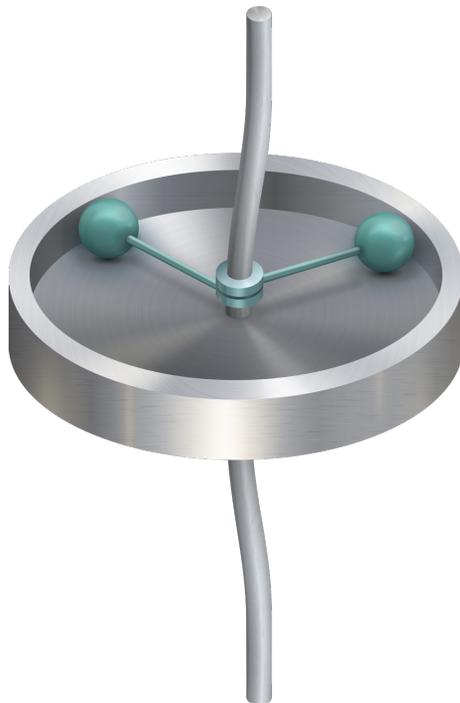


Olga Drozdetskaya

Zur Dynamik eines unwuchtigen Rotors mit Selbstauswuchtsystem





Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung -
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

Zur Dynamik eines unwuchtigen Rotors mit Selbstauswuchtsystem

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

von der

KIT-Fakultät für Maschinenbau
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Olga Drozdetskaya

Tag der mündlichen Prüfung:

Hauptreferent:

Korreferent:

30. November 2020

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois Steindl

Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Technische Mechanik, Teilinstitut Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Zunächst möchte ich recht herzlich meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin für die engagierte wissenschaftliche Betreuung der Arbeit, sein Vertrauen sowie die ständige Förderung und Unterstützung nicht nur in wissenschaftlichen Fragen danken.

Mein besonderer Dank gilt zudem Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois Steindl für die Übernahme des Korreferats sowie für die interessante wissenschaftliche Diskussion über diese Arbeit und die wertvollen Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Henning möchte ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann danke ich für das Interesse an meiner Arbeit, fachliche Diskussionen und wertvolle Anmerkungen im Rahmen von Doktoranden- und Abteilungsseminaren.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe danke ich für die angenehme Zusammenarbeit am Institut.

Ich danke den ehemaligen Professoren des Instituts Jörg Wauer, Walter Wedig und Jens Wittenburg für ihre aktive Teilnahme am Institutsleben, ihr Interesse an meiner Arbeit und ihre wertvollen Anmerkungen und Anregungen.

Ich möchte dem Sekretariat, vertreten durch Frau Sylvia Gelsok, Frau Gudrun Volz und Frau Elke Höllig, für ihre Unterstützung bei der Bewältigung großer und kleiner

organisatorischer Angelegenheiten danken.

Ich bin allen meinen Kollegen vom Institut für Technische Mechanik sehr dankbar für die angenehme Arbeitsatmosphäre, die Unterstützung und die gemeinsame Zeit. Von den ehemaligen Doktoranden möchte ich namentlich Jens Deppler, Georg Jehle und Marius Köster erwähnen, die mich vor allem zu Beginn meiner Zeit am Institut stark unterstützt haben.

Ich bedanke mich bei Ulrich Römer für sein offenes Ohr und die Fähigkeit, ein Problem von einem anderen Blickwinkel zu betrachten, was mir bei der Entstehung dieser Arbeit viele Male geholfen hat.

Meinem Zimmerkollegen Tunc Yüzbasioğlu möchte ich für die angenehme Gesellschaft und die vielen fachlichen Diskussionen danken. Es war sehr bereichernd, gemeinsam an verwandten Themen zu arbeiten.

Mein besonderer Dank gilt Kai Becker und Tim Leister, die mich auf meinem Weg vom ersten Arbeitstag am Institut an begleitet haben, Erfolge und Niederlagen mit mir teilten und viel mehr als nur Kollegen geworden sind. Ohne sie wäre diese Zeit nicht halb so schön gewesen. Ich möchte Kai Becker außerdem für die sprachliche Durchsicht dieser Arbeit danken.

Mein herzlichster Dank gilt meinen Eltern, meinem Bruder und meiner ganzen Familie. Ohne ihre Unterstützung, Förderung und bedingungslose Liebe hätte ich es nicht geschafft.

Ich bin meinem lieben Andrej dankbar für seine Geduld, seine uneingeschränkte Unterstützung und seinen Sinn für Humor, der mir viele Male geholfen hat, schwierige Momente zu überwinden.

Karlsruhe, den 14. Dezember 2020

Olga Drozdetskaya

Kurzfassung

Selbstauswuchtsysteme sind im Bereich der Technik weit verbreitet, um das Schwingungsniveau von rotierenden Maschinen mit variabler Unwucht, wie z.B. Waschmaschinen, Zentrifugen, optische Laufwerke u.v.a.m., zu reduzieren. Ein Unwuchtausgleich mit besagten Selbstauswuchtsystemen ist dabei nur im überkritischen Drehzahlbereich der Maschinen möglich. Im Zuge einer Beschleunigung der Maschine auf einen im überkritischen Drehzahlbereich liegenden Betriebspunkt passiert diese zwangsläufig ein oder mehrere Resonanzfrequenzen, an denen es zu unerwünschten dynamischen Effekten kommen kann, die in der Regeln von einer deutlichen Zunahme des Schwingungsniveaus begleitet werden.

Die vorliegende Arbeit widmet sich der systematischen Untersuchung der Dynamik solcher unwuchtiger Maschinen mit einem einfachen Selbstauswuchtsystem unter Berücksichtigung der Interaktion des mechanischen Systemteils mit einem nicht-idealen Antrieb begrenzter Leistung. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den beim Resonanzdurchgang eines exemplarischen Rotors auftretenden dynamischen Effekten.

Im Zuge der Untersuchungen wurden zwei Arten von Bewegungen identifiziert, die jeweils einem Hängenbleiben des Rotors in der Resonanz entsprechen. Im ersten Fall rotieren der Rotor und zwei Auswuchtpendel eines zugehörigen Selbstauswuchtsystems mit der gleichen Drehzahl knapp unterhalb der Resonanzdrehzahl, wobei die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse nahezu konstant bleibt. Im zweiten Fall eilen die Auswuchtpendel des Selbstauswuchtsystems dem Rotor hinterher, was zu einer kontinuierlichen Veränderung der effektiven Unwucht des gesamten Systems führt, wobei dies zu einer starken Modulation der Rotordrehzahl sowie der Schwingungsamplitude der Rotordrehachse führt. Beide Arten der beschriebenen Resonanzlösungen koexistieren mit einer weiteren, kompensierenden Lösung, bei welcher der Rotor seine Nenndrehzahl erreicht und die Auswuchtpendel die Unwucht des Rotors vollständig kompensieren. Ein zentraler Punkt der vorliegenden Arbeit ist dabei die Untersuchung der Existenz-, Stabilitäts- und Einzugsgebiete aller drei genannten Lösungsarten.

Um die negativen Auswirkungen des Selbstauswuchtsystems auf die Rotordynamik im Resonanzbereich zu reduzieren, wird weiterhin eine Konstruktionsänderung der Auswuchtpendel vorgeschlagen, die es ermöglicht, diese erst am Betriebspunkt im überkritischen Drehzahlbereich zu aktivieren. Alternativ kann das Phänomen des nicht-stationären Hängenbleibens in der Resonanz auch zur Gestaltung einer Anregungsquelle für Betriebsfestigkeitsversuche genutzt werden.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	I
Kurzfassung	III
1 Einleitung	1
1.1 Ziel der Arbeit	5
1.2 Aufbau der Arbeit	6
2 Grundlagen	7
2.1 Grundbegriffe der Theorie der nichtlinearen Schwingungen	7
2.1.1 Stationäre Lösungen	11
2.1.2 Grenzzyklen	13
2.1.3 Bifurkationen	16
2.2 Grundmodelle	26
2.2.1 Grundmodell des Rotors	26
2.2.2 Grundmodelle der Elektromotoren	32
3 Asymptotische Analyse der partiell stark gedämpften Systeme	43
3.1 Mittelwertbildungsverfahren	43
3.2 Erweiterung auf partiell stark gedämpfte Systeme	46
3.3 Anwendungsbeispiel: Sommerfeldeffekt	48
3.3.1 Starrer Rotor auf einem oszillierenden Träger	48
3.3.2 Elastischer Rotor in starren Lagern	53
4 Modell eines unwuchtigen Rotors mit Selbstausschlagssystem	57
4.1 Bewegungsgleichungen und dimensionslose Parameter	58
4.2 Asymptotische Analyse	61
5 Dynamik des Selbstausschlagssystems	67
5.1 Stationäre Lösungen	67

5.2	Hochlaufsimulationen	71
5.3	Dynamik des Systems in Konfiguration II ($\delta = 0$)	74
5.4	Stabilität der periodischen Lösung	79
5.5	Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung	80
5.6	Untersuchung der Approximationsqualität durch das reduzierte System	82
5.6.1	Allgemeine Anmerkungen	82
5.6.2	Einfluß der Systemparameter	86
6	Mögliche technische Anwendungen	93
6.1	Selbstausschlagsystem mit schaltbaren Ausschlagspendeln	93
6.2	Schwingungserreger für einen Prüfstand	96
7	Zusammenfassung und Ausblick	99
	Notation	101
	Literaturverzeichnis	107
	Eigene Publikationen	115
	Anhang	117
A	Stationäre und periodische Lösungen des Systems für einen alternativen Parametersatz	119

1 Einleitung

Das Problem des Auswuchtens ist fast so alt wie die Erfindung des Töpferrads um ca. 3500 vor Christus. Räder wurden dabei primär für den handwerklichen Gebrauch entwickelt, bevor sie für den Transport verwendet wurden. Erst 500 Jahre später entwickelten die Ägypter das erste sorgfältig ausbalancierte Steinrad für den rollenden Transport [65]. Im Laufe der Zeit und mit dem technischen Fortschritt wurden die ersten Wasser- und Windräder entwickelt. Eine ungenaue Fertigung führte dazu, dass derartige Räder mit dem Massenschwerpunkt nach unten rotierten und sich bei einer schwachen Strömung bzw. Wind überhaupt nicht mehr drehten [73].

Mit dem Beginn der industriellen Revolution wurde das Problem des Auswuchtens noch akuter. Die Erhöhung der Betriebsdrehzahlen rotierender Maschinen führte zu einer deutlichen Zunahme der Amplituden der durch die Unwucht induzierten Schwingungen. Bis Ende des 19. Jahrhunderts wurde die Überschreitung der ersten Resonanzdrehzahl für unmöglich gehalten [64]. Im Jahr 1889 konstruierte der schwedische Ingenieur K.G. Laval eine einstufige Dampfturbine [47], wobei er experimentell zeigte, dass im Falle einer ausreichend schnellen Beschleunigung der Maschine diese keine Zeit hat, sich in der Resonanz aufzuschaukeln sondern in den überkritischen Bereich zu einem ruhigeren Laufverhalten übergeht. Die theoretischen Grundlagen für eine überkritische Selbstzentrierung des Rotors wurden einige Jahre später von Föppl [25] und Jeffcott [38] ausgearbeitet.

Im Jahr 1902 entdeckte der deutsche Physiker A. Sommerfeld, dass die Motorleistung unter Umständen nicht ausreicht, um den Rotor durch die Resonanz zu bringen [77], sodass eine für den überkritischen Betrieb ausgelegte Maschine vor der Resonanz stehen bleibt und mit sehr hohen Amplituden schwingt. Dabei führte eine leichte Erhöhung der Energieversorgung zu nahezu keiner Erhöhung der Drehzahl. Erst nach einem Leistungsanstieg über einen bestimmten Schwellenwert „springt“ der Rotor auf die überkritische Drehzahl. Dieses Phänomen wurde entsprechend seines Entdeckers als Sommerfeld-Effekt bezeichnet und blieb ein halbes Jahrhundert lang unerklärt. Erst in den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts wurde eine theoretische Erklärung dieses Phänomens für ein System mit einem oszillierenden und einem

rotierenden Freiheitsgrad zunächst von Blekhman erarbeitet [10, 11] und danach von Kononenko erweitert [43]. Diese Arbeiten legten den richtungsweisenden Grundstein für die wissenschaftlichen Forschung über die Interaktion von schwingenden Systemen mit nicht-idealen Energiequellen. Der Einfluss eines Antriebs mit begrenzter Leistung wurde für eine Vielzahl von Systemen untersucht, u.a. für flexible Rotoren [90], Kurbeltriebe [89], selbstsynchronisierende Vibratoren [8, 11] und sogar für die Stabilisierung von Raumschiffen und Satelliten [88].

Viele Autoren untersuchten die Möglichkeit, den Sommerfeld-Effekt zu vermeiden oder zu minimieren, unter anderem durch aktive Steuerung des Antriebsmomentes [88], Änderung der Systemsteifigkeit [17, 18, 24, 90] oder Systemdämpfung [40] während des Hochlaufs, mit Hilfe von trockener Reibung [15] und aktiver Magnetlager [39].

Parallel zu der Entwicklung der rotierenden Maschinen trat auch die Auswuchttechnik in den Fokus der Forschung. Im Falle einer permanenten Unwucht kann diese mit hoher Genauigkeit durch starr angebrachte Zusatzgewichte ausgeglichen werden [21, 73]. Der Auswuchtvorgang wird in der Regel einmalig vor der Inbetriebnahme der Maschine durchgeführt, was auch als „Offline-Auswuchten“ bezeichnet wird. In Fällen variierender Unwucht, bei denen sich die Unwucht von Start zu Start oder sogar während des Betriebs der Maschine verändern kann, ist dieser Ansatz allerdings nicht geeignet. Hier ist ein kontinuierlicher Unwuchtausgleich während der gesamten Laufzeit der Maschine erforderlich, was üblicherweise als „Online-Auswuchten“ bezeichnet wird. Zu den Maschinen, die online ausgewuchtet werden müssen, gehören unter anderem Waschmaschinen [7, 53], verschiedene Zentrifugen [55, 58], optische Laufwerke [16, 34, 42] und elektrische Handwerkzeuge [61, 63].

Im Hinblick auf die Realisierung wird dabei zwischen aktiven und passiven Online-Auswuchtssystemen unterschieden. Bei aktiven Systemen wird die Position der Ausgleichsmasse(n) durch spezielle Aktoren in Abhängigkeit vom momentanen Systemzustand eingestellt (siehe zum Beispiel [1, 57, 86]), was oft ein komplexes und teures Regelungssystem in Kombination mit entsprechenden Messsensoren erfordert. Bei passiven Auswuchtssystemen, auch Selbstauswuchtsysteme genannt, wird dagegen nur die natürliche Dynamik der Interaktion zwischen dem Hauptsystem und den Ausgleichsmassen genutzt, was bei vielen Anwendungen durchaus vorteilhaft sein kann.

Das erste passive Auswuchtssystem wurde von Leblanc im Jahre 1915 patentiert [48]. Er schlug vor, eine Scheibe mit einer kreisförmigen Nut, die teilweise mit einer schweren viskosen Flüssigkeit gefüllt wurde, als Auswuchtkörper zu verwenden. Einige Jahre später stellte Tearle eine Konstruktion vor, bei der Kugeln anstatt der viskosen Flüssigkeit zum Balancieren verwendet wurden [83].

Die Mehrheit der wissenschaftlichen Arbeiten zum Selbstauswuchten ist dabei der Dynamik von Selbstauswuchtssystemen vom Kugeltyp gewidmet. Blekhman leitete die

Bewegungsgleichungen für den Fall von n identischen Kugeln her und untersuchte die stationären Lösungen und deren Stabilität für ein System mit zwei Kugeln für eine quasi-konservative Problemformulierung [11]. Es konnte gezeigt werden, dass die kompensierende Konfiguration nur im überkritischen Drehzahlbereich stabil ist. Im unterkritischen Bereich neigen die Kugeln dazu, die Unwucht des Rotors zu vergrößern. Stationäre Lösungen und ihre Stabilität für den sich in der Ebene bewegenden Rotor mit einem Auswuchtsystem vom Kugeltyp wurden ebenfalls in den Arbeiten [14, 27–29, 35, 49, 51–53] untersucht. In [52] wurde der Effekt der Rollreibung zwischen den Kugeln und der Führung untersucht. Es wurde gezeigt, dass die Reibungskräfte die Kugeln daran hindern können, sich in die ideale Auswuchtkonfiguration zu bewegen, woraus geschlossen wurde, dass ein vollständiges Auswuchten in solchen Systemen nicht möglich ist.

Das Auswuchten mit nur einer Kugel wurde dagegen in [62] untersucht. Es wurde gezeigt, dass ein vollständiges Auswuchten nur dann möglich ist, wenn die ursprüngliche Unwucht des Rotors komplett mit der durch die Kugel erzeugten Unwucht übereinstimmt.

In [35] wurde ein Auswuchtsystem mit zwei Führungsbahnen unterschiedlicher Radien untersucht. Bei der Drehung des Rotors mit einer Resonanzfrequenz wurde eine nicht synchrone Bewegung der Kugeln beobachtet, die zu einer signifikanten Erhöhung der Amplitude der Rotorschwingungen und ihrer Modulation führte.

Der Einfluss der Dämpfung auf den Zeitraum, in dem eine kompensierende Konfiguration der Kugeln bei einer gegebenen Rotordrehzahl erreicht wird (Konvergenzzeit), wurde in [27] untersucht. Es wurde gezeigt, dass sich die Dämpfung positiv auf die Konvergenzzeit auswirkt, jedoch kann eine zu hohe Dämpfung zu einem Stabilitätsverlust der kompensierenden Lösung führen. Mittels Pfadverfolgungsmethoden wurden in [29] die Bifurkationen von stationären Lösungen untersucht sowie die Existenz von Grenzzyklen nachgewiesen.

Der Einfluss einer äußeren Störung auf die Stabilität von stationären Lösungen wurde in [82] diskutiert. Es wurde gezeigt, dass eine äußere Störung nur dann einen signifikanten Einfluss auf die Position der Kugeln hat, wenn die Störungsfrequenz nahe der Resonanzfrequenz liegt.

Um die Dynamik der Auswuchtsysteme zu verbessern, wurde in [28] vorgeschlagen, die Kugelführung in drei bzw. vier Sektoren mit jeweils einer Kugel zu unterteilen. Diese Aufteilung sollte die Massenverteilung im System im unterkritischen Drehzahlbereich verbessern. Um die Auswuchtqualität und den Stabilitätsbereich der Ausgleichskonfiguration zu verbessern, wurde in [37] empfohlen, eine Auswuchtscheibe mit mehreren Führungen unterschiedlicher Radien mit jeweils zwei Kugeln in jeder Führung zu verwenden.

Im Falle von Rotoren, die räumliche Bewegungen ausführen und/oder dynamische Unwuchten aufweisen, sollten dreidimensionale Modelle verwendet werden. Die Möglichkeiten des Auswuchtens mit einer einzigen Auswuchtscheibe für derartige Rotoren wurden im Hinblick auf verschiedene technische Anwendungen in den Arbeiten [16, 42, 55, 61, 80] untersucht. Es wurde gezeigt, dass ein vollständiges Auswuchten nur in der Ebene der Auswuchtscheibe möglich ist. In anderen Rotorebenen gab es Restschwingungen, deren Amplituden im Vergleich zu einem Rotor ohne Selbstauswuchtsystem allerdings deutlich reduziert waren.

In [14] wurde vorgeschlagen, statt einer Auswuchtscheibe einen Ausgleichszylinder zu verwenden, in dem sich die Kugeln nicht nur in einer, zur Rotordrehachse senkrechten Ebene, sondern auch entlang der Rotorachse frei bewegen können.

Dem Auswuchten in zwei Ebenen mit Hilfe von zwei Auswuchtscheiben sind die Arbeiten [32, 54, 67, 79] gewidmet.

In [32] wurde gezeigt, dass durch die Verwendung von zwei Auswuchtscheiben, die in verschiedenen Ebenen angebracht sind, sowohl statische als auch dynamische Unwuchten eines starren Rotors ausgeglichen werden können.

In [79] wurde nachgewiesen, dass die Stabilität der Ausgleichskonfiguration stark vom Verhältnis der Hauptträgheitsmomente des Rotors und dem Abstand zwischen den Auswuchtscheiben abhängt.

In [54] wurde das Auswuchten des Rotors auf einer elastischen Welle in zwei Ebenen untersucht. Es hat sich ergeben, dass in diesem Fall ein vollständiges Auswuchten nicht möglich ist und die Qualität des Auswuchtens umso besser ist, je kleiner der Abstand zwischen den Auswuchtscheiben und dem Rotor ausfällt.

Eine Alternative zu einer Auswuchtscheibe mit zwei oder mehr Kugeln ist die Verwendung von zwei Auswuchtpendeln.

In [44] wurden stationäre Lösungen für ein System mit mehreren Auswuchtpendeln untersucht, deren Aufhängepunkte einen Abstand zur Rotordrehachse aufweisen. Es hat sich gezeigt, dass ein vollständiges Auswuchten nur möglich ist, falls die Rotor- und Pendelachsen zusammenfallen. Die Stabilität von stationären Lösungen eines Selbstauswuchtsystems vom Pendeltyp wurde auch in [33] untersucht. Es wurde bestätigt, dass die Verlagerung des Aufhängepunktes der Auswuchtpendel relativ zur Rotordrehachse einen stark negativen Einfluss auf die Qualität des Auswuchtens hat. Der vorgenommene Vergleich von Pendeltyp- und Kugeltyp-Selbstauswuchtsystemen zeigte, dass das Pendeltyp-System nicht nur unempfindlicher gegenüber äußeren Störungen ist, sondern aufgrund eines geringeren Widerstandsmoments auch ein schnelleres Erreichen der kompensierenden Konfiguration ermöglicht. Die numerischen Simulationsergebnisse wurden in einer Reihe von experimentellen Versuchen validiert. Die Untersuchung von stationären Lösungen von Selbstauswuchtsystemen beider zuvor genannter Typen offenbarte, dass eine stabile Konfiguration des Systems im

unterkritischen Drehzahlbereich einen negativen Einfluss auf die Dynamik des Systems hat, was unter Berücksichtigung des nicht-idealen Antriebs die Frage nach der Fähigkeit des Systems zum Passieren der Resonanz aufwirft und in der Literatur kaum untersucht wurde. In Artikel [78] wurden die Ergebnisse eines experimentellen und eines simulierten Hochlaufs des Rotors mit einer einzelnen Ausgleichskugel verglichen, um das Reibungsmodell zwischen der Ausgleichskugel und der Führung zu validieren. Die Merkmale des Hochlaufprozesses und der Durchgang des Systems durch die Resonanz wurden in der besagten Arbeit nicht angesprochen.

Stationäre und transiente Lösungen für ein ebenes Modell eines starren Rotors mit einer Auswuchtscheibe mit zwei Kugeln unter Berücksichtigung einer linearen Motor-Kennlinie wurden in [68] untersucht. In der Simulation wurde die Motornendrehzahl dabei langsam erhöht und es zeigte sich, dass ab einer bestimmten Drehzahl in der Nähe der Resonanz die Kugeln sich nicht mehr mit dem Rotor synchronisieren und stattdessen bei einer Frequenz knapp unterhalb der Resonanzfrequenz verbleiben. Dieses Verhalten der Ausgleichskugeln führt zu einem starken Anstieg der Schwingungsamplitude des Systems und in einigen Fällen sogar zu einer starken Modulation. Im Falle eines starren Rotors, der eine räumliche Bewegung ausführt, wurde dieses Phänomen ebenfalls beim Auswuchten mit einer [70, 80] bzw. mit zwei [69] Auswuchtscheiben beobachtet.

Nichtsynchroner Lösungen dieser Art sind auch in Arbeiten anderer Autoren angedeutet (siehe z.B. [5, 27, 35, 37, 49, 61]). In all diesen Publikationen wurden diese Lösungen jedoch unter Annahme einer vorgegebenen oder sogar konstanten Rotordrehzahl beobachtet, was in den meisten Fällen keine adäquate Annahme bei der Untersuchung des Durchgangs durch die Resonanz darstellt. Sowohl die auftretenden periodischen Lösungen als auch ihre Ursachen wurden darüber hinaus nur rudimentär analysiert.

1.1 Ziel der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die systematische Untersuchung der Dynamik eines unwuchtigen Rotors mit einem einfachen Selbstausswuchtsystem unter Berücksichtigung der Interaktion des mechanischen Systemteils mit einem nicht-idealen Antrieb begrenzter Leistung. Sowohl die äußere radiale Dämpfung des Rotors als auch die Rotationsdämpfung in den Lagern zwischen dem Rotor und den Auswuchtpendeln werden in dem zu untersuchenden Modell berücksichtigt. Der Schwerpunkt der Studie liegt dabei auf Untersuchungen der nicht-stationären Lösungen, die während des Hochlaufs des Rotors bis zu Motornendrehzahl entstehen, wobei ein Resonanzdurchlauf mit eingeschlossen ist.

1.2 Aufbau der Arbeit

- In Kapitel 2 werden die in dieser Arbeit verwendeten Grundlagen dargelegt. Der erste Teil des Kapitels ist der Einführung in die Theorie der nichtlinearen Schwingungen gewidmet, wohingegen der zweite Teil des Kapitels die Minimalmodelle des unwuchtigen Rotors und der Elektromotoren, die als Grundlage für die Modellierung des Rotors mit einem Selbstauswuchtsystem dienen, umfasst.
- Kapitel 3 befasst sich mit der Methode der Mittelwertbildung und ihrer Modifikation für Systeme mit signifikanter Dämpfung, die später zur Herleitung von Gleichungen für die langsame Dynamik der zu untersuchenden Systeme verwendet wird. Nach einer kurzen theoretischen Einführung wird die Methode anhand des Beispiels des Sommerfeld-Effekts illustriert.
- Im Kapitel 4 wird ein Minimalmodell eines unwuchtigen Rotors mit einem Selbstauswuchtsystem eingeführt. Nach der Modellbeschreibung wird die Herleitung der Gleichungen der langsamen Dynamik des betreffenden Systems dargestellt.
- Kapitel 5 widmet sich der systematischen Untersuchung der stationären und der periodischen Lösungen der Gleichungen der langsamen Dynamik, die in Kapitel 4 hergeleitet wurden. Der letzte Abschnitt des Kapitels befasst sich mit der qualitativen Bewertung der verwendeten Methode hinsichtlich der Approximationsgüte.
- In Kapitel 6 werden zwei spezifische technische Anwendungen vorgestellt, die auf den Ergebnissen dieser Arbeit basieren. Der erste Abschnitt zeigt eine Änderung der Konstruktion von Auswuchtpendeln, um die negativen Auswirkungen des Selbstauswuchtsystems auf die Dynamik im Resonanzbereich zu reduzieren. Im zweiten Abschnitt wird das Phänomen des nichtstationären Hängenbleibens in der Resonanz zur Gestaltung der Anregungsquelle bei versuchstechnischen Abschätzungen der Betriebsfestigkeit thematisiert.
- Schließlich fasst Kapitel 7 die wichtigsten Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen und führt überdies offene Fragen der zugrundeliegenden Problemstellung an.

2 Grundlagen

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die grundlegenden Konzepte der Theorie der nichtlinearen Schwingungen und der Stabilitätstheorie diskutiert, die in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

Der zweite Teil dieses Kapitels ist den Basismodellen eines Rotors und eines Elektromotors gewidmet, die später als Grundlage für die Modellierung der Selbstauswuchtsysteme dienen.

2.1 Grundbegriffe der Theorie der nichtlinearen Schwingungen

Die Dynamik mechanischer Systeme mit konzentrierten Parametern wird in der Regel durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= f_n(q_1, \dots, q_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

beschrieben, welches wahlweise auch in Matrizenform

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \tag{2.2}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

eine Spaltenmatrix mit den Variablen $q_1 \dots q_n$ ist, die Verschiebungen und Geschwindigkeiten des Systems der Ordnung n beschreiben. Die Spaltenmatrix

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} f_1(q_1, \dots, q_n) \\ f_2(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ f_n(q_1, \dots, q_n) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

beinhaltet die Funktionen $f_1(q_1, \dots, q_n) \dots f_n(q_1, \dots, q_n)$, die von der spezifischen Problemstellung abhängen. Treten die Variablen $q_1 \dots q_n$ nur in erster Potenz in den Funktionen $f_1 \dots f_n$ auf, wird das Gleichungssystem als **linear**, ansonsten als **nichtlinear** genannt. Für den betrachteten Fall, dass die rechten Seiten der Gleichungen (2.1) bzw. (2.2) nicht explizit von einem unabhängigen Argument abhängen, wird das System als **autonom** bezeichnet. Andernfalls ist das System **nicht autonom**, wobei ein zugehöriges Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n, t), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= f_n(q_1, \dots, q_n, t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

durch die Einführung einer zusätzlichen Variable $q_{n+1} = t$ und einer zusätzlichen Gleichung für diese autonomisiert werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}), \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= f_n(q_1, \dots, q_n, q_{n+1}), \\ \dot{q}_{n+1} &= 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Somit ist das zeitabhängige System der Ordnung n ein Sonderfall des Systems der Ordnung $(n + 1)$.

Erfüllt der Funktionssatz $\mathbf{q}(t) = (q_1(t) \dots q_n(t))^T$ das Gleichungssystem (2.1), so wird dieser Funktionssatz als **Lösung** des Systems bezeichnet. Der Wertesatz der Variablen $\mathbf{q}(t_0) = (q_{1_0} \dots q_{n_0})^T$ zum Zeitpunkt t_0 (in den meisten Fällen wird angenommen, dass $t_0 = 0$ ist) wird als **Anfangsbedingungen** bezeichnet und stellt zusammen mit dem Gleichungssystem (2.1) ein **Anfangswertproblem** dar. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf, hat jedes Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung in der Umgebung des Punktes t_0 , sofern die Funktionen $f_1(q_1, \dots, q_n) \dots f_n(q_1, \dots, q_n)$ stetig, stetig-differenzierbar und begrenzt sind sowie die Lipschitz-Bedingungen erfüllen [4].

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Lösungen des Gleichungssystems ist ihre Stabilität, die das Verhalten des Systems im Falle einer Störung der Anfangsbedingungen charakterisiert. Die formale Definition der Stabilität einer Lösung ist von Lyapunov gegeben worden.

Im Folgenden werden zwei Lösungen des Systems (2.2) betrachtet: eine ungestörte Lösung $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ und eine gestörte Lösung $\mathbf{q}(t)$.

Die ungestörte Lösung $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ des Systems (2.2) wird als **stabil** in Bezug auf die Variablen $q_1 \dots q_n$ bezeichnet, wenn für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Lösung $\mathbf{q}(t)$ des Systems, die der Bedingung $\|\mathbf{q}(t_0) - \tilde{\mathbf{q}}(t_0)\| \leq \delta$ genügt, die Ungleichung

$$\|\mathbf{q}(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t)\| \leq \varepsilon \quad (2.7)$$

für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist.

Sollte ferner neben (2.7) auch

$$\|\mathbf{q}(t) - \tilde{\mathbf{q}}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

erfüllt sein, wird eine solche Lösung auch als **asymptotisch stabil** bezeichnet [75].

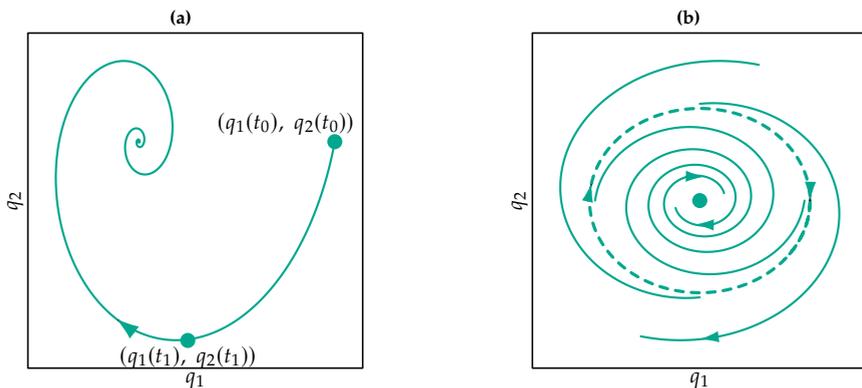


Abbildung 2.1: Phasentrajektorie (a) und Phasenportrait (b) eines Systems zweiter Ordnung

In der Untersuchung der Dynamik mechanischer Systeme erfolgt die Analyse von Systemlösungen nicht zwingend im Zeitbereich, sondern häufiger im sogenannten **Phasenraum** [3]. Jeder Systemzustand, der durch den Satz von Werten der Variablen $q_1 \dots q_n$ beschrieben wird, entspricht nur einem Punkt im Phasenraum, sodass jeder Punkt im Phasenraum einem einzigen Zustand des Systems entspricht. Die Gesamtmenge aller zu einer Systemlösung $q_1(t) \dots q_n(t)$ gehörenden Punkte bildet eine **Phasentrajektorie**, die auch **Phasenkurve** oder **Phasenbahn** genannt wird. Die Pfeile

auf der Phasentrajektorie zeigen die Richtung der Änderung der Zustandsvariablen für in der Regel zunehmende Werte des unabhängigen Arguments (in den meisten Fällen die Zeit) an. Der Phasenraum des Systems ist dicht mit Trajektorien gefüllt, da jeder Punkt des Phasenraums als Anfangsbedingung dienen kann. Das Gesamtbild der für das System charakteristischer Phasentrajektorien wird als **Phasenportrait** des Systems bezeichnet.

Abb. 2.1 zeigt Beispiele für die Phasenkurve und das Phasenportrait eines dynamischen Systems zweiter Ordnung mit Variablen q_1 und q_2 .

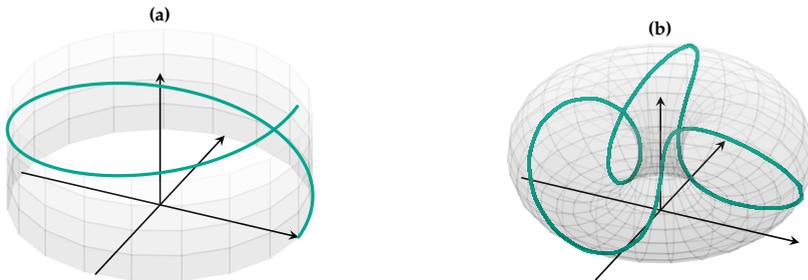


Abbildung 2.2: Zylindrische Phasenraum (a) und torusförmige Phasenraum (b) eines Systems zweiter Ordnung

Phasenraum des Systems zweiter Ordnung, der die lineare Bewegung des mechanischen Systems beschreibt, ist im betrachteten Fall eine Ebene. Beschreibt ein Gleichungssystem eine Drehbewegung eines mechanischen Systems, wie z.B. Schwingungen oder Drehungen eines mathematischen Pendels, dann erfüllt die Darstellung des Phasenraums in Form einer Ebene nicht die Anforderung einer eindeutigen Darstellung des Systemzustandes im Phasenportrait. Der gleiche physikalische Zustand des Systems entspricht einer unendlichen Anzahl von Punkten mit den Koordinaten (q_1^*, q_2^*) , $(q_1^* + 2\pi, q_2^*)$, $(q_1^* + n\pi, q_2^*)$ usw. im Phasenportrait. Der Phasenraum solcher Systeme ist daher eine Zylinderoberfläche (siehe Abb.2.2a). Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird jedoch in der Regel eine Auffaltung der zylindrischen Oberfläche verwendet. Falls beide Zustandsgrößen Winkelkoordinaten sind, stellt der Phasenraum eine Torusfläche dar (siehe Abb. 2.2b). Mit zunehmender Dimension des Systems nimmt folglich auch die Dimension des Phasenraums zu, der sich beliebig komplex gestalten kann.

Im Folgenden werden zwei Arten von Lösungen, die für die qualitative Analyse der Systemdynamik von besonderem Interesse sind - stationäre Lösungen und Grenzyklen - näher betrachtet.

2.1.1 Stationäre Lösungen

Wenn eine Lösung $\tilde{\mathbf{q}} = \text{konst.}$ des Systems (2.2) die rechten Seiten der Gleichungen zu Null werden lässt, dann wird eine solche Lösung als **stationäre Lösung** oder **Gleichgewichtslage** bezeichnet. Im Phasenportrait des Systems entspricht eine stationäre Lösung dabei einem Punkt.

Um die Stabilität von stationären Lösungen zu untersuchen, wird das Verhalten von Trajektorien in der Nähe des Gleichgewichtspunktes ausgewertet. Zu diesem Zweck wird eine Abweichung $\Delta\mathbf{q}(t)$ von einer stationären Lösung formell eingeführt:

$$\Delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \tilde{\mathbf{q}}. \quad (2.9)$$

In diesem Fall wird Gleichung (2.1) in Bezug auf die Abweichungen in die Form

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{q}} + \Delta\mathbf{q}(t), t) \quad (2.10)$$

umgeschrieben. Da nur geringe Abweichungen von der Gleichgewichtslage berücksichtigt werden, kann die rechte Seite von Gleichung (2.10) in einer Taylorreihe entwickelt und die Gleichung selbst in Bezug auf $\Delta(\mathbf{q})$ linearisiert werden

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}\Delta\mathbf{q}(t) + O(\Delta\mathbf{q}^2(t)), \quad (2.11)$$

wobei \mathbf{J} eine charakteristische Matrix mit den Koeffizienten

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\tilde{\mathbf{q}}} \quad (2.12)$$

bezeichnet.

Aus den Ljapunovschen Stabilitätssätzen [30] folgt, dass

- die stationäre Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ stabil ist, wenn alle Eigenwerte der Matrix \mathbf{J} negative Realteile haben,
- die stationäre Lösung $\tilde{\mathbf{q}}$ instabil ist, wenn zumindest einer der Eigenwerte der Matrix \mathbf{A} einen positiven Realteil hat,
- der kritische Fall vorliegt, falls der Realteil bei einem oder mehreren Eigenwerten gleich null ist, und alle anderen Eigenwerte negative Realteile haben. In diesem Fall wird die Stabilität der Lösung durch nichtlineare Terme der Gleichung bestimmt, sofern es sich bei dem betrachteten System um ein nichtlineares System handelt, ansonsten ist entscheidend, ob die den kritischen Eigenwerten entsprechenden Elementarteiler einfach oder mehrfach sind.

Weiterhin werden die Arten von stationären Lösungen und deren Stabilität für Systeme zweiter Ordnung betrachtet. Die charakteristische Matrix des Systems zweiter Ordnung hat zwei Eigenwerte, die das Systemverhalten in der Nähe der Gleichgewichtslage bestimmen.

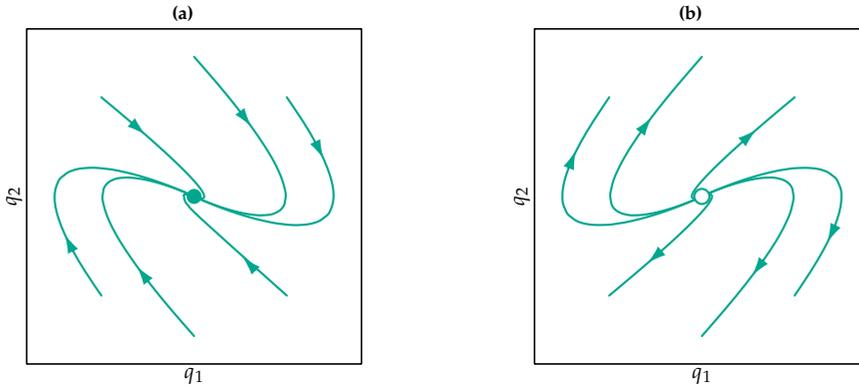


Abbildung 2.3: Phasenportraits eines stabilen Knotens (a) und eines instabilen Knotens (b)

In dem Fall, dass beide Eigenwerte reell sind und gleiche Vorzeichen haben, wird die Gleichgewichtslage als **Knoten** bezeichnet. In der Umgebung eines Knotens bilden die Trajektorien ein Bündel. Der Knoten ist stabil, falls das Bündel sich auf den Knoten zubewegt (siehe Abb. 2.3a), und instabil, falls es sich von diesem weg bewegt (siehe Abb. 2.3b).

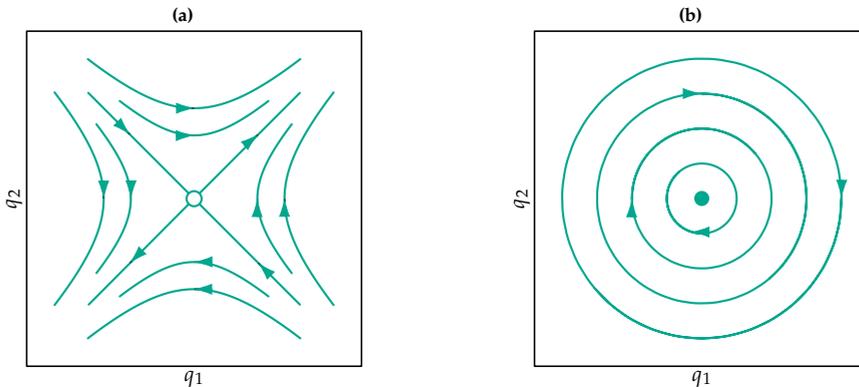


Abbildung 2.4: Phasenportraits eines Sattelpunktes (a) und eines Zentrums (b)

Die stationäre Lösung heißt Sattelpunkt, wenn die Eigenwerte zwar reell sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben. Am Sattelpunkt (Abb. 2.4a) gibt es zwei Paare

von Phasentrajektorien, von denen sich eines auf den Sattel zu und das andere von dem Sattel weg bewegt. Die Trajektorien jedes Paares haben gemeinsame Tangenten an dem Sattelpunkt, wobei der Sattelpunkt selbst nicht zu diesen Trajektorien gehört. Diese Bahnen werden **Separatrizen** genannt und sind von großer Bedeutung, da sie den Phasenraum oft in Bereiche mit qualitativ unterschiedlicher Dynamik des Systems unterteilen. Die verbleibenden Phasenkurven können in Richtung der Gleichgewichtsposition gezogen werden, wobei sie sich für eine Weile in deren Nähe bewegen und sich dann wieder von dieser entfernen.

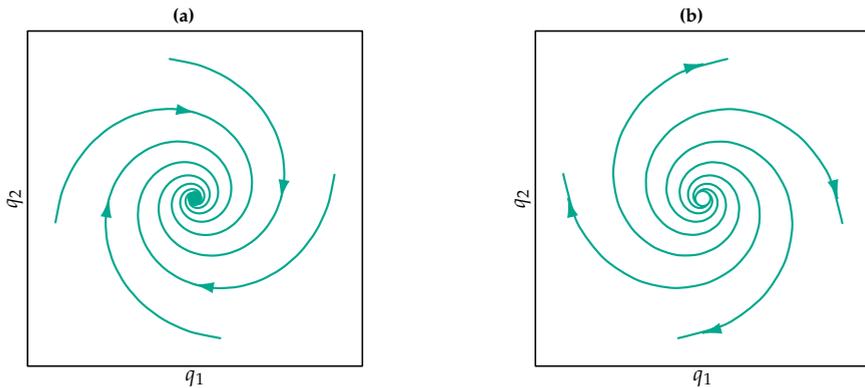


Abbildung 2.5: Phasenportraits eines stabilen Fokus (a) und eines instabilen Fokus (b)

Im Fall von rein imaginären Eigenwerten wird die Gleichgewichtslage als **Zentrum** bezeichnet. In der Umgebung eines Zentrums bilden die Trajektorien geschlossene Kurven (Abb. 2.4b). Da die Realteile der Eigenwerte in diesem Fall gleich Null sind, wird die Stabilität dieses stationären Punktes durch nichtlineare Terme des Gleichungssystems bestimmt.

Im Falle von komplex konjugierten Eigenwertpaaren wird die entsprechende Gleichgewichtslage als **Fokus** bezeichnet. In der Umgebung eines Fokus sind die Trajektorien spiralförmig und bewegen sich entweder auf den Punkt zu (stabiler Fokus - Abb. 2.5a) oder von diesem weg (instabiler Fokus - 2.5b) ([72] p.79).

2.1.2 Grenzyklen

Ist die Lösung $\mathbf{q}(t)$ von Gleichung (2.2) eine periodische Funktion, d.h. es gibt eine solche Konstante $T > 0$, dass $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t + T)$ für beliebige t gilt, dann wird die Lösung $\mathbf{q}(t)$ als **periodisch** bezeichnet, und die minimale Konstante T ist eine **Periodendauer** dieser Lösung. Periodische Lösungen sind geschlossene Kurven im Phasenportrait (siehe Abbildungen 2.1, 2.4b).

Ist eine periodische Lösung isoliert, d.h. es gibt keine weiteren periodischen Lösungen in ihrer unmittelbaren Umgebung, so wird eine solche Lösung als **Grenzzzyklus** bezeichnet.

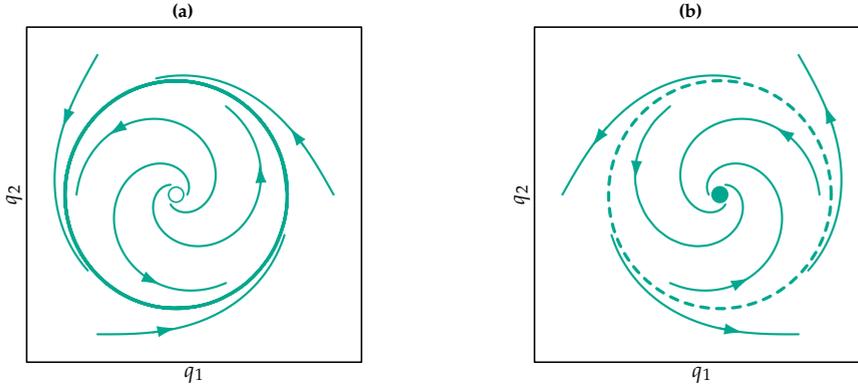


Abbildung 2.6: Phasenportraits eines stabilen Grenzzykklus (a) und eines instabilen Grenzzykklus (b)

Die Stabilität von Grenzzyklen kann auch im Sinne der Stabilität nach Ljapunov beurteilt werden. Zu diesem Zweck wird, ähnlich wie bei der Untersuchung der Stabilität stationärer Lösungen, die Abweichung $\Delta \mathbf{q}(t)$ von der periodischen Lösung $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ eingeführt, und das Gleichungssystem 2.2 wird in der Nähe der periodischen Lösung linearisiert:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}(t)\Delta \mathbf{q}(t) + \mathcal{O}(\Delta \mathbf{q}^2(t)), \quad (2.13)$$

wobei die Koeffizienten der zeitabhängigen Matrix $\mathbf{J}(t)$

$$J_{ij}(t) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=\tilde{\mathbf{q}}(t)} \quad (2.14)$$

periodische Funktionen der unabhängigen Variable t mit Periode T sind, sodass

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}(t + T) \quad (2.15)$$

gilt. Basierend darauf wird die Stabilität der trivialen Lösung der Gleichung (2.13) untersucht. Aufgrund der Abhängigkeit der Matrix $\mathbf{J}(t)$ von der unabhängigen Variable t (Zeit) ist eine direkte Berechnung der Eigenwerte nicht möglich, da der Begriff

Eigenwert für solche Systeme nicht definiert ist. Nach dem Satz von Floquet [30] gibt es eine Variablentransformation

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}(t)\Delta\mathbf{q}, \quad (2.16)$$

sodass ein System von Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{J}(t)\Delta\mathbf{q}(t) \quad (2.17)$$

mit dem entsprechenden Fundamentalsystem

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{J}(t)\mathbf{F}(t) \quad (2.18)$$

zu einem Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p}(t) \quad (2.19)$$

überführt werden kann, wobei

$$\mathbf{B} = (\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{J}(t))\mathbf{P}^{-1}(t) \quad (2.20)$$

gilt. Dabei ist die Transformationsmatrix $\mathbf{P}(t)$ ebenfalls T -periodisch und nicht singular. Die Fundamentalmatrix von (2.19) kann als Exponentialfunktion der Form $e^{\mathbf{B}t}$ geschrieben werden, sodass die Fundamentalmatrix von (2.17) unter Berücksichtigung von (2.16) als

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t)e^{\mathbf{B}t} \quad (2.21)$$

angegeben werden kann [30] und Lösungen der Gleichung (2.17) als

$$\Delta\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)\Delta\mathbf{q}(0) = \mathbf{P}^{-1}(t)e^{\mathbf{B}t}\Delta\mathbf{q}(0) \quad (2.22)$$

geschrieben werden können. Diese stellen das Produkt von periodischen Funktionen und Matrixexponentialfunktion dar. Die Stabilität der Lösung hängt also nur von den Eigenwerten der Matrix \mathbf{B} ab. Im allgemeinen Fall kann die Matrix $\mathbf{P}(t)$ und damit die Matrix \mathbf{B} jedoch nicht explizit angegeben werden, weswegen in der Praxis die Matrix $\mathbf{F}(t)$ in der Regel numerisch (in seltenen Fällen analytisch) für den Zeitpunkt berechnet wird, der einer Periode entspricht $t = T$. Die Matrix $\mathbf{F}(T)$ wird **Monodromiematrix** genannt und ihre Eigenwerte ρ_i werden als **Floquet-Multiplikatoren** bezeichnet. Auf Basis der Berechnung und Analyse der Floquet-Multiplikatoren können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

- Eine periodische Lösung $\tilde{q}(t)$ ist asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte der Monodromiematrix $F(T)$ vom Betrag her kleiner eins sind.
- Ist der Betrag mindestens eines Eigenwerts größer eins, ist die periodische Lösung $\tilde{q}(t)$ instabil.
- Falls die Matrix $F(T)$ keinen Eigenwert mit Betrag größer eins aufweist, aber zumindest einen Eigenwert vom Betrag her gleich eins hat, wird die Lösungsstabilität durch nichtlineare Terme der Gleichung bestimmt [30].

Das Phasenportrait eines stabilen Grenzzykus ist in Abb. 2.6a und das eines instabilen Grenzzykus ist in Abb. 2.6b dargestellt.

2.1.3 Bifurkationen

Im Allgemeinen hängt das Systemverhalten von einem oder mehreren Steuerungsparametern $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)^T$ ab. Infolge dessen können kleine Änderungen der Parameterwerte der Steuerungsparameter zu signifikanten qualitativen Veränderungen des Lösungsverhaltens führen. Eine solche schlagartig auftretende Änderung des Systemverhaltens wird als **Bifurkation** oder **Verzweigung** bezeichnet [3], wobei der kritische Parameterwert μ_{kr} , an dem diese Änderung auftritt, **Bifurkationspunkt** genannt wird [41]. Das Ziel der sog. Bifurkationsanalyse ist es, kritische Parameterwerte zu bestimmen und neue, aus der Bifurkation abzweigende Lösungen und deren Stabilität zu identifizieren [56].

Lokale Bifurkationen der Ruhelagen

In diesem Abschnitt werden nur die einfachsten Formen lokaler Verzweigungen von stationären Lösungen betrachtet, die von lediglich einem Parameter abhängen. Solche Verzweigungen verändern den Charakter von Phasentrajektorien nur in der lokalen Umgebung stationärer Punkte, was deren Analyse und Zuordnung zu einem der wenigen Grundtypen erheblich erleichtert.

Im Folgenden werden Systeme des Typs

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

untersucht, die für einen Parameterwert μ_0 eine stationäre Lösung x_0 aufweisen. Damit wird durch die Gleichung

$$f(x, \mu) = 0 \tag{2.24}$$

die Funktion $x = x(\mu)$ implizit vorgegeben. Ein Punkt (x_0, μ_0) heißt **regulär**, falls es eine Umgebung dieses Punktes gibt, in der die Funktion $x(\mu)$ stetig und eindeutig ist. Ansonsten heißt der Punkt **singulär**.

Bifurkationspunkte sind diejenigen singulären Punkte, die innerhalb des Definitionsbereichs der Funktion $f(x, \mu)$ liegen.

Die Regularitätskriterien sind durch den Satz über die implizite Funktionen bestimmt. Es wird die Jakobi-Matrix aufgebaut:

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_0)}. \quad (2.25)$$

Ist die Funktion $f(x, \mu)$ stetig in μ und die Jakobi-Matrix \mathbf{J} nicht singulär ($\det(\mathbf{J}) \neq 0$), dann gibt es eine Umgebung des Punktes (x_0, μ_0) , in der x eine eindeutige und stetige Funktion von μ ($x = x(\mu)$) ist.

Wird angenommen, dass die Jakobi-Matrix \mathbf{J} im Punkt (x_0, μ_{kr}) singulär ist, kann die Funktion $f(x, \mu) = 0$ in der Nähe des singulären Punktes in eine Taylor-Reihe

$$\begin{aligned} f(x, \mu) &\approx f(x_0 + \Delta x, \mu_{kr} + \Delta \mu) = \\ &f(x_0, \mu_{kr}) + \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial x} \right|_{(x_0, \mu_{kr})} \Delta x + \left. \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} \right|_{(x_0, \mu_{kr})} \Delta \mu + \\ &\quad \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(x, \mu)}{\partial x^2} \right|_{(x_0, \mu_{kr})} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f(x, \mu)}{\partial \mu^2} \right|_{(x_0, \mu_{kr})} \Delta \mu^2 + \left. \frac{\partial^2 f(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} \right|_{(x_0, \mu_{kr})} \Delta x \Delta \mu + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

entwickelt werden, um die Verzweigung der Lösungen in einer lokalen Umgebung des Bifurkationspunktes zu analysieren.

Aus Gründen der Anschaulichkeit wird das System aus Gleichung (2.23) um

$$\dot{y} = -y \quad (2.27)$$

erweitert. Die Bifurkationscharakteristik wird dadurch nicht verändert [56], aber der Phasenraum wird zweidimensional und die stationären Lösungen können den in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Typen zugeordnet werden.

Falte oder Sattel-Knoten Bifurkation. Es wird ein System der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y, (\mu \in \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

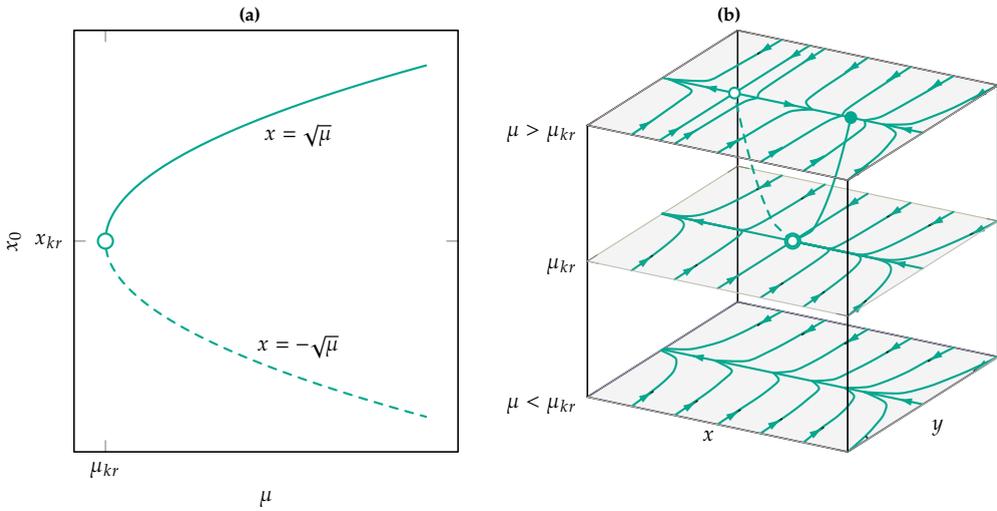


Abbildung 2.7: Bifurkationsdiagramm (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Sattel-Knoten Bifurkation

betrachtet, bei dem sich die stationären Lösungen wie folgt ergeben

$$x_0 = \pm\sqrt{\mu}, \mu \geq 0, \tag{2.29}$$

$$y_0 = 0. \tag{2.30}$$

Je nach dem Parameterwert μ gibt es null, eine oder zwei Lösungen von System (2.28). Der singuläre Punkt ergibt sich aus der Gleichung

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} -2x_{kr} & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2x_{kr} = 0,$$

aus der $x_{kr} = 0$ und mit (2.29) auch $\mu_{kr} = 0$ folgt. Der Bifurkationspunkt ist also $(x_{kr}, \mu_{kr}) = (0, 0)$.

Das Bifurkationsdiagramm ist in Abb. 2.7a dargestellt. Sind die μ -Werte negativ, hat das System keine stationären Lösungen, wie im Phasenportrait des Systems (Abb. 2.7b, unterste Ebene) zu sehen ist.

Wenn der Parameter μ einen kritischen Wert erreicht (hier $\mu_{kr} = 0$), existiert ein singulärer stationärer Punkt. Dann spaltet sich dieser in einen stabilen Knoten und einen instabilen Sattelpunkt auf, die sich mit dem zunehmenden Anstieg des Parameters μ weiter voneinander entfernen.

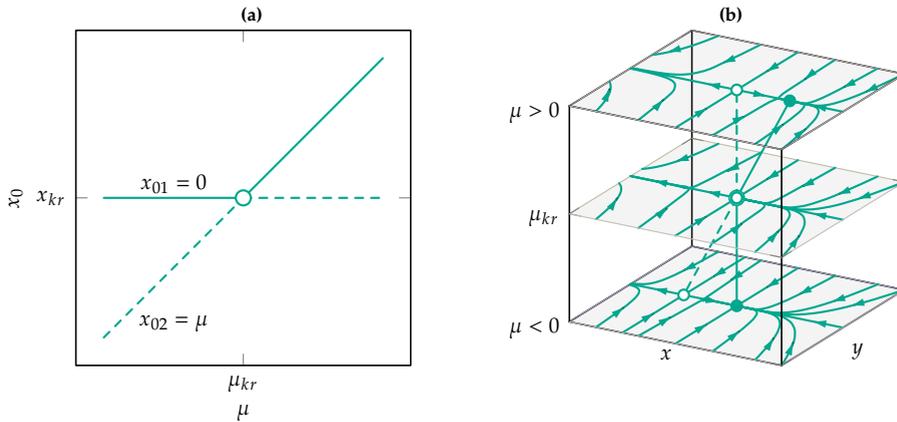


Abbildung 2.8: Bifurkationsdiagramm (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer transkritischen Bifurkation

Transkritische Bifurkation. Das einfachste Beispiel zur Veranschaulichung dieser Art von Verzweigung ist das Gleichungssystem

$$\dot{x} = \mu x - x^2, \quad (2.31)$$

$$\dot{y} = -y. \quad (2.32)$$

Dieses System hat zwei stationäre Lösungen: eine triviale Lösung ($x_{01} = 0, y_{01} = 0$) und eine vom Parameter μ abhängige Lösung ($x_{02} = \mu, y_{02} = 0$), die sich am Bifurkationspunkt bei ($\mu_{kr} = 0, x_0 = 0$) schneiden (siehe Abb. 2.8a).

Bei negativen Werten des Parameters μ ist die triviale Gleichgewichtslage ($x_{01} = 0, y_{01} = 0$) stabil und stellt einen stabilen Knoten dar. Die zweite Lösung ist instabil und stellt einen Sattelpunkt dar. Beim Passieren des Bifurkationspunktes verliert die triviale Lösung ihre Stabilität und wird zu einem Sattelpunkt, und die zweite Lösung wird zu einem stabilen Knoten.

Die qualitative Änderung des Phasenraumes mit Anstieg des Parameters μ in der Nähe des Bifurkationspunktes ist in Abb. 2.8b dargestellt.

Pitchfork-Bifurkation. Es wird das Gleichungssystem

$$\dot{x} = \mu x - x^3, \quad (2.33)$$

$$\dot{y} = -y \quad (2.34)$$

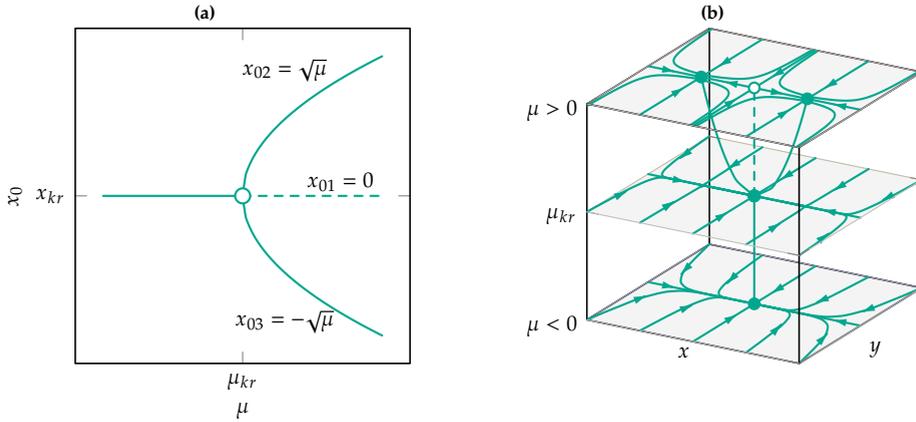


Abbildung 2.9: Bifurkationsdiagramm (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Pitchfork Bifurkation

untersucht. Stationäre Lösungen sind durch die Gleichungen

$$x(\mu - x^2) = 0 \tag{2.35}$$

$$y = 0 \tag{2.36}$$

bestimmt. Je nach Wert des Parameters μ hat das System eine oder drei stationäre Lösungen ($x_{01} = 0, y_{01} = 0$), ($x_{02,3} = \pm\sqrt{\mu}, y_{02,3} = 0$) (siehe Abb. 2.9a).

Die Stabilität der trivialen Lösung ($x = 0, y = 0$) wird untersucht. Die Eigenwerte ergeben sich aus der Gleichung

$$\det(\mathbf{J}) = \begin{vmatrix} \mu - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

zu $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \mu$. Somit ist die Gleichgewichtslage ($x_{01} = 0, y_{01} = 0$) bei negativen Werten des Parameters μ ein stabiler Knoten (siehe unterste Ebene in der Abb. 2.9b) und wird bei $\mu > \mu_{kr} = 0$ zu einem instabilen Sattelpunkt. Beide stationäre Lösungen, die nach dem Bifurkationspunkt entstehen, haben Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3\mu$ und sind stabile Knoten (oberste Ebene in der Abb. 2.9b). Das Bifurkationsdiagramm ähnelt in diesem Fall einer stilisierten Gabel (vergleiche Abb. 2.9a), wodurch der Name dieser Bifurkation entstanden ist.

Hopf-Bifurkation. In den vorherigen Fällen wurden Systeme mit reellen Eigenwerten betrachtet. In diesem Abschnitt wird die Bifurkation einer stationären Lösung mit komplex konjugierten Eigenwerten am Beispiel des Gleichungssystems

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2), \tag{2.37}$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \tag{2.38}$$

betrachtet.

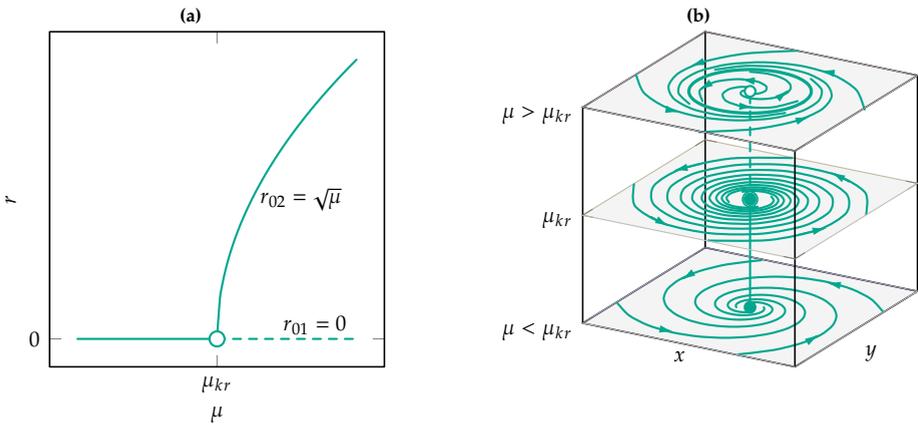


Abbildung 2.10: Bifurkationsdiagramm (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Hopf-Bifurkation

In diesem System existiert eine triviale stationäre Lösung für alle Werte des Parameters μ mit den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$ des zugehörigen linearisierten Systems.

Im Falle negativer Werte des Parameters μ ist die stationäre Lösung ein stabiler Fokus, während sie im Falle positiver μ -Werte ein instabiler Fokus ist.

Für die Gestaltung von Phasenportraits des Systems ist es hilfreich, eine Variablentransformation der Form

$$x = r \cos(\theta), \tag{2.39}$$

$$y = r \sin(\theta) \tag{2.40}$$

vorzunehmen, die zum Gleichungssystem

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \tag{2.41}$$

$$\dot{\theta} = 1 \tag{2.42}$$

führt. Die Analyse von Gleichung (2.41) zeigt, dass bei positiven Werten des Parameters μ zusätzlich zur trivialen stationären Lösung eine zusätzliche nichttriviale stationäre Lösung für die mit einer Amplitude zu assoziierende Variable r , mit $r = \sqrt{\mu}$ entsteht, die einem stabilen Grenzyklus des Ausgangssystems entspricht und deren Amplitude r mit dem Parameter μ zunimmt (siehe Abb. 2.10a). Die Entwicklung des Phasenraums für diesen Fall ist in Abb. 2.10b dargestellt.

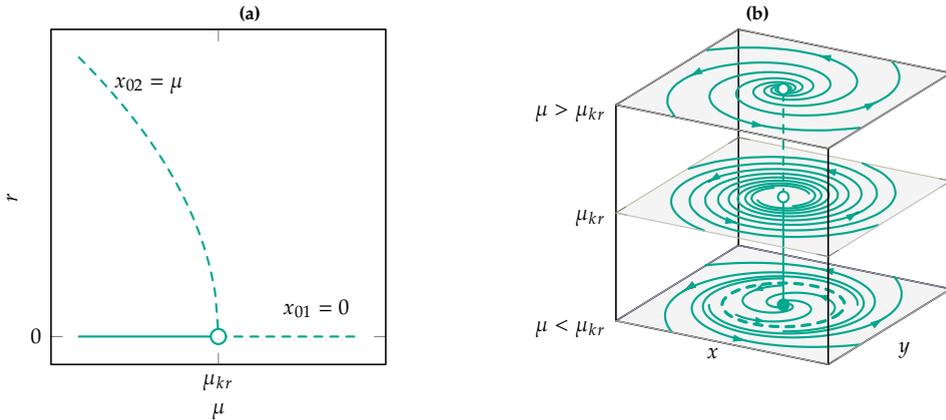


Abbildung 2.11: Bifurkationsdiagramm (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Hopf-Bifurkation

Das betrachtete Szenario eines stabilen Grenzyklus im überkritischen Bereich der Parameterwerte wird üblicherweise als **superkritische Hopf-Bifurkation** bezeichnet. Es gibt überdies ein sehr ähnliches Bifurkationsszenario, in dem ein instabiler Grenzyklus mit einem stabilen Fokus im unterkritischen Bereich der Parameterwerte koexistiert. Die Amplitude des Grenzyklus nimmt mit steigendem Parameterwert ab, und falls der Parameter den kritischen Wert μ_{kr} erreicht, „kollabiert“ der Grenzyklus um die Gleichgewichtsposition herum, wodurch die Ruhelage instabil wird. Dieses Bifurkationsszenario wird als **subkritische Hopf-Bifurkation** bezeichnet. Das zugehörige Bifurkationsdiagramm und die Entwicklung des Phasenraums sind in Abb. 2.11 dargestellt.

Globale Bifurkationen der Grenzyklen

Die zuvor betrachtete Hopf-Bifurkation ist die bekannteste und am weitesten verbreitete Variante des Auftretens und/oder des Verschwindens von Grenzyklen. In diesem Abschnitt werden nun drei weitere Arten von Grenzyklus-Verzweigungen betrachtet, die zu der Klasse der sog. globalen Bifurkationen gehören. Diese Verzweigungen sind schwieriger zu identifizieren, da sie große Bereiche des Phasenraums verändern, was

die Verwendung von linearisierten Gleichungen in der Nähe stationärer Punkte für ihre Analyse nicht zulässt.

Sattel-Knoten Bifurkation der Grenzzyklen. Diese Bifurkation kann in dem durch Gleichungen

$$\dot{x} = x (\mu + x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y(\omega + b(x^2 + y^2)), \quad (2.43)$$

$$\dot{y} = y (\mu + x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x(\omega + b(x^2 + y^2)) \quad (2.44)$$

beschriebenen System beobachtet werden [81]. Durch eine Variablentransformation

$$x = r \cos(\theta), \quad (2.45)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (2.46)$$

wird das System in die Form

$$\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5, \quad (2.47)$$

$$\dot{\theta} = \omega + br^2 \quad (2.48)$$

umgeschrieben. Durch Analyse von Gleichung (2.47) kann gezeigt werden, dass das System je nach Wert des Parameters μ einen, zwei oder drei stationäre Werte für die Amplitude r hat (siehe Abb. 2.12a).

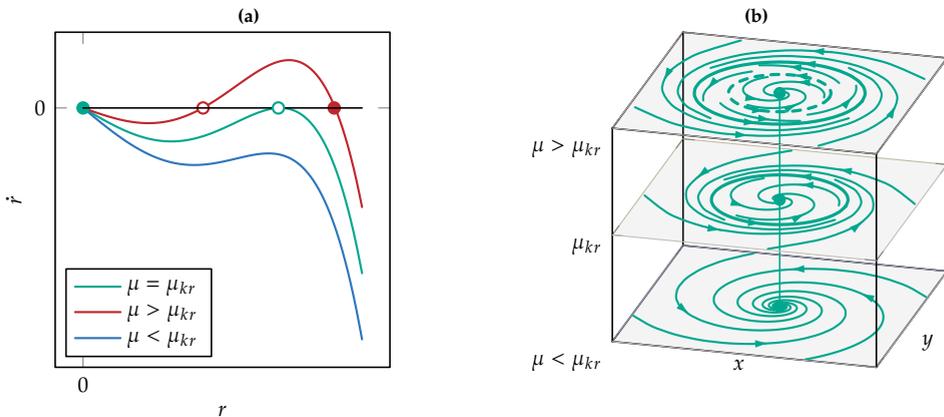


Abbildung 2.12: Stationäre Lösungen (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Sattel-Knoten Bifurkation der Grenzzyklen

Bei unterkritischen Werten von Parameter μ gibt es lediglich eine triviale stationäre Lösung für die Amplitude, die dem stabilen Fokus des ursprünglichen Systems

entspricht. Die Struktur der Phasentrajektorien ist für diesen Fall auf der untersten Ebene von Abb. 2.12b dargestellt.

Bei einem kritischen Wert des Parameters μ tritt eine weitere nichttriviale stationäre Lösung für die Amplitude auf. In diesem Fall erscheint das Phasenporträt des Ursprungssystems „aus dem Nichts“ als halbstabiler Grenzzyklus von beträchtlicher Amplitude, der sich mit weiterem Anstieg des Parameters μ in zwei Grenzzyklen, einen stabilen und einen instabilen, aufspaltet (siehe obere Ebene in Abb. 2.12b).

Infinite-Period Bifurkation. Das System wird durch Gleichungen in Polarkoordinaten beschrieben [81]

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \tag{2.49}$$

$$\dot{\theta} = \mu - \sin \theta, \tag{2.50}$$

die mit einer Variablentransformation

$$x = r \cos(\theta), \tag{2.51}$$

$$y = r \sin(\theta), \tag{2.52}$$

auch in kartesischen Koordinaten dargestellt werden können.

Für alle Werte von μ existiert eine instabile triviale stationäre Lösung. Bei Werten von μ kleiner eins gibt es zwei weitere stationäre Lösungen ($r = 1, \theta = \arcsin(\mu)$) und ($r = 1, \theta = \pi - \arcsin(\mu)$), die einem stabilen Knoten und einem instabilen Sattelpunkt entsprechen. Diese beiden stationären Lösungen sind durch zwei Heteroklinen miteinander verbunden, die eine geschlossene kreisförmige Kurve bilden (siehe unterste Ebene in Abb. 2.13bb).

Mit zunehmendem Parameter μ bewegen sich nicht-triviale stationäre Punkte entlang dieses Kreises aufeinander zu und verschmelzen zu einem singulären Punkt, falls der Parameter μ den kritischen Wert von $\mu = \mu_{kr} = 1$ erreicht (vergleiche Abb. 2.13a). Dabei verschmelzen zwei heterokline Orbits zu einer Homoklinen (siehe Mittelebene in Abb. 2.13b) und die Bewegung entlang dieser kann unendlich lange dauern. Falls der Parameter μ über den kritischen Wert μ_{kr} hinaus ansteigt, verschwindet der nichttriviale stationäre Punkt und die Homokline wird zu einer geschlossenen stabilen periodischen Bahn mit einer nicht kleinen Amplitude.

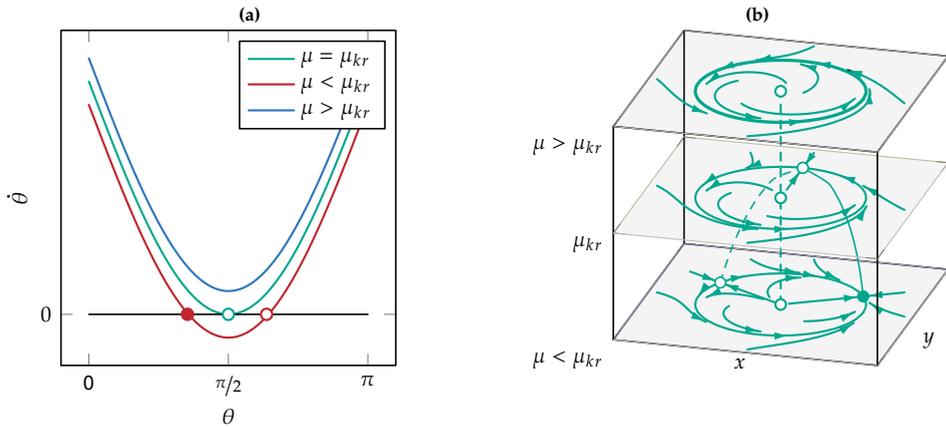


Abbildung 2.13: Stationäre Lösungen (a) und Entwicklung des Phasenraums (b) bei einer Infinite-Period Bifurkation

Homoklinische Bifurkation. Diese Art der Bifurkation lässt sich am Beispiel eines Gleichungssystems

$$\dot{x} = y, \tag{2.53}$$

$$\dot{y} = \mu y + x - x^2 + xy \tag{2.54}$$

demonstrieren [81].

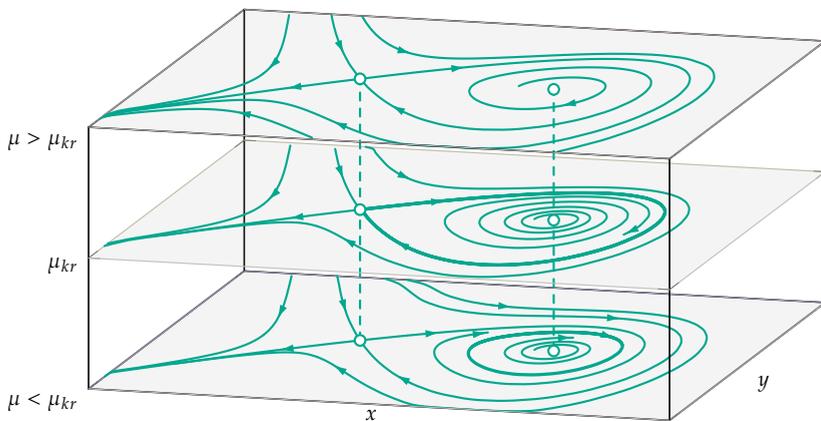


Abbildung 2.14: Entwicklung des Phasenraums bei einer homoklinischen Bifurkation

Es existieren zwei stationäre Lösungen in diesem System: ein instabiler Fokus und ein Sattelpunkt. Bei unterkritischen Werten des Parameters μ gibt es zwischen ihnen

eine periodische Trajektorie auf der Phasenebene (siehe unterste Ebene in Abb. 2.14). Mit zunehmendem Parameter μ nimmt die Amplitude des Grenzyklus zu und die periodische Bahn nähert sich dem Sattelpunkt und seinen Separatrizen. Erreicht der Parameter μ den kritischen Wert, verschmilzt der Grenzyklus mit einer der Sattel-Separatrizen und verwandelt diese in eine geschlossene homoklinische Umlaufbahn, entlang derer Bewegungen unendlich lange dauern.

Eine weitere Erhöhung des Wertes des Parameters μ führt dazu, dass die geschlossenen Trajektorien verschwinden. Die Homokline zerfällt in zwei verschiedene Separatrizen, von denen eine Heteroklin ist und den Sattel und den instabilen Fokus miteinander verbindet. Die Änderung des Phasenportraits des Systems mit steigenden Werten des Parameters μ ist in Abb. 2.14 dargestellt.

Alle in diesem Kapitel betrachteten Bifurkationen sind Bifurkationen der Kodimension eins, da sie bei der Änderung nur eines Systemparameters beobachtet werden können. In Systemen mit mehreren Parametern können komplexere Bifurkationen höherer Kodimension existieren. Ein wohlbekanntes Beispiel für eine Bifurkation der Kodimension zwei ist die Bogdanov-Takens-Bifurkation, bei der sich eine Sattel-Knoten-Bifurkation, eine Hopf-Bifurkation und eine homoklinische Bifurkation in einem Punkt des Parameterraums treffen [45]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden solche Bifurkationen jedoch nicht im Detail betrachtet.

2.2 Grundmodelle

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Modelle für einen Rotor und einen Elektromotor diskutiert, auf denen die Modellierung eines unwuchtigen Rotors mit Selbstausswuchtsystem in Kapitel 4 basiert.

2.2.1 Grundmodell des Rotors

Bei Problemen der Dynamik rotierender Maschinen wird oft das Modell des Lavalrotors verwendet, welches in der englischsprachigen Literatur auch als Jeffcottrotor bekannt ist. Bei diesem Modell (vereinfacht in Abb. 2.16 dargestellt) handelt es sich um eine masselose elastische Welle mit radialer Steifigkeit c , in deren Mitte eine unwuchtbehaftete Scheibe der Masse M mit einem Trägheitsmoment J_R bezüglich des Massenschwerpunktes S befestigt ist. Der Schwerpunkt S der Scheibe ist relativ zur Drehachse (bzw. zum Wellendurchstoßpunkt W) um einen Abstand e verschoben. Die Scheibe wird durch ein Drehmoment T angetrieben, das der Differenz aus Antriebsmoment T_M und Lastmoment T_L entspricht:

$$T = T_M - T_L. \tag{2.55}$$

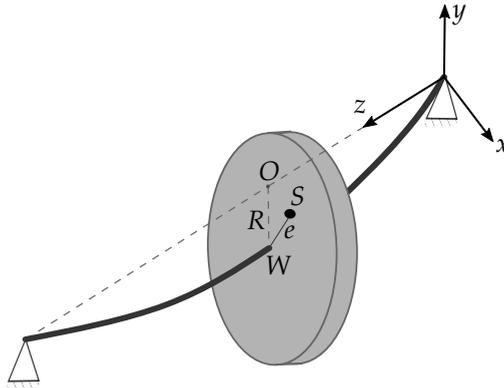


Abbildung 2.15: Vereinfachte Darstellung eines Lavalrotors

Im betrachteten Modell wird angenommen, dass die Wellenlager absolut starr sind und die Scheibe stets orthogonal zur Wellenachse fixiert ist. Etwaige Schiefstellung der Scheibe wird im Rahmen dieses Modells nicht betrachtet und die Analyse wird auf eine ebene Bewegung der Scheibe beschränkt. Diese Annahmen mögen zwar eine ziemlich starke Einschränkung des Modells sein, allerdings hat die Praxis gezeigt (siehe z.B. [26]), dass das Modell den qualitativen Einfluss der Unwucht auf das Verhalten von Rotorsystemen mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Andererseits ermöglicht das Ausschliessen der Schräglage die Beschreibung des Systems stark zu vereinfachen, sodass lediglich ein ebenes Modell (siehe Abb. 2.16) mit drei Freiheitsgraden vorliegt. Die Verschiebungen der Rotordrehachse (bzw. des Wellendurchstoßpunkts W) werden durch die Koordinaten x und y beschrieben und der Rotordrehwinkel wird durch die Winkelkoordinate ϕ beschrieben. Um die Energiedissipation zu berücksichtigen, wird sowohl in x - als auch in y -Richtung eine viskose Dämpfung mit Dämpfungsfaktor b eingeführt.

Die Bewegungsgleichungen des Systems können mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen zweiter Art hergeleitet werden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.56)$$

wobei

$$L = E_{kin} - E_{pot} \quad (2.57)$$

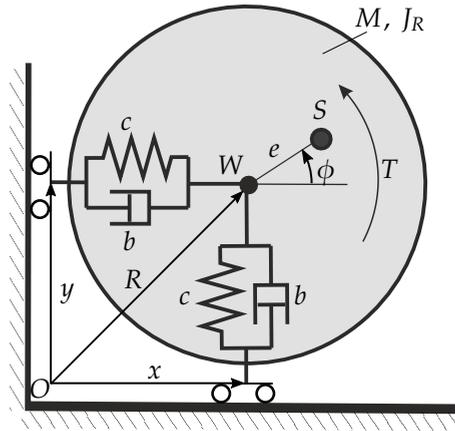


Abbildung 2.16: Modellskizze eines Lavalrotors

die Lagrange-Funktion ist,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

der Vektor der generalisierten Koordinaten, und

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_\phi \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

der Vektor der generalisierten Kräfte ist.

Die kinetische Energie setzt sich aus der Energie der Bewegung des Rotorschwerpunkts S und der Rotationsenergie der Scheibe zusammen:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} M V_S^2 + \frac{1}{2} J_R \dot{\phi}^2. \quad (2.60)$$

Der Betrag der Geschwindigkeit des Rotorschwerpunkts S ergibt sich zu

$$V_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2}, \quad (2.61)$$

wobei

$$x_S = x + e \cos \phi, \quad (2.62)$$

$$y_S = y + e \sin \phi \quad (2.63)$$

die Koordinaten des Schwerpunkts und

$$\dot{x}_S = \dot{x} - e\dot{\phi} \sin \phi, \quad (2.64)$$

$$\dot{y}_S = \dot{y} + e\dot{\phi} \cos \phi \quad (2.65)$$

die zugehörigen Zeitableitungen sind.

Die potentielle Energie beschreibt die Verformungsenergie elastischen Welle

$$E_{pot} = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}cy^2. \quad (2.66)$$

Die generalisierte Kräfte ergeben sich aus dem Ausdruck der virtuellen Arbeit des Antriebsmoments und der Widerstandskräfte der viskosen Dämpfer:

$$\delta A = T\delta\phi - b\dot{x}\delta x - b\dot{y}\delta y = Q_x\delta x + Q_y\delta y + Q_\phi\delta\phi. \quad (2.67)$$

Die resultierende Bewegungsgleichungen ergeben sich damit zu

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Me(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi), \quad (2.68)$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Me(\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi), \quad (2.69)$$

$$J_r\ddot{\phi} = T + Me(\ddot{x} \sin \phi - \ddot{y} \cos \phi). \quad (2.70)$$

Es handelt sich um ein System gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen sechster Ordnung, deren exakte Lösung im allgemeinen Fall nicht analytisch ermittelt werden kann. Folglich erfordert eine qualitative Untersuchung der Dynamik dieses Systems die Einführung zusätzlicher vereinfachender Annahmen.

Zum Beispiel wird in [91] bei der Betrachtung des Hochlaufs eines oszillierenden Systems von einer konstanten Beschleunigung ausgegangen. In den meisten Arbeiten beschränken sich die Autoren auf die Untersuchung stationärer Lösungen, wobei die Rotordrehzahl konstant gehalten wird

$$\dot{\phi} = \omega = konst. \quad (2.71)$$

In diesem Fall wird das Gleichungssystem (2.68)-(2.70) zu

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Me\omega^2 \cos \omega t, \quad (2.72)$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Me\omega^2 \sin \omega t \quad (2.73)$$

vereinfacht. Es handelt sich um ein System zweier unabhängiger linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung analytisch einfach zu berechnen ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen setzt sich aus Eigenschwingungen und erzwungenen Schwingungen zusammen. Da die Eigenschwingungen im gedämpften System abklingen, werden in der Regel nur rein erzwungene Lösungen der Form

$$x_p = \frac{e\omega^2}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2} ((k^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\sigma\omega \sin(\omega t)), \quad (2.74)$$

$$y_p = \frac{e\omega^2}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2} ((k^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\sigma\omega \cos(\omega t)) \quad (2.75)$$

untersucht, wobei die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems durch

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}} \quad (2.76)$$

und die Dämpfungskonstante durch

$$\sigma = \frac{b}{2M} \quad (2.77)$$

gegeben ist.

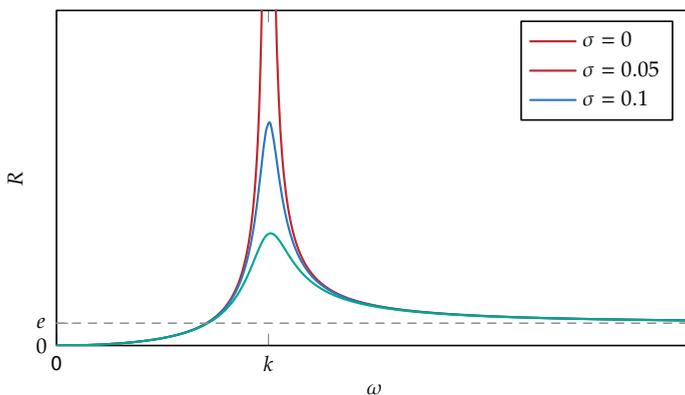


Abbildung 2.17: Amplitudenverlauf der Wellenschwingungen in Abhängigkeit von der Rotordrehzahl

Die Rotorachse bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius

$$R = \sqrt{x_p^2 + y_p^2} = \frac{e\omega^2}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2}}. \quad (2.78)$$

Die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude R (bzw. des Bahnradius) von der Rotordrehzahl bei unterschiedlichen Dämpfungswerten des Systems ist in Abb. (2.17) dargestellt. Die Amplitude der Schwingungen erreicht die maximalen Werte in der Nähe der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, wobei die entsprechende Rotordrehzahl auch als kritisch bezeichnet wird.

Bei unterkritischen Drehzahlen bewegt sich der Rotorschwerpunkt S um einen Kreis, dessen Radius größer ist als die Amplitude der Rotorachsenschwingung (siehe Abb. 2.18a), was unter anderem zu hohen Belastungen der Wellenlager führt.

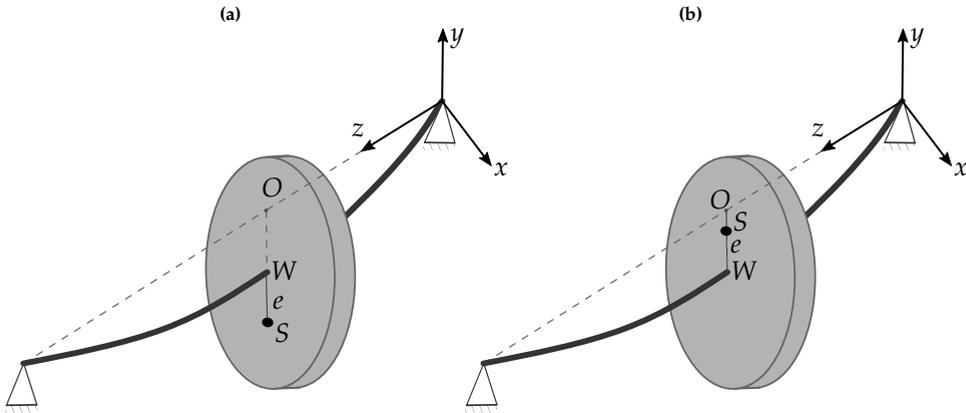


Abbildung 2.18: Relative Lage von Wellendurchstosspunkt W und Rotorschwerpunkt S für (a) unterkritischen Betrieb ($\omega < k$) und (b) überkritischen Betrieb ($\omega > k$)

Im überkritischen Drehzahlbereich wird der Rotationsradius des Schwerpunkts der Scheibe kleiner als die Schwingungsamplitude der Drehachse (siehe Abb. 2.18b) und strebt mit zunehmender Drehgeschwindigkeit gegen Null. Dieses Phänomen wird als Selbstzentrierung des Rotors bezeichnet.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (2.71), (2.74) und (2.75) in die Gleichung (2.70) kann das Drehmoment ermittelt werden, das erforderlich ist, um die Rotordrehung auf einer konstanten Drehzahl zu halten:

$$T = \frac{2e^2\sigma\omega^5}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2}. \quad (2.79)$$

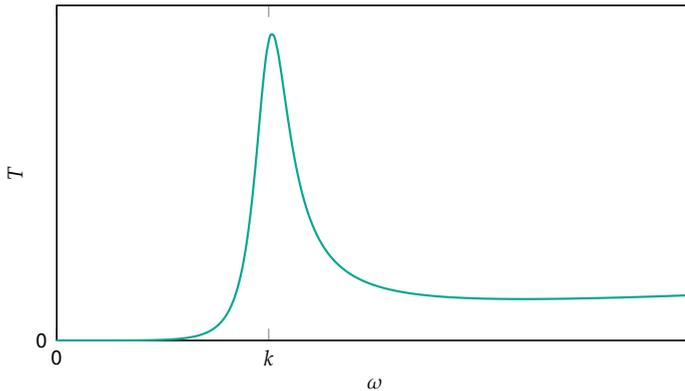


Abbildung 2.19: Erforderliches Antriebsmoment in Abhängigkeit von der Rotordrehzahl

Die qualitative Abhängigkeit dieses Drehmoments von der Rotordrehzahl ist in Abb. 2.19 dargestellt. Diese Kennlinie ist nicht zwingend typisch für reale Motoren, wobei deren Umsetzung ein komplexes Steuerungssystem in Kombination mit einem Hochleistungsmotor erfordern würde. Die Leistungskennlinien der einfachsten realen Elektromotoren werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

2.2.2 Grundmodelle der Elektromotoren

Im vorherigen Abschnitt wurde die Rotordrehzahl bzw. das Motordrehmoment als konstant angenommen, d.h. es wurde der ideale Antrieb mit unendlicher Leistung angenommen. In realen Maschinen wird der Rotor durch einen nicht-idealen Antrieb mit begrenzter Leistung angetrieben.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich darauf, nur die am häufigsten vorkommenden Antriebsart, den Elektromotor zu untersuchen. Physikalische Simulationsmodelle von Motoren können beliebig komplex sein, aber bei Problemen der Dynamik mechanischer Systeme reicht es in der Regel aus, sich auf so genannte mechanische Charakteristiken von Motoren zu beschränken. Die **mechanische Charakteristik** des Motors ist die Beziehung zwischen den Steuerungsparametern $U_M(t)$ (elektrische Spannung und/oder Wechselstromfrequenz bei Elektromotoren), der generalisierten Koordinate $q(t)$, der generalisierten Geschwindigkeit $\dot{q}(t)$, und der generalisierten Kraft $Q(t)$ am Ausgang des Antriebs. Es wird dabei zwischen idealen, statischen und dynamischen Motorkennlinien unterschieden [36].

Bei einer **idealen kinematischen** Kennlinie wird davon ausgegangen, dass die verallgemeinerte Drehgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ am Ausgang des Antriebs ausschließlich vom

Wert der Steuerungsparameter $U(t)$ und nicht von dem verallgemeinerten Moment T_M abhängt:

$$\dot{\phi} = f_{\phi}(U). \quad (2.80)$$

Die Anwendung einer idealen kinematischen Kennlinie ist nur bei starren Motoren zulässig, bei denen die Ausgangsdrehzahl geringfügig von der Last abhängig ist, z.B. bei Synchronmotoren.

Die zweite Art der idealen Charakteristiken ist die ideale Kraftkennlinie. In diesem Fall wird angenommen, dass die generalisierte Antriebskraft unabhängig von der Antriebsgeschwindigkeit ist:

$$T_M = f_T(U). \quad (2.81)$$

Im Allgemeinen hängt die Antriebsdrehzahl aufgrund der Dynamik der im Motor ablaufenden physikalischen Prozesse sowohl vom Lastwert als auch von dessen Zeitableitungen ab. In erster Näherung wird diese Abhängigkeit in der Form

$$\dot{\phi} = f_{\phi}(U, T_M, \dot{T}_M) \quad (2.82)$$

geschrieben und als **dynamische Motorkennlinie** bezeichnet.

In Fällen, in denen stationäre Bewegungen untersucht werden oder Geschwindigkeits- und Laständerungen in einem mechanischen System viel langsamer als elektromagnetische Prozesse im Motor ablaufen, ist es zulässig, die **statischen Kennlinien**

$$\dot{\phi} = f_{\phi}(U, T_M) \quad (2.83)$$

bzw.

$$T_M = f_T(U, \dot{\phi}) \quad (2.84)$$

zu verwenden.

Im Folgenden werden die statischen Charakteristiken der zwei am häufigsten in der Technik verwendeten Arten von Elektromotoren betrachtet: Gleichstrommotor und Asynchronmotor.

Die in der Technik weit verbreiteten Synchronmotoren werden in diesem Kapitel nicht behandelt. Ihre statischen Kennlinien ähneln den idealen Charakteristiken, sodass Maschinen mit solchen Motoren nicht anfällig für den Sommerfeld-Effekt sind (siehe z.B. [50]) und sich in erster Näherung durch Modelle mit einer fest vorgegebenen Motordrehzahl beschreiben lassen.

Gleichstrommotor

Die Drehung des Rotors des Gleichstrommotors wird durch die Wechselwirkung des in der Rotorwicklung (Anker) erzeugten Stroms mit dem durch die Erregerwicklung erzeugten Magnetfeld verursacht. Je nach Schaltung der Erregerwicklung wird zwischen einem fremderregten Gleichstrommotor, einem Nebenschlussmotor und einem Reihenschlussmotor unterschieden.

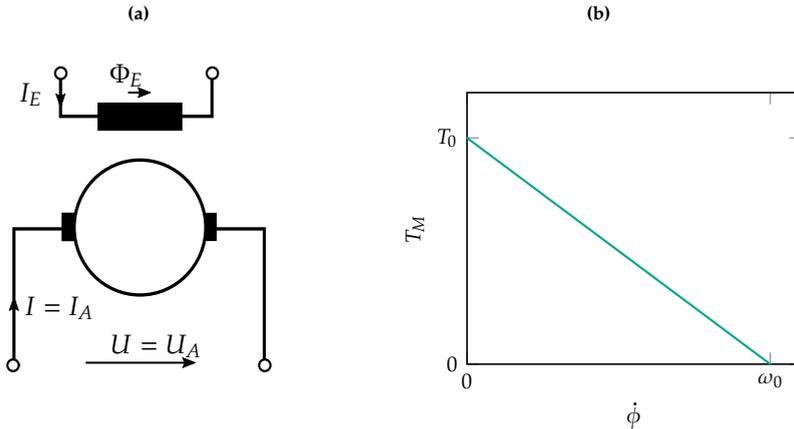


Abbildung 2.20: Ersatzbild (a) und statische Motorkennlinie (b) eines fremderregten Gleichstrommotors

Das Drehmoment T_M am Motoranker wird entweder als Summe über die Kräfte auf die einzelnen Leiterstäbe im Rotor

$$T_M = k_M I_A \Phi_E, \quad (2.85)$$

oder über die innere Leistung P

$$T_M = \frac{P}{\dot{\phi}} = \frac{U_i I_A}{\dot{\phi}} \quad (2.86)$$

berechnet [6], wobei I_A die Stromstärke in der Ankerwicklung, U_i die induzierte Spannung, Φ_E der magnetische Fluss der Erregerwicklung, k_M der durch die Motorkonstruktionsparameter bestimmte Proportionalitätsfaktor und $\dot{\phi}$ die Drehgeschwindigkeit der Rotors ist. Der magnetische Fluss Φ_E der Erregerwicklung ist proportional zum Strom I_E in der Erregerwicklung

$$\Phi_E = I_E L_E, \quad (2.87)$$

wobei L_E - die Induktivität der Erregerwicklung ist.

Unter Berücksichtigung des Gesamtwiderstandsverlusts R_A wird die Gleichung des Ankerkreises wie folgt geschrieben:

$$U - U_i = R_A I_A. \quad (2.88)$$

Im Fall eines **fremderregten Gleichstrommotors** (siehe Abb. 2.20a) ist der magnetische Fluss Φ_E unabhängig vom Strom in der Ankerwicklung und kann als konstant angenommen werden. Dann kann aus den Gleichungen (2.85) und (2.86) die Stromstärke

$$I_A = \frac{T_M}{k_M \Phi_E}, \quad (2.89)$$

bzw. die induzierte Spannung

$$U_i = k_M \Phi_E \dot{\phi}, \quad (2.90)$$

ermittelt und die Gleichung (2.88) schließlich in der Form

$$U - k_M \Phi_E \dot{\phi} = \frac{T_M R_A}{k_M \Phi_E}, \quad (2.91)$$

umgeschrieben werden. Nach der Auflösung der Gleichung (2.91) bezüglich des Drehmoments T_M ergibt sich die statische Motorkennlinie

$$T_M = \frac{k_M^2 \Phi_E^2}{R_A} \left(\frac{U}{k_M \Phi_E} - \dot{\phi} \right), \quad (2.92)$$

die nach Einführung der Parameter

$$U_M = \frac{k_M^2 \Phi_E^2}{R_A}, \quad \omega^* = \frac{U}{k_M \Phi_E}, \quad (2.93)$$

in die Form

$$T_M = U_M (\omega^* - \dot{\phi}), \quad (2.94)$$

geschrieben werden kann. Dabei ist U_M die Steigung der Motorkennlinie und ω^* die Leerlaufdrehzahl des Motors. Die Kennlinie ist linear, das Motormoment fällt mit zunehmender Drehzahl ab. Der grafische Verlauf der Kennlinie ist in Abb. 2.20b dargestellt.

Die Charakteristik eines **Nebenschlussmotors** ist beinahe identisch mit der eines fremderregten Gleichstrommotors. Da die Erregerwicklung jedoch von der gleichen

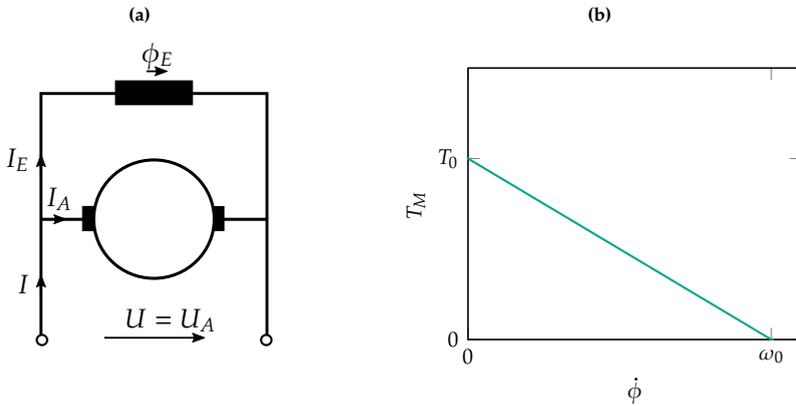


Abbildung 2.21: Ersatzbild (a) und statische Motorkennlinie (b) eines Nebenschlussmotors

Spannungsquelle wie die Ankerwicklung versorgt wird, sind der Ankerstrom und Erregerstrom nicht mehr unabhängig:

$$I_A = I - I_E. \quad (2.95)$$

Die Stromstärke im Erregerkreis kann aus der Maschenregel bestimmt werden

$$I_E = \frac{U}{R_E}, \quad (2.96)$$

wobei R_E der Gesamtwidestand des Erregerkreises ist. Damit kann die induzierte Spannung U_i wie folgt umgeschrieben werden:

$$U_i = k_M I_E L_E \dot{\phi} = \frac{k_M U L_E \dot{\phi}}{R_E}. \quad (2.97)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.97) und Gleichung (2.88) für den Ankerkreis kann der Ankerstrom I_A gemäß

$$I_A = \frac{U}{R_A} \left(1 - \frac{k_M L_E \dot{\phi}}{R_E} \right), \quad (2.98)$$

berechnet werden. Folglich ergibt sich das zum Ankerstrom proportionale Motordrehmoment zu

$$T_M = \frac{k_M^2 U^2 L_E^2}{R_A R_E^2} \left(\frac{R_E}{k_M L_E} - \dot{\phi} \right). \quad (2.99)$$

Da der Ankerstrom bei der gleichen Leistung der Stromquelle wie beim fremderregten Motor durch (2.95) geringer ausfällt, wird die statische Kennlinie weicher (siehe Abb. 2.21b). Um sicherzustellen, dass der Strom in der Erregerwicklung minimal ist, wird diese mit einer großen Anzahl von Windungen und damit mit einem hohen Widerstand ausgeführt.

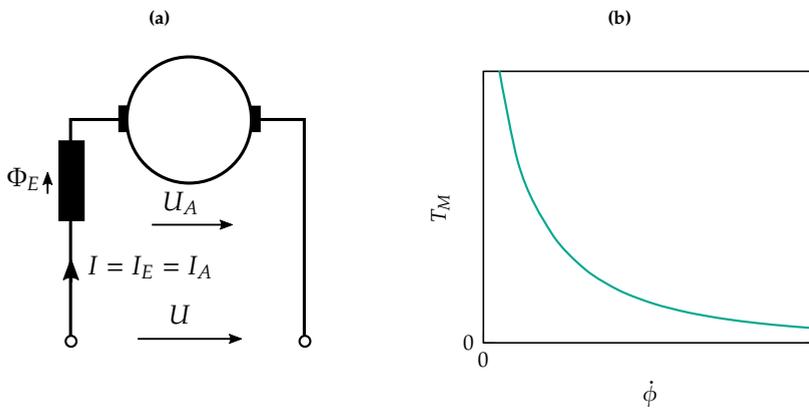


Abbildung 2.22: Ersatzbild (a) und statische Motorkennlinie (b) eines Reihenschlussgleichstrommotors

Bei einem **Reihenschlussmotor** befindet sich die Erregerwicklung im gleichen Stromkreis wie die Ankerwicklung (siehe Abb. 2.22a). Der magnetische Fluss kann in diesem Fall nicht mehr als unabhängig betrachtet werden, da er proportional zum Strom in der Wicklung ist:

$$\Phi_E = I_E L_E = I_A L_E. \quad (2.100)$$

Das Motordrehmoment hängt also nicht wie in den vorherigen Fällen (fremderregter Motor und Nebenschlussmotor) linear, sondern quadratisch vom Ankerstrom ab:

$$T_M = k_M I_A^2 L_E. \quad (2.101)$$

Gleichung 2.88 für den Stromkreis wird zu

$$U - k_M I_A L_E \dot{\phi} = R_\Sigma I_A, \quad (2.102)$$

umgeschrieben, wobei $R_\Sigma = R_A + R_E$ der Gesamtwiderstand des Stromkreises ist. So kann der Strom in der Ankerwicklung durch

$$I_A = \frac{U}{R_\Sigma + k_M L_E \dot{\phi}}, \quad (2.103)$$

angegeben werden, woraus die statische Motorkennlinie

$$T_M = \frac{k_M L_E U^2}{(R_\Sigma + k_E L_E \dot{\phi})^2} \quad (2.104)$$

folgt. In diesem Fall ist die statische Charakteristik nichtlinear, sie ist in Abb. 2.22b dargestellt. Bei Reihenschlussmotoren wird die Erregerwicklung mit einer geringen Anzahl von Windungen gewählt, so dass die Stromstärke im Stromkreis und damit das Motordrehmoment möglichst groß ist [36].

Ein weiteres Merkmal ergibt sich durch Auflösen der Gleichung 2.102 nach der Drehgeschwindigkeit

$$\dot{\phi} = \frac{U}{\sqrt{k_M L_E T_M}} - \frac{R_\Sigma}{k_M L_E}. \quad (2.105)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass bei fehlendem Lastmoment die Drehgeschwindigkeit des Rotors unendlich wird, d.h. der Motor neigt zum Durchdrehen [6]. Daher sollte der Motor nur unter Last betrieben werden.

Asynchronmotor

Asynchronmotoren gehören zur Klasse der Drehfeldmaschinen. Der Stator eines Asynchronmotors hat mehrere Wicklungen, die im Raum gegeneinander versetzt sind. Werden diese mit Mehrphasenstrom versorgt, erzeugen die Wicklungen ein rotierendes Magnetfeld. Dieses Magnetfeld induziert den Strom im Rotor, der mit dem Magnetfeld derart interagiert, dass der Rotor sich in die gleiche Richtung wie das Magnetfeld zu drehen beginnt. Die relative Differenz zwischen der Rotorgeschwindigkeit und der Statorfeldgeschwindigkeit wird als Schlupf s_A bezeichnet und mit Hilfe der Formel

$$s_A = \frac{\dot{\phi}_s - \dot{\phi}}{\dot{\phi}_s} \quad (2.106)$$

bestimmt. Dabei ist $\dot{\phi}_s = 2\pi f/p$ die synchrone Drehgeschwindigkeit des Magnetfelds des Stators, die durch die Netzfrequenz f und Polpaarzahl p festgelegt ist, und $\dot{\phi}$

beschreibt die Rotordrehgeschwindigkeit. Falls kein Schlupf vorhanden ist, erzeugt der Asynchronmotor kein Drehmoment.

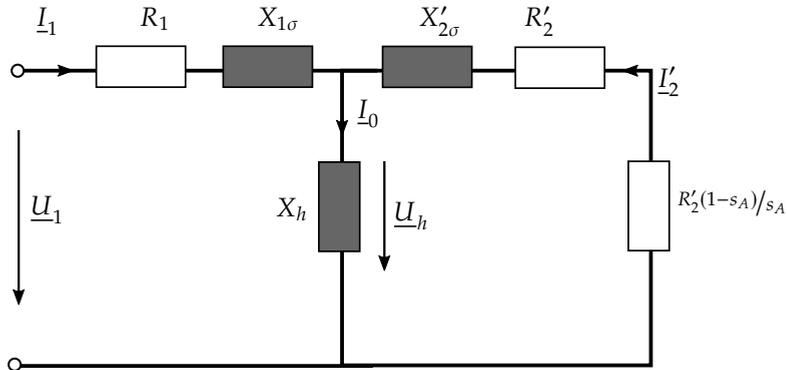


Abbildung 2.23: Vereinfachtes Ersatzschaltbild eines Asynchronmotors (basiert auf Abb. 4.6.1-2 [6])

Zur Berechnung der Drehmomentkennlinie eines Asynchronmotors wird das in Abb. 2.23 gezeigte vereinfachte Ersatzschaltbild verwendet, bei dem die elektromagnetische Kopplung zwischen den Rotor- und Statorwicklungen durch eine elektrische Kopplung ersetzt wird [6]. Dabei sind \underline{U}_1 die Phasenspannung der Statorwicklung, R_1 der aktive Widerstand der Statorwicklung, $X_{1\sigma}$ die primäre Streuinduktivität der Statorwicklung, \underline{I}_1 der Strom in der Statorwicklung, $X'_{2\sigma}$ die auf den Stator bezogene Streuinduktivität (auch induktiver Blindwiderstand genannt) der Rotorwicklung, \underline{I}'_2 der auf den Stator bezogener Strom in der Rotorwicklung, \underline{U}_h die induzierte Hauptspannung und X_h die Streuinduktivität des Magnetisierungskreises. Da ein Asynchronmotor elektrische Energie in mechanische Energie umwandelt, wird in dem Ersatzschaltbild in Abb. 2.23 ein variabler aktiver Widerstand $R'_2(1-s_A)/s_A$ zugeschaltet, der vom Schlupf s_A abhängig ist [74]. Bei fehlender Belastung auf der Motorwelle ist der Schlupf nahezu Null $s_A \approx 0$. Folglich ist der variable Widerstand in der Rotorwicklung unendlich, was einem Leerlaufbetrieb entspricht. Bei einer Überlastung des Motors gilt dagegen $s_A = 1$, sodass der Widerstand gleich Null ist, was einem Kurzschlussmodus entspricht. Die Grundgleichungen eines Asynchronmotors, die diesem Ersatzschaltbild entsprechen, werden in der Form

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_0 = 0, \quad (2.107)$$

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_h = X'_{1\sigma} \dot{\underline{I}}_1 + R_1 \underline{I}_1, \quad (2.108)$$

$$\underline{U}_h = X'_{2\sigma} \dot{\underline{I}}_2 + \frac{R'_2}{s_A} \underline{I}_2 \quad (2.109)$$

geschrieben. Mit Exponentialdarstellung der Stromstärke $\underline{I}_i = I_i e^{jt}$ lassen sich diese Gleichungen in die Form

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_0 = 0, \quad (2.110)$$

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_h = jX'_{1\sigma}\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_1, \quad (2.111)$$

$$\underline{U}_h = jX'_{2\sigma}\underline{I}_2 + \frac{R'_2}{s_A}\underline{I}_2 \quad (2.112)$$

umschreiben.

Das Drehmoment des Asynchronmotors berechnet sich aus der Drehfeldleistung P_D , die im Luftspalt aus den Energiedifferenzen des Rotors- und Statorfeldes entsteht und für einen dreiphasigen Motor

$$P_D = 3 \frac{R'_2 I_2^2}{s_A} \quad (2.113)$$

beträgt. Abzüglich der Widerstandsverlustleistung in den Rotorwicklungen

$$P_V = 3R'_2 I_2^2 = s_A P_D \quad (2.114)$$

ergibt sich die mechanische Leistung des Motors

$$P_{mech} = P_D - P_V = (1 - s_A)P_D = \frac{3R'_2 I_2^2 (1 - s_A)}{s_A}. \quad (2.115)$$

Zugleich wird die mechanische Leistung durch das Drehmoment T_M und die Rotordrehgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ bestimmt:

$$P_{mech} = T_M \dot{\phi}. \quad (2.116)$$

Daraus folgt der Ausdruck für das Motordrehmoment

$$T_M = \frac{P_{mech}}{\dot{\phi}} = \frac{3R'_2 I_2^2 (1 - s_A)}{s_A \dot{\phi}}. \quad (2.117)$$

Der Betrag des auf die Statorwicklung bezogenen Rotorstroms wird aus der Gleichung (2.112) abgeleitet

$$I'_2 = \frac{U_1}{\sqrt{(R_1 + R'_2/s_A)^2 + (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})^2}}. \quad (2.118)$$

Das Drehmoment kann dann unter Berücksichtigung von $\dot{\phi} = (1 - s)\dot{\phi}_s$ als Funktion des Schlupfes s_A angegeben werden:

$$T_M = \frac{3R'_2 U_1^2}{s_A \dot{\phi}_s \left((R_1 + R'_2/s_A)^2 + (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})^2 \right)}. \quad (2.119)$$

Das maximale Drehmoment eines Asynchronmotors T_{M_k} (siehe Abb. 2.24a) wird als Kippmoment bezeichnet und ergibt sich aus der Bedingung $dT_M/ds_A = 0$ zu

$$T_{M_k} = \frac{3R'_2 U_1^2}{2\dot{\phi}_s \left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})^2} \right)}, \quad (2.120)$$

mit einer entsprechenden Kippschlupfzahl

$$s_{A_k} = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_{1\sigma} + X'_{2\sigma})^2}}. \quad (2.121)$$

Nach Substitution des Ausdrucks $s_A = 1 - \dot{\phi}/\dot{\phi}_s$ in Gleichung (2.119) ergibt sich die Abhängigkeit des Motordrehmoments von der Drehzahl $\dot{\phi}$. Der grafische Verlauf dieser Kennlinie ist in Abb. 2.24b dargestellt.

Im Allgemeinen sind die Motorkennlinien (wie z.B. (2.104) bzw. (2.119)) nichtlineare Funktionen der Variablen $\dot{\phi}$, T_M und U . Normalerweise werden die Betriebsbedingungen der Motoren so gewählt, dass die entsprechenden Bereiche der statischen Kennlinien allerdings nahezu linear sind. Im vorliegenden Fall ist es gerechtfertigt, die Kennlinien zu linearisieren und in Form (2.94) umzuschreiben, indem die Funktionen in eine Taylor-Reihe entwickelt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich lineare bzw. linearisierte Motorkennlinien verwendet.

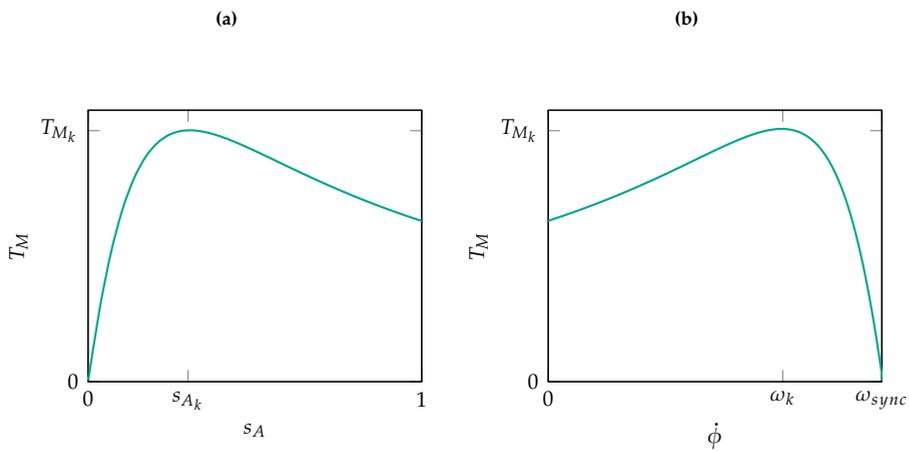


Abbildung 2.24: Statische Momentkennlinie eines Asynchronmotors in Abhängigkeit von dem Schlupf (a) und von der Motordrehgeschwindigkeit (b)

3 Asymptotische Analyse der partiell stark gedämpften Systeme

Systeme von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen haben im Allgemeinen keine exakte analytische Lösung. Die numerische Integration ermöglicht es, schnell und mit geringem Aufwand eine Lösung für einen bestimmten Parametersatz und Anfangsbedingungen zu finden, ist aber in den meisten Fällen für eine qualitative Analyse des Systems ineffizient, da eine große Anzahl von Berechnungen erforderlich ist und die spätere Auswertung der so gewonnenen Ergebnisse vergleichsweise kompliziert ist.

Als Alternative bieten sich Asymptotische Näherungsverfahren an, die häufig für die qualitative Analyse nichtlinearer Systeme eingesetzt werden. In dieser Arbeit wird eine der Modifikationen des von Bogoljubow und Mitropolski in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts entwickelten Mittelwertbildungsverfahrens [13] verwendet. Der erste Abschnitt gibt zunächst eine kurze Einführung in das klassische Mittelwertbildungsverfahren. Anschließend wird ein Ansatz für die asymptotische Analyse von partiell stark gedämpften Systemen vorgestellt, der anhand des in der Einführung beschriebenen Sommerfeld-Effekts veranschaulicht wird.

3.1 Mittelwertbildungsverfahren

Die klassische Mittelwertbildungsmethode ist für Systeme in der Standardform

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{3.1}$$

formuliert. Dabei ist t eine unabhängige Variable, meistens die explizite Zeit, und ε stellt einen kleinen Parameter des Systems dar ($\varepsilon \ll 1$).

Die Mittelwertbildung ist kein Verfahren zum Bestimmen einer Näherungslösung des Gleichungssystems (3.1), sondern ein Verfahren zur Ableitung eines im Vergleich zum ursprünglichen System einfacheren Anfangswertproblems, dessen Lösung innerhalb eines asymptotisch langen Zeitintervalls in der Nähe der Lösung des Originalsystems

liegt [92]. Eine solche Vereinfachung kann durch Eliminierung der unabhängigen Variablen t aus dem betrachteten Differentialgleichungssystem erreicht werden. Die effektive Ordnung des Systems wird dadurch um eins reduziert.

Das Verfahren basiert auf einer quasi-identischen Variablentransformation [23]:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, t) + O(\varepsilon^2). \quad (3.2)$$

Diese Variablentransformation spaltet die Lösung des ursprünglichen Systems in zwei Teile auf: einen nicht kleinen, sich langsam verändernden Teil $\bar{\mathbf{x}}$, der die Evolution des Systems beschreibt, und einen kleinen, schnell schwingenden Teil $\varepsilon \tilde{\mathbf{x}}$, der für die schnelle Schwingung des Systems um den sich langsam verändernden Teil verantwortlich ist. Die Variable $\bar{\mathbf{x}}$ wird durch die autonome Differentialgleichung der Form

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \varepsilon \Theta(\bar{\mathbf{x}}) + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

bestimmt. Beide Funktionen $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ und $\Theta(\bar{\mathbf{x}})$ sind zunächst unbekannt und sollen im Rahmen des Verfahrens ermittelt werden.

Nach Substitutionen der Reihen (3.2) und (3.3) ergibt sich Gleichung (3.1) zu

$$\varepsilon \Theta(\bar{\mathbf{x}}) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}, t) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) + O(\varepsilon^2), \quad (3.4)$$

sofern die Funktion $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ hinreichend glatt ist. Das Ausgleichen der Terme nach Potenzen des Parameters ε unter Berücksichtigung der Erfordernisse der Beschränktheit (und der Periodizität in t im Falle von periodischen Funktion \mathbf{X}) der Funktion $\tilde{\mathbf{x}}$ führt zu dem Schluss, dass Gleichung (3.4) nur erfüllt wird, falls die Funktion $\Theta(\bar{\mathbf{x}})$ der Mittelwert der Funktion $\mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ über die unabhängige Variable t ist:

$$\Theta(\bar{\mathbf{x}}) = \langle \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, t) dt. \quad (3.5)$$

Somit ist die Funktion $\tilde{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ durch den Ausdruck

$$\tilde{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \int_0^t (\mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \tau) - \Theta(\bar{\mathbf{x}})) d\tau + \tilde{\mathbf{x}}_0(\bar{\mathbf{x}}), \quad (3.6)$$

bestimmt. Die Funktionen $\tilde{\mathbf{x}}_0(\bar{\mathbf{x}})$ werden in der Regel so gewählt, dass der Mittelwert der Funktion $\tilde{\mathbf{x}}$ gleich Null ist.

Für die Funktion $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ gilt dabei Folgendes:

1. Falls die Funktion auf einem asymptotisch langen Zeitintervall beschränkt ist

$$\|\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)\| \leq M, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}, \quad L = \mathcal{O}(1); \quad (3.7)$$

2. und die Funktion die Lipschitzsche Bedingung erfüllt

$$\|\mathbf{X}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{X}(\mathbf{x}_2, t)\| \leq \lambda \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad 0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}, \quad \lambda = \mathcal{O}(1); \quad (3.8)$$

3. und der Mittelwert

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) dt, \quad (3.9)$$

gleichmäßig in Bezug auf die Variable \mathbf{x} existiert;

so gilt der erste Satz von Bogoljubow, der eine Abschätzung der Approximationsgüte des Anfangswertproblems (3.1) durch ein einfacheres Anfangswertproblem

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \langle \varepsilon \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}, t) \rangle_t, \quad \bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.10)$$

liefert. Im Allgemeinen gilt für die erste Näherung [71]

$$\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| = \mathcal{O}(\delta^{1/2}(\varepsilon)), \quad t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}), \quad (3.11)$$

wobei

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{\mathbf{x} \in D} \sup_{t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]} \varepsilon \left| \int_0^t (\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau) - \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x})) d\tau \right|. \quad (3.12)$$

In dem speziellen Fall, dass die rechte Seite von Gleichung (3.1) eine periodische Funktion der unabhängigen Variablen t mit Periode T ist, kann die Fehlerschätzung zudem verbessert werden [92]:

$$\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq 2\lambda M \varepsilon^2 T^2 (N+1) e^{\varepsilon \lambda t}, \quad NT \leq t < (N+1)T. \quad (3.13)$$

3.2 Erweiterung auf partiell stark gedämpfte Systeme

In dieser Arbeit bezieht sich der Begriff „partiell stark gedämpfte Systeme“ auf Systeme der Art:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (3.14)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.15)$$

Dabei wird angenommen, dass die logarithmische Norm der Matrix \mathbf{K} streng negativ ist. In diesem Fall werden die durch die Gleichungen vom Typ (3.15) beschriebenen Variablen als stark gedämpfte Variablen bezeichnet.

Gleichung (3.15) kann nicht auf die Standardform (3.1) für die klassische Mittelwertbildung gebracht werden [23]. Die ungestörte Gleichung lautet

$$\dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{K}\mathbf{y}_0 \quad (3.16)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}e^{\mathbf{K}t}. \quad (3.17)$$

Wird dabei \mathbf{A} als neue Variable betrachtet, was dem Ansatz der Variation der Konstanten entspricht, ergibt sich

$$\dot{\mathbf{A}} = \varepsilon e^{-\mathbf{K}t} \mathbf{Y}(\mathbf{A}e^{\mathbf{K}t}, t). \quad (3.18)$$

Gleichung (3.18) könnte eine Gleichung in Standardform sein, ist es aber nicht. Die rechte Seite ist im Allgemeinen keine beschränkte Funktion von t , d.h. Bedingung (3.7) ist verletzt und die klassische Mittelwertbildung kann nicht angewendet werden. Für solche Systeme wird daher ein modifiziertes Vorgehen verwendet.

Durch die Einführung einer neuen Zeitskala $t = \varepsilon\tau$ wird das System in eine für singular gestörte Systeme typische Form umgewandelt:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon\tau), \quad (3.19)$$

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \varepsilon\tau), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (3.20)$$

Es kann gezeigt werden (vgl. [22], [84]), dass in der ersten Näherung das Verhalten der langsamen Variablen \mathbf{x} durch

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, \varepsilon\tau), \varepsilon\tau) \quad (3.21)$$

bestimmt wird, wobei \mathbf{y}_0 eine stabile Lösung des ungestörten Problems

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{y}_0 = 0 \quad (3.22)$$

ist.

Diese Ergebnisse wurden von Pontryagin und Rodygin [59] und Alymkulov [2] für den Fall von stabilen periodischen Lösungen in einem Subsystem mit schneller Zeit generalisiert.

Nach der Rückkehr zur ursprünglichen Zeit t wird die Dynamik des Systems auf einer langsamen Mannigfaltigkeit durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t), t), \quad (3.23)$$

beschrieben. Erfüllt die rechte Seite von Gleichung (3.23) die Anforderungen der Standardmittelwertbildung, kann das System in der ersten Ordnung gemittelt werden. Somit wird die effektive Ordnung des Gleichungssystems um eins reduziert:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \varepsilon \langle \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\eta}_0(\bar{\mathbf{x}}, t), t) \rangle_t, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\eta}_0 = 0. \quad (3.25)$$

Winkelklammern $\langle \rangle$ in Gleichung (3.24) bezeichnen die Mittelung nach der expliziten Zeit t unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Variable $\boldsymbol{\eta}_0$. Dennoch gilt in diesem konkreten Fall in der ersten Näherung $\boldsymbol{\eta}_0 = 0$. Die Genauigkeit dieser Näherung liegt bei

$$\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \mathcal{O}(\ln(\varepsilon)^{-1}) \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}). \quad (3.26)$$

Das Mittelwertbildungsverfahren für teilweise stark gedämpfte Systeme ist in seiner Idee der Konstruktion der zentralen Mannigfaltigkeit sehr ähnlich, d.h. der invarianten Mannigfaltigkeit im Phasenraum, die für alle nahe gelegenen Phasentrajektorien des Systems attraktiv ist [85].

3.3 Anwendungsbeispiel: Sommerfeldeffekt

Bei teilweise stark gedämpften Systemen besteht das Problem darin, stark und schwach gedämpfte Variablen von einander zu trennen und das Gleichungssystem auf die Standardform (3.14)-(3.15) zu bringen. In diesem Abschnitt wird eine mögliche Vorgehensweise am Beispiel des bekannten Sommerfeld-Effekts veranschaulicht.

3.3.1 Starrer Rotor auf einem oszillierenden Träger

Um die mit der beschriebenen Methode erzielten Ergebnisse mit den Ergebnissen klassischer Arbeiten zu vergleichen, wird der Durchgang durch die Resonanz eines starren Rotors auf einer elastischen Unterlage betrachtet, wobei das Modell mit zwei Freiheitsgraden beschrieben wird. Dieses Modell wird häufig bei Synchronisierungsproblemen von Schwingungserregern eingesetzt, falls die Verformungen und Bewegungen des Trägersystems die Verformungen des Rotors deutlich übersteigen. Der Inhalt dieses Abschnitts basiert auf den unter [24] veröffentlichten Forschungsergebnissen. Es wird

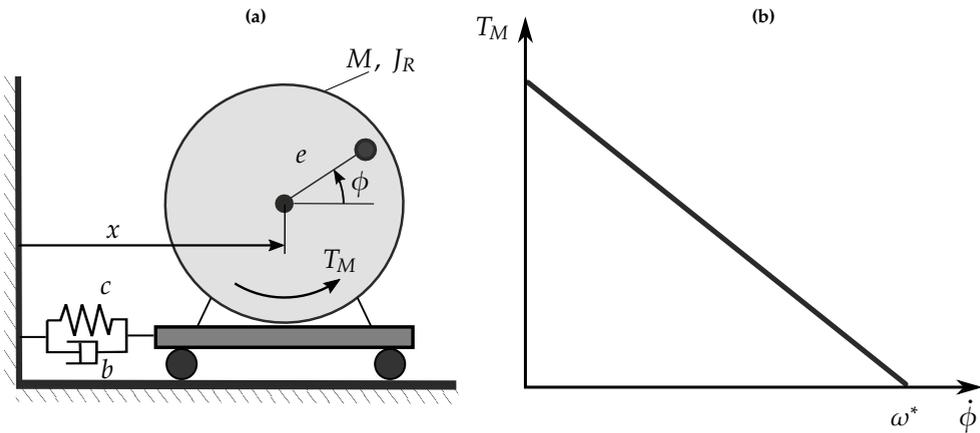


Abbildung 3.1: Modell eines unwuchtigen Rotors mit leistungsbegrenztem Antrieb (a) und linearisierter statischer Motorkennlinie (b)

das Modell eines Rotors der Masse M mit dem Massenträgheitsmoment in Bezug auf die Drehachse J_R betrachtet (siehe Abb.3.1a). Der Massenschwerpunkt des Rotors ist relativ zur Drehachse um den Abstand e verschoben. Der Rotor ist auf einem masselosem Träger montiert, der in horizontaler Richtung über ein Feder-Dämpfer Element der Steifigkeit c und des Dämpfungsfaktors b mit der Umgebung verbunden ist. Die Drehung des Rotors wird durch die Winkelkoordinate ϕ und die horizontale Bewegung seiner Achse durch die Koordinate x beschrieben. Das System wird durch

das Motordrehmoment T_M angetrieben. Zur Beschreibung des Motordrehmoments wird eine linearisierte statische Kennlinie verwendet:

$$T_M = U_M(\omega^* - \dot{\phi}). \quad (3.27)$$

Die Kennlinie berücksichtigt sowohl das elektromagnetische Moment des Antriebs als auch die Verluste, einschließlich der Reibungsverluste in den Lagern. Der grafische Verlauf der Kennlinie ist in Abb. 3.1b dargestellt.

Die Bewegungsgleichungen des Systems werden mit Hilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art [76] hergeleitet und haben die Form:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Me(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi), \quad (3.28)$$

$$J_R \ddot{\phi} = T_M + Me\ddot{x} \sin \phi. \quad (3.29)$$

Das System muss für die weitere Analyse entdimensioniert werden, wofür die dimensionslosen Parameter

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}}, \quad \sigma = \frac{b}{2Mk}, \quad \lambda = \frac{\omega^*}{k}, \quad u = \frac{U_M}{KMe^2}, \quad \varepsilon = \frac{Me^2}{J_R}, \quad (3.30)$$

die dimensionslose Verschiebung

$$\xi = \frac{x}{e}, \quad (3.31)$$

und die dimensionslose Zeit

$$\tau = kt, \quad (3.32)$$

eingeführt werden und sich damit die Gleichungen (3.28)-(3.29) zu

$$\xi'' + 2\sigma\xi' + \xi = \phi'^2 \cos \phi + \phi'' \sin \phi, \quad (3.33)$$

$$\phi'' = \varepsilon(u(\lambda - \phi') + \xi'' \sin \phi) \quad (3.34)$$

ergeben. Der Parameter ε stellt dabei das Quadrat aus dem Verhältnis der Exzentrizität des Rotors zu seinem effektiven Trägheitsradius dar. Für die überwiegende Mehrheit der rotierenden Maschinen ist dieser Wert klein, weswegen ohne Vorbehalt $\varepsilon \ll 1$ angenommen werden kann.

Als Nullannäherung wird das ungestörte System betrachtet ($\varepsilon = 0$). Die Lösung der ungestörten Gleichung (3.34) lautet

$$\phi'_0 = \text{konst.} \quad (3.35)$$

Unter Verwendung der Bezeichnung $\phi' = \omega$ für die Rotordrehzahl, wird Gleichung (3.33) in die Form

$$\xi_0'' + 2\sigma\xi_0' + \xi_0 = \omega^2 \cos \phi \quad (3.36)$$

umgeschrieben.

Die rein erzwungene Lösung dieser Gleichung kann analytisch gefunden werden und ist durch

$$\xi_{p0} = \frac{\omega^2(A \cos \phi + B \sin \phi)}{A^2 + B^2}, \quad (3.37)$$

gegeben, wobei

$$A = 1 - \omega^2, \quad B = 2\sigma\omega \quad (3.38)$$

gilt. Nun werden die bestimmten Lösungen als Grundlage für eine Variablentransformation verwendet. Horizontale dimensionslose Verschiebungen der Rotorachse werden als Summe der rein erzwungenen Lösung der ungestörten Gleichungen (3.36) und ihre Abweichungen von der Lösung der ursprünglichen Gleichung (3.33) dargestellt:

$$\xi = \xi_{p0} + \tilde{\xi}. \quad (3.39)$$

Damit ergibt sich die Gleichung für die neue Variable zu

$$\tilde{\xi}'' + 2\sigma\tilde{\xi}' + \tilde{\xi} = O(\varepsilon). \quad (3.40)$$

Mit Hilfe einer weiteren Variablentransformation

$$\tilde{\xi} = \rho_\xi \cos(\kappa\tau) + \zeta_\xi \sin(\kappa\tau), \quad (3.41)$$

$$\tilde{\xi}' = \rho_\xi(-\kappa \sin(\kappa\tau) - \sigma \cos(\kappa\tau)) + \zeta_\xi(\kappa \cos(\kappa\tau) - \sigma \sin(\kappa\tau)), \quad (3.42)$$

$$\kappa = \sqrt{1 - \sigma^2}, \quad (3.43)$$

kann Gleichung (3.40) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden:

$$\rho_\xi' = -\sigma\rho_\xi + O(\varepsilon), \quad (3.44)$$

$$\zeta_\xi' = -\sigma\zeta_\xi + O(\varepsilon). \quad (3.45)$$

Die Gleichungen haben die Standardform für stark gedämpfte Systeme, sodass die Variablen ρ_ξ und ζ_ξ und somit auch die Variable $\tilde{\xi}$ in der ersten Näherung auf Null

gesetzt werden können. Die Ableitung in der rechten Seite der Gleichung (3.34) ist damit durch

$$\xi_0'' = -\frac{\omega^4(A \cos \phi + B \sin \phi)}{A^2 + B^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (3.46)$$

gegeben.

Es resultiert ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\phi' = \omega, \quad (3.47)$$

$$\omega' = \varepsilon \left(u(\lambda - \omega) + \frac{\omega^4 (A \cos \phi + B \sin \phi) \sin \phi}{A^2 + B^2} \right). \quad (3.48)$$

Wird die Winkelkoordinate ϕ als neue unabhängige Variable gewählt, ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung, die die Entwicklung der Rotordrehzahl beschreibt:

$$\frac{d\omega}{d\phi} = \frac{\varepsilon}{\omega} \left(u(\lambda - \omega) - \frac{\omega^4 (A \cos \phi + B \sin \phi) \sin \phi}{A^2 + B^2} \right). \quad (3.49)$$

Gleichung (3.49) entspricht der Standardform (3.1) und kann mit Hilfe der Mittelwertbildung autonomisiert werden:

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\phi} = \frac{\varepsilon}{\bar{\omega}} \left(u(\lambda - \bar{\omega}) - \frac{\bar{\omega}^5 \sigma}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\sigma^2 \bar{\omega}^2} \right). \quad (3.50)$$

Gleichung (3.50) stimmt mit dem Ergebnis von Blekhman überein, der diese mit dem Verfahren der direkten Trennung von Bewegungen erhält [12].

Die Gleichung zur Bestimmung stationärer Lösungen ergibt sich durch Annahme einer über den Winkel ϕ konstanten Rotordrehzahl, sodass Nullstellen der rechten Seite von Gleichung (3.50) identifiziert werden müssen:

$$\frac{\varepsilon}{\bar{\omega}} \left(\underbrace{u(\lambda - \bar{\omega})}_{\tilde{T}_M(\bar{\omega})} - \underbrace{\frac{\bar{\omega}^5 \sigma}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\sigma^2 \bar{\omega}^2}}_{\tilde{V}(\bar{\omega})} \right) = 0. \quad (3.51)$$

Der erste Summand in der Klammer von Gleichung (3.51) entspricht dem dimensionslosen Drehmoment des Motors $\tilde{T}_M(\bar{\omega})$ und der zweite Summand entspricht dem sogenannten Vibrationsmoment $\tilde{V}(\bar{\omega})$, das sich aus der Wechselwirkung des

Trägersystems mit dem drehenden Rotor ergibt. Diese Gleichung kann nach dem Motorparameter u aufgelöst werden:

$$u = \frac{\bar{\omega}^5 \sigma}{(1 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\sigma^2 \bar{\omega}^2} (\lambda - \bar{\omega}) \tag{3.52}$$

Ein grafischer Verlauf der Abhängigkeit der stationären Rotordrehzahl vom Motorpa-

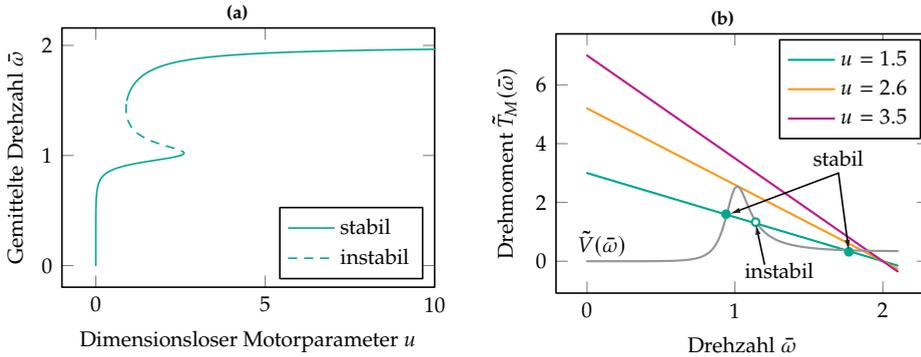


Abbildung 3.2: Stationäre Lösungen des Systems in Abhängigkeit des Motorparameters u (a) und deren graphische Interpretation (b)

rameter u ist in Abb. 3.2a dargestellt. Zur Erstellung des Diagramms wurden die in Tabelle 3.1 aufgeführten Parameterwerte verwendet.

Parameterbezeichnung	Formelzeichen	Standardwert
dimensionslose Exzentrizität	ε	0.001
dimensionslose Betriebsdrehzahl	λ	2
dimensionslose Dämpfung	σ	0.1

Tabelle 3.1: Standardparametersatz für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines unwuchtigen Rotors mit leistungsbegrenztem Antrieb

Je nach Wert des Motorparameters u kann das System eine, zwei oder drei stationäre Lösungen aufweisen, die sich bei Übereinstimmung von Motor- und Vibrationsmoment ergeben (siehe Abb. 3.2b). Im Falle von drei stationären Lösungen ist die mittlere Lösung, die in der Nähe der Resonanz im überkritischen Drehzahlbereich liegt, instabil. Die unterkritische stationäre Lösung und die Lösung nahe der Leerlaufdrehzahl sind dagegen stabil. Im Falle von zwei stabilen stationären Lösungen wird die Geschwindigkeit der stationären Rotorbewegung durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

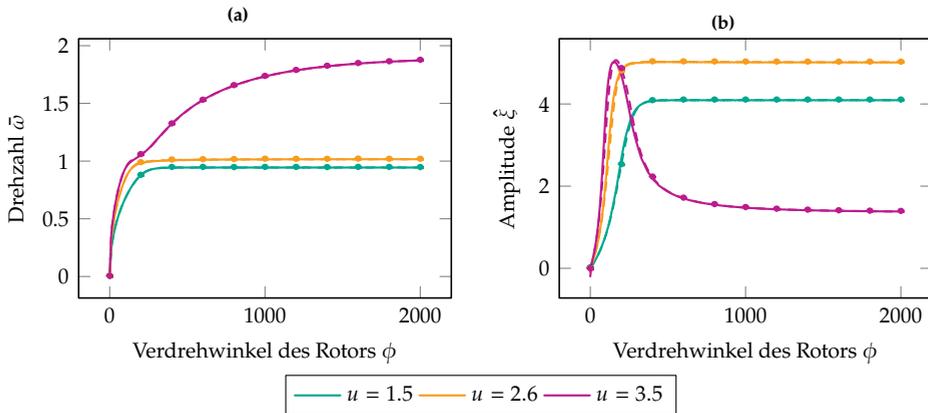


Abbildung 3.3: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (-•-) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und Schwingungsamplitude des Trägersystems (b) bei verschiedenen Werten des Motorparameters u

Im Folgenden wird die Beschleunigung des Rotors aus dem Ruhezustand heraus betrachtet. Die Güte der Approximation (3.50) wird durch Vergleich mit den Ergebnissen der numerischen Integration von System (3.33)-(3.34) bewertet. Die Berechnungsergebnisse für drei verschiedene Motorparameterwerte sind in Abb. 3.3 dargestellt. Es wurden sowohl der glatte Durchgang durch die Resonanz (rote Linien) als auch das Hängenbleiben in der Resonanz (gelbe und grüne Linien) gezeigt. In allen Fällen ist die Diskrepanz zwischen den Lösungen des reduzierten Systems (durchgezogene Linien) und des vollständigen Gleichungssystems extrem gering, obwohl die transienten Prozesse im oszillierenden Teil des Systems vernachlässigt wurden. Im Falle von Systemparameterwerten in der Nähe des Bifurkationspunktes (Berührung der Motorkennlinie und des Vibrationsmomentes) kann die Divergenz der Ergebnisse erheblich sein. Dieser Fall wurde in [24] näher betrachtet und analysiert.

3.3.2 Elastischer Rotor in starren Lagern

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Berücksichtigung der Rotorelastizität auf den Sommerfeld-Effekt untersucht. Es wird das Modell des Rotors der Masse M mit dem Massenträgheitsmoment in Bezug auf die Drehachse J_R betrachtet (siehe Abb.3.4). Der Massenschwerpunkt des Rotors ist relativ zur Drehachse um den Abstand e verschoben. Die Rotorachse ist durch zwei identische Feder-Dämpfern Elemente mit Steifigkeit c und Dämpfungsfaktor b in vertikaler und horizontaler Richtung visko-elastisch gelagert. Die Drehung des Rotors wird durch die Winkelkoordinate ϕ und die horizontale und

vertikale Bewegung seiner Achse durch die Koordinaten x bzw. y beschrieben. Das System wird durch das Motordrehmoment $T_M = U(\omega^* - \dot{\phi})$ angetrieben.

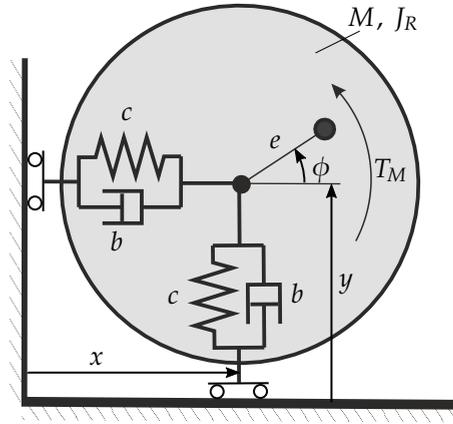


Abbildung 3.4: Modell eines Laval-Rotors mit leistungsbegrenztem Antrieb

Die Bewegungsgleichungen des Systems ergeben sich damit zu:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Me(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi), \quad (3.53)$$

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Me(\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi), \quad (3.54)$$

$$J_r \ddot{\phi} = T_M + Me(\ddot{x} \sin \phi - \ddot{y} \cos \phi). \quad (3.55)$$

Das System wird analog zum vorherigen Fall entdimensioniert. Nach der Einführung der dimensionslosen Parametern

$$k = \sqrt{\frac{c}{M}}, \quad \sigma = \frac{b}{2Mk}, \quad \lambda = \frac{\omega^*}{k}, \quad u = \frac{U}{KMe^2}, \quad \varepsilon = \frac{Me^2}{J_r}, \quad (3.56)$$

der dimensionslosen Verschiebungen

$$\xi = \frac{x}{e}, \quad \eta = \frac{y}{e}, \quad (3.57)$$

und der dimensionslosen Zeit

$$\tau = kt, \quad (3.58)$$

ergeben sich die Gleichungen (3.53)-(3.55) zu

$$\xi'' + 2\sigma\xi' + \xi = \phi'^2 \cos \phi + \phi'' \sin \phi, \quad (3.59)$$

$$\eta'' + 2\sigma\eta' + \eta = \phi'^2 \sin \phi - \phi'' \cos \phi, \quad (3.60)$$

$$\phi'' = \varepsilon (u(\lambda - \phi') + \xi'' \sin \phi - \eta'' \cos \phi). \quad (3.61)$$

Zur Beschreibung der Rotordrehzahl wird wieder eine neue Variable ω eingeführt:

$$\phi' = \omega. \quad (3.62)$$

Im betrachteten Fall kann ebenfalls gezeigt werden, dass die Variablen, die die Schwingungen der Rotorachse beschreiben, stark gedämpft sind. Daher werden im Folgenden nur noch rein erzwungene Lösungen der Gleichungen (3.59) und (3.60) betrachtet:

$$\xi_{p0} = \frac{\omega^2(A \cos \phi + B \sin \phi)}{A^2 + B^2}, \quad (3.63)$$

$$\eta_{p0} = \frac{\omega^2(A \sin \phi - B \cos \phi)}{A^2 + B^2}, \quad (3.64)$$

wobei

$$A = 1 - \omega^2, \quad B = 2\sigma\omega. \quad (3.65)$$

Daraus resultiert ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\phi' = \omega, \quad (3.66)$$

$$\omega' = \varepsilon \left(u(\lambda - \omega) - \frac{2\sigma\omega^5}{(1 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2} \right). \quad (3.67)$$

Wird die Winkelkoordinate ϕ wieder als neue unabhängige Variable betrachtet, ergibt sich eine Differentialgleichung erster Ordnung, die die langsame Entwicklung der Rotordrehzahl beschreibt:

$$\frac{d\omega}{d\phi} = \frac{\varepsilon}{\omega} \left(u(\lambda - \omega) - \frac{2\sigma\omega^5}{(1 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2} \right). \quad (3.68)$$

Aufgrund der Symmetrie des betrachteten Systems ist Gleichung (3.68) bereits vor der Mittelwertbildung autonom. Diese Gleichung stimmt mit Gleichung (3.50) der langsamen Entwicklung der Drehzahl eines Rotors auf einem elastischen Träger bis auf einen konstanten Koeffizienten überein. Daher können alle im vorherigen Abschnitt

vorgestellten Ergebnisse mit der entsprechenden Auswahl von Systemparametern auf das Modell des elastischen Rotors in starren Lagern verallgemeinert werden.

4 Modell eines unwuchtigen Rotors mit Selbstauswuchtsystem

Dieses Kapitel widmet sich der Modellierung eines starren Rotors mit einem Selbstauswuchtsystem, der von einem Motor mit begrenzter Leistung angetrieben wird, sowie der Herleitung von Gleichungen der langsamen Dynamik für dieses System. Das Modell basiert auf dem Laval-Rotormodell und der linearen statischen Motorkennlinie aus Abschnitt 2.2.

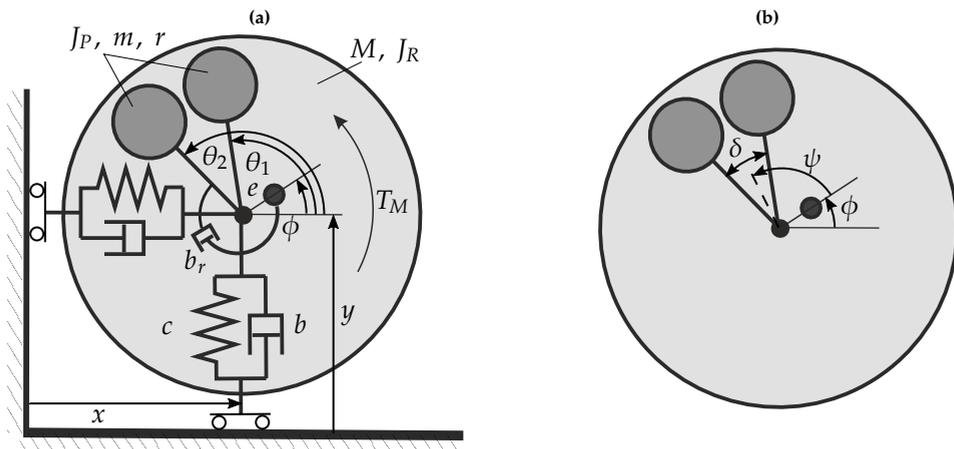


Abbildung 4.1: Modell eines starren Rotors mit Selbstauswuchtsystem (a) und Darstellung der neuen relativen Koordinaten ψ und δ (b)

Ein starrer Rotor der Masse M mit Massenträgheitsmoment J_r bezüglich seiner Drehachse wird horizontal und vertikal von zwei linearen viskoelastischen Elementen der Steifigkeit c und der Dämpfung b abgestützt. Der Massenschwerpunkt des Rotors ist um den Abstand e relativ zur Drehachse versetzt. Der Rotor wird von einem elektromagnetischen Motor mit einem Drehmoment T_M angetrieben. Zwei Auswuchtpendeln der Masse m , Pendellänge r und dem Massenträgheitsmoment J_P bezüglich der Drehachse sind koaxial zum Hauptrotor montiert. Die Wechselwirkung zwischen Rotor und Pendel

wird durch eine viskose Dämpfung mit Dämpfungsfaktor b_r sowie Normalkräften in den Lagern modelliert.

Die Winkelkoordinaten ϕ , θ_1 und θ_2 beschreiben die absoluten Verdrehungen des Rotors und der Auswuchtpendel. Die Lage der Drehachse wird durch die generalisierten Koordinaten x und y beschrieben. Obwohl in der Beschreibung die terminologie „Auswuchtpendel“ verwendet wird, kann das Modell mit der entsprechenden Parameterwahl ($J_P = mr^2$) auch die Dynamik eines Systems mit kugelförmigen Ausgleichsmassen beschreiben. Das Abrollen der Kugeln in der Führung wird dabei aber vernachlässigt, und die Kugeln werden nur als Massenpunkte betrachtet.

4.1 Bewegungsgleichungen und dimensionslose Parameter

Die Bewegungsgleichungen werden in Form der Lagrange-Gleichung 2. Art hergeleitet und ergeben sich zu

$$(M + 2m)\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Me(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi) + \sum_{i=1}^2 mr \left(\dot{\theta}_i^2 \cos \theta_i + \ddot{\theta}_i \sin \theta_i \right), \quad (4.1)$$

$$(M + 2m)\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Me(\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi) + \sum_{i=1}^2 mr \left(\dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i - \ddot{\theta}_i \cos \theta_i \right), \quad (4.2)$$

$$J_R \ddot{\phi} + b_r(2\dot{\phi} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_M + Me(\ddot{x} \sin \phi - \ddot{y} \cos \phi), \quad (4.3)$$

$$J_P \ddot{\theta}_i + b_r(\dot{\theta}_i - \dot{\phi}) = mr(\ddot{x} \sin \theta_i - \ddot{y} \cos \theta_i), \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Das Antriebsmoment wird durch die linearisierte statische Motorcharakteristik beschrieben:

$$T_M = U_M(\omega^* - \dot{\phi}), \quad (4.5)$$

wobei der Parameter U_M der Motorsteuerungsparameter (bzw. Steigung der Motor-kennlinie) und der Parameter ω^* die nominale Motordrehzahl bezeichnet.

Um die weitere Analyse zu erleichtern, werden die mittlere Phasenverschiebung zwischen dem Hauptrotor und den Pendeln

$$\psi = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\phi}{2}, \quad (4.6)$$

und der Pendelöffnungswinkel

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 \quad (4.7)$$

als neue relative Koordinaten eingeführt.

Durch die zusätzliche Einführung der dimensionslosen Parameter

$$\begin{aligned} M^* &= M + 2m, \quad k = \sqrt{\frac{c}{M^*}}, \quad s = \frac{Me}{mr}, \quad \varepsilon = \frac{Me^2}{J_R}, \quad p = \frac{mr^2}{J_P}, \quad \mu = p \frac{m}{M^*}, \\ w &= \frac{mr}{M^*e}, \quad \sigma = \frac{b}{2kM^*}, \quad \beta_r = \frac{2b_r}{kJ_R}, \quad \beta_p = \frac{b_p}{kJ_P}, \quad \lambda = \frac{\omega^*}{k}, \quad u = \frac{U_M}{kMe^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

der dimensionslosen Zeit

$$\tau = kt, \quad (4.9)$$

der dimensionslosen Verschiebungen

$$\xi = \frac{M^*}{mr}x, \quad \eta = \frac{M^*}{mr}y, \quad (4.10)$$

und der Abkürzung $d/d\tau = (\cdot)'$ lassen sich die Bewegungsgleichungen (4.1)-(4.4) durch

$$\xi'' + 2\sigma\xi' + \xi = f_\xi(\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi', \psi'', \delta, \delta', \delta''), \quad (4.11)$$

$$\eta'' + 2\sigma\eta' + \eta = f_\eta(\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi', \psi'', \delta, \delta', \delta''), \quad (4.12)$$

$$\phi'' - \beta_r\psi' = \varepsilon f_\phi(\phi, \phi', \xi'', \eta''), \quad (4.13)$$

$$\psi'' + (\beta_r + \beta_p)\psi' = \varepsilon f_\psi(\phi, \phi', \psi, \delta, \xi'', \eta''), \quad (4.14)$$

$$\delta'' + \beta_p\delta' = \varepsilon f_\delta(\phi, \phi', \psi, \delta, \xi'', \eta'') \quad (4.15)$$

angeben, wobei

$$\begin{aligned}
 f_{\xi}(\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi', \psi'', \delta, \delta, \delta'') &= s(\phi'^2 \cos \phi + \phi'' \sin \phi) + \\
 &+ \left(\phi' + \psi' + \frac{\delta'}{2} \right)^2 \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \\
 &+ \left(\phi'' + \psi'' + \frac{\delta''}{2} \right) \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \\
 &+ \left(\phi' + \psi' - \frac{\delta'}{2} \right)^2 \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) + \\
 &+ \left(\phi'' + \psi'' - \frac{\delta''}{2} \right) \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right), \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\eta}(\phi, \phi', \phi'', \psi, \psi', \psi'', \delta, \delta, \delta'') &= s(\phi'^2 \sin \phi - \phi'' \cos \phi) + \\
 &+ \left(\phi' + \psi' + \frac{\delta'}{2} \right)^2 \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) - \\
 &- \left(\phi'' + \psi'' + \frac{\delta''}{2} \right) \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \\
 &+ \left(\phi' + \psi' - \frac{\delta'}{2} \right)^2 \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) - \\
 &- \left(\phi'' + \psi'' - \frac{\delta''}{2} \right) \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right), \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon f_{\phi}(\phi, \phi', \xi'', \eta'') = \varepsilon (u(\lambda - \phi') + w(\xi'' \sin \phi - \eta'' \cos \phi)), \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon f_{\psi}(\phi, \phi', \psi, \delta, \xi'', \eta'') &= \\
 &= \mu (\xi'' \sin(\phi + \psi) - \eta'' \cos(\phi + \psi)) \cos \frac{\delta}{2} - \varepsilon f_{\phi}, \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon f_{\delta}(\phi, \phi', \psi, \delta, \xi'', \eta'') = 2\mu (\xi'' \cos(\phi + \psi) + \eta'' \sin(\phi + \psi)) \sin \frac{\delta}{2} \quad (4.20)$$

gilt.

Der Parameter ε kann dabei mit dem Quadrat des Verhältnisses von Exzentrizität zum effektiven Trägheitsradius des Rotors assoziiert werden. Bei den meisten realen

Maschinen liegt dieser dimensionslose Parameter im Bereich 10^{-3} bis 10^{-8} und kann als eher klein angesehen werden:

$$\varepsilon \ll 1. \quad (4.21)$$

Der Parameter μ ist proportional zum Verhältnis der Masse der Auswuchtpendel zur Gesamtmasse des Systems. In den meisten Fällen wird bei der Auslegung angestrebt, die Auswuchtfunktion mit minimalen Auswirkungen auf die Parameter des Originalsystems, einschließlich dessen Masse, zu realisieren. Das bedeutet, dass die Masse der Ausgleichsvorrichtung und damit die Masse der Auswuchtpendel oder -kugeln im Vergleich zur Masse des Originalsystems klein sein muss. Nachfolgend werden μ und ε formal als Parameter derselben Größenordnung betrachtet:

$$\mu = O(\varepsilon). \quad (4.22)$$

Sowohl die Dämpfungskoeffizienten des oszillierenden Teils des Systems als auch des rotierenden Teilsystems werden als nicht klein angenommen, d.h. es gilt

$$\sigma = O(1), \beta_r = O(1), \beta_p = O(1). \quad (4.23)$$

Abschnitt 5.6 behandelt dabei die Fälle, für die die Annahmen (4.22) und (4.23) nicht erfüllt sind.

4.2 Asymptotische Analyse

Um die Gleichungen der langsamen Dynamik des Selbstauswuchtsystems herzuleiten, wird die Verallgemeinerung der Mittelungsmethode für partiell stark gedämpfte Systeme verwendet, die im Abschnitt 3.2 beschrieben wurde. Dazu muss das Gleichungssystem (4.11)-(4.15) in die Standardform (3.14)-(3.15) überführt werden. Mit der Einführung der Variablentransformation

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi' + (\beta_r + \beta_p)\psi}{\beta_r + \beta_p}, \quad (4.24)$$

$$\psi = \tilde{\psi} + \alpha, \quad (4.25)$$

kann Gleichung (4.14) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\tilde{\psi}' = \frac{\varepsilon f_{\psi}}{\beta_r + \beta_p}, \quad (4.26)$$

$$\alpha' = -(\beta_r + \beta_p)\alpha - \frac{\varepsilon f_{\psi}}{\beta_r + \beta_p}, \quad (4.27)$$

angegeben werden. Es ist zu beachten, dass die Variable α stark gedämpft ist, sodass diese in erster Näherung durch eine stationäre Lösung von der Gleichung (4.27) der Form

$$\alpha_0 = -\frac{\varepsilon f_{\psi}}{(\beta_r + \beta_p)^2} \quad (4.28)$$

ersetzt werden kann. Somit gilt in der ersten Näherung:

$$\psi = \tilde{\psi} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.29)$$

Analog dazu wird die Gleichung (4.15) durch die Variablentransformation

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta' + \beta_p \delta}{\beta_p}, \quad (4.30)$$

$$\delta = \tilde{\delta} + \nu, \quad (4.31)$$

auf die Form

$$\tilde{\delta}' = \frac{\varepsilon f_{\delta}}{\beta_p}, \quad (4.32)$$

$$\nu' = -\beta_p \nu - \frac{\varepsilon f_{\delta}}{\beta_p}, \quad (4.33)$$

gebracht. Die Variable ν ist ebenfalls stark gedämpft und kann in erster Näherung durch eine stationäre Lösung der Gleichung (4.33) der Form

$$\nu_0 = -\frac{\varepsilon f_{\delta}}{\beta_p^2} \quad (4.34)$$

ersetzt werden. Damit gilt in der ersten Näherung

$$\delta = \tilde{\delta} + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.35)$$

Nach der Einführung einer neuen Variablen ω für eine dimensionslose Rotordrehzahl und unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.24) und (4.25) vereinfacht sich Gleichung (4.13) zu

$$\phi' = \omega, \quad (4.36)$$

$$\omega' = \varepsilon f_\phi + \frac{\varepsilon f_\psi \beta_r}{\beta_r + \beta_p}. \quad (4.37)$$

Mit $\omega' = O(\varepsilon)$, $\psi' = O(\varepsilon)$ und $\delta' = O(\varepsilon)$ können auch die rechten Seiten der Gleichungen (4.11) und (4.12) vereinfacht werden:

$$f_\xi = \omega^2 \left[s \cos \phi + \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right] + O(\varepsilon), \quad (4.38)$$

$$f_\eta = \omega^2 \left[s \sin \phi + \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right] + O(\varepsilon). \quad (4.39)$$

In diesem Fall können die rein erzwungenen Lösungen der Gleichungen (4.11) und (4.12) in nullter Näherung (also für $\omega' = 0$) analytisch wie folgt angegeben werden:

$$\xi_{p0} = \frac{\omega^2}{A^2 + B^2} \left[A \left(s \cos \phi + \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) + B \left(s \sin \phi + \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) \right], \quad (4.40)$$

$$\eta_{p0} = \frac{\omega^2}{A^2 + B^2} \left[A \left(s \sin \phi + \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) - B \left(s \cos \phi + \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) \right], \quad (4.41)$$

mit

$$A = 1 - \omega^2, \quad (4.42)$$

$$B = 2\sigma\omega. \quad (4.43)$$

Weiterhin werden die Variablen ξ und η als eine Summe der rein erzwungenen Lösungen ξ_{p0} bzw. η_{p0} und der Abweichungen $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ von der vollständigen Lösungen der Ausgangsgleichungen (4.11) bzw. (4.12) dargestellt:

$$\xi = \xi_{p0} + \tilde{\xi}, \quad (4.44)$$

$$\eta = \eta_{p0} + \tilde{\eta}. \quad (4.45)$$

Durch die Variablentransformation

$$\tilde{\xi} = \rho_\xi \cos(\kappa\tau) + \zeta_\xi \sin(\kappa\tau), \quad (4.46)$$

$$\tilde{\xi}' = \rho_\xi (-\kappa \sin(\kappa\tau) - \sigma \cos(\kappa\tau)) + \zeta_\xi (\kappa \cos(\kappa\tau) - \sigma \sin(\kappa\tau)), \quad (4.47)$$

$$\tilde{\eta} = \rho_\eta \cos(\kappa\tau) + \zeta_\eta \sin(\kappa\tau), \quad (4.48)$$

$$\tilde{\eta}' = \rho_\eta (-\kappa \sin(\kappa\tau) - \sigma \cos(\kappa\tau)) + \zeta_\eta (\kappa \cos(\kappa\tau) - \sigma \sin(\kappa\tau)), \quad (4.49)$$

$$\kappa = \sqrt{1 - \sigma^2}, \quad (4.50)$$

kann gezeigt werden, dass die Variablen ρ_ξ , ζ_ξ , ρ_η und ζ_η stark gedämpft sind

$$\rho'_\xi = -\sigma \rho_\xi + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.51)$$

$$\zeta'_\xi = -\sigma \zeta_\xi + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.52)$$

$$\rho'_\eta = -\sigma \rho_\eta + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.53)$$

$$\zeta'_\eta = -\sigma \zeta_\eta + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.54)$$

sodass es für die weitere Analyse in der ersten Näherung ausreicht, nur die rein erzwungenen Lösungen ξ_{p0} und η_{p0} zu berücksichtigen. In diesem Fall könnten die Ableitungen der Variablen ξ und η auf der rechten Seiten der Gleichungen (4.26), (4.32), und (4.37) durch die gegebenen Funktionen schwach gedämpfter Variablen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \xi''_{p0} = \frac{-\omega^4}{A^2 + B^2} & \left[A \left(s \cos \phi + \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + B \left(s \sin \phi + \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta''_{p0} = \frac{-\omega^4}{A^2 + B^2} & \left[A \left(s \sin \phi + \sin \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \sin \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) - \right. \\ & \left. - B \left(s \cos \phi + \cos \left(\phi + \psi + \frac{\delta}{2} \right) + \cos \left(\phi + \psi - \frac{\delta}{2} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.56) \end{aligned}$$

Um das System in eine für die Anwendung der Mittelwertbildungsmethode geeignete Form zu bringen, muss Gleichung (4.36) eliminiert werden. Dies wird bewerkstelligt, indem der Drehwinkel des Hauptrotors ϕ als neue unabhängige Variable eingeführt wird:

$$\frac{d\omega}{d\phi} = \frac{1}{\omega} \left[\varepsilon f_\phi + \frac{\varepsilon f_\psi \beta_r}{\beta_r + \beta_p} \right], \quad (4.57)$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{d\phi} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\varepsilon f_\psi}{\beta_r + \beta_p} \right], \quad (4.58)$$

$$\frac{d\tilde{\delta}}{d\phi} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\varepsilon f_\delta}{\beta_p} \right]. \quad (4.59)$$

Das System der Gleichungen (4.57)-(4.59) erfüllt die Anforderungen der klassischen Mittelwertbildung und kann in Bezug auf den Drehwinkel des Hauptrotors ϕ gemittelt werden. Die Gleichungen der ersten Näherung ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}}{d\phi} = & \frac{\varepsilon \beta_p u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} + \\ & + \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[(A(2\varepsilon\beta_p w - \mu\beta_r s) \sin \bar{\psi} - \right. \\ & \left. - B(2\varepsilon\beta_p w + \mu\beta_r s) \cos \bar{\psi}) \cos \frac{\bar{\delta}}{2} - B(\mu\beta_r(\cos \bar{\delta} + 1) + \varepsilon\beta_p s w) \right], \quad (4.60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\psi}}{d\phi} = & -\frac{\varepsilon u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} + \\ & + \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[(B(2\varepsilon w - \mu s) \cos \bar{\psi} - \right. \\ & \left. - A(2\varepsilon w + \mu s) \sin \bar{\psi}) \cos \frac{\bar{\delta}}{2} - B(\mu(\cos \bar{\delta} - 1) - \varepsilon s w) \right], \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\phi} = -\frac{2\mu\bar{\omega}^3}{\beta_p(A^2 + B^2)} \left[A s \cos \bar{\psi} - B s \sin \bar{\psi} + 2A \cos \frac{\bar{\delta}}{2} \right] \sin \frac{\bar{\delta}}{2}. \quad (4.62)$$

Hier stellt $\bar{\omega}$ die gemittelte Rotordrehzahl dar, und $\bar{\psi}$ bzw. $\bar{\delta}$ bezeichnen die gemittelten Variablen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\delta}$, die in der ersten Näherung die mittlere Phasenverschiebung der Pendel bzw. den Pendelöffnungswinkel beschreiben.

So kann die langsame Dynamik des mechanischen Systems mit vier Freiheitsgraden, also eines Systems achter Ordnung, mit nur drei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden. Eine derart starke Reduzierung des Gleichungssystems ermöglicht eine umfassende qualitative Analyse des Systemverhaltens und ein tieferes Verständnis der physikalischen Mechanismen, die die Dynamik des Systems bestimmen.

5 Dynamik des Selbstauswuchtsystems

Dieses Kapitel widmet sich der Analyse der stationären und der transienten Lösungen der Gleichungen der langsamen Dynamik des Selbstauswuchtsystems, die im vorangegangenen Kapitel hergeleitet wurden.

5.1 Stationäre Lösungen

Gleichungen zur Bestimmung stationärer Lösungen ergeben sich, indem die rechten Seiten der Gleichungen (4.60)-(4.62) zu Null gesetzt werden:

$$\frac{\varepsilon\beta_p u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} + \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[(A(2\varepsilon\beta_p w - \mu\beta_r s) \sin \bar{\psi} - B(2\varepsilon\beta_p w - \mu\beta_r s) \cos \bar{\psi}) \cos \frac{\bar{\delta}}{2} - B(\mu\beta_r(\cos \bar{\delta} + 1) + \varepsilon\beta_p s w) \right] = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\varepsilon u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} - \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[(B(2\varepsilon w - \mu s) \cos \bar{\psi} - A(2\varepsilon w + \mu s) \sin \bar{\psi}) \cos \frac{\bar{\delta}}{2} - B(\mu(\cos \bar{\delta} - 1) - \varepsilon s w) \right] = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{2\mu\bar{\omega}^3}{\beta_p(A^2 + B^2)} \left[A s \cos \bar{\psi} - B s \sin \bar{\psi} + 2A \cos \frac{\bar{\delta}}{2} \right] \sin \frac{\bar{\delta}}{2} = 0, \quad (5.3)$$

wobei

$$A = 1 - \bar{\omega}^2, \quad B = 2\sigma\bar{\omega} \quad (5.4)$$

gilt.

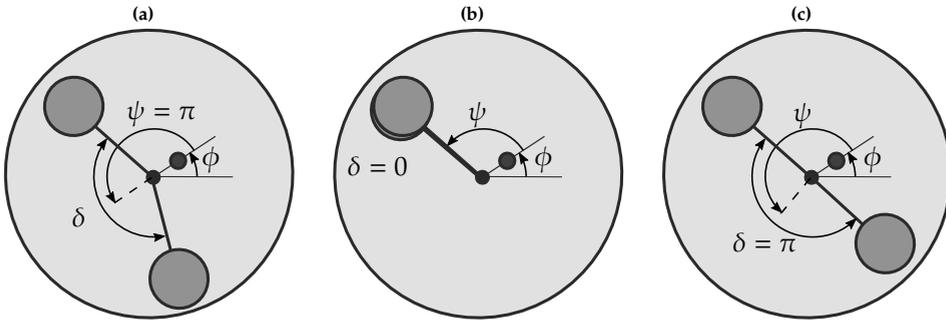


Abbildung 5.1: Stationäre Konfigurationen der Auswuchtpendel eines Selbstausswuchtsystems

Das resultierende Gleichungssystem (5.1) bis (5.3) verfügt über drei Arten von stationären Lösungen, die in Abbildung 5.1 dargestellt sind.

1. Konfiguration I mit Kompensation der Unwucht (siehe Abb. 5.1a):

$$\bar{\psi} = \pi, \tag{5.5}$$

$$\bar{\delta} = 2 \arccos\left(\frac{s}{2}\right), \quad s \leq 2, \tag{5.6}$$

$$\bar{\omega} = \lambda. \tag{5.7}$$

Bei dieser Art von stationärer Lösung kompensieren die Auswuchtpendel die Unwucht des Hauptrotors vollständig. Dies ist nur möglich, falls die primäre Unwucht des Rotors nicht größer ist als die Unwucht der beiden Auswuchtpendel zusammen ($s \leq 2$). Der effektive Massenschwerpunkt des Systems liegt auf der Drehachse und der Rotor dreht sich mit seiner nominalen Drehzahl. Die praktische Umsetzung dieser Lösung ist der eigentliche Einsatzzweck des Selbstausswuchtsystems bei unwichtigen Rotoren.

2. Konfiguration II mit zusammenfallenden Auswuchtpendeln (siehe Abb. 5.1b):

$$\bar{\psi} = \arctan\left(\frac{B \left(2A^2 + A\sqrt{s^2(A^2 + B^2) - 4B^2}\right)}{A \left(2B^2 - A\sqrt{s^2(A^2 + B^2) - 4B^2}\right)}\right), \quad s \geq \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{5.8}$$

$$\bar{\delta} = 0. \tag{5.9}$$

Die stationäre Rotordrehzahl für diese Konfiguration wird aus der Gleichung

$$\frac{(B\bar{\omega}^4 w(s^2 + 4) - us(A^2 + B^2)(\lambda - \bar{\omega}))^2}{16B^2 \bar{\omega}^8 w^2 s^2} + \frac{(B\bar{\omega}^4 w(s^2 - 4) - us(A^2 + B^2)(\lambda - \bar{\omega}))^2}{16A^2 \bar{\omega}^8 w^2 s^2} = 1 \quad (5.10)$$

bestimmt, die nach dem Motorparameter u aufgelöst werden kann:

$$u = -\frac{\omega^5 w \sigma A^2 (s^2 + 1) + B^2 (s^2 - 1) \pm \sqrt{A^2 (A^2 s^2 + B^2 (s^2 - 1))}}{s(\bar{\omega} - \lambda)(A^2 + B^2)}. \quad (5.11)$$

Bei dieser Konfiguration haben die beiden Auswuchtpendel die gleiche Phasenlage und können je nach Rotordrehzahl die Unwucht des Rotors teilweise kompensieren oder sogar verstärken. Es ist zu beachten, dass die Konfiguration $\bar{\delta} = 0$ eine Lösung der Gleichungen (4.62) bzw. (5.3) für beliebige (auch ϕ -abhängige) Werte der Variablen $\bar{\psi}$ und $\bar{\omega}$ darstellt.

3. Konfiguration III mit gegenüberliegenden Auswuchtpendeln (siehe Abb. 5.1c):

$$\bar{\psi} - \text{beliebig}, \quad (5.12)$$

$$\bar{\delta} = \pi. \quad (5.13)$$

Die stationäre Rotordrehzahl für diese Konfiguration ergibt sich aus der Gleichung

$$\frac{\beta_p \varepsilon (u(A^2 + B^2)(\lambda - \bar{\omega}) - B s w \bar{\omega}^4)}{\bar{\omega}(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} = 0, \quad (5.14)$$

die ebenfalls nach dem Motorparameter u aufgelöst werden kann:

$$u = \frac{2\bar{\omega}^5 s \sigma w}{(\lambda - \bar{\omega})(A^2 + B^2)}. \quad (5.15)$$

In dieser Konfiguration sind die Auswuchtpendel auf einer Geraden gegenüber voneinander angeordnet (Gegenphase) und kompensieren sich gegenseitig.

Abb. 5.3 zeigt die stationären Drehzahlen des Rotors in Abhängigkeit des Motorparameters u für ein System mit dem in Tabelle 5.1 aufgeführten Standardparametersatz. Stabile Lösungen werden als durchgezogene Linien (—) und instabile Lösungen als gestrichelte (---) und strichpunktierte Linien (- · -) dargestellt. Die Stabilität der Lösungen wurde auf Grundlage der direkten numerischen Berechnung von Eigenwerten ermittelt.

Parameter	Standardwert	Parameter	Standardwert
ε	0.01	β_p	1.0
μ	0.01	β_r	0.1
s	0.75	λ	2.0
w	1.30	σ	0.1

Tabelle 5.1: Standardparametersatz für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines ungewichtigen Rotors mit Selbstauswuchtsystem

In diesem Beispiel entspricht $\bar{\omega} = 1$ einer dimensionslosen Resonanzdrehzahl und $\bar{\omega} = 2$ einer dimensionslosen Motornendrehzahl.

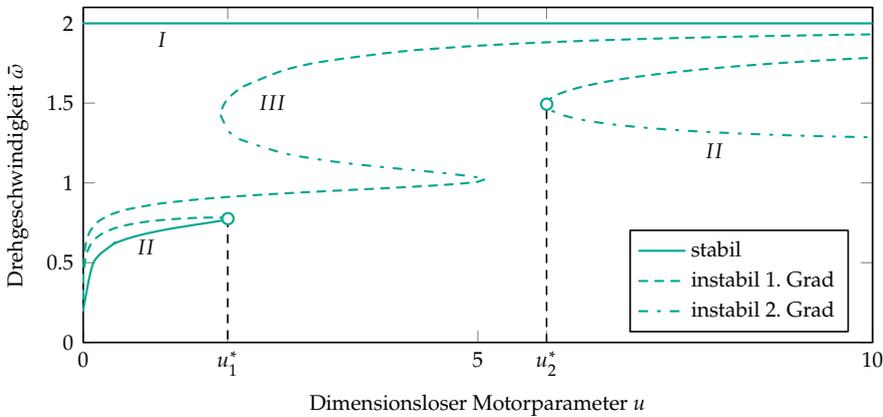


Abbildung 5.2: Stationäre Drehzahlen des Rotors mit Selbstauswuchtsystem in Abhängigkeit vom Motorparameter u

Die unterkritischen Lösungen vom Typ *II* mit $\bar{\omega} < 1$ existieren nur im Bereich kleinerer Werte des Parameters u , was einer geringen Motorleistung entspricht. Beim kritischen Wert $u = u_1^*$ kollidieren stabile und instabile Lösungen und verschwinden. Die stabile unterkritische Lösung kann als klassischer Sommerfeld-Effekt oder als stationäres Hängenbleiben in der Resonanz beschrieben werden. Die entsprechende geometrische Konfiguration des Systems ist in Abb. 5.1b dargestellt. Die Auswuchtpendel verstärken die ursprüngliche Unwucht des Rotors, was zu hohen Amplituden der Rotordrehachse führt.

Überkritische Lösungen, die der Konfiguration *II* mit zusammenfallenden Auswuchtpendeln entsprechen, existieren nur im Bereich größerer Werte des Parameters u ($u > u_2^*$). Bei diesen Lösungen wird die Unwucht des Hauptrotors durch die Auswuchtpendel teilweise kompensiert und die Amplitude der Schwingungen der Rotordrehachse wird

kleiner. Beide überkritischen Lösungen dieser Art sind jedoch instabil und können daher im Betrieb nicht realisiert werden.

Abhängig von der Parameterkonfiguration (z.B. für andere Dämpfungsparameter σ) kann der kritische Wert u_1^* größer oder kleiner als u_2^* sein. Das bedeutet, dass für bestimmte Parameterwerte ein Paar unterkritischer Lösungen vom Typ II mit einem Paar überkritischer stationärer Lösungen dieses Typs koexistieren kann (siehe z.B. lilafarbene Linien in Abb. 5.3).

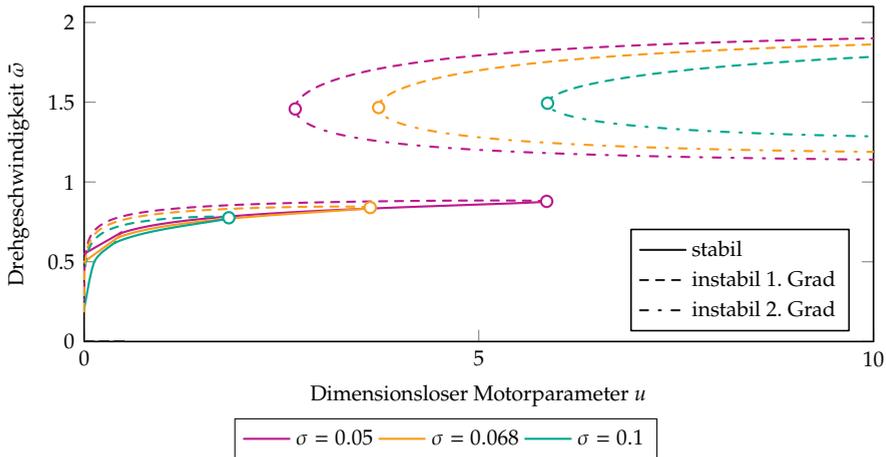


Abbildung 5.3: Stationäre Lösungen vom Typ II in Abhängigkeit vom Motorparameter u für verschiedene Werte des Dämpfungsparameters σ

Die stationäre Lösung vom Typ III existiert für beliebige Werte des Motorparameters u . Lösungen dieser Art sind jedoch immer instabil, werden in der Praxis nicht verwirklicht und haben keinen wesentlichen Einfluss auf die Dynamik des Rotors.

Die kompensierende stationäre Lösung vom Typ I existiert bei allen Werten des Motorparameters u und ist stets stabil.

5.2 Hochlaufsimulationen

In diesem Abschnitt wird der Hochlauf des unwuchtigen Rotors mit Selbstauswuchtsystem einschließlich des Durchgangs durch die Resonanz diskutiert. Die Ergebnisse der numerischen Integration des gemittelten Gleichungssystems (4.60)-(4.62), die in Abb. 5.4 mit durchgezogenen Linien (—) dargestellt sind, werden mit den Ergebnissen für die Ausgangsgleichungen (4.11)-(4.15) (gestrichelte Linien mit Marker (- - -)) in Abb. 5.4 bei äquivalenter Wahl der Anfangsbedingungen verglichen. Die Schätzung

der Amplitude der Rotordrehachse für das reduzierte System wird dabei aus den rein erzwungenen Lösungen $\xi_{p0}(\phi, \bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\delta})$ und $\eta_{p0}(\phi, \bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\delta})$ gemäß

$$\bar{\rho} = \sqrt{\xi_{p0}^2 + \eta_{p0}^2} \quad (5.16)$$

berechnet.

Im Bereich kleiner Werte des Motorparameters u ($u < u_1^*$), der proportional zur Steigung der Motorkennlinie ist, erreicht der Rotor eine Drehzahl leicht unterhalb der Resonanzdrehzahl (vgl. orangefarbene Kurve in Abb.5.4a), wonach der Rotor zusammen mit den Auswuchtpendeln mit derselben konstanten Drehgeschwindigkeit als Einheit rotiert. Diese Lösung zeichnet sich durch eine konstant hohe Amplitude der radialen Schwingungen der Rotordrehachse aus (vgl. orangefarbene Kurve in Abb.5.4c) und kann als stationäres Hängenbleiben in der Resonanz oder auch Sommerfeld-Effekt bezeichnet werden.

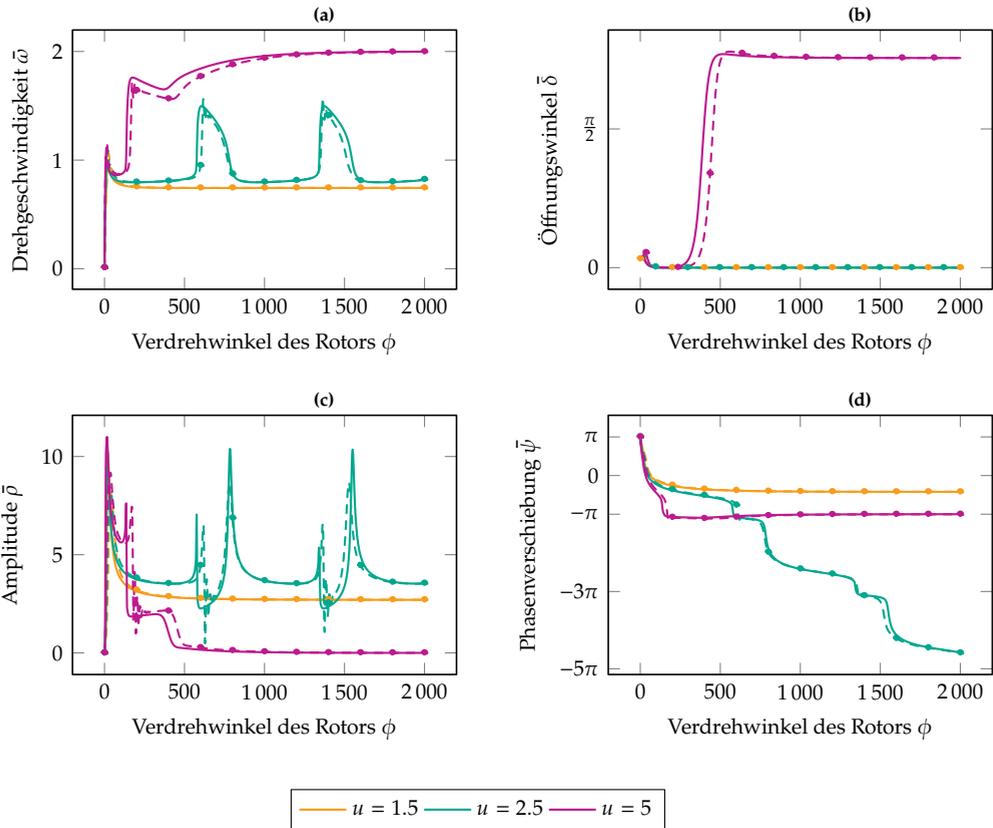


Abbildung 5.4: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (---) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a), den Öffnungswinkel der Auswuchtpendel δ (b), die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (c) und die mittlere Phasenverschiebung $\bar{\psi}$ (d) für verschiedene Werte des Motorparameters u

Bei hohen Werten des Motorparameters u ($u > u_2^*$) passiert der Rotor erfolgreich die Resonanz. Im überkritischen Bereich driften die Auswuchtpendel auseinander (vgl. lilafarbene Linie in Abb. 5.4b), wodurch die Unwucht des Hauptrotors kompensiert wird. Danach strebt die Amplitude der Schwingungen der Rotordrehachse asymptotisch gegen Null (Abb. 5.4c) und der Rotor erreicht die Nenndrehzahl des Motors (siehe Abb. 5.4a).

Im mittleren Bereich des Motorparameters $u_1^* < u < u_2^*$ ist die kompensierende Konfiguration vom Typ I zwar die einzige stabile stationäre Lösung des Systems, allerdings kann der Rotor immer noch in die Resonanz gefangen werden. Beide Auswuchtpendel drehen sich gemeinsam als eine Einheit, jedoch etwas langsamer als der Hauptrotor (vgl. grüne Linie in Abb. 5.4d). Die effektive Unwucht des Gesamtsystems ändert

sich dabei ständig, was zu einer starken Modulation der Rotordrehzahl sowie der Schwingungsamplitude der Rotordrehachse führt (vgl. grüne Linien in Abb. 5.4a und 5.4c). Gleichzeitig übersteigt die Schwingungsamplitude größtenteils deutlich die beim stationären Hängenbleiben in der Resonanz auftretende Amplitude. Im Folgenden wird diese Art der Lösung als „nichtstationäres Hängenbleiben in der Resonanz“ oder einfach als „periodische Lösung“ bezeichnet.

5.3 Dynamik des Systems in Konfiguration II ($\delta = 0$)

Sowohl stationäre als auch periodische Lösungen, die dem Hängenbleiben des Systems in der Resonanz entsprechen, sind durch die Konfiguration vom Typ II gekennzeichnet, bei der beide Pendel die gleiche Phasenlage haben und sich gemeinsam als Einheit drehen. In diesem Abschnitt wird die Dynamik des Systems in dieser Konfiguration ausführlich erörtert.

Wenn die Winkelstellungen der Auswuchtpendel zusammenfallen, geht die Phasendifferenz δ gegen Null und das Gleichungssystem (4.60)-(4.62) vereinfacht sich zu

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\phi} = \frac{\varepsilon\beta_p u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} + \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[A(2\varepsilon\beta_p w - \mu\beta_r s) \sin \bar{\psi} - B(2\varepsilon\beta_p w + \mu\beta_r s) \cos \bar{\psi} - B(2\mu\beta_r + \varepsilon\beta_p s w) \right], \quad (5.17)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\phi} = -\frac{\varepsilon u(\lambda - \bar{\omega})}{\omega(\beta_p + \beta_r)} + \frac{\bar{\omega}^3}{(A^2 + B^2)(\beta_p + \beta_r)} \left[B(2\varepsilon w - \mu s) \cos \bar{\psi} - A(2\varepsilon w + \mu s) \sin \bar{\psi} + B\varepsilon s w \right]. \quad (5.18)$$

Das System verhält sich in diesem Fall effektiv wie ein Schwingungserreger mit koaxialen Unwuchten, dessen Dynamik hinreichend in [20] untersucht wurde.

Um den Mechanismus des Auftretens der periodischen Lösungen im Resonanzbereich sowie den Übergang zwischen den drei Lösungsarten, die im vorigen Abschnitt beschrieben wurden, zu verstehen, wird die Entwicklung des Phasenraums des Systems (5.17)-(5.18) mit dem Anstieg des Motorparameters u betrachtet. Der Phasenraum dieses Subsystems ist eine Zylinderoberfläche, die durch die vertikale Koordinate $\bar{\omega}$ und die umlaufende Winkel-Koordinate $\bar{\psi}$ beschrieben wird. Abwicklungen dieser Fläche sind für verschiedene Werte des Motorparameters u in Abb. 5.5 dargestellt.

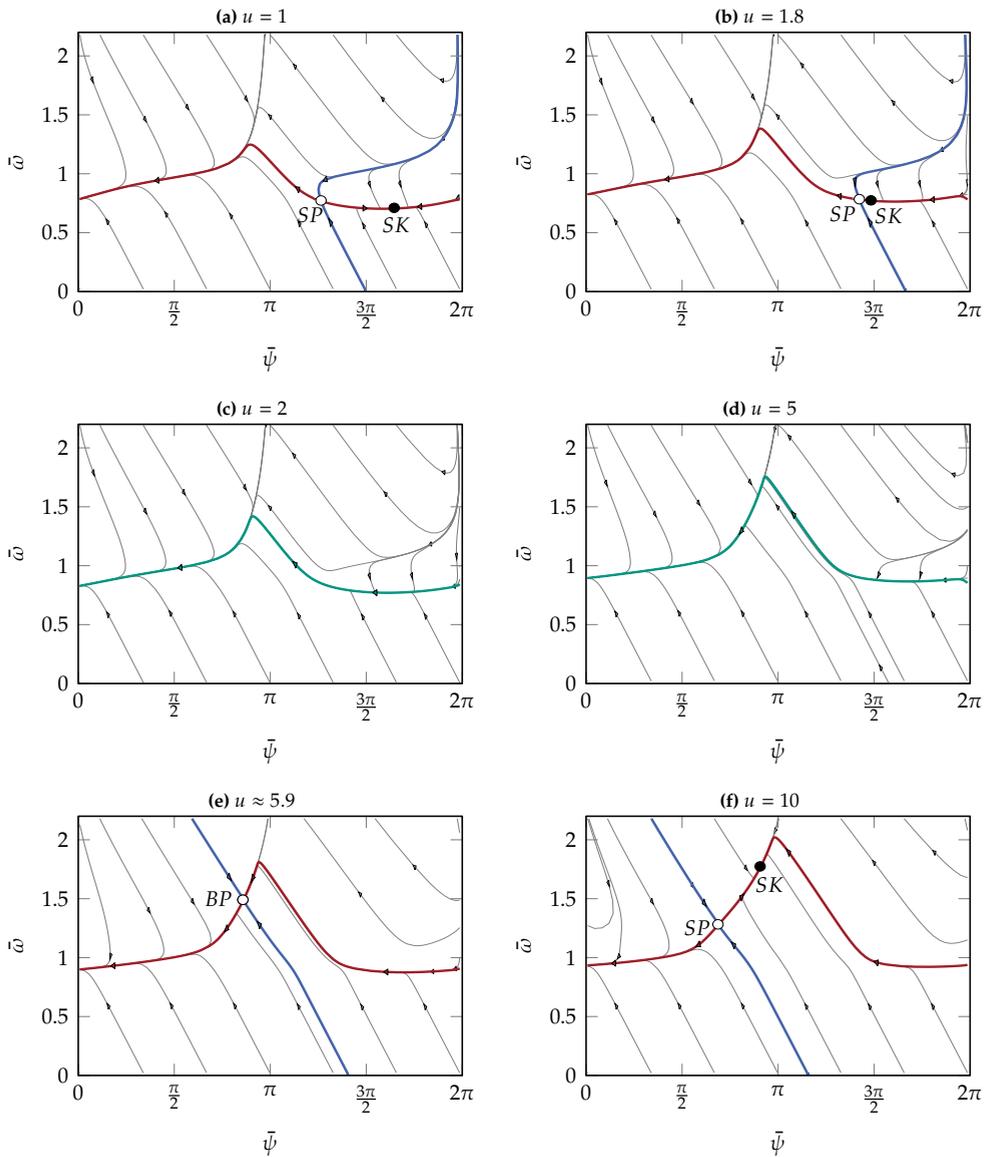


Abbildung 5.5: Entwicklung des Phasenraums des Subsystems mit $\delta = 0$ für steigende Werte des Motorparameters u bei $\sigma = 0.1$

Für kleine Werte des Parameters u (vgl. Abb. 5.5a) gibt es nur zwei stationäre Lösungen, den stabilen Knoten (SK) und den Sattelpunkt (SP), die durch zwei heterokline Orbits (rote Linien) miteinander verbunden sind. Aufgrund der zylindrischen Form des

Phasenraums bilden diese beiden Bahnen eine geschlossene Kontur auf der Zylinderoberfläche.

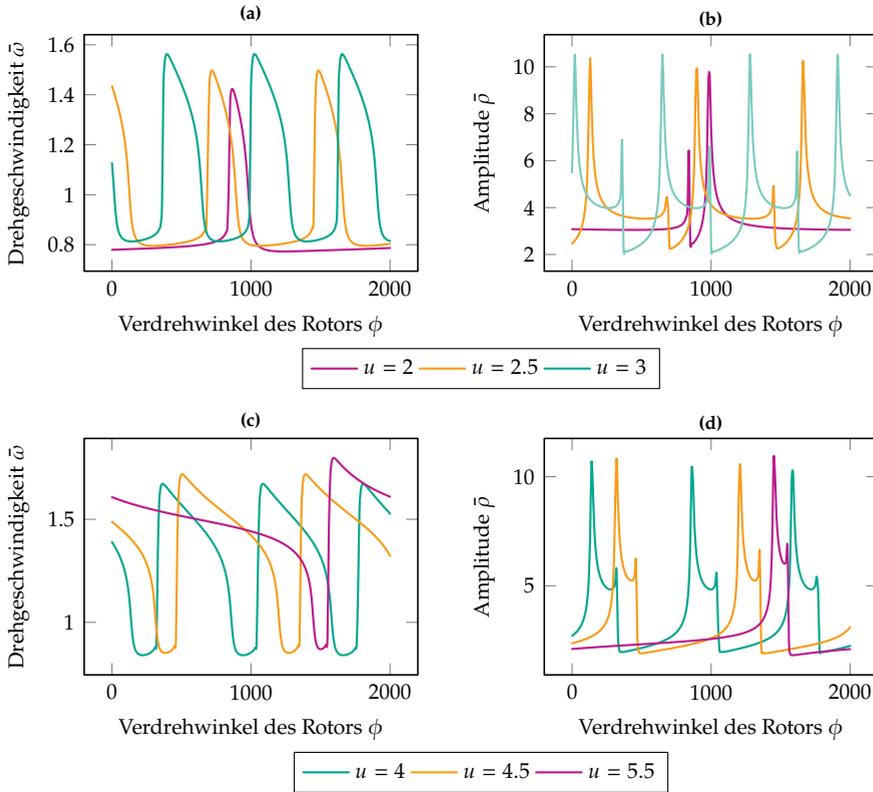


Abbildung 5.6: Geschwindigkeitsverläufe (a),(c) und Amplitudenverläufe (b),(d) der periodischen Lösung für verschiedene Werte des Motorparameters u

Mit zunehmendem Wert des Motorparameters u bewegen sich die beiden stationären Punkte aufeinander zu (vgl. Abb. 5.5b). Erreicht der Motorparameter u einen kritischen Wert $u = u_1^*$, kollidieren die stationären Punkte und verschwinden, sodass die beiden Heteroklinen zu einer geschlossenen Umlaufbahn verschmelzen (vgl. Abb. 5.5c). Die Periodendauer der Bewegung entlang dieser Trajektorie unmittelbar nach der Bifurkation ist nahezu unendlich lang. Diese Bifurkation ist eine globale Bifurkation und der in Abschnitt 2.1.3 gezeigten Infinite-Period Bifurkation sehr ähnlich, aber nicht identisch. Im Falle der klassischen Infinite-Period Bifurkation ist das Vorhandensein einer stationären Lösung innerhalb einer geschlossenen Kontur eine Voraussetzung für die Existenz der Kontur selbst. Im Falle des Phasenraums des Selbstauswuchtsystems

ist eine weitere stationäre Lösung nicht erforderlich. Die Existenz einer geschlossenen Trajektorie wird durch die zylindrische Form der Phasenoberfläche ermöglicht.

Mit zunehmender Erhöhung des Motorparameters u ausgehend vom Verzweigungspunkt bei $u = u_1^*$ erhöht sich sowohl die Frequenz der periodischen Bewegung entlang der Trajektorie als auch die Amplitude der Modulation der Rotordrehzahl und die Schwingungsamplitude seiner Drehachse (vgl. Abb. 5.6a und 5.6b).

Bei Annäherung an den zweiten Bifurkationspunkt bei $u = u_2^*$ nimmt die Modulationsamplitude der periodischen Lösung weiter zu, allerdings nimmt die Schwingungsperiodendauer zu (vgl. Abb. 5.6c und 5.6d) und strebt unmittelbar vor der Bifurkation gegen unendlich. Erreicht der Motorparameter u den zweiten kritischen Wert u_2^* , bildet sich auf der periodischen Trajektorie eine stationäre Lösung (vgl. Abb. 5.5e), die anschließend in ein Paar stationärer Punkte zerfällt (vgl. Abb. 5.5f), infolgedessen die periodische Lösung nicht mehr existiert. Diese Bifurkation stellt eine Analogie der ersten Bifurkation dar, die bei $u = u_1^*$ auftritt. Auf der Phasenfläche $\delta = 0$ entsprechen die neuen stationären Lösungen einem stabilen Knoten (SK) und einem Sattelpunkt (SP). Allerdings sind im dreidimensionalen Phasenraum des Selbstausschlagsystems beide Lösungen instabil (siehe Abschnitt 5.1).

Der schattierte Bereich in Abb. 5.7 zeigt den Existenzbereich der periodischen Lösung. Die gepunkteten Linien (·····) zeigen die maximalen und minimalen Werte der Rotordrehgeschwindigkeit in Abhängigkeit des Motorparameters u .

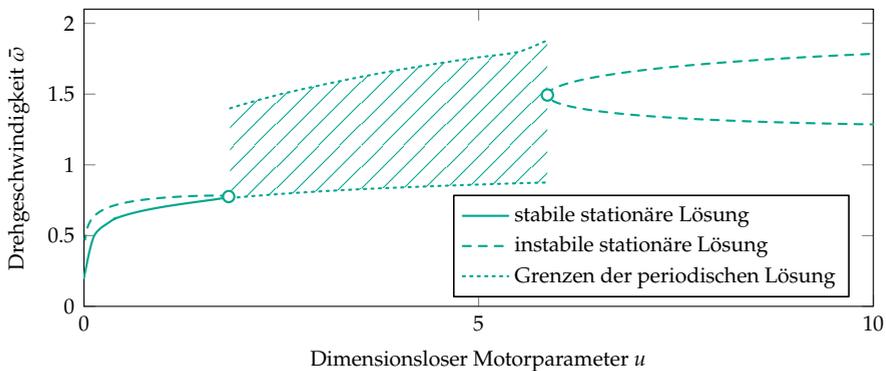


Abbildung 5.7: Stationäre Lösungen vom Typ II und die Grenzen der periodischen Lösung in Abhängigkeit des Motorparameters u

Bei niedrigeren Werten des radialen Dämpfungskoeffizienten σ , für die $u_1^* > u_2^*$ gilt, unterscheidet sich das Phasenportrait im Bereich $u < u_2^*$ qualitativ nicht vom vorherigen Fall. Im unterkritischen Bereich gibt es nach wie vor zwei stationäre Lösungen, einen stabilen Knoten (SK_1) und einen Sattelpunkt (SP_1), die durch zwei Heteroklinen in einem geschlossenen Kreis miteinander verbunden sind (vgl. Abb. 5.8a).

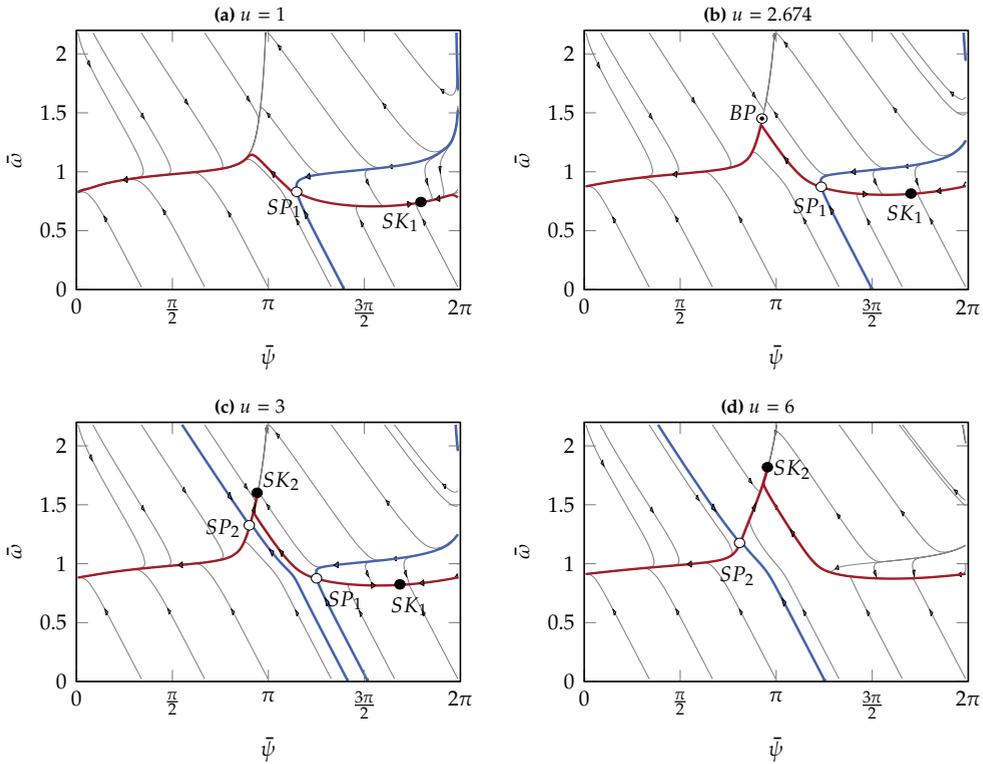


Abbildung 5.8: Entwicklung des Phasenraums des Subsystems $\delta = 0$ für steigende Werte des Motorparameters u bei $\sigma = 0.05$

Die kompensierende Lösung $\bar{\omega} = 2$, sowie die instabile Lösung $\bar{\delta} = \pi$ sind in der Abbildung nicht dargestellt, da sie außerhalb der Phasenfläche $\bar{\delta} = 0$ liegen.

Erreicht der Motorparameter u einen kritischen Wert u_2^* , bildet sich in unmittelbarer Nähe einer der Heteroklinen eine neue stationäre Lösung (BP) (siehe Abb.5.8b), die weiter in einen stabilen¹ Knoten (SK_2) und einen Sattelpunkt (SP_2) zerfällt. Dies führt zu einem Brechen der Heteroklinen, die die stationären Punkte im unterkritischen Drehgeschwindigkeitsbereich miteinander verbindet. Nun bewegt sich eine der ausgehenden Separatrizen des Sattelpunktes SP_1 auf den Knoten SK_2 im überkritischen Bereich zu und der stabile Knoten SK_1 im unterkritischen Bereich ist durch eine Heterokline zudem mit dem überkritischen Sattelpunkt SP_2 verbunden (vgl. Abb. 5.8c)). So wird eine geschlossene, aus Heteroklinen bestehende Umlaufbahn nach dem Verschwinden des Paares von unterkritischen stationären Lösungen nicht kontinuierlich und die periodische Lösung tritt nicht auf (vgl. Abb. 5.8d)).

¹ Diese Lösung ist nur im Subsystem $\delta = 0$ stabil.

Das Verhalten des Systems ist keineswegs auf das zuvor beschriebene Szenario der Phasenraumentwicklung beschränkt. In [20] wurde ein Parametersatz untersucht, bei dem die periodische Lösung mit dem Paar von stationären Lösungen im überkritischen Drehzahlbereich in einem beträchtlichen Bereich des Motorparameters u koexistieren kann. Ein solcher Parametersatz und entsprechende Phasendiagramme finden sich in Anhang A. In diesem Fall tritt das zweite Paar stationärer Lösungen bei $u = u_2^*$ in ausreichender Entfernung vom periodischen Orbit auf. Erst wenn der Motorparameter u weiter erhöht wird, bewegt sich der Sattelpunkt auf die periodische Lösung zu und „zieht“ sie gleichzeitig an sich. Erreicht der Motorparameter u den dritten kritischen Wert u_3^* , schneidet der Sattelpunkt die periodische Trajektorie und zerstört diese. Diese globale Bifurkation scheint näher an die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene homoklinische Bifurkation zu sein, ist aber nicht identisch mit dieser. Bei der klassischen homoklinischen Bifurkation wird der Grenzzyklus um einen instabilen Fokus gebildet. Im vorliegenden Fall ist die Geschlossenheit des Grenzzyklus durch die zylindrische Form der Phasenfläche gegeben.

Die Frage des Übergangs zwischen den beiden beschriebenen Szenarien des Verschwindens der periodischen Lösung ist nicht untersucht worden und bleibt offen.

5.4 Stabilität der periodischen Lösung

Obwohl die periodische Lösung im Subsystem $\delta = 0$ stabil ist, kann die Konfiguration mit zusammenfallenden Pendeln selbst die Stabilität verlieren. Zur Beurteilung der Stabilität der periodischen Lösung $\bar{\omega} = \Omega(\phi)$, $\bar{\psi} = \Psi(\phi)$, $\bar{\delta} = 0$ werden die Gleichungen (4.60)-(4.62) in der Nähe dieser periodischen Lösung linearisiert. Die periodische Lösung selbst kann numerisch gefunden werden, z.B. mit Hilfe eines Schieß- oder eines Kollokationsverfahrens (siehe zum Beispiel [56], [9]). Es ergibt sich ein System von linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten der Struktur

$$\Delta \bar{\omega}' = \left. \frac{dF_\omega}{d\bar{\omega}} \right|_{\bar{\omega}=\Omega, \bar{\psi}=\Psi, \bar{\delta}=0} \Delta \bar{\omega} + \left. \frac{dF_\omega}{d\bar{\psi}} \right|_{\bar{\omega}=\Omega, \bar{\psi}=\Psi, \bar{\delta}=0} \Delta \bar{\psi}, \quad (5.19)$$

$$\Delta \bar{\psi}' = \left. \frac{dF_\psi}{d\bar{\psi}} \right|_{\bar{\omega}=\Omega, \bar{\psi}=\Psi, \bar{\delta}=0} \Delta \bar{\psi} + \left. \frac{dF_\psi}{d\bar{\omega}} \right|_{\bar{\omega}=\Omega, \bar{\psi}=\Psi, \bar{\delta}=0} \Delta \bar{\omega}, \quad (5.20)$$

$$\Delta \bar{\delta}' = \left. \frac{dF_\delta}{d\bar{\delta}} \right|_{\bar{\omega}=\Omega, \bar{\psi}=\Psi, \bar{\delta}=0} \Delta \bar{\delta}, \quad (5.21)$$

wobei $F_\omega(\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\delta})$, $F_\psi(\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\delta})$, $F_\delta(\bar{\omega}, \bar{\psi}, \bar{\delta})$ die rechten Seiten der Gleichungen (4.60), (4.61) bzw. (4.62) bezeichnen.

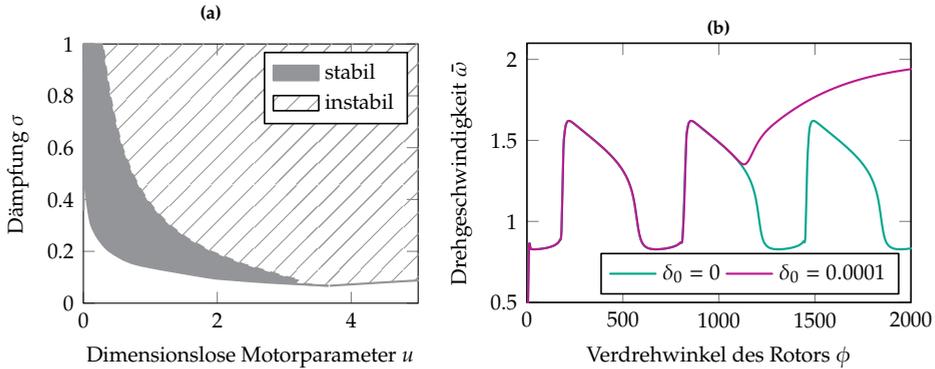


Abbildung 5.9: Der Existenz- und Stabilitätsbereich der periodischen Lösung (a) und Drehgeschwindigkeitsverlauf für verschiedene Werte des Anfangsöffnungswinkels δ_0 im Falle einer instabilen periodischen Lösung ($u = 3.5, \sigma = 0.1$) (b)

Es ist zu beachten, dass die Gleichung (5.21), die den Öffnungswinkel der Auswuchtpendel in der Nähe der periodischen Lösung beschreibt, vollständig von den Gleichungen (5.19), (5.20) entkoppelt ist:

$$\Delta\bar{\delta}' = \frac{\mu\Omega^3\Delta\bar{\delta}}{\beta_p((1-\Omega^2)^2 + 4\Omega^2\sigma^2)} (2s\Omega\sigma \sin(\Psi) - (s \cos(\Psi) + 2)(1 - \Omega^2)) . \quad (5.22)$$

Aus der numerischen Berechnung der Floquet-Multiplikatoren ergibt sich, dass die Stabilität der periodischen Lösung allein durch die Stabilität der Lösung der Gleichung (5.22) bestimmt wird. Daher muss lediglich ein Floquet-Multiplikator berechnet werden, um die Stabilität abzuschätzen. Die Existenz- und Stabilitätsbereiche der periodischen Resonanzlösung des Systems sind in Abbildung 5.9a dargestellt.

Das Verhalten des Systems während des Hochlaufs im Falle der Existenz einer instabilen periodischen Lösung ist in Abb. 5.9b dargestellt. Eine kleine Abweichung der Anfangsbedingungen von $\delta_0 = 0$ führt zu einem zunehmenden Öffnungswinkel zwischen den Auswuchtpendeln. Die Rotordrehzahl kann sehr lange in der Nähe der modulierten Resonanzlösung verbleiben, bis der Öffnungswinkel einen kritischen Wert erreicht, infolgedessen das System schnell zur stabilen kompensierenden Lösung konvergiert (vgl. lilafarbene Linie auf Abb. 5.9b).

5.5 Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung

Die Koexistenz mehrerer stabiler Lösungen motiviert zu einer sorgfältigen Analyse ihrer Einzugsgebiete. Der Begriff „Einzugsgebiet“ wird in diesem Abschnitt nicht im klassischen Sinne verwendet, da die Anfangsbedingungen für eine der drei Systemva-

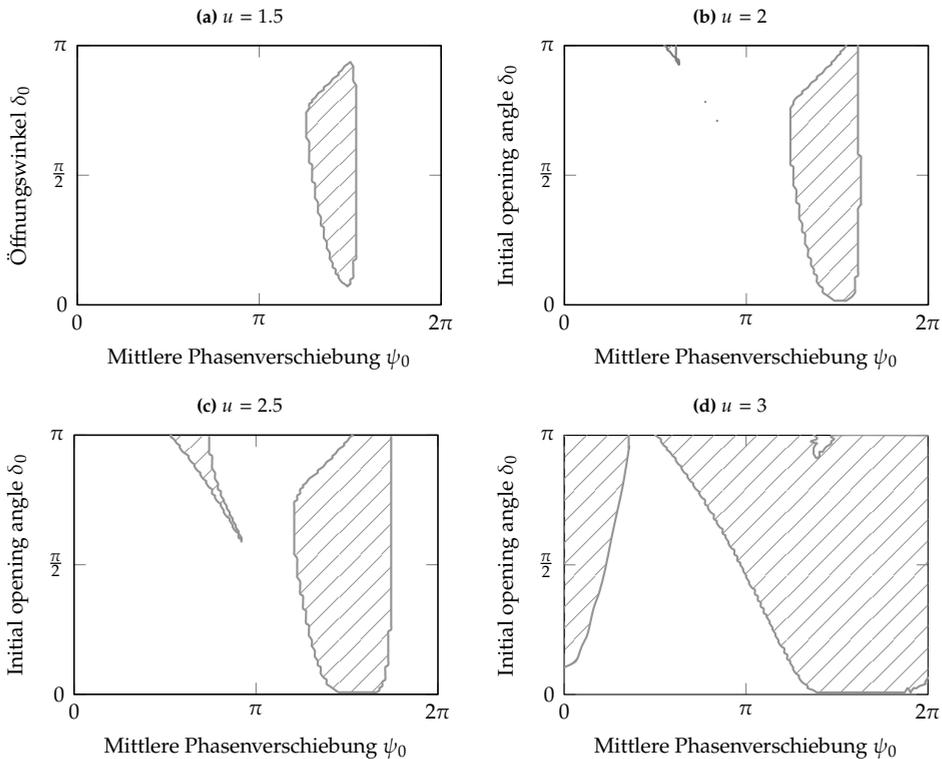


Abbildung 5.10: Einzugsgebiete der kompensierenden Lösung (schraffierter Bereich) für verschiedene Werte des Motorparameters u

riablen – die Rotordrehzahl $\bar{\omega}$ – nicht variiert werden. Alle angegebenen Diagramme beziehen sich auf die Beschleunigung des Rotors aus dem Stillstand, d.h.

$$\bar{\omega}(\phi = 0) = 0, \quad (5.23)$$

was eine natürliche Anfangsbedingung beim Start der rotierenden Maschine ist. Bei kleineren Werten des Motorparameters u ist die Realisierung einer kompensierenden Lösung vom Typ *I* nur dann möglich, wenn die Anfangsbedingungen für die Auswuchtpendel in einem kleinen Bereich nahe der Kompensationskonfiguration gewählt werden ($\bar{\psi} = \pi$, $\bar{\delta} = 0.38\pi$ für den betrachteten Parametersatz aus Tabelle 5.1). Der schattierte Bereich in Abb. 5.10a zeigt das Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung. Liegen die Anfangsbedingungen außerhalb des schattierten Bereichs, wird das System in der Resonanz mit einer konstant hohen Amplitude der Rotordrehachse gefangen.

Mit einer Zunahme des Motorparameters u nimmt auch das Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung zu bzw. wird größer (vgl. Abb. 5.10b - 5.10d). Überschreitet der Motorparameter u jedoch den kritischen Wert u_1^* , wird das System bei Anfangsbedingungen außerhalb des schattierten Bereichs in einer nicht stationären stark modulierten Resonanzlösung mit einer deutlich höheren Amplitude der Rotordrehachse hängen bleiben.

Überschreitet der Motorparameter u die Stabilitätsgrenze der periodischen Lösung, wird das Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung global, mit Ausnahme von Geraden bei $\delta = 0$. Theoretisch kann das System im Falle der idealen Erfüllung der Anfangsbedingungen $\delta_0 = 0$ während endlicher Zeit die kompensierende Lösung nicht erreichen und bleibt in der Nähe der instabilen periodischen Lösung hängen. Dieses Szenario wird jedoch in der Praxis nicht realisiert. Die geringste Abweichung von den Anfangsbedingungen führt dazu, dass das System die Oberfläche $\delta = 0$ verlässt und zur kompensierenden Lösung übergeht. Die Zeit, die das System hierfür benötigt kann jedoch in Abhängigkeit der Ausgangsbedingungen stark variieren.

5.6 Untersuchung der Approximationsqualität durch das reduzierte System

Die in Kapitel 4 hergeleiteten Gleichungen der langsamen Dynamik des Selbstausschwingungssystems sind eine Approximation mit einem hohen Grad der Modellreduktion, wobei die Ordnung des Differentialgleichungssystems von zehn auf drei reduziert wurde. Im folgenden Abschnitt wird die Qualität dieser Approximation diskutiert und die Ergebnisse der numerischen Lösungen des vollständigen und des genäherten Gleichungssystems werden verglichen. Im ersten Teil des Abschnitts wird die Qualität der Approximation anhand des in dieser Arbeit verwendeten Standardsatz von Parametern diskutiert. Der zweite Teil befasst sich mit dem Einfluss der breiten Variation der wichtigsten Parameter auf die Konvergenz der Lösungen. Das Ziel ist, zu prüfen, ob und wie weit die mathematisch abgesteckten Parameterbereiche in der Realität ausgeweitet werden können.

5.6.1 Allgemeine Anmerkungen

Die in Abschnitt 5.2 dargestellten Verläufe des Hochlaufs des Rotors zeichnen sich sowohl durch gute qualitative als auch quantitative Übereinstimmungen der Lösungen des reduzierten und des vollständigen Gleichungssystems aus (vgl. Abb. 5.4). In einigen Fällen, die im Folgenden eingehender behandelt werden, kann die Diskrepanz jedoch erheblich werden.

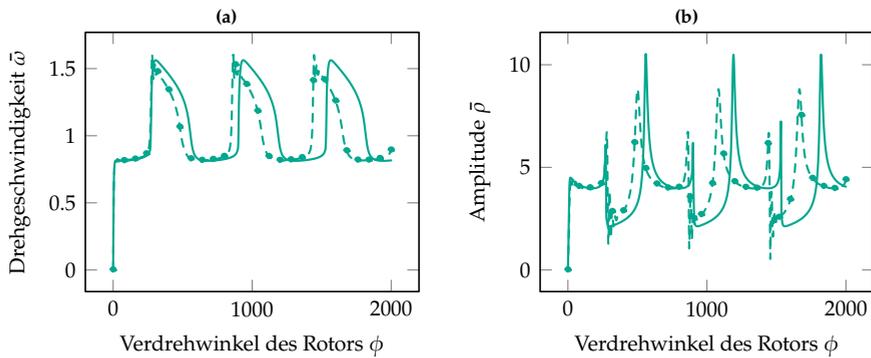


Abbildung 5.11: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (- - -) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) im Falle einer nicht stationären Resonanz

Abbildung der periodischen Lösung

Abb. 5.11 zeigt die Verläufe von Drehzahl und Amplitude der Rotorachse im Falle des Einfangens des Systems in nichtstationärer Resonanz. Es kann festgestellt werden, dass die entstehende periodische Lösung des vollständigen Gleichungssystems durch eine etwas höhere Modulationsfrequenz im Vergleich zum Näherungssystem gekennzeichnet ist. Dies führt zu einer Zunahme des absoluten Fehlers bei großen Werten der unabhängigen Variablen.

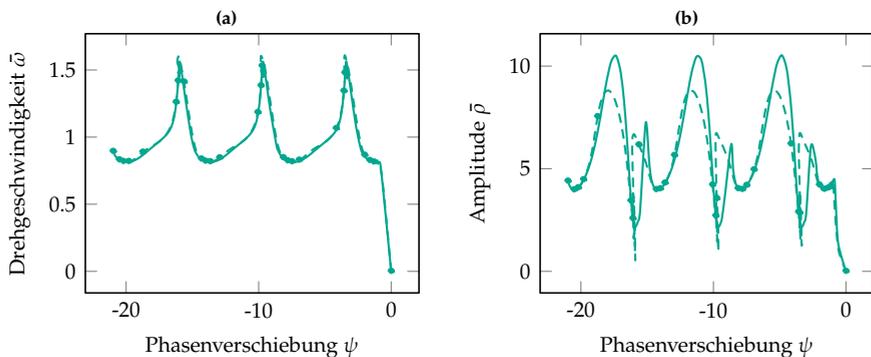


Abbildung 5.12: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (- - -) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) in Abhängigkeit von der mittleren Phasenverschiebung ψ im Falle einer nicht stationären Resonanz

Wird die Entwicklung der Drehzahl und der Amplitude in Abhängigkeit von der mittleren Phasenverschiebung aufgetragen, sind die Kurven der Rotationsgeschwindigkeit

des vollständigen und des angenäherten Systems nahezu identisch (vgl. Abb. 5.12a). Der Phasenfehler in Amplitudenkurven verschwindet ebenfalls (vgl. Abb. 5.12b) und der Fehler im absoluten Amplitudenwert scheint nur in dem Bereich signifikant zu sein, in dem die Rotordrehzahl nahe der Resonanz liegt und die erzwungenen Lösungen der Form (4.55),(4.56) können das Verhalten der Rotorachse nicht mit ausreichender Genauigkeit beschreiben. Daraus lässt sich schließen, dass der Fehler in der Frequenz der periodischen Lösung durch einen kleinen Fehler bei der Bestimmung der gemittelten Phasenverschiebung $\bar{\psi}$ verursacht wird.

Dieser Unterschied in der Frequenz steht jedoch nicht im Widerspruch zur erwarteten Genauigkeit der verwendeten asymptotischen Methode. Das Mittelwertbildungsverfahren garantiert die Konvergenz auf einem asymptotisch langen Intervall der unabhängigen Variablen der Größenordnung $O(1/\epsilon)$.

Im verwendeten Parametersatz sind die beiden kleinen Parameter $\epsilon = \mu = 0.01$ angenommen worden. Dies bedeutet, dass eine hohe Genauigkeit für das ϕ -Intervall der Größenordnung $O(100)$ erwartet werden kann, was im vorliegenden Fall auch erfüllt ist.

Umgebung einer instabilen Lösung

Im Falle einer instabilen periodischen Resonanzlösung im System und der Wahl von Anfangsbedingungen in der Nähe dieser Lösung tendiert das vollständige System dazu, länger in der Nähe der instabilen Lösung zu verbleiben als das Näherungssystem (vgl. Abb. 5.13).

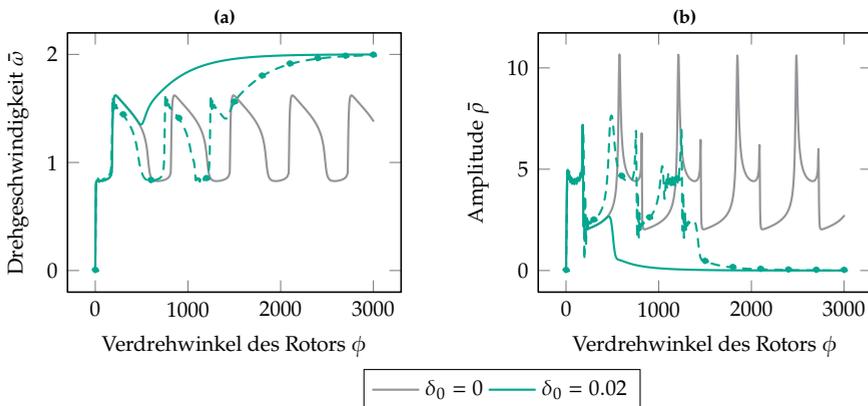


Abbildung 5.13: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (- - -) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse \bar{p} (b) in der Nähe einer instabilen periodischen Lösung, die durch $\delta_0 = 0$ gekennzeichnet ist

Gleichzeitig beschreibt das Näherungssystem das qualitative Verhalten des vollen Systems noch korrekt und konvergiert am Ende zur kompensierenden Lösung. Ein signifikanter Unterschied zwischen den Lösungen wird nur außerhalb des Konvergenzintervalls der Mittelwertbildung erkennbar.

Grenze des Einzugsgebiets

Im Falle der Auswahl der Anfangsbedingungen in der Nähe der Grenze des Einzugsgebiets verschiedener Arten von Lösungen können die Lösungen vollständiger und angenäherter Systeme voneinander divergieren (vgl. Abb. 5.14).

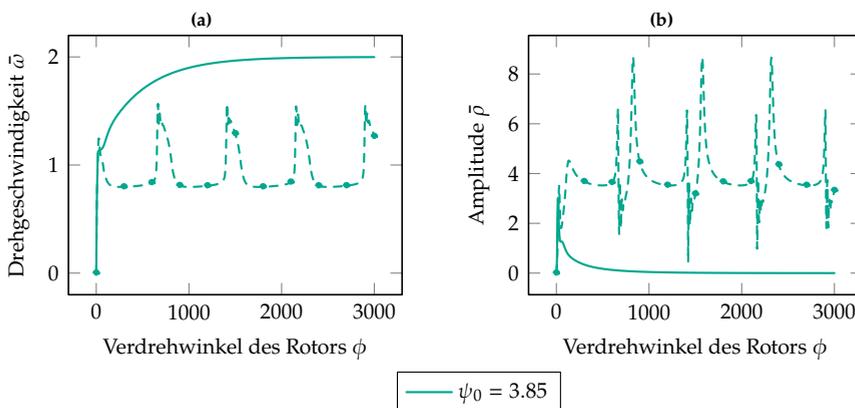


Abbildung 5.14: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (- - -) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) bei Anfangsbedingungen in der Nähe einer Grenze der Einzugsgebiete

Die Grenze des Einzugsgebiets selbst kann mit Hilfe eines Näherungssystems von Gleichungen nur mit einer Genauigkeit in der Größenordnung von $\mathcal{O}(\varepsilon)$ bestimmt werden. In der ε -Umgebung der gefundenen Grenze ist es daher unmöglich, die Lösung des Systems zuverlässig vorherzusagen.

Bei einem geringen Abstand der Anfangsbedingungen von der Grenze des Einzugsgebiets in beliebiger Richtung stimmen jedoch die Lösungen beider Gleichungssysteme wieder überein (vgl. Abb. 5.15).

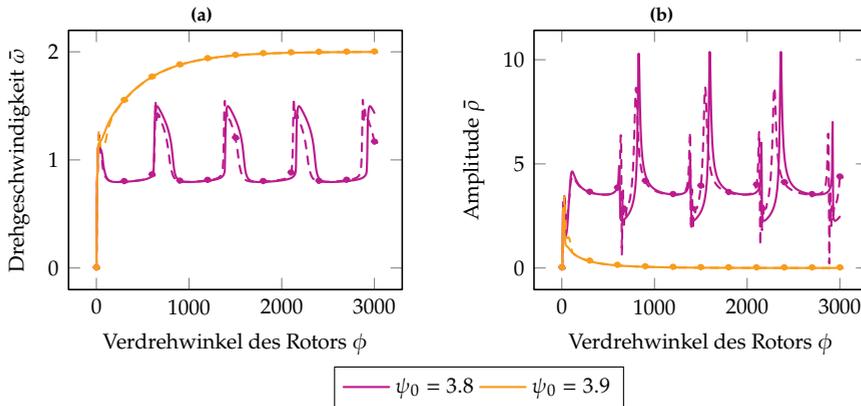


Abbildung 5.15: Vergleich der numerischen Simulationsergebnisse des reduzierten (—) und des ursprünglichen vollen (---) Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) bei Anfangsbedingungen in der Nähe einer Grenze der Einzugsgebiete

5.6.2 Einfluß der Systemparameter

Eine Variation der Modellparameter in einem weiten, über die Gültigkeitsgrenzen des mathematischen Verfahrens hinausgehenden Bereich kann dazu führen, dass die zu vergleichenden Lösungen qualitativ unterschiedlich ausfallen. In solchen Fällen ist es schwierig, die Konvergenz auf Grundlage der direkten Betrachtung von Zeitverläufen der Variablen zu bewerten. Daher werden im Folgenden die absoluten Abweichungen der Lösungen des reduzierten Systems von den Lösungen des vollständigen Gleichungssystems für die Drehgeschwindigkeit des Rotors

$$\Delta\omega_a = |\omega(\phi) - \bar{\omega}(\phi)| \quad (5.24)$$

und die Amplitude der Schwingungen der Rotorachse

$$\Delta\rho_a = |\rho(\phi) - \bar{\rho}(\phi)| \quad (5.25)$$

analysiert. Weiterhin wird der Einfluss der vier für die Konvergenz der verwendeten asymptotischen Methode maßgeblichen Parameter untersucht: Dämpfungskoeffizienten σ und b_r sowie die kleinen Parameter μ und ε .

Einfluß der radialen Dämpfung σ

Die Abweichungen der Lösungen des reduzierten Systems von den Lösungen des vollständigen Gleichungssystems für verschiedene Werte des radialen Dämpfungskoeffizienten σ sind in Abb. 5.16 dargestellt.

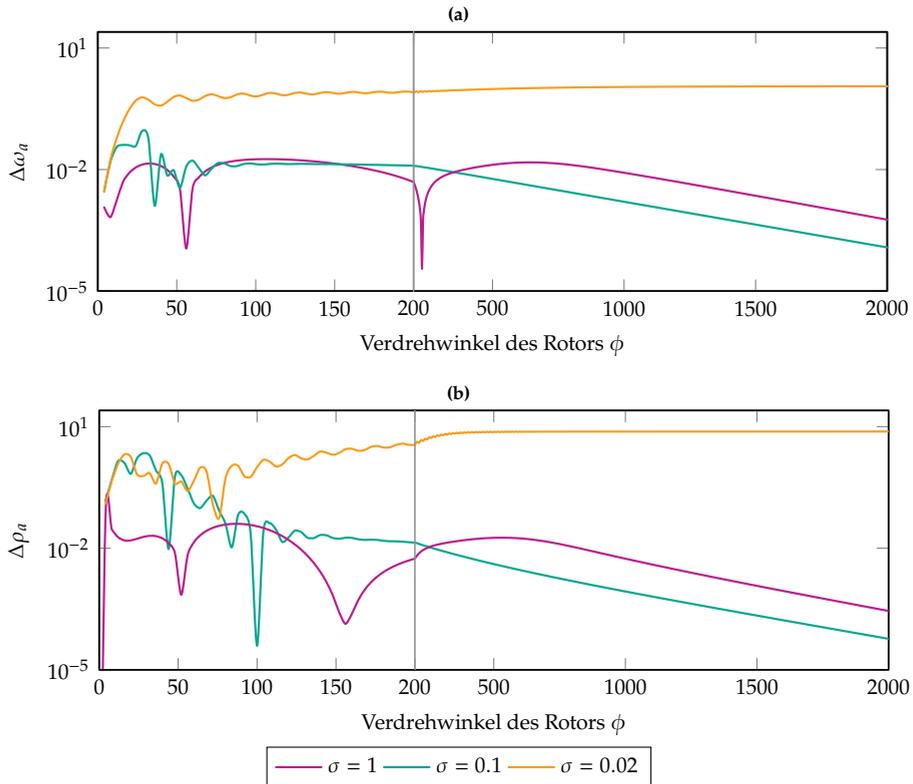


Abbildung 5.16: Die absolute Abweichung zwischen dem reduzierten und dem ursprünglichen vollen Gleichungssystem für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) bei verschiedenen Werten des Dämpfungsparameters σ

Eine Erhöhung des als nicht klein angenommenen radialen Dämpfungsfaktors σ führt zu einer leicht verbesserten Qualität der Approximation der Lösung. Liegt der radiale Dämpfungsfaktor σ nahe am Wert kleiner Parameter (im vorliegenden Fall $\varepsilon = \mu = 0.01$), führt die Fehlerzunahme beim Durchgang durch die Resonanz zur Divergenz der Lösungen des reduzierten und des vollständigen Systems. Daraus lässt sich schließen, dass die erhaltene Approximation für die Analyse der Dynamik von schwach gedämpften Systemen nicht geeignet ist.

Einfluß der Rotationsdämpfung b_r

Da der Drehdämpfungsfaktor in zwei dimensionslosen Parametern β_p und β_r enthalten ist, werden diese beiden Parameter in den nachfolgenden Berechnungen mit dem gleichen Faktor multipliziert.

Die Ergebnisse der Variation der Rotationsdämpfung sind in Abb. 5.17 dargestellt.

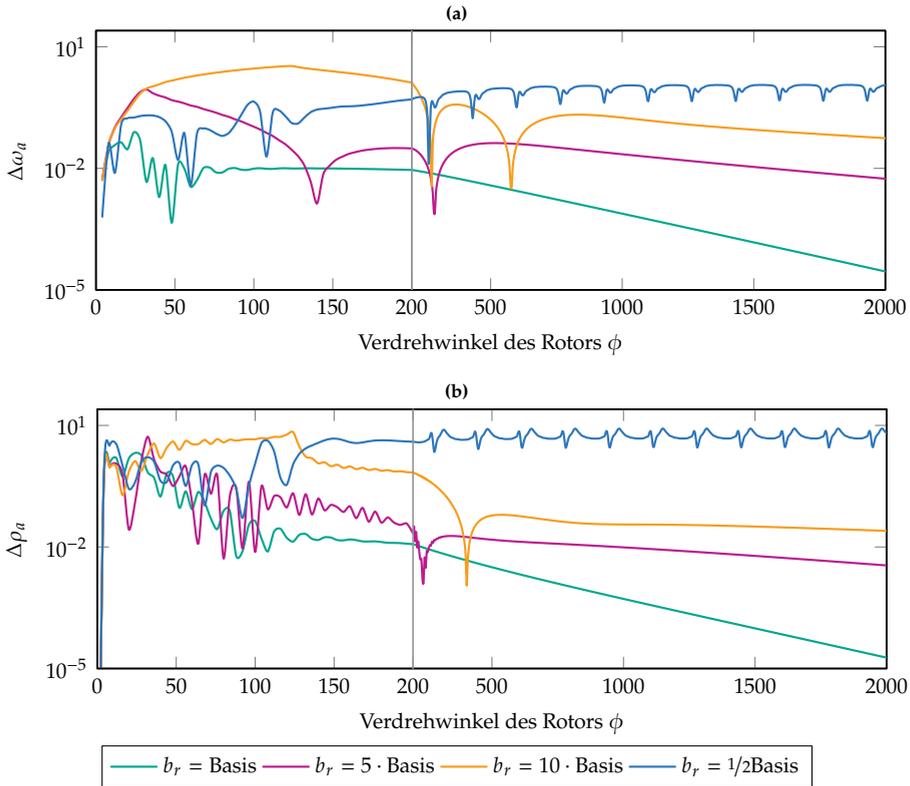


Abbildung 5.17: Die absolute Abweichung zwischen dem reduzierten und dem ursprünglichen vollen Gleichungssystem für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse \bar{p} (b) bei verschiedenen Werten des Dämpfungsparameters b_r

Die Analyse der Ergebnisse zeigt, dass sowohl eine signifikante Erhöhung als auch eine signifikante Reduktion der Rotationsdämpfung zu einer Verschlechterung der Approximationsqualität führt. Ein möglicher Grund ist, dass die Rotationsdämpfung bezogen auf das Trägheitsmoment von Auswuchtpendeln β_p viel größer ist als die Dämpfung bezogen auf das Trägheitsmoment des Rotors β_r . So führt eine signifikante Erhöhung des Koeffizienten b_r dazu, dass der Parameter β_p im Vergleich zu den anderen

Parameter der Gleichungen nicht von der Größenordnung $O(1)$, sondern wesentlich größer ist. Eine signifikante Reduzierung des Koeffizienten b_r führt zu einer Senkung des Parameters β_r auf ein Niveau, das mit kleinen Parametern des Systems ε und μ vergleichbar ist. In beiden Fällen sind die Voraussetzungen für die Anwendung asymptotischer Methoden verletzt.

Einfluß des Unwuchtgrades ε

Abb. 5.18 zeigt die Fehlerverläufe in Drehgeschwindigkeit und Amplitude für die verschiedenen Werte des Parameters ε . Hohe Werte dieses Parameters entsprechen Anwendungen mit signifikanter Unwucht (z.B. Waschmaschinen), niedrige Werte dagegen Systemen mit geringer Restunwucht (z.B. optische Laufwerke).

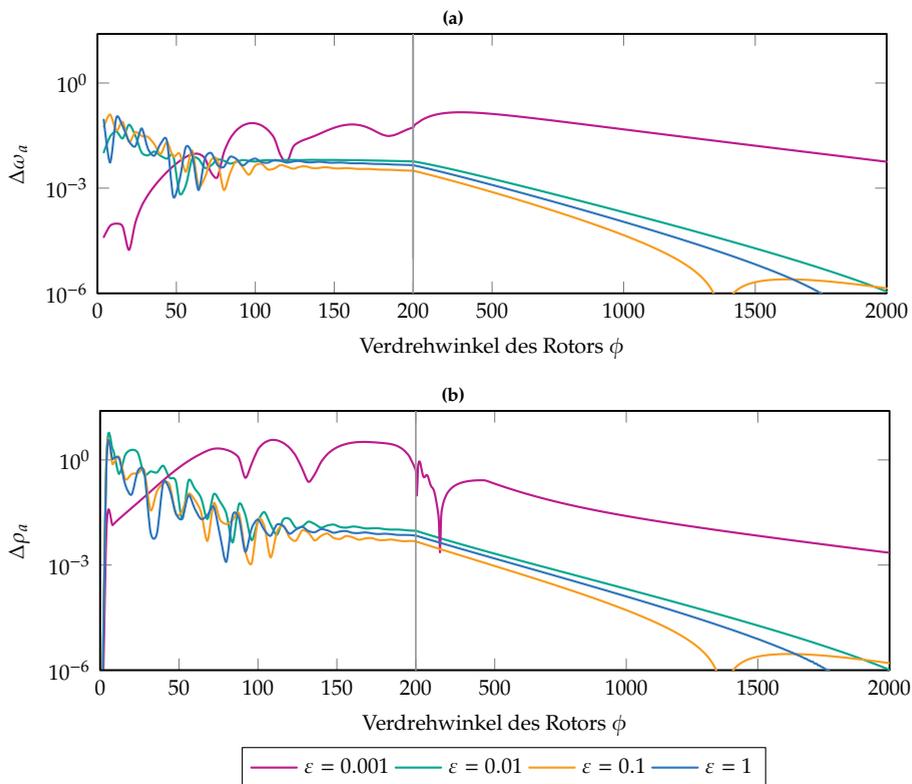


Abbildung 5.18: Die absolute Abweichung zwischen dem reduzierten und dem ursprünglichen vollen Gleichungssystem für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) bei verschiedenen Werten des kleinen Parameters ε

Eine Erhöhung des Parameters ε bis zu einem Grenzwert $\varepsilon = 1$ führt nur zu einer geringfügigen Änderung des absoluten Fehlers unter Beibehaltung seiner Größenordnung. In Anbetracht der lilafarbenen Kurven in Abb. 5.18, mag es scheinen, dass eine starke Verringerung des Parameters ε zu einem Anstieg des absoluten Fehlerwertes führt, was jedoch nicht der Fall ist. Die Reduktion eines kleinen Parameters um eine Größenordnung führt lediglich zu einer Erhöhung der Dauer der transienten Vorgänge. Deshalb werden die Fehlerkurven entlang der ϕ -Achse "gestreckt", die Maximalwerte der Fehler bleiben dabei im gleichen Bereich wie bei höheren Werten des Parameters ε . Somit hat die Änderung des Parameters Epsilon praktisch keinen Einfluss auf die Qualität der Approximation mittels des Näherungssystems. Dies ermöglicht es, die hergeleiteten Gleichungen der langsamen Dynamik für die Analyse von Systemen sowohl mit signifikanter als auch mit kleiner Unwucht zu verwenden.

Einfluß des Massenverhältnisses μ

Die Variation des Parameters μ ist konstruktiv begrenzt. Hohe Werte dieses Parameters bedeuten, dass die Masse des Auswuchtsystems mit der des auszuwuchtenden Rotors vergleichbar ist, was in den meisten Fällen nicht erwünscht ist. Eine signifikante Verringerung dieses Parameters bedeutet, dass die radialen Abmessungen der Auswuchtpendel deutlich erhöht werden müssen, um einen vollständigen Unwuchtausgleich zu ermöglichen.

Die Ergebnisse der Fehlerberechnung für die verschiedenen Werte des Parameters μ sind in Abb. 5.19 dargestellt. Eine Reduktion des Parameters μ um den Faktor zehn hat nahezu keinen Einfluss auf den Approximationsfehler. Eine Verzehnfachung des Parameters führt zu einer merkbaren Erhöhung des Fehlers im Interval der Veränderung von der als unabhängig betrachteten Variable ϕ , in dem das Mittelwertbildungsverfahren gültig ist. Diese Erhöhung des Fehlers bleibt in Übereinstimmung mit der erwarteten Genauigkeit des reduzierten Modells.

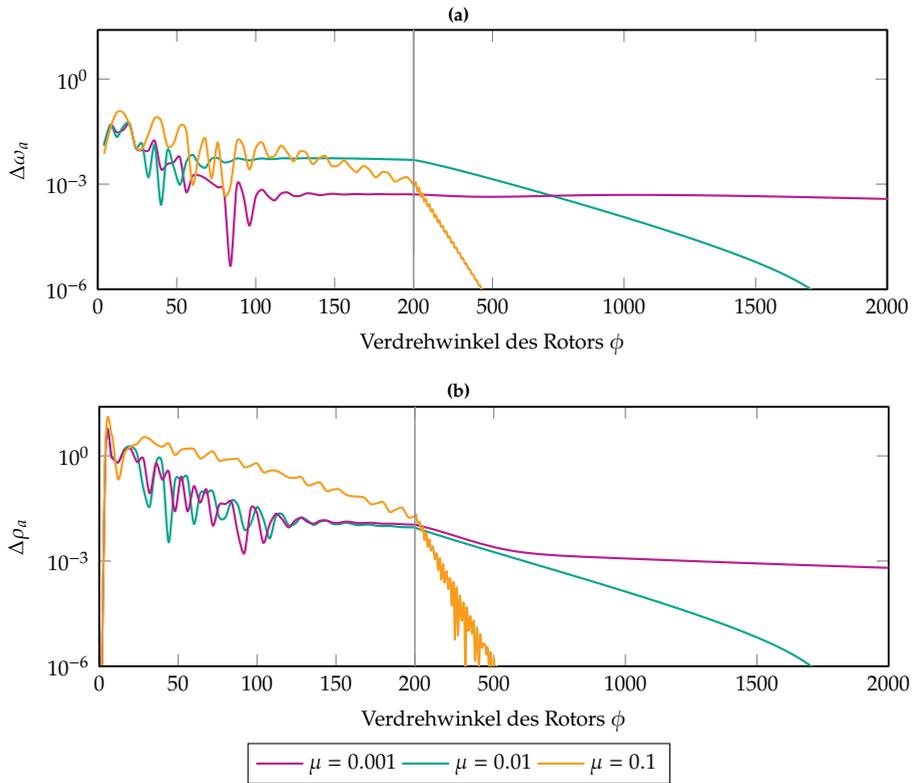


Abbildung 5.19: Die absolute Abweichung zwischen dem reduzierten und dem ursprünglichen vollen Gleichungssystem für die Drehgeschwindigkeit des Rotors (a) und die Schwingungsamplitude der Rotordrehachse $\bar{\rho}$ (b) bei verschiedenen Werten des kleinen Parameters μ

6 Mögliche technische Anwendungen

Die durchgeführte dynamische Analyse hat gezeigt, dass die Verwendung des einfachsten Selbstauswuchtsystems mit starren Pendeln dazu führen kann, dass das System in der Resonanz hängen bleibt. In diesem Fall wird die Realisierung der Hauptfunktion dieses Systems praktisch unmöglich, und daher ist sein Einsatz in der betrachteten Form zum Auswuchten von Rotoren und zur Reduktion des Schwingungsniveaus nicht zielführend.

Im ersten Teil des folgenden Kapitels wird eine mögliche Änderung der Konstruktion von Auswuchtpendeln vorgestellt, die den negativen Einfluss des Selbstauswuchtsystems auf die Rotordynamik im Vor- und Resonanzbereich deutlich reduzieren kann, was die Anwendung von Selbstauswuchtsystemen erheblich erweitert.

Der zweite Teil des Kapitels befasst sich mit einer möglichen Anwendung des Phänomens des nichtstationären Hängenbleibens in der Resonanz bei der Festigkeitsprüfung von Maschinenbauteilen.

6.1 Selbstauswuchtsystem mit schaltbaren Auswuchtpendeln

Selbst im Falle eines Systems mit leistungsstarkem Antrieb, in dem das System in der Lage ist, durch die Resonanz durchzugehen, fallen die Schwingungsamplituden des Rotors mit einem Selbstauswuchtsystem wesentlich höher aus als im Falle eines Rotors ohne ein derartiges System (vgl. Abb. 6.1), was für eine praktische Umsetzung inakzeptabel ist.

Um die negativen Auswirkungen des Selbstauswuchtsystems während des Hochlaufs des Rotors zu vermeiden oder zumindest zu verringern, kann eine in [19] vorgeschlagene Konstruktion der schaltbaren Auswuchtpendel verwendet werden. Ein schaltbares Auswuchtpendel besteht aus einem starren Rahmen und einer darin beweglichen Masse. Die Masse ist dabei mithilfe einer Feder derart vorgespannt, dass das Gesamtkonstrukt des Auswuchtpendels im unterkritischen Geschwindigkeitsbereich vollständig ausgewuchtet ist (vgl. Abb. 6.2a).

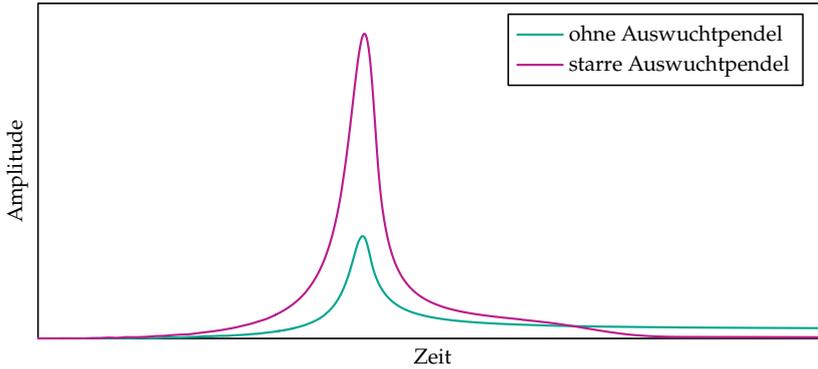


Abbildung 6.1: Qualitativer Amplitudenverlauf der Wellenschwingungen eines Rotors mit und ohne Selbsauswuchtsystem

Die Amplitudenkurve des Rotors mit solchen Auswuchtpendeln folgt im unterkritischen Drehzahlbereich der Kurve des Rotors ohne Selbstausswuchtsystem (vgl. Abb.6.2b). Im überkritischen Drehzahlbereich wird die durch die Feder vorgespannte Masse aufgrund der Fliehkraft nach außen gedrückt, wodurch die Unwucht entsteht (vgl. Abb. 6.2a unten)¹. Nun kann die Unwucht des Rotors kompensiert werden.

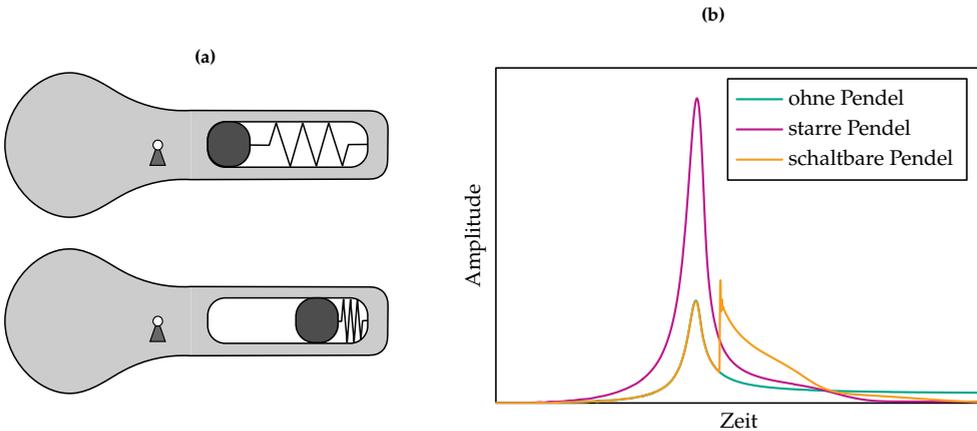


Abbildung 6.2: Schaltbare Auswuchtpendel im unterkritischen (oben) bzw. überkritischen (unten) Drehzahlbereich (a) und qualitativer Amplitudenverlauf der Wellenschwingungen eines Rotors mit starren und schaltbaren Auswuchtpendeln und ohne Selbsauswuchtsystem

Eine schnelle Änderung der Systemparameter führt jedoch zu einem transienten Prozess mit einer ziemlich hohen Schwingungsamplitude (vgl. Abb. 6.2b). Die Spitzenamplitude

¹ Ein ähnliches Prinzip wurde von Rezaee und Fathi in [66] vorgeschlagen, um die Dynamik des Selbstausswuchtsystems vom Kugeltyp zu verbessern.

und die Dauer dieses transienten Vorgangs hängt jedoch stark von der Ausrichtung der Auswuchtpendel zueinander kurz vor dem Eintritt in die Resonanzzone ab (vgl. Abb. 6.3b). Die Ausrichtung in die entgegengesetzten Richtungen (vgl. Abb. 6.3a) erscheint besonders vorteilhaft zu sein.

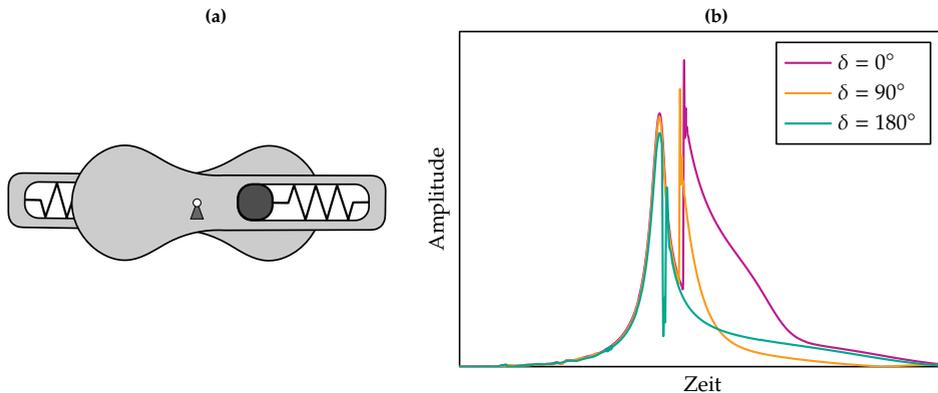


Abbildung 6.3: Vorteilhafte Ausrichtung der Auswuchtpendel vor der Aktivierung des Schaltmechanismus (a) und qualitativer Amplitudenverlauf der Wellenschwingungen bei verschiedenen Orientierungen der schaltbaren Auswuchtpendel (b)

In dieser Konfiguration kompensieren sich die Auswuchtpendel gegenseitig, was zu einer deutlichen Verringerung der Amplitude der Spitzenwerte im Amplitudenverlauf führt.

Allerdings ist fraglich, wie diese Konfiguration kurz vor der Aktivierung der Auswuchtpendel sichergestellt werden kann. Es kann sich hierfür anbieten, die natürliche Dynamik des Systems im unterkritischen Drehgeschwindigkeitsbereich zu nutzen. Die Idee besteht darin, eins von beiden Auswuchtpendeln mit einer kleinen permanenten Unwucht in Richtung der schaltbaren Hauptunwucht auszulegen und das andere Auswuchtpendel mit einer um 180° phasenverschobenen kleinen Unwucht (vgl. Abb. 6.4a). Im unterkritischen Bereich sind die kleinen Unwuchtmassen bestrebt, die gleiche Phasenlage (Konfiguration II) zu erreichen (vgl. Abb. 6.4b oben). Dies führt dazu, dass die schaltbaren Hauptunwuchten sich während der Aktivierung in entgegengesetzten Richtungen bewegen und sich gegenseitig kompensieren (vgl. Abb. 6.4b unten).

Die kleineren zusätzlichen Unwuchten erhöhen zwar leicht die Schwingungsamplitude im unterkritischen Bereich und bei der Resonanz, helfen aber die ideale Ausrichtung der Hauptpendel zu erreichen und tragen dadurch maßgeblich dazu bei, einen langen transienten Prozess mit hohen Amplitude durch die Aktivierung der Hauptpendel zu vermeiden (vgl. Abb. 6.5).

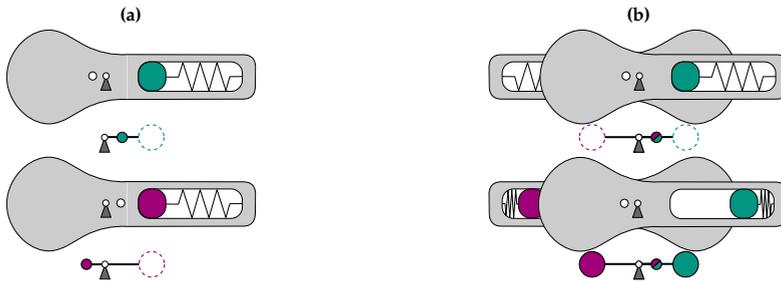


Abbildung 6.4: Schaltbare Auswuchtpendel mit kleinen zusätzlichen Unwuchten (a) und deren relative Position kurz vor und nach der Aktivierung (b)

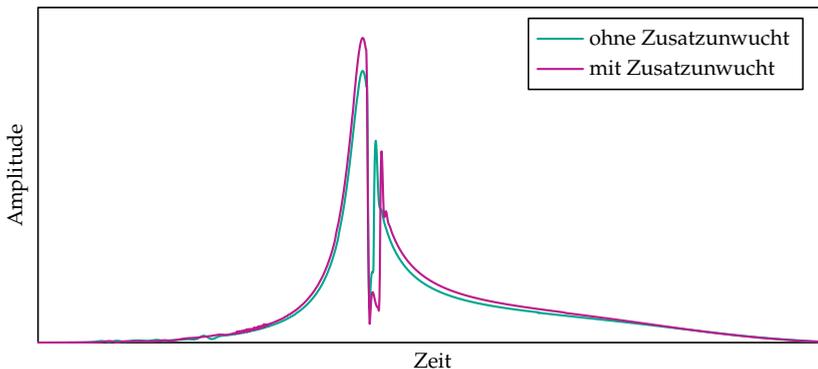


Abbildung 6.5: Qualitativer Amplitudenverlauf der Wellenschwingungen mit ideal ausgerichteten schaltbaren Auswuchtpendeln ohne zusätzliche Unwuchten (grün) und mit schaltbaren Auswuchtpendeln und zusätzlichen Unwuchten (lila)

6.2 Schwingungserreger für einen Prüfstand

Den Statistiken zufolge versagen Maschinenteile und Komponente viel häufiger in Folge von Schwingungsbruch und Ermüdungsrissen als von Gewaltbruch [46].

Die Besonderheit des Ermüdungsversagens besteht darin, dass es nicht als Folge einer einzigen extrem hohen Belastung auftritt, sondern sich allmählich unter dem Einfluss variabler (oft zyklischer) Belastungen entwickelt. Die entstehenden Mikrorisse häufen sich, was zur Bildung und zum Wachstum eines makroskopischen Risses führt. Mit zunehmendem Risswuchs sinkt die Querschnittsfläche des betreffenden Teils immer weiter, und schließlich bricht das Teil unter einer extremen Belastung [31].

Das Belastungsniveau ist nur in sehr seltenen Fällen konstant, da sich hohe, mittlere und niedrige Lasten ständig abwechseln. Ein typisches Lastprofil hängt von vielen Faktoren ab und wird in der Regel experimentell in Form von Beanspruchungs-Zeit-Funktionen ermittelt (siehe z.B. [60] S. 256). Auf Grundlage der ermittelten Verläufe werden mit

verschiedenen statistischen Methoden Häufigkeitsverteilungen von Lastamplituden, sogenannte Lastkollektive oder Beanspruchungskollektive, berechnet. Einige Beispiele für derartige Beanspruchungskollektive sind in Abb. 6.6a dargestellt.

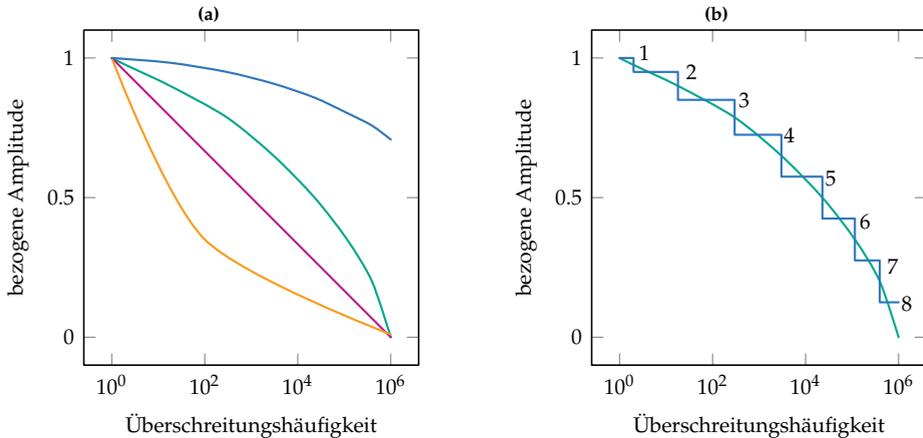


Abbildung 6.6: Beispiele verschiedener Formen eines Lastkollektivs (a) und Stufung eines Lastkollektivs

Die experimentelle Untersuchung der Festigkeit ist in den meisten Fällen ein unerlässlicher Bestandteil des Produktentstehungsprozesses. Um in der Praxis den Arbeitsaufwand zu reduzieren und das Prüfverfahren zu vereinfachen, wird die glatte Kurve des Lastkollektivs gestuft (vgl. Abb. 6.6b) und der Prüfling wird auf eine endliche Anzahl diskreter, amplitudenkonstanter Lasten hingetestet [31].

Als Anregungsquelle in Prüfständen ist der Einsatz von Unwuchtschwingungserregern (siehe z.B. [87]) aufgrund ihres einfachen Aufbaus, ihrer Zuverlässigkeit und ihrer geringen Kosten weit verbreitet. Die Umsetzung eines stufigen Lastkollektivs erfordert dabei jedoch ein entsprechendes Steuerungssystem. Darüber hinaus wird die Tatsache, dass ein Prüfkörper versagt, oft nur visuell festgestellt, wenn der Prüfstand von einem Mitarbeiter kontrolliert wird. Dies kann zu einem erheblichen Fehler bei der Schätzung der Anzahl der Lastwechsel bis zum Versagen führen.

Die Grundidee dieses Abschnitts besteht darin, das untersuchte Phänomen des nicht-stationären Hängenbleibens in der Resonanz zur Gestaltung der Anregungsquelle bei einem Betriebsfestigkeitsversuch zu nutzen.

Dieses Phänomen erlaubt es, Beanspruchungskollektive unterschiedlicher Art nachzubilden (vgl. Abb. 6.7²). In diesem Fall besteht keine Notwendigkeit, das Lastkollektiv zu stufen, da die Lastamplitude sich kontinuierlich ändert.

² Die Amplitudenverläufe wurden mit folgenden Modellparameterwerten berechnet: $\varepsilon = 0.01$, $s = 1$, $p = 0.99$, $\beta_r = 0.2$, $\beta_p = 2$, $\sigma = 0.1$, (a) $\mu = 0.5$, (b) $\mu = 0.1$

Zwei koaxiale Unwuchten (Hauptrotor und ein einziges Auswuchtpendel) sind für die technische Umsetzung dieser periodischen Bewegung ausreichend. Dies vereinfacht sowohl die Konstruktion im Vergleich zum Selbstauswuchtsystem als auch die Zuverlässigkeit bei der Umsetzung der gewünschten Bewegungsart erheblich. Das Einzugsgebiet der modulierten Lösung hängt in diesem Fall nicht von der Anfangsstellung des Pendels ab und die periodische Lösung selbst ist über den gesamten Existenzbereich stabil [20].

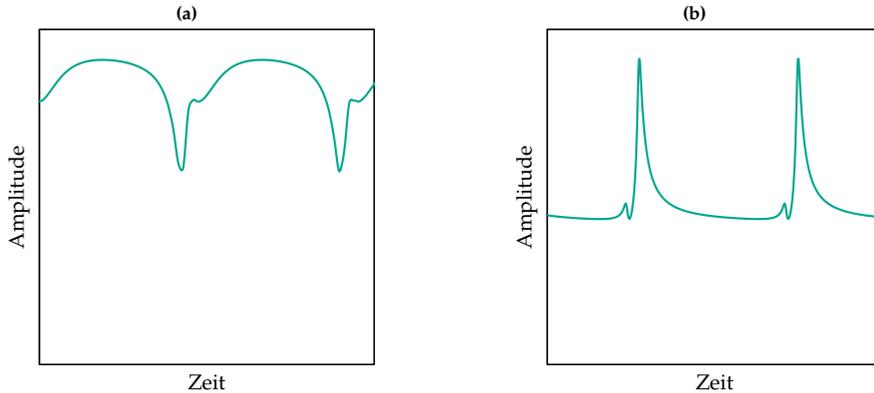


Abbildung 6.7: Qualitative Amplitudenverläufe der Schwingungserreger mit einem höheren (a) und niedrigeren (b) Anteil der hohen Amplituden

Darüber hinaus kann der Schwingungserreger so ausgelegt werden, dass beim Versagen eines Prüflings (was einer starken Änderung der Systemsteifigkeit entspricht) das System aus der Resonanz „fällt“ und zu einer anderen stationären Lösung übergeht. In diesem Fall kann der Zeitpunkt des Versagens leicht bestimmt werden, indem lediglich die Drehgeschwindigkeit des Schwingungserregers mit einer relativ niedrigen Abtastrate gemessen wird. Dies ist bei Versuchen, die oft mehrere Wochen oder sogar Monate dauern und eine sehr hohe Anzahl an Lastwechseln verzeichnen, besonders wichtig.

Die Auswahl der Parameter des Schwingungserregers zwecks Realisierung des vorgegebenen Belastungskollektivs und Erfüllung zusätzlicher Bedingungen ist eine weiterführende, nicht triviale Aufgabe, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt wurde.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde systematisch die langsame Dynamik eines ungewichtigen Rotors mit einem einfachen Selbstauswuchtsystem und einem Antrieb mit begrenzter Leistung untersucht.

Durch die Berücksichtigung einer beträchtlichen Dämpfung im System und die Verwendung einer zweistufigen asymptotischen Methode, die die Prinzipien der Analyse von singular gestörten Systemen und die Grundlagen der Mittelwertbildung vereinigt, konnte die Ordnung des bewegungsbeschreibenden Differentialgleichungssystems von zehn auf drei reduziert werden. Eine derart starke Modellreduktion ermöglichte es, stationäre und periodische Lösungen des Systems, die während des Hochlaufs des Rotors (inklusive des Resonanzdurchgangs) entstehen, zu identifizieren und ausführlich zu analysieren. Vor allem wurden zwei Arten von Lösungen gefunden, die dem Hängenbleiben des Systems in der Resonanz entsprechen.

Der erste Typ kann als stationäres Hängenbleiben in der Resonanz beschrieben werden und ist dem klassischen Sommerfeld-Effekt ähnlich. In diesem Fall rotieren der Rotor und die Auswuchtpendel zusammen als eine Einheit mit einer konstanten Geschwindigkeit geringfügig unterhalb der Resonanzdrehzahl. Beide Auswuchtpendel nehmen dabei die gleiche Winkellage ein und verstärken die Primärunwucht des Rotors. Diese Art der Lösung tritt im Bereich von geringen Werten des Motorparameters auf.

Die zweite Art des Hängenbleibens in der Resonanz ist nicht stationär. Diese Art von Lösung tritt infolge einer globalen Bifurkation nach der Kollision und dem Verschwinden eines Paares unterkritischer stationärer Lösungen auf, bei der zwei heterokline Bahnen, die stationäre Punkte miteinander verbinden, zu einer geschlossenen Trajektorie verschmelzen. Die Auswuchtpendel drehen sich dabei gemeinsam als Einheit, jedoch etwas langsamer als der Hauptrotor. Dadurch ändert sich die effektive Unwucht des Gesamtsystems ständig, was zu einer starken Modulation der Rotordrehzahl und der Amplitude der Rotorachse führt. Diese Art von Lösung existiert in einem weiten Bereich von Werten des Motorparameters, wird aber bei hohen Werten instabil. Dabei können zwei mögliche Szenarien für das Verschwinden dieser periodischen Lösung identifiziert werden. Im ersten Fall erscheint eine neue

überkritische stationäre Lösung direkt auf der periodischen Trajektorie und unterbricht diese. Im zweiten Fall koexistiert die periodische Lösung in einem bestimmten Bereich des Motorparameters mit einem Paar überkritischer stationärer Lösungen und nähert sich diesen allmählich an, bis die Separatrix des Sattelpunkts die Lösung schneidet. Der Übergang zwischen diesen beiden Szenarien wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher betrachtet und ist einer der möglichen Themenbereiche für weitere Untersuchungen.

Beide Arten von Resonanzlösungen koexistieren im gesamten Existenzbereich mit einer kompensierenden stationären Lösung, die durch das Erreichen der Motornendrehzahl und der Nullamplitude der Rotorachse gekennzeichnet ist. Bei kleinen Werten des Motorparameters kann die kompensierende Lösung beim Hochlauf des Rotors aus dem Stillstand heraus nur realisiert werden, falls die Anfangspositionen der Pendel in der Nähe der Kompensationskonfiguration liegen. Mit steigendem Motorparameter wächst zudem das Einzugsgebiet der kompensierenden Lösung. Steigt der Motorparameter über die Stabilitätsgrenze der nichtstationären Resonanzlösung hinaus an, passiert der Rotor erfolgreich die Resonanz unter allen möglichen Anfangsbedingungen, bis auf die Ausgangslage mit exakter Übereinstimmung der Winkellage der beiden Auswuchtpendel.

Um die Dynamik des Selbstauswuchtsystems im Resonanzbereich zu verbessern, ist eine Konstruktion von Auswuchtpendeln vorgeschlagen worden, die nur im überkritischen Bereich aktiviert werden. Es wurde weiterhin vorgeschlagen, das Phänomen des nichtstationären Hängenbleibens in der Resonanz zur Gestaltung einer Anregungsquelle für Betriebsfestigkeitsversuche zu nutzen.

Die Ergebnisse der Berechnungen mit dem entwickelten reduzierten Modell zeigen sowohl eine gute qualitative als auch quantitative Übereinstimmung mit den Ergebnissen des ursprünglichen, vollständigen Gleichungssystems. Für eine vollständige Validierung der hier vorgestellten Ergebnisse wäre zusätzlich eine experimentelle Bestätigung vorteilhaft.

Notation

Allgemein

a Skalar

\mathbf{a} Vektor

a_i i -te Komponente des Vektors \mathbf{a}

\mathbf{A} Matrix

A_{ij} Komponente der Matrix \mathbf{A}

$f(a, b, \dots, t)$ Funktion der Variablen a, b, \dots, t

i, j Laufindizes

Konventionen

$\frac{d(\cdot)}{dt} = \dot{(\cdot)}$ Differentialoperator bzgl. Zeit t

$\frac{d(\cdot)}{d\tau} = (\cdot)'$ Differentialoperator bzgl. dimensionsloser Zeit τ

$\mathcal{O}(\cdot)$ Größenordnung

$\langle \cdot \rangle_\phi$ Mittelwert bzgl. Verdrehwinkel des Rotors ϕ

$\langle \cdot \rangle_t$ Mittelwert bzgl. Zeit t

Symbolverzeichnis

b radiale Dämpfungskonstante [Ns/m]

b_r Drehdämpfungskonstante [Nms]

c radiale Steifigkeit des Rotors [N/m]

e Exzentrizität des Rotors [m]

Notation

E_{kin}	kinetische Energie	[J]
E_{pot}	potentielle Energie	[J]
f	Netzfrequenz	[Hz]
f_{δ}	generalisierte Kraft in δ	[-]
f_{η}	generalisierte Kraft in η	[-]
f_{ξ}	generalisierte Kraft in ξ	[-]
f_{ϕ}	generalisierte Kraft in ϕ	[-]
f_{ψ}	generalisierte Kraft in ψ	[-]
I	Stromstärke	[A]
I_A	Stromstärke in der Ankerwicklung	[A]
I_E	Stromstärke in der Erregerwicklung	[A]
\underline{I}_1	Strom in der Statorwicklung	[A]
\underline{I}'_2	auf den Stator bezogener Strom in der Rotorwicklung	[A]
J_P	Trägheitsmoment des Auswuchtpendels	[kgm ²]
J_R	Trägheitsmoment des Rotors	[kgm ²]
k	Eigenfrequenz des ungedämpften Systems	[-]
k_M	Proportionalitätsfaktor	[-]
L	Lagrange-Funktion	[J]
L_E	Induktivität der Erregerwicklung	[H]
m	Masse des Auswuchtpendels	[kg]
M	Masse des Rotors	[kg]
M^*	Gesamtmasse des Systems	[kg]
p	Polpaarzahl	[-]
P	innere Leistung	[W]
P_D	Drehfeldleistung	[W]

P_{mech}	mechanische Leistung des Motors	[W]
P_V	Widerstandsverlustleistung in den Rotorwicklungen	[W]
$Q(t)$	generalisierte Kraft	[N]
$q(t)$	generalisierte Koordinate	[m]
r	Länge des Auswuchtpendels	[m]
R	Schwingungsamplitude bzw. Bahnradius der Rotordrehachse	[m]
R_1	aktiver Widerstand der Statorwicklung	[Ω]
R_A	Elektrischer Widerstand der Ankerwicklung	[Ω]
R_E	Elektrischer Widerstand der Erregerwicklung	[Ω]
R_Σ	Gesamtwiderstand des Stromkreises	[Ω]
s	dimensionsloser Parameter, Unwuchtverhältnis	[-]
s_A	Schlupf des Asynchronmotors	[-]
s_{A_k}	Kippschlupfzahl	[-]
S	Schwerpunkt des Rotors	
t	Zeit	[s]
T	Drehmoment	[Nm]
T_L	Lastmoment	[Nm]
T_M	Antriebsmoment	[Nm]
T_{M_k}	Kippmoment eines Asynchronmotors	[Nm]
\tilde{T}_M	dimensionslosen Drehmoment des Motors	[-]
u	dimensionsloser Motorparameter	[-]
U	elektrische Spannung	[V]
U_A	elektrische Spannung im Ankerkreis	[V]
U_i	induzierte Spannung	[V]
U_M	Motorsteuerungsparameter bzw. Steigung der Motorkennlinie	[Nms]

\underline{U}_1	Phasenspannung der Statorwicklung	[V]
\underline{U}_h	induzierte Hauptspannung	[V]
\tilde{V}	dimensionslosen Vibrationsmoment	[-]
w	dimensionsloser Parameter, umgekehrt proportional zum Unwuchtverhältnis	[-]
W	Wellendurchstoßpunkt	
x	horizontale Verschiebung der Rotordrehachse	[m]
X_h	Streuinduktivität des Magnetisierungskreises	[H]
$X_{1\sigma}$	primäre Streuinduktivität der Statorwicklung	[H]
$X'_{2\sigma}$	auf den Stator bezogene Streuinduktivität der Rotorwicklung	[H]
y	vertikale Verschiebung der Rotordrehachse	[m]
α	stark gedämpfte Anteil der Variable ψ	[-]
α_0	stationäre Lösung für die Variable α	[-]
β_p	dimensionsloser Drehdämpfungsfaktor bezogen auf Auswuchtpendel	[-]
β_r	dimensionsloser Drehdämpfungsfaktor bezogen auf Rotor	[-]
δ	Öffnungswinkel der Auswuchtpendel	[-]
$\bar{\delta}$	gemittelte Öffnungswinkel der Auswuchtendeln	[-]
$\tilde{\delta}$	schwach gedämpfte Anteil der Variable δ	[-]
$\bar{\delta}$	gemittelte Öffnungswinkel der Auswuchtpendel	[-]
δ_0	Anfangswert des Öffnungswinkels der Auswuchtpendel	[-]
ε	dimensionsloser kleiner Parameter, Unwuchtgrad	[-]
ζ_ε	stark gedämpfte Variable	[-]
ζ_ε	stark gedämpfte Variable	[-]
η	dimensionslose vertikale Verschiebung der Rotordrehachse	[m]
η_{p0}	rein erzwungene Lösung für Variable η	[-]
$\tilde{\eta}$	Abweichung zwischen den Variablen η und η_{p0}	[-]

θ_1	Verdrehwinkel des ersten Auswuchtpendels	[-]
θ_2	Verdrehwinkel des zweiten Auswuchtpendels	[-]
κ	Eigenfrequenz des gedämpften Systems	[-]
μ	dimensionsloser kleiner Parameter, proportional zum Massenverhältnis	[-]
ν	stark gedämpfte Anteil der Variable δ	[-]
ν_0	stationäre Lösung für die Variable ν	[-]
ξ	dimensionslose horizontale Verschiebung der Rotordrehachse	[m]
ξ_{p0}	rein erzwungene Lösung für Variable ξ	[-]
$\tilde{\xi}$	Abweichung zwischen den Variablen ξ und ξ_{p0}	[-]
ρ	dimensionslose Schwingungsamplitude der Rotordrehachse	[-]
$\bar{\rho}$	gemittelte dimensionslose Schwingungsamplitude der Rotordrehachse	[-]
ρ_η	stark gedämpfte Variable	[-]
$\Delta\rho_a$	absolute Abweichungen der Lösung für die Schwingungsamplitude	[-]
ρ_ξ	stark gedämpfte Variable	[-]
σ	dimensionslose radiale Dämpfungskonstante	[-]
τ	dimensionslose Zeit	[-]
ϕ	Verdrehwinkel des rotors	[-]
Φ_E	magnetischer Fluss der Erregerwicklung	[Wb]
$\dot{\phi}_s$	synchrone Drehgeschwindigkeit des Magnetfelds des Stators	[1/s]
λ	dimensionslose Nenndrehzahl der Rotors	[-]
ψ	mittlere Phasenverschiebung der Auswuchtpendel	[-]
$\bar{\psi}$	gemittelte mittlere Phasenverschiebung der Auswuchtendeln	[-]
$\tilde{\psi}$	schwach gedämpfte Anteil der Variable ψ	[-]
$\bar{\tilde{\psi}}$	gemittelte mittlere Phasenverschiebung der Auswuchtpendel	[-]
Ψ	periodische Lösung für die mittlere Phasenverschiebung der Auswuchtpendel	[-]

Notation

ψ_0	Anfangswert der mittleren Phasenverschiebung der Auswucht pendel	[-]
ω	dimensionslose Drehgeschwindigkeit des Rotors	[-]
ω^*	Lehrlaufdrehgeschwindigkeit des Elektromotors	[1/s]
$\bar{\omega}$	gemittelte dimensionslose Drehgeschwindigkeit des Rotors	[-]
Ω	periodische Lösung für die Drehgeschwindigkeit des Rotors	[-]
$\Delta\omega_a$	absolute Abweichungen der Lösung für die Drehgeschwindigkeit des Rotors	[-]

Literaturverzeichnis

- [1] C. Alauze, J. Hagopian, L. Gaudiller und Voinis P. "Active balancing of turbomachinery: application to large shaft line". In: *Journal of Vibration and Control* 7 (2001), S. 249–278.
- [2] K. Alymkulov. "A problem of singular perturbation with a limit cycle in a subsystem with fast time". In: *Mathematical Notes (in russian)* 46.5 (1989), S. 89–91.
- [3] A. A. Andronov, A. A. Vitt und S. E. Khaikin. *Theory of oscillators: adiwes international series in physics*. International series of monographs in physics. Oxford: Pergamon Press, 2013. ISBN: 9781483194721. URL: <https://books.google.de/books?id=Vbk3BQAAQBAJ>.
- [4] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger und H. Stachel. *Mathematik*. Berlin: Springer Spektrum, 2018.
- [5] A. I. Artyunin und S. V. Eliseyev. "Effect of „crawling“ and peculiarities of motion of a rotor with pendular self-balancers". In: *Applied Mechanics and Materials* 373 (2013), S.38–42. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.373-375.38>.
- [6] G. Babel. *Elektrische Antriebe in der Fahrzeugtechnik*. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.
- [7] S. Bae, J. M. Lee, Y. J. Kang, J. S. Kang und J. R. Yun. "Dynamic analysis of an automatic washing machine with a hydraulic balancer". In: *Journal of Sound and Vibration* 257.1 (2002), S. 3–18.
- [8] J. M. Balthazar, J. L. Felix und R. Brasil. "Some comments on the numerical simulation of self-synchronization of four non-ideal exciters". In: *Applied mathematics and computation* 164.2 (2005), S. 615–625.
- [9] K. U. Becker. "Dynamisches Verhalten hydrodynamisch gelagerter Rotoren unter Berücksichtigung veränderlicher Lagergeometrien". Dissertation. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2020. 159 S. DOI: [10.5445/IR/1000117516](https://doi.org/10.5445/IR/1000117516).

- [10] I. I. Blekhman. "Self-synchronization of certain vibratory devices". In: *Eng. Trans (Inzhenemyi Sbornik)* 16 (1953), S. 49–72.
- [11] I. I. Blekhman. *Synchronization in science and technology*. ASME Press translations. New York: ASME Press, 1988. ISBN: 9780791800034. URL: <https://books.google.de/books?id=ao1QAAAAAAAJ>.
- [12] I. I. Blekhman. *Vibrational mechanics: nonlinear dynamic effects, general approach, applications*. Singapore: World Scientific, 2000. ISBN: 9789810238902. URL: <https://books.google.de/books?id=C0aZ-qXVv10C>.
- [13] N. N. Bogoliubov und Y. A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. New York: Gordon und Breach, 1961.
- [14] P. Bövik und C. Högfors. "Autobalancing of rotors". In: *Journal of Sound and Vibration* 111.3 (1986), S. 429–440.
- [15] P. Chakraborty, G. Chakraborty und R. Bhattacharyya. "Elimination of Sommerfeld effect in non-ideal systems using dry friction". In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. Salt Lake City, USA, 2019, Art. V004T05A085.
- [16] P. Chao, Y.-D. Huang und C.-K. Sung. "Non-planar dynamic modeling for the optical disk drive spindles equipped with an automatic balancer". In: *Mechanism and Machine Theory* 38.11 (2003), S. 1289–1305.
- [17] M. F. Dimentberg und K. V. Frolov. "The Sommerfeld effect in a system with randomly varying natural frequency". In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR (in russian)* 171.6 (1966), S. 1293–1296.
- [18] M. F. Dimentberg, L. McGovern, R. L. Norton, J. Chapdelaine und R. Harrison. "Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply". In: *Nonlinear Dynamics* 13.2 (1997), S. 171–187.
- [19] O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "On the dynamic balancing of a planetary moving rotor using a passive pendulum-type device". In: *Procedia IUTAM* 19 (2016). IUTAM Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics, Frankfurt am Main, S. 126–135. ISSN: 2210-9838. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.017>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210983816000183>.
- [20] O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "On the passing through resonance of a centrifugal exciter with two coaxial unbalances". In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 72 (2018), S. 516–520.
- [21] K. Federn. *Auswuchttechnik: Band 1: Allgemeine Grundlagen, Meßverfahren und Richtlinien*. Berlin: Springer, 2013. ISBN: 9783662059395. URL: <https://books.google.de/books?id=Zc2yBgAAQBAJ>.

- [22] N. Fenichel. "Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations". In: *Journal of Differential Equations* 31.1 (1979), S. 53–98.
- [23] A. Fidlin. *Nonlinear oscillations in mechanical engineering*. Berlin: Springer, 2006.
- [24] A. Fidlin und O. Drozdetskaya. "On the averaging in strongly damped systems: the general approach and its application to asymptotic analysis of the Sommerfeld effect". In: *Procedia IUTAM* 19 (2016). IUTAM Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics, Frankfurt am Main, S. 43–52. ISSN: 2210-9838. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.008>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210983816000092>.
- [25] A. Föppl. "Das Problem der Laval'schen Turbinenwelle". In: *Civilingenieur* 41 (1895), S. 248–250.
- [26] R. Gasch, R. Nordmann und H. Pfützner. *Rotordynamik*. Berlin: Springer, 2005. ISBN: 9783540412403. URL: <https://books.google.de/books?id=JIsch814PI0C>.
- [27] K. Green, A. R. Champneys und M. I. Friswell. "Analysis of the transient response of an automatic dynamic balancer for eccentric rotors". In: *International Journal of Mechanical Sciences* 48.3 (2006), S. 274–293.
- [28] K. Green, A. R. Champneys, M. I. Friswell und A. M. Munoz. "Investigation of a multi-ball, automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors". In: *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 366.1866 (2008), S. 705–728.
- [29] K. Green, A. R. Champneys und N. J. Lieven. "Bifurcation analysis of an automatic dynamic balancing mechanism for eccentric rotors". In: *Journal of Sound and Vibration* 291 (2006), S. 861–881.
- [30] P. Hagedorn. *Nichtlineare Schwingungen*. Wiesbaden: Akademische Verlagsgesellschaft, 1978.
- [31] E. Haibach. *Betriebsfestigkeit. Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. Berlin: Springer, 2002.
- [32] M. T. Hedaya und R. S. Sharp. "An analysis of a new type of automatic balancer". In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 19.5 (1977), S. 221–226.
- [33] R. Horvath, G. T. Flowers und J. Fausz. "Passive balancing of rotor systems using pendulum balancers". In: *Journal of Vibration and Acoustics* 130.4, Art. 041011 (2008).
- [34] W.-Y. Huan, C.-P. Chao, J.-R. Kang und C.-K. Sung. "The application of ball-type balancers for radial vibrations reduction of high-speed optic disk drives". In: *Journal of Sound and Vibration* 250.3 (2002), S. 415–430.

- [35] C.-H. Hwang und J. Chung. "Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races". In: *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 42.2 (1999), S. 265–272.
- [36] R. Isermann. *Mechatronische Systeme*. Berlin: Springer, 2008. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-32512-3>.
- [37] Y. Ishida. "Recent development of the passive vibration control method". In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 29 (2012), S. 2–18.
- [38] H. H. Jeffcott. "The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed.—The effect of want of balance". In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 317.219 (1919), S. 304–314.
- [39] A. K. Jha und S. S. Dasgupta. "Attenuation of Sommerfeld effect in an internally damped eccentric shaft-disk system via active magnetic bearings". In: *Meccanica* 54.1-2 (2019), S. 311–320.
- [40] A. K. Jha und S. S. Dasgupta. "Suppression of Sommerfeld effect in a non-ideal discrete rotor system with fractional order external damping". In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 79 (2020), S. 103873.
- [41] D. W. Jordan und P. Smith. *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientists and engineers*. New York: Oxford University Press Inc., 2007.
- [42] W. Kim, D.-J. Lee und J. Chung. "Three-dimensional modelling and dynamic analysis of an automatic ball balancer in an optical disk drive". In: *Journal of Sound and Vibration* 285.3 (2005), S. 547–569.
- [43] V. O. Kononenko. *Vibrating systems with a limited power supply*. London: Iliffe Books, 1969.
- [44] S. Kubo, Y. Jinnouchi, Y. Araki und J. Inoue. "Automatic balancer: pendulum balancer". In: *Bulletin of JSME* 29.249 (1986), S. 924–928.
- [45] Y. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*. New York: Springer, 2004. ISBN: 978-1-4757-3978-7.
- [46] G. Lange. *Systematische Beurteilung technischer Schadensfälle*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag, 2001. ISBN: 9783527304172. URL: <https://books.google.de/books?id=ozPZiJxVSqkC>.
- [47] C.G. Laval. *Steam-turbine*. US Patent 522,066. Juni 1894.
- [48] M. Leblanc. *Automatic balancer for rotating bodies*. US Patent 1,159,052. Nov. 1915.
- [49] J. Lee und V. K. Van Moorhem. "Analytical and experimental analysis of a self-compensating dynamik balancer in a rotating mechanism". In: *Transactions of the ASME* 118 (1996), S. 468–475.

- [50] G. Leonov. "The passage through resonance of synchronous electric motors mounted on an elastic base". In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)* 72.6 (2008), S. 631–637.
- [51] C.-J. Lu, M.-C. Wang und S.-H. Huang. "Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer". In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 23.3 (2009), S. 884–896.
- [52] T. Majewski. "Position error occurrence in self balancers used on rigid rotors of rotating machinery". In: *Mechanism and machine theory* 23.1 (1988), S. 71–78.
- [53] T. Majewski und G. A. Ahearn. "Extended model of automatic balancer for washing machine". In: *IFTOMM World Congress on Mechanism and Machine Science*. Krakow, Poland, 2019, S. 3197–3206.
- [54] T. Majewski, D. Szwedowicz und M. A. M. Melo. "Self-balancing system of the disk on an elastic shaft". In: *Journal of Sound and Vibration* 359 (2015), S. 2–20.
- [55] T. Majewski, D. Szwedowicz und A. H. Riquelme. "Automatic elimination of vibrations for a centrifuge". In: *Mechanism and machine theory* 46.3 (2011), S. 344–357.
- [56] B. Marx und W. Vogt. *Dynamische Systeme - Theorie und Numerik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- [57] J.-D. Moon, B.-S. Kim und S.-H. Lee. "Development of the active balancing device for high-speedspindle system using influence coefficients". In: *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46.9 (Apr. 2006), S. 978–987.
- [58] I. Pavlenko, J. Trojanowska, O. Gusak, V. Ivanov, J. Pitel und V. Pavlenko. "Estimation of the reliability of automatic axial-balancing devices for multistage centrifugal pumps". In: *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* 63.1 (2019), S. 52–56.
- [59] L. S. Pontryagin und L. V. Rodygin. "Periodic solution of a system of ordinary differential equations with a small parameter in the terms containing derivatives". In: *Proceedings of the USSR Academy of Sciences (in russian)* 132.3 (1960), S. 537–540.
- [60] D. Radaj und M. Vormwald. *Ermüdungsfestigkeit*. Berlin: Springer, 2007. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71459-0_5.
- [61] C. Rajalingham und R. B. Bhat. "Complete balancing of a disk mounted on a vertical cantilever shaft using a two ball automatic balancer". In: *Journal of Sound and Vibration* 290.1-2 (2006), S. 169–191.
- [62] C. Rajalingham, R. B. Bhat und S. Rakheja. "Automatic balancing of flexible vertical rotors using a guided ball". In: *International Journal of Mechanical Sciences* 40.9 (1998), S. 825–834.

- [63] C. Rajalingham und S. Rakheja. "Whirl suppression in hand-held power tool rotors using guided rolling balancers". In: *Journal of Sound and Vibration* 217.3 (1998), S. 453–466.
- [64] W. J. Rankine. "On the centrifugal force of rotating shafts". In: *Van Nostrand's Eclectic Engineering Magazine (1869-1879)* 1.7 (1869), S. 598.
- [65] J. S. Rao. *History of rotating machinery dynamics*. History of Mechanism and Machine Science. Berlin: Springer, 2011. ISBN: 9789400711655. URL: <https://books.google.de/books?id=-78QewtubgoC>.
- [66] M. Rezaee und R. Fathi. "A new design for automatic ball balancer to improve its performance". In: *Mechanism and Machine Theory* 94 (2015), S. 165–176.
- [67] D. J. Rodrigues, A. R. Champneys, M. I. Friswell und R. E. Wilson. "Automatic two-plane balancing for rigid rotors". In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43.6 (2008), S. 527–541. ISSN: 0020-7462. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.01.002>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746208000152>.
- [68] B. Ryzhik, T. Amer, H. Duckstein und L. Sperling. "Zum Sommerfeldeffekt beim selbsttätigen Auswuchten in einer Ebene". In: *Technische Mechanik* 21.4 (2001), S. 297–312.
- [69] B. Ryzhik, L. Sperling und H. Duckstein. "Problems of vibration near critical speeds in rigid rotors with autobalancing devices". In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. Chicago, Illinois, USA, 2003, S. 895–901.
- [70] B. Ryzhik, L. Sperling und H. Duckstein. "Non-synchronous motions near critical speeds in a single-plane auto-balancing device". In: *Technische Mechanik. Scientific Journal for Fundamentals and Applications of Engineering Mechanics* 24.1 (2004), S. 25–36.
- [71] J. A. Sanders und F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. New York: Springer, 1985.
- [72] G. Schmidt und A. Tondl. *Non-linear vibrations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [73] H. Schneider. *Auswuchttechnik*. VDI-Buch. Berlin: Springer, 2013. ISBN: 9783642249143. URL: <https://books.google.de/books?id=iRwjBAAAQBAJ>.
- [74] K. Seksen S. B. und Dasgupta. *Fundamentals of electrical engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.
- [75] A. P. Seyranian und A. A. Mailybaev. *Multiparameter stability theory with mechanical applications*. Singapore: World Scientific Publishing, 2003.

- [76] W. Skolaut, Hrsg. *Maschinenbau*. Berlin: Springer Vieweg, 2018.
- [77] A. Sommerfeld. "Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre". In: *Physikal. Zeitschr* 3 (1902), S. 266–286.
- [78] L. Spannan, C. Daniel und E. Woschke. "Run-up simulation of automatic balanced rotors considering velocity-dependent drag coefficients". In: *Technische Mechanik* 37.2-5 (2017), S. 441–449.
- [79] L. Sperling, F. Merten und H. Duckstein. "Self-synchronization and automatic balancing in rotor dynamics". In: *International Journal of Rotating Machinery* 6.4 (2000), S. 275–285.
- [80] L. Sperling, B. Ryzhik und H. Duckstein. "Single-plane auto-balancing of rigid rotors". In: *Technische Mechanik* 24 (2004), S. 1–24.
- [81] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Massachusetts: Perseus Books, 1994.
- [82] C. K. Sung, T. C. Chan, C. P. Chao und C. H. Lu. "Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer". In: *Mechanism and Machine Theory* 69 (2013), S. 115–126.
- [83] E.L. Thearle. *Means for dynamically balancing machine tools*. US Patent 1,967,163. Juli 1934.
- [84] A. Tikhonov, A. Vasilieva und A. Sveshnikov. *Differential equations*. Springer Series in Solid-State Sciences. Berlin: Springer, 1985. ISBN: 9780387130026. URL: <https://books.google.de/books?id=cKorAAAAYAAJ>.
- [85] H. Troger und A. Steindl. *Nonlinear stability and bifurcation theory: an introduction for engineers and applied scientists*. Vienna: Springer, 2012. ISBN: 9783709191682. URL: https://books.google.de/books?id=ws%5C_sCAAQBAJ.
- [86] J. V. Vegte. "Continuous automatic balancing of rotating systems". In: *Journal Mechanical engineering science* 6.3 (1964), S. 264–269.
- [87] P. Vielsack. "A vibro-impacting model for the detection of delamination". In: *Journal of Sound and Vibration* 253.2 (2002), S. 347–358.
- [88] C. J. Wan, D. S. Bernstein und V. T. Coppola. "Global stabilization of the oscillating eccentric rotor". In: *Nonlinear Dynamics* 10.1 (1996), S. 49–62.
- [89] J. Wauer und P. Bührle. "Dynamics of a flexible slider-crank mechanism driven by a non-ideal source of energy". In: *Nonlinear Dynamics* 13.3 (1997), S. 221–242.
- [90] J. Wauer und S. Suherman. "Vibration suppression of rotating shafts passing through resonances by switching shaft stiffness". In: *Transactions of the ASME* 120 (Jan. 1998), S. 170–180.

- [91] J. Wittenburg. *Schwingungslehre: Lineare Schwingungen, Theorie und Anwendungen*. Berlin: Springer, 2013.
- [92] V. Zhuravlev und D. Klimov. *Applied methods in oscillation theory (in russian)*. Moskow: Nauka, 1988.

Eigene Publikationen

- O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "On the dynamic balancing of a planetary moving rotor using a passive pendulum-type device". In: *Procedia IUTAM* 19 (2016). IUTAM Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics, Frankfurt am Main, S. 126–135. ISSN: 2210-9838. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.017>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210983816000183>.
- O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "On the strongly nonlinear resonance of a rotor with a self-balancing device". Englisch. In: *Contributions to the foundations of multidisciplinary research in mechanics : papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ITCAM2016), Montreal, Canada, 22-26 August, 2016*. Ed.: J.M. Floryan. 2017, S. 126–127. ISBN: 978-0-660-05459-9.
- O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "On the passing through resonance of a centrifugal exciter with two coaxial unbalances". In: *European Journal of Mechanics-A/Solids* 72 (2018), S. 516–520.
- O. Drozdetskaya, A. Fidlin und B. Waltersberger. "On the wobbling of friction discs". In: *Proceedings of the 7th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2011)*. Rom, Italy, 2011, Art. nicht spezifiziert.
- A. Fidlin und O. Drozdetskaya. "Instabilität der gleitenden Fahrzeugkupplungen: vom analytischen Grundmodell zur Simulation des Gesamtgetriebes". In: *Schwingungen in Antrieben 2011: 7. Fachtagung, Leonberg, 19. und 20. Oktober 2011*. Bd. 2155. VDI-Berichte. VDI-Verl., Düsseldorf, 2011, S. 183–194. ISBN: 978-3-18-092155-6.
- A. Fidlin und O. Drozdetskaya. "On the averaging in strongly damped systems: the general approach and its application to asymptotic analysis of the Sommerfeld effect". In: *Procedia IUTAM* 19 (2016). IUTAM Symposium Analytical Methods in Nonlinear Dynamics, Frankfurt am Main, S. 43–52. ISSN: 2210-9838. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2016.03.008>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210983816000092>.

- A. Fidlin, O. Drozdetskaya und B. Waltersberger. "On the minimal model for the low frequency wobbling instability of friction discs". In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 30.5 (2011), S. 665–672. ISSN: 0997-7538. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.03.009>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S099775381100043X>.
- G. Jehle, O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "Nonlinear dynamics of gearboxes with flexible friction clutch". Englisch. In: *Contributions to the foundations of multidisciplinary research in mechanics : papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ITCAM2016), Montreal, Canada, 22-26 August, 2016*. Ed.: J.M. Floryan. 2017, S. 210–211. ISBN: 978-0-660-05459-9.
- T. Yüzbaşıoğlu, O. Drozdetskaya und A. Fidlin. "Investigation of a centrifugal exciter with two coaxial unbalances on a carrier performing planar motion". In: *PAMM* 19.1, Art. e201900445 (2019).

Anhang

A Stationäre und periodische Lösungen des Systems für einen alternativen Parametersatz

Parameter	Standardwert	Parameter	Standardwert
ε	0.01	β_p	1
μ	0.02	β_r	1
s	1	λ	2
w	0.98	σ	0.1

Tabelle A.1: Alternative Parametersatz für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines ungewichtigen Rotors mit einem Selbstauswuchtsystem

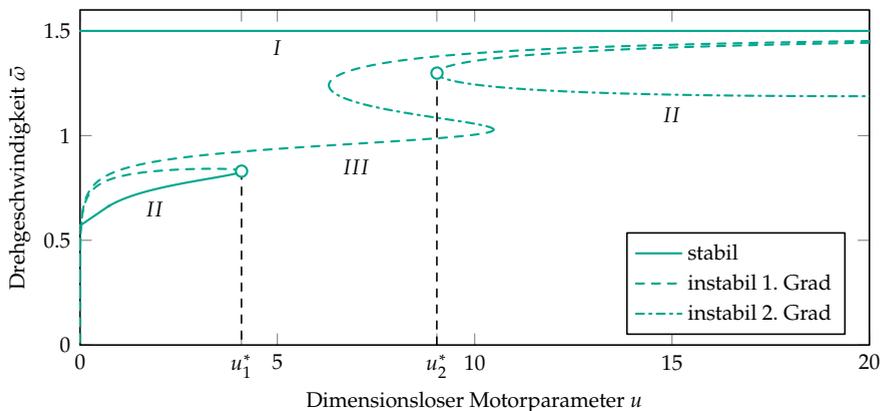


Abbildung A.1: Stationäre Drehzahlen des Rotors mit Selbstauswuchtsystem in Abhängigkeit des Motorparameters u für einen alternativen Parametersatz

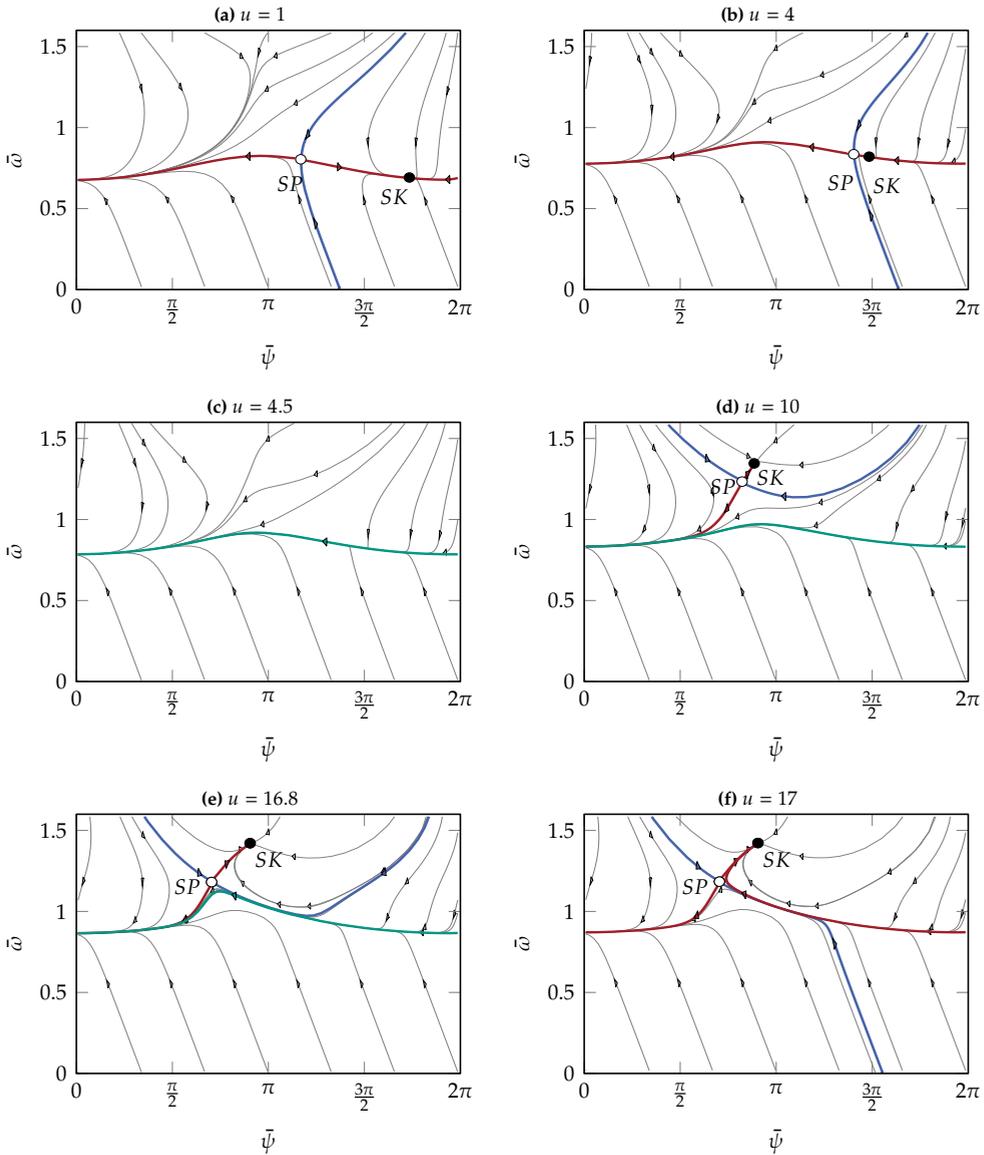


Abbildung A.2: Entwicklung des Phasenraums auf der Langsamen Mannigfaltigkeit $\delta = 0$ mit der Steigung des Motorparameters u bei einem alternativen Parametersatz

Wie beim Standardparametersatz gibt es auch in diesem Fall mit kleinen Werten des Motorparameters u nur zwei stationäre Punkte, die durch zwei heterokline Orbits miteinander verbunden sind (vgl. Abb. A.2a). Mit zunehmendem Wert des Motorparameters u bewegen sich die stationären Punkte aufeinander zu (vgl. Abb. A.2b).

Ihre Kollision bei $u = u_1^*$ führt zur Entstehung eines Grenzzyklus (vgl. Abb. A.2c). Im Gegensatz zum Standard-Parametersatz erscheint das zweite Paar stationärer Lösungen bei $u = u_2^*$ in ausreichender Entfernung vom periodischen Orbit (vgl. Abb. A.2d). Erst wenn der Motorparameter u weiter erhöht wird, bewegt sich der Sattelpunkt auf die periodische Lösung zu und „zieht“ sie gleichzeitig an (vgl. Abb. A.2e). Erreicht der Motorparameter u den dritten kritischen Wert u_3^* , schneidet der Sattelpunkt die periodische Trajektorie und zerstört diese (vgl. Abb. A.2f).

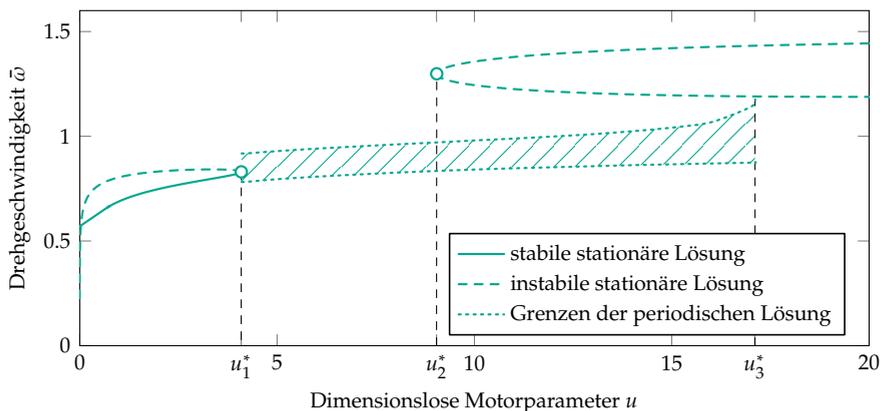


Abbildung A.3: Stationäre Lösungen vom Typ II und die Grenzen der periodischen Lösung in Abhängigkeit vom Motorparameter u für einen alternativen Parametersatz