



Analyse von Tilgerkonfigurationen mit trockenen Reibungselementen

Jimmy Aramendiz¹ · Alexander Fidlin¹

Eingegangen: 13. September 2019 / Angenommen: 13. Februar 2020
© Der/die Autor(en) 2020

Zusammenfassung

Die Ergreifung von Maßnahmen zur Schwingungsreduktion ist eine im Maschinenbau wichtige Aufgabe, da unerwünschte Vibrationen zu Systemstörungen führen können. Insbesondere bei Leichtbausystemen wird die natürlich vorhandene interne Dämpfung des Systems reduziert und neue, innovative, energieeffiziente Dämpfungsalternativen sind erforderlich. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit zwei Systemen: der trockene Lock-Up Dämpfer und der vorgespannte trockene Reibungstilger. Diese Systeme basieren auf trockener Reibung und nutzen die Haft-Gleit-Eigenschaften aus, um Schwingungen im System zu reduzieren. Die Bewegungsgleichung dieser Systeme, sowie numerische Parameterstudien und analytische Lösungen via Mittelwertbildungsverfahren werden vorgestellt. Anschließend werden die Dämpfungsmechanismen in transienten Simulationen verglichen.

On the analysis of damper configurations with dry friction elements

Abstract

The implementation of measures to reduce vibration is an important task in mechanical engineering, as unwanted vibrations can lead to system failure. In lightweight systems in particular, the system's inherent internal damping is reduced and new, innovative, energy-efficient damping alternatives are required. The present work deals with two systems: the dry lock-up damper and the preloaded sliding wedge damper. These systems are based on dry friction and use its stick-slip properties to reduce vibrations in the system. The equations of motion of these systems, as well as numerical parameter studies and analytical solutions via averaging methods are presented. Subsequently, the damping mechanisms are compared in transient simulations.

1 Einleitung

Eine effektive, zielgerichtete Schwingungsdämpfung, welche die Effizienz eines Mechanismus möglichst wenig beeinträchtigt, ist ein wichtiges Ziel für ein modernes Design, besonders bei Leichtbaukonstruktionen und energieeffizienten Anwendungen. Ein idealer Dämpfer dissipiert Energie nur in der Nähe der Resonanzfrequenz, wenn die unerwünschten Schwingungsamplituden die Lebensdauer oder die Funktion des Systems beeinträchtigen. Somit kann ein derartiger Dämpfer die Energieeffizienz des Systems erhöhen.

Um unerwünschte Schwingungen zu unterdrücken, wird in den meisten Anwendungen eine viskose Dämpfung in das System eingeführt, wie z. B. in der Automobilbranche in Form eines hydraulischen Stoßdämpfers [6], oder zur Erhöhung der bereits vorhandenen Materialdämpfung, z. B. constrained layer damping [33]. Diese Dämpfungsmechanismen sind stets aktiv und dissipieren ständig Energie, auch wenn dies nicht erforderlich ist. Dadurch wird die Energieeffizienz des Systems verringert. Die viskose Dämpfung ist nicht die einzige Möglichkeit zur Schwingungsreduktion. Der Einsatz von Tilgern zur Schwingungsreduktion ist üblich im Ingenieurwesen [27, 5]. Dämpfer, die Stöße sich zunutze machen, werden in [19, 2, 20, 21, 32] hauptsächlich in drei Varianten untersucht: mit Spiel, mit einer einzigen Stoßmasse und mit mehrfachen Stoßmassen. Magneto-elektro-rheologische Dämpfer [16, 29, 30, 9] stellen Dämpfer mit einstellbaren Parametern dar, beispielsweise mit einer verstellbaren Steifigkeit oder Dämpfung. Dämpfer, welche

✉ Jimmy Aramendiz
jimmy.aramendiz@kit.edu

¹ Institut für Technische Mechanik, Teilinstitut
Dynamik/Mechatronik, Karlsruher Institut für Technologie,
76131 Karlsruhe, Deutschland

auf nichtlineare viskose Zusammenhänge basieren, werden in [18, 25, 26] untersucht.

Eine weitere Möglichkeit zur Schwingungsreduktion ist die reibungsbasierte Energiedissipation, welche im Ingenieurwesen weit verbreitet ist [1, 10, 11, 23]. Reibungsbasierte Dämpfer werden oft bei Lufttriebwerken zwischen Turbinenschaufeln oder zwischen Schaufel und Rotor eingesetzt [3, 4, 7, 8]. Des Weiteren werden Reibungsdämpfer auch im Bauingenieurwesen zwischen Trägern und Stützen und zur Dämpfung von Kabelschwingungen eingesetzt [22, 24, 31]. Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung energieeffizienter Dämpfungsmechanismen. Klassische Dämpfungsmaßnahmen, wie z. B. viskose Dämpfung, sind wirksame Methoden im Hinblick auf die Schwingungsreduzierung. Diese Maßnahme ist jedoch nicht energieeffizient, da Energie über alle Erregerfrequenzen dissipiert wird. Eine mögliche passive Implementierung einer energieeffizienten Schwingungsunterdrückung kann durch trockene Reibung realisiert werden. Der besondere Charakter trockener Reibung mit Stick-Slip-Übergängen ermöglicht es Elemente zu konstruieren, die ihr Verhalten ändern. Reibungskontakte, die haften und gleiten können, ändern die Struktur eines Systems und somit auch sein Verhalten. Die gezielte Gestaltung der haftenden und gleitenden Dynamik erlaubt, dass Systeme sich passiv an die aktuellen Betriebsbedingungen anpassen.

Dieser Beitrag konzentriert sich auf zwei solcher passiven, trockenen Reibungsdämpfer: den trockenen Lock-up Dämpfer und einen vorgespannten trockenen Reibungstilger mit amplitudenabhängiger Reibungskraft. Das zugrundeliegende Wirkungsprinzip der Dämpfer basiert auf den Stick-Slip-Eigenschaften der trockenen Reibung. Diese sorgt für Haften bei niedrigen Anregungsamplituden, wodurch jegliche Relativbewegung zwischen den Massen verhindert wird und somit keine Energie dissipiert wird. Sobald die Losbrechkraft des Dämpfers überwunden ist, bewegt sich das System im Stick-Slip-Bereich. Die Losbrechbedingung gewährleistet eine selektive Energiedissipation, die erst bei hohen Schwingungsamplituden auftritt. Das in dieser Arbeit verwendete Reibmodell entspricht dem einfachsten Coulomb-Modell, in dem Stribeck-Effekte sowie ein Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibungskoeffizienten vernachlässigt werden. Diese Arbeit ist wie folgt strukturiert. In Abschn. 2 wird der trockene Lock-Up Dämpfer untersucht. Die Bewegungsgleichungen der Dämpfer werden abgeleitet und numerische Parameterstudien durchgeführt, wodurch ein erster Eindruck der Systemdynamik erhalten wird. Zusätzlich wird eine analytische Lösung für die Systeme über das Mittelwertbildungsverfahren hergeleitet und analysiert. Analoge Untersuchungen werden in Abschn. 3 für den vorgespannten trockenen Reibungstilger durchgeführt. Anschließend werden die Dämpfer in Abschn. 4 verglichen, deren Vor- und Nachteile diskutiert sowie optima-

le Umsetzungsszenarien abgeleitet. Zusätzlich wird kurz eine semi-aktive Gestaltung des vorgespannten trockenen Reibungstilgers vorgestellt. Die wesentlichen Erkenntnisse werden in Abschn. 5 zusammengefasst.

2 Der trockene Lock-Up Dämpfer

Das Ziel des Lock-Up Dämpfers (Abb. 1) ist die Dynamik eines bestehenden Hauptsystems zu verbessern. In dieser Arbeit wird das Hauptsystem durch die primäre Feder c_1 und die primäre Masse m_1 dargestellt. An diesem Hauptsystem wird der Lock-Up Dämpfer, bestehend aus einer trockenen Reibstelle mit Reibkraft R , einer sekundären Feder c_2 und einer sekundären Masse m_2 angebracht. Aufgrund der Vernachlässigung von sowohl Stribeck-Effekten als auch von einem Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibungskoeffizienten stimmt die Reibkraft R mit der Losbrechkraft der Reibstelle für den Lock-Up Dämpfer überein. Die Reibstelle bestimmt das Stick-Slip-Verhalten des Systems und somit auch, wann die sekundäre Feder Einfluss auf die Systemdynamik hat. Wenn das Reibungselement eine Relativbewegung blockiert, bewegen sich beide Massen gleich und die sekundäre Feder ist inaktiv. Im inaktiven Zustand kann die sekundäre Feder sich in einem ausgelenkten Zustand befinden, jedoch wirkt sich diese nicht auf die Dynamik des haftenden Systems aus. Die inaktive sekundäre Feder beeinflusst nur die Haftkraft. Sobald das Reibungselement eine Relativbewegung zulässt, ändert sich die Struktur des Systems von einem Oszillator mit einem Freiheitsgrad zu einem Oszillator mit zwei Freiheitsgraden. Dies führt zu einer Änderung der Eigenfrequenzen des Systems. Die Stick-Slip-Eigenschaften bewirken eine Aufteilung des Systemsverhaltens in lineare und nichtlineare Bereichen, die jeweils durch den geschlossenen und geöffneten Zustand des Reibungselements bestimmt werden. Daher ist die Systemdynamik durch diese zwei Bereiche gekennzeichnet: der Haftbereich und der Gleitbereich. Das System befindet sich im Haftbereich, solange die Haftreibungskraft H kleiner als die Losbrechkraft

$$R(|H| \leq R)$$

ist und die kinematische Bedingung $\dot{x}_1 = \dot{x}_2$ erfüllt ist. Wird eine dieser Bedingungen verletzt, so wechselt das System in den Gleitbereich. Die Bewegungsgleichungen für beide Bereiche lauten im Haftbereich

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + c_1 x_1 = F \sin \Omega t, \quad (1)$$

$$H = m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1), \quad (2)$$

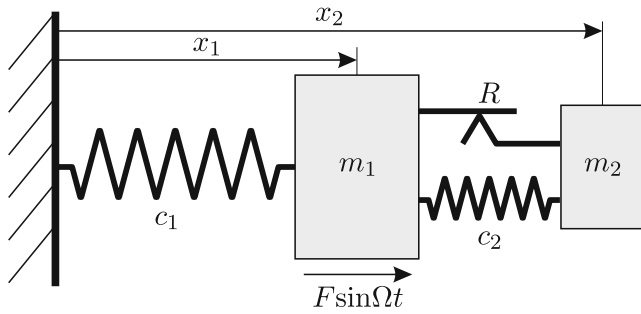


Abb. 1 Lock-Up Dämpfer mit einer harmonischen Erregung an der primären Masse

und im Gleitbereich

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) - R \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F \sin \Omega t, \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) + R \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0. \quad (4)$$

Der Haftbereich wird durch eine Bewegungsgleichung und eine algebraische Gleichung für die Haftkraft beschrieben, wohingegen der Gleitbereich durch zwei Bewegungsgleichung charakterisiert wird. Wie in [14] beschrieben, ist es intuitiv, dass der Amplitudengang des gesamten Systems bis zu einer bestimmten Losbrechamplitude dem Amplitudengang des linearen Systems folgt. Nach dem Losbrechen folgt ein nichtlinearer Bereich, worin Haft-Gleit-Bewegungen sowie vollständige Gleitbewegungen stattfinden. Der nichtlineare Bereich, wird erst durch das vollständige Schließen der Reibstelle über eine gesamte Periode beendet. Danach folgt der Amplitudengang des Gesamtsystems erneut dem Amplitudengang des linearen Systems.

2.1 Numerische Untersuchungen

Um einen ersten Einblick in die Dynamik des Lock-Up Dämpfers zu erlangen, werden numerische Parameterstudien durchgeführt. Die Parameter des Hauptsystems sind in der Regel a priori festgelegt und somit nicht modifizierbar. In diesen Studien werden sowohl die Masse als auch die Federsteifigkeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu Eins gesetzt. Da die Gesamtmasse des Systems nicht signifikant verändert werden soll, wird der Wert der sekundären Masse wesentlich kleiner als die primäre Masse gewählt, beispielsweise ein Zehntel der primären Masse. Damit die Amplituden über das gesamte Frequenzspektrum reduziert werden, wird die sekundäre Steifigkeit so gewählt, dass die Resonanz des Hauptsystems getilgt wird. Es bleibt lediglich die Losbrechkraft der Reibstelle als frei wählbarer Kon-

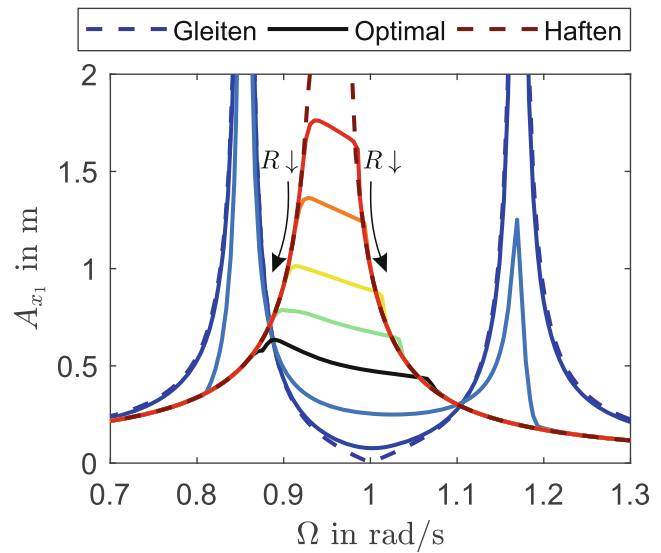


Abb. 2 Parameterstudie der Lock-Up Dämpfer für $R \in [0\text{N (blau)}, 1,5\text{N (rot)}]$, $R_{\text{opt}} \approx 0,0369\text{N}$

struktionsparameter. Die Parameterstudie zum Einfluss der Reibkraft wird in Abb. 2 für die Parameter

$$m_1 = 1\text{ kg}, \quad m_2 = 0,1\text{ kg}, \quad c_1 = 1\text{ N/m}, \\ c_2 = 0,1\text{ N/m}, \quad F = F_0 = 0,1\text{ N},$$

dargestellt [28]. Die Reibkraft R legt die Losbrechfrequenz fest und anhand deren gibt sie vor, ob das System sich hauptsächlich wie ein System mit einem oder zwei Freiheitsgraden verhält. Für ein System mit einem Peak ist es notwendig, dass die Losbrechfrequenz nach der ersten Resonanzfrequenz des Zweifreiheitsgradsystems liegt. Anhand dieser Parameterstudie ist die Existenz einer optimalen Reibkraft zu erkennen. Die optimale Reibkraft führt zu einer Minimierung der maximalen Amplitude im Frequenzspektrum und muss mit der Anregungskraft abgestimmt werden. Dies wird deutlich in Abb. 3. Eine Erhöhung der Erregerkraft bei gleichbleibender Reibkraft führt bei einem nicht abgestimmten Lock-Up Dämpfer zu wesentlich größeren Amplituden. Der Grund dafür liegt in der durch den Dämpfer dissipierten Energie. Die energiedissipierende Kraft ist konstant über den Weg. Dies führt zu einer zur relativen Amplitude proportionalen Energiedissipation. Für den nicht abgestimmten Fall reicht die dissipierte Energie nicht, um die Amplituden zu begrenzen. Bei den gewählten Parametern ist dieser Effekt bei einer Verdoppelung der Erregung zu sehen.

2.2 Analytische Untersuchungen

Nach dem Einblick in die Dynamik des Lock-Up Dämpfers, ist eine analytische Lösung für das tiefere Systemver-

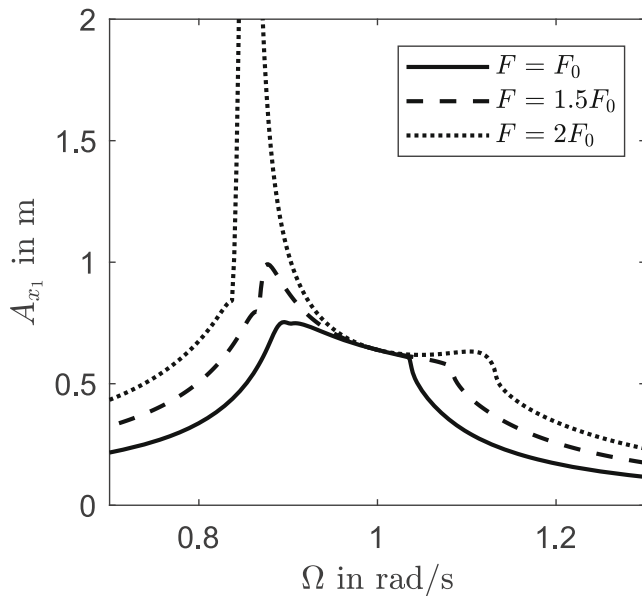


Abb. 3 Parameterstudie der Lock-Up Dämpfer für verschiedene Erregungskräfte bei $R = 0,05 \text{ N}$

ständnis vorteilhaft. Eine ausführliche Beschreibung dieser Lösung kann in [12] gefunden werden. Um eine analytische Lösung für dieses System herzuleiten, werden die nichtlinearen Gleichungen des Systems betrachtet. Es wird zusätzlich davon ausgegangen, dass dauerhaftes Gleiten auftritt. Der erste Schritt besteht darin, die Bewegungsgleichungen des Systems zu entdimensionieren. Die dazu notwendigen Transformationen lauten

$$z_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad z_2 = x_2 - x_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ll 1, \quad k = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}, \quad p = \frac{\lambda}{k}, \quad (6a)$$

$$\tau = kt, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}(\cdot), \quad \eta = \frac{\Omega}{k}, \quad \mu = \frac{R}{m_2 k^2 (1 - \varepsilon)}, \quad (6b)$$

$$f_0 = \frac{F}{k^2(m_1 + m_2)} = \varepsilon f, \quad f = \mathcal{O}(1). \quad (6c)$$

Die neu eingeführten Variablen z_1 und z_2 stellen jeweils die Bewegung des Massenschwerpunktes des Gesamtsystems und die relative Bewegung zwischen den Massen dar. Diese Transformationen führen auf die entdimensionierten Gleichungen

$$z_1'' + z_1 = \varepsilon(z_1 + z_2 + f \sin \eta \tau) - \varepsilon^2 z_2, \quad (7)$$

$$z_2'' + \frac{p^2}{1 - \varepsilon} z_2 + \mu \operatorname{sgn}(z_2') = z_1 - \varepsilon \left(z_2 + \frac{f}{1 - \varepsilon} \sin \eta \tau \right). \quad (8)$$

Um geeignete Gleichungen für das Mittelwertbildungsverfahren zu erhalten, wird zusätzlich eine Van-der-Pol-Transformation angewendet und die sich langsam ändernden Am-

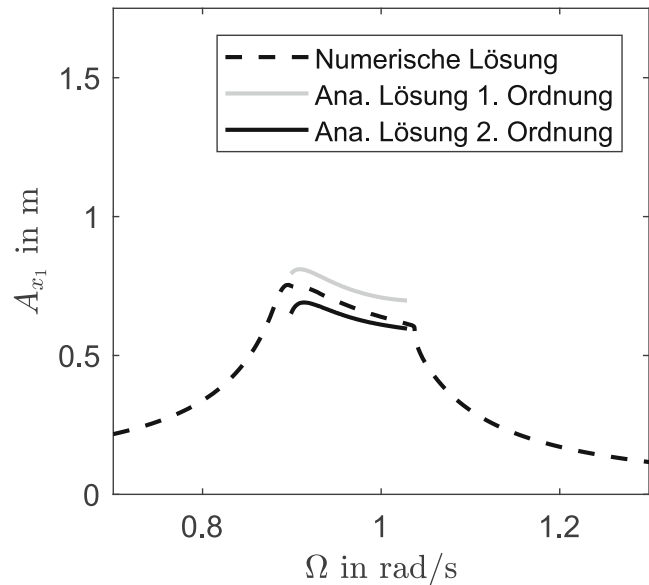


Abb. 4 Analytische Lösungen des Lock-Up Dämpfers

plituden und Phasenunterschiede der Variablen werden betrachtet.

$$z_1 = A \sin \varphi, \quad z_1' = A \cos \varphi, \quad (9)$$

$$z_2 = B \sin \psi, \quad z_2' = B p \cos \psi, \quad (10)$$

$$\gamma = \varphi - \eta \tau, \quad \varepsilon \delta_1 = 1 - \eta, \quad (11)$$

$$\theta = \psi - \varphi, \quad \varepsilon \delta_2 = p - \eta, \quad (12)$$

$$A' = \varepsilon(f \sin \eta \tau + A \sin \varphi + B \sin \psi) \cos \varphi - \varepsilon^2 B \sin \psi \cos \varphi, \quad (13)$$

$$\gamma' = \varepsilon \delta_1 - \varepsilon(f \sin \eta \tau + A \sin \varphi + B \sin \psi) \sin \varphi + \varepsilon^2 B \sin \psi \sin \varphi, \quad (14)$$

$$B' = \frac{\varepsilon}{p} ((\tilde{A} \sin \varphi - \tilde{\mu} \operatorname{sgn}(\cos \psi)) - (1 + p^2) B \sin \psi) \cos \psi - \frac{\varepsilon^2}{p} (p^2 B \sin \psi + \tilde{f} \sin \eta \tau) \cos \psi, \quad (15)$$

$$\theta' = \varepsilon \delta_2 + \frac{\varepsilon}{p} (\tilde{\mu} \operatorname{sgn}(\cos \psi) + (1 + p^2) B \sin \psi) \sin \psi - \frac{\varepsilon}{p} \tilde{A} \sin \varphi \sin \psi + \frac{\varepsilon^2}{p} (p^2 B \sin \psi + \tilde{f} \sin \eta \tau) \sin \psi. \quad (16)$$

Es ist anzumerken, dass in den Gln. (15) und (16) die Skalierungen $A = \varepsilon \tilde{A}$, $\mu = \varepsilon \tilde{\mu}$ und $f = \varepsilon \tilde{f}$ angewendet wurden. Die Begründung dieser Skalierung liegt daran, dass Gl. (8) nur von den Verhältnissen dieser Größen abhängt und nicht von den tatsächlichen Größen selbst. Werden diese ausgewählten Parameter mit dem gleichen Faktor skaliert, so liefert die Gleichung qualitativ dieselbe Lösung, die lediglich um den ausgewählten Faktor skaliert ist. Für eine ausführlichere Erklärung wird der Leser auf [12] hingewiesen. Wird ein Mittelwertbildungsverfahren erster und

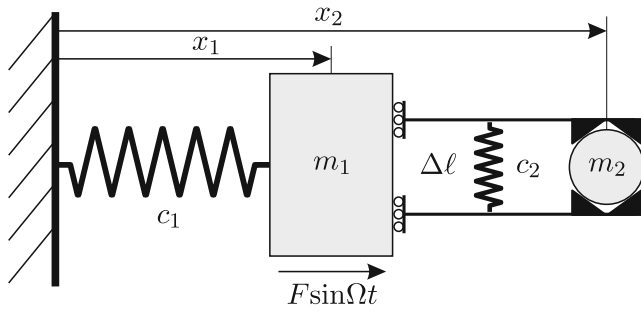


Abb. 5 Der vorgespannte trockene Reibungstilger

zweiter Ordnung auf die Gln. (13)–(16) angewendet, so ergeben sich die analytischen Lösungen in Abb. 4.

Die Lösung erster Ordnung stellt das qualitative Verhalten des Amplitudenverlaufs dar. Der Resonanzpeak des Systems wird begrenzt und eine abfallende Kennlinie im Resonanzbereich ist zu beobachten. Die Lösung zweiter Ordnung liefert eine quantitative Verbesserung des Ergebnisses.

3 Der vorgespannte trockene Reibungstilger

Analog zum Lock-Up Dämpfer besteht das Ziel des vorgespannten trockenen Reibungstilgers darin, die Dynamik eines Hauptsystems mit der Federsteifigkeit c_1 und mit der Masse m_1 zu verbessern. Der Reibungstilger wird an dem Hauptsystem angebracht und besteht aus einer zwischen zwei Keilen, mit dem Keilwinkel α , vorgespannten Masse m_2 , siehe Abb. 5. Die an den Keilen wirkende Vorspannkraft wird durch eine Feder der Steifigkeit c_2 hervorgerufen, welche um eine Länge Δl vorgespannt ist. Zusätzlich beschreibt der Reibkoeffizient μ den Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibkraft zwischen den Keilen und der Masse. Eine relative Auslenkung zwischen den Massen sorgt dafür, dass die Keile symmetrisch auseinander gedrückt werden. Weiterhin sind die Keile an der Hauptmasse so gelagert, dass sie nur eine Kraft in Schwingungsrichtung übertragen. Dadurch, dass die Keile auseinander gedrückt werden, stellt dieser Dämpfer eine robustere Variante im Vergleich zum Lock-Up Dämpfer dar. Die Reibkraft des Lock-Up Dämpfers ist konstant, wohingegen die Reibkraft im vorgespannten trockenen Reibungstilger von der relativen Auslenkung abhängt. Findet eine relative Verschiebung zwischen den Massen statt, so erhöht sich aufgrund der Geometrie und Federauslenkung die Normalkraft zwischen den Keilen und der Masse. Diese Änderung führt letztendlich zu einer variablen Reibkraft, welche begrenzte Schwingungsamplituden bei unterschiedlichen Erregerkraftamplituden erzielt. Analytische Untersuchungen zu diesem System ohne Vorspannung können in [13] ge-

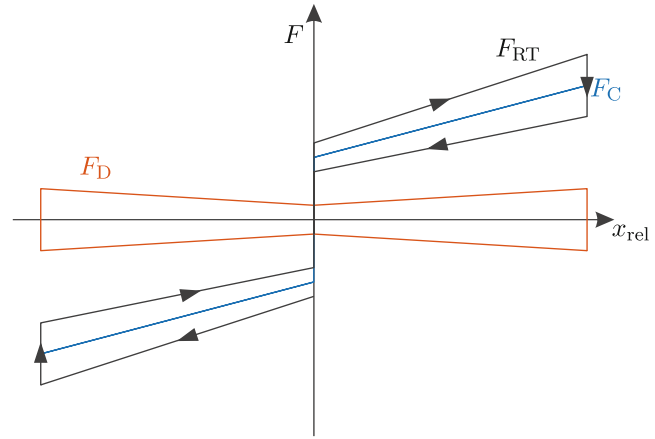


Abb. 6 Zerlegung der Dämpferkraft des Reibungstilgers mit $x_{rel} = x_2 - x_1$

funden werden. Die industrielle Umsetzung eines trockenen Reibungstilgers ohne Vorspannung in einem Antriebsstrang ist in [17] beschrieben und wird als Rupftilger bezeichnet.

Aus praktischer Sicht ist es sinnvoll kleine Reibkoeffizienten zu wählen, denn diese führen zu einer höheren Lebensdauer des Dämpfers [15]. Eine Verringerung des Reibkoeffizienten verringert ebenfalls die Energiedissipation. Falls dieser Effekt nicht erwünscht ist, kann eine Kompensation durch die Anpassung des Winkels α vorgenommen werden. Weiterhin ist es für kleine Reibwerte zulässig, die Bewegungsgleichungen des Systems in Bezug auf den Reibungsparameter zu linearisieren. Die Bewegungsgleichungen bleiben in Bezug auf die Koordinaten nichtlinear und für kleine Reibungskoeffizienten lauten diese im Haftbereich

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + c_1 x_1 = F \sin \Omega t, \tag{17}$$

$$H = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (F \sin \Omega t - c_1 x_1), \tag{18}$$

und im Gleitbereich

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - F_{RT} = F \sin \Omega t, \tag{20}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + F_{RT} = 0, \tag{21}$$

$$F_{RT} = 2c_2 (2 \tan \alpha (x_2 - x_1) + \Delta l \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)) \times \left(\tan \alpha + \frac{\mu}{\cos^2 \alpha} \operatorname{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \operatorname{sgn}(x_2 - x_1) \right). \tag{22}$$

Die Haftkraft H stellt in Gl. (18) die notwendige Zwangskraft dar, um eine Relativbewegung zwischen den Massen zu verhindern. Dementsprechend ist sie nicht die Haftkraft zwischen den Keilen und der Masse m_2 . Die Dämpferkraft kann in einen dissipationsfreien Anteil F_C

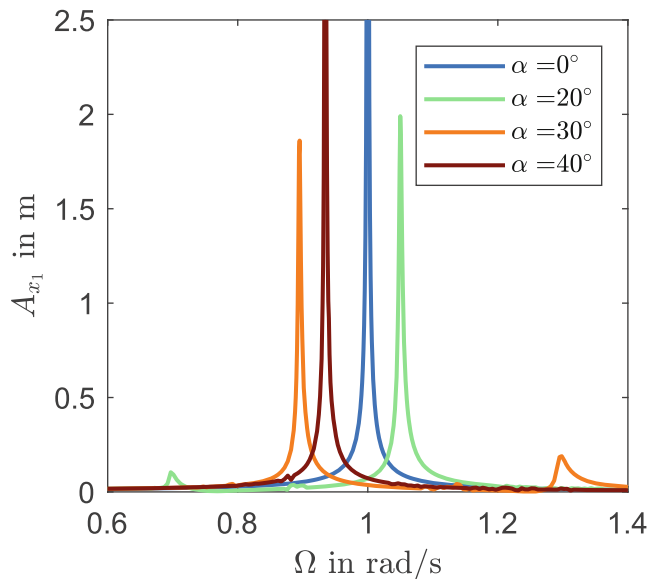


Abb. 7 Parameterstudie des Reibungstilgers für verschiedene Keilwinkel α

und einen dissipationsbehafteten Anteil F_D zerlegt werden, vgl. Abb. 6,

$$F_{RT} = F_C + F_D, \quad (23)$$

$$F_C = 2c_2(2\tan\alpha(x_2 - x_1) + \Delta\ell\text{sgn}(x_2 - x_1)\tan\alpha), \quad (24)$$

$$F_D = 2c_2(2\tan\alpha|x_2 - x_1| + \Delta\ell)\frac{\mu}{\cos^2\alpha}\text{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \quad (25)$$

Die Nichtlinearitäten im Reibungstilger sind deutlich ausgeprägter als bei dem Lock-Up Dämpfer, denn für diesen Dämpfer liegen Unstetigkeiten in der Dämpferkraft sowohl auf Lageebene als auch auf der Geschwindigkeitsebene vor. Zusätzlich ist der dissipationsbehaftete Anteil der Dämpferkraft proportional zum Weg. Dies führt dazu, dass die dissipierte Energie proportional zum Quadrat der relativen Amplitude ist, ähnlich wie bei einem viskosen Dämpfer. Anhand dieses Erkenntnisses bezeichnen die Autoren dieser Arbeit den Reibungstilger als ein pseudoviskoser Dämpfer.

3.1 Numerische Untersuchungen

Die erste Erkenntnisse dieses Systems werden durch numerische Simulationen gewonnen. Nach wie vor sind die Parameter des Hauptsystems beispielhaft auf Eins gesetzt und die sekundäre Masse wird als ein Zehntel der Hauptmasse gewählt. Der Reibungstilger bietet allerdings eine höhere Flexibilität in der Gestaltung, da als Konstruktionsparameter der Keilwinkel α , der Reibungskoeffizient μ , die Vorspannlänge $\Delta\ell$ und die sekundäre Steifigkeit c_2 in Frage kommen. Die numerischen Studien dieser Arbeit beschränken sich auf zwei Konstruktionsparameter α und $\Delta\ell$ und auf die Robustheit des Systems gegenüber der Erregungsamplitude F . Falls nicht anders spezifiziert, werden für die

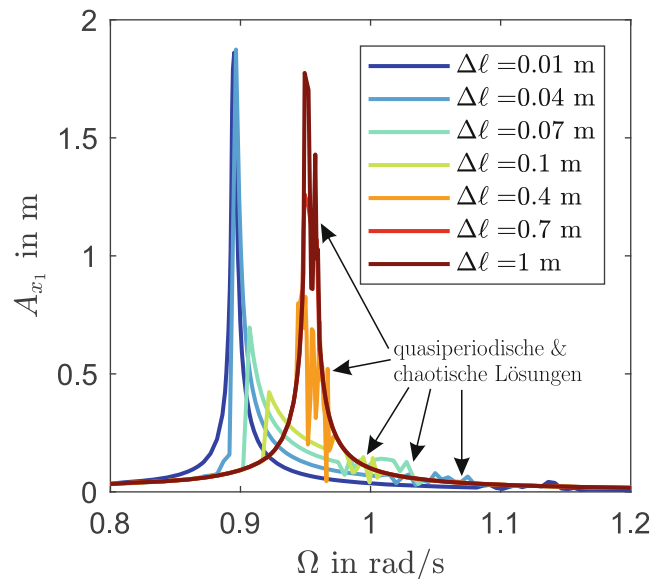


Abb. 8 Parameterstudie des Reibungstilgers für verschiedene Vorspannlängen $\Delta\ell$

numerischen Parameterstudien die folgenden Standardparameter verwendet

$$m_1 = 1 \text{ kg}, \quad m_2 = 0,1 \text{ kg}, \quad c_1 = 1 \text{ N/m},$$

$$c_2 = 0,1 \text{ N/m}, \quad F = F_0 = 0,01 \text{ N}, \quad \alpha = 30^\circ,$$

$$\Delta\ell = 0,01 \text{ m}, \quad \mu = 0,01.$$

Die Variation des Keilwinkels α zeigt, dass dieser Parameter einen wesentlichen Einfluss auf die effektive Steifigkeit $c_{2,\text{eff}}$ zwischen den Massen hat. Anhand des nicht dissipativen Anteils der Dämpferkraft lässt sich die effektive Steifigkeit als der Koeffizient der relativen Verschiebung ableiten, $c_{2,\text{eff}} = 4c_2\tan^2\alpha$, vgl. Gl. (24). Diese Einflüsse sind in Abb. 7 erkennbar. Bei kleinen Winkeln ergibt es sich eine niedrige effektive Steifigkeit und somit auch ein Peak bei niedrigen Frequenzen und ein Peak in der Nähe der Resonanz des haftenden Systems. Eine Erhöhung der effektiven Steifigkeit durch den Winkel α bewirkt eine Verschiebung beider Resonanzen nach rechts, eine Erhöhung des ersten Peaks und eine Verminderung des zweiten Peaks. Zusätzlich hat der Keilwinkel einen Einfluss auf die dissipierte Energie. Je höher der Keilwinkel, desto höher ist die dissipierte Energie bei gleichbleibender relativer Auslenkung, vgl. Gl. (25).

Ähnlich zur Reibkraft des Lock-Up Dämpfers bestimmt die Vorspannlänge die Losbrechfrequenz, bei der das System in den nichtlinearen Haft-Gleit-Bereich übergeht. Die Parameterstudie zur Vorspannlänge $\Delta\ell$ wird in Abb. 8 dargestellt. Eine verschwindende Vorspannlänge führt zu einem Zweifreiheitsgradsystem, das nicht ins Haften kommt. Wird die Vorspannlänge erhöht so reduziert sich der Gleitbereich und zwei Haftbereiche treten am Rande des Am-

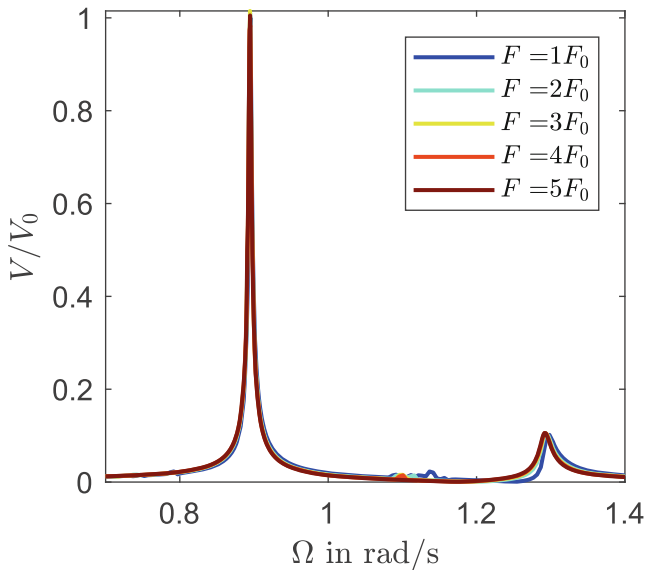


Abb. 9 Parameterstudie des Reibungstilgers für verschiedene Erregerkraftamplituden F mit $V = A_{x1}/F$, $V_0 = A_{x1,F_0}/F_0$

plitudengangs in Erscheinung. Je höher die Vorspannlänge desto größer werden die Haftbereiche. Für $\Delta\ell \rightarrow \infty$ haftet das System stets. Für dieses System existiert eine optimale Vorspannlänge. Diese optimale Vorspannlänge bewirkt die bestmögliche Schaltung zwischen den beiden Extremfällen und erzielt somit niedrigere Schwingungsamplituden. Weiterhin können nicht periodische Lösungen im System auftreten. Diese können sowohl quasiperiodisch als auch chaotisch sein. Für möglichst geringe Schwingungsamplituden sind dieser Art Lösungen zu vermeiden.

Die letzte Studie des Reibungstilgers beschäftigt sich mit der Robustheit des Systems gegenüber einer Änderung der Erregerkraftamplitude. Abb. 9 stellt die normierten Vergrößerungsfunktionen des Systems für verschiedene Erregerkraftamplituden dar. Im Gegensatz zum Lock-Up Dämpfer bleiben die Amplituden begrenzt. Die Kurven liegen nicht direkt aufeinander, dennoch sind die Unterschiede minimal. Eine Erhöhung der Erregerkraft bewirkt nahezu keine Änderung des Vergrößerungsfaktors. Folglich werden die Schwingungsamplituden des Systems näherungsweise mit dem gleichen Faktor verstärkt. Dies impliziert eine Art Skalierbarkeit der Amplitudengänge, obwohl eine genaue Skalierbarkeit nur bei linearen mechanischen Systemen mit viskoser Dämpfung zu beobachten ist. Diese letzten Zusammenhänge bekräftigen das pseudoviskose Verhalten des Reibungstilgers.

3.2 Analytische Untersuchungen

Die analytische Lösung des Reibungstilgers [13] wird analog zum Lock-Up Dämpfer über ein Mittelwertbildungsverfahren hergeleitet. Zu diesem Zweck werden die Gleichun-

gen entdimensioniert und die folgenden dimensionslosen Parameter eingeführt

$$\lambda = \frac{m_2}{m_1}, \quad k^2 = \frac{c_1}{m_1}, \quad f = \frac{F}{m_1 k^2}, \tag{26a}$$

$$\tau = kt, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}(\cdot), \quad \eta = \frac{\Omega}{k}, \tag{26b}$$

$$a = \tan^2\alpha, \quad b = \mu \frac{\tan\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{26c}$$

$$c = \Delta\ell \tan\alpha, \quad d = \frac{\Delta\ell \mu}{\cos^2\alpha}, \tag{26d}$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad f, \Delta\ell, \mu = \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{26e}$$

Werden diese dimensionslosen Parameter in Gln. (17)–(21) eingesetzt, so ergeben sich die dimensionslosen Differentialgleichungen

$$x_1'' + x_1 + 4\lambda a(x_1 - x_2) = f \sin\eta\tau - 4\lambda b|x_1 - x_2| \operatorname{sgn}(x_1' - x_2') - 2\lambda c \operatorname{sgn}(x_1 - x_2), \tag{27}$$

$$\lambda x_2'' - 4\lambda a(x_1 - x_2) = 4\lambda b|x_1 - x_2| \operatorname{sgn}(x_1' - x_2') + 2\lambda c \operatorname{sgn}(x_1 - x_2). \tag{28}$$

Gln. (27) und (28) werden zunächst in Matrixform zusammengefasst und eine Modaltransformation wird angewendet

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' + \mathbf{C}\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{x}, \Omega), \tag{29}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{z} = \mathbf{R}[p, q]^T, \tag{30}$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{z}'' + \mathbf{R}^T \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{z} = \varepsilon \mathbf{R}^T \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{z}) = \tilde{\varepsilon} \tilde{\mathbf{f}}_{NL}(\mathbf{z}), \tag{31}$$

$$p'' + \eta_1^2 p = \varepsilon \tilde{f}_{NL,1}(p, q, \Omega), \tag{32}$$

$$q'' + \eta_2^2 q = \varepsilon \tilde{f}_{NL,2}(p, q, \Omega). \tag{33}$$

Gln. (32) und (33) beschreiben die Bewegungsgleichungen des Systems in den Modalkoordinaten. Die Gleichungen sind schwach gekoppelt, da die Terme auf der rechten Seite der Gleichung von der Größenordnung ε sind. Um entkoppelte Gleichungen zu bekommen, wird nur die entsprechende Modalkoordinate ausschließlich in der Nähe ihrer Resonanzfrequenz berücksichtigt. Daher wird die verbleibende Modalkoordinate vernachlässigt [13]. Dies führt zu den entkoppelten Bewegungsgleichungen in den Modalkoordinaten

$$p'' + \eta_1^2 p = \varepsilon \tilde{f}_{NL,1}(p, 0, \Omega), \tag{34}$$

$$q'' + \eta_2^2 q = \varepsilon \tilde{f}_{NL,2}(0, q, \Omega). \tag{35}$$

Um eine analytische Lösung abzuleiten, wird analog wie beim Reibungstilger eine Van-der-Pol-Transformation auf das System angewendet und die sich langsam ändernde Amplitude und Phasenunterschiede des Systems werden untersucht

$$p = A_1 \sin\varphi_1, \quad p' = A_1 \eta_1 \cos\varphi_1, \quad \varphi_1 = \eta\tau + \psi_1, \tag{36}$$

$$q = A_2 \sin\varphi_2, \quad q' = A_2 \eta_2 \cos\varphi_2, \quad \varphi_2 = \eta\tau + \psi_2, \tag{37}$$

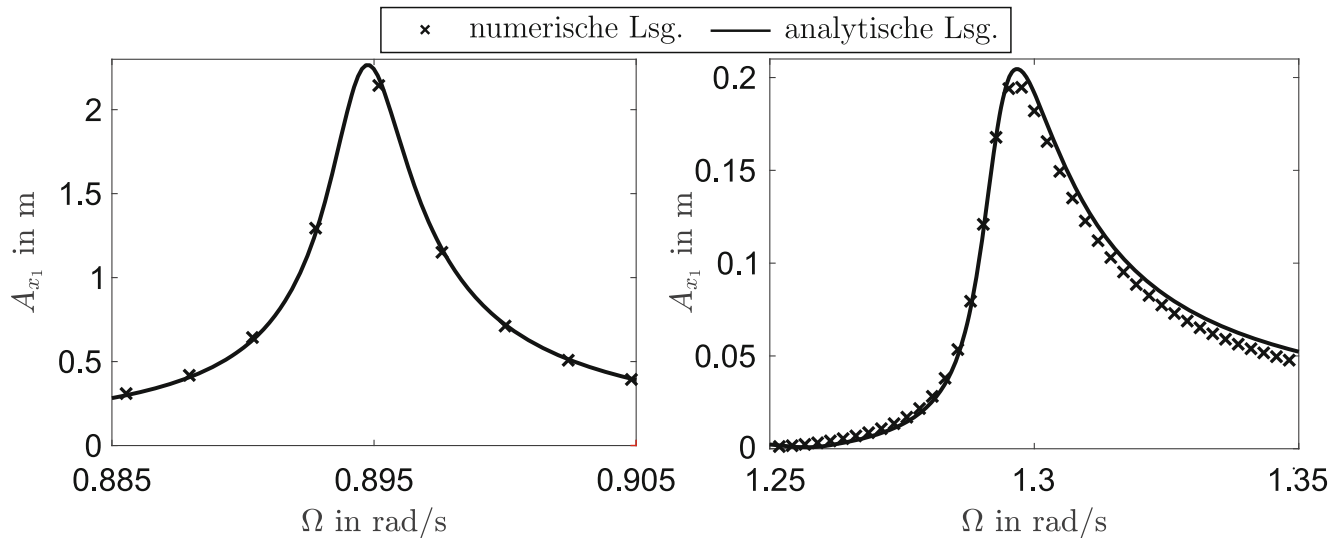


Abb. 10 Analytische Lösung des Reibungstilgers für die Standardparameter

$$i = \{1, 2\}, \quad \delta_i = \eta_i - \eta, \quad (38)$$

$$A_i' = \varepsilon \tilde{f}_{NL,i}(A_i, \psi_i, \varphi_i) \cos \varphi_i, \quad (39)$$

$$\psi_i' = \varepsilon \left(\delta_i - \frac{1}{A_i \eta_i} \tilde{f}_{NL,i}(A_i, \psi_i, \varphi_i) \cos \varphi_i \right). \quad (40)$$

Die stationäre Lösung der Gleichungen für A_i und ψ_i wird mit dem Mittelwertbildungsverfahren bestimmt und die Ergebnisse werden in Abb. 10 dargestellt. Zu erkennen ist, dass die analytische Lösung die numerischen Ergebnisse mit der Genauigkeit asymptotischer Verfahren annähert. Die Abweichungen zur numerischen Lösung sind von der Größenordnung ε , was die Gültigkeit der Lösung bestätigt.

4 Vergleich der Dämpfungsmechanismen

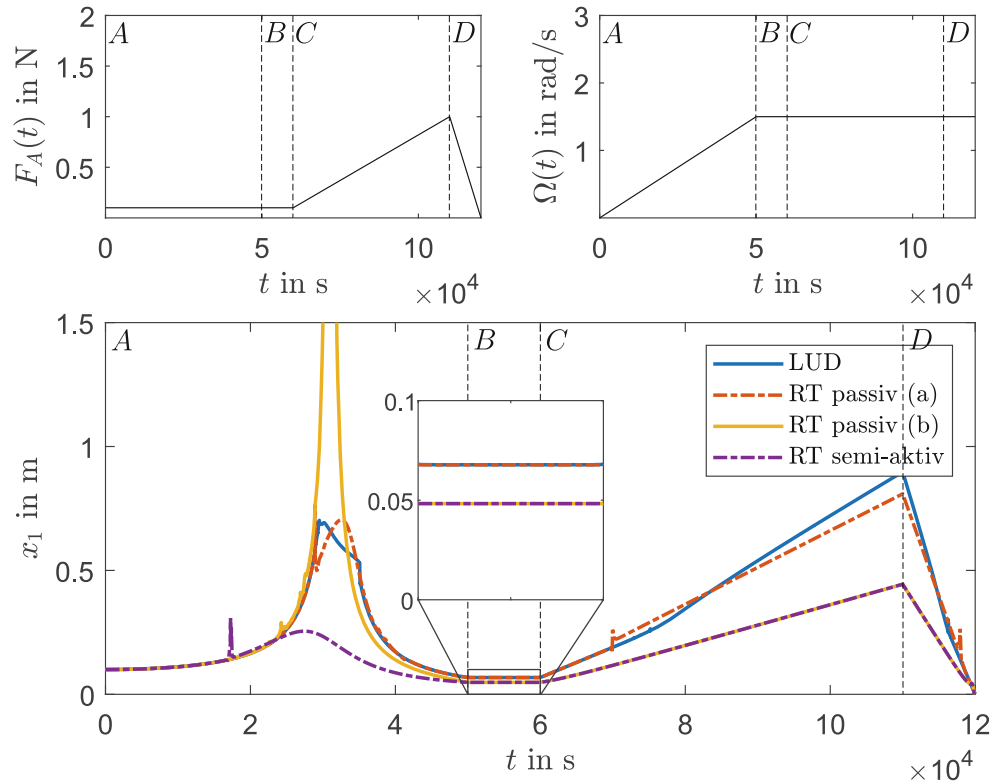
Nach der separaten Behandlung der Dämpfer beschäftigt sich dieser Abschnitt mit dem Vergleich dieser. Die Dämpfer werden mit derselben Kraft angeregt, welche verschiedene Betriebsverhältnisse darstellen soll. Es werden mögliche Einsatzszenarien der Dämpfer vorgestellt und deren Vorteile und Nachteile werden erläutert. Die angebrachte Kraft $F(t) = F_A(t) \sin(\varphi(t))$ ersetzt die harmonischen Kräfte in den Abbn. 1 und 5. Die Erregeramplitude wird durch die Funktion $F_A(t)$ beschrieben, wohingegen die Phase der Erregung durch die Integration der Kreisfrequenz $\Omega(t)$ erhalten wird, $\varphi(t) = \int_0^t \Omega(\tau) d\tau$. Die Funktionen der Erregeramplitude und der Erregerfrequenz sind in Abb. 11 dargestellt und setzen sich aus den Bereichen A bis D zusammen. Im Bereich A soll das Hauptsystem in Betrieb genommen werden. Dies wird durch eine sweepförmige Anregung von $\Omega = 0$ rad/s bis zur Nennfrequenz von $\Omega = 1,5$ rad/s dargestellt. Die Amplitude der Erregung soll während dem Sweep-Signal bei $F = 0,1$ N konstant bleiben.

Anschließend wird im Bereich B das System mit einer harmonischen Funktion angeregt, welche den normalen Betrieb des Hauptsystems darstellen soll. Der Bereich C der Erregung stellt eine Überbelastung des Systems dar, bei dem die Frequenz der Erregerkraft konstant bleibt und die Amplitude linear um das 10-Fache steigt. Anschließend wird das System kontrolliert heruntergefahren, in dem die Amplitude der Erregerkraft von $F = 1$ N bis $F = 0$ N linear abnimmt. Abb. 11 zeigt die Amplituden der transienten Schwingungen über der Zeit für vier Systeme: der Lock-Up Dämpfer, zwei passive, vorgespannte trockene Reibtilger und ein semi-aktiver, vorgespannter trockener Reibtilger.

Für den Lock-Up Dämpfer wird eine Losbrechkraft von $R = 0,045$ N eingestellt und alle weiteren Parameter werden nach Abschn. 2.1 gewählt. Es ist zu erkennen, dass die Amplituden während des Resonanzdurchgangs deutlich verringert werden. Der zu erwartende Resonanzpeak wird begrenzt und die Dynamik des Systems verbessert. Nachteile dieses System erscheinen im Überlastungsbereich, wo ein deutlicher Anstieg der Schwingungsamplituden zu erkennen ist.

Der passive Reibungstilger wird in zwei Konfigurationen untersucht. Einige Parameter der jeweiligen Fälle sind aus Tab. 1 zu entnehmen. Alle weiteren, nicht spezifizierten Parameter werden vom Abschn. 3.1 übernommen. Für beide Fälle wurde der Reibkoeffizient erhöht, um mit den Lock-Up Dämpfer vergleichbare Ergebnisse zu erzeugen. Der passive Reibungstilger im Fall (a) stellt ein ähnliches Verhalten wie der Lock-Up Dämpfer dar. Zusätzlich wird der Keilwinkel so eingestellt, dass die Resonanzfrequenzen des Zweifreiheitsgradsystems nicht innerhalb des nichtlinearen Resonanzdurchgangs liegen. Die Robustheit dieses Systems ist etwas besser als beim Lock-Up Dämpfer. Die Schwingungsreduktion im Überlastungsbereich ist jedoch

Abb. 11 Verlauf der Erregeramplitude $F_A(t)$ und Erregerkreisfrequenz $\Omega(t)$ (oben). Vergleich der Dämpfermechanismen in einem Betriebsszenario (unten)



Tab. 1 Parameterwahl für die passiven Reibtilger

	μ [-]	$\Delta\ell$ [m]	α [°]
Fall (a)	0,30	0,25	21,80
Fall (b)	0,1	0,05	36,87

gering. Die Parameter für den Fall (b) des passiven Reibungstilgers werden so gewählt, dass die Schwingungen im normalen Betrieb des Hauptsystems (Bereich B) minimiert werden. Der Keilwinkel wird so gewählt, dass das linearisierte System die Nennfrequenz tilgt. Diese Parameterwahl führt zu hohen Schwingungsamplituden während des Resonanzdurchgangs. Die Vorteile dieses Systems sind im normalen Betrieb und im Überlastungsbereich zu erkennen. Im Vergleich zum Lock-Up Dämpfer und zum Fall (a) sind in diesen Bereichen die Amplituden geringer.

Aus den Untersuchungen der passiven Systeme sind die Grenzen derartiger Systeme zu erkennen. Diese können entweder den Resonanzdurchgang oder die Robustheit eines Systems optimieren. Eine optimale Lösung für alle Bereiche lässt sich durch ein semi-aktives System gestalten. Zu diesem Zweck wird der Keilwinkel des Reibungstilger zeitlich vorgegeben, sodass die momentane Erregerfrequenz getilgt wird. Alle verbleibenden Parameter werden vom passiven Fall (b) übernommen. Der zeitliche Verlauf vom Keilwinkel wird so gestaltet, dass die momentane Erregerfrequenz näherungsweise getilgt wird. Die Näherung für

den entsprechenden Winkel wird anhand des linearisierten Systems bestimmt, vgl. Gl. (27) und (28),

$$\alpha(t) = \arctan \left(\sqrt{\frac{m_2 \Omega(t)^2}{4c_2}} \right). \tag{41}$$

Der semi-aktive Reibtilger weist geringere Amplituden auf, vermeidet die hohen Amplituden beim Resonanzdurchgang und zeigt sich robust im Überlastungsfall. Somit kombiniert der semi-aktive Reibtilger die Vorteile der passiven Systeme.

5 Diskussion und Ausblick

Diese Arbeit beschäftigt sich mit zwei auf trockener Reibung basierten Dämpfer: der Lock-Up Dämpfer und der vorgespannte trockene Reibtilger. Die Systeme wurden zuerst separat behandelt und einen Einblick in ihrer Systemdynamik wurde vorgestellt. Anschließend wurden die Mechanismen verglichen. Der Lock-Up Dämpfer zeigt sich als ein wirkungsvoller Mechanismus, um Schwingungen zu vermeiden, solange die Größenordnung der im System auftretenden Kräfte und Störungen bekannt ist. Falls die Reibkraft und die Erregerkraft nicht passend zueinander gewählt werden, treten große Schwingungsamplituden im System auf. Der vorgespannte trockene Reibungstilger bietet eine höhe-

re Flexibilität in der Gestaltung als der Lock-Up Dämpfer. Dieser kann in seiner passiven Form entweder die Amplituden beim Resonanzdurchgang begrenzen oder für geringe Schwingungsamplituden und hohe Robustheit im Betrieb sorgen. Die semi-aktive Gestaltung des vorgespannten trockenen Reibungstilgers bietet einen universalen Dämpfer, welcher die Dynamik des Systems sowohl beim Resonanzdurchgang als auch im normalen Betrieb verbessert.

Der Reibungstilger kann die Dynamik des Systems beeinträchtigen, in dem nicht periodische Lösungen durch die Keilgeometrie erzeugt werden. Diese Art Lösungen sollen zukünftig untersucht werden. Weitere Untersuchungen zum kurz vorgestellten semi-aktiven Reibungstilger sind ebenfalls notwendig. Dieser hat ein hohes Potenzial zur Schwingungsreduktion gezeigt. In den vorgestellten Simulation ist allerdings die Anregung bekannt gewesen. Die Fragestellung nach einem robusten Regelungskonzept ist noch offen.

Förderung Diese Arbeit wurde vom Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) – Grant FI 1761/2-1 im Rahmen des Schwerpunktprogramms SPP 1897 „Calm, Smooth and Smart – Novel Approaches for Influencing Vibrations by Means of Deliberately Introduced Dissipation“ gefördert.

Funding Open Access funding provided by Projekt DEAL.

Open Access Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.

Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

Literatur

- Alspaugh D (1978) Analysis of coulomb friction vibration dampers. *J Sound Vib* 57(1):65–78
- Babitsky VI (2013) *Theory of vibro-impact systems and applications*. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg
- Berthillier M, Dupont C, Mondal R, Barrau JJ (1998) Bladed forced response analysis with friction dampers. *J Vib Acoust* 120(2):468–474
- Ciğeroğlu E, Özgüven HN (2006) Nonlinear vibration analysis of bladed disks with dry friction dampers. *J Sound Vib* 295(3):1028–1043
- Den Hartog JP (1985) *Mechanical vibrations*. Courier Corporation, New York
- Dixon JC (2008) *The shock absorber handbook*. John Wiley & Sons, New York
- Dowell E, Schwartz H (1983) Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached, part i: Theory. *J Sound Vib* 91(2):255–267
- Dowell E, Schwartz H (1983) Forced response of a cantilever beam with a dry friction damper attached, part ii: Experiment. *J Sound Vib* 91(2):269–291
- Dyke S, Spencer B Jr, Sain M, Carlson J (1998) An experimental study of mr dampers for seismic protection. *Smart Mater Struct* 7(5):693
- Feeny B, Guran A, Hinrichs N, Popp K (1998) A historical review on dry friction and stick-slip phenomena. *Appl Mech Rev* 51(5):321–341
- Ferri A (1995) Friction damping and isolation systems. *J Vib Acoust* 117(B):196–206
- Fidlin A, Aramendiz J (2019) Study on the dynamics of a lock-up mass damper: asymptotic analysis and application limits. *Nonlinear Dyn* 97:1867–1875
- Fidlin A, Gafur N (2017) On the dynamics of friction based tuned mass dampers. *Proceedings of ENOC the 9th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference*
- Fidlin A, Lobos M (2014) On the limiting of vibration amplitudes by a sequential friction-spring element. *J Sound Vib* 333(23):5970–5979
- Fleischer G, Wachter K (1987) *Konstruktionslehre für Maschineningenieure*. Technik, Berlin
- Greiner-Petter C, Tan AS, Sattel T (2014) A semi-active magnetorheological fluid mechanism with variable stiffness and damping. *Smart Mater Struct* 23(11):115008
- Hausner M, Hässler M (2012) Kupplungsscheibe mit frequenztilger gegen rufschwingungen. *ATZ Automobiltech Z* 114(1):64–69
- Jo H, Yabuno H (2010) Amplitude reduction of parametric resonance by dynamic vibration absorber based on quadratic nonlinear coupling. *J Sound Vib* 329(11):2205–2217
- Luo G, Ma L, Lv X (2009) Dynamic analysis and suppressing chaotic impacts of a two-degree-of-freedom oscillator with a clearance. *Nonlinear Anal Real World Appl* 10(2):756–778
- Masri S (1970) General motion of impact dampers. *J Acoust Soc Am* 47(1B):229–237
- Mikhlin YV, Reshetnikova S (2006) Dynamical interaction of an elastic system and a vibro-impact absorber. *Math Probl Eng*. <https://doi.org/10.1155/MPE/2006/37980>
- Morgen B, Kurama Y (2004) A friction damper for post-tensioned precast concrete beam-to-column joints. *PCI J* 49(4):112–133
- Popp K, Panning L, Sextro W (2003) Vibration damping by friction forces: theory and applications. *Modal Anal* 9(3–4):419–448
- Ricciardelli F, Vickery BJ (1999) Tuned vibration absorbers with dry friction damping. *Earthq Eng Struct Dyn* 28(7):707–723
- Rüdinger F (2006) Optimal vibration absorber with nonlinear viscous power law damping and white noise excitation. *J Eng Mech* 132(1):46–53
- Starosvetsky Y, Gendelman O (2009) Vibration absorption in systems with a nonlinear energy sink: nonlinear damping. *J Sound Vib* 324(3–5):916–939
- Sun J, Jolly MR, Norris M (1995) Passive, adaptive and active tuned vibration absorbers—a survey. *J Mech Des* 117(B):234–242
- Tan AS, Aramendiz J, Ross KH, Sattel T, Fidlin A (2019) Comparative study between dry friction and electrorheological fluid switches for tuned vibration absorbers. *J Sound Vib* 460:114874. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114874>
- Tang D, Gavin HP, Dowell EH (2004) Study of airfoil gust response alleviation using an electro-magnetic dry friction damper. part 1: Theory. *J Sound Vib* 269(3–5):853–874
- Tang D, Gavin HP, Dowell EH (2004) Study of airfoil gust response alleviation using an electro-magnetic dry friction damper. part 2: experiment. *J Sound Vib* 269(3–5):875–897

31. Weber F, Høgsberg J, Krenk S (2010) Optimal tuning of amplitude proportional coulomb friction damper for maximum cable damping. *J Struct Eng* 136(2):123–134
32. Wong C, Daniel M, Rongong J (2009) Energy dissipation prediction of particle dampers. *J Sound Vib* 319(1-2):91–118
33. Yan MJ, Dowell E (1972) Governing equations for vibrating constrained-layer damping sandwich plates and beams. *J Appl Mech* 39(4):1041–1046