Extremale Eigenschaften zufälliger Mosaike und Graphen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von Moritz Otto
aus Hannover

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 2020

1. Referent: Prof. Dr. Günter Last
2. Referent: Prof. Dr. Daniel Hug
3. Referent: Prof. Dr. Bojan Basrak (Zagreb)

Danksagung

Diese Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Stochastik des KIT.

Allem voran danke ich meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Günter Last für die Möglichkeit, unter seiner Anleitung zu promovieren. Seine zahlreichen Anregungen und Anstöße haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Prof. Dr. Daniel Hug sowie Herrn Prof. Dr. Bojan Basrak danke ich für die Bereitschaft, diese Arbeit zu begutachten.

Allen Mitarbeitern des Instituts für Stochastik danke ich für die stets angenehme Atmosphäre.

Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für die vielfältige Unterstützung in den vergangenen Jahren.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**

1.1 Motivation und Hintergrund . . . 1

1.2 Grundlagen . . . 4

1.2.1 Punkt- und Poissonprozesse . . . 5

1.2.2 Palmsche Maße und Stoppmengen . . . 6

1.2.3 Abstände und Konvergenz von Punktprozessen . . . 8

1.2.4 Modelle und Transformationen der stochastischen Geometrie . . . 9

2 Poissonprozessapproximation Poissonscher Funktionale **13**

2.1 Allgemeines Theorem . . . 13

2.2 Maximale k-nächsten-Nachbarn-Abstände und Volumeninhalte . . . 21

2.3 Maximale Radien im Poisson-lilypond-Modell . . . 30

2.4 Poissonprozessapproximation im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . 32

2.4.1 Minimale Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . 33

2.4.2 Maximale Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . 35

3 Poissonprozessapproximation Poissonscher Zentrumsprozesse **45**

3.1 Allgemeines Theorem . . . 45

3.2 Poissonprozessapproximation im Gabriel-Graphen . . . 53

3.2.1 Minimale Kanten im Gabriel-Graphen . . . 53

3.2.2 Maximale Kanten im Gabriel-Graphen . . . 55

3.3 Minimale Fundamentalregionen von k-Seiten im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . 59

3.4 Maximale Zellen im Poisson-Delaunay-Mosaik . . . 62

4 Zusammengesetzte Poissonprozessapproximation Poissonscher Funktionale **71**

4.1 Allgemeines Theorem . . . 71

4.2 Kleine Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . 75

5 Poissonprozessapproximation abhängiger Ausdünnungen Gibbsscher Punktprozesse **77**

5.1 Gibbssche Punktprozesse . . . 77

5.2 Uneinigkeitskopplung . . . 79

5.3 Palmsche Maße und Papangelou-Dichten . . . 81

5.4 Poissonprozessapproximation Gibbscher Ausdünnungen . . . 83

5.4.1 Markenabhängige Verdünnung eines Gibbsprozesses . . . 85

5.4.2 Maximale Nächste-Nachbarn-Abstände im hard-core-Modell . . . 86

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation und Hintergrund

Das vermutlich bekannteste Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie ist der zentrale Grenzwertsatz. Er besagt, dass das arithmetische Mittel n unabängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen bei Skalierung mit dem Faktor $\sqrt{n}$ im Limes $n \to \infty$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergiert, sofern das zweite Moment endlich ist. Wenden wir das Gesetz großer Zahlen auf die Folge $(\mathbb{1}_{A_n})_n$ mit unabhängigen Ereignissen $(A_n)_n$ mit identischer Eintrittswahrscheinlichkeit $p = \mathbb{P}(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$, an, so erhalten wir die Aussage, dass die zufällige Anzahl eintretender Ereignisse bei Division durch $\sqrt{n}$ im Limes $n \to \infty$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable konvergiert.

Dem gegenüber steht der Poissonsche Grenzwertsatz. Seien dazu $\lambda > 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig und mit identischer Eintrittswahrscheinlichkeit $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ und $np_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Der Poissonsche Grenzwertsatz in seiner einfachsten Form, dass die Anzahl eintretender Ereignisse im Limes $n \to \infty$ gegen eine Poisson(λ)-verteilte Zufallsvariable konvergiert. Dieses einfache Resultat lässt sich auf verschiedene Weisen verbessern. In [56] wurde gezeigt, dass der Abstand in totaler Variation zwischen einer Binomial(n, p)-verteilten Zufallsvariablen und einer Poisson(np)-verteilten Zufallsvariablen durch ein von n unabhängiges Vielfaches von p nach oben beschränkt ist. Eine weitere Möglichkeit der Verallgemeinerung besteht in der Lockerung der Voraussetzung der identischen Verteilung. In [43] wird bewiesen, dass der Abstand in totaler Variation zwischen der Summe $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ mit unabhängigen Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$ mit $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ und einer Poisson(λ)-verteilten Zufallsvariablen für $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i$ durch $\frac{9}{2} \max_{1\le i\le n} p_i$ abgeschätzt werden kann. Die dort verwendete Beweismethode setzt Techniken aus der Fourieranalyse ein und stellt diskrete $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen als Operatoren auf $\mathbb{Z}$ dar. Diese Methode lässt sich verallgemeinern und führt auf unterschiedliche Abschätzungen in verschiedenen Metriken. Wesentlich für die Funktionsweise ist hier die Annahme der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ Eine Möglichkeit, diese Annahme zu lockern, stellt die in [64] zur Anwendung gebrachte Koppplungsmethode dar. Dort wird eine obere Schranke an den totalen Variationsabstand angegeben, die die bedingten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_i, gegeben $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_{i-1}}$, verwendet. Im Falle unabhängiger Ereignisse reduziert sich die angegebene Schranke auf $\sum\limits_{i=1}^n p_i^2$.

Die in den 1970er Jahren entwickelte Stein-Methode zur Normalapproximation basiert auf einer charakterisierenden Gleichung dieser Verteilung ([65]). Diese Beweistechnik wurde dahingehend weiterentwickelt, dass der totale Variationsabstand einer gegebenen Zufallsvariablen zu einer Poissonverteilung abgeschätzt werden konnte ([13]). Die dabei verwendete charakterisierende Gleichung der Poissonverteilung lautet

$$\lambda \mathbb{E} f(X+1) - \mathbb{E} X f(X) = 0.$$

Diese Gleichung ist genau dann für jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ erfüllt, wenn X Poisson(λ)-verteilt ist. Die Beweisidee zur Poissonapproximation lautet nun wie folgt. Für gegebenes $A \subset \mathbb{N}_0$ konstruieren wir eine Funktion $f \equiv f_{\lambda,A} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, sodass die Gleichungen

$$\lambda f(j+1) - j f(j) = \mathbb{1}\{j \in A\} - \mathrm{Po}_\lambda(A), \quad j \geq 0,$$

erfüllt sind, wobei Po_λ die Poissonverteilung mit Parameter λ bezeichnet. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \in A) - \mathrm{Po}_\lambda(A) = \lambda \mathbb{E} f(X+1) - \mathbb{E} X f(X).$$

Diese Gleichung liefert eine Abschätzung des totalen Variationsabstands zwischen der Verteilung von X und einer Poissonverteilung mit Parameter λ. Sei nun $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Summe n unabhängiger Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$, $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i$ für $i \in [n]$ und $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Dann gilt

$$\mathbb{E} X f(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} X_i f(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} X_i f(X - X_i + 1) = \lambda \mathbb{E} f(X - X_1 + 1).$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathrm{Po}_\lambda(A)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}\left[f(X+1) - f(X - X_i + 1) \right] \right| \\ &\leq \sup_{1 \leq j \leq n+1} \left| f_{\lambda,A}(j+1) - f_{\lambda,A}(j) \right| \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \end{aligned}$$

Die Aufgabe besteht nun noch darin, die Funktion $f_{\lambda,A}$ geeignet abzuschätzen.

Dieses als Chen-Stein-Methode bekannte Beweisverfahren ist in der Literatur umfangreich verwendet und in verschiedene Richtungen weiterentwickelt worden. In [1] und [2] werden obere Schranken an den totalen Variationsabstand angegeben, falls X die Summe nicht notwendigerweise unabhängiger Bernoulli(p_i)-verteilter Zufallsvariablen ist. Die dort angegebenen Abschätzungen verwenden nur erste und zweite Momente der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$

Die ersten strukturellen Zugänge zur Poissonapproximation in einem räumlichen Kontext finden sich in [62], [14], [63], [51], [20], [55]. In [62] und [63] werden Beispiele von U-Statistiken betrachtet, deren Verteilung auf einem zugrunde liegenden Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ beruht, und gezeigt, dass die Verteilung der Minima bzw. Maxima im Anziehungsbereich der Weibull- bzw. Gumbelverteilung liegt. Davon ausgehend wird in [20] der (eindimensionale) Punktprozess der realisierten Größen betrachtet und unter Verwendung der Glauberdynamiken von Geburts- und Todesprozessen gezeigt, dass der skalierte Prozess unter geeigneten Voraussetzungen in der sogenannten Kantorovich-Rubinstein-Metrik gegen einen Poissonprozess konvergiert. Dagegen beruht das Theorem in [55] auf einer Kopplungsidee in [44] und verwendet wie [51] den Chen-Stein-Kalkül. Die Arbeit [14] basiert auf Theorem 1 in [2]. Es wird eine Diskretisierung des Raumes in d-dimensionale Würfel vorgenommen und das Ereignis A_i, $i \in \mathbb{N}$, dann so gewählt, dass A_i genau dann eintritt, wenn ein Punkt eines vorgegebenen Poissonprozesses in den Würfel i fällt und die diesen Punkt umgebende Voronoi-Zelle eine bestimmte Eigenschaft aufweist (also etwa ein Volumen besitzt, das größer als eine vorgegebene Schranke ist). Aus Eigenschaften des Poissonprozesses folgt dann ein Resultat zur Poissonapproximation der Anzahl der Poissonpunkte mit dieser Eigenschaft. Darüber hinaus wird in [15] gezeigt, dass die Verteilung des minimalen bzw. maximalen Inkreisradius der Zellen eines stationären und isotropen Poisson-Geraden-Mosaiks in einem wachsenden Beobachtungsfenster im Anziehungsbereich der Weibull- bzw. Gumbelverteilung liegt. Dazu werden die Momentenmethode zum Nachweis der Verteilungskonvergenz verwendet und eine graphische Konstruktion benutzt, um die Abhängigheit der Zellen der Mosaiks von den Geraden des zugrunde liegenden Prozesses zu modellieren. Für allgemeinere Punktprozesse, deren Papangelou-Intensität existiert, finden sich in [66] Abschätzungen des totalen Variationsabstand zwischen der Anzahl der Punkte und einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen. Hierzu werden abstrakte Abschätzungen der Stein-Operatoren vergenommen. Die resultierenden Abschätzungen konnten allerdings bislang nur in wenigen Anwendungen mit Gewinn ausgwewertet werden.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Nach einer kurzen Einführung Palmscher Maße und Stoppmengen formulieren und beweisen wir in Kapitel 2 unser Hauptresultat zur Poissonapproximation eines abhängig verdünnten Poissonprozesses und zeigen auf, dass dieses Ergebnis Implikationen für die asymptotische Verteilung von Minima/Maxima geometrischer Funktionale hat, die auf einem Poissonprozess definiert werden können. Für die Formulierung des Ergebnisses vergleichen wir den verdünnten Poissonprozess im totalen Variationsabstand mit einem fast sicher endlichen Poissonprozess auf einem kompakten Beobachtungsfenster. Der Beweis der Konvergenz nutzt eine Kopplungskonstruktion zwischen dem verdünnten Prozess und einer reduzierten Palmschen Version dieses Prozesses. Daraufhin verwenden wir die Chen-Stein-Methode in Form einer Abschätzung in [3]. Damit gelingt es uns, den totalen Variationsabstand durch die Summe aus der Differenz der erwarteten Anzahl der Punkte der beiden Prozesse und dem zweiten faktoriellen Moment der Anzahl der Punkte des verdünnten Prozesses abzuschätzen. Dieses Resultat wenden wir auf verschiedene geometrische Strukturen an. Zunächst betrachten wir maximale Kantenlängen und Volumeninhalte in einem zufälligen k-nearest-neighbour-Graphen, dessen Knotenmenge durch einen nicht notwendigerweise stationären Poissonprozess gegeben ist. Dabei zeigen wir Verbindungen zu verwandten Resultate aus [27] und [28] auf. Nach einer Anwendung im Poisson-lilypond-Modell diskutieren wir verschiedene Szenarien im Poisson-Voronoi-Mosaik. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass der skalierte Prozess dann gegen einen Poissonprozess konvergiert, wenn die Verdünnungsvorschrift so gewählt ist, dass nur Punkte mit der Eigenschaft verbleiben, dass die Umkugel der umgebenden Voronoi-Zelle klein genug ist. Daraufhin diskutieren wir unsere Hauptanwendung in Kapitel 2. Dazu definieren wir ein allgemeines Größenfunktional und ein Abweichungsfunktional auf dem Raum konvexer Körper in $\mathbb{R}^d$ nach dem Vorbild in [34]. Eine Kombination einer Variante des dort angegebenen Resultats über die Form großer typischer Voronoi-Zellen mit einer Abschätzung über das Volumen der Vereinigung zweier formtypischer großer Voronoi-Zellen ermöglicht es uns, ein Resultat zur Poissonapproximation des verdünnten Prozesses zu zeigen, der nur Punkte behält, deren umgebende Voronoi-Zelle bezüglich des oben gewählten Größenfunktionals größer als eine vorgegebene Schranke ist.

In Kapitel 3 betrachten wir Größenfunktionale, deren Wert vom betrachteten Poissonprozess und einem k-Tupel von Punkten dieses Prozesses abhängt. Dabei definieren wir eine Verdünnung des Prozesses aller Mittelpunkte $(k-1)$–dimensionaler Kugeln mit der Eigenschaft, dass sie k Punkte des Poissonprozesses auf ihrem Rand und keinen Punkt im Inneren enthalten. Wir zeigen ein Resultat zur Poissonapproximation dieses Prozesses und geben dazu eine Abschätzung des totalen Variationsabstands an. Dies erlaubt es uns, neben Anwendungen auf minimale und maximale Kanten im Gabriel-Graphen und auf minimale Fundamentalregionen im Poisson-Voronoi-Mosaik, einen Satz zur Poissonapproximation im Poisson-Delaunay-Mosaik zu formulieren. Wir betrachten dabei Größenfunktionale wie in [33] und wählen die Verdünnungsvorschrift so, dass der Mittelpunkt einer d-dimensionalen Kugel genau dann erhalten bleibt, wenn die von dieser Kugel umschlossene Delaunay-Zelle bezüglich des betrachteten Größenfunktionals groß genug ist.

In den Kapiteln 2 und 3 ist aufgefallen, dass verdünnte Poissonprozesse in einigen geometrischen Situationen unabhängig von der gewählten Skalierung nicht gegen einen Poissonprozess konvergieren. Dies ist etwa dann der Fall, wenn Minima/Maxima des gewählten Funktionals aus geometrischen Gründen in Clustern auftreten (können). In Kapitel 4 zeigen wir, dass der verdünnte Prozess dann in einigen Fällen bezüglich eines d_2–Abstandes gegen einen zusammengesetzten Poissonprozess konvergiert. Anschließend betrachten wir eine Anwendung auf die Situation minimaler Kanten in einem k-nächsten-Nachbarn-Graphen und geben die exakte Verteilung des zusammengesetzten Poissonproesses an.

In Kapitel 5 betrachten wir Verdünnungen stationärer Gibbsscher Punktprozesse, die durch einen Poissonprozess stochastisch dominiert werden und deren Wechselwirkungen in einem bestimmten Sinn lokal sind. Wir zeigen ein Resultat zur Poissonprozessapproximation solcher Verdünnungen und verwenden dabei im Beweis die Methode der Uneinigkeitskopplung zur Realisierung von Gibbsschen Punktprozessen auf einem beschränkten Gebiet mit verschiedenen Randbedingungen und nutzen Perkolationseigenschaften des Booleschen Modells. Anschließend präsentieren wir eine Anwendung auf einen verdünnten hard-core-Prozess.

1.2 Grundlagen

Wir arbeiten auf einem lokalkompaktem Hausdorffraum $(\mathbb{X},\mathcal{X})$ mit abzählbarer Basis. Ein solcher Raum ist separabel und metrisierbar. Es bezeichne $\mathbf{N}_{<\infty} \equiv \mathbf{N}_{<\infty}(\mathbb{X})$ den Raum aller endlichen Zählmaße μ auf $\mathbb{X}$ und $\mathbf{N} \equiv \mathbf{N}(\mathbb{X})$ den Raum aller lokalendlichen (d.h. endlich auf allen lokalkompakten Teilmengen) Zählmaße auf $\mathbb{X}$. Beispiele für Elemente aus $\mathbf{N}$ sind das *Nullmaß* 0 oder das durch $\delta_x(B) := \mathbb{1}_B(x)$, $B \in \mathcal{X}$, definierte *Dirac-Maß* im Punkt $x \in \mathbb{X}$. Für $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{X}^k$ und $\mu \in \mathbf{N}$ schreiben wir $\delta_\mathbf{x} := \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_k}$, $\mu_\mathbf{x} := \mu + \delta_\mathbf{x}$ sowie $\mathbf{x} \in B$ falls $x_i \in B$ für alle $i \in [k]$. Sei $\mu \in \mathbf{N}$ gegeben durch $\mu = \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$ für ein $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $x_1,\dots,x_k \in \mathbf{X}$ (nicht notwendigerweise verschieden). Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir das *m-te faktorielle Maß* $\mu^{(m)}$ von μ durch

$$\mu^{(m)} := \sum_{i_1,\dots,i_m \le k}^{\neq} \delta_{(x_{i_1},\dots,x_{i_m})},$$

wobei das Superskript $\neq$ die Summation über m-Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen meint und wobei die leere Summe als 0 definiert ist (vgl. [42], (4.5)). Ein Maß $\mu \in \mathbf{N}$ heißt *einfach*, falls $\mu(\{x\}) \in \{0,1\}$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt. Wir definieren $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(\mathbb{X})$ als die kleinste σ-Algebra auf $\mathbf{N}$, sodass die Abbildung $\mu \mapsto \mu(B)$ für alle $B \in \mathcal{X}$ messbar ist. Wir statten $\mathbf{N}_{<\infty}$ und $\mathbf{N}$ mit den jeweiligen Spur-σ-Algebren $\mathcal{N}_{<\infty}$ und $\mathcal{N}$ von $\mathcal{N}$ aus. Die σ–Algebra $\mathcal{N}$ von $\mathbf{N}$ ist dann die

Borel-σ-Algebra der *vagen Topologie* auf $\mathbf{N}$. Eine Folge $(\mu_n)_n$ in $\mathbf{N}$ *konvergiert vage* gegen μ, falls für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{X} \to [0, \infty)$ mit kompaktem Träger gilt,

$$\int f(x)\, \mu_n(\mathrm{d}x) \to \int f(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Nach Theorem A2.3 in [38] ist $\mathbf{N}$ ein Polnischer Raum.

1.2.1 Punkt- und Poissonprozesse

Ein *Punktprozess* in $\mathbb{X}$ ist ein zufälliges Element ξ in $\mathbf{N}$, definiert über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Wir nehmen an, dass dieser Wahrscheinlichkeitsraum groß genug ist, sodass alle zufälligen Objekte aus dieser Arbeit darauf existieren. Nach Definition von $\mathbf{N}$ ist $\xi(B)$ für jedes $B \in \mathcal{X}$ eine Zufallsvariable in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Ein Punktprozess heißt *einfach*, falls $\mathbb{P}(\xi \text{ ist einfach}) = 1$ gilt. Das Maß $B \mapsto \mathbb{E}\xi(B)$ heißt *Intensitätsmaß* von ξ.

Das zentrale Objekt in dieser Arbeit ist der *Poissonprozess*. Dieser ist wie folgt definiert.

Definition 1.2.1. Es sei λ ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{X}$. Ein Punktprozess η auf $\mathbb{X}$ heißt Poissonprozess mit Intensitätsmaß λ, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) Für jedes $B \in \mathcal{X}$ ist $\eta(B)$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(B)$.

(b) Für jedes $n \in \mathbf{N}$ und jede Auswahl paarweise disjunkter Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{X}$ sind die Zufallsvariablen $\eta(B_1), \dots, \eta(B_n)$ stochastisch unabhängig.

□

Poissonprozesse, deren Intensitätsmaße übereinstimmen, besitzen dieselbe Verteilung (Proposition 3.2 in [42]). Die Existenz des Poissonprozesses ergibt sich aus Theorem 3.6 in [42]. Dass ein Poissonprozess genau dann einfach ist, wenn sein Intensitätsmaß diffus (d.h. atomfrei) ist, ist der Inhalt von Proposition 6.9 in [42]. Ist η ein Poissonprozess, so existieren nach Korollar 6.5 in [42] eine Folge von Zufallsvektoren $(X_n)_n$ in $\mathbb{X}$ sowie eine Zufallsvariable $N : \Omega \to \mathbb{N}_0$, sodass $\eta = \sum_{n=1}^{N} \delta_{X_n}$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt. Zentral für das Rechnen mit Poissonprozessen ist die (multivariate) Mecke-Gleichung, die wir in folgendem Satz angeben.

Satz 1.2.2 (vgl. Theorem 4.4 in [42])**.** *Seien λ ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{X}$ und η ein Poissonprozess in $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß λ. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und jede messbare Funktion $f : \mathbb{X}^k \times \mathbf{N} \to [0, \infty]$,*

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{X}^k} f(\mathbf{x}, \eta)\, \eta^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \int \mathbb{E} f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}})\, \lambda^k(\mathrm{d}\mathbf{x}).$$

In weiten Teilen dieser Dissertation arbeiten wir auf dem Raum $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$. In diesem Fall definieren wir für $y \in \mathbb{R}^d$ die Translation $\theta_y : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ durch

$$\theta_y(\varphi)(B) = \varphi(B + y), \quad \varphi \in \mathbf{N},\, B \in \mathcal{B}^d,$$

wobei $B + y \coloneqq \{x + y : x \in B\}$. Ein Punktprozess ξ in $\mathbb{R}^d$ heißt *stationär*, falls $\theta_y(\xi) \overset{d}{=} \xi$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$. Ein stationärer Punktprozess mit der Eigenschaft $\mathbb{E}\xi([0,1]^d) < \infty$ besitzt das Intensitätsmaß $\gamma \mathcal{L}^d$ für ein $\gamma > 0$ (vgl. Proposition 8.2 in [42]) und γ heißt die Intensität von ξ. Für Poissonprozesse gilt auch die Umkehrung dieses Resultats, d.h. ein Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$

mit Intensitätsmaß $\gamma\,\mathcal{L}^d$ für ein $\gamma > 0$ ist stationär (vgl. Proposition 8.3 in [42]). Ferner gilt für einen stationären Punktprozess ξ, dass dessen Kardinalität mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder 0 oder unendlich ist, d.h.

$$\mathbb{P}(\xi(\mathbb{R}^d) \in \{0, +\infty\}) = 1$$

(vgl. Proposition 8.4 in [42]).

1.2.2 Palmsche Maße und Stoppmengen

Fundamental für den Umgang mit Punktprozessen sind *Palmsche Prozesse*. Wir orientieren uns bei deren Einführung an [39], Kapitel 6. Seien dazu η, ξ zwei Punktprozesse in $\mathbb{X}$ und ξ besitze ein σ-endliches Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi$. Im Allgemeinen existiert eine ganze Familie Palmscher Maße, eines für jedes $x \in \mathbb{X}$. Die Palmschen Maße verallgemeinern das Konzept der regulär bedingten Verteilungen (vgl. Theorem 6.3 in [38]) und sie stimmen mit denen im Fall $\xi = \delta_z$ für ein $z \in \mathbb{X}$ überein. Da das Intensitätsmaß von ξ nach Annahme σ-endlich ist, ist auch das durch

$$C_{\eta,\xi} f := \mathbb{E} \int f(x, \eta)\, \xi(\mathrm{d}x), \quad f \geq 0 \text{ messbar},$$

definierte Campbell-Maß $C_{\eta,\xi}$ auf $\mathbb{X} \times \mathbf{N}$ σ-endlich. Damit existiert ein Wahrscheinlichkeitskern $P^x_{\eta,\xi}$ von $\mathbb{X}$ nach $\mathbf{N}$, der die Desintegration

$$C_{\eta,\xi} f = \iint f(x, \mu)\, P^x_{\eta,\xi}(\mathrm{d}\mu)\, \mathbb{E}\xi(\mathrm{d}x)$$

erlaubt. Das Maß $P^x_{\eta,\xi}$ heißt Palmsches Maß von η bezüglich ξ bei x. Ein Punktprozess η^x_ξ, dessen Verteilung unter $\mathbb{P}$ durch $P^x_{\eta,\xi}$ gegeben ist, heißt *Palmscher Prozess* oder *Palmsche Version* von η bezüglich ξ bei x. Er lässt sich als der von $x \in \operatorname{supp}(\xi)$ gesehene Prozess η interpretieren. Nach Lemma 6.2(ii) in [39] gilt

$$\mathbb{P}(x \in \eta^x_\xi) = 1.$$

Der Prozess $\eta^x_\xi - \delta_x$ heißt *reduzierter Palmscher Prozess* von η bezüglich ξ bei x.

Ein weiteres wichtiges Werkzeug im Umgang mit Punktprozessen sind Stoppmengen. Diese verallgemeinern das Konzept der Stoppzeiten für Zufallsvariablen. Es bezeichne $\mathcal{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{X}$. Für $F \in \mathcal{F}$ bezeichnet μ_F die Einschränkung von μ auf F. Außerdem sei $\mathcal{N}_F$ die kleinste σ-Algebra auf $\mathbf{N}$, bzgl. der die Abbildung $\mu \mapsto \mu(B \cap F)$ für alle $B \in \mathcal{X}$ messbar ist.

Definition 1.2.3. Eine messbare Abbildung $S : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$ heißt *Stoppmenge* (bezüglich der Filtration $(\mathcal{N}_F)_{F \in \mathcal{F}}$), falls $\{\mu \in \mathbf{N} : S(\mu) \subset F\} \in \mathcal{N}_F$ für alle $F \in \mathcal{F}$. □

Der folgende Satz gibt eine Möglichkeit an, Stoppmengen zu charakterisieren.

Satz 1.2.4. *(Proposition A.1 [9]) Eine messbare Abbildung $S : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$ ist genau dann eine Stoppmenge, falls $S(\mu) = S(\mu_{S(\mu)})$ für alle $\mu \in \mathbf{N}$ und die folgende Implikation für alle $\mu, \varphi \in \mathbf{N}$ gilt:*

$$\varphi = \mu_{S(\varphi)} \Longrightarrow S(\varphi) = S(\mu).$$

Die folgende Aussage ist für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung.

Satz 1.2.5. *Seien λ σ–endlich, η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß λ und S eine Stoppmenge, sodass $S(\eta)$ $\mathbb{P}$–fast sicher kompakt ist. Ferner sei $g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\int g(\mu_{S(\mu)}, \mu_{S(\mu)^c})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) = \iint g(\mu_{S(\mu)}, \varphi_{S(\mu)^c})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi)\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu).$$

Beweis. Der Beweis kann aus verschiedenen Quellen in der Literatur zusammengesetzt werden (z.B. [9], [69]). Der Vollständigkeit halber führen wir die Argumente hier aus.

Seien $B_n \in \mathcal{B}^d$ mit $B_n \uparrow \mathbb{R}^d$ für $n \to \infty$ und $\lambda(B_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Da $S(\eta)$ $\mathbb{P}$–fast sicher kompakt ist, gilt

$$\mathbb{P}(\eta(S(\eta)) = \infty) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\eta(S(\eta) \cap B_n) = \infty\}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\eta(B_n) = \infty) = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int g(\mu_{S(\mu)}, \mu_{S(\mu)^c})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int g(\mu_{S(\mu)}, \mu_{S(\mu)^c})\, \mathbb{1}\{\mu(S(\mu)) = k\}\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \iint g(\delta_{\mathbf{x}}, \mu_{S(\mu)^c})\, \mathbb{1}\{\mu_{S(\mu)} = \delta_{\mathbf{x}}\}\, \mu^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

wobei wir daran erinnern, dass wir $\delta_{\mathbf{x}} := \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_k}$ für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{X}^k$ schreiben. Wegen $S(\mu) = S(\mu_{S(\mu)})$ (vgl. Satz 1.2.4) lässt sich (1.2.1) schreiben als

$$\frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \iint g(\delta_{\mathbf{x}}, \mu_{S(\delta_{\mathbf{x}})^c})\, \mathbb{1}\{\mu_{S(\delta_{\mathbf{x}})} = \delta_{\mathbf{x}}\}\, \mu^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu). \tag{1.2.2}$$

Für $\mathbf{x} \in \mu^{(k)}$ und $S \in \mathcal{B}^d$ gilt die Äquivalenz (vgl. Satz 1.2.4)

$$\mu_S = \delta_{\mathbf{x}} \iff \mathbf{x} \in S^k \quad \text{und} \quad (\mu - \delta_{\mathbf{x}})\,(S) = 0.$$

Damit lässt sich (1.2.2) umformen zu

$$\frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \iint g(\delta_{\mathbf{x}}, \mu_{S(\delta_{\mathbf{x}})^c})\, \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in S(\delta_{\mathbf{x}})^k\} \mathbb{1}\{(\mu - \delta_{\mathbf{x}})\,(S(\delta_x)) = 0\}\, \mu^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu). \tag{1.2.3}$$

Eine Anwendung der Mecke-Formel (Satz 1.2.2) auf (1.2.3) ergibt

$$\frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \iint g(\delta_{\mathbf{x}}, \mu_{S(\delta_{\mathbf{x}})^c})\, \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in S(\delta_{\mathbf{x}})^k\} \mathbb{1}\{\mu(S(\delta_{\mathbf{x}})) = 0\}\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\, \lambda^k(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{1.2.4}$$

Nach Definition des Poissonprozesses η sind $\eta_{S(\delta_{\mathbf{x}})}$ und $\eta_{S(\delta_{\mathbf{x}})^c}$ unabhängig. Daher erhalten wir für (1.2.4) den Ausdruck

$$\frac{1}{k!} \int \sum_{k=0}^{\infty} \iint g(\delta_{\mathbf{x}}, \varphi_{S(\delta_{\mathbf{x}})^c})\, \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in S(\delta_{\mathbf{x}})^k\} \mathbb{1}\{\mu(S(\delta_{\mathbf{x}})) = 0\}\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\, \lambda^k(\mathrm{d}\mathbf{x})\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi). \tag{1.2.5}$$

Wir betrachten nun den Ausdruck im Inneren des Integrals und vollziehen die bisherigen Beweisschritte rückwärts. Damit ergibt sich die Behauptung. □

1.2.3 Abstände und Konvergenz von Punktprozessen

Sei nun d eine Metrik auf $\mathbb{X}$, sodass die durch d induzierte Topologie mit $\mathcal{X}$ übereinstimmt. Für $x, y \in \mathbb{X}$ sei $d_0(x,y) := |x-y| \wedge 1$ und es bezeichne $\mathbb{K}$ den Raum aller Funktionen $k : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ mit

$$s_1(k) := \sup_{\substack{y_1, y_2 \in \mathbb{X}, \\ y_1 \neq y_2}} \frac{|k(y_1) - k(y_2)|}{d_0(y_1, y_2)} < \infty.$$

Für endliche Maße μ, χ auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ definieren wir

$$d_1(\mu,\chi) : = \begin{cases} 1, & \mu(\mathbb{X}) \neq \chi(\mathbb{X}), \\ 0, & \mu(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X}) = 0, \\ m^{-1} \sup\limits_{k \in \mathbb{K}} \frac{1}{s_1(k)} \left| \int k \, \mathrm{d}\mu - \int k \, \mathrm{d}\chi \right|, & \mu(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X}) = m > 0. \end{cases}$$

Falls $\mu, \chi \in \mathbf{N}_{<\infty}$, so lässt sich der Abstand $d_1(\mu,\chi)$ für $\mu = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $\chi = \{y_1, \ldots, y_m\}$ auch erklären durch

$$d_1(\mu,\chi) = \min_{\pi \in S_m} \left\{ m^{-1} \sum_{i=1}^{m} d_0(x_i, y_{\pi(i)}) \right\}, \tag{1.2.6}$$

wobei S_m die Menge aller Permutationen auf $\{1, \ldots, m\}$ bezeichnet. Also misst d_1 den mittleren Abstand zwischen μ und χ bzgl. d_0 unter dem „nächsten" Matching $\pi \in S_m$. Für endliche Maße μ, χ auf $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ verwenden wir auch die Notation

$$\widehat{d_1}(\mu,\chi) := \begin{cases} \inf\limits_{\mu' \leq \mu : \, \mu'(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X})} d_1(\mu', \chi), & \mu(\mathbb{X}) \geq \chi(\mathbb{X}), \\ \widehat{d_1}(\chi, \mu), & \mu(\mathbb{X}) < \chi(\mathbb{X}). \end{cases}$$

Falls $\mu(\mathbb{X}) = \chi(\mathbb{X})$, so gilt $\widehat{d_1}(\mu,\chi) = d_1(\mu,\chi)$. Die Metrik d_1 wird in der Literatur auch als *Kantorovich*$_{1,1}$- oder *durch* d_0 *induzierte Wasserstein-Metrik* bezeichnet. Es sei $\mathbb{F}$ die Menge der Funktionen $f : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$s_2(f) := \sup_{\substack{\mu, \chi \in \mathbf{N}, \\ \mu \neq \chi}} \frac{|f(\mu) - f(\chi)|}{d_1(\mu,\chi)} < \infty.$$

Wir definieren den Abstand d_2 zwischen zwei Punktprozessen ξ und ν in $\mathbb{X}$ durch

$$d_2(\xi,\nu) := \sup_{f \in \mathbb{F}} \frac{1}{s_2(f)} \left| \int f(\mu) \, \mathbb{P}(\xi \in \mathrm{d}\mu) - \int f(\mu) \, \mathbb{P}(\nu \in \mathrm{d}\mu) \right|.$$

Die Metrik d_2 lässt sich auch ausdrücken durch

$$d_2(\xi,\nu) = \inf_{C \in \Sigma(\xi,\nu)} \int_{\mathbf{N} \times \mathbf{N}} d_1(\mu_1, \mu_2) \, C(\mathrm{d}(\mu_1, \mu_2))$$

(vgl. Theorem 5.10 in [67]), wobei $\Sigma(\xi,\nu)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ mit den Randverteilungen $\mathbb{P}(\xi \in \cdot)$ und $\mathbb{P}(\nu \in \cdot)$ bezeichnet. Dieser Zusammenhang heißt in der Literatur *Kantorovich-Rubinstein-Formel*. Eine andere Möglichkeit, die Verteilungen zweier Punktprozesse zu vergleichen, liefert der *totale Variationsabstand* d_{TV}. Dieser ist gegeben durch

$$d_{\mathrm{TV}}(\xi,\nu) = \sup_{A \in \mathcal{N}} \left(\mathbb{P}(\xi \in A) - \mathbb{P}(\nu \in A) \right).$$

Der d_2-Abstand zweier Wahrscheinlichkeitsmaße ξ und ν auf $\mathbf{N}$ ist durch deren Abstand in totaler Variation dominiert. Es gilt (vgl. Spezialfall 6.16 in [67])

$$d_2(\xi,\nu) \le d_{\mathrm{TV}}(\xi,\nu). \tag{1.2.7}$$

Wir begründen nun, dass die Konvergenz lokalendlicher Punktprozesse im totalen Variationsabstand d_{TV} deren Konvergenz in Verteilung impliziert. Wir haben oben bereits festgehalten, dass $\mathbf{N}$ mit der Borel-σ-Algebra der vagen Topologie ein Polnischer Raum ist. Es gilt folgender Zusammenhang.

Satz 1.2.6 (Theorem 16.16 in [38])**.** *Seien $\nu, \xi_1, \xi_2, \ldots$ zufällige Maße auf $\mathbb{X}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\xi_n \xrightarrow{d} \nu$ *für $n \to \infty$.*

(ii) $\int g \,\mathrm{d}\xi_n \xrightarrow{d} \int g \,\mathrm{d}\nu$ *für $n \to \infty$ für alle stetigen $g : \mathbb{X} \to [0,\infty)$ mit kompaktem Träger.*

Mithilfe von Satz 1.2.6 lässt sich leicht einsehen, dass die Konvergenz lokalendlicher Punktprozesse im totalen Variationsabstand d_{TV} deren Konvergenz in Verteilung impliziert (vgl. Proposition 2.1 in [20]). Seien dazu ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, und ν lokalendliche Punktprozesse mit $d_2(\xi_n,\nu) \to 0$ für $n \to \infty$. Wir wollen $\int g \,\mathrm{d}\xi_n \xrightarrow{d} \int g \,\mathrm{d}\nu$ für alle stetigen Funktionen $g \ge 0$ mit kompakten Träger zeigen. Da die Konvergenz von Zufallsvariablen in totaler Variation deren Konvergenz in Verteilung impliziert, genügt es, für alle $B \subset \mathbb{R}$ zu zeigen,

$$\mathbb{P}\left(\int g \,\mathrm{d}\xi_n \in B\right) \to \mathbb{P}\left(\int g \,\mathrm{d}\xi_n \in B\right) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da die Mengen $\{\mu \in \mathcal{N} : \int g \,\mathrm{d}\mu \in B\}$ messbar sind, folgt die Behauptung. Wegen (1.2.7) zeigt dies auch, dass die Konvergenz lokalendlicher Punktprozesse in totaler Variation hinreichend für deren Konvergenz im d_2-Abstand ist.

1.2.4 Modelle und Transformationen der stochastischen Geometrie

Es seien nun $d \ge 2$ und $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, ausgestattet mit der Borelschen σ−Algebra $\mathcal{B}^d$. In dieser Arbeit untersuchen wir extremale Eigenschaften zufälliger Graphen und Mosaike, zu deren Einführung wir einige Notation, Sprechweisen und Hilfsmittel benötigen.

Zunächst führen wir auf $\mathbb{R}^d$ eine totale Ordnung ein. Dazu ordnen wir die Elemente aus $\mathbb{R}^d$ zunächst aufsteigend nach ihrem Betrag und erzeugen damit eine partielle Ordnung. In einem zweiten Schritt ordnen wir Elemente mit gleichem Betrag aufsteigend bezüglich der lexikographischen Ordnung. Damit erklären wir $[x,y)$ als die Menge aller $w \in \mathbb{R}^d$ mit der Eigenschaft $x \le w < y$ und andere Intervalle entsprechend. Seien nun $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbf{N}$. Dann ist der *k-nächste-Nachbar* $N_k(x,\mu)$ von x in μ gegeben durch

$$N_k(x,\mu) = y \iff y \in \mu \text{ und } \theta_x\mu((0, y-x]) = k.$$

Hiermit lässt sich ein geometrischer Graph erklären. Seien dazu $k \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathbf{N}$ einfach. Wir definieren den *k-nächsten-Nachbarn-Graphen* auf μ als das Paar $G = (V,E)$, wobei $V = \mu$ *Knotenmenge* und

$$E := \{(x,y) \in \mu \times \mu : y = N_i(x,\mu) \text{ oder } x = N_i(y,\mu) \text{ für ein } i \le k\}$$

Kantenmenge heißt. Offensichtlich gilt $(x,y) \in E \Longleftrightarrow (y,x) \in E$, weshalb wir G als ungerichteten Graphen auffassen. Falls die Knotenmenge ein zufälliges Element aus $\mathbf{N}$ ist (beispielsweise ein Poissonprozess), ist das entstehende Objekt ein klassisches und häufig untersuchtes Beispiel eines *zufälligen geometrischen Graphen*, siehe [53] für eine umfassende Einführung. Dann lassen sich in G verschiedene abgeleitete Zufallsvariablen definieren. Eine Möglichkeit ist, in dem Teilgraphen, der durch die Einschränkung von μ auf eine kompakte Menge $W \subset \mathbb{R}^d$ und die dadurch induzierte Kantenmenge hervorgeht, den maximalen oder minimalen Abstand eines Punktes aus μ_W zu seinem nächsten Nachbarn zu betrachten. Diese Fragen untersuchen wir in dieser Arbeit.

Daneben untersuchen wir in dieser Arbeit geometrische Eigenschaften zufälliger Mosaike. Unter einem *Mosaik* verstehen wir ein System konvexer Polytope in $\mathbb{R}^d$, die den gesamten Raum überdecken und paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Gegeben $\varnothing \neq \mu \in \mathbf{N}$, lassen sich ausgehend von μ verschiedene Mosaike definieren. Die Struktur und die Form der Zellen eines Mosaiks können genutzt werden, um die Regularität von μ zu beschreiben. Vielfach verwendet wird das folgendermaßen definierte *Voronoi-Mosaik*. Zu jedem $x \in \mu$ definieren wir die *Voronoi-Zelle*

$$C(x,\mu) := \{z \in \mathbb{R}^d : N(z,\mu) = x\}.$$

Für $x \neq y$ sei $H_y^+(x)$ der abgeschlossene Halbraum, der x enthält und durch die mittlere Hyperebene zwischen x und y begrenzt wird, also

$$H_y^+(x) := \{z \in \mathbb{R}^d : \langle z, y - x\rangle \leq \frac{1}{2}(\|y\|^2 - \|x\|^2)\}.$$

In dieser Arbeit werden wir wiederholt davon Gebrauch machen, dass sich $C(x,\mu)$ auch durch

$$C(x,\mu) := \bigcap_{y \in \mu,\, y \neq x} H_y^+(x)$$

definieren lässt. Aus dieser Darstellung ist auch ersichtlich, dass $C(x,\mu)$ eine abgeschlossene konvexe Menge mit inneren Punkten ist. Das System $m := \{C(x,\mu : x \in \mu)\}$ bildet ein Mosaik im Sinne der obigen Definition.

Ein weiteres wichtiges Mosaik, das ausgehend von einem lokalendlichen Maß $\varnothing \neq \mu \in \mathbf{N}$ definiert werden kann, ist das *Delaunay-Mosaik*. Dieses ist in einem gewissen Sinn dual zum Voronoi-Mosaik. Für ein konvexes Polytop P definieren wir die *Seiten* als die Schnitte von P mit seinen stützenden Hyperebenen. Eine Seite der Dimension k heißt *k-Seite*, $k \in \{0,\dots,d-1\}$, und wir schreiben $\mathcal{F}_k(P)$ für die Menge aller k-Seiten von P. Für ein Mosaik m schreiben wir $\mathcal{F}_k(m)$ für die Menge aller k-Seiten von Zellen in m. Sei nun $m := \{C(x,\mu : x \in \mu)\}$ das Voronoi-Mosaik zu μ. Die *Delaunay-Zelle* bei $e \in \mathcal{F}_0(m)$ ist gegeben durch

$$D(e,\mu) := \mathrm{conv}\{x \in \mu : e \in \mathcal{F}_0(C(x,\mu))\}.$$

Das System $d := \{D(e,\mu) : e \in \mathcal{F}_0(m)\}$ bildet ein Mosaik, das sogenannte *Delaunay-Mosaik*. Ist $\mu \in \mathbf{N}$ zufällig, so lassen sich Eigenschaften der abgeleiteten Verteilung des Mosaiks und dessen Zellen untersuchen. In dieser Arbeit betrachten wir das ausgehend von einem Poissonprozess definierte *Poisson-Voronoi-* und *-Delaunay-Mosaik*.

In der Untersuchung zufälliger Graphen und Mosaike spielen verschiedene integralgeometrische Transformationen eine wichtige Rolle. Das folgende Resultat ist die klassische Blaschke-Petkantschin-Formel für Sphären.

Satz 1.2.7 (Theorem 7.3.1 in [60])**.** *Sei $f : (\mathbb{R}^d)^{d+1} \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\int f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = d!(d\kappa_d)^{d+1} \iiint f(z + r\mathbf{u}) r^{d^2-1}\,\Delta_d(\mathbf{u})\,\sigma^{d+1}(\mathrm{d}\mathbf{u})\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z.$$

Sei $k \in [d]$. Es bezeichne ν_k das eindeutige Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Grassmannschen Raum $G(d,k)$ k–dimensionaler linearer Unterräume des $\mathbb{R}^d$ (vgl. Theorem 13.2.11 in [60]). Für einen festen Unterraum $L \in G(d,k)$ bezeichne $\mathbb{S}_L$ die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre in L. Für $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^k$ sei $\Delta_k(\mathbf{u})$ das k–dimensionale Volumen der konvexen Hülle $\mathrm{conv}(\mathbf{u})$ und x^L bezeichne die Projektion von $x \in \mathbb{R}^d$ auf L. Die folgende Formel drückt das Integral über $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{k+1}) \in (\mathbb{R}^d)^{k+1}$ durch eine Integration auf der $(k-1)$–dimensionalen Sphäre aus, auf der die Punkte $x_1, \dots, x_{k+1}$ liegen. Sie findet sich in [50], verallgemeinert Theorem 7.3.1 in [60] und wird in [23] bewiesen.

Satz 1.2.8 (Theorem 1 in [50])**.** *Seien $k \in [d]$ und $f : (\mathbb{R}^d)^{k+1} \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\int f(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \iiiint f(z + r\mathbf{u}) r^{dk-1} k! \Delta_k(\mathbf{u})^{d-k+1}\,\mathbb{S}_L^{k+1}(\mathrm{d}\mathbf{u})\,\mathrm{d}r\,\nu_k(\mathrm{d}L)\,\mathrm{d}z.$$

Bei der Untersuchung des Poisson-Delaunay-Mosaiks ist es oft notwendig, über Punkte auf einer Sphäre zu integrieren, die eine feste niederdimensionale Sphäre enthält. Auch für diese Situation gibt es eine maßgeschneiderte Blaschke-Petkantschin-Formel, die wir nun präsentieren. Wir betrachten $d-k+1$ Punkte $p_i \in \mathbb{R}^d$ in allgemeiner Lage. Dann existiert für fast alle $m \le k$ Punkte x_j eine eindeutige $(d-k+m-1)$–Sphäre durch alle x_j und p_i. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass der Mittelpunkt der $(d-k-1)$–Sphäre durch die p_i der Ursprung 0 sei, bezeichnen mit r_0 den Radius dieser Sphäre und mit Q die eindeutige $(d-k)$–Hyperebene, die alle p_i enthält. Eine $(d-k+m-1)$–Sphäre mit Radius $r \ge r_0$ geht durch alle x_j und p_i genau dann, wenn ihr Mittelpunkt im Orthogonalraum $Q^\perp$ von Q liegt und der Abstand des Mittelpunkts zum Ursprung $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ beträgt. Diese Konstruktion nutzen wir für die folgende Transformation.

Satz 1.2.9 (Theorem 5 in [50])**.** *Seien $k \in [d]$, $Q \in G(d, d-k)$, $r_0 \ge 0$, $1 \le m \le k$ und $f : (\mathbb{R}^d)^m \to [0,\infty)$ eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\mathbb{R}^d)^m} f(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \int\limits_{G(d,d-k)} \int\limits_{r_0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{S}_L} \int\limits_{\mathbb{S}^m_{L\oplus Q}} & f\big(\sqrt{r^2-r_0^2}\,z + r\mathbf{u}\big) r^{m(d-1)+1} (r^2 - r_0^2)^{(m-2)/2} \\ & \times \left[m!\,\Delta_m\left(-\frac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{r} z, \mathbf{u}^L \right) \right]^{k-m+1} \sigma^m_{L\oplus Q}(\mathrm{d}\mathbf{u})\,\sigma_L(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\,\nu_m(\mathrm{d}L).\end{aligned}$$

Kapitel 2

Poissonprozessapproximation Poissonscher Funktionale

2.1 Allgemeines Theorem

In diesem Kapitel arbeiten wir auf dem Raum $\mathbb{R}^d$, ausgestattet mit seiner Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}^d$, und $\mathcal{L}^d$ bezeichne das Lebesguemaß auf $\mathcal{B}^d$. Es seien $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ messbar und η ein Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß $f\,\mathcal{L}^d$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Ferner seien $g_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$ für alle $t > 0$ messbar und $W_t := [0, t^{1/d}]^d$. Wir betrachten die durch

$$\xi_t \equiv \xi_t(\eta) := \sum_{x \in \eta \cap W_t} g_t(x, \eta - \delta_x)\, \delta_x. \tag{2.1.1}$$

erklärte Verdünnung von η und fassen ξ_t als Punktprozess auf W_t auf. Wir bestimmen nun das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t. Mit der Mecke-Formel gilt für $A \in \mathcal{B}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_t(A) =& \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{x \in A \cap W_t\}\, g_t(x, \eta - \delta_x)\, \eta(\mathrm{d}x) \\
=& \int \mathbb{1}\{x \in A \cap W_t\}\, \mathbb{E} g_t(x, \eta)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\
=& \int_{A \cap W_t} \mathbb{E}\, g_t(x, \eta)\, f(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}\xi_t$ σ-endlich ist, existiert für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$ ein Palmscher Prozess von η bezüglich der Verdünnung ξ_t bei x. Wenn η_t^x einen solchen Punktprozess bezeichnet, dann gilt die Desintegration

$$\mathbb{E} \int h(x, \eta)\, \xi_t(\mathrm{d}x) = \iint h(x, \mu)\, \mathbb{P}(\eta_t^x \in \mathrm{d}\mu)\, \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}x), \quad h : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \to [0, +\infty) \text{ messbar.}$$

Im Folgenden gelte $\mathbb{E}\, g_t(x, \eta) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t > 0$. Dann lässt sich die Verteilung $\mathbb{P}(\eta_t^x \in \cdot)$ von η_t^x mit der Mecke-Formel explizit bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \int h(x, \eta)\, \xi_t(\mathrm{d}x) &= \iint \mathbb{1}\{x \in W_t\} h(x, \mu)\, g_t(x, \mu - \delta_x)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) \\
&= \int \mathbb{1}\{x \in W_t\} \mathbb{E}\, h(x, \eta + \delta_x)\, g_t(x, \eta)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathbb{E}\, h(x, \eta + \delta_x)\, g_t(x, \eta)}{\mathbb{E} g_t(x, \eta)}\, \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

Folglich gilt für alle $A \in \mathcal{N}$,

$$\mathbb{P}(\eta_t^x \in A) = \int \mathbb{1}\{\mu + \delta_x \in A\} \frac{g_t(x,\mu)}{\mathbb{E} g_t(x,\eta)} \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu). \tag{2.1.2}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \int h(x, \xi_t(\eta))\, \xi_t(\eta)(\mathrm{d}x) &= \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{x \in W_t\} h(x, \xi_t(\eta)) g_t(x, \eta - \delta_x)\, \eta\,(\mathrm{d}x) \\ &= \int \mathbb{1}\{x \in W_t\} \mathbb{E} h(x, \xi_t(\eta + \delta_x))\, g_t(x,\eta)\, f(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int \mathbb{E} h(x, \xi_t(\eta_t^x))\, \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

ist durch $\xi_t(\eta_t^x)$ eine Palmsche Version von ξ_t (bezüglich ξ_t) bei x gegeben.

Unser Ziel in diesem Abschnitt besteht darin, den skalierten Prozess

$$(t^{-1/d}\xi_t)(\cdot) \coloneqq \int \mathbb{1}\{t^{-1/d}x \in \cdot\}\, \xi_t(\mathrm{d}x),$$

dessen Intensitätsmaß $\mathbb{E}(t^{-1/d}\xi_t)$ durch

$$\mathbb{E}(t^{-1/d}\xi_t)(B) = \int_{[0,1]^d} \mathbb{1}\{v \in B\}\, \mathbb{E} g_t(t^{1/d}v, \eta) f(t^{1/d}v)\, t\, \mathrm{d}v, \quad B \in \mathcal{B}([0,1]^d), \tag{2.1.4}$$

gegeben ist, im Limes $t \to \infty$ (im totalen Variationsabstand d_{TV}) durch einen Poissonprozess auf $[0,1]^d$ zu approximieren. Dazu darf die Auswahlfunktion g_t in (2.1.1) nur lokal von der Konfiguration um x abhängen. Damit meinen wir, dass $(g_t)_t$ die folgende Definition erfüllt, wobei

$$B(x,R) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \le R\}$$

die abgeschlossene Kugel mit Radius R um x bezeichnet.

Definition 2.1.1. Sei $(g_t)_{t>0}$ eine Familie messbarer Funktionen $g_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$, $t > 0$. Wir nennen $(g_t)_t$ *stabilisierend*, falls für alle $t > 0$ eine messbare Funktion $R_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $R_t(x, \eta + \delta_x) < \infty$ $\quad\mathbb{P}$-fast sicher.

(ii) $g_t(x,\mu) = g_t(x, \mu_{B(x,R_t(x,\mu))} + \chi_{B(x,R_t(x,\mu))^c}), \quad \mu, \chi \in \mathbf{N}$.

(iii) Für alle $t > 0$ ist die Abbildung $\mu \mapsto B(x, R_t(x, \mu + \delta_x))$ von $\mathbf{N}$ nach $\mathcal{F}$ eine Stoppmenge.

Wir nennen $R_t \equiv R_t(x,\mu)$ einen *Stabilisierungsradius* und verwenden für $\mu \in \mathbf{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ die Schreibweise $S_t(x,\mu) \coloneqq B(x, R_t(x,\mu))$. □

In der Literatur versteht man unter stabilisierenden Funktionalen üblicherweise solche, die die in Definition (i) und (ii) geforderten Eigenschaften erfüllen (vgl. [54], Definition 2.4), deren Wert bei x also intuitiv gesprochen nur von der Konfiguration μ in einer Kugel mit Radius $R_t(x,\mu)$ um x abhängt. Das Konzept der Stabilisierung ist wohlbekannt und wird insbesondere zur Normalapproximation geometrischer Funktionale verwendet; siehe etwa die aktuelle Arbeit [40].

Das Hauptresultat dieses Abschnitts basiert auf folgendem Resultat zur Poissonprozess-approximation endlicher Punktprozesse aus [3], das auf der Chen-Stein-Methode beruht. Für ein endliches signiertes Maß μ auf $\mathcal{B}^d$ seien μ_+ und μ_- dessen Positiv- bzw. Negativteil und $\|\mu\| \coloneqq \mu_+(\mathbb{R}^d) + \mu_-(\mathbb{R}^d)$ die totale Variation.

Satz 2.1.2 (Theorem 2.6 in [3]). *Seien ξ ein endlicher Punktprozess mit Intensitätsmaß π auf $\mathbb{R}^d$ und ξ^x eine Palmsche Version von ξ (bezüglich ξ) bei $x \in \mathbb{R}^d$ auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien π' ein endliches Maß auf $\mathcal{B}^d$ und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß π'. Dann gilt*

$$d_{TV}(\xi, \nu) \le \int \mathbb{E}\|\xi - (\xi^x - \delta_x)\| \, \pi(\mathrm{d}x) + \|\pi' - \pi\|.$$

Wir zeigen folgendes Resultat zur Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$.

Satz 2.1.3. *Seien $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ messbar, $h : [0,1]^d \to [0,\infty)$ stetig, η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $f\mathcal{L}^d$, ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $h\lambda^d_{[0,1]^d}$ sowie $(x,t) \mapsto b_t(x)$ und $(x,t) \mapsto d_t(x)$ messbare Funktionen von $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ nach $(0,\infty)$. Ferner sei $(g_t)_t$ eine stabilisierende Familie messbarer Funktionen im Sinne von Definition 2.1.1 mit*

$$\sup_{v \in [0,1]^d} \left| t\,\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v, \eta)\, f(t^{1/d}v) - h(v) \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0. \tag{2.1.5}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le C_t &+ \sup_{v\in[0,1]^d} \left| t\,\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v,\eta)\, f(t^{1/d}v) - h(v)\right| \\ &+ O\left(\sup_{v\in[0,1]^d} (h\mathcal{L}^d)\left(B\left(v, \frac{b_t(t^{1/d}v)}{t^{1/d}}\right)\right) + \sup_{v\in[0,1]^d} \frac{\mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v, \eta + \delta_{t^{1/d}v}) > b_t(t^{1/d}v))}{\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v,\eta)} \right. \\ &\left. + (f\mathcal{L}^d)(W_t)^2 \sup_{u,v\in[0,1]^d} \mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v, \eta + \delta_{t^{1/d}v} + \delta_{t^{1/d}u}) > d_t(t^{1/d}v)) \right) \quad \text{für } t\to\infty, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

wobei

$$C_t := \int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{E}\, g_t(x, \eta+\delta_y)\, g_t(y,\eta+\delta_x)\, f(y)\, f(x) \mathbb{1}\{|x-y| \le d_t(x) + d_t(y)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

Auf den ersten Blick mag es überraschend erscheinen, dass b_t und d_t in Satz 2.1.3 beliebig gewählt werden können. Wie wir anhand der Struktur der Terme auf der rechten Seite von (2.1.6) erkennen können, hat eine Vergrößerung von b_t oder d_t zur Folge, dass ein Term in (2.1.6) wächst, während ein anderer möglicherweise fällt. In den folgenden Abschnitten zeigen wir, wie b_t und d_t in unseren Anwendungen gewählt werden können, um gute Konvergenzraten zu erhalten.

Interessante Anwendungen von Satz 2.1.3 ergeben sich, wenn die Auswahlfunktion $(x,\mu) \mapsto g_t(x,\mu)$ als Indikatorfunktion gewählt wird, die angibt, ob ein dem Punkt x zugeordnetes und von μ abhängendes (geometrisches) Funktional einen fest gewählten (von t abhängenden) Wert über- bzw. unterschreitet. In diesem Fall besitzt das Leerereignis $\{\xi_t(\eta) = 0\}$ die Interpretation, dass das gewählte Funktional für jedes Element in $\mathrm{supp}(\eta)$ kleiner oder größer gleich dem fest gewählten Wert ist. Mit dieser Überlegung lässt sich in den folgenden Anwendungen aus Satz 2.1.3 die asymptotische Verteilung des Maximums oder Minimus von $g_t(x, \eta - \delta_x)$ über alle $x \in \eta \cap W_t$ im Limes $t \to \infty$ herleiten. Dies demonstrieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 2.1.4. (a) Seien $t \mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$ und $h : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \to \mathbb{R}$ messbar. Für jedes $t > 0$ und jedes $c > 0$ seien $g_{t,c}(x,\mu) := \mathbb{1}\{h(x,\mu) > u_t - \log c\}$ und $h_c : [0,1]^d \to [0,\infty)$ mit $\int_{[0,1]^d} h_c(v)\,\mathrm{d}v = c$ und ferner

$$\sup_{x\in[0,1]^d} \left| t\,\mathbb{P}\Big(h(t^{1/d}x, \eta) > u_t - \log c\Big)\, f(t^{1/d}x) - h_c(x)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Falls die rechte Seite von (2.1.6) für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3,

$$\mathbb{P}\left(\max_{x\in\eta\cap W_t} h(x,\eta-\delta_x) - u_t \le -\log c\right) = \mathbb{P}(\xi_t(W_t)=0) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbb{P}(\nu([0,1]^d)=0) = e^{-c}, \quad c>0.$$

Wählen wir $c := e^{-\lambda}$, so ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{x\in\eta\cap W_t} h(x,\eta-\delta_x) - u_t \le \lambda\right) = e^{-e^{-\lambda}}, \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dies zeigt, dass $\max\limits_{x\in\eta\cap W_t} h(x,\eta-\delta_x)$ im Anziehungsbereich der Gumbel-Extremwertverteilung (vgl. [58], (0.3)) liegt.

(b) Sei $t\mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$ und $h:\mathbb{R}^d\times\mathbf{N}\to\mathbb{R}$ messbar. Für jedes $t>0$ und jedes $c>0$ seien $g_t(x,\mu) := \mathbb{1}\{h(x,\mu) < c^{1/k}u_t\}$ und $h_c : [0,1]^d \to [0,\infty)$ mit $\int_{[0,1]^d} h_c(v)\,\mathrm{d}v = c$ und ferner

$$\sup_{x\in[0,1]^d} \left| t\,\mathbb{P}\left(h(t^{1/d}x,\eta) < c^{1/k}u_t\right) f(t^{1/d}x) - h_c(x)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Falls die rechte Seite von (2.1.6) für $t\to\infty$ gegen 0 konvergiert, so ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3,

$$\mathbb{P}\left(\min_{x\in\eta\cap W_t} u_t^{-1} h(x,\eta-\delta_x) \ge c^{1/k}\right) = \mathbb{P}(\xi_t(W_t)=0) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbb{P}(\nu([0,1]^d)=0) = e^{-c}, \quad c>0.$$

Wählen wir $c := \lambda^k$, so ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(u_t^{-1} \min_{x\in\eta\cap W_t} h(x,\eta-\delta_x) \ge \lambda\right) = e^{-\lambda^k}, \quad \lambda \ge 0.$$

Dies zeigt, dass $\min\limits_{x\in\eta\cap W_t} h(x,\eta-\delta_x)$ im Anziehungsbereich der Weibull-Extremwertverteilung mit Formparameter k liegt.

□

Beweis von Satz 2.1.3. Wir wollen Satz 2.1.2 verwenden. Dazu müssen wir für alle $v\in[0,1]^d$ eine geeignete Palmsche Version $(t^{-1/d}\xi_t)^v$ von $t^{-1/d}\xi_t$ (bezüglich $t^{-1/d}\xi_t$) bei v konstruieren, sodass die totale Variation $\left\|t^{-1/d}\xi_t - \left((t^{-1/d}\xi_t)^v - \delta_v\right)\right\|$ möglichst klein wird. Sei $\xi_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von ξ_t bei $t^{1/d}v$. Wegen (2.1.4) und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_{[0,1]^d} h(v,t^{-1/d}\xi_t)\,(t^{-1/d}\xi_t)\,(\mathrm{d}v) &= \mathbb{E}\int_{W_t} h(t^{-1/d}x, t^{-1/d}\xi_t)\,\xi_t\,(\mathrm{d}x)\\
&= \mathbb{E}\int_{W_t} h(t^{-1/d}x, t^{-1/d}\xi_t^x)\,\mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}x)\\
&= t\mathbb{E}\int_{[0,1]^d} h(v, t^{-1/d}\xi_t^{t^{1/d}v})\,\mathbb{E}(t^{-1/d}\xi_t)(\mathrm{d}v)
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ist durch $t^{-1/d}\xi_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von $t^{-1/d}\xi_t$ bei v gegeben. Sei $\eta_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei $t^{1/d}v$. Aus (2.1.3) wissen wir, dass die Verdünnung von $\eta_t^{t^{1/d}v}$, also $\xi_t(\eta_t^{t^{1/d}v})$, eine Palmsche Version von ξ_t (bezüglich ξ_t) bei $t^{1/d}v$ ist. Daher lässt sich das oben beschriebene Problem auf die Konstruktion einer geeigneten Palmschen Version von η bezüglich ξ_t

bei $t^{1/d}v$ zurückführen. Sei dazu η_t^x für $x \in W_t = [0, t^{1/d}]^d$ eine von η unabhängige Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei x (nach Annahme ist der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum groß genug, sodass ein solches Objekt darauf existiert). Ferner sei $S_t : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$ die Abbildung aus Definition 2.1.1. Wir weisen nun nach, dass dann für $\mathbb{E}\xi_t$-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c} \tag{2.1.8}$$

eine Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei x gegeben ist und werden diese Version im weiteren Beweis verwenden. Mit der Unabhängigkeit von η und η_t^x und der Definition des Palmschen Maßes gilt für $\mathbb{E}g_t(x,\eta) > 0$ und alle $A \in \mathcal{N}$ in (2.1.2),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c} \in A\Big) \\
&= \iint \mathbb{1}\{\mu_{S_t(x,\mu)} + \varphi_{S_t(x,\mu)^c} \in A\}\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi)\, \mathbb{P}(\eta_t^x \in \mathrm{d}\mu) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}\, g_t(x,\eta)} \iint \mathbb{1}\{(\mu+\delta_x)_{S_t(x,\mu+\delta_x)} + \varphi_{S_t(x,\mu+\delta_x)^c} \in A\}\, g_t(x,\mu)\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi)\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu).
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Da $(g_t)_t$ stabilisierend ist, die Abbildung $\mu \mapsto B(x, R_t(x, \mu + \delta_x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $t > 0$ eine Stoppmenge ist und $x \in S_t(x, \mu + \delta_x)$ gilt, lässt sich (2.1.9) mit der messbaren Funktion

$$g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0, \infty), \quad (\mu, \varphi) \mapsto \mathbb{1}\{\mu + \varphi + \delta_x \in A\}\, g_t(x, \mu),$$

in Satz 1.2.5 umschreiben zu

$$\frac{1}{\mathbb{E}\, g_t(x,\eta)} \int \mathbb{1}\{\mu + \delta_x \in A\}\, g_t(x,\mu)\, \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) = \mathbb{P}(\eta_t^x \in A). \tag{2.1.10}$$

Nach Satz 2.1.2 erhalten wir nun für $t^{-1/d}\xi_t$ und den Poissonprozess ν aus Satz 2.1.3 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\
&\le t \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}\left\| t^{-1/d}\xi_t(\eta) - \left[t^{-1/d}\xi_t\left((\eta_t^{t^{1/d}v})_{S_t(t^{1/d}v, \eta_t^{t^{1/d}v})} + \eta_{S_t(t^{1/d}v, \eta_t^{t^{1/d}v})^c} \right) - \delta_v \right]\right\| \\
&\qquad \times \mathbb{E}g_t(t^{1/d}v, \eta) f(t^{1/d}v)\, \mathrm{d}v + \left\| \mathbb{E}\left(t^{-1/d}\xi_t\right) - h\mathcal{L}^d_{[0,1]^d} \right\| \\
&= \int_{W_t} \mathbb{E}\| \xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}) + \delta_x \|\, \mathbb{E}g_t(x,\eta) f(x)\, \mathrm{d}x \\
&\qquad + \left\| \mathbb{E}\left(t^{-1/d}\xi_t\right) - h\mathcal{L}^d_{[0,1]^d} \right\|.
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Für die totale Variation der Differenz der Intensitätsmaße von $t^{-1/d}\xi_t$ und ν gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbb{E}(t^{-1/d}\xi_t) - h\mathcal{L}^d_{[0,1]^d} \right\| &= \sup_{A \in \mathcal{B}([0,1]^d)} \left| \mathbb{E}(t^{-1/d}\xi_t)(A) - (h\mathcal{L}^d_{[0,1]^d})(A) \right| \\
&= \sup_{A \in \mathcal{B}([0,1]^d)} \left| \int_A \left(t\, \mathbb{E}g_t(t^{1/d}x, \eta) f(t^{1/d}x) - h(x) \right) \mathrm{d}x \right| \\
&\le \sup_{v \in [0,1]^d} \left| t\, \mathbb{E}g_t(t^{1/d}v, \eta) f(t^{1/d}v) - h(v) \right|.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (2.1.11) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\,\nu)\\
&\quad\le \int\limits_{W_t} \mathbb{E}\left\|\xi_t(\eta)-\xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})+\delta_x\right\| \mathbb{E}g_t(x,\eta)f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad+\sup_{v\in[0,1]^d}\left|t\,\mathbb{E}g_t(t^{1/d}v,\eta)f(t^{1/d}v)-h(v)\right|. \qquad (2.1.12)
\end{aligned}$$

Die in (2.1.12) auftretende totale Variation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\|\xi_t(\eta)-\xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})+\delta_x\|\\
&\quad=(\xi_t(\eta)-\xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})+\delta_x)_+(W_t)\\
&\qquad+(\xi_t(\eta)-\xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})+\delta_x)_-(W_t). \qquad (2.1.13)
\end{aligned}$$

Um den ersten Summanden in (2.1.13) abzuschätzen, machen wir folgende Vorüberlegung. Seien dazu $\mu,\varphi\in\mathbf{N}$ und $x,y\in\mathbb{R}^d$ und es gelte

$$S_t(x,\varphi)\cap S_t(y,\mu)=\varnothing. \qquad (2.1.14)$$

Da $(g_t)_t$ stabilisierend ist, ergibt sich aus (2.1.14) und Definition 2.1.1(ii),

$$g_t(y,\mu)=g_t(y,\mu_{S_t(x,\varphi)^c})=g_t(y,\mu_{S_t(x,\varphi)^c}+\varphi_{S_t(x,\varphi)}). \qquad (2.1.15)$$

Diese Überlegung führt auf die Abschätzung

$$(\xi_t(\eta)-\xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})+\delta_x)_+(W_t)\le\sum_{y\in\eta\cap W_t}g_t(y,\eta-\delta_y)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x)\cap S_t(y,\eta)\neq\varnothing\}. \qquad (2.1.16)$$

Zur weiteren Abschätzung von (2.1.16) sei $\widetilde{\eta}$ ein Poissonprozess mit $\widetilde{\eta}\overset{d}{=}\eta$, sodass η und $\widetilde{\eta}$ unabhängig sind. Mit der Unabhängigkeit von η und η_t^x sowie der Definition des Palmschen Maßes in (2.1.2) gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\,g_t(x,\eta)\mathbb{E}\sum_{y\in\eta\cap W_t}g_t(y,\eta-\delta_y)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x)\cap S_t(y,\eta)\neq\varnothing\}\\
&\quad=\mathbb{E}\sum_{y\in\eta\cap W_t}\mathbb{1}\left\{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)\cap S_t(y,\eta)\neq\varnothing\right\}g_t(x,\widetilde{\eta})\,g_t(y,\eta-\delta_y). \qquad (2.1.17)
\end{aligned}$$

Nun folgt mit einer Anwendung der Mecke-Formel auf den Poissonprozess η und der Unabhängigkeit von η und $\widetilde{\eta}$, dass (2.1.17) geschrieben werden kann als

$$\mathbb{E}\int\limits_{W_t}\mathbb{1}\{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)\cap S_t(y,\eta+\delta_y)\neq\varnothing\}\,g_t(x,\widetilde{\eta})\,g_t(y,\eta)\,f(y)\,\mathrm{d}y. \qquad (2.1.18)$$

Wir unterscheiden nach der Größe der Stabilisierungsradien $R_t(x,\eta)$ und $R_t(y,\widetilde{\eta})$ und erhalten mit der Funktion $(x,t)\mapsto b_t(x)$ aus Satz 2.1.3 und (2.1.18) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{W_t}\mathbb{E}g_t(x,\eta)\,f(x)\,\mathbb{E}\sum_{y\in\eta\cap W_t}g_t(y,\eta-\delta_y)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x)\cap S_t(y,\eta)\neq\varnothing\}\,\mathrm{d}x\\
&\quad\le\int\limits_{W_t}\int\limits_{W_t}\mathbb{E}\,\mathbb{1}\{R_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)>b_t(x)\text{ oder }R_t(y,\eta+\delta_y)>b_t(y)\}\,g_t(x,\widetilde{\eta})\,g_t(y,\eta)\,f(y)\,f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad (2.1.19)\\
&\qquad+\int\limits_{W_t}\int\limits_{W_t}\mathbb{E}\,\mathbb{1}\{R_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)\le b_t(x),\,R_t(y,\eta+\delta_y)\le b_t(y),S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)\cap S_t(y,\eta+\delta_y)\neq\varnothing\}\\
&\qquad\quad\times g_t(x,\widetilde{\eta})\,g_t(y,\eta)\,f(y)\,f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \qquad (2.1.20)
\end{aligned}$$

Zur Abschätzung des ersten Summanden (2.1.19) nutzen wir die triviale Schranke $g_t \le 1$ und erhalten mit der Definition der Verdünnung ξ_t, dass sich (2.1.19) nach oben abschätzen lässt durch

$$\begin{aligned} &2\int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{E}\,\mathbb{1}\{R_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x) > b_t(x)\} g_t(x,\widetilde{\eta})\, g_t(y,\eta)\, f(y)\, f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\quad\le 2 \sup_{v\in[0,1]^d} \frac{\mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v,\eta+\delta_{t^{1/d}v}) > b_t(t^{1/d}v))}{\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v,\eta)} (\mathbb{E}\xi_t\,(W_t))^2. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Mit der Substitution $x = t^{1/d}v$ ergibt sich

$$\mathbb{E}\xi_t\,(W_t) = \int_{W_t} \mathbb{E}\, g_t(x,\eta)\, f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[0,1]^d} \Big[t\,\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v,\eta)\, f(t^{1/d}v) - h(v)\Big]\,\mathrm{d}v + \nu\,([0,1]^d).$$

Mit der Annahme (2.1.5) folgt $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\xi_t(W_t) = \nu([0,1]^d)$. Daher lässt sich (2.1.21) asymptotisch abschätzen durch

$$O\left(\sup_{v\in[0,1]^d} \frac{\mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v,\eta+\delta_{t^{1/d}v}) > b_t(t^{1/d}v))}{\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v,\eta)}\right) \quad \text{für } t\to\infty. \tag{2.1.22}$$

Zur Abschätzung des zweiten Summanden (2.1.20) nutzen wir die Ereignisinklusion

$$\begin{aligned} &\{R_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x) \le b_t(x),\ R_t(y,\eta+\delta_y) \le b_t(y), S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x) \cap S_t(y,\eta+\delta_y) \ne \varnothing\} \\ &\quad\subset \{|x-y| \le b_t(x) + b_t(y)\} \end{aligned}$$

und erhalten damit für (2.1.20) die obere Schranke

$$\begin{aligned} &2\int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{E}\, g_t(x,\eta)\, g_t(y,\widetilde{\eta})\, f(y)\, f(x) \mathbb{1}\{|x-y| \le b_t(x)+b_t(y)\}\, \mathbb{1}\{b_t(y) \le b_t(x)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\quad\le 2\int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{E}\, g_t(x,\eta)\, g_t(y,\widetilde{\eta})\, f(y)\, f(x) \mathbb{1}\{|x-y| \le 2b_t(x)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Mit den Substitutionen $y = t^{1/d}u$ und $x = t^{1/d}v$ lässt sich (2.1.23) umformen zu

$$2\int_{[0,1]^d}\int_{[0,1]^d} t^2\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}u,\eta)\, g_t(t^{1/d}v,\widetilde{\eta})\, f(t^{1/d}u)\, f(t^{1/d}v)\, \mathbb{1}\{|v-u| \le \frac{2b_t(t^{1/d}v)}{t^{1/d}}\}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{2.1.24}$$

Mit Annahme (2.1.5) gilt

$$t^2\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}u,\eta)\, g_t(t^{1/d}v,\widetilde{\eta})\, f(t^{1/d}u)\, f(t^{1/d}v) = h(u)h(v) + o(1) \quad \text{für } t\to\infty. \tag{2.1.25}$$

Daher ergibt sich für (2.1.24) die asymptotische obere Schranke

$$O\left(\sup_{v\in[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} h(u)\mathbb{1}\{|v-u| \le \frac{2b_t(t^{1/d}v)}{t^{1/d}}\}\,\mathrm{d}u\right) \quad \text{für } t\to\infty. \tag{2.1.26}$$

Nun betrachten wir den zweiten Summanden in (2.1.13). Mit (2.1.15) ergibt sich analog zu (2.1.16) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &(\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}) + \delta_x)_-(W_t) \\ &\quad\le \sum_{y\in\left((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}-\delta_x\right)\cap W_t} g_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c} - \delta_y) \\ &\qquad\times \mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x) \cap S_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}) \ne \varnothing\}. \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

Mit der Unabhängigkeit von η und η_t^x sowie der Definition von η_t^x ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} g_t(x,\eta) \sum_{y\in\left((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}-\delta_x\right)\cap W_t} g_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}-\delta_y)\\
&\qquad\times \mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x)\cap S_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})\neq\varnothing\}\\
&= \mathbb{E} \sum_{y\in(\widetilde{\eta}_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)}+\eta_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)^c})\cap W_t} g_t(x,\widetilde{\eta})\, g_t(y,\widetilde{\eta}_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)}+\eta_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)^c}+\delta_x-\delta_y)\\
&\qquad\times \mathbb{1}\{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)\cap S_t(y,\widetilde{\eta}_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)}+\eta_{S_t(x,\widetilde{\eta}+\delta_x)^c}+\delta_x)\neq\varnothing\}. \qquad (2.1.28)
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir Satz 1.2.5 mit der Funktion

$$\begin{aligned}
&g:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to[0,\infty),\\
&\quad(\mu,\varphi)\mapsto \sum_{y\in(\mu+\varphi)\cap W_t} g_t(x,\mu)\, g_t(y,\mu+\varphi+\delta_x-\delta_y)\mathbb{1}\{S_t(x,\mu+\delta_x)\cap S_t(y,\mu+\varphi+\delta_x)\neq\varnothing\}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für (2.1.28) der Ausdruck

$$\mathbb{E}\int_{W_t} g_t(x,\eta)\, g_t(y,\eta+\delta_x-\delta_y)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta+\delta_x)\cap S_t(y,\eta+\delta_x)\neq\varnothing\}\,\eta(\mathrm{d}y). \qquad (2.1.29)$$

Eine Anwendung der Mecke-Formel auf (2.1.29) führt auf

$$\mathbb{E}\int_{W_t} g_t(x,\eta+\delta_y)\, g_t(y,\eta+\delta_x)\, f(y)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)\cap S_t(y,\eta+\delta_x+\delta_y)\neq\varnothing\}\,\mathrm{d}y. \qquad (2.1.30)$$

Analog zu oben unterscheiden wir nach der Größe der Stabilisierungsradien $R_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)$ und $R_t(y,\eta+\delta_x+\delta_y)$ und erhalten mit der Funktion $t\mapsto d_t(x)$ aus Satz 2.1.3 und (2.1.30) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_{W_t}\mathbb{E} g_t(x,\eta)\, f(x) \sum_{y\in\left((\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}-\delta_x\right)\cap W_t} g_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c}-\delta_y)\\
&\qquad\times \mathbb{1}\{S_t(x,\eta_t^x)\cap S_t(y,(\eta_t^x)_{S_t(x,\eta_t^x)}+\eta_{S_t(x,\eta_t^x)^c})\neq\varnothing\}\,\mathrm{d}x\\
&\le \int_{W_t}\int_{W_t}\mathbb{E}\, g_t(x,\eta+\delta_y)\, g_t(y,\eta+\delta_x)\\
&\qquad\times \mathbb{1}\{R_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)>d_t(x)\text{ oder } R_t(y,\eta+\delta_x+\delta_y)>d_t(y)\}\, f(y)\, f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad (2.1.31)\\
&\quad+\int_{W_t}\int_{W_t}\mathbb{E}\, g_t(x,\eta+\delta_y)\, g_t(y,\eta+\delta_x)\,\mathbb{1}\{S_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)\cap S_t(y,\eta+\delta_x+\delta_y)\neq\varnothing\}\\
&\qquad\times \mathbb{1}\{R_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)\le d_t(x),\ R_t(y,\eta+\delta_x+\delta_y)\le d_t(y)\}\, f(y)\, f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \qquad (2.1.32)
\end{aligned}$$

Der erste Summand (2.1.31) lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&2\int_{W_t}\int_{W_t}\mathbb{P}\left(R_t(x,\eta+\delta_x+\delta_y)>d_t(x)\right)\, f(y)\, f(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\quad\le O\left((f\mathcal{L}^d)(W_t)^2 \sup_{u,v\in[0,1]^d}\mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v,\eta+\delta_{t^{1/d}v}+\delta_{t^{1/d}u})>d_t(t^{1/d}v))\right). \qquad (2.1.33)
\end{aligned}$$

Den zweiten Summanden (2.1.32) schätzen wir analog zu (2.1.20) ab durch

$$\int_{W_t}\int_{W_t}\mathbb{E}\, g_t(x,\eta+\delta_y)\, g_t(y,\eta+\delta_x)\, f(y)\, f(x)\,\mathbb{1}\{|x-y|\le d_t(x)+d_t(y)\}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =: C_t. \qquad (2.1.34)$$

Mit (2.1.22), (2.1.26), (2.1.33) und (2.1.34) ergibt sich für die rechte Seite von (2.1.12) für $t \to \infty$ die asymptotische obere Schranke

$$
\begin{aligned}
d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le C_t &+ \sup_{v \in [0,1]^d} \left| t\,\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v, \eta)\, f(t^{1/d}v) - h(v) \right| \\
&+ O\Bigg(\sup_{v \in [0,1]^d} (h\mathcal{L}^d)\left(B\left(v, \frac{b_t(t^{1/d}v)}{t^{1/d}}\right)\right) + \sup_{v \in [0,1]^d} \frac{\mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v, \eta + \delta_{t^{1/d}v}) > b_t(t^{1/d}v))}{\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v, \eta)} \\
&\quad + (f\mathcal{L}^d)(W_t)^2 \sup_{u,v \in [0,1]^d} \mathbb{P}(R_t(t^{1/d}v, \eta + \delta_{t^{1/d}v} + \delta_{t^{1/d}u}) > d_t(t^{1/d}v)) \Bigg) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung 2.1.5. Falls $R_t(x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, ein deterministischer Stabilisierungsradius ist, also für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$
g_t(x, \mu) = g_t(x, \mu_{B(x, R_t(x))}), \quad \mu \in \mathbf{N},
$$

gilt, so ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2.1.3 mit der Wahl $b_t(x) := d_t(x) := R_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\
&\le C_t + \sup_{v \in [0,1]^d} \left| t\mathbb{E}\, g_t(t^{1/d}v, \eta)\, f(t^{1/d}v) - h(v) \right| + O\left(\sup_{v \in [0,1]^d} \frac{R_t(t^{1/d}v)^d}{t} \right) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned}
$$

□

2.2 Maximale k-nächsten-Nachbarn-Abstände und Volumeninhalte

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Anwendung von Satz 2.1.3, in der ein deterministischer Stabilisierungsradius existiert (vgl. Bemerkung 2.1.5). Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $c > 0$, $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty)$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ bezeichne $B(x, r)$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r. Ferner seien $(x, t) \mapsto s_t(x)$ eine messbare Abbildung von $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ nach $[0, \infty)$ und η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $f\mathcal{L}^d$. Wir betrachten die Verdünnung

$$
\xi_t \equiv \xi_t(\eta) = \sum_{x \in \eta \cap W_t} \mathbb{1}\{(\eta - \delta_x)(B(x, s_t(x))) \le k\}\, \delta_x. \tag{2.2.1}
$$

Dies ist der Prozess aller Punkte in $\eta \cap W_t$ mit der Eigenschaft, dass die Menge $B(x, s_t(x))$ höchstens k Punkte in $\eta - \delta_x$ enthält. In der Sprache von Kapitel 1 beschreibt der Prozess ξ_t die Verdünnung, die alle Punkte aus $x \in \eta \cap W_t$ behält, die mindestens Abstand $s_t(x)$ zu ihrem k-nächsten Nachbarn haben. Wählen wir $\lambda = f\mathcal{L}^d$, $T_k(x, \mu) = \sup\{r > 0 : \mu(B(x, r) \le k)\}$,

$$
g_t(x, \mu) = \mathbb{1}\{(f\mathcal{L}^d)(B(x, T_k(x, \mu))) > (f\mathcal{L}^d)(B(x, s_t(x)))\}, \quad y \in \mathbb{R}^d,\ \mu \in \mathbf{N}, \tag{2.2.2}
$$

so stellen wir fest, dass die Prozess ξ_t aus (2.2.1) in den allgemeinen Rahmen von Abschnitt 2.1 fällt. Für spezielle Wahlen von $s_t(x)$ ergeben sich bekannte und in der Literatur studierte Modelle:

- Mit der Wahl $s_t \equiv s_t(0)$ unabhängig von $x \in \mathbb{R}^d$ ist ξ_t der Prozess aller Punkte in $\eta \cap W_t$, deren Abstand zum $(k+1)$-nächsten Nachbarn größer als s_t ist, wobei wir die in Abschnitt 1.2.4 erklärte totale Ordnung auf $\mathbb{R}^d$ verwenden. Für binomialverteilte Punkte wurde in [52] die Konvergenz in Verteilung gegen einen Poissonprozess bewiesen. Zuvor wurde dieser Prozess in [27] untersucht.
- Wählen wir $s_t(x) := \inf\{s > 0 : (f\,\mathcal{L}^d)(B(x,s)) > v_t\}$ für eine wachsende Funktion $v : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so erhalten wir den Prozess aller Punkte in $\eta \cap W_t$ mit der Eigenschaft, dass der Volumeninhalt $(f\,\lambda)(B(x, N_k(x,\eta)))$ des Balls um x mit dem Abstand zum k-nächsten Nachbarn $N_k(x,\eta)$ als Radius größer als v_t ist. In [26] wurde für $k = 0$ gezeigt, dass die Verteilung des maximalen Volumeninhalts in diesem Modell im Anziehungsbereich der Gumbelverteilung liegt.

Unser Ziel besteht im Folgenden in der Formulierung von Bedingungen, die die Konvergenz von $t^{-1/d}\xi_t$ im totalen Variationsabstand d_{TV} gegen einen Poissonprozess ν auf $[0,1]^d$ mit Intensitätsmaß $h\lambda^d_{[0,1]^d}$ für eine geeignete Dichte h sicherstellen.

Dazu bestimmen wir zunächst das Intensitätsmaß von $t^{-1/d}\xi_t$. Für $A \in \mathcal{B}^d$ gilt mit der Mecke-Formel und der Substitution $x = t^{1/d}v$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, t^{-1/d}\xi_t(A) = \mathbb{E}\,\xi_t(t^{1/d}A) &= \int_{t^{1/d}A\cap W_t} \mathbb{P}(\eta(B(x,s_t(x)) \le k)\, f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{k} \int_{t^{1/d}A\cap W_t} e^{-(f\,\mathcal{L}^d)(B(x,s_t(x)))}\, \frac{(f\,\mathcal{L}^d)(B(x,s_t(x)))^i}{i!}\, f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{k} \int_{A\cap[0,1]^d} e^{-(f\,\mathcal{L}^d)(B(t^{1/d}v,s_t(t^{1/d}v)))}\, \frac{(f\,\mathcal{L}^d)(B(t^{1/d}v,s_t(t^{1/d}v)))^i}{i!}\, t\, f(t^{1/d}v)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Im Beweis der Konvergenz des Prozesses $t^{-1/d}\xi_t$ gegen einen Poissonprozess ν wollen wir Satz 2.1.3 verwenden. Offensichtlich ist

$$R_t(x) := s_t(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\, t > 0, \tag{2.2.3}$$

ein (deterministischer) Stabilisierungsradius. Wie sich zeigen wird, ergeben sich bedeutende Unterschiede in den Beweisen und Konvergenzraten in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{N}_0$. Daher betrachten wir zunächst den Fall $k = 0$ separat und formulieren folgendes Resultat. Dabei ist

$$a_t(x) := e^{-(f\mathcal{L}^d)(B(x,s_t(x)))}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2.4}$$

Satz 2.2.1. *Seien $k = 0$, $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ messbar und $h : [0,1]^d \to [0,\infty)$ stetig, $(x,t) \mapsto s_t(x)$ eine messbare Funktion von $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ nach $(0,\infty)$ und η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $f\,\mathcal{L}^d$. Es gelte*

$$\sup_{v\in[0,1]^d} \left| t a_t(t^{1/d}v) f(t^{1/d}v) - h(v) \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0. \tag{2.2.5}$$

und es existiere ein $\beta \in (0,1)$, sodass für alle $s \ge r > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $x \notin B(y,s)$,

$$(f\mathcal{L}^d)\left[B(y,s) \setminus B(x,r)\right] \ge (1-\beta)(f\mathcal{L}^d)B(y,s). \tag{2.2.6}$$

Ferner seien ξ_t aus (2.2.1) und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $h\,\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\
&\le \sup_{v\in[0,1]^d} \left| t\, a_t(t^{1/d}v)\, f(t^{1/d}v) - h(v) \right| + O\left(\sup_{v\in[0,1]^d} \frac{s_t^d(t^{1/d}v)}{t a_t^{\beta}(t^{1/d}v)} \right) \quad \textit{für } t \to \infty.
\end{aligned}$$

Bevor wir Satz 2.2.1 beweisen, wollen wir dessen Voraussetzungen interpretieren. Durch Bedingung (2.2.5) ist sichergestellt, dass das Intensitätsmaß von $t^{-1/d}\xi_t$ gegen das Intensitätsmaß von ν konvergiert. Die Bedingung (2.2.6) ist eine natürliche Forderung erfüllt, falls etwa $f \equiv \gamma$ für ein $\gamma > 0$ (siehe hierzu auch Beispiel 2.2.2 unten). Dadurch ist eine uniforme obere Schranke an den relativen Volumeninhalt des Schnittes zweier gestreckter und verschobener Kugeln gegeben. Diese Schranke wird im Beweis des Satzes bei der Abschätzung des zweiten faktoriellen Moments von $\xi_t(W_t)$ eine entscheidende Rolle spielen.

Beweis von Satz 2.2.1. Wir verwenden Satz 2.1.3. Mit der Wahl

$$b_t(x) := d_t(x) := s_t(x), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d,$$

erhalten wir aus (2.2.3) und Bemerkung 2.1.5 für ξ_t und den Poissonprozess ν aus Satz 2.2.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} &d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\ &\quad \leq C_t + \sup_{v \in [0,1]^d} \left| t\, a_t(t^{1/d}v)\, f(t^{1/d}v) - h(v) \right| + O\left(\sup_{v \in [0,1]^d} \frac{s_t^d(t^{1/d}v)}{t} \right) \quad \text{für } t \to \infty. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Im Folgenden verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$B_t(x) := B(x, s_t(x)), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Wir schätzen nun den Term C_t auf der rechten Seite von (2.2.7) ab. Mit einer Unterscheidung, ob $s_t(x)$ oder $s_t(y)$ größer ist, gilt

$$\begin{aligned} C_t &= \int_{W_t} \int_{W_t} \mathbb{P}\left((\eta + \delta_y)(B_t(x)) = 0,\, (\eta + \delta_x)(B_t(y)) = 0 \right) \mathbb{1}\{|x-y| \leq (s_t(x) + s_t(y))\} \\ &\qquad \times\, f(y) f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &\leq 2 \int_{W_t} \int_{W_t} e^{-(f\mathcal{L}^d)(B_t(x))}\, e^{-(f\mathcal{L}^d)(B_t(y)) \setminus B_t(x)} \mathbb{1}\{|x-y| \leq 2s_t(y)\}\, f(y)\, f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Mit (2.2.6) lässt sich (2.2.8) nach oben abschätzen durch

$$2 \int_{W_t} \int_{W_t} e^{-(f\mathcal{L}^d)(B_t(x))}\, e^{-(1-\beta)(f\mathcal{L}^d)(B_t(y))}\, \mathbb{1}\{|x-y| \leq 2s_t(y)\}\, f(y)\, f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{2.2.9}$$

Indem wir zunächst $x = t^{1/d}v$ und $y = t^{1/d}u$ substituieren, erhalten wir mit a_t aus (2.2.4) für (2.2.9) den Ausdruck

$$2 \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} t^2 a_t(t^{1/d}v)\, a_t^{1-\beta}(t^{1/d}u)\, \mathbb{1}\left\{ |u-v| \leq \frac{2s_t(t^{1/d}u)}{t^{1/d}} \right\} f(t^{1/d}u) f(t^{1/d}v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u. \tag{2.2.10}$$

Wie in (2.1.24) lässt sich (2.2.10) abschätzen durch

$$2 \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} (h(u)h(v) + o(1)) a_t^{-\beta}(t^{1/d}u)\, \mathbb{1}\left\{ |u-v| \leq \frac{2s_t(t^{1/d}u)}{t^{1/d}} \right\} \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.2.11}$$

Da h als stetige Funktion auf $[0,1]^d$ beschränkt ist, lässt sich (2.2.11) asymptotisch nach oben abschätzen durch

$$O\left(\sup_{u \in [0,1]^d} \frac{s_t^d(t^{1/d}u)}{t a_t^\beta(t^{1/d}u)} \right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.2.12}$$

Indem wir diesen Ausdruck in (2.2.7) einsetzen und beachten, dass $|a_t| \leq 1$ gilt, erhalten wir die Behauptung. □

Besonders anschaulich wird die Aussage von Satz 2.2.1, wenn der zugrunde liegende Poissonprozess η stationär ist und der für die Verdünnung maßgebliche Skalierungsfaktor s_t nicht von $x \in \mathbb{R}^d$ abhängt. In diesem Fall ist der verdünnte Prozess ebenfalls stationär und die im Satz abstrakt angegebene Abschätzung lässt sich konkretisieren. Dies demonstrieren wir in folgendem Beispiel.

Beispiel 2.2.2. (Maximale Radien im stationären nächsten-Nachbarn-Graphen) Seien $c > 0$, $\gamma > 0$ und η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität γ. Wir definieren s_t für $t > 0$ durch

$$s_t := \left(\frac{\log(\gamma\, t/c)}{\gamma \kappa_d} \right)^{1/d}. \tag{2.2.13}$$

Damit gilt

$$\gamma\, t\, e^{-\gamma\, \mathcal{L}^d(B(0,s_t))} = c, \quad t > 0,$$

womit wir Bedingung (2.2.5) verifizieren können. Zur Verifikation von Bedingung (2.2.6) stellen wir fest, dass für alle $s \geq r > 0$ gilt,

$$\mathcal{L}^d \left(B(y,s) \setminus B(x,r) \right) \geq \frac{s^d \kappa_d}{2}. \tag{2.2.14}$$

Ferner gilt

$$a_t = e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(0,s_t))} = \frac{c}{\gamma t}, \quad t > 0.$$

□

Somit ergibt sich folgendes Korollar aus Satz 2.2.1.

Korollar 2.2.3. *Seien $k = 0$, $c > 0$, $\gamma > 0$, s_t aus* (2.2.13) *sowie η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$. Ferner seien ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d}$ und ξ_t aus* (2.2.1)*. Dann existiert ein $\beta \in (0,1)$, sodass gilt*

$$d_{TV}\left(t^{-1/d}\xi_t,\, \nu\right) \leq O\left(t^{\beta-1} \log t\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Bemerkung 2.2.4. Für s_t aus (2.2.13) erhalten wir die Darstellung

$$\mu(B(x,s_t(x))) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma\kappa_d(\sup\{s > 0 : \mu(B(x,s)) = 0\})^d \geq \log(\gamma t) - \log c, \quad \mu \in \mathbf{N},\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Wie in Bemerkung 2.1.4(a) ergibt sich somit aus Korollar 2.2.3 die folgende Verteilungsaussage:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\gamma\kappa_d \max_{x \in \eta \cap W_t} (\sup\{s > 0 : (\eta - \delta_x)(B(x,s)) = 0\})^d - \log(\gamma t) < \lambda \right) = e^{-e^{-\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2.15}$$

□

Wir untersuchen nun den Fall näher, in dem die integrierten Größen $(f\mathcal{L}^d)(B(x,s_t(x)))$ nicht von $x \in \mathbb{R}^d$ abhängen. Dabei arbeiten wir in der Situation eines Poissonprozesses mit stetiger Dichtefunktion f und behandeln zunächst den Fall $k = 0$ in Satz 2.2.5 und daraufhin den allgemeinen Fall $k \in \mathbb{N}$ in Satz 2.2.7. Für $k = 0$ wird in [26] die asymptotische Verteilung des maximalen Volumeninhalts für den Fall n unabhängiger und identisch verteilter Punkte auf einem beschränkten Gebiet im Limes $n \to \infty$ hergeleitet.

Satz 2.2.5. *Seien $k = 0$, $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ stetig, $h : [0,1]^d \to [0,\infty)$ stetig und*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,\mathrm{d}z = \infty, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$t \mapsto a_t$ eine messbare Funktion von $(0,\infty)$ nach $(0,\infty)$ mit $a_t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ sowie

$$s_t(x) := \inf\left\{r > 0 : (f\mathcal{L}^d)(B(x,r)) \ge -\log a_t\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d,\, t > 0,$$

und es gelte

$$\sup_{v\in[0,1]^d} \left| t a_t f(t^{1/d} v) - h(v)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0. \tag{2.2.16}$$

Ferner existieren $\alpha, \beta \in (0,1)$ mit

$$(f\mathcal{L}^d)\left[B(y,s) \setminus B(x,r)\right] \ge (1-\beta)(f\mathcal{L}^d)(B(y,s)) \text{ für } s \ge r > 0 \text{ und } x, y \in \mathbb{R}^d \text{ mit } x \notin B(y,s), \tag{2.2.17}$$

$$(f\mathcal{L}^d)(B(x,ar)) \le \alpha a^d (f\mathcal{L}^d)(B(x,r)) \quad \text{für } a, r > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2.18}$$

Weiter seien ξ_t aus (2.2.1) und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $h\,\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\ &\quad\le \sup_{v\in[0,1]^d} \left| t\, a_t\, f(t^{1/d} v) - h(v)\right| + O\left(a_t^{1-\beta} \log a_t^{-1}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \end{aligned}$$

Beweis. Wir wählen $b_t(x) := d_t(x) := s_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, in Satz 2.1.3 und erhalten mit (2.2.3) und Bemerkung 2.1.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le{}& C_t + \sup_{v\in[0,1]^d} \left| t\, a_t\, f(t^{1/d} v) - h(v)\right| \\ &+ O\left(\sup_{v\in[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} h(u) \mathbb{1}\{|v-u| \le \frac{2 s_t(t^{1/d} v)}{t^{1/d}}\}\,\mathrm{d}u\right) \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

für $t \to \infty$. Wie im Beweis von Satz 2.2.1 verwenden wir die Abkürzung

$$B_t(x) := B(x, s_t(x)), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Zunächst erläutern wir, wie sich der letzte Summand in (2.2.19) vereinfachen lässt. Für alle $v \in [0,1]^d$ gilt wegen (2.2.16),

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]^d} h(u) \mathbb{1}\{|v-u| \le \frac{2 s_t(t^{1/d} v)}{t^{1/d}}\}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{[0,1]^d} \left[h(u) - t a_t f(t^{1/d} u) + t a_t f(t^{1/d} u)\right] \mathbb{1}\left\{\left|t^{1/d} v - t^{1/d} u\right| \le s_t(t^{1/d} v)\right\}\,\mathrm{d}u \\ &\le \sup_{u\in[0,1]^d} \left|h(u) - t\, a_t\, f(t^{1/d} u)\right| + a_t \int_{W_t} f(x)\, \mathbb{1}\{|x - t^{1/d} v| \le s_t(t^{1/d} v)\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Mit der Definition von $s_t(t^{1/d} v)$ lässt sich (2.2.20) nach oben abschätzen durch

$$\sup_{u\in[0,1]^d} \left|h(u) - t\, a_t\, f(t^{1/d} u)\right| + a_t \log a_t^{-1} \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.2.21}$$

Der Term C_t lässt sich abschätzen durch

$$2\int\limits_{W_t}\int\limits_{B(y,2s_t(y))} e^{-(f\mathcal{L}^d)(B_t(x))}\, e^{-(1-\beta)(f\mathcal{L}^d)(B_t(y))}\mathbb{1}\{s_t(y)\geq s_t(x)\}f(y)\,f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.2.22}$$

Mit der Definition von $s_t(y)$ und (2.2.18) lässt sich (2.2.22) abschätzen durch

$$\begin{aligned}&2\int\limits_{W_t}\int\limits_{B(y,2s_t(y))} a_t\, a_t^{1-\beta}\mathbb{1}\{s_t(y)\geq s_t(x)\}f(y)\,f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\leq \alpha 2^{d+1}a_t^{2-\beta}\int\limits_{W_t}\int\limits_{B(y,s_t(y))} f(y)\,f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Somit erhalten wir für (2.2.23) die obere Schranke

$$\alpha 2^{d+1}a_t^{1-\beta}\log a_t^{-1}\mathbb{E}\,\xi_t(W_t) = O\left(a_t^{1-\beta}\log a_t^{-1}\right)\quad \text{für } t\to\infty. \tag{2.2.24}$$

Wegen $a_t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ ergibt sich aus (2.2.21) und (2.2.24) durch Einsetzen in (2.2.19) die Behauptung. □

Man beachte, dass wir in Satz 2.2.5 nur fordern, dass die integrierten Größen $a_t \equiv a_t(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, nicht von x abhängen. Die Größen $s_t(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$, können dabei so gewählt werden, dass die Inhomogenität von s_t die der nichtkonstanten Dichte f kompensiert. Ein solches Beispiel diskutieren wir nun.

Beispiel 2.2.6. (Maximale Volumeninhalte im nächsten-Nachbarn-Graphen) Während wir in Beispiel 2.2.2 Knoten im stationären nächsten-Nachbarn-Graphen mit großem Abstand zum nächsten Nachbarn betrachtet haben, studieren wir nun große Volumeninhalte. Diese Unterscheidung ist nur gerechtfertigt, falls η nicht stationär ist.

Seien $f\geq 0$ stetig und η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $f\mathcal{L}^d$. Ferner seien $t\mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$ mit $u_t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ und $h:[0,1]^d\to[0,\infty)$ stetig mit $\int_{[0,1]^d} h(v)\,\mathrm{d}v =: H>0$, sodass

$$\sup_{v\in[0,1]^d}\left|tu_t f(t^{1/d}v) - h(v)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Wir definieren für alle $c>0$,

$$a_{t,c} := \frac{cu_t}{H},\quad s_{t,c}(x) := \inf\{r>0:\ (f\,\mathcal{L}^d)(B(x,r))\geq -\log a_{t,c}\},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d. \tag{2.2.25}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt nun

$$\{\mu(B(x,s_{t,c}(x)))=0\} = \{(f\mathcal{L}^d)(B(x,\sup\{r>0:\ \mu(B(x,r))=0\}))\geq -\log a_{t,c}\},\quad \mu\in\mathbf{N},\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Falls die Voraussetzungen (2.2.17) und (2.2.18) erfüllt sind, erhalten wir aus Satz 2.2.5 wie in Bemerkung 2.1.4(a) die folgende Extremwertaussage:

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\left(\max_{x\in\eta\cap W_t}(f\mathcal{L}^d)(B(x,\sup\{r>0:\ (\eta-\delta_x)(B(x,r))=0\})) - \log H + \log u_t < \lambda\right) = e^{-e^{-\lambda}},\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{2.2.26}$$

Im Fall einer konstanten Dichte $f\equiv\gamma$ wählen wir $u_t := 1/t$, $h\equiv\gamma$ und erkennen, dass die Aussage (2.2.26) mit (2.2.15) übereinstimmt. □

Im Fall $k \in \mathbb{N}$ gilt folgendes Resultat.

Satz 2.2.7. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ stetig mit $(f\mathcal{L}^d)(\mathbb{R}^d) = \infty$ und $h : [0,1]^d \to [0,\infty)$ stetig, $t \mapsto a_t$ eine messbare Funktion von $(0,\infty)$ nach $(0,\infty)$ mit $a_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sowie*

$$s_t(x) := \inf\left\{r > 0 : (f\mathcal{L}^d)(B(x,r)) \geq -\log a_t\right\}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d.$$

und es gelte

$$\sup_{v\in[0,1]^d}\left| t a_t \frac{\log^k(a_t^{-1})}{k!} f(t^{1/d}v) - h(v)\right| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.2.27}$$

Wir nehmen an, dass $\alpha, \beta \in (0,1)$ existieren, sodass für alle $s \geq r > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$(f\mathcal{L}^d)\left[B(y,s) \setminus B(x,r)\right] \geq (1-\beta)(f\mathcal{L}^d)(B(y,s)) \quad \textit{für } x \notin B(y,s), \tag{2.2.28}$$

$$\frac{(f\mathcal{L}^d)[B(y,s) \setminus B(x,r)]}{(f\mathcal{L}^d)(B(y,s))^{(d-1)/2d}} \geq \alpha|x-y|^{(d+1)/2} \sup_{z\in B(x,2r)} f(z)^{(d+1)/2d} \quad \textit{für } x \in B(y,s), \tag{2.2.29}$$

$$(f\mathcal{L}^d)(B(x,ar)) \leq \alpha a^d (f\mathcal{L}^d)(B(x,r)) \quad \textit{für } a > 0. \tag{2.2.30}$$

Weiter seien ξ_t aus (2.2.1) und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $h\,\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\ &\leq \sup_{v\in[0,1]^d}\left| t\, a_t \frac{(\log a_t^{-1})^k}{k!} f(t^{1/d}v) - h(v)\right| + O\left((-\log a_t)^{-\frac{d-1}{d+1}}\right) \quad \textit{für } t \to \infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.2.8. In dem Fall, dass die Dichtefunktion f (nach oben und unten) beschränkt ist (also insbesondere im Fall eines stationären Poissonprozesses η), ist leicht einzusehen, dass die Voraussetzungen (2.2.28) und (2.2.30) erfüllt sind. In Lemma 2.2.10 unten zeigen wir, dann auch Bedingung (2.2.29) erfüllt ist. □

Beweis von Satz 2.2.7. Wir verwenden Satz 2.1.3, wählen $b_t(x) := d_t(x) := s_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, und erhalten mit (2.2.3) und Bemerkung 2.1.5 die Abschätzung

$$\begin{aligned} &d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \\ &\leq C_t + \sup_{v\in[0,1]^d}\left| t\, a_t \frac{\log^k(a_t^{-1})}{k!} f(t^{1/d}v) - h(v)\right| + O\left(\sup_{v\in[0,1]^d}\int_{[0,1]^d} h(u)\mathbb{1}\{|v-u| \leq \frac{2s_t(t^{1/d}v)}{t^{1/d}}\}\,\mathrm{d}u\right) \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

für $t \to \infty$. Wie zuvor verwenden wir die Abkürzung

$$B_t(x) := B(x, s_t(x)), \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 2.2.5 lässt sich zeigen, dass der letzte Summand in (2.2.31) nach oben beschränkt ist durch

$$\sup_{z\in[0,1]^d}\left| h(z) - t\, a_t \frac{\log^k(a_t^{-1})}{k!} f(t^{1/d}z)\right| + O\left(a_t \log^{k+1} a_t^{-1}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.2.32}$$

Um den Term C_t in (2.2.31) abzuschätzen, unterscheiden wir danach, ob $x \in B(y, s_t(y))$ oder $x \in B(y, 2s_t(x)) \setminus B(y, s_t(y))$ gilt. Dies führt auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} C_t \leq 2 \int_{W_t} \int_{W_t} & \mathbb{P}((\eta + \delta_y)(B_t(x)) \leq k,\, (\eta + \delta_x)(B_t(y)) \leq k) \\ & \times \mathbb{1}\{x \in B(y, s_t(y))\} \mathbb{1}\{s_t(y) \geq s_t(x)\} f(y) f(x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ + 2 \int_{W_t} \int_{W_t} & \mathbb{P}((\eta + \delta_y)(B_t(x)) \leq k,\, (\eta + \delta_x)(B_t(y)) \leq k) \\ & \times \mathbb{1}\{x \in B(y, 2s_t(x)) \setminus B(y, s_t(y))\} \mathbb{1}\{s_t(y) \geq s_t(x)\} f(y) f(x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Der erste Summand in (2.2.33) lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned} 2 \int_{W_t} \int_{W_t} & \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \leq k) \, \mathbb{P}(\eta(B_t(y) \setminus B_t(x)) \leq k - 1) \\ & \times \mathbb{1}\{x \in B(y, s_t(y))\} \mathbb{1}\{s_t(y) \geq s_t(x)\} f(y) f(x) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = x + s_t(x)v$ im inneren Integral lässt sich dieser Ausdruck schreiben als

$$\begin{aligned} 2 \int_{W_t} \int_{B(0,1) \cap s_t^{-1}(W_t - y)} & \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \leq k) \, \mathbb{P}(\eta(B_t(x + s_t(x)v) \setminus B_t(x)) \leq k - 1) \\ & \times s_t(x)^d \, \mathbb{1}\{s_t(x + s_t(x)v) \geq s_t(x)\} f(x) f(x + s_t(x)v) \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Da die Funktion $z \mapsto \sum_{i=0}^{k-1} e^{-z} \frac{z^i}{i!}$ für $z > 0$ groß genug fallend ist, ergibt sich im Fall $s_t(x + s_t(x)v) \geq s_t(x)$ für $v \in B(0,1)$ mit (2.2.29) für $t > 0$ groß genug die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\eta(B_t(x + s_t(x)v) \setminus B_t(x)) \leq k - 1) \\ & \leq \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2} (-\log a_t)^{(d-1)/2d} s_t(x + s_t(x)v)^{(d+1)/2} |v|^{(d+1)/2} \sup_{z \in B(x, 2s_t(x))} f(z)^{(d+1)/2d} \right\}. \end{aligned}$$

Indem wir diese Beziehung in (2.2.34) einsetzen, erhalten wir für $t > 0$ groß genug für (2.2.34) die obere Schranke

$$\begin{aligned} 2 \int_{W_t} \int_{\delta A \cap s_t^{-1}(W_t - y)} & \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \leq k) \, s_t(x)^d \, \mathbb{1}\{s_t(x + s_t(x)v) \geq s_t(x)\} f(x) f(x + s_t(x)v) \\ & \times \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2} (-\log a_t)^{(d-1)/2d} s_t(x + s_t(x)v)^{(d+1)/2} |v|^{(d+1)/2} \sup_{z \in B(x, 2s_t(x))} f(z)^{(d+1)/2d} \right\} \mathrm{d}v \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Nach Transformation des inneren Integrals auf d-dimensionale Polarkoordinaten ergibt sich für (2.2.35) die obere Schranke

$$\begin{aligned} 2d\kappa_d \int_{W_t} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^1 & \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \leq k) \, s_t(x)^d \, \mathbb{1}\{s_t(x + s_t(x)r\theta) \geq s_t(x)\} f(x) f(x + s_t(x)r\theta) \\ & \times \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2} (-\log a_t)^{(d-1)/2d} s_t(x)^{(d+1)/2} r^{(d+1)/2} \sup_{z \in B(x, 2s_t(x))} f(z)^{(d+1)/2d} \right\} r^{d-1} \,\mathrm{d}r \, \sigma^{d-1}(\mathrm{d}\theta) \,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Mit der Substitution $r = \left[\frac{\alpha}{2}(-\log a_t)^{(d-1)/2d} s_t(x)^{(d+1)/2} \sup_{z \in B(x, 2s_t(x))} f(z)^{(d+1)/2d}\right]^{-2/(d+1)} q$ ergibt sich für (2.2.36) wegen $f(x + s_t(x)r\theta) \leq \sup_{z \in B(x, 2s_t(x))} f(z)$ die obere Schranke

$$\frac{4^{1/(d+1)} d\kappa_d}{\alpha^{2d/(d+1)}(d+1)} \int_{W_t} \int_0^\infty \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \leq k) \, f(x) \, (-\log a_t)^{-(d-1)/(d+1)} \, e^{-q} q^{(d-1)/(d+1)} \,\mathrm{d}q \,\mathrm{d}y. \tag{2.2.37}$$

Wegen $\int_0^\infty e^{-q} q^{(d-1)/(d+1)} < \infty$ und Bedingung (2.2.27) ergibt sich für (2.2.37) die asymptotische obere Schranke

$$O\left((-\log a_t)^{-\frac{d-1}{d+1}}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.2.38}$$

Den zweiten Summanden aus (2.2.33) schätzen wir ab durch

$$2\int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \le k)\, \mathbb{P}(\eta(B_t(y) \setminus B_t(x)) \le k)\, \mathbb{1}\{x \in B(y, 2s_t(x)) \setminus B(y, s_t(y))\}$$
$$\times \mathbb{1}\{s_t(y) \ge s_t(x)\}\, f(y)\, f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Da die Funktion $z \mapsto e^{-z} \sum_{i=0}^k \frac{z^i}{i!}$ für $z > 0$ groß genug fallend ist, lässt sich dieser Ausdruck mit Bedingung (2.2.28) für alle $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ groß genug abschätzen durch

$$\int_{W_t}\int_{W_t} \mathbb{P}(\eta(B_t(x)) \le k)\, e^{-(1-\beta-\varepsilon)(f\mathcal{L}^d)(B_t(y))}\, \mathbb{1}\{|x-y| \le 2s_t(y)\}\, f(y)\, f(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{2.2.39}$$

Analog zum Beweis von Satz 2.2.1 lässt sich zeigen, dass (2.2.39) die asymptotische obere Schranke

$$O\left(a_t^{\beta-\varepsilon} \log a_t^{-1}\right) \quad \text{für } t \to \infty \tag{2.2.40}$$

besitzt. Einsetzen von (2.2.32), (2.2.38) und (2.2.40) in (2.2.7) ergibt die Behauptung. □

Beispiel 2.2.9. (Maximale Volumeninhalte im k-nächsten-Nachbarn-Graphen) Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $f \ge 0$ stetig und η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $f\mathcal{L}^d$. Ferner seien $t \mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0, \infty)$ nach $[0, \infty)$ mit $u_t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ und $h : [0,1]^d \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_{[0,1]^d} h(v)\, \mathrm{d}v =: H > 0$, sodass

$$\sup_{v \in [0,1]^d} \left| t u_t f(t^{1/d} v) - h(v) \right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Wir definieren für alle $c > 0$,

$$a_{t,c} := \frac{c u_t}{H(\log u_t^{-1})^k}, \quad s_{t,c}(x) := \inf\{r > 0 : (f\mathcal{L}^d)(B(x,r)) \ge -\log a_{t,c}\}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2.41}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt nun

$$\{\mu(B(x, s_t(x))) \le k\} = \{(f\mathcal{L}^d)(B(x, \sup\{r > 0 : \mu(B(x,r)) \le k\})) \ge -\log a_t\}, \quad \mu \in \mathbf{N},\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Wir zeigen nun, dass Bedingung (2.2.27) erfüllt ist. Es gilt

$$a_t \frac{(\log a_t^{-1})^k}{k!} = \frac{c}{H} \frac{u_t}{(\log u_t^{-1})^k} \left[\left(\log \frac{H}{ck! u_t}\right)^k + O\left((\log u_t^{-1})^{k-1} \cdot \log\log u_t^{-1}\right)\right]. \tag{2.2.42}$$

Aus (2.2.41) und (2.2.42) erhalten wir

$$\sup_{v \in [0,1]^d} \left| t a_t \frac{(\log a_t^{-1})^{k-1}}{(k-1)!} f(t^{1/d} v) - \frac{ch(v)}{H} \right| = O\left(\frac{\log\log u_t^{-1}}{\log u_t^{-1}}\right).$$

Falls die Voraussetzungen (2.2.28), (2.2.29) und (2.2.30) erfüllt sind, erhalten wir folglich aus Satz 2.2.7 wie in Bemerkung 2.1.4(a) die folgende Extremwertaussage:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{x \in \eta \cap W_t} (f\mathcal{L}^d)(B(x, \sup\{r > 0 : (\eta - \delta_x)(B(x,r)) \le k\})) - \log H + \log u_t - k \log\log u_t^{-1} < \lambda\right)$$
$$= e^{-e^{-\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2.43}$$

Wir erkennen, dass die Aussage (2.2.43) im Fall $k = 0$ mit (2.2.26) übereinstimmt. □

Das folgende Lemma gibt eine obere Schranke an das Volumen der Vereinigung der Kugel $B(0,s)$ und einer Skalierung dieser Kugel. Damit rechtfertigt es die Sinnhaftigkeit von Bedingung (2.2.29) in Satz 2.2.7. Insbesondere folgt, dass die Bedingung (2.2.29) für eine nach oben beschränkte Dichte f ohne weitere Voraussetzung erfüllt ist.

Lemma 2.2.10. *Für alle $x \in B(0,1)$ gilt*

$$\mathcal{L}^d(B(0,1) \setminus B(x,1)) \geq \frac{2\kappa_{d-1}}{d+1}|x|^{(d+1)/2}. \tag{2.2.44}$$

Beweis. Sei $x \in B(0,1)$, H eine Hyperebene und $z \in \mathbb{R}^d \setminus H$. Wir erinnern daran, dass wir H_z^+ für den abgeschlossenen Halbraum schreiben, der durch H beschränkt ist und z enthält. Die Menge $B(0,1) \setminus B(x,1)$ enthält den Schnitt von $B(0,1)$ und $H\left(-\frac{x}{|x|}, 1-|x|\right)^+_{-x/|x|}$. Um eine obere Schranke an das Volumen dieser Menge zu finden, verwenden wir die elementare Gleichung

$$\lambda^{d-1}(B(0,1) \cap H(u,r)) = \kappa_{d-1}(1-r^2)^{(d-1)/2}, \quad u \in \mathbb{S}^{d-1},\ r \in [0,1].$$

Mit der Beziehung $1 - r \leq 1 - r^2$ für $r \leq 1$ gilt daher

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^d(B(0,1) \setminus B(x,1)) &\geq \mathcal{L}^d\left(B(0,1) \cap H\left(-\frac{x}{|x|}, 1-|x|\right)^+_{-x/|x|}\right)\\ &= \kappa_{d-1}\int_{1-|x|}^1 (1-r^2)^{(d-1)/2}\,\mathrm{d}r \geq \kappa_{d-1}\int_{1-|x|}^1 (1-r)^{(d-1)/2}\,\mathrm{d}r = \frac{2\kappa_{d-1}}{d+1}|x|^{(d+1)/2}.\end{aligned}$$

□

2.3 Maximale Radien im Poisson-lilypond-Modell

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Anwendung von Satz 2.1.3 im Poisson-lilypond-Modell in $\mathbb{R}^d$. Das lilypond-Modell zu einer endlichen Menge $\chi \in \mathbf{N}_{<\infty}$ ergibt sich wie folgt. Zur Zeit 0 beginnen alle Punkte in χ mit Geschwindigkeit 1 in alle Richtungen zu wachsen. Ohne Wechselwirkung mit anderen Punkten ist jeder Punkt $x \in \chi$ zur Zeit $t > 0$ zu einem Ball mit Mittelpunkt x und Radius t angewachsen. Das lilypond-Modell zu χ ergibt sich, wenn jeder Ball zu wachsen aufhört, sobald er einen anderen Ball berührt, der seinerseits entweder durch die Berührung zu wachsen aufhört oder bereits davor zu wachsen aufgehört hat. Falls $|\chi| \geq 2$ haben nach endlicher Zeit alle Bälle zu wachsen aufgehört und bilden das lilylond-Modell zu χ. Für $x \in \chi$ bezeichnen wir mit $\rho(x,\chi)$ den Radius des Balls um x im lilypond-Modell zu χ.

Für unendliche, aber lokalendliche $\chi \in \mathbf{N}$ ist es deutlich komplizierter, die Existenz und Eindeutigkeit des lilypond-Modells zu χ zu zeigen, da Wechselwirkungen zwischen beliebig weit entfernten Punkten möglich sind. Das lilypond-Modell zu einem stationären Poissonprozess η nennen wir auch *Poisson-lilypond-Modell.* Dieses Modell wurde in [47] eingeführt und es wurde gezeigt, dass das System

$$Z(\eta) := \bigcup_{x\in\eta} B(x, \rho(x,\eta))$$

fast sicher keinen unendlichen Cluster enthält; in [29] wurde die Existenz und Eindeutigkeit für allgemeines $\chi \in \mathbf{N}$ nachgewiesen. In [41] wurden Verteilungseigenschaften des größten Clusters in $Z(\eta)$ gezeigt. In [19] wurde das Poisson-lilypond-Modell umfassend untersucht und in der aktuellen Arbeit [18] findet sich eine geometrische Verallgemeinerung des Modells.

Seien $t \mapsto v_t > 0$ eine wachsende Funktion und η ein stationärer Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$. Wir betrachten den Punktprozess

$$\xi_t := \sum_{x \in \eta \cap W_t} \mathbb{1}\{\rho(x,\eta) > v_t\}\, \delta_x. \tag{2.3.1}$$

Dies ist der Prozess aller Punkte in $\eta \cap W_t$, deren Radius im Poisson-lilypond-Modell größer als v_t ist.

Um zu zeigen, dass $(\mathbb{1}\{\rho(\cdot,\cdot) > v_t\})_t$ stabilisierend ist, benötigen wir den Begriff einer *absteigenden Kette*, den wir nun einführen.

Definition 2.3.1. Seien $\chi \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_n \in \chi$ paarweise verschieden mit $|x_{i-1} - x_i| \geq |x_i - x_{i+1}|$, $i = 1, \dots, n-1$. Dann heißt $x_0, \dots, x_n \in \chi$ *absteigende Kette der Länge n in χ.* □

Wir zeigen folgendes Resultat zur Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$.

Satz 2.3.2. *Seien $c > 0$, η ein Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, $t \mapsto v_t > 0$ mit*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(\rho(0, \eta + \delta_0) > v_t) = c$$

und

$$\xi_t := \sum_{x \in \eta \cap W_t} \mathbb{1}\{\rho(x,\eta) > v_t\}\, \delta_x.$$

Ferner sei ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq O\left(\frac{(\log t)^{d+1}}{t^{1/2}} + |\mathbb{P}(\rho(0,\eta+\delta_0) > v_t) - c|\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. Wir wollen Satz 2.1.3 verwenden. Zunächst zeigen wir, dass $(\mathbb{1}\{\rho(\cdot,\cdot) > v_t\})_t$ stabilisierend ist. Dazu gehen wir wie in [41] vor. Seien $\mu \in \mathbf{N}$ und $A(y,\mu) \subset \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ die Menge aller Tupel (x,r), sodass eine absteigende Kette $x_0, \dots, x_n$ in μ mit $x_0 = y$, $|x_1 - y| \leq 2|x - N(x,\mu)|$, $x_n = x$ und $r = |x - x_{n-1}|$ existiert. Ferner sei

$$S(y,\mu) := B(y, 2|y - N(y,\mu)|) \cup \bigcup_{(x,r) \in A(y,\mu)} B(x,r). \tag{2.3.2}$$

Nach Lemma 2.1 in [41] ist $S(y,\cdot) : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$ eine $\mathbb{P}$-fast sicher kompakte Stoppmenge. Wegen Lemma 2.2 in [41] gilt

$$\rho(y, \mu + \delta_y) = \rho(y, (\mu + \delta_y)_{S(y,\mu)} + \chi_{S(y,\mu)^c}), \quad \chi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher}.$$

Wir definieren

$$R(x,\mu) := \inf\{r > 0 : S(x,\mu) \subset B(x,r)\}, \quad \text{wobei } \inf \varnothing := +\infty.$$

Nach Lemma 2.4 in [41] gibt es eine Konstante $s > 0$, sodass

$$\mathbb{P}(R(0,\eta) > t) \leq s^{-1} \exp(-s\, t^{d/(d+1)}), \quad t > 0. \tag{2.3.3}$$

Sei $y \in \mathbb{R}^d$ fest. Aus Formel (2.6) in [41] erkennen wir, dass $s > 0$ so gewählt werden kann, dass für $t > 0$ groß genug die Abschätzung

$$\mathbb{P}(R(0, \eta + \delta_y) > t) \leq s^{-1} \exp(-s\, t^{d/(d+1)}) \tag{2.3.4}$$

gilt. Mit der Wahl $b_t := d_t := (3s^{-1} \log t)^{(d+1)/d}$ in Satz 2.1.3 erhalten wir nun die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) = C_t + O\left(|\mathbb{P}(\rho(0, \eta + \delta_0) > v_t) - c|\right) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{2.3.5}$$

wobei der Term C_t gegeben ist durch

$$\gamma^2 \int_{W_t} \int_{B(x, 2(3s^{-1}\log t)^{(d+1)/d})} \mathbb{P}\left(\rho(x, \eta + \delta_x + \delta_y) > v_t,\, \rho(y, \eta + \delta_x + \delta_y) > v_t\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \tag{2.3.6}$$

Zur Abschätzung von (2.3.6) nutzen wir die Beziehung

$$\rho(x, \mu + \delta_x + \delta_x) \le |x - N(x, \mu + \delta_y)| \tag{2.3.7}$$

und erhalten daraus für (2.3.6) die obere Schranke

$$\begin{aligned} &\gamma^2 \int_{W_t} \int_{B(x, 2(3s^{-1}\log t)^{(d+1)/d})} \mathbb{P}\left(|x - N(x, \eta + \delta_y)| > v_t,\, |y - N(y, \eta + \delta_x)| > v_t\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &\quad \le \gamma^2 \int_{W_t} \int_{B(x, 2(3s^{-1}\log t)^{(d+1)/d}) \setminus B(x, v_t)} \mathbb{P}\left(\eta\left(B(x, v_t) \cup B(y, v_t)\right) = \varnothing\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Für $y \in B(x, v_t)^c$ gilt $\mathcal{L}^d\left(B(x, v_t) \cup B(y, v_t)\right) \ge 3/2\kappa_d v_t^d$. Daraus ergibt sich für (2.3.8) die obere Schranke

$$\gamma^2 \exp\left(-\gamma 3/2\kappa_d v_t^d\right) \int_{W_t} \int_{B(x, 2(3s^{-1}\log t)^{(d+1)/d})} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = O\left(\frac{(\log t)^{d+1}}{t^{1/2}}\right) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Indem wir diesen Ausdruck in (2.3.5) einsetzen, folgt die Behauptung. □

Wir zeigen nun, wie sich aus Satz 2.3.2 die asymptotische Verteilung des maximalen Radius im Poisson-lilypond-Modell herleiten lässt.

Bemerkung 2.3.3. Wegen

$$\rho(0, \eta + \delta_0) > v_t \Longleftrightarrow \gamma\kappa_d \rho(0, \eta + \delta_0)^d - \log t > -\log c, \quad c > 0,$$

gilt mit Bemerkung 2.1.4(a) und Satz 2.3.2,

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}\left(\gamma\kappa_d \max_{x \in \eta \cap W_t} \rho(x, \eta + \delta_x)^d - \log t \le \lambda\right) = e^{-e^{-\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

2.4 Poissonprozessapproximation im Poisson-Voronoi-Mosaik

In diesem Abschnitt seien $\gamma > 0$ und η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität γ in $\mathbb{R}^d$. Wir präsentieren zwei Anwendungen von Theorem 2.1.3 im Poisson-Voronoi-Mosaik m, an dessen Definition in Abschnitt 1.2.4 wir erinnern. Zunächst betrachten wir Zellen mit kleiner Umkugel und daraufhin solche, die bezüglich eines allgemeinen Größenfunktionals groß sind.

2.4.1 Minimale Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik

In diesem Unterabschnitt untersuchen wir den Prozess der Punkte $x \in \eta \cap W_t$ mit der Eigenschaft, dass der Radius $R(x,\eta)$ der minimalen Kugel mit Mittelpunkt x, die die Voronoi-Zelle $C(x,\eta)$ enthält, kleiner als die vorgegebene Schranke $v_t > 0$ ist, also

$$R(x,\eta) := \inf\{r > 0 : C(x,\eta) \subset B(x,r)\} < v_t.$$

Dazu verwenden wir geometrische Abschätzungen aus [12] und zeigen ein Resultat zur Poissonprozessapproximation einer abhängigen Verdünnung von η. Durch die Anwendung von Satz 2.1.3 erhalten wir mit geringerem Beweisaufwand ein stärkeres Resultat als Theorem 1 (2d) in [12] und zeigen, dass der (geeignet skalierte) Prozess der Poissonpunkte $x \in \eta$, deren zugehörige Voronoi-Zelle einen kleinen Radius $R(x,\eta)$ besitzt, im totalen Variationsabstand d_{TV} gegen einen Poissonprozess ν in $[0,1]^d$ konvergiert.

Für $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ definieren wir den Halbraum $H^+(u,\theta) := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x,u\rangle \geq \theta\}$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Ferner bezeichne p_k, $k \in \mathbb{N}$, die Wahrscheinlichkeit, dass die k Halbräume $H(u_1,\theta_1),\dots,H(u_k,\theta_k)$ die Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ überdecken. Seien $c > 0$ und

$$v_t := \left(\frac{((d+1)!\,c)^{1/(d+1)}}{(\gamma t\, p_{d+1})^{1/(d+1)}\, 2^d\,\kappa_d\,\gamma}\right)^{1/d} \qquad \text{für } t > 0. \tag{2.4.1}$$

Wir betrachten die Verdünnung

$$\xi_t = \sum_{x \in \eta \cap W_t} \mathbb{1}\{R(x,\eta) < v_t\}\,\delta_x. \tag{2.4.2}$$

Zunächst zeigen wir, dass $\mathbb{E}\xi_t(W_t)$ im Limes $t \to \infty$ gegen c konvergiert. Für $k \in \mathbb{N}$ seien dazu $u_1,\dots,u_k,\theta_1,\dots,\theta_k$ stochastisch unabhängig. Ferner seien $u_1,\dots,u_k$ und $\theta_1,\dots,\theta_k$ jeweils identisch verteilt, wobei die Verteilung von u_1 das auf (auf eins normierte) sphärische Lebesgue-Maß σ^{d-1} sei und die Verteilung von θ_1 gegeben sei durch

$$Q(\mathrm{d}\theta_1) = d\,\pi\,\sin(\pi\,\theta_1)\,\cos^{d-1}(\pi\,\theta_1)\,\mathbb{1}_{[0,1/2]}(\theta)\,\lambda^1(\mathrm{d}\theta_1).$$

Das Ereignis $\{R(0,\eta+\delta_0) > v_t\}$ tritt genau dann ein, wenn die Halbräume $H^+\left(\frac{y}{|y|},\frac{|y|}{2}\right)$ die Sphäre $v_t\mathbb{S}^{d-1}$ überdecken. Daher gilt (vgl. [11], Abschnitt 5.2.3, und (15) in [12]) für alle $v > 0$

$$\mathbb{P}\left(R(0,\eta+\delta_0) < v\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2^d\,\kappa_d\,\gamma\,v^d}\,\frac{\left(2^d\,\kappa_d\,\gamma\,v^d\right)^k}{k!}\,p_k,$$

Da zum Überdecken der $(d-1)$−dimensionalen Einheitssphäre mindestens $d+1$ Halbräume nötig sind (siehe Lemma 3 in [12]), gilt $p_1 = \dots = p_d = 0$. Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, $\mathbb{S}^{d-1}$ mit $k \geq d+1$ Kappen zu überdecken, stets positiv, d.h. $p_k > 0$ für $k \geq d+1$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_t(W_t) &= \gamma t\,\mathbb{P}\left(R(0,\eta+\delta_0) < v_t\right)\\
&= \gamma t \sum_{k=d+1}^{\infty} e^{-\left(\frac{(d+1)!\,c}{\gamma t\,p_{d+1}}\right)^{1/(d+1)}} \left(\frac{(d+1)!c}{\gamma t p_{d+1}}\right)^{k/(d+1)} \frac{p_k}{k!}\\
&= e^{-\left(\frac{(d+1)!\,c}{\gamma t\,p_{d+1}}\right)^{1/(d+1)}} \left(c + \sum_{k=d+2}^{\infty} \left(\frac{(d+1)!\,c}{\gamma p_{d+1}}\right)^{k/(d+1)} t^{(k-d-1)/(d+1)}\,\frac{p_k}{k!}\right).
\end{aligned}$$

Wegen $e^{-\left(\frac{(d+1)!\,c}{t\,p_{d+1}\gamma}\right)^{1/(d+1)}} - 1 = O(t^{-1/(d+1)})$ für $t \to \infty$ ergibt sich

$$|\mathbb{E}\xi_t(W_t) - c| = O(t^{-1/(d+1)}) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{2.4.3}$$

Es gilt folgender Satz von Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$.

Satz 2.4.1. *Seien $c > 0$, $\gamma > 0$ und v_t für $t > 0$ aus* (2.4.1)*. Ferner seien η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität γ, ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\,\lambda^d_{[0,1]^d}$ und ξ_t aus* (2.4.2)*. Dann gilt*

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq O(t^{-1/(d+1)}) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Bemerkung 2.4.2. Satz 2.4.1 impliziert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{2^d\,\kappa_d\,\gamma(\gamma t\,p_{d+1})^{1/(d+1)}}{(d+1)!^{1/(d+1)}} \min_{x\in\eta\cap W_t} R(x,\eta+\delta_x)^d \geq c^{1/(d+1)}\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{x\in\eta\cap W_t} R(x,\eta+\delta_x) > v_t\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\xi_t(W_t) = 0\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} e^{-c}, \quad c > 0.\end{aligned}$$

Mit $c := \lambda^{d+1}$ ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{(\gamma t\,p_{d+1})^{1/(d+1)} 2^d\,\kappa_d\,\gamma}{(d+1)!^{1/(d+1)}} \min_{x\in\eta\cap W_t} R(x,\eta+\delta_x)^d \geq \lambda\right) = e^{-\lambda^{d+1}}, \quad \lambda > 0.$$

Das zeigt, dass $\max_{x\in\eta\cap W_t} -R(x,\eta+\delta_x)^d = -\min_{x\in\eta\cap W_t} R(x,\eta+\delta_x)^d$ im Anziehungsbereich der Weibull-Extremwertverteilung mit Formparameter $d+1$ liegt. □

Beweis von Satz 2.4.1. Zunächst zeigen wir, dass $\mathbb{1}\{R(x,\eta+\delta_x) < v_t\}$ stabilisierend ist. Dazu stellen wir fest, dass $R(x,\eta+\delta_x) < v_t$ genau dann gilt, wenn die Halbräume $H_y^+(x) := x + H^+\left(\frac{y-x}{|y-x|}, \frac{|y-x|}{2}\right)$, $y \in \eta$, die Sphäre $x + v_t\,\mathbb{S}^{d-1}$ überdecken. Wegen

$$\left\{\bigcup_{y\in\eta} H_y^+(x) \supseteq x + v_t\,\mathbb{S}^{d-1}\right\} = \left\{\bigcup_{y\in\eta\cap B(y,2v_t)} H_y^+(x) \supseteq x + v_t\,\mathbb{S}^{d-1}\right\}$$

gilt

$$R(x,\eta+\delta_x) < v_t \Longleftrightarrow R(x,\eta_{B(x,2v_t)} + \delta_x) < v_t.$$

Damit ist ein deterministischer und von $x \in \mathbb{R}^d$ unabhängiger Stabilisierungsradius durch $R_t := 2v_t$, $t > 0$, gegeben. Sei ν der Poissonprozess aus Satz 2.4.1. Dann gilt mit Satz 2.1.3 und Bemerkung 2.1.5,

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq C_t + |t\,\mathbb{P}\left(R(0,\eta+\delta_0) < v_t\right) - c| + O(t^{-\frac{d+2}{d+1}}) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{2.4.4}$$

wobei C_t gegeben ist durch

$$C_t = \gamma^2 \int_{W_t} \int_{B(x,4v_t)} \mathbb{P}\left(R(x,\eta+\delta_x+\delta_y) < v_t,\, R(y,\eta+\delta_x+\delta_y) < v_t\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad t > 0. \tag{2.4.5}$$

Zur Abschätzung von (2.4.5) stellen wir fest, dass

$$\mathbb{P}\left(R(x,\eta+\delta_x+\delta_y) < v_t,\, R(y,\eta+\delta_x+\delta_y) < v_t\right)$$

die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Vereinigung der Sphären $x + v_t\mathbb{S}^{d-1}$ und $y + v_t\mathbb{S}^{d-1}$ von den Halbräumen $H_w^+(x)$, $w \in \eta + \delta_y$, und $H_w^+(y)$, $w \in \eta + \delta_x$, überdeckt wird. Gegeben

$$\eta\,(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t))) = k,$$

ist der Prozess $\eta \cap (B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t))$ stochastisch äquivalent zum Prozess k unabhängiger und auf $B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)$ gleichverteilter Zufallsvektoren, d.h.

$$\eta \cap (B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{X_i}$$

wobei $X_1, \dots, X_k$ unabhängig sind und $X_1 \sim \mathrm{Unif}\,(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)))$ gilt. Es bezeichne $p_k(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Halbräume $H_x(y)$, $H_y(x)$, $H_{X_i}(x)$, $i \le k$, und $H_{X_i}(y)$, $i \le k$, die Vereinigung der Sphären $x + v_t\mathbb{S}^{d-1}$ und $y + v_t\mathbb{S}^{d-1}$ überdecken. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,(R(x, \eta + \delta_x + \delta_y) < v_t,\ R(y, \eta + \delta_x + \delta_y) < v_t) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\,(\eta\,(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)) = k)\ p_k(x, y) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_d(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t))^k}{k!} \exp(-\lambda_d(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)))\, p_k(x, y),
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Nach Lemma 3 in [12] gilt $p_k(x, y) = 0$ für alle $k < d + 1$. Daher erhalten wir aus (2.4.6) mit den offensichtlichen Ungleichungen $0 \le p_k(x, y) \le 1$ und $\lambda_d\big(B(x, 2v_t) \cup B(y, 2v_t)\big) \le 2^{d+1}\kappa_d v_t^d$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\,(R(x, \eta + \delta_x + \delta_y) < v_t,\ R(y, \eta + \delta_x + \delta_y) < v_t) \\
&\quad \le \sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{(2^{d+1}\kappa_d v_t^d)^k}{k!} = O(t^{-1}) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen in (2.4.5) ergibt sich die obere Schranke

$$C_t \le O(v_t^d) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Wegen $v_t \sim t^{-1/d(d-1)}$ für $t \to \infty$ erhalten wir aus (2.4.3) und (2.4.4) die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\, \nu) \le O(t^{-1/(d+1)}) \quad \text{für } t \to \infty.$$

□

2.4.2 Maximale Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik

Es sei $\mathcal{K}_0^d$ der Raum aller konvexen Körper (nichtleerer, konvexer und kompakter) Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$, die den Ursprung 0 als inneren Punkt enthalten, ausgestattet mit dern Hausdorff-Metrik δ. Für $k > 0$ nennen wir eine Abbildung $\Sigma : \mathcal{K}_0^d \to [0, \infty)$ *Größenfunktional*, falls Σ stetig, nicht identisch 0, k-homogen und monoton ist, d.h. $\Sigma(K_1) \le \Sigma(K_2)$ für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_0^d$ mit $K_1 \subset K_2$. In diesem Unterabschnitt betrachten wir Zellen der Poisson-Voronoi Mosaiks, die bezüglich Σ maximal sind. Für ein Funktional $F : \mathcal{K}_0^d \to [0, \infty)$, $\mu \in \mathbf{N}$ und $x \in \mu$ erinnern wir daran, dass $C(x, \mu)$ die Voronoi-Zelle bei x bzgl. μ bezeichnet und führen die Notation

$$F(x, \mu) := F(C(x, \mu) - x)$$

ein.

Sei η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, $t \mapsto v_t$ eine wachsende und positive Funktion und betrachte die Verdünnung

$$\xi_t := \sum_{x \in \eta \cap W_t} \mathbb{1}\{\Sigma(x,\eta) > v_t\}\, \delta_x, \quad t > 0. \tag{2.4.7}$$

Offensichtlich fällt ξ_t mit der Wahl $g_t(x,\mu) = \mathbb{1}\{\Sigma(x,\mu) > v_t\}$ in den allgemeinen Rahmen von Abschnitt 2.1. Sein Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ ist gegeben durch

$$\mathbb{E}\xi_t(A) = \mathcal{L}^d(A \cap W_t)\, \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t), \quad A \in \mathcal{B}^d. \tag{2.4.8}$$

Sei $h_K(u) := \max\{\langle x, u\rangle : x \in K\}$, $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, die *Stützfunktion* von K. Definiere

$$\Phi(K) := \frac{1}{d} \int h_K(u)^d\, \sigma^{d-1}(\mathrm{d}u),$$

wobei wir daran erinnern, dass σ^{d-1} die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ bezeichnet. Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei H_x die mittlere Hyperebene zwischen 0 und x und $S(K) := \{y \in \mathbb{R}^d : H_{2y} \cap K \neq \varnothing\}$. Dann gilt

$$d\kappa_d \Phi(K) = \mathcal{L}^d(S(K)) \tag{2.4.9}$$

(vgl. [35], Seite 5). Es existiert eine Konstante $\tau > 0$, sodass Φ und Σ die isoperimetrische Ungleichung

$$\tau \Sigma(K)^{d/k} \leq \Phi(K) \tag{2.4.10}$$

erfüllen (vgl. [34], (4)). Jedes $K \in \mathcal{K}_0^d$, das diese Ungleichung mit Gleichheit erfüllt, bezeichnen wir im Folgenden als *Extremalkörper*. Im Beispiel $\Sigma = \mathcal{L}^d$ sind dies gerade alle Körper $K \in \mathcal{K}_0^d$ mit $S(K) = K$, also die d-dimensionalen Kugeln mit Mittelpunkt im Ursprung.

Die Abweichung eines Körpers $K \in \mathcal{K}_0^d$ von einem Extremalkörper messen wir durch ein nicht-negatives, stetiges, 0-homogenes Funktional $\vartheta : \mathcal{K}_0^d \to [0,\infty)$ mit der Eigenschaft $\vartheta(K) = 0$ für ein $K \in \mathcal{K}_0^d$ mit $\Sigma(K) > 0$ genau dann, wenn K ein Extremalkörper ist. Wir nennen ϑ *Abweichungsfunktional*.

Um die Ungleichung (2.4.10) zu verschärfen, führen wir das Konzept einer Stabilitätsfunktion für Σ und ϑ ein. Dies ist eine stetige Funktion $f : [0,1) \to [0,1)$ mit den Eigenschaften $f(0) = 0$, $f(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ und

$$\Phi(K) \geq (1 + f(\varepsilon))\tau \Sigma(K)^{d/k} \quad \text{für alle } K \in \mathcal{K}_0^d \text{ mit } \vartheta(K) \geq \varepsilon. \tag{2.4.11}$$

Es wurde in [34] gezeigt, dass Stabilitäsfunktionen existieren.

Für $K \in \mathcal{K}_0^d$ seien $R(K)$ der Radius der kleinsten Kugel mit Mittelpunkt 0, die K enthält (zentrierter Umkugelradius), und $r(K)$ der Radius der größten in K enthaltenen Kugel mit Mittelpunkt 0 (zentrierter Inkugelradius). Wir nehmen an, dass $a \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ existieren, so dass für den Umkugel- bzw. Inkugelradius $R(K) := \inf\{r > 0 : rB^d \subset K\}$ bzw. $r(K) := \sup\{r > 0 : K \subset rB^d\}$ von K gilt, dass

$$\frac{r(K)}{R(K)} > a \quad \text{für alle } K \in \mathcal{K}_0^d \text{ mit } \vartheta(K) < \varepsilon. \tag{2.4.12}$$

Im Folgenden diskutieren wir Beispiele geometrischer Funktionale, in denen (2.4.12) erfüllt ist und geben jeweils eine mögliche Wahl für a explizit an.

Beispiel 2.4.3. (Zentrierter Inkugelradius) Sei $\Sigma(K) := r(K)$, $K \in \mathcal{K}_0^d$. Dann nimmt die isoperimetrische Ungleichung (2.4.10) die Form

$$r(K)^d \le d\Phi(K) \tag{2.4.13}$$

an, wobei Gleichheit in (2.4.13) genau dann gilt, wenn K eine d-dimensionale Kugel mit Mittelpunkt 0 ist. Als Abweichungsfunktional wählen wir

$$\vartheta(K) := \frac{R(K) - r(K)}{R(K) + r(K)}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Falls $\vartheta(K) < \varepsilon$, so folgt $\frac{r(K)}{R(K)} > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, und (2.4.12) ist mit $a := \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ erfüllt. In [12] wird die asymptotische Verteilung des maximalen Inkugelradius der Zellen eines Poisson-Voronoi-Mosaiks hergeleitet, deren zugehörige Poissonpunkte in einem kompakten Beobachtungsfenster liegen. Wir werden eine prozesswertige Verallgemeinerung dieses Resultats angeben, werden allerdings die Asymptotik bei wachsendem Volumen des Beobachtungsfensters anstatt wachsender Intensität des zugrunde liegenden Poissonprozesses betrachten. □

Beispiel 2.4.4. (Innere Volumina) Seien $k \in [d]$ und $\Sigma(K) := V_k(K)$, $K \in \mathcal{K}_0^d$, das k-te innere Volumen von K. Die Größen $V_k(K)$, $k \in [d]$, lassen sich mithilfe der Steinerformel

$$V_d(K + \varepsilon B^d) = \sum_{k=0}^{d} \varepsilon^{d-k} \binom{d}{k} V_k(K), \quad \varepsilon \ge 0,$$

(vgl. (14.5) in [60]) definieren, wobei B^d die Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$ bezeichne. Insbesondere ist dV_{d-1} die Oberfläche und $2V_1/\kappa_d$ die mittlere Breite. Nach (15) in [34] gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{d}\left(\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}\kappa_d}\right)^{d/k} V_k(K)^{d/k} \le \Phi(K).$$

Auch hier sind die Extremalkörper durch die d-dimensionalen Kugeln mit Mittelpunkt 0 gegeben. Folglich lassen sich auch ϑ und a wie oben wählen. □

Das folgende Lemma schätzt die Wahrscheinlichkeit ab, dass zwei Zellen des Poisson-Voronoi-Mosaiks größer (bzgl. Σ) als v sind und zugleich eine Form besitzen, die (bzgl. ϑ) näher als ε an der eines Extremalkörpers ist.

Lemma 2.4.5. *Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$ und η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$ und $\varepsilon > 0$. Seien Σ ein Größen- und ϑ ein Abweichungsfunktional mit den obigen Eigenschaften und es gelte (2.4.12) für ein $a \in (0,1)$. Dann gilt für alle $v > 0$,*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\Sigma(x, \eta_{x,y}) > v,\, \Sigma(y, \eta_{x,y}) > v,\, \vartheta(x, \eta_{x,y}) < \varepsilon,\, \vartheta(y, \eta_{x,y}) < \varepsilon\right) \\ &\quad \le \mathbb{P}\left(\Sigma(0, \eta_0) > v\right) \exp\left(-\gamma a^d \tau \left(1 - \frac{\arccos\sqrt{1-a^2}}{\pi}\right) v^{d/k}\right). \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$ und $a \in (0,1)$, sodass (2.4.12) gilt und definiere

$$A := \left\{ w \in \mathbb{R}^d : \frac{\langle w - y, y - x\rangle}{|w - y|\,|y - x|} \le \sqrt{1 - a^2} \right\}.$$

In einem ersten Schritt zeigen wir

$$\{\mu \in \mathbf{N} : \Sigma(x, \mu_{x,y}) > v,\, \vartheta(x, \mu_{x,y}) < \varepsilon\} \in \mathcal{N}_A. \tag{2.4.15}$$

Wir definieren die *Voronoi-Blume*

$$T : \mathbf{N} \to \mathcal{F}, \quad \mu \mapsto \bigcup_{z \in C(x,\mu_x)} B(z, |z-x|).$$

Nach Lemma 5.1 in [9] ist T eine Stoppmenge. Es gilt

$$C(x, \mu_x) = C(x, (\mu_x)_{T(x,\mu)} + \chi_{T(x,\mu)^c}) \quad \text{for all } \mu, \chi \in \mathbf{N}.$$

Um (2.4.15) zu zeigen, genügt es daher, $T(x, \mu_y) \subset A$ für $\Sigma(x, \mu_{x,y}) > v$ und $\vartheta(x, \mu_{x,y}) < \varepsilon$ nachzuweisen. Nach Definition des Voronoi-Mosaiks gilt $C(x, \mu_{x,y}) \subset H_y(x)^-$ und daher $r(x, \mu_{x,y}) \leq \frac{|x-y|}{2}$. Wegen (2.4.12) gilt dann $R(x, \mu_{x,y}) \leq \frac{|x-y|}{2a}$. Daher folgt

$$C(x, \mu_{x,y}) \subset H_y(x)^- \cap B(x, \frac{|x-y|}{2a}).$$

Definiere Z als die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{R}^d$ mit Abstand $\frac{|x-y|}{2a}$ von x und y. Dann gilt

$$T(x, \mu_y) \subset \bigcup_{z \in Z} \{w \in \mathbb{R}^d : \langle w-z, y-z\rangle \leq |y-z|^2\}. \tag{2.4.16}$$

Seien $w \in T(x, \mu_y)$ mit $\langle w-y, y-x\rangle \geq 0$ und $z \in Z$ mit $\langle w-z, y-z\rangle \leq |y-z|^2$. Definiere E als die 2-dimensionale Ebene, die x, y, z enthält, und bezeichne die Projektion von $v \in \mathbb{R}^d$ auf E mit v^E. Es ist ein elementarer geometrischer Fakt, dass

$$\arccos \frac{\langle y-x, (w-y)^E\rangle}{|y-x||(w-y)^E|} + \arccos \frac{\langle (w-y)^E, z-y\rangle}{|(w-y)^E||z-y|} + \arccos \frac{\langle z-y, x-y\rangle}{|z-y||x-y|} = \pi, \tag{2.4.17}$$

$$\arccos \frac{\langle y-z, \frac{x+y}{2}-z\rangle}{|y-z||\frac{x+y}{2}-z|} + \arccos \frac{\langle y-\frac{x+y}{2}, z-\frac{x+y}{2}\rangle}{|y-\frac{x+y}{2}||z-\frac{x+y}{2}|} + \arccos \frac{\langle z-y, x-y\rangle}{|z-y||x-y|} = \pi. \tag{2.4.18}$$

Nach Definition von E und (2.4.16) gilt

$$\langle (w-y)^E, z-y\rangle = \langle w-y, z-y\rangle = |z-y|^2 - \langle w-z, y-z\rangle \geq 0. \tag{2.4.19}$$

Wegen $\langle y-\frac{x+y}{2}, z-\frac{x+y}{2}\rangle = 0$ erhalten wir aus (2.4.17), (2.4.18), (2.4.19) und der Monotonie des Kosinus im Intervall $[0, \pi]$, dass

$$\arccos \frac{\langle y-x, (w-y)^E\rangle}{|y-x||(w-y)^E|} \geq \arccos \frac{\langle y-z, \frac{x+y}{2}-z\rangle}{|y-z||\frac{x+y}{2}-z|}.$$

Wegen $\langle y-x, (w-y)^E\rangle = \langle y-x, w-y\rangle$ und $|(w-y)^E| \leq |w-y|$ folgt nun

$$\frac{\langle y-x, w-y\rangle}{|y-x||w-y|} \leq \frac{\langle y-z, \frac{x+y}{2}-z\rangle}{|y-z||\frac{x+y}{2}-z|} = \frac{|\frac{x+y}{2}-z|}{|y-z|}.$$

Aus dem Satz von Pythagoras und der Definition von Z erhalten wir

$$\left|\frac{x+y}{2} - z\right| = \sqrt{|z-y|^2 - \left(\frac{|x-y|}{2}\right)^2} = |y-z|\sqrt{1-a^2}.$$

Dies zeigt, dass $T(x,\mu_y) \subset A$ für $\Sigma(x,\mu_{x,y}) > v$ und $\vartheta(x,\mu_{x,y}) < \varepsilon$.

Da die Einschränkungen von η auf disjunkte Mengen stochastich unabhängige Poissonprozesse sind, ergibt sich aus (2.4.15) und (2.4.12) die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\Sigma(x,\eta_{x,y}) > v,\, \Sigma(y,\eta_{x,y}) > v,\, \vartheta(x,\eta_{x,y}) < \varepsilon,\, \vartheta(y,\eta_{x,y}) < \varepsilon\right)\\ &\quad\le \mathbb{P}\left(\Sigma(x,\eta_{x,y}) > v,\, \vartheta(x,\eta_{x,y}) < \varepsilon\right) \mathbb{P}\left(\eta\left(B(y,\left(a^d\tau/\kappa_d\right)^{1/d} v^{1/k}) \cap A\right) = 0\right). \qquad (2.4.20)\end{aligned}$$

Mit der Schranke $\mathcal{L}^d\left(B(y,r)\cap A\right) \ge r^d\kappa_d\left(1 - \frac{\arccos\sqrt{1-a^2}}{\pi}\right)$ für $r > 0$, sowie der Monotonie und Stationarität von η ergibt sich, dass (2.4.20) nach oben beschränkt ist durch

$$\mathbb{P}\left(\Sigma(0,\eta_0) > v\right) \exp\left(-\gamma a^d\tau\left(1 - \frac{\arccos\sqrt{1-a^2}}{\pi}\right) v^{d/k}\right).$$

□

Wie bereits erwähnt nutzt die Beweistechnik unseres Hauptresultats dieses Unterabschnitts den Rahmen eines geeigneten Poissonschen Hyperbenen-Mosaiks. Wir erklären diese Beziehung und beginnen dabei mit der Einführung des Konzepts der typischen Zelle Z eines Poisson-Voronoi Mosaiks. Deren Verteilung ist gegeben durch

$$\mathbb{P}(Z \in \cdot) := \frac{1}{\gamma}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\}\mathbb{1}\{C(x,\eta) - x \in \cdot\}\,\eta(\mathrm{d}x). \qquad (2.4.21)$$

Wir erklären nun, warum die typische Zelle Z stochastisch äquivalent zur Nullzelle eines geeigneten Poissonschen Hyperbenen-Mosaiks ist und folgen dabei [32]. Mit der Mecke-Formel (Satz 1.2.2) und der Stationarität von η lässt sich (2.4.21) ausdrücken durch

$$\int \mathbb{1}\{x \in [0,1]^d\}\mathbb{P}(C(x,\eta_x) - x \in \cdot)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(C(0,\eta_0) \in \cdot).$$

Daher gilt

$$Z \overset{d}{=} C(0,\eta_0).$$

Wir erinnern daran, dass H_x für $x \in \mathbb{R}^d$ die mittlere Hyperebene zwischen dem Ursprung 0 und x bezeichnet und H_x^- den durch H_x beschränkten Halbraum, der 0 enthält. Beachte, dass die Zelle Z gegeben ist durch

$$Z = \bigcap_{x\in\eta} H_x^-. \qquad (2.4.22)$$

Bevor wir diesen Zusammenhang verwenden, definieren wir den Hyperbenenprozess

$$\widehat{\eta} := \{H_x : x \in \eta\}.$$

Für jede Borelmenge A im Raum der Hyperbenen gilt

$$\mathbb{E}\widehat{\eta}(A) = \mathbb{E}\left|\{x \in \eta : H_x \in A\}\right| = \gamma\mathcal{L}^d\left(\{x \in \mathbb{R}^d : H_x \in A\}\right). \qquad (2.4.23)$$

Wir erinnern an die Notation $H(u,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y,u\rangle = r\}$ für $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ und $r \in \mathbb{R}$. Indem wir (2.4.23) in Polarkoordinaten ausdrücken, ergibt sich

$$\mathbb{E}\widehat{\eta}(A) = 2^d d\kappa_d\gamma \iint \mathbb{1}\{H(u,r) \in A\}r^{d-1}\,\mathrm{d}r\,\sigma^{d-1}(\mathrm{d}u) = 2^d d\kappa_d\Phi(A),$$

wobei wir daran erinnern, dass σ^{d-1} die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{d-1}$ ist. Dies zeigt, dass $\widehat{\eta}$ ein stationärer stationärer und isotroper Poissonscher Hyperebenenprozess mit Intensität

$$\widehat{\gamma} \coloneqq 2^d d\kappa_d \gamma \tag{2.4.24}$$

(vgl. [60], Abschnitt 11.3) ist.

Nun können wir unser Hauptresultat dieses Unterabschnitts formulieren.

Satz 2.4.6. *Seien $c > 0$, $\varepsilon > 0$, $\Sigma : \mathcal{K}_0^d \to \mathbb{R}$ ein geometrisches Funktional, das die obigen Eigenschaften besitzt und derart, dass alle Extremalkörper K von Σ mit $\vartheta(K) < \varepsilon$ die Bedingung (2.4.12) mit $a \in (0,1)$ erfüllen. Ferner seien η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$ und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann existiert eine wachsende Funktion $t \mapsto v_t$ von $(0,\infty)$ nach $(0,\infty)$ mit $v_t^{-d/k} \log t \xrightarrow{t\to\infty} 2^d d\kappa_d \tau\gamma$ und $\gamma t\, \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t) = c$, $t > 0$. Ferner existiert ein $b > 0$, sodass für ξ_t aus (2.4.7) gilt,*

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le O(t^{-b}) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. In einem ersten Schritt zeigen wir, dass eine Funktion $t \mapsto v_t$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma t\, \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t) = c$ existiert. Da die Funktion $v \mapsto \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v)$ fallend ist, ist die Funktion

$$t \mapsto v_t \coloneqq \inf\left\{u > 0 : \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > u) \le \frac{c}{\gamma t}\right\} \tag{2.4.25}$$

wachsend. Nach Abschnitt 9 in [34] ist die Verteilung von $\Sigma(0,\eta_0)$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßs auf $\mathbb{R}$. Somit ist die Verteilungsfunktion von $\Sigma(0,\eta_0)$ unter $\mathbb{P}$ stetig. Daher wird das Infimum in (2.4.25) angenommen und es gilt $\mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t) = \frac{c}{\gamma t}$. Dies zeigt die Existenz von $t \mapsto v_t$. Die behauptete Asymptotik ergibt sich, indem wir die Darstellung

$$\frac{\log \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t)}{v_t^{d/k}} = \frac{\log t}{v_t^{d/k}} \left(\frac{\log(t\mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t))}{\log t} - 1 \right) \tag{2.4.26}$$

betrachten. Wegen $\mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v) > 0$ für alle $v > 0$, ergibt sich $v_t \xrightarrow{t\to\infty} \infty$ und nach Theorem 2 in [34] gilt mit der Konstanten τ aus (2.4.10),

$$\frac{\log \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t)}{v_t^{d/k}} \xrightarrow{t\to\infty} -2^d d\kappa_d \tau\gamma.$$

Wegen $t\mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t) = c/\gamma > 0$ folgt mit (2.4.26), dass $\frac{\log t}{v_t^{d/k}} \xrightarrow{t\to\infty} 2^d d\kappa_d \tau\gamma$ gilt.

Um die Abschätzung des totalen Variationsabstands zu zeigen, wollen wir Satz 2.1.3 verwenden. Zunächst zeigen wir, dass $(x,\mu) \mapsto \mathbb{1}\{\Sigma(x,\mu) > v_t\}$, $t > 0$, stabilisierend ist. Seien $\mu \in \mathbf{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{C}_i$, $1 \le i \le I$, eine endliche Familie unendlicher offener Kegel in $\mathbb{R}^d$ mit Spitze in x und Vereinigung $\mathbb{R}^d$. Definiere $R_i(x,\mu)$ als Abstand von x zum nächsten Punkt in $\mu \cap C_i$, falls $\mu(C_i) > 0$, und $R_i(x,\mu) = \infty$, sonst. Setze

$$R(x,\mu) \coloneqq 2 \max_{1\le i\le I} R_i(x,\mu)$$

Wie in [54], Abschnitt 6.3, gezeigt, gilt

$$C(x,\mu) = C(x, \mu_{B(x,2R(x,\mu))} + \chi_{B(x,2R(x,\mu))^c}), \quad \chi \in \mathbf{N}.$$

Da $\mathbb{P}(R(x,\eta) < \infty) = 1$ und $\mu \mapsto B(x, R(x,\mu))$ eine Stoppmenge ist, ist $R \equiv R(x,\mu)$ ein Stabilisierungsradius. Wegen $C(x,\mu_{x,y}) \subset C(x,\mu_x)$ folgt

$$R(x,\mu_{x,y}) \leq R(x,\mu_x), \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4.27}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\mathbb{P}(R(0,\eta_0) > r) \leq 1 - \left(1 - e^{-\gamma(r/2)^d/I}\right)^I \sim e^{-\gamma(r/2)^d/I} \quad \text{für } r \to \infty.$$

Diese Abschätzung nutzen wir nun, um den totalen Variationsabstand zwischen $t^{-1/d}\xi_t$ und dem Poissonprozess ν aus Satz 2.4.6 abzuschätzen. Wegen $\gamma t \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta_0) > v_t) = c$ gilt nach Satz 2.1.3 mit der Wahl

$$b_t := d_t := 2(3I\gamma^{-1}\log t)^{1/d}, \quad t > 0,$$

die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq C_t + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{2.4.28}$$

wobei

$$C_t = \gamma^2 \int\limits_{W_t} \int\limits_{B(x,2d_t)} \mathbb{P}\left(\Sigma(x,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t,\, \Sigma(y,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

Wir betrachten C_t näher und unterscheiden nach der Abweichung der Zellen $C(x,\eta+\delta_x+\delta_y)$ und $C(y,\eta+\delta_x+\delta_y)$ von einem Extremalkörper von Σ. Dies führt auf die Abschätzung

$$\begin{aligned} C_t \leq \gamma^2 \int\limits_{W_t} \int\limits_{B(x,2d_t)} &\mathbb{P}\left(\Sigma(x,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t,\, \Sigma(y,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t,\right. \\ &\times \left. \vartheta(x,\eta+\delta_x+\delta_y) < \varepsilon,\, \vartheta(y,\eta+\delta_x+\delta_y) < \varepsilon\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ + \gamma^2 \int\limits_{W_t} \int\limits_{B(x,2d_t)} &\mathbb{P}\left(\Sigma(x,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t,\, \Sigma(y,\eta+\delta_x+\delta_y) > v_t,\right. \\ &\times \left. \vartheta(x,\eta+\delta_x+\delta_y) \geq \varepsilon \text{ oder } \vartheta(y,\eta+\delta_x+\delta_y) \geq \varepsilon\right) \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

Das Doppelintegral im ersten Summanden lässt sich mit Lemma 2.4.5 nach oben abschätzen durch

$$\gamma^2 \kappa_d (2d_t)^d t \mathbb{P}(\Sigma(0,\eta+\delta_0) > v_t) \exp\left(-\gamma a^d \left(1 - \frac{\arccos\sqrt{1-a^2}}{\pi}\right) \beta^d v_t^{d/k}\right). \tag{2.4.30}$$

Wegen der Stationarität von η lässt sich der zweite Summand in (2.4.29) abschätzen durch

$$2\gamma^2 t \int\limits_{B(0,2d_t)} \mathbb{P}\left(\Sigma(0,\eta+\delta_y+\delta_0) > v_t,\, \vartheta(0,\eta+\delta_y+\delta_0) \geq \varepsilon\right) \mathrm{d}y. \tag{2.4.31}$$

Um (2.4.31) weiter abzuschätzen, wollen wir wie in [34] vorgehen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass in (2.4.29) das Voronoi-Mosaik bezüglich des Prozesses $\eta + \delta_y$ betrachtet wird und wir Theorem 1 in [34] daher nicht direkt anwenden können. Stattdessen passen wir die Argumente aus [34] auf unsere Situation an.

Auf der kompakten Menge $\{K \in \mathcal{K}_0^d : R(K) = 1\}$ nehme die stetige Funktion Σ das positive Maximum $1/c_2^k$ an, mit der k-Homogenität von Σ folgt also $R(K) \geq c_2\, \Sigma(K)^{1/k}$ für alle $K \in \mathcal{K}_0^d$. Für $K \in \mathcal{K}_0^d$ definieren wir den relativen Radius Δ durch $\Delta(K) := R(K)/c_2\Sigma(K)^{1/k}$. Seien $B^d := B(0,1)$, $t > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und a aus (2.4.12). Für $m \leq m_0 := \lceil \left(ac_2\Sigma(B^d)^{1/k}\right)^{-1} \rceil$ definieren wir

$$\mathcal{K}_{t,i}(m) := \{K \in \mathcal{K}_0^d : \Sigma(K) \in v_t\, 2^i(1,2),\, \vartheta(K) \geq \varepsilon,\, \Delta(K) \in [m, m+1)\}.$$

Nach Lemma 2 in [34] existiert eine Konstante $c_1 > 0$, sodass $K \in \mathcal{K}_{t,i}(m)$ impliziert, dass $K \subset c_1 m 2^{i/k} v_t^{1/k} B^d$ gilt. Wegen $v_t \sim b_t$ für $t \to \infty$ und der Definition des Voronoi-Mosaiks lässt sich c_1 so wählen, dass mit $B_{i,m} := c_1 m 2^{1+i/k} v_t^{1/k} B^d$ für $t > 0$ groß genug und alle $i \in \mathbb{N}_0$, $m \leq m_0$ und $\mu \in \mathbf{N}$ gilt, dass

$$B(0, 2b_t) \subset B_{i,m}, \quad C(0, (\mu_0)_{B_{i,m}}) = C(0, \mu_0).$$

Indem wir auf die Anzahl der Punkte aus η in $B_{i,m}$ bedingen, erhalten wir für (2.4.31) die Darstellung

$$\begin{aligned}
&2\gamma^2\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \int_{B(0,2d_t)} \mathbb{P}\left(C(0, \eta + \delta_y + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m)\right) \mathrm{d}y \\
&\quad = 2\gamma^2\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d}^{\infty} \int_{B(0,2d_t)} \mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n)\, \mathbb{P}\left(C(0, \eta + \delta_y + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m) \mid \eta(B_{i,m}) = n\right) \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Gegeben $\eta(B_{i,m}) = n$, ist der Prozess $\eta \cap B_{i,m}$ stochastisch äquivalent zum Prozess n unabhängiger und auf $B_{i,m}$ gleichverteilter Punkte. Da $d_t B^d \subset B_{i,m}$ für $t > 0$ groß genug gilt, erhalten wir für (2.4.32) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&2\gamma^2\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n)}{(\mathcal{L}^d(B_{i,m}))^n} \\
&\quad \times \int_{B(0,2d_t)} \int_{B_{i,m}^n} \mathbb{1}\{C(0, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n} + \delta_y + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m)\}\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}y \\
&\leq 2\gamma^2\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n)}{(\mathcal{L}^d(B_{i,m}))^n} \\
&\quad \times \int_{B_{i,m}^{n+1}} \mathbb{1}\{C(0, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{n+1}} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m)\}\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Mit der Beziehung $\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{i,m})\, \mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n) = (n+1)\, \mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, einer Indexverschiebung in der inneren Summe und der stochastischen Äquivalenz des Binomial- und des bedingten Poissonprozesses lässt sich (2.4.33) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&2\gamma\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d}^{\infty} (n+1)\, \frac{\mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n+1)}{(\mathcal{L}^d(B_{i,m}))^{n+1}} \\
&\quad \times \int_{B_{i,m}^{n+1}} \mathbb{1}\{C(0, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{n+1}} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m)\}\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_{n+1}) \\
&= 2\gamma\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d+1}^{\infty} n\, \frac{\mathbb{P}(\eta(B_{i,m}) = n)}{(\mathcal{L}^d(B_{i,m}))^n} \int_{B_{i,m}^n} \mathbb{1}\{C(0, \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m)\}\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) \\
&= 2\gamma\, t \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d+1}^{\infty} n\, \mathbb{P}(C(0, \eta + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m),\, \eta(B_{i,m}) = n).
\end{aligned} \tag{2.4.34}$$

Wir argumentieren nun ähnlich wie im Beweis von Lemma 5 in [34] und zeigen zunächst, wie sich der Summand mit $i = 0$ in (2.4.34) abschätzen lässt. Seien dazu B ein Extremalkörper von Σ und $B_t := v_t B$ mit $\Sigma(B) = 1$. Für festes $m \in \mathbb{N}$ sei $B_{0,m}$ wie oben gewählt. Seien ferner $x_1, \dots, x_n \in B_{i,m}$ mit $C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m)$. Dann gilt mit (2.4.11),

$$\begin{aligned}\Phi(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0)) &\geq (1 + f(\varepsilon))\tau\Sigma(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0))^{d/k} \\ &\geq (1 + f(\varepsilon))\tau v_t^{d/k} = (1 + f(\varepsilon))\Phi(B_t). \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

Sei $\alpha := f(\varepsilon)/(2 + f(\varepsilon))$. Nach Lemma 4 in [34] gibt es u Ecken von $C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0)$, sodass für die konvexe Hülle $Q = Q(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0))$ dieser Ecken die Abschätzung

$$\Phi(Q) \geq (1 - \alpha)\Phi(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0)) \tag{2.4.36}$$

gilt. Aus (2.4.35) und (2.4.36) ergibt sich wegen $(1 - \alpha)(1 + f(\varepsilon)) = 1 + \alpha$ die Abschätzung

$$\Phi(Q) \geq (1 + \alpha)\Phi(B_t).$$

Für jedes n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m)$ wählen wir $Q = Q(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0))$, sodass $Q(C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0))$ eine messbare Funktion von $(x_1, \dots, x_n)$ ist. Bis auf n-Tupel von $(\mathcal{L}^d)^n$-Maß 0 können wir annehmen, dass jede der Ecken von Q gleichen Abstand zu genau d der Punkte $x_1, \dots, x_n$ hat. Daher ist Q durch höchstens du der Punkte $x_1, \dots, x_n$ bereits eindeutig festgelegt; es seien $j \in \{d + 1, \dots, du\}$ die genaue Zahl und $x_1, \dots, x_j$ die Punkte, die Q eindeutig festlegen. Dann gibt es Teilmengen $J_1, \dots, J_{f_0(Q)} \subset [j]$ mit $|J_i| = d$, $i \in [f_0(Q)]$, sodass die Ecken von Q durch die Mittelpunkte der d-Kugeln $B(0, x_{i,1}, \dots, x_{i,d})$ für $J_i := \{x_{i,1}, \dots, x_{i,d}\}$, $i \in [f_0(Q)]$, gegeben sind. Für $K \in \mathcal{K}_0^d$ sei

$$S(K) := \{y \in \mathbb{R}^d : H(2y) \cap K \neq \varnothing\},$$

wobei $H(x)$ die mittlere Hyperebene zwischen 0 und x bezeichne. Dann gilt $\mathcal{L}^d(S(K)) = \Phi(K)$. Wir erhalten für $m \leq m_0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(C(0, \eta + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m) \mid \eta(B_{0,m}) = n)\, (\mathcal{L}^d(B_{0,m}))^n \\ &\quad\leq \sum_{j=d+1}^{du} \binom{n}{j} \int_{B_{0,m}^n} \mathbb{1}\{C(0, \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_n} + \delta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m)\} \\ &\qquad\quad \times \mathbb{1}\{x_i \in 2S(Q) \text{ for } i = 1, \dots, j\}\, \mathbb{1}\{x_i \notin 2S(Q) \text{ für } i = j + 1, \dots, n\}\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad\leq \sum_{j=d+1}^{du} \binom{n}{j} \sum_{(J_1, \dots, J_u)} \int_{B_{0,m}^j} \int_{B_{0,m}^{n-j}} \mathbb{1}\{\Phi(\operatorname{conv} \bigcup_{r=1}^{n} \bigcap_{k \in J_r} H_{2x_k}^-) \geq (1 + \alpha)\Phi(B_t)\} \\ &\qquad\quad \times \mathbb{1}\{x_i \notin 2S(\operatorname{conv} \bigcup_{r=1}^{n} \bigcap_{k \in J_r} H_{2x_k}^-) \text{ für } i = j + 1, \dots, n\}\, \mathrm{d}(x_{j+1}, \dots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \dots, x_j). \end{aligned} \tag{2.4.37}$$

Wegen (2.4.9) gilt

$$\int_{B_{0,m}} \mathbb{1}\{x \notin 2S(Q)\}\, \mathrm{d}x = \mathcal{L}^d(B_{0,m}) - 2^d d\kappa_d \Phi(Q).$$

Daher ergibt sich, dass der Term (2.4.37) nach oben beschränkt ist durch

$$\sum_{j=d+1}^{du} \binom{n}{j} \binom{j}{d}^u \left[\mathcal{L}^d(B_{0,m}) - 2^d d\kappa_d (1 + \alpha)\tau v_t^{d/k})\right]^{n-j} \mathcal{L}^d(B_{0,m})^j.$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=d+1}^{\infty} n\,\mathbb{P}(C(0,\eta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m),\, \eta(B_{0,m}) = n) \\
&\le \sum_{n=d+1}^{\infty} \frac{\left(\gamma \mathcal{L}^d(B_{0,m})\right)^n}{(n-1)!} \exp(-\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})) \sum_{j=d+1}^{du} \binom{n}{j}\binom{j}{d}^u \frac{\left(\mathcal{L}^d(B_{0,m}) - 2^d d\kappa_d(1+\alpha)\tau v_t^{d/k}\right)^{n-j}}{\mathcal{L}^d(B_{0,m})^{n-j}} \\
&= \sum_{j=d+1}^{du} \binom{j}{d}^u \frac{\left(\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})\right)^j}{j!} \exp(-\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{\gamma^{n-j} n}{(n-j)!} \left(\mathcal{L}^d(B_{0,m}) - 2^d d\kappa_d(1+\alpha)\tau v_t^{d/k}\right)^{n-j}.
\end{aligned}
\tag{2.4.38}
$$

Mit $\beta := \frac{(5+3f(\varepsilon))(2+f(\varepsilon))}{(5+f(\varepsilon))(2+2f(\varepsilon))} < 1$ und $\widehat{\gamma} = 2^d d\kappa_d \gamma$ ergibt sich für (2.4.38) für $t > 0$ groß genug die obere Schranke

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=d+1}^{du} \binom{j}{d}^u \frac{\left(\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})\right)^j}{j!} \exp(-\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{(n-j)!} \left(\gamma \mathcal{L}^d(B_{0,m}) - \beta\widehat{\gamma}(1+\alpha)\tau v_t^{d/k}\right)^{n-j} \\
&\quad = \sum_{j=d+1}^{du} \binom{j}{d}^u \frac{\left(\gamma\, \mathcal{L}^d(B_{0,m})\right)^j}{j!} \exp(-\beta\widehat{\gamma}(1+\alpha)\tau v_t^{d/k}).
\end{aligned}
\tag{2.4.39}
$$

Wegen $\mathcal{L}^d(B_{0,m}) = c_1\kappa_d 2^d\, m^d\, v_t^{d/k}$ für alle $m \le m_0$ und $\beta(1+\alpha) > 1 + f(\varepsilon)/3$, erhalten wir für $t > 0$ groß genug und Konstanten $c_3, c_4 > 0$ die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=d+1}^{\infty} n\mathbb{P}\left(C(0,\eta_0) \in \mathcal{K}_{t,0}(m),\, \eta(B_{0,m}) = n\right) &\le c_3 \left(\gamma\, m^d\, v_t^{d/k}\right)^{du} \exp(-\beta\widehat{\gamma}(1+\alpha)\tau v_t^{d/k}) \\
&\le c_4\, m^{du} \exp\left(-(1+f(\varepsilon)/4)\widehat{\gamma}\,\tau\, v_t^{d/k}\right).
\end{aligned}
$$

Mit analogem Vorgehen wie im Beweis von Lemma 8 in [34] kann diese Abschätzung genutzt werden, um die Reihe

$$
\sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=d+1}^{\infty} n\,\mathbb{P}(C(0,\eta+\delta_0) \in \mathcal{K}_{t,i}(m),\, \eta(B_{i,m}) = n)
$$

für allgemeines $i \in \mathbb{N}_0$ abzuschätzen. Wie in den Beweisen von Proposition 7.1 und Theorem 1 in [36] gibt es ein $c_5 > 0$, sodass (2.4.32) beschränkt ist durch

$$
c_5\, t \exp\left(-(1+f(\varepsilon)/8)\widehat{\gamma}\,\tau\, v_t^{d/k}\right). \tag{2.4.40}
$$

Zusammen mit (2.4.30) und $\frac{\log t}{v_t^{d/k}} \xrightarrow{t\to\infty} \widehat{\gamma}\tau$ erhalten wir nach Einsetzen in (2.4.28), dass ein $b > 0$ existiert, sodass

$$
d_{TV}(t^{-1/d}\,\xi_t,\, \nu) = O(t^{-b}) \quad \text{für } t \to \infty.
$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Poissonprozessapproximation Poissonscher Zentrumsprozesse

Es gibt geometrische Funktionale, zu deren Definition ein Tupel $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$ mit $k \geq 2$ und ein Zählmaß $\mu \in \mathbf{N} \equiv \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$ nötig ist und die sich somit nicht im Rahmen von Kapitel 2 behandeln lassen. Wir erklären nun ein einfaches solches Funktional im Fall $k = 2$. Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2$ sei $B(\mathbf{x})$ die kleinste d-dimensionale Kugel, auf deren Rand x_1, x_2 liegen. Wir ordnen dem Tupel $(\mathbf{x}, \mu)$ im Fall $\mu(B(\mathbf{x})) = 0$ das Volumen $\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))$ und andernfalls den Wert 0 zu. Weitere Beispiele finden sich im Voronoi- und Delaunay-Mosaik. In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Methoden des vorigen Kapitels und ermöglichen damit die Untersuchung solcher Funktionale in dem Fall, dass ein stationärer Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ zugrunde liegt. Für festes $k \in [d+1]$ ordnen wir dazu jedem k-Tupel $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ ein Zentrum $z(\mathbf{x})$ zu. In einem nächsten Schritt erklären wir eine Verdünnung des sich ergebenden Zentrumsprozesses und leiten daraufhin ein Resultat zur Poissonprozessapproximation dieses Prozesses her.

3.1 Allgemeines Theorem

Seien $k \in [d+1]$, η ein stationärer Poissonprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensität $\gamma > 0$ und $f : (\mathbb{R}^d)^k \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$ eine messbare und translationsinvariante Funktion. Außerdem sei $z : (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}^d$ permutationsinvariant und translationskovariant, d.h.

$$z(x_1 + y, \dots, x_k + y) = z(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) + y$$

für alle $x_1, \dots, x_k, y \in \mathbb{R}^d$ und jede Permutation $\pi : [k] \to [k]$. Eine solche Funktion z nennen wir Zentrumsfunktion. Eine kanonische Wahl für z ist der Mittelpunkt der volumenminimalen abgeschlossenen $(k-1)$-dimensionalen Kugel, die $x_1, \dots, x_k$ auf ihrem Rand enthält. Wir definieren

$$\zeta \equiv \zeta(\eta) := \frac{1}{k!} \sum_{\mathbf{x} \in \eta^{(k)}} f(\mathbf{x}, \eta)\, \delta_{z(\mathbf{x})}$$

und betrachten ζ als stationären Punktprozess qualifizierter Zentren von k-Tupeln aus η. Es sei $\gamma_\zeta := \mathbb{E}\,\zeta([0,1]^d)$ die Intensität von ζ. Ferner sei $g_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$ für alle $t > 0$ eine messbare und translationsinvariante Funktion. Wir betrachten die Verdünnung

$$\xi_t \equiv \xi_t(\eta) := \sum_{z \in \zeta \cap W_t} g_t(z, \eta)\, \delta_z, \quad t > 0. \tag{3.1.1}$$

Für $z \in \mathbb{R}^d$ bezeichne η_ζ^z eine Palmsche Version von η bezüglich ζ bei z. Damit lässt sich das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t für $A \in \mathcal{B}^d$ ausdrücken durch

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\xi_t(A) &= \mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z \in A \cap W_t\}\, g_t(z,\eta)\,\zeta(\mathrm{d}z)\\ &= \gamma_\zeta\,\mathcal{L}^d(A\cap W_t)\,\mathbb{E}\,g_t(0,\eta_\zeta^0).\end{aligned}\tag{3.1.2}$$

Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnung

$$\gamma_t := \gamma_\zeta \mathbb{E} g_t(0,\eta_\zeta^0), \quad t > 0.$$

In der folgenden Definition verallgemeinern wir das in Definition 2.1.1 eingeführte Konzept der Stabilisierung geometrischer Funktionale.

Definition 3.1.1. Sei $(h_t)_t$ eine Familie messbarer Funktionen $h_t : (\mathbb{R}^d)^k \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$, $t > 0$. Wir nennen $(h_t)_t$ *stabilisierend*, falls für alle $t > 0$ eine messbare Funktion $R_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ existiert, sodass für alle $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^k$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $R_t(z(\mathbf{x}),\eta_{\mathbf{x}}) < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

(ii) $h_t(\mathbf{x},\mu) = h_t(\mathbf{x},\mu_{B(z(\mathbf{x}),R_t(z(\mathbf{x}),\mu))} + \chi_{B(z(\mathbf{x}),R_t(z(\mathbf{x}),\mu))^c})$, $\quad \mu,\chi \in \mathbf{N}$.

(iii) Die Abbildung $\mu \mapsto B(z(\mathbf{x}),R_t(z(\mathbf{x}),\mu_{\mathbf{x}}))$ von $\mathbf{N}$ nach $\mathcal{F}$ ist eine Stoppmenge.

(iv) $\mathbf{x} \in B(z(\mathbf{x}),R_t(z(\mathbf{x}),\mu_{\mathbf{x}}))$, d.h. $x_i \in B(z(\mathbf{x}),R_t(z(\mathbf{x}),\mu_{\mathbf{x}}))$ für alle $i = 1,\dots,k$, $\quad \mu \in \mathbf{N}$.

Wir nennen $R_t \equiv R_t(z,\mu)$ einen *Stabilisierungsradius* und verwenden für $\mu \in \mathbf{N}$ und $z \in \mathbb{R}^d$ die Schreibweise $S_t(z,\mu) := B(z,R_t(z,\mu))$. □

Unser Ziel besteht nun darin, einen Satz zur Poissonapproximation des skalierten Prozesses $t^{-1/d}\xi_t$ zu finden. Wie in Kapitel 2 wird eine geeignet gewählte Palmsche Version von η bezüglich ξ_t in der Herleitung dieses Satzes eine tragende Rolle spielen. Um dem Leser eine bessere Anschauung dieses Objektes zu vermitteln, bestimmen wir im Folgenden dessen Verteilung. Dazu erinnern wir daran, dass ν_{k-1} wie in Kapitel 1 das eindeutige Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Grassmannschen Raum $G(d,k-1)$ der $(k-1)$-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^d$ bezeichnet (vgl. Abschnitt 13.2 in [60]). Für einen festen Unterraum $L \in G(d,k-1)$ bezeichne $\mathbb{S}_L$ die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre in L. Für $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^k$ sei $\Delta_{k-1}(\mathbf{u})$ das $(k-1)$-dimensionale Volumen der konvexen Hülle $\mathrm{conv}(\mathbf{u})$.

Lemma 3.1.2. *Seien $z \in \mathbb{R}^d$, η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, ξ_t der verdünnte Prozess aus* (3.1.1) *und $\gamma_t := \gamma_\zeta \mathbb{E} g_t(0,\eta_\zeta^0)$, $t > 0$. Dann ist die Verteilung einer Palmschen Version η_t^z von η bezüglich ζ bei z gegeben durch*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\eta_t^z \in A) = \frac{\gamma^k}{\gamma_t}\mathbb{E}\iiint &\mathbb{1}\{(\theta_{-z(z+r\boldsymbol{u})}\eta)_{z+r\boldsymbol{u}} \in A\}\, g_t(0,\eta_{r\boldsymbol{u}-z(r\boldsymbol{u})})\, f(r\boldsymbol{u}-z(r\boldsymbol{u}),\eta_{r\boldsymbol{u}-z(r\boldsymbol{u})})\\ &\times r^{d(k-1)-1}\,(k-1)!\Delta_{k-1}(\boldsymbol{u})^{d-k+2}\,\mathbb{S}_L^k(\mathrm{d}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}r\,\nu_{k-1}(\mathrm{d}L), \quad A \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Beweis. Seien $t > 0$ und $B \in \mathcal{B}^d$. Nach Definition von ξ_t und ζ gilt

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z \in B\}\,\mathbb{1}\{\eta \in A\}\,\xi_t(\mathrm{d}z)\\ &= \mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z \in B \cap W_t\}\,\mathbb{1}\{\eta \in A\}\,g_t(z,\eta)\,\zeta(\mathrm{d}z)\\ &= \mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\}\mathbb{1}\{\eta \in A\}\,g_t(z(\mathbf{x}),\eta)\,f(\mathbf{x},\eta)\,\eta^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Mit der multivariaten Mecke-Formel, der Stationarität von η und der Translationsinvarianz von g_t und f lässt sich (3.1.3) schreiben als

$$\begin{aligned}
&\gamma^k \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\} \mathbb{1}\{\eta_{\mathbf{x}} \in A\}\, g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x}})\, f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \gamma^k \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\} \mathbb{1}\{(\theta_{-z(\mathbf{x})}\eta)_{\mathbf{x}} \in A\}\, g_t(z(\mathbf{x}), (\theta_{-z(\mathbf{x})}\eta)_{\mathbf{x}})\, f(\mathbf{x}, (\theta_{-z(\mathbf{x})}\eta)_{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad = \gamma^k \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\} \mathbb{1}\{(\theta_{-z(\mathbf{x})}\eta)_{\mathbf{x}} \in A\}\, g_t(0, \eta_{\mathbf{x}-z(\mathbf{x})})\, f(\mathbf{x} - z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x}-z(\mathbf{x})})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Mit einer Blaschke-Petkantschin-Formel für umgebende $(k-1)$–dimensionale Sphären (Satz 1.2.8) und der Translationskovarianz der Zentrumsfunktion z lässt sich (3.1.4) umformen zu

$$\begin{aligned}
&\gamma^k \mathbb{E} \iiiint \mathbb{1}\{z \in B \cap W_t\}\, \mathbb{1}\{(\theta_{-z(z+r\mathbf{u})}\eta)_{z+r\mathbf{u}} \in A\}\, g_t(0, \eta_{r\mathbf{u}-z(r\mathbf{u})})\, f(r\mathbf{u} - z(r\mathbf{u}), \eta_{r\mathbf{u}-z(r\mathbf{u})}) \\
&\qquad \times r^{d(k-1)-1}\, (k-1)! \Delta_{k-1}(\mathbf{u})^{d-k+2}\, \mathbb{S}_L^k(\mathrm{d}\mathbf{u})\, \mathrm{d}r\, \nu_{k-1}(\mathrm{d}L)\, \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Da das Intensitätsmaß von ξ_t nach (3.1.2) durch $\mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}z) = \mathbb{1}\{z \in W_t\}\, \gamma_t\, \mathrm{d}z$ gegeben ist, folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.1.3. Man vergleiche Lemma 3.1.2 mit Theorem 1.1 in [8]. □

Wir zeigen folgendes Resultat zur Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$.

Satz 3.1.4. *Seien $c > 0$,$z : (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}^d$ translationskovariant und permutationsinvariant sowie $f : (\mathbb{R}^d)^k \times \boldsymbol{N} \to \{0,1\}$ und $g_t : \mathbb{R}^d \times \boldsymbol{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$ messbare und translationsinvariante Funktionen, sodass die Familie $(g_t f)_t$ stabilisierend im Sinne von Definition 3.1.1 ist. Ferner seien η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, ξ_t der Prozess aus* (3.1.1)*, ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d}$ und es gelte $\lim_{t\to\infty} t\gamma_t = c$. Dann gilt für messbare Abbildungen $t \mapsto b_t$ und $t \mapsto d_t$ von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$,*

$$\begin{aligned}
&d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\, \nu) \\
&\quad \le C_{t,1} + C_{t,2} + C_{t,3} + O\left(t\mathbb{P}\left(R_t(0, \eta^0_\zeta) > b_t\right) + \frac{b_t^d}{t} \right) + |t\,\gamma_t - c|, \quad t > 0, \qquad (3.1.5)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_{t,1} &:= \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\gamma^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \mathbb{E} \iiint \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^{k-\ell}\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y},\mathbf{u}) \in W_t\} \\
&\qquad \times g_t(z(\mathbf{x},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, g_t(z(\mathbf{y},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}}) f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, f((\mathbf{y},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \\
C_{t,2} &:= \frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \\
&\qquad \times \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \le 2d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}, \\
C_{t,3} &:= \frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \\
&\qquad \times \mathbb{1}\{R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{y}}) > d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Wie in Kapitel 2 ergeben sich interessante Anwendungen von Satz 3.1.4, wenn wir g_t als Indikatorfunktion wählen, die angibt, ob ein bestimmtes Funktional einen fest gewählten Wert über- bzw. unterschreitet. Dies diskutieren wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 3.1.5. (a) Sei $t \mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$. Für jedes $t > 0$ und jedes $c > 0$ sei $g_{t,c}(z,\eta) := \mathbb{1}\{h(z,\eta) > u_t - \log c\}$ mit

$$\left|\gamma_\zeta t\,\mathbb{P}\left(h(0,\eta_\zeta^0) > u_t - \log c\right) - c\right| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Falls die rechte Seite von (3.1.5) für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.4,

$$\mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} h(z(\mathbf{x}),\eta) - u_t \le -\log c\right) = \mathbb{P}(\xi_t(W_t) = 0) \xrightarrow{t\to\infty} e^{-c}, \quad c > 0.$$

Wählen wir $c := e^{-\lambda}$, so ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\max_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} h(z(\mathbf{x}),\eta) - u_t \le \lambda\right) = e^{-e^{-\lambda}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies zeigt, dass $\max_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} h(z(\mathbf{x}),\eta)$ im Anziehungsbereich der Gumbelverteilung liegt.

(b) Sei $t \mapsto u_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$. Für jedes $t > 0$ und jedes $c > 0$ sei $g_{t,c}(x,\eta) := \mathbb{1}\{h(x,\eta) < c^{1/k}u_t\}$ mit

$$\left|\gamma_\zeta t\,\mathbb{P}\left(h(0,\eta_\zeta^0) < c^{1/k}u_t\right) - c\right| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Falls die rechte Seite von (3.1.5) für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert, so ergibt sich unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.4,

$$\mathbb{P}\left(\min_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:\,z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} u_t^{-1} h(z(\mathbf{x}),\eta) \ge c^{1/k}\right) = \mathbb{P}(\xi_t(W_t) = 0) \xrightarrow{t\to\infty}= e^{-c}, \quad c > 0.$$

Wählen wir $c := \lambda^k$, so ergibt sich

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(u_t^{-1} \min_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:\,z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} h(z(\mathbf{x}),\eta) \ge \lambda\right) = e^{-\lambda^k}, \quad \lambda \ge 0.$$

Dies zeigt, dass $\min_{\mathbf{x}\in\eta^{(k)}:\,z(\mathbf{x})\in\zeta\cap W_t} h(z(\mathbf{x}),\eta)$ im Anziehungsbereich der Weibullverteilung mit Formparameter k liegt.

□

Beweis von Satz 3.1.4. Die Struktur des Beweises ist wie die des Beweises von Satz 2.1.3. An denjenigen Stellen, an denen die Argumente analog sind, verweisen wir auf die entsprechende Stelle im Beweis von Satz 2.1.3, an den übrigen Stellen führen wir der Vollständigkeit halber die Argumente aus. Wir wollen Satz 2.1.2 verwenden. Dazu konstruieren wir für alle $v \in [0,1]^d$ eine geeignete Palmsche Version $(t^{-1/d}\xi_t)^v$ von $t^{-1/d}\xi_t$ (bezüglich $t^{-1/d}\xi_t$) bei v, sodass die totale Variation $\left\|t^{-1/d}\xi_t - \left((t^{-1/d}\xi_t)^v - \delta_v\right)\right\|$ möglichst klein wird. Sei $\xi_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von ξ_t bei $t^{1/d}v$. Wie in (2.1.7) lässt sich zeigen, dass durch $t^{-1/d}\xi_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von $t^{-1/d}\xi_t$ bei v gegeben ist. Sei $\eta_t^{t^{1/d}v}$ eine Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei $t^{1/d}v$. Wie in (2.1.3) lässt sich zeigen, dass $\xi_t(\eta_t^{t^{1/d}v})$ eine Palmsche Version von ξ_t (bezüglich ξ_t) bei $t^{1/d}v$ ist. Daher lässt sich das oben beschriebene Problem auf die Konstruktion einer geeigneten Palmschen Version von η bezüglich ξ_t bei $t^{1/d}v$ zurückführen. Sei dazu η_t^z für $z \in W_t = [0,t^{1/d}]^d$ eine von η

unabhängige Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei x. Ferner sei $S_t : \mathbf{N} \to \mathcal{F}$ die Abbildung aus Definition 3.1.1(ii). Wir weisen nun nach, dass dann auch durch

$$(\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c} \tag{3.1.6}$$

eine Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei z gegeben ist und werden diese Version im weiteren Beweis verwenden. Sei dazu $h : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \to [0,\infty)$ eine messbare Abbildung. Mit der Unabhängigkeit von η und η_t^z, der Definition von η_t^z und von ξ_t ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int h(z, (\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c})\,\mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}z)\\
&= \iiint h(z, \mu_{S_t(z,\mu)} + \varphi_{S_t(z,\mu)^c})\,\xi_t(\mu)(\mathrm{d}z)\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi)\\
&= \frac{1}{k!}\iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} h(z(\mathbf{x}), \mu_{S_t(z(\mathbf{x}),\mu)} + \varphi_{S_t(z(\mathbf{x}),\mu)^c})\,g_t(z(\mathbf{x}),\mu)\,f(\mathbf{x},\mu)\\
&\qquad \times \mu^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x})\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Mit der multivariaten Mecke-Formel und der Eigenschaft aus Definition 3.1.1(iii) ergibt sich für (3.1.7) der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^k}{k!}\iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} h(z(\mathbf{x}), \mu_{S_t(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x})} + \varphi_{S_t(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x})^c} + \delta_\mathbf{x})\,g_t(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x})\,f(\mathbf{x},\mu_\mathbf{x})\\
&\qquad \times \mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Da $(fg_t)_t$ stabilisierend und S_t eine Stoppmenge ist, lässt sich (3.1.8) mit der messbaren Funktion

$$g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0,\infty), \quad (\mu,\varphi) \mapsto h(z(\mathbf{x}), \mu + \varphi + \delta_\mathbf{x}) g_t(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x}) f(\mathbf{x},\mu_\mathbf{x}),$$

in Satz 1.2.5 umschreiben zu

$$\frac{\gamma^k}{k!}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} h(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x})\,g_t(z(\mathbf{x}),\mu_\mathbf{x})\,f(\mathbf{x},\mu_\mathbf{x})\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu)\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.1.9}$$

Mit der multivariaten Mecke-Formel lässt sich (3.1.9) nun schreiben als

$$\frac{1}{k!}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} h(z(\mathbf{x}),\mu)\,g_t(z(\mathbf{x}),\mu)\,f(\mathbf{x},\mu)\,\mu^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x})\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu) = \mathbb{E}\int h(z,\eta)\,\xi_t(\mathrm{d}z).$$

Dies zeigt, dass $(\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}$ für $\mathbb{E}\xi_t$-fast alle z eine Palmsche Version von η bezüglich ξ_t bei z ist.

Wie in Satz 2.1.3 erhalten wir nun für $t^{-1/d}\xi_t$ und den Poissonprozess ν aus Satz 3.1.4 die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le \int\limits_{W_t} \mathbb{E}\left\|\xi_t(\eta) - \left[\xi_t((\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) - \delta_z\right]\right\|_{\mathrm{TV}} \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}z) + |t\gamma_t - c|. \tag{3.1.10}$$

Die in (3.1.10) auftretende totale Variation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\|\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) + \delta_z\| &= (\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) + \delta_z)_+(W_t)\\
&\quad + (\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^z)_{S_t(x,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^z)^c}) + \delta_z)_-(W_t).
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Zur Abschätzung des ersten Summanden in (3.1.11) machen wir folgende Vorüberlegung. Seien dazu $\mu, \varphi \in \mathbf{N}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^k$ und es gelte

$$S_t(z(\mathbf{y}), \varphi) \cap S_t(z(\mathbf{x}), \mu) = \varnothing. \tag{3.1.12}$$

Da $(fg_t)_t$ stabilisierend ist, ergibt sich aus (3.1.12) und Definition 3.1.1(ii),

$$(fg_t)(\mathbf{x}, \mu) = (fg_t)(\mathbf{x}, \mu_{S_t(z(\mathbf{y}),\varphi)^c}) = (fg_t)(\mathbf{x}, \mu_{S_t(z(\mathbf{y}),\varphi)^c} + \varphi_{S_t(z(\mathbf{y}),\varphi)}). \tag{3.1.13}$$

Diese Überlegung und die in Definition 3.1.1(iv) geforderte Eigenschaft führen auf die Abschätzung

$$(\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) + \delta_z)_+(W_t) \leq \sum_{w \in \zeta(\eta) \cap W_t} g_t(w, \eta)\, \mathbb{1}\{S_t(z, \eta_t^z) \cap S_t(w, \eta) \neq \varnothing\}. \tag{3.1.14}$$

Im Folgenden sei $\widetilde{\eta}$ ein Poissonprozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\eta \overset{d}{=} \widetilde{\eta}$, sodass η und $\widetilde{\eta}$ unabhängig sind. Für die integrierte rechte Seite von (3.1.14) ergibt sich mit der Unabhängigkeit von η und η_t^z sowie der Definition des Palmschen Prozesses η_t^z,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int \sum_{w \in \zeta(\eta) \cap W_t} g_t(w, \eta)\, \mathbb{1}\{S_t(z, \eta_t^z) \cap S_t(w, \eta) \neq \varnothing\}\, \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}z) \\
&\quad = \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{w \in W_t\}\, g_t(w, \eta) \mathbb{1}\{S_t(z, \eta_t^z) \cap S_t(w, \eta) \neq \varnothing\}\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w)\, \mathbb{E}\xi_t(\mathrm{d}z) \\
&\quad = \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{w, z \in W_t\}\, g_t(w, \eta)\, g_t(z, \widetilde{\eta}) \mathbb{1}\{S_t(z, \widetilde{\eta}) \cap S_t(w, \eta) \neq \varnothing\}\, \zeta(\widetilde{\eta})(\mathrm{d}z)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w).
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Indem wir nach der Größe der Stabilisierungsradien $R_t(w, \eta)$ und $R_t(z, \widetilde{\eta})$ unterscheiden, lässt sich (3.1.15) mit b_t aus Satz 3.1.4 abschätzen durch

$$\mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{w, z \in W_t\}\, \mathbb{1}\{R_t(w, \eta) > b_t \text{ oder } R_t(z, \widetilde{\eta}) > b_t\}\, g_t(z, \widetilde{\eta})\, g_t(w, \eta)\, \zeta(\widetilde{\eta})(\mathrm{d}z)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w) \tag{3.1.16}$$

$$\begin{aligned}
+ \mathbb{E} \iint &\mathbb{1}\{w, z \in W_t\}\, \mathbb{1}\{R_t(w, \eta) \leq b_t \text{ und } R_t(z, \widetilde{\eta}) \leq b_t,\ S_t(w, \eta) \cap S_t(z, \widetilde{\eta}) \neq \varnothing\}\, g_t(z, \widetilde{\eta})\, g_t(w, \eta) \\
&\times \zeta(\widetilde{\eta})(\mathrm{d}z)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w).
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Wegen der Symmetrie in η und $\widetilde{\eta}$ lässt sich der erste Summand (3.1.16) mit der Stationarität von ζ, der Definition des Prozesses η_ζ^0 und der Eigenschaft $t\gamma_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c$ nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned}
&2\, \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{w, z \in W_t\}\, \mathbb{1}\{R_t(w, \eta) > b_t\}\, g_t(z, \widetilde{\eta})\, g_t(w, \eta)\, \zeta(\widetilde{\eta})(\mathrm{d}z)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w) \\
&\quad \leq 2t\, \gamma_t\, \mathbb{E} \int_{W_t} \mathbb{1}\{R_t(w, \eta) > b_t\}\, g_t(w, \eta)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w) \\
&\quad = 2\, t^2\, \gamma_t\, \gamma_\zeta\, \mathbb{P}\big(R_t(0, \eta_\zeta^0) > b_t\big) \\
&\quad = O\big(t\, \mathbb{P}\big(R_t(0, \eta_\zeta^0) > b_t\big)\big) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Den zweiten Summanden (3.1.17) schätzen wir mit der Ereignisinklusion

$$\{R_t(w, \eta) \leq b_t \text{ und } R_t(z, \widetilde{\eta}) \leq b_t,\ S_t(w, \eta) \cap S_t(z, \widetilde{\eta}) \neq \varnothing\} \subset \{|z - w| \leq 2b_t\} \tag{3.1.19}$$

sowie der Stationarität von ζ ab durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_{W_t}\int_{B(z,2b_t)} g_t(z,\widetilde{\eta})\, g_t(w,\eta)\, \zeta(\widetilde{\eta})(\mathrm{d}z)\, \zeta(\eta)(\mathrm{d}w) \\
&\quad = 2^d\, \kappa_d\, b_t^d\, t\, \gamma_t^2 = O\left(\frac{b_t^d}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \qquad (3.1.20)
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den zweiten Summanden in (3.1.11). Aus (3.1.13) und der Eigenschaft aus Definition 3.1.1(iv) ergibt sich analog zu (3.1.14) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&(\xi_t(\eta) - \xi_t((\eta_t^z)_{S_t(x,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(x,\eta_t^z)^c}) + \delta_z)_-(W_t) \\
&\leq \sum_{w \in \left[\zeta\left((\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}\right) - \delta_z\right] \cap W_t} g_t(w, (\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) \\
&\qquad \times \mathbb{1}\{S_t(z,\eta_t^z) \cap S_t(w, (\eta_t^z)_{S_t(z,\eta_t^z)} + \eta_{S_t(z,\eta_t^z)^c}) \neq \varnothing\}. \qquad (3.1.21)
\end{aligned}$$

Für die integrierte rechte Seite von (3.1.21) ergibt sich mit der Unabhängigkeit von η und η_t^z sowie der Definition des Palmschen Prozesses η_t^z,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} \sum_{w \in [\zeta(\widetilde{\eta}_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})^c}) - \delta_{z(\mathbf{x})}] \cap W_t} g_t(w, \widetilde{\eta}_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})^c}) \\
&\quad \times \mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}) \cap S_t(w, \widetilde{\eta}_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})^c}) \neq \varnothing\}\, g_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta})\, f(\mathbf{x},\widetilde{\eta})\, \widetilde{\eta}^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{x}). \qquad (3.1.22)
\end{aligned}$$

Mit der multivariaten Mecke-Formel lässt sich (3.1.22) schreiben als

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^k}{k!}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\mathbb{E} \sum_{w \in [\zeta((\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})^c}) - \delta_{z(\mathbf{x})}] \cap W_t} g_t(w, (\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})^c}) \\
&\quad \times \mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}}) \cap S_t(w, (\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})} + \eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})^c}) \neq \varnothing\}\, g_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})\, f(\mathbf{x},\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.1.23)
\end{aligned}$$

Indem wir in Satz 1.2.5 die Abbildung

$$\begin{aligned}
&g : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to [0,\infty), \quad (\mu,\varphi) \mapsto \\
&\quad \sum_{w \in [\zeta(\mu_{\mathbf{x}} + \varphi) - \delta_{z(\mathbf{x})}] \cap W_t} g_t(w, \mu_{\mathbf{x}} + \varphi)\mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}),\mu_{\mathbf{x}}) \cap S_t(w, \mu_{\mathbf{x}} + \varphi) \neq \varnothing\} g_t(z(\mathbf{x}),\mu_{\mathbf{x}})\, f(\mathbf{x},\mu_{\mathbf{x}}),
\end{aligned}$$

wählen und beachten, dass $(fg_t)_t$ stabilisierend ist, erhalten wir für (3.1.23) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^k}{k!}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} \sum_{w \in [\zeta(\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}}) - \delta_{z(\mathbf{x})}] \cap W_t} g_t(w,\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}}) \\
&\quad \times \mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}}) \cap S_t(w,\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}}) \neq \varnothing\}\, g_t(z(\mathbf{x}),\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})\, f(\mathbf{x},\widetilde{\eta}_{\mathbf{x}})\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \frac{\gamma^k}{(k!)^2}\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t \setminus \{z(\mathbf{x})\}\} g_t(z(\mathbf{y}),\eta_{\mathbf{x}}) f(\mathbf{y},\eta_{\mathbf{x}}) \\
&\quad \times \mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}),\eta_{\mathbf{x}}) \cap S_t(z(\mathbf{y}),\eta_{\mathbf{x}}) \neq \varnothing\} g_t(z(\mathbf{x}),\eta_{\mathbf{x}}) f(\mathbf{x},\eta_{\mathbf{x}})\, \eta_{\mathbf{x}}^{(k)}(\mathrm{d}\mathbf{y})\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.1.24)
\end{aligned}$$

Indem wir nach der Anzahl gemeinsamer Punkte in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ unterscheiden, lässt sich (3.1.24) mit der multivariaten Mecke-Formel abschätzen durch

$$\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\gamma^{k+\ell}}{k!\,\ell!} \mathbb{E} \iiint \mathbb{1}\{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^{k-\ell}\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y},\mathbf{u}) \in W_t\}$$
$$\times g_t(z(\mathbf{x},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, g_t(z(\mathbf{y},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}}) f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, f((\mathbf{y},\mathbf{u}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{u}})\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{3.1.25}$$

$$+ \frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{S_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \cap S_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \neq \varnothing\}\, g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$$
$$\times f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.1.26}$$

Der erste Summand (3.1.25) ist der Term $C_{1,t}$ in Satz 3.1.4. Indem wir nach der Größe der Stabilisierungsradien unterscheiden, lässt sich der zweite Summand (3.1.26) schreiben als die Summe

$$\frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq d_t \text{ und } R_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \leq d_t,\, S_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \cap S_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \neq \varnothing\}$$
$$\times g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$+ \frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) > d_t \text{ oder } R_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) > d_t,\, S_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \cap S_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) \neq \varnothing\}$$
$$\times g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.1.27}$$

Mit einem zu (3.1.19) analogen Argument ergibt sich für den ersten Summanden die obere Schranke

$$C_{t,2} := \frac{\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\} g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}) f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$$
$$\times \mathbb{1}\{|z - w| \leq 2d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.1.28}$$

Der zweite Summand in (3.1.27) lässt sich abschätzen durch

$$C_{t,3} := \frac{2\gamma^{2k}}{(k!)^2} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, g_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, g_t(z(\mathbf{y}), \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})\, f(\mathbf{y}, \eta_{\mathbf{x},\mathbf{y}})$$
$$\times \mathbb{1}\{R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{y}}) > d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.1.29}$$

Indem wir die Ausdrücke aus (3.1.18), (3.1.20), (3.1.25), (3.1.28) und (3.1.29) in (3.1.10) einsetzen, ergibt sich die behauptete Abschätzung. □

3.2 Poissonprozessapproximation im Gabriel-Graphen

In diesem Abschnitt betrachten wir Anwendungen von Satz 3.1.4 im zufälligen Gabriel-Graphen G mit Knotenmenge η. Zwei Punkte $x_1, x_2 \in \eta$ heißen in G *verbunden*, falls die d-dimensionale offene Kugel $B(\mathbf{x})$, deren Zentrum der Mittelpunkt $\frac{x_1+x_2}{2}$ von x_1 und x_2 und deren Radius $\frac{|x_1-x_2|}{2}$ ist, mit $\operatorname{supp}(\eta - \delta_{(x_1,x_2)})$ leeren Schnitt besitzt. In [37] wurden zudem geometrische und kombinatorische Eigenschaften des Gabriel-Graphen untersucht. Wir untersuchen minimale und maximale Kanten in G. Dazu wählen wir die Zentrumsfunktion

$$z : (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{3.2.1}$$

und definieren den Prozess ζ von Kantenmittelpunkten in G, also

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x} \in \eta^{(2)}} \mathbb{1}\{(\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\, \delta_{z(\mathbf{x})}.$$

3.2.1 Minimale Kanten im Gabriel-Graphen

Seien $c > 0$ und $t \mapsto v_t$ eine Abbildung von $[0, \infty)$ nach $[0, \infty)$. Zunächst studieren wir minimale Kantenlängen im Gabriel-Graphen und betrachten dazu den verdünnten Prozess

$$\xi_t := \sum_{z \in \zeta \cap W_t} \mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\, \delta_z. \tag{3.2.2}$$

Dies ist die Einschränkung des Zentrumsprozesses ζ auf Zentren $z(\mathbf{x}) \in W_t$ mit der Eigenschaft, dass der Radius von $B(\mathbf{x})$ kleiner als v_t ist. Zunächst bestimmen wir das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t. Für $B \in \mathcal{B}^d$ gilt

$$\mathbb{E}\xi_t(B) = \frac{1}{2} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\}\, \mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\, \mathbb{1}\{(\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\, \eta^{(2)}(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{3.2.3}$$

Mit der multivariaten Mecke-Formel, der Substitution $z = z(\mathbf{x})$ und der Translationsinvarianz von $\mathcal{L}^d$ lässt sich (3.2.3) ausdrücken durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^2}{2} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in B \cap W_t\}\, \mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\, e^{-\gamma\,\kappa_d\, 2^{-d}|x_1-x_2|^d}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= 2^{d-1}\gamma^2 \iint \mathbb{1}\{z \in B \cap W_t\}\, \mathbb{1}\{|z - x_1| < v_t\}\, e^{-\gamma\,\kappa_d\,|z-x_1|^d}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x_1 \\
&= 2^{d-1}\gamma^2\, \mathcal{L}^d(B \cap W_t) \int \mathbb{1}\{|x_1| < v_t\}\, e^{-\gamma\,\kappa_d\,|x_1|^d}\, \mathrm{d}x_1.
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Nach Transformation auf d-dimensionale Polarkoordinaten erhalten wir für (3.2.4) den Ausdruck

$$d\,\kappa_d\, 2^{d-1}\gamma^2\, \mathcal{L}^d(B \cap W_t) \int_0^{v_t} e^{-\gamma\kappa_d r^d} r^{d-1} \mathrm{d}r.$$

Mit der Substitution $s = \gamma\kappa_d r^d$ lässt sich dieser Ausdruck umschreiben zu

$$2^{d-1}\gamma\, \mathcal{L}^d(B \cap W_t) \int_0^{\gamma\,\kappa_d\, v_t^d} e^{-s}\mathrm{d}s = 2^{d-1}\gamma\, \mathcal{L}^d(B \cap W_t) \left(1 - e^{-\gamma\kappa_d v_t^d}\right).$$

Mit der Wahl

$$v_t := \left(\frac{c}{t\, 2^{d-1}\gamma^2\, \kappa_d}\right)^{1/d}, \quad t > 0, \tag{3.2.5}$$

ergibt sich

$$\mathbb{E}\xi_t(B) = c\,\mathcal{L}^d(B \cap W_t)(1/t + O(t^{-2})) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{E}\xi_t(W_t) = c + O(t^{-1})$ für $t \to \infty$.

Wir zeigen folgendes Theorem zur Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$.

Satz 3.2.1. *Seien $c > 0$, η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$ und v_t aus* (3.2.5)*. Ferner seien ξ_t aus* (3.2.2) *und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\,\mathcal{L}^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt*

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. Wir wollen Satz 3.1.4 verwenden. Dazu zeigen wir, dass $(fg_t)_t$ stabilisierend ist und definieren zunächst einen geeigneten Stabilisierungsradius. Für $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbf{N}$ wählen wir $R_t(z, \mu) := |x_1 - x_2|/2$, falls es genau ein $\mathbf{x} \in \mu^{(2)}$ (bis auf Permutationen in den Komponenten von $\mathbf{x}$) mit $z(\mathbf{x}) = z$ gibt, und $R_t(z, \mu) := \infty$, sonst. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x}}) = \infty) &= \mathbb{P}(\exists \mathbf{x} \ne \mathbf{y} \in \eta^{(2)} : z(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}))\\ &\le \frac{\gamma^4}{4} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in [0,1]^d\}\mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y})\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\quad + \frac{\gamma^3}{2} \iiint \mathbb{1}\{z(x,u) \in [0,1]^d\}\mathbb{1}\{z(x,u) = z(y,u)\}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x. \qquad (3.2.6)\end{aligned}$$

Indem wir das innere Integral im ersten Summanden in (3.2.6) wie in (3.2.4) transformieren und auf das innere Integral im zweiten Summanden die Transformation aus Satz 1.2.9 anwenden, ergibt sich mit der Diffusität des Lebesgue-Maßes, dass beide Summanden in (3.2.6) gleich null sind. Folglich gilt für $(\mathcal{L}^d)^2$-fast alle $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^2$,

$$(fg_t)(\mathbf{x}, \eta_{\mathbf{x}}) = \mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0,\, |x_1 - x_2| < 2v_t\} = \mathbb{1}\{\eta_{S_t(z(\mathbf{x}),\eta_{\mathbf{x}})}(B(\mathbf{x})) = 0,\, |x_1 - x_2| < 2v_t\} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und es folgt, dass $(fg_t)_t$ stabilisierend ist. Mit der Wahl

$$b_t := d_t := (3\gamma^{-1}\kappa_d^{-1}\log t)^{1/d}$$

ergibt sich nach einer zu (3.2.4) analogen Rechnung,

$$\gamma_\zeta t\mathbb{P}(R_t(0, \eta_\zeta^0) > b_t) = \frac{\gamma^2}{2} t \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in [0,1]^d\}\, \mathbb{P}(R_t(z(\mathbf{x}), \eta_{\mathbf{x}}) > b_t) e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{2^{d-1}\gamma}{t^2}.$$

Folglich erhalten wir aus Satz 3.1.4 die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le C_{t,1} + C_{t,2} + C_{t,3} + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \qquad (3.2.7)$$

Der Term $C_{t,1}$ lautet

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^3}{2}\mathbb{E} \iiint &\mathbb{1}\left\{z(x,u) \in W_t\right\}\, \mathbb{1}\left\{z(y,u) \in W_t\right\}\, \mathbb{1}\left\{|x-u| < 2v_t\right\}\, \mathbb{1}\left\{|y-u| < 2v_t\right\}\\ &\times \mathbb{1}\{(\eta + \delta_y)(B(x,u)) = 0\}\, \mathbb{1}\{(\eta + \delta_x)(B(y,u)) = 0\}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x. \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

Im Fall $|x-u| < 2v_t$ und $|y-u| < 2v_t$ gilt mit der Dreiecksungleichung $|y - z(x,u)| < 3v_t$. Daher ergibt sich für (3.2.8) mit der Substitution $v = y - z(x,u)$ die obere Schranke

$$\frac{\gamma^3}{2} 3^d \kappa_d v_t^d \iint \mathbb{1}\left\{z(x,u) \in W_t\right\}\, \mathbb{1}\left\{|x-u| < 2v_t\right\} \mathbb{P}\left(\eta(B(x,u)) = 0\right)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x = O(t^{-1}) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Der Term $C_{t,2}$ ist gegeben durch

$$\frac{\gamma^4}{4}\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\,\mathbb{1}\{|y_1 - y_2| < 2v_t\}$$
$$\times\,\mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{y}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{y})) = 0\}\,\mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \le 2d_t\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.2.9}$$

Indem wir im inneren Integral $z = z(\mathbf{y})$ substituieren und anschließend die Integration über y_1 und z ausführen, ergibt sich für (3.2.9) die obere Schranke

$$\begin{aligned}
&2^{d-2}\gamma^4\mathbb{E}\iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\,\mathbb{1}\{|z - y_1| < v_t\}\,\mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{|z - z(\mathbf{x})| \le 2d_t\}\\
&\qquad\times\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= 2^{d-2}\gamma^4\kappa_d v_t^d\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\,\mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{|z - z(\mathbf{x})| \le 2d_t\}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= 2^{2d-2}\gamma^4\kappa_d^2 d_t^d v_t^d\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\,\mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Den Term $C_{t,3}$ ist gegeben durch

$$\frac{\gamma^4}{4}\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| < 2v_t\}\,\mathbb{1}\{|y_1 - y_2| < 2v_t\}$$
$$\times\,\mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{y}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{y})) = 0\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > d_t\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.2.11}$$

Wegen $v_t \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt $C_{t,3} = 0$ für t groß genug. Indem wir (3.2.8), (3.2.10) und (3.2.11) in (3.2.7) einsetzen, erhalten wir die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) = O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty.$$

□

3.2.2 Maximale Kanten im Gabriel-Graphen

Seien erneut $c > 0$ und $t \mapsto v_t$ eine Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$. Wir untersuchen nun maximale Kantenlängen im Gabriel-Graphen und betrachten dazu den verdünnten Prozess

$$\xi_t := \sum_{z\in\zeta\cap W_t} \mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > 2v_t\}\,\delta_z. \tag{3.2.12}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung wie in (3.2.4) ergibt sich, dass das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t gegeben ist durch

$$\mathbb{E}\xi_t(B) = 2^{d-1}\,\gamma\,\mathcal{L}^d(B\cap W_t)e^{-\gamma\kappa_d v_t^d}, \quad B \in \mathcal{B}^d,\ t > 0.$$

Folglich ergibt sich mit der Wahl

$$v_t := \left(\frac{\log(t\,2^{d-1}\,\gamma/c)}{\gamma\,\kappa_d}\right)^{1/d}, \quad t > 0, \tag{3.2.13}$$

für Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ die Form

$$\mathbb{E}\xi_t(B) = c\frac{\mathcal{L}^d(B\cap W_t)}{t}, \quad B \in \mathcal{B}^d,\ t > 0.$$

Wir zeigen folgendes Resultat zur Poissonprozessapproximation von ξ_t.

Satz 3.2.2. *Seien $c > 0$, $\gamma > 0$, η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität γ, v_t aus* (3.2.13) *und ξ_t aus* (3.2.12). *Ferner sei ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\mathcal{L}^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt*

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq O\left((\log t)^{-\frac{d-1}{d+1}}\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Bemerkung 3.2.3. Beim Vergleich der Sätze 3.2.1 und 3.2.2 fällt auf, dass die Konvergenzrate im Fall maximaler Kantenlängen schlechter als für minimale Kantenlängen ist. Dies lässt sich intuitiv wie folgt begründen. Minimale Kantenlängen treten offensichtlich zwischen Punkten in sehr geringem Abstand auf. Da wir in den Resttermen $C_{t,1}$ und $C_{t,2}$ über Punktepaare integrieren, die in kleinem Abstand zueinander sind, lassen sich diese beiden Restterme im Fall minimaler Kantenlängen im Wesentlichen über das Maß des Integrationsgebiets abschätzen. Dies ist im Fall maximaler Kantenlängen nicht möglich. In diesem Fall müssen wir feinere geometrische Abschätzungen für das Volumen des Schnitts zweier Kugeln verwenden. Man vergleiche die Sätze 3.2.1 und 3.2.2 mit den Aussagen zur Poissonprozessapproximation im k-nächsten-Nachbarn-Graphen in Kapitel 2. □

Beweis von Satz 3.2.2. Wir wollen Satz 3.1.4 verwenden. Wie im Beweis von Satz 3.2.1 zeigen wir, dass $(fg_t)_t$ stabilisierend ist und definieren einen geeigneten Stabilisierungsradius. Für $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbf{N}$ wählen wir $R_t(z, \mu) := |x_1 - x_2|/2$, falls es genau ein $\mathbf{x} \in \mu^{(2)}$ (bis auf Permutationen in den Komponenten von $\mathbf{x}$) mit $z(\mathbf{x}) = z$ gibt, und $R_t(z, \mu) := \infty$, sonst. Wie oben ergibt sich mit der Wahl $b_t := d_t := (3\gamma^{-1}\kappa_d^{-1} \log t)^{1/d}$ in Satz 3.1.4 die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \leq C_{t,1} + C_{t,2} + C_{t,3} + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{3.2.14}$$

Bevor wir $C_{t,1}$, $C_{t,2}$ und $C_{t,3}$ näher betrachten, machen wir folgende geometrische Vorüberlegungen zur Abschätzung des Volumens einer Vereinigung zweier Kugeln. Für $|y - u| \geq |x - u|$ gilt mit der d-Homogenität des Lebesgue-Maßes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^d\left(B(y,u) \setminus B(x,u)\right) &= \mathcal{L}^d\left(B\left(z(y,u), |y - z(y,u)|\right) \setminus B\left(z(x,u), |x - z(x,u)|\right)\right)\\ &\geq \mathcal{L}^d\left(B\left(z(y,u), |y - z(y,u)|\right) \setminus B\left(z(x,u), |y - z(y,u)|\right)\right)\\ &= |y - z(y,u)|^d \mathcal{L}^d\left(B\left(0,1\right) \setminus B\left(\frac{z(x,u) - z(y,u)}{|y - z(y,u)|}, 1\right)\right).\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.2.10 gilt für $2|z(x,u) - z(y,u)| < |y - u|$ mit der Abkürzung $\alpha := 2\kappa_{d-1}/(d+1)$,

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^d\left(B(y,u) \setminus B(x,u)\right)\\ &\geq \alpha |y - z(y,u)|^d \left|\frac{z(x,u) - z(y,u)}{y - z(y,u)}\right|^{(d+1)/2}\\ &= \alpha \left(\frac{|u - y|}{2}\right)^{(d-1)/2} |z(x,u) - z(y,u)|^{(d+1)/2}.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Ferner gilt für $2|z(x,u) - z(y,u)| \geq |y - u|$ und $|y - u| \geq |x - u|$ mit $\beta := \kappa_d/2$,

$$\mathcal{L}^d\left(B(y,u) \setminus B(x,u)\right) \geq a(|u - y|/2)^d.$$

Der Term $C_{t,1}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{\gamma^3}{2}\mathbb{E} \iiint &\mathbb{1}\left\{z(x,u) \in W_t\right\} \mathbb{1}\left\{z(y,u) \in W_t\right\} \mathbb{1}\left\{|x - u| > 2v_t\right\} \mathbb{1}\left\{|y - u| > 2v_t\right\}\\ &\times \mathbb{1}\{(\eta + \delta_y)(B(x,u)) = 0\} \mathbb{1}\{(\eta + \delta_x)(B(y,u)) = 0\} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Indem wir danach unterscheiden, welche der Kanten (x, u) und (y, u) länger ist, ergibt sich daraus für (3.2.16) die obere Schranke

$$\begin{aligned}\gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(y,u) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{|y-u| \geq |x-u| > 2v_t\} \\ & \times \exp\left[-\gamma\alpha(|u-y|/2)^{(d-1)/2}|z(x,u)-z(y,u)|^{(d+1)/2}\right] \mathbb{1}\{2|z(x,u)-z(y,u)| < |y-u|\}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x \\ + \gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(y,u) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{|y-u| \geq |x-u| > 2v_t\} \\ & \times \exp\left[-\gamma\beta(|u-y|/2)^d\right] \mathbb{1}\{2|z(x,u)-z(y,u)| \geq |y-u|\}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Mit der Substitution $z = z(y, u)$ im ersten und zweiten Summanden erhalten wir für (3.2.17),

$$\begin{aligned} 2^d\gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{2|z-u| \geq |x-u| > 2v_t\} \\ & \times \exp\left[-\gamma\alpha|z-u|^{(d-1)/2}|z(x,u)-z|^{(d+1)/2}\right] \mathbb{1}\{|z(x,u)-z| < |z-u|\}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x \\ + 2^d\gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{2|z-u| \geq |x-u| > 2v_t\} \\ & \times \exp\left[-\gamma\beta|z-u|^d\right] \mathbb{1}\{|z(x,u)-z| \geq |z-u|\} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}u\ \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Indem wir im ersten Summanden $z-z(x,u)$ und im zweiten Summanden $z-u$ auf d-dimensionale Polarkoordinaten transformieren und die jeweiligen Indikatoren in den Integranden beachten, ergibt sich für (3.2.18) die obere Schranke

$$\begin{aligned} d\kappa_d 2^d\gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{|x-u| > 2v_t\} \\ & \times \exp\left[-2^{-(d-1)/2}\gamma\alpha|x-u|^{(d-1)/2} r^{(d+1)/2}\right] r^{d-1}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x \\ + d\kappa_d 2^d\gamma^3 \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{2r \geq |x-u| > 2v_t\} \exp\left[-\gamma\beta r^d\right] r^{d-1}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Mit der Substitution $r = \left(\frac{s}{2^{-(d-1)/2}\gamma\alpha|x-u|^{(d-1)/2}}\right)^{2/(d+1)}$ im ersten und $r = \left(\frac{s}{\gamma\beta}\right)^{1/d}$ im zweiten Summanden ergibt sich für (3.2.19),

$$\begin{aligned} \frac{d\kappa_d 2^{d+1}\gamma^3}{d+1}\left(2^{-(d-1)/2}\gamma\alpha\right)^{-2d/(d+1)} v_t^{-\frac{d(d-1)}{d+1}} \iiint & \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{|x-u| > 2v_t\} \\ & \times e^{-s} s^{\frac{d-1}{d+1}}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x \\ + \kappa_d 2^d\gamma^2\beta^{-1}e^{-\gamma\beta v_t^d} \iint \mathbb{1}\{z(x,u) \in W_t\}\, & e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(x,u))}\, \mathbb{1}\{|x-u| > 2v_t\}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Wegen $\int_0^\infty e^{-s}s^{d-1}\,\mathrm{d}s < \infty$ besitzt die Summe (3.2.20) die asymptotische obere Schranke

$$O\left(v_t^{-\frac{d-1}{d+1}}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{3.2.21}$$

Der Term $C_{t,2}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^4}{4}\mathbb{E} \iint & \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{|x_1-x_2| > 2v_t\}\, \mathbb{1}\{|y_1-y_2| > 2v_t\} \\ & \times \mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{y}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\, \mathbb{1}\{(\eta+\delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{y})) = 0\}\, \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x})-z(\mathbf{y})| \leq 2d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Analog zur Herleitung von (3.2.17) führt Lemma 2.2.10 zusammen mit einer Unterscheidung danach, welche der Kanten (x_1, x_2) und (y_1, y_2) länger ist, für (3.2.22) auf die obere Schranke

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma^4}{2} \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\} \\
&\qquad \times \exp\left[-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{y}) \setminus B(\mathbf{x}))\right] \mathbb{1}\{2|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| < |y_1 - y_2|\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&+ \frac{\gamma^4}{2} \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\} \\
&\qquad \times \exp\left[-\gamma \beta (|y_1 - y_2|/2)^d\right] \mathbb{1}\{2|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \leq 2d_t\}\, \mathrm{d}\mathbf{y}\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung wie in (3.2.6) und der speziellen Form von d_t erhalten wir für den zweiten Summanden in (3.2.23) die obere Schranke $O(t^{-\beta} \log t)$ für $t \to \infty$. Der erste Summand lautet nach Transformation auf d-dimensionale Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
&d\kappa_d 2^{d-1} \gamma^4 \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \mathbb{1}\{z \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{2r \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\} \\
&\qquad \times \exp\left[-\gamma \mathcal{L}^d(B(z, r) \setminus B(\mathbf{x}))\right] \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z| < r\} r^{d-1}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Indem wir nach dem Vorzeichen der Differenz von $\alpha r^{(d-1)/2} |z - z(\mathbf{x})|^{(d+1)/2}$ und $\kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d)$ unterscheiden und daraufhin $z - z(\mathbf{x})$ auf d-dimensionale Polarkoordinaten transformieren, ergibt sich für (3.2.24) mit (3.2.15) die obere Schranke

$$\begin{aligned}
&(d\kappa_d)^2 2^{d-1} \gamma^4 \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{2r \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\}\, \mathbb{1}\{s < r \wedge 2d_t\} \\
&\quad \times \exp\left[-\gamma \alpha r^{(d-1)/2} s^{(d+1)/2}\right] \mathbb{1}\{\alpha r^{(d-1)/2} s^{(d+1)/2} \geq \kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d)\} r^{d-1} s^{d-1}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

$$\begin{aligned}
&+ (d\kappa_d)^2 2^{d-1} \gamma^4 \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{2r \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\}\, \mathbb{1}\{s < r \wedge 2d_t\} \\
&\times \exp\left[-\gamma \kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d)\right] \mathbb{1}\{\alpha r^{(d-1)/2} s^{(d+1)/2} < \kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d)\} r^{d-1} s^{d-1}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Zur Abschätzung von (3.2.25) substituieren wir $s = \left(\frac{q}{\gamma \alpha r^{(d-1)/2}}\right)^{2/(d+1)}$ und erhalten wegen der des Indikators $\mathbb{1}\{r > v_t\}$ die obere Schranke

$$\begin{aligned}
&v_t^{-\frac{d(d-1)}{d+1}} \frac{(\gamma\alpha)^{-2d/(d+1)} (d\kappa_d)^d 2^d \gamma^4}{d+1} \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{2r \geq |x_1 - x_2| > 2v_t\} \\
&\qquad \times e^{-q}\, \mathbb{1}\{\gamma \kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d) \leq q \leq \gamma \alpha r^d\} r^{d-1} q^{\frac{d-1}{d+1}}\, \mathrm{d}q\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Für das innere Doppelintegral in (3.2.27) ergibt sich mit der Substitution $r = s^{1/d}$ und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{|x_1 - x_2|}{2}}^{\infty} \int_{\gamma \kappa_d(r^d - (|x_1 - x_2|/2)^d)}^{\gamma \alpha r^d} e^{-q} q^{\frac{d-1}{d+1}} r^{d-1}\, \mathrm{d}q\, \mathrm{d}r &= \int_{\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|^d}^{\infty} \int_{\gamma \kappa_d(s - (|x_1 - x_2|/2)^d)}^{\gamma \alpha s} e^{-q} q^{\frac{d-1}{d+1}}\, \mathrm{d}q\, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\frac{q}{\gamma\alpha} \vee \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|^d}^{\frac{q}{\gamma \kappa_d} + \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|^d} \mathrm{d}s e^{-q} q^{\frac{d-1}{d+1}}\, \mathrm{d}q < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich besitzt (3.2.27) die obere Schranke $O(v_t^{-\frac{d(d-1)}{d+1}})$ für $t \to \infty$.

Um den Summanden (3.2.26) abzuschätzen substituieren wir $r = \left(\frac{q}{\gamma\kappa_d} + \left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|^d\right)^{1/d}$. Damit ergibt sich für (3.2.26) die obere Schranke

$$\begin{aligned} &d\kappa_d 2^{d-1}\gamma^3 \iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}))}\, \mathbb{1}\{q \geq 0\}\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > 2v_t\} \\ &\quad \times e^{-q}\,\mathbb{1}\{\gamma\alpha\left(\frac{q}{\gamma\kappa_d} + \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|^d\right)^{\frac{d-1}{2d}} s^{(d+1)/2} < q\}s^{d-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.2.28) \end{aligned}$$

Das innere Doppelintegral in (3.2.28) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^{\left[q/\left(\gamma\alpha\left(\frac{q}{\gamma\kappa_d}+\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|^d\right)^{\frac{d-1}{2d}}\right)\right]^{2/(d+1)}} e^{-q}s^{d-1}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}q \\ \leq &\quad \left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right|^{-\frac{d(d-1)}{d+1}} d^{-1}(\gamma\alpha)^{-\frac{d-1}{d+1}} \int_0^\infty e^{-q}q^{2d/(d+1)}\mathrm{d}q. \end{aligned}$$

Wegen des Indikators $\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > 2v_t\}$ folgt nun, dass auch (3.2.28) die obere Schranke $O(v_t^{-\frac{d(d-1)}{d+1}})$ für $t \to \infty$ besitzt.

Der Term $C_{t,3}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma^4}{4}\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > 2b_t\}\,\mathbb{1}\{|y_1 - y_2| > 2v_t\} \\ &\qquad \times \mathbb{1}\{(\eta + \delta_{\mathbf{y}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{(\eta + \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{y})) = 0\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &\leq \frac{\gamma^4}{4}\mathbb{E}\iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{y}) \in W_t\}\,\mathbb{1}\{|x_1 - x_2| > 2b_t\}\,\mathbb{1}\{|y_1 - y_2| > 2v_t\} \\ &\qquad \times \mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{y})) = 0\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.2.29) \end{aligned}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung wie in (3.2.4) ergibt sich für (3.2.29) der Ausdruck

$$c2^{d-1}\gamma t e^{-\gamma\kappa_d b_t^d} = \frac{2^{d-1}c\gamma}{t}.$$

Indem wir die Abschätzungen von $C_{t,1}$, $C_{t,1}$ und $C_{t,1}$ in (3.2.14) einsetzen, ergibt sich die Behauptung. □

3.3 Minimale Fundamentalregionen von k-Seiten im Poisson-Voronoi-Mosaik

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie Satz 3.1.4 verwendet werden kann, um ein Resultat zur Poissonapproximation kleiner Fundamentalregionen im Poisson-Voronoi-Mosaik herzuleiten und so deren asymptotische Verteilung zu bestimmen. Als wichtigen Spezialfall einer Fundamentalregion haben wir dabei Delaunay-Zellen im Sinn. Zunächst wollen wir den Begriff einer Fundamentalregion einführen. Seien dazu $k \in [d]$, $\mu \in \mathbf{N}$ einfach und $m(\mu)$ das zu μ gehörende Voronoi-Mosaik (vgl. Abschnitt 1.2.4). In dem allgemeinen Rahmen dieses Kapitels wählen wir die Auswahlfunktion

$$f(\mathbf{x}, \mu) = \mathbb{1}\{\dim \bigcap_{i=1}^{d-k+1} C(x_i, \mu) = k\}, \quad \mu \in \mathbf{N},\ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{d-k+1}) \in \mu^{(d-k+1)},$$

sowie $z(\mathbf{x})$ als das Zentrum der volumenminimalen $(d-k-1)$–dimensionalen Sphäre, auf der $x_1,\dots,x_{d-k+1}$ liegen. Der entstehende Zentrenprozess

$$\zeta := \frac{1}{(d-k+1)!}\sum_{\mathbf{x}\in\eta^{(d-k+1)}} f(\mathbf{x},\eta)\,\delta_{z(\mathbf{x})}.$$

ist ein stationäer Punktprozess mit positiver und endlicher Intensität (vgl. Abschnitt 5.3 in [9] und Theorem 10.2.4 in [60]). Für $k=0$ ist ζ der Prozess der Umkugelmittelpunkte der Zellen des durch η erzeugten Delaunay-Mosaiks. Wir nehmen nun an, dass für $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mu^{(k)}$ die Implikation

$$z(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y}) \Longrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y} \tag{3.3.1}$$

gilt. Dass dies gerechtfertigt in unserer Situation gerechtfertigt ist, zeigt folgendes Argument:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\{\mathbf{x}\neq\mathbf{y}\in\eta^{(d-k+1)} : z(\mathbf{x}) = z(\mathbf{y})\}\right| \\
&\quad = \sum_{\ell=0}^{\infty}\iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u}) = z(\mathbf{y},\mathbf{u})\}\,(\eta-\delta_{\mathbf{x}}-\delta_{\mathbf{u}})^{(d-k+1-\ell)}(\mathrm{d}\mathbf{y})\,(\eta-\delta_{\mathbf{x}})^{(\ell)}(\mathrm{d}\mathbf{u})\,\eta^{(d-k+1-\ell)}(\mathrm{d}\mathbf{x}) \\
&\quad = \sum_{\ell=0}^{\infty}\iiint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u}) = z(\mathbf{y},\mathbf{u})\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{x},\mathbf{y}\in(\mathbb{R}^d)^{d-k+1-\ell}\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{u}\in(\mathbb{R}^d)^{\ell}\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Indem wir Satz 1.2.8 auf den Summanden mit $\ell=0$ und Satz 1.2.9 auf alle anderen Summanden anwenden, ergibt sich mit der Diffusität des Lebesgue-Maßes, dass alle Summanden in (3.3.2) gleich null sind.

Unter der Annahme (3.3.1) ist $\mathbf{x}$ durch $z(\mathbf{x})$ und μ eindeutig festgelegt und es lässt sich für $\mathbf{x}\in\mu^{(k)}$ mit $\dim C(x_1,\mu)\cap\dots\cap\dim C(x_{d-k+1},\mu) = k$ die *Fundamentalregion* $T(z(\mathbf{x}),\mu)$ von $S(\mathbf{x})$ durch

$$T(z(\mathbf{x}),\mu) := \bigcup_{i=1}^{d-k+1} B(x_i,|z(\mathbf{x})-x_i|)$$

definieren. Sei nun $t\mapsto v_t$ eine messbare Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$. Dann erhalten wir mit der Wahl

$$g_t(z(\mathbf{x}),\mu) := \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(T(z(\mathbf{x}),\mu)) < v_t\}$$

in dem Rahmen von Abschnitt 3.1 den verdünnten Prozess

$$\xi_t = \frac{1}{(d-k+1)!}\sum_{\mathbf{x}\in\eta^{(d-k+1)}} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{\dim\bigcap_{i=1}^{d-k+1} C(x_i,\mu) = k\}\,\mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(T(z(\mathbf{x}),\mu)) < v_t\}\,\delta_{z(\mathbf{x})}. \tag{3.3.3}$$

Sei nun η^0_ζ eine Palmsche Version von η bezüglich ζ bei 0. Dann gilt nach (3.1.2) mit der Stationarität von $\mathcal{L}^d$,

$$\mathbb{E}\,\xi_t(B) = \gamma_\zeta\,\mathcal{L}^d(B\cap W_t)\,\mathbb{P}\left(\mathcal{L}^d(T(0,\eta^0_\zeta)) < v_t\right),\quad B\in\mathcal{B}.$$

Über die Verteilung von $\mathcal{L}^d(T(0,\eta^0_\zeta))$ unter $\mathbb{P}$ ist folgendes Resultat bekannt.

Satz 3.3.1. *([9], Theorem 5.2) Sei $m\in\mathbb{N}_0$ mit $m=0$ für $k=0$, $m=2$ für $k=1$ und $m\geq k+1$ in allen anderen Fällen. Gegeben $\eta(T(0,\eta^0_\zeta)) = m+d-k+1$, ist das Volumen $\mathcal{L}^d(T(0,\eta^0_\zeta))$ unter $\mathbb{P}$ eine Gamma$(m+d-k,\gamma)$-verteilt.*

Sei $c > 0$. Mit Satz 3.3.1 lässt sich die Abbildung $t \mapsto v_t$ nun so bestimmen, dass das Intensitätsmaß von ξ_t gegen c konvergiert. Seien dazu $M_0 := \{0\}$, $M_1 := \{2\}$ und $M_k := \{k+1, \dots, d\}$ für $2 \le k \le d$. Wir fixieren nun $k \in [d]$ und bezeichnen $m' := \min M_k$ sowie mit p_m die (positive) Wahrscheinlichkeit unter $\mathbb{P}$, dass die Fundamentalregion $T(0, \eta_\zeta^0)$ genau $m - d + k + 1$ Punkte aus η_ζ^0 enthält, $m \in M_k$. Dann gilt mit Satz 3.3.1 und $v_t := \left(\frac{c(m'-k+d)!}{t\gamma_\zeta\, p_{m'}\, \gamma^{m'-k+d}}\right)^{1/(m'-k+d)}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\mathcal{L}^d(T(0,\eta_\zeta^0)) < v_t\right) \\
&\quad = \sum_{m \in M_k} p_m\, \mathbb{P}\left(\mathcal{L}^d(T(0,\eta_\zeta^0)) < v_t \mid \eta_\zeta^0(T(0,\eta_\zeta^0)) = m + d - k + 1\right) \\
&\quad = \sum_{m \in M_k} p_m \frac{\gamma^{m-k+d}}{(m-k+d-1)!} \int_0^{v_t} u^{m-k+d-1}\, e^{-\gamma u}\, \mathrm{d}u.
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Eine Taylorentwicklung des Integrals in (3.3.4) zeigt

$$|\mathbb{E}\, \xi_t(W_t) - c| = \left|\gamma_\zeta\, t\, \mathbb{P}\left(\mathcal{L}^d(T(0,\eta_\zeta^0)) < v_t\right) - c\right| = O(t^{-1/(m'-k+d)}) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{3.3.5}$$

Im Fall $k = 0$ formulieren wir folgenden Satz zur Poissonprozessapproximation von $t^{-1/d}\xi_t$. Der Satz macht eine Aussage über die Verteilung des Volumens von Zellen mit kleiner Umkugel in dem durch η erzeugten Delaunay-Mosaik.

Satz 3.3.2. *Seien $c > 0$, $\gamma > 0$ und $v_t := \left(\frac{cd!}{t\gamma_\zeta\, \gamma^d}\right)^{1/d}$ für $t > 0$. Ferner seien ξ_t der Prozess aus (3.3.3) für $k = 0$ und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\,\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann gilt*

$$d_{TV}\left(t^{-1/d}\xi_t, \nu\right) \le O(t^{-1/d}) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis von Satz 3.3.2. Wir wollen Satz 3.1.4 verwenden. Zunächst zeigen wir, dass $(fg_t)_t$ stabilisierend ist. Seien dazu $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^{d+1}$ und $\mu \in \mathbf{N}$. Wir erkennen den Zusammenhang

$$\{\dim \bigcap_{i=1}^{d-k+1} C(x_i, \mu) = k\} = \{(\mu - \delta_\mathbf{x})(B(\mathbf{x})) = 0\}.$$

Damit ergibt sich die Darstellung

$$(fg_t)(\mathbf{x}, \mu) = \mathbb{1}\{(\mu - \delta_\mathbf{x})(B(\mathbf{x})) = 0,\ \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})) < v_t\}.$$

Für $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbf{N}$ wählen wir $R_t(z, \mu) := |z(\mathbf{x}) - x_1|$, falls es genau ein $\mathbf{x} \in \mu^{(d-k+1)}$ (bis auf eine Permutation der Komponenten von $\mathbf{x}$) gibt, sodass $z(\mathbf{x})$ gilt, und $R_t(z, \mu) := \infty$, sonst. Wegen (3.3.2) ist somit $R_t(z(\mathbf{x}), \eta_\mathbf{x})$ für $(\mathcal{L}^d)^k$-fast alle $\mathbf{x}$ eine $\mathbb{P}$-fast sicher kompakte Stoppmenge. Mit Satz 3.3.1 und der Wahl $b_t := d_t := (3\gamma^{-1}\kappa_d^{-1} \log t)^{1/d}$ ergibt sich,

$$\begin{aligned}
t\,\mathbb{P}(R_t(0, \eta_\zeta^0) > b_t) &= t\mathbb{P}(\kappa_d R_t^d(0, \eta_\zeta^0) > 3\gamma^{-1} \log t) \\
&= t \frac{\gamma^d}{(d-1)!} \int_{3\gamma^{-1}\log t}^{\infty} u^{d-1} e^{-\gamma u}\, \mathrm{d}u = O\left(\frac{(\log t)^{d-1}}{t^2}\right) \quad \text{für } t \to \infty.
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir aus Satz 3.1.4 und (3.3.5) die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\, \nu) \le C_{t,1} + C_{t,2} + C_{t,3} + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{3.3.6}$$

wobei der Term $C_{t,1}$ gegeben ist durch

$$\sum_{\ell=1}^{d} \gamma^{d+1+\ell} \mathbb{E} \iiint \mathbb{1}\{\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^{d+1-\ell}\} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in W_t,\, z(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \in W_t\}$$
$$\times \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u})) < v_t,\, \mathcal{L}^d(B(\mathbf{y}, \mathbf{u})) < v_t\} \mathbb{1}\{\eta_{\mathbf{y}}(B(\mathbf{x}, \mathbf{u})) = 0, \eta_{\mathbf{x}}(B(\mathbf{y}, \mathbf{u})) = 0\} \,\mathrm{d}\mathbf{y} \,\mathrm{d}\mathbf{u} \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.3.7}$$

Im Falle $\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u})) < v_t$, $\mathcal{L}^d(B(\mathbf{y}, \mathbf{u})) < v_t$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|y_i - x_1| \le |y_i - z(\mathbf{x}, \mathbf{u})| + |z(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - x_1| \le 2\kappa_d^{-1/d} v_t^{1/d}, \quad i = 1, \dots, d+1-\ell.$$

Daraus ergibt sich mit der Substitution $y_i = x_1 + v_i$, $i = 1, \dots, d+1-\ell$, für (3.3.7) die obere Schranke

$$\sum_{\ell=1}^{d} \gamma^{d+1+\ell} 2^{d(d+1-\ell)} v_t^{d+1-\ell} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^\ell,\, \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^{d+1-\ell}\} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in W_t\}$$
$$\times \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u})) < v_t\} \, e^{-\gamma \mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u}))} \,\mathrm{d}\mathbf{u} \,\mathrm{d}\mathbf{x}$$
$$= O(v_t) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{3.3.8}$$

Der Term $C_{t,2}$ lautet

$$\gamma^{2(d+1)} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}),\, z(\mathbf{y}) \in W_t\} \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \le 2d_t\} \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})) < v_t,\, \mathcal{L}^d(B(\mathbf{y})) < v_t\}$$
$$\times \mathbb{1}\{\eta_{\mathbf{y}}(B(\mathbf{x})) = 0, \eta_{\mathbf{x}}(B(\mathbf{y})) = 0\} \,\mathrm{d}\mathbf{y} \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.3.9}$$

Mit der Definition des Prozesses ξ_t lässt sich (3.3.9) schreiben als

$$\mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{|z - w| \le 2d_t\} \, \xi_t(\mathrm{d}z) \, \xi_t(\mathrm{d}w) \le \mathbb{E}\xi_t(W_t) \, \mathbb{E}\xi_t(B(0, 2d_t)) = O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Der Term $C_{t,3}$ ist gegeben durch

$$\gamma^{2(d-1)} \mathbb{E} \iint \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}),\, z(\mathbf{y}) \in W_t\} \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \le 2b_t\} \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})) < v_t,\, \mathcal{L}^d(B(\mathbf{y})) < v_t\}$$
$$\times \mathbb{1}\{\eta_{\mathbf{y}}(B(\mathbf{x})) = 0, \eta_{\mathbf{x}}(B(\mathbf{y})) = 0\} \mathbb{1}\{\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})) > 3\gamma^{-1} \log t\} \,\mathrm{d}\mathbf{y} \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.3.10}$$

Wegen $v_t / \log t \to 0$ für $t \to \infty$ ist der Integrand in (3.3.10) für $t > 0$ groß genug gleich 0.

Indem wir (3.3.8), (3.3.9) und (3.3.10) in (3.3.6) einsetzen, ergibt sich die behauptete Abschätzung. □

3.4 Maximale Zellen im Poisson-Delaunay-Mosaik

In diesem Unterabschnitt betrachten wir eine weitere Anwendung von Satz 3.1.4 und studieren Zellen im Poisson-Delaunay Mosaik, die in einem bestimmten Sinne maximal sind. Wir beginnen damit, einige Notation einzuführen. Für ein Simplex (d.h. d-Simplex) S in $\mathbb{R}^d$ seien $z(s)$ der Mittelpunkt und $r(S)$ der Radius seiner Umkugel. Für $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{d+1}) \in (\mathbb{R}^d)^{d+1}$ in allgemeiner Lage (d.h. nicht alle in einem $(d-1)$-dimensionalen affinen Unterraum) sei $S(\mathbf{x})$ der Simplex mit Ecken x_i, $i \in [d+1]$, $B(\mathbf{x})$ seine Umkugel und Δ der Raum aller Simplices S mit $z(S) = o$, ausgestattet mit der Hausdorff-Metrik. Ähnlich wie im Abschnitt über das Voronoi-Mosaik wollen wir maximale Zellen (d.h. Simplices) im Delaunay-Mosaik betrachten und werden dabei deren

Abweichung von einem extremalen Simplex betrachten. Hierzu passen wir zunächst unsere Notation an die vorliegende Situation an. Für $k > 0$ nennen wir $\Sigma : \Delta \to [0, \infty)$ *Größenfunktional*, falls Σ stetig und k-homogen ist, und gilt, dass Σ auf der Menge aller Simplices in der Einheitskugel ein Maximum annimmt und $\mathcal{L}^d/\Sigma^{1/k}$ beschränkt ist. Für $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^d$ und $F : \Delta \to [0, +\infty]$ verwenden wir die Schreibweise

$$F(\mathbf{x}) := F(S(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x})).$$

Seien $\mu \in \mathbf{N}$ einfach und $\mathbf{x} \in \mu^{(d+1)}$. Nach Definition ist die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(\mathbf{x})$ (der Komponenten) von $\mathbf{x}$ genau dann eine *Delaunay-Zelle* (bzgl. μ), falls $(\mu - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0$. Für eine wachsende Funktion $t \mapsto v_t > 0$ betrachten wir den Prozess

$$\xi_t := \frac{1}{(d+1)!} \sum_{\mathbf{x} \in \eta^{(d+1)}} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} \mathbb{1}\{(\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0\} \, \mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x}) > v_t\} \, \delta_{z(\mathbf{x})}, \quad t > 0. \tag{3.4.1}$$

Dies ist der Prozess aller Punkte in W_t, die ein Zentrum einer Delaunay-Zelle sind, die größer als v_t bzgl. des Größenfunktionals Σ ist. Mit der multivariaten Mecke-Formel (Satz 1.2.2) und der Stationarität von η ergibt sich, dass das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi_t(A) &= \frac{1}{(d+1)!} \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in A \cap W_t\} \mathbb{1}\{(\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0, \, \Sigma(\mathbf{x}) > v_t\} \, \eta^{(d+1)}(\mathrm{d}\mathbf{x}) \\
&= \frac{\gamma^{d+1}}{(d+1)!} \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in A \cap W_t\} \mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0, \, \Sigma(\mathbf{x}) > v_t\} \, \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \mathcal{L}^d(A \cap W_t) \frac{\gamma^{d+1}}{(d+1)!} \mathbb{E} \int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in [0,1]^d\} \mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0, \, \Sigma(\mathbf{x}) > v_t\} \, \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad A \in \mathcal{B}^d.
\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Unser Ziel besteht nun darin zu zeigen, dass der skalierte Prozess $t^{-1/d}\xi_t$ für $t \to \infty$ gegen einen Poissonprozess auf $[0,1]^d$ konvergiert, sofern Σ und v_t geeignet gewählt sind. Ähnlich wie zuvor ist unser Beweis eine Anwendung von Satz 3.1.4 und beruht auf einer qualitativen Abschätzung der Form großer Poisson-Delaunay Zellen. Wir führen nun die Notation ein, um diese Abschätzung angeben zu können.

Sei $\tau := \max\{\Sigma(S) : S \in \Delta, \, r(S) = 1\}$. Mit der k-Homogenität von Σ erhalten wir

$$\Sigma(S) \le \tau r(S)^k, \quad S \in \Delta. \tag{3.4.3}$$

Falls in (3.4.3) Gleichheit gilt, nennen wir $S \in \Delta$ *Extremalsimplex*. Die Abweichung eines Simplex $S \in \Delta$ von einem regulären Simplex wird durch das wie folgt definierte Funktional ϑ gemessen. Seien $u_1, \dots, u_{d+1} \in \mathbb{S}^{d-1}$ Punkte, sodass $\operatorname{conv}(u_1, \dots, u_{d+1})$ ein reguläres Simplex ist und $S \in \Delta$. Dann definieren wir $\vartheta(S)$ als die kleinste Zahl $\alpha > 0$, sodass Punkte $v_1, \dots, v_{d+1} \in \mathbb{S}^{d-1}$ existieren, deren konvexe Hülle $\operatorname{conv}(v_1, \dots, v_{d+1})$ ähnlich zu S ist und $|u_i - v_i| \le \alpha$ für $i \in [d+1]$ gilt. Beachte, dass $\vartheta(S) = 0$ genau dann gilt, wenn S ein reguläres Simplex ist.

Die Ungleichung in (3.4.3) kann verschärft werden. Wir nennen $f : [0,1) \to [0,1)$ *Stäbilitätsfunktion* zu Σ und ϑ, falls $f(0) = 0$, $f(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ und

$$\Sigma(S) \le (1 - f(\varepsilon)) r(S)^k \tau \quad \text{für alle } S \in \Delta \text{ mit } \vartheta(S) \ge \varepsilon.$$

Außerdem brauchen wir das Konzept der *typischen Zelle* Z des Poisson-Delaunay Mosaiks. Aus [60], Seite 496, (Vorversion von Theorem 10.4.4 in [60]) ergibt sich, dass deren Verteilung gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(Z \in \cdot) := \frac{1}{\beta_d(d+1)!}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in [0,1]^d\}\mathbb{1}\{S(\mathbf{x}) \in \cdot, (\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0\}\,\eta^{(d+1)}(\mathrm{d}\mathbf{x}) \tag{3.4.4}$$

wobei

$$\beta_d := \frac{2^{d+1}\pi^{\frac{d-1}{2}}}{d^2(d+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{d^2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2}{2}\right)}\left[\frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\right]^d\gamma$$

die erwartete Anzahl von Zentren von Zellen des Delaunay-Mosaiks bezüglich eines Poissonprozesses mit Intensität γ ist, und Γ die Gammafunktion bezeichent. Nun lässt sich das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ ausdrückent durch

$$\mathbb{E}\xi_t(A) = \beta_d\mathcal{L}_d(A \cap W_t)\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t). \tag{3.4.5}$$

In den folgenden Beispielen diskutieren wir mögliche Wahlen von Stabilitätsfunktionen für verschiedene Größenfunktionale.

Beispiel 3.4.1. (Volumen) Für das Volumen $\Sigma = \mathcal{L}^d$ wurde in [32] gezeigt, dass die Extremalsimplices regulär sind und eine Konstante $c_1 > 0$ exitiert, die nur von der Dimension d abhängt, sodass für alle $\varepsilon \in [0,1]$ gilt, dass

$$\mathcal{L}^d(S) \le (1 - c_1\varepsilon^2)r(S)^d\tau \quad \text{für alle } S \in \Delta \text{ mit } \vartheta(S) > \varepsilon.$$

Folglich ist eine Stabilitätsfunktion gegeben durch $f(\varepsilon) = c_1\varepsilon^2$. Man beachte, dass für $d = 2$ die Verteilung des Volumens der typischen Zelle des Poisson-Delaunay Mosaiks explizit bekannt ist (vgl. [57]). Es gilt

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}_2(Z) > v) = \frac{8\pi}{9}\int_v^\infty u\,K_{1/6}^2\left(\frac{2\pi u}{3\sqrt{3}}\right)\mathrm{d}u, \quad u > 0,$$

wobei $K_{1/6}(u)$ die modifizierte Besselfunktion zweiter Art (MacDonald-Funktion) von Ordnung 1/6 bezeichnet. □

Beispiel 3.4.2. (Inkugelradius) Im Falle des Inradius ρ sind die Extremalsimplices ebenfalls durch die regulären Simplices gegeben. In [33] wurde gezeigt, dass für die Konstante c_1 aus dem vorigen Beispiel und $\varepsilon \in [0,1]$ gilt, dass

$$\rho(S) \le (1 - c_1\varepsilon^2/d)r(S)\tau \quad \text{für alle } S \in \Delta \text{ mit } \vartheta(S) > \varepsilon.$$

Daher ist durch $f(\varepsilon) = c_1\varepsilon^2/d$ eine Stabilitätsfunktion gegeben. □

Das folgende Resultat gibt Aufschluss über die Form einer großen typischen Zelle im Poisson-Delaunay Mosaik.

Satz 3.4.3. *(Theorem 1 in [33]) Seien Σ, ϑ und f wie oben und $v, \varepsilon > 0$. Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, die nur von Σ, ϑ, f und d abhängt, sodass*

$$\mathbb{P}(\vartheta(Z) \ge \varepsilon \mid \Sigma(Z) \ge v) \le c_1\exp(-c_0 f(\varepsilon)v^{d/k}\gamma),$$

wobei $c_1 > 0$ nur von d, ε, Σ, ϑ, f abhängt.

Lemma 3.4.4. *Sei $\Sigma : \Delta \to [0,\infty)$ stetig. Dann ist die Verteilung von $\Sigma(Z)$ diffus.*

Beweis. Für alle $v > 0$ ist $\mathbb{P}(\Sigma(Z) = v) = 0$ zu zeigen. Aus (3.4.4), der Mecke-Formel und Satz 1.2.7 ergibt sich

$$\mathbb{P}(\Sigma(Z) = v) = \frac{(d\kappa_d)^{d+1}}{\beta_d(d+1)} \iint \mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{u}) = v/r^k\} e^{-\gamma\kappa_d r^d} r^{d^2-1} \Delta_d(\mathbf{u}) \,\mathrm{d}r\, \sigma^{d+1}(\mathrm{d}\mathbf{u}).$$

Da das innere Integral gleich 0 ist, folgt die Behauptung. □

Für $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}^d$ in in allgemeiner Lage sei $L(x_1, \dots, x_d)$ die Hyperebene, die $x_1, \dots, x_d$ enthält. Wir erinnern daran, dass wir für $z \in \mathbb{R}^d$ und eine Hyperebene H in $\mathbb{R}^d$ den durch H beschränkten abgeschlossenen Halbraum, der z enthält, mit H_z^+ bezeichnen. Nach Definition von ϑ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^{d+1}$ in allgemeiner Lage mit $\vartheta(\mathbf{x}) < \varepsilon$ gilt, dass

$$\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}) \setminus L(x_1, \dots, x_d)^+_{z(\mathbf{x})}) \le \frac{\kappa_d}{d+1} r(\mathbf{x})^d. \tag{3.4.6}$$

Lemma 3.4.5. *Seien $\ell \in [d+1]$, $\mathbf{u} \in (\mathbb{R}^d)^{d+1-\ell}$, $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^\ell$, $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^d)^\ell$, sodass $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ und $(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ in allgemeiner Lage sind. Ferner seien $\varepsilon > 0$ aus (3.4.6), sodass $\vartheta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) < \varepsilon$, $r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) < r(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ und $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, \mathbf{u})^c$. Dann gilt*

$$\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cap B(\mathbf{y}, \mathbf{u})) \le \frac{2}{d+1} \kappa_d r(\mathbf{y}, \mathbf{u})^d.$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und ε wie im Lemma. In einem ersten Schritt zeigen wir $z(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \in S(\mathbf{x}, \mathbf{u})^c$. Angenommen, das Gegenteil wäre der Fall. Wegen

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B(x_i, r(\mathbf{x}, \mathbf{u})) \cup \bigcup_{i=1}^{d+1-\ell} B(u_i, r(\mathbf{x}, \mathbf{u})),$$

und $r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le r(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ gäbe es ein $i \in [\ell]$ mit $x_i \in B(\mathbf{y}, \mathbf{u})$, im Widerspruch zur Annahme $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, \mathbf{u})^c$.

Daher gibt es $\ell - 1$ Punkte aus $x_1, \dots, x_\ell$, seien es $x_1, \dots, x_{\ell-1}$, sodass die Hyperebene L, die $x_1, \dots, x_{\ell-1}, u_1, \dots, u_{d+1-\ell}$ enthält, x_ℓ und $z(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ trennt. Wegen $r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le r(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ folgt aus (3.4.6),

$$\mathcal{L}_d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cap B(\mathbf{y}, \mathbf{u})) \le \mathcal{L}_d(B(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cap L^+_{z(\mathbf{y}, \mathbf{u})}) + \mathcal{L}_d(B(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \cap L^+_{x_\ell}) \le \frac{2}{d+1} \kappa_d r(\mathbf{y}, \mathbf{u})^d.$$

□

Nun können wir unseren Hauptsatz dieses Abschnitts formulieren.

Satz 3.4.6. *Seien $c > 0$ und Σ ein Größenfunktional, dessen Extremalsimplices die regulären Simplices sind, und ϑ und f wie oben. Ferner seien η ein Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, ξ_t der Prozess aus (3.4.1) und ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d}$. Dann existiert eine wachsende Funktion $t \mapsto v_t$ von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$, sodass $v_t^{-d/k} \log t \to \kappa_d \tau^{-d/k} \gamma$ für $t \to \infty$ und $t\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) = c$, $t > 0$. Ferner existiert ein $b > 0$, sodass*

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t, \nu) \le O(t^{-b}) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{3.4.7}$$

Beweis. Die Existenz einer Funktion $t \mapsto v_t$ mit $t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) = c$ für alle $t > 0$ lässt sich wie folgt einsehen. Da $v \mapsto \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v)$ fallend ist, wächst die Funktion

$$t \mapsto v_t := \inf\{u > 0 : t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > u) \le c\}. \tag{3.4.8}$$

Nach Lemma 3.4.4 ist die Verteilungsfunktion von $\Sigma(Z)$ unter $\mathbb{P}$ stetig. Daher wird das Infimum in (3.4.8) angenommen und es gilt $t\gamma\beta_d\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) = c$. Um das asymptotische Verhalten von v_t für $t \to \infty$ zu zeigen, betrachten wir die Beziehung

$$\frac{\log \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t)}{v_t^{d/k}} = \frac{\log t}{v_t^{d/k}} \left(\frac{\log(t\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t))}{\log t} - 1 \right).$$

Aus (3.4.4) schließen wir, dass $\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v) > 0$ für alle $v > 0$ und daher $v_t \xrightarrow{t\to\infty} \infty$. Aus Theorem 2 in [33] ergibt sich $\frac{\log \mathbb{P}(\Sigma(Z)>v_t)}{v_t^{d/k}} \xrightarrow{t\to\infty} -\kappa_d \tau^{-d/k}\gamma$ für die Konstante τ aus (2.4.10). Wegen $t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) = c$ gilt $\frac{\log t}{v_t^{d/k}} \xrightarrow{t\to\infty} \kappa_d\tau^{-d/k}\gamma$.

Um (3.4.7) zu zeigen, verwenden wir Satz 3.1.4. Darin wählen wir

$$g_t(\mathbf{x}, \mu) = \mathbb{1}\{(\mu - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0,\, \Sigma(\mathbf{x}) > v_t\}, \quad t > 0.$$

Um zu zeigen, dass g_t stabilisierend ist, wählen wir für $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbf{N}$ den Stabilisierungsradius $R(z,\mu) = R_t(z,\mu) := |z(\mathbf{x}) - x_1|$, falls ein eindeutiges $(d+1)$-Tupel $\mathbf{x} \in \mu^{(d+1)}$ (bis auf Permutationen der Komponenten von $\mathbf{x}$) existiert, sodass $z(\mathbf{x}) = z$ und $R(z,\mu) := \infty$, sonst. Mit

$$b_t := d_t := (3\gamma^{-1}\kappa_d^{-1}\log t)^{1/d} \tag{3.4.9}$$

gilt

$$\int \mathbb{P}(R_t(z, \eta_\zeta^z) > b_t) = \frac{1}{(d+1)!}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{(\eta - \delta_{\mathbf{x}})(B(\mathbf{x})) = 0,\, r(\mathbf{x}) > b_t,\, z(\mathbf{x}) \in W_t\}\, \eta^{(d+1)}(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{3.4.10}$$

Seien $a > 0$, $b > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Mit der Substitution $r = (s/b)^{1/d}$, gefolgt von der Ungleichung $\int_a^\infty e^{-s}s^{k-1}\mathrm{d}s \le k!e^{-a}a^{k-1}$, die durch sukzessive partielle Integration erhalten werden kann, ergibt sich die Beziehung

$$\int_a^\infty e^{-br^d} r^{kd-1}\mathrm{d}r = \frac{1}{b^k d}\int_{ba^d}^\infty e^{-s}s^{k-1}\,\mathrm{d}s \le \frac{k!}{bd}e^{-ba^d}a^{d(k-1)} \quad \text{für } ba^d \ge 1. \tag{3.4.11}$$

Eine Anwendung der Mecke-Formel (Satz 1.2.2), von Satz 1.2.7 und (3.4.11) mit $a = b_t$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = d$ im letzten Ausdruck führt auf die obere Schranke

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\xi_t(W_t)\left(\frac{\gamma^{d+1}}{(d+1)!}\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{\eta(B(\mathbf{x})) = 0, r(\mathbf{x}) > b_t, z(\mathbf{x}) \in W_t\}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \kappa_d 2^d b_t^d \beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t)\right)\\
&\le \mathbb{E}\xi_t(W_t)\left(\frac{t\beta_d\gamma^d\kappa_d^d d}{(d-1)!}\int_{b_t}^\infty e^{-\gamma\kappa_d r^d} r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r + \kappa_d 2^d b_t^d\beta_d\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t)\right)\\
&\le \mathbb{E}\xi_t(W_t)\left(\frac{\beta_d\gamma^{d-1}\kappa_d^{d-1}d}{t^2} + 2^d 3\gamma^{-1}\beta_d(\log t)\mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t)\right).
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir aus Satz 3.1.4 die Abschätzung

$$d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\, \nu) \le C_{t,1} + C_{t,2} + C_{t,3} + O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{3.4.12}$$

wobei $C_{t,1}, C_{t,2}, C_{t,3}$ wie in Satz 3.1.4 sind. Indem wir nach dem Vorzeichen der Differenz von $r(\mathbf{x},\mathbf{u})$ und $r(\mathbf{y},\mathbf{u})$ unterscheiden und die Symmetrie in $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ verwenden, erkennen wir, dass $C_{t,1}$ beschränkt ist durch

$$2\sum_{\ell=1}^{d} \frac{\gamma^{2d+2-\ell}}{(d+1)!(d+1-\ell)!} \iiint \mathbb{1}\{\mathbf{u}\in(\mathbb{R}^d)^{d+1-\ell}\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^{\ell}\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{y}\in(\mathbb{R}^d)^{\ell}\}\,e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x},\mathbf{u})\cup B(\mathbf{y},\mathbf{u}))}$$
$$\times\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})>v_t,\ \Sigma(\mathbf{y},\mathbf{u})>v_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x},\mathbf{u})\le r(\mathbf{y},\mathbf{u})\}\mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u})\in W_t,\ z(\mathbf{y},\mathbf{u})\in W_t\}$$
$$\times\mathbb{1}\{\mathbf{y}\in B(\mathbf{x},\mathbf{u})^c,\ \mathbf{x}\in B(\mathbf{y},\mathbf{u})^c\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4.13}$$

Um (3.4.13) abzuschätzen, nutzen wir Satz 1.2.9. Darin sei $r_{\mathbf{u}}$ der Radius der $(d-\ell)$-dimensionalen Sphäre, die die Punkte $\mathbf{u}$ enthält, es sei $L_{\mathbf{u}}$ der $(d-\ell)$–dimensionale lineare Unterraum, der diese Sphäre enthält (nach Verschieben seines Mittelpunkts in den Ursprung) und $L_{\mathbf{u}}^{\perp}$ sei das zugehörige orthogonale Komplement in $\mathbb{R}^d$. Wir erinnern daran, dass wir für $x\in\mathbb{R}^d$ und einen Unterraum L die Projektion von x auf L mit $x^L\in L$ bezeichnen, σ_L die Gleichverteilung auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}_L$ in L ist und $\Delta_\ell(\mathbf{x})$ das ℓ-dimensionale Lebesgue-Maß des ℓ-Simplices mit Ecken $\mathbf{x}$ ist. Mit Satz 1.2.9 lässt sich $\mathbf{y}=z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w}$ für ein $z\in\mathbb{S}_{L_{\mathbf{u}}^{\perp}}$ und $\mathbf{w}\in(\mathbb{S}^{d-1})^{\ell}$ substituieren. Für (3.4.13) erhalten wir die Darstellung

$$\sum_{\ell=1}^{d}\frac{2\gamma^{2d+2-\ell}\ell!}{(d+1)!(d+1-\ell)!}\int\cdots\int \mathbb{1}\{\mathbf{u}\in(\mathbb{R}^d)^{d+1-\ell}\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{x}\in(\mathbb{R}^d)^{\ell}\}\,e^{-\gamma\mathcal{L}^d\left(B(\mathbf{x},\mathbf{u})\cup B\left(z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w},\mathbf{u}\right)\right)}$$
$$\times\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})>v_t,\ \Sigma\left(z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w},\mathbf{u}\right)>v_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x},\mathbf{u})\le r\}$$
$$\times\ \mathbb{1}\{z(\mathbf{x},\mathbf{u})\in W_t,\ z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z\in W_t\}$$
$$\times\ \mathbb{1}\{z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w}\in B(\mathbf{x},\mathbf{u})^c,\ \mathbf{x}\in B(z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w},\mathbf{u})^c\}$$
$$\times r^{\ell(d-1)+1}(r^2-r_{\mathbf{u}}^2)^{\frac{\ell-2}{2}}\,\Delta_\ell\left(-\frac{\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}}{r}z,\mathbf{w}^{L_u}\right)(\sigma^{d-1})^{\ell}(\mathrm{d}\mathbf{w})\,\sigma_{L_{\mathbf{u}}^{\perp}}(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4.14}$$

Aus Lemma 3.4.5 erhalten wir für $r(\mathbf{x},\mathbf{u})\le r$ und $\vartheta(\mathbf{x})<\varepsilon$ die Schranke

$$\mathcal{L}^d\left(B(\mathbf{x},\mathbf{u})\cap B\left(z(\mathbf{u})+\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}z+r\mathbf{w},\mathbf{u}\right)\right)\le a_d\kappa_d r^d. \tag{3.4.15}$$

Mit (3.4.15), den trivialen Abschätzungen $(r^2-r_{\mathbf{u}}^2)^{(\ell-2)/2}\le r^{\ell-2}$ und $\Delta_\ell(-\frac{\sqrt{r^2-r_{\mathbf{u}}^2}}{r}z,\mathbf{w}^{L_u})\le\kappa_\ell$ und einer Unterscheidung nach der Abweichung von $S(\mathbf{x},\mathbf{u})$ von einem regulären Simplex erhalten wir für (3.4.14) und alle $\varepsilon>0$ die Abschätzung

$$\sum_{\ell=1}^{d}\frac{2\kappa_\ell\gamma^{2d+2-\ell}\ell!}{(d+1)!(d+1-\ell)!}\iint \mathbb{1}\{r>r(\mathbf{x})\}e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}$$
$$\times e^{-\gamma(1-a_d)\kappa_d r^d}\,r^{\ell d-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{3.4.16}$$
$$+\sum_{\ell=1}^{d}\frac{2\kappa_\ell\gamma^{2d+2-\ell}\ell!}{(d+1)!(d+1-\ell)!}\iint \mathbb{1}\{r>r(\mathbf{x})\}\mathbb{1}\{\vartheta(\mathbf{x})\ge\varepsilon\}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}$$
$$\times e^{-\gamma\kappa_d r^d}\,r^{\ell d-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4.17}$$

Indem wir (3.4.11) mit $a=r(\mathbf{x})$, $b=\gamma\kappa_d$ und $k=\ell$ im inneren Integral in (3.4.16) anwenden, ergibt sich für (3.4.16) die obere Schranke

$$\sum_{\ell=1}^{d}\frac{2\kappa_\ell\gamma^{2d+1-\ell}(\ell!)^2}{d\kappa_d(d+1)!(d+1-\ell)!}\int e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}$$
$$\times r(\mathbf{x})^{d(\ell-1)}\,e^{-\gamma(1-a_d)\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{3.4.18}$$

Wegen (3.4.3) gilt $r(\mathbf{x}) > (\tau^{-1} v_t)^{1/k}$ für $\Sigma(\mathbf{x}) > v_t$. Wir verwenden, dass $s \mapsto s^{d(\ell-1)} e^{-\gamma(1-\alpha_d)\kappa_d s^d}$ für $s > 0$ groß genug fallend ist, und nutzen (3.4.4). Dann ergibt sich für (3.4.18) die obere Schranke

$$t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{2d+1-\ell} (\ell!)^2}{d\kappa_d (d+1)!(d+1-\ell)!} (\tau^{-1} v_t)^{(\ell-1)d/k} e^{-\gamma(1-a_d)\kappa_d \tau^{-d/k} v_t^{d/k}}. \tag{3.4.19}$$

Nun schätzen wir den zweiten Summanden (3.4.17) ab. Mit (3.4.11) für $a = r(\mathbf{x})$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = \ell$ und einer Unterscheidung nach dem Vorzeichen der Differenz von $r(\mathbf{x})$ und $r_t := v_t^{1/k} \left(\tau^{-d/k} + c_0 f(\varepsilon)/\kappa_d\right)^{1/d}$ erhalten wir für (3.4.17) die obere Schranke

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{2d+1-\ell} (\ell!)^2}{d\kappa_d (d+1)!(d+1-\ell)!} \int \mathbb{1}\{r(\mathbf{x}) \le r_t\} \mathbb{1}\{\vartheta(\mathbf{x}) > \varepsilon\} \mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x}) > v_t\} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} \\ &\qquad \times e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d} r(\mathbf{x})^{d(\ell-1)} \,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &+ \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{2d+1-\ell} (\ell!)^2}{d\kappa_d (d+1)!(d+1-\ell)!} \int \mathbb{1}\{r(\mathbf{x}) > r_t\} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t\} e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d} r(\mathbf{x})^{d(\ell-1)} \,\mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Aus Satz 3.4.3 ergibt sich für den ersten Summanden in (3.4.20) die obere Schranke

$$\begin{aligned} &t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) \mathbb{P}(\vartheta(Z) \ge \varepsilon \mid \Sigma(Z) > v_t) \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{d+1-\ell} (\ell!)^2}{d\kappa_d (d+1-\ell)!} r_t^{d(\ell-1)} \\ &\le t\gamma\beta_d \mathbb{P}(\Sigma(Z) > v_t) \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2C\kappa_\ell \gamma^{d+1-\ell} (\ell!)^2}{d\kappa_d (d+1-\ell)!} r_t^{d(\ell-1)} e^{-\gamma c_0 f(\varepsilon) v_t^{d/k}}. \end{aligned}$$

Der zweite Summand in (3.4.20) kann mit der klassischen Blaschke-Petkantschin-Formel für Sphären (Satz 1.2.7) behandelt werden. Dann ergibt sich der Ausdruck

$$t \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{2d-\ell} (\ell!)^2 \beta_d \kappa_d^{d-1}}{(d+1-\ell)!(d-1)!} \int_{r_t}^{\infty} e^{-\gamma\kappa_d r^d} r^{d(d+\ell-1)-1} \,\mathrm{d}r. \tag{3.4.21}$$

Indem wir (3.4.11) mit $a = r_t$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = d+\ell-1$ anwenden, können wir (3.4.21) abschätzen durch

$$t \sum_{\ell=1}^{d} \frac{2\kappa_\ell \gamma^{2d-\ell-1} (\ell!)^2 \beta_d \kappa_d^{d-2}}{d!} e^{-\gamma\kappa_d r_t^d} r_t^{d(d+\ell-2)}. \tag{3.4.22}$$

Dies führt auf die Abschätzung

$$C_{t,1} = O\left(v_t^{d(d-1)/k} e^{-\gamma\kappa_d(1-a_d)\tau^{-d/k} v_t^{d/k}} + (1 + t\, v_t^{d(d-1)/k} e^{-\gamma\kappa_d \tau^{-d/k} v_t^{d/k}})\, v_t^{d(d-1)/k} e^{-\gamma c_0 f(\varepsilon) v_t^{d/k}} \right) \tag{3.4.23}$$

für $t \to \infty$. Der Term $C_{t,2}$ ist beschränkt durch

$$\begin{aligned} &\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2} \iint e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{y}))} \mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x}) > v_t,\, \Sigma(\mathbf{y}) > v_t\} \mathbb{1}\{z(\mathbf{x}) \in W_t,\, z(\mathbf{y}) \in W_t\} \\ &\qquad \times \mathbb{1}\{r(\mathbf{x}) \le r(\mathbf{y})\} \mathbb{1}\{|z(\mathbf{x}) - z(\mathbf{y})| \le 2b_t\} \mathbb{1}\{\mathbf{y} \in B(\mathbf{x})^c,\, \mathbf{x} \in B(\mathbf{y})^c\} \,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{3.4.24}$$

Mit Lemma (3.4.5) und einer Unterscheidung nach der Abweichung von $S(\mathbf{x})$ von einem regulären Simplex erhalten wir für (3.4.24) die obere Schranke

$$\begin{aligned}&\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2}\iint e^{-\gamma\,\kappa_d\,r(\mathbf{x})^d}\,e^{-\gamma\,(1-a_d)\,\kappa_d\,r(\mathbf{y})^d}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t,\,\Sigma(\mathbf{y})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\\&\qquad\times\mathbb{1}\{|z(\mathbf{x})-z(\mathbf{y})|\le 2b_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})\le r(\mathbf{y})\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (3.4.25)\\&+\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2}\iint \mathbb{1}\{\vartheta(\mathbf{x})\ge\varepsilon\}\,e^{-\gamma\,\kappa_d\,r(\mathbf{y})^d}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t,\,\Sigma(\mathbf{y})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\\&\qquad\times\mathbb{1}\{|z(\mathbf{x})-z(\mathbf{y})|\le 2b_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})\le r(\mathbf{y})\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.4.26)\end{aligned}$$

Eine Anwendung von Satz 1.2.7 auf das innere Integral in (3.4.25) führt auf die obere Schranke

$$\frac{2^{d+1}b_t^d\beta_d\kappa_d^{d+1}\gamma^{2d+1}}{(d+1)!(d-1)!}\iint_{r(\mathbf{x})}^{\infty} e^{-\gamma\,\kappa_d\,r(\mathbf{x})^d}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,e^{-\gamma\,(1-a_d)\,\kappa_d\,r^d}\,r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.4.27)$$

Indem wir (3.4.11) mit $a=r(\mathbf{x})$, $b=\gamma(1-a_d)\kappa_d$ und $k=d$ im inneren Integral und (3.4.3) verwenden, ergibt sich für (3.4.27) die obere Schranke

$$t\frac{2^{d+1}b_t^d\beta_d\kappa_d^d\gamma^{2d}d}{(1-a_d)(d+1)!}\beta_d\,\mathbb{P}(\Sigma(Z)>v_t)\tau^{-d(d-1)/k}\,v_t^{d(d-1)/k}\,e^{-\gamma\,(1-a_d)\,\kappa_d\,\tau^{-d/k}\,v_t^{d/k}}. \qquad (3.4.28)$$

Für (3.4.26) erhalten wir mit Satz 1.2.7 die obere Schranke

$$\begin{aligned}&\frac{2^{d+1}b_t^d\beta_d\kappa_d^{d+1}\gamma^{2d+1}}{(d+1)!(d-1)!}\iint_{r(\mathbf{x})}^{\infty} e^{-\gamma\,\kappa_d\,r^d}\,\mathbb{1}\{\vartheta(\mathbf{x})\ge\varepsilon\}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\&\le\frac{2^{d+1}b_t^d\beta_d\kappa_d\gamma^{2d}d}{(d+1)!}\int e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\,\mathbb{1}\{\vartheta(\mathbf{x})\ge\varepsilon\}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,r^{d^2-1}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.4.29)\end{aligned}$$

Um (3.4.29) weiter abzuschätzen, unterscheiden wir nach dem Wert von $r(\mathbf{x})$. Mit analogen Betrachtungen wie in (3.4.20) erhalten wir für (3.4.29) die obere Schranke

$$O\Big(t\,v_t^{2d(d-1)/k}\,e^{-\gamma\kappa_d\,\tau^{-d/k}\,v_t^{d/k}}\,e^{-\gamma\,c_0\,f(\varepsilon)\,v_t^{d/k}}\Big).$$

Dies führt auf die Abschätzung

$$C_{t,2}=O\Big(v_t^{d(d-1)/k}\,e^{-\gamma\kappa_d\,(1-a_d)\,\tau^{-d/k}\,v_t^{d/k}}+t\,v_t^{2d(d-1)/k}\,e^{-\gamma\kappa_d\,\tau^{-d/k}\,v_t^{d/k}}\,e^{-\gamma\,c_0\,f(\varepsilon)\,v_t^{d/k}}\Big)\quad\text{für } t\to\infty. \qquad (3.4.30)$$

Der Term $C_{t,3}$ ist beschränkt durch

$$\begin{aligned}&\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2}\iint e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{y}))}\,\mathbb{1}\{\Sigma(\mathbf{x})>v_t,\,\Sigma(\mathbf{y})>v_t\}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t,\,z(\mathbf{y})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})>b_t\}\\&\qquad\times\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})\ge r(\mathbf{y})\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{y}\in B(\mathbf{x})^c,\,\mathbf{x}\in B(\mathbf{y})^c\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.4.31)\end{aligned}$$

Wir unterscheiden nach dem Wert von $r(\mathbf{x})$ und schätzen (3.4.31) ab durch die Summe

$$\begin{aligned}&\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2}\iint e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{y}))}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t,\,z(\mathbf{y})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})>b_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{y})>b_t\}\\&\qquad\times\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})\ge r(\mathbf{y})\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{y}\in B(\mathbf{x})^c,\,\mathbf{x}\in B(\mathbf{y})^c\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad (3.4.32)\\&+\frac{2\gamma^{2d+2}}{((d+1)!)^2}\iint e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(\mathbf{x})\cup B(\mathbf{y}))}\,\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t,\,z(\mathbf{y})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})>b_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{y})\le b_t\}\\&\qquad\times\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})\ge r(\mathbf{y})\}\,\mathbb{1}\{\mathbf{y}\in B(\mathbf{x})^c,\,\mathbf{x}\in B(\mathbf{y})^c\}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}. \qquad (3.4.33)\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini und erneut Satz 1.2.7 lässt sich (3.4.32) ausdrücken durch

$$t\frac{2\gamma^{2d+1}\beta_d\kappa_d^d d}{(d+1)!(d-1)!}\iint_{r(\mathbf{y})}^{\infty}\mathbb{1}\{z(\mathbf{y})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{y})>b_t\}e^{-\gamma\kappa_d r^d}\,r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{3.4.34}$$

Eine Anwendung von (3.4.11) mit $a = r(\mathbf{y})$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = d$ und erneut Satz 1.2.7 führt für (3.4.34) auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&t\frac{2\gamma^{2d}\beta_d\kappa_d^{d-1}d}{(d+1)!}\int\mathbb{1}\{z(\mathbf{y})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{y})>b_t\}e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{y})^d}r(\mathbf{y})^{d(d-1)}\,\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&=t^2\frac{2\gamma^{2d-1}\beta_d^2\kappa_d^{2d-1}d^2}{(d-1)!}\int_{b_t}^{\infty}e^{-\gamma\kappa_d r_t^d}r^{2d^2-d-1}\,\mathrm{d}r.
\end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Indem wir (3.4.11) mit $a = b_t$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = 2d-1$ auf (3.4.35) anwenden, ergibt sich die obere Schranke

$$t^2\frac{2\gamma^{2d-2}\beta_d^2\kappa_d^{2d-2}d(2d-1)!}{(d-1)!}e^{-\gamma\kappa_d b_t^d}b_t^{2d(d-1)}. \tag{3.4.36}$$

Analog zu (3.4.34) lässt sich der zweite Summand (3.4.33) schreiben als

$$\begin{aligned}
&t\frac{2\gamma^{2d+1}\beta_d\kappa_d^d d}{(d+1)!(d-1)!}\iint_0^{b_t}\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})>b_t\}e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\,r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&=tb_t^{d^2}\frac{2\gamma^{2d+1}\beta_d\kappa_d^d}{(d+1)!d!}\int\mathbb{1}\{z(\mathbf{x})\in W_t\}\,\mathbb{1}\{r(\mathbf{x})>b_t\}e^{-\gamma\kappa_d r(\mathbf{x})^d}\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{3.4.37}$$

Eine Anwendung von (3.4.11) mit $a = b_t$, $b = \gamma\kappa_d$ und $k = d$ auf (3.4.37) führt auf die Abschätzung

$$\frac{t^2b_t^{d^2}2\gamma^{2d}\beta_d^2\kappa^{2d}}{((d+1)!)^2}\int_{b_t}^{\infty}e^{-\gamma\kappa_d r^d}r^{d^2-1}\,\mathrm{d}r\le t^2b_t^{2d^2-d}\frac{2\gamma^{2d-1}\beta_d^2\kappa_d^{2d-1}}{(d+1)!}e^{-\gamma\kappa_d b_t^d}. \tag{3.4.38}$$

Aus (3.4.36) und (3.4.38) erhalten wir

$$C_{t,3}\le O\left(\frac{(\log t)^{2d-1}}{t}\right)\quad\text{für } t\to\infty. \tag{3.4.39}$$

Indem wir (3.4.23), (3.4.30) und (3.4.39) in (3.4.12) einsetzen und $\frac{\log t}{v_t^{d/k}}\xrightarrow{t\to\infty}\kappa_d\tau^{-d/k}\gamma$ beachten, erhalten wir (3.4.7). $\square$

Kapitel 4

Zusammengesetzte Poissonprozessapproximation Poissonscher Funktionale

4.1 Allgemeines Theorem

Wie oben bereits beschrieben, ist in vielen geometrischen Situationen intuitiv klar (z.B. wenn ξ_t die Ausdünnung von η beschreibt, die alle Punkte aus η löscht, deren umgebende Voronoi-Zelle einen kleinen Innenradius besitzt), dass $t^{-1/d}\xi_t$ nicht gegen einen einfachen Poissonprozess konvergiert. Das richtige Grenzobjekt ist hingegen oft ein zusammengesetzter Poissonprozess, den wir nun einführen.

Definition 4.1.1. Seien $\pi_1, \pi_2, \dots > 0$ mit $\sum_{i \geq 1} i\pi_i = 1$ und λ ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{R}^d$. Ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parametern $\lambda, \pi_1, \pi_2, \dots$ ist ein zufälliges Maß ψ auf $\mathbb{R}^d$ der Form

$$\psi(B) = \int_{B \times \mathbb{N}} i\, \zeta(\mathrm{d}y \times \mathrm{d}i), \quad B \in \mathcal{B}^d,$$

wobei ζ ein Poissonprozess ist, dessen Intensitätsmaß durch $\mathbb{E}\,\zeta(B \times \{i\}) = \pi_i\, \lambda(B)$ für $B \in \mathcal{B}^d$ und $i \in \mathbb{N}$ gegeben ist. □

In diesem Abschnitt betrachten wir abhängige Verdünnungen eines stationären Poissonprozesses, in denen der Term C_t aus Theorem 2.1.3 im Limes $t \to \infty$ nicht gegen Null konvergiert. Wir zeigen, dass der skalierte ausgedünnte Prozess $t^{-1/d}\xi_t$ dann unter bestimmten Voraussetzungen bezüglich der in Abschnitt 1.2.3 eingeführten d_2-Metrik gegen einen zusammengesetzten Poissonprozess konvergiert.

Bei der Verwendung der Steinschen Methode zur zusammengesetzten Poissonapproximation von Zufallsvariablen wie von zufälligen Zählmaßen hat sich gezeigt, dass der totale Variationsabstand häufig zu stark und damit ungeeignet ist. Stattdessen hat sich der schwächere d_2-Abstand als geeignete Metrik erwiesen (siehe z.B. Theorem 10.F in [6], [5]). Man vergleiche auch die allgemeine Diskussion zum d_2-Abstand in [7]. Wir erinnern an die Definition des d_2-Abstandes in Abschnitt 1.3.

Unser Hauptresultat dieses Kapitels basiert auf folgendem Satz zur Approximation eines endlichen Punktprozesses ξ in $\mathbb{R}^d$ durch einen zusammmengesetzten Poissonprozess. Dazu zerlegen wir den Punktprozess ξ für ein $r > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ in die Summe

$$\xi = \xi(\{x\})\delta_x + \xi_{B(x,r)\setminus\{x\}} + \xi_{B(x,r)^c}. \tag{4.1.1}$$

Intuitiv gesprochen wird $r > 0$ in Anwendungen häufig so gewählt, dass $\xi_{B(x,r)\setminus\{x\}}$ den Teil von ξ beschreibt, auf den $\xi(\{x\})$ einen Einfluss hat, und $\xi_{B(x,r)^c}$ den restlichen Teil. Ferner seien ξ^x eine Palmsche Version von ξ bei x und ξ_i^x eine Palmsche Version von ξ bezüglich des Prozesses $\sum_{x\in\xi} \mathbb{1}\{\xi(B(x,r)) = i\}\,\delta_x$ bei x. In dieser Situation gilt folgender Satz.

Satz 4.1.2 (Theorem 4.2 in [4]). *Seien $r > 0$, ξ ein endlicher Punktprozess in $\mathbb{R}^d$ mit Intensitätsmaß λ, zerlegt wie in (4.1.1). Für $x \in \mathbb{R}^d$ seien ξ^x eine Palmsche Version von ξ bei x und ξ_i^x eine Palmsche Version von ξ bezüglich des Prozesses $\sum_{x\in\xi} \mathbb{1}\{\xi(B(x,r)) = i\}\,\delta_x$ bei x. Ferner sei π_i gegeben durch*

$$i\,\pi_i := \mathbb{P}\left(\left|(\xi^x)_{B(x,r)}\right| = i\right), \quad i \geq 1,$$

und ψ sei ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parametern $\lambda, \pi_1, \pi_2, \ldots$ Dann gilt

$$\begin{aligned} d_2(\xi,\psi) \leq e^{\lambda(\mathbb{R}^d)\sum_{i\geq1}\pi_i} \bigg\{ &\int \mathbb{E} d_1\left((\xi^x)_{B(x,r)\setminus\{x\}}, (\xi^x)(B(x,r)\setminus\{x\})\,\delta_x\right)\lambda(\mathrm{d}x) \\ &+ \sum_{i\geq1} i\pi_i \int \mathbb{P}\left(|\xi| \neq \left|(\xi_i^x)_{B(x,r)^c}\right|\right) + \mathbb{E}\widehat{d_1}\left(\xi, (\xi_i^x)_{B(x,r)^c}\right)\lambda(\mathrm{d}x)\bigg\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz ist ein Korollar aus Satz 4.1.2 und gibt eine Abschätzung des d_2-Abstandes zweier zusammengesetzter Poissonprozesse an.

Satz 4.1.3 (Theorem 4.6 in [4]). *Seien ψ, ψ' zusammengesetzte Poissonprozesse mit Parametern $\lambda, \pi_1, \pi_2, \ldots$ bzw. $\lambda', \pi_1', \pi_2', \ldots$ Dann gilt*

$$d_2(\psi,\psi') \leq e^{\lambda(\mathbb{R}^d)\sum_{i\geq1}\pi_i} \sum_{i\geq1}\left(i\left|\pi_i\lambda(\mathbb{R}^d) - \pi_i'\lambda'(\mathbb{R}^d)\right| + \min\left[\pi_i\lambda(R^d), \pi_i'\lambda'(\mathbb{R}^d)\right]\widehat{d_1}\left(\pi_i\lambda, \pi_i'\lambda'\right)\right).$$

Wir formulieren und beweisen nun unser Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 4.1.4. *Seien $c > 0$, η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität γ, $t \mapsto r_t$ eine messbare Abbildung von $[0,\infty)$ nach $[0,\infty)$ mit $r_t^d/t \xrightarrow{t\to\infty} 0$ und $g_t : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \to \{0,1\}$ für alle $t > 0$ eine translationsinvariante und messbare Funktion, sodass*

$$g_t(0,\mu) = g_t(0, \mu_{B(0,r_t)} + \varphi_{B(0,r_t)^c}), \quad \mu, \varphi \in \mathbf{N}. \tag{4.1.2}$$

Ferner gelte $\mathbb{E}g_t(0,\eta) > 0$ für alle $t > 0$ und

$$\lim_{t\to\infty} \gamma t\,\mathbb{E}g_t(0,\eta) = c.$$

Wir betrachten

$$\xi_t \equiv \xi_t(\eta) := \sum_{x\in\eta\cap W_t} g_t(x, \eta - \delta_x)\,\delta_x$$

und definieren

$$\pi_{t,i} := \frac{\mathbb{E}g_t(0,\eta)\mathbb{1}\{\xi_t(\eta+\delta_0)\,(B(0,2r_t)) = i\}}{i\,\mathbb{E}g_t(0,\eta)}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{4.1.3}$$

Ferner sei ψ ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parametern $c\lambda^d_{[0,1]^d}$, $\pi_1, \pi_2, \dots$ Dann gilt mit $\pi_t := \gamma t\,\mathbb{E}g_t(0,\eta)\sum_{i\geq 1}\pi_{t,i}$,

$$d_2\left(t^{-1/d}\xi_t, \psi\right) \leq O\left(\frac{r_t}{t^{1/d}}\right) + e^{\pi_t}\left\{\gamma t\,\mathbb{E}g_t(0,\eta)\sum_{i\geq 1} i\,|\pi_{t,i} - \pi_i| + |\gamma t\mathbb{E}g_t(0,\eta) - c|\right\} \quad \text{für } t \to \infty. \tag{4.1.4}$$

Bevor wir Satz 4.1.4 beweisen, interpretieren wir die Struktur der rechten Seite von (4.1.4).

Bemerkung 4.1.5. Interessant ist der Vergleich von Satz 4.1.4 mit Satz 2.1.3. Dabei fällt auf, dass der Term C_t aus Satz 2.1.3 in der Abschätzung des d_2-Abstands in Satz 4.1.4 nicht auftritt. Dessen Rolle übernimmt der totale Variationsabstand $\sum_{i\geq 1} i\,|\pi_{t,i} - \pi_i|$ der Verteilungen der Clustergrößen des verdünnten und des zusammengesetzten Poissonprozesses. Damit lassen sich auch Konvergenzresultate für verdünnte Poissonprozesse zeigen, falls der Term C_t für $t \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert. In dieser Hinsicht stellt Satz 4.1.4 eine Verallgemeinerung von Satz 2.1.3 dar. In vielen Anwendungen (z.B. im Poisson-Voronoi-/Delaunay-Mosaik) ist es allerdings sehr kompliziert zu zeigen, dass $\sum_{i\geq 1} i\,|\pi_{t,i} - \pi_i|$ für $t \to \infty$ gegen 0 konvergiert. In [15] ist in Simulationsstudien versucht worden, die Größen π_i, $i \in \mathbb{N}$, in konkreten geometrischen Situationen approximativ zu bestimmen □

Beweis von Satz 4.1.4. Wir wollen Satz 4.1.2 verwenden. Dazu zerlegen wir den Prozess ξ_t für alle $x \in \mathbb{R}^d$ in die Summe

$$\xi_t(\{x\})\delta_x + (\xi_t)_{B(x,2r_t)\setminus\{x\}} + (\xi_t)_{B(x,2r_t)^c}. \tag{4.1.5}$$

Wir definieren

$$\xi_{t,i} := \sum_{x\in\eta\cap W_t} g_t(x,\eta-\delta_x)\mathbb{1}\{|\{y \in \eta_{B(x,2r_t)} : g_t(y,\eta-\delta_y) = 1\}| = i\}\,\delta_x, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Seien $x \in W_t$ und $\tilde{\eta}^x_{t,i}$ ein Punktprozess auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dessen Verteilung durch das Palmsche Maß von η bzgl. $\xi_{t,i}$ bei x gegeben ist, also

$$h(\mu)\,\mathbb{P}(\tilde{\eta}^x_{t,i} \in \mathrm{d}\mu) = \frac{h(\mu+\delta_x)g_t(x,\mu)\mathbb{1}\{\xi_t(\mu+\delta_x)(B(x,2r_t)) = i\}}{\mathbb{E}\,g_t(0,\eta)\mathbb{1}\{\xi_t(\eta+\delta_0)(B(0,2r_t)) = i\}}\,\mathbb{P}(\eta \in \mathrm{d}\mu), \quad h : \mathbf{N} \to [0,\infty)\text{ mb.},$$

mit der Interpretation $0/0 := 0$, sodass η und $\tilde{\eta}^x_{t,i}$ unabhängig sind. Mit Eigenschaft (4.1.2) gilt für alle $\mu, \varphi \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\xi_t(\mu)(B(x,2r_t)) &= \sum_{y\in\mu_{B(x,2r_t)}} g_t(y,\mu-\delta_y)\\ &= \sum_{y\in\mu_{B(x,2r_t)}} g_t(y,(\mu-\delta_y)_{B(y,2r_t)} + \varphi_{B(y,2r_t)^c})\\ &= \sum_{y\in\mu_{B(x,2r_t)}} g_t(y,(\mu-\delta_y)_{B(x,3r_t)} + \varphi_{B(x,3r_t)^c})\\ &= \xi_t(\mu_{B(x,3r_t)} + \varphi_{B(x,3r_t)^c})(B(x,2r_t)).\end{aligned}$$

Daher gilt mit einem zu (2.1.10) analogen Argument, dass auch durch

$$\eta^x_{t,i} := \left(\widetilde{\eta}^x_{t,i}\right)_{B(x,3r_t)} + \eta_{B(x,3r_t)^c} \overset{d}{=} \widetilde{\eta}^x_{t,i}.$$

eine Palmsche Version von η bzgl. $\xi_{t,i}$ bei x gegeben ist.

Seien $\gamma_t := \gamma t\,\mathbb{E} g_t(0,\eta)$ und $\pi_{t,1}, \pi_{t,2}, \dots$ wie in Satz 4.1.4. Ferner seien ψ_t ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parametern $\gamma_t \lambda^d_{[0,1]^d}, \pi_{t,1}, \pi_{t,2}, \dots$, $t > 0$. Aus Satz 4.1.2 und einem zur Argumentation in (2.1.11) analogen Skalierungsargument erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & d_2\left(t^{-1/d}\xi_t, \psi_t\right) \\ &\le \gamma\, e^{\pi_t} \left\{ \int_{W_t} t^{-1/d} \mathbb{E}\, d_1\left(\xi_t(\eta)_{B(x,2r_t)\setminus\{x\}}, \xi_t(\eta)(B(x,2r_t)\setminus\{x\})\delta_x\right) g_t(x,\eta)\,\mathrm{d}x \right. && (4.1.6) \\ & + \sum_{i\ge 1} \int_{W_t} \left(\mathbb{P}\left(|\xi_t(\eta)| \ne \left|\xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c}\right|\right) + t^{-1/d}\mathbb{E}\,\widehat{d_1}(\xi_t(\eta), \xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c})\right) \\ & \qquad \left. \times \mathbb{E}\, g_t(x,\eta)\, \mathbb{1}\{\xi_t(\eta)(B(x,2r_t)) = i\}\,\mathrm{d}x \right\}. && (4.1.7) \end{aligned}$$

Wir schätzen die beiden Summanden (4.1.6) und (4.1.7) separat ab. Für den d_1-Abstand in (4.1.6) ergibt sich aus der Definition von d_0 sowie der Zerlegung aus (4.1.5) die Abschätzung

$$d_1(\xi_t(\eta)_{B(x,2r_t)\setminus\{x\}}, \xi_t(\eta)(B(x,2r_t)\setminus\{x\})\delta_x) \le 4r_t \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Daraus folgt mit der Stationarität von η,

$$t^{-1/d}\mathbb{E} d_1\left(\xi_t(\eta)_{B(x,2r_t)\setminus\{x\}}, \xi_t(\eta)(B(x,2r_t)\setminus\{x\})\delta_x\right) g_t(x,\eta) \le 4r_t t^{-1/d}\mathbb{E} g_t(0,\eta).$$

Nun schätzen wir (4.1.7) ab. Mit der Markov-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\xi_t(\eta)| \ne \left|\xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c}\right|\right) &\le \mathbb{E}\left\|\xi_t(\eta) - \xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c}\right\|_{\mathrm{TV}} \\ &\le \mathbb{E} \sum_{y\in(\eta^x_{t,i})_{B(x,3r_t)\setminus B(x,2r_t)}} g_t(y, \eta^x_{t,i} - \delta_y) + \mathbb{E}\sum_{y\in\eta_{B(x,3r_t)}} g_t(y,\eta-\delta_y). \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Mit der Definition des Palmschen Prozesses $\eta^x_{t,i}$ und der Mecke-Formel lässt sich der erste Summand in (4.1.8) schreiben als

$$\int\limits_{B(x,3r_t)\setminus B(x,2r_t)} \frac{\mathbb{E}\, g_t(y,\eta+\delta_x)\, g_t(x,\eta+\delta_y)\, \mathbb{1}\{\xi_t(\eta+\delta_y)(B(x,2r_t)) = i\}}{\mathbb{E}\, g_t(x,\eta)\, \mathbb{1}\{\xi_t(\eta)(B(x,2r_t)) = i\}}\,\gamma\,\mathrm{d}y. \tag{4.1.9}$$

Der zweite Summand in (4.1.8) ist nach der Mecke-Formel gegeben durch

$$\int_{B(x,3r_t)} \mathbb{E} g_t(y,\eta)\gamma\,\mathrm{d}y.$$

Zur Abschätzung von $\mathbb{E}\,\widehat{d_1}(\xi_t(\eta), \xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c})$ beachten wir, dass sich die Prozesse $\xi_t(\eta)$ und $\xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c}$ wegen der Translationsinvarianz von g_t und (4.1.2) $\mathbb{P}$-fast sicher nur in $B(x,4r_t)$ unterscheiden können. Aus der Definition von $\widehat{d_1}$ erhalten wir folglich

$$\widehat{d_1}(\xi_t(\eta), \xi_t(\eta^x_{t,i})_{B(x,2r_t)^c}) \le 8r_t \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher.}$$

Somit lässt sich (4.1.7) abschätzen durch

$$\begin{aligned} &\int_{W_t}\int_{B(x,3r_t)\setminus B(x,2r_t)} \mathbb{E} g_t(y,\eta+\delta_x)\, g_t(x,\eta+\delta_y)\gamma\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{W_t}\int_{B(x,3r_t)} \mathbb{E} g_t(y,\eta)\mathbb{E} g_t(x,\eta)\gamma\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 8t^{-1/d} r_t t\mathbb{E} g_t(0,\eta). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Wegen $B(x,r_t)\cap B(y,r_t)=\varnothing$ für $|x-y|>2r_t$ und Eigenschaft (4.1.2) erhalten wir für (4.1.10) die obere Schranke

$$3^d\gamma\kappa_d r_t^d t(\mathbb{E}g_t(0,\eta))^2+3^d\gamma\kappa_d r_t^d t(\mathbb{E}g_t(0,\eta))^2+8t^{-1/d}r_t t\mathbb{E}g_t(0,\eta).$$

Wegen $r_t^d/t\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$ ergibt sich daraus die Abschätzung

$$d_2\left(t^{-1/d}\xi_t(\eta),\psi_t\right)\le O\left(\frac{r_t}{t^{1/d}}\right)\quad\text{für } t\to\infty. \tag{4.1.11}$$

Um die in (4.1.4) behauptete Beziehung zu zeigen, nutzen wir nun noch Satz 4.1.3. Dazu sei ψ ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parametern $\lambda:=c\lambda^d_{[0,1]^d}$ und wie oben

$$i\,\pi_{t,i}=\frac{\mathbb{E}g_t(0,\eta)\mathbb{1}\{\xi_t(\eta+\delta_0)\,(B(0,2r_t))=i\}}{\mathbb{E}g_t(0,\eta)},\quad i\in\mathbb{N}.$$

Nach Definition von $\widehat{d_1}$ gilt für α, $beta>0$ mit $\alpha\ne\beta$

$$\widehat{d_1}\left(\alpha\lambda^d_{[0,1]^d},\beta\lambda_{[0,1]^d}\right)=0.$$

Daraus ergibt sich mit Satz 4.1.3 die Abschätzung

$$\begin{aligned}d_2\left(\psi_t,\psi\right)&\le e^{\pi_t}\sum_{i\ge1}i\left|\gamma t\,\mathbb{E}g_t(0,\eta)\,\mathbb{1}\{\xi_t(\eta+\delta_0)(B(0,2r_t))=i\}-\pi_i\,c\right|\\&\le e^{\pi_t}\left\{\gamma t\,\mathbb{E}g_t(0,\eta)\sum_{i\ge1}i\left|\pi_{t,i}-\pi_i\right|+\left|\gamma t\mathbb{E}g_t(0,\eta)-c\right|\right\}.\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

Indem wir die rechten Seiten von (4.1.11) und (4.1.12) addieren, folgt sich die Behauptung. □

Wir diskutieren nun eine Anwendung von Theorem 4.1.4 und betrachten dabei kleine Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik.

4.2 Kleine Zellen im Poisson-Voronoi-Mosaik

Wir studieren nun kleine Zellen des durch η erzeugten Poisson-Voronoi-Mosaiks und betrachten dazu den Prozess

$$\xi_t=\sum_{x\in\eta\cap W_t}\mathbb{1}\{(\eta-\delta_x)\,(B(x,v_t))\ge1\}\,\delta_x. \tag{4.2.1}$$

Dies ist der Prozess aller Punkte aus η, deren Abstand zum Rand der sie umgebenden Voronoi-Zelle größer oder gleich v_t ist. Nach Konstruktion des Voronoi-Mosaiks ist klar, dass solche Punkte in Paaren auftreten und somit ist nicht zu erwarten, dass der Prozess $t^{-1/d}\xi_t$ im Limes $t\to\infty$ gegen einen einfachen Poissonprozess konvergiert. Stattdessen zeigen wir in Satz 4.2.1, dass $t^{-1/d}\xi_t$ bezüglich der d_2-Metrik gegen einen zusammengesetzten Poissonprozess konvergiert. Damit verschärfen wir das in [16], Beispiel 4.2, gezeigte Resultat, das die schwache Konvergenz der Punktprozesse zeigt.

Satz 4.2.1. *Seien $c > 0$, η ein stationärer Poissonprozess mit Intensität $\gamma > 0$, $r_t := c^{1/d}(\gamma^2\kappa_d t)^{-1/d}$ für $t > 0$ und*

$$\xi_t = \sum_{x\in\eta\cap W_t} \mathbb{1}\left\{(\eta - \delta_x)\left(B(x,r_t)\right) \geq 1\right\} \delta_x.$$

Weiter sei ψ ein zusammengesetzter Poissonprozess auf $[0,1]^d$ mit Parametern

$$c\lambda^d_{[0,1]^d},\ 0,\ 1/2,\ 0,\ 0,\dots$$

Dann gilt

$$d_2\left(t^{-1/d}\xi_t, \psi\right) \leq O(t^{-2/d}) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. Wir verwenden Satz 4.1.4. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\{\eta\left(B(0,r_t)\right) \geq 1\} = \left\{\eta_{B(0,r_t)}\left(B(0,r_t)\right) \geq 1\right\}$$

gilt. Dies zeigt, dass r_t die Voraussetzung (4.1.2) aus Satz 4.1.4 erfüllt. Wegen

$$\mathbb{P}\left(\eta\left(B(0,(\gamma\kappa_d t)^{-1/d})\right) \geq 1\right) = 1 - e^{-\gamma\mathcal{L}^d(B(0,(\gamma\kappa_d t)^{-1/d}))} = \frac{c}{\gamma tr}t + O(t^{-2})$$

erhalten wir aus Satz 4.1.4 die Abschätzung

$$d_2\left(t^{-1/d}\xi_t, \psi\right) \leq (c + O(1/t))\sum_{i\geq 1} i\left|\pi_{t,i} - \pi_i\right| + O\left(\frac{r_t}{t^{1/d}}\right) \quad \text{für } t \to \infty, \tag{4.2.2}$$

wobei $\pi_{t,i}$, $i \in \mathbb{N}$ in (4.1.3) gegeben ist. Nun schätzen wir die rechte Seite von (4.2.2) ab. Es gilt $\pi_{t,1} = 0$. Für $i \geq 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
i\,\pi_{t,i} &= \mathbb{P}\left(\xi_t(\eta + \delta_0)(B(0,2r_t)) = i \mid \eta(B(0,r_t)) \geq 1\right)\\
&\leq \mathbb{P}(\eta(B(0,2r_t)) = i - 1 \mid \eta(B(0,r_t)) \geq 1)\\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\mathbb{P}(\eta(B(0,r_t)) = k)\,\mathbb{P}(\eta(B(0,2r_t) \setminus B(0,r_t) = i - 1 - k)}{1 - e^{-\gamma\kappa_d r_t^d}}\\
&= \begin{cases} 1 + O(1/t), & i = 2,\\ O(1/t), & i \geq 3.\end{cases}
\end{aligned}$$

Folglich gilt mit $2\pi_2 = 1$ und $\pi_i = 0$ für $i \neq 2$,

$$\sum_{i\geq 1} i\left|\pi_{t,i} - \pi_i\right| = O(1/t) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Aus (4.2.2) ergibt sich die Behauptung. $\square$

Kapitel 5

Poissonprozessapproximation abhängiger Ausdünnungen Gibbsscher Punktprozesse

5.1 Gibbssche Punktprozesse

Für ein σ-endliches Maß λ auf $\mathbb{X}$ bezeichne Π_λ die Verteilung eines Poissonprozesses auf $\mathbb{X}$ mit Intensitätsmaß λ. Von besonderem Interesse sind für uns Verteilungen der Form $\Pi_{\alpha\,\lambda_B}$, wobei $\alpha \geq 0$ und $\lambda_B := \lambda(B \cap \cdot)$ die Einschränkung von λ auf ein $B \in \mathcal{X}_b$ bezeichne. Für jedes $B \in \mathcal{X}$ sei $\mathbf{N}_B := \{\mu \in \mathbf{N} : \mu(B^c) = 0\}$.

Sei $\kappa : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ messbar. Ein Punktprozess χ auf $\mathbb{X}$ heißt *Gibbsprozess* mit *Papangeloudichte* (PI) κ, falls

$$\mathbb{E} \int h(x, \chi)\, \chi(\mathrm{d}x) = \mathbb{E} \int h(x, \chi + \delta_x)\, \kappa(x, \chi)\, \lambda(\mathrm{d}x), \tag{5.1.1}$$

für jede messbare Funktion $h : \mathbb{X} \times \mathbf{N} \to [0, \infty)$. Dies sind die nach Georgii, Nguyen und Zessin benannten GNZ-Gleichungen.

In der gegenwärtigen Allgemeinheit ist nicht bekannt, ob Gibbsprozesse existieren. Unter verschiedenen Voraussetzungen ist diese Frage in [22], [59] untersucht worden. Deutlich herausfordernder ist die Frage, ob Gibbsprozesse in Verteilung eindeutig sind. Hierzu verweisen wir auf die aktuelle Übersichtsarbeit [21].

Die Gleichung (5.1.1) kann verallgemeinert werden. Dazu definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ die messbare Funktion $\kappa_m : \mathbb{X}^m \times \mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\kappa_m(x_1, \ldots, x_m, \mu) := \kappa(x_1, \mu)\, \kappa(x_2, \mu + \delta_{x_1}) \cdots \kappa(x_m, \mu + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_{m-1}}).$$

Man beachte $\kappa_1 = \kappa$. Falls χ ein Gibbsprozess mit PI κ ist, so gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und jede messbare Funktion $f : \mathbb{X}^m \times \mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \int f(x_1, \ldots, x_m, \chi)\, \chi^{(m)}(\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_m)) \\
&\quad = \mathbb{E} \int f(x_1, \ldots, x_m, \chi + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m})\, \kappa_m(x_1, \ldots, x_m, \chi)\, \lambda^m(d(x_1, \ldots, x_m)),
\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

wobei $\chi^{(m)}$ das m-te faktorielle Momentenmaß von χ bezeichnet, vgl. [42]. Dies folgt nach Induktion mit der Beziehung

$$\kappa_{m+1}(x_1, \ldots, x_{m+1}, \mu) = \kappa_m(x_1, \ldots, x_m, \mu)\, \kappa(x_{m+1}, \mu + \delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_m}).$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\widetilde{\kappa}_m : \mathbb{X}^m \times \mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ die Symmetrisierung von κ_m in den ersten m Argumenten. Die *Hamiltonfunktion* $H : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to (-\infty, \infty]$ (gegeben κ) ist definiert durch

$$H(\mu,\psi) := \begin{cases} 0, & \mu(\mathbb{X}) = 0, \\ -\log \widetilde{\kappa}_m(x_1,\dots,x_m,\psi), & \mu = \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_m}, \\ \infty, & \mu(\mathbb{X}) = \infty. \end{cases}$$

Für $B \in \mathcal{X}_b$ ist die *Zustandsfunktion* $Z_B : \mathbf{N} \to [0,\infty]$ definiert durch

$$Z_B(\psi) = \int e^{-H(\mu,\psi)}\,\Pi_{\lambda_B}(\mathrm{d}\mu), \quad \psi \in \mathbf{N}. \tag{5.1.3}$$

Wegen $H(0,\psi) = 0$ für alle $\psi \in \mathbf{N}$ gilt

$$Z_B(\psi) \geq e^{-\lambda(B)}, \quad B \in \mathcal{X}_b, \tag{5.1.4}$$

wobei man beachte, dass die rechte Seite positiv ist. Es wurde in [49] (siehe auch [46]) bewiesen, dass $\kappa_m(\cdot,\chi)$ für einen Gibbsprozess χ mit PI κ fast sicher symmetrisch für alle $m \in \mathbb{N}$ ist,

$$\mathbb{P}(Z_B(\chi_{B^c}) < \infty) = 1, \quad B \in \mathcal{X}_b, \tag{5.1.5}$$

gilt und für jede messbare Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{E}[f(\chi_B) \mid \chi_{B^c}] = Z_B(\chi_{B^c})^{-1} \int f(\mu)\, e^{-H(\mu,\chi_{B^c})}\,\Pi_{\lambda_B}(\mathrm{d}\mu), \quad B \in \mathcal{X}_b, \tag{5.1.6}$$

wobei angenommen wird, dass Beziehungen mit bedingten Erwartungen fast sicher gelten. Dies sind die DLR-Gleichungen, vgl. [45], [59]. Man beachte, dass (5.1.6) impliziert, dass

$$\mathbb{P}(\chi(B) = 0 \mid \chi_{B^c}) = e^{-\lambda(B)}\, Z_B(\chi_{B^c})^{-1}, \quad B \in \mathcal{X}_b. \tag{5.1.7}$$

Eine natürliche Forderung an κ ist die *Kozykelformel*

$$\kappa(x,\mu)\,\kappa(y,\mu+\delta_y) = \kappa(y,\mu)\,\kappa(x,\mu+\delta_y), \tag{5.1.8}$$

welche zumindest für $\lambda^2 \otimes \Pi_\lambda$-fast alle (x,y,μ) gelten sollte. Dann folgt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\kappa_m(x_1,\dots,x_m,\mu) = \widetilde{\kappa}_m(x_1,\dots,x_m,\mu), \tag{5.1.9}$$

für $\lambda^m \otimes \Pi_\lambda$-fast alle $(x_1,\dots,x_m,\mu)$. Das folgende Resultat wurde in [49] bewiesen, auch wenn es dort nicht in der vorliegenden Allgemeinheit angegeben ist.

Satz 5.1.1. *Die PI κ erfülle* (5.1.8) *für jedes $\mu \in \mathbf{N}$ und für λ^2-fast alle (x,y). Ferner sei χ ein Punktprozess, der* (5.1.5) *und* (5.1.6) *erfülle. Dann ist χ ein Gibbsprozess mit PI κ.*

Der Beweis von 5.1.1 zeigt, dass das folgende Korollar gilt.

Korollar 5.1.2. *Sei $\lambda(\mathbb{X}) < \infty$. Ferner erfülle κ die Voraussetzung aus Satz 5.1.1 und es gelte $Z_{\mathbb{X}} := \int e^{-H(\mu,0)}\,\Pi_\lambda(\mathrm{d}\mu) < \infty$. Dann ist*

$$Z_{\mathbb{X}}^{-1} \int \mathbb{1}\{\mu \in \cdot\}\, e^{-H(\mu,0)}\,\Pi_\lambda(\mathrm{d}\mu) \tag{5.1.10}$$

die Verteilung eines Gibbsprozesses mit PI κ.

5.2 Uneinigkeitskopplung

In diesem Abschnitt sei λ endlich und diffus. Wir betrachten eine messbare Funktion $\kappa : \mathbb{X}\times\mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ und nehmen an, dass eine messbare Funktion $\alpha : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ existiert, sodass $\int \alpha(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) < \infty$ und

$$\kappa(x,\mu) \le \alpha(x), \quad (x,\mu) \in \mathbb{X}\times\mathbf{N}. \tag{5.2.1}$$

Wir wissen aus [24], dass ein Gibbsprozess mit PI κ durch einen Poissonprozess η mit Intensitätsmaß $\alpha\lambda$, definiert durch $\alpha\lambda(\mathrm{d}x) := \alpha(x)\lambda(\mathrm{d}x)$, stochastisch dominiert wird. Das heißt, dass ein Punktprozess φ auf $\mathbb{X}$ existiert, sodass

$$\chi + \varphi \overset{d}{=} \eta \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher.}$$

In [30] wurde eine spezielle Ausdünnungskonstruktion eingeführt und mit deren Hilfe ein alternativer Beweis dieser Aussage angegeben. Die in [30] geführte Argumentation scheint jedoch nicht vollständig. Wir verweisen daher auch auf die auf arXiv verfügbare aktualisierte Version [31] dieser Arbeit. Im Folgenden stellen wir die verwendete Kopplungskonstruktion dar.

Es erfülle κ für alle $(x,y,\mu) \in \mathbb{X}^2\times\mathbf{N}$ die Kozykelformel (5.1.8) und ferner sei

$$Z_B(\psi_{B^c}) < \infty, \quad B \in \mathcal{X}_B,\ \psi \in \mathbf{N}. \tag{5.2.2}$$

Für $B \in \mathcal{X}_b$ und $\psi \in \mathbf{N}_{B^c}$ definieren wir $\kappa_{B,\psi} : B\times\mathbf{N}_b \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\kappa_{B,\psi}(x,\mu) := \kappa(x,\psi+\mu), \quad (x,\mu) \in B\times\mathbf{N}_B.$$

(Für allgemeines $\psi \in \mathbf{N}$ definieren wir $\kappa_\psi : \mathbb{X}\times\mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ durch $\kappa_\psi(x,\mu) := \kappa(x,\psi+\mu)$.) Wie in [30] konstruieren wir eine spezielle Kopplung zweier Gibbsprozesse auf B mit Papangelou-Dichten $\kappa_{B,\psi}$ und $\kappa_{B,\psi'}$ für $\psi,\psi' \in \mathbf{N}_{B^c}$. Dazu müssen wir eine zusätzliche Annahme an κ treffen. Es sei $\sim$ eine symmetrische Relation auf $\mathbb{X}$, sodass $\{(x,y) : x \sim y\} \subset \mathbb{X}^2$ eine messbare Teilmenge ist. Gegeben $x \in \mathbb{X}$ und $A \subset \mathbb{X}$ schreiben wir $x \sim A$, falls ein $z \in A$ mit $x \sim z$ existiert. Wir nennen $x,z \in \mathbb{X}$ *durch A verbunden*, falls es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $z_1,\dots,z_n \in A$ gibt, sodass $z_i \sim z_{i+1}$ für $i \in \{0,\dots,n\}$, wobei $z_0 := z$ und $z_{n+1} := z$. Diese Schreibweise nutzen wir auch für Zählmaße anstelle von A. Definiere

$$C(x,\mu) := \int \mathbb{1}\{y \in \cdot\}\mathbb{1}\{x \text{ und } y \text{ sind durch } \mu \text{ verbunden}\}\,\mu(\mathrm{d}y).$$

Wir nehmen an, dass

$$\kappa(x,\mu) = \kappa(x, C(x,\mu)), \quad (x,\mu) \in \mathbb{X}\times\mathbf{N}. \tag{5.2.3}$$

Zunächst führen wir einige Notationen ein. Nach Definition des Borelraumes existiert eine injektive messbare Abbildung $\varphi : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, sodass $\varphi(\mathbb{X})$ und die inverse Abbildung $\varphi^{-1} : \varphi(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ messbar sind. Wir führen eine totale Ordnung auf $\mathbb{X}$ ein, indem wir $x \le y$ schreiben, falls $\varphi(x) \le \varphi(y)$. Wir schreiben $x < y$, falls $x \le y$ und $x \ne y$. Wie üblich lassen sich dann $(x,y] := \{z \in \mathbb{X} : x < z \le y\}$ und andere Intervalle analog definieren. Insbesondere schreiben wir $(-\infty,y) := \{z \in \mathbb{X} : z < y\}$. Es sei $\mathbf{N}^*$ die Menge aller einfachen und endlichen Elemente aus $\mathbf{N}$. Es ist leicht einzusehen, dass die Abbildung $(x,\mu) \mapsto (\mu_{(-\infty,x)}, \mu_{(-\infty,x]})$ auf $\mathbb{X}\times\mathbf{N}^*$ messbar ist. Wir kürzen $\mu_x := \mu_{(-\infty,x)}$ ab.

Es bezeichne $\mathbf{N}^*(\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+)$ den Raum aller einfachen Zählmaße ψ auf $\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+$, sodass $\psi(\mathbb{X}\times B) < \infty$ für alle beschränkten Borelmengen $B \subset \mathbb{R}_+$ gilt. Wir nutzen die totale Ordnung auf $\mathbb{X}$ und definieren für alle $\psi \in \mathbf{N}^*(\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+)$

$$x_1(\psi) := \min\{x \in \mathbb{X} : \exists t \geq 0, \text{ sodass } (x,t) \in \psi \text{ und } t \leq p(x,0)\}, \tag{5.2.4}$$

wobei $\min\varnothing := \infty$ und $\min A := -\infty$, falls $A \subset \mathbb{X}$ unendlich ist. Induktiv definieren wir $x_n(\psi)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $x_n(\psi) \notin \mathbb{X}$ setzen wir $x_{n+1}(\psi) := x_n(\psi)$. Falls $x_n(\psi) \in \mathbb{X}$, so setzen wir

$$x_{n+1}(\psi) := \min\{x > x_n(\psi) : \exists t \geq 0 : (x,t) \in \psi \text{ und } t \leq p(x, \delta_{x_1(\psi)} + \cdots + \delta_{x_n(\psi)})\}. \tag{5.2.5}$$

Sei $\mathbf{N}^*(\mathbb{X})$ der Raum aller einfachen endlichen Zählmaße auf $\mathbb{X}$. Wir definieren eine Abbildung $T : \mathbf{N}\times(\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+) \to \mathbf{N}^*(\mathbb{X})$ durch

$$T(\psi) := \mathbb{1}\{\tau(\psi) < \infty\} \sum_{n=1}^{\tau}(\psi)\delta_{x_n(\psi)},$$

wobei $\tau(\psi) := \sup\{n \geq 1 : x_n(\psi) \in \mathbb{X}\}$. Aufgrund der Messbarkeitseigenschaften der totalen Ordnung und [42], Proposition 6.3, ist die Abbildung T messbar. Wir verwenden folgendes Resultat.

Satz 5.2.1 ([30]/[31])**.** *Es sei η ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+$ mit Intensitätsmaß $\lambda\otimes\lambda_1$ und es gelten die Bedingungen* (5.2.1) *und* (5.2.3)*. Dann ist $T(\eta)$ ein Gibbsprozess mit PI κ.*

Seien $B \in \mathcal{X}_b$ und $\psi, \psi' \in \mathbf{N}_{B^c}$. Ferner sei η ein Poissonprozess auf $\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+$ mit Intensitätsmaß $\lambda\otimes\lambda_1$. Für $C \in \mathcal{X}$ schreiben wir $\eta_C := \eta_{C\times\mathbb{R}_+}$. Sofern $\widetilde{\kappa} : \mathbb{X}\times\mathbf{N} \to \mathbb{R}_+$ die allgemeinen Voraussetzungen erfüllt und $C \in \mathcal{X}_b$, können wir Satz 5.2.1 anwenden, wobei wir $\mathbb{X}$ durch C ersetzen und κ durch die Einschränkung von $\widetilde{\kappa}$ auf $C\times\mathbf{N}_C$. Die dazugehörige Abbildung T kürzen wir mit $T_{C,\widetilde{\kappa}}$ ab.

Wir definieren nun rekursiv eine Folge zufälliger paarweise disjunkter Teilmengen $Y_1, Y_2, \dots$ von B sowie Punktprozesse $\chi_1, \chi_2, \dots$ und $\chi'_1, \chi'_2, \dots$ Gegeben solche Teilmengen, definieren wir für $n \in \mathbb{N}$, $W_n := Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$, $\xi_n := (\chi_n)_{Y_n}$ und $\xi'_n := (\chi'_n)_{Y_n}$. Die Rekursion startet mit $Y_1 := \{x \in B : x \sim (\psi+\psi')\}$ und $(\chi_1, \chi'_1) := \Big(T_{B,\kappa_\psi}(\eta_B), T_{B,\kappa'_\psi}(\eta_B)\Big)$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$Y_{n+1} := \begin{cases} B \setminus W_n, & \text{falls } \chi_n(Y_n) + \chi'_n(Y_n) = 0, \\ \{x \in B\setminus W_n : x \sim (\chi_n + \chi'_n)_{Y_n}\}, & \text{falls } \chi_n(Y_n) + \chi'_n(Y_n) = 0, \end{cases} \tag{5.2.6}$$

und

$$\big(\chi_{n+1}, \chi'_{n+1}\big) := \Big(T_{B\setminus W_n, \kappa_{\psi+\xi_1+\cdots+\xi_n}}(\eta_{B\setminus W_n}), T_{B\setminus W_n, \kappa_{\psi'+\xi'_1+\cdots+\xi'_n}}(\eta_{B\setminus W_n})\Big). \tag{5.2.7}$$

Man beachte, dass für $\chi_n(Y_n) + \chi'_n(Y_n) = 0$ gilt, dass $Y_1 \cup \cdots \cup Y_{n+1} = B$ ist, sodass $Y_i = \varnothing$ für $i \geq n+2$. Definiere

$$\chi := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n, \quad \chi' := \sum_{n=1}^{\infty} \chi'_n.$$

Für $\mu, \mu' \in \mathbf{N}$ seien $|\mu - \mu'| \in \mathbf{N}$ das totale Variationsmaß von $\mu - \mu'$ und

$$|\mu - \mu'| := \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n - \mu'_n|.$$

Es gilt folgender Satz.

Satz 5.2.2 ([30]/[31])**.** *Es sei η ein Poissonprozess auf $\mathbb{X} \times \mathbb{R}_+$ mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \lambda_1$ und es gelten die Bedingungen* (5.2.1) *und* (5.2.3)*. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\chi_n - \chi_n')(B) < \infty \quad \textit{fast sicher.}$$

Außerdem ist χ ein Gibbsprozess auf B mit PI $\kappa_{B,\psi}$, während χ' ein Gibbsprozess auf B mit PI $\kappa_{B,\psi'}$. Jeder Punkt in $|\xi - \xi'|$ ist durch $\xi + \xi'$ mit $\psi + \psi'$ verbunden.

Die Relevanz von Satz 5.2.2 wollen wir nun in Anwendungen verdeutlichen. Dabei werden wir die im Satz behauptete Uneinigkeitskopplung nutzen, um eine Kopplung zwischen einem stationären Gibbsprozess und seinem Palmschen Maß zu konstruieren. Zunächst zeigen wir im folgenden Abschnitt, dass das reduzierte Palmsche Maß eines Gibbsprozesses bezüglich einer abhängigen Verdünnung unter den obigen Voraussetzungen ein Gibbsprozess mit einer anderen Randbedingung ist.

5.3 Palmsche Maße und Papangelou-Dichten

Seien $\gamma > 0$, $R > 0$, $\mathcal{L}^d$ das d-dimensionale Lebesgue-Maß und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0, R]$. Wir arbeiten auf dem Borelraum $\mathbb{X} := \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, ausgestattet mit dem Produktmaß $\gamma\mathcal{L}^d \otimes Q$. Dabei verwenden wir die abkürzenden Schreibweisen $\chi_{W_t} = \chi \cap W_t$ für die Einschränkung des Gibbsprozesses χ auf $W_t \times [0, \infty)$ und $(x, r) \in A$ für $(x, r) \in A \times [0, \infty)$. Die zur Ausdünnung notwendige totale Ordnung (vgl. Abschnitt 5.2) ist kanonisch gegeben durch $(x, r) < (y, s)$ falls $|x| < |y|$ oder $|x| = |y|$ und $x < y$ bezüglich der lexikographischen Ordnung oder $x = y$ und $r < s$. Die zur Uneinigkeitskopplung nötige Relation auf $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ erklären wir durch $(x, r) \sim (y, s)$ falls $|x - y| \le r + s$. Eine Konfiguration $\mu \in \mathbf{N}(\mathbb{X})$ besitzt einen zugehörigen *Gilbert-Graphen* $G(\mu)$ mit Knotenmenge supp μ und einer Kante zwischen $(x, r), (y, s) \in \mu$ genau dann, wenn $|x - y| \le r + s$. Wir sagen, dass $(x, r) \in \mathbb{X}$ und $(y, s) \in \mathbb{X}$ *durch μ verbunden* sind, falls es in $G(\mu + \delta_{(x,r)} + \delta_{(y,s)})$ einen Pfad zwischen (y, r) und (y, s) gibt, i.Z. $(x, r) \xleftrightarrow{\mu} (y, s)$. Für $\varnothing \neq A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{X})$ schreiben wir $A \xleftrightarrow{\mu} \varphi$, falls es $x \in A$ und $(y, s) \in \varphi$ gibt, sodass $(x, r) \xleftrightarrow{\mu} (y, s)$, und verwenden diese Definition für zwei nichtleere Borelmengen oder lokalendliche Zählmaße entsprechend.

Seien χ ein stationärer Gibbsprozess mit Papangelou-Dichte κ, die die Bedingungen (5.2.1) und (5.2.3) erfüllt. Ferner seien κ und $g_t : \mathbb{X} \times \mathbf{N} \to \{0, 1\}$ messbare Funktionen mit den Eigenschaften

$$\kappa((x, r), \mu) = \kappa((0, r), \theta_x \mu), \tag{5.3.1}$$

$$g_t((x, r), \mu) = g_t((0, r), \theta_x \mu), \quad (x, r) \in \mathbb{X},\ \mu \in \mathbf{N}, \tag{5.3.2}$$

wobei $\theta_x \mu$ durch $(\theta_x \mu)(A \times B) = \mu((A + x) \times B)$ für Borelmengen $A \subset \mathbb{R}^d$ und $B \subset [0, \infty)$, erklärt ist. Ferner nehmen wir an, dass für alle $t > 0$ die Monotonieeigenschaft

$$g_t((x, r), \mu) \ge g_t((x, r), \mu + \delta_{(y,s)}), \quad (x, r), (y, s) \in \mathbb{X},\ \mu \in \mathbf{N}, \tag{5.3.3}$$

gelte. Wir betrachten die durch

$$\xi_t \equiv \xi_t(\chi) := \sum_{(x,r) \in \chi \cap W_t} g_t((x, r), \chi - \delta_{(x,r)})\, \delta_{(x,r)}$$

gegebene Verdünnung von χ. Unser Ziel besteht darin, ein Resultat zur Poissonprozessapproximation des durch

$$(t^{-1/d}\xi_t)(A\times B) = \iint \mathbb{1}\{(x,r)\in(t^{1/d}A)\times B\}\,\xi_t(\mathrm{d}(x,r)), \quad A\subset\mathbb{R}^d,\ B\subset\mathcal{B}([0,\infty)), \tag{5.3.4}$$

erklärten Prozesses $t^{-1/d}\xi_t$ zu finden. Die in Kapitel 2 verwandte Methode verlangt eine geeignete Kopplung zwischen χ und einem reduzierten Palmschen Prozess von χ bezüglich ξ_t. Zu deren Konstruktion bestimmen wir zunächst das Palmsche Maß von χ bezüglich ξ_t bei (x,r). Das Intensitätsmaß $\mathbb{E}\xi_t$ von ξ_t ist gegeben durch

$$\mathbb{E}\xi_t(A\times B) = \iint \mathbb{E}g_t((x,r),\chi)\,\kappa((x,r),\chi)\,\gamma\,Q(\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}x.$$

Wir weisen nun nach, dass der reduzierte Palmsche Prozess von χ bezüglich ξ_t bei (x,r) wieder ein Gibbsprozess ist und bestimmen dessen Papangelou-Dichte (vgl. [17], Seite 17). Für jede messbare Funktion $h:\mathbb{X}\times\mathbf{N}\to[0,\infty)$ gilt mit der GNZ-Formel und der Definition von ξ_t,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int h((x,r),\chi)\,\xi_t(\chi)(\mathrm{d}(x,r)) &= \mathbb{E}\int h((x,r),\chi)\,g_t((x,r),\chi-\delta_{(x,r)})\,\chi(\mathrm{d}(x,r))\\ &= \mathbb{E}\iint h((x,r),\chi+\delta_{(x,r)})\,g_t((x,r),\chi)\,\kappa((x,r),\chi)\,\gamma\mathrm{d}x\,Q(\mathrm{d}r).\end{aligned}$$

Es folgt, dass für $\mathbb{E}\xi_t$-f.a. $(x,r)\in\mathbb{R}^d\times[0,R]$ die Verteilung des reduzierten Palmschen Prozesses $\chi_t^{(x,r)!}$ von χ bezüglich ξ_t bei (x,r) gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(\chi_t^{(x,r)!}\in\mathrm{d}\mu) = \frac{g_t((x,r),\mu)\,\kappa((x,r),\mu)}{\mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\,\kappa((0,r),\chi)}\,\mathbb{P}(\chi\in\mathrm{d}\mu). \tag{5.3.5}$$

Wir zeigen nun, dass der reduzierte Palmsche Prozess $\chi_t^{(x,r)!}$ ein Gibbsprozess mit Papangelou-Dichte

$$\kappa_t^{(x,r)}((y,s),\mu) := \frac{\kappa((y,s),\mu+\delta_{(x,r)})g_t((x,r),\mu+\delta_{(y,s)})}{g_t((x,r),\mu)} \tag{5.3.6}$$

mit der Interpretation $0/0 := 0$ (beachte, dass der Fall $1/0$ wegen Bedingung (5.3.3) nicht auftreten kann) ist. Dazu weisen wir die Gültigkeit der GNZ-Formel nach, zeigen also für $h:\mathbb{X}\times\mathbf{N}\to[0,\infty)$ messbar die Gleichung

$$\begin{aligned}&\iint h((y,s),\mu)\,\mu(\mathrm{d}(y,s))\,\mathbb{P}(\chi_t^{(x,r)!}\in\mathrm{d}\mu)\\ &= \iiint h((y,s),\mu+\delta_{(y,s)})\frac{\kappa((y,s),\mu+\delta_{(x,r)})g_t((x,r),\mu+\delta_{(y,s)})}{g_t((x,r),\mu)}\,\mathbb{P}(\chi_t^{(x,r)!}\in\mathrm{d}\mu)\,\gamma\,\mathrm{d}y\,Q(\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Indem wir die in (5.3.5) gegebene Verteilung von $\chi_t^{(x,r)!}$ in die linke Seite von (5.3.7) einsetzen und daraufhin die GNZ-Formel anwenden, ergibt sich

$$\begin{aligned}&\iint \frac{h((y,s),\mu)g_t((x,r),\mu)\kappa((x,r),\mu)}{\mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)}\mu(\mathrm{d}(y,s))\,\mathbb{P}(\chi\in\mathrm{d}\mu)\\ &= \iint \frac{\mathbb{E}h((y,s),\chi+\delta_{(y,s)})g_t((x,r),\chi+\delta_{(y,s)})\kappa((x,r),\chi+\delta_{(y,s)})\kappa((y,s),\chi)}{\mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)}\gamma\mathrm{d}y\,Q(\mathrm{d}s).\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Mit (5.3.5) und der Kozykelformel (5.1.8) ergibt sich die rechte Seite von (5.3.7).

5.4 Poissonprozessapproximation Gibbscher Ausdünnungen

In diesem Abschnitt verwenden wir Perkolationseigenschaften des Booleschen Modells. Wir sagen, dass eine Konfiguration $\mu \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$ *perkoliert*, falls es im Booleschen Modell $\bigcup_{(x,r)\in\mu} B(x,r)$ zumindest eine unbeschränkte Komponente gibt. Für ein gegebenes Maß Q sei $\alpha_c(d,Q)$ die Intensitätsschranke, die das subkritische und das superkritische Regime trennt, d.h.

$$\alpha_c(d,Q) := \inf\{\alpha > 0 : \mathbb{P}(\eta_{\alpha,Q} \text{ perkoliert}) > 0\} \in [0,\infty],$$

wobei $\eta_{\alpha,Q}$ einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\alpha\mathcal{L}^d \otimes Q$ bezeichnet. Nach [48] und [25] gilt $\alpha_c(d,Q) \in (0,\infty)$ und ferner für alle $B \in \mathcal{B}_b$,

$$\mathbb{P}(B \overset{\eta}{\longleftrightarrow} B(0,n)^c) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Folgendes Lemma ergibt sich aus Gleichung (3.7) in [68] (siehe auch Lemma 3.1 in [10]). Es gibt eine Abschätzung der Wahrscheinlichkeit an, dass zwei konzentrische d-Kugeln im durch einen Poissonprozess erzeugten Booleschen Modell zur gleichen Komponente gehören.

Lemma 5.4.1. *Seien $0 < \alpha < \alpha_c(d,Q)$ und η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\alpha\mathcal{L}^d \otimes Q$. Dann existieren Konstanten $c_0, C > 0$, sodass für alle $b, r > 0$ mit $b > r$ gilt*

$$\mathbb{P}\Big(B(0,r) \overset{\eta}{\longleftrightarrow} B(0,b)^c\Big) \le c_0 r^d e^{-C(b-r)}.$$

Wir zeigen folgendes Resultat.

Satz 5.4.2. *Seien $\gamma > 0$, χ ein stationärer Gibbsprozess mit Papangelou-Dichte κ, sodass die Bedingungen (5.2.3) und (5.3.1) und $\gamma\kappa \le \alpha < \alpha_c(d,Q)$ erfüllt ist. Ferner seien $c > 0$, $r_t > 0$ für $t > 0$ und $g_t : \big(\mathbb{R}^d \times [0,\infty)\big) \times \mathbf{N} \to \{0,1\}$ für alle $t > 0$ eine messbare Abbildung mit den Eigenschaft (5.3.2) und (5.3.3), sodass*

$$g_t((0,r),\mu) = g_t((0,r),\mu_{B(0,r_t)} + \varphi_{B(0,r_t)^c}), \quad r > 0,\ \mu,\varphi \in \mathbf{N}, \tag{5.4.1}$$

und

$$\gamma t \int \mathbb{E} g_t((0,r),\chi)\,\kappa((0,r),\chi)\,Q(\mathrm{d}r) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c. \tag{5.4.2}$$

Außerdem sei ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\mathcal{L}^d_{[0,1]^d} \otimes Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &d_{TV}(t^{-1/d}\xi_t,\nu) \\ &\quad \le C_t + O\left(\frac{(\log t)^d}{t} + \frac{r_t^d}{t}\right) + \left|\gamma t \int \mathbb{E} g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\,Q(\mathrm{d}r) - c\right| \quad \text{für } t \to \infty, \end{aligned}$$

wobei für $b_t := 2C^{-1}\log t + r_t$ mit C aus Lemma 5.4.1,

$$\begin{aligned} C_t := \gamma^2 \iiiint &\mathbb{E} g_t((x,r),\chi + \delta_{(y,s)})\kappa((x,r),\chi + \delta_{(y,s)}) g_t((y,s),\chi + \delta_{(x,r)})\kappa((y,s),\chi) \\ &\times \mathbb{1}\{x \in W_t\}\,\mathbb{1}\{y \in B(x,b_t)\}\,Q(\mathrm{d}s)\,Q(\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Beweis. Wir wollen Satz 2.1.2 verwenden. Dazu müssen wir für $\mathbb{E}\xi_t$-fast alle (x,r) eine Kopplung zwischen ξ_t und einer Palmschen Version von ξ_t (bezüglich ξ_t) bei (x,r) konstruieren. Wie zu Beginn des Beweises von Satz 2.1.3 erläutert, lässt sich diese Kopplung durch eine Kopplung zwischen χ und einer Palmschen Version von χ bezüglich ξ_t bei (x,r) realisieren. Eine solche Kopplung konstruieren wir nun.

Sei dazu $\chi_t^{x!}$ eine reduzierte Palmsche Version von χ bezüglich ξ_t bei (x,r), sodass χ und $\chi_t^{(x,r)!}$ unabhängig sind. Aus (5.3.8) wissen wir, dass $\chi_t^{(x,r)!}$ ein Gibbsprozess mit Papangelou-Dichte $\kappa_t^{(x,r)}$ aus (5.3.6) ist. Sei $U_t := \left[x - t^{1/d} - b_t, x + t^{1/d} + b_t\right]^d \setminus B(x, r_t)$. Nach Satz 5.2.2 existieren auf $U_t \times [0,R]$ zwei Gibbsprozesse $\psi, \psi_t^{(x,r)}$ mit PI $\kappa_{U_t,\chi}$ bzw. $\kappa_{U_t,\chi_t^{(x,r)}}$, sodass ψ und $\psi_t^{(x,r)}$ durch einen stationären Poissonprozess η mit Intensitätsmaß $\alpha\mathcal{L}^d \otimes Q$ stochastisch dominiert werden, und ferner

$$\left|\psi - \psi_t^{(x,r)}\right| \overset{\eta}{\longleftrightarrow} U_t^c \quad \mathbb{P}-\text{fast sicher.}$$

Die DLR-Gleichungen besagen nun

$$\chi_{U_t^c} + \psi \overset{d}{=} \chi, \qquad (\chi_t^{(x,r)})_{U_t^c} + \psi_t^{(x,r)} \overset{d}{=} \chi_t^{(x,r)}.$$

Damit lässt sich der totale Variationsabstand zwischen $t^{-1/d}\xi_t$ und dem Poissonprozess ν aus Satz 5.4.2 wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{TV}}\left(t^{-1/d}\xi_t, \nu\right) \le \iint_{W_t} \mathbb{E}\left\|\xi_t(\chi_{U_t^c} + \psi_{U_t}) - \left(\xi_t((\chi_t^{(x,r)})_{U_t^c} + \psi_t^{(x,r)}) - \delta_{(x,r)}\right)\right\|_{\mathrm{TV}} \\ \times \mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\,\gamma\,\mathrm{d}x\,Q(\mathrm{d}r) \\ + \left|\gamma t \int \mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\,Q(\mathrm{d}r) - c\right|. \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

Der Erwartungswert der totalen Variation in (5.4.3) lässt sich mit b_t aus dem Satz nach oben abschätzen durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_t(\chi)(B(x,b_t)) + \mathbb{E}\left(\xi_t\left(\chi_t^{(x,r)}\right) - \delta_{(x,r)}\right)(B(x,b_t)) \\ + \mathbb{E}\left|\xi_t(\chi_{U_t^c} + \psi) - \xi_t\left((\chi_t^{(x,r)})_{U_t^c} + \psi_t^{(x,r)}\right)\right|(W_t \setminus B(x,b_t)). \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

Für den ersten Summanden in (5.4.4) gilt mit den GNZ-Gleichungen, der Stationarität von χ, (5.3.1) und (5.3.2),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_t(\chi)(B(x,b_t)) &= \gamma \iint_{B(x,b_t)} \mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\,\mathrm{d}y\,Q(\mathrm{d}r) \\ &= \gamma\kappa_d b_t^d \int \mathbb{E}g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\,Q(\mathrm{d}r). \end{aligned}$$

Wegen (5.4.2) ergibt sich hieraus

$$\mathbb{E}\xi_t(\chi)(B(x,b_t)) = O\left(\frac{(\log t)^d + r_t^d}{t}\right) \quad \text{für } t \to \infty. \tag{5.4.5}$$

Wir schätzen nun den bezüglich $\mathbb{E}\xi_t$ integrierten zweiten Summanden in (5.4.4) ab. Dabei erhalten wir mit der Definition von $\chi_t^{(x,r)}$,

$$\begin{aligned} &\gamma \iint_{W_t} \mathbb{E}g_t((x,r),\chi)\kappa((x,r),\chi)\,\mathbb{E}\left(\xi_t\left(\chi_t^{(x,r)}\right) - \delta_{(x,r)}\right)(B(x,b_t))\,\mathrm{d}x\,Q(\mathrm{d}r) \\ &= \gamma \iint_{W_t} \int_{B(x,b_t)} \mathbb{E}g_t((x,r),\chi)\kappa((x,r),\chi)g_t((y,s),\chi - \delta_{(y,s)} + \delta_{(x,r)})\,\chi(\mathrm{d}(y,s))\,\mathrm{d}x\,Q(\mathrm{d}r). \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Mit einer erneuten Anwendung der GNZ-Formel lässt sich (5.4.6) umformen zu

$$C_t := \gamma^2 \iint_{W_t \times B(x,b_t)} \mathbb{E} g_t((x,r),\chi+\delta_{(y,s)})\kappa((x,r),\chi+\delta_{(y,s)}) g_t((y,s),\chi+\delta_{(x,r)})\kappa((y,s),\chi) \times \mathrm{d}(x,y)\, Q^2(\mathrm{d}(r,s)).$$

Nach Konstruktion der Verdünnung besitzt jedes Element

$$(y,s) \in B(x,b_t)^c \cap \left|\xi_t(\chi_{U_t^c}+\psi) - \left(\xi_t\left((\chi_t^{(x,r)})_{U_t^c}+\psi_t^{(x,r)}\right) - \delta_{(x,r)}\right)\right|$$

die Eigenschaft

$$B(y,r_t) \cap \left|\psi - \psi_t^{(x,r)}\right| \neq \varnothing.$$

Wegen $\left|\psi - \psi_t^{(x,r)}\right| \overset{\eta}{\longleftrightarrow} U_t^c$ und da $\left|\psi - \psi_t^{(x,r)}\right|$ durch η stochastisch dominiert wird, lässt sich der dritte Summand in (5.4.4) abschätzen durch

$$\mathbb{E}\int \mathbb{1}\{B(y,r_t) \overset{\eta}{\longleftrightarrow} U_t^c\}\mathbb{1}\{y \in W_t \setminus B(x,r_t)\}\,\eta(\mathrm{d}(y,s)) \leq \alpha t \mathbb{P}(B(0,r_t) \overset{\eta+\delta_{(0,s)}}{\longleftrightarrow} B(0,b_t)). \quad (5.4.7)$$

Wegen $Q([0,R]) = 1$ gilt $\mathbb{P}(B(0,r_t) \overset{\eta+\delta_{(0,s)}}{\longleftrightarrow} B(0,b_t)) = \mathbb{P}(B(0,r_t) \overset{\eta}{\longleftrightarrow} B(0,b_t))$ für $t > 0$ groß genug. Folglich gilt mit Lemma 5.4.1, dass sich (5.4.7) für $t > 0$ groß genug abschätzen lässt durch

$$c_0 t r_t^d\, e^{-C(b_t - r_t)} = O(r_t^d/t) \quad \text{für } t \to \infty. \quad (5.4.8)$$

Insgesamt erhalten wir aus (5.4.5), (5.4.6) und (5.4.8) die Abschätzung

$$d_{\mathrm{TV}}(t^{-1/d}\xi_t,\nu) \leq C_t + O\left(\frac{(\log t)^d}{t} + \frac{r_t^d}{t}\right) + \left|\gamma t \int \mathbb{E} g_t((0,r),\chi)\kappa((0,r),\chi)\, Q(\mathrm{d}r) - c\right| \quad \text{für } t \to \infty.$$

□

Wir zeigen die Wirkungsmacht von Satz 5.4.2 nun anhand zweier Beispiele.

5.4.1 Markenabhängige Verdünnung eines Gibbsprozesses

Zunächst betrachten wir ein Beispiel, in dem die Verdünnungsvorschrift so gewählt ist, dass die Entscheidung, ob ein Punkt aus χ gelöscht wird oder nicht, nur von dessen Marke r abhängt. In dieser Situation gilt folgender Satz.

Satz 5.4.3. *Seien χ ein stationärer Gibbsprozess mit PI κ, die den Bedingungen (5.2.3) und $\gamma\kappa \leq \alpha < \alpha_c(d,Q)$ genügt. Ferner sei die Abbildung $t \mapsto v_t$ so gewählt, dass*

$$\gamma t \int_{v_t}^{\infty} \mathbb{E}\kappa((0,r),\chi) Q(\mathrm{d}r) = c, \quad t > 0.$$

Außerdem seien ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d} \otimes Q$ und

$$\xi_t := \sum_{(x,r) \in \chi \cap W_t} \mathbb{1}\{r > v_t\}\, \delta_{(x,r)}.$$

Dann gilt

$$d_{TV}\left(t^{-1/d}\xi_t,\nu\right) = O\left(\frac{(\log t)^d}{t}\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. Wir verwenden Satz 5.4.2. Offenbar können wir $r_t \equiv 0$ wählen. Für den Term C_t ergibt sich

$$C_t \le \gamma^2 t b_t^d \left(\int_{v_t}^{\infty} \mathbb{E}\kappa((0,r),\chi) Q(\mathrm{d}r) \right)^2 = O\left(\frac{(\log t)^d}{t} \right) \quad \text{für } t \to \infty.$$

Daraus folgt die behauptete Abschätzung. □

5.4.2 Maximale Nächste-Nachbarn-Abstände im hard-core-Modell

In diesem Unterabschnitt leiten wir ein Resultat zur Poissonprozessapproximation eines ausgedünnten hard-core-Prozesses her. Dazu nehmen wir an, dass die PI des Prozesses gegeben ist durch

$$\kappa((x,r),\mu) = \begin{cases} 0, & \exists (y,s) \in \mu : |x-y| < r+s, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.4.9}$$

Offensichtlich erfüllt κ dann die Bedingung (5.2.3). In Lemma 3.3 in [61] wurde gezeigt, dass ein Gibbsprozess χ mit PI aus (5.4.9) *Poisson-ähnlich* ist. Dies bedeutet, dass χ von einem Poissonprozess stochastisch dominiert wird und $r_1 > 0$, $c_1 > 0$ existieren, sodass für alle $E \in \mathcal{N}_{B(0,r_1)^c}$ und $r > r_1$ gilt,

$$\mathbb{P}(\chi_{B(0,r)} = \varnothing \mid \chi_{B(0,r)^c} \in E) \le e^{-c_1 r^d}. \tag{5.4.10}$$

In folgendem Satz untersuchen wir den Prozess derjenigen Punkte aus χ, deren Abstand zum nächsten Nachbarn in χ größer als eine vorgegebene untere Schranke ist. Dazu seien $c > 0$ und die Abbildung $t \mapsto v_t$ so gewählt, dass

$$\gamma t \int \mathbb{E}\mathbb{1}\{\chi \cap B(0,v_t) = \varnothing\}\kappa((0,r),\chi)\, Q(\mathrm{d}r) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} c \tag{5.4.11}$$

gelte. Dann gilt folgender Satz.

Satz 5.4.4. *Seien χ ein stationärer Gibbsprozess mit PI κ aus (5.4.9) und $\gamma\kappa \le \alpha < \alpha_c(d,Q)$. Dann existieren $c > 0$ und eine Abbildung $t \mapsto v_t$, sodass $v_t/(\log t)^{1/d}$ beschränkt ist und*

$$\gamma t \int \mathbb{E}\,\mathbb{1}\{\chi \cap B(0,v_t) = \varnothing\}\kappa((0,r),\chi)\, Q(\mathrm{d}r) = c, \quad t > 0. \tag{5.4.12}$$

Ferner seien ν ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $c\lambda^d_{[0,1]^d} \otimes Q$ und

$$\xi_t := \sum_{(x,r)\in\chi\cap W_t} \mathbb{1}\{(\chi - \delta_{(x,r)}) \cap B(0,v_t) = \varnothing\}\, \delta_{(x,r)}.$$

Dann existiert eine Konstante $b > 0$, sodass gilt

$$d_{TV}\left(t^{-1/d}\xi_t, \nu\right) = O\left(t^{-b}\right) \quad \textit{für } t \to \infty.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass eine Abbildung $t \mapsto v_t$ mit den besagten Eigenschaften existiert. Für $v > 2R$ gilt $\mathbb{1}\{\chi \cap B(0,v_t) = \varnothing\}\kappa((0,r),\chi) = \mathbb{1}\{\chi \cap B(0,v_t) = \varnothing\}$ $\mathbb{P}$-fast sicher und damit folgt

$$\gamma t \int \mathbb{E}\,\mathbb{1}\{\chi \cap B(0,v) = \varnothing\}\kappa((0,r),\chi)\, Q(\mathrm{d}r) = \gamma t \mathbb{P}(\chi \cap B(0,v) = \varnothing).$$

Da χ durch einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\alpha\mathcal{L}^d \otimes Q$ stochastisch dominiert wird und χ Poisson-ähnlich ist, erhalten wir für $v > 0$ groß genug die Ungleichungen

$$e^{-\alpha v^d} \leq \mathbb{P}\left(\chi \cap B(0,v) = \varnothing\right) \leq e^{-c_1 v^d}.$$

Folglich existiert eine Abbildung $t \mapsto v_t$, sodass $v_t/(\log t)^{1/d}$ beschränkt ist und (5.4.12) gilt.

Nun zeigen wir die behauptete Abschätzung des totalen Variationsabstands. Dazu verwenden wir Satz 5.4.2. Für den Term C_t erhalten wir

$$\begin{aligned}\gamma^2 \iint_{W_t \times B(x,b_t)} &\mathbb{E}\mathbb{1}\{(\chi + \delta_{(y,s)}) \cap B(x,v_t) = \varnothing\}\mathbb{1}\{(\chi + \delta_{(x,r)}) \cap B(y,v_t) = \varnothing\} \\ &\times \kappa((x,r), \chi + \delta_{(y,s)})\kappa((y,s), \chi + \delta_{(x,r)})\,\mathrm{d}(x,y))\,Q^2(\mathrm{d}(r,s)).\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

Wegen $v_t \to \infty$ für $t \to \infty$ und der speziellen Form von κ vereinfacht sich der Integrand in (5.4.13) für $t > 0$ groß genug zu

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left((\chi + \delta_y) \cap B(x,v_t) = \varnothing, \chi \cap B(y,v_t) = \varnothing\right)\mathbb{1}\{|x-y| > r+s\} \\ &\quad = \mathbb{P}\left((\chi + \delta_y) \cap B(x,v_t) = \varnothing\right)\mathbb{P}\left(\chi \cap B(y,v_t) = \varnothing \mid (\chi + \delta_y) \cap B(x,v_t) = \varnothing\right)\mathbb{1}\{|x-y| > r+s\}.\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

Für $|x-y| > v_t$ sind die beiden d-Kugeln $B(x,v_t)$ und $B\left(x + 3/2(y-x), v_t/2\right)$ disjunkt. Somit ergibt sich für (5.4.14) in diesem Fall die obere Schranke

$$\mathbb{P}(\chi \cap B(x,v_t) = \varnothing)\mathbb{P}\left(\chi \cap B\left(x + 3/2(y-x), v_t/2\right) = \varnothing \mid \chi \cap B(x,v_t) = \varnothing\right).$$

Da χ ein Poisson-artiger Gibbsprozess ist, gilt

$$\mathbb{P}\left(\chi \cap B\left(x + 3/2(y-x), v_t/2\right) = \varnothing \mid \chi \cap B(x,v_t) = \varnothing\right) \leq e^{-c_1 2^{-d}\kappa_d v_t^d}.$$

Somit ergibt sich für C_t die obere Schranke

$$\gamma^2 \kappa_d\, t\, b_t^d \mathbb{P}\left(\chi \cap B(0,v_t) = \varnothing\right) e^{-c_1 2^{-d}\kappa_d v_t^d}.$$

Wegen $b_t = 2C^{-1}\log t + 2r_t$ und da $v_t/(\log t)^{1/d}$ beschränkt ist, ergibt sich hieraus die Behauptung.

□

Literaturverzeichnis

[1] Arratia, R., Goldstein, L. and Gordon, L. (1989). Two moments suffice for Poisson approximation: the Chen-Stein method. *Ann. Prob.* **17,** 9–25.

[2] Arratia, R., Goldstein, L. and Gordon, L. (1990). Poisson approximation and the Chen-Stein method. *Stat. Sci.* **5,** 403–424.

[3] Barbour, A. and Brown, T. (1992). Stein's method and point process approximation. *Stoch. Proc. Appl.* **43,** 9–31.

[4] Barbour, A. and Månsson, M. (2002). Compound Poisson process approximation. *Ann. Prob.* **30,** 1492–1537.

[5] Barbour, A. and Utev, S. (1998). Solving the Stein Equation in compound Poisson approximation. *Adv. Appl. Prob.* **30,** 449-475.

[6] Barbour, A., Holst, L. and Jansson, S. (1992). *Poisson Approximation.* Oxford University Press, Oxford.

[7] Barbour, A., Novak, S. and Xia, A. (2002). Compound Poisson approximation for the distribution of extremes. *Adv. Appl. Prob.* **34,** 223–240.

[8] Baumstark, V. and Last, G. (2007). Some distributional results for Poisson–Voronoi tessellations. *Adv. Appl. Prob.* **39,** 16–40.

[9] Baumstark, V. and Last, G. (2009). Gamma distributions for stationary Poisson flat processes. *Adv. Appl. Prob.* **41,** 911–939.

[10] Beneš, V., Hofer-Temmel, C., Last, G. and Večeřa, J. (2019). Decorrelation of a class of Gibbs particle processes and asymptotic properties of U-statistics. arXiv preprint arXiv:1903.06553

[11] Calka, P. (2010). Tessellations. *In: New Perspectives in Stochastic Geometry.* Oxford University Press, Oxford.

[12] Calka, P. and Chenavier, N. (2014). Extreme values for characteristic radii of a Poisson–Voronoi tessellation. *Extremes* **17,** 359–385.

[13] Chen, L. (1975). Poisson approximation for dependent trials. *Ann. Prob.* **3,** 534–545.

[14] Chenavier, N. (2014). A general study of extremes of stationary tessellations with examples. *Stoch. Proc. Appl.* **124,** 2917–2953.

[15] Chenavier, N. and Hemsley, R. (2016). Extremes for the inradius in the Poisson line tessellation. *Adv. Appl. Prob.* **48,** 544–573.

[16] Chenavier, N. and Robert, C. (2018). Cluster size distributions of extreme values for the Poisson–Voronoi tessellation. *Ann. Appl. Prob.* **28,** 3291–3323.

[17] Coeurjolly, J.-F., Møller, J. and Waagepetersen, R. (2017). A tutorial on Palm distributions for spatial point processes. *Int. Stat. Rev.* **85,** 404–420.

[18] Coupier, D., Dereudre, D. and Le Stum, S. (2020). Absence of percolation for Poisson outdegree-one graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **56,** 1179–1202.

[19] Daley, D. and Last, G. (2005). Descending chains, the lilypond model, and mutual-nearest-neighbour matching. *Adv. Appl. Prob.* **37,** 604–628.

[20] Decreusefond, L., Schulte, M. and Thäle, C. (2016). Functional Poisson approximation in Kantorovich-Rubinstein distance with applications to U-statistics and stochastic geometry. *Ann. Appl. Prob.* **44,** 2147–2197.

[21] Dereudre, D. (2019). Introduction to the Theory of Gibbs Point Processes. *In: Stochastic Geometry.* Springer, Berlin.

[22] Dereudre, D., Drouilhet, R. and Georgii, H.-O. (2012). Existence of Gibbsian point processes with geometry-dependent interactions. *Probab. Theory Relat. Fields* **153,** 643–670.

[23] Edelsbrunner, H., Nikitenko, A. and Reitzner, M. (2017). Expected sizes of Poisson–Delaunay mosaics and their discrete Morse functions. *Adv. Appl. Prob.* **49,** 745–767.

[24] Georgii, H.-O. and Küneth, T. (1997). Stochastic comparison of point random fields. *J. Appl. Prob.* **34,** 868–881.

[25] Gouéré, J.-B. (2008). Subcritical regimes in the Poisson Boolean model of continuum percolation. *Ann. Prob.* **36,** 1209–1220.

[26] Györfi, L., Henze, N. and Walk, H. (2019). The limit distribution of the maximum probability nearest neighbor ball. *J. Appl. Prob.* **56,** 574–589.

[27] Henze, N. (1982). The limit distribution for maxima of ‘weighted’rth-nearest-neighbour distances. *J. Appl. Prob.* **19,** 344–354.

[28] Henze, N. (1983). Ein asymptotischer Satz über den maximalen Minimalabstand von unabhängigen Zufallsvektoren mit Anwendung auf einen Anpassungstest und auf der Kugel. *Metrika* **30,** 245–259.

[29] Heveling, M. and Last, G. (2006). Existence, uniqueness, and algorithmic computation of general lilypond systems. *Random Struct. Algorithms* **29,** 338–350.

[30] Hofer-Temmel, C. and Houdebert, P. (2019). Disagreement percolation for marked Gibbs point processes. *Stoch. Proc. Appl.* **129,** 3922–3940.

[31] Hofer-Temmel, C. and Houdebert, P. (2019). Disagreement percolation for marked Gibbs point processes. arXiv preprint arXiv:1709.04286.

[32] Hug, D., and Schneider, R. (2004). Large cells in Poisson–Delaunay tessellations. *Discrete Comput. Geom.* **31,** 503–514.

[33] Hug, D., and Schneider, R. (2005). Large typical cells in Poisson–Delaunay mosaics. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **50,** 657–670.

[34] Hug, D., and Schneider, R. (2007). Asymptotic shapes of large cells in random tessellations. *Geom. Funct. Anal.* **17,** 156–191.

[35] Hug, D., Reitzner, M. and Schneider, R. (2004). Large Poisson–Voronoi cells and Crofton cells. *Adv. Appl. Prob.* **36,** 667–690.

[36] Hug, D., Reitzner, M. and Schneider, R. (2004). The limit shape of the zero cell in a stationary Poisson hyperplane tessellation. *Ann. Prob.* **32,** 1140–1167.

[37] Jaromczyk, J. and Toussaint, G. (1992). Relative neighborhood graphs and their relatives. *Proc. IEEE* **80,** 1502–1517.

[38] Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability.* Second Edition, Springer, New York.

[39] Kallenberg, O. (2017). *Random Measures, Theory and Applications.* Springer, Cham.

[40] Lachèze-Rey, R., Schulte, M. and Yukich, J. (2019). Normal approximation for stabilizing functionals. *Ann. Appl. Prob.* **29,** 931–993.

[41] Last, G. and Penrose, M. (2013). Percolation and limit theory for the Poisson lilypond model. *Random Struct. Algorithms* **42,** 226–249.

[42] Last, G. and Penrose, M. (2017). *Lectures on the Poisson Process.* Cambridge University Press, Cambridge.

[43] Le Cam, L. (1960). An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. *Pacific J. Math.* **10,** 1181–1197.

[44] Lindvall, T. (2017). *Lectures on the Coupling Method.* Wiley, New York.

[45] Mase, S. (2000). Marked Gibbs processes and asymptotic normality of maximum pseudo-likelihood estimators. *Math. Nachr.* **209,** 151–169.

[46] Matthes, K., Warmuth, W. and Mecke, J. (1979). Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh und Hans Zessin. *Math. Nachr.* **88,** 117–127.

[47] Meester, R. and Häggström, O. (1996). Nearest neighbor and hard sphere models in continuum percolation. *Random Struct. Algorithms* **9,** 295–315.

[48] Meester, R. and Roy, R. (1996). *Continuum percolation.* Cambridge University Press, Cambridge.

[49] Nguyen, X. X. and Zessin, H. (1979). Integral and differential characterizations of the Gibbs process. *Math. Nachr.* **88,** 105–115.

[50] Nikitenko, A. (2019). Integrating by spheres: Summary of Blaschke–Petkantschin formulas. arXiv preprint arxiv:1904:10750.

[51] Peccati, G. (2011). The Chen-Stein method for Poisson functionals. arXiv preprint arXiv:1112.5051.

[52] Penrose, M. (1997). The longest edge of the random minimal spanning tree. *Ann. Prob.* **7,** 340–361.

[53] Penrose, M. (2003). *Random Geometric Graphs.* Oxford University Press, Oxford.

[54] Penrose, M. (2007). Gaussian limits for random geometric measures. *Electron. J. Probab.* **12,** 989–1035.

[55] Penrose, M. (2018). Inhomogeneous random graphs, isolated vertices, and Poisson approximation. *J. Appl. Prob.* **55** 112–136.

[56] Prohorov, Y. (1953). Asymptotic behavior of the binomial distribution. *Uspekhi Mat. Nauk* **8,** 135–142.

[57] Rathie, P. (1992). On the volume distribution of the typical Poisson–Delaunay cell. *J. Appl. Prob.* **29,** 740–744.

[58] Resnick, S. (1987). *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes.* Springer, New York.

[59] Ruelle, D. (1970). Superstable interactions in classical statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.* **18,** 127–159.

[60] Schneider, R. and Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry.* Springer, Berlin.

[61] Schreiber, T. and Yukich, J. (2013). Limit theorems for geometric functionals of Gibbs point processes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **49,** 1158–1182.

[62] Schulte, M. and Thäle, C. (2012). The scaling limit of Poisson–driven order statistics with applications in geometric probability. *Stoch. Proc. Appl.* **122,** 4096–4120.

[63] Schulte, M. and Thäle, C. (2016). Poisson point process convergence and extreme values in stochastic geometry. *In: Stochastic Analysis for Poisson Point Processes.* Springer, Cham.

[64] Serfling, R. (1975). A general Poisson approximation theorem. *Ann. Prob.* **3,** 726–731.

[65] Stein, C. (1970). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proc. Sixth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* **2,** 583–602.

[66] Torrisi, G. (2017). Probability approximation of point processes with Papangelou conditional intensity. *Bernoulli* **23,** 2210–2256.

[67] Villani, C. (2008). *Optimal Transport: Old and New.* Springer, Berlin.

[68] Ziesche, S. (2018). Sharpness of the phase transition and lower bounds for the critical intensity in continuum percolation on $\mathbb{R}^d$. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **54,** 866–878.

[69] Zuyev, S. (1999). Stopping sets: Gamma-type results and hitting properties. *Adv. Appl. Prob.* **31,** 355–366.