

Untersuchungen zur Asymptotik und zum Erwartungswert im verallgemeinerten Coupon-Collector-Problem

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Judith Schilling, M.Sc.
geboren in Leimen

Tag der mündlichen Prüfung: 11.03.2020

Referent: Prof. Dr. Norbert Henze

Korreferent: Prof. Dr. Daniel Hug

DANKSAGUNG

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin des Instituts für Stochastik am Karlsruher Institut für Technologie. Ich möchte mich an dieser Stelle bei all denjenigen bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben.

Zuallererst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Norbert Henze bedanken, der mich bereits während meines Lehramtsstudiums für die Stochastik begeisterte. Besonders hervorheben möchte ich sein Engagement und seine Wertschätzung für die Lehramtsstudenten sowie seine Fähigkeit, das *Stochastik-Gen* zu wecken. Ich lernte sehr viel durch sein umfangreiches Fachwissen und seine Liebe zur deutschen Sprache. Ich hatte immer die Möglichkeit, eigene Ideen einzubringen, konnte mich aber auch auf seine Expertise und Unterstützung verlassen. Darüber hinaus hat er mir den Weg in die Didaktik der Stochastik geöffnet. Auch in diesem Gebiet hatte ich die Möglichkeit, von seiner langjährigen Erfahrung zu profitieren.

Prof. Dr. Daniel Hug danke ich für seine Bereitschaft, der Korreferent dieser Arbeit zu sein. Die Arbeit wurde durch sein ausführliches Feedback sehr aufgewertet. Ich freue mich über sein Interesse an meiner Dissertation.

Ich hatte das große Glück, in einer sehr positiven und angenehmen Atmosphäre zu arbeiten. Dafür danke ich allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Stochastik, von denen viele zu guten Freunden geworden sind. Besonderer Dank gebührt Celeste Mayer und Andreas Eberl, die zu jeder Zeit ein offenes Ohr für Fragen und Probleme jeglicher Art hatten. Ich konnte mich immer auf die Unterstützung und den organisatorischen Überblick von Michaela Regelin, Tatjana Dominic und Jenny Rausch im Sekretariat verlassen.

Auch bei der gesamten Abteilung für Didaktik möchte ich mich bedanken. Die enge Zusammenarbeit mit Ingrid Lenhardt, Verena Möhler, Lea Schenk, Peter Kaiser und Janina Gärtner hat mir große Freude bereitet.

Besonders dankbar bin ich meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung und das unermüdliche Vertrauen in mich. Vor allem meinen Eltern und meinem Verlobten Erik Fischer gebührt mehr Dankbarkeit als ich hier zum Ausdruck bringen kann.

Zu guter Letzt möchte ich meinen Mathematiklehrern Herrn Zuber, Herrn Kraft und Herrn Möhn danken. Sie haben mich für die Mathematik begeistert, mich gefördert, unterstützt und ermutigt. Durch ihre Vorbildfunktion habe ich mich für das Lehramtsstudium entschieden.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Der Fall $s = 1$	5
2.1. Fächer mit gleichen Wahrscheinlichkeiten	5
2.1.1. Erwartungswert und Varianz	7
2.1.2. Asymptotische Verteilung	8
2.1.3. Vollständige Serien und Extremwertverteilungen	8
2.1.4. Anteilig vollständige Serien	10
2.2. Fächer mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten	11
2.2.1. Erwartungswert und Varianz	12
2.2.2. Asymptotische Verteilung	16
2.3. Warten auf die c -te Serie	19
3. Der Fall $s \geq 1$	21
3.1. Teilmengen mit gleichen Wahrscheinlichkeiten	23
3.2. Teilmengen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten	25
3.2.1. Die Fälle $s = 1$ und $s = 2$	26
3.2.2. Der Fall $n = ks$	28
3.3. Zusammenfassung	29
4. Asymptotische Untersuchungen im allgemeinen Modell	31
4.1. Gleich wahrscheinliche s -Teilmengen und $c \geq 1$	32
4.1.1. Beweis von Theorem 4.1.1	35
4.2. s -Teilmengen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten und $c = 1$	39
4.2.1. Beweis von Theorem 4.2.1	42
5. Vollständige Serien und Kollisionen	49
5.1. Asymptotische Unabhängigkeit von X_n und Y_n	50
5.1.1. Beweis von Theorem 5.1.1	52
6. Minimierung der erwarteten Anzahl an Besetzungsvorgängen	55
6.1. Optimalität der Gleichverteilung in den Fällen $s = 1$ und $s = n - 1$	55
6.2. Minimierung von $E_n^{(3)}$	68
6.2.1. Der Spezialfall $n = 5$	69

6.2.2. Der Spezialfall $n = 7$	71
6.2.3. Ausblick und Vermutungen	71
A. Beweise der Lemmata	75
B. Ergänzende Beweise	87
B.1. Nachweis von (2.25)	87
B.2. Beweis von (2.26) mithilfe der Formel des Ein- und Ausschließens	88
B.3. Nachweis der zweiten Voraussetzung für die Momentenmethode	99
B.4. Alternativer Beweis von Theorem 6.1.1	100
C. Ergänzende Formeln und Rechnungen	103
C.1. Die Formel des Ein- und Ausschließens	103
C.2. Die Bonferroni-Ungleichungen	104
C.3. Darstellung von $\mathbb{P}(X_n = k)$ durch Stirling-Zahlen zweiter Art	104
C.4. Integraldarstellung für $E_n^{(1)}$	105
C.5. Der Erwartungswert von $X_n(X_n + 1)$	106
C.6. Berechnung der Erwartungswerte	108
C.7. Berechnung der Eigenwerte von \hat{H}'	110
D. Rechnungen mit Maple	111
D.1. Optimierung im Fall $s = 3$ und $n = 5$	111
D.2. Optimierung im Fall $s = 3$ und $n = 7$	116
D.3. Minimierung des Erwartungswertes für das konkrete Modell, $s = 3$, $n = 5$	122
D.4. Eigenwerte in Abhängigkeit von s und n	123
Literaturverzeichnis	125

SYMBOLVERZEICHNIS

n	Anzahl der Fächer	S.1
s	Anzahl der Teilchen, die pro Besetzungsvorgang verteilt werden	S.1
c	Anzahl der vollständigen Serien, auf die gewartet wird	S.1
$X_n^{(s,c)}$	Zufallsvariable, die die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur c -ten vollständigen Serie beschreibt. Im Fall $c = 1$ ist $X_n^{(s,1)} = X_n^{(s)}$	S.1
p_{n,i_1,\dots,i_s}	Wahrscheinlichkeit, die Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_s zu besetzen	S.1
$\mathbf{p}^{(s)}$	Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen s -Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ in lexikographischer Ordnung enthält	S.1
$E_n^{(s,c)}(\mathbf{p})$	Erwartungswert von $X_n^{(s,c)}$ in Abhängigkeit der Besetzungswahrscheinlichkeiten	S.3
$A_{n,j}^{(c)}(k)$	Ereignis, dass Fach Nummer j nach k Besetzungsvorgängen weniger als c Teilchen enthält	S.3
$Z_n^{(s,c)}(k)$	Anzahl der Fächer mit weniger als c Teilchen nach dem Verteilen von $k \cdot s$ Teilchen	S.3
$Y_n = Y_n^{(d)}$	Zufallsvariable, die die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur ersten d -fach Kollision angibt	S.3
$P_{n,i_1,\dots,i_k}^{(s)}$ $= P_{n,i_1,\dots,i_k}$	Wahrscheinlichkeit, dass k bestimmte Fächer in einer s -Auswahl enthalten sind	S.21
$\mathbf{P}_n^{(k)} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$	Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,i_1,\dots,i_k}, \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, in lexikographischer Ordnung enthält	S.21
$S_{n,i_1,\dots,i_k}^{(s)}$ $= S_{n,i_1,\dots,i_k}$	Wahrscheinlichkeit, mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_k zu besetzen	S.21
$B_{n,i}(\ell)$	Ereignis, dass Fach Nummer j nach ℓ mindestens d Teilchen enthält	S.49
$V_n(\ell)$	Anzahl der Fächer mit mindestens d Teilchen nach dem Verteilen von ℓ Teilchen	S.50

KAPITEL 1

EINLEITUNG

In einem Fächer-Modell mit n Fächern, die von 1 bis n nummeriert sind, werden in jedem Besetzungsvorgang s verschiedene der Fächer mit je einem Teilchen belegt. Die s ausgewählten Fächer bezeichnen wir im Folgenden als s -Auswahl oder s -Teilmenge. Die Wahrscheinlichkeit, die Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_s zu besetzen, sei p_{n,i_1,\dots,i_s} . Die s -Auswahl wird in jedem Schritt zufällig getroffen, und es wird angenommen, dass Ereignisse, die sich auf unterschiedliche Besetzungsvorgänge beziehen, stochastisch unabhängig sind. Gegenstand dieser Arbeit ist die Zufallsvariable $X_n^{(s,c)}$, welche die Anzahl der Besetzungsvorgänge beschreibt, bis jedes der n Fächer mindestens c Teilchen enthält. Wurde jedes Fach einmal besetzt, so sprechen wir von einer *vollständigen Serie*. Wir verwenden im Folgenden auch den Begriff *Zeitpunkt*, um die Anzahl an Besetzungsvorgängen zu beschreiben, bis ein Ereignis eintritt. Im Fall $c = 1$ schreiben wir $X_n^{(s)} := X_n^{(s,1)}$. Wir wollen den Fall untersuchen, in dem die Wahrscheinlichkeiten für die s -Teilmengen verschieden sein können und betrachten somit eine Verallgemeinerung des *klassischen Coupon-Collector-Problems*, bei dem $c = 1$ und $s = 1$ gelten und jedes Fach mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ belegt wird.

Dieses klassische Problem geht zurück auf die im Jahr 1711 erschienene Arbeit *De Mensura Sortis* von A. de Moivre (siehe [41]). De Moivre betrachtet für natürliche Zahlen n und p den n -maligen Wurf eines $(p + 1)$ -seitigen Würfels und untersucht die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorher festgelegte Anzahl an Seiten mindestens einmal auftritt. Auch Laplace (1775) und Euler (1785) untersuchen Problemstellungen, die auf das klassische Coupon-Collector-Problem zurückgeführt werden können (siehe [52], S. 252 ff.). Dabei berechnet Laplace die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem k -maligen Ziehen mit Zurücklegen von je s aus insgesamt n Losen alle Nummern mindestens einmal gezogen werden und verallgemeinert somit das von de Moivre gestellte Problem auf den Fall $s \geq 2$. Euler beschäftigt sich mit einer nahezu identischen

Fragestellung, verweist aber weder auf die Arbeit von de Moivre noch auf die von Laplace (siehe [52]). Pólya deutet in [45] bereits an, dass das klassische Coupon-Collector-Problem einige Einschränkungen fordert, die in der Realität selten erfüllt sind. Eine Voraussetzung ist die Gleichwahrscheinlichkeit der Fächer. Eine Verallgemeinerung, bei der die Fächer unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten aufweisen dürfen, wird erstmalig 1934 von Hermann von Schelling und damit über 200 Jahre nach der Arbeit von de Moivre untersucht [48, 49].

Seit dem 18. Jahrhundert entstanden zahlreiche Arbeiten, die sich mit Wartezeiten auf vollständige Serien in ganz unterschiedlichen Modellen beschäftigen. Der Name Coupon-Collector-Problem entwickelte sich allerdings erst zu Beginn des 20. Jahrhunderts und geht auf eine Arbeit von Georg Pólya zurück. Dieser untersuchte im Jahr 1930, wie viele Päckchen mit je zwei Sammelbildern im Mittel gekauft werden müssen, um eine Sammlung zu komplettieren (siehe [45]).

Die Herausgabe von Sammelbildern hat ihren Ursprung im 19. Jahrhundert. Zu Werbezwecken beginnt Aristide Boucicaut, der Besitzer des Pariser Kaufhauses „Au Bon Marché“, bunte Bilder an seine Kunden zu verteilen, die auf der Rückseite Werbung tragen. Diese Bilder erfreuen sich so großer Beliebtheit, dass ganze Serien herausgegeben werden. Schon bald gab es die ersten Nachahmer. Besonders erfolgreich waren in Deutschland die Fleischextrakt-Firma Liebig, die 6400 Bilder in über 1100 Serien herausgab, und die Firma Stollwerck, die den Schokoladentafeln in Süßigkeitenautomaten Bilder beilegte (siehe [13], [54], S. 39). Dieser Trend des Sammelns von Bildchen hat sich bis heute gehalten und gibt Anlass für eine Vielzahl mathematischer Fragestellungen. Ein sehr populäres Beispiel sind die im Rahmen der Fußball-WM angebotenen Sammelalben des Panini-Verlags, die ganz ohne Werbezweck verkauft werden. Im Jahr 2018 galt es, ein Sammelalbum mit $n = 682$ Plätzen zu füllen, wobei die Bilder in Päckchen der Größe $s = 5$ verkauft wurden.

Die wichtigsten Ergebnisse, die seit 1711 für $s = 1$ erzielt wurden, sind in Kapitel 2 zusammengefasst. In Kapitel 3 werden bereits vorhandene Resultate für den Fall $s \geq 1$ vorgestellt. Diese beschränken sich weitestgehend auf die Situation, in der $c = 1$ gilt und jede s -Auswahl dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

Mit Kapitel 4 werden wir die vorhandene Literatur um zwei Grenzwertsätze ergänzen. Einerseits untersuchen wir das asymptotische Verhalten von $X_n^{(s,c)}$ für den Fall, dass $c = 1$ gilt und die s -Teilmengen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten besetzt werden. Zum anderen betrachten wir den Fall $c \geq 1$, unter der Voraussetzung, dass die s -Teilmengen alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegt werden.

In Kapitel 6 beschäftigen wir uns mit der Wahl der Besetzungswahrscheinlichkeiten, welche die erwartete Zeit bis zur ersten vollständigen Serie minimiert. Um die Notation übersichtlich zu halten, beschreiben wir mit $\mathbf{p}_n^{(s)} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{s}}$ den Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen s -Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ in lexikographischer Ordnung enthält. Wir indizieren $\mathbf{p}_n^{(s)}$ nur dann mit n und s , wenn die Parameter nicht eindeutig durch den Kontext festgelegt sind. Gehen wir davon aus, dass alle s -Teilmengen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegt werden,

so verwenden wir die Schreibweise $\mathbf{p}_{GW} := \mathbf{p}_{n,GW}^{(s)}$. Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $X_n^{(s,c)}$, der im Allgemeinen mit \mathbb{E} bezeichnete wird, hängt von der Wahl des Vektors $\mathbf{p}_n^{(s)}$ ab. Um diese Abhängigkeit herauszuheben, nutzen wir die Notation

$$E_n^{(s,c)}(\mathbf{p}) := E_n^{(s,c)}(\mathbf{p}_n) := E_n^{(s,c)}(\mathbf{p}_n^{(s)}) := \mathbb{E}(X_n^{(s,c)}).$$

Dabei verwenden wir im Fall $c = 1$ die Schreibweise $E_n^{(s)}(\mathbf{p}) := E_n^{(s,1)}(\mathbf{p})$ und setzen im Fall $s = 1, c = 1$ abkürzend $E_n(\mathbf{p}) := E_n^{(1,1)}(\mathbf{p})$. Neben $X_n^{(s,c)}$ werden wir die Zufallsvariable $Z_n^{(s,c)}(k)$ betrachten. Diese gibt die Anzahl der Fächer an, die nach k Besetzungsvorgängen weniger als c Teilchen enthalten.

Für eine beliebige Menge A sei die Indikatorfunktion $\mathbb{1}\{A\}$ durch

$$\mathbb{1}_A(x) := \mathbb{1}\{A\}(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases} \quad (1.1)$$

definiert. Beschreibt $A_{n,j}^{(c)}(k)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, das Ereignis, dass Fach Nummer j nach k Besetzungsvorgängen weniger als c Teilchen enthält, so gilt

$$Z_n^{(s,c)}(k) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_{n,j}^{(c)}(k)\}. \quad (1.2)$$

Weil die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur c -ten vollständigen Serie genau dann kleiner oder gleich k ist, wenn es nach k Besetzungsvorgängen kein Fach mit weniger als c Teilchen gibt, gilt

$$\mathbb{P}(X_n^{(s,c)} \leq k) = \mathbb{P}(Z_n^{(s,c)}(k) = 0). \quad (1.3)$$

In Kapitel 4 werden wir diesen Zusammenhang nutzen, indem wir zunächst Grenzwertsätze für $Z_n^{(s,c)}(k)$ angeben, um anschließend Eigenschaften von $X_n^{(s,c)}$ abzuleiten.

Warten wir nicht auf vollständige Serien, sondern auf den Zeitpunkt, zu dem das erste Mal $d \geq 2$ Teilchen in einem der Fächer enthalten sind, so sprechen wir vom Warten auf die erste d -fach Kollision. Die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zu diesem Ereignis beschreibt, bezeichnen wir mit $Y_n^{(d)}$. In Kapitel 5 werden wir für den Fall $s = 1$ und $c = 1$ zeigen, dass die Zufallsvariablen $X_n^{(s,c)}$ und $Y_n^{(d)}$ asymptotisch unabhängig sind.

Die Arbeit wird durch einen umfangreichen Anhang abgeschlossen, in dem die Beweise der Lemmata, ergänzende Beweise und Rechnungen, sowie Computersimulationen und Literaturangaben aufgeführt sind.

Wir verwenden in dieser Arbeit durchgängig folgende Notationen:

Mit \mathbb{N} , \mathbb{R} und \mathbb{R}^+ bezeichnen wir die natürlichen, die reellen und die positiven reellen Zahlen. Weiter umfasse $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ alle natürlichen Zahlen und die Null. Für $n \in \mathbb{N}$ ist \mathbb{R}^n die Menge aller reellen n -Tupel. Für eine reelle Zahl x sei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner

oder gleich x ist und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist, das heißt

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

und

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}.$$

Für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von Funktionen verwenden wir die auf den Mathematiker Edmund Landau (1877-1938) zurückgehende *Landau-Symbolik* (vergleiche [1], Seite 396). Demnach ist für Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(n) \neq 0$ für hinreichend große n

$$f(n) = O(g(n)), \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

falls der Quotient f/g beschränkt ist, f also nicht wesentlich schneller als g wächst. Weiter schreiben wir

$$f(n) = o(g(n)), \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

falls f gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar ist, also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 0$ gilt.

Für zwei Funktionen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir außerdem $a(n) \sim b(n)$ für $n \rightarrow \infty$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{b(n)} = 1$ gilt.

Wir werden in dieser Arbeit an einigen Stellen die Ungleichungen

$$1 - \frac{1}{t} \leq \log t \leq t - 1, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

für die Logarithmusfunktion verwenden, die auf der Taylorentwicklung erster Ordnung beruhen.

Im Folgenden sei stets ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit σ -Algebra \mathcal{A} und Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} zugrunde gelegt.

KAPITEL 2

DER FALL $s = 1$

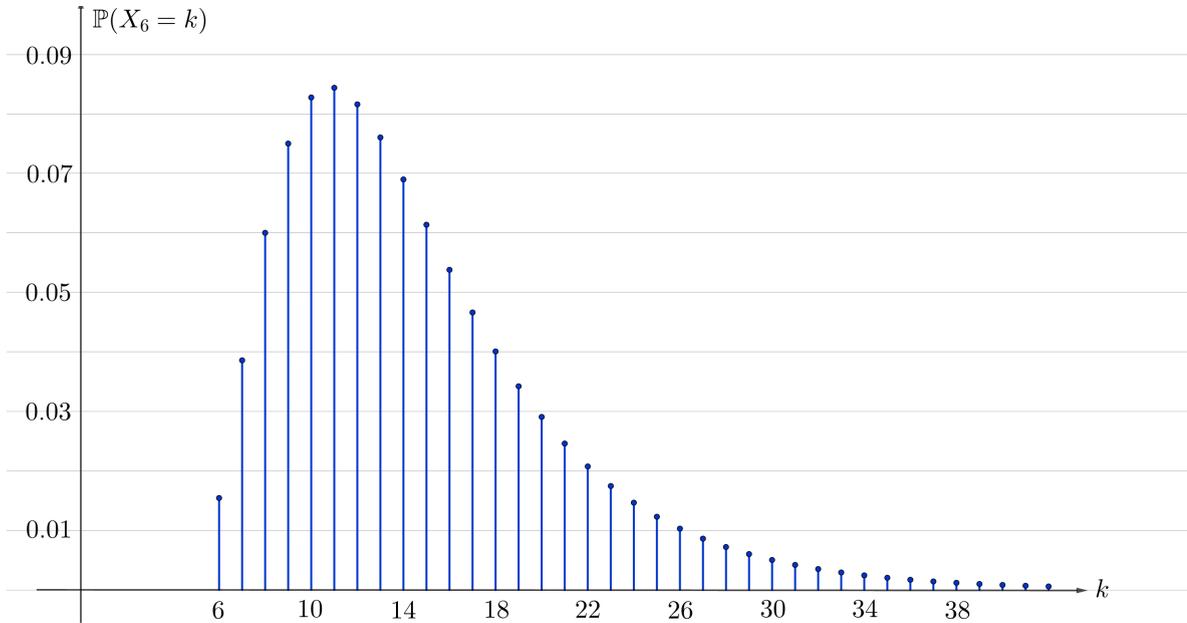
Nehmen wir an, dass in jedem Besetzungsvorgang genau ein Teilchen in eines der n Fächer fällt und $c = 1$ gilt, so kürzen wir die Zufallsvariable $X_n^{(1,1)}$ durch X_n ab. In diesem Kapitel stellen wir bekannte Resultate für X_n vor und führen an einigen Stellen ergänzend Beweise auf. Wir werden in Abschnitt 2.1 das klassische Coupon-Collector-Problem beschreiben, bei dem die Besetzungswahrscheinlichkeit für jedes Fach gleich groß ist und im anschließenden Abschnitt 2.2 zulassen, dass die Fächer mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten besetzt werden können. In Abschnitt 2.3 untersuchen wir, wie sich die bis dahin betrachteten Größen ändern, wenn wir nicht auf eine, sondern auf $c \geq 1$ vollständige Serien warten.

2.1. FÄCHER MIT GLEICHEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Wir bezeichnen den i -ten Besetzungsvorgang als *Teilerfolg*, falls irgendein Fach das erste Mal besetzt wird, und beschreiben die Anzahl der Besetzungsvorgänge zwischen dem i -ten und dem $(i + 1)$ -ten Teilerfolg, wobei die Teilerfolge jeweils eingeschlossen sind, durch die Zufallsvariable W_i . Dann gilt

$$X_n = 1 + W_1 + \cdots + W_{n-1}, \quad (2.1)$$

wobei die Zufallsvariablen W_1, \dots, W_{n-1} stochastisch unabhängig sind und $W_i - 1$ für jedes $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ eine geometrische Verteilung mit Parameter $p_{n,i} = \frac{n-i}{n}$ besitzt. Diesen Ansatz verwendet auch Feller (siehe [24] S. 210 ff.). Auf die Verteilung der Zufallsvariablen X_n werden wir in Unterabschnitt 2.2 für den Fall eingehen, dass die Fächer mit unterschiedlichen

Abbildung 2.1.: Stabdiagramm der Verteilung von X_6

Wahrscheinlichkeiten besetzt werden dürfen und geben an dieser Stelle ohne Nachweis an, dass

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i} \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right), \quad k \in \{n, n+1, \dots\}, \quad (2.2)$$

gilt. Wir bezeichnen mit

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\} := \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k \quad (2.3)$$

die Stirling-Zahl zweiter Art (siehe [28], S.260) und erhalten die alternative Darstellung

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n!}{n^k} \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\}$$

(siehe [6]). Die Rechnung ist im Anhang C.3 nachzulesen. Für $n = 6$ lässt sich X_n als Anzahl der Würfe mit einem echten Würfel interpretieren, bis jede Augenzahl aufgetreten ist. Abbildung 2.1 visualisiert die Verteilung der Zufallsvariablen X_6 .

Es ist deutlich zu sehen, dass die Wahrscheinlichkeiten zunächst schnell ansteigen und nach dem Erreichen des Maximums langsamer wieder abnehmen. In Kapitel 3 werden wir sehen, dass diese „Rechts-Schiefe“ erhalten bleibt, wenn wir s und n erhöhen.

2.1.1. ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ

Der Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen W mit Parameter p ist durch $\mathbb{E}(W) = \frac{1}{p} - 1$ gegeben (siehe [35], S. 188). Damit ergibt sich (siehe [24], S. 211)

$$\begin{aligned} E_n(\mathbf{p}_{GW}) &= 1 + \mathbb{E}(W_1) + \cdots + \mathbb{E}(W_{n-1}) \\ &= 1 + \mathbb{E}(W_1 - 1) + 1 + \cdots + \mathbb{E}(W_{n-1} - 1) + 1 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{n}{n-i} - 1 + 1 \right) \\ &= n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Die Summe $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} =: H_n$ heißt *n-te harmonische Zahl* (siehe [28], S. 29). Für diese gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = \gamma,$$

wobei $\gamma \approx 0.5772156649$ die *Euler-Mascheroni-Konstante* bezeichnet (siehe [36], [39], S.222). Für $n \rightarrow \infty$ finden wir somit die Approximation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{X_n}{n} - \log n \right) = \gamma$$

für den Erwartungswert. Daraus ergibt sich

$$\mathbb{E}(X_n) \sim n \log n.$$

Die Varianz einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen W mit Parameter p ist $\mathbb{V}(W) = \frac{1-p}{p^2}$ (siehe [35], S. 188). Mit der Verschiebungsinvarianz der Varianz und der Unabhängigkeit von W_1, \dots, W_n gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{V}(W_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-p_i}{p_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n \cdot i}{(n-i)^2} = n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{k^2} \\ &= n^2 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir $X_n^* := \frac{X_n}{n} - \log n$, so gilt

$$\mathbb{V}(X_n^*) = \mathbb{V} \left(\frac{X_n}{n} - \log n \right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Mit dem bekannten Reihenwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(siehe [44], S. 182) folgt direkt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(X_n^*) = \frac{\pi^2}{6}$$

und schließlich

$$\mathbb{V}(X_n) \sim n^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Neben der Konvergenz des Erwartungswertes und der Varianz von X_n^* lässt sich auch die Konvergenz in Verteilung ebendieser Zufallsvariablen nachweisen.

2.1.2. ASYMPTOTISCHE VERTEILUNG

Seien X, X_1, X_2, \dots reelle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum mit Verteilungsfunktionen $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ sowie $F_n(x) := \mathbb{P}(X_n \leq x)$, $n \geq 1$. Die Folge $(X_n)_{n \geq 1}$ konvergiert nach Verteilung gegen X , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \tag{2.4}$$

in jeder Stetigkeitsstelle x von F gilt (siehe [32], S. 207). Wir schreiben $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, um die Konvergenz nach Verteilung abzukürzen.

Im Folgenden bezeichnet G die Verteilungsfunktion der durch

$$G(x) := \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

definierten *Gumbelschen Extremwertverteilung*. Erdős und Rényi zeigen in [22], dass

$$\frac{X_n - n \log n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \tag{2.6}$$

gilt, wobei X die Verteilungsfunktion $\mathbb{P}(X \leq x) = G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, besitzt. Sie geben sogar ein allgemeineres Resultat an, das in Abschnitt 2.3 vorgestellt wird.

2.1.3. VOLLSTÄNDIGE SERIEN UND EXTREMWERTVERTEILUNGEN

Die Zufallsvariable X_n lässt sich wie in (2.1) als Summe darstellen. Betrachten wir das asymptotische Verhalten von Summen, so liegt es nahe, nach einem Zentralen Grenzwertsatz zu suchen, der die asymptotische Normalität der Summe liefert. Dass wir in (2.6) als Grenzverteilung nicht die Normalverteilung, sondern die Gumbelsche Extremwertverteilung erhalten, ist bei näherer Betrachtung nicht überraschend.

Extremwertverteilungen eignen sich, um Grenzverteilungen von Minima und Maxima stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen zu beschreiben. Dass es sich bei der Zufallsvariablen X_n um ein Maximum handelt, ist leicht einzusehen. Wir betrachten eine Folge $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$

identisch verteilter Zufallsvariablen. Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ beschreibt $X_{n,i}$ die Anzahl der Besetzungsvorgänge, bis das Fach mit der Nummer i das erste Mal besetzt wird. Dann gilt

$$X_n = \max(X_{n,1}, \dots, X_{n,n}) = \max_{1 \leq i \leq n} X_{n,i}. \quad (2.7)$$

Die Zufallsvariablen $X_{n,1} - 1, \dots, X_{n,n} - 1$ sind in dieser Situation jeweils geometrisch verteilt mit Parameter $1/n$, aber nicht stochastisch unabhängig. Liegt eine Folge $(X_{n,i})_{1 \leq i \leq n}$ von *unabhängigen* und identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F vor, so findet der Satz von Fisher–Tippett Anwendung. Nach diesem Satz gilt für eine Zufallsvariable X mit nicht ausgearteter Verteilungsfunktion \mathcal{F} das folgende Theorem (siehe [21], S.121):

Theorem 2.1.1 (Fisher–Tippett). *Wenn Folgen von Konstanten $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ existieren, sodass*

$$\frac{X_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X$$

gilt und X_n wie in (2.7) definiert ist, so hat \mathcal{F} die Form einer der drei folgenden Verteilungsfunktionen:

$$\Phi_\tau(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \exp(-x^{-\tau}), & x > 0, \quad \tau > 0, \end{cases}$$

$$\Psi_\tau(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\tau), & x \leq 0, \quad \tau > 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$G(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Neben der *Gumbel-Verteilung* $G(x)$ können also bei asymptotischen Untersuchungen der Minima und Maxima von Zufallsvariablen die *Fréchet-Verteilung* $\Phi_\tau(x)$ und die *Weibull-Verteilung* $\Psi_\tau(x)$ auftreten. Abbildung 2.2 zeigt die Dichten der drei Extremwertverteilungen im Vergleich. Dabei wurde $\tau = 1$ gewählt.

Eine Zufallsvariable, die der Gumbel-Verteilung folgt, besitzt den Erwartungswert γ , und die Varianz ist $\frac{\pi^2}{6}$ (siehe [34]). Diese Werte stimmen mit den Grenzwerten von Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen X_n im klassischen Coupon-Collector-Problem überein. Auch die „Rechts-Schiefe“ der Verteilung von X_6 , die wir im letzten Abschnitt beobachtet haben, findet sich in der Dichte $g(x)$ wieder.

Während die Gumbel-Verteilung als Grenzverteilung der Wartezeit auf die erste vollständige Serie auftritt, ergibt sich für Minima von Wartezeiten im Fächer-Modell asymptotisch eine Weibull-Verteilung. Diese Minima finden sich bei der Untersuchung von Erstkollisionszeiten (siehe [34]). Die Weibull-Verteilung wird in Kapitel 5 auftreten, wenn wir auf den Zusammenhang zwischen vollständigen Serien und Kollisionen eingehen.

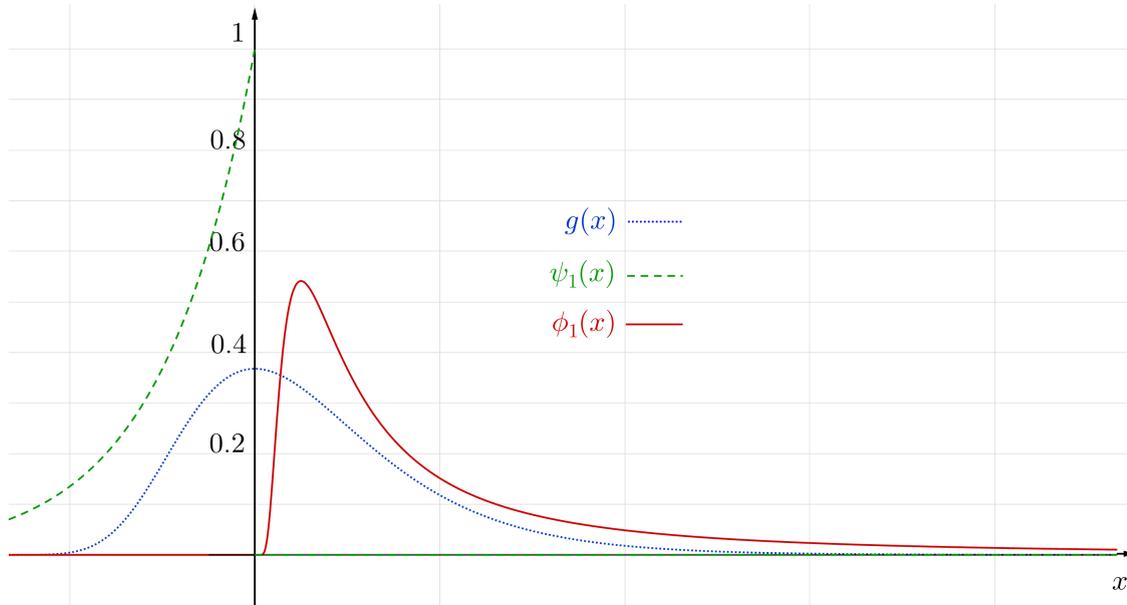


Abbildung 2.2.: Dichten der Extremwertverteilungen

2.1.4. ANTEILIG VOLLSTÄNDIGE SERIEN

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass wir die Zufallsvariable X_n als Maximum darstellen können, und dass das Auftreten der Gumbel-Verteilung als Grenzverteilung nicht überraschend ist. Die Möglichkeit, X_n wie in (2.1) als Summe unabhängiger Zufallsvariablen darzustellen, wirft die Frage auf, *warum* kein Zentraler Grenzwertsatz Anwendung findet, der asymptotische Normalität liefert. Grund dafür ist der große Unterschied, den die einzelnen Summanden zur Summe in (2.1) beitragen. So sind die Wartezeiten auf frühe Teilerfolge im Allgemeinen deutlich kürzer als die Wartezeit auf den letzten. Wir können die langen Wartezeiten auf die letzten Teilerfolge ausschließen, indem wir nur solange warten, bis für ein $\kappa \in (0, 1)$ genau $\lfloor n\kappa \rfloor$ Fächer je mindestens ein Teilchen enthalten. Die Wartezeit auf solch eine *anteilig vollständige Serie* besitzt asymptotisch eine Normalverteilung (siehe [2]). In dieser Situation kann die Ljapunov-Bedingung nachgewiesen werden, die eine hinreichende Bedingung für den Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg–Feller ist (siehe [32], S. 219).

2.2. FÄCHER MIT UNTERSCHIEDLICHEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Wir nehmen an, dass für $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Teilchen mit Wahrscheinlichkeit $p_{n,i}$ in Fach Nummer i fällt, wobei die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,i}$ verschieden sein dürfen und $\sum_{i=1}^n p_{n,i} = 1$ erfüllt ist. Die Zufallsvariable $X_{n,i}$ beschreibe wie in Abschnitt 2.1.3 die Anzahl der Besetzungsvorgänge, bis das Fach mit der Nummer i das erste Mal besetzt wird.

Um die Verteilung von X_n anzugeben, betrachten wir die Ereignisse $A_{n,j} := A_{n,j}^{(c)}(k)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, aus Kapitel 1, mit welchen

$$A_{n,j} = \{X_{n,j} > k\}$$

gilt (siehe [34]). Die Wahrscheinlichkeit, mehr als k Besetzungsvorgänge bis zur ersten vollständigen Serie zu benötigen, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Fächer nach k Besetzungsvorgängen leer ist. Es gilt also

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_{n,j}\right).$$

Mit der Formel des Ein- und Ausschließens (siehe Anhang C.1) gilt unter Verwendung von $\mathbb{P}(A_{n,1} \cap \dots \cap A_{n,n}) = 0$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_{n,j}\right) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}).$$

Die Wahrscheinlichkeit, in den ersten k Besetzungsvorgängen keines der Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_r zu besetzen, ist $(1 - \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^k$. Es folgt

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(1 - \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}\right)^k \quad (2.8)$$

und damit

$$\mathbb{P}(X_n \leq k) = 1 - \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(1 - \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}\right)^k.$$

Nehmen wir an, dass alle Fächer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt werden, erhalten wir unter Verwendung von $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n > k-1) - \mathbb{P}(X_n > k)$ den Ausdruck (2.2).

2.2.1. ERWARTUNGSWERT UND VARIANZ

Wie in Abschnitt 2.1.3 kann X_n auch hier durch

$$X_n = \max(X_{n,1}, \dots, X_{n,n}) = \max_{1 \leq i \leq n} X_{n,i}$$

dargestellt werden. Um den Erwartungswert zu berechnen, verwenden wir die Maximum-Minimum-Identität (siehe [47], S. 345). Diese erlaubt es, den Erwartungswert des Maximums $\max_{1 \leq i \leq n} X_{n,i}$ durch

$$\begin{aligned} E_n(\mathbf{p}) &= \mathbb{E}\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_{n,i}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}(X_{n,i}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{E}\left(\min(X_{n,i_1}, \dots, X_{n,i_2})\right) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{E}\left(\min(X_{n,1}, \dots, X_{n,n})\right) \\ &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{E}\left(\min(X_{n,i_1}, \dots, X_{n,i_r})\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

auszudrücken. Obige Identität wird in [47] mithilfe der Formel (C.2) des Ein- und Ausschließens hergeleitet. Die Zufallsvariable $X_{n,i}$ wird als Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zum ersten Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Trefferwahrscheinlichkeit $p_{n,i}$ aufgefasst. Somit ist $X_{n,i} - 1$ geometrisch verteilt mit Parameter $p_{n,i}$. Analog beschreibt die Zufallsvariable $\min(X_{n,i_1}, \dots, X_{n,i_r})$ die Anzahl der Besetzungsvorgänge, bis mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_r ein Teilchen enthält. Wegen $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ ist $\min(X_{n,i_1}, \dots, X_{n,i_r}) - 1$ geometrisch verteilt mit Parameter $\sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}$, und wir können (2.9) durch

$$E_n(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}}$$

darstellen. Auf eine alternative Herleitung, mit der wir ausgehend von (2.8) unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion zum gleichen Ergebnis kommen, gehen wir in Anhang C.5 ein. Der Erwartungswert lässt sich in wenigen Schritten zu

$$E_n(\mathbf{p}) = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-xp_{n,i}})\right) dx \quad (2.10)$$

vereinfachen. Die Rechnung orientiert sich an [47] und ist im Anhang C.4 aufgeführt.

Um die Varianz von X_n zu berechnen, verwenden wir die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) &= 2 \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{1}{(p_{n,i_1} + \dots + p_{n,i_r})^2} \\ &= 2 \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-tp_{n,i}}) \right) t \, dt \\ &= -2 \int_0^1 \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - x^{p_{n,i}}) \right) \frac{\ln x}{x} \, dx\end{aligned}$$

(siehe [18]). Ein Nachweis der Gültigkeit des ersten Gleichheitszeichen ist im Anhang C.5 nachzulesen. Das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich analog zu den in Anhang C.4 aufgeführten Rechnungen. Hiermit kann die Varianz durch

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) - \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)^2 \quad (2.11)$$

bestimmt werden. Lassen wir zu, dass die Fächer mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten besetzt werden, hängen Verteilung, Erwartungswert, Varianz und asymptotische Verteilung von $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ ab. Wir werden im Folgenden auf die in der Literatur am häufigsten diskutierten Modelle für die Wahrscheinlichkeiten eingehen.

David und Barton untersuchen in [15] den Spezialfall, in dem der Vektor der Besetzungswahrscheinlichkeiten durch die Einträge

$$p_{n,i} = \frac{2i}{n(n+1)}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

gegeben ist. In diesem sogenannten, durch \mathbf{p}_{lin} gekennzeichneten *linearen* Fall gilt

$$E_n(\mathbf{p}_{lin}) = O(n(n+1)). \quad (2.12)$$

Ein weiterer, häufig erwähnter Spezialfall ist die *Zipfsche* Verteilung. Der Vektor \mathbf{p}_{zipf} ist durch die Einträge

$$p_{n,i} = \frac{1}{i} H_n, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

gegeben, wobei H_n die n -te harmonische Zahl ist. Für das asymptotische Verhalten des Erwartungswertes gilt (siehe [27])

$$E_n(\mathbf{p}_{zipf}) = O(n(\log n)^n).$$

In Tabelle 2.1 werden die Erwartungswerte für die drei bisher vorgestellten Verteilungen in Abhängigkeit von n angegeben (siehe [6]). Unter den in Tabelle 2.1. aufgeführten Verteilungen liefert die Gleichverteilung die kleinsten Werte für den Erwartungswert. Diese Beobachtung greifen Boneh und Hofri auf, indem sie mithilfe der Integraldarstellung (2.10) zeigen, dass $E_n(\mathbf{p})$ genau dann ein globales Minimum annimmt, wenn alle Fächer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt werden (siehe [6]). Der Beweis verwendet die Methode der Lagrange-Multiplikatoren

n	$E_n(\mathbf{p}_{GW})$	$E_n(\mathbf{p}_{lin})$	$E_n(\mathbf{p}_{zipf})$
10	29.93	68.99	56.24
100	518.74	6338.74	1856.52
1000	7485.47	628226.33	41288.83
10000	97876.06	62766148.84	739709.57

Tabelle 2.1.: Erwartungswert von X_n in Abhängigkeit von \mathbf{p}

und kann in [6] nachgelesen werden. Boneh und Hofri zeigen darüber hinaus, dass X_n unter Annahme der Gleichverteilung bezüglich der *stochastischen Ordnung* minimal wird. Für zwei Zufallsvariablen X und Y gilt, dass X bezüglich der stochastischen Ordnung kleiner oder gleich Y ist, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\mathbb{P}(X \leq x) \geq \mathbb{P}(Y \leq x)$ erfüllt ist. Weil für den Erwartungswert einer ganzzahligen nichtnegativen Zufallsvariablen X allgemein $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$ gilt, kann die Minimalität des Erwartungswertes unter Annahme der Gleichverteilung auch mithilfe der stochastischen Ordnung nachgewiesen werden.

Für $s \geq 2$ konnte bisher keine zu (2.10) analoge Darstellung gefunden werden. In den Kapiteln 3 und 6 gehen wir auf weitere Fälle ein, in denen die Gleichverteilung eine Minimalstelle des Erwartungswertes liefert und zeigen auf, dass diese Aussage nicht auf den allgemeinen Fall übertragen werden kann.

Einen weiteren Ansatz zur Modellierung der Wahrscheinlichkeiten schlagen Boneh und Papanicolaou vor (siehe [8]). Die Besetzungswahrscheinlichkeiten werden mithilfe einer Folge positiver Zahlen $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ durch

$$p_{n,i} := \frac{\alpha_i}{A_n} \quad \text{mit} \quad A_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (2.13)$$

modelliert. Um den Erwartungswert in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\alpha}$ darzustellen, definieren wir wie in der Arbeit [8]

$$\begin{aligned} E_n(\boldsymbol{\alpha}) &:= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^r \alpha_{i_\ell}} \\ &= \int_0^1 \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - x^{\alpha_i}) \right) \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

womit

$$E_n(\mathbf{p}) = A_n E_n(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.14)$$

folgt. Unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir

$$L_1(\boldsymbol{\alpha}) := \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^1 \left[1 - \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{\alpha_i}) \right] \frac{dx}{x}. \quad (2.15)$$

Wir müssen im Folgenden die Fälle $0 < L_1(\boldsymbol{\alpha}) < \infty$ und $L_1(\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ unterscheiden. Für

$0 < L_1(\boldsymbol{\alpha}) < \infty$ gilt mit (2.14) und (2.15)

$$E_n(\mathbf{p}) = A_n L_1(\boldsymbol{\alpha})(1 + o(1)).$$

Um eine Aussage über den Grenzwert des Erwartungswertes aus (2.14) im Fall $L_1(\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ treffen zu können, muss die Klasse der Verteilungen eingeschränkt werden (siehe [8]). Wir machen wie in [8] den Ansatz

$$\alpha_i := \frac{1}{h(i)}, \quad (2.16)$$

wobei die Funktion $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ den Bedingungen $h(x) > 0$ und $h'(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, genüge. Darüber hinaus sollen für $x \rightarrow \infty$ die Bedingungen

$$\begin{aligned} (B1) \quad h(x) &\rightarrow \infty, & (B2) \quad \frac{h'(x)}{h(x)} &\rightarrow 0, \\ (B3) \quad \frac{h''(x)/h'(x)}{h'(x)/h(x)} &= O(1) & (B4) \quad \frac{h'''(x)h(x)^2}{h'(x)^3} &= O(1) \end{aligned}$$

gelten. Die Funktion h ist somit streng monoton wachsend. Sie wächst schneller als die Logarithmusfunktion, aber langsamer als die Exponentialfunktion. Beispiele sind

$$h(x) = x^r (\log x)^t, \quad r > 0, t \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \exp(x^r), \quad 0 < r < 1,$$

sowie alle Konvexkombinationen dieser Funktionen. Mit

$$\delta(n) := \frac{1}{\log(h(n)/h'(n))} \quad (2.17)$$

und

$$\omega(n) := -2 + \frac{h''(n)/h'(n)}{h'(n)/h(n)}$$

folgt dann im Fall $L_1(\boldsymbol{\alpha}) = \infty$, $\delta(n) \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ (siehe [18])

$$E_n(\mathbf{p}) = A_n h(n) \left[\frac{1}{\delta(n)} + \log \delta(n) + \gamma - \delta(n) \log \delta(n) + (\omega(n) - \gamma) + O(\delta(n) \log^2 \delta(n)) \right]. \quad (2.18)$$

Vergleichen wir (2.18) mit (2.12), so wird klar, dass das asymptotische Verhalten des Erwartungswertes in der Tat stark von der Wahl der Wahrscheinlichkeiten $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ abhängt. Auch die Asymptotik der Varianz ist in dem durch (2.13) gegebenen Modell bekannt. Wegen (2.11) untersuchen wir $\mathbb{E}(X_n(X_n + 1))$ und definieren

$$\begin{aligned} Q_n(\boldsymbol{\alpha}) &:= 2 \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{(\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r})^2} \\ &= -1 \int_0^1 \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - x^{\alpha_i}) \right] \frac{\ln x}{x} dx, \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei (2.19) nach [18] gilt. Wegen $Q_n(t\boldsymbol{\alpha}) = t^{-2}Q_n(\boldsymbol{\alpha})$, $t \geq 0$, ist

$$\mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) = Q_n(A_n^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = A_n^2 Q_n(\boldsymbol{\alpha}).$$

Setzen wir

$$L_2(\boldsymbol{\alpha}) := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\boldsymbol{\alpha}),$$

so können wir die Varianz im Fall $L_2(\boldsymbol{\alpha}) < \infty$ durch

$$\mathbb{V}(X_n) = A_n^2 (L_2(\boldsymbol{\alpha}) - L_1(\boldsymbol{\alpha})^2) - o(A_n^2)$$

beschreiben. Für $L_2(\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ verhält sich die Varianz von X_n unter gewissen Voraussetzungen asymptotisch wie $\pi^2 / (6 \cdot \min_{1 \leq j \leq n} (p_{n,i})^2)$ (siehe [18]).

Es sei erwähnt, dass auch für die Asymptotik höherer Momente der Zufallsvariablen X_n Resultate bekannt sind. Da diese jedoch nicht Gegenstand der hier vorliegenden Arbeit sind, verweisen wir für weitere Aspekte auf [19].

2.2.2. ASYMPTOTISCHE VERTEILUNG

Das in (2.6) vorgestellte Resultat zur asymptotischen Verteilung der Zufallsvariablen X_n wurde im Jahr 2008 von Peter Neal durch die Theoreme 2.2.1 und 2.2.2 verallgemeinert (siehe [42], Theorem 2.1 und 2.2).

Theorem 2.2.1 (Neal). *Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, die $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllen. Weiter sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Unter der Voraussetzung*

$$\mathfrak{S}_n(x) := \sum_{i=1}^n \exp[-p_{n,i}(b_n + xa_n)] \rightarrow g(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

gilt dann

$$\frac{X_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (2.21)$$

wobei X die Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = e^{-g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, besitzt.

Neal beweist dieses Theorem, indem er zunächst zeigt, dass die wie in (1.1) definierten Indikatorvariablen $\mathbb{1}\{A_{n,j}\}$ *negatively related* sind, es also eine *negative Abhängigkeit* gibt, die über die negative Korrelation hinausgeht. Anschließend weist er nach, dass für $Z_n := Z_n^{(1,1)}$ wie in Kapitel 1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n(a_n + xb_n)) = g(x)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(Z_n(a_n + xb_n)) = g(x)$ gelten. Daraus schlussfolgert er die Konvergenz von $Z_n(a_n + xb_n)$ gegen eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter $g(x)$. Der Zusammenhang (1.3) liefert die Aussage aus Theorem 2.2.1. Wir werden dieses Resultat in Kapitel 4 aufgreifen, um einen Grenzwertsatz für $s \geq 1$ zu beweisen.

Theorem 2.2.2 (Neal). *Es sei (a_n) eine reelle Folge mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \exp[-p_{n,i} x a_n] = \tilde{g}(x).$$

Dabei ist $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $\tilde{g}(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ und $\tilde{g}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Falls eine Funktion $\ell : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 - \exp[-p_{n,i} x a_n]) = \ell(x)$$

existiert, so folgt $\ell(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$ sowie $\ell(x) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$. Weiter gilt

$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \hat{X} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei \hat{X} die Verteilungsfunktion $\hat{F}(x) = \mathbb{P}(\hat{X} \leq x) = \ell(x)$ besitzt.

Um die Grenzwertsätze von Neal für konkrete Wahrscheinlichkeiten $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ anwenden zu können, müssen die Folgen (a_n) und (b_n) so gewählt werden, dass die Voraussetzungen erfüllt sind. Modellieren wir die Besetzungswahrscheinlichkeiten wie in (2.16), so fällt die Wahl im Fall von Theorem 2.2.1 auf die Folgen

$$a_n = A_n h(n) \quad \text{und} \quad b_n = A_n h(n) [\rho(n) - \ln \rho(n)] \quad (2.22)$$

mit (2.17) und

$$\rho(n) := \frac{1}{\delta(n)} = \ln \left(\frac{h(n)}{h'(n)} \right),$$

wobei wir die am Ende des letzten Abschnitts eingeführte Notation und die dort aufgeführten Voraussetzungen (B1) – (B4) verwenden (siehe [18]). Die Folgen (2.22) erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 2.2.1, wir erhalten also

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow \exp(-e^{-x}), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

unabhängig von h . Vergleichen wir dieses Resultat mit (2.6), so sehen wir, dass auch in diesem Fall die Gumbelsche Extremwertverteilung als Grenzverteilung auftritt. Wählen wir $a_n = A_n$, so sind die Voraussetzungen von Theorem 2.2.2 erfüllt, und wir erhalten

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \exp(-\alpha_i x)) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall hängt die asymptotische Verteilung also von der Folge α und damit von h ab. Für $\alpha_i = i$ ist die rechte Seite die Limesverteilung des größten Abstandes in der geordneten Stichprobe von n unabhängigen und identisch Exp(1)-verteilten Zufallsvariablen (siehe [31]).

Eine weitere Möglichkeit, die Besetzungswahrscheinlichkeiten zu modellieren, besteht darin, eine stetige Verteilung mit einer von n abhängigen Dichte $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zu betrachten und die Wahrscheinlichkeiten durch

$$p_{n,i} := \int_{(i-1)/n}^{i/n} f_n(t) dt, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (2.23)$$

darzustellen. Dieser Ansatz wird in [9] und [42] untersucht. In beiden Arbeiten werden unterschiedliche Bedingungen an die Funktion f_n gestellt und Grenzwertuntersuchungen durchgeführt. Wählen wir

$$f_n(t) := 1 + \frac{m(t)}{\log n},$$

wobei $m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, die

$$\int_0^1 m(t) dt = 0$$

erfüllt und definieren

$$J_m := \int_0^1 e^{-m(t)} dt,$$

so gilt mit $b_n = n \log n$ und $a_n = n$ der Grenzwertsatz

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_n - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow G(x - \log J_m), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Für $f_n(t) \equiv 1$ und damit $m(t) \equiv 0$ und $J_m = 1$ ergibt sich der Fall der Gleichverteilung. Weil die Folgen a_n und b_n die in Theorem 2.2.1 geforderten Voraussetzungen erfüllen, muss für einen Nachweis von (2.24) lediglich

$$\mathfrak{S}_n(x) \rightarrow J_m \cdot \exp(-x), \quad n \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

mit $\mathfrak{S}_n(x)$ wie in (2.20) gezeigt werden. Dieser Nachweis ist im Anhang B.1 nachzulesen. Das Limesresultat (2.24) ist ein Spezialfall eines Grenzwertsatzes für $X_n^{(1,c)}$ mit $c \geq 1$, den wir im folgenden Abschnitt vorstellen werden. Legen wir das in (2.23) beschriebene Modell zugrunde, lässt sich der Beweis beider Grenzwertsätze ohne das von Neal publizierte Resultat führen. Dieser alternative Beweis beruht auf der Formel des Ein- und Ausschließens und ist für $c \geq 1$ im Anhang B.2 aufgeführt.

2.3. WARTEN AUF DIE c -TE SERIE

Warten wir nicht auf die erste, sondern auf die c -te vollständige Serie, so stellt sich die Frage, ob die zweite und spätere Serien schneller auftreten als die erste. Dieses sogenannte „double Dixie cup problem“ wurde 1960 von Newman und Shepp für den Fall untersucht, in dem alle Fächer die gleichen Besetzungswahrscheinlichkeiten aufweisen (siehe [43]). Mit $X_n^{(s,c)}$ wie in Kapitel 1 gilt für $s = 1$

$$\mathbb{E}(X_n^{(1,c)}) = n \log n + (c-1)n \log \log n + nK_c + o(n), \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei K_c eine von c abhängige Konstante ist. Während wir im Mittel ungefähr $n \log n$ Teilchen auf die Fächer verteilen müssen, um die erste Serie zu erhalten, warten wir auf jede weitere vollständige Serie grob gesprochen im Mittel nur $n \log \log n$ Besetzungsvorgänge. Erdős und Rényi zeigen in [22], dass die Konstante K_c durch

$$K_c = \gamma - \log((c-1)!)$$

gegeben ist. Wie zuvor bezeichnet dabei γ die Euler–Mascheroni-Konstante. Darüber hinaus beweisen sie den Grenzwertsatz

$$\frac{X_n^{(1,c)} - n(\log n + (c-1) \log \log n)}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_c, \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei X_c die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{P}(X_c \leq x) = \exp\left(-\frac{\exp(-x)}{(c-1)!}\right) = G(x + \log((c-1)!))$$

besitzt (siehe [22]). Lassen wir zu, dass die Fächer mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten besetzt werden, so hängen Erwartungswert und asymptotische Verteilung von dem Modell ab, das der Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde liegt. Neal verallgemeinert das in (2.21) vorgestellte Resultat durch das folgende Theorem (siehe [42], Abschnitt 4):

Theorem 2.3.1 (Neal). *Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen, die $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllen. Weiter sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$. Unter der Voraussetzung*

$$\mathfrak{S}_n(c, x) := \frac{b_n^{c-1}}{(c-1)!} \sum_{i=1}^n p_{n,i}^{c-1} \exp[-p_{n,i}(b_n + xa_n)] \rightarrow g(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\frac{X_n^{(1,c)} - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_c \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dabei besitzt X_c die Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X_c \leq x) = e^{-g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Wählen wir $p_{n,1}, \dots, p_{n,n}$ wie in (2.23), so erhalten wir mit

$$b_n = n(\log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)!)) \quad \text{und} \quad a_n = n$$

den Grenzwertsatz

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_n^{(1,c)} - b_n}{a_n} \leq x \right) \rightarrow G(x - \log J_m), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) erfüllen die Voraussetzungen für Theorem 2.3.1. Um (2.26) zu zeigen, muss also

$$\mathfrak{S}_n(c, x) \rightarrow J_m \cdot e^{-x}$$

nachgewiesen werden. Ein alternativer Beweis für (2.26), der die Formel des Ein- und Ausschließens verwendet, findet sich im Anhang B.2.

Das Modell (2.23) legt auch Brayton in seiner Dissertation zugrunde, um das asymptotische Verhalten von Erwartungswert und Varianz zu untersuchen (siehe [9]). An $f(\cdot)$ stellt er die Voraussetzungen

- (V1) $\int_0^1 f(u) \, du = 1,$
- (V2) $\min_{0 \leq u \leq 1} f(u) =: \xi > 0; \quad \max_{0 \leq u \leq 1} f(u) =: \mathcal{M} < \infty,$
- (V3) $f(\cdot)$ ist eine Funktion von beschränkter Variation auf $[0, 1]$.

Falls (V1) – (V3) erfüllt sind und die Gleichung $f(u) = \xi$ auf einer endlichen Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle, deren Gesamtlänge positiv ist, gilt, so kann das asymptotische Verhalten des Erwartungswertes $E_n^{(1,c)}$ von $X_n^{(1,c)}$ in Abhängigkeit von \mathbf{p} durch

$$E_n^{(1,c)}(\mathbf{p}) = \frac{n}{\xi} \left[\log(Kn) + (c-1) \log \log(Kn) + \gamma + (c-1) \log \frac{1}{\xi} + o(1) \right] \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

beschrieben werden (siehe [9]). Dabei ist K eine Konstante, die in [9] nicht weiter konkretisiert wird.

Unter gleichen Bedingungen gilt für das asymptotische Verhalten der Varianz

$$\mathbb{V}(X_n^{(1,c)}) = \frac{n^2}{\xi^2} \left[\frac{\pi^2}{6} + O \left(\frac{\log \log \log n}{\log \log n} \right) \right] \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir sehen, dass Erwartungswert und Varianz asymptotisch lediglich vom Minimum der Funktion f abhängen. Dieser Zusammenhang lässt sich leicht einsehen. Nimmt f im Intervall $[i-1, i]$ kleine Werte an, so ist auch die Besetzungswahrscheinlichkeit $p_{n,i}$ klein. Die erwartete Zeit bis zur c -ten vollständigen Serie ist somit umso größer, je kleiner die Wahrscheinlichkeit für das Fach ist, das mit der geringsten Wahrscheinlichkeit belegt wird (siehe [9]).

KAPITEL 3

DER FALL $s \geq 1$

Wir betrachten nun die Situation, in der pro Besetzungsvorgang genau $s \geq 1$ verschiedene Fächer mit je einem Teilchen besetzt werden und geben einen Überblick über bisher bekannte Resultate. Diese beschränken sich auf die Situation, in der $c = 1$ gilt, weswegen wir im Folgenden auf jegliche Indizierung mit c verzichten werden. Die Wahrscheinlichkeit, die Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_s zu besetzen, bezeichnen wir mit p_{n,i_1,\dots,i_s} . Betrachten wir für $k \leq s$ das Ereignis, dass k bestimmte Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_k in einer s -Auswahl enthalten sind, so bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis mit $P_{n,i_1,\dots,i_k} := P_{n,i_1,\dots,i_k}^{(s)}$. Wir schreiben $\mathbf{P}_n^{(k)} \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ für den Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,i_1,\dots,i_k}, \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, in lexikographischer Ordnung enthält. Im Falle der Gleichverteilung schreiben wir $\mathbf{P}_{GW} := \mathbf{P}_{n,GW}^{(k)}$. Für $k = s$ stimmen die Vektoren $\mathbf{P}_n^{(k)}$ und $\mathbf{p}_n^{(s)}$ überein. Fordern wir lediglich, dass mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_k besetzt wird, beschreiben wir die entsprechende Wahrscheinlichkeit durch $S_{n,i_1,\dots,i_k} := S_{n,i_1,\dots,i_k}^{(s)}$. Wir können P_{n,i_1,\dots,i_k} und S_{n,i_1,\dots,i_k} durch die Wahrscheinlichkeiten $p_{n,j_1,\dots,j_s}, \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, darstellen. Zunächst gilt

$$P_{n,i_1,\dots,i_k} = \sum_{\substack{\{j_1,\dots,j_s\} \subseteq \{1,\dots,n\}: \\ \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{j_1,\dots,j_s\}}} p_{n,j_1,\dots,j_s}. \quad (3.1)$$

Bezeichnen wir das Ereignis, Fach Nummer j zu besetzen, mit \mathcal{B}_j , so gelten

$$S_{n,i_1,\dots,i_k} = \mathbb{P} \left(\bigcup_{\ell=1}^k \mathcal{B}_{i_\ell} \right)$$

und

$$P_{n,i_1,\dots,i_k} = \mathbb{P} \left(\bigcap_{\ell=1}^k \mathcal{B}_{i_\ell} \right).$$

Mithilfe der Formel des Ein- und Ausschließens (C.2) gilt also

$$S_{n,i_1,\dots,i_k} = \sum_{j=1}^k \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_j \leq k} (-1)^{j-1} P_{n,i_{\ell_1},\dots,i_{\ell_j}}. \quad (3.2)$$

Setzen wir (3.1) in (3.2) ein, so erhalten wir eine Darstellung, die von p_{n,i_1,\dots,i_s} abhängt. Im allgemeinen Fall ist die Untersuchung von S_{n,i_1,\dots,i_k} aufwändig. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, wie sich diese Wahrscheinlichkeit vereinfachen lässt, wenn wir voraussetzen, dass jede Teilmenge mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegt wird. Analog zum Fall $s = 1$ beschreibt $X_{n,i}^{(s)}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Anzahl der Besetzungsvorgänge, bis Fach Nummer i das erste Mal besetzt wird. Mit der Maximum-Minimum-Identität gilt wie in (2.9)

$$E_n^{(s)}(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{E} \left(\min(X_{n,i_1}^{(s)}, \dots, X_{n,i_r}^{(s)}) \right). \quad (3.3)$$

Wir interpretieren die Zufallsvariable $X_{n,i}^{(s)}$ weiterhin als Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zum ersten Treffer in einer Bernoulli-Kette. Unter einem Treffer verstehen wir hier das Ereignis, dass Fach Nummer i in der s -Auswahl enthalten ist. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist $P_{n,i}$. Somit besitzt $X_{n,i}^{(s)} - 1$ eine geometrische Verteilung mit Parameter $P_{n,i}$. Analog beschreibt die Zufallsvariable $\min(X_{n,i_1}^{(s)}, \dots, X_{n,i_k}^{(s)})$ die Anzahl der Besetzungsvorgänge, bis mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_k ein Teilchen enthält. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist durch S_{n,i_1,\dots,i_k} gegeben. Wegen $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ist $\min(X_{n,i_1}, \dots, X_{n,i_k}) - 1$ geometrisch verteilt mit Parameter S_{n,i_1,\dots,i_k} , und wir können (3.3) durch

$$\begin{aligned} E_n^{(s)}(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{n,i_1,\dots,i_k}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_{n,i}} - \sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{n,i_1,\dots,i_k}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ausdrücken (vergleiche [10]; [47], Seite 347). Die Abspaltung des ersten Summanden ist für spätere Untersuchungen nützlich. Die Wahrscheinlichkeit S_{n,i_1,\dots,i_k} ist für $k > n - s$ gleich eins, wodurch sich für (3.4) die in [25] vorgeschlagene alternative Form

$$\begin{aligned} E_n^{(s)}(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{n,i_1,\dots,i_k}} - \sum_{k=n-s+1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_{n,i}} - \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{n,i_1,\dots,i_k}} - \sum_{k=n-s+1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ergibt. Mit der für natürliche Zahlen m und n geltenden Identität (siehe [28], S. 165)

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

erhalten wir für die letzte Summe in (3.5)

$$\sum_{k=n-s+1}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=n-(s-1)}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = (-1)^{n-s-1} \binom{n-1}{s-1}$$

und damit

$$E_n^{(s)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_{n,i}} - \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{n,i_1, \dots, i_k}} + (-1)^{n-s} \binom{n-1}{s-1}. \quad (3.6)$$

Bevor wir in Abschnitt 3.2 den Fall untersuchen, in dem die Wahrscheinlichkeiten p_{n,i_1, \dots, i_s} verschieden sein dürfen, setzen wir in Abschnitt 3.1 voraus, dass jede s -Teilmenge mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegt wird. Obwohl die Annahme $s > 1$ gerade im Hinblick auf das Sammeln von Serienbildern der Realität oft näher kommt als der Fall $s = 1$, finden sich in der Literatur bisher kaum Resultate für den Fall $s > 1$.

3.1. TEILMENGEN MIT GLEICHEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Nehmen wir an, dass jede s -elementigen Teilmenge mit gleicher Wahrscheinlichkeit

$$p_{n,i_1, \dots, i_s} = \frac{1}{\binom{n}{s}}, \quad \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\},$$

besetzt wird, so vereinfachen sich die zu Beginn dieses Abschnittes vorgestellten Formeln. Mit der bekannten Identität

$$\binom{n}{s} = \binom{n-1}{s} + \binom{n-1}{s-1}$$

gilt

$$P_{n,i} = \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ i \in \{i_1, \dots, i_s\}}} \frac{1}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{n-1}{s-1}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{n}{s} - \binom{n-1}{s}}{\binom{n}{s}} = 1 - \frac{n-s}{n} = \frac{s}{n}.$$

In diesem Spezialfall lässt sich auch die Wahrscheinlichkeit S_{n,i_1, \dots, i_k} , mindestens eines der Fächer $\{i_1, \dots, i_k\}$ zu besetzen, bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst das Ereignis, keines der k Fächer i_1, \dots, i_k zu treffen. Die Wahrscheinlichkeit ist nicht von der konkreten Wahl der Fächer, sondern nur von k abhängig und durch

$$q(k) := \frac{\binom{n-k}{s}}{\binom{n}{s}}$$

gegeben.

Damit gilt

$$S_{n,i_1,\dots,i_k} = 1 - q(k) = 1 - \frac{\binom{n-k}{s}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{n}{s} - \binom{n-k}{s}}{\binom{n}{s}}. \quad (3.7)$$

Für $k > n - s$ verschwindet $q(k)$, weil es beim Besetzen von mehr als $n - k$ Fächern nicht möglich ist, dass k bestimmte Fächer frei bleiben. In dem Fall ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eines von k Fächern zu besetzen, gleich eins. Mit der gleichen Argumentation wurde bereits die alternative Schreibweise (3.5) für den Erwartungswert hergeleitet. Mit dem Ansatz (3.4) folgt direkt

$$\begin{aligned} E_n^{(s)}(\mathbf{p}_{GW}) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{\binom{n}{s}}{\binom{n}{s} - \binom{n-k}{s}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{\binom{n}{s}}{\binom{n}{s} - \binom{n-k}{s}} + (-1)^{n-s-1} \binom{n-1}{s-1}, \end{aligned}$$

was sowohl mit dem Resultat von Adler und Ross als auch mit dem von Stadjé übereinstimmt (siehe [3], [51]). Stadjé gibt in [51] darüber hinaus die Verteilung von $X_n^{(s)}$ durch

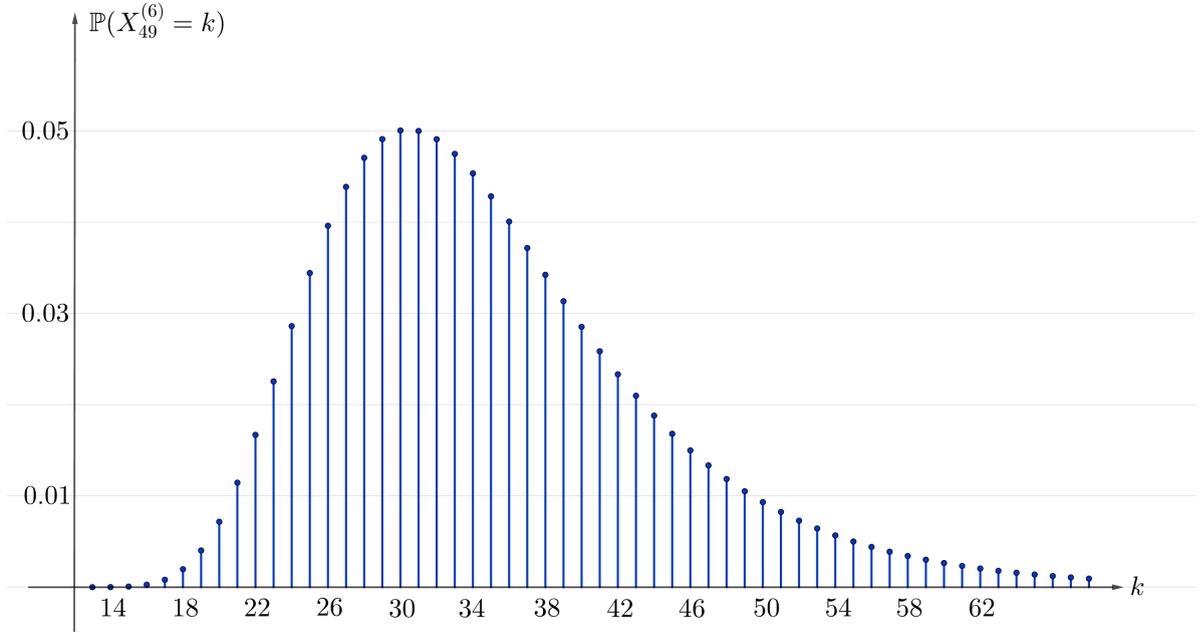
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n^{(s)} = k) &= \sum_{j=s}^{n-1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j} \frac{\binom{n}{s} - \binom{j}{s}}{\binom{n}{s}} \left[\frac{\binom{j}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-s} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{\binom{n}{s} - \binom{n-j}{s}}{\binom{n}{s}} \left[\frac{\binom{n-j}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^{k-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$k \in \{\lceil \frac{n}{s} \rceil, \lceil \frac{n}{s} \rceil + 1, \dots\}$, an. Die Darstellung (3.8) wird in [35] mithilfe der Formel (C.2) des Ein- und Ausschließens hergeleitet und kann dort ab Seite 192 nachgelesen werden. Setzen wir $s = 1$, so liefert (3.8) die Verteilung von X_n im klassischen Coupon-Collector-Problem. Abbildung 3.1 visualisiert die Verteilung der Wartezeit für $s = 6$ und $n = 49$. Eine Einkleidung dieser Situation ist das Ziehen von 6 aus 49 Lottozahlen. Fassen wir jede mögliche Gewinnzahl als Fach auf, entspricht $X_{49}^{(6)}$ der Wartezeit, bis jede dieser Zahlen einmal gezogen wurde.

Wie bereits im Fall $s = 1$ lässt sich deutlich eine „Rechts-Schiefe“ erkennen. Der folgende Grenzwertsatz verallgemeinert die Situation aus (2.6). Für die Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion $G(x)$, $x \in \mathbb{R}$, wie in (2.5) gilt

$$\frac{sX_n^{(s)} - n \log n}{n} \xrightarrow{\mathcal{D}} X. \quad (3.9)$$

Dieses Resultat wird in [34] ohne Beweis angegeben. Wir werden in Kapitel 4 einen Grenzwertsatz für $X_n^{(s,c)}$ mit $c \geq 1$ und $s \geq 1$ beweisen, der für $c = 1$ die Aussage (3.9) liefert.

Abbildung 3.1.: Stabdiagramm der Verteilung von $X_{49}^{(6)}$

3.2. TEILMENGEN MIT UNTERSCHIEDLICHEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Für diesen allgemeinen Fall finden sich in der Literatur die in (3.4) und (3.5) vorgestellten Formeln für den Erwartungswert. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten für die s -Teilmengen unter der Bedingung $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} p_{n, i_1, \dots, i_s} = 1$ frei gewählt werden dürfen, so können wir wie im Fall $s = 1$ fragen, unter welcher Wahl die erwartete Anzahl an Besetzungsvorgängen bis zur ersten vollständigen Serie minimal wird. Um für $\eta_k := \binom{n}{k}$, $k \in \{1, \dots, s\}$, den Vektor $\mathbf{p}_n^{(s)} \in \mathbb{R}^{\eta_s}$ der Besetzungswahrscheinlichkeiten zu finden, der den Erwartungswert minimiert, betrachten wir das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

$$\left(\mathcal{P}_n^{(s)} \right) \begin{cases} \text{minimiere } E_n^{(s)}(\mathbf{p}) \\ \text{unter } \mathbf{p}_n^{(s)} \in V_n^{(s)} \end{cases} \quad (3.10)$$

mit $V_n^{(s)} := \left\{ \mathbf{p}_n^{(s)} \in \mathbb{R}^{\eta_s} \mid 0 \leq \mathbf{p}_n^{(s)} \leq \mathbf{e}_{\eta_s}, \mathbf{e}_{\eta_s}^\top \mathbf{p} = 1 \right\}$. Dabei ist \mathbf{e}_ℓ der aus lauter Einsen bestehende Vektor im \mathbb{R}^ℓ , und die Ungleichungen $0 \leq \mathbf{p}_n^{(s)} \leq \mathbf{e}_{\eta_s}$ sind komponentenweise zu verstehen.

In Unterabschnitt 2.2.1 haben wir bereits gesehen, dass unter Annahme der Gleichverteilung für $s = 1$ ein Minimum vorliegt. Diese Tatsache lässt die Vermutung zu, dass die Gleichverteilung ganz allgemein für $s \geq 1$ eine Minimalstelle des Erwartungswertes $E_n^{(s)}(\cdot)$ ist. Dass dies nicht der Fall ist, soll durch ein Gegenbeispiel verdeutlicht werden (siehe [11, 23]).

Wir betrachten die Situation, in der pro Besetzungsschritt $s = 2$ von insgesamt $n = 4$ Fächern mit einem Teilchen besetzt werden. Eine konkrete Wahl der Wahrscheinlichkeiten

für s -Teilmengen werden wir *Strategie* nennen und mit \mathbb{S} bezeichnen. Wir betrachten zwei mögliche Strategien \mathbb{S}_1 und \mathbb{S}_2 . Die erste Strategie repräsentiert gerade den Fall, in dem alle 2-Teilmengen die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/\binom{4}{2} = 1/6$ besitzen. Dieser Fall ist durch den Vektor

$$\mathbf{p}_{4,\mathbb{S}_1}^{(2)} := (p_{4,1,2}, p_{4,1,3}, \dots, p_{4,3,4}) := \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)^\top$$

gegeben, und wir erhalten $E_4^{(2)}(\mathbf{p}_{\mathbb{S}_1}) = 3.8$. Die Berechnung der Erwartungswerte ist im Anhang C.6 nachzulesen. Die zweite Strategie wird durch

$$\mathbf{p}_{4,\mathbb{S}_2}^{(2)} := \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2} \right)^\top$$

beschrieben und entspricht der Situation, in der die Fächer nur in den disjunkten Paaren 1, 2 und 3, 4 besetzt werden. Mit \mathbb{S}_2 erwarten wir bereits nach drei Besetzungsvorgängen eine vollständige Serie, was der anfänglichen Vermutung widerspricht. Auch wenn im zweiten Fall keine Gleichverteilung auf den 2-Teilmengen vorliegt, so ist trotzdem jedes der vier Fächer mit gleicher Wahrscheinlichkeit in einer 2-Auswahl enthalten. Es gilt nämlich

$$\mathbf{P}_{4,\mathbb{S}_2}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^\top.$$

Caron, Hlynka und MyDonald zeigen, dass für $\mathbf{p}_{4,\mathbb{S}_2}^{(2)}$ mit $E_4^{(2)}(\mathbf{p}_{\mathbb{S}_2}) = 3$ ein globales Minimum vorliegt (siehe [10]).

Auch für einige weitere Werte für s und n wurde (3.10) bereits gelöst. Die Ergebnisse werden in den folgenden Unterabschnitten vorgestellt.

3.2.1. DIE FÄLLE $s = 1$ UND $s = 2$

Boneh und Golan vermuten bereits in ihrer 1979 erschienenen Arbeit, dass der Erwartungswert im Fall $s = 1$ im Falle der Gleichverteilung minimal wird (siehe [7]). Diese Vermutung beweisen Caron, Hlynka und MyDonald 1988 für den Fall, in dem n nicht größer als sechs ist (siehe [10]). Sie untersuchen darüber hinaus den Fall $s = 2$. Elf Jahre später zeigen Boneh und Hofri auch für $n \geq 6$, dass die erwartete Anzahl an Besetzungsvorgängen bis zur vollständigen Serie für $s = 1$ unter Annahme einer Gleichverteilung minimal wird (siehe [6]). Diese Situation wurde bereits in Unterabschnitt 2.2.1 thematisiert. Caron und McDonald vermuten, dass $E_n^{(2)}$ im sogenannten *pairing case*, der im folgenden Abschnitt konkretisiert wird, ein globales Minimum annimmt (siehe [12]). Um den *pairing case* für gerade und ungerade n formal einzuführen, halten sie zunächst fest, dass $E_n^{(s)}(\mathbf{p})$ zwar keine symmetrische Funktion in $\mathbf{p} := \mathbf{p}_n^{(s)}$ ist, jedoch symmetrisch in Bezug auf die Nummerierung der Fächer (siehe [10–12]). Diese Symmetrie beschreiben Caron et al., indem sie die Gruppe der Permutationen auf $\{1, \dots, n\}$ mit S_n bezeichnen und für $\sigma \in S_n$ die Wahrscheinlichkeit

$$(\sigma(p))_{i_1, \dots, i_s} := p_{n, \sigma(i_{\ell_1}), \sigma(i_{\ell_2}), \dots, \sigma(i_{\ell_s})}$$

mit $\sigma(i_{\ell_1}) < \sigma(i_{\ell_2}) < \dots < \sigma(i_{\ell_s})$ und paarweise verschiedene ℓ_1, \dots, ℓ_s mit $\ell_1, \dots, \ell_s \in \{1, \dots, s\}$ definieren. Dann gilt für $s \geq 2$

$$E_n^{(s)}(\sigma(\mathbf{p})) = E_n^{(s)}(\mathbf{p}).$$

Anschließend wird der *pairing case* für gerade n und für ungerade n separat eingeführt. Die folgenden Unterabschnitte beziehen sich weiterhin auf den Fall $s = 2$.

DER *pairing case* FÜR GERADE n UND $s = 2$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n = 2k$. Wir definieren \mathbf{p}_2^* durch

$$p_{n,i_1,i_2}^* := \begin{cases} 1/k, & \text{wenn } i_1 = 2r - 1, \ i_2 = i_1 + 1, \ r = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann kann die Menge aller Vektoren, in denen der *pairing case* vorliegt, durch

$$B_n^{(2)} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \sigma(\mathbf{p}_2^*) \text{ für ein } \sigma \in S_n\}$$

ausgedrückt werden (siehe [11]).

DER *pairing case* FÜR UNGERADES n UND $s = 2$

In dieser Situation ist n kein Vielfaches von zwei, und die Fächer können nicht mehr ausschließlich in disjunkten Paaren besetzt werden. Es lässt sich aber auch hier eine dem *pairing case* ähnliche Strategie beschreiben. Sei k so, dass $n = 2k + 3$, $k \geq 1$, gilt, und sei $\beta = \frac{1-3\alpha}{k}$ mit $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$. Dann bezeichnet $\mathbf{p}^{(\alpha)}$ den Vektor, der durch

$$p_{n,i_1,i_2}^{(\alpha)} := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } (i_1, i_2) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, \\ \beta & \text{wenn } i_1 = 2r, \ i_2 = i_1 + 1, \ r = 2, 3, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert ist. Weiter beschreibt

$$D_n^{(\alpha)} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \sigma(\mathbf{p}^{(\alpha)}) \text{ für ein } \sigma \in S_n\}$$

die Menge der Vektoren, für die definitionsgemäß der *pairing case* vorliegt (siehe [11]). Bei dieser Art des *pairing case* wählen wir drei bestimmte Fächer aus und weisen jeder 2-Auswahl dieser Fächer die Wahrscheinlichkeit α zu. Die Anzahl der restlichen Fächer ist gerade, sodass wir wie im vorherigen Fall disjunkte Paare bilden können und diesen jeweils die Wahrscheinlichkeit β zuordnen.

VERMUTUNGEN IM FALL $s = 2$

Caron et al. formulieren in [10] für $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{(2)}$ das Optimierungsproblem

$$\left(\mathcal{P}_n^{(2)}\right) \begin{cases} \text{minimiere} & E_n^{(2)}(\mathbf{p}) \\ \text{unter} & \mathbf{p} \in V_n^{(2)} \end{cases}$$

mit $V_n^{(2)} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\eta_2} \mid 0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_{\eta_2} \mathbf{e}_{\eta_2}^\top \mathbf{p} = 1 \right\}$, sowie die folgenden Vermutungen zur Lösung (vergleiche [10, 11]).

Vermutung 3.2.1. *Für gerade n liegt an der Stelle \mathbf{p} genau dann ein Minimum von $E_n^{(2)}(\mathbf{p})$ vor, wenn $\mathbf{p} \in B_n^{(2)}$ gilt.*

Vermutung 3.2.2. *Ist n ungerade, so existiert ein eindeutiges α^* , $0 \leq \alpha^* \leq \frac{1}{3}$, $\alpha^* \neq \frac{1}{n}$, $n \geq 3$, so dass an der Stelle \mathbf{p} genau dann ein globales Minimum von $E_n^{(2)}(\mathbf{p})$ vorliegt, wenn $\mathbf{p} \in D_n^{(\alpha^*)}$ gilt.*

In [10] wird Vermutung 3.2.1 für die Fälle $n = 2$ und $n = 4$ sowie Vermutung 3.2.2 für den Fall $n = 3$ bewiesen. Darüber hinaus wird für $n \geq 6$ gezeigt, dass stets lokale Minima vorliegen, und dass $\mathbf{P}_n^{(1)} \neq \mathbf{P}_{n,GW}^{(1)}$ gilt, falls α von $\frac{1}{n}$ verschieden ist. Neben der in diesem Abschnitt vorgestellten Situation ist in der Literatur lediglich ein weiterer Spezialfall bekannt, dem Unterabschnitt 3.2.2 gewidmet ist.

3.2.2. DER FALL $n = ks$

Fang und Chang untersuchen die Situation, in der n ein Vielfaches von s ist (siehe [23]). Für den Fall $k = 2$, in dem immer genau die Hälfte der Fächer mit einem Teilchen besetzt wird, zeigen sie, dass $E_{2s}^{(s)}$ genau dann minimal wird, wenn die Teilchen in disjunkten Gruppen mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verteilt werden. Neben dem eben genannten Hauptresultat wird in [23] mit Lemma 3.2.1 eine Abschätzung für die erwartete Anzahl der besetzten Fächer für $n = ks$ bewiesen. Wir wollen erneut den *pairing case* betrachten und definieren den Vektor \mathbf{p}_s^* durch

$$p_{n,i_1,\dots,i_s}^* := \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{wenn } i_1 = sr - (s - 1), i_2 = i_1 + 1, \dots, i_s = i_1 + (s - 1), r \in \{1, 2, \dots, k\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog zu Unterabschnitt 3.2.1 kann die Menge aller Fälle, in denen der *pairing case* vorliegt, durch

$$B_n^{(s)} = \{ \mathbf{p}_n^{(s)} \mid \mathbf{p}_n^{(s)} = \sigma(\mathbf{p}_s^*) \text{ für ein } \sigma \in S_n \} \quad (3.11)$$

dargestellt werden. Wir bezeichnen jede Strategie, die einen Vektor $\mathbf{p}_n^{(s)}$ aus der Menge $B_n^{(s)}$ wählt, mit S_k . Weiter sei $V_{S,t}$ die Anzahl der Fächer, die nach t Besetzungsvorgängen und unter Verwendung der Strategie S mindestens ein Teilchen enthalten. Mit diesen Begriffen können wir das bereits erwähnte Lemma formulieren.

Lemma 3.2.1 (Fang und Chang). *Im Fall $n = ks$ ist die erwartete Anzahl der Fächer mit mindestens einem Teilchen unter der disjunkten Strategie \mathbb{S}_k nach t Besetzungsvorgängen maximal. Es gilt also*

$$\mathbb{E}(V_{\mathbb{S}_k,t}) \geq \mathbb{E}(V_{\tilde{\mathbb{S}},t})$$

für jede Strategie $\tilde{\mathbb{S}}$ und jedes $t \in \mathbb{N}$.

Dieses Resultat impliziert nicht, dass die erwartete Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur vollständigen Serie minimal wird (siehe [23]). Diese Implikation ergibt sich in [23] lediglich für $k = 2$ und fußt auf dem folgenden Theorem (siehe [23], Theorem 2).

Theorem 3.2.1 (Fang und Chang). *Im Fall $n = 2s$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Fächer nach t Besetzungsvorgängen belegt sind, unter der disjunkten Strategie \mathbb{S}_2 strikt größer als unter jeder Strategie $\tilde{\mathbb{S}}$, die nicht disjunkt ist. Es gilt also*

$$\mathbb{P}(V_{\mathbb{S}_2,t} = n) > \mathbb{P}(V_{\tilde{\mathbb{S}},t} = n)$$

für jede Strategie $\tilde{\mathbb{S}}$ und jedes $t \in \mathbb{N}$.

Jede Strategie, die den Erwartungswert minimiert, weist also nur paarweise disjunkten Teilmengen eine positive Wahrscheinlichkeit zu. Fassen wir jede dieser Teilmengen als ein Fach zusammen, so reduziert sich das Problem auf den Fall $s = 1$ und $n = 2$. In diesem Fall können wir das bekannte Resultat von Boneh und Hofri [6] anwenden und erhalten eine optimale Strategie genau dann, wenn beide Teilmengen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ besetzt werden.

3.3. ZUSAMMENFASSUNG

Die bisherigen Ergebnisse verallgemeinern das klassische Coupon-Collector-Problem entweder dahingehend, dass die Fächer unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten aufweisen dürfen oder dass mehr als ein Teilchen pro Besetzungsvorgang verteilt wird. Wir werden im folgenden Kapitel präsentieren, wie sich die Verteilung und das asymptotische Verhalten ändern, wenn wir beide Verallgemeinerungen gleichzeitig zulassen. Außerdem betrachten wir das Warten auf die c -te Serie im Fall $s \geq 1$. In Kapitel 6 lösen wir das Optimierungsproblem (3.10) für den Fall $s = n - 1$ und diskutieren die Existenz weitere Fälle, in denen die Gleichverteilung die erwartete Anzahl an Besetzungsvorgängen bis zur ersten vollständigen Serie minimiert.

KAPITEL 4

ASYMPTOTISCHE UNTERSUCHUNGEN IM ALLGEMEINEN MODELL

Wir stellen in diesem Kapitel zwei Grenzwertsätze für den Fall $s \geq 1$ vor, welche die bereits existierenden Resultate ergänzen. Zunächst untersuchen wir die Wartezeit auf die c -te vollständige Serie unter der Annahme, dass jede s -Teilmenge die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt. Anschließend lassen wir zu, dass die Wahrscheinlichkeiten p_{n,i_1,\dots,i_s} unterschiedlich sein können und geben einen Grenzwertsatz für die Wartezeit auf die erste vollständige Serie an. Um eine nicht ausgeartete Grenzverteilung zu erhalten, müssen wir die Zufallsvariable $X_n^{(s,c)}$ für beide Grenzwertsätze wie in Theorem 2.2.1, passend normieren. Für Folgen $(a_n^{(s,c)})$ und $(b_n^{(s,c)})$ untersuchen wir also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_n^{(s,c)} - a_n^{(s,c)}}{b_n^{(s,c)}} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(X_n^{(s,c)} \leq b_n^{(s,c)} x + a_n^{(s,c)} \right).$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, setzen wir $k_n := k_n^{(s,c)}(x) := b_n^{(s,c)} x + a_n^{(s,c)}$. Wir untersuchen somit das asymptotische Verhalten der Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur c -ten vollständigen Serie höchstens dem von n , s , c und x abhängigen Wert $k_n^{(s,c)}(x)$ entspricht. Zuerst betrachten wir dafür die Zufallsvariable $Z_n^{(s,c)}(k_n)$, die wie in (1.2) definiert ist, um anschließend unter Verwendung von (1.3) Resultate für $X_n^{(s,c)}$ abzuleiten.

4.1. GLEICH WAHRSCHEINLICHE s -TEILMENGEN UND $c \geq 1$

Wie in Kapitel 1 beschreibt $A_{n,j}^{(c)}(k_n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, das Ereignis, dass Fach Nummer j nach k_n Besetzungsvorgängen weniger als c Teilchen enthält. Für festes $c \geq 1$ kürzen wir $A_{n,j}^{(c)}(k_n)$ in diesem Abschnitt durch $A_{n,j}$ ab. Außerdem schreiben wir kurz $Z_n(k_n)$ für die in (1.2) definierte Zufallsvariable $Z_n^{(s,c)}(k_n)$ und X_n für $X_n^{(s,c)}$.

Theorem 4.1.1. *Seien $x \in \mathbb{R}$ beliebig sowie $k_n := \lfloor \frac{n}{s}(\log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)! + x)) \rfloor$, $n > 1$. Wenn alle s -Teilmengen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt werden, so gilt*

$$Z_n(k_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei Z eine Zufallsvariable mit der Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$, $\lambda := \lambda(x) := e^{-x}$, bezeichnet.

Der in Unterabschnitt 4.1.1 geführte Beweis fußt auf der Momentenmethode. Nach dieser Methode gilt für eine Zufallsvariable X und eine Folge von Zufallsvariablen X_n allgemein

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n^r = \mathbb{E}X^r \text{ für jedes } r \in \mathbb{N} \implies X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

falls alle auftretenden Momente existieren und die Verteilung von X durch die Folge $(\mathbb{E}(X^r))_{r \geq 1}$ eindeutig bestimmt ist (siehe [5], S. 344). Die Momente einer Zufallsvariablen können durch deren faktorielle Momente dargestellt werden, die für eine poissonverteilte Zufallsvariable einfacher zu berechnen sind. Das r -te faktorielle Moment einer Zufallsvariablen X ist durch

$$\mathbb{E}X^{\underline{r}} := \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1)]$$

gegeben. Mithilfe der in (2.3) definierten Stirling-Zahlen zweiter Art und der Identität (siehe [28], S. 262)

$$X^r = \sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}}, \quad r \in \mathbb{N}$$

lässt sich der Zusammenhang

$$\mathbb{E}X^r = \sum_{k=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} \mathbb{E}X^{\underline{k}}, \quad r \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

zwischen den Momenten und den faktoriellen Momenten einer Zufallsvariablen herstellen. Es folgt direkt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n^r = \mathbb{E}X^{\underline{r}} \text{ für jedes } r \in \mathbb{N} \implies X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

falls alle auftretenden faktoriellen Momente existieren und die Verteilung von X durch die Folge $(\mathbb{E}(X^{\underline{r}}))_{r \geq 1}$ eindeutig bestimmt ist. Für eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ

gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (4.2)$$

womit das r -te faktorielle Moment durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=r}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-r)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^r \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\lambda^{k-r}}{(k-r)!} \\ &= \lambda^r \end{aligned} \quad (4.3)$$

gegeben ist. Die erste Voraussetzung $\mathbb{E}|Z^r| < \infty$ ist somit für die poissonverteilte Zufallsvariable Z erfüllt. Um zu zeigen, dass die Verteilung von Z durch die Folge $(\mathbb{E}(Z^r))_{r \geq 1}$ eindeutig bestimmt ist, reicht es nachzuweisen, dass die Potenzreihe

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{E}(Z^r) \frac{t^r}{r!}$$

einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt (siehe [5], S. 342). Dieser Nachweis ist im Anhang B.3 nachzulesen. Den vorausgegangenen Überlegungen folgend, ergibt sich dann aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r) = \lambda^r \quad (4.4)$$

der Grenzwertsatz in Theorem 4.1.1.

Wir werden das für Indikatorensummen bekannte Resultat

$$\mathbb{E}(Z_n^r) = \mathbb{E}\left(r! \binom{Z_n}{r}\right) = r! \mathbb{E}\left(\binom{Z_n}{r}\right) = r! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \quad (4.5)$$

verwenden (siehe [53], S. 162). Weil für jedes r mit $1 \leq r \leq n$ und jede Wahl von i_1, \dots, i_r mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ nicht von der speziellen Wahl der $A_{n,i_1}, \dots, A_{n,i_r}$, sondern nur von der Anzahl r der Ereignisse abhängt, gilt (siehe [35], S. 72)

$$\mathbb{E}(Z_n^r) = r! \binom{n}{r} \mathbb{P}(A_{n,1} \cap \dots \cap A_{n,r}). \quad (4.6)$$

Die Zufallsvariable $N_j := N_{n,j}$ beschreibe die Anzahl der Teilchen, die nach k_n Besetzungsvorgängen in Fach j liegen.

Damit gilt

$$\begin{aligned} r! \binom{n}{r} \mathbb{P}(A_{n,1} \cap \dots \cap A_{n,r}) &= r! \binom{n}{r} \mathbb{P}(N_1 \leq c-1, \dots, N_r \leq c-1) \\ &= \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} r! \binom{n}{r} \mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r). \end{aligned} \quad (4.7)$$

In jedem Besetzungsschritt werden s Teilchen auf unterschiedliche Fächer verteilt. Dabei kann es vorkommen, dass mehrere der Fächer $1, 2, \dots, r$ gleichzeitig getroffen werden. Für $i \in \{1, \dots, r\}$ beschreibe die Zufallsvariable B_i die Anzahl der Besetzungsvorgänge, in denen genau i der Fächer $1, \dots, r$ gleichzeitig besetzt werden. Wir fassen B_1, \dots, B_r durch den Vektor $B = (B_1, \dots, B_r)$ zusammen. Um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r\}$ für $(\ell_1, \dots, \ell_r) \in \{0, \dots, c-1\}^r$ zu bestimmen, unterteilen wir dieses nach den möglichen Realisierungen $b = (b_1, \dots, b_r)$ von B . Mit

$$\ell_\Sigma := \ell_1 + \dots + \ell_r \quad (4.8)$$

gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r) \\ &= \sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \dots \sum_{b_r=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b) \mathbf{1}\{b_1 + 2b_2 + \dots + rb_r = \ell_\Sigma\}, \end{aligned}$$

wobei jede der auftretenden Summen endlich ist. Dabei ist zu beachten, dass

$$\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b)$$

im Fall $s < r$ nur dann positive Werte annimmt, wenn $b_{s+1} = \dots = b_r = 0$ gilt. Das folgende Lemma ist grundlegend für den Beweis von Theorem 4.1.1.

Lemma 4.1.1. *Es gilt $\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b) = O\left(n^{-r - \sum_{i=2}^r (i-1)b_i}\right)$.*

Der Beweis ist im Anhang A nachzulesen. Nach Definition von

$$\mathcal{S}_{n,r,s} := \mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B_1 = \ell_\Sigma, B_2 = \dots = B_r = 0)$$

gilt wegen $r! \binom{n}{r} = O(n^r)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r! \binom{n}{r} \mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} r! \binom{n}{r} \mathcal{S}_{n,r,s}$$

und es genügt, für den Nachweis von (4.4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} r! \binom{n}{r} \mathcal{S}_{n,r,s} = \lambda^r$$

zu zeigen.

4.1.1. BEWEIS VON THEOREM 4.1.1

Zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$ ist k_n durch $k_n = \lfloor \frac{n}{s}(\log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)!) + x) \rfloor$ definiert. Im Folgenden sei n so groß, dass $k_n \geq 1$ gilt. Wir nennen den Term innerhalb der unteren Gaußklammer t_n und definieren damit

$$\varepsilon_n := t_n - k_n.$$

Mit $\mathcal{S}_{n,r,s}$ untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass in ℓ_Σ der insgesamt k_n Besetzungsvorgänge jeweils genau eines der Fächer $1, \dots, r$ und in den restlichen keines der Fächer $1, \dots, r$ getroffen wird. Die Wahrscheinlichkeit für das erste dieser Ereignisse ist $\binom{n-r}{s-1} / \binom{n}{s}$. Das zweite der beiden Ereignisse tritt pro Besetzungsvorgang mit einer Wahrscheinlichkeit von $\binom{n-r}{s} / \binom{n}{s}$ ein. Das Ereignis $\{N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r\}$ hängt nicht von der Reihenfolge ab, in der die Besetzungsvorgänge durchgeführt werden. Die Anzahl der möglichen Vorgänge, die zu diesem Ereignis führen, lässt sich bestimmen, indem zunächst die ℓ_1 Zeitpunkte, zu denen nur Fach 1 besetzt wird, danach ℓ_2 der restlichen $k_n - \ell_1$ Zeitpunkt für Fach 2 und so weiter gewählt werden. Durch dieses Vorgehen verbleiben $k_n - \ell_\Sigma$ Zeitpunkte, zu denen keines der Fächer $1, \dots, r$ belegt wird. Die gesuchte Anzahl ergibt sich durch das Produkt

$$\binom{k_n}{\ell_1} \binom{k_n - \ell_1}{\ell_2} \cdots \binom{k_n - \ell_1 - \cdots - \ell_{r-1}}{\ell_r} = \frac{k_n!}{\ell_1! \cdots \ell_r! \cdot (k_n - \ell_\Sigma)!}, \quad (4.9)$$

wobei das Gleichheitszeichen aus der Definition der Binomialkoeffizienten und durch Kürzen der auftretenden Fakultäten resultiert. Mit diesen Vorüberlegungen finden wir die Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{S}_{n,r,s} = \frac{k_n!}{\ell_1! \cdots \ell_r! \cdot (k_n - \ell_\Sigma)!} \left[\frac{\binom{n-r}{s-1}}{\binom{n}{s}} \right]^{\ell_\Sigma} \left[\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^{k_n - \ell_\Sigma}. \quad (4.10)$$

Im Beweis des Lemmas 4.1.1, der im Anhang A aufgeführt ist, wird die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b)$ untersucht. Die Rechnungen stimmen in einigen Punkten überein, da es sich bei (4.10) um den Spezialfall handelt, in dem $B = (B_1 = \ell_\Sigma, B_2 = \dots, B_r = 0)$ und damit $b_1 + \dots + b_r = \ell_\Sigma$ gilt. Auch der Beweis von (2.26), der im Anhang B.2 aufgeführt ist, ähnelt den folgenden Überlegungen. Dort wird der Fall $s = 1$ unter der Annahme untersucht, dass die Teilmengen mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten besetzt werden.

Mit

$$\frac{k_n!}{(k_n - \ell_\Sigma)!} = k_n^{\ell_\Sigma} \cdot (1 + o(1))$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n-r}{s-1}}{\binom{n}{s}} &= \frac{s}{n} \cdot \frac{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-s-r+2)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)} \\
&= \frac{s}{n} \prod_{i=0}^{r-2} \frac{n-s-i}{n-1-i} \\
&= \frac{s}{n} \prod_{i=0}^{r-2} \left(1 - \frac{s-1}{n-1-i}\right) \\
&= \frac{s}{n} (1 + o(1))
\end{aligned}$$

und

$$\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}} = \prod_{i=0}^{r-1} \left(1 - \frac{s}{n-i}\right) \quad (4.11)$$

gilt

$$\mathcal{S}_{n,r,s} = k_n^{\ell_\Sigma} \cdot (1 + o(1)) \cdot \left[\frac{s}{n}(1 + o(1))\right]^{\ell_\Sigma} \cdot \left[\prod_{i=0}^{r-1} \left(1 - \frac{s}{n-i}\right)\right]^{k_n - \ell_\Sigma} \cdot \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!}.$$

Wir wenden die Logarithmusfunktion auf $\mathcal{S}_{n,r,s}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\log(\mathcal{S}_{n,r,s}) &= \ell_\Sigma \log k_n + \log(1 + o(1)) + \ell_\Sigma \log\left(\frac{s}{n}\right) \\
&\quad + (k_n - \ell_\Sigma) \left[\sum_{i=0}^{r-1} \log\left(1 - \frac{s}{n-i}\right) \right] - \log(\ell_1! \cdots \ell_r!) \\
&= \ell_\Sigma \log\left(\frac{k_n s}{n}\right) + (k_n - \ell_\Sigma) \left[\sum_{i=0}^{r-1} \log\left(1 - \frac{s}{n-i}\right) \right] + o(1) - \log(\ell_1! \cdots \ell_r!).
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden der letzten Zeile gilt

$$\begin{aligned}
\ell_\Sigma \log\left(\frac{k_n s}{n}\right) &= \ell_\Sigma \log\left(x + \log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)!) - \frac{s}{n} \varepsilon_n\right) \\
&= \ell_\Sigma \log\left((\log n) \left(1 + \frac{x}{\log n} + \frac{(c-1) \log \log n}{\log n} - \frac{\log((c-1)!) - \frac{s}{n} \varepsilon_n}{\log n}\right)\right) \\
&= \ell_\Sigma \log((\log n) (1 + o(1))) \\
&= \ell_\Sigma \log \log n + o(1).
\end{aligned} \quad (4.12)$$

Den zweiten Summanden schätzen wir mit den Ungleichungen (1.4) für die Logarithmusfunktion

nach oben durch

$$\begin{aligned}
& (k_n - \ell_\Sigma) \left[\sum_{i=0}^{r-1} \log \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \right] \\
& \leq -(k_n - \ell_\Sigma) \left[\sum_{i=0}^{r-1} \frac{s}{n-i} \right] \\
& \leq -(k_n - \ell_\Sigma) \cdot r \cdot \frac{s}{n} \\
& = \ell_\Sigma \frac{rs}{n} - \left(rx + r \log n + r(c-1) \log \log n - r \log((c-1)!) - \frac{rs\varepsilon_n}{n} \right) \\
& = -rx - r \log n - r(c-1) \log \log n + r \log((c-1)!) + o(1)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ab. Wir fassen zusammen, wenden die Exponentialfunktion an, um das Logarithmieren rückgängig zu machen, und erhalten

$$\mathcal{S}_{n,r,s} \leq \exp(o(1)) e^{-rx} \frac{1}{n^r} (c-1)!^r \exp[(\log \log n) (\ell_\Sigma - r(c-1))] \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!}. \tag{4.14}$$

Da wir das Verhalten dieses Terms für $n \rightarrow \infty$ untersuchen wollen, betrachten wir im Folgenden die von n abhängigen Faktoren. Für das Argument des letzten Faktors gilt

$$(\ell_\Sigma - r(c-1)) \log \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \ell_\Sigma = r(c-1), \\ -\infty, & \ell_\Sigma < r(c-1), \end{cases}$$

und damit

$$\exp((\ell_\Sigma - r(c-1)) \log \log n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & \ell_\Sigma = r(c-1), \\ 0, & \ell_\Sigma < r(c-1). \end{cases} \tag{4.15}$$

Alle übrigen von n abhängenden Faktoren sind beschränkt, somit konvergiert die obere Schranke in (4.14) für $\ell_\Sigma < r(c-1)$ gegen Null. Wir untersuchen (4.14) für $\ell_\Sigma = \ell_1 + \cdots + \ell_r = r(c-1)$. Diese Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ die Gleichheit $\ell_i = (c-1)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!} = \frac{1}{(c-1)!^r},$$

und wir finden die obere Schranke

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} r! \binom{n}{r} \mathcal{S}_{n,r,s} & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} r! \binom{n}{r} e^{o(1)} e^{-rx} \frac{1}{n^r} \exp(0) \\
& = e^{-rx}.
\end{aligned}$$

Um eine untere Schranke anzugeben, bilden wir erneut den Logarithmus von $\mathcal{S}_{n,r,s}$ und schätzen mithilfe der Ungleichungen (1.4) ab.

Es gilt

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{S}_{n,r,s}) &= \ell_\Sigma \log k_n + \log(1 + o(1)) + \ell_\Sigma \log \left(\frac{s}{n} \right) + (k_n - \ell_\Sigma) \sum_{i=0}^{r-1} \log \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) - \log(\ell_1! \cdots \ell_r!) \\ &\geq \ell_\Sigma \log \left(\frac{k_n s}{n} \right) + o(1) + (k_n - \ell_\Sigma) \sum_{i=0}^{r-1} \left[1 - \frac{1}{1 - s/(n-i)} \right] - \log(\ell_1! \cdots \ell_r!). \end{aligned}$$

In (4.12) wurde gezeigt, dass

$$\ell_\Sigma \log \left(\frac{k_n s}{n} \right) = \ell_\Sigma \log \log n + o(1)$$

gilt. Wegen

$$1 - \frac{1}{1-t} = \frac{1-t-1}{1-t} = -\frac{t}{1-t}$$

für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$1 - \frac{1}{1 - s/(n-i)} = -\frac{s}{n-i} \cdot \frac{1}{1 - s/(n-i)} = -\frac{s}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

und damit

$$\begin{aligned} &(k_n - \ell_\Sigma) \sum_{i=0}^{r-1} \left[1 - \frac{1}{1 - s/(n-i)} \right] \\ &= -(k_n - \ell_\Sigma) \cdot r \cdot \frac{s}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \ell_\Sigma \frac{rs}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) - (rx + r \log n + r(c-1) \log \log n - r \log((c-1)!)) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= -rx - r \log n - r(c-1) \log \log n + r \log((c-1)!) + o(1). \end{aligned}$$

Wie oben erhalten wir damit

$$\mathcal{S}_{n,r,s} \geq \exp(o(1)) e^{-rx} \frac{1}{n^r} (c-1)!^r \exp[(\log \log n) (\ell_\Sigma - r(c-1))] \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!}$$

sowie mit (4.15)

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} r! \binom{n}{r} \mathcal{S}_{n,r,s} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} r! \binom{n}{r} e^{o(1)} e^{-rx} \frac{1}{n^r} \exp(0) \\ &= e^{-rx}. \end{aligned}$$

Wegen (4.6), (4.7) und den Schlussfolgerungen aus Lemma 4.1.1 gilt (4.4) und damit die Behauptung. \square

Wählen wir k_n wie in Theorem 4.1.1, so gilt mit dem Zusammenhang (1.3) und der Zähldichte (4.2) der Poisson-Verteilung

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n(k_n) = 0) \\
 &= \mathbb{P}(Z = 0) \\
 &= \frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} \\
 &= \exp(-e^{-x}) \\
 &= G(x),
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei G die Verteilungsfunktion der Gumbelschen Extremwertverteilung ist.

4.2. s -TEILMENGEN MIT UNTERSCHIEDLICHEN WAHRSCHEINLICHKEITEN UND $c = 1$

In diesem Unterabschnitt ist $c = 1$ fest. Wir untersuchen das asymptotische Verhalten von $Z_n(k_n)$ bei $n \rightarrow \infty$ für den Fall, in dem verschiedene s -Teilmengen unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten aufweisen können, um anschließend eine Aussage über die Asymptotik von X_n treffen zu können. Die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen s -Teilmengen sollen sich mit wachsendem n in einem zu präzisierenden Sinn einer Gleichverteilung annähern. Für den Fall $s = 1$ haben wir in Abschnitt 2.2 ein Resultat von Peter Neal vorgestellt. Während $p_{n,i}$, a_n und b_n in [42] allgemein betrachtet werden, verwenden wir in diesem Abschnitt ein konkretes Modell, um die Wahrscheinlichkeiten zu modellieren. Auch die Folgen a_n und b_n werden wir explizit angeben. Wir weisen jeder s -Teilmenge die Wahrscheinlichkeit

$$p_{n,i_1,\dots,i_s} := \frac{1}{\binom{n}{s}} \left(1 + \frac{\Delta_{n,i_1,\dots,i_s}}{\log n} \right)$$

mit $\Delta_{n,i_1,\dots,i_s} \in \mathbb{R}$ zu. Die Abweichung von der Gleichverteilung ist in diesem Modell also $\Delta_{n,i_1,\dots,i_s} / \log n$. Die Division durch $\log n$ bewirkt, dass wir nur solche Fälle betrachten, in denen die Abweichung von der Gleichverteilung asymptotisch klein ist. Wir wollen, dass

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} p_{n,i_1,\dots,i_s} = 1$$

erfüllt ist und fordern deswegen

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} \Delta_{n,i_1,\dots,i_s} = 0.$$

Darüber hinaus soll es eine obere Schranke für die Abweichung von der Gleichverteilung in dem Sinne geben, dass für ein $M \in (0, \infty)$ die Ungleichung

$$\max_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n} |\Delta_{n,i_1,\dots,i_s}| \leq M \quad (4.17)$$

erfüllt ist. Wir definieren für jedes $h \in \{1, \dots, s\}$ und jede Menge $\{i_1, \dots, i_h\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ die gemittelte Abweichung von der Gleichverteilung für diejenigen s -Teilmengen, die die Fächer i_1, \dots, i_h enthalten, durch

$$\bar{\Delta}_{n,i_1,\dots,i_h} := \frac{1}{\binom{n-h}{s-h}} \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_s\} \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \{i_1,\dots,i_h\} \subseteq \{i_1,\dots,i_s\}}} \Delta_{n,i_1,\dots,i_s}. \quad (4.18)$$

Für $s = h$ gilt $\Delta_{n,i_1,\dots,i_s} = \bar{\Delta}_{n,i_1,\dots,i_h}$. Mit den obigen Vorbereitungen können wir das angekündigte Theorem angeben.

Theorem 4.2.1. *Seien $x \in \mathbb{R}$ beliebig sowie $k_n := \lfloor \frac{n}{s}(x + \log n) \rfloor$, $n \geq 1$. Unter der Voraussetzung*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \cdot \bar{\Delta}_{n,i}\right) =: c(x) < \infty, \quad (4.19)$$

gilt für die durch (1.2) definierte Zufallsvariable $Z_n(k_n)$ die Verteilungskonvergenz

$$Z_n(k_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dabei ist Z eine Zufallsvariable mit der Poisson-Verteilung $Po(\lambda)$, $\lambda := \lambda(x) := e^{-x}c(x)$.

In dem in Unterabschnitt 4.2.1 geführten Beweis findet erneut die Momentenmethode Anwendung. Den Überlegungen des vorausgegangenen Abschnittes folgend, ergibt sich aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) = \lambda^r$$

die Behauptung von Theorem 4.2.1, wobei wie in (4.5)

$$\mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) = r! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$$

gilt. Um die Schreibweise einfach zu halten, definieren wir für $r \geq 1$

$$a_{n,r} := \frac{s}{n} \left(r + \frac{rM}{\log n} \right) \quad (4.20)$$

sowie für $r \geq 2$ und $h \in \{2, \dots, r\}$ die Ausdrücke

$$\mathbf{s}_{n,h} := \frac{n}{s} \cdot \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} = \frac{(s-1) \cdots (s-h+1)}{(n-1) \cdots (n-h+1)} \quad (4.21)$$

sowie

$$R_{n,r} := \sum_{h=2}^r (-1)^{h+1} \mathbf{s}_{n,h} \left(\binom{r}{h} + \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \quad (4.22)$$

und

$$\bar{R}_{n,r} := \sum_{h=2}^r \mathbf{s}_{n,h} \left(\binom{r}{h} + \frac{M}{\log n} \binom{r}{h} \right).$$

Weiter setzen wir $R_{n,1} := 0$ und $\bar{R}_{n,1} := 0$. Darüber hinaus definieren wir unter Verwendung von (4.18) die Ausdrücke

$$b_{n,r} := \sum_{h=2}^r \left(\mathbf{s}_{n,h} \binom{r}{h} (x + \log n) + \mathbf{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \quad (4.23)$$

sowie

$$a_{n,r}^+ := \frac{s}{n} \left(r + \frac{rM}{\log n} + \bar{R}_{n,r} \right)$$

und

$$d_{n,r} := \exp \left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} \left(rx + r \log n + \frac{x + \log n}{\log n} rM \right) \right), \quad (4.24)$$

die wir im Beweis des Lemmas 4.2.1 verwenden werden. Schließlich setzen wir $b_{n,1} := 0$, sowie $a_{n,1}^+ := a_{n,1}$. Mit dieser Vorbereitung können wir folgendes Lemma formulieren.

Lemma 4.2.1. *Sei $A_{n,j} := A_{n,j}^{(1)}(k_n)$ das Ereignis, dass Fach Nummer j nach $k_n = \lfloor \frac{n}{s}(x + \log n) \rfloor$ Besetzungsvorgängen noch leer ist. Dann gelten für jedes $r \geq 1$ und für jede Wahl von $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$*

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \leq \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \cdot \exp(a_{n,r} + b_{n,r})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) &\geq \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \cdot d_{n,r} \cdot \exp \left(-(x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} (x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right). \end{aligned}$$

Im Beweis, der im Anhang A aufgeführt ist, wird die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ mithilfe von (3.1) und (3.2) angegeben. Anschließend werden die Ungleichungen (1.4) für die Logarithmusfunktion verwendet, um Schranken für $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ zu finden.

4.2.1. BEWEIS VON THEOREM 4.2.1

Die in Lemma 4.2.1 ermittelten Schranken für

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$$

werden im Folgenden verwendet, um das r -te faktorielle Moment $\mathbb{E}(Z_n^r(k_n))$ nach oben und nach unten abzuschätzen. Anschließend werden wir in einer Konvergenzuntersuchung zeigen, dass die Schranken für $n \rightarrow \infty$ gegen den gleichen Wert streben und damit die Verteilungskonvergenz nachweisen. Bevor wir diese Untersuchung für den allgemeinen Fall $r \geq 1$ vornehmen, werden wir den Fall $r = 1$ und damit den Erwartungswert betrachten. Anschließend können wir Erkenntnisse von dieser einfachen Situation auf den allgemeinen Fall übertragen.

ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DES ERWARTUNGSWERTES

Das erste faktorielle Moment von $Z_n(k_n)$ ist der Erwartungswert von $Z_n(k_n)$. Mit den Schranken aus Lemma 4.2.1 können wir diesen Erwartungswert mit (4.5) durch

$$\mathbb{E}(Z_n(k_n)) \leq \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \overline{\Delta}_{n,i}\right) \cdot \exp(a_{n,1})$$

und

$$\mathbb{E}(Z_n(k_n)) \geq \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \overline{\Delta}_{n,i}\right) \cdot d_{n,1}$$

abschätzen, wobei $a_{n,1}$ beziehungsweise $d_{n,1}$ in (4.20) und (4.24) definiert sind.

Im Folgenden untersuchen wir $\exp(a_{n,1})$ und $d_{n,1}$ für $n \rightarrow \infty$ auf Konvergenz. Wegen

$$a_{n,r} = \frac{s}{n} \left(r + \frac{rM}{\log n} \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

gilt zum einen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a_{n,1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{s}{n} \cdot \left(1 + \frac{M}{\log n}\right)\right) = 1 \tag{4.25}$$

und zum anderen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n,1}}{1 - a_{n,1}} \cdot \log n \right) = 0.$$

Bei der Berechnung des Grenzwertes von $d_{n,1}$ erhalten wir durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{a_{n,1}}{1 - a_{n,1}} \left(x + \log n + \frac{x + \log n}{\log n} \cdot M\right)\right) = 1$$

wie in (4.25) den Wert eins. Diese Beobachtung lässt vermuten, dass obere und untere Schranke

asymptotisch identisch sind und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n(k_n)) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i}\right) \cdot \exp(a_{n,1}) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i}\right) \cdot d_{n,1} \end{aligned}$$

gilt. Weil nach Voraussetzung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i}\right) = c(x) < \infty$$

erfüllt ist, folgt für den Erwartungswert von $Z_n(k_n)$ in der Tat

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n(k_n)) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i}\right) \cdot \exp(a_{n,r}) \\ &= e^{-x} \cdot c(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n(k_n)) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{e^{-x}}{n} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i}\right) \cdot d_{n,1} \\ &= e^{-x} c(x) \end{aligned}$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n(k_n)) = e^{-x} c(x).$$

ASYMPTOTISCHES VERHALTEN DES r -TEN FAKTORIELLEN MOMENTS

Wie im Fall $r = 1$ werden wir zeigen, dass die obere und die untere Schranke für das r -te faktorielle Moment gegen denselben Wert konvergieren. Mit den Schranken für $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ aus Lemma 4.2.1 gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &= r! \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \\ &\leq r! \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot e^{a_{n,r}} \cdot e^{b_{n,r}} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &= r! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \\
&\geq r! \frac{e^{-rx}}{n^r} d_{n,r} \exp\left(-(x + \log n) \bar{R}_{n,r}\right) \exp\left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} (x + \log n) \bar{R}_{n,r}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Wir untersuchen die einzelnen Faktoren in (4.26) auf Konvergenz, wobei in (4.25) bereits für $r = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(a_{n,r}) = 1$$

gezeigt wurde. Für $r > 1$ folgt diese Aussage auf gleiche Weise aus der Definition von $a_{n,r}$ in (4.20). Wir betrachten den Exponenten des Faktors $e^{b_{n,r}}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
b_{n,r} &= \sum_{h=2}^r \left(\mathfrak{s}_{n,h} \binom{r}{h} (x + \log n) + \mathfrak{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \\
&\leq \sum_{h=2}^r \left(\mathfrak{s}_{n,h} \binom{r}{h} (x + \log n) + \mathfrak{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} \binom{r}{h} M \right)
\end{aligned}$$

und analog

$$b_{n,r} \geq \sum_{h=2}^r \left(\mathfrak{s}_{n,h} \binom{r}{h} (x + \log n) - \mathfrak{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} \binom{r}{h} M \right).$$

Mit (4.21) ist $\mathfrak{s}_{n,h}$ für $h \geq 2$ von der Größenordnung $O\left(\frac{1}{n}\right)$, und es gelten sowohl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{s}_{n,h} (x + \log n) = 0$$

als auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} = 0.$$

Folglich konvergieren obere und untere Schranke von $b_{n,r}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen null, und wir erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,r} = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(b_{n,r}) = 1.$$

Die Folgen $\exp(a_{n,r})$ und $\exp(b_{n,r})$ werden für die weiteren Untersuchungen durch die gegen eins konvergierende Folge

$$f_{o,n} := \exp(a_{n,r} + b_{n,r})$$

zusammengefasst, womit

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(r! \frac{e^{-rx}}{n^r} f_{o,n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right) \\ &= r! e^{-rx} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(f_{o,n} \frac{1}{n^r} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

gilt. Im nächsten Schritt soll (4.27) auf Konvergenz untersucht werden. Es gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{R}_{n,r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=2}^r s_{n,h} \left(\binom{r}{h} + \frac{M}{\log n} \binom{r}{h} \right) = 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,r}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{n} \left(r + \frac{rM}{\log n} + \bar{R}_{n,r} \right) = 0.$$

Außerdem gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,r}^+ \log n = 0$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{R}_{n,r} \log n = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} \left(rx + r \log n + \frac{x + \log n}{\log n} rM \right) \right) = 1$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-(x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right) = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} (x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right) = 1.$$

Wir definieren die für $n \rightarrow \infty$ gegen eins konvergierende Folge

$$f_{u,n} := d_{n,r} \exp \left(-(x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right) \exp \left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} (x + \log n) \bar{R}_{n,r} \right)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(r! \frac{e^{-rx}}{n^r} f_{u,n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right) \\ &= r! e^{-rx} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f_{u,n} \frac{1}{n^r} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Mit (4.28) und (4.29) unterscheiden sich obere und untere Schranke von $\mathbb{E}(Z_n^r(k_n))$ asymptotisch

lediglich um die Folgen $f_{o,n}$ und $f_{u,n}$, die für $n \rightarrow \infty$ gegen eins konvergieren.

Im Folgenden werden wir den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right)$$

bestimmen und definieren dazu für $1 \leq t \leq r-1$ die Menge I_t aller r -Tupel (i_1, \dots, i_r) aus $\{1, \dots, n\}^r$, die jeweils genau t verschiedene Komponenten besitzen. Es gilt also $|\{i_1, \dots, i_r\}| = t$. Stimmen beispielsweise $r-1$ Komponenten eines Tupels überein, so ist dieses Tupel ein Element von I_2 . An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Mengen $I_1 \dots I_{r-1}$ disjunkt sind. Wir definieren $I := \bigcup_{t=1}^{r-1} I_t$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^r} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \\ &= \frac{1}{n^r} \cdot \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$- \frac{1}{n^r} \cdot \frac{1}{r!} \cdot \sum_I \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right). \quad (4.31)$$

Die Terme in (4.30) und (4.31) werden im Folgenden getrennt untersucht. Mit Voraussetzung (4.19) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \cdot \bar{\Delta}_{n,i} \right) = c(x) < \infty$$

und so für (4.30)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} \cdot \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} \frac{1}{r!} \cdot \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_r=1}^n \prod_{\ell=1}^r \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^r \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i_\ell=1}^n \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \bar{\Delta}_{n,i} \right) \right)^r \\ &= \frac{1}{r!} c(x)^r. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für festes $1 \leq t \leq r-1$ ist

$$\sum_{I_t} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell} \right)$$

nach Vereinfachung eine t -fache Summe, die nach Multiplikation mit $1/n^t$ analog zu (4.32)

einen existierenden Grenzwert hat. Es gilt also

$$\sum_{I_t} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) = O(n^t)$$

und damit

$$\sum_I \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) = \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{I_t} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) = O(n^{r-1}).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} \frac{1}{r!} \sum_I \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) = 0. \quad (4.33)$$

Wir verwenden (4.31), (4.32) und (4.33) und erhalten

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(r! \cdot \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot f_{o,n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) \right) \\ &= e^{-rx} c(x)^r \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(r! \frac{e^{-rx}}{n^r} f_{u,n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) \right) \\ &= e^{-rx} c(x)^r, \end{aligned}$$

womit der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^r(k_n)) = e^{-rx} c(x)^r = (e^{-x} c(x))^r$$

bestimmt ist. Da alle Momente von $Z_n(k_n)$ im Grenzwert mit den Momenten einer poissonverteilten Zufallsvariablen Z mit Parameter $\lambda = e^{-x} c(x)$ übereinstimmen, folgt $Z_n(k_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Po}(\lambda)$ und damit die Behauptung. \square

Wie im letzten Abschnitt ergibt sich mit (1.3) und (4.2) aus Theorem 4.2.1 direkt das folgende Resultat.

Korollar 4.2.1. *Sei X_n die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur ersten vollständigen Serie. Dann gilt unter den Voraussetzungen von Theorem 4.2.1*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k_n) = G(x - \log c(x)).$$

Dabei bezeichnet G die Verteilungsfunktion der Gumbelschen Extremwertverteilung.

VOLLSTÄNDIGE SERIEN UND KOLLISIONEN

Eine weitere interessante und in der Literatur gut beschriebene Größe im Zusammenhang mit Fächer-Modellen ist die Zufallsvariable $Y_n := Y_n^{(d)}$, welche die Anzahl der Besetzungsvorgänge angibt, bis erstmalig eines der Fächer $d \geq 2$ Teilchen enthält. Wir nennen dieses Ereignis im Folgenden auch d -fach-Kollision. Eine ausführliche Einführung kann in [14], [30] und [33] nachgelesen werden. Wir werden uns auf den Fall beschränken, in dem $s = 1$ und $c = 1$ gelten und alle Fächer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ getroffen werden. Wie zuvor beschreibt X_n die Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur ersten vollständigen Serie. Außerdem bezeichnen wir das Ereignis, dass Fach Nummer j nach k_n Besetzungsvorgängen noch frei ist, wie zuvor mit $A_j := A_{n,j}^{(1)}(k_n)$ und verwenden die in (1.2) eingeführte Schreibweise

$$Z_n(k_n) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}\{A_j\}.$$

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Grenzwertsatz für die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X_n und Y_n herzuleiten. Wir setzen $k_n = \lfloor n(x + \log n) \rfloor$, definieren für beliebiges reelles $y > 0$

$$\ell_n := \ell_n(y) := \lfloor yn^{1-\frac{1}{d}} \rfloor$$

und bezeichnen das Ereignis, dass sich in Fach Nummer i nach ℓ_n Besetzungsvorgängen mindestens d Teilchen befinden, mit

$$B_i := B_{n,i} := B_{n,i}(\ell_n).$$

Die Zufallsvariable

$$V_n(\ell_n) := \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{B_i\}$$

zählt somit die Fächer, in denen es nach ℓ_n Besetzungsvorgängen zu einer d -fach-Kollision gekommen ist.

5.1. ASYMPTOTISCHE UNABHÄNGIGKEIT VON X_n UND Y_n

Wir werden den Zusammenhang

$$\mathbb{P}(X_n \leq k_n, Y_n > \ell_n) = \mathbb{P}(Z_n(k_n) = 0, V_n(\ell_n) = 0)$$

ausnutzen, um das folgende Theorem zu beweisen.

Theorem 5.1.1. *Mit obigen Definitionen gilt*

$$\mathbb{P}(X_n \leq k_n, Y_n > \ell_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G(x)(1 - W(y)), \quad (5.1)$$

mit $G(x)$, $x > 0$, wie in (2.5) und $W(y) := 1 - \exp(-\frac{y^d}{d!})$, $y > 0$.

Grundlegend für den Beweis des Theorems, der in Abschnitt 5.1.1 geführt wird, ist eine Verallgemeinerung der Jordanformel (siehe [53], S.154). Die Wahrscheinlichkeit, dass die Indikatorensummen $V_n(\ell_n)$ und $Z_n(k_n)$ beide den Wert null annehmen, kann demnach durch

$$\mathbb{P}(Z_n(k_n) = 0, V_n(\ell_n) = 0) = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\sigma=0}^n (-1)^{\nu+\sigma} \sum^* \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_\nu} \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_\sigma})$$

angegeben werden ([53], S. 169). Dabei läuft die Summe \sum^* über alle möglichen Auswahlen der Indizes $\{j_1, \dots, j_\nu\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ und $\{i_1, \dots, i_\sigma\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, sie enthält also $\binom{n}{\nu} \binom{n}{\sigma}$ Summanden. Weil alle Fächer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit belegt werden, hängt $\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_\nu} \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_\sigma})$ nur von der Anzahl der Fächer ab, die leer bleiben beziehungsweise mindestens d Teilchen enthalten, nicht aber von der konkreten Wahl dieser Fächer. Vergleichen wir die Folgen k_n und ℓ_n so stellen wir fest, dass k_n für $n \rightarrow \infty$ schneller wächst, als ℓ_n . Für jede Wahl von $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ gibt es folglich ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $k_n > \ell_n$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Für solche $n \geq n_0$ ist

$$\mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_\nu} \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_\sigma}) = 0,$$

falls $\{i_1, \dots, i_\sigma\} \cap \{j_1, \dots, j_\nu\} \neq \emptyset$ erfüllt ist, da ein Fach zum Zeitpunkt k_n nicht leer sein kann, wenn es zu Zeitpunkt ℓ_n bereits d Teilchen enthalten hat.

Zusammengefasst gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum^* \mathbb{P}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_\nu} \cap B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_\sigma}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu \cap B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n(k_n) = 0, V_n(\ell_n) = 0) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^{\nu+\sigma} \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu \cap B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}). \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\mathbb{P}_{n,\nu}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid A_1 \cap \dots \cap A_\nu)$$

können wir die Wahrscheinlichkeit über die Schnitte durch

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu \cap B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma})$$

ausdrücken und somit die Doppelsumme in

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^{\nu+\sigma} \binom{n}{\nu} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu \cap B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\ = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^{\nu+\sigma} \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\ = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \end{aligned}$$

überführen. Der Beweis von Theorem 5.1.1 fußt auf den folgenden Lemmata.

Lemma 5.1.1. *Für festes ν und $\sigma \geq 0$ gelten*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = 1 - W(y).$$

Der Beweis des Lemmas ist in Anhang A nachzulesen.

Lemma 5.1.2. Für $\nu \geq 0$ gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) = \frac{1}{\nu!} \exp(-\nu x)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) = G(x).$$

Der Beweis des Lemmas kann in [34] nachgelesen werden.

5.1.1. BEWEIS VON THEOREM 5.1.1

Nach Definition von

$$a_{n,\nu} := (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma})$$

gilt mit den Lemmata 5.1.2 und 5.1.1

$$a_\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,\nu} = (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \exp(-\nu x) \cdot (1 - W(y)).$$

Wir werden zunächst unter Verwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

erfüllt ist. Sei μ das Zählmaß auf \mathbb{N}_0 , dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}_0} \mathbf{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu} \mu(d\nu).$$

Der Integrand lässt sich durch

$$|\mathbf{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu}| \leq \left| \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \right|$$

abschätzen.

Mit (A.4) und der Formel C.2 des Ein und Ausschließens gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) &= 1 - \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\ &= 1 - \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}(B_{n-\nu,1} \cap \dots \cap B_{n-\nu,\sigma}) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-\nu} B_{n-\nu,i}\right) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, in k_n Besetzungsvorgängen keines der Fächer mit den Nummern $1, \dots, \nu$ zu treffen, ist $((n-\nu)/n)^{k_n} = (1-\nu/n)^{k_n}$, und es folgt mit (1.4) und $k_n = \lfloor n(x + \log n) \rfloor$

$$\begin{aligned} |\mathbb{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu}| &\leq \left| \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \right| \\ &= \binom{n}{\nu} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{k_n} \\ &\leq \frac{n^\nu}{\nu!} \exp\left(k_n \log\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)\right) \\ &\leq \frac{n^\nu}{\nu!} \exp\left(-k_n \frac{\nu}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\nu!} \exp\left(\nu \log n - (n(x + \log n)) \frac{\nu}{n}\right) \\ &= \frac{\exp(-\nu x)}{\nu!}. \end{aligned}$$

Für jedes feste $x > 0$ ist durch $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(\nu) := \frac{\exp(-\nu x)}{\nu!}$$

eine Majorante gegeben, die wegen

$$\int_{\mathbb{N}_0} g(\nu) \mu(d\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu x)}{\nu!} = \exp(\exp(-x)) < \infty$$

integrierbar ist. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu} = a_\nu$$

folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}_0} \mathbf{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu} \mu(d\nu) \\
&= \int_{\mathbb{N}_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}\{0 \leq \nu \leq n\} a_{n,\nu} \mu(d\nu) \\
&= \int_{\mathbb{N}_0} a_\nu \mu(d\nu) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} \exp(-\nu x) \cdot (1 - W(y)) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\exp(-x))^\nu}{\nu!} \cdot (1 - W(y)) \\
&= G(x)(1 - W(y)).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k_n, Y_n > \ell_n) \\
&= \mathbb{P}(Z_n(k_n) = 0, V_n(\ell_n) = 0) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_\nu) \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu} = G(x)(1 - W(y)).
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Mit (4.16) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k_n) = G(x).$$

In [30] wird die Gültigkeit von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq \ell_n) = W(y)$$

und somit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n > \ell_n) = 1 - W(y)$$

nachgewiesen. Fassen wir die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{P}(X_n \leq k_n, Y_n > \ell_n) - \mathbb{P}(X_n \leq k_n)\mathbb{P}(Y_n > \ell_n)| = 0$$

und damit das folgende Korollar.

Korollar 5.1.1. *Die Zufallsvariablen X_n und Y_n sind asymptotisch unabhängig.*

KAPITEL 6

MINIMIERUNG DER ERWARTETEN ANZAHL AN BESETZUNGSVORGÄNGEN

Wir werden im Folgenden die in Kapitel 3 vorgestellten Untersuchungen zum Anlass nehmen, weitere Spezialfälle zu betrachten. In diesem Kapitel ist $c = 1$, und es wird auf jegliche Indizierung mit c verzichtet. Wir verwenden weiterhin die Notation $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{(s)}$ und $\mathbf{P}_n^{(k)}$ für die Vektoren, welche die Wahrscheinlichkeiten p_{n,i_1,\dots,i_s} beziehungsweise P_{n,i_1,\dots,i_k} enthalten. Weil in diesem Kapitel keine Grenzwertuntersuchung durchgeführt werden und n fest gewählt wird, schreiben wir p_{i_1,\dots,i_s} , P_{i_1,\dots,i_k} und S_{i_1,\dots,i_k} statt p_{n,i_1,\dots,i_s} , P_{n,i_1,\dots,i_k} und S_{n,i_1,\dots,i_k} .

6.1. OPTIMALITÄT DER GLEICHVERTEILUNG IN DEN FÄLLEN $s = 1$ UND $s = n - 1$

Mithilfe der Integraldarstellung (2.10) weisen Boneh und Hofri bereits 1989 nach, dass $E_n^{(1)}$ genau dann ein globales Minimum annimmt, wenn alle Fächer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ besetzt werden (siehe [6]). Wir werden im Folgenden zeigen, dass der Erwartungswert auch im Fall $s = n - 1$ unter Annahme einer Gleichverteilung minimal wird. Für die Untersuchung bietet sich die Darstellung (3.5) an, da sich diese zu

$$E_n^{(n-1)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} - \binom{n-1}{n-2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} - (n-1) \quad (6.1)$$

vereinfachen lässt. Wie zuvor ist $\eta_k = \binom{n}{k}$, $k \in \{1, \dots, s\}$, und \mathbf{e}_ℓ beschreibt den Vektor im \mathbb{R}^ℓ , der nur aus Einsen besteht. Für $s = n - 1$ ist $\eta_s = \binom{n}{n-1} = n$.

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\left(\mathcal{P}_n^{(n-1)}\right) \begin{cases} \text{minimiere} & E_n^{(n-1)}(\mathbf{p}) \\ \text{unter} & \mathbf{p} \in V_n^{(n-1)} \end{cases}$$

mit $V_n^{(n-1)} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n^\top \mathbf{p} = 1\}$, suchen also nach dem Vektor $\mathbf{p} \in V_n^{(n-1)}$, der $E_n^{(n-1)}(\mathbf{p})$ minimiert. Theorem 6.1.1 liefert den gesuchten Vektor.

Theorem 6.1.1. *Im Fall $s = n - 1$ nimmt die erwartete Anzahl der Besetzungsvorgänge bis zur vollständigen Serie genau dann ein globales Minimum an, wenn alle $(n - 1)$ -Teilmengen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ belegt werden.*

Beweis. Beim Verteilen von $n - 1$ Teilchen auf n Fächer bleibt in jedem Besetzungsschritt genau ein Fach frei. Um die Notation einfach zu halten, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, eine $(n - 1)$ -Auswahl zu treffen, bei der Fach Nummer j nicht besetzt wird, mit $q(j)$. Falls $j \neq i_\ell$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, n - 1\}$, so gilt $q(j) = p_{i_1, \dots, i_{n-1}}$, womit wir $P_i = 1 - q(i)$ erhalten und eine Darstellung der P_i durch die Wahrscheinlichkeiten für die Teilmengen gefunden haben. Im Fall $n - 1$ ist der Vektor \mathbf{p} somit eindeutig durch den Vektor $\mathbf{P}_n^{(1)}$ festgelegt, und es gilt

$$\mathbf{p} = (q(n), q(n - 1), \dots, q(1))^\top.$$

Der Erwartungswert in (6.1) wird für festes n genau dann minimal, wenn $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i}$ minimal wird. Wir werden zeigen, dass diese Summe kleiner wird, wenn wir zwei unterschiedliche Werte P_{i_1} und P_{i_2} , $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, durch deren Mittelwert $\frac{P_{i_1} + P_{i_2}}{2}$ ersetzen. Im Folgenden seien P_1 und P_2 verschieden. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{P_i} = \frac{P_1 + P_2}{P_1 P_2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{P_i}.$$

Aus der Äquivalenzkette

$$(P_1 - P_2)^2 > 0 \Leftrightarrow P_1^2 - 2P_1 P_2 + P_2^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow P_1^2 + 2P_1 P_2 + P_2^2 > 4P_1 P_2$$

$$\Leftrightarrow (P_1 + P_2)^2 > 4P_1 P_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 > P_1 P_2$$

folgt direkt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} &> \frac{P_1 + P_2}{\left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{P_i} \\ &= \frac{4}{P_1 + P_2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{P_i} \\ &= \frac{1}{(P_1 + P_2)/2} + \frac{1}{(P_1 + P_2)/2} + \sum_{i=3}^n \frac{1}{P_i}. \end{aligned}$$

Weil der Erwartungswert ein stetiges Funktional ist, wird das Minimum auf der kompakten Menge V_n^{n-1} angenommen. Die Summe $\sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i}$ verkleinert sich durch die obige Operation, solange es mindestens zwei unterschiedliche P_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, gibt und wird somit für $P_1 = \dots = P_n$ minimal. In diesem Fall gilt

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n (1 - q(i)) = n - 1$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ sowie

$$P_i = \frac{n - 1}{n}$$

und damit

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{GW} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^\top.$$

Da die Funktion $E_n^{(s)}(\cdot)$ für $s = n - 1$ konvex ist, handelt es sich um ein globales Minimum. \square

Eine alternative Beweisführung ist mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren möglich. Diese ähnelt dem Beweis für den Fall $s = 1$, den Boneh und Hofri in [6] angeben und ist im Anhang B.4 aufgeführt.

Caron et al. zeigen, dass die Wahl von $\mathbf{p}_n^{(2)} = \mathbf{p}_{n,GW}^{(2)}$ für $n \geq 4$ einen Sattelpunkt und damit kein Minimum liefert (siehe [10]). Wir werden zeigen, dass sich diese Aussage verallgemeinern lässt und betrachten das Optimierungsproblem

$$\left(\mathcal{P}_n^{(s)}\right) \begin{cases} \text{minimiere} & E_n^{(s)}(\mathbf{p}) \\ \text{unter} & \mathbf{p} \in V_n^{(s)} \end{cases}$$

mit $V_n^{(s)} := \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\eta_s} \mid 0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_{\eta_s}, \mathbf{e}_{\eta_s}^\top \mathbf{p} = 1 \right\}$. Wir formulieren die folgende Vermutung, deren Gültigkeit durch die anschließende Beweisskizze motiviert werden soll.

Vermutung 6.1.1. Die Funktion $E_n^{(s)}(\cdot)$ hat an der Stelle $\mathbf{p}_{n,GW}^{(s)}$ genau dann ein Minimum, wenn $s = n - 1$ gilt. In allen anderen Fällen liegt ein Sattelpunkt vor.

Beweisskizze. Mit $s = n - 1$ erhalten wir das in Theorem 6.1.1 vorgestellte Resultat. Wir betrachten den Fall $n \geq s + 2$. Um die Notation übersichtlich zu halten, setzen wir im Folgenden $E_n(\mathbf{p}) := E_n^{(s)}(\mathbf{p}_n^{(s)})$ und $E_n(\mathbf{p}_{GW}) := E_n^{(s)}(\mathbf{p}_{n,GW}^{(s)})$.

Wir werden zeigen, dass es sich bei $\mathbf{p}_{n,GW}^{(s)}$ um einen kritischen Punkt handelt, der Gradient also an dieser Stelle verschwindet. Anschließend untersuchen wir die Hesse-Matrix, da ein kritischer Punkt nur dann ein Sattelpunkt sein kann, wenn die Hesse-Matrix in diesem Punkt indefinit ist.

Die Nebenbedingung $\mathbf{e}_{\eta_s}^\top \mathbf{p} = 1$ impliziert, dass eine der Wahrscheinlichkeiten nach Wahl der $\eta_s - 1$ anderen bereits festgelegt ist. Dadurch befinden wir uns auf dem Rand der zulässigen Menge. Um über die Indefinitheit der Hesse-Matrix auf einen Sattelpunkt schließen zu können, müssen wir einen Punkt im Inneren der zulässigen Menge betrachten. Das Optimierungsproblem lässt sich folgendermaßen umformulieren. Wir ersetzen eine der Wahrscheinlichkeiten durch eins minus die Summe über alle übrigen Wahrscheinlichkeiten. Der Erwartungswert lässt sich dann als Funktion in $\eta_s - 1$ Veränderlichen darstellen, und der $(\eta_s - 1)$ -dimensionale Vektor $\hat{\mathbf{p}}_{n,GW}^{(s)}$, dessen Einträge alle $1/\eta_s$ sind, befindet sich im Inneren der zulässigen Menge. Prinzipiell ist es möglich, jede der $\eta_s = \binom{n}{s}$ Wahrscheinlichkeiten zu ersetzen. Wir wählen die Wahrscheinlichkeit $p_{3,4,\dots,s-2,s-1,s,s+1,s+2}$, setzen also

$$p_{3,4,\dots,s-2,s-1,s,s+1,s+2} = p^* := 1 - \sum_J p_{j_1,\dots,j_s},$$

wobei die Summe \sum_J über jede mögliche Wahl der Indizes $j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\}$ läuft, sodass $j_1 < \dots < j_s$ gilt und $|\{3, 4, \dots, s-2, s-1, s, s+1, s+2\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}| < s$ erfüllt ist. Die konkrete Wahl von p^* wird erst für die Untersuchung der Hesse-Matrix relevant sein. Sei $\hat{\mathbf{p}} := \hat{\mathbf{p}}_n^{(s)}$ der $\eta_s - 1$ -dimensionale Vektor, den wir erhalten, wenn wir den Eintrag $p_{3,4,\dots,s-2,s-1,s,s+1,s+2}$ aus dem Vektor $\mathbf{p} = \mathbf{p}_n^{(s)}$ entfernen, dann können wir den Erwartungswert als Funktion $\hat{E} : \mathbb{R}^{\eta_s-1} \rightarrow \mathbb{R}$ in $\hat{\mathbf{p}}$ darstellen. Unter der Nebenbedingung $p_{3,4,\dots,s-2,s-1,s,s+1,s+2} = p^*$ gilt

$$E_n(\mathbf{p}) = \hat{E}_n(\hat{\mathbf{p}}).$$

UNTERSUCHUNG DES GRADIENTEN

Die Einträge des Gradienten sind die partiellen Ableitungen des Erwartungswertes

$$E_n(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{i_1,\dots,i_k}} + (-1)^{n-s} \binom{n-1}{s-1},$$

der in (3.6) eingeführt wurde und den wir als Funktion in \mathbf{p} auffassen. Diese können durch

$$\frac{\partial E_n(\mathbf{p})}{\partial p_{j_1,\dots,j_s}} = \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{-1}{S_{i_1,\dots,i_k}^2} \frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{j_1,\dots,j_s}}$$

dargestellt werden. Wir untersuchen die Summanden zunächst einzeln.

Um die partiellen Ableitungen $\frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{j_1, \dots, j_s}}$ zu bilden, betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten S_{i_1, \dots, i_k} , mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_k zu besetzen. Diese Wahrscheinlichkeit kann als Summe über alle p_{j_1, \dots, j_s} dargestellt werden, für die mindestens einer der Indizes i_1, \dots, i_k zur Menge $\{j_1, \dots, j_s\}$ gehört.

Leiten wir partiell nach p_{j_1, \dots, j_s} ab, so erhalten wir nur dann einen von null verschiedenen Wert, wenn p_{j_1, \dots, j_s} als Summand in S_{i_1, \dots, i_k} enthalten ist. Anderenfalls ist $\frac{1}{S_{i_1, \dots, i_k}}$ bezüglich p_{j_1, \dots, j_s} eine Konstante und fällt beim Ableiten weg. In diesem Fall nimmt auch $\frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{j_1, \dots, j_s}}$ den Wert null an.

Für $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}| > 0$ ist p_{j_1, \dots, j_s} genau dann einer der Summanden, wenn $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| = 0$ gilt, da ansonsten auch p^* als Summand enthalten ist, wodurch die Wahrscheinlichkeit p_{j_1, \dots, j_s} wieder abgezogen wird. In diesem Fall nimmt die partielle Ableitung den Wert 1 an. Falls $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}| = 0$, so ist $-p_{j_1, \dots, j_s}$ genau dann einer der Summanden, wenn $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| > 0$ gilt, da in diesem Fall p^* enthalten ist, was zum Wert -1 für die partielle Ableitung führt. Es gilt also

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{-1}{S_{i_1, \dots, i_k}^2} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{j_1, \dots, j_s}} = \sum_{I_1} \frac{-1}{S_{i_1, \dots, i_k}^2} \cdot (-1) + \sum_{I_2} \frac{-1}{S_{i_1, \dots, i_k}^2} \cdot 1,$$

wobei die Summe \sum_{I_1} über alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ mit $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| > 0$ und $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}| = 0$ und die Summe \sum_{I_2} über alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ mit $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| = 0$ und $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_s\}| > 0$ läuft.

Unter Annahme der Gleichverteilung gilt für jedes k wie in (3.7)

$$S_{i_1, \dots, i_k} = 1 - \frac{\binom{n-k}{s}}{\binom{n}{s}} =: M_{n,s,k},$$

und es folgt

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{-1}{S_{i_1, \dots, i_k}^2} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{j_1, \dots, j_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} = \frac{1}{M_{n,s,k}^2} \left[\sum_{I_1} 1 - \sum_{I_2} 1 \right].$$

Sei $\mu := |\{j_1, \dots, j_s\} \cap \{3, \dots, s+2\}|$ die Anzahl der Indizes, in denen p_{j_1, \dots, j_s} mit p^* übereinstimmt. Dann gilt

$$\sum_{I_1} 1 = \binom{n-s}{k} - \binom{n-(2s-\mu)}{k} = \sum_{I_2} 1$$

und damit

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{-1}{S_{i_1, \dots, i_k}^2} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{j_1, \dots, j_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} = 0.$$

Weil alle Einträge des Gradienten den Wert null annehmen, wenn wir diesen für die Gleichverteilung auswerten, handelt es sich um einen kritischen Punkt.

UNTERSUCHUNG DER HESSE-MATRIX

Die Hesse-Matrix von $E_n(\mathbf{p})$ bezeichnen wir im Folgenden mit $H = (h_{i,j}), 1 \leq i, j \leq \eta_s$. Eine Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann indefinit, wenn Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ existieren, sodass

$$v^\top \mathcal{A} v > 0 \text{ und } w^\top \mathcal{A} w < 0 \quad (6.2)$$

gelten (siehe [40], S. 68). Um zu zeigen, dass die Matrix H unter Annahme der Gleichverteilung indefinit ist, untersuchen wir H für eine beliebige Wahl von \mathbf{p} und sortieren die Einträge des Vektors \mathbf{p} so, dass die ersten sechs Stellen durch

$$\mathbf{p} = (p_{1,\dots,s-2,s-1,s}, p_{1,\dots,s-2,s-1,s+1}, p_{1,\dots,s-2,s-1,s+2}, \\ p_{1,\dots,s-2,s,s+1}, p_{1,\dots,s-2,s,s+2}, p_{1,\dots,s-2,s+1,s+2}, \dots)^\top$$

festgelegt sind. Die ersten sechs Einträge stimmen damit in den Indizes $1, \dots, s-2$ überein und unterscheiden sich nur in den letzten beiden Indizes. Außerdem stimmt jeder der ersten sechs Einträge mit p^* in genau $s-2$ Indizes überein. Die Reihenfolge der restlichen $\eta_s - 6$ Einträge wird nicht relevant sein.

Wir setzen

$$x_1 := p_{1,\dots,s-2,s-1,s}, \quad x_2 := p_{1,\dots,s-2,s-1,s+1}, \quad \dots, \quad x_6 := p_{1,\dots,s-2,s+1,s+2}, \quad \dots$$

und können die Einträge von H durch

$$h_{i,j} := h_{i,j}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{p})}{\partial x_i \partial x_j}$$

berechnen. Im Folgenden betrachten wir anstelle der Matrix H die Matrix

$$\widehat{H} := (h_{i,j}), 1 \leq i, j \leq 6,$$

und nutzen aus, dass mit der Indefinitheit von \widehat{H} die Indefinitheit von H folgt. Falls nämlich Vektoren $\widehat{v}, \widehat{w} \in \mathbb{R}^6$ existieren, sodass $\widehat{v}^\top \widehat{H} \widehat{v} > 0$ und $\widehat{w}^\top \widehat{H} \widehat{w} < 0$, gelten, so existieren auch Vektoren $v = (\widehat{v}^\top, \mathbf{0}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{\eta_s}$ und $w = (\widehat{w}^\top, \mathbf{0}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{\eta_s}$, sodass $v^\top H v > 0$ und $w^\top H w < 0$ erfüllt ist. Dabei beschreibt $\mathbf{0}$ den $(\eta_s - 6)$ -dimensionalen Nullvektor. Mit (6.2) genügt es somit nachzuweisen, dass die Matrix \widehat{H} unter Annahme der Gleichverteilung indefinit ist, um anschließend auf die Indefinitheit von H unter Gleichverteilung zu schließen.

Mit $j_{s-1}, j_s, j'_{s-1}, j'_s \in \{s-1, s, s+1, s+2\}$, sodass $j_{s-1} < j_s$ und $j'_{s-1} < j'_s$ erfüllt ist, ergeben sich die Einträge der Matrix \hat{H} zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_n(\mathbf{p})}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j_{s-1},j_s} \partial p_{1,2,\dots,s-2,j'_{s-1},j'_s}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{2}{S_{i_1,\dots,i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j_{s-1},j_s}} \frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j'_{s-1},j'_s}}. \end{aligned}$$

Wie bereits im letzten Unterabschnitt erhalten wir für die partiellen Ableitungen jeweils nur dann einen von null verschiedenen Wert, wenn $p_{1,2,\dots,s-2,j_{s-1},j_s}$ beziehungsweise $p_{1,2,\dots,s-2,j'_{s-1},j'_s}$ als Summanden in S_{i_1,\dots,i_k} enthalten sind.

Analog zu den Überlegungen des letzten Unterabschnittes nimmt $\frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j_{s-1},j_s}}$ den Wert 1 an, wenn sowohl

$$|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s\}| > 0$$

als auch

$$|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| = 0$$

erfüllt sind. Außerdem nimmt die partielle Ableitung den Wert -1 an, wenn

$$|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s\}| = 0$$

sowie

$$|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| > 0$$

gelten. Entsprechend argumentieren wir für $\frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j'_{s-1},j'_s}}$. Um das Produkt der partiellen Ableitungen zu berechnen, sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

- (1) Es gelten $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ sowie
- i) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s\}| > 0$,
 - ii) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s\}| > 0$ und
 - iii) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| = 0$.

In Kombination mit der dritten Bedingung lassen sich die ersten beiden zu

- i') $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2\}| > 0$

zusammenfassen. In diesem Fall ist

$$\frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j_{s-1},j_s}} \frac{\partial S_{i_1,\dots,i_k}}{\partial p_{1,2,\dots,s-2,j'_{s-1},j'_s}} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(2) Es gelten $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ sowie

i) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s\}| = 0$,

ii) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s\}| = 0$ und

iii) $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| > 0$.

In Kombination mit den ersten beiden Bedingungen können wir die dritte durch

iii') $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{s-1, s, s+1, s+2\}| > 0$

ersetzen. Die Bedingungen (2) i), ii) und iii') können nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| \neq 0$ gilt. In diesem Fall gilt

$$\frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} = -1 \cdot (-1) = 1.$$

(3) In allen anderen Fällen ist mindestens eine der beiden partiellen Ableitungen null und damit auch das Produkt.

Es gilt also

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{2}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} = \sum_{I_3} \frac{2}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} + \sum_{I_4} \frac{2}{S_{i_1, \dots, i_k}^3},$$

wobei die Summe \sum_{I_3} über alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ läuft, die (1) erfüllen und \sum_{I_4} die Summe über alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ist, die (2) erfüllen. Unter Annahme der Gleichverteilung gilt

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{2}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} = \frac{2}{M_{n,s,k}^3} \left[\sum_{I_3} 1 + \sum_{I_4} 1 \right].$$

Es ist

$$\sum_{I_3} 1 = \binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k},$$

da es $\binom{n-s}{k}$ Möglichkeiten gibt, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ zu wählen, sodass die Bedingung $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{3, \dots, s+2\}| = 0$ erfüllt ist. Weil mindestens einer der Indizes 1 oder 2 in $\{i_1, \dots, i_k\}$ enthalten sein soll, müssen wir die $\binom{n-s-2}{k}$ Fälle, für welche diese Bedingung nicht erfüllt ist, abziehen.

Die Summe \sum_{I_4} nimmt unterschiedliche Werte in Abhängigkeit der Kardinalität der Menge $\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}$ an.

Für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 2$, und damit $j_{s-1} = j'_{s-1}$ und $j_s = j'_s$, leiten wir zweimal partiell nach der selben Variablen ab. In diesem Fall gilt

$$\sum_{I_4} 1 = \binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k},$$

da es $\binom{n-s}{k}$ Möglichkeiten gibt, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ zu wählen, sodass die Bedingung $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{1, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s\}| = 0$ erfüllt ist. Weil mindestens einer der Indizes $\{s-1, s, s+1, s+2\} \setminus \{j_{s-1}, j_s\}$ in $\{i_1, \dots, i_k\}$ enthalten sein soll, müssen wir die Anzahl $\binom{n-s-2}{k}$ der Fälle, für welche diese Bedingung nicht erfüllt ist, abziehen.

Für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 1$ leiten wir zweimal partiell nach Variablen ab, die in einem Index übereinstimmen. Damit ist Bedingung (2) iii') gleichbedeutend mit $|\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{s-1, s, s+1, s+2\}| = 1$. Weil es $1 \cdot \binom{n-s-2}{k-1}$ Möglichkeiten gibt, die Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ zu wählen, sodass genau einer der Indizes $s-1, s, s+1, s+2$ und $k-1$ Indizes, die von den $s+2$ Werten $1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s, j'_{s-1}, j'_s$ sowie dem zuerst gewählten Index verschieden sind, gilt

$$\sum_{I_4} 1 = \binom{n-s-2}{k-1}.$$

Für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 0$ ist $\sum_{I_4} 1 = 0$. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, so nimmt

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{2}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}}$$

in Abhängigkeit von $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}|$ unterschiedliche Werte an, und zwar für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 2$ den Wert

$$\begin{aligned} a_{n,s} &:= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[2 \binom{n-s}{k} - 2 \binom{n-s-2}{k} \right], \end{aligned}$$

für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 1$ den Wert

$$\begin{aligned} b_{n,s} &:= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{n, i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k} + \binom{n-s-2}{k-1} \right], \end{aligned}$$

und für $|\{j_{s-1}, j_s\} \cap \{j'_{s-1}, j'_s\}| = 0$ den Wert

$$\begin{aligned} c_{n,s} &:= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{i_1, \dots, i_k}^3} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j_{s-1}, j_s}} \frac{\partial S_{i_1, \dots, i_k}}{\partial p_{1, 2, \dots, s-2, j'_{s-1}, j'_s}} \Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_{GW}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k} \right]. \end{aligned}$$

Seien H' und \widehat{H}' die Matrizen, die sich ergeben, wenn wir H und \widehat{H} jeweils für den Vektor \mathbf{p}_{GW} auswerten. Nach Definition von \widehat{H} , $a_{n,s}$, $b_{n,s}$ und $c_{n,s}$ ist \widehat{H}' eine symmetrische (6×6) -Matrix der Form

$$\widehat{H}' = \begin{pmatrix} a_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & c_{n,s} \\ b_{n,s} & a_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & c_{n,s} & b_{n,s} \\ b_{n,s} & b_{n,s} & a_{n,s} & c_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} \\ b_{n,s} & b_{n,s} & c_{n,s} & a_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} \\ b_{n,s} & c_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & a_{n,s} & b_{n,s} \\ c_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & b_{n,s} & a_{n,s} \end{pmatrix}.$$

Weil eine reelle und symmetrische $(n \times n)$ -Matrix genau dann indefinit ist, wenn sie mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert besitzt (siehe [1], S. 659), befassen wir uns im Folgenden mit den Eigenwerte von \widehat{H}' . Diese sind durch

$$\begin{aligned} \lambda_{n,s,1} &= a_{n,s} - c_{n,s}, \\ \lambda_{n,s,2} &= a_{n,s} - 2b_{n,s} + c_{n,s}, \\ \lambda_{n,s,3} &= a_{n,s} + 4b_{n,s} + c_{n,s} \end{aligned}$$

gegeben (siehe Anhang C.7).

In den folgenden Unterabschnitten werden wir die Eigenwerte $\lambda_{n,s,1}$ und $\lambda_{n,s,2}$ untersuchen und anhand einiger Beispiele zeigen, dass $\lambda_{n,s,1} > 0$ und $\lambda_{n,s,2} < 0$ für konkrete s und n erfüllt ist.

UNTERSUCHUNG DER EIGENWERTE $\lambda_{n,s,1}$ UND $\lambda_{n,s,2}$

Wegen $\binom{n-s}{1} - \binom{n-s-2}{1} - 2\binom{n-s-2}{1-1} = 0$ können die Eigenwerte durch

$$\begin{aligned}
 \lambda_{n,s,1} &= a_{n,s} - c_{n,s} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[2 \binom{n-s}{k} - 2 \binom{n-s-2}{k} - \binom{n-s}{k} + \binom{n-s-2}{k} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s}{k} - \binom{n-s-1}{k} + \binom{n-s-1}{k} - \binom{n-s-2}{k} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s-1}{k-1} + \binom{n-s-2}{k-1} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s-2}{k-2} + 2 \binom{n-s-2}{k-1} \right] \\
 &= 2 \left[\sum_{k=2}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-s-2}{k-2}}{M_{n,s,k}^3} + 2 \sum_{k=1}^{n-s-1} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-s-2}{k-1}}{M_{n,s,k}^3} \right] \\
 &= -2 \sum_{j=0}^{n-s-2} (-1)^j \frac{\binom{n-s-2}{j}}{\left[1 - \frac{\binom{n-j-2}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^3} + 4 \sum_{j=0}^{n-s-2} (-1)^j \frac{\binom{n-s-2}{j}}{\left[1 - \frac{\binom{n-j-1}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^3}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \lambda_{n,s,2} &= a_{n,s} - 2b_{n,s} + c_{n,s} \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s}{k} - \binom{n-s-2}{k} - 2 \binom{n-s-2}{k-1} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s-1}{k-1} + \binom{n-s-1}{k} - \binom{n-s-2}{k} - 2 \binom{n-s-2}{k-1} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \left[\binom{n-s-2}{k-1} + \binom{n-s-2}{k-2} - \binom{n-s-2}{k-1} \right] \\
 &= 2 \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{1}{M_{n,s,k}^3} \binom{n-s-2}{k-2} \\
 &= 2 \sum_{k=2}^{n-s} (-1)^{k-1} \frac{\binom{n-s-2}{k-2}}{\left[1 - \frac{\binom{n-k}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^3} \\
 &= -2 \sum_{j=0}^{n-s-2} (-1)^j \frac{\binom{n-s-2}{j}}{\left[1 - \frac{\binom{n-j-2}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^3}
 \end{aligned}$$

angegeben werden.

Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda_{n,s,1} > 0$ und $\lambda_{n,s,2} < 0$ gelten. Mit Maple wurden die Eigenwerte für unterschiedliche Werte $s \in \{3, \dots, 100\}$ in Abhängigkeit von $n \in \{s+2, \dots, 300\}$ berechnet und in Schaubildern aufgetragen (siehe Abbildungen 6.3, 6.4, 6.1 und 6.2). Der Quellcode ist im Anhang D.4 zu finden. In allen Abbildungen sind die Eigenwerte für jedes feste s in der gleichen Farbe dargestellt. Aus Übersichtszwecken wurde in den Abbildungen 6.4 und 6.2 auf eine Legende verzichtet.

DER EIGENWERT $\lambda_{n,s,1}$

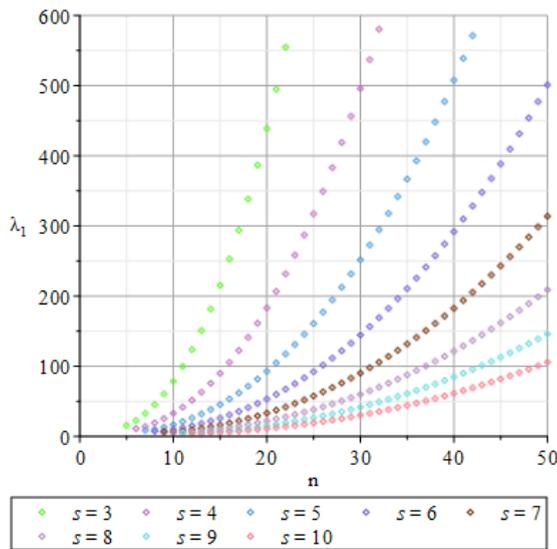


Abbildung 6.1.: $\lambda_{n,s,1}$ für $s \in \{3, \dots, 10\}$
und $n \in \{s+2, \dots, 100\}$

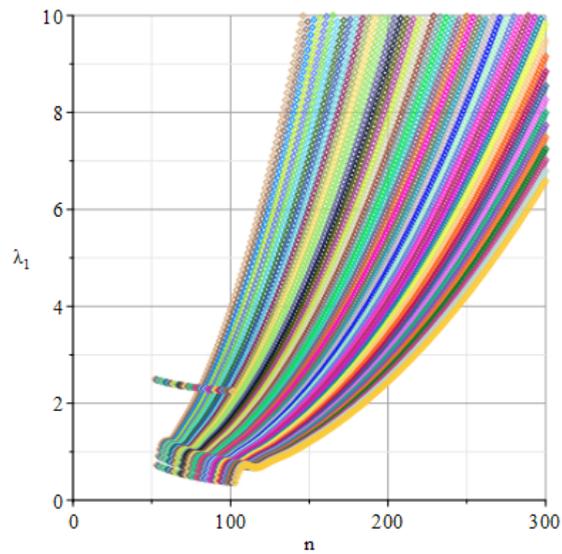


Abbildung 6.2.: $\lambda_{n,s,1}$ für $s \in \{50, \dots, 100\}$
und $n \in \{s+2, \dots, 300\}$

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 ist das Verhalten der Eigenwerte $\lambda_{n,s,1}$ visualisiert. Hier ist für festes n mit $s_1 < s_2$ die Ungleichung $\lambda_{n,s_1,2} > \lambda_{n,s_2,2}$ erfüllt. Es wird deutlich, dass diese Eigenwerte für jede getroffene Wahl der Werte s und n positiv sind. Außerdem ist die von n abhängende Folge der Eigenwerte für jedes feste s ab einem bestimmten Wert n monoton wachsend. Der rechnerische Nachweis dieser Eigenschaften ist bisher nicht gelungen.

DER EIGENWERT $\lambda_{n,s,2}$

In den Abbildungen 6.3 und 6.4 wird deutlich, dass die Eigenwerte $\lambda_{n,s,2}$ für jede getroffene Wahl der Werte s und n negativ sind. Für festes n und $s_1 < s_2$ ist hier die Ungleichung $\lambda_{n,s_1,2} < \lambda_{n,s_2,2}$ erfüllt. Außerdem ist die von n abhängende Folge der Eigenwerte für jedes feste s ab einem bestimmten Wert n monoton fallen. Der rechnerische Nachweis dieser Eigenschaften ist bisher nicht gelungen.

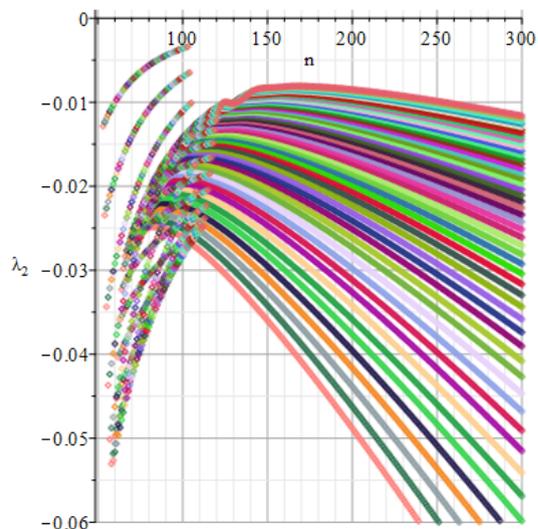
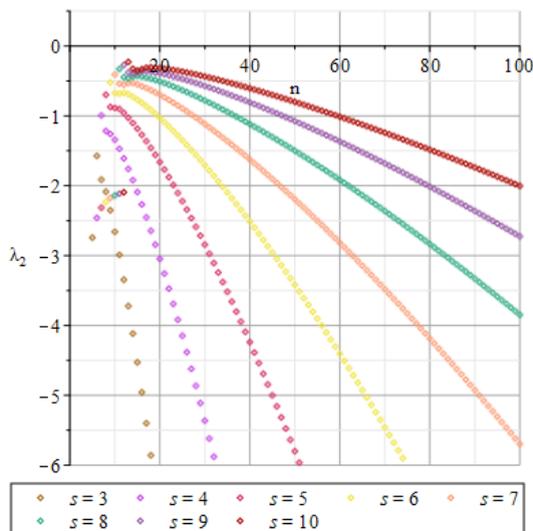


Abbildung 6.3.: $\lambda_{n,s,2}$ für $s \in \{3, \dots, 10\}$ und $n \in \{s + 2, \dots, 100\}$ Abbildung 6.4.: $\lambda_{n,s,2}$ für $s \in \{50, \dots, 100\}$ und $n \in \{s + 2, \dots, 300\}$

Verbinden wir die Punkte in der Abbildung für ein festes s , erhalten wir immer die gleiche Struktur. Für $s \in \{3, 4, 5, 6\}$ ist diese Struktur in Abbildung 6.5 jeweils durch einen Polygonzug visualisiert.

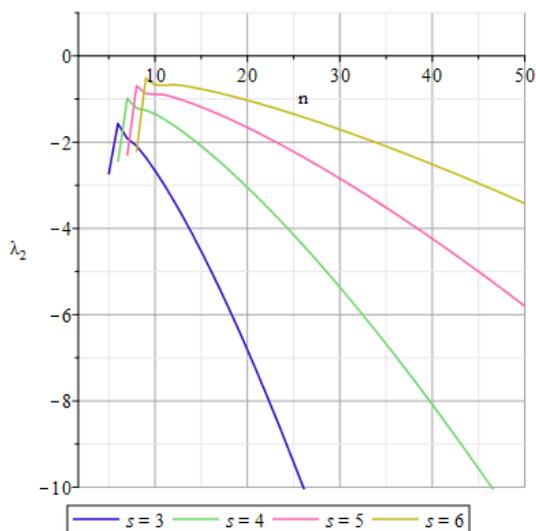


Abbildung 6.5.: Polygonzug der Folge $\lambda_{n,s,2}$ für $s \in \{3, \dots, 6\}$ und $n \in \{s + 2, \dots, 50\}$

Wir haben somit gezeigt, dass die Gleichverteilung einen Sattelpunkt liefert, wenn $s \in \{3, \dots, 10\}$ und gleichzeitig $n \in \{s + 2, \dots, 100\}$ beziehungsweise $s \in \{50, \dots, 100\}$ und gleichzeitig $n \in \{s + 2, \dots, 300\}$ erfüllt sind. Es besteht die Vermutung, dass sich diese Aussage für den Fall $s \geq 3$ und $n \geq s + 2$ verallgemeinern lässt. \square

In Abschnitt 6.2 werden wir uns dem Fall $s = 3$ zuwenden und untersuchen, wie die Wahrscheinlichkeiten gewählt werden können, um den Erwartungswert zu minimieren.

6.2. MINIMIERUNG VON $E_n^{(3)}$

Wählen wir $n = 4$ oder $n = 6$, so erhalten wir jeweils Spezialfälle der in den Abschnitten 3.2.2 und 6.1 vorgestellten Situationen. Im allgemeinen Fall $n \geq 5$ suchen wir einen Vektor

$$\mathbf{p} = (p_{1,2,3}, p_{1,2,4}, \dots, p_{1,2,n}, p_{1,3,4}, \dots, p_{n-2,n-1,n})^\top \in V_n^{(3)}$$

mit $V_n^{(3)} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\eta_3} \mid 0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_{\eta_3}, \mathbf{e}_{\eta_3}^\top \mathbf{p} = 1\}$, der

$$E_n^{(3)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{P_i} - \sum_{k=2}^{n-3} (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{S_{i_1, \dots, i_k}} + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} \quad (6.3)$$

minimiert. Zunächst müssen Darstellungen für P_i , $i = 1, \dots, n$, und S_{i_1, \dots, i_k} , $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, $k = 1, \dots, n-3$, gefunden werden, die nur von den Wahrscheinlichkeiten p_{i_1, i_2, i_3} der 3-Teilmengen abhängen. Durch

$$P_i = \sum_{1 \leq t_1 < t_2 \leq i-1} p_{t_1, t_2, i} + \sum_{1 \leq t_1 < i < t_2 \leq n} p_{t_1, i, t_2} + \sum_{i \leq t_1 < t_2 \leq n} p_{i, t_1, t_2} \quad (6.4)$$

können wir die erste der gesuchten Wahrscheinlichkeiten ausdrücken. Wir betrachten als Nächstes die Wahrscheinlichkeit S_{i_1, \dots, i_k} , mindestens eines der Fächer i_1, \dots, i_k zu besetzen. Offensichtlich ist diese Wahrscheinlichkeit für $k > n-3$ gleich eins. Mit der Formel des Ein- und Ausschließens können wir S_{i_1, \dots, i_k} für $k \leq n-3$ wie in (3.2) durch

$$S_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{t=1}^k P_{i_t} - \sum_{1 \leq t_1 < t_2 \leq k} P_{i_{t_1}, i_{t_2}} + \sum_{1 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq k} P_{i_{t_1}, i_{t_2}, i_{t_3}} \quad (6.5)$$

darstellen. Die Wahrscheinlichkeit P_{i_1, i_2} , eine 3-Auswahl zu treffen, in der die Fächer i_1 und i_2 enthalten sind, kann mithilfe von

$$P_{i_1, i_2} = \sum_{i_2 < t \leq n} p_{i_1, i_2, t} + \sum_{i_1 < t < i_2} p_{i_1, t, i_2} + \sum_{1 \leq t < i_1} p_{t, i_1, i_2} \quad (6.6)$$

beschrieben werden. Es wird klar, dass schon im Fall $s = 3$ sehr große Terme entstehen, wenn wir (6.6) in (6.5) und anschließend (6.5) und (6.4) in (6.3) einsetzen. Aus diesem Grund betrachten wir zunächst die Spezialfälle $n = 5$ und $n = 7$.

6.2.1. DER SPEZIALFALL $n = 5$

Wie zu Beginn von Abschnitt 6.2 beschrieben, suchen wir einen Vektor $\mathbf{p} \in V_5^{(3)}$ der Form

$$\mathbf{p} = (p_{1,2,3}, p_{1,2,4}, p_{1,2,5}, p_{1,3,4}, p_{1,3,5}, p_{1,4,5}, p_{2,3,4}, p_{2,3,5}, p_{2,4,5}, p_{3,4,5})^\top,$$

sodass

$$\begin{aligned} E_5^{(3)}(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^5 \frac{1}{P_i} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} \frac{1}{S_{i_1, i_2}} + (-1)^2 \binom{4}{2} \\ &= \sum_{i=1}^5 \frac{1}{P_i} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 5} \frac{1}{S_{i_1, i_2}} + 6 \end{aligned}$$

minimal wird. Um $E_5^{(3)}(\mathbf{p})$ für verschiedene Strategien zu berechnen, suchen wir P_i und S_{i_1, i_2} in Abhängigkeit von \mathbf{p} . Es gelten

$$\begin{aligned} P_1 &= p_{1,2,3} + p_{1,2,4} + p_{1,2,5} + p_{1,3,4} + p_{1,3,5} + p_{1,4,5}, \\ &\vdots \\ P_5 &= p_{1,2,5} + p_{2,4,5} + p_{3,4,5} + p_{1,3,5} + p_{1,4,5} + p_{1,2,5}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} P_{1,2} &= p_{1,2,3} + p_{1,2,4} + p_{1,2,5}, \\ &\vdots \\ P_{4,5} &= p_{1,4,5} + p_{2,4,5} + p_{3,4,5} \end{aligned}$$

und (6.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= P_1 + P_2 - P_{1,2} = 1 - p_{3,4,5}, \\ S_{1,3} &= 1 - p_{2,4,5}, \\ &\vdots \\ S_{4,5} &= 1 - p_{1,2,3}. \end{aligned}$$

Mit Maple lässt sich $E_5^{(3)}(\mathbf{p})$ in Abhängigkeit von \mathbf{p} berechnen. Die Werte sind in Tabelle 6.1 auf drei Nachkommastellen gerundet aufgeführt, die Rechnungen sind im Anhang D.1 nachzulesen.

$p_{1,2,3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	0.18052
$p_{1,2,4}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$	0.18052
$p_{1,2,5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$	0.18052
$p_{1,3,4}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{1,3,5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{1,4,5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{2,3,4}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{2,3,5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{2,4,5}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
$p_{3,4,5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	0.4584
$E_5^{(3)}(\mathbf{p})$	3.222	3	2.917	2.881

Tabelle 6.1.: $E_5^{(3)}(\mathbf{p})$ in Abhängigkeit von \mathbf{p}

Wenden wir in Maple den Befehl `Minimize` auf den Erwartungswert an, erhalten wir je nach Startwert unterschiedliche Ausgaben. Für Startwerte, welche die durch $V_n^{(3)}$ gegebenen Nebenbedingungen erfüllen, wird keine Iteration durchgeführt. Im Anhang D.1 sind zwei Beispiele aufgeführt, in denen der Startwert geringfügig von der Gleichverteilung abweicht. In beiden Fällen ermittelt Maple den in der letzten Spalte von Tabelle 6.1 aufgeführten Wert. Um $E_5^{(3)}(\mathbf{p})$ zu minimieren, scheint es optimal zu sein, zwei Fächer auszuwählen, hier die Fächer mit den Nummern 1 und 2, die zusammen mit einem der übrigen Fächer besetzt werden können. Dies geschieht jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit α . Der 3-Auswahl, die aus den übrigen Fächern besteht, hier 3, 4, 5, wird die Wahrscheinlichkeit $\beta = 1 - 3 \cdot \alpha$ zugeordnet. Setzen wir voraus, dass der Erwartungswert minimal wird, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten nach diesem Modell, also

$$p_{1,2,3} = p_{1,2,4} = p_{1,2,5} = \alpha,$$

$$p_{1,3,4} = p_{1,3,5} = p_{1,4,5} = p_{2,3,4} = p_{2,3,5} = p_{2,4,5} = 0$$

und

$$p_{3,4,5} = \beta = 1 - 3 \cdot \alpha$$

wählen, so wird $E_5^{(3)}(\mathbf{p})$ für $\alpha = 0.18052$ minimal. Es handelt sich dabei um ein einfaches Optimierungsproblem, das gelöst werden kann, indem wir den Erwartungswert in Abhängigkeit von α darstellen, ableiten und die Ableitung mit null gleichsetzen. Anschließendes Auflösen nach α liefert den oben genannten Wert. Die Rechnung ist im Anhang D.3 aufgeführt. Es ist anzumerken, dass die Wahrscheinlichkeiten P_1, \dots, P_5 in diesem Modell unterschiedlich groß sind. Während die Wahrscheinlichkeit, Fach Nummer 1 oder 2 in einem der Besetzungsvorgänge zu treffen, gleich

$$P_1 = P_2 = p_{1,2,3} + p_{1,2,4} + p_{1,2,5} \approx 0.54156$$

ist, werden die Fächer mit den Nummern 3, 4 und 5 mit der größeren Wahrscheinlichkeit

$$P_3 = P_4 = P_5 = p_{3,4,5} + p_{1,2,3} = p_{3,4,5} + p_{1,2,4} = p_{3,4,5} + p_{1,2,5} \approx 0.63892$$

getroffen. Diese Beobachtung stimmt mit der von Caron et al. beschriebenen Situation im Fall $s = 2$ überein (siehe [10]).

6.2.2. DER SPEZIALFALL $n = 7$

Weil die Berechnungen für den Fall $n = 7$ bereits sehr aufwändig sind, verweisen wir auf die mit Maple durchgeführten Rechnungen im Anhang und geben an dieser Stelle nur die wichtigsten Formeln wieder. Gesucht wird ein Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{35}$ der Art

$$\mathbf{p} = (p_{1,2,3}, p_{1,2,4}, \dots, p_{5,6,7})^\top,$$

sodass

$$E_7^{(3)}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{P_i} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 7} \frac{1}{S_{i_1, i_2}} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 7} \frac{1}{S_{i_1, i_2, i_3}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 7} \frac{1}{S_{i_1, i_2, i_3, i_4}} + 15$$

minimal wird. Tabelle 6.2 zeigt die mit Maple berechneten Werte in Abhängigkeit von \mathbf{p} .

Wenden wir in Maple den Befehl `Minimize` auf den Erwartungswert an, erhalten wir wie im Fall $n = 5$ je nach Startwert unterschiedliche Ausgaben. Wählen wir den Startpunkt so, dass er minimal von den Werten der letzten Spalte in Tabelle 6.2 abweicht, erhalten wir die Werte

$$p_{1,2,4} = p_{1,2,5} = p_{1,4,5} = p_{2,4,5} = 0.15742635877$$

und

$$p_{3,6,7} = 0.37029456567,$$

alle anderen Wahrscheinlichkeiten sind null. Der optimale Wert ist

$$\mathbb{E}_7^{(3)}(\mathbf{p}) = 4.65862944123323.$$

Die Rechnung ist im Anhang nachzulesen.

6.2.3. AUSBLICK UND VERMUTUNGEN

Weil die Berechnungen mit wachsendem n stark an Umfang zunehmen, könnte es erstrebenswert sein, $E_n^{(3)}(\mathbf{p})$ auf eine andere, leichter zu untersuchende Art darzustellen. Im Fall $n = 8$ wird beispielsweise bereits ein Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{120}$ gesucht. Eine alternative Darstellung für $E_n^{(s)}(\mathbf{p})$ wäre auch für $s \geq 3$ interessant. Dazu liegen bislang noch keine Ergebnisse vor.

Die Struktur des Vektors \mathbf{p} , die Maple für die Fälle $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ als Minimalstelle für $E_n^{(3)}(\mathbf{p})$ ausgibt, führt zu der Vermutung, dass im Fall $s = 3$ drei Fälle unterschieden

$p_{1,2,3}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{32}$	$p_{2,3,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,2,4}$	$\frac{1}{35}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{32}$	$p_{2,4,5}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,2,5}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{2,4,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,2,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{2,4,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,2,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{2,5,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,3,4}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{32}$	$p_{2,5,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,3,5}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{2,6,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,3,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{3,4,5}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,3,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{3,4,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,4,5}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$p_{3,4,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,4,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{3,5,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,4,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{3,5,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,5,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{3,6,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,5,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{4,5,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{1,6,7}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$p_{4,5,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{2,3,4}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{32}$	$p_{4,6,7}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0
$p_{2,3,5}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0	$p_{5,6,7}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$
$p_{2,3,6}$	$\frac{1}{35}$	0	0	0					
$E_7^{(3)}(\mathbf{p})$						5.42	4.8	4.75	4.6593

Tabelle 6.2.: $E_7^{(3)}(\mathbf{p})$ in Abhängigkeit von \mathbf{p}

werden müssen. In jedem der Fälle wollen wir einer gewissen Anzahl disjunkter 3-Teilmengen die Wahrscheinlichkeit β zuweisen.

DIE FÄLLE $n = k \cdot 3$ UND $n = k \cdot s$

Im Fall $n = 3k$ können wir k disjunkten 3-Teilmengen die Wahrscheinlichkeit $\beta = \frac{1}{k}$ zuordnen. Dieser Fall wurde in Abschnitt 3.2.2 für ein allgemeines s angeschnitten und führt zu der bereits in früheren Arbeiten (siehe z.B. [23]) vorgestellten Vermutung.

Vermutung 6.2.1. *Sei n ein Vielfaches von 3, dann liegt an der Stelle \mathbf{p} genau dann ein Minimum von $E_n^{(3)}(\mathbf{p})$ vor, wenn $\mathbf{p} \in B_n^{(3)}$ mit $B_n^{(3)}$ wie in (3.11) gewählt wird. Für $s \geq 3$ und $n = k \cdot s$, liegt an der Stelle \mathbf{p} genau dann ein Minimum von $E_n^{(s)}(\mathbf{p})$ vor, wenn $\mathbf{p} \in B_n^{(s)}$ gewählt wird.*

DER FALL $n = k \cdot 3 + 4$ MIT $s = 3$

Motiviert durch den in [11] vorgestellten Fall $s = 2$ und $n = 5 = 1 \cdot 2 + 3$, in dem \mathbf{p} aus der in Unterabschnitt 3.2.1 definierten Menge $D_n^{(2)}$ gewählt wird, definieren wir für $s = 3$ und $n = k \cdot 3 + 4$ den Vektor $\mathbf{p}_3^{(\alpha)}$ durch

$$p_{i_1, i_2, i_3}^{(\alpha)} := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } (i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) \text{ und } (2, 3, 4), \\ \beta, & \text{wenn } i_1 = 3 \cdot r - 1, \quad i_2 = 3 \cdot r, \quad i_3 = 3 \cdot r + 1, \quad r = 2, 3, \dots, \frac{3k-1}{3}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wählen also zunächst vier Fächer aus und weisen jeder 3-Auswahl innerhalb dieser Fächer die Wahrscheinlichkeit α zu. Wegen $n = k \cdot 3 + 4$ können wir aus den übrigen Fächern paarweise disjunkte 3-Teilmengen bilden, denen wir jeweils die Wahrscheinlichkeit $\beta = \frac{1-4\alpha}{k}$ zuweisen. Mit

$$D_{n,3}^{(\alpha)} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \sigma(\mathbf{p}_3^{(\alpha)}) \text{ für ein } \sigma \in S_n\}$$

können wir eine weitere Vermutung formulieren.

Vermutung 6.2.2. Für $n = k \cdot 3 + 4$ existiert ein eindeutiges α^* , sodass an der Stelle \mathbf{p} genau dann ein Minimum von $E_n^{(3)}(\mathbf{p})$ vorliegt, wenn $\mathbf{p} \in D_{n,3}^{(\alpha^*)}$ gilt.

Für den Fall $n = 7 = 1 \cdot 3 + 4$ wird diese Hypothese durch die Werte in Tabelle 6.2 gestützt.

DER FALL $n = k \cdot 3 + 2$ MIT $s = 3$

Wir definieren für $s = 3$ und $n = k \cdot 3 + 2$ den Vektor $\mathbf{p}_3^{(\alpha)}$ durch

$$p_{i_1, i_2, i_3}^{(\alpha)} := \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } (i_1, i_2, i_3) = (1, 2, j), \quad j \in \{3, \dots, n\}, \\ \beta, & \text{wenn } i_1 = 3 \cdot r, \quad i_2 = 3 \cdot r + 1, \quad i_3 = 3 \cdot r + 2, \quad r = 1, 2, \dots, k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Fächer mit den Nummern 1 und 2 werden folglich in Kombination mit jedem der Fächer 3 bis n mit der gleichen Wahrscheinlichkeit α besetzt. Außerdem werden die Fächer mit den Nummern 3 bis n in (innerhalb dieser Gruppe disjunkten) 3-Teilmengen mit Wahrscheinlichkeit $\beta = \frac{1-(n-2)\cdot\alpha}{k}$ besetzt. Auch hier verwenden wir die Menge

$$D_{n,3}^{(\alpha)} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \sigma(\mathbf{p}_3^{(\alpha)}) \text{ für ein } \sigma \in S_n\},$$

um die folgende Vermutung zu formulieren:

Vermutung 6.2.3. Für $n = k \cdot 3 + 2$ existiert ein eindeutiges α^* , so dass der Punkt \mathbf{p} genau dann ein Minimierer von $E_n^{(3)}(\mathbf{p})$ ist, wenn $\mathbf{p} \in D_{n,3}^{(\alpha^*)}$ gilt.

Es ist denkbar, dass sich nicht nur Vermutung 6.2.1, sondern auch die Vermutungen 6.2.2 und 6.2.3 für $s \geq 3$ verallgemeinern lassen.

ANHANG A

BEWEISE DER LEMMATA

Lemma 4.1.1. *Es gilt*

$$\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b) = O\left(n^{-r - \sum_{i=2}^r (i-1)b_i}\right).$$

Beweis. Wir definieren $b_\Sigma := \sum_{i=1}^r b_i$ und betrachten

$$\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B_1 = b_1, \dots, B_r = b_r)$$

für alle $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{N}_0$, die $\ell_1 + \dots + \ell_r = b_1 + 2b_2 + \dots + rb_r$ erfüllen. Diese Wahrscheinlichkeit wird im Beweis von Theorem 4.1.1 für den Fall untersucht, in dem $b_\Sigma = \ell_\Sigma$ gilt. Wir verweisen an einigen Stellen auf den Spezialfall, um den Beweis kurz zu halten.

Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau b_i mal i der Fächer 1 bis r besetzt werden, gleich $\left(\frac{\binom{n-r}{s-i}}{\binom{n}{s}}\right)^{b_i}$. Die Wahrscheinlichkeit, in den übrigen $k_n - b_\Sigma$ Besetzungsvorgängen keines der Fächer $1, \dots, r$ zu treffen, ist $\left(\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}}\right)^{k_n - b_\Sigma}$. Mit (4.9) gilt dann

$$\mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b) = \prod_{i=1}^r \left[\frac{\binom{n-r}{s-i}}{\binom{n}{s}} \right]^{b_i} \left[\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^{k_n - b_\Sigma} \frac{k_n!}{b_1! \dots b_r! (k_n - b_\Sigma)!}. \quad (\text{A.1})$$

Wir werden das asymptotische Verhalten der Faktoren zunächst getrennt betrachten. Wegen

$$\frac{\binom{n-r}{s-i}}{\binom{n}{s}} = \frac{s!}{(s-i)!} \frac{(n-s) \cdots (n-s-r+1+i)}{n \cdots (n-r+1)} = O(n^{-i})$$

gilt

$$\prod_{i=1}^r \left[\frac{\binom{n-i}{s}}{\binom{n}{s}} \right]^{b_i} = O\left(n^{-\sum_{i=1}^r ib_i}\right)$$

Um den Faktor $\left(\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}}\right)^{k_n - b_\Sigma}$ zu untersuchen, logarithmieren wir ihn zunächst. Es gilt mit (4.11), ε_n wie in (B.2) und den Ungleichungen (1.4) analog zu (4.13)

$$\begin{aligned} \log \left(\left(\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}} \right)^{k_n - b_\Sigma} \right) &= (k_n - b_\Sigma) \log \left(\prod_{i=0}^{r-1} \left(1 - \frac{s}{n-i} \right) \right) \\ &\leq -(k_n - b_\Sigma) \sum_{i=0}^{r-1} \frac{s}{n-i} \\ &\leq \frac{b_\Sigma r s}{n} - r \left(x + \log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)!) - \frac{\varepsilon_n s}{n} \right). \end{aligned}$$

Um das Logarithmieren rückgängig zu machen, wenden wir die Exponentialfunktion an und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\frac{\binom{n-r}{s}}{\binom{n}{s}} \right)^{k_n - b_\Sigma} &\leq e^{-r(x - s\varepsilon_n/n)} n^{-r} \exp(-r(c-1) \log \log n) (c-1)!^r \exp\left(\frac{b_\Sigma r s}{n}\right) \\ &= O\left(n^{-r} (\log n)^{-r(c-1)}\right). \end{aligned}$$

Für den letzten Faktor in (A.1) gilt

$$\frac{k_n!}{b_1! \cdots b_r! (k_n - b_\Sigma)!} = \frac{k_n^{b_\Sigma} (1 + o(1))}{b_1! \cdots b_r!} = O\left(n^{b_\Sigma} (\log n)^{b_\Sigma}\right).$$

Wegen

$$-r - \left(\sum_{i=1}^r ib_i \right) + b_\Sigma = -r - \sum_{i=1}^r (i-1)b_i$$

und

$$b_\Sigma - r(c-1) \leq 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_1 = \ell_1, \dots, N_r = \ell_r, B = b) &= O\left(n^{-\sum_{i=1}^r ib_i}\right) O\left(n^{-r} (\log n)^{-r(c-1)}\right) O\left(n^{b_\Sigma} (\log n)^{b_\Sigma}\right) \\ &= O\left(n^{-r - \sum_{i=1}^r (i-1)b_i}\right) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Lemma 4.2.1 Sei $A_{n,j} := A_{n,j}^{(1)}(k_n)$ das Ereignis, dass Fach Nummer j nach $k_n = \lfloor \frac{n}{s}(x + \log n) \rfloor$ Besetzungsvorgängen noch leer ist. Dann gelten für jedes $r \geq 1$ und für jede Wahl von $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \leq \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) \cdot \exp(a_{n,r} + b_{n,r})$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) &\geq \frac{e^{-rx}}{n^r} \cdot \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) \cdot d_{n,r} \cdot \exp\left(-(x + \log n)\bar{R}_{n,r}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+}(x + \log n)\bar{R}_{n,r}\right). \end{aligned}$$

Beweis. Mit $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ untersuchen wir die Wahrscheinlichkeit, dass die Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_r nach k_n Besetzungsvorgängen noch frei sind. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich durch

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) = (1 - S_{n,i_1, \dots, i_r})^{k_n}$$

ausdrücken. Mit (3.2) gilt also

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) = \left[1 - \sum_{h=1}^r \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} (-1)^{h-1} P_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}}\right]^{k_n}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Fächer mit den Nummern i_1, \dots, i_h in einer s -Auswahl enthalten sind, ist in diesem Modell mit (4.18) durch

$$\begin{aligned} P_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} &= \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}: \\ \{i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}\} \subseteq \{i_1, \dots, i_s\}}} p_{n,i_1, \dots, i_s} \\ &= \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}: \\ \{i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}\} \subseteq \{i_1, \dots, i_s\}}} \frac{1}{\binom{n}{s}} \left(1 + \frac{\Delta_{n,i_1, \dots, i_s}}{\log n}\right) \\ &= \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} + \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \frac{1}{\log n} \frac{1}{\binom{n-h}{s-h}} \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}: \\ \{i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}\} \subseteq \{i_1, \dots, i_s\}}} \Delta_{n,i_1, \dots, i_s} \\ &= \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \left(1 + \frac{\bar{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}}}{\log n}\right) \end{aligned}$$

gegeben.

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) &= \left[1 - \sum_{h=1}^r \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} (-1)^{h-1} \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \left(1 + \frac{\overline{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}}}{\log n} \right) \right]^{k_n} \\ &= \left[1 - \left(\sum_{h=1}^r (-1)^{h-1} \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \left(\binom{r}{h} + \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \overline{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \right) \right]^{k_n}. \end{aligned}$$

Für die weiteren Berechnungen wird der erste Summand der alternierenden Summe abgespalten. Die übrigen $r - 1$ Summanden werden durch $R_{n,r}$ aus (4.22) zusammengefasst. Unter Verwendung der Ungleichungen (1.4) für die Logarithmusfunktion ergibt sich somit

$$\log \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) = k_n \log \left(1 - \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} + R_{n,r} \right) \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} &\leq -k_n \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} + R_{n,r} \right) \\ &= -k_n \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} \right) - k_n \frac{s}{n} R_{n,r}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der erste Summand in (A.3) lässt sich mit M wie in (4.17) durch

$$\begin{aligned} -k_n \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} \right) &\leq -\frac{s}{n} \left(\frac{n}{s} (x + \log n) - 1 \right) \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \\ &\leq -rx - r \log n - \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} + \frac{s}{n} \left(r + \frac{rM}{\log n} \right) \end{aligned}$$

nach oben abschätzen. Um das Logarithmieren rückgängig zu machen, wenden wir die Exponentialfunktion an und erhalten mit $a_{n,r}$ wie in (4.20)

$$\exp \left(-k_n \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \right) \leq \frac{e^{-rx}}{n^r} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \overline{\Delta}_{n,i_\ell} \right) \exp(a_{n,r}).$$

Bei der Untersuchung des zweiten Summanden in (A.3) beobachten wir zunächst

$$-k_n \frac{s}{n} R_{n,r} \leq k_n \sum_{h=2}^r \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \left(\binom{r}{h} + \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \overline{\Delta}_{n,i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right)$$

und betrachten anschließend die $r - 1$ Summanden für festes h einzeln. Es gilt

$$\begin{aligned} & k_n \frac{\binom{n-h}{s-h}}{\binom{n}{s}} \left(\binom{r}{h} + \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n, i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \\ & \leq \frac{n}{s} (x + \log n) \mathbf{s}_{n,h} \frac{s}{n} \left(\binom{r}{h} + \frac{1}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n, i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}} \right) \\ & = \mathbf{s}_{n,h} \binom{r}{h} (x + \log n) + \mathbf{s}_{n,h} \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_h \leq r} \bar{\Delta}_{n, i_{\ell_1}, \dots, i_{\ell_h}}. \end{aligned}$$

Mit $b_{n,r}$ wie in (4.23) ergibt sich

$$-k_n \frac{s}{n} R_{n,r} \leq b_{n,r}$$

und somit die obere Schranke

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \leq \frac{e^{-rx}}{n^r} \exp \left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} \right) \exp(a_{n,r} + b_{n,r}).$$

Auch für die Herleitung einer unteren Schranke verwenden wir die Ungleichungen (1.4) für die Logarithmusfunktion und erhalten für hinreichend große n unter Verwendung von (A.2) durch

$$\begin{aligned} & \log \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \\ & = k_n \log \left(1 - \frac{s}{n} \left(r + \frac{1}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} + R_{n,r} \right) \right) \\ & \geq -\frac{n}{s} (x + \log n) \frac{s}{n} \frac{r + (1/\log n) \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} + R_{n,r}}{1 - s/n(r + (1/\log n) \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} + R_{n,r})} \\ & \geq -\left(xr + r \log n + \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} \right) \frac{1}{1 - s/n(r + rM/\log n + \bar{R}_{n,r})} \\ & \quad - (x + \log n) \bar{R}_{n,r} \frac{1}{1 - s/n(r + rM/\log n + \bar{R}_{n,r})} \end{aligned}$$

eine erste Abschätzung. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - s/n(r + rM/\log n + \bar{R}_{n,r})} &= 1 + \frac{s/n(r + rM/\log n + \bar{R}_{n,r})}{1 - s/n(r + rM/\log n + \bar{R}_{n,r})} \\ &= 1 + \frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) &\geq -\left(xr + r \log n + \frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n, i_\ell} \right) \left(1 + \frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} \right) \\ &\quad - (x + \log n) \bar{R}_{n,r} \left(1 + \frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} \right). \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Exponentialfunktion folgt mit $d_{n,r}$ wie in (4.24)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) \\ & \geq \frac{e^{-rx}}{n^r} \exp\left(-\frac{x + \log n}{\log n} \sum_{\ell=1}^r \bar{\Delta}_{n,i_\ell}\right) d_{n,r} \exp\left(-(x + \log n) \bar{R}_{n,r}\right) \\ & \quad \exp\left(-\frac{a_{n,r}^+}{1 - a_{n,r}^+} (x + \log n) \bar{R}_{n,r}\right). \end{aligned}$$

□

Lemma 5.1.1 Für festes ν und $\sigma \geq 0$ gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n - \nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n, \nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n - \nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n, \nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = 1 - W(y).$$

Beweis. Für $i \in \{1, \dots, \sigma\}$ und festes ν beschreibe N_i die Anzahl der Teilchen in Fach Nummer i , nachdem ℓ_n Teilchen verteilt wurden, wobei wir annehmen, dass lediglich $n - \nu$ Fächer zu Verfügung stehen. Die Zufallsvariable $N_{\sigma+1}$ beschreibe die Anzahl der Teilchen in den restlichen $n - \nu - \sigma$ Fächern. Dann gilt wegen der Austauschbarkeit der Fächer

$$\mathbb{P}_{n, \nu}(B_{n, \nu+1} \cap \dots \cap B_{n, \nu+\sigma}) = \mathbb{P}(B_{n-\nu, 1} \cap \dots \cap B_{n-\nu, \sigma}) = \mathbb{P}(N_1 \geq d, \dots, N_\sigma \geq d), \quad (\text{A.4})$$

wobei der Zufallsvektor $(N_1, \dots, N_\sigma, N_{\sigma+1})$ die Multinomialverteilung

$$(N_1, \dots, N_\sigma, N_{\sigma+1}) \sim \text{Mult} \left(\ell_n, \frac{1}{n - \nu}, \dots, \frac{1}{n - \nu}, \frac{n - \nu - \sigma}{n - \nu} \right)$$

besitzt. Die Tail-Wahrscheinlichkeit der Multinomialverteilung kann mithilfe unvollständiger Dirichlet-Integrale ausgedrückt werden (siehe [30], [38]). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^{\sigma} \{N_i \geq d\} \right) &= \frac{\ell_n!}{(d-1)^\sigma (\ell_n - d\sigma)!} \int_0^{\frac{1}{n-\nu}} \dots \int_0^{\frac{1}{n-\nu}} \left(1 - \sum_{i=1}^{\sigma} x_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \prod_{i=1}^{\sigma} x_i^{d-1} dx_1 \dots dx_\sigma \\ &= \frac{\ell_n!}{(d-1)^\sigma (\ell_n - d\sigma)!} \left(\frac{1}{n - \nu} \right)^{d\sigma} \\ &\quad \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} \left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} du_1 \dots du_\sigma \end{aligned}$$

und werden im Folgenden die Konvergenz des σ -fachen Integrals gegen $\left(\frac{1}{d}\right)^\sigma$ für $n \rightarrow \infty$ zeigen. Der Nachweis erfolgt unter Verwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz (siehe [32], S. 336). Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir zunächst die Existenz einer integrierbaren Majorante und anschließend die Konvergenz des Integranden nachweisen. Mit $n - \nu \geq \sigma$ und $u_i \in [0, 1]$ gilt

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \leq 1. \quad (\text{A.5})$$

Also ist durch $g : [0, 1]^\sigma \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(u_1, \dots, u_\sigma) := \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1}$$

eine Majorante gegeben, die wegen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} du_1 \dots du_{\sigma} &= \prod_{i=1}^{\sigma} \int_0^1 u_i^{d-1} du_i \\ &= \left(\frac{1}{d}\right)^{\sigma} < \infty \end{aligned}$$

integrierbar ist. Um die Konvergenz des Integranden nachzuweisen, betrachten wir zunächst den Teil des Integranden, der von n abhängt und verwenden die Identität

$$\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right)^{\ell_n - d\sigma} = \exp\left((\ell_n - d\sigma) \left(\log\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right)\right)\right).$$

Mit der Abschätzung (1.4) für den Logarithmus ergibt sich für das Argument der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} (\ell_n - d\sigma) \log\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right) &\geq (\ell_n - d\sigma) \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i}\right) \\ &= (\ell_n - d\sigma) \left(-\frac{\frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i}{1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i}\right) \\ &\geq (yn^{1-\frac{1}{d}} - d\sigma) \left(-\frac{\frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i}{1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i}\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i} \left(-\frac{yn^{1-\frac{1}{d}}}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i + d\sigma \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (\ell_n - d\sigma) \log\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right) \\ \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i} \left(\frac{d\sigma}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i - \frac{yn^{1-\frac{1}{d}}}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right) \\ = 0. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right)^{\ell_n - d\sigma} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\exp\left((\ell_n - d\sigma) \log\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left((\ell_n - d\sigma) \log\left(1 - \frac{1}{n-\nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i\right)\right)\right) \\ &\geq \exp(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Weil der Integrand mit (A.5) nach oben durch eins beschränkt ist, gilt auch

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \leq 1,$$

womit schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} = 1$$

folgt. Zusammengefasst erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} \right) &= \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1}. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue können wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen, womit die Konvergenz des σ -fachen Integrals mittels

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\left(1 - \frac{1}{n - \nu} \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \right)^{\ell_n - d\sigma} \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} \right) du_1 \dots du_{\sigma} &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{\sigma} u_i^{d-1} du_1 \dots du_{\sigma} \\ &= \left(\frac{1}{d} \right)^{\sigma} \end{aligned}$$

nachgewiesen ist. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n - \nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n, \nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \nu)!}{\sigma!(n - \nu - \sigma)!} \left(\frac{1}{d} \right)^{\sigma} \frac{\ell_n!}{(d-1)^{\sigma}(\ell_n - d\sigma)!} \left(\frac{1}{n - \nu} \right)^{d\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{1}{d!} \right)^{\sigma} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \nu)!}{(n - \nu - \sigma)!} \frac{\ell_n!}{(\ell_n - d\sigma)!} \left(\frac{1}{n - \nu} \right)^{d\sigma}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{(n - \nu)!}{(n - \nu - \sigma)!} = (1 + o(1)) \cdot (n - \nu)^{\sigma}$$

und

$$\frac{\ell_n!}{(\ell_n - d\sigma)!} = (1 + o(1)) \cdot \ell_n^{d\sigma}$$

vereinfacht sich der Grenzwert zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n - \nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n, \nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{1}{d!} \right)^{\sigma} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + o(1)) \left(\frac{\ell_n^{d\sigma}}{(n - \nu)^{d\sigma - \sigma}} \right).$$

Weiter gilt wegen $yn^{1-\frac{1}{d}} - 1 \leq \ell_n \leq yn^{1-\frac{1}{d}}$ zum einen

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n^{d\sigma}}{(n-\nu)^{d\sigma-\sigma}} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(yn^{1-\frac{1}{d}}\right)^{d\sigma}}{(n-\nu)^{d\sigma-\sigma}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{y^{d\sigma} n^{d\sigma-\sigma}}{(n-\nu)^{d\sigma-\sigma}} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} y^{d\sigma} \left(\frac{n}{n-\nu}\right)^{d\sigma-\sigma} \\ &= y^{d\sigma} \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n^{d\sigma}}{(n-\nu)^{d\sigma-\sigma}} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(yn^{1-\frac{1}{d}} - 1\right)^{d\sigma}}{(n-\nu)^{d\sigma-\sigma}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{yn^{1-\frac{1}{d}} - 1}{(n-\nu)^{1-\frac{1}{d}}}\right)^{d\sigma} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(y \left(\frac{n}{n-\nu}\right)^{1-\frac{1}{d}} - \frac{1}{(n-\nu)^{1-\frac{1}{d}}}\right)^{d\sigma} \\ &= y^{d\sigma}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_n^{d\sigma}}{(n-\nu)^\sigma} = y^{d\sigma}$$

schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) = \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!}\right)^\sigma. \quad (\text{A.6})$$

Wir betrachten für festes ν zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}).$$

Mit den Bonferroni-Ungleichungen (C.3) und (C.4) gilt für jedes feste $s_1 \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-\nu-1}{2} \rfloor\}$ und $s_2 \in \{0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-\nu}{2} \rfloor\}$ zum einen

$$\sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \leq \sum_{\sigma=1}^{2s_1+1} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma})$$

und zum anderen

$$\sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \geq \sum_{\sigma=1}^{2s_2} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma})$$

und mit (A.6)

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{2s_1+1} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& = \sum_{\sigma=1}^{2s_1+1} (-1)^{\sigma-1} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{2s_2} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& = \sum_{\sigma=1}^{2s_2} (-1)^{\sigma-1} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma.
\end{aligned}$$

Lassen wir s_1 und s_2 gegen unendlich streben, ergeben sich für die Bonferroni-Schranken die selben Werte. Es gilt also

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=0}^{n-\nu} (-1)^\sigma \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\sigma=1}^{n-\nu} (-1)^{\sigma-1} \binom{n-\nu}{\sigma} \mathbb{P}_{n,\nu}(B_{\nu+1} \cap \dots \cap B_{\nu+\sigma}) \\
& = 1 - \sum_{\sigma=1}^{\infty} (-1)^{\sigma-1} \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma \\
& = \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{1}{\sigma!} \left(\frac{y^d}{d!} \right)^\sigma \\
& = \exp \left(-\frac{y^d}{d!} \right) \\
& = 1 - W(y).
\end{aligned}$$

□

ANHANG B

ERGÄNZENDE BEWEISE

B.1. NACHWEIS VON (2.25)

Um die Notation übersichtlich zu halten, setzen wir für $j \in \{1, \dots, n\}$

$$m_{n,j} := \int_{(j-1)/n}^{j/n} m(t) dt.$$

Hiermit gilt

$$m_{n,j} = \frac{1}{n} \cdot m(x_{n,j}), \tag{B.1}$$

wobei $(j-1)/n \leq x_{n,j} \leq j/n$ ist. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n(x) &= \sum_{i=1}^n \exp[-p_{n,i}(b_n + xa_n)] \\ &= \sum_{i=1}^n \exp \left[\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{\log n} \int_{(i-1)/n}^{i/n} m(t) dt \right) (n(\log n) + xn) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \exp \left[-\log n - x - n \int_{(i-1)/n}^{i/n} m(t) dt \left(1 + \frac{x}{\log n} \right) \right] \\ &= \frac{1}{n} e^{-x} \sum_{i=1}^n \exp \left[-n \int_{(i-1)/n}^{i/n} m(t) dt \left(1 + \frac{x}{\log n} \right) \right] \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_n(x) &= e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left[-n \int_{(i-1)/n}^{i/n} m(t) dt \left(1 + \frac{x}{\log n} \right) \right] \\ &= e^{-x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left[-m_{n,i} \left(1 + O \left(\frac{1}{\log n} \right) \right) \right].\end{aligned}$$

Weil für die Riemannsche Näherungssumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left[-m_{n,i} \left(1 + O \left(\frac{1}{\log n} \right) \right) \right] = J_m$$

gilt, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_n(x) = e^{-x} J_m,$$

womit die Voraussetzungen von Theorem 2.2.1 erfüllt sind und (2.24) gilt.

B.2. BEWEIS VON (2.26) MITHILFE DER FORMEL DES EIN- UND AUSSCHLIESSENS

Der folgende Beweis ähnelt den Überlegungen in Unterabschnitt 4.1.1, in welchem aber $s \geq 2$ gilt und die s -Teilmengen alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt werden.

Zu gegebenem $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$k_n^{(1,c)} = \lfloor n(\log n + (c-1) \log \log n - \log((c-1)!) + x) \rfloor$$

und wählen n so groß, dass $k_n^{(1,c)} \geq 1$ gilt. Wir schreiben im Folgenden k_n für $k_n^{(1,c)}$, nennen den Term innerhalb der unteren Gaußklammer t_n und definieren damit

$$\varepsilon_n := t_n - k_n \in (0, 1). \tag{B.2}$$

Weiter ist $A_{n,j} = A_{n,j}^{(1)}(k_n)$ das Ereignis, dass Fach Nummer j nach dem Verteilen von k_n Teilchen höchstens $c-1$ Teilchen enthält. Da $X_n^{(1,c)}$ genau dann größer als k_n ist, wenn nach dem Verteilen von k_n Teilchen noch mindestens eines der Fächer höchstens $c-1$ Teilchen enthält, gilt mit der Ganzzahligkeit von $X_n^{(1,c)}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P} \left(X_n^{(1,c)} \leq t_n \right) &= \mathbb{P} \left(X_n^{(1,c)} \leq k_n \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(X_n^{(1,c)} > k_n \right) \\ &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^n A_{n,j} \right).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Formel (C.2) des Ein- und Ausschließens gilt mit (C.1)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_{n,j}\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}). \quad (\text{B.3})$$

Wir verwenden die Abkürzung

$$\mathbf{S}_{n,r} := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$$

und zeigen, dass für jedes feste $r \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_{n,r} = \frac{e^{-rx}}{r!} J_r^r \quad (\text{B.4})$$

gilt. Mithilfe der in Unterabschnitt C.2 vorgestellten Bonferroni-Ungleichungen werden wir nachweisen, dass (2.26) gilt.

Die Zufallsvariable $N_j := N_{n,j}(k_n)$ beschreibe die Anzahl der Teilchen in Fach j , nachdem k_n Teilchen verteilt wurden. Damit gilt

$$\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) = \mathbb{P}(N_{i_1} \leq c-1, \dots, N_{i_r} \leq c-1).$$

Die Anzahl der Teilchen, die nicht in den Fächern mit den Nummern i_1, \dots, i_r liegen, ist $M := k - N_{i_1} - \dots - N_{i_r}$. Die Wahrscheinlichkeit, keines der Fächer i_1, \dots, i_r zu treffen, ist $p_{n,M} := 1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}$. Wir untersuchen das Ereignis

$$\{N_{i_1} = \ell_1, \dots, N_{i_r} = \ell_r, M = \ell_M\}$$

und betrachten für $\ell_M := k_n - (\ell_1 + \dots + \ell_r)$ den Zufallsvektor $(N_{i_1}, \dots, N_{i_r}, M)$, der eine Multinomialverteilung mit den Parametern k_n und $p_{n,i_1}, \dots, p_{n,i_r}, p_{n,M}$ besitzt. Für einen multinomialverteilten Zufallsvektor ist die Zähldichte durch

$$\mathbb{P}(N_{i_1} = \ell_1, \dots, N_{i_r} = \ell_r, M = \ell_M) = \frac{k_n!}{\ell_1! \dots \ell_r! \cdot \ell_M!} p_{n,i_1}^{\ell_1} \dots p_{n,i_r}^{\ell_r} p_{n,M}^{\ell_M} \quad (\text{B.5})$$

gegeben. Wir können $\mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r})$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n,i_1} \cap \dots \cap A_{n,i_r}) &= \mathbb{P}(N_{i_1} \leq c-1, \dots, N_{i_r} \leq c-1) \\ &= \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} \mathbb{P}(N_{i_1} = \ell_1, \dots, N_{i_r} = \ell_r, M = \ell_M) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

berechnen. Um (B.4) nachzuweisen, werden wir zuerst eine obere Schranke für $\mathbf{S}_{n,r}$ angeben und verwenden dafür die Abschätzungen (1.4) für die Logarithmusfunktion. Wir werden sehen, dass die obere Schranke einen existierenden Grenzwert hat und die Differenz zwischen oberer und unterer Schranke im Grenzwert gegen null strebt. Wir können somit auf die Berechnung

einer unteren Schranke verzichten. Mit (B.3), (B.5) und (B.6) gilt

$$\mathbf{S}_{n,r} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} \frac{k_n!}{\ell_1! \dots \ell_r! \ell_M!} p_{n,i_1}^{\ell_1} \dots p_{n,i_r}^{\ell_r} p_{n,M}^{\ell_M}.$$

Wir untersuchen das Produkt

$$\frac{k_n!}{\ell_1! \dots \ell_r! \ell_M!} p_{n,i_1}^{\ell_1} \dots p_{n,i_r}^{\ell_r} p_{n,M}^{\ell_M} = \frac{k_n!}{\ell_M!} \left(\prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \right) p_{n,M}^{\ell_M} \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!}, \quad (\text{B.7})$$

wobei der Faktor $1/(\ell_1! \dots \ell_r!)$ vorerst vernachlässigt werden soll. Mit ℓ_Σ wie in (4.8) gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{k_n!}{\ell_M!} = \frac{k_n!}{(k_n - \ell_1 - \dots - \ell_r)!} = k_n^{\ell_\Sigma} \cdot (1 + o(1)).$$

Durch Anwendung der Logarithmusfunktion auf die Faktoren der rechten Seite in (B.7) ergeben sich durch Umformung die Summanden

$$\log \left(k_n^{\ell_\Sigma} (1 + o(1)) \prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} p_{n,M}^{\ell_M} \right) = \log k_n^{\ell_\Sigma} + \log \left(\prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \right) + \log p_{n,M}^{\ell_M} + \log(1 + o(1)), \quad (\text{B.8})$$

die nacheinander untersucht werden sollen. Den ersten Summanden können wir durch

$$\log k_n^{\ell_\Sigma} = \ell_\Sigma \log(k_n)$$

umformen. Wir setzen in den zweiten Summanden die Definition (2.23) der $p_{n,j}$ ein, verwenden (B.1) und erhalten

$$\begin{aligned} \log \left(\prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \right) &= \log \left(\prod_{j=1}^r \left(\frac{1}{n} \left(1 + \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right) \right)^{\ell_j} \right) \\ &= \log \left(\prod_{j=1}^r n^{-\ell_j} \cdot \prod_{j=1}^r \left(1 + \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right)^{\ell_j} \right) \\ &= - \sum_{j=1}^r \ell_j \log n + \log \left(\prod_{j=1}^r \left(1 + \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right)^{\ell_j} \right) \\ &= -\ell_\Sigma \log n + o(1). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit beruht darauf, dass

$$\prod_{j=1}^r \left(1 + \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right)^{\ell_j}$$

wegen der Beschränktheit von $m(\cdot)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen eins konvergiert. Die Untersuchung des

dritten Summanden in (B.8) führt zu

$$\log p_{n,M}^{\ell_M} = \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right)^{k_n - \ell_\Sigma} = (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right).$$

Für den letzten Summanden in (B.8) gilt $\log(1 + o(1)) = o(1)$. Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen, erhalten wir für (B.8) unter Verwendung der Definition von k_n

$$\begin{aligned} & \log \left(k_n^{\ell_\Sigma} \cdot (1 + o(1)) \prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \cdot p_{n,M}^{\ell_M} \right) \\ &= \ell_\Sigma \log(k_n) - \ell_\Sigma \log n + (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1) \\ &= \ell_\Sigma \log \left(\frac{k_n}{n} \right) + (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1) \\ &= \ell_\Sigma \log \left(\log n \left(1 + \frac{(c-1) \log \log n}{\log n} - \frac{\log((c-1)!)}{\log n} + \frac{x}{\log n} - \frac{\varepsilon_n}{\log n} \right) \right) \\ & \quad + (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1) \\ &= \ell_\Sigma \log(\log n(1 + o(1))) + (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1). \end{aligned}$$

Den bisherigen Rechnungen folgend gelten

$$\mathbf{S}_{n,r} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} k_n^{\ell_\Sigma} (1 + o(1)) \left(\prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \right) p_{n,M}^{\ell_M} \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!} \quad (\text{B.9})$$

sowie

$$\begin{aligned} & k_n^{\ell_\Sigma} (1 + o(1)) \left(\prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} \right) p_{n,M}^{\ell_M} \\ &= \exp \left(\ell_\Sigma \log(\log n(1 + o(1))) + (k_n - \ell_\Sigma) \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1) \right). \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen (1.4) für die Logarithmusfunktion erhalten wir

$$1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}} \leq \log \left(1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) \leq - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}$$

und können durch

$$U_{n,i_1, \dots, i_r} := \exp \left(\ell_\Sigma \log(\log n(1 + o(1))) + (k_n - \ell_\Sigma) \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}} \right) + o(1) \right) \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!}$$

beziehungsweise

$$O_{n,i_1,\dots,i_r} := \exp\left(\ell_\Sigma \log(\log n(1+o(1))) + (k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right) + o(1)\right) \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!}$$

eine untere und eine obere Schranke für die Summanden in (B.9) angeben, mit welchen

$$U_{n,i_1,\dots,i_r} \leq k_n^{\ell_\Sigma} (1+o(1)) \prod_{j=1}^r p_{n,i_j}^{\ell_j} p_{n,M}^{\ell_M} \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!} \leq O_{n,i_1,\dots,i_r}$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} U_{n,i_1,\dots,i_r} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_{n,r} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r}.$$

gelten. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r} - U_{n,i_1,\dots,i_r} = 0$$

gilt und betrachten dafür die Differenz

$$O_{n,i_1,\dots,i_r} - U_{n,i_1,\dots,i_r} = \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!} \exp(\ell_\Sigma \log(\log n(1+o(1)))) \cdot \left[\exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right)\right) \right. \quad (\text{B.10})$$

$$\left. - \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}\right)\right) \right]. \quad (\text{B.11})$$

Für das Argument der Exponentialfunktionen in (B.10) folgt durch Einsetzen der Definitionen für k_n und $p_{n,i}$

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^r p_{n,i_j} (k_n - \ell_\Sigma) &= -\sum_{j=1}^r \left(\frac{1}{n} \left(1 + \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right) \right) (k_n - \ell_\Sigma) \\ &= -\frac{1}{n} \left(r + \sum_{j=1}^r \frac{m(x_{n,i_j})}{\log n} \right) (k_n - \ell_\Sigma) \\ &= -\frac{r}{n} (k_n - \ell_\Sigma) - \sum_{j=1}^r \frac{m(x_{n,i_j})}{n \log n} (k_n - \ell_\Sigma). \end{aligned}$$

Mit der Definition von k_n finden wir zum einen

$$\begin{aligned}
 -\frac{r}{n}(k_n - \ell_\Sigma) &= -\frac{r}{n}(n(\log n + (c-1)\log \log n - \log((c-1)!) + x) - \varepsilon_n - \ell_\Sigma) \\
 &= -r \log n - r(c-1)\log \log n + r \log((c-1)!) - rx + \frac{r\varepsilon_n}{n} + \frac{r\ell_\Sigma}{n} \\
 &= -r \log n - r(c-1)\log \log n + r \log((c-1)!) - rx + o(1) \tag{B.12}
 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{j=1}^r \frac{m(x_{n,i_j})}{n \log n} (k_n - \ell_\Sigma) \\
 &= -\sum_{j=1}^r \frac{m(x_{n,i_j})}{n \log n} (n(\log n + (c-1)\log \log n - \log((c-1)!) + x) - \varepsilon_n - \ell_\Sigma) \\
 &= -\left(1 + \frac{(c-1)\log \log n}{\log n} - \frac{\log((c-1)!) + x}{\log n} - \frac{\varepsilon_n}{n \log n} - \frac{\ell_\Sigma}{n \log n}\right) \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \\
 &= -(1 + o(1)) \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}). \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned}
 &-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j} (k_n - \ell_\Sigma) \\
 &= -r \log n - r(c-1)\log \log n + r \log((c-1)!) - rx + o(1) - \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})(1 + o(1)). \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Für das Argument der Exponentialfunktion in (B.11) gilt wegen

$$1 - \frac{1}{1-t} = \frac{1-t-1}{1-t} = -\frac{t}{1-t}$$

außerdem

$$1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}} = -\frac{\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}. \tag{B.15}$$

Wir betrachten den Nenner des Terms der rechten Seite und erhalten durch Einsetzen der Definition für p_{n,i_j}

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}} &= \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r [1/n \cdot (1 + m(x_{n,i_j})/\log n)]} \\
 &= \frac{1}{1 - r/n - \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})/(n \log n)}.
 \end{aligned}$$

Mit

$$a := \max_{0 \leq t \leq 1} m(t)$$

gelten

$$\frac{1}{1 - r/n - \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})/(n \log n)} \geq \frac{1}{1 - r/n + ra/(n \log n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sowie

$$\frac{1}{1 - r/n - \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})/(n \log n)} \leq \frac{1}{1 - r/n - ra/(n \log n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

und damit

$$\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}} = \frac{1}{1 - r/n - \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})/(n \log n)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (\text{B.16})$$

Für den Ausdruck in den eckigen Klammern in (B.10) und (B.11) erhalten wir mit (B.14), (B.15) und (B.16)

$$\begin{aligned} & \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right)\right) - \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(1 - \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}\right)\right) \\ &= \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right)\right) - \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\frac{\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}{1 - \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}}\right)\right) \\ &= \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right)\right) - \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right) \\ &= \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right)\right) \left[1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] \\ &= \exp(-r \log n - r(c-1) \log \log n + r \log((c-1)!) - rx + o(1)) \\ & \quad \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})(1 + o(1))\right) \\ & \quad \cdot \left[1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \cdot O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Weil k_n von der Größenordnung $n \log n$ und p_{n,i_j} von der Größenordnung $1/n$ ist, strebt das Argument der Exponentialfunktion in (B.17) gegen null, womit

$$1 - \exp\left((k_n - \ell_\Sigma) \cdot O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{j=1}^r p_{n,i_j}\right) = 1 - (1 + o(1)) = o(1)$$

folgt.

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 O_{n,i_1,\dots,i_r} - U_{n,i_1,\dots,i_r} &= \frac{1}{n^r} e^{-rx} e^{o(1)} \exp\left(-\sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})(1+o(1))\right) o(1) \\
 &\quad \cdot \exp(\ell_\Sigma \log(\log n(1+o(1)))) \exp(-r(c-1) \log \log n) \quad (\text{B.18}) \\
 &\quad \cdot \frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!} (c-1)!^r.
 \end{aligned}$$

Weil wir das Verhalten dieses Terms für $n \rightarrow \infty$ studieren wollen, betrachten wir im Folgenden die von n abhängigen Faktoren. Um das Argument der Exponentialfunktion in (B.18) zu untersuchen, notieren wir zunächst

$$(\ell_\Sigma - r(c-1)) \log \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \ell_\Sigma = r(c-1), \\ -\infty, & \ell_\Sigma < r(c-1), \end{cases}$$

womit

$$\exp(\ell_\Sigma \log(\log n(1+o(1)))) \exp(-r(c-1) \log \log n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & \ell_\Sigma = r(c-1), \\ 0, & \ell_\Sigma < r(c-1) \end{cases}$$

folgt. Da die Funktion m nach Definition beschränkt ist, sind alle übrigen von n abhängenden Faktoren beschränkt, und (B.18) konvergiert für $\ell_\Sigma < r(c-1)$ gegen Null. Durch diese Grenzwertbetrachtung motiviert, untersuchen wir im Folgenden nur den Fall, in dem $\ell_\Sigma = \ell_1 + \dots + \ell_r = r(c-1)$ gilt. Diese Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$

$$\ell_j = c-1$$

gilt. In diesem Fall ist

$$\frac{1}{\ell_1! \cdots \ell_r!} = \frac{1}{(c-1)!^r},$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=1}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r} - U_{n,i_1,\dots,i_r} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} o(1) \cdot e^{-rx} e^{o(1)} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{n^r} \exp\left(-\sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})(1+o(1))\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Wir zeigen im Folgenden, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=1}^{c-1} \cdots \sum_{\ell_r=1}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r}$$

existiert, womit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=1}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=1}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=1}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=1}^{c-1} U_{n,i_1,\dots,i_r} < \infty$$

und damit auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_{n,r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=1}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=1}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r}$$

gelten. Um diesen Grenzwert zu berechnen, untersuchen wir die obere Schranke

$$O_{n,i_1,\dots,i_r} = \exp \left(\ell_\Sigma \log(\log n(1 + o(1))) + (k_n - \ell_\Sigma) \left(- \sum_{j=1}^r p_{n,i_j} \right) + o(1) \right) \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!}.$$

Mit (B.13), (B.12) und (B.14) ergibt sich

$$\begin{aligned} O_{n,i_1,\dots,i_r} &= \exp(\ell_\Sigma \log(\log n(1 + o(1)))) \exp((\ell_\Sigma - r(c-1)) \log \log n) \\ &\quad \cdot \exp \left(- \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j})(1 + o(1)) \right) \frac{1}{n^r} \cdot (c-1)!^r e^{-rx} e^{o(1)} \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!}, \end{aligned}$$

und wir erhalten mit den gleichen Überlegungen wie zu (B.18)

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} O_{n,i_1,\dots,i_r} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{n^r} \exp \left(- \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \right) \exp \left(- \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \cdot o(1) \right) \\ &\quad \cdot (c-1)!^r e^{-rx} e^{o(1)} \exp(0) \frac{1}{(c-1)!^r}. \end{aligned}$$

Es gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c-1)!^r e^{o(1)} \exp(0) \frac{1}{(c-1)!^r} = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \cdot o(1) = 0,$$

womit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(- \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \cdot o(1) \right) = 1$$

folgt. Die Riemannsche Näherungssumme

$$\frac{1}{n^r} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \exp \left(- \sum_{j=1}^r m(x_{n,i_j}) \right)$$

konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen das r -fache Integral

$$\int_{0 \leq s_1 < \dots < s_r \leq 1} \dots \int \exp\left(-\sum_{j=1}^r m(s_j)\right) ds_1 \dots ds_r.$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} O_{n, i_1, \dots, i_r} \\ = e^{-rx} \int_{0 \leq s_1 < \dots < s_r \leq 1} \dots \int \exp\left(-\sum_{j=1}^r m(s_j)\right) ds_1 \dots ds_r. \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen integrieren wir hier über die Menge

$$M_r = \{(s_1, \dots, s_r) : 0 \leq s_1 < \dots < s_r \leq 1\},$$

wobei der Wert des r -fachen Integrals unabhängig von der Integrationsreihenfolge ist. Alle $(r-1)$ -dimensionalen Hyperebenen haben das Maß Null, wir können also über den r -dimensionalen Hyperwürfel mit Kantenlänge eins integrieren und anschließend durch die Anzahl $r!$ der Möglichkeiten teilen, s_1, \dots, s_r der Größe nach zu ordnen, was uns zum gesuchten Ergebnis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{\ell_1=0}^{c-1} \dots \sum_{\ell_r=0}^{c-1} O_{n, i_1, \dots, i_r} &= e^{-rx} \int_{0 \leq s_1 < \dots < s_r \leq 1} \prod_{j=1}^r e^{-m(s_j)} ds_1 \dots ds_r \\ &= \frac{e^{-rx}}{r!} \int_0^1 e^{-m(s_1)} ds_1 \dots \int_0^1 e^{-m(s_r)} ds_r \\ &= \frac{e^{-rx}}{r!} \left(\int_0^1 e^{-m(s)} ds \right)^r \\ &= \frac{e^{-rx}}{r!} J_m^r \end{aligned}$$

führt. Weil der Grenzwert existiert, folgt direkt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{S}_{n,r} = \frac{e^{-rx}}{r!} J_m^r.$$

Um den Beweis von (2.26) abzuschließen, verwenden wir die Bonferroni-Ungleichungen (C.3) und (C.4). Auf der einen Seite gilt aufgrund der soeben bewiesenen Limesbeziehungen für jedes feste $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > k_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2s+1} (-1)^{r-1} \mathbf{S}_{n,r} \\ &= \sum_{r=1}^{2s+1} (-1)^{r-1} \frac{e^{-rx}}{r!} J_m^r. \end{aligned} \tag{B.19}$$

Andererseits gilt für jedes $s \geq 1$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > k_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{2s+1} (-1)^{r-1} \mathbf{S}_{n,r} \\ &= \sum_{r=1}^{2s} (-1)^{r-1} \frac{e^{-rx}}{r!} J_m^r. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Für $s \rightarrow \infty$ erhalten wir für die Summen in (B.19) und (B.20) den gleichen Grenzwert

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{e^{-rx}}{r!} J_m^r &= \sum_{r=1}^{\infty} -\frac{(-1)^r \cdot e^{-x \cdot r}}{r!} \cdot \exp(\log J_m)^r \\ &= -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-\exp(-x + \log J_m))^r}{r!} \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\exp(-x + \log J_m))^r}{r!} \\ &= 1 - \exp(-\exp(-x + \log J_m)). \end{aligned}$$

Wir können die Verteilungsfunktion der gesuchten Grenzverteilung also durch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq k_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \mathbb{P}(X_n > k_n)) \\ &= \exp(-\exp(-x + \log J_m)) \\ &= G(x - \log J_m) \end{aligned}$$

angeben. Wählen wir $c = 1$, so folgt als Spezialfall der in (2.24) vorgestellte Grenzwertsatz.

B.3. NACHWEIS DER ZWEITEN VORAUSSETZUNG FÜR DIE MOMENTENMETHODE

Um zu zeigen, dass die Verteilung von Z durch die Folge $(\mathbb{E}(Z^r))_{r \geq 1}$ eindeutig bestimmt ist, reicht es nachzuweisen, dass die Potenzreihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z^r) \frac{t^r}{r!} \tag{B.21}$$

einen nicht verschwindenden Konvergenzradius besitzt (siehe [5], S. 342). Wir verwenden die für jedes $r \geq 1$ und $j \in \{0, \dots, k\}$ geltende Ungleichung

$$(k - j)^r \leq k^r$$

sowie die aus dem binomischen Lehrsatz folgende Gleichung

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 2^k,$$

womit unter Verwendung von (2.3), (4.1) und (4.3)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z^r) &= \sum_{k=1}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \mathbb{E}Z^k \\ &\leq \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (k - j)^r \lambda^k \\ &\leq \sum_{k=1}^r \frac{(2\lambda)^k}{k!} k^r \\ &\leq \exp(2\lambda) r^r \end{aligned}$$

folgt. Durch Einsetzen in (B.21) erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z^r) \frac{t^r}{r!} \leq \sum_{r=1}^{\infty} \exp(2\lambda) t^r \frac{r^r}{r!}.$$

Für $a_r := \frac{r^r}{r!}$ gilt

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{(r+1)^{r+1}}{(r+1)!} \frac{r!}{r^r} = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r < 4$$

und wir haben eine konvergente Majorante gefunden, womit die Potenzreihe $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{E}(Z^r) \cdot \frac{t^r}{r!}$ für jedes t mit $t \in (0, \frac{1}{4})$ konvergiert. Die Verteilung von Z ist somit eindeutig durch die Folge $(\mathbb{E}(Z^r))_{r \geq 1}$ bestimmt.

B.4. ALTERNATIVER BEWEIS VON THEOREM 6.1.1

Wir werden das Optimierungsproblem $(\mathcal{P}_n^{(n-1)})$ so umformulieren, dass wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden können (siehe [1], S. 1038). Die zweite Summe in (6.1) ist für festes n konstant und kann vernachlässigt werden. Wir suchen also einen Vektor \mathbf{p} , der

$$(\mathcal{P}_n^{(n-1)}) \begin{cases} \text{minimiere} & \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-q(i)} \\ \text{unter} & \mathbf{p} \in V_n^{(n-1)} \end{cases}$$

mit $V_n^{(n-1)} := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n^\top \mathbf{p} = 1\}$ löst. Dabei ist \mathbf{e}_ℓ wie zuvor der Vektor im \mathbb{R}^ℓ , der aus lauter Einsen besteht, und die Ungleichungsketten sind komponentenweise zu verstehen. Die Lagrange-Funktion ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{p}, \lambda) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-q(j)} + \lambda(\mathbf{e}_n^\top \mathbf{p} - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{1-q(j)} + \lambda \left(\sum_{j=1}^n q(j) - 1 \right) \end{aligned}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q(j)} = (1 - q(j))^{-2} + \lambda, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^n q(j) - 1. \quad (\text{B.23})$$

Gleichsetzen von (B.22) mit null führt für $j = 1, \dots, n$ zu

$$\begin{aligned} (1 - q(j))^{-2} + \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - q(j) &= (-\lambda)^{-1/2} \\ \Leftrightarrow q(j) &= 1 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Wir setzen (B.23) gleich null, erhalten mit (B.24)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n q(j) - 1 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(1 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2}\right) - 1 \\ &= n - n \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} - 1 \end{aligned}$$

und finden

$$\lambda = -\left(\frac{n}{n-1}\right)^2. \quad (\text{B.25})$$

Wir setzen (B.25) in (B.24) ein und können so die optimale Strategie durch

$$\begin{aligned} q(j) &= 1 - \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= 1 - \left(\frac{n-1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

bestimmen. Die erwartete Anzahl an Besetzungsvorgängen wird also minimal, wenn jede $(n-1)$ -Auswahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.

ANHANG C

ERGÄNZENDE FORMELN UND RECHNUNGEN

C.1. DIE FORMEL DES EIN- UND AUSSCHLIESSENS

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A_1, \dots, A_n , $n \geq 2$, Ereignisse. Für jede natürliche Zahl r mit $r \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$\mathbf{S}_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) \quad (\text{C.1})$$

gesetzt. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \mathbf{S}_r. \quad (\text{C.2})$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion und kann in [35], Seite 71, nachgelesen werden.

C.2. DIE BONFERRONI-UNGLEICHUNGEN

Durch Abbruch der auf der rechten Seite von (C.2) stehenden Summe entstehen Partialsummen, die im Wechsel zu klein und zu groß sind. Mit (C.1) führt diese Beobachtung zu den Bonferroni-Ungleichungen (siehe [32], S. 27)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{r=1}^{2s+1} (-1)^{r-1} \mathbf{S}_r, \quad s \geq 0 \text{ und } 2s + 1 \leq n, \quad (\text{C.3})$$

und

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq \sum_{r=1}^{2s} (-1)^{r-1} \mathbf{S}_r, \quad s \geq 1 \text{ und } 2s \leq n. \quad (\text{C.4})$$

C.3. DARSTELLUNG VON $\mathbb{P}(X_n = k)$ DURCH STIRLING-ZAHLEN ZWEITER ART

Mit der Definition (2.3) der Stirling-Zahlen zweiter Art gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = k) &= \frac{n!}{n^k} \left\{ \begin{matrix} k-1 \\ n-1 \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{n!}{n^k (n-1)!} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n-1}{j} j^{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} n \binom{n-1}{j} \frac{j^{k-1}}{n^k}. \end{aligned}$$

Mit

$$n \binom{n-1}{j} = (n-j) \binom{n}{j}$$

erhalten wir wie behauptet

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{n}{j} \frac{n-j}{n} \left(\frac{j}{n}\right)^{k-1}.$$

C.4. INTEGRALDARSTELLUNG FÜR $E_n^{(1)}$

Im Fall $s = 1$ gilt $p_{n,i} = P_{n,i}$, und wir können (3.4) zu

$$E_n^{(1)}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{\sum_{r=1}^k p_{n,i_r}}$$

vereinfachen. Wegen

$$\int_0^\infty e^{-px} dx = \frac{1}{p}$$

gilt

$$\begin{aligned} E_n^{(1)}(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-xp_{n,i}} dx - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \int_0^\infty e^{-x(p_{n,i_1} + p_{n,i_2})} dx \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} \int_0^\infty e^{-x(p_{n,1} + \dots + p_{n,n})} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n e^{-xp_{n,i}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} e^{-x(p_{n,i_1} + p_{n,i_2})} + \dots + (-1)^{n+1} e^{-x(p_{n,1} + \dots + p_{n,n})} dx, \end{aligned}$$

und wir erhalten mit

$$1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-xp_{n,i}}) = \sum_{i=1}^n e^{-xp_{n,i}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} e^{-x(p_{n,i_1} + p_{n,i_2})} + \dots + (-1)^{n+1} e^{-x(p_{n,1} + \dots + p_{n,n})}$$

schließlich die gesuchte Darstellung

$$E_n(\mathbf{p}) = \int_0^\infty \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-xp_{n,i}}) \right) dx. \quad (\text{C.5})$$

C.5. DER ERWARTUNGSWERT VON $X_n(X_n + 1)$

Wir weisen im Folgenden die Gültigkeit von

$$\mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) = 2 \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{1}{(p_{n,i_1} + \dots + p_{n,i_r})^2}$$

nach und orientieren uns dabei an [18]. Zunächst betrachten wir die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariablen $-X_n$. Diese ist gegeben durch (siehe [35], S. 203)

$$g_{(-X_n)}(t) := \mathbb{E}(t^{-X_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k} \mathbb{P}(X_n = k).$$

Für die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X_n gilt (siehe [35], S. 207)

$$\mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) = \lim_{t \nearrow 1} g''_{X_n}(t)$$

und damit

$$\mathbb{E}(X_n(X_n + 1)) = \lim_{t \searrow 1} g''_{(-X_n)}(t).$$

Wir betrachten also

$$\begin{aligned} g_{(-X_n)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k} \mathbb{P}(X_n \geq k) - \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k} \mathbb{P}(X_n \geq k+1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-k} \mathbb{P}(X_n \geq k) - \sum_{k=1}^{\infty} t^{-(k-1)} \mathbb{P}(X_n \geq k) \\ &= 1 + (t^{-1} - 1) \sum_{k=1}^{\infty} t^{-(k-1)} \mathbb{P}(X_n \geq k). \end{aligned}$$

Mit der in (2.8) hergeleiteten Darstellung

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \left(1 - \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell} \right)^k \quad (\text{C.6})$$

für die Wahrscheinlichkeiten gilt

$$g_{(-X_n)}(t) = 1 + (t^{-1} - 1) \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{k=1}^{\infty} t^{-(k-1)} \left(1 - \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell} \right)^{k-1}.$$

Mit dem Reihenwert der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\begin{aligned} g_{(-X_n)}(t) &= 1 + (t^{-1} - 1) \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{t}{t - 1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}} \\ &= 1 + (1 - t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{t - 1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}} \end{aligned}$$

und damit die Ableitungen

$$g'_{(-X_n)}(t) = (1-t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^r}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}}$$

und

$$\begin{aligned} g''_{(-X_n)}(t) &= 2(1-t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^3} \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2} + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2} \\ &= 2(1-t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^3} \\ &\quad + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2}. \end{aligned}$$

Bilden wir den Grenzwert

$$\begin{aligned} &\lim_{t \searrow 1} g''_{(-X_n)}(t) \\ &= \lim_{t \searrow 1} \left(2(1-t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^3} + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2} \right) \\ &= 2 \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{1}{(\sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2}, \end{aligned}$$

erhalten wir die gesuchte Darstellung. Mit

$$\mathbb{E}(X_n) = \lim_{t \searrow 1} g'_{(-X_n)}(t)$$

(siehe [35], S. 207) ergibt sich auch auf diesem Weg

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \lim_{t \searrow 1} g'_{(-X_n)}(t) \\ &= \lim_{t \searrow 1} \left((1-t) \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^r}{(t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell})^2} - \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \frac{(-1)^{r-1}}{t-1 + \sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} (-1)^{r-1} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^r p_{n,i_\ell}} \end{aligned}$$

und damit die in Unterabschnitt 2.2.1 hergeleitete Darstellung für den Erwartungswert $E_n(\mathbf{p})$.

C.6. BERECHNUNG DER ERWARTUNGSWERTE

Im Fall $n = 4$ und $s = 2$ erhalten wir zunächst mit (3.6)

$$\begin{aligned} E_4^{(2)}(\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{P_{4,i}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \frac{1}{S_{4,i_1,i_2}} + (-1)^{4-2} \binom{3}{1} \\ &= \sum_{i=1}^4 \frac{1}{P_{4,i}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \frac{1}{S_{4,i_1,i_2}} + 3 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} P_{4,1} &= p_{4,1,2} + p_{4,1,3} + p_{4,1,4}, \\ &\vdots \\ P_{4,4} &= p_{4,1,4} + p_{4,2,4} + p_{4,3,4} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_{4,1,2} &= 1 - p_{4,3,4}, \\ &\vdots \\ S_{4,3,4} &= 1 - p_{4,1,2}. \end{aligned}$$

Für Strategie \mathbb{S}_1 , also

$$\mathbf{p}_{4,\mathbb{S}_1}^{(2)} = (p_{4,1,2}, p_{4,1,3}, \dots, p_{4,3,4}) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)^\top,$$

berechnen wir

$$P_{4,1} = P_{4,2} = P_{4,3} = P_{4,4} = \frac{1}{2},$$

$$S_{4,1,2} = S_{4,1,3} = S_{4,1,4} = S_{4,2,3} = S_{4,2,4} = S_{4,3,4} = \frac{5}{6}$$

und somit

$$E_4^{(2)}(\mathbf{p}_{\mathbb{S}_1}) = 4 \cdot 2 - \binom{4}{2} \cdot \frac{6}{5} + 3 = 3.8.$$

Analog können wir für Strategie \mathbb{S}_2 , also

$$\mathbf{p}_{4,\mathbb{S}_2}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}\right),$$

die Werte

$$P_{4,1} = P_{4,2} = P_{4,3} = P_{4,4} = \frac{1}{2},$$

$$S_{4,1,2} = S_{4,3,4} = \frac{1}{2},$$

$$S_{4,1,3} = S_{4,1,4} = S_{4,2,3} = S_{4,2,4} = 1$$

und somit

$$E_4^{(2)}(\mathbf{p}_{\mathbb{S}_2}) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 3 = 3$$

berechnen.

C.7. BERECHNUNG DER EIGENWERTE VON \widehat{H}'

Zur besseren Lesbarkeit seien im Folgenden $a := a_{n,s}$, $b := b_{n,s}$ und $c := c_{n,s}$ gesetzt. Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix \widehat{H}' , indem wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_{\widehat{H}'}(\lambda)$ bestimmen. Sei I_6 die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{6 \times 6}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
P_{\widehat{H}'}(\lambda) &:= \det(\widehat{H}' - \lambda \cdot I_6) \\
&= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & b & b & b & c \\ b & a - \lambda & b & b & c & b \\ b & b & a - \lambda & c & b & b \\ b & b & c & a - \lambda & b & b \\ b & c & b & b & a - \lambda & b \\ c & b & b & b & b & a - \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & b & b & b & c \\ b & a - \lambda & b & b & c & b \\ b & b & a - \lambda & c & b & b \\ 0 & 0 & c - a + \lambda & a - \lambda - c & 0 & 0 \\ 0 & c - a + \lambda & 0 & 0 & a - \lambda - c & 0 \\ c - a + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & a - \lambda - c \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a - \lambda & b & b & 2b & 2b & a - \lambda + c \\ b & a - \lambda & b & 2b & a - \lambda + c & 2b \\ b & b & a - \lambda & a - \lambda + c & 2b & 2b \\ 0 & 0 & c - a + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c - a + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c - a + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (c - a + \lambda)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2b & 2b & a - \lambda + c \\ 2b & a - \lambda + c & 2b \\ a - \lambda + c & 2b & 2b \end{vmatrix} \\
&= (c - a + \lambda)^3 \left[2b \cdot (a - \lambda + c) \cdot 2b + 2b \cdot 2b \cdot (a - \lambda + c) + (a - \lambda + c) \cdot 2b \cdot 2b \right. \\
&\quad \left. - (a - \lambda + c)^3 - (2b)^3 - (2b)^3 \right] \\
&= (c - a + \lambda)^3 \left[12b^2(a - \lambda + c) - (a - \lambda + c)^3 - 16b^3 \right] \\
&= (\lambda - (a - c))^3 (\lambda - (a - 2b + c))^2 (\lambda - (a + 4b + c)).
\end{aligned}$$

Lösen wir $P_{\widehat{H}'}(\lambda) = 0$ nach λ auf, so finden wir die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= a - c \\
\lambda_2 &= a - 2b + c \\
\lambda_3 &= a + 4b + c.
\end{aligned}$$

ANHANG D

RECHNUNGEN MIT MAPLE

Der Code ist folgendermaßen zu interpretieren: Für die Eingabe wurde die Schriftfarbe rot gewählt und für die Ausgabe die Schriftfarbe blau. Kommentare sind in schwarz eingefügt.

D.1. OPTIMIERUNG IM FALL $s = 3$ UND $n = 5$

Zuerst müssen die Wahrscheinlichkeiten definiert werden.

`restart:`

`P1:=p123+p124+p125+p134+p135+p145:`

`P2:=p123+p124+p125+p234+p235+p245:`

`P3:=p123+p134+p135+p234+p235+p345:`

`P4:=p124+p134+p145+p234+p245+p345:`

`P5:=p125+p135+p145+p235+p245+p345:`

`P12:=p123+p124+p125:`

`S12:=P1+P2-P12:`

`P13:=p123+p134+p135:`

`S13:=P1+P3-P13:`

`P14:=p124+p134+p145:`

`S14:=P1+P4-P14:`

`P15:=p125+p135+p145:`

`S15:=P1+P5-P15:`

`P23:=p123+p234+p235:`

`S23:=P3+P2-P23:`

`P24:=p124+p234+p245:`

`S24:=P4+P2-P24:`

`P25:=p125+p235+p245:`

`S25:=P5+P2-P25:`

`P34:=p134+p234+p345:`

`S34:=P3+P4-P34:`

`P35:=p135+p235+p345:`

`S35:=P3+P5-P35:`

$$P45:=p145+p245+p345:$$

$$S45:=P4+P5-P45:$$

Setzen wir jetzt für die Wahrscheinlichkeiten konkrete Werte ein, so erhalten wir

$$p123:=0.18052:$$

$$p124:=0.18052:$$

$$p125:=0.18052:$$

$$p134:=0:$$

$$p135:=0:$$

$$p145:=0:$$

$$p234:=0:$$

$$p235:=0:$$

$$p245:=0:$$

$$p345:=0.45844:$$

$$\frac{1}{P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25-1/S34-1/S35-1/S45+6};$$

2.880788948

$$p123:=1/10:$$

$$p124:=1/10:$$

$$p125:=1/10:$$

$$p134:=1/10:$$

$$p135:=1/10:$$

$$p145:=1/10:$$

$$p234:=1/10:$$

$$p235:=1/10:$$

$$p245:=1/10:$$

$$p345:=1/10:$$

$$\frac{1}{P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25-1/S34-1/S35-1/S45+6};$$

3.222222225

$$p123:=1/2:$$

$$p124:=0:$$

$$p125:=0:$$

$$p134:=0:$$

$$p135:=0:$$

```
p145:=0:
p234:=0:
p235:=0:
p245:=0:
p345:=1/2:
```

```
1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25
-1/S34-1/S35-1/S45+6;
```

3

```
p123:=1/5:
p124:=1/5:
p125:=1/5:
p134:=0:
p135:=0:
p145:=0:
p234:=0:
p235:=0:
p245:=0:
p345:=2/5:
```

```
1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25
-1/S34-1/S35-1/S45+6;
```

2.916666668

Verwenden wir den Befehl `Minimize` aus dem Paket `Optimization`, so erhalten wir je nach Startwert unterschiedliche Werte. Wählen wir einen Punkt, der die Nebenbedingung erfüllt, bricht die Iteration sofort ab. Das erste Beispiel ist die Gleichverteilung.

```
with(Optimization):
```

```
Minimize( 1/P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25
-1/S34-1/S35-1/S45+6,initialpoint={p123=0.1,p124=0.1,p125=0.1,p134=0.1,
p135=0.1,p145=0.1,p234=0.1,p235=0.1,p245=0.1,p345=0.1},
{p123+p124+p125+p134+p135+p145+p234+p235+p245+p345=1}, assume=nonnegative);
```

```
Warning, no iterations performed as initial point satisfies
first-order conditions
```

```
[3.22222222222222188, [p123 = 0.1000000000000000,
```

```
p124 = 0.1000000000000000, p125 = 0.1000000000000000,
p134 = 0.1000000000000000, p135 = 0.1000000000000000,
p145 = 0.1000000000000000, p234 = 0.1000000000000000,
p235 = 0.1000000000000000, p245 = 0.1000000000000000,
p345 = 0.1000000000000000]]
```

Auch der Vektor

$$p = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5)$$

erfüllt die Nebenbedingung, und Maple liefert keine Iteration.

```
Minimize( 1/P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-
1/S25-1/S34-1/S35-1/S45+6,initialpoint={p123=0.5,p124=0,p125=0,p134=0,
p135=0,p145=0,p234=0,p235=0,p245=0,p345=0.5},
{p123+p124+p125+p134+p135+p145+p234+p235+p245+p345=1}, assume=nonnegative);
```

Warning, no iterations performed as initial point satisfies
first-order conditions

```
[3., [p123 = 0.5000000000000000, p124 = 0., p125 = 0., p134 = 0.,
p135 = 0., p145 = 0., p234 = 0., p235 = 0., p245 = 0.,
p345 = 0.5000000000000000]]
```

Wählen wir Startwerte, die geringfügig von der Gleichverteilung abweichen, so erhalten wir

```
Minimize( 1/P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-1/S25
-1/S34-1/S35-1/S45+6,initialpoint={p123=0.2,p124=0.1,p125=0.2,p134=0.1,
p135=0.1,p145=0.1,p234=0.1,p235=0.1,p245=0.1,p345=0.1},{p123+p124+p125+p134
+p135+p145+p234+p235+p245+p345=1}, assume=nonnegative);
```

```
[2.88078894849152345, [p123 = 0.180520067738387,
p124 = 0.180520066513309, p125 = 0.180520067729653, p134 = 0.,
p135 = 0., p145 = 0., p234 = 0., p235 = 0., p245 = 0.,
```

```
p345 = 0.458439798018651]]
```

oder

```
Minimize( 1/P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23-1/S24-  
1/S25-1/S34-1/S35-1/S45+6,initialpoint={p123=0.2,p124=0.2,p125=0.2,  
p134=0.1,p135=0.1,p145=0.1,p234=0.1,p235=0.1,p245=0.1,p345=0.5},  
{p123+p124+p125+p134+p135+p145+p234+p235+p245+p345=1}, assume=nonnegative);
```

```
[2.88078894849152611, [p123 = 0.180520067303384,
```

```
p124 = 0.180520067303384, p125 = 0.180520067303220, p134 = 0.,
```

```
p135 = 0., p145 = 0., p234 = 0., p235 = 0., p245 = 0.,
```

```
p345 = 0.458439798090012]]
```

D.2. OPTIMIERUNG IM FALL $s = 3$ UND $n = 7$

Zuerst müssen die Wahrscheinlichkeiten definiert werden.

restart:

$$P1:=p123+p124+p125+p126+p134+p135+p136+p145+p146+p156+p127$$

$$+p137+p147+p157+p167:$$

$$P2:=p123+p124+p125+p126+p234+p235+p236+p245+p246+p256+p237$$

$$+p247+p257+p267+p127:$$

$$P3:=p123+p134+p135+p136+p234+p235+p236+p345+p346+p356+p137$$

$$+p237+p347+p357+p367:$$

$$P4:=p124+p134+p145+p146+p234+p245+p246+p345+p346+p456+p147$$

$$+p247+p347+p457+p467:$$

$$P5:=p125+p135+p145+p156+p235+p245+p256+p345+p356+p456+p157$$

$$+p257+p357+p457+p567:$$

$$P6:=p126+p136+p146+p156+p236+p246+p256+p346+p356+p456+p167$$

$$+p267+p367+p467+p567:$$

$$P7:=p127+p137+p147+p157+p237+p247+p257+p347+p357+p457+p167$$

$$+p267+p367+p467+p567:$$

$$P12:=p123+p124+p125+p126+p127:$$

$$S12:=P1+P2-P12:$$

$$P13:=p123+p134+p135+p136+p137:$$

$$S13:=P1+P3-P13:$$

$$P14:=p124+p134+p145+p146+p147:$$

$$S14:=P1+P4-P14:$$

$$P15:=p125+p135+p145+p156+p157:$$

$$S15:=P1+P5-P15:$$

$$P16:=p126+p136+p146+p156+p167:$$

$$S16:=P1+P6-P16:$$

$$P17:=p127+p137+p147+p157+p167:$$

$$S17:=P1+P7-P17:$$

$$P23:=p123+p234+p235+p236+p237:$$

$$S23:=P3+P2-P23:$$

$$P24:=p124+p234+p245+p246+p247:$$

$$S24:=P4+P2-P24:$$

$$P25:=p125+p235+p245+p256+p257:$$

$$S25:=P5+P2-P25:$$

$$P26:=p126+p236+p246+p256+p267:$$

$$S26:=P2+P6-P26:$$

$$P27:=p127+p237+p247+p257+p267:$$

$$S27:=P2+P7-P27:$$

$$P34:=p134+p234+p345+p346+p347:$$

$$S34:=P3+P4-P34:$$

$$P35:=p135+p235+p345+p356+p357:$$

$$S35:=P3+P5-P35:$$

$$P36:=p136+p236+p346+p356+p367:$$

$$S36:=P3+P6-P36:$$

$$P37:=p137+p237+p347+p357+p367:$$

$$S37:=P3+P7-P37:$$

$$P45:=p145+p245+p345+p456+p457:$$

$$S45:=P4+P5-P45:$$

$$P46:=p146+p246+p346+p456+p467:$$

$$S46:=P4+P6-P46:$$

$$P47:=p147+p247+p347+p457+p467:$$

$$S47:=P4+P7-P47:$$

$$P56:=p156+p256+p356+p456+p567:$$

$$S56:=P5+P6-P56:$$

$$P57:=p157+p257+p357+p457+p567:$$

$$S57:=P5+P7-P57:$$

$$P67:=p167+p267+p367+p467+p567:$$

$$S67:=P6+P7-P67:$$

S123:=S12+P3-P23-P13+p123:	S1234:=1-p567:
S124:=S12+P4-P24-P14+p124:	S1235:=1-p467:
S125:=S12+P5-P25-P15+p125:	S1236:=1-p457:
S126:=S12+P6-P26-P16+p126:	S1237:=1-p456:
S127:=S12+P7-P27-P17+p127:	S1245:=1-p367:
S134:=S13+P4-P34-P14+p134:	S1246:=1-p357:
S135:=S13+P5-P35-P15+p135:	S1247:=1-p356:
S136:=S13+P6-P36-P16+p136:	S1256:=1-p347:
S137:=S13+P7-P37-P17+p137:	S1257:=1-p346:
S145:=S14+P5-P45-P15+p145:	S1267:=1-p345:
S146:=S14+P6-P46-P16+p146:	S1345:=1-p267:
S147:=S14+P7-P47-P17+p147:	S1346:=1-p257:
S156:=S15+P6-P56-P16+p156:	S1347:=1-p256:
S157:=S15+P7-P57-P17+p157:	S1356:=1-p247:
S167:=S16+P7-P67-P17+p167:	S1357:=1-p246:
S234:=S23+P4-P24-P34+p234:	S1367:=1-p245:
S235:=S23+P5-P25-P35+p235:	S1456:=1-p237:
S236:=S23+P6-P26-P36+p236:	S1457:=1-p236:
S237:=S23+P7-P27-P37+p237:	S1467:=1-p235:
S245:=S24+P5-P25-P45+p245:	S1567:=1-p234:
S246:=S24+P6-P26-P46+p246:	S2345:=1-p167:
S247:=S24+P7-P27-P47+p247:	S2346:=1-p157:
S256:=S25+P6-P26-P56+p256:	S2347:=1-p156:
S257:=S25+P7-P27-P57+p257:	S2356:=1-p147:
S267:=S26+P7-P27-P67+p267:	S2357:=1-p146:
S345:=S34+P5-P35-P45+p345:	S2367:=1-p145:
S346:=S34+P6-P36-P46+p346:	S2456:=1-p137:
S347:=S34+P7-P37-P47+p347:	S2457:=1-p136:
S356:=S35+P6-P36-P56+p356:	S2467:=1-p135:
S357:=S35+P7-P37-P57+p357:	S2567:=1-p134:
S367:=S36+P7-P37-P67+p367:	S3456:=1-p127:
S456:=S45+P6-P46-P56+p456:	S3457:=1-p126:
S457:=S45+P7-P47-P57+p457:	S3467:=1-p125:
S467:=S46+P7-P47-P67+p467:	S3567:=1-p124:
S567:=S56+P7-P67-P57+p567:	S4567:=1-p123:

Setzen wir jetzt für die Wahrscheinlichkeiten konkrete Werte ein, so erhalten wir

```

p123:=1/7:
p124:=1/7:
p125:=0:
p126:=0:
p127:=0:
p134:=1/7:
p135:=0:
:
p167:=0:
p234:=1/7:
p235:=0:
:
p467:=0:
p567:=3/8:

EW:=1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5+1/P6+1/P7-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S16-1/S17
-1/S23-1/S24-1/S25-1/S26-1/S27-1/S34-1/S35-1/S36-1/S37-1/S45-1/S46-1/S47
-1/S56-1/S57-1/S67+1/S123+1/S124+1/S125+1/S126+1/S127+1/S134+1/S135+1/S136
+1/S137+1/S145+1/S146+1/S147+1/S156+1/S157+1/S167+1/S234+1/S235+1/S236
+1/S237+1/S245+1/S246+1/S247+1/S256+1/S257+1/S267+1/S345+1/S346+1/S347
+1/S356+1/S357+1/S367+1/S456+1/S457+1/S467+1/S567-(1/S1234+1/S1235
+1/S1236+1/S1237+1/S1245+1/S1246+1/S1247+1/S1256+1/S1257+1/S1267+1/S1345
+1/S1346+1/S1347+1/S1356+1/S1357+1/S1367+1/S1456+1/S1457+1/S1467+1/S1567
+1/S2345+1/S2346+1/S2347+1/S2356+1/S2357+1/S2367+1/S2456+1/S2457+1/S2467
+1/S2567+1/S3456+1/S3457+1/S3467+1/S3567+1/S4567)+15;

```

$EW := 4.749999976$

```

p123:=5/32:
p124:=5/32:
p125:=0:
p126:=0:
p127:=0:
p134:=5/32:
p135:=0:
:

```

p167:=0:

p234:=5/32:

p235:=0:

:

p467:=0:

p567:=3/8:

EW:=1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5+1/P6+1/P7-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S16-1/S17-1/S23-1/S24-1/S25-1/S26-1/S27-1/S34-1/S35-1/S36-1/S37-1/S45-1/S46-1/S47-1/S56-1/S57-1/S67+1/S123+1/S124+1/S125+1/S126+1/S127+1/S134+1/S135+1/S136+1/S137+1/S145+1/S146+1/S147+1/S156+1/S157+1/S167+1/S234+1/S235+1/S236+1/S237+1/S245+1/S246+1/S247+1/S256+1/S257+1/S267+1/S345+1/S346+1/S347+1/S356+1/S357+1/S367+1/S456+1/S457+1/S467+1/S567-(1/S1234+1/S1235+1/S1236+1/S1237+1/S1245+1/S1246+1/S1247+1/S1256+1/S1257+1/S1267+1/S1345+1/S1346+1/S1347+1/S1356+1/S1357+1/S1367+1/S1456+1/S1457+1/S1467+1/S1567+1/S2345+1/S2346+1/S2347+1/S2356+1/S2357+1/S2367+1/S2456+1/S2457+1/S2467+1/S2567+1/S3456+1/S3457+1/S3467+1/S3567+1/S4567)+15;

$EW := 4.659259250$

p123:=1/35:

p124:=1/35:

:

p567:=1/35:

EW:=1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5+1/P6+1/P7-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S16-1/S17-1/S23-1/S24-1/S25-1/S26-1/S27-1/S34-1/S35-1/S36-1/S37-1/S45-1/S46-1/S47-1/S56-1/S57-1/S67+1/S123+1/S124+1/S125+1/S126+1/S127+1/S134+1/S135+1/S136+1/S137+1/S145+1/S146+1/S147+1/S156+1/S157+1/S167+1/S234+1/S235+1/S236+1/S237+1/S245+1/S246+1/S247+1/S256+1/S257+1/S267+1/S345+1/S346+1/S347+1/S356+1/S357+1/S367+1/S456+1/S457+1/S467+1/S567-(1/S1234+1/S1235+1/S1236+1/S1237+1/S1245+1/S1246+1/S1247+1/S1256+1/S1257+1/S1267+1/S1345+1/S1346+1/S1347+1/S1356+1/S1357+1/S1367+1/S1456+1/S1457+1/S1467+1/S1567+1/S2345+1/S2346+1/S2347+1/S2356+1/S2357+1/S2367+1/S2456+1/S2457+1/S2467+1/S2567+1/S3456+1/S3457+1/S3467+1/S3567+1/S4567)+15;

$EW := 5.420050755$

```

p123:=1/7:
p124:=0:
:
p137:=0:
p145:=1/7:
p146:=0:
:
p157:=0:
p167:=1/7:
p234:=2/7:
p235:=0:
:
p467:=0:
p567:=2/7:

```

```

EW:=1./P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5+1/P6+1/P7-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S16-1/S17
-1/S23-1/S24-1/S25-1/S26-1/S27-1/S34-1/S35-1/S36-1/S37-1/S45-1/S46-1/S47
-1/S56-1/S57-1/S67+1/S123+1/S124+1/S125+1/S126+1/S127+1/S134+1/S135+1/S136
+1/S137+1/S145+1/S146+1/S147+1/S156+1/S157+1/S167+1/S234+1/S235+1/S236
+1/S237+1/S245+1/S246+1/S247+1/S256+1/S257+1/S267+1/S345+1/S346+1/S347
+1/S356+1/S357+1/S367+1/S456+1/S457+1/S467+1/S567-(1/S1234+1/S1235
+1/S1236+1/S1237+1/S1245+1/S1246+1/S1247+1/S1256+1/S1257+1/S1267+1/S1345
+1/S1346+1/S1347+1/S1356+1/S1357+1/S1367+1/S1456+1/S1457+1/S1467+1/S1567
+1/S2345+1/S2346+1/S2347+1/S2356+1/S2357+1/S2367+1/S2456+1/S2457+1/S2467
+1/S2567+1/S3456+1/S3457+1/S3467+1/S3567+1/S4567)+15;

```

$EW := 4.799999983$

Verwenden wir den Befehl `Minimize` aus dem Paket `Optimization`, so erhalten wir je nach Startwert unterschiedliche Werte. Wählen wir einen Punkt, der die Nebenbedingung erfüllt, bricht die Iteration sofort ab. Das erste Beispiel sind die in Tabelle 6.2 aufgeführten Werte.

```

Summ:=p123+p124+p125+p126+p127+p134+p135+p136+p137+p145+p146+p147+p156+p157
+p167+p234+p235+p236+p237+p245+p246+p247+p256+p257+p267+p345+p346+p347+p356
+p357+p367+p456+p457+p467+p567:

```

a:=5/32:b:=3/8:

L1:={p123=a,p124=a,p125=0,p126=0,p127=0,p134=a,p135=0,p136=0,p137=0,p145=0,

```
p146=0,p147=0,p156=0,p157=0,p167=0,p234=a,p235=0,p236=0,p237=0,p245=0,p246=0,
p247=0,p256=0,p257=0,p267=0,p345=0,p346=0,p347=0,p356=0,p357=0,p456=0,p457=0,
p467=0,p567=b}:
```

```
with(Optimization):
```

```
Minimize( EW ,{Summ=1,P1>=0,P2>=0,P3>=0,P4>=0,P5>=0,P6>=0,P7>=0},
initialpoint=L1,assume=nonnegative);
```

Error, (in Optimization:-NLPSolve) no improved point could be found

Wählen wir einen Startwert, der geringfügig von dem obigen abweicht, erhalten wir

```
Summ:=p123+p124+p125+p126+p127+p134+p135+p136+p137+p145+p146+p147+p156+p157
+p167+p234+p235+p236+p237+p245+p246+p247+p256+p257+p267+p345+p346+p347+p356
+p357+p367+p456+p457+p467+p567:
```

```
a:=6/32:b:=2/8:
```

```
L1:={p123=a,p124=a,p125=0,p126=0,p127=0,p134=a,p135=0,p136=0,p137=0,p145=0,
p146=0,p147=0,p156=0,p157=0,p167=0,p234=a,p235=0,p236=0,p237=0,p245=0,p246=0,
p247=0,p256=0,p257=0,p267=0,p345=0,p346=0,p347=0,p356=0,p357=0,p456=0,p457=0,
p467=0,p567=b}:
```

```
with(Optimization):
```

```
Minimize( EW ,{Summ=1,P1>=0,P2>=0,P3>=0,P4>=0,P5>=0,P6>=0,P7>=0},
initialpoint=L1,assume=nonnegative);
```

```
[4.65862944123322542,
[p123 = 0., p124 = .157426365052230, p125 = .157426356810151,
p126 = 0., p127 = 0., p134 = 0., p135 = 0., p136 = 0., p137 = 0.,
p145 = .157426353924029, p146 = 0., p147 = 0., p156 = 0., p157 = 0.,
p167 = 0., p234 = 0., p235 = 0., p236 = 0., p237 = 0.,
p245 = .157426358592997, p246 = 0., p247 = 0., p256 = 0., p257 = 0.,
p267 = 0., p345 = 0., p346 = 0., p347 = 0., p356 = 0., p357 = 0.,
p367 = .370294565620594, p456 = 0., p457 = 0., p467 = 0., p567 = 0.]]
```

D.3. MINIMIERUNG DES ERWARTUNGSWERTES FÜR DAS KONKRETE MODELL, $s = 3$, $n = 5$

Zuerst definieren wir den Erwartungswert als Funktion von α . In Maple verwenden wir $a := \alpha$.

```
EW:=unapply(1/P1+1/P2+1/P3+1/P4+1/P5-1/S12-1/S13-1/S14-1/S15-1/S23
-1/S24-1/S25-1/S34-1/S35-1/S45+6,a);
```

$$EW := a \rightarrow \frac{1}{3a} + \frac{3}{-2a+1} - \frac{3}{-a+1}$$

Anschließend bilden wir die Ableitung.

```
Ableitung:=unapply(diff(EW(a),a),a);
```

$$Ableitung := a \rightarrow -\frac{1}{3a^2} + \frac{6}{(-2a+1)^2} - \frac{3}{(-a+1)^2}$$

Wir setzen die Ableitung mit null gleich und lösen nach a auf.

```
z:=fsolve(diff(EW(a),a)=0,a);
```

```
z := 0.180520067299032938227061063517782496407964646774015164222
```

D.4. EIGENWERTE IN ABHÄNGIGKEIT VON s UND n

Die Eigenwerte $\lambda_{n,s,2}$ können durch die folgende Schleife berechnet werden. Die äußere Schleife durchläuft für s die Werte 3 bis S . Die innere Schleife durchläuft für das gewählte s für n die Werte von $s + 2$ bis N . Die Werte S und N können frei gewählt werden. Im Plot erscheinen alle Eigenwerte, für die s gleich ist, in derselben Farbe.

```
restart:N:=100:S:=10:with(plots):with(ColorTools):

for s from 3 to S do

  L[s+1,s]:=NULL:

  for n from s+2 to N do

    a:=-2*sum((-1.)^k*binomial(n-s-2,k-2)
      *(1/(1-(binomial(n-k,s)/binomial(n,s))))^3,k=2..n-s);
    L[n,s]:=L[n-1,s],[n,a];

  end do:

  l[s]:=[L[n-1,s]]:
  Anz:=nops(l[s]):
  p[s]:=pointplot(l[s],color=ColorTools:-Color([rand()/10^12,
    rand()/10^12,rand()/10^12]),gridlines=true):

end do:

P:=seq(p[i],i=3..S):
display(P,view=[2..N,-50..2]);
```

Die Schleife für die Berechnung der Eigenwerte $\lambda_{n,s,1}$ besitzt dieselbe Struktur wie die soeben vorgestellte Schleife für die Berechnung von $\lambda_{n,s,2}$.

```
restart:N:=100:S:=10:with(plots):with(ColorTools):

for s from 3 to S do

  L[s+1,s]:=NULL:

  for n from s+2 to N do
```

```
a:=2*sum((-1.)^(k-1)*(binomial(n-s-1,k-1)+
  binomial(n-s-2,k-1))*(1/(1-(binomial(n-k,s)/binomial(n,s))))^3
  ,k=1..n-s);

end do:

l[s]:=[L[n-1,s]]:
Anz:=nops(l[s]):
p[s]:=pointplot(l[s],color=ColorTools:-Color([rand()/10^12,
  rand()/10^12,rand()/10^12]),gridlines=true):

end do:

P:=seq(p[i],i=3..S):
display(P,view=[2..N,-50..2]);
```

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Arens, T., Busam, R., Hettlich, F., Karpfinger, C., Stachel, H. (2013). *Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. 1. Auflage, Springer, Heidelberg.
- [2] Baum, L.E., Billingsley, P. (1965). *Asymptotic distributions for the coupon collector's problem*. The Annals of Mathematical Statistics, **36**(6), 1835-1839.
- [3] Adler, I., Ross, S.M. (2001). *The coupon subset collection problem*. Journal of Applied Probability, **38**(3), 737-746.
- [4] Barbour, A.D., Holst, L., Janson, S. (1992). *Poisson approximation*. The Clarendon Press Oxford University Press.
- [5] Billingsley, P. (1979). *Probability and Measure*. 1. Auflage, John Wiley and Sons Incorporated, Toronto.
- [6] Boneh, A., Hofri, M. (1997). *The coupon-collector problem revisited - a survey of engineering problems and computational methods*. Communications in Statistics. Stochastic Models, **13**(1), 39-66.
- [7] Boneh, A., Golan, A. (1979). *Constraints redundancy and feasible region boundedness by a random feasible point generator (RFPG)*. Contributed paper, EURO III, Amsterdam.
- [8] Boneh, S., Papanicolaou, V.G. (1996). *General asymptotic estimates for the coupon collector problem*. Journal of Computational and Applied Mathematics, **67**(2), 277-289.
- [9] Brayton, R.K. (1963). *On the asymptotic behavior of the number of trials necessary to complete a set with random selection*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, **7**(1), 31-61.
- [10] Caron, R.J., Hlynka, M., McDonald, J.F. (1988). *On the best case performance of hit and run methods for detecting necessary constraints*. Windsor Mathematics Report, **88-02**.

- [11] Caron, R.J., Hlynka, M., McDonald, J.F. (1992). *On the best case performance of hit and run methods for detecting necessary constraints*. Mathematical Programming, **54**, 233-249.
- [12] Caron, R.J., McDonald, J.F. (1989). *A new approach to the analysis of random methods for detecting necessary linear inequality constraints*. Mathematical Programming, **43**, 97-102.
- [13] Ciolina, E., Ciolina, E. (2007). *Das Reklamesammelbild. Sammlerträume. Ein Bewertungskatalog. Von Schokolade bis Schuhcreme kleine Kunstwerke in der Werbung*. Regenstauf.
- [14] DasGupta, A. (2005). *The matching, birthday and the strong birthday problem: a contemporary review*. Journal of Statistical Planning and Inference, **130**(1-2), 377-389.
- [15] David, F.N., Barton, D. E. (1962). *Combinatorial chance*. Charles Griffin, London.
- [16] Diniz, M.A., Lopes, D., Polpo, A., Salazar, L.E.B. (2016). *The Sticker Collector's Problem*. The College Mathematics Journal, **47**(4), 255-263.
- [17] Doumas, A.V. (2015). *How many trials does it take to collect all different types of a population with probability p ?* Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics, **5**(3), 1-14.
- [18] Doumas, A., Papanicolaou, V. (2012). *The Coupon Collector's Problem Revisited: Asymptotics of the variance*. Advances in Applied Probability, **44**, 166-195.
- [19] Doumas, A., Papanicolaou, V. (2013). *Asymptotics of the rising moments for the coupon collector's problem*. Electronic Journal of Probability **18**, 1-15.
- [20] Doumas, A., Papanicolaou, V. (2016). *The Coupon Collector's Problem Revisited: Generalizing the Double Dixie Cup Problem of Newman and Shepp*. ESAIM: Probability and Statistics **20**, 367-399.
- [21] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (2013). *Modelling extremal events: for insurance and finance (Vol. 33)*. Springer Science Business Media.
- [22] Erdős, P., Rény, A. (1961). *On a classical problem of probability theory*. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, **6**, 215-220.
- [23] Fang, C., Chang, E. (2014). *Optimal strategy of coupon subset collection when each package contains half of the coupons*. Information Processing Letters, **114**, 703-705.
- [24] Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. 2. Auflage, John Wiley and Sons Inc, New York.
- [25] Ferrante, M., Frigo, N. (2014). *A note on the coupon - collector's problem with multiple arrivals and the random sampling*. arXiv preprint arXiv:1209.2667.

-
- [26] Ferrante, M., Saltalamacchia, M. (2014). *The coupon collector's problem*. Materials matemàtics, 0001-35.
- [27] Flajolet, P., Gardy, D., Thimonier, L. (1992). *Birthday paradox, coupon collectors, caching algorithms and self-organizing search*. Discrete Applied Mathematics, **39**(3), 207-229.
- [28] Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O. (1995). *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston.
- [29] Hald, A., de Moivre, A., McClintock, B. (1984). *A. de Moivre: 'De Mensura Sortis' or 'On the Measurement of Chance'*. International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, 229-262.
- [30] Henze, N. (1998). *A Poisson limit law for a generalized birthday problem*. Statistics and Probability Letters, **39**(4), 333-336.
- [31] Henze, N. (1987). *On the limiting distribution of the largest exponential spacing*. Utilitas Mathematica, **31**, 85-91.
- [32] Henze, N. (2019). *Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie*. Springer Spektrum.
- [33] Henze, N. (2015). *Stochastische Extremwertprobleme im Fächer-Modell I: Minima von Wartezeiten und Kollisionsprobleme*. Stochastik in der Schule, **35**(3), 24-30.
- [34] Henze, N. (2016). *Stochastische Extremwertprobleme im Fächer-Modell II: Maxima von Wartezeiten und Sammelbilderprobleme*. Stochastik in der Schule, **36**(1), 2-9.
- [35] Henze, N. (2018). *Stochastik für Einsteiger*. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden.
- [36] Heuser, H. (1994). *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. 11. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart.
- [37] Johnson, N.L., Kotz, S. (1977). *Urn models and their application: an approach to modern discrete probability theory*. 1. Auflage, John Wiley and Sons Incorporated, Toronto.
- [38] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1997). *Discrete multivariate distributions*. Volume 165, John Wiley and Sons Incorporated, New York.
- [39] Königsberger, K. (2003). *Analysis 1*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [40] Königsberger, K. (2002). *Analysis 2*. 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [41] Moivre, A. de (1711). *De Mensura Sortis*. Philosophical Transactions of the Royal Society, **27**, 213-264.
- [42] Neal, P. (2008). *The generalised coupon collector problem*. Journal of Applied Probability, **45**, 621-629.

- [43] Newman, D.J., Shepp, L. (1960). *The double Dixie Cup Problem*. The American Mathematical Monthly, **67**, 58-61.
- [44] Papula, L. (2017). *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 12. Auflage, Vieweg und Teubner Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- [45] Pólya, G. (1930). *Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung*. ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, **10**(1), 96-97.
- [46] Riordan, J. (1968). *Combinatorial Identities*. 1. Auflage, John Wiley and Sons Incorporated, New York, London, Sydney.
- [47] Ross, S. (2016). *A first course in probability*. 7. Auflage, Pearson International Education, New Jersey.
- [48] Von Schelling, H. (1934). *Auf der Spur des Zufalls*. Deutsches Statistisches Zentralblatt, **26**, 137-146.
- [49] Von Schelling, H. (1954). *Coupon collecting for unequal probabilities*. The American Mathematical Monthly, **61**(5), 306-311.
- [50] Smith, R.L., Telgen, J. (1981). *Random methods for identifying nonredundant constraints*. Technical Report **81-4**, Department of Industrial and Operations Engineering, The University of Michigan.
- [51] Stadje, W. (1990). *The collector's problem with group drawings*. Advances in Applied Probability, **22**(4), 866-882.
- [52] Todhunter, I. (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge, London, Macmillan and co.
- [53] Vogel, W. (1970). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen.
- [54] Wasem, E. (1981). *Sammeln von Serienbildchen: Entwicklung und Bedeutung eines beliebten Mediums der Reklame und der Alltagskultur*. Trausnitz-Verlag.
- [55] Wilf, H.S. (2005). *Generatingfunctionology*. 2. Auflage, Academic Press, Boston.