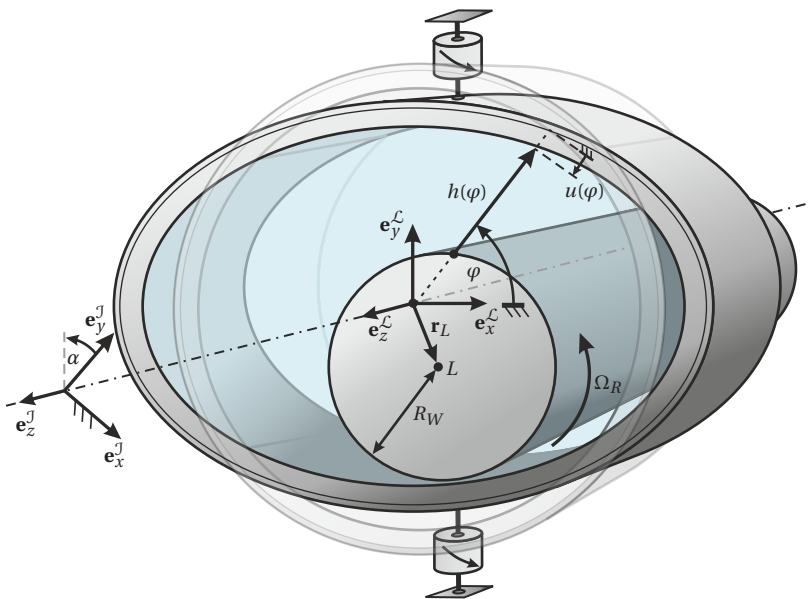


KAI UWE BECKER

Dynamisches Verhalten hydrodynamisch gelagerter Rotoren unter Berücksichtigung veränderlicher Lagergeometrien





Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung -
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

Abbildung Titelseite: Prinzipskizze eines verformbaren hydrodynamischen Gleitlagers.

Dynamisches Verhalten hydrodynamisch gelagerter Rotoren unter Berücksichtigung veränderlicher Lagergeometrien

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

von der
KIT-Fakultät für Maschinenbau
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Kai Uwe Becker

Tag der mündlichen Prüfung:
Hauptreferent:
Korreferent:

10. Dezember 2019
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann
a.o. Univ.-Prof. Dr. techn. Fadi Dohnal

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik in der Abteilung für Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

An erster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann für die fachliche Betreuung und für das mir entgegengebrachte Vertrauen während meiner Zeit als Doktorand meinen Dank aussprechen. Hervorheben möchte ich insbesondere die mir zugesprochene wissenschaftliche Freiheit, die es mir nicht nur gestattete, die verschiedensten Themengebiete zu vertiefen, sondern mir auch den Besuch zahlreicher Konferenzen und Seminare ermöglichte.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn a.o. Univ.-Prof. Dr. Fadi Dohnal für die Übernahme des Koreferats, dem damit verbundenen Gedankenaustausch sowie den wertvollen Anmerkungen zur vorliegenden Arbeit.

Ich bedanke mich darüber hinaus bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe, deren Lehrveranstaltungen mein bis heute anhaltendes Interesse an der Mechanik geweckt haben.

Den ehemaligen Professoren des Instituts, Jörg Wauer, Walter Wedig und Jens Wittenburg, möchte ich meinen Dank für ihr nach wie vor andauerndes Engagement aussprechen. Die stets konstruktiven und wertvollen Rückmeldungen, u. a. im Rahmen unserer Institutsseminare, empfand ich stets als Bereicherung und ich hoffe, dass sie sich noch viele Jahre um den wissenschaftlichen Nachwuchs kümmern werden.

Ich danke weiterhin allen aktuellen aber auch ehemaligen Kolleginnen und Kollegen des Teilinstituts Dynamik/Mechatronik. Das Arbeitsklima war stets entspannt sowie von enger Zusammenarbeit und einer regen Diskussionskultur geprägt. Namentlich nennen möchte ich hierbei Benedikt Wiegert und Jens Deppler, die mir als Betreuer meiner Bachelor- und Masterarbeit stets mit Rat und Tat zur Seite standen sowie Ulrich Römer, der mich fünf Jahre lang als seinen Büronachbar ausgehalten hat und dessen stets wertvolle Ratschläge mir fehlen werden.

Den guten Seelen unseres Sekretariats, Frau Gelsok, Frau Höllig, Frau Volz und Frau Windbiel, danke ich herzlich für die Unterstützung in sämtlichen organisatorischen Angelegenheiten und der damit verbundenen Entlastung für die wissenschaftlichen Mitarbeiter im Arbeitsalltag. Ohne ihr Zutun würde das Institut nur halb so rund laufen.

Ein besonderer Dank gilt vor allem Olga Drozdetskaya und Tim Leister, die mich nicht nur bei meinem Boykott der KIT-Mensa unterstützten, sondern in den vergangenen fünf Jahren auch zu sehr guten Freunden geworden sind. Die beiden haben mich sowohl in fachlicher als auch privater Hinsicht immer unterstützt und damit nicht nur meine Zeit am Institut verschönert, sondern auch maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Weiterhin möchte ich mich bei den Kollegen aus dem Fachbereich der Technischen Dynamik der Universität Kassel bedanken. Neben Herrn Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler zählen hierzu Simon Bäuerle, Felix Boy und Robert Fiedler, mit denen ich im Rahmen zahlreicher Seminare, Konferenzbesuche sowie gemeinsamer Urlaube spannende, teils fachbezogene Diskussionen führen durfte und die im Laufe der Jahre ebenfalls zu sehr guten Freunden geworden sind.

Zu den wichtigsten Personen, bei denen ich mich herzlich bedanken möchte, zählt meine beste Freundin und Tanzpartnerin Miriam Bartkowiak. Wir teilen Freud und Leid und verbringen so viel Zeit miteinander, dass sie zu einem Eckpfeiler meines Lebens geworden ist. Unser gemeinsamer Sport ist das beste Ventil zum Abbau von arbeitsbedingtem Frust und hat mir stets geholfen, neue Energie zu tanken. Die unvermeidbaren Durststrecken während der Ausarbeitung dieser Arbeit waren daher meist nur von kurzer Dauer.

Ohne die Unterstützung meiner Familie wäre diese Arbeit natürlich keineswegs möglich gewesen. Deswegen möchte ich meinen Eltern und meinem Bruder für die bedingungslose Liebe, Unterstützung, Aufopferung und ihr ununterbrochenes Interesse an meinem Leben während der letzten 29 Jahre danken. Ihr seid die Menschen, mit denen ich meine Erfolge teile, die mich in schweren Zeiten aufbauen und ohne die mein Leben nur halb so schön wäre. Ich liebe euch von ganzem Herzen und hoffe, dass diese paar Zeilen in etwa ausdrücken, wie dankbar ich bin, euch in meinem Leben zu haben.

Ein großer Dank gilt natürlich allen Korrekturlesern, mit deren Hilfe (hoffentlich) alle Tippfehler eliminiert werden konnten.

Zu guter Letzt danke ich allen übrigen Freunden und Bekannten, die mich, auch wenn sie nicht namentlich genannt wurden, stets unterstützt und motiviert haben und mein Leben bereichern.

Karlsruhe, den 11. Dezember 2019
Kai Uwe Becker

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluss hydrodynamischer Gleitlager unterschiedlicher Geometrien auf das dynamische Verhalten eines Rotorsystems untersucht. Da eine auf Linearisierung beruhende Betrachtung meist nur einen begrenzten Einblick in das Systemverhalten bietet, wird ein Zugang über eine systematische Lösungsverfolgung des nichtlinearen Systems mit entsprechender Berücksichtigung auftretender Bifurkationen gewählt. Ein solches Vorgehen erfordert ein geeignetes Lösungsverfahren zur Näherung des durch die Reynoldsgleichung beschriebenen Fluiddrucks, welches sich sowohl durch ein schnelles Konvergenzverhalten als auch durch eine möglichst rechenzeiteffiziente Implementierung auszeichnet.

Aufgrund verschiedenster, teilweise kombinierter Anregungsmechanismen wird die Untersuchungsmethodik um eine Beschreibung von quasi-periodischem Lösungsverhalten erweitert. Die Entwicklung eines hierfür geeigneten Verfahrens sowie dessen implementierungstechnische Umsetzung ist gerade im Bereich der Rotordynamik neuartig und stellt zusammen mit zugehörigen Anwendungsbeispielen einen großen Teil der vorliegenden Arbeit dar.

Da die Schwingungsamplituden eines Rotorsystems in der Praxis aufgrund einer möglichen Beeinträchtigung des Betriebs einen gewissen Toleranzbereich nicht überschreiten dürfen, werden die Auswirkungen verschiedener Ausführungen eines Radialgleitlagers mit oval-förmigem Querschnitt auf das Systemverhalten untersucht. Es werden hierbei sowohl unwuchtfreie als auch unwuchtbehaftete Rotoren untersucht, für die sich in Abhängigkeit verschiedener Systemparameter signifikante Verbesserungen im Vergleich zur Lagerung mit klassischen, zylinderförmigen Gleitlagern zeigen. Dies äußert sich sowohl in erweiterten Stabilitätsgebieten vorliegender Ruhelagen als auch einer Amplitudenreduktion der ursprünglich auftretenden Schwingungen, sogar in Bereichen mit kombinierten Anregungsmechanismen.

Es zeigt sich, dass die Möglichkeiten zur Unterdrückung der auftretenden Schwingungen durch eine solche Maßnahme auf bestimmte Parameterbereiche begrenzt sind, weswegen der Einfluss einer zusätzlichen harmonischen Variation der Lagergeometrie untersucht wird. Das im Vorfeld betrachtete Gleitlager mit oval-förmigen Querschnitt dient hierfür als Ausgangspunkt. Motiviert durch die Theorie der Parameter-Antiresonanzen kann durch eine solche Variation je nach Erregungsfrequenz sowohl eine Verbesserung aber auch eine Verschlechterung des Systemverhaltens beobachtet werden, was sich in Form einer Reduktion oder aber einer Erhöhung der auftretenden Schwingungsamplituden des Rotors äußert. Eine während des Betriebs systematisch veränderte Geometrie des Radialgleitlagers offenbart somit ein großes Potential hinsichtlich der Schwingungsreduktion des durch die Lager abgestützten Rotorsystems.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Kurzfassung	iii
Notation	ix
Symbolverzeichnis	xvi
Abkürzungsverzeichnis	xvii
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.3 Zielsetzungen der Arbeit	5
1.4 Aufbau der Arbeit	6
2 Methodische Grundlagen	9
2.1 Grundzüge der Stabilitätstheorie	9
2.1.1 Definitionen	9
2.1.2 Stabilität stationärer Lösungen	11
2.2 Näherung stationärer Lösungen und Pfadverfolgung	13
2.2.1 Lösungsverfahren für Ruhelagen und periodische Lösungen	14
2.2.2 Pfadverfolgung stationärer Lösungen	16
2.2.3 Verzweigungen stationärer Lösungen	17
2.3 Beschreibung von quasi-periodischem Verhalten	18
2.3.1 Grundlagen	19
2.3.2 Synchronisation	23
2.3.3 Approximationsverfahren	24
2.3.4 Anwendungsbeispiel	31
3 Modellierung hydrodynamisch gelagerter Rotoren	43
3.1 Übersicht	43
3.1.1 Aufbau und Submodelle	44
3.1.2 Gleitlagerkonzept	46
3.2 Hydrodynamischer Fluidfilm	47
3.2.1 Reynoldsgleichung	47
3.2.2 Lösungsanforderungen	49

3.2.3	Lagerkräfte	51
3.2.4	Dimensionslose Notation	52
3.2.5	Vereinfachung mit Hilfe des Kurzlageransatzes	54
3.3	Lagerschale	54
3.3.1	Balkenmodell	55
3.3.2	Dimensionslose Notation	59
3.4	Elastischer Rotor	60
3.4.1	Bewegungsgleichungen des Laval-Rotors	60
3.4.2	Dimensionslose Notation	63
4	Lösungsverfahren und Implementierungsstrategie	67
4.1	Näherungslösung der Reynoldsgleichung	67
4.1.1	Lösungsverfahren	67
4.1.2	Beurteilung des Näherungsverfahrens	71
4.2	Lagerkräfte	77
4.2.1	Angepasstes Integrationsverfahren	77
4.2.2	Vergleichende Betrachtung der Auswertung der Lagerkräfte	79
5	Einfluss der Lagergeometrie auf das dynamische Verhalten des Rotors	83
5.1	Modellierungsüberblick	84
5.1.1	Bewegungsgleichungen und relevante Parameter	84
5.2	Dynamisches Verhalten des unwuchtfreien Rotors	87
5.2.1	Einführendes Beispiel zur Lösungsverfolgung	87
5.2.2	Stationäre Lösungen und deren Bifurkationen	90
5.2.3	Einsetzende Selbsterregung - Stabilität der Ruhelage	100
5.3	Auswirkungen statischer Unwucht	106
5.3.1	Modellierung über Spektralsystem	106
5.3.2	Stationäre Lösungen und deren Bifurkationen	108
6	Einfluss einer harmonisch variierten Lagergeometrie	119
6.1	Einführendes Beispiel zur Stabilisierung mittels Parametererregung	120
6.1.1	Bewegungsgleichungen und Spektralsystem	120
6.1.2	Simulationsergebnisse für das homogene System	122
6.1.3	Simulationsergebnisse für das inhomogene System	126
6.2	Modellierungsüberblick	131
6.2.1	Bewegungsgleichungen	131
6.2.2	Beschreibung über Spektralsystem	132
6.3	Unterdrückung selbsterregter Schwingungen des unwuchtfreien Rotors	133
6.3.1	Vorüberlegungen	133
6.3.2	Ausgewählte Ergebnisse zur Unterdrückung selbsterregter Schwingungen	134
7	Zusammenfassung	141
7.1	Erkenntnisse zur verwendeten Methodik	141

7.2	Erkenntnisse zum untersuchten Gleitlagerkonzept	142
7.3	Offene Fragen und weiterführende Problemstellungen	143
A	Zusätzliche Untersuchungsergebnisse	145
A.1	Lösungsverläufe des unwuchtfreien Rotors mit konstanter Lagergeometrie	146
A.1.1	Abhängigkeit vom Massenverhältnis κ	146
A.1.2	Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl N_φ der Drucknäherung .	147
A.2	Stabilitätskarten des unwuchtfreien Rotors mit konstanter Lagergeometrie	148
A.2.1	Abhängigkeit vom Massenverhältnis κ	148
	Literaturverzeichnis	149
	Eigene Publikationen	159

Notation

Generelle Anmerkung zur Darstellung von Dezimalzahlen:

Die Darstellung der Dezimaltrennzeichen erfolgt in der vorliegenden Arbeit stets über eine Punktnotation gemäß $\frac{1}{2} = 0.5$, wohingegen die Kommanotation als Trennzeichen für Matrizeneinträge u. Ä. verwendet wird.

Allgemein

a	Skalar
\mathbf{a}	Tensor erster Stufe (Vektor)
\mathbf{A}	Tensor zweiter Stufe (i. d. R. mit fett -gedruckten Großbuchstaben)
\underline{a}	Spaltenmatrix, z. B. $\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
\underline{A}	Matrix, z. B. $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$
\mathbf{e}_k	Einheitsvektor $\ \mathbf{e}_k\ = 1$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$	Bezugssysteme (außer \mathcal{O})
$\mathbf{e}_k^{\mathcal{A}}$	Basisvektor des Bezugssystems \mathcal{A}

Konventionen

$\frac{d(\cdot)}{dt} = (\dot{\cdot})$	Differentialoperator bzgl. Zeit t
$\frac{d(\cdot)}{d\tau} = (\cdot)'$	Differentialoperator bzgl. dimensionsloser Zeit τ

Operatoren

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Vektorprodukt
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Dyadisches Produkt
$\text{grad}(\mathbf{a})$	Gradient
$\det(\underline{A})$	Determinante
$\mathcal{O}(\cdot)$	Größenordnung, asymptotische obere Schranke

Spezielle Größen

\mathbf{I}	Einheitstensor zweiter Stufe
\underline{I}	Einheitsmatrix
δ_{kl}	Kronecker-Delta
\mathcal{J}	Inertialsystem
i	imaginäre Einheit ($i = \sqrt{-1}$)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor (Tensor zweiter Stufe)
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor (Tensor zweiter Stufe)

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole

$a_{k,i}^F$	i -ter Eintrag der Hauptdiagonalen des LGS der k -ten axialen Ansatzfunktion der Drucknäherung
A	Querschnittsfläche der als Biegebalken modellierten Lagerschale
$\underline{A}, \underline{A}(t)$	Jacobi-Matrix der Linearisierung der rechten Seite eines Differentialgleichungssystems
$b_{k,i}^F$	i -ter Eintrag der unteren Nebendiagonale des LGS der k -ten axialen Ansatzfunktion der Drucknäherung
B	Lagerbreite
$\underline{c}^{(k)}(\theta_2), \hat{\underline{c}}^{(k)}(\hat{\theta}_2)$	Spektralkomponenten, resultierend aus Projektion auf harmonische Ansatzfunktionen $\cos(k\theta_2)$
$c_{k,i}^F$	i -ter Eintrag der oberen Nebendiagonale des LGS der k -ten axialen Ansatzfunktion der Drucknäherung
c_W	Steifigkeit der Welle des biegeelastischen Rotors
C	initiales Lagerspiel ($= R_0 - R_W$)
$\underline{C}\underline{Y}$	linearer Anteil des Spektralsystems
d	Dicke der Lagerschale
d_a	äußere viskose Dämpfung des Rotors
\bar{d}_a	dimensionslose äußere viskose Dämpfung des Rotors
\bar{D}	mittlere Abweichung der Spektralkomponenten
$e_{\Pi}^{N_{\bar{z}}}$	lokale Abweichung der Drucknäherung $\Pi^{(N_{\bar{z}})}$ von Referenzlösung
$E_{\Pi}^{N_{\bar{z}}}$	globales Fehlermaß basierend auf $e_{\Pi}^{N_{\bar{z}}}$
$e_{Q_{k,i}}$	lokale Abweichung der diskreten Werte $Q_{k,i}$ vom definierten Referenzwert
$E_{Q_k}^{N_{\varphi}}$	globales Fehlermaß basierend auf $e_{Q_{k,i}}$
E	Elastizitätsmodul

$f_{k,i}^F$	i -ter Eintrag der rechten Seite des LGS der k -ten axialen Ansatzfunktion der Drucknäherung
$f_{p,x}^{\mathcal{L}}, f_{p,x}$	dimensionslose Lagerkraft in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung
$f_{p,y}^{\mathcal{L}}, f_{p,y}$	dimensionslose Lagerkraft in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung
$\tilde{f}_{p,x}, \tilde{f}_{p,y}$	durch Trapez-Verfahren genäherte Lagerkraft $f_{p,x}$ bzw. $f_{p,y}$
$\underline{f}_{\text{ana}}$	durch analytische Integration auszuwertende Anteile der rechten Seite einer DGL im Zuge der Projektion auf die Ansatzfunktionen
$\underline{f}_{\text{FFT}}$	durch FFT-Verfahren auszuwertende Anteile der rechten Seite einer DGL im Zuge der Projektion auf die Ansatzfunktionen
$\underline{f}_0(\alpha)$	Anteil der statischen Last in den Bewegungsgleichungen des Rotors
$\underline{f}_p(z)$	Anteil der Lagerkräfte in den Bewegungsgleichungen des Rotors
$\underline{f}_U(\tau)$	Anteil der statischen Unwucht in den Bewegungsgleichungen des Rotors
\mathbf{F}_p	Lagerkraft (vektoriell)
$F_{p,x}^{\mathcal{L}}, F_{p,x}$	Komponente der Lagerkraft in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung ($= \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$)
$F_{p,y}^{\mathcal{L}}, F_{p,y}$	Komponente der Lagerkraft in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung ($= \mathbf{F}_p \cdot \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$)
F_0	charakteristische Kraft bzw. statische Lagerlast
g	Gravitationskonstante des Schwerfelds der Erde
h, h_0	Schmierspalthöhe/Fluidfilmdicke (Näherung erster Ordnung: h_0)
H	dimensionslose Schmierspalthöhe/Fluidfilmdicke ($= h_0/c$)
H_i	diskrete Werte der Schmierspalthöhe H an den Stützstellen φ_i
\underline{H}	Hill'sche Matrix oder Hill-Matrix
$\underline{H}^{(N)}$	Näherung der Hill'schen Matrix
I	Flächenträgheitsmoment der als Biegebalken modellierten Lagerschale
m_k	Floquet-Multiplikatoren
m	Masse der Wellenzapfen an den Lagerstellen
M	Hauptmasse des Rotors
\overline{M}	Mittelwert der Spektralkomponenten
$N_{\bar{z}}$	Anzahl axialer Ansatzfunktionen für Drucknäherung
N_{φ}	Stützstellenanzahl in Umfangsrichtung für Drucknäherung

N_φ^+	Anzahl zusätzlicher Stützstellen im Rahmen des angepassten Trapez-Verfahrens
$p, p(\varphi, z)$	Fluiddruck im Gleitlager
$p^*, p^*(\varphi, z)$	physikalisch sinnvoller Fluiddruck im Gleitlager
$P_k(\bar{z})$	axiale Ansatzfunktionen k -ter Ordnung der Drucknäherung
$\underline{P}_k^{\theta_1}, \underline{P}_k^{\theta_1}$	auf Torusmannigfaltigkeit beruhende Poincaré-Abbildung
$Q_k(\varphi)$	zur Ansatzfunktion $P_k(\bar{z})$ zugehöriger Koeffizient des Ansatzes $\Pi^{(N_{\bar{z}})}$
$Q_{k,l}$	diskrete Werte von Q_k an den Stützstellen φ_l
\mathbf{r}_L	Ortsvektor des Wellenzapfenmittelpunkts L im Lager
\mathbf{r}_W	Ortsvektor des Wellendurchstoßpunkts W der Hauptmasse des Rotors
R_0	Innenradius der Lagerschale im unverformten Zustand
R_W	Radius des Wellenzapfens
$R_\Pi^{(N_{\bar{z}})}$	Residuum der Reynoldsgleichung für axialen Ansatz der Ordnung $N_{\bar{z}}$
$\underline{\xi}^{(k)}(\theta_2), \hat{\underline{\xi}}^{(k)}(\hat{\theta}_2)$	Spektralkomponenten, resultierend aus Projektion auf harmonische Ansatzfunktionen $\sin(k\theta_2)$
S_m	modifizierte Sommerfeldzahl
$\underline{S}(Y)$	nichtlinearer Anteil des Spektralsystems
t	Zeit
T, T_k	Periodendauer einer periodischen Lösung
$\underline{u}(\theta)$	Torusfunktion
$\underline{u}(\omega t)$	quasi-periodische Funktion mit Frequenzbasis ω
$\underline{u}^{(N)}$	Ansatz der Ordnung N für Torusfunktion \underline{u}
\mathbf{u}	Verschiebungsfeld der Lagerschale
\mathbf{u}^*	Ansatz für Verschiebungsfeld \mathbf{u} der Lagerschale
u, v, w	Koordinaten des Verschiebungsfeldes bzgl. des zylind. Koordinatensystems
\bar{u}	radiale Verschiebung der Mittellinie des Balkenmodells der Lagerschale
\hat{u}	radiale Verschiebung der Lagerschale an den Aktorpunkten
U	dimensionslose radiale Verschiebung der Lagerschale ($= \bar{u}/C$)
\hat{U}	dimensionslose radiale Verschiebung der Lagerschale an den Aktorpunkten ($= \hat{u}/C$)

U_m	Mittelwert der dimensionslosen radialen Verschiebung \hat{U} der Lagerschale an den Aktopunkten
U_{el}	Elastische Energie der Lagerschale
\bar{v}	tangentiale Verschiebung der Mittellinie des Balkenmodells der Lagerschale
\underline{W}_k	Ansatzpolynome für Kollokationsverfahren zur Näherung periodischer Lösungen
$x_L^{\mathcal{L}}, x_L$	Auslenkung des Wellenzapfens im Lager in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung
$x_W^{\mathcal{L}}, x_W$	Auslenkung des Rotors in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung
X_L	dimensionslose Auslenkung des Wellenzapfens im Lager ($= x_L/c$)
X_W	dimensionslose Auslenkung des Rotors ($= x_W/c$)
$y_L^{\mathcal{L}}, y_L$	Auslenkung des Wellenzapfens im Lager in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung
$y_W^{\mathcal{L}}, y_W$	Auslenkung des Rotors in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung
Y_L	dimensionslose Auslenkung des Wellenzapfens im Lager ($= y_L/c$)
Y_W	dimensionslose Auslenkung des Rotors ($= y_W/c$)
\underline{Y}	Zustandsgrößen des Spektralsystems in Matrixform
\bar{z}	dimensionslose axiale Koordinate im Gleitlager ($= 2z/B$)
\underline{z}	allgemeine Darstellung der Zustandsgrößen eines Differentialgleichungssystems
$\underline{z}^*, \underline{z}^*(t)$	stationäre Lösungen eines Differentialgleichungssystems
$\Delta \underline{z}, \Delta \underline{z}(t)$	Störungsgrößen der Lösung eines Differentialgleichungssystems
\underline{z}_p^*	Prädiktorschritt des Kollokationsverfahrens
\underline{z}_{k+1}^*	Korrektorschritt des Kollokationsverfahrens

Griechische Symbole

α	statischer Lastwinkel
$\hat{\alpha}$	Stärke der Fremderregung des van-der-Pol Oszillators
Γ	dimensionslose Wellennachgiebigkeit
γ	Kurzlagerparameter
γ_s	dimensionslose Unwuchtstärke

δ	relative Amplitude der Parametererregung im Beispiel gekoppelter Oszillatoren
δ_P	relative Amplitude der Geometrievariation des Gleitlagers
η	allgemeine dimensionslose Erregerfrequenz
η_{Laval}^*	auf Ω_R bezogene Eigenkreisfrequenz des starr gelagerten Laval-Rotors
η_P	dimensionslose Erregerfrequenz der Geometrievariation der Lagerschale (bezogen auf die Drehfrequenz Ω_R des Rotors)
ϱ, θ_k	Toruskoordinaten oder auch Winkelkoordinaten
κ	Massenverhältnis von Wellenzapfen zu Hauptmasse des Rotors ($= 2m/M$)
λ_k	Eigenwerte einer Jacobi-Matrix
$\Phi(t)$	Fundamentalmatrix
μ	dynamische Viskosität des Fluids
ν, ν_U, ν_P	zweite, i. d. R. dimensionslose Basisfrequenz bei quasi-period. Näherung (Index U für Unwucht- und Index P für Parametererregung)
ν_{FFT}	Frequenz des FFT-Spektrums
$\Xi_l, \hat{\Xi}_l$	Projektionen der rechten Seite einer DGL auf harmonische Ansatzfunktionen ψ_l bzgl. θ_1
Ξ_l^{FFT}	Durch FFT-Verfahren genährte Projektionen Ξ_l
Π	dimensionsloser Druck des Fluids
$\Pi^{(N_z)}$	Ansatz zur Drucknäherung mit N_z axialen Ansatzfunktionen
$\Pi_i^{(N_z)}$	Semi-diskrete Druckwerte $\Pi^{(N_z)}$ an den Stützstellen φ_l
$\underline{\Pi}^{(N_z)}$	Matrixdarstellung aller semi-diskreten Druckwerte $\Pi_i^{(N_z)}$
ρ_k	Floquet-Exponenten
σ	reziproker Lagerlastparameter
τ	dimensionslose Zeit
φ	Winkelcoordinate im Gleitlager
φ, φ_l	Stützstellen des Finite-Differenzen-Verfahrens zur Drucknäherung
$\Delta\varphi$	Schrittweite des Finite-Differenzen-Verfahrens zur Drucknäherung
φ^+	erweiterte Stützstellen-Menge
ψ, ψ_k	Ansatzfunktion(en) für spektrale Projektion
ψ_R	Phasenwinkel des Rotors ($= \Omega_R t$)

$\bar{\omega}$	dimensionsloser Drehzahlparameter
$\bar{\omega}_{\text{krit}}$	kritischer Wert des Drehzahlparameters mit Stabilitätsverlust der Ruhelage (Grenzdrehzahl)
$\bar{\omega}_{\text{krit}}^U$	Wert des Drehzahlparameters, der einer Unwuchterregung mit der Eigenkreisfrequenz des starr gelagerten Laval-Rotors entspricht (unwuchtkritische Drehzahl)
Ω_R	Dreh- oder Kreisfrequenz des Rotors
$\Omega_{\text{Fluid}}, \Omega_p$	Definitionsbereich der Reynoldsgleichung
Ω_{p^-}	Unterdruckbereich der Reynoldsgleichung
(Ω, ω)	Frequenzbasis quasi-periodischer Funktionen

Abkürzungsverzeichnis

DGL	Differentialgleichung
FD	Finite-Differenzen, z. B. FD-Verfahren
FFT	Fast-Fourier-Transformation
H	Hopf-Bifurkation
LGS	Lineares Gleichungssystem
LPC	Limit-Point-Cycle: Sattelpunkt von Grenzzyklen
NS	Neimark-Sacker-Bifurkation
PDGL	partielle Differentialgleichung
period.	periodisch oder periodische
SWT	Lösungsverfahren basierend auf der Shermann-Morrison-Woodburry-Formel und des Thomas-Algorithmus

1. Einleitung

Die Auswahl geeigneter Lagerungskonzepte spielt eine essentielle Rolle für die Entwicklung, Auslegung und Konstruktion vieler technischer Systeme aus den unterschiedlichsten Industriebereichen. Je nach Anwendungsgebiet/-art kommen verschiedene Konzepte zum Einsatz, um den entsprechend definierten Anforderungen zu genügen. Die Klasse der hydro- und aerodynamischen Gleitlager spielt hierbei eine essentielle Rolle, da diese in zahlreichen Bereichen Vorteile gegenüber alternativen Lagerungskonzepten, wie beispielsweise Wälzlager, aufweisen. Der zugrunde liegende Effekt, den sich diese Lagerungsarten zu Nutze machen, besteht in einem durch Relativbewegung erzeugten Druckfeld in einem eingebrachten Fluid, wobei dieses sowohl in flüssiger Form (hydrodynamische Ausführung) als auch in Gasform (aerodynamische Ausführung) vorliegen kann. In dieser Arbeit beschränken sich die Untersuchungen auf die Klasse hydrodynamischer Radialgleitlager, im Folgenden lediglich als Gleitlager bezeichnet, welche u. a. in Turboladern, bei der Kurbelwellenlagerung oder bei äußerst schweren Rotoren, wie beispielsweise Gasturbinen, zum Einsatz kommen. Wie jedes technische Bauteil stellen auch Gleitlager lediglich einen Kompromiss zwischen den zu erfüllenden Funktionen und den damit in Kauf genommenen Nachteilen dar. Der Einsatz erfordert demnach eine präzise Auslegung der relevanten Komponenten, welche ein fundiertes Wissen über die im Gleitlager stattfindenden Vorgänge sowie deren Einfluss auf das dynamisch Verhalten des Systems voraussetzt.

1.1. Motivation

Im Zuge von theoretischen aber auch experimentellen Untersuchungen ergeben sich zahlreiche Vor- aber auch Nachteile, die der Einsatz von Gleitlagern mit sich bringt. Typischerweise werden neben relativ hohen zulässigen Drehzahlen die hohe Tragfähigkeit, geringer Verschleiß, geringer Bauraum oder auch der geringe Wartungsaufwand als Vorteile dieser Lagerart angeführt (siehe [46]).

Nichtsdestotrotz ist der Einsatz von Gleitlagern ebenso mit unerwünschten Effekten verbunden. Ein wesentlicher Nachteil, welcher im Fokus der vorliegenden Arbeit steht, ist das hochgradig nichtlineare Verhalten, welches für das Auftreten von unerwünschten Schwingungen im Betrieb verantwortlich sein kann. Die Ursache hierfür lässt sich auf die komplexe Interaktion zwischen dem Fluid und den übrigen Lagerbestandteilen zurückführen.

Diese als besonders kritisch einzustufenden Auswirkungen der Fluid-Struktur-Interaktion können zu stark anwachsenden Schwingungen des Gesamtsystems führen, was nicht nur ein Komfortproblem im Sinne der Geräuschentwicklung darstellt, sondern unter Umständen auch den sicheren und zuverlässigen Betrieb gefährden kann. Dies rechtfertigt den nicht unerheblichen Aufwand, der mit der Erforschung der zugrundeliegenden Vorgänge einhergeht, gerade im Hinblick auf eine gezielte Überprüfung möglicher Anpassungen und Veränderungen bereits existierender Gleitlagerausführungen.

1.2. Stand der Forschung

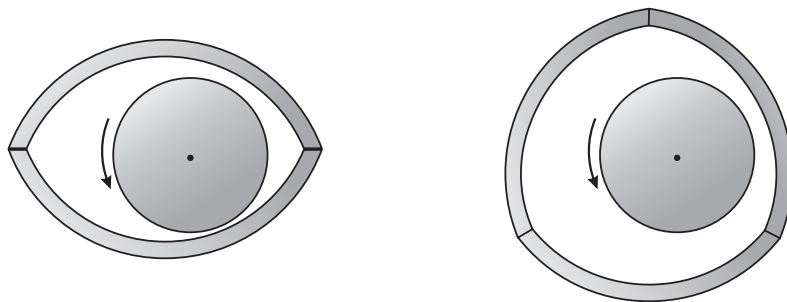
Das grundlegende Verständnis der Vorgänge in hydrodynamischen Gleitlagern ist weitestgehend vorhanden und deckt sich von Seiten der Theorie mit den experimentellen Erkenntnissen (vgl.[46]). Die wohl einfachste Realisierung eines Radialgleitlagers besteht dabei aus einer zylindrisch gestalteten Lagerschale mit einer darin rotierenden, runden Welle. Schon in diesem einfachen Fall lassen sich für bestimmte Betriebszustände unerwünschte Schwingungen feststellen, deren Ursache in der erwähnten Fluid-Struktur-Interaktion und der daraus resultierenden Selbsterregung des Systems liegt. In der Literatur wird dieser Fall oft als „oil-whirl“ oder „oil-whip“ bezeichnet (siehe [26, 56]).

Im Gegensatz zum Konzept eines starren zylindrischen Gleitlagers mit kreisrundem Querschnitt finden sich in heutigen technischen Anwendungen weitaus komplexere Ausführungen, die das Ziel einer für den Betrieb sinnvollen Veränderung des dynamischen Verhaltens verfolgen.

Die meisten Ideen beruhen dabei im Wesentlichen auf einer Veränderung der Lagergeometrie in Relation zur zylindrischen Ausführung. Neben formtechnisch unterschiedlich gestalteten, aber während des Betriebs unveränderlichen Lagerprofilen finden sich ebenso auch Konzepte mit zusätzlich eingebrachten, beliebig gearteten Elementen, welche die Geometrie des Lagers in Abhängigkeit des Betriebszustandes entweder passiv oder sogar aktiv beeinflussen können. Im Folgenden findet sich eine Übersicht verschiedener Realisierungen aus den zuvor genannten Kategorien.

Gleitlager mit konstanten, nicht-kreisrunden Querschnittsgeometrien. Diese Kategorie umfasst die Typen von Gleitlagern, die eine nicht-zylindrische und unveränderliche geometrische Form aufweisen.

Hierzu zählen verschiedene Konzepte, bei denen die Lagerschale typischerweise in mehrere Segmente bzw. Laufflächen unterteilt ist. Diese Segmente haben i. d. R. die Querschnittsform eines Kreisbogens und können in Anzahl, Positionierung sowie Orientierung im Lager variieren. Typische Vertreter dieser Klasse sind das sog. Zitronenlager, welches seiner Bezeichnung entsprechend ein zitronenförmiges Querschnittprofil aufweist, oder aber das Dreiflächenlager. Prinzipskizzen der zugehörigen Querschnitte dieser beiden Lagerarten können Abbildung 1.1 entnommen werden. Die zwei bzw. drei Laufflächen werden dabei je nach Anwendung, Rotorart und Belastung auf unterschiedliche Weisen relativ zueinander platziert.



(a) Prinzipskizze eines Zitronenlagers

(b) Prinzipskizze eines Dreiflächenlagers

Abbildung 1.1.: Querschnitt verschiedener Gleitlagergeometrien.

In der Literatur finden sich hierzu zahlreiche Arbeiten, die sich mit der Beschreibung und Untersuchung einzelner Ausführungen von Zitronenlagern [35, 44, 51, 78] oder aber von Dreiflächenlagern [12, 24] befassen. Im Fokus dieser Arbeiten stehen neben einer geeigneten Beschreibung des sich einstellenden Druckverlaufs vor allem die Auswertung linearisierter Größen wie Steifigkeit und viskoser Dämpfung.

Ein systematischer Vergleich bzw. eine Gegenüberstellung verschiedenartiger Querschnittsgeometrien findet sich weiterhin in den Sachbüchern von FRENE ET AL. [26] oder von LANG UND STEINHILPER [46] sowie in zahlreichen weiteren Veröffentlichungen zu hydrodynamischen [2, 25, 29] aber auch aerodynamischen Gleitlagern [11, 65]. Im Fokus dieser Arbeiten steht der Vergleich hinsichtlich verschiedener Aspekte, wozu neben Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften auch der Einfluss auf die Stabilität einzelner Lösungen im rotordynamischen Kontext zählen. Es werden hierbei die Einflüsse verschieden vieler Segmente sowie deren Positionierungen im Lager untersucht. Wie sich dabei zeigt, weisen Gleitlager, deren Querschnitt vom Kreisprofil abweicht¹, ein besonders vorteilhaftes Verhalten hinsichtlich der Ruhelagenstabilität auf, besonders im Fall schwach belasteter Rotoren².

Gleitlager mit passiv anpassender Geometrie. Im Gegensatz zur vorherigen Kategorie fallen hierunter Ausführungen von Gleitlagern, welche die Eigenschaften der Lagerung durch das gezielte Einbringen von beweglichen, verschiebbaren sowie elastischen oder visko-elastischen Elemente verändern.

Ein klassisches Beispiel ist dabei durch das Konzept der Kippsegmentlager (vgl. [26]) gegeben. Ähnlich des im vorherigen Teilabschnitt geschilderten Aufbaus wird auch hier das Lager in mehrere Segmente unterteilt, die allerdings nicht fest stehen, sondern (zumindest teilweise) drehbar im Lager verbaut werden. Dies gestattet eine Änderung der Orientierung der einzelnen Segmente basierend auf dem vorherrschenden Fluiddruck während des Betriebs.

¹in der englischsprachigen Literatur oft als „noncircular journal bearings“ bezeichnet

²im Grenzfall statisch unbelastete Rotoren

Da es sich hierbei um zusätzliche Elemente handelt, die sich in ihrer Positionierung oder Orientierung nach dem Zustand des Systems richten, wird hierfür die Bezeichnung einer *passiv* anpassenden Geometrie verwendet.

Neben der Ausführung des Kippsegmentlagers finden sich in der Literatur auch andere Vorschläge, die auf einer Einbringung zusätzlicher beweglicher Elemente oder Segmente beruhen. So wird von CHASALEVRIS UND DOHNAL [13–15] beispielsweise ein Gleitlager mit einem visko-elastisch gelagerten, translatorisch verschiebbaren Teilsegment vorgeschlagen. Dies eignet sich zur gezielten Schwingungsreduktion im Rotorsystem und zeigt sich besonders beim Resonanzdurchlauf als äußerst vorteilhaft.

Eine direkte, aktive Einflussnahme auf die Lagergeometrie während des Betriebs ist in den genannten Fällen allerdings nicht möglich.

Aktuierte Gleitlager mit aktiv anpassbarer Geometrie. Im Hinblick auf die zuvor aufgegriffenen Lager mit passiv anpassender Geometrie bietet sich folgerichtig die aktive Beeinflussung der Lagergeometrie während des Betriebs als zusätzliche Maßnahme an. Diese im Allgemeinen unter dem Überbegriff der aktuierten Gleitlager zusammengefassten Konzepte bieten umfassendere Möglichkeiten als die passiven Varianten. Ein ausführlicher Überblick zum Themenfeld der aktuierten Gleitlager findet sich in der Arbeit von SANTOS [70], in der die Errungenschaften jüngster Zeit aufgezeigt werden.

Es finden sich hierbei zahlreiche Konzepte, die auf unterschiedlichste Weisen den hydrodynamischen Fluidfilm aktiv beeinflussen, um so eine Verbesserung des Rotorverhaltens im Sinne einer Schwingungsreduktion zu erzielen.

In den Arbeiten von PRZYBYLOWICZ [67] oder TÜMA ET AL. [90] wird die als starr angenommene zylindrische Lagerschale durch geeignete Aktoren während des Betriebs translatorisch in eine oder mehrere Richtungen verschoben.

Weitere Konzepte sind z. B. in den Arbeiten von SANTOS ET AL. [36, 71], DECKLER ET AL. [17] oder WU ET AL. [99] zu finden, in denen aktuierte Kippsegmentlager vorgeschlagen und untersucht werden. Im Gegensatz zu der im vorherigen Teilabschnitt erwähnten Ausführung können in diesen Fällen die Positionen der Lagerungspunkte (oder wahlweise auch die Orientierungen) einzelner Kippsegmente durch geeignete Aktoren verändert werden, um so die Eigenschaften des Gleitlagers gezielt zu beeinflussen.

Eine andere Herangehensweise findet sich in den Arbeiten von CHASALEVRIS UND DOHNAL [16] sowie von PFAU ET AL. [61, 63]. Diese setzen auf die radiale Verschiebung einzelner Lagersegmente, wobei diese selbst nicht drehbar gelagert sind. Als grundlegender Mechanismus wird in diesen Fällen zudem eine zusätzliche Anregung des Systems durch entsprechende harmonische Variationen der Verschiebungen der einzelnen Lagersegmente angestrebt. Mit Hilfe der dadurch erzielten Parametererregung können Ruhelagen in andernfalls instabilen Parameterbereichen wieder stabilisiert werden. Dieses Vorgehen steht dabei im Kontext der Theorie der sog. Parameter-Antiresonanzen (vgl. [89]) steht.

Ein eher abweichendes Konzept aus dem Bereich der aktuierten Gleitlager findet sich dagegen in den Arbeiten von KRODKIEWSKI UND SUN [41, 42, 80]. Hier besteht ein Teil der sonst starren Lagerschale aus einem flexiblen, elastischen Element, dessen geometrische Form durch eine anliegende, interne Hydraulikkammer aktiv angepasst werden kann.

1.3. Zielsetzungen der Arbeit

Alle in Abschnitt 1.2 aufgeführten Quellen belegen einen positiven Einfluss verschiedener Lagergeometrien auf das dynamische Systemverhalten, wobei unterschiedliche Aspekte, wie auftretende Selbsterregung, Dissipationseffekte etc. im Fokus der jeweiligen Untersuchungen stehen. Die potentiellen Vorteile der aufgeführten Konzepte sind somit belegt und bieten Raum für neue Ideen hinsichtlich der Ausführung von Gleitlagern mit dem Ziel der Verbesserung des dynamischen Rotorverhaltens.

Im Fokus dieser Arbeit steht daher ein neues Konzept eines aktuierten Gleitlagers welches zur Lagerung eines möglichst einfach gehaltenen Rotorsystems verwendet wird. Die grundlegende Idee liegt hierbei in der elastischen Verformung einer kontinuierlichen, initial zylindrischen Lagerschale durch beliebig geartete Aktoren (vgl. Prinzipskizze in Abbildung 1.2). Die dadurch realisierbaren geometrischen Veränderungen beeinflussen direkt den tragenden Fluidfilm und zielen damit auf eine Verbesserung des dynamischen Verhaltens des gelagerten Rotorsystems ab.

Eine effiziente Untersuchung kann hierbei durch den Einsatz einer systematischen, rechnergestützten Lösungsverfolgung sowie Bifurkationsanalyse gewährleistet werden. Dieses Vorgehen erfordert zwar zusätzlichen Aufwand hinsichtlich Modellierung und Implementierung, liefert dafür aber umfassendere Ergebnisse und Tendenzen gegenüber der rein linearen Betrachtungsweise, wie sie im Bereich der Lager- und Rotordynamik üblicherweise zum Einsatz kommt. So beschäftigen sich nur wenige Arbeiten mit detaillierten Untersuchungen dieser Art, allen voran die von BOYACI [9] und BAUM [5], wobei Letztere im Bereich aerodynamischer Gleitlager anzusiedeln ist.

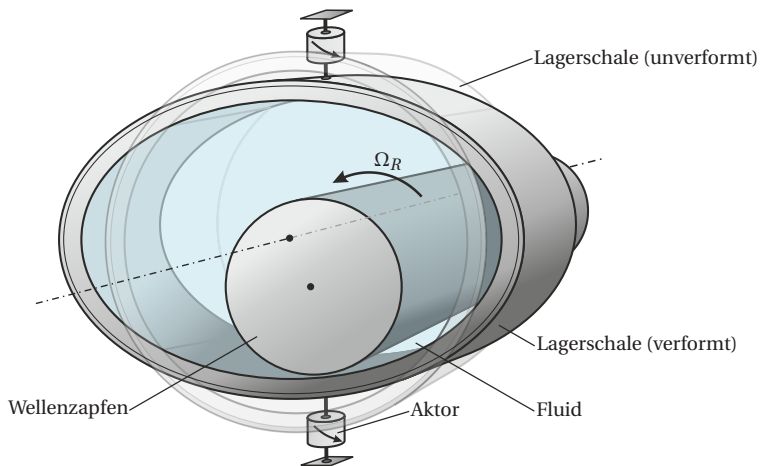


Abbildung 1.2.: Konzept eines verformbaren, hydrodynamischen Gleitlagers in Anlehnung an [6].

Die Ziele dieser Arbeit umfassen daher neben dem Aufbau möglichst einfacher Modelle zur Beschreibung der Vorgänge innerhalb des Gleitlagers und des damit verknüpften Rotors auch eine effiziente Implementierung hinsichtlich des späteren Einsatzes verschiedener rechnergestützter Näherungsverfahren. Darauf aufbauend werden Parameterstudien zur Ermittlung des Einflusses einzelner Parametergrößen auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems durchgeführt. Ziel ist hierbei die Erfassung möglicher Konfigurationen, die eine Reduktion oder sogar Unterdrückung auftretender, unerwünschter Schwingungen gestatten.

1.4. Aufbau der Arbeit

Da im Fokus der vorliegenden Arbeit die systematische Untersuchung des Einflusses des neuen Gleitlagerkonzepts steht, werden zum besseren Verständnis die zugrunde liegenden Modelle und Methoden sowie die rechnergestützten Untersuchungen und die daraus gewonnenen Erkenntnisse sequentiell aufbereitet. In den sich an die Einleitung anschließenden Kapiteln werden daher folgende Themen dargelegt:

- In **Kapitel 2** werden die für das Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen aufbereitet. Diese befassen sich vorwiegend mit der methodischen Vorgehensweise zur Untersuchung dynamischer Systeme.
Im Vordergrund stehen hierbei die grundlegenden Aspekte der Stabilitätstheorie sowie Verfahren zur systematischen Verfolgung stationärer Lösungen in Abhängigkeit einzelner Systemparameter.
Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf der Untersuchung quasi-periodischer Lösungen, da diese in der entsprechenden Standardliteratur eher selten bis gar nicht behandelt werden. Das Kapitel endet mit einem Anwendungsbeispiel zur quasi-periodischen Näherung.
- In **Kapitel 3** finden sich die zur Modellierung des hydrodynamisch gelagerten Rotor-systems notwendigen Grundlagen aus den Bereichen der Fluid-dynamik und der technischen Mechanik sowie die darauf aufbauende Modellbildung. Ausgehend von den drei Submodellen *Lagerschale*, *Fluid* und *Rotor* wird letztlich das entsprechende Gesamtmodell aufgestellt.
- Auf Basis der Modellierung wird in **Kapitel 4** ein Näherungsverfahren zur Lösung der fluidbeschreibenden Gleichungen vorgestellt. Der Fokus liegt hierbei auf der Eignung zur Implementierung im Sinne einer rechnergestützten Untersuchung, welche durch entsprechende Fehlerabschätzungen sowie Rechenzeitstudien validiert wird.
- Der erste Ergebnisteil in **Kapitel 5** zeigt die Resultate der rechnergestützten Simulationen hinsichtlich des stationären Bewegungsverhaltens des Rotors in Abhängigkeit von dessen Drehzahl. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf Phänomenen der Selbsterregung ohne und mit Berücksichtigung einer statischen Unwucht.

- **Kapitel 6** beginnt mit einem einleitenden Beispiel zum Thema Stabilisierung durch Parametererregung und greift dieses Konzept im Anschluss bei der Untersuchung möglicher Auswirkungen einer zusätzlichen Variation der Gleitlagergeometrie während des Betriebs auf. Der Fokus liegt hier auf der Erhöhung der für das Rotorsystem zulässigen Drehzahl im Hinblick auf eine Vermeidung selbsterregter Schwingungen.
- Abschließend findet sich in **Kapitel 7** eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Erkenntnisse sowie eine Auflistung offener Fragestellungen sowie weiterer potentieller Forschungsthemen.

2. Methodische Grundlagen

Bevor die physikalisch motivierte Modellierung eines hydrodynamisch gelagerten Rotor-systems dargelegt wird, werden im nachfolgenden Kapitel die für das Verständnis der Arbeit notwendigen Grundlagen zur Untersuchung dynamischer Systeme aufgearbeitet.

Auf die Grundlagen der Kinematik und Kinetik sowie der darauf aufbauenden Schwingungstheorie wird dabei weniger eingegangen, da diese im Wesentlichen als bekannt vorausgesetzt werden. Für eine Einarbeitung in besagte Themengebiete wird an dieser Stelle auf die Fachliteratur von HAGEDORN [32, 33], MAGNUS ET AL. [50], WAUER [96] und WITTENBURG [98] verwiesen.

Der Fokus der nachfolgend präsentierten Theorie liegt im Wesentlichen auf den Grundlagen der dynamischen Stabilitätstheorie sowie dem methodischen Vorgehen zur Näherung und Verfolgung stationärer Lösungen in Abhängigkeit eines beliebigen Systemparameters, wobei Letzteres im Zusammenhang mit der Theorie der Lösungsverzweigung¹ steht. Die hierzu empfohlene Fachliteratur stammt von MÜLLER [55], HAGEDORN [31], KUZNETSOV [45] sowie MARX UND VOGT [52].

Die im Zuge der Untersuchung dynamischer Systeme üblicherweise verwendeten Verfahren beschränken sich i. d. R. auf lediglich zwei mögliche Lösungstypen: Ruhelagen und periodische Lösungen. Dies erweist sich in den meisten Fällen als ausreichend. Als Erweiterung hierzu werden in diesem Kapitel die Grundlagen zum Verständnis von quasi-periodischem Systemverhalten aufgearbeitet, welche u. a. von SAMOILENKO [69] ausführlich beschrieben werden. Basierend auf den Arbeiten von SCHILDER [72, 73, 75] wird ein Verfahren zur effizienten Näherung quasi-periodischer Lösungen vorgestellt, welches einen erweiterten Zugang zur Beschreibung des Verhaltens dynamischer Systeme gestattet.

2.1. Grundzüge der Stabilitätstheorie

2.1.1. Definitionen

Als Ausgangspunkt der Stabilitätsuntersuchung dient das i. d. R. aus der Modellbildung resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}, t), \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Wird eine zugehörige Lösung $\underline{z}^*(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\underline{z}^*(t = t_0) = \underline{z}_0$ betrachtet, so stellt sich zwangsläufig die Frage nach der Stabilität dieser Lösung. Der Begriff

¹auch Bifurkation genannt

Stabilität bezeichnet dabei die Eigenschaft, dass andere Lösungen, die in einer näheren Umgebung von \underline{z}_0 mit ähnlichen Anfangsbedingungen starten, sich nicht beliebig weit von $\underline{z}^*(t)$ entfernen können oder sogar für den Grenzfall $t \rightarrow \infty$ auf $\underline{z}^*(t)$ zustreben (Begriff der asymptotischen Stabilität). Eine saubere Definition dieses Sachverhalts ist durch die Stabilitätsdefinition nach LJAPUNOV gegeben:

Definition 2.1: Ljapunov-Stabilität [31]

Die Lösung $\underline{z}^*(t)$ mit $\underline{z}^*(t = t_0) = \underline{z}_0$ ist stabil, wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass für $\underline{z}(t)$ gilt

$$\|\underline{z}(t) - \underline{z}^*(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad \text{sofern} \quad \|\underline{z}(t = t_0) - \underline{z}_0\| < \delta(\varepsilon)$$

erfüllt ist.

Im Zuge der Stabilitätstheorie hat sich die Einführung einer Störungsgröße $\Delta \underline{z}(t)$ gemäß

$$\underline{z}(t) = \underline{z}^*(t) + \Delta \underline{z}(t) \tag{2.2}$$

etabliert, welche die Abweichung eines beliebigen Zeitverlaufs $\underline{z}(t)$ von der Lösung $\underline{z}^*(t)$ beschreibt. Mit Hilfe der Störungsgröße kann die ursprüngliche Differentialgleichung (2.1) auf die zugehörige Störungsdifferentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}^*(t) + \Delta \underline{z}(t), t) - \underline{f}(\underline{z}^*(t), t) \tag{2.3}$$

gebracht werden, welche die zeitliche Entwicklung besagter Störung beschreibt (vgl. [55]). Die Lösung $\underline{z}^*(t)$ wird in der transformierten Gleichung (2.3) durch die triviale Lösung $\Delta \underline{z} = \underline{0}$ der Störungsgröße beschrieben. Die Stabilitätseigenschaften der trivialen Lösung sind dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit direkt auf die zugehörige Lösung $\underline{z}^*(t)$ übertragbar (Satz von HARTMANN-GROBMAN [34]), woraus sich aus Definition 2.1 das Stabilitätskriterium für die triviale Lösung $\Delta \underline{z} = \underline{0}$ und damit auch für $\underline{z}^*(t)$ ergibt:

$$\|\Delta \underline{z}(t = t_0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\Delta \underline{z}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Neben der Stabilität wird darüber hinaus noch der Begriff der Attraktivität eingeführt:

Definition 2.2: Attraktivität [31]

Eine Lösung $\underline{z}^*(t)$ wird attraktiv genannt, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass folgender Zusammenhang erfüllt ist:

$$\|\underline{z}(t = t_0) - \underline{z}_0\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{z}(t) - \underline{z}^*(t)\| = 0.$$

Dies lässt sich ebenso auf die entsprechenden Größen der Störungsdifferentialgleichung übertragen:

$$\|\Delta \underline{z}(t = t_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta \underline{z}(t)\| = 0.$$

Es ist hierbei anzumerken, dass eine Lösung attraktiv sein kann, ohne stabil zu sein.

Zur Vervollständigung der Grundbegriffe hinsichtlich Stabilität fehlen noch folgende Definitionen:

Definition 2.3: Asymptotische Stabilität [31]

Ist eine Lösung $\underline{z}^*(t)$ stabil und attraktiv, so wird diese als asymptotisch stabil bezeichnet.

Definition 2.4: Instabilität [31]

Ist eine Lösung $\underline{z}^*(t)$ nicht stabil, so wird diese als instabil bezeichnet.

2.1.2. Stabilität stationärer Lösungen

Wird die Störungsdifferentialgleichung (2.3) um die triviale Lösung $\Delta \underline{z} = \underline{0}$ linearisiert, so ergibt sich das i. d. R. nicht autonome System erster Näherung in $\Delta \underline{z}(t)$

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}} \bigg|_{\underline{z}=\underline{z}^*(t)}}_{=\underline{A}(t)} \Delta \underline{z}(t), \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Delta \underline{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

mit der an der Stelle $\underline{z} = \underline{z}^*(t)$ ausgewerteten Jacobi-Matrix $\underline{A}(t)$ von $\underline{f}(\underline{z}, t)$. Inwieweit das linearisierte System nun Aussagen über die Stabilität der Lösung des eigentlichen (i. d. R. nichtlinearen) Systems zulässt, ist im nachfolgenden Satz aufgeführt:

Satz 2.5: Stabilität / Instabilität nach der ersten Näherung [55]

Ist die triviale Lösung des linearen Systems (2.4)

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}} \bigg|_{\underline{z}=\underline{z}^*(t)} \Delta \underline{z}(t)$$

asymptotisch stabil (oder instabil), so ist die triviale Lösung des nichtlinearen Systems (2.3)

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}^*(t) + \Delta \underline{z}(t), t) - \underline{f}(\underline{z}^*(t), t)$$

und damit auch die Lösung $\underline{z}^*(t)$ asymptotisch stabil (oder instabil).

Diese Zusammenhänge gelten dabei für jeden beliebigen Lösungstyp, solange die entsprechende Linearisierung unter Kenntnis der Lösung $\underline{z}^*(t)$ vorgenommen und das System somit in der Form von Gleichung (2.4) angegeben werden kann.

Stabilität bei konstanter Jacobi-Matrix des linearisierten Systems. Dieser Fall tritt bei der Betrachtung einer Ruhelage ($\underline{z}^*(t) = \text{konst.}$) autonomer Systeme auf, für den sich eine lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten ergibt:

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \underline{A} \Delta \underline{z}(t), \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \underline{A} = \text{konst.}, \Delta \underline{z} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.5)$$

Die Stabilität der trivialen Lösung kann direkt mit Hilfe der n Eigenwerte λ_k mit $k = 1, \dots, n$ der Jacobi-Matrix angegeben werden, welche sich aus dem Eigenwertproblem

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \tag{2.6}$$

ergeben (vgl.[55]):

- Die triviale Lösung ist *asymptotisch stabil*, wenn sämtliche Eigenwerte einen negativen Realteil aufweisen:

$$\Re(\lambda_k) < 0, \forall k \in [1, \dots, n].$$

- Die triviale Lösung ist *instabil*, wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil aufweist:

$$\Re(\lambda_k) > 0 \text{ für mind. ein } k \in [1, \dots, n].$$

Als Alternative zur direkten Auswertung der zugehörigen Eigenwerte sei an dieser Stelle das Routh-Hurwitz-Kriterium¹ [31] genannt, welches einen weniger umständlichen Zugang zur Ermittlung der Stabilität der trivialen Lösung des linearisierten Systems bietet.

Stabilität bei periodischer Jacobi-Matrix des linearisierten Systems. Wird die Stabilität einer periodischen Lösung $\underline{z}^*(t) = \underline{z}^*(t + T)$ mit Periodendauer $T > 0$ untersucht, so ergibt sich für die Störungsdifferentialgleichungen erster Näherung normalerweise ein lineares System mit periodischen Koeffizienten bzw. periodischer Jacobi-Matrix²:

$$\frac{d}{dt} \Delta \underline{z}(t) = \underline{A}(t) \Delta \underline{z}(t) \quad \text{mit} \quad \underline{A}(t) = \underline{A}(t + T). \tag{2.7}$$

Die Beurteilung der Stabilität der trivialen Lösung dieses linearen Systems erfolgt in diesem Fall über die Auswertung einer für die lineare Theorie typischen Fundamentalmatrix $\underline{\Phi}(t)$, wobei deren Anfangsbedingungen üblicherweise als $\underline{\Phi}(t = 0) = \underline{I}$ gewählt werden. Mit Hilfe dieser Fundamentalmatrix lässt sich jede Lösung des linearen Differentialgleichungssystems (2.7) in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen $\Delta \underline{z}_0 = \Delta \underline{z}(t = 0)$ angeben:

$$\Delta \underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t) \Delta \underline{z}_0. \tag{2.8}$$

Wird im Zuge der Störungsdifferentialgleichung der Term $\Delta \underline{z}_0$ als anfängliche Störung interpretiert, so liefert

$$\Delta \underline{z}(T) = \underline{\Phi}(T) \Delta \underline{z}_0 \tag{2.9}$$

die Störung nach einer Periode der Dauer T . Die Relation der Störung $\Delta \underline{z}(T)$ zu $\Delta \underline{z}_0$ entscheidet hierbei über ein mögliches Auf- oder Abklingen besagter Störung und ist damit

¹verkürzt auch nur Hurwitz-Kriterium genannt

²Dieser Fall kann ebenso auch für eine Ruhelage eines nicht-autonomen Systems mit periodischen Koeffizienten auftreten.

repräsentativ für die Stabilität der trivialen Lösung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich unter der Annahme einer Normalform

$$\Delta \underline{z}(T) = m \Delta \underline{z}_0 \tag{2.10}$$

ein zugehöriges Eigenwertproblem formulieren (siehe [53]):

$$(\Phi(T) - mI) \Delta \underline{z}_0 = \underline{0}. \tag{2.11}$$

Die skalare Konstante m entscheidet hierbei über das auf- oder abklingende Verhalten der initialen Störung und definiert sich über die Eigenwerte der Matrix $\Phi(T)$, welche auch als Monodromie-Matrix bezeichnet wird. Die Eigenwerte m_k mit $k = 1, \dots, n$ dieser Matrix sind die sog. Floquet-Multiplikatoren.

Handelt es sich um die Stabilitätsbeurteilung einer periodischen Lösung, so tritt stets ein Floquet-Multiplikator $m_1 = 1$ (auch Hauptmultiplikator genannt) auf, der einer tangentialen Störung entlang der Trajektorie dieser Lösung entspricht. Auf Basis der verbleibenden m_k mit $k = 2, \dots, n$ Multiplikatoren lassen sich folgende Stabilitätskriterien formulieren:

- Gilt für alle verbleibenden Floquet-Multiplikatoren

$$\|m_k\| < 1, \forall k \in [2, \dots, n],$$

so klingen alle zur Lösung $\underline{z}^*(t)$ orthogonal stehenden Störungen ab und die Lösung ist somit *asymptotisch stabil*.

- Erfüllt mindestens ein Floquet-Multiplikator

$$\|m_k\| > 1 \text{ für mind. ein } k \in [2, \dots, n],$$

so ist die Lösung $\underline{z}^*(t)$ *instabil*.

Wird statt einer periodischen Lösung eine Ruhelage eines nicht-autonomen Systems, beispielsweise die triviale Ruhelage der Hill'schen Differentialgleichung, auf ihre Stabilität hin untersucht, so entfällt die Möglichkeit einer tangentialen Störung in Trajektorienrichtung und es existiert kein Hauptmultiplikator. Die zuvor genannten Stabilitätskriterien beziehen in diesem Fall **alle** Floquet-Multiplikatoren m_k mit $k = 1, \dots, n$ mit ein.

Da die Auswertung der Multiplikatoren in den seltensten Fällen analytisch möglich ist, wird an dieser Stelle auf die Arbeit von PELETAN ET AL. [60] verwiesen, die eine Auflistung verschiedener näherungsbasierter Verfahren zur Bestimmung der Stabilität enthält.

2.2. Näherung stationärer Lösungen und Pfadverfolgung

Zur systematischen Untersuchung des stationären Verhaltens schwingungsfähiger Systeme ist eine Bestimmung (oder zumindest Näherung) der zugehörigen Lösungen notwendig. Als Ausgangspunkt dient die allgemeine Form eines autonomen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einem beliebigen skalaren Parameter ξ :

$$\frac{d}{dt} \underline{z}(t) = \underline{f}(\underline{z}, \xi), \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Handelt es sich hierbei um ein lineares System, so lassen sich die zugehörigen stationären Lösungen meist auf analytischem Wege direkt bestimmen. Dies ist allerdings ein Spezialfall, der bei der Modellierung der meisten physikalischen Systeme nur selten auftritt. In der Regel ist hier mit einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem zu rechnen, für welches keine analytisch herleitbare Lösung zu erwarten ist. Aus diesem Grund bedarf es geeigneter Verfahren zur Näherung stationärer Lösungen solcher Systeme, die im Folgenden für den Fall von Ruhelagen und periodischen Lösungen kurz vorgestellt werden. Darauf aufbauend kann die Entwicklung dieser Lösungen für eine Änderung des Parameters ξ mit Hilfe der Verfahren zur Pfadverfolgung (auch Lösungsverfolgung genannt) untersucht werden.

2.2.1. Lösungsverfahren für Ruhelagen und periodische Lösungen

Die im Folgenden präsentierten Lösungsverfahren eignen sich zur Näherung von Ruhelagen und periodischen Lösungen bei vergleichsweise einfacher Implementierung.

Näherung einer Ruhelage durch das Newton-Verfahren. Der bekannteste Ansatz zur Näherung von Ruhelagen (oder auch Fixpunkten) ist das NEWTON-Verfahren, welches in iterativer Form die Lösung \underline{z}^* der Gleichung

$$\underline{f}(\underline{z}^*, \xi) = \underline{0}, \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.13)$$

abschätzt. Hierzu wird $\underline{f}(\underline{z})$ an einer Stelle $\underline{z} = \underline{z}_k$ in einer Taylorreihe der Form

$$\underline{f}(\underline{z}, \xi) = \underline{f}(\underline{z}_k, \xi) + \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{z}} \Big|_{\underline{z}=\underline{z}_k}}_{=\underline{A}_k} (\underline{z} - \underline{z}_k) + \mathcal{O}\left((\underline{z} - \underline{z}_k)^2\right) \quad (2.14)$$

entwickelt. Anstatt der eigentlichen Gleichung (2.13) wird nur der lineare Anteil mit der an der Stelle $\underline{z} = \underline{z}_k$ ausgewerteten Jacobi-Matrix \underline{A}_k gelöst. Mit der aus numerischer Sicht effektiven Einführung eines Korrekturterms $\Delta \underline{z}_k = \underline{z}_{k+1} - \underline{z}_k$ ergibt sich damit das lineare Gleichungssystem

$$\underline{A}_k \Delta \underline{z}_k = -\underline{f}(\underline{z}_k, \xi), \quad (2.15)$$

welches mit Hilfe klassischer Verfahren, z. B. LR-Zerlegung [3], effizient gelöst werden kann. Formal lässt sich das Ergebnis des Iterationsschrittes auch durch

$$\underline{z}_{k+1} = \underline{z}_k - \underline{A}_k^{-1} \underline{f}(\underline{z}_k, \xi) \quad (2.16)$$

angeben. Die so erhaltene Lösung \underline{z}_{k+1} wird anschließend als neuer Startpunkt gewählt und das Verfahren wird wiederholt. So lässt sich die Lösung von Gleichung (2.13) durch eine ausreichend große Anzahl an Iterationen nähern, gesetzt dem Fall, der erste, zu wählende Startpunkt $\underline{z}_k|_{k=0}$ befindet sich in ausreichender Nähe zur Lösung. Auf Basis eines definierten Abbruchkriteriums wird die Iterationsschleife nach einer bestimmten Anzahl

an Ausführungen abgebrochen und liefert so eine Näherung der gesuchten Ruhelage bzw. des Fixpunktes. Ein Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass im Zuge des Verfahrens weiterhin auch die Jacobi-Matrizen \underline{A}_k bestimmt werden, die direkt zur Beurteilung der Stabilität der genährten Ruhelage eingesetzt werden können.

Näherung einer periodischen Lösung durch das Kollokationsverfahren. Zur Näherung periodischer Lösungen (mit Periodendauer T) wird die zugehörige Interpretation als nichtlineares Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{z}^*(t) &= \underline{f}(\underline{z}^*(t), \xi), \quad \underline{z}^*(t=T) - \underline{z}^*(t=0) = \underline{0} \\ \text{mit } \underline{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{z}^* \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad T \in \mathbb{R}_{>0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

verwendet, in der $\underline{z}^*(t)$ die zu nähernde Lösung beschreibt. Im Sinne des Verfahrens wird der Zeitbereich in mehrere Intervalle mit einzelnen Punkten, den sog. Kollokationspunkten, unterteilt, wobei eine angesetzte Näherung die Differentialgleichung an diesen ausgewählten Punkten exakt erfüllen muss (vgl. [40]).

Im ersten Schritt werden die Stützstellen

$$\underline{t} = [t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = t_0 + T] \quad (2.18)$$

zur Unterteilung von $[0, T]$ in N kleinere Zeitintervalle definiert. Pro Intervall werden weitere M (i. d. R. äquidistant) verteilte Punkte

$$t_{k,j} = t_k + \frac{j}{M+1} (t_{k+1} - t_k), \quad j = 1, \dots, M \quad (2.19)$$

eingeführt, welche die Kollokationspunkte auf dem Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$ darstellen. Auf jedem der N Teilintervalle soll das Lösungsverhalten durch ein Polynom M -ten Grades

$$\underline{W}_k(t) = \sum_{s=0}^M \underline{a}_{k,s} \left(\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \right)^s, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.20)$$

mit den noch zu bestimmenden Koeffizienten $\underline{a}_{k,s} \in \mathbb{R}^n$ approximiert werden. Es ergeben sich bei einem n -dimensionalen Differentialgleichungssystem somit nN Polynome mit je $(M+1)$ Koeffizienten, also insgesamt $N(M+1)n$ Unbekannte.

Die einzelnen Polynome \underline{W}_k müssen hierbei folgende Bedingungen erfüllen:

- Stetigkeit der Polynome an den inneren Intervallgrenzen:

$$\underline{W}_k(t = t_{k+1}) = \underline{W}_{k+1}(t = t_{k+1}) \quad \text{für } k = 0, \dots, N-2. \quad (2.21)$$

- Erfüllen der Differentialgleichung an den einzelnen Kollokationspunkten:

$$\left. \frac{d}{dt} \underline{W}_k \right|_{t=t_{k,j}} = \underline{f}(\underline{W}_k, \xi) \Big|_{t=t_{k,j}} \quad \text{für } j = 1, \dots, M \text{ und } k = 0, \dots, N-1. \quad (2.22)$$

- Erfüllen der Randbedingungen des ursprünglichen Randwertproblems:

$$\underline{W}_0(t = t_0) = \underline{W}_{N-1}(t = t_N). \quad (2.23)$$

Somit ergibt sich aus den Gleichungen (2.21) bis (2.23) ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der einzelnen Koeffizienten $\underline{a}_{k,s}$ der angesetzten Polynome. Das Gleichungssystem ist dabei i. d. R. nichtlinear und kann mit dem im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten NEWTON-Verfahren näherungsweise gelöst werden.

Ist die Periodendauer T der periodischen Lösung vorab nicht bekannt, muss das System um eine zusätzliche Phasenbedingung ergänzt werden. Als mögliche Umsetzungen hierfür sind beispielsweise die einfache Komponentenbedingung [43] oder die integrale Phasenbedingung [45] zu nennen.

Als alternative Vorgehensweise bieten sich ebenso Schieß-Verfahren an (vgl. [52]), welche auf der numerischen Integration der eigentlichen Differentialgleichung beruhen. Solange die zu nähernden Lösungen stabil sind, können diese vergleichsweise gut approximiert werden. Handelt es sich dagegen um instabile Lösungen, so gestaltet sich eine Näherung schwierig bis nahezu unmöglich. Im Gegensatz dazu können über das Kollokationsverfahren sowohl stabile als auch instabile periodische Lösungen genähert werden.

2.2.2. Pfadverfolgung stationärer Lösungen

Ist eine stationäre Lösung eines Differentialgleichungssystems für einen bestimmten Parameterwert $\xi = \xi_0$ (näherungsweise) bekannt, so bietet es sich an, die Entwicklung dieser Lösung in Abhängigkeit eben jenes Systemparameters zu untersuchen. An dieser Stelle wird aufbauend auf den vorherigen Ausführungen ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren vorgestellt (siehe [52]). Ausgangspunkt ist ein algebraisches Gleichungssystem der Form

$$\underline{f}(\underline{z}, \xi) = \underline{0}, \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2.24)$$

wie es bei der Bestimmung von Ruhelagen oder nach Anwendung des Kollokationsverfahrens vorliegt. Im Fall des Kollokationsverfahrens entspricht die linke Seite dem aus den Gleichungen (2.21) bis (2.23) gewonnen Gleichungssystem für die Koeffizienten $\underline{a}_{k,s}$.

Ausgehend von einer Lösung \underline{z}^* für $\xi = \xi_0$ existiert unter der Voraussetzung, dass $\underline{f}(\underline{z}^*, \xi_0)$ regulär ist, eine implizite Funktion $\underline{z}^*(\xi)$, die dem Zusammenhang

$$\frac{d}{d\xi} \underline{z}^*(\xi_0) = - \left[\begin{array}{cc} \underline{d}\underline{f}^{-1} & \underline{d}\underline{f} \\ \underline{d}\underline{z} & \underline{d}\xi \end{array} \right]_{\underline{z}=\underline{z}^*(\xi_0)} \quad (2.25)$$

an der Stelle $\xi = \xi_0$ genügt. Auf Basis dieses Zusammenhangs kann eine Abschätzung der gesuchten Funktion $\underline{z}^*(\xi)$ in einem benachbarten Parameterbereich um ξ_0 vorgenommen werden. Die dafür notwendigen Schritte erfolgen durch eine Kombination aus einem geeigneten Prädiktor- sowie eines iterativen Korrektor-Verfahrens:

1. Prädiktor-Schritt:

Ausgehend von einem Startwert ξ_j wird mit definierter Schrittweite $\Delta\xi_j$ über einen Tangentenprädiktor unter Berücksichtigung von Gleichung (2.25) der nächste mögliche Kurvenpunkt extrapoliert:

$$\tilde{z}_P^*(\xi_j + \Delta\xi_j) = \tilde{z}_P^*(\xi_{j+1}) = \frac{d}{d\xi} \tilde{z}^*(\xi_j) \Delta\xi_j + \tilde{z}^*(\xi_j). \quad (2.26)$$

Handelt es sich bei dem Startwert um den ersten Punkt ξ_0 , so kann lediglich der Tangentenprädiktor verwendet werden. Sind hingegen bereits mehrere Kurvenpunkte bekannt, kann durch Hinzunahme weitere Punkte der Prädiktorwert durch geeignete polynomielle Extrapolation eines höheren Grades verbessert werden.

2. Korrektor-Schritt:

Aufgrund seines guten Konvergenzverhaltens und der geringen Rechenzeit bei der Auswertung wird für den Korrektor-Schritt an dieser Stelle das bereits vorgestellte NEWTON-Verfahren gemäß Gleichung (2.16) verwendet:

$$\tilde{z}_{k+1}^*(\xi_{j+1}) = \tilde{z}_k^*(\xi_{j+1}) - \left[\frac{df^{-1}}{d\tilde{z}} \quad \tilde{f} \right] \Bigg|_{\tilde{z}=\tilde{z}_k, \xi=\xi_{j+1}}. \quad (2.27)$$

Als Startpunkt dieses iterativen Verfahrens wird das Ergebnis \tilde{z}_P^* des Prädiktors verwendet. Nach Erreichen der durch ein geeignetes Abbruchkriterium definierten Anzahl an Iterationsschritten ergibt sich die Abschätzung der Lösung $\tilde{z}^*(\xi_{j+1})$ für einen benachbarten Parameterwert ξ_{j+1} .

Zur Rechenzeiterparnis werden häufig nur NEWTON-ähnliche Verfahren als Korrektor eingesetzt, bei denen die Jacobi-Matrix nicht in jedem Iterationsschritt neu ausgewertet wird.

Zusätzlich zu dem vorgestellten Ablauf muss desweiteren eine Schrittweitenkontrolle für $\Delta\xi_i$ sowie eine Überprüfung der Jacobi-Matrizen benachbarter Lösungen erfolgen, um so mögliche Verzweigungsszenarien zu detektieren. Auf weitere Ausführungen dieser Zusammenhänge wird an dieser Stelle allerdings verzichtet und es wird auf die hierzu weiterführende Literatur, u. a. in [52], verwiesen.

2.2.3. Verzweigungen stationärer Lösungen

Bei der Verfolgung einzelner Lösungen eines nichtlinearen Differentialgleichungssystems kann es darüber hinaus zu verschiedenen Verzweigungsmustern in Abhängigkeit des jeweiligen Verfolgungsparameters kommen. Punkte, an denen mehrere Lösungen aufeinandertreffen und somit eine Verzweigung vorliegt, werden auch als Bifurkationspunkte bezeichnet. Für die entsprechenden Grundlagen der Bifurkationstheorie wird auf [45] verwiesen. Darauf aufbauend werden die im Rahmen der Untersuchungsergebnisse dieser Arbeit am häufigsten auftretenden Bifurkationen kurz andiskutiert, wobei die Detektionskriterien für eine Lösungsverfolgung im Vordergrund stehen.

Poincaré-Andronov-Hopf-Bifurkation (kurz: Hopf-Bifurkation). Als entscheidende Bifurkation im Rahmen dieser Arbeit repräsentiert diese die Verzweigung eines Grenzzyklus von einer Ruhelage aus dar.

Wird im Zuge der Lösungsuntersuchung eines autonomen Systems der Form

$$\frac{d}{dt} \underline{z} = \underline{f}(\underline{z}, \xi), \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

mit $n \geq 2$ für $\xi = \xi_0$ eine Ruhelage \underline{z}^* identifiziert, für welche die Jacobi-Matrix

$$\left. \frac{d\underline{f}}{d\underline{z}} \right|_{\underline{z}=\underline{z}^*, \xi=\xi_0}$$

lediglich ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$ mit $\omega_0 \in \mathbb{R}$ hat, welches einen verschwindenden Realteil aufweist und alle verbleibenden Eigenwerte einen Realteil $\neq 0$ haben, so stellt der Punkt (\underline{z}^*, ξ_0) eine Hopf-Bifurkation dar. Von diesem Punkt ausgehend kann sowohl der weitere Verlauf der Ruhelage als auch der hiervon abzweigende Grenzzyklus weiter in Abhängigkeit des Parameters ξ verfolgt werden.

Neimark-Sacker- oder auch Torus-Bifurkation. Die Neimark-Sacker-Bifurkation stellt die Verzweigung einer quasi-periodischen Lösung und eines Grenzzyklus dar. Die Theorie zu Eigenschaften und Beschreibungsmöglichkeiten quasi-periodischer Lösungen wird ausführlich in Abschnitt 2.3 behandelt.

Als Ausgangspunkt dient ebenfalls ein autonomes System der Form (2.28) mit $n \geq 3$, wobei für $\xi = \xi_0$ eine periodische Lösung $\underline{z}^*(t)$ existiert. Werden für diesen Fall gemäß des Eigenwertproblems in Gleichung (2.11) die zugehörigen Floquet-Multiplikatoren m_k ausgewertet und neben dem Hauptmultiplikator $m_1 = 1$ existiert lediglich ein Paar konjugiert komplexer Multiplikatoren $m_{2,3} = \exp(\pm \theta_0 i)$ mit $\theta_0 \in \mathbb{T}$, die auf dem Einheitskreis liegen (also $\|m_{2,3}\| = 1$), so handelt es sich bei der Konstellation $(\underline{z}^*(t), \xi_0)$ um eine Neimark-Sacker-Bifurkation.

Anmerkung: Liegt der Phasenwinkel θ_0 der betreffenden Multiplikatoren bei $\theta_0 = \pi$, so handelt es sich um den Spezialfall einer Periodenverdopplungsbifurkation, in der die ursprüngliche periodische Lösung mit einer periodischen Lösung doppelter Periodendauer zusammentrifft.

2.3. Beschreibung von quasi-periodischem Verhalten

Der Fokus bei der Untersuchung dynamischer Systeme richtet sich üblicherweise auf das lokale Auffinden stationäre Lösungen für bestimmte Parameterkonstellationen. Hierbei werden mit Hilfe der zuvor beschriebenen Verfahren Ruhelagen und/oder periodischen Lösungen bzw. Grenzzyklen abgeschätzt sowie deren Stabilitätseigenschaften untersucht. Handelt es sich allerdings um komplexeres Verhalten, so verbleibt lediglich die Möglichkeit einer Zeitsimulation, um eine etwaige Vorstellung des Systemverhaltens zu erhalten. Hierunter fallen u. a. quasi-periodisches aber auch chaotisches Verhalten.

Ersteres wird im nachfolgenden Abschnitt näher betrachtet, wobei sukzessive die Grundlagen und Grundbegriffe in Bezug auf Quasi-Periodizität bis hin zur Vorstellung eines geeigneten Verfahrens zur Approximation quasi-periodischer Lösungen erläutert werden. Motivieren lässt sich dieser Abschnitt durch die Tatsache, dass in realen Systemen oft kombinierte Anregungsmechanismen (z. B. Fremd- und Selbsterregung) oder gekoppelte Differentialgleichungen vorliegen, was für bestimmte Parameterkonstellationen zu einem quasi-periodischen Lösungsverhalten führen kann.

2.3.1. Grundlagen

Die nachfolgend aufgeführten Grundlagen basieren auf der Fachliteratur von MARX UND VOGT [52], die sich wiederum im Wesentlichen der Terminologie von SAMOILENKO [69] bedient.

„The world is full of periodic and quasi-periodic motions and oscillations. That is multifrequency oscillations.“¹

Mit diesem Zitat als Einstieg wird der prinzipielle Charakter der Quasi-Periodizität treffend erklärt. Es handelt sich um ein schwingendes Bewegungsverhalten, bei dem verschiedene Frequenzen („multifrequency“) auftreten.

Torusfunktionen und quasi-periodische Funktionen. Als Ausgangspunkt wird der p -dimensionale Standardtorus definiert, welcher mit Hilfe der Winkelkoordinaten $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ modulo 2π die Menge

$$\mathbb{T}^p = \{ \underline{\theta} \mid \underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p), \theta_k \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, k = 1, \dots, p \} \quad (2.29)$$

beschreibt. Die Winkelkoordinaten werden alternativ auch als Toruskoordinaten bezeichnet. Der Standardtorus dient normalerweise als Definitionsmenge einer (in diesem Fall reellen) Torusfunktion $\underline{u} : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, die per Definition stetig und 2π -periodisch in den Toruskoordinaten $\theta_1, \dots, \theta_p$ ist:

$$\underline{u}(\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_p) = \underline{u}(\theta_1, \dots, \theta_k + 2\pi, \dots, \theta_p) \quad \text{für } k = 1, \dots, p. \quad (2.30)$$

Als anschauliches Beispiel wird die Torusfunktion

$$u(\theta_1, \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

genannt, welche den 2-dimensionalen Standardtorus \mathbb{T}^2 auf \mathbb{R}^1 abbildet und dabei den Periodizitätsbedingungen genügt:

$$u(\theta_1, \theta_2) = u(\theta_1 + 2\pi, \theta_2), \quad u(\theta_1, \theta_2) = u(\theta_1, \theta_2 + 2\pi).$$

¹Zitat von SAMOILENKO aus [69], Preface, S.vi

Ein für die Näherung quasi-periodischer Lösungen wichtiger Punkt ist durch folgenden Satz gegeben:

Satz 2.6: Satz von Stone-Weierstrass [52]

Jede Torusfunktion $\underline{u} \in C^0(\mathbb{T}^p)$ kann gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden, d.h. es existiert eine Folge trigonometrischer Polynome (\underline{G}_k) , $k = 1, 2, \dots$, mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\underline{u} - \underline{G}_k\| = 0$.

Dieser stellt gerade im Hinblick auf eine geeignete Wahl von Ansatzfunktionen im Zuge eines Approximationsverfahrens einen notwendigen Ausgangspunkt dar.

Mit Hilfe des Begriffs der Torusfunktion lässt sich nun eine Definition von quasi-periodischen Funktionen angeben:

Definition 2.7: Quasi-periodische Funktion [52]

Es sei $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_p) \in \mathbb{R}^p$ eine Zeilenmatrix positiver reeller Zahlen. Die ω_i sind rational unabhängig (inkommensurabel), falls für $\underline{b} \in \mathbb{Z}^p$ der Zusammenhang

$$\sum_{k=1}^p b_k \omega_k = 0$$

nur für die triviale Wahl $\underline{b} = \underline{0}$ gilt.

Eine Funktion $\underline{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der reellen Veränderlichen t mit der Darstellung

$$\underline{f}(t) = \underline{u}(\underline{\omega}t) = \underline{u}(\omega_1 t, \dots, \omega_p t),$$

wobei $\underline{u} \in C^0(\mathbb{T}^p)$ ist, heißt quasi-periodische Funktion. Die verwendete Zeilenmatrix $\underline{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ heißt Frequenzbasis und die Zahlen $\omega_1, \dots, \omega_p$ werden als Basisfrequenzen bezeichnet.

Eine quasi-periodische Funktion ergibt sich somit aus der Kombination einer Torusfunktion \underline{u} und einer entsprechenden Frequenzbasis $\underline{\omega}$. Hierbei ist entscheidend, dass es sich bei den einzelnen Basisfrequenzen ω_k für $k = 1, \dots, p$ tatsächlich um inkommensurable Frequenzen handelt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so lässt sich die Menge der Basisfrequenzen entsprechend reduzieren. Der Sonderfall mit lediglich einer Basisfrequenz wird mit einer periodischen Funktion assoziiert, wohingegen im Fall mit $p > 1$ inkommensurablen Basisfrequenzen von einer quasi-periodischen Funktion gesprochen wird. Als Beispiel wird wieder die Torusfunktion

$$u(\theta_1, \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

betrachtet, die zusammen mit der beispielhaften Frequenzbasis $\underline{\omega} = (1, \pi)$ auf eine quasi-periodische Funktion führt:

$$f(t) = u(\underline{\omega}t) = \cos(t) \sin(\pi t)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft quasi-periodischer Funktionen ist durch folgenden Satz gegeben:

Satz 2.8: Dichtigkeit der quasi-periodischen Funktionen [52]

Die Menge der Werte einer quasi-periodischen Funktion $\underline{f}(t) = \underline{u}(\underline{\omega}t)$ ist dicht in der Menge der Werte der Torusfunktion \underline{u} .

Anschaulich bedeutet Satz 2.8, dass der mit t parametrisierte Orbit von $\underline{f}(t)$ die durch die Torusfunktion \underline{u} beschriebenen Mannigfaltigkeit, auf der er verläuft, dicht ausfüllt.

Quasi-periodische Bewegungen. Nach Einführung der Grundbegriffe werden nun die Grundlagen quasi-periodischer Bewegungen, die als mögliche Lösungen von Differentialgleichungssystemen auftreten können, erläutert. Hierzu wird ein beliebiges (ggf. autonomisiertes) Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}), \quad \underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

betrachtet, wobei die Existenz einer hinreichend glatten quasi-periodischen Lösung

$$\underline{z}^*(t) = \underline{u}(\underline{\omega}t) \quad \text{mit} \quad \underline{z}^*(0) = \underline{z}_0, \quad \underline{u} \in C^r(\mathbb{T}^p), \quad r \geq 1 \quad (2.32)$$

vorausgesetzt wird. Die durch $\underline{z}^*(t)$ mit Startpunkt \underline{z}_0 beschriebene Trajektorie sei kompakt in der Definitionsmenge D , sodass aus Satz 2.8 gefolgert werden kann, dass die Lösungstrajektorie $\underline{z}^*(t)$ aus den Punkten besteht, die durch die Darstellung

$$\underline{z}^* = \underline{u}(\underline{\theta}), \quad \underline{\theta} \in \mathbb{T}^p \quad (2.33)$$

beschrieben werden. Die zu $\underline{u}(\underline{\theta})$ zugehörige Mannigfaltigkeit stellt dabei eine Abbildung des p -dimensionalen Standardtorus dar und wird allgemein hin als Torus oder Torusmannigfaltigkeit bezeichnet, die selbst invariant bzgl. des Flusses des Differentialgleichungssystems (2.31) ist.

Als Modellproblem wird ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\underline{z}} = \underline{f}(\underline{z}, \Omega_1 t, \dots, \Omega_q t), \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^n \quad (2.34)$$

betrachtet. Die reellen Frequenzen Ω_k , $k = 1, \dots, q$ bezeichnen hierbei inkommensurable Erregungsfrequenzen, die beispielsweise durch verschiedene Formen der Fremd- oder Parametererregung in das schwingungsfähige System eingebracht werden. Weiterhin ist \underline{f} eine bzgl. aller Erregerphasen 2π -periodische Funktion, also

$$\underline{f}(\underline{z}, \Omega_1 t, \dots, \Omega_k t, \dots, \Omega_q t) = \underline{f}(\underline{z}, \Omega_1 t, \dots, \Omega_k t + 2\pi, \dots, \Omega_q t) \quad \text{für} \quad k = 1, \dots, q. \quad (2.35)$$

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich das Differentialgleichungssystem unter Hinzunahme entsprechender Toruskoordinaten $\underline{\theta} \in \mathbb{T}^q$ autonomisieren, was auf das autonome Modellproblem führt:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}} &= \underline{f}(\underline{z}, \underline{\theta}) \\ \dot{\underline{\theta}} &= \underline{\Omega} \quad \text{mit} \quad (\underline{z}, \underline{\theta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aufstellen einer Invarianzgleichung. Um quasi-periodische Bewegungen eines dynamischen Systems der Form (2.36) zu approximieren, bietet es sich gerade im Hinblick auf Satz 2.8 an, direkt die Torusmannigfaltigkeit unabhängig von den darauf verlaufenden Trajektorien zu approximieren. Wird unter anderem davon ausgegangen, dass für das Modellproblem eine quasi-periodische Lösung $\underline{z}^*(t)$ mit $p \geq q$ Basisfrequenzen

$$(\underline{\Omega}, \underline{\omega}) = (\Omega_1, \dots, \Omega_q, \omega_{q+1}, \dots, \omega_p) \in \mathbb{R}^p. \quad (2.37)$$

existiert, bietet sich an, nach einer entsprechenden Torusfunktion $\underline{u} : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu suchen, für die der Zusammenhang

$$\underline{z}^*(t) = \underline{u}(\underline{\Omega}t, \underline{\omega}t) \quad (2.38)$$

erfüllt ist. Es wird hierbei explizit zwischen den von außen vorgegebenen q Erregerfrequenzen $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ und den noch unbekanntenen $p - q$ freien Frequenzen $\omega_{q+1}, \dots, \omega_p$ des Systems unterschieden. Entsprechend der gewählten Frequenzbasis wird das Modellproblem (2.36) um weitere $p - q$ Toruskoordinaten erweitert, die gemäß

$$\dot{\theta}_k = \omega_k \quad \text{für } k = q + 1, \dots, p \quad (2.39)$$

mit den freien Frequenzen assoziiert werden. Die aufgrund der gewählten Frequenzbasis eingeführten p Toruskoordinaten $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ können als unterschiedliche Zeitskalen interpretiert werden, sodass sich folgende Darstellung für den zeitlichen Differentialoperator ergibt:

$$\frac{d}{dt} = \dot{\underline{\theta}} \frac{\partial}{\partial \underline{\theta}} = \sum_{j=1}^q \Omega_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=q+1}^p \omega_k \frac{\partial}{\partial \theta_k}. \quad (2.40)$$

Damit lässt sich aus System (2.36) unter Berücksichtigung von Satz 2.8 eine Differentialgleichung zur Beschreibung der Torusfunktion \underline{u} , welche die gesuchte Torusmannigfaltigkeit beschreibt, angeben:

$$\sum_{j=1}^q \Omega_j \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_j} + \sum_{k=q+1}^p \omega_k \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_k} = \underline{f}(\underline{u}, \theta_1, \dots, \theta_q). \quad (2.41)$$

Da es sich hierbei um eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung einer invarianten Torusmannigfaltigkeit handelt, wird diese auch als Invarianzgleichung bezeichnet. Zur eindeutigen Bestimmung einer Lösung, werden weiterhin Randbedingungen benötigt, die sich direkt aus der Forderung (2.30) ergeben:

$$\underline{u}(\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_p) = \underline{u}(\theta_1, \dots, \theta_k + 2\pi, \dots, \theta_p) \quad \text{für } k = 1, \dots, p. \quad (2.42)$$

Eine ausführliche Herleitung der Invarianzgleichung kann [52] entnommen werden.

Poincaré-Abbildung. Ein häufig verwendeter Ansatz zur Unterscheidung periodischer und quasi-periodischer Bewegungen ist die Poincaré-Abbildung, welche die Projektion einer n -dimensionalen Lösungstrajektorie auf eine $(n - 1)$ -dimensionale Hyperfläche beschreibt (siehe [57, 79]). Im Zuge von numerischen Zeitsimulationen ergibt sich daraus zwangsläufig die Stroboskop-Abbildung, bei der es sich um eine diskrete Abfolge der Funktionswerte einer Lösungstrajektorie $\underline{z}^*(t)$ zu festgesetzten Zeitpunkten handelt:

$$\underline{P}_k = \underline{z}^*(t = t_0 + kT). \quad (2.43)$$

Der Systemzustand wird also bei vorher definierter Periodendauer T zu den jeweiligen Zeitpunkten $t_k = t_0 + kT$ mit $k \in \mathbb{N}$ erfasst, um so durch ausreichend viele Auswertungen eine Näherung der Poincaré-Abbildung zu erhalten. Die Aussagekraft eines solchen Vorgehens hängt stark von der Anzahl der ermittelten Punkte ab und erfordert daher verhältnismäßig lange Simulationszeiten.

Der Vorteil der Poincaré-Abbildung besteht darin, dass über Zeitsimulationen leicht Aussagen über den prinzipiellen Charakter einer Lösungstrajektorie getroffen werden können. So ergibt sich für periodische Trajektorien ein Fixpunkt in der Poincaré-Abbildung, wohingegen sich eine quasi-periodische Trajektorie durch eine geschlossene Untermenge äußert (vgl. [45]). Gerade in diesem Fall ist eine ausreichende hohe Anzahl an diskreten Auswertungen von Nöten, um diese verhältnismäßig gut zu approximieren.

Im Zuge der auf einer Torusmannigfaltigkeit basierenden Beschreibung quasi-periodischer Bewegungen ergibt sich mit Hilfe der zugrundeliegenden Torusfunktion eine alternative Methode zur Ermittlung der Poincaré-Abbildung. Wird unter Berücksichtigung der Gültigkeit von Gleichung (2.38) eine mit einer beliebigen Toruskoordinate θ_k assoziierte Periodendauer $T_k = 2\pi/\dot{\theta}_k$ gewählt, so ergibt sich damit

$$\underline{P}^{\theta_k}(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \theta_{k-1}, \dots, \theta_p) = \underline{u}(\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, 0, \theta_{k+1}, \dots, \theta_p) \quad (2.44)$$

als Poincaré-Abbildung in Abhängigkeit der verbleibenden $(p - 1)$ Toruskoordinaten der Torusfunktion \underline{u} (vgl. [52]).

2.3.2. Synchronisation

Die vorangegangene Theorie zielt klar auf die Bestimmung einer Torusmannigfaltigkeit ab, auf der mögliche Lösungstrajektorien des Differentialgleichungssystems verlaufen. Da es sich hierbei nicht zwangsläufig um quasi-periodische sondern auch um periodische Trajektorien handeln kann, ist eine kurze Übersicht zum Effekt der Synchronisation von Nöten, welcher in der englischsprachigen Literatur auch als „Entrainment“ oder „phase-locking“ bezeichnet wird.

Schwingungsfähige Systeme mit mehreren Freiheitsgraden können in diesem Kontext als gekoppelte Oszillatoren interpretiert werden. Eine entsprechende Kopplungsstärke sowie ein Detuning-Parameter, der die Relation der Frequenzen der einzelnen Oszillatoren beschreibt, dienen hierbei als Ausgangspunkt für die nachfolgenden Erläuterungen.

Wird für ein System mit einer existenten Torusmannigfaltigkeit, auf der quasi-periodische Trajektorien verlaufen, die Kopplungsstärke oder der Detuning-Parameter verändert, so

kann es zum Phänomen der Synchronisation kommen, welches dazu führt, dass auf der Torusmannigfaltigkeit nun statt einer quasi-periodischen Trajektorie ein oder mehrere stabile und instabile periodische Trajektorien verlaufen. Der Fluss der Differentialgleichung verläuft nun nicht mehr parallel auf der Mannigfaltigkeit, sodass darauf verlaufende Lösungstrajektorien die Mannigfaltigkeit nicht mehr dicht ausfüllen. Die Mannigfaltigkeit wird aber keineswegs zerstört, sie bleibt erhalten und ist nach wie vor invariant bzgl. des Flusses der zugrundeliegenden Differentialgleichung. Diese Effekt der Synchronisation bleibt dabei in bestimmten Bereichen der Kopplungsstärke und des Detuning-Parameters erhalten. Werden die Übergänge in einen solchen Synchronisationsbereich grafisch in der Kopplung-Detuning-Ebene dargestellt, ergeben sich die aus der Literatur bekannten geometrischen Gebilde der sog. Arnol'd Zungen (siehe [4]).

Diesem Effekt ist hinsichtlich der Aussagekraft von Näherungsverfahren zur Beschreibung von Systemen mit quasi-periodischem Lösungsverhalten eine gewisse Bedeutung beizumessen, worauf im weiteren Verlauf der Arbeit nochmals eingegangen wird.

Detailliertere Ausführungen zum Thema Synchronisation und Arnol'd-Zungen finden sich u. a. in [28, 72, 74].

2.3.3. Approximationsverfahren

Das durch die Gleichungen (2.41) und (2.42) gegebene Randwertproblem ist in den meisten Fällen nicht analytisch lösbar, weshalb mögliche Lösungen zur Beschreibung der Torusmannigfaltigkeit nur näherungsweise bestimmt werden können. Das gewählte Approximationsverfahren basiert auf den von SCHILDER [73, 75] beschriebenen Verfahren und wird im Folgenden für den einfachsten Fall einer quasi-periodischen Bewegung mit $p = 2$ Basisfrequenzen vorgestellt, wobei es sich um eine freie und eine von außen vorgegebene Frequenz handelt (d.h. $q = 1$). Ein solches Szenario findet sich häufig in Systemen, die eine Kombination von Selbsterregung und Parameter- oder Fremderregung aufweisen.

Auf Basis der sich für $p = 2$ ergebenden Invarianzgleichung

$$\Omega_1 \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_2} = \underline{f}(\underline{u}, \theta_1) \quad \text{mit} \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.45)$$

wird nun nach Lösungen der Form $\underline{u}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ gesucht, die den entsprechenden Periodizitätsbedingungen (2.42) genügen. Zur näherungsweisen Bestimmung einer solchen Lösung bieten sich ein Finite-Differenzen-Verfahren, eine Finite-Elemente-Formulierung, ein Kollokationsverfahren oder ein Galerkin-Verfahren gleichermaßen an. Das hier vorgestellte Vorgehen stellt in gewisser Weise eine Kombination aus den beiden letztgenannten Verfahren dar und wird im weiteren Verlauf mit dem Begriff des Spektralsystems assoziiert.

Herleitung des Spektralsystems. In einem ersten Schritt wird ein Galerkin-Verfahren bezüglich der mit der bekannten Erregungsfrequenz Ω_1 assoziierten Toruskoordinate θ_1 angewendet, wobei ein reeller Ansatz N -ter Ordnung mit $N \in \mathbb{N}$ und $N \geq 1$ gewählt wird:

$$\underline{u}^{(N)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^N \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1). \quad (2.46)$$

Gemäß Satz 2.6 stellen dabei die 2π -periodischen Funktionen

$$\underline{\psi}(\theta_1) = [1, \cos(\theta_1), \sin(\theta_1), \dots, \cos(N\theta_1), \sin(N\theta_1)]^T \quad \underline{\psi}: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2N+1} \quad (2.47)$$

eine geeignete Basis zur Beschreibung quasi-periodischer Lösungen dar. Das sich aus dem Ansatz ergebende Residuum

$$R(\underline{u}^{(N)}) = \Omega_1 \frac{\partial \underline{u}^{(N)}}{\partial \theta_1} + \omega_2 \frac{\partial \underline{u}^{(N)}}{\partial \theta_2} - \underline{f}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1) \quad (2.48)$$

wird im Sinne des Galerkin-Verfahrens über ein verallgemeinertes Skalarprodukt der Form

$$\langle x, y \rangle_{\theta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta_1) y(\theta_1) d\theta_1 \quad (2.49)$$

auf die einzelnen Ansatzfunktionen projiziert. Die einzelnen Projektionen

$$\left\langle \underline{f}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1), \psi_l \right\rangle_{\theta_1} = \underline{\Xi}_l, \quad l = 1, \dots, 2N+1 \quad (2.50)$$

der rechten Seite $\underline{f}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1)$ der partiellen Differentialgleichung werden dabei mit $\underline{\Xi}_l$ abgekürzt und entsprechen den bzgl. θ_1 ausgewerteten Fourierkoeffizienten.

Aus den Projektionen des Residuums in Gleichung (2.48) resultiert ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die im Ansatz (2.46) gewählten Koeffizienten $\underline{c}^{(0)}(\theta_2)$, $\underline{c}^{(k)}(\theta_2)$ und $\underline{s}^{(k)}(\theta_2)$:

$$\frac{\omega_2}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \underline{c}^{(0)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \underline{c}^{(1)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \underline{s}^{(1)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \underline{c}^{(N)} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} \underline{s}^{(N)} \end{bmatrix} = -\frac{\Omega_1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{s}^{(1)} \\ \underline{c}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{s}^{(N)} \\ \underline{c}^{(N)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\Xi}_1 \\ \underline{\Xi}_2 \\ \underline{\Xi}_3 \\ \vdots \\ \underline{\Xi}_{2N} \\ \underline{\Xi}_{2N+1} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Mit Hilfe dieses Systems können nun Näherungslösungen für die Invarianzgleichung (2.45) bestimmt werden. Die für eine Lösung gewünschte 2π -Periodizität bzgl. der einzelnen Toruskoordinaten ist für θ_1 per se durch den gewählten Ansatz (2.46) erfüllt, sodass lediglich die Forderung nach Periodizität in θ_2 verbleibt:

$$\underline{c}^{(0)}(\theta_2) = \underline{c}^{(0)}(\theta_2 + 2\pi), \quad \underline{c}^{(k)}(\theta_2) = \underline{c}^{(k)}(\theta_2 + 2\pi), \quad \underline{s}^{(k)}(\theta_2) = \underline{s}^{(k)}(\theta_2 + 2\pi) \quad \text{für } k = 1, \dots, N. \quad (2.52)$$

Zwecks Darstellung bietet es sich an, das explizite Auftreten der bisher noch unbekanntem freien Frequenz ω_2 durch Einführen von $\hat{\theta}_2 = \theta_2/\omega_2$ zu unterbinden, sodass sich aus System (2.51) ein autonomes, i. d. R. nichtlineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{c}^{(0)} \\ \hat{c}^{(1)} \\ \hat{s}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{c}^{(N)} \\ \hat{s}^{(N)} \end{bmatrix}}_{=\underline{Y}(\hat{\theta}_2)} = -\Omega_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{s}^{(1)} \\ \hat{c}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{s}^{(N)} \\ \hat{c}^{(N)} \end{bmatrix}}_{=\underline{C}\underline{Y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ 2\hat{\xi}_2 \\ 2\hat{\xi}_3 \\ \vdots \\ 2\hat{\xi}_{2N} \\ 2\hat{\xi}_{2N+1} \end{bmatrix}}_{=\underline{S}(\underline{Y})}, \quad (2.53)$$

also

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \underline{Y} = -\Omega_1 \underline{C}\underline{Y} + \underline{S}(\underline{Y}) \quad \text{mit} \quad \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n(2N+1) \times 1}, \underline{S} \in \mathbb{R}^{n(2N+1) \times 1}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{n(2N+1) \times n(2N+1)} \quad (2.54)$$

ergibt, welches das Spektralsystem darstellt. Die Zustandsgrößen

$$\underline{Y} = \left[(\hat{c}^{(0)})^T, (\hat{c}^{(1)})^T, (\hat{s}^{(1)})^T, \dots, (\hat{c}^{(N)})^T, (\hat{s}^{(N)})^T \right]^T \quad (2.55)$$

des Spektralsystems werden im Folgenden als Spektralkomponenten bezeichnet.

Zur Näherung der Torusfunktion \underline{u} wird nun das hergeleitete Spektralsystem herangezogen, für welches periodische Lösungen mit noch unbekannter Periodendauer gesucht werden müssen. Als mögliche (numerische) Vorgehensweisen stehen hierbei u. a. Schieß-, Finite-Differenzen- oder Kollokationsverfahren zur Verfügung. Das hergeleitete Spektralsystem stellt zwangsläufig ein System höherer Ordnung verglichen mit den Ausgangsgleichungen (2.36) dar, sodass ein solches Verfahren gerade bei Problemen mit vielen Freiheitsgraden nur begrenzt geeignet ist. Nichtsdestotrotz liefert die vorgestellte Betrachtungsweise sinnvolle Ergebnisse bei der Untersuchung quasi-periodischen Lösungsverhaltens, welches alternativ nur durch entsprechende Zeitsimulationen zu gewinnen wäre. Inwieweit sich aus den Lösungen des Spektralsystems (2.54) nun Schlüsse auf ein mögliches Verhalten der originalen Bewegungsgleichungen (2.36), welche im Folgenden auch Originalsystem genannt werden, ziehen lassen, ist in [52] aufgeführt:

- Für den Fall einer vollständigen Funktionsbasis ($N \rightarrow \infty$) entspricht eine Ruhelage des Spektralsystems einer periodischen Lösung mit der Periodendauer $2\pi/\Omega_1$ des Originalsystems.
- Desweiteren liegt im Falle einer periodischen Lösung des Spektralsystems (mit Periodendauer T_2) eine quasi-periodische Lösung des Originalsystems mit der Frequenzbasis $(\Omega_1, \omega_2 = 2\pi/T_2)$ vor.

Es ist an dieser Stelle nochmals anzumerken, dass die beschriebene Vorgehensweise auf die Approximation einer Mannigfaltigkeit abzielt, auf der die Lösungstrajektorien des Systems verlaufen, nicht aber auf die Approximation der Lösung selbst.

Das Verfahren setzt quasi-periodisches Verhalten voraus, woraus sich die Frage ergibt, inwieweit brauchbare Ergebnisse erzielt werden können, falls die Quasi-Periodizität aufgrund einer in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Synchronisation verloren geht. Details hierzu werden im weiteren Verlauf der Arbeit anhand verschiedener Beispiele diskutiert.

Implementierung des Spektralsystems. Da die notwendigen Projektionen (2.50) bei nichtlinearen Differentialgleichungssystemen meist nicht mehr analytisch angegeben werden können, bedarf es einer entsprechenden implementierungstechnischen Umsetzung. Hierfür bietet sich eine Näherung der Fourierkoeffizienten bzgl. θ_1 aus Gleichung (2.50) durch eine diskrete Fourier-Transformation im Rahmen einer Fast-Fourier-Transformation¹ an. Um eine möglichst effiziente Umsetzung hinsichtlich der Rechenzeit zu erreichen, wird die zu projizierende Funktion in einen analytisch projizierbaren Anteil und einen entsprechenden Rest zerlegt:

$$\underline{f}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1) = \underline{f}_{\text{ana}}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1) + \underline{f}_{\text{FFT}}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1). \quad (2.56)$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Projektionen des ersten Summanden in der Regel ohne größeren Aufwand direkt analytisch durchgeführt werden können, sodass lediglich die Fourierkoeffizienten des Anteils $\underline{f}_{\text{FFT}}$ durch einen diskreten Ansatz der Form

$$\begin{aligned} \underline{\Xi}_{\text{FFT}} &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \underline{f}_{\text{FFT}}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1) \Big|_{\theta_1=m\Delta\theta_1}, \\ \underline{\Xi}_{\text{FFT}} + i \underline{\Xi}_{\text{FFT}}^* &= \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \underline{f}_{\text{FFT}}(\underline{u}^{(N)}, \theta_1) \Big|_{\theta_1=m\Delta\theta_1} e^{-\frac{2\pi m l}{M} i} \quad \text{für } l = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.57)$$

bestimmt werden müssen. Da die Fourierreihe bzgl. der als unabhängiges Argument verwendeten ersten Toruskoordinate θ_1 aufgestellt wird, liegt die entsprechende Grundfrequenz und damit die Abtastrate $\Delta\theta_1$ bei $\Delta\omega_{\text{FFT},\theta_1} = 2\pi/M\Delta\theta_1 = 1$, wobei M die Anzahl der Diskretisierungspunkte bezeichnet. Die maximal im Bezug auf das Argument θ_1 abzubildende Kreisfrequenz $\omega_{\text{FFT},\theta_1}^{\max}$ wird unter Berücksichtigung des Abtasttheorems (vgl. [37]) auf das Doppelte der im Ansatz (2.46) auftretenden höchsten Harmonischen gesetzt: $\omega_{\text{FFT},\theta_2}^{\max} = \pi/\Delta\theta_1 = 2N$. Bei der eigentlichen Implementierung kann auf bereits existierende, etablierte FFT-Algorithmen zurückgegriffen werden, wie beispielsweise solche aus dem kommerziellen Numerik-Programm MATLAB.

Stabilität der durch das Spektralsystem genäherten Lösungen. Im Rahmen der durch das Spektralsystem ermittelten Lösungen stellt sich zwangsläufig die Frage nach deren Stabilität (im Sinne Ljapunovs) und inwieweit diese repräsentativ für die äquivalenten Lösungen des Originalsystems sind. Hierzu werden Ruhelagen und periodische Lösungen des Spektralsystems getrennt voneinander betrachtet.

¹abgekürzt: FFT

Für ermittelte Ruhelagen des Spektralsystems lässt sich über das sog. Hill-Verfahren (vgl. [39]) die Stabilität der zugehörigen periodischen Lösung des Originalsystems abschätzen. In [47, 91] finden sich hierzu die entsprechenden Ausführungen, die im Folgenden auf das Konzept des Spektralsystems angewendet werden.

Wird bei der Herleitung des Spektralsystems ein unendlich-dimensionaler Lösungsansatz der Form

$$\underline{u}^{(\infty)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1) \quad (2.58)$$

verwendet (vgl. Gleichung (2.46)), so ergibt sich daraus das zugehörige unendlich-dimensionale Spektralsystem (vgl. Gleichung (2.54))

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \underline{Y}^{(\infty)} = -\Omega_1 \underline{C}^{(\infty)} \underline{Y}^{(\infty)} + \underline{S}^{(\infty)}(\underline{Y}^{(\infty)}). \quad (2.59)$$

Wird für dieses Spektralsystem eine Ruhelage \underline{Y}_0 identifiziert, so entspricht dies einer periodischen Lösung des Originalsystems. Die Stabilität dieser Lösung kann dabei über die aus dem Spektralsystem gewonnen Informationen bestimmt werden. Durch Aufstellen der zugehörigen Störungsdifferentialgleichungen (vgl. Gleichung (2.3)) und der entsprechenden Linearisierung ergibt sich ein lineares System gewöhnlicher, autonomer Differentialgleichungen in den Abweichungen

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \Delta \underline{Y}^{(\infty)} = -\Omega_1 \underline{C}^{(\infty)} \Delta \underline{Y}^{(\infty)} + \left. \frac{\partial \underline{S}^{(\infty)}}{\partial \underline{Y}} \right|_{\underline{Y}=\underline{Y}_0} \Delta \underline{Y}^{(\infty)}. \quad (2.60)$$

Durch Verwendung des klassischen Exponentialansatzes (vgl. [31]) lässt sich daraus in wenigen Schritten ein unendlich-dimensionales Eigenwertproblem der Form

$$(\underline{H} - s\underline{I}) \underline{r} = \underline{0} \quad (2.61)$$

mit den Eigenwerten s und den Eigenvektoren \underline{r} ableiten. Wie in [47] gezeigt wird, handelt es sich hierbei um das Hill'sche Eigenwertproblem, in dem die unendlich-dimensionale Matrix \underline{H} auch als Hill-Matrix bezeichnet wird. Die unendlich vielen Eigenwerte der Hill-Matrix repräsentieren die sog. Floquet-Exponenten ρ_k sowie deren zyklische Fortsetzungen $\rho_k \pm ai$ mit $a \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$.

Die Floquet-Exponenten ρ_k sind dabei charakteristisch für die Stabilität der jeweiligen Lösung und stehen in folgender Beziehung zu den in Abschnitt 2.1.2 vorgestellten, üblicherweise verwendeten Floquet-Multiplikatoren m_k bei einer zugrundeliegenden Periodendauer T :

$$\begin{aligned} \Re(\rho_k) &= \frac{1}{T} \ln(|m_k|), \\ \Im(\rho_k) &= \frac{1}{T} (\arg(m_k) \pm 2a\pi), \quad a \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Hinsichtlich der Stabilität einer periodischen Lösung lässt sich somit das auf den Floquet-Multiplikatoren beruhende Kriterium direkt auf die Floquet-Exponenten übertragen:

- Die periodische Lösung ist *asymptotisch stabil*, falls außer ρ_1 mit $\Re(\rho_1) = 0$, welcher dem typischen Hauptmultiplikator $m_1 = 1$ bei periodischen Lösungen entspricht, alle weiteren Floquet-Exponenten einen negativen Realteil aufweisen:

$$\Re(\rho_k) < 0, \forall k \in [2, \dots, n].$$

- Die periodische Lösung ist *instabil*, falls es mindestens einen Floquet-Exponenten mit positivem Realteil gibt:

$$\Re(\rho_k) > 0 \text{ für mind. ein } k \in [2, \dots, n]. \tag{2.63}$$

Über die Realteile der Floquet-Exponenten kann somit direkt die Stabilität der periodischen Lösung angegeben werden.

Zur Bestimmung der Floquet-Exponenten ist das unendlich-dimensionale Eigenwertproblem (2.61) jedoch ungeeignet, da es sich weder aufstellen noch lösen lässt. Wird hingegen ein im Sinne des Spektralsystems endlicher Ansatz der Ordnung N verwendet, so ergibt sich daraus eine endlich dimensionale Näherung $\underline{H}^{(N)}$ der Hill-Matrix mit dem zugehörigen Eigenwertproblem

$$(\underline{H}^{(N)} - s^{(N)} \underline{I}) \underline{x}^{(N)} = \underline{0}. \tag{2.64}$$

Die $n(2N + 1)$ Eigenwerte, die sich aus diesem Problem ergeben, können nun zur näherungsweise Bestimmung der Floquet-Exponenten eingesetzt werden. So enthalten die Eigenwerte $s_k^{(N)}$ für $k = 1, \dots, n(2N + 1)$ folgende Näherungen der Floquet-Exponenten und ihrer zyklischen Fortsetzungen mit der entsprechenden Ordnung (siehe [91]):

Anzahl	Ordnung der Näherung	Näherung für die Floquet-Exponenten
n	N	ρ_1, \dots, ρ_n
$2n$	$(N - 1)$	$\rho_1 \pm i, \dots, \rho_n \pm i$
$2n$	$(N - 2)$	$\rho_1 \pm 2i, \dots, \rho_n \pm 2i$
\vdots	\vdots	\vdots
$2n$	0	$\rho_1 \pm Ni, \dots, \rho_n \pm Ni$

Tabelle 2.1.: Übersicht der mit Hilfe der Hill-Matrix genäherten Floquet-Exponenten.

Nach Berechnung der einzelnen Eigenwerte des genäherten, endlich dimensional Problems, müssen demnach die darunter befindlichen n Näherungen der Ordnung N identifiziert werden, da diese die besten Abschätzungen der eigentlichen Floquet-Exponenten liefern.

Dies geschieht durch einen systematischen, rechnergestützten Vergleich der einzelnen Eigenwerte, bei dem überprüft wird, ob es sich bei besagtem Eigenwert ggf. um eine zyklische Fortsetzung oder die gewünschte Näherung handelt. Ein hierzu ähnliches Vorgehen ist ausführlich in [47] beschrieben.

Die im Rahmen des Verfahrens genährten Floquet-Exponenten werden dabei nicht nur zur Beurteilung der Stabilität, sondern auch zur Detektion möglicher Bifurkationsszenarien bei der Verfolgung von Ruhelagen des Spektralsystems eingesetzt.

Hinsichtlich quasi-periodischer Lösungen gestaltet sich die Festsetzung eines geeigneten Stabilitätsbegriffs als eher schwierig. SAMOILENKO [69] liefert hierzu zwar eine geeignete Definition, deren praktische Umsetzung im Rahmen numerischer Untersuchungen allerdings nicht zu realisieren ist.

Die im Zuge des vorgestellten Verfahrens angestrebte Beschreibung quasi-periodischer Bewegungen beschränkt sich somit lediglich auf die Approximation der zugehörigen Torusmannigfaltigkeit ohne Hinzunahme eines entsprechenden Stabilitätsbegriffs. Im Gegensatz dazu können die Stabilitätseigenschaften der mit Hilfe des Verfahrens genährten periodischen Lösungen über das beschriebene Hill-Verfahren bestimmt werden.

Stationäre Lösungen und Pfadverfolgung. Das Lösungsverhalten des i. A. nichtlinearen Spektralsystems (2.54) wird mit den in Abschnitt 2.2 vorgestellten Verfahren zum Auffinden und Verfolgen stationärer Lösungen untersucht. Von Interesse sind hierbei sowohl Ruhelagen als auch periodische Lösungen des Spektralsystems, welche mit periodischem bzw. quasi-periodischem Verhalten des Originalsystems zu assoziieren sind.

Für den prinzipiellen Ablauf bei einer Lösungsverfolgung in Abhängigkeit eines beliebigen Systemparameters wird dabei folgende Vorgehensweise empfohlen:

1. Bestimmung einer Ruhelage des Spektralsystems für einen bestimmten Wert des Verfolgungsparameters. Dies entspricht einer periodische Lösung des Originalsystems.
2. Lösungsverfolgung der Ruhelage als Pfadverfolgung in Abhängigkeit des ausgewählten Parameters.
3. Detektion einer Verzweigung von Ruhelage und Grenzzyklus im Spektralsystem unter Berücksichtigung der für die Stabilität ausgewählten Floquet-Exponenten gemäß des Hill-Verfahrens. Dies geschieht beispielsweise über eine Hopf-Bifurkation, welche je nach Floquet-Exponenten einer Periodenverdopplungsbifurkation oder aber einer Neimark-Sacker-Bifurkation des Originalsystems entsprechen kann.
4. Weiterverfolgung der Ruhelage sowie des abzweigenden Grenzzyklus des Spektralsystems in Abhängigkeit des ausgewählten Parameters ausgehend vom detektierten Bifurkationspunkt.

2.3.4. Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wird das vorgestellte Verfahren zur quasi-periodischen Näherung am Beispiel des fremderregten van-der-Pol Oszillators näher erläutert. Ausgangspunkt ist die vollständig entdimensionierte Bewegungsgleichung

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = \hat{\alpha} \cos(\eta\tau) \quad (2.65)$$

des Oszillators, in der τ die dimensionslose Zeit¹, ε die Stärke der Nichtlinearität und Dämpfung, η die dimensionslose Erregerfrequenz der Fremderregung und $\hat{\alpha}$ die zugehörige Anregungsstärke beschreibt. Für den homogenen Oszillator mit $\hat{\alpha} = 0$ kommt es im Falle $\varepsilon > 0$ zu selbsterregten Schwingungen, welche nun im Zusammenspiel mit der hier vorliegenden Fremderregung untersucht werden. Ein solches System mit kombinierter Selbst- und Fremderregung eignet sich zur Erläuterung des in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten Verfahrens, da sich sowohl periodische als auch quasi-periodische Lösungen beobachten lassen. Zur Näherung quasi-periodischer Lösungen wird im Folgenden stets eine Frequenzbasis mit $p = 2$ Basisfrequenzen angesetzt, wobei eine davon als bekannt vorausgesetzt wird.

Bewegungsgleichungen und Spektralsystem. Entsprechend der Notation des Modellproblems in Gleichung (2.36) auf Seite 21 lässt sich die Bewegungsgleichung durch Einführung der Zustandsgrößen $\underline{z} = [z_1, z_2]^T = [x, x']^T$ und der Toruskoordinate $\theta_1 \in \mathbb{T}^1$ als autonomes System erster Ordnung darstellen

$$\begin{aligned} \underline{z}' &= \begin{pmatrix} z_2 \\ \varepsilon(1 - z_1^2)z_2 - z_1 + \hat{\alpha} \cos(\theta_1) \end{pmatrix}, \\ \theta_1' &= \eta \quad \text{mit} \quad (\underline{z}, \theta_1) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1, \end{aligned} \quad (2.66)$$

welches im Folgenden auch als Originalsystem bezeichnet wird. Aufgrund der vollständig entdimensionierten Darstellung wird eine dimensionslose Frequenzbasis der Form (η, ν) angesetzt, in welcher η die bekannte Frequenz der Fremd- und ν die noch unbekannt Frequenz der Selbsterregung repräsentiert. Somit folgt eine Invarianzgleichung

$$\eta \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_1} + \nu \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_2 \\ \varepsilon u_2 - u_1 + \hat{\alpha} \cos(\theta_1) \end{pmatrix}}_{=\underline{f}_{\text{ana}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon u_1^2 u_2 \end{pmatrix}}_{=\underline{f}_{\text{FFT}}} \quad (2.67)$$

für eine Torusfunktion $\underline{u}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die sich gemäß

$$\underline{z}^*(\tau) = \underline{u}(\eta\tau, \nu\tau) \quad (2.68)$$

mit einer quasi-periodischen Lösung \underline{z}^* des Oszillators verknüpfen lässt.

¹mit $(\cdot)' = d(\cdot)/d\tau$

Mit dem in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Vorgehen wird nun mit Hilfe des harmonischen Ansatzes

$$\underline{u}^{(3)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^3 \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1) \quad (2.69)$$

eine Näherung $\underline{u}^{(3)}$ dritter Ordnung für die Torusfunktion \underline{u} bestimmt. Als Basisfunktionen des Ansatzes dienen hierbei die Harmonischen bis zur dritten Ordnung:

$$\underline{\psi}(\theta_1) = [1, \cos(\theta_1), \sin(\theta_1), \dots, \cos(3\theta_1), \sin(3\theta_1)]^T. \quad (2.70)$$

Die rechte Seite der Invarianzgleichung (2.67) ist bereits in einen analytisch zu projizierenden Anteil $\underline{f}_{\text{ana}}$ und einen mittels FFT zu nähernden Anteil $\underline{f}_{\text{FFT}}$ unterteilt. Obgleich die Projektionen des Anteils $\underline{f}_{\text{FFT}}$ auf die Ansatzfunktionen in diesem einfachen Fall auch analytisch angegeben werden können, wird im Zuge einer Validierung der vorgestellten Vorgehensweise dennoch eine Näherung mittels FFT gewählt.

Das nach den Projektionen resultierende Spektralsystem (siehe Vorgehen auf den Seiten 22 bis 26) nimmt die Form

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \underline{Y} = -\eta \underline{C} \underline{Y} + \underline{S}(\underline{Y}) \quad \text{mit} \quad \underline{Y} \in \mathbb{R}^{12 \times 1}, \underline{S} \in \mathbb{R}^{12 \times 1}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \quad (2.71)$$

an, wobei die Zustandsgrößen durch

$$\underline{Y} = [\hat{c}_1^{(0)}, \hat{c}_2^{(0)}, \hat{c}_1^{(1)}, \hat{c}_2^{(1)}, \hat{s}_1^{(1)}, \dots, \hat{s}_2^{(3)}]^T \quad (2.72)$$

gegeben sind und $\hat{\theta}_2 = \theta_2/\nu$ das unabhängige Argument des autonomen Differentialgleichungssystems darstellt.

Ergebnisse des Originalsystems. Zu Beginn wird das Verhalten des Originalsystems in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η untersucht. Für eine erste Einschätzung bietet sich eine FFT-Untersuchung der durch numerische Integration des Differentialgleichungssystems gewonnenen Lösung an. Soweit nichts Gegenteiliges erwähnt wird, erfolgt die numerische Integration von Differentialgleichungen über ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit relativer und absoluter Toleranz $\text{tol}_{\text{rel}} = 10^{-6}$ bzw. $\text{tol}_{\text{abs}} = 10^{-6}$. Die FFT selbst erfolgt mit Hilfe des bereitgestellten Algorithmus des kommerziellen Numerik-Programms MATLAB.

In den Abbildungen 2.1 und 2.2 sind die Beträge des FFT-Spektrums mit der jeweiligen dimensionslosen Kreisfrequenz ν_{FFT} des FFT-Verfahrens für verschiedene Werte der Erregerfrequenz $\eta \in [0.5, 4]$ dargestellt. Es werden hierbei gesondert die Fälle einer moderaten Anregungsstärke $\hat{\alpha} = 0.75$ sowie einer stärkeren Anregung mit $\hat{\alpha} = 1.5$ betrachtet. Wie den Ergebnissen zu entnehmen ist, findet sich im Bereich um $\eta \approx 1$ im Spektrum für beide Anregungsstärken lediglich eine auftretende Frequenz bzw. Vielfache von dieser. So zeigen sich die beiden (kommensurablen) Frequenzen $\nu_{\text{FFT},1} = \eta$ und $\nu_{\text{FFT},2} = 0.5\eta$, welche mit entsprechend periodischem Lösungsverhalten zu assoziieren sind. Mit steigender Erregerfrequenz treten für $\hat{\alpha} = 0.75$ ab $\eta \approx 1.2$ und für $\hat{\alpha} = 1.5$ ab $\eta \approx 1.5$ zusätzliche

Frequenzanteile im Signal auf, die in keinem rationalen Verhältnis zur Anregungsfrequenz zu stehen scheinen. Es handelt sich somit um einsetzendes quasi-periodisches Verhalten. Der mit der Anregung assoziierte Frequenzanteil verläuft erwartungsgemäß proportional zu η , wohingegen der zweite Frequenzanteil durchweg bei etwa $\nu_{\text{FFT}} \approx 1$ zu liegen scheint.

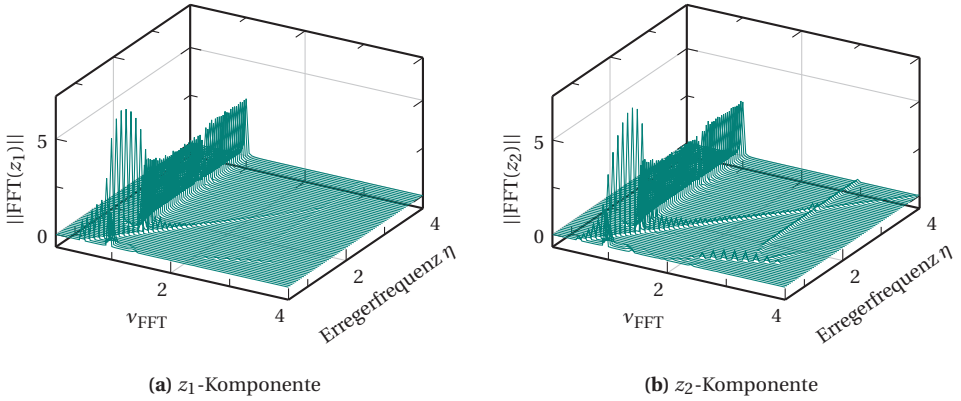


Abbildung 2.1.: FFT-Ergebnisse des Originalsystems mit $\varepsilon = 0.5$ bei moderater Anregungsstärke $\hat{\alpha} = 0.75$

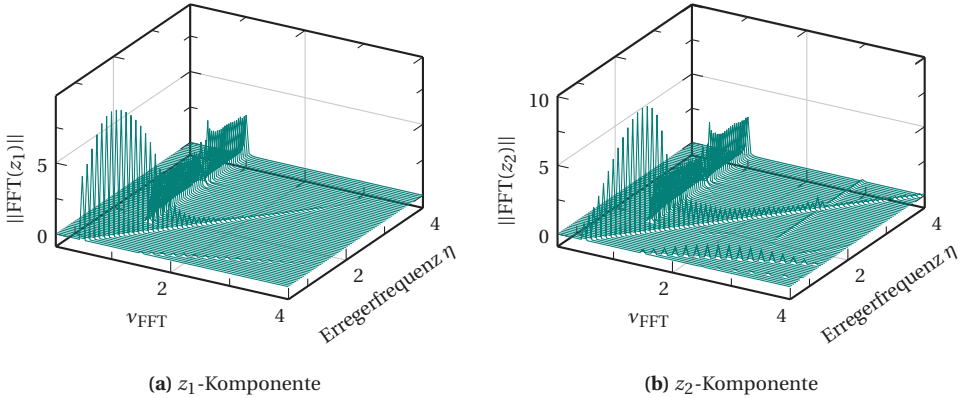


Abbildung 2.2.: FFT-Ergebnisse des Originalsystems mit $\varepsilon = 0.5$ bei größerer Anregungsstärke $\hat{\alpha} = 1.5$.

Ergebnisse des Spektralsystems. Für das in der FFT-Untersuchung aufgezeigte quasi-periodische Verhalten erfolgt eine detaillierte Betrachtung mit Hilfe des aufgestellten Spektralsystems (2.71). Im Fokus steht hierbei der Parametersatz mit $\varepsilon = 0.5$ und $\hat{\alpha} = 1.5$. Ausgehend von der im Originalsystem zu beobachtenden periodischen Lösung bei $\eta = 1$ kann eine zugehörige stabile Ruhelage des Spektralsystems durch ein einfaches NEWTON-Verfahren bestimmt werden. Die so initialisierte Ruhelage wird mit den in

Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Verfahren in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η weiter verfolgt, wobei die Stabilität der Lösung durch das Hill-Verfahren bestimmt wird und damit auch mögliche Bifurkationspunkte detektiert werden können.

Die Darstellung der Verfolgungsergebnisse der Ruhelage des Spektralsystems in Abbildung 2.3 zeigt wie zu erwarten stabiles Verhalten bis zu einer Erregerfrequenz $\eta \approx 1.4$, bei der aufgrund der mit (■) gekennzeichneten Hopf-Bifurkation (H) die Ruhelage instabil wird, was einem Übergang in einen Bereich mit instabiler periodischer Lösung des Originalsystems entspricht.

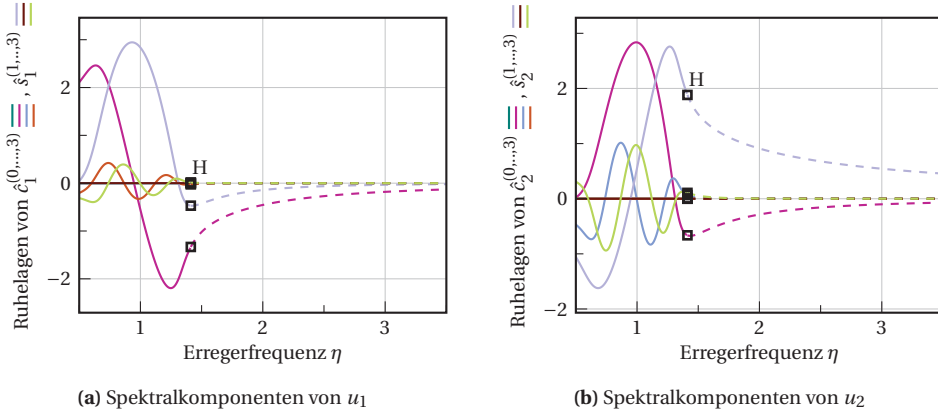


Abbildung 2.3.: Ruhelagen des Spektralsystems in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η für $\varepsilon = 0.5$ und $\hat{\alpha} = 1.5$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - -]

Die detektierte Hopf-Bifurkation ist dabei auf Grund der durch das Spektralsystem reduzierten Beschreibung mit einer Neimark-Sacker-Bifurkation des Originalsystems zu assoziieren, in Folge derer es zur Ausprägung einer Torusmannigfaltigkeit mit darauf verlaufenden Lösungen kommt. Diese Mannigfaltigkeit wird durch eine systematische Verfolgung der sich aus der Hopf-Bifurkation entwickelnden periodischen Lösung des Spektralsystems approximiert. Es wird dabei angenommen, dass dieses Vorgehen auch für potentiell einsetzende Synchronisation brauchbare Ergebnisse liefert (siehe [72]). Da es sich um einen vergleichsweise großen Zustandsraum handelt, sind in Abbildung 2.4 lediglich die mit u_1 assoziierten Näherungen der Spektralkomponenten visualisiert. Die Darstellung erfolgt dabei durch Angabe eines Mittelwerts sowie einer zugehörigen mittleren Abweichung, die Aufschluss über das Schwingungsverhalten liefert. Der Mittelwert bestimmt sich durch Mittelung der einzelnen Spektralkomponenten über eine Periode von θ_2 bzw. $\hat{\theta}_2$ und ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\overline{M}(\hat{c}_j^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{2\pi} c_j^{(k)}(\theta_2) d\theta_2 = \frac{1}{T_2} \int_{\theta_2=0}^{T_2} \hat{c}_j^{(k)}(\hat{\theta}_2) d\hat{\theta}_2. \quad (2.73)$$

Die mittlere Abweichung ist durch

$$\bar{D}(\hat{c}_j^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_2=0}^{2\pi} \sqrt{(c_j^{(k)}(\theta_2) - \bar{M}(\hat{c}_j^{(k)}))^2} d\theta_2 = \frac{1}{T_2} \int_{\hat{\theta}_2=0}^{T_2} \sqrt{(\hat{c}_j^{(k)}(\hat{\theta}_2) - \bar{M}(\hat{c}_j^{(k)}))^2} d\hat{\theta}_2 \quad (2.74)$$

gegeben und charakterisiert die Schwankungen um den Mittelwert über eine Periode. Die zur Auswertung nötige Periodendauer T_2 wird im Zuge der numerischen Bestimmung der periodischen Lösung des Spektralsystems notwendigerweise mit bestimmt und kann somit direkt verwendet werden. In analoger Weise ergeben sich besagte Größen auch für die Komponenten $\hat{s}_j^{(k)}$.

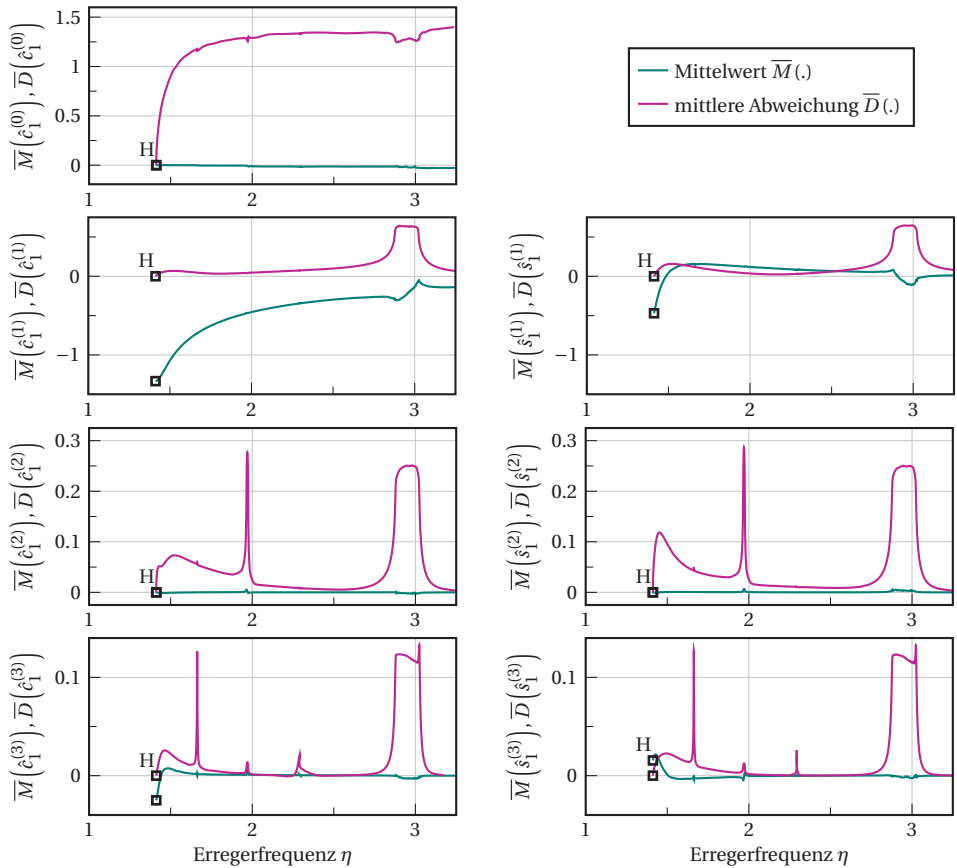


Abbildung 2.4.: Von Hopf-Bifurkation aus verfolgte periodische Lösung des Spektralsystems in den Komponenten von u_1 in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η für $\varepsilon = 0.5$, $\dot{\alpha} = 1.5$.

Erwartungsgemäß startet die sich aus der Hopf-Bifurkation entwickelnde, periodische Lösung mit einer verhältnismäßig niedrigen Amplitude, was sich durch die niedrigen Werte der mittleren Abweichung äußert. Mit zunehmender Erregerfrequenz steigen nun auch die Schwingungsamplituden des Spektralsystems an, wobei die einzelnen Spektralkomponenten unterschiedlich stark angesprochen werden. Die zur Basisfunktion $\psi_1 = 1$ zugehörige Spektralkomponente $\hat{c}_1^{(0)}$ verzeichnet die höchsten Schwingungsamplituden bei annähernd verschwindendem Mittelwert, wohingegen es sich für die mit $\psi_2 = \cos(\theta_1)$ und $\psi_3 = \sin(\theta_1)$ assoziierten Komponenten fast umgekehrt verhält. Die übrigen Spektralkomponenten weisen kaum einen von Null verschiedenen Mittelwert auf, zeigen allerdings ein auffällig peak-artiges Verhalten in bestimmten Bereichen der Erregerfrequenz. So können bei den in Abbildung 2.4 dargestellten Verläufen für die Werte $\eta \approx 1.65, 1.9, 2.4$ als auch in einem relativ weiten Bereich um $\eta \approx 2.9$ solche Auffälligkeiten im Spektrum beobachtet werden. Eine detaillierte Betrachtung zur Klärung dieser Auffälligkeiten und deren Bedeutung für das Systemverhalten findet sich im späteren Verlauf auf Seite 40.

Im Fokus der Lösungsverfolgung steht jedoch nicht nur die Abschätzung der einzelnen Spektralkomponenten, sondern auch die Näherung der noch unbekannt zweiten Basisfrequenz ν . Der in Abbildung 2.5 gegebene Verlauf zeigt sowohl die im Zuge der Verfolgung bestimmte Periodendauer T_2 als auch die daraus ableitbare Basisfrequenz $\nu = 2\pi/T_2$, die zur Beschreibung der Torusmannigfaltigkeit und damit der darauf verlaufenden quasi-periodischen Lösung benötigt werden. Ausgehend von der Neimark-Sacker-Bifurkation lässt sich so der Verlauf der zweiten Basisfrequenz über der Erregerfrequenz angeben. Die Frequenzwerte liegen hier im Bereich $\nu \approx 1$ und stimmen somit mit den Ergebnissen der FFT-Analyse in Abbildung 2.2 überein. Wie schon im Falle der einzelnen Spektralkomponenten zeigen sich auch für diese Verläufe einige auffällige Stellen, gerade in den Bereichen um $\eta \approx 1.95$ sowie um $\eta \approx 2.9$.

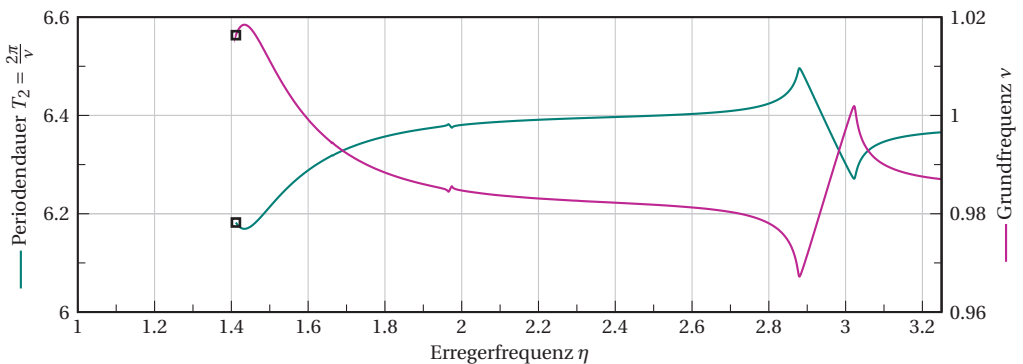


Abbildung 2.5.: Periodendauer/Grundfrequenz der verfolgten periodischen Lösung des Spektralsystems in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η für $\varepsilon = 0.5, \hat{\alpha} = 1.5$.

Gemäß des gewählten Ansatzes für die Torusfunktion aus Gleichung (2.69) kann mit Hilfe der numerisch bestimmten periodischen Lösungen des Spektralsystems die Näherung $\underline{u}^{(3)}$ der eingeführten Torusfunktion angegeben werden, welche die entsprechende invariante Mannigfaltigkeit näherungsweise beschreibt. Im Fall einer Torusfunktion mit lediglich zwei Basisfrequenzen bietet sich eine grafische Darstellung der Mannigfaltigkeiten als Fläche über die Toruskoordinaten θ_1 und θ_2 an. In Abbildung 2.6 finden sich exemplarisch für eine Erregerfrequenz $\eta = 1.5$ solche Visualisierungen für die Komponenten $u_1^{(3)}$, welche die Position des Oszillators beschreibt, und $u_2^{(3)}$, die der Geschwindigkeit entspricht. Aufgrund der periodischen Randbedingungen können die dargestellten Flächen durch Aneinanderreihung beliebig in θ_1 - und/oder θ_2 -Richtung fortgesetzt werden.

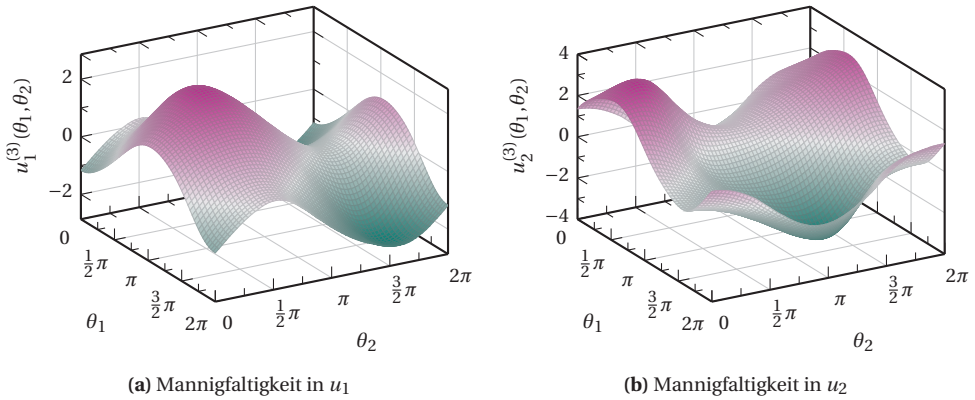


Abbildung 2.6.: Exemplarische Darstellung für genäherte Mannigfaltigkeit des fremderregten van-der-Pol Oszillators im quasi-periodischen Bereich für eine Erregerfrequenz $\eta = 1.5$ für $\varepsilon = 0.5$, $\hat{\alpha} = 1.5$.

Die Mannigfaltigkeit ist gemäß der in Abschnitt 2.3 aufgearbeiteten Theorie invariant unter dem Fluss der zugrundeliegenden Differentialgleichung. Startet demnach eine Trajektorie auf dieser Mannigfaltigkeit, so wird sie diese nicht verlassen. Weiterhin füllt im quasi-periodischen Fall eine entsprechende Trajektorie die Mannigfaltigkeit dicht aus. Aus den genäherten Mannigfaltigkeiten lässt sich das stationäre Systemverhalten näherungsweise abschätzen. Abbildung 2.7 zeigt hierzu sowohl das periodische als auch das quasi-periodische Lösungsverhalten. Da im quasi-periodischen Fall die Lösungstrajektorien die Mannigfaltigkeit dicht ausfüllen, dienen die Maximal- und Minimalwerte der genäherten Torusfunktion als Abschätzung der maximalen bzw. minimalen Auslenkung einer darauf verlaufenden Lösung:

$$\max/\min(z_k) = \max/\min(u_k(\theta_1, \theta_2)), \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{T}^1, k = 1, 2.$$

Das Diagramm in Abbildung 2.7a zeigt die entsprechenden Extremalwerte des stationären Systemverhaltens. Die bei $\eta \approx 1.4$ mit \blacktriangle markierte Neimark-Sacker-Bifurkation¹ (NS) stellt

¹entspricht der detektierten Hopf-Bifurkation (H) des Spektralsystems

nicht nur den Übergangspunkt zwischen periodischer und quasi-periodischer Lösung dar, sondern auch den Bereich, in welchem die Systemauslenkungen verhältnismäßig niedrig sind. Eine Unterscheidung im Sinne der Stabilität erfolgt in Ermangelung eines umsetzbaren Kriteriums für quasi-periodische Lösungen dabei nur für die periodischen Lösungszweige. Das Frequenzverhältnis in Abbildung 2.7b deutet, wie auch die Verläufe der Spektralkomponenten, potentielle Synchronisationsbereiche an. Gerade um $\eta \approx 2.9$ ist der Plateau-artige Verlauf zu erkennen, welcher einer in Abschnitt 2.3.2 beschriebenen Synchronisation entsprechen könnte.

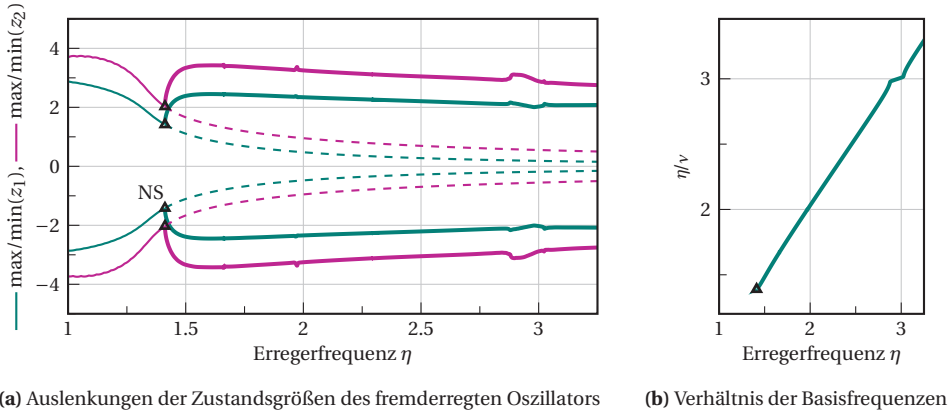


Abbildung 2.7.: Stationäre Lösungen des fremderregten van-der-Pol Oszillators in Abhängigkeit der Erregerfrequenz η für $\epsilon = 0.5$, $\hat{\alpha} = 1.5$.
 [period. stabil: —, period. instabil: - - , quasi-period.: —]

Es ist anzumerken, dass bei der Lösungsverfolgung aus pragmatischen Gründen keine Unterscheidung zwischen tatsächlich quasi-periodischen Lösungen und Synchronisationen mit auf dem Torus verlaufenden periodischen Lösungen stattfinden kann. Zur Validierung der ermittelten Ergebnisse findet sich in Abbildung 2.8 eine Gegenüberstellung der über das Spektralsystem erhaltenen Näherung mit den Ergebnissen einer herkömmlichen Zeitsimulation.

Es ist hierbei sicherzustellen, dass die Systemgleichungen über einen ausreichend langen Zeitraum integriert werden, um so repräsentative Ergebnisse des zugehörigen stationären Zustands zu erhalten. Die Ergebnisse zeigen durchweg sehr gute Übereinstimmungen und untermauern damit die vorgestellte Vorgehensweise. Lediglich im Bereich um $\eta \approx 2.9$ sind geringe Abweichungen zu erkennen. Dies ist mit der dort vermuteten Synchronisation zu verknüpfen. In diesem Fall füllen auf der Mannigfaltigkeit verlaufende, periodische Lösungen diese nicht mehr dicht aus und müssen daher die abgeschätzten Extremalwerte nicht zwingend passieren. Die Invarianz bleibt von diesem Sachverhalt jedoch unberührt; eine auf der Mannigfaltigkeit startende Lösung wird diese nicht verlassen. Unter diesem Aspekt scheint es naheliegend, dass die Abschätzung der Auslenkungen des Originalsystems auch im Falle von Synchronisation repräsentative Ergebnisse liefert. Auch wenn die

darauf verlaufenden Lösungstrajektorien nicht zwangsläufig die Maxima oder Minima der Mannigfaltigkeit passieren, so liefert die Mannigfaltigkeit dennoch eine obere bzw. untere Schranke des Systemverhaltens in diesen Bereichen.

Somit kann das durch die Mannigfaltigkeit approximiertere Verhalten als weitestgehend repräsentativ erachtet werden, ungeachtet der Tatsache, ob nun tatsächlich quasi-periodische oder durch Synchronisation bedingte periodische Lösungen vorliegen.

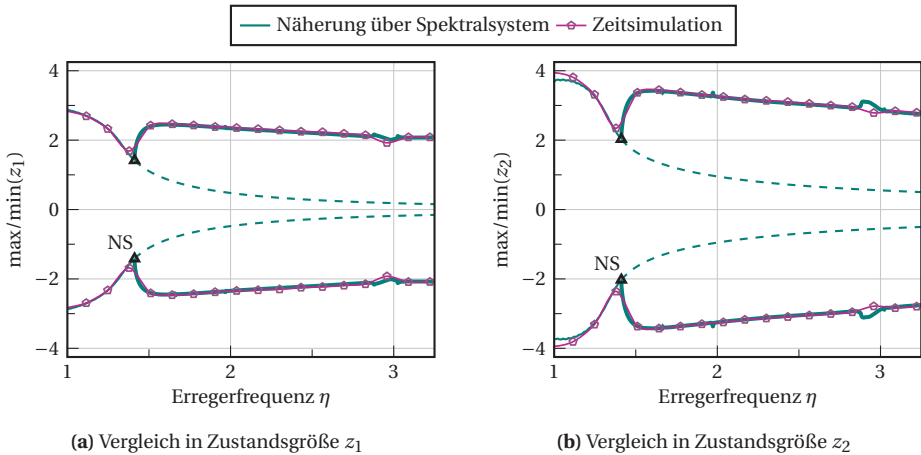


Abbildung 2.8.: Vergleich der mit Hilfe der Mannigfaltigkeit genährten stationären Zustände mit den Ergebnissen einer regulären Zeitsimulation für verschiedene Erregerfrequenzen für $\varepsilon = 0.5$, $\hat{\alpha} = 1.5$.

Im Zuge der gemachten Beobachtungen hinsichtlich besonders auffälliger Stellen im Spektrum und der dort vermuteten Synchronisation werden in Abbildung 2.9 verschiedene Poincaré-Schnitte sowohl für Erregerfrequenzen mit unauffälligem als auch mit auffälligem Spektrumsverlauf herangezogen. Die Poincaré-Schnitte lassen sich hierbei direkt unter Verwendung der genäherten Torusfunktion und des Zusammenhangs aus Gleichung (2.44) angeben:

$$\underline{P}^{\theta_1}(\theta_2) = \underline{u}^{(3)}(0, \theta_2) \quad , \quad \underline{P}^{\theta_1} : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Alternativ steht die klassische Vorgehensweise über eine entsprechend langen Zeitsimulation zur Verfügung, wobei der Systemzustand jeweils zu den Zeitpunkten $t_k = 2k\pi/\eta$ erfasst wird. Die Ergebnisse dieser beiden Verfahren finden sich in Abbildung 2.9. Die Graphen in Abbildung 2.9a zeigen die Poincaré-Schnitte an unauffälligen Stellen des Spektrums. Die auf der Mannigfaltigkeit basierenden Schnitte sind hierbei geschlossene, sich nicht schneidende Kurven und entsprechen im geometrischen Sinne einem Schnitt durch die Torusmannigfaltigkeit bei $\theta_1 = 0$. Es zeigt sich, dass die durch Zeitsimulation gewonnenen Ergebnisse dicht auf diesen Kurven liegen, sodass es sich klar um Mannigfaltigkeiten mit darauf verlaufenden quasi-periodischen Lösungen handelt.

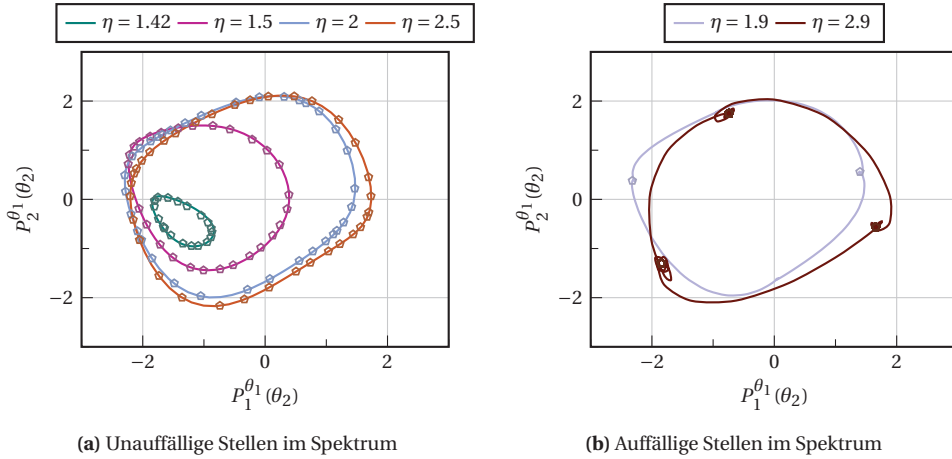


Abbildung 2.9.: Poincaré-Schnitte für den fremderregten van-der-Pol Oszillator für verschiedene Erregerfrequenzen η für $\varepsilon = 0.5$, $\hat{\alpha} = 1.5$.
 [Mannigfaltigkeit: —, Zeitsimulation: \circ]

Ein völlig unterschiedliches Ergebnis liefert die Betrachtung der Poincaré-Schnitte an besagten auffälligen Stellen des Spektrums in Abbildung 2.9b. Die auf der Mannigfaltigkeit basierenden Schnitte zeigen ein partiell schleifenartiges Verhalten mit entsprechenden Überschneidungen. Dies spricht für einen Wechsel in einen Synchronisationsbereich mit periodisch verlaufenden Trajektorien, wobei die Schleifenbildung dem Ansatz mit endlich vielen trigonometrischen Basisfunktionen zuzuordnen ist.

Die einsetzende Synchronisation kann darüber hinaus mit der Gegenüberstellung zu den Ergebnissen der Zeitsimulation belegt werden. Die hierdurch gewonnenen Ergebnisse liegen keineswegs mehr dicht auf eben jenen Kurven, sondern lokalisieren sich in einzelnen Punkten.

Im Fall $\eta = 1.9$ finden sich zwei Häufungspunkte an den jeweiligen Schleifen, wohingegen sich für $\eta = 2.9$ drei Häufungspunkte ergeben. Es handelt sich somit um Synchronisationen vom 1 : 2- bzw. 1 : 3-Typ, bei der sich jeweils periodische Lösungen mit Grundfrequenzen, die der Hälfte bzw. einem Drittel der Erregerfrequenz entsprechen, auf der Mannigfaltigkeit ausbilden; ein solches Verhalten ist auch in den Abbildung 2.8 gegebenen Verläufen der Maximalauslenkungen zumindest ansatzweise zu beobachten. Parallel zu den durch Zeitsimulation detektierten stabilen periodischen Lösungen finden sich darüber hinaus noch instabile periodische Lösungen auf der Mannigfaltigkeit, welche die jeweiligen Einzugsgebiete auf dem Torus abgrenzen.

Eine zusätzliche Validierung der für dieses Anwendungsbeispiel gewonnenen Erkenntnisse kann durch einen Vergleich mit den Ergebnissen aus [54] erzielt werden. Es zeigt sich, dass die beschriebene Vorgehensweise zur Approximation von Torusmannigfaltigkeiten zur Beschreibung von quasi-periodischem Systemverhalten durchaus brauchbare Ergebnisse liefert. Darüber hinaus eignet sich das Verfahren in Zusammenspiel mit den auf

dem Hill-Verfahren beruhenden Stabilitätskriterien für die Approximation, Verfolgung und Bifurkationsdetektion periodischer Lösungen. Die detektierten Neimark-Sacker-Bifurkationen stellen dabei einen Initialisierungspunkt für den Zugang zu Bereichen mit quasi-periodischem Verhalten dar.

Weiterhin hat sich gezeigt, dass das Verfahren auch zur Detektion von Synchronisationsbereichen auf der Torusmannigfaltigkeit selbst gute Ergebnisse liefert. Ein entsprechendes Kriterium zur systematischen Festsetzung dieser Bereiche, die sich nicht der Begrifflichkeiten „auffällig“ bzw. „unauffällig“ bedient, steht dabei noch aus und bietet sich als Thema zukünftiger Arbeiten an.

3. Modellierung hydrodynamisch gelagerter Rotoren

Das nachfolgende Kapitel befasst sich mit der Modellierung des im Zentrum dieser Arbeit stehenden Systems eines hydrodynamisch gelagerten, biegeelastischen Rotors. Im Fokus steht hierbei klar die Beschreibung der fluidmechanischen Vorgänge innerhalb des Gleitlagers, sodass der eigentliche Rotor eher eine untergeordnete Rolle spielt. Aus diesem Grund kommt für diesen ein verhältnismäßig simples Modell zum Einsatz.

3.1. Übersicht

Ein möglicher Aufbau des zu untersuchenden Systems ist in vereinfachter Weise in Abbildung 3.1 dargestellt. Der biegeelastische Rotor rotiert mit der vorgegebenen Drehfrequenz Ω_R und ist dabei beidseitig durch hydrodynamische Radialgleitlager abgestützt. Die statische Hauptbelastung des Systems erfolgt durch die Gewichtskraft basierend auf dem Schwerfeld der Erde mit Gravitationskonstante g .

Die Lagerung basiert auf dem durch die Bewegung der Welle induzierten Druckaufbau im Fluid und stellt ein in technischen Anwendungen häufig verwendetes Konzept dar. Ein exemplarischer Querschnitt durch ein solches Gleitlager ist in der Skizze in Abbildung 3.2 für die wohl denkbar einfachste Ausführung dargestellt.

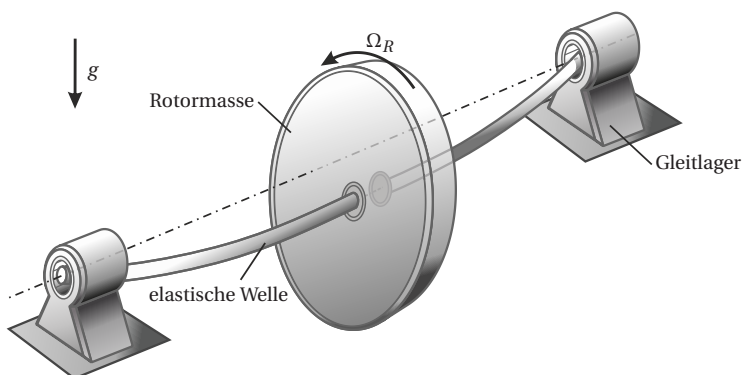


Abbildung 3.1.: Prinzipskizze eines hydrodynamisch gelagerten Rotors.

Durch die Rotation des Wellenzapfens mit der Drehfrequenz Ω_R gegenüber der feststehenden Lagerschale kommt es zur Ausprägung eines tragenden Fluidfilms mit einem entsprechend verteilten Druckfeld. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass es sich aus Gründen der übersichtlichen Darstellung keineswegs um eine maßstabgetreue Skizze handelt. Der radiale Abstand zwischen Lagerschale und Wellenzapfen fällt beim realen Gleitlager wesentlich kleiner aus als dies durch die gegebene Skizze suggeriert wird. Wird auf Basis des Innenradius R_0 der Lagerschale sowie des Wellenzapfenradius R_W ein nominelles Lagerspiel der Form $(R_0 - R_W)/R_W$ definiert, so bewegt sich dieses für eine technische Realisierung des dargestellten zylinderförmigen, mit Öl geschmierten Gleitlagers typischerweise im Größenordnungsbereich $(R_0 - R_W)/R_W \approx 2\%$ (vgl. [83]).

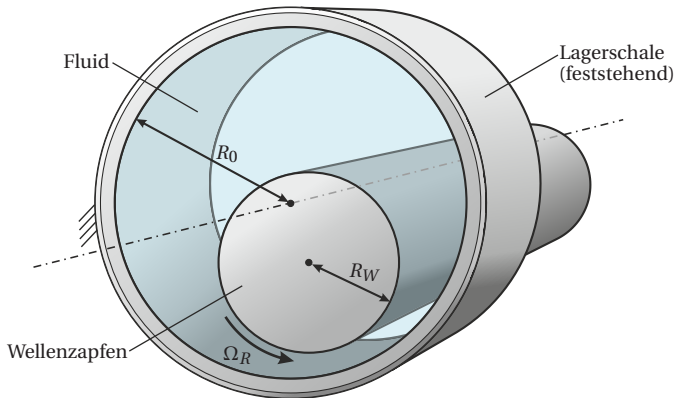


Abbildung 3.2.: Prinzipskizze eines hydrodynamischen Gleitlagers in zylinderförmiger Ausführung.

3.1.1. Aufbau und Submodelle

Die Beschreibung eines hydrodynamisch gelagerten Rotorsystems erfordert im Wesentlichen die Betrachtung von drei verschiedenen, miteinander gekoppelten Teilsystemen, für die jeweils ein separates Submodell aufgestellt wird. Zu diesen Teilsystemen gehören das Fluid, die Lagerschale sowie der biegeelastische Rotor. Die Vereinigung aus Fluid und Lagerschale kann weitestgehend auch als das eigentliche Gleitlager betrachtet werden, welches in Wechselwirkung mit dem zugehörigen Rotor steht.

Die jeweiligen Submodelle werden unter Berücksichtigung der Fluidmechanik, Kontinuumsmechanik und der Mehrkörperdynamik aufgestellt und bedienen sich weitestgehend bereits existierender Modellbeschreibungen. Das Fluidmodell basiert auf der Annahme eines vergleichsweise dünnen Films und wird in Abschnitt 3.2 näher ausgeführt. Hinzu kommt die Berücksichtigung einer von der klassischen Zylinderbauform abweichenden Geometrie der Lagerschale, die im Zuge einer kontinuumsmechanischen Modellierung in Abschnitt 3.3 beschrieben wird. Das in dieser Arbeit eher eine untergeordnete Rolle spielende Rotormodell wird kurz in Abschnitt 3.4 angerissen.

Die in Abbildung 3.3 dargestellte Übersicht zeigt den Aufbau des Gesamtmodells sowie die hierfür benötigten Submodelle, welche unter Berücksichtigung der relevanten Wechselwirkungsgrößen weitestgehend unabhängig voneinander aufgestellt werden können. Das im Zentrum stehende Fluidmodell stellt dabei die Verbindung zwischen Lagerschale und Rotor dar. Das durch die Prinzipien der Hydrodynamik aufgebaute Druckfeld p führt zu einer resultierenden Lagerkraft F_p , welche als Eingangsgröße für das Submodell *Rotor* fungiert. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass für die anschließenden Untersuchungen die Wirkung des Fluiddrucks auf die Verformung der Lagerschale in einem ersten Schritt vernachlässigt wird. Diese Annahme stellt eine vergleichsweise starke Einschränkung dar, erscheint dennoch im Hinblick auf eine erste Abschätzung der Möglichkeiten zur gezielten Einflussnahme auf das dynamische Verhalten des Rotorsystems als sinnvoll. Der Druckaufbau im Fluid steht sowohl mit der Bewegung des Wellenzapfens als auch mit der Geometrie der Lagerschale in Zusammenhang.

Weitere Eingangsgrößen sind durch die in Abschnitt 1.3 erwähnten Aktoren gegeben, welche zur gezielten Verformung der Lagerschale und somit zur Realisierung unterschiedlicher Geometrien eingesetzt werden. Die Aktoren selbst spielen eine untergeordnete Rolle und liefern lediglich eine vorgegebene Verschiebung der Lagerschale am jeweiligen Angriffspunkt, wobei eine Rückwirkung der Lagerschale auf die Aktoren an dieser Stelle nicht berücksichtigt wird. Die Verschiebung hat hierbei direkten Einfluss auf die geometrische Form der Lagerschale und kann so die Druckverteilung im Fluid beeinflussen.

Weitere Informationen zu den einzelnen Submodellen finden sich in detaillierter Ausführung in den nachfolgend aufgeführten Teilabschnitten.

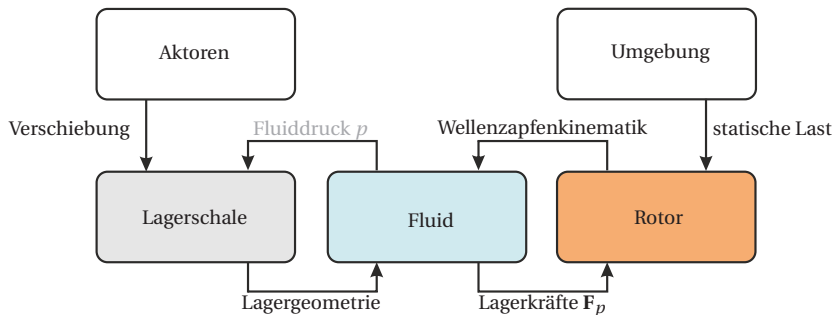


Abbildung 3.3.: Schema der einzelnen Submodelle und deren Wechselwirkungen im Gesamtmodell des hydrodynamisch gelagerten Rotors.

3.1.2. Gleitlagerkonzept

Im Zuge der Modellierung erfolgt eine detaillierte Betrachtung des vorgeschlagenen Gleitlagerkonzepts sowie der zur Beschreibung notwendigen kinematischen und geometrischen Größen.

Konzeptioneller Aufbau. Ausgangspunkt ist das Radialgleitlager, dessen Querschnittsdarstellung als Prinzipskizze in Abbildung 3.4 gegeben ist. Es handelt sich hierbei um ein Konzept, welches im initialen Zustand von einer in Abbildung 3.2 gezeigten zylinderförmigen Lagerschale mit Innenradius R_0 ausgeht. Durch zwei an gegenüberliegenden Umfangspositionen angebrachte Aktoren wird die Lagerschale verformt, um so ein ovalförmiges Querschnittsprofil zu realisieren. Die Aktoren haben hierbei nur einen qualitativen Charakter, sodass die tatsächliche technische Realisierung sowie die Aktorauswahl kein Bestandteil der vorliegenden Arbeit sind.

Allgemein haben sich nicht-kreisrunde Profile als äußerst vorteilhaft hinsichtlich der Unterdrückung üblicherweise unerwünschter Selbsterregungsmechanismen erwiesen (siehe Abschnitt 1.2), weswegen das hier vorgeschlagene Konzept als vielversprechend eingestuft wird. Das Konzept ähnelt denen von PFAU [61] oder CHASALEVRIS UND DOHNAL [16] vorgeschlagenen Realisierungen aktuierter Gleitlager, unterscheidet sich aber in sofern, dass nicht von starren, verschiebbaren Elementen ausgegangen wird, sondern von einem nicht-kreisrunden Profil, welches durch eine Verformung $u(\varphi)$ der Lagerschale in radialer Richtung erzielt wird.

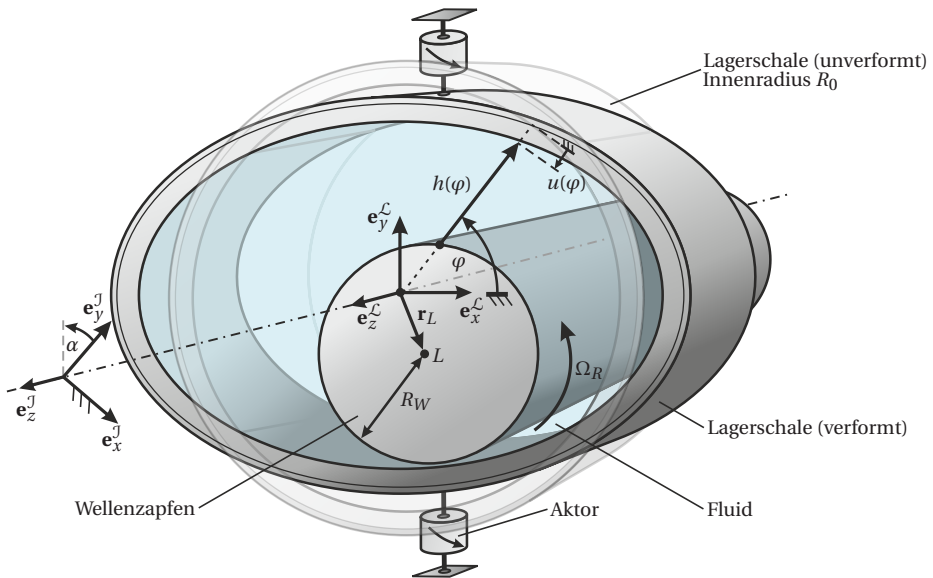


Abbildung 3.4.: Prinzipskizze des zu untersuchenden, hydrodynamischen Gleitlagers.

Kinematische Größen. Die Beschreibung der für die Modellierung relevanten Abmessungen und kinematischen Größen erfolgt sowohl mit Hilfe des Inertialsystems \mathcal{J} als auch des lagerfesten Bezugssystems \mathcal{L} mit den entsprechenden kartesischen Koordinatensystemen $\{\mathbf{e}_x^{\mathcal{J}}, \mathbf{e}_y^{\mathcal{J}}, \mathbf{e}_z^{\mathcal{J}}\}$ und $\{\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}, \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}, \mathbf{e}_z^{\mathcal{L}}\}$ (vgl. Abbildung 3.4). Die Basisvektoren des inertialfesten Koordinatensystems werden hierbei so gewählt, dass $\mathbf{e}_z^{\mathcal{J}}$ stets in axiale Längsrichtung des Rotors zeigt. Das lagerfeste Koordinatensystem resultiert dabei aus einer einfachen Drehung des inertialfesten Koordinatensystems um eben jene $\mathbf{e}_z^{\mathcal{J}}$ -Achse mit dem konstanten Winkel α , sodass die Wirkrichtung der beiden angebrachten Aktoren stets parallel zur $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Achse verläuft.

Die Position des Wellenzapfenmittelpunkts L im Lager wird durch den Ortsvektor \mathbf{r}_L beschrieben, wobei für die Modellierung und Untersuchung lediglich die entsprechenden Anteile in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ - und $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung von Interesse sind. Es wird angenommen, dass sämtliche translatorischen Bewegungen stets orthogonal zur $\mathbf{e}_z^{\mathcal{J}}$ -Längsrichtung verlaufen.

Relevante geometrische Abmessungen. Im Zuge der Beschreibung des Druckaufbaus ist besonders die Fluidfilmdicke oder Schmierstalthöhe $h(\varphi)$ entscheidend. Diese hängt direkt von der Position \mathbf{r}_L des Wellenzapfens sowie der durch die Aktoren bedingten radialen Verformung $u(\varphi)$ der Lagerschale ab.

3.2. Hydrodynamischer Fluidfilm

Die Modellierung des hydrodynamischen Fluidfilms innerhalb des Radialgleitlagers erfolgt im Rahmen der Dünnfilmtheorie und führt unter Berücksichtigung weiterer Annahmen auf die aus der Literatur bekannte Reynoldsgleichung (siehe [83]). Es handelt sich hierbei um eine partielle Differentialgleichung des Fluiddrucks, deren Lösung sich nur unter bestimmten Umständen in analytischer Form angeben lässt. Im Regelfall kann diese jedoch mit Hilfe entsprechender Verfahren (Finite-Differenzen, Galerkin-Verfahren, etc.) näherungsweise bestimmt werden.

3.2.1. Reynoldsgleichung

Die im Bereich der Gleitlagerdynamik typischerweise eingesetzte Reynoldsgleichung stellt eine Vereinfachung der aus der Fluidmechanik bekannten Navier-Stokes-Gleichungen sowie der Kontinuitätsgleichung dar (siehe [68]). Die im Folgenden vorgestellte Form dieser Druckaufbaugleichung bezieht sich hierbei lediglich auf inkompressible Fluide und wird daher u. a. auch als inkompressible Reynoldsgleichung bezeichnet. Die Reynoldsgleichung zählt dabei zu den Standardmodellen aus dem Bereich der Fluidodynamik und beschränkt sich nicht nur auf die Auslegung von hydro- oder aerodynamischen Gleitlagern, sondern findet in fast allen Anwendungen mit vergleichsweise dünnem Fluidfilm Anwendung, so z. B. auch bei der Auslegung elasto-hydrodynamischer Kontakte. Aus Gründen der Übersicht sind nachfolgend kurz die grundlegenden Annahmen der Herleitung aufgeführt, welche sich an den Ausführungen von SZERI [83] orientieren.

Grundlegende Annahmen. Für die Herleitung der Reynoldsgleichung werden u. a. folgende Annahmen getroffen:

- Das mit Fluid gefüllte Volumen zeichnet sich in einer Raumrichtung durch eine verhältnismäßig kleine Abmessung aus. Im vorliegenden Fall von Radialgleitlagern sind dabei die Abmessungen in radialer Richtung sehr viel kleiner als die der verbleibenden axialen sowie Umfangsrichtung. Wird die einleitende Skizze in Abbildung 3.2 betrachtet, so finden sich nach [83] bei ölgeschmierten Gleitlagern typischerweise Verhältnisse von $(R_0 - R_W)/R_W \approx 0.002$.
- Das Fluid wird als inkompressibel angesetzt. Da es sich hier um eine hydrodynamische Ausföhrung handelt, stellt dies eine sinnvolle Annahme dar. Im Falle aerodynamischer Gleitlager muss hingegen eine kompressible Modellierung unter Hinzunahme eines entsprechenden Stoffgesetzes erfolgen.
- Die Viskosität des Fluids ist konstant.
- Es liegen verhältnismäßig kleine Reynolds-Zahlen vor, sodass Trägheits- wie auch Volumenkräfte vernachlässigt werden.

Einföhrung von Zylinderkoordinaten. Hinsichtlich der zu betrachtenden Geometrie des in Abbildung 3.4 dargestellten Konzepts erfolgt die Darstellung der Reynoldsgleichung ausgehend vom lagerfesten Koordinatensystem mit Hilfe von Zylindermantelkoordinaten (φ, z) . Da im Zuge der Herleitung eine Mittelung über die radiale Richtung erfolgt, werden nur Änderungen in axialer sowie Umfangsrichtung in der Reynoldsgleichung berücksichtigt, deren Definitionsbereich demnach eine Teilmenge von

$$\Omega_{\text{Fluid}} = \left\{ (\varphi, z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \mid -\frac{B}{2} \leq z \leq \frac{B}{2}, B > 0 \right\} \quad (3.1)$$

ist, wobei B die Breite des Lagers $\mathbf{e}_z^{\mathcal{L}}$ -Richtung angibt.

Reynoldsgleichung in dimensionsbehafteter Form. Durch die relative Bewegung zwischen Lagerschale und Wellenzapfen kommt es innerhalb des Fluids zu einem Druckaufbau, welcher durch die Reynoldsgleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{h_0^3}{R_W^2 \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{h_0^3}{\mu} \right) = 6\Omega_R \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial h_0}{\partial t} \quad (3.2)$$

beschrieben werden kann (vgl. [83]). Die gegebene partielle Differentialgleichung zur Beschreibung des Fluiddrucks p enthält dabei lediglich Ableitungen bzgl. Umfangskoordinate φ und der axialen Koordinate z . Als Parameter treten weiterhin der Wellenzapfenradius R_W , die Drehfrequenz Ω_R sowie die dynamische Viskosität μ des Fluids auf.

Als essentielle Eingangsgröße der Reynoldsgleichung fungiert der Ausdruck h_0 , welcher die Schmierspalthöhe (oder auch Fluidfilmdicke genannt) in Abhängigkeit einzelner kinematischer Größen angibt. Im Zuge der Herleitung der Reynoldsgleichung handelt es sich hierbei um den bzgl. der Wellenzapfenauslenkung linearisierten Anteil:

$$h_0 = R_0 - R_W + u - \mathbf{r}_L \cdot \left(\cos \varphi \mathbf{e}_x^{\mathcal{L}} + \sin \varphi \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}} \right). \quad (3.3)$$

Wird für den Ortsvektor \mathbf{r}_L des Wellenzapfens eine Darstellung als Linearkombination der kartesischen Basisvektoren gewählt

$$\mathbf{r}_L = x_L \mathbf{e}_x^{\mathcal{L}} + y_L \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}, \quad (3.4)$$

gewählt, so ergibt sich die Schmierespalthöhe zu

$$h_0 = R_0 - R_W + u - x_L \cos \varphi - y_L \sin \varphi. \quad (3.5)$$

Die für die Beschreibung der nach außen gerichteten radialen Verschiebung u der Innenseite der Lagerschale relevanten Ausdrücke werden dabei im nachfolgenden Abschnitt 3.3 näher ausgeführt.

3.2.2. Lösungsanforderungen

Basierend auf Gleichung (3.1) ergibt sich der Definitionsbereich Ω_p der Reynoldsgleichung als Teilmenge

$$\Omega_p \subset \Omega_{\text{Fluid}} \quad (3.6)$$

des vollständig durch den 2π -periodischen Umfangswinkel¹ φ und durch die axiale Koordinate z beschriebenen Zylindermantels. Bei dem gesuchten Fluiddruck handelt es sich somit um eine Funktion der Form

$$p : \Omega_p \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Es stellt sich zwangsläufig die Frage nach der Beschaffenheit dieses Definitionsbereichs Ω_p sowie den damit verbunden Lösungsanforderungen im Hinblick auf eine sinnvolle Beschreibung der Druckverteilung im Radialgleitlager.

In diesem Kontext werden verschieden geartete Anforderungen betrachtet, die im Laufe der vergangenen Jahrzehnte Bestandteil zahlreicher Untersuchungen gewesen sind und die üblicherweise unter dem Überbegriff „Randbedingungen der Reynoldsgleichung“ gruppiert werden (siehe u. a. [10, 26, 46, 83, 94]).

Axiale Randbedingungen. Den Randbedingungen in axialer Richtung werden in der zuvor genannten Literatur vergleichsweise wenig Aufmerksamkeit geschenkt. So werden für die Druckfunktion (3.7) üblicherweise Null-Bedingungen an den axialen Rändern gefordert:

$$p\left(\varphi, z = \pm \frac{B}{2}\right) = 0. \quad (3.8)$$

Diese Herangehensweise ist typisch für die Modellierung hydrodynamischer Gleitlager, wobei meistens noch eine zusätzliche Symmetrieannahme der Form

$$p(\varphi, z = \hat{z}) = p(\varphi, z = -\hat{z}), \quad \forall \hat{z} \in \left[0, \frac{B}{2}\right]. \quad (3.9)$$

eingebraucht wird.

¹oder auch Umfangskoordinate

Voll-Film-Annahme. Neben den axialen Randbedingungen müssen auch die Anforderungen an eine Druckfunktion bzgl. der Umfangsrichtung spezifiziert werden. Die denkbar einfachste Annahme setzt eine Gültigkeit der Reynoldsgleichung auf dem gesamten Gebiet Ω_{Fluid} an, für welches nun stetig differenzierbare Lösungen der Form

$$p : \Omega_p \rightarrow \mathbb{R}, p \in C^2 \quad \text{mit} \quad \Omega_p = \Omega_{\text{Fluid}} \quad (3.10)$$

gefordert werden. Dies entspricht den Sommerfeld-Bedingungen, woraus durch Vernachlässigung negativer Druckwerte die Gumbel-Bedingungen resultieren (vgl. [46]).

Voll-Film-Annahme mit zusätzlicher Druckbedingung. Zusätzlich zur vorherigen Annahme kann der Fluiddruck an einer oder mehreren ausgezeichneten Stellen des Umfangs vorgegeben werden. Dieser Umstand lässt sich beispielsweise durch eine im Lager verbauten Fluidzufuhr mit konstantem Versorgungsdruck motivieren.

Die beschriebenen Anforderungen bleiben weitestgehend bestehen, wobei auf Kosten der stetigen Differenzierbarkeit nun an N_p beliebigen Stellen $\hat{\varphi}_k$ für $k = 1, \dots, N_p$ der Druck durch entsprechende Werte $\hat{p}_k(z)$ vorgegeben wird:

$$p(\hat{\varphi}_k, z) = \hat{p}_k(z), \quad k = 1, \dots, N_p. \quad (3.11)$$

Daraus resultiert ein Auftrennen der Umfangsmenge S^1 in N_p Teilintervalle und somit eine Unterteilung in N_p separate Randwertprobleme, für welche die Druckwerte an den jeweiligen Übergängen durch die verschiedenen $\hat{p}_k(z)$ vorgegeben sind.

Teil-Film-Annahme. Im Gegensatz zu der recht einfach umzusetzenden Voll-Film-Annahme, stellt die nachfolgend diskutierte Herangehensweise eine wesentlich komplexere Modellierung mit erhöhtem Implementierungsaufwand dar.

Die hier zugrunde liegende Annahme setzt auf eine Betrachtung partiell mit Fluid gefüllter Bereiche bei Vermeidung entsprechender Unverträglichkeiten hinsichtlich der Kontinuitätsgleichung. In der Literatur wird dieses Vorgehen üblicherweise mit den sog. Reynolds-Randbedingungen (siehe [46]) assoziiert. Ausgehend vom Beginn φ_1 eines in Umfangsrichtung konvergierenden Schmierspalt

$$\left. \frac{\partial h_0}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 h_0}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} < 0 \quad (3.12)$$

wird der Beginn eines Bereichs mit positivem Fluiddruck initialisiert:

$$p(\varphi_1, z) = 0. \quad (3.13)$$

Die Reynolds-Randbedingungen fordern nun am anderen Ende des Druckgebiets einen Übergang in den sich anschließenden Unterdruckbereich mit verschwindender erster Ableitung. Diese liefert weitere Bedingungen

$$p(\varphi_2, z) = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_2} = 0, \quad (3.14)$$

mit der noch zu bestimmenden Umfangsposition $\varphi_2 > \varphi_1$.

Das Problem erweitert sich somit um die Bestimmung der noch unbekanntenen Position φ_2 der Übergangsstelle, welche i. d. R. nur durch iterative Verfahren ermittelt werden kann. Treten aufgrund einer vom Kreisprofil abweichenden Geometrie allerdings mehrere über den Umfang verteilte, nicht zusammenhängende Bereiche mit tragenden Fluidfilmen auf, so gestaltet sich die iterative Suche nach den einzelnen Bereichen unter jeweiliger Berücksichtigung der postulierten Bedingungen (3.13) und (3.14) als sehr schwierig und rechenzeitintensiv, da jeder einzelne Druckbereich variable Ränder hat und im Zuge einer dynamischen Untersuchung in jedem Zeitschritt systematisch ausiteriert werden muss. Somit ist eine solche Modellierung für das zugrundeliegende Gleitlagerkonzept eher ungeeignet, weswegen im Folgenden lediglich die Voll-Film-Annahme Anwendung findet.

Anpassung des Druckfelds. Für die Voll-Film-Annahme wird eine Gültigkeit der Reynolds-Gleichung über ganz $\Omega_p = \Omega_{\text{Fluid}}$ vorausgesetzt, was aufgrund des modellierten, inkompressiblen Fluids zu Bereichen $\Omega_{p^-} \subset \Omega_p$ führt, in denen der Fluiddruck p negative Werte annimmt; also $p(\varphi, z) < 0$ für $(\varphi, z) \in \Omega_{p^-}$. Dieser Umstand ist als einsetzende Kavitation bzw. als Abriss des Fluidfilms zu interpretieren (vgl. [10]) und steht somit in direktem Gegensatz zu den zuvor getroffenen Annahmen eines voll ausgeprägten Fluidfilms. Um dieses aus modellierungstechnischer Sicht unerwünschte Auftreten negativer Druckwerte, welches einer Übertragung von Zugkräften entsprechen würde, zu handhaben, werden die im Unterdruckbereich liegenden Werte schlichtweg zu Null gesetzt. Dieses Vorgehen findet sich u. a. bei VAN DE VRANDE [95], woraus eine als physikalisch *sinnvoll* einzustufende Beschreibung resultiert:

$$p^*(\varphi, z) = \begin{cases} 0 & p(\varphi, z) < 0 \\ p(\varphi, z) & p(\varphi, z) \geq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Diese Funktion ist zwar nur noch teilweise stetig differenzierbar, aber in dem für die Modellierung entscheidenden Bereich $\Omega_p \setminus \Omega_{p^-}$ werden alle relevanten Anforderungen erfüllt. Obgleich dieses Vorgehen teilweise unverträgliche Anforderungen an die Vorgänge im Gleitlager stellt, können bei simpler Implementierung vergleichsweise gute bis sehr gute Näherungen des Druckfelds erzielt werden (vgl. [46, 95]).

3.2.3. Lagerkräfte

Ziel der vorgestellten Modellierung in Abschnitt 3.2.1 im Zusammenspiel mit den Lösungsanforderungen in Abschnitt 3.2.2 ist ein gemäß Gleichung (3.15) gegebener Ausdruck $p^*(\varphi, z)$ zur Beschreibung des Fluiddrucks innerhalb des Gleitlagers an einer beliebigen Stelle $(\varphi, z) \in \Omega_p$ des zugehörigen Definitionsbereichs.

Wird dieser Ausdruck durch ein geeignetes Verfahren entweder exakt oder näherungsweise bestimmt, lassen sich daraus die auf den Wellenzapfen wirkenden, hydrodynamischen Fluidkräfte berechnen, welche im Kontext dieser Arbeit auch als Lagerkräfte bezeichnet werden. Diese ergeben sich in vektorieller Form durch Integration der durch den Fluiddruck verursachten Flächenlast:

$$\mathbf{F}_p = - \int_{\Omega_p} p^* \mathbf{n}_L d\Omega_p \quad (3.16)$$

Der Vektor \mathbf{n}_L repräsentiert hierbei den nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektor der Oberfläche des Wellenzapfens und wird ähnlich der in der Reynoldsgleichung auftretenden, linearisierten Fluidfilmdicke (3.5) mit

$$\mathbf{n}_L \approx \cos \varphi \mathbf{e}_x^{\mathcal{L}} + \sin \varphi \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}} \quad (3.17)$$

approximiert. Mit der Darstellung in Abhängigkeit der Basisvektoren ergibt sich weiterhin:

$$\mathbf{F}_p = F_{p,x}^{\mathcal{L}} \mathbf{e}_x^{\mathcal{L}} + F_{p,y}^{\mathcal{L}} \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}. \quad (3.18)$$

Üblicherweise bietet sich in diesem Kontext auch eine Linearisierung an, um so Aussagen über Steifigkeit und Dämpfungseigenschaften der Lagerung treffen zu können (siehe [49]).

3.2.4. Dimensionslose Notation

Formulierung der Reynoldsgleichung. Eine möglichst einfache und allgemeine Darstellung der Reynoldsgleichung kann durch Einführung einer dimensionslosen Notation erzielt werden, was ebenso die Anzahl der in der Gleichung enthaltenen Parameter reduziert. Eine mögliche Entdimensionierung ist durch

$$\tau = \Omega_R t, \quad \bar{z} = \frac{2z}{B}, \quad \gamma = \frac{2R_W}{B} \quad H = \frac{h_0}{C}, \quad \Pi = \frac{C^2}{R_W^2 \mu \Omega_R} p \quad (3.19)$$

gegeben, worin neben der dimensionslosen Zeit τ weiterhin die dimensionslose axiale Längsrichtung \bar{z} , der Kurzlagerparameter γ , die auf das initiale Lagerspiel normierte Schmierspalthöhe H sowie der dimensionslose Fluiddruck Π eingeführt werden. Damit lässt sich die Reynoldsgleichung (3.2) auf folgende dimensionslose Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (3.20)$$

Die aus Gleichung (3.5) ableitbare, normierte Schmierspalthöhe

$$H = \frac{h_0}{C} = 1 + U - X_L \cos(\varphi) - Y_L \sin(\varphi) \quad (3.21)$$

bedingt zwangsläufig die Einführung entsprechender dimensionsloser Größen für die Wellenzapfenkoordinaten

$$X_L = \frac{x_L}{C}, \quad Y_L = \frac{y_L}{C} \quad (3.22)$$

und für die radiale Verschiebung der Lagerschale

$$U = \frac{u}{C}. \quad (3.23)$$

Nach entsprechender Umformulierung der in Abschnitt 3.2.2 gelisteten Randbedingungen in Abhängigkeit der eingeführten Größen (3.19) liegen alle für das Fluidmodell notwendigen Zusammenhänge in dimensionsloser Form vor.

Zur besseren Einordnung der jeweiligen Größenordnungen können Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 auf den Seiten 64 und 65 herangezogen werden.

Ausdruck für die Lagerkräfte. Im Zuge einer einheitlichen Vorgehensweise lassen sich auch die Lagerkräfte (3.16) mit Hilfe der entdimensionierten Größen (3.19) angeben. Wird auf die aus der Fluidodynamik typischerweise verwendeten Größen zurückgegriffen ergibt sich

$$\mathbf{F}_p = F_0 S_m \iint -\frac{\gamma^2}{4} \Pi^* \mathbf{n}_L d\varphi d\bar{z}, \quad (3.24)$$

wobei S_m die modifizierte Sommerfeldzahl (vgl. [27])

$$S_m = \frac{R_W B^3 \mu \Omega_R}{2 F_0 C^2} \quad (3.25)$$

beschreibt und F_0 eine noch unspezifizierte charakteristische Kraft¹ bezeichnet. Die Druckfunktion Π^* bezeichnet dabei die physikalisch sinnvolle Druckverteilung gemäß Gleichung (3.15) in dimensionsloser Form:

$$\Pi^*(\varphi, z) = \begin{cases} 0 & \Pi(\varphi, \bar{z}) < 0 \\ \Pi(\varphi, \bar{z}) & \Pi(\varphi, \bar{z}) \geq 0 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Basierend auf den kartesischen Basisvektoren ergeben sich die skalaren Ausdrücke für die auf den Wellenzapfen wirkenden Lagerkräfte:

$$\begin{aligned} F_{p,x}^{\mathcal{L}} &= S_m F_0 \underbrace{\iint -\frac{\gamma^2}{4} \Pi^* \cos \varphi d\varphi d\bar{z}}_{=: f_{p,x}^{\mathcal{L}}}, \\ F_{p,y}^{\mathcal{L}} &= S_m F_0 \underbrace{\iint -\frac{\gamma^2}{4} \Pi^* \sin \varphi d\varphi d\bar{z}}_{=: f_{p,y}^{\mathcal{L}}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die auszuwertenden Integrale werden im Folgenden mit den dimensionslosen Ausdrücken $f_{p,x}^{\mathcal{L}}$ und $f_{p,y}^{\mathcal{L}}$ abgekürzt, sodass die auf F_0 normierten Lagerkräfte sich durch

$$\frac{F_{p,x}^{\mathcal{L}}}{F_0} = S_m f_{p,x}^{\mathcal{L}}, \quad \frac{F_{p,y}^{\mathcal{L}}}{F_0} = S_m f_{p,y}^{\mathcal{L}} \quad (3.28)$$

darstellen lassen.

¹Für F_0 wird üblicherweise die statische Lagerlast gewählt.

3.2.5. Vereinfachung mit Hilfe des Kurzlageransatzes

Um einen analytischen Zugang zur Reynoldsgleichung zu ermöglichen, wird in der Literatur oft der Kurzlageransatz angeführt, der unter Annahme eines vergleichsweise kurzen Lagers ($\gamma^2 \gg 1$) die auf den Umfang bezogenen partiellen Ableitung vernachlässigt. Daraus ergibt sich die auf das Kurzlager angepasste Reynoldsgleichung:

$$\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H^3 \frac{\partial \Pi^{\text{KL}}}{\partial \bar{z}} \right) = 6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau}. \quad (3.29)$$

Zwecks Abgrenzung wird das zu beschreibende Druckfeld mit Π^{KL} bezeichnet. Eine zweifache Integration der gegebenen Differentialgleichung über die axiale Längsrichtung liefert unter Berücksichtigung einer von der axialen Längskoordinate unabhängigen Schmierpalthöhe H und den typischerweise verwendeten axialen Randbedingungen die Druckverteilung im Kurzlager (vgl. [9]):

$$\Pi^{\text{KL}} = \frac{6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau}}{\gamma^2 H^3} (\bar{z}^2 - 1). \quad (3.30)$$

3.3. Lagerschale

Ein zentrales Element der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen stellt der Einfluss der Lagergeometrie auf das dynamische Verhalten dar, welcher für verschiedene Parameterkonstellationen untersucht wird.

Die vorgestellte Modellierung liefert hierfür eine auf rein linear-elastischer Verformung basierende Beschreibung des Verschiebungsfeldes der Lagerschale, welche im Ausdruck (3.21) der Schmierpalthöhe der Reynoldsgleichung berücksichtigt wird.

Es ist anzumerken, dass im Rahmen dieser Arbeit eine Rückkopplung des Fluiddrucks auf die strukturelle Vorformung der Lagerschale sowie Trägheitseffekte nicht berücksichtigt werden. Es wird davon ausgegangen, dass diese unter bestimmten Voraussetzungen keinen (oder nur einen geringen) Einfluss haben. Diese Annahmen erscheinen für einen ersten Ansatz vertretbar, da z. B. in [38] gezeigt wird, dass die Berücksichtigung einer Wechselwirkung des Drucks lediglich einen geringen Einfluss auf die Tragfähigkeit der Gleitlager hat. Die Trägheitsterme werden unter dem Gesichtspunkt eines relativ groß ausfallenden Unterschieds zwischen der Masse der jeweiligen Lagerschalen und der eigentlichen Rotormasse vernachlässigt.

Unabhängig von der Annahme einer einseitigen Kopplung zwischen Fluid und Lagerschale, führt das in diesem Abschnitt vorgestellte Verschiebungsfeld auf mögliche, nicht-zylindrische Gleitlagergeometrien, die ebenso auch als starr angenommen werden können. Der Einfluss eines solch geformten Gleitlagers auf das dynamische Verhalten des Rotors wird darauf aufbauend in Kapitel 5 näher untersucht.

Zum Thema der strukturellen Verformung von Lagerschalen finden sich zur weiteren Information entsprechende Ansätze in der Literatur, u. a. in [38, 95].

3.3.1. Balkenmodell

Zur Bestimmung eines entsprechenden Ausdrucks für die Gleitlagergeometrie wird ein linear-elastisches Verschiebungsmodell eines initial kreisrund gebogenen Balkens aufgestellt. Die Verformung erfolgt dabei durch zwei geeignete Aktoren (vgl. Abbildung 3.4), die jeweils die gleiche Verschiebung an gegenüberliegenden Seiten aufbringen.

Eine Skizze des betrachteten Balkenmodells ist in Abbildung 3.5 dargestellt und zeigt die initiale Konfiguration mit kreisrundem Profil in der $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}} - \mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Ebene. Für die nachfolgende Modellierung wird aufgrund der vorliegenden Symmetrie zusätzlich ein zylindrisches Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_r^{\mathcal{L}}, \mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}}, \mathbf{e}_z^{\mathcal{L}}\}$ eingeführt.

Die Mittellinie des Balkens hat im unverformten Ausgangszustand den radialen Abstand R zum Mittelpunkt des Lagers. Weiterhin ist die radiale Dicke durch d und die axiale Breite durch B gegeben. Daraus ergibt sich der für das Fluidmodell wichtige Innenradius $R_0 = R - d/2$ im Ausgangszustand.

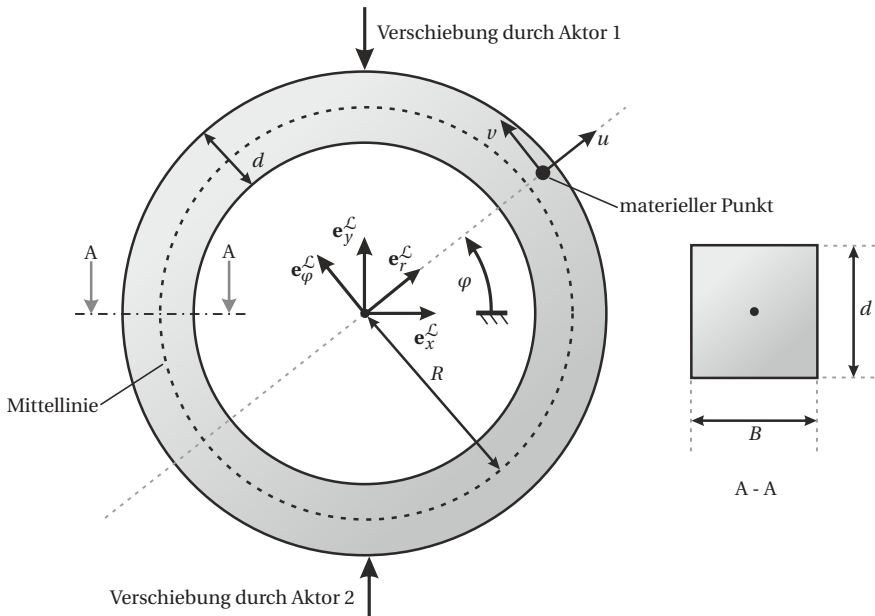


Abbildung 3.5.: Skizze des Balkenmodells für die Lagerschale.

Im Rahmen der klassischen Balkentheorie wird die Ausdehnung der Lagerschale in radialer und axialer Richtung als verhältnismäßig klein gegenüber der Ausdehnung in Umfangsrichtung angenommen, also $B \ll R$ und $d \ll R$. Dies hat zur Folge, dass lediglich kürzere Gleitlager mit diesem Modell näherungsweise beschrieben werden können.

Zur Modellbildung kommt im Wesentlichen die Theorie der linearen Kontinuumsmechanik zum Einsatz, die sich u. a. in [59, 66, 85, 96, 97] findet.

Formulierung des Verschiebungsansatzes sowie des zugehörigen Verzerrungstensors.

Die Verschiebung eines materiellen Punktes des Balkens kann allgemein durch

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z) = u(r, \varphi, z) \mathbf{e}_r^{\mathcal{L}} + v(r, \varphi, z) \mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}} + w(r, \varphi, z) \mathbf{e}_z^{\mathcal{L}} \quad (3.31)$$

in Abhängigkeit der polaren Koordinaten (r, φ, z) der Anfangsplatzierung angegeben werden. Im unverformten Zustand gilt folglich $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Die Modellierung des Balkens erfolgt im Rahmen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie (vgl. [59]), woraus sich basierend auf den Ausführungen von WAUER [96] folgender Ansatz für das Verschiebungsfeld (3.31) anbietet:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^* = \bar{u}(\varphi) \mathbf{e}_r^{\mathcal{L}} + \left[\bar{v}(\varphi) - \frac{r-R}{R} \left(\frac{\partial \bar{u}(\varphi)}{\partial \varphi} - \bar{v}(\varphi) \right) \right] \mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}}. \quad (3.32)$$

Die Funktionen $\bar{u}(\varphi) = u(r=R, \varphi)$ und $\bar{v}(\varphi) = v(r=R, \varphi)$ beschreiben dabei die Verschiebung der Balkenmittellinie von einem initialen Referenzkreis in radialer und tangentialer Richtung und sind lediglich von der Umfangskoordinate φ abhängig. Es wird angenommen, dass die radiale Verschiebung unabhängig von der radialen Koordinate r ist, sodass alle zu einer beliebigen Umfangsposition gehörigen materiellen Punkte die gleiche Verschiebung in $\mathbf{e}_r^{\mathcal{L}}$ -Richtung erfahren. Die Verschiebung in tangentialer $\mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}}$ -Richtung setzt sich aus der Verschiebung sowie Krümmungsänderung der Mittellinie zusammen und hängt linear von der radialen Koordinate r ab. Eine Verschiebung in axialer $\mathbf{e}_z^{\mathcal{L}}$ -Richtung sowie eine Abhängigkeit von der axialen Koordinate selbst wird nicht berücksichtigt.

Basierend auf dem gewählten Verschiebungsansatz (3.32) ergibt sich der zugehörige Verzerrungstensor als symmetrischer Anteil des Verschiebungsgradienten zu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\mathbf{u}^*) + \text{grad}(\mathbf{u}^*)^T) = \underbrace{\left[\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} - \frac{r-R}{Rr} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \bar{u} \right]}_{=\varepsilon_{\varphi\varphi}} \left(\mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}} \right). \quad (3.33)$$

Unter Verwendung einer von der Mittellinie aus startenden Koordinate $\Delta r = r - R$ nimmt der einzig verbleibende Anteil des Verzerrungstensors die Form

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R + \Delta r} \bar{u} - \frac{\Delta r}{R(R + \Delta r)} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \quad (3.34)$$

an.

Aufstellen des elastischen Potentials. Zur Angabe des elastischen Potentials wird der Spannungstensor benötigt, der sich unter der vereinfachenden Annahme eines einachsigen Spannungszustandes sowie eines entsprechenden linearen Materialgesetzes mit Elastizitätsmodul E angeben lässt:

$$\boldsymbol{\sigma} = E \varepsilon_{\varphi\varphi} \left(\mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}} \otimes \mathbf{e}_\varphi^{\mathcal{L}} \right). \quad (3.35)$$

Damit kann folgender Ausdruck für das elastische Potential aufgestellt werden:

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_{\varphi} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} E \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 (R + \Delta r) dz d\Delta r d\varphi. \quad (3.36)$$

Im Hinblick auf die durchzuführenden Integrationen weist der Integrand jedoch eine etwas ungünstige Form auf, da die Größe Δr hier linear im Nenner auftritt, sodass eine Integration zwangsläufig auf den natürlichen Logarithmus führt. Durch eine vereinfachenden Ansatz von WAUER [96] kann dies allerdings umgangen werden. Hierzu wird unter der Annahme $d \ll R$ der Integrand des elastischen Potentials (3.36) in einer Taylorreihe um den Punkt $\Delta r = 0$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt:

$$E\varepsilon_{\varphi\varphi}^2(R + \Delta r) \approx E \left[\frac{1}{R} \left(\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\Delta r}{R^2} \left(\bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right) \left(\bar{u} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{(\Delta r)^2}{R^3} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \bar{u} \right)^2 \right]. \quad (3.37)$$

Dies führt nach teilweiser Integration unter Verwendung der aus der Biegetheorie bekannten Größen

$$A = Bd, \quad I = \frac{Bd^3}{12}$$

für die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I auf die vereinfachte Form des elastischen Potentials:

$$U_{\text{el}} \approx \frac{1}{2} \int_{\varphi} \left(\frac{EA}{R} (\bar{v}_{,\varphi} + \bar{u})^2 + \frac{EI}{R^3} (\bar{u}_{,\varphi\varphi} + \bar{u})^2 \right) d\varphi. \quad (3.38)$$

Zwecks Darstellung erfolgt die Angabe der partiellen Ableitungen nach der Umfangskoordinate φ durch die Indexschreibweise $(\cdot)_{,\varphi}$.

Variationsprinzip und Verschiebungsdifferentialgleichungen. Basierend auf dem ermittelten Potential wird die Variationsgleichung

$$\delta U_{\text{el}} = \delta W_p \quad (3.39)$$

aufgestellt, in der δW_p die virtuelle Arbeit des Fluiddrucks beschreibt, welche mit Hilfe des physikalischen Druckverlaufs aus (3.15) durch den Zusammenhang

$$\delta W_p = \int_{\varphi - \frac{B}{2}}^{\varphi + \frac{B}{2}} p^*(\varphi, z) \delta \bar{u} R dz d\varphi \quad (3.40)$$

angegeben werden kann, welcher im Zuge der Modellierung aber zu null gesetzt wird. Durch entsprechende Produktintegrationen ergeben sich somit die beiden Verschiebungsdifferentialgleichungen für die radiale Verschiebung \bar{u} und die tangentielle Verschiebung \bar{v} der Mittellinie, welche im Folgenden exemplarisch für den Bereich $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ aufgeführt sind:

$$\frac{EI}{R^4} (\bar{u}_{,\varphi\varphi\varphi\varphi} + 2\bar{u}_{,\varphi\varphi} + \bar{u}) + \frac{EA}{R^2} (\bar{v}_{,\varphi} + \bar{u}) = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} p^*(\varphi, z) dz, \quad (3.41a)$$

$$\frac{EA}{R^2} (\bar{v}_{,\varphi\varphi} + \bar{u}_{,\varphi}) = 0. \quad (3.41b)$$

Die verwendeten Dirichlet-Randbedingungen lauten dabei:

$$\bar{u}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\hat{u}, \quad \bar{v}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \bar{u}_{,\varphi}\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (3.42)$$

Die ersten beiden Randbedingungen erfassen die durch die beiden Aktoren gleichermaßen realisierte Verschiebung $-\hat{u}$ in radialer Richtung, wobei im weiteren Verlauf stets von einem Zusammendrücken der Lagerschale ausgegangen wird und damit nur Werte $\hat{u} \geq 0$ gewählt werden. Die verbleibenden vier Randbedingungen entsprechen der Forderung einer nicht verkippenden Querschnittsfläche an den jeweiligen Positionen der beiden Aktoren, also einer rein radialen Verschiebung aller materiellen Punkte an den Winkelpositionen $\varphi = \pm\pi/2$.

Lösung des Randwertproblems. Unter Annahme einer verschwindenden Kopplung mit dem Druckfeld p^* kann das resultierende System homogener Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen gelöst werden. Aus Gleichung (3.41b) ergibt sich durch Integration der Zusammenhang

$$\bar{v}_{,\varphi} + \bar{u} = K = \text{konst.}, \quad (3.43)$$

welcher eingesetzt in Gleichung (3.41a) auf eine reine Differentialgleichung in \bar{u} führt:

$$\bar{u}_{,\varphi\varphi\varphi} + 2\bar{u}_{,\varphi\varphi} + \bar{u} = -\frac{AKR^2}{I}. \quad (3.44)$$

Deren allgemeine Lösung kann in der Form

$$\bar{u}(\varphi) = C_1\varphi \cos\varphi + C_2 \cos\varphi + C_3\varphi \sin\varphi + C_4 \sin\varphi - \frac{AKR^2}{I} \quad (3.45)$$

mit den Integrationskonstanten $C_{1,\dots,4} \in \mathbb{R}$ und $K \in \mathbb{R}$ angegeben werden. Mit Hilfe der Randbedingungen (3.42) für \bar{u} und $\bar{u}_{,\varphi}$ können bis auf K alle übrigen Konstanten entsprechend bestimmt werden:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = C_3 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{AR^2K}{I} - \hat{u} \right), \quad C_4 = 0. \quad (3.46)$$

Die einzig verbleibende Unbekannte ist nun die Integrationskonstante K aus Gleichung (3.43). Wird diese nochmals integriert so ergibt sich

$$K\pi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{v}_{,\varphi} d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{u} d\varphi = \underbrace{\bar{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \bar{v}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{u} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{u} d\varphi. \quad (3.47)$$

Durch Integration von \bar{u} aus Gleichung (3.45) und unter Berücksichtigung der Integrationskonstanten $C_{1,\dots,4}$ kann eine Gleichung zur Bestimmung von K abgeleitet werden. Diese lässt sich leicht lösen und liefert so den Ausdruck

$$K = -\hat{u} \frac{2I \sin \frac{\pi}{2}}{-2AR^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} (AR^2 + I)} = -\frac{I}{AR^2} \frac{2\hat{u}}{-2 + \frac{\pi^2}{4} \left(1 + \frac{I}{AR^2}\right)}. \quad (3.48)$$

Wird dieser zusammen mit $C_{1,\dots,4}$ in Gleichung (3.45) eingesetzt, kann eine Linearisierung mit der Annahme $d \ll R$ des einzig verbleibenden Anteils mit Geometrieparametern vorgenommen werden:

$$\frac{I}{AR^2} = \frac{Bd^3}{12BdR^2} = \frac{d^2}{12R^2} \approx 0. \quad (3.49)$$

So lässt sich die radiale Verschiebung der Mittellinie der Lagerschale infolge einer durch die beiden Aktoren aufgebrachten Verschiebung unabhängig von den einzelnen geometrischen Größen angeben:

$$\bar{u}(\varphi) = -\hat{u} \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \left(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{\pi} \right) \quad \text{für } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.50)$$

Die periodische Fortsetzung dieses Ausdrucks liefert die radiale Verschiebung aller materiellen Punkte des kreisförmig gebogenen Balkens über den gesamten Umfang:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{e}_r^{\mathcal{L}} = -\hat{u} \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \begin{cases} \left(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{\pi} \right) & , \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + \pi \sin \varphi - \frac{4}{\pi} \right) & , \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \end{cases}. \quad (3.51)$$

Diese Verschiebung kann direkt in den Ausdruck der Schmierstalthöhe (3.5) eingesetzt werden, da keine Abhängigkeit von der radialen Koordinate vorliegt und daher auch die Verschiebung der Innenfläche der Lagerschale an einer beliebigen Umfangsposition durch diesen Ausdruck vollständig erfasst wird.

Da die Verschiebung in tangentialer Richtung für den durch die Reynoldsgleichung beschriebenen Druckaufbau nicht relevant ist, wird auf deren ausführliche Darstellung an dieser Stelle verzichtet. Diese lässt sich allerdings in wenigen Schritten durch eine Integration von Gleichung (3.43) unter Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen bestimmen.

3.3.2. Dimensionslose Notation

Im Zuge der Modellierung des Fluidfilms wird die entsprechende Entdimensionierung bereits in Gleichung (3.23) eingeführt. Durch eine Normierung der Verschiebungsgröße auf das initiale Lagerspiel $C = R_0 - R_W$ ergibt sich

$$U = -\hat{U} \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \begin{cases} \left(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{\pi} \right) & , \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ \left(-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + \pi \sin \varphi - \frac{4}{\pi} \right) & , \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \end{cases}, \quad (3.52)$$

mit der dimensionslosen Verschiebung

$$\hat{U} = \hat{u}/C \quad (3.53)$$

an den beiden Aktorpositionen.

3.4. Elastischer Rotor

Für die Beschreibung des elastischen Rotors wird das vergleichsweise einfache Modell des Laval-Rotors (engl. Jeffcott rotor) herangezogen. Dieses bezieht alle im Fokus dieser Arbeit stehenden Einflüsse, wie Rotornachgiebigkeit und statische Unwucht, mit ein und eignet sich daher für simulationsgestützte Untersuchungen zur Einschätzung der Auswirkungen des beschriebenen Gleitlagerkonzepts auf das Schwingungsverhalten.

Eine grundlegende Annahme ist hierbei der stationäre Betrieb des Rotorsystems mit einer zeitlich konstanten Rotordrehfrequenz Ω_R .

3.4.1. Bewegungsgleichungen des Laval-Rotors

Modellierungsannahmen. Bei der Modellierung des Laval-Rotors wird von einer symmetrischen Lagerung durch zwei baugleiche Gleitlager des im Vorfeld beschriebenen Typs ausgegangen. Eine schematische Darstellung findet sich in Abbildung 3.6. Der mit der konstanten Drehfrequenz Ω_R rotierende Rotor der Gesamtmasse $M + 2m$ besteht aus einer als masselos angenommenen elastischen Welle (isotrope Steifigkeit c_W), welche die mittig montierte, scheibenförmige Hauptmasse M mit denen im Lager angenommenen Zapfenmassen m verbindet.

Im Fall des horizontalen Rotors wird der Einfluss des in vertikaler \mathbf{e}_y^j -Richtung wirkenden Schwerfelds der Erde (Gravitationskonstante g) berücksichtigt. Zur Einbringung möglicher dissipativer Effekte wird eine auf die Hauptmasse wirkende äußere viskose Dämpfung (Dämpfungskoeffizient d_a) eingeführt. Weiterhin wird eine Exzentrizität ε_S zwischen dem Schwerpunkt S der Hauptmasse und dem Wellendurchstoßpunkt W angenommen, was im Betrieb zu einer statischen Unwucht führt.

Da der Fokus der Untersuchungen auf den Auswirkungen der Fluid-Struktur-Interaktionen im Gleitlager steht, wird das Rotormodell so einfach wie möglich gehalten. Im Zuge dessen setzt die hier beschriebene Modellierung ein komplett symmetrisches Verhalten der beiden Zapfenmassen voraus und berücksichtigt weder Verkippungen, Fehlstellungen der Lager noch gyroskopische Effekte. Diese Annahmen stellen zwar eine verhältnismäßig starke Einschränkungen dar, sind für ein grundlegendes Rotormodell aber nach GASCH ET AL. [30] durchaus gerechtfertigt und geeignet.

Bewegungsgleichungen. Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen bedarf es der Einführung entsprechender kinematischer Größen. Unter der Annahme rein ebener Bewegungen in einer durch die Basisvektoren \mathbf{e}_x^j und \mathbf{e}_y^j aufgespannten Ebene werden die Lage des Scheibenschwerpunkts S sowie des Wellendurchstoßpunkts W durch die Ortsvektoren \mathbf{r}_S und \mathbf{r}_W angegeben. Die Beschreibung der Wellenzapfenkinematik erfolgt gemäß den Ausführungen in Abschnitt 3.1.2 durch den Ortsvektor \mathbf{r}_L .

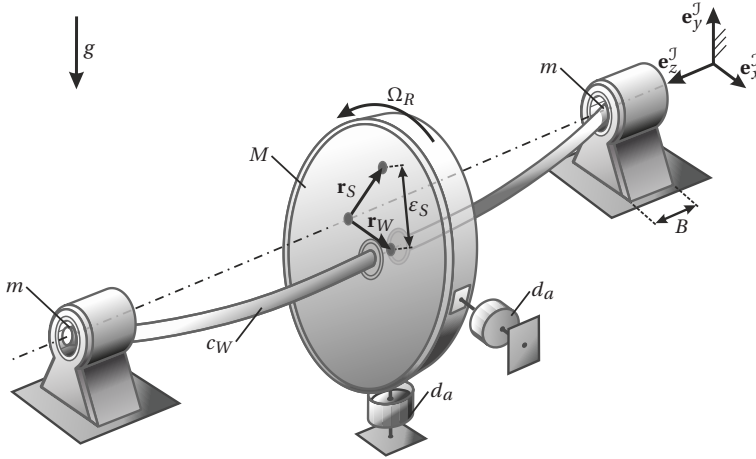


Abbildung 3.6.: Prinzipskizze eines hydrodynamisch gelagerten Laval-Rotors.

Unter Berücksichtigung des angenommenen symmetrischen Verhaltens können die beiden Lagerzapfen zusammengefasst werden, sodass sich folgendes System gewöhnlicher, gekoppelter Differentialgleichungen¹ zur Beschreibung der Bewegungen von Wellendurchstoßpunkt und Wellenzapfen ergibt:

$$\begin{aligned}
 M \frac{{}^J d^2}{dt^2} \mathbf{r}_W + d_a \frac{{}^J d}{dt} \mathbf{r}_W + c_W (\mathbf{r}_W - \mathbf{r}_L) &= -M \frac{{}^J d^2}{dt^2} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_W) - M g \mathbf{e}_y^J, \\
 2m \frac{{}^J d^2}{dt^2} \mathbf{r}_L + c_W (\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_W) &= 2\mathbf{F}_p \left(\mathbf{r}_L, \frac{{}^J d}{dt} \mathbf{r}_L \right) - 2m g \mathbf{e}_y^J.
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Der im allgemeinen nichtlineare Kraftvektor \mathbf{F}_p beschreibt die auf den Wellenzapfen wirkende hydrodynamische Lagerkraft, welche selbst von Lage und Geschwindigkeit des Wellenzapfens abhängt.

Zur Darstellung in skalaren Größen werden die Vektoren in Abhängigkeit der Basisvektoren des lagerfesten Koordinatensystems mit den zugehörigen Koordinaten angegeben. Gemäß den in Abbildung 3.7 dargestellten Zusammenhängen ist das dem Lager zugeordnete Koordinatensystem gegenüber dem inertialfesten um den konstanten Winkel α verdreht. Die Positionsangabe des Scheibenschwerpunkts erfolgt relativ zum Wellendurchstoßpunkt durch die Exzentrizität ε_S sowie den Phasenwinkel ψ_R , welcher wiederum von der Drehfrequenz Ω_R des Rotors abhängt. Unter Annahme eines stationären Betriebszustandes ($\Omega_R = \text{konst.}$) lässt sich der Phasenwinkel durch $\psi_R = \Omega_R t + \psi_0$ angeben, wobei die Anfangsphase ψ_0 aufgrund der freien Wahl des Anfangszeitpunkts ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu $\psi_0 = 0$ gesetzt werden kann.

¹Die differentielle Notation $\frac{{}^J d}{dt}$ entspricht hierbei den Zeitableitungen bzgl. des Inertialsystems \mathcal{J} gemäß [98].

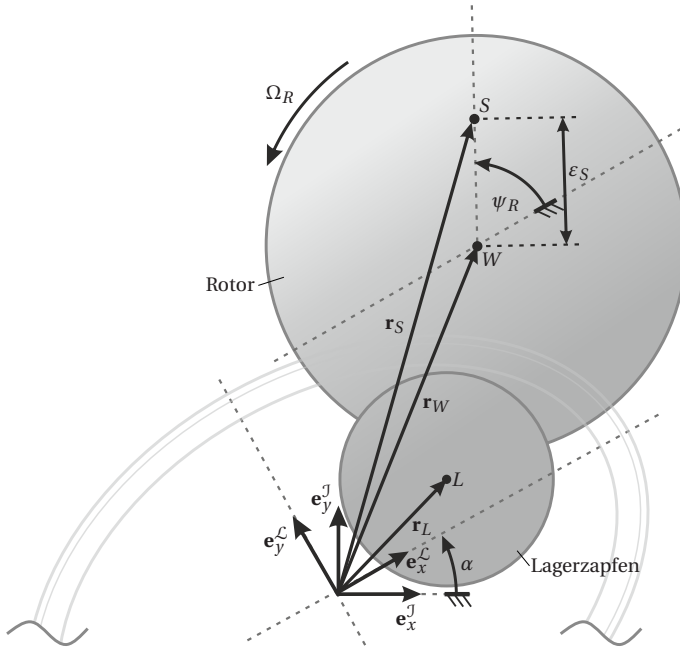


Abbildung 3.7.: Kinematische Betrachtung von Lagerzapfen und Rotor in der $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}-\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Ebene.

Durch komponentenweise Auswertung der Gleichungen (3.54) bzgl. $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ und $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ ergeben sich die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_W^{\mathcal{L}} + d_a\dot{x}_W^{\mathcal{L}} + c_W(x_W^{\mathcal{L}} - x_L^{\mathcal{L}}) &= M\varepsilon_S\Omega_R^2 \cos(\Omega_R t) & -Mg \sin \alpha &, \\
 M\ddot{y}_W^{\mathcal{L}} + d_a\dot{y}_W^{\mathcal{L}} + c_W(y_W^{\mathcal{L}} - y_L^{\mathcal{L}}) &= M\varepsilon_S\Omega_R^2 \sin(\Omega_R t) & -Mg \cos \alpha &, \\
 2m\ddot{x}_L^{\mathcal{L}} + c_W(x_L^{\mathcal{L}} - x_W^{\mathcal{L}}) &= & +2F_{p,x}^{\mathcal{L}} - 2mg \sin \alpha &, \\
 2m\ddot{y}_L^{\mathcal{L}} + c_W(y_L^{\mathcal{L}} - y_W^{\mathcal{L}}) &= & +2F_{p,y}^{\mathcal{L}} - 2mg \cos \alpha &.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Unwucht
Druck
äußere Last

Die Rotorbelastung setzt sich demnach aus einer durch ε_S hervorgerufenen statischen Unwucht, der durch das Fluid aufgebracht Lagerkräfte $F_{p,x}^{\mathcal{L}}, F_{p,y}^{\mathcal{L}}$ sowie der durch die Schwerkraft verursachten äußeren, statischen Last zusammen, welche sowohl auf die Hauptmasse M als auch auf die Wellenzapfenmassen m wirkt.

In den nachfolgenden Ausführungen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Kennzeichnung des Bezugssystems durch den hochgestellten Index \mathcal{L} verzichtet, so gilt beispielsweise $x_W^{\mathcal{L}} \hat{=} x_W$.

3.4.2. Dimensionslose Notation

Im Zuge einer Modellierung mit möglichst geringen Anzahl freier Parameter bietet sich auch in diesem Fall eine Entdimensionierung der Bewegungsgleichungen mit einer gleichzeitigen Definition neuer, dimensionsloser Parameter an. Im Zuge der in Abschnitt 3.2 verwendeten Größen werden ebenso auch die Auslenkungen des Rotors auf das initiale Lagerspiel C normiert

$$X_W = \frac{x_W}{C}, \quad Y_W = \frac{y_W}{C},$$

sodass sich mit Hilfe der dimensionslosen Zeit $\tau = \Omega_R t$ die Bewegungsgleichungen (3.55) in entdimensionierter Form angeben lassen:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 X_W'' + \bar{d}_a \bar{\omega} X_W' + \frac{X_W - X_L}{\Gamma} &= \bar{\omega}^2 \gamma_S \cos \tau & + \frac{2}{1 + \kappa} \sin \alpha, \\ \bar{\omega}^2 Y_W'' + \bar{d}_a \bar{\omega} Y_W' + \frac{Y_W - Y_L}{\Gamma} &= \bar{\omega}^2 \gamma_S \sin \tau & + \frac{2}{1 + \kappa} \cos \alpha, \\ \kappa \bar{\omega}^2 X_L'' + \frac{X_L - X_W}{\Gamma} &= 2\bar{\omega} \sigma f_{p,x} + \frac{\kappa}{1 + \kappa} \sin \alpha, \\ \kappa \bar{\omega}^2 Y_L'' + \frac{Y_L - Y_W}{\Gamma} &= 2\bar{\omega} \sigma f_{p,y} + \frac{\kappa}{1 + \kappa} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Die verwendeten Parameter sind dabei wie folgt definiert (vgl.[9]):

$$\kappa = \frac{2m}{M}, \quad \Gamma = \frac{F_0}{c_W C}, \quad \bar{d}_a = \sqrt{\frac{C}{F_0 M}} d_a, \quad \gamma_S = \frac{\varepsilon_S}{C}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{MC}{F_0}} \Omega_R, \quad \sigma = \frac{B^3 \mu R_W}{2C^2 \sqrt{MCF_0}}. \quad (3.57)$$

Der Parameter κ beschreibt das Verhältnis der Wellenzapfen- zur Hauptmasse des Rotors. Der dimensionslose Parameter Γ kann mit der Nachgiebigkeit der Welle assoziiert werden und \bar{d}_a beschreibt die auf den Rotor wirkende äußere Dämpfung. Der Einfluss der statischen Unwucht wird durch γ_S beschrieben, wobei für den perfekt gewuchteten Rotor $\gamma_S = 0$ gilt. Der dimensionslose Parameter σ bezeichnet hierbei die reziproke Last der Gleitlager und steht über die dimensionslose Winkelgeschwindigkeit¹ $\bar{\omega}$ in direktem Zusammenhang mit der modifizierten Sommerfeldzahl (vgl. Gleichung (3.25)):

$$\sigma = \frac{S_m}{\bar{\omega}}. \quad (3.58)$$

Die typischerweise verwendete modifizierte Sommerfeldzahl wird im vorliegenden Fall als Produkt eines drehzahlabhängigen Anteils $\bar{\omega}$ und eines -unabhängigen Anteils σ dargestellt, da die Drehzahl des Rotors als zentrale Verfolungsgröße bei der Untersuchung stationärer Lösungen des Rotorsystems dient.

¹In den nachfolgenden Abschnitten wird für die eingeführte dimensionslose Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ des Rotors auch der Begriff Drehzahlparameter oder nur Drehzahl als Synonym verwendet.

Bei der vorgestellten Entdimensionierung kommt die charakteristische Kraft F_0 zum Einsatz, welche als die auf ein einzelnes Gleitlager wirkende äußere Last interpretiert wird:

$$F_0 = \frac{(Mg + 2mg)}{2}. \quad (3.59)$$

Der mit der statischen Belastung verknüpfte Lastwinkel α beschreibt hierbei den Winkel zwischen der Wirkrichtung der Last und der Hauptrichtung $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ des Gleitlagers. Die aus dem hydrodynamischen Druckaufbau resultierenden Lagerkräfte werden im gegebenen Differentialgleichungssystem durch die dimensionslosen Terme $f_{p,x}$ und $f_{p,y}$ repräsentiert, welche sich auf Basis der definierten Druckkräfte (3.27) in Abschnitt 3.2.3 angeben lassen:

$$f_{p,x} = \frac{F_{p,x}^{\mathcal{L}}}{S_m F_0}, \quad f_{p,y} = \frac{F_{p,y}^{\mathcal{L}}}{S_m F_0}. \quad (3.60)$$

Zur besseren Einschätzung der jeweiligen Größenordnungen der einzelnen physikalischen Parameter findet sich in Tabelle 3.1 eine Zusammenstellung möglicher physikalischer Parameterwerte in Anlehnung an [9].

Hauptmasse Rotor	M	4 kg
Zapfenmassen	m	0.5 kg
Wellensteifigkeit	c_W	4000 N/mm
Äußere Dämpfung	d_a	0.12 Ns/mm
Exzentrizität	ε_S	0.01 mm
Winkelgeschwindigkeit Rotor	Ω_R	0-6000 rad/s
Gravitationskonstante	g	9.81 m/s ²
Initiales Lagerspiel	C	0.06 mm
Wellenzapfenradius	R_W	16 mm
Lagerbreite	B	8 mm
Dynamische Viskosität	μ	0.0075 Pa s

Tabelle 3.1.: Physikalische Parameterwerte des hydrodynamisch gelagerten Laval-Rotors.

Die daraus für die numerischen Untersuchungen abgeleiteten Werte der dimensionslosen Parameter sind Tabelle 3.2 zu entnehmen. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass gerade der Dämpfungsparameter d_a bzw. \bar{d}_a eher einen qualitativen Charakter inne hat und daher weitestgehend willkürlich gewählt wird.

Massenverhältnis	κ	0.25
Wellennachgiebigkeit	Γ	≈ 0.1
Äußere Dämpfung	\bar{d}_a	≈ 0.1
Exzentrizität	γ_S	≈ 0.15
Kurzlagerparameter	γ	4
Drehzahlparameter	$\bar{\omega}$	0-20
Reziproker Lastparameter	σ	≈ 0.1

Tabelle 3.2.: Zu Tabelle 3.1 äquivalente Werte der dimensionslosen Parameter des hydrodynamisch gelagerten Laval-Rotors.

4. Lösungsverfahren und Implementierungsstrategie

Bevor eine Untersuchung des hydrodynamisch gelagerten Rotors erfolgen kann, müssen die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Lagerkräfte in Abhängigkeit der Zustandsgrößen bestimmt werden. Hierzu wird sowohl die druckbeschreibende Reynoldsgleichung näherungsweise gelöst als auch die Integrale zur Bestimmung der Lagerkräfte. Der Fokus liegt hierbei auf einem möglichst effizienten Vorgehen mit sinnvoller Implementierung, um so im Hinblick auf sich anschließende rechnergestützte Untersuchungen möglichst geringe Rechenzeiten zu erzielen.

4.1. Näherungslösung der Reynoldsgleichung

Für die Bestimmung geeigneter Näherungslösungen der druckbeschreibenden Reynoldsgleichung (3.20) können zahlreiche Verfahren eingesetzt werden, die je nach Beschaffenheit des Problems und der zur Verfügung stehenden Ressourcen unterschiedlich gut geeignet sind. Die Wahl des Näherungsverfahrens beeinflusst weiterhin die Anforderungen an die Auswertung der Integrale zur Bestimmung der Lagerkräfte.

Neben den aus der klassischen Theorie bekannten Kurz- oder Langlageransätzen finden sich in der Literatur zahlreiche weitere Ansätze zur Lösung der Reynoldsgleichung in einem Lager endlicher Breite, u. a. in [5, 9, 76, 93, 94].

4.1.1. Lösungsverfahren

Es wird ein kombinierter Ansatz aus einem Galerkin- und einem Finite-Differenzen-Verfahren zur Bestimmung des Druckverlaufs vorgeschlagen. Als Ausgangspunkt dient hierfür die entdimensionierte Reynoldsgleichung (3.20) sowie die Lösungsanforderungen der für diesen Fall gewählten Voll-Film-Annahme (siehe Abschnitt 3.2.2).

Projektion auf axiale Ansatzfunktionen mittels Galerkin-Verfahren. Unter der Annahme einer von der axialen Koordinate \bar{z} unabhängigen Schmierspalthöhe H bietet sich ein projektionsbasiertes Verfahren zur Näherung der axialen Abhängigkeit des Druckes an. Ähnliche Ansätze aus dem Gebiet der aerodynamischen Gleitlager finden sich in den Arbeiten [5, 8, 64] und zeigen ein gutes Approximationsverhalten, sodass ein solches Vorgehen auch im vorliegenden Fall als sinnvoll erachtet wird.

Es wird daher ein Ansatz in der separierten Form

$$\Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{N_{\bar{z}}} Q_k(\varphi) P_k(\bar{z}) \quad (4.1)$$

gewählt, in dem die Ansatzfunktionen $P_k(\bar{z})$ sowohl die axialen Randbedingungen $P_k(\bar{z} = \pm 1) = 0$ als auch die Symmetriebedingung $P_k(\bar{z}) = P_k(-\bar{z})$ erfüllen sollen (vgl. Abschnitt 3.2.2). Die Funktionen $Q_k(\varphi)$ beschreiben hierbei den zur jeweiligen Ansatzfunktion zugehörigen Lösungsverlauf in Abhängigkeit der Umfangskoordinate φ . Mit der Definition des Projektionsoperators

$$\langle f, g \rangle_{\bar{z}} = \langle g, f \rangle_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\bar{z}) g(\bar{z}) d\bar{z} \quad (4.2)$$

lässt sich im Sinne Galerkins aus der Reynoldsgleichung (3.20) somit ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die angesetzten Funktionen $Q_k(\varphi)$ ableiten:

$$\sum_{k=1}^{N_{\bar{z}}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial Q_k}{\partial \varphi} \right) \langle P_k, P_l \rangle_{\bar{z}} + \gamma^2 H^3 \left\langle \frac{\partial^2 P_k}{\partial \bar{z}^2}, P_l \right\rangle_{\bar{z}} Q_k \right] = \left(6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) \langle 1, P_l \rangle_{\bar{z}}, \quad (4.3)$$

$$l = 1, \dots, N_{\bar{z}}.$$

Unter Berücksichtigung der durchzuführenden Projektionen sowie der Lösungsanforderungen findet sich schnell ein entsprechender Satz an orthogonalen Ansatzfunktionen¹:

$$P_k(\bar{z}) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\bar{z}\right), \quad k = 1, \dots, N_{\bar{z}}. \quad (4.4)$$

Die Auswertung der jeweiligen Projektionen liefert in diesem Fall²:

$$\begin{aligned} \langle P_l, P_k \rangle_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \delta_{kl}, \\ \langle 1, P_k \rangle_{\bar{z}} &= \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}, \\ \left\langle \frac{\partial^2 P_l}{\partial \bar{z}^2}, P_k \right\rangle_{\bar{z}} &= \left[-\frac{\pi^2}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \delta_{kl} \quad \text{für } k = 1, \dots, N_{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen (4.3) zu einem Satz von $N_{\bar{z}}$ ungekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen³ für die $Q_k(\varphi)$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial Q_k}{\partial \varphi} \right) + \underbrace{\gamma^2 H^3 \left[-\frac{\pi^2}{2} \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \right]}_{=:K_{1,k}} Q_k = \underbrace{\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}}_{=:K_{2,k}} \left(6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right), \quad k = 1, \dots, N_{\bar{z}}. \quad (4.6)$$

¹Zur Theorie um die Auswahl geeigneter Ansatzfunktionen wird auf [96] verwiesen.

² δ_{kl} bezeichnet hierbei das Kronecker-Symbol gemäß eingeführter Notation.

³Aus der Projektion resultierende Koeffizienten werden mit $K_{1,k}$ bzw. $K_{2,k}$ abgekürzt.

Ein solcher Ansatz stellt eine effiziente Herangehensweise zur Näherung des Druckes dar, da ausgehend von der ersten Differentialgleichung für $k = 1$ jede weitere lediglich eine zusätzliche Korrektur der Näherung liefert, die aufgrund der nicht vorhandenen Kopplung unabhängig und mit minimalem Aufwand bestimmt werden kann.

Finite-Differenzen-Verfahren zur Näherung der Umfangslösung. Nach der erfolgreichen Entkopplung der Reynoldsgleichung von der axialen Koordinate \bar{z} verbleiben die $N_{\bar{z}}$ gewöhnlichen Differentialgleichungen (4.6), welche über ein Finite-Differenzen-Verfahren¹ näherungsweise gelöst werden.

Im Folgenden werden lediglich Lösungsanforderungen im Hinblick auf eine *Voll-Film-Annahme* ohne zusätzliche Druckbedingungen betrachtet (siehe Gleichung (3.10)). Diese Anschauung ist mit einem umfangsperiodischen Druckverlauf im Gleitlager gleichzusetzen und findet sich u. a. in der Arbeit von VAN DE VRANDE [95]. Es wird demnach für alle $k \in [1, \dots, N_{\bar{z}}]$ nach zulässigen Lösungen von

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{H^3}{2} \frac{\partial Q_k}{\partial \varphi} \right) + \gamma^2 H^3 K_{1,k} Q_k = K_{2,k} \left(6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right), \quad Q_k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^1, Q_k \in C^2 \quad (4.7)$$

gesucht. Die im Sinne des FD-Verfahrens notwendige Diskretisierung des Definitionsbereichs $\varphi \in S^1$ erfolgt mittels der Schrittweite

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi - 1} \quad (4.8)$$

über N_φ äquidistant verteilte Stützstellen

$$\varphi_l = (l-1)\Delta\varphi, \quad l = 1, \dots, N_\varphi.$$

Weiterhin werden die auftretenden Differentialoperatoren durch zentrale Differenzenquotienten² genähert (siehe [23]):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_l} &\approx \frac{H(\varphi_{l+1}) - H(\varphi_{l-1})}{2\Delta\varphi} &&= \frac{H_{l+1} - H_{l-1}}{2\Delta\varphi}, \\ \left. \frac{\partial Q_k}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_l} &\approx \frac{Q_k(\varphi_{l+1}) - Q_k(\varphi_{l-1})}{2\Delta\varphi} &&= \frac{Q_{k,l+1} - Q_{k,l-1}}{2\Delta\varphi}, \\ \left. \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_l} &\approx \frac{Q_k(\varphi_{l+1}) - 2Q_k(\varphi_l) + Q_k(\varphi_{l-1})}{\Delta\varphi^2} &&= \frac{Q_{k,l+1} - 2Q_{k,l} + Q_{k,l-1}}{\Delta\varphi^2}. \end{aligned}$$

Dies führt auf eine diskrete Darstellung der Differentialgleichung (4.7) für eine Auswertung an einer beliebigen Stützstelle φ_l :

$$b_{k,l}^F Q_{k,l-1} + a_{k,l}^F Q_{k,l} + c_{k,l}^F Q_{k,l+1} = f_{k,l}^F. \quad (4.9)$$

¹im Folgenden mit FD-Verfahren abgekürzt

²Zwecks vereinfachter Darstellung erfolgt die Angabe des Arguments einer beliebigen Funktion $Q_k(\varphi)$ oder $H(\varphi)$ bei der Auswertung an einer spezifischen Stelle φ_l üblicherweise durch eine entsprechende Indexdarstellung: $Q_k(\varphi_l) = Q_{k,l}$, $H(\varphi_l) = H_l$.

Die verwendeten Koeffizienten sind dabei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} a_{k,l}^F &= -\frac{H_l^3}{\Delta\varphi^2} + \gamma^2 H_l^3 K_{1,k} & , & & b_{k,l}^F &= \frac{H_l^3}{2\Delta\varphi^2} - \frac{3H_l^2(H_{l+1} - H_{l-1})}{8\Delta\varphi^2} & , \\ c_{k,l}^F &= \frac{H_l^3}{2\Delta\varphi^2} + \frac{3H_l^2(H_{l+1} - H_{l-1})}{8\Delta\varphi^2} & , & & f_{k,l}^F &= K_{2,k} \left(\frac{H_{l+1} - H_{l-1}}{\Delta\varphi} + 12 \frac{\partial H_l}{\partial \tau} \right) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Unter Beachtung der diskreten Form der Lösungsanforderungen hinsichtlich eines stetig differenzierbaren, periodischen Verlaufs

$$Q_{k,0} = Q_{k,N_\varphi-1}, \quad Q_{k,N_\varphi} = Q_{k,1}, \quad \forall k \in [1, \dots, N_{\bar{z}}] \quad (4.11)$$

führen die Auswertungen von Gleichung (4.9) an den ersten $(N_\varphi - 1)$ Stützstellen auf ein lineares Gleichungssystem für die Werte $Q_{k,l}$ mit $l = 1, \dots, N_\varphi - 1$:

$$\begin{pmatrix} a_{k,1}^F & c_{k,1}^F & 0 & \cdots & b_{k,1}^F \\ b_{k,2}^F & a_{k,2}^F & c_{k,2}^F & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{k,N_\varphi-2}^F & a_{k,N_\varphi-2}^F & c_{k,N_\varphi-2}^F \\ c_{k,N_\varphi-1}^F & \cdots & 0 & b_{k,N_\varphi-1}^F & a_{k,N_\varphi-1}^F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{k,1} \\ Q_{k,2} \\ \vdots \\ Q_{k,N_\varphi-2} \\ Q_{k,N_\varphi-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k,1}^F \\ f_{k,2}^F \\ \vdots \\ f_{k,N_\varphi-2}^F \\ f_{k,N_\varphi-1}^F \end{pmatrix} . \quad (4.12)$$

Das Gleichungssystem (4.12) weist dabei eine fast tridiagonale Struktur auf, sodass ein kombiniertes Lösungsverfahren aus der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel [18] und dem Thomas-Algorithmus empfohlen wird. Bei diesem Vorgehen wird das Gleichungssystem in einem ersten Schritt in seinen tridiagonalen Anteil und den entsprechenden Rest aufgetrennt. Auf Basis der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel kann daraus im Anschluss ein Problem in einer rein tridiagonalen Form angegeben werden, welches mittels eines dafür besonders gut geeigneten iterativen Verfahrens, dem Thomas-Algorithmus, gelöst werden. Im Anschluss wird die resultierende Lösung durch die inverse Sherman-Morrison-Woodbury-Formel in die ursprüngliche Form zurück transformiert.

Eine detaillierte Darstellung dieses direkten Lösungsverfahrens, welches im Folgenden als SWT-Verfahren bezeichnet wird, kann der Arbeit von YARROW [100] entnommen werden.

Näherungslösung der Reynoldsgleichung in semi-diskreter Form. Nach erfolgter Näherung durch das FD-Verfahren kann ein diskreter semi-analytischer Ausdruck (kurz: semi-diskret) für eine Näherungslösung der Reynoldsgleichung gemäß Ansatz (4.1) angegeben werden

$$\Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi_l, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{N_{\bar{z}}} Q_{k,l} P_k(\bar{z}), \quad l = 1, \dots, N_\varphi - 1, \quad \bar{z} \in [-1, 1], \quad (4.13)$$

welche alternativ auch in Index-Schreibweise

$$\Pi_l^{(N_{\bar{z}})}(\bar{z}) = \Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi_l, \bar{z}) \quad (4.14)$$

und damit in matrizieller Form dargestellt werden kann:

$$\underline{\Pi}^{(N_{\bar{z}})}(\bar{z}) = \left[\Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi_1, \bar{z}), \dots, \Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi_{N_\varphi-1}, \bar{z}) \right]^T . \quad (4.15)$$

4.1.2. Beurteilung des Näherungsverfahrens

Zwecks Beurteilung des Verfahrens sowie der damit verbundenen Implementierung werden in den nachfolgenden Abschnitten weitere Untersuchungen hinsichtlich möglicher Fehlerabschätzungen präsentiert. Die Beschreibung erfolgt ohne Modifikation der erhaltenen Näherungslösung im Sinne eines physikalisch sinnvollen Druckverlaufs (siehe Seite 51), sodass in den hier betrachteten Näherungen des Druckes ebenso auch negative Werte auftreten können.

Bei den präsentierten Ergebnissen handelt es sich zum Teil um gemittelte Werte, die aus einer entsprechend hohen Anzahl an Funktionsauswertungen bestimmt werden. Die hierfür verwendeten Eingangsgrößen sind durch alle möglichen Kombinationen der in Tabelle 4.1 aufgeführten Werte gegeben, um so eine repräsentative Mittelung zu erhalten. Als Ausdruck der Schmierspalthöhe wird dabei der vergleichsweise einfache Zusammenhang

$$H = 1 - X_L \cos \varphi - Y_L \sin \varphi \quad (4.16)$$

eines zylindrischen Gleitlagers verwendet. Im Fokus der Beurteilung stehen dabei ein Rechenzeitvergleich für das gewählte SWT-Verfahren, eine Fehlerabschätzung des FD-Verfahrens sowie eine Residuums- und Lösungsbetrachtung für den gewählten Ansatz der axialen Abhängigkeit des Druckfeldes.

Die Ergebnisse dienen dabei der Validierung des Verfahrens sowie der Wahl geeigneter Ansatzgrößen $N_{\bar{z}}$ und N_{φ} .

Schmierspalthöhe	H	$1 - X_L \cos \varphi - Y_L \sin \varphi$
Index axialer Ansatzfunktion	k	[1,2,3]
Kurzlagerparameter	γ	[3,5,10]
Position des Wellenzapfens in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung	X_L	[0,0.1,0.3,0.6]
Position des Wellenzapfens in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung	Y_L	[0,0.1,0.3,0.6]
Geschwindigkeit des Wellenzapfens in $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}$ -Richtung	X_L'	[0,0.5,-0.5]
Geschwindigkeit des Wellenzapfens in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung	Y_L'	[0,0.5,-0.5]

Tabelle 4.1.: Gewählte Werte der Eingangsgrößen für die Beurteilung des Näherungsverfahrens.

Rechenzeitvergleich des Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme. Der Vorteil des SWT-Verfahrens gegenüber alternativen Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme besteht klar in den stark reduzierten Rechenzeiten, wie dem Vergleich in Abbildung 4.1 entnommen werden kann. Zur Gegenüberstellung dienen hierbei das Gauß'sche Eliminationsverfahren mit einer vorherigen Zerlegung des Gleichungssystems in eine obere und untere Dreiecksmatrix (kurz: LR-Verfahren [3]) sowie der Standardlöser `mldivide` des kommerziellen Numerik-Programms `MATLAB`. Die für verschieden viele Stützstellen ausgewerteten Rechenzeiten (CPU-Zeiten) sind hierbei in Relation zu der des SWT-Verfahrens angegeben.

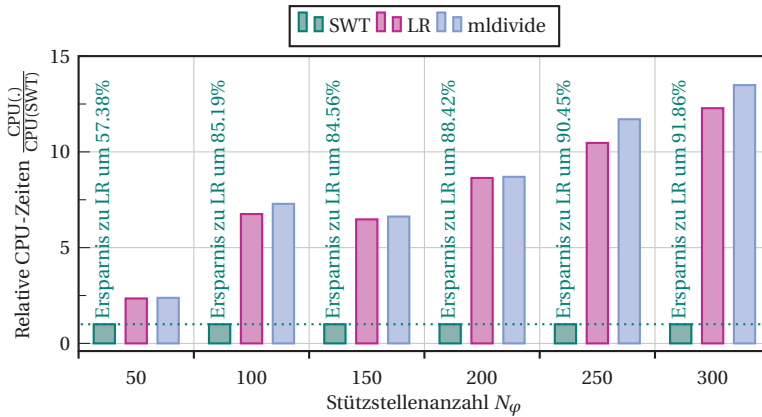


Abbildung 4.1.: Rechenzeitvergleich verschiedener numerischer Lösungsverfahren für das lineare Gleichungssystem (4.12). Darstellung der gemittelten CPU-Zeiten für verschiedene Parametersätze (siehe Tabelle 4.1) mit je 5000 Funktionsaufrufen.

Es ist klar zu erkennen, dass sich das SWT-Verfahren gerade bei steigender Anzahl der Stützstellen durch durchweg reduzierte Rechenzeiten gegenüber den beiden Alternativverfahren auszeichnet. So liegt die Rechenzeiterparnis gegenüber dem LR-Verfahren bei einer gewählten Stützstellenzahl $N_\varphi \geq 100$ zwischen ca. 80 – 90%.

Die leicht erhöhten Rechenzeiten des mldivide-Algorithmus gegenüber dem LR-Verfahren sind vermutlich mit der vorherigen Analyse des Gleichungssystems zu begründen, bei welcher der Algorithmus auf Basis der Struktur des linearen Gleichungssystems ein geeignetes Lösungsverfahren auswählt.

Das SWT-Verfahren zeigt sich als direktes Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit einer vergleichsweise einfachen Implementierung (vgl. [100]) und stark reduzierter Rechenzeit, weshalb es im Folgenden zur Lösung der aus dem FD-Verfahren resultierenden Gleichungssysteme eingesetzt wird.

Fehlerabschätzung des Finite-Differenzen-Verfahrens. Zur besseren Einordnung des durch das FD-Verfahren bedingten Fehlers wird ein Maß für die lokale Abweichung der diskreten Näherungswerte von einer Referenzlösung definiert:

$$e_{Q_{k,l}} = \left| \frac{Q_k(\varphi_l) - Q_k^{\text{ref}}(\varphi_l)}{Q_k^{\text{ref}}(\varphi_l)} \right|. \quad (4.17)$$

Als Referenz Q_k^{ref} dient hierbei eine durch das FD-Verfahren bestimmte Näherung mit $N_\varphi = 2^{12} + 1$ Stützstellen, welche als repräsentativ für die tatsächliche Lösung angenommen wird. Die für einen Vergleich zu wählende Stützstellenanzahl einer Näherungslösung ist hierbei so zu setzen, dass eine Auswertung von Näherung und Referenzlösung jeweils an übereinstimmenden Umfangspositionen erfolgt. Im vorliegenden Fall wird dies durch eine systematische Verdopplung der Stützstellen nach einem $(2^x + 1)$ -Schema erreicht.

Zur systematischen Gegenüberstellung wird basierend auf der lokalen Abweichung (4.17) ein globaler Ausdruck der Form

$$E_{Q_k}^{N_\varphi} = \frac{1}{N_\varphi - 1} \sum_{l=1}^{N_\varphi - 1} e_{Q_k, l} \quad (4.18)$$

als entsprechendes Fehlermaß definiert. Der in Abbildung 4.2 gegebene Fehlerverlauf zeigt das zu erwartende Verhalten für eine steigende Zahl an Stützstellen. Der Vergleich endet bei einer Stützstellenanzahl $2^8 + 1$, da eine höhere Anzahl im Falle einer praktischen Anwendung auf Grund enormer Rechenzeiten nicht rentabel ist. Die unterschiedlichen Werte des Kurzlagerparameters γ zeigen lediglich geringfügig quantitative und kaum qualitative Unterschiede, sodass die beobachtete Tendenz als einheitlich für Lager unterschiedlichster Breite angenommen wird. Im Hinblick auf die Güte der Näherungslösung wird eine Abweichung von 1% als zulässig gewählt, sodass sich daraus eine aus dem Bereich $N_\varphi \in [2^6, 2^8]$ zu wählende Stützstellenanzahl ergibt. Angesichts einer ähnlichen Wahl in [95] erscheint dieser Bereich als sinnvoll.

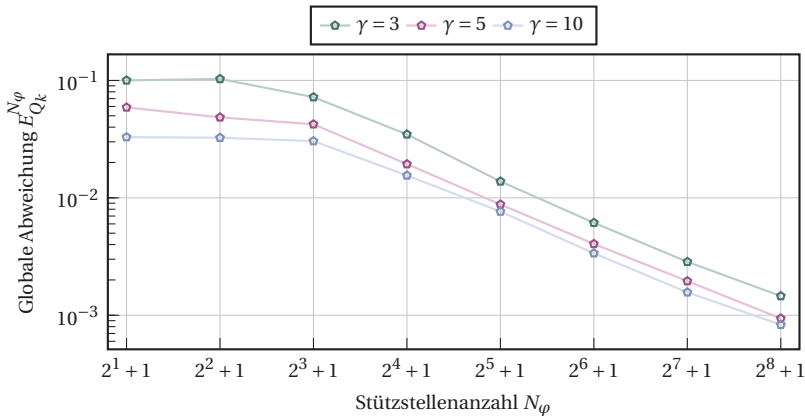


Abbildung 4.2.: Mittlere Abweichung des Finite-Differenzen-Verfahrens bezogen auf die Vergleichslösung mit $N_\varphi = 2^{12} + 1$ Stützstellen. Darstellung des gemittelten Fehlers für verschiedene Parametersätze (siehe Tabelle 4.1).

Residuum- und Konvergenzbetrachtung in Abhängigkeit der axialen Ansatzordnung.

Inwieweit Ansatz (4.1) mit den jeweiligen Ansatzfunktionen (4.4) zur sinnvollen Beschreibung der Abhängigkeit des Druckfeldes von der axialen Koordinate \bar{z} gerechtfertigt ist, wird im Folgenden geklärt.

Abbildung 4.3 zeigt hierzu exemplarisch den für einen bestimmten Zustand ausgewerteten Druckverlauf¹ an der Stelle $\bar{z} = 0$ für verschiedene Ansatzordnungen $N_{\bar{z}}$.

¹Die dargestellten Verläufe sind Näherungslösungen der Reynoldsgleichung ohne die auf Seite 51 beschriebene Anpassung der negativen Werte.

Die dargestellten Näherungen des dimensionslosen Fluiddrucks ergeben sich durch Anwendung des beschriebenen FD-Verfahrens für die jeweils $k = 1$ -te bis $N_{\bar{z}}$ -te Differentialgleichung (4.7) bei einer verhältnismäßig hohen Stützstellenanzahl $N_{\varphi} = 2^{12} + 1$, um so den Einfluss des Fehlers durch das FD-Verfahren selbst möglichst gering zu halten. Die in Abbildung 4.3a gegebene Gegenüberstellung zeigt für eine steigende Ansatzordnung $N_{\bar{z}}$ quantitativ nur geringfügige Änderungen. Dies lässt ein vergleichsweise starkes Konvergenzverhalten vermuten, was durch eine Betrachtung der zugehörigen unabhängigen Einzellösungen Q_k in Abbildung 4.3b untermauert werden kann.

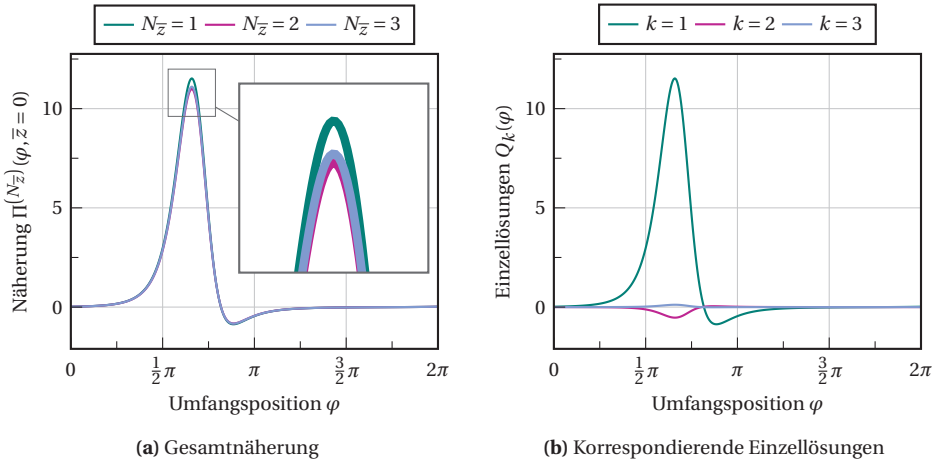


Abbildung 4.3.: Gegenüberstellung exemplarischer Drucknäherungen über den Lagerumfang an der axialen Position $\bar{z} = 0$ mit verschiedenen Ansatzordnungen für den Fall $\gamma = 5$ und $(X_W, X'_W, Y_W, Y'_W) = (-0.5, -0.1, 0.7, 0.1)$.

Zur besseren Beurteilung des Konvergenzverhaltens des axialen Ansatzes wird das den Projektionen (4.3) zugrunde liegende Residuum betrachtet:

$$\begin{aligned}
 R_{\Pi}^{(N_{\bar{z}})} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial \Pi^{(N_{\bar{z}})}}{\partial \varphi} \right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H^3 \frac{\partial \Pi^{(N_{\bar{z}})}}{\partial \bar{z}} \right) - \left(6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(H^3 \frac{\partial Q_k}{\partial \varphi} \right) P_k(\bar{z}) + \gamma^2 H^3 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \bar{z}^2} Q_k(\varphi) \right] - \left(6 \frac{\partial H}{\partial \varphi} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Unter Berücksichtigung der zugehörigen L^2 -Norm des Residuums

$$\left\| R_{\Pi}^{(N_{\bar{z}})} \right\|_{L^2} = \left(\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(R_{\Pi}^{(N_{\bar{z}})} \right)^2 d\bar{z} d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{2\pi}{N_{\varphi} - 1} \sum_{l=1}^{N_{\varphi}-1} \left[\int_{-1}^1 \left(R_{\Pi}^{(N_{\bar{z}})} \Big|_{Q_k=Q_{k,l}} \right)^2 d\bar{z} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.20}$$

können Informationen hinsichtlich des Konvergenzverhaltens des Ansatzes erhalten werden. In Abbildung 4.4 finden sich hierzu die Auswertungen der Norm für verschiedene

Ansatzordnungen bis hin zum Grad $N_{\bar{z}} = 15$. Die dargestellten Ergebnisse entsprechen hierbei dem arithmetischen Mittel aller möglichen Kombinationen der in Tabelle 4.1 gegebenen Eingangsgrößen.

Die in Abbildung 4.4a dargestellten Mittelwerte der Residuumsnorm sind verhältnismäßig gering und deuten daher auf eine vergleichsweise gute Näherung durch den gewählten Ansatz hin. Mit zunehmender Ansatzordnung zeigt sich erwartungsgemäß eine Reduktion der Norm, was einer verbesserten Näherung der Lösung entspricht. Dies wird durch die in Abbildung 4.4b gegebene Auswertung der einzelnen Normverhältnisse verdeutlicht. Das Diagramm zeigt die relative Änderung der mit einem Ansatz beliebiger Ordnung $N_{\bar{z}}$ assoziierten Residuumsnorm bezogen auf die für $N_{\bar{z}} = 1$ ausgewertete Norm. So lässt sich beispielsweise feststellen, dass durch Hinzunahme einer weiteren Ansatzfunktion eine Verbesserung um rund 28% gegenüber der Näherung erster Ordnung erzielt werden kann. Das für die Residuumsnorm zu beobachtende Verhalten legt ein zu null konvergierendes Verhalten nahe und rechtfertigt somit den Einsatz der gewählten Ansatzfunktion sowie des damit verbundenen Projektionsverfahrens.

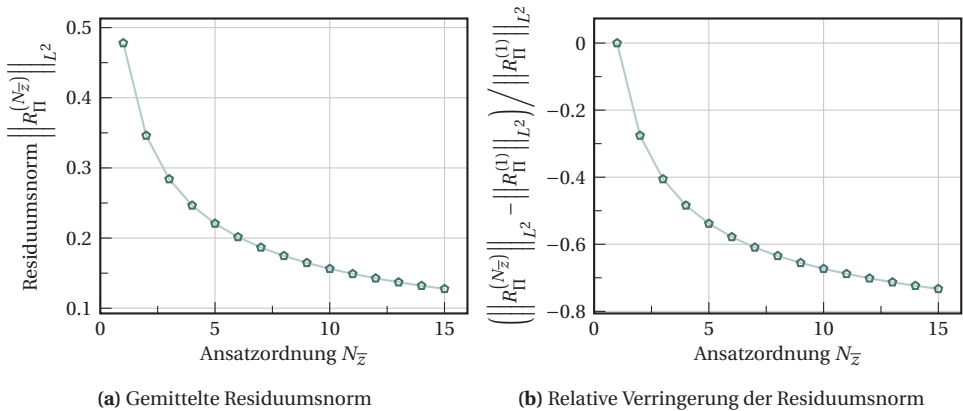


Abbildung 4.4.: Residuumsauswertung in Abhängigkeit der axialen Ansatzordnung $N_{\bar{z}}$. Darstellung der gemittelten Werte für verschiedene Parametersätze (siehe Tabelle 4.1).

Fehlerabschätzung der Näherungslösung. Da sich die bisher vorgestellten Untersuchungen lediglich mit dem Residuum und nicht der Lösung selbst befassen, wird ergänzend ein auf die Näherungslösungen bezogenes Fehlermaß definiert:

$$e_{\Pi}^{N_{\bar{z}}} = \left| \frac{\Pi^{(N_{\bar{z}})}(\varphi, \bar{z}) - \Pi^{\text{ref}}(\varphi, \bar{z})}{\Pi^{\text{ref}}(\varphi, \bar{z})} \right|. \quad (4.21)$$

Dies dient dem systematischen Vergleich von Näherungen verschiedener Ansatzordnungen $N_{\bar{z}}$ und lässt somit Tendenzen hinsichtlich der Approximationsgüte erkennen. Die definierte lokale Abweichung einer Näherungslösung wird dabei in Abhängigkeit einer Referenzlösung $\Pi^{\text{ref}}(\varphi, \bar{z}) = \Pi^{(20)}(\varphi, \bar{z})$ der Ordnung $N_{\bar{z}} = 20$ angegeben. Angesichts des in Abbildung 4.4 zu beobachtenden Verhaltens des Residuums kann davon ausgegangen werden, dass diese ausreichend genau ist. Basierend auf dem eingesetzten FD-Verfahren ergibt sich ein Ausdruck für die globale Abweichung

$$E_{\Pi}^{N_{\bar{z}}} = \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 e_{\Pi}^{N_{\bar{z}}} d\bar{z} d\varphi \right) \approx \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\pi}{N_{\varphi} - 1} \sum_{l=1}^{N_{\varphi}-1} \left[\int_{-1}^1 e_{\Pi}^{N_{\bar{z}}} \Big|_{\varphi=\varphi_l} d\bar{z} \right] \right), \quad (4.22)$$

deren Auswertung dem Diagramm in Abbildung 4.5 zu entnehmen ist. Erwartungsgemäß sinkt die globale Abweichung mit einer steigenden Ansatzordnung. So zeigt sich für $N_{\bar{z}} = 1$ im Mittel ein Fehler von ca. 2%, wohingegen ein Ansatz der Ordnung $N_{\bar{z}} = 10$ nur noch einen mittleren Fehler von ca. 0.02% aufweist. Der Einfluss des Kurzlagerparameters scheint, wie auch zuvor bei der Fehlerbetrachtung des FD-Verfahrens selbst (vgl. Abbildung 4.2), marginal zu sein.

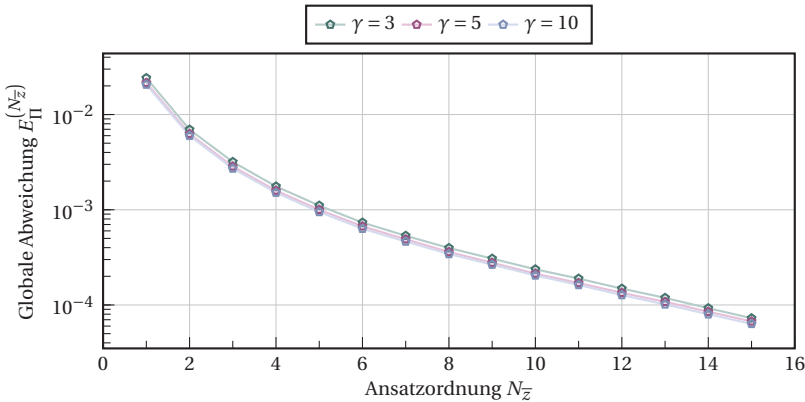


Abbildung 4.5.: Fehlerauswertung der Näherungslösungen bezogen auf die Vergleichslösung $\Pi^{(20)}$. Darstellung der gemittelten Werte für verschiedene Parametersätze (siehe Tabelle 4.1).

Im Hinblick auf simulationsgestützte Untersuchungen ist eine möglichst effiziente Implementierung hinsichtlich der Rechenzeit zu wählen. Daher wird auf Basis eines maximal zulässigen Fehlers von 1% die Ansatzordnung $N_{\bar{z}} = 2$ für alle nachfolgenden Simulationen gewählt.

4.2. Lagerkräfte

Auf Basis des im vorangegangenen Abschnitt gewählten Lösungsverfahrens der Reynolds-Gleichung, erfolgt eine entsprechende Näherung der in den Gleichungen (3.27) definierten Integrale unter Berücksichtigung der dimensionslosen Notation aus den Gleichungen (3.60). Als Ausgangspunkt dient die in semi-diskreter Form vorliegende Näherungslösung (4.15), die auf eine als physikalisch sinnvoll zu erachtende Form gebracht wird (vgl. Gleichung (3.15)). Hierzu wird der Operator

$$\mathcal{P}(x) = \frac{|x| + x}{2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{P}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.23)$$

definiert, mit dessen Hilfe die positiven Werte der Druckverteilung in semi-diskreter Form durch $\mathcal{P}\left(\Pi_l^{(N_{\bar{z}})}(\bar{z})\right)$ angegeben werden können.

4.2.1. Angepasstes Integrationsverfahren

Aufgrund der semi-diskreten Form der Druckwerte wird eine Kombination aus analytischer und numerischer Integration zur Näherung der Lagerkräfte angewendet. Die Integration über die axiale \bar{z} -Koordinate erfolgt hierbei analytisch, wohingegen die Integration über die Umfangskoordinate φ über ein Trapez-Verfahren erfolgt.

Integration mittels Trapez-Verfahren für äquidistante Stützstellen. Die Lagerkräfte ergeben sich näherungsweise durch Auswertung der Integrale (3.27) unter Berücksichtigung der N_φ Stützstellen in Umfangsrichtung zu

$$\begin{aligned} f_{p,x} &\approx \tilde{f}_{p,x} = -\frac{\gamma^2}{4} \frac{2\pi}{N_\varphi - 1} \sum_{l=1}^{N_\varphi - 1} \left[\left(\int_{-1}^1 \mathcal{P}\left(\Pi_l^{(N_{\bar{z}})}(\bar{z})\right) d\bar{z} \right) \cos \varphi_l \right], \\ f_{p,y} &\approx \tilde{f}_{p,y} = -\frac{\gamma^2}{4} \frac{2\pi}{N_\varphi - 1} \sum_{l=1}^{N_\varphi - 1} \left[\left(\int_{-1}^1 \mathcal{P}\left(\Pi_l^{(N_{\bar{z}})}(\bar{z})\right) d\bar{z} \right) \sin \varphi_l \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Qualität dieser Näherung korreliert dabei mit der Anzahl der Stützstellen, sodass für eine höhere Stützstellenzahl ebenso auch bessere Ergebnisse für Näherung der Integrale zu erwarten sind.

Ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch die äquidistante Stützstellenverteilung. Da lediglich über positive Werte der Druckverteilung integriert wird, stellt sich zwangsläufig die Frage nach deren Nulldurchgängen und inwieweit diese das Integrationsergebnis qualitativ und quantitativ beeinflussen. Liegt ein Nulldurchgang und damit der Wechsel in den nicht zu berücksichtigenden Unterdruckbereich zwischen zwei Stützstellen vor, ist beim angeführten Trapez-Verfahren mit unerwünschten Effekten zu rechnen.

Anpassung des Trapez-Verfahrens durch zusätzliche Stützstellen. Um der beschriebenen Problematik entgegenzuwirken wird eine anpassende Vorgehensweise mit zusätzlichen Stützstellen empfohlen.

Algorithmus 4.1: Stützstellenerweiterung für angepasstes Trapez-Verfahren

1. Die Nulldurchgänge der Druckverteilung werden durch Vergleich der Funktionswerte an zwei aufeinanderfolgenden diskreten Umfangspunkten bei $\bar{z} = 0$ abgeschätzt:

$$VZW_l = \left[\Pi_l^{(N_{\bar{z}})} \Pi_{l+1}^{(N_{\bar{z}})} \right] \Big|_{\bar{z}=0}, \quad i = l, \dots, N_\varphi.$$

Wird ein Vorzeichenwechsel $VZW_l < 0$ detektiert, so ist in dem durch die beiden Stützstellen φ_l und φ_{l+1} begrenzten Bereich mindestens ein Nulldurchgang zu erwarten. Als Resultat ergeben sich N_φ^+ Teilintervalle, in denen die Druckfunktion mindestens eine Nullstelle aufweist.

2. Für alle N_φ^+ Intervalle wird eine Nullstelle der Druckverteilung näherungsweise durch ein Sekantenverfahren bestimmt:

$$\hat{\varphi}_k = -\Pi_k^{(N_{\bar{z}})} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Pi_{k+1}^{(N_{\bar{z}})} - \Pi_k^{(N_{\bar{z}})}} + \varphi_k \Big|_{\bar{z}=0}, \quad k = 1, \dots, N_\varphi^+.$$

3. Es werden N_φ^+ zusätzliche Stützstellen an den Umfangspositionen $\hat{\varphi}_k$ eingefügt. Der zugehörige Funktionswert wird entsprechend zu null gesetzt:

$$\Pi^{(N_{\bar{z}})}(\hat{\varphi}_k, \bar{z}) = 0, \quad k = 1, \dots, N_\varphi^+.$$

Eine hierzu schematische Darstellung ist in Abbildung 4.6 aufgeführt.

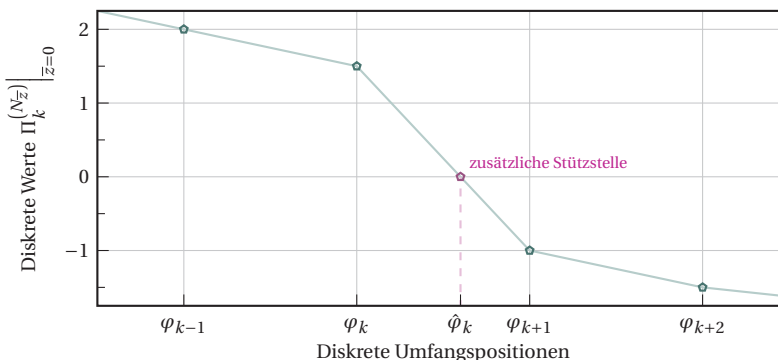


Abbildung 4.6.: Beispielhafte Darstellung von Algorithmus 4.1 für die Stützstellenerweiterung der Druckwerte in Umfangsrichtung.

Durch das beschriebene Vorgehen ergibt sich die um zusätzliche N_φ^+ Einträge erweiterte Menge der Stützstellen¹

$$\underline{\varphi}^+ = \left[\varphi_1, \dots, \varphi_k, \hat{\varphi}_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{N_\varphi-1} \right]^T \in \mathbb{R}^{(N_\varphi+N_\varphi^+-1) \times 1}. \quad (4.25)$$

Die semi-diskrete Form (4.15) wird somit um die entsprechenden N_φ^+ Einträge auf

$$\underline{\Pi}^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) = \left[\Pi_1^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}), \dots, \Pi_k^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}), 0, \Pi_{k+1}^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}), \dots, \Pi_{N_\varphi-1}^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) \right]^T \in \mathbb{R}^{(N_\varphi+N_\varphi^+-1) \times 1} \quad (4.26)$$

erweitert.

In Anbetracht der zusätzlich eingeführten Stützstellen lassen sich die angepassten Näherungen der dimensionslosen Lagerkräfte angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p,x} &= -\frac{\gamma^2}{4} \sum_{l=1}^{N_\varphi+N_\varphi^+-1} \left[\frac{\varphi_{l+1}^+ - \varphi_l^+}{2} \left(\int_{-1}^1 \mathcal{P} \left(\Pi_{l+1}^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) \right) \cos \varphi_{l+1}^+ d\bar{z} + \int_{-1}^1 \mathcal{P} \left(\Pi_l^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) \right) \cos \varphi_l^+ d\bar{z} \right) \right], \\ \tilde{f}_{p,y} &= -\frac{\gamma^2}{4} \sum_{l=1}^{N_\varphi+N_\varphi^+-1} \left[\frac{\varphi_{l+1}^+ - \varphi_l^+}{2} \left(\int_{-1}^1 \mathcal{P} \left(\Pi_{l+1}^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) \right) \sin \varphi_{l+1}^+ d\bar{z} + \int_{-1}^1 \mathcal{P} \left(\Pi_l^{(N_\varphi^+)}(\bar{z}) \right) \sin \varphi_l^+ d\bar{z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Diese Vorgehensweise, welche auf der Einführung zusätzlicher Stützstellen beruht, wird im Folgenden auch als angepasstes Trapez-Verfahren bezeichnet.

4.2.2. Vergleichende Betrachtung der Auswertung der Lagerkräfte

Zwecks Erläuterung der Problematik und Rechtfertigung der empfohlenen Anpassung des Trapez-Verfahrens wird exemplarisch eine auf der Kurzlagerlösung (3.30) basierende Druckverteilung für ein zylindrisches Gleitlager betrachtet. Als Ausdruck für die dimensionslose Schmierstathöhe wird in diesem Fall exemplarisch

$$H = 1 - \hat{E} \cos \beta \cos \varphi - \hat{E} \sin \beta \sin \varphi \quad (4.28)$$

gewählt. Unter der Annahme einer zeitlich konstanten Exzentrizität \hat{E} sowie eines zeitlich konstanten Verlagerungswinkels β beschreibt diese eine konstante Position des Wellenzapfenmittelpunkts im Gleitlager. Der sich für diesen Fall aus der Reynoldsgleichung (unter Annahme der Kurzlagerlösung) ergebende Druckverlauf

$$\Pi^{\text{KL}}(\hat{E}, \beta) = \frac{(6\hat{E} \cos \beta \sin \varphi - 6\hat{E} \sin \beta \cos \varphi)}{\gamma^2 (1 - \hat{E} \cos \beta \cos \varphi - \hat{E} \sin \beta \sin \varphi)^3} (\bar{z}^2 - 1) \quad (4.29)$$

wird exemplarisch an $(N_\varphi - 1)$ diskreten Umfangsstellen ausgewertet und basierend auf den Ausdrücken (4.24) bzw. (4.27) näherungsweise integriert.

¹hier exemplarisch für eine zwischen den Stützstellen φ_k und φ_{k+1} eingeführte Nullstelle $\hat{\varphi}_k$

Analytische Referenzlösung. Zu Vergleichszwecken können aufgrund der relativ simplen Form der Funktion (4.29) die Lagerkräfte ebenso auch analytisch angegeben werden. Hierzu werden die Nullstellen der Zählerfunktion bestimmt, welche die Integrationsgrenzen für den positiven Druckbereich von $\varphi \in [\beta, \beta + \pi]$ liefern. Ein solches Vorgehen ist lediglich für den hier dargestellten Fall der Kurzlagerlösung möglich. Die Integrale können in wenigen Schritten ausgewertet werden, sodass sich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned}
 f_{p,x}(\Pi^{\text{KL}}) &= -\frac{\gamma^2}{4} \int_{\beta}^{\beta+\pi} \int_{-1}^1 \frac{(6\hat{E} \cos \beta \sin \varphi - 6\hat{E} \sin \beta \cos \varphi)}{\gamma^2(1 - \hat{E} \cos \beta \cos \varphi - \hat{E} \sin \beta \sin \varphi)^3} (\bar{z}^2 - 1) \cos \varphi \, d\bar{z} \, d\varphi \\
 &= \frac{-4\hat{E}^2 \cos \beta \sqrt{-\hat{E}^2 + 1} - \hat{E}\pi \sin \beta (\hat{E} - 1) (\hat{E} + 1)}{\sqrt{-\hat{E}^2 + 1} (\hat{E} - 1)^2 (\hat{E} + 1)^2}, \\
 f_{p,y}(\Pi^{\text{KL}}) &= -\frac{\gamma^2}{4} \int_{\beta}^{\beta+\pi} \int_{-1}^1 \frac{(6\hat{E} \cos \beta \sin \varphi - 6\hat{E} \sin \beta \cos \varphi)}{\gamma^2(1 - \hat{E} \cos \beta \cos \varphi - \hat{E} \sin \beta \sin \varphi)^3} (\bar{z}^2 - 1) \sin \varphi \, d\bar{z} \, d\varphi \\
 &= \frac{-4\hat{E}^2 \sin \beta \sqrt{-\hat{E}^2 + 1} + \hat{E}\pi \cos \beta (\hat{E} - 1) (\hat{E} + 1)}{\sqrt{-\hat{E}^2 + 1} (\hat{E} - 1)^2 (\hat{E} + 1)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

Fehlerbetrachtung in Abhängigkeit der Stützstellenanzahl. In Abbildung 4.7 findet sich eine Gegenüberstellung der mit Hilfe der beiden Trapez-Verfahren (4.24) und (4.27) genährten Lagerkräfte mit den Referenzwerten der analytischen Lösung (4.30). Die Darstellung erfolgt hierbei in Form eines relativen Fehlermaßes der beiden Näherungsergebnisse bezogen auf die exakte Lösung für unterschiedlich viele Stützstellen.

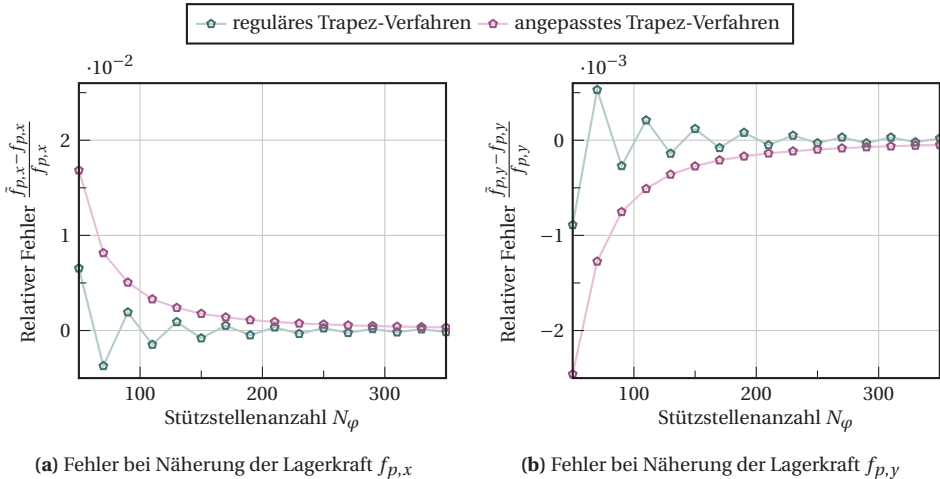


Abbildung 4.7.: Exemplarische Fehlerbetrachtung bei Näherung der Lagerkräfte für Druckverlauf (4.29) für verschieden viele Stützstellen mit $\hat{E} = 0.5$ und $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Die mit steigender Stützstellenanzahl abklingenden Fehler zeigen eine gute Approximation durch die beiden Verfahren auf, wobei das reguläre Trapez-Verfahren im betrachteten Fall einen stets geringeren Fehler als das angepasste Verfahren nach Algorithmus 4.1 aufweist. Trotz quantitativ schlechterer Näherung wird dennoch das angepasste Verfahren empfohlen. Der Grund hierfür deutet sich bereits in dem sichtlich alternierenden Verlauf des regulären Verfahrens an, welches einen ständigen Wechsel zwischen Über- bzw. Unterschätzung der Lagerkräfte offenbart.

Fehlerbetrachtung in Abhängigkeit verschiedener quasi-statischer Positionen. Zur weiteren Erläuterung werden die Ergebnisse aus Abbildung 4.8 herangezogen, in denen die relativen Fehler der Lagerkräfte für unterschiedliche Positionen des Wellenzapfens dargestellt sind. Die Positionierung erfolgt hierbei durch Vorgabe des stationären Verlagerungswinkels β bei einer willkürlich gewählten Exzentrizität $\hat{E} = 0.5$. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die in den beiden Diagrammen vorliegenden Polstellen der Wahl des Fehlermaßes geschuldet sind. Dieses wird für eine verschwindende Lagerkraft $f_{p,x} \rightarrow 0$ bzw. $f_{p,y} \rightarrow 0$ entsprechend singular.

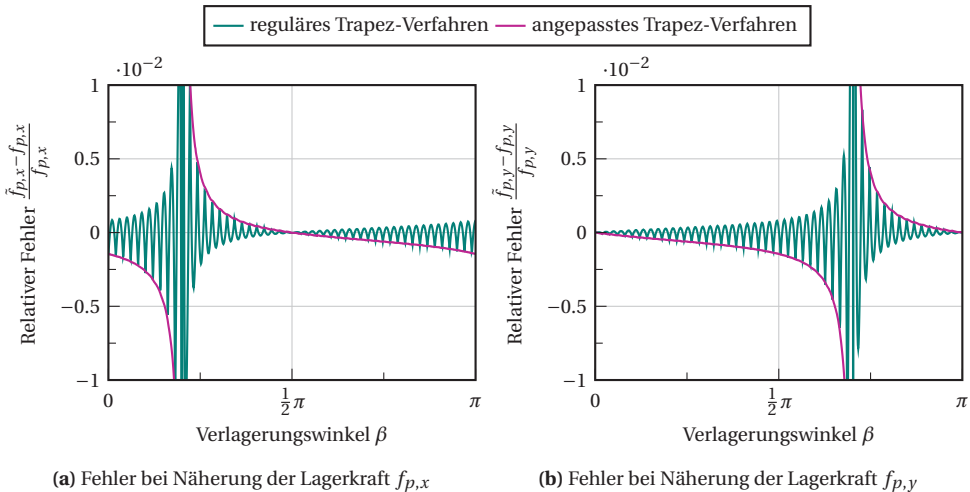


Abbildung 4.8.: Exemplarische Fehlerbetrachtung bei Näherung der Lagerkräfte für Druckverlauf (4.29) für verschiedene Wellenzapfenpositionen mit $\hat{E} = 0.5$ und einer Stützstellenanzahl $N_\varphi = 100$.

Die durch das reguläre Trapez-Verfahren approximierten Lagerkräfte zeigen wie schon in Abbildung 4.7 ein stark alternierendes Verhalten. Die Lagerkräfte werden also bei einer stetigen Abfolge quasi-stationärer Positionen des Wellenzapfens im Wechsel über- und unterschätzt. Hinsichtlich des Einsatzes numerischer Verfahren ist ein solches Verhalten im höchsten Maße ungeeignet, da eine Auswertung der zugehörigen Jacobi-Matrizen zu stark schwankenden, nicht stetigen Ausdrücken führt, die unter Umständen eine Lösungsverfolgung oder Bifurkationsanalyse nahezu unmöglich machen.

Die Untersuchungen der Lagerkräfte sowie des Näherungsverfahrens zeigen, dass es keineswegs ausreicht, die als unphysikalisch zu erachtenden Unterdrücke lediglich zu null zu setzen und über die verbleibenden Werte zu integrieren, wie dies beispielsweise in der Arbeit von VAN DE VRANDE [95] geschieht. Dies führt auf stark schwankende, nicht als stetig zu betrachtende Ausdrücke.

Das angepasste Verfahren liefert im Gegensatz dazu annähernd stetige Verläufe in Abhängigkeit einer variierten Größe, wie sich im Beispiel der Abhängigkeit vom Verlagerungswinkel β zeigt. Ein solches Vorgehen eignet sich daher besser zur Näherung für den anschließenden Einsatz numerischer Verfahren zur Lösungsbestimmung und -verfolgung.

5. Einfluss der Lagergeometrie auf das dynamische Verhalten des Rotors

Das folgende Kapitel befasst sich mit der Untersuchung des dynamischen Verhaltens des in Kapitel 3 hergeleiteten Rotormodells auf Basis der zugehörigen Bewegungsgleichungen (3.56). Zentrales Element ist dabei das zum Einsatz kommende Konzept eines Gleitlagers mit oval-förmigem Querschnittsprofil gemäß Abbildung 3.4 und dessen Einfluss auf das Bewegungsverhalten des Rotors. Die geometrische Form des Lagers wird im vorliegenden Kapitel als zeitlich konstant angenommen.

Im Fokus der Untersuchungen stehen die Näherung stationärer Lösungen, die zugehörige Stabilitätsbetrachtung sowie die darauf aufbauende Lösungsverfolgung in Abhängigkeit der dimensionslosen Rotordrehzahl $\bar{\omega}$. Je nach Parameterkonstellation kann es sich beim stationären Verhalten um Ruhelagen¹, periodische oder gar quasi-periodische Lösungen handeln. In seltenen Fällen lässt sich sogar chaotisches Verhalten beobachten, was im Zuge dieser Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt wird.

Die Untersuchungen erfolgen mit dem Ziel einer Abschätzung stabilisierender oder schwingungsreduzierender Einflüsse verschiedener Systemparameter, wobei der unwuchtfreie Rotor in Abschnitt 5.2 und der Rotor mit statischer Unwucht in Abschnitt 5.3 näher beleuchtet werden.

Eine systematische Verfolgung des möglichen Lösungsverhaltens auf Basis der nichtlinearen Bewegungsgleichungen stellt ein eher unübliches Vorgehen im Forschungsbereich der Rotordynamik dar. Aufgrund der Komplexität der zugrunde liegenden Modelle stützt sich die übliche Vorgehensweise auf linearisierte Modellgleichungen sowie eine damit verbundene Betrachtung der Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften, z. B. in [56]. Eine Betrachtung der nichtlinearen Zusammenhänge findet sich dagegen eher seltener, u. a. in [77], und Ansätze aus dem Bereich der Lösungsverfolgung und Bifurkationsanalyse sind außer bei BAUM [5] und BOYACI [9] nahezu nicht vorhanden.

In Ergänzung zu den letztgenannten Arbeiten werden in den folgenden Untersuchungen auch auftretende quasi-periodische Lösungen berücksichtigt. Hierzu kommt die in Abschnitt 2.3.3 eingeführte Vorgehensweise zum Einsatz, die im Zusammenspiel mit den Methoden der Bifurkationsanalyse den Zugang zu komplexen Verzweigungsstrukturen einzelner Lösungen ermöglicht.

¹Ogleich es sich um ein rotierendes System handelt, werden stationäre, zeitlich konstante Positionen des Wellenzapfens und des Rotormittelpunkts als Ruhelage bezeichnet.

5.1. Modellierungsüberblick

Das der Untersuchung zugrunde liegende Modell bedient sich des Differentialgleichungssystems (3.56) sowie der damit verbundenen Näherung der Lagerkräfte aus Kapitel 4.

5.1.1. Bewegungsgleichungen und relevante Parameter

Bewegungsgleichungen als System erster Ordnung. Für die rechnergestützte Untersuchung des dynamischen Verhaltens werden die Bewegungsgleichungen in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt, wobei

$$\underline{z} = [X_W, X'_W, X_L, X'_L, Y_W, Y'_W, Y_L, Y'_L]^T, \quad \underline{z} \in \mathbb{R}^8 \quad (5.1)$$

die entsprechenden Zustandsgrößen enthält. Die einzelnen kinematischen Größen entsprechen jeweils den auf das initiale Lagerspiel C normierten Positionen und Geschwindigkeiten des Wellendurchstoßpunkts W am Rotor sowie des Wellenzapfensmittelpunkts L . Daraus ergibt sich die Darstellung der Bewegungsgleichungen als System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \underline{z}' = \frac{1}{\omega^2} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Gamma} & -\bar{d}_a \bar{\omega} & +\frac{1}{\Gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\kappa \Gamma} & 0 & -\frac{1}{\kappa \Gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Gamma} & -\bar{d}_a \bar{\omega} & \frac{1}{\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa \Gamma} & 0 & -\frac{1}{\kappa \Gamma} & 0 \end{pmatrix} \underline{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \frac{\sigma}{\kappa \bar{\omega}} \tilde{f}_{p,x}(\underline{z}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \frac{\sigma}{\kappa \bar{\omega}} \tilde{f}_{p,y}(\underline{z}) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{1+\kappa} \sin \alpha \\ 0 \\ \frac{1}{\omega^2(1+\kappa)} \sin \alpha \\ 0 \\ \frac{2}{1+\kappa} \cos \alpha \\ 0 \\ \frac{1}{\omega^2(1+\kappa)} \cos \alpha \end{pmatrix} + \gamma_S \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin \tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{A} \underline{z} + \underline{f}_p(\underline{z}) + \underline{f}_0(\alpha) + \underline{f}_U(\tau). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die vier aufgeführten Anteile der rechten Seite des Differentialgleichungssystems repräsentieren dabei den linearen Systemanteil $\underline{A} \underline{z}$, die nichtlinearen Lagerkräfte \underline{f}_p , die vom Lastwinkel α bestimmte äußere statische Last \underline{f}_0 sowie die von der dimensionslosen Zeit abhängige Unwuchterregung \underline{f}_U . Die in \underline{f}_p enthaltenen Lagerkräfte $\tilde{f}_{p,x}$ und $\tilde{f}_{p,y}$ entsprechen dabei der mittels des angepassten Trapez-Verfahrens genäherten Integrale aus Gleichung (4.27).

Für die notwendige Näherung des Druckfelds wird das in Kapitel 4 beschriebene Vorgehen zur Lösung der Reynoldsgleichung (3.20) verwendet, wobei sich unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.3 hergeleiteten radialen Verschiebung der Lagerschale folgender Ausdrück für die Schmierstalthöhe (3.21) ergibt:

$$H = 1 - X_L \cos(\varphi) - Y_L \sin(\varphi) - \hat{U}(\tau) \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \begin{cases} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{\pi}) & , \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + \pi \sin \varphi + \frac{4}{\pi}) & , \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \quad (5.3)$$

Wird angenommen, dass die zur Verformung der Lagerschale eingesetzten Aktoren eine konstante Verschiebung aufbringen, so ist die Lagergeometrie zeitlich konstant und $\hat{U}(\tau)$ kann durch folgenden Zusammenhang ersetzt werden:

$$\hat{U}(\tau) = U_m. \quad (5.4)$$

Die Größe U_m , welche auch als Geometrieparameter bezeichnet wird, beschreibt die Verschiebung der Lagerschale an den Aktorangriffspunkten zur Lagermitte hin und ist somit ein Maß für die ovale Querschnittsform. Für $U_m = 0$ liegt dabei das klassische, kreisrunde Querschnittprofil eines zylindrischen Gleitlagers vor. Um die Funktion des Lagers nicht einzuschränken, muss stets ein entsprechendes Lagerspiel erhalten bleiben, sodass ein maximaler Wert des Geometrieparameters $\max(U_m) = 0.5$ nicht überschritten werden sollte. Dieser Grenzwert orientiert sich an den für Mehrflächenlagern geltenden Größen und sollte daher möglichst nicht überschritten werden (vgl. [26]).

Standardwerte der einzelnen Parameter. Als Ausgangspunkt der rechnergestützten Simulationen dient der in Tabelle 5.1 aufgeführte Standardsatz an Parameterwerten, welcher sich an den Tabellen 3.1 bzw. 3.2 orientiert und beispielsweise den Rotor eines etwas schwereren Turboladers beschreibt. Sofern keine zusätzlichen Angaben gemacht werden, liegt den präsentierten Untersuchungsergebnissen stets dieser Standardparametersatz zu Grunde.

Parameterbezeichnung	Formelzeichen	Standardwert
Massenverhältnis	κ	0.25
Wellennachgiebigkeit	Γ	0.1
äußere Dämpfung	\bar{d}_a	0.1
Kurzlagerparameter	γ	4
reziproker Lastparameter	σ	0.1
Geometrieparameter	U_m	0.3
statischer Lastwinkel (Lagerorientierung)	α	0
statischer Unwucht	γ_S	0.25
Anzahl axialer Ansatzfunktionen	N_z	2
Anzahl Stützstellen in Umfangsrichtung	N_φ	201

Tabelle 5.1.: Standardparametersatz für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des unwuchtfreien Rotors mit konstanter Lagergeometrie.

Von besonderem Interesse ist die geometrische Form und Orientierung des verwendeten Gleitlagers, welche durch den Geometrieparameter U_m und den Lastwinkel α beschrieben wird. In der in Abbildung 5.1 gegebenen Skizze ist die Bedeutung dieser beiden Größen nochmals dargestellt. So bestimmt U_m die Querschnittsform des Gleitlagers und α die Orientierung bzgl. des Schwerfelds der Erde. Unter Berücksichtigung der Drehrichtung des Rotors muss hierbei klar zwischen den Bereichen $\alpha < 0$ und $\alpha > 0$ unterschieden werden, sodass sich für den als konstant anzunehmenden Orientierungswinkel ein zulässiger Wertebereich $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ ergibt.

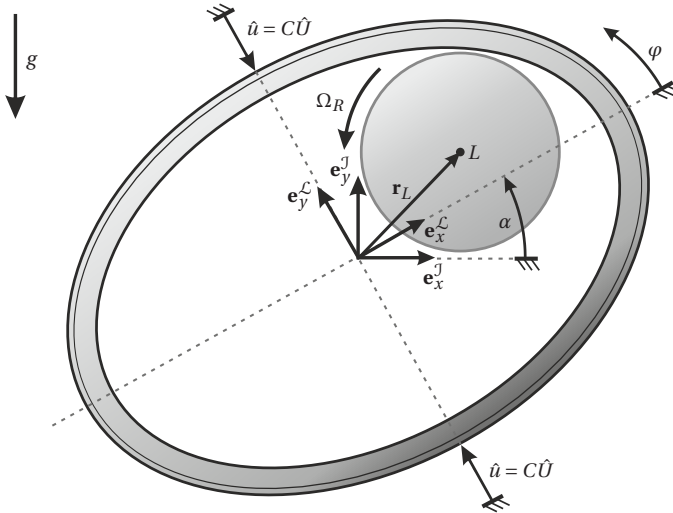


Abbildung 5.1.: Geometrie und Orientierung des Gleitlagers mit ovalem Querschnittsprofil.

Abschätzung der Eigenkreisfrequenz des starr gelagerten Rotors. Im Zuge der Untersuchungen ist weiterhin die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_{Laval}^* des eigentlichen Laval-Rotors bei starrer Lagerung von Interesse. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.4.1 kann diese in Form des Frequenzverhältnisses

$$\eta_{Laval}^* = \frac{\omega_{Laval}^*}{\Omega_R} = \sqrt{\frac{c_W}{M} \frac{1}{\Omega_R}} = \frac{1}{\bar{\omega}\sqrt{\Gamma}} \quad (5.5)$$

angegeben werden. Dieser Ausdruck stellt die auf die Rotordrehfrequenz bezogene Eigenkreisfrequenz in Abhängigkeit der Wellennachgiebigkeit Γ und des Drehzahlparameters $\bar{\omega}$ dar und entspricht bei Abbildung in Abhängigkeit einer dieser beiden Parameter stets einer Hyperbel. Das Frequenzverhältnis liefert eine Abschätzung potentieller Resonanzfrequenzen des betrachteten Rotorsystems.

5.2. Dynamisches Verhalten des unwuchtfreien Rotors

Die Ergebnisse basieren auf den Bewegungsgleichungen (5.2) unter Vernachlässigung der Unwuchterregung ($\gamma_S = 0$ bzw. $f_U = 0$). Das zugrunde liegende nichtlineare Differentialgleichungssystem ist somit autonom und kann mit Hilfe der numerischen Verfahren aus Abschnitt 2.2 untersucht werden.

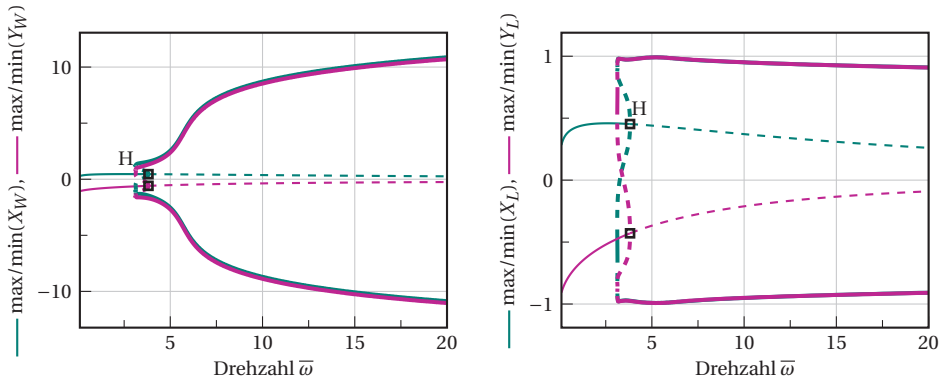
5.2.1. Einführendes Beispiel zur Lösungsverfolgung

Zwecks Einführung der verwendeten Darstellungsvarianten werden im Folgenden die Ergebnisse einer beispielhaften Konfiguration mit normalen, zylinderförmigen Gleitlagern präsentiert.

Prinzipielles Lösungsverhalten in Abhängigkeit der Rotordrehzahl. Erwartungsgemäß lässt sich bei einer verhältnismäßig geringen Drehzahl eine stabile Ruhelage des Rotorsystems detektieren. Eine Verfolgung dieser Ruhelage in Abhängigkeit des Drehzahlparameters $\bar{\omega}$ führt auf die in Abbildung 5.2 dargestellten Lösungsverläufe. Es wird hierbei zwischen Ruhelagen (—, - -) und periodischen Lösungen (Grenzzyklen) (—, - -) unterschieden, deren Stabilität jeweils durch die Linienart der einzelnen Graphen gekennzeichnet ist. Weiterhin werden Hopf-Bifurkationspunkte (H) mit (◻) und Sattelpunkte von Grenzzyklen (LPC) mit (◦) dargestellt.

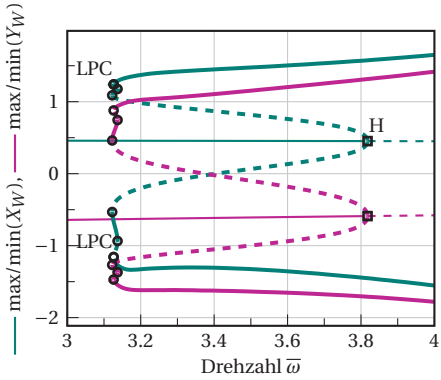
Erwartungsgemäß stellt sich für den betrachteten Fall einer in negative $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung wirkenden statischen Last ($\alpha = 0$) eine Ruhelage mit negativen Werten von Y_L bzw. Y_W ein. Der quantitative Unterschied zwischen der vertikalen Position des Rotors und des Wellenzapfens ist dabei durch die statische Durchbiegung der Welle bedingt. Ab einer bestimmten Drehzahl ist die für hydrodynamisch gelagerte Rotoren typische Verlagerung der Ruhelage zu erkennen, in Folge derer der Wellenzapfen zunehmend zur Lagermitte hin strebt. Mit steigender Drehzahl verliert die Ruhelage üblicherweise über eine Hopf-Bifurkation (H) ihre Stabilität und es kommt zur Ausprägung von Schwingungen aufgrund von Selbsterregung. Der Wellenzapfen vollführt eine Art Rührbewegung, mit annähernd maximal möglicher Exzentrizität, wie sich in Abbildung 5.2b zeigt. Die Auslenkungen des Rotors sind dabei im Gegensatz zu denen des Wellenzapfens nicht durch das vorliegende Lagerspiel begrenzt. Dieses Phänomen, bei dem die Ruhelage in Folge einer Hopf-Bifurkation ihre Stabilität verliert, wird oft auch als „oil-whirl“ bezeichnet. Die daraus resultierenden Bifurkationsszenarien im Bereich der Übergangstelle können sich dabei in Abhängigkeit der Systemparameter beliebig komplex gestalten, wie die vergrößerte Ansicht in den Abbildungen 5.2c und 5.2d offenbart. Ausgehend von der Hopf-Bifurkation werden im gegebenen Fall mehrere stabile und instabile Lösungsäste von Grenzzyklen durchlaufen, bevor die stabile „Hauptlösung“, welche sich durch ihre Stabilität über einen entsprechend ausgedehnten Drehzahlbereich auszeichnet, erreicht wird. Die einzelnen Äste sind hierbei über Sattelpunkte von Grenzzyklen¹ (LPC) miteinander verbunden.

¹im Folgenden lediglich als LPC-Bifurkationen, LPC oder LPCs bezeichnet

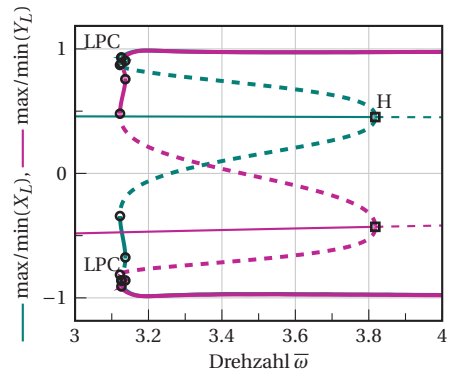


(a) Auslenkungen des Rotors

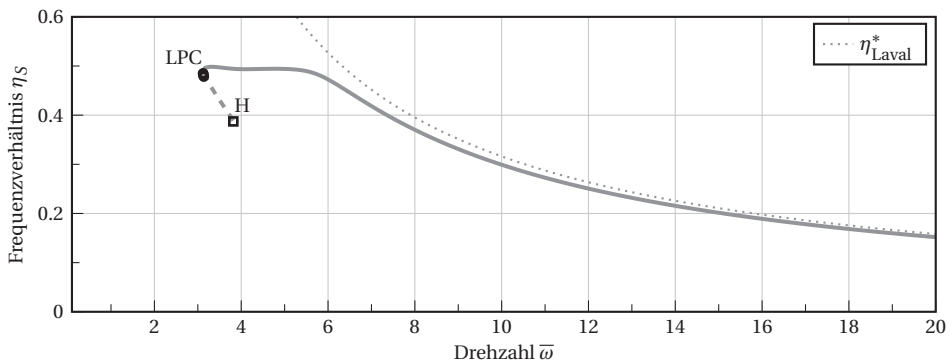
(b) Auslenkungen des Wellenzapfens



(c) Auslenkungen des Rotors im relevanten Bifurkationsbereich



(d) Auslenkungen des Wellenzapfens im relevanten Bifurkationsbereich



(e) Auf Drehfrequenz des Rotors bezogenes Frequenzverhältnis der periodischen Grenzyklusschwingungen

Abbildung 5.2.: Exemplarische Darstellung der stationären Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl mit Standardparametersatz für zylindrische Gleitlager ($U_m = 0$).

[Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —, period. instabil: - -]

Die zum Grenzyklus zugehörige Grundfrequenz ω_S wird über das dimensionslose Frequenzverhältnis $\eta_S = \omega_S/\Omega_R$ angegeben und wird im Zuge der numerischen Verfolgung ebenso bestimmt. Eine entsprechende Darstellung ist in Abbildung 5.2e aufgeführt. Das sich nach den einzelnen LPC-Bifurkationen einstellende Frequenzverhältnis liegt in diesem Fall über einen größeren Drehzahlbereich hinweg bei $\eta_S \approx 0.5$. Dies bedeutet, dass sich periodische Lösungen mit der Hälfte der Drehfrequenz Ω_R des Rotors einstellen. Ein solcher Wert ist im Fall zylindrischer Gleitlager typisch für das bereits erwähnte Phänomen des oil-whirl, welches aufgrund des vorliegenden Frequenzverhältnisses in der deutschsprachigen Literatur auch als Halbfrequenz-Wirbel bezeichnet wird. Wird die Drehzahl weiter erhöht, kommt es bei hinreichender Annäherung der Frequenz an die für den starr gelagerten Laval-Rotor abgeschätzte Eigenkreisfrequenz (dargestellt durch η_{Laval}^*) zu einem Mitnahmeeffekt, in Folge dessen die Grenzyklusfrequenz für weiter ansteigende Drehzahlen annähernd dem Verlauf von η_{Laval}^* folgt. Dieses Phänomen wird in der Literatur oft auch als „oil-whip“ bezeichnet und äußert sich i. d. R. durch stark erhöhte Rotorauslenkungen, wie in Abbildung 5.2a ab $\bar{\omega} \approx 6$ zu erkennen ist.

Je nach Parameterwahl unterscheiden sich die kritischen Werte des Drehzahlparameters $\bar{\omega}$ (im Folgenden auch mit Grenzdrehzahl bezeichnet), ab denen es zum Stabilitätsverlust der Ruhelagen kommt, als auch die sich daran anschließenden Grenzyklusbifurkationen. Für eine entsprechende Übersicht möglicher Szenarien wird an dieser Stelle auf die Arbeit von BOYACI [9] verwiesen.

Als alternative Darstellung zu den Abbildungen 5.2a und 5.2b bietet sich die in Abbildung 5.3 gezeigte Variante mittels polarer Koordinaten bzgl. des lagerfesten Systems \mathcal{L} an. Das Diagramm zeigt die Position von Wellendurchstoßpunkt und Wellenzapfen in der $\mathbf{e}_x^{\mathcal{L}}-\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Ebene für den entsprechend verfolgten Drehzahlbereich. Die Darstellung der Ruhelagen liefert in diesem Fall die Verlagerungsbahnen, auf denen sich Wellenzapfen und Rotor mit ansteigender Drehzahl bewegen, wobei das charakteristische Anheben gut zu erkennen ist. So bewegen sich die Mittelpunkte auf bogenförmigen Verlagerungsbahnen in Richtung Lagermitte, wobei die Bahn des Rotors eine entsprechende Versetzung aufweist, welche sich durch die Auslenkung der Welle in Folge der statischen Last ergibt.

Verliert die Ruhelage ab der Grenzdrehzahl über die Hopf-Bifurkation (\blacksquare) ihre Stabilität, so kommt es zu Ausbildung der beschriebenen Grenzyklusschwingungen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in dieser Darstellungsvariante die zugehörigen Trajektorien von Rotor und Wellenzapfen lediglich für den Fall $\bar{\omega} = 4$ dargestellt.

Ein Vorteil zur vorherigen Darstellung besteht in der besseren Visualisierung einzelner Grenzyklustrajektorien. So ergeben sich für den betrachteten Fall annähernd kreisförmige Trajektorien für sowohl Rotor als auch Wellenzapfen, wobei die Bewegung des Wellenzapfens durch das Lagerspiel beschränkt ist.

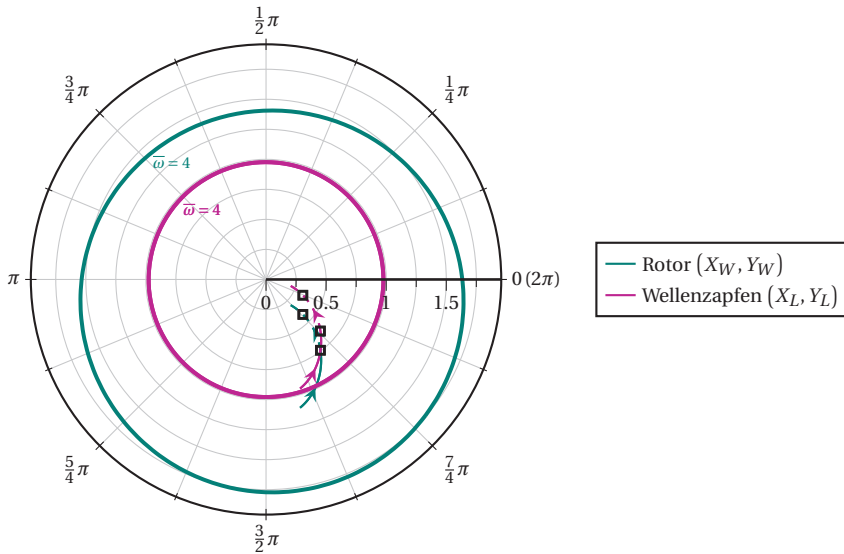


Abbildung 5.3.: Polare Darstellung der Verlagerungsbahnen und Grenzyklus trajektorien in der $\mathbf{e}_x^L - \mathbf{e}_y^L$ -Ebene im Bereich $\bar{\omega} \in [0.1, 20]$ für den Standardparametersatz für zylindrische Gleitlager ($U_m = 0$).
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —]

5.2.2. Stationäre Lösungen und deren Bifurkationen

Im Fokus der Untersuchungen steht vor allem der Einfluss verschiedener Gleitlagergeometrien, da diese einen stabilisierenden Effekt hinsichtlich der in Abschnitt 5.2.1 geschilderten Instabilitätsphänomene haben (siehe [26]). Weiterhin sind sowohl quantitative als auch qualitative Änderungen des dynamischen Verhaltens gegenüber der Ausführung mit zylindrischen Gleitlagern zu erwarten, wie sich in ähnlichen Arbeiten [44, 51] zum Thema nicht-kreisrunder Querschnittsprofile zeigt.

Einfluss der Lagergeometrie auf das Lösungsverhalten. Hierzu werden verschiedene Werte des Geometrieparameters U_m , welcher die Form des Querschnittsprofils charakterisiert, betrachtet. Die Systemparameter werden entsprechend dem definierten Standardsatz aus Tabelle 5.1 gewählt.

Beginnend mit dem in Abbildung 5.4 präsentierten Lösungsverhalten zeigt sich deutlich der Einfluss der unterschiedlich ausgeprägten Geometrien. Ausgehend vom kreisrunden Querschnittsprofil mit $U_m = 0$ nehmen die Auslenkungen des Rotors gerade im Bereich vorhandener Selbsterregung mit steigendem U_m systematisch ab, wie in der Übersicht in Abbildung 5.4a zu erkennen ist. Der maximal betrachtete Wert des Geometrieparameters beträgt hierbei $U_m = 0.3$ und entspricht einer Verformung des Kreisprofils um 30% des initialen Lagerspiels gemessen an den beiden Aktorangriffspunkten.

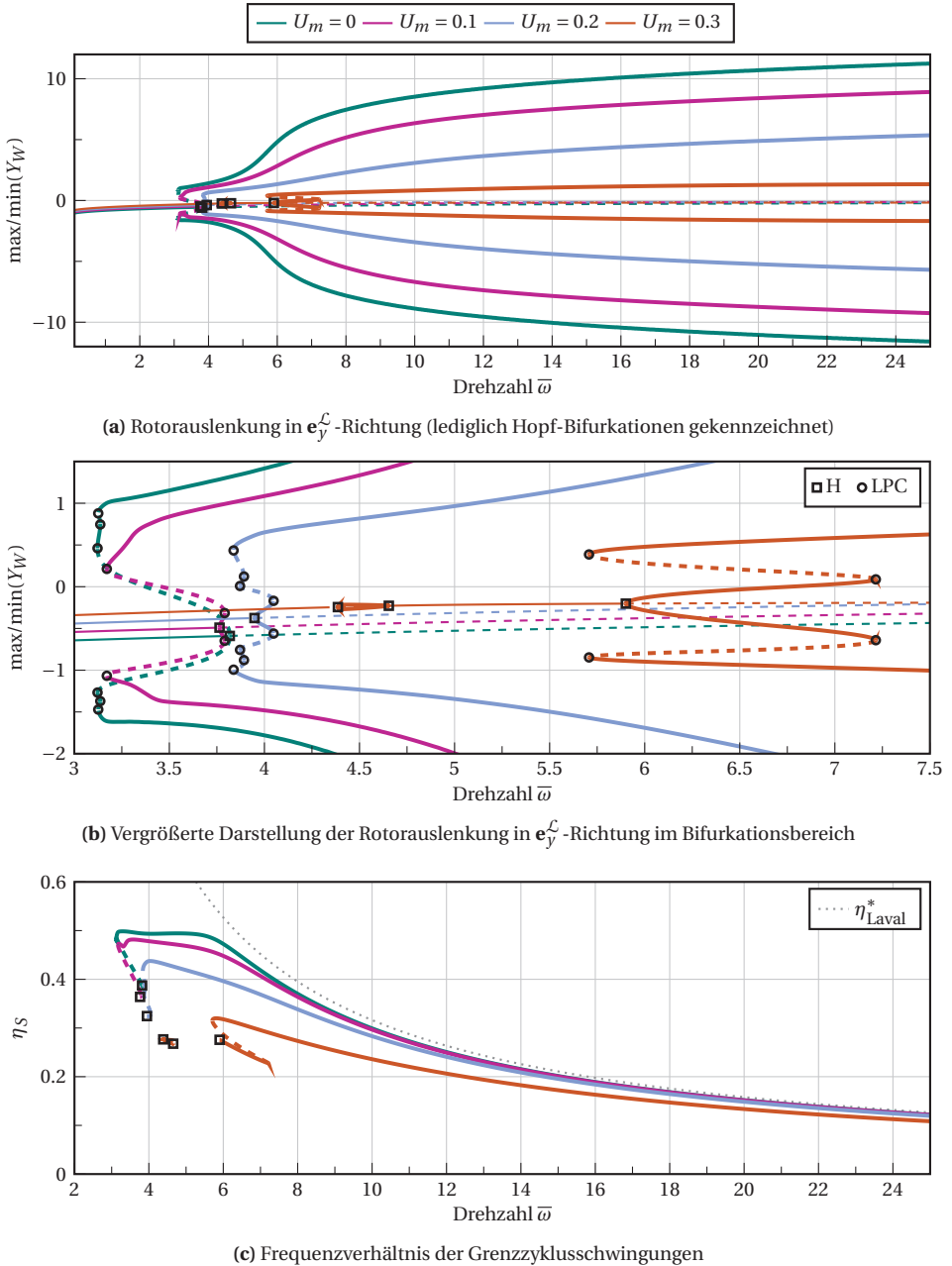


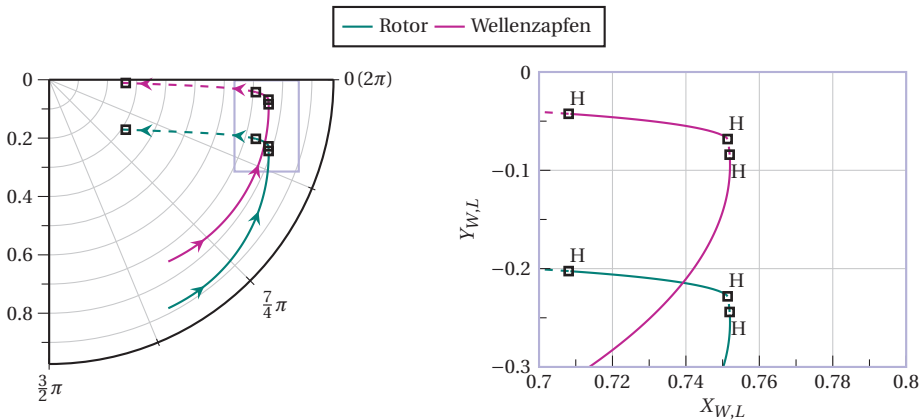
Abbildung 5.4.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschiedene Lagergeometrien U_m mit Standardparametersatz.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —●—, period. instabil: - -●- -]

Für diesen Wert wird demnach das Querschnittsprofil mit der am stärksten ausgeprägten ovalen Form erreicht, wodurch eine Reduktion der Rotorauslenkung um bis zu 80% erreicht wird.

Abgesehen von der Amplitudenreduktion äußert sich der Einfluss der veränderten Lagergeometrie deutlich im Bezug auf die Grenzdrehzahlen mit einsetzender Selbsterregung sowie auf das damit verbundene Verzweigungsverhalten, wie sich in Abbildung 5.4b zeigt. Eine schwache bis mittlere Veränderung der Lagergeometrie hat im betrachteten Fall keinen nennenswerten Einfluss auf die Grenzdrehzahl, aber auf die darauf folgende Bifurkationsszenarien. Ausgehend von der Hopf-Bifurkation (H) werden mehrere LPCs durchlaufen, die zum Teil dazu führen, dass Drehzahlbereiche mit koexistierenden Ruhelagen und Grenzzyklen vorliegen, wie es beispielsweise für $U_m = 0$ und $U_m = 0.1$ im Bereich $\bar{\omega} \in [3.1, 3.8]$ der Fall ist. Je nach Ausdehnung dieses „überlappenden“ Bereichs sind diese als besonders kritisch einzustufen, da das System trotz stabiler Ruhelage durch eine Störung auf die Grenzzykluslösung abdriften kann.

Mit steigendem U_m reduziert sich nicht nur die Ausdehnung dieses als unerwünscht anzusehenden Bereichs, die Ruhelage verliert zudem ihre Stabilität erst bei wesentlich höheren Drehzahlen. So wird Hopf-Bifurkation für $U_m = 0.3$ erst bei $\bar{\omega} \approx 5.9$ durchlaufen.

Darüber hinaus lässt sich für diesen Fall ein weiterer interessanter Effekt beobachten. Um $\bar{\omega} \approx 4.5$ kommt es zu einem vorgelagerten instabilen Bereich der Ruhelage, der durch zwei Hopf-Bifurkation begrenzt wird. Die Amplituden des dort vorliegenden Grenzzyklus sind jedoch so gering, dass dieser Effekt für praktische Anwendung eher unbedeutend ist. Die Verlagerungsbahnen von Rotor und Wellenzapfen in Abbildung 5.5 liefern eine mögliche Erklärung dieses Phänomens.



(a) Verlagerungsbahnen von Wellenzapfen und Rotor (b) Vergrößerte Ansicht im markierten Teilbereich

Abbildung 5.5.: Polare Darstellung der Verlagerungsbahnen im Drehzahlbereich $\bar{\omega} \in [0.1, 20]$ zur Visualisierung des vorgelagerten instabilen Bereichs (entspricht Ruhelagen aus Abbildung 5.4 für $U_m = 0.3$).
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - -]

Mit steigender Drehzahl bewegt sich der Wellenzapfen auf einer annähernd kreisbogenförmigen Bahn, bevor die Ruhelage an der äußersten Position in e_x^c -Richtung ihre Stabilität verliert. Wird die vorliegende Lagergeometrie in Abbildung 5.1 betrachtet, so stellt dies den Bereich der Position dar, in der sich die beiden konvergierenden Schmierspalt zunehmend der gleichen Umfangsposition $\varphi \approx 0$ annähern und der Wellenzapfen in Folge dessen aus seiner Ruhelage förmlich heraus gedrückt wird. Mit steigender Drehzahl stabilisiert sich die Ruhelage wieder Rotor und Wellenzapfen streben annähernd orthogonal zur statischen Hauptlast in Richtung Lagermitte, bevor die zweite, als kritisch zu erachtende Instabilität auftritt.

Werden ferner die Frequenzverhältnisse der selbsterregten Schwingungen in Abbildung 5.4c betrachtet, so zeigt sich, dass diese für einen steigenden Geometrieparameter systematisch niedriger ausfallen. Die Rührbewegung des Wellenzapfens im Lager fällt also zunehmend „langsamer“ aus. Ebenso reduziert sich auch der für $U_m = 0$ noch vorhandene Bereich eines Halbfrequenzwirbels. Das Auftreten der selbsterregten Schwingungen mit der Hälfte der Rotordrehfrequenz, wie es beispielsweise in Abbildung 5.2e zu beobachten ist, geht somit durch ein nicht-kreisrundes Lagerprofil zunehmend verloren. Die üblicherweise unterhalb von η_{Laval}^* liegenden Frequenzverhältnisse zeigen mit steigenden Drehzahlen die Tendenz, sich η_{Laval}^* anzunähern. Dies lässt sich durch die zunehmende Steifigkeit innerhalb der Gleitlager erklären (vgl. [46]), die damit einer starren Lagerung zunehmend näher kommen.

Im Kontext nicht-zyklischer Gleitlager bietet sich unter Berücksichtigung der gemachten Beobachtungen die typischerweise verwendete Terminologie von oil-whirl und oil-whip nicht mehr an, da das qualitative Lösungsverhalten doch sehr stark von dem des zylindrischen Lagers abweicht.

Die Untersuchung des Geometrieinflusses liefert durchweg positive Resultate eines ovalen Lagerprofils, sowohl im Hinblick auf die Systemauslenkungen als auch auf die einsetzende Selbsterregung. Letzteres wird für Gleitlager mit ähnlich nicht-kreisrunden Profilen bereits in zahlreichen Arbeiten, u. a. in [44, 51], untersucht, jedoch lediglich auf Basis linearisierter Systemgleichungen.

Einfluss der Lagerorientierung auf das Lösungsverhalten. Im Gegensatz zum zylindrischen Gleitlager ist im vorliegenden Fall einer davon abweichenden Geometrie ebenso auch die Orientierung gegenüber der statischen Hauptlasttrichtung entscheidend, die im zugrundeliegenden Modell durch den Lastwinkel α erfasst wird. Die Auswirkungen des Lastwinkels werden im Folgenden anhand der vier dargestellten Konfigurationen in Abbildung 5.6 untersucht, wobei der Fall $\alpha = 0$ den vorherigen Ergebnissen aus Abbildung 5.4 entspricht.

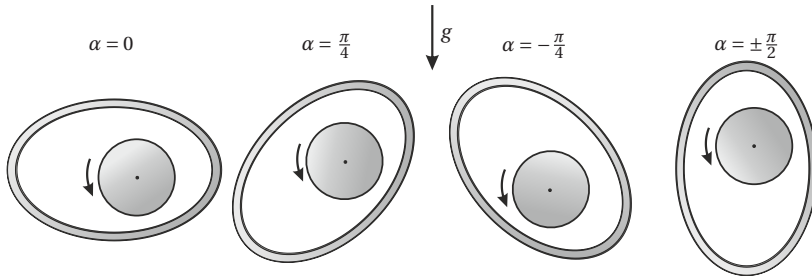


Abbildung 5.6.: Untersuchte Orientierungen des Gleitlagers.

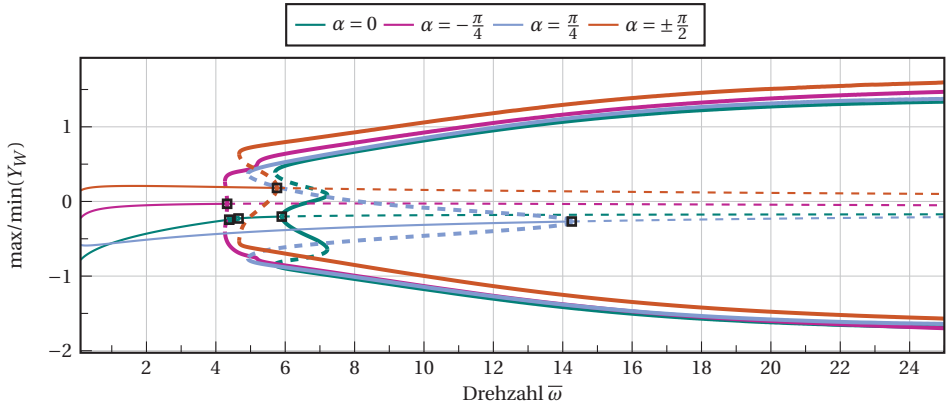
In analoger Weise zur Lagergeometrie finden sich die entsprechenden Verzweigungsdiagramme der stationären Lösung bei einem gewählten Geometrieparameter $U_m = 0.3$ für verschiedene Lastwinkel in Abbildung 5.7. Die Rotorauslenkungen der in Folge von Selbsterregung auftretenden Grenzzyklen sind hierbei für alle betrachteten Fälle weitestgehend identisch, wie sich in Abbildung 5.7a zeigt. Dies scheint naheliegend, da sich der Wellenzapfen im Selbsterregungsfall nicht lokalisiert sondern typischerweise in Form einer rührenden, dem Umfang folgenden Bewegung durch das Gleitlager läuft. Die Besonderheit der Orientierung findet sich dagegen eher bei der Drehzahl der auftretenden Hopf-Bifurkationen. So zeigt sich für $\alpha = \pi/4$ der mit Abstand ausgedehnteste Stabilitätsbereich der Ruhelage bis hin zu einer Drehzahl $\bar{\omega} \approx 14$. Nichtsdestotrotz ist für diesen Fall auf Grund der relativ weit vorgelagerten LPC-Bifurkation bereits ab $\bar{\omega} \approx 5$ mit der Möglichkeit eines Abdriftens auf die Grenzzykllösung zu rechnen.

Im Vergleich dazu zeigt sich für $\alpha = -\pi/4$ das wohl ungünstigste Verhalten hinsichtlich Stabilität (vgl. Abbildung 5.7b). Obwohl intuitiv bedingt die Variante mit $\alpha = \pi/2$ als besonders kritisch einzustufen gewesen wäre, liefert eine Schrägstellung um $\alpha = -\pi/4$ das wohl unvorteilhafteste Lösungsverhalten und ist daher zu vermeiden.

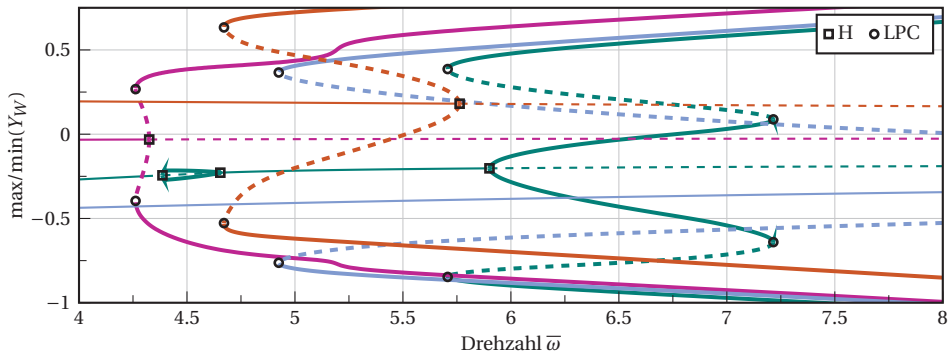
Weiterhin zeigt sich eine starke Abhängigkeit des jeweiligen Verzweigungsverhaltens ausgehend von den einzelnen Ruhelagen. So liegt lediglich für den Fall $\alpha = 0$ eine superkritische Hopf-Bifurkation vor, in deren Anschluss der Grenzzyklus zwei LPC-Bifurkationen durchläuft, während für die übrigen Fälle eine subkritische Hopf-Bifurkation und lediglich ein LPC vorliegt. Die instabilen Äste (---) repräsentieren hierbei periodische Lösungen, welche die Einzugsgebiete benachbarter Lösungen voneinander abtrennt (siehe [45]).

Welcher Wert von α für den praktischen Einsatz zu favorisieren ist, muss fallspezifisch entschieden werden. Als Tendenz lässt sich allerdings angeben, dass aufgrund der mehr oder weniger gleichen Drehzahlwerte der einzelnen LPCs die Variante mit dem ausgeprägtesten Stabilitätsbereich der Ruhelage, also $\alpha = \pi/4$, zu wählen wäre, da hier zumindest die Möglichkeit besteht, auch in höheren Drehzahlbereichen eine stabile Ruhelage zu realisieren.

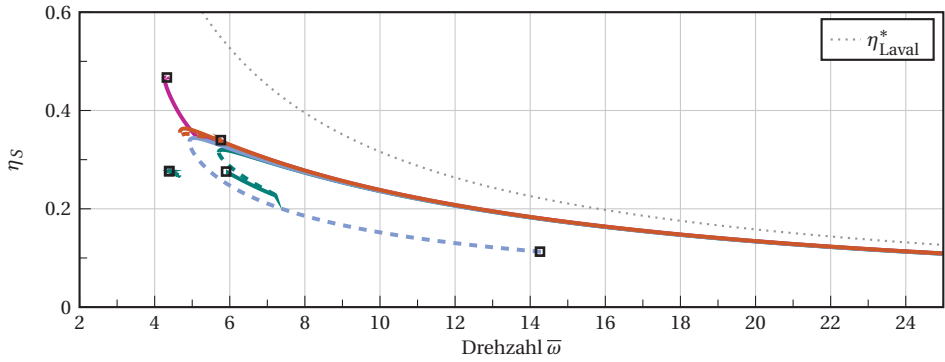
Die in Abbildung 5.7c gezeigten Verläufe der einzelnen Frequenzverhältnisse stehen im Kontext des bereits für andere Systemkonfigurationen festgestellten, einheitlichen Verhaltens der einzelnen Grenzzykllösungen.



(a) Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung (lediglich Hopf-Bifurkationen gekennzeichnet)



(b) Vergrößerte Darstellung der Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung im Bifurkationsbereich



(c) Frequenzverhältnis der Grenzyklussschwingungen

Abbildung 5.7.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschiedene Lastwinkel α mit Standardparametersatz und Geometrie $U_m = 0.3$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —, period. instabil: - -]

Umfassende Untersuchungen zum Einfluss der Lagergeometrie auf die Stabilität einzelner Ruhelagen finden sich zudem in der Literatur, u. a. in [2, 29]. Die in diesen Arbeiten vorgestellten Untersuchungen basieren allerdings lediglich auf linearisierten Systemgleichungen, sodass die Stabilität der Ruhelage zwar abgeschätzt werden kann, jedoch nicht die daraus verzweigenden Grenzzyklen. Folglich wird die Möglichkeit einer parallel zur Ruhelage koexistierender Grenzzykluslösung außer Acht gelassen bzw. erst gar nicht durch die Modellgleichungen erfasst. Dies kann zu Fehleinschätzungen beim tatsächlichen Betrieb des Rotors führen, da in den betroffenen Drehzahlbereichen eine entsprechende Störung zum Abdriften auf die besagten Grenzzyklen verursachen kann.

Einflüsse der Lagerlast und der Wellennachgiebigkeit auf das Lösungsverhalten. Im Rahmen dieser Arbeit handelt es sich hierbei im Gegensatz zur Geometrie und Orientierung des Lagers um vergleichsweise untergeordnete Größen, deren Einflüsse zumindest für zylindrische Lager ausführlich in [9] untersucht werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden eine leicht reduzierte Darstellungsvariante gewählt.

Beginnend mit der reziproken Lagerlast σ in Abbildung 5.8 werden für das Lager mit $U_m = 0.3$ die Fälle mit starker Belastung ($\sigma = 0.01$), schwacher Belastung ($\sigma = 1$) sowie einer mittleren Belastung ($\sigma = 0.05$, $\sigma = 0.1$) untersucht. Es wird an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass es sich bei dem Lagerlastparameter nicht um die in der Literatur üblicherweise verwendete Sommerfeldzahl handelt (vgl. [46]), sondern einen drehzahlbefreiten Lastparameter darstellt (siehe Gleichungen (3.57) und (3.58)).

Durch die abnehmende Belastung ($\sigma \uparrow$) zeigt sich ein generelles Anheben der Ruhelagen in $\mathbf{e}_y^{\mathcal{L}}$ -Richtung. Der Wellenzapfen nähert sich zunehmend der Lagermitte, da der tragende Fluidfilm verhältnismäßig dicker wird. Für die beiden Extremfälle des stark bzw. schwach belasteten Lagers sind keine nennenswerten Grenzzyklusschwingungen festzustellen. Dies ist angesichts der aus der Literatur bekannten Tendenzen für zylindrische Gleitlager für den stark belasteten Fall zu erwarten (vgl. [9, 26]). Das Verhalten für eine schwache Belastung steht hingegen qualitativ in völligem Gegensatz zu den Ergebnissen des zylindrischen Lagers. Unter Berücksichtigung der Gleitlagergeometrie und deren Auswirkung auf den Druckaufbau scheint dieses Verhalten dennoch naheliegend, da sich gerade bei schwacher Belastung der Wellenzapfen zunehmend in der Lagermitte lokalisiert und damit durch zwei Druckbereiche in den beiden konvergierenden Spaltbereichen des Lagers mit $U_m = 0.3$ abgestützt werden kann. Eine separate Diskussion dieses Umstands für den schwach belasteten Fall ist in Abschnitt 5.2.3 auf Seite 100ff. aufgeführt.

Für den mittleren Lastbereich zeigt sich das im Vorfeld diskutierte Verhalten mit Stabilitätsverlust und resultierender Ausprägung von Grenzzyklen sowie dem bereits beschriebenen Phänomen eines vorgelagerten instabilen Bereichs der Ruhelage (siehe Abbildung 5.8c).

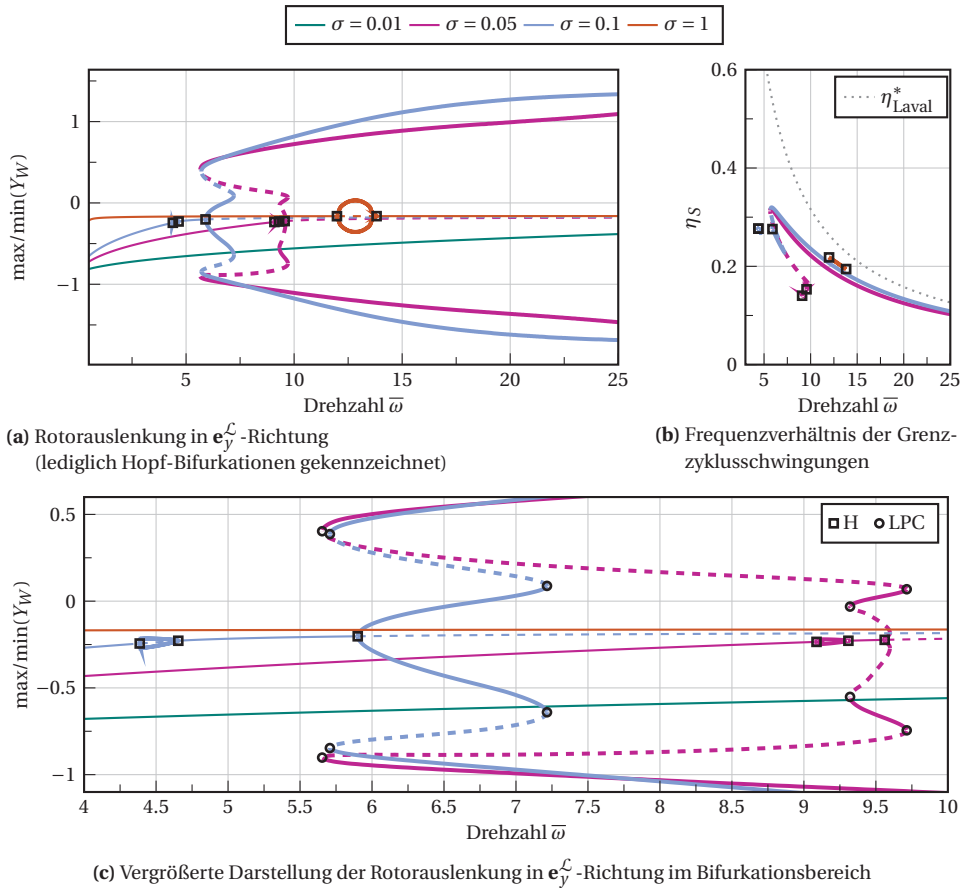


Abbildung 5.8.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschiedene Werte des reziproken Lastparameters σ mit Standardparametersatz und Geometrie $U_m = 0.3$.

[Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —, period. instabil: - -]

Die Untersuchungsergebnisse zur Abhängigkeit des Lösungsverhaltens von der Nachgiebigkeit Γ der Welle finden sich in Abbildung 5.9, wobei die Grenzfälle $\Gamma = 0.01$ und $\Gamma = 0.5$ eine eher steifere Welle bzw. nachgiebigere Welle beschreiben.

Bedingt durch die steigende Nachgiebigkeit fällt die statische Durchbiegung der Welle stärker aus, was sich in den einzelnen Ruhelagenpositionen des Rotors widerspiegelt, die sich mit steigender Nachgiebigkeit zunehmenden in den negativen Bereich von Y_W verschieben. Wird die Grenzdrehzahl mit einsetzender Selbsterregung augenscheinlich kaum von der Nachgiebigkeit beeinflusst, offenbaren sich die Auswirkungen gerade für den Fall einer besonders nachgiebigen Welle bei $\Gamma = 0.5$.

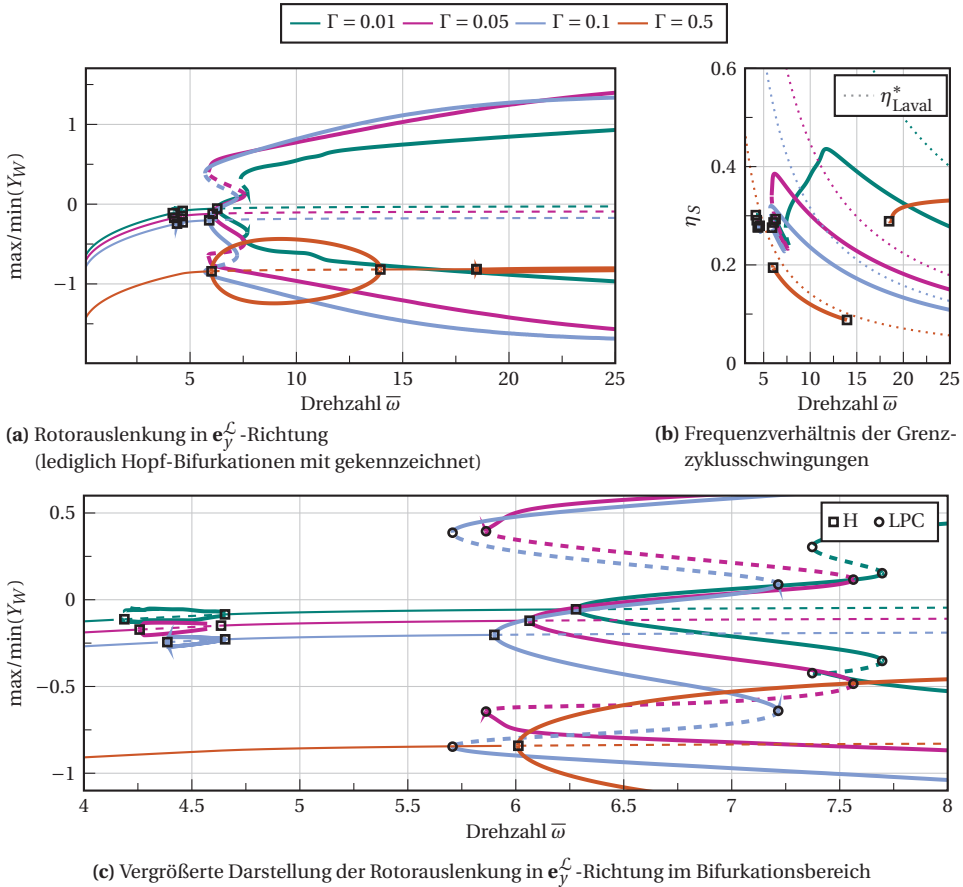


Abbildung 5.9.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschiedene Werte der Wellennachgiebigkeit Γ mit Standardparametersatz und Geometrie $U_m = 0.3$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: ———, period. instabil: - - -]

Hier kommt es neben relativ niedrigen Auslenkungen bereits nach einem kurzen Drehzahlbereich zu einer völligen Unterdrückung der selbsterregten Schwingungen ab einem Drehzahlwert $\bar{\omega} \approx 14$.

Weiterhin lässt sich für diesen speziellen Fall eine weitere Bifurkation der Ruhelage bei $\bar{\omega} \approx 18$ zu beobachten. Der sich hieraus entwickelnde Grenzzyklus weist allerdings sehr geringe Auslenkungen des Rotors auf. Wie das zugehörige Frequenzverhältnis in Abbildung 5.9b zeigt, stellt sich hier ein Wert $\eta_S \approx 1/3$ ein, sodass das System mit einem Drittel der Rotordrehfrequenz schwingt. Inwieweit sich die beiden für $\Gamma = 0.5$ auftretenden Grenzzyklusbereiche unterscheiden, wird in der Gegenüberstellung in Abbildung 5.10 deutlich. Für $\bar{\omega} = 10$ stellt sich ein Grenzzyklus mit einer Frequenz in

der Nähe der Eigenkreisfrequenz des starr gelagerten Laval-Rotors ein. Wird der Rotor selbst als linearer Oszillator interpretiert, bei dem die Wellenzapfenbewegung eine entsprechende Fußpunkterregung in der Nähe der Eigenkreisfrequenz repräsentiert, so lassen sich damit die relativ großen Rotorauslenkungen erklären.

Wird dagegen das Verhalten im zweiten Bereich bei $\bar{\omega} = 20$ in Abbildung 5.10b betrachtet, zeigt sich eine umgekehrte Tendenz mit verhältnismäßigen großen Auslenkungen des Wellenzapfens und verschwindend geringer Auslenkung des Rotors. Unter Berücksichtigung des angeführten Beispiels eines linearen Oszillators kann dieser Fall als Fußpunkterregung im überkritischen Frequenzbereich interpretiert werden und so die nahezu verschwindenden Rotorschwingungen erklären.

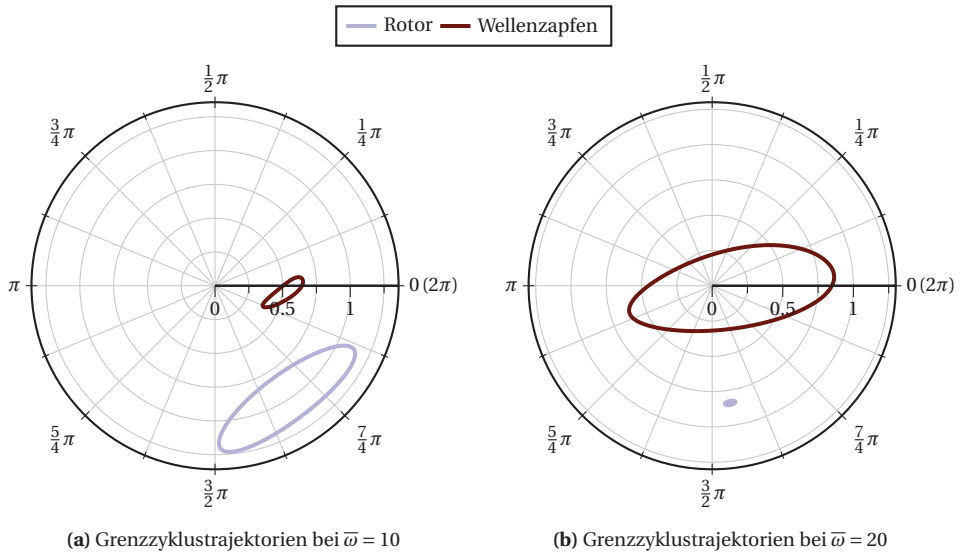


Abbildung 5.10.: Polare Darstellung der Grenzzyklustrajektorien in der $\mathbf{e}_x^C - \mathbf{e}_y^C$ -Ebene in zwei unterschiedlichen Bereichen der Selbsterregung bei einer Wellennachgiebigkeit $\Gamma = 0.5$ und Standardparametersatz mit Geometrie $U_m = 0.3$.
 [period. stabil: —]

Zusammenfassend finden sich bei der Untersuchung des Einflusses der Wellennachgiebigkeit zwei entscheidende Auswirkungen. Zum einen bedingt die nachgiebigere Welle eine größere statische Auslenkung und zum anderen zeigt sich der positive Einfluss auf die Stabilität und die Begrenzung der Grenzzyklusschwingungen. Eine praktische Auslegung des Rotorsystems sollte hierbei den idealen Kompromiss dieser beiden Effekte anstreben.

Einfluss weiterer Modellparameter auf das Lösungsverhalten. Weitere Simulationsergebnisse, die den Einfluss des Massenverhältnisses zwischen Rotor und Wellenzapfen sowie den der Stützstellenanzahl für die Drucknäherung umfassen, finden sich in Anhang A.1, da diese lediglich einen geringen quantitativen und qualitativen Einfluss zeigen.

5.2.3. Einsetzende Selbsterregung - Stabilität der Ruhelage

Von Interesse ist weiterhin die einsetzende Selbsterregung, die sich aus den im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Hopf-Bifurkationen heraus entwickelt. Entsprechend der präsentierten Ergebnisse kann der damit verbundene Stabilitätsverlust der Ruhelage je nach vorliegendem Parametersatz bei vergleichsweise hohen aber auch niedrigen Drehzahlen auftreten. Im Rahmen der Untersuchungen wird die Hopf-Bifurkation in Abhängigkeit zweier Parameter verfolgt, dem reziproken Lagerlastparameter σ und dem Drehzahlparameter $\bar{\omega}$, um so die Grenzdrehzahl¹ des Rotors zu identifizieren. Diese wird im Folgenden mit $\bar{\omega}_{\text{krit}}$ bezeichnet.

Einflüsse von Lagergeometrie und -orientierung auf die Stabilität der Ruhelage. In einem ersten Schritt werden sowohl der Einfluss der Lagergeometrie als auch der Orientierung gegenüber der statischen Lastrichtung untersucht.

In Abbildung 5.11 findet sich eine Darstellung der Hopf-Bifurkationen in der σ - $\bar{\omega}$ -Ebene für verschiedene Werte des Geometrieparameters. Zur besseren Darstellung sind Bereiche mit instabiler Ruhelage grau hinterlegt (■).

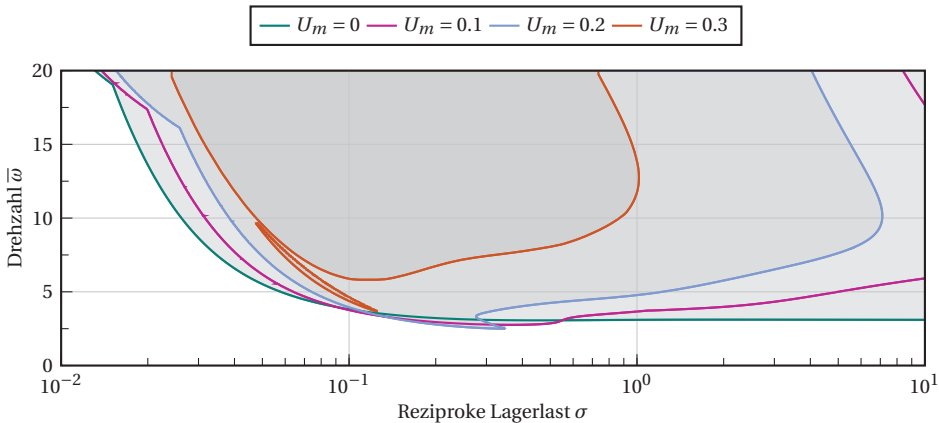


Abbildung 5.11.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lagerlast für verschiedene Gleitlagergeometrien U_m mit Standardparametersatz. [instabile Ruhelagen: ■]

Der Einfluss verschiedener Lagergeometrien ist klar zu erkennen. Ausgehend vom kreisrunden Lagerprofil bei $U_m = 0$ zeigt sich im eher niedrigen Lastbereich $\sigma > 1$ für einen steigenden Wert des Geometrieparameters U_m eine verhältnismäßig starke Verschiebung der Stabilitätsgrenze in höheren Drehzahl- und Lastbereiche. So verlagert sich die Grenzdrehzahl für eine verhältnismäßig geringe Belastung des Lagers mit $\sigma = 2$ von anfänglich $\bar{\omega}_{\text{krit}}(U_m = 0) \approx 3$ über $\bar{\omega}_{\text{krit}}(U_m = 0.1) \approx 4$ und $\bar{\omega}_{\text{krit}}(U_m = 0.2) \approx 6$ bis hin zu einer vollständigen Stabilisierung im Fall $U_m = 0.3$.

¹Wert des Drehzahlparameters, für den die Ruhelage in Folge einer Hopf-Bifurkation instabil wird

Im Bereich mit höherer Belastung bei $\sigma < 0.1$ fällt der Einfluss der Lagergeometrie dagegen geringer aus. Die Stabilitätsgrenze wird in diesem Bereich zwar ebenfalls zu höheren Drehzahlen hin verschoben, allerdings fällt dieser Effekt wesentlich geringer aus als im niedrigen Lastbereich. Erklären lässt sich dieser Effekt durch die Positionierung des Wellenzapfens für verschieden starke Belastungen des Systems. Wie sich beispielsweise in Abbildung 5.8 zeigt, wandert die Position des Wellenzapfens für abnehmende Lagerlasten ($\sigma \uparrow$) bei gleicher Drehzahl tendenziell in die Mitte des Gleitlagers, da bei geringerer Belastung ein verhältnismäßig dickerer Fluidfilm aufgebaut wird. Im Vergleich zum klassischen zylindrischen Gleitlager mit $U_m = 0$ offenbart sich hier nun der Vorteil der gewählten Gleitlagergeometrie. Diese liefert selbst für eine exakt mittige Ausrichtung des Wellenzapfens noch einen entsprechenden Druckaufbau durch die nach wie vor vorhandenen konvergierenden Schmierpalte und kann so nach wie vor eine Abstützung der Welle und des Rotors gewährleisten. Die schematische Darstellung in Abbildung 5.12 verdeutlicht diesen Sachverhalt anhand der zwei gegebenen konvergierenden Schmierpalte jeweils in der oberen und unteren Lagerhälfte, die zu einem entsprechenden Druckaufbau in den jeweiligen Bereichen führen.

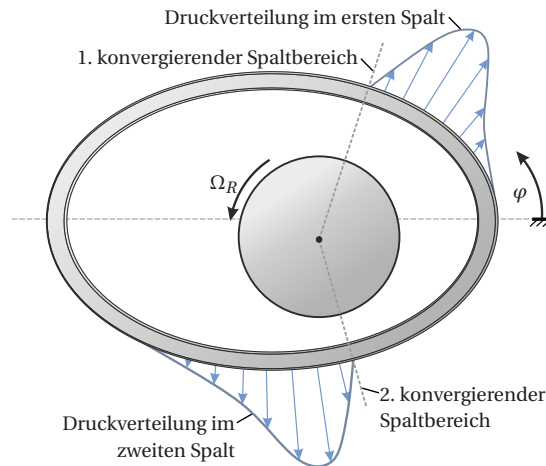


Abbildung 5.12.: Schematische Druckverteilung für ein Gleitlager mit ovalem Querschnittsprofil für eine stationäre Wellenzapfenposition.

Im Gegensatz hierzu verliert das System mit zylindrischem Gleitlager im Grenzfall $(X_W, Y_W) \rightarrow (0, 0)$ seine Stabilität, da in diesem Fall der für den Druckaufbau entscheidende Gradient $\partial H / \partial \varphi$ (siehe Gleichung (3.20)) verschwindet und das Lager eine Abstützung des Rotors nur noch durch eine einsetzende Rührbewegung des Wellenzapfens realisieren kann.

In Abbildung 5.13 ist hierzu eine exemplarische Gegenüberstellung des dimensionslosen Druckverlaufs bei $\bar{z} = 0$ für das zylindrische und das Gleitlager mit ovalem Profil für verschiedene statische Position des Wellenzapfens gegeben. Die Positionen der Aktoren liegen jeweils bei den Umfangspositionen $\varphi = \pi/2$ und $\varphi = 3\pi/2$.

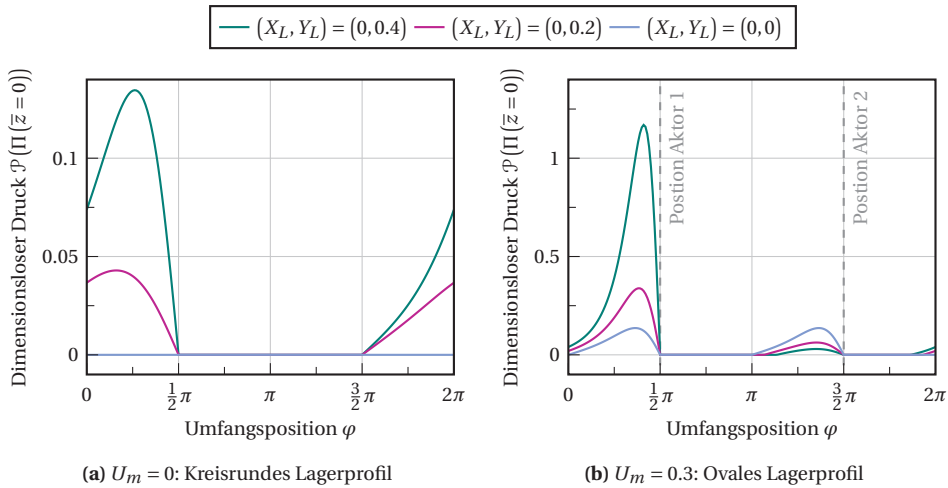


Abbildung 5.13.: Gegenüberstellung der Druckverteilung über den Umfang an der axialen Stelle $\bar{z} = 0$ für verschiedene statische Wellenzapfenpositionen bei einem Kurzlagerparameter $\gamma = 4$.

Wie zu erkennen ist, bilden sich für das Lager mit ovalem Profil zwei Druckberge aus, die selbst für eine komplett mittige Position des Wellenzapfens (dargestellt durch —) noch erhalten bleiben.

Beim kreisrunden Profil kommt es hingegen zur Ausbildung nur eines Druckberges, dessen Maximum zudem auch nur bei ca. 10% des Maximums des ovalen Profils liegt. Für eine komplett mittige Ausrichtung verschwindet der Fluiddruck darüber hinaus völlig, sodass für diesen Fall keine Abstützung des Rotors bei konstanter Position des Wellenzapfens mehr möglich ist.

Neben dem ausführlich erklärten stabilisierenden Effekt lässt sich in Abbildung 5.11 ebenso auch das für $U_m = 0.3$ bereits beobachtete Phänomen eines vorangehenden Instabilitätsbereichs beobachten. Während dieser für $U_m = 0.2$ noch nicht vorhanden ist, zeigt der Verlauf der Hopf-Bifurkationen für $U_m = 0.3$ eine separierte, geschlossene Kurve im mittleren Lastbereich. Wie die Ergebnisse der Lösungsverfolgung gezeigt haben, entstehen hier jedoch nur Grenzyklen mit verhältnismäßig niedrigen Amplituden. Daher ist dieser Bereich nicht als kritisch anzusehen.

Es lässt sich somit zusammenfassen, dass durch die nicht-kreisrunde Querschnittsgeometrie der Gleitlager eine Ausdehnung der stabilen Bereiche der Ruhelage gegenüber der zylindrischen Bauform realisiert werden kann. Dieser Umstand ist bereits bekannt und wird beispielsweise in [2, 26, 29] für verschiedene Typen von Mehrflächenlagern gezeigt, jedoch ohne eine detaillierte Bifurkationsanalyse und ohne anschließende Verfolgung der auftretenden Grenzyklusschwingungen.

Über eine mögliche Stabilisierung entscheidet jedoch nicht nur die Querschnittsform des Gleitlagers, sondern auch deren Orientierung gegenüber der statischen Lastrichtung. Die zuvor betrachteten Fälle bedienen sich dabei stets eines statischen Lastwinkels $\alpha = 0$. Ändert sich die Orientierung des Gleitlagers gemäß Abbildung 5.1, hat dies ebenso Einfluss auf die Stabilität der Ruhelage, wie sich in den Diagrammen in Abbildung 5.14 zeigt.

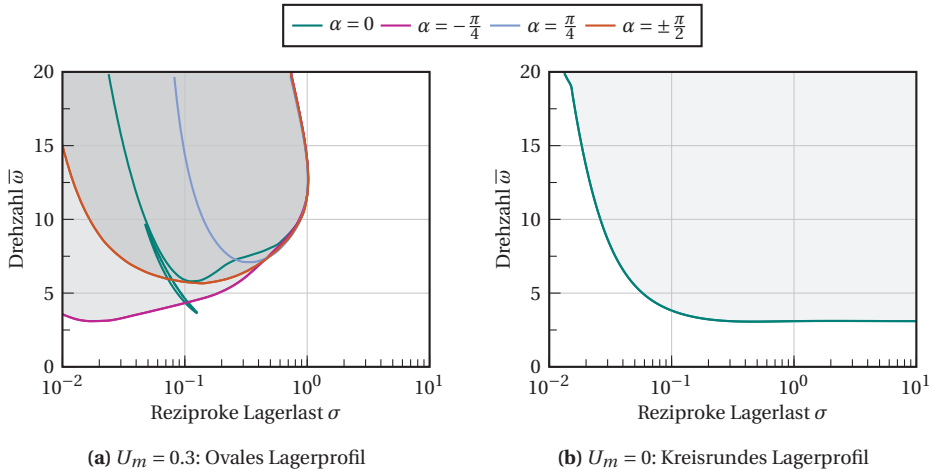


Abbildung 5.14.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lagerlast in vergleichender Betrachtung von ovalem und kreisrundem Lagerprofil für verschiedene Werte des Lastwinkels α mit Standardparametersatz.
[instabile Ruhelagen:]

Der Einfluss der Orientierung äußert sich gerade im höheren Lastbereich für $\sigma < 0.1$, da hier eine relativ starke Auslenkung des Wellenzapfens und damit eine starke Abhängigkeit von der Orientierung des Lagers zu erwarten ist. Sinkt die Lagerbelastung, so lokalisiert sich der Wellenzapfen zunehmend mittig (vgl. Abbildung 5.8), sodass der Einfluss eines veränderten Lastwinkels vergleichsweise gering ausfällt.

In Abbildung 5.14b zeigt sich zu Vergleichszwecken die vom Lastwinkel unberührte Stabilitätsgrenze des zylindrischen Gleitlagers. Es ist klar zu erkennen, dass gerade im hohen Lastbereich ein ovales Profil für die Lastwinkel $\alpha = -\pi/4$ und $\alpha = \pm\pi/2$ weitaus niedrigere Grenzdrehzahlen erzielt werden als für das kreisrunde Profil. Gerade dieser Umstand stellt die größte Schwäche des Konzepts nicht-zylindrischer Gleitlager dar. Wie u. a. von FRENE ET AL. in [26] angeführt wird, reagiert das System unter bestimmten Umständen höchst sensitiv auf eine Änderung der Hauptlastrichtung. Diese Änderung kann bei realen Systemen entweder aus dem Betrieb heraus resultieren oder aber durch eine ungenaue Montage der Lager selbst entstehen. Das zylindrische Lager ist bzgl. der genannten Punkte aufgrund der vorliegenden Achsensymmetrie der Lagerschale weitaus weniger fehleranfällig.

Wird die direkte Abhängigkeit der Grenzdrehzahl vom Lastwinkel α untersucht, so lässt sich der genannte Nachteil anhand der in Abbildung 5.15 dargestellten Ergebnisse nochmals verdeutlichen. Als Beispiel wird das System für $\sigma = 0.05$ betrachtet, welches unter dem statischen Lastwinkel $\alpha = 0$ operieren soll. Aufgrund der starken Abhängigkeit der Grenzdrehzahl von α an diesem Punkt stellt dies jedoch eine eher ungünstige Konfiguration dar. Wird das Lager beispielsweise -10° versetzt montiert, so fällt die Grenzdrehzahl auf ca. 75% des Ausgangswertes. Eine derartige Abhängigkeit ist bei der Verwendung solcher Lagertypen stets zu berücksichtigen, da diese im Gegensatz zu zylindrischen Lagern relativ stark ins Gewicht fallen kann.

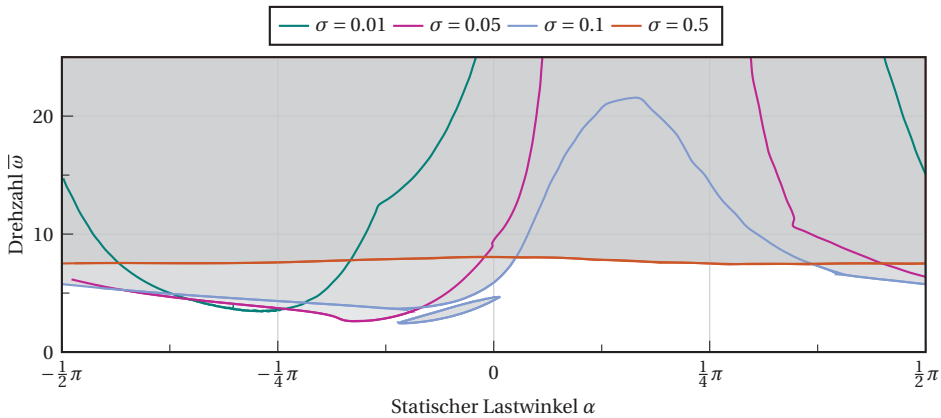


Abbildung 5.15.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lastwinkel für verschiedene Werte des reziproken Lagerlastparameters σ mit Standardparametersatz und Geometrie $U_m = 0.3$.
[instabile Ruhelagen:]

Einflüsse der Wellennachgiebigkeit auf die Stabilität der Ruhelage. Für verschieden nachgiebige Wellen sind die Ergebnisse der Verfolgung der Hopf-Bifurkationen in Abbildung 5.16 dargestellt. Für steife bis mittelsteife Wellen zeigt sich annähernd kein nennenswerter Einfluss auf die Lage der Hopf-Bifurkationen, sowohl für das Lager mit ovalem als auch mit kreisrundem Profil. Dieser Sachverhalt findet sich ebenso in den bereits diskutierten Lösungsverläufen in Abbildung 5.9.

Bei einer relativ nachgiebigen Welle mit $\Gamma = 0.5$ ist der Einfluss auf die Stabilität jedoch deutlich sichtbar. Gerade im niedrig belasteten Bereich kommt es zu einer starken Verschiebung der Stabilitätsgrenze.

Im hoch belasteten Bereich ist für die betrachteten Fälle hingegen kein nennenswerter Unterschied festzustellen.

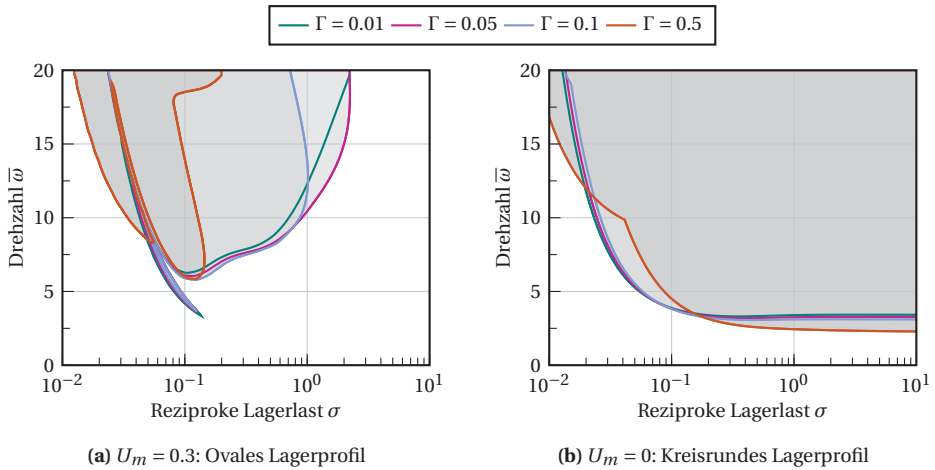


Abbildung 5.16.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lagerlast in vergleichender Betrachtung von ovalem und kreisrundem Lagerprofil für verschiedene Wellennachgiebigkeiten Γ mit Standardparametersatz.
 [instabile Ruhelagen:]

Abschließende Empfehlungen zur Auslegung hinsichtlich auftretender Selbsterregung.

Je nach Belastungsart unterscheiden sich die zu berücksichtigenden Parameter zwecks Verbesserung des dynamischen Verhaltens hinsichtlich der auftretenden Selbsterregung. Handelt es sich im Sinne des Lagerlastparameters um niedrig belastete Rotoren, so kann ein stark erweiterter stabiler Drehzahlbereich der Ruhelage durch ein Lager mit ovalem Querschnitt erzielt werden. Der statische Lastwinkel spielt in diesem Fall eher eine untergeordnete bis keine Rolle. Die Auslegung mit einer nachgiebigeren Welle begünstigt dabei den stabilisierenden Effekt.

Wird ein hoch belastetes System betrachtet, so kann durch eine Kombination aus ovalem Lagerprofil und geeignetem statischen Lastwinkel eine Stabilisierung der Ruhelage erzielt werden, die allerdings stark von einer Veränderung des Lastwinkels abhängt. Die Wellennachgiebigkeit hat in diesem Bereich hingegen keinen nennenswerten Einfluss.

Ein Rotorsystem mit einer Lagerlast im mittleren Bereich $\sigma \in [0.1, 0.5]$ stellt den Grenzübergang der beiden zuvor geschilderten Fälle dar. Als ersichtliche Tendenz lässt sich aber auch hier ein ovales Lagerprofil empfehlen. Die Abhängigkeit von den übrigen Systemparametern ist in diesem Bereich eher unsystematisch oder marginal.

Als wesentlicher Vorteil gegenüber der zylindrischen Variante ist die weitaus größer ausfallende Grenzdrehzahl im Bereich niedriger Lagerlasten zu erwähnen. Dies wird u. a. im Grenzfall $\sigma \rightarrow \infty$ eines vertikalen Rotors ohne statische Last ausgenutzt. Ein Lager mit kreisrundem Querschnittsprofil führt in diesem Fall zu keiner stabilen Ruhelage, wohingegen eine nicht-zylindrische Geometrie eine entsprechende Stabilisierung erzielen kann.

5.3. Auswirkungen statischer Unwucht

Zusätzlich zu den ausführlich untersuchten selbsterregten Schwingungen wird nun der Einfluss einer statischen Unwucht betrachtet. Da in einem solchen Fall neben der Selbsterregung noch eine Fremderregung durch die Unwucht vorliegt, sind nun auch quasi-periodischen Lösungen zu erwarten. Aus diesem Grund erfolgt die Untersuchung auf Basis eines Spektralsystems, welches aus den jeweiligen Bewegungsgleichungen abgeleitet wird.

5.3.1. Modellierung über Spektralsystem

Herleitung des zugehörigen Spektralsystems. Als Ausgangspunkt zur Herleitung des Spektralsystems gemäß des in Abschnitt 2.3.3 geschilderten Verfahrens dienen die Bewegungsgleichungen (5.2).

Durch Einführung der mit der Drehfrequenz des Rotors assoziierten Toruskordinate θ_1 ergibt sich die autonome Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{z}' &= \underline{A}\underline{z} + \underline{f}_p(\underline{z}) + \underline{f}_0 + \underline{f}_U(\theta_1), \\ \theta_1' &= \eta_U \quad \text{mit} \quad (\underline{z}, \theta_1) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{T}^1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

als Basis zur Herleitung des Spektralsystems. Da die dimensionslose Zeit τ über die Drehfrequenz Ω_R des Rotors definiert ist, ergibt sich der Wert der zur Toruskordinate θ_1 zugehörigen Basisfrequenz zu $\eta_U = 1$. Es wird eine quasi-periodische Lösung \underline{z}^* des Differentialgleichungssystems (5.6) angenommen, die den Zusammenhang in der Form

$$\underline{z}^*(\tau) = \underline{u}(\eta_U \tau, \nu_U \tau) = \underline{u}(\tau, \nu_U \tau)$$

unter Verwendung einer \mathbb{T}^2 -Torusfunktion $\underline{u}(\theta_1, \theta_2)$ erfüllen soll. Damit lässt sich eine zugehörige Invarianzgleichung

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_1} + \nu_U \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_2} = \underbrace{\underline{A}\underline{u} + \underline{f}_0 + \underline{f}_U(\theta_1)}_{=: \underline{f}_{\text{ana}}} + \underbrace{\underline{f}_p(\underline{u})}_{=: \underline{f}_{\text{FFT}}} \tag{5.7}$$

zur Beschreibung der Torusfunktion angeben, wobei ν_U die noch unbekannt zweite Basisfrequenz darstellt. Zur Approximation der Torusfunktion $\underline{u}(\theta_1, \theta_2)$ wird, wie im Anwendungsbeispiel in Abschnitt 2.3.4 aufgeführt, ein Galerkin-Ansatz dritter Ordnung ($N = 3$) in θ_1 gewählt:

$$\underline{u} \approx \underline{u}^{(3)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^3 \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1). \tag{5.8}$$

Die im Sinne des Verfahrens durchzuführenden Projektionen auf die Ansatzfunktionen werden dabei für den Anteil $\underline{f}_{\text{ana}}$ analytisch und für den Anteil $\underline{f}_{\text{FFT}}$, welcher die Lager-

kräfte beinhaltet, mit Hilfe eines FFT-Verfahrens bestimmt (siehe Seite 27). Als Resultat ergibt sich das Spektralsystem

$$\frac{d}{d\hat{\theta}_2} \underline{Y} = -\underline{C} \underline{Y} + \underline{S}(\underline{Y}) \quad \text{mit} \quad \underline{Y} \in \mathbb{R}^{56}, \underline{S} \in \mathbb{R}^{56}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{56 \times 56}, \quad (5.9)$$

welches sich zur Beschreibung von periodischem und auch quasi-periodischem Verhalten mit maximal zwei Basisfrequenzen eignet. Die transformierte Toruskoordinate $\hat{\theta}_2$ ergibt sich dabei aus $\hat{\theta}_2 = \theta_2 / \nu_U$. Die zugehörigen Spektralkomponenten bzgl. $\hat{\theta}_2$ werden über den Zusammenhang

$$\hat{\underline{c}}^{(k)} = \underline{c}^{(k)}(\hat{\theta}_2) = \underline{c}^{(k)}(\nu_U \hat{\theta}_2), \quad \hat{\underline{s}}^{(k)} = \underline{s}^{(k)}(\hat{\theta}_2) = \underline{s}^{(k)}(\nu_U \hat{\theta}_2) \quad (5.10)$$

in Form von

$$\underline{Y} = \left[(\hat{\underline{c}}^{(0)})^T, (\hat{\underline{c}}^{(1)})^T, (\hat{\underline{s}}^{(1)})^T, \dots, (\hat{\underline{s}}^{(3)})^T \right]^T \quad (5.11)$$

zusammengefasst. Auf eine detaillierte Darstellung der einzelnen Anteile des Spektralsystems wird aufgrund der hohen Dimension des Problems an dieser Stelle verzichtet und es wird auf die exemplarische Darstellung in Abschnitt 2.3.3 verwiesen.

Prinzipielle Vorgehensweise. Zur Untersuchung des Einflusses der statischen Unwucht wird das Spektralsystem in einem niedrigen Drehzahlbereich an einer stabilen Ruhelage initialisiert. Dies entspricht einer periodischen Lösung des Originalsystems. In Abhängigkeit des Drehzahlparameters wird diese Lösung verfolgt, bis sich eine entsprechende Hopf-Bifurkation im Spektralsystem zeigt, von der aus periodische Lösungen initialisiert und weiter verfolgt werden können. Diese entsprechen quasi-periodischen Lösungen des Originalsystems, die von einer NS-Bifurkation aus starten.

Die Stabilität der durch das Spektralsystem zu approximierenden Lösungen wird dabei über das auf Seite 27ff. beschriebene Äquivalent zum Hill-Verfahren ausgewertet.

Anmerkung zum kritischen Wert des Drehzahlparameters im Falle statischer Unwucht.

Die Eigenkreisfrequenz des elastischen Rotors für eine starre Lagerung wird durch das Frequenzverhältnis η_{Laval}^* in Gleichung (5.5) abgeschätzt. Im Falle statischer Unwucht erfolgt eine Anregung des Systems über die zur Unwucht zugehörigen harmonischen Terme $\sin(\tau)$ und $\cos(\tau)$. Aufgrund dieses Zusammenhangs kann ein solch unwuchtkritischer Wert des Drehzahlparameters wie folgt abgeschätzt werden:

$$\bar{\omega}_{\text{Laval}}^U = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \quad (5.12)$$

Dieser Ausdruck stellt eine Abschätzung des Wertes des Drehzahlparameters dar, für den im Unwuchtfall vergleichsweise hohe Systemamplituden zu erwarten sind. Ein Betrieb des Systems oberhalb oder unterhalb dieses Wertes wird dabei als über- bzw. unterkritisch angesehen.

5.3.2. Stationäre Lösungen und deren Bifurkationen

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Verfolgung des unwuchtbehafteten Rotors auf Basis des Spektralsystems für verschiedene Parameterkonfigurationen präsentiert.

Einflüsse der Lagergeometrie bei statischer Unwucht. Das stationäre Verhalten des Rotors im Unwuchtfall ist in Abhängigkeit der Drehzahl in Abbildung 5.17 dargestellt. Grundsätzlich liegen für alle betrachteten Fälle im niedrigen Drehzahlbereich periodische Lösungen vor (—), die mit steigender Drehzahl des Rotors über eine mit (▲) gekennzeichnete Neimark-Sacker-Bifurkation (NS) ihre Stabilität verlieren. Als Resultat ergeben sich quasi-periodische Lösungen (—), die aufgrund der Beschreibung mittels des Spektralsystems ebenfalls verfolgt werden können. Wie sich in Abbildung 5.17b zeigt, kann auch hier ein beliebig komplexes Verzweigungsverhalten der quasi-periodischen Äste erfolgen. Es ist dabei anzumerken, dass aufgrund eines fehlenden Stabilitätskriteriums hierbei nicht zwischen stabilen und instabilen quasi-periodischen Lösungen unterschieden wird.

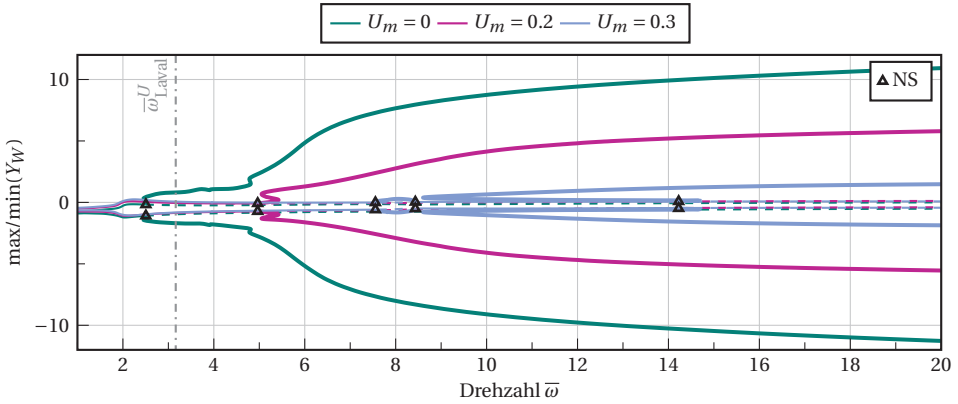
Das in Abbildung 5.17c gegebene Frequenzverhältnis liefert aufgrund von $\eta_U = 1$ direkt die zweite Basisfrequenz ν_U der quasi-periodischen Lösungen und entspricht erwartungsgemäß den im Falle reiner Selbsterregung aufgezeigten Tendenzen.

Beginnend mit den periodischen Lösungen zeigt sich, dass der Geometrieparameter U_m keinen nennenswerten Einfluss auf die auftretenden Auslenkungen hat, aber dafür auf die Stabilität der Lösung. So verlieren die durch die Unwucht verursachten periodischen Lösungen bei zunehmend ovaler Form des Lagerprofils erst bei höheren Drehzahlen ihre Stabilität aufgrund der einsetzenden Selbsterregung. So lässt sich ausgehend von der NS-Bifurkation für $U_m = 0$ bei $\bar{\omega} \approx 2.5$ diese im Fall $U_m = 0.3$ erst bei $\bar{\omega} \approx 14$ beobachten. Diese Verschiebung des stabilen Lösungsbereichs durch die Lagerform findet sich ebenso für den Fall reiner Selbsterregung des unwuchtfreien Rotors (vgl. Abbildung 5.4) und ist damit als validiert zu erachten.

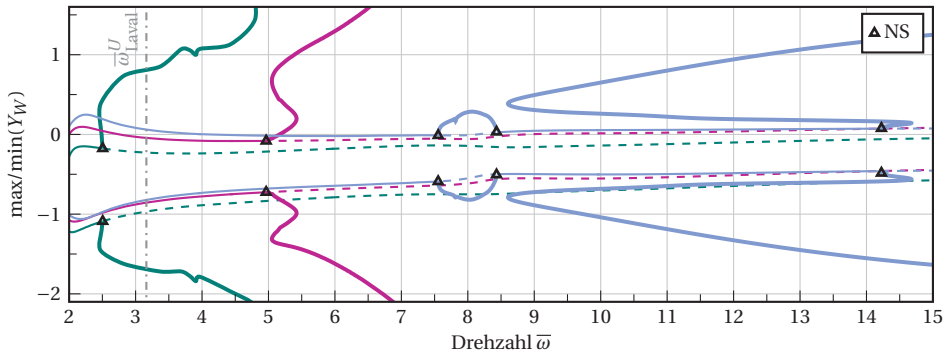
Der Einfluss der Lagergeometrie auf die aus der NS-Bifurkation entstehenden quasi-periodischen Lösungszweige zeigt unter Berücksichtigung der Ergebnisse des unwuchtfreien Falls die zu erwartenden Tendenzen: Mit zunehmend ovaler Querschnittsform fallen die Rotorauslenkungen immer geringer aus.

Wird der Fall des zylindrischen Lagers mit $U_m = 0$ betrachtet, zeigt sich sowohl im Auslenkungsverlauf als auch bei der Darstellung des Frequenzverhältnisses ein ähnliches Verhalten zum oil-whirl und oil-whip, aber für den quasi-periodischen Bereich. Die Basisfrequenz ν_U pendelt sich im Bereich $\bar{\omega} \approx [4.5, 6]$ bei $\nu_U \approx 0.5$ ein, bevor sich diese der abgeschätzten Eigenkreisfrequenz des starr gelagerten Laval-Rotors annähert und es letztlich zu stark ansteigenden Auslenkungen der quasi-periodischen Lösungen kommt. Mit steigendem Geometrieparameter geht dieser Effekt, wie auch schon im unwuchtfreien Fall, zunehmend verloren.

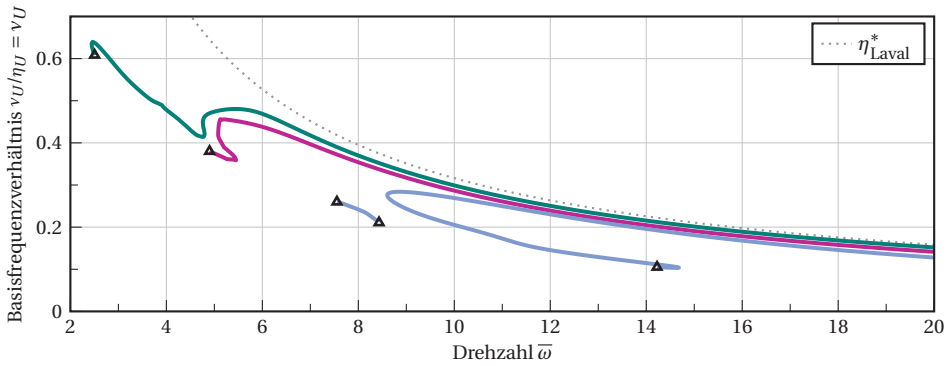
Interessanterweise kommt es auch im Unwuchtfall für $U_m = 0.3$ zu einem vorgelagerten Bereich mit instabiler, in diesem Fall periodischer Lösung bei $\bar{\omega} \approx 8$, wobei hier eine koexistierende quasi-periodische Lösung vorliegt.



(a) Rotorauslenkung in e_y^L -Richtung (lediglich NS-Bifurkationen gekennzeichnet)



(b) Rotorauslenkung in e_y^L -Richtung vergrößert



(c) Verhältnis der Basisfrequenzen der quasi-periodischen Lösung

Abbildung 5.17.: Stationäre Lösungen des Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl unter Berücksichtigung einer statischen Unwucht $\gamma_S = 0.25$ für verschiedene Lagergeometrien U_m mit Standardparametersatz.

[period. stabil: —, period. instabil: - - , quasi-period.: —]

Zwecks Erklärung und möglicher Interpretation der berechneten quasi-periodischen Lösungszweige und deren Besonderheiten ist in Abbildung 5.18 für den Fall des zylindrischen Lagers ($U_m = 0$) ein Abgleich mit Ergebnissen einer reinen Zeitsimulation des Originalsystems aufgeführt. Beginnend mit Abbildung 5.18a wird ein kleiner Ausschnitt einer zugehörigen Spektralkomponente der quasi-periodischen Lösung betrachtet.

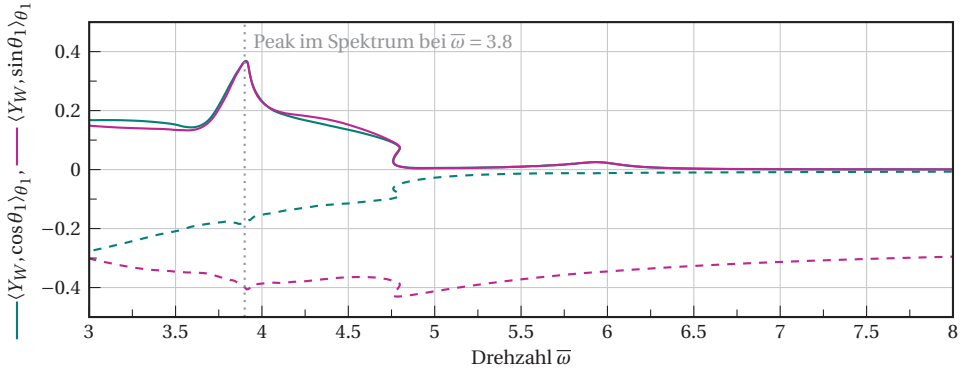
Es handelt sich sichtlich um quasi-periodisches Verhalten mit einer mittleren Abweichung ungleich null der betrachteten Spektralkomponenten. Als Besonderheit lässt sich ein peak-artiger Verlauf bei $\bar{\omega} = 3.8$ identifizieren, dessen Bedeutung im Folgenden diskutiert wird.

Wie bereits im Beispiel in Abschnitt 2.3.4 entspricht ein solcher Peak einer potentiellen Synchronisation auf der quasi-periodischen Mannigfaltigkeit. Als Validierung hierfür sind die zugehörigen Ergebnisse einer reinen Zeitsimulation des Originalsystem jeweils direkt an und neben der Peak-Stelle in Abbildung 5.18b und Abbildung 5.18c aufgeführt. Diese zeigen bei $\bar{\omega} = 3.8$ klar einen periodischen und bei $\bar{\omega} = 4$ einen quasi-periodischen Lösungsverlauf. Es ist dabei anzumerken, dass im periodischen Fall die maximale Auslenkung bei $\max(Y_W(\bar{\omega} = 3.8)) \approx 0.5$ liegt, obwohl diese gemäß dem Verlauf in Abbildung 5.17b mit $\max(Y_W(\bar{\omega} = 3.8)) \approx 1$ abgeschätzt wird. Dieser Umstand wird u. a. im Zuge des einführenden Beispiels diskutiert und beruht auf der Tatsache, dass im Falle einer auf der Mannigfaltigkeit periodisch verlaufenden Lösung, diese die Extremalstellen selbst nicht zwingend durchlaufen muss. Dieser Sachverhalt wird durch den in Abbildung 5.18d dargestellten Poincaré-Schnitt nochmals verdeutlicht. Eine Näherung durch Zeitsimulation führt lediglich auf zwei Fixpunkte, welche die Mannigfaltigkeitskurve konsequenterweise nicht dicht ausfüllen. Im Gegensatz dazu lässt sich für die quasi-periodische Lösung bei $\bar{\omega} = 4$ in Abbildung 5.18e eine mehr oder weniger gleichmäßige Verteilung auf der Mannigfaltigkeit feststellen.

Die genäherten Maxima und Minima der Torusmannigfaltigkeit liefern, wie auch bereits im Beispiel in Abschnitt 2.3.4, lediglich eine Abschätzung einer oberen und unteren Schranke der darauf verlaufenden Lösungen. Quasi-periodische Lösungen werden hierdurch sehr gut approximiert, wie der Vergleich mit der Zeitsimulation zeigt, wohingegen im Synchronisationsfall mit quantitativen Abweichungen zu rechnen ist.

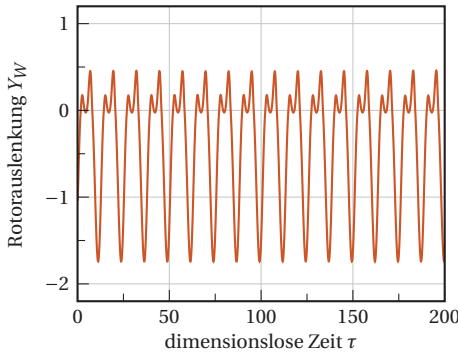
Ein weitere Punkt, den es zu klären gilt, ist die falten- oder sattelpunktähnliche Verzweigungsstruktur der quasi-periodischen Lösungen. Hierzu wird ein solches Szenario für den Fall $U_m = 0$ in Abbildung 5.19 näher betrachtet.

Wie in Abbildung 5.19a zu erkennen ist, liegen für $\bar{\omega} \approx 4.8$ eine instabile periodische Lösung sowie drei quasi-periodische Lösungen vor, die jeweils durch die zugehörigen Mannigfaltigkeiten approximiert werden. Basierend auf den Erfahrungen bei der Verzweigung von Grenzzyklen erscheint es naheliegend, dass Mannigfaltigkeit 2 die Einzugsgebiete der als attraktiv anzunehmenden Mannigfaltigkeiten 1 und 3 voneinander abtrennt. Lösungen, die kurz „oberhalb“ der Mannigfaltigkeit 2 initialisiert werden, würden demnach auf Mannigfaltigkeit 3 zustreben, wohingegen eine Initialisierung kurz „unterhalb“ auf Mannigfaltigkeit 1 zulaufen würden.

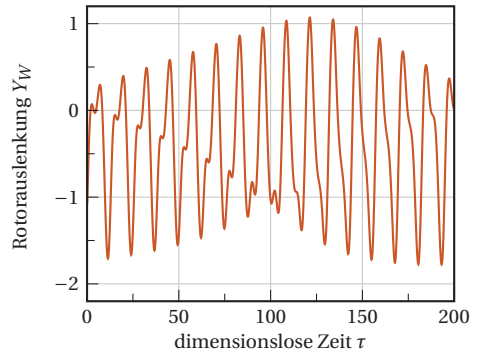


(a) Anteile des Spektrums der Rotorkoordinate Y_W im quasi-periodischen Bereich, basierend auf dem definierten Projektionsoperator aus Gleichung (2.49).

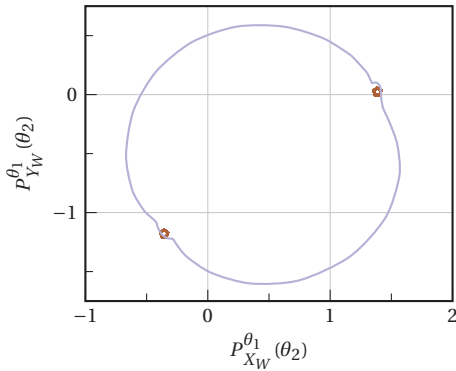
[Mittelwert über θ_2 : - - , mittlere quad. Abweichung über θ_2 : —]



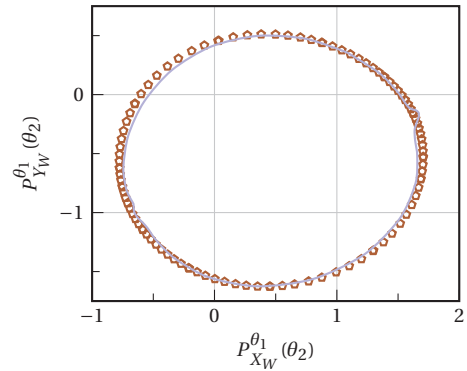
(b) Periodisches Verhalten für $\bar{\omega} = 3.8$ (Peak)



(c) Quasi-periodisches Verhalten für $\bar{\omega} = 4$



(d) Poincaré-Schnitt bei $\theta_1 = 0$ für $\bar{\omega} = 3.8$
[Mannigfaltigkeit: —, Zeitsimulation: \circ]

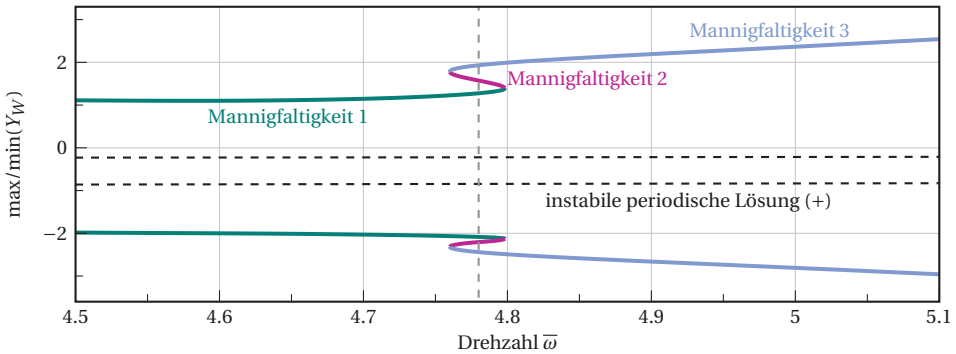


(e) Poincaré-Schnitt bei $\theta_1 = 0$ für $\bar{\omega} = 4$
[Mannigfaltigkeit: —, Zeitsimulation: \circ]

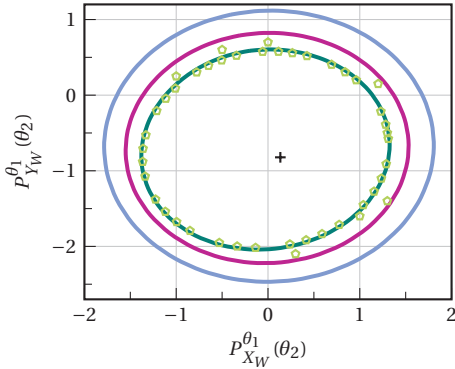
Abbildung 5.18.: Exemplarische Betrachtung einer Peak-Stelle im Spektrum im quasi-periodischen Bereich und Vergleich mit den jeweiligen transienten Simulationsergebnissen für den Fall $U_m = 0$ aus Abbildung 5.17.

Zur Validierung dieser Annahme sind in den Abbildungen 5.19b und 5.19c Gegenüberstellungen der Poincaré-Schnitte, welche auf den genäherten Mannigfaltigkeiten basieren, mit Ergebnissen entsprechender Zeitsimulationen dargestellt. Im ersten Fall einer Initialisierung der Zeitsimulation zwischen Mannigfaltigkeit 1 und 2 ist klar zu erkennen, dass sich die Poincaré-Abbildungen (◊) der Trajektorie nach einer Einschwingphase auf dem Schnitt durch Mannigfaltigkeit 1 ansammeln. Wird hingegen zwischen den Mannigfaltigkeiten 2 und 3 initialisiert, zeigt sich die vermutete Lokalisierung der Abbildungen (◊) auf dem Schnitt durch Mannigfaltigkeit 3.

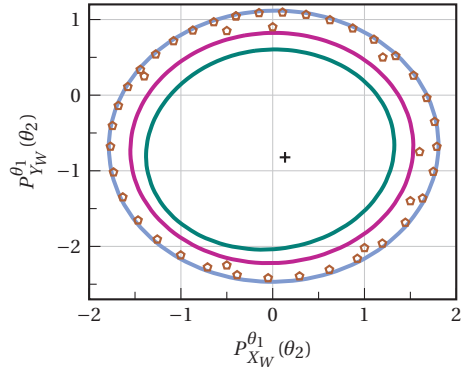
Ein solches Bifurkationsszenario, bei dem Bereiche mit koexistierenden quasi-periodischen Lösungen auftreten, könnte im Kontext der bisher präsentierten Ergebnisse auch als Falte oder Sattelpunkt von quasi-periodischen Lösungen bezeichnet werden, in Folge derer sich die Attraktivität der Torusmannigfaltigkeit bzgl. ihrer Normalenrichtung umkehrt.



(a) Faltenähnliche Verzweigung der Torusmannigfaltigkeiten (vergrößert aus Abbildung 5.17)



(b) Poincaré-Schnitt bei $\theta_1 = 0$ für $\bar{\omega} = 4.78$. Zeitsimulation ◊ mit Initialisierung „zwischen“ den Mannigfaltigkeiten 1 und 2



(c) Poincaré-Schnitt bei $\theta_1 = 0$ für $\bar{\omega} = 4.78$. Zeitsimulation ◊ mit Initialisierung „zwischen“ den Mannigfaltigkeiten 2 und 3

Abbildung 5.19.: Abschätzung möglichen Einzugsverhaltens verschiedener quasi-periodischer Lösungen über Poincaré-Schnitte und Zeitsimulationen bei $\bar{\omega} = 4.78$ im Bereich der in (a) gezeigten faltenähnlichen Verzweigung für den Fall $U_m = 0$ aus Abbildung 5.17.

Einflüsse der Unwuchtstärke. Als entscheidender Parameter ist ebenso die Unwuchtstärke als Maß für die Massenkrafterregung des Rotorsystems zu nennen. Diese wird im verwendeten Modell durch die Größe γ_S charakterisiert, welche die auf das Lagerspiel normierte Distanz zwischen Wellendurchstoßpunkt W und Schwerpunkt S der Hauptmasse des Rotors beschreibt. Im Sonderfall $\gamma_S = 0$ ergibt sich der perfekt gewuchtete oder unwuchtfreie Rotor, der im vorangehenden Abschnitt 5.2 ausführlich diskutiert wurde.

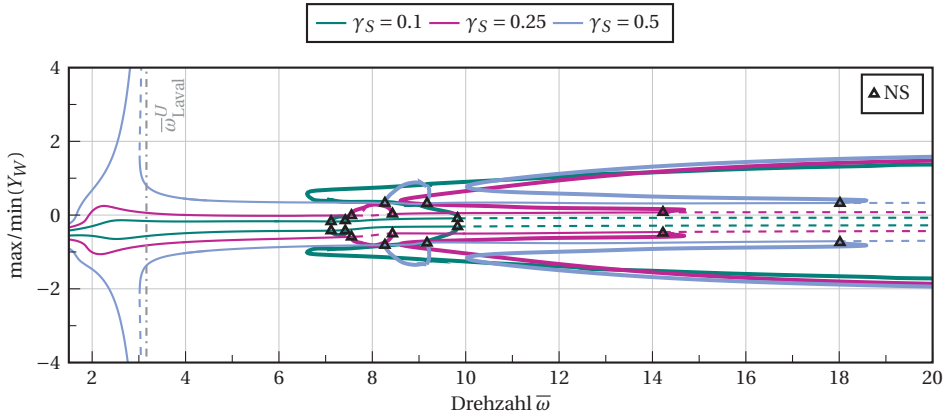
Da sich die Größe der Unwucht im realen System je nach Genauigkeit des Auswuchtverfahrens unterscheiden kann, wird im Folgenden der Einfluss einer schwachen Unwucht $\gamma_S = 0.1$ bis hin zu einer verhältnismäßig starken Unwucht $\gamma_S = 1$ untersucht.

In den Diagrammen in Abbildung 5.20 ist das entsprechende stationäre Verhalten für unterschiedliche Drehzahlen abgebildet. Beginnend mit dem niedrigen Drehzahlbereich in Abbildung 5.20b lässt sich lediglich periodisches Lösungsverhalten feststellen, welche direkt durch die Unwuchtstärke beeinflusst wird. So kommt es für $\gamma_S = 0.5$ zu stark ansteigenden Auslenkungen des Rotors direkt unterhalb der abgeschätzten unwuchtkritischen Drehzahl $\bar{\omega}_{\text{Laval}}^U$, die einer Unwuchterregung des starr gelagerten Laval-Rotors mit dessen Eigenkreisfrequenz beschreibt.

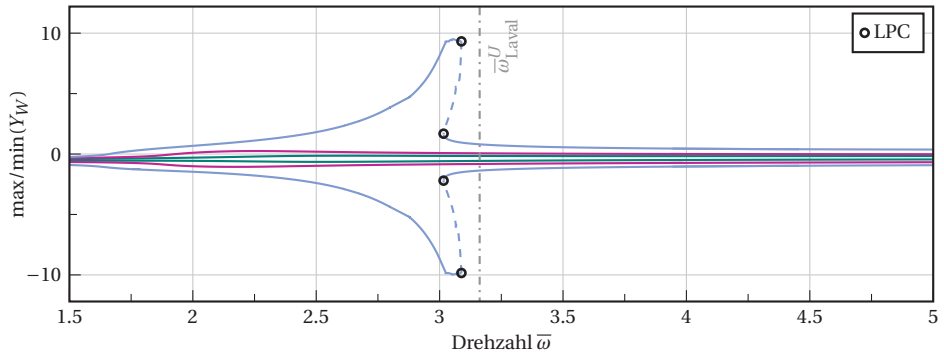
Nach Überschreiten von $\bar{\omega}_{\text{Laval}}^U$ reduzieren sich die Auslenkungen wieder und die periodischen Lösungen bleiben so lange stabil, bis die einsetzende Selbsterregung zur Ausprägung quasi-periodischer Lösungsäste führt. Es lässt sich dabei in Abbildung 5.20c feststellen, dass die entsprechenden NS-Bifurkationen durch eine steigende Unwucht in höhere Drehzahlbereiche verschoben werden. Die Ursache hierfür liegt in der Natur der Kopplung innerhalb des Systems. Der Unwuchtterm \underline{f}_U aus Gleichung (5.6) kann aus systemtheoretischer Sicht als eine einseitige Kopplung zu einem Oszillator mit der Kreisfrequenz $\eta_U = 1$ interpretiert werden, wobei die Kopplungsstärke durch γ_S gegeben ist. Je stärker die Kopplung ausfällt, umso mehr wird dem Rotorsystem das Verhalten des anregenden Oszillators „aufgezwungen“, was sich bereits für einfache Systeme, z. B. in [74], beobachten lässt. Reicht die Stärke der Kopplung nicht mehr aus, dem System das periodische Verhalten „aufzuzwingen“, kommt es zur Entstehung quasi-periodischer Lösungen. Diese zeigen ausgehend vom Bifurkationspunkt einen kurzen Verlauf in Richtung höherer Drehzahlen, gefolgt von einem Rückgang in die niedrigeren Drehzahlbereiche, bevor es über einen weiteren faltenähnlichen Punkt zu einem Übergang auf den äußersten, als attraktiv anzusehenden, Lösungsast kommt. Dieses Verhalten wird ebenso im unwuchtfreien Fall beobachtet und zeigt auf, dass das System durch eine geeignete Störung in diesem Bereich koexistierender Lösungen beispielsweise vom stabilen periodischen Ast auf die äußere quasi-periodische Lösung abdriften kann. Dieser Umstand kann durch eine reine Betrachtung periodischer Lösungen schlichtweg nicht erfasst werden. Die Frage nach einer geeigneten Störung sowie möglicher Einzugsgebiete einzelner quasi-periodischer Lösungen ist dabei im Zuge der Einarbeitung des bisher fehlenden Stabilitätskriteriums ebenfalls zu klären.

Das Verhalten der quasi-periodischen Lösungen selbst zeigt, abgesehen von der Lage der NS-Bifurkationen, kaum nennenswerte quantitative Unterschiede. Dies lässt sich dadurch begründen, dass der Selbsterregungsmechanismus an sich für alle betrachteten Fälle gleich bleibt, unabhängig vom gewählten γ_S .

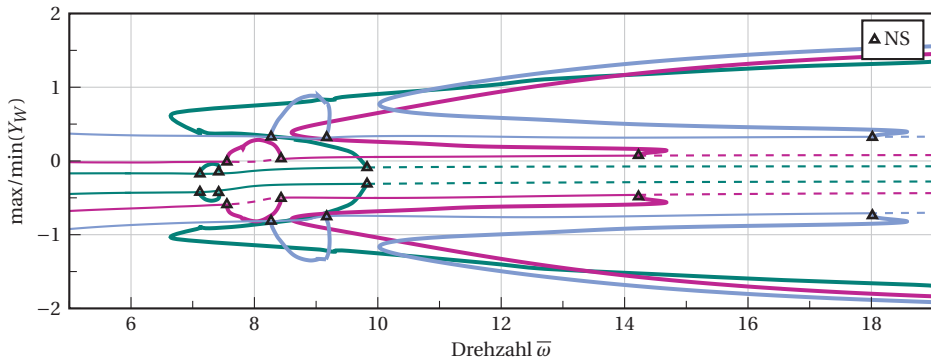
5. Einfluss der Lagergeometrie auf das dynamische Verhalten des Rotors



(a) Rotorauslenkung in e_y^C -Richtung (lediglich NS-Bifurkationen gekennzeichnet)



(b) Vergrößerte Ansicht im Drehzahlbereich $\bar{\omega} \in [1.5, 5]$ mit lediglich periodischen Lösungen



(c) Vergrößerte Ansicht im Drehzahlbereich mit quasi-periodischen Lösungen

Abbildung 5.20.: Stationäre Lösungen des Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl unter Berücksichtigung unterschiedlich starker Unwuchten γ_S mit Standardparametersatz. [period. stabil: —, period. instabil: - - , quasi-period.: —]

In Ergänzung wird der Fall einer relativ starken Unwucht mit $\gamma_S = 1$ in Abbildung 5.21 betrachtet. Es werden hierbei die Fälle für zwei verschiedene Wellennachgiebigkeiten betrachtet, da diese gemäß Gleichung (5.12) zu unterschiedlichen unwuchtkritischen Drehzahlen $\bar{\omega}_{\text{Laval}}^U$ im Unwuchtfall führen. Wird eine steife Welle ($\Gamma \downarrow$) gewählt, fällt diese größer aus als für eine nachgiebige Welle.

Die starke Unwucht reicht in beiden betrachteten Fällen aus, dem Rotor ein durchweg stabiles periodisches Verhalten aufzuzwingen. Es tritt kein durch zusätzliche Selbsterregung verursachtes quasi-periodisches Verhalten auf. Die in der Nähe der jeweiligen Eigenkreisfrequenz auftretenden Amplituden sind in diesen Fällen allerdings enorm und stellen im praktischen Fall gerade für den Hochlauf eines solchen Rotors ein immenses Problem dar. Zudem fallen die Amplituden beim stationären Betrieb im überkritischen Bereich ohnehin relativ groß aus.

Obwohl die Selbsterregung durch eine hohe Unwucht unterdrückt werden kann, sollte für praktische Anwendungen eine möglichst geringe Unwucht nach wie vor als erstrebenswert eingestuft werden, wohingegen auch ein möglichst schneller Hochlauf als alternatives Vorgehen verbleibt.

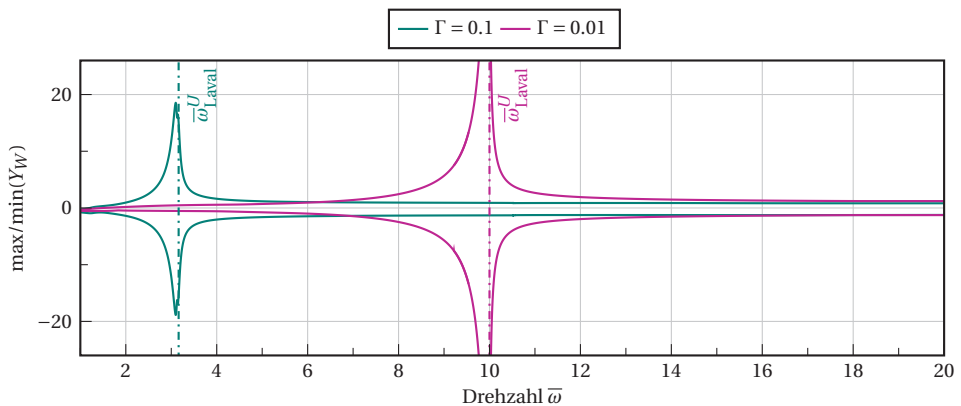
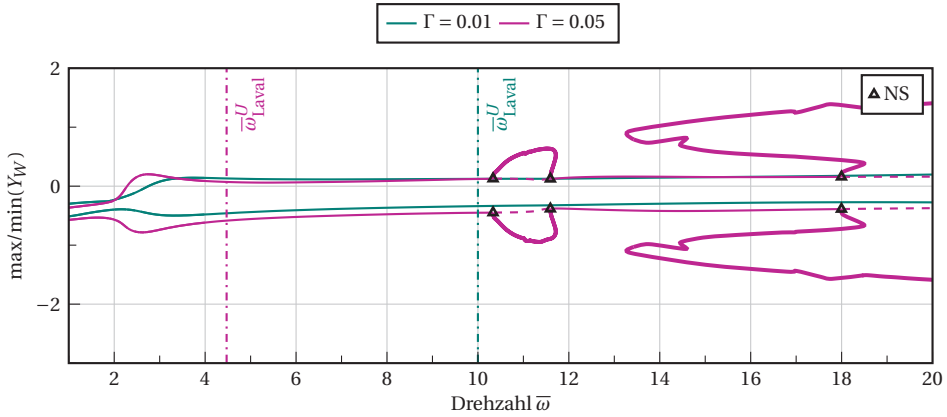
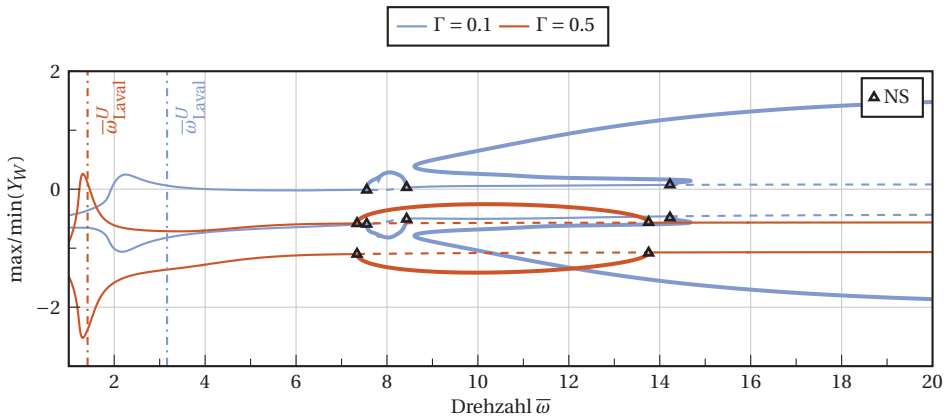


Abbildung 5.21.: Stationäre Lösungen des Rotors in Abhängigkeit der Rotordrehzahl unter Berücksichtigung einer starken Unwucht $\gamma_S = 1$ für eine eher steife ($\Gamma = 0.01$) und eine eher nachgiebige Welle ($\Gamma = 0.1$) mit Standardparametersatz.
[period. stabil: —]

Einflüsse der Wellennachgiebigkeit. Für den Fall einer moderaten Unwucht mit weiterhin auftretender Selbsterregung werden abschließend die Auswirkungen der Wellennachgiebigkeit untersucht. Wie sich bereits in Abbildung 5.21 andeutet, hat diese einen direkten Einfluss auf die unwuchtkritischen Drehzahlen im periodischen Lösungsbereich. Zur besseren Übersicht sind die zu verschiedenen Nachgiebigkeiten gehörenden Verläufe in Abbildung 5.22 in zwei Diagramme unterteilt. Die besten Ergebnisse hinsichtlich der Auslenkung im quasi-periodischen Bereich werden dabei mit der nachgiebigsten ($\Gamma = 0.5$) und der steifsten Welle ($\Gamma = 0.01$) erreicht, wobei für letztere sogar eine vollständige Unterdrückung der Selbsterregung festzustellen ist.



(a) Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung für steifere Wellen



(b) Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung für nachgiebigere Wellen

Abbildung 5.22.: Stationäre Lösungen des Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl unter Berücksichtigung einer statischen Unwucht $\gamma_S = 0.25$ für verschiedene Wellennachgiebigkeiten Γ mit Standardparametersatz.

[period. stabil: —, period. instabil: - - , quasi-period.: —]

Der Fall $\Gamma = 0.05$ liefert hingegen lediglich einen verkürzten Drehzahlbereich mit zu beobachtender Selbsterregung, was im Kontext zu den Ergebnissen im unwuchtfreien Fall steht (vgl. Abbildung 5.9). Zeitgleich werden aber hohe Auslenkungen beim Durchgang der abgeschätzten Eigenkreisfrequenz bei $\bar{\omega} \approx 1$ festgestellt.

Die Ergebnisse zu den mittelsteifen Wellen $\Gamma = 0.05$ und $\Gamma = 0.1$ zeigen qualitativ ähnliches Verhalten, wobei die NS-Bifurkation für $\Gamma = 0.05$ eher in den höheren Drehzahlbereichen liegt. In beiden Fällen findet sich dennoch ein relativ ausgedehnter Bereich mit koexistierenden periodischen und quasi-periodischen Lösungen, sodass bei gleichbleibender Drehzahl auch hier ein durch eine entsprechende Störung verursachter Sprung auf einen

benachbarten Lösungsweig führen kann. Dies kann unter Umständen zu einer dreifach so großen Auslenkung als im periodischen Fall führen.

Empfehlung hinsichtlich der Auslegung gegen Unwucht. Im Rahmen der präsentierten Untersuchungsergebnisse zur Unwuchterregung zeigt sich der Einfluss des ovalen Lagerprofils vorwiegend im Bereich der einsetzenden Selbsterregung, deren Auswirkung hierdurch stark beeinflusst werden können. So besteht die Möglichkeit eine Reduktion der auftretenden Schwingungen zu erzielen. Es zeigt sich weiterhin, dass eine größere Unwucht die einsetzende Selbsterregung in höhere Drehzahlbereiche verschiebt, was allerdings auf Kosten der Auslenkungen beim Durchgang der kritischen Eigenkreisfrequenz des Rotors als auch des stationären Betriebs im überkritischen Bereich geschieht. Eine solche Maßnahme zur Reduktion der durch Selbsterregung hervorgerufenen Schwingungen ist daher nicht zu empfehlen.

Kann hingegen eine möglichst geringe Unwucht realisiert werden, so zeigt sich für hohe Wellensteifigkeiten ein äußerst vorteilhaftes Verhalten mit durchweg stabilen periodischen Lösungen niedriger Auslenkung.

Unabhängig von dem Einfluss einzelner Parameter offenbaren sich bei der systematischen Untersuchung des Systems Drehzahlbereiche mit koexistierenden periodischen und quasi-periodischen Lösungen, die bei praktischer Auslegung mit in Betracht gezogen werden sollten.

6. Einfluss einer harmonisch variierten Lagergeometrie

Die im vorangegangenen Kapitel präsentierten Ergebnisse zeigen den positiven Einfluss einer nicht-zylindrischen Lagergeometrie hinsichtlich der Unterdrückung selbsterregter Schwingungen sowie der Reduktion auftretender Schwingungen im Unwuchtfall. Es stellt sich die Frage, inwieweit eine aktiv gesteuerte Veränderung der Lagergeometrie während des Betriebs darüber hinaus von Vorteil sein kann.

Zahlreiche Arbeiten befassen sich mit der Interaktion verschiedenster Anregungsmechanismen und deren Auswirkung auf das Verhalten dynamischer Systeme, u. a. in [86, 87]. Der sich daraus ergebende Gedanke, unerwünschte Schwingungen durch gezielte Ausnutzung der Wechselwirkungen einzelner Anregungsmechanismen zu reduzieren oder gar völlig zu unterdrücken, scheint daher nur naheliegend. In der Literatur finden sich basierend auf zahlreichen Modellproblemen hierzu Untersuchungen von DOHNAL ET AL. [19, 22, 92] und PFAU [62], die maßgeblich durch die Arbeiten von TONDL (z. B. [89]) geprägt sind und den Begriff der sog. Parameter-Antiresonanz etablieren. Dieser beschreibt für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden einen auf Parametererregung beruhenden Effekt, der im Gegensatz zur klassischen Parameterresonanz (vgl. [58]) keine destabilisierende, sondern eine stabilisierende Wirkung auf Lösungen des dynamischen Systems hat. Die hierzu vorliegenden Arbeiten nähern sich dem besagten Problem vorwiegend über entsprechende Mittelungsverfahren mit der dafür typischen Annahme eines kleinen Parameters. Als Resultat ergeben sich die Parameter-Antiresonanzen in Frequenzbereichen, die einer Kombination einzelner Eigenkreisfrequenzen des linearisierten Systems entsprechen. Für weitere Einzelheiten wird auf die genannte Literatur verwiesen. Alternative Methodiken zur Abschätzung der durch Parametererregung beeinflussten Stabilität von Lösungen finden sich in den Arbeiten [48, 81, 82, 84, 101], die vorwiegend auf Näherungen über das Verfahren der harmonischen Balance zurückgreifen.

Alle genannten Quellen zeigen die Möglichkeit auf, durch Parametererregung die Stabilität einzelner Lösungen gezielt zu beeinflussen. Die sich daraus ergebenden Möglichkeiten im Anwendungsgebiet hydrodynamisch gelagerter Rotorsysteme sind die logische Konsequenz. So befassen sich einige Arbeiten mit der gezielten Einbringung einer solchen Erregung durch Variation der Lagergeometrie während des Betriebs (siehe [16, 61, 63]). Ein solches Vorgehen wird auch für das in dieser Arbeit diskutierte Gleitlager angestrebt und erscheint aufgrund der positiven Resultate aus der genannten Literatur als durchaus vielversprechend.

Zur Veranschaulichung der verwendeten Methodik wird in Abschnitt 6.1 ein vereinfachtes Beispiel zweier gekoppelter Oszillatoren betrachtet. Ziel ist hierbei die Stabilisierung einer Ruhelage bzw. einer periodischen Lösung mit möglichst geringer Amplitude durch

Aufbringen einer entsprechenden Parametererregung. In Abhängigkeit eines Detuning-Parameters und der Frequenz der Parametererregung können so Bereiche mit stabilen und instabilen Lösungen identifiziert werden. Wird die Möglichkeit koexistierender Grenzzyklen (oder auch quasi-periodischer Lösungen) in Betracht gezogen, so wie es im Fall des hydrodynamisch gelagerten Rotors beobachtet werden kann, muss die Untersuchungsmethode weiterhin auch das Verzweigungsverhalten der Lösungen in den angrenzenden instabilen Bereichen mit in Betracht ziehen. Existiert bei einer durch Parametererregung stabilisierten Ruhelage beispielsweise ein benachbarter Lösungsast mit verhältnismäßig großen Systemauslenkungen, so ist dieser Zustand nur bedingt von Vorteil.

Nach Auswertung des Beispielsystems kommt das vorgestellte Verfahren im Anschluss in Abschnitt 6.3 für das eigentliche Rotorsystem zum Einsatz, wobei die Ergebnisse aus Kapitel 5 als Ausgangspunkt für zu betrachtende Parameterbereiche herangezogen werden. Ziel der Untersuchungen ist, wie auch im Falle des Beispielsystems, die Charakterisierung eines möglichen positiven Einflusses einer harmonischen Parametererregung, welche durch eine Variation der Lagergeometrie in das System eingebracht wird.

6.1. Einführendes Beispiel zur Stabilisierung mittels Parametererregung

Es wird ein relativ simples System mit lediglich zwei Freiheitsgraden als Beispiel herangezogen. Dieses besteht aus einem ersten Oszillator, welcher als van-der-Pol Oszillator ausgelegt ist und auf Lageebene mit einem gedämpften, linearen Oszillator gekoppelt ist. Basierend auf den nachfolgend aufgeführten Bewegungsgleichungen wird das System u. a. mit Hilfe des in Abschnitt 2.3.3 präsentierten Verfahrens zur quasi-periodischen Näherung untersucht.

6.1.1. Bewegungsgleichungen und Spektralsystem

Die dem Beispielsystem zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen in dimensionsloser, autonomer Form bzgl. der dimensionslosen Zeit τ sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x + k(1 + \delta \cos(\theta_1))(x - y) &= f, \\y'' + D y' + (1 + d)y + k(1 + \delta \cos(\theta_1))(y - x) &= 0, \\ \theta_1' &= \eta.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Die Autonomisierung erfolgt durch Einführung der Toruskoordinate $\theta_1 \in \mathbb{T}^1$, welcher der Anregungsphase der Parametererregung entspricht. Der Parameter ε beschreibt die Stärke der Nichtlinearität des van-der-Pol Oszillators, D charakterisiert die Dämpfung des linearen Oszillators, k die mittlere Kopplungsstärke auf Lageebene und d den für die nachfolgenden Untersuchungen relevanten Detuning-Parameter. Die Parametererregung wird

durch den harmonischen Term mit dimensionsloser Kreisfrequenz η und Amplitude δ realisiert und kann mit einer harmonisch variierten Steifigkeit assoziiert werden. Zusätzlich wird durch den Term f eine Inhomogenität ins System eingebracht.

Je nach Parameterwahl können Ruhelagen, periodische aber auch quasi-periodische Lösungen auftreten. Im homogenen Fall mit $f = 0$ existiert die triviale Ruhelage, die es zu stabilisieren gilt, wohingegen bei vorhandener Inhomogenität mit $f \neq 0$ im Falle einer nicht verschwindenden Parametererregung keine Ruhelage mehr vorliegt. Hier sind periodische Lösungen zu erwarten, die beim Übergang in den instabilen Bereich zu quasi-periodischem Verhalten führen können.

Herleitung des Spektralsystems für quasi-periodische Näherung. Zur gezielten Verfolgung möglicher periodischer und quasi-periodischer Lösungen wird das zugehörige Spektralsystem aufgestellt. Unter der Annahme von lediglich $p = 2$ Basisfrequenzen wird zusätzlich zur Phase der Parametererregung θ_1 gemäß Abschnitt 2.3.1 eine zweite Toruskoordinate $\theta_2 \in \mathbb{T}^1$ definiert, für welche

$$\theta_2' = \nu \tag{6.2}$$

gelten soll. Die Frequenz η der Parametererregung wird als bekannt vorausgesetzt, wohingegen ν im Zuge der Untersuchungen zu bestimmen ist. Mit Einführung einer entsprechenden Torusfunktion $\underline{u}(\theta_1, \theta_2)$ lässt sich, wie in den Abschnitten 2.3.4 und 5.3.1 dargelegt, aus den Bewegungsgleichungen (6.1) die Invarianzgleichung

$$\eta \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_1} + \nu \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_2} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\varepsilon(u_1^2 - 1)u_2 - u_1 - k(1 + \delta \cos(\theta_1))(u_1 - u_3) + f \\ u_4 \\ -Du_4 - (1 + d)u_3 - k(1 + \delta \cos(\theta_1))(u_3 - u_1) \end{pmatrix}, \quad \underline{u}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \tag{6.3}$$

zur Beschreibung der invarianten Torusmannigfaltigkeit ableiten. Diese Invarianzgleichung wird in ein zugehöriges Spektralsystem überführt. Es wird hierzu ein Ansatz dritter Ordnung in θ_1 mit entsprechenden harmonischen Ansatzfunktionen gewählt:

$$\underline{u} \approx \underline{u}^{(3)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^3 \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1). \tag{6.4}$$

Die anschließenden Projektionen im Sinne Galerkins führen auf das zugehörige Spektralsystem (vgl. Vorgehen in den Gleichungen (2.46) bis (2.54)). Auf eine separate Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet.

6.1.2. Simulationsergebnisse für das homogene System

Die Ergebnisse für das homogene System resultieren aus einer systematischen Verfolgung einzelner Lösungen sowohl des Originalsystems als auch des Spektralsystems, wobei die Stabilität der spektralen Lösungen auf Basis des Hill-Verfahrens bestimmt wird.

Verhalten des Systems ohne Parametererregung. Die ohne Parametererregung vorliegende triviale Ruhelage wird in Abhängigkeit des eingeführten Detuning-Parameters d untersucht. Für diesen Fall lässt sich die dritte Differentialgleichung (für θ_1) des Originalsystems (6.1) streichen, sodass sich Ruhelagen und ggf. Grenzyklen als mögliche Lösungstypen erwarten lassen.

Durch eine entsprechende Verfolgung sowie Bifurkationsanalyse ergeben sich hierfür die in Abbildung 6.1 dargestellten stationären Lösungen des homogenen Systems ohne Parametererregung.

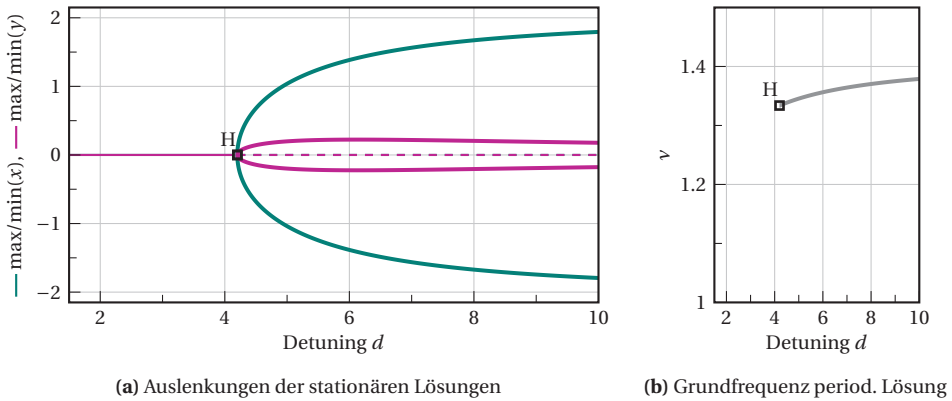


Abbildung 6.1.: Stationäre Lösungen (Ruhelagen und periodische Lösungen) des homogenen Beispielsystems ($f = 0$) ohne Parametererregung ($\delta = 0$) für $\varepsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —]

Die triviale Ruhelage verliert hierbei ab einem kritischen Wert $d_{\text{krit}} \approx 4.2$ des Detuning-Parameters in Folge einer superkritischen Hopf-Bifurkation (H) ihre Stabilität. Der Einfluss des Selbsterregungsmechanismus überwiegt und es kommt zur Ausprägung stabiler Grenzyklen mit einer Grundfrequenz im Bereich $\nu \in [1.3, 1.4]$. Die zu x zugehörigen Amplituden fallen hierbei wesentlich größer aus als die für y .

Die im Sinne der Stabilitätsanalyse berechneten Eigenwerte der trivialen Ruhelage sind in Form ihrer Real- und Imaginärteile in Abbildung 6.2 dargestellt. Es handelt sich hierbei um zwei komplex konjugierte Eigenwertpaare $(\lambda_1, \lambda_3 = \bar{\lambda}_1)$ und $(\lambda_2, \lambda_4 = \bar{\lambda}_2)$, deren betragsmäßig ausgewertete Imaginärteile mit ω_1 und ω_2 bezeichnet werden. Bei ω_1 handelt es sich dabei per Definition um den zum „instabil“ werdenden Eigenwertpaar zugehörigen Imaginärteil.

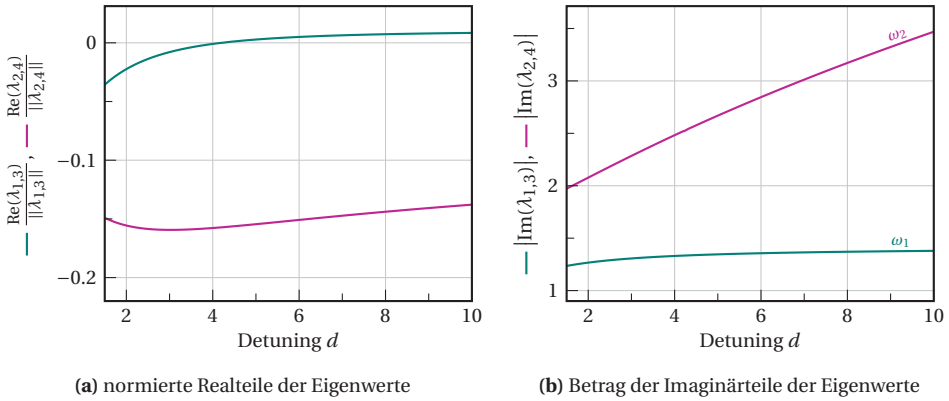


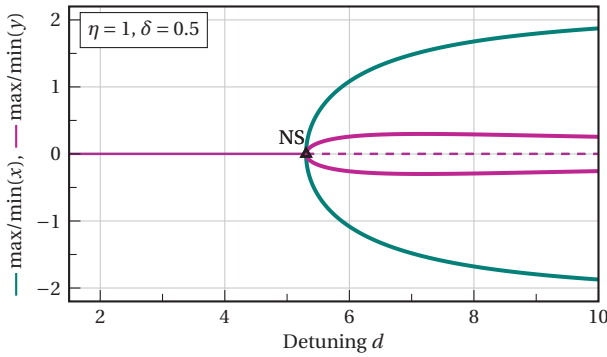
Abbildung 6.2.: Komplex konjugierte Eigenwertpaare $(\lambda_3 = \bar{\lambda}_1, \lambda_4 = \bar{\lambda}_2)$ der verfolgten trivialen Ruhelage des homogenen Beispielsystems ($f = 0$) ohne Parametererregung ($\delta = 0$) für $\varepsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.

Lösungsverfolgung im Falle von Parametererregung. In ähnlicher Weise werden nun die Lösungen des Spektralsystems in Abhängigkeit des Detuning-Parameters d für verschiedene Erregerfrequenzen η bei nicht-verschwindendem δ verfolgt. In diesem Kontext ist anzumerken, dass es sich bei der trivialen Lösung des Systems aufgrund der autonomen Ausgangsform (6.1) ebenso um eine periodische Lösung handelt, die sich aber durch eine verschwindende Amplitude auszeichnet.

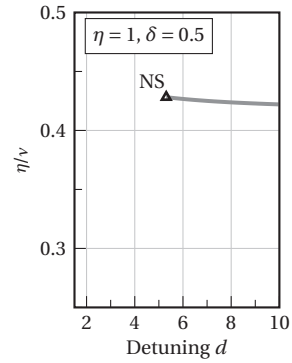
In Abbildung 6.3 sind die Ergebnisse einer solchen Verfolgung exemplarisch für die Erregerfrequenzen $\eta = 1$ und $\eta = 2$ dargestellt. Die Ruhelage wird in beiden Fällen ab einem bestimmten Wert des Detuning-Parameters über eine Neimark-Sacker-Bifurkation (NS) instabil und es kommt zur Ausprägung quasi-periodischer Lösungen, die mit Hilfe des verwendeten Spektralsystems verfolgt werden können. Wie sich in den beiden Fällen zeigt, hat die Parametererregung durchaus einen Einfluss auf die Stabilität der trivialen Ruhelage. So liegt im Fall $\eta = 1$ der kritische Wert des Detuning-Parameters bei $d_{\text{krit}}(\eta = 1) \approx 5.3$ und im Fall $\eta = 2$ lässt sich sogar eine vollständige Unterdrückung der selbsterregten Schwingungen ab $d \approx 8$ erkennen.

Es zeigt sich weiterhin kein durch Bifurkationsszenarien verursachter überlappender Bereich mit koexistierenden Lösungen, was auf die verhältnismäßig einfache Nichtlinearität des Beispielsystems zurückzuführen ist. Somit ist die stabile Ruhelage im betrachteten Fall mit Parametererregung als nicht kritisch zu beurteilen, da kein Abrutschen auf einen benachbarten Lösungsweig mit größeren Auslenkungen möglich ist.

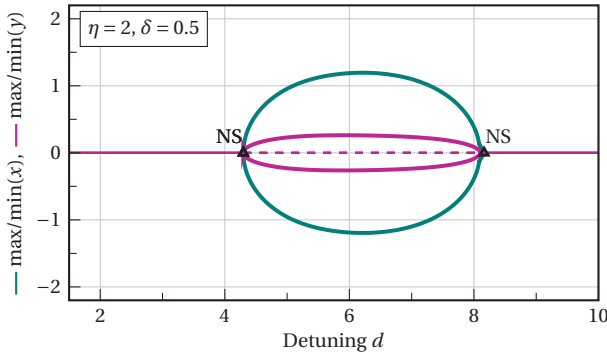
Erwartungsgemäß hat die Parametererregung einen großen Einfluss auf die Stabilität der betrachteten Lösung sowie auf das auftretende quasi-periodische Verhalten.



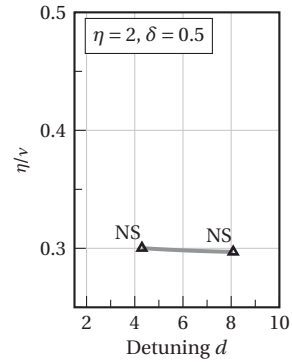
(a) Auslenkungen der stationären Lösungen für $\eta = 1$



(b) Frequenzverhältnis für $\eta = 1$



(c) Auslenkungen der stationären Lösungen für $\eta = 2$



(d) Frequenzverhältnis für $\eta = 2$

Abbildung 6.3.: Stationäre Lösungen (periodische und quasi-periodische Lösungen) des homogenen Beispiel-systems ($f = 0$) mit Parametererregung $\delta = 0.5$ für die Erregerfrequenzen $\eta = 1$ und $\eta = 2$ für $\varepsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.
 [period. stabil: —, period. instabil: - - , quasi-period.: —]

Stabilisierung der Ruhelage durch Parametererregung. Auf Basis der gemachten Beobachtungen wird der stabilisierende Effekt der Parametererregung untersucht, wobei gerade die Bereiche $d > 4.2$, für welche im Fall ohne Parametererregung verhältnismäßig große Schwingungsamplituden zu beobachten sind, von Interesse sind. Hierzu werden die auftretenden NS-Bifurkationen, welche simplen Hopf-Bifurkationen des Spektralsystems entsprechen, in Abhängigkeit des Detuning-Parameters d und der Erregerfrequenz η verfolgt. Als Resultat ergeben sich die in Abbildung 6.4 dargestellten Stabilitätskarten. Zusätzlich zu den Stabilitätsgrenzen der trivialen Lösung sind die im Zuge der Lösungsverfolgung des Systems ohne Parametererregung ermittelten Imaginärteile der Eigenwerte aus Abbildung 6.2 mit in die Diagramme integriert.

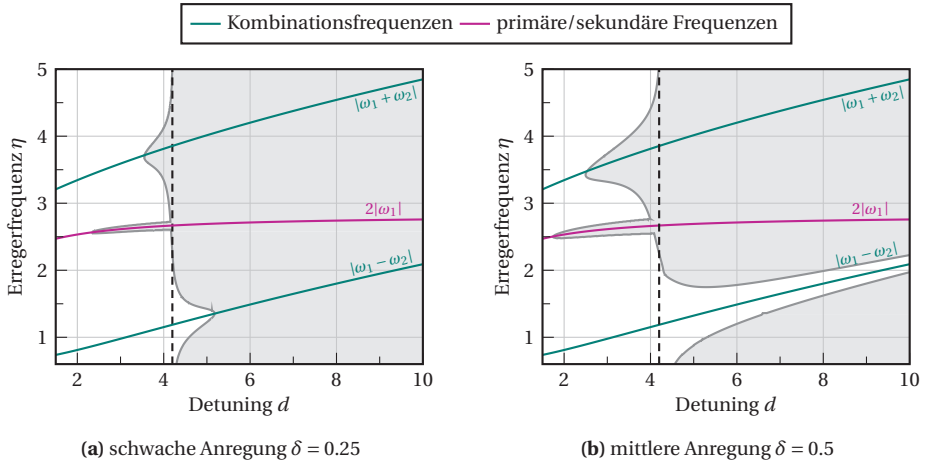


Abbildung 6.4.: Stabilitätskarten der trivialen Ruhelage des Beispielsystems mit mittlerer Nichtlinearität $\varepsilon = 0.025$ für $k = 1$, $D = 0.5$ und $f = 0$.
 [instabile period. Lösung: , Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung ($\delta = 0$): - - -]

Es handelt sich hierbei allerdings um Vielfache dieser Frequenzen (primäre Frequenzen) oder um Linearkombinationen (Kombinationsfrequenzen). Wie bereits erwähnt, beschreibt ω_1 dabei die zu dem „instabilen“ Eigenwertpaar gehörigen Imaginärteile. Im Sinne der in den Arbeiten [22, 89] behandelten Theorie ist der Effekt der Parameter-Antiresonanz gerade für den Fall $\delta = 0.5$ klar zu erkennen. Die Anregung des Systems in einer Umgebung der Kombinationsfrequenz vom Differenzentyp $|\omega_1 - \omega_2|$ zeigt ein erweitertes Stabilitätsgebiet der Ruhelage bis über das doppelte der eigentlichen Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung (---) hinaus. Diese Beobachtung steht im Kontext der zuvor genannten Arbeiten, die für Systeme mit ähnlicher Grundstruktur über eine linearisierte und gemittelte Betrachtung die gleichen Tendenzen beobachten. Eine detaillierte Übersicht für verschiedene lineare Systeme mit periodisch schwankenden Koeffizienten findet sich in der Arbeit von DOHNAL [20]. Je nach Struktur des linearen Systems finden sich hier unterschiedliche Frequenzkombinationen, mit denen eine Stabilisierung der trivialen Lösung durch Parametererregung erzielt werden kann. Neben dem stabilisierenden Effekt der Kombinationsfrequenz ist in Abbildung 6.2 weiterhin zu erkennen, dass eine Anregung mit der doppelten Frequenz $2|\omega_1|$ oder der additiven Kombinationsfrequenz $|\omega_1 + \omega_2|$ zu einer frühzeitigen Destabilisierung führt. Dieser durch Parameter-Resonanzen verursachte Effekt ist in zahlreichen Arbeiten, u. a. in [53], bereits untersucht worden und lässt sich ebenso beim einfachsten Fall der Matthieu'schen Differentialgleichung beobachten. Speziell zur Anregung mit $2|\omega_1|$ sei angemerkt, dass es sich hierbei um keine NS-Bifurkationen an der Stabilitätsgrenze handelt, sondern um Periodenverdopplungsbifurkationen, in Folge derer periodische Lösung mit doppelter Periode entstehen.

6.1.3. Simulationsergebnisse für das inhomogene System

Das homogene System ist leider nur ein Sonderfall, der sich auch in den meisten physikalisch motivierten Modellen nur selten zeigt. Liegt in den Systemgleichungen (6.1) eine Inhomogenität vor, so existiert für den Fall einer zusätzlichen Parametererregung normalerweise keine Ruhelage mehr.

Das Aufbringen einer parametrischen Erregung zur Stabilisierung eines solchen Systems stellt damit selbst eine Anregungsquelle dar, die zu einem schwingenden Verhalten des Systems führt. Es ist somit nicht mehr möglich, mittels Parametererregung eine Ruhelage über den kritischen Wert eines Detuning-Parameters hinaus zu stabilisieren, da diese in diesem Fall schlichtweg nicht mehr existiert.

Das durch die Erregung zu erreichende Ziel muss in diesem Kontext umformuliert werden. Es soll eine Parametererregung in das System eingebracht werden, welche für den vormals instabilen Bereich der Ruhelage zu einer Reduktion der auftretenden Schwingungsamplituden führt.

Verhalten des Systems ohne Parametererregung. Wie im homogenen Fall wird auch für das inhomogene System mit einer konstanten Inhomogenität $f = 0.5$ eine Lösungsverfolgung in Abhängigkeit des Detuning-Parameters d vorgenommen. Bei den detektierten Ruhelagen handelt es sich entsprechend der in Abbildung 6.5 gegebenen Verläufe nicht länger um die triviale Lösung. Nichtsdestotrotz bleibt das qualitative Verhalten weitestgehend identisch: Mit steigendem d kommt es ab einem kritischen Wert $d_{krit} \approx 4.4$ über eine Hopf-Bifurkation zur Destabilisierung der Ruhelage und zur Ausprägung entsprechender Grenzzyklen.

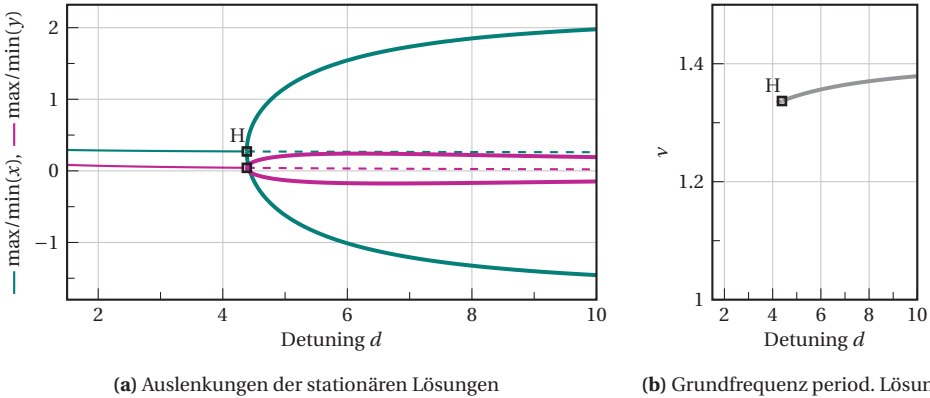


Abbildung 6.5.: Stationäre Lösungen (Ruhelagen und periodische Lösungen) des inhomogenen Beispielsystems ($f = 0.5$) ohne Parametererregung ($\delta = 0$) für $\varepsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —]

Ebenso zeigen auch die zur Ruhelage zugehörigen Eigenwertverläufe in Abbildung 6.6 lediglich geringe quantitative Unterschiede im Vergleich zu den Ergebnissen aus Abbildung 6.2.

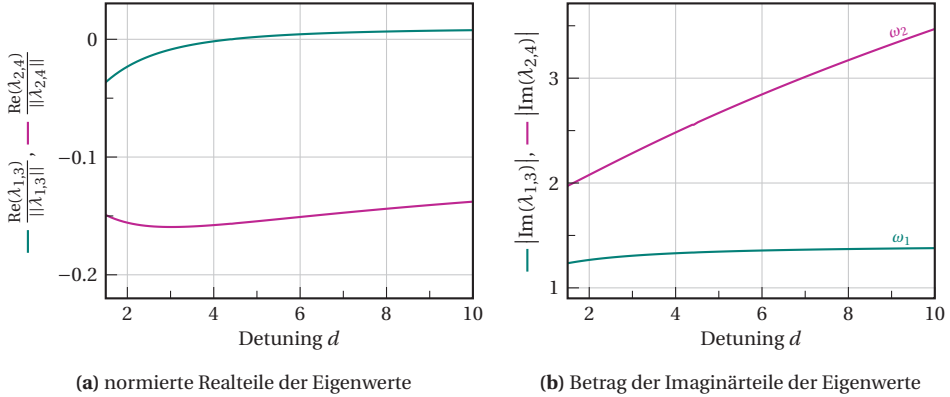
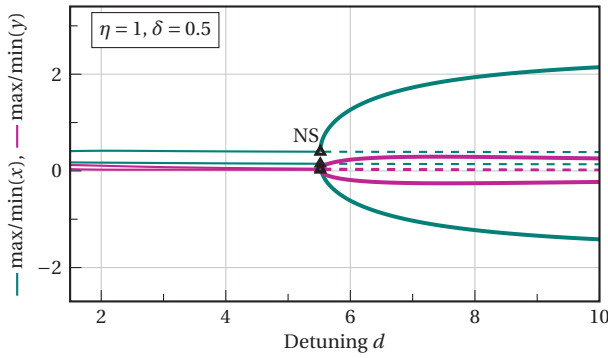


Abbildung 6.6.: Komplex konjugierte Eigenwertpaare ($\lambda_3 = \bar{\lambda}_1, \lambda_4 = \bar{\lambda}_2$) der verfolgten Ruhelage des inhomogenen Beispielsystems ($f = 0.5$) ohne Parametererregung ($\delta = 0$) für $\varepsilon = 0.025, k = 1, D = 0.5$.

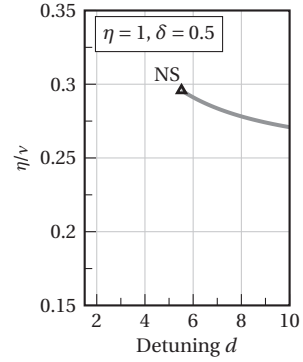
Lösungsverfolgung im Falle von Parametererregung. Wird nun das inhomogene System mit einsetzender Parametererregung betrachtet, so lässt sich das in Abbildung 6.7 gegebene stationäre Verhalten beobachten. Wie erwähnt, existiert für $\delta \neq 0$ keine Ruhelage mehr, sodass periodische Lösungen mit nicht-verschwindender Amplitude sowohl in x als auch y zu beobachten sind. Je nach Erregerfrequenz können diese Amplituden (der periodischen Lösungen) unterschiedlich stark ausfallen. So zeigen sich für $\eta = 1$ größere Amplituden für x , wohingegen für $\eta = 2$ das Gegenteil der Fall ist.

Mit steigendem Detuning-Parameter kann nun qualitativ ähnliches Verhalten zum homogenen System beobachtet werden. Die periodische Lösung verliert für beide Fälle über eine NS-Bifurkation ihre Stabilität und es kommt zur Ausprägung quasi-periodischer Lösungen. Die vergleichsweise kleinen Amplituden der periodischen Lösung in den stabilen Bereichen scheinen vertretbar zu sein. Angesichts des qualitativ ähnlichen Verhaltens zum homogenen System stellt sich die Frage, inwieweit sich das homogene und inhomogene System nun prinzipiell unterscheiden.

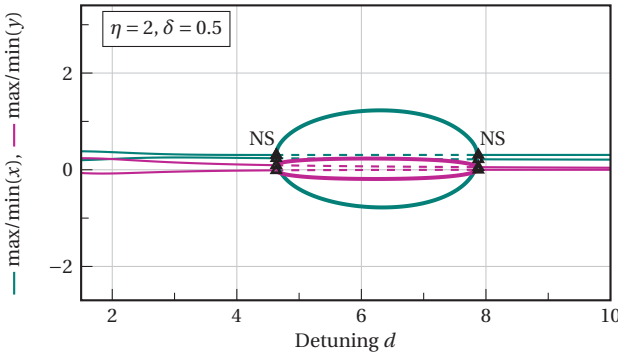
Aufschluss hierüber liefert der in Abbildung 6.7e gegebene Lösungsverlauf für eine Erregung mit $\eta = 1.35$, für die sich eine über den gesamten betrachteten Bereich des Detuning-Parameters stabile periodische Lösung zeigt. Es werden hier Amplituden erreicht, welche die des Systems ohne Parametererregung aus Abbildung 6.5 teilweise um bis zu 50% übersteigen. Das Kriterium „Stabilität“ darf somit nicht der einzige Schwerpunkt der Untersuchungen sein, da dieses keine Garantie für ein vergleichsweise besseres Systemverhalten darstellt. Zusätzlich zur Stabilität sind demnach auch die Amplituden zu überprüfen.



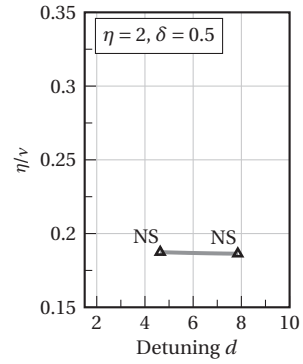
(a) Auslenkungen der stationären Lösungen für $\eta = 1$



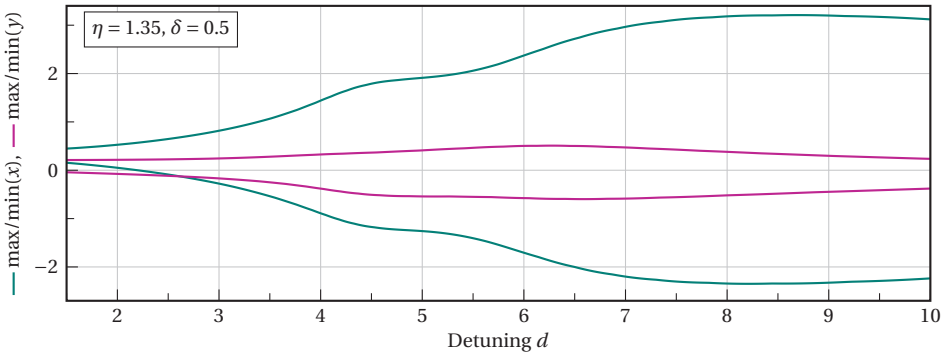
(b) Frequenzverhältnis für $\eta = 1$



(c) Auslenkungen der stationären Lösungen für $\eta = 2$



(d) Frequenzverhältnis für $\eta = 2$



(e) Auslenkungen der stationären Lösungen für $\eta = 1.35$

Abbildung 6.7.: Stationäre Lösungen (periodische und quasi-periodische Lösungen) des inhomogenen Beispiel-systems ($f = 0.5$) mit Parametererregung $\delta = 0.5$ für die Erregerfrequenzen $\eta = 1$, $\eta = 2$ und $\eta = 1.35$ für $\epsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.

[period. stabil: —, period. instabil: - -, quasi-period.: —]

Stabilisierung periodischer Lösungen durch Parametererregung. Wird in ähnlicher Weise wie für das homogene System eine Verfolgung der als kritisch zu beurteilenden NS-Bifurkationen durchgeführt (auf Basis einer Verfolgung der Hopf-Bifurkationen im Spektralsystem), so ergeben sich die in Abbildung 6.8 aufgeführten Stabilitätskarten des inhomogenen Systems.

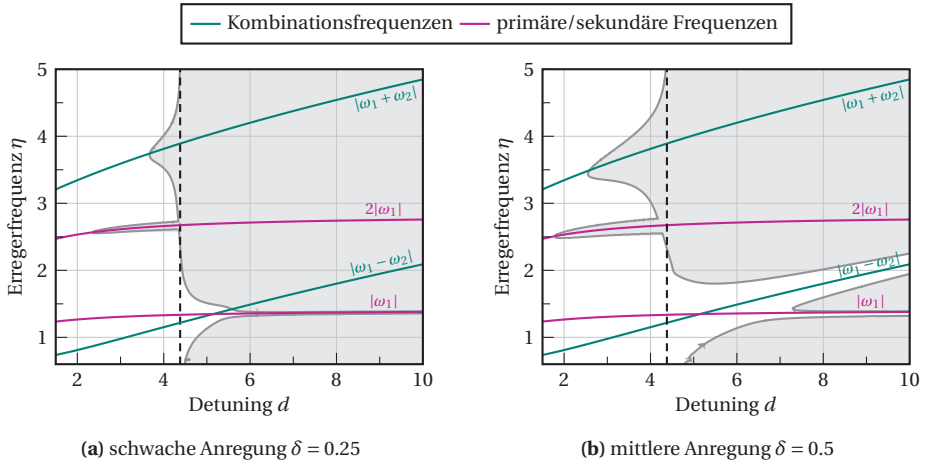


Abbildung 6.8.: Stabilitätskarten periodischer Lösungen des Beispielsystems mit mittlerer Nichtlinearität $\varepsilon = 0.05$ für $k = 1$, $D = 0.5$, $\varepsilon = 0.025$ für $f = 0.5$.
 [instabile period. Lösung: , Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung ($\delta = 0$): - - -]

Es zeigt sich weitestgehend ähnliches Verhalten zum homogenen System mit stabilisierendem und destabilisierendem Einfluss der Parametererregung. Die für den Fall der Ruhelage (bei $\delta = 0$) ermittelten Eigenkreisfrequenzen sind demnach auch hier repräsentativ für eine mögliche Beeinflussung der Stabilität der periodischen Lösung im Fall $\delta \neq 0$.

Als wesentlicher Unterschied ergibt sich allerdings das Verhalten für eine Erregung um die primäre Frequenz $|\omega_1|$, für die, im Gegensatz zum homogenen System, ein Bereich mit stabiler periodischer Lösung existiert, wie sich ebenso in Abbildung 6.7e zeigt.

Schwingungsamplituden im periodischen Fall mit Parametererregung. Ausgehend von den Erkenntnissen der vorherigen Untersuchungen genügt es nicht, lediglich die Stabilität der entsprechenden Lösung zu überprüfen, sondern es müssen auch die zugehörigen Amplituden betrachtet werden. Hierzu wird die in Abbildung 6.9 gegebene Darstellung über einen farblich codierten Höhenausdruck verwendet. Die Diagramme zeigen hierbei in Form der farblichen Hinterlegung die Amplituden der verfolgten periodischen Lösung, sowohl im stabilen als auch im instabilen Bereich. Die Stabilitätskarten aus Abbildung 6.8 sind ebenfalls hinterlegt und dienen der Unterscheidung der Bereiche mit stabiler und instabiler periodischer Lösung.

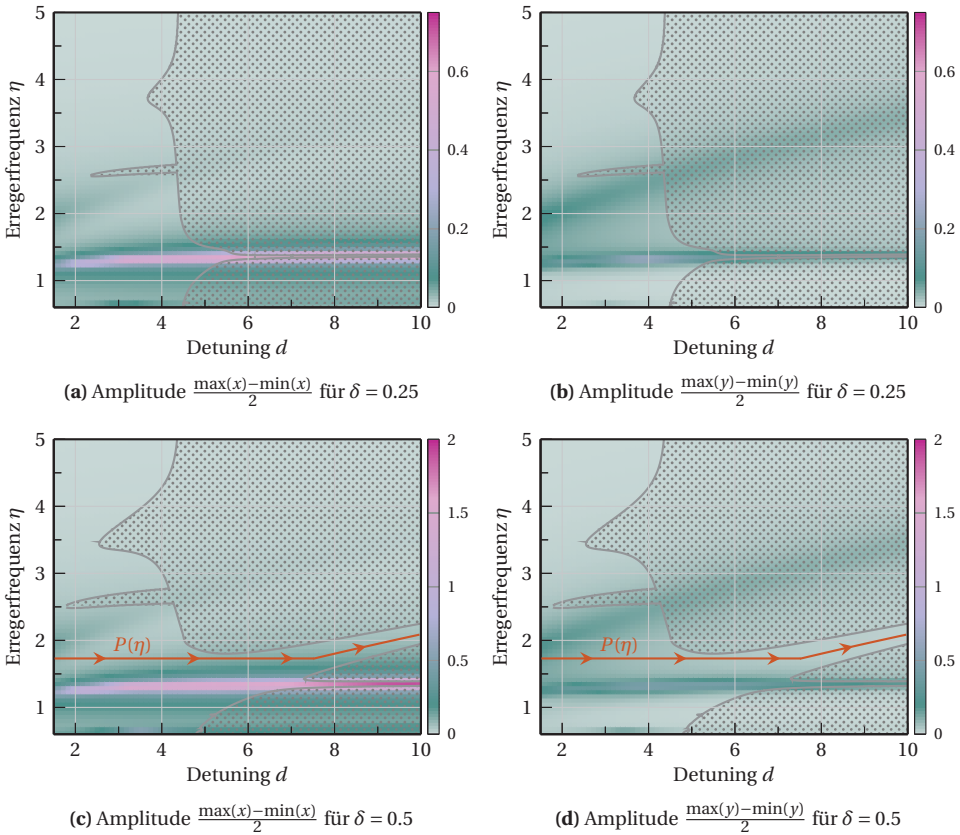


Abbildung 6.9.: Amplituden der periodischen Lösungen (stabil und instabil) des inhomogenen Beispielsystems ($f = 0.5$) mit schwacher und mittlerer Parametererregung für $\varepsilon = 0.025$, $k = 1$, $D = 0.5$.
 [instabile Bereiche:]

Wie im vorherigen Lösungsverlauf für $\eta = 1.35$ zu beobachten ist, ergeben sich vergleichsweise große Auslenkungen im stabilen Bereich für eine Anregung mit der primären Frequenz $|\omega_1|$. Es handelt sich hierbei um eine primäre Parameter-Resonanz, die dem System ein periodisches Verhalten aufzwingt, das allerdings mit verhältnismäßig großen Amplituden verbunden ist. Der periodische Charakter der Lösung bleibt zwar erhalten und überdies auch stabil, allerdings ist dieser Bereich im Sinne eines optimalen Betriebs mit möglichst geringen Schwingungsamplituden nicht geeignet.

Der Bereich um die Kombinationsfrequenz zeigt dagegen das aus den Lösungsverfolgungen zu erwartende Verhalten mit vergleichsweise niedrigen Amplituden bei einem durch den Effekt der Parameter-Antiresonanz ausgedehnten stabilen Bereich der periodischen Lösung. So ergibt sich beispielsweise für den Fall $d = 10$ und $\eta = 2$ bei $\delta = 0.5$ eine stabile periodische Lösung mit einer Amplitude ≈ 0.1 , wohingegen das System ohne Parameter-

erregung eine Amplitude ≈ 1.75 aufweist (vgl. Abbildung 6.5). Es zeigt sich weiterhin, dass gerade im Bereich um $|\omega_1|$ generell große Amplituden auftreten, die teilweise in Gebiete der Kombinationsfrequenz $|\omega_1 - \omega_2|$ hineinragen. Wird die Erregerfrequenz beispielsweise stets auf $\eta = |\omega_1 - \omega_2|$ gehalten, so zeigt das System zwangsläufig im Bereich $d \in [3, 5]$ verhältnismäßig große Amplituden.

Die Erkenntnisse aus diesen Ergebnissen werden anhand eines möglichen Hochlaufszenarios veranschaulicht. Hierbei soll d als Hochlaufparameter interpretiert werden, der beispielsweise bis zu einem stationären Wert $d = 10$ erhöht werden soll. Zur Erhaltung möglichst geringer Systemamplituden ist es nun sinnvoll, nicht von Anfang an einen Zusammenhang $\eta = |\omega_1 - \omega_2|$ für die Parametererregung zu wählen, sondern beispielsweise dem in Abbildungen 6.9c und 6.9d exemplarisch gegebenen Pfad $P(\eta)$ zu folgen.

Eine separate Darstellung der Auslenkungen der quasi-periodischen Lösungen ist nicht nötig, da die hier existierenden, attraktiven Lösungen auf einer entsprechende Mannigfaltigkeit liegen, welche die periodische Lösung umhüllt. Dies ist durch die Natur der NS-Bifurkationen bedingt, im Zuge derer die Mannigfaltigkeiten entstehen. Die Auslenkungen des Systems im quasi-periodischen Zustand sind also generell größer als die der umhüllten, instabilen periodischen Lösung.

Die in diesem Abschnitt präsentierte Vorgehensweise zur Untersuchung des gezielten Einbringens einer Parametererregung dient als Grundlage für den nachfolgenden Abschnitt.

6.2. Modellierungsüberblick

Zur gezielten Untersuchung des Rotorsystems mit aktuierten Gleitlagern erfolgt die notwendige Anpassung der Modellgleichungen.

6.2.1. Bewegungsgleichungen

Als Ausgangspunkt dient das bereits aufgestellte System erster Ordnung (5.2) des vorangegangenen Kapitels. Bis auf den Anteil der durch den Fluidruck bestimmten Lagerkräfte bleibt die Form identisch:

$$\underline{z}' = \underline{A}\underline{z} + \underline{f}_p(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \tau) + \underline{f}_0 + \underline{f}_U(\tau). \quad (6.5)$$

In der Spaltenmatrix \underline{f}_p werden dabei lediglich die Lagerkräfte berücksichtigt

$$\underline{f}_p(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \tau) = \left[0, 0, 0, 2 \frac{\sigma}{\kappa\omega} \tilde{f}_{p,x}(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \tau), 0, 0, 0, 2 \frac{\sigma}{\kappa\omega} \tilde{f}_{p,y}(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \tau) \right]^T, \quad (6.6)$$

welche auf den dimensionslosen, mittels des angepassten Trapez-Verfahrens genäherten Ausdrücke $\tilde{f}_{p,x}$ und $\tilde{f}_{p,y}$ gemäß Gleichung (4.27) basieren, die im vorliegenden Fall nicht nur von den Zustandsgrößen \underline{z} sondern auch von δ_P , η_P und der dimensionslosen Zeit

τ abhängen. Diese Abhängigkeiten ergeben sich aus folgendem Ansatz für die Schmier-spalthöhe, welche sich aus Gleichung (3.21) ableitet:

$$H = 1 - X_L \cos(\varphi) - Y_L \sin(\varphi) - \underbrace{U_m (1 + \delta_P \cos(\eta_P \tau))}_{=\dot{U}} \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \begin{cases} (\varphi \sin \varphi + \cos \varphi - \frac{4}{\pi}) & , \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (-\varphi \sin \varphi - \cos \varphi + \pi \sin \varphi + \frac{4}{\pi}) & , \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases} \quad (6.7)$$

Zusätzlich zu der bereits im Vorfeld verwendeten Verschiebung U_m an den beiden Aktor-punkten wird diese nun mit einer harmonischen Variation mit relativer Amplitude δ_P und dimensionsloser Kreisfrequenz η_P beaufschlagt. Diese harmonische Variation repräsen-tiert die Quelle der zu untersuchenden Parametererregung des Rotors.

6.2.2. Beschreibung über Spektralsystem

Wie in den vorherigen Abschnitten wird auch hier eine Näherung über ein Spektralsys-tem gewählt. Da sich diese Methodik jedoch nur auf Systeme mit zwei Basisfrequenzen anwenden lässt, wird an dieser Stelle die statische Unwucht vernachlässigt.

Herleitung des Spektralsystems für den unwuchtfreien, parametererregten Rotor Die Herleitung geschieht analog zu Abschnitt 5.3.1 und wird deshalb nur verkürzt aufgeführt. Durch Einführung der mit der Frequenz der Parametererregung assoziierten Toruskoordi-nate $\theta_1 \in \mathbb{T}^1$ ergibt sich für das unwuchtfreie System die autonome Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{z}' &= \underline{A} \underline{z} + \underline{f}_{\sim p}(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \theta_1) + \underline{f}_{\sim 0}, \\ \theta_1' &= \eta_P \quad \text{mit} \quad (\underline{z}, \theta_1) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{T}^1, \end{aligned} \quad (6.8)$$

die mit der Torusfunktion \underline{u} , welche für eine quasi-periodische Lösung \underline{z}^* dem Zusam-menhang

$$\underline{z}^*(\tau) = \underline{u}(\eta_P, \nu_P \tau)$$

genügt, auf die Invarianzgleichung

$$\eta_P \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_1} + \nu_P \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta_2} = \underbrace{\underline{A} \underline{u} + \underline{f}_{\sim 0}}_{=: \underline{f}_{\sim \text{ana}}} + \underbrace{\underline{f}_{\sim p}(\underline{z}, \delta_P, \eta_P, \theta_1)}_{=: \underline{f}_{\sim \text{FFT}}} \quad (6.9)$$

führt. ν_P ist hierbei die zweite, noch unbekannte Basisfrequenz. Es wird ein Galerkin-Ansatz dritter Ordnung ($N = 3$) gewählt

$$\underline{u} \approx \underline{u}^{(3)} = \underline{c}^{(0)}(\theta_2) + \sum_{k=1}^3 \underline{c}^{(k)}(\theta_2) \cos(k\theta_1) + \underline{s}^{(k)}(\theta_2) \sin(k\theta_1), \quad (6.10)$$

der nach den entsprechenden Projektionen auf das Spektralsystem führt, welches an die-ser Stelle nicht mehr gesondert aufgeführt wird.

6.3. Unterdrückung selbsterregter Schwingungen des unwuchtfreien Rotors

6.3.1. Vorüberlegungen

Als Ausgangspunkt der Untersuchung einer möglichen Verbesserung des dynamischen Verhaltens des Rotorsystems durch Einbringung einer Parametererregung wird basierend auf den Ergebnissen aus Abschnitt 5.2.3 die Grundkonfiguration mit dem Standardparametersatz aus Tabelle 5.1 gewählt. Hierbei handelt es sich um das System mit Gleitlagern ovalen Querschnitts mit $U_m = 0.3$, dessen zugehörige Hopf-Bifurkationen mit Stabilitätswechsel der Ruhelagen nochmals in Abbildung 6.10 dargestellt sind.

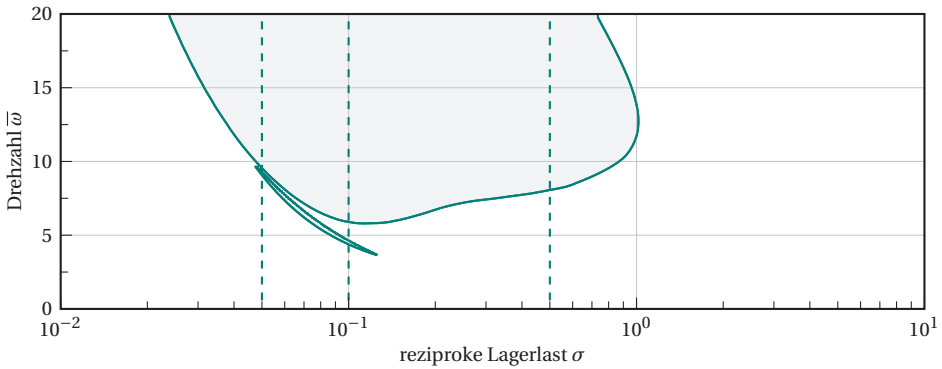


Abbildung 6.10.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lagerlast für die ausgewählten Grundkonfiguration.
[instabile Ruhelagen:]

Für diese Konfiguration wird die Möglichkeit zur positiven Beeinflussung für verschiedene Belastungszustände untersucht, bei denen die Hopf-Bifurkationen ohnehin in niedrigen Drehzahlbereichen liegen. Es handelt sich hierbei um die mit (- -) gekennzeichneten Lastzustände $\sigma \in [0.05, 0.1, 0.5]$.

Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die zu wählende Frequenz η_P der Parametererregung in direktem Zusammenhang mit der Druckmodellierung durch die Reynoldsgleichung steht. Da diese auf einer entsprechenden Größenordnungsabschätzung beruht (vgl. [83]), ist im Rahmen der Gültigkeit ebenso sicherzustellen, dass die einzelnen Anteile nach wie vor dieser Abschätzung genügen. Da für den in Gleichung (6.7) eingeführten Ausdruck der harmonischen Variation auch deren Zeitableitung über $\frac{\partial H}{\partial \tau}$ in die Gleichung eingeht, kann lediglich ein Wertebereich der Größenordnung $\eta_P \in \mathcal{O}(1)$ in Betracht gezogen werden. Sollte dies nicht erfüllt sein, ist die Gültigkeit der Reynoldsgleichung in Frage zu stellen.

Prinzipielle Vorgehensweise. Auf Basis der durch das Spektralsystem genäherten periodischen Lösungen mit Periodendauer $2\pi/\eta_p$ wird nach Bifurkationspunkten mit Stabilitätsverlust und i. d. R. einsetzendem quasi-periodischen Verhalten gesucht. Hierzu wird nach Initialisierung einer entsprechenden Ruhelage des Spektralsystems eine Variation in $\bar{\omega}$ vorgenommen, bis eine Hopf-Bifurkation, die einer NS-Bifurkation im Originalsystem entspricht, detektiert wird. Ausgehend hiervon kann unter Hinzunahme eines zweiten zu variierenden Parameters, in diesem Fall η_p , eine Verfolgung der Bifurkationsart selbst vorgenommen werden.

Darstellungsvariante der Ergebnisse. Die Präsentation der Ergebnisse erfolgt in analoger Weise zu Abschnitt 6.1, wobei auf eine jeweils separate Darstellung der Eigenkreisfrequenzen der jeweiligen Ruhelagen im Fall ohne Parametererregung verzichtet wird. Diese ergeben sich aus einer um eine Ruhelage \underline{z}^* linearisierten Betrachtung von Gleichung (6.5) unter Vernachlässigung der Unwucht und für den Fall $\delta_p = 0$. Das sich so ergebende Eigenwertproblem lautet:

$$\det \left(\left(\underline{A} + \frac{\partial \underline{f}_p}{\partial \underline{z}} \bigg|_{\underline{z}=\underline{z}^*, \delta_p=0} \right) - \lambda \underline{I} \right) = 0. \quad (6.11)$$

Als Lösung ergeben sich vier komplex konjugierte Eigenwertpaare $(\lambda_k, \bar{\lambda}_k)$ mit $k = 1, \dots, 4$, von denen ein Paar mit Erreichen der Grenzdrehzahl einen positiven Realteil aufweist und so die Instabilität der Lösung indiziert.

Für die nachfolgend präsentierten Ergebnisse werden auf Basis der λ_k folgende Bezeichnungen gewählt:

- Die Eigenkreisfrequenz ω_1 bezeichnet den positiven Imaginärteil des Eigenwertpaares, welches im Zuge der Lösungsverfolgung für den Stabilitätswechsel verantwortlich ist. Dieses ist durch $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$ gegeben, sodass $\omega_1 = |\Im(\lambda_1)|$ gilt.
- Die (positiven) Imaginärteile der verbleibenden drei Eigenwertpaare mit negativen Realteilen werden durch die Eigenkreisfrequenzen ω_k mit $k = 2, \dots, 4$ repräsentiert, wobei diese in aufsteigender Reihenfolge sortiert werden: $\omega_2 < \omega_3 < \omega_4$.

6.3.2. Ausgewählte Ergebnisse zur Unterdrückung selbsterregter Schwingungen

Die präsentierten Ergebnisse sind auf Bereiche in $\bar{\omega}$ und η_p beschränkt, für die eine verhältnismäßig starke Veränderung der Stabilitätsgrenze bei einer generellen Anregungsstärke $\delta_p = 0.3$ erzielt werden kann.

Je nach Parameterkonstellation gestalten sich die Möglichkeiten zur Ausnutzung des stabilisierenden Effekts von Parameter-Antiresonanzen allerdings sehr unterschiedlich, wie sich im Folgenden zeigt.

Unterdrückung im Bereich einer geringen Lagerlast. Für eine eher geringe Belastung der Lager mit $\sigma = 0.5$ lässt sich eine begrenzt gute Stabilisierung der auftretenden periodischen Lösungen des Systems erreichen, wie sich in Abbildung 6.11a zeigt. Im Fall $\delta_P = 0$ wird die Ruhelage des Systems bei $\bar{\omega} \approx 8.1$ instabil (---), wohingegen die eingebrachte Erregung lediglich zu einer stabilen periodischen Lösung bis hin zu $\bar{\omega} = 10$ führen kann. Dies ist zwar nur eine begrenzt gute Erweiterung des als zulässig zu erachtenden Drehzahlbereichs, aber es zeigt sich dennoch ein stabilisierender Effekt. Im Gegensatz zum Beispielsystem lässt sich eine Stabilisierung im Bereich um die Kombinationsfrequenz $|\omega_1 + \omega_2|$ vom additiven Typ feststellen, was sich mit den Prognosen aus [20] für lineare, parametererregte Systeme mit schiefssymmetrischen Anteilen in Dämpfungs- und Steigkeitsmatrizen deckt.

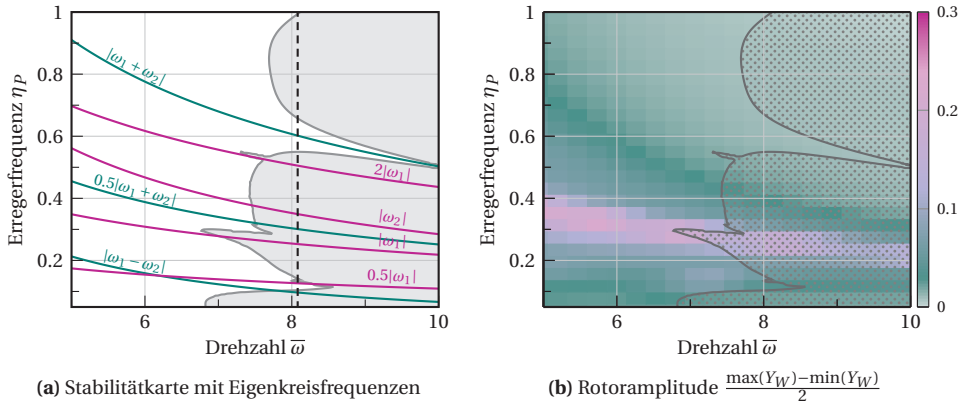


Abbildung 6.11.: Stabilität und Amplituden periodischer Lösungen im parametererregten System ($\delta_P = 0.3$) für den Lastfall $\sigma = 0.5$ bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz.

[instabile Bereiche: / , Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung ($\delta_P = 0$): ---]

Eine Anregung im Bereich der Eigenkreisfrequenz $|\omega_1|$ hat einen destabilisierenden Effekt, wohingegen eine Anregung mit der Hälfte bei $0.5|\omega_1|$ wieder eine Stabilisierung aufzeigt. Wird die Stabilitätskarte der periodischen Lösungen mit der farblich codierten Darstellung der Rotoramplituden überlagert (siehe Abbildung 6.11a), so zeigt sich, dass die Auslenkungen im erweiterten Stabilitätsgebiet der Kombinationsfrequenz $|\omega_1 + \omega_2|$ zudem verhältnismäßig niedrig ausfallen. Umgekehrt lassen sich im Bereich um $|\omega_1|$ vergleichsweise hohe Amplituden beobachten.

Zwecks Veranschaulichung werden in Abbildung 6.12 für diese beiden Bereiche die zugehörigen Verläufe der periodischen Lösungen direkt gegenübergestellt, wobei $\eta_P = 0.57$ und $\eta_P = 0.15$ gewählt werden. Es zeigt sich, wie in Abbildung 6.11a angedeutet, eine verhältnismäßig große Auslenkung für $\eta_P = 0.15$ gegenüber dem Fall $\eta_P = 0.57$. Solche Auswirkungen gilt es bei der praktischen Auslegung des Systems zu erfassen und ebenso auch zu berücksichtigen.

Auf eine separate Verfolgung der quasi-periodischen Lösungen ab den detektierten NS-Bifurkation wird an dieser Stelle verzichtet.

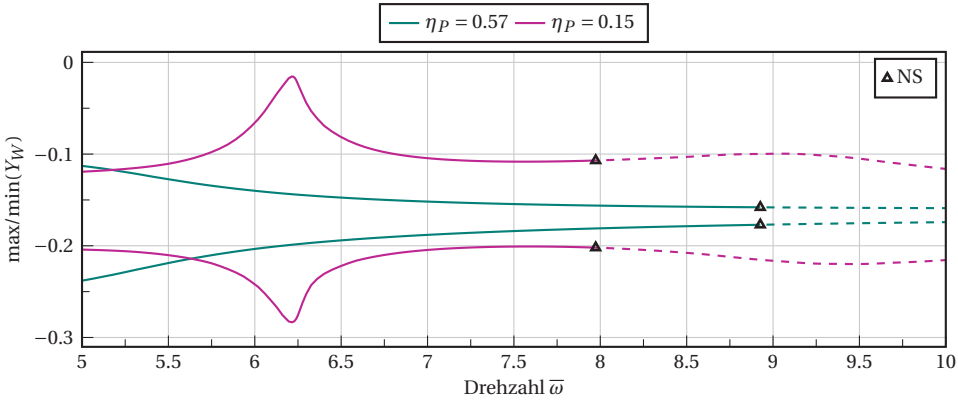


Abbildung 6.12.: Stationäre periodische Lösungen des Systems in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für eine Parametererregung ($\delta_P = 0.3$) bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen im Lastfall $\sigma = 0.5$ bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz.
 [period. stabil: —, period. instabil: - -]

Aufgrund der starken Nichtlinearität des betrachteten Systems gestaltet sich eine generelle Aussage hinsichtlich geeigneter Frequenzen als überaus schwierig, sodass jeweils nur eine individuelle Untersuchung der einzelne Fälle sinnvoll ist, wie sich im Vergleich mit den nachfolgenden Ergebnissen anderer Werte des Lastparameters zeigt.

Unterdrückung im Bereich einer mittleren Lagerlast. Da sich für den betrachteten mittleren Lastbereich bei $\sigma = 0.1$ im Fall ohne Parametererregung ein vorgelagerter Bereich mit instabiler Ruhelage zeigt (vgl. Abbildung 5.4), sind drei mit (- - -) gekennzeichnete Stabilitätsgrenzen im Diagramm in Abbildung 6.13a angegeben.

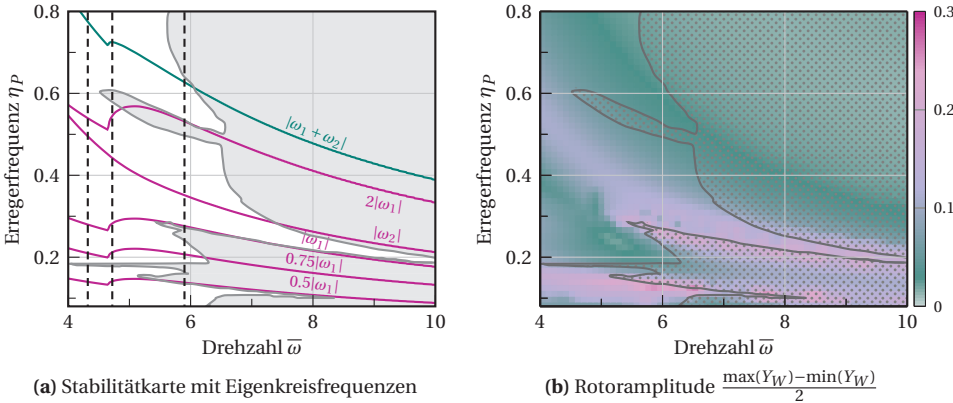


Abbildung 6.13.: Stabilität und Amplituden periodischer Lösungen im parametererregten System ($\delta_P = 0.3$) für den Lastfall $\sigma = 0.1$ bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz.
 [instabile Bereiche: / Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung ($\delta_P = 0$): - - -]

Der vorgelagerte Bereich ist im Vergleich zum Stabilitätsverlust der Ruhelage bei der Drehzahl $\bar{\omega} \approx 5.8$ allerdings von geringem Interesse, zumal dieser sich im betrachteten Fall mit Parametererregung für nahezu alle Erregerfrequenzen stabilisiert.

Es lässt sich für den gegebenen Fall keine Stabilisierung im Bereich möglicher Kombinationsfrequenzen feststellen. In den sich andeutende Bereich um $|\omega_1 + \omega_2|$ scheint aufgrund der Nähe zur sekundären Frequenz $2|\omega_1|$ keine Stabilisierung möglich zu sein. Wie beispielsweise in [62] von PFAU, BREUNUNG, DOHNAL und MARKERT beschrieben wird, ist die Interaktion einzelner Parameterresonanzen und -Antiresonanzen ebenso zu berücksichtigen. Sofern diese nah genug beieinander liegen, kann eine mögliche stabilisierende Wirkung unterbunden oder auch verstärkt werden, wie sich im gegebenen Fall zeigt.

Zusätzlich finden sich zahlreiche primäre und sekundäre Parameterresonanzeffekte, deren Auftreten bei der Untersuchung des Beispielsystems in Abschnitt 6.1 diskutiert werden (vgl. Abbildung 6.9). So zeigen sich stabile periodische Lösungen in den Bereichen um $|\omega_1|$ sowie um $0.5|\omega_1|$. Diese Anregungen erhalten zwar weitestgehend den periodischen Lösungstyp, sind aber generell mit vergleichsweise hohen Amplituden verbunden, wie sich in Abbildung 6.13b sowie dem exemplarischen Lösungsverlauf in Abbildung 6.14 für den Fall $\eta_P = 0.4$ zeigt.

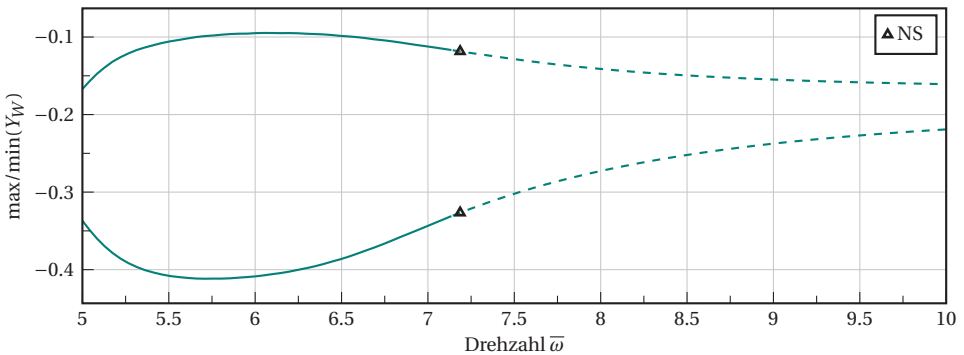


Abbildung 6.14.: Stationäre periodische Lösungen des Systems in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für eine Parametererregung ($\delta_P = 0.3$) mit Erregerfrequenz $\eta_P = 0.3$ im Lastfall $\sigma = 0.1$ bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz.

[period. stabil: —, period. instabil: - -]

Für den Fall einer mittleren Lagerbelastung sind im zulässigen Frequenzbereich der Parametererregung somit keine nennenswerten Stabilisierungen mit zeitgleich niedrigen Amplituden zu beobachten. Es treten lediglich auf „ Parameterresonanzen zurückzuführende Effekte mit vergleichsweise hohen Systemamplituden auf.

Unterdrückung im Bereich einer erhöhten Lagerlast. Für den Fall einer erhöhten Lagerbelastung bei $\sigma = 0.05$ lassen sich hingegen große Einflüsse der Parametererregung beobachten, wie sich in den Diagrammen in Abbildung 6.15 zeigt.

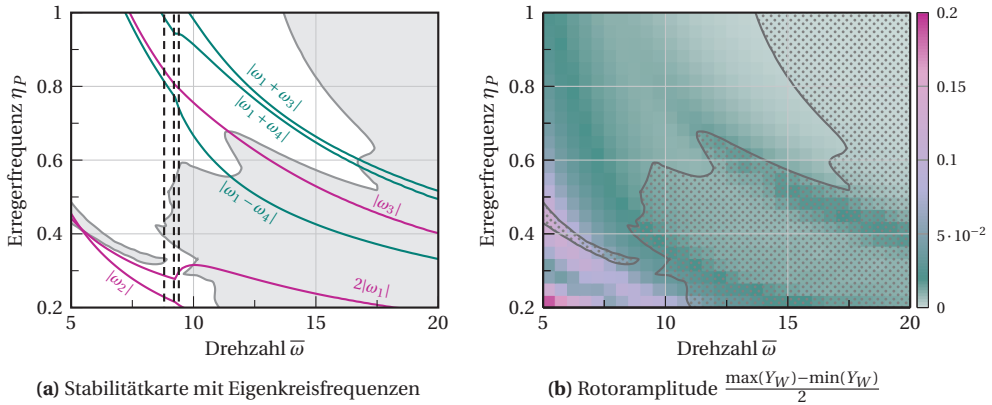


Abbildung 6.15.: Stabilität und Amplituden periodischer Lösungen im parametererregten System ($\delta_P = 0.3$) für den Lastfall $\sigma = 0.05$ bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz.

[instabile Bereiche: / , Stabilitätsgrenze ohne Parametererregung ($\delta_P = 0$): - - -]

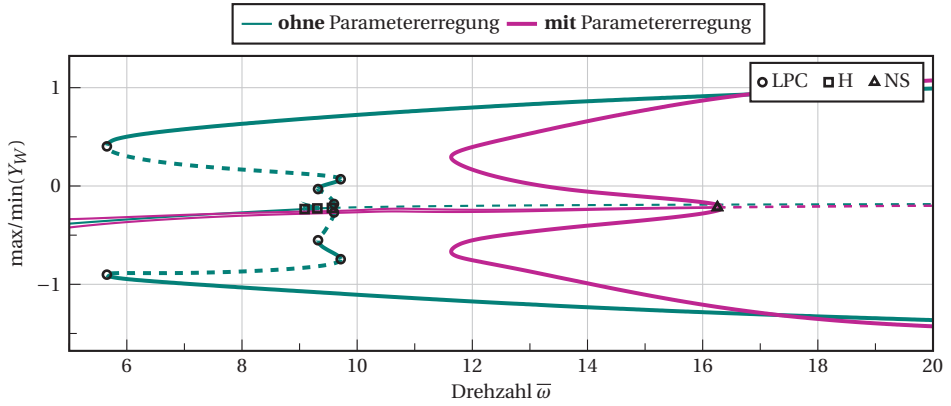
Wie auch bei $\sigma = 0.1$ liegt für den Fall ohne Parametererregung ein vorgelagerter Bereich instabiler Ruhelagen vor, sodass auch hier drei mit (- - -) gekennzeichnete Stabilitätsgrenzen vermerkt sind, die allerdings sehr dicht beieinander liegen.

Der wohl ausgedehnteste Bereich stabiler periodischer Lösungen lässt sich um die Kombinationsfrequenzen $|\omega_1 + \omega_3|$ und $|\omega_1 + \omega_4|$ feststellen, wobei diese eine Art kombinierte Parameter-Antiresonanz zu sein scheint. Der gegebene nasenartige Verlauf in diesem Bereich deutet auf sich gegenseitig aufhebende Tendenzen der beiden Parameter-Antiresonanzen hin. Zusätzlich lässt sich auch im Bereich einer Kombinationsfrequenz des Differenzentyps bei $|\omega_1 - \omega_4|$ eine Stabilisierung feststellen.

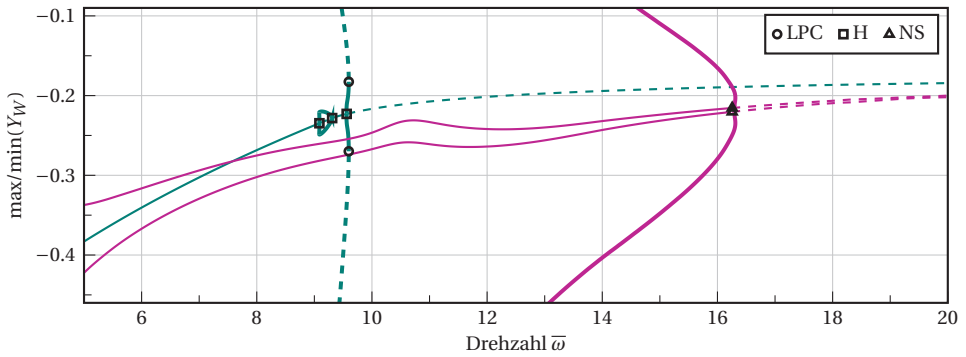
Werden die zugehörigen Amplituden in Abbildung 6.15b ausgewertet, so zeigt sich im Bereich der Kombinationsfrequenzen äußerst vorteilhaftes Verhalten, was lediglich durch den der primären Frequenz $|\omega_3|$ folgenden Amplitudenberg tangiert werden könnte.

Da die beobachtete Stabilisierung im Vergleich zu den anderen Lastfällen hier am stärksten ausfällt, werden die zugehörigen stationären Lösungen in detaillierter Form mit den Ergebnissen ohne Parametererregung verglichen. Hierzu finden sich in Abbildung 6.16 die entsprechenden Verläufe für eine Erregerfrequenz $\eta_P = 0.7$, die den durch die Parameter-Antiresonanzen stabilisierten Bereich passiert. In diesem Fall sind zusätzlich die Ergebnisse einer Verfolgung der von der NS-Bifurkation aus startenden quasi-periodischen Lösung mit aufgeführt.

Für die beiden farblich gekennzeichneten Fälle mit und ohne Parametererregung liegt unterschiedliches Lösungsverhalten vor. So handelt es sich im Falle reiner Selbsterregung (—) um Ruhelagen und periodische Lösungen, wohingegen die Parametererregung (—) die Dimension der Frequenzbasis erhöht, sodass periodische und quasi-periodische Lösungen vorliegen.



(a) Übersicht der Lösungsverläufe mit und ohne Parametererregung



(b) Vergrößerte Ansicht der Lösungsverläufe mit und ohne Parametererregung

Abbildung 6.16.: Vergleich der stationären Lösungen des Systems in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für die Fälle **mit** ($\eta_p = 0.7$) und **ohne** Parametererregung bei $U_m = 0.3$ und Standardparametersatz. Lösungstypen für $\delta_p = 0$ (—): Ruhelagen und period. Lösungen
 Lösungstypen für $\delta_p = 0.3$ (—): period. und quasi-period. Lösungen

In Abbildung 6.16b zeigt sich für das parametererregte System eine stabile periodische Lösung mit äußerst geringer Amplitude, die annähernd der Ruhelage des Systems ohne Parametererregung folgt. Die Stabilität dieser Lösung geht im Vergleich erst bei sehr viel höheren Drehzahlen verloren, was den zuvor präsentierten Ergebnissen im Bezug auf die Stabilisierung entspricht. Allerdings lässt sich ausgehend vom Bifurkationspunkt für das parametererregte System ein ähnliches Verhalten wie für den Fall reiner Selbsterregung beobachten. Der quasi-periodische Lösungszweig verzeichnet einen Rückgang in niedrigere Drehzahlbereiche bevor dieser bei $\bar{\omega} \approx 11.6$ über eine faltenähnliche Verzweigung auf einen äußeren quasi-periodischen Lösungszweig übergeht, der weitestgehend ähnliche Auslenkungen wie im Fall ohne Parametererregung aufweist.

Der vorliegende Drehzahlbereich $\bar{\omega} = [11.6, 16]$ mit koexistierenden periodischen und quasi-periodischen Lösungen ist als unerwünscht einzustufen, da hier unter Umständen ein Abdriften auf einen benachbarten Lösungszweig erfolgen kann. Ein solcher Sachverhalt kann durch eine reine Betrachtung der linearisierten Systemgleichungen und der daraus gewonnenen Stabilitätsaussagen nicht offengelegt werden, da in diesem Fall benachbarte Lösungsarme erst gar nicht abgebildet werden können.

Beurteilung der eingebrachten Parametererregung. Das hochgradig nichtlineare System des betrachteten hydrodynamisch gelagerten Rotors zeigt zahlreiche durch die Parametererregung hervorgerufene Effekte auf, die unter bestimmten Umständen zu einem vorteilhaften Lösungsverhalten führen. Es zeigt sich, dass die hierfür aufzuwendenden Erregerfrequenzen vorwiegend in Bereichen additiver Kombinationsfrequenzen zu finden sind, sofern diese fernab von destabilisierend wirkenden Parameterresonanzen liegen.

Weiterhin wird hierzu auf die Arbeit von DOHNAL [21] verwiesen, in der sich ein experimenteller Nachweis der stabilisierenden Eigenschaften solcher Parametererregungen für ein magnetisch gelagertes Rotorsystem findet.

Ungeachtet der Stabilisierung der betrachteten periodischen Lösung zeigt sich bei Berücksichtigung der sich aus der Instabilität heraus entwickelnden quasi-periodischen Lösung eine ähnliche Problematik wie auch im Falle reiner Selbsterregung. Bereiche koexistierender Lösungen können die praktische Umsetzung der gewünschten Reduktion auftretender Schwingungen gefährden. Dieser Sachverhalt könnte weiterhin als mögliche Erklärung für die in [61] geschilderte experimentelle Beobachtung eines vergleichbaren Systems dienen. Hier konnte im Experiment keine Stabilisierung durch eine eingebrachte Parametererregung festgestellt werden, was ggf. auf den beschriebenen Umstand koexistierender Lösungen zurückzuführen ist.

Im Hinblick auf eine gezielte Unterdrückung bzw. Auslenkungsreduktion selbsterregter Schwingungen (vgl. [21, 88]) bietet sich zusätzlich zur Ausnutzung der Parameter-Antiresonanzen ein kombiniertes Vorgehen an, welches eine weitere Dissipationsquelle oder ein entsprechendes Regelungskonzept mit einbinden könnte. Wie sich beispielsweise in der Arbeit von ABELE ET AL. [1] zeigt, können durch den Einsatz eines Reglers zusätzlich zur Parametererregung auftretende Ratterschwingungen einer Fräsmaschine reduziert werden.

In Ergänzung zu diesem Vorgehen wird zusätzlich zu einer gezielten Parametererregung die Einbringung trockener Reibung als weitere, mögliche Maßnahme empfohlen, welche Teil weiterführender Untersuchungen sein könnte.

7. Zusammenfassung

Die Zusammenfassung greift die wesentlichen Ergebnisse und die damit verbundenen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit auf. Da sich ein Großteil des Inhalts mit der Entwicklung einer entsprechenden Methodik zur sinnvollen Auswertung, Verfolgung und Beurteilung von quasi-periodischem Systemverhalten beschäftigt, werden die hieraus gewonnenen Erkenntnisse in einem separaten Abschnitt aufgeführt, unabhängig von den Resultaten des untersuchten Rotorsystems.

Abschließend werden offene Fragen und mögliche weiterführende Problemstellungen diskutiert.

7.1. Erkenntnisse zur verwendeten Methodik

Im Hinblick auf eine möglichst effiziente Untersuchung eines hydrodynamisch gelagerten Rotors müssen mehrere parallel existierende Anregungsmechanismen berücksichtigt werden. Dies führt in der Regel auf ein komplexes Verhalten, welches im stationären Zustand Ruhelagen, periodische aber auch quasi-periodische Lösungen sein können. Um speziell quasi-periodisches Verhalten sinnvoll zu beschreiben, wird mit Hilfe eines mannigfaltigkeitsbasierten Vorgehens ein geeignetes Näherungsverfahren vorgestellt. Dieses wird im Rahmen einer möglichst effizienten Implementierung um FFT-basierte Auswertungsschritte erweitert. Zusätzlich wird ein auf dem Hill-Verfahren beruhendes Stabilitätskriterium eingearbeitet, um eine im Sinne des Verfahrens sinnvolle Detektion möglicher Bifurkationen, die auf quasi-periodisches Verhalten führen, zu gewährleisten. Die hierdurch erzielte Eignung des Näherungsverfahrens hinsichtlich numerischer Lösungsverfolgung erweitert die Untersuchungsmöglichkeiten im Vergleich zu alternativ verfügbaren Verfahren, die sich in der Regel lediglich auf Ruhelagen und periodische Lösungen stützen.

Das Verfahren überzeugt hierbei durch sehr gute Ergebnisse bei der Approximation von periodischen und quasi-periodischen Lösungen sowie dem bifurkationsbasierten Übergang dieser beiden Lösungstypen, wie sich anhand zahlreicher Beispiele zeigt. Darüber hinaus bietet das Verfahren einen Zugang zur Abschätzung möglicher Synchronisationsbereiche im Zuge einer numerischen Verfolgung in Abhängigkeit beliebiger Systemparameter.

Die vorgestellte Methode kommt im Rahmen der Untersuchung des dynamischen Verhaltens hydrodynamisch gelagerter Rotoren zum Einsatz, wobei jeweils die Kombinationen aus Selbst- und Unwuchterregung sowie Selbst- und Parametererregung betrachtet werden.

7.2. Erkenntnisse zum untersuchten Gleitlagerkonzept

Es werden die Auswirkungen verschiedener Geometrien der hydrodynamischen Gleitlager auf das Verhalten eines dadurch abgestützten Rotorsystems untersucht. Ziel ist es, die durch die Fluid-Struktur-Interaktion hervorgerufenen Schwingungen mittels einer geschickten Wahl der Geometrie des Lagers zu reduzieren. Hierzu wird ausgehend von einer kontinuumsmechanischen Betrachtung eine mögliche Beschreibung der Lagergeometrie in Abhängigkeit einer durch zwei entsprechende Aktoren aufgebrachten, symmetrischen Verschiebung hergeleitet. Diese nimmt im Zuge des mit Hilfe der Reynoldsgleichung modellierten Fluids direkten Einfluss auf den Druckaufbau innerhalb des Gleitlagers und somit auf die zugehörigen Lagerkräfte. Der Entwicklung einer zur Beschreibung geeigneten Implementierung wird dabei ein großer Stellenwert beigemessen.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete oval-förmige Querschnittsgeometrie der Lager zeigt ein äußerst vorteilhaftes Verhalten hinsichtlich der Unterdrückung unerwünschter Schwingungen. Gerade für niedrig belastete Rotorsysteme ohne Unwucht können im Vergleich zum zylindrischen Lager wesentlich höhere Drehzahlen gefahren werden, bevor es zu Schwingungen in Folge von Selbsterregung kommt.

Unter Verwendung der vorgestellten Methodik zur quasi-periodischen Näherung lässt sich dieser Effekt darüber hinaus ebenso für den Fall eines unwuchtbehafteten Rotors beobachten.

Desweiteren zeigt sich in bestimmten Drehzahlbereichen die Möglichkeit koexistierender Lösungen, was für praktische Anwendungen einen zu berücksichtigenden Aspekt darstellt. Wechselt das System störungsbedingt auf einen solchen benachbarten Lösungsast, kann es zu einem Anstieg der Schwingungsamplituden kommen.

Zur zusätzlichen Einflussnahme auf das dynamische Verhalten werden die Auswirkungen einer harmonisch variierenden Lagergeometrie untersucht. Hierzu werden der durch die beiden Aktoren aufgebrachten Verschiebung zusätzlich harmonische Terme kleinerer Größenordnung überlagert. Im Rahmen der Theorie zur Stabilisierung von Lösungen durch Parametererregung lässt sich eine Erweiterung des stabilen Lösungsbereichs des unwuchtfreien Rotors realisieren. In einem hierdurch realisierten Drehzahlbereich mit stabilen periodischen Lösungen zeigen sich allerdings koexistierende quasi-periodische Lösungsäste mit verhältnismäßig hoch ausfallenden Auslenkungen. Dies gilt es bei der praktischen Anwendung der Stabilisierung durch Parametererregung entsprechend zu berücksichtigen.

Das betrachtete Lager mit oval-förmigem Querschnittsprofil zeigt durchweg eine Verbesserung des dynamischen Verhaltens des Rotors, wobei lediglich die Sensitivität bezüglich der Ausrichtung gegenüber der äußeren statischen Last als Nachteil zu nennen ist.

7.3. Offene Fragen und weiterführende Problemstellungen

In dieser Arbeit werden viele verschiedene Themengebiete tangiert, die Raum für weiterführende Forschung bieten. Zusätzlich werden in einigen Modellierungsschritten starke Vereinfachungen vorgenommen, die im Zuge einer Weiterentwicklung durch entsprechend detailliertere Zusammenhänge ersetzt werden können. Im Einzelnen handelt es sich um folgende Punkte:

- Zur sinnvollen Beschreibung und Verfolgung quasi-periodischen Systemverhaltens stellt die Entwicklung eines **implementierungsfähigen Stabilitätskriteriums** für quasi-periodische Lösungen bzw. Mannigfaltigkeiten eine notwendige Erweiterung dar. Die Abschätzung der Stabilität solcher Lösungstypen würde den Zugang zur Beschreibung höherdimensionaler Verzweigungsszenarien ebnet und somit eine umfassendere Untersuchungsmöglichkeit nichtlinearer Systeme bieten.
- Die Modellerweiterung um eine **Rückwirkung des Fluiddrucks** auf die Verformung der Lagerschale stellt eine sinnvolle Maßnahme dar, die im Gegensatz zu den in der Literatur zu findenden Beschreibungen (z. B. in [95]) über das Modell einer rein elastischen Bettung hinaus gehen sollte.
- Den **Auswirkungen verschiedener Lösungsanforderungen an die Reynoldsgleichung** auf das dynamische Verhalten des Rotors wird in der Regel keine große Bedeutung beigemessen. Eine sich hierauf konzentrierende Untersuchung könnte womöglich interessante, nicht zu vernachlässigende Effekte offen legen.
- Eine **Erweiterung** des Systems mit harmonisch variiertem Lagergeometrie **um eine zusätzlich Dissipationsquelle**, z. B. in Form trockener Reibung.
- Im Hinblick auf die lediglich harmonisch angesetzte Variation der Lagergeometrie bietet sich die **Entwicklung eines geeigneten Regelungskonzepts** an, um die Geometrie individuell anzupassen und so ein verbessertes Systemverhalten zu erzielen.
- In direktem Zusammenhang mit dem vorherigen Punkt, steht eine auf **Optimierung** basierende Herangehensweise, um so die für einen jeweils ausgezeichneten Betriebszustand optimale Lagergeometrie zu identifizieren.
- Eine **Erweiterung** des vorgeschlagenen Lagermodells **um zusätzliche Aktorpaare** wird als sinnvoll erachtet, da so ein breiteres Spektrum an verschiedenen Lagergeometrien realisiert werden kann. Dieser Schritt umfasst indirekt die vorangegangenen Aspekte eines Regelungskonzepts sowie einer optimierungsbasierten Herangehensweise.
- Eine **experimentelle Validierung** der im Rahmen dieser Arbeit aufgezeigten Stabilisierungseffekte steht noch aus, erscheint aber im Hinblick auf die in der Literatur zu findenden Resultate ähnlicher Systeme vielversprechend.

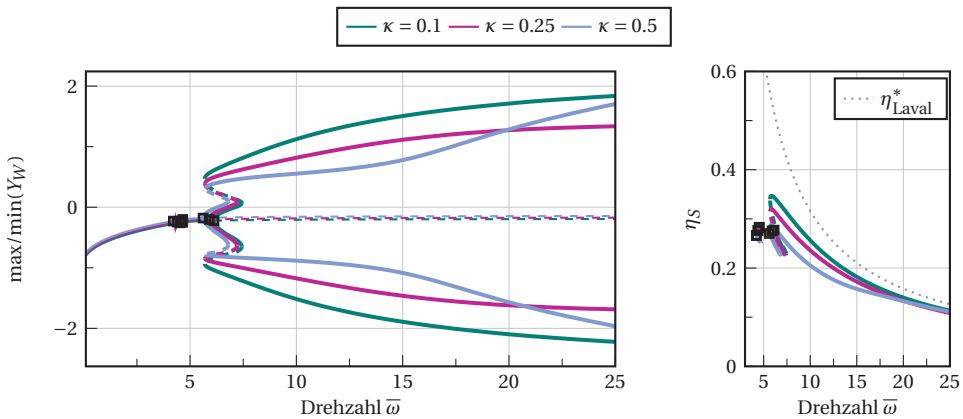
A. Zusätzliche Untersuchungsergebnisse

In den nachfolgenden Abschnitten finden sich zusätzliche Ergebnisse zum dynamischen Verhalten hydrodynamisch gelagerter Rotoren. Es handelt sich hierbei um Untersuchungen in Abhängigkeit von Modellierungsparametern, deren Einfluss vergleichsweise gering ausfällt.

A.1. Lösungsverläufe des unwuchtfreien Rotors mit konstanter Lagergeometrie

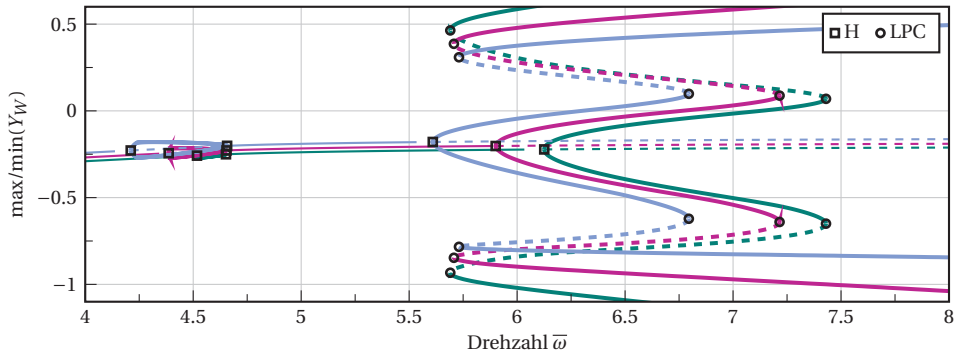
A.1.1. Abhängigkeit vom Massenverhältnis κ

Das im Zuge der Auftrennung des Rotors in Hauptmasse M und Zapfenmasse m eingeführte Massenverhältnis $\kappa = 2m/M$ hat lediglich einen geringen Einfluss auf das Lösungsverhalten.



(a) Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung (lediglich Hopf-Bifurkationen mit gekennzeichnet)

(b) Frequenzverhältnis der Grenzzyklusschwingungen



(c) Vergrößerte Darstellung der Rotorauslenkung in e_y^c -Richtung im Bifurkationsbereich

Abbildung A.1.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschiedene Massenverhältnisse κ mit Standardparametersatz und Geometrieparameter $U_m = 0.3$.

[Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: —●—, period. instabil: - -●- -]

A.1.2. Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl N_φ der Drucknäherung

Eine Erhöhung der Stützstellenanzahl N_φ der Drucknäherung (siehe Abschnitt 4.1.1) zeigt keine nennenswerten Unterschiede bei der Lösungsverfolgung.

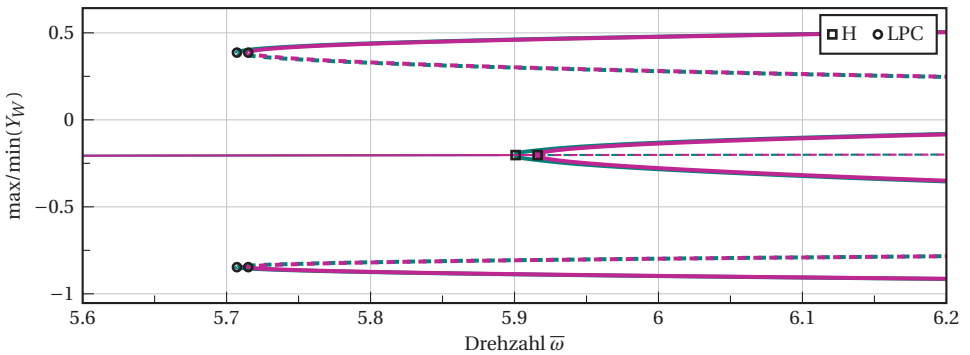
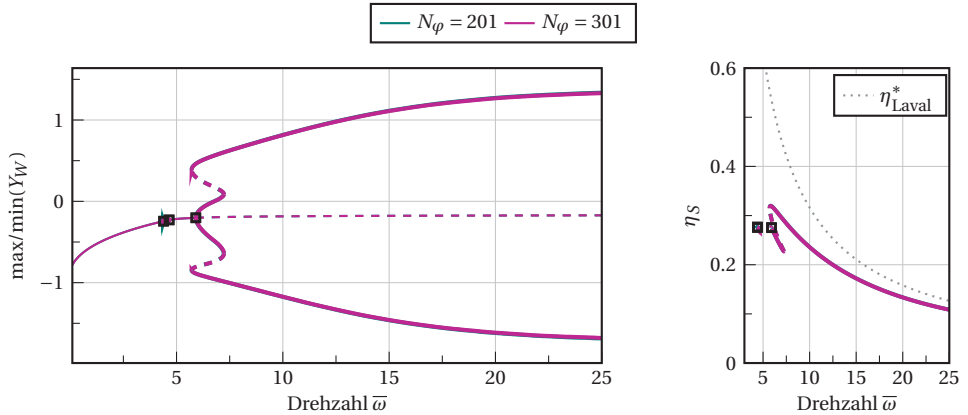


Abbildung A.2.: Stationäre Lösungen des unwuchtfreien Rotors und deren Bifurkationen in Abhängigkeit der Rotordrehzahl für verschieden viele Stützstellen in Umfangsrichtung zur Näherung des Druckes mit Standardparametersatz und Geometrieparameter $U_m = 0.3$.
 [Ruhelage stabil: —, Ruhelage instabil: - - , period. stabil: ———, period. instabil: - - -]

A.2. Stabilitätskarten des unwuchtfreien Rotors mit konstanter Lagergeometrie

A.2.1. Abhängigkeit vom Massenverhältnis κ

Das im Zuge der Auftrennung des Rotors in Hauptmasse M und Zapfenmasse m eingeführte Massenverhältnis $\kappa = 2m/M$ hat nur einen sehr geringen Einfluss auf die Stabilität der Ruhelage, sowohl für den Fall mit ovalem als auch mit kreisrundem Lagerprofil.

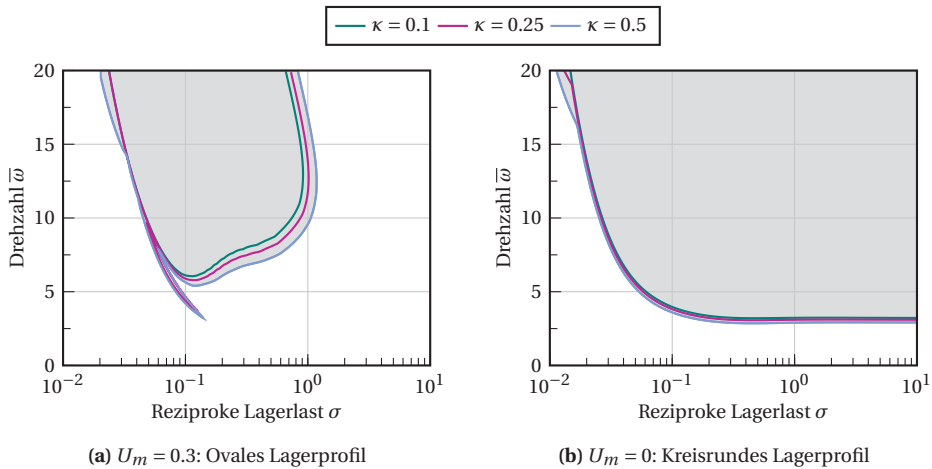


Abbildung A.3.: Hopf-Bifurkationspunkte mit Stabilitätswechsel der Ruhelage in Abhängigkeit von Rotordrehzahl und Lagerlast in vergleichender Betrachtung von ovalem und kreisrundem Lagerprofil für verschiedene Massenverhältnisse κ mit Standardparametersatz.
[instabile Ruhelagen:]

Literaturverzeichnis

- [1] E. ABELE, F. DOHNAL, M. FEULNER, T. SIELAFF, C. DAUME. Numerical investigation of chatter suppression via parametric anti-resonance in a motorized spindle unit during milling. In: *Production Engineering* 12.3 (2018), S. 309–317.
(Zitiert auf Seite 140.)
- [2] M. AKKOK, C. MCC. ETTLES. The effect of grooving and bore shape on the stability of journal bearings. In: *ASLE Transactions* 23.4 (1980), S. 431–441.
(Zitiert auf den Seiten 3, 96, 102.)
- [3] T. ARENS, F. HETTLICH, C. KARPFINGER, U. KOCKELKORN, K. LICHTENEGGER, H. STACHEL. *Mathematik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2015.
(Zitiert auf den Seiten 14, 71.)
- [4] V. I. ARNOL'D. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer, New York, 1988.
(Zitiert auf Seite 24.)
- [5] C. BAUM. Zur Dynamik einfacher Rotoren in aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie. Diss. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2018.
(Zitiert auf den Seiten 5, 67, 83.)
- [6] K. BECKER. Ovally Deformed Journal Bearing–Principle Sketch. *KITopen*, ID: 1000086134, Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe. 2018.
(Zitiert auf Seite 5.)
- [7] H. BOCK, M. DIEHL, C. KIRCHES. Vorlesung - Optimierung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen (Numerik 2). 2014.
- [8] P. BONELLO, H. PHAM. The efficient computation of the nonlinear dynamic response of a foil–air bearing rotor system. In: *Journal of Sound and Vibration* 333.15 (2014), S. 3459–3478.
(Zitiert auf Seite 67.)
- [9] A. BOYACI. Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern. Diss. Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2012.
(Zitiert auf den Seiten 5, 54, 63, 64, 67, 83, 89, 96.)
- [10] A. CAMERON. *Basic Lubrication Theory*. Ellis Horwood Series in Engineering Science. Ellis Horwood Ltd., West Sussex, 1981.
(Zitiert auf den Seiten 49, 51.)

- [11] M. CHANDRA, M. MALIK, R. SINHASAN. Comparative study of four gas-lubricated noncircular journal bearing configurations. In: *Tribology International* 16.2 (1983), S. 103–108.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [12] A. CHASALEVRIS. Analytical evaluation of the static and dynamic characteristics of three-lobe journal bearings with finite length. In: *Journal of Tribology* 137.4 (2015). Nr. 041701.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [13] A. CHASALEVRIS, F. DOHNAL. A journal bearing with variable geometry for the reduction of the maximum amplitude during passage through resonance. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 134.6 (Dez. 2012). Nr. 061005.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [14] A. CHASALEVRIS, F. DOHNAL. Vibration quenching in a large scale rotor-bearing system using journal bearings with variable geometry. In: *Journal of Sound and Vibration* 333.7 (2014), S. 2087–2099.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [15] A. CHASALEVRIS, F. DOHNAL. A journal bearing with variable geometry for the suppression of vibrations in rotating shafts: simulation, design, construction and experiment. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2015), S. 506–528.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [16] A. CHASALEVRIS, F. DOHNAL. Improving stability and operation of turbine rotors using adjustable journal bearings. In: *Tribology International* 104 (2016), S. 369–382.
(Zitiert auf den Seiten 4, 46, 119.)
- [17] D. DECKLER, R. VEILLETTE, M. BRAUN, F. CHOY. Simulation and control of an active tilting-pad journal bearing. In: *Tribology Transactions* 47.3 (2004), S. 440–458.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [18] C. Y. DENG. A generalization of the Sherman-Morrison-Woodbury formula. In: *Applied Mathematics Letters* 24.9 (2011), S. 1561–1564.
(Zitiert auf Seite 70.)
- [19] F. DOHNAL. Damping by parametric stiffness excitation: resonance and anti-resonance. In: *Journal of Vibration and Control* 14.5 (2008), S. 669–688.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [20] F. DOHNAL. General parametric stiffness excitation – anti-resonance frequency and symmetry. In: *Acta Mechanica* 196.1 (2008), S. 15–31.
(Zitiert auf den Seiten 125, 135.)
- [21] F. DOHNAL, R. MARKERT. Enhancement of external damping of a flexible rotor in active magnetic bearings by time-periodic stiffness variation. In: *Journal of System Design and Dynamics* 5.5 (2011), S. 856–865.
(Zitiert auf Seite 140.)

-
- [22] F. DOHNAL, F. VERHULST. Averaging in vibration suppression by parametric stiffness excitation. In: *Nonlinear Dynamics* 54.3 (2008), S. 231–248.
(Zitiert auf den Seiten 119, 125.)
- [23] S. J. FARLOW. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Courier Corporation, North Chelmsford, 1993.
(Zitiert auf Seite 69.)
- [24] R. FLACK, P. ALLAIRE. An experimental and theoretical examination of the static characteristics of three-lobe bearings. In: *ASLE Transactions* 25.1 (1982), S. 88–94.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [25] R. FLACK, M. LEADER, P. ALLAIRE. An experimental and theoretical investigation of pressures in four-lobe bearings. In: *Wear* 61.2 (1980), S. 233–242.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [26] J. FRENE, D. NICOLAS, B. DEGUEURCE, D. BERTHE, M. GODET. *Hydrodynamic Lubrication: Bearings and Thrust Bearings*. Bd. 33. Elsevier, Amsterdam, 1997.
(Zitiert auf den Seiten 2, 3, 49, 85, 90, 96, 102, 103.)
- [27] M. FRISWELL, J. PENNY, S. GARVEY, A. LEES. *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
(Zitiert auf Seite 53.)
- [28] H. FUJISAKA, T. YAMADA. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. In: *Progress of Theoretical Physics* 69.1 (Jan. 1983), S. 32–47.
(Zitiert auf Seite 24.)
- [29] D. GARNER, C. LEE, F. MARTIN. Stability of profile bore bearings: influence of bearing type selection. In: *Tribology International* 13.5 (1980), S. 204–210.
(Zitiert auf den Seiten 3, 96, 102.)
- [30] R. GASCH, R. NORDMANN, H. PFÜTZNER. *Rotordynamik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.
(Zitiert auf Seite 60.)
- [31] P. HAGEDORN. *Nichtlineare Schwingungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978, XII, 313 S.
(Zitiert auf den Seiten 9–12, 28.)
- [32] P. HAGEDORN. *Technische Schwingungslehre: Lineare Schwingungen diskreter mechanische Systeme*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.
(Zitiert auf Seite 9.)
- [33] P. HAGEDORN. *Technische Schwingungslehre - Band 2: Lineare Schwingungen kontinuierlicher mechanischer Systeme*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.
(Zitiert auf Seite 9.)
- [34] P. HARTMAN. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 11.4 (1960), S. 610–620.
(Zitiert auf Seite 10.)

- [35] H. HASHIMOTO, S. WADA, H. TSUNODA. Performance characteristics of elliptical journal bearings in turbulent flow regime. In: *Bulletin of JSME–The Japan Society of Mechanical Engineers* 27.232 (1984), S. 2265–2271.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [36] A. M. HAUGAARD, I. F. SANTOS. Elastohydrodynamics applied to active tilting-pad journal bearings. In: *Journal of Tribology* 132.2 (2010). Nr. 021702.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [37] D. HAVELOCK, S. KUWANO, M. VORLÄNDER, Hrsg. *Handbook of Signal Processing in Acoustics*. Springer Science & Business Media, Berlin, 2008.
(Zitiert auf Seite 27.)
- [38] G. HIGGINSON. Paper 1: The theoretical effects of elastic deformation of the bearing liner on journal bearing performance. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* (London, England, 1965). Bd. 180. 2. 1965, S. 31–38.
(Zitiert auf Seite 54.)
- [39] G. W. HILL. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. In: *Acta Mathematica* 8.1 (1886), S. 1–36.
(Zitiert auf Seite 28.)
- [40] B. KRAUSKOPF, H. M. OSINGA, J. GALÁN-VIOQUE. *Numerical continuation methods for dynamical systems*. Springer, Dordrecht, 2007.
(Zitiert auf Seite 15.)
- [41] J. KRODKIEWSKI, Y. CEN, L. SUN. Improvement of stability of rotor system by introducing a hydraulic damper into an active journal bearing. In: *International Journal of Rotating Machinery* 3.1 (1997), S. 45–52.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [42] J. KRODKIEWSKI, L. SUN. Modelling of multi-bearing rotor systems incorporating an active journal bearing. In: *Journal of Sound and Vibration* 210.2 (1998), S. 215–229.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [43] M. KUBICEK, M. MAREK. *Computational Methods in Bifurcation Theory and Dissipative Structures*. Springer Science & Business Media, Berlin, 2012.
(Zitiert auf Seite 16.)
- [44] A. KUMAR, R. SINHASAN, D. SINGH. Performance characteristics of two-lobe hydrodynamic journal bearings. In: *Journal of Lubrication Technology* 102.4 (1980), S. 425–429.
(Zitiert auf den Seiten 3, 90, 93.)
- [45] Y. A. KUZNETSOV. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Bd. 112. Springer Science & Business Media, Berlin, 2013.
(Zitiert auf den Seiten 9, 16, 17, 23, 94.)

-
- [46] O. LANG, W. STEINHILPER. *Gleitlager. Konstruktionsbücher - Band 31*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1979.
(Zitiert auf den Seiten 1–3, 49–51, 93, 96.)
- [47] A. LAZARUS, O. THOMAS. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. In: *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), S. 510–517.
(Zitiert auf den Seiten 28, 30.)
- [48] T. LEIBER, H. RISKEN. Stability of parametrically excited dissipative systems. In: *Physics Letters A* 129.4 (1988), S. 214–218.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [49] J. LUND, K. THOMSEN. A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. In: *Topics in fluid film bearing and rotor bearing system design and optimization* (1978), S. 1–28.
(Zitiert auf Seite 52.)
- [50] K. MAGNUS, K. POPP, W. SEXTRO. *Schwingungen*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2016.
(Zitiert auf Seite 9.)
- [51] M. MALIK. A comparative study of some two-lobed journal bearing configurations. In: *ASLE Transactions* 26.1 (1983), S. 118–124.
(Zitiert auf den Seiten 3, 90, 93.)
- [52] B. MARX, W. VOGT. *Dynamische Systeme: Theorie und Numerik*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2010.
(Zitiert auf den Seiten 9, 16, 17, 19–23, 26.)
- [53] D. R. MERKIN. *Introduction to the Theory of Stability*. Springer, New York, 1997.
(Zitiert auf den Seiten 13, 125.)
- [54] R. METTIN, U. PARLITZ, W. LAUTERBORN. Bifurcation structure of the driven van der pol oscillator. In: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 3.06 (1993), S. 1529–1555.
(Zitiert auf Seite 40.)
- [55] P. C. MÜLLER. *Stabilität und Matrizen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1977.
(Zitiert auf den Seiten 9–12.)
- [56] A. MUSZYNSKA. Stability of whirl and whip in rotor/bearing systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 127.1 (1988), S. 49–64.
(Zitiert auf den Seiten 2, 83.)
- [57] A. H. NAYFEH, B. BALACHANDRAN. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational and Experimental Methods*. John Wiley & Sons, Hoboken, 2008.
(Zitiert auf Seite 23.)
- [58] A. H. NAYFEH, D. T. MOOK. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, New York, 2008.
(Zitiert auf Seite 119.)

- [59] A. ÖCHSNER. *Theorie der Balkenbiegung: Einführung und Modellierung der statischen Verformung und Beanspruchung*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2016.
(Zitiert auf den Seiten 55, 56.)
- [60] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI, G. JACQUET-RICHARDET. A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics. In: *Nonlinear Dynamics* 72.3 (2013), S. 671–682.
(Zitiert auf Seite 13.)
- [61] B. PFAU. Ein verstellbares Zweiflächengeleitlager zur Schwingungsminderung flexibler Rotoren. Diss. Technische Universität Darmstadt, 2018.
(Zitiert auf den Seiten 4, 46, 119, 140.)
- [62] B. PFAU, T. BREUNUNG, F. DOHNAL, R. MARKERT. Averaging in parametrically excited systems – a state space formulation. In: *MATEC Web of Conferences*. Bd. 83. Nr. 05008. EDP Sciences. 2016.
(Zitiert auf den Seiten 119, 137.)
- [63] B. PFAU, M. RIEKEN, R. MARKERT. Numerische Untersuchungen eines verstellbaren Gleitlagers zur Unterdrückung von Instabilitäten mittels Parameter-Antiresonanzen. In: *First IFToMM D–A–CH Conference 2015*. 2015, S. 1–9.
(Zitiert auf den Seiten 4, 119.)
- [64] H. PHAM, P. BONELLO. Efficient techniques for the computation of the nonlinear dynamics of a foil-air bearing rotor system. In: *ASME Turbo Expo 2013: Turbine Technical Conference and Exposition* (San Antonio, USA, 2013). Nr. V07BT30A011. 2013.
(Zitiert auf Seite 67.)
- [65] O. PINKUS. Analysis of noncircular gas journal bearings. In: *Journal of Lubrication Technology* 97.4 (1975), S. 616–623.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [66] J. PRESCOTT. *Applied Elasticity*. Bd. 122. Longmans, Green und Company, New York, 1924.
(Zitiert auf Seite 55.)
- [67] P. PRZYBYLOWICZ. Active stabilisation of a rigid rotor by piezoelectrically controlled mobile journal bearing system. In: *Australian Journal of Mechanical Engineering* 1.2 (2004), S. 123–128.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [68] M. RIEUTORD. *Fluid Dynamics*. Springer International Publishing, Basel, 2015.
(Zitiert auf Seite 47.)
- [69] A. M. SAMOILENKO. *Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations*. Bd. 71. Springer Science & Business Media, Berlin, 2012.
(Zitiert auf den Seiten 9, 19, 30.)

-
- [70] I. F. SANTOS. Trends in controllable oil film bearings. In: *IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics* (Neu Delhi, Indien, 2009). Springer. 2011, S. 185–199.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [71] I. F. SANTOS. Design and evaluation of two types of active tilting pad journal bearings. In: (London, England, 1994). 1994, S. 79–87.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [72] F. SCHILDER. Numerische Approximation quasiperiodischer invarianter Tori unter Anwendung erweiterter Systeme. Diss. TU Ilmenau, 2004.
(Zitiert auf den Seiten 9, 24, 34.)
- [73] F. SCHILDER, H. M. OSINGA, W. VOGT. Continuation of quasi-periodic invariant tori. In: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 4.3 (2005), S. 459–488.
(Zitiert auf den Seiten 9, 24.)
- [74] F. SCHILDER, B. B. PECKHAM. Computing Arnol'd tongue scenarios. In: *Journal of Computational Physics* 220.2 (2007), S. 932–951.
(Zitiert auf den Seiten 24, 113.)
- [75] F. SCHILDER, W. VOGT, S. SCHREIBER, H. M. OSINGA. Fourier methods for quasi-periodic oscillations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67.5 (2006), S. 629–671.
(Zitiert auf den Seiten 9, 24.)
- [76] D. SFYRIS, A. CHASALEVRIS. An exact analytical solution of the Reynolds equation for the finite journal bearing lubrication. In: *Tribology International* 55 (2012), S. 46–58.
(Zitiert auf Seite 67.)
- [77] G. SHEN, Z. XIAO, W. ZHANG, T. ZHENG. Nonlinear behavior analysis of a rotor supported on fluid-film bearings. In: *Journal of Vibration and Acoustics* 128.1 (2006), S. 35–40.
(Zitiert auf Seite 83.)
- [78] D. SINGH, R. SINHASAN, A. KUMAR. A variational solution of two lobe bearings. In: *Mechanism and Machine Theory* 12.4 (1977), S. 323–330.
(Zitiert auf Seite 3.)
- [79] S. H. STROGATZ. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, New York, 1994.
(Zitiert auf Seite 23.)
- [80] L. SUN, J. KRODKIEWSKI. Experimental investigation of dynamic properties of an active journal bearing. In: *Journal of Sound and Vibration* 230.5 (2000), S. 1103–1117.
(Zitiert auf Seite 4.)

- [81] W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA. On the phenomenon of the combination type resonance in non-linear two-degree-of-freedom systems. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 4.4 (1969), S. 335–359.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [82] W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA. The generalized harmonic balance method for determining the combination resonance in the parametric dynamic systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 58.3 (1978), S. 347–361.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [83] A. Z. SZERI. *Fluid Film Lubrication: Theory and Design*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
(Zitiert auf den Seiten 44, 47–49, 133.)
- [84] K. TAKAHASHI. An approach to investigate the instability of the multiple-degree-of-freedom parametric dynamic systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 78.4 (1981), S. 519–529.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [85] S. TIMOSHENKO, J. GOODIER. *Theory of Elasticity*. Bd. 412. McGraw-Hill Inc., New York, 1970, S. 108.
(Zitiert auf Seite 55.)
- [86] A. TONDL. On the interaction between self-excited and parametric vibrations. In: *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 60.1 (1978), S. 61–61.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [87] A. TONDL. Zum Problem des gegenseitigen Einflusses von selbsterregten und fremderregten Schwingungen. In: *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 62.2 (1982), S. 103–113.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [88] A. TONDL. Stabilization of a rigid rotor by a time-varying stiffness of the bearing mounts. In: *Vibrations in rotating machinery* 16 (2004), S. 45.
(Zitiert auf Seite 140.)
- [89] A. TONDL. To the problem of self-excited vibration suppression. In: *Engineering Mechanics* 15.4 (2008), S. 297–307.
(Zitiert auf den Seiten 4, 119, 125.)
- [90] J. TŮMA, J. ŠIMEK, J. ŠKUTA, J. LOS. Active vibrations control of journal bearings with the use of piezoactuators. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 36.2 (2013), S. 618–629.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [91] Ö. TURHAN. A generalized Bolotin's method for stability limit determination of parametrically excited systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 216.5 (1998), S. 851–863.
(Zitiert auf den Seiten 28, 29.)

-
- [92] F. VERHULST. Quenching of self-excited vibrations. In: *Journal of Engineering Mathematics* 53.3-4 (2005), S. 349–358.
(Zitiert auf Seite 119.)
- [93] G. G. VIGNOLO, D. O. BARILÁ, L. M. QUINZANI. Approximate analytical solution to Reynolds equation for finite length journal bearings. In: *Tribology International* 44.10 (2011), S. 1089–1099.
(Zitiert auf Seite 67.)
- [94] G. VOGELPOHL. Zur Integration der Reynoldsschen Gleichung für das Zapfenlager endlicher Breite. In: *Ingenieur-Archiv* 14.3 (1943), S. 192–212.
(Zitiert auf den Seiten 49, 67.)
- [95] B. L. VAN DE VRANDE. Nonlinear dynamics of elementary rotor systems with compliant plain journal bearings. Diss. Technische Universiteit Eindhoven, 2004.
(Zitiert auf den Seiten 51, 54, 69, 73, 82, 143.)
- [96] J. WAUER. *Kontinuumsschwingungen*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014.
(Zitiert auf den Seiten 9, 55–57, 68.)
- [97] K. WILLNER. *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
(Zitiert auf Seite 55.)
- [98] J. WITTENBURG. *Dynamics of Multibody Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
(Zitiert auf den Seiten 9, 61.)
- [99] A. WU, M. DE QUEIROZ. A new active tilting-pad bearing: nonlinear modeling and feedback control. In: *Tribology Transactions* 53.5 (2010), S. 755–763.
(Zitiert auf Seite 4.)
- [100] M. YARROW. Solving periodic block tridiagonal systems using the Sherman-Morrison-Woodbury formula. In: *AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Technical Papers* (Buffalo, USA, 1989). 1989, S. 188–196.
(Zitiert auf den Seiten 70, 72.)
- [101] J. ZAJACZKOWSKI. An approximate method of analysis of parametric vibration. In: *Journal of Sound and Vibration* 79.4 (1981), S. 581–588.
(Zitiert auf Seite 119.)

Eigene Publikationen

- [102] K. BECKER, W. SEEMANN. A journal bearing with actively modified geometry for extending the parameter-based stability range of rotor dynamic systems. In: *Euro-mech colloquium 573 - coupling and nonlinear interactions in rotating machinery* (Lyon, Frankreich, 25. Aug. 2015–27. Aug. 2015). 2015.
- [103] K. BECKER, W. SEEMANN. A journal bearing with actively modified geometry for extending the parameter-based stability range of rotor-dynamic systems. In: *Open Archives of the 16th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. 16th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery. ISROMAC 2016 (Honolulu, HI, USA, 10. Apr. 2016–15. Apr. 2016). Elsevier, Amsterdam, 2016.
- [104] K. BECKER, W. SEEMANN. Approximation of quasi-periodic solutions of a rotor in two-lobe bearings with time-varying geometry. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 1.16 (2016), S. 263–264.
- [105] K. BECKER, W. SEEMANN. Comparison of the original and the spectral system of an elastic rotor in two-lobe bearings with an active geometry variation. In: *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 17.1, SI (2017), S. 363–364.
- [106] K. BECKER, W. SEEMANN. Stability investigations of an elastic rotor supported by actively deformed journal bearings considering the associated spectral system. In: *Open Archives of the 17th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. 17th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery. ISROMAC 2017 (Maui, HI, USA, 16. Dez. 2017–21. Dez. 2017). 2017.

Die Schwingungsamplituden eines Rotorsystems dürfen in der Praxis aufgrund einer möglichen Beeinträchtigung des Betriebs einen gewissen Toleranzbereich nicht überschreiten. Um dies auch bei hohen Drehzahlen zu gewährleisten werden verschiedene Ausführungen eines Radialgleitlagers mit oval-förmigem Querschnitt und deren Auswirkungen auf das Verhalten des Rotorsystems untersucht. Es werden hierbei sowohl unwuchtfreie als auch unwuchtbehaftete Rotoren untersucht, für die sich in Abhängigkeit verschiedener Systemparameter signifikante Verbesserungen im Vergleich zur Lagerung mit klassischen, zylinderförmigen Gleitlagern zeigen. Dies äußert sich sowohl in erweiterten Stabilitätsgebieten vorliegender Ruhelagen als auch einer Amplitudenreduktion der ursprünglich auftretenden Schwingungen, sogar in Bereichen mit kombinierten Anregungsmechanismen.

Motiviert durch die Theorie der Parameter-Antiresonanzen kann eine zusätzliche harmonische Variation der Querschnittsgeometrie des Gleitlagers je nach Erregungsfrequenz sowohl eine Verbesserung aber auch eine Verschlechterung des Verhaltens des Rotorsystems bewirken, was sich in Form einer Reduktion oder aber einer Erhöhung der auftretenden Schwingungsamplituden des Rotors äußert.

