwendung und Vergleich des fraktionalen extended Kalman-Filters und des fraktionalen unscented Kalman-Filters	126
6.3.1	Voraussetzungen und Parametrierung	127
6.3.2	Ergebnisse und Bewertung	128
6.4	Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion	132
6.5	Anwendung des fraktionalen unknown-input Kalman-Filters	135
6.5.1	Voraussetzungen und Parametrierung	135
6.5.2	Ergebnisse und Bewertung	136
6.6	Zusammenfassung und Bewertung der Einzelzellschätzung	139
7	Ladezustandsschätzung für ein Lithium-Ionen-Batteriepack	141
7.1	Voraussetzungen und Vereinfachungen	141
7.1.1	Aufteilung des Batteriepacks in Subsysteme	141
7.1.2	Überprüfung der allgemeinen Voraussetzungen	142
7.1.3	Bestimmung der Strangströme	143
7.2	Versuchsbeschreibung	146
7.2.1	Versuchsaufbau	146
7.2.2	Parametrierung	146
7.3	Anwendung der verteilten fraktionalen Kalman-Filter	149
7.3.1	Schätzung mithilfe der Gesamtspannungsmessung	149
7.3.2	Schätzung mithilfe der Gesamtstrommessung	155
7.3.3	Schätzung auf Basis des kaskadierten Ansatzes	157
7.4	Anwendung des fraktionalen unknown-input Kalman-Filters	157
7.5	Zusammenfassung und Bewertung der Batteriepackschätzung	160
8	Zusammenfassung	163
A	Parameter der LiPo-Batteriezele	XIX
B	Stand der Technik zur Beobachtbarkeit fraktionaler Systeme	XXIII
C	Ergänzende Beweise	XXV
C.1	Herleitung des FEKF	XXV
C.2	Herleitung des FUKF	XXIX
C.3	Ergänzungen zum Beweis des DDFKF	XXXIII
C.4	Ergänzungen zum Beweis des FUIKF	XXXVII
D	Linearisiertes 1-RQ-Batteriezelellenmodell	XXXIX
E	Ergänzende Ergebnisse zur Batteriezelellenschätzung	XLIII

F	Ergänzende Ergebnisse zur Batteriepackschätzung	XLV
F.1	Batteriepackschätzung mit Messung der Strangströme	XLV
F.2	Anwendung der verteilten Kalman-Filter auf Basis nicht-fraktionaler Modelle	XLVI
F.3	Verteilte Batteriepackschätzung mit erhöhtem Rauschen	XLIX
F.4	Verteilte Batteriepackschätzung mit Parametervariationen	L
	Literaturverzeichnis	LIII

Abbildungsverzeichnis

2.1	Näherungsweise Zusammenhang zwischen SOC und OCV einer LiPo-Batteriezelle des Typs SLPB834374H von <i>Kokam</i>	9
2.2	Impedanzspektren der LiPo-Zelle für zwei verschiedene Ladezustände.	11
2.3	Impedanzspektren der LiPo-Zelle für den SOC = 90 %, gefittet mit je einem fraktionalem und einem nicht-fraktionalem Modell.	13
2.4	Aufbau eines Batteriepacks, bestehend aus P parallel geschalteten Strängen mit je N seriell verschalteten Zellen.	17
2.5	Schematische Darstellungen eines dezentralen und eines verteilten Systems (nach [MDW94]).	23
4.1	Ersatzschaltbild des 1-RQ-Batteriezellenmodells.	54
4.2	Ersatzschaltbild des Batteriepacks auf Basis des 1-RQ-Zellenmodells.	61
4.3	Beobachtbarkeitsdiagramm des fraktionalem Batteriezellenmodells.	70
5.1	Schematischer Ablauf der Zustandsschätzung des DDFKFs.	89
5.2	Zeitverläufe der zur Simulation verwendeten Eingangsgrößen.	91
5.3	Ergebnis der Zustandsschätzung des DDFKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.	93
5.4	Zeitverläufe der vom DDFKF und vom FEKF berechneten Varianzen ϵ_1^2 und ϵ_5^2 der Zustände x_1 und x_5	93
5.5	Schematische Abbildung eines kaskadierten Schätzverfahrens (nach [LBDS08]).	94
5.6	Darstellung eines Systems mithilfe eines gerichteten, azyklischen Graphen.	95
5.7	Schematischer Ablauf der Zustandsschätzung des CFKFs.	103
5.8	Ergebnis der Zustandsschätzung des CFKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.	105
5.9	Zeitverläufe der vom CFKF und vom FEKF berechneten Varianzen ϵ_1^2 und ϵ_5^2 der Zustände x_1 und x_5	105
5.10	Schematischer Ablauf der Zustands- und Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs.	115
5.11	Ergebnis der Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs sowie die Zeitverläufe der zur Simulation verwendeten Eingangsgrößen.	117
5.12	Zeitverläufe der vom FUIKF berechneten Varianzen $(\epsilon_1^d)^2$ und $(\epsilon_2^d)^2$ der unbekanntem Eingangsgrößen d_1 und d_2	117
5.13	Ergebnis der Zustandsschätzung des FUIKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.	118
5.14	Zeitverläufe der vom FUIKF und vom FEKF berechneten Varianzen $(\epsilon_1^x)^2$ und $(\epsilon_5^x)^2$ der Zustände x_1 und x_5	118

6.1	Schematischer Aufbau für die Messungen an einer einzelnen LiPo-Batteriezelle.	123
6.2	Zeitverlauf des Batteriezellenstroms $i_{\text{cell},k}$, gemessen mit dem Digitalmultimeter.	123
6.3	Ausschnitt des Zeitverlaufs des Batteriezellenstroms.	123
6.4	Zeitverläufe der gemessenen Batteriezellenspannung und der simulierten Batteriezellenspannung des 1-RQ-Modells nach V1 mit der Speicherlänge $S = 1000$ sowie die simulierte Batteriezellenspannung des 1-RC-Modells.	125
6.5	Ergebnisse der SOC-Schätzung des FEKFs sowie des FUKFs mit korrekt gewähltem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der Varianz des SOC's $\epsilon_{\text{SOC},k k}^2$ für beide Filter und der SOC-Referenz.	129
6.6	Zeitverlauf des zur Simulation verwendeten Batteriezellenstroms $i_{\text{cell},k}$	133
6.7	Ergebnisse der SOC-Schätzung einer simulierten, initialisierten Batteriezelle mit und ohne Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion für das erste Szenario.	134
6.8	Ergebnisse der SOC-Schätzung einer simulierten, initialisierten Batteriezelle mit und ohne Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion für das zweite Szenario.	134
6.9	Ergebnis der SOC-Schätzung des FUIKFs mit falschem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs der SOC-Referenz.	138
6.10	Ergebnis der Batteriestromschätzung des FUIKFs mit falschem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs des Batteriezellenstroms, gemessen mit dem Digitalmultimeter.	138
7.1	Aufteilung des Batteriepacks in P Subsysteme, welche jeweils aus N Zellen bestehen.	142
7.2	Schematischer Aufbau für Messungen an einem LiPo-Batteriepack, welcher sich aus drei Strängen mit je drei Zellen zusammensetzt.	147
7.3	Zeitverlauf des Gesamtstroms $i_{t,k}$ der Batterie, gemessen mit dem Netzteil.	148
7.4	Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des ersten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.	151
7.5	Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des zweiten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.	152
7.6	Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des dritten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.	152
7.7	Ergebnisse der Strangstromschätzung bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der mit den Digitalmultimetern gemessenen Strangströme.	154
7.8	Ergebnisse der SOC-Schätzung des FUIKFs des ersten Strangs mit einer Speicherlänge von $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.	159

7.9	Ergebnisse der Strangstromschätzung des FUIKFs des ersten Strangs mit einer Speicherlänge von $S = 250$. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs des mit dem Digitalmultimeter gemessenen Strangstroms.	159
A.1	Datenblatt der SLPB834374H-Zelle von <i>Kokam</i>	XIX
A.2	Parameter des 1-RQ-Batteriezellenmodells	XX
A.3	Parameter des 1-RC-Batteriezellenmodells	XXI

Tabellenverzeichnis

5.1	Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des DDFKFs und des FEKFs. . .	94
5.2	Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des CFKFs und des FEKFs. . .	106
5.3	Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des FUIKFs und des FEKFs sowie die Schätzfehler der Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs.	118
6.1	Modellfehler (RMSE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht- fraktionalen Modells (RC).	126
6.2	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FEKF mit richtigem Startzustand.	130
6.3	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FUKF mit richtigem Startzustand.	130
6.4	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FEKF mit falschem Startzustand.	131
6.5	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FUKF mit falschem Startzustand.	131
6.6	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ- Modells und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem FUIKF mit richtigem Startzustand.	137
6.7	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ- Modells und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem FUIKF mit falschem Startzustand.	139
7.1	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und der Spei- cherlänge $S = 250$	151
7.2	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtstrommessung und der Speicherlän- ge $S = 250$	156
7.3	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit dem FUIKF und der Speicherlänge $S = 250$.	158
A.1	Messtechnisch ermittelte Ladekapazitäten der verwendeten LiPo-Zellen . . .	XXI

E.1	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ-Modells (V1, $S = 250$) für die Schätzung mit dem FEKF mit richtigem Startzustand und zusätzlichem Rauschen mit verschiedenen Standardabweichungen.	XLIII
E.2	SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem EKF mit richtigem Startzustand und zusätzlichem Rauschen mit verschiedenen Standardabweichungen.	XLIV
F.1	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei einer Zustandsschätzung mit gemessenen Strangströmen und der Speicherlänge $S = 250$	XLV
F.2	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei einer Zustandsschätzung mit gemessenen Strangströmen.	XLVI
F.3	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung.	XLVII
F.4	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtstrommessung.	XLVIII
F.5	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells für die Schätzung mit dem UIKF.	XLVIII
F.6	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung, der Speicherlänge $S = 250$ und zusätzlichem Rauschen.	XLIX
F.7	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und zusätzlichem Rauschen.	L
F.8	Verwendete Parameterabweichungen des fraktionalen Modells.	LI
F.9	Verwendete Parameterabweichungen des nicht-fraktionalen Modells.	LI
F.10	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung, der Speicherlänge $S = 250$ und Parameterabweichungen.	LII
F.11	SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und Parameterabweichungen.	LII

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
CCCV	Konstantstrom-Konstantspannung
CFKF	Kaskadiertes fraktionales Kalman-Filter
CNLS	Komplexes nichtlineares least-squares Verfahren
DDFKF	Dezentrales und verteiltes fraktionales Kalman-Filter
DRT	Verteilung der Relaxationszeiten
EIS	Elektrochemische Impedanzspektroskopie
EKF	Extended Kalman-Filter
FEKF	Fraktionales extended Kalman-Filter
FKF	Fraktionales Kalman-Filter
FUIKF	Fraktionales unknown-input Kalman-Filter
FUKF	Fraktionales unscented Kalman-Filter
GLS	Verallgemeinertes least-squares Verfahren
IRS	Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
LiPo	Lithium-Polymer
LMU	Lineare Matrixungleichung
LS	Least-squares Verfahren
LSS	Large-scale system
LTI	Linear zeitinvariant
MAE	Maximum absolute error
OCV	Open Circuit Voltage
RMSE	Root-mean-square-error
SEI	Solid Electrolyte Interface
SMP	Short-Memory-Prinzip
SNR	Signal-Rausch-Verhältnis
SOC	Ladezustand
UI	Unbekannte Eingangsgröße
UIKF	Nicht-fraktionales unknown-input Kalman-Filter
UKF	Unscented Kalman-Filter
UT	Unscented transformation

Symbole

Symbol	Beschreibung
A	Gesamtanzahl der Subsysteme
a	Untergrenze der fraktionalen Ableitung, Systemstartzeitpunkt, Parameter eines Systems
a_0	Untergrenze der fraktionalen Ableitung, Systemstartzeitpunkt im zeitdiskreten Fall
α_k	Zeitvariante, fraktionale Ableitungsordnungen eines Systems
α	Fraktionale Ableitungsordnung, Parameter der DRT
\mathbf{B}_k	Jakobi-Matrix der Zustandsgleichung bezüglich der externen Zustände, Jakobi-Matrix der Zustandsgleichung bezüglich der unbekanntem Eingangsgrößen
b	Beginn der Messungen, Parameter eines Systems
b_0	Zeitdiskreter Beginn der Messungen
β	Fraktionale Ableitungsordnung
\mathbf{C}_k	Hilfsmatrix
C	Kapazität, C-Rate
$C(u)$	Differentielle Kapazität
$C_0(\text{OCV})$	Differentielle Kapazität der Batteriezelle
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
c	Hilfsgröße
Γ	Eulersche Gamma-Funktion
\mathcal{D}^n	Ableitung der Ordnung n
${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$	Fraktionale Ableitung der Ordnung α mit der Untergrenze a
\mathbf{D}_k	Jakobi-Matrix der Ausgangsgleichung bezüglich der externen Zustände, Jakobi-Matrix der Ausgangsgleichung bezüglich der unbekanntem Eingangsgrößen
\mathbf{d}_k	Unbekannte Eingangsgrößen
$\mathbf{d}_{i,k}$	Externe Zustände in Subsystem i
${}_a^f\Delta_b^{\alpha(t)}(t)$	Initialisierungsfunktion bezüglich einer Funktion $f(t)$ und den Grenzen a und b
Δ_k	Lagrange-Multiplikatoren
$\Delta\phi(\omega)$	Phasendifferenz
$\Delta^c \mathbf{u}_k$	Linearisierte Eingangsgrößen des Zellenmodells
$\Delta^c \mathbf{x}_k$	Linearisierte Zustandsgrößen des Zellenmodells
$\Delta^c \mathbf{y}_k$	Linearisierte Ausgangsgrößen des Zellenmodells
δ_k	Kronecker-Delta
$\mathbf{E}_{m,k}$	Hilfsmatrix bezüglich Subsystem m
$\mathbf{e}_{m,k}$	Hilfsvektor bezüglich Subsystem m
\mathbf{e}_k	Hilfsvektor
$\epsilon_{k j}$	Zustandsschätzfehler zum Zeitpunkt k unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt j

Symbol	Beschreibung
ϵ	Fehlergröße
ε	Maximaler Fehler des SMPs
\mathbf{F}_k	Systemmatrix, Jakobi-Matrix der Zustandsgleichung bezüglich der Zustände
$\tilde{\mathbf{F}}_k$	Erweiterte Systemmatrix, Hilfsmatrix
\mathcal{F}	Fourier-Transformation
$F(\omega)$	Fouriertransformierte von $f(t)$
\mathbf{f}_k	Zustandsfunktionen eines Systems
$\tilde{\mathbf{f}}(t)$	Zeitkontinuierliche Zustandsgleichungen
$f(t)$	Kontinuierliche Funktion
\mathbf{G}_k	Ausgangsmatrix, Jakobi-Matrix der Ausgangsgleichung bezüglich der Zustände
$\tilde{\mathbf{G}}_k$	Erweiterte Ausgangsmatrix
\mathbf{g}_k	Ausgangsfunktionen eines Systems
$\mathbf{g}(t)$	Zeitkontinuierliche Ausgangsgleichungen
$g(\tau)$	Verteilung der Relaxationszeiten
\mathbf{H}_k	Eingangsmatrix, Hilfsmatrix
$\mathbf{H}_{m,k}$	Hilfsmatrix für Subsystem m zum Zeitschritt k
$\tilde{\mathbf{H}}_k$	Erweiterte Eingangsmatrix
h	Hilfsgröße zur Bestimmung des Grenzwerts des Differenzenquotienten
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
I_{amp}	Stromamplitude eines sinusförmigen Signals
${}_a\mathcal{I}_t^\alpha$	Fraktionale Integration der Ordnung α mit der Untergrenze a
$i_{\text{cell},k}$	Klemmenstrom der Batteriezelle
i_k	Strangstrom
$\tilde{i}_{p,k k}$	Schätzung des Stroms in Strang p zum Zeitschritt k
\mathbf{J}_k	Durchgangsmatrix
j	Imaginärzahl, Hilfsgröße zur Beschreibung vorheriger Zeitschritte
\mathbf{K}_k	Kalman-Verstärkung
K	Anzahl an RC-Gliedern zur Beschreibung der nicht-fraktionalen Batteriezellenimpedanz
k	Diskreter Zeitschritt
κ	Tuning-Parameter, welcher die Streuung der Stichproben der UT beeinflusst
\mathbf{L}_k	Jakobi-Matrix der Zustandsgleichung bezüglich des Systemrauschens
$\bar{\mathbf{L}}_k$	Linearisierte Zustandsgleichung bezüglich des Systemrauschens
L	Speicherlänge des SMP
\mathbf{M}_k	Jakobi-Matrix der Ausgangsgleichung bezüglich des Ausgangsrauschens
$\bar{\mathbf{M}}_k$	Linearisierte Zustandsgleichung bezüglich des Ausgangsrauschens
M	Hilfsgröße

Symbol	Beschreibung
m	Zählergrad, Hilfsgröße zur Beschreibung anderer Subsysteme
$\boldsymbol{\mu}^{\boldsymbol{x}}$	Mittelwert eines Vektors \boldsymbol{x}
\boldsymbol{N}_k	Hilfsmatrix zur Bestimmung der unbekanntenen Eingangsgröße
N	Anzahl seriell verschalteter Zellen in einem Batteriestrang, Anzahl an RQ-Gliedern zur Beschreibung des Ladungstransfers und der SEI
n	Ableitungsordnung, Anzahl der Zustandsgrößen eines Systems, Nennergrad, Hilfsgröße
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen, einschließlich der Null
η	Coulomb-Effizienz
O	Anzahl an RQ-Gliedern zur Beschreibung der Diffusion
$\boldsymbol{P}_{k j}$	Schätzfehlerkovarianzmatrix zum Zeitpunkt k unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt j
$\boldsymbol{P}_{k j}^a$	Kovarianzmatrix bezüglich der Größe a zum Zeitpunkt k unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt j
$\boldsymbol{P}_{k j}^{ab}$	Kovarianzmatrix bezüglich der zwei Größen a und b zum Zeitpunkt k unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt j
P	Anzahl parallel verschalteter Stränge in einem Batteriepack
p	Anzahl der Eingangsgrößen eines Systems
ϕ_i	Hilfsgröße für die UT
$\phi(\omega)$	Phasenverschiebung
$\boldsymbol{\Psi}_k$	Hilfsmatrix
$\boldsymbol{\psi}(t)$	Zustand eines Systems
ψ_i	Hilfsgröße für die UT
\boldsymbol{Q}	Ableitungsmatrix
\boldsymbol{Q}_k	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
$\bar{\boldsymbol{Q}}_k$	Linearisierte Kovarianzmatrix des Systemrauschens
Q	Parameter des Konstantphasenelements
Q_N	Ladekapazität
$Q_{\text{cell}}(t)$	Entnehmbare Ladung der Batteriezelle
Q_{charge}	Ladekapazität im Ladezyklus
$Q_{\text{discharge}}$	Ladekapazität im Entladezyklus
q	Kontinuierlich differenzierbare Hilfsfunktion
q	Ladung, Anzahl der Ausgangsgrößen eines Systems
\boldsymbol{R}_k	Kovarianzmatrix des Ausgangsrauschens
$\bar{\boldsymbol{R}}_k$	Linearisierte Kovarianzmatrix des Ausgangsrauschens
$\tilde{\boldsymbol{R}}_k$	Linearisierte Matrix der Ausgangsrauschprozesse bezüglich der Ausgangsfunktionen
R	Widerstand
$R_{c,p}$	Kabel- und Kontaktwiderstand in Strang p
R_i	Innenwiderstand

Symbol	Beschreibung
$R_{i,p}$	Summe der Ohmschen Widerstände in Strang p
R_0	Innenwiderstand
Ref	SOC-Referenz
r	Anzahl der Systemrauschprozesse
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^{\geq 0}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}^{<0}$	Menge der negativen reellen Zahlen
\mathbf{S}_k	Hilfsmatrix
S	Zeitdiskreter Speicher des SMP
s	Anzahl der Ausgangsrauschprozesse, Hilfsgröße
σ_{max}	Größter Singulärwert einer Matrix
σ_{min}	Kleinster Singulärwert einer Matrix
$\mathbf{T}_{\alpha,k}$	Matrix der Verallgemeinerung der Abtastzeit
\mathbf{T}_i	Transformations- bzw. Selektionsmatrix für die internen Zustände von Subsystem i
\mathbf{T}_i^d	Transformations- bzw. Selektionsmatrix für die externen Zustände von Subsystem i
\mathbf{T}_i^u	Transformations- bzw. Selektionsmatrix für die Eingangsgrößen von Subsystem i
\mathbf{T}_i^v	Transformations- bzw. Selektionsmatrix für das Systemrauschen von Subsystem i
\mathbf{T}_i^w	Transformations- bzw. Selektionsmatrix für das Messrauschen von Subsystem i
${}^c\tilde{\mathbf{T}}_{j,\alpha,k}$	Hilfsmatrix zur Verallgemeinerung der Abtastzeit bezüglich des Batteriezellenmodells für Variante V2
T	Abtastzeit
t	Zeit
τ	Hilfsgröße zur Beschreibung der Zeit
τ_0	Parameter der DRT
U_{amp}	Spannungsamplitude eines sinusförmigen Signals
U_{high}	Obere Abschaltspannung
U_{low}	Untere Abschaltspannung
\mathbf{u}_k	Eingangsgrößen eines Systems
u	Spannung
$u_{cell,k}$	Klemmenspannung der Batteriezelle
$u_{m,p,k+1 k}$	Prädiktion der Hilfsspannung in Strang p zum Zeitschritt $k + 1$
$u_{m,p}$	Hilfsspannung in Strang p
V	Variante
\mathbf{v}_k	Systemrauschen
$\tilde{\mathbf{v}}_k$	Erweitertes Systemrauschen

Symbol	Beschreibung
\mathbf{w}_k	Ausgangsrauschen
ω	Kreisfrequenz
\mathbf{x}_k	(Pseudo-)Zustandsgrößen eines Systems
$\mathbf{x}_{k j}$	Zustandsschätzung zum Zeitpunkt k unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt j
$\tilde{\mathbf{x}}_k$	Erweiterter Zustandsvektor
χ	Deterministische Stichproben
\mathbf{y}_k	Ausgangsgrößen eines Systems
\mathbf{y}'_k	Linearisierte Ausgangsgröße
$\Upsilon_{j,\alpha,k}$	Matrix der Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten
${}^c\Upsilon_{j,\alpha,k}$	Matrix der Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten bezüglich des Batteriezellenmodells für Variante V2
\mathbf{Z}^\dagger	Moore-Penrose-Pseudoinverse einer Matrix \mathbf{Z}
$Z_{\text{cell}}(j\omega)$	Impedanz des 1-RQ-Batteriezellenmodells
$Z_{\text{ges}}(j\omega)$	Impedanz der Lithium-Ionen-Zelle
$Z(j\omega)$	Komplexe Impedanz
z	Hilfsgröße für das SMP
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
ζ	Konditionszahl einer Matrix

Indizes

Index	Beschreibung
$(\cdot)^0$	Entwicklungspunkt für eine Taylorreihe
2002	DS2002 A/D-Wandlerkarte
2004	DS2004 A/D-Wandlerkarte
${}^b(\cdot)$	Auf ein Batteriepack bezogene Größe
BOP	BOP20-20M Netzteil
${}^c(\cdot)$	Auf eine Batteriezelle bezogene Größe
cell	Batteriezelle
Diff	Diffusion
DM	Digitalmultimeter
i	Auf Subsystem i bezogene Größe
k	Zeitschritt k
KS	Klimaschrank
LT	Ladungstransfer
$(\cdot)^{(e)}$	Erweiterte Größe eines Systems
m	Auf Subsystem m bezogene Größe
n	n -te Zelle eines Strangs
noise	Rauschen
p	p -ter Strang eines Packs

Index **Beschreibung**

$(\cdot)_{p,n,k}$	Verweis auf die n -ten Zelle des p -ten Strangs zum Zeitschritt k
RC	Nicht-fractionales Modell, RC-Glied
RQ	Fractionales Modell, RQ-Glied
$^s(\cdot)$	Auf einen Batteriestrang bezogene Größe
SEI	Solid Electrolyte Interface
t	Auf die gesamte Batterie bezogene Größe

1 Einleitung

In der heutigen Gesellschaft steigen die Mobilitätsansprüche und der Wunsch nach einer nachhaltigen Energienutzung. Nicht nur die Elektrifizierung des Antriebsstrangs im Automobil, sondern auch die verstärkte Nutzung von mobilen Kleingeräten wie Smartphones und Notebooks erfordern kompakte und effiziente Energiespeicher. Zusätzlich spielen auch im Rahmen der Energiewende in Deutschland stationäre Speicher eine wichtige Rolle [BEH⁺13]. Viele erneuerbare Energieerzeuger wie Photovoltaik- oder Windkraftanlagen generieren elektrische Leistung nicht nach Bedarf, sondern abhängig von der vorliegenden Wetterlage. Um die Leistung zur Verfügung stellen zu können, wenn sie auch benötigt wird, sind daher Speicher erforderlich. Eine Möglichkeit zur Speicherung von Energie stellen Lithium-Ionen-Batterien dar. Im Vergleich zu anderen Batterietypen besitzen sie den Vorteil, dass sie eine hohe spezifische Energie aufweisen und somit vergleichsweise kompakt sind [BEH⁺13].

Nachteilig ist jedoch, dass Lithium-Ionen-Batterien sicherheitskritische Systeme sind. Wenn sie außerhalb ihres Betriebsbereichs verwendet werden, kann dies zu einer thermischen Reaktion und zur Zerstörung der Zelle führen. Für den Betrieb der Zelle zählen die Stromstärke und der Ladezustand (engl. state of charge, SOC) der Batteriezelle zu den relevantesten Größen. Der SOC gibt dabei an wie viel Energie der Zelle noch entnommen oder zugeführt werden darf bis die Betriebsgrenze erreicht wird. Allerdings ist der SOC der Zelle nicht direkt messbar, weswegen eine Schätzung notwendig ist. Mithilfe modellbasierter Methoden kann eine Schätzung Informationen über weitere Prozesse, die in der Batteriezelle ablaufen, liefern. Eine Möglichkeit diese Prozesse physikalisch exakt zu charakterisieren, ist durch fraktionale Modelle gegeben. Diese Modelle besitzen im Vergleich zu gewöhnlichen Modellen häufig eine geringere Systemordnung, eine moderate Komplexität und sind eine natürliche Beschreibung der inhärent verteiltparametrischen Prozesse der Batterie wie der Diffusion. In den Materialwissenschaften haben sich fraktionale Modelle bereits bewährt (siehe beispielsweise [ICE⁺10]).

Bei Anwendungen, die hohe Leistungs- und Energieanforderungen besitzen, werden nicht nur einzelne Batteriezellen verwendet, sondern es werden hunderte oder tausende Zellen miteinander zu Batteriepacks verschaltet. Dabei können hohe Ströme auftreten, sodass die Stromsensoren für verschiedene Größenordnungen ausgelegt werden müssen. Zudem werden alle Teilströme des Batteriepacks für die Schätzung des Ladezustands benötigt. Dadurch ergeben sich hohe Kosten und Anforderungen an diese Sensoren. Tritt ein fehlerhafter Betriebszustand auf, kann dieser zu einer thermischen Kettenreaktion führen. Daher müssen für solche Batteriepacks nicht nur hohe Ansprüche an die Zustandsschätzung und die Sensorik, sondern auch an die Datenverarbeitung, die elektrischen Verbindungen, usw. gestellt werden, sodass eine erhöhte Ausfallsicherheit und Robustheit gegenüber Störungen gewährleistet werden kann. Diese Maßnahmen und die hohen

Kosten der Speichertechnologien selbst sind häufig Gründe, weshalb Batteriespeicher im kommerziellen Betrieb nicht zum Einsatz kommen [BEH⁺13]. Ein Ziel ist es daher die Kosten und den Aufwand für solche Speichersysteme zu reduzieren.

Weiterhin lassen sich Batteriepacks als Großsysteme (engl. large-scale systems, LSS) klassifizieren. Charakteristisch für diese Systeme ist, dass sie sich aus mehreren, kleineren Subsystemen zusammensetzen, die miteinander verschaltet sind. Für die Zustandsschätzung von LSS bieten sich insbesondere dezentrale und verteilte Methoden an. Im Gegensatz zu zentralen Methoden können sie vorteilhafte Eigenschaften wie Modularität, Robustheit und Skalierbarkeit bereitstellen [Mut98, S. 3, 7, 64, 65].

Eine verteilte Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batteriesystemen auf Basis der physikalisch motivierten, fraktionalen Modelle ist also wünschenswert. Die Entwicklung von Methoden zur Zustandsschätzung fraktionaler Systeme ist das Thema aktueller Forschung. Manche dieser neu entwickelten Methoden wurden bereits kürzlich erfolgreich auf die Zustandsschätzung von einzelnen Lithium-Ionen-Batteriezellen angewendet. Im Bereich der verteilten Zustandsschätzung fraktionaler Systeme gibt es in der Literatur jedoch noch keine bekannten Methoden. Auch die Anwendung einer funktional verteilten Zustandsschätzung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme ist in der Literatur noch unbekannt, unabhängig von der Verwendung fraktionaler Methoden oder Modelle. Darauf basierend lassen sich direkt die folgenden Forschungsziele ableiten:

- Entwicklung von Methoden für die verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme
- Anwendung der verteilten Zustandsschätzung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme

Zum Einstieg in die Thematik wird in Kapitel 2 die prinzipielle Funktionsweise von Lithium-Ionen-Batteriezellen, deren Charakterisierung mithilfe einer fraktionalen Impedanz sowie der Stand der Technik zu ihrer Zustandsschätzung vorgestellt. Weiterhin wird der aktuelle Stand der Forschung zur allgemeinen Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und zur verteilten Zustandsschätzung nicht-fraktionaler Systeme diskutiert. Zum Abschluss werden die Forschungsziele dieser Arbeit weiter konkretisiert. Die in dieser Arbeit benötigten Konzepte und Methoden der fraktionalen Analysis werden in Kapitel 3 vorgestellt und diskutiert. In Kapitel 4 werden die für die Zustandsschätzung verwendeten Batteriemodelle hergeleitet. Dazu wird ein vereinfachtes Modell einer einzelnen Lithium-Ionen-Batteriezelle aufgestellt und anschließend auf ein Packmodell erweitert. Weiterhin werden neuartige Modelle für die Aufteilung des Gesamtstroms auf die verschiedenen Batteriestränge angegeben. Nachfolgend wird die Beobachtbarkeit des Batteriemodells anhand eines Kriteriums für nichtlineare fraktionale Systeme überprüft. Das erste Kernstück dieser Arbeit bildet Kapitel 5. Dort werden drei neuartige und strukturell unterschiedliche Algorithmen zur verteilten Zustandsschätzung fraktionaler Systeme vorgestellt: das verteilte fraktionale Kalman-Filter (engl. decentralized and distributed fractional Kalman filter, DDFKF), das kaskadierte fraktionale Kalman-Filter (engl. cascaded fractional Kalman filter, CFKF) und das fraktionale unknown-input Kalman-Filter (FUIKF). Ein Sonderfall stellt dabei das FUIKF dar, da dieses nicht nur auf die verteilte Zustandsschätzung beschränkt ist, sondern auch auf nicht-verteilte fraktionale Systeme mit unbekanntem Eingangsgrößen angewendet werden kann. Die

Anwendung dieser Methoden wird in den Kapiteln 6 und 7 präsentiert. In Kapitel 6 wird dabei das verwendete Modell für eine einzelne Lithium-Ionen-Batteriezelle anhand von Messdaten validiert. Weiterhin werden die nicht-verteilten Kalman-Filter zur SOC-Schätzung der Zelle verwendet und miteinander verglichen. Kapitel 7 ist das zweite Kernstück der Arbeit. Mithilfe der Modelle zur Bestimmung der Stromaufteilung aus Kapitel 4 werden die verteilten Kalman-Filter zunächst vereinfacht. Anschließend werden diese erstmalig zur verteilten Zustandsschätzung eines Batteriepacks angewendet und anhand von Messungen validiert. Dabei können zusätzlich zu den SOC's der einzelnen Zellen des Batteriepacks auch die Teilströme modellbasiert mitgeschätzt werden. Zum Abschluss wird die Arbeit in Kapitel 8 zusammengefasst.

2 Verfahren zur Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batteriesystemen

In diesem Kapitel wird diskutiert, wie das Problem der Zustandsschätzung für Lithium-Ionen-Batterien aktuell gelöst wird. Dazu werden zunächst die grundsätzliche Funktionsweise und die Prozesse innerhalb einer Lithium-Ionen-Batteriezelle sowie deren Charakterisierung vorgestellt. Anschließend wird der Stand der Technik zur Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Zellen sowie von Lithium-Ionen-Packs herausgearbeitet. Dabei wird der Fokus auf die Zustandsschätzung mithilfe fraktionaler Batteriemodelle gelegt.

Da diese Arbeit einen allgemeinen Beitrag zur Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und zur verteilten Zustandsschätzung leistet, wird zudem der Stand der Technik zu diesen Themenbereichen betrachtet. Es wird untersucht, ob bereits vorhandene Methoden aus der Literatur geeignet sind, um die Forschungsziele dieser Arbeit zu erfüllen. Abschließend werden diese Ziele weiter konkretisiert.

2.1 Beschreibung der Lithium-Ionen-Batteriezelle

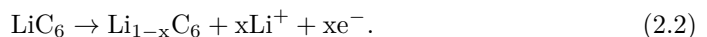
Die Lithium-Ionen-Batteriezelle kann chemische Energie speichern und diese in elektrische Energie umwandeln. Da sich die hier betrachteten Zellen durch Anlegen einer Spannung mithilfe der Elektrolyse wieder aufladen lassen, spricht man auch von Akkumulatoren oder Sekundärzellen [JW06, S. 5]. Lithium-Ionen-Zellen besitzen den Vorteil gegenüber anderen Zellentypen, dass sie eine hohe spezifische Energie aufweisen.

2.1.1 Funktionsweise

Lithium-Ionen-Batteriezellen bestehen aus vier Hauptkomponenten: Zwei Elektroden (Anode und Kathode), ein Elektrolyt und ein Separator. Als Aktivmaterial kann beispielsweise Lithium-Cobaltdioxid für die Kathode und Graphit für die Anode verwendet werden [JW06, S. 104], [Ill14, S. 4]. Für die genannten Materialien findet bei der Entladung an der Kathode die Reaktion



statt. Gleichzeitig läuft folgende Reaktion an der Anode ab:



Die frei gewordenen Elektronen fließen über einen äußeren elektrischen Stromkreis. Das Lithium-Ion diffundiert durch den Elektrolyten und den Separator innerhalb der Zelle [JW06, S. 104] [Ill14, S. 4].

Dabei sind nach [Eck17, S. 11, 12], [Sch18, S. 9-12], [Ill14, S. 13-18] und [JW06, S. 17] im Wesentlichen vier Prozesse bzw. Effekte für das dynamische Verhalten der Batterie verantwortlich. Diese werden in der nachfolgenden Definition aufgelistet.

Definition 2.1 (Prozesse und Effekte innerhalb der Lithium-Ionen-Batteriezelle [JW06, S. 6, 20, 123], [Ill14, S. 13, 18], [Eck17, S. 11, 12])

Das dynamische Verhalten der Batterie lässt sich auf folgende Effekte und Prozesse zurückführen:

- **Ladungstransfer:** *An der Grenzschicht zwischen Anode und Elektrolyt geben Lithium-Atome beim Entladevorgang Elektronen ab und gehen als Ionen in den Elektrolyten über. An der Grenzschicht zur Kathode nehmen Lithium-Ionen wiederum Elektronen auf und reagieren zu Lithium-Atomen. Diese Prozesse an Anode bzw. Kathode werden jeweils als Ladungstransfer bezeichnet. Beim Ladevorgang laufen die Prozesse entsprechend umgekehrt ab.*
- **Diffusion:** *Beim Entladevorgang entsteht aufgrund des Ladungstransfers an der Grenzschicht zwischen Anode und Elektrolyt ein Konzentrationsgefälle, wodurch Lithium-Ionen an dieser Grenzschicht aus der Anode austreten. Es entsteht ein Prozess des Lithium-Transports durch den Festkörper hin zur Grenzschicht. An der Kathode findet der Transportprozess des Lithiums von der Grenzschicht hin zum Festkörper statt. Diese Lithium-Transportprozesse werden als Diffusion bezeichnet. Beim Ladevorgang laufen die Prozesse entsprechend umgekehrt ab.*
- **Solid electrolyte interface (SEI):** *Aufgrund einer Zersetzung des Elektrolyts bildet sich an der Grenzschicht zwischen Elektrolyt und Elektrode eine Festkörperschicht, die als SEI bezeichnet wird und die Impedanz der Zelle vergrößert. Meistens bildet sich die SEI in den ersten Zyklen und wächst erst bei späteren Alterungsprozessen weiter.*
- **Ohmsche Verluste:** *Unter anderem in den Elektroden und in den Kontakten treten Ohmsche Verluste auf.*

Die Effekte nach Definition 2.1 bewirken jeweils eine Überspannung, welche die Zellspannung beim Entladen verringert, und beim Laden erhöht [JW06, S. 16]. Die Prozesse sind sowohl von der Temperatur als auch von der eingepprägten Stromstärke abhängig [Ill14, S. 17-20].

Die Zellspannung setzt sich jedoch nicht nur aus den Überspannungen, sondern auch aus der Ruhe- bzw. Gleichgewichtsspannung zusammen, die auch im statischen und unbelasteten Fall vorhanden ist. Diese Spannung wird daher auch als *Open Circuit Voltage* (OCV) bezeichnet und wird durch das elektrochemische Potenzial der beiden aktiven

Materialien erzeugt [JW06, S. 16], [Ill14, S. 15]. Das jeweilige Potenzial der Elektroden hängt dabei sowohl vom verwendeten aktiven Material als auch von der vorliegenden Lithium-Konzentration ab [JW06, S. 12]. Die an den Klemmen der Batteriezelle messbare Spannung u_{cell} setzt sich insgesamt aus allen Überspannungen und der OCV zusammen [Ill14, S. 4, 15], [JW06, S. 16].

Allerdings können beide Elektroden jeweils nur eine bestimmte Kapazität für Lithium-Ionen zur Verfügung stellen. Diese Kapazitäten sind vom verwendeten Material selbst und der Menge dieses Materials abhängig und stehen in direktem Zusammenhang mit der Ladekapazität Q_N der Zelle [Ill14, S. 15, 22, 23]. Diese gibt die maximale Menge entnehmbarer elektrischer Ladung der Zelle an. Sie wird vom Hersteller im Datenblatt angegeben, kann aber aufgrund von Fertigungsstreuung und Alterung von diesem Wert abweichen [JW06, S. 134, 142, 240].

Mithilfe der Ladekapazität kann der sogenannte Ladezustand definiert werden.

Definition 2.2 (Ladezustand)

Der Ladezustand ist definiert als (vergleiche beispielsweise [Cha13])

$$\text{SOC}(t) := 100\% \cdot \frac{Q_{\text{cell}}(t)}{Q_N}. \quad (2.3)$$

Er beschreibt das Verhältnis der zum aktuellen Zeitpunkt t noch entnehmbaren elektrischen Ladung $Q_{\text{cell}}(t)$ der Zelle zur Ladekapazität Q_N und wird prozentual angegeben.

Mit Definition 2.2 lässt sich beschreiben, wie viel Ladung der Zelle zu einem bestimmten Zeitpunkt, relativ zur Ladekapazität, noch entnommen oder zugefügt werden kann. Der SOC darf dabei den Bereich von 0% bis 100% nicht unter- bzw. überschreiten, da dadurch die Zelle zerstört werden kann. Wenn die Zelle überladen wird, können sich beispielsweise Lithium-Dendrite bilden, welche Lithium irreversibel binden und in ausgeprägten Fällen zu einem Kurzschluss innerhalb der Zelle führen [LHL⁺13], [Ill14, S. 10]. Bei einer Tiefentladung bricht das Kristallgitter, in welchem das Lithium eingebettet ist, zusammen, was die Performanz der Batterie nachhaltig beeinträchtigt [LHL⁺13].

Je nach verwendetem Typ wird für die Lithium-Ionen-Zelle ein sicherer Betriebsbereich definiert. Dazu gehört außer den SOC-Grenzen, ein Spannungsbereich der durch die obere und untere Abschaltspannung U_{high} und U_{low} definiert ist sowie ein Temperatur- und ein Stromstärkebereich [JW06, S. 101, 133, 134] (vergleiche das Datenblatt in Abbildung A.1 in Anhang A). Die Klemmenspannung u_{cell} , der Klemmenstrom i_{cell} und die Gehäusetemperatur liegen als Messgrößen vor. Der SOC der Zelle ist jedoch nicht direkt messbar, weshalb eine Zustandsschätzung notwendig ist [XMCC13].

2.1.2 Modellierung

Modellierung der OCV

Da die OCV von der Lithium-Konzentration in den aktiven Materialien abhängt, existiert ein unmittelbarer aber nichtlinearer Zusammenhang zwischen SOC und OCV [JW06, S. 12], [Ill14, S. 15, 22, 23]. Eine Beschreibung dieser Konzentration oder die Bestimmung der einzelnen Potenziale der Elektroden ist messtechnisch jedoch schwierig. Häufig ist es einfacher den nichtlinearen Zusammenhang zwischen zwei Größen mithilfe einer Kennlinie zu beschreiben [Ler16, S. 77]. Für die Bestimmung der SOC-OCV-Kennlinie wird die SOC-Bestimmung mittels Stromintegration nach Satz 2.1 benötigt.

Satz 2.1 (SOC-Bestimmung durch Stromintegration)

Der SOC der Zelle kann mithilfe einer Stromintegration durch die Gleichung

$$\text{SOC}(t) = \frac{100}{Q_N} \int_{t_0}^t i_{\text{cell}}(\tau) d\tau + \text{SOC}(t_0) \quad (2.4)$$

bestimmt werden (vergleiche [Eck17, S. 14], [JW06, S. 206]).

Der Ladezustand $\text{SOC}(t_0)$ und der Zeitpunkt t_0 in Satz 2.1 kann z. B. durch die letzte Voll- oder Leerladung definiert werden [JW06, S. 209].

Die SOC-OCV-Kennlinie kann dann beispielsweise mit dem folgenden Verfahren bestimmt werden:

1. Zunächst wird die Zelle bis zur unteren Abschaltspannung U_{low} entladen, sodass $\text{OCV}(\text{SOC}(t_0) = 0\%) = U_{\text{low}}$ gilt¹. Dieser Punkt dient als Startwert des Verfahrens.
2. Die Zelle wird mit einem kleinen konstanten Strom vollständig bis zur oberen Abschaltspannung U_{high} geladen, sodass $\text{OCV}(\text{SOC}(t_1) = 100\%) = U_{\text{high}}$ gilt. Dabei wird die Spannung sowie der Strom aufgezeichnet.
3. Anschließend wird die Zelle mit dem gleichen konstanten Strom wieder vollständig bis hin zu $\text{OCV}(\text{SOC}(t_2) = 0\%) = U_{\text{low}}$ entladen. Spannung und Strom werden wiederum aufgezeichnet.
4. Der zeitliche Verlauf $\text{SOC}(t)$ wird mithilfe von Satz 2.1 unter Berücksichtigung der jeweiligen Startwerte des SOCs zu den Zeitpunkten t_0, t_1, t_2 hergestellt.
5. Mithilfe der gemessenen Spannung und dem in Punkt 4 ermittelten SOC-Verlauf kann durch Eliminierung der Zeit t ein Zusammenhang zwischen OCV und SOC bestimmt werden.

¹ Hierzu kann beispielsweise das constant-current, constant-voltage (CCCV)-Verfahren verwendet werden [JW06, S. 195].

Ein Beispiel für eine nach diesem Ablauf messtechnisch ermittelte Kurve einer *Lithium-Polymer* (LiPo)-Zelle des Typs SLPB834374H von *Kokam* ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die Messungen wurden mit dem in Abschnitt 6.1 vorgestellten Messaufbau aufgenommen. Da beim Laden bzw. Entladen der Zelle zwangsläufig Überspannungen entstehen, zeigt es nur näherungsweise den Zusammenhang zwischen OCV und SOC. Aus diesem Grund ist auch eine Hysterese zu sehen [Ill14, S. 15]. Um den Einfluss der Überspannungen gering zu halten, wird bei diesem Verfahren ein kleiner Lade- bzw. Entladestrom gewählt, z. B. $C/40$ [Eck17, S. 207]. Die C-Rate beschreibt dabei die Stromstärke, die sich ergibt, wenn die Nennkapazität durch eine Stunde geteilt wird [JW06, S. 25]. Der Zusammenhang zwischen OCV und SOC wird oft durch Mittelung der Lade- und Entladekurve vorgenommen [WFS14] oder, wenn die Impedanz bekannt ist, durch Herausrechnen der Überspannungen bestimmt.

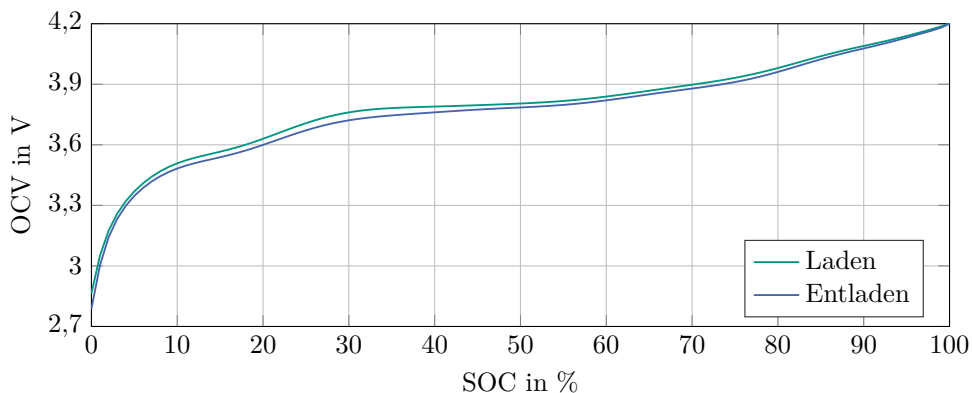


Abbildung 2.1: Näherungsweise Zusammenhang zwischen SOC und OCV einer LiPo-Batterie zelle des Typs SLPB834374H von *Kokam*.

Anhand des in den Punkten 1 - 5 beschriebenen Verfahrens lässt sich auch die tatsächliche Nennladekapazität der Zelle bestimmen. Diese muss beispielsweise aufgrund von Alterungseffekten oder Fertigungsstreuung nicht zwangsläufig mit der im Datenblatt angegebenen Ladekapazität übereinstimmen. Dazu wird (2.4) aus Satz 2.1 nach Q_N umgestellt und die SOC-Werte zu den Zeitpunkten t_0 und t_1 bzw. t_1 und t_2 eingesetzt. Da sich für Lade- und Entladevorgänge unterschiedliche Werte für die Ladekapazität Q_{charge} und $Q_{\text{discharge}}$ ergeben können, lässt sich auch die sogenannte Coulomb-Effizienz

$$\eta_{Ah} := \frac{Q_{\text{discharge}}}{Q_{\text{charge}}} \quad (2.5)$$

ermitteln. Da sie für die meisten Lithium-Ionen-Zellen hohe Werte von $\eta_{Ah} \approx 99,9\%$ annimmt, wird sie aber oft vernachlässigt [Ill14, S. 23]. Sie wird daher auch in dieser Arbeit nicht betrachtet, weshalb sie in Satz 2.1 nicht berücksichtigt wurde.

Der Zusammenhang zwischen OCV und SOC ist im Zeitbereich also durch eine Kennlinie $OCV(\text{SOC})$ beschreibbar. Da der SOC eine Ladungsmenge und die OCV eine von dieser Ladungsmenge abhängige Spannung darstellt, kann sie alternativ mithilfe einer

nichtlinearen Kapazität beschrieben werden [Ler16, Kapitel 4.1.4]. Eine zeitinvariante nichtlineare Kapazität wird mithilfe der differentiellen Kapazität $C(u)$ durch

$$C(u) := \frac{dq(u)}{du}, \quad (2.6)$$

$$i(u) = C(u) \frac{du}{dt} \quad (2.7)$$

beschrieben [Ler16, Kapitel 4.1.4]. Für die Lithium-Ionen-Zelle lässt sie sich unter Berücksichtigung von Definition 2.2 mit

$$C_0(\text{OCV}) = \frac{d\text{SOC} \frac{Q_N}{100}}{d\text{OCV}} \quad (2.8)$$

bestimmen.

Charakterisierung der Überspannungen

Eine Möglichkeit, eine Lithium-Ionen-Zelle und deren Prozesse bzw. Effekte nach Definition 2.1 zu modellieren, liegt in der Bestimmung ihrer Impedanz. Für die Untersuchung elektrochemischer Systeme hat sich die elektrochemische Impedanzspektroskopie (EIS) [MB87, OT11], [Ill14, S. 53, 58] bewährt. Dazu wird die Zelle mit einem sinusförmigen Stromsignal $i(t) = I_{\text{amp}}(\omega) \cdot \sin(\omega t)$ mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ angeregt und die sich ergebende Spannung $u(t)$ gemessen². Da sich die Zelle bei kleinen Amplituden näherungsweise linear verhält, kann das Spannungssignal durch $u(t) \approx U_{\text{amp}}(\omega) \cdot \sin(\omega t + \phi(\omega))$ mit der gleichen Frequenz und einer Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ approximiert werden. Die komplexe Impedanz lässt sich dann durch

$$Z(j\omega) = \frac{U_{\text{amp}}(\omega)}{I_{\text{amp}}(\omega)} e^{j\Delta\phi(\omega)} \quad (2.9)$$

beschreiben [Ill14, S. 24]. Um ein Impedanzspektrum zu erhalten, wird das eben beschriebene Verfahren für mehrere Frequenzen durchgeführt.

Die Überspannungen der Zelle treten in einem breiten Frequenzspektrum auf. Die Aufnahme des Impedanzspektrums ermöglicht eine Unterscheidung der verschiedenen Prozesse, da diese jeweils eigene charakteristische Zeitkonstanten besitzen [ISWIT13, LA97]. Da die Impedanz zusätzlich vom aktuellen Ladezustand der Zelle abhängt, werden für verschiedene SOC's eigene Impedanzspektren ermittelt. Diese SOC-Abhängigkeit weist nochmals auf die Nichtlinearität der Lithium-Ionen-Zelle hin.

In Abbildung 2.2 sind Impedanzspektren einer LiPo-Zelle für zwei verschiedene SOC's in einem Nyquist-Diagramm beispielhaft dargestellt. Abbildung 2.2a zeigt dabei das Spektrum für den SOC = 40 % und Abbildung 2.2b zeigt das Spektrum für den SOC = 90 %. Wie bei elektrochemischen Speichern üblich verhält sich die Zelle kapazitiv, weswegen die imaginäre Achse gespiegelt dargestellt wird [Ill14, S. 24]. Der induktive Bereich

² Alternativ lässt sich auch ein sinusförmiges Spannungssignal anlegen und das Stromsignal messen.

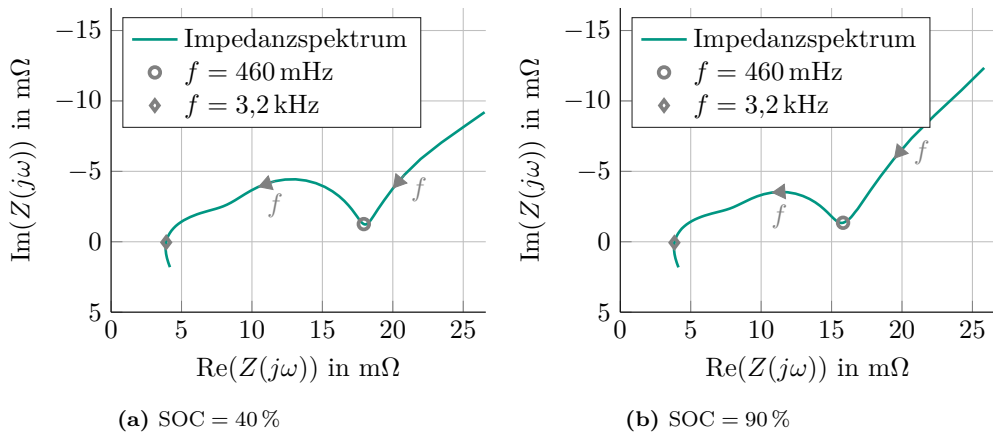


Abbildung 2.2: Impedanzspektren der LiPo-Zelle für zwei verschiedene Ladezustände.

oberhalb der Frequenz von 3,2 kHz lässt sich auf den Induktivitätsbelag der verwendeten Kabel zurückführen [Ill14, S. 131]. Die Kurven schneiden die reelle Achse bei etwa 3,2 kHz. Dieser Achsenabschnitt lässt sich als Ohmscher Widerstand beschreiben [Eck17, S. 16]. Der abgeflachte Bereich von 460 mHz bis 3,2 kHz ist charakteristisch für die Ladungstransferprozesse und die SEI. Die Diffusion zusammen mit der differentiellen Kapazität aus (2.8), die sich aufgrund der SOC-OCV-Beziehung ergibt, liegen im niederfrequenten Bereich unterhalb von 460 mHz [Eck17, S. 16].

Folglich ist eine Zuordnung der Batterieprozesse zu den Impedanzbereichen möglich. In mehreren Arbeiten, beispielsweise in [Eck17, S. 18-20] wurde beschrieben, dass sich die Prozesse der Batterie aus der Definition 2.1 jeweils mithilfe der Verteilung der Relaxationszeiten (engl. distribution of relaxation times, DRT)

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{\sin((1-\alpha)\pi)}{\cosh\left(\alpha \ln\left(\tau \cdot \tau_0^{-1/\alpha}\right)\right) - \cos((1-\alpha)\pi)} \quad (2.10)$$

mit $\tau_0 \in \mathbb{R}^{>0}$, $\alpha \in (0, 1)$ mathematisch beschreiben lassen. Es lässt sich zeigen, dass die Parameter der DRT τ_0 und α mit den Parametern eines RQ-Glieds nach

$$Z_{RQ}(j\omega) = \frac{R}{1 + RQ(j\omega)^\alpha} \quad (2.11)$$

mit $\tau_0 = RQ$ und $R, Q \in \mathbb{R}^{>0}$, $\alpha \in (0, 1)$ übereinstimmen [Eck17, S. 19, 75].

Das RQ-Glied nach (2.11) setzt sich aus einem Ohmschen Widerstand und einem sogenannten Konstantphasenelement mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{Q(j\omega)^\alpha}$ zusammen [Mac84, S. 37]. Charakteristisch für dieses Element ist die Ordnung α , welche nicht-ganzzahlige Werte annehmen kann. Das Konstantphasenelement kann somit als Verallgemeinerung einer Kapazität mit einer nicht-ganzzahligen oder auch *fraktionalen* Ordnung α betrachtet werden.

Unter Berücksichtigung, dass mehrere Prozesse nach (2.10) für die vollständige Beschreibung der Batterieprozesse benötigt werden und dass das RQ-Glied eine äquivalente Beschreibung zur DRT ist, lässt sich ein physikalisch motiviertes Impedanzmodell für die Lithium-Ionen-Zelle wie folgt aufstellen.

Definition 2.3 (Fraktionales Batteriezellenmodell)

Die Lithium-Ionen-Zelle lässt sich im Kleinsignalbereich durch die Impedanz

$$Z_{\text{ges}}(j\omega) = R_0 + \frac{1}{j\omega C_0} + Z_{LT,SEI}(j\omega) + Z_{\text{Diff}}(j\omega) \quad (2.12)$$

modellieren. Dabei beschreibt R_0 die Ohmschen Verluste, C_0 ist die differenzielle Kapazität nach (2.8), $Z_{LT,SEI}(j\omega)$ bezeichnet die gemeinsame Impedanz des Ladungstransfers und der SEI, da diese im gleichen Frequenzbereich liegen und $Z_{\text{Diff}}(j\omega)$ beschreibt die Diffusionsimpedanz. Sie können nach [Eck17, S. 20, 21] durch

$$Z_{LT,SEI}(j\omega) := \sum_{m=1}^N \frac{R_m}{1 + (j\omega)^{\alpha_m} R_m Q_m}, \quad (2.13)$$

$$Z_{\text{Diff}}(j\omega) := \sum_{s=1}^O \frac{R_s}{1 + (j\omega)^{\alpha_s} R_s Q_s} \quad (2.14)$$

mit $R_m, Q_m, R_s, Q_s \in \mathbb{R}^{>0}$ und $\alpha_m, \alpha_s \in (0, 1)$ für alle m, s beschrieben werden. Die Anzahl der Summenelemente N, O richtet sich nach der Komplexität der in der Batterie ablaufenden Prozesse und den verwendeten Materialien und können daher mit dem Zelltyp variieren. Insgesamt besteht die Impedanz aus einem Ohmschen Widerstand, einer differenziellen Kapazität und einer Reihe von RQ-Gliedern.

Es ist zu beachten, dass die Impedanz vom SOC abhängt und sich somit auch die Parameter der Definition 2.3 mit dem SOC ändern (vergleiche Anhang A sowie Abbildung 2.2). Zusätzlich gibt es, wie bereits erwähnt, Abhängigkeiten zur Stromstärke und zur Temperatur [Ill14, S. 15]. Die nichtlinearen Effekte sind in der Definition 2.3 nicht enthalten.

In der Literatur (vergleiche beispielsweise [RBM⁺11, Cha13, SBS⁺13, WFS14, XSL⁺16, LHLZ17]) wird die Impedanz jedoch häufig mit einer Reihe von RC-Gliedern beschrieben. Dabei wird die Impedanz auf folgende Weise angenähert:

$$Z_{\text{ges}}(j\omega) \approx R_0 + \frac{1}{j\omega C_0} + \sum_{c=1}^K \frac{R_c}{1 + j\omega R_c C_c}. \quad (2.15)$$

Falls in (2.15) $K \approx N + O$ gewählt wird, so werden ähnlich viele oder sogar weniger Parameter als in Definition 2.3 benötigt. Die Impedanz wird dabei in der Regel aber nur ungenau angenähert (vergleiche Abbildung 2.3). Wird hingegen $K \gg N + O$ verwendet, lässt sich die Impedanz zwar genau approximieren, aber es werden deutlich mehr Parameter benötigt. In beiden Fällen handelt es sich um nicht-fraktionale Modelle. Dadurch

sind zwar keine Methoden für fraktionale Systeme erforderlich, aber die physikalische Interpretierbarkeit geht verloren, da der direkte Zusammenhang zur DRT und somit auch zu den grundlegenden Materialprozessen nicht mehr existiert.

Das Impedanzspektrum aus Abbildung 2.2b mit dem SOC = 90% wurde mit (2.12) und den Parametern $N = 2$ und $O = 1$ mithilfe eines komplexen, nichtlinearen least-squares Verfahrens (engl. complex nonlinear least-squares, CNLS) [Bou86] angenähert. Die Impedanz des resultierenden 3-RQ-Modells ist in Abbildung 2.3a dargestellt. Das gleiche Impedanzspektrum wurde auch für ein nicht-fraktionales Modell nach (2.15) mit dem Parameter $K = 3$ und dem CNLS-Verfahren approximiert. Die Impedanz dieses 3-RC-Modells ist in Abbildung 2.3b abgebildet. Es ist zu erkennen, dass das fraktionale Modell die Impedanz besser annähern kann. Das nicht-fraktionale Modell kann das Spektrum nur näherungsweise charakterisieren, da sich die RC-Glieder aufgrund der festen Ableitungsordnung $\alpha = 1$ immer als Halbkreise im Nyquist-Diagramm äußern.

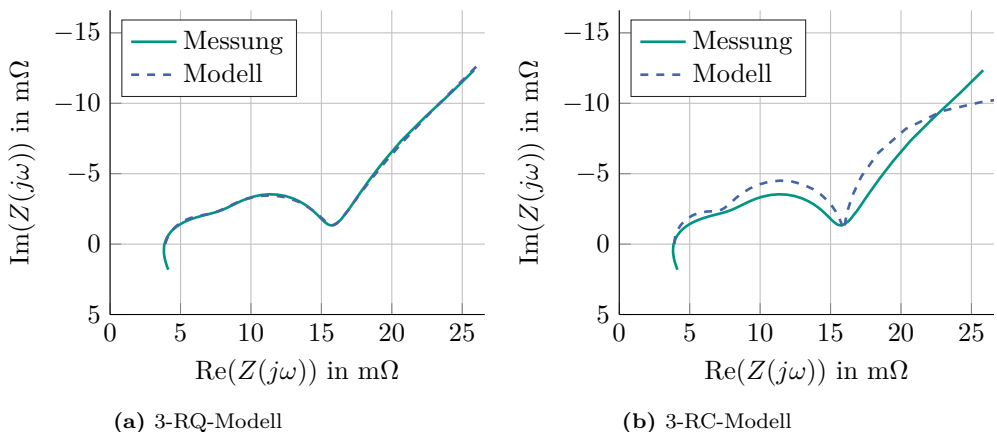


Abbildung 2.3: Impedanzspektren der LiPo-Zelle für den SOC = 90%, gefittet mit je einem fraktionalem und einem nicht-fraktionalem Modell.

Charakterisierung der Zelle mittels Parameteridentifikation

Im vorherigen Abschnitt wurde das fraktionale Batteriemodell mithilfe der EIS und der DRT motiviert. Die EIS hat allerdings den Nachteil, dass sie lange Lauf- bzw. Wartezeiten sowie hohe Anforderungen bezüglich des Signal-Rausch-Verhältnisses (SNR) der Messgeräte besitzt [MB87, OT11], [Eck17, S. 16, 23]. Um die Parameter des Batteriezellenmodells bestimmen zu können, ist es allerdings nicht zwingend notwendig die EIS und aufwändige Algorithmen wie das CNLS-Verfahren zu verwenden. Aktuelles Thema der Forschung ist daher die Entwicklung von Methoden zur direkten Parameteridentifikation fraktionaler Modelle. Vorteile davon sind unter anderem die Berechnung der Parameter während des laufenden Betriebs und, dass niedrigere Anforderungen an die Sensorik gestellt werden müssen. An dieser Stelle sei jedoch lediglich

auf die eigenen Arbeiten [EKH14a, EKH14b, EKH14c, SKKH18] sowie die Arbeiten [HL03, AMLO07, PSP12, TLW⁺15, VT15, EKH15] verwiesen.

2.2 Ladezustandsschätzung für die Lithium-Ionen-Batterie

In diesem Abschnitt wird der Stand der Technik zur Ladezustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batterien vorgestellt. Dazu wird zunächst die Schätzung für einzelne Batteriezellen mit dem Fokus auf fraktionalen Methoden diskutiert. Anschließend wird nicht nur die SOC-Schätzung von Batteriepacks, sondern auch deren Strukturen und die Stromaufteilung bei parallel verschalteten Batteriesystemen behandelt.

2.2.1 Ladezustandsschätzung für die Lithium-Ionen-Zelle

Der SOC der Batteriezelle ist eine wichtige Größe. Sie dient dem Benutzer der Batterie nicht nur als Information über die noch übrige nutzbare Energie, die in der Zelle gespeichert ist, sondern ist auch eine sicherheitsrelevante Größe. Auch beispielsweise für eine Alterungsschätzung wird der SOC der Zelle benötigt, da die Parameter der Zelle vom SOC abhängen (siehe Abschnitt 2.1.2) und mithilfe dualer Schätzverfahren oftmals gemeinsam geschätzt werden (siehe beispielsweise [Ple05, NTSG⁺13, RBSGD13, HYZ⁺18]). Dies ist notwendig, um die Degradation der Batterie abschätzen zu können.

Zur Zustandsschätzung von Batteriezellen werden häufig modellbasierte Methoden verwendet. Diese sind robust gegenüber Rauschprozessen und können den SOC auch bei dynamischer Anregung der Zelle akkurat schätzen [WFS14]. Dies ist insbesondere darauf zurückzuführen, dass die Algorithmen anhand des Modells zwischen den verschiedenen Batterieprozessen und deren Überspannungen unterscheiden können.

Ladezustandsschätzung mit nicht-fraktionalen Methoden

In der Literatur sind überwiegend Methoden zu finden, die die Zustände der Batterie auf Basis nicht-fraktionaler Modelle schätzen. Es gibt zu diesen Methoden zahlreiche Quellen, die bereits in einigen Artikeln zusammengefasst wurden. Aus diesem Grund sei an dieser Stelle lediglich auf die Übersichtsartikel [Cha13, WFS14, LHLZ17] verwiesen.

Fraktionale Modellierung der Lithium-Ionen-Zelle

Fraktionale Modelle werden zur Beschreibung von Lithium-Ionen-Batteriezellen in der Literatur immer häufiger verwendet. Insbesondere hat sich gezeigt, dass diese Modellform Vorteile wie eine hohe Genauigkeit bei moderater Komplexität, eine physikalisch motivierte Charakterisierung anhand der elektrochemischen Prozesse der Batte-

rie und eine Robustheit gegenüber Unsicherheiten bietet [SMF⁺14, SFG⁺15, WLPL15, ZLSW16, ZSL⁺16]. Besonders erwähnenswert sind dabei die beiden Artikel [SMF⁺14, SFG⁺15]. In diesen wird ein fraktionales Batteriezellenmodell anhand gekoppelter, partieller Differenzialgleichungen, welche die elektrochemischen Prozesse der Batterie beschreiben, hergeleitet.

Ladezustandsschätzung mit fraktionalen Methoden

Noch vor wenigen Jahren existierten nur wenige Veröffentlichungen zur SOC-Schätzung von Lithium-Ionen-Zellen auf Basis fraktionaler Modelle. Viele der Verfahren sind zeitgleich zu dieser Arbeit entstanden. Zu diesen Verfahren gehören fraktionale Methoden, die auf Luenberger-ähnlichen Beobachtern basieren [FSL⁺14, WLL⁺17] und fraktionale Sliding-Mode-Beobachter [YZCZ14, ZLZ⁺15, ZZC⁺17]. Überwiegend wurden jedoch Methoden verwendet, die auf dem Kalman-Filter beruhen. Beispiele dafür sind die Verwendung eines fraktionalen Kalman-Filters (FKF) mit einem linearen oder zumindest stückweise linearen fraktionalen Batteriemodell [XMCC13, MZLC16] und die Nutzung eines fraktionalen extended Kalman-Filters (FEKF), welches ein nichtlineares Batteriemodell verwendet [XSL⁺16, LLW⁺16, HYZ⁺18]. In [XSL⁺16] wurde zudem ein Vergleich zwischen fraktionalen und nicht-fraktionalen Modellen sowie zwischen der SOC-Schätzung mit dem fraktionalen und dem gewöhnlichen Kalman-Filter durchgeführt, mit dem Fazit, dass die fraktionalen Modelle und Methoden bessere Ergebnisse erzielen.

Charakteristisch für fraktionale Systeme ist zudem, dass der Verlauf ihrer Zustands- und Ausgangsgrößen nicht nur vom aktuellen Zustand, sondern von der gesamten Vergangenheit der Zustandsgrößen abhängt³. Da die komplette Vergangenheit des Systems in der Praxis nicht berücksichtigt werden kann, wird zur Approximation das sogenannte *Short-Memory-Prinzip* (SMP) verwendet, welches nur eine bestimmte Zeitspanne L der Vergangenheit berücksichtigt. Weiterhin ist nicht nur ein einzelner Punkt, sondern eine Funktion zur Initialisierung eines fraktionalen Systems notwendig. In der Literatur wurde die Auswirkung solch einer Initialisierungsfunktion auf die Zustandsschätzung der Batterie allerdings noch nicht untersucht. Des Weiteren wurde bisher kein systematischer und experimenteller Vergleich verschiedener Zeitspannen L im Sinne des SMPs durchgeführt. In bisherigen Veröffentlichungen wurde darauf entweder gar nicht eingegangen (beispielsweise in [XMCC13]) oder es wurde einfach ein Wert für L festgelegt (beispielsweise in [XSL⁺16, HYZ⁺18]). Weiterhin wurde das fraktionale unscented Kalman-Filter (FUKF) noch nicht für die Zustandsschätzung der Batteriezelle verwendet, obwohl das gewöhnliche unscented Kalman-Filter (UKF) für nicht-fraktionale Batteriezellenmodelle oftmals bessere Schätzergebnisse als das gewöhnliche extended Kalman-Filter (EKF) erzielt.

³ Fraktionale Systeme sind eine natürliche Beschreibungsform für partielle Differenzialgleichungen, wenn diese an ihren Grenzen betrachtet werden (siehe z. B. [Pod99, KST06]). Für partielle Differenzialgleichungen werden oftmals Finite-Elemente-Methoden verwendet, welche das Systemverhalten auch mithilfe einer Vielzahl an Elementen beschreiben. Daher lässt sich diese Aussage nachvollziehen.

2.2.2 Diskussion der Strukturen und der Ladezustandsschätzung für Lithium-Ionen-Batteriepacks

In vielen praktischen Anwendungen werden mehrere Batteriezellen seriell und parallel miteinander zu einem sogenannten *Batteriepack* verschaltet, um Spannungs-, Strom- und Leistungsanforderungen zu erfüllen [KSJC11, BM16, TA11, BWRL18], [JW06, S. 244]. Dabei werden ausschließlich seriell verschaltete Zellen als *Batteriestrang* und rein parallel verschaltete Zellen als *Zellbündel* bezeichnet [JW06, S. 244]. Die Bezeichnungen *Batterie* und *Batteriesystem* werden in dieser Arbeit äquivalent als Oberbegriffe für Batteriezellen und Batteriepacks verwendet.

Wie auch bei einzelnen Zellen ist es notwendig den SOC des Batteriepacks zu ermitteln [LHL⁺13]. Eine Schwierigkeit dabei ist jedoch, dass Alterung, Fertigungstoleranzen, Temperaturunterschiede und unterschiedliche Kontaktwiderstände dafür sorgen, dass sich das Verhalten der einzelnen Zellen unterscheidet oder manche Zellen im Pack stärker als andere belastet werden [YZSL16, DWS⁺12, ZZHC14]. Dies kann zu weiteren, ungleichen Degradierungsgraden führen [XSGH13]. Aus diesem Grund ist es wichtig, dass jede einzelne Zelle des Batteriepacks betrachtet wird. Klassische Ansätze verwenden dazu einen zentralen Ansatz, bei dem die Zustände aller Zellen in einem einzigen Computer bestimmt werden. Ein Beispiel dafür ist in [LHL⁺13] gegeben.

Die in diesem Abschnitt genannten Quellen verwenden ausschließlich nicht-fractionale Modelle und Methoden. Auf fraktionale Batteriemodelle angewendete Methoden zur Zustandsschätzung von Batteriepacks sind in der Literatur nicht existent.

Ansätze mit Ausnutzung der Batteriestruktur

Es wurde bereits in [LHL⁺13, SX15] darauf hingewiesen, dass es eine wachsende Anzahl an Methoden gibt, die sich mit der SOC-Schätzung von Batteriepacks und nicht nur einzelnen Zellen auseinandersetzen. Dabei wird häufig versucht die benötigte Rechenleistung zu reduzieren oder das Wissen über die Struktur des Packs so auszunutzen, dass Informationen effizienter genutzt werden können. Viele Algorithmen wie beispielsweise in [DSW06, DWS09, LLW09, SHZL11, ZJZS12, CHC13] nutzen dazu ein einzelnes Ersatzschaltbildmodell, welches aus den gemittelten Parametern aller Zellen errechnet wird, für den gesamten Batteriepack. Mithilfe dieses Modells wird dann ein einzelner SOC für den Batteriepack geschätzt. Auch wenn die Schätzung dadurch deutlich einfacher wird, ist es allerdings schwierig einen aussagekräftigen SOC für den gesamten Batteriepack zu definieren [Ple09]. Weiterhin sollte für einen sicheren Betrieb der SOC jeder einzelnen Zelle betrachtet werden [JW06, S. 244], [LBK⁺18], sodass diese Methoden für die praktische Anwendung nicht geeignet sind.

Ein weiterer Ansatz aus [Ple09, DWS⁺12] ist die Bestimmung des gemittelten SOC's eines Batteriestrangs, welcher anschließend für jede Zelle individuell angepasst wird. Im Gegensatz zu einer direkten Schätzung jeder Zelle kann so Rechenleistung eingespart werden.

Untersuchung parallel geschalteter Batteriesysteme

In letzter Zeit entstand in der Literatur größeres Interesse an der Untersuchung parallel verschalteter Batteriesysteme [BMG14, BM16, BHS⁺16, NK18, BWRL18]. Insbesondere wird das Problem untersucht, dass sich der Gesamtstrom aufgrund unterschiedlicher Parameter ungleichmäßig zwischen den Zellen oder Strängen aufteilt [BM16, DWS⁺12, YZSL16].

In [BWRL18, NK18] wird diskutiert, dass die Verwendung von Zellbündeln bzw. die Reihenschaltung mehrerer Zellbündel, zu einer erhöhten Alterung der einzelnen Zellen führen kann, weil diese unterschiedlich stark belastet werden. Dieser Effekt wird beschleunigt, je stärker sich die einzelnen Zellparameter unterscheiden. Da selbst bei sorgfältiger Auswahl der Zellen jedoch immer Abweichungen zwischen den Zellen vorhanden sind [LBK⁺18], [JW06, S. 240], kann dieser Effekt nicht gänzlich vermieden werden. Möglichkeiten um zumindest Fehlerfälle zu verhindern, ist die Verwendung von Bond-Drähten, die bei zu großen Strömen die elektrische Verbindung zu den betroffenen Zellen auftrennen [Ruo16]. Allerdings ist diese Auftrennung nicht reversibel, sodass die betroffene Zelle nicht weiter genutzt werden kann. Eine Alternative ist die Verwendung von Schalernetzwerken [KQQ12], die je nach Struktur die Zellen nicht nur überbrücken, sondern auch beliebig und dynamisch miteinander verschalten können. Dieser Ansatz liefert jedoch noch weitere Fehlerquellen, da beispielsweise An- und Abschaltzeiten der Schalter berücksichtigt werden müssen.

Weiterhin wird in [NK18] diskutiert, dass eine Parallelschaltung von Strängen (siehe Abbildung 2.4) eine einfachere Bestimmung der einzelnen Zellzustände ermöglicht. Solch eine Verschaltung kann zusätzlich zu einer erhöhten Ausfallsicherheit führen [LBK⁺18], da einzelne Stränge beispielsweise im Fehlerfall mit wenig Aufwand zu- oder abgeschaltet werden können [ZCS14]. Im Gegensatz zu den Zellbündeln werden zwar mehr Spannungssensoren benötigt, diese sind aber im Vergleich zu Stromsensoren kostengünstiger und genauer [LBK⁺18].

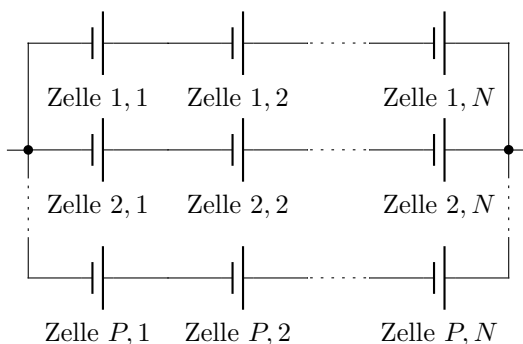


Abbildung 2.4: Aufbau eines Batteriepacks, bestehend aus P parallel geschalteten Strängen mit je N seriell verschalteten Zellen.

Nichtsdestotrotz teilen sich auch bei dieser Batteriestruktur die Ströme ungleichmäßig auf die Stränge auf [WLW⁺06, BMG14, BM16, BHS⁺16]. Die Messung aller Teilströme ist jedoch oftmals unerwünscht, da hohe Anforderungen an Stromsensoren gestellt werden [LBK⁺18] und diese daher vergleichsweise teuer sind, Leistungsverluste hervorrufen oder aufgrund variierender Fehlergrößen nur unter bestimmten Voraussetzungen verwendet werden können [CBS⁺15, WFS14]. Daher wird häufig nur der Gesamtstrom der Batterie gemessen, sodass die genaue Aufteilung des Gesamtstroms auf die einzelnen Stränge unbekannt ist [LBK⁺18]. Dies ist jedoch problematisch, da die Ströme der einzelnen Stränge sicherheitskritische Größen darstellen (vergleiche Abschnitt 2.1.1). Weiterhin sollten sie bekannt sein, um die Batterie optimal nutzen zu können.

In der Literatur wurde das Problem der Ermittlung der Teilströme bisher in nur wenigen Arbeiten untersucht. In [WLW⁺06] wird ein Algorithmus zur Simulation der Stromaufteilung vorgeschlagen. Aufgrund einer iterativen Vorgehensweise lässt sich die benötigte Rechenleistung vorab nicht eingrenzen. Weiterhin ist der Algorithmus für große Batteriepacks nicht skalierbar. Die Bestimmung der Teilströme mithilfe einer Maschenanalyse wurde in [BMG14, BM16] simulativ untersucht. Dort wurde die Auswirkung verschiedener Kabel- und Kontaktwiderstände auf die Stromaufteilung betrachtet.

Der bisher einzige Ansatz für die SOC-Schätzung, welcher gänzlich auf eine Strommessung verzichtet, wurde in [CBS⁺15] vorgeschlagen. Dort wird eine gefilterte Klemmenspannung für die SOC-Schätzung ohne Messung des Stroms verwendet. Allerdings werden dabei keine Modell- und Messunsicherheiten berücksichtigt. Zusätzlich wird dort die Inverse der SOC-OCV-Kurve verwendet, welche für viele Zelltypen nicht injektiv und somit nicht eindeutig invertierbar ist [SGL14, WFS14].

Zusammenfassend existiert in der Literatur bisher noch keine Methode, die eine modellbasierte Schätzung der Teilströme vornimmt.

2.3 Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme

In den folgenden Abschnitten wird zuerst der Stand der Technik zur Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und anschließend die verteilte Zustandsschätzung vorgestellt.

2.3.1 Zustandsschätzung fraktionaler Systeme

In diesem Abschnitt werden verschiedene Verfahren für die Zustandsschätzung fraktionaler Systeme betrachtet, zusätzlich zu den Methoden aus Abschnitt 2.2.1, die bereits zur SOC-Schätzung von Lithium-Ionen-Zellen verwendet wurden. Interessant ist insbesondere, dass die meisten Methoden erst in den letzten zehn Jahren veröffentlicht wurden. Dies deutet darauf hin, dass fraktionale Methoden in der Regelungstechnik noch relativ jung sind. Auffällig ist auch, dass die meisten Verfahren im Bereich der fraktionalen Kalman-Filter veröffentlicht wurden. Dies ist ein Indiz dafür, dass sich diese Filter für die Zustandsschätzung fraktionaler Systeme eignen. Insgesamt ist bei

den hier genannten Verfahren aber zu beachten, dass es sich um Methoden zur Pseudo-Zustandsschätzung fraktionaler Systeme handelt [SFMF12]. Im späteren Abschnitt 3.2.2 wird die Bedeutung und die Herkunft dieses Begriffs genauer diskutiert.

Lineare fraktionale Kalman-Filter

Das FKF wurde erstmalig in [SD06] vorgestellt. Es wird für die Zustandsschätzung linearer zeitdiskreter fraktionaler Systeme mit stochastischen Störungen verwendet. Für die Herleitung wird die Vereinfachung angenommen, dass Schätzwerte vergangener Zustände nicht aktualisiert werden, wenn neue Messdaten vorliegen. Weiterhin wird die Annahme getroffen, dass die Schätzungen der vergangenen Zustände unkorreliert sind. Aufgrund dieser Vereinfachungen ist das FKF im Gegensatz zum nicht-fraktionalen Kalman-Filter kein Minimum-Varianz-Schätzer. Da bei fraktionalen Systemen die Berücksichtigung der Vergangenheit des Systems notwendig ist, erhöht sich auch der Rechenaufwand und Speicherbedarf des Filters. Um dies zu beschränken werden oftmals zusätzliche Maßnahmen ergriffen, wie beispielsweise das in Abschnitt 3.1.2 vorgestellte SMP.

Im Gegensatz zum FKF, welches von unkorrelierten vergangenen Zuständen ausgeht, berücksichtigt das verbesserte FKF aus [STV11] die Korrelation einer endlichen Anzahl vorheriger Zustände. Weiterhin wird auch die gleiche Anzahl vergangener Zustandswerte mithilfe der aktuellen Messdaten aktualisiert. Dadurch wird die Schätzung der vergangenen sowie der aktuellen Zustände verbessert. Allerdings wird diese Verbesserung mit einer erhöhten Komplexität erkauft. Das Filter aus [STV11] ist somit vor allem dann geeignet, wenn genügend Rechenleistung vorhanden ist, beispielsweise bei Offline-Anwendungen. In der selben Veröffentlichung wird das Filter für die Schätzung in einem Netzwerk mit lückenhaften Messungen verwendet. Das verbesserte FKF wurde in [SZ15] auf Systeme mit variabler fraktionaler Ordnung erweitert.

Weitere Verallgemeinerungen des FKF auf lineare fraktionale Systeme mit korreliertem Mess- und Systemrauschen sowie auf farbige Rauschprozesse zeitveränderlicher fraktionaler Ordnung werden in [Sie13] bzw. [SZ14] vorgestellt. Das FKF für fraktionale Systeme mit variabler Ordnung wird in [SZ14, SZ15] hergeleitet. In [ZTRFS17] wird ein FKF präsentiert, welches zusätzlich zu den Zuständen die unbekanntes Eingangsgrößen eines Systems schätzt, welches keinen Durchgriff dieser unbekanntes Eingangsgrößen zu den Ausgangsgrößen besitzt. Anwendungsbeispiele für das FKF sind die bereits erwähnte Schätzung des Ladezustands anhand eines stückweise linearisierten Batteriemodells in [XMCC13] und die Sensorfusion für MEMS-Inertialsensorik in [RKTM09].

Das fraktionale Pendant zum Kalman-Bucy-Filter wird in [ANAA12] hergeleitet. Dabei wird das FKF nach [SD06] anhand des Grenzübergangs zu beliebig kleinen Abtastzeiten betrachtet, sodass sich eine fraktionale Differenzialgleichung sowie eine generalisierte zeitkontinuierliche Riccati-Gleichung für den Schätzer ergibt.

Nichtlineare fraktionale Kalman-Filter

Die bisher in diesem Abschnitt vorgestellten FKF können ausschließlich für lineare fraktionale Systeme verwendet werden. Für die Anwendung fraktionaler Kalman-Filter auf nichtlineare fraktionale Systeme gibt es wie bei nicht-fraktionalen Systemen im Wesentlichen zwei unterschiedliche Ansätze: Die Linearisierung des Systemmodells um die aktuellen Schätzwerte sowie die Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schätzgrößen. Das FEKF aus [SD06] verwendet den ersten der Ansätze und nutzt das um den letzten Schätzwert linearisierte Systemmodell für die Zustandsschätzung. Der zweite genannte Ansatz zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten des Systems wird beim FUKF in [CAHCLP12] verwendet. Dieses benutzt deterministisch gewählte Stichproben um die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Schätzwertes und von ihm abhängiger Größen anzunähern.

Anwendung findet das FEKF beispielsweise bei der Synchronisation chaotischer fraktionaler Systeme [SSAM14] oder bei der Parameter- und Systemordnungsidentifikation [SD06]. Wie bereits erwähnt, wurde das FEKF auch im Batteriebereich für die SOC-Schätzung von Lithium-Ionen-Batteriezellen mithilfe eines nichtlinearen fraktionalen Batteriemodells verwendet [XSL⁺16]. In [ANT⁺17] wird das FEKF an Systeme mit unterschiedlich zeitverzögerten Messungen angepasst. Das FUKF wird in [CAHCLP12] zur Parameteridentifikation eines linearen fraktionalen Systems angewendet. In [SMMS16] wird ein duales FUKF verwendet, um die Zustände und die Ordnung eines nichtlinearen fraktionalen Systems zu bestimmen.

In Kapitel 3.3 werden FEKF sowie FUKF aufgrund ihrer Ähnlichkeit zu den Methoden, die in dieser Arbeit entwickelt wurden, detaillierter vorgestellt. Außerdem werden sie später zum Vergleich herangezogen. Die Herleitungen zu FEKF und FUKF sind in Anhang C.1 und C.2 zu finden.

Fraktionale Luenberger-ähnliche Beobachter

Ein Luenberger-ähnlicher Beobachter für zeitdiskrete fraktionale LTI-Systeme (linear, zeitinvariant) wird in [DS06] vorgestellt. Außer der Verwendung fraktionaler Ableitungen ist er identisch zu einem klassischen Luenberger-Beobachter. Er wurde unter Berücksichtigung von Stabilitätskriterien für fraktionale Systeme entworfen. In [SFMF12] wird ein Luenberger-Beobachter für zeitkontinuierliche fraktionale LTI-Systeme beschrieben, welcher anhand einer Polvorgabe parametrisiert und mittels einer Wärmeleitung in einem Metallstab validiert wurde. Ein ähnlicher Ansatz wird in [Koc13] präsentiert, welcher mittels linearer Programmierung und einer linearen Matrixungleichung (LMU) für fraktionale LTI-Systeme entworfen wird. Für Systeme mit nichtlinearem Anteil wird in [BM12a, BM12b] ein Beobachter hergeleitet. Dabei wird die direkte Methode nach Lyapunov auf fraktionale Systeme erweitert und mithilfe einer LMU gelöst. Der nichtlineare Anteil muss dabei Lipschitz-stetig sein. Ein ähnlicher Ansatz für die gleiche Systemklasse wurde fast zeitgleich in [LZ13] veröffentlicht. Dort wird ein Beobachter anhand einer LMU und einer Singulärwertzerlegung hergeleitet. Dieser kann zusätzlich

Parameterunsicherheiten berücksichtigen, wodurch eine erhöhte Robustheit gewährleistet wird.

Fraktionale H_∞ -Beobachter

In [BDZR14] wird ein H_∞ -Beobachter für die Zustandsschätzung fraktionaler LTI-Systeme entworfen. Dabei wird das Verfahren anhand zwei verschiedener Methoden hergeleitet. Eine verwendet den Laplace-Bereich und eine koprime Faktorisierung zum Entwurf, die andere leitet das Verfahren anhand der Lösung einer LMU her. Eine Erweiterung dieses Ansatzes ist die Berücksichtigung veränderlicher Totzeiten, welche in [BZDR15] vorgestellt wird. In [LLCA14] wird die Auswirkung einer Initialisierung auf die Zustandsschätzung des H_∞ -Beobachters für kommensurable fraktionale LTI-Systeme⁴ untersucht. Es wird gezeigt, dass der Initialisierungsfehler begrenzt ist, keinen Einfluss auf die Stabilität des Entwurfs hat und gegen null konvergiert.

Fraktionale Sliding-Mode-Beobachter

Ein Sliding-Mode-Beobachter für eine bestimmte Klasse nichtlinearer kommensurabler fraktionaler Systeme wird in [DM11] mithilfe der fraktionalen Lyapunov-Stabilitätstheorie hergeleitet. Zeitgleich wurde in [PURJ11] ein Sliding-Mode-Beobachter zweiter Ordnung für fraktionale lineare zeitvariante Systeme präsentiert, welcher zusätzlich zu den Zuständen auch Fehlergrößen eines Systems schätzen kann. Weiterhin wird der Beobachter in [PURJ11] auf schaltende fraktionale Systeme angewendet. Eine Erweiterung auf lineare Systeme mit Initialisierung und unbekannter Eingangsgröße ist in [LLCA14] zu finden. Eine Erweiterung des Sliding-Mode-Beobachters für nichtlineare Systeme ohne Initialisierung, aber mit unbekannter Eingangsgröße wird in [DDB⁺16] vorgestellt.

Weitere Zustandsschätzer

In [NVD⁺12, NDVZ13] werden weitere Beobachter für lineare fraktionale Systeme mit nichtlinearem Anteil mithilfe von LMUs und der fraktionalen direkten Methode nach Lyapunov hergeleitet, die zusätzlich zu den Zuständen auch unbekannte Eingangsgrößen bestimmen können. Ein weiterer, nicht-asymptotischer Beobachter wurde in [WLB17] hergeleitet. Er nutzt dabei die Methode der Modulationsfunktionen, welche bisher üblicherweise für die Parameteridentifikation verwendet wird (siehe beispielsweise [LLKGP13, EKH14c, Eck17]). Der Stand der Technik zur Beobachtbarkeit fraktionaler Systeme ist in Anhang B beschrieben.

⁴ Ein kommensurables fraktionales System beschreibt ein System, welches für alle auftretenden Größen die gleiche Ableitungsordnung α bzw. ein Vielfaches davon verwendet.

2.3.2 Verteilte Zustandsschätzung

In der Einleitung und in Abschnitt 2.2.2 wurde bereits darauf hingewiesen, dass in vielen Batterieanwendungen eine Vielzahl an Zellen miteinander verschaltet werden. Aus Sicherheitsgründen werden für diese Systeme hohe Anforderungen an Sensorik, Datenverarbeitung und elektrische Verbindungen gestellt. Auch für die Schätzung dieser Systeme werden Eigenschaften wie eine hohe Robustheit gegenüber Störungen sowie Modularität und Skalierbarkeit gefordert, um das Design und die Wartung solcher Systeme zu vereinfachen. Bisherige Ansätze zur Schätzung von Batteriepacks verwerten teilweise Wissen über deren Strukturen oder nutzen vorhandene Kenntnis über Messgrößen besser aus, um Sensoren einzusparen oder die Rechenzeit zu verringern. Allerdings erfüllen diese Methoden nicht die gewünschten Eigenschaften. Vielmehr weisen sie verschiedene Nachteile auf, wie beispielsweise fehlende praktische Anwendbarkeit.

Aus der Literatur ist bekannt, dass eine Dezentralisierung und Verteilung eines Systems die geforderten Vorteile mit sich bringen kann. Eine Dezentralisierung bzw. eine Verteilung beruht auf der Partitionierung eines Systems und eignet sich insbesondere für LSS, weil diese aus mehreren kleineren Subsystemen bestehen [Mut98, S. 3, 7, 64, 65], [Hil12, S. 50, 58]. Diese Eigenschaft ist für Batteriepacks erfüllt, da sie sich aus vielen verschalteten Batteriezellen zusammensetzen, weswegen man sie der Klasse der LSS zuordnen kann. Für die weitere Beschreibung der verteilten Zustandsschätzung werden zunächst die Definitionen der Dezentralisierung und der Verteilung in Anlehnung an [Hil12, S. 41, 42] eingeführt.

Definition 2.4 (Dezentrale Zustandsschätzung)

Bei einer Dezentralisierung werden die Sensoren oder Messeinrichtungen des Gesamtsystems in sogenannte Knoten oder Subsysteme gruppiert. Dabei werden die in den Subsystemen vorliegenden Messungen lokal verarbeitet und eine Zustandsschätzung auf Basis dieser Größen vorgenommen. Die geschätzten Zustände werden dann mithilfe einer Fusion zusammengeführt, sodass jeder Knoten optimale Schätzergebnisse nicht nur auf Basis der lokalen Messungen, sondern unter Berücksichtigung aller Messungen berechnen kann. Diese Fusion kann über einen zentralen Prozessor oder in jedem Knoten lokal durchgeführt werden und erfordert einen Datenaustausch zwischen allen Subsystemen. Charakteristisch für die Dezentralisierung ist, dass jeder Knoten lokal zwar nur einen Teil der Messungen verarbeitet, aber trotzdem den kompletten Zustandsvektor des Gesamtsystems beinhaltet.

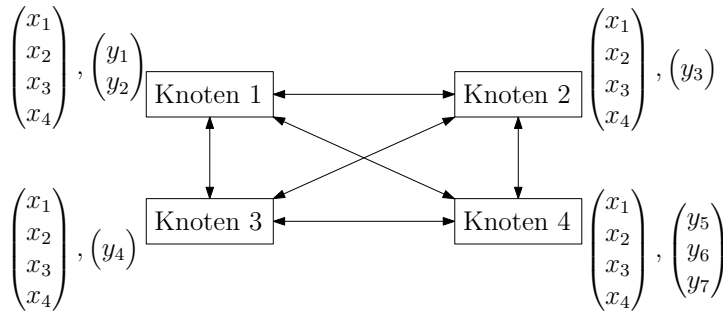
Eine schematische Darstellung der Dezentralisierung ist in Abbildung 2.5a gegeben.

Definition 2.5 (Verteilte Zustandsschätzung)

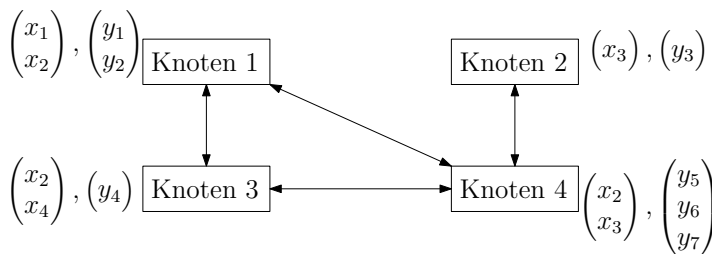
Bei einer Verteilung wird, zusätzlich zur Dezentralisierung der Messungen aus Definition 2.4, in jedem Knoten auch nur ein Unterraum des Zustandsvektors betrachtet. Dieser enthält nur Zustände, die im lokalen Knoten relevant sind. Durch diese Un-

terteilung des Zustandsraums ist es nicht mehr zwingend nötig, dass alle Knoten miteinander kommunizieren, sondern nur noch die Knoten, bei denen sich Teile des lokalen Zustandsvektors überschneiden bzw. die Informationen zur Verbesserung der Schätzung bereitstellen können.

Eine schematische Darstellung der Verteilung ist in Abbildung 2.5b gegeben.



(a) Dezentrales System



(b) Verteiltes System

Abbildung 2.5: Schematische Darstellungen eines dezentralen und eines verteilten Systems (nach [MDW94]).

Eine reine Dezentralisierung nach Definition 2.4 und die damit verbundene Kommunikation aller vorhandenen Knoten ist oftmals nicht erwünscht. Zusätzlich ist die Dezentralisierung nur ein Sonderfall der Verteilung, in welcher der lokale Zustandsvektor in allen Subsystemen dem Zustandsvektor des Gesamtsystems entspricht. Aus diesem Grund werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit nachfolgend nur verteilte Systeme betrachtet. Für die verteilte Zustandsschätzung nach Definition 2.5 können sich nach [Mut98, S. 64, 65, 112] folgende Vorteile im Vergleich zu einer zentralen Zustandsschätzung ergeben:

- **Modularität:** Alle Berechnungen und Fusionschritte werden lokal in den Knoten durchgeführt und es ist kein Wissen über die globale Netzwerkstruktur notwendig. Daher können die Knoten unabhängig voneinander aufgebaut und parametrisiert werden. Diese Eigenschaft vereinfacht das Systemdesign, die Anwendung und die Wartung.

- **Robustheit:** Bei Ausfall eines Teilsystems oder einer Störung der Kommunikation fällt nicht das gesamte System aus, da es nicht von einem einzelnen Prozessor abhängt.
- **Skalierbarkeit und Erweiterbarkeit:** Die Verteilung des Gesamtmodells und die direkte Kommunikation zwischen den Knoten bewirken, dass nicht alle Subsysteme Informationen austauschen müssen. Bei Erweiterungen des Systems müssen also nur die Subsysteme angepasst werden, bei denen es Überschneidungen der Zustandsgrößen gibt. Durch das Fehlen einer zentralen Kommunikationsstelle, welche alle Informationen sammelt, können oftmals Engpässe bezüglich der Kommunikationsbandbreite vermieden werden.
- **Flexibilität:** Da kein zentraler Knoten verwendet und kein Wissen über die gesamte Netztopologie benötigt wird, ist das System anpassungsfähig in Bezug auf Änderungen in der Netzstruktur. Es können also auch Knoten ggf. im laufenden Betrieb hinzugefügt oder entfernt werden.
- **Ordnungsreduktion und Parallelisierung:** Dadurch, dass lokale Knoten in der Regel nicht den gesamten Zustandsvektor, sondern nur einen Teil davon schätzen, besitzen lokale Knoten eine deutlich geringere Systemordnung als das globale System. Dadurch wird die Komplexität der Algorithmen reduziert. Durch die Verteilung laufen die Algorithmen zudem in verschiedenen Knoten und somit auf verschiedenen Prozessoren ab. Daher können die Algorithmen in den Knoten parallel berechnet werden.

Durch eine Verteilung können allerdings auch Nachteile und zusätzlicher Aufwand entstehen. Beispielsweise müssen die einzelnen Subsysteme Informationen austauschen, sodass ein entsprechender Kommunikationskanal eingerichtet werden muss. Weiterhin werden aufgrund der Parallelisierung mehrere Prozessoren benötigt. Darüber hinaus werden in den einzelnen Knoten nur Teile des Zustandsvektors geschätzt. Daher können von den Algorithmen die Kreuzkovarianzen zwischen allen Zuständen nicht exakt bestimmt werden, weswegen die Schätzung häufig suboptimal ist. Zusätzlicher Aufwand kann sich nach [Mut98, S. 66] außerdem aufgrund erhöhter Komplexität bei der Systemüberwachung und bei Kommunikationsproblemen ergeben.

Die Idee der dezentralen Zustandsschätzung und Regelung wurde Mitte der 1970er Jahre geäußert, um sie beispielsweise auf verschaltete elektrische Großenergiesysteme anzuwenden (engl. large-scale interconnected electric energy systems) [STL75, TSL76]. Es wurde diskutiert, wie eine effektive Zustandsschätzung und Regelung für diese Systeme aussehen kann.

In der Zwischenzeit wurde die verteilte Zustandsschätzung für nicht-fraktionale Systeme in der Literatur umfangreich erforscht. Die meisten entwickelten Verfahren basieren auf Kalman-Filter-Algorithmen [BDW91, RDW91, MDW94, OS05, KM07, LBDS08, HA10, NLNH11]. Weitere Methoden basieren auf Luenberger- [Sha86, CS95] oder H_∞ -Beobachtern [DWDS12, DWSD15]. Auch wenn viele der verteilten Zustandsschätzer rein für lineare Systeme entwickelt wurden [BDW91, RDW91, CS95, OS05, KM07, LBDS08], gibt es auch einige verteilte Kalman-Filter für nichtlineare Systeme. Diese beruhen häufig auf extended [SMB08, Mut98] oder auch unscented [HA10] Ansätzen.

Eine weitere Klassifizierung der Algorithmen lässt sich anhand der Fusion der geschätzten Zustände verschiedener Subsysteme vornehmen. Dabei kann diese Zustandsfusion anhand der Kovarianz bzw. des Informationsgehalts des jeweils geschätzten Zustands [KM07, KM⁺08, Koc08, MDW00] oder durch eine Mittelung bestimmter Größen vorgenommen werden [SOSM05, OS05].

Auch hinsichtlich ihrer Struktur können verteilte Zustandsschätzalgorithmen eingeteilt werden. In der Literatur finden sich beispielsweise komplett verknüpfte Architekturen [RDW91, CS95], beschränkt oder beliebig verknüpfte Strukturen [MDW94, KM07, HA10], kaskadierte Strukturen [LBDS08] oder auch unverknüpfte Strukturen auf Basis einer unknown-input Schätzung [SG92, DXZI14]. Bei letzterem werden die Abhängigkeiten zwischen den Subsystemen als unbekannte Größen interpretiert und berücksichtigt.

Die Kenntnis darüber wie das globale System in Subsysteme partitioniert werden kann, spielt für die praktische Umsetzung einer Verteilung eine wichtige Rolle. Häufig ist die Verteilung des Systems nicht eindeutig, sodass es verschiedene Möglichkeiten gibt das System zu unterteilen. Da sich Systeme aber oft direkt aus verschiedenen Teilsystemen zusammensetzen, wird diese Kenntnis in der Literatur häufig vorausgesetzt. Hinweise auf mögliche Subsysteme werden geboten, wenn Teile des Systems räumlich getrennt sind, wie z. B. Mehrtanksysteme, oder wenn verschiedene Domänen betrachtet werden, wie beispielsweise bei mechatronischen Systemen. Falls die Aufteilung jedoch unklar ist, wird z. B. in [Hil12, S. 50, 51, 58, 59] eine Heuristik zur Partitionierung des Systems vorgeschlagen.

Unabhängig von der Methode wird häufig eine Verteilung eines zeitdiskreten Systems⁵

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \quad (2.17)$$

so angenommen, dass die Ausgangsgleichung $\mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k})$ des Subsystems i nur von bestimmten Zuständen $\mathbf{x}_{i,k}$ abhängt. In der Literatur geht man oftmals davon aus, dass die lokale Zustandsgleichung $\mathbf{f}_{i,k}$ in Subsystem i auch nur von $\mathbf{x}_{i,k}$ abhängt (vergleiche z. B. [HA10, MDW94]). Allerdings kann der Fall auftreten, dass für die Berechnung der lokalen Zustände $\mathbf{x}_{i,k+1}$ auch die Kenntnis über weitere Zustände $\mathbf{x}_{j,k}$ benötigt wird, sodass $\mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{x}_{j,k})$ gilt. Die Zustände $\mathbf{x}_{j,k}$ sind im lokalen Subsystem i dabei nicht von Interesse und sollen daher auch nicht geschätzt werden. Allerdings werden sie für die Berechnung der Zustandsgleichung $\mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{x}_{j,k})$ benötigt⁶ [Hil12, S. 51].

Ein Ansatz in [Hil12, S. 51] umgeht diese Problematik, indem die Zustände $\mathbf{x}_{j,k}$ zwar in den Zustandsraum mit aufgenommen, aber ohne Berücksichtigung ihrer Dynamik

⁵ Eingangsgrößen und Störungen werden hier der Übersicht halber außer acht gelassen.

⁶ Beispielsweise wird in [Hil12, S. 74ff] die Verteilung eines Dreitanksystems vorgenommen. Jeder Tank wird durch ein Subsystem mit der eigenen Füllhöhe x_i als Zustandsgröße beschrieben, welche lokal geschätzt werden soll. Da die Systemdynamik jedes Tanks jedoch auch von der Füllhöhe $x_{j,k}$ jedes Nachbartanks beeinflusst wird, müssen diese Größen auch berücksichtigt werden. Die Füllhöhen der Nachbartanks werden aber lokal nicht geschätzt, sondern von den anderen Subsystemen kommuniziert.

konstant gehalten werden⁷. Dabei wird allerdings vorausgesetzt, dass der Einfluss dieser Zustände auf die Berechnung von $\mathbf{x}_{i,k}$ nur sehr klein ist, da sie sonst das Ergebnis verfälschen würden. Die Zustände $\mathbf{x}_{j,k}$ werden bei der Fusion mithilfe von Informationen anderer Subsysteme regelmäßig aktualisiert.

Im Gegensatz dazu wird in [KM07, KM⁺08] die Aufteilung des Systems direkt in der vorliegenden Form $\mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k})$ und $\mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{x}_{j,k})$ ohne Modifikation der Modellgleichungen betrachtet. Dieser Ansatz unterscheidet zwischen lokal relevanten Zuständen $\mathbf{x}_{i,k}$, die im lokalen Subsystem i geschätzt werden und rein externen Zustände $\mathbf{x}_{j,k}$. Diese externen Zustände werden nur in anderen Subsystemen geschätzt und von diesen im Fusionsschritt kommuniziert. Dadurch wird die Einschränkung, dass $\mathbf{x}_{j,k}$ nur einen kleinen Einfluss haben darf, nicht mehr benötigt, weshalb dieser Ansatz zielführender und weniger einschränkend ist.

Insgesamt hat sich die verteilte Zustandsschätzung von Systemen in vielen Anwendungen bewährt, an denen auch die oben genannten Vorteile gezeigt werden konnten. Beispielsweise seien hier ein Dreitanksystem [HA10], Unterwasserroboter [DMC00], Multitarget-Trackingsysteme [RDWS93], [Hil12, S. 83ff und S. 106ff] und mobile Roboteranwendungen [MDW94, MDW00] genannt.

Die verteilte Zustandsschätzung ist also ein weitestgehend bekanntes Gebiet der Regelungstechnik. Eine Ausnahme stellt jedoch die verteilte Zustandsschätzung für die Klasse der fraktionalen Systeme dar, die bisher noch nicht erforscht wurde.

2.4 Zusammenfassung und Forschungslücke

In den vorherigen Abschnitten wurde motiviert, dass sich die Prozesse innerhalb der Batterie mithilfe nichtlinearer fraktionaler Modelle physikalisch genau beschreiben lassen. Zusätzlich zeigen diese Modelle in Kombination mit fraktionalen Zustandsschätzalgorithmen auch in der Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriezellen eine höhere Genauigkeit als nicht-fraktionale Modelle und Methoden. Dies wurde anhand kürzlich veröffentlichter Quellen belegt.

Obwohl das FKF bereits zur Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Zellen verwendet wird, sind in diesem Themenfeld noch Punkte offen. Da das UKF im nicht-fraktionalen Fall häufig bessere Ergebnisse als das EKF erzielt, stellt sich zwangsläufig die Frage nach der Güte eines FUKFs in dieser Anwendung. Weiterhin sollten auch die Auswirkungen der für fraktionale Systeme notwendigen Konzepte des SMPs und der Initialisierungsfunktionen auf die Zustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batterien systematisch untersucht werden, da dies bisher noch nicht durchgeführt wurde.

Im Bereich der Zustandsschätzung für Batteriepacks wurden verschiedene nicht-fraktionale Methoden genannt, die versuchen, die benötigte Rechenleistung der Algorithmen

⁷ Werden die Zustände mit ihrer Dynamik berücksichtigt, besteht die Möglichkeit, dass wiederum andere Zustände $\mathbf{x}_{l,k}$ für die Beschreibung der Dynamik von $\mathbf{x}_{j,k}$ benötigt werden, wodurch sich die Problematik wiederholt.

zu reduzieren oder die Teilströme der Batterie in einer Simulation zu ermitteln. Diese Methoden sind jedoch nicht praktikabel, nicht skalierbar und liefern insbesondere keinen Beitrag zu den für LSS wünschenswerten Eigenschaften wie Skalierbarkeit und Modularität. Es wurde diskutiert, dass eine funktionale Verteilung der Zustandsschätzalgorithmen diese geforderten Eigenschaften liefern kann. Solch eine Verteilung wurde bisher aber noch nicht auf Batteriesysteme angewendet. Aus diesem Grund soll eine verteilte Zustandsschätzung zur Bestimmung der Ladezustände von Batterien in dieser Arbeit erstmalig betrachtet werden. Eine weitere Aufgabe ist die Untersuchung, ob sich die Teilströme der Batterie mithilfe modellbasierter Methoden zusätzlich bestimmen lassen.

Darüber hinaus soll der Batteriepack mithilfe fraktionaler Modelle beschrieben werden. Daher werden verteilte Zustandsschätzer für fraktionale Systeme benötigt, welche in der Literatur jedoch noch nicht existieren. Einzig das fraktionale unknown-input Kalman-Filter aus [ZTRFS17] lässt sich in speziellen Fällen als verteilter Zustandsschätzer auffassen⁸. Allerdings kann das Kalman-Filter aus [ZTRFS17] nicht auf die Batterie angewendet werden, da es keinen direkten Durchgriff der Eingangs- zu den Ausgangsgrößen berücksichtigen kann, welcher bei den Batteriemodellen (siehe Kapitel 4) jedoch vorliegt. Insgesamt ist es daher notwendig das Konzept der verteilten Zustandsschätzung auf die Klasse der fraktionalen Systeme zu übertragen. Dabei stellt sich zudem die Frage, ob sich verschiedene verteilte Strukturen realisieren lassen.

Nicht nur im Anwendungsbereich der Batterien, sondern auch im allgemeinen Fall der Zustandsschätzung für fraktionale Systeme werden überwiegend Algorithmen verwendet, die auf dem Kalman-Filter beruhen. Auch bei der verteilten Zustandsschätzung im nicht-fraktionalen Fall dominieren Methoden, die auf dem Kalman-Filter basieren. Da sich diese Filter bewährt haben, sollen sie auch die Basis dieser Arbeit bilden.

Die in der Einleitung genannten Ziele der Arbeit lassen sich anhand dieser Zusammenfassung zu den folgenden Forschungsfragen konkretisieren:

- Können die Konzepte der verteilten Zustandsschätzung auf die Klasse der fraktionalen Systeme übertragen werden?
 - Lassen sich verschiedene Strukturen für die verteilte Zustandsschätzung realisieren?
 - Ist die Entwicklung eines fraktionalen unknown-input Kalman-Filters für Systeme mit Durchgriff der unbekanntes Eingangsgröße möglich?
- Kann eine verteilte Zustandsschätzung auf Lithium-Ionen-Batteriepacks angewendet werden?
 - Wie lässt sich ein Batteriepack in Subsysteme unterteilen? Welche Informationen müssen zwischen den Subsystemen ausgetauscht werden?

⁸ Die Auffassung dieses Kalman-Filters als verteilter Zustandsschätzer ist unter der Berücksichtigung möglich, dass in [SG92, DXZI14] bereits unknown-input Zustandsschätzer zur verteilten Zustandsschätzung nicht-fraktionaler Systeme verwendet wurden.

- Welche Vor- und Nachteile bietet die verteilte Schätzung gegenüber zentralen Algorithmen? Können die gewünschten Eigenschaften wie Modularität, Robustheit und Skalierbarkeit erzielt werden?
- Können die Teilströme der Batterie modellbasiert geschätzt werden? Ist es möglich Sensoren einzusparen?
- Wie wirken sich das SMP und die Verwendung von Initialisierungsfunktionen auf die Ladezustandsschätzung von Lithium-Ionen-Batterien auf Basis fraktionaler Modelle aus?
- Kann das FUKF den Ladezustand einer Lithium-Ionen-Batteriezelle genauer schätzen als das FEKF?

Diese Fragen sollen in dieser Dissertation nach einer mathematischen Einführung beantwortet werden.

3 Fraktionale Analysis

In diesem Kapitel werden die für diese Arbeit grundlegenden Konzepte der fraktionalen Analysis und der fraktionalen Systeme eingeführt. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Analysis werden hierbei nicht nur ganzzahlige Ordnungen für die Differenzial- und Integralrechnung verwendet, sondern auch reelle Ordnungen.

Im nachfolgenden Abschnitt wird zunächst der Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient definiert, welcher für die Berechnung der fraktionalen Ableitung bzw. Integration in dieser Arbeit verwendet wird. Anschließend werden das SMP sowie die Initialisierung fraktionaler Ableitungen eingeführt, welche für die praktische Umsetzung bzw. die korrekte Beschreibung der fraktionalen Prozesse benötigt werden. Basierend auf den vorgestellten Definitionen werden weiterhin verschiedene Beschreibungsarten für fraktionale Systeme im Frequenz- und im Zeitbereich diskutiert. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die aus der Literatur bekannten Algorithmen des FEKFs sowie des FUKFs vorgestellt.

3.1 Grundlagen

In der Literatur ist eine Vielzahl an Definitionen für die Beschreibung fraktionaler Ableitungen bekannt [MCV⁺10, S. 11, 217], [Pod99, S. 43ff]. Jede dieser Definitionen besitzt bestimmte mathematische Eigenschaften, die sie für unterschiedliche Anwendungen oder Problemstellungen prädestinieren. In dieser Arbeit wird die Definition nach Grünwald-Letnikov [Pod99, S. 48, 55] verwendet, da diese besonders für die Beschreibung fraktionaler Systeme im zeitdiskreten Bereich geeignet ist [MCV⁺10, S. 217]. Daher ist sie ideal für die Implementierung der in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen auf einem digitalen Signalverarbeitungssystem. Im Anwendungsbereich der fraktionalen Kalman-Filter wird aus diesem Grund fast ausschließlich diese Definition verwendet.

3.1.1 Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient

Für die Herleitung des fraktionalen Differenzenquotienten nach Grünwald-Letnikov wird zunächst der gewöhnliche Differenzenquotient betrachtet. Mit dessen Hilfe lässt sich die erste Ableitung einer kontinuierlichen Funktion $f(t)$ wie folgt berechnen [Pod99, S. 43]:

$$\mathcal{D}^1 f(t) := \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \quad (3.1)$$

Wenn diese Berechnungsvorschrift rekursiv n -fach angewendet wird, lässt sich auch die Ableitung einer höheren Ordnung $n \in \mathbb{N}$ bestimmen [Pod99, S. 43]:

$$\mathcal{D}^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh). \quad (3.2)$$

Der Binomialkoeffizient lässt sich dabei mithilfe der Fakultätsfunktion oder äquivalent mit der Eulerschen Gamma-Funktion Γ für komplexe $n \in \mathbb{C}$ und natürliche Zahlen $j \in \mathbb{N}_0$ beschreiben [KST06, S. 26, 27], [MCV⁺10, S. 6], [WCCW17]:

$$\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-j+1)}{j!} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}. \quad (3.4)$$

Die Anzahl der Summanden in (3.2) entspricht dabei dem Wert der Ableitungsordnung n , da der Binomialkoeffizient für höhere Werte $j > n$ immer genau auf den Polstellen der Gammafunktion $\Gamma(n-j+1)$ in (3.4) liegt bzw. der Zähler in (3.3) zu null wird. Werte für $j > n$ müssen daher nicht berücksichtigt werden [Pod99, S. 44].

Weiterhin lässt sich die Ableitungsordnung n in (3.2) durch eine reelle Ableitungsordnung $\alpha \in \mathbb{R}$ ersetzen, da der Binomialkoeffizient auch für eine reelle oder komplexe Ordnung definiert ist. Dadurch wird die Definition der fraktionalen Ableitung bzw. der fraktionalen Integration nach Grünwald-Letnikov motiviert.

Definition 3.1 (Fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov [Pod99, S. 52-55])

Die fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist durch

$${}_a \mathcal{D}_t^\alpha f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \quad (3.5)$$

für eine m -fach kontinuierlich differenzierbare Funktion $f(t)$ im Intervall $[a, t]$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $m = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ definiert.

Definition 3.2 (Fraktionale Integration nach Grünwald-Letnikov [Pod99, S. 48-52], [KST06, S. 72])

Die fraktionale Integration nach Grünwald-Letnikov ist durch

$${}_a\mathcal{I}_t^{-\alpha} f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (3.6)$$

für eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f(t)$ im Intervall $[a, t]$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^{<0}$ definiert.

Bei dieser Erweiterung auf reelle Ordnungen liegen die Werte des Binomialkoeffizienten nicht mehr zwingend auf den Polstellen der Gammafunktion $\Gamma(\alpha-j+1)$ für $j > \alpha$ in (3.4) und (3.3) besitzt im Zähler keine Nullstelle mehr. Da der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ betrachtet wird, wird die Summe in den Definitionen 3.1 und 3.2 daher auf eine gegen unendlich laufende Anzahl an Elementen erweitert. Dennoch wird die Abrundungsfunktion formal benötigt, da $(t-a)/h$ nicht zwingend eine ganze Zahl ist⁹.

Die Definitionen 3.1 und 3.2 unterscheiden sich nur anhand des Definitionsbereichs der Ableitungsordnung α . Daher können sie äquivalent für die Berechnung von Ableitungen und Integralen verwendet werden, sofern der Definitionsbereich für die Ableitungsordnung jeweils auf $\alpha \in \mathbb{R}$ erweitert wird und die Funktion $f(t)$ die genannten Voraussetzungen erfüllt [LH98, S. 9]. Es gilt dann die Schreibweise ${}_a\mathcal{I}_t^{-\alpha} f(t) = {}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$. In der Literatur wird deshalb häufig der Begriff *Differintegration* verwendet.

Anschaulich betrachtet berechnet sich die fraktionale Ableitung bzw. Integration nach Grünwald-Letnikov als eine mit dem Binomialkoeffizienten gewichtete Summe vergangener Funktionswerte von $f(t)$. Aus diesem Grund wird oftmals von dem *Memory-Effekt* bzw. einem Gedächtnis bei fraktionalen Ableitungen und Systemen gesprochen [MCV⁺10, S. 18], [WCCW17].

Zeitvariante Ableitungsordnungen

Für Funktionen oder Systeme bei denen die Ableitungsordnung von der Zeit oder von anderen Parametern abhängt, die sich im Verlauf der Zeit ändern, muss die Definition 3.1 auf variable Ableitungsordnungen $\alpha(t)$ erweitert werden. Dies ist in dieser Arbeit von Bedeutung, weil die Impedanz der Batterie vom SOC abhängt. Da sich der SOC während des Betriebs der Batterie mit der Zeit ändert, ändert sich nach Definition 2.3 auch die Ordnung α .

In der Literatur werden hauptsächlich drei mögliche Varianten für die Definition einer

⁹ In [Pod99] wird deswegen die alternative Randbedingung $(t-a)/h = n, n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$ für den Grenzwert verwendet.

fraktionalen Ableitung mit variabler Ordnung diskutiert¹⁰. Diese werden in der nachfolgenden Definition eingeführt.

Definition 3.3 (Fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov mit variabler Ordnung [LH02, VC13, SMM15])

Die Erweiterungen der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov aus Definition 3.1 für eine zeitvariante Ordnung $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ sind durch folgende drei Varianten definiert:

$$V1 : {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{(-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t-jh)}{h^{\alpha(t)}}, \quad (3.7)$$

$$V2 : {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{(-1)^j \binom{\alpha(t-jh)}{j} f(t-jh)}{h^{\alpha(t-jh)}}, \quad (3.8)$$

$$V3 : {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{(-1)^j \binom{\alpha(jh)}{j} f(t-jh)}{h^{\alpha(jh)}}. \quad (3.9)$$

In Definition 3.3 ist zu beachten, dass der Nenner der letzten beiden Gleichungen innerhalb der Summe stehen muss, da er von j abhängt.

Die drei vorgestellten Varianten lassen sich unterschiedlich einordnen. Variante V1 verwendet unabhängig vom Verlauf der Ordnung immer den zum Zeitpunkt t vorliegenden Wert $\alpha(t)$. Im Gegensatz dazu ordnet V2 den vergangenen Funktionswerten von $f(t-jh)$ auch die entsprechenden Werte der fraktionalen Ordnung $\alpha(t-jh)$ zu. Zusätzlich zu dem Gedächtnis für vergangene Funktionswerte liegt also auch ein Gedächtnis für die vergangenen Ordnungen vor. Der dritte Fall V3 ordnet den neuesten Funktionswerten immer die ältesten Ableitungsordnungen zu.

In [LH02, VC13, SMM15] werden die drei Möglichkeiten V1 - V3 aus Definition 3.3 hinsichtlich ihrer Bedeutung in der Praxis diskutiert. Die Frage, welche der Varianten eine größere Relevanz zeigt, lässt sich jedoch nicht direkt beantworten. Deshalb wurden in [LH02, VC13, SMM15] sowohl theoretische als auch praktische Untersuchungen vorgenommen, um die Variationen auf Eigenschaften wie Linearität, Umsetzbarkeit und Verhalten bei Ordnungssprüngen zu analysieren. Dazu wurden in [LH02] die drei Möglichkeiten mithilfe schaltender Systeme nachgebildet. Es zeigte sich, dass für eine Realisierung von V3 vorab der komplette zeitliche Verlauf der Ordnung vorliegen muss. Da diese Variante durch die umgekehrte Zuordnung der vergangenen Funktionswerte zu den Ordnungen zusätzlich stark von der unteren Grenze a abhängt, hat sie keine besondere Bedeutung in der Praxis.

¹⁰ Weitere Varianten ergeben sich beispielsweise durch Permutationen der hier vorgestellten Möglichkeiten (siehe [LH98, S. 101]). Allerdings wird ihnen keine besondere Bedeutung zugesprochen. Sie werden in keiner anderen Veröffentlichung berücksichtigt.

Für mögliche Realisierungen von V1 und V2 ließen sich in [LH02] schaltende Modelle finden, die ihre Dynamik mit weniger Aufwand nachbilden können. Beispielhaft wurde solch ein System in [SMM15] analog aufgebaut, um Variante V1 zu verifizieren. Im Allgemeinen kann allerdings keine pauschale Aussage getroffen werden, ob fraktionale Systeme auch ein Gedächtnis für die Ableitungsordnung besitzen oder nicht. Vielmehr ist es wahrscheinlich, dass für beide Variationen reale Systeme existieren.

Sofern es nicht explizit gekennzeichnet ist, wird in dieser Arbeit V1 verwendet, weil nur die aktuelle Ableitungsordnung in den Gleichungen berücksichtigt wird und dadurch vergangene Ableitungsordnungen nicht gespeichert werden müssen, was sich positiv auf die benötigte Rechenleistung und den Speicherplatz auswirkt. Weiterhin werden in Abschnitt 6.2 zwei Modelle jeweils auf Basis von V1 bzw. V2 anhand realer Messdaten einer Batteriezelle untersucht und verglichen. In Abschnitt 6.3 werden zusätzlich auch Schätzalgorithmen auf Basis der beiden Varianten V1 und V2 zur SOC-Schätzung einer Batteriezelle angewendet. Allerdings konnte in beiden Fällen keine der zwei Varianten eine signifikante Verbesserung gegenüber der anderen aufweisen. Da sich die Ableitungsordnung in Abhängigkeit des SOC nur langsam und geringfügig ändert, werden allerdings auch keine großen Unterschiede erwartet. Dies ist dadurch zu begründen, dass bei konstanter Ableitungsordnung alle drei in Definition 3.3 genannten Variationen V1 - V3 mit Definition 3.1 für zeitinvariante Ordnungen übereinstimmen.

Zeitdiskrete Approximation

Die bisher genannten Definitionen für fraktionale Ableitungen bestehen jeweils aus einer Summe unendlich vieler Werte. Daher können sie in der Praxis mit den angegebenen Gleichungen nicht berechnet werden. Zusätzlich kann h insbesondere dann nicht beliebig klein gewählt werden, wenn die Ableitung mithilfe von digitalen Signalverarbeitungsprogrammen berechnet werden soll. Für solche Fälle, aber auch wenn allgemein zeitdiskrete Ableitungen oder Systeme betrachtet werden, muss h durch eine Abtastzeit $T \in \mathbb{R}^{>0}$ ersetzt werden. Dadurch ergibt sich eine zeitdiskrete Approximation für die fraktionale Ableitung mit einer festen Abtastzeit T und einer abkürzenden Schreibweise $f_k := f(kT)$, $\alpha_k := \alpha(kT)$ bzw. $t_k := kT$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Definition 3.4 (Zeitdiskrete Approximation der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov [MCV⁺10, S. 61])

Die Variante V1 der fraktionalen Ableitung nach Grünwald-Letnikov aus Definition 3.3 wird durch die zeitdiskrete Gleichung

$${}_a \mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k} f_k \approx \frac{1}{T^{\alpha_k}} \sum_{j=0}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha_k}{j} f_{k+1-j} \quad (3.10)$$

approximiert.

Da die Abtastzeit T und die untere Schranke a normalerweise vorgegeben sind, ist bei der Approximation die Anzahl der Summenelemente beschränkt, sofern auch $t \neq \infty$ und $a \neq -\infty$ beschränkt sind. Diese Approximation lässt sich analog auch auf die anderen beiden Varianten V2 und V3 aus Definition 3.3 anwenden.

3.1.2 Short-Memory-Prinzip

Im vorherigen Abschnitt wurden die verschiedenen Definitionen nach Grünwald-Letnikov vorgestellt. Diese haben gemein, dass sie die vergangenen Funktionswerte mit unterschiedlichen Gewichten aufsummieren, um die aktuellen Ableitungswerte zu berechnen. Auch wenn die zeitdiskrete Approximation der Ableitung aus Definition 3.4 verwendet wird, so steigt die Anzahl der Summanden mit fortlaufender Zeit t und konstanter Untergrenze a trotzdem weiter an. Für die Berechnung der Ableitung wird also in jedem Zeitschritt mehr Rechenleistung und Speicherplatz benötigt. Aus diesem Grund wird das SMP verwendet. Dabei wird die betrachtete Vergangenheit der Funktion $f(t)$ bei der Berechnung der Ableitung auf eine sich bewegende, meist vorher festgelegte Zeitspanne $[t - L, t]$ beschränkt. Das SMP wird in der nachfolgenden Definition beschrieben.

Definition 3.5 (Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient mit endlicher Speicherlänge nach [Pod99, S. 203], [WCCW17])

Der Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient mit endlicher Speicherlänge bzw. das SMP vernachlässigt für die Berechnung der fraktionalen Ableitung alle Werte der Funktion $f(t)$, die weiter als eine Zeitspanne $L \in \mathbb{R}^{>0}$ in der Vergangenheit zurück liegen. Somit gilt

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) \approx {}_{t-L}\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) \quad (3.11)$$

für $a < t - L$. Die Zeitspanne L wird auch als Speicherlänge bezeichnet.

Anschaulich kann die Approximation durch das SMP dadurch motiviert werden, dass $\lim_{j \rightarrow \infty} \binom{\alpha(t)}{j} = 0$ gilt und somit sehr weit zurückliegende Funktionswerte von $f(t)$ einen geringen Einfluss auf die Berechnung der Ableitung haben.

Falls die Funktion $|f(t)| \leq M$ im Bereich $a \leq t \leq b$ beschränkt und die Ableitungsordnung α konstant ist, kann der Fehler der Approximation durch das SMP nach [WCCW17] mit

$$\epsilon(t) = |{}_a\mathcal{D}_t^\alpha f(t) - {}_{t-L}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)| \leq \frac{M}{L^\alpha |\Gamma(1-\alpha)|}, \quad a+L \leq t \leq b \quad (3.12)$$

abgeschätzt werden. Die Länge des Speichers kann dann anhand der Vorgabe eines maximalen Fehlers ϵ mit

$$\epsilon(t) < \epsilon, \quad a+L \leq t \leq b \quad \Rightarrow L \geq \left(\frac{M}{\epsilon |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{1/\alpha} \quad (3.13)$$

bestimmt werden. Die mathematische Herleitung des SMP für konstante Ableitungsordnungen sowie die Abschätzungen (3.12) und (3.13) sind in [WCCW17] zu finden. Die Herleitung und die Abschätzungen lassen sich jedoch nicht direkt auf den Fall einer zeitvarianten Ableitungsordnung erweitern, da die Eulersche Gamma-Funktion in (3.12) und (3.13) für eine variable Ordnung nicht monoton ist und unendlich viele Polstellen besitzt. Da sich die Ordnung α oftmals auf einen Wertebereich abschätzen lässt, kann jedoch anhand dieses Bereichs eine worst-case Abschätzung vorgenommen werden.

In Definition 3.5 wird die fraktionale Ableitung mit unterer Grenze a also durch eine fraktionale Ableitung mit sich bewegender unterer Schranke $t - L$ approximiert. Nach Anwendung des SMPs auf die zeitdiskrete fraktionale Ableitung ergibt sich die nachfolgende Definition.

Definition 3.6 (Zeitdiskrete fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov unter Berücksichtigung des SMPs)

Durch die Anwendung des SMPs auf die zeitdiskrete fraktionale Ableitung nach Definition 3.4 ergibt sich die Approximation

$${}_a\mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k} f_k \approx \frac{1}{T^{\alpha_k}} \sum_{j=0}^z (-1)^j \binom{\alpha_k}{j} f_{k+1-j}, \quad z := \left\lfloor \min \left(\frac{L}{T} + 1, k + 1 - \frac{a}{T} \right) \right\rfloor, \quad (3.14)$$

in welcher die Anzahl an berücksichtigten Summanden nach oben beschränkt wird.

Der maximale Fehler, der sich durch das SMP ergibt, wird nach (3.12) kleiner, je größer L gewählt wird. Allerdings können weitere Fehler unter der Berücksichtigung, dass bereits Definition 3.4 eine Approximation ist oder bei der Verwendung großer Abtastzeiten, auftreten. Es ist daher zu erwarten, dass für große Speicherlängen der tatsächliche Fehler nicht beliebig klein wird, sondern aufgrund numerischer Fehler, welche durch die Rechengenauigkeit bei der Summenbildung hervorgerufen werden, wieder ansteigt. Aus diesem Grund können sich je nach Anwendung unterschiedliche Speicherlängen L als optimale Größen ergeben.

3.1.3 Initialisierung

Bei der fraktionalen Ableitung handelt es sich im Gegensatz zur gewöhnlichen Ableitung um keine lokale Operation, da für die Berechnung der Ableitung zum aktuellen Zeitpunkt t nach Definition 3.3 alle vergangenen Funktionswerte $f(\tau)$ mit $a < \tau < t$ berücksichtigt werden müssen. Es gilt daher im Allgemeinen [LH00, S. 2]:

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) \neq {}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t), \quad a < b \leq t. \quad (3.15)$$

In der Praxis kommt es vor allem dann zu Schwierigkeiten, wenn eine fraktionale Ableitung ab der unteren Grenze a berechnet werden soll, aber nur Werte ab einem späteren Zeitpunkt $b > a$ vorliegen. Beispielsweise wird zur exakten Beschreibung physikalischer Phänomene häufig die Untergrenze $a \rightarrow -\infty$ verwendet (vergleiche Abschnitt 3.2.1).

Falls $f(t)$ eine Messgröße ist, liegen jedoch keine Funktionswerte $f(t)$ für $t < b$ vor, wenn der Zeitpunkt b der Beginn der Messung ist. Nachfolgend wird angenommen, dass die Grenze a so gewählt wurde, dass die Funktionswerte $f(t)$ mit $t < a$ für die Berechnung der Ableitung keine Rolle spielen. Der Zeitpunkt $t = a$ wird daher auch Systemstartzeitpunkt genannt. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass ab dem Zeitpunkt $t = b$ Werte für die Funktion $f(t)$ zur Verfügung stehen. Dieser Zeitpunkt wird daher auch als Startzeitpunkt der Messung bezeichnet.

Falls es notwendig ist, dass sich die fraktionale Ableitung ${}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t)$ für die Zeiten $t \geq b$ identisch zur fraktionalen Ableitung ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t)$ verhält, wird eine geeignete Initialisierungsfunktion benötigt [LH00, S. 2]. Solch eine Initialisierung für die zeitvariante fraktionale Ableitung nach Grünwald-Letnikov ist in Satz 3.1 gegeben.

Satz 3.1 (Initialisierung)

Es seien die fraktionalen Ableitungen ${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t)$ und ${}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t)$ mit $a < b \leq t$ gegeben. Dann lässt sich die fraktionale Ableitung ${}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t)$ mit der Funktion

$${}_a\Delta_b^{\alpha(t)}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha(t)} \sum_{j=\lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t - jh) \quad (3.16)$$

initialisieren, sodass

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t) = {}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)}f(t) + {}_a\Delta_b^{\alpha(t)}(t), \quad {}_a\Delta_b^{\alpha(t)}(t) \neq 0 \quad (3.17)$$

gilt. Es sei weiterhin die Approximation nach Definition 3.4 gegeben. Dann ergibt sich unter der Annahme, dass die Werte a, b genau auf den Abtastzeiten mit

$$a_0 := a/T, \quad (3.18)$$

$$b_0 := b/T \quad (3.19)$$

und $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ liegen, folgende zeitdiskrete Approximation der Initialisierungsfunktion:

$${}_a\Delta_b^{\alpha_k}(t_k) \approx T^{-\alpha_k} \sum_{j=1}^{b_0 - a_0} (-1)^{j+k-b_0} \binom{\alpha_k}{j+k-b_0} f((b_0 - j)T). \quad (3.20)$$

Beweis:

Die Initialisierung leitet sich direkt aus der Grünwald-Letnikov-Definition ab und wird hier in Anlehnung an [LH98, S. 24, 25] auf zeitvariante Ableitungsordnungen erweitert.

Da $a < b$ gilt, wird (3.7) in zwei Terme aufgeteilt:

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} \frac{(-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t-jh)}{h^{\alpha(t)}} \quad (3.21)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha(t)} \underbrace{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t-jh)}_{=: {}_b\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} f(t)} \quad (3.22)$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha(t)} \underbrace{\sum_{j=\lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t-jh)}_{=: {}_a\Delta_b^{\alpha(t)}(t)}, \quad (3.23)$$

woraus direkt (3.17) und (3.16) folgt. Für den Approximationsschritt wird zunächst die Laufvariable mit $j = i + \lfloor (t-b)/h \rfloor$ substituiert:

$$\begin{aligned} {}_a\Delta_b^{\alpha(t)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha(t)} \sum_{j=\lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha(t)}{j} f(t-jh) \quad (3.24) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha(t)} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor - \lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor} (-1)^{i+\lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor} \binom{\alpha(t)}{i + \lfloor \frac{t-b}{h} \rfloor} f\left(t - \left(i + \left\lfloor \frac{t-b}{h} \right\rfloor\right)h\right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Weiterhin wird h durch die Abtastzeit T ersetzt. Zusätzlich werden die Gleichungen (3.18) und (3.19) verwendet, sodass die Zeiten a, b auf den Abtastzeitpunkten liegen und die Abrundungsfunktion wegfällt. Es folgt dann aufgrund der Approximation aus Definition 3.4

$${}_a\Delta_b^{\alpha_k}(t_k) \approx T^{-\alpha_k} \sum_{i=1}^{b_0-a_0} (-1)^{i+k-b_0} \binom{\alpha_k}{i+k-b_0} f((b_0-i)T), \quad (3.26)$$

was (3.20) entspricht und den Beweis abschließt. \square

Bei fraktionalen Ableitungen ist, im Gegensatz zu nicht-fraktionalen Ableitungen, also die Verwendung einer Initialisierungsfunktion notwendig, was in [LH98, LH00] ausführlich diskutiert wird. Überträgt man die Erkenntnisse des SMPs nach Definition 3.5 auf die Initialisierungsfunktion, wird ersichtlich, dass die Initialisierungsfunktion mit wachsender Zeit abklingt (vergleiche auch [LLCA14]). Spätestens sobald $b < t - L$ gilt, muss die Initialisierung aufgrund des SMPs nicht mehr berücksichtigt werden. Eine fehlende Initialisierung ist also vor allem dann problematisch, wenn nicht genügend Funktionswerte von $f(t)$ für die komplette Speicherlänge L vorliegen. In diesem Fall darf sie nicht vernachlässigt werden.

3.2 Beschreibungsarten fraktionaler Systeme

Die soeben eingeführten Definitionen der fraktionalen Ableitungen werden in diesem Abschnitt für die Beschreibung fraktionaler Systeme verwendet. Dazu wird zunächst ein fraktionales Frequenzbereichsmodell vorgestellt. Um diese Modelle auch im Zeitbereich beschreiben zu können, wird anschließend die Fouriertransformation der fraktionalen Ableitungen und Integrale eingeführt. Dabei wird das Thema der Initialisierung nochmals motiviert. Zum Abschluss des Abschnitts werden Zustandsraummodelle für zeitkontinuierliche und zeitdiskrete fraktionale Systeme eingeführt. Dabei wird der Begriff des Pseudo-Zustands diskutiert.

3.2.1 Frequenzbereichsdarstellung

Wie in Abschnitt 2.1.2 bereits diskutiert, können Lithium-Ionen-Batteriezellen mithilfe fraktionaler Impedanzen beschrieben werden. Eine allgemeine Form des fraktionales Frequenzgangs wird nachfolgend definiert.

Definition 3.7 (Fraktionaler Frequenzgang)

Der fraktionale Frequenzgang wird durch

$$Z(j\omega) := \frac{\sum_{l=0}^m b_l(j\omega)^{\beta_l}}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^{\alpha_i}} \quad (3.27)$$

beschrieben. Dabei sind $a_i, b_l \in \mathbb{R}$ die Parameter des Systems, $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ sind Zähler- bzw. Nennergrad, $\alpha_i, \beta_l \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ sind die fraktionalen Ordnungen und $j\omega \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Kreisfrequenz.

Um den in Definition 3.7 definierten Frequenzgang auch im Zeitbereich beschreiben zu können, wird die Fourier-Transformation für die fraktionale Differintegration benötigt. Diese wird im nachfolgenden Satz vorgestellt.

Satz 3.2 (Fourier-Transformation für fraktionale Integrale und Ableitungen [Pod99, S. 111, 112], [KST06, Kap. 1])

Die Fourier-Transformation mit den Vorschriften

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt = F(\omega) \quad (3.28)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(\omega) d\omega = f(t) \quad (3.29)$$

nach [Lun12, S. 235, 238] ist für das fraktionale Integral mit $\alpha \in (0, 1)$ in [Pod99, S. 111, 112], [KST06, Kap. 1] durch

$$\mathcal{F}\{-\infty \mathcal{I}_t^\alpha f(t)\} = (j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \quad (3.30)$$

gegeben. Die Fourier-Transformation der fraktionalen Ableitung mit $\alpha \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ berechnet sich nach [Pod99, S. 111, 112], [KST06, Kap. 1] zu

$$\mathcal{F}\{-\infty \mathcal{D}_t^\alpha f(t)\} = (j\omega)^\alpha F(\omega). \quad (3.31)$$

Dabei ist $F(\omega)$ die Fouriertransformierte von $f(t)$ nach (3.28).

Beispiel 3.1:

Es sei das RQ-Glied aus (2.11) gegeben:

$$Z_{RQ}(j\omega) = \frac{R}{1 + RQ(j\omega)^\alpha} = \frac{U_{RQ}(\omega)}{I_{RQ}(\omega)}. \quad (3.32)$$

Nach Umstellung der Gleichung ergibt sich mit Satz 3.2 die Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}\{R \cdot I_{RQ}(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{U_{RQ}(\omega) + RQ(j\omega)^\alpha \cdot U_{RQ}(\omega)\}, \quad (3.33)$$

$$\Leftrightarrow R \cdot i_{RQ}(t) = u_{RQ}(t) + RQ \cdot -\infty \mathcal{D}_t^\alpha u_{RQ}(t), \quad (3.34)$$

$$\Leftrightarrow -\infty \mathcal{D}_t^\alpha u_{RQ}(t) = -\frac{1}{RQ} u_{RQ}(t) + \frac{1}{Q} i_{RQ}(t), \quad (3.35)$$

welche die Dynamik des RQ-Glieds im Zeitbereich beschreibt.

In Satz 3.2 ist zu sehen, dass die Fourier-Transformation für fraktionale Ableitungen und Integrale in dieser Form nur gültig ist, wenn der Systemstartzeitpunkt im Zeitbereich zu $a \rightarrow -\infty$ gewählt wird. Wenn also eine fraktionale Impedanz wie die der Batterie im Zeitbereich betrachtet werden soll, muss die komplette Vergangenheit der Funktionswerte $f(t)$ berücksichtigt werden. In Beispiel 3.1 betrifft dies die Werte der RQ-Spannungen $u_{RQ}(t)$. In der Regel liegen die vergangenen Werte dieser Spannungen jedoch nicht vor. Alternativ kann zwar eine Initialisierungsfunktion verwendet werden, diese benötigt nach Satz 3.1 die vergangenen Werte der RQ-Spannungen jedoch auch. Eine Initialisierungsfunktion kann in diesem Fall also nur verwendet werden, wenn sie sich auf andere Weise bestimmen lässt. Eine Untersuchung wie sich die Verwendung bzw. die Vernachlässigung einer Initialisierungsfunktion beispielsweise auf die Zustandsschätzung oder andere Anwendungen von fraktionalen Systemen auswirkt, ist daher eine wichtige Aufgabe.

3.2.2 Fraktionale Zustandsraumdarstellung

Der fraktionale Frequenzgang in Definition 3.7 beschreibt nur das Ein- und Ausgangsverhalten des Systems. Um auch die im inneren des Systems ablaufenden Prozesse zu be-

trachten, werden nachfolgend Zustandsraummodelle eingeführt, die Informationen darüber bieten.

Definition 3.8 (Zeitkontinuierlicher fraktionaler Pseudo-Zustandsraum)

Ein nichtlineares zeitkontinuierliches fraktionales System wird durch die Gleichungen

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), t) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t), t) \quad (3.37)$$

mit

$${}_a\mathcal{D}_t^{\alpha(t)} \mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha_1(t)} x_1(t) \\ \vdots \\ {}_a\mathcal{D}_t^{\alpha_n(t)} x_n(t) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

beschrieben. Es ist eine Erweiterung des Zustandsraums in [MCV⁺10, S. 35] bei welchem eine von null verschiedene untere Grenze $a \in \mathbb{R}, a \leq t$ verwendet werden kann und den Zuständen verschiedene zeitvariante fraktionale Ableitungsordnungen $\alpha(t) := (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))^T \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^n$ zugeordnet werden können. Es sind $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ die Pseudo-Zustände, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ die Eingänge und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ die Ausgänge des Systems. Die Terme $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^r, \mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^s$ repräsentieren System- und Messrauschen. Die Zustands- und Ausgangsfunktionen $\tilde{\mathbf{f}}(t), \mathbf{g}(t)$ sind zeitvariant und nichtlinear. Die Funktion $\tilde{\mathbf{f}}$ ist mit einer Tilde gekennzeichnet, um den zeitkontinuierlichen Zustandsraum vom später eingeführten zeitdiskreten Zustandsraum unterscheiden zu können.

Eine solche oder ähnliche Zustandsraumdarstellung ist in der Literatur weit verbreitet. Bei den Größen $\mathbf{x}(t)$ in der Definition 3.8 handelt es sich jedoch nicht um Zustände im klassischen regelungstechnischen Sinn. Deswegen wird nachfolgend zunächst die Definition eines Zustands in der Regelungstechnik gegeben.

Definition 3.9 (Zustand eines dynamischen Systems [Lun12, S. 77])

Ein Vektor ψ wird Zustand eines Systems genannt, wenn für eine beliebige Zeit $t_e \geq t_0$ die Elemente $\psi_i(t_0)$ von ψ zum Zeitpunkt t_0 zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgrößen $\mathbf{u}(\tau)$ für $t_0 \leq \tau \leq t_e$ den Wert $\psi(t_e)$ und den Wert der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t_e)$ eindeutig bestimmen. ψ heißt auch Zustandsvektor und die Komponenten $\psi_i(t)$ von ψ Zustandsvariable oder Zustandsgröße.

Betrachtet man das System aus Definition 3.8, ist es jedoch nicht möglich nur mit dem Wissen über $\mathbf{x}(t_0)$ und den Eingangsgrößen $\mathbf{u}(\tau)$ für $t_0 \leq \tau \leq t_e$ die Werte $\mathbf{x}(t_e)$ und die Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t_e)$ eindeutig zu bestimmen, wie es in Definition 3.9 gefordert ist. Für die eindeutige Bestimmung dieser Größen müssen zusätzlich alle Funktionswerte $\mathbf{x}(\tau)$

ab der unteren Grenze $a \leq \tau \leq t_0$ bekannt sein, oder eine geeignete Initialisierungsfunktion vorliegen. Daher sind $\mathbf{x}(t)$ also nicht der Definition entsprechend klassische Zustandsgrößen. In [SFMF12] wird für die Größen $\mathbf{x}(t)$ die Bezeichnung *Pseudo-Zustände* vorgeschlagen, da sie dennoch wichtige Kenngrößen des Systems wiedergeben, die für regelungstechnische Zwecke von Bedeutung sind.

Wenn der Verlauf der Pseudo-Zustände $\mathbf{x}(\tau)$ für $a \leq \tau \leq t_0$ bzw. eine entsprechende Initialisierungsfunktion $\mathbf{x}_a \Delta_{t_0}^{\alpha(\tau)}(\tau)$ gemäß Satz 3.1 vorliegt, so kann $\mathbf{x}(t_e)$ bzw. $\mathbf{y}(t_e)$ gemäß Definition 3.9 aber trotzdem eindeutig bestimmt werden. Das Wissen über den gesamten Verlauf der Pseudo-Zustände ist also äquivalent zur Zustandsdefinition 3.9.

Wird zusätzlich die Approximation des SMPs verwendet, so muss zur Berechnung der Größen $\mathbf{x}(t_e)$ bzw. $\mathbf{y}(t_e)$ nicht die komplette Vergangenheit, sondern nur der Verlauf von $\mathbf{x}(\tau)$ für die Zeitspanne $t_e - L \leq \tau \leq t_e$ vorliegen. In den in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen werden die geschätzten Pseudo-Zustände des Systems immer mindestens für diesen Zeitraum berücksichtigt. Damit liegen zumindest näherungsweise alle benötigten Größen vor, um Definition 3.9 zu erfüllen. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit die Begriffe Zustand und Zustandsschätzung äquivalent zu den Begriffen Pseudo-Zustand und Pseudo-Zustandsschätzung verwendet.

Das Ziel ist es an dieser Stelle eine zeitdiskrete Darstellung des Systems aus Definition 3.8 herzuleiten. Mithilfe der Approximation aus Definition 3.4 kann der Zustandsraum in den zeitdiskreten Bereich überführt werden. Dies wird nachfolgend durchgeführt.

Satz 3.3 (Zeitdiskreter fraktionaler Zustandsraum)

Ein nichtlineares zeitdiskretes System mit variabler fraktionaler Ordnung ist in Anlehnung an [MCV⁺10] durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{a}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (3.39)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (3.40)$$

mit

$$\Upsilon_{j,\alpha,k} := \text{diag} \left\{ \binom{\alpha_{1,k}}{j}, \dots, \binom{\alpha_{n,k}}{j} \right\} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{T}_{\alpha,k} := \text{diag} \{ T^{\alpha_{1,k}}, \dots, T^{\alpha_{n,k}} \} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) := \mathbf{T}_{\alpha,k} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{v}(t_k), t_k) \quad (3.43)$$

gegeben. Es sind $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ die Zustände, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ die Eingänge und $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$ die Ausgänge des zeitdiskreten Systems. Die zeitdiskretisierten, fraktionalen Ableitungsordnungen sind durch $\boldsymbol{\alpha}_k := (\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{n,k})^\top \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^n$ gegeben. Die Terme $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^s$ repräsentieren das zeitdiskrete System- und Messrauschen. Die Matrizen $\Upsilon_{j,\alpha,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{T}_{\alpha,k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschreiben eine Verallgemeinerung des

Binomialkoeffizienten und der Abtastzeit für fraktionale Mehrgrößensysteme in Abhängigkeit zu den Ableitungsordnungen. Die nichtlinearen, zeitdiskreten Zustands- und Ausgangsfunktionen sind durch \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_k gegeben.

Beweis:

Die Zustandsgleichung (3.36) aus Definition 3.8 wird in den zeitdiskreten Bereich überführt, indem beide Seiten zum Zeitpunkt $t = kT$ ausgewertet werden. Zusätzlich wird die Approximation aus Definition 3.4 elementweise auf vektorielle Größen erweitert und eingesetzt:

$${}_a\mathcal{D}_{t_k}^{\alpha(t_k)} \mathbf{x}(t_k) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{v}(t_k), t_k) \quad (3.44)$$

$$\approx \mathbf{T}_{\alpha,k}^{-1} \sum_{j=0}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j}. \quad (3.45)$$

Die Matrizen $\Upsilon_{j,\alpha,k}$ und $\mathbf{T}_{\alpha,k}$ sind dabei nach (3.41) und (3.42) definiert. Da $\Upsilon_{0,\alpha,k} = \mathbf{I}$ gilt, kann \mathbf{x}_{k+1} aus der Summe gelöst werden, sodass sich

$$\mathbf{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} = \mathbf{T}_{\alpha,k} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{v}(t_k), t_k) \quad (3.46)$$

ergibt. Wenn (3.43) verwendet und nach \mathbf{x}_{k+1} umgestellt wird, folgt

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (3.47)$$

was identisch zu (3.39) ist. Die Matrix $\mathbf{T}_{\alpha,k}$ wird dabei implizit innerhalb der Funktion $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)$ berücksichtigt. Die Ausgangsgleichung wird überführt, indem beide Seiten zum Zeitpunkt kT ausgewertet werden:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k), \quad (3.48)$$

sodass sich direkt (3.40) ergibt. □

Falls eine Initialisierung des fraktionalen Systems nötig ist, kann sie mit folgendem Korollar integriert werden.

Korollar 3.1 (Initialisierung fraktionaler Systeme)

Es sei eine Initialisierung nach Satz 3.1 und das zeitdiskrete fraktionale System nach Satz 3.3 gegeben. Dann kann das System durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{b}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} + \mathbf{T}_{\alpha,k} \cdot {}_a^{\mathbf{x}} \Delta_b^{\alpha_k}(t_k), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \quad (3.50)$$

mit der Funktion

$${}_a^{\mathbf{x}} \Delta_b^{\alpha_k}(t_k) := \mathbf{T}_{\alpha,k}^{-1} \sum_{j=1}^{b_0-a_0} (-1)^{j+k-b_0} \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{b_0-j}. \quad (3.51)$$

initialisiert werden.

Beweis:

Der Beweis zu Korollar 3.1 ist identisch zum Beweis von Satz 3.3 und lässt sich einfach durch Einsetzen von Satz 3.1 in (3.45) zeigen. \square

Beim Einsetzen von (3.51) in (3.49) lässt sich $\mathbf{T}_{\alpha,k}$ kürzen. Damit die Initialisierung des Systems konsistent zur allgemeinen Initialisierung von fraktionalen Ableitungen nach Satz 3.1 bleibt, wird dies hier jedoch nicht vorgenommen.

Bisher wurde der allgemeine Fall nichtlinearer zeitvarianter fraktionaler Systeme beschrieben. Falls das betrachtete System jedoch linear ist, kann das Modell aus Satz 3.3 zwar trotzdem verwendet werden, aber es lässt sich alternativ in einem linearen Zustandsraum beschreiben. Dieser wird nachfolgend definiert.

Definition 3.10 (Zeitdiskreter linearer fraktionaler Zustandsraum)

Ein zeitdiskretes lineares System mit zeitvarianter fraktionaler Ordnung ist in Anlehnung an [MCV⁺10, S. 60, 61] durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{a}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{J}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3.53)$$

gegeben. $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{G}_k \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $\mathbf{J}_k \in \mathbb{R}^{q \times p}$ werden als Systemmatrix, Eingangsmatrix, Ausgangsmatrix und Durchgangsmatrix bezeichnet. Die restlichen Größen entsprechen denen aus Satz 3.3.

Eine alternative Darstellung des linearen fraktionalen Zustandsraums ist möglich, indem die vergangenen Werte des Zustandsvektors als zusätzliche Zustände des Systems interpretiert werden [MCV⁺10, S. 61, 62], [DS06, STV11]. Dies wird in der nachfolgenden Definition beschrieben.

Definition 3.11 (Zeitdiskreter linearer fraktionaler Zustandsraum mit erweitertem Zustand)

Ein zeitdiskretes lineares fraktionales System kann in Anlehnung an [DS06, SZ15] und [MCV⁺10, S. 61, 62] in der Form

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \tilde{\mathbf{F}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\mathbf{H}}_k \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{v}}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \tilde{\mathbf{G}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{J}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k\end{aligned}\tag{3.54}$$

mit den Vektoren

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{\lfloor a/T \rfloor} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

und den Matrizen

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_k &= \begin{pmatrix} \mathbf{F}_k + \Upsilon_{1,\alpha,k} & -\Upsilon_{2,\alpha,k} & \cdots & (-1)^{\lfloor k+1-a/T \rfloor} \Upsilon_{\lfloor k+1-a/T \rfloor, \alpha, k} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_k &= (\mathbf{H}_k^\top \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0})^\top, \quad \tilde{\mathbf{G}}_k = (\mathbf{G}_k \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0})\end{aligned}\tag{3.55}$$

dargestellt werden. Hervorzuheben ist, dass die Vektoren $\tilde{\mathbf{x}}_k$ und $\tilde{\mathbf{v}}_k$ sowie die Matrizen $\tilde{\mathbf{F}}_k$, $\tilde{\mathbf{H}}_k$ und $\tilde{\mathbf{G}}_k$ in jedem Schritt ihre Dimension ändern, außer wenn der Zustandsraum durch das SMP oder andere Einschränkungen limitiert wird (siehe beispielsweise [STV11, SZ15]) oder bereits unendlichdimensional ist, z. B. aufgrund $a \rightarrow -\infty$. Die restlichen Größen entsprechen denen aus Definition 3.10.

Die Darstellung nach Definition 3.11 ist zur Untersuchung bestimmter Systemeigenschaften von Vorteil, da Verfahren für nicht-fraktionale Systeme einfacher angepasst bzw. angewendet werden können. Sie wird in [DS06] zur Analyse der Beobachtbarkeit und in [STV11] für die Zustandsschätzung fraktionaler Systeme verwendet.

3.3 Fraktionale Kalman-Filter

Beim klassischen Kalman-Filter für lineare Systeme handelt es sich um einen rekursiven, erwartungstreuen, Minimum-Varianz-Schätzer für Zustände dynamischer Systeme mit stochastischen Komponenten. Da es zunächst nur für lineare nicht-fraktionale Systeme definiert ist, werden in den folgenden Abschnitten zwei Erweiterungen für nicht-lineare fraktionale Systeme vorgestellt: das FEKF nach [SD06] und das FUKF nach [CAHCLP12]. Im Unterschied zu den genannten Quellen, werden die Algorithmen hier für eine allgemeinere Systemklasse mit Durchgriff vorgestellt.

Als Schreibweise wird \mathbf{x}_k , wie zuvor, für den wahren Systemzustand im Zeitschritt k verwendet. Dagegen beschreibt

$$\mathbf{x}_{k|j} := \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_k \mid \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{y}_{\lceil a/T \rceil} \right\} =: \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_k \mid \mathbf{y}_j^* \right\} \quad (3.56)$$

die Schätzung des Systemzustandes \mathbf{x}_k unter Berücksichtigung aller Messwerte \mathbf{y}_i mit $\lceil a/T \rceil \leq i \leq j$. Für diese Messwerte wird die Kurzschreibweise \mathbf{y}_j^* verwendet. Diese Schreibweise überträgt sich auch auf den Schätzfehler $\boldsymbol{\epsilon}$ und die Schätzfehlerkovarianzmatrix \mathbf{P} :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{k|j} := \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|j}, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{P}_{k|j} := \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{k|j} \boldsymbol{\epsilon}_{k|j}^\top \right\}. \quad (3.58)$$

Annahme 3.1 (Rauschprozesse)

Es wird angenommen, dass die Prozesse des System- und Messrauschens \mathbf{v}_k und \mathbf{w}_k mittelwertfrei und weiß sind sowie eine Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen. Weiterhin seien \mathbf{v}_k und \mathbf{w}_k untereinander unkorreliert. Es gilt:

$$\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k\} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}_k\} = \mathbf{0}, \quad (3.59)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^\top\} = \delta_{k-j} \mathbf{Q}_k, \quad (3.60)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^\top\} = \delta_{k-j} \mathbf{R}_k, \quad (3.61)$$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{w}_j^\top\} = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Durch den Memory-Effekt fraktionaler Systeme wäre es möglich anhand neuer Messungen vergangene Schätzungen zu aktualisieren und diese nachfolgend zu berücksichtigen (vergleiche [STV11, SZ15]). Allerdings erhöht sich dadurch der Rechenaufwand der Verfahren erheblich. Daher wird in der Literatur häufig die in der nachfolgenden Annahme beschriebene Vereinfachung verwendet.

Annahme 3.2 (Aktualisierung vergangener Schätzungen)

Es wird die Vereinfachung

$$\mathbf{x}_{k+1-j|k} \approx \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j} \quad (3.63)$$

angenommen (siehe beispielsweise [SD06, CAHCLP12, Sie13]).

Der Systemzustand zu einem bestimmten Zeitpunkt wird somit nur einmal geschätzt und die initiale Schätzung danach nicht mehr aktualisiert.

Auch für die Berechnung der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers wird eine Vereinfachung getroffen, da diese Kreuzterme von Schätzfehlern verschiedener Zeitschritten enthält. Diese Vereinfachung wird in der nachfolgenden Annahme beschrieben.

Annahme 3.3 (Korrelation vergangener Schätzungen)

Es wird angenommen, dass die Zustandsschätzungen zu verschiedenen Zeitpunkten unkorreliert sind. Es gilt daher

$$\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n|n}) (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m|m})^\top \right\} \approx \mathbf{0} \quad (3.64)$$

für $n \neq m$ (siehe beispielsweise [SD06, CAHCLP12, Sie13]).

Auch wenn die beiden Annahmen 3.2 und 3.3 nicht gerechtfertigt und nur näherungsweise erfüllt sind, wird oftmals angenommen, dass diese Vereinfachungen nur wenig Einfluss auf die Schätzergebnisse haben [SD06, CAHCLP12]. Weiterhin ist eine exakte Berücksichtigung der Kovarianzen in (3.64) für alle n bzw. m nicht möglich, da die Kovarianzmatrix ohne Berücksichtigung des SMPs eine unendlichdimensionale Form annehmen müsste. Falls der Einfluss dieser Kovarianzen dennoch approximiert werden soll, sei auf den Algorithmus in [STV11] verwiesen.

3.3.1 Fraktionales extended Kalman-Filter

Das FEKF ist ein Zustandsschätzer für nichtlineare fraktionale Systeme. Es approximiert die Nichtlinearitäten des Systems durch eine Linearisierung um den aktuellen Schätzwert. Es ist im nachfolgenden Satz beschrieben.

Satz 3.4 (Fraktionales extended Kalman-Filter [SD06])

Es sei ein Zustandsraummodell nach Satz 3.3 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 3.1, 3.2 und 3.3 gültig. Dann ist das fraktionale extended Kalman-Filter durch zwei Schritte gegeben:

Prädiktion

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \tilde{\mathbf{F}}_k \mathbf{P}_{k|k} \tilde{\mathbf{F}}_k^\top + \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^\top + \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j} \Upsilon_{j,\alpha,k}^\top. \quad (3.66)$$

Korrektur

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \right)^{-1}, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})), \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{k+1}^\top. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Die Matrizen $\mathbf{F}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{G}_{k+1} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathbf{L}_k \in \mathbb{R}^{n \times r}$ und $\mathbf{M}_{k+1} \in \mathbb{R}^{q \times s}$ sind die Jakobi-Matrizen der Funktionen \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_{k+1} bzgl. \mathbf{x}_k , \mathbf{v}_k , \mathbf{x}_{k+1} und \mathbf{w}_{k+1} :

$$\mathbf{F}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}}, \quad (3.70)$$

$$\mathbf{L}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)}{\partial \mathbf{v}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}}, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{G}_{k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{0}}, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1})}{\partial \mathbf{w}_{k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{0}}. \quad (3.73)$$

Die Hilfsmatrix $\tilde{\mathbf{F}}_k$ ist durch

$$\tilde{\mathbf{F}}_k := (\mathbf{F}_k + \Upsilon_{1,\alpha,k}) \quad (3.74)$$

definiert. Die Größe $\mathbf{P}_{k+1|k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die prädierte Schätzfehlerkovarianzmatrix und $\mathbf{P}_{k+1|k+1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die korrigierte Schätzfehlerkovarianzmatrix, $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ist die Kovarianzmatrix des Systemrauschens nach (3.60), $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{s \times s}$ ist die Kovarianzmatrix des Ausgangsrauschens nach (3.61) und \mathbf{I} ist die Einheitsmatrix. Die Kalman-Verstärkung besitzt die Dimension $\mathbf{K}_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Die restlichen Größen entsprechen denen aus Satz 3.3. Das FEKF ist im Rahmen der getroffenen Annahmen ein erwartungstreuer Minimum-Varianz-Schätzer.

Die Herleitung des FEKF befindet sich in Anhang C.1. Die Nichtlinearitäten des Modells werden beim FEKF mithilfe einer Linearisierung des Modells um den jeweils letzten Schätzwert approximiert. Bei den getroffenen Annahmen 3.2 und 3.3 handelt es sich um

Vereinfachungen, die nur näherungsweise erfüllt sind und somit beispielsweise zu einer fehlerhaft berechneten Kovarianzmatrix führen können. Deswegen und aufgrund von Linearisierungsfehlern, handelt es sich beim FEKF nicht um einen Minimum-Varianz-Schätzer. Dies gilt, im Gegensatz zum nicht-fraktionalen Kalman-Filter, auch für lineare fraktionale Systemmodelle [SD06].

Eine Voraussetzung des FEKF ist, dass die nichtlinearen Vektorfunktionen \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_{k+1} des Modells differenzierbar sind. Selbst wenn die Funktionen differenzierbar sind, aber starke Nichtlinearitäten aufweisen, kann es wie im nicht-fraktionalen Fall (vergleiche [Sim06, S. 433-436]), dennoch zu inkonsistenten Ergebnissen kommen. Die Schätzfehlerkovarianz kann daraufhin beispielsweise wesentlich zu klein geschätzt werden, sodass der Schätzwert des Zustands außerhalb eines Konfidenzintervalls um den tatsächlichen Wert liegt. Die Stabilität bzw. Konvergenz der Schätzergebnisse kann im nichtlinearen Fall daher nur schwer überprüft werden [Sim06, S. 425].

Um das FEKF anwenden zu können muss weiterhin ein Schätzwert $\mathbf{x}_{\lceil a/T \rceil | \lceil a/T \rceil}$ des Zustands zum Systemstartzeitpunkt a und dessen Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{\lceil a/T \rceil | \lceil a/T \rceil}$ berücksichtigt werden. Da aber Messungen oftmals erst zu einem späteren Zeitpunkt b vorliegen, wird bei fraktionalen Systemen formal eine Initialisierungsfunktion nach Korollar 3.1 benötigt. Da auch diese, wie in Abschnitt 3.2.1 diskutiert, in der Praxis nicht vorliegt, wird dem FEKF häufig eine Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{\lceil b/T \rceil | \lceil b/T \rceil}$ mit großen Einträgen für den Zeitpunkt des Messbeginns b vorgegeben (vergleiche [SD06] für fraktionale Kalman-Filter und [Sim06, S. 90] für nicht-fraktionale Kalman-Filter). Wenn die Einträge der Kovarianzmatrix groß genug sind, ermittelt das FEKF die Zustandsgrößen dann rein auf Basis der Messungen und nicht anhand der Zustandsgleichungen¹¹. In diesem Fall werden die vorherigen Zustandsgrößen aus dem Grünwald-Letnikov-Differenzenquotienten nur schwach gewichtet, sodass die Genauigkeit dieser Größen (und damit auch die Initialisierungsfunktion) nur einen geringen Einfluss besitzt. Wie in Abschnitt 3.1.3 diskutiert, klingt die Initialisierungsfunktion mit wachsender Zeit ab, sodass diese im späteren Verlauf keine Rolle mehr spielt. Diese Ausführung zur Initialisierung gilt analog für alle fraktionalen Kalman-Filter. In der eigenen Veröffentlichung [KSH17] wurde beispielhaft gezeigt, dass fraktionale Filter auch bei der Verwendung falscher Initialisierungsfunktionen konvergieren können.

3.3.2 Fraktionales unscented Kalman-Filter

In diesem Abschnitt wird das FUKF vorgestellt, welches die zweite Erweiterung des Kalman-Filters für nichtlineare fraktionale Systeme darstellt. Im vorherigen Abschnitt wurde darauf hingewiesen, dass die Linearisierung bei stark nichtlinearen Systemen zu größeren Fehlern führen kann. Im Gegensatz zum FEKF werden beim FUKF die Nichtlinearitäten des Systems daher nicht linearisiert, sondern es wird die Wahrscheinlichkeits-

¹¹ Wenn Kovarianzmatrizen mit großen Einträgen vorgegeben werden, dann werden diese auch bei der Berechnung der Kovarianzmatrix der Prädiktion nach (3.66) berücksichtigt. Da große Einträge in der Kovarianzmatrix auf eine schlechte Prädiktion hindeutet, wird in (3.67) auch eine Kalman-Verstärkung mit großen Einträgen berechnet, sodass in (3.68) die Messung stärker gewichtet wird.

verteilung der beteiligten Zufallsvariablen anhand deren Momente approximiert. Dies kann nach [Sim06, S. 433] zu besseren und verlässlicheren Schätzergebnissen führen.

Im Allgemeinen ist es schwierig die Verteilung einer nichtlinear transformierten Zufallsvariablen exakt zu berechnen. Daher werden deterministische Stichproben χ_i aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung des geschätzten Zustands oder anderer Zufallsgrößen ausgewählt, welche dann durch die nichtlinearen Funktionen des Systems propagiert werden. Die Momente der nichtlinear transformierten Zufallsgrößen werden dann mithilfe der propagierten Stichproben approximiert. Diese Methode zur Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Zufallsgrößen bzw. deren Momente wird auch als unscented transformation (UT) bezeichnet.

Für das FUKF und dessen Herleitung wird ein Modell mit additivem Rauschen betrachtet, welches nachfolgend definiert wird.

Definition 3.12 (Zeitdiskreter fraktionaler Zustandsraum mit additivem Rauschen)

Ein nichtlineares zeitdiskretes System mit variabler fraktionaler Ordnung und additiven Rauschprozessen ist durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k \quad (3.76)$$

gegeben. Das Systemrauschen $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ und das Ausgangsrauschen $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^q$ besitzen daher die gleichen Dimensionen wie die Zustands- bzw. die Ausgangsgrößen. Die übrigen Größen entsprechen denen aus Satz 3.3.

Mithilfe dieser Definition wird nun das FUKF vorgestellt.

Satz 3.5 (Fraktionales unscented Kalman-Filter [CAHCLP12])

Es sei ein Zustandsraummodell nach Definition 3.12 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 3.1, 3.2 und 3.3 gültig. Dann ist das fraktionale unscented Kalman-Filter durch zwei Schritte gegeben:

Prädiktion

Die Prädiktion ist durch

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}_{k+1|k} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}, \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} &= \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{f}} + \Upsilon_{1,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{f}} + \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{x}} \Upsilon_{1,\alpha,k}^\top \\ &+ \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} \Upsilon_{j,\alpha,k}^\top \end{aligned} \quad (3.78)$$

mit

$$\mathbf{f}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k), \quad (3.79)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{f}} = \mathbf{Q}_k + \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right)^\top, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{f}} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\chi_{i,k|k} - \mathbf{x}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right)^\top \quad (3.81)$$

$$= \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{x}} \right)^\top \quad (3.82)$$

und

$$\chi_{0,k|k} = \mathbf{x}_{k|k}, \quad (3.83)$$

$$\chi_{i,k|k} = \mathbf{x}_{k|k} + \left(\sqrt{(n + \kappa_1) \mathbf{P}_{k|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i \quad \text{mit } i = 1 \dots n, \quad (3.84)$$

$$\chi_{i,k|k} = \mathbf{x}_{k|k} - \left(\sqrt{(n + \kappa_1) \mathbf{P}_{k|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_{i-n} \quad \text{mit } i = n + 1 \dots 2n, \quad (3.85)$$

$$\phi_0 = \frac{\kappa_1}{n + \kappa_1}, \quad (3.86)$$

$$\phi_i = \frac{1}{2(n + \kappa_1)} \quad \text{mit } i = 1 \dots 2n \quad (3.87)$$

gegeben, wobei $(\cdot)_i$ den i -ten Spaltenvektor einer Matrix kennzeichnet. Der Tuning-Parameter κ_1 bestimmt die Streuung der deterministischen Stichproben um den Schätzwert $\mathbf{x}_{k|k}$ und erlaubt eine Anpassung der Stichprobenwahl auf die Nichtlinearitäten der Zustandsdifferenzgleichung.

Korrektur

Die Korrektur ist durch

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1|k} \right), \quad (3.88)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{K}_{k+1}^\top, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^{\mathbf{x}\mathbf{y}} \left(\mathbf{P}_{k+1}^{\mathbf{y}\mathbf{y}} \right)^{-1} \quad (3.90)$$

mit

$$\mathbf{y}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}), \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{y}} &= \mathbf{R}_{k+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right) \\ &\cdot \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right)^\top, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \left(\chi_{i,k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right)^\top \quad (3.93)$$

$$= \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{x}} \right)^\top \quad (3.94)$$

und

$$\chi_{0,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k}, \quad (3.95)$$

$$\chi_{i,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \left(\sqrt{(n + \kappa_2) \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i \quad \text{mit } i = 1 \dots n, \quad (3.96)$$

$$\chi_{i,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k} - \left(\sqrt{(n + \kappa_2) \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_{i-n} \quad \text{mit } i = n + 1 \dots 2n, \quad (3.97)$$

$$\psi_0 = \frac{\kappa_2}{n + \kappa_2}, \quad (3.98)$$

$$\psi_i = \frac{1}{2(n + \kappa_2)} \quad \text{mit } i = 1 \dots 2n \quad (3.99)$$

gegeben [CAHCLP12]. Der Tuning-Parameter κ_2 bestimmt die Streuung der deterministischen Stichproben um $\mathbf{x}_{k+1|k}$ und kann zur optimalen Anpassung auf die Ausgangsgleichung des Systemmodells verschieden zu κ_1 gewählt werden. Das FUKF ist im Rahmen der getroffenen Annahmen ein erwartungstreuer Minimum-Varianz-Schätzer.

Die Herleitung zum FUKF befindet sich in Anhang C.2. Da das FUKF keine Linearisierung benötigt, müssen die Funktionen \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_{k+1} auch nicht differenzierbar sein. Allerdings ist auch das FUKF kein optimaler Schätzer. Diese Suboptimalität ist eine

Folge der Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die UT und der vereinfachenden Annahmen, die wie beim FEKF nur näherungsweise erfüllt sind und für die Herleitung verwendet wurden. Wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, muss auch das FUKF mit Startwerten bzw. einer Initialisierungsfunktion initialisiert werden.

In Definition 3.12 bzw. im Algorithmus nach Satz 3.5 werden nur additive Rauschprozesse betrachtet. Sollen jedoch auch nichtlinear verknüpfte Rauschprozesse berücksichtigt werden, so lässt sich dies nach [Sim06, S. 450, 451] im nicht-fraktionalen Fall erzielen, indem ein erweiterter Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_k^{(e)} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

betrachtet wird. Das UKF wird dann verwendet um den erweiterten Zustandsvektor $\mathbf{x}_k^{(e)}$ statt des ursprünglichen Zustandsvektors \mathbf{x}_k zu schätzen. Die Kovarianzmatrizen der Rauschprozesse \mathbf{Q}_k und \mathbf{R}_{k+1} werden aus den Gleichungen (3.80) und (3.92) entfernt und die initiale Kovarianzmatrix wird zu

$$\mathbf{P}_{\lceil b/T \rceil}^{\mathbf{x}\mathbf{x},(e)} := \text{diag} \left\{ \mathbf{P}_{\lceil b/T \rceil}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}, \mathbf{Q}_{\lceil b/T \rceil}, \mathbf{R}_{\lceil b/T \rceil} \right\} \quad (3.101)$$

gewählt. Da diese Vorgehensweise bei der Betrachtung fraktionaler Systeme nicht beeinflusst wird, kann sie analog auch auf fraktionale Modelle und das FUKF übertragen werden.

4 Batteriemodelle

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Batteriemodelle vorgestellt. Dazu wird zunächst die bereits motivierte fraktionale Impedanz aus Definition 2.3 vereinfacht, sodass nur die niederfrequenten Prozesse der Batterie betrachtet werden. Daraus resultiert ein 1-RQ-Modell, welches für eine Einzelzelle im Zustandsraum eingeführt wird. Danach wird das Modell zur Beschreibung eines Batteriestrangs erweitert, welcher aus einer Reihenschaltung mehrerer Lithium-Ionen-Zellen besteht. Darauf basierend wird ein Batteriepackmodell hergeleitet, welches sich aus einer Parallelschaltung mehrerer Stränge zusammensetzt (vergleiche Abbildung 2.4).

In einem weiteren Abschnitt des Kapitels wird gezeigt, dass sich die Wechselbeziehungen der einzelnen Stränge mithilfe von Berechnungsvorschriften für die Teilströme beschreiben lassen. Die daraus folgenden Modelle zur Stromaufteilung werden anhand der Kirchhoffschen Gesetze hergeleitet.

Weitere Inhalte dieses Kapitels sind die Abgrenzung der Effekte, die in dieser Arbeit berücksichtigt werden und die Untersuchung der Beobachtbarkeit der verwendeten Batteriemodelle.

4.1 Nichtlineares Modell für die Lithium-Ionen-Batteriezelle

Um die Funktionsweise der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden prinzipiell zu validieren, wird das Batteriezellenmodell aus Definition 2.3 nachfolgend vereinfacht. Dabei werden nur die Diffusionsprozesse gemeinsam mit der OCV, also die Prozesse im niederfrequenten Bereich betrachtet. Die Impedanzen im höherfrequenten Bereich, die auf den Ladungstransfer und die SEI zurückzuführen sind, werden durch Ohmsche Widerstände approximiert. Es gilt dann (siehe auch [Eck17, S. 22]):

$$Z_{LT,SEI}(j\omega) \approx \sum_{m=1}^N R_m =: R_{LT,SEI}. \quad (4.1)$$

Dieser Widerstand wird mit dem Ohmschen Widerstand R_0 aus Definition 2.3 zum Innenwiderstand der Zelle $R_i := R_0 + R_{LT,SEI}$ zusammengefasst. Diese Vereinfachung ist für viele Anwendungen nur wenig einschränkend, da sich der Ladezustand nur bei hohem Gleichanteil des Stroms signifikant ändert. Obwohl höherfrequente Signale trotzdem auftreten können, so spielen sie im Hinblick auf den Ladezustand und dessen Schätzung

daher keine Rolle. Falls solche Signale dennoch berücksichtigt werden sollen, darf das Modell in dieser Form nicht vereinfacht werden.

Ein weiterer Vorteil dieser Vereinfachung ist, dass aufgrund des Nyquist-Shannon Theorems auch größere Abtastzeiten gewählt werden können¹². Dadurch lässt sich bei der Implementierung Speicherplatz und Rechenleistung sparen.

Wie in Abbildung 2.3a zu sehen, lassen sich die Diffusionsprozesse unterhalb von 460 mHz mit einem RQ-Glied und der differentiellen Kapazität bereits gut annähern, sodass die Anzahl an RQ-Gliedern in (2.14) hier zu $O = 1$ gewählt wird. Auch in der Literatur werden oftmals einfache Batteriezellenmodelle verwendet¹³. Die nachfolgenden Ausführungen in dieser Arbeit lassen sich analog zum vereinfachten Modell jedoch auch auf komplexere Batteriemodelle erweitern. Es ergibt sich das folgende vereinfachte Batteriezellenmodell.

Definition 4.1 (Fraktionale Impedanz des 1-RQ-Batteriezellenmodells)

Das fraktionale 1-RQ-Batteriezellenmodell ist mit der Impedanz

$$Z_{\text{cell}}(j\omega) = R_i + \frac{1}{j\omega C_0} + \frac{R}{1 + RQ(j\omega)^\alpha} \quad (4.2)$$

gegeben.

Das Ersatzschaltbild der in Definition 4.1 gegebenen Impedanz ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Um mit dieser Impedanz ein Zustandsraummodell für die Lithium-Ionen-Batteriezelle aufzustellen, wird diese zunächst mithilfe von Satz 3.2 in den Zeitbereich

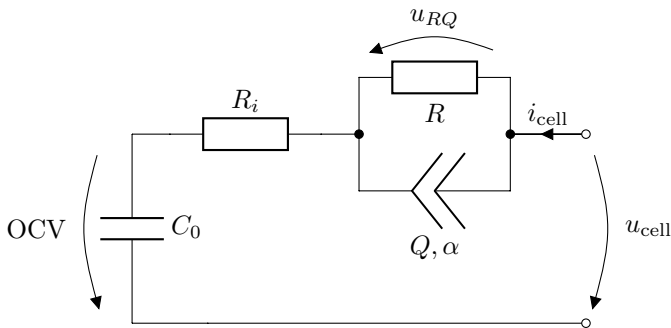


Abbildung 4.1: Ersatzschaltbild des 1-RQ-Batteriezellenmodells.

¹² Typischerweise werden Abtastzeiten von 0,1s bis 1s gewählt, siehe beispielsweise [ZSL⁺16, LLW⁺16, WLL⁺17, HYZ⁺18]

¹³ Beispielsweise werden Modelle mit einem RQ-Glied in [YZCZ14, ZLSW16, XSL⁺16] und mit zwei RQ-Gliedern in [WLL⁺17, HYZ⁺18] verwendet.

transformiert. Dabei lässt sich folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned} Z_{\text{cell}}(j\omega) &= \frac{U_{\text{cell}}(\omega)}{I_{\text{cell}}(\omega)} \\ &= R_i + \frac{1}{j\omega C_0} + \frac{R}{1 + RQ(j\omega)^\alpha}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\Leftrightarrow U_{\text{cell}}(\omega) = R_i I_{\text{cell}}(\omega) + \underbrace{\frac{1}{j\omega C_0} I_{\text{cell}}(\omega)}_{=: \text{OCV}(\omega)} + \underbrace{\frac{R}{1 + RQ(j\omega)^\alpha} I_{\text{cell}}(\omega)}_{=: U_{RQ}(\omega)}. \quad (4.4)$$

Mit dieser Gleichung kann die Transformation elementweise durchgeführt werden. Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 diskutiert, ist es einfacher die nichtlineare Kapazität mithilfe der bereits bekannten Kennlinie OCV(SOC) zu beschreiben. Die Transformation des RQ-Glieds wurde bereits in Beispiel 3.1 durchgeführt und die Transformation des Widerstands ist trivial. Es gilt somit

$$F^{-1}\{U_{\text{cell}}(\omega)\} = u_{\text{cell}}(t) = R_i i_{\text{cell}}(t) + \text{OCV}(\text{SOC}(t)) + u_{RQ}(t). \quad (4.5)$$

Wenn als Zustandsgrößen der SOC und die Spannung u_{RQ} gewählt werden, so können die Zustandsgleichungen mithilfe der Stromintegration aus Satz 2.1 und dem Ergebnis aus Beispiel 3.1 ermittelt werden. Wie in Abschnitt 2.1.2 bereits erwähnt, ist die Impedanz und somit auch die Parameter R, Q, R_i und α vom SOC abhängig. Dies wird in den Zustandsgleichungen berücksichtigt, sodass sich die Dynamiken

$$\text{S}\dot{\text{O}}\text{C}(t) = \frac{100}{Q_N} i_{\text{cell}}(t), \quad (4.6)$$

$$-{}_{-\infty}\mathcal{D}_t^{\alpha(\text{SOC}(t))} u_{RQ}(t) = -\frac{1}{R(\text{SOC}(t))Q(\text{SOC}(t))} u_{RQ}(t) + \frac{i_{\text{cell}}(t)}{Q(\text{SOC}(t))} \quad (4.7)$$

ergeben. Dieses Modell wird in der nachfolgenden Definition zusammengefasst.

Definition 4.2 (Zeitkontinuierliches 1-RQ-Batteriezellenmodell)

Die zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung des 1-RQ-Batteriezellenmodells ist durch die Gleichungen

$$-{}_{-\infty}\mathcal{D}_t^{\alpha(\text{SOC}(t))} {}^c \mathbf{x}(t) = {}^c \tilde{\mathbf{f}}({}^c \mathbf{x}(t), {}^c u(t), t), \quad (4.8)$$

$${}^c y(t) = {}^c \mathbf{g}({}^c \mathbf{x}(t), {}^c u(t), t) \quad (4.9)$$

mit

$${}^c \mathbf{x}(t) = (\text{SOC}(t) \quad u_{RQ}(t))^\top, \quad (4.10)$$

$${}^c u(t) = i_{\text{cell}}(t), \quad (4.11)$$

$${}^c y(t) = u_{\text{cell}}(t), \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\text{SOC}(t)) = (1 \quad \alpha(\text{SOC}(t)))^\top \quad (4.13)$$

und

$${}^c \tilde{\mathbf{f}}({}^c \mathbf{x}(t), {}^c u(t), t) = \left(-\frac{\frac{100}{Q_N} i_{\text{cell}}(t)}{R(\text{SOC}(t))Q(\text{SOC}(t))} u_{RQ}(t) + \frac{1}{Q(\text{SOC}(t))} i_{\text{cell}}(t) \right), \quad (4.14)$$

$${}^c \mathbf{g}({}^c \mathbf{x}(t), {}^c u(t), t) = \text{OCV}(\text{SOC}(t)) + u_{RQ}(t) + R_i(\text{SOC}(t)) i_{\text{cell}}(t) \quad (4.15)$$

gegeben. Dabei sind ${}^c \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ die Zustände, ${}^c u(t) \in \mathbb{R}$ die Eingangsgröße und ${}^c y(t) \in \mathbb{R}$ die Ausgangsgröße. ${}^c \mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ ist das System- und ${}^c w(t) \in \mathbb{R}$ ist das Ausgangsrauschen. Die SOC-Abhängigkeit der Systemfunktionen ${}^c \mathbf{f}(t)$ und der Ausgangsfunktion ${}^c g(t)$ wird für eine übersichtlichere Darstellung rein durch die Zeitabhängigkeit repräsentiert. Zu beachten ist, dass es sich bei der Ableitungsordnung des SOC's um eine gewöhnliche Ableitung handelt und diese daher zu eins gewählt wurde. Der Index ${}^c(\cdot)$ kennzeichnet, dass es sich um das Modell einer Zelle handelt.

Anhand (4.6) ist direkt ersichtlich, dass für die Gleichung des SOC's in (4.8) keine fraktionale Ableitung nötig ist. Allerdings wurde diese Schreibweise gewählt, da sie eine kompaktere Darstellung bietet und trotzdem allgemeingültig ist. Diese Aussage gilt äquivalent auch für die nachfolgenden Ausführungen und Erweiterungen des Modells in diesem Kapitel.

Für die Betrachtung der Batteriezelle im zeitdiskreten Bereich sollen zusätzlich auch Rauschprozesse berücksichtigt werden. Dazu wird die nachstehende Annahme getroffen.

Annahme 4.1 (Rauschprozesse der Batteriezelle)

Das zeitdiskretisierte Systemrauschen der Batteriezelle wird durch die vektorielle Größe ${}^c \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^2$ charakterisiert. Das zeitdiskretisierte Ausgangsrauschen wird in der Größe ${}^c w_k \in \mathbb{R}$ zusammengefasst. Weiterhin wird angenommen, dass die vorliegenden Rauschprozesse jeweils mittelwertfrei, additiv, weiß und unkorreliert sind sowie eine Gaußsche Verteilung besitzen.

In der Literatur werden für die Rauschprozesse von Systemen oftmals vereinfachende Beschreibungsformen wie in Annahme 4.1 getroffen (vergleiche [Sim06, S. 124]). Die Legitimität von Annahme 4.1 für die Zwecke dieser Arbeit wird in Abschnitt 4.4 diskutiert. Sie lässt sich insbesondere dadurch begründen, dass in der Praxis ohnehin nicht alle Rauschprozesse exakt ermittelt werden können und Annahme 4.1 die Approximation dieser Prozesse und das spätere Tuning des Kalman-Filters vereinfacht.

Nachfolgend wird das zeitdiskrete Modell der Lithium-Ionen-Batteriezelle eingeführt. Dieses ergibt sich durch Anwendung von Definition 3.4 auf das zeitkontinuierliche Modell aus Definition 4.2 unter Berücksichtigung der additiven Rauschprozesse nach Annahme 4.1.

Definition 4.3 (Zeitdiskretes 1-RQ-Batteriezellenmodell unter Berücksichtigung von Rauschen)

Das zeitdiskrete 1-RQ-Batteriezellenmodell mit Berücksichtigung des System- und Ausgangsrauschens nach Annahme 4.1 wird durch

$${}^c \mathbf{x}_{k+1} = {}^c \mathbf{f}_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c \Upsilon_{j,\alpha,k} {}^c \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (4.16)$$

$${}^c y_k = {}^c g_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c w_k) \quad (4.17)$$

mit

$${}^c \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \text{SOC}_k & u_{RQ,k} \end{pmatrix}^\top, \quad (4.18)$$

$${}^c u_k = i_{\text{cell},k}, \quad (4.19)$$

$${}^c y_k = u_{\text{cell},k}, \quad (4.20)$$

$${}^c \mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} v_{\text{SOC},k} & v_{RQ,k} \end{pmatrix}^\top, \quad (4.21)$$

$${}^c w_k = w_k, \quad (4.22)$$

$${}^c \Upsilon_{j,\alpha,k} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha(\text{SOC}_k) \\ j \end{pmatrix} \right\} \quad (4.23)$$

und

$${}^c \mathbf{f}_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_k) = \begin{pmatrix} \frac{100T}{Q_N} i_{\text{cell},k} + v_{\text{SOC},k} \\ -\frac{T^{\alpha(\text{SOC}_k)}}{R(\text{SOC}_k)Q(\text{SOC}_k)} u_{RQ,k} + \frac{T^{\alpha(\text{SOC}_k)}}{Q(\text{SOC}_k)} i_{\text{cell},k} + v_{RQ,k} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$${}^c g_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c w_k) = \text{OCV}(\text{SOC}_k) + u_{RQ,k} + R_i(\text{SOC}_k) i_{\text{cell},k} + w_k \quad (4.25)$$

beschrieben. Dabei sind ${}^c \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$ die Zustände, ${}^c u_k \in \mathbb{R}$ die Eingangsgröße, ${}^c y_k \in \mathbb{R}$ die Ausgangsgröße. ${}^c \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^2$ beschreibt das System und ${}^c w_k \in \mathbb{R}$ das Ausgangsrauschen. Die SOC-Abhängigkeit der Systemfunktionen ${}^c \mathbf{f}_k$ und der Ausgangsfunktion ${}^c g_k$ wird für eine übersichtlichere Darstellung rein durch die Zeitabhängigkeit mit dem zusätzlichen Index k repräsentiert. Der Index ${}^c(\cdot)$ beschreibt wie im kontinuierlichen Fall, dass es sich um das Modell einer Lithium-Ionen-Zelle handelt.

Eine Linearisierung des Zellmodells aus Definition 4.3 ist in Anhang D zu finden. Die nachfolgende Definition 4.4 vereinfacht das fraktionale 1-RQ-Batteriezellenmodell zu einem gewöhnlichen 1-RC-Modell.

Definition 4.4 (Zeitdiskretes 1-RC-Batteriezellenmodell)

Wenn im Batteriezellenmodell nach Definition 4.3 ausschließlich die Ableitungsordnung $\alpha_k = 1$ für alle Zeiten k verwendet wird, dann ergibt sich ein nicht-fraktionales 1-RC-Batteriezellenmodell.

Die Summe in (4.16), die sich aus dem Grünwald-Letnikov-Differenzenquotienten ergibt,

kann für das in Definition 4.4 gegebene Modell bis auf den Wert für $j = 1$ vernachlässigt werden, da die Binomialkoeffizienten für $j > 1$ zu null werden, wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben. Die Parameter des 1-RQ-Modells aus Definition 4.3 entsprechen jedoch nicht denen aus Definition 4.4, da sich durch das Festlegen der Ableitungsordnung eine neue Modellform ergibt. Durch ein erneutes Fitting an die gemessene Impedanzkurve können sich daher andere Parameter ergeben (vergleiche Anhang A).

4.2 Batteriepackmodell

Für die meisten Anwendungen werden viele Lithium-Ionen-Batteriezellen miteinander verschaltet, um diverse Anforderungen erfüllen zu können. Deshalb wird in diesem Abschnitt zunächst das Zellmodell aus Definition 4.3 auf ein Batteriestrangmodell erweitert, welches aus N seriell verschalteten Zellen besteht. In diesem Strangmodell wird ein zusätzlicher Index $n = 1, 2, \dots, N$ ergänzt, welcher die jeweiligen Zellen des Strangs kennzeichnet (vergleiche Abbildung 4.2). Das Zustandsraummodell des Strangs ist durch die folgende Definition gegeben.

Definition 4.5 (Zeitdiskretes Modell eines Batteriestrangs basierend auf dem 1-RQ-Batteriezellenmodell)

Das Modell eines Batteriestrangs, welcher sich aus N 1-RQ-Batteriezellenmodellen nach Definition 4.3 zusammensetzt, ist durch

$${}^s \mathbf{x}_{k+1} = {}^s \mathbf{f}_k ({}^s \mathbf{x}_k, {}^s u_k, {}^s \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^s \Upsilon_{j,\alpha,k} {}^s \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (4.26)$$

$${}^s \mathbf{y}_k = {}^s \mathbf{g}_k ({}^s \mathbf{x}_k, {}^s u_k, {}^s \mathbf{w}_k) \quad (4.27)$$

mit

$${}^s \mathbf{x}_k = ({}^c \mathbf{x}_{1,k}, \dots, {}^c \mathbf{x}_{N,k})^\top, \quad (4.28)$$

$${}^s u_k = {}^c u_k = i_{\text{cell},k}, \quad (4.29)$$

$${}^s \mathbf{y}_k = ({}^c y_{1,k}, \dots, {}^c y_{N,k})^\top, \quad (4.30)$$

$${}^s \mathbf{v}_k = ({}^c \mathbf{v}_{1,k}, \dots, {}^c \mathbf{v}_{N,k})^\top, \quad (4.31)$$

$${}^s \mathbf{w}_k = ({}^c w_{1,k}, \dots, {}^c w_{N,k})^\top, \quad (4.32)$$

$${}^s \Upsilon_{j,\alpha,k} = \text{diag} \{ {}^c \Upsilon_{1,j,\alpha,k}, \dots, {}^c \Upsilon_{N,j,\alpha,k} \} \quad (4.33)$$

und

$${}^s \mathbf{f}_k ({}^s \mathbf{x}_k, {}^s u_k, {}^s \mathbf{v}_k) = \begin{pmatrix} {}^c \mathbf{f}_{1,k} ({}^c \mathbf{x}_{1,k}, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_{1,k}) \\ \vdots \\ {}^c \mathbf{f}_{N,k} ({}^c \mathbf{x}_{N,k}, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_{N,k}) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

$${}^s \mathbf{g}_k ({}^s \mathbf{x}_k, {}^s u_k, {}^s \mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} {}^c g_{1,k} ({}^c \mathbf{x}_{1,k}, {}^c u_k, {}^c w_{1,k}) \\ \vdots \\ {}^c g_{N,k} ({}^c \mathbf{x}_{N,k}, {}^c u_k, {}^c w_{N,k}) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

gegeben. Dabei sind ${}^s \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{2N}$ die Zustände, ${}^s u_k \in \mathbb{R}$ die Eingangsgröße und ${}^s \mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^N$ die Ausgangsgrößen. ${}^s \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{2N}$ beschreibt das System- und ${}^s \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^N$ das Ausgangsrauschen. Die SOC-Abhängigkeit der Systemfunktionen ${}^s \mathbf{f}_k$ und der Ausgangsfunktionen ${}^s \mathbf{g}_k$ wird für eine übersichtlichere Darstellung rein durch die Zeitabhängigkeit mit dem Index k repräsentiert. Der Index ${}^s(\cdot)$ beschreibt, dass es sich um das Modell eines Batteriestrangs handelt. Die Eingangsgröße ${}^s u_k$ ist wie beim Zellmodell eindimensional, da alle Zellen vom gleichen Strom durchflossen werden.

Die hier vorgestellte Definition 4.5 eines Strangs ergibt sich direkt aus einer Erweiterung der Zellmodelle, indem die Gleichungen der einzelnen Zellen vektoriell in einem gemeinsamen Zustandsraum zusammengeführt werden. Es ist an (4.34) und (4.35) zu erkennen, dass sich die Dynamik des Strangs aus den einzelnen Zelldynamiken zusammensetzt. Weiterhin ist zu sehen, dass jede einzelne Zelle entkoppelt betrachtet werden kann, da keine Korrelation zwischen den einzelnen Zellen gegeben ist. Die einzige Gemeinsamkeit ist, dass alle Zellen vom gleichen Strangstrom ${}^s u_k =: i_k$ durchflossen werden.

Nachfolgend wird ein Batteriepack beschrieben, welcher sich aus einer Parallelschaltung von P Strängen nach Definition 4.5 zusammensetzt. Diese Struktur ist in Abbildung 2.4 und detaillierter in Abbildung 4.2 dargestellt. Auch für dieses Modell wird ein weiterer Index $p = 1, 2, \dots, P$ für die Kennzeichnung der einzelnen Stränge innerhalb des Packs eingeführt. In Abbildung 4.2 ist zum Vergleich der erste Strang gesondert mit einem blau gestrichelten Rahmen gekennzeichnet. Die N -te Zelle des P -ten Strangs ist mit einem grün strichpunktierten Rahmen markiert.

Definition 4.6 (Zeitdiskretes Modell eines Batteriepacks basierend auf dem 1-RQ-Batteriezellenmodell)

Das Modell eines Batteriepacks, welcher sich aus P 1-RQ-Batteriestrangmodellen nach Definition 4.5 zusammensetzt, ist durch

$${}^b \mathbf{x}_{k+1} = {}^b \mathbf{f}_k ({}^b \mathbf{x}_k, {}^b u_k, {}^b \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^b \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,k} {}^b \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (4.36)$$

$${}^b \mathbf{y}_k = {}^b \mathbf{g}_k ({}^b \mathbf{x}_k, {}^b u_k, {}^b \mathbf{w}_k) \quad (4.37)$$

mit

$${}^b\mathbf{x}_k = ({}^s\mathbf{x}_{1,k}, \dots, {}^s\mathbf{x}_{P,k})^\top, \quad (4.38)$$

$${}^b\mathbf{u}_k = ({}^su_{1,k}, \dots, {}^su_{P,k})^\top, \quad (4.39)$$

$${}^b\mathbf{y}_k = ({}^s\mathbf{y}_{1,k}, \dots, {}^s\mathbf{y}_{P,k})^\top, \quad (4.40)$$

$${}^b\mathbf{v}_k = ({}^sv_{1,k}, \dots, {}^sv_{P,k})^\top, \quad (4.41)$$

$${}^b\mathbf{w}_k = ({}^s\mathbf{w}_{1,k}, \dots, {}^s\mathbf{w}_{P,k})^\top, \quad (4.42)$$

$${}^b\Upsilon_{j,\alpha,k} = \text{diag} \{ {}^s\Upsilon_{1,j,\alpha,k}, \dots, {}^s\Upsilon_{P,j,\alpha,k} \} \quad (4.43)$$

und

$${}^b\mathbf{f}_k({}^b\mathbf{x}_k, {}^b\mathbf{u}_k, {}^b\mathbf{v}_k) = \begin{pmatrix} {}^s\mathbf{f}_{1,k}({}^s\mathbf{x}_{1,k}, {}^su_{1,k}, {}^sv_{1,k}) \\ \vdots \\ {}^s\mathbf{f}_{P,k}({}^s\mathbf{x}_{P,k}, {}^su_{P,k}, {}^sv_{P,k}) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

$${}^b\mathbf{g}_k({}^b\mathbf{x}_k, {}^b\mathbf{u}_k, {}^b\mathbf{w}_k) = \begin{pmatrix} {}^s\mathbf{g}_{1,k}({}^s\mathbf{x}_{1,k}, {}^su_{1,k}, {}^s\mathbf{w}_{1,k}) \\ \vdots \\ {}^s\mathbf{g}_{P,k}({}^s\mathbf{x}_{P,k}, {}^su_{P,k}, {}^s\mathbf{w}_{P,k}) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

gegeben. Dabei sind ${}^b\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{2NP}$ die Zustände, ${}^b\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^P$ die Eingangsgrößen und ${}^b\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{NP}$ die Ausgangsgrößen. ${}^b\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{2NP}$ beschreibt das System- und ${}^b\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{NP}$ das Ausgangsrauschen. Die SOC-Abhängigkeit der Systemfunktionen ${}^b\mathbf{f}_k$ und der Ausgangsfunktionen ${}^b\mathbf{g}_k$ wird für eine übersichtlichere Darstellung durch die Zeitabhängigkeit mit dem Index k repräsentiert. Der Index ${}^b(\cdot)$ beschreibt, dass es sich um das Modell eines Batteriepacks handelt. Die Eingangsgröße ${}^b\mathbf{u}_k$ ist mehrdimensional, da die einzelnen Batteriestränge von verschiedenen Strömen durchflossen werden können, z. B. aufgrund unterschiedlicher Widerstände.

Ähnlich zum Strangmodell lässt sich auch das Packmodell als eine vektorielle Verkettung von P Strängen in einem gemeinsamen Zustandsraum beschreiben. Da die Stränge jeweils aus N Zellen bestehen, setzt sich das Packmodell insgesamt aus NP Zellen zusammen. Diese sind im Zustandsraum so angeordnet, dass zuerst die Zellen des ersten Strangs aufgelistet werden, dann die Zellen des zweiten Strangs usw. bis hin zur N -ten Zelle des P -ten Strangs. Wenn eine bestimmte Zelle innerhalb des Packs betrachtet werden soll, so wird die n -te Zelle des p -ten Strangs mit $(\cdot)_{p,n}$ gekennzeichnet. Dieses Batteriemodell wurde in den eigenen Veröffentlichungen [KBS⁺18, KCS⁺19] zur Beschreibung des Batteriepacks verwendet.

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 diskutiert, bietet die Batteriepackstruktur nach Definition 4.6 mehr Vorteile als eine Reihenschaltung von Zellbündeln. In der Literatur wurde die Aussage getroffen, dass die Verwendung seriell verschalteter Zellbündel verschiedene Nachteile wie eine verstärkte Alterung nach sich ziehen kann. Weiterhin lässt sich nachvollziehen, dass jede einzelne Zelle von einem unterschiedlichen Strom durchflossen wird, da sich der Strom bei jedem Zellbündel neu aufteilt. Daher würde jede Zelle einen

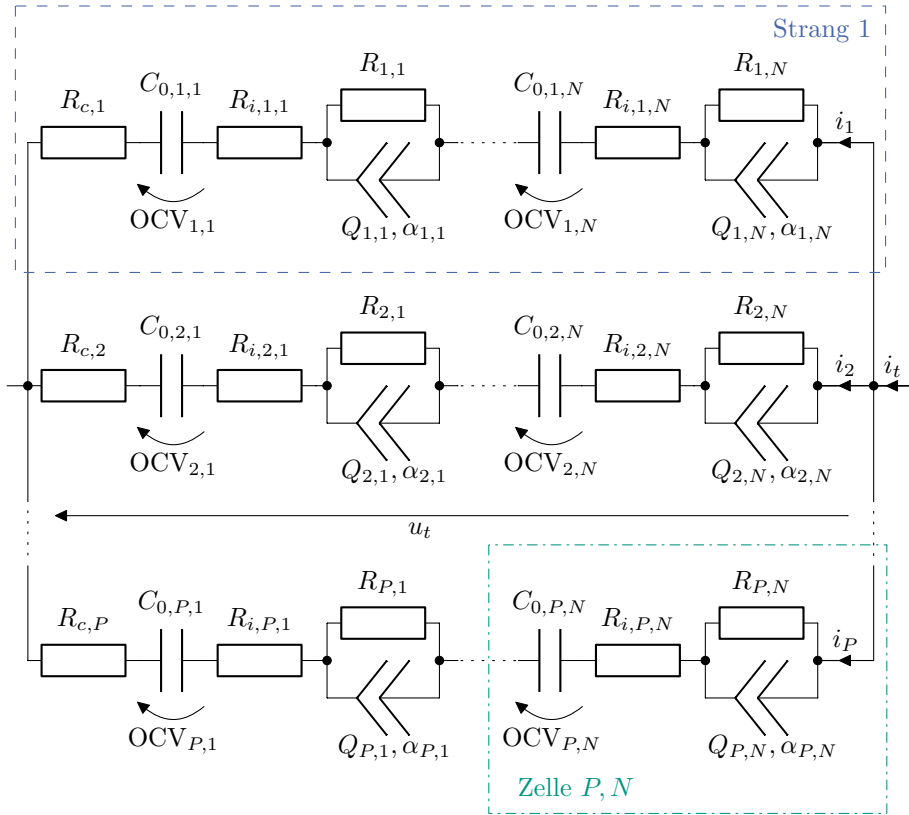


Abbildung 4.2: Ersatzschaltbild des Batteriepacks auf Basis des 1-RQ-Zellenmodells.

eigenen Stromsensor benötigen, was aber einer Sensoreinsparung und somit einem der Ziele dieser Arbeit direkt widerspricht. Zudem wurde in Abschnitt 2.2.2 angesprochen, dass häufig nur der Gesamtstrom einer Batterie gemessen wird. Die fehlende Kenntnis über die einzelnen Zellströme würde aber eine modellbasierte Zustandsschätzung deutlich erschweren. Solch eine Batteriestruktur wird in dieser Arbeit daher nicht weiter betrachtet. Das Modell eines einzelnen Zellbündels mit P Zellen lässt sich jedoch als Sonderfall von Definition 4.6 mit $N = 1$ interpretieren.

Es ist zu sehen, dass das Zellmodell nach Definition 4.3 sowie die Strang- und Packmodelle nach den Definitionen 4.5 und 4.6 alle der Form des fraktionalen Zustandsraummodells aus Satz 3.3 entsprechen. Weiterhin lässt sich die folgende Definition in Anlehnung an Definition 4.4 für die Strang- und Packmodelle ergänzen.

Definition 4.7 (Zeitdiskretes, nicht-fraktionales Modell für Batteriestränge und Batteriepacks)

Wenn im Batteriestrangmodell nach Definition 4.5 bzw. im Batteriepackmodell nach Definition 4.6 ausschließlich Ableitungsordnungen $\alpha_{p,n,k} = 1$ für alle Zellen $n = 1, 2, \dots, N$, alle Stränge $p = 1, 2, \dots, P$ und alle Zeiten k verwendet werden, dann ergibt sich ein nicht-fraktionales Batteriestrangmodell bzw. Batteriepackmodell auf Basis des 1-RC-Zellenmodells.

Die in Definition 4.7 genannten Vereinfachungen der Modelle dienen später zum Vergleich mit den fraktionalen Modellen. Auch bei den Batteriesträngen und Batteriepacks gilt im nicht-fraktionalen Fall, dass die Summenterme in (4.26) und (4.36), die sich aus dem Grünwald-Letnikov-Differenzenquotienten ergeben, jeweils für $j > 1$ vernachlässigt werden können.

4.3 Stromaufteilungsmodelle

Es wurde in Abschnitt 2.2.2 bereits angesprochen, dass häufig nur der Gesamtstrom des Batteriepacks gemessen wird und dass Stromsensoren oftmals teuer, wartungsintensiv oder fehlerbehaftet sind. Allerdings setzt das Batteriepackmodell nach Definition 4.6 die einzelnen Strangströme als bekannte Eingangsgrößen voraus. In diesem Abschnitt werden daher Modelle für die Aufteilung des Gesamtstroms hergeleitet, sodass die einzelnen Strangströme mithilfe der Zustandsgrößen und den Parametern der Batterie beschrieben werden können. Diese Modelle sollen später zur Einsparung von Stromsensoren bei Batteriepacks dienen, was zum Erreichen der Ziele dieser Arbeit beiträgt.

Der Gesamtstrom des Batteriepacks $i_{t,k}$ (vergleiche Abbildung 4.2) lässt sich nach der Kirchhoffschen Knotenregel als Summe aller Teilströme beschreiben:

$$i_{t,k} = i_{1,k} + \dots + i_{P,k} \neq P \cdot i_{1,k} \neq \dots \neq P \cdot i_{P,k}, \quad (4.46)$$

wobei $i_{p,k}$ den Strom durch Strang $p = 1, 2, \dots, P$ beschreibt. Es wurde bereits in Abschnitt 2.2.2 und in [WLW⁺06, BMG14, BM16, BHS⁺16] diskutiert, dass die einzelnen Strangströme nicht gleich groß sind. Vielmehr verteilen sie sich ungleichmäßig, da sich die Parameter der einzelnen Zellen und somit auch der Stränge aufgrund von Alterungs- und Fertigungsprozessen unterscheiden. Weiterhin tragen auch ungleiche Kontakt- und Kabelwiderstände $R_{c,p}$ in den Strängen dazu bei. In Abbildung 4.2 sind solche Widerstände $R_{c,p}$ bereits dargestellt.

Daher sind Modelle für die Stromaufteilung wünschenswert, mit deren Hilfe Informationen über die Strangströme generiert werden können. Zwei solche Modelle werden in Satz 4.1 vorgestellt.

Satz 4.1 (Stromaufteilungsmodelle)

Es sei ein Batteriepack nach Definition 4.6 gegeben. Dann lassen sich die einzelnen Strangströme des Batteriepacks mit den beiden äquivalenten Gleichungen

$$i_p = i_t \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} + \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} \left(\sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q} - u_{m,p}}{R_{i,q}} \right) \quad (4.47)$$

$$= \frac{u_t - u_{m,p}}{R_{i,p}} \quad (4.48)$$

berechnen.

Dabei bezieht sich der Index p auf die Variablen des aktuell betrachteten, p -ten Strangs. Für Summen über alle Stränge wird der Laufindex q verwendet. Die Variablen mit dem Index t beziehen sich auf die gesamte Batterie. Die Größe

$$R_{i,p} := \sum_{n=1}^N R_{i,p,n} + R_{c,p} \quad (4.49)$$

beschreibt die Summe der Innenwiderstände aller Zellen eines Strangs p . Dabei werden zusätzlich auch mögliche Kabel- und Kontaktwiderstände $R_{c,p}$ berücksichtigt. Der Index p, n bezieht sich auf die n -te Zelle im p -ten Strang. Die Variable

$$R_{i,t} := \left(\sum_{q=1}^P \frac{1}{R_{i,q}} \right)^{-1} \quad (4.50)$$

kann als der gesamte Widerstand des Batteriepacks interpretiert werden, und

$$i_t := \sum_{q=1}^P i_q \quad (4.51)$$

ist der gesamte Batteriepackstrom nach der Kirchhoffschen Knotenregel. Die Hilfsspannung

$$u_{m,p} := \sum_{n=1}^N (OCV_{p,n} + u_{RQ,p,n}) \quad (4.52)$$

beschreibt die Summe aus OCV und u_{RQ} der Zellen eines Strangs $p = 1, 2, \dots, P$. Da es sich um rein algebraische Gleichungen handelt, wurde auf den Zeitindex k hier verzichtet. Auch die Abhängigkeiten der Parameter und der OCV zum SOC der jeweiligen Zelle wurde hier für eine kompaktere Schreibweise vernachlässigt.

Beweis:

Aufgrund der Kirchhoffschen Maschenregel ist die Gesamtspannung u_t identisch zur

Spannung jedes einzelnen Strangs u_p :

$$u_t = u_p, \quad \forall p. \quad (4.53)$$

Die Spannung eines Strangs setzt sich aus den Spannungen aller Zellen sowie der Spannung über dem Widerstand $R_{c,p}$ zusammen:

$$u_p = \sum_{n=1}^N (\text{OCV}_{p,n} + u_{RQ,p,n} + R_{i,p,n} i_p) + R_{c,p} i_p. \quad (4.54)$$

Mit den Definitionen (4.49) und (4.52) lässt sich (4.53) mit (4.54) zu

$$u_t = u_{m,p} + i_p R_{i,p}, \quad \forall p \quad (4.55)$$

zusammenführen. Wenn (4.55) nach dem Strangstrom i_p aufgelöst und wiederholt mit der Substitution $i_q = i_p$ in (4.51) eingesetzt wird, resultiert

$$i_t = \sum_{q=1}^P i_q = \sum_{q=1}^P \frac{u_t - u_{m,q}}{R_{i,q}} = u_t \sum_{q=1}^P \frac{1}{R_{i,q}} - \sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q}}{R_{i,q}}. \quad (4.56)$$

Nach Umstellen der Gleichung nach u_t und mithilfe von (4.50) ergibt sich

$$u_t = \left(i_t + \sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q}}{R_{i,q}} \right) R_{i,t}. \quad (4.57)$$

Mit (4.57) kann (4.55) zu

$$i_p = \frac{u_t - u_{m,p}}{R_{i,p}} \quad (4.58)$$

$$= i_t \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} + \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} \left(\sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q} - u_{m,p}}{R_{i,q}} \right) \quad (4.59)$$

umformuliert werden, woraus direkt (4.47) und (4.48) folgen. \square

Die Berechnung der Strangströme nach Gleichung (4.47) lässt sich in zwei Teile zerlegen. Auf der einen Seite wird der Gesamtstrom anhand des Verhältnisses des Gesamtwiderstands zum Strangwiderstand in Strang p aufgeteilt. Auf der anderen Seite erzeugt ein Ungleichgewicht der Hilfsspannungen Ausgleichsströme, die von den Spannungen OCV und u_{RQ} aller Stränge abhängen. Diese Ausgleichsströme sind auch vom Verhältnis des Gesamtwiderstands zum Strangwiderstand in Strang p abhängig.

Die Strangströme, die auf Basis von (4.48) berechnet werden, verwenden nicht den Gesamtstrom, sondern die Gesamtspannung. Der Strom des Strangs p wird in diesem Fall nur von den Widerständen und den Spannungen OCV und u_{RQ} des eigenen Strangs bestimmt. Kenntnisse über die Größen anderer Stränge werden für die Berechnung des

Stroms in Strang p nicht benötigt. Diese Modelle zur Stromaufteilung wurden in der eigenen Veröffentlichung [KCS⁺19] publiziert.

Werden die Ergebnisse dieses Abschnitts auf das Batteriepackmodell in Definition 4.6 bezogen, wird klar, dass, obwohl (4.44) und (4.45) vermuten lassen, dass die einzelnen Stränge voneinander entkoppelt sind, diese gegenseitige Abhängigkeiten aufgrund der Kirchhoffschen Gesetze besitzen. Das bedeutet konkret, dass die Strangspannungen nach (4.53) identisch sein müssen und dass die Summe der Teilströme nach (4.51) den Gesamtstrom ergeben muss. Diese Randbedingung wurde im Batteriepackmodell nach Definition 4.6 allerdings noch nicht berücksichtigt.

Im nachfolgenden Lemma 4.1 wird noch ein Sonderfall von Satz 4.1 vorgestellt, welcher eine kaskadierte Berechnung des Teilstroms von Strang p anhand der Berechnungen des vorherigen Strangs $p - 1$ vornimmt.

Lemma 4.1 (Kaskadierte Berechnung der Stromaufteilung)

Die Stromaufteilung nach Satz 4.1 lässt sich alternativ auch kaskadiert mit

$$i_p = \frac{u_{m,p-1} + R_{i,p-1}i_{p-1} - u_{m,p}}{R_{i,p}} \quad \forall p = 2, \dots, P \quad (4.60)$$

berechnen, wobei für die Berechnung des ersten Strangstroms wie in Satz 4.1 Gleichung (4.48) verwendet wird:

$$i_1 = \frac{u_t - u_{m,1}}{R_{i,1}}. \quad (4.61)$$

Beweis:

Es gilt bereits nach (4.53), dass alle Strangspannungen identisch sind. Ob für die Berechnung des Strangstroms u_t oder eine der Strangspannungen u_q verwendet wird, spielt keine Rolle. Das Einsetzen von (4.55) mit der Substitution $u_t = u_{p-1}$ in (4.48) ergibt direkt (4.60). \square

Für die Herleitung von Lemma 4.1 kann alternativ ein Maschenstrommodell wie in [BMG14, BM16] verwendet werden. Die dort gegebene Form kann mögliche Vorteile bieten, wenn die Kabel- und Kontaktwiderstände nicht in einer Größe $R_{c,p}$ zusammengefasst, sondern einzelne Leitungsabschnitte separat betrachtet werden sollen. Die beiden Modellformen lassen sich allerdings durch einfache Umformungen ineinander überführen. Die kaskadierte Berechnung der Stromaufteilung wurde in der eigenen Veröffentlichung [KBS⁺18] verwendet, um die Wechselwirkung der Stränge zu beschreiben.

Um die beiden Möglichkeiten zur Stromberechnung (4.47) und (4.48) bzw. (4.60) und deren Auswirkung in den späteren Kapiteln besser unterscheiden zu können, wird Annahme 4.2 getroffen.

Annahme 4.2 (Kenntnis der Gesamtspannung und des Gesamtstroms)

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird nachfolgend davon ausgegangen, dass entweder der Gesamtstrom oder die Gesamtspannung bekannt ist, jedoch nicht beide.

Weiterhin besteht die Möglichkeit die Strangströme als unbekannte Eingangsgrößen zu definieren. Es werden dabei weder die Strangströme gemessen noch wird die Gesamtspannung oder der Gesamtstrom zur Bestimmung berücksichtigt.

4.4 Abgrenzung der Effekte

In diesem Abschnitt werden Abgrenzungen verschiedener Abhängigkeiten und Effekte der Batterie vorgenommen und diskutiert, warum sie in dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

Temperatur- und Stromstärkeabhängigkeit

Die Temperatur sowie die Stromstärkeabhängigkeit der Prozesse tauchen in den vorgestellten Modellen nicht explizit auf, obwohl bekannt ist, dass die Prozesse in der Batterie von diesen Größen beeinflusst werden (vergleiche Abschnitt 2.1.1). Um die neuen Methoden dieser Arbeit prinzipiell validieren zu können und um grundlegende Forschungsergebnisse zu erzielen, werden allerdings kleine Ströme und konstante Temperaturen vorausgesetzt, sodass die Auswirkung dieser Größen begrenzt bleibt.

Sofern die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Batterieprozessen und der Stromstärke sowie der Temperatur bekannt sind, lassen sich die Modelle jedoch direkt erweitern. Die entsprechenden Abhängigkeiten werden bei der Modellierung und der Zustandsschätzung in dieser Arbeit jedoch nicht berücksichtigt.

Parameterabhängigkeiten

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurden die funktionalen Zusammenhänge der Parameter zum SOC der Zelle mithilfe der EIS und des CNLS bestimmt (vergleiche Anhang A). Allerdings treten im laufenden Betrieb Degradationsphänomene auf, welche beispielsweise den Innenwiderstand der Zelle erhöhen oder die Ladekapazität reduzieren. Da für eine modellbasierte Schätzung die Parameter der Zelle bekannt sein müssen, werden im nicht-fraktionalen Fall duale Schätzverfahren verwendet (vergleiche beispielsweise [Ple05, NTSG⁺13, RBSGD13, HYZ⁺18]), welche die Parameter bzw. die Degradation im laufenden Betrieb, parallel zum SOC, mitschätzen.

Für fraktionale Batteriemodelle existieren solche duale Schätzverfahren bisher nicht. Im Rahmen der Abschlussarbeit [Pha17] wurde deshalb ein duales Kalman-Filter für

eine gemeinsame SOC- und Parameterschätzung auf fraktionale Batteriemodelle angepasst und beispielhaft gezeigt, dass eine duale Schätzung für fraktionale Batteriemodelle prinzipiell möglich ist. In den nachfolgenden Kapiteln werden allerdings keine dualen Schätzverfahren verwendet und für alle betrachteten Zellen die gleichen konstanten Zusammenhänge der Parameter zum SOC angenommen (vergleiche Anhang A). Dadurch sollen Anhaltspunkte gegeben werden, ob die Zustandsschätzung einer Batterie auch anwendbar ist, wenn die Parameter der Zellen nicht exakt bekannt sind. In Anhang F.4 werden dazu zusätzliche Schätzergebnisse vorgestellt für den Fall, dass die Parameter der Zellen stärker abweichen.

Rauschprozesse

In Annahme 4.1 wurde vorausgesetzt, dass die Rauschprozesse der Batterie mittelwertfrei, additiv, weiß und unkorreliert sind sowie eine Gaußsche Verteilung besitzen. Es lässt sich jedoch leicht nachvollziehen, dass diese Annahmen nicht immer erfüllt sind. Beispiele hierfür sind Messgeräte, die verschiedene Bias-Größen besitzen und somit nicht mittelwertfrei sind, oder Rauschprozesse, die nichtlinear mit den Modellgleichungen verknüpft sind [Sim06, S. 22, 398, 450].

Weiterhin kann Rauschen unterschiedliche Ursachen haben, sodass es sich in mehrere Unterprozesse zerlegen lässt. In diesem Fall können auch mehrere Prozesse pro Gleichung vorliegen (vergleiche beispielsweise Definition 3.8 und Satz 3.3, die andere Dimensionen für die Rauschprozesse zulassen). Ein Beispiel hierfür wäre die Berücksichtigung von Unsicherheiten der Eingangsgrößen. Obwohl die Eingangsgrößen vieler Modelle oftmals als unverrauscht angenommen werden, kann es sich alternativ auch um Messgrößen mit entsprechenden Abweichungen handeln. Wenn dies berücksichtigt wird, lässt sich das Systemrauschen beispielsweise in die Fehlerquellen der Modellunsicherheiten und des Messrauschens unterteilen. Wenn man im Fall einer Batteriezelle nach Definition 4.3 von einer verrauschten Strommessung ausgeht, erscheint diese aufgrund des Durchgriffs sowohl in der Systemgleichung als auch unverzögert in der Ausgangsgleichung (vergleiche (4.24) und (4.25)). Demzufolge wären Anteile von ${}^c v_k$ und ${}^c w_k$ im gleichen Zeitschritt korreliert. Dies gilt analog auch für die Strang- und Packmodelle nach den Definitionen 4.5 bzw. 4.6 sowie für die Verwendung der Stromaufteilungsmodelle nach Satz 4.1.

Allerdings sind oftmals nur wenige Informationen über die Rauschprozesse vorhanden [ACM⁺05], [CC17, S. 15, 19]. Zwar kann das Messrauschen von Sensoren in vielen Fällen anhand des Datenblatts ermittelt oder vergleichsweise einfach messtechnisch bestimmt werden, aber das Systemrauschen lässt sich oft nur schwer oder gar nicht analysieren. Insbesondere wenn Korrelationen zwischen den einzelnen Rauschprozessen auftreten, sind die entsprechenden Parameter schwierig zu bestimmen [ACM⁺05]. Vor allem bei nichtlinearen Systemen sind solche Prozesse zusätzlich Zeit- oder Arbeitspunktabhängig und lassen sich nicht vollständig erfassen [ACM⁺05]. Aus diesem Grund werden die Rauschprozesse in der Literatur, wie in Annahme 4.1, häufig als rein additiv, weiß und unkorreliert angenommen und die Parameter der Rauschprozesse lediglich zum Tuning des Kalman-Filters verwendet [STSM09, BTZ03]. Zudem wird dieses Tuning

vereinfacht, da weniger Parameter berücksichtigt werden müssen, auch wenn dadurch das bestmögliche Ergebnis eventuell nicht gefunden werden kann¹⁴.

4.5 Beobachtbarkeit der Modelle

In diesem Abschnitt wird die Beobachtbarkeit des 1-RQ-Batteriezellenmodells untersucht und darauf basierend die Beobachtbarkeit der Strang- und Packmodelle diskutiert. Nach [SFMF12] können fraktionale Systeme nur approximativ die Eigenschaft der Beobachtbarkeit besitzen (vergleiche Anhang B), was daher auch für die Ausführungen in diesem Abschnitt gilt. Weiterhin konnte in [SM17] die Aussage getroffen werden, dass die Initialisierung zur Untersuchung der Beobachtbarkeit fraktionaler Systeme nicht berücksichtigt werden muss (siehe Anhang B).

Um die nichtlinearen fraktionalen Batteriemodelle aus diesem Kapitel auf die Beobachtbarkeit zu untersuchen, werden die Verfahren aus [MB10, MPW17] aufgegriffen. Dazu wird das Batteriezellenmodell nachfolgend mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion untersucht. Die Ergebnisse zur Beobachtbarkeit des Batteriezellenmodells wurden in der eigenen Veröffentlichung [KFEH18] publiziert.

Soweit es möglich ist, werden nachfolgend allgemeine Größen des Batteriezellenmodells ${}^c(\cdot)$ genutzt und nur beim Einsetzen die konkreten Größen des betrachteten 1-RQ-Modells aus Definition 4.3 verwendet. Weiterhin wird die SOC-Abhängigkeit explizit berücksichtigt, da sich diese auf die Beobachtbarkeit auswirkt. Unter Beachtung der vorherigen Aussage, dass die vergangenen Zustände für die Beobachtbarkeit nicht berücksichtigt werden müssen, wird nachfolgend von einem uninitialisierten System ausgegangen. Dies hat den zusätzlichen Vorteil, dass sich die Ergebnisse später in einem zweidimensionalen Diagramm noch übersichtlich darstellen lassen.

Um den Satz der impliziten Funktion nach [MPW17] auf das Batteriezellenmodell anzuwenden, werden die ersten beiden Zeitschritte der Ausgangsgröße des Modells ${}^c\mathbf{y} = (u_{\text{cell},0}, u_{\text{cell},1})$ explizit anhand einer Sequenz der Eingangsgröße ${}^c\mathbf{u} = (i_{\text{cell},0}, i_{\text{cell},1})$ und des initialen Zustands ${}^c\mathbf{x}_0 = (\text{SOC}_0, u_{RQ,0})$ berechnet. Darauf basierend kann eine kontinuierlich differenzierbare Funktion

$$q({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} u_{\text{cell},0} - q_0({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0) \\ u_{\text{cell},1} - q_1({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

definiert werden, wobei $u_{\text{cell},0} = q_0({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0)$ und $u_{\text{cell},1} = q_1({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0)$ die berechneten Ausgangsgrößen sind. Die Komponentenfunktionen sind nach (4.25) mit

$$q_0({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0) = \text{OCV}(\text{SOC}_0) + u_{RQ,0} + R_i(\text{SOC}_0)i_{\text{cell},0} \quad (4.63)$$

¹⁴ In [Sim06, S. 184, 188] wird gezeigt, dass die Berücksichtigung einer Korrelation zwischen System- und Ausgangsrauschen zu einem besseren Schätzergebnis führen kann, allerdings nur, wenn diese Größen und deren Korrelation auch bekannt sind. Für die Berücksichtigung von Rauschprozessen, die nicht Annahme 4.1 entsprechen, sei an dieser Stelle nochmals auf die Literatur aus Abschnitt 2.3.1 sowie auf [Sim06, S. 184, 188, 398] und [CC17, S. 57ff] verwiesen. Für eine systematische Ermittlung der Rauschprozesse sei auf [ACM⁺05] verwiesen.

und unter Berücksichtigung von (4.24) mit

$$q_1({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{x}_0) = \text{OCV}(\text{SOC}_1) + u_{RQ,1} + R_i(\text{SOC}_1)i_{\text{cell},1} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} &= \text{OCV} \left(\frac{100T}{Q_N} i_{\text{cell},0} + \text{SOC}_0 \right) + \alpha(\text{SOC}_0)u_{RQ,0} \\ &\quad - \frac{T^{\alpha(\text{SOC}_0)}}{R(\text{SOC}_0)Q(\text{SOC}_0)} u_{RQ,0} + \frac{T^{\alpha(\text{SOC}_0)}}{Q(\text{SOC}_0)} i_{\text{cell},0} \\ &\quad + R_i \left(\frac{100T}{Q_0} i_{\text{cell},0} + \text{SOC}_0 \right) i_{\text{cell},1} \end{aligned} \quad (4.65)$$

gegeben. Es gilt aufgrund des Satzes der impliziten Funktion [MPW17]:

Wenn die Ableitungsmatrix

$$\mathbf{Q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (4.66)$$

von $\mathbf{q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0)$ an einem Punkt $({}^c\tilde{\mathbf{u}}, {}^c\tilde{\mathbf{y}}, {}^c\tilde{\mathbf{x}}_0)$ invertierbar ist, dann gibt es eine Umgebung V von $({}^c\tilde{\mathbf{u}}, {}^c\tilde{\mathbf{y}})$ und eine Umgebung U von ${}^c\tilde{\mathbf{x}}_0$ so, dass für jedes $({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}) \in V$ genau ein ${}^c\mathbf{x}_0 \in U$ existiert, welches $\mathbf{q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ erfüllt.

Wenn diese Anforderung erfüllt ist, bedeutet das anschaulich, dass ${}^c\mathbf{x}_0$ eindeutig anhand von Messungen bestimmt werden kann. Es folgt, dass wenn $\mathbf{Q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0)$ für eine Sequenz ${}^c\mathbf{u} = (i_{\text{cell},0}, i_{\text{cell},1})$ und alle möglichen ${}^c\mathbf{x}_0$ invertierbar ist, dann ist das System nach [MB10] lokal beobachtbar.

Die Konditionszahl

$$\zeta = \frac{\sigma_{\max} \{ \mathbf{Q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0) \}}{\sigma_{\min} \{ \mathbf{Q}({}^c\mathbf{u}, {}^c\mathbf{y}, {}^c\mathbf{x}_0) \}} \quad (4.67)$$

ist nach [Sim06, S. 159] definiert als das Verhältnis des größten Singulärwerts σ_{\max} zum kleinsten Singulärwert σ_{\min} einer Matrix und ist ein Maß für die Invertierbarkeit derselben. Große Werte von ζ deuten eine näherungsweise singuläre Matrix an. Das bedeutet, dass das betrachtete System schlecht konditioniert ist und potenziell nicht-beobachtbar wird. Dadurch können bei der Zustandsschätzung größere Fehler auftreten.

Die Konditionszahl der Ableitungsmatrix wurde numerisch für verschiedene Zustände und Eingangsströme ausgewertet. Die Ströme wurden dabei im Bereich von -3 A bis 3 A betrachtet. Für diesen Bereich kann die RQ-Spannung Werte von etwa -35 mV bis 35 mV annehmen. Die berechnete Konditionszahl ist logarithmisch in einem Beobachtbarkeitsdiagramm in Abbildung 4.3 dargestellt. Aus dieser Abbildung folgt, dass das System lokal beobachtbar ist, sofern der verwendete Prozessor über eine ausreichende numerische Genauigkeit verfügt [Sim06, S. 159, 160].

Allerdings gibt es in Abbildung 4.3 Gebiete in denen die Konditionszahl deutlich höhere Werte annimmt. Beispiele hierfür sind im Bereich von etwa 35% bis 60% SOC oder im Fall von höheren Werten für die RQ-Spannung bei etwa 70% SOC zu finden. In diesen Bereichen ist zu erwarten, dass sich die Varianz der Schätzung vergrößert und

daher größere Fehler auftreten können. Im niedrigen SOC-Bereich lässt sich die Zelle hingegen gut beobachten, da dort die Konditionszahl vergleichsweise niedrig ist. Intuitiv ist dieses Resultat gut nachvollziehbar, da im Bereich von 35 % bis 60 % SOC die SOC-OCV-Kurve sehr flach ist (vergleiche Abbildung 2.1). Daher ist es schwieriger anhand der gemessenen Spannung oder der OCV auf den SOC zu schließen, weil ein kleiner Fehler ΔOCV bereits eine große Abweichung ΔSOC hervorruft. Gleichzeitig ist die SOC-OCV-Kurve bei niedrigen SOC sehr steil, sodass diese Zuordnung dort einfacher ist. Für andere Zelltypen mit beispielsweise einer insgesamt steileren SOC-OCV-Kurve können sich die Konditionszahlen verbessern.

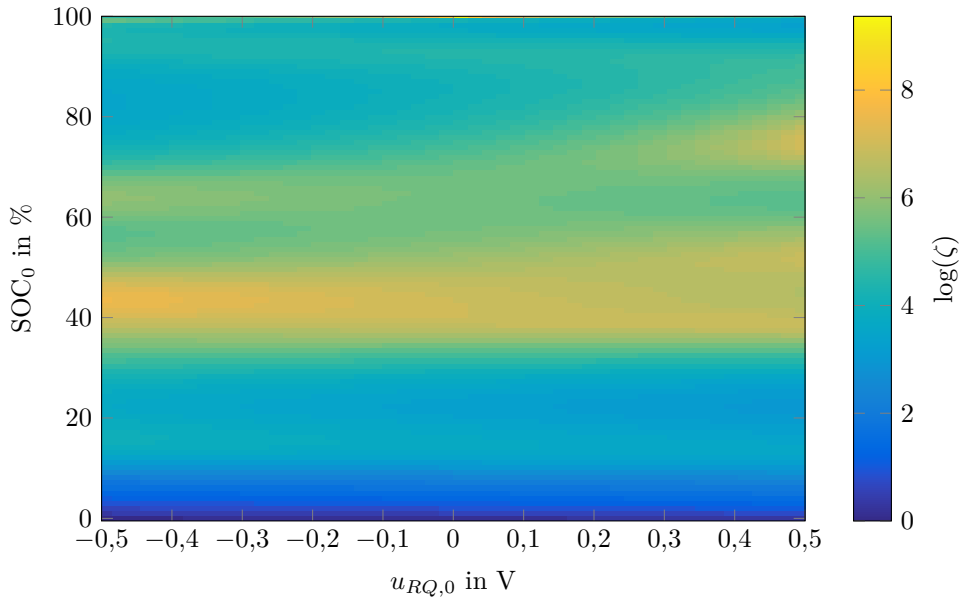


Abbildung 4.3: Beobachtbarkeitsdiagramm des fraktionalen Batteriezellenmodells.

Auch die Beobachtbarkeit der Strang- und Packmodelle kann mithilfe des Beobachtbarkeitskriteriums untersucht werden. Allerdings nimmt die Ableitungs- bzw. Beobachtbarkeitsmatrix für mehrere Zellen schnell höhere Dimensionen an. Wenn unterschiedliche SOC und RQ-Spannungen der einzelnen Zellen berücksichtigt werden, erhöht sich auch die Menge an Parametern und deren Kombinationsmöglichkeiten stark. In der Bachelorarbeit [Cre16] wurde deswegen eine Untersuchung der Beobachtbarkeit für ein Batteriepack beispielhaft nur für einen eingeschränkten Wertebereich für die Zustände und die Ströme durchgeführt. Als Resultat konnten die gleichen Aussagen zur Beobachtbarkeit getroffen werden wie bei der Einzelzelle. Alternativ lässt sich auch anhand der Ergebnisse für das Einzelzellmodell direkt auf die Beobachtbarkeit der Strang- und Packmodelle schließen. Beide Modelle bestehen nur aus einer Konkatenation mehrerer Zellen, die jeweils ihre eigene Ausgangsgröße und die gleiche Modellstruktur besitzen. Da einzelne Zellen bereits beobachtbar sind, müssen auch Batteriestränge diese Eigenschaft besitzen. Dies gilt auch für Batteriepacks, sofern alle Strangströme bekannt sind.

5 Verteilte Kalman-Filter für fraktionale Systeme

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Prinzipien der Dezentralisierung und Verteilung, welche in Abschnitt 2.3.2 vorgestellt wurden, aufgegriffen und auf fraktionale Systeme angewendet. Da verteilte Systeme auf unterschiedliche Weisen miteinander verknüpft sein können, werden anschließend drei verschiedene Strukturen für eine verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme hergeleitet. Die erste Struktur beschreibt dabei eine allgemeine Verteilung ohne strukturelle Einschränkungen. Dabei wird das Gesamtsystem so in Subsysteme aufgeteilt, dass entsprechend Abbildung 2.5b nicht zwingend alle Subsysteme miteinander verknüpft sind. Für diese allgemeine Struktur wird erstmalig ein verteiltes Kalman-Filter für nichtlineare fraktionale Systeme hergeleitet. Dieses DDFKF verwendet einen sogenannten Fusionschritt, in welchem Informationen aus anderen Subsystemen gesammelt, nach ihrer Güte bewertet und die lokal geschätzten Zustände darauf basierend verbessert werden.

Im darauffolgenden Abschnitt wird die Verteilung des Systems strukturell eingeschränkt. Dabei werden die Subsysteme seriell angeordnet, sodass Informationen nur unidirektional an nachfolgende Subsysteme weitergegeben werden. Dadurch sind die Subsysteme zwar nicht mehr beliebig verknüpft, allerdings kann der Fusionschritt direkt in die Korrektur integriert werden. Das sich ergebende kaskadierte fraktionale Kalman-Filter ist das zweite verteilte Filter, welches erstmalig im Rahmen dieser Arbeit für nichtlineare fraktionale Systeme hergeleitet wird. Das CFKF dient im Wesentlichen der Vereinfachung des DDFKF.

Diese beiden Filter haben gemein, dass Informationen zwischen Subsystemen ausgetauscht werden, damit deren Schätzung im Rahmen der getroffenen Annahmen optimal wird. Falls aber ein Datenaustausch zwischen Subsystemen nicht möglich ist oder vermieden werden soll, können diese fehlenden Informationen als unbekannte Eingangsgrößen interpretiert werden. In solch einem Fall kann ein fraktionales unknown-input Kalman-Filter die fehlenden Informationen bestimmen. Das FUIKF ist das dritte Filter, welches erstmalig im Rahmen dieser Arbeit für nichtlineare fraktionale Systeme hergeleitet wird. Im Unterschied zu den beiden vorher genannten Filtern kann das FUIKF auch auf nicht-verteilte fraktionale Systeme angewendet werden, welche einen Durchgriff einer unbekanntem Eingangsgröße zur Ausgangsgröße besitzen.

Dieses Kapitel dient dem Zweck die erste Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 zu beantworten.

5.1 Grundidee, Voraussetzungen und Notationen

In diesem Abschnitt wird die Grundidee der Verteilung des Systems nach den Definitionen 2.4 und 2.5 für fraktionale Systeme diskutiert. Dadurch sollen die in Abschnitt 2.3.2 genannten Vorteile auch auf diese Systemklasse übertragen werden. Dazu sei das System aus Satz 3.3 gegeben, welches anhand der Ausgangsgröße in Subsysteme aufgeteilt wird:

$$\mathbf{y}_k := (\mathbf{y}_{1,k}^\top \quad \dots \quad \mathbf{y}_{A,k}^\top)^\top. \quad (5.1)$$

Dabei beschreibt A die Gesamtanzahl der Subsysteme. Die Größen $\mathbf{y}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i}$ werden lokale Ausgangsgrößen des Subsystems i genannt. Dies entspricht bereits einer Dezentralisierung nach Definition 2.4. Um auch eine Verteilung nach Definition 2.5 zu erreichen, werden die Zustandsgrößen ebenso in A Untervektoren zerlegt. Diese Verteilung lässt sich mithilfe von Transformations- oder Selektionsmatrizen beschreiben, sodass

$$\mathbf{x}_{i,k} = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_k \quad (5.2)$$

mit

$$\mathbf{y}_{i,k} = \mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}) \quad (5.3)$$

gilt. Dabei wird $\mathbf{x}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_i}$ mit $n_i \leq n$ auch lokaler Zustandsvektor des Subsystems i genannt. Für die Elemente der Transformationsmatrizen $\mathbf{T}_i \in \mathbb{N}_0^{n_i \times n}$ gilt $T_{a,b,i} \in \{0, 1\}$, wobei $T_{a,b,i}$ die a -te Zeile und b -te Spalte der Matrix angibt. Weiterhin gilt für die Summe aller Elemente einer Zeile $\sum_{b=1}^n T_{a,b,i} = 1 \quad \forall a, i$. Anschaulich setzt sich diese Matrix aus transponierten bzw. liegenden Einheitsvektoren zusammen und beschreibt eine Auswahl an Zuständen aus dem zentralen Zustandsvektor.

Die Wahl der Subsysteme wird so getroffen, dass die lokalen Ausgangsgrößen eine Funktion der lokalen Zustandsgrößen nach (5.3) sind. Die Aufteilung der Zustandsgrößen nach (5.2) muss dabei, im Gegensatz zur Aufteilung der Ausgangsgrößen nach (5.1), nicht zwingend disjunkt erfolgen. Weiterhin ist der Unterraum in (5.2) nicht unbedingt als echte Teilmenge zu verstehen, da auch die Wahl von $\mathbf{x}_{i,k} \equiv \mathbf{x}_k$ zulässig ist. Zur besseren Unterscheidung wird das Subsystem i mit den Zustands- und Ausgangsgrößen $\mathbf{x}_{i,k}$ und $\mathbf{y}_{i,k}$ auch als lokales System i bezeichnet. Das nicht-verteilte Gesamtsystem, welches alle Zustands- und Ausgangsgrößen berücksichtigt (wie beispielsweise das in Satz 3.3), wird auch globales oder zentrales System genannt.

Im lokalen Subsystem werden nur die Zustandsgleichungen für $\mathbf{x}_{i,k+1}$ betrachtet. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass nach Abschnitt 2.3.2 zur Berechnung der lokalen Zustandsgleichungen $\mathbf{f}_{i,k}$ in der Regel nicht nur die lokalen Zustände $\mathbf{x}_{i,k}$, sondern auch weitere, sogenannte externe Zustände $\mathbf{d}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ benötigt werden. Die lokale Zustandsgleichung lässt sich somit durch

$$\mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1 - \frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j} \quad (5.4)$$

beschreiben. Die Größe $\mathbf{d}_{i,k}$ beschreibt dabei die Zustände des Systems, die aufgrund der Verteilung nicht im lokalen Zustandsvektor $\mathbf{x}_{i,k}$ des Subsystems i enthalten sind¹⁵. Die externen Zustände sind im lokalen Subsystem i weder in der Ausgangsgröße enthalten noch wird ihre Systemgleichung betrachtet. Daher können sie auch als zusätzliche Eingangsgrößen interpretiert werden.

Es stellt sich nun noch die Frage, ob die Darstellung nach (5.4) bezüglich des dort enthaltenen Grünwald-Letnikov-Differenzenquotienten gültig ist. Da $\mathbf{\Upsilon}_{j,\alpha,k}$ nach (3.41) eine Diagonalmatrix darstellt und somit jeder Zustandsgröße nur genau ihre eigene Vergangenheit zugeordnet wird, ist die Darstellung mithilfe einer lokalen Matrix $\mathbf{\Upsilon}_{i,j,\alpha_i,k}$ nach (5.4) zulässig. Das fraktionale System lässt sich also ohne weitere Einschränkungen auf die gleiche Weise wie auch nicht-fraktionale Systeme in Subsysteme aufteilen. Für eine geeignete Vorgehensweise zur Aufteilung des Systems sei daher nochmals auf die Ausführungen in Abschnitt 2.3.2 und auf die Literatur, z. B. [KM07, KM⁺08] oder [Hil12, S. 50, 51, 58, 59], verwiesen.

Bisher wurden noch keine Eingangsgrößen und Rauschprozesse des Systems betrachtet. Da oftmals nicht in jedem Subsystem alle Eingangsgrößen sowie alle Rauschprozesse des gesamten Systems auftreten, können auch für diese Größen lokale Vektoren definiert werden. Sie lassen sich für die einzelnen Subsysteme als nicht-disjunkte Untervektoren der zentralen Größen, ähnlich zu (5.2), beschreiben: $\mathbf{u}_{i,k} = \mathbf{T}_i^u \mathbf{u}_k$, $\mathbf{v}_{i,k} = \mathbf{T}_i^v \mathbf{v}_k$ und $\mathbf{w}_{i,k} = \mathbf{T}_i^w \mathbf{w}_k$ für alle $i = 1, 2, \dots, A$. Für die Transformationsmatrizen \mathbf{T}_i^u , \mathbf{T}_i^v und \mathbf{T}_i^w gilt $T_{a,b,i}^u \in \{0, 1\}$, $T_{a,b,i}^v \in \{0, 1\}$ und $T_{a,b,i}^w \in \{0, 1\}$ sowie $\sum_{b=1}^p T_{a,b,i}^u = 1$, $\sum_{b=1}^r T_{a,b,i}^v = 1$ und $\sum_{b=1}^s T_{a,b,i}^w = 1 \forall a, i$. Auch hier werden für die lokalen Vektoren keine echten Teilmengen vorausgesetzt, sodass die Transformationsmatrizen auch der Einheitsmatrix entsprechen können, wenn der lokale Vektor aus dem gesamten Vektor besteht.

Das Ziel lautet nun für jeden Knoten ein lokales Kalman-Filter zu entwerfen. Diese schätzen jeweils zunächst nur die lokalen Zustände $\mathbf{x}_{i,k}$ auf Basis der lokalen Messungen $\mathbf{y}_{i,k}$. Erst im Anschluss werden Informationen mit anderen Subsystemen kommuniziert und die Schätzungen darauf basierend verbessert. Der Begriff Information wird dabei als Ausdruck für die lokal geschätzten Zustände und Kovarianzen verwendet. Es können im Allgemeinen aber auch andere Größen gemeint sein, die zwischen den Subsystemen ausgetauscht werden.

Um die Schätzung aller Zustände des Gesamtsystems durchführen zu können, müssen für die Verteilung allerdings verschiedene Voraussetzungen erfüllt sein. Diese werden in den nachfolgenden Annahmen zusammengefasst.

¹⁵ In Abschnitt 2.3.2 wurden diese externen Zustände noch $\mathbf{x}_{j,k}$ genannt. Hier werden sie jedoch mit $\mathbf{d}_{i,k}$ bezeichnet, um diese Größen eindeutig unterscheiden und um sie Subsystem i zuordnen zu können. Auch der Vergleich zum später vorgestellten FUIKF soll dadurch klarer werden.

Annahme 5.1 (Vollständigkeit)

Es wird angenommen, dass die Gesamtheit aller Subsysteme $1, \dots, A$ das zentrale System vollständig beschreibt. D. h., dass jede einzelne Zustands- bzw. Ausgangsgleichung von \mathbf{f}_k bzw. \mathbf{g}_k in einem Subsystem enthalten ist.

Diese Annahme ist für die Ausgangsgleichungen bereits durch die Definition (5.1) erfüllt, aber für die Zustandsgleichungen ausschließlich anhand von (5.2) noch nicht, da die Aufteilung der Zustände nicht disjunkt erfolgen muss.

Annahme 5.2 (Unbekannte Parameter)

Es wird angenommen, dass in Subsystem i keine Parameter aus anderen Subsystemen $m \neq i$ bekannt sind oder übertragen werden. Die Parameter anderer Subsysteme werden in Subsystem i vernachlässigt bzw. zu null angenommen.

Jedes Subsystem soll nur seine eigene Dynamik betrachten und nur Zustandsinformationen austauschen. Wissen über die Struktur oder Parameter anderer Subsysteme werden nicht berücksichtigt. Annahme 5.2 dient also im Wesentlichen der Modularität und der Vereinfachung des Ansatzes.

Annahme 5.3 (Beobachtbarkeit lokaler Systeme)

Es wird angenommen, dass jedes Subsystem i beobachtbar ist. D. h., dass es möglich ist, die lokalen Zustände $\mathbf{x}_{i,k}$ anhand der lokalen Ausgangsgrößen $\mathbf{y}_{i,k}$ bestimmen zu können.

Die einzelnen Elemente des Vektors $\mathbf{d}_{i,k}$ müssen aufgrund von Annahme 5.1 jeweils in mindestens einem lokalen Zustandsvektor eines anderen Subsystems enthalten sein. In diesem Subsystem können diese Größen lokal geschätzt und anschließend an Subsystem i kommuniziert werden. Daher müssen sie in Subsystem i auch nicht beobachtbar sein. Aus diesem Grund bietet die in (5.4) verwendete Form zur Betrachtung der lokalen Zustandsgleichung im Gegensatz zu anderen Darstellungen (wie z. B. die in Abschnitt 2.3.2 vorgestellte Form aus [HA10, MDW94]) Vorteile. Es lassen sich nicht nur eindeutige Aussagen zur Beobachtbarkeit treffen, sondern es wird auch klar festgelegt, für welche Zustände intern eine Schätzung vorgenommen wird und welche Zustände nur von anderen Subsystemen übertragen werden.

Es gibt oftmals mehrere Möglichkeiten ein System zu verteilen. Falls das Gesamtsystem beobachtbar ist, findet man immer mindestens die triviale Aufteilung $A = 1$ bei der das einzige Subsystem das Gesamtsystem darstellt. Falls es keine weiteren Aufteilungsmöglichkeiten gibt, kann ein Grund dafür sein, dass das zentrale System zu klein ist oder die einzelnen Zustände zu viele Abhängigkeiten untereinander besitzen. Ein Beispiel hierfür wäre eine einzelne Batteriezelle nach Definition 4.3. Eine Unterteilung wäre hier weder sinnvoll noch möglich, da die Batteriezelle nur eine einzige Ausgangsgröße besitzt.

Zusätzlich zu diesen Annahmen bleiben die in Abschnitt 3.3 verwendeten Annahmen 3.1, 3.2 und 3.3 sowie die Voraussetzung, dass die nichtlinearen Funktionen \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_{k+1} des Modells differenzierbar sind, bestehen.

Zusätzlich zur Notation (3.56), die die Schätzung des zentralen Zustandsvektors auf Basis aller Ausgangsgrößen beschreibt, werden nachfolgend weitere Notationen die Subsysteme betreffend eingeführt:

$$\mathbf{x}_{i,k|j} := \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_{i,k} \mid \mathbf{y}_j, \dots, \mathbf{y}_{\lceil a/T \rceil} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_{i,k} \mid \mathbf{y}_j^* \right\}, \quad (5.5)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k|j} := \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_{i,k} \mid \mathbf{y}_{i,j}, \mathbf{y}_{j-1}, \dots, \mathbf{y}_{\lceil a/T \rceil} \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}_{i,k} \mid \mathbf{y}_{i,j}, \mathbf{y}_{j-1}^* \right\}. \quad (5.6)$$

Gleichung (5.5) beschreibt die Schätzung der lokalen Zustände im Schritt k auf Basis aller Ausgangsgrößen bis zum Schritt j . Gleichung (5.6) beschreibt die Schätzung der gleichen Zustandsgrößen auf Basis aller Ausgangsgrößen bis zum Zeitschritt $j - 1$ und berücksichtigt dabei zusätzlich die lokalen Ausgangsgrößen im Schritt j . Weiterhin werden verschiedene Notationen für die Fehlergrößen und deren Kovarianzmatrizen eingeführt, die für die Herleitungen der Filteralgorithmen benötigt werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^x := \mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k|j}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{P}_{i,k|j}^x := \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^x \right)^\top \right\}, \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^d := \mathbf{d}_{i,k} - \mathbf{d}_{i,k|j}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{P}_{i,k|j}^d := \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^d \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^d \right)^\top \right\}, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{P}_{i,k|j}^{xd} := \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|j}^d \right)^\top \right\} = \left(\mathbf{P}_{i,k|j}^{dx} \right)^\top, \quad (5.11)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{i,k|j}^x := \mathbf{x}_{i,k} - \tilde{\mathbf{x}}_{i,k|j}, \quad (5.12)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{i,k|j}^x := \mathbb{E} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{i,k|j}^x \left(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{i,k|j}^x \right)^\top \right\}. \quad (5.13)$$

5.2 Verteiltes fraktionales Kalman-Filter

In diesem Abschnitt wird das DDFKF vorgestellt, welches für ein verteiltes fraktionales System ohne strukturelle Einschränkungen verwendet werden kann. Dieses wurde für den linearen Fall in der eigenen Veröffentlichung [KSH16] in einer leicht modifizierten Struktur publiziert und wird hier auf nichtlineare fraktionale Systeme erweitert. Für das Filter werden Subsysteme nach nachfolgender Definition betrachtet.

Definition 5.1 (Verteilte Subsysteme)

Das Gesamtsystem nach Satz 3.3 wird unter Berücksichtigung der Annahmen 5.1 und 5.3 folgendermaßen in Subsysteme aufgeteilt:

$$\mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1 - \frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j}, \quad (5.14)$$

$$\mathbf{y}_{i,k} = \mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{w}_{i,k}), \quad (5.15)$$

mit

$$\Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} := \text{diag} \left\{ \binom{\alpha_{i,1,k}}{j}, \dots, \binom{\alpha_{i,n_i,k}}{j} \right\} \quad (5.16)$$

wobei $i \in [1, \dots, A]$ das i -te Subsystem bezeichnet und A die Gesamtanzahl der Subsysteme beschreibt. Dabei sind $\mathbf{x}_{i,k} \in \mathbb{R}^{n_i}$ die lokalen Zustände, $\mathbf{u}_{i,k} \in \mathbb{R}^{p_i}$ die lokalen Eingänge und $\mathbf{y}_{i,k} \in \mathbb{R}^{q_i}$ die lokalen Ausgänge des Subsystems i . Die Terme $\mathbf{v}_{i,k} \in \mathbb{R}^{r_i}$, $\mathbf{w}_{i,k} \in \mathbb{R}^{s_i}$ repräsentieren das lokale System- und Messrauschen. Die Matrix $\Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ beschreibt den lokalen Unterraum von $\Upsilon_{j,\alpha,k}$ des fraktionalen Gesamtsystems. Die lokalen Zustands- und Ausgangsgleichungen sind durch $\mathbf{f}_{i,k}$ und $\mathbf{g}_{i,k}$ mit den Ableitungsordnungen $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n_i}$, welche sich den Zuständen $x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i}$ zuordnen lassen, gegeben. Die Größen $\mathbf{d}_{i,k} \in \mathbb{R}^{m_i}$ sind Zustandsgrößen anderer Subsysteme, die für die Berechnung von $\mathbf{f}_{i,k}$ benötigt, aber im Subsystem i nicht geschätzt werden. Diese werden daher auch externe Zustandsgrößen genannt.

Die Verteilung nach Definition 5.1 findet dabei anhand (5.1) durch eine Aufteilung der Ausgangsgrößen statt. Die Zustände werden darauf basierend mit (5.2) und (5.3) unter Berücksichtigung der Annahmen 5.1 und 5.3 ausgewählt.

Bei der Aufteilung nach (5.1) ist direkt ersichtlich, dass jede Ausgangsgröße in genau einem Subsystem enthalten ist. Für die Zustandsgleichungen nach (5.2) ist dies nicht zwingend notwendig. Es ist möglich, dass Zustandsgleichungen auch in mehreren Subsystemen auftreten, z. B. wenn die entsprechende Zustandsgröße in mehreren Subsystemen von Relevanz ist. Die Zustände des i -ten Subsystems werden mithilfe von Transformations- bzw. Selektionsmatrizen wie in (5.2) aus dem zentralen Zustandsvektor ausgewählt:

$$\mathbf{x}_{i,k} = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_k, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{d}_{i,k} = \mathbf{T}_i^d \mathbf{x}_k. \quad (5.18)$$

Analog zur bereits in (5.2) eingeführten Transformationsmatrix \mathbf{T}_i gilt $T_{a,b,i}^d \in \{0, 1\}$ sowie $\sum_{b=1}^n T_{a,b,i}^d = 1$ auch für \mathbf{T}_i^d . Die Transformationsmatrizen in (5.17) und (5.18) werden später zur Beschreibung des Austauschs der Informationen zwischen verschiedenen Subsystemen benötigt.

Da durch die Verteilung in den lokalen Subsystemen nur Unterräume des gesamten Zustandsvektors betrachtet werden, können nicht alle Kreuzkorrelationen der Rauschprozesse bzw. deren Auswirkung auf die Zustände betrachtet werden. Es gelten daher die nachfolgenden Annahmen.

Annahme 5.4 (Voraussetzungen für das lokale Systemrauschen)

Für das lokale Systemrauschen wird die lokale, linearisierte Matrix der Systemrauschprozesse zu

$$\bar{\mathbf{Q}}_{i,k} := \bar{\mathbf{L}}_{i,k} \mathbf{Q}_{i,k} \bar{\mathbf{L}}_{i,k}^\top, \quad \forall i, k \quad (5.19)$$

mit

$$\bar{\mathbf{L}}_{i,k} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k})}{\partial \mathbf{v}_{i,k}} \right], \quad (5.20)$$

$$\mathbf{Q}_{i,k} := \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k}^\top \} \quad (5.21)$$

angenommen. Eine möglicherweise auftretende Korrelation des Systemrauschens zu Zuständen anderer Subsysteme wird im lokalen Subsystem i nicht berücksichtigt.

Für das Ausgangsrauschen wird die gleiche Annahme formuliert. Da die einzelnen Ausgangsgrößen jeweils nur in genau einem Subsystem auftreten, lässt sich die Annahme mithilfe einer Blockdiagonalmatrix formulieren.

Annahme 5.5 (Voraussetzungen für das lokale Ausgangsrauschen)

Es wird für das Ausgangsrauschen angenommen, dass

$$\bar{\mathbf{R}}_k := \bar{\mathbf{M}}_k \mathbf{R}_k \bar{\mathbf{M}}_k^\top = \text{blockdiag} \{ \bar{\mathbf{R}}_{1,k}, \dots, \bar{\mathbf{R}}_{A,k} \}, \quad \forall k \quad (5.22)$$

mit

$$\bar{\mathbf{M}}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)}{\partial \mathbf{w}_k} \right] \quad (5.23)$$

gilt. Dabei beschreibt $\bar{\mathbf{R}}_{i,k}$ die lokale, linearisierte Matrix der Ausgangsrauschprozesse mit

$$\bar{\mathbf{R}}_{i,k} = \bar{\mathbf{M}}_{i,k} \mathbf{R}_{i,k} \bar{\mathbf{M}}_{i,k}^\top, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{R}_{i,k} := \mathbb{E} \{ \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{w}_{i,k}^\top \}, \quad (5.25)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{i,k} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{w}_{i,k})}{\partial \mathbf{w}_{i,k}} \right]. \quad (5.26)$$

Nach Annahme 5.4 wird in Subsystem i nur das lokale Systemrauschen betrachtet, sodass eventuelle Korrelationen des Systemrauschens zu Zustandsgleichungen, welche

nur in anderen Subsystemen auftreten, nicht berücksichtigt werden können. Für das Ausgangsrauschen gilt analog dazu Annahme 5.5. Diese beiden Annahmen wirken zunächst einschränkend. Insbesondere Annahme 5.4 lässt sich oftmals nur erfüllen, wenn die unterschiedlichen Rauschprozesse bzw. deren Linearisierung bezüglich der Zustandsgleichung gar keine Korrelationen aufweisen. Falls eine Korrelation auftritt, welche einen großen Einfluss auf die Schätzung besitzt oder aus anderen Gründen nicht vernachlässigt werden darf, muss das Gesamtsystem so in Subsysteme aufgeteilt werden, dass die korrelierten Rauschprozesse im gleichen Subsystem auftreten, wo sie entsprechend berücksichtigt werden.

Um das verteilte fraktionale Kalman-Filter nachfolgend zu beschreiben, wird die Inversion der Transformationsmatrizen benötigt. Da diese in der Regel aber nicht quadratisch sind, wird die Moore-Penrose-Pseudoinverse verwendet. Für die Pseudoinverse einer Matrix \mathbf{Z} wird die Notation

$$\mathbf{Z}^\dagger := \left(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \right)^{-1} \mathbf{Z}^\top \quad (5.27)$$

verwendet. Die Pseudoinverse kann für die hier betrachtete Klasse der Transformations- bzw. Selektionsmatrizen in (5.17) bzw. (5.18) ohne Einschränkungen verwendet werden, da sie sich nur aus mehreren liegenden Einheitsvektoren zusammensetzen und daher per Definition immer vollen Zeilenrang besitzen. Für weitere Informationen zu Transformationsmatrizen, ihrer Pseudoinverse und deren Rechenregeln sei auf [Mut98, S. 94-112] verwiesen. An den dortigen Ausführungen orientieren sich auch die Grundideen und Herleitungen im Fusionsschritt.

Im nachfolgenden Satz wird das verteilte fraktionale Kalman-Filter vorgestellt.

Satz 5.1 (Verteiltes fraktionales Kalman-Filter)

Es sei ein nichtlineares fraktionales System nach Satz 3.3 mit einer Aufteilung in Subsysteme nach Definition 5.1 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 5.4 und 5.5 gültig. Dann ist das durch die drei nachfolgenden Schritte gegebene DDFKF ein erwartungstreuer Minimum-Varianz-Schätzer für die Zustände des Systems.

Prädiktion

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j}, \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{i,k} & \mathbf{B}_{i,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i,k|k}^x & \mathbf{P}_{i,k|k}^{xd} \\ \mathbf{P}_{i,k|k}^{dx} & \mathbf{P}_{i,k|k}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{i,k}^\top \\ \mathbf{B}_{i,k}^\top \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{i,k} \\ &+ \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{i,j,\alpha,k} \mathbf{P}_{i,k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{i,j,\alpha,k}^\top. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Korrektur

$$\mathbf{K}_{i,k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top + \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \right)^{-1}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}_{i,k+1})). \quad (5.32)$$

Fusion

Dieser Schritt besteht aus der Fusion der lokalen Zustände und deren Kovarianzen

$$\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} + \sum_{m=1}^A \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{E}_{m,k+1} \mathbf{T}_i^\dagger, \quad (5.33)$$

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \sum_{m=1}^A \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{e}_{m,k+1} \right) \quad (5.34)$$

sowie der externen Zustände, deren Kovarianzen und den Kreuzkovarianzen zwischen den internen und externen Zuständen

$$\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d \right)^{-1} = \sum_{m=1}^A \left(\left(\mathbf{T}_i^d \right)^\top \right)^\dagger \mathbf{E}_{m,k+1} \left(\mathbf{T}_i^d \right)^\dagger, \quad (5.35)$$

$$\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd} \right)^{-1} = \sum_{m=1}^A \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{E}_{m,k+1} \left(\mathbf{T}_i^d \right)^\dagger = \left(\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{dx} \right)^\top \right)^{-1}, \quad (5.36)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d \left(\sum_{m=1}^A \left(\left(\mathbf{T}_i^d \right)^\top \right)^\dagger \mathbf{e}_{m,k+1} \right) \quad (5.37)$$

mit den Hilfsgrößen

$$\mathbf{E}_{m,k+1} := \mathbf{T}_m^\top \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^x \right)^{-1} - \left(\mathbf{P}_{m,k+1|k}^x \right)^{-1} \right) \mathbf{T}_m, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{e}_{m,k+1} := \mathbf{T}_m^\top \left(\left(\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^x \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k+1|k+1} - \left(\mathbf{P}_{m,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{m,k+1|k} \right), \quad (5.39)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i,k} := \mathbf{F}_{i,k} + \Upsilon_{i,1,\alpha,k} \quad (5.40)$$

und den Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{F}_{i,k} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k})}{\partial \mathbf{x}_{i,k}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k}=\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{v}_{i,k}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k}=\mathbf{d}_{i,k|k}}, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{L}_{i,k} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k})}{\partial \mathbf{v}_{i,k}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k}=\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{v}_{i,k}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k}=\mathbf{d}_{i,k|k}}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{B}_{i,k} := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k})}{\partial \mathbf{d}_{i,k}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k}=\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{v}_{i,k}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k}=\mathbf{d}_{i,k|k}}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{G}_{i,k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1})}{\partial \mathbf{x}_{i,k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k+1}=\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{w}_{i,k+1}=\mathbf{0}}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{M}_{i,k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1})}{\partial \mathbf{w}_{i,k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k+1}=\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{w}_{i,k+1}=\mathbf{0}}. \quad (5.45)$$

Die restlichen Größen entsprechen denen aus Definition 5.1 und den Gleichungen (5.7) - (5.13). Die Größen mit Index m wie beispielsweise die Matrix $\mathbf{E}_{m,k+1}$ oder der Vektor $\mathbf{e}_{m,k+1}$ werden dabei von Subsystem m übermittelt.

Beweis:

Der Beweis ist, wie Satz 5.1 selbst, in drei Teile gegliedert.

Prädiktion

Der Prädiktionsschritt ergibt sich aus dem bedingten Erwartungswert des lokalen Systemzustands vor einer Messung \mathbf{y}_{k+1} bzw. $\mathbf{y}_{i,k+1}$:

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k} = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}_{i,k+1} | \mathbf{y}_k^* \}. \quad (5.46)$$

Die Prädiktion ist somit ähnlich zum FEKF, mit dem Unterschied, dass in (5.46) nur die lokalen Zustände in Knoten i betrachtet werden. Allerdings werden nicht nur lokale, sondern alle bisherigen Messungen \mathbf{y}_k^* berücksichtigt, da diese aufgrund des Fusionsschritts (siehe später) vorliegen. Nachfolgend wird die Nichtlinearität der lokalen Zustandsgleichung (5.14) durch Einsetzen in (5.46) und anschließender Linearisierung von $\mathbf{f}_{i,k}$ aufgelöst. Die Linearisierung erfolgt mit einer Taylorreihenentwicklung um den Punkt $\mathbf{x}_{i,k}^0 = \mathbf{x}_{i,k|k}$, $\mathbf{d}_{i,k}^0 = \mathbf{d}_{i,k|k}$ und $\mathbf{v}_{i,k}^0 = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,k+1|k} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j} \middle| \mathbf{y}_k^* \right\} \\ &\approx \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k|k}) + \mathbf{F}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k|k}) + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j} + \mathbf{B}_{i,k}(\mathbf{d}_{i,k} - \mathbf{d}_{i,k|k}) \middle| \mathbf{y}_k^* \right\}. \quad (5.47) \end{aligned}$$

Da die Schätzwerte $\mathbf{x}_{i,k|k}$ und $\mathbf{d}_{i,k|k}$ erwartungstreu sind (siehe später), lässt sich der Schätzwert zu

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k} \quad (5.48)$$

angeben. Mit Annahme 3.2 folgt weiterhin

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j}, \quad (5.49)$$

was (5.28) entspricht.

Der Schätzfehler der Prädiktion ergibt sich durch Einsetzen von (5.14) und (5.49) in (5.7). Es folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,k+1|k}^x &= \mathbf{x}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{i,k+1|k} \\ &= \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j} \\ &\quad - \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k|k}) + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Anschließend wird die gleiche Taylorreihenentwicklung wie in (5.47) verwendet:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,k+1|k}^x &\approx \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k|k}) + \mathbf{F}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k|k}) + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} \\ &\quad + \mathbf{B}_{i,k}(\mathbf{d}_{i,k} - \mathbf{d}_{i,k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j} \\ &\quad - \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k|k}) + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j} \\ &= \mathbf{F}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k} - \mathbf{x}_{i,k|k}) + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} + \mathbf{B}_{i,k}(\mathbf{d}_{i,k} - \mathbf{d}_{i,k|k}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} (\mathbf{x}_{i,k+1-j} - \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Mit (5.40) folgt

$$\epsilon_{i,k+1|k}^x = \tilde{\mathbf{F}}_{i,k} \epsilon_{i,k|k}^x + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} - \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \epsilon_{i,k+1-j|k+1-j}^x + \mathbf{B}_{i,k} \epsilon_{i,k|k}^d. \quad (5.52)$$

Da der Erwartungswert dieser Fehlergleichung (5.52) null ist, ist der Prädiktionsschritt im Rahmen der getroffenen Annahmen und Vereinfachungen erwartungstreu. Mithilfe des Fehlers (5.52) wird nun die Schätzfehlerkovarianzmatrix der Prädiktion berechnet. Wenn (5.52) in (5.8) eingesetzt wird, ist ersichtlich, dass nicht nur Kreuzterme von $\epsilon_{i,k+1-j|k+1-j}^x$, sondern auch von $\epsilon_{i,k+1-j|k+1-j}^x$ zu $\epsilon_{i,k|k}^d$ auftreten. Nach Annahme 3.3 gilt allerdings $E\{\epsilon_{n|m} \epsilon_{m|m}^\top\} = 0$ mit $n \neq m$ für alle Zustände, unabhängig davon in welchem Subsystem diese betrachtet werden. Somit müssen auch keine Kovarianzen zwischen internen und externen Zuständen unterschiedlicher Zeitschritte betrachtet werden, sondern lediglich die Kovarianz zum gleichen Zeitschritt k . Weiterhin ist das lokale Systemrauschen $\mathbf{v}_{i,k}$ nicht mit den Größen $\epsilon_{i,j|j}^x$ für alle $j \leq k$ korreliert. Damit ergibt sich die Schätzfehler-Kovarianzmatrix der Prädiktion zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x &= \tilde{\mathbf{F}}_{i,k} \epsilon_{i,k|k}^x \epsilon_{i,k|k}^{x,\top} \tilde{\mathbf{F}}_{i,k}^\top + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k}^\top \mathbf{L}_{i,k}^\top + \mathbf{B}_{i,k} \epsilon_{i,k|k}^d \epsilon_{i,k|k}^{d,\top} \mathbf{B}_{i,k}^\top \\ &\quad + \tilde{\mathbf{F}}_{i,k} \mathbf{P}_{i,k|k}^{xd} \mathbf{B}_{i,k}^\top + \mathbf{B}_{i,k} \mathbf{P}_{i,k|k}^{dx} \tilde{\mathbf{F}}_{i,k}^\top \\ &\quad + \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{P}_{i,k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k}^\top, \end{aligned} \quad (5.53)$$

was in Matrixschreibweise (5.29) entspricht. Wie in Annahme 5.4 beschrieben, wird zur Berechnung des Schätzfehlers lediglich $\mathbf{Q}_{i,k}$ für das Systemrauschen berücksichtigt. Eventuell auftretende Kreuzkovarianzen von Zuständen verschiedener Subsysteme werden vernachlässigt. Da im lokalen Subsystem i keine Prädiktion der externen Größen $\mathbf{d}_{i,k+1|k}$ stattfindet, liegt keine Information über diese Größen vor. Dies kann mathematisch durch $(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d)^{-1} = \mathbf{0}$ und $(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd})^{-1} = \mathbf{0}$ oder durch eine unendlich große Kovarianz beschrieben werden [Sim06, S. 156]. Diese Aussage muss nicht explizit im Algorithmus angegeben werden, aber sie wird für die spätere Herleitung der Fusion benötigt.

Korrektur

Im Korrekturschritt wird die Schätzung anhand der lokalen Messungen verbessert. Für die Korrektur der Zustände wird die übliche Form eines Kalman-Filters

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0})) \quad (5.54)$$

angenommen. Da im Gegensatz zur bisherigen Notation zwar alle Ausgangsgrößen \mathbf{y}_k^* bis zum Zeitschritt k , aber im Zeitschritt $k+1$ nur die lokalen Ausgangsgrößen $\mathbf{y}_{i,k}$ verwendet werden, werden die geschätzten Zustände, die Schätzfehler und die Kovarianzmatrix im Korrekturschritt mit einer Tilde gekennzeichnet (vergleiche (5.6), (5.12) und (5.13)). Die Bestimmung von $\mathbf{K}_{i,k+1}$ selbst folgt nach der Herleitung der Kovarianzmatrix.

Für diese wird zunächst der Schätzfehler nach Einbeziehung der lokalen Messung $\mathbf{y}_{i,k+1}$ berechnet. Diesen erhält man durch Einsetzen der Korrekturgleichung (5.54) und der

Ausgangsgleichung (5.15) in (5.12):

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x &= \mathbf{x}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{i,k+1|k} - \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0})) \\ &= \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k} \\ &\quad - \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1}) - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0})).\end{aligned}\quad (5.55)$$

Nach Approximation der Gleichung mithilfe einer Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_{i,k+1}^0 = \mathbf{x}_{i,k+1|k}$, $\mathbf{d}_{i,k+1}^0 = \mathbf{d}_{i,k+1|k}$ und $\mathbf{w}_{i,k+1}^0 = \mathbf{0}$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x &\approx \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{G}_{i,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x + \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{w}_{i,k+1}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{w}_{i,k+1}.\end{aligned}\quad (5.56)$$

Da die Prädiktion erwartungstreu ist, ist somit auch die Korrektur im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen und Annahmen erwartungstreu. Die externen Zustände sind per Definition nicht in der Ausgangsgröße enthalten. Daher müssen sie im Korrekturschritt auch nicht berücksichtigt werden. Da das Rauschen $\mathbf{w}_{i,k+1}$ nicht mit dem Schätzfehler der prädizierten Zustände korreliert ist, folgt die Schätzfehler-Kovarianzmatrix nach der Korrektur mit (5.13) zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top.\end{aligned}\quad (5.57)$$

Mithilfe dieser Kovarianzmatrix kann der Verstärkungsfaktor $\mathbf{K}_{i,k+1}$ nun so gewählt werden, dass der Schätzer im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen und auf Basis der lokalen Messungen zu einem Minimum-Varianz-Schätzer wird. Dazu muss in jedem Zeitschritt

$$\mathbb{E} \left\{ \|\mathbf{x}_{i,k+1} - \tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1}\|^2 \right\} \rightarrow \min. \quad (5.58)$$

erfüllt sein. Diese Forderung kann in Abhängigkeit zur Schätzfehlerkovarianzmatrix durch

$$\text{Spur} \left\{ \tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x \right\} \rightarrow \min. \quad (5.59)$$

formuliert werden [Sim06, S. 9]. Durch Ableiten der Spur nach $\mathbf{K}_{i,k+1}$ und zu null setzen erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{i,k+1}} \text{Spur} \left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \right. \\ \left. + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \right\} \\ = -2 (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top + 2 \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1}\end{aligned}\quad (5.60)$$

$$= \mathbf{0}. \quad (5.61)$$

Nach Umstellen der Gleichung lässt sich der optimale Verstärkungsfaktor $\mathbf{K}_{i,k+1}$ durch

$$\mathbf{K}_{i,k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top + \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \right)^{-1} \quad (5.62)$$

angeben. Der Korrekturschritt auf Basis der lokalen Messungen ist somit auch abgeschlossen.

Fusion

Andere Subsysteme können Informationen über $\mathbf{x}_{i,k+1}$ enthalten, da die Aufteilung nach (5.2) nicht disjunkt ist. Weiterhin müssen aufgrund von Annahme 5.1 andere Subsysteme Informationen über $\mathbf{d}_{i,k+1}$ enthalten. Um diese Informationen in Subsystem i berücksichtigen zu können, wird der Fusionschritt benötigt. Die Herleitung dieses Schritts basiert auf einem Vergleich aller lokalen Filter mit dem zentralen Filter nach Satz 3.4. Anhand dieses Vergleichs lässt sich bestimmen, welche Informationen ausgetauscht werden müssen. Dabei wird eine alternative Form des Kalman-Filters, der sogenannte Informationsfilter verwendet. In Anhang C.3 sind Ergänzungen zu diesen alternativen Beschreibungsformen zu finden. Die Berechnungen und Rechengesetze zu den Transformationsmatrizen sind [Mut98, S. 94-112] entnommen.

Wie in Annahme 5.4 bereits vorausgesetzt, lässt sich die Kovarianzmatrix des Ausgangsrauschens unter Berücksichtigung der Linearisierung in Blockdiagonalform schreiben. Zur Berücksichtigung der Linearisierung um den aktuellen Schätzwert werden für die Herleitung die kürzeren Schreibweisen

$$\tilde{\mathbf{R}}_{k+1} := \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}, \quad (5.63)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1} := \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \quad (5.64)$$

verwendet.

Die Kovarianz des zentralen Systems unter Berücksichtigung aller Messungen nach (3.69) kann auf die Form des Informationsfilters (vergleiche Lemma C.1) gebracht werden. Damit kann (3.69) zu

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \quad (5.65)$$

umgeschrieben werden. Die gleiche Vorgehensweise lässt sich nach Lemma C.2 auch auf Gleichung (5.31) anwenden, sodass diese durch

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} + \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{G}_{i,k+1} \quad (5.66)$$

dargestellt werden kann.

Da in den lokalen Ausgängen nicht der zentrale Zustandsvektor verwendet wird, lässt sich die linearisierte Ausgangsmatrix $\mathbf{G}_{i,k}$ durch Einfügen von Nullen auf die Größe des zentralen Zustandsvektors erweitern. Mathematisch lässt sich dies mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}_i beschreiben, welche die Zustände zusätzlich in der gleichen Reihenfolge des zentralen Zustandsvektors anordnet. Dazu wird die Matrix

$$\mathbf{H}_{m,k+1} := \mathbf{G}_{m,k+1} \mathbf{T}_m \quad (5.67)$$

mit $\mathbf{H}_{m,k+1} \in \mathbb{R}^{q_m \times n}$ für Subsystem m verwendet.

Es wird der zweite Term auf der rechten Seite aus (5.65) betrachtet. Mithilfe von Annahme 5.5 und (5.67) wird dieser umgeformt und wieder in (5.65) eingesetzt:

$$\mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^\top & \cdots & \mathbf{H}_{A,k+1}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{1,k+1}^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{A,k+1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_{A,k+1} \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$$= \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{H}_{m,k+1} \quad (5.69)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{H}_{m,k+1}. \quad (5.70)$$

Diese Gleichung beschreibt die Kovarianzmatrix des globalen Systems unter Berücksichtigung aller Messungen. Um die Kovarianzmatrix des lokalen Systems i betrachten zu können, wird (5.70) von links mit $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger$ und von rechts mit \mathbf{T}_i^\dagger multipliziert. Dadurch wird die Matrix auf den lokalen Unterraum in Subsystem i abgebildet:

$$\underbrace{(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \mathbf{T}_i^\dagger}_{\approx (\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x)^{-1}} = \underbrace{(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{T}_i^\dagger}_{\approx (\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x)^{-1}} + (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{H}_{m,k+1} \mathbf{T}_i^\dagger. \quad (5.71)$$

Allerdings ist nach [KM⁺08] die Inversion und das Bilden eines Unterraums einer Matrix nicht kommutativ. Weiterhin werden zur Berechnung der Kovarianz des zentralen Ansatzes $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$ keine Vereinfachungen wie Annahmen 5.4 und 5.5 verwendet. Daher ist beispielsweise $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \mathbf{T}_i^\dagger \approx (\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x)^{-1}$ nur näherungsweise erfüllt. Aufgrund von Annahme 5.2 liegen die Matrizen $\mathbf{H}_{m,k+1}$ und $\tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}$ aus anderen Subsystemen m nicht vor, sodass die Summe in (5.71) nicht berechnet werden kann. Daher wird (5.71) mithilfe von (5.66) und (5.67) weiter umgeformt:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x)^{-1} &\approx (\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x)^{-1} + \sum_{m=1}^A (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \mathbf{G}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{G}_{m,k+1} \mathbf{T}_m \mathbf{T}_i^\dagger \quad (5.72) \\ &= (\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x)^{-1} \\ &\quad + \sum_{m=1}^A (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \left((\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^x)^{-1} - (\mathbf{P}_{m,k+1|k}^x)^{-1} \right) \mathbf{T}_m \mathbf{T}_i^\dagger \end{aligned} \quad (5.73)$$

Da Annahme 5.2 nur Parameter betrifft und Kovarianzmatrizen somit ausgetauscht werden dürfen, lässt sich Gleichung (5.73) berechnen, sofern die entsprechenden Matrizen von den anderen Subsystemen übertragen werden.

Die in (5.73) berechnete Kovarianz entspricht im Rahmen der getroffenen Annahmen dem in Subsystem i betrachteten Unterraum der Kovarianz des zentralen Ansatzes. Nachfolgend werden noch die Kovarianzen der externen Zustände $\mathbf{d}_{i,k+1|k+1}$ bestimmt. Die Vorgehensweise ist dabei ähnlich zu (5.71) - (5.73). Der Hauptunterschied zu diesen Gleichungen ist, dass es für die Zustände $\mathbf{d}_{i,k+1}$ im lokalen Subsystem keine Prädiktion gibt. Wie beim Beweis zur Prädiktion diskutiert, wird daher $(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d)^{-1} = \mathbf{0}$ und $(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd})^{-1} = \mathbf{0}$ angenommen.

Die Kovarianz $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d$ wird dann bestimmt, indem (5.70) von links mit $((\mathbf{T}_i^d)^\top)^\dagger$ und von rechts mit $(\mathbf{T}_i^d)^\dagger$ multipliziert wird:

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger &= \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger \\ &\quad + \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{H}_{m,k+1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d \right)^{-1} &\approx \underbrace{\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \right)^{-1}}_{=\mathbf{0}} \\ &\quad + \sum_{m=1}^A \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \left(\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^{-1} - \mathbf{P}_{m,k+1|k}^{-1} \right) \mathbf{T}_m (\mathbf{T}_i^d)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Multipliziert man (5.70) hingegen mit $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger$ von links und mit $(\mathbf{T}_i^d)^\dagger$ von rechts, ergibt sich die Kreuzkovarianz $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd}$ zu

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger &= \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger \\ &\quad + \sum_{m=1}^A \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{H}_{m,k+1} (\mathbf{T}_i^d)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd} \right)^{-1} &\approx \underbrace{\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd} \right)^{-1}}_{=\mathbf{0}} \\ &\quad + \sum_{m=1}^A \left(\mathbf{T}_i^\top \right)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \left(\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^{-1} - \mathbf{P}_{m,k+1|k}^{-1} \right) \mathbf{T}_m (\mathbf{T}_i^d)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Auf Basis dieser Kovarianzmatrizen, die nun alle Messungen berücksichtigen, wird anschließend die Zustandsfusion hergeleitet. Dazu wird eine ähnliche Vorgehensweise wie

in (5.65) - (5.73) verwendet. Mithilfe von Lemma C.3 kann (3.68) auch durch

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{k+1} \quad (5.78)$$

mit

$$\mathbf{y}'_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}) + \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{x}_{k+1|k} \quad (5.79)$$

dargestellt werden. Analog dazu lässt sich nach Lemma C.4 die gleiche Umformung auch auf den lokalen, korrigierten Zustand anwenden:

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{i,k+1} \quad (5.80)$$

mit

$$\mathbf{y}'_{i,k+1} = \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}) + \mathbf{G}_{i,k+1} \mathbf{x}_{i,k+1|k}. \quad (5.81)$$

Nach dem gleichen Schema wie in (5.68) wird der zweite Term auf der rechten Seite in (5.78) umgeformt und wieder in (5.78) eingesetzt:

$$\mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{1,k+1}^\top & \cdots & \mathbf{H}_{A,k+1}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{R}}_{1,k+1}^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{R}}_{A,k+1}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_{1,k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_{A,k+1} \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

$$= \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{m,k+1} \quad (5.83)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k} + \sum_{m=1}^A \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{m,k+1}. \quad (5.84)$$

Analog zu den Kovarianzmatrizen werden die Gleichungen wieder transformiert, um nur noch die lokalen Zustände $\mathbf{x}_{i,k+1}$ zu berücksichtigen. Es wird dazu (5.84) von links mit $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger$ multipliziert und zusätzlich eine Einheitsmatrix $(\mathbf{T}_i)^\dagger \mathbf{T}_i$ eingefügt. Es folgt mit (5.67)

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} (\mathbf{T}_i)^\dagger \underbrace{\mathbf{T}_i \mathbf{x}_{k+1|k+1}}_{\approx \mathbf{x}_{i,k+1|k+1}} &= (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} (\mathbf{T}_i)^\dagger \underbrace{\mathbf{T}_i \mathbf{x}_{k+1|k}}_{\approx \mathbf{x}_{i,k+1|k}} \\ &+ \sum_{m=1}^A (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \mathbf{G}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{m,k+1}, \end{aligned} \quad (5.85)$$

sodass sich

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} &\approx \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k} \\ &+ \sum_{m=1}^A (\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \left[\left(\tilde{\mathbf{P}}_{m,k+1|k+1}^x \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k+1|k+1} - \left(\mathbf{P}_{m,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{m,k+1|k} \right] \end{aligned} \quad (5.86)$$

ergibt. Auch hier ist $\mathbf{T}_i \mathbf{x}_{k+1|k+1} \approx \mathbf{x}_{i,k+1|k+1}$ aufgrund der vereinfachenden Annahmen 5.4 und 5.5 nur näherungsweise erfüllt. Wird (5.86) mit $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x$ von links multipliziert, resultiert (5.34), sodass die fusionierten Zustände in Subsystem i im Rahmen der getroffenen Annahmen nun den zentral geschätzten Zuständen entsprechen.

Auf eine ähnliche Weise lässt sich auch der externe Zustand \mathbf{d}_i unter Verwendung der Transformationsmatrix \mathbf{T}_i^d bestimmen:

$$\begin{aligned} \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \left(\mathbf{T}_i^d \right)^\dagger \mathbf{T}_i^d \mathbf{x}_{k+1|k+1} &= \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \left(\mathbf{T}_i^d \right)^\dagger \mathbf{T}_i^d \mathbf{x}_{k+1|k} \\ &+ \sum_{m=1}^A \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \mathbf{H}_{m,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{m,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{m,k+1}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d \right)^{-1} \mathbf{d}_{i,k+1|k+1} &\approx \underbrace{\left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \right)^{-1}}_{=0} \mathbf{d}_{i,k+1|k} \\ &+ \sum_{m=1}^A \left((\mathbf{T}_i^d)^\top \right)^\dagger \mathbf{T}_m^\top \left[\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^d \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{m,k+1|k+1} - \mathbf{P}_{m,k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{m,k+1|k} \right]. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Wird (5.88) mit $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d$ von links multipliziert, ergibt sich (5.37). Es liegt dabei eine Transformation der Zustände der anderen Subsysteme m auf die Zustände \mathbf{d}_i des i -ten Subsystems vor. Da keine lokale Prädiktion dieser Größen in Subsystem i betrachtet wird, fällt diese wie zuvor weg. Damit ist die Herleitung abgeschlossen. \square

Zusammenfassend laufen im Algorithmus also insgesamt drei Schritte ab. Diese sind schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt. Im ersten Schritt werden die geschätzten Zustände zum Zeitschritt k aus dem Fusionsschritt unter Berücksichtigung aller Messgrößen verwendet, um die lokalen Zustände für den Zeitschritt $k+1$ zu präzisieren. Der anschließende Korrekturschritt berücksichtigt die lokalen Messwerte des Subsystems i im Zeitschritt $k+1$, aber noch nicht die Informationen aus anderen Subsystemen. Im Korrekturschritt werden lediglich die lokal präzisierten Größen $\mathbf{x}_{i,k+1|k}$ verwendet. Die Prädiktion der externen Größen $\mathbf{d}_{i,k+1|k}$ wird dabei nicht benötigt, weil sie in der Ausgangsgleichung nicht berücksichtigt werden muss. Um auch die Messungen aus anderen Subsystemen hinzuzuziehen, findet nachfolgend eine Fusion statt. Diese gewichtet die Informationen aus dem lokalen sowie allen anderen Subsystemen nach ihrer Güte und berechnet daraus optimale Schätzwerte $\mathbf{x}_{i,k+1|k+1}$ und $\mathbf{d}_{i,k+1|k+1}$, die wiederum für die Prädiktion verwendet werden. In Abbildung 5.1 ist der Datenaustausch zwischen verschiedenen Subsystemen durch grüne Pfeile gekennzeichnet.

Um im Rahmen der getroffenen Annahmen eine Minimum-Varianz-Schätzung zu erzielen, werden auch die einzelnen Kovarianzmatrizen $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x$, $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d$ und $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd}$

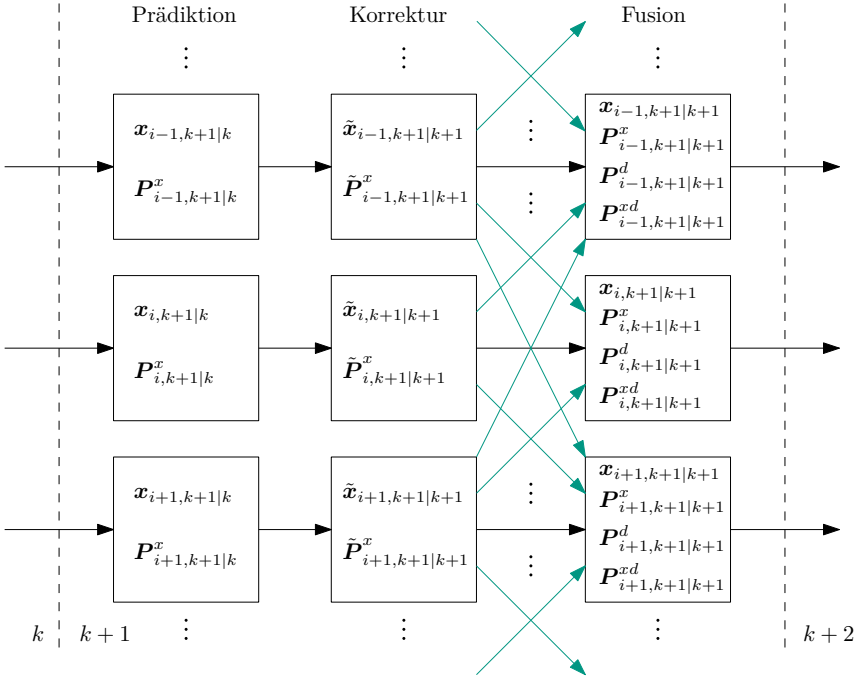


Abbildung 5.1: Schematischer Ablauf der Zustandsschätzung des DDFKFs.

bzw. deren entsprechenden Inversen nach den Gleichungen (5.33), (5.35) und (5.37) berücksichtigt. Zur Berechnung dieser Kovarianzmatrizen wird nach (5.38) zunächst in allen Subsystemen die Differenz aus den lokalen Informationsmatrizen der Prädiktion und der Korrektur berechnet. Die Differenz dieser Matrizen $(\tilde{P}_{m,k+1|k+1}^x)^{-1} - (P_{m,k+1|k}^x)^{-1}$ lässt sich als Informationsgewinn im lokalen Korrekturschritt in Subsystem m interpretieren. Wie in [Mut98, S. 103] beschrieben, wird die Differenz dieser Matrizen anschließend mithilfe der Transformationsmatrizen \mathbf{T}_m^\top und $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger$ bzw. \mathbf{T}_m und \mathbf{T}_i^\dagger von Subsystem m in Subsystem i transformiert.

Sind die Verknüpfungen der zwei Transformationsmatrizen $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top$ zwei bestimmter Subsysteme i und m gleich null, bedeutet das, dass sich die entsprechenden Zustandsräume dieser zwei Subsysteme nicht überschneiden. Bei der Berechnung der Summen in (5.33), (5.34) und (5.36) können die entsprechenden Elemente dann a-priori vernachlässigt werden. Dies lässt sich analog auch auf den Informationsaustausch für die externen Zustände mit $((\mathbf{T}_i^d)^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top$ übertragen. Ist dieser Term gleich null, kann auch hier das entsprechende Summenelement vorab aus den Gleichungen (5.35), (5.36) und (5.37) entfernt werden. Daraus lässt sich folgern, dass beide Subsysteme m und i gar keine Informationen austauschen müssen, falls $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top = ((\mathbf{T}_i^d)^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top = ((\mathbf{T}_m^d)^\top)^\dagger \mathbf{T}_i^\top = \mathbf{0}$ gilt (vergleiche [Mut98, S. 94-112]). In diesem Fall können auch die zugehörigen grünen Pfeile in Abbildung 5.1 entfernt werden.

Bei Betrachtung der Kovarianz $P_{i,k+1|k+1}^{xd}$ nach Gleichung (5.36) sind die Anforderun-

gen an die Transformationsmatrizen besonders hoch, da sowohl $((\mathbf{T}_i^d)^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top$ als auch $(\mathbf{T}_i^\top)^\dagger \mathbf{T}_m^\top$ ungleich null sein müssen. Damit in diesem Fall ein sinnvoller Informationsaustausch stattfinden kann, muss der Zustandsvektor $\mathbf{x}_{m,k}$ in Subsystem m sowohl Zustände aus den Vektoren $\mathbf{x}_{i,k}$ als auch $\mathbf{d}_{i,k}$ enthalten. Dies bestätigt nochmals die Aussage, dass nicht alle (Kreuz-)Kovarianzen beliebiger Zustände im Algorithmus berücksichtigt werden. Aus diesem Grund ist das DDFKF im Vergleich zum FEKF suboptimal.

Auch wenn die Schätzung im Vergleich zum FEKF suboptimal ist, so ist sie aber dennoch erwartungstreu (vergleiche die Fehlergleichungen (5.52) und (5.56)). Dazu müssen zu Beginn der Schätzung jedoch erwartungstreue Schätzwerte oder eine geeignete Initialisierungsfunktion vorliegen (vergleiche Abschnitt 3.3.1). Falls diese Werte unbekannt sind, können wie bei den zentralen Kalman-Filtern große Kovarianzmatrizen $\mathbf{P}_{i,0|0}^x$ für die lokalen Systeme gewählt werden, sodass das Filter die vorgegebenen Startwerte als unsicher einstuft und diese schneller korrigiert.

Beispiel 5.1:

Es sei ein lineares fraktionales System nach Definition 3.10 mit den konstanten Matrizen bzw. Vektoren

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,1 & 0,15 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & -0,2 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,05 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 1,2 \\ 0,8 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{pmatrix} \quad (5.89)$$

gegeben.

Dieses System wurde mit den folgenden Werten für die Startzustände und die Rauschprozesse simuliert:

$$\mathbf{x}_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^\top \} = 0,001 \mathbf{I}, \quad (5.91)$$

$$\mathbf{R} = \mathbb{E} \{ \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^\top \} = 0,001 \mathbf{I}. \quad (5.92)$$

Dabei wurde eine Abtastzeit von $T = 0,5$ s, eine Simulationsdauer von 300 s und ein Speicher von $S = 600$ gewählt. Im betrachteten Zeitbereich der Simulation wird also kein SMP verwendet. Die Eingangsgrößen sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Das SNR der Ausgangsgrößen wurde jeweils zu $\text{SNR}_1 = 27,7$ dB, $\text{SNR}_2 = 23,2$ dB und $\text{SNR}_3 = 35,1$ dB für y_1 , y_2 bzw. y_3 berechnet.

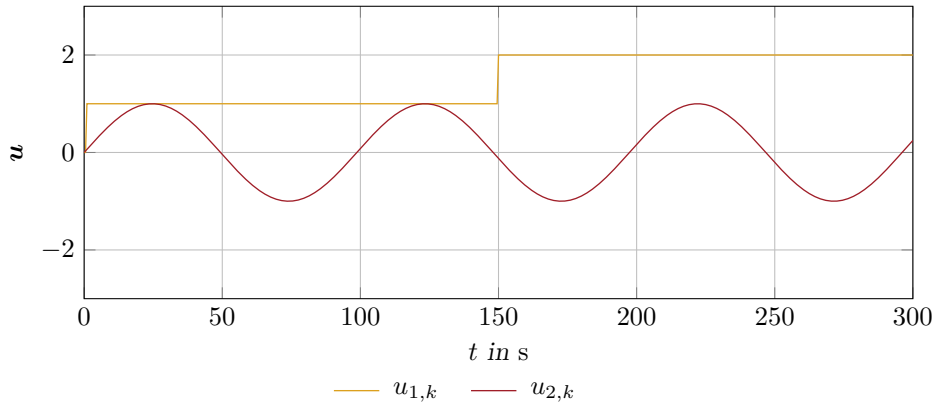


Abbildung 5.2: Zeitverläufe der zur Simulation verwendeten Eingangsgrößen.

Nun sollen anhand der Simulation die Zustände des Systems mithilfe des DDFKF geschätzt werden. Das System mit den Matrizen und Vektoren aus (5.89) wird deshalb in Subsysteme unterteilt. Eine Möglichkeit dazu wäre die Wahl von

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{d}_1 = (x_3), \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = (x_3), \quad (5.94)$$

$$\mathbf{y}_1 = (y_1), \quad \mathbf{y}_2 = (y_2), \quad \mathbf{y}_3 = (y_3), \quad (5.95)$$

sodass sich die drei folgenden Subsysteme ergeben:

Subsystem 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1,k+1} &= \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 \\ -0,2 & -0,1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{1,k} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,15 \end{pmatrix} \mathbf{d}_{1,k} + \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_{1,k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha_1,k} \mathbf{x}_{1,k+1-j}, \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\mathbf{y}_{1,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{1,k} + \mathbf{w}_{1,k} \quad (5.97)$$

Subsystem 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2,k+1} &= \begin{pmatrix} -0,2 & -0,1 \\ 0,1 & -0,1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{2,k} + \begin{pmatrix} -0,2 & 0 \\ 0 & -0,1 \end{pmatrix} \mathbf{d}_{2,k} + \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_{2,k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha_2,k} \mathbf{x}_{2,k+1-j}, \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\mathbf{y}_{2,k} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{2,k} + \mathbf{w}_{2,k} \quad (5.99)$$

Subsystem 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{3,k+1} &= \begin{pmatrix} -0,1 & -0,1 \\ -0,05 & 0,2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{3,k} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}_{3,k} + \begin{pmatrix} 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_{3,k} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha_3,k} \mathbf{x}_{3,k+1-j}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\mathbf{y}_{3,k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_{3,k} + \mathbf{w}_{3,k} \quad (5.101)$$

Die Transformationsmatrizen lauten entsprechend:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.102)$$

$$\mathbf{T}_1^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2^d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_3^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.103)$$

Anhand der Systemgleichungen bzw. anhand der Transformationsmatrizen lässt sich bereits erkennen, dass die Subsysteme 1 und 2 bzw. 2 und 3 jeweils Informationen austauschen müssen. Die Subsysteme 1 und 3 nutzen zwar beide den Zustand x_3 , da dieser aber jeweils nur als externer Zustand definiert ist und lokal nicht geschätzt wird, müssen zwischen diesen beiden Subsystemen keine Informationen ausgetauscht werden.

Um die prinzipielle Funktionsweise des DDFKFs zu validieren, werden die Subsysteme nach (5.96) - (5.101) mithilfe von Satz 5.1 geschätzt. Dabei werden die gleichen Parameter wie für die Simulation verwendet:

$$\mathbf{x}_{0|0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad (5.104)$$

$$\mathbf{Q}_i = \mathbb{E} \{ \mathbf{v}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k}^\top \} = 0,001 \mathbf{I}, \quad (5.105)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbb{E} \{ \mathbf{w}_{i,k} \mathbf{w}_{i,k}^\top \} = 0,001 \mathbf{I}, \quad (5.106)$$

eine Abtastzeit von $T = 0,5$ s, eine Simulationsdauer von 300 s und ein Speicher von $S = 600$. Im betrachteten Zeitbereich spielt das SMP also für die Schätzung keine Rolle. Die Schätzfehlerkovarianzmatrix wurde zu $\mathbf{P}_{i,0} = 100 \mathbf{I}$ gewählt.

Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Zum Vergleich wurde auch eine Schätzung des Systems nach Definition 3.10 mit den Matrizen (5.89) mit dem FEKF nach Satz 3.4 durchgeführt. Die Werte für den root-mean-square error (RMSE) der einzelnen Zustände beider Algorithmen sind in Tabelle 5.1 gegeben. Da das DDFKF den Zustand x_4 sowohl im zweiten als auch im dritten Subsystem schätzt, wurden in Abbildung 5.3 sowie in Tabelle 5.1 das Schätzergebnis aus dem dritten Subsystem verwendet. Anhand der Verläufe in Abbildung 5.3 wird deutlich, dass das DDFKF den tatsächlichen Verlauf der Zustände gut schätzen kann. Aus Tabelle 5.1 wird ersichtlich, dass das DDFKF ähnliche Schätzergebnisse wie das FEKF liefert. Damit

bestätigt dieses Beispiel die Funktionsweise des DDFKFs. In Abbildung 5.4 sind zudem beispielhaft die vom DDFKF sowie die vom FEKF berechneten Kovarianzen für die Zustände x_1 und x_5 dargestellt. Anhand dieser Darstellung lässt sich erkennen, dass die Kovarianzen zum gleichen Wert konvergieren, da beide Zustandsschätzer prinzipiell die Informationen aller Ausgangsgrößen berücksichtigen. Beim DDFKF besteht zwar keine direkte Abhängigkeit zwischen den unverknüpften Subsystemen, allerdings werden die Ergebnisse durch die Wechselwirkung der einzelnen Zustände untereinander trotzdem beeinflusst. Daher liegen manche Informationen in verschiedenen Subsystemen erst zeitverzögert vor. Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise des DDFKFs berücksichtigt das FEKF diese Wechselwirkungen bereits innerhalb eines Zeitschritts und konvergiert daher schneller.

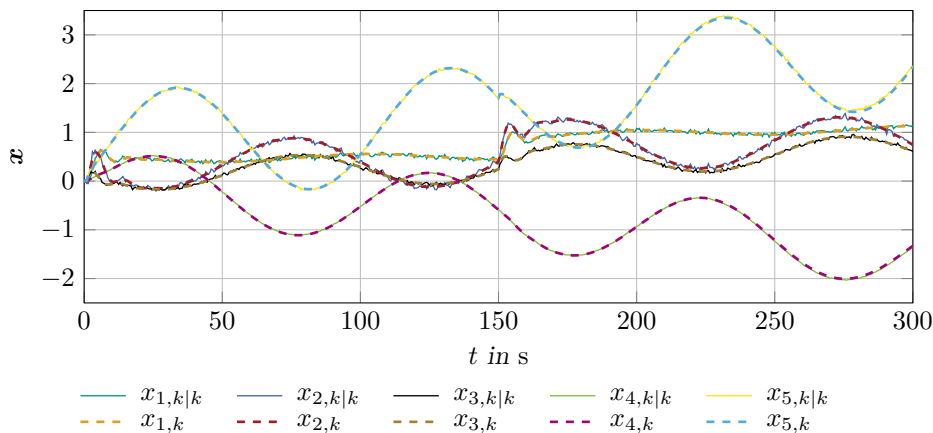


Abbildung 5.3: Ergebnis der Zustandsschätzung des DDFKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.

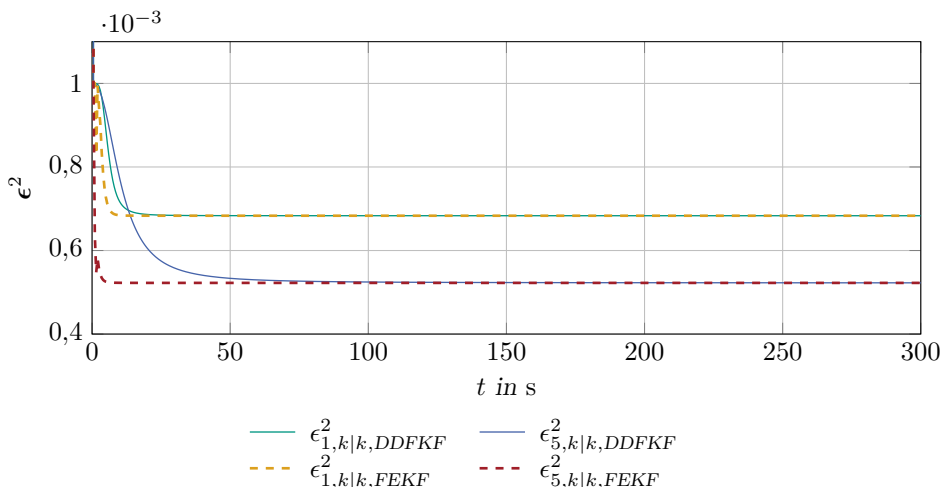


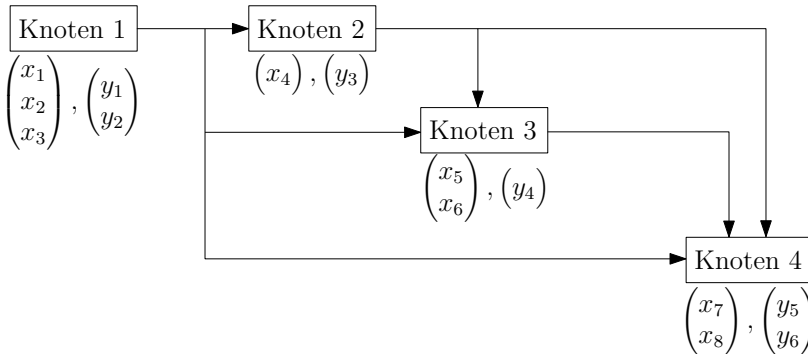
Abbildung 5.4: Zeitverläufe der vom DDFKF und vom FEKF berechneten Varianzen ϵ_1^2 und ϵ_5^2 der Zustände x_1 und x_5 .

Tabelle 5.1: Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des DDFKFs und des FEKFs.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
<i>RMSE DDFKF</i>	0,0233	0,0297	0,0187	0,0115	0,0229
<i>RMSE FEKF</i>	0,0232	0,0295	0,0186	0,0113	0,0223

5.3 Kaskadiertes fraktionales Kalman-Filter

Das in diesem Abschnitt vorgestellte CFKF soll insbesondere einer Vereinfachung des DDFKFs dienen. Während das DDFKF für eine Architektur mit beliebig verknüpften Subsystemen verwendet wird, kann das CFKF nur dann angewendet werden, wenn sich das Gesamtsystem mithilfe kaskadierter Subsysteme beschreiben lässt (vergleiche Abbildung 5.5).

**Abbildung 5.5:** Schematische Abbildung eines kaskadierten Schätzverfahrens (nach [LBDS08]).

Obwohl das DDFKF prinzipiell auch auf diese Systeme anwendbar ist, vereinfachen sich die Gleichungen bei Verwendung des kaskadierten Ansatzes. Insbesondere die Transformationsmatrizen werden nicht mehr benötigt, da sich die Informationen von anderen Subsystemen direkt in die Gleichungen der Prädiktion und Korrektur integrieren lassen. Zustandsinformationen werden dabei immer nur an nachfolgende Subsysteme übertragen. Das CFKF für lineare Systeme wurde in [KSH17] veröffentlicht und wird hier auf nichtlineare Systeme erweitert.

Ob sich ein System mithilfe kaskadierter Subsysteme darstellen lässt, kann beispielsweise mithilfe einer graphentheoretischen Beschreibung überprüft werden. Dazu muss das System als gerichteter, azyklischer Graph darstellbar sein, bei dem jedes Subsystem nach Annahme 5.3 beobachtbar ist (vergleiche [KM⁺08, LBDS08] und Abbildung 5.6). Für das Beispielsystem in Abbildung 5.6 ist zu erkennen, dass die Zustände x_1, x_2 und x_3 nicht von den Zuständen x_4 und x_5 abhängen. Falls die ersten drei Zustände auf Basis von y_1 beobachtbar sind, lassen sich diese lokal in Subsystem 1 schätzen, auch wenn

keine Informationen über u_2, x_4, x_5 und y_2 vorliegen. Umgekehrt können die Zustände x_4 und x_5 geschätzt werden, sofern Subsystem 2 auf Basis von y_2 beobachtbar ist und Schätzgrößen für x_2 und x_3 von Subsystem 1 übermittelt werden.

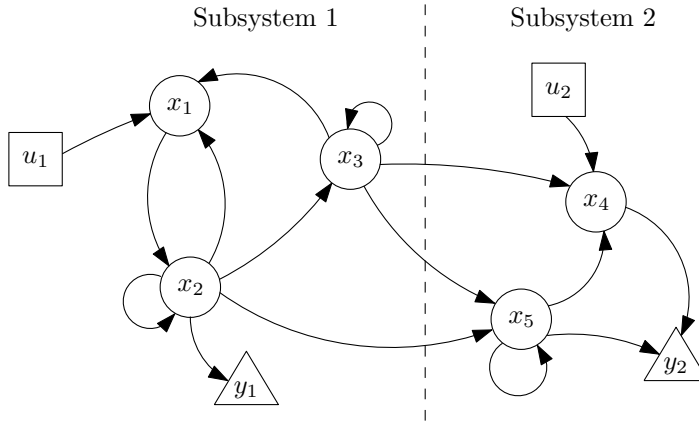


Abbildung 5.6: Darstellung eines Systems mithilfe eines gerichteten, azyklischen Graphen.

Alternativ kann das System auch mittels seiner Linearisierung untersucht werden, ob es sich durch kaskadierte Subsysteme beschreiben lässt [LBDS08]. In diesem Fall müssen sich die linearisierten Matrizen F_k und G_{k+1} für alle Zeitschritte k in Blockdreiecksform darstellen lassen (vergleiche [LBDS08]). Dies lässt sich ohne Einschränkungen direkt auf fraktionale Systeme übertragen, da $\Upsilon_{j,\alpha,k}$ eine Diagonalmatrix darstellt und wie zuvor somit jeder Zustandsgröße immer nur ihre eigene Vergangenheit zugeordnet wird. Sowohl die graphentheoretische Beschreibung als auch die Linearisierung des Systems wird durch den zusätzlichen Summenterm, welcher aufgrund der fraktionalen Ordnung bzw. des Grünwald-Letnikov-Differenzenquotients auftritt, nicht beeinflusst. Eine Aufteilung in Subsysteme wie sie nachfolgend beschrieben wird, ist daher zulässig. Sie ist, wie beim DDFKF, jedoch nicht immer eindeutig.

Definition 5.2 (Kaskadierte Subsysteme)

Das Gesamtsystem nach Satz 3.3 wird unter Berücksichtigung der Annahmen 5.1 und 5.3 in die Subsysteme

$$\mathbf{x}_{i,k+1} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{v}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j}, \quad (5.107)$$

$$\mathbf{y}_{i,k} = \mathbf{g}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{w}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k}) \quad (5.108)$$

mit $i = 1, 2, \dots, A$ unterteilt. Die Aufteilung der Zustände nach (5.2) erfolgt hierbei

disjunkt:

$$\mathbf{x}_k := (\mathbf{x}_{1,k}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{A,k}^\top)^\top. \quad (5.109)$$

Die externen Zustände setzen sich aus den Zuständen vorheriger Subsysteme zusammen und lassen sich aufgrund von (5.109) durch

$$\mathbf{d}_{i,k} := (\mathbf{x}_{1,k}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i-1,k}^\top)^\top \quad (5.110)$$

beschreiben. Die übrigen Vektoren und Matrizen sind identisch zu denen aus Definition 5.1.

Ein Unterschied der kaskadierten Darstellung nach Definition 5.2 zu den Subsystemen nach Definition 5.1 ist, dass sich die externen Zustände $\mathbf{d}_{i,k}$ unmittelbar aus den Zuständen der vorherigen Subsysteme zusammensetzen (siehe (5.110)). Da die internen Zustandsvektoren $\mathbf{x}_{i,k}$ disjunkt sind, wird jeder Zustand in genau einem Subsystem geschätzt, sodass sich jeder (interne) Zustand eindeutig einem Subsystem zuordnen lässt (siehe auch die Abbildungen 5.5 und 5.6).

Weiterhin treten im Gegensatz zu Definition 5.1 die externen Zustände $\mathbf{d}_{i,k}$ auch in der Ausgangsgleichung auf. Dies ist dadurch zu begründen, dass die Aufteilung hier anhand der kaskadierten Systemstruktur vorgenommen wird. Bei einer Aufteilung wie sie im vorherigen Abschnitt durchgeführt wurde, würden alle Zustände, die in den Ausgangsgrößen auftreten nicht $\mathbf{d}_{i,k}$, sondern auch $\mathbf{x}_{i,k}$ zugeordnet werden. Dies ist durch die disjunkte Aufteilung der Zustände hier jedoch nicht möglich. Das Auftreten der externen Zustände $\mathbf{d}_{i,k}$ in der Ausgangsgleichung hat allerdings keine Auswirkung auf die Beobachtbarkeit der Subsysteme, da $\mathbf{d}_{i,k}$ als bekannte Eingangsgröße interpretiert werden kann, die von anderen Subsystemen geschätzt und übertragen wird.

Für die Herleitung des CFKF gelten die Annahmen 5.4 und 5.5 weiterhin. Dadurch, dass jeder Zustand nur in einem Subsystem enthalten ist, lässt sich Annahme 5.4 analog zu Annahme 5.5 nun auch mithilfe einer Blockdiagonalmatrix formulieren.

Annahme 5.6 (Voraussetzungen für das lokale Systemrauschen)

Für das Systemrauschen wird

$$\bar{\mathbf{Q}}_k := \bar{\mathbf{L}}_k \mathbf{Q}_k \bar{\mathbf{L}}_k^\top = \text{blockdiag} \{ \bar{\mathbf{Q}}_{1,k}, \dots, \bar{\mathbf{Q}}_{A,k} \}, \quad \forall k \quad (5.111)$$

mit

$$\bar{\mathbf{L}}_k := \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k)}{\partial \mathbf{v}_k} \end{bmatrix} \quad (5.112)$$

angenommen.

Da das CFKF im Wesentlichen einer Vereinfachung des DDFKF für Systeme, die sich in Form von Definition 5.2 beschreiben lassen, dient, wird die nachfolgende Annahme formuliert.

Annahme 5.7 (Unidirektionaler Informationsaustausch)

Es wird angenommen, dass Informationen des Subsystems i nur an nachfolgende Subsysteme $m > i$ weitergegeben werden. Es wird also nur ein unidirektionaler Datenaustausch vorgenommen.

Anhand (5.108) ist zu erkennen, dass die Ausgangsgröße $\mathbf{y}_{i,k}$ auch Informationen über $\mathbf{d}_{i,k}$ enthalten kann. Diese Information könnte zwar dazu genutzt werden die Schätzung vorheriger Subsysteme zu verbessern, allerdings müsste dafür, wie beim DDFKF, ein Fusionschritt implementiert werden, welcher die Informationen entsprechend gewichtet. Das CFKF soll jedoch einer Vereinfachung des DDFKFs dienen. Daher soll der Fusionschritt in die Gleichungen der Prädiktion und der Korrektur so integriert werden, dass dieser Schritt nicht mehr separat berechnet werden muss. Für den Fall, dass $\mathbf{d}_{i,k}$ nur einen geringen Einfluss auf $\mathbf{y}_{i,k}$ besitzt, oder der Fehler der Zustandsschätzung vorheriger Subsysteme auch ohne Fusionschritt klein ist, würde sich die Schätzung durch eine Fusion nur wenig verbessern.

Mit diesen Annahmen und Voraussetzungen lässt sich das CFKF formulieren.

Satz 5.2 (Kaskadiertes fraktionales Kalman-Filter)

Es sei ein nichtlineares fraktionales System nach Satz 3.3 mit einer Aufteilung in Subsysteme nach Definition 5.2 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 5.5 - 5.7 gültig. Dann ist das durch die beiden nachfolgenden Schritte gegebene CFKF ein erwartungstreuer Minimum-Varianz-Schätzer für die Zustände des Systems.

Prädiktion

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k} = \mathbf{f}_{i,k}(\mathbf{x}_{i,k|k}, \mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{0}_{i,k}, \mathbf{d}_{i,k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{x}_{i,k+1-j|k+1-j}, \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x &= (\tilde{\mathbf{F}}_{i,k} \quad \mathbf{B}_{i,k}) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i,k|k}^x & \mathbf{P}_{i,k|k}^{xd} \\ \mathbf{P}_{i,k|k}^{dx} & \mathbf{P}_{i,k|k}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_{i,k}^\top \\ \mathbf{B}_{i,k}^\top \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_{i,k} \\ &+ \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k} \mathbf{P}_{i,k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{i,j,\alpha_i,k}^\top, \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d = \text{blockdiag} \left\{ \mathbf{P}_{1,k+1|k}^d, \dots, \mathbf{P}_{i-1,k+1|k}^d \right\}, \quad (5.115)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1|k} = \left(\mathbf{x}_{1,k+1|k}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k+1|k}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i-1,k+1|k}^\top \right)^\top. \quad (5.116)$$

Korrektur

$$\mathbf{K}_{i,k+1} = \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top + \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top + \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \right)^{-1}, \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top, \end{aligned} \quad (5.118)$$

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1|k})), \quad (5.119)$$

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd} = -\mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \quad (5.120)$$

$$= \left(\mathbf{P}_{i,k}^{dx} \right)^\top, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d = \text{blockdiag} \left\{ \mathbf{P}_{1,k+1|k+1}^x, \dots, \mathbf{P}_{i-1,k+1|k+1}^x \right\}, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1|k+1} = \left(\mathbf{x}_{1,k+1|k+1}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k+1|k+1}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i-1,k+1|k+1}^\top \right)^\top. \quad (5.123)$$

Die Jacobi-Matrizen sind hierbei durch

$$\mathbf{G}_{i,k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1})}{\partial \mathbf{x}_{i,k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k+1}^0, \mathbf{w}_{i,k+1}^0, \mathbf{d}_{i,k+1}^0}, \quad (5.124)$$

$$\mathbf{M}_{i,k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1})}{\partial \mathbf{w}_{i,k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k+1}^0, \mathbf{w}_{i,k+1}^0, \mathbf{d}_{i,k+1}^0}, \quad (5.125)$$

$$\mathbf{D}_{i,k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1})}{\partial \mathbf{d}_{i,k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{i,k+1}^0, \mathbf{w}_{i,k+1}^0, \mathbf{d}_{i,k+1}^0} \quad (5.126)$$

mit dem Entwicklungspunkt

$$\mathbf{x}_{i,k+1}^0 = \mathbf{x}_{i,k+1|k}, \quad (5.127)$$

$$\mathbf{w}_{i,k+1}^0 = \mathbf{0}, \quad (5.128)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1}^0 = \mathbf{d}_{i,k+1|k} \quad (5.129)$$

definiert. Die restlichen Größen sind identisch zu denen aus Definition 5.2 und zu den Gleichungen (5.7) - (5.13). Die externen Zustände in (5.116) und (5.123) sowie die zugehörigen Kovarianzen in (5.115) und (5.122) werden dabei von den jeweiligen vorherigen Subsystemen übertragen.

Beweis:

Wie Satz 5.2 selbst, ist auch der Beweis in zwei Schritte gegliedert.

Prädiktion

Die Herleitung des prädizierten Zustands $\mathbf{x}_{i,k+1|k}$, dessen Schätzfehlers $\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x$ und der Kovarianz $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x$ ist identisch zum DDFKF mit den Gleichungen (5.46) - (5.53) und wird hier daher nicht betrachtet.

Die prädizierten Werte für $\mathbf{d}_{i,k+1|k}$ und $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d$ werden in den vorherigen Subsystemen berechnet und direkt übertragen. Dabei ist anhand der Aufteilung (5.1) bzw. (5.110) festgelegt, welches Subsystem welchen Zustand schätzt und überträgt. Dies entspricht direkt den Gleichungen (5.115) und (5.116):

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k}^d = \text{blockdiag} \left\{ \mathbf{P}_{1,k+1|k}^x, \dots, \mathbf{P}_{i-1,k+1|k}^x \right\}, \quad (5.130)$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1|k+1} = \left(\mathbf{x}_{1,k+1|k+1}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k+1|k+1}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i-1,k+1|k+1}^\top \right)^\top. \quad (5.131)$$

Durch die eindeutige Zuordnung der Zustände und aufgrund von Annahme 5.7 wird kein Fusionsschritt benötigt. Eine Gewichtung anhand des Informationsgehalts wie in (5.34) und (5.37) ist somit nicht notwendig.

Nun werden noch die Kreuzkovarianzen $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd}$ und $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{dx}$ der prädizierten Zustände berechnet. Zuerst wird beispielhaft die Kovarianz zwischen Subsystem i und Subsystem $i-1$ betrachtet:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k+1|k}^x \right)^\top \right\} \\ &= \left[\mathbf{F}_{i,k} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k|k}^x + \mathbf{L}_{i,k} \mathbf{v}_{i,k} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j,\alpha_i,k} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1-j|k+1-j} + \mathbf{M}_{i,k} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k|k}^d \right] \\ & \cdot \left[\mathbf{F}_{i-1,k} \boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k|k}^x + \mathbf{L}_{i-1,k} \mathbf{v}_{i-1,k} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \boldsymbol{\Upsilon}_{i-1,j,\alpha_{i-1},k} \boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k+1-j|k+1-j} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{M}_{i-1,k} \boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k|k}^d \right]^\top. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Teile von $\boldsymbol{\epsilon}_{i,k|k}^d$ sind auch in $\boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k|k}^x$ und in $\boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k|k}^d$ enthalten. Deswegen ist ersichtlich, dass diese Größen korreliert sind und daher Kreuzkovarianzen zwischen den Größen existieren müssen. Unter Annahme 5.2 wird jedoch vorausgesetzt, dass die Parameter aus anderen Subsystemen unbekannt sind und diese zu null angenommen werden. Es gilt daher aus der Perspektive des Subsystems i :

$$\mathbf{F}_{i-1,k} = \mathbf{L}_{i-1,k} = \mathbf{M}_{i-1,k} = \boldsymbol{\Upsilon}_{i-1,j,\alpha_{i-1},k} = \mathbf{0}. \quad (5.133)$$

Setzt man dies in (5.132) ein und berücksichtigt alle weiteren Subsysteme, lässt sich die Kovarianz zu

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{dx} \right)^\top = \mathbf{0} \quad (5.134)$$

bestimmen. Die Kovarianz zwischen den Größen $\mathbf{x}_{i,k+1|k}$ und $\mathbf{d}_{i,k+1|k}$ wird im Algorithmus also nicht berücksichtigt. Annahme 5.2 führt daher insgesamt dazu, dass die Kovarianz betragsmäßig unterschätzt wird. Damit ist die Herleitung der Prädiktion abgeschlossen.

Korrektur

Wie beim DDFKF wird die für die Korrektur übliche Form des Kalman-Filters

$$\mathbf{x}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1}(\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1|k})) \quad (5.135)$$

verwendet. Um die Kovarianzmatrix der Korrektur herzuleiten, wird zunächst der Schätzfehler des Korrekturschritts bestimmt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,k+1|k+1}^x &= \mathbf{x}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{i,k+1|k+1} \\ &= \mathbf{x}_{i,k+1} - \mathbf{x}_{i,k+1|k} - \mathbf{K}_{i,k+1}(\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k+1|k})) \\ &= \epsilon_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1}(\mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{w}_{i,k+1}, \mathbf{d}_{i,k+1}) \\ &\quad - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{i,k+1|k})). \end{aligned} \quad (5.136)$$

Mithilfe einer Taylorreihenentwicklung um den Punkt $\mathbf{x}_{i,k+1}^0 = \mathbf{x}_{i,k+1|k}$, $\mathbf{d}_{i,k+1}^0 = \mathbf{d}_{i,k+1|k}$ und $\mathbf{w}_{i,k+1}^0 = \mathbf{0}$ folgt

$$\begin{aligned} \epsilon_{i,k+1|k+1}^x &\approx \epsilon_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} \left(\mathbf{G}_{i,k+1} \epsilon_{i,k+1|k}^x + \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{w}_{i,k+1} + \mathbf{D}_{i,k+1} \epsilon_{i,k+1|k}^d \right) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \epsilon_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{w}_{i,k+1} \\ &\quad - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \epsilon_{i,k+1|k}^d. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Unter Berücksichtigung, dass das Rauschen $\mathbf{w}_{i,k+1}$ sowohl zu den internen als auch zu den externen Zuständen unkorreliert ist, kann nun die Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \\ &\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd} \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \\ &\quad - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \end{aligned} \quad (5.138)$$

berechnet werden. Da die Kovarianzen $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd}$ und $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{dx}$ nach (5.134) zu null angenommen wurden, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \mathbf{K}_{i,k+1}^\top, \end{aligned} \quad (5.139)$$

was (5.118) entspricht. Mithilfe dieser Kovarianz kann nun die Kalman-Verstärkung $\mathbf{K}_{i,k+1}$ bestimmt werden. Diese erhält man durch Ableiten der Spur von $\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x$ nach $\mathbf{K}_{i,k+1}$ und anschließendes zu null setzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{i,k+1}} \text{Spur} \left\{ \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^x \right\} \\ = -2(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \\ + 2\mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{R}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1}^\top + 2\mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \mathbf{D}_{i,k+1}^\top \end{aligned} \quad (5.140)$$

$$= \mathbf{0}. \quad (5.141)$$

Nach einer Umformung folgt direkt (5.117).

Um die Kovarianzen zwischen den Fehlern $\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x$ und $\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^d$ nach dem Korrekturschritt zu bestimmen, werden diese zunächst aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd} &= \left(\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{dx} \right)^\top = \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^d \right)^\top \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\left(\boldsymbol{\epsilon}_{1,k+1|k+1}^x \right)^\top, \dots, \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k+1|k+1}^x \right)^\top \right) \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{1,k+1|k+1}^x \right)^\top \right\}, \dots, \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{i-1,k+1|k+1}^x \right)^\top \right\}, \end{aligned} \quad (5.142)$$

sodass diese den einzelnen Subsystemen zugeordnet werden können. Mithilfe dieser Gleichung lässt sich die Kovarianz für jedes Subsystem einzeln berechnen und aneinanderreihen. Beispielphaft wird wieder nur eine dieser Kovarianzen mit $i > m$ betrachtet. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k+1}^x \right)^\top \right\} \\ = \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{M}_{i,k+1} \mathbf{w}_{i,k+1} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^d \right] \\ \cdot \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{m,k+1} \mathbf{G}_{m,k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{m,k+1} \mathbf{M}_{m,k+1} \mathbf{w}_{m,k+1} \right. \\ \left. - \mathbf{K}_{m,k+1} \mathbf{D}_{m,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^d \right]^\top. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Nach Annahme 5.2 sind die Parameter aus Subsystem m in Subsystem i nicht bekannt und werden deshalb zu null angenommen. Zudem sind die Kovarianzen $\mathbf{P}_{i,k+1|k}^{xd}$ nach (5.134) gleich null, sodass $\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x \left[\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x \right]^\top = \mathbf{0}$ aus Sicht von Subsystem i gilt. Weiterhin sind die Rauschprozesse $\mathbf{w}_{i,k+1}$ zu allen Zustandsschätzfehlern der Prädiktion

unkorreliert. Diese müssen demnach nicht berücksichtigt werden. Es folgt somit:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k+1}^x \left(\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k+1}^x \right)^\top \right\} \\
&= \left[(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^d \right] \left[\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x \right]^\top \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \underbrace{\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^x \left[\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x \right]^\top}_{=0} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^d \left[\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x \right]^\top \\
&= -\mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^d \left[\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x \right]^\top. \tag{5.144}
\end{aligned}$$

Anschließend wird (5.144) mit $m = 1, \dots, i-1$ wiederholt in (5.142) eingesetzt. Berücksichtigt man, dass eine Aneinanderreihung von $(\boldsymbol{\epsilon}_{m,k+1|k}^x)^\top$ für alle $1 \leq m < i$ genau $(\boldsymbol{\epsilon}_{i,k+1|k}^d)^\top$ aufgrund von (5.110) ergibt, lässt sich die Kovarianz identisch zu (5.121) mit

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^{xd} = -\mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{D}_{i,k+1} \mathbf{P}_{i,k+1|k}^d \tag{5.145}$$

beschreiben.

Zum Abschluss werden, wie im Prädiktionsschritt, die korrigierten externen Zustände und deren Kovarianzen von den anderen Subsystemen übertragen:

$$\mathbf{P}_{i,k+1|k+1}^d = \text{blockdiag} \left\{ \mathbf{P}_{1,k+1|k+1}^x, \dots, \mathbf{P}_{i-1,k+1|k+1}^x \right\}, \tag{5.146}$$

$$\mathbf{d}_{i,k+1|k+1} = \left(\mathbf{x}_{1,k+1|k+1}^\top \quad \mathbf{x}_{2,k+1|k+1}^\top \quad \dots \quad \mathbf{x}_{i-1,k+1|k+1}^\top \right)^\top, \tag{5.147}$$

was (5.122) und (5.123) entspricht. \square

Der Ablauf des CFKF ist schematisch in Abbildung 5.7 dargestellt. Die grünen Pfeile stellen den Informationsaustausch zu den nachfolgenden Subsystemen dar.

Der größte Vorteil des CFKF gegenüber dem DDFKF ist die einfache Struktur und die direkte Zuordnung der internen Zustände zu den einzelnen Subsystemen. Weiterhin werden für den Informationsaustausch keine Transformationsmatrizen und kein Fusionschritt benötigt. Die Informationen können stattdessen direkt übertragen und in die vorhandenen Gleichungen integriert werden. Allerdings wurden für die Herleitung vereinfachende Maßnahmen ergriffen, wie beispielsweise, dass Informationen nur an nachfolgende Subsysteme weitergegeben werden (vergleiche Abbildung 5.7). Auch die vereinfachende Betrachtung in Annahme 5.2 führt dazu, dass die Kreuzkovarianzmatrizen in (5.134) und (5.144) betragsmäßig unterschätzt werden. Dies führt dazu, dass das CFKF nicht nur im Vergleich zum zentralen FEKF suboptimal ist, sondern auch im Vergleich zum DDFKF. Da das CFKF den gleichen Prädiktionsschritt wie das DDFKF verwendet und auch der Erwartungswert der Fehlergleichung der Korrektur (5.137) gleich null ist, ist die Schätzung dennoch erwartungstreu, sofern eine geeignete Initialisierungsfunktion

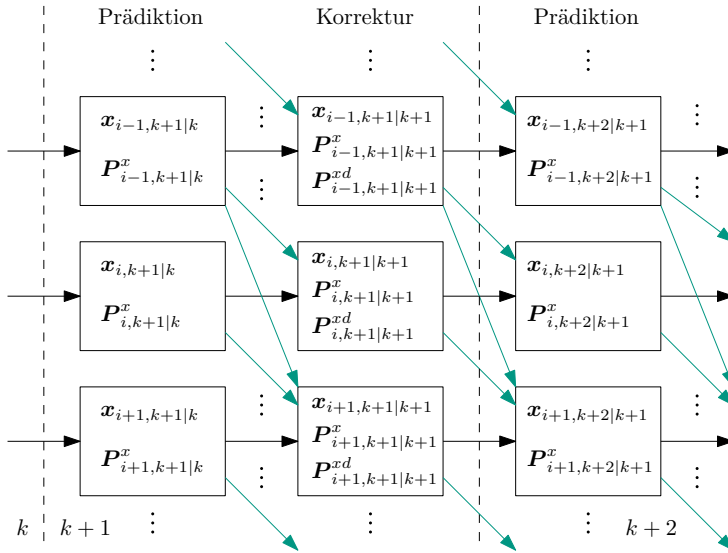


Abbildung 5.7: Schematischer Ablauf der Zustandsschätzung des CFKFs.

oder erwartungstreue Schätzwerte vorliegen (vergleiche Abschnitt 3.3.1). Auch wenn das CFKF praktisch gesehen kein optimaler Schätzer mit der Minimum-Varianz-Eigenschaft ist, kann man daher dennoch von korrekten Schätzwerten ausgehen.

Bei der Herleitung der Gleichungen des CFKF wurden immer alle Einträge des Vektors $\mathbf{d}_{i,k}$, also alle Zustände aller vorherigen Subsysteme berücksichtigt. Wie beim DDFKF kann jedoch auch hier auf Basis einer Analyse der Zustands- und Ausgangsgleichungen (5.107) und (5.108) vorab überprüft werden, welche externen Zustände tatsächlich in Subsystem i zur Berechnung von $\mathbf{f}_{i,k}$ und $\mathbf{g}_{i,k}$ benötigt werden. Nicht benötigte Zustände und deren Kovarianzen müssen nicht kommuniziert werden. Falls von bestimmten Subsystemen gar keine Größen verwendet werden, müssen diese Subsysteme auch nicht verknüpft sein, sodass die entsprechenden grünen Pfeile in Abbildung 5.7 entfernt werden können.

Im Gegensatz zum DDFKF werden beim CFKF aufgrund des Durchgriffs der externen Zustandsgrößen zusätzlich auch die Prädiktionen $\mathbf{d}_{i,k+1|k}$ und deren Kovarianzen zur Berechnung der Korrektur benötigt, welche daher auch übermittelt werden müssen.

Beispiel 5.2:

In diesem Beispiel wird das lineare fraktionale System aus Beispiel 5.1 aufgegriffen. Da die Matrizen \mathbf{F} und \mathbf{G} zur Darstellung als kaskadiertes System nach Definition 5.2 in Blockdreiecksform vorliegen müssen, werden diese beiden Matrizen im Vergleich

zu (5.89) leicht variiert:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -0,3 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & -0,1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & -0,2 & -0,1 & 0 \\ 0 & -0,2 & 0,1 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 & -0,05 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.148)$$

Die restlichen Matrizen werden direkt von (5.89) übernommen. Dieses System wurde mit den gleichen Parametern \mathbf{x}_0 , \mathbf{Q} und \mathbf{R} wie in Beispiel 5.1 simuliert. Auch die Abtastzeit, die Simulationsdauer, die Speicherlänge und die Eingangsgrößen (vergleiche Abbildung 5.2) wurden identisch gewählt. Das SNR der Ausgangsgrößen wurde zu $\text{SNR}_1 = 25,5 \text{ dB}$, $\text{SNR}_2 = 19,5 \text{ dB}$ und $\text{SNR}_3 = 31,4 \text{ dB}$ für y_1 , y_2 bzw. y_3 berechnet.

Dieses System soll mithilfe des CFKF geschätzt werden und wird deshalb in kaskadierte Subsysteme nach Definition 5.2 unterteilt. Eine Möglichkeit ist die Wahl von:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = (x_5), \quad (5.149)$$

$$\mathbf{y}_1 = (y_1), \quad \mathbf{y}_2 = (y_2), \quad \mathbf{y}_3 = (y_3). \quad (5.150)$$

Die externen Zustände \mathbf{d}_i ergeben sich direkt aus Definition 5.2, da diese alle Zustände vorheriger Subsysteme beinhalten.

Auch für die Schätzung mit dem CFKF werden die identischen Größen für die Abtastzeit, die Simulationsdauer und die Speicherlänge sowie die Parameter $\mathbf{x}_{0|0}$, \mathbf{Q}_i , \mathbf{R}_i und $\mathbf{P}_{i,0}$ zu Beispiel 5.1 gewählt.

Die Ergebnisse der Zustandsschätzung des CFKF sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Auch in diesem Beispiel wurde ein Vergleich mit dem FEKF nach Satz 3.4 und dem nicht-verteilten Gesamtsystem durchgeführt. Die Fehlerwerte der Zustandsschätzung sind in Tabelle 5.2 abgebildet. Anhand der Verläufe in Abbildung 5.8 wird deutlich, dass das CFKF den Verlauf der Zustände gut schätzen kann. Aus Tabelle 5.2 wird ersichtlich, dass das CFKF ähnliche Schätzergebnisse wie das FEKF liefert. Damit bestätigt dieses Beispiel die Funktionsweise des CFKFs. Interessant ist, dass das CFKF für x_1 , x_2 und x_5 schlechtere und für x_3 und x_4 bessere Ergebnisse als das FEKF erzielt. Dies ist dadurch zu erklären, dass jedes lokale Kalman-Filter des CFKFs nur anhand der lokalen Messung optimiert. Es ist deshalb möglich, dass das CFKF auf bestimmte Zustände besser rückschließen kann. Zur Bestimmung des globalen Optimums verwendet das FEKF hingegen alle Messungen und optimiert alle Zustände gleichzeitig. In Summe erzielt das FEKF aus diesem Grund bessere Ergebnisse.

In Abbildung 5.9 sind beispielhaft die vom CFKF sowie die vom FEKF berechneten Kovarianzen für die Zustände x_1 und x_5 dargestellt. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel 5.1 konvergieren die Kovarianzen des CFKFs hier nicht zwingend zum gleichen Wert wie das FEKF. Dies ist dadurch zu begründen, dass die ersten Subsysteme aufgrund von Annahme 5.7 keinen Zugriff auf die Messungen der nachfolgenden

Subsysteme besitzen und daher weniger Informationen als die späteren Subsysteme erhalten. Da das letzte Subsystem die Schätzungen aller vorherigen Subsysteme erhält und somit Zugriff auf alle Informationen besitzt, konvergiert die Kovarianz zum gleichen Wert wie das FEKF. In Abbildung 5.9 konvergiert die Kovarianz des Zustands x_5 des CFKFs daher zum gleichen Endwert wie die Kovarianz des FEKFs, die Kovarianz des Zustands x_1 hingegen nicht.

Auch wenn in diesem Beispiel alle Subsysteme miteinander verknüpft sind, so ist dies im Allgemeinen nicht zwingend erforderlich. Wenn der Eintrag der Matrix $A_{5,1} = 0$ wäre, müsste Subsystem 1 keine Informationen an Subsystem 3 weitergeben, sodass diese unverknüpft wären.

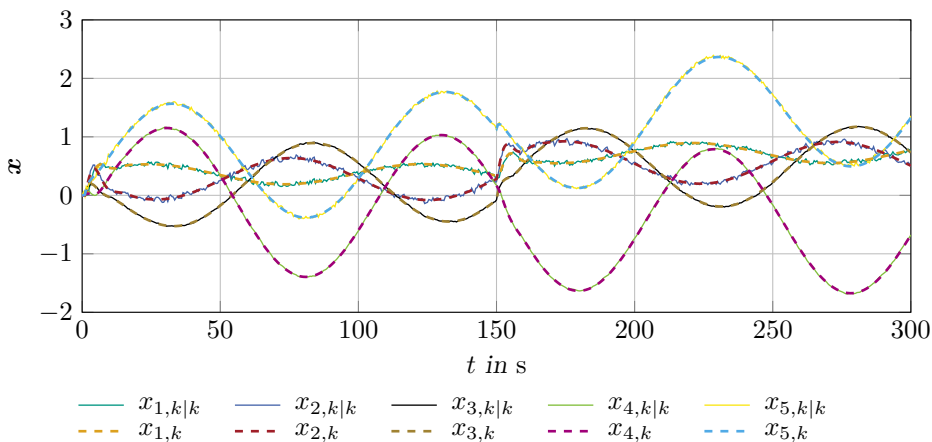


Abbildung 5.8: Ergebnis der Zustandsschätzung des CFKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.

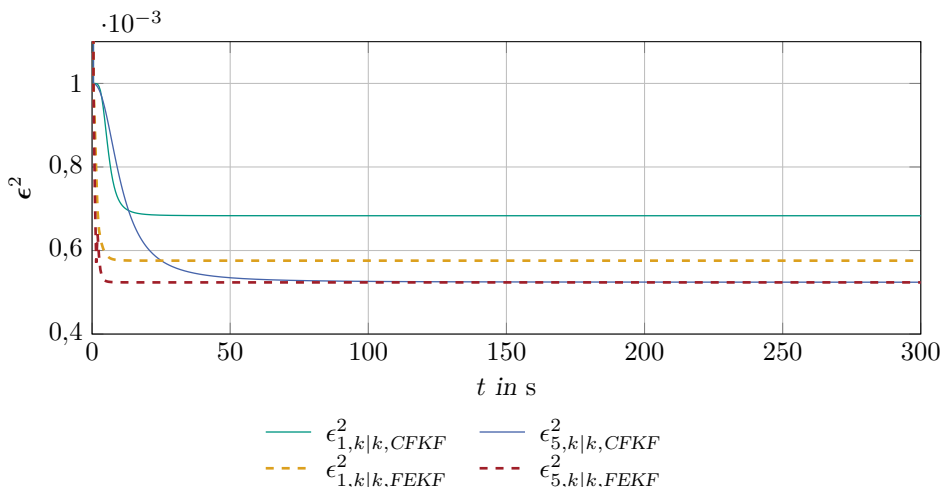


Abbildung 5.9: Zeitverläufe der vom CFKF und vom FEKF berechneten Varianzen ϵ_1^2 und ϵ_5^2 der Zustände x_1 und x_5 .

Tabelle 5.2: Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des CFKFs und des FEKFs.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
RMSE CFKF	0,0218	0,0272	0,0075	0,0085	0,0201
RMSE FEKF	0,0183	0,0203	0,0105	0,0156	0,0189

5.4 Fraktionales unknown-input Kalman-Filter

In diesem Abschnitt wird das FUIKF vorgestellt, welches zusätzlich zu den Zuständen des Systems auch unbekannte Eingangsgrößen schätzt. Da die Batterie, unabhängig von ihrer Verschaltung, einen direkten Durchgriff der Eingangs- zur Ausgangsgröße besitzt (vergleiche die Definitionen 4.3, 4.5 und 4.6), wird hier ein FUIKF hergeleitet, welches solch einen Durchgriff berücksichtigt. Dieses Filter wurde in der eigenen Veröffentlichung [KPKH19] für lineare Systeme vorgestellt und wird hier für nichtlineare Systeme erweitert.

Für den nachfolgenden Abschnitt wird das System aus Definition 5.3 betrachtet.

Definition 5.3 (Nichtlineares fraktionales System mit unbekannter Eingangsgröße)

Das Gesamtsystem nach Satz 3.3 wird um eine unbekannte Eingangsgröße mit direktem Durchgriff zur Ausgangsgröße erweitert. Es ist durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (5.151)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{d}_k) \quad (5.152)$$

definiert. Dabei sind $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^m$ die unbekanntes Eingangsgrößen. Die restlichen Größen entsprechen denen aus Satz 3.3.

Dieses System ist identisch zu den Gleichungen (5.107) und (5.108) aus Definition 5.2 ohne den Index i . Durch diese Ähnlichkeit soll verdeutlicht werden wie das FUIKF mit den verteilten Filtern DDFKF und CFKF in Zusammenhang gebracht werden kann.

Für das FUIKF wird nachfolgend Annahme 3.3 erweitert.

Annahme 5.8 (Korrelation vergangener Schätzwerte zur unbekanntes Eingangsgröße)

Es wird angenommen, dass die Zustandsschätzfehler zu früheren Zeitpunkten nicht mit dem aktuellen Schätzfehler des Eingangs zum Zeitpunkt k korreliert sind. Es

gilt daher

$$\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m|m}) (\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k|k})^\top \right\} \approx \mathbf{0} \quad (5.153)$$

für alle $m < k$.

Wie auch Annahme 3.3 ist Annahme 5.8 nicht gerechtfertigt und wirkt sich dahingehend aus, dass die Kovarianz betragsmäßig unterschätzt wird. Allerdings ist auch hier die exakte Berücksichtigung der Kovarianzen in (5.153) für alle m nicht möglich, da die Kovarianzmatrix ohne Berücksichtigung des SMPs eine unendlichdimensionale Form annehmen müsste. Mit der gleichen Begründung wie bei Annahme 3.3 lässt sich jedoch annehmen, dass auch Annahme 5.8 nur einen kleinen Einfluss auf die Schätzergebnisse besitzt.

Für die nächste Annahme seien zunächst die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{G}_{k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{w}_{k+1}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{k+1}=\mathbf{d}_{k|k}}, \quad (5.154)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1})}{\partial \mathbf{w}_{k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{w}_{k+1}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{k+1}=\mathbf{d}_{k|k}}, \quad (5.155)$$

$$\mathbf{D}_{k+1} := \left[\frac{\partial \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1})}{\partial \mathbf{d}_{k+1}} \right]_{\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{w}_{k+1}=\mathbf{0}, \mathbf{d}_{k+1}=\mathbf{d}_{k|k}} \quad (5.156)$$

gegeben. Da die unbekannte Eingangsgröße nicht prädiert und somit pro Zeitschritt nur einmal geschätzt wird (siehe später in Satz 5.3), wird die Linearisierung um den Schätzwert des vorherigen Zeitschritts durchgeführt. Mit diesen Matrizen werden nun noch weitere Annahmen für das FUIKF getroffen.

Annahme 5.9 (Invertierbare Matrizen)

Sowohl \mathbf{C}_{k+1} als auch $\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1}$ müssen invertierbar sein. Wobei

$$\mathbf{C}_{k+1} := \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \quad (5.157)$$

ist.

Annahme 5.10 (Rangbedingung für \mathbf{D}_k)

Die Matrix \mathbf{D}_k besitzt den vollen Spaltenrang, d. h. $\text{rang}(\mathbf{D}_k) = m$.

Anschaulich bedeutet Annahme 5.10, dass das System einen Durchgriff aller unbekannt-ten Eingangsgrößen zu den Ausgangsgrößen besitzen muss. Weiterhin müssen sich die einzelnen Eingangsgrößen in den Ausgangsgrößen voneinander unterscheiden lassen. Daher muss das System mindestens gleich viele oder mehr Ausgänge als unbekannt-ene Eingänge besitzen.

Mithilfe dieser Voraussetzungen kann nachfolgend das FUIKF formuliert werden.

Satz 5.3 (Fraktionales unknown-input Kalman-Filter)

Es sei ein nichtlineares fraktionales System mit unbekanntem Eingangsgroßen nach Definition 5.3 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 5.8, 5.9 und 5.10 gültig. Dann ist das durch die drei nachfolgenden Schritte gegebene FUIKF ein erwartungstreuer Minimum-Varianz-Schätzer für die Zustände sowie die unbekanntem Eingangsgroßen des Systems.

Prädiktion

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}, \quad (5.158)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^x &= (\tilde{\mathbf{F}}_k \quad \mathbf{B}_k) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k|k}^x & \mathbf{P}_{k|k}^{xd} \\ \mathbf{P}_{k|k}^{dx} & \mathbf{P}_{k|k}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_k^\top \\ \mathbf{B}_k^\top \end{pmatrix} + \mathbf{Q}_k \\ &+ \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{j,\alpha,k}^\top. \end{aligned} \quad (5.159)$$

Schätzung der unbekanntem Eingangsgroße

$$\mathbf{C}_{k+1} = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top, \quad (5.160)$$

$$\mathbf{N}_{k+1} = \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1}, \quad (5.161)$$

$$\mathbf{d}_{k+1|k+1} = \mathbf{N}_{k+1} \left(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k} \right), \quad (5.162)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^d = \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1}. \quad (5.163)$$

Korrektur

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1}, \quad (5.164)$$

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{d}_{k+1|k+1}) \right), \quad (5.165)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x = \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top, \quad (5.166)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^{xd} = \left(\mathbf{P}_{k+1}^{dx} \right)^\top = -\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top. \quad (5.167)$$

Die Jacobi-Matrizen sind zu

$$\mathbf{F}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{k|k}}, \quad (5.168)$$

$$\mathbf{L}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k)}{\partial \mathbf{v}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{k|k}}, \quad (5.169)$$

$$\mathbf{B}_k := \left[\frac{\partial \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k)}{\partial \mathbf{d}_k} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_{k|k}} \quad (5.170)$$

und die Hilfsmatrix zu

$$\tilde{\mathbf{F}}_k := \mathbf{F}_k + \Upsilon_{1, \alpha, k} \quad (5.171)$$

definiert. Die restlichen Größen entsprechen denen aus Definition 5.3, den Gleichungen (5.7) - (5.11) ohne Index i und den Jacobi-Matrizen in (5.154) - (5.156).

Beweis:

Wie Satz 5.3 selbst ist der Beweis in drei Teile gegliedert.

Prädiktion

Die Prädiktion lässt sich analog zu den vorherigen Beweisen mithilfe einer Taylorreihenentwicklung um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_k^0 = \mathbf{x}_{k|k}$, $\mathbf{d}_k^0 = \mathbf{d}_{k|k}$ und $\mathbf{v}_k^0 = \mathbf{0}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1|k} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1 - \frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j, \alpha, k} \mathbf{x}_{k+1-j} \middle| \mathbf{y}_k^* \right\} \\ &\approx \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1 - \frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j, \alpha, k} \mathbf{x}_{k+1-j} + \mathbf{B}_k(\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k|k}) \middle| \mathbf{y}_k^* \right\}. \quad (5.172) \end{aligned}$$

Sind die geschätzten Zustände $\mathbf{x}_{k|k}$ und die geschätzten Eingangsgrößen $\mathbf{d}_{k|k}$ aus dem Korrekturschritt erwartungstreu und gelten weiterhin die Annahmen 3.1 und 3.2, folgt

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1 - \frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j, \alpha, k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}. \quad (5.173)$$

Der Schätzfehler kann dann mit

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1|k}^x &= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k, \mathbf{d}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \\ &\quad - \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}_k, \mathbf{d}_{k|k}) + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j} \end{aligned} \quad (5.174)$$

angegeben werden. Dieser wird mit der gleichen Taylorreihenentwicklung wie in (5.172) approximiert:

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1|k}^x &\approx \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}_k, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k \\ &\quad + \mathbf{B}_k (\mathbf{d}_k - \mathbf{d}_{k|k}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \\ &\quad - \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}_k, \mathbf{d}_{k|k}) + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}. \end{aligned} \quad (5.175)$$

Mit der Schreibweise (5.171) folgt

$$\epsilon_{k+1|k}^x = \tilde{\mathbf{F}}_k \epsilon_{k|k}^x + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \epsilon_{k+1-j|k+1-j}^x + \mathbf{B}_k \epsilon_{k|k}^d, \quad (5.176)$$

sodass die Schätzung im Prädiktionsschritt im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen und Annahmen erwartungstreu ist. Unter Berücksichtigung der Annahmen 3.3 und 5.8 werden nur die Fehlerwerte aus dem gleichen Zeitschritt als korreliert angenommen. Korrelationen zu Fehlergrößen aus vergangenen Zeitschritten werden zu null angenommen, wodurch die Kovarianz betragsmäßig unterschätzt wird. Die Schätzfehlerkovarianzmatrix der Prädiktion lässt sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^x &= \tilde{\mathbf{F}}_k \mathbf{P}_{k|k}^x \tilde{\mathbf{F}}_k^\top + \mathbf{B}_k \mathbf{P}_k^d \mathbf{B}_k^\top + \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^\top + \mathbf{B}_k \mathbf{P}_k^{dx} \tilde{\mathbf{F}}_k^\top \\ &\quad + \tilde{\mathbf{F}}_k \mathbf{P}_k^{dx} \mathbf{B}_k^\top + \sum_{j=2}^{k+1} \Upsilon_{\alpha,k,j} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{\alpha,k,j}^\top \end{aligned} \quad (5.177)$$

$$\begin{aligned} &= (\tilde{\mathbf{F}}_k \quad \mathbf{B}_k) \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{k|k}^x & \mathbf{P}_k^{dx} \\ \mathbf{P}_k^{dx} & \mathbf{P}_k^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_k^\top \\ \mathbf{B}_k^\top \end{pmatrix} + \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^\top \\ &\quad + \sum_{j=2}^{k+1} \Upsilon_{\alpha,k,j} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^x \Upsilon_{\alpha,k,j}^\top \end{aligned} \quad (5.178)$$

berechnen, womit die Herleitung des Prädiktionsschritts abgeschlossen ist.

Schätzung der unbekanntem Eingangsgröße

Für die Schätzung der unbekanntem Eingangsgröße wird zunächst die Größe

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} := \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k} \quad (5.179)$$

definiert, welche als linearisierte Innovation interpretiert werden kann.

Mithilfe einer Taylorreihenentwicklung um $\mathbf{x}_{k+1}^0 = \mathbf{x}_{k+1|k}$, $\mathbf{d}_{k+1}^0 = \mathbf{d}_{k|k}$ und $\mathbf{w}_{k+1}^0 = \mathbf{0}$ folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} &\approx \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{G}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k}) + \mathbf{D}_{k+1}(\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_{k|k}) \\ &\quad + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k} \\ &= \mathbf{G}_{k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}^x + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1}. \end{aligned} \quad (5.180)$$

Weiterhin wird die Fehlergröße

$$\mathbf{e}_{k+1} := \mathbf{G}_{k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}^x + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} \quad (5.181)$$

definiert, mit welcher

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{e}_{k+1} \quad (5.182)$$

folgt.

Um die unbekanntem Eingangsgröße zu bestimmen, wird nun folgende Gleichung angesetzt:

$$\mathbf{d}_{k+1|k+1} = \mathbf{N}_{k+1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (5.183)$$

$$= \mathbf{N}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}. \quad (5.184)$$

Betrachtet man den Erwartungswert von (5.184), gilt

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{d}_{k+1|k+1}\} &= E\{\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}\} \\ &= E\{\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}\}, \end{aligned} \quad (5.185)$$

da in (5.181) die Prädiktion des Zustands $\mathbf{x}_{k+1|k}$ erwartungstreu und das Rauschen \mathbf{w}_{k+1} mittelwertfrei ist, sodass $E\{\mathbf{e}_{k+1}\} = \mathbf{0}$ gilt. Es muss daher \mathbf{N}_{k+1} so gewählt werden, dass

$$\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{I} \quad (5.186)$$

erfüllt ist, damit (5.185) bzw. die Schätzung nach (5.183) erwartungstreu wird. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend, um eine erwartungstreue Schätzung der unbekanntem Eingangsgröße zu erhalten. Die Pseudoinverse $\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1}^\dagger$ kann dann als LS-Lösung (engl. least-squares) von (5.182) mit dem Fehler aus (5.181) interpretiert werden. Die Schätzung des unbekanntem Eingangs soll jedoch nicht nur erwartungstreu sein, sondern auch die Minimum-Varianz-Eigenschaft besitzen. Allerdings ist ersichtlich, dass für die Kovarianzmatrix des Fehlers \mathbf{e}_{k+1} nach

$$\mathbf{C}_{k+1} = E\{\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^\top\} = \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \neq c\mathbf{I} \quad (5.187)$$

das Gauss-Markov-Theorem [Har76] im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Dabei ist c eine beliebige Größe $c \in \mathbb{R}^{>0}$. Deswegen wird nachfolgend ein GLS-Ansatz (engl. generalized least-squares) verfolgt. Dieser transformiert (5.182) in ein anderes lineares Modell, dessen Fehler eine Einheitsvarianz besitzt, wodurch das Gauss-Markov-Theorem erfüllt wird. Dieses Modell wird im Anschluss mithilfe der LS-Methode gelöst.

Wenn Annahme 5.9 erfüllt ist, kann die Matrix \mathbf{C}_{k+1} beispielsweise mithilfe einer Cholesky Zerlegung in $\mathbf{C}_{k+1}^{-1} = (\mathbf{S}_{k+1}^{-1})^\top \mathbf{S}_{k+1}^{-1}$ aufgeteilt werden (vergleiche beispielsweise [GDM07]). Gleichung (5.182) wird dann von links mit \mathbf{S}_{k+1}^{-1} multipliziert, sodass der Term $\mathbf{S}_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_{k+1}$ Einheitsvarianz besitzt:

$$\mathbf{S}_{k+1}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_{k+1}. \quad (5.188)$$

Es folgt nach einer Umstellung:

$$\Rightarrow \mathbf{D}_{k+1}^\top (\mathbf{S}_{k+1}^{-1})^\top (\mathbf{S}_{k+1}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} - \mathbf{S}_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_{k+1}) = \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1}, \quad (5.189)$$

wodurch sich die GLS-Lösung

$$\mathbf{d}_{k+1|k+1} = \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \tilde{\mathbf{y}}_{k+1} \quad (5.190)$$

ergibt, welche die Minimum-Varianz-Eigenschaft besitzt. Mit (5.183) folgt

$$\mathbf{N}_{k+1} = \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1}. \quad (5.191)$$

Um die Kovarianz des Schätzfehlers der unbekanntenen Eingangsgröße bestimmen zu können, wird der Fehler $\boldsymbol{\epsilon}_{k+1}^d$ betrachtet. Dieser lässt sich durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1}^d &= \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{N}_{k+1} (\mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} + \mathbf{e}_{k+1}) \\ &= -\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1} \end{aligned} \quad (5.192)$$

beschreiben. Die Schätzfehler-Kovarianzmatrix berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1}^d &= \mathbf{N}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}^\top \\ &= \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.193)$$

sodass der zweite Teil des Beweises abgeschlossen ist.

Korrektur

Für die Herleitung der Korrektur des Zustands wird zunächst eine alternative Gleichung zu (5.165) angesetzt. Es wird aber die gleiche Innovation wie in (5.179) verwendet. Es gilt

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k}), \quad (5.194)$$

sodass die Korrektur unabhängig von der Schätzung der unbekanntenen Eingangsgröße $\mathbf{d}_{k|k}$ zum Zeitschritt $k+1$ bleibt. Im Verlauf der Herleitung werden die Gleichungen jedoch auf die in Satz 5.3 angegebene Form (5.165) angepasst.

Es wird der Zustandsschätzfehler basierend auf (5.194) zu

$$\begin{aligned}\epsilon_{k+1|k+1}^x &= \mathbf{x}_{k+1} - (\mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k})) \\ &= \epsilon_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{d}_{k+1}) \\ &\quad - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k})\end{aligned}\quad (5.195)$$

berechnet. Mithilfe einer Taylorreihenentwicklung um $\mathbf{x}_{k+1}^0 = \mathbf{x}_{k+1|k}$, $\mathbf{d}_{k+1}^0 = \mathbf{d}_{k|k}$ und $\mathbf{w}_{k+1}^0 = \mathbf{0}$ folgt

$$\begin{aligned}\epsilon_{k+1|k+1}^x &\approx \epsilon_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) \\ &\quad + \mathbf{G}_{k+1} \epsilon_{k+1|k}^x + \mathbf{D}_{k+1} (\mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} \\ &\quad - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k|k}) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \epsilon_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1}.\end{aligned}\quad (5.196)$$

Damit der Schätzfehler nicht abhängig vom absoluten Wert von \mathbf{d}_{k+1} ist, muss

$$\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{0} \quad (5.197)$$

gelten. D. h. die Schätzung wird erwartungstreu. Unter Berücksichtigung von (5.197) wird die Schätzfehlerkovarianzmatrix berechnet:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top \\ &\quad + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top.\end{aligned}\quad (5.198)$$

Nachfolgend wird die Spur von (5.198) minimiert, sodass die Schätzung auch die Minimum-Varianz-Eigenschaft erhält. Um zusätzlich die Randbedingung (5.197) zu berücksichtigen, sodass die Schätzung erwartungstreu bleibt, werden Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Die Lagrange-Funktion wird dabei zu

$$\begin{aligned}\text{Spur} \left\{ \mathbf{P}_{k+1|k}^x - 2\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top \right\} \\ - 2 \text{Spur} \left\{ \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{\Delta}_{k+1}^\top \right\}\end{aligned}\quad (5.199)$$

gewählt. Hierbei sind $\mathbf{\Delta}_{k+1}$ die Lagrange-Multiplikatoren. Nach Ableiten der Lagrange-Funktion nach \mathbf{H}_{k+1} und zu null setzen folgt

$$2\mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top - 2\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x - 2\mathbf{D}_{k+1} \mathbf{\Delta}_{k+1}^\top = \mathbf{0}.\quad (5.200)$$

Die beiden Gleichungen (5.197) und (5.200) lassen sich gemeinsam in Matrix-Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{k+1} & -\mathbf{D}_{k+1} \\ \mathbf{D}_{k+1}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{k+1}^\top \\ \mathbf{\Delta}_{k+1}^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.\quad (5.201)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist genau dann möglich, wenn Annahme 5.9 erfüllt ist, da sowohl \mathbf{C}_{k+1} als auch das zugehörige Schurkomplement $\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1}$ invertierbar sein müssen. Mithilfe der Blockmatrixinversion nach [LS02] folgt aus (5.201)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{k+1}^\top \\ \Delta_{k+1}^\top \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{k+1} & -\mathbf{D}_{k+1} \\ \mathbf{D}_{k+1}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\mathbf{C}_{k+1}^{-1} - \mathbf{N}_{k+1}^\top \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \right) \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ -\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.202)$$

Wenn die erste Zeile dabei separat betrachtet wird, resultiert

$$\mathbf{H}_{k+1} = \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}) \quad (5.203)$$

mit der Notation

$$\mathbf{K}_{k+1} := \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1}. \quad (5.204)$$

Mithilfe von (5.203) kann (5.194) jetzt auf die Form (5.165) umformuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1|k+1} &= \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{H}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_{k|k}) \\ &= \mathbf{x}_{k+1|k} + (\mathbf{K}_{k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}) \\ &\quad \cdot (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_{k|k}) \\ &= \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_{k|k}) \\ &\quad - \underbrace{\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{D}_k \mathbf{N}_{k+1}}_{=\hat{\mathbf{d}}_{k+1|k+1}} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) + \mathbf{D}_k \mathbf{d}_{k|k}). \end{aligned} \quad (5.205)$$

Mit der Linearisierung

$$\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k|k}) \approx \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k+1|k+1}) + \mathbf{D}_k (\mathbf{d}_{k|k} - \mathbf{d}_{k+1|k+1}) \quad (5.206)$$

um den Punkt $\mathbf{d}_{k|k}^0 = \mathbf{d}_{k+1|k+1}$ folgt aus (5.205) dann

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} \approx \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}, \mathbf{d}_{k+1|k+1})). \quad (5.207)$$

Für die Zustandsschätzung wird nun also die Schätzung der unbekanntten Eingangsgröße berücksichtigt, sodass die Reihenfolge der beiden Schritte nicht mehr beliebig ist. Alternativ kann die Korrektur trotzdem anhand (5.194) und (5.203) mit (5.204) durchgeführt werden.

Abschließend werden die Kovarianzmatrizen \mathbf{P}_{k+1}^{xd} und $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x$ bestimmt, welche für die Prädiktion benötigt werden. Mithilfe von (5.181), (5.191), (5.192), (5.196) und

(5.197) lassen sich für die Kovarianzmatrix \mathbf{P}_{k+1}^{xd} verschiedene Berechnungsmöglichkeiten angeben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1}^{xd} &= \left[(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} \right] [-\mathbf{N}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}]^\top \\
&= -(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top \\
&= -\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \left(\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \right) \mathbf{N}_{k+1}^\top \\
&= -\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top + \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}^\top \\
&= -\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{N}_{k+1}^\top + \underbrace{\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1}}_{=0} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \\
&= -\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \\
&= -\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d.
\end{aligned} \tag{5.208}$$

Die Matrix $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x$ lässt sich bestimmen, indem (5.203) und (5.204) unter Verwendung von Lemma C.5 in (5.198) eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1|k+1}^x &= \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top \\
&= \mathbf{P}_{k+1|k}^x - \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top,
\end{aligned} \tag{5.209}$$

was den Korrekturschritt abschließt. \square

Der Ablauf des FUIKF ist schematisch in Abbildung 5.10 dargestellt. Das betrachtete System wird als Gesamtsystem mit unbekanntem Eingangsgrößen interpretiert, welche vom FUIKF in einem separaten Schritt geschätzt werden.

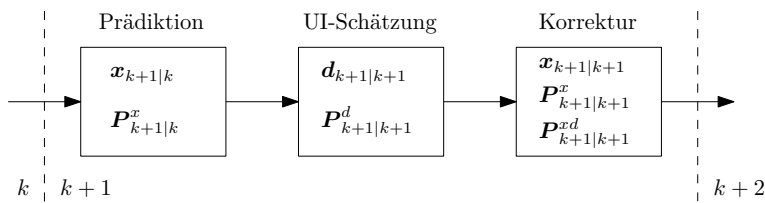


Abbildung 5.10: Schematischer Ablauf der Zustands- und Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs.

Obwohl das FUIKF eigentlich kein verteiltes Filter ist, kann es trotzdem für eine verteilte Zustandsschätzung eingesetzt werden. Sind die Annahmen 5.8 - 5.10 für alle Subsysteme nach den Gleichungen (5.107) und (5.108) erfüllt, kann das FUIKF direkt auf die einzelnen Subsysteme angewendet werden. Die Größen $\mathbf{d}_{i,k}$ müssen sich hierbei jedoch nicht unbedingt aus den Zuständen vorheriger Subsysteme nach (5.110) zusammensetzen, sondern können auch von beliebigen Subsystemen stammen. Bei solch einer Anwendung resultieren komplett entkoppelte Subsysteme. Informationen, die nach den Algorithmen des DDFKFs oder CFKFs von anderen Subsystemen übertragen werden müssten,

schätzt das FUIKF lokal und ohne Kenntnis der Parameter anderer Subsysteme mit. Zusätzlich wird mithilfe der Kovarianz $\mathbf{P}_{i,k|k}^d$ die Güte dieser Information im jeweiligen Subsystem bewertet. Für jedes Subsystem würde dann ein separates FUIKF nach dem Ablauf in Abbildung 5.10 verwendet werden.

Aufgrund der Schätzung der unbekanntem Eingangsgröße \mathbf{d}_k besitzt das FUIKF im Vergleich zum DDFKF und CFKF eine andere Struktur und weicht daher am stärksten von den anderen Algorithmen ab. Insbesondere kann das FUIKF auch auf beliebige nicht-verteilte Systeme angewendet werden, welche eine unbekanntem Eingangsgröße mit Durchgriff besitzen.

Beispiel 5.3:

Es wird das lineare System aus Beispiel 5.2 aufgegriffen, mit dem Unterschied, dass das FUIKF die vorher bekannten Eingangsgrößen \mathbf{u} nun als unbekanntem Eingangsgrößen \mathbf{d} annimmt. Gleichzeitig wird Matrix \mathbf{H} in \mathbf{B} umbenannt, da sich diese nicht mehr auf bekannte, sondern unbekanntem Eingangsgrößen bezieht:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 \\ 0 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}. \quad (5.210)$$

Um Annahme 5.10 zu erfüllen, benötigt das System weiterhin noch eine Durchgriffmatrix der unbekanntem Eingangsgrößen zu den Ausgangsgrößen. Dazu wird im System die Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 \\ 0,5 & -0,4 \\ 0,9 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.211)$$

ergänzt, welche die Kriterien erfüllt. Die restlichen Matrizen des Systems werden identisch zu Beispiel 5.2 gewählt. Sowohl für die Simulation als auch für die Zustandsschätzung werden die Parameter $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{0|0}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ und \mathbf{P}_0 sowie die Abtastzeit, die Simulationsdauer und die Speicherlänge identisch zu Beispiel 5.2 gewählt. Zur Anregung des Systems werden weiterhin die gleichen Verläufe der Eingangsgrößen nach Abbildung 5.2 verwendet, auch wenn diese im Fall des FUIKFs als unbekannt angenommen werden. Das SNR der einzelnen Ausgangsgrößen wurde zu $\text{SNR}_1 = 28,3 \text{ dB}$, $\text{SNR}_2 = 29,2 \text{ dB}$ und $\text{SNR}_3 = 37,8 \text{ dB}$ für y_1, y_2 bzw. y_3 berechnet.

Die vorgegebenen sowie die geschätzten Eingangsgrößen des FUIKFs sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Die vom FUIKF berechneten Kovarianzen der unbekanntem Eingangsgrößen d_1 und d_2 sind in Abbildung 5.12 zu sehen. Abbildung 5.13 zeigt die simulierten und die vom FUIKF geschätzten Zustände. In Tabelle 5.3 sind die RMSE-Werte sowohl für das FKF als auch das FUIKF abgebildet. In Abbildung 5.14 sind beispielhaft die vom FUIKF sowie die vom FEKF berechneten Kovarianzen für die Zustände x_1 und x_5 dargestellt.

Im Gegensatz zum FEKF stehen dem FUIKF die Eingangsgrößen nicht zur Verfügung. Daher kann das FEKF bessere Schätzergebnisse erzielen. Dennoch kann das FUIKF sowohl die Zustände als auch die Eingangsgrößen des Systems bestimmen. Dieses Beispiel bestätigt somit die Funktionsweise des FUIKFs.

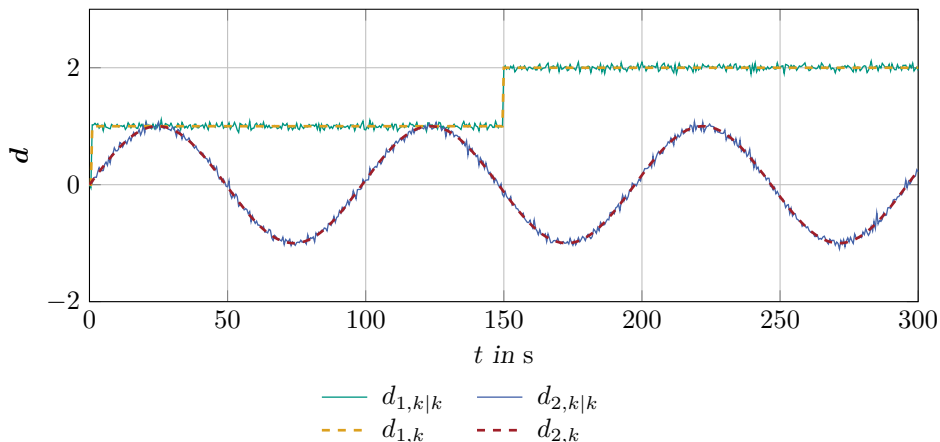


Abbildung 5.11: Ergebnis der Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs sowie die Zeitverläufe der zur Simulation verwendeten Eingangsgrößen.

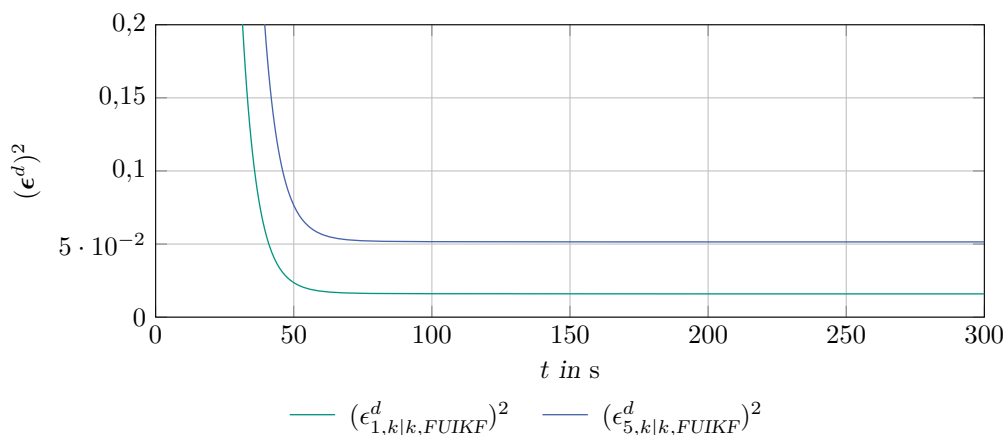


Abbildung 5.12: Zeitverläufe der vom FUIKF berechneten Varianzen $(\epsilon_1^d)^2$ und $(\epsilon_2^d)^2$ der unbekannten Eingangsgrößen d_1 und d_2 .

Dadurch, dass das FUIKF die Eingangsgrößen zusätzlich bestimmt, besitzen diese eine Unsicherheit (siehe Abbildung 5.12). Diese Unsicherheit wirkt sich auch auf die Zustandsschätzung aus, sodass der Fehler der Zustandsschätzung und die Kovarianz im Vergleich zum FEKF höher ausfällt (vergleiche Tabelle 5.3 und Abbildung 5.14). Der Endwert der Kovarianz des FEKFs in Abbildung 5.14 liegt in der Größenordnung von etwa 10^{-4} wie auch in den vorherigen Beispielen 5.1 und 5.2.

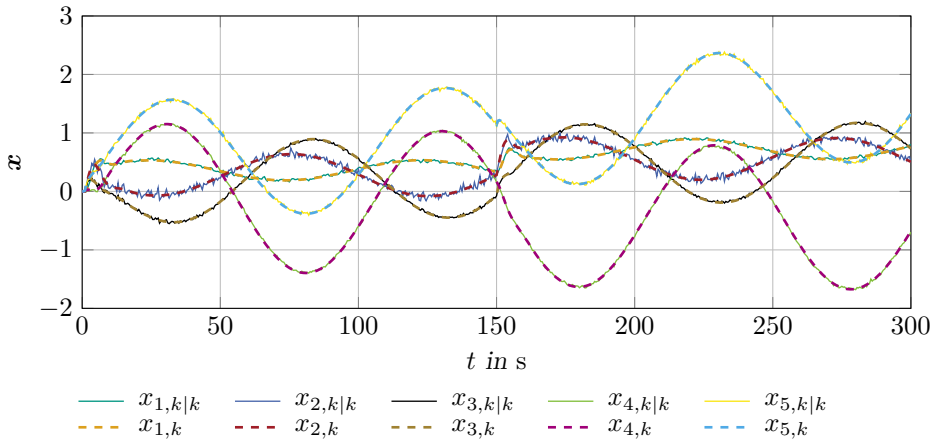


Abbildung 5.13: Ergebnis der Zustandsschätzung des FUIKFs sowie die Zeitverläufe der Zustände des simulierten Systems.

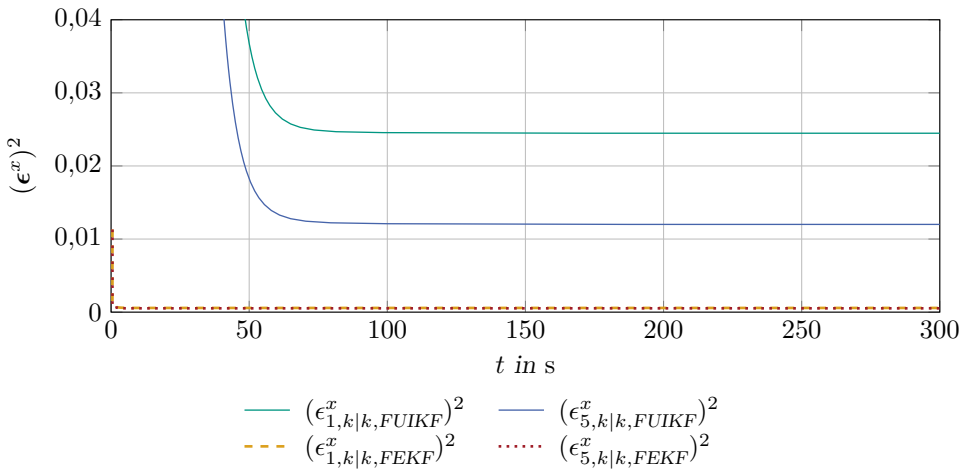


Abbildung 5.14: Zeitverläufe der vom FUIKF und vom FEKF berechneten Varianzen $(\epsilon_1^x)^2$ und $(\epsilon_5^x)^2$ der Zustände x_1 und x_5 .

Tabelle 5.3: Schätzfehler (RMSE) der Zustandsschätzung des FUIKFs und des FEKFs sowie die Schätzfehler der Eingangsgrößenschätzung des FUIKFs.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	d_1	d_2
RMSE FUIKF	0,0158	0,0407	0,0157	0,0177	0,0193	0,0402	0,0442
RMSE FEKF	0,0185	0,0192	0,0103	0,0072	0,0179		

5.5 Zusammenfassung und Diskussion der Verfahren

Es wurde in diesem Kapitel gezeigt, dass sich die grundlegenden Prinzipien der Verteilung von nicht-fractionalen Systemen auf fraktionale Systeme übertragen lassen. Dazu wurden drei unterschiedliche, verteilte fraktionale Kalman-Filter vorgestellt. Die Verteilung selbst findet dabei je nach verwendetem Algorithmus unter Berücksichtigung der Annahmen 5.1 - 5.7 bzw. nach den Definitionen 5.1 - 5.3 statt. Durch die Anwendung der Verteilung auf fraktionale Systeme können die in Abschnitt 2.3.2 genannten Vorteile wie Modularität, Robustheit, Skalierbarkeit und Flexibilität auf diese Systemklasse übertragen werden.

Die Komplexität der Berechnungen des Kalman-Filters lässt sich mit der Größenordnung $\mathcal{O}(n^3)$ angeben [TFW17]. Bei einer Verteilung besitzt Subsystem i nur noch die Ordnung $n_i < n$, wenn der lokale Zustandsvektor nach (5.2) eine echte Teilmenge des zentralen Zustandsvektors darstellt. Dann reduziert sich die Komplexität auf $\mathcal{O}(n_i^3) < \mathcal{O}(n^3)$ im lokalen Subsystem. Durch die Parallelisierung der Gleichungen und die implizite Ordnungsreduktion des Zustandsraums in den einzelnen Knoten, vereinfacht sich daher die Schätzung.

Zumindest beim DDFKF muss dabei zwar einerseits beachtet werden, dass manche Zustände in mehreren Subsystemen enthalten sein können und dass in jedem Subsystem der Fusionsschritt berechnet werden muss, allerdings ist dieser zusätzliche Aufwand bei der Betrachtung der Komplexität vernachlässigbar [Hil12, S. 166, 167], [TFW17]. Andererseits muss berücksichtigt werden, dass der Grünwald-Letnikov-Differenzenquotient insbesondere bei großen Speichirlängen zur Komplexität beiträgt. Die Ordnung der in dieser Summe enthaltenen Vektoren bzw. Matrizen reduziert sich bei der Verteilung aber auch von n auf n_i in Subsystem i . Dadurch und durch die Parallelisierung der Berechnungen in den Knoten vereinfacht sich auch die Berechnung des Grünwald-Letnikov-Differenzenquotienten, sodass eine Verteilung für fraktionale Systeme besonders vorteilhaft wird.

Weiterhin sind die hier vorgestellten Verfahren nicht auf fraktionale Systeme beschränkt. Falls nicht-fractionale Ableitungen in den Modellen verwendet werden sollen, können diese zu $\alpha = 1$ gesetzt werden. Die Algorithmen sind dadurch allgemein anwendbar.

Aufgrund vereinfachender Annahmen sind die in diesem Kapitel vorgestellten verteilten Kalman-Filter (beispielsweise falls die Annahmen 5.4 und 5.5 nicht erfüllt sind oder aufgrund einschränkender Vereinfachungen wie Annahme 5.7) suboptimal im Vergleich zum zentralen FEKF. Anhand von Beispielen konnte aber gezeigt werden, dass eine verteilte Zustandsschätzung für fraktionale Systeme trotzdem ähnlich gute Ergebnisse wie eine zentrale Zustandsschätzung erzielen kann. Es muss allerdings auch berücksichtigt werden, dass in der Praxis weitere Fehlerquellen auftreten können, die die Güte der Schätzung beeinflussen. Beispielsweise sei hier die Taylorreihenentwicklung der Nichtlinearitäten oder die Tatsache, dass Rauschprozesse oftmals nicht vorab bekannt sind und die zugehörigen Matrizen durch Tuning parametrisiert werden, genannt.

In der Literatur finden sich zudem noch weitere Vereinfachungen, um die verteilte Zustandsschätzung zu erleichtern. Beispielsweise werden in [LBDS08] verteilte Filter

diskutiert, die nur die geschätzten Zustände und keine Kovarianzen austauschen. Die ausgetauschten Zustände werden dann wie deterministische Eingänge behandelt. Anhand eines Beispiels wird in der gleichen Quelle gezeigt, dass die Berücksichtigung der Kovarianz nur einen geringen Einfluss auf die Güte der Schätzung besitzt. Für das DDFKF lässt sich solch eine Vereinfachung realisieren, indem beim Fusionschritt nur noch die externen Zustände übertragen werden. Da eine Gewichtung anhand der jeweiligen Kovarianzen in diesem Fall nicht mehr möglich ist, müsste eine feste Zuweisung stattfinden, welches Subsystem welche Zustände überträgt. Solch eine Zuweisung kann beispielsweise so erfolgen, dass möglichst wenige verschiedene Subsysteme miteinander kommunizieren müssen. Alternativ kann die Zuweisung auch auf Basis der Güte lokaler Schätzungen, beispielsweise anhand einer Analyse der Beobachtbarkeit erfolgen. Beim CFKF wäre die Vorgehensweise einfacher. Dort ist solch eine feste Zuweisung aufgrund der disjunkten Aufteilung der Zustände bereits vorhanden. Die Kovarianzen bezüglich der Zustände anderer Subsysteme könnten hier direkt vernachlässigt werden. Für lineare fraktionale Systeme wurde diese Vorgehensweise in der eigenen Veröffentlichung [KSH17] vorgestellt. Das FUIKF berechnet die Kovarianz der unbekanntem Eingangsgrößen lokal, sodass ohnehin kein Austausch stattfindet. Daher stellt sich die Frage nach der Vernachlässigung der Kovarianz hier nicht.

Die vorgestellten verteilten fraktionalen Kalman-Filter unterscheiden sich untereinander im Wesentlichen in ihrer Struktur. Das DDFKF und das CFKF sind sich dabei ähnlich, da letzteres durch vereinfachende Annahmen und Struktureinschränkungen aus dem ersten entstand. Das DDFKF ist daher prinzipiell auch anwendbar, wenn das CFKF anwendbar ist, aber nicht umgekehrt. Falls die zusätzlichen Annahmen wie beispielsweise die kaskadierte Struktur nach Definition 5.2 oder der unidirektionale Informationsaustausch nach Annahme 5.7 erfüllt sind, lassen sich die Filtergleichungen und der Datenaustausch vereinfachen. Wie im vorherigen Abschnitt besprochen, ist das FUIKF eigentlich kein verteiltes Filter und unterscheidet sich aufgrund der Schätzung der unbekanntem Eingangsgröße am stärksten von den anderen beiden Filtern.

6 Ladezustandsschätzung für eine einzelne Lithium-Ionen-Batteriezelle

In diesem Kapitel werden die fraktionalen Kalman-Filter aus Abschnitt 3.3 zur Schätzung des Ladezustands einer LiPo-Batteriezelle verwendet und miteinander verglichen. Dabei werden auch die Auswirkungen des SMPs sowie einer Initialisierung der Filter untersucht. Dieses Kapitel dient somit insbesondere dem Zweck die dritte und vierte Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 zu beantworten.

Weiterhin wird das im vorherigen Kapitel vorgestellte FUIKF zur Zustands- und Stromschätzung der Batteriezelle verwendet. Da sich das DDFKF und das CFKF nicht sinnvoll für die SOC-Schätzung einer einzelnen Zelle anwenden lassen, werden sie in diesem Kapitel nicht betrachtet.

Zur Gliederung der Vorgehensweise wird zunächst der Versuchsaufbau vorgestellt und das fraktionale 1-RQ-Batteriezellenmodell im Zeitbereich validiert. Anschließend werden die Versuchsdurchführung und deren Ergebnisse beschrieben und diskutiert.

6.1 Versuchsbeschreibung

Um das 1-RQ-Batteriezellenmodell aus Definition 4.3 im Zeitbereich zu validieren und die Filteralgorithmen zu testen, wurden Messungen an einer LiPo-Zelle am Batteriemessstand des IRS durchgeführt. Dieser besteht unter anderem aus einem Echtzeitsystem von *dSPACE*, in welchem eine DS2004 A/D-Wandlerkarte integriert ist, einem BOP20-20M Netzteil von *Kepeco* sowie einem 34410A Digitalmultimeter von *Keysight*.

Letzteres wird für eine hochauflösende Messung des Zellstroms verwendet. Es wird der Stromstärkebereich von -3 A bis 3 A genutzt, für welchen im Datenblatt ein maximales Rauschen von $0,1\%$ des aktuellen Messwerts und $0,02\%$ des Messbereichs angegeben wird. Damit liegt die maximale Abweichung bei $3,6\text{ mA}$. Der Rauschprozess wurde auch messtechnisch untersucht, wobei sich eine Standardabweichung von $\sigma_{\text{DM}} = 1,4\text{ mA}$ ergab.

Das Netzteil wird verwendet, um eine gewünschte Stromstärke vorzugeben. Gleichzeitig kann das Netzteil mithilfe der A/D-Wandlerkarte ausgelesen werden, sodass es dem Echtzeitsystem auch Messwerte für die Stromstärke und die Spannung zur Verfügung stellen kann. Da die Messwerte allerdings sowohl Rauschprozesse des Netzteils als auch der Wandlerkarte beinhalten sowie keine Vierpunktmessung verwendet wird, sind die Messwerte ungenauer als beispielsweise die des Digitalmultimeters. Zudem zeigt sich, dass sich das Rauschen in verschiedenen Arbeitspunkten unterschiedlich verhält. Die

Standardabweichung der Strommessung bei der Vorgabe eines Sollstroms von 0 A ließ sich messtechnisch zu etwa $\sigma_{\text{BOP},i} = 2,6 \text{ mA}$ bestimmen. Die Standardabweichung der Spannungsmessung liegt bei etwa $\sigma_{\text{BOP},u} = 2,9 \text{ mV}$.

Ein weiterer Kanal der DS2004 A/D-Wandlerkarte wird für die Messung der Klemmenspannung der Zelle verwendet. Die messtechnisch bestimmte Standardabweichung der Kanäle der Wandlerkarte beträgt $\sigma_{2004} = 0,15 \text{ mV}$. Alle Messgeräte wurden auf einen möglichen Offset hin untersucht und bei Bedarf ein entsprechender Abgleich vorgenommen. Die auftretenden Rauschprozesse können somit als näherungsweise mittelwertfrei betrachtet werden. Es wurde eine Abtastzeit von $T = 0,1 \text{ s}$ für alle Messgeräte vorgegeben (vergleiche Abschnitt 4.1). Weiterhin wird die Zelle innerhalb eines Klimaschranks von Vötsch betrieben, um die Temperatur konstant auf $T_{\text{KS}} = 23 \text{ °C}$ zu halten, wie es in Abschnitt 4.4 bereits vorausgesetzt wurde. Dadurch, dass der Strom der Zelle über zwei verschiedene Geräte mit unterschiedlicher Güte gemessen wird, können diese dazu verwendet werden, um einerseits eine genaue SOC-Referenz zu erzeugen und andererseits, um die Algorithmen auf Robustheit gegenüber Fehler zu untersuchen.

Der schematische Aufbau der Einzelzellmessung ist in Abbildung 6.1 dargestellt. In dieser Abbildung ist rechts das Kepco Netzteil mit einem Kanal der A/D-Wandlerkarte zu sehen, welche die Stromstärke des Netzteils ausliest. Oben ist das Keysight Digitalmultimeter dargestellt. Links ist die LiPo-Zelle mit einer Spannungsmessung via A/D-Wandlerkarte abgebildet.

Vor dem eigentlichen Versuchsablauf wurde die Zelle zunächst mit dem CCCV-Ladeverfahren aufgeladen. Da die Zelle anschließend für eine längere Zeitdauer ($t \geq 1000 \text{ s}$) in Ruhe war, sind alle Überspannungen näherungsweise abgeklungen. Somit lässt sich der initiale Zustand der Zelle mithilfe der SOC-OCV-Kennlinie zu

$${}^c \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 99,8 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

bestimmen. Um einen möglichst großen SOC-Bereich der Zelle zu betrachten, aber auch um die Zelle dynamisch zu belasten, wurde dem Netzteil anschließend das in Abbildung 6.2 dargestellte Stromprofil vorgegeben. Die Abbildung zeigt die Strommessung des Digitalmultimeters.

Das Digitalmultimeter und das *dSPACE*-System verwenden zwar prinzipiell die gleiche Abtastrate, allerdings werden sie über verschiedene Schnittstellen ausgelesen. Aus diesem Grund liegen zu manchen Zeitpunkten Messwerte erst um einen Abtastschritt verzögert vor. Ein Ausschnitt eines solchen Jitters ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Dort wird die Strommessung des Netzteils mit der Messung des Digitalmultimeters verglichen. Es ist zu sehen, dass das Digitalmultimeter im Vergleich zum Netzteil länger benötigt, um den Messwert $i_{\text{cell}} = 0$ anzuzeigen. Insbesondere bei Sprüngen, wie sie beispielsweise im Stromprofil nach Abbildung 6.2 auftauchen, kann sich diese Verzögerung z. B. auf die Zustandsschätzung auswirken. Auch eine automatische Berechnung des maximalen Fehlers (engl. maximum absolute error, MAE) einer Stromschätzung wie sie in späteren Abschnitten betrachtet wird, wird von diesem Fehler stark beeinflusst und verliert daher an Aussagekraft.

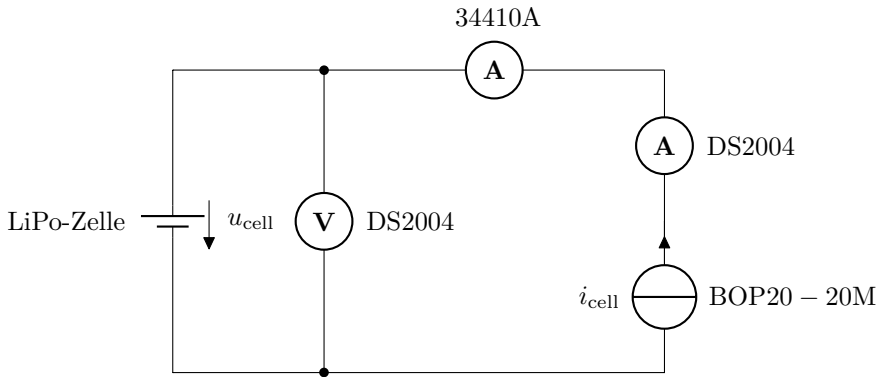


Abbildung 6.1: Schematischer Aufbau für die Messungen an einer einzelnen LiPo-Batteriezele.

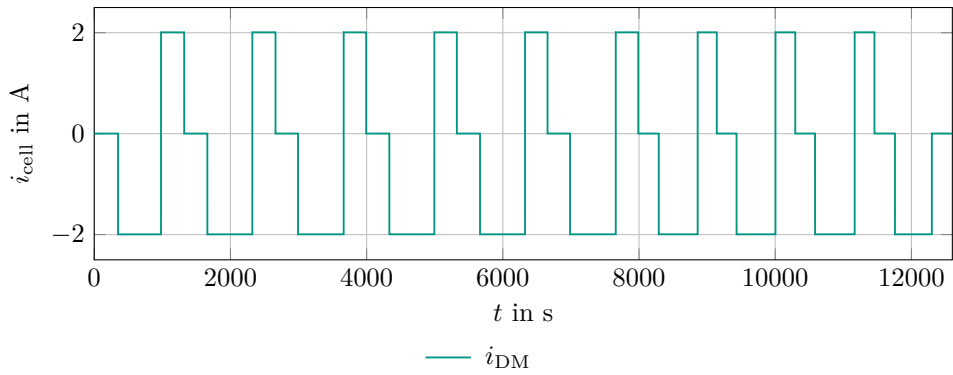


Abbildung 6.2: Zeitverlauf des Batteriezellenstroms $i_{cell,k}$, gemessen mit dem Digitalmultimeter.

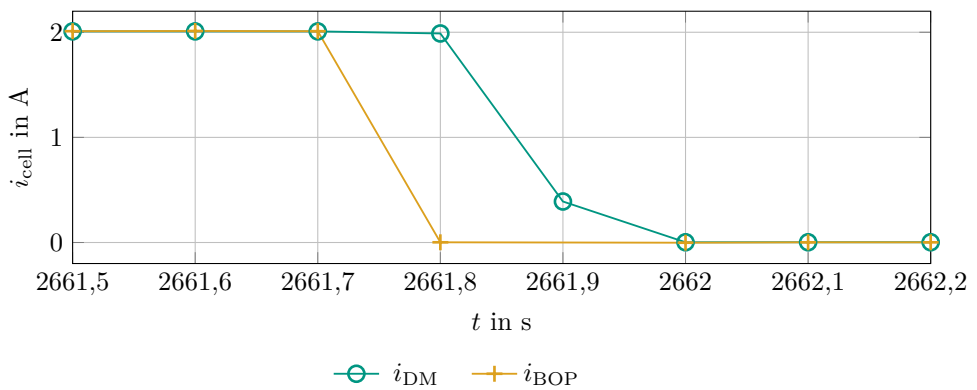


Abbildung 6.3: Ausschnitt des Zeitverlaufs des Batteriezellenstroms.

6.2 Modellvalidierung

Das 1-RQ-Batteriezellenmodell aus Definition 4.3 wird mit den initialen Zuständen aus (6.1) und dem Stromprofil nach Abbildung 6.2 simuliert. Dazu wird als Eingangsgröße die Strommessung des Digitalmultimeters verwendet. Da es nur um die Modellvalidierung gehen soll, wird im Modell kein Rauschen berücksichtigt.

Für die Validierung wird die Batteriezelle mit verschiedenen Speicherlängen nach dem SMP simuliert. Das bedeutet, dass die Summe in (4.16) gemäß dem SMP nach Definition 3.6 auf eine maximale Anzahl an Elementen beschränkt wird. Da die Abtastzeit nachfolgend immer konstant zu $T = 0,1\text{ s}$ gewählt wird, wird dazu entweder die Zeitspanne L oder die Anzahl der berücksichtigten Zeitschritte $S := L/T$ angegeben. Dabei wird L so gewählt, dass für den Speicher S immer $S \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Batterie vorher in Ruhe war und die Überspannungen alle abgeklungen sind (siehe Abschnitt 6.1), wurde die untere Grenze der fraktionalen Ableitung zu $a = b = 0$ gewählt. Es ergibt sich somit eine bezüglich der Anzahl der Summenelemente leicht modifizierte Zustandsgleichung für das fraktionale 1-RQ-Batteriezellenmodell:

$$\text{V1: } {}^c \mathbf{x}_{k+1} = {}^c \mathbf{f}_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^z (-1)^j {}^c \Upsilon_{j,\alpha,k} {}^c \mathbf{x}_{k+1-j} \quad (6.2)$$

mit

$$z = \min(S + 1, k + 1). \quad (6.3)$$

Die in (6.2) aufgestellte Zustandsgleichung basiert auf Variante V1 aus (3.7). In Abschnitt 3.1.1 wurde allerdings diskutiert, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, zeitvariante fraktionale Ableitungen zu definieren (siehe Definition 3.3). Es konnte jedoch keine Aussage getroffen werden, ob sich Variante V1 oder V2 besser zur Modellierung von Systemen im Allgemeinen oder der Batterie eignet. Daher wird nachfolgend eine weitere Zustandsgleichung für das Batteriezellenmodell vorgestellt, welche auf Variante V2 nach (3.8) basiert. Diese Modelle sollen anschließend miteinander verglichen werden. Die in (3.45) - (3.47) verwendete Vorgehensweise lässt sich äquivalent auch auf V2 nach (3.8) anwenden, sodass sich

$$\text{V2: } {}^c \mathbf{x}_{k+1} = {}^c \mathbf{f}_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c \mathbf{v}_k) - {}^c \tilde{\mathbf{T}}_{0,\alpha,k} \sum_{j=1}^z {}^c \tilde{\mathbf{T}}_{j,\alpha,k}^{-1} (-1)^j {}^c \tilde{\Upsilon}_{j,\alpha,k} {}^c \mathbf{x}_{k+1-j} \quad (6.4)$$

mit den Matrizen

$${}^c \tilde{\Upsilon}_{j,\alpha,k} := \text{diag} \left\{ \binom{1}{j}, \binom{\alpha(\text{SOC}_{k-j})}{j} \right\}, \quad (6.5)$$

$${}^c \tilde{\mathbf{T}}_{j,\alpha,k} := \text{diag} \left\{ T, T^{\alpha(\text{SOC}_{k-j})} \right\} \quad (6.6)$$

ergibt. Da die Matrix ${}^c \tilde{\mathbf{T}}_{j,\alpha,k}$ von j abhängt und daher in (6.4) innerhalb der Summe stehen muss, lässt sie sich im Gegensatz zu (6.2) hier nicht mit ${}^c \tilde{\mathbf{T}}_{0,\alpha,k}$ kürzen.

Als drittes Modell wird noch das nicht-fractionale 1-RC-Modell nach Definition 4.4 zum Vergleich herangezogen. Wie in Abschnitt 4.1 diskutiert, benötigt das 1-RC-Modell kein SMP, da die Summenelemente, die sich aufgrund der Grünwald-Letnikov-Definition ergeben (beispielsweise in (4.16)) für $j > 1$ ohnehin gleich null werden. Daher wird bei diesem Modell immer $S = 1$ gewählt. Aus dem gleichen Grund muss hier auch nicht zwischen V1 und V2 unterschieden werden.

Die Parametrierung der Modelle ist in Anhang A beschrieben. Die beiden 1-RQ-Modelle V1 und V2 nutzen dabei die gleichen Parameter. Zur Validierung der Modelle wird nun die simulierte Ausgangsspannung der verschiedenen Batteriezellenmodelle mit der gemessenen Klemmenspannung verglichen und anhand ihrer Abweichungen bewertet. Ein Verlauf für V1 mit $S = 1000$ sowie der Verlauf des nicht-fractionalen 1-RC-Modells sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Es ist zu sehen, dass das Modell V1 den tatsächlichen Verlauf der Zellspannung gut abbilden kann. Der Verlauf des nicht-fractionalen 1-RC-Modells weicht ein wenig stärker vom tatsächlichen Spannungsverlauf ab. Der RMSE der simulierten zu den gemessenen Spannungen ist in Tabelle 6.1 abgebildet. Dabei werden in der ersten Spalte die verwendeten Speicherlängen S angegeben. Eine Ausnahme bildet die erste Zeile, welche die Ergebnisse des 1-RC-Modells zeigt, da dieses kein SMP benötigt. In der zweiten und dritten Spalte sind die Fehlerwerte für die Batteriemodelle zu sehen, die auf V1 nach (6.2) bzw. V2 nach (6.4) beruhen.

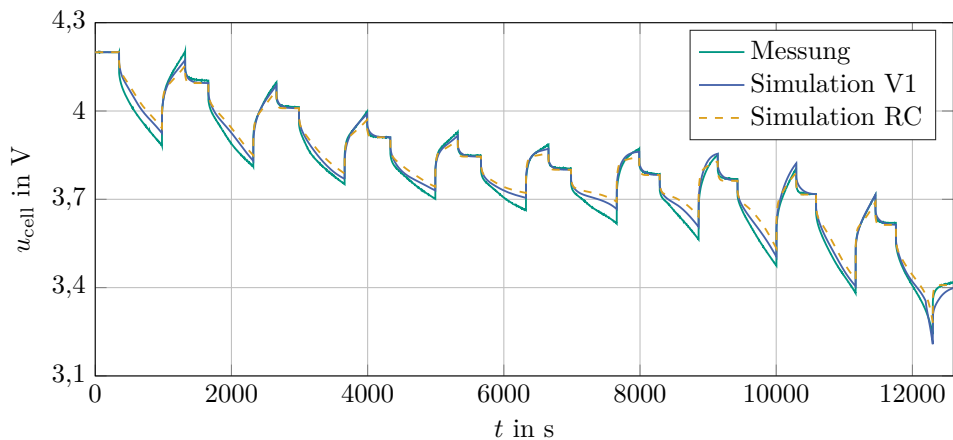


Abbildung 6.4: Zeitverläufe der gemessenen Batteriezellenspannung und der simulierten Batteriezellenspannung des 1-RQ-Modells nach V1 mit der Speicherlänge $S = 1000$ sowie die simulierte Batteriezellenspannung des 1-RC-Modells.

Anhand Tabelle 6.1 ist zu erkennen, dass die beiden Varianten V1 und V2 sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Allerdings ist die Tendenz zu erkennen, dass V1 bei größeren Speicherlängen kleinere Fehlerwerte erzielt. Weiterhin ist auffallend, dass das nicht-fractionale 1-RC-Modell die Realität besser abbilden kann als das fractionale 1-RQ-Modell, wenn Speicherlängen $S \leq 100$ verwendet werden. Das 1-RQ-Modell ist, im Gegensatz zum 1-RC-Modell, aber eigentlich für größere Speicherlängen ausgelegt (vergleiche z. B. die Herleitung zu Definition 4.2). Da das SMP nur eine vereinfachende

Tabelle 6.1: Modellfehler (RMSE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V_1 , V_2) und des nicht-fraktionalen Modells (RC).

S	RMSE V_1	RMSE V_2
<i>RC</i>	34,1 mV	
25	44,5 mV	44,5 mV
100	35,5 mV	35,5 mV
250	28,7 mV	28,9 mV
500	24,3 mV	24,7 mV
750	22,4 mV	23,1 mV
1000	21,5 mV	22,3 mV

Approximation ist und einen zusätzlichen Fehler verursacht, ist es nachvollziehbar, dass das fraktionale Modell für kleine Speicherlängen schlechtere Fehlerwerte als das nicht-fraktionale Modell erzielt. Für größere Speicherlängen erzielen die fraktionalen Modelle bessere Fehlerwerte.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse aus Abbildung 6.4 und Tabelle 6.1, dass das fraktionale Modell aus Definition 4.3 trotz der Vereinfachungen, wie z. B. das SMP oder die Vernachlässigung des Ladungstransfers, die Realität akkurat abbilden kann. Für den Speicher $S = 1000$ ist dabei ein RMSE von 21,5 mV möglich. Allerdings sind die Ergebnisse auch für kleinere Speicherlängen in einem ähnlichen Wertebereich. Die Validierung des 1-RQ-Batteriezellenmodells wurde in kürzerer Form in [KFEH18] veröffentlicht.

6.3 Anwendung und Vergleich des fraktionalen extended Kalman-Filters und des fraktionalen unscented Kalman-Filters

Nachdem im vorherigen Abschnitt das 1-RQ-Batteriezellenmodell auch im Zeitbereich validiert wurde, sollen jetzt die Filteralgorithmen des FEKF und des FUKF miteinander verglichen werden. Die Ergebnisse dazu wurden verkürzt in [KFEH18] publiziert.

Hierbei wird die gleiche Messung verwendet, die in Abschnitt 6.1 beschrieben wurde. Als Referenz dient dabei ein SOC-Verlauf, welcher mithilfe von Satz 2.1, dem Startwert (6.1) und den Messungen des Digitalmultimeters errechnet wird. Im Gegensatz dazu erhalten die Filteralgorithmen die Spannungsmessungen der Wandlerkarte und die Strommessungen des Netzteils. Da weiterhin die Schätzungen auf Basis von V_1 , V_2 und RC verglichen werden, wird entsprechend das Modell nach Satz 3.3 mit den Zustandsgleichungen (6.2) und (6.4) bzw. Definition 4.4 verwendet.

6.3.1 Voraussetzungen und Parametrierung

Es wurde bereits in Abschnitt 4.4 diskutiert, dass die in dieser Arbeit getroffene Annahme 4.1 bezüglich der Rauschprozesse legitim ist. Aus diesem Grund wird sie auch in diesem Kapitel angenommen. Auch die in Abschnitt 3.3 getroffenen Annahmen 3.2 und 3.3, welche für die Herleitung der fraktionalen Kalman-Filter genutzt wurden, werden hier vorausgesetzt.

Die einzige zusätzliche Voraussetzung für das FEKF, welche vorab überprüft werden kann, ist, ob die Jacobi-Matrizen nach (3.70) - (3.73) existieren, bzw., ob die nichtlinearen Funktionen \mathbf{f}_k und \mathbf{g}_{k+1} differenzierbar sind. Die Parameter dieser Funktionen setzen sich aus Kennlinien zusammen, die vom SOC der jeweiligen Zelle abhängen. Zur RQ-Spannung haben diese Parameter keine Abhängigkeit. Wie in Anhang A beschrieben, sind die Parameterkennlinien bezüglich des SOCs der Zelle differenzierbar. Mithilfe der Kennlinien und deren Ableitungen lässt sich ein linearisiertes Batteriemodell nach Satz D.1 in Anhang D angeben, welches die benötigten Jacobi-Matrizen konkret für das 1-RQ-Batteriezellenmodell angibt. Im Gegensatz zum FEKF hat das FUKF keine besondere Voraussetzung und ist daher direkt anwendbar.

Die Performanz der Filteralgorithmen hängt stark von der Güte des Modells und der richtigen Wahl der Kovarianzmatrizen ab. Die Güte des Modells wurde bereits in Abschnitt 6.2 diskutiert. Die Kovarianzmatrizen werden basierend auf den Ausführungen in Abschnitt 4.4 und dem Tuning aus der Bachelorarbeit [Fun16] gewählt. Zusätzlich werden aber noch weitere Randbedingungen und Überlegungen berücksichtigt, die nachfolgend aufgelistet und begründet werden:

- Die Parameter der einzelnen Kovarianzmatrizen werden unter Berücksichtigung von Annahme 4.1 mittels Trial-and-Error ermittelt (siehe Abschnitt 4.4).
- Die fraktionalen Modelle unterscheiden sich strukturell von den nicht-fraktionalen Modellen. Weiterhin ist das 1-RC-Modell ungenauer als das 1-RQ-Modell, wenn größere Speicherlängen verwendet werden. Um das zu berücksichtigen, wird für die beiden Modellarten ein getrenntes Tuning vorgenommen.
- Das FEKF und das FUKF verwenden hingegen identische Modelle und sollen daher auch die gleichen Kovarianzmatrizen nutzen. Dadurch sollen die Ergebnisse vergleichbarer werden. Auch wenn unterschiedliche Matrizen gegebenenfalls zu besseren Ergebnissen führen können, wäre ein unabhängiges Tuning unvorteilhaft, falls bei einem der Filter optimale Kovarianzen gefunden werden und beim anderen nur suboptimale.
- Die Parameter der Kovarianzmatrizen werden beim Tuning so gewählt, dass die Algorithmen möglichst gute Schätzergebnisse bereitstellen, sowohl wenn der SOC zum Startzeitpunkt richtig als auch wenn er falsch gewählt wurde. Da in der Regel nicht bekannt ist, wie nahe der initiale Zustand beim richtigen Startzustand liegt, sollen die Filter beide Fälle gut abdecken können.

Unter Berücksichtigung dieser Punkte wurden folgende konstante Kovarianzmatrizen ermittelt:

$${}^c R_{\text{FEKF}} = {}^c R_{\text{FUKF}} = {}^c R_{\text{EKF}} = {}^c R_{\text{UKF}} = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2, \quad (6.7)$$

$${}^c Q_{\text{FEKF}} = {}^c Q_{\text{FUKF}} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \%^2 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

$${}^c Q_{\text{EKF}} = {}^c Q_{\text{UKF}} = \begin{pmatrix} 10^{-4} \%^2 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

$${}^c P_{0|0} = \begin{pmatrix} 10 \%^2 & 0 \\ 0 & 1 \text{ V}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Die Matrix ${}^c P_{0|0}$ wurde in diesem Kapitel für alle Methoden und Modelle identisch gewählt. Zusätzlich zu den genannten Matrizen wurden für das UKF sowie das FUKF die Parameter $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ bestimmt.

6.3.2 Ergebnisse und Bewertung

Wahl des korrekten initialen SOC's

In einem ersten Szenario werden allen Filtern die richtigen Startzustände

$${}^c \mathbf{x}_{0|0} = \begin{pmatrix} 99,8 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

nach (6.1) übergeben. In Abbildung 6.5 ist der geschätzte SOC des FEKFs sowie des FUKFs mit einem Speicher von jeweils $S = 250$ im Vergleich zur Referenz zu sehen. Weiterhin ist dort auch der obere linke Eintrag der Schätzfehlerkovarianzmatrix ${}^c P_{k|k}$, welcher die Varianz des SOC's $\epsilon_{\text{SOC},k}^2$ und somit die Unsicherheit der SOC-Schätzung beschreibt, dargestellt. Der Vergleich der SOC-Schätzungen für verschiedene Speicherlängen sowie für die fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und das nicht-fraktionale 1-RC-Modell (RC) ist in Tabelle 6.2 für das FEKF und in Tabelle 6.3 für das FUKF gegeben. Dort wird der RMSE sowie der MAE der SOC-Schätzung abgebildet.

Anhand Abbildung 6.5 ist zu erkennen, dass sowohl das FEKF als auch das FUKF gute Schätzwerte für eine Speicherlänge von $S = 250$ bereitstellen können. Es zeigt sich auch, dass im SOC-Bereich von 20 % bis 60 % die größten Abweichungen auftreten. Dies deckt sich allerdings mit dem Fazit zur Beobachtbarkeit des Batteriezellenmodells aus Abschnitt 4.5. Dort wurde diskutiert, dass in etwa im gleichen SOC-Bereich die Beobachtbarkeitsmatrix schlechter konditioniert ist und somit höhere Fehlerwerte zu erwarten sind. Die Varianz der SOC-Schätzung, die ebenfalls in Abbildung 6.5 aufgetragen ist, weist zumindest im SOC-Bereich von etwa 40 % bis 60 % deutlich höhere Werte auf. Dies zeigt, dass die Filter ihre jeweilige Schätzung auch als unsicher einstufen, was konsistent zur vorherigen Aussage ist. Eine weitere Fehlerquelle ist, dass die gemessene Spannung in einigen Bereichen des Experiments unterhalb der Spannung liegt, die aufgrund des Batteriemodells erwartet wird (vergleiche Abbildung 6.4). Dadurch ist es

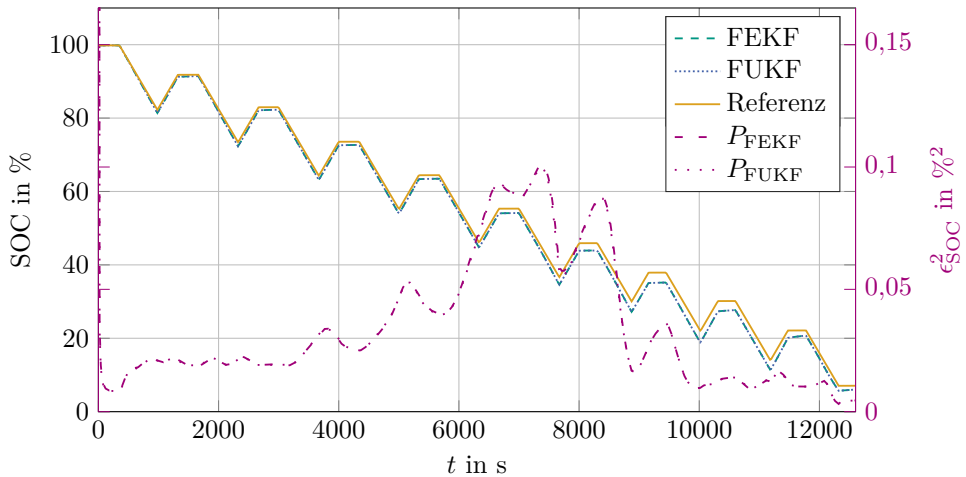


Abbildung 6.5: Ergebnisse der SOC-Schätzung des FEKFs sowie des FUKFs mit korrekt gewähltem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der Varianz des SOC's $\epsilon_{\text{SOC},k|k}^2$ für beide Filter und der SOC-Referenz.

nachvollziehbar, dass die Filter den SOC in diesen Bereichen etwas zu niedrig schätzen.

Nicht nur aufgrund Abbildung 6.5, sondern auch anhand der Tabellen 6.2 und 6.3 wird deutlich, dass das FUKF im Vergleich zum FEKF sehr ähnliche Fehlerwerte aufweist. Ein Vorteil des FUKF ist, dass es im Gegensatz zum FEKF auch dann anwendbar ist, wenn sich die Jacobi-Matrizen des Systems nicht berechnen lassen. Weiterhin erzielt es oftmals bessere Ergebnisse als das FEKF, wenn das System starke Nichtlinearitäten aufweist. Dadurch, dass die Nichtlinearitäten des Modells aber im Wesentlichen aus Parameterkennlinien bestehen (vergleiche Anhang A), die sich nur in Abhängigkeit des SOC's ändern, äußern sich diese Vorteile hier jedoch nicht. Aus diesem Grund ist das Ergebnis nachvollziehbar. Falls allerdings komplexere Rauschprozesse oder weitere Nichtlinearitäten wie die Abhängigkeiten des Systems zur Stromstärke oder zur Temperatur berücksichtigt werden sollen, wäre zu erwarten, dass das FUKF im Vergleich zum FEKF bessere Ergebnisse erzielt. Dies soll, wie bereits in Abschnitt 4.4 diskutiert, hier aber nicht betrachtet werden.

Die Tabellen 6.2 und 6.3 zeigen auch, dass die SOC-Schätzung anhand des 1-RQ-Modells nach V2 schlechtere Ergebnisse erzielt als das 1-RQ-Modell, welches auf V1 basiert. Weiterhin spiegelt sich eine Erhöhung des Speichers in allen Fällen in einer Verbesserung der Schätzung wider. Zudem zeigen die Tabellen auch, dass das 1-RQ-Modell mit der Speicherlänge $S = 25$ die schlechtesten Ergebnisse erzielt. Das 1-RC-Modell erzielt ähnliche Fehlerwerte wie das 1-RQ-Modell mit der Speicherlänge $S = 100$. Die Ergebnisse sind somit konsistent mit der Modellvalidierung aus Abschnitt 6.2.

Tabelle 6.2: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FEKF mit richtigem Startzustand.

SMP	V1		V2	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	2,0102 %	4,2252 %		
25	2,9276 %	6,6273 %	2,9297 %	6,6336 %
100	2,1100 %	4,2004 %	2,1190 %	4,2233 %
250	1,6705 %	3,1841 %	1,6905 %	3,2406 %
500	1,4087 %	2,5449 %	1,4424 %	2,6413 %
750	1,2847 %	2,2477 %	1,3288 %	2,3735 %
1000	1,2092 %	2,0718 %	1,2615 %	2,2208 %

Tabelle 6.3: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FUKF mit richtigem Startzustand.

SMP	V1		V2	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	2,1783 %	4,1199 %		
25	2,9309 %	6,6605 %	2,9326 %	6,6666 %
100	2,0664 %	4,1879 %	2,0744 %	4,2102 %
250	1,3133 %	3,1341 %	1,6141 %	3,1896 %
500	1,4138 %	2,4666 %	1,3464 %	2,5620 %
750	1,1795 %	2,1557 %	1,2233 %	2,2807 %
1000	1,0979 %	1,9717 %	1,1505 %	2,1200 %

Wahl eines falschen initialen SOC's

In einem zweiten Szenario wurde den Filtern ein falscher Startwert folgendermaßen vorgegeben:

$${}^c \mathbf{x}_{0|0} = \begin{pmatrix} 89,8 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Dieser weicht um 10 Prozentpunkte vom richtigen Wert ab. Damit wird geprüft, ob die Filter diese Anfangsauslenkung erkennen und korrigieren können. Die resultierenden Fehlerwerte sind in Tabelle 6.4 für das FEKF und in Tabelle 6.5 für das FUKF dargestellt.

Die Ergebnisse dieses Szenarios sind sehr ähnlich zu den Ergebnissen auf Basis der richtigen Startzustände aus dem vorherigen Absatz. Der Hauptunterschied liegt darin, dass der RMSE aufgrund des falschen initialen SOC's jeweils höher ausfällt und dass

Tabelle 6.4: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FEKF mit falschem Startzustand.

SMP	V1		V2	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	2,9202 %	9,9873 %		
25	3,1647 %	9,9713 %	3,1726 %	9,9713 %
100	2,8637 %	9,9713 %	2,8892 %	9,9713 %
250	2,8007 %	9,9713 %	2,8413 %	9,9713 %
500	2,7769 %	9,9713 %	2,8294 %	9,9713 %
750	2,7671 %	9,9713 %	2,8266 %	9,9713 %
1000	2,7616 %	9,9713 %	2,8260 %	9,9713 %

Tabelle 6.5: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) der fraktionalen 1-RQ-Modelle (V1, V2) und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells (RC) für die Schätzung mit dem FUKF mit falschem Startzustand.

SMP	V1		V2	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	3,2465 %	9,9870 %		
25	3,1726 %	9,9705 %	3,1807 %	9,9705 %
100	2,8492 %	9,9705 %	2,8755 %	9,9705 %
250	2,7747 %	9,9705 %	2,8166 %	9,9705 %
500	2,7446 %	9,9705 %	2,7987 %	9,9705 %
750	2,7321 %	9,9705 %	2,7935 %	9,9705 %
1000	2,7250 %	9,9705 %	2,7914 %	9,9705 %

der MAE für alle Speicherlängen im fraktionalen Fall identisch ist. Da die einzelnen Werte des RMSE allerdings nicht wesentlich größer als die Einträge in den Tabellen 6.2 und 6.3 sind und der MAE den initialen Fehler nicht überschreitet, zeigen die Ergebnisse, dass die Filter eine Abweichung korrigieren können. Dies ist möglich, obwohl keine Änderung an den Kovarianzmatrizen nach (6.7) - (6.10) vorgenommen wurde, wie in Abschnitt 6.3.1 beschrieben. Eine Erhöhung der initialen Schätzfehlerkovarianzmatrix im Vergleich zu (6.10) kann die Korrekturgeschwindigkeit allerdings erhöhen, da das Kalman-Filter die Messungen im Vergleich zu den initialen Zuständen stärker gewichtet (vergleiche Abschnitt 3.3.1).

Weiterhin kann man anhand der Tabellen 6.4 und 6.5 erkennen, dass eine Erhöhung der Speicherlänge in diesem Szenario nur noch einen kleinen Einfluss auf die Ergebnisse besitzt. Die Fehlerwerte unterscheiden sich im Vergleich von beispielsweise $S = 100$ zu $S = 1000$ nur noch geringfügig. Auch das 1-RC-Modell erzielt in diesem Szenario schlechtere Ergebnisse als die fraktionalen Modelle mit der Speicherlänge $S = 100$. Dies

lässt darauf schließen, dass die Schätzung auf Basis der fraktionalen Modelle zu Beginn der Schätzung schneller konvergiert.

Das FUKF erzielt im Vergleich zum FEKF nur marginal bessere Ergebnisse. Die Güte der Ergebnisse lässt sich im betrachteten Bereich nach den Tabellen 6.2 bzw. 6.3 einfacher durch eine Erhöhung der Speicherlänge verbessern. Deswegen wird das FUKF nachfolgend nicht mehr berücksichtigt.

Außerdem wird analog zum vorherigen Szenario deutlich, dass Variante V1 gegenüber V2 minimal bessere Resultate erzielt. Aus diesem Grund und da V1 einfacher implementiert werden kann (vergleiche (6.2) und (6.4)), wird in den nachfolgenden Abschnitten nur noch das 1-RQ-Modell basierend auf Variante V1 verwendet. Da V2 nicht mehr betrachtet wird, ist in den nachfolgenden Abschnitten und Kapiteln immer V1 gemeint, wenn vom fraktionalen Modell oder vom 1-RQ-Modell gesprochen wird.

In Anhang E wird die in diesem Abschnitt beschriebene SOC-Schätzung für die Einzelzelle wiederholt, wobei den Messgrößen i_{cell} und u_{cell} zusätzliches Rauschen hinzugefügt wird. Die Ergebnisse zeigen, dass die Schätzung auf Basis des fraktionalen Modells und des FEKFs robust gegenüber Rauschen ist. Die Fehlerwerte der Schätzung auf Basis des nicht-fraktionalen Modells steigen bei erhöhtem Rauschen hingegen deutlich an.

6.4 Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion

In diesem Abschnitt soll die Auswirkung einer Initialisierungsfunktion auf die Zustandsschätzung einer Lithium-Ionen-Zelle untersucht werden. Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden in verkürzter Form in [KFEH18] veröffentlicht.

Nach Abschnitt 3.1.3 müssen für die korrekte Berechnung der fraktionalen Ableitung einer Funktion $f(t)$ alle Werte dieser Funktion ab dem Systemstartzeitpunkt a bis zum aktuellen Zeitpunkt t vorliegen. Betrachtet man die Batteriezelle nach Definition 4.3, wird deutlich, dass insbesondere die Werte der RQ-Spannung für alle Zeiten berücksichtigt werden müssen. In der Praxis liegen Messungen jedoch erst ab einem späteren Zeitpunkt b vor. Auch die Schätzalgorithmen werden erst mit dem Beginn der Messungen gestartet. Daher können keine früheren Werte für diese Spannungen einbezogen werden.

Aus diesem Grund wird nachfolgend untersucht, wie sich die Verwendung bzw. die Vernachlässigung einer Initialisierungsfunktion auf die Zustandsschätzung auswirkt. Da bei realen Messungen an einer Lithium-Ionen-Zelle keine Werte für die RQ-Spannungen vorliegen, wird dazu eine Simulation verwendet.

Für diese Simulation wird angenommen, dass die Batteriezelle vor dem Zeitpunkt $a = -1800$ s in Ruhe war und bis zu diesem Zeitpunkt nicht initialisiert werden muss. Es wird eine Abtastzeit von $T = 0,1$ s gewählt, sodass sich der zeitdiskrete Systemstartzeitpunkt

zu $a_0 = a/T = -18000$ bestimmen lässt. Der Startzustand wurde zu

$${}^c \mathbf{x}_{a_0} = \begin{pmatrix} 30 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

gewählt. Die Batteriezelle wird mit dem Stromprofil nach Abbildung 6.6 aufgeladen. Aufgrund des Ladestroms kann man für die Zeiten $t > a$ von einem initialisierten System ausgehen. Nach einer Zeitdauer von 1800s liegt der Zustand der simulierten Zelle bei

$${}^c \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 82,361 \% \\ 0,089 \text{ V} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Da bis zum Ende der Simulation kein Strom mehr fließt, bleibt der SOC ab diesem Zeitpunkt konstant, die RQ-Spannung ändert sich aber weiterhin.

Zum Zeitpunkt $b_0 = b/T = 0$ werden zwei FEKFs gestartet. Diese erhalten nur Messgrößen ab diesem Zeitpunkt. Der erste Algorithmus wird dabei zusätzlich mit der Funktion

$${}_{-1800}^{RQ} \Delta_0^{\alpha_k}(t_k) = (0.1)^{-\alpha_k} \sum_{j=1}^{18000} (-1)^{j+k} \binom{\alpha_k}{j+k} u_{RQ}(-jT) \quad (6.15)$$

nach Korollar 3.1 initialisiert. Die Werte $u_{RQ}(-jT)$ in (6.15) stellen dabei die simulierten RQ-Spannungen vor dem Zeitpunkt $t = 0$ dar. Die Initialisierungsfunktion für den SOC ${}_{-1800}^{\text{SOC}} \Delta_0^{\alpha_k}(t_k)$ ist null, da es sich um eine nicht-fractionale Gleichung handelt. Der zweite Algorithmus berücksichtigt keine Initialisierungsfunktion. Beide Filter erhalten den korrekten Startzustand ${}^c \mathbf{x}_{0|0} = {}^c \mathbf{x}_0$.

In einem ersten Szenario verwenden beide Algorithmen einen Speicher von $S = 1000$ und Kovarianzmatrizen identisch zu (6.7), (6.8) und (6.10). In einem zweiten Szenario nutzen die Filter an Stelle von (6.10) die Schätzfehler-Kovarianzmatrix

$${}^c \mathbf{P}_{0|0} = \begin{pmatrix} 10^{-6} \%^2 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \text{ V}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

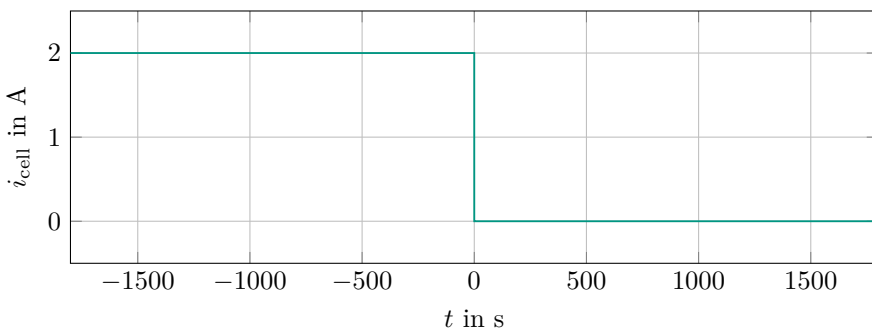


Abbildung 6.6: Zeitverlauf des zur Simulation verwendeten Batteriezellenstroms $i_{\text{cell},k}$.

Die Kovarianzmatrizen des System- und Messrauschens bleiben unverändert.

Die Ergebnisse des ersten Szenarios sind in Abbildung 6.7 dargestellt. Die Ergebnisse des zweiten Szenarios zeigt Abbildung 6.8.

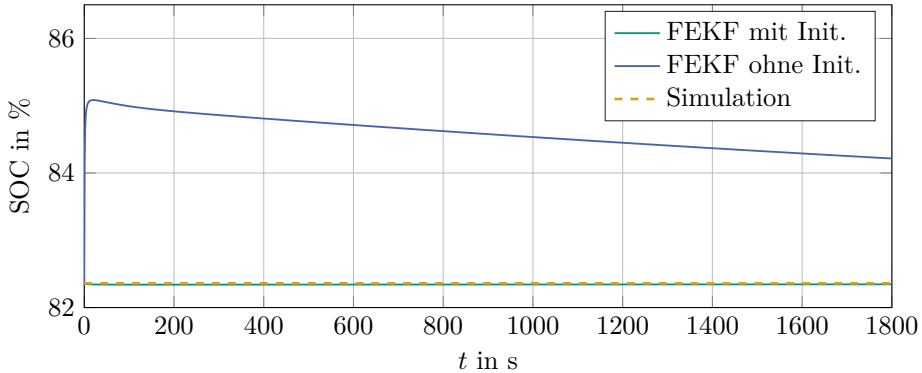


Abbildung 6.7: Ergebnisse der SOC-Schätzung einer simulierten, initialisierten Batteriezelle mit und ohne Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion für das erste Szenario.

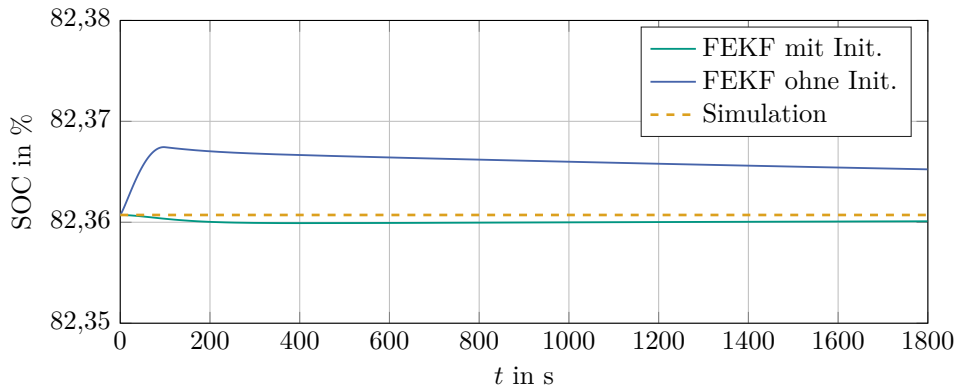


Abbildung 6.8: Ergebnisse der SOC-Schätzung einer simulierten, initialisierten Batteriezelle mit und ohne Berücksichtigung einer Initialisierungsfunktion für das zweite Szenario.

In Abbildung 6.7 ist zu sehen, dass das erste Filter aufgrund der richtigen Initialisierung nur wenig vom richtigen SOC abweicht. Diese Abweichung kommt im Wesentlichen durch nichtlineare Effekte und das SMP zustande. Da das zweite Filter uninitialisiert ist, wird der vorliegende Spannungsunterschied als Zustandsfehler interpretiert. Daher weicht der geschätzte SOC stärker vom simulierten SOC ab. Nach kurzer Zeit sinkt der Schätzfehler jedoch wieder. Im gesamten Szenario bleibt er unterhalb von 3%.

Im zweiten Szenario bewirkt die vergleichsweise klein gewählte Kovarianz in (6.16), dass die Filter den vorgegebenen Startzustand als korrekte Schätzung einstufen. Auftretende

Abweichungen werden daher als Messfehler interpretiert. Das initialisierte Filter verhält sich in Abbildung 6.8 ähnlich wie im ersten Szenario. Aber auch das uninitialisierte Filter weicht nur minimal vom simulierten SOC ab. Der Schätzfehler beider Filter überschreitet den Wert 0,01 % nicht.

Vergleicht man die Fehlerwerte aus den beiden hier präsentierten Szenarien mit den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt, wird deutlich, dass die Berücksichtigung bzw. die Vernachlässigung der Initialisierungsfunktion nur einen vergleichsweise geringen Einfluss auf die Güte der Schätzung hat. Da die Initialisierungsfunktion immer abklingt (vergleiche Abschnitt 3.1.3 und [LLCA14]), ist eine eventuell auftretende Abweichung der Zustände bzw. der Klemmenspannung auch nur kurzfristig. Zusätzlich muss man berücksichtigen, dass die Ergebnisse in diesem Abschnitt unter optimalen Bedingungen in der Simulation durchgeführt wurden. In der Realität ist die Initialisierungsfunktion nicht bekannt, sodass diese auch nicht berücksichtigt werden kann. Weiterhin soll eine Batterie nicht ohne SOC-Überwachung betrieben werden. Daher sollte der beschriebene Fall, in welchem eine Initialisierungsfunktion berücksichtigt werden muss, in der Praxis nicht auftreten. Zusammenfassend kann deshalb der Rückschluss gezogen werden, dass eine Initialisierungsfunktion für die Zustandsschätzung einer Lithium-Ionen-Batteriezelle vernachlässigt werden kann. Diese Aussage lässt sich auch auf allgemeine Strukturen von Lithium-Ionen-Batterien erweitern, da sich Batteriepacks aus mehreren einzelnen Zellen zusammensetzen.

6.5 Anwendung des fraktionalen unknown-input Kalman-Filters

In diesem Abschnitt wird das FUIKF aus Abschnitt 5.4 zur Zustandsschätzung der Batteriezelle verwendet. Da dieses Filter nicht nur die Zustände, sondern auch unbekannte Eingangsgrößen schätzt, wird der Batteriezellenstrom in diesem Abschnitt als unbekannte Größe aufgefasst. Das Filter erhält aus diesem Grund keine Messwerte für den Zellstrom, sondern lediglich für die Zellspannung. Dadurch ist es erstmalig möglich, sowohl den Ladezustand als auch den Strom einer einzelnen Lithium-Ionen-Batteriezelle modellbasiert zu schätzen. Somit können in Anwendungen durch das FUIKF Stromsensoren eingespart werden.

Für die nachfolgend beschriebene Schätzung wird die Messung und die Referenz aus den Abschnitten 6.1 bzw. 6.3 verwendet.

6.5.1 Voraussetzungen und Parametrierung

Die Einzelzelle nach Definition 4.3 besitzt genau eine Eingangsgröße. In diesem Experiment wird der Zellstrom $i_{\text{cell},k}$ jedoch nicht als bekannte Eingangsgröße \mathbf{u}_k , sondern als unbekannte Eingangsgröße \mathbf{d}_k modelliert. Dieses Zellenmodell besitzt dann die für das FUIKF notwendige Form nach Definition 5.3, in welchem aber keine bekannte Eingangsgröße \mathbf{u}_k enthalten ist.

Für die Anwendung des FUIKFs muss das Modell jedoch, zusätzlich zu den Anforderungen, die in Abschnitt 6.3.1 für das FEKF diskutiert wurden, auch die Voraussetzung aus Annahme 5.10 erfüllen. Diese fordert einen vollen Spaltenrang für die linearisierte Durchgriffmatrix \mathbf{D}_k . Diese Matrix besteht nach (4.25) bzw. nach Satz D.1 nur aus einem einzelnen Wert, nämlich dem Innenwiderstand der Zelle $R_i(\text{SOC}_k) \in \mathbb{R}^{>0}$. Dieser erfüllt die Voraussetzung für den gesamten SOC-Bereich (vergleiche Anhang A).

Da für die Schätzung das gleiche fraktionale 1-RQ-Modell (V1) bzw. das gleiche nicht-fraktionale 1-RC-Modell wie in Abschnitt 6.3 verwendet wird, werden auch die identischen Kovarianzmatrizen nach (6.7) - (6.10) genutzt:

$${}^c R_{\text{FUIKF}} = {}^c R_{\text{UIKF}} = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2, \quad (6.17)$$

$${}^c \mathbf{Q}_{\text{FUIKF}} = \begin{pmatrix} 10^{-5} \%^2 & 0 \\ 0 & 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

$${}^c \mathbf{Q}_{\text{UIKF}} = \begin{pmatrix} 10^{-4} \%^2 & 0 \\ 0 & 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$${}^c \mathbf{P}_{0|0} = \begin{pmatrix} 10 \%^2 & 0 \\ 0 & 1 \text{ V}^2 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Der Index UIKF steht hierbei für das unknown-input Kalman-Filter, welches das nicht-fraktionale Modell verwendet. Für die Stromschätzung muss keine Kovarianzmatrix angegeben werden, da das FUIKF diese mithilfe von (5.163) selbstständig bestimmt.

6.5.2 Ergebnisse und Bewertung

Wahl des korrekten initialen SOC's

Wie in Abschnitt 6.3 wird als erstes Szenario dem FUIKF der richtige Startzustand übergeben:

$$\mathbf{x}_{0|0} = \begin{pmatrix} 99,8 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

Die Ergebnisse zu diesem Szenario sind in Tabelle 6.6 dargestellt. Diese zeigt bezüglich des SOC's im Vergleich zu den Ergebnissen des FEKF und des FUKF in den Tabellen 6.2 und 6.3 einen um etwa ein bis zwei Prozentpunkte höheren RMSE. Der MAE ist je nach Speicherlänge um etwa drei bis sechs Prozentpunkte höher. Berücksichtigt man, dass das FUIKF keinen Zugriff auf die Messwerte des Zellstroms hat, ist dieses Ergebnis nachvollziehbar.

Aufgrund des Jitters des Digitalmultimeters zu den anderen Messgeräten (vergleiche Abschnitt 6.1), wird in Tabelle 6.6 der geschätzte Strom sowohl mit dem Digitalmultimeter als auch mit der Strommessung des Netzteils verglichen. In beiden Fällen liegt der RMSE in der Größenordnung von einigen hundert mA. Im Verhältnis zum tatsächlichen Stromverlauf nach Abbildung 6.2 sind diese Werte vergleichsweise groß. Dies trifft auch auf den MAE zu. Die Berechnung des MAEs bezüglich des Digitalmultimeters

Tabelle 6.6: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ-Modells und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem FUIKF mit richtigem Startzustand.

SMP	SOC		Strom DM		Strom BOP	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	3,7037 %	9,0883 %	0,6819 A	5,1971 A	0,6729 A	2,8858 A
25	4,7757 %	12,7334 %	1,1315 A	5,0851 A	1,1245 A	3,0332 A
100	3,8682 %	9,3693 %	0,7339 A	5,2087 A	0,7255 A	2,6599 A
250	3,2762 %	7,6824 %	0,5192 A	5,2981 A	0,5091 A	2,6362 A
500	2,8811 %	6,5172 %	0,4131 A	5,3562 A	0,4016 A	2,6278 A
750	2,6764 %	5,9681 %	0,3751 A	5,3862 A	0,3629 A	2,6280 A
1000	2,5445 %	5,6472 %	0,3575 A	5,4059 A	0,3450 A	2,6304 A

wird allerdings stark vom Jitter beeinflusst. Der MAE auf Basis des Netzteils ist daher aussagekräftiger, da dort kein Jitter vorliegt. Er beträgt aber dennoch etwa 2,7 A.

In Tabelle 6.6 ist auch zu erkennen, dass sich die Güte des Algorithmus, wie zuvor, mit steigender Speicherlänge verbessert. Die Schätzung auf Basis des nicht-fraktionalen Modells ist wie in den Szenarien zuvor für Speicherlängen $S \leq 100$ besser und für größere Speicherlängen schlechter als die Schätzung mithilfe des fraktionalen Modells.

Weiterhin muss berücksichtigt werden, dass das FUIKF im Vergleich zum FEKF aufgrund der zusätzlichen Schätzung des Stroms und dessen Kovarianz eine andere Struktur besitzt. Es ist daher wahrscheinlich, dass sich bessere Ergebnisse erzielen lassen, wenn ein eigenes Parametertuning für das FUIKF sowie das UIKF vorgenommen wird.

Wahl eines falschen initialen SOC

Wie auch in Abschnitt 6.3 wird dem Filter in einem zweiten Szenario ein falscher Start-SOC zugewiesen:

$$\mathbf{x}_{0|0} = \begin{pmatrix} 89,8 \% \\ 0 \text{ V} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Die SOC-Schätzung des FUIKF für einen Speicher von $S = 250$ ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Abbildung 6.10 zeigt die zugehörige Stromschätzung. Ein Vergleich der Fehlerwerte des SOC und des Stroms für verschiedene Speicherlängen ist in Tabelle 6.7 abgebildet.

In Abbildung 6.9 ist zu sehen, dass der initiale SOC-Fehler ungefähr in den ersten 500 s korrigiert wird und der geschätzte SOC ab diesem Zeitpunkt in etwa dem wahren Verlauf des SOC folgt. Das FUIKF ist also auch in der Lage einen initialen SOC-Fehler zu korrigieren. Wie auch beim FEKF liegen die größten Schätzfehler im SOC-Bereich von etwa 30 % bis 60 % vor. Die Ergebnisse aus Tabelle 6.7 zeigen auch in diesem Szenario,

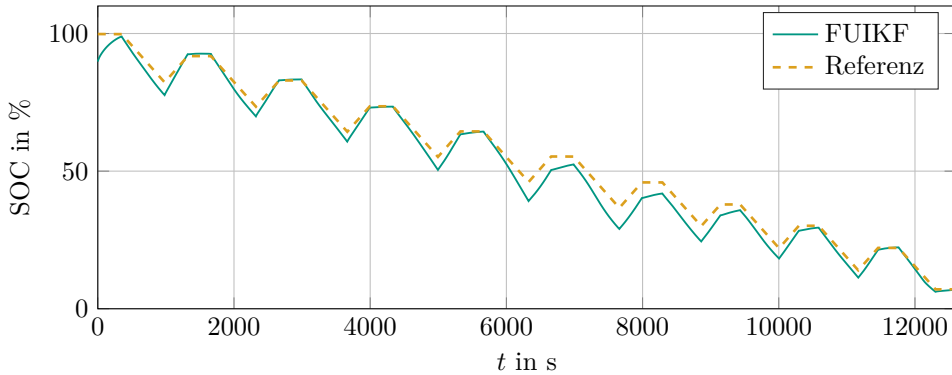


Abbildung 6.9: Ergebnis der SOC-Schätzung des FUIKFs mit falschem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs der SOC-Referenz.

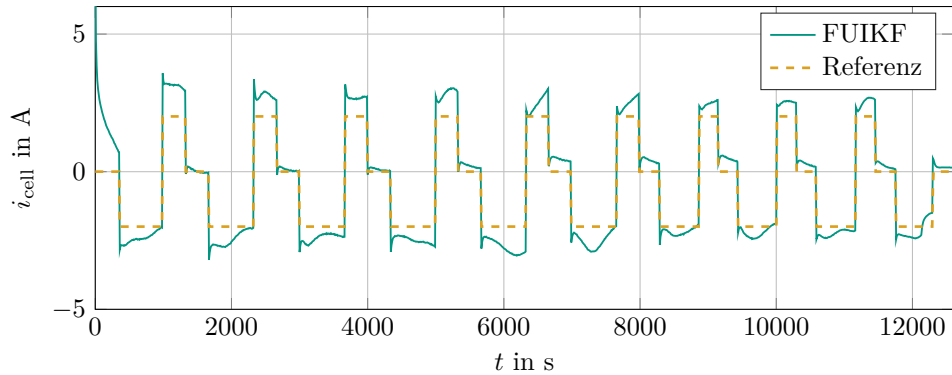


Abbildung 6.10: Ergebnis der Batteriestromschätzung des FUIKFs mit falschem Startzustand und einer Speicherlänge von $S = 250$ anhand von Messdaten. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs des Batteriezellenstroms, gemessen mit dem Digitalmultimeter.

dass der RMSE des SOC's im Vergleich zu den Werten in Tabelle 6.6 ansteigt. Der MAE des SOC's überschreitet den initialen Fehler nur im Fall der Speicherlänge von $S = 25$, welcher wie im ersten Szenario die schlechtesten Ergebnisse erzielt.

Die Stromschätzung in Abbildung 6.10 zeigt, dass der initiale SOC-Fehler im ersten Schritt eine starke Abweichung des geschätzten Stroms bewirkt. Aus diesem Grund ist der MAE in Tabelle 6.7 für alle Speicherlängen identisch, da der erste Zeitschritt unabhängig vom SMP ist. In Abbildung 6.10 ist auch zu erkennen, dass die Stromschätzung zwar die Sprungstellen des Stroms erkennt, aber den restlichen Verlauf des wahren Stroms nur bedingt nachbilden kann. Die auftretenden Abweichungen spiegeln sich auch in Tabelle 6.7 wider. Die Fehlerwerte lassen sich dadurch begründen, dass dem FUIKF nur eine Messgröße zur Verfügung steht. Nur auf Basis dieser einen Größe kann das Filter nicht eindeutig zwischen der Eingangsgröße, den Zuständen und Rauschprozessen unterscheiden. Im Vergleich zu den Werten in Tabelle 6.6 steigt auch der RMSE der

Tabelle 6.7: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ-Modells und des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem FUIKF mit falschem Startzustand.

SMP	SOC		Strom DM		Strom BOP	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
<i>RC</i>	3,7819 %	10 %	0,7816 A	8,1367 A	0,7739 A	8,1358 A
25	4,8257 %	12,7334 %	1,2061 A	8,1367 A	1,1996 A	8,1358 A
100	3,9461 %	10 %	0,8238 A	8,1367 A	0,8163 A	8,1358 A
250	3,3811 %	10 %	0,6278 A	8,1367 A	0,6196 A	8,1358 A
500	3,0090 %	10 %	0,5369 A	8,1367 A	0,5284 A	8,1358 A
750	2,8181 %	10 %	0,5058 A	8,1367 A	0,4971 A	8,1358 A
1000	2,6957 %	10 %	0,4917 A	8,1367 A	0,4830 A	8,1358 A

Stromschätzung an. Obwohl die Stromschätzung hohe Fehlerwerte aufweist, kann das FUIKF den SOC der Zelle trotz unbekannter Eingangsgröße in einer ähnlichen Größenordnung wie das FEKF oder das FUKF schätzen.

6.6 Zusammenfassung und Bewertung der Einzelzellschätzung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Einzelzellschätzung zusammengefasst und bewertet.

Die Schätzergebnisse des FEKF und des FUKF anhand realer Messungen wurde in Abschnitt 6.3 vorgestellt. Dabei hat sich gezeigt, dass beide Algorithmen sehr ähnliche Ergebnisse erzielen. Für den betrachteten Betriebsbereich ist es daher nicht notwendig das aufwändigere FUKF zu verwenden. Weiterhin sind die Schätzungen auf Basis der Modellvarianten V1 und V2 aus Definition 3.3 nahezu identisch. Aus diesem Grund ist es auch nicht notwendig die komplexere Variante V2 zu wählen.

Sowohl bei der Modellierung als auch bei der Zustandsschätzung haben die fraktionalen Modelle und Methoden bessere Simulations- bzw. Schätzergebnisse als die nicht-fraktionalen Modelle und Methoden erzielt, sofern im fraktionalem Fall die Speicherlänge ausreichend groß gewählt wurde. Es genügen bereits Speicherlängen von etwa $S = 250$, um gute Ergebnisse zu erzielen. Berücksichtigt man zusätzlich die Ergebnisse aus Anhang E, wird deutlich, dass die fraktionalem Modelle und Algorithmen auch robuster gegenüber Messrauschen sind. In praktischen Anwendungen in denen höheres Rauschen auftritt, z. B. im Automobil, lässt sich die Energie in der Batterie bei Verwendung fraktionaler Modelle im Vergleich zu nicht-fraktionalem Modellen um mehrere Prozent besser nutzen. Dies würde sich direkt in einer längeren möglichen Nutzungsdauer bzw. in einer erhöhten Reichweite widerspiegeln. Da die Wahl des Modells hauptsächlich die

Software und weniger die Hardware beeinflusst, würde sich diese verbesserte Nutzung nicht oder nur wenig auf die Kosten der Batterie auswirken.

In Abschnitt 6.4 wurde außerdem die Auswirkung einer Initialisierungsfunktion auf die Schätzung anhand einer Simulation untersucht. Falls das System vorher nicht für eine längere Zeit in Ruhe war, wird eine Initialisierungsfunktion formal benötigt. Wenn diese vernachlässigt wird, können insbesondere zu Beginn der Schätzung Fehler auftreten. Der sich ergebende Schätzfehler des SOC lag in beiden betrachteten Szenarien immer unterhalb von 3% und liegt damit in der gleichen Größenordnung wie die Schätzfehler, die in Abschnitt 6.3 auftraten. Da sich eine Initialisierungsfunktion zudem nur zeitlich begrenzt auswirkt, kann sie für diese Anwendung vernachlässigt werden.

Weiterhin wurde in Abschnitt 6.5 das FUIKF erstmalig auf eine reale Messung angewendet. Das FUIKF schätzt nicht nur die Zustände des Systems, sondern auch unbekannte Eingangsgrößen. Deshalb wurde der gemessene Zellstrom in diesem Szenario dem Filter nicht zur Verfügung gestellt, sondern von diesem geschätzt. Die einzige Messgröße, auf die der Algorithmus Zugriff hat, ist somit die Zellspannung. Obwohl die Stromschätzung größere Fehlerwerte annimmt, kann die Schätzung des SOC dem wahren Verlauf dennoch gut folgen. Da eine gemeinsame, modellbasierte SOC- und Stromschätzung für Batteriezellen bisher noch nicht existiert, sind die Ergebnisse des FUIKF mit keinem Algorithmus in der Literatur vergleichbar. Auch die erstmalige Anwendung des Filters auf nicht-fractionale Modelle erzielt vergleichbare Ergebnisse zu den fractionalen Modellen.

Die Umsetzung des FUIKF ist nicht bedeutend aufwändiger als die des FEKF. Lediglich die Schätzung der unbekanntes Eingangsgröße muss zusätzlich implementiert werden. Dadurch lässt sich das FUIKF beispielsweise zu Diagnosezwecken oder als Redundanz zu einer Messung verwenden. Alternativ kann es auch eingesetzt werden, wenn die genaue Kenntnis über den Strom nicht zwingend notwendig ist, z. B. bei Kleingeräten in der Unterhaltungselektronik.

7 Ladezustandsschätzung für ein Lithium-Ionen-Batteriepack

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel wird hier nicht nur die Ladezustandsschätzung einer einzelnen Batteriezelle, sondern eines Batteriepacks betrachtet. Dazu werden die verschiedenen in Kapitel 5 vorgestellten, verteilten Kalman-Filter vereinfacht, auf die Batterie angewendet und miteinander verglichen.

Im ersten Abschnitt wird zunächst die Aufteilung des Batteriepacks in Subsysteme besprochen sowie die Voraussetzungen der Filter zur Anwendung auf den Batteriepack untersucht. Zum Informationsaustausch zwischen den Subsystemen werden dabei die Stromaufteilungsmodelle aus Abschnitt 4.3 herangezogen. Anschließend wird der verwendete Versuchsaufbau beschrieben.

In den darauffolgenden Abschnitten wird die SOC-Schätzung eines Batteriepacks mithilfe der verteilten Kalman-Filter für fraktionale Systeme vorgestellt. Dabei werden die Algorithmen so angepasst, dass sie die Stromaufteilungsmodelle nicht nur zum Informationsaustausch verwenden, sondern auch modellbasiert die Strangströme des Batteriepacks schätzen. Aus diesem Grund benötigen die Algorithmen auch keine Messwerte für die Teilströme. Um die Güte der Algorithmen zu bewerten, werden die Ergebnisse der SOC-Schätzung sowohl mit der Referenz der Stromintegration, als auch mit einer Zustandsschätzung, welche die gemessenen Strangströme als Eingangsgrößen nutzt, verglichen. Somit dient dieses Kapitel insbesondere der Beantwortung der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4.

7.1 Voraussetzungen und Vereinfachungen

7.1.1 Aufteilung des Batteriepacks in Subsysteme

Um eine verteilte Zustandsschätzung durchführen zu können, muss der Batteriepack zunächst in Subsysteme unterteilt werden. Betrachtet man das Batteriepackmodell nach Definition 4.6, ist ersichtlich, dass sich der Pack direkt aus den einzelnen Strangmodellen nach Definition 4.5 zusammensetzt. Weiterhin wurde in Abschnitt 4.3 bereits diskutiert, dass sich die Kopplung der einzelnen Stränge mithilfe der Strommodelle nach Satz 4.1 oder Lemma 4.1 beschreiben lässt.

Werden also die einzelnen Stränge des Batteriepacks jeweils als eigenständige Subsysteme verwendet, welche über die Strommodelle gekoppelt sind, erhält man eine natürliche

und naheliegende Aufteilung des Batteriepacks. Deswegen werden nachfolgend P Batteriestrangmodelle nach Definition 4.5 als Subsysteme für die verteilten Kalman-Filter genutzt (vergleiche Abbildung 7.1).

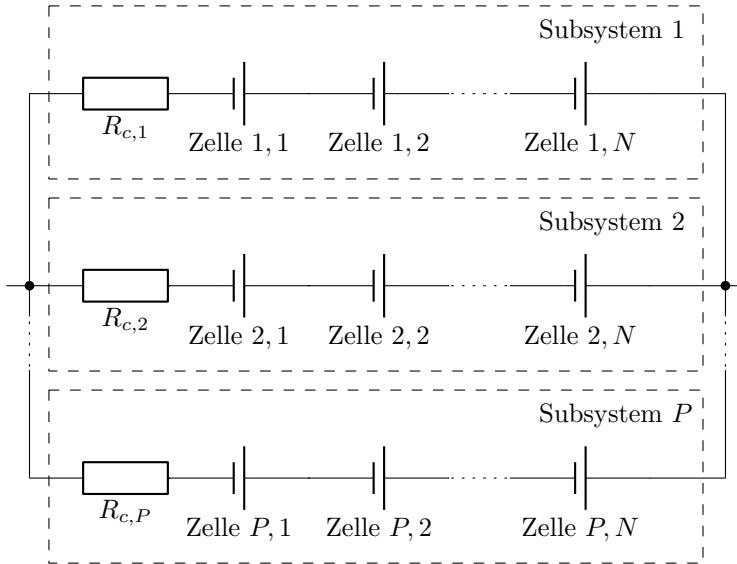


Abbildung 7.1: Aufteilung des Batteriepacks in P Subsysteme, welche jeweils aus N Zellen bestehen.

Wie in Abschnitt 5.1 erwähnt, gibt es oftmals mehrere Möglichkeiten, ein Gesamtsystem in Subsysteme zu unterteilen. Der Batteriepack könnte hier auch in kleinere Subsysteme, z. B. zellweise, aufgeteilt werden. Eine solche Unterteilung des Batteriestrangs wurde beispielsweise in der Bachelorarbeit [Wie15] simulativ untersucht. Dadurch konnte zwar die Komplexität der einzelnen Subsysteme reduziert werden, an den funktionalen Zusammenhängen änderte sich dabei allerdings nichts.

7.1.2 Überprüfung der allgemeinen Voraussetzungen

In diesem Abschnitt sollen die für die verteilte Zustandsschätzung getroffenen Annahmen 5.1 - 5.5 anhand der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Subsysteme diskutiert werden.

Die Subsysteme wurden so gewählt, dass jedes Subsystem genau einem Strang entspricht. Dadurch ist das Batteriepackmodell vollständig abgebildet, wodurch Annahme 5.1 erfüllt ist. Die Beobachtbarkeit des Batteriestrangmodells wurde bereits in Abschnitt 4.5 besprochen, sodass Annahme 5.3 gültig ist. In Abschnitt 4.4 wurde diskutiert, dass die Rauschprozesse als untereinander unkorreliert und als rein additiv angenommen werden können, wodurch die Annahmen 5.4 und 5.5 gegeben sind.

Annahme 5.2 ist prinzipiell auch erfüllt, da jedes Strangmodell nur die Parameter des eigenen Strangs berücksichtigt. Allerdings werden im nächsten Abschnitt die Strom-

modelle für einen vereinfachten Datenaustausch zwischen den Subsystemen verwendet. Dabei müssen (zumindest teilweise) die Widerstände anderer Stränge bekannt sein, was Annahme 5.2 verletzt. Da die Strommodelle den Datenaustausch zwischen den Subsystemen jedoch deutlich vereinfachen (siehe Abschnitt 7.1.3), wird die Kommunikation der Widerstände in Kauf genommen. Bis auf diese Annahme sind daher alle Voraussetzungen für die Anwendung einer verteilten Zustandsschätzung auf die in Abschnitt 7.1.1 genannten Subsysteme erfüllt.

Als letzte Bedingung muss allerdings noch überprüft werden, ob die Funktionen ${}^s\mathbf{f}$ und ${}^s\mathbf{g}$ des Batteriestrangs differenzierbar sind, sodass der EKF-Ansatz zur Betrachtung der Nichtlinearitäten des Modells verwendet werden kann. Für das Zellmodell wurde diese Bedingung bereits in Abschnitt 6.3.1 überprüft. Da sich ein Batteriestrang aus mehreren Zellen zusammensetzt, lässt sich diese Aussage auch auf das Modell des Batteriestrangs übertragen.

7.1.3 Bestimmung der Strangströme

Das DDFKF und das CDFKF erfordern, dass die Subsysteme ihre geschätzten Zustände und Kovarianzen untereinander austauschen. Wenn jedoch ein Batteriepack betrachtet wird, welches eine große Anzahl N an Zellen beinhaltet, steigt auch der benötigte Informationsaustausch an. Daher werden in diesem Abschnitt die Stromaufteilungsmodelle aus Abschnitt 4.3 verwendet, um den Datenaustausch zwischen den Subsystemen zu reduzieren.

Dazu werden nun die drei Stromaufteilungsmodelle nach den Gleichungen (4.47) und (4.48) aus Satz 4.1 und (4.60) aus Lemma 4.1

$$i_p = \frac{u_t - u_{m,p}}{R_{i,p}}, \quad \forall p = 1, \dots, P \quad (7.1)$$

$$= i_t \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} + \frac{R_{i,t}}{R_{i,p}} \left(\sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q} - u_{m,p}}{R_{i,q}} \right), \quad \forall p = 1, \dots, P \quad (7.2)$$

$$= \frac{u_{m,p-1} + R_{i,p-1} i_{p-1} - u_{m,p}}{R_{i,p}}, \quad \forall p = 2, \dots, P \quad (7.3)$$

mit

$$u_{m,p} = \sum_{n=1}^N (\text{OCV}_{p,n} + u_{RQ,p,n}) \quad (7.4)$$

genauer analysiert. Ziel ist es zu untersuchen, welche Größen für den Datenaustausch zwischen den Subsystemen auf Basis der Stromaufteilungsmodelle benötigt werden.

Zur Berechnung des Stroms i_p in Strang p nach den Gleichungen (7.1), (7.2) und (7.3) müssen im Wesentlichen jeweils drei Komponenten bekannt sein:

- die Strangwiderstände $R_{i,p}$,
- eine der Größen u_t oder i_t des gesamten Packs,
- die Hilfsspannung $u_{m,p}$.

Die Parameter der Zelle und des Systems werden als bekannt vorausgesetzt, sodass die Kenntnis über $R_{i,p}$ in Strang p vorliegt. Weiterhin wurde in Annahme 4.2 davon ausgegangen, dass Messgrößen zu u_t oder i_t vorhanden sind. Da durch die Zustandsschätzung alle SOC's und alle RQ-Spannungen eines Strangs im lokalen Subsystem p als Schätzgrößen vorliegen, lässt sich lokal auch die Hilfsspannung $u_{m,p}$ abschätzen. Statt der wahren Größen wie in (7.4), werden dafür nachfolgend die Schätzgrößen eingesetzt. Somit sind prinzipiell alle benötigten Größen für die Berechnung der Ströme vorhanden, unabhängig davon, welche der drei Gleichungen (7.1), (7.2) oder (7.3) verwendet wird. Das bedeutet, dass eine Bestimmung der Strangströme auf Basis der Schätz- und Messwerte möglich ist und somit die Teilströme geschätzt werden können.

Um die Schätzung der Teilströme in die Gleichungen des Kalman-Filters einzugliedern, wird die Stromschätzung sowie der Prädiktions- und der Korrekturschritt des Kalman-Filters betrachtet. Die Stromaufteilungsmodelle (7.1) - (7.3) sowie (7.4) sind jeweils rein algebraische Gleichungen. Daraus folgt, dass für die Berechnung der Ströme $i_{p,k+1}$ bereits Größen für die Zustände ${}^s\mathbf{x}_{p,k+1}$ zum gleichen Zeitpunkt $k+1$ vorliegen müssen. Betrachtet man den Korrekturschritt des Kalman-Filters, so wird zur Berechnung von ${}^s\mathbf{x}_{p,k+1|k+1}$ eine Größe für den Strangstrom $i_{p,k+1}$ benötigt, unabhängig vom verwendeten Algorithmus. Die Prädiktion erfordert im Gegensatz dazu zur Berechnung von ${}^s\mathbf{x}_{p,k+1|k}$ nur den Strom $i_{p,k}$ aus dem vorherigen Zeitschritt k . Eine sinnvolle Reihenfolge für die Schätzung der Zustände und des Stroms ist also:

1. Prädiktion der Zustände ${}^s\mathbf{x}_{p,k+1|k}$,
2. Informationsaustausch und Schätzung der Strangströme $\tilde{i}_{p,k+1|k+1}$,
3. Korrektur der Zustände ${}^s\mathbf{x}_{p,k+1|k+1}$.

Die Teilströme können dann mithilfe der Schätzgrößen nach den folgenden drei Alternativen basierend auf (7.1), (7.2) und (7.3) berechnet werden:

$$\tilde{i}_{p,k+1|k+1} = \frac{u_{t,k+1} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,p,k+1}} \quad (7.5)$$

$$= i_{t,k+1} \frac{R_{i,t,k+1}}{R_{i,p,k+1}} + \frac{R_{i,t,k+1}}{R_{i,p,k+1}} \left(\sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q,k+1|k} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,q,k+1}} \right) \quad (7.6)$$

$$= \frac{u_{m,p-1,k+1|k} + R_{i,p-1,k+1} \tilde{i}_{p-1,k+1|k+1} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,p,k+1}} \quad (7.7)$$

mit

$$u_{m,p,k+1|k} = \sum_{n=1}^N (\text{OCV}(\text{SOC}_{p,n,k+1|k}) + u_{RQ,p,n,k+1|k}). \quad (7.8)$$

Die Schätzgröße des Stroms $\tilde{i}_{p,k+1|k+1}$ wird mit einer Tilde gekennzeichnet, da zwar der Gesamtstrom bzw. die Gesamtspannung zum Zeitpunkt $k+1$ verwendet wird, aber die restlichen Messgrößen (z. B. die Zellspannungen) zum Zeitpunkt $k+1$ nicht berücksichtigt werden, da $u_{m,p,k+1|k}$ in (7.8) nur auf der Prädiktion der Zustände basiert.

Es stellt sich nun noch die Frage, welche Informationen zwischen den Subsystemen ausgetauscht werden müssen. Für die Berechnung des Strangstroms nach (7.5) werden keine Informationen aus anderen Subsystemen benötigt, da alle Größen im lokalen Subsystem vorliegen. Es ist daher gar keine Kommunikation erforderlich.

Für die Berechnungsvorschrift (7.6) müssen jedoch alle Subsysteme miteinander kommunizieren, da die Hilfsspannungen $u_{m,q,k+1|k}$ für alle Subsysteme $q = 1, \dots, P$ benötigt werden. Weiterhin sind die Widerstände $R_{i,q,k+1}$ nur in Subsystem q bekannt und müssen daher auch zwischen allen Subsystemen ausgetauscht werden. Die Widerstände $R_{i,q,k+1}$ sind zudem zeitvariant, weil die Innenwiderstände der Zellen vom aktuellen SOC der jeweiligen Zelle abhängen. Deshalb müssen sie in jedem Zeitschritt kommuniziert werden¹⁶.

Für die dritte Möglichkeit die Strangströme zu berechnen (7.7), müssen die Hilfsspannungen und die Widerstände lediglich vom vorherigen Subsystem übermittelt werden. Allerdings wird zusätzlich der geschätzte Strangstrom $\tilde{i}_{p-1,k+1|k+1}$ dieses Subsystems benötigt.

Aufgrund der in diesem Abschnitt speziell auf Batteriepacks angepassten Vereinfachung der Kommunikation weichen die Algorithmen von der Vorgehensweise des DDFKF aus Abschnitt 5.2 bzw. dem CFKF aus Abschnitt 5.3 ab. Statt einzelne Zustände zu übermitteln, werden mithilfe der Strommodelle gar keine oder nur wenige Größen zwischen den Subsystemen ausgetauscht, sodass sich die Algorithmen deutlich einfacher umsetzen lassen. Lediglich die Gesamtstrom- oder Gesamtspannungsmessung muss gegebenenfalls in mehreren Subsystemen zur Berechnung der Teilströme vorliegen. Daher werden die verteilten Kalman-Filter nachfolgend entweder auf Basis des zugrundeliegenden Stromaufteilungsmodells nach (7.5) - (7.7) oder anhand der betrachteten Messgröße $u_{t,k}$ und $i_{t,k}$ klassifiziert.

¹⁶ Im vorherigen Abschnitt wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Kommunikation der Widerstände eigentlich Annahme 5.2 verletzt. Da bei der hier vorgestellten Vereinfachung allerdings nur zwei Größen pro Strang ($u_{m,q,k+1|k}$ und $R_{i,q,k+1}$) kommuniziert werden müssen, und nicht wie eigentlich erforderlich alle Zustände des Systems, ist diese Vorgehensweise gerechtfertigt.

7.2 Versuchsbeschreibung

7.2.1 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau für die Aufnahme von Messungen am Batteriepack entspricht im Wesentlichen dem Aufbau aus Abschnitt 6.1. Aus diesem Grund werden hier nur die Unterschiede zu diesem Aufbau genannt.

Es wird ein Batteriepack untersucht, welcher aus drei Strängen mit jeweils drei Zellen besteht. Der Aufbau ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Aufgrund dieser Struktur wird der Batterie der Gesamtstrom $i_{t,k}$ und nicht die einzelnen Teilströme $i_{p,k}$ eingepreßt. In Abbildung 7.3 ist das verwendete Gesamtstromprofil zu sehen, welches dem Netzteil vorgegeben wurde. Die Abbildung zeigt die Messung, welche mithilfe der DS2004 Wandlerkarte aus dem Netzteil ausgelesen wurde. Da sich der Gesamtstrom allerdings auf drei Stränge aufteilt, wurden im Vergleich zum Profil aus Abbildung 6.2 längere Entladephasen und betragsmäßig größere Entladeströme verwendet. Um Referenzwerte für die Strangströme zu erhalten und um damit auch die einzelnen SOC-Referenzen erzeugen zu können, wurde für diesen Versuch in jedem der drei Stränge ein Keysight-Digitalmultimeter integriert.

Für die Messung der Klemmenspannung der Zellen wurde in diesem Experiment nicht nur die DS2004 A/D-Wandlerkarte, sondern auch eine DS2002 A/D-Wandlerkarte im Versuchsaufbau integriert und verwendet. Die Standardabweichung der Kanäle dieser Karte wurde messtechnisch zu $\sigma_{2002} = 1,4 \text{ mV}$ bestimmt. Diese ist etwa zehnfach größer als die der DS2004 Wandlerkarte. Für jeweils eine Zelle in jedem Strang wurden Kanäle der DS2002 Wandlerkarte verwendet (siehe Abbildung 7.2). Die Messung der übrigen Zellen erfolgt über die Kanäle der DS2004 Wandlerkarte. Die Parameter des Messrauschens der anderen Messgeräte sind identisch zu den in Abschnitt 6.1 angegebenen Werten.

7.2.2 Parametrierung

Um eine ungleiche Stromaufteilung zwischen den Strängen zu verstärken, wurden jedem Strang unterschiedlich große, zusätzliche Widerstände hinzugefügt. Diese wurden messtechnisch zu

$$R_{c,1} = 535 \text{ m}\Omega, \quad R_{c,2} = 610 \text{ m}\Omega, \quad R_{c,3} = 655 \text{ m}\Omega \quad (7.9)$$

bestimmt¹⁷. Aus dem gleichen Grund erhalten die Zellen auch unterschiedliche Start-SOCs. Dazu wurden die einzelnen Zellen getrennt voneinander mithilfe des CCCV-Verfahrens auf definierte SOC's geladen. Die initialen SOC's der drei Stränge wurden wie

¹⁷ In diesen Größen sind auch die Kabel- und Kontaktwiderstände der Zellen enthalten.

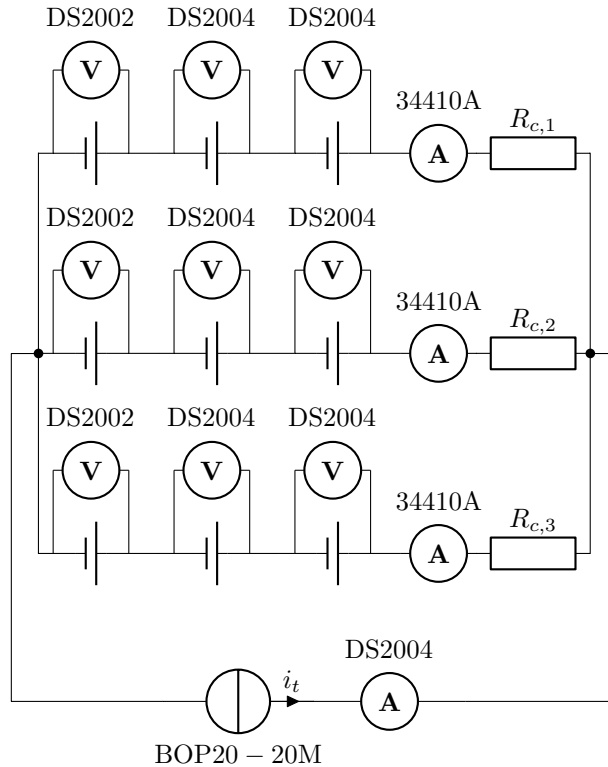


Abbildung 7.2: Schematischer Aufbau für Messungen an einem LiPo-Batteriepack, welches sich aus drei Strängen mit je drei Zellen zusammensetzt.

zuvor nach einer Ruhezeit von $t = 1000\text{s}$ mithilfe der SOC-OCV-Kurve zu folgenden Werten bestimmt:

$${}^s\mathbf{x}_{1,0} = (95,3\% \quad 0\text{V} \quad 85,5\% \quad 0\text{V} \quad 74,9\% \quad 0\text{V})^\top, \quad (7.10)$$

$${}^s\mathbf{x}_{2,0} = (90,5\% \quad 0\text{V} \quad 80,8\% \quad 0\text{V} \quad 69,4\% \quad 0\text{V})^\top, \quad (7.11)$$

$${}^s\mathbf{x}_{3,0} = (85,6\% \quad 0\text{V} \quad 76,1\% \quad 0\text{V} \quad 64,6\% \quad 0\text{V})^\top. \quad (7.12)$$

Erst danach wurden sie zu einem Pack verschaltet und die Versuchsdurchführung begonnen. Die Zellen befanden sich wie beim vorherigen Versuch innerhalb der Klimakammer, welche die Temperatur näherungsweise konstant auf $T_{\text{KS}} = 23^\circ\text{C}$ hält.

Um die betrachteten Methoden vergleichbarer zu machen, werden bei den Schätzungen

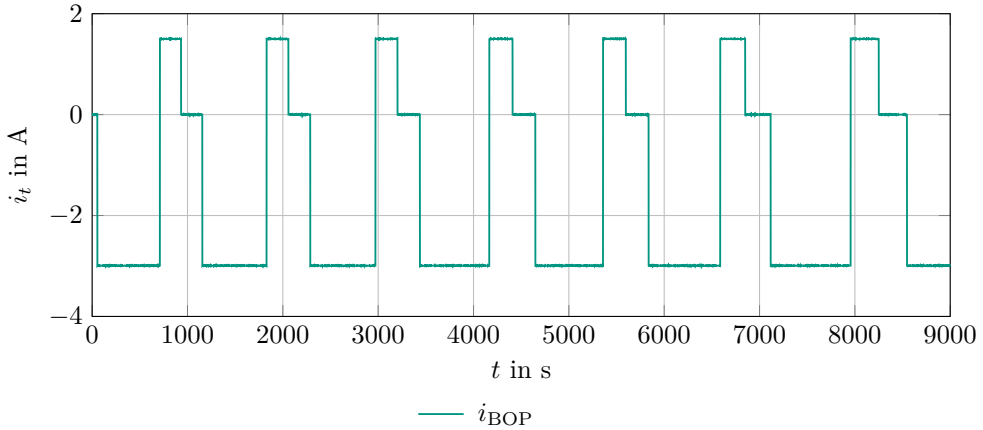


Abbildung 7.3: Zeitverlauf des Gesamtstroms $i_{t,k}$ der Batterie, gemessen mit dem Netzteil.

in den späteren Abschnitten immer die gleichen Startzustände

$${}^s \mathbf{x}_{1,0|0} = (93,3\% \quad 0 \text{ V} \quad 88,5\% \quad 0 \text{ V} \quad 79,9\% \quad 0 \text{ V})^\top, \quad (7.13)$$

$${}^s \mathbf{x}_{2,0|0} = (93,5\% \quad 0 \text{ V} \quad 77,8\% \quad 0 \text{ V} \quad 73,4\% \quad 0 \text{ V})^\top, \quad (7.14)$$

$${}^s \mathbf{x}_{3,0|0} = (81,6\% \quad 0 \text{ V} \quad 81,1\% \quad 0 \text{ V} \quad 63,6\% \quad 0 \text{ V})^\top \quad (7.15)$$

gewählt. Dabei wurden den Startzuständen der Filter zufällig verschiedene Abweichungen im Vergleich zu den richtigen Startzuständen in (7.10) - (7.12) zugeordnet. Hiermit soll überprüft werden, ob die Filter falsche SOC-Schätzwerte der Zellen zu Beginn korrigieren können. Für die Bestimmung der Kovarianzmatrizen wurden die Matrizen aus (6.7) - (6.10) aufgegriffen und für die Strangmodelle wie folgt erweitert:

$${}^s \mathbf{R}_{i,\text{RQ}} = {}^s \mathbf{R}_{i,\text{RC}} = \text{diag} \{2,8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2, \dots, 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ V}^2\}, \forall i \quad (7.16)$$

$${}^s \mathbf{Q}_{i,\text{RQ}} = \text{diag} \{10^{-5} \%^2, 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2, \dots, 10^{-5} \%^2, 5 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2\}, \forall i \quad (7.17)$$

$${}^s \mathbf{Q}_{i,\text{RC}} = \text{diag} \{10^{-4} \%^2, 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2, \dots, 10^{-4} \%^2, 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2\}, \forall i \quad (7.18)$$

$${}^s \mathbf{P}_{i,0|0} = \text{diag} \{100 \%^2, 100 \text{ V}^2, \dots, 100 \%^2, 100 \text{ V}^2\}, \forall i. \quad (7.19)$$

Da für die Packmessungen davon ausgegangen wird, dass der gewählte Startzustand nicht korrekt ist, wurden die Einträge der Kovarianzmatrix ${}^s \mathbf{P}_{i,0|0}$ im Vergleich zur Einzelzellschätzung in (6.10) entsprechend größer gewählt. Der Index RQ in den Gleichungen (7.16) - (7.19) gibt an, dass es sich um das fraktionale Modell handelt. Der Index RC verweist auf das nicht-fraktionale Modell. In den nachfolgenden Abschnitten verwendet jedes Kalman-Filter je nach Modell die gleichen Kovarianzmatrizen.

Bei der Einzelzellschätzung hat sich gezeigt, dass das FUKF im betrachteten Betriebsbereich keine signifikanten Verbesserungen gegenüber dem FEKF erzielt. Daher wird das aufwändigere FUKF in diesem Kapitel nicht mehr betrachtet. Weiterhin zeigt Kapitel 6, dass die Filter bereits für Speicherlängen von $S = 250$ gute Ergebnisse erzielen, welche

für das fraktionale Modell nachfolgend fix verwendet wird. Für das nicht-fraktionale Modell wird die Speicherlänge wie zuvor zu $S = 1$ gewählt.

Des Weiteren ist eine exakte Parametrierung jeder einzelnen Zelle eines Batteriepacks aufwändig und daher unerwünscht. Aus diesem Grund werden die funktionalen Zusammenhänge der Parameter zum SOC (siehe Anhang A), welche für eine einzelne Zelle identifiziert wurden, nachfolgend für alle Zellen verwendet. Es wurde lediglich per Stichprobe validiert, dass sich die Zellen grundsätzlich ähnlich verhalten und die Parameter in der gleichen Größenordnung liegen. Eine Ausnahme davon bildet die Ladekapazität (siehe Anhang A). Diese wurde für jede Zelle mithilfe des Verfahrens bestimmt, welches zu Beginn von Abschnitt 2.1.2 beschrieben wurde, um eine möglichst genaue SOC-Referenz berechnen zu können. Die Filter nutzen allerdings alle den gleichen Parameter für die Ladekapazität.

7.3 Anwendung der verteilten fraktionalen Kalman-Filter

In diesem Abschnitt werden verteilte fraktionale Kalman-Filter zur SOC- sowie zur Strangstromschätzung eines Batteriepacks verwendet. Die Aufteilung des Batteriepacks in die lokalen Zustände erfolgt durch die in Abschnitt 7.1.1 beschriebene Wahl der Subsysteme disjunkt. Somit sind die Informationen, die aus anderen Subsystemen stammen, externe Zustände. Alternativ lassen sie sich als zusätzliche Eingangsgrößen interpretieren. Es wurde zudem in Abschnitt 7.1.3 gezeigt, dass der Informationsaustausch zwischen den Subsystemen mithilfe der Stromaufteilungsmodelle vereinfacht werden kann. Daher können diese Modelle dazu verwendet werden den aufwändigeren Fusionsschritt zu ersetzen. Zur Validierung der Methoden werden die in Abschnitt 7.2 beschriebenen Messungen und Parametrierungen herangezogen.

7.3.1 Schätzung mithilfe der Gesamtspannungsmessung

In einem ersten Szenario wird die Schätzung auf Basis des Stromaufteilungsmodells nach (7.5) durchgeführt. Die besondere Eigenschaft dieser Gleichung ist, dass sie keine Informationen über Zustände anderer Subsysteme benötigt. Jeder Strang kann die Zustands- und Stromschätzung daher ausschließlich anhand lokaler Messgrößen vornehmen. Eine Ausnahme bildet lediglich die Gesamtspannungsmessung, die in jedem Strang vorliegen muss. Mithilfe der Stromschätzung lässt sich das Kalman-Filter zur verteilten Zustandsschätzung des Batteriepacks daher stark vereinfachen. Der Algorithmus für die lokale Schätzung der Zustände und des Stroms des p -ten Strangs lässt sich auf Basis der Überlegungen aus Abschnitt 7.1.3 folgendermaßen formulieren:

Prädiktion der Zustände:

$${}^s \mathbf{x}_{p,k+1|k} = {}^s \mathbf{f}_{p,k} ({}^s \mathbf{x}_{p,k|k}, \tilde{i}_{p,k|k}, \mathbf{0}) - \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j {}^s \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,p,k} {}^s \mathbf{x}_{p,k+1-j|k+1-j}, \quad (7.20)$$

$${}^s \mathbf{P}_{p,k+1|k} = {}^s \mathbf{F}_{p,k} {}^s \mathbf{P}_{p,k|k} {}^s \mathbf{F}_{p,k}^\top + {}^s \mathbf{Q}_{p,k} + \sum_{j=1}^{k+1} {}^s \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,p,k} {}^s \mathbf{P}_{p,k+1-j|k+1-j} {}^s \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,p,k}^\top, \quad (7.21)$$

Stromschätzung:

$$u_{m,p,k+1|k} = \sum_{n=1}^N (\text{OCV}(\text{SOC}_{p,n,k+1|k}) + u_{RQ,p,n,k+1|k}), \quad (7.22)$$

$$\tilde{i}_{p,k+1|k+1} = \frac{u_{t,k+1} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,p,k+1}}, \quad (7.23)$$

Korrektur der Zustände:

$${}^s \mathbf{K}_{p,k+1} = {}^s \mathbf{P}_{p,k+1|k} {}^s \mathbf{G}_{p,k+1}^\top ({}^s \mathbf{G}_{p,k+1} {}^s \mathbf{P}_{p,k+1|k} {}^s \mathbf{G}_{p,k+1}^\top + {}^s \mathbf{R}_{p,k+1})^{-1}, \quad (7.24)$$

$${}^s \mathbf{x}_{p,k+1|k+1} = {}^s \mathbf{x}_{p,k+1|k} + {}^s \mathbf{K}_{p,k+1} ({}^s \mathbf{y}_{p,k+1} - {}^s \mathbf{g}_{p,k+1} ({}^s \mathbf{x}_{p,k+1|k}, \tilde{i}_{p,k+1|k+1}, \mathbf{0})), \quad (7.25)$$

$${}^s \mathbf{P}_{p,k+1|k+1} = (\mathbf{I} - {}^s \mathbf{K}_{p,k+1} {}^s \mathbf{G}_{p,k+1}) {}^s \mathbf{P}_{p,k+1|k} (\mathbf{I} - {}^s \mathbf{K}_{p,k+1} {}^s \mathbf{G}_{p,k+1})^\top + {}^s \mathbf{K}_{p,k+1} {}^s \mathbf{R}_{p,k+1} {}^s \mathbf{K}_{p,k+1}^\top. \quad (7.26)$$

Dabei sind die Kovarianzmatrizen der Rauschprozesse durch

$${}^s \mathbf{Q}_{p,k} := \text{E} \{ {}^s \mathbf{v}_{p,k} {}^s \mathbf{v}_{p,k}^\top \}, \quad (7.27)$$

$${}^s \mathbf{R}_{p,k+1} := \text{E} \{ {}^s \mathbf{w}_{p,k+1} {}^s \mathbf{w}_{p,k+1}^\top \} \quad (7.28)$$

und die Jacobi-Matrizen durch

$${}^s \mathbf{F}_{p,k} := \left[\frac{\partial {}^s \mathbf{f}_{p,k} ({}^s \mathbf{x}_{p,k}, i_{p,k}, {}^s \mathbf{v}_{p,k})}{\partial {}^s \mathbf{x}_{p,k}} \right]_{{}^s \mathbf{x}_{p,k}^0, i_{p,k}^0, {}^s \mathbf{v}_{p,k}^0}, \quad (7.29)$$

$${}^s \mathbf{G}_{p,k+1} := \left[\frac{\partial {}^s \mathbf{g}_{p,k+1} ({}^s \mathbf{x}_{p,k+1}, i_{p,k+1}, {}^s \mathbf{w}_{p,k+1})}{\partial {}^s \mathbf{x}_{p,k+1}} \right]_{{}^s \mathbf{x}_{p,k+1}^0, i_{p,k+1}^0, {}^s \mathbf{w}_{p,k+1}^0} \quad (7.30)$$

mit den zugehörigen Taylorreihenentwicklungspunkten

$${}^s \mathbf{x}_{p,k}^0 = {}^s \mathbf{x}_{p,k|k}, \quad (7.31)$$

$$i_{p,k}^0 = \tilde{i}_{p,k|k}, \quad (7.32)$$

$${}^s \mathbf{v}_{p,k}^0 = \mathbf{0}, \quad (7.33)$$

$${}^s \mathbf{x}_{p,k+1}^0 = {}^s \mathbf{x}_{p,k+1|k+1}, \quad (7.34)$$

$$i_{p,k+1}^0 = \tilde{i}_{p,k+1|k+1}, \quad (7.35)$$

$${}^s \mathbf{w}_{p,k+1}^0 = \mathbf{0} \quad (7.36)$$

gegeben. Der Index $^s(\cdot)$ wird verwendet, um zu kennzeichnen, dass es sich beim betrachteten System um ein Batteriestrangmodell nach Definition 4.5 handelt. Um den Algorithmus in (7.20) - (7.36) anwenden zu können, gibt es außer den in Abschnitt 7.1.2 bereits geprüften Annahmen keine besonderen Voraussetzungen.

Die Ergebnisse für die SOC-Schätzungen der drei Stränge, die mit dem Ablauf nach (7.20) - (7.36) erzielt werden, sind in den Abbildungen 7.4 - 7.6 dargestellt. Die Abbildungen enthalten auch SOC-Referenzen, die mithilfe von Satz 2.1, den Startwerten (7.10) - (7.12), den Ladekapazitäten der Zellen nach Tabelle A.1 und den Messungen der Digitalmultimeter errechnet wurden.

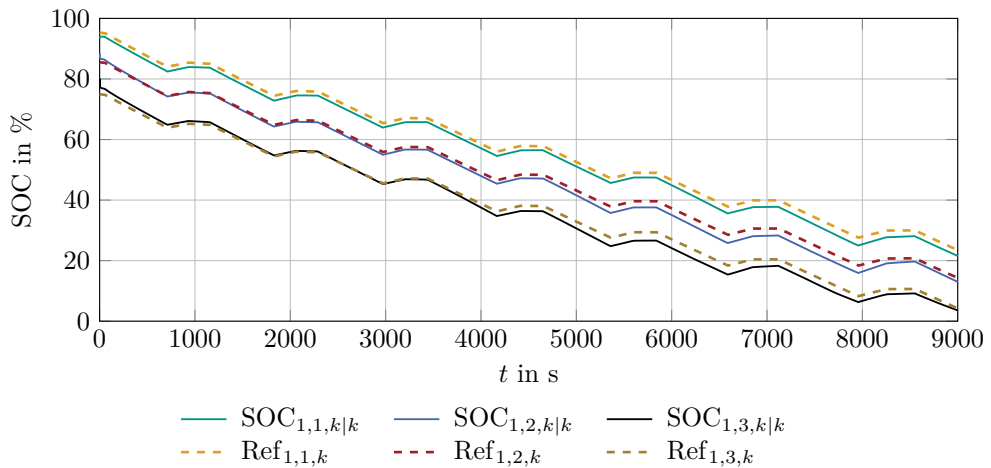


Abbildung 7.4: Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des ersten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.

Tabelle 7.1: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,4892 %	1,3225 %	1,6163 %	0,0179 A
MAE	2,2417 %	2,9997 %	4,9994 %	1,4154 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,5016 %	1,9063 %	1,3290 %	0,0183 A
MAE	2,9996 %	2,9996 %	3,9997 %	1,2860 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,6889 %	0,9923 %	1,7246 %	0,0160 A
MAE	3,9996 %	4,9994 %	2,8220 %	1,2071 A

Anhand der Abbildungen 7.4 - 7.6 ist zu erkennen, dass die Schätzungen der SOC's die Referenzen gut nachbilden können. Die Fehlerwerte, welche in Tabelle 7.1 dargestellt

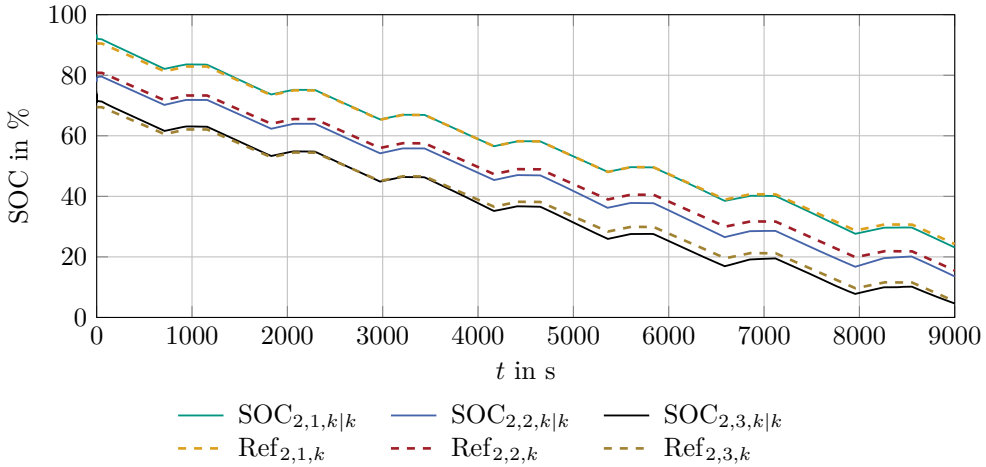


Abbildung 7.5: Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des zweiten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.

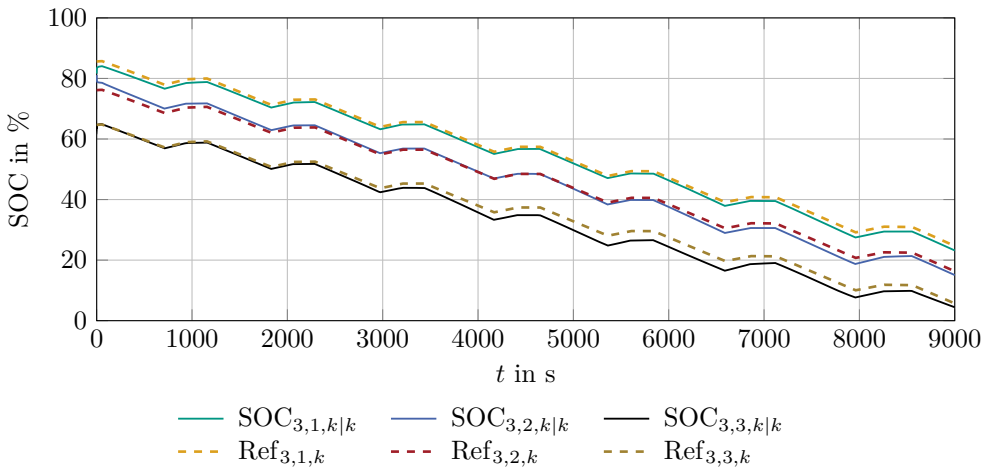


Abbildung 7.6: Ergebnisse der verteilten SOC-Schätzung des dritten Strangs mit Gesamtspannungsmessung und der Speicherlänge $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.

sind, bestätigen diese Aussagen. Mit Ausnahme der ersten Zelle des ersten Strangs und der dritten Zelle des dritten Strangs überschreitet keine der Zelle ihren initialen SOC-Fehler. Auch der RMSE liegt für alle Zellen jeweils unterhalb von 2%. Obwohl die jeweils dritte Zelle jedes Strangs einen Kanal der DS2002 Wandlerkarte zur Spannungsmessung verwendet, welche im Vergleich zur DS2004 Wandlerkarte deutlich höheres Rauschen

besitzt, kann der SOC dieser Zellen mit der gleichen Genauigkeit wie die der restlichen Zellen bestimmt werden. Das erhöhte Rauschen macht sich in den Ergebnissen somit nicht bemerkbar.

In den Abbildungen 7.4 - 7.6, aber insbesondere in der Tabelle 7.1 ist weiterhin auffallend, dass für manche Zellen deutlich bessere Schätzergebnisse als für andere erzielt werden. Die Schätzungen der jeweils ersten Zelle des zweiten und des dritten Strangs sind z. B. besonders gut. Dies lässt sich dadurch erklären, dass für alle Zellen die gleichen Zusammenhänge für die Parameter zum SOC der jeweiligen Zelle angenommen wurden. Für manche Zellen liegen daher eventuell größere Parameterabweichungen als für andere vor. Beispielsweise wurden die Ladekapazitäten (siehe Anhang A) zwar für alle Zellen ermittelt und zur Berechnung der SOC-Referenz verwendet, allerdings erhalten die Kalman-Filter zur Schätzung für alle Zellen den gleichen Parameter. In Abschnitt 4.4 wurde erwähnt, dass in solch einem Anwendungsfall duale fraktionale Kalman-Filter die Parameter der einzelnen Zellen mitschätzen können. Solch ein duales Kalman-Filter für fraktionale Systeme wurde in der Abschlussarbeit [Pha17] vorgestellt. Es wurde beispielhaft gezeigt, dass eine duale Schätzung auch für fraktionale Batteriemodelle möglich ist.

Der in diesem Abschnitt vorgestellte Anwendungsfall weist allerdings darauf hin, dass eine Schätzung auch dann möglich ist, wenn die Parameter der einzelnen Batteriezellen weder exakt bekannt sind noch mitgeschätzt werden. In Anhang F.4 wird in einem weiteren Szenario betrachtet, wie sich die Schätzungen verändern, wenn zusätzliche Abweichungen der Parameter vorliegen. Auch im dortigen Szenario ergeben sich keine großen Änderungen bei den Schätzergebnissen. Dies deutet darauf hin, dass die in dieser Arbeit betrachteten Kalman-Filter robust gegenüber Parametervariationen sind.

Die unterschiedliche Güte der SOC-Schätzung der einzelnen Zellen wie sie in Tabelle 7.1 auftritt zeigt sich auch in allen weiteren Ergebnissen und wird in den späteren Abschnitten daher nicht nochmals aufgegriffen.

In Abbildung 7.7 sind die Ergebnisse der Stromschätzung der drei Stränge zusammen mit den gemessenen Strömen der Digitalmultimeter dargestellt. Es ist in dieser Abbildung zu erkennen, dass die Stromschätzungen bis auf kleinere Abweichungen die gemessenen Ströme gut abbilden können. Eine Strangstromschätzung ist also möglich, obwohl der SOC zeitweise vom wahren Wert abweicht. In den flachen Bereichen der SOC-OCV-Kurve, in denen die größten SOC-Abweichungen auftreten, spiegeln sich fehlerhafte SOC-Schätzungen allerdings in nur kleinen Unterschieden bei der OCV wider. Daher kann die Hilfsspannung $u_{m,p,k+1|k}$ auch bei SOC-Fehlern näherungsweise korrekt bestimmt werden, sodass die berechneten Ströme trotzdem gut mit den wahren Größen übereinstimmen.

Die bisherigen Aussagen lassen sich auch durch die Schätzungen auf Basis des nicht-fraktionalen Modells stützen. Die Ergebnisse dazu sind in Tabelle F.3 in Anhang F.2.1 zu finden. Die Schätzung verschlechtert sich zwar bei der Verwendung nicht-fraktionaler Modelle, die Ergebnisse zeigen aber, dass eine verteilte SOC- und Stromschätzung mit dem in diesem Abschnitt verwendeten Algorithmus auch für diese Modellform möglich ist.

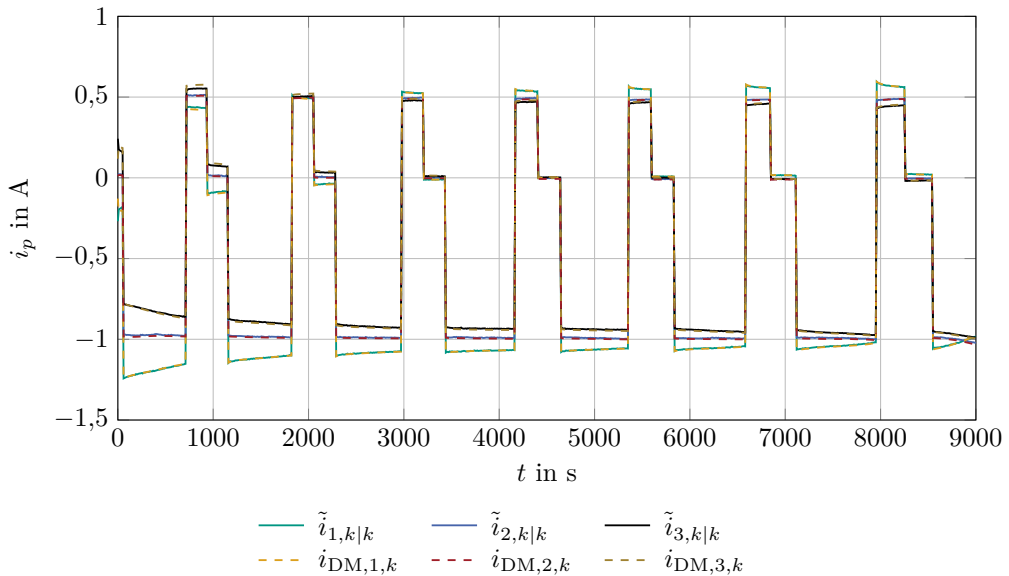


Abbildung 7.7: Ergebnisse der Strangstromschätzung bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der mit den Digitalmultimetern gemessenen Strangströme.

In Tabelle 7.1 ist zu sehen, dass der RMSE der Stromschätzung für alle drei Stränge etwa im Bereich von 15 mA bis 20 mA liegt. Diese Werte sind im Vergleich zur Standardabweichung der Strommessgeräte (z. B. $\sigma_{DM} = 1,4 \text{ mA}$) zwar größer, aber grundsätzlich noch in der gleichen Größenordnung. Berücksichtigt man zusätzlich den Jitter der Strommessung der Digitalmultimeter (vergleiche Abschnitt 6.1), so ist zumindest der MAE der Stromschätzung nicht aussagekräftig. Allerdings wirkt sich der Jitter auch auf die Berechnung des RMSE aus, obwohl der Einfluss dort geringer ist. Daher wurde zusätzlich zu den in Tabelle 7.1 dargestellten Werten die Summe der drei geschätzten Ströme betrachtet und mit der Gesamtstrommessung des Netzteils verglichen. Dabei wurden Fehlerwerte ermittelt, die deutlich kleiner als die Standardabweichung der Strommessgeräte sind. Hierbei muss allerdings berücksichtigt werden, dass das BOP auch die Messwerte bereitstellt, die für diese Stromschätzung verwendet werden. Deswegen ist ein Vergleich mit dieser Messgröße auch nur bedingt aussagekräftig. Er deutet jedoch darauf hin, dass die Stromschätzung eine Güte erzielt, die mit den Messwerten des BOPs vergleichbar ist.

In Anhang F.1 werden die Ergebnisse der Kalman-Filter diskutiert, welche statt den geschätzten Strömen $\tilde{i}_{p,k|k}$ die mit den Digitalmultimetern gemessenen Strangströme $i_{DM,p,k}$ als Eingangsgröße nutzen. Da in diesem Fall die Eingangsgröße vom Jitter der Digitalmultimeter betroffen ist, wirkt sich dieser direkt auf die SOC-Schätzung aus. Deswegen sind die Schätzungen mit den gemessenen Strangströmen im Anhang im Vergleich zu den Ergebnissen mit den geschätzten Strangströmen aus diesem Abschnitt sogar et-

was schlechter. Diese Aussage trifft auch auf die Schätzung auf Basis nicht-fraktionaler Modelle und Methoden zu, die auch in Anhang F.1 zu finden sind.

Weiterhin wurde in Anhang F.3 das Szenario auf Basis der Gesamtspannungsmessung aus diesem Abschnitt wiederholt. Allerdings wurde allen Messgrößen jeweils ein zusätzliches, künstlich erzeugtes Rauschen hinzugefügt. Die Ergebnisse der Schätzverfahren, welche auf den fraktionalen Modellen basieren verschlechtern sich hierbei nicht, im Gegensatz zu den nicht-fraktionalen Modellen. Es lässt sich deshalb die Aussage treffen, dass die Schätzverfahren auf Basis fraktionaler Modelle robuster gegenüber Rauschen sind. Aus diesem Grund lässt sich auch die in der Batterie verfügbare Energie bei der Verwendung fraktionaler Modelle in praktischen Anwendungsfällen besser nutzen. Die Ergebnisse sind konsistent zur Einzelzellschätzung aus Anhang E.

Da jedes Filter eigenständig agiert und keine Informationen aus anderen Subsystemen benötigt, lässt sich der in (7.20) - (7.36) vorgeschlagene Algorithmus auch auf Batteriestränge übertragen, die nicht zu einem Pack verschaltet sind.

Weiterhin werden die geschätzten Ströme im Algorithmus nach (7.20) - (7.36) als deterministische Größen betrachtet, obwohl sie eigentlich stochastische Größen mit einer entsprechenden Kovarianz darstellen. Wie in diesem Abschnitt gezeigt wurde, erzielt die Schätzung jedoch auch ohne Berücksichtigung dieser Kovarianz des geschätzten Stroms bereits gute Ergebnisse. Im Rahmen der Bachelorarbeit [Cre16] wurde anhand von Simulationen verifiziert, dass die Betrachtung der Kovarianz des geschätzten Stroms nur geringfügig bessere Ergebnisse erzielt. Der zusätzliche Aufwand zur Berücksichtigung dieser Kovarianz ist somit nicht gerechtfertigt, sodass diese vernachlässigt wird.

Die SOC- und Strangstromschätzung auf Basis der Stromaufteilungsmodelle, welche in diesem Abschnitt vorgestellt und diskutiert wurden, wurden in der Veröffentlichung [KCS⁺19] publiziert.

7.3.2 Schätzung mithilfe der Gesamtstrommessung

In diesem Szenario wird das Stromaufteilungsmodell nach (7.6) verwendet. Im Gegensatz zum vorherigen Szenario müssen dabei alle Subsysteme miteinander kommunizieren, da Zustandsinformationen aller Stränge zur korrekten Berechnung des Stroms benötigt werden. Am Algorithmus selbst ändert sich dennoch nur der zweite Schritt, die Stromschätzung. Aus diesem Grund wird Gleichung (7.23) durch

$$\tilde{i}_{p,k+1|k+1} = i_{t,k+1} \frac{R_{i,t,k+1}}{R_{i,p,k+1}} + \frac{R_{i,t,k+1}}{R_{i,p,k+1}} \left(\sum_{q=1}^P \frac{u_{m,q,k+1|k} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,q,k+1}} \right) \quad (7.37)$$

ersetzt. Die Hilfsspannungen $u_{m,q,k+1|k}$ und die Strangwiderstände $R_{i,q,k+1}$ müssen dabei vom jeweiligen Subsystem $q = 1, \dots, P \neq p$ übertragen werden. Der restliche Algorithmus nach den Gleichungen (7.20) - (7.36) bleibt bestehen.

Da im Vergleich zum vorherigen Algorithmus nur eine Gleichung ausgetauscht wird, sind auch hier keine weiteren Voraussetzungen außer den in Abschnitt 7.1.2 diskutierten Annahmen zu beachten. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt werden hier die

geschätzten Zustände und die Widerstände der Stränge zwischen allen Subsystemen ausgetauscht. Deshalb wirkt sich eine fehlerhafte Zustandsschätzung oder eine falsche Parametrierung einer Zelle bei diesem Algorithmus nicht nur auf einen, sondern auf alle Stränge aus. Da die Schätzung aus dem vorherigen Abschnitt eine hohe Güte aufweist, kann daher angenommen werden, dass die Parameter der Zellen jedoch nicht sehr stark voneinander abweichen. Weiterhin sind die Rauschprozesse der Gesamtspannungs- und Gesamtstrommessung ähnlich groß (vergleiche Abschnitt 6.1). Aus diesem Grund ist bei der Schätzung auf Basis von (7.37) eine ähnliche Güte wie bei der Schätzung im vorherigen Abschnitt zu erwarten. Die Ergebnisse der Schätzung sind in Tabelle 7.2 dargestellt. Aufgrund der Ähnlichkeit zu den Ergebnissen in den Abbildungen 7.4 - 7.6 und 7.7 aus dem vorherigen Abschnitt, wird hier auf die Darstellung von Abbildungen verzichtet.

Tabelle 7.2: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtstrommessung und der Speicherlänge $S = 250$.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,9251 %	1,7219 %	1,8793 %	0,0099 A
MAE	2,9179 %	3,0547 %	4,9994 %	1,4489 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,5831 %	2,2610 %	1,5558 %	0,0097 A
MAE	2,9996 %	3,4609 %	3,9997 %	1,3180 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,9731 %	1,0957 %	1,9745 %	0,0110 A
MAE	3,9996 %	4,9994 %	3,1060 %	1,2377 A

Tabelle 7.2 zeigt bezüglich der SOC-Schätzung leicht schlechtere Ergebnisse als Tabelle 7.1 aus dem vorherigen Abschnitt. Die Stromschätzung erzielt bezüglich des RMSEs zwar bessere, aber bezüglich des MAEs schlechtere Werte. Alle diese Unterschiede sind jedoch nur marginal.

Auch in diesem Szenario werden die Fehlerwerte der Stromschätzung vom Jitter beeinflusst und lassen sich deshalb nur schwer vergleichen. Es lässt sich aber analog zum vorherigen Abschnitt die Aussage treffen, dass sie etwa in der gleichen Größenordnung wie die der Strommessgeräte liegen. Die Ergebnisse auf Basis des nicht-fraktionalen Modells und der Stromschätzung nach (7.37) sind in Tabelle F.4 in Anhang F.2.2 dargestellt. Sie zeigen wie erwartet zwar schlechtere Schätzergebnisse, aber sie belegen, dass der in diesem Abschnitt verwendete Algorithmus auch auf nicht-fraktionale Modelle angewendet werden kann.

Im Vergleich zur Schätzung in Tabelle F.1 in Anhang F.1, welche die mit den Digitalmultimetern gemessenen Ströme verwendet, zeigen die Ergebnisse in Tabelle 7.2 leicht bessere Schätzergebnisse, was, wie zuvor, auf den Jitter der Messgeräte zurückzuführen ist.

Das in diesem Szenario verwendete verteilte fraktionale Kalman-Filter auf Basis der Gesamtstrommessung setzt eine Kommunikation aller Stränge voraus. Die Umsetzung

dieses Algorithmus erfordert dadurch mehr Aufwand als der Algorithmus aus dem vorherigen Abschnitt bei etwa gleichbleibender Genauigkeit der Schätzungen. Die Anwendung des hier verwendeten Filters ist somit vor allem dann sinnvoll, wenn eine Gesamtstrommessung, aber keine Gesamtspannungsmessung des Packs vorliegt, bereits ein Kommunikationskanal zwischen den Strängen eingerichtet ist oder der Batteriepack nur aus wenigen Strängen besteht, sodass der Kommunikationsaufwand begrenzt bleibt.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden in der Veröffentlichung [KCS⁺19] publiziert.

7.3.3 Schätzung auf Basis des kaskadierten Ansatzes

Im dritten Szenario wird das Stromaufteilungsmodell nach (7.7) verwendet. Da für die Stromschätzung nur Informationen aus dem vorherigen Subsystem benötigt werden und somit Annahme 5.7 erfüllt ist, kann dieser Algorithmus auch als kaskadierte Schätzung bezeichnet werden. Im Vergleich zu den Algorithmen aus den vorherigen Abschnitten ändert sich wieder nur die Stromschätzung. Die Gleichung (7.23) wird durch

$$\tilde{i}_{p,k+1|k+1} = \frac{u_{m,p-1,k+1|k} + R_{i,p-1,k+1} \tilde{i}_{p-1,k+1|k+1} - u_{m,p,k+1|k}}{R_{i,p,k+1}} \quad (7.38)$$

für alle Subsysteme $p \geq 2$ ersetzt. Für den ersten Strang $p = 1$ bleibt nach Lemma 4.1 Gleichung (7.23) bestehen. Der Ausdruck $u_{m,p-1,k+1|k} + R_{i,p-1,k+1} \tilde{i}_{p-1,k+1|k+1}$ kann hierbei vom vorherigen Subsystem berechnet und direkt übertragen werden. Dabei ist jedoch ersichtlich, dass dieser Term, wie im Beweis für Lemma 4.1 gezeigt, genau der Gesamtspannung des Packs entspricht. Dadurch ist die kaskadierte Schätzung algebraisch äquivalent zum ersten Szenario in Abschnitt 7.3.1 und erzielt identische Ergebnisse, welche aus diesem Grund hier nicht angegeben werden.

Im Vergleich zum Algorithmus aus Abschnitt 7.3.1 müsste das Filter zudem Informationen an nachfolgende Subsysteme weitergeben. Ob die einzelnen Subsysteme Zugriff auf die Gesamtspannungsmessung besitzen oder diese Information über andere Subsysteme übermittelt wird, ist aus methodischer Sicht allerdings nicht von Bedeutung. Unabhängig davon kann aber direkt die Spannungsmessung $u_{t,k}$ übermittelt werden, sodass der Term $u_{m,p-1,k+1|k} + R_{i,p-1,k+1} \tilde{i}_{p-1,k+1|k+1}$ nicht separat berechnet werden muss. Daher wird der kaskadierte Ansatz nicht weiter betrachtet.

Die SOC- und Strangstromschätzung auf Basis des kaskadierten Ansatzes wurde unabhängig von den ersten beiden Szenarien in [KBS⁺18] veröffentlicht.

7.4 Anwendung des fraktionalen unknown-input Kalman-Filters

In diesem Abschnitt wird das FUIKF zur verteilten Zustands- und Stromschätzung eines Batteriepacks angewendet. Dazu wird jeweils ein FUIKF pro Strang implementiert.

Wie auch schon bei der Anwendung auf eine einzelne Zelle in Abschnitt 6.5 wird dabei der Strangstrom $i_{p,k}$ als unbekannte Eingangsgröße \mathbf{d}_k aufgefasst, sodass dieser dem Algorithmus nicht übergeben wird. Im Gegensatz zu den Methoden aus Abschnitt 7.3 wird bei der Schätzung weder die Gesamtstrom- noch die Gesamtspannungsmessung berücksichtigt.

Es muss aber vorab überprüft werden, ob Annahme 5.10 auch für das Strangmodell erfüllt ist, damit das FUIKF anwendbar ist. Dazu wird der linearisierte Durchgriff des Strangstroms betrachtet. Das Modell nach Definition 4.5 besitzt wie das Einzelzellmodell eine Eingangs-, aber mehrere Ausgangsgrößen. Die linearisierte Durchgriffsmatrix lässt sich mit (4.25) und (4.35) zu

$${}^s\mathbf{D}_k = (R_{i,1,k}(\text{SOC}_{1,k}) \quad \dots \quad R_{i,N,k}(\text{SOC}_{N,k})) \neq \mathbf{0} \quad (7.39)$$

bestimmen. Da ${}^s\mathbf{D}_k$ in (7.39) einen Vektor darstellt, genügt es bereits, wenn eines der Elemente $R_{i,n,k}(\text{SOC}_{n,k}) \neq 0$ ist, mit $n = 1, \dots, N$, um die Rangbedingung nach Annahme 5.10 zu erfüllen. Wie bei der Einzelzelle ist Annahme 5.10 daher für den kompletten Betriebsbereich erfüllt, sodass sich das FUIKF für die Batteriestrangschätzung anwenden lässt.

Nachfolgend wird das FUIKF aus Abschnitt 5.4 auf die Batteriepackmessungen aus Abschnitt 7.2 zur SOC- sowie zur Strangstromschätzung angewendet. Die Ergebnisse dieser Schätzungen sind in Tabelle 7.3 dargestellt. Weiterhin zeigt Abbildung 7.8 beispielhaft die SOC-Schätzergebnisse des ersten Strangs sowie die zugehörigen SOC-Referenzen. In Abbildung 7.9 ist der geschätzte Strom des ersten Strangs sowie die Messung des Stroms mit dem Digitalmultimeter abgebildet.

Tabelle 7.3: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit dem FUIKF und der Speicherlänge $S = 250$.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	4,5287 %	4,0951 %	3,8585 %	0,4505 A
MAE	8,1693 %	8,1576 %	8,2933 %	2,3330 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	2,8814 %	5,1926 %	3,3569 %	0,3538 A
MAE	6,0673 %	9,1020 %	7,2933 %	1,2286 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	4,5338 %	4,0791 %	2,9759 %	0,3617 A
MAE	7,7822 %	7,5521 %	5,3988 %	1,1190 A

Tabelle 7.3 zeigt, dass die Strangströme, wie auch bei der Einzelzellschätzung in Abschnitt 6.5, vergleichsweise ungenau geschätzt werden. Der RMSE liegt dabei im Bereich von einigen hundert mA. Die Fehlerwerte der SOC-Schätzungen nehmen hingegen moderate Größen an. Der RMSE liegt im Bereich von etwa 3 % bis 5 %. Vergleicht man die Ergebnisse mit Tabelle 7.1 aus Abschnitt 7.3.1 oder Tabelle 7.2 aus Abschnitt 7.3.2 wird jedoch ersichtlich, dass sich die Schätzungen mithilfe einer einzigen zusätzlichen

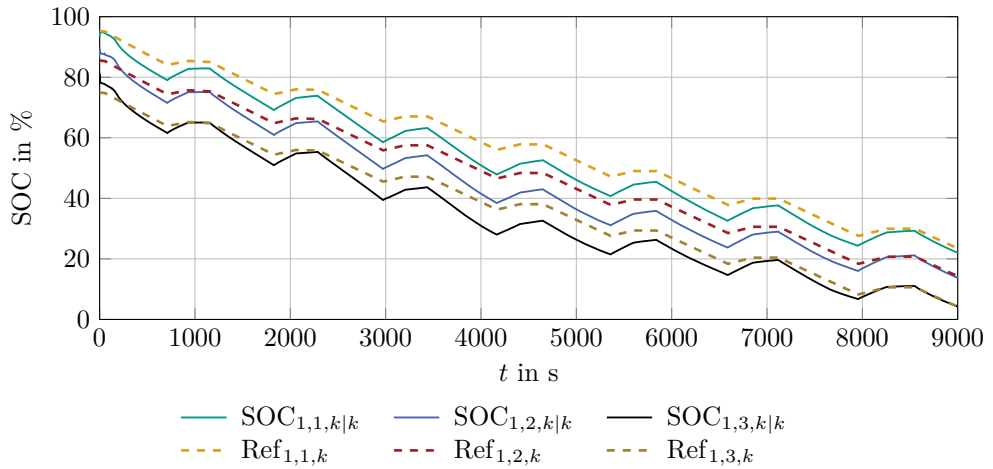


Abbildung 7.8: Ergebnisse der SOC-Schätzung des FUIKFs des ersten Strangs mit einer Speicherlänge von $S = 250$. Weiterhin Darstellung der Zeitverläufe der SOC-Referenzen.

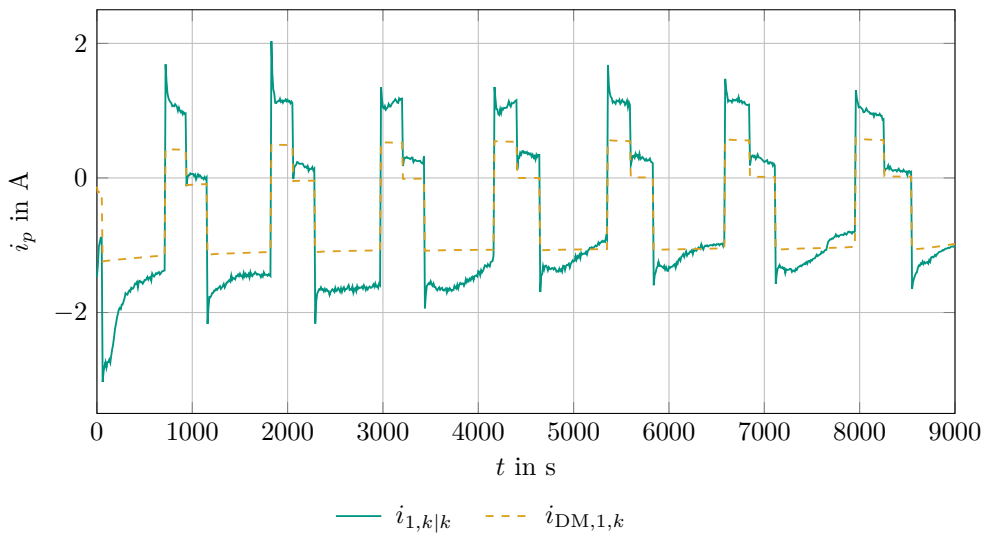


Abbildung 7.9: Ergebnisse der Strangstromschätzung des FUIKFs des ersten Strangs mit einer Speicherlänge von $S = 250$. Weiterhin Darstellung des Zeitverlaufs des mit dem Digitalmultimeter gemessenen Strangstroms.

Messgröße (Gesamtspannung oder Gesamtstrom) bereits verbessern lässt. Der RMSE des SOC's der einzelnen Zellen würde sich dabei jeweils um etwa 2 bis 3 Prozentpunkte und der RMSE des Stroms sogar um mehr als 300 mA verbessern. Das FUIKF wird bei der Zustands- und Strangstromschätzung eines Batteriepacks deshalb nur eingeschränkt

Gebrauch finden. Es wären aber die in Abschnitt 6.6 genannten Anwendungen, z. B. zur Diagnose oder als Redundanz, oder Anwendungen, die auf eine exakte Kenntnis des Stroms verzichten können, denkbar.

Diese Aussagen werden auch durch die Abbildungen 7.8 und 7.9 gestützt, welche eine große Ähnlichkeit zu den in Abschnitt 6.5 dargestellten Ergebnissen aufzeigen. In Abbildung 7.8 ist zu sehen, dass die geschätzten SOC's den prinzipiellen Verläufen der wahren SOC's folgen können. Allerdings treten nicht nur im SOC-Bereich von 30 % bis 60 %, sondern auch in anderen Bereichen größere Unterschiede auf. Abbildung 7.9 zeigt, dass die Stromschätzung die Sprungstellen des Stroms erkennen kann. Aber auch hier treten in weiten Bereichen größere bleibende Abweichungen auf. Obwohl das FUIKF schlechtere Schätzergebnisse erzielt, lässt sich dennoch die Aussage treffen, dass es grundsätzlich für eine SOC- und Strangstromschätzung eines Batteriepacks angewendet werden kann.

In Tabelle F.5 in Anhang F.2.3 sind die Ergebnisse der Schätzung auf Basis des nicht-fraktionalen Modells dargestellt. Insgesamt verschlechtert sich die Schätzung auch in diesem Fall bei der Verwendung nicht-fraktionaler Modelle. Allerdings trifft dies nicht auf die Fehlerwerte aller Zellen zu, was in Anhang F.2.3 genauer diskutiert wird. Auch bezüglich nicht-fraktionaler Modelle lässt sich daher die Aussage treffen, dass eine Schätzung mithilfe des UIKF prinzipiell angewendet werden kann.

7.5 Zusammenfassung und Bewertung der Batteriepackschätzung

In diesem Kapitel wurden erstmalig verteilte Kalman-Filter zur Ladezustandsschätzung eines Lithium-Ionen-Batteriepacks angewendet und erfolgreich validiert. Die in Abschnitt 7.3 verwendeten Algorithmen nutzen dabei die Strommodelle aus Abschnitt 4.3 nicht nur um den Datenaustausch zwischen den Subsystemen zu reduzieren und die Schätzung dadurch zu vereinfachen, sondern auch um die einzelnen Strangströme modellbasiert zu schätzen.

Das in Abschnitt 7.3.2 verwendete Filter benötigt dazu den Gesamtstrom als zusätzliche Messgröße. Weiterhin ist es erforderlich, dass alle Subsysteme miteinander kommunizieren, weil zur Bestimmung der Teilströme, Größen aus jedem einzelnen Subsystem benötigt werden. Im Gegensatz dazu benötigt das Filter aus Abschnitt 7.3.1 zwar nicht den Gesamtstrom, aber die Gesamtspannung als zusätzliche Messgröße. Allerdings müssen bei diesem Ansatz gar keine Informationen mit anderen Subsystemen ausgetauscht werden. Das in Abschnitt 7.3.3 vorgestellte Filter lässt sich auf das Filter aus Abschnitt 7.3.1 zurückführen und muss daher nicht separat betrachtet werden.

Mit diesen Filtern ließen sich die Strangströme mit einer Genauigkeit im mA-Bereich schätzen. Für keine der Zellen in den vorgestellten Szenarien überstieg der RMSE des SOC's den Wert 2,3 % und der MAE entspricht bei den meisten Zellen dem initialen Fehler. Dadurch wird die Funktionsweise der verteilten fraktionalen Zustandsschätzung

für Batteriepacks bestätigt. Zudem konnte gezeigt werden, dass die Kalman-Filter, welche die Strangströme schätzen etwa die gleiche Genauigkeit erzielen wie die Kalman-Filter, welche Zugriff auf die gemessenen Strangströme besitzen. Insgesamt können durch die Verwendung der Verfahren aus Abschnitt 7.3 somit $P - 1$ Sensoren zur Bestimmung der Strangströme eingespart werden, bei gleichbleibender Genauigkeit der SOC-Schätzung.

Zudem wurde angedeutet, dass die Verfahren auch mit den nicht-fraktionalen Modellen durchgeführt werden können. Der RMSE des SOC der Zellen erzielte Werte bis zu 4,7%, der MAE nimmt Werte bis zu 7,3% an (siehe Anhang F.2). Prinzipiell lässt sich eine verteilte Zustands- und Strangstromschätzung somit auch auf nicht-fraktionale Modelle anwenden. Allerdings lässt sich insbesondere durch den höheren MAE die Batterie nicht optimal nutzen. Betrachtet man als Anwendungsbeispiel ein Elektrofahrzeug, dann müsste man, vereinfacht betrachtet, mehr als 7,3% der Ladekapazität als Sicherheitsreserve vorhalten, um zu gewährleisten, dass der sichere Betriebsbereich nicht verlassen wird. Da die Umsetzung der Zustandsschätzung auf Basis fraktionaler Modelle im Vergleich zur Schätzung mit nicht-fraktionalen Modellen jedoch keine zusätzliche Hardware erfordert, lässt sich rein durch softwaretechnische Maßnahmen der MAE der Schätzung verringern und somit die maximal nutzbare Ladung bzw. die Reichweite des Fahrzeugs erhöhen. Berücksichtigt man zudem die Ergebnisse aus Anhang F.3 und F.4, wird deutlich, dass die Schätzung basierend auf dem fraktionalen Modell zusätzlich robust gegenüber höherem Rauschen und Parameterabweichungen ist. In praktischen Anwendungsfällen, in denen keine Laborbedingungen vorliegen, lässt sich die Batterie mit diesen Modellen daher insgesamt besser nutzen.

Aufgrund der Skalierbarkeit der verteilten Kalman-Filter lassen sich die Verfahren weiterhin einfach auf Batteriepacks mit einer anderen Anzahl an Zellen übertragen. Zusätzlich erfordert die Schätzung auf Basis der Gesamtspannungsmessung keinen Informationsaustausch mit anderen Strängen, wodurch sich jeder Strang separat betrachten lässt. Da es keine Kommunikation benötigt und insgesamt die genauesten Ergebnisse erzielt, ist das verteilte Kalman-Filter auf Basis der Gesamtspannungsmessung aus Abschnitt 7.3.1 am besten für die SOC- und die Strangstromschätzung von Batteriepacks geeignet. Durch die Modularität der Algorithmen verbessert sich insbesondere die Wartbarkeit der Batterie, da die einzelnen Stränge unabhängig voneinander diagnostiziert werden können. Dadurch lässt sich die Batterie theoretisch im laufenden Betrieb warten. Auch das Design der einzelnen Filter lässt sich gegebenenfalls separat durchführen. Da weiterhin kein Informationsaustausch zwischen den Strängen erforderlich ist, werden keine zusätzlichen elektrischen Verbindungen oder Kommunikationskanäle benötigt, wodurch die Erweiterbarkeit bzw. Skalierbarkeit der Algorithmen weiter erhöht wird.

In Abschnitt 7.4 wurde das FUIKF zur Zustands- und Stromschätzung des Batteriepacks verwendet und prinzipiell validiert. Dieses hat im Vergleich zu allen anderen Filtern jedoch die schlechtesten Schätzergebnisse erzielt. Insbesondere unter Berücksichtigung, dass die Nutzung einer weiteren, zusätzlichen Messgröße (Gesamtspannung oder Gesamtstrom) bereits eine deutliche Verbesserung der Schätzergebnisse des kompletten

Packs bewirken kann, wie anhand der verteilten Filter in Abschnitt 7.3 gezeigt wurde, besitzt das FUIKF eine vergleichsweise geringe Relevanz für die Praxis. Allerdings können bei Anwendung dieses Filters bis zu P Stromsensoren eingespart werden.

Weiterhin lässt sich nachvollziehen, dass die Methoden zur Stromschätzung auch unabhängig von einer Verteilung angewendet werden können. Die Berechnung der Strangströme nach den Modellen (7.5) - (7.7) kann auch dann erfolgen, wenn alle Zustände des Batteriepacks in einem einzelnen, zentralen Prozessor geschätzt werden. Vielmehr wird dann nicht nur für das Stromaufteilungsmodell nach (7.5), sondern auch für das Modell nach (7.6) kein Austausch von Informationen mehr benötigt, da alle Größen bereits im zentralen System vorliegen.

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass eine verteilte Zustandsschätzung, unabhängig von der Verwendung fraktionaler Modelle, auf ein Batteriepack angewendet werden kann und verschiedene vorteilhafte Eigenschaften besitzt. Die in diesem Kapitel zur Zustands- und Strangstromschätzung eines Batteriepacks verwendeten Methoden sind im Rahmen des Patents [Kup19] geschützt.

8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Kalman-Filtern zur verteilten Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und der Anwendung dieser Methoden auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme. Bei einer verteilten Zustandsschätzung wird das Gesamtsystem in mehrere Subsysteme unterteilt. In diesen Subsystemen wird jeweils nur ein Unterraum des gesamten Zustandsvektors, welcher lokal relevante Zustände enthält, betrachtet. Dieser lokale Zustandsvektor wird zunächst nur anhand lokaler Messgrößen geschätzt. Um auch Messungen anderer Subsysteme zu berücksichtigen und die Schätzung darauf basierend zu verbessern, müssen diese untereinander Informationen austauschen. Eine solche verteilte Zustandsschätzung bietet verschiedene Vorteile wie eine einfache Erweiterbarkeit oder Modularität. Insbesondere bei der Anwendung einer Verteilung auf große Batteriesysteme sind diese Eigenschaften erwünscht.

Um Lithium-Ionen-Batterien physikalisch genau zu charakterisieren, ist es zudem vorteilhaft fraktionale Modelle zu verwenden. Durch die direkte Verbindung zur Physik ermöglicht diese Modellklasse die Interpretation und die Diagnose der im Inneren der Batterie ablaufenden Prozesse wie beispielsweise der Diffusion. In der Literatur existieren allerdings keine Algorithmen zur verteilten Zustandsschätzung fraktionaler Systeme.

Ein Ziel dieser Arbeit war daher die Entwicklung solcher Methoden. Aus diesem Grund wurden drei strukturell unterschiedliche, verteilte fraktionale Zustandsschätzer ausgearbeitet. Diese basieren auf dem Kalman-Filter, da sich dieser sowohl bei der verteilten Zustandsschätzung als auch bei der SOC-Schätzung von Lithium-Ionen-Batterien bewährt hat. Der erste neue Ansatz, das DDFKF, beschreibt dabei eine möglichst allgemeine Struktur, bei der die einzelnen Subsysteme ohne strukturelle Einschränkungen miteinander verknüpft sein können. Der zweite neue Ansatz, das CFKF, beschreibt einen strukturellen Sonderfall. Hierbei werden die Subsysteme geordnet betrachtet, sodass Informationen nur an nachfolgende Subsysteme weitergegeben werden. Der dritte neue Ansatz, das FUIKF, schätzt zusätzlich zu den Zuständen unbekannte Eingangsgrößen eines fraktionales Systems. Streng genommen ist das FUIKF zwar kein verteiltes Filter, es lässt sich aber als solches interpretieren, wenn die Informationen von anderen Subsystemen nicht berücksichtigt, sondern als unbekannte Eingangsgrößen aufgefasst werden. Alle diese Kalman-Filter wurden für allgemeine, nichtlineare, fraktionale Systeme hergeleitet und zusätzlich anhand von akademischen Beispielen bestätigt. Die in dieser Arbeit entwickelten Kalman-Filter lassen sich auch auf nicht-fraktionale (Teil-)Systeme anwenden, wenn im System entsprechend nicht-fraktionale Ableitungsordnungen auftreten. Die Entwicklung dieser Methoden war der methodische Schwerpunkt dieser Arbeit.

Um diese neuen Algorithmen auch auf Batteriesysteme anwenden zu können, wurde ein fraktionales 1-RQ-Batteriezellenmodell im Frequenzbereich hergeleitet und zusätzlich

im Zeitbereich validiert. Dieses Zellenmodell wurde auf ein Strangmodell, das sich aus seriell verschalteten Zellen zusammensetzt, erweitert und nachfolgend zu einem Batteriepackmodell, das aus mehreren parallel geschalteten Strängen besteht, ergänzt. Es wurde gezeigt, dass sich der Gesamtstrom des Batteriepacks aufgrund von ungleichen Kontakt- und Kabelwiderständen sowie inhomogener Alterungs- und Fertigungsprozesse ungleichmäßig zwischen den einzelnen Strängen aufteilt. Deswegen wurden neuartige Modelle hergeleitet, welche diese Stromaufteilung beschreiben. Um eine verteilte Zustandsschätzung auf ein Batteriepack anwenden zu können, wurde dieses strangweise in Subsysteme unterteilt. Die Kopplung der einzelnen Stränge konnte dabei mithilfe der Stromaufteilungsmodelle beschrieben werden. Da die einzelnen Strangströme nur von den geschätzten Zuständen, den Widerständen des Batteriestrangs und dem Gesamtstrom bzw. der Gesamtspannung abhängen, können diese modellbasiert vom Algorithmus bestimmt werden. Diese Modelle vereinfachen daher nicht nur die benötigte Kommunikation zwischen den Subsystemen, sondern lassen sich auch dazu verwenden, die einzelnen Strangströme zu schätzen. Im Vergleich zu einer Methode, welche die Strangströme messtechnisch erfasst, lassen sich $P - 1$ Sensoren einsparen, bei gleichbleibender Genauigkeit der SOC-Schätzung der einzelnen Zellen. Zusätzlich konnten die allgemeinen Vorteile einer verteilten Zustandsschätzung wie Modularität, Skalierbarkeit und eine einfache Wartbarkeit auf die Batterieanwendung übertragen werden, wodurch das Systemdesign und die Entwicklung vereinfacht wird. Die Funktionsweise der Algorithmen für die Ladezustands- und Strangstromschätzung eines Batteriepacks wurde anhand von Messungen am Batteriemessstand des IRS validiert, sodass auch dieses Ziel erreicht werden konnte. Dabei wurde zusätzlich beispielhaft gezeigt, dass die Algorithmen, welche fraktionale Batteriemodelle verwenden, auch robust gegenüber höherem Messrauschen und Parametervariationen sind. Die Anwendung der verteilten Zustandsschätzung für fraktionale Systeme auf Lithium-Ionen-Batterien und die damit einhergehende Schätzung der Strangströme war der praktische Schwerpunkt dieser Arbeit.

Ein weiteres Ziel war die Untersuchung der Auswirkung des SMPs sowie einer Initialisierungsfunktion auf die Ladezustandsschätzung einer Lithium-Ionen-Batterie. Das SMP wurde auf Basis einer Batteriezelle anhand von Messungen untersucht. Hierbei konnte die Speicherlänge mittels der erzielten Genauigkeit abgeschätzt werden. Wie sich die Verwendung einer Initialisierungsfunktion auf die SOC-Schätzung einer Batterie auswirkt, wurde mithilfe einer Simulation analysiert. Obwohl solch eine Initialisierungsfunktion in der Praxis unbekannt ist, konnte gezeigt werden, dass sie auf die Ergebnisse der Zustandsschätzung nur einen vergleichsweise geringen Einfluss besitzt und daher vernachlässigt werden kann.

Zudem wurde die SOC-Schätzung des FEKFs mit der des FUKFs auf Basis von Messungen an einer Einzelzelle verglichen. Das FUKF erzielte dabei sehr ähnliche Schätzergebnisse wie das FEKF. Daher konnte die Aussage getroffen werden, dass die Implementierung des komplexeren FUKF für den in dieser Arbeit verwendeten Zellentyp und den betrachteten Betriebsbereich nicht gerechtfertigt ist.

Insgesamt liefert diese Arbeit durch die Entwicklung von drei neuen Methoden einen allgemeinen Beitrag zur Zustandsschätzung fraktionaler Systeme. Darüber hinaus wurde

erstmalig eine verteilte Zustandsschätzung auf ein Lithium-Ionen-Batteriesystem angewendet. Dabei wurden nicht nur die Zustände, sondern auch die Strangströme des Batteriepacks modellbasiert geschätzt, wodurch sich Stromsensoren einsparen lassen.

A Parameter der LiPo-Batteriezelle

Um die in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen in der Praxis zu untersuchen, werden LiPo-Batteriezellen vom Typ SLPB834374H von *Kokam* verwendet. Dieser Zelltyp enthält Graphit als Aktivmaterial an der Anode und einen Blend aus Nickel-Cobalt-Aluminium und Cobaltdioxid an der Kathode [Ill14, S. 8], [Eck17, S. 169]. Das Datenblatt ist in Abbildung A.1 abgebildet.

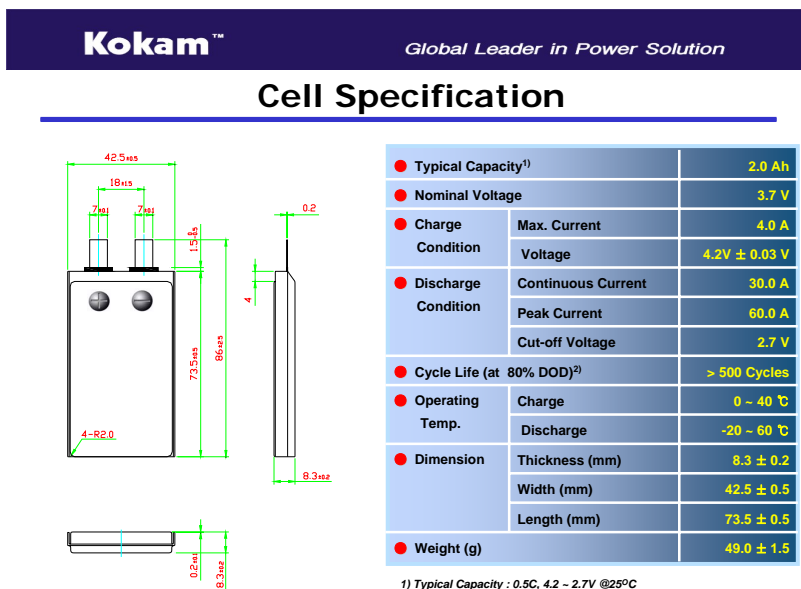


Abbildung A.1: Datenblatt der SLPB834374H-Zelle von *Kokam*

Ein messtechnisch ermittelter Zusammenhang zwischen SOC und OCV ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Auf Basis dieses Zusammenhangs und mithilfe der differentiellen Kapazität (2.8) wurde der Parameter $C_0(\text{OCV})$ des Modells nach Definition 4.1 bestimmt.

Um die weiteren Parameter zu ermitteln, wurden die Impedanzspektren der Zelle mithilfe der EIS ermittelt. Dabei wurde nur der Frequenzbereich unterhalb von 460 mHz betrachtet, wie in Abschnitt 4.1 diskutiert. Für alle SOC-Werte von 0 % bis 100 % wurde

in 10 %-Schritten jeweils ein separates Impedanzspektrum aufgenommen. Die Parameter des 1-RQ-Batteriezellenmodells nach Definition 4.1 wurden für diese SOC-Werte ermittelt, indem das Modell unter Berücksichtigung von $C_0(\text{OCV})$ jeweils mithilfe des CNLS-Algorithmus an die gemessenen Impedanzkurven angefitet wurde. Diese Parameter wurden als Stützstellen verwendet, um mithilfe der PCHIP¹⁸-Funktion in *Matlab* eine stetige Kennlinie zu erzeugen. Die Interpolation der Stützstellen findet dabei so statt, dass auch die erste Ableitung der Kennlinien stetig ist. Dieser Ablauf wurde analog auch für das 1-RC-Batteriezellenmodell durchgeführt.

Die Verläufe der Parameter des 1-RQ-Batteriezellenmodells sind in Abbildung A.2 dargestellt. Die Verläufe der Parameter des 1-RC-Batteriezellenmodells zeigt Abbildung A.3. Es ist zu sehen, dass die Widerstände R_i und R für SOC im Bereich von 0 % bis 10 % vergleichsweise groß sind. Es hat den Anschein, dass insbesondere der Parameter R des 1-RQ-Modells nicht kontinuierlich ist. Wie in diesem Abschnitt diskutiert, sind die Kennlinien und deren Ableitungen aber trotzdem stetig, auch wenn der Widerstand unterhalb von 10 % SOC große Werte annimmt.

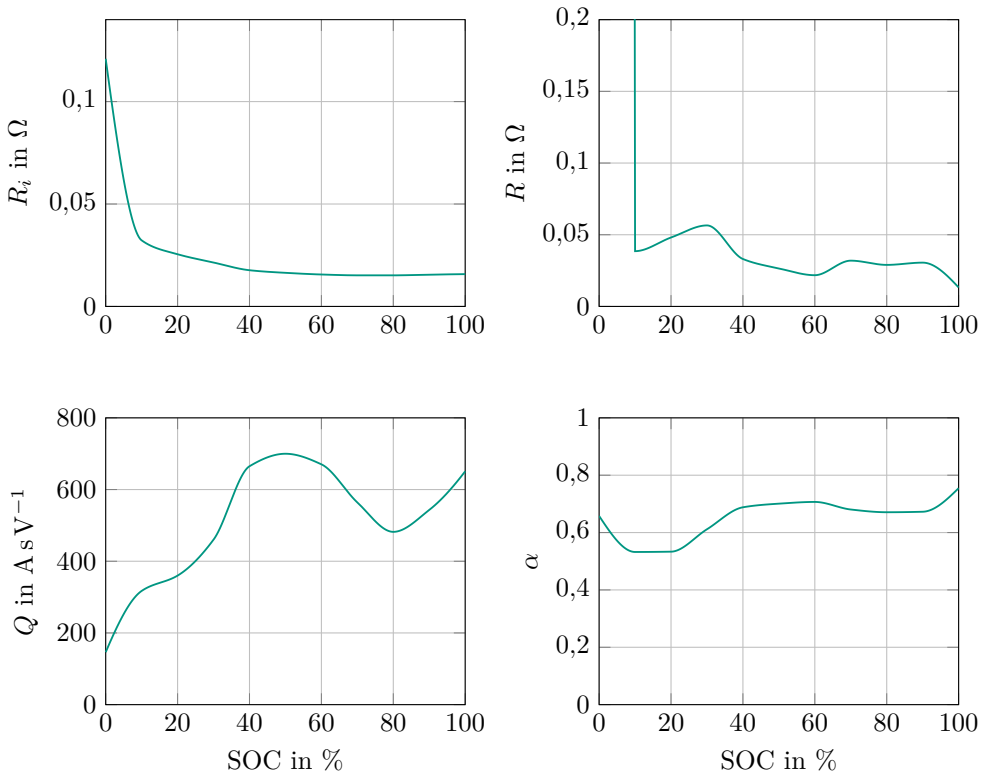


Abbildung A.2: Parameter des 1-RQ-Batteriezellenmodells

¹⁸ Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial

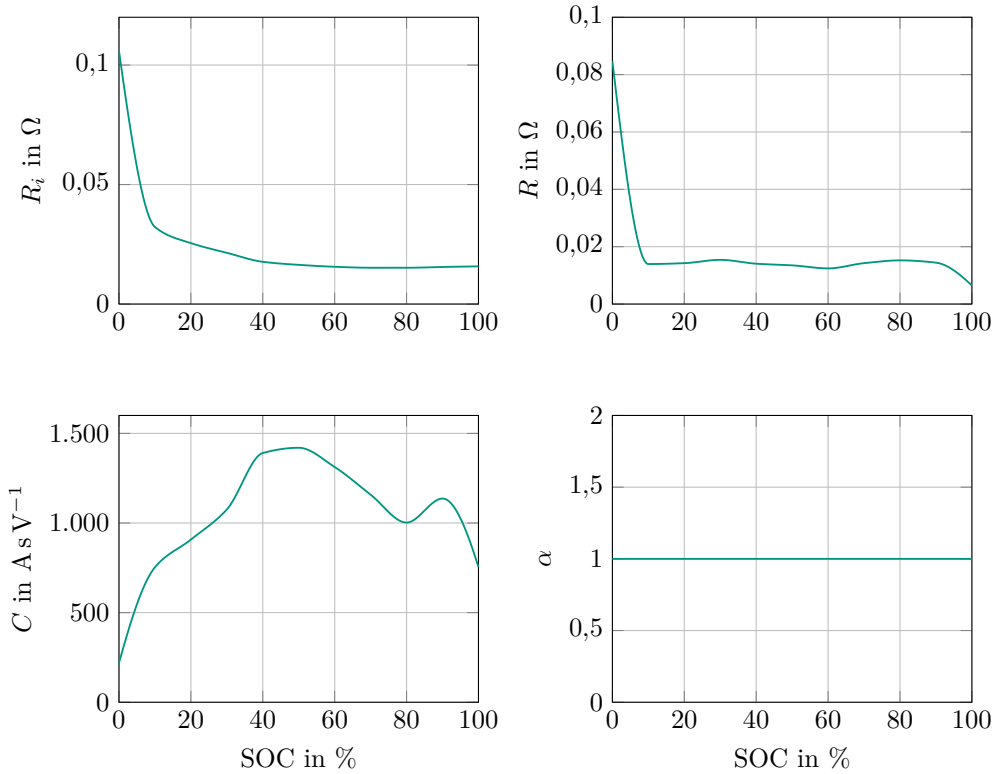


Abbildung A.3: Parameter des 1-RC-Batteriezellenmodells

Im Rahmen dieser Arbeit wurde nicht nur eine einzelne, sondern mehrere LiPo-Batteriezellen genutzt. Obwohl die Zellen verschiedene Parameter besitzen können, wurden für alle Zellen die gleichen funktionalen Zusammenhänge der Parameter zum jeweiligen SOC verwendet. Es wurden lediglich die Ladekapazitäten nach dem Ablauf aus Abschnitt 2.1.2 für alle Zellen separat bestimmt. Die Ladekapazitäten der Zellen wie sie in Abschnitt 7.2.2 innerhalb des Batteriepacks angeordnet sind, sind in Tabelle A.1 dargestellt.

Tabelle A.1: Messtechnisch ermittelte Ladekapazitäten der verwendeten LiPo-Zellen

Strang 1	Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3
Q_N	1,967 Ah	1,983 Ah	1,997 Ah
Strang 2	Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3
Q_N	1,944 Ah	1,972 Ah	2,008 Ah
Strang 3	Zelle 1	Zelle 2	Zelle 3
Q_N	1,931 Ah	1,967 Ah	1,994 Ah

B Stand der Technik zur Beobachtbarkeit fraktionaler Systeme

Die Struktur fraktionaler Systeme unterscheidet sich von gewöhnlichen Systemen (vergleiche Abschnitt 3.2.2). Daher ist es notwendig neue Kriterien zur Untersuchung der Beobachtbarkeit fraktionaler Systeme zu verwenden. Dabei ist zu beachten, dass fraktionale Systeme nur approximativ die Eigenschaft der Beobachtbarkeit besitzen können [SFMF12]. Dies lässt sich durch die Initialisierung fraktionaler Systeme (vergleiche Korollar 3.1) und die notwendige Berücksichtigung ihrer gesamten Vergangenheit begründen. Wie in Abschnitt 3.2.2 diskutiert, muss für die exakte Bestimmung des Zustands zum Zeitpunkt t_0 der gesamte Verlauf von $\mathbf{x}(\tau)$ für $a \leq \tau \leq t_0$ bzw. eine entsprechende Initialisierungsfunktion ${}_a\Delta_{t_0}^{\alpha(\tau)}(\tau)$ gemäß Korollar 3.1 vorliegen. In [SFMF12] wird diskutiert, dass eine Bestimmung dieses kompletten Verlaufs nicht möglich ist und daher nur approximiert werden kann, was sich entsprechend auch auf die Beobachtbarkeit auswirkt.

Zur Untersuchung der Beobachtbarkeit wurde in [MCV⁺10, S. 57, 58] ein Kriterium für zeitkontinuierliche und in [MCV⁺10, S. 71-74] ein Kriterium für zeitdiskrete, lineare, uninitialisierte, kommensurable fraktionale Systeme vorgestellt. Diese sind dem Kalman-Kriterium im nicht-fraktionalen Fall sehr ähnlich. Für die Bestimmung der Beobachtbarkeit werden die Ausgangsmatrix und eine Pseudo-Transitionsmatrix verwendet. In [GDB08] wurde dieses Beobachtbarkeitskriterium auch auf zeitdiskrete, nicht-kommensurable Systeme erweitert. Weiterhin wird die Beobachtbarkeit dort auch anhand der Gramschen Matrix untersucht, die auf fraktionale Systeme angepasst wird. Die in [MP10, MP12] vorgestellten Kriterien betrachten zudem auch die Zeiten vor $t = 0$, sodass auch die Beobachtbarkeit für initialisierte Systeme bestimmt werden kann. Dazu wird eine endliche Anzahl vorheriger Zustände nach dem SMP berücksichtigt. Auch wenn dies nicht explizit erwähnt wird, lässt sich mithilfe dieser Kriterien zusätzlich eine Aussage darüber treffen, ob sich auch vergangene Zustände des fraktionalen Systems bestimmen lassen und wie viele Zeitschritte dafür betrachtet werden müssen. Dadurch kann eine Aussage über die Rekonstruierbarkeit von Teilen der Initialisierungsfunktion getroffen werden. Wie zu Beginn des Abschnitts erwähnt, können fraktionale Systeme jedoch nur approximativ beobachtbar sein, sodass eine unendliche Anzahl an vergangenen Zuständen nicht berücksichtigt werden kann.

In der neueren Veröffentlichung [SM17] wurde formal hergeleitet, dass die vergangenen Zustände zur Bestimmung der approximativen Beobachtbarkeit linearer, nicht-kommensurabler fraktionaler Systeme mit variabler Ordnung nicht zwingend berücksichtigt werden müssen. Es genügt die Analyse der System- und Ausgangsmatrix wie im nicht-fraktionalen Fall. Für die praktische Untersuchung der Beobachtbarkeit ist dies

von besonderer Relevanz, da sich das Kalman-Kriterium für nicht-fraktionale Systeme direkt auch auf fraktionale Systeme übertragen lässt.

Für nichtlineare fraktionale Systeme wurden in [MB10] Untersuchungen bezüglich der lokalen und globalen Beobachtbarkeit vorgenommen und entsprechende Kriterien hergeleitet. Es wurden Aussagen anhand der Unterscheidbarkeit von vergangenen Zuständen getroffen. Dabei wurde diskutiert, dass aus Komplexitätsgründen nicht beliebig viele vergangene Zustände für die Betrachtung der Beobachtbarkeit herangezogen werden können. In [MPW17] wurde das Konzept erweitert, sodass die Beobachtbarkeit eines nichtlinearen fraktionales Systems anhand seiner Linearisierung mithilfe des Satzes von der impliziten Funktion überprüft werden kann. Auch für dieses Kriterium wird nur eine beschränkte Anzahl an vergangenen Zuständen berücksichtigt. Ein Beobachtbarkeitskriterium für nichtlineare, uninitialisierte, zeitkontinuierliche fraktionale Systeme wurde in [DDB⁺16] vorgestellt, welches mithilfe von Lie-Ableitungen überprüft wird.

In Abschnitt 4.5 werden die Methoden aus [MB10, MPW17] aufgegriffen und auf die Batteriemodelle angewendet.

C Ergänzende Beweise

C.1 Herleitung des FEKF

Die Herleitung des FEKF in diesem Abschnitt orientiert sich hauptsächlich an den Herleitungen für einen nicht-fractionalen EKF nach [Sim06, S. 397-409]. Vereinfachungen und speziell auf die fraktionale Variante abzielende Zusammenhänge stammen aus der Herleitung des FEKF nach [SD06]. Im Unterschied zu den genannten Quellen, wird der Algorithmus im Folgenden aber für Systeme mit Durchgriff hergeleitet.

Beweis:

Die Herleitung des FEKF ist, wie Satz 3.4 selbst, in zwei Teile gegliedert.

Prädiktion

Der Prädiktionsschritt ergibt sich aus dem bedingten Erwartungswert des Systemzustandes vor der Messung \mathbf{y}_{k+1}

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^* \}. \quad (\text{C.1})$$

Durch Einsetzen von (3.39) in (C.1) und mithilfe einer Taylorreihenentwicklung von \mathbf{f}_k um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_k^0 = \mathbf{x}_{k|k}$ und $\mathbf{v}_k^0 = \mathbf{0}$, resultiert ein Ausdruck ohne Erwartungswerte

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_{k+1|k} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \bigg| \mathbf{y}_k^* \right\} \\ &\approx \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \bigg| \mathbf{y}_k^* \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k}, \quad (\text{C.3})$$

sofern $\mathbf{x}_{k|k}$ erwartungstreu ist. Die Erwartungstreu von $\mathbf{x}_{k|k}$ wird im Korrekturschritt gezeigt. In (C.3) treten Schätzwerte $\mathbf{x}_{k+1-j|k}$ von vergangenen Systemzuständen auf, die aktuelle Messungen einbeziehen. Mit Annahme 3.2 kann jedoch die Vereinfachung

$\mathbf{x}_{k+1-j|k} \approx \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}$ verwendet werden. Jeder Zeitschritt des Systemzustandes wird somit nur einmal geschätzt und die initiale Schätzung danach nicht mehr aktualisiert:

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}. \quad (\text{C.4})$$

Man erhält den Schätzfehler der Prädiktion durch Einsetzen von (3.39) und (C.4) in (3.57):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k} & (\text{C.5}) \\ &= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} - \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}. & (\text{C.6}) \end{aligned}$$

Mithilfe der Taylorreihenentwicklung von \mathbf{f}_k um den gleichen Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_k^0 = \mathbf{x}_{k|k}$ und $\mathbf{v}_k^0 = \mathbf{0}$ wie in (C.2) folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} &\approx \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j} \\ &\quad - \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{u}_k, \mathbf{0}) + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \\ &= \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} (\mathbf{x}_{k+1-j} - \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}) \\ &= \mathbf{F}_k \boldsymbol{\epsilon}_{k|k} + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1-j|k+1-j}. & (\text{C.7}) \end{aligned}$$

Die Prädiktion ist im Rahmen der getroffenen Annahmen somit erwartungstreu, wenn auch die Schätzung im Korrekturschritt erwartungstreu ist. Anhand der Fehlergrößen $\boldsymbol{\epsilon}_{k+1-j|k+1-j}$ in der Summe von (C.7) lässt sich bereits erkennen, dass die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers nach (3.58) Kreuzterme zwischen verschiedenen Zeitschritten enthalten muss. Aufgrund von Annahme 3.3 gilt jedoch die Vereinfachung $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\epsilon}_{n|n} \boldsymbol{\epsilon}_{m|m}^\top\} \approx \mathbf{0}$ für $n \neq m$. Weiterhin ist der Term $\mathbb{E}\{\boldsymbol{\epsilon}_{k|k} \mathbf{v}_k^\top\} = \mathbf{0}$, da das Rauschen \mathbf{v}_k unkorreliert zu den Schätzfehlern $\boldsymbol{\epsilon}_{k|k}$ ist (vergleiche Annahme 3.1). Damit folgt die

prädizierte Schätzfehler-Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}^\top \right\} \\
&= \left[\mathbf{F}_k \boldsymbol{\epsilon}_{k|k} + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,k} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1-j|k+1-j} \right] \\
&\quad \cdot \left[\mathbf{F}_k \boldsymbol{\epsilon}_{k|k} + \mathbf{L}_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,k} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1-j|k+1-j} \right]^\top \\
&= (\mathbf{F}_k + \boldsymbol{\Upsilon}_{1,\alpha}) \mathbf{P}_{k|k} (\mathbf{F}_k + \boldsymbol{\Upsilon}_{1,\alpha})^\top + \mathbf{L}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{L}_k^\top \\
&\quad + \sum_{j=2}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j} \boldsymbol{\Upsilon}_{j,\alpha,k}^\top. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

Korrektur

Für den Korrekturschritt wird die für Kalman-Filter übliche Form

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})) \tag{C.9}$$

angenommen. Die Berechnung der Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_{k+1} wird erst nach der Herleitung der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k+1|k+1}$ beschrieben.

Der Schätzfehler $\boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k+1}$, welcher sich nach Einbeziehung der aktuellen Messung \mathbf{y}_{k+1} ergibt, wird durch Einsetzen der Korrekturgleichung (C.9) und der Ausgangsgleichung (3.40) in (3.57) berechnet:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1} \\
&= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})) \\
&= \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_{k+1}) - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})). \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Um die nichtlineare Funktion \mathbf{g}_{k+1} berücksichtigen zu können, wird eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_{k+1}^0 = \mathbf{x}_{k+1|k}$ und $\mathbf{w}_{k+1}^0 = \mathbf{0}$ verwendet, sodass

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k+1} &\approx \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{G}_{k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1}) \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{w}_{k+1} \tag{C.11}
\end{aligned}$$

folgt. Da die Prädiktion erwartungstreu ist, ist somit auch der Korrekturschritt erwartungstreu, sofern die geforderten Annahmen und Approximationen gültig sind. Wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, müssen jedoch erwartungstreue Startwerte für das Filter vorliegen.

Die Schätzfehler-Kovarianzmatrix im Korrekturschritt ergibt sich mit (3.58) zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k+1}^\top \right\} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top \\
&\quad + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{k+1}^\top \\
&\quad - (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} \mathbf{w}_{k+1}^\top \right\} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{k+1}^\top \\
&\quad - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{w}_{k+1} \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}^\top \right\} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top. \tag{C.12}
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung treten Kreuzterme des Messrauschens \mathbf{w}_{k+1}^\top mit dem Schätzfehler $\boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k}$ auf. Da diese unkorreliert sind, gilt für die Terme $\mathbb{E} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}_{k+1|k} \mathbf{w}_{k+1}^\top \right\} = \mathbf{0}$ (vergleiche Annahme 3.1).

Damit ist die korrigierte Schätzfehler-Kovarianzmatrix durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1|k+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top \\
&\quad + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{k+1}^\top \tag{C.13}
\end{aligned}$$

gegeben.

Der Verstärkungsfaktor \mathbf{K}_{k+1} wird so gewählt, dass der Schätzer im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen zu einem Minimum-Varianz-Schätzer wird. Es muss somit zu jedem Zeitschritt

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1} \right\|^2 \right\} \rightarrow \min. \tag{C.14}$$

erfüllt sein. Diese Forderung kann in Abhängigkeit von der Schätzfehlerkovarianzmatrix durch

$$\text{Spur} \left\{ \mathbf{P}_{k+1|k+1} \right\} \rightarrow \min. \tag{C.15}$$

formuliert werden [Sim06, S. 9]. Durch Ableiten der Spur nach \mathbf{K}_{k+1} und zu null setzen erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} \text{Spur} &\left\{ (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1})^\top \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \mathbf{K}_{k+1}^\top \right\} \\
&= -2 (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top + 2 \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Damit ist der optimale Verstärkungsfaktor \mathbf{K}_{k+1} durch

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{M}_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \mathbf{M}_{k+1}^\top \right)^{-1} \tag{C.16}$$

gegeben. □

C.2 Herleitung des FUKF

Die Herleitung des FUKF in diesem Abschnitt orientiert sich an der Herleitung des nicht-fractionalen UKFs in [Sim06, S. 407-409, 433ff]. Das FUKF wurde in [CAHCLP12] vorgestellt, jedoch kein Beweis vorgelegt. Der Beweis wird, für den Fall additiven Messrauschens, daher hier durchgeführt.

Beweis:

Die Herleitung des FUKF ist im Gegensatz zu Satz 3.5 in drei Teile gegliedert, da die UT separat betrachtet wird.

Prädiktion

Die Prädiktion des Zustands ergibt sich aus dem bedingten Erwartungswert

$$\mathbf{x}_{k+1|k} = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{y}_k^* \}. \quad (\text{C.17})$$

Durch Einsetzen von (3.75) in (C.17) folgt der Prädiktionsschritt der Zustände

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1|k} &= \mathbb{E} \left\{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j} \middle| \mathbf{y}_k^* \right\} \\ &= \mathbb{E} \{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k | \mathbf{y}_k^* \} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Mit Annahme 3.2 folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1|k} &\approx \mathbb{E} \{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k | \mathbf{y}_k^* \} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j} \\ &= \mathbf{f}_{k+1|k} - \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} (-1)^j \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j} \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

mit der Schreibweise $\mathbf{f}_{k+1|k} := \mathbb{E} \{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k | \mathbf{y}_k^* \}$.

Die Prädiktion der Schätzfehlerkovarianzmatrix des Zustandes $\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}$ berechnet sich analog zur Prädiktion des Zustandes selbst. Durch Einsetzen von (3.75) und (C.19) in die Definition der Schätzfehlerkovarianzmatrix (3.58) und unter Berücksichtigung von Annahme 3.3 resultiert

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k}) (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k})^\top \right\} \\ &\approx \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{f}} + \Upsilon_1 \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{f}} + \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{x}} \Upsilon_1^\top + \sum_{j=1}^{\lfloor k+1-\frac{\alpha}{T} \rfloor} \Upsilon_{j,\alpha,k} \mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^{\mathbf{x}\mathbf{x}} \Upsilon_{j,\alpha,k}^\top. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Die Matrizen $\mathbf{P}_{k+1|k}^{ff}$ und $\mathbf{P}_{k+1-j|k+1-j}^{xx}$ stellen die Autokovarianzmatrizen der Zufallsvariablen $\mathbf{f}_{k+1|k}$ und $\mathbf{x}_{k+1-j|k+1-j}$ dar. Die Matrizen $\mathbf{P}_{k+1|k}^{xf}$ und $\mathbf{P}_{k+1|k}^{fx}$ dagegen bezeichnen die Kreuzkovarianzmatrizen der Zufallsvariablen $\mathbf{f}_{k+1|k}$ und $\mathbf{x}_{k|k}$. Diese Matrizen werden später bei der UT konkret berechnet.

Korrektur

Die korrigierte Schätzung des Zustands sei analog zum FEKF in der Form

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_{k+1|k} \right) \quad (\text{C.21})$$

gegeben, wobei die Schreibweise $\mathbf{y}_{k+1|k} := \mathbb{E} \left\{ \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}) + \mathbf{w}_{k+1} | \mathbf{y}_k^* \right\}$ verwendet wird. Die korrigierte Schätzung der Kovarianzmatrix des Zustands lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{xx} &= \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1}) (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1})^\top \right\} \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}^{xx} - \mathbf{P}_{k+1|k}^{xy} \mathbf{K}_{k+1}^\top - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{yx} + \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{yy} \mathbf{K}_{k+1}^\top. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Die Matrix $\mathbf{P}_{k+1|k}^{yy}$ stellt die Autokovarianzmatrix der Zufallsvariablen $\mathbf{y}_{k+1|k}$ dar. Die Matrizen $\mathbf{P}_{k+1|k}^{xy}$ und $\mathbf{P}_{k+1|k}^{yx}$ bezeichnen die Kreuzkovarianzmatrizen der Zufallsvariablen $\mathbf{y}_{k+1|k}$ und $\mathbf{x}_{k+1|k}$. Diese Matrizen werden bei der UT genauer betrachtet. Um die Minimum-Varianz-Eigenschaft im Rahmen der getroffenen Vereinfachungen zu erfüllen, muss

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1})^\top (\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1|k+1}) \right\} \\ &= \text{Spur} \left\{ \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{xx} \right\} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

gelten. Die Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_{k+1} ergibt sich durch Ableiten von (C.23) nach \mathbf{K}_{k+1} und zu null setzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{K}_{k+1}} \text{Spur} \left\{ \mathbf{P}_{k+1|k+1}^{xx} \right\} &= -2\mathbf{P}_{k+1}^{xy} + 2\mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{yy} = \mathbf{0} \\ \rightarrow \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1}^{xy} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{yy} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Unscented transformation

Die Besonderheit des UKF im Vergleich zum EKF ist, unabhängig von der Betrachtung fraktionaler oder nicht-fraktionaler Modelle, der Verzicht auf eine Linearisierung. Stattdessen wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung des geschätzten Zustandsvektors mithilfe von deterministisch gewählten Stichproben approximiert. Die Wahl dieser Stichproben bezeichnet man als unscented transformation (UT). Im Folgenden wird eine Variante der UT vorgestellt und im Anschluss auf das Problem des FUKF angewendet.

Gegeben sei ein Zufallsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, der durch den Mittelwert $\boldsymbol{\mu}^x$ und die Kovarianzmatrix \mathbf{P}^{xx} charakterisiert ist. Weiterhin sei die nichtlineare Funktion \mathbf{f} gegeben. Dabei

sei der Mittelwert und die Kovarianzmatrix des durch \mathbf{f} transformierten Zufallsvektors $\tilde{\mathbf{x}}$ gesucht. Um diese Größen näherungsweise zu bestimmen, werden Stichproben χ_i des Zufallsvektors \mathbf{x} wie folgt angenommen [Sim06, S. 441]:

$$\chi_i = \begin{cases} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{x}}, & i = 0 \\ \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{x}} + \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i, & i = 1 \dots n \\ \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{x}} - \left(\sqrt{(n + \kappa) \mathbf{P}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_{i-n}, & i = n + 1 \dots 2n \end{cases}. \quad (\text{C.25})$$

Hierbei beschreibt $(\cdot)_i$ den i -ten Spaltenvektor einer Matrix. Die Größe κ ist ein Tuning-Parameter, der die Streuung der Stichproben um den Mittelwert $\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{x}}$ bestimmt. Mithilfe von κ kann die UT auf die nichtlineare Funktion \mathbf{f} angepasst werden, um möglichst repräsentative Stichproben zu erhalten. Die resultierenden Stichproben werden dann durch die Funktion \mathbf{f} propagiert und daraus ein Stichprobenmittelwert

$$\boldsymbol{\mu}^{\tilde{\mathbf{x}}} \approx \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \mathbf{f}(\chi_i), \quad (\text{C.26})$$

$$\phi_0 = \frac{\kappa}{n + \kappa}, \quad (\text{C.27})$$

$$\phi_i = \frac{1}{2(n + \kappa)}, \quad i = 1 \dots 2n \quad (\text{C.28})$$

sowie eine Stichprobenvarianz

$$\mathbf{P}^{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\mathbf{f}(\chi_i) - \boldsymbol{\mu}^{\tilde{\mathbf{x}}} \right) \left(\mathbf{f}(\chi_i) - \boldsymbol{\mu}^{\tilde{\mathbf{x}}} \right)^\top \quad (\text{C.29})$$

gebildet. Analog lässt sich das Verfahren auch auf Kreuzkovarianzen von Zufallsvariablen anwenden.

Für das FUKF ergibt sich somit für den Prädiktionsschritt die Transformation

$$\mathbf{f}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k), \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{f}\mathbf{f}}_{k+1|k} = \mathbf{Q}_k + \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right)^\top, \quad (\text{C.31})$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{x}\mathbf{f}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\chi_{i,k|k} - \mathbf{x}_{k|k} \right) \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right)^\top, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathbf{P}^{\mathbf{f}\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \phi_i \left(\mathbf{f}_k(\chi_{i,k|k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{f}_{k+1|k} \right) \left(\chi_{i,k|k} - \mathbf{x}_{k|k} \right)^\top \quad (\text{C.33})$$

mit

$$\chi_{0,k|k} = \mathbf{x}_{k|k}, \quad (\text{C.34})$$

$$\chi_{i,k|k} = \mathbf{x}_{k|k} + \left(\sqrt{(n + \kappa_1) \mathbf{P}_{k|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (\text{C.35})$$

$$\chi_{i,k|k} = \mathbf{x}_{k|k} - \left(\sqrt{(n + \kappa_1) \mathbf{P}_{k|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_{i-n}, \quad i = n + 1 \dots 2n, \quad (\text{C.36})$$

$$\phi_0 = \frac{\kappa_1}{n + \kappa_1}, \quad (\text{C.37})$$

$$\phi_i = \frac{1}{2(n + \kappa_1)}, \quad i = 1 \dots 2n. \quad (\text{C.38})$$

Die Transformation im Korrekturschritt ist durch

$$\mathbf{y}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}), \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{y}} &= \mathbf{R}_{k+1} \\ &+ \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right)^\top, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \left(\chi_{i,k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1|k} \right) \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right)^\top, \quad (\text{C.41})$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{2n} \psi_i \left(\mathbf{g}_{k+1}(\chi_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}) - \mathbf{y}_{k+1|k} \right) \left(\chi_{i,k+1|k} - \mathbf{x}_{k+1|k} \right)^\top \quad (\text{C.42})$$

mit

$$\chi_{0,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k}, \quad (\text{C.43})$$

$$\chi_{i,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \left(\sqrt{(n + \kappa_2) \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_i, \quad i = 1 \dots n, \quad (\text{C.44})$$

$$\chi_{i,k+1|k} = \mathbf{x}_{k+1|k} - \left(\sqrt{(n + \kappa_2) \mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{x}\mathbf{x}}} \right)_{i-n}, \quad i = n + 1 \dots 2n, \quad (\text{C.45})$$

$$\psi_0 = \frac{\kappa_2}{n + \kappa_2}, \quad (\text{C.46})$$

$$\psi_i = \frac{1}{2(n + \kappa_2)}, \quad i = 1 \dots 2n \quad (\text{C.47})$$

gegeben. Für Prädiktion und Korrektur können verschiedene Tuning-Parameter κ_1, κ_2 gewählt werden. Somit kann die UT auf die Funktionen \mathbf{f} und \mathbf{g} getrennt angepasst werden. Es fällt auf, dass in (C.31) für $\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{f}\mathbf{f}}$ der Term \mathbf{Q}_k und in (C.40) für $\mathbf{P}_{k+1|k}^{\mathbf{y}\mathbf{y}}$ der Term \mathbf{R}_{k+1} zusätzlich zur eigentlichen UT auftritt. Dies ist die Folge der Definition $\mathbf{f}_{k+1|k} = \mathbb{E} \{ \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k | \mathbf{y}_k^* \}$ und der Definition $\mathbf{y}_{k+1|k} = \mathbb{E} \{ \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k | \mathbf{y}_k^* \}$, in denen die Rauschterm \mathbf{v}_k und \mathbf{w}_k enthalten sind. \square

C.3 Ergänzungen zum Beweis des DDFKF

Lemma C.1 (Informationsfilterform der Kovarianz [Sim06, S. 86, 87])

Die Gleichung

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})^\top + \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^\top \quad (\text{C.48})$$

zur Kovarianzbestimmung nach (3.69) ist identisch zu

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \quad (\text{C.49})$$

unter Berücksichtigung der Kalman-Verstärkung (3.67). Diese Form der Kovarianzberechnung wird auch Informationsfilterform genannt. Die Inverse der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1}$ bzw. $\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}$ wird auch als Informationsmatrix bezeichnet.

Beweis:

Die Herleitung basiert auf [Sim06, S. 86, 87]. Zunächst wird (3.67) unter Verwendung der abkürzenden Schreibweise (5.63) in (C.48) eingesetzt. Durch Ausmultiplizieren ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\mathbf{K}_{k+1}^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\mathbf{K}_{k+1}^\top + \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^\top. \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Die Identität des zweiten und dritten Terms von (C.50) lässt sich durch Einsetzen von (3.67) zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k} \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\mathbf{K}_{k+1}^\top. \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

Weiterhin gilt für den vierten und fünften Term von (C.50):

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\mathbf{K}_{k+1}^\top + \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{R}}_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^\top \\ &= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right)^{-1} \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right) \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}^\top. \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

Es lässt sich erkennen, dass (C.52) identisch zu (C.51) ist. Setzt man beide Gleichungen wiederum in (C.50) ein, folgt

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}^\top. \quad (\text{C.53})$$

Durch Inversion beider Seiten folgt weiterhin

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} = \left(\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1} \left(\mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{P}_{k+1|k}^\top \right)^{-1}. \quad (\text{C.54})$$

Mit dem Matrizeninversionslemma nach [Sim06, S. 11, 12] resultiert

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1}, \quad (\text{C.55})$$

was den Beweis abschließt. \square

Lemma C.2 (Informationsfilterform der Kovarianz des lokalen Systems i)

Die Gleichung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1}) \mathbf{P}_{i,k+1|k}^x (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{i,k+1} \mathbf{G}_{i,k+1})^\top \\ &\quad + \mathbf{K}_{i,k+1} \tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1} \mathbf{K}_{i,k+1}^\top \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

zur Kovarianzbestimmung nach (5.57) ist identisch zu

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} + \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{G}_{i,k+1} \quad (\text{C.57})$$

unter Berücksichtigung der lokalen Kalman-Verstärkung (5.30).

Beweis:

Der Beweis lässt sich auf die gleiche Weise ausführen wie die Herleitung zu Lemma C.1, mit dem Unterschied, dass nur lokale Größen und Matrizen, wie beispielsweise die lokale Kalman-Verstärkung $\mathbf{K}_{i,k+1}$ nach (5.30), verwendet werden. \square

Lemma C.3 (Informationsfilterform des Zustands [Mut98, S. 40, 41])

Die Gleichung zur Zustandsbestimmung

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})) \quad (\text{C.58})$$

ist identisch zu

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{k+1} \quad (\text{C.59})$$

mit der Schreibweise

$$\mathbf{y}'_{k+1} := \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0}) + \mathbf{G}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k}. \quad (\text{C.60})$$

Beweis:

Zunächst wird der Term $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})$ umgeformt. Zusätzlich wird die abkürzende Schreibweise $\Psi_{k+1} := (\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1})$ verwendet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \\ &= (\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k})\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \\ &= \left(\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\Psi_{k+1} \underbrace{\Psi_{k+1}^{-1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}}_{\mathbf{K}_{k+1}^\top} \right) \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \\ &= (\mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\Psi_{k+1}\mathbf{K}_{k+1}^\top) \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Mit (C.52) folgt dann

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}) = \mathbf{P}_{k+1|k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}. \quad (\text{C.62})$$

Nun wird (C.58) betrachtet. Durch Addition von null und mit der Notation (C.60) folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1|k+1} &= \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})) \\ &\quad + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1|k} \\ &\quad + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{G}_{k+1}\mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1|k}, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{0})) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{G}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{y}'_{k+1}. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Wird (C.62) in (C.63) eingesetzt, folgt

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1}\mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}\mathbf{y}'_{k+1}. \quad (\text{C.64})$$

Die Kalman-Verstärkung \mathbf{K}_{k+1} wird in die Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\Psi_{k+1}^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k+1}\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1}\mathbf{P}_{k+1|k}\mathbf{G}_{k+1}^\top\Psi_{k+1}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

überführt. Mit Lemma C.1 gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k+1} \left(\mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \right) \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \boldsymbol{\Psi}_{k+1}^{-1} \\
&= \mathbf{P}_{k+1|k+1} \left(\mathbf{G}_{k+1}^\top + \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \right) \boldsymbol{\Psi}_{k+1}^{-1} \\
&= \mathbf{P}_{k+1|k+1} \mathbf{G}_{k+1}^\top \left(\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \right) \boldsymbol{\Psi}_{k+1}^{-1} \\
&= \mathbf{P}_{k+1|k+1} \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{R}}_{k+1} + \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{G}_{k+1}^\top \right) \boldsymbol{\Psi}_{k+1}^{-1} \\
&= \mathbf{P}_{k+1|k+1} \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1}.
\end{aligned} \tag{C.66}$$

Es wird (C.66) in (C.64) eingesetzt, sodass sich

$$\mathbf{x}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^{-1} \mathbf{x}_{k+1|k} + \mathbf{P}_{k+1|k+1} \mathbf{G}_{k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{k+1} \tag{C.67}$$

ergibt. Multipliziert man beide Seiten von (C.67) mit $\mathbf{P}_{k+1|k+1}^{-1}$ von links, ist der Beweis abgeschlossen. \square

Lemma C.4 (Informationsfilterform der lokalen Zustandsschätzung in Subsystem i)

Die Gleichung zur lokalen Zustandsbestimmung in Subsystem i

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{K}_{i,k+1} (\mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}_{i,k+1})) \tag{C.68}$$

ist identisch zu

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}_{i,k+1|k+1}^x \right)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_{i,k+1|k+1} = \left(\mathbf{P}_{i,k+1|k}^x \right)^{-1} \mathbf{x}_{i,k+1|k} + \mathbf{G}_{i,k+1}^\top \tilde{\mathbf{R}}_{i,k+1}^{-1} \mathbf{y}'_{i,k+1} \tag{C.69}$$

mit

$$\mathbf{y}'_{i,k+1} = \mathbf{y}_{i,k+1} - \mathbf{g}_{i,k+1}(\mathbf{x}_{i,k+1|k}, \mathbf{u}_{i,k+1}, \mathbf{0}) + \mathbf{G}_{i,k+1} \mathbf{x}_{i,k+1|k}. \tag{C.70}$$

Beweis:

Der Beweis lässt sich auf die gleiche Weise ausführen wie die Herleitung zu Lemma C.3, mit dem Unterschied, dass nur lokale Größen und Matrizen, wie beispielsweise die lokale Kalman-Verstärkung $\mathbf{K}_{i,k+1}$ nach (5.30), verwendet werden. \square

C.4 Ergänzungen zum Beweis des FUIKF

Lemma C.5 (Ergänzung zum Beweis des FUIKF)

Es gilt:

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top = \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \quad (\text{C.71})$$

$$= \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top \quad (\text{C.72})$$

$$= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top. \quad (\text{C.73})$$

Beweis:

Mit (5.191) zur Berechnung von \mathbf{N}_{k+1} , (5.203) zur Berechnung von \mathbf{H}_{k+1} und (5.204) zur Berechnung von \mathbf{K}_{k+1} folgt für (C.71)

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ &= \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}) \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ &= \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}) \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ &= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \right) \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ &= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \\ &= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \underbrace{\left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1}}_{\mathbf{P}_{k+1}^d} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top \\ &= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top, \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

was identisch zu (C.73) ist. Zusätzlich lässt sich erkennen, dass die Matrix symmetrisch ist und somit

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x &= \left(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{G}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k}^x \right)^\top \\ &= \mathbf{P}_{k+1|k}^x \mathbf{G}_{k+1}^\top \mathbf{H}_{k+1}^\top \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

gelten muss. Nun wird noch (C.72) umgeformt:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}^\top \\
&= \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{N}_{k+1}) \mathbf{C}_{k+1} (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{k+1}^\top \mathbf{D}_{k+1}^\top) \mathbf{K}_{k+1}^\top \\
&= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{C}_{k+1} \right) \\
&\quad \cdot \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top \\
&= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \left(\mathbf{D}_{k+1}^\top \mathbf{C}_{k+1}^{-1} \mathbf{D}_{k+1} \right)^{-1} \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top \\
&= \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{C}_{k+1} - \mathbf{D}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^d \mathbf{D}_{k+1}^\top \right) \mathbf{K}_{k+1}^\top. \tag{C.76}
\end{aligned}$$

Gleichung (C.76) ist identisch zu (C.73), womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

D Linearisiertes 1-RQ-Batteriezellenmodell

In diesem Abschnitt soll das 1-RQ-Batteriezellenmodell nach Definition 4.3 linearisiert werden.

Satz D.1 (Linearisiertes 1-RQ-Batteriezellenmodell)

Das um den Punkt ${}^c \mathbf{x}_k = {}^c \mathbf{x}_k^0$, ${}^c u_k = {}^c u_k^0$, ${}^c \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ und ${}^c w_k = 0$ linearisierte 1-RQ-Batteriezellenmodell nach Definition 4.3 lässt sich durch die Gleichungen

$$\Delta {}^c \mathbf{x}_{k+1} = {}^c \mathbf{F}_k \Delta {}^c \mathbf{x}_k + {}^c \mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k + {}^c \mathbf{L}_k {}^c \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c \Upsilon_{j,\alpha,k} \Delta {}^c \mathbf{x}_{k+1-j}, \quad (\text{D.1})$$

$$\Delta {}^c y_k = {}^c \mathbf{G}_k \Delta {}^c \mathbf{x}_k + {}^c \mathbf{J}_k \Delta {}^c u_k + {}^c \mathbf{M}_k {}^c w_k \quad (\text{D.2})$$

und die Größen

$${}^c \mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

$$F_{21} = \left[T^\alpha \left(\frac{R'Q + RQ'}{(RQ)^2} - \frac{\ln(T)\alpha'}{RQ} \right) u_{RQ,k} + T^\alpha \left(\frac{\ln(T)\alpha'}{Q} - \frac{Q'}{Q^2} \right) i_{\text{cell},k}^0 \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0}, \quad (\text{D.4})$$

$$F_{22} = \left[-\frac{T^\alpha}{RQ} \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0}, \quad (\text{D.5})$$

$${}^c \mathbf{H}_k = \left[\left(\frac{100(i_{\text{cell},k}^0)T}{\frac{Q_N}{T^\alpha}} \right) \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0}, \quad (\text{D.6})$$

$${}^c \mathbf{L}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

$${}^c \mathbf{G}_k = \left[(\text{OCV}' + R_i' i_{\text{cell},k}^0 \quad 1) \right]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0}, \quad (\text{D.8})$$

$${}^c \mathbf{J}_k = [R_i]_{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0}, \quad (\text{D.9})$$

$${}^c \mathbf{M}_k = 1 \quad (\text{D.10})$$

beschreiben. Die Abhängigkeit der einzelnen Parameter zum SOC wird hier für eine

übersichtlichere Notation nicht explizit dargestellt. Mit der Notation $(\cdot)'$ ist die Ableitung der entsprechenden Größe nach dem SOC gemeint.

Beweis:

Zunächst wird die Systemgleichung des 1-RQ-Batteriezellenmodells nach Definition 4.3 mithilfe einer Taylorreihe um den Punkt ${}^c\mathbf{x}_k = {}^c\mathbf{x}_k^0$, ${}^c u_k = {}^c u_k^0$ und ${}^c\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ entwickelt, sodass sich

$$\begin{aligned} {}^c\mathbf{f}_k({}^c\mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c\mathbf{v}_k) &= \left(\begin{array}{c} \frac{100T}{Q_N} i_{\text{cell},k} + v_{\text{SOC},k} \\ -\frac{T^{\alpha(\text{SOC}_k)}}{R(\text{SOC}_k)Q(\text{SOC}_k)} u_{RQ,k} + \frac{T^{\alpha(\text{SOC}_k)}}{Q(\text{SOC}_k)} i_{\text{cell},k} + v_{RQ,k} \end{array} \right) \\ &\approx {}^c\mathbf{f}_k({}^c\mathbf{x}_k^0, {}^c u_k^0, \mathbf{0}) + {}^c\mathbf{F}_k({}^c\mathbf{x}_k - {}^c\mathbf{x}_k^0) + {}^c\mathbf{H}_k({}^c u_k - {}^c u_k^0) + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

mit den Matrizen bzw. Vektoren nach den Gleichungen (D.3) - (D.7) ergibt. Wird (D.11) in (4.16) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= {}^c\mathbf{f}_k({}^c\mathbf{x}_k^0, {}^c u_k^0, \mathbf{0}) + {}^c\mathbf{F}_k \Delta {}^c\mathbf{x}_k + {}^c\mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k \\ &\quad + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} {}^c\mathbf{x}_{k+1-j} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

mit $\Delta {}^c\mathbf{x}_k = ({}^c\mathbf{x}_k - {}^c\mathbf{x}_k^0)$ und $\Delta {}^c u_k = ({}^c u_k - {}^c u_k^0)$. Wird der Entwicklungspunkt ${}^c\mathbf{x}^0$ so gewählt, dass er eine Lösung der Differenzgleichung (4.16) ist, so folgt durch Addition von null:

$$\begin{aligned} {}^c\mathbf{x}_{k+1} &= {}^c\mathbf{f}_k({}^c\mathbf{x}_k^0, {}^c u_k^0, \mathbf{0}) + {}^c\mathbf{F}_k \Delta {}^c\mathbf{x}_k + {}^c\mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k \\ &\quad + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} {}^c\mathbf{x}_{k+1-j} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} {}^c\mathbf{x}_{k+1-j}^0 - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} {}^c\mathbf{x}_{k+1-j}^0 \\ &= {}^c\mathbf{f}_k({}^c\mathbf{x}_k^0, {}^c u_k^0, \mathbf{0}) - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} {}^c\mathbf{x}_{k+1-j}^0 + {}^c\mathbf{F}_k \Delta {}^c\mathbf{x}_k + {}^c\mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k \\ &\quad + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} \Delta {}^c\mathbf{x}_{k+1-j} \\ &= {}^c\mathbf{x}_{k+1}^0 + {}^c\mathbf{F}_k \Delta {}^c\mathbf{x}_k + {}^c\mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} \Delta {}^c\mathbf{x}_{k+1-j}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Es ergibt sich damit

$$\Delta {}^c\mathbf{x}_{k+1} = {}^c\mathbf{F}_k \Delta {}^c\mathbf{x}_k + {}^c\mathbf{H}_k \Delta {}^c u_k + {}^c\mathbf{L}_k {}^c\mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j {}^c\mathbf{Y}_{j,\alpha,k} \Delta {}^c\mathbf{x}_{k+1-j} \quad (\text{D.14})$$

für die linearisierte Zustandsgleichung.

Die Ausgangsgleichung ist nach (4.17) und (4.25) durch

$$\begin{aligned} {}^c y_k &= {}^c g_k({}^c \mathbf{x}_k, {}^c u_k, {}^c w_k) \\ &= \text{OCV}(\text{SOC}_k) + u_{RQ,k} + R_i(\text{SOC}_k) i_{\text{cell},k} + w_k \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

gegeben. Die Taylorentwicklung erster Ordnung um den Punkt ${}^c \mathbf{x}_k = {}^c \mathbf{x}_k^0$, ${}^c u_k = {}^c u_k^0$ und ${}^c w_k = 0$ ergibt

$${}^c y_k \approx {}^c g_k({}^c \mathbf{x}^0, {}^c u_k^0, 0) + {}^c \mathbf{G}_k \Delta {}^c \mathbf{x}_k + {}^c J_k \Delta {}^c u_k + {}^c M_k {}^c w_k \quad (\text{D.16})$$

mit den Größen nach (D.8) - (D.10). Es ergibt sich mit (D.16), ${}^c y_k^0 := {}^c g_k({}^c \mathbf{x}^0, {}^c u_k^0, 0)$ und $\Delta {}^c y_k := {}^c y_k - {}^c y_k^0$ die linearisierte Ausgangsgleichung

$$\Delta {}^c y_k = {}^c \mathbf{G}_k \Delta {}^c \mathbf{x}_k + {}^c J_k \Delta {}^c u_k + {}^c M_k {}^c w_k, \quad (\text{D.17})$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Ändern sich die Parameter des Systems nur langsam, so können sie in jedem Arbeitspunkt als näherungsweise konstant angenommen werden. Das linearisierte System entspricht dann einem fraktionalem LTI-System.

E Ergänzende Ergebnisse zur Batteriezellschätzung

In diesem Kapitel werden ergänzende Ergebnisse zur SOC-Schätzung einer Batteriezelle auf Basis des Aufbaus und der Messungen aus Abschnitt 6.1 und der Parametrierung aus Abschnitt 6.3.1 präsentiert.

Es ist zu erwarten, dass in praktischen Anwendungen, wie z. B. im Automobil keine Laborbedingungen existieren. Daher soll in diesem Abschnitt untersucht werden, wie robust das FEKF ist und wie sich die Ergebnisse der SOC-Schätzung für eine Einzelzelle verändern, wenn größeres Rauschen für i_{cell} und u_{cell} vorliegt. Diese Messgrößen besitzen bereits die Standardabweichungen $\sigma_{\text{BOP},i} = 2,6 \text{ mA}$ bzw. $\sigma_{2004} = 0,15 \text{ mV}$ (vergleiche Abschnitt 6.1). Nachfolgend wird jedoch beiden Größen jeweils ein künstlich erzeugtes, mittelwertfreies, weißes Rauschen mit Gaußscher Wahrscheinlichkeitsverteilung hinzugefügt:

$$i_{\text{cell}}^* = i_{\text{cell}} + i_{\text{noise}}, \quad (\text{E.1})$$

$$u_{\text{cell}}^* = u_{\text{cell}} + u_{\text{noise}}. \quad (\text{E.2})$$

Die Standardabweichungen σ_i und σ_u der Rauschprozesse i_{noise} und u_{noise} werden dabei so gewählt, dass sie ein Vielfaches der bereits vorliegenden Standardabweichungen der Rauschprozesse $\sigma_i = c_i \cdot \sigma_{\text{BOP},i}$ und $\sigma_u = c_u \cdot \sigma_{2004}$ betragen. Mit den neuen Messgrößen i_{cell}^* und u_{cell}^* wird die Schätzung aus Abschnitt 6.3 mehrfach wiederholt. Dabei werden die Variablen c_i und c_u variiert. Die Fehlerwerte der SOC-Schätzung auf Basis des fraktionalen Modells mit der Speicherlänge $S = 250$ sind für verschiedene c_i, c_u in Tabelle E.1 dargestellt. Tabelle E.2 zeigt die Ergebnisse für das nicht-fraktionale Modell.

Tabelle E.1: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen 1-RQ-Modells ($V_1, S = 250$) für die Schätzung mit dem FEKF mit richtigem Startzustand und zusätzlichem Rauschen mit verschiedenen Standardabweichungen.

c_u	$c_i = 0$		$c_i = 20$		$c_i = 50$	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
0	1,6705 %	3,1841 %	1,6542 %	3,1434 %	1,5596 %	2,9355 %
20	1,6924 %	3,1992 %	1,6681 %	3,1676 %	1,5637 %	2,9487 %
50	1,7377 %	3,2819 %	1,7074 %	3,1847 %	1,5944 %	2,9829 %
100	1,8439 %	3,3513 %	1,7878 %	3,2798 %	1,8658 %	3,1803 %

Tabelle E.2: SOC-Schätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen 1-RC-Modells für die Schätzung mit dem EKF mit richtigem Startzustand und zusätzlichem Rauschen mit verschiedenen Standardabweichungen.

c_u	$c_i = 0$		$c_i = 20$		$c_i = 50$	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE
0	2,0102 %	4,2252 %	3,7331 %	8,6781 %	20,3508 %	52,9039 %
20	2,0607 %	3,5698 %	4,2357 %	9,8752 %	20,2605 %	53,0090 %
50	3,6854 %	5,9624 %	7,2052 %	16,7980 %	19,5708 %	53,1107 %
100	12,9996 %	31,7047 %	12,8001 %	33,4402 %	18,0067 %	52,9406 %

Anhand Tabelle E.1 lässt sich erkennen, dass die SOC-Schätzung auf Basis des fraktionalen Modells robust gegenüber erhöhtem Rauschen ist. Für alle betrachteten Szenarien bleibt der RMSE sowie der MAE der SOC-Schätzung näherungsweise konstant. Bei höherem Rauschen der Strommessung verbessern sich die Ergebnisse sogar leicht. Dies lässt sich dadurch erklären, dass das Batteriemodell aufgrund des Rauschens stärker angeregt wird und das FEKF dadurch eine bessere Lösung finden kann.

Im Gegensatz zum fraktionalen Modell steigen die Fehlerwerte für die SOC-Schätzung des nicht-fraktionalen Modells in Tabelle E.2 für höheres Rauschen hingegen an. Wird nur das Rauschen der Spannungsmessung erhöht, erzielt die Schätzung für Werte bis zu $c_u = 50$ noch akzeptable Schätzergebnisse. Wird jedoch das Rauschen der Strommessung erhöht, steigt insbesondere der MAE schnell an. Für sehr hohe Werte $c_u \geq 100$ oder $c_i \geq 50$ werden die Fehlerwerte so groß, dass die Schätzung unbrauchbar wird.

Obwohl kein Parametertuning für die Kovarianzmatrizen (6.7) - (6.10) durchgeführt wurde, um diese an das erhöhte Rauschen anzupassen, weist dieses Szenario darauf hin, dass die Zustandsschätzung auf Basis fraktionaler Modelle robust gegenüber Rauschen ist. In praktischen Anwendungsfällen müsste man beispielsweise im nicht-fraktionalen Fall für Parameterwerte $c_i = c_u = 20$ bereits einen Sicherheitsabstand von etwa 10 % SOC einhalten, um einen Betrieb im sicheren Bereich gewährleisten zu können. Im fraktionalen Fall wäre nur ein Abstand von etwa 3,5 % nötig, selbst bei stärkerem Rauschen. Dadurch kann die in der Batterie enthaltene Energie besser genutzt werden.

F Ergänzende Ergebnisse zur Batteriepackschätzung

In diesem Kapitel werden ergänzende Ergebnisse zur SOC-Schätzung eines Batteriepacks auf Basis des Aufbaus, der Messungen und der Parametrierung aus Abschnitt 7.2 präsentiert.

F.1 Batteriepackschätzung mit Messung der Strangströme

In diesem Abschnitt werden Kalman-Filter angewendet, welche im Gegensatz zu den Algorithmen aus Abschnitt 7.3 nicht die geschätzten, sondern die gemessenen Strangströme als Eingangsgröße nutzen.

Es wird der Algorithmus nach (7.20) - (7.36) mit Ausnahme von (7.22) und (7.23) verwendet, mit dem weiteren Unterschied, dass die geschätzten Ströme $\tilde{i}_{p,k|k}$ durch die gemessenen Ströme $i_{DM,p,k}$ ersetzt werden. Die Ergebnisse sind für das fraktionale Modell in Tabelle F.1 und für das nicht-fraktionale Modell in Tabelle F.2 abgebildet.

Tabelle F.1: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei einer Zustandsschätzung mit gemessenen Strangströmen und der Speicherlänge $S = 250$.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	1,9741 %	1,7670 %	1,9119 %
MAE	2,9904 %	3,1186 %	4,9994 %
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	0,7092 %	2,4492 %	1,6751 %
MAE	2,9996 %	3,7419 %	3,9997 %
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	1,0049 %	1,1171 %	1,9921 %
MAE	3,9996 %	4,9994 %	3,1535 %

Vergleicht man die Fehlerwerte in Tabelle F.1 mit denen aus Tabelle 7.1 und 7.2, ist ersichtlich, dass die Messung der Strangströme keine Vorteile gegenüber der Schätzung dieser Größen bringt. Vielmehr werden sogar leicht schlechtere Ergebnisse erzielt. Dieser Effekt lässt sich auf den in Abschnitt 6.1 beschriebenen Jitter der Digitalmultimeter zu den restlichen Messgrößen zurückführen. Der Jitter betrifft in diesem Szenario die

Tabelle F.2: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalen Modells bei einer Zustandsschätzung mit gemessenen Strangströmen.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	2,8538 %	3,6468 %	4,6673 %
MAE	4,3449 %	5,5673 %	7,3310 %
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	1,6964 %	3,5767 %	4,6917 %
MAE	3,0614 %	5,7481 %	7,3360 %
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3
RMSE	1,0153 %	2,4379 %	4,5783 %
MAE	3,9996 %	5,0462 %	7,2621 %

Eingangs- und die Ausgangsgrößen. Es kann daher zu zeitlichen Verzögerungen zwischen diesen Messgrößen kommen. Das Kalman-Filter geht bei einer solchen Verzögerung von einer fehlerhaften Zustandsschätzung aus und passt die Zustände fälschlicherweise an. Deshalb wirkt sich der Jitter direkt auf die SOC-Schätzung aus. Die Kalman-Filter in Abschnitt 7.3 nutzen keine Messwerte der Digitalmultimeter und werden daher auch nicht auf diese Weise beeinflusst.

Dieser Effekt tritt auch bei der Schätzung im nicht-fraktionalen Fall auf. Tabelle F.2 zeigt im Vergleich zu den Ergebnissen in den Tabellen F.3 und F.4, welche mithilfe der geschätzten Strangströme ermittelt wurden, leicht schlechtere Ergebnisse.

Die Fehlerwerte auf Basis des nicht-fraktionalen Modells in Tabelle F.2 sind im Vergleich zu den Werten in Tabelle F.1, welche auf dem fraktionalem Modell basieren, wie erwartet schlechter. Zudem lässt sich in Tabelle F.2 erkennen, dass im nicht-fraktionalem Fall die Fehlerwerte für die jeweils dritte Zelle jedes Strangs etwas schlechter als für die übrigen Zellen sind. Für die Spannungsmessung dieser Zellen wurde die DS2002 Wandlerkarte verwendet, welche ein höheres Rauschen als die DS2004 Wandlerkarte besitzt (vergleiche Abschnitt 7.2.1). Auf die Ergebnisse bezüglich der fraktionalem Modelle in Kapitel 7 sowie auf die Ergebnisse in Tabelle F.1 hat sich dieses Rauschen nicht negativ ausgewirkt. Die Schätzung auf Basis des nicht-fraktionalem Modells wird von diesem Rauschen jedoch beeinflusst.

F.2 Anwendung der verteilten Kalman-Filter auf Basis nicht-fraktionaler Modelle

F.2.1 Schätzung mithilfe der Gesamtspannungsmessung

In diesem Abschnitt wird die SOC- und Strangstromschätzung aus Abschnitt 7.3.1 wiederholt. Allerdings wird hier nicht das Batteriestrangmodell nach Definition 4.5, sondern

das nicht-fraktionale Modell nach Definition 4.7 verwendet. Die Ergebnisse sind in Tabelle F.3 abgebildet.

Tabelle F.3: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionales Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	2,4486 %	3,2405 %	4,3891 %	0,0189 A
MAE	3,8228 %	5,1323 %	6,8208 %	1,4115 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,1397 %	3,0750 %	4,4161 %	0,0195 A
MAE	3,0314 %	5,0753 %	6,9517 %	1,2814 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,6512 %	2,0313 %	4,3100 %	0,0169 A
MAE	3,9996 %	5,0944 %	6,8308 %	1,2040 A

Wie erwartet sind die SOC-Schätzungen nach Tabelle F.3 ungenauer als beim fraktionales Modell in Tabelle 7.1. Im RMSE spiegelt sich dies in einer Verschlechterung um bis zu drei Prozentpunkte wider. Die Schätzung der Strangströme liegt jedoch in der gleichen Größenordnung wie im fraktionales Fall. In Abschnitt 7.3.1 wurde bereits beschrieben, dass sich Abweichungen bei der SOC-Schätzung in den flachen Bereichen der SOC-OCV-Kurve durch vergleichsweise kleine OCV-Fehler bemerkbar machen. Aus diesem Grund kann die Hilfsspannung $u_{m,p,k+1|k}$ trotz SOC-Fehler akkurat bestimmt werden. Im nicht-fraktionales Fall sind die Fehler der SOC-Schätzung noch klein genug, sodass die Strangströme auch in diesem Fall vergleichsweise genau geschätzt werden können. In diesem Szenario lässt sich weiterhin erkennen, dass die jeweils dritte Zelle jedes Strangs etwas schlechtere Ergebnisse als die übrigen Zellen erzielt, was wiederum auf das erhöhte Rauschen der DS2002 Wandlerkarte zurückzuführen ist.

F.2.2 Schätzung mithilfe der Gesamtstrommessung

In diesem Abschnitt wird die SOC- und Strangstromschätzung aus Abschnitt 7.3.2 wiederholt. Hierbei wird nicht das Batteriestrangmodell nach Definition 4.5, sondern wiederum das nicht-fraktionale Modell nach Definition 4.7 verwendet. Die Ergebnisse sind in Tabelle F.4 abgebildet.

Auch in diesem Szenario erzielt die SOC-Schätzung auf Basis des nicht-fraktionales Modells in Tabelle F.4 ungenauere Ergebnisse als im fraktionales Fall in Tabelle 7.2. Die Stromschätzung erreicht jedoch eine ähnliche Güte. Zur Begründung dieser Ergebnisse lassen sich die gleichen Argumente wie im vorherigen Abschnitt heranziehen.

Tabelle F.4: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fractionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtstrommessung.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	2,8898 %	3,6317 %	4,6458 %	0,0100 A
MAE	4,4067 %	5,5680 %	7,2963 %	1,4493 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,5232 %	3,4314 %	4,6145 %	0,0098 A
MAE	3,0691 %	5,5685 %	7,2534 %	1,3172 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,9818 %	2,3787 %	4,5369 %	0,0109 A
MAE	3,9996 %	5,1162 %	7,1666 %	1,2380 A

F.2.3 Schätzung mithilfe des nicht-fractionalen UIKF

In diesem Abschnitt werden die Schätzergebnisse des UIKF auf Basis des nicht-fractionalen Modells nach Definition 4.7 diskutiert. Diese sind in Tabelle F.5 abgebildet. Es ist zu sehen, dass der RMSE der einzelnen Strangströme im Vergleich zum fraktionalem Modell in Tabelle 7.3 etwas schlechter ist, aber noch in der gleichen Größenordnung liegt. Der MAE nimmt jedoch deutlich höhere Werte an.

Tabelle F.5: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fractionalen Modells für die Schätzung mit dem UIKF.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	2,8025 %	3,2485 %	7,0059 %	0,5525 A
MAE	6,9380 %	8,3043 %	13,8954 %	9,5699 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	4,6910 %	4,2630 %	11,6616 %	0,4860 A
MAE	8,4865 %	8,3221 %	23,6443 %	7,3610 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	3,1552 %	2,9703 %	8,5253 %	0,3854 A
MAE	6,6097 %	6,0878 %	17,4075 %	9,4597 A

Bei den Ergebnissen zu den SOC-Schätzungen ist besonders auffallend, dass für die jeweils dritte Zelle aller Stränge in diesem Szenario deutlich schlechtere Schätzergebnisse vorliegen. Das erhöhte Rauschen der DS2002 Wandlerkarte macht sich hier stark bemerkbar. Es ist daher ersichtlich, dass das UIKF für diese Höhe des Rauschens nicht robust ist.

Die Ergebnisse auf Basis des nicht-fractionalen Modells sind in Summe zwar schlechter, die SOC-Schätzungen mancher einzelner Zellen sind jedoch besser (z. B. die ersten beiden Zellen des ersten und dritten Strangs). Es wurde allerdings schon in Abschnitt 6.5

darauf hingewiesen, dass für das FUIKF eigentlich ein separates Parametertuning notwendig ist, da es eine andere Struktur als die restlichen Filter besitzt. Unter Umständen führt dies sowohl im fraktionalen als auch im nicht-fraktionalen Fall zu besseren Ergebnissen. Weiterhin könnte dies auch eine höhere Robustheit bezüglich der Rauschprozesse bewirken, insbesondere, wenn das erhöhte Rauschen der DS2002 Wandlerkarte in der Kovarianzmatrix ${}^s \mathbf{R}_i$ (vergleiche (7.16)) berücksichtigt wird. Nichtsdestotrotz zeigen die Ergebnisse in diesem Abschnitt, dass das UIKF auch auf Basis nicht-fraktionaler Modelle anwendbar ist.

F.3 Verteilte Batteriepackschätzung mit erhöhtem Rauschen

In diesem Abschnitt wird die SOC- und Strangstromschätzung aus Abschnitt 7.3.1 auf Basis der Gesamtspannungsmessung aufgegriffen. Der Versuchsaufbau, die Messungen und die Parametrierung der verteilten Kalman-Filter aus Abschnitt 7.2 bleiben bestehen. Allerdings wird in diesem Szenario den einzelnen gemessenen Spannungen u_{cell} und u_t jeweils ein zusätzliches, weißes, Gaußsches Rauschen hinzugefügt

$$u_{\text{cell},p,n}^* = u_{\text{cell},p,n} + u_{\text{noise},p,n} \quad \forall p, n = 1, 2, 3, \quad (\text{F.1})$$

$$u_t^* = u_t + u_{\text{noise},t}, \quad (\text{F.2})$$

ähnlich zu Anhang E. Damit soll überprüft werden, ob eine verteilte Zustands- und Strangstromschätzung auch möglich ist, wenn keine Laborbedingungen vorhanden sind und die Messgrößen stärkeres Rauschen besitzen. Die Standardabweichung $\sigma_u = c_u \cdot \sigma_{2004}$ mit $c_u = 20$ wird in diesem Szenario für die zusätzlichen Rauschprozesse der Gesamtspannung $u_{\text{noise},t}$ sowie alle Zellspannungen $u_{\text{noise},p,n}$ identisch gewählt. Die Ergebnisse der SOC- sowie der Strangstromschätzung sind in Tabelle F.6 für das fraktionale Modell und in Tabelle F.7 für das nicht-fraktionale Modell dargestellt.

Tabelle F.6: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung, der Speicherlänge $S = 250$ und zusätzlichem Rauschen.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,4903 %	1,3070 %	1,6218 %	0,0195 A
MAE	2,2427 %	2,9997 %	4,9994 %	1,4136 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,5290 %	1,8713 %	1,3285 %	0,0195 A
MAE	2,9996 %	2,9996 %	3,9997 %	1,2829 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,6671 %	1,0044 %	1,7483 %	0,0172 A
MAE	3,9996 %	4,9994 %	2,8420 %	1,2038 A

Tabelle F.7: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fractionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und zusätzlichem Rauschen.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	3,0105 %	3,6141 %	8,1293 %	0,0215 A
MAE	6,6125 %	5,6801 %	12,7268 %	1,4139 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,3253 %	6,8797 %	7,1625 %	0,0216 A
MAE	3,1262 %	10,8718 %	13,7800 %	1,2859 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,8983 %	2,8121 %	5,5481 %	0,0187 A
MAE	4,0371 %	9,8392 %	13,4548 %	1,2212 A

Die Ergebnisse dieses Szenarios deuten darauf hin, dass die SOC- und die Strangstromschätzung im fraktionalen Fall auch bei höherem Rauschen erwartungsgemäß funktioniert. Sowohl RMSE als auch MAE unterscheiden sich nur geringfügig von den Werten in Tabelle 7.1. Im Gegensatz dazu verschlechtert sich die SOC-Schätzung auf Basis des nicht-fractionalen Modells im Vergleich zu Tabelle F.3 um bis zu 4% bezüglich des RMSEs und bis zu 7% bezüglich des MAEs. Die Fehlerwerte der Stromschätzung verändern sich jedoch auch in diesem Fall nur marginal. Die Ergebnisse dieses Szenarios sind konsistent zu den Ergebnissen für die Einzelzellschätzung in Anhang E, insbesondere unter der Betrachtung, dass für die jeweils dritte Zelle jedes Strangs sowie die Gesamtspannungsmessung ohnehin ein größeres Messrauschen vorliegt (vergleiche Abschnitt 7.2.1).

Da die fraktionalen Modelle robuster gegenüber Rauschen sind, ergeben sich für die praktische Anwendung verschiedene Vorteile. Wie bereits in Anhang E diskutiert, lässt sich die in der Batterie gespeicherte Energie besser nutzen, da weniger Sicherheitsabstand benötigt wird, um die Betriebsbedingungen garantiert einzuhalten. Weiterhin besteht die Möglichkeit günstigerer Sensoren zu verwenden, da fraktionale Modelle weniger stark auf die Genauigkeit der Messgeräte angewiesen sind.

F.4 Verteilte Batteriepackschätzung mit Parametervariationen

Wie in Abschnitt 7.2.2 und in Anhang A bereits erwähnt, sind die exakten Parameter aller Zellen der Batterie nicht bekannt. Bei den SOC- und Strangstromschätzungen des Batteriepacks in Kapitel 7 wurden bereits für alle Zellen die gleichen Parameter verwendet, obwohl diese in der Praxis aufgrund von ungleicher Alterung und Fertigung unterschiedliche Parameter besitzen.

Trotz dieser Vereinfachung konnten gute Schätzergebnisse erzielt werden. In diesem Abschnitt soll nun aber untersucht werden, ob auch dann eine Schätzung möglich ist,

wenn die Modellparameter der Zellen stärker abweichen. Für dieses Szenario wird die SOC- und Strangstromschätzung aus Abschnitt 7.3.1 aufgegriffen. Allerdings werden dem verteilten Kalman-Filter für die einzelnen Batteriezellen zufällig abweichende Parameter vorgegeben. Diese Variationen der Zellparameter sind für das fraktionale Modell in Tabelle F.8 aufgelistet. In Tabelle F.9 sind die Parametervariationen für die Zellen des nicht-fraktionalen Modells dargestellt. Die restliche Schätzung wird identisch zu Abschnitt 7.3.1 durchgeführt.

Tabelle F.8: Verwendete Parameterabweichungen des fraktionalen Modells.

Strang 1 Variation	Zelle 1 $\alpha^* = \alpha + 0,05$	Zelle 2 $R^* = R \cdot 0,9$ $Q^* = Q \cdot 0,9$	Zelle 3 $R_i^* = R_i \cdot 1,1$
Strang 2 Variation	Zelle 1 $R_i^* = R_i \cdot 0,95$ $Q^* = Q \cdot 1,05$	Zelle 2 $R^* = R \cdot 0,95$	Zelle 3 $R^* = R \cdot 1,05$ $\alpha^* = \alpha - 0,05$
Strang 3 Variation	Zelle 1 $\alpha^* = \alpha \cdot 0,95$	Zelle 2 $R_i^* = R_i \cdot 0,95$	Zelle 3 $Q^* = Q \cdot 1,05$

Tabelle F.9: Verwendete Parameterabweichungen des nicht-fraktionalen Modells.

Strang 1 Variation	Zelle 1 $R_i^* = R_i \cdot 1,05$	Zelle 2 $R^* = R \cdot 0,9$ $C^* = C \cdot 0,9$	Zelle 3 $R_i^* = R_i \cdot 1,1$
Strang 2 Variation	Zelle 1 $R_i^* = R_i \cdot 0,95$ $C^* = C \cdot 1,05$	Zelle 2 $R^* = R \cdot 0,95$	Zelle 3 $C^* = C \cdot 1,1$
Strang 3 Variation	Zelle 1 $R^* = R \cdot 0,95$	Zelle 2 $R_i^* = R_i \cdot 0,95$	Zelle 3 $C^* = C \cdot 1,05$

Die Ergebnisse für das fraktionale Modell sind in Tabelle F.10 abgebildet. Vergleicht man die dargestellten Fehlerwerte mit den Werten in Tabelle 7.1, lässt sich erkennen, dass die Ergebnisse trotz Parametervariationen fast identisch sind. Der RMSE des SOCs für die dritte Zelle des zweiten Strangs hat sich mit einer Differenz von etwa 0,4 % am stärksten verschlechtert. Interessant ist jedoch auch, dass sich die Schätzung mancher Zellen verbessert hat. Beispielsweise konnte für die erste Zelle des ersten Strangs ein um fast 0,3 % besserer RMSE für die SOC-Schätzung erzielt werden. Wie bereits erwähnt, liegen sowieso bereits Parameterabweichungen zwischen den Zellen vor. Im Fall dieser Zelle wurde durch die Variation von R_i der wahre Parameter zufällig besser getroffen, sodass sich die Schätzung dadurch verbessern konnte. Auf die Stromschätzung haben sich die Parametervariationen nur marginal ausgewirkt.

In Tabelle F.11 sind die Ergebnisse für die Schätzung mit Parametervariationen auf Basis des nicht-fraktionalen Modells dargestellt. Für dieses Modell lassen sich sehr ähn-

Tabelle F.10: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des fraktionalen Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung, der Speicherlänge $S = 250$ und Parameterabweichungen.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,1954 %	1,5598 %	1,5442 %	0,0179 A
MAE	1,9997 %	2,9997 %	4,9995 %	1,4067 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,5047 %	1,9601 %	1,7079 %	0,0183 A
MAE	2,9996 %	3,0079 %	3,9997 %	1,2862 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,7761 %	1,0000 %	1,7178 %	0,0159 A
MAE	3,9996 %	4,9994 %	2,8218 %	1,2087 A

liche Aussagen treffen. Im Vergleich zu den Ergebnissen ohne zusätzliche Variation der Parameter in Tabelle F.3 haben sich die in Tabelle F.11 dargestellten Fehlerwerte nur minimal geändert. Die größte Abweichung beträgt etwa 0,2 % für den SOC. Auch beim nicht-fraktionalem Modell tritt der Fall auf, dass sich das Ergebnis mancher Zellen verbessert hat (z. B. die erste und die dritte Zelle des ersten Strangs). Die Fehlerwerte der Stromschätzung blieben fast unverändert.

Für praktische Anwendungen kann man davon ausgehen, dass die Parameter der einzelnen Zellen nicht exakt bekannt sind, insbesondere da sich diese aufgrund von Alterungseffekten im Laufe der Zeit verändern. Daher ist es vorteilhaft, dass die in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmen sowohl für fraktionale als auch nicht-fraktionale Modelle robust gegenüber Parameterabweichungen sind. Wie bereits erwähnt, besteht alternativ die Möglichkeit mithilfe dualer Schätzverfahren die Parameter der Modelle mitzuschätzen, um Degradationseffekte berücksichtigen zu können (vergleiche die Abschlussarbeiten [Pha17, Xia17]).

Tabelle F.11: SOC- und Stromschätzfehler (RMSE und MAE) des nicht-fraktionalem Modells bei verteilter Zustandsschätzung mit Gesamtspannungsmessung und Parameterabweichungen.

Strang 1	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	2,3878 %	3,4323 %	4,1791 %	0,0188 A
MAE	3,7231 %	5,3194 %	6,4195 %	1,3996 A
Strang 2	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	1,1548 %	3,1336 %	4,5026 %	0,0195 A
MAE	3,0322 %	5,1884 %	6,9582 %	1,2834 A
Strang 3	SOC Zelle 1	SOC Zelle 2	SOC Zelle 3	Strom
RMSE	0,7070 %	2,1009 %	4,3669 %	0,0169 A
MAE	3,9996 %	5,0946 %	6,8230 %	1,2061 A

Literaturverzeichnis

Öffentlich zugängliche Quellen

- [ACM⁺05] ABBEEL, Pieter ; COATES, Adam ; MONTEMERLO, Michael ; NG, Andrew Y. ; THRUN, Sebastian: Discriminative Training of Kalman Filters. In: *Robotics: Science and systems* Bd. 2, 2005
- [AMLO07] AOUN, Mohamed ; MALTI, Rachid ; LEVRON, François ; OUSTALOUP, Alain: Synthesis of fractional Laguerre basis for system approximation. In: *Automatica* 43 (2007), Nr. 9, S. 1640–1648
- [ANAA12] AOUN, Mohamed ; NAJAR, Slaheddine ; ABDELHAMID, Moufida ; ABDELKRIM, Mohamed N.: Continuous fractional Kalman filter. In: *2012 9th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices (SSD)* IEEE, 2012, S. 1–6
- [ANT⁺17] AZAMI, Ali ; NAGHAVI, Seyed V. ; TEHRANI, Reza D. ; KHOOBAN, Mohammad H. ; SHABANINIA, Faridoon: State estimation strategy for fractional order systems with noises and multiple time delayed measurements. In: *IET Science, Measurement & Technology* 11 (2017), Nr. 1, S. 9–17
- [BDW91] BERG, Timothy M. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Model distribution in decentralized multi-sensor data fusion. In: *American Control Conference, 1991* IEEE, 1991, S. 2292–2293
- [BDZR14] BOUKAL, Yassine ; DAROUACH, Mohamed ; ZASADZINSKI, Michel ; RADHY, Nour-Eddine: H_∞ observer design for linear fractional-order systems in time and frequency domains. In: *2014 European Control Conference (ECC)* IEEE, 2014, S. 2975–2980
- [BEH⁺13] BECK, Hans-Peter ; ENGEL, Bernd ; HOFMANN, Lutz ; MENGES, Roland ; TUREK, Thomas ; WEYER, Hartmut: Studie: Eignung von Speichertechnologien zum Erhalt der Systemsicherheit / Energie-Forschungszentrum Niedersachsen (efzn). 2013 (FA 43/12). – Abschlussbericht der BMWi Auftragsstudie
- [BHS⁺16] BRAND, Martin J. ; HOFMANN, Markus H. ; STEINHARDT, Marco ; SCHUSTER, Simon F. ; JOSSEN, Andreas: Current distribution within parallel-connected battery cells. In: *Journal of Power Sources* 334 (2016), S. 202–212

- [BM12a] BOROUJENI, Elham A. ; MOMENI, Hamid R.: Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems. In: *Signal Processing* 92 (2012), Nr. 10, S. 2365–2370
- [BM12b] BOROUJENI, Elham A. ; MOMENI, Hamid R.: Observer based control of a class of nonlinear fractional-order systems using LMI. In: *International Journal of Science and Engineering Investigations* 1 (2012), Nr. 1, S. 48–52
- [BM16] BRUEN, Thomas ; MARCO, James: Modelling and experimental evaluation of parallel connected lithium ion cells for an electric vehicle battery system. In: *Journal of Power Sources* 310 (2016), S. 91–101
- [BMG14] BRUEN, Thomas ; MARCO, James ; GAMA, Miguel: Current variation in parallelized energy storage systems. In: *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC) IEEE*, 2014, S. 1–6
- [Bou86] BOUKAMP, Bernard A.: A nonlinear least squares fit procedure for analysis of immittance data of electrochemical systems. In: *Solid state ionics* 20 (1986), Nr. 1, S. 31–44
- [BTZ03] BOLOGNANI, Silverio ; TUBIANA, Luca ; ZIGLIOTTO, Mauro: Extended Kalman filter tuning in sensorless PMSM drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 39 (2003), Nr. 6, S. 1741–1747
- [BWRL18] BAUMANN, Michael ; WILDFEUER, Leo ; ROHR, Stephan ; LIENKAMP, Markus: Parameter variations within Li-ion battery packs – Theoretical investigations and experimental quantification. In: *Journal of Energy Storage* 18 (2018), S. 295–307
- [BZDR15] BOUKAL, Yassine ; ZASADZINSKI, Michel ; DAROUACH, Mohamed ; RADHY, Nour-Eddine: H_∞ filters design for fractional-order time-varying delay systems. In: *2015 European Control Conference (ECC) IEEE*, 2015, S. 1243–1248
- [CAHCLP12] CABALLERO-AGUILA, R ; HERMOSO-CARAZO, A ; LINARES-PEREZ, J: Extended and unscented filtering algorithms in nonlinear fractional order systems with uncertain observations. In: *Appl. Math. Sci* 6 (2012), Nr. 29–32, S. 1471–1486
- [CBS⁺15] CHUN, Chang Y. ; BAEK, Jongbok ; SEO, Gab-Su ; CHO, BH ; KIM, Jonghoon ; CHANG, Il K. ; LEE, Sangwoo: Current sensor-less state-of-charge estimation algorithm for lithium-ion batteries utilizing filtered terminal voltage. In: *Journal of Power Sources* 273 (2015), S. 255–263
- [CC17] CHUI, Charles K. ; CHEN, Guanrong: *Kalman Filtering - with Real-Time Applications*. Fifth Edition. Springer International Publishing, 2017
- [Cha13] CHANG, Wen-Yeau: The state of charge estimating methods for battery: A review. In: *ISRN Applied Mathematics* (2013), S. 1–7

- [CHC13] CHANG, Ming-Hui ; HUANG, Han-Pang ; CHANG, Shu-Wei: A new state of charge estimation method for LiFePO₄ battery packs used in robots. In: *Energies* 6 (2013), Nr. 4, S. 2007–2030
- [CS95] CHUNG, Walter H. ; SPEYER, Jason L.: A general framework for decentralized estimation. In: *Proceedings of the 1995 American Control Conference IEEE*, 1995, S. 2931–2935
- [DDB⁺16] DJEGHALI, Nadia ; DJENNOUNE, Said ; BETTAYEB, Maamar ; GHANES, Malek ; BARBOT, Jean-Pierre: Observation and sliding mode observer for nonlinear fractional-order system with unknown input. In: *ISA Transactions* 63 (2016), Juli, S. 1–10
- [DM11] DADRAS, Sara ; MOMENI, Hamid R.: Fractional sliding mode observer design for a class of uncertain fractional order nonlinear systems. In: *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, IEEE, Dezember 2011, S. 6925–6930
- [DMC00] DROLET, Louis ; MICHAUD, François ; CÔTÉ, Jean: Adaptable sensor fusion using multiple Kalman filters. In: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, (IROS 2000)*. IEEE, 2000, S. 1434–1439
- [DS06] DZIELIŃSKI, Andrzej ; SIEROCIUK, Dominik: Observer for discrete fractional order state-space systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 39 (2006), Nr. 11, S. 511–516
- [DSW06] DAI, Haifeng ; SUN, Zechang ; WEI, Xuezhe: Online SOC estimation of high-power lithium-ion batteries used on HEVs. In: *IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES 2006)* IEEE, 2006, S. 342–347
- [DWDS12] DING, Derui ; WANG, Zidong ; DONG, Hongli ; SHU, Huisheng: Distributed H_∞ state estimation with stochastic parameters and nonlinearities through sensor networks: the finite-horizon case. In: *Automatica* 48 (2012), Nr. 8, S. 1575–1585
- [DWS09] DAI, Haifeng ; WEI, Xuezhe ; SUN, Zechang: State and parameter estimation of a HEV Li-ion battery pack using adaptive Kalman filter with a new SOC-OCV concept. In: *International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation (ICMTMA'09)* Bd. 2 IEEE, 2009, S. 375–380
- [DWS⁺12] DAI, Haifeng ; WEI, Xuezhe ; SUN, Zechang ; WANG, Jiayuan ; GU, Weijun: Online cell SOC estimation of Li-ion battery packs using a dual time-scale Kalman filtering for EV applications. In: *Applied Energy* 95 (2012), S. 227–237

- [DWSD15] DING, Derui ; WANG, Zidong ; SHEN, Bo ; DONG, Hongli: State estimation with fading measurements, randomly varying nonlinearities and probabilistic distributed delays. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 25 (2015), Nr. 13, S. 2180–2195
- [DXZI14] DING, Jialin ; XIAO, Jian ; ZHANG, Yong ; IQBAL, Muhammad N.: Distributed state estimation for discrete-time nonlinear system with unknown inputs. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 33 (2014), Nr. 11, S. 3421–3441
- [Eck17] ECKERT, Marius: *Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2017
- [EKH15] ECKERT, M. ; KÖLSCH, L. ; HOHMANN, S.: Fractional algebraic identification of the distribution of relaxation times of battery cells. In: *Conference on Decision and Control (CDC)*, 2015, S. 2101–2108
- [FSL⁺14] FRANCISCO, JM ; SABATIER, Jocelyn ; LAVIGNE, Loïc ; GUILLEMARD, F ; MOZE, M ; TARI, M ; MERVEILLAUT, M ; NOURY, A: Lithium-ion battery state of charge estimation using a fractional battery model. In: *2014 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA)* IEEE, 2014, S. 1–6
- [GDB08] GUERMAH, Said ; DJENNOUNE, Said ; BETTAYEB, Maamar: Controllability and observability of linear discrete-time fractional-order systems. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 18 (2008), Nr. 2, S. 213–222
- [GDM07] GILLIJNS, Steven ; DE MOOR, Bart: Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feed-through. In: *Automatica* 43 (2007), Nr. 5, S. 934–937
- [HA10] HILGERS, Peter ; AMENT, Christoph: Distributed and decentralised estimation of non-linear systems. In: *2010 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)* IEEE, 2010, S. 328–333
- [Har76] HARVILLE, David: Extension of the Gauss-Markov theorem to include the estimation of random effects. In: *The Annals of Statistics* (1976), S. 384–395
- [Hil12] HILGERS, Peter: *Verteilte Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme*, Technische Universität Ilmenau, Diss., 2012
- [HL03] HARTLEY, Tom T. ; LORENZO, Carl F.: Fractional-order system identification based on continuous order-distributions. In: *Signal processing* 83 (2003), Nr. 11, S. 2287–2300

- [HYZ⁺18] HU, Xiaosong ; YUAN, Hao ; ZOU, Changfu ; LI, Zhe ; ZHANG, Lei: Co-estimation of state of charge and state of health for lithium-ion batteries based on fractional-order calculus. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 67 (2018), Nr. 11, S. 10319–10329
- [ICE⁺10] ILLIG, J. ; CHROBAK, T. ; ENDER, M. ; SCHMIDT, J. P. ; KLOTZ, D. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Studies on $LiFePO_4$ as cathode material in Li-ion batteries. In: *ECS Transactions* 28 (2010), Nr. 30, S. 3–17
- [Ill14] ILLIG, Jörg: *Physically based impedance modelling of lithium-ion cells*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2014
- [ISWIT13] ILLIG, J. ; SCHMIDT, J.P. ; WEISS, M. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Understanding the impedance spectrum of 18650 $LiFePO_4$ -cells. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 670–679
- [JW06] JOSSEN, A. ; WEYDANZ, W.: *Moderne Akkumulatoren richtig einsetzen*. Inge Reichhardt Verlag, 2006
- [KM07] KHAN, Usman A. ; MOURA, José MF: Distributed Kalman filters in sensor networks: Bipartite fusion graphs. In: *IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing (SSP'07)* IEEE, 2007, S. 700–704
- [KM⁺08] KHAN, Usman A. ; MOURA, José MF u. a.: Distributing the Kalman filter for large-scale systems. In: *IEEE Trans. Signal Processing* 56 (2008), Nr. 10-1, S. 4919–4935
- [Koc08] KOCH, Wolfgang: On optimal distributed Kalman filtering and retrodiction at arbitrary communication rates for maneuvering targets. In: *IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2008)* IEEE, 2008, S. 457–462
- [Koc13] KOCISZEWSKI, Rafał: Observer synthesis for linear discrete-time systems with different fractional orders. In: *Pomiary Automatyka Robotyka* 17 (2013), Nr. 2, S. 376–381
- [KQQ12] KIM, Taesic ; QIAO, Wei ; QU, Liyan: A multicell battery system design for electric and plug-in hybrid electric vehicles. In: *2012 IEEE International Electric Vehicle Conference* IEEE, 2012, S. 1–7
- [KSJC11] KIM, Jonghoon ; SHIN, Jongwon ; JEON, Changyoon ; CHO, Bohyung: High accuracy state-of-charge estimation of Li-Ion battery pack based on screening process. In: *Twenty-Sixth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)* IEEE, 2011, S. 1984–1991
- [KST06] KILBAS, A Anatolii A. ; SRIVASTAVA, Hari M. ; TRUJILLO, Juan J.: *Theory and applications of fractional differential equations*. Bd. 204. Elsevier Science Limited, 2006

- [LA97] LEVI, MD ; AURBACH, D: Simultaneous measurements and modeling of the electrochemical impedance and the cyclic voltammetric characteristics of graphite electrodes doped with lithium. In: *The Journal of Physical Chemistry B* 101 (1997), Nr. 23, S. 4630–4640
- [LBDS08] LENDEK, Zsófia ; BABUŠKA, R ; DE SCHUTTER, Bart: Distributed Kalman filtering for cascaded systems. In: *Engineering applications of artificial intelligence* 21 (2008), Nr. 3, S. 457–469
- [LBK⁺18] LELIE, Markus ; BRAUN, Thomas ; KNIPS, Marcus ; NORDMANN, Hannes ; RINGBECK, Florian ; ZAPPEN, Hendrik ; SAUER, Dirk U.: Battery management system hardware concepts: An overview. In: *Applied Sciences* 8 (2018), Nr. 4, S. 534
- [Ler16] LERCH, Reinhard: *Elektrische Messtechnik - Analoge, digitale und computergestützte Verfahren*. Springer Vieweg, 2016. – 7., aktualisierte Auflage
- [LH98] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Initialization, conceptualization and application in the generalized fractional calculus / National Aeronautics and Space Administration (NASA). 1998. – Forschungsbericht
- [LH00] LORENZO, Carl F. ; HARTLEY, Tom T.: Initialized fractional calculus / National Aeronautics and Space Administration (NASA). 2000. – Forschungsbericht
- [LH02] LORENZO, Carl F. ; HARTLEY, Tom T.: Variable order and distributed order fractional operators. In: *Nonlinear dynamics* 29 (2002), Nr. 1-4, S. 57–98
- [LHL⁺13] LU, Languang ; HAN, Xuebing ; LI, Jianqiu ; HUA, Jianfeng ; OUYANG, Minggao: A review on the key issues for lithium-ion battery management in electric vehicles. In: *Journal of Power Sources* 226 (2013), S. 272–288
- [LHLZ17] LI, Zhe ; HUANG, Jun ; LIAW, Bor Y. ; ZHANG, Jianbo: On state-of-charge determination for lithium-ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 348 (2017), S. 281–301
- [LLCA14] LEE, Sang-Chul ; LI, Yan ; CHEN, YangQuan ; AHN, Hyo-Sung: H_∞ and sliding mode observers for linear time-invariant fractional-order dynamic systems with initial memory effect. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 136 (2014), Nr. 5, S. 051022
- [LLKGP13] LIU, Da-Yan ; LALEG-KIRATI, Taous-Meriem ; GIBARU, Olivier ; PERRUQUETTI, Wilfrid: Identification of fractional order systems using modulating functions method. In: *American Control Conference (ACC) IEEE*, 2013, S. 1679–1684
- [LLW09] LI, Huijun ; LIAO, Chenglin ; WANG, Lifang: Research on state-of-charge estimation of battery pack used on hybrid electric vehicle. In: *Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference (APPEEC 2009) IEEE*, 2009, S. 1–4

- [LLW⁺16] LIU, Congzhi ; LIU, Weiqun ; WANG, Lingyan ; HU, Guangdi ; MA, Luping ; REN, Bingyu: A new method of modeling and state of charge estimation of the battery. In: *Journal of Power Sources* 320 (2016), S. 1–12
- [LS02] LU, Tzon-Tzer ; SHIOU, Sheng-Hua: Inverses of 2×2 block matrices. In: *Computers & Mathematics with Applications* 43 (2002), Nr. 1-2, S. 119–129
- [Lun12] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer-Verlag, 2012. – 9., aktualisierte Auflage
- [LZ13] LAN, Yong-Hong ; ZHOU, Yong: Non-fragile observer-based robust control for a class of fractional-order nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 62 (2013), Nr. 12, S. 1143–1150
- [Mac84] MACDONALD, J.R.: Note on the parameterization of the constant-phase admittance element. In: *Solid State Ionics* 13 (1984), Nr. 2, S. 147–149
- [MB87] MACDONALD, J.R. ; BARSOUKOV, E.: *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications*. John Wiley & Sons, 1987
- [MB10] MOZYRSKA, Dorota ; BARTOSIEWICZ, Zbigniew: On observability of nonlinear discrete-time fractional-order control systems. In: *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer, 2010, S. 305–312
- [MCV⁺10] MONJE, Concepción A ; CHEN, YangQuan ; VINAGRE, Blas M. ; XUE, Dingyu ; FELIU-BATLLE, Vicente: *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. London : Springer Science & Business Media, 2010
- [MDW94] MUTAMBARA, Arthur G. ; DURRANT-WHYTE, HF: Modular scalable robot control. In: *IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI'94)* IEEE, 1994, S. 121–127
- [MDW00] MUTAMBARA, Arthur G. ; DURRANT-WHYTE, HF: Estimation and control for a modular wheeled mobile robot. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (2000), Nr. 1, S. 35–46
- [MP10] MOZYRSKA, Dorota ; PAWLUSZEWICZ, Ewa: Observability of linear q-difference fractional-order systems with finite initial memory. In: *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences* 58 (2010), Nr. 4, S. 601–605
- [MP12] MOZYRSKA, Dorota ; PAWLUSZEWICZ, Ewa: Fractional discrete-time linear control systems with initialisation. In: *International Journal of Control* 85 (2012), Nr. 2, S. 213–219

- [MPW17] MOZYRSKA, Dorota ; PAWLUSZEWICZ, Ewa ; WYRWAS, Malgorzata: Local observability and controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems based on their linearisation. In: *International Journal of Systems Science* 48 (2017), Nr. 4, S. 788–794
- [Mut98] MUTAMBARA, Arthur G.: *Decentralized estimation and control for multisensor systems*. CRC press, 1998
- [MZLC16] MA, Yan ; ZHOU, Xiuwen ; LI, Bingsi ; CHEN, Hong: Fractional modeling and SOC estimation of lithium-ion battery. In: *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 3 (2016), Nr. 3, S. 281–287
- [NDVZ13] N'DOYE, Ibrahima ; DAROUACH, Mohamed ; VOOS, Holger ; ZASADZINSKI, Michel: Design of unknown input fractional-order observers for fractional-order systems. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 23 (2013), Nr. 3, S. 491–500
- [NK18] NEUPERT, Steven ; KOWAL, Julia: Inhomogeneities in battery packs. In: *World Electric Vehicle Journal* 9 (2018), Nr. 2, S. 20
- [NLNH11] NOACK, Benjamin ; LYONS, Daniel ; NAGEL, Matthias ; HANEBECK, Uwe D.: Nonlinear information filtering for distributed multisensor data fusion. In: *American Control Conference (ACC) IEEE*, 2011, S. 4846–4852
- [NTSG⁺13] NUHIC, Adnan ; TERZIMEHIC, Tarik ; SOCZKA-GUTH, Thomas ; BUCHHOLZ, Michael ; DIETMAYER, Klaus: Health diagnosis and remaining useful life prognostics of lithium-ion batteries using data-driven methods. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 680–688
- [NVD⁺12] N'DOYE, Ibrahima ; VOOS, Holger ; DAROUACH, Mohamed ; SCHNEIDER, Jochen G. ; KNAUF, Nicolas: An unknown input fractional-order observer design for fractional-order glucose-insulin system. In: *2012 IEEE EMBS Conference on Biomedical Engineering and Sciences (IECBES) IEEE*, 2012, S. 595–600
- [OS05] OLFATI-SABER, Reza: Distributed Kalman filter with embedded consensus filters. In: *2005 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC'05) IEEE*, 2005, S. 8179–8184
- [OT11] ORAZEM, M.E. ; TRIBOLLET, B.: *Electrochemical Impedance Spectroscopy*. John Wiley & Sons, 2011 (The Electrochemical Society Series)
- [Ple05] PLETT, Gregory L.: Dual and joint EKF for simultaneous SOC and SOH estimation. In: *Proceedings of the 21st Electric Vehicle Symposium (EVS21), Monaco*, 2005, S. 1–12
- [Ple09] PLETT, Gregory L.: Efficient battery pack state estimation using bar-delta filtering. In: *EVS24 international battery, hybrid and fuel cell electric vehicle symposium*, 2009, S. 1–8

- [Pod99] PODLUBNY, Igor: *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego : Academic Press, 1999 (Mathematics in science and engineering 198)
- [PSP12] PETRAS, Ivo ; SIEROCIUK, Dominik ; PODLUBNY, Igor: Identification of parameters of a half-order system. In: *IEEE Transactions on Signal Processing* 60 (2012), Nr. 10, S. 5561–5566
- [PURJ11] PISANO, Alessandro ; USAI, Elio ; RAPAIC, MR ; JELICIC, Zoran: Second-order sliding mode approaches to disturbance estimation and fault detection in fractional-order systems. In: *Preprints of the 18th IFAC World Congress*, 2011, S. 2436–2441
- [RBM⁺11] REMMLINGER, Jürgen ; BUCHHOLZ, Michael ; MEILER, Markus ; BERNREUTER, Peter ; DIETMAYER, Klaus: State-of-health monitoring of lithium-ion batteries in electric vehicles by on-board internal resistance estimation. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), Nr. 12, S. 5357–5363
- [RBSGD13] REMMLINGER, Juergen ; BUCHHOLZ, Michael ; SOCZKA-GUTH, Thomas ; DIETMAYER, Klaus: On-board state-of-health monitoring of lithium-ion batteries using linear parameter-varying models. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 689–695
- [RDW91] RAO, Bobby S. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. In: *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)* Bd. 138 IET, 1991, S. 413–420
- [RDWS93] RAO, BSY ; DURRANT-WHYTE, Hugh F. ; SHEEN, JA: A fully decentralized multi-sensor system for tracking and surveillance. In: *The International Journal of Robotics Research* 12 (1993), Nr. 1, S. 20–44
- [RKTM09] ROMANOVAS, M. ; KLINGBEIL, L. ; TRAECHTLER, M. ; MANOLI, Y.: Application of fractional sensor fusion algorithms for inertial mems sensing. In: *Mathematical Modelling and Analysis* 14 (2009), Januar, Nr. 2, S. 199–209
- [Ruo16] RUOFF, Christian: A Closer Look at Wire Bonding. In: *Charged - Electric Vehicles Magazine* (2016), März/April, Nr. 24
- [SBS⁺13] SCHMIDT, Jan P. ; BERG, Philipp ; SCHÖNLEBER, Michael ; WEBER, André ; IVERS-TIFFÉE, Ellen: The distribution of relaxation times as basis for generalized time-domain models for Li-ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 221 (2013), S. 70–77
- [Sch18] SCHÖNLEBER, Michael: *Verfahren zur Charakterisierung des Niederfrequenzverhaltens von Lithium-Ionen Batterien*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2018

- [SD06] SIEROCIUK, Dominik ; DZIELIŃSKI, Andrzej: Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 16 (2006), Nr. 1, S. 129–140
- [SFG⁺15] SABATIER, Jocelyn ; FRANCISCO, Junior M. ; GUILLEMARD, Franck ; LAVIGNE, Loic ; MOZE, Mathieu ; MERVEILLAUT, Mathieu: Lithium-ion batteries modeling: A simple fractional differentiation based model and its associated parameters estimation method. In: *Signal Processing* 107 (2015), S. 290–301
- [SFMF12] SABATIER, Jocelyn ; FARGES, Christophe ; MERVEILLAUT, Mathieu ; FENETEAU, Ludovic: On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. In: *European Journal of Control* 18 (2012), Januar, Nr. 3, S. 260–271
- [SG92] SAIF, Mehrdad ; GUAN, Yuping: Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems. In: *Automatica* 28 (1992), Nr. 1, S. 215–219
- [SGL14] SEPASI, Saeed ; GHORBANI, Reza ; LIAW, Bor Y.: Improved extended Kalman filter for state of charge estimation of battery pack. In: *Journal of Power Sources* 255 (2014), S. 368–376
- [Sha86] SHAHIAN, Bahram: Decentralized control using observers. In: *International Journal of Control* 44 (1986), Nr. 4, S. 1125–1135
- [SHZL11] SUN, Fengchun ; HU, Xiaosong ; ZOU, Yuan ; LI, Siguang: Adaptive unscented Kalman filtering for state of charge estimation of a lithium-ion battery for electric vehicles. In: *Energy* 36 (2011), Nr. 5, S. 3531–3540
- [Sie13] SIEROCIUK, D.: Fractional Kalman filter algorithms for correlated system and measurement noises. In: *Control and Cybernetics* 42 (2013), Nr. 2
- [Sim06] SIMON, Dan: *Optimal state estimation: Kalman, H ∞ and nonlinear approaches*. John Wiley & Sons, 2006
- [SM17] SIEROCIUK, Dominik ; MALESZA, Wiktor: Fractional variable order discrete-time systems, their solutions and properties. In: *International Journal of Systems Science* 48 (2017), Nr. 14, S. 3098–3105
- [SMB08] SALAHSHOOR, Karim ; MOSALLAEI, Mohsen ; BAYAT, Mohammadreza: Centralized and decentralized process and sensor fault monitoring using data fusion based on adaptive extended Kalman filter algorithm. In: *Measurement* 41 (2008), Nr. 10, S. 1059–1076
- [SMF⁺14] SABATIER, Jocelyn ; MERVEILLAUT, Mathieu ; FRANCISCO, Junior M. ; GUILLEMARD, Franck ; PORCELATTO, Denis: Lithium-ion batteries modeling involving fractional differentiation. In: *Journal of Power Sources* 262 (2014), September, S. 36–43

- [SMM15] SIEROCIUK, Dominik ; MALESZA, Wiktor ; MACIAS, Michal: On the recursive fractional variable-order derivative: equivalent switching strategy, duality, and analog modeling. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 34 (2015), Nr. 4, S. 1077–1113
- [SMMS16] SIEROCIUK, Dominik ; MACIAS, Michal ; MALESZA, Wiktor ; SARWAS, Grzegorz: Dual estimation of fractional variable order based on the unscented fractional order Kalman filter for direct and networked measurements. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 35 (2016), Nr. 6, S. 2055–2082
- [SOSM05] SPANOS, Demetri P. ; OLFATI-SABER, Reza ; MURRAY, Richard M.: Approximate distributed Kalman filtering in sensor networks with quantifiable performance. In: *Proceedings of the 4th international symposium on Information processing in sensor networks* IEEE, 2005, S. 18
- [SSAM14] SADEGHIAN, Hoda ; SALARIEH, Hassan ; ALASTY, Aria ; MEGHDARI, Ali: On the fractional-order extended Kalman filter and its application to chaotic cryptography in noisy environment. In: *Applied Mathematical Modelling* 38 (2014), Februar, Nr. 3, S. 961–973
- [STL75] SANDERS, CW ; TACKER, EC ; LINTON, TD: Decentralized filtering algorithms for interconnected systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 8 (1975), Nr. 1, S. 143–148
- [STSM09] SALAU, Nina P. ; TRIERWEILER, Jorge O. ; SECCHI, Argimiro R. ; MARQUARDT, Wolfgang: A new process noise covariance matrix tuning algorithm for Kalman based state estimators. In: *IFAC Proceedings Volumes* 42 (2009), Nr. 11, S. 572–577
- [STV11] SIEROCIUK, Dominik ; TEJADO, Inés ; VINAGRE, Blas M.: Improved fractional Kalman filter and its application to estimation over lossy networks. In: *Signal Processing* 91 (2011), März, Nr. 3, S. 542–552
- [SX15] SUN, Fengchun ; XIONG, Rui: A novel dual-scale cell state-of-charge estimation approach for series-connected battery pack used in electric vehicles. In: *Journal of Power Sources* 274 (2015), S. 582–594
- [SZ14] SIEROCIUK, Dominik ; ZIUBINSKI, Pawel: Fractional order estimation schemes for fractional and integer order systems with constant and variable fractional order colored noise. In: *Circuits, Systems, and Signal Processing* 33 (2014), Dezember, Nr. 12, S. 3861–3882
- [SZ15] SIEROCIUK, Dominik ; ZIUBINSKI, Pawel: Variable Order Fractional Kalman Filters for Estimation over Lossy Network. In: LATAWIEC, Krzysztof J. (Hrsg.) ; LUKANISZYN, Marian (Hrsg.) ; STANISLAWSKI, Rafal (Hrsg.): *Advances in Modelling and Control of Non-integer-Order Systems* Bd. 320. Cham : Springer International Publishing, 2015, S. 285–294

- [TA11] TARASCON, J-M ; ARMAND, Michel: Issues and challenges facing rechargeable lithium batteries. In: *Materials For Sustainable Energy*. World Scientific, 2011, S. 171–179
- [TFW17] TIAN, Ning ; FANG, Huazhen ; WANG, Yebin: 3-D temperature field reconstruction for a lithium-ion battery pack: A distributed kalman filtering approach. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2017), Nr. 99, S. 1–8
- [TLW⁺15] TANG, Yinggan ; LIU, Haifang ; WANG, Weiwei ; LIAN, Qiusheng ; GUAN, Xinping: Parameter identification of fractional order systems using block pulse functions. In: *Signal Processing* 107 (2015), S. 272–281
- [TSL76] TACKER, EC ; SANDERS, CW ; LINTON, TD: Some results in decentralized filtering and control. In: *IFAC Proceedings Volumes* 9 (1976), Nr. 3, S. 401–408
- [VC13] VALÉRIO, Duarte ; COSTA, José Sá da: Variable order fractional controllers. In: *Asian Journal of Control* 15 (2013), Nr. 3, S. 648–657
- [VT15] VALÉRIO, Duarte ; TEJADO, Inés: Identifying a non-commensurable fractional transfer function from a frequency response. In: *Signal Processing* 107 (2015), S. 254–264
- [WCCW17] WEI, Yiheng ; CHEN, Yuquan ; CHENG, Songsong ; WANG, Yong: A note on short memory principle of fractional calculus. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 20 (2017), Nr. 6, S. 1382–1404
- [WFS14] WAAG, Wladislaw ; FLEISCHER, Christian ; SAUER, Dirk U.: Critical review of the methods for monitoring of lithium-ion batteries in electric and hybrid vehicles. In: *Journal of Power Sources* 258 (2014), Juli, S. 321–339
- [WLB17] WEI, Xing ; LIU, Da-Yan ; BOUTAT, Driss: Nonasymptotic pseudo-state estimation for a class of fractional order linear systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (2017), Nr. 3, S. 1150–1164
- [WLL⁺17] WANG, Baojin ; LIU, Zhiyuan ; LI, Shengbo E. ; MOURA, Scott J. ; PENG, Huei: State-of-charge estimation for lithium-ion batteries based on a nonlinear fractional model. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 25 (2017), Nr. 1, S. 3–11
- [WLPL15] WANG, Baojin ; LI, Shengbo E. ; PENG, Huei ; LIU, Zhiyuan: Fractional-order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 293 (2015), S. 151–161
- [WLW⁺06] WU, Mao-Sung ; LIN, Chang-Yen ; WANG, Yung-Yun ; WAN, Chi-Chao ; YANG, CR: Numerical simulation for the discharge behaviors of batteries in series and/or parallel-connected battery pack. In: *Electrochimica Acta* 52 (2006), Nr. 3, S. 1349–1357

- [XMCC13] XU, Jun ; MI, Chunting C. ; CAO, Binggang ; CAO, Junyi: A new method to estimate the state of charge of lithium-ion batteries based on the battery impedance model. In: *Journal of Power Sources* 233 (2013), Juli, S. 277–284
- [XSGH13] XIONG, Rui ; SUN, Fengchun ; GONG, Xianzhi ; HE, Hongwen: Adaptive state of charge estimator for lithium-ion cells series battery pack in electric vehicles. In: *Journal of Power Sources* 242 (2013), S. 699–713
- [XSL⁺16] XIAO, Renxin ; SHEN, Jiangwei ; LI, Xiaoyu ; YAN, Wensheng ; PAN, Erdong ; CHEN, Zheng: Comparisons of modeling and state of charge estimation for lithium-ion battery based on fractional order and integral order methods. In: *Energies* 9 (2016), März, Nr. 3, S. 184
- [YZCZ14] YIN, Chun ; ZHONG, QiShui ; CHEN, YangQuan ; ZHONG, Shou-ming: Estimating the state of charge of lithium batteries based on fractional-order sliding-mode observer. In: *International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA'14)* IEEE, 2014, S. 1–6
- [YZSL16] YANG, Naixing ; ZHANG, Xiongwen ; SHANG, BinBin ; LI, Guojun: Unbalanced discharging and aging due to temperature differences among the cells in a lithium-ion battery pack with parallel combination. In: *Journal of Power Sources* 306 (2016), S. 733–741
- [ZCS14] ZHAO, Xin ; CALLAFON, Raymond A. ; SHRINKLE, Lou: Current scheduling for parallel buck regulated battery modules. In: *IFAC Proceedings Volumes* 47 (2014), Nr. 3, S. 2112–2117
- [ZJZS12] ZHANG, Caiping ; JIANG, Jiuchun ; ZHANG, Weige ; SHARKH, Suleiman M.: Estimation of state of charge of lithium-ion batteries used in HEV using robust extended Kalman filtering. In: *Energies* 5 (2012), Nr. 4, S. 1098–1115
- [ZLSW16] ZOU, Yuan ; LI, Shengbo E. ; SHAO, Bing ; WANG, Baojin: State-space model with non-integer order derivatives for lithium-ion battery. In: *Applied Energy* 161 (2016), S. 330–336
- [ZLZ⁺15] ZHONG, Fuli ; LI, Hui ; ZHONG, Shouming ; ZHONG, Qishui ; YIN, Chun: An SOC estimation approach based on adaptive sliding mode observer and fractional order equivalent circuit model for lithium-ion batteries. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 24 (2015), Nr. 1-3, S. 127–144
- [ZSL⁺16] ZHANG, Qi ; SHANG, Yun-long ; LI, Yan ; DUAN, Bin ; ZHANG, Chenghui: Variable-order fractional equivalent circuit model for lithium-ion batteries. In: *2016 IEEE 11th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)* IEEE, 2016, S. 2277–2282

- [ZTRFS17] ZAREI, Jafar ; TABATABAEI, Mahmood ; RAZAVI-FAR, Roozbeh ; SAIF, Mehrdad: Fractional order unknown input filter design for fault detection of discrete linear systems. In: *43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2017)* IEEE, 2017, S. 4333–4338
- [ZZC⁺17] ZHONG, Qishui ; ZHONG, Fuli ; CHENG, Jun ; LI, Hui ; ZHONG, Shouming: State of charge estimation of lithium-ion batteries using fractional order sliding mode observer. In: *ISA transactions* 66 (2017), S. 448–459
- [ZZHC14] ZHONG, Liang ; ZHANG, Chenbin ; HE, Yao ; CHEN, Zonghai: A method for the estimation of the battery pack state of charge based on in-pack cells uniformity analysis. In: *Applied Energy* 113 (2014), S. 558–564

Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

- [EKH14a] ECKERT, Marius ; KUPPER, Martin ; HOHMANN, Sören: Fraktionale Systemidentifikation von Batteriezellen mit Hilfe von Modulationsfunktionen. In: *GMA-Fachausschuss 1.30, Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik*, 2014
- [EKH14b] ECKERT, Marius ; KUPPER, Martin ; HOHMANN, Sören: Functional fractional calculus for battery identification. In: *International Workshop on Impedance Spectroscopy (IWIS)*, Chemnitz University of Technology, 2014
- [EKH14c] ECKERT, Marius ; KUPPER, Martin ; HOHMANN, Sören: Functional fractional calculus for system identification of battery cells. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 62, S. 272–281
- [HKKB13] HEISSWOLF, Jan ; KÖNIG, Ralf ; KUPPER, Martin ; BECKER, Jürgen: Providing multiple hard latency and throughput guarantees for packet switching networks on chip. In: *Computers & Electrical Engineering* 39 (2013), Nr. 8, S. 2603–2622
- [HSK⁺13] HEISSWOLF, Jan ; SINGH, Maximilian ; KUPPER, Martin ; KÖNIG, Ralf ; BECKER, Jürgen: Rerouting: Scalable NoC self-optimization by distributed hardware-based connection reallocation. In: *2013 International Conference on Reconfigurable Computing and FPGAs (ReConFig)* IEEE, 2013, S. 1–8
- [KBS⁺18] KUPPER, Martin ; BRENNEISEN, Jochen ; STARK, Oliver ; KREBS, Stefan ; HOHMANN, Sören: Cascaded fractional Kalman filtering for state and current estimation of large-scale lithium-ion battery packs. In: *2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC)*, 2018
- [KCS⁺19] KUPPER, Martin ; CREUTZ, Andreas ; STARK, Oliver ; KREBS, Stefan ; HOHMANN, Sören: Current and state of charge estimation of lithium-ion battery packs using distributed fractional extended Kalman filters. In: *The third IEEE Conference On Control Technology And Applications (CCTA)* IEEE, 2019

- [KFEH18] KUPPER, Martin ; FUNK, Christopher ; ECKERT, Marius ; HOHMANN, Sören: Fractional extended and unscented Kalman filtering for state of charge estimation of lithium-ion batteries. In: *2018 Annual American Control Conference (ACC)* IEEE, 2018, S. 3855–3862
- [KH16] KUPPER, Martin ; HOHMANN, Sören: Distributed state estimation of large-scale fractional order systems. In: *SINO-EU Doctoral School for Sustainability Engineering*, 2016
- [KH18] KUPPER, Martin ; HOHMANN, Sören: Verteilte Zustandsschätzung für fraktionale Systeme am Beispiel von Lithium-Ionen-Batterien. In: *GMA-Fachausschuss 1.40, Systemtheorie und Regelungstechnik*, 2018
- [KPKH19] KUPPER, Martin ; PFEIFER, Martin ; KREBS, Stefan ; HOHMANN, Sören: Unknown input Kalman filtering for linear discrete-time fractional order systems with direct feedthrough. In: *European Control Conference (ECC)* IEEE, 2019
- [KSH15] KUPPER, Martin ; SCHUFF, Timo ; HOHMANN, Sören: Possible new concepts for robust battery management systems. In: *24. Aachener Kolloquium Fahrzeug- und Motorentechnik* ika, VKA, 2015
- [KSH16] KUPPER, Martin ; SESAR GIL, Inigo ; HOHMANN, Sören: Distributed and decentralized state estimation of fractional order systems. In: *American Control Conference (ACC)* IEEE, 2016, S. 2765–2771
- [KSH17] KUPPER, Martin ; SESAR GIL, Inigo ; HOHMANN, Sören: Distributed and decentralized Kalman filtering for cascaded fractional order systems. In: *American Control Conference (ACC)* IEEE, 2017, S. 5223–5230
- [Kup19] KUPPER, Martin: *Verfahren zur Ermittlung von Ladungszuständen von Zellen in einer Batterie*. Patent Nr. 10 2018 206 353, IPC: G01R 31/36, 2019. – Inhaber: ITK Engineering GmbH, 76761 Rülzheim, Karlsruher Institut für Technologie, 76131 Karlsruhe
- [SKKH18] STARK, Oliver ; KUPPER, Martin ; KREBS, Stefan ; HOHMANN, Sören: Online parameter identification of a fractional order model. In: *57th IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2018)*, 2018

Betreute studentische Arbeiten

- [Ana17] ANASTASIADIS, Johannes: *Untersuchung einer verteilten Zustandsschätzung in Kombination mit einer Stromsteuerung für Batteriemodule*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2017

- [Bre16] BRENNISEN, Jochen: *Entwurf eines kaskadierten Kalman Filters zur Zustandsschätzung von Li-Ionen Batterien*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Buc15] BUCHELE, Alexander: *Implementierung und Simulation einer Schaltung zur Stromsteuerung von Batteriemodulen und deren Integration in den Zustandsraum eines bestehenden Batteriemodells*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Cre16] CREUTZ, Andreas: *Implementierung eines verteilten Kalman Filters zur Zustandsschätzung fraktionaler Batteriemodelle*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Fun16] FUNK, Christopher: *Implementierung und Analyse eines fraktionalen Kalman-Filters zur Ladezustandsschätzung von Li-Ionen Batteriezellen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Het16] HETTLER, Lukas: *Konzeptionierung und Umsetzung einer Schaltung zur Stromsteuerung für Batteriemodule*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Pha17] PHAM, Bastian: *Design of a Dual Kalman Filter for State and Parameter Estimation of a Fractional Lithium-ion Battery Model*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2017
- [Sch16] SCHMIDT, Robert: *Implementierung und Test eines verteilten Kalman Filters zur Zustandsschätzung von Lithium-Ionen Batterien*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [See16] SEEL, Albert: *Zustandsschätzung fraktionaler Systeme mit Hilfe von Modulationsfunktionen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016
- [SG15] SESAR GIL, Inigo: *Development of a distributed Kalman filter for the state estimation of fractional systems*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2015
- [Tim15] TIMMEREVERS, Thorsten: *Simulation eines verteilten Kalman-Filters zur Zustandsschätzung von Li-Ionen Batterien*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015

-
- [Wie15] WIECZOREK, Dieter: *Implementierung und Test eines Unknown-Input Kalman-Filters zur Zustands- und Stromschätzung von seriell verschalteten Batteriezellen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Xia17] XIA, Linqing: *Entwicklung eines verteilten Dual Kalman Filters zur Zustands- und Parameterschätzung von Li-Ionen Batterien*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Insitut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2017