KITopen (2019), 5 pp.
DOI: 10.5445/IR/1000098449

Integralungleichungen bei Verwendung allgemeinerer Integralbegriffe

Markus Antoni, Gerd Herzog, Peter Volkmann

1. Einleitung. Gemäß [6] gilt ein Vergleichssatz für Integralgleichungen in geordneten topologischen Vektorräumen. Hier werden wir den gleichen Satz unter Zugrundelegung allgemeinerer Integralbegriffe erhalten; diese Begriffe erklären wir in den folgenden beiden Abschnitten. In Nr. 4 wird dann der Vergleichssatz gegeben (Satz 1), und in der abschließenden Nr. 5 wird ein abstrakter Vergleichssatz bewiesen (Satz 2), aus welchem Satz 1 auch folgt.

2. Integration von Funktionen $\alpha : [0,t] \to \mathbb{R}$. Es sei $T > 0$. Für jedes $t \in \,]0,T]$ sei V_t ein Unterraum des Vektorraumes $\mathbb{R}^{[0,t]}$ aller Funktionen $\gamma : [0,t] \to \mathbb{R}$, und es sei $\int_0^t : V_t \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit

$$\int\limits_0^t \alpha(s)ds \geq 0 \text{ für } \alpha \in V_t \text{ mit } \alpha(s) \geq 0 \quad (0 \leq s \leq t).$$

Dabei bedeutet allgemein $\int_0^t \alpha(s)ds$ den Wert von $\int_0^t$ an der Stelle $\alpha \in V_t$. Hat $\beta : [0,t_1] \to \mathbb{R}$ mit $0 < t < t_1 \leq T$ eine Einschränkung $\beta\,|_{[0,t]} \in V_t$, so hat $\int_0^t \beta(s)ds$ die Bedeutung von $\int_0^t (\beta\,|_{[0,t]})(s)ds$.

3. Integration von Funktionen mit Werten in topologischen Vektorräumen. Wieder sei $T > 0$, und es sei E ein reeller topologischer Vektorraum (T_2-Axiom wird vorausgesetzt), E^* bezeichne seinen topologischen Dual. Dann wird für $g : [0,t] \to E$ mit $0 < t \leq T$ die Formel

$$\int\limits_0^t g(s)ds = \xi \tag{1}$$

wie folgt verstanden: Es ist $\xi \in E$, und für alle $\varphi \in E^*$ ist $\varphi \circ g \in V_t$ mit $\int_0^t \varphi(g(s))ds = \varphi(\xi)$ (das Integral links im Sinne von Nr. 2 gebildet).

Ist der Raum E lokal konvex, so kann (1) bei gegebenem g nur für ein $\xi \in E$ gelten; anderenfalls ist Mehrdeutigkeit möglich, die aber keine Schwierigkeiten bereiten wird.

In [6] wurde das hier eingeführte Integral unter Zugrundelegung des Lebesgueschen Integrals für reellwertige Funktionen $\alpha : [0,t] \to \mathbb{R}$ benutzt.

4. Vergleichssatz für Integralgleichungen. T, E, E^* seien wie in Nr. 3. Wir folgen [6]: Es sei K ein Keil in E, also $\emptyset \neq K \subseteq E$ mit

$$\lambda \geq 0,\ \xi \in K,\ \eta \in K \Longrightarrow \lambda(\xi + \eta) \in K.$$

Es sei noch K abgeschlossen und $\mathrm{Int}K \neq \emptyset$. Für $\xi, \eta \in E$ setzen wir

$$\xi \leq \eta \Longleftrightarrow \eta - \xi \in K, \quad \xi \ll \eta \Longleftrightarrow \eta - \xi \in \mathrm{Int}K.$$

Es sei K^* der zu K duale Keil, d.h.

$$K^* = \{\varphi \mid \varphi \in E^*,\ \varphi(\xi) \geq 0 \quad (\xi \in K)\}.$$

Ist $D \subseteq E$, so wird $\Phi : D \to E$ *(monoton) wachsend* genannt, wenn aus $\xi, \eta \in D,\ \xi \leq \eta$ stets $\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta)$ folgt. Gemäß [3] heißt die Funktion $\Phi : D \to E$ *quasimonoton wachsend*, wenn aus $\xi, \eta \in D,\ \xi \leq \eta,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ stets $\varphi(\Phi(\xi)) \leq \varphi(\Phi(\eta))$ folgt.

Der nachfolgende Satz 1 sieht genauso aus, wie der Satz in [6], aber die hier auftretenden Integrale sind im Sinne von Nr. 3 zu verstehen; sie sind also allgemeiner als diejenigen in [6].

Zum Beweise des Satzes 1 kann wie beim Beweis in [6] verfahren werden. Außerdem erhalten wir Satz 1 auch weiter unten in Nr. 5.

Satz 1. *Es sei $T > 0$, und es seien $v, w : [0, T] \to E$ stetige Funktionen mit*

$$v(0) \ll w(0),$$

$$(2) \qquad \int_0^t k(t, s, w(s))ds + f(t, w(t)) \ll \int_0^t k(t, s, v(s))ds + f(t, v(t)) \qquad (0 < t \leq T).$$

Dabei seien $k(t, s, \xi), f(t, \xi) \in E$ für alle in (2) vorkommenden t, s, ξ definiert, es sei $k(t, s, \xi)$ in ξ wachsend und $f(t, \xi)$ in ξ quasimonoton wachsend.

Dann gilt

$$v(t) \ll w(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Bemerkung. Im Hinblick auf mögliche Mehrdeutigkeit bei der Integration von Funktionen $g : [0, t] \to E$ ist (2) wie folgt zu verstehen: Für jedes $t \in]0, T]$ sollen für beide Integrale in (2) Werte in E existieren, mit welchen die Ungleichung gilt.

5. Abstrakter Vergleichssatz. T, E, E^*, K, K^* und $\leq, \ll$ in E seien wie in Nr. 4. Für $t \in]0, T]$ sei

$$E^{[0,t]} = \{g \mid g : [0, t] \to E\}.$$

Für $g, h \in E^{[0,t]}$ definieren wir $g \leq h$ durch

$$g(s) \leq h(s) \quad (0 \leq s \leq t),$$

und für $W \subseteq E^{[0,t]}$ wird eine Funktion $F : W \to E$ *(monoton) wachsend* genannt, falls gilt:

$$g, h \in W,\ g \leq h \Longrightarrow F(g) \leq F(h).$$

Satz 2. *Es sei $T > 0$, und für alle $t \in]0, T]$ sei $D_t \subseteq E$, $W_t \subseteq E^{[0,t]}$, $F(t, \cdot, \cdot) : W_t \times D_t \to E$. Dabei wird $F(t, g, \xi)$ (für jedes $\xi \in D_t$) als monoton wachsend bezüglich $g \in W_t$ vorausgesetzt.*

Es seien $v, w : [0, T] \to E$ stetige Funktionen mit

$$v(t),\ w(t) \in D_t \quad (0 < t \leq T)$$

und

$$v\,|_{[0,t]},\ w\,|_{[0,t]} \in W_t \quad (0 < t \leq T)$$

(wobei $v\,|_{[0,t]}$, $w\,|_{[0,t]}$ Einschränkungen auf das Intervall $[0, t]$ bedeuten). Außerdem sei für jedes $t \in]0, T]$ mindestens eine der beiden Funktionen

(3) $$F(t, v\,|_{[0,t]}, \cdot),\ F(t, w\,|_{[0,t]}, \cdot) : D_t \to E$$

quasimonoton wachsend. Dann folgt aus den Ungleichungen

(4) $$v(0) \ll w(0),$$

(5) $$F(t, w\,|_{[0,t]}, w(t)) \ll F(t, v\,|_{[0,t]}, v(t)) \quad (0 < t \leq T)$$

die Beziehung

$$v(t) \ll w(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Beweis. Anderenfalls ist

$$w(\tau) - v(\tau) \in E \setminus \mathrm{Int}K$$

für ein $\tau \in [0, T]$ möglich. Auf Grund der Stetigkeit von v und w kann τ minimal gewählt werden; wegen (4) ist dann

$$\tau > 0,$$

und wir bekommen

(6) $$w(t) - v(t) \in K \quad (0 \leq t \leq \tau),$$

(7) $$w(\tau) - v(\tau) \in \partial K.$$

Wegen (7) liefert der Satz von Hahn und Banach ein

$$\varphi \in K^* \setminus \{0\} \tag{8}$$

mit

$$\varphi(w(\tau) - v(\tau)) = 0. \tag{9}$$

Nach (7), (8), (9) haben wir

$$v(\tau) \le w(\tau),\ \varphi \in K^*, \quad \varphi(v(\tau)) = \varphi(w(\tau)),$$

und da für $t = \tau$ eine der Funktionen in (3) quasimonoton wachsend ist, gilt eine der folgenden beiden Ungleichungen:

$$\varphi(F(\tau, v\,|_{[0,\tau]}, v(\tau))) \le \varphi(F(\tau, v\,|_{[0,\tau]}, w(\tau))), \tag{10}$$

$$\varphi(F(\tau, w\,|_{[0,\tau]}, v(\tau))) \le \varphi(F(\tau, w\,|_{[0,\tau]}, w(\tau))). \tag{11}$$

Ferner folgt aus (5) für $t = \tau$ mit (8) die Ungleichung

$$\varphi(F(\tau, w\,|_{[0,\tau]}, w(\tau))) < \varphi(F(\tau, v\,|_{[0,\tau]}, v(\tau))). \tag{12}$$

Formel (6) bedeutet $v\,|_{[0,\tau]} \le w\,|_{[0,\tau]}$ in $E^{[0,\tau]}$, die für F vorausgesetzte Monotonie liefert daher

$$F(\tau, v\,|_{[0,\tau]}, \xi) \le F(\tau, w\,|_{[0,\tau]}, \xi) \quad (\xi \in D_\tau),$$

und hieraus folgt

$$\varphi(F(\tau, v\,|_{[0,\tau]}, \xi)) \le \varphi(F(\tau, w\,|_{[0,\tau]}, \xi)) \quad (\xi \in D_\tau). \tag{13}$$

Um den Beweis zu beenden, zeigen wir, dass jeder der beiden Fälle (10), (11) zu einem Widerspruch führt: Im ersten Fall ergibt sich dieser durch Zusammensetzen der drei Ungleichungen (10), (13) mit $\xi = w(\tau)$ und (12); im zweiten Fall werden die Ungleichungen (11), (12) und (13) mit $\xi = v(\tau)$ genommen.

Bemerkung. Werden in Satz 2 für $t \in \,]0, T]$ und $g \in W_t$ alle Funktionen

$$F(t, g, \cdot) : D_t \to E$$

als quasimonoton wachsend vorausgesetzt, so haben natürlich auch die Funktionen in (3) diese Eigenschaft (und zwar beide). Der oben geführte Beweis zeigt, dass so starke Voraussetzungen in Satz 2 nicht notwendig sind.

Anwendung von Satz 2 zum Beweise des Satzes 1. Es seien die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Für $0 < t \le T$ setzen wir

$$D_t = \{v(t), w(t)\}, \quad W_t = \{v\,|_{[0,t]}, w\,|_{[0,t]}\},$$

und wir definieren $F(t,\cdot,\cdot): W_t \times D_t \to E$ durch

$$F(t,g,\xi) = \int_0^t k(t,s,g(s))ds + f(t,\xi) \quad (g \in W_t, \xi \in D_t).$$

Dann gelten alle Voraussetzungen des Satzes 2, also folgt (die Satz 1 und Satz 2 gemeinsame Behauptung) $v(t) \ll w(t)$ $(0 \leq t \leq T)$.

Bemerkung. Es wäre interessant, Zusammenhänge des obigen Satzes 2 mit den Resultaten aus [1] - [5] zu untersuchen.

Literatur

[1] Karol Baron und Peter Volkmann, *Characterization of quasi-monotonicity by means of functional inequalities.* Sem. LV, Nr. 22, 5 pp. (2005), http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv, DOI:10.5445/IR/1000003621

[2] Gerd Herzog und Peter Volkmann, *Quasimonotonicity and functional inequalities.* Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput. **47**, 293-296 (2018).

[3] Peter Volkmann, *Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. **127**, 157-164 (1972), DOI:10.1007/BF01112607

[4] —, *Funktionalungleichungen in topologischen Vektorräumen.* Sem. LV, Nr. 12, 4 pp. (2002), http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv, DOI:10.5445/IR/492002

[5] —, *Quasimonotonicity as a tool for differential and functional inequalities.* Inequalities and Applications 2010, herausgegeben von Catherine Bandle et al., International Series of Numerical Mathematics 161, Springer Basel, 269-273 (2012), DOI: 10.1007/978-3-0348-0249-9_21

[6] —, *Ein Vergleichssatz für Integralgleichungen.* KITopen, 3 pp. (2016), DOI:10.5445/IR/1000061837

M. Antoni, Institut für Mathematik, Universität Kassel, 34132 Kassel, Deutschland
mantoni@mathematik.uni-kassel.de

G. Herzog, Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland
gerd.herzog2@kit.edu

P. Volkmann, Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland