

Polymorphe Unschärfemodellierung in der nichtlinearen Strukturmechanik – Stabilität von Schalentragwerken, räumliche Variabilität und Metamodellierung

Marc Fina

**Polymorphe Unschärfemodellierung
in der nichtlinearen Strukturmechanik –
Stabilität von Schalentragwerken,
räumliche Variabilität und
Metamodellierung**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften

des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Marc Fina

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 24. April 2020

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Graf

Karlsruhe 2020

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner

Organisation und Verwaltung:

Institut für Baustatik
Karlsruher Institut für Technologie
Kaiserstr. 12
76131 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608-42280
Telefax: (0721) 608-46015
E-Mail: info@ibs.kit.edu

© 2020 Marc Fina
Institut für Baustatik
Karlsruher Institut für Technologie
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

ISBN 978-3-935322-27-0

Vorwort

Die vorliegende Dissertationsschrift entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) von 2014 bis 2020.

Mein außerordentlicher Dank gilt meinem Doktorvater und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner für die hervorragende wissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit. Er hat mir sehr viel Freiheit gewährt und war stets vom Gelingen dieser Arbeit überzeugt. Insbesondere möchte ich mich bei ihm für die Ermöglichung der Teilnahme zahlreicher nationaler und internationaler Konferenzen herzlich bedanken. Hierdurch sind viele internationale Kontakte und Kooperationen entstanden. Weiterhin danke ich ihm für die vielen fachlichen Diskussionen und die Weichenstellung für eine Hochschullaufbahn. Darüber hinaus waren die gemeinsamen ‘gemütlichen’ Rennradtouren stets eine willkommene Abwechslung und haben zu einem ganz besonderen Arbeitsklima am Institut beigetragen.

Ein besonderer Dank gilt ebenso Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Graf für die Übernahme des Korreferats und die Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit. Ich möchte mich bei ihm für die vielen Ratschläge, persönlichen Gespräche und sein großes Interesse an der Arbeit herzlich bedanken. Vor allem konnte ich bei seiner akribischen Durchsicht der Arbeit sehr viel lernen. Ich freue mich schon sehr auf die weitere wissenschaftliche Zusammenarbeit.

Zudem danke ich allen weiteren Mitgliedern der Promotionskommission für das Interesse an meiner Arbeit. Die Durchführung der Disputation in der ungewöhnlichen Zeit der Corona-Pandemie war nicht selbstverständlich. Dafür möchte ich gesondert danken.

Meinen ehemaligen und aktuellen Arbeitskollegen am Institut für Baustatik möchte ich für die freundschaftliche und kollegiale Zusammenarbeit danken. Die vielen fachlichen und privaten Diskussionen haben für ein sehr angenehmes Arbeitsklima gesorgt und zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Besonders hervorheben möchte ich Herrn Patrick Weber und Herrn Lukas Panther. Beide haben schon als wissenschaftliche Hilfskräfte mir viele Anregungen zu dieser Arbeit gegeben und ich bin überzeugt, dass sie einen großen Beitrag in der Forschung leisten werden. Auch möchte ich mich bei allen Studierenden bedanken, die durch viel Engagement bei der Anfertigung ihrer Abschlussarbeiten zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

Von Herzen danke ich meiner Familie und all meinen Freunden, die mir stets den Rücken freigehalten haben. Meiner Schwester Madeleine möchte ich für das Lektorat dieser Arbeit und das gemeinsame Training für die anfangs erwähnten ‘gemütlichen’ Rennradtouren danken.

Karlsruhe, im April 2020

Marc Fina

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung polymorpher Unschärfemodelle im Bereich der nichtlinearen Strukturmechanik diskutiert. Die Schwerpunkte der Arbeit sind die Einführung der Unschärfemodellierung im Schalenbeulen, Modellierung räumlicher Variabilität und Aspekte der Metamodellierung.

Eine realitätsnahe Tragwerksanalyse erfordert neben einem geeigneten Modell auch die Berücksichtigung von Unschärfen in den Eingangsdaten. Eine explizite Unterscheidung zwischen aleatorischen und epistemischen Unschärfen wird ermöglicht mit der polymorphen Unschärfemodellierung. Für die numerische Umsetzung wird die α -Level-Optimierung angewendet. Diese ist für große Modelle sehr rechenaufwendig. Deshalb werden effiziente und robuste Metamodelle benötigt. In dieser Arbeit werden verschiedene Metamodelle wie das *Kriging-Verfahren*, *Neuronale Netze* und die *hochdimensionale Modelldarstellung* im Rahmen der Unschärfemodellierung eingesetzt. Dabei wird der Einfluss der unterschiedlichen Ersatzmodelle auf die Qualität der unscharfen Ergebnisgrößen diskutiert. Die Unschärfe soll zukünftig bei der Entscheidungsfindung in einem Tragwerksentwurf berücksichtigt werden. Zur Unterstützung der Entscheidungsfindung wird eine globale Sensitivitätsanalyse auf Basis der Metamodelle angewendet.

Manche Eingangsparameter müssen durch räumlich korrelierte Felder beschrieben werden. Hierfür wird die Anwendung von Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeldern erläutert. Zur Diskretisierung dieser Felder im Rahmen der Finite-Element-Methode werden effiziente Methoden vorgestellt. Zusätzlich werden auch Problemstellungen mit zeitlichen Abhängigkeiten behandelt.

Ein großer Anwendungsbereich polymorpher Unschärfemodelle ist das Thema Schalenbeulen. Geometrische und materielle Imperfektionen haben einen großen Einfluss auf das Beulverhalten von Schalen. Das Dilemma ist, dass die Imperfektionen in der Regel unbekannt sind. In dieser Arbeit werden neben den bereits existierenden semi-empirischen und herkömmlichen probabilistischen Ansätzen verschiedene Unschärfemodelle eingeführt, um aleatorische und epistemische Unschärfen bei der Modellierung von Imperfektionen zu berücksichtigen. Zur Modellierung der räumlichen Variabilität von Mantelimperfektionen wird ein Korrelationsmodell mit polymorph unscharfen Parametern entwickelt. Die Quantifizierung der Unschärfe basiert auf realen Messdaten von Imperfektionen. Zusätzlich werden weitere Unschärfemodelle für Aufstandsimperfektionen, Variationen der Schalendicke und materielle Imperfektionen diskutiert.

Weiterhin werden Möglichkeiten zur Effizienzsteigerung im Rahmen der Unschärfemodellierung genannt. Abschließend wird das Konzept der polymorphen Unschärfemodellierung an weiteren Beispielen aus dem Ingenieurwesen gezeigt.

Abstract

In the present doctoral thesis, the application of polymorphic uncertainty models in the field of nonlinear structural mechanics is discussed. The main focuses of the thesis are the introduction of polymorphic uncertainty modeling in shell buckling, modeling of spatial variability and aspects of surrogate modeling.

A realistic structural analysis requires a suitable model as well as the consideration of uncertainties in the input data. The polymorphic uncertainty modeling allows to distinguish explicitly between aleatoric and epistemic uncertainties. For the numerical treatment the so-called α -level-optimization is used. This is very demanding for the computation of large models. Therefore, efficient and robust surrogate models are required. In this thesis different surrogate models like kriging, neural networks and the high-dimensional model representation are used in context of uncertainty modeling. The influence of the different models on the quality of the fuzzy result variables is discussed. The aim is to consider different kinds of uncertainties in a structural design process. Therefore, a global sensitivity analysis based on the surrogate models is applied to support the decision-making process.

Some input parameters have to be modelled by spatially correlated fields. Therefore, the use of fuzzy probability based random fields will be presented in detail. Efficient methods for the discretization of random fields within the framework of the finite element method are presented. Additionally, problems with time dependencies are discussed.

The use of polymorphic uncertainty models is particularly appropriate in shell buckling. Geometric and material imperfections have a great influence on the buckling behavior of shells. The dilemma is that the imperfections are usually unknown. In this thesis, in addition to the already existing semi-empirical and classical probabilistic approaches, different uncertainty models are introduced to consider aleatoric and epistemic uncertainties in modeling of imperfections. A correlation model with polymorphic uncertain parameters is developed for modeling spatial variability of initial imperfections. The uncertainty quantification is based on real imperfection measurements. Different uncertainty models for boundary imperfections, variations in shell thickness and material imperfections are also discussed.

Furthermore, possibilities for increasing the efficiency within the scope of uncertainty modeling are mentioned. Finally, the concept of polymorphic uncertainty modeling is shown within further engineering applications.

‘As far as the laws of mathematics refer to reality, they are not certain, and as far as they are certain, they do not refer to reality.’

— Albert Einstein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Ziele	1
1.2	Stand der Technik und Einordnung der Arbeit	3
1.3	Gliederung der Arbeit	9
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	14
2.1	Kinematik	14
2.1.1	Konfigurationen und Bewegung eines materiellen Körpers .	14
2.1.2	Der materielle Deformationsgradient	16
2.1.3	Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor	17
2.2	Spannungen	21
2.3	Bilanzgleichungen der Mechanik	23
2.3.1	Massenerhaltung	23
2.3.2	Impulserhaltung	24
2.3.3	Drehimpulserhaltung	26
2.3.4	Energieerhaltung	27
2.4	Konstitutive Modellierung	29
2.4.1	Hyperelastisches Material	29
2.4.2	Isotropes Materialverhalten	31
2.4.3	Transversal isotropes Materialverhalten	32
2.5	Variationsformulierung	33
2.6	Linearisierung	35
3	Grundgleichungen der Schale	38
3.1	Schalenkonzept	38
3.2	Differentialgeometrie	39
3.3	Schalenkinematik	40
3.4	Schnittgrößen	46
3.5	Stoffgesetz	47
3.6	Materialmatrix	50
3.7	Variationsformulierung und Linearisierung	51
3.8	Finite-Elemente-Formulierung	54

4	Stabilität von Tragwerken	64
4.1	Einordnung von Stabilitätsproblemen	64
4.2	Lösung nichtlinearer FE-Gleichungen	67
4.3	Pfadverfolgungsalgorithmen	69
4.3.1	Laststeuerung	71
4.3.2	Verschiebungssteuerung	72
4.3.3	Bogenlängenverfahren	72
4.4	Numerische Berechnung von Stabilitätspunkten	74
4.4.1	Mathematische Betrachtungsweise	75
4.4.2	Klassische und lineare Beulanalyse	76
4.5	Begleitende nichtlineare Stabilitätsuntersuchung	77
4.6	Verhalten bei Imperfektionen	79
5	Grundgleichungen der Strukturdynamik	83
5.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	83
5.2	Semidiskrete Bewegungsgleichung	84
5.3	Zeitintegrationsverfahren	85
5.3.1	Explizite Verfahren	85
5.3.2	Implizite Verfahren	86
6	Polymorphe Unschärfemodellierung	88
6.1	Basisunschärfemodelle	88
6.1.1	Zufallsvariable	89
6.1.2	Fuzzy-Variable	91
6.1.3	Intervallvariable	94
6.2	Polymorphe Unschärfemodelle	95
6.2.1	Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable	95
6.2.2	Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable	96
6.2.3	Zusammenfassung polymorpher Unschärfemodelle	97
6.3	Numerische Strukturanalyse mit unscharfen Daten	100
6.3.1	α -Level-Optimierung	100
6.3.2	Monte-Carlo-Simulation	101

6.3.3	Fuzzy- und Fuzzy-stochastische Strukturanalyse	102
6.4	Modellierung räumlicher Variabilität	104
6.4.1	Grundlagen der multivariaten Stochastik	104
6.4.2	Zufallsfelder	105
6.4.3	Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld	106
6.4.4	Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld	107
6.4.5	Übersicht der Unschärfemodelle	108
6.4.6	Methoden zur Diskretisierung von Zufallsfeldern	109
6.4.7	Beispiel: Quadratplatte mit Imperfektionen	113
6.4.8	Beispiel: Eingespannte Lochplatte mit Imperfektionen . . .	115
6.5	Modellierung unscharfer Ergebnisprozesse	117
7	Methoden der künstlichen Intelligenz	119
7.1	Idee der Metamodellierung	120
7.2	Die statistische Versuchsplanung	121
7.3	Metamodelle in der Unschärfemodellierung	126
7.3.1	Polynominterpolation als Metamodell	130
7.3.2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate als Metamodell . . .	132
7.3.3	Nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate	137
7.3.4	Kriging-Verfahren	139
7.3.5	Künstliche Neuronale Netze	145
7.3.6	Hochdimensionale Modelldarstellung - HDMR	149
7.3.7	Zusammenfassung der Metamodelle	154
7.4	Methoden zur Beurteilung der Qualität eines Metamodells	155
7.5	Globale Sensitivitätsanalyse	159
7.5.1	Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse	160
7.5.2	Monte-Carlo-Integration	162
7.6	Numerische Beispiele	165
7.6.1	Benchmark-Funktionen	165
7.6.2	Elastisch gebetteter Bohrpfahl mit Imperfektion	171
7.6.3	Einmassenschwinger	179

8	Zylinderschale mit Imperfektionen	182
8.1	Historischer Überblick	183
8.1.1	Deterministisches vs. probabilistisches Bemessungskonzept	183
8.1.2	Schalenbeulen in der aktuellen Norm	185
8.1.3	Einführung der Unschärfemodellierung im Schalenbeulen .	188
8.2	Unschärfemodell für Mantelimperfektionen	191
8.2.1	Auswertung einer Imperfektionsdatenbank	191
8.2.2	Ein Korrelationsmodell für Mantelimperfektionen	193
8.2.3	Definition geeigneter Korrelationsfunktionen und Fitting .	201
8.2.4	Das Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern	203
8.2.5	Darstellung der Imperfektionen als fp-rf-Zufallsfeld	209
8.2.6	Schleifenalgorithmus der Stabilitätsanalyse unter Unschärfe	212
8.2.7	FE-Modell der Zylinderschale	214
8.2.8	Ergebnisse einer probabilistischen Modellierung	219
8.2.9	Ergebnisse der Unschärfemodellierung	221
8.2.10	Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse	224
8.3	Ein Gesamtmodell für geometrische und materielle Imperfektionen	226
8.3.1	Unschärfemodell für Aufstandsimperfektionen	226
8.3.2	Unschärfemodell für materielle Imperfektionen	231
8.3.3	Unschärfemodell für Imperfektionen der Schalendicke	232
8.3.4	Ergebnisse der Unschärfemodellierung	234
8.3.5	Diskussion zur Entscheidungsfindung	239
8.3.6	Zusammenfassung	240
9	Weitere Beispiele aus dem Ingenieurwesen	243
9.1	Zwischenstufe der Ariane-Rakete	243
9.1.1	FE-Modell der Kegelschale	243
9.1.2	Unschärfemodell für Mantelimperfektionen	245
9.1.3	Ergebnisse und Diskussion	249
9.2	Dynamische Untersuchung eines Propfans	251
9.2.1	FE-Modell des Propfans	252
9.2.2	Geometrische Imperfektionen des gekrümmten Rotorblatts	255
9.2.3	Fuzzy-stochastische Analyse der Propfan-Rotation	258

10 Zusammenfassung und Ausblick	262
10.1 Zusammenfassung	262
10.2 Ausblick für weitere Forschungsvorhaben	265
Literaturverzeichnis	271

1 Einleitung

1.1 Motivation und Ziele

In den letzten Jahren haben rasante Entwicklungen im Bereich der numerischen Strukturmechanik es möglich gemacht, dass beliebig komplexe Tragwerke berechnet werden können. Die Finite-Elemente-Methode gehört mittlerweile zum Standardwerkzeug eines im konstruktiven Ingenieurbau tätigen Ingenieurs. Auch wenn die Berechnungsverfahren immer präziser werden, kann die Komplexität der realen Welt dennoch nicht vollständig erfasst werden. Die Anwendung der Finite-Elemente-Methode erfordert immer die Beschreibung eines Modells. Dafür werden Vereinfachungen getroffen und die Eingangsparameter auf Basis weniger Experimente a posteriori validiert. Oftmals wird bei den gewählten Eingangsparametern eine Genauigkeit vorgetäuscht, die im Widerspruch zu den vorliegenden Daten steht. Das mechanische Verhalten eines Tragwerks kann nur realitätsnah wiedergegeben werden, wenn die Unschärfe in den Eingangsdaten und in den Modellgrößen zutreffend quantifiziert wird. Daher besteht die Motivation in dieser Arbeit darin, die vorhandenen aleatorischen und epistemischen Unschärfen bei Problemstellungen aus der nichtlinearen Strukturmechanik in einem numerischen Modell zu berücksichtigen.

Die Unschärfemodellierung und -quantifizierung erfordern unterschiedliche Verfahren und Strategien für eine effiziente numerische Umsetzung. Um den Rechenaufwand gering zu halten, wird das komplexe Ausgangsmodell durch ein vereinfachtes Modell ersetzt werden. Damit befasst sich das Forschungsgebiet der *Metamodellierung*. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie ein Metamodell die Qualität der Ergebnisgröße beeinflusst. Dazu werden zunächst die Grundlagen bekannter Metamodelle, wie die *Polynominterpolation*, *Methode der kleinsten Fehlerquadrate*, *Kriging*, *Künstlich Neuronale Netze mit Feed Forward-Struktur* und das *HDMR-Metamodell*, beschrieben. Erläutert wird, warum die Wahl eines geeigneten Metamodells in Abhängigkeit des angewendeten Unschärfemodells getroffen werden sollte.

Ein großer Anwendungsbereich der Unschärfemodellierung ist das Thema Schalenbeulen. Imperfektionen haben einen großen Einfluss auf die Stabilitätslast von Schalen. Bis heute gibt es noch kein zufriedenstellendes Regelwerk wie Imperfektionen in einem numerischen Modell berücksichtigt werden sollen. Das Dilemma besteht darin, dass die Form der Imperfektionen i.A. unbekannt sind. Das Ziel ist, das unvollständige und ungenaue Wissen mit verschiedenen Unschärfemodellen zu quantifizieren. Damit soll die Unschärfemodellierung in der Stabilitätsanalyse von Schalenstrukturen eingeführt werden. Bei Imperfektionen als Abweichungen von der Sollgeometrie einer Schale handelt es sich um räumlich

korrelierte Felder. Die räumliche Variabilität wird in einer stochastischen Modellierung mit Zufallsfeldern simuliert. Auch hier muss für eine realitätsnahe Modellierung die Unschärfe in einem benötigten Korrelationsmodell berücksichtigt werden. Der Fokus liegt in der Anwendung von Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeldern. Zur Darstellung der Imperfektionen sind oft nur wenige Messdaten vorhanden. Daher wird gezeigt, wie mit wenigen Daten die Parameter für die Zufallsfelder gewonnen werden können. Als Ergebnis wird ein Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern vorgestellt. Zudem werden für die numerische Umsetzung effiziente Methoden zur Diskretisierung der Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfelder diskutiert. Der Einsatz verschiedener Unschärfemodelle bei Stabilitätsuntersuchungen von Schalentragwerken soll die Notwendigkeit der Unschärfemodellierung auch für weitere Anwendungen deutlich machen. Die Motivation und Ziele dieser Arbeit lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Berücksichtigung der Unschärfe bei Problemstellungen aus der nichtlinearen Strukturmechanik.
- Einführung der Unschärfemodellierung in der Stabilitätsanalyse von Schalentragwerken.
- Wahl geeigneter Unschärfemodelle auf Grundlage vorhandener Daten aus Messungen zu verschiedenen Imperfektionsarten wie Mantelimperfektionen, materielle Imperfektionen, Aufstandsimperfektionen und Variationen der Schalendicke.
- Entwicklung eines Korrelationsmodells mit unscharfen Parametern zur Simulation räumlich korrelierter Imperfektionen mit Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeldern.
- Methoden zur Diskretisierung von Zufallsfeldern im Rahmen der Finite-Elemente-Methode.
- Effizienzsteigerung der Unschärfemodellierung durch Anwendung geeigneter Metamodelle.
- Untersuchungen zum Einfluss der Metamodelle auf die Qualität der unscharfen Ergebnisgröße.
- Sensitivitätsanalyse als Unterstützung der Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) im Rahmen der polymorphen Unschärfemodellierung.

1.2 Stand der Technik und Einordnung der Arbeit

Neben Forschungen zu robusten FE-Modellen ist das Thema der Unsicherheitsanalyse (engl.: *uncertainty analysis*) als ein weiterer umfangreicher Forschungszweig entstanden. Die steigenden Computerressourcen machen es heutzutage möglich solche Unsicherheitsanalysen durchzuführen. Für eine realitätsnahe Tragwerksanalyse ist eine Quantifizierung der Unschärfen in den Eingangsparametern und den Modellparametern unbedingt notwendig. Denn selbst ein weiterentwickeltes mechanisches Modell, wie z.B. die Anwendung eines Materialmodells mit dem ein Materialverhalten genauer abgebildet werden kann, führt nicht immer zu einer Verbesserung der Lösung. Oftmals sind zusätzliche Parameter erforderlich. Diese sind wiederum nicht exakt ermittelbar und können im schlimmsten Falle sogar zu einer Verschlechterung der Lösung führen [56]. Bereits in den 1920er Jahren machte MAYER [194] den Vorschlag, Wahrscheinlichkeiten zur Sicherheitsbeurteilung der Bauwerke zu verwenden [56]. MAYER schreibt, dass die gebräuchlichen zulässigen Beanspruchungen der Materialien willkürlich gewählt seien und somit keine Aussagen trafen über die Sicherheit einer Konstruktion [244]. Diese und weitere Arbeiten, wie z.B. FREUDENTHAL [101], können als Vorläufer des heutigen Sicherheitskonzepts der Tragwerke betrachtet werden. Der aktuelle Eurocode [64] basiert auf einem semi-probabilistischen Sicherheitskonzept. Darin wird die Zuverlässigkeit i.d.R. mit probabilistischen Größen ausgedrückt, d.h. die Beschreibung erfolgt über die Festlegung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen. Der Eurocode ermöglicht eine Kalibrierung der Teilsicherheitsbeiwerte durch Zuverlässigkeitsmethoden 1. Ordnung (Stufe II) und vollständig probabilistischen Methoden (Stufe III). In einer Anmerkung des Eurocodes [64] heißt es:

„Die Versagenswahrscheinlichkeit und der zugehörige Zuverlässigkeitsindex [...] sind lediglich operative Werte, die nicht die wirklichen Versagensraten ausdrücken, sondern nur für die Kalibrierung der Normen und für Vergleiche der Zuverlässigkeitsniveaus verschiedener Tragwerke verwendet werden.“

Bei der Anwendung sollte stets die wahre Sicherheit eines Tragwerks hinterfragt werden. Eine weitere Anmerkung im Eurocode [64] zur Anwendung der vollständig probabilistischen Methode (Stufe III) lautet:

„Die vollständig probabilistischen Methoden (Stufe III) geben zwar im Prinzip genaue Auskünfte zum Zuverlässigkeitsproblem, werden aber selten als Grundlage für Bemessungsnormen angewendet, da häufig statistische Daten fehlen.“

Für spezielle Tragwerke, die nicht von der Norm erfasst werden, können aber solche vollständig probabilistischen Methoden einen Ausweg darstellen. Hierzu gibt es bereits entsprechende Zusatztools kommerzieller Programme für die numerische Strukturanalyse, siehe z.B. *LS-OPT* von *Dynamore* [72], *Probabilistic Design System* und *DesignXplorer* von *ANSYS* [8] oder *optiSlang* der Firma *Dynardo* [73]. Diese ermöglichen bereits durch Simulationsmethoden, wie z.B. der *Monte-Carlo-Methode*, eine Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten. Die Anwendung der Zusatztools erfordert aber stets eine ausreichende Datengrundlage, um zuverlässige Ergebnisse zu erzeugen.

Das englische Wort *Uncertainty* wird meist mit *Unsicherheit* übersetzt. Der Begriff wird im Deutschen für mehrere Zusammenhänge verwendet. Eine politische Lage, eine Autofahrt oder ein Netzwerkzugang kann ebenso als unsicher beschrieben werden. Bezogen auf „unsichere“ Eingangsdaten kann die Frage gestellt werden, was damit eigentlich ausgedrückt werden soll. Können die Eingangsdaten „unsicher“ sein? Eine alternative Übersetzung für *Uncertainty* ist *Ungewissheit*. Die Eingangsdaten sind wohl auch eher ungewiss als unsicher. Oftmals ist aber ein begrenztes Wissen über die Daten vorhanden, d.h. sie sind nicht vollständig ungewiss. Vielmehr sind die Daten *unscharf* (engl.: *uncertain*). Nach GRAF ET AL. [107,108], MÖLLER ET AL. [203,205], BEER [24,25] und REUTER [248] sind die Daten für die Tragwerksplanung mit Unschärfe behaftet. Eine inhärente Unschärfe lässt sich bei der Annahme möglicher Verteilungstypen auf Basis wenig vorhandener Daten verdeutlichen. Als Beispiel sind hierzu in Abbildung 1.1 die Versuchsergebnisse der Beullasten von elf ringförmig ausgesteiften Zylinderschalen (AR-Schalen) aus [10] in einem Histogramm aufgetragen. Für eine Risikoabschätzung wird die Versagenswahrscheinlichkeit berechnet. Dazu werden auf Basis der vorhandenen Daten eine Normalverteilung, Weibull-Verteilung und Lognormalverteilung geschätzt. Alle drei Verteilungstypen sind durchaus zulässig. In Tabelle 1.1 sind für drei festgelegte Beullasten, bei denen ein Versagen eintritt, die berechneten Unterschreitungswahrscheinlichkeit enthalten. Insbesondere bei kleinen

Dichtefunktion	Unterschreitungswahrscheinlichkeit		
	$P(P_{cr} \leq 3 kN)$	$P(P_{cr} \leq 5 kN)$	$P(P_{cr} \leq 7 kN)$
Normalverteilung	$1,80 \cdot 10^{-3}$	$7,40 \cdot 10^{-3}$	$2,44 \cdot 10^{-2}$
Weibull-Verteilung	$1,40 \cdot 10^{-3}$	$9,70 \cdot 10^{-3}$	$3,40 \cdot 10^{-2}$
Lognormalverteilung	$3,55 \cdot 10^{-10}$	$1,26 \cdot 10^{-5}$	$0,17 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 1.1: Unterschreitungswahrscheinlichkeiten für verschiedene Versagenslasten unter Annahme einer Normal-, Weibull- und Lognormalverteilung

Auftretenswahrscheinlichkeiten, d.h. im Bereich der „Schwänze“ der Wahrschein-

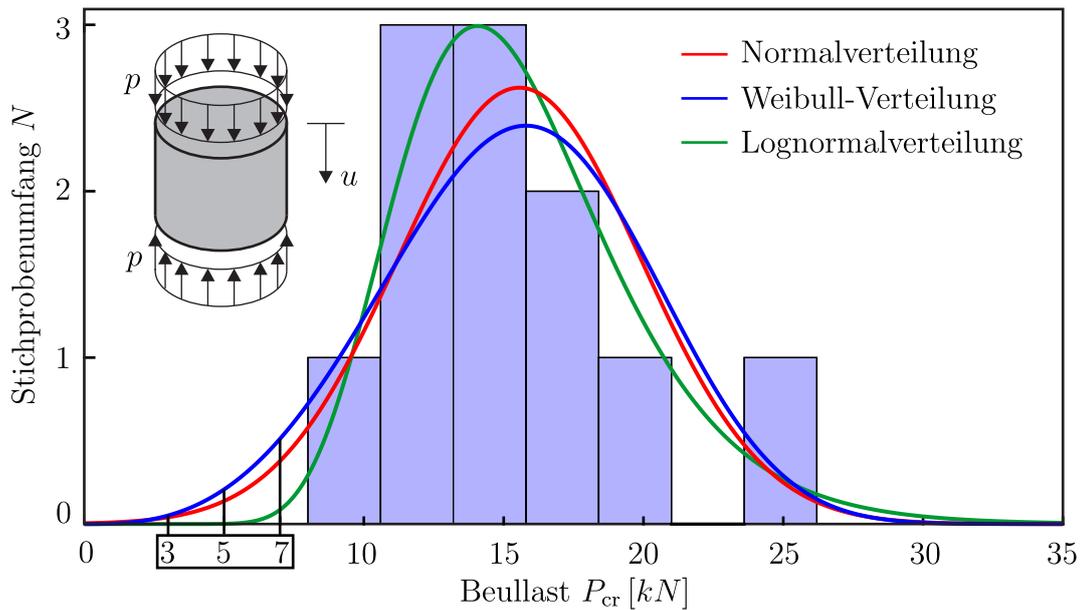


Abbildung 1.1: Versuchsergebnisse der Beullasten von $N = 11$ ringförmig ausgesteiften Zylinderschalen (AR-Schalen) aus [10]: Histogramm und Annahmen möglicher Dichtefunktionen

lichkeitsverteilungen, sind die Abweichungen der Unterschreitungswahrscheinlichkeiten groß. Die Tragsicherheit kann allein durch die Wahl möglicher Dichtefunktionen und zugehöriger Verteilungsparameter um mehrere Zehnerpotenzen abweichen [108, 116]. GRAF ET AL. [108] bezeichnen daher diese Wahrscheinlichkeiten auch als *unscharf*. Eine Angabe der Verteilungsparameter als Intervallgrößen führt zu keiner Reduzierung der Unschärfe. Vorwiegend bei Problemstellungen der nichtlinearen Strukturmechanik sind die Parameter, die zu konservativen Ergebnissen führen, im Voraus unbekannt. Um die Tragsicherheit zu erhöhen, sind alternative Modelle zur Beschreibung diverser Arten von Unschärfe erforderlich. Unschärfe wird zwischen Daten- und Modellunschärfe unterschieden. Modellunschärfe entsteht beim Modellierungsprozess. Ein unscharfes Modell liefert eine unscharfe Modellantwort, obwohl scharfe Eingangsparameter vorliegen. Unschärfe Modellgrößen sind unscharfe Tragwerksparameter, die nur modellintern wirken und lediglich die Abbildung beeinflussen [109]. Beispielsweise liefert ein Balkenmodell mit entsprechender Abmessung und gleicher Eingangsgrößen bereits unterschiedliche Ergebnisse, wenn eine *Bernoulli-Theorie* oder *Timoshenko-Theorie* verwendet wird. Bei Datenunschärfe handelt es sich um Unschärfe in den Eingangsparametern. Die unscharfen Eingangsgrößen werden mithilfe des Modells auf Ergebnisgrößen abgebildet und haben dabei keinen Einfluss auf das Modell selbst. Daneben gibt es die lexikalische Unschärfe, die eine Quantifizierung von sprachlichen Aussagen mithilfe von linguistischen Variablen möglich macht [203].

Als Weiterentwicklung gilt der Begriff der *Polymorphen Unschärfe* nach GRAF ET AL. [105, 106]. Die polymorphe Unschärfe ermöglicht explizit die Unterscheidung zwischen aleatorischen und epistemischen Unschärfen. In zahlreichen Veröffentlichungen wird das Thema der Quantifizierung von aleatorischer und epistemischer Unschärfe diskutiert, siehe z.B. in [26, 48, 133, 134, 154, 210, 219, 229, 249].

Unter *aleatorischer Unschärfe* versteht man die natürliche Variabilität. Aleatorische Unschärfe liegt vor, wenn die Größen eines Prozesses zufällig variieren. Die Beschreibung der Variabilität erfolgt mit den bekannten stochastischen Methoden. Diese Art von Unschärfe kann jedoch nicht reduziert werden. Aleatorik stammt aus dem Lateinischen *alea* und heißt übersetzt „Würfel, Risiko, Zufall“.

Mit *epistemischer Unschärfe*, aus dem Griechischen *episteme* (Wissen, Erkenntnis, Wissenschaft), werden Unschärfen aufgrund fehlendem Wissen (engl.: *lack of knowledge*) bezeichnet. Epistemische Unschärfe ist vorhanden, wenn eine Beobachtung nicht präzise beschrieben werden kann. Hierbei wird zwischen zwei Ursachen unterschieden: Ungenauigkeit (engl.: *imprecision*) der vorliegenden Daten und Unvollständigkeit (engl.: *incompleteness*), d.h. wenn nur ein begrenzter Stichprobenumfang einer Beobachtung vorliegt. Wird diese Art der Unschärfe identifiziert, kann sie z.B. durch Erhöhen des Stichprobenumfangs oder einer verbesserten Genauigkeit der Messungen reduziert werden.

Heute wird intensiv zu Ansätzen geforscht, wie gleichzeitig aleatorische und epistemische Unschärfe in einem Modell berücksichtigt werden können. Einigkeit besteht darüber, dass aleatorische Unschärfe mit den klassischen stochastischen Methoden modelliert werden kann. Offen ist die Frage, wie zusätzlich die epistemische Unschärfe berücksichtigt werden kann. Dazu sind folgende Ansätze bekannt:

- *Possibilistische Modelle*
- *Bayes-Stochastik*
- und *ungenau* Wahrscheinlichkeiten (engl.: *imprecise probability*) .

Mithilfe *Possibilistischer Modelle* wird versucht anstatt der Wahrscheinlichkeit, die Möglichkeit des Auftretens eines Ereignisses zu beschreiben [68, 69]. Dazu können die von ZADEH [360, 361] eingeführte Theorie der Fuzzy-Mengen verwendet werden.

Die Fuzzy-Theorie kann als Verallgemeinerung der klassischen Mengenlehre oder der dualen Logik angesehen werden [365]. Bei einer klassischen Variable gibt es nur zwei Zustände, entweder gehört eine Variable x zur Menge $x \in X$ oder sie gehört nicht zur Menge $x \notin X$. Die Zugehörigkeit kann nur zwei Werte annehmen, entweder 1 oder 0. Hingegen kann die Zugehörigkeitsfunktion einer Fuzzy-

Variable Werte zwischen 1 oder 0 annehmen. Somit können Elemente als nur teilweise zugehörig einer Menge betrachtet werden. Das ermöglicht eine Bewertung der Eingangsdaten. Die Definition einer solchen Zugehörigkeitsfunktion wird auch *Fuzzifizierung* genannt und kann durch linguistische Bewertungen oder Expertenwissen erfolgen [326]. Die Fuzzifizierung ist eine problemspezifische Quantifizierungsmethode [108].

Die Fuzzy-Theorie wird als nichtstochastische Methode zur Quantifizierung von Unschärfen vor allem unter den Vertretern des *Bayes'schen Ansatzes* kontrovers diskutiert [365]. Beim *Bayes'schen Ansatz* wird eine a priori Wahrscheinlichkeit (aleatorische Unschärfe) auf Grundlage von Expertenwissen (epistemische Unschärfe) festgelegt. Danach erfolgt mithilfe einer *Likelihood-Funktion* auf Basis von Messdaten und dem *Bayes-Theorem* die Berechnung einer a posteriori Wahrscheinlichkeitsfunktion (engl.: *Bayesian Update*) für eine Zufallsvariable. Der Nachteil dabei ist, dass epistemische und aleatorische Unschärfe miteinander vermischt werden. Ebenfalls wird die Festlegung der a priori Wahrscheinlichkeit kritisches gesehen [201]. Anwendungsbeispiele zum *Bayes'schen Ansatz* sind z.B. in [42, 83, 141, 189] zu finden.

Viele Veröffentlichungen existieren zum Ansatz der ungenauen Wahrscheinlichkeiten (engl.: *imprecise probability*). Dahinter verbirgt sich eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden, siehe z.B. in [26, 52, 116, 207, 217–219]. Bekannte Methoden sind die Evidenztheorie von DEMPSTER und SHAFER [61, 286], Intervall-Wahrscheinlichkeiten (engl.: *interval probabilities*) [348], p-box (engl.: *probability box*) [89, 90, 270] und Fuzzy-Wahrscheinlichkeiten (engl.: *fuzzy randomness*) [199, 200]. Diese Methoden ermöglichen die Trennung von aleatorischen und epistemischen Unschärfen.

Unter *imprecise probability* kann als Erweiterung auch die *Polymorphe Unschärfemodellierung* eingeordnet werden. Das Attribut *polymorph* bezieht sich auf die diversen Unschärfemodelle zur Berücksichtigung der verschiedenen Unschärfecharakteristiken. Damit wird eine Beschreibung der Unschärfe auf Grundlage der vorliegenden Datenbasis ermöglicht, ohne dass falsche Voraussetzungen generiert werden [27, 116, 223]. In zahlreichen Anwendungen wird der Einsatz polymorpher Unschärfemodelle demonstriert. Beispielsweise verwendet LEICHSENRING in [184] Unschärfemodelle zur Beschreibung der stark streuenden Materialparameter von Holz und in [183] wird die Unschärfe auf Mikroebene in einem repräsentativen Volumenelement (RVE) für ein FE^2 -Modell für Beton berücksichtigt. HENNING ET AL. [125] beschreiben flüssigkeitsgesättigte Böden unter Unschärfe. EDLER [74] definiert unscharfe Parameter zur Modellierung der Rissausbreitung in einer Stahlbetonbrücke.

In dieser Arbeit wird die polymorphe Unschärfemodellierung bei der Stabilitäts-

analyse von Schalenträgwerken eingeführt. Dabei steht die Beschreibung der Unschärfe für Imperfektionen im Vordergrund. Als Fortsetzung zu den Veröffentlichungen in [91–93] werden außerdem verschiedene Unschärfemodelle für Mantelimperfektionen, Aufstandsimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variationen der Schalendicke diskutiert.

Für die Modellierung der räumlichen Variabilität der Mantelimperfektionen, d.h. Abweichungen von der Sollgeometrie der perfekten Schale, sind Zufallsfelder notwendig. Eine ausführliche Literaturrecherche zur Geschichte des Schalenbeulens wird im Kapitel 8 skizziert. Im Gegensatz zur Umsetzung mit klassischen Zufallsfeldern wird die Unschärfe bei räumlich korrelierten Feldern berücksichtigt. Dazu werden Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder verwendet. Einen umfassenden Überblick zur Modellierung räumlich korrelierter Felder unter Unschärfe geben z.B. SCHIETZOLD ET AL. [276]. Anwendungen sind z.B. in [275, 277, 278] gegeben. Eine weitere Klasse *ungenauer Zufallsfelder* (engl.: *imprecise random fields*) sind Intervall-Zufallsfelder (engl.: *interval fields*), siehe z.B. in [84, 85, 206, 324].

Als Zusammenfassung ist in Abbildung 1.2, in Anlehnung an SUDRET [309], ein Ablaufschema der Strukturanalyse mit unscharfen Parametern skizziert.

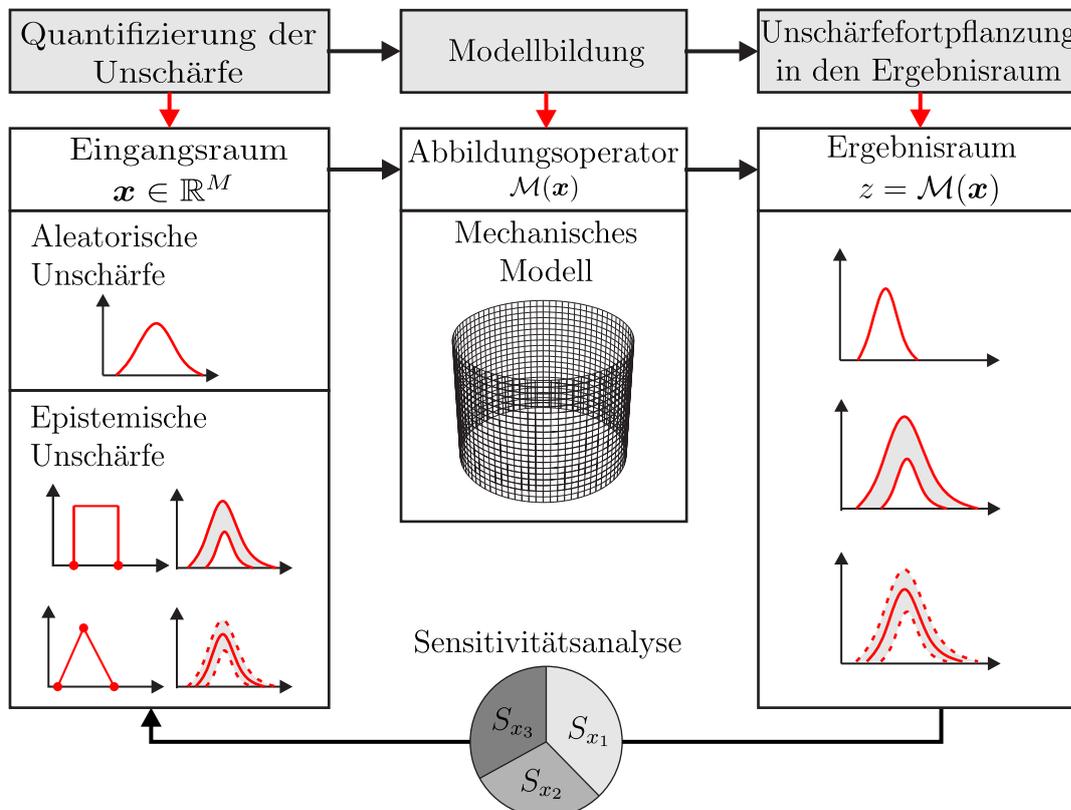


Abbildung 1.2: Ablaufschema einer Strukturanalyse mit unscharfen Parametern

Am Anfang wird ein Modell $\mathcal{M}(\boldsymbol{x})$ zu einer möglichst genauen Beschreibung der Realität erstellt. Das kann wie in dieser Arbeit ein mechanisches Modell bzw. ein FE-Modell sein oder auch eine beliebig komplexe mathematische Formulierung eines physikalischen Systems. Im Gegensatz zu einer deterministischen Analyse wird nun die Unschärfe der Eingangsdaten quantifiziert. Der Vektor der Eingangsdaten $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^M$ kann zur Beschreibung eines mechanischen Modells die Materialparameter, Geometrieparameter, Querschnittswerte und Lasten enthalten. Die polymorphen Unschärfemodelle ermöglichen hierbei eine differenzierte Quantifizierung der Unschärfe in den Eingangsdaten. Das Modell überträgt dann die Unschärfen der Eingangsdaten in den Ausgang. Der Prozess wird im Englischen auch *uncertainty propagation* genannt. Die Ausgangsgrößen, wie Knotenverschiebungen, Spannungen/Schnittgrößen oder in dieser Arbeit vorwiegend von Interesse die Stabilitätslasten von Schalenträgwerken, sind demnach auch unscharfe Größen. Diese ermöglichen die Berücksichtigung der Unschärfe zur Entscheidungsfindung (engl.: decision-making) in einem Bemessungsprozess. Zur Unterstützung der Entscheidungsfindung werden mithilfe einer Sensitivitätsanalyse die Einflüsse der einzelnen Eingangsgrößen auf eine definierte Ausgangsgröße untersucht.

1.3 Gliederung der Arbeit

Die Arbeit besteht im Wesentlichen aus den Themenschwerpunkten: Unschärfemodellierung, Stabilität von Schalenträgwerken, Modellierung räumlicher Variabilität und Metamodellierung mit Sensitivitätsanalyse. Diese Themen sind aufgeteilt unter den folgenden Kapiteln:

- In **Kapitel 2** werden die benötigten Grundlagen der Kontinuumsmechanik behandelt. Ausgehend von dem kontinuumsmechanischen Modell eines mechanisch deformierbaren Körpers werden die Größen zur Beschreibung einer nichtlinearen Kinematik und die daraus resultierenden Spannungen hergeleitet. Danach werden die Bilanzgleichungen aufgestellt und die Voraussetzungen für ein hyperelastisches Material erläutert. Abschließend wird die schwache Form des Gleichgewichts und dessen Linearisierung zur Umsetzung mit der Methode der Finiten Elemente vorgestellt.
- Eine Unschärfemodellierung dünner Schalenträgwerke erfordert die Anwendung robuster Schalelemente. Dazu werden in **Kapitel 3** die Grundgleichungen einer geometrisch nichtlinearen Schale vorgestellt. Nach der Herleitung der Schalenkinematik und der Schalenschnittgrößen wird die Finite-Element-Formulierung präsentiert.
- In **Kapitel 4** wird die Stabilität von Tragwerken behandelt. Zunächst wird das Verfahren zur Lösung nichtlinearer Finite Elemente Gleichungen vor-

gestellt. Nach der Herleitung der tangentialen Steifigkeitsmatrix aus der Schalenformulierung werden hier die Möglichkeiten numerischer Stabilitätsuntersuchungen aufgezeigt. Zusätzlich werden Pfadverfolgungsalgorithmen genannt, die bei einem stark nichtlinearen Last-Verformungsverhalten eingesetzt werden können. Abschließend wird das Stabilitätsverhalten einer imperfekten Kreiszylinderschale diskutiert und die dabei auftretenden numerischen Probleme gezeigt.

- Die Unschärfe- und Metamodellierung wird auch an Beispielen der nichtlinearen Strukturmechanik vorgeführt. Dazu werden in **Kapitel 5** die benötigten Grundlagen zur Behandlung zeitabhängiger Probleme beschrieben. Explizite und implizite Zeitintegrationsverfahren werden vorgestellt.
- In **Kapitel 6** werden zuerst die mathematischen Grundlagen der Basisunschärfemodelle, wie Zufälligkeit, Fuzziness und Intervalle, beschrieben. Darauf aufbauend werden die einzelnen polymorphen Unschärfemodelle vorgestellt. Zur Beschreibung der räumlichen Variabilität werden die Zufallsfelder eingeführt. Um auch hier Unschärfen beschreiben zu können, werden Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder beschrieben. Die numerische Umsetzung der Zufallsfelder erfordert geeignete Diskretisierungsmethoden wie die Karhunen-Loève-Transformation und die EOLE-Methode. Bei der Anwendung der EOLE-Methode wird zwischen dem Finite-Element-Netz und einem stochastischen Netz unterschieden. Das ermöglicht eine Reduzierung des Eigenwertproblems der Kovarianzmatrix. Einfache Beispiele zeigen hierzu den Netzeinfluss des stochastischen Netzes auf das Ergebnis der stochastischen Simulation mit der *Monte-Carlo-Methode*. Zudem wird die numerische Umsetzung mit dem Erweiterungsprinzip und der α -Level-Optimierung erläutert und der Schleifenalgorithmus einer Fuzzy-stochastischen Analyse vorgestellt.
- Der Rechenaufwand einer Unschärfemodellierung ist sehr hoch. Daher wird der Abbildungsoperator, hier das FE-Modell, durch ein einfacheres Modell, das weniger rechenintensiv ist, ersetzt. So ein Ersatzmodell wird auch Metamodell genannt. In **Kapitel 7** werden die in dieser Arbeit umgesetzten Metamodelle, wie die *Polynominterpolation*, die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate*, *Neuronale Netze*, *Kriging* und die *hochdimensionale Modelldarstellung (HDMR)*, detailliert für den allgemein mehrdimensionalen Fall hergeleitet. Dabei werden die Metamodelle in Interpolationsmodelle und in Ausgleichsmodelle klassifiziert. Die Metamodellierung erfordert zudem eine sinnvolle Wahl der Stützstellen (engl.: *sample points*). Dazu werden die Methoden der statistischen Versuchsplanung vorgestellt. Zur Validierung der Metamodelle werden unterschiedliche Verfahren präsentiert. Als Unterstüt-

zung der Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) wird die *varianzbasierte Sensitivitätsanalyse (ANOVA-HDMM)* vorgeschlagen. Die Strategie der numerischen Umsetzung dieser Sensitivitätsanalyse wird auf Basis der Metamodelle ausführlich dargelegt. An Benchmark-Tests wird die Funktionalität und auch die unterschiedliche Leistungsfähigkeit der implementierten Metamodelle gezeigt. Als baupraktisches Beispiel dient das Stabilitätsproblem eines elastisch gebetteten Bohrpfahls unter Axialdruck mit einer Anfangsschiefstellung als Imperfektion. Anhand der kritischen Knicklast, die als unscharfe Ergebnisgröße vorliegt, wird der Einfluss der Metamodelle auf die Qualität der Ergebnisgröße diskutiert.

- Das **Kapitel 8** beinhaltet das umfangreiche Beispiel der Zylinderschale mit Imperfektionen. Zuerst wird ein historischer Überblick zum Forschungsgebiet des Schalenbeulens gegeben. Bis heute besteht das Dilemma der unbekanntenen Imperfektionen. Zur Behandlung des Problems existiert noch kein abgeschlossenes Regelwerk. Um die Unschärfen mit der vorhandenen Datenbasis zu quantifizieren, kommen die vorgestellten polymorphen Unschärfemodelle zum Einsatz. Das Vorgehen wird anhand einer Datenbank mit Messungen zu Mantelimperfektionen von Zylinderschalen aus unterschiedlichen Herstellprozessen gezeigt. Hierfür wird ein Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern entwickelt, für das die Korrelationseigenschaften aus der Datenbank gewonnen werden. Aus der Fuzzifizierung der Korrelationsparameter folgt eine Darstellung der Mantelimperfektionen mit Fuzzywahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeldern. Die Ergebnisse sind stochastische Größen der Beullasten als unscharfe Parameter. Diese werden mit Versuchsergebnissen verglichen und eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Zusätzlich zum Unschärfemodell für die Mantelimperfektionen werden weitere Unschärfemodelle für die Modellierung von Aufstandsimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variationen der Schalendicke eingesetzt. Die Ergebnisse des Gesamtmodells werden ausführlich diskutiert und den aktuellen Bemessungsregeln, die auf semi-empirischen Ansätzen beruhen, gegenübergestellt. Ebenso findet eine Diskussion zum *decision-making* mit unscharfen kritischen Beulfaktoren als Ergebnisgröße statt.
- In **Kapitel 9** werden weitere numerische Beispiele aus der Ingenieurpraxis präsentiert. Die Anwendung des Korrelationsmodells mit unscharfen Parametern wird an einer Kegelschale der Zwischenstufe der Ariane-Rakete gezeigt. Hierfür werden ebenfalls aus Imperfektionsmessungen die Korrelationseigenschaften gewonnen. Ein weiteres Beispiel ist eine dynamische Untersuchung eines Propfans des Transportflugzeugs A400M unter Berücksichtigung der Unschärfe. Hierbei wird u.a. gezeigt, dass stochastische Imper-

fektionen auch problemlos auf gekrümmte Oberflächen aufgebracht werden können.

- In **Kapitel 10** werden die wesentlichen Erkenntnisse der Arbeit zusammengefasst. Darüber hinaus wird ein Ausblick zu weiteren Forschungsvorhaben gegeben.

Eine bildhafte Darstellung der einzelnen Kapitel wird in Abbildung 1.3 gegeben.

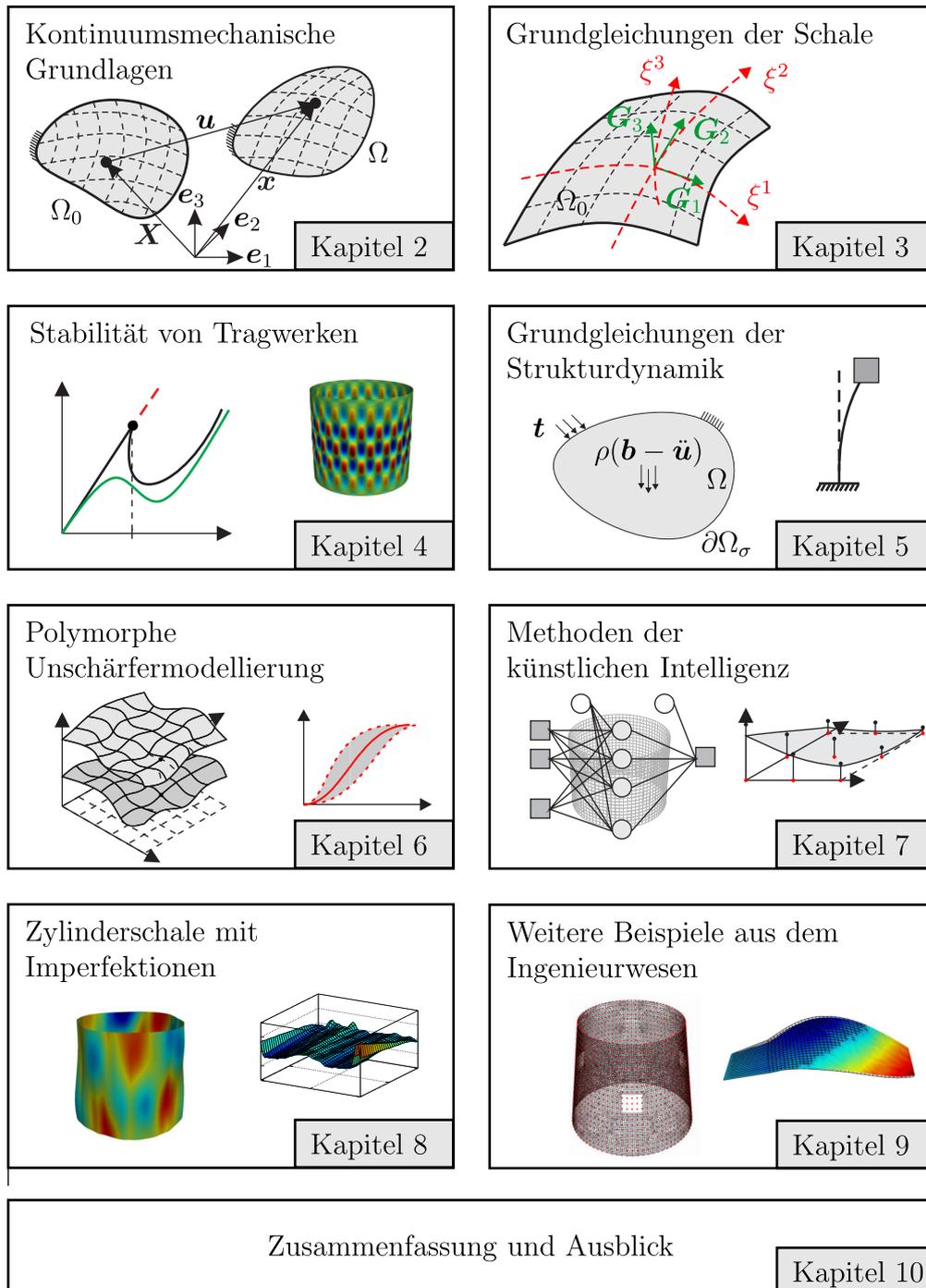


Abbildung 1.3: Grafische Zusammenfassung der einzelnen Kapitel

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik wird als Grundlage verwendet, um wesentliche physikalische Phänomene zu beschreiben. Die Idee besteht darin beliebig vorkommende Strukturen als einen materiellen Körper – ein *Kontinuum* – zu betrachten. Diese Idealisierung erfordert keine detaillierten Kenntnisse über die mikroskopische Struktur. Die zusammenhängenden materiellen Punkte bilden einen materiellen Körper als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen. Bezogen auf die Festkörpermechanik ermöglicht die Betrachtungsweise eine vollständige Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Festkörpern. In diesem Kapitel werden die wesentlichen Punkte der Kontinuumsmechanik:

- Kinematik
- Spannungen
- Bilanzgleichungen
- und die konstitutive Modellierung

zusammengefasst. Abschließend wird zur Anwendung der Finite-Element-Methode (FEM) die Variationsformulierung und Linearisierung vorgestellt. Die Ausführungen sind aus den folgenden Standardwerken zur Kontinuumsmechanik entnommen: HOLZAPFEL [135], STEIN & BARTHOLD [305], WRIGGERS [355], MARDEN & HUGHES [191], ERINGEN [81], GREVE [110], PARISCH [228] und ALTENBACH [5]. Die Herleitungen bilden die Grundlage für die Elementformulierung der Schale im nachfolgenden Kapitel.

2.1 Kinematik

2.1.1 Konfigurationen und Bewegung eines materiellen Körpers

In der Kontinuumsmechanik wird mit der Kinematik das Deformationsverhalten und die Verschiebungen eines Kontinuums beschrieben. Das Kontinuum ist ein homogener Körper \mathcal{B} , der durch den Rand $\partial\mathcal{B}$ begrenzt ist. Dieser Körper besteht aus einer endlichen Anzahl an materiellen Punkten $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ und wird im dreidimensionalen *Euklidischen Raum* \mathbb{R}^3 definiert.

Zur Beschreibung der Lage und Bewegung des Körpers wird ein kartesisches Bezugssystem mit festem Ursprung O und den orthonormalen Basisvektoren $\mathbf{e}_i, i = \{1, 2, 3\}$ eingeführt, siehe Abbildung 2.1. Während der Bewegung durch den Raum verformt sich der Körper und nimmt verschiedene Konfigurationen

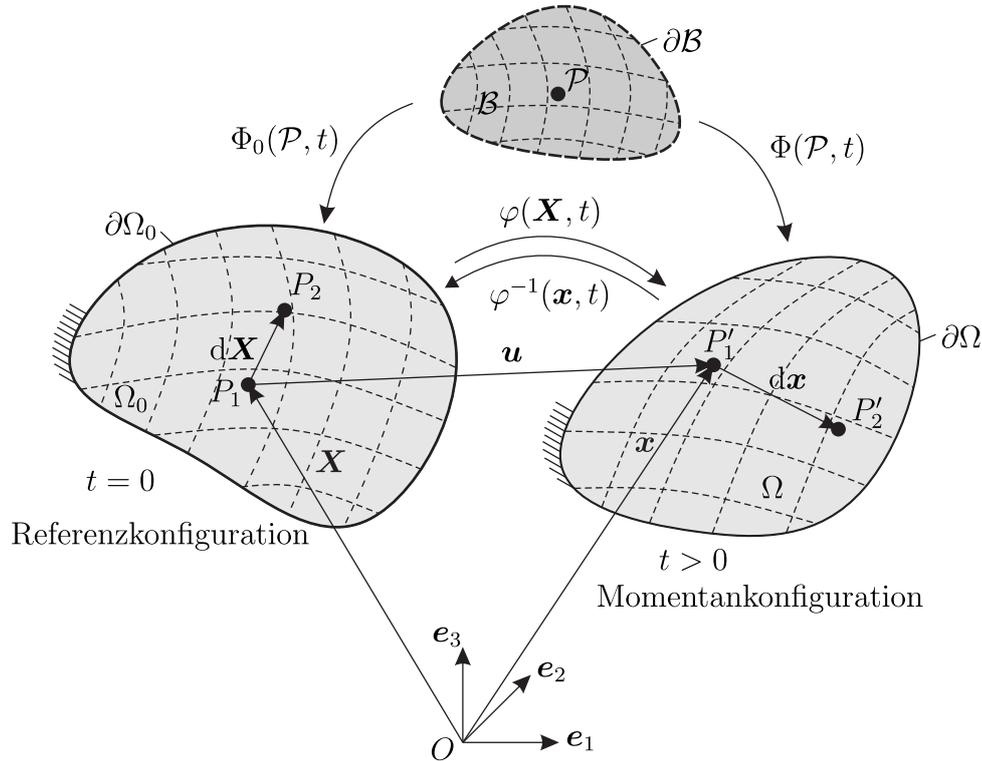


Abbildung 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines materiellen Körpers

Ω_0, \dots, Ω ein. Die Referenzkonfiguration Ω_0 ist die Lage des unverformten Körpers zur Referenzzeit $t = 0$. Die Momentankonfiguration ist die Lage, die der verformte Körper zu einem beliebigen Zeitpunkt t einnimmt. Die Gebiete beider Konfigurationen sind mit den Rändern $\partial\Omega_0$ und $\partial\Omega$ begrenzt. Die Einführung der Abbildungen $\mathbf{X} = \Phi_0(\mathcal{P}, t)$ und $\mathbf{x} = \Phi(\mathcal{P}, t)$ ermöglicht die Beschreibung der eindeutigen Lage eines materiellen Punktes $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration $\mathbf{X} \in \Omega_0$ und in der Momentankonfiguration $\mathbf{x} \in \Omega$. Die Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} werden für beide Konfigurationen wie folgt definiert:

$$\mathbf{X} = X_i e_i \quad \in \Omega_0 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} = x_i e_i \quad \in \Omega \quad . \quad (2.2)$$

Mithilfe der Abbildung $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ kann der Körper direkt von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration überführt werden. Eine inverse Abbildung $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ existiert, weil eine bijektive Abbildung vorausgesetzt wird. Die Differenz beider Ortsvektoren

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

ist der Verschiebungsvektor des materiellen Punktes. In der *Lagrangeschen Betrachtungsweise* lassen sich die Ortsvektoren in der Momentankonfiguration auch

als Funktion der Ortsvektoren in der Referenzkonfiguration und der Zeit t darstellen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (2.4)$$

In dieser Betrachtungsweise nimmt ein materieller Punkt P andere Raumpunkte P' mit den Koordinaten x_i ein. Daraus folgt, dass die *Eulerschen* oder *räumliche Koordinaten* x_i von den *Lagrangeschen* oder materiellen Koordinaten X_i und der Zeit t abhängig sind. Der Beobachter ist hierbei fest mit den materiellen Punkten \mathcal{P} des Körpers \mathcal{B} verbunden und verfolgt die Bewegung. Daher wird diese Darstellungsform auch *materielle Betrachtungsweise* genannt. Der Verschiebungsvektor nach Gleichung (2.3) lässt sich mit diesem Zusammenhang auch in der *Lagrangeschen Darstellung* angeben:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad . \quad (2.5)$$

2.1.2 Der materielle Deformationsgradient

Die Beschreibung der Bewegung materieller Körper wird im Folgenden für die Darstellung von Deformationen und Verzerrungen eines Körpers benutzt. Hierzu wird ein Linienelement in der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in die Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ überführt, siehe Abbildung 2.1. Mithilfe der Beziehung

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.6)$$

wird das Linienelement in der Momentankonfiguration definiert. Der Ortsvektor kann als *Taylorreihe* dargestellt werden:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^2} d\mathbf{X}^2 + \dots \quad . \quad (2.7)$$

Wird die *Taylorreihenentwicklung* nach dem ersten Glied abgebrochen und in Gleichung (2.6) eingesetzt folgt für das Linienelement

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \text{Grad}(\mathbf{x}) d\mathbf{X} \quad . \quad (2.8)$$

Der materielle Deformationsquotient

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.9)$$

wird als lineare Abbildung des Linienelements $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration auf das Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration eingeführt:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (2.10)$$

Der Deformationsgradient ist im Allgemeinen nicht symmetrisch:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} \neq \mathbf{F}^T \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial X_j}(\dots) = (\dots), j \quad . \quad (2.11)$$

Die Voraussetzung für die Existenz einer inversen Abbildung \mathbf{F}^{-1} ist, dass die *Jacobische Funktionaldeterminante* J ungleich Null ist:

$$J := \det \mathbf{F} \neq 0 \quad . \quad (2.12)$$

Dies gilt auch bei Starrkörperverschiebungen. Um eine Selbstdurchdringung des Körpers zu vermeiden, wird außerdem gefordert, dass die Determinante $J > 0$ ist. Mithilfe der Determinante lassen sich auch Flächenelemente und Volumenelemente von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration transformieren

$$d\mathbf{a} = J\mathbf{F}^{-T}d\mathbf{A} \quad , \quad (2.13)$$

$$dv = JdV \quad . \quad (2.14)$$

Eine weitere Darstellung des materiellen Deformationsgradienten wird mithilfe des materiellen Verschiebungsgradienten

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{Grad}(\mathbf{u}) = u_{i,j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \text{Grad}(\mathbf{x}) - \text{Grad}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbf{F} - \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.15)$$

gegeben.

2.1.3 Der Green-Lagrange-Verzerrungstensor

Im materiellen Deformationsgradienten sind unterschiedliche Bewegungsanteile wie Starrkörpertranslationen, Starrkörperrotationen und Deformationen enthalten. Mit Starrkörperbewegungen werden ausschließlich Änderungen der Lage des Körpers im Raum beschrieben. Allerdings sind für die Definition von Verzerrungen lediglich die Deformationen von Bedeutung. Der Deformationsgradient ist kein geeignetes Verzerrungsmaß, weil dieser für Starrkörperrotationen und Starrkörpertranslationen nicht identisch Null ist. Bei Starrkörperbewegungen dürfen bei Multiplikation des Materialtensors mit dem Verzerrungstensor keine Spannungen entstehen. Ein weiterer Nachteil ist, dass der Deformationsgradient im Allgemeinen nicht symmetrisch ist, siehe Gleichung (2.11). Jedoch herrscht ein symmetrischer Spannungszustand. Für die Definition einfacher Materialtensoren ist daher ebenfalls ein symmetrisches Verzerrungsmaß erforderlich.

Die Einführung eines geeigneten Verzerrungsmaßes erfordert eine Trennung der Deformationsanteile. Die polare Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{oder} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.16)$$

ist Basis diverser Verzerrungsmaße. Dabei ist \mathbf{R} der *Drehtensor*, \mathbf{U} der materielle *Rechts-Streck-Tensor* und \mathbf{V} der räumliche *Links-Streck-Tensor*. Die polare Zerlegung ist eine Hintereinanderschaltung von Starrkörperrotation und Streckung in unterschiedlicher Reihenfolge, siehe Abbildung 2.2. Die Tensoren zweiter Stufe

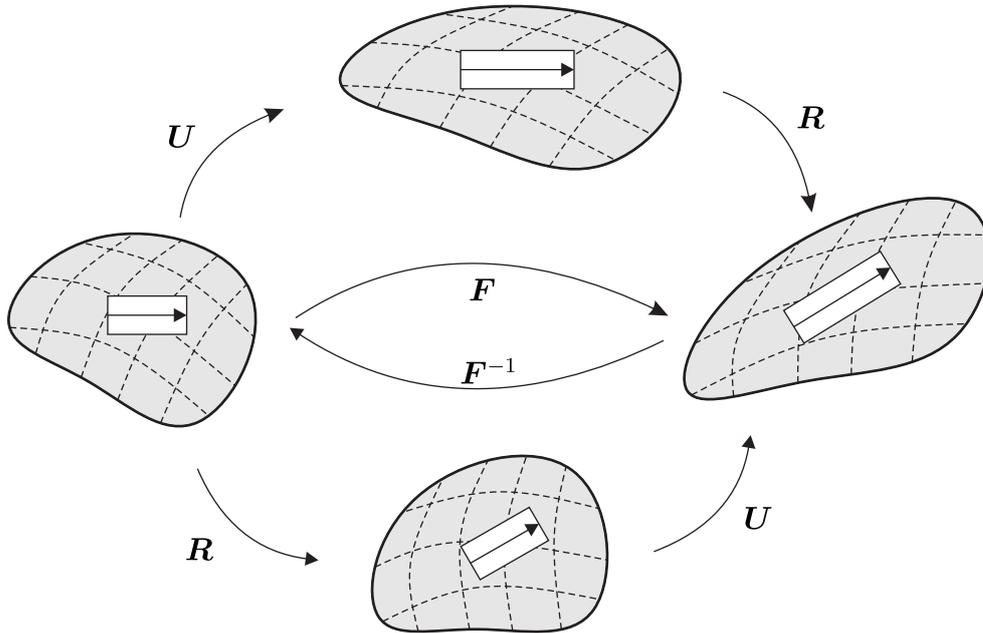


Abbildung 2.2: Polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten

\mathbf{R} und \mathbf{V} sind symmetrisch und positiv definit. Damit gilt:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \quad . \quad (2.17)$$

Zusätzlich ist der Drehtensor \mathbf{R} orthogonal, d.h.

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad . \quad (2.18)$$

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge nach Gleichung (2.17) und (2.18) wird der materielle *Rechts-Cauchy-Green-Tensor* eingeführt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad . \quad (2.19)$$

In diesem Tensor werden die Rotationsanteile \mathbf{R} eliminiert. Für den Fall einer Starrkörpertranslation entspricht der *Rechts-Cauchy-Green-Tensor* sowie der Deformationsgradient einem zweistufigen Einheitstensor: $\mathbf{C} = \mathbf{F} = \mathbf{1}$. Nach Gleichung (2.15) verschwindet in diesem Fall auch der Verschiebungsgradient \mathbf{H} .

Obwohl der materielle Körper nicht deformiert wird, führt dies bei der Multiplikation mit dem Materialtensor fälschlicherweise zu Spannungen.

Gesucht wird daher ein Verzerrungstensor, der bei Starrkörperbewegungen einem Null-Tensor entspricht und symmetrisch ist. Diese gewünschten Eigenschaften werden mit dem *Green-Lagrange-Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.20)$$

$$(2.21)$$

erfüllt. Alternativ wird der *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* oftmals auch mithilfe der Differenz der Skalarprodukte der Linienelemente $d\mathbf{x} \in \Omega$ und $d\mathbf{X} \in \Omega_0$ hergeleitet:

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2 &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{1}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}(2\mathbf{E})d\mathbf{X} \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wird der Zusammenhang zwischen Deformations- und Verschiebungsgradient nach Gleichung (2.15) in Gleichung (2.21) eingesetzt, resultiert die Darstellungsform des *Greenschen Verzerrungstensors* mithilfe des Verschiebungsgradienten:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{1} + \mathbf{H})^T (\mathbf{1} + \mathbf{H}) - \mathbf{1} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

In dieser Darstellung kann der *Greensche Verzerrungstensor* additiv in einen linearen Anteil \mathbf{E}_{lin} und in einen nichtlinearen Anteil \mathbf{E}_{nlin} der Verschiebungen \mathbf{u} in der Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{lin}} + \mathbf{E}_{\text{nlin}} \quad (2.24)$$

mit

$$\mathbf{E}_{\text{lin}} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{E}_{\text{lin}}^T \quad \text{und} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E}_{\text{nlin}} = \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \frac{1}{2}(u_{k,i} u_{k,j}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{E}_{\text{nlin}}^T \quad (2.26)$$

zerlegt werden.

Die Verzerrungen lassen sich mit den Verschiebungen $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ in der *Voigtschen Notation* in bekannter Vektorschreibweise darstellen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,3} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \\ u_{2,3} + u_{3,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_{\text{lin}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,3}u_{1,3} + u_{2,3}u_{2,3} + u_{3,3}u_{3,3}) \\ u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} + \\ u_{1,2}u_{1,1} + u_{2,2}u_{2,1} + u_{3,2}u_{3,1} \\ u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3} + \\ u_{1,3}u_{1,1} + u_{2,3}u_{2,1} + u_{3,3}u_{3,1} \\ u_{1,3}u_{1,2} + u_{2,3}u_{2,2} + u_{3,3}u_{3,2} + \\ u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_{\text{nl}}} \quad . \quad (2.27)$$

Bei einer geometrisch linearen Theorie können für $\|\mathbf{H}\| \ll 1$ die nichtlinearen Anteile \mathbf{E}_{nl} vernachlässigt werden. Mithilfe der Linearisierung von \mathbf{E} im Punkt \mathbf{X} in der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned} \text{Lin}[\mathbf{E}]_{\mathbf{u}} &= \bar{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{D}\mathbf{E}}\mathbf{u} \quad \text{mit} \\ \overline{\mathbf{D}\mathbf{E}}\mathbf{u} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\alpha} \left[\left[\frac{\partial(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} \right]^T \left[\frac{\partial(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{u})}{\partial\mathbf{X}} \right] - \mathbf{1} \right] \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\alpha} \left[[\mathbf{1} + \alpha\mathbf{H}]^T [\mathbf{1} + \alpha\mathbf{H}] - \mathbf{1} \right] \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\alpha} \left[\alpha\mathbf{H} + \alpha\mathbf{H}^T + \alpha^2\mathbf{H}^T\mathbf{H} \right] \right]_{\alpha=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \alpha\mathbf{H}^T\mathbf{H} \right]_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right] = \mathbf{E}_{\text{lin}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

und $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ kann gezeigt werden, dass die Anwendung eines linearisierten *Verzerrungstensors* \mathbf{E}_{lin} für kleine Verschiebungen \mathbf{u} zulässig ist.

In der geometrisch linearen Theorie wird der lineare Verzerrungstensor \mathbf{E}_{lin} auch mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezeichnet.

Im Rahmen der klassischen Ingenieurmechanik gilt für die Ingenieurdehnungen in Richtung der drei Koordinatenachsen

$$\gamma_{11} = \varepsilon_{11}, \quad \gamma_{22} = \varepsilon_{22}, \quad \gamma_{33} = \varepsilon_{33} \quad (2.29)$$

und für die Ingenieurgleitungen

$$\frac{1}{2}\gamma_{12} = \varepsilon_{12}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{23} = \varepsilon_{23}, \quad \frac{1}{2}\gamma_{13} = \varepsilon_{13} \quad . \quad (2.30)$$

2.2 Spannungen

Die Ursache der Deformation eines materiellen Körpers sind Spannungen. Mit dem *Eulerschen Schnittprinzip* werden gedanklich Schnitte durch den materiellen Körper geführt und damit ein Zugang zu den inneren Kräften des mechanisch beanspruchten Kontinuums ermöglicht. Die Herleitung des Konzepts der Spannung wird ausgehend vom Körper \mathcal{B} in der Momentankonfiguration Ω erläutert. Der Körper wird durch einen ebenen Schnitt S in zwei Teilkörper Ω_1 und Ω_2 mit den Oberflächen $\partial\Omega_1 \cup S^-$ und $\partial\Omega_2 \cup S^+$ zerlegt, siehe Abbildung 2.3.

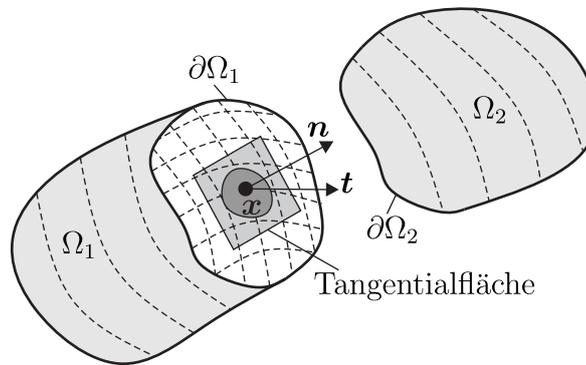


Abbildung 2.3: Spannungs- und Normalenvektor in einem Schnitt durch den Körper \mathcal{B} in der Momentankonfiguration

Die Lage der Tangentialfläche der Schnittfläche wird mit dem Normalenvektor \mathbf{n} festgelegt. Durch den Schnitt werden innere Kräfte frei gelegt. An einem Flächenelement Δa der Schnittfläche wirkt die Kraft $\Delta \mathbf{f}$. Die Spannung \mathbf{t} an einem materiellen Punkt \mathbf{x} wird als Grenzwert

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (2.31)$$

eingeführt. Der Kraftvektor $d\mathbf{f}$ lässt sich sowohl für die Momentankonfiguration mit \mathbf{t} und da als auch für die Referenzkonfiguration mit \mathbf{t}_0 und dA formulieren:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}_0 dA = \mathbf{t} da \quad . \quad (2.32)$$

Zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und der Flächennormale \mathbf{n} besteht die Beziehung

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad , \quad (2.33)$$

die als *Cauchy-Postulat* bekannt ist und gilt als weitreichende Annahme. Dieses besagt, dass der Spannungsvektor \mathbf{t} in Punkt \mathbf{x} nur von der Lage der Tangentialebene und nicht von den Eigenschaften der Schnittfläche, wie z.B. der Krümmung,

abhängig ist. Des Weiteren gilt das *Fundamentallemma von Cauchy*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \quad (2.34)$$

mit der Aussage, dass die Spannungsvektoren auf den entgegengesetzten Seiten der Schnittfläche betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt in der Richtung sind. Die lineare Beziehung

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad , \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

zwischen dem Spannungsvektor \mathbf{t} und dem Normalenvektor \mathbf{n} wird als *Cauchy-Theorem* bezeichnet. Mit der Drehimpulsbilanz lässt sich die Symmetrie des *Cauchyschen Spannungstensors* zeigen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad . \quad (2.36)$$

Die *Cauchy-Spannungen* $\boldsymbol{\sigma}$ wirken in der Momentankonfiguration und werden auch als *wahre Spannungen* bezeichnet. Da die verformte Konfiguration zunächst unbekannt ist, wird eine *pull-back-Transformation* in die unverformte Konfiguration durchgeführt. Mithilfe der Beziehungen (2.13), (2.35) und den vektoriellen Oberflächenelementen $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$ der Momentankonfiguration und $d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA$ der Referenzkonfiguration folgt der Zusammenhang:

$$t da = \boldsymbol{\sigma} n da = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{a} = \boldsymbol{\sigma} J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} = \underbrace{J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}}_{\mathbf{P}} \mathbf{N} dA = \mathbf{t}_0 dA \quad . \quad (2.37)$$

Dabei wird der Spannungsvektor \mathbf{t}_0 in der Referenzkonfiguration als *1. Piola-Kirchhoffsche Spannungsvektor* (Abk.: 1. P.K.) bezeichnet mit der Definition

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (2.38)$$

Dieser Spannungstensor ist nicht symmetrisch

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T \quad . \quad (2.39)$$

Für die Aufstellung der schwachen Form des Gleichgewichts wird jedoch ein symmetrischer Tensor benötigt, der arbeitskonform zum bereits eingeführtem *Green-schen Verzerrungstensor* \mathbf{E} ist. Dabei wird mithilfe der Kongruenztransformation $\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ die Symmetrie des *Cauchyschen Spannungstensors* bewahrt. Daraus resultiert der *2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* (Abk.: 2. P.K.):

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (2.40)$$

Der 2. P.K dient nur als Rechengröße, dessen Komponenten keine physikalische Bedeutung haben. Dieser Spannungstensor ist symmetrisch:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad . \quad (2.41)$$

2.3 Bilanzgleichungen der Mechanik

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Bilanzgleichungen der Mechanik behandelt. Dabei werden die Bilanzen der Masse, des Impulses, des Drehimpulses und die Energieerhaltung bzw. der erste Hauptsatz der Thermodynamik diskutiert. Die Bilanzgleichungen müssen für jeden beliebigen Körper \mathcal{B} und jeden Teilkörper erfüllt sein. Diese lassen sich formal in der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \alpha \, dv = \int_{\mathcal{B}} \Sigma \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \Gamma \, da \quad (2.42)$$

angeben und sind unabhängig von den materiellen Eigenschaften. Die Zustandsvariablen α resultieren aus dem Zuwachs Σ innerhalb des Gebiets \mathcal{B} und einer Zufuhr Γ über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$. Mit den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Drehimpuls werden die Größen α , Σ und Γ definiert.

2.3.1 Massenerhaltung

Der Satz von der Erhaltung der Masse besagt, dass sich die Masse m des materiellen Körpers \mathcal{B} während des Deformationsprozesses nicht ändert. Der Körper wird als ein abgeschlossenes System betrachtet, dessen Gesamtmasse sich weder durch Massenzufuhr über die Oberfläche $\partial\mathcal{B}$ noch durch Zufuhr im Inneren von \mathcal{B} verändert. Ein Gegenbeispiel ist der Start einer Rakete, die durch die Verbrennung von Treibstoff an Masse verliert. Zur Berechnung der Gesamtmasse wird die Existenz einer Massendichte ρ vorausgesetzt. In der Momentankonfiguration wird die Dichte ρ in einem Punkt \boldsymbol{x} durch die Grenzwertbetrachtung

$$\rho := \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (2.43)$$

definiert. Damit folgt die Beziehung

$$dm = \rho \, dv \quad . \quad (2.44)$$

Der Satz von der Erhaltung der Masse bedeutet, dass die Masse m für jede Konfiguration Ω_t von \mathcal{B} gleich ist. Damit kann die Gesamtmasse zu jedem Zeitpunkt t mit der Integration

$$m = \int_{\Omega_t} dm = \int_{\Omega_t} \rho \, dv = \text{konst.} \quad (2.45)$$

berechnet werden. Für die Bilanz der Masse zwischen der Referenzkonfiguration Ω_0 und der Momentankonfiguration Ω gilt insbesondere

$$m_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \, dV = \int_{\Omega} \rho \, dv = m \quad (2.46)$$

und mit der Transformation der Volumenelemente nach Gleichung (2.14) folgt

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 dV = \int_{\Omega_0} \rho \det \mathbf{F} dV = \int_{\Omega_0} (\rho_0 - \rho \det \mathbf{F}) dV = 0 \quad . \quad (2.47)$$

Dabei ist ρ_0 die Massendichte in der Referenzkonfiguration. Diese Gleichung wird für einen beliebigen Körper Null, wenn der Integrand verschwindet. Damit lässt sich die erste lokale Form der Massenerhaltung

$$\rho_0 = \rho \det \mathbf{F} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (2.48)$$

formulieren. Mit der Masse als Erhaltungsgröße gilt für Gleichung (2.49)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho dv = 0 \quad . \quad (2.49)$$

Diese Beziehung wird auch als zweite lokale Form der Massenbilanz bezeichnet und besagt, dass sich die Masse auch zeitlich nicht ändert.

2.3.2 Impulserhaltung

Der Impuls I eines Körpers \mathcal{B} , der sich mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ bewegt, ist mit

$$I := m \dot{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} dV \quad (2.50)$$

definiert und ist eine Erhaltungsgröße. Das 2. *Newton'sche Gesetz der Bewegung* ist Grundlage der Impulserhaltung. Durch die Impulsbilanz wird postuliert, dass die Summe aller auf einen Körper einwirkenden Kräfte gleich der zeitlichen Impulsänderung ist. Die Darstellung dieses Erhaltungssatzes wird in materieller Form wie folgt definiert:

$$\dot{I} = \frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} dV = \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} \bar{\mathbf{t}}_0 dA}_{\mathbf{F}_t} + \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 dV}_{\mathbf{F}_b} \quad . \quad (2.51)$$

Dabei wird die resultierende Oberflächenkraft \mathbf{F}_t mit der Integration der eingprägten Spannung $\bar{\mathbf{t}}_0$ über die Oberfläche $\partial\Omega_0$ erhalten und die resultierende Volumenkraft \mathbf{F}_b entsteht aus der massenbezogenen Beschleunigung $\bar{\mathbf{b}}_0$, z.B. der Erdbeschleunigung. Die Beziehung in Gleichung (2.51) wird als *dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung* bezeichnet und ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

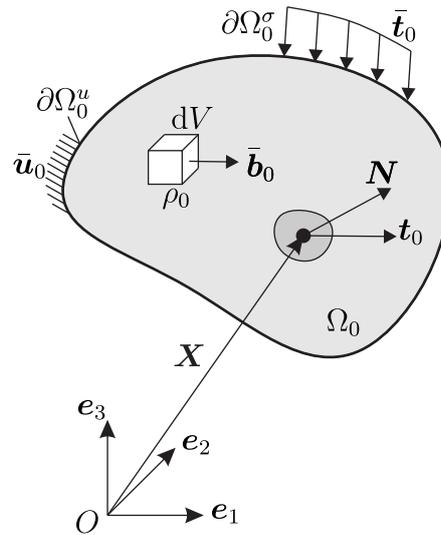


Abbildung 2.4: Kräftegleichgewicht am Körper \mathcal{B} in der Referenzkonfiguration Ω_0

In jedem Punkt \mathbf{X} der Oberfläche $\partial\Omega_0$ der Referenzkonfiguration Ω_0 entspricht die eingeprägte Oberflächenspannung $\bar{\mathbf{t}}_0$ der dort auftretenden Schnittspannung \mathbf{t}_0 . Durch die Anwendung des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungsvektors gilt:

$$\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{t}_0 = \mathbf{P}\mathbf{N} \quad . \quad (2.52)$$

Damit kann die *dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung* nach Umstellen von Gleichung (2.51) in der Form

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{P}\mathbf{N} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0(\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) \, dV = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

geschrieben werden. Mithilfe des *Gaußschen Integralsatzes* wird das Oberflächenintegral über die Oberfläche der Referenzkonfiguration in ein Volumenintegral umgewandelt. Dies führt auf die Beziehung

$$\int_{\Omega_0} \{\text{Div}\mathbf{P} + \rho_0(\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}})\} \, dV = \mathbf{0} \quad , \quad (2.54)$$

die nur für beliebige Körper erfüllt sein kann, wenn der Integrand identisch Null wird. Damit wird die *dynamische Feldgleichung* in materieller Form

$$\text{Div}\mathbf{P} + \rho_0(\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.55)$$

hergeleitet. Die Anwendung des symmetrischen 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors führt mit der Beziehung $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$ auf die Definition der *dynamischen Feldgleichung*

$$\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_0(\bar{\mathbf{b}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

in der Referenzkonfiguration. Unter Vernachlässigung der Trägheitskräfte, d.h. $\ddot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{0}$, resultiert das *statische Kräftegleichgewicht*:

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV = \mathbf{0} \quad (2.57)$$

bzw. die *statische Feldgleichung* in der Referenzkonfiguration mit dem 2. P.K.

$$\text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0} \quad . \quad (2.58)$$

Mithilfe des *Cauchy Theorems*

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.59)$$

kann die *dynamische Kräftegleichgewichtsbedingung* und die *dynamische Feldgleichung* in der Momentankonfiguration Ω wie folgt angegeben werden:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \, da + \int_{\Omega} \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) \, dv = \mathbf{0} \quad (2.60)$$

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(\bar{\mathbf{b}} - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad . \quad (2.61)$$

2.3.3 Drehimpulserhaltung

Mit der Drehimpulsbilanz kann die Symmetrie des *Cauchyschen Spannungstensors* gezeigt werden. Diese muss neben der Impulsbilanz zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Der Drall- oder Drehimpuls \mathbf{L} eines materiellen Körpers \mathcal{B} , der sich mit der Geschwindigkeit bezüglich eines raumfesten Punkts \mathbf{x}_0 bewegt, ist gegeben mit

$$\mathbf{L} := \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\Omega_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV \quad . \quad (2.62)$$

Das Postulat des Satzes der Erhaltung des Drehimpulses besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses \mathbf{L} gleich der vektoriellen Summe der Momente aller auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. In Gleichung (2.49) sind die Zuwächse Σ und Γ die Momente, die durch Volumenkräfte und Oberflächenkräfte verursacht werden. Mit den resultierenden Momenten können die Gleichungen der Impulsbilanz in der Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration aufgestellt werden:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \, dV = \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA}_{\mathbf{M}_t} + \underbrace{\int_{\Omega_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \, dV}_{\mathbf{M}_b} \quad (2.63)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \ddot{\mathbf{x}} \, dv = \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \bar{\mathbf{t}} \, da}_{\mathbf{M}_t} + \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \bar{\mathbf{b}} \, dv}_{\mathbf{M}_b} \quad . \quad (2.64)$$

Dabei ist \mathbf{M}_t das resultierende Moment der auf der Oberfläche $\partial\Omega_0$ bzw. $\partial\Omega$ wirkenden eingepägten Kräfte $\bar{\mathbf{t}}_0$ bzw. $\bar{\mathbf{t}}$ und \mathbf{M}_b das resultierende Moment der in Ω_0 bzw. Ω eingepägten Volumenkräfte. Mithilfe der Anwendung des *Gaußschen Integralsatzes* für Kreuzprodukte, siehe z.B. [58], und einigen Umformungen der Gleichung (2.63) bzw. (2.64) kann die Symmetrie des *Cauchyschen* bzw. des *2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* gezeigt werden.

2.3.4 Energieerhaltung

Der Energieerhaltungssatz besagt, dass die zeitliche Änderung der Energie $\dot{\mathcal{E}}$ in einem Körper aus der Summe der Leistung der eingepägten Oberflächen- und Volumenkräfte \mathcal{W}_{ext} und der äußeren Wärmezufuhr \mathcal{Q} resultiert. Weitere Energieformen, wie z.B. chemische, nukleare und elektromagnetische Energieformen, werden hier ausgeschlossen. Damit gilt für die Änderung der Energie:

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{d\dot{\mathcal{E}}}{dt} = \mathcal{W}_{\text{ext}} + \mathcal{Q} \quad . \quad (2.65)$$

Die Leistung der Kräfte \mathcal{W}_{ext} in der Referenz- und Momentankonfiguration ist gegeben durch

$$\mathcal{W}_{\text{ext}} = \int_{\partial\Omega_0} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV = \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, da + \int_{\Omega} \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.66)$$

und die von außen zugeführte Wärmemenge \mathcal{Q} ist

$$\mathcal{Q} = \int_{\partial\Omega_0} -(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{N} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 r \, dV = \int_{\partial\Omega} -(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\Omega} \rho r \, dv \quad (2.67)$$

mit der Wärmequelle r im materiellen Körper und dem Wärmefluss \mathbf{Q} bzw. \mathbf{q} über die Oberfläche des materiellen Körpers. Zur Herleitung des *1. Hauptsatzes der Thermodynamik* wird die gesamte Energie \mathcal{E} additiv in den Anteil der kinetischen Energie

$$\mathcal{K} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad (2.68)$$

und in einen Anteil der inneren Energie

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \cdot e \, dV = \int_{\Omega} \rho \cdot e \, dv \quad (2.69)$$

zerlegt, wobei e die Energiedichtefunktion ist. Damit ist die Definition der gesamten Energie

$$\mathcal{E} = \mathcal{K} + \mathcal{U} \quad . \quad (2.70)$$

Der Bilanzsatz der inneren Energie ist der *1. Hauptsatz der Thermodynamik*. Dieser besagt, dass die zeitliche Änderung der inneren Energie \mathcal{U} der Summe der inneren Spannungsleistung \mathcal{W}_{int} und der zugeführten Wärme \mathcal{Q} entspricht. Damit gilt:

$$\dot{\mathcal{U}} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{W}_{\text{int}} + \mathcal{Q} \quad . \quad (2.71)$$

Wird die Beziehung $\dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{U}}$ in Gleichung (2.65) eingesetzt, folgt

$$\mathcal{W}_{\text{ext}} + \mathcal{Q} = \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{U}} \quad . \quad (2.72)$$

Mit der Definition der Änderung der inneren Energie nach Gleichung (2.71) und Umstellung nach $\dot{\mathcal{K}}$ resultiert beispielsweise für die Referenzkonfiguration

$$\dot{\mathcal{K}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} dV = \mathcal{W}_{\text{ext}} - \mathcal{W}_{\text{int}} \quad . \quad (2.73)$$

Für quasi-statische Prozesse, d.h. $\dot{\boldsymbol{x}} \approx \mathbf{0}$, folgt der *Arbeitssatz der Mechanik*

$$\mathcal{W}_{\text{int}} = \mathcal{W}_{\text{ext}} \quad . \quad (2.74)$$

Der Term \mathcal{W}_{int} entspricht der Leistung der inneren Spannungen. Nur arbeitskonforme Paarungen eines Spannungstensors mit einem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor beschreiben eine tatsächliche physikalische Leistung. Der *1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* mit dem Deformationsgradienten und der *2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor* mit dem *Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor* sind beispielsweise arbeitskonforme Paarungen. Damit kann die innere Spannungsleistung in der Referenz- und Momentankonfiguration mit geeigneten materiellen Zeitableitungen der Verzerrungstensoren wie folgt dargestellt werden:

$$\mathcal{W}_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} dV = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} dV \quad (2.75)$$

$$= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \dot{\boldsymbol{x}} dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} dv \quad . \quad (2.76)$$

Dabei ist \boldsymbol{d} der räumliche Deformationsgeschwindigkeitstensor, $\dot{\boldsymbol{F}}$ der materielle Geschwindigkeitsgradient und $\dot{\boldsymbol{E}}$ die Ableitung des *Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors*. Abschließend sei der *2. Hauptsatz der Thermodynamik* erwähnt. Dieser besagt, dass für thermodynamische Vorgänge eine Prozessrichtung gegeben ist. Beispielsweise kann Wärme nicht von selbst aus einem Körper niedriger Temperatur T_1 zu einem Körper höherer Temperatur $T_2 > T_1$ übergehen. Als Maß zur Beschreibung der Prozessrichtung wird die *Entropie* eingeführt. Eine Änderung der *Entropie* tritt infolge Wärmeproduktion und Entropieproduktion

auf. Bei reversiblen Prozessen ist keine bestimmte Prozessrichtung vorgegeben und eine Umkehrung der Vorgänge ist möglich. Hingegen ist bei einem irreversiblen Prozess eine Umkehrung nicht ohne weitere Energiezufuhr von außen möglich. Beispiele sind Prozesse mit Reibung, Plastizität oder Schädigung, bei denen Energie dissipiert. Solche Beispiele werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

2.4 Konstitutive Modellierung

Die bereits hergeleiteten Grundgleichungen zur Beschreibung von Deformationen, Spannungen und Bilanzen sind stoffunabhängig. Aus der Bilanzierung der stoffunabhängigen Gleichungen verbleiben sechs unbekannte Gleichungen. Dabei stehen für den statischen Fall neun unbekannte Größen für den Spannungstensor und den drei unbekanntes Verschiebungsgrößen jeweils drei Gleichungen aus der Impuls- und Drehimpulsbilanz gegenüber. Zusammengefasst folgen für zwölf unbekanntes Größen nur sechs Gleichungen. Zur eindeutigen Lösbarkeit werden konstitutive Beziehungen eingeführt. Diese konstitutiven Gesetze werden auch als Stoffgesetze oder Materialgleichungen bezeichnet und stellen den Zusammenhang von Verzerrungs- und Spannungstensor her.

2.4.1 Hyperelastisches Material

In dieser Arbeit werden ausschließlich homogene elastische Materialien betrachtet. Wenn der *Cauchy-Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ nur vom Deformationsgradienten \mathbf{F} abhängt, ist das Material elastisch. Das Material ist zusätzlich homogen, wenn dessen Eigenschaften in jedem materiellen Punkt $\mathbf{X} \in \Omega_0$ gleich sind. Damit gilt die Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{F}) \quad , \quad (2.77)$$

die mit der Gleichung (2.40) auf die Größen des 2. P.K.'s $\mathbf{S}(\mathbf{F})$ transformiert werden kann. Der *Cauchy-Spannungstensor* lässt sich allein vom aktuellen Deformationszustand herleiten und ist damit nicht von der Verformungsgeschichte des Körpers abhängig. Allerdings ist die von der Spannung geleistete Arbeit vom Deformationsweg abhängig. Folglich kann keine Potentialfunktion zugeordnet werden. Diese elastischen Materialien werden auch als *Cauchy-elastische Materialien* bezeichnet. Im Gegensatz dazu sind hyperelastische Materialien, die auch als *Green-elastische Materialien* bezeichnet werden, wegunabhängig. Für diese spezielle Gruppe elastischer Materialien kann die Existenz eines elastischen Potentials ψ vorausgesetzt werden. Das Potential beschreibt die im Körper gespeicherte Verzerrungsenergie und wird daher auch als Verzerrungsenergiefunktion bezeichnet. Für isotherme Prozesse, d.h. Prozesse ohne Temperaturänderung, entspricht die

Potentialfunktion der freien *Helmholz-Energie*. Vereinfachend wird die volumenbezogene Dehnungsenergiefunktion

$$\Psi = \rho_0 \psi = \rho \psi \quad (2.78)$$

eingeführt. Diese kann als Funktion der *Cauchyschen Verzerrungen* \mathbf{C} und *Green-schen Verzerrungen* \mathbf{E} dargestellt werden:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{E}) \quad . \quad (2.79)$$

Aus der Ableitung der Energiefunktion nach den Verzerrungen folgt die Herleitung des 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors*

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad . \quad (2.80)$$

Die zweite Ableitung der Energiefunktion bzw. die Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen liefert den vierstufigen Materialtensor

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (2.81)$$

mit der Darstellung bezüglich des kartesischen Koordinatensystems $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \quad , \quad (2.82)$$

wobei die Koeffizienten durch die Beziehung

$$C_{ijkl} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} \quad \text{bzw.} \quad C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (2.83)$$

berechnet werden. Aufgrund der Vertauschbarkeit der Indexpaare $\{ij\}$ und $\{kl\}$ und der Symmetrie des 2. P.K.'s verbleiben von den $3^4 = 81$ Konstanten des Materialtensors noch 21 unabhängige Konstanten für einen anisotropen elastischen Werkstoff. Der Materialtensor \mathbf{C} ist nichtlinear abhängig vom *Greenschen Verzerrungstensor*. Für ein linear elastisches Materialverhalten wird ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen vorausgesetzt. Damit gilt die Beziehung

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad , \quad (2.84)$$

wobei der Materialtensor konstant ist. Ein Beispiel einer linear elastischen Materialgleichung ist das *St. Venant-Kirchhoff-Material*. Bei der Linearisierung der Spannungen bezüglich des *Greenschen Verzerrungstensors* in der Umgebung der spannungsfreien Referenzkonfiguration

$$\mathbf{S} = \text{Lin}[\mathbf{S}]_{\mathbf{E}} + \mathcal{O}(\|\mathbf{E}\|) = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{E}}) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}(\bar{\mathbf{E}}) : \mathbf{E} + \mathcal{O}(\|\mathbf{E}\|) \quad (2.85)$$

kann ein Fehler der Größe $\mathcal{O}(\|\mathbf{E}\|)$ angegeben werden. Die Vernachlässigung dieses Fehlers führt auf ein *St. Venant-Kirchhoff-Material*, durch das eine lineare Beziehung zwischen dem *Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{E} und dem *2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* \mathbf{S} dargestellt wird. Aufgrund der nichtlinearen Beziehung zwischen dem *Greenschen Verzerrungstensor* \mathbf{E} und den Verschiebungen \mathbf{u} können große Verschiebungen auftreten. Die Anwendbarkeit ist damit auf kleine Verzerrungen beschränkt.

Im Rahmen der FEM ist es zweckmäßig die Stoffgesetze in Vektor- bzw. Matrixschreibweise darzustellen. Dazu werden die Spannungs- und Verzerrungsgrößen unter Ausnutzung der Symmetrien $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ und $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ in der *Voigtschen Notation* wie folgt angegeben:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{sym} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.86)$$

Darin wird mit der Materialmatrix ein anisotroper Werkstoff beschrieben, der mit 21 unabhängigen Materialparametern definiert ist. Durch eine weitere Reduzierung der Anzahl der Materialparameter können spezielle Werkstoffeigenschaften beschrieben werden. In dieser Arbeit werden Beispiele aus Stahl und Faserverbundmaterial untersucht. Daher werden in den folgenden Abschnitten die dazugehörigen Materialmatrizen angegeben.

2.4.2 Isotropes Materialverhalten

Ein isotropes Material ist unabhängig vom gewählten Bezugssystem und ist mit unendlich vielen Symmetrieebenen charakterisiert. Jede Schnittebene durch den materiellen Körper ist zugleich eine Symmetrieebene. Beispiele solcher Materialien sind metallische Werkstoffe und unverstärkte Kunststoffe. Ein isotroper Werkstoff lässt sich mit zwei unabhängigen Materialparametern darstellen. Das reduzierte Stoffgesetz ist definiert zu

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.87)$$

Die isotrope Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{\Delta} & \frac{\nu E}{\Delta} & \frac{\nu E}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{\Delta} & \frac{(1-\nu)E}{\Delta} & \frac{\nu E}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{\Delta} & \frac{\nu E}{\Delta} & \frac{(1-\nu)E}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{\nu E} & \frac{\Delta}{\nu E} & \frac{\Delta}{\nu E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

mit $\Delta = (1 + \nu)(1 - 2\nu)$ und $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$

wird aufgrund der Symmetrieebenen mit zwei Ingenieurkonstanten: dem Elastizitätsmodul $E = E_1 = E_2$ und einer Querdehnzahl $\nu = \nu_{12} = \nu_{23}$ beschrieben. Die Definition des Schubmoduls G erfolgt mithilfe des E-Moduls und der Querdehnzahl.

2.4.3 Transversal isotropes Materialverhalten

In Kapitel 9.2 wird eine dynamische Analyse eines Propfans durchgeführt. Dieser ist aus einem transversal isotropen Faserverbundmaterial hergestellt. Ein transversal isotropes Werkstoffverhalten liegt vor, wenn ein Material eine Vorzugsrichtung und dazu unendlich viele Symmetrieebenen besitzt. Transversale Isotropie ist ein Sonderfall der Orthotropie. Der Werkstoff verhält sich bezüglich einer Ebene isotrop. Bei Faserverbundmaterialien ist die Vorzugsrichtung die Faserichtung. Für die Vorzugsrichtung wird meistens die 1-Richtung gewählt. In der Materialmatrix

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

sind fünf unabhängige Materialparameter enthalten. Aus dem identischen Materialverhalten in der 2- und 3-Richtung folgt für die Elastizitätsmoduln, die Querdehnzahlen und die Schubmoduln

$$E_2 = E_3, \quad \nu_{12} = \nu_{13}, \quad G_{12} = G_{13} \quad (2.90)$$

mit dem dritten Schubmodul

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} \quad . \quad (2.91)$$

Die Materialmatrix für ein transversal isotropes Materialverhalten

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{(1 - \nu_{23}^2)E_1}{\Delta} & \frac{(1 + \nu_{23})\nu_{21}E_1}{\Delta} & \frac{(1 + \nu_{23})\nu_{21}E_1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1 + \nu_{23})\nu_{21}E_1}{\Delta} & \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})E_2}{\Delta} & \frac{(\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})E_1}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1 + \nu_{23})\nu_{21}E_1}{\Delta} & \frac{(\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21})E_1}{\Delta} & \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \Delta = 1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - 2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23} - \nu_{23}^2 \quad (2.92)$$

ist unabhängig von der Rotation um die 1-Richtung. Zusammenfassend sind E_1 , E_2 , G_{12} , G_{23} und ν_{12} die fünf unabhängigen Materialparameter, die zur Beschreibung des transversal isotropen Materialverhaltens notwendig sind.

2.5 Variationsformulierung

Die Grundgleichungen aus den vorherigen Abschnitten werden für die Formulierung eines Randwertproblems verwendet. Die Gleichungen sind in Tabelle 2.1 für den statischen Fall, d.h. $\ddot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{0}$, in der Referenzkonfiguration zusammengefasst. Zur Lösung des Randwertproblems mit der FEM müssen Randbedingungen

Kinematik:	$\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$	in \mathcal{B}_0
Gleichgewicht:	$\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0}$	in \mathcal{B}_0
Stoffgesetz:	$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}$	in \mathcal{B}_0
Verschiebungs-RB:	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0$	auf $\partial\Omega_0^u$
Spannungs-RB:	$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0$	auf $\partial\Omega_0^\sigma$

Tabelle 2.1: Grundgleichungen der strengen Form der Randwertaufgabe

(RB) definiert werden. Der Rand $\partial\Omega_0$ eines mehrdimensionalen Körpers in der Referenzkonfiguration wird in Ränder mit vorgegebener Verschiebung $\partial\Omega_0^u$ und

in Ränder mit vorgegebener Spannung $\partial\Omega_0^\sigma$ unterteilt. Für die Ränder bzw. Teilflächen gilt:

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^u \cup \partial\Omega_0^\sigma \quad \text{mit} \quad \partial\Omega_0^u \cap \partial\Omega_0^\sigma = \emptyset \quad . \quad (2.93)$$

Auf dem Rand $\partial\Omega_0^u$ werden die Verschiebungsrandbedingungen $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}_0$ definiert. Diese Randbedingungen werden auch als *Dirichlet*- oder geometrische Randbedingungen bezeichnet. Auf dem Rand $\partial\Omega_0^\sigma$ werden hingegen Spannungen $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P}\mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}}_0$ definiert. Diese werden als *Neumann*- oder statische Randbedingungen bezeichnet. Damit kann das lokale Gleichgewicht des Körpers als Randwertproblem formuliert werden. Gesucht ist die Lösung des Verschiebungszustands \mathbf{u} . Die Verschiebungen sind die primären Feldgrößen. Da die Differentialgleichungen in Tabelle 2.1 in jedem Punkt P des Körpers erfüllt sein müssen, wird die Randwertaufgabe auch als strenge Form bezeichnet und stellt ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Nur in seltenen Fällen kann das Gleichungssystem analytisch gelöst werden. Allerdings kann mit der Variationsrechnung eine Näherungslösung ermittelt werden. Die variationelle Form wird auch als schwache Form des Randwertproblems bezeichnet. In dieser Form ist das Gleichgewicht nicht mehr in jedem Punkt, sondern im integralen Mittel erfüllt. Das Gleichgewicht ist damit schwach erfüllt. Um eine schwache Form zu erhalten, kann das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, das Prinzip der virtuellen Kräfte (PVK) und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PVV) angewendet werden. Das PVV wird im Folgenden zur Herleitung der schwachen Form des Gleichgewichts verwendet. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass im Gegensatz zum Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie kein Potential vorausgesetzt wird. Damit können auch Problemstellungen mit nicht konservativen Lasten, d.h. nicht richtungstreuen Lasten, oder irreversible Prozesse mit plastischem Materialverhalten und Schädigung untersucht werden.

Die Herleitung der schwachen Form erfolgt über die Impulsbilanz. Dabei wird die starke Form der Impulsbilanz mit einer Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ multipliziert und über das Gebiet integriert. Hieraus folgt die schwache Form der Impulsbilanz:

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div}\mathbf{P} + \rho_0\bar{\mathbf{b}}_0)\delta\mathbf{u} \, dV = 0 \quad . \quad (2.94)$$

Die Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ wird auch als virtuelle Verschiebung oder virtuelle Verrückung bezeichnet. Diese muss die geometrischen Randbedingungen $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega_0^u$ erfüllen. Die Gleichung (2.94) wird nur erfüllt, wenn für die beliebig und infinitesimal kleinen virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ die Impulsbilanz erfüllt wird. Die Anwendung der Produktregel auf den Divergenzterm

$$\text{Div}(\mathbf{P}^T\delta\mathbf{u}) = \text{Div}(\mathbf{P}) \cdot \delta\mathbf{u} + \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta\mathbf{u}) \quad (2.95)$$

sowie des *Gaußschen Integralsatzes*

$$\int_{\Omega_0} \text{Div}(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{u}) \, dV = \int_{\partial \Omega_0^\sigma} \mathbf{P}^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\partial \Omega_0^\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA \quad (2.96)$$

führt auf die schwache Form des Gleichgewichts

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}) - \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA = 0 \quad (2.97)$$

Mit der Beziehung

$$\text{Grad}(\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{H} = \delta \mathbf{F} \quad (2.98)$$

kann die schwache Form des Gleichgewichts in der Darstellung

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} - \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA = 0 \quad (2.99)$$

angegeben werden. In dieser Form ist $\mathbf{P} : \delta \mathbf{F}$ eine arbeitskonforme Paarung. Aufgrund der Symmetrie des 2. *Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors* und des *Greenschen Verzerrungstensors* wird die Darstellung

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}}_{\delta \mathcal{W}_{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA}_{\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}} = 0 \quad (2.100)$$

für die Anwendung der FEM bevorzugt. In Gleichung (2.100) wird das Gleichgewicht der virtuellen Arbeiten, das auch unter dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (PdvA) bekannt ist, dargestellt. Die virtuelle innere Arbeit $\delta \mathcal{W}_{\text{int}}$ ist gleich der virtuellen äußeren Arbeit $\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}$. Dabei wird die virtuelle innere Arbeit $\delta \mathcal{W}_{\text{int}}$ durch die tatsächlich auftretenden inneren Spannungen \mathbf{S} auf dem Weg virtueller Verzerrungen $\delta \mathbf{E}$ geleistet und die virtuelle äußere Arbeit $\delta \mathcal{W}_{\text{ext}}$ wird durch die tatsächlich auftretenden, flächenhaft bzw. volumenhaft verteilten, äußeren Spannungen $\bar{\mathbf{t}}_0$ bzw. $\rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0$ auf dem Weg virtueller Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ des Randes geleistet.

2.6 Linearisierung

Die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.100) ist i.A. eine nichtlineare Funktion von den Verschiebungen \mathbf{u} . Die Nichtlinearitäten können aus den nichtlinearen Verzerrungen (geometrische Nichtlinearität) und/oder einem nichtlinearem Werkstoffverhalten (materielle Nichtlinearität) resultieren. Zur Lösung

nichtlinearer Gleichungssysteme im Rahmen der FEM werden iterative Verfahren eingesetzt. Ein bekanntes Verfahren ist das *Newton-Raphson-Verfahren*. Dieses Verfahren wird im Kapitel 4.2 beschrieben. Für die iterative Berechnung der Verschiebungen muss die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.100) linearisiert werden. Bei der Linearisierung von \mathbf{E} in Gleichung (2.28) und der Spannungen in Gleichung (2.85) wird das Prinzip der Linearisierung bereits angewendet. Dieses soll am Beispiel einer beliebigen Funktion $f = f(u)$ mit einer Veränderlichen im Folgenden näher erläutert werden. Die Funktion sei stetig differenzierbar. Mit dieser Voraussetzung kann die Funktion f an der festen Stelle \bar{u} in eine *Taylorreihe*

$$f(\bar{u} + \Delta u) = f(\bar{u}) + f'(\bar{u}) \Delta u + R(\bar{u}) \quad \text{mit} \quad f'(\bar{u}) = \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \quad (2.101)$$

entwickelt werden. Das nichtlineare Restglied $R(\bar{u})$ beschreibt einen Fehler. Für kleine Inkremente Δu konvergiert das Restglied gegen Null. Die Vernachlässigung des Restglieds führt auf die Linearisierung der Funktion f

$$L[f(\bar{u}, \Delta u)] = f(\bar{u}) + \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \Delta u \quad (2.102)$$

Mit der Linearisierung wird eine Tangente der Funktion $f(u)$ an der Stützstelle \bar{u} beschrieben. Dabei ist $L[\dots]$ der Operator der Linearisierung.

Die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.100) ist eine Funktion mehrerer Veränderlicher $f(\mathbf{u})$ im *Euklidischen Raum* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Zur Ableitung wird die Richtungsableitung oder auch *Gâteaux-Ableitung* angewendet. Die Richtungsableitung von f in Richtung $\Delta \mathbf{u}$ ist wie folgt definiert:

$$D[f(\bar{\mathbf{u}})] \cdot \Delta \mathbf{u} = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} [f(\bar{\mathbf{u}} + \alpha \Delta \mathbf{u})] \right|_{\alpha=0} = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.103)$$

Dabei ist α ein infinitesimal kleiner Parameter und mit $D[\dots]$ wird der *Gâteaux-Operator* eingeführt. Die Anwendung dieser Grundlagen führt auf die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

$$L[G(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})] = G(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}) + D[G(\bar{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (2.104)$$

Auf den Querstrich zur Kennzeichnung der Stützstelle wird im Folgenden verzichtet. Unter Annahme konservativer (nicht richtungstreu) Lasten, d.h. die Belastungen sind unabhängig vom Verschiebungszustand, wird nur die innere Arbeit der schwachen Form in Gleichung (2.100) linearisiert. Die Verzerrungen und Spannungen sind abhängige Funktionen von der Verschiebung und müssen linearisiert werden. Damit folgt mit Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} D[G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} &= D[\delta \mathcal{W}_{\text{int}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} \\ &= \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \Delta \mathbf{S} \, dV + \int_{\Omega_0} \Delta \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV \quad (2.105) \end{aligned}$$

Mit dem ersten Summanden wird beispielsweise die Änderung der Spannungen bei festgehaltenen virtuellen Verzerrungen beschrieben. Dieser Term wird auch als materieller Anteil bezeichnet. Weiterhin wird das Differential der Spannungen

$$\Delta \mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \mathbf{E} = \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E} \quad (2.106)$$

mit der Anwendung der Kettenregel angegeben. Der zweite Term $\Delta \delta \mathbf{E} : \mathbf{S}$ in Gleichung (2.105) ist der geometrische Anteil. In diesem Term ist die geometrische Nichtlinearität enthalten, wenn die nichtlinearen Anteile im *Greenschen Verzerrungstensor* berücksichtigt werden. Die linearisierten Verzerrungen werden definiert zu

$$\Delta \delta \mathbf{E} = \text{sym}(\text{Grad}^T(\Delta \mathbf{u}) \text{Grad}(\delta \mathbf{u})) \quad . \quad (2.107)$$

Abschließend kann die gesamte Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts formuliert werden:

$$\begin{aligned} L[G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u})] &= \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\Omega_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \Omega_0^g} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA \\ &+ \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{C} : \Delta \mathbf{E} \, dV + \int_{\Omega_0} \Delta \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dV \quad . \end{aligned} \quad (2.108)$$

In dieser Linearisierung wird ausschließlich eine geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. Im Falle einer materiellen Nichtlinearität ist der Materialtensor ebenso eine Funktion der Verzerrungen und damit der Verschiebungen. Dies erfordert auch eine Linearisierung des Materialtensors.

3 Grundgleichungen der Schale

Schalen sind gekennzeichnet durch ihre effiziente Lastabtragung. Häufig werden ebene Flächentragwerke mit ausgeprägten Kanten und Ecken realisiert. Solche Tragwerke werden auch *Faltwerke* genannt und sind im Massivbau sehr verbreitet. Auch in der Natur wird die Form einer Schale bevorzugt, um simultan Lasten abzutragen und Raum zu umschließen. Eine Muschel oder ein Hühnerknochen sind Beispiele von natürlich vorkommenden Schalenstrukturen. Mit verbesserten Bauweisen und Berechnungsmethoden können wie in der Natur beliebig gekrümmte Schalen umgesetzt werden. Abhängig von der Konstruktion einer Schale werden die Lasten über Biegung und Membrankräfte abgetragen. Damit kann ein Ingenieur ein filigranes Bauwerk realisieren.

Bei der Berechnung dünner Schalenstrukturen sollen zukünftig vorhandene Unschärfen bei der Bemessung berücksichtigt werden. In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen zur numerischen Behandlung einer Schale mit der Methode der *Finiten Elemente* bereitgestellt. Das Kapitel ist eine Zusammenfassung einer Schalenformulierung aus bekannten Forschungsarbeiten, wie z.B.: KLINKEL ET AL. [159], BETSCH & STEIN [29], BLETZINGER ET AL. [32], GRUTTMANN ET AL. [114], SANSOUR [268], BATHE & BOLOURCHI [19] und WISNIEWSKI [353]. Die im vorherigen Kapitel vorgestellten Grundlagen der Kontinuumsmechanik werden auf ein Schalenkontinuum angewendet.

3.1 Schalenkonzept

Schalenstrukturen sind dünne Strukturen, deren Abmessungen in der Ebene um ein Vielfaches größer sind als die Dicke des Querschnitts. Ist diese Voraussetzung gegeben, können Deformationen in Dickenrichtung vernachlässigt werden. Weiterhin ist dadurch eine Reduktion der Schale als dreidimensionales Kontinuum auf eine Mittel- oder Referenzfläche zulässig. Die Beschreibung gekrümmter Strukturen erfordert die Einführung konvektiver Koordinaten, die nicht zwingend orthogonal zueinander gerichtet sind. Ebene Schalen werden definiert, mit denen *Faltwerke* berechnet werden können. Gekrümmte Schalenstrukturen können aus mehreren ebenen Schalen zusammengesetzt werden. Die Ausrichtung einzelner Schalenflächen wird durch den *Direktorvektor* beschrieben. In der unverformten Ausgangslage entspricht dieser Vektor dem *Normalenvektor*, d.h. der Direktor steht senkrecht auf der Mittelfläche. Im vorherigen Kapitel werden Deformationen mit Verschiebungen beschrieben. Die Freiheitsgrade werden im Rahmen des Schalenkonzepts um Verdrehungen in der Mittelfläche erweitert. Diese sind im Direktorvektor enthalten. Damit können Membran- und Biegeverformungen eindeutig beschrieben werden.

Für das vorgestellte Schalenkonzept werden folgende Annahmen und Voraussetzungen definiert:

- Die Verzerrung in Dickenrichtung wird vernachlässigt
- Normalspannungen in Dickenrichtung werden nicht berücksichtigt
- Ebene Querschnitte bleiben während der Deformation eben
- Schubverzerrungen werden durch die *Reissner-Mindlin-Kinematik* berücksichtigt
- Für mäßige Drehungen $\beta_\alpha \leq 7^\circ - 8^\circ$ gilt: $\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$ und $\cos \beta \approx 1$
- Kleine Verzerrungen $\epsilon < 5\%$, *St. Venant-Kirchhoff Material*
- Verwendung konvektiver Koordinaten $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ mit $\zeta = \xi^3$
- Inextensibles Direktorfeld: $|\mathbf{d}| = 1$.

3.2 Differentialgeometrie

Die Grundlagen der Differentialgeometrie sind für die Herleitung der Schalenformulierung erforderlich. Für beliebig gekrümmte Strukturen werden die in Kapitel 2 eingeführten Vektoren und Tensoren bezüglich einer kovarianten \mathbf{G}_i bzw. \mathbf{g}_i (tiefgestellter Index) oder kontravarianten \mathbf{G}^i bzw. \mathbf{g}^i (hochgestellter Index) Basis dargestellt. Die dazugehörigen konvektiven Koordinatenlinien $\xi^i = \{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ in der Referenz- und Momentankonfiguration sind krummlinige Koordinaten, die sich beim Deformationsprozess des Körpers mitverformen [305]. Damit können die Ortsvektoren in den konvektiven Koordinaten

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (3.1)$$

formuliert werden. An jedem materiellen Punkt des Körpers kann ein kovariantes Basissystem aufgestellt werden. Die kovarianten Basisvektoren sind Tangenten an den konvektiven Koordinatenlinien

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}(\xi^i)}{\partial \xi^i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad \text{und} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi^i)}{\partial \xi^i} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3 \quad . \quad (3.3)$$

Eine Darstellung der krummlinigen Koordinatenlinien wird in Abbildung 3.1 gegeben. Für die kontravariante Basis gilt:

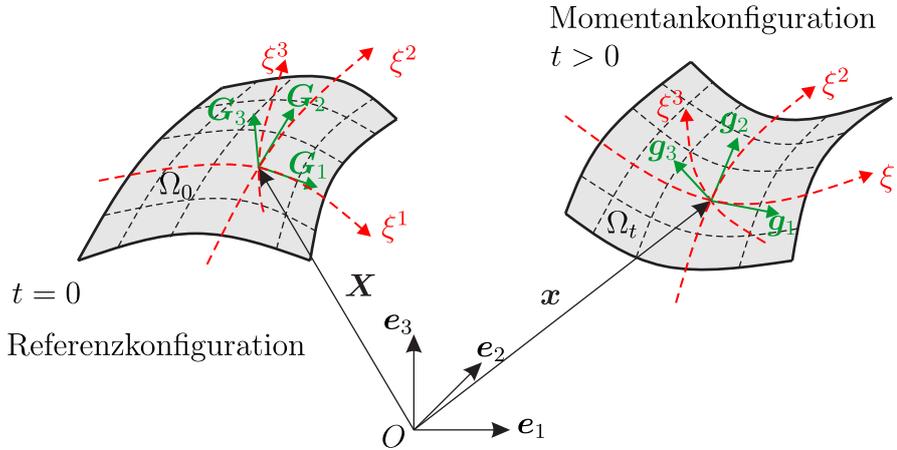


Abbildung 3.1: Konvektive Koordinaten in der Referenz- und Momentankonfiguration

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j \quad (3.4)$$

mit dem *Kronecker-Symbol* der krummlinigen Basis

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} . \quad (3.5)$$

Das bedeutet, dass die kontravarianten Basisvektoren orthonormal zu den kovarianten Basisvektoren sind [355]. Mit dem Skalarprodukt der Basisvektoren kann der Metriktensor in ko- und kontravarianter Darstellung

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j, & g_{ij} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j & \text{bzw.} \\ G^{ij} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j, & g^{ij} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (3.6)$$

aufgestellt werden. Mithilfe des Metriktensors können die ko- und kontravarianten Basisvektoren ineinander überführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_{ik} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k \\ \mathbf{g}^{-1} &= g^{ik} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k \\ \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{g} &= \mathbf{1} \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bei orthogonalen kartesischen Koordinaten sind die ko- und kontravarianten Basen identisch. In diesem Fall ist der Metriktensor ein Einheitstensor [355].

3.3 Schalenkinematik

Die Beschreibung der Kinematik einer ebenen Schale basiert auf dem vorgestellten Deformationsprozess eines Kontinuums, siehe Kapitel 2. In Abbildung 3.2 ist die ebene Schale in der Referenz- und Momentankonfiguration mit einer Referenzfläche dargestellt. Zusätzlich zu dem globalen kartesischen Koordinatensystem mit

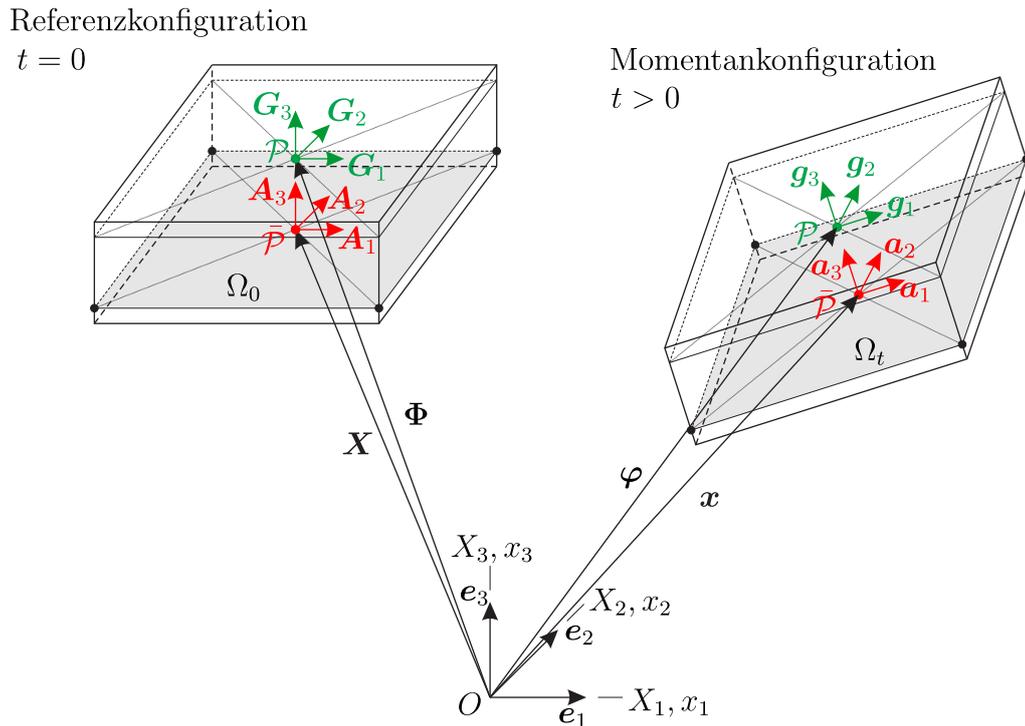


Abbildung 3.2: Die ebene Schale in der Referenz- und Momentankonfiguration

den Basisvektoren \mathbf{e}_i werden zwei lokale Koordinatensysteme für beide Konfigurationen der Schale eingeführt. Beispielsweise wird in der Referenzkonfiguration ein materieller Punkt \mathcal{P} mit den Basisvektoren \mathbf{G}_i definiert. Dieser Punkt wird auf die Referenzfläche der ebenen Schale projiziert und mit $\bar{\mathcal{P}}$ bezeichnet. An dieser Stelle wird eine weitere Basis mit den Basisvektoren \mathbf{A}_i definiert. In der Momentankonfiguration werden diese beiden Basissysteme mit den Kleinbuchstaben \mathbf{g}_i und \mathbf{a}_i dargestellt. Da eine ebene Schale beschrieben wird, sind Krümmungen ausgeschlossen. Ein *Shifter-Tensor* mit dem der Zusammenhang beider lokaler Koordinatensysteme $\mathbf{G}_i, \mathbf{A}_i$ bzw. $\mathbf{g}_i, \mathbf{a}_i$ definiert wird, ist daher nicht notwendig. In beiden Konfigurationen wird jeder Punkt der Schale zusätzlich durch einen Direktorvektor \mathbf{d} bzw. \mathbf{D} beschrieben. Unter der Annahme mäßiger Drehungen wird der Direktorvektor \mathbf{d} in der Momentankonfiguration wie folgt definiert:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (3.8)$$

In der Referenzkonfiguration steht der Direktor senkrecht auf der Referenzfläche ($\mathbf{D} = \mathbf{G}_3$) und die Basissysteme

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1 &= \mathbf{A}_1 = \mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{A}_2 = \mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 0]^T \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3 = \mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T\end{aligned}\quad (3.9)$$

sind identisch. Der Direktor \mathbf{d} ändert während des Deformationsprozesses seine Richtung und steht in der Momentankonfiguration nicht mehr senkrecht auf der Ebene. Eine graphische Darstellung des Direktors mit der lokalen Basis \mathbf{A}_i wird in Abbildung 3.3 gegeben. Mit der Annahme eines inextensiblen Direktorfelds gilt

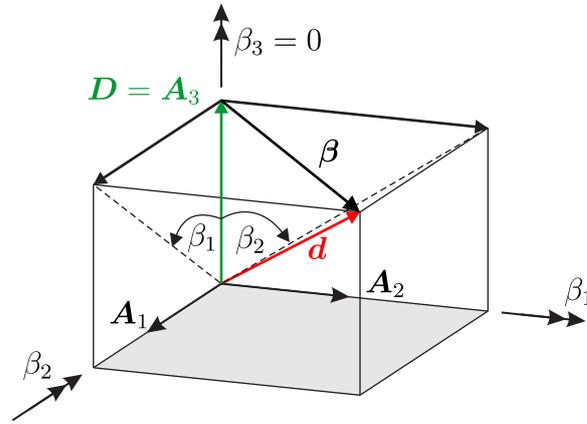


Abbildung 3.3: Graphische Darstellung des Direktors

für den Direktorvektor in beiden Konfigurationen:

$$|\mathbf{D}| = |\mathbf{d}| = 1 \quad . \quad (3.10)$$

Diese Annahme ist aufgrund der Linearisierung der Winkelbeziehungen nicht exakt erfüllt. Allerdings gilt für kleine Winkel: $|\mathbf{d}| \approx 1$. Mit der Einführung der Koordinate $\zeta = \xi_3$ wird die Schalendicke beschrieben. Ein beliebiger Punkt auf der Referenzfläche der Schale wird mithilfe der Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} definiert. Von diesem Punkt ausgehend kann ein weiterer Punkt mithilfe der Ortsvektoren $\mathbf{\Phi}$, $\boldsymbol{\varphi}$ und der Koordinate ζ wie folgt definiert werden:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X} + \zeta \mathbf{D}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{x} + \zeta \mathbf{d} \quad . \quad (3.11)$$

Mit den Ableitungen dieser Ortsvektoren nach den globalen Koordinaten werden die Tangentenvektoren berechnet. Aus der Differenz der Tangentenvektoren folgt der *Greensche Verzerrungstensor*

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varphi}_{,i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,j} - \mathbf{\Phi}_{,i} \cdot \mathbf{\Phi}_{,j}) \quad . \quad (3.12)$$

Die Komponenten des *Greenschen Verzerrungstensors* werden in Matrixschreibweise wie folgt angeordnet:

$$E_{ij} = \left[\begin{array}{cc|c} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ \hline E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E}_m & \mathbf{E}_s \\ \hline \mathbf{E}_s^T & E_{33} \end{array} \right] . \quad (3.13)$$

Die Verzerrungen werden unterteilt in Membrananteile \mathbf{E}_m , Gleitungen \mathbf{E}_s und in die Verzerrung über die Schalendicke E_{33} . Für die Beschreibung der Verzerrungen im zweidimensionalen Raum werden die Indizes $\alpha, \beta = 1, 2$ eingeführt. Damit werden die Einträge des Verzerrungstensors mit $E_{\alpha\beta}$, $E_{\alpha 3}$ und E_{33} bezeichnet. Mithilfe der Ableitungen der Ortsvektoren

$$\begin{aligned} \Phi_{,\alpha} &= \mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}, & \Phi_{,3} &= \mathbf{D} \\ \varphi_{,\alpha} &= \mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}, & \varphi_{,3} &= \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.14)$$

können die Verzerrungskomponenten

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\varphi_{,\alpha} \cdot \varphi_{,\beta} - \phi_{,\alpha} \cdot \phi_{,\beta}] \\ &= \frac{1}{2} [(\mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}) (\mathbf{x}_{,\beta} + \zeta \mathbf{d}_{,\beta}) - (\mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}) (\mathbf{X}_{,\beta} + \zeta \mathbf{D}_{,\beta})] \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta} + \zeta^2 \varrho_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.15)$$

angegeben werden. Diese setzen sich aus den Membranverzerrungen

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}] \quad (3.16)$$

den Krümmungen erster Ordnung

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}] \quad (3.17)$$

und den Krümmungen zweiter Ordnung

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}] \quad , \quad (3.18)$$

die für dünne Schalen vernachlässigt werden, zusammen. Weiterhin folgt mit der Annahme eines inextensiblen Direktorfelds

$$|\mathbf{d}| = |\mathbf{D}| = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha} = 0 \quad (3.19)$$

die Definition der Querschubverzerrungen

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} &= 2 E_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\varphi_{,\alpha} \cdot \varphi_{,3} - \phi_{,\alpha} \cdot \phi_{,3}) \\ &= (\mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{d} - (\mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{D} \\ &= \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit Gleichung (3.16) kann gezeigt werden, dass die Dickenverzerrungen verschwinden:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{33} = E_{33} &= \frac{1}{2}(\varphi_3 \cdot \varphi_{,3} - \phi_3 \cdot \phi_{,3}) \\ &= \frac{1}{2}[\underbrace{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}_{=1} - \underbrace{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}_{=1}] = 0 \quad .\end{aligned}\quad (3.21)$$

Die Beziehungen der Kinematik können mit dem Verschiebungsgradienten \mathbf{H} dargestellt werden. In diesem sind neben den Verschiebungen \mathbf{u} auch die Verdrehungen $\boldsymbol{\beta}$ enthalten. Die Schale wird mit insgesamt fünf Freiheitsgraden definiert. Damit kann der Gesamtverschiebungsvektor wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u} \quad \boldsymbol{\beta}]^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \beta_1 \quad \beta_2]^T \quad . \quad (3.22)$$

Die Definition der Verdrehung resultiert aus der Konvention, dass durch eine positive Verdrehung positive Spannungen an der Unterseite der Schale erzeugt werden. Eine Darstellung der Freiheitsgrade wird in Abbildung 3.4 gegeben.

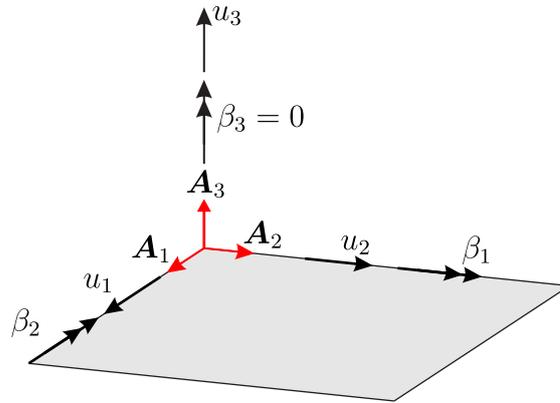


Abbildung 3.4: Freiheitsgrade der Schale

Die Verzerrungen werden mit den Verschiebungen wie folgt dargestellt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\alpha} (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}] \\ &= \frac{1}{2} [\underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}}_{= u_{\alpha,\beta}} + \underbrace{\mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}}_{= u_{\beta,\alpha}} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}] \\ &= \frac{1}{2} [u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}] + \frac{1}{2} [\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}] \quad .\end{aligned}\quad (3.23)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon_{\text{lin}}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\varepsilon_{\text{nlín}}}$

Dabei werden die linearen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{lin}}$ und die nichtlinearen Anteile $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{nl}}$ sichtbar. Auch die Krümmungen können in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}] \\
&= \frac{1}{2} [\underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}}_{=\beta_{\alpha,\beta}} + \underbrace{\mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}}_{=\beta_{\beta,\alpha}} + \underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}}_{=0} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}] \\
&= \frac{1}{2} [\underbrace{\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}}_{\kappa_{\alpha\beta}^{\text{lin}}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha})}_{\kappa_{\alpha\beta}^{\text{nl}}}] \quad , \tag{3.24}
\end{aligned}$$

wobei der nichtlineare Anteil $\kappa_{\alpha\beta}^{\text{nl}}$ aufgrund der Annahme mäßiger Drehungen vernachlässigt wird. Weiterhin werden die Querschubverzerrungen nach Gleichung (3.20) mit den Beziehungen $\mathbf{X}_{,3} = \mathbf{D}$ und $\mathbf{x}_{,3} = \mathbf{d}$ umformuliert zu

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha 3} &= \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} = (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \\
&= \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}}_{=0} = \beta_{\alpha} + u_{3,\alpha} \quad . \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Die Gesamtverzerrungen der Schale

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{lin}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{nl}} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

enthalten aus der Herleitung der Verzerrungen und Krümmungen nur für die Membrangrößen einen nichtlinearen Anteil. Die Annahme ist für mäßige Drehungen gültig. In Abhängigkeit der Verschiebungsgrößen können die Verzerrungen wie folgt angegeben werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \hline \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \\ \hline \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & + & \frac{1}{2} (u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ u_{2,2} & + & \frac{1}{2} (u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2) \\ u_{1,2} + u_{2,1} & + & u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} \\ \hline & & \beta_{1,1} \\ & & \beta_{2,2} \\ & & \beta_{1,2} + \beta_{2,1} \\ \hline & & \beta_1 + u_{3,1} \\ & & \beta_2 + u_{3,2} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.27}$$

Die Beschreibung des Zusammenhangs der Verzerrungen

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.28}$$

erfolgt über die Transformationsmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & \zeta \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 \end{bmatrix} . \quad (3.29)$$

Damit wird die Matrixschreibweise

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.30)$$

der Verzerrungen ermöglicht, die für eine Formulierung von Materialgesetzen verwendet werden kann. Die Verzerrungen enthalten aufgrund der Annahme $E_{33} = 0$ fünf Komponenten. Für die virtuellen inneren Arbeiten aus Kapitel 2 müssen die virtuellen Schalenverzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ auf die des Kontinuums $\delta \mathbf{E}$ umgerechnet werden. Diese Umrechnung erfolgt ebenfalls mithilfe der Transformationsmatrix \mathbf{A} :

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{A} \delta \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (3.31)$$

3.4 Schnittgrößen

In diesem Abschnitt wird der Vektor der Schalenschnittgrößen hergeleitet. Unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands wird die Hauptspannung über die Höhe des Querschnitts S_{33} vernachlässigt. Damit verbleiben fünf Spannungen für die Schale:

$$\mathbf{S} = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12} \quad S_{13} \quad S_{23}]^T . \quad (3.32)$$

Mit den virtuellen Verzerrungen

$$\delta \mathbf{E} = [\delta E_{11} \quad \delta E_{22} \quad 2\delta E_{12} \quad 2\delta E_{13} \quad 2\delta E_{23}]^T \quad (3.33)$$

kann die virtuelle innere Arbeit

$$\delta \mathcal{W}_{\text{int}} = \int_V \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \, dV \quad (3.34)$$

aufgestellt werden. Darin sind der *Green-Lagrange Verzerrungstensor* \mathbf{E} und der zweite *Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{S} arbeitskonforme Größen. Mit dem Zusammenhang der virtuellen Verzerrungen nach Gleichung (3.31) können die virtuellen inneren Arbeiten auf die Referenzfläche der Schale wie folgt umgerechnet

werden:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{W}_{\text{int}} &= \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{+h/2} \delta\mathbf{E}^T \mathbf{S} \, d\zeta \, dA \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \underbrace{\int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \, d\zeta}_{\boldsymbol{\sigma}} \, dA = \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA \quad .\end{aligned}\quad (3.35)$$

Die Schalschnittgrößen resultieren aus der Integration der Spannungen über die konstante Schalendicke h :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \\ m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \\ q_{13} \\ q_{23} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} \, d\zeta \quad .\quad (3.36)$$

Darin sind $\mathbf{N} = [n_{11} \ n_{22} \ n_{12}]^T$ die Membrankräfte, $\mathbf{M} = [m_{11} \ m_{22} \ m_{12}]^T$ die Biegemomente und $\mathbf{Q} = [q_{13} \ q_{23}]^T$ die Querkräfte. Die Schnittgrößen am positiven Schnittufer der Schale sind in Abbildung 3.5 dargestellt.

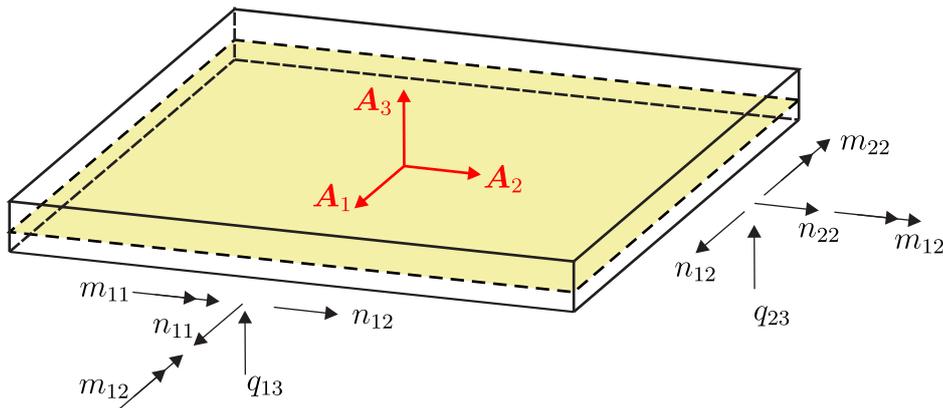


Abbildung 3.5: Schnittgrößenkonvention der Schale

3.5 Stoffgesetz

In diesem Abschnitt wird auf Basis der Herleitungen in Kapitel 2.4 das *St. Venant-Kirchhoff Stoffgesetz* für die Schale angegeben. Im Folgenden wird auch das iso-

trope und transversal-isotrope Materialverhalten der Schale beschrieben. Durch die Annahme eines ebenen Spannungszustands ($S_{33} = 0$) und unter Berücksichtigung der Schubspannungen kann das Stoffgesetz nach Gleichung (2.86) weiter reduziert werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ & & & C_{44} & C_{45} \\ \text{sym} & & & & C_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \\ 2 E_{23} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} . \quad (3.37)$$

Für ein isotropes Material folgt die Materialmatrix

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 + \nu^2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \frac{1-\nu}{2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

mit dem Schubkorrekturfaktor $\kappa = 5/6$. Zur Modellierung von Laminatschalen wird im Folgenden ein transversal-isotropes Werkstoffverhalten beschrieben. Die Materialmatrix einer einzelnen Schicht eines Laminats wird wie folgt angegeben:

$$\bar{\mathbf{C}} = \left[\begin{array}{ccc|cc} E_1^* & E_2^* \nu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E_2^* \nu_{12} & E_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \kappa G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa G_{23} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_s \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\text{mit } E_1^* = E_1/\Delta \quad , \quad E_2^* = E_2/\Delta \quad , \quad \Delta = (1 + \nu_{23})(1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}) \quad .$$

Der Elastizitätsmodul der Vorzugsrichtung einer Faser wird mit E_1 bezeichnet und der E-Modul senkrecht zur Faser ist mit E_2 definiert. Zudem ist die Angabe einer Querdehnzahl ν_{12} und der Schubmoduln G_{12} und G_{23} erforderlich. Die angegebene Materialmatrix in Gleichung (3.39) basiert auf einem orthonormierten Basissystem \mathbf{t}_i mit $i = 1, 2, 3$ für jede Schicht, siehe Abbildung 3.6.

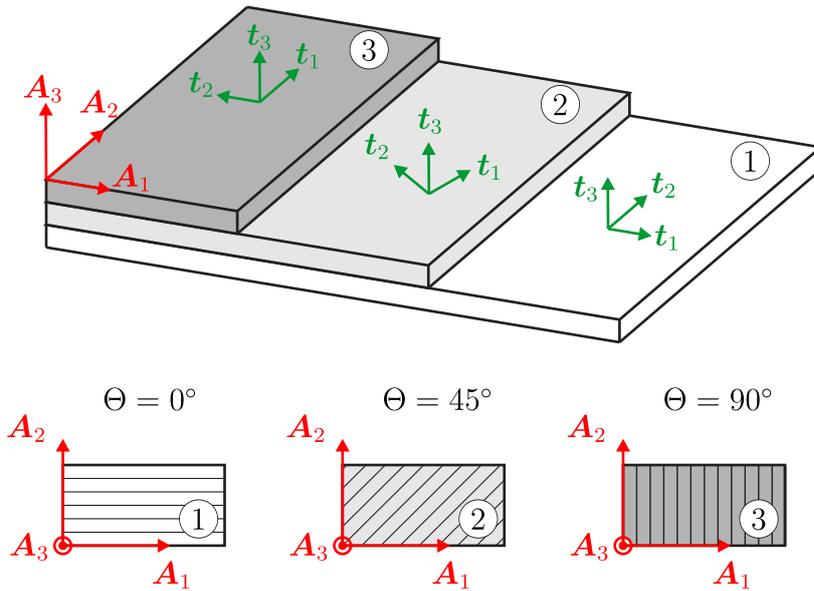


Abbildung 3.6: Schichtaufbau und Faserwinkel für Faserverbund-Laminat

Die Vorzugsrichtung ist in der Laminattheorie mit dem Vektor \mathbf{t}_1 definiert. Die Koordinatensysteme \mathbf{t}_i der einzelnen Schichten stimmen nicht zwangsläufig mit dem globalen Hauptkoordinatensystem \mathbf{A}_i überein. Deshalb muss die lokale Materialmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ in Gleichung (3.39) mit der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

in das Hauptkoordinatensystem transformiert werden. Die Schichten liegen in der Ebene der aufgespannten Fläche der Vektoren \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 . Die Rotation um die \mathbf{A}_3 -Achse wird mit dem Winkel Θ angegeben. Damit können die lokalen Verzerrungen $\bar{\mathbf{E}}$ in die globalen Verzerrungen \mathbf{E} mit dem Zusammenhang

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

umgerechnet werden. Darin gilt für die Abkürzungen $s = \sin \Theta$ und $c = \cos \Theta$.

Weiterhin kann die lokale Materialmatrix $\bar{\mathbf{C}}$ in Gleichung (3.39) mit der Vorschrift

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc|cc} C_{11} & C_{12} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

in das globale Hauptkoordinatensystem \mathbf{A}_i transformiert werden. Infolge der Transformation entstehen zusätzliche Terme. Die globalen Materialparameter können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} C_{11} &= c^4 \bar{C}_{11} + 2c^2 s^2 (\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{44}) + s^4 \bar{C}_{22} \\ C_{12} &= c^2 s^2 (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} - 4\bar{C}_{44}) + (c^4 + s^4) \bar{C}_{12} \\ C_{14} &= c^3 s (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{44}) - s^3 c (\bar{C}_{22} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{44}) \\ C_{22} &= s^4 \bar{C}_{11} + 2c^2 s^2 (\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{44}) + c^4 \bar{C}_{22} \\ C_{24} &= s^3 c (\bar{C}_{11} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{44}) - c^3 s (\bar{C}_{22} - \bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{44}) \\ C_{44} &= c^2 s^2 (\bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} - 2\bar{C}_{12} - 2\bar{C}_{44}) + (c^4 + s^4) \bar{C}_{44} \\ C_{55} &= c^2 \bar{C}_{55} + s^2 \bar{C}_{66} \\ C_{56} &= cs (\bar{C}_{55} - \bar{C}_{66}) \\ C_{66} &= s^2 \bar{C}_{55} + c^2 \bar{C}_{66} \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.6 Materialmatrix

Das Endergebnis der Schalenschnittgrößen

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{h^-}^{h^+} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \, d\zeta = \int_{h^-}^{h^+} \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}}_{\mathbf{D}} \, d\zeta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.44)$$

ist für eine beliebige Referenzfläche und unterschiedliche Materialien gültig. Für Schichtverbunde folgt die Materialmatrix

$$\mathbf{D} = \int_{h^-}^{h^+} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \zeta \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \zeta \mathbf{C}_m^T & \zeta^2 \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} d\zeta = \sum_{k=1}^{n_{\text{lay}}} \mathbf{D}_k = \sum_{k=1}^{n_{\text{lay}}} \int_{h_k^-}^{h_k^+} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m^k & \mathbf{C}_m^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_m^k & \mathbf{C}_m^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s^k \end{bmatrix} d\zeta \quad (3.45)$$

aus der Addition der Materialmatrizen \mathbf{D}_k der einzelnen Schichten. In Abbildung 3.7 ist ein Laminat mit $k = 1, \dots, n_{\text{lay}}$ Schichten dargestellt.

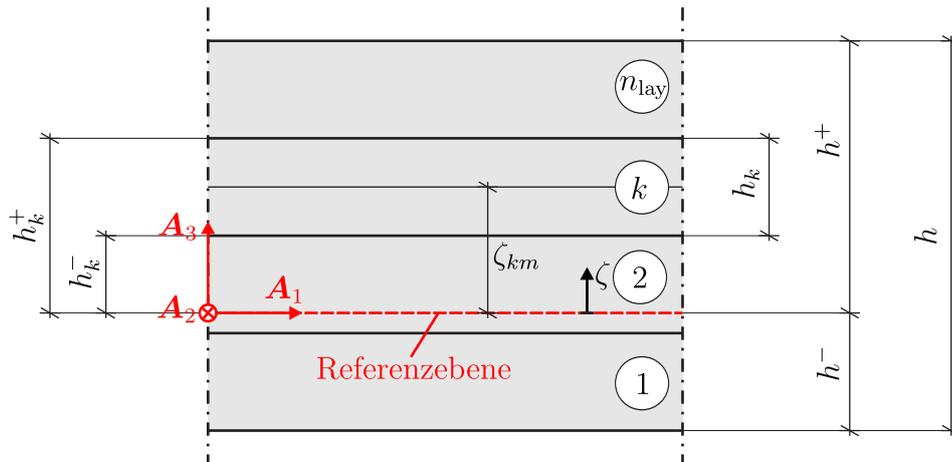


Abbildung 3.7: Schichtung einer Schale in Dickenrichtung

Die Lage einer Referenzebene kann beliebig im Laminat definiert werden. Die Dicke einer Einzelschicht wird mit h_k bezeichnet. Für die Dickenintegration werden die Integrationsgrenzen der Einzelschicht mit

$$h_k^- = \zeta_{km} - \frac{h_k}{2} \quad \text{und} \quad h_k^+ = \zeta_{km} + \frac{h_k}{2} \quad (3.46)$$

angegeben. Die Auswertung der Integrale in Gleichung (3.45) liefert

$$\int_{h_k^-}^{h_k^+} d\zeta = h_k \quad , \quad \int_{h_k^-}^{h_k^+} \zeta d\zeta = h_k \zeta_{km} \quad \text{und} \quad \int_{h_k^-}^{h_k^+} \zeta^2 d\zeta = \frac{h_k^3}{12} + h_k \zeta_{km}^2 \quad . \quad (3.47)$$

Daraus resultiert die globale Materialmatrix eines Schichtverbunds

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^{n_{\text{lay}}} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m^k & \mathbf{D}_{mb}^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb}^{k,T} & \mathbf{D}_b^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb}^T & \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

mit den Membran- \mathbf{D}_m , Biege- \mathbf{D}_b und Schubanteilen \mathbf{D}_s sowie den gemischten Kopplungstermen \mathbf{D}_{mb} . Wird die Referenzfläche abweichend zur Mittelfläche des Laminats gewählt, sind diese Kopplungsterme ungleich Null. Das ist auch der Fall, wenn über die Höhe keine symmetrische Steifigkeitsverteilung vorliegt. Beispielsweise können für ein Laminat mit einer unsymmetrischen Schichtung, das nur mit einer Zugkraft belastet wird, Biegeanteile aktiviert werden.

3.7 Variationsformulierung und Linearisierung

In den vorherigen Kapiteln 2.5 und 2.6 werden die Grundlagen der Variationsformulierung und der Linearisierung beschrieben. Diese Grundlagen werden im

Folgenden auf das Randwertproblem ebener Schalen angewendet. Die Formulierungen für die Verzerrungen und Schnittgrößen der Schale können in die schwache Form des Gleichgewichts

$$G(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, dA}_{\delta\mathcal{W}_{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}}_0 \, dA - \int_{\partial\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{f}}_0 \, dS}_{\delta\mathcal{W}_{\text{ext}}} = 0 \quad (3.49)$$

eingesetzt werden. Die Feldgrößen der Schale

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{bzw.} \quad (3.50)$$

$$\delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 & \delta u_3 & \delta\beta_1 & \delta\beta_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.51)$$

werden in Verschiebungen \mathbf{u} und Rotationen $\boldsymbol{\beta}$ aufgeteilt. Arbeitskonforme Größen zu den Verschiebungen sind Kräfte und zu den Rotationen die Momente. Die äußeren Lasten werden mit dem Vektor der Flächenlasten

$$\bar{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.52)$$

bzw. mit dem Vektor der Randlasten

$$\bar{\mathbf{f}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.53)$$

definiert. Eine Darstellung der äußeren Lasten mit den Verschiebungs- $\partial\Omega_0^u$ und Spannungsändern $\partial\Omega_0^\sigma$ wird in Abbildung 3.8 gezeigt.

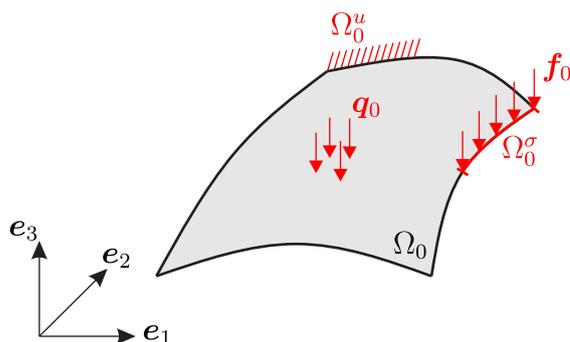


Abbildung 3.8: Die Schale mit Verschiebungs- und Spannungsändern in der Referenzkonfiguration

Mit der eingeführten Notation in Tabelle 2.1 gilt für die Randbedingungen $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_0$ auf $\partial\Omega_0^u$ und $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}_0$ auf $\partial\Omega_0^\sigma$. Durch die Annahme mäßiger Drehung sind die Membrananteile der Schalenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ nichtlinear. Deshalb ist eine Linearisierung

der schwachen Form notwendig. Mithilfe der virtuellen Verzerrungen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{11} \\ \delta \varepsilon_{22} \\ 2 \delta \varepsilon_{12} \\ \hline \delta \kappa_{11} \\ \delta \kappa_{22} \\ 2 \delta \kappa_{12} \\ \hline \delta \gamma_{13} \\ \delta \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{1,1} & + & \delta u_{1,1} u_{1,1} + \delta u_{2,1} u_{2,1} + \delta u_{3,1} u_{3,1} \\ \delta u_{2,2} & + & \delta u_{1,2} u_{1,2} + \delta u_{2,2} u_{2,2} + \delta u_{3,2} u_{3,2} \\ \delta u_{1,2} + \delta u_{2,1} & + & \delta u_{1,1} u_{1,2} + \delta u_{2,1} u_{2,2} + \delta u_{3,1} u_{3,2} + \\ & & \delta u_{1,2} u_{1,1} + \delta u_{2,2} u_{2,1} + \delta u_{3,2} u_{3,1} \\ \hline & & \delta \beta_{1,1} \\ & & \delta \beta_{2,2} \\ & & \delta \beta_{1,2} + \delta \beta_{2,1} \\ \hline & & \delta \beta_1 + \delta u_{3,1} \\ & & \delta \beta_2 + \delta u_{3,2} \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

den linearisierten Verzerrungen

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ 2 \Delta \varepsilon_{12} \\ \hline \Delta \kappa_{11} \\ \Delta \kappa_{22} \\ 2 \Delta \kappa_{12} \\ \hline \Delta \gamma_{13} \\ \Delta \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta u_{1,1} & + & \Delta u_{1,1} u_{1,1} + \Delta u_{2,1} u_{2,1} + \\ & & \Delta u_{3,1} u_{3,1} \\ \Delta u_{2,2} & + & \Delta u_{1,2} u_{1,2} + \Delta u_{2,2} u_{2,2} + \\ & & \Delta u_{3,2} u_{3,2} \\ \Delta u_{1,2} + \Delta u_{2,1} & + & \Delta u_{1,1} u_{1,2} + \Delta u_{2,1} u_{2,2} + \\ & & \Delta u_{3,1} u_{3,2} + \Delta u_{1,2} u_{1,1} + \\ & & \Delta u_{2,2} u_{2,1} + \Delta u_{3,2} u_{3,1} \\ \hline & & \Delta \beta_{1,1} \\ & & \Delta \beta_{2,2} \\ & & \Delta \beta_{1,2} + \Delta \beta_{2,1} \\ \hline & & \Delta \beta_1 + \Delta u_{3,1} \\ & & \Delta \beta_2 + \Delta u_{3,2} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

und den linearisierten virtuellen Verzerrungen

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\delta\varepsilon_{22} \\ 2\Delta\delta\varepsilon_{12} \\ \hline \Delta\delta\kappa_{11} \\ \Delta\delta\kappa_{22} \\ 2\Delta\delta\kappa_{12} \\ \hline \Delta\delta\gamma_{13} \\ \Delta\delta\gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{1,1}\Delta u_{1,1} + \delta u_{2,1}\Delta u_{2,1} + \delta u_{3,1}\Delta u_{3,1} \\ \delta u_{1,2}\Delta u_{1,2} + \delta u_{2,2}\Delta u_{2,2} + \delta u_{3,2}\Delta u_{3,2} \\ \delta u_{1,2}\Delta u_{1,1} + \delta u_{2,2}\Delta u_{2,1} + \delta u_{3,2}\Delta u_{3,1} + \\ \delta u_{1,1}\Delta u_{1,2} + \delta u_{2,1}\Delta u_{2,2} + \delta u_{3,1}\Delta u_{3,2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

in denen im Fall mäßiger Drehungen nur noch nichtlineare Membrananteile enthalten sind, kann die Linearisierung in der Form

$$\begin{aligned} \text{Lin}[G(\bar{\boldsymbol{v}}, \delta\boldsymbol{v}, \Delta\boldsymbol{v})] &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, dA - \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{v}^T \bar{\boldsymbol{q}}_0 \, dA - \int_{\partial\Omega_0} \delta\boldsymbol{v}^T \bar{\boldsymbol{f}}_0 \, dS \\ &+ \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \, dA + \int_{\Omega_0} \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA \end{aligned} \quad (3.57)$$

durchgeführt werden.

3.8 Finite-Elemente-Formulierung

Zur Lösung der schwachen Form nach Gleichung (3.49) bietet sich die Anwendung der Finite-Elemente-Methode (Abk.: FEM) an. In diesem Kapitel wird die FE-Formulierung der Schale vorgestellt. Das beschriebene Schalenelement wird im Rahmen der Unschärfemodellierung eingesetzt. Die Elementformulierung der Schale basiert auf den Arbeiten von WAGNER & GRUTTMANN [340, 341] und GRUTTMANN & WAGNER [115]. Die benötigten Grundlagen der FEM sind in diesem Kapitel zusammengefasst und können aus den Standardwerken zur FEM, wie z.B.: ZIENKIEWICZ ET AL. [364], WRIGGERS [355], BELYTSCHKO ET AL. [28], BATHE & HO [20, 21] und HUGHES [139], entnommen werden.

Die FE-Lösung ist abhängig von der Variationsformulierung und den gewählten Ansätzen eine Näherungslösung. In der FEM wird der materielle Körper \mathcal{B} in eine endliche Anzahl finiter Elemente Ω^e zerlegt. In Abbildung 3.9 ist eine Diskretisierung des Körpers in der Referenzkonfiguration dargestellt.

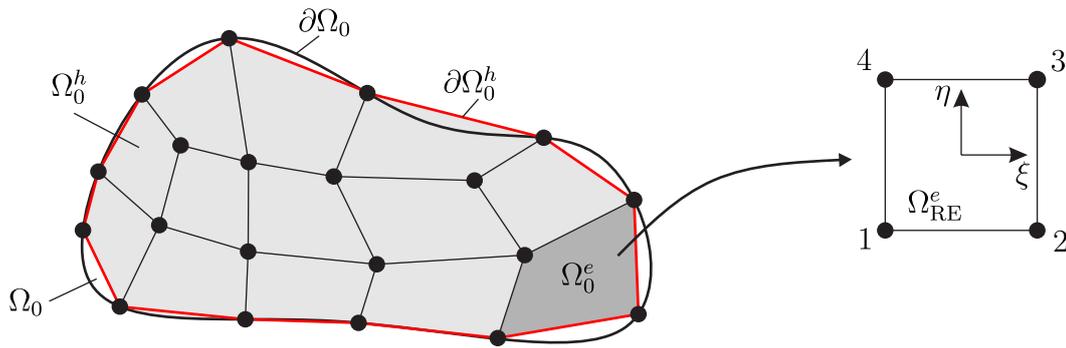


Abbildung 3.9: FE-Diskretisierung eines materiellen Körpers

Mit der Beziehung

$$\Omega_0 \approx \Omega_0^h = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \Omega_0^e \quad (3.58)$$

wird beschrieben, dass der Körper Ω_0^h eine Näherung des materiellen Körpers Ω_0 ist. Die Oberflächen werden mit $\partial\Omega_0$ und $\partial\Omega_0^h$ definiert. Eine feinere Diskretisierung, d.h. eine erhöhte Anzahl finiter Elemente Ω_0^e , führt auf eine verbesserte Approximation der Geometrie des Körpers. Die Anzahl der Elemente wird mit numel bezeichnet. Durchdringungen und Überlappungen der Elemente müssen vermieden werden, um ein brauchbares FE-Netz zu erhalten. Die Elemente werden mit Eckknoten beschrieben. In dieser Arbeit wird ein 4-Knoten-Schalelement angewendet. Zusätzlich ist in Abbildung 3.9 ein Referenzelement Ω_{RE}^e mit einem ξ - η -Koordinatensystem und den Knotennummern dargestellt. In einer isoparametrischen FE-Formulierung werden die einzelnen Elemente, die beliebig verzerrt sein können, auf ein solches Referenzelement projiziert. Für die FE-Formulierung ist eine Transformation der Ortsvektoren der Knoten auf das lokale Basissystem der Schale notwendig. Mithilfe der globalen Element-Koordinaten für den jeweiligen Knoten I

$$\mathbf{X}_I^{e,G} = \left[X_{I1}^{e,G} \quad X_{I2}^{e,G} \quad X_{I3}^{e,G} \right]^T \quad (3.59)$$

kann der Mittelpunkt eines Elements

$$\mathbf{X}_0^{e,G} := \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \mathbf{X}_I^{e,G} \quad (3.60)$$

berechnet werden. Zudem können mithilfe der normierten Diagonalenvektoren

$$\mathbf{d}_1 := \frac{\mathbf{X}_3^{e,G} - \mathbf{X}_1^{e,G}}{|\mathbf{X}_3^{e,G} - \mathbf{X}_1^{e,G}|}, \quad \mathbf{d}_2 := \frac{\mathbf{X}_2^{e,G} - \mathbf{X}_4^{e,G}}{|\mathbf{X}_2^{e,G} - \mathbf{X}_4^{e,G}|} \quad (3.61)$$

die Basisvektoren in der Schalenebene wie folgt ermittelt werden:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2|} \quad , \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2|} \quad , \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \quad . \quad (3.62)$$

Dabei wird die Normale der Schalenebene \mathbf{A}_3 über das Kreuzprodukt gebildet. Dieses orthonormale Basissystem ist nur für regelmäßige Netze und ein isotropes Werkstoffverhalten gültig. Eine Transformation für Werkstoffe aus Faserverbundmaterial wird in Kapitel 3.5 vorgestellt. Die Definition der Ortsvektoren der Knoten im lokalen Basissystem

$$\mathbf{X}_I^e = \mathbf{T} \left(\mathbf{X}_I^{e,G} - \mathbf{X}_0^{e,G} \right) \quad (3.63)$$

erfolgt mit einer Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} := \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{e}_i = \left[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3 \right]^T \quad . \quad (3.64)$$

Zusätzlich werden die Verschiebungen und Verdrehungen mit der Beziehung

$$\mathbf{v}_I^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^e \\ \boldsymbol{\beta}_I^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I^{e,G} \\ \boldsymbol{\beta}_I^{e,G} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

in das lokale Koordinatensystem transformiert. In der fünfparametrischen Schalenkinematik werden pro Knoten lokal fünf Freiheitsgrade berücksichtigt:

$$\mathbf{v}_I^e = \left[u_{1I}^e \quad u_{2I}^e \quad u_{3I}^e \quad \beta_{1I}^e \quad \beta_{2I}^e \quad 0 \right]^T \quad . \quad (3.66)$$

Der sechste lokale Freiheitsgrad wird, wie bereits in Kapitel 3.3 diskutiert, zu Null gesetzt. Allerdings sind global alle sechs Freiheitsgrade

$$\mathbf{v}_I^{e,G} = \left[u_{1I}^{e,G} \quad u_{2I}^{e,G} \quad u_{3I}^{e,G} \quad \beta_{1I}^{e,G} \quad \beta_{2I}^{e,G} \quad \beta_{3I}^{e,G} \right]^T \quad (3.67)$$

vorhanden. Der sechste globale Freiheitsgrad $\beta_{3I}^{e,G}$ ist bei Verkantungen zwischen Elementen bzw. bei Verschneidungen von Schnittgrößen ungleich Null. Aus den Elementverwölbungen $\beta_{1I}^{e,G}$ und $\beta_{2I}^{e,G}$ kann damit eine Verdrillung $\beta_{3I}^{e,G}$ resultieren. Die Definition der Freiheitsgrade in der FEM sind in Abbildung 3.10 dargestellt.

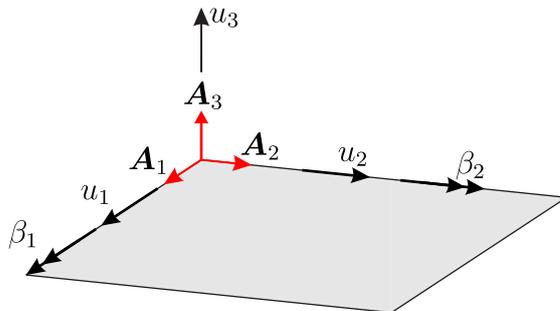


Abbildung 3.10: Freiheitsgrade der Schale in der FEM

Im Gegensatz zur kontinuumsmechanischen Beschreibung in Abbildung 3.4 werden die Verdrehungen zum zugehörigen Basisvektor definiert. Damit gilt für die Definition der Freiheitsgrade in der FE-Formulierung:

$$\beta_1 = -\beta_2^{\text{konti}} \quad , \quad \beta_2 = \beta_1^{\text{konti}} \quad . \quad (3.68)$$

Die Elementformulierung der Schale basiert auf dem isoparametrischen Konzept. Dabei werden Geometrie und Verschiebungen mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert. Das bedeutet, dass sowohl zur Näherung der Ortsvektoren der Referenzfläche

$$\mathbf{X}^e = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{X}_I^e \quad (3.69)$$

als auch für die lokalen Verschiebungen

$$\mathbf{v}^e = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \mathbf{v}_I^e \quad (3.70)$$

die bilinearen Ansatzfunktionen

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (3.71)$$

angewendet werden. Die C^0 -stetigen Ansatzfunktionen sind in den natürlichen Koordinaten (ξ, η) formuliert. Damit können die Knotenkoordinaten mit $\xi_I \in \{-1, 1\}$ und $\eta_I \in \{-1, 1\}$ angegeben werden. Eine isoparametrische Abbildung des 4-Knoten-Elements ist in Abbildung 3.11 dargestellt.

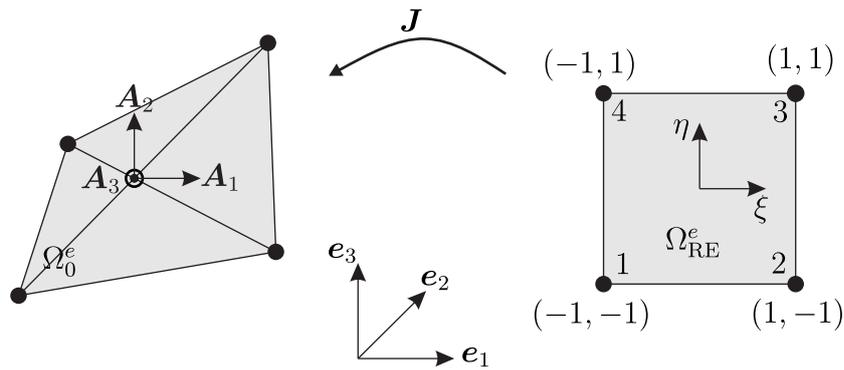


Abbildung 3.11: Isoparametrische Abbildung eines 4-Knoten-Elements

Die virtuellen und inkrementellen Verschiebungsgrößen werden gleichermaßen approximiert:

$$\delta \mathbf{v}^e = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \delta \mathbf{v}_I^e \quad , \quad \Delta \mathbf{v}^e = \sum_{I=1}^4 N_I(\xi, \eta) \Delta \mathbf{v}_I^e \quad . \quad (3.72)$$

Im Folgenden wird auf den Index h zur Darstellung der approximierten Größen verzichtet. Mithilfe der Ableitungen der Ansatzfunktionen nach ξ und η können die Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{v}_{,\xi}^e = \sum_{I=1}^4 N_{I,\xi}(\xi, \eta) \mathbf{v}_I^e \quad , \quad \mathbf{v}_{,\eta}^e = \sum_{I=1}^4 N_{I,\eta}(\xi, \eta) \mathbf{v}_I^e \quad (3.73)$$

berechnet werden. Für die Verzerrungen werden die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den lokalen Koordinaten benötigt. Die Transformation

$$\begin{bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

wird mithilfe der *Jacobi-Matrix*

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^4 \mathbf{X}_I^e \otimes \nabla_{\xi} N_I = \begin{bmatrix} X_{1,\xi}^e & X_{1,\eta}^e \\ X_{2,\xi}^e & X_{2,\eta}^e \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

durchgeführt. Damit können die virtuellen und inkrementellen Schalenverzerrungen mit den Beziehungen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I^e \quad , \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I^e \quad (3.76)$$

berechnet werden. Die \mathbf{B} -Matrix ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{B}_{I8 \times 5} := \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I3 \times 3}^m & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{B}_{I3 \times 3}^b \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{B}_{I2 \times 3}^s \end{bmatrix} \quad . \quad (3.77)$$

Diese wird in einen Membrananteil \mathbf{B}_I^m , Biegeanteil \mathbf{B}_I^b und in einen Schubanteil \mathbf{B}_I^s aufgeteilt. In der \mathbf{B} -Matrix sind die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den lokalen Koordinaten enthalten. Damit gilt für die einzelnen Matrizen:

$$\mathbf{B}_{I3 \times 3}^m := \begin{bmatrix} N_{I,1}(1 + u_{1,1}) & N_{I,1}u_{2,1} & N_{I,1}u_{3,1} \\ N_{I,2}u_{1,2} & N_{I,2}(1 + u_{2,2}) & N_{I,2}u_{3,2} \\ N_{I,1}u_{1,2} + N_{I,2}(1 + u_{1,1}) & N_{I,1}(1 + u_{2,2}) + N_{I,2}u_{2,1} & N_{I,1}u_{3,2} + N_{I,2}u_{3,1} \end{bmatrix} \quad , \quad (3.78)$$

$$\mathbf{B}_{I3 \times 3}^b := \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,1} \\ 0 & -N_{I,2} & 0 \\ 0 & -N_{I,1} & N_{I,2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{B}_{I2 \times 3}^s := \begin{bmatrix} N_{I,1} & 0 & 1 \\ N_{I,2} & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.80)$$

Im Membrananteil der \mathbf{B} -Matrix nach Gleichung (3.78) sind aufgrund der geometrischen Nichtlinearität zusätzlich zu den Ableitungen der Ansatzfunktionen auch Verschiebungsgradienten enthalten. Die gesamte \mathbf{B} -Matrix des Elements wird wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{B}_{8 \times 20}^e := \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3 \quad \mathbf{B}_4 \right] \quad . \quad (3.81)$$

Das Einsetzen des FE-Ansatzes nach Gleichung (3.76) in die schwache Form des Gleichgewichts nach Gleichung (3.49) führt auf die Form

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}^e, \delta \mathbf{v}^e) &= \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^{e,T} \left[\underbrace{\int_{\Omega_0} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} \, dA}_{\mathbf{R}_I^e} - \underbrace{\left(\int_{\Omega_0} N_I^T \bar{\mathbf{q}}_0 \, dA + \int_{\partial \Omega_0} N_I^T \bar{\mathbf{f}}_0 \, dS \right)}_{\mathbf{P}_I^e} \right] \quad (3.82) \\ &= \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^{e,T} [\mathbf{R}_I^e - \mathbf{P}_I^e] = \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^{e,T} \mathbf{G}_I^e \quad . \end{aligned}$$

Dabei wird durch das Residuum auf Elementebene \mathbf{G}_I^e die Differenz der inneren und äußeren Kräfte beschrieben. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird mit dem *Newton-Raphson-Verfahren*, das im Rahmen der FEM in Kapitel 4.2 beschrieben wird, durchgeführt. Hierfür wird eine Linearisierung der inneren Arbeiten notwendig. Da in der vorgestellten FE-Formulierung ausschließlich konservative Kräfte betrachtet werden, müssen die äußeren Arbeiten nicht linearisiert werden. Die Grundlagen der Linearisierung sind in Kapitel 2.6 beschrieben. Für die Linearisierung der inneren Arbeiten folgt mit Anwendung der Produktregel die Beziehung

$$\begin{aligned} D[G(\mathbf{v}^e, \delta \mathbf{v}^e, \Delta \mathbf{v}^e)] &= \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dA + \int_{\Omega_0} \Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA \\ &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^{e,T} (\mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{mat}} + \mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{geom}}) \Delta \mathbf{v}_K^e \quad (3.83) \\ &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^{e,T} \mathbf{K}_{TIK}^e \Delta \mathbf{v}_K^e \quad . \end{aligned}$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{TIK}^e wird in einen materiellen Anteil

$$\mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{mat}} = \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_K \, dA \quad (3.84)$$

und in einen geometrischen Anteil

$$\mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{geom}} = \int_{\Omega_0^e} \left[\begin{array}{cc} \hat{n}_{IK} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{array} \right] dA \quad (3.85)$$

mit

$$\hat{n}_{IK} = n_{11}N_{I,1}N_{K,1} + n_{12}(N_{I,1}N_{K,2} + N_{I,2}N_{K,1}) + n_{22}N_{I,2}N_{K,2} \quad (3.86)$$

aufgeteilt. Für die Integration der Gleichungen (3.84) und (3.85) wird die *Gauß-Integration* angewendet. Die numerische Integration einer beliebigen Funktion $g(\mathbf{X})$ kann auf dem Referenzelement Ω_{RE} wie folgt durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} g(\mathbf{X}) dA &= \int_{\Omega_{\text{RE}}} g(\xi, \eta) \det \mathbf{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \sum_{p=1}^4 g(\xi_p, \eta_p) \det \mathbf{J}(\xi_p, \eta_p) w_p \quad . \end{aligned} \quad (3.87)$$

Für das lineare Schalenelement ist eine *2-Punkt-Gauß-Integration* je Richtung ausreichend. Dabei sind die Koordinaten der *Gaußpunkte* im Referenzelement Ω_{RE} mit $\xi_p = \pm\sqrt{3}/3$, $\eta_p = \pm\sqrt{3}/3$ definiert. Für den Wichtungsfaktor gilt: $w_p = 1$. Allerdings ist für eine verzerrte Elementgeometrie die Lösung der numerischen Integration mit der *Gauß-Integration* nicht exakt. Der Grund hierfür ist, dass die Determinante der *Jacobi-Matrix* $\det \mathbf{J}$ bei verzerrten Elementen keine Konstante ist. Aufgrund der Division mit der Determinante zur Bildung der Inverse der *Jacobi-Matrix*, siehe Gleichung (3.74), entstehen gebrochenrationale Funktionen und die Anwendung der *Gauß-Integration* führt auf eine Näherungslösung. Eine Verbesserung der Lösung kann durch eine erhöhte Anzahl an *Gaußpunkten* erzielt werden.

Der materielle Anteil der Steifigkeitsmatrix nach Gleichung (3.84) kann abhängig von der FE-Formulierung nur in Ausnahmefällen in einen linearen und nichtlinearen Anteil aufgespalten werden. Mit der Zerlegung der virtuellen Verzerrungen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{I=1}^4 \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I^e = \sum_{I=1}^4 (\mathbf{B}_I^{\text{lin}} + \mathbf{B}_I^{\text{nl}}) \delta \mathbf{v}_I^e \quad (3.88)$$

kann der materielle Anteil der Steifigkeitsmatrix in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{mat}} &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \int_{\Omega_0^e} (\mathbf{B}_I^{\text{lin}} + \mathbf{B}_I^{\text{nl}})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_K^{\text{lin}} + \mathbf{B}_K^{\text{nl}}) dA \\ &= \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \int_{\Omega_0^e} \mathbf{B}_I^{\text{lin},T} \mathbf{D} \mathbf{B}_K^{\text{lin}} + \\ &\quad \mathbf{B}_I^{\text{lin},T} \mathbf{D} \mathbf{B}_K^{\text{nl}} + \mathbf{B}_I^{\text{nl},T} \mathbf{D} \mathbf{B}_K^{\text{lin}} + \mathbf{B}_I^{\text{nl},T} \mathbf{D} \mathbf{B}_K^{\text{nl}} dA \\ &= \mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{lin}} + \mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{u}} \end{aligned} \quad (3.89)$$

angegeben werden. Dabei ist $\mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{lin}}$ der lineare Anteil und $\mathbf{K}_{TIK}^{e,\text{u}}$ wird als Anfangsverschiebungsmatrix bezeichnet. Für die Formulierung des Eigenwertpro-

blems zur Behandlung von Stabilitätsproblemen ist die Kenntnis über die Zusammensetzung der Steifigkeitsmatrix von Bedeutung. Beispielsweise wird bei einer klassischen Beulanalyse die Anfangsverschiebungsmatrix nicht berücksichtigt. Der Zusammenhang wird in Kapitel 4.4.2 diskutiert.

Die vollständige Linearisierung der Variationsformulierung für ein Element wird mit

$$L[G(\mathbf{v}^e, \delta\mathbf{v}^e, \Delta\mathbf{v}^e)] = \sum_{I=1}^4 \delta\mathbf{v}_I^{e,T} (\mathbf{G}_I^e + \sum_{K=1}^4 \mathbf{K}_{TIK}^e \Delta\mathbf{v}_K^e) \quad (3.90)$$

definiert. Die Größe der vollständigen Elementsteifigkeitsmatrix ist in der Matrixschreibweise

$$\mathbf{K}_{T20 \times 20}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T11}^e & \mathbf{K}_{T12}^e & \mathbf{K}_{T13}^e & \mathbf{K}_{T14}^e \\ \mathbf{K}_{T21}^e & \mathbf{K}_{T22}^e & \mathbf{K}_{T23}^e & \mathbf{K}_{T24}^e \\ \mathbf{K}_{T31}^e & \mathbf{K}_{T32}^e & \mathbf{K}_{T33}^e & \mathbf{K}_{T34}^e \\ \mathbf{K}_{T41}^e & \mathbf{K}_{T42}^e & \mathbf{K}_{T43}^e & \mathbf{K}_{T44}^e \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

dargestellt. Die lokalen Größen in Gleichung (3.90) müssen abschließend auf das globale Koordinatensystem transformiert werden. Die Transformation wird mit der Beziehung in Gleichung (3.64) durchgeführt. Damit folgt für die Linearisierung:

$$\begin{aligned} L[G(\mathbf{v}^e, \delta\mathbf{v}^e, \Delta\mathbf{v}^e)] &= \sum_{I=1}^4 \delta\mathbf{v}_I^{e,G,T} (\mathbf{T}_I^T \mathbf{G}_I^e + \sum_{K=1}^4 \mathbf{T}_I^T \mathbf{K}_{TIK}^e \mathbf{T}_K \Delta\mathbf{v}_K^{e,G}) \\ &= \sum_{I=1}^4 \delta\mathbf{v}_I^{e,G,T} (\mathbf{G}_I^{e,G} + \sum_{K=1}^4 \mathbf{K}_{TIK}^{e,G} \Delta\mathbf{v}_K^{e,G}) \quad . \end{aligned} \quad (3.92)$$

Der Zusammenbau der Elementgrößen

$$\mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \mathbf{K}_T^{e,G}, \quad \Delta\mathbf{V} = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \Delta\mathbf{v}^{e,G} \quad \text{und} \quad \mathbf{G} = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \mathbf{G}^{e,G} \quad (3.93)$$

führt auf das nichtlineare Gleichungssystem

$$\delta\mathbf{V}(\mathbf{G} + \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{V}) = 0 \quad . \quad (3.94)$$

Die virtuellen Verschiebungen sind beliebig und ungleich Null: $\delta\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. Daraus folgt das zu lösende Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{V} = -\mathbf{G} \quad . \quad (3.95)$$

Wird eine Schale nur durch Biegung beansprucht, verschwinden in einigen Fällen die transversalen Schubspannungen nicht. Der Grund für dieses Phänomen

sind die gewählten Ansatzfunktionen. Bei der numerischen Integration entstehen „parasitäre“ Terme. Diese sind Ursache eines Versteifungseffekts (engl.: *Locking*). Beispielsweise kann mit einer selektiven oder reduzierten Integration der transversalen Schubverzerrungen dieses *Locking* vermieden werden, siehe z.B. [188, 214]. Der Nachteil einer reduzierten Integration ist, dass das Phänomen des *Hourglassings* auftreten kann.

In dieser Arbeit wird daher zur Vermeidung von *Locking-Effekten* bei dünnwandigen schubelastischen Schalen die *Assumed-Natural-Strain-Methode* (Abk.: ANS-Methode) von DVORKIN & BATHE [71] bevorzugt. Die Methode basiert auf Interpolationsansätzen für die Schubverzerrungen. Diese zusätzlichen Ansätze werden über die Seitenmittelpunkte A , B , C und D des Elements im ξ, η -Koordinatensystem definiert:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{\xi 3} &= \frac{1}{2}(1-\eta) \cdot \tilde{\gamma}_{\xi 3}^B + \frac{1}{2}(1+\eta) \cdot \tilde{\gamma}_{\xi 3}^D \\ \tilde{\gamma}_{\eta 3} &= \frac{1}{2}(1-\xi) \cdot \tilde{\gamma}_{\eta 3}^A + \frac{1}{2}(1+\xi) \cdot \tilde{\gamma}_{\eta 3}^C\end{aligned}\quad (3.96)$$

Die Interpolationsfunktionen sind in den lokalen Koordinaten beschrieben. In Abbildung 3.12 werden die ANS-Ansätze für das 4-Knoten-Element dargestellt.

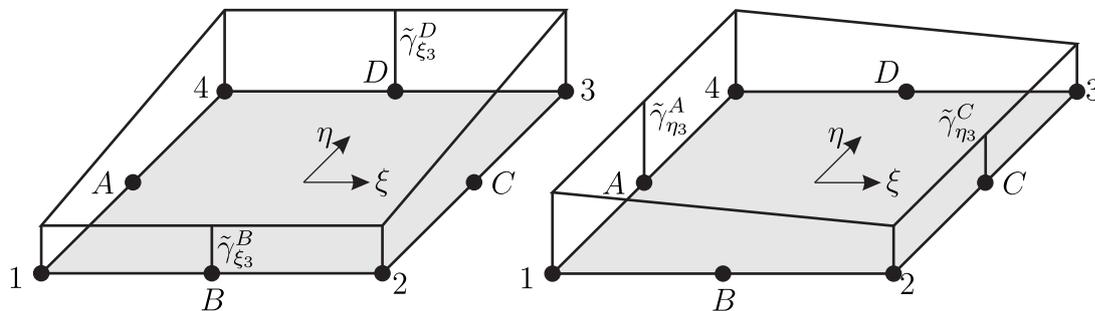


Abbildung 3.12: ANS-Ansätze für ein 4-Knoten-Schalenelement

Die Schubverzerrungen werden an den Seitenmittelpunkten berechnet und über die jeweiligen Knoten gemittelt. An den Kollokationspunkten gilt für die Schubverzerrungen:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{\xi 3}^M &= x_{,\xi}^M \beta_x^M + y_{,\xi}^M \beta_y^M + u_{3,\xi}^M, & M = B, D, \\ \tilde{\gamma}_{\eta 3}^L &= x_{,\eta}^L \beta_x^L + y_{,\eta}^L \beta_y^L + u_{3,\eta}^L, & L = A, C\end{aligned}\quad (3.97)$$

Die Verschiebungsgradienten $u_{3,\xi}^{L,M}$ bzw. $u_{3,\eta}^{L,M}$ sowie die Verdrehungen $\beta_x^{L,M}$ bzw. $\beta_y^{L,M}$ werden mit der Interpolation über die Eckknoten ermittelt. Mithilfe der *Jacobi-Matrix* werden die Schubverzerrungen auf die kartesischen Koordinaten

transformiert:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{\xi 3} \\ \tilde{\gamma}_{\eta 3} \end{bmatrix} . \quad (3.98)$$

Damit kann die \mathbf{B}_I^s -Matrix für den Schubanteil wie folgt modifiziert werden:

$$\mathbf{B}_I^s := \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} & -N_{I,\xi}\xi_I X_2^M & N_{I,\xi}\xi_I X_1^M \\ N_{I,\eta} & -N_{I,\eta}\eta_I X_2^L & N_{I,\eta}\eta_I X_1^L \end{bmatrix} . \quad (3.99)$$

Die Zuordnung der Kollokationspunkte zu den jeweiligen Knoten $I = \{1, 2, 3, 4\}$ erfolgt mit den Exponenten M und L . Die Reihenfolge wird mit $M = \{B, B, D, D\}$ und $L = \{A, C, C, A\}$ festgelegt. Mit der modifizierten \mathbf{B}_I^s -Matrix für den Schubanteil können die inneren Arbeiten der schwachen Form des Gleichgewichts neu aufgestellt werden. Für die numerische Integration der Schubanteile kann unverändert eine *2-Punkt-Gauß-Integration* je Richtung angewendet werden.

4 Stabilität von Tragwerken

Das Stabilitätsversagen ist vor allem bei dünnwandigen Schalenstrukturen unter Druckbeanspruchung oft die maßgebende Versagensart. Daher spielt in der nichtlinearen Strukturmechanik das Auffinden von Stabilitätspunkten, die in der mathematischen Betrachtungsweise auch als singuläre Punkte bezeichnet werden, eine wichtige Rolle. Dazu werden in diesem Kapitel die Grundlagen numerischer Berechnungsmöglichkeiten diskutiert. Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen existieren bereits zahlreiche Standardwerke. Der Inhalt des Kapitels wird mithilfe der Arbeiten von STEIN ET AL. [306], WAGNER [337], BAŽANT & CEDOLIN [23], TIMOSHENKO [319], WOLMIR [354] und PFLÜGER [234] zusammengestellt.

4.1 Einordnung von Stabilitätsproblemen

Ein System wird als stabil bezeichnet, wenn es die Fähigkeit besitzt nach einer Störung wieder in den Ausgangszustand zurückzukehren. Kriterien für das nichtlineare Stabilitätsverhalten von Tragwerken werden in der Regel aus der Diskussion der Last-Verschiebungskurven erhalten. Dabei werden die Kurven hinsichtlich singulärer Punkte untersucht. In Abbildung 4.1 sind typische Last-Verschiebungskurven verschiedener Tragwerke dargestellt. Das erste Tragwerk in

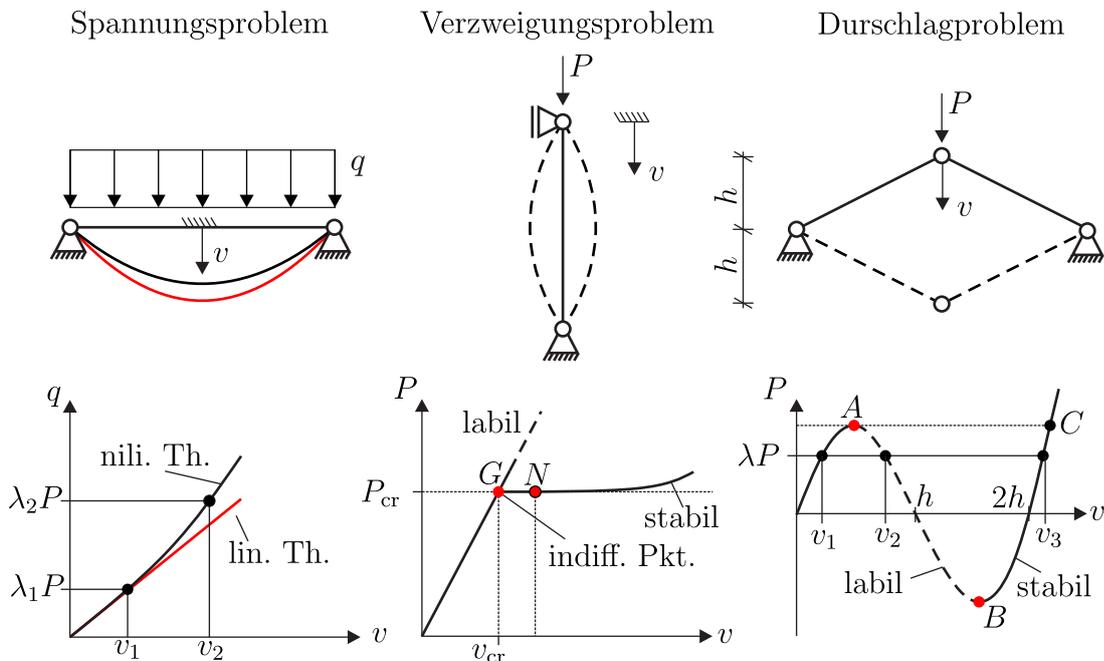


Abbildung 4.1: Tragwerke und deren Last-Verschiebungskurven zur Beurteilung des Stabilitätsverhaltens

Abbildung 4.1 (links) ist ein Biegebalken unter Streckenlast. In diesem Beispiel ist die Kurve monoton wachsend und es tritt keine Mehrdeutigkeit auf. In der Last-Verschiebungskurve ist kein Stabilitätsproblem zu erkennen. Des Weiteren sind hier unterschiedliche Kurven für eine lineare Theorie und nichtlineare Theorie skizziert. Auch unter Annahme eines linear-elastischen Werkstoffgesetzes ist die Last-Verschiebungskurve mit nichtlinearem Verlauf die genaue Lösung. Der Grund hierfür ist die geometrische Nichtlinearität. Um diese zu berücksichtigen, muss das Gleichgewicht am verformten System aufgestellt werden. Eine materiell und geometrisch lineare Theorie stellt lediglich eine Näherungslösung dar. Die Anwendung einer vollständig geometrisch nichtlinearen Theorie endlicher Rotationen ermöglicht in diesem Fall die Abbildung einer Zugversteifung. Meist ist die lineare Theorie bei Werkstoffen mit kleinen Verzerrungen ausreichend, wenn die Verschiebungen nicht zu groß werden. Allerdings können bei Beispielen mit einem Stabilitätsproblem die Verschiebungen sehr groß werden, obwohl nur kleine Verzerrungen auftreten.

Eine Stabilitätsuntersuchung erfordert stets die Anwendung einer geometrisch nichtlinearen Theorie. Wenn sich mehrere Verschiebungszustände v_i zu einem Lastniveau $\lambda_i P$ ergeben oder umgekehrt, ist das Stabilitätsverhalten zu untersuchen. Dazu kann im einfachsten Fall zwischen einem Verzweigungsproblem oder einem Durchschlagproblem unterschieden werden. Ausführlicher wird dies beispielsweise in BUDIANSKY [45], THOMPSON & HUNT [317], WRIGGERS ET AL. [357] oder WRIGGERS & SIMO [356] diskutiert.

In Abbildung 4.1 (mitte) ist das statische System eines Knickstabs dargestellt. Die momentenfreie Lagerung an beiden Enden entspricht einem Eulerfall 2. Die Druckkraft wird solange erhöht bis der Stabilitätspunkt bzw. die kritische Last P_{cr} mit der dazugehörigen kritischen Verschiebung u_{cr} erreicht wird. Das Last-Verschiebungsverhalten vor Erreichen des Stabilitätspunkts wird als Vorbeulverhalten bezeichnet. Schlanke Stabtragwerke sind durch ein lineares Vorbeulverhalten charakterisiert. Das Verhalten nach Erreichen des Stabilitätspunkts wird als überkritischer Bereich oder Nachbeulverhalten bezeichnet. Am kritischen Punkt, auch indifferenten Punkt genannt, verzweigt der Gleichgewichtspfad in einen labilen und stabilen Pfad. Daher wird ein solches Problem auch Verzweigungsproblem genannt. Ein indifferenten Punkt liegt vor, wenn neben einem Grundzustand (G) ein infinitesimal ausgelenkter Nachbarzustand (N) existiert, der sich für die gleiche Last im Gleichgewicht befindet. Dabei ist die Last-Verschiebungskurve nicht mehr eindeutig. Ein Knicken tritt auf, wenn das System ab diesem Punkt eine Auslenkung – eine Imperfektion – erfährt. Der Knickvorgang ist ein Stabilitätsversagen. Dabei treten großen Verschiebungen auf. Bei einem Knickstab kann die Last nicht mehr weiter gesteigert werden. Der horizontale Verlauf der Last-Verschiebungskurve nach dem Ausknicken wird als neutral bezeichnet. Mit diesem

Pfad wird ein stabiles Gleichgewicht beschrieben. Erfährt das System keine Auslenkung – das System enthält keine Imperfektionen – kann über den indifferenten Punkt hinaus die Last beliebig weiter gesteigert werden ohne zu versagen. In diesem Fall wird mit der Kurve ein labiler Pfad beschrieben. Auf diesem Pfad genügt schon eine kleine Störung, dass das System ein stabiles Gleichgewicht einnimmt. Der Sachverhalt kann mit einer Kugelanalgie erklärt werden, siehe Abbildung 4.2. Ein Gleichgewichtszustand wird als stabil bezeichnet, wenn die Kugel nach

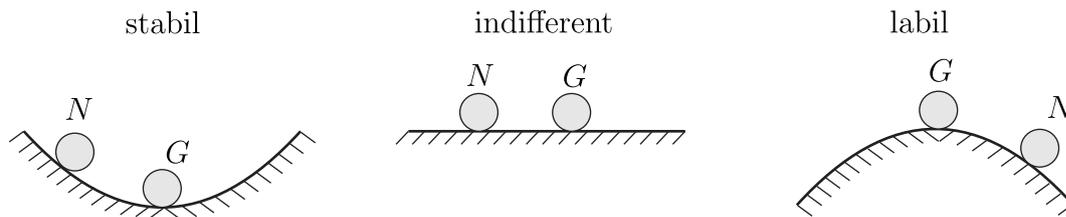


Abbildung 4.2: Kugelanalgie der Gleichgewichtszustände [234]

einer Auslenkung wieder von alleine ihre ursprüngliche Lage einnimmt, siehe Abbildung 4.2 (links). In Abbildung 4.2 (rechts) ist ein labiler Gleichgewichtszustand dargestellt. Erfährt die Kugel dort eine kleine Störung, rollt diese, bestrebt nach einem günstigeren energetischen Zustand, den Abhang hinunter ohne wieder die Ausgangslage einzunehmen. Beim indifferenten Fall verändert sich der energetische Zustand der Kugel nicht. Im Gegensatz zum labilen Fall nimmt die Kugel nach einer Auslenkung und einem kurzen Rollen auf der horizontale Ebene wieder eine stabile Lage ein, siehe Abbildung 4.2 (mitte).

Die Analogie kann auch auf das Durchschlagproblem in Abbildung 4.1 (rechts) übertragen werden. Ein klassisches Durchschlagproblem ist der symmetrische Zweischlag mit einer gelenkigen Lagerung und Verbindung der zwei Stäbe. Damit ist eine Biegung der Stäbe ausgeschlossen. Die Belastung P erzeugt eine Drucknormalkraft in beiden Stäben. Ein steiler Zweischlag entsteht, wenn die Höhe h groß genug gewählt wird. Bei einem steilen Zweischlag kann jeder einzelne Stab wie ein Eulerfall 2 versagen. Die Last-Verschiebungskurve in Abbildung 4.1 (rechts) entspricht einem flachen Zweischlag. Hier resultiert bereits aus einer kleinen Verschiebung v eine Mehrdeutigkeit in der Last-Verschiebungskurve, d.h. zu einem Lastniveau λP existieren mehrere Verschiebungszustände v_1 , v_2 und v_3 . Nach Erreichen des indifferenten Punkts A, der hier auch als Durchschlagpunkt bezeichnet werden kann, erfolgt ein dynamischer Durchschlag bis zum Punkt B. Der Bereich zwischen beiden Punkten wird als labil eingestuft. Ein Kurvenverfolgungsalgorithmus mit einer Laststeuerung kann den Bereich zwischen den Punkten A und C nicht erfassen. Hierfür ist eine Verschiebungssteuerung notwendig. Zudem kann ein berechneter labiler Gleichgewichtspfad in der Praxis nur

durchfahren werden, wenn das Tragwerk geführt wird. Dennoch sind auch diese Bereiche für eine Bemessung von Interesse. Sie tragen beispielsweise zur Kenntnis über das Imperfektionsverhalten bei. Bei einem Schalentragswerk kann die niedrigste Beullast auch weit im Nachbeulbereich auftreten. Im Folgenden werden Strategien zum Auffinden der singulären Punkte vorgestellt.

4.2 Lösung nichtlinearer FE-Gleichungen

In der nichtlinearen Strukturmechanik muss in der Regel ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Hierfür existiert eine Vielzahl von Lösungsverfahren. Das wohl bekannteste Verfahren aus der Nullstellensuche ist das *Newton-Raphson-Verfahren*, auch bekannt unter dem *Newton-Verfahren*. Im vorherigen Kapitel wird eine Schalenformulierung hergeleitet, die hier als Ausgangsgleichung dienen soll. Für die numerische Umsetzung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird das Prinzip der virtuellen Verschiebung für ein 4-Knoten-Schalenelement definiert:

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}) = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \sum_{I=1}^4 \delta \mathbf{v}_I^T \left[\underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} \, dA}_{\mathbf{R}_I} - \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{q}} \, dA - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{f}} \, dS}_{\mathbf{P}_I} \right] . \quad (4.1)$$

Dabei ist \mathbf{P} der Vektor der äußeren Kräfte und \mathbf{R} der Vektor der inneren Kräfte. Ein System befindet sich im Gleichgewicht, wenn gilt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda^{t+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda^{t+1} \mathbf{P} = \mathbf{0} . \quad (4.2)$$

Das Residuum $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda^{t+1})$ muss hierbei verschwinden. Zur inkrementellen Laststeigerung für eine Anzahl von t Lastschritten wird der Lastfaktor λ^{t+1} eingeführt. Der Vektor der inneren Kräfte ist abhängig vom Verschiebungszustand \mathbf{v} . Die Gleichung (4.2) ist ein nichtlineares Gleichungssystem. Die verwendete Theorie bestimmt den Grad der Nichtlinearität. Der Verschiebungsgrad bei einer Schalentheorie unter Verwendung endlicher Rotationen hängt von trigonometrischen Funktionen ab, siehe GRUTTMANN [113], WAGNER [335]. Auch die Anwendung eines elasto-plastischen Stoffgesetzes kann zu unterschiedlichen Graden der Nichtlinearität führen [337]. Zur Lösung wird die beliebig nichtlineare Gleichung (4.2) in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}} + \Delta \mathbf{v}, \lambda^{t+1}) = \mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda^{t+1}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda^{t+1})}{\partial \mathbf{v}}}_{\mathbf{K}_T} \Delta \mathbf{v} + \dots = \mathbf{0} . \quad (4.3)$$

Die Taylorreihe wird an einem aktuellen Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \lambda^{t+1})$ in Richtung $\Delta \mathbf{v}$ innerhalb eines Lastinkrements $\Delta \lambda$ mit $\lambda^{t+1} = \lambda^t + \Delta \lambda$ linearisiert, d.h. die Reihe wird nach dem linearen Glied abgebrochen. Innerhalb des Verfahrens werden mehrere lineare Gleichungssysteme gelöst:

$$\Delta \mathbf{v}_i^t = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{v}_i^t) \mathbf{G}_i^t(\mathbf{v}_i^t, \lambda^{t+1}) \quad . \quad (4.4)$$

Durch die Verschiebungskremente $\Delta \mathbf{v}_i^t$ wird in der Iterationsschleife ein Update der Verschiebung durchgeführt

$$\mathbf{v}_{i+1}^t = \mathbf{v}_i^t + \Delta \mathbf{v}_i^t \quad . \quad (4.5)$$

Die Iteration ist abgeschlossen, wenn die Norm des Residuums eine zuvor festgelegte Toleranz unterschreitet. Das Verfahren ist in Abbildung 4.3 skizziert und der zugehörige Lösungsalgorithmus ist in Tafel 4.1 dargestellt.

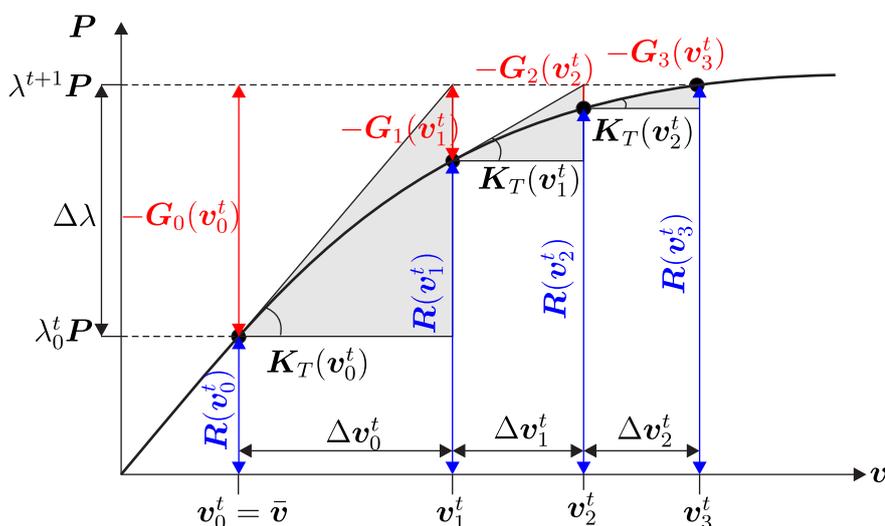


Abbildung 4.3: *Newton-Raphson-Verfahren*

Das Verfahren konvergiert außerdem quadratisch in der Nähe der Gleichgewichtslösung. Bei FE-Diskretisierungen mit einer großen Anzahl an Elementen wird die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T sehr groß. Diese muss beim Lösungsalgorithmus des *Newton-Raphson-Verfahrens* für einen neuen Verschiebungszustand stets neu aufgestellt werden. Das kann sehr rechenintensiv sein. Einige Verfahren berechnen die Steifigkeitsmatrix daher nur näherungsweise. Als Beispiel sei das modifizierte Newton-Verfahren zu nennen. In diesem Verfahren wird innerhalb eines Lastschrittes die Steifigkeitsmatrix aus dem ersten Iterationsschritt verwendet und nicht weiter angepasst.

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_0^t) \Delta \mathbf{v}_0 = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_0^t) \quad (4.6)$$

- (1) Setze Startwerte: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $t = 0$, $\lambda_0 = 0$ und $\Delta\lambda$
- (2) Schleife über alle Lastinkremente: $\lambda^{t+1} = \lambda^t + \Delta\lambda$
- (3) Iterationsschleife
 - Berechne $\mathbf{G}_i^t(\mathbf{v}_i^t, \lambda^{t+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{v}_i^t) - \lambda^{t+1}\mathbf{P}$
 - Konvergenz-Check:
 WENN $\|\mathbf{G}_i^t(\mathbf{v}_i^t, \lambda^{t+1})\| \leq TOL \rightarrow$ Gehe zu 4)
 SONST \rightarrow Weiter
 - Berechne $\Delta\mathbf{v}_i^t = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{v}_i^t)\mathbf{G}_i^t(\mathbf{v}_i^t, \lambda^{t+1})$
 - Update: $\mathbf{v}_{i+1}^t = \mathbf{v}_i^t + \Delta\mathbf{v}_i^t$
 - Setze $i = i + 1$
- (4) $\mathbf{v}_0^{t+1} = \mathbf{v}_i^t$
- (5) Setze $t = t + 1 \rightarrow$ Gehe zu (1)

Tafel 4.1: Lösungsalgorithmus für das *Newton-Raphson-Verfahren*

Ein Nachteil kann sein, dass bei stark nichtlinearen Problemen sich das Konvergenzverhalten so verschlechtert, dass dies zu einer Divergenz führen kann und daraus auch höhere Rechenzeiten resultieren. Des Weiteren sind moderne Gleichungslöser, wie z.B. der PARDISO-Solver [274], in der Lage automatisch das Iterationsverfahren zu wechseln, wenn nur kleine Änderungen festgestellt werden. Der PARDISO-Solver führt bei entsprechender Einstellung und näherungsweise linearen Last-Verschiebungsverhalten die Berechnung der Steifigkeitsmatrix mit einer quadrierten konjugierten Gradienten Methode (engl.: *conjugate gradients squared method*, CGS) durch, siehe zur Beschreibung der Methode in [301]. Das Verfahren ermöglicht schnellere Berechnungen, kann aber auch Konvergenzprobleme hervorrufen. Zudem können bei Stabilitätsuntersuchungen mit näherungsweise linearem Vorbeulverhalten die Stabilitätspunkte nicht erfasst werden.

4.3 Pfadverfolgungsalgorithmen

Das *Newton-Verfahren* funktioniert gut für monoton wachsenden Last-Verschiebungskurven mit einem stetigen Zuwachs der äußeren Last. Das Eingangsbeispiel eines Zweischlags in Abbildung 4.1 ist ein Beispiel für nicht eindeutige Zusammenhänge zwischen Last- und Verschiebungsgrößen. Hier versagt eine inkre-

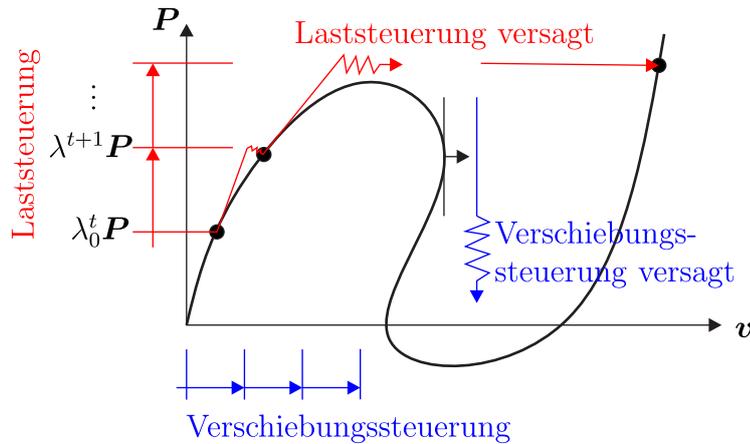


Abbildung 4.4: Versagen der Last- und Verschiebungssteuerung

mentelle Steigerung der Last. Das Versagen einer Laststeuerung und zusätzlich einer Verschiebungssteuerung ist in Abbildung 4.4 verdeutlicht. Die Laststeuerung versagt bei einem Abfall des Lastfaktors. Die Verschiebungssteuerung versagt bei zurückgehender Verschiebung. In der nichtlinearen Strukturmechanik ist dennoch das Verhalten im gesamten Lastbereich von Interesse. Eine vollständige Verfolgung beliebiger nichtlinearer Last-Verschiebungskurven ermöglichen verschiedene inkrementell-iterative Lösungsstrategien, sogenannte Pfadverfolgungsalgorithmen. Im Folgenden ermöglicht die Einführung einer Nebenbedingung ein allgemeines Konzept für die Herleitung einer Laststeuerung, Verschiebungssteuerung und des Bogenlängenverfahrens. Einen tieferen Einblick in die Thematik der Pfadverfolgung wird z.B. in WAGNER & WRIGGERS [342], RIKS [252, 253], CRISFIELD [53] und RAMM [241] gegeben. Das Gleichungssystem wird durch eine spezifizierte Nebenbedingung $f(\mathbf{v}, \lambda)$ wie folgt erweitert:

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) \\ f(\mathbf{v}, \lambda) \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Mit der Nebenbedingung wird die Form der Korrektoriteration vorgegeben. Das erweiterte Gleichungssystem (4.7) wird nach den Verschiebungen und Lasten an einem bekannten Gleichgewichtspunkt $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ linearisiert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_v & \mathbf{G}_\lambda \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) \\ f(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

mit den Richtungsableitungen (*Gâteaux-Ableitungen*)

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_v \Delta \mathbf{v} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] \right|_{\epsilon=0}, & \mathbf{G}_\lambda \Delta \lambda &= \left. \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] \right|_{\epsilon=0}, \\ \mathbf{f}_v^T \Delta \mathbf{v} &= \left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] \right|_{\epsilon=0}, & f_\lambda \Delta \lambda &= \left. \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] \right|_{\epsilon=0}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

In der Ingenieurliteratur ist \mathbf{G}_v als tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T bekannt. Das Lastkollektiv \mathbf{G}_λ ist definiert durch $\mathbf{G}_\lambda = \mathbf{P}$. Damit kann das Gleichungssystem (4.8) wie folgt formuliert werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_T} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix}}_{\Delta \hat{\mathbf{w}}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) \\ f(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda)} . \quad (4.10)$$

Das Gleichungssystem ist unsymmetrisch und kann mit der Partitionierungsmethode gelöst werden. Die Methode wird von KELLER [150] auch Block-Eliminationsverfahren genannt. Das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{v}$ in Gleichung (4.10) wird in jedem Iterationsschritt i in Teillösungen aufgeteilt

$$\Delta \mathbf{v}_{Pi} = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{P} \quad , \quad \Delta \mathbf{v}_{Gi} = -\mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{G}_i(\mathbf{v}_i, \lambda) \quad (4.11)$$

und zu einem Gesamtverschiebungsinkrement zusammengefasst:

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi} . \quad (4.12)$$

Durch Einsetzen des Gesamtverschiebungsinkrements nach Gleichung (4.12) in das Gleichungssystem (4.10) resultiert das noch unbekannte Inkrement des Lastparameters

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v^T \Delta \mathbf{v} + f_\lambda \Delta \lambda_i &= \mathbf{f}_v^T (\Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi}) + f_\lambda \Delta \lambda_i = -f_i(\mathbf{v}, \lambda) \\ \Leftrightarrow \Delta \lambda_i &= -\frac{f_i(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{f}_v^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{\mathbf{f}_v^T \Delta \mathbf{v}_{Pi} + f_\lambda} . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das Vorgehen der Block-Elimination ist gültig für reguläre Matrizen \mathbf{K}_T und $\hat{\mathbf{K}}_T$. Der mathematische Beweis wird in KELLER [150] geführt. Dennoch wird bei Erreichen eines Stabilitätspunkts sowohl an einem Durchschlag- als auch an einem Verzweigungspunkt die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T singulär. Allerdings kann gezeigt werden, dass für einen Durchschlagpunkt die Koeffizientenmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T$ regulär bleibt. Denn für einen Durchschlagpunkt gilt: $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$, aber mit $\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ ist die Regularität von $\hat{\mathbf{K}}_T$ gesichert. Die erweiterte Matrix ist für einen Verzweigungspunkt nach wie vor singulär. Das verhindert eine Invertierung. Allerdings wird bei der inkrementell-iterativen Pfadverfolgung ein singulärer Punkt i.d.R. nicht exakt erreicht, sodass \mathbf{K}_T auch invertierbar bleibt.

4.3.1 Laststeuerung

Bei einer klassischen Laststeuerung bleibt die Belastung innerhalb eines Lastschritts konstant: $\lambda = c = \text{konst.}$. Die Nebenbedingung ist die Differenz zwischen dem Lastniveau λ und einem vorgegebenen Wert c

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \lambda - c . \quad (4.14)$$

Aus der Linearisierung folgt $\mathbf{f}_v^T = 0$ und $f_\lambda = 1$. Mithilfe der Gleichungen (4.12) und (4.13) resultiert das Last- und Verschiebungsincrement:

$$\Delta\lambda_i = -f_i(\mathbf{v}, \lambda) = -\lambda + c \quad , \quad \Delta\mathbf{v}_i = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{R}(\mathbf{v}_i) - c\mathbf{P}) \quad . \quad (4.15)$$

Das Verschiebungsincrement entspricht der Grundgleichung des *Newton-Verfahrens*, vgl. Gleichung (4.4).

4.3.2 Verschiebungssteuerung

Auch zur Realisierung einer Verschiebungssteuerung kann eine Nebenbedingung angegeben werden, siehe z.B. BATOZ & DHATT [22]. Die Nebenbedingung ist

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = v_a - c \quad (4.16)$$

mit der vorgegebenen Verschiebungsgröße v_a . Der aktuelle Wert der Verschiebung wird mit c definiert. Aus der Linearisierung folgen die Beziehungen $\mathbf{f}_v^T = \mathbf{e}_a^T$ und $f_\lambda = 0$ mit dem Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_a^T = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0 \ 0] \quad , \quad (4.17)$$

der an der der Stelle a den Wert 1 besitzt. Dementsprechend folgen wieder mithilfe der Gleichungen (4.12) und (4.13) die beiden Inkremente für Last und Verschiebung

$$\Delta\lambda_i = -\frac{f_i(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{e}_a^T \Delta\mathbf{v}_{Gi}}{\mathbf{e}_a^T \Delta\mathbf{v}_{Pi}} \quad , \quad \Delta\mathbf{v}_i = -\frac{f_i(\mathbf{v}, \lambda) + \mathbf{e}_a^T \Delta\mathbf{v}_{Gi}}{\mathbf{e}_a^T} + \Delta\mathbf{v}_{Gi} \quad . \quad (4.18)$$

4.3.3 Bogenlängenverfahren

In Abbildung 4.4 wird gezeigt, wann eine Last- und Verschiebungssteuerung versagt. Daraus wird ersichtlich, dass Pfadverfolgungsverfahren benötigt werden, die sowohl den Belastungs- als auch den Verschiebungszustand während der Iteration verändern können. Eine entsprechende Formulierung der Nebenbedingung macht dies möglich. Ein bekanntes Verfahren ist das *Bogenlängenverfahren* von RIKS [252, 253]. Weitere Varianten des Verfahrens, die sich im Wesentlichen durch die Wahl der Nebenbedingung unterscheiden, sind z.B. in WAGNER [336] oder CRISFIELD [53] beschrieben. Die Idee des Verfahrens besteht darin, nach einem Prädiktorschritt die Gleichgewichtslösung durch einen Korrektorschritt mit spezieller Richtung zu ermitteln. Eine Möglichkeit ist die Iteration auf einer Normalebene. Dabei erfolgt der Korrektorschritt senkrecht auf dem vorangegangenen Prädiktorschritt. Die geometrische Interpretation ist in Abbildung 4.5 dargestellt. Die dazugehörige Nebenbedingung ist

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T(\mathbf{v} - \mathbf{v}_m) + (\lambda_m - \bar{\lambda})(\lambda - \lambda_m) = 0 \quad (4.19)$$

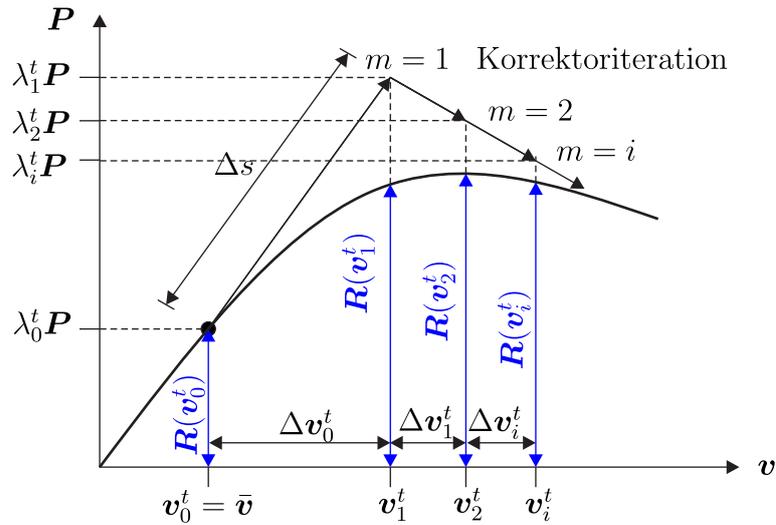


Abbildung 4.5: Bogenlängenverfahren mit Iteration auf einer Normalenebene

mit den Größen des zuvor erreichten Gleichgewichtszustands $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$. Die Nebenbedingung ist abhängig von dem Verschiebungszustand \mathbf{v}_m und dem Lastfaktor λ_m . Mit dem Index m wird der Zwischenzustand innerhalb der Korrektoriteration angegeben. Für $m = 1 = \text{konst.}$ bleibt die Normalenebene senkrecht zum Prädiktorschritt. Die Wahl von $m = i$ ermöglicht eine Anpassung der Normalenebene in jedem Iterationsschritt, siehe z.B. RAMM [241]. Aus der Linearisierung der Nebenbedingung folgt:

$$\mathbf{f}_{vi}^T = (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T, \quad f_{\lambda i} = \lambda_m - \bar{\lambda}. \quad (4.20)$$

Mithilfe der zuvor eingeführten Notation resultiert das Lastinkrement

$$\Delta \lambda_i = -\frac{f_i(\mathbf{v}, \lambda) + (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{(\lambda_m - \bar{\lambda}) + (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}} \quad (4.21)$$

und der inkrementelle Zuwachs der Verschiebung

$$\Delta \mathbf{v}_i = -\frac{f_i(\mathbf{v}, \lambda) + (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{(\lambda_m - \bar{\lambda}) + (\mathbf{v}_m - \bar{\mathbf{v}})^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}} \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi}. \quad (4.22)$$

Bei dem Verfahren muss eine Bogenlänge ds vorgegeben werden mit dieser der Lastschritt $\Delta \lambda_i$ wie folgt berechnet werden kann:

$$\Delta \lambda_i = \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta \mathbf{v}_{Pi})^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}}}. \quad (4.23)$$

Abschließend ist in Tafel 4.2 der Lösungsalgorithmus für das Bogenlängenverfahren skizziert.

- (1) Setze Startwerte: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $t = 0$, $\lambda_0 = 0$ und Δs
- (2) Schleife über alle Lastinkremente: $\lambda^{t+1} = \lambda^t + \Delta \lambda$
- (3) Prädiktorschritt

$$\begin{aligned} - \Delta \mathbf{v}_{P_0}^t &= \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{v}_{P_0}^t) \lambda_0^t \mathbf{P} \\ - \Delta \lambda_0^t &= \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta \mathbf{v}_{P_0}^t)^T \Delta \mathbf{v}_{P_0}^t}} \\ - \Delta \mathbf{v}_0^t &= \Delta \lambda_0^t \Delta \mathbf{v}_{P_0}^t \end{aligned}$$

$$\text{Update: } \mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_0^t + \Delta \mathbf{v}_0^t, \quad \lambda_1^t = \lambda_0^t + \Delta \lambda_0^t$$

- (4) Korrektoriteration $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} - \Delta \mathbf{v}_{P_i} &= \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{v}_i^t) \lambda_i^t \mathbf{P} \quad . \\ \Delta \mathbf{v}_{G_i}^t &= \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{v}_i^t) \mathbf{G}_i(\mathbf{v}_i^t, \lambda_i^t) \\ - \Delta \lambda_i^t &= - \frac{f_i(\mathbf{v}_i^t, \lambda_i^t) + (\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_0^t)^T \Delta \mathbf{v}_{G_i}}{(\lambda_i^t - \lambda_0^t) + (\mathbf{v}_i^t - \mathbf{v}_0^t)^T \Delta \mathbf{v}_{P_i}} \\ \Delta \mathbf{v}_i^t &= \Delta \lambda_i^t \Delta \mathbf{v}_{P_i}^t + \Delta \mathbf{v}_{G_i}^t \\ - \text{Update: } \lambda_{i+1}^t &= \lambda_i^t + \Delta \lambda_i^t, \quad \mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t + \Delta \mathbf{v}_i^t \\ - \text{Konvergenz-Check:} \\ \text{Wenn: } \|\mathbf{G}_i(\mathbf{v}_{i+1}^t, \lambda_{i+1}^t)\| &\leq \text{TOL} \rightarrow \text{Gehe zu (5)} \\ \text{SONST: Weiter } i &= i + 1 \end{aligned}$$

(5) $\mathbf{v}_0^{t+1} = \mathbf{v}_i^t$

- (6) Setze $t = t + 1 \rightarrow$ Gehe zu (1)

Tafel 4.2: Lösungsalgorithmus für das Bogenlängenverfahren mit Iteration auf einer Normalenebene

4.4 Numerische Berechnung von Stabilitätspunkten

In diesem Abschnitt werden verschiedene Möglichkeiten zum Auffinden singulärer Punkte im Rahmen der FEM diskutiert. Im Ingenieurbereich werden diese Punkte Stabilitätspunkte oder Instabilitätspunkte genannt. Allgemein liegt ein Stabilitätsproblem vor, wenn neben dem ursprünglichen Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}^G(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ auf einem Gleichgewichtspfad ein weiterer Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}^N(\bar{\mathbf{v}} + \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})$ auf einem benachbarten Gleichgewichtspfad existiert. Ausgehend

vom Grundzustand

$$\mathbf{G}^G(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

kann der Nachbarzustand in eine Taylorreihe nach \mathbf{v} entwickelt werden

$$\mathbf{G}^N(\bar{\mathbf{v}} + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = \underbrace{\mathbf{G}^G(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})}_{\mathbf{0}} + \underbrace{D_v \mathbf{G}^G(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})}_{\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})} \Delta\mathbf{v} + \dots \quad (4.25)$$

Befindet sich der Nachbarzustand ebenfalls im Gleichgewicht

$$\mathbf{G}^N(\bar{\mathbf{v}} + \Delta\mathbf{v}, \bar{\lambda}) = \mathbf{0} \quad , \quad (4.26)$$

resultiert aus der Taylorreihenentwicklung (4.25) die Definition eines Stabilitätsproblems an der Stelle $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}) \Delta\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.27)$$

Die Lösung dieses homogenen Gleichungssystems kann mit einer mathematischen Betrachtungsweise oder der klassischen und linearen Beulanalyse in einer ingenieurmäßigen Herangehensweise erfolgen. Beide Methoden werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

4.4.1 Mathematische Betrachtungsweise

Aus mathematischer Sicht definiert die quadratische Matrix $\mathbf{K}_{T_n \times n}$ eine Abbildung des \mathfrak{R}^n in sich selbst. Jedem Vektor $\boldsymbol{\varphi}$ wird ein Vektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi} \quad (4.28)$$

zugeordnet. Gesucht sind die Vektoren $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$, die ihre Richtung nicht ändern, sondern nur in ein Vielfaches $\omega \boldsymbol{\varphi}$, $\omega \in \mathfrak{R}$ übergehen. Das führt auf die Formulierung des speziellen Eigenwertproblems

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi} = \omega \boldsymbol{\varphi} \quad \iff \quad [\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{1}] \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.29)$$

Die Vektoren $\boldsymbol{\varphi}$ werden auch als Eigenvektoren von \mathbf{K}_T mit den dazugehörigen Eigenwerten ω bezeichnet. Ein singulärer Punkt liegt vor, wenn Null-Eigenwerte $\omega_i = 0$ auftreten. Dadurch vereinfacht sich das spezielle Eigenwertproblem zu

$$[\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{1}] \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.30)$$

Der zugehörige Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}$ kann als Beulform interpretiert werden. Durch Ersetzen des Eigenvektors $\boldsymbol{\varphi}$ mit der Verschiebung $\Delta\mathbf{v}$ resultiert das Stabilitätsproblem aus Gleichung (4.27). Das Eigenwertproblem kann bei der Berechnung der Last-Verschiebungskurve begleitend gelöst werden. Treten Null-Eigenwerte auf, ist ein Stabilitätspunkt gefunden.

4.4.2 Klassische und lineare Beulanalyse

Für eine Bemessung ist meist nur eine näherungsweise Berechnung des ersten singulären Punkts von Interesse. Auf eine geometrisch nichtlineare Untersuchung kann in den meisten Fällen verzichtet werden. Dann ist nur ein linearer Rechenschritt erforderlich. Das ist die Motivation der klassischen und linearen Beulanalyse, die in der Ingenieurliteratur weit verbreitet sind. Diese Methoden basieren auf der Zerlegung der tangentialen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}^{\text{lin}} + \mathbf{K}^{\text{u}} + \mathbf{K}^{\text{geom}} \quad (4.31)$$

mit der linearen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{lin} , der Anfangsverschiebungsmatrix \mathbf{K}^{u} und der geometrischen Matrix \mathbf{K}^{geom} . Eine solche Zerlegung kann abhängig von der Variationsformulierung nur in wenigen Fällen durchgeführt werden. Im allgemeinen Fall kann die Zerlegung

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}^{\text{lin}} + \mathbf{K}^{\text{nlin}} \Leftrightarrow \mathbf{K}^{\text{nlin}} = \mathbf{K}_T - \mathbf{K}^{\text{lin}} \quad (4.32)$$

in einen linearen \mathbf{K}^{lin} und einen nichtlinearen Anteil \mathbf{K}^{nlin} durchgeführt werden. Die Untersuchung des Stabilitätsverhalten beginnt dabei im Ursprung $\mathbf{G}(\mathbf{0}, 0)$. Dort wird die lineare Lösung

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{0})\mathbf{v}_0 = \mathbf{P} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{0})\mathbf{P} \quad (4.33)$$

berechnet mit $\mathbf{K}^{\text{lin}} = \mathbf{K}_T(\mathbf{0})$. Bei der klassischen Beulanalyse entfallen die Vorbeuldeformationen und das allgemeine Eigenwertproblem lautet:

$$\left[\mathbf{K}^{\text{lin}} + \Lambda \mathbf{K}^{\text{geom}}(\mathbf{v}_0) \right] \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.34)$$

Bei einer linearen Beulanalyse werden alle Anteile betrachtet:

$$\left[\mathbf{K}^{\text{lin}} + \Lambda (\mathbf{K}^{\text{u}}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{K}^{\text{geom}}(\mathbf{v}_0)) \right] \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad . \quad (4.35)$$

Die Idee der beiden Beulanalysen basiert darauf, dass bei einer Stabilitätsuntersuchung die tangentiale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T vom Belastungszustand und damit auch vom Verschiebungszustand abhängig ist. Dabei ändern sich nur die nichtlinearen Terme \mathbf{K}^{u} und \mathbf{K}^{geom} mit der Last. Die Frage ist wie weit diese Terme gesteigert werden müssen, damit die Gleichungen (4.34) und (4.35) für eine nicht-triviale Lösung $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$ erfüllt werden. Im Falle eines linearen Vorbeulverhaltens gilt näherungsweise

$$\mathbf{P}_{\text{cr}} \sim \Lambda (\mathbf{K}^{\text{u}} + \mathbf{K}^{\text{geom}}) \quad . \quad (4.36)$$

Die kritische Last mit der dazugehörigen kritischen Verschiebung kann dann mit der linearen Beziehung

$$\mathbf{P}_{\text{cr}} = \Lambda \mathbf{P} \quad , \quad \mathbf{v}_{\text{cr}} = \Lambda \mathbf{v}_0 \quad (4.37)$$

berechnet werden. Der Eigenwert Λ kann als Laststeigerungsfaktor mechanisch wie folgt beurteilt werden:

$$\Lambda \begin{cases} > 1 & \text{überkritisch} \\ = 1 & \text{singulär (am Stabilitätspunkt)} \\ < 1 & \text{unterkritisch} \end{cases} . \quad (4.38)$$

Ein Nachteil im Vergleich zur mathematischen Betrachtungsweise ist, dass die Matrizen \mathbf{K}^u und \mathbf{K}^{geom} nicht positiv-definit sind. Deshalb wird auch ein spezieller Eigenwertlöser benötigt.

4.5 Begleitende nichtlineare Stabilitätsuntersuchung

Die Ergebnisse einer klassischen oder linearen Beulanalyse (Stabilitätsanalyse) können bei einem nichtlinearem Vorbeulverhalten stark von der tatsächlichen Beullast abweichen. Hierfür ist eine vollständig geometrisch nichtlineare Berechnung notwendig. Die nichtlineare Stabilitätsuntersuchung erfolgt hierbei ohne größeren Aufwand begleitend zur Berechnung des Last-Verschiebungsverhaltens. Die Beobachtung der Determinante und der Anzahl der negativen Diagonalelemente der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T sind einfache Methoden, die in diesem Abschnitt diskutiert werden. Weitere Möglichkeiten sind die Inverse Iteration, das Bisektionsverfahren oder die Untersuchung des *Current Stiffness Parameters*, siehe für eine Zusammenfassung der Verfahren in [337]. Die Determinante $\det \mathbf{K}_T$ kann als Nebenprodukt der Dreieckszerlegung $\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$ der tangentialen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T nahezu ohne zusätzlichen Rechenaufwand ermittelt werden. Mithilfe der Determinante von \mathbf{K}_T kann folgende Aussage über die Art des Gleichgewichtszustands getroffen werden:

$$\det \mathbf{K}_T = \begin{cases} > 0 & \text{stabiles Gleichgewicht} & - \text{positiv definit} \\ = 0 & \text{indifferentes Gleichgewicht} & - \text{indefinit} \\ < 0 & \text{labiles Gleichgewicht} & - \text{negativ definit} \end{cases} . \quad (4.39)$$

Hierbei ist die Bedingung $\det \mathbf{K}_T > 0$ für ein stabiles Verhalten notwendig, aber nicht hinreichend. Die Berechnung der Determinante erfolgt über das Produkt der Hauptdiagonalelemente D_{ii}

$$\det \mathbf{K}_T = \prod_{i=1}^{\text{ndof}} D_{ii} \quad (4.40)$$

mit ndof der Anzahl der Freiheitsgrade. Zur Beobachtung wird die Determinante in der Form

$$\det \bar{\mathbf{K}}_T = \frac{\det_k \mathbf{K}_T}{\det_1 \mathbf{K}_T} \quad (4.41)$$

skaliert. Eine Berechnung beginnt so stets mit $\det \bar{\mathbf{K}}_T = 1$. Komplexe FE-Modelle mit einer sehr großen Anzahl von Freiheitsgraden können zu großen Werten von $\det \bar{\mathbf{K}}_T$ führen. Die Größe ist durch den darstellbaren Zahlenbereich des Computersystems beschränkt. Das Problem kann durch Anwendung der extrem langsam anwachsenden Logarithmus-Funktion gelöst werden

$$\det \bar{\mathbf{K}}_T = \frac{\det_k \mathbf{K}_{Ts}}{\det_1 \mathbf{K}_{Ts}} \quad \text{mit} \quad (4.42)$$

$$\det_k \mathbf{K}_{Ts} = (-1)^{\text{negd}} \log \prod_{i=1}^{\text{ndof}} |{}_k D_{ii}| = (-1)^{\text{negd}} \sum_{i=1}^{\text{ndof}} \log |{}_k D_{ii}| \quad .$$

Dabei muss die Anzahl der negativen Diagonalelemente mit dem Parameter negd gezählt werden. Trotzdem ist die Determinantenbeobachtung für sehr große Systeme ungeeignet. Eine Nullstelle mit der v -Achse in einem $\det \mathbf{K}_T - v$ -Diagramm ist aufgrund der Darstellung der Genauigkeit auch mithilfe der Logarithmus-Funktion oft nicht ersichtlich. Das Phänomen wird „schleifender Schnitt“ genannt. In Abbildung 4.6 ist ein schleifender Schnitt bei einer Stabilitätsuntersuchung einer axialgedrückten Zylinderschale dargestellt.

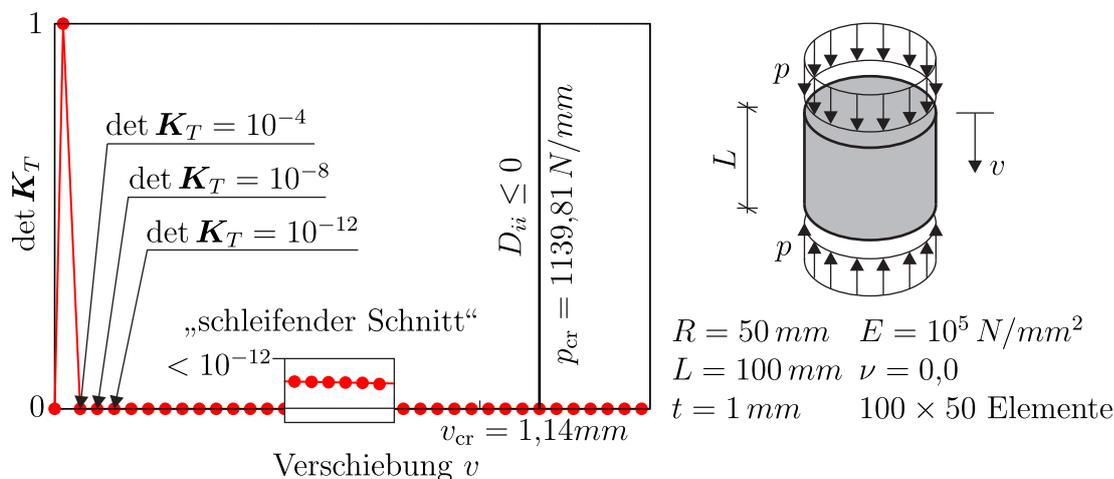


Abbildung 4.6: Determinantenbeobachtung für eine Stabilitätsuntersuchung einer axialgedrückten Zylinderschale

Nach der Skalierung der Determinante auf den Wert Eins erfolgt bereits beim zweiten Verschiebungsschritt ein starker Abfall auf den Wert $\det \mathbf{K}_T = 10^{-4}$. Ein Schnitt mit der v -Achse kann im weiteren Verlauf nicht festgelegt werden. Ein negatives Diagonalelement D_{ii} tritt viel später auf. In [40, 334, 338, 339, 342, 345] wird daher die Beobachtung der Hauptdiagonalelemente als zuverlässiges Kriterium für das Auffinden eines Stabilitätspunkts empfohlen. Instabile Pfade sind grundsätzlich durch ein oder mehrere negative Diagonalelemente gegeben. Das

führt auch dazu, dass bei geradzahliger Anzahl von negativen Diagonalelementen eine positive Determinante resultiert, obwohl ein instabiles Gleichgewicht vorliegt. Das Vorzeichen der Diagonalelemente von \mathbf{K}_T legt die Art des Gleichgewichtszustands fest:

$$\begin{aligned} \forall D_{ii} \quad , \quad D_{ii} > 0 &\rightarrow \text{stabil} \\ \exists D_{ii} \quad , \quad D_{ii} = 0 &\rightarrow \text{indifferent} \\ \exists D_{ii} \quad , \quad D_{ii} < 0 &\rightarrow \text{instabil, labil} \end{aligned} \quad . \quad (4.43)$$

Die Beobachtung der Elemente der Hauptdiagonalen kostet ebenso keine zusätzliche Rechenzeit. Diese liefert ein moderner Gleichungslöser als Nebenprodukt.

4.6 Verhalten bei Imperfektionen

In diesem Abschnitt soll das Tragverhalten bei aufgetragenen Imperfektionen erläutert werden. Imperfektionen können Abweichungen in der Geometrie (Mantelimperfektionen), Belastung, Randbedingung oder im Werkstoff sein. In Abbildung 4.7 ist das Last-Verschiebungsverhalten unter Imperfektionen für einen Stab, einer Platte und einer Zylinderschale gegenübergestellt.

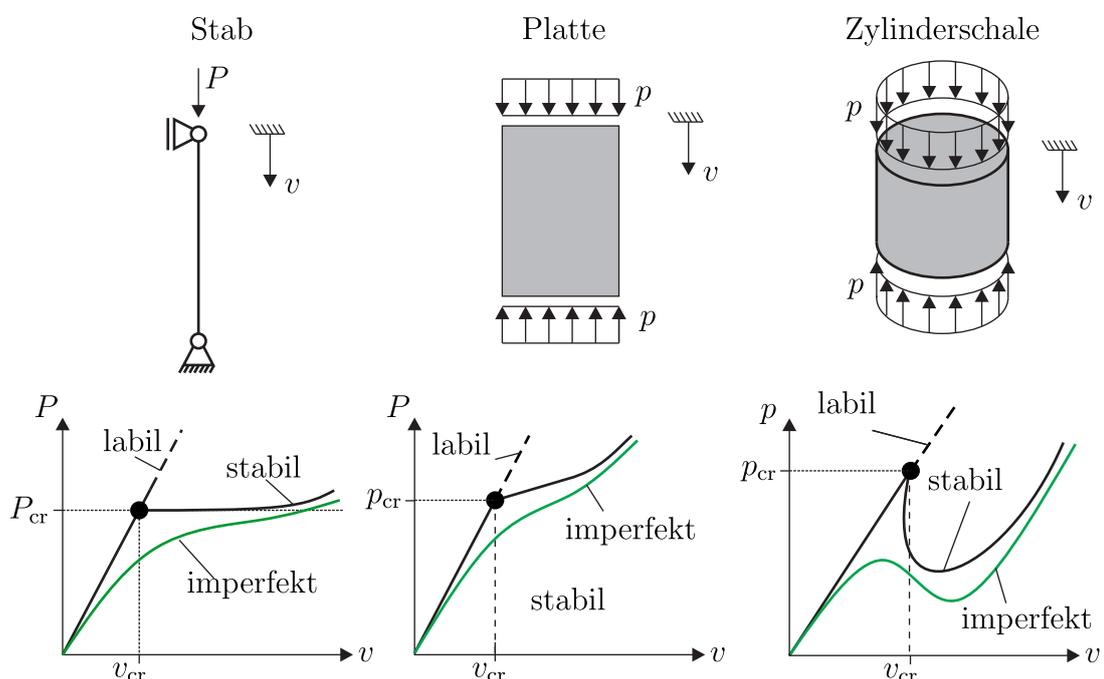


Abbildung 4.7: Last-Verschiebungsverhalten unter Imperfektionen eines Stabs (links), einer Platte (mitte) und einer Zylinderschale (rechts)

Der stabile Pfad des Stabmodells eines Eulerfalls 2 in Abbildung 4.7 (links) ist durch ein neutrales Verhalten charakterisiert. Hingegen kann bei einer Platte nach

Erreichen des indifferenten Punkts die Last aufgrund der zweiachsigen Tragwirkung weiter gesteigert werden. Im Rahmen der FEM kann ein Pfadwechsel am singulären Punkt nur dann erreicht werden, wenn eine Störung in Form einer Imperfektion aufgebracht wird. Unter Verwendung geometrischer Imperfektionen kann mit den berechneten Eigenwerten am Stabilitätspunkt der Gleichgewichtszustand $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ des primären Pfads gestört werden:

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}_0 \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{v}}_0 = \xi_i \frac{\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i}{\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i\|} \quad . \quad (4.44)$$

Dabei wird auf das aktuelle Verschiebungsfeld $\bar{\mathbf{v}}$ der normierte Eigenvektor aufgebracht. Die Imperfektionsamplitude wird mit ξ_i gesteuert. Alternativ kann auch der Eigenvektor auf die Knotenkoordinaten des FE-Netzes \mathbf{x}_i als spannungsfreie Knotenverschiebung aufgebracht werden:

$$\mathbf{x}_i = \bar{\mathbf{x}} + \xi_i \frac{\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i}{\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i\|} \quad . \quad (4.45)$$

Die Imperfektionen bewirken eine Eindeutigkeit in der Last-Verschiebungskurve und ein Stabilitätsproblem wird zu einem Spannungsproblem. Der imperfekte Pfad liegt unterhalb des labilen Pfads. Vor allem bei der Zylinderschale tritt ein Stabilitätsversagen unter dem Einfluss von Imperfektionen bei einer viel geringeren Last ein. Zudem kommt es nach Erreichen des Stabilitätspunktes zu einem schlagartigen Lastabfall. Das Verhalten wird auch als böse bezeichnet. Das spezielle Verhalten und die Imperfektionsanfälligkeit einer Zylinderschale wird in Abbildung 4.8 genauer betrachtet. Die ideale Beullast für eine Schale ohne Imper-

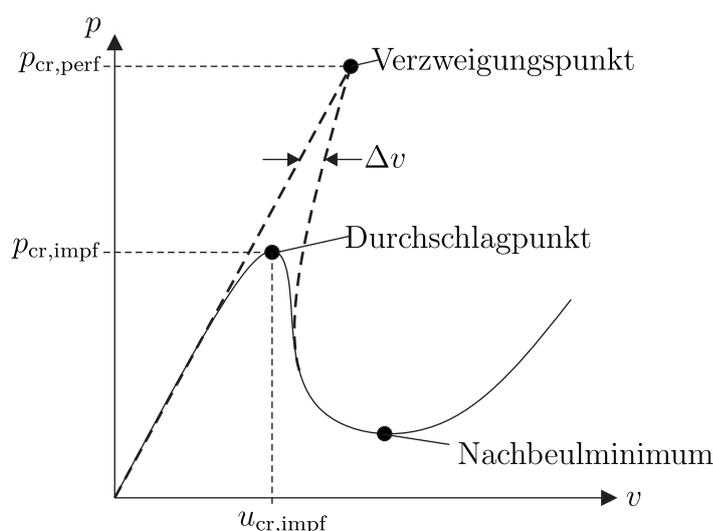


Abbildung 4.8: Last-Verschiebungsverhalten einer imperfekten Zylinderschale in Anlehnung an [321]

fektionen wird im weiteren Verlauf der Arbeit mit $p_{\text{cr,perf}}$ bezeichnet. Die kritische Last bei aufgebrachtten Imperfektionen wird mit $p_{\text{cr,impf}}$ definiert. In Abbildung 4.8 wird verdeutlicht, dass bereits eine geringe Störverschiebung Δv ausreichend ist, die Schale in den instabilen Bereich zu überführen. Das ist auch ein Grund für die Empfindlichkeit der Versagenslast gegenüber relativ kleinen Imperfektionen [321]. Die Imperfektionsempfindlichkeit kann in Abhängigkeit der Imperfektionsamplitude ξ_i dargestellt werden, siehe Abbildung 4.9. Schon eine geringe Veränderung

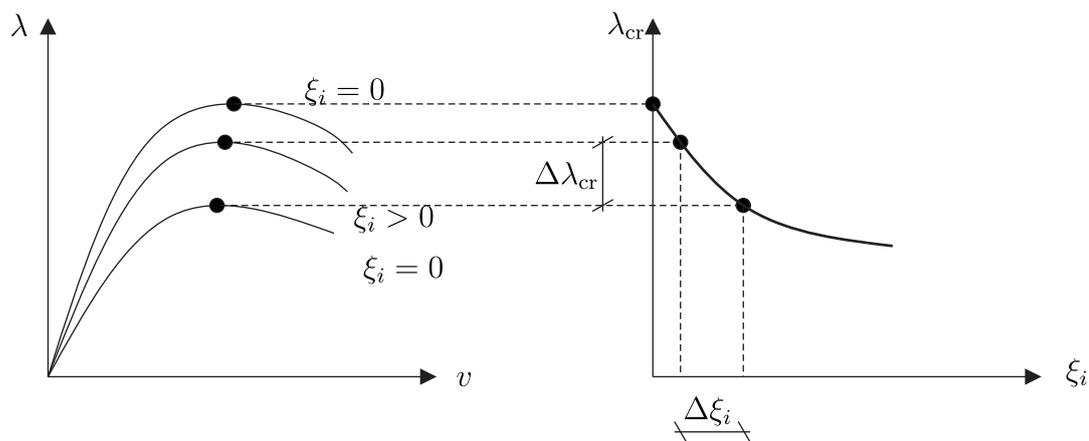


Abbildung 4.9: Definition der Imperfektionsempfindlichkeit

der Imperfektionsamplitude $\Delta\xi_i$ oder des Imperfektionsmusters können zu einem überproportionalen Abfall der Beullast $\Delta\lambda_{\text{cr}}$ führen [162]. Hingegen gelten plattenförmige Bauteile als imperfektionsunempfindlich. Sie zeigen keine Reduktion der kritischen Last nach Erreichen des Stabilitätspunkts, siehe Abbildung 4.7 (mitte). Der Anstieg der ξ_i - λ_{cr} -Kurve in Abbildung 4.9 (rechts) ist ein Maß für die Imperfektionsempfindlichkeit. In THOMPSON & HUNT [317] sind weitere Ausführungen zu dieser Thematik zu finden. Die Imperfektionsempfindlichkeit ist ein wichtiger Parameter bei der Festlegung von Sicherheitsfaktoren im Rahmen einer Normung [162].

Außerdem entfällt der Verzweigungspunkt, wenn Imperfektionen vorhanden sind. Stattdessen tritt an der Stelle der maximal aufnehmbaren Last $p_{\text{cr,impf}}$ ein Durchschlagpunkt auf. Die Pfade nähern sich dann wieder einander an und erreichen ein stabiles Gleichgewicht im Nachbeulbereich. Mithilfe statischer Untersuchungen unter Anwendung der vorgestellten Kurvenverfolgungsverfahren ist es nicht möglich den Nachbeulbereich zu untersuchen, siehe z.B. [283]. Das ist auch der Fall, wenn die Schrittweiten der Kurvenverfolgungsverfahren sehr klein gewählt werden. Der primäre Lösungspfad verzweigt im Nachbeulbereich einer Zylinderschale unter axialem Druck mehrfach und es existieren mehrere sekundäre Pfade. Das Phänomen wird als Clusterbildung bezeichnet. Die unterschiedliche Beul-

formen der einzelnen Verzweigungspfade liegen sehr dicht beieinander. Bei imperfekten Schalen entfallen die Verzweigungspunkte und eine Abfolge von Durchschlagproblemen tritt auf. Das bedeutet, dass viele Bereiche mit abfallenden Last-Verschiebungskurven enthalten sind [283]. Ein Pfadwechsel nach Gleichung (4.44) zu initiieren, ist aufgrund der großen Anzahl möglicher Pfade nahezu unmöglich. Der Beulvorgang lässt sich vielmehr als zeitlich sehr schnell ablaufender Vorgang beschreiben, sodass dynamische Phänomene berücksichtigt werden müssen, wenn ein Interesse am Nachbeulminimum besteht. Nach Erreichen des Nachbeulminimums befindet sich der Zylinder wieder in einem stabilen Gleichgewicht und die aufnehmbare Last kann weiter gesteigert werden. Dieser Bereich in der Last-Verschiebungskurve wird Nachbeulbereich genannt. Ein weiteres charakteristisches Merkmal des Last-Verschiebungsverhaltens einer Zylinderschale ist, dass nach Erreichen des Stabilitätspunkts die Verschiebung kleiner werden kann. Dieses Phänomen wird *snapback* genannt. In der numerischen Pfadverfolgung versagt an dieser Stelle eine Verschiebungssteuerung.

5 Grundgleichungen der Strukturdynamik

Oft sind vor allem dynamische Systeme mit großen Unschärfen behaftet. Baupraktische Beispiele sind Schwingungen von Tragwerken aufgrund zeitlich abhängiger Wind- oder Erdbebenlasten. Das Verhalten kann durch Fuzzy-stochastische Prozesse modelliert werden. Hierzu werden im Folgenden die Grundlagen der Strukturdynamik bereitgestellt. Zur numerischen Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichung im Rahmen der FEM wird ein explizites und implizites Zeitintegrationsverfahren vorgestellt. Daraufhin wird ein Ausblick zu „verbesserten“ Zeitintegrationsverfahren gegeben, die für eine zuverlässige zeitabhängige Fuzzy-stochastische Analyse erforderlich sind. Das Kapitel entspricht im Wesentlichen einer kurzen Zusammenfassung der Werke von HUGHES [139] und BATHE [18].

5.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

In der dynamischen Betrachtung werden die Volumenkräfte $\rho \mathbf{b} dV$ mit den *d'Alembert'schen Trägheitskräften* $\rho \ddot{\mathbf{u}} dV$ erweitert, siehe Abbildung 5.1.

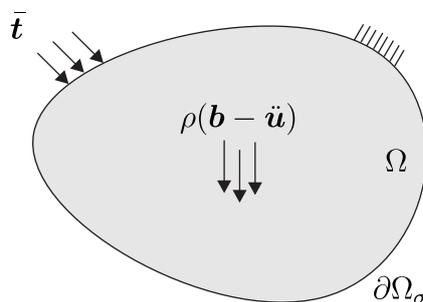


Abbildung 5.1: Oberflächen-, Volumen- und d'Alembert'sche Trägheitskräfte eines materiellen Körpers bezogen auf die allgemeine Konfiguration Ω

Die Oberflächenkräfte $\bar{\mathbf{t}} dA$ bilden mit den modifizierten Volumenkräften ein Gleichgewicht

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad . \quad (5.1)$$

Damit kann die schwache Form des (dynamischen) Gleichgewichts als Basis einer FE-Formulierung aufgestellt werden

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad . \quad (5.2)$$

5.2 Semidiskrete Bewegungsgleichung

Mithilfe der Ansätze für die Verschiebung \mathbf{u} und für die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{v} & \partial\mathbf{u} &= \mathbf{N}\partial\mathbf{v} \quad , \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\ddot{\mathbf{v}} & \partial\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}\partial\ddot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

folgt mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung nach Gleichung (5.2) die FE-Formulierung für ein 4-Knoten-Element

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W} &= \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \sum_{I=1}^4 \delta\mathbf{v}_I^T \left\{ \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} \, dA}_{\mathbf{R}_I} - \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{q}} \, dA - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{f}} \, ds}_{\mathbf{P}_I} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\sum_{K=1}^4 \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_I^T \rho \mathbf{N}_K \, dA}_{\mathbf{M}_{IK}} \ddot{\mathbf{v}}_K \right\} = \mathbf{0} \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dabei sind die einzelnen Einträge wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_I &: && \text{Vektor der inneren Kräfte} \\ \mathbf{P}_I &: && \text{Vektor der äußeren Kräfte} \\ \mathbf{M}_{IK} &: && \text{Massenmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Für die vorgestellte Schalenformulierung wird eine Lumped-Form der Massenmatrix verwendet. Die Matrix ist nur auf der Hauptdiagonalen besetzt. Das führt zu einer Reduzierung des Rechenaufwands bei der Invertierung der Matrix. Aus einer numerischen Integration folgt die Darstellung der Massenmatrix zu

$$\mathbf{M}_{IK} = \begin{cases} \boldsymbol{\rho} \det \mathbf{J} & \text{für } I = K \\ 0 & \text{für } I \neq K \end{cases} \quad (5.5)$$

mit

$$\boldsymbol{\rho} = \rho_0 \begin{bmatrix} h & & & & & \\ & h & & & & \mathbf{0} \\ & & h & & & \\ & & & h^3/12 & & \\ \mathbf{0} & & & & h^3/12 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.6)$$

Die einzelnen Einträge in $\boldsymbol{\rho}$ für die Rotationsfreiheitsgrade resultieren aus dem Massenträgheitsmoment für dünnwandige Schalen. Die Gleichung (5.4) führt auf die semidiskrete Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{R}(\mathbf{v}(t)) = \mathbf{P}(t) \quad . \quad (5.7)$$

Dabei wird der Dämpfungsterm vernachlässigt. Der Ausdruck *semidiskret* weist darauf hin, dass die Knotenwerte einer räumlichen Diskretisierung entstammen, aber dennoch kontinuierlich von der Zeit t abhängen [162].

5.3 Zeitintegrationsverfahren

Zur Lösung der semidiskreten Bewegungsgleichung (5.7) werden Zeitintegrationsverfahren eingesetzt. Unterschieden wird zwischen expliziten und impliziten Verfahren. Das Zentrale Differenzen-Verfahren ist ein Vertreter der expliziten Verfahren. Das bekannte Newmark-Verfahren zählt zu den impliziten Zeitintegrationsverfahren. In den folgenden zwei Abschnitten werden beide Methoden kurz vorgestellt.

5.3.1 Explizite Verfahren

Das Zentrale Differenzen-Verfahren nach VERLET [325] basiert auf einer Approximation der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{v}}$ und Verschiebung \mathbf{v}

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_{n+1/2} &= \dot{\mathbf{v}}_{n-1/2} + \Delta\bar{t}\ddot{\mathbf{v}}_n \quad \text{mit} \quad \Delta\bar{t} = \frac{(t_{n+1} - t_n) + (t_n - t_{n-1})}{2} \quad , \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t \dot{\mathbf{v}}_{n+1/2} \quad \text{mit} \quad \Delta t = t_{n+1} - t_n \quad .\end{aligned}\tag{5.8}$$

Durch Einsetzen der Ansätze nach der Gleichung (5.8) in die semidiskrete Bewegungsgleichung (5.7) resultiert ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} = -\mathbf{R}_{n+1} + \mathbf{P}_{n+1} \quad ,\tag{5.9}$$

das ohne Iteration und mit der Lumped-Form der Massenmatrix $\mathbf{M} = [M^{(ii)}]$ für jeden Freiheitsgrad (i) direkt gelöst werden kann

$$\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}^{(i)} = \frac{1}{M^{(ii)}} \left[-\mathbf{R}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} \right] \quad .\tag{5.10}$$

Die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$ zum Zeitpunkt $n+1$ werden anschließend in die Ansätze (5.8) eingesetzt, um den neuen Verschiebungszustand und Geschwindigkeitszustand zu erhalten. Zum Start der Berechnung wird ein Geschwindigkeitszustand vorgegeben

$$\dot{\mathbf{v}}_{0+1/2} \approx \dot{\mathbf{v}}_0 + \Delta t \ddot{\mathbf{v}}_0 \quad .\tag{5.11}$$

5.3.2 Implizite Verfahren

Das Newmark-Verfahren ist benannt nach NEWMARK [213] und ist wohl der bekannteste Vertreter der impliziten Zeitintegrationsverfahren. Das Verfahren basiert auf den folgenden parametrisierten Beschleunigungsansätzen

$$\text{in } \dot{\mathbf{v}} \quad \ddot{\mathbf{v}}_{n+\gamma} = (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{v}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \quad \text{und} \quad (5.12)$$

$$\text{in } \mathbf{v} \quad \ddot{\mathbf{v}}_{n+2\beta} = (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{v}}_n + 2\beta\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} \quad . \quad (5.13)$$

Die Parameter γ und β sind in den Grenzen $0 \leq \gamma \leq 1$ und $0 \leq \beta \leq 0,5$ frei wählbar. Typische Werte sind $\gamma = 0,5$ und $\beta = 0,25$. Für $\gamma = 0,5$ und $\beta = 0$ resultiert das explizite Verfahren. Durch die Integration der Ansätze für die Beschleunigung resultieren die Approximationen für die Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{v}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}\Delta t + \dot{\mathbf{v}}_n \quad (5.14)$$

und Verschiebungen

$$\mathbf{v}_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{\mathbf{v}}_n\Delta t^2 + \beta\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}\Delta t^2 + \dot{\mathbf{v}}_n\Delta t + \mathbf{v}_n \quad . \quad (5.15)$$

Das Umstellen von Gleichung (5.15) nach der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{v}}_{n+1}$ führt auf

$$\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{v}}_n - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{v}}_n \quad (5.16)$$

und durch Einsetzen dieser Gleichung (5.16) in Gleichung (5.14) folgt für die Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{v}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{v}}_n + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{v}}_n\Delta t \quad . \quad (5.17)$$

Die Gleichungen (5.16) und (5.17), die nun in Abhängigkeit der Verschiebung \mathbf{v}_{n+1} ausgedrückt sind, werden in die semidiskrete Bewegungsgleichung (5.7) für den Zeitpunkt t_{n+1} eingesetzt

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}_{n+1} + \mathbf{R}\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \quad . \quad (5.18)$$

Daraus resultiert die Definition eines Residuums

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n+1} &= \mathbf{M} \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{v}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{v}}_n \right] \\ &+ \mathbf{R}\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{P}_{n+1} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Das Residuum bildet ein nichtlineares Gleichungssystem und ist implizit von den gesuchten Größen abhängig und muss iterativ gelöst werden. Die Lösung der unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{v}_{n+1} kann mit dem Lösungsverfahren des *Newton-Raphson-Verfahrens* nach Tafel 4.1 aus dem vorherigen Kapitel erfolgen. Dafür

ist eine Linearisierung erforderlich, die auf einen Algorithmus mit einer effektiven Steifigkeitsmatrix führt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}^i}{\partial \mathbf{v}_{n+1}^i} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{Tn+1}^i =: \mathbf{K}_{\text{eff}}^i \\ \mathbf{K}_{\text{eff}}^i \Delta \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} &= -\mathbf{G}(\mathbf{v}_{n+1}^i) \\ \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{v}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{v}_{n+1}^{i+1} \quad . \end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ist für jeden Zeitschritt n mit i Iterationen erforderlich. Der Rechenaufwand pro Zeitschritt ist dadurch im Vergleich zu einem expliziten Verfahren größer. Dafür kann aber die Zeitschrittweite vergrößert werden. Dennoch kann auch hier das Phänomen einer numerischen Dissipation auftreten, d.h. die Lösung divergiert mit fortschreitender Zeit. Besonders bei einem Fuzzy-stochastischen Zeitprozess muss dies verhindert werden, da sonst auch der Verlauf der Unschärfe in der Zeit divergiert. Deshalb sollten auch abhängig von der Problemstellung alternative Verfahren verwendet werden. KLARMANN & WAGNER [155] untersuchen z.B. ein „verbessertes“ Zeitintegrationsverfahren speziell für nichtlineare Dynamikprobleme. Weitere bekannte Verfahren sind z.B. das Generalized- α -Verfahren [51] oder das HHT-Verfahren [129].

6 Polymorphe Unschärfemodellierung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der polymorphen Unschärfemodellierung bereitgestellt. Hierzu werden zunächst die Basisunschärfemodelle, wie Zufälligkeit, Intervalle und Fuzziness, beschrieben. Danach werden die polymorphen Unschärfemodelle, die in dieser Arbeit zum Einsatz kommen, vorgestellt. Die Modelle werden aus GRAF ET AL. [106], GÖTZ [116], PANNIER ET AL. [223] und SCHIETZOLD ET AL. [276] zusammengefasst. Im Anschluss wird die numerische Umsetzung einer Fuzzy-stochastischen Analyse diskutiert. Die Beschreibung der räumlichen Variabilität erfordert die Theorie der Zufallsfelder. Die Theorie und geeignete Diskretisierungsmethoden zur numerischen Umsetzung werden behandelt. Um zusätzlich epistemische Unschärfe bei Problemstellungen räumlicher Variabilität berücksichtigen zu können, wird der Fokus auf Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder gelegt.

6.1 Basisunschärfemodelle

Unschärfe kann in *aleatorische* und *epistemische Unschärfe* unterteilt werden. Mit *aleatorischer Unschärfe* wird die natürliche Variabilität beschrieben, die mit dem Basisunschärfemodell *Zufallsvariable* aus der bekannten Wahrscheinlichkeitstheorie dargestellt werden kann. Fehlendes Wissen wird mit *epistemische Unschärfe* quantifiziert. Damit kann die Unvollständigkeit und Ungenauigkeit der vorhandenen Daten beschrieben werden. Die Basisunschärfemodelle *Fuzzy-Variable* und *Intervallvariable* aus der Möglichkeitstheorie (engl.: *possibility theory*) werden zur Beschreibung der *epistemischen Unschärfe* angewendet. Im Folgenden werden die drei Basisunschärfemodelle *Zufallsvariable*, *Fuzzy-Variable* und *Intervallvariable* vorgestellt, siehe Abbildung 6.1.

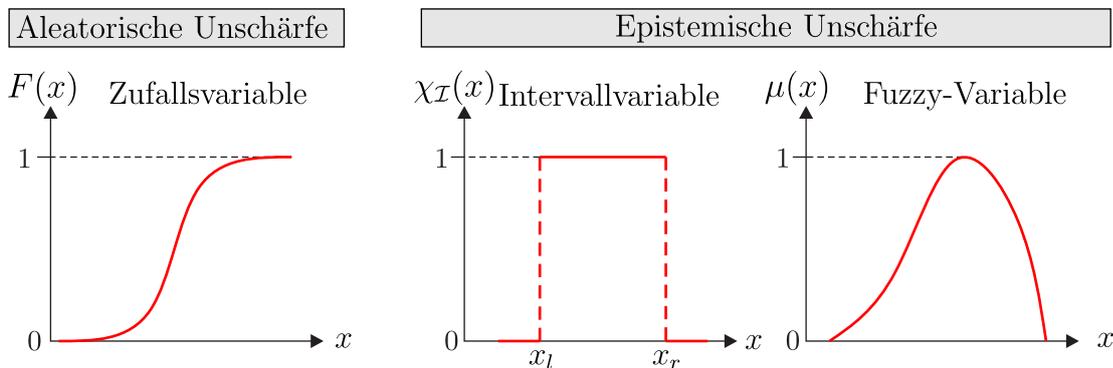


Abbildung 6.1: Basisunschärfemodelle: Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer Zufallsvariable (links), Intervallvariable (mitte), Fuzzy-Variable (rechts)

6.1.1 Zufallsvariable

Die folgenden Zusammenhänge stammen aus den Standardwerken der Stochastik: FAHRMEIR ET AL. [86], KÜTTING & SAUER [171], JANCZYK & PFISTER [145], BAMBERG [17], BOX ET AL. [36] und LEHN & WEGMANN [182].

Die Zufälligkeit wird über den Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \Sigma, P) \quad (6.1)$$

einer Zufallsgröße bzw. Experiments definiert. Dabei ist Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments, Σ ist das Ereignissystem (σ -Algebra) und P ist das Wahrscheinlichkeitsmaß. Eine Zufallsvariable X ordnet jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ zu. Das Ereignis ω wird als Realisation des Zufallsexperiments bezeichnet. Die Zufallsvariable ist eine Abbildung von Ω in den Raum der reellen Zahlen

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) \quad (6.2)$$

mit der Wahrscheinlichkeit im Intervall $[0,1]$ eines Zufallsexperiments

$$P : \Sigma \rightarrow [0,1] \quad . \quad (6.3)$$

Für die Angabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes werden Verteilungsfunktionen und Dichtefunktionen verwendet. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion (engl.: *cumulative distribution function*, cdf) einer Zufallsgröße entspricht der Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl.: *probability density function*, pdf)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad . \quad (6.4)$$

Mit $P(X \leq x)$ kann eine Unterschreitungswahrscheinlichkeit angegeben werden. Da ein Ereignis im Intervall $(-\infty, \infty)$ sicher eintritt, gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \quad . \quad (6.5)$$

Zur Angabe einer Unterschreitungswahrscheinlichkeit p bzw. Überschreitungswahrscheinlichkeit $1 - p$ werden Quantilwerte verwendet. Eine reelle Zahl

$$x_p = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < p\} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\} \quad (6.6)$$

wird für $0 < p < 1$ auch p -Quantil einer Zufallsvariable genannt. Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$\mu \equiv E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \quad (6.7)$$

und die Varianz ist wie folgt definiert:

$$\sigma^2 \equiv \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = E[(x - \mu)^2] \quad . \quad (6.8)$$

Die Attribute werden auch als statistische Momente bezeichnet. $E[X^n]$ bzw. $E[(X - \mu)^n]$ sind n -te Momente um X

$$\begin{aligned} 1. \text{ Moment (Mittelwert):} \quad & E[X] = E[(X - \mu)] = E[X] - \mu = 0 \\ 2. \text{ Moment (Varianz):} \quad & E[(X - \mu)^2] = E[X] - \mu \equiv \text{Var}(X) \quad . \end{aligned} \quad (6.9)$$

Oftmals wird als Maß der Streuung die Standardabweichung für Dichtefunktionen angegeben. Diese berechnet sich aus der Wurzel der Varianz $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte- und Verteilungsfunktionen sind die Gleichverteilung und die Normalverteilung. Die Normalverteilung wird auch *Gauß-Verteilung* genannt.

Für eine Gleichverteilung, wie in Abbildung 6.2 dargestellt, gilt:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq t \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} dt & \text{für } a \leq t \leq b, \\ 1 & \text{für } b < x \end{cases} \quad (6.10)$$

mit dem Erwartungswert und der Varianz

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad . \quad (6.11)$$

Eine Gleichverteilung im Intervall $[a, b]$ kann mit $\mathcal{U}(a, b)$ angegeben werden.

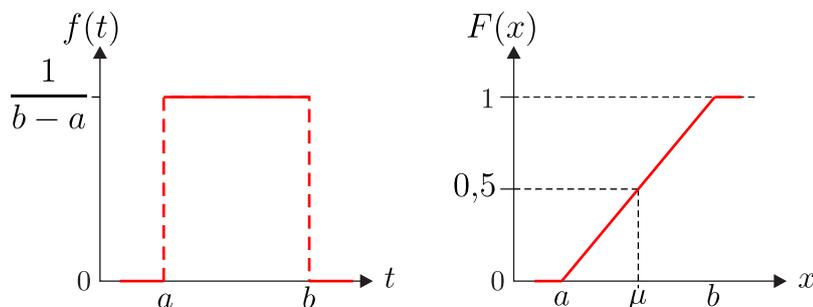


Abbildung 6.2: Dichtefunktion (links) und Wahrscheinlichkeitsverteilung (rechts) einer Gleichverteilung

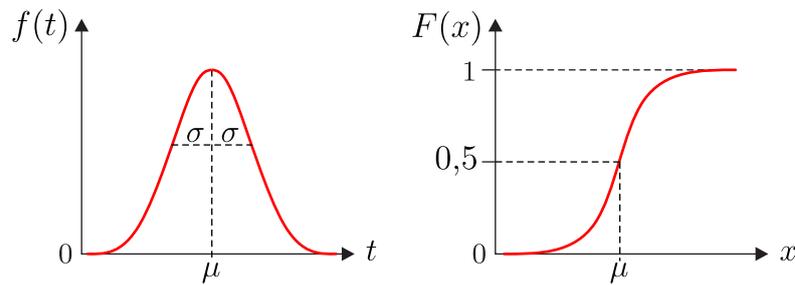


Abbildung 6.3: Dichtefunktion (links) und Wahrscheinlichkeitsverteilung (rechts) einer Normalverteilung

In Abbildung 6.3 ist eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dargestellt. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] . \quad (6.12)$$

Das Maximum der Dichtefunktion liegt an der Stelle $t = \mu$ und an den Stellen $t = \mu \pm \sigma$ besitzt sie Wendestellen. Mit $\mathcal{N}(0, 1)$ wird eine Standardnormalverteilung definiert. Aus der *Maximum-Likelihood-Schätzung* einer *Gauß-Verteilung* resultiert der Stichprobenmittelwert

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6.13)$$

und die Stichprobenvarianz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 . \quad (6.14)$$

Die Parameter zur Beschreibung einer Dichtefunktion f_X und einer Verteilungsfunktion $F_X(x)$, wie z.B. Erwartungswert $E[X]$ und Standardabweichung σ_X , können in einem Vektor $\boldsymbol{\lambda}_X$ zusammengefasst werden:

$$F_X(x) = F(x, \boldsymbol{\lambda}_X) \quad \text{und} \quad f_X(x) = f(x, \boldsymbol{\lambda}_X) . \quad (6.15)$$

Bei diesem Unschärfemodell sind die enthaltenen Parameter in $\boldsymbol{\lambda}_X$ deterministische Größen.

6.1.2 Fuzzy-Variable

Die folgenden mathematischen Definitionen der Fuzzy-Set-Theorie orientieren sich an MÖLLER & BEER [200], MÖLLER [199] und MÖLLER ET AL. [202].

In der klassischen Mengenlehre können Elemente zu einer Menge nur binär zugeordnet werden. Entweder gehört ein Element x zur Menge $x \in A$ oder es gehört

nicht zur Menge $x \notin A$. Die Zugehörigkeit kann nur zwei Werte annehmen, entweder 0 oder 1. Im Gegensatz zur klassischen Mengenlehre wird bei der Fuzzy-Set-Theorie die Zugehörigkeit eines Elements zur Menge A mit einer Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ graduell bewertet. Die Zugehörigkeitsfunktion kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen. Damit können Elemente als nur teilweise zugehörig zur Menge betrachtet werden, siehe Abbildung 6.4.

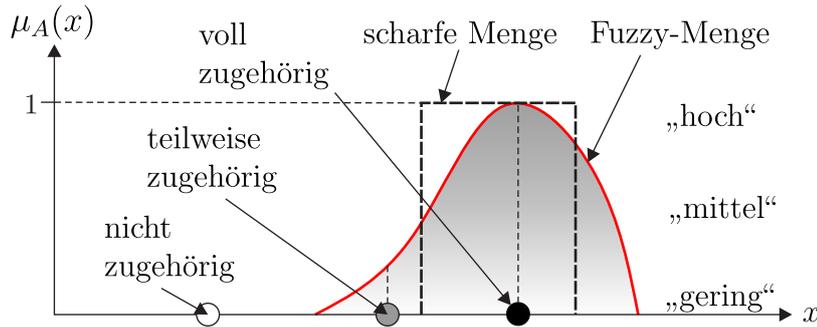


Abbildung 6.4: Bewertung der Zugehörigkeit eines Elements mit einer Fuzzy-Menge und scharfen Menge

Die Bewertung der Zugehörigkeit wird auch als *Fuzzifizierung* bezeichnet und ist eine problemspezifische Quantifizierungsmethode [108]. Die Festlegung der Zugehörigkeitsfunktion kann auf Basis linguistischer Bewertungen und Expertenwissen erfolgen. Hierzu können vorhandenen Daten als Anhaltspunkt dienen. Ohne statistischen Hintergrund erfolgt eine subjektive Bewertung der Daten, indem verbale Aussagen zur Zugehörigkeit getroffen werden, wie z.B. „gering“, „mittel“ und „hoch“. Mit der Zugehörigkeitsfunktion einer Fuzzy-Menge wird eine (epistemische) Möglichkeit des Auftretens beschrieben. Eine normierte Fuzzy-Variable \tilde{A} ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad , \\ \mu_A(x) &: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad , \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} [\mu_A(x)] &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (6.16)$$

In Abbildung 6.5 ist diese normierte Fuzzy-Größe dargestellt. Der Wert bei $\mu_A(x) = 1$ wird auch als *Trendwert* bezeichnet. Zur numerischen Umsetzung wird die α -Level-Diskretisierung durchgeführt. Hierfür wird die Zugehörigkeitsfunktion in α -Levels unterteilt:

$$A_{\alpha_k} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) \geq \alpha_k\}, \quad \alpha \in (0, 1], \quad k = 1, \dots, N_{\text{alev}} \quad . \quad (6.17)$$

Mit jedem α -Level A_{α_k} wird ein Intervall $A_{\alpha_k} \subseteq \mathbb{R}$, $A_{\alpha_k} = [x_{\alpha,l}, x_{\alpha,r}]$ beschrieben und damit eine scharfe Menge. Das Unschärfemodell *Intervallvariable* kann als

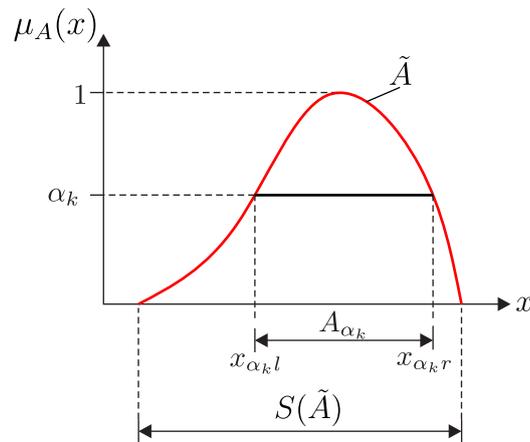


Abbildung 6.5: Darstellung einer normierten Fuzzy-Größe

Sonderfall einer Fuzzy-Variable betrachtet werden. Die Stützmenge (engl.: *Support*) einer Fuzzy-Variable ist ebenfalls eine scharfe Menge

$$S(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \mu_A(x) > 0\} \quad . \quad (6.18)$$

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich konvexe Fuzzy-Größen definiert. Die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ einer konvexen Fuzzy-Variable \tilde{A} ist beidseitig vom maximalen Funktionswert $\mu_A(x) = 1$ monoton fallend:

$$\mu_A(x_2) \geq \min[\mu_A(x_1); \mu_A(x_3)] \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \tilde{A} \quad \text{mit } x_1 \leq x_2 \leq x_3 \quad . \quad (6.19)$$

In Abbildung 6.6 ist eine konvexe Fuzzy-Dreieckszahl und ein Fuzzy-Trapezintervall mit linearer Zugehörigkeitsfunktion dargestellt.

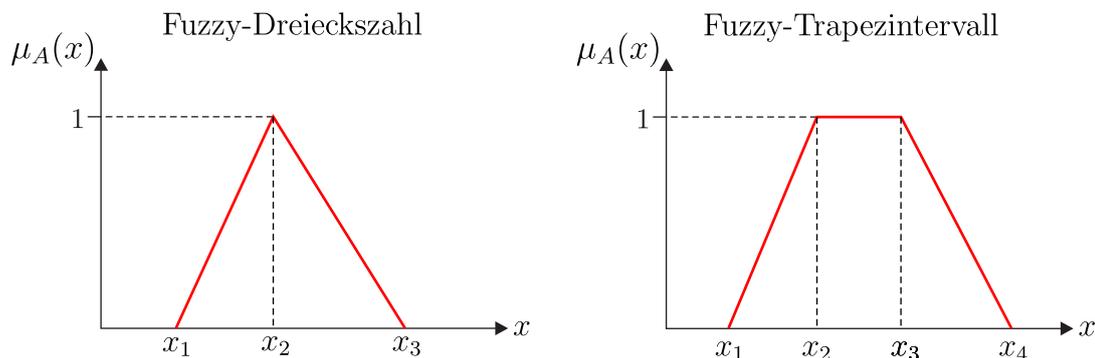


Abbildung 6.6: Darstellung einer Fuzzy-Dreieckszahl (links) und eines Fuzzy-Trapezintervalls (rechts)

Beide Fuzzy-Zahlen können mit folgender einfacher Notation beschrieben werden:

- Fuzzy-Dreieckszahl $\tilde{A} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$
- Fuzzy-Trapezintervall $\tilde{A} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$.

Nichtkonvexe Fuzzy-Größen werden z.B. in [247] erläutert. In Abbildung 6.7 ist eine nichtkonvexe Fuzzy-Variable dargestellt.

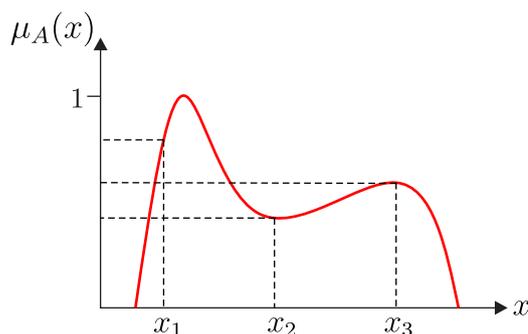


Abbildung 6.7: Darstellung einer nichtkonvexen Fuzzy-Variable

6.1.3 Intervallvariable

Ist beispielsweise keine Bewertung der Daten möglich, bietet sich die Wahl des Unschärfemodells *Intervallvariable* an. Damit können ungenaue, unbewertete Daten abgebildet werden. Die Grenzen können durch Experteneinschätzungen festgelegt werden. Ein Intervall $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ist durch eine charakteristische Funktion

$$\chi_{\mathcal{I}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathcal{I} \\ 0, & \text{für } x \notin \mathcal{I} \end{cases} \quad (6.20)$$

definiert und kann unter der Annahme $x_l, x_r, x \in \mathbb{R}$ mit $x_l < x_r$ wie folgt angegeben werden:

$$\mathcal{I} = \begin{cases} [x_l, x_r], & \text{für } x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} : x_l \leq x \leq x_r, & \text{geschlossen} \\ (x_l, x_r), & \text{für } x \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} : x_l < x < x_r, & \text{offen} \\ [x_l, x_r), & \text{für } x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} : x_l \leq x < x_r, & \text{rechts offen} \\ (x_l, x_r], & \text{für } x \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} : x_l < x \leq x_r, & \text{links offen} \end{cases} \quad (6.21)$$

Eine Menge, die alle Intervallgrößen enthält, wird auch mit $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

6.2 Polymorphe Unschärfemodelle

Aus der Kombination aleatorischer und epistemischer Basisunschärfemodelle ist der Begriff der *polymorphen Unschärfe* entstanden, siehe GRAF ET AL. [105, 106]. *Polymorphe Unschärfemodelle* ermöglichen die Berücksichtigung verschiedener Unschärfecharakteristiken in einer Analyse. Vorteilhaft ist, dass eine explizite Trennung zwischen aleatorischer und epistemischer Unschärfe möglich ist. Im Folgenden werden die angewendeten Unschärfemodelle einer Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable (p-box) und einer Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable erläutert. Abschließend werden weitere Unschärfemodelle aus [105, 106, 116, 223] in einer Tabelle zusammengestellt.

6.2.1 Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion einer Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable (engl.: *interval probability based random variable*, ip-r) wird durch eine linke Grenze $\overline{F}(x)$ und rechte Grenze $\underline{F}(x)$ gebildet, siehe Abbildung 6.8.

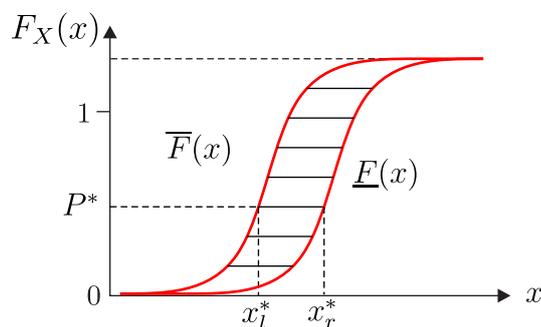


Abbildung 6.8: Darstellung einer Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable (p-box)

Das Intervall $[\overline{F}(x), \underline{F}(x)]$ wird Wahrscheinlichkeitsbox (engl.: *probability box*, p-box) genannt [26]. Dieses Unschärfemodell wird angewendet, wenn kein Verteilungstyp festgelegt werden kann. Neben aleatorischer Unschärfe wird damit auch epistemische Unschärfe berücksichtigt. Der Wahrscheinlichkeit P^* wird ein Intervall $\mathcal{I}^* = [x_l^*, x_r^*]$ zugeordnet. Eine p-box kann vollständig wie folgt definiert werden [26]:

$$\langle \overline{F}(x), \underline{F}(x), \mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{F} \rangle \quad (6.22)$$

unter Einhaltung der Bedingung

$$\underline{F}_X(x) \leq F_X(x) \leq \overline{F}_X(x) \quad . \quad (6.23)$$

Liegen weitere Informationen vor, kann hier auch ein Konfidenzintervall des Erwartungswerts \mathcal{M} und der Varianz \mathcal{V} angegeben werden. In \mathcal{F} sind alle möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen enthalten. Die Abbildungsvorschrift einer p-box als Zufallsvariable mit Intervallisierung ist $X : \Omega \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$.

6.2.2 Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable

Das Unschärfemodell Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (engl.: *fuzzy probability based random variable*, fp-r) wird in PANNIER [222] und PANNIER ET AL. [223] eingeführt. Wenn mindestens ein Verteilungsparameter im Vektor nach Gleichung (6.15) durch eine Fuzzy-Variable beschrieben wird, resultiert daraus eine Fuzzy-wertige Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion. Die fp-r-Variable ist für den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \hat{P})$ definiert. Ω und Σ können aus der Definition einer Zufallsvariable entnommen werden. \hat{P} wird Fuzzy-wertige Wahrscheinlichkeit genannt

$$\hat{P} = \left(\hat{P}_\alpha \right)_{\alpha \in (0,1]} \quad . \quad (6.24)$$

Diese ordnet für jedes α -Level jedem $A \in \Sigma$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß in Form eines Intervalls $\hat{P}_\alpha = [\hat{P}_{\alpha,l}(A), \hat{P}_{\alpha,r}(A)]$ zu. Dabei gilt die Bedingung

$$0 \leq \hat{P}_{\alpha,l}(A) \leq \hat{P}_{\alpha,r}(A) \leq 1 \quad . \quad (6.25)$$

Für jedes α -Level kann eine zugehörige Fuzzy-wertige Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion definiert werden

$$F_X = \left((F_X)_\alpha \right)_{\alpha \in (0,1]} \quad . \quad (6.26)$$

Eine fp-r-Variable ist außerdem folgende Abbildung:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad . \quad (6.27)$$

In Abbildung 6.9 (rechts) ist die fp-r-Variable mit Fuzzy-wertigen Wahrscheinlichkeiten dargestellt. Mithilfe der Abbildung soll verdeutlicht werden, dass bei einer fp-r-Variable das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Ereignisses fuzzifiziert wird. Wenn der Erwartungswert oder die Varianz eines Verteilungstyps aufgrund zu wenig vorhandener Daten nicht festgelegt werden können, bietet sich die Verwendung der fp-r-Variable an. Die Definition der Verteilungsparameter führt dann auf eine Fuzzy-wertige Wahrscheinlichkeitsfunktion. Das Unschärfemodell erlaubt neben der aleatorischen Unschärfe auch die Quantifizierung der Unvollständigkeit der Daten als Teil epistemischer Unschärfe.

6.2.3 Zusammenfassung polymorpher Unschärfemodelle

In Tabelle 6.1 sind die polymorphen Unschärfemodelle nach [105, 106, 116] zusammengefasst. Da das gewählte Unschärfemodell das Ergebnis und auch das *decision-making* maßgeblich beeinflusst, sollte die Wahl eines Modells stets von den tatsächlich vorhandenen Daten abhängig gemacht werden. Dazu werden in der letzten Spalte der Tabelle entsprechende Hinweise gegeben. Der Vorteil der polymorphen Unschärfemodelle besteht darin, dass bei geeigneter Wahl den Eingangsparametern kein höherer Informationsgehalt nachgesagt wird. Die Unschärfemodellierung ermöglicht eine „wahrheitsgemäße“ Angabe der Parameter und damit eine zuverlässige und realitätsnahe Modellierung. Neben den Basisunschärfemodellen werden in dieser Arbeit das p-box-Modell und das fp-r-Modell eingesetzt. Zur Vollständigkeit sind in Tabelle 6.1 zusätzlich die Modelle Fuzzy-Zufallsvariable (fr) und Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Fuzzy-Zufallsvariable (fp-fr) aufgeführt. In Abbildung 6.9 wird einer fr-Variable eine fp-r-Variable gegenübergestellt.

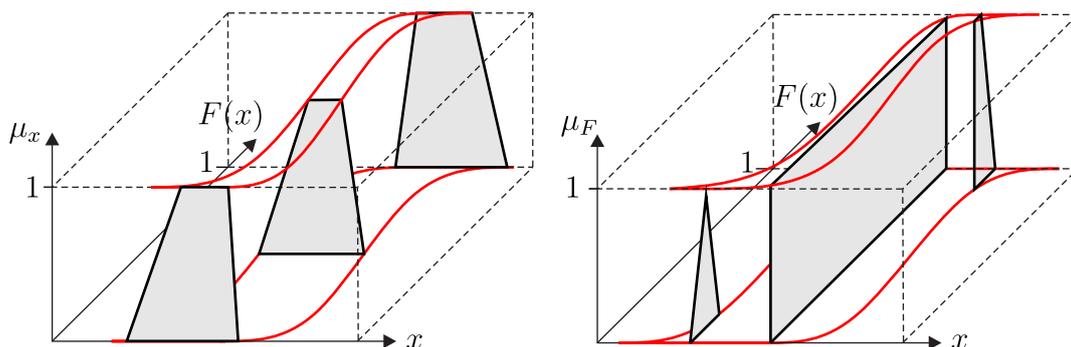


Abbildung 6.9: Darstellung einer Fuzzy-Zufallsvariable (links) und einer Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable mit Fuzzy-wertigen Wahrscheinlichkeiten (rechts), in Anlehnung an [116]

Bei der fr-Variable wird nicht das Wahrscheinlichkeitsmaß fuzzifiziert, sondern die Realisation. Das ist mit der Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad (6.28)$$

gekennzeichnet. Die Wahrscheinlichkeit ist bei diesem Modell also „scharf“. Als Beispiel sind Ungenauigkeiten von Messungen zu nennen. Auch wenn die Auftretenswahrscheinlichkeit genau ermittelbar ist, kann durchaus ein Messgerät fehlerhafte Werte der Realisation liefern. Damit können durch dieses Modell Ungenauigkeiten quantifiziert werden. Aus der Kombination mit dem fp-r-Modell

resultiert das fp-fr-Modell, eingeführt in [222, 223]. GÖTZ führt in [116] zusätzlich das Modell Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte p-box (fp-p-box) ein, das ein Sonderfall der fp-fr-Variable darstellt.

Unschärfemodell	Abbildung	Charakteristik	Bemerkung zur Wahl des Modells
Basisunschärfemodelle			
Zufallsvariable	$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	aleatorisch	sehr viele Daten vorhanden
Fuzzy-Variablen	$\mu_{\tilde{A}}(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$	epistemisch	nur wenig/ungenaue Daten, subjektive/linguistische Bewertung, Expertenwissen vorhanden
Intervallvariable	$\chi_{\mathcal{I}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$	epistemisch	wenige/ungenaue Daten, keine Bewertung möglich, Expertenwissen vorhanden
polymorphe Unschärfemodelle			
Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (p-box)	$X : \Omega \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$	aleatorisch & epistemisch (Ungenauigkeit)	viele ungenaue Daten vorhanden, cdf unbekannt, keine Bewertung der Daten möglich
Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (fp-r)	$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\hat{P} = (\hat{P}_{\alpha})_{\alpha \in (0,1]}$	aleatorisch & epistemisch (Unvollständigkeit)	wenig (genaue) Daten vorhanden, Bewertung möglich, cdf bekannt
Fuzzy-Zufallsvariable (fr)	$X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$	aleatorisch & epistemisch (Ungenauigkeit)	viele ungenaue Daten vorhanden, Bewertung möglich, cdf unbekannt
Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Fuzzy-Zufallsvariable (fp-fr)	$X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ $\hat{P} = (\hat{P}_{\alpha})_{\alpha \in (0,1]}$	aleatorisch & epistemisch (Unvollständigkeit & Ungenauigkeit)	wenig ungenaue Daten vorhanden, Bewertung möglich, cdf unbekannt

Tabelle 6.1: Zusammenstellung der polymorphen Unschärfemodelle nach [105, 106, 116]

6.3 Numerische Strukturanalyse mit unscharfen Daten

In einer numerischen Strukturanalyse mit unscharfen Daten werden die Fuzzy-Eingangsgrößen $\tilde{\mathbf{x}} = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_M\}$ auf die Fuzzy-Ergebnisgrößen $\tilde{\mathbf{z}} = \{\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_j, \dots, \tilde{z}_N\}$ abgebildet

$$\tilde{\mathbf{x}} \in D \subset \mathbb{R}^M \mapsto \tilde{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^N \quad . \quad (6.29)$$

Der Abbildungsoperator $\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ stellt den Analysealgorithmus dar, z.B. das FE-Modell. Dieser transformiert alle Punkte \mathbf{x} aus dem Fuzzy-Eingangsraum $\tilde{\mathbf{x}}$ in den Fuzzy-Ergebnisraum $\tilde{\mathbf{z}}$ [203]. Folgend wird nur ein eindimensionaler Ergebnisraum mit $\tilde{z} \in \mathbb{R}^1$ betrachtet. Die Abbildung wurde ursprünglich mit dem Erweiterungsprinzip von ZADEH [360] gelöst. Allerdings führt diese Methode bei rechnerisch aufwendigen Abbildungsoperatoren $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ mit mehreren Fuzzy-Eingangsgrößen auf unwirtschaftliche Rechenzeiten. Eine effiziente numerische Umsetzung der Abbildung erfolgt deshalb besser mit der α -Level-Optimierung (ALO), siehe z.B. [202].

6.3.1 α -Level-Optimierung

Bei der ALO wird folgendes Optimierungsproblem gelöst:

$$\begin{aligned} z_{\alpha_k, \ell} &= \min_{\mathbf{x} \in A_{\alpha_k}} [\mathcal{M}(\mathbf{x})] \\ z_{\alpha_k, r} &= \max_{\mathbf{x} \in A_{\alpha_k}} [\mathcal{M}(\mathbf{x})] \quad \text{mit } k = 1, \dots, N_{alev} \quad . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die minimalen und maximalen Ergebnisgrößen auf jedem α -Level werden gesucht. In Abbildung 6.10 ist das Prinzip für einen zweidimensionalen Eingangsraum und einem eindimensionalen Ergebnisraum dargestellt. Ein mehrdimensionaler Fuzzy-Eingangsraum \tilde{K} wird durch das kartesische Produkt der Fuzzy-Eingangsmengen $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_M$ gebildet:

$$\tilde{K} = \tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_M \quad . \quad (6.31)$$

Das ist aber nur zulässig, wenn Abhängigkeiten unter den Fuzzy-Eingangsmengen ausgeschlossen werden können. Zur Lösung des Optimierungsproblems können Suchverfahren, wie z.B. Evolutionsstrategien, angewendet werden. In [202] wird im Kontext der α -Level-Optimierung eine modifizierte Evolutionsstrategie vorgestellt. Solche Evolutionsstrategien sind bei komplexen Abbildungsoperatoren nicht mehr zielführend. Deshalb wird die Strategie der Metamodelle, die im nächsten Kapitel vorgestellt wird, angewendet. Dabei wird für den Abbildungsoperator ein geeignetes Ersatzmodell gesucht. Die Auswertung des Ersatzmodells läuft sehr viel schneller ab. Auf dem Metamodell können dann wieder die entwickelten Evolutionsstrategien zum Auffinden der extremalen Punkte eingesetzt werden.

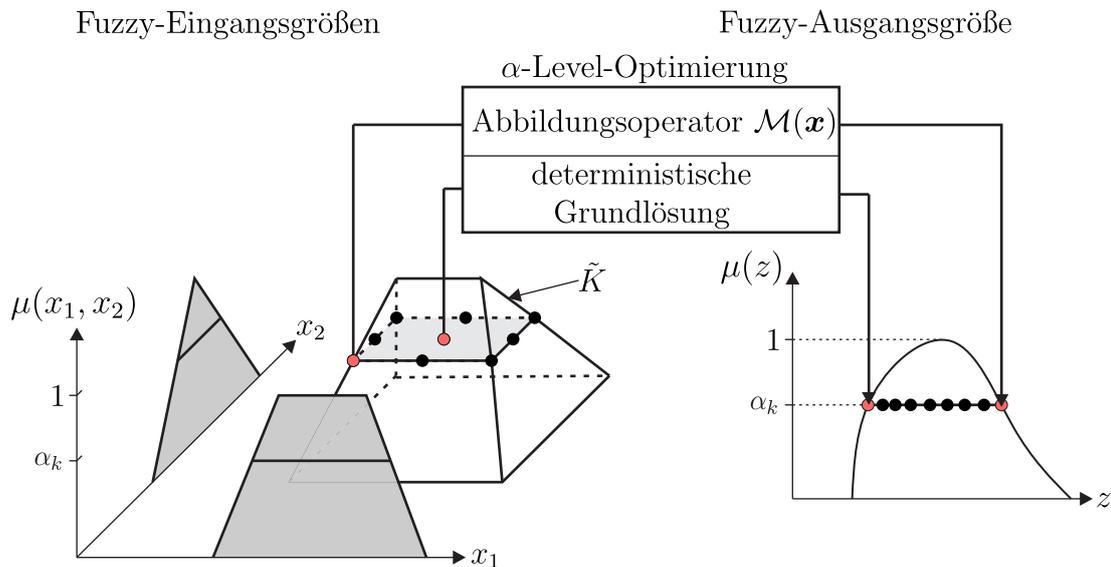


Abbildung 6.10: Darstellung der α -Level-Optimierung für einen zweidimensionalen Eingangsraum und einem eindimensionalen Ausgangsraum

6.3.2 Monte-Carlo-Simulation

Die folgende Beschreibung der *Monte-Carlo-Simulation* ist eine kurze Zusammenfassung aus [171]. Durch die Entwicklung von Computern können heutzutage Zufallsexperimente mit Modellen numerisch durchgeführt werden. Damit kann aleatorische Unschärfe mit der Simulation von Zufallszahlen berücksichtigt werden. Das Ereignis, das bei einem solchen numerischen Zufallsexperiment eintritt, wird als Realisation bezeichnet. Die Methode für numerische Zufallsexperimente wird *Monte-Carlo-Simulation* (MCS) genannt. Die Namensgebung dieser Methode geht auf die Roulettespiele im berühmten Casino der Stadt *Monte-Carlo* zurück. Die Zufallszahlen werden mit der Anwendung eines Zufallszahlengenerators erzeugt. Die durch den Computer generierten Zufallszahlen sind keine „echten“ Zufallszahlen. Diese werden mit deterministischen Algorithmen, wie z.B. der linearen Kongruenzmethode, erzeugt. Diese Zahlen werden deshalb *Pseudozufallszahlen* genannt. Ausgehend von gleichverteilten Zufallsvariablen im Intervall $[0, 1]$ können weitere Verteilungen von Zufallszahlen erzeugt werden. Eine Methode zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen ist beispielsweise die *Polare Methode der Normalverteilung* nach BOX & MULLER [37]. Die Grundlage der MCS ist das *Gesetz der großen Zahlen*. Dieses besagt, wenn das numerische Zufallsexperiment immer wieder mit den gleichen Voraussetzungen durchgeführt wird, konvergiert die relative Häufigkeit gegen die Wahrscheinlichkeit des Zufallsexperiments. Im Rahmen der Unschärfemodellierung ist daher darauf zu achten, dass genügend Realisationen eines Zufallsexperiments erzeugt werden.

6.3.3 Fuzzy- und Fuzzy-stochastische Strukturanalyse

Bei einer Fuzzy-Analyse werden die Eingangsparameter als Fuzzy-Variablen definiert. Das Ergebnis der α -Level-Optimierung sind Fuzzy-Ausgangsgrößen. Das Schema einer Fuzzy-Strukturanalyse für eine Fuzzy-Eingangsvariable ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Bei einer Fuzzy-stochastischen Analyse werden die Ver-

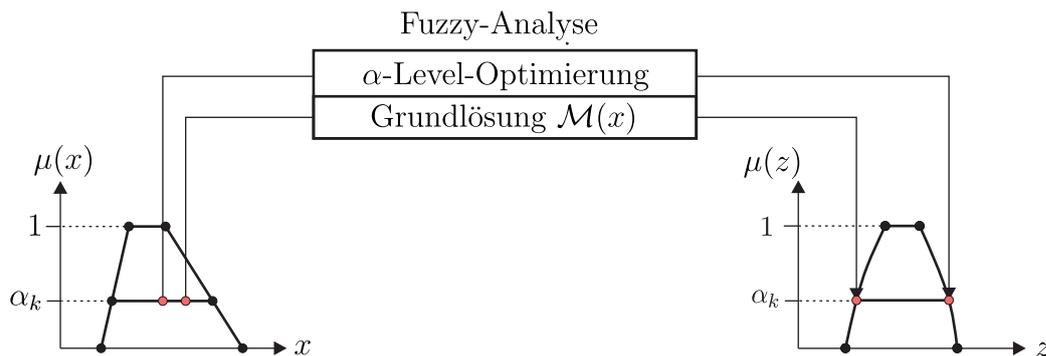


Abbildung 6.11: Darstellung einer Fuzzy-Strukturanalyse für den eindimensionalen Fall

teilungsparemeter, wie z.B. Erwartungswert und Standardabweichung, als Fuzzy-Variablen definiert. Hier muss an den Stützstellen im Eingangsraum jeweils eine stochastische Analyse, z.B. mit der MCS, durchgeführt werden. Für eine MCS sind N_{mcs} Auswertungen der Grundlösung nötig, um ausreichend genaue stochastische Ausgangsgrößen zu erhalten. In dieser Arbeit basieren die deterministischen Grundlösungen meist auf der Nichtlinearen Finiten-Elemente-Methode, d.h. der Abbildungsoperator $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ ist ein FE-Modell mit dem geometrische Nichtlinearitäten beschrieben werden können. Die Strukturanalyse mit unsharpen Parametern und einem FE-Modell zur Berechnung der deterministischen Grundlösung wird auch Fuzzy-stochastische Finite-Elemente-Methode (FSFEM) genannt [204, 289]. Eine praktische Beschreibung Fuzzy-zufälliger Eingangsgrößen bietet die Scharparameterdarstellung, siehe z.B. in [199, 200, 288]. Dabei können beispielsweise der Fuzzy-Erwartungswert und die Fuzzy-Standardabweichung in einem Scharparameter $\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \dots\}$ zusammengefasst werden. Eine Fuzzy-cdf kann dann wie folgt angegeben werden:

$$\tilde{F}(x) = F(\tilde{\mathbf{s}}, x) \quad . \quad (6.32)$$

In Abbildung 6.12 ist eine Fuzzy-stochastische Strukturanalyse mit einer fp-r-Variable dargestellt. Die Verteilungsparemeter s_1 und s_2 sind als Eingangsvariablen im Scharparameter $\tilde{\mathbf{s}}$ enthalten. Die Ergebnisgröße z der Analyse ist ebenfalls eine

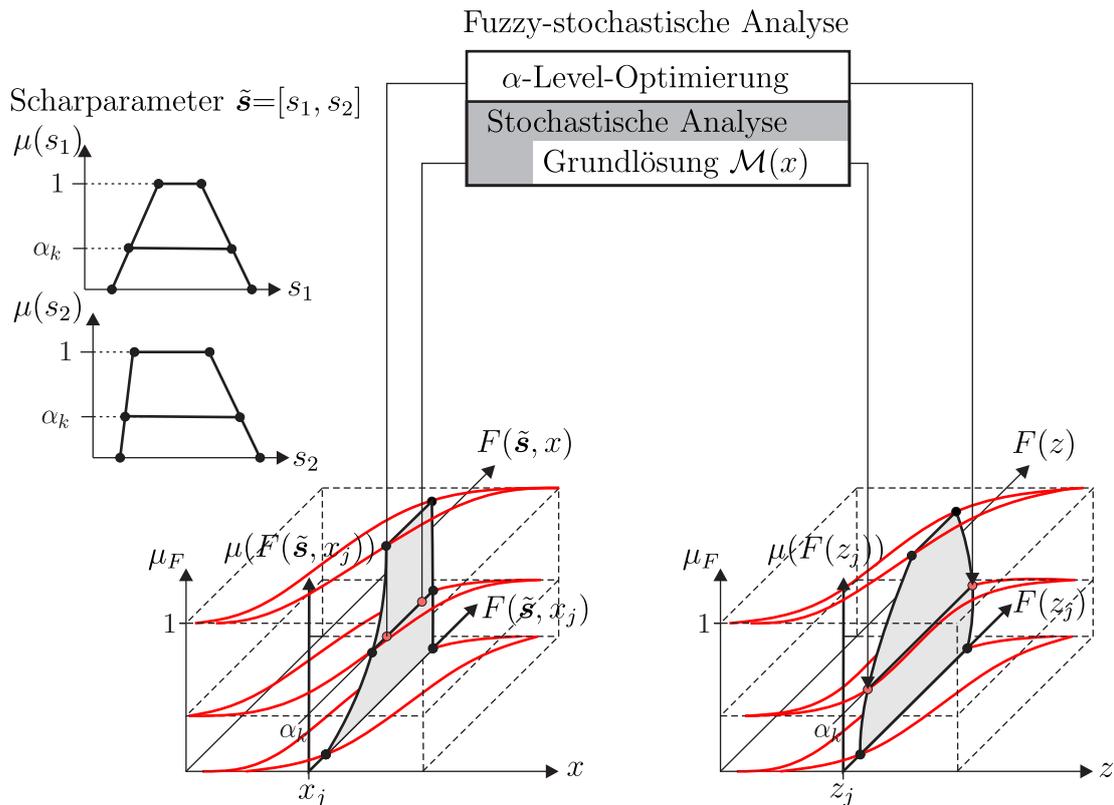


Abbildung 6.12: Darstellung einer Fuzzy-stochastischen Strukturanalyse mit einer Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable (fp-r)

fp-r-Variable. Zusammenfassend besteht der Algorithmus einer Fuzzy-stochastischen Analyse für das fp-r-Unschärfemodell aus drei Schleifen, siehe Abbildung 6.13 (links).

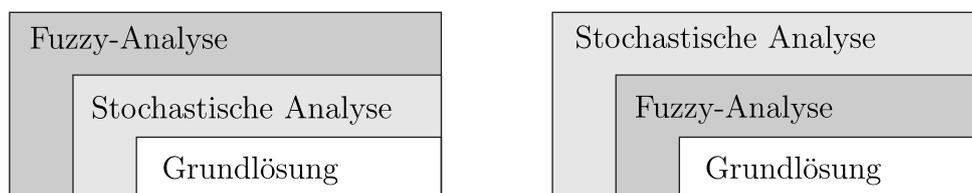


Abbildung 6.13: Schleifenalgorithmus zur Verarbeitung verschiedener Unschärfemodelle nach [223]: Struktogramm für eine fp-r-Variable (links) und einer fr-Variable (rechts)

Die äußere Schleife ist die Fuzzy-Analyse und beinhaltet die α -Level-Optimierung. Die mittlere Schleife besteht aus der stochastischen Analyse und die deterministische Grundlösung bildet die innere Schleife. Bei der Verarbeitung eines fr-Modells

wird beispielsweise die Stochastik- mit der Fuzzy-Schleife getauscht. Eine ausführliche Beschreibung der Analysemethoden für unterschiedliche Unschärfemodelle wird in [223, 250] gegeben.

6.4 Modellierung räumlicher Variabilität

In diesem Abschnitt werden Methoden zur Behandlung räumlich variierender Unschärfe vorgestellt. Die Streuungen von Material- oder auch Geometrieparametern beschreiben räumlich korrelierte Felder. Werden die mechanischen Eigenschaften an zwei benachbarten Punkten eines Tragwerks betrachtet, ist eine Korrelation der Materialeigenschaften zu beobachten. Für eine realistische Modellierung muss diese Korrelation berücksichtigt werden. Dafür werden im Folgenden nach den Grundlagen der multivariaten Stochastik die Theorie der Zufallsfelder skizziert. Zur Berücksichtigung der Unschärfe werden Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte und Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder vorgestellt. Im Anschluss werden effiziente Methoden zur Diskretisierung der Felder erläutert.

6.4.1 Grundlagen der multivariaten Stochastik

Wie stark Ereignisse miteinander zusammenhängen, wird in der Stochastik mit der Korrelation beschrieben. Der lineare Zusammenhang zweier Zufallsvariablen X_1 und X_2 kann über die Kovarianz wie folgt angegeben werden:

$$C(X_1, X_2) = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] \quad . \quad (6.33)$$

Die Korrelation ist die Normierung der Kovarianz mit der Standardabweichung der jeweiligen Zufallsvariablen

$$R(X_1, X_2) = \frac{C(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \equiv \rho_{X_1, X_2} \quad . \quad (6.34)$$

Der Korrelationskoeffizient ρ_{X_1, X_2} , umgangssprachlich die Korrelation, kann folgende Werte annehmen:

$$-1 \leq \rho_{X_1, X_2} \leq 1 \quad . \quad (6.35)$$

Die Matrixschreibweise

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{R} \quad (6.36)$$

mit \mathbf{C} der (Auto-)Kovarianzmatrix und \mathbf{R} der (Auto-)Korrelationsmatrix ermöglicht die Darstellung einer multivariaten *Gauß-Verteilung*

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^N \det(\mathbf{C})}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right] \quad . \quad (6.37)$$

6.4.2 Zufallsfelder

Die skizzierten Grundlagen sind aus [312,322] entnommen. Ein Zufallsfeld $H(\mathbf{x}, \theta)$ ist ein Skalarfeld, in dem jedem Ort $\mathbf{x} \in \Omega$ eine Zufallsvariable zugeordnet wird. In Abbildung 6.14 ist ein zweidimensionales Zufallsfeld dargestellt. Für einen festen

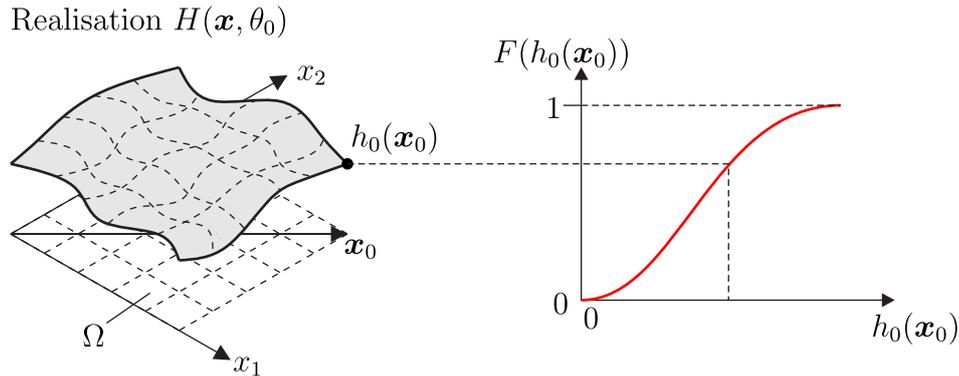


Abbildung 6.14: Darstellung eines Zufallsfelds

Ort \mathbf{x}_0 ist $H(\mathbf{x}_0, \theta)$ eine Zufallsvariable und ein Zufallsfeld stellt mit

$$\{H(\mathbf{x}, \theta) : \mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta\} \quad (6.38)$$

eine Sammlung von Zufallsvariablen dar. Die möglichen Ereignisse aus der Ereignismenge Θ eines Zufallsexperiments werden mit θ bezeichnet. Damit kann eine Realisation eines Zufallsfelds für ein festes Ereignis θ_0 mit

$$h_0(\mathbf{x}) := H(\mathbf{x}, \theta_0) \quad (6.39)$$

angegeben werden. Bei einem *Gauß-Zufallsfeld* ist die Verteilungsfunktion an jedem Ort eine *Gauß-Normalverteilung* mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 :

$$H_0(\theta) := H(\mathbf{x}_0, \theta) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (6.40)$$

Ein *Gauß-normalverteiltes Zufallsfeld* kann durch die Mittelwertfunktion

$$\mu(\mathbf{x}) = E[H(\mathbf{x})] \quad (6.41)$$

und der Kovarianz zwischen zwei Zufallsvariablen des Felds mit den Ortsvektoren \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j zu

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = E[(H(\mathbf{x}_i) - \mu(\mathbf{x}_i))(H(\mathbf{x}_j) - \mu(\mathbf{x}_j))] \quad (6.42)$$

vollständig beschrieben werden. $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ wird auch Kovarianzfunktion genannt. Durch die Normierung der Standardabweichung folgt die Korrelationsfunktion

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{\sigma(\mathbf{x}_i)\sigma(\mathbf{x}_j)} \quad . \quad (6.43)$$

Mithilfe der Korrelationsfunktion wird die Form eines Zufallsfelds gesteuert. Diese spielt eine zentrale Rolle bei der Modellierung räumlicher Variabilität. Die Korrelationsfunktion kann als Funktion des relativen Abstands $\boldsymbol{\tau}$ der Punkte zueinander angegeben werden

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \rho(\boldsymbol{\tau}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \quad . \quad (6.44)$$

Ein Zufallsfeld wird als schwach homogen bezeichnet, wenn die ersten beiden Momente (Erwartungswert und Varianz) im Gebiet Ω konstant (translationsinvariant) sind.

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu \quad \text{und} \quad \sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \quad (6.45)$$

Sind auch noch die höheren Momente konstant, wird ein Zufallsfeld als streng homogen bezeichnet. Außerdem ist für ein homogenes Zufallsfeld die Korrelationsfunktion nicht vom Ort abhängig, sondern lediglich vom Abstand

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\tau}) = \rho(\boldsymbol{\tau}) \quad . \quad (6.46)$$

Eine homogene Korrelationsstruktur lässt sich folglich schreiben zu

$$C(\boldsymbol{\tau}) = \sigma^2 \rho(\boldsymbol{\tau}) \quad . \quad (6.47)$$

Eine Korrelationsstruktur ist separierbar, wenn die Korrelationsfunktion wie folgt aufgebaut werden kann:

$$\rho(\boldsymbol{\tau}) = \rho_1(\tau_1) \rho_2(\tau_2) \rho_3(\tau_3) \quad (6.48)$$

mit τ_i den Komponenten des Relativvektors $\boldsymbol{\tau}$ [15]. Ein Zufallsfeld kann zusätzlich als isotrop bezeichnet werden, wenn die Korrelationsfunktion rotationsinvariant ist, d.h. bei einer Rotation des Relativvektors $\boldsymbol{\tau}$ lässt sich keine Veränderung der Korrelation beobachten, siehe [144].

6.4.3 Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld

Aleatorische Unschärfe räumlicher Variabilität wird durch ein klassisches Zufallsfeld beschrieben. Allerdings sind die Parameter für ein Zufallsfeld oftmals nicht exakt ermittelbar. Eine Möglichkeit die epistemische Unschärfe zu berücksichtigen, bietet ein Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (ip-rf). Die Parameter wie Standardabweichung, Mittelwert und Korrelationslängen(-parameter) zur Beschreibung der Korrelationsfunktion werden bei diesem Feld als Intervalle angegeben. Das führt zu einer p-box an jedem Knoten des Feldes, siehe Abbildung 6.15.

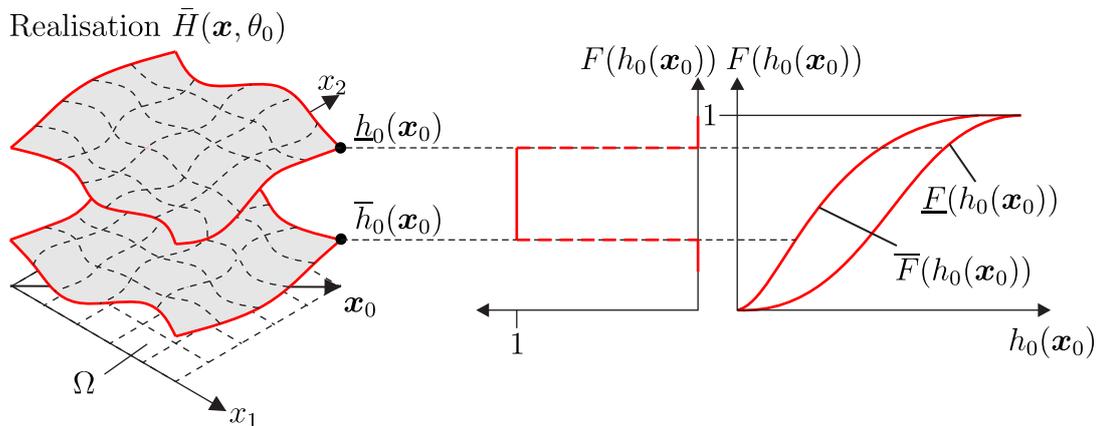


Abbildung 6.15: Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (ip-rf)

6.4.4 Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld

Die Theorie der Zufallsfelder kann mit der Fuzzy-Set-Theorie erweitert werden. Hierbei sind die Parameter als Fuzzy-Variablen definiert. Ein Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld ist ein Vektor bestehend aus fp-r-Variablen, d.h. an jedem Punkt des Felds wird eine fp-r-Variable definiert. Jede Realisation $\tilde{h}_0(\mathbf{x})$ für ein Ereignis $\theta_0 \in \Theta$ ist eine Fuzzy-Funktion. Analog kann jedes Unschärfemodell zur Darstellung der räumlichen Variabilität verwendet werden. In Abbildung 6.16 ist ein Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (fp-rf) dargestellt.

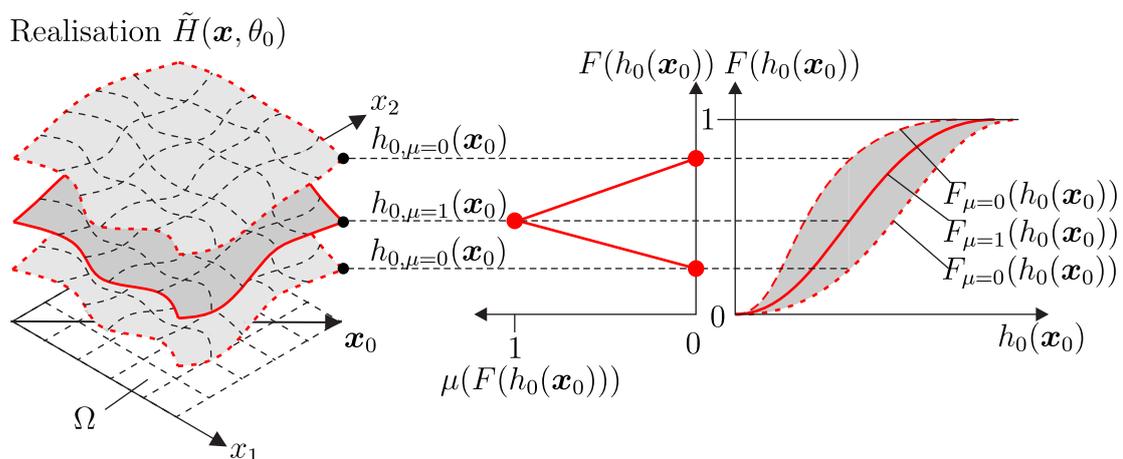


Abbildung 6.16: Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (fp-rf)

6.4.5 Übersicht der Unschärfemodelle

In Tabelle 6.2 sind die Modelle räumlich veränderlicher Unschärfe zusammengefasst. Neben den in dieser Arbeit verwendeten Modellen sind zusätzlich auch In-

Name	Bezeichnung	Charakteristik
Zufallsfeld (rf)	$H(\mathbf{x}, \theta)$ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$	aleatorisch
Intervallfeld (if)	$\bar{H}(\mathbf{x})$ $\chi_{\mathcal{I}} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$	epistemisch, unbewertete Feldparameter
Fuzzy-Feld (ff)	$\tilde{H}(\mathbf{x})$ $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$	epistemisch, bewertete Feldparameter
Fuzzy-Zufallsfeld (f-rf)	$\tilde{H}(\mathbf{x})$ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$	aleatorisch, epistemisch, bewertete Feldparameter, Unvollständigkeit
Intervall- wahrscheinlichkeits- basiertes Zufallsfeld (ip-rf)	$\bar{H}(\mathbf{x}, \theta)$ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$	aleatorisch, epistemisch, unbewertete Feldparameter
Fuzzy-wahrscheinlichkeits- basiertes Zufallsfeld (fp-rf)	$\tilde{H}(\mathbf{x}, \theta)$ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\hat{P} = (\hat{P}_{\alpha})_{\alpha \in (0,1]}$	aleatorisch, epistemisch, bewertete Feldparameter, Unvollständigkeit
Fuzzy-wahrscheinlichkeits- basiertes Fuzzy-Zufallsfeld (fp-f-rf)	$\tilde{H}(\mathbf{x}, \theta)$ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ $\hat{P} = (\hat{P}_{\alpha})_{\alpha \in (0,1]}$	aleatorisch, epistemisch, bewertete Feldparameter, Unvollständigkeit & Ungenauigkeit

Tabelle 6.2: Polymorphe Unschärfemodelle zur Modellierung räumlicher Variabilität

tervallfelder (if), Fuzzy-Felder (ff) und Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Fuzzy-Zufallsfelder (fp-f-rf) aufgelistet. Mithilfe von Fuzzy-Zufallsfeldern und deren Spezialfall den Intervallfeldern können räumliche Felder mit epistemischer Unschärfe beschrieben werden. Eine Vorgehensweise wie mehrere Fuzzy-Variablen für jeden Punkt im Raum berücksichtigt werden können, wird z.B. in [116,117] gezeigt. Im Verlauf der Arbeit werden Imperfektionen als Zufallsfelder beschrieben und die Korrelationseigenschaften aus Messungen gewonnen. Die Messungen werden als ausreichend genau vorausgesetzt. Daher wird ein Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (fp-rf) ausgewählt. In weiteren Arbeiten kann für diese Problemstellung die Anwendung eines fp-f-rf-Felds untersucht werden. Dadurch können zusätzlich die Messungenauigkeiten berücksichtigt werden.

6.4.6 Methoden zur Diskretisierung von Zufallsfeldern

Um die räumliche Variabilität in einem Finite-Elemente-Modell abbilden zu können, werden die Zufallsfelder an einer endlichen Anzahl von Stützstellen $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N]^T$, den FE-Knoten oder den Gaußpunkten, dargestellt. Neben der Ortsdiskretisierung ist zusätzlich eine stochastische Diskretisierung der Zufallsvariable erforderlich.

$$H(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{Diskretisierung}} \hat{H}(\mathbf{x}) \quad (6.49)$$

Hierfür existiert eine Vielzahl von Möglichkeiten, siehe auch [312]. Eine häufig verwendete Methode ist die *Karhunen-Loève-Transformation* (KLT) (engl.: *Karhunen-Loève-Expansion*, KLE), die in diesem Zusammenhang in [363] eingeführt wird. Weitere mathematische Grundlagen sind in [3, 153] beschrieben. Die KLE ist eine Reihenentwicklung, bei der sich das diskrete Zufallsfeld als Summe M unabhängiger Basisvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})$ und den Zufallsvariablen $b_i(\theta)$ zusammensetzt.

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^M b_i(\theta) \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) \quad (6.50)$$

Die Basisvektoren resultieren aus dem Eigenwertproblem der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \sigma^2 \rho(\boldsymbol{\tau}) = \begin{bmatrix} C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \cdots & C(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

mit den Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$ und den Eigenwerten λ_i . Da die Kovarianzfunktion symmetrisch und positiv ist, ist auch die Kovarianzmatrix symmetrisch und positiv definit. Diese kann mit einer Korrelationsfunktion $\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ entwickelt werden. Dazu bietet sich ein exponentieller Verlauf

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[-\frac{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{\ell_c} \right] \quad (6.52)$$

oder ein quadratisch exponentieller Verlauf

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[-\frac{d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{\ell_c} \right] \quad (6.53)$$

an. Dabei ist $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ der Abstand der FE-Knoten oder der Gaußpunkte. Der Parameter ℓ_c ist die Korrelationslänge. Mit der Korrelationslänge, auch Korrelationsparameter genannt, kann der Verlauf der Exponentialfunktion gesteuert werden. Für $\ell_c \rightarrow \infty$ oder für $d(i, j) \rightarrow 0$ konvergiert die Exponentialfunktion gegen den Wert 1. Damit besteht ein maximaler Zusammenhang (Korrelation)

zwischen den beiden Punkten i und j . Hingegen beeinflussen sich zwei Punkte mit sehr großem Abstand kaum. In Abbildung 6.17 sind hierzu Realisationen einer Struktur mit 8×8 Knoten für eine quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion mit zwei unterschiedlichen Korrelationslängen dargestellt. Die Korrelationslängen

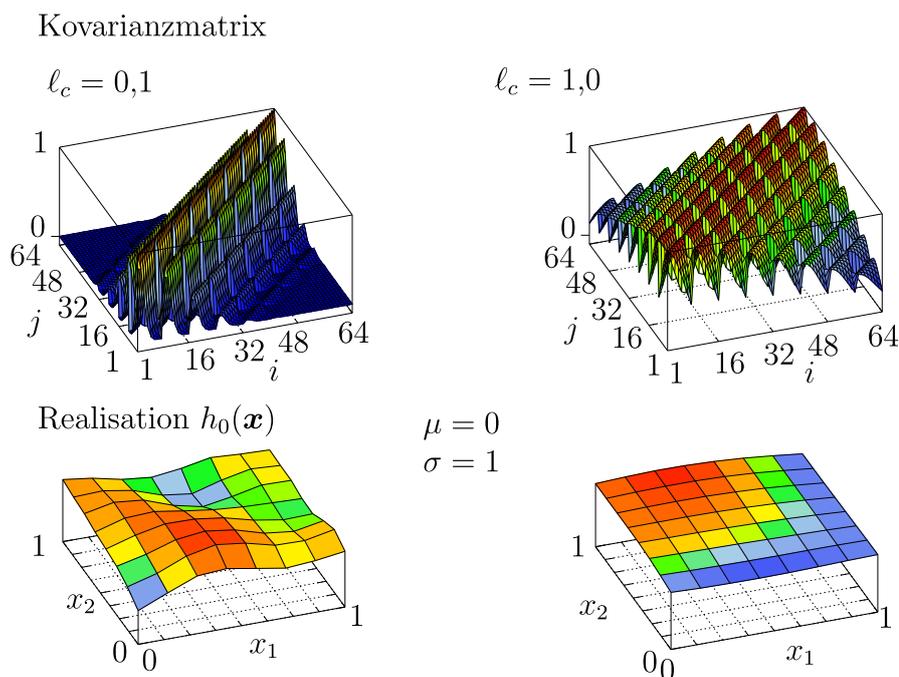


Abbildung 6.17: Kovarianzmatrix und Realisation einer quadratischen Struktur mit den Seitenlängen 1×1 und 8×8 Knoten für eine quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion mit zwei unterschiedlichen Korrelationslängen

können in der Unschärfemodellierung als Fuzzy-Variablen beschrieben werden. Des Weiteren spielt auch die Wahl der Korrelationsfunktion eine entscheidende Rolle für die Glattheit der Realisation. Die Ableitung der Korrelationsfunktion ist maßgebend für die Glattheit des Zufallsfelds, siehe [243, 308]. Wenn für die Ableitung an der Stelle $d = 0$ gilt:

$$\left. \frac{\partial \rho(d)}{\partial d} \right|_{d=0} = 0 \quad , \quad (6.54)$$

folgen glatte Realisationen eines Zufallsfelds. Das ist hier nur für die quadratisch exponentielle Korrelationsstruktur der Fall, siehe Abbildung 6.18.

Die Zufallsvariablen $b_i(\theta)$ sind unkorreliert und mittelwertfrei, aber nicht standardnormalverteilt. Die Eigenwerte λ_i sind die Varianz σ_b^2 der Zufallsvariablen

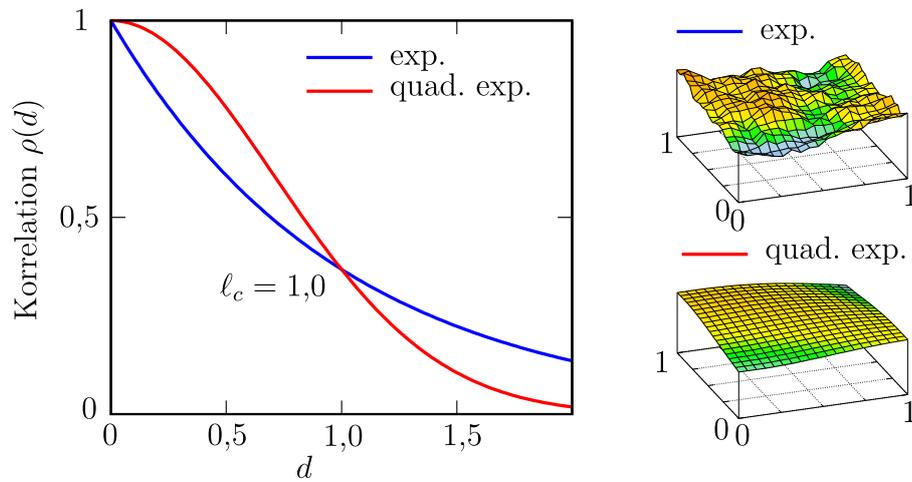


Abbildung 6.18: Vergleich der Realisationen für eine exponentielle und quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion

und mit dem Zusammenhang

$$\xi_i(\theta) = \frac{b_i(\theta) - \mu_b}{\sigma_b} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (6.55)$$

können die Zufallsvariablen transformiert werden. Daraus resultiert die bekannte Form des diskreten Zufallsfelds

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (6.56)$$

Durch Vorgabe eines Mittelwerts $\mu(\mathbf{x})$ kann ein beliebiges *Gauß-normalverteiltes Feld* beschrieben werden.

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sigma \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (6.57)$$

Eine effizientere Methode ist die EOLE (Expansion Optimal Linear Estimation) nach LI & KIUREGHIAN [185]. Diese minimiert den Varianzfehler an den Knoten des Felds

$$\text{Minimiere: } \text{Var} [H(\mathbf{x}) - \hat{H}(\mathbf{x})] \quad . \quad (6.58)$$

Dafür wird ein stochastisches Netz eingeführt. Damit ist eine einfache Trennung vom FE-Netz möglich. Die Reihenentwicklung ähnelt der KLE und ist wie folgt definiert:

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \left(\sum_{i=1}^M \frac{\xi_i(\theta)}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i(\mathbf{x}^S) \right) \mathbf{C}(\mathbf{x}^S, \mathbf{x}) \quad . \quad (6.59)$$

Die stochastischen Knoten sind im Vektor $\mathbf{x}^S = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_i^S \dots \mathbf{x}_M^S]$ enthalten und die FE-Knoten werden mit dem Vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_N]$ definiert. Die Lösung des Eigenwertproblems ist nur bezüglich der Knoten des stochastischen Netzes erforderlich. Die Kovarianzen zwischen FE- und stochastischen Knoten sind in der gemischten Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}^S, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} C(\mathbf{x}_1^S, \mathbf{x}_1) & \dots & C(\mathbf{x}_1^S, \mathbf{x}_j) & \dots & C(\mathbf{x}_1^S, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{x}_i^S, \mathbf{x}_1) & \dots & C(\mathbf{x}_i^S, \mathbf{x}_j) & \dots & C(\mathbf{x}_i^S, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{x}_M^S, \mathbf{x}_1) & \dots & C(\mathbf{x}_M^S, \mathbf{x}_j) & \dots & C(\mathbf{x}_M^S, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

enthalten. Das stochastische Netz kann weniger Knoten enthalten als das FE-Netz. Dadurch kann der numerische Aufwand zur Lösung des Eigenwertproblems verringert werden. Der Rechenaufwand kann weiter reduziert werden, indem nicht alle Eigenwerte ausgerechnet werden. Allerdings ist die Anzahl der benötigten Eigenwerte abhängig von der gewählten Korrelationsstruktur. Für ein unregelmäßiges Zufallsfeld werden mehr Eigenwerte benötigt als für ein glattes Feld. Zur Abschätzung der Anzahl benötigter Eigenwerte wird in [15, 41] das Qualitätsmaß

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^{N_\lambda - c_\lambda} \lambda_k}{\text{tr}(\mathbf{C})} \quad (6.61)$$

gegeben. Ein Qualitätsmaß $Q = 1$ bedeutet, dass alle Eigenwerte N_λ für die Darstellung des Zufallsfelds berücksichtigt werden. Die Qualität nimmt ab, wenn eine Anzahl von c_λ Eigenwerten bei der Summe vernachlässigt wird.

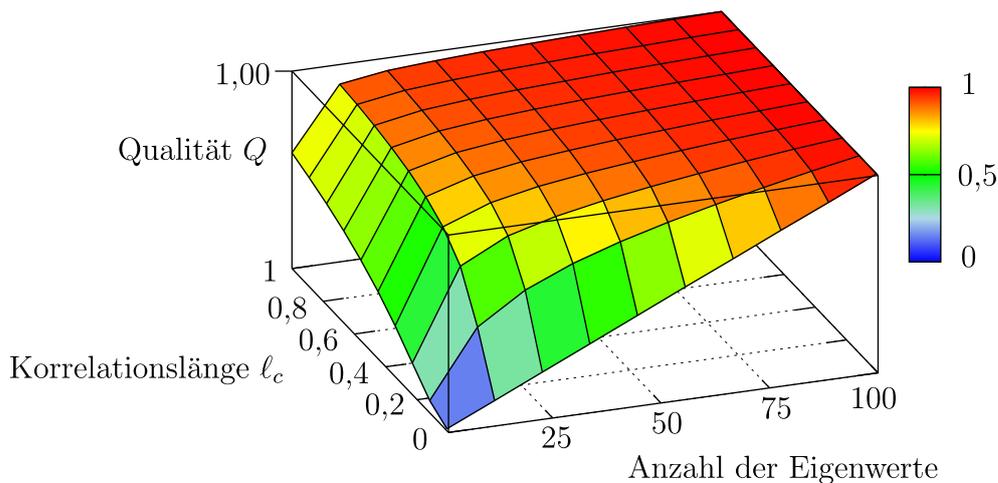


Abbildung 6.19: Qualitätsmaß eines Zufallsfelds mit exponentieller Korrelationsfunktion nach Gleichung (6.52) für eine quadratische Struktur mit der Abmessung 1×1 und 10×10 Knoten.

In Abbildung 6.19 ist das Qualitätsmaß für ein Zufallsfeld einer quadratischen Struktur mit der Abmessung 1×1 für verschiedene Korrelationslängen ℓ_c mit exponentieller Korrelationsfunktion nach Gleichung (6.52) dargestellt. Die Diskretisierung besteht aus 10×10 Knoten. Damit beträgt die maximale Anzahl zu berechneter Eigenwerte $N_\lambda = 100$. In [179] werden geometrische Imperfektionen von Plattenstrukturen mit Zufallsfeldern modelliert. In dieser Veröffentlichung wird auch die Auswirkung der Vernachlässigung von Eigenwerten bei der Darstellung der Zufallsfelder mit der KLE auf das Beulverhalten genauer untersucht.

6.4.7 Beispiel: Quadratplatte mit Imperfektionen

Das Beispiel soll den Einfluss des stochastischen Netzes auf das Ergebnis einer MCS verdeutlichen. Geometrische Imperfektionen werden als Realisationen eines Zufallsfelds für eine Quadratplatte mit *Navier-Lagerung* erzeugt. Für die Standardabweichung des Zufallsfelds wird $\sigma = 5 \text{ mm}$ gewählt. Die Korrelationsmatrix wird mit der quadratisch exponentiellen Korrelationsfunktion nach Gleichung (6.53) erstellt. Mit dieser Wahl der Korrelationsfunktion wird eine Glattheit der erzeugten stochastischen Imperfektionen erreicht. Das FE-Modell der Quadratplatte unter Axialdruck und den Materialparametern für ein isotropes Stoffgesetz ist in Abbildung 6.20 dargestellt.

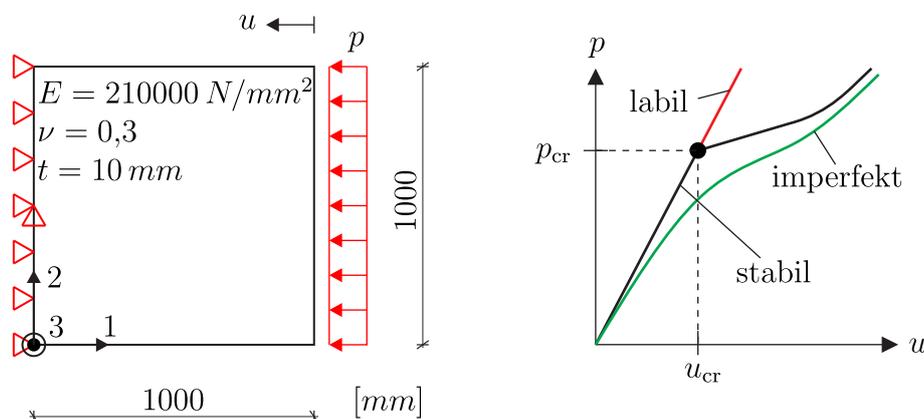


Abbildung 6.20: FE-Modell der Quadratplatte mit *Navier-Lagerung* unter Axialdruck (links) und Last-Verschiebungskurve (rechts)

Die ideale Beullast beträgt $p_{cr} = 758,73 \text{ N/mm}$ mit der zugehörigen kritischen Verschiebung $u_{cr} = 0,361 \text{ mm}$. Für die MCS werden jeweils 500 stochastische Imperfektionen erzeugt. Diese geometrischen Imperfektionen werden im FE-Modell als spannungsfreie Knotenverschiebungen senkrecht zur Ebene berücksichtigt.

Die Beulanalyse wird mit dem Bogenlängenverfahren und einer Verschiebungssteuerung durchgeführt. Aufgrund der Imperfektion wird mit der Last-Verschiebungskurve ein Spannungsproblem beschrieben, d.h. der indifferente Punkt entfällt. Deshalb wird die Last der imperfekten Platte an der Stelle der kritischen Verschiebung untersucht. Die zu dieser Verschiebung zugehörigen Lasten aus der MCS werden mit der ideellen Beullast normiert. Die Normierung führt auf den kritischen Beulfaktor:

$$\alpha_{\text{cr}} = \frac{p_{\text{cr,perf}}}{p_{\text{cr,impf}}} \quad . \quad (6.62)$$

Die untersuchte Größe ist der Stichprobenmittelwert des kritischen Beulfaktors $\mu_{\alpha_{\text{cr}}}$. Für die MCS werden zur Berechnung des Stichprobenmittelwerts 500 Simulationen gewählt.

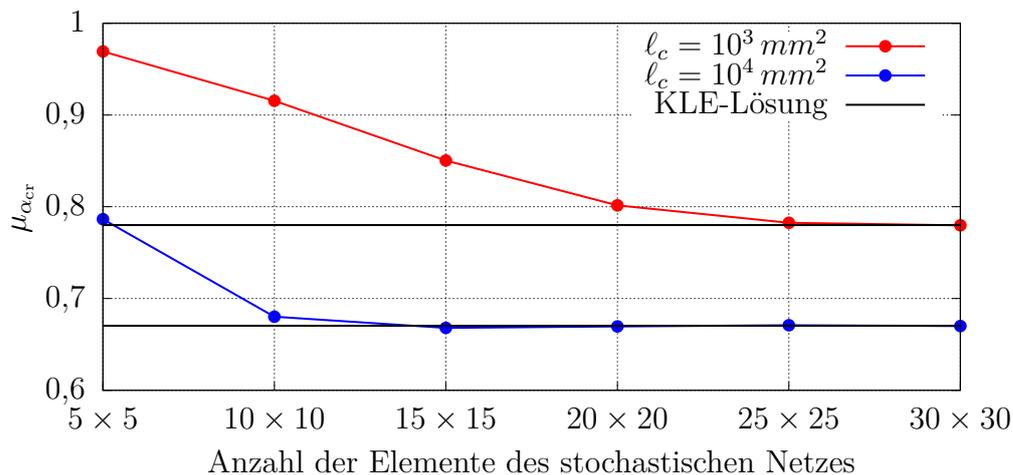


Abbildung 6.21: Konvergenzuntersuchung zum Stichprobenmittelwert des kritischen Beulfaktors für unterschiedliche stochastische Netze

Das FE-Netz besteht aus 30×30 Schalenelementen. Variiert wird das stochastische Netz der EOLE-Methode. Das Ergebnis für zwei unterschiedliche Korrelationslängen ist in Abbildung 6.21 dargestellt. Mit dem Diagramm soll gezeigt werden, dass für kleinere Korrelationslängen eine größere Anzahl an stochastischen Knoten erforderlich ist. Zum Beispiel werden für die Korrelationslänge $l_c = 10^4 \text{ mm}^2$ nur halb so viele stochastische Knoten benötigt als FE-Knoten. Die Lösung der EOLE-Methode für ein Netz mit 30×30 Knoten entspricht wieder der KLE-Lösung. In Abbildung 6.22 sind Realisationen des Zufallsfelds mit unterschiedlicher stochastischer Diskretisierung für die Korrelationslänge $l_c = 10^4 \text{ mm}^2$ dargestellt. Mit dieser Abbildung soll gezeigt werden, dass zur Darstellung der Variabilität ein Netz mit 5×5 stochastischen Elementen nicht ausreichend ist.

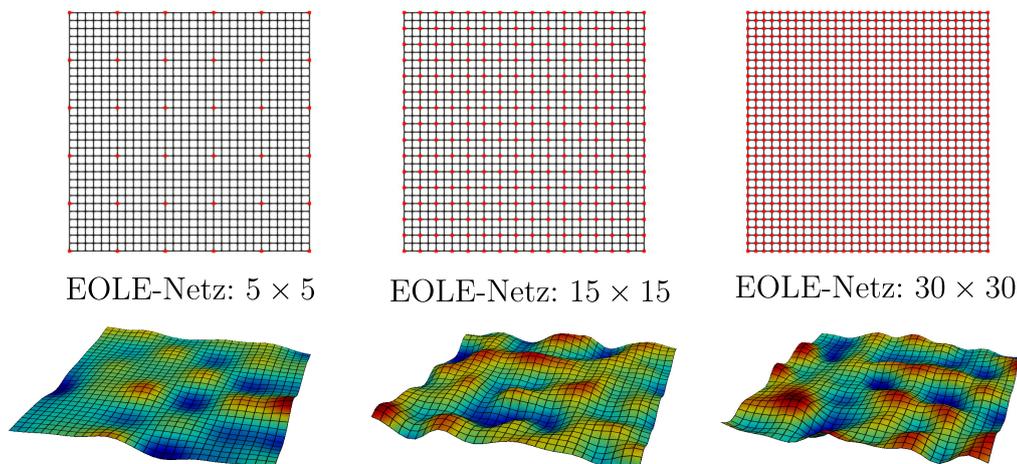


Abbildung 6.22: Realisationen eines Zufallsfelds (5-fach überhöht dargestellt) mit unterschiedlichen Diskretisierungen des stochastischen Netzes

Zusätzlich zu einem Konvergenztest im Rahmen der FEM muss vor einer stochastischen Analyse mit Zufallsfeldern auch immer ein Konvergenztest zum stochastischen Netz durchgeführt werden.

6.4.8 Beispiel: Eingespannte Lochplatte mit Imperfektionen

An diesem Beispiel soll der Vorteil der Anwendung der EOLE-Methode für Strukturen mit Aussparungen und verzerrten FE-Netzen verdeutlicht werden. Für eine eingespannte Lochplatte werden geometrische Imperfektionen als Realisationen eines Zufallsfelds erzeugt. Eine Beulanalyse und das Aufbringen von Imperfektionen senkrecht zur Ebene der Lochplatte erfordert eine Diskretisierung mit Schalenelementen. Das verzerrte FE-Netz wird mit dem Netzgenerator NEGE in [291] erstellt und umfasst 1048 Schalenelemente bzw. 1148 Knoten. Die quadratische Lochplatte ist auf einer Seite eingespannt und wird auf der gegenüberliegenden Seite mit Axialdruck belastet. Das FE-Modell und die Materialparameter für ein isotropes Stoffgesetz sind in Abbildung 6.24 dargestellt. Das Last-Verschiebungsverhalten ist ähnlich dem der Platte in Abbildung 6.20 (rechts). Deshalb werden auch hier die Lasten im Rahmen der stochastischen Analyse an der Stelle der kritischen Verschiebung ausgewertet. Die kritische Last der idealen Lochplatte ist $p_{cr} = 30,45 \text{ N/mm}$ und die zugehörige kritische Verschiebung ist $u_{cr} = 0,02435 \text{ mm}$. Für das Zufallsfeld wird eine Standardabweichung von $\sigma = 5 \text{ mm}$ definiert und die Korrelation wird mit einer quadratisch exponentiellen Korrelationsfunktion nach Gleichung (6.53) beschrieben. In Abbildung 6.24 (links) ist das stochastische Netz mit 16×16 Knoten und das verzerrte FE-Netz dargestellt. Zusätzlich wird auf der rechten Seite in Abbildung 6.24 eine Realisation

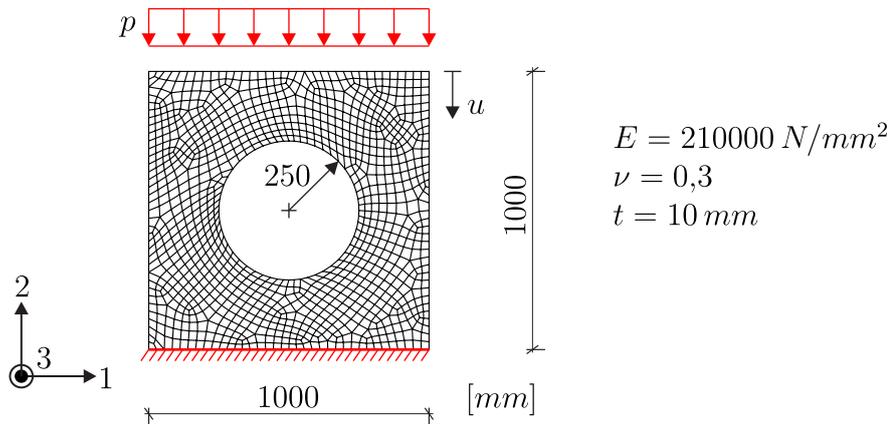


Abbildung 6.23: FE-Netz und Materialparameter der eingespannten Lochplatte unter Axialdruck

sation des Zufallsfelds für die Korrelationslänge $\ell_c = 10^4 \text{ mm}^2$ gezeigt. Im Be-

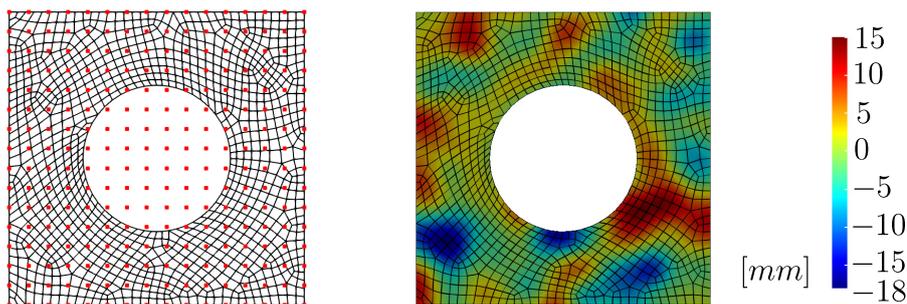


Abbildung 6.24: FE-Netz mit stochastischen Knoten (links) und Realisation einer stochastischen Imperfektion (rechts)

reich des Lochs werden stochastische Knoten generiert. Dies kann abhängig von der Herstellung und der Messung geometrischer Imperfektionen gemacht werden. Wird beispielsweise das Loch erst nach der Herstellung des Blechs und nach der Messung von Imperfektionen ausgestanzt, ist es sinnvoll die Eigenschaften des Zufallsfelds, die in diesem Bereich auch einen Einfluss auf den restlichen Bereich haben, zu berücksichtigen. Unter der Annahme, dass die stochastischen Imperfektionen des ausgestanzten Blechs keinen Einfluss auf andere Bereiche der Struktur haben, können die stochastischen Knoten in diesem Bereich gelöscht werden. Untersucht wird das Konvergenzverhalten der Standardabweichung des kritischen Beulfaktors $\sigma_{\alpha_{cr}}$ für unterschiedliche Diskretisierungen des stochastischen Netzes. Die Standardabweichung wird aus einer MCS mit 1000 Simulationen für zwei unterschiedliche Korrelationslängen $\ell_c = 10^3 \text{ mm}^2$ und $\ell_c = 10^4 \text{ mm}^2$ berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.25 dargestellt. Bereits für ein stochastisches Netz

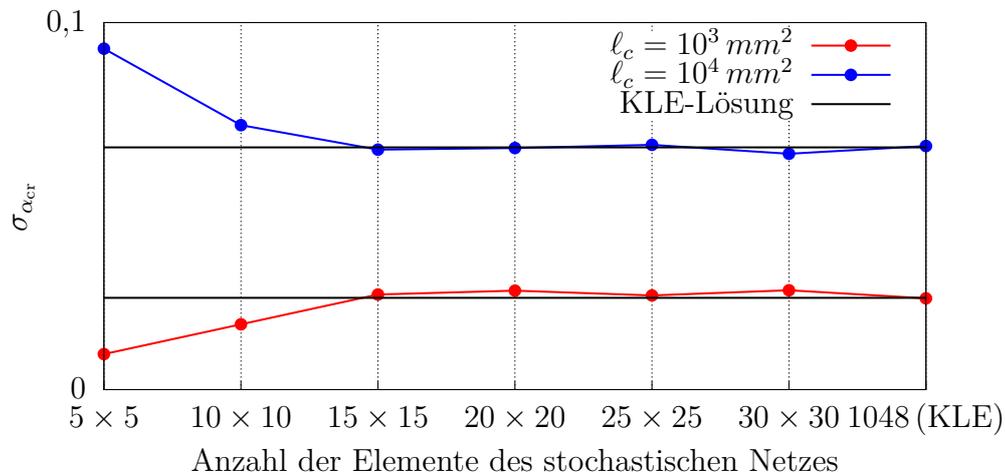


Abbildung 6.25: Konvergenzuntersuchung zur Standardabweichung des kritischen Beulfaktors für unterschiedliche stochastische Netze der Lochplatte

mit 15×15 Knoten ist eine gute Konvergenz der Standardabweichung zu beobachten. Die Lösung mit 1048 Elementen entspricht der KLE-Lösung, bei der alle FE-Knoten für die Diskretisierung des Zufallsfelds verwendet werden. In zahlreichen Veröffentlichungen wird die Wahl eines geeigneten stochastischen Netzes diskutiert, siehe z.B. [4, 30]. Das Ziel ist die Entwicklung von Netzgeneratoren für das stochastische Netz, um eine optimale Diskretisierung von Zufallsfeldern zu erreichen. Mithilfe solcher Netzgeneratoren wird beispielsweise versucht den Fehler der Varianz des Zufallsfelds

$$e_{\sigma^2} = \frac{1}{V_S} \int_{V_S} \frac{\text{Var}[H(\mathbf{x}^S, \theta)] - \text{Var}[\hat{H}(\mathbf{x}^S, \theta)]}{\text{Var}[\hat{H}(\mathbf{x}^S, \theta)]} dV_S \quad (6.63)$$

zu minimieren.

6.5 Modellierung unscharfer Ergebnisprozesse

In dieser Arbeit werden auch Beispiele zeitlicher Abhängigkeiten diskutiert. Beispielsweise wird in Kapitel 9.2 eine dynamische Untersuchung eines Propfans durchgeführt. Ein weiteres baupraktisches Beispiel eines Stockwerkrahmens unter Erdbebenbeanspruchung wird in [346] diskutiert. Dabei wird das Erdbeben mit unscharfen Parametern simuliert. Die Grundlagen zur Berücksichtigung von Unschärfe bei Beispielen mit zeitlicher Abhängigkeit wird in diesem Abschnitt bereitgestellt. Der Fokus wird auf unscharfe Ergebnisprozesse gelegt, die durch die Abbildung

$$\tilde{\mathbf{x}} \mapsto \tilde{\mathbf{z}}(t) = [\tilde{z}_{t_1}, \dots, \tilde{z}_{t_i}, \dots, \tilde{z}_{t_n}] \quad (6.64)$$

charakterisiert sind. Durch die Diskretisierung der Zeit folgt ein Prozess, bei dem zu jedem Zeitpunkt eine Fuzzy-Ergebnisgröße definiert ist. Weitere Abbildungsvarianten räumlicher und zeitlicher Abhängigkeiten werden in [116] diskutiert. In Abbildung 6.26 ist ein eindimensionaler unscharfer Ergebnisprozess sowie zwei Schnitte an den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ dargestellt.

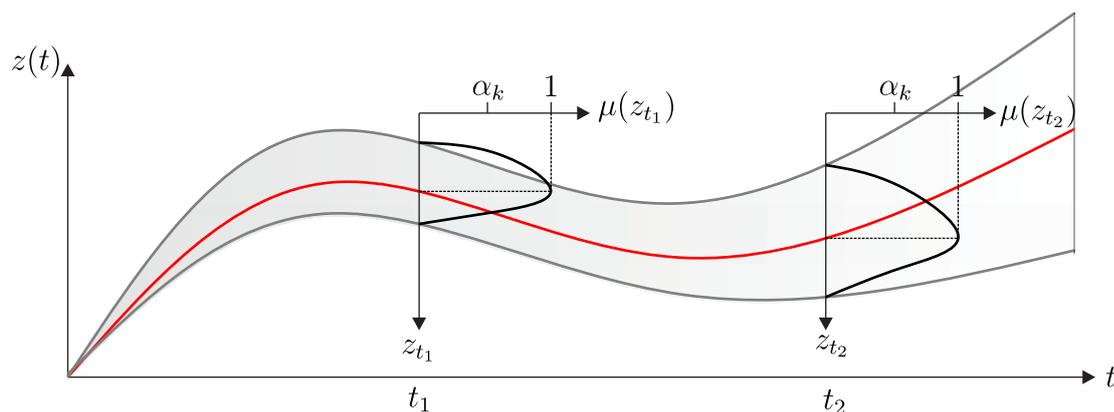


Abbildung 6.26: Eindimensionaler unscharfer Ergebnisprozess

Die zeitlichen Verläufe für $\mu \rightarrow 0$ werden als Stützfunktionen bezeichnet. Der Verlauf für $\mu \equiv 1$ wird Trendfunktion genannt. In [106, 118] werden Varianten der numerischen Umsetzung vorgestellt. In dieser Arbeit wird die beschriebene Variante I angewendet. In dieser Variante werden für jeden Zeitschritt eine Fuzzy-Ergebnisgröße berechnet. Die unscharfen Analysen sind zeitunabhängig. In Kapitel 7.3 wird die Umsetzung der α -Level-Optimierung mit Metamodellen veranschaulicht.

7 Methoden der künstlichen Intelligenz

Der Begriff künstliche Intelligenz (KI) umfasst viele unterschiedliche Verfahren. GRUHN & FRANZ geben in ihrem Artikel [112] eine Einordnung der KI und soll hier als Einführung wiedergegeben werden. In der Informationstechnik wird unter dem Begriff die Abbildung eines „intelligenten“ Verhaltens durch Computersysteme verstanden. In letzter Zeit rückt nicht nur in der Politik das Thema der KI immer mehr in den Fokus. Auch in Unternehmen werden KI-Systeme immer vielseitiger eingesetzt. Die Hauptgründe dafür sind, dass immer mehr Daten, Speicherkapazitäten und auch Rechenleistung zur Verfügung stehen. Dabei wird zwischen „starker KI“ und „schwacher KI“ unterschieden. In der „starken KI“ wird versucht menschliche Intelligenz nachzuahmen und sogar zu übertreffen. Dies ist nach heutigem Stand noch nicht möglich. Hingegen wird die „schwache KI“ schon in vielen technischen Systemen eingesetzt. Die Grundlage eines KI-Systems ist das Modell, das für bestimmte Fragestellungen entwickelt ist.

In dieser Arbeit werden FE-Modelle erstellt, die dann durch ein geeignetes KI-Verfahren ersetzt werden sollen. Nach einem Lernprozess soll die KI in der Lage sein für gewisse Eingangsdaten die FE-Lösung mit erheblich weniger Rechenzeit „vorherzusagen“. Das maschinelle Lernen (engl.: *Machine Learning*) wird in drei Varianten unterschieden: überwachtes Lernen, unüberwachtes Lernen und verstärkendes Lernen (engl.: *Reinforcement Learning*). Die in diesem Kapitel vorgestellten Methoden beziehen sich alle auf das überwachte Lernen. Das heißt, die Trainingsdaten oder Stützstellen an denen eine FE-Rechnung nötig ist, werden vom Benutzer vorgegeben. Beim unüberwachten Lernen hingegen entscheidet das KI-System hinsichtlich sinnvoller Trainingsdaten. Eine stärkere Version stellt das *Reinforcement Learning* dar. Dabei findet der Lernprozess durch direktes Feedback statt und nicht durch die Vorgabe von Trainingsdaten. Als Beispiel ist der Schachcomputer zu nennen.

Zusammengefasst kommen in dieser Arbeit zur Modellierung mit unscharfen Daten die Methoden der „schwachen KI“ zum Einsatz. Zuerst werden die Grundlagen der Metamodellierung vorgestellt, orientiert an DEY & ADHIKARI [63], FORRESTER ET AL. [96], QUEIPO ET AL. [237], RYBERG ET AL. [261], SIMPSON ET AL. [292], SUDRET ET AL. [313] und WANG & SHAN [344]. Danach werden die einzelnen Ersatzmodelle: *Polynominterpolation*, *Ausgleichsrechnung*, *Kriging*, *Neuronale Netze* und die *hochdimensionale Modelldarstellung* vorgestellt. Zusätzlich wird die *globale Sensitivitätsanalyse* beschrieben, um Aussagen über den Einfluss der Eingangsparameter auf die Systemantwort treffen zu können. Die Vor- und Nachteile der aufgeführten Metamodelle werden anschließend an möglichst einfachen numerischen Beispielen gezeigt.

7.1 Idee der Metamodellierung

Ein *Metamodell* ist eine Vereinfachung eines detaillierten Simulationsmodells und wird daher in der Literatur auch häufig als „Modell eines Modells“ beschrieben [156]. Im Gebiet der numerischen Strukturmechanik wird mithilfe eines Metamodells versucht rechenaufwendige Finite-Element-Modelle durch ein „einfacheres“ mathematisches Modell zu ersetzen. Im Englischen wird daher neben dem Begriff Metamodell (engl.: *metamodel*) auch oft die Übersetzung für ein Ersatzmodell (engl.: *surrogate model*) verwendet. In Abbildung 7.1 wird gezeigt an welcher Stelle die Metamodellstrategie in der Unschärfemodellierung eingesetzt wird. Die Grundidee ist das Computermodell oder allgemein einen Abbildungs-

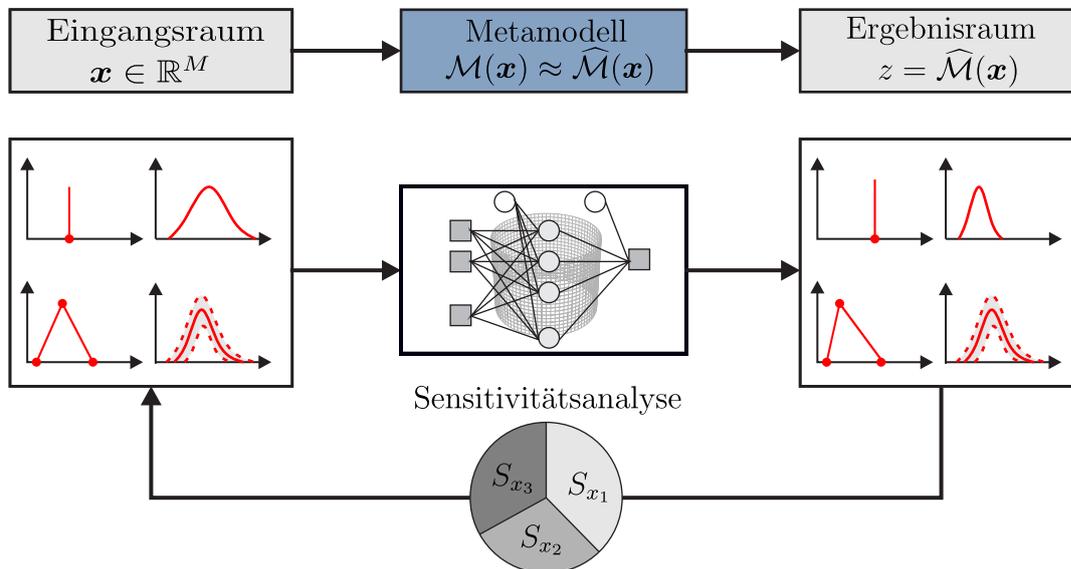


Abbildung 7.1: Metamodellstrategie im Rahmen der Unschärfemodellierung

operator $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ durch ein Näherungsmodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ zu ersetzen:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) \approx \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \quad . \quad (7.1)$$

Die eingeführte Notation orientiert sich an SUDRET [313]. Die Modellfunktion $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ stellt eine Abbildung der Eingangsgrößen in den Ergebnisraum dar:

$$\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^M \mapsto z = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^1 \quad (7.2)$$

mit den N_{sim} Stützstellen $\mathcal{X}_{\text{sim}} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{N_{\text{sim}}}\} \subset D$. Die dazugehörigen Ergebnisgrößen seien mit $\mathcal{Z}_{\text{sim}} = \{z_1, \dots, z_i, \dots, z_{N_{\text{sim}}}\}$ im eindimensionalen Ergebnisraum definiert. Wird ein mehrdimensionaler Ergebnisraum betrachtet, können die Ergebnisgrößen auch in einem Vektor zusammengefasst werden:

$$\mathbf{z} = \mathcal{M}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^O \quad (7.3)$$

mit O der Anzahl der Ergebnisgrößen. Da ein Metamodell eine Näherung beschreibt, entsteht ein Approximationsfehler

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathcal{M}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \quad , \quad (7.4)$$

der u.a. abhängig von der Anzahl der Stützstellen N_{sim} ist. Wenn das Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ aufgestellt ist, können nun an beliebigen Stützstellen im Eingangsraum weitere Ergebnisgrößen ausgewertet werden ohne weitere aufwendige Berechnungen mit dem Abbildungsoperator $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ durchführen zu müssen. Neben dem Vorteil, dass die Auswertung des Metamodells erheblich weniger Rechenzeit kostet, ist durch $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ nun auch ein funktioneller Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen gegeben. Deshalb wird im Zusammenhang mit der Metamodellierung auch häufig das Synonym „Antwortflächenverfahren“ (engl.: *Response Surface Method*, RSM) verwendet. In Abbildung 7.2 wird durch das Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ eine „Antwortfläche“ dargestellt.

a) Versuchsplan (DoE)

b) Metamodell

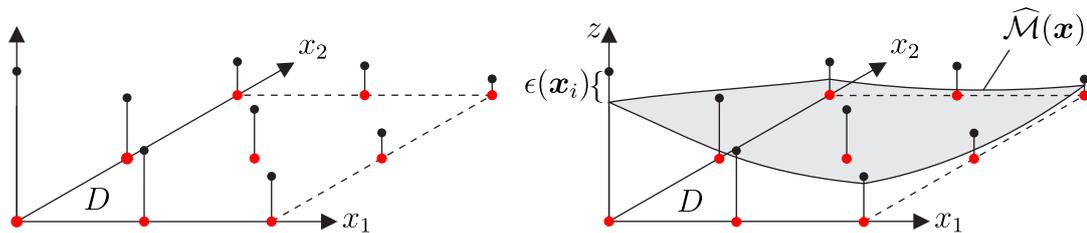


Abbildung 7.2: Darstellung eines Metamodells für den zweidimensionalen Fall mit Versuchsplanung (links) und der Näherung durch ein Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ (rechts)

Die Bezeichnung RSM wurde im Zusammenhang der Polynomapproximation eingeführt und ist nur eine bestimmte Klasse der Metamodelle, siehe z.B.: [131, 211, 212].

7.2 Die statistische Versuchsplanung

Die Entwicklung eines Metamodells erfordert zunächst die Erstellung eines Versuchsplans (engl.: *Design of Experiments*, DoE), siehe Abbildung 7.2. Das DoE ist die Wahl der Stützstellen (engl.: *sample points*) im entsprechenden Definitionsbereich und wird daher oft auch als *sampling plan* bezeichnet [237]. Unterschieden wird zwischen klassischen und raumfüllenden Methoden (engl.: *space filling designs*) [292]. Die klassischen Methoden stammen ursprünglich aus der Planung von

physikalischen Experimenten. Dazu gehören z.B. das *Factorial Design* [208], *Central Composite Design* [38] und das *Box Behnken Design* [35]. Die drei Methoden sind in Abbildung 7.3 mit drei Eingangsvariablen dargestellt.

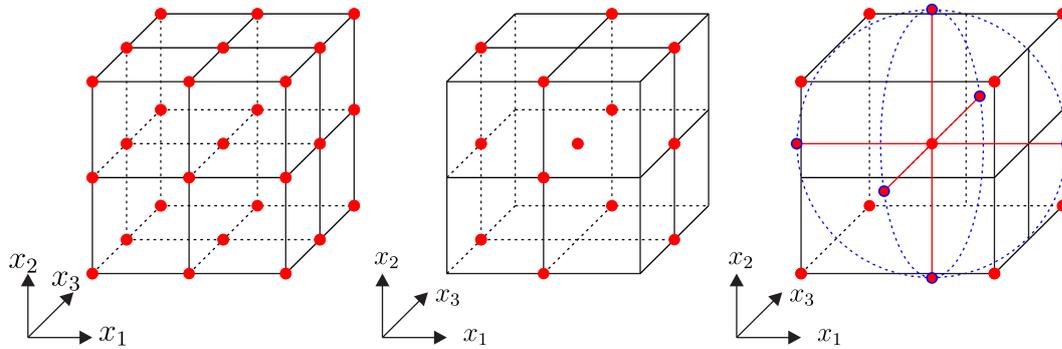


Abbildung 7.3: Klassische Methoden der Versuchsplanung mit drei Eingangsvariablen: *Full Factorial Design* (links), *Box Behnken Design* (mitte) und *Central Composite Design* (rechts)

Bei einer vollfaktoriellen Versuchsplanung (engl.: *Full Factorial Design*) kann die Anzahl der Stützstellen mit der Dimension exponentiell ansteigen. Daher ist eine äquidistante Anordnung der Stützstellen für Problemstellungen mit einem hochdimensionalen Eingangsraum nicht mehr geeignet. Außerdem kommen bei stochastischen Computersimulationen häufiger die raumfüllenden Methoden zum Einsatz. Beispielsweise kann mithilfe der *Monte-Carlo-Methode* eine zufällige Anordnung der Stützstellen generiert werden (engl.: *Simple Random Sampling*). Hierbei kann es allerdings passieren, dass Bereiche des Versuchsraums nicht berücksichtigt werden. Um eine bessere Raumausfüllung zu erreichen, empfiehlt es sich daher eine Versuchsplanung in Form einer geschichteten Zufallsstichprobe (engl.: *Stratified Random Sampling*) zu verwenden. Bei dieser Variante wird der Versuchsraum in Abschnitte unterteilt, in denen dann einzelne Stichproben gezogen werden. Ein beliebtes Verfahren ist das *Latin Hypercube Sampling* (LHS). Durch eine „intelligenter“ Anordnung kann die Anzahl der Stützstellen weiter reduziert werden, indem Stützstellen mit gleichen Informationen entfernt werden. Dieses Verfahren soll nachfolgend detaillierter beschrieben werden.

Latin Hypercube Sampling

Das *Latin Hypercube Sampling* wurde von MCKAY [195] eingeführt und u.a. von STEIN [307] weiterentwickelt. Das LHS baut auf dem *Stratified Sampling* auf [262,290]. Die Idee besteht darin den Versuchsraum D in N voneinander getrennte Schichten S_j zu unterteilen. Dabei gilt: $\bigcup_{j=1}^N S_j = D$ [287]. Die L Realisationen

pro Schicht $\mathbf{x}_j = \{x_{1j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{Lj}\}$ können folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= F_{X_i}^{-1}(U_{ij}) \quad , \quad i = 1, \dots, L \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \\ U_{ij} &= \frac{j-1 + \xi_{ij}}{N} \quad . \end{aligned} \quad (7.5)$$

F_{X_i} sind kumulative Verteilungsfunktionen und $\xi_{ij} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ sind unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen auf dem Intervall $[0, 1]$. Für eine Schichtanzahl $N = 1$ und $L = N_{\text{sim}}$ wird der Zusammenhang für das einfache *Simple Random Sampling* erhalten. Der Vorteil der geschichteten Stichprobe ist eine bessere Abdeckung des Versuchsraums durch die Vermeidung einer „Clusterbildung“, d.h. einer Ansammlung der *sample points*. Allerdings steigt auch bei einer Stützstelle pro Schicht ($L = 1$) die Gesamtanzahl der notwendigen Stützstellen mit der Dimension M exponentiell an: $N_{\text{sim}} = N^M$. Die Motivation vom LHS ist nun diesen Anstieg der *sample points* zu verhindern, indem unnötige Stützstellen vermieden werden. Die Vorgehensweise ist vergleichbar mit dem „Sudoku-Spiel“, in dem nur ein *sample point* pro Zeile und Spalte gesetzt werden darf. Das Sudoku-Spiel ist ein spezielles lateinisches Quadrat im zweidimensionalen Raum [7]. Die Erweiterung auf den mehrdimensionalen Fall wird „Hyperwürfel“ (engl.: *hypercube*) genannt. Die Stützstellen im Rahmen des LHSs können nach STEIN [307] folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x_{jk} &= F_{X_k}^{-1}(U_{jk}) \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad , \quad k = 1, \dots, M \\ U_{jk} &= \frac{\pi_{jk} - 1 + \xi_{jk}}{N} \quad . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Dabei ist π_{jk} eine zufällige Permutation von $\{1, 2, \dots, N\}$. Demzufolge ist $\boldsymbol{\pi}$ eine $N \times M$ -Matrix. Die Adresse der Stützstellen im gleichmäßig eingeteilten Versuchsraum mit N Schichten pro Dimension wird durch die Werte in einer Zeile der Matrix angegeben. Wobei für die Gesamtanzahl der Stützstellen gilt: $N_{\text{sim}} = N$. Für den 2-D Versuchsraum entsteht ein regelmäßiges Gitter mit N^M Zellen. In welcher „Zelle“ sich die Stützstelle befindet, wird mit π_{jk} angegeben. Mithilfe der gleichverteilten Zufallsvariable ξ_{jk} wird definiert, wo genau in der „Zelle“ sich die Stützstelle befinden soll [307]. In Abbildung 7.4 ist die Methode für einen Versuchsraum als Einheitsquadrat mit $M = 2$ Eingangsvariablen und $N = 4$ Schichten dargestellt. Die LHS-Bedingung, dass nur eine Stützstelle pro Reihe vorkommen darf, wird in der Abbildung 7.4 sichtbar. Alternativ wird häufig auch das zentrierte LHS (engl.: *Midpoint Latin Hypercube Sampling*, MLHS) verwendet [290]. Hierzu ändert sich U_{jk} in Gleichung (7.6) wie folgt:

$$U_{jk} = \frac{\pi_{jk} - 0,5}{N} \quad . \quad (7.7)$$

Dadurch befindet sich jede Stützstelle im Mittelpunkt einer Zelle. Auch hier handelt es sich um eine zufällige Versuchsplanung mit $(M!)^{N-1}$ möglichen Anordnungen der Stützstellen. Die drei Methoden der zufallsbasierten Versuchsplanung:

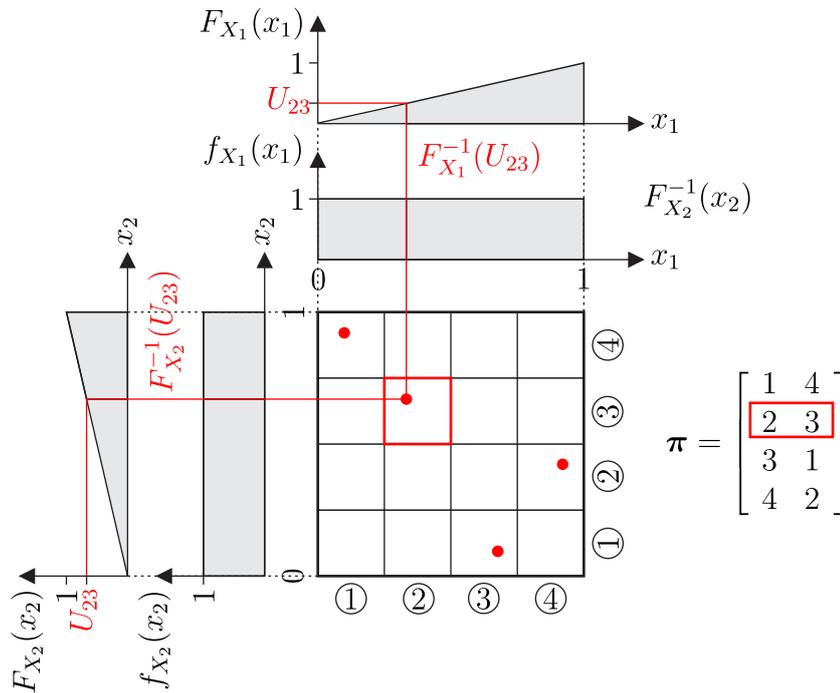


Abbildung 7.4: Darstellung des LHS auf dem Einheitsquadrat

Simple Random Sampling, Stratified Sampling und Latin Hypercube Sampling sind in Abbildung 7.5 mit $N_{\text{sim}} = 25$ Stützstellen gegenübergestellt.

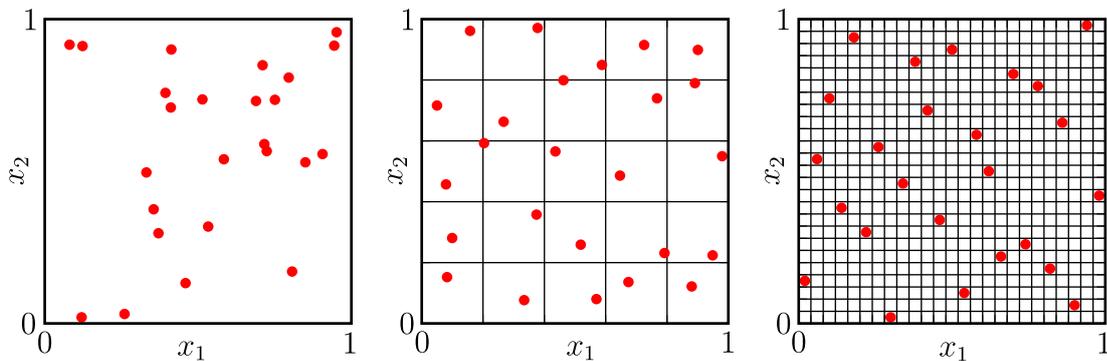


Abbildung 7.5: Methoden der Versuchsplanung als Zufallsstichprobe, Stichprobenanzahl $N_{\text{sim}} = 25$: Simple Random Sampling (links), Stratified Sampling (mitte) und Latin Hypercube Sampling (rechts)

Bei den Methoden können künstliche Korrelationen auftreten. Um das zu verhindern, empfiehlt OWEN in [220] für das LHS oder MLHS zusätzlich einen Algorithmus basierend auf dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren. Dieser Algorithmus reduziert die Korrelation der Stützstellen unter Einhaltung der LHS-

Bedingung. Als Abbruchkriterium dient die mittlere quadratische Korrelation

$$\rho^2 = \frac{\sum_{j=2}^M \sum_{k=1}^{j-1} \rho_{jk}^2}{(M-1)M/2} \leq TOL \quad , \quad (7.8)$$

wobei hier die Stichprobenkorrelation ρ_{jk} wie folgt berechnet wird:

$$\rho_{jk} = \frac{1}{N_{\text{sim}} - 1} \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (x_{ij} - \bar{\mu}(\mathbf{x}_j))(x_{ik} - \bar{\mu}(\mathbf{x}_k))}{\sigma_{X_j} \sigma_{X_k}} \quad , \quad j = 1 \dots M \quad . \quad (7.9)$$

Die Abbildung 7.6 zeigt auf der linken Seite ein MLHS mit zwei Eingangsvariablen und $N_{\text{sim}} = 25$ ohne *Gram-Schmidt-Orthogonalisierung*. Die mittlere quadratische Korrelation beträgt $\rho^2 = 0,6876$. Für eine maximale Korrelation gilt: $\rho^2 = 1,0$. In diesem Fall liegen alle Stützstellen auf einer Geraden. Dabei ist auch die LHS-Bedingung eingehalten. Auf der rechten Seite der Abbildung 7.6 ist das Ergebnis nach der Orthogonalisierung zu sehen. Hier gilt: $\rho^2 \approx 0$ und damit existiert näherungsweise keine Korrelation zwischen den Eingangsvariablen.

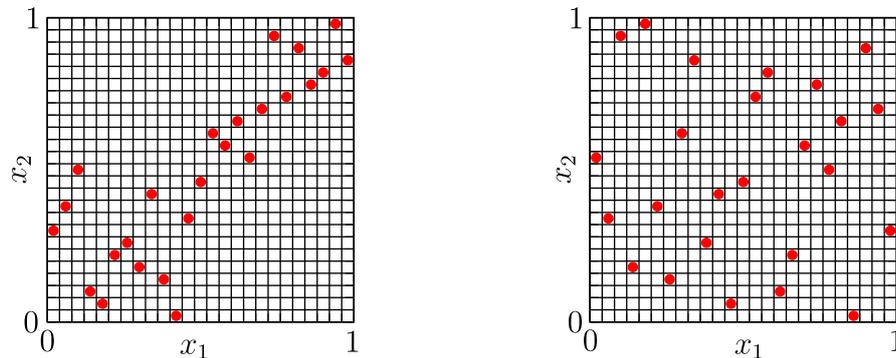


Abbildung 7.6: MLHS für zwei Eingangsvariablen ohne (links) und mit *Gram-Schmidt-Orthogonalisierung* (rechts)

Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung des LHSs ist zum Beispiel den kleinsten *Euklidischen* Abstand zu maximieren [147, 209]. Dies soll hier nur erwähnt bleiben und wird in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt.

7.3 Metamodelle in der Unschärfemodellierung

Die im Kapitel 6.3.1 bereits vorgestellte α -Level-Optimierung soll nun mit dem Konzept der Metamodellierung durchgeführt werden. Ein Metamodell kann im Schleifenalgorithmus der Unschärfemodellierung auf verschiedenen Ebenen eingesetzt werden, siehe Abbildung 7.7. Im Rahmen einer Fuzzy-stochastischen Ana-

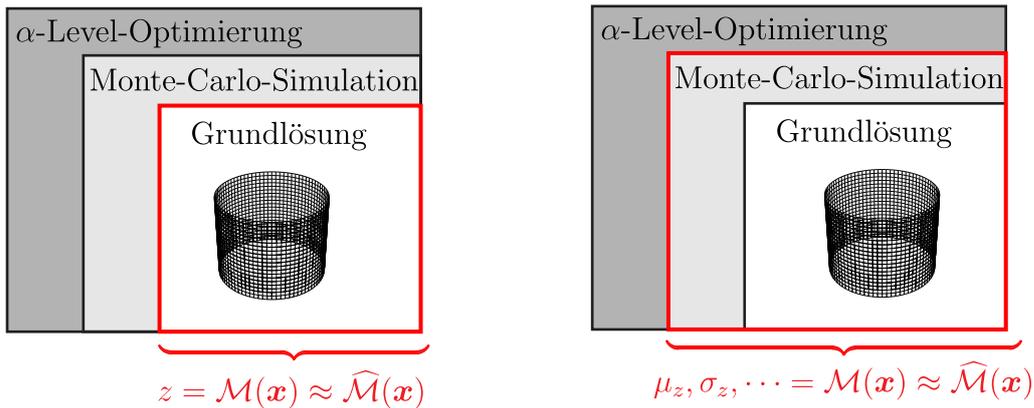


Abbildung 7.7: Anwendung der Metamodelle für die Grundlösung (links) oder der *Monte-Carlo-Simulation* (rechts)

lyse ist eine Möglichkeit, die Grundlösung durch ein Metamodell zu ersetzen. Die Monte-Carlo-Simulation wird dann mithilfe des Metamodells durchgeführt. Alternativ kann die *Monte-Carlo-Schleife* inklusive der Grundlösung ersetzt werden. In diesem Fall wird der Zusammenhang zwischen den Eingangsparametern und den statistischen Momenten, wie z.B. Mittelwert oder Standardabweichung, durch das Metamodell abgebildet. Diese Variante wird in Kapitel 8 bei der Unschärfemodellierung von Imperfektionen mit Zufallsfeldern angewendet. Dabei wird beispielsweise der Zusammenhang zwischen den Feldparametern des Zufallsfelds und dem Mittelwert der Beullast abgebildet. Die extremalen Punkte nach Gleichung (6.30) werden auf dem Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ ermittelt:

$$\begin{aligned} \widehat{z}_{\alpha_k, \ell} &\approx \min_{\mathbf{x} \in A_{\alpha_k}} [\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})] \\ \widehat{z}_{\alpha_k, r} &\approx \max_{\mathbf{x} \in A_{\alpha_k}} [\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})] \quad \text{mit } k = 1, \dots, N_{\text{alev}} \quad . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die Genauigkeit der Fuzzy-Ergebnisgröße ist demnach auch abhängig vom gewählten Metamodell. Meistens ist es ausreichend, das Metamodell lediglich auf der *Support-Menge* $\mathbf{x} \in S$ aufzustellen. Im Definitionsbereich der einzelnen α -Levels mit $D = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in A_{\alpha_k}\}$ wird das Optimierungsproblem gelöst, indem der Definitionsbereich für jedes α -Level angepasst wird, ohne dass das Metamodell

neu aufgestellt werden muss. Bei einem stark nichtlinearem Verhalten der Modellfunktion muss allerdings der *Support* zum Auffinden der extremalen Punkte sehr fein diskretisiert werden. Alternativ können zur Effizienzsteigerung die extremalen Punkte auch auf dem Metamodell mithilfe von modernen Suchalgorithmen gefunden werden. Hierzu eignen sich Algorithmen auf Basis von Evolutionsstrategien, wie z.B. der Optimierungsalgorithmus nach HANSEN [121, 122].

Eine weitere Möglichkeit, die in der Literatur z.B. in [2, 14] angewendet wird, ist dass das Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}_{\alpha_k}(\mathbf{x}_{\alpha_k})$ pro α -Level neu aufgestellt wird. Dabei kann auch das DoE geändert werden. Dies kann zwar bei stark nichtlinearem Systemverhalten zu einer besseren Konvergenz führen, hat aber auch einen höheren Rechenaufwand zur Folge. Deshalb wird diese Variante hier nicht näher betrachtet. Hingegen wird stets das Ziel verfolgt, ein geeignetes Metamodell auf dem *Support* aufzustellen. Beide Varianten sind in Abbildung 7.8 gegenübergestellt.

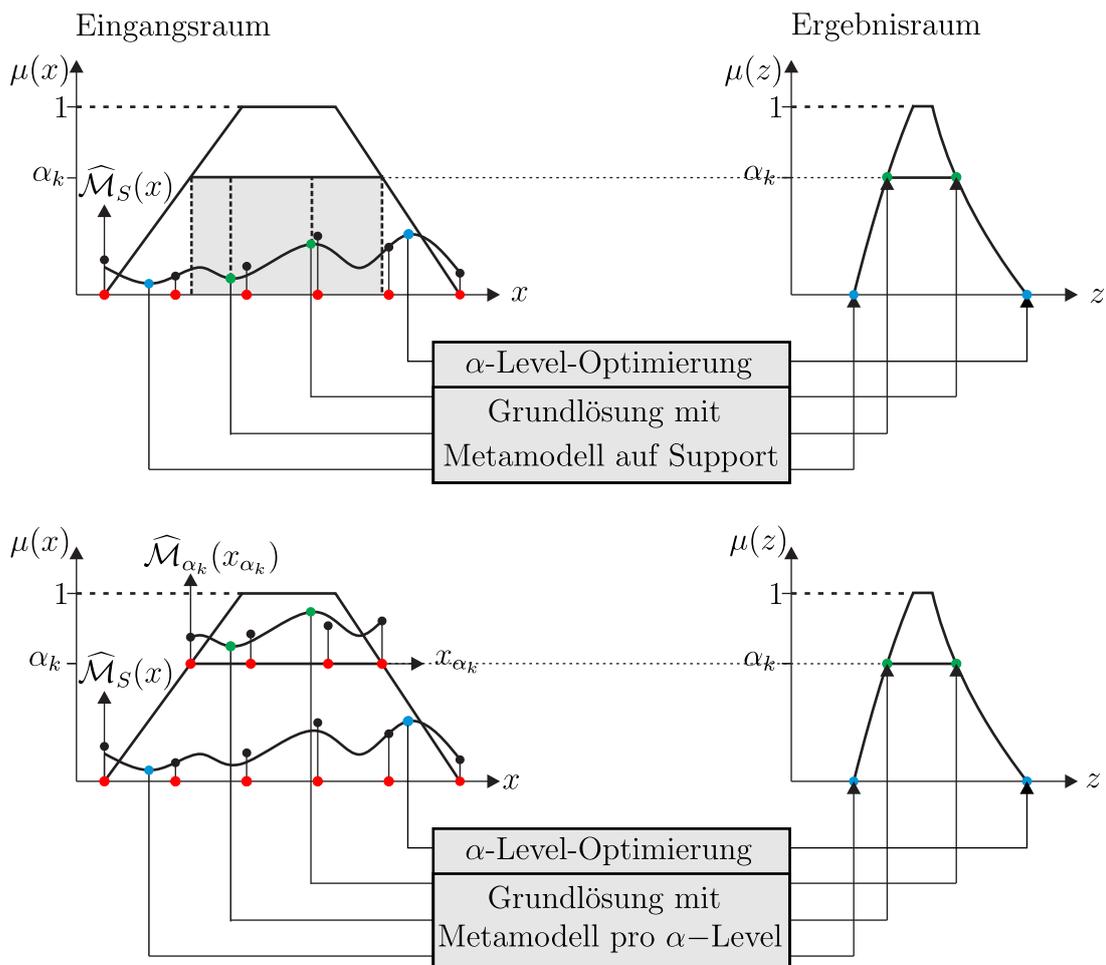


Abbildung 7.8: Die α -Level-Optimierung mit einer Eingangsvariable: Metamodell auf der *Support-Menge* (oben) oder für jedes α -Level ein neues Metamodell (unten)

Für zeitabhängige Probleme wird für jeden Zeitschritt das Metamodell neu ausgewertet. Zu Beginn wird ein passendes DoE gewählt. Dabei kann für jeden Zeitschritt das gleiche DoE verwendet werden. Zur numerischen Umsetzung eines unscharfen Ergebnisprozesses ist es sinnvoll, zuerst alle Zeitverlaufskurven mit $1, \dots, t_n$ Zeitschritten für jeden *sample point* zu berechnen und in einer Matrix der Form

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} z_{t_1}^1 & z_{t_2}^1 & \dots & z_{t_n}^1 \\ z_{t_1}^2 & z_{t_2}^2 & \dots & z_{t_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{t_1}^{N_{\text{sim}}} & z_{t_2}^{N_{\text{sim}}} & \dots & z_{t_n}^{N_{\text{sim}}} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, t_1) \quad \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, t_2) \qquad \qquad \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, t_n)$

abzuspeichern. Die Anzahl der Versuchskurven entspricht der Anzahl der Stützstellen für ein gewähltes DoE. Danach kann die Ergebnisgröße an jedem Zeitpunkt durch erneutes Auswerten des Metamodells berechnet werden. Das Vorgehen für zeitabhängige Problemstellungen wird in Abbildung 7.9 verdeutlicht. In Tabelle 7.1 sind die in dieser Arbeit umgesetzten Metamodelle zur Berücksichtigung polymorpher Unschärfe aufgelistet. Diese werden in zwei Kategorien eingeteilt: Interpolations- und Ausgleichsmodelle. Bei den Interpolationsmodellen

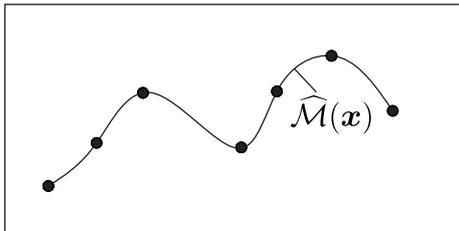
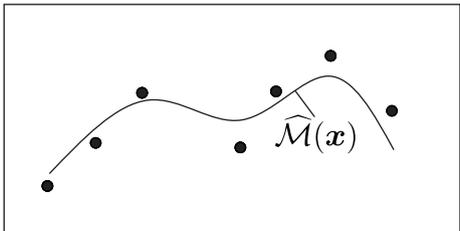
Interpolationsmodelle	Ausgleichsmodelle
	
<ul style="list-style-type: none"> • Polynominterpolation $\widehat{\mathcal{M}}^I(\mathbf{x})$ • HDMR-Metamodell mit Interpolation $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{HD}}(\mathbf{x})$ • Kriging $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KR}}(\mathbf{x})$ 	<ul style="list-style-type: none"> • Methode der kleinsten Fehlerquadrate $\widehat{\mathcal{M}}^A(\mathbf{x})$ • HDMR-Metamodell mit Ausgleichsrechnung $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{HD}}(\mathbf{x})$ • Neuronale Netze $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KNN}}(\mathbf{x})$

Tabelle 7.1: Klassifizierung der Metamodelle

verlaufen die Näherungsfunktionen anders als bei den Ausgleichsmodellen durch die vorgegebenen Stützstellen. Durch diese Bedingung kann eine kleine Störung in den Daten eine große Änderung des Verlaufs der Näherungsfunktion verursachen [236]. Eine kleine Störung in den Daten kann im Rahmen einer MCS

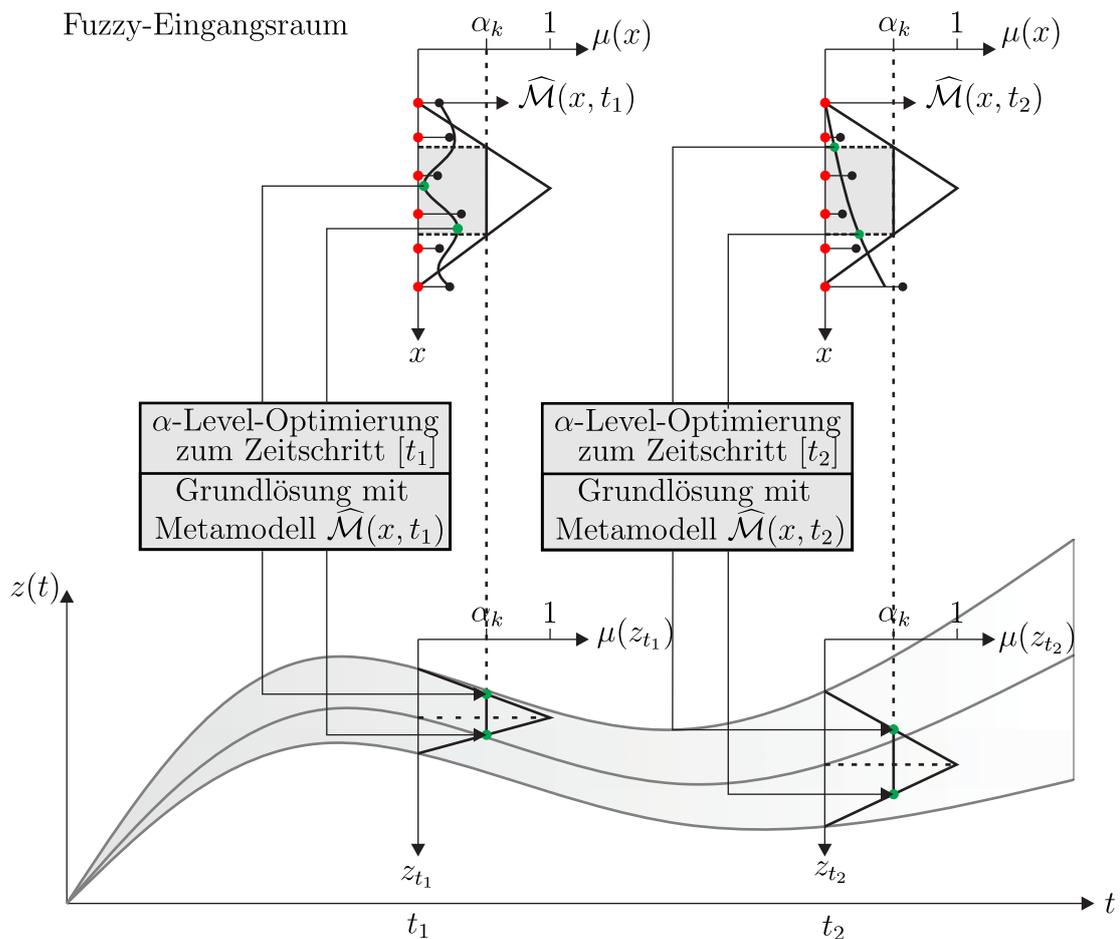


Abbildung 7.9: Unscharfer Ergebnisprozess und α -Level-Optimierung mit Metamodellen

zum Beispiel durch einen zu geringen Stichprobenumfang verursacht werden. Da die Näherungsfunktion bei den Ausgleichsmodellen nicht zwangsläufig durch die Stützstellen verlaufen muss, sind diese Modelle daher in der Lage einen Fehler in der stochastischen Simulation auszugleichen. Zusätzlich existieren in der Literatur noch weitere interessante Techniken der Metamodellierung, die in diesem Zusammenhang untersucht werden können. Dazu zählen u.a. *Radial Basis Functions* (RBF) [87, 124], *Moving Least Squares* (MLS) [39, 175], Metamodellierung mit NURBS [320], *Multivariate Adaptive Regression Splines* (MARS) [102], *Support Vector Machine* (SVM) [293, 323], *Polynomial chaos* (PC) [311] oder das PC-Metamodell in Kombination mit dem *Kriging-Verfahren*, auch *PC-Kriging* genannt [152, 271]. Nachfolgend werden nun die theoretischen Grundlagen der eingesetzten Metamodelle näher beschrieben und im Anschluss die Vor- und Nachteile an Beispielen gezeigt.

7.3.1 Polynominterpolation als Metamodell

Als Einstieg in die Metamodell-Strategie dient hier die *Lagrange-Form* des Interpolationspolynoms, auch bekannt aus der FEM. Im Gegensatz zur Finite-Element-Methode, bei der stückweise *Lagrange-Polynome* als Ansatzfunktionen verwendet werden, wird ein globales Polynom beliebig hoher Ordnung gesucht. Die Grundlagen orientieren sich an HÄMMERLIN [132] und QUARTERONI [236], wobei direkt der allgemeine M -dimensionale Fall in $D \in \mathbb{R}^M$ mit K -ter Ordnung beschrieben wird. Gesucht wird ein M -dimensionales Polynom $P_K^I(\mathbf{x})$, das durch die Stützstellen

$$P_K^I(\mathbf{x}_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, N_{\text{sim}} \quad (7.12)$$

verlaufen soll. Der hochgestellte Index I steht für Interpolation und dient später zur Unterscheidung zwischen den einzelnen Metamodellen. Eine Voraussetzung ist, dass der Polynomgrad K in jeder Dimension gleich ist. Damit seien $N_{\text{sim}} = (K + 1)^M$ Stützstellen

$$([x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_M}^{(M)}]_i, z_{i_1, i_2, \dots, i_M}), \quad i_1, i_2, \dots, i_M = 0, \dots, K \quad (7.13)$$

gegeben, die auch als Interpolationsknoten bezeichnet werden. Das M -dimensionale Interpolationspolynom höchstens K -ter Ordnung ist wie folgt definiert:

$$P_K^I(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K \cdots \sum_{i_M=0}^K a_{i_1, i_2, \dots, i_M} \mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_M}(\mathbf{x}) \quad (7.14)$$

mit den zunächst noch unbekanntenen Koeffizienten $a_{0,0,\dots,0} \dots a_{K,K,\dots,K}$ und den *Lagrange-Faktoren* $\mathcal{L}_{0,0,\dots,0}(\mathbf{x}) \dots \mathcal{L}_{K,K,\dots,K}(\mathbf{x})$ als Basisfunktionen im mehrdimensionalen Polynomraum $\mathbb{P}_{K_1, K_2, \dots, K_M}$, wobei gilt $K_1 = K_2 = \dots = K_M = K$. Die Formulierung der mehrdimensionalen *Lagrange-Faktoren* erfolgt über das Produkt $\prod_{n=1}^M (\bullet)$ der eindimensionalen Faktoren

$$\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_M}(\mathbf{x}) = \prod_{n=1}^M \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i_n}}^K \frac{x^{(n)} - x_j^{(n)}}{x_{i_n}^{(n)} - x_j^{(n)}} \quad (7.15)$$

Dabei stellt die Forderung

$$\mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_M}(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_M}^{(M)}) = \prod_{n=1}^M \delta_{i_n j_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } i_n = j_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.16)$$

sicher, dass das Polynom durch die Stützstellen verläuft. Eingesetzt in die Interpolationsbedingung nach Gleichung (7.12) werden für die unbekanntenen Koeffizienten genau die Stützwerte

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_M} = z_{i_1, i_2, \dots, i_M}, \quad i_1, i_2, \dots, i_M = 0, \dots, K \quad (7.17)$$

erhalten. Daraus folgt das M-dimensionale *Lagrange-Interpolationspolynom* als Metamodell

$$\widehat{\mathcal{M}}^I(\mathbf{x}) = P_K^I(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K \cdots \sum_{i_M=0}^K z_{i_1, i_2, \dots, i_M} \mathcal{L}_{i_1, i_2, \dots, i_M}(\mathbf{x}) \quad . \quad (7.18)$$

Die eindimensionalen Polynome sind nach Gleichung (7.15) voneinander unabhängig. Deshalb kann dieses Metamodell auch nur für unabhängige Fuzzy-Eingangsvariablen verwendet werden. Außerdem soll noch erwähnt sein, dass bei einer äquidistanten Stützstellenwahl der Interpolationsfehler nicht zu Null wird:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} |\mathcal{M}(\mathbf{x}) - P_K^I(\mathbf{x})| \neq 0 \quad . \quad (7.19)$$

Speziell an den Randpunkten divergiert das Interpolationspolynom [236]. Dieses Phänomen hat CARL RUNGE erstmals in [259] beschrieben und wird daher auch als RUNGE-Phänomen bezeichnet. Durch eine Verdichtung der Stützstellen an den Rändern können diese „Überschwingungen“ verhindert werden. In der Praxis werden dazu die $K + 1$ Nullstellen des TSCHEBYSCHOW-Polynoms [126]

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(M)} = \cos\left(\frac{K-i}{K}\pi\right), \quad i = 0 \dots K \quad (7.20)$$

angewendet, die auf dem Intervall $x \in [-1, 1]$ definiert sind und anschließend in einen beliebigen physikalischen Versuchsraum transformiert werden können.

7.3.2 Methode der kleinsten Fehlerquadrate als Metamodell

Die Polynomapproximation ist als Metamodell bekannt aus dem *Antwortflächenverfahren* und wird häufig auch als Regressionsmodell bezeichnet. Im Englischen wird die Methode *Least Squares method* (LSQ) genannt. Im Gegensatz zur Forderung nach Gleichung (7.12) der Polynominterpolation muss die Näherungsfunktion $\widehat{M}(\mathbf{x})$ nicht durch die „exakten“ Werte der Stützstellen verlaufen. Dadurch können Instabilitäten des Metamodells in Folge gestörter Daten verhindert werden [236]. Die Anzahl der Stützstellen N_{sim} ist damit nicht an den Polynomgrad K gekoppelt. Um eine stabile Lösung zu erhalten, sollte dennoch gelten: $N_{\text{sim}} \gg K^M$. Bevor der mehrdimensionale Fall beschrieben wird, soll zunächst das Prinzip der LSQ im eindimensionalen Fall $D \in \mathbb{R}^1$ beschrieben werden. Die folgenden Grundlagen sind hierzu aus [123, 236] entnommen. Gegeben seien im eindimensionalen Raum $i = 1 \dots N_{\text{sim}}$ Datenpunkte (x_i, z_i) . Das Ziel ist ein Polynom K -ter Ordnung der Struktur

$$P_K^A(x_i) = \sum_{j=0}^K a_j x_i^j \quad (7.21)$$

zu finden, das den quadratischen Fehler

$$\min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (z_i - P_K^A(x_i, \mathbf{a}))^2 \quad (7.22)$$

minimiert. Die Koeffizienten a_j sind noch unbekannt und müssen ermittelt werden. Durch den hochgestellten Index A wird das Metamodell für eine Polynomapproximation gekennzeichnet. Die Bedingung zur Erfüllung des Minimierungsproblems wird durch die partielle Ableitung nach den Koeffizienten

$$\nabla_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (z_i - P_K^A(x_i, \mathbf{a}))^2 = \mathbf{0} \quad (7.23)$$

erreicht. Durch Einsetzen der Gleichung (7.21) und nach einigen Umformungen, kann die partielle Ableitung wie folgt angegeben werden:

$$\nabla_{\mathbf{a}} = \frac{\partial}{\partial a_\ell} \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (z_i - \sum_{j=0}^K a_j x_i^j)^2 \right] = 2 \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (z_i - \sum_{j=0}^K a_j x_i^j) x_i^\ell \quad (7.24)$$

Wird dieser Zusammenhang in die Minimierungsbedingung (7.23) eingesetzt, folgt ein lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\sum_{j=0}^K \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} x_i^{j+\ell} a_j}_{\mathbf{X} \mathbf{a}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} z_i x_i^\ell}_{\mathbf{b}} \quad \ell = 0, \dots, K \quad (7.25)$$

Die Matrix und Vektoren für die Implementierung sind:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \begin{bmatrix} x_i^0 & x_i^1 & \cdots & x_i^K \\ x_i^1 & x_i^2 & \cdots & x_i^{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_i^K & x_i^{K+1} & \cdots & x_i^{2K} \end{bmatrix}_{(K+1) \times (K+1)}, \quad (7.26)$$

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \left[a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_K \right]_{(K+1) \times 1}^T \quad \text{und} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \left[z_i x_i^0 \quad z_i x_i^1 \quad \cdots \quad z_i x_i^K \right]_{(K+1) \times 1}^T. \quad (7.28)$$

Die unbekanntten Koeffizienten werden durch die Lösung des linearen Gleichungssystems (LGSs)

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{b} \quad (7.29)$$

erhalten. Je nach Stützstellenwahl kann die zu invertierende Matrix schlecht konditioniert sein.

Deshalb wird für eine bessere numerische Stabilität die VANDERMONDE-MATRIX vorgeschlagen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^K \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N_{\text{sim}}}^1 & x_{N_{\text{sim}}}^2 & \cdots & x_{N_{\text{sim}}}^K \end{bmatrix}_{N_{\text{sim}} \times (K+1)}. \quad (7.30)$$

Das Gleichungssystem kann mit der Beziehung

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{X} \quad (7.31)$$

in die Normalengleichung überführt werden:

$$\mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{z}}. \quad (7.32)$$

Die Koeffizienten können über das Lösen des LGSs

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{z}} \quad (7.33)$$

ermittelt werden. Dabei setzt sich die rechte Seite mit den Ergebnisgrößen

$$\bar{\mathbf{z}} = \left[z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_{N_{\text{sim}}} \right]_{N_{\text{sim}} \times 1}^T \quad (7.34)$$

zusammen. Das Metamodell für den eindimensionalen Fall der Polynomapproximation ist schlussendlich

$$\widehat{\mathcal{M}}^A(x) = P_K^A(x) = \sum_{j=0}^M a_j x^j. \quad (7.35)$$

In der Literatur ist häufig nur eine Formulierung der LSQ für den zweidimensionalen Fall zu finden. Zur Lösung der Approximation mit mehrdimensionalen Polynomen wird oft auf ein nichtlineares Gleichungssystem verwiesen [62]. Deshalb wird hier die Formulierung aus [347] vorgestellt, die mithilfe einer einfachen Indextransformation auch im mehrdimensionalen Fall auf ein lineares Gleichungssystem führt. Gegeben seien nun $i = 1, \dots, N_{\text{sim}}$ Stützstellen (\mathbf{x}_i, z_i) in $D \in \mathbb{R}^M$

$$([x_{(1)}^{i_1}, x_{(2)}^{i_2}, \dots, x_{(M)}^{i_M}]_i, z_{i_1, i_2, \dots, i_M}), \quad i_1, i_2, \dots, i_M = 0, \dots, K \quad . \quad (7.36)$$

Zu beachten ist, dass die Dimensionierung $(1), (2), \dots, (M)$ im Gegensatz zur Schreibweise bei der Polynominterpolation nach Gleichung (7.13) jetzt aus Gründen der Übersichtlichkeit tiefgestellt ist. Gesucht sei das M-dimensionale Polynom höchstens K-ter Ordnung

$$\begin{aligned} P_K^A(\mathbf{x}) &= \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K \cdots \sum_{i_M=0}^K a_{i_1, i_2, \dots, i_M} x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2}, \dots, x_{(M)}^{i_M} \\ &= \sum_{\substack{i_n=0 \\ n=1 \dots M}}^K a_{i_1, i_2, \dots, i_M} \prod_{n=1}^M x_{(n)}^{i_n} \quad , \end{aligned} \quad (7.37)$$

das den quadratischen Fehler

$$\nabla_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} (z_i - P_K^A(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}))^2 = \mathbf{0} \quad (7.38)$$

minimieren soll. Wird das Monom

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_M} x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2}, \dots, x_{(M)}^{i_M} \quad (7.39)$$

betrachtet, ist zu erkennen, dass die Exponenten durch die Indizes der unbekanntenen Koeffizienten definiert werden. Die Anzahl der möglichen Monome ist $(K+1)^M$. Für die Adressierung in einem linearen Gleichungssystem wie in Gleichung (7.25) ist es sinnvoll, die Koeffizienten und Exponenten mit einer neuen Indizierung anzugeben:

$$a_{i_1, i_2, \dots, i_M} x_{(1)}^{i_1} x_{(2)}^{i_2}, \dots, x_{(M)}^{i_M} \Leftrightarrow a_{\hat{k}} x_{(n)}^{[w^{-1}(\hat{k})]_n} \quad . \quad (7.40)$$

Die Koeffizienten seien gegeben mit

$$\hat{\mathbf{a}} = \left[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{\hat{k}} \quad \cdots \quad a_{(K+1)^M} \right]^T \quad (7.41)$$

und die Umrechnung der Exponenten erfolgt mit der Vorschrift

$$\hat{k} := w(i_1, i_2, \dots, i_M) = 1 + \sum_{j=0}^{M-1} (K+1)^j i_{M-j} \quad . \quad (7.42)$$

Durch die inverse Abbildung werden wieder die ursprünglichen Exponenten

$$w^{-1}(\hat{k}) = [i_1 \quad i_2 \quad \cdots \quad i_n \quad \cdots \quad i_M] \quad (7.43)$$

erhalten. Die Transformation soll am Beispiel eines zweidimensionalen Polynoms mit $M = 1$ und einem Polynomgrad $K = 2$ gezeigt werden:

$$P_K^A(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^K \sum_{i_2=0}^K a_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = \begin{bmatrix} a_{00} x_1^0 x_2^0 & a_{01} x_1^0 x_2^1 & a_{02} x_1^0 x_2^2 \\ a_{10} x_1^1 x_2^0 & a_{11} x_1^1 x_2^1 & a_{12} x_1^1 x_2^2 \\ a_{20} x_1^2 x_2^0 & a_{21} x_1^2 x_2^1 & a_{22} x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix} . \quad (7.44)$$

Die ursprünglichen und transformierten Koeffizienten seien untereinander als Vektoren geschrieben:

$$\mathbf{a} = [a_{00} \quad a_{01} \quad \mathbf{a}_{02} \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{20} \quad a_{21} \quad a_{22}]^T \quad (7.45)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = [a_1 \quad a_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9]^T . \quad (7.46)$$

Der dritte Index kann mit der Transformationsgleichung (7.42) folgendermaßen berechnet werden:

$$w(02) = \hat{k} = 1 + [(2+1)^0 i_{2-0} + (2+1)^1 i_{2-1}] = 1 + \left[1 \cdot \underbrace{i_2}_2 + 3 \cdot \underbrace{i_1}_0 \right] = 3 . \quad (7.47)$$

Analog zur Gleichung (7.25) und mithilfe der eingeführten Indextransformation kann das LGS in der kompakten Schreibweise

$$\underbrace{\sum_{\hat{k}=1}^{(K+1)^M} \left[\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^{[w^{-1}(\hat{k})+w^{-1}(\hat{\ell})]_n} \right] a_{\hat{k}}}_{\hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{a}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} z_i \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^{[w^{-1}(\hat{\ell})]_n}}_{\hat{\mathbf{b}}} , \quad (7.48)$$

$$\hat{\ell} = 1, \dots, (K+1)^M$$

dargestellt werden. Für die Matrix $\hat{\mathbf{X}}$ und den Vektor $\hat{\mathbf{b}}$ folgt:

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \prod_{n=1}^M \begin{bmatrix} x_{(n),i}^0 & x_{(n),i}^1 & \cdots & x_i^{(K+1)^M} \\ x_{(n),i}^1 & x_{(n),i}^2 & \cdots & x_{(n),i}^{(K+1)^{M+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n),i}^{(K+1)^M} & x_{(n),i}^{(K+1)^{M+1}} & \cdots & x_{(n),i}^{(K+1)^M+(K+1)^M} \end{bmatrix}_{(K+1)^M \times (K+1)^M} , \quad (7.49)$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \left[z_i \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^0 \quad z_i \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^1 \quad \cdots \quad z_i \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^{(K+1)^M} \right]_{(K+1)^M \times 1}^T . \quad (7.50)$$

Die Koeffizienten nach Gleichung (7.41) werden durch Lösung des LGSs

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{X}}^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (7.51)$$

erhalten. Alternativ kann das Gleichungssystem mit der VANDERMONDE-Matrix aufgestellt werden:

$$\begin{bmatrix} 1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),1}^1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),1}^2 & \cdots & \prod_{n=1}^M x_{(n),1}^{(K+1)^M} \\ 1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),2}^1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),2}^2 & \cdots & \prod_{n=1}^M x_{(n),2}^{(K+1)^M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),N_{\text{sim}}}^1 & \prod_{n=1}^M x_{(n),i}^2 & \cdots & \prod_{n=1}^M x_{(n),N_{\text{sim}}}^{(K+1)^M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{(K+1)^M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N_{\text{sim}}} \end{bmatrix} . \quad (7.52)$$

Das Metamodell kann abschließend für den allgemein mehrdimensionalen Fall der Polynomapproximation mithilfe der vorgestellten kompakten Schreibweise wie folgt definiert werden:

$$\widehat{\mathcal{M}}^A(\mathbf{x}) = P_K^A(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{k}=1}^{(K+1)^M} a_{\hat{k}} \prod_{n=1}^M x_{(n)}^{[w^{-1}(\hat{k})]_n} . \quad (7.53)$$

7.3.3 Nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Zusätzlich soll an dieser Stelle auch das Vorgehen der Nichtlinearen Methode der kleinsten Fehlerquadrate (engl.: *Nonlinear Least Squares method*, NLLSQ) erläutert werden. Die Methode wird später für das *Fitten* von Korrelationsfunktionen angewendet, wird aber nicht als Metamodell eingesetzt. Bei der zuvor behandelten linearen LSQ ist die Modellfunktion $P_K^A(\mathbf{x}_i, \mathbf{a})$ zwar nichtlinear in \mathbf{x} , aber linear in den Koeffizienten \mathbf{a} . Das führt auch im mehrdimensionalen Fall auf ein lineares Gleichungssystem, siehe Abschnitt 7.3.2. Bei der NLLSQ hingegen sind die Modellfunktionen auch nichtlinear bezüglich den Koeffizienten \mathbf{a} . Für das nichtlineare Problem der kleinsten Fehlerquadrate folgt

$$\min_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) \equiv \min_{\mathbf{a}} \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \underbrace{(z_i - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{a}))^2}_{r_i} \quad . \quad (7.54)$$

Das Polynom in $D \in \mathbb{R}^M$ wird durch eine allgemeine Modellfunktion $\mathcal{M}(\mathbf{x}_i, \mathbf{a})$ ersetzt. Aufgrund der Nichtlinearität der Modellfunktion in beiden Parametern muss ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden. Die notwendige Bedingung fordert, dass der Gradient Null werden muss

$$\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} r_i(\mathbf{a}) \frac{\partial r_i(\mathbf{a})}{\partial a_j} = \mathbf{0} \quad , j = 1, \dots, P \quad (7.55)$$

mit P der Anzahl der Koeffizienten bzw. der Anzahl der *Fitting*-Parameter. Die Bedingung kann mithilfe der Jacobi-Matrix

$$[J(\mathbf{a})]_{ij} = \frac{\partial r_i(\mathbf{a})}{\partial a_j} = -\frac{\partial \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{a})}{\partial a_j}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{sim}}, \quad j = 1, \dots, P \quad (7.56)$$

definiert werden zu

$$\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) = \mathbf{J}(\mathbf{a})^T \mathbf{r}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad . \quad (7.57)$$

Zur Lösung der nichtlinearen Gleichung mit dem *Newton-Verfahren* ist eine Linearisierung der Funktion notwendig:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}) &= \nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) + \nabla_{\mathbf{a}}^2 f(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{a}}^2 f(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{a} = -\nabla_{\mathbf{a}} f(\mathbf{a}) \quad . \end{aligned} \quad (7.58)$$

Die zweiten partiellen Ableitungen $\nabla_{\mathbf{a}}^2$ werden in der *Hesse-Matrix* zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{a}}^2 f(\mathbf{a}) &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_\ell} = \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} \frac{\partial r_i(\mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial r_i(\mathbf{a})}{\partial a_\ell} + \sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} r_i(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 r_i(\mathbf{a})}{\partial a_k \partial a_\ell} \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{a})^T \mathbf{J}(\mathbf{a}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{\text{sim}}} r_i(\mathbf{a}) \nabla_{\mathbf{a}}^2 r_i(\mathbf{a})}_{\mathbf{S}(\mathbf{a})}, \quad k, \ell = 1, \dots, P \quad . \end{aligned} \quad (7.59)$$

- Setze Startwerte: \mathbf{a}_0 und $k = 0$
- Iterationsschleife
 - (1) Berechne die Inkremente $\Delta \mathbf{a}_k$ durch Lösung des LGSs:

$$\left[\mathbf{J}(\mathbf{a}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{a}_k) \right] \Delta \mathbf{a}_k = -\mathbf{J}(\mathbf{a}_k)^T \mathbf{r}(\mathbf{a}_k)$$
 - (2) Update: $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k + \Delta \mathbf{a}_k$
 - (3) Konvergenz:
 WENN $\|\mathbf{J}(\mathbf{a}_k)^T \mathbf{r}(\mathbf{a}_k)\| \leq TOL \rightarrow \text{STOP}$
 SONST $\rightarrow k=k+1$ und gehe zu (1)

Tafel 7.1: Algorithmus des *Gauß-Newton-Verfahrens* für die Nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Mit der Definition des Gradienten und der *Hesse-Matrix* unter Vernachlässigung des zweiten Terms $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ folgt das nichtlineare Gleichungssystem

$$\left[\mathbf{J}(\mathbf{a})^T \mathbf{J}(\mathbf{a}) \right] \Delta \mathbf{a} = -\mathbf{J}(\mathbf{a})^T \mathbf{r}(\mathbf{a}) \quad , \quad (7.60)$$

das mit dem *Newton-Verfahren* gelöst werden kann. Die Vernachlässigung des zweiten Terms der *Hesse-Matrix* ist bei „schwach“ nichtlinearen Problemen für eine bessere *Performance* sinnvoll. Das Verfahren wird auch als *Gauß-Newton-Verfahren* bezeichnet. Der Lösungsalgorithmus ist in Tafel 7.1 dargestellt. Dieser kann auch für mehrdimensionale Polynome als Modellfunktionen $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{a})$ in $D \in \mathbb{R}^M$ verwendet werden. Allerdings wird die zuvor vorgestellte Indextransformation empfohlen, um das Iterationsverfahren zu vermeiden.

7.3.4 Kriging-Verfahren

Ein etabliertes Verfahren der Metamodellierung ist das *Kriging*, benannt nach dem Geologen D.G. KRIGE [170]. Da beim *Kriging-Modell* davon ausgegangen wird, dass die Modellfunktion einer Realisation eines *Gauß-Prozesses* (GP) entspricht, wird das *Kriging-Verfahren* auch oft als *Gauß-Prozess-Modell* bezeichnet. Die Ausgangsgleichung des Metamodells ist demnach ein stationärer *Gauß-Prozess* [269]:

$$Y(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} + \sigma^2 Z(\mathbf{x}, \omega) \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \quad (7.61)$$

Eine Realisation ist hierzu in Abbildung 7.10 dargestellt. Mit dem ersten Anteil in

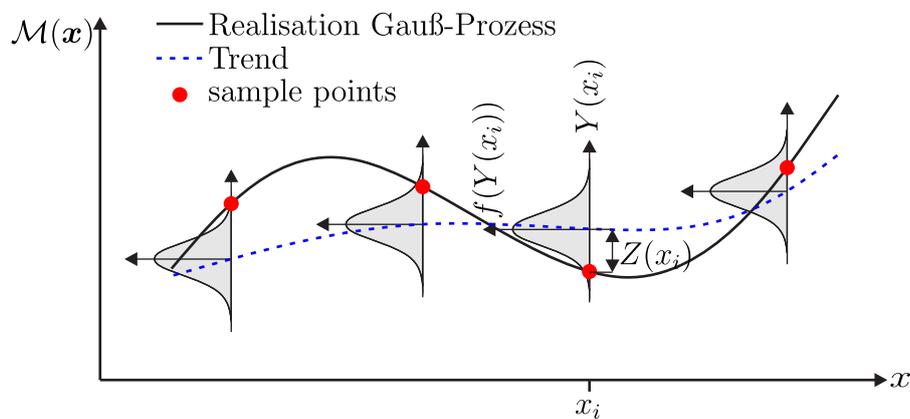


Abbildung 7.10: Der *Gauß-Prozess* als Grundlage des *Kriging-Modells*

Gleichung (7.61) $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}$ wird der Mittelwert des *Gauß-Prozesses* beschrieben, auch „Trend“ genannt. Darin sind die Basisfunktionen $\{f_i, i = 1, \dots, P\}$ und die Regressionskoeffizienten $\{\beta_i, i = 1, \dots, P\}$ enthalten [176]. P ist die Anzahl beliebiger Funktionen, z.B. Polynome. In [177,308] wird durch die Form des Trends das *Kriging-Verfahren* in drei unterschiedliche Typen gegliedert. Diese sind in Tabelle 7.2 aufgelistet. In dieser Arbeit wird lediglich das *Ordinary-Kriging* angewendet.

Name	Trend
<i>Universal-Kriging</i>	$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^P f_i(\mathbf{x}) \beta_i$
<i>Simple-Kriging</i>	$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} = \beta_1, \beta_1$ bekannt
<i>Ordinary-Kriging</i>	$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} = f_1(\mathbf{x}) \beta_1 = \beta_1$ mit $f_1(\mathbf{x}) = 1, \beta_1$ unbekannt

Tabelle 7.2: Namen der *Kriging-Verfahren* für verschiedene Formen des Trends [177]

Dieses Verfahren ist ein konstantes Regressionsmodell, für das der Parameter β_1 zunächst noch unbekannt ist. Hingegen wird beim *Simple-Kriging* der Parameter β_1 als bekannt vorausgesetzt. *Simple-* und *Ordinary-Kriging* sind Spezialfälle des *Universal-Krigings*, das die allgemeine und auch flexibelste Form beschreibt. Im zweiten Teil der Gleichung (7.61) ist σ^2 die Varianz des *Gauß-Prozesses* und mit $Z(\mathbf{x}, \omega)$ ist ein standardnormalverteilter *Gauß-Prozess* definiert. Die Zufallscharakteristik bzw. der Wahrscheinlichkeitsraum ist mit ω beschrieben. Der *Gauß-Prozess* ist vollständig definiert durch eine Autokorrelationsfunktion $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta})$ zwischen zwei beliebigen Punkten \mathbf{x} und \mathbf{x}' im Raum der Eingangsgrößen. Die Korrelationsparameter, die bezüglich der vorhandenen Daten noch ermittelt werden müssen, sind im Vektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ enthalten. Im Kontext des *Krigings* werden diese auch *Hyperparameter* genannt. An einem beliebigen Punkt \mathbf{x} im Eingangsraums soll später das *Kriging-Modell* ausgewertet werden. Die Ergebnisgrößen für die Menge aller *sample points* $\mathcal{X}_{\text{sim}} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{N_{\text{sim}}}\} \subset D$ werden für die folgende Formulierung in einem Vektor zusammengefasst: $\mathbf{y} = [y_1 = \mathcal{M}(\mathbf{x}_1), \dots, y_i = \mathcal{M}(\mathbf{x}_i), \dots, y_{N_{\text{sim}}} = \mathcal{M}(\mathbf{x}_{N_{\text{sim}}})]^T$. Die Notation orientiert sich hierzu an [177, 271]. Die Vorhersage des *Kriging-Modells* an einem beliebigen Punkt \mathbf{x} entspricht einer *Gauß-Zufallsvariable*

$$\hat{Y}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}), \sigma_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x})) \quad . \quad (7.62)$$

Mithilfe des Vektors der Ergebnisgrößen \mathbf{y} kann eine multivariate *Gauß-Verteilung* definiert werden:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}_{N_{\text{sim}}+1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{F} \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}; \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} & \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) & \mathbf{R} \end{bmatrix} \right) \quad . \quad (7.63)$$

Dabei ist $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N_{\text{sim}} \times P}$ die Regressionsmatrix

$$F_{ij} = f_j(\mathbf{x}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, N_{\text{sim}} \quad , \quad j = 1, \dots, P \quad , \quad (7.64)$$

$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_{\text{sim}} \times N_{\text{sim}}}$ die Korrelationsmatrix zwischen den *sample points*

$$R_{ij} = R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}) \quad , \quad i, j = 1, \dots, N_{\text{sim}} \quad (7.65)$$

und $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{N_{\text{sim}} \times 1}$ ist der Vektor, in dem die Korrelationen zwischen den *sample points* und einem beliebigen Auswertungspunkt \mathbf{x} enthalten sind

$$r_i(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\theta}) \quad , \quad i = 1, \dots, N_{\text{sim}} \quad . \quad (7.66)$$

Die Wahl der Korrelationsfunktion, die im Rahmen des *Krigings* auch Kernfunktion genannt wird, hat einen entscheidenden Einfluss auf die Güte der Näherung des *Kriging-Metamodells*. In der Praxis werden die stationären Korrelationsfunktionen in Tabelle 7.3 bevorzugt verwendet. Diese sind lediglich von dem Abstand

Name	Berechnungsformel
Exponentiell (exp.)	$R(d; \theta) = \exp\left(-\frac{ d }{\theta}\right)$
Gauß (quad. exp.)	$R(d; \theta) = \exp\left(-\frac{ d ^2}{\theta}\right)$
Matérn, $\nu = 3/2$	$R(d; \theta) = \left(1 + \frac{\sqrt{3} d }{\theta}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{3} d }{\theta}\right)$
Matérn, $\nu = 5/2$	$R(d; \theta) = \left(1 + \frac{\sqrt{5} d }{\theta} + \frac{5 d ^2}{3\theta^2}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{5} d }{\theta}\right)$

Tabelle 7.3: Liste gängiger Korrelationsfunktionen für ein *Kriging-Modell*

zweier Punkte abhängig: $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$. Für den allgemein mehrdimensionalen Fall ($M > 1$) wird in [176, 262] eine separierbare Korrelationsfunktion vorgeschlagen:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^M R(x_i, x'_i; \theta_i) \quad . \quad (7.67)$$

Der Einfluss der Korrelationsfunktion auf die Realisationen des *Gauß-Prozesses* wird in Abbildung 7.11 gezeigt. Wie bereits in Kapitel 6.4 diskutiert, beeinflusst die Differenzierbarkeit die Glattheit der Realisation.

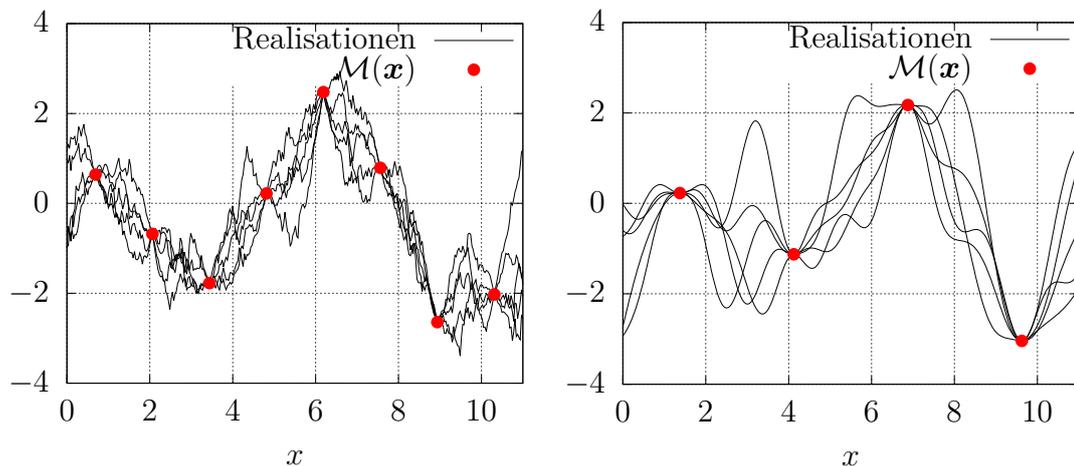


Abbildung 7.11: Realisationen für verschiedene Korrelationsfunktionen des *Kriging-Modells* zur Abbildung der Funktion $\mathcal{M}(x) = \sqrt{x} \cos(x)$: Exponentielle Korrelationsfunktion mit $N_{\text{sim}} = 8$ (links) und *Gauß-Korrelationsfunktion* mit $N_{\text{sim}} = 4$ (rechts)

Zur Bildung des *Kriging-Metamodells* müssen zunächst die optimalen *Hyperparameter* $\boldsymbol{\theta}$ berechnet werden. Hierzu kommen bekannte Schätzmethoden wie die

Maximum-Likelihood-Methode (ML) [70, 180, 190] oder auch die schon vorgestellte *Cross Validation* (CV) [13, 269] zum Einsatz. In dieser Arbeit werden die *Hyperparameter* mit der ML-Methode berechnet. Die Idee hinter der Methode ist die Wahrscheinlichkeit (engl.: *Likelihood*) für das Auftreten der Ergebnisgrößen in \mathbf{y} zu maximieren. Diese ist abhängig von den Parametern $\{\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}\}$, die durch das Lösen einer Optimierungsaufgabe ermittelt werden. Im Vektor \mathbf{y} aus Gleichung (7.63) sind die Realisationen eines multivariaten *Gauß-Prozesses* enthalten:

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{N_{\text{sim}}}(\mathbf{F}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \mathbf{R}) \quad . \quad (7.68)$$

Werden der Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}$ und die Kovarianzmatrix $\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{R}$ in die Gleichung (6.37) der mehrdimensionalen Normalverteilung eingesetzt, resultiert die *Likelihood-Funktion*:

$$L(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^{N_{\text{sim}}} \det(\mathbf{R})}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}) \right] \quad . \quad (7.69)$$

Das Maximieren dieser Funktion kann aufgrund großer Bereiche mit Funktionswerten nahe Null sehr schwierig sein. Allerdings ist die *Likelihood-Funktion* streng positiv. Deshalb wird zur Verbesserung des Optimierungsprozesses auf den Logarithmus der *Likelihood-Funktion* zurück gegriffen [192]:

$$l(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N_{\text{sim}}}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\ln(\det(\mathbf{R}))}{2} - \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2} \quad . \quad (7.70)$$

Das Maximum kann durch die partiellen Ableitungen nach den Parametern ermittelt werden. Aus der partiellen Ableitung $\frac{\partial l(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$ folgt:

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta}) = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (7.71)$$

und aus $\frac{\partial l(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma^2} = \mathbf{0}$ folgt:

$$\sigma^2 = \sigma^2(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_{\text{sim}}} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}) \quad . \quad (7.72)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (7.71) und (7.72) in die *Log-Likelihood-Funktion* (7.70) resultiert:

$$l(\mathbf{y} | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{N_{\text{sim}}}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\ln(\det(\mathbf{R}))}{2} - \frac{N_{\text{sim}}}{2} \quad . \quad (7.73)$$

Gesucht werden die Korrelationsparameter $\boldsymbol{\theta}$, für die die Funktion ein Maximum einnimmt:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \max_{D_{\boldsymbol{\theta}}} \left(-\frac{N_{\text{sim}}}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\ln(\det(\mathbf{R}))}{2} - \frac{N_{\text{sim}}}{2} \right) \quad \text{für } \theta_i > 0 \quad . \quad (7.74)$$

Eine analytische Lösung kann nicht ohne Weiteres angegeben werden. Zur Lösung dieser Optimierungsaufgabe können Gradientenverfahren wie das *Newton-Raphson* oder auch verschiedene Evolutionsstrategien angewendet werden. In einem gewählten Definitionsbereich D_θ der Korrelationsparameter kann die Gleichung (7.73) ausgewertet und die optimalen Korrelationsparameter aus der Menge $\mathcal{X}_\theta = \{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_{N_\theta}\}$ ermittelt werden. Für die Vorhersage des *Kriging-Metamodells* ist zusätzlich der Mittelwert $\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x})$ und die Varianz der *Gauß-Zufallsvariable* $\sigma_{\hat{Y}}(\mathbf{x})$ in der Gleichung (7.62) zu berechnen. Diese können mit dem besten linearen erwartungstreuen Schätzer (engl.: *Best Linear Unbiased Predictor*, BLUP) geschätzt werden. Die Grundlage hierfür ist der MSE. An dieser Stelle wird auf eine ausführliche Herleitung verzichtet und auf die Fachliteratur verwiesen: [70, 269]. Der Mittelwert kann hiermit wie folgt angegeben werden:

$$\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \boldsymbol{\beta}) \quad (7.75)$$

und das Ergebnis der Varianz ist

$$\sigma_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left(1 - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right) \quad (7.76)$$

Die Korrelationsmatrix nach Gleichung (7.65) und der Vektor der Korrelationen zwischen *sample points* und einem beliebigen Auswertungspunkt nach Gleichung (7.66) sind durch die bekannten optimalen Korrelationsparameter $\boldsymbol{\theta}$ ebenfalls ermittelbar. Als Metamodell wird dann lediglich der Mittelwert $\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x})$ verwendet:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) \approx \widehat{\mathcal{M}}^{\text{KR}}(\mathbf{x}) \equiv \mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) \quad (7.77)$$

Die Varianz $\sigma_{\hat{Y}}(\mathbf{x})$ wird als lokaler Fehler der Vorhersage interpretiert [176]. Zusätzlich können mit dem Mittelwert und der Varianz an beliebigen Auswertungspunkten \mathbf{x} Konfidenzintervalle bzw. Vertrauensbereiche angegeben werden. Die obere und untere Schranke sind definiert zu

$$\hat{Y}_u(\mathbf{x}) = \mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad (7.78)$$

$$\hat{Y}_o(\mathbf{x}) = \mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sigma_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) \quad (7.79)$$

mit Φ der Verteilungsfunktion einer Normalverteilung und der Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$. Das Intervall kann als Bereich interpretiert werden, in dem sich der *Kriging-Schätzer* $\hat{Y}(\mathbf{x})$ mit der gewählten Wahrscheinlichkeit befindet. In Abbildung 7.12 werden die Vertrauensbereiche für eine unterschiedliche Anzahl an Stützstellen gezeigt. Je mehr Stützstellen vorhanden sind, desto kleiner sind die Konfidenzintervalle. Außerdem ist zu erkennen, dass die Intervalle an den *sample points* verschwinden. Dabei gilt:

$$\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}_i) = \mathcal{M}(\mathbf{x}_i) \quad \text{und} \quad \sigma_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, N_{\text{sim}} \quad (7.80)$$

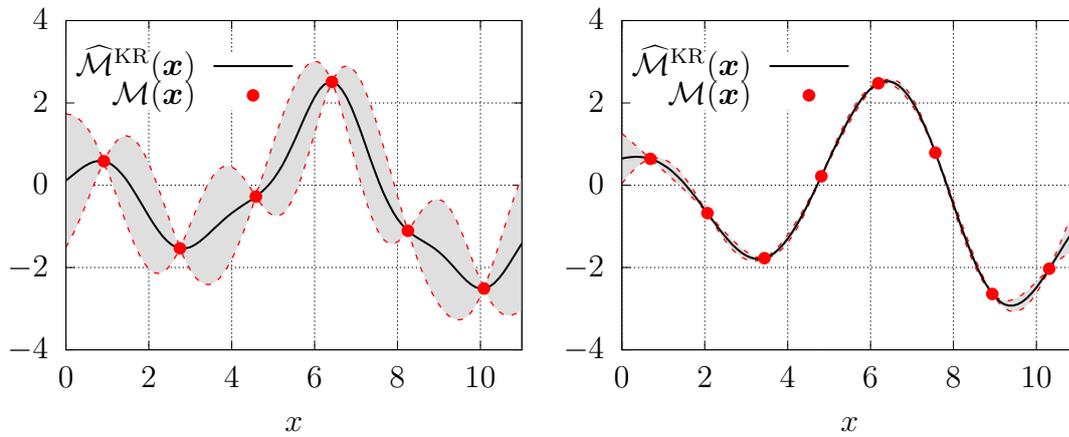


Abbildung 7.12: Kriging-Modell und Konfidenzintervalle mit $\alpha = 0,05$ für die Abbildung der Funktion $\mathcal{M}(x) = \sqrt{x} \cos(x)$: $N_{\text{sim}} = 6$ (links) und $N_{\text{sim}} = 8$ (rechts)

Durch das *Kriging-Modell* werden die Daten interpoliert. Deshalb wird das Metamodell in die Gruppe der Interpolationsmodelle eingeordnet.

7.3.5 Künstliche Neuronale Netze

Künstliche neuronale Netze (KNN) (engl.: *artificial neuronal network*, ANN) sind weitere Metamodelle und stellen einen großen Bereich der Künstlichen Intelligenz dar. Neuronale Netze sind inspiriert durch biologische Systeme, wie das menschliche Nervensystem, die aus einer großen Anzahl einfacher Einheiten (Nervenzellen) aufgebaut sind und sich gegenseitig Informationen über gerichtete Verbindungen senden [362]. KNNs werden u.a. zur Mustererkennung und Funktionsapproximation eingesetzt. Arbeiten, in denen die Funktionsapproximation mit Neuronalen Netzen diskutiert wird, sind z.B. [88] und [137]. Ein Überblick zur Anwendung Neuronaler Netze in der Strukturmechanik wird in [1] gegeben. Für verschiedene Aufgabenstellungen existieren unterschiedliche Netz-Architekturen, siehe z.B.: [255]. FREITAG entwickelte in [97] *rekurrente* neuronale Netze für Fuzzy-Größen, mit denen unscharfe zeitabhängige Tragwerksantworten modellfrei prognostiziert werden können. Fortsetzungen hierzu sind u.a. in [100, 104] veröffentlicht. In dieser Arbeit wird im Rahmen der polymorphen Unschärfemodellierung zur Approximation des Abbildungsoperators ein *Multilayer Perceptron* (MLP) mit *Feed Forward-Struktur* verwendet. Die Grundlagen zur Umsetzung des MLP's sind aus [6, 240] entnommen. Eine Darstellung des Netzes mit der *Feed Forward-Struktur* wird in Abbildung 7.13 gezeigt.

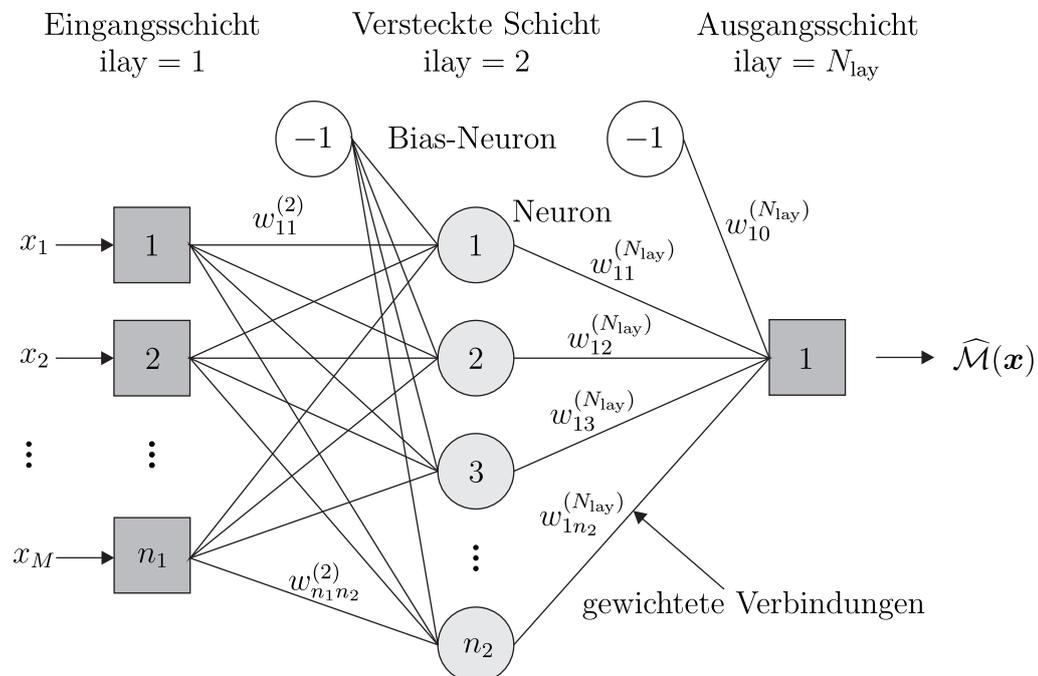


Abbildung 7.13: Darstellung des Multilayer Perceptrons (MLP)

Das Netz besteht aus einer Eingangs- und Ausgangsschicht. Dazwischen befinden sich

den sich verdeckte Schichten (engl.: *Hidden Layers*). Die Stützstellen bzw. die Trainingsdaten $\mathbf{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_M]_i$ mit $i = 1, \dots, N_{\text{sim}}$ werden über die Eingangsschicht dem Netz zugeführt. Die Anzahl der Neuronen in der Eingangsschicht entspricht der Dimension M der Eingangsgrößen: $n_1 \equiv M$. Die Ausgangsschicht besteht dementsprechend aus einem Ausgabeneuron für die eindimensionale Ausgangsgröße $z = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$. Die Anzahl der Neuronen in einer Schicht ilay wird mit n_{ilay} bezeichnet. In dieser Struktur sind alle Neuronen außer die der Eingangsschicht mit einem Bias-Neuron verbunden. Dieses ermöglicht durch einen Schwellenwert ein Neuron zu aktivieren oder es inaktiv zu schalten. Die Intensität der Verbindungen der Neuronen untereinander wird durch die Wichtungsfaktoren w definiert. Sie werden zu Beginn mit gleichverteilten Zufallszahlen $w \sim \mathcal{U}(-0,5, 0,5)$ initialisiert. Ein einzelnes Neuron j ist in Abbildung 7.14 dargestellt. Über eine Aktivierungsfunktion $g(r_j)$ wird der Eingang des Neurons r_j in

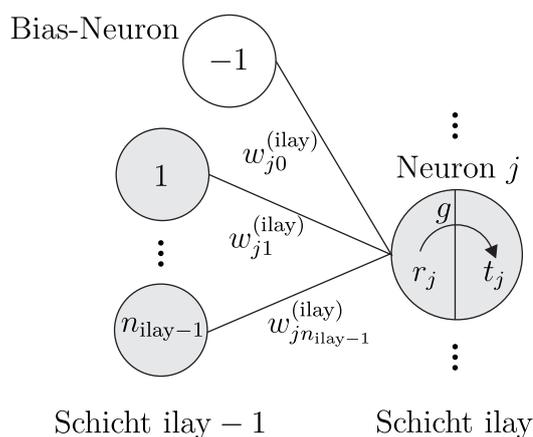


Abbildung 7.14: Darstellung eines Neurons

den Ausgang t_j transformiert. Der Eingang $r_j^{(\text{ilay})}$ eines Neurons aus der Schicht ilay berechnet sich aus der gewichteten Summe der Ausgänge $t_i^{(\text{ilay}-1)}$ aller Neuronen der vorherigen Schicht ($\text{ilay} - 1$):

$$r_j^{(\text{ilay})} = \sum_{i=0}^{\text{ilay}-1} w_{ij}^{(\text{ilay})} t_i^{\text{ilay}-1} \quad . \quad (7.81)$$

Als Aktivierungsfunktion (Sigmoidfunktion) der Neuronen in den versteckten Schichten wird folgende logistische Funktion gewählt:

$$t_j = g(r_j) = \frac{1}{1 + \exp(-T \cdot r_j)} \quad . \quad (7.82)$$

Hierzu müssen die Eingangsparameter normiert werden. Die Konstante T wird auch als Temperaturparameter bezeichnet. In Abbildung 7.15 wird das Verhalten

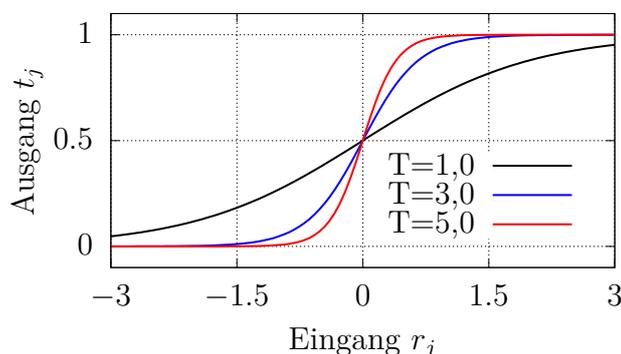


Abbildung 7.15: Logistische Aktivierungsfunktion (Sigmoidfunktion)

der Aktivierungsfunktion für verschiedene Parameter T gezeigt. Für das Neuron der Ausgangsschicht N_{lay} wird eine Identitätsfunktion verwendet. Damit entspricht der Ausgang dieses Neurons dem Eingang:

$$\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = g\left(r^{(N_{\text{lay}})}\right) = r^{(N_{\text{lay}})} \quad . \quad (7.83)$$

Backpropagation-Algorithmus

Dem Netz werden N_{sim} Stützstellen als Trainingsdaten zugeführt. Durch einen Trainingsalgorithmus erlernt das Netz den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen. Für das Training des Netzes wird die Rückpropagierung (engl.: *Backpropagation*) angewendet, orientiert an [46, 358]. Zur Verbesserung des Trainings kann z.B. der *Rprop-Algorithmus* [251] oder der *Levenberg-Marquardt-Algorithmus* [359] eingesetzt werden. Ähnlich wie bei der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist das Ziel, den quadratischen Fehler zwischen Näherungsfunktion und Modellfunktion zu minimieren:

$$\min_{\mathbf{w}} E(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \quad \text{mit} \quad E(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\mathcal{M}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}))^2 \quad . \quad (7.84)$$

Gesucht werden die Wichtungsfaktoren \mathbf{w} . Die Näherungsfunktion verläuft nicht durch die Stützstellen. Deshalb wird das Neuronale Netz in Tabelle 7.1 unter den Ausgleichsmodellen eingruppiert. Ausgehend von der Ausgangsschicht erfolgt eine Anpassung der Wichtungsfaktoren mithilfe eines Gradientenverfahrens. Zuerst werden die partiellen Ableitungen der Fehlerfunktion nach den Wichtungsfaktoren $w_{ji}^{(N_{\text{lay}})}$ der letzten Schicht gebildet

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ji}^{(N_{\text{lay}})}} = - \underbrace{(\mathcal{M}(\mathbf{x}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})) \cdot g'\left(r_j^{(N_{\text{lay}})}\right)}_{\delta_j^{N_{\text{lay}}}} \cdot t_i^{(N_{\text{lay}}-1)} \quad (7.85)$$

mit der Ableitung der Identitätsfunktion $g' = 1$. Zur Schrittweitensteuerung wird eine Lernrate eingeführt:

$$\Delta w_{ji}^{(N_{\text{lay}})} = \eta \cdot \delta_j^{N_{\text{lay}}} \cdot t_i^{(N_{\text{lay}}-1)} \quad . \quad (7.86)$$

Das Update der Gewichte zwischen der vorletzten und letzten Schicht lässt sich dann angeben zu

$$w_{ji,k+1}^{(N_{\text{lay}})} = w_{ji,k}^{(N_{\text{lay}})} + \Delta w_{ji}^{(N_{\text{lay}})} \quad . \quad (7.87)$$

Der Gradient wird für die restlichen Schichten wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ji}^{(i_{\text{lay}})}} = - \underbrace{\sum_{n=1}^{n_{i_{\text{lay}}+1}} \delta_n^{(i_{\text{lay}}+1)} \cdot w_{jn}^{(i_{\text{lay}}+1)} \cdot g'(r_j^{(i_{\text{lay}})}) \cdot t_i^{(i_{\text{lay}}-1)}}_{\delta_j^{i_{\text{lay}}}} \quad (7.88)$$

mit $g' = g(1 + g)$ der Ableitung der angewendeten Aktivierungsfunktion nach Gleichung (7.82). Das Update der Gewichte erfolgt mit der Lernrate als Schrittweitensteuerung:

$$\begin{aligned} \Delta w_{ji}^{(i_{\text{lay}})} &= \eta \cdot \delta_j^{(i_{\text{lay}})} \cdot t_i^{(i_{\text{lay}}-1)} \\ w_{ji,k+1}^{(i_{\text{lay}})} &= w_{ji,k}^{(i_{\text{lay}})} + \Delta w_{ji}^{(i_{\text{lay}})} \quad . \end{aligned} \quad (7.89)$$

Sind die Wichtungsfaktoren für das Minimum des quadratischen Fehlers ermittelt, kann das Neuronale Netz als Metamodell mit einer versteckten Schicht aufgestellt werden:

$$\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KNN}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{n_2} w_{1j}^{(3)} \cdot \text{sigmoid} \left(\sum_{k=0}^M w_{jk}^{(2)} \cdot x_k \right) \quad (7.90)$$

mit $n_1 \equiv M$ der Anzahl der Neuronen in der Eingangsschicht und n_2 der Anzahl der Neuronen in der versteckten Schicht. Für die numerischen Beispiele wird lediglich eine versteckte Schicht gewählt, die für die Funktionsapproximation ausreichend ist. Eine ausführliche Parameterstudie zur Netzarchitektur und den Einstellmöglichkeiten des Netzes ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Daher wird eine Lernrate von $\eta = 0,02$ gewählt. Der Temperaturparameter in der Sigmoidfunktion nach Gleichung (7.82) ist für alle numerischen Beispiele $T = 5$.

7.3.6 Hochdimensionale Modelldarstellung - HDMR

Für den Abbildungsoperator $\mathcal{M}(\mathbf{x})$ vieler Problemstellungen aus dem Ingenieurwesen müssen meist viele Eingangsparameter beschrieben werden. In der Literatur gilt ein Problem beispielsweise ab einer Anzahl von $M > 10$ Eingangsvariablen als hochdimensional [50]. Allerdings sind die Einflüsse der Eingangsparameter auf die Ergebnisgröße meist voneinander unabhängig. Das bedeutet, dass zwischen den Variablen nur eine „schwache“ Korrelation vorhanden ist [238]. In diesem Fall können die Einflüsse höherer Ordnung vernachlässigt werden. Das ist die Motivation der *hochdimensionalen Modelldarstellung* (Abk.: HDMR) nach SOBOL' [295]. Die Abkürzung HDMR steht für die englische Bezeichnung *High-Dimensional Model Representation*. Diese Methode wird auch schon in zahlreichen Anwendungen im Rahmen der Fuzzy-Analyse eingesetzt, siehe hierzu z.B.: [16, 49, 343]. Folgend wird der theoretische Hintergrund mithilfe der Veröffentlichungen [50, 186, 238, 239, 297] wiedergegeben. Die HDMR ist eine Summenentwicklung des Abbildungsoperators $\mathcal{M}(\mathbf{x})$, der von M Eingangsparameter $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_M]$ abhängig ist:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\mathbf{x}) \equiv & \mathcal{M}_0 + \sum_{k=1}^M \mathcal{M}_k(x_k) \\
 & + \sum_{k_2=2}^M \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) \\
 & + \dots \\
 & + \sum_{k_L=L}^M \dots \sum_{k_2=2}^{k_3-1} \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_L}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_L}) \\
 & + \dots \\
 & + \mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_M}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_M}) \quad .
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

Dabei ist \mathcal{M}_0 ein konstanter Term. Mit der Funktion $\mathcal{M}_k(x_k)$ werden die Einflüsse auf den Abbildungsoperator der Variablen x_k beschrieben. Die gemeinsamen Einflüsse der Variablen x_{k_1} und x_{k_2} werden mit der Funktion $\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2})$ definiert. Der Term $\mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_L}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_L})$ beschreibt die Einflüsse L -ter Ordnung. Die Ordnung der Einflüsse ist nicht mit der Ordnung einer Funktion zu verwechseln, die beispielsweise durch den größten vorkommenden Exponenten im Funktionsausdruck ermittelt wird. Das heißt, die Teilfunktionen $\mathcal{M}_k(x_k)$ beschreiben zwar die Einflüsse erster Ordnung, können aber beliebig nichtlinear werden. Die gemeinsamen Einflüsse aller Variablen auf den Abbildungsoperator sind im letzten Term $\mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_M}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_M})$ enthalten. Im Gegensatz zur Reihenentwicklung der KLE oder einem *Taylor-Polynom* ist bei dieser Formulierung die Anzahl der Summenglieder endlich und unter Mitnahme aller Terme exakt. Die

Anzahl aller möglichen Teilsummenfunktionen zur Berücksichtigung der Einflüsse L -ter Ordnung lässt sich mithilfe des Binomialkoeffizienten berechnen [136]:

$$\sum_{L=1}^M \binom{M}{L} = 2^M - 1 \quad . \quad (7.92)$$

Für einen Abbildungsoperator mit $M = 3$ Eingangsparameter resultieren drei Einflüsse erster Ordnung $\mathcal{M}_1(x_1)$, $\mathcal{M}_2(x_2)$, $\mathcal{M}_3(x_3)$, drei Einflüsse 2. Ordnung $\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2})$, $\mathcal{M}_{k_1 k_3}(x_{k_1}, x_{k_3})$, $\mathcal{M}_{k_2 k_3}(x_{k_2}, x_{k_3})$ und ein Einfluss dritter Ordnung $\mathcal{M}_{k_1 k_2 k_3}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3})$. Das Ziel eines HDMR-Metamodells ist nun die Summenentwicklung zu kürzen, um den Rechenaufwand zu minimieren. Dabei ist eine HDMR 2. Ordnung für die meisten physikalischen Problemstellungen bereits ausreichend [238, 239]:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) \approx \mathcal{M}_0 + \sum_{k=1}^M \mathcal{M}_k(x_k) + \sum_{k_2=2}^M \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) \quad . \quad (7.93)$$

Die numerische Umsetzung ist nur möglich, wenn die einzelnen Teilsummenfunktionen $\mathcal{M}_k(x_k)$, $\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2})$, \dots , $\mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_M}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_M})$ ermittelbar sind. Dazu werden in der Literatur im Wesentlichen zwei Methoden vorgeschlagen: die *cut*-HDMR-Methode oder die *RS(Random Sampling)*-HDMR-Methode. In dieser Arbeit wird die *cut*-HDMR-Methode angewendet und vorgestellt. Für diese Methode ist die Wahl eines Referenzpunkts im Raum der Eingangsparameter erforderlich. Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_M]^T, \quad c_i = \frac{\max_{x_i \in D} x_i + \min_{x_i \in D} x_i}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, M \quad . \quad (7.94)$$

Die Wahl des Referenzpunkts hat einen großen Einfluss auf die Konvergenz der HDMR. SOBOL' zeigt in [297], dass der Mittelpunkt des Eingangsraums ein optimaler Punkt dafür ist. In einer Fuzzy-Analyse ist dies nicht der Punkt in der *Support*-Menge des Fuzzy-Eingangs mit der größten Zugehörigkeit. Die Teilsummenfunktionen der Summenentwicklung werden durch den Referenzpunkt als Schnittlinien $\mathcal{M}_k(x_k, \mathbf{c}^k)$, Schnittflächen $\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, \mathbf{c}^{k_1, k_2})$ oder für eine HDMR 3. Ordnung durch ein Volumen $\mathcal{M}_{k_1 k_2 k_3}(x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \mathbf{c}^{k_1, k_2, k_3})$ angegeben. Eine Visualisierung der eindimensionalen bzw. zweidimensionalen Schnitte wird in Abbildung 7.16 gezeigt. Die einzelnen Teilsummenfunktionen einer HDMR bis einschließlich 2. Ordnung können mithilfe der eingeführten Schnitte dann folgendermaßen definiert werden:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\mathbf{c}) \quad (7.95)$$

$$\mathcal{M}_k(x_k) = \mathcal{M}_k(x_k, \mathbf{c}) - \mathcal{M}_0 \quad (7.96)$$

$$\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) = \mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, \mathbf{c}^{k_1, k_2}) - \mathcal{M}_1(x_1) - \mathcal{M}_2(x_2) - \mathcal{M}_0 \quad . \quad (7.97)$$

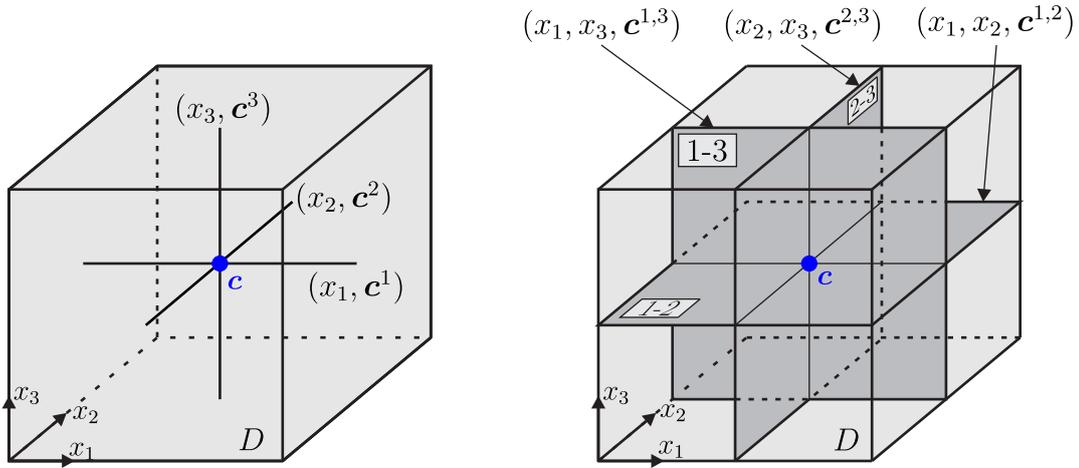


Abbildung 7.16: Darstellung der Schnitte für drei Eingangsvariablen für die *cut*-HDMR: Schnittlinien (links) und Schnittflächen (rechts)

Die Einflüsse niedriger Ordnung werden jeweils subtrahiert, um diese nicht mehrfach zu berücksichtigen. Im Verlauf der Arbeit werden zusätzlich auch diese Funktionen dargestellt, da sie die „bereinigten“ Einflüsse der Eingangsvariablen widerspiegeln. Werden die Gleichungen (7.95) bis (7.97) der Teilsummenfunktionen in die Summenentwicklung der HDMR nach Gleichung (7.91) eingesetzt, resultieren die Gleichungen der Schnittfunktionen der *cut*-HDMR zur numerischen Umsetzung. Die Schnittfunktionen der *cut*-HDMR 1. Ordnung sind wie folgt definiert:

$$\mathcal{M}^{\text{HD}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \mathcal{M}_k(x_k, \mathbf{c}^k) - (M-1)\mathcal{M}(\mathbf{c}) \quad (7.98)$$

und für die *cut*-HDMR 2. Ordnung folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{HD}}(\mathbf{x}) = & \sum_{k_2=2}^M \sum_{k_1=1}^{k_2-1} \mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, \mathbf{c}^{k_1, k_2}) \\ & - (M-2) \sum_{k=1}^M \mathcal{M}_k(x_k, \mathbf{c}^k) + \frac{(M-1)(M-2)}{2} \mathcal{M}(\mathbf{c}) \quad . \end{aligned} \quad (7.99)$$

Die einzelnen Schnittfunktionen, die einen beliebigen Verlauf haben können, können nun auch durch Metamodelle entwickelt werden:

$$\mathcal{M}^{\text{HD}}(\mathbf{x}) \approx \widehat{\mathcal{M}}^{\text{HD}}(\mathbf{x}) \quad . \quad (7.100)$$

Für die eindimensionalen Schnittfunktionen gilt:

$$\mathcal{M}_k(x_k, \mathbf{c}^k) \approx \widehat{\mathcal{M}}_k(x_k) \quad (7.101)$$

und die zweidimensionalen Schnittfunktionen können wie folgt angegeben werden:

$$\mathcal{M}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}, \mathbf{c}^{k_1, k_2}) \approx \widehat{\mathcal{M}}_{k_1 k_2}(x_{k_1}, x_{k_2}) \quad . \quad (7.102)$$

In Abbildung 7.17 ist die Näherung durch ein Metamodell mit einer vollfaktoriellen Versuchsplanung auf einer ausgewählten Schnittlinie und Schnittfläche aus Abbildung 7.16 dargestellt.

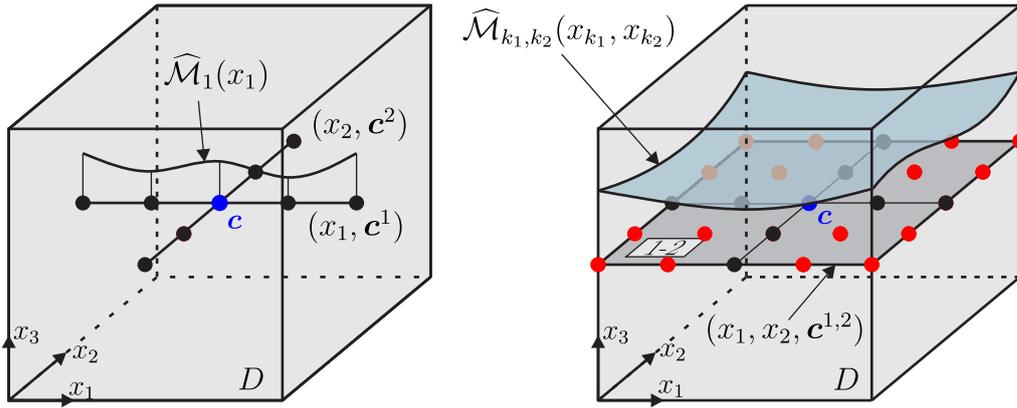


Abbildung 7.17: Näherung der Schnittfunktionen durch Metamodelle: Metamodell für eine eindimensionale Schnittfunktion (links) und einer zweidimensionalen Schnittfunktion (rechts)

Zur Darstellung der Schnittfunktionen können die vorgestellten Metamodelle aus Tabelle 7.1 angewendet werden. Kommen die Ausgleichsmodelle wie das LSQ-Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}^A(\mathbf{x})$ oder das Neuronale Netz $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KNN}}(\mathbf{x})$ zum Einsatz, ist das HDMR-Metamodell auch ein Ausgleichsmodell. Wird hingegen ein Metamodell mit *Lagrange-Polynomen* $\widehat{\mathcal{M}}^I(\mathbf{x})$ oder das *Kriging-Modell* $\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KR}}(\mathbf{x})$ angewendet, ist das HDMR-Metamodell ein Interpolationsmodell. Die statistische Versuchsplanung beschränkt sich hier auf eine vollfaktorielle Versuchsplanung mit einer ungeraden Anzahl an Stützstellen pro Variable. Damit ist sichergestellt, dass die Schnittlinien bzw. Schnittflächen durch den Referenzpunkt als Mittelpunkt des Eingangsraums verlaufen. Die *Random Sampling* Methoden können deshalb zur Erstellung der Schnittfunktionen nicht angewendet werden. Der Rechenaufwand gemessen in der Gesamtanzahl der nötigen Stützstellen N_{sim} kann für eine HDMR L -ter Ordnung in Abhängigkeit der Anzahl der Eingangsvariablen M wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} N_{\text{sim}}(M, n_{\text{sim}}) &= \sum_{i=0}^L \frac{M!}{i!(M-i)!} (n_{\text{sim}} - 1)^i \\ &= 1 + M(n_{\text{sim}} - 1) + \frac{M(M-1)(n_{\text{sim}} - 1)^2}{2} + \dots \quad . \end{aligned} \quad (7.103)$$

Dabei ist n_{sim} die Anzahl der Stützstellen pro Eingangsvariable für eine vollfaktorielle Versuchsplanung. Hierzu wird in Abbildung 7.18 der Rechenaufwand für eine bestimmte Anzahl an Eingangsvariablen für $n_{\text{sim}} = 5$ dargestellt.

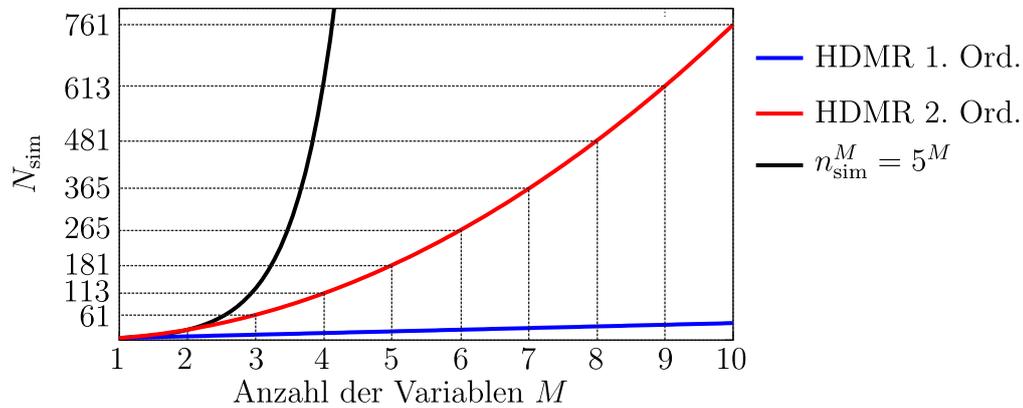


Abbildung 7.18: Darstellung des Rechenaufwands mit $n_{\text{sim}} = 5$ Stützstellen pro Eingangsvariable für eine HDMR 1. Ordnung, HDMR 2. Ordnung und einer vollfaktoriellen Versuchsplanung ohne die HDMR

Wird eine vollfaktorielle Versuchsplanung ohne das HDMR-Metamodell angewendet, entspricht der Aufwand einem exponentiellen Verlauf $N_{\text{sim}} \sim n_{\text{sim}}^M$. Nach Gleichung (7.103) resultiert für eine HDMR 2. Ordnung ein quadratischer Verlauf $N_{\text{sim}} \sim n_{\text{sim}}^2 \cdot M^2$. Der Aufwand kann damit erheblich reduziert werden.

7.3.7 Zusammenfassung der Metamodelle

In Tabelle 7.4 sind alle Metamodelle, die zur Lösung der Problemstellungen in dieser Arbeit angewendet werden, gegenübergestellt. Zusätzlich sind in der Ta-

Metamodell	Form	Parameter
Lagrange	$\widehat{\mathcal{M}}^I(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^K \cdots \sum_{i_M=0}^K z_{i_1, \dots, i_M} \mathcal{L}_{i_1, \dots, i_M}(\mathbf{x})$	$\mathcal{L}(\mathbf{x}), z_i$
LSQ	$\widehat{\mathcal{M}}^A(\mathbf{x}) = \sum_{\hat{k}=1}^{(K+1)^M} a_{\hat{k}} \prod_{n=1}^M x_{(n)}^{[w^{-1}(\hat{k})]_n}$	\mathbf{a}
Kriging	$\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KR}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F} \boldsymbol{\beta})$	$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2$
KNN	$\widehat{\mathcal{M}}^{\text{KNN}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{n_2} w_{1j}^{(3)} \cdot \text{sigmoid} \left(\sum_{k=0}^M w_{jk}^{(2)} \cdot x_k \right)$	\mathbf{w}
HDMR	$\widehat{\mathcal{M}}^{\text{HD}}(\mathbf{x})$ nach Gleichung (7.98) oder (7.99)	$\widehat{\mathcal{M}}_k(x_k),$ $\widehat{\mathcal{M}}_{k_1, k_2}(x_{k_1}, x_{k_2})$

Tabelle 7.4: Übersicht der vorgestellten Metamodelle und deren Konstruktionsparameter

belle die Parameter aufgelistet, die zur Konstruktion des jeweiligen Metamodells berechnet werden müssen. Sind diese bekannt, können für beliebige weitere Stützstellen im Definitionsbereich der Eingangsparameter das Metamodell ohne großen Rechenaufwand ausgewertet werden. In der Anwendung müssen mehrere Ersatzmodelle getestet werden, wenn für ein System keine Kenntnis zum Funktionsverlauf vorhanden ist. Ein Metamodell, das für alle Problemstellungen gleich gut funktioniert existiert nicht. Mit der Validierung der Modelle befasst sich der nächste Abschnitt. Im Verlauf der Arbeit hat sich dennoch die HDMR in Kombination mit den Ausgleichsmodellen als sehr effizient erwiesen. Das gilt aber nur für die im Folgenden vorgestellten Beispiele.

7.4 Methoden zur Beurteilung der Qualität eines Metamodells

Schon allein die Validierung eines Metamodells beschreibt ein eigenes Forschungsfeld. Hierzu gibt es zahlreiche Veröffentlichungen: [31, 95, 103, 142, 146, 157, 285]. Die Güte eines Metamodells kann nach JIN ET. AL [146] unter folgenden Gesichtspunkten bewertet werden:

- **Genauigkeit** Die Fähigkeit des Ersatzmodells die Ergebnisgrößen der „wahren“ Funktion an weiteren Stützstellen im Versuchsraum möglichst genau „vorherzusehen“.
- **Robustheit** Die Möglichkeit das aufgestellte Ersatzmodell auch für weitere Problemstellungen einzusetzen.
- **Effizienz** Die benötigte Rechenzeit zur Aufstellung und Auswertung des Metamodells.
- **Transparenz** Die Konstruktion eines Metamodells sollte durchschaubar sein. Eine „Black Box“ sollte möglichst vermieden werden.
- **Einfachheit** Ist das Metamodell einfach zu implementieren und zu bedienen?

Die hierzu etablierten Messgrößen für die Qualität sind in Tafel 7.2 aufgelistet. Darunter sind der mittlere quadratische Fehler (engl.: *Mean Square Error*, MSE), die Wurzel des MSE (engl.: *Root Mean Square Error*, RMSE) und das Bestimmtheitsmaß, auch Determinationskoeffizient R^2 genannt, wohl die meist genutzten Qualitätskriterien. Diese Größen sind auch ein Maß für die globale Genauigkeit eines Metamodells. Das Bestimmtheitsmaß gibt an, wie gut ein Metamodell sich an variable Daten anpassen kann. Je größer R^2 , desto höher ist die „Güte“ des Ersatzmodells. Hingegen wird mit dem maximalen absoluten Fehler (engl.: *Maximum Absolute Error*, MAE) nur ein lokaler Fehler beschrieben. Weitere Kriterien, wie der mittlere absolute Fehler (engl.: *Average Absolute Error*, AAE) und das Maximum des absoluten Fehlers in Prozent (engl.: *Maximum Absolute Percentage Error*, MAPE), sind zwar global orientiert, aber anfällig bezüglich „Ausreißer“. Außerdem wird davon abgeraten, den Fehler bezüglich der Stützstellen mit denen das Metamodell aufgestellt wird, zu berechnen. Da das Metamodell robust sein soll, muss es auch für einen unterschiedlichen statistischen Versuchsplan die gleiche Qualität aufweisen. Daher werden für die Validierung zu den N_{sim} Stützstellen $\mathcal{X}_{\text{sim}} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_{N_{\text{sim}}}\} \subset D$ zusätzliche N_{test} Testpunkte $\mathcal{X}_{\text{test}} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_{N_{\text{test}}}\} \subset D$ eingeführt. Die Wahl der Testpunkte

$$\text{MSE} = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} (\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j))^2, \quad (7.104)$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} (\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j))^2}, \quad (7.105)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} (\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j))^2}{\sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} (\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \overline{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j))^2}, \quad (7.106)$$

$$\text{MAE} = \max |\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j)|, \quad j = 1, \dots, N_{\text{test}}, \quad (7.107)$$

$$\text{AAE} = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} |\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j)|, \quad (7.108)$$

$$\text{MAPE} = \max \left| \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j)}{\mathcal{M}(\mathbf{x}_j)} \right| \times 100, \quad j = 1, \dots, N_{\text{test}} \quad (7.109)$$

Tafel 7.2: Qualitätskriterien für die Bewertung der Güte eines Metamodells

kann mit den vorgestellten Methoden der Versuchsplanung durchgeführt werden, z.B. dem LHS. Allerdings ist darauf zu achten, dass genügend Testpunkte gewählt werden und diese mit einem ausreichenden Abstand zu den Stützstellen liegen [142]. Bei der Interpretation der Fehlergrößen ist zu beachten, dass keine falschen Schlussfolgerungen getroffen werden. In Abbildung 7.19 ist dargestellt, wie beispielsweise der Determinationskoeffizient R^2 eine falsche Aussage liefern kann bei unterschiedlich ausgeprägten Metamodellen.

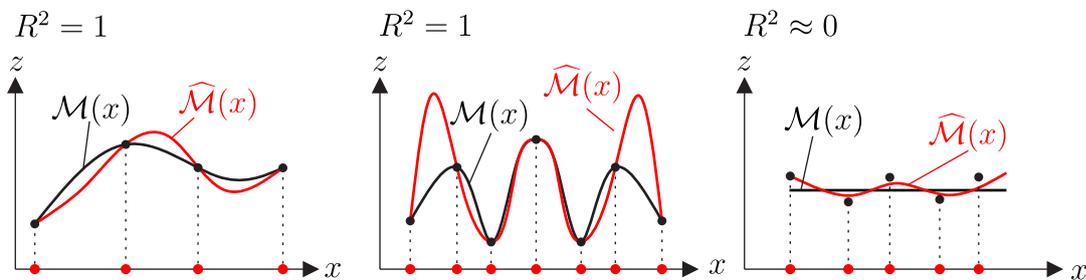


Abbildung 7.19: Beispiele aus [261] zum Determinationskoeffizienten R^2 zur Beurteilung der Qualität eines Metamodells: Metamodell als Interpolation (links), *Overfitting-Phänomen* (mitte), näherungsweise konstanter Verlauf der Modellfunktion (rechts)

Bei einem Metamodell mit Polynominterpolation oder auch beim *Kriging* verläuft das Metamodell durch die Stützstellen. Dadurch wird kein Fehler angezeigt, wenn die Stützstellen als Testpunkte gewählt werden. Deshalb kann in diesem Fall auch nur bei einem Ausgleichspolynom ein Fehler gemessen werden. Bei einem *Overfitting-Phänomen* wie dem RUNGE-Effekt wird beispielsweise auch kein Fehler angezeigt, obwohl zwischen den Stützstellen große Abweichungen zur „wahren“ Funktion vorhanden sind. Ist die Funktion unsensibel bezüglich einer Eingangsvariable oder werden nur kleine Fluktuationen in den Daten angezeigt, gilt: $R^2 \approx 0$, obwohl die Abweichungen zum Ersatzmodell eher gering sind. Eine weitere Möglichkeit zur Fehlerauswertung ist die Methode der Kreuzvalidierung (engl.: *Cross Validation*, CV) nach MECKESHEIMER [197, 198]. In der *p-fold CV* wird die Menge an Stützstellen

$$\mathcal{X}_{\text{sim}} = \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_p, \quad p \geq 2 \quad (7.110)$$

in möglichst p gleich große Untermengen aufgeteilt. Die Auswahl der Stützstellen der Untermengen erfolgt zufällig. Das Metamodell wird dann k -mal „gefittet“. Dabei wird bei jedem Durchlauf eine Untermenge ausgelassen. In der ausgelassenen Untermenge sind N_{test} Testpunkte enthalten. Der CV-Fehler wird jeweils an diesen ausgelassenen Punkten berechnet. Die übrigen Stützstellen bilden die Trainingsdaten mit denen das Metamodell neu aufgestellt wird. Werden die Ausgangsgrößen des neuen Metamodells $\widehat{\mathcal{M}}^*(\mathbf{x})$ mit den Ausgangsgrößen des ursprünglichen Metamodells $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ an den ausgelassenen Stützstellen verglichen, kann eine Differenz festgestellt werden. Diese Differenz wird bei der CV zur Fehlermessung mit den bekannten Größen aus Tafel 7.2 verwendet. Oft wird der Mittelwert des MSE als Kriterium angewendet:

$$\text{MSE}_{\text{CV}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \text{MSE}(i) \quad (7.111)$$

mit

$$\text{MSE}(i) = \frac{1}{N_{\text{test}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{test}}} (\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}_j) - \widehat{\mathcal{M}}^*(\mathbf{x}_j))^2 \quad (7.112)$$

Die Fähigkeit des Metamodells wie gut die Ergebnisgrößen mit neuen Eingangsdaten vorhergesagt werden können, wird durch den CV-Fehler beschrieben. Für eine *2-fold CV* und einem Versuchsraum mit $N_{\text{sim}} = 8$ Stützstellen, wie in Abbildung 7.20 dargestellt, werden beispielsweise zwei gleich große Untermengen mit jeweils $N_{\text{test}} = 4$ Testpunkten erhalten. Das heißt, das Metamodell wird 2-mal an den jeweils 4 verbleibenden Stützstellen „gefittet“. Dabei wird der Fehler an den vier ausgelassenen Stützstellen gemessen.

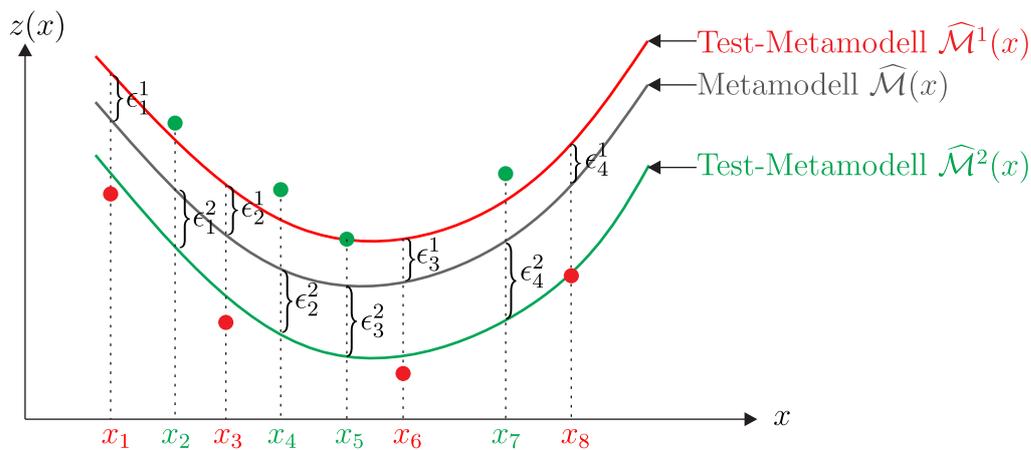


Abbildung 7.20: 2-fold Cross Validation mit 8 Stützstellen und 2 Test-Metamodellen

In [31, 163] wird eine 10-fold CV empfohlen. Die Anwendung stellt auch sicher, dass nicht zu viele Stützstellen ausgelassen werden. Eine *Leave-One-Out* CV wird durch den Fall $p = N_{\text{sim}}$ beschrieben. Alternativ werden bei einer *Leave-k-Out* CV alle möglichen

$$\binom{N_{\text{sim}}}{k} = \frac{N_{\text{sim}}!}{k!(N_{\text{sim}} - k)!} \quad (7.113)$$

Untermengen der Größe k ausgelassen. Für den Fall $k = 1$ resultiert wieder eine *Leave-One-Out* CV. Allerdings ist dieses Vorgehen auch aufwendiger.

7.5 Globale Sensitivitätsanalyse

In der Analyse von Unschärfen oder der probabilistischen Strukturmechanik spielt die Sensitivitätsanalyse (SA) eine wichtige Rolle. Mithilfe einer SA werden die Einflüsse der Eingangsparameter auf die Ausgangsgrößen eines Modells untersucht. Die Eingangsparameter werden dabei nach Wichtigkeit sortiert. Eine SA wird daher auch als *importance measure* bezeichnet. Das Bewertungsmaß ist ein skalarer Wert und wird auch als Sensitivitätsmaß oder Sensitivitätsindex benannt [119]. Das Ergebnis stellt damit eine Art Rangliste dar, an der abgelesen werden kann, welche Eingangsparameter das Modell am stärksten beeinflussen. Mit dieser Zusatzinformation kann beispielsweise ein planender Ingenieur irrelevante Größen identifizieren und das Modell mit den relevanten Eingangsgrößen gezielt anpassen. Die Durchführung einer SA findet nach der Berechnung der Ausgangsgrößen statt und wird deshalb auch als Nebenprodukt einer stochastischen Modellierung oder als Nachlaufrechnung (engl.: *Post Processing*) bezeichnet. In [116, 222] werden beispielsweise Sensitivitäten für den Entwurf von Tragwerken unter Berücksichtigung von Unschärfen eingesetzt, um damit die Robustheit eines Tragwerks zu bewerten. Im Rahmen der Unschärfemodellierung kann zur Unterstützung der Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) eine SA durchgeführt werden.

Die vorgestellten Grundlagen orientieren sich im Wesentlichen an SUDRET [309] und SALTELLI ET AL. [263–265], die umfassend den Stand der Technik zu den Methoden der Sensitivitätsanalyse beschreiben. Diese lassen sich in zwei Kategorien einteilen: lokale und globale Methoden. Eine lokale SA beschränkt sich auf die Untersuchung lokaler Einflüsse der Eingangsparameter und basiert auf der Berechnung des Gradienten, der als Sensitivitätsmaß verwendet wird. Wenn die Modellfunktion nicht analytisch differenziert werden kann, können hierbei numerische Verfahren, wie z.B. das Finite Differenzen-Verfahren, angewendet werden. Hingegen wird bei einer globalen Sensitivitätsanalyse (GSA) der gesamte Definitionsbereich des Eingangsraums betrachtet. Zusätzlich werden kombinierte Effekte der Eingangsvariablen auf die Ausgangsgrößen berücksichtigt.

In [264] wird zwischen *regressionsbasierten* und *varianzbasierten* Methoden unterschieden. Bei den regressionsbasierten Methoden wird der Effekt jeder Eingangsvariable mit einem Korrelationskoeffizienten gemessen, z.B. mit den *Pearson-Korrelationskoeffizienten*. Da diese Methoden auf einem linearen Korrelationsmodell beruhen, können bei einem nichtlinearen Verhalten des Abbildungsoperators die Sensitivitätsmaße nur mit unzureichender Genauigkeit berechnet werden [266]. Bei den varianzbasierten Methoden wird die Varianz der Ausgangsgröße in eine Summe von Einzelvarianzen und Kombinationen aufgeteilt. Zu den bekannten Methoden gehören der *Fourier Amplitude Sensitivity Test* (Abk.:

FAST) [54, 55, 267] und die *Sobol'-Indizes* [12, 136, 266, 295, 296, 298]. Diese Techniken sind unter der Abkürzung ANOVA für ***Analysis of Variance*** bekannt.

7.5.1 Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse

In dieser Arbeit wird die ANOVA-HDMR angewendet, d.h. die *Sobol'-Indizes* werden zur Angabe von Sensitivitätsmaßen berechnet. Diese Methode basiert auf der bereits vorgestellten HDMR in Abschnitt 7.3.6. Zur Herleitung sei eine Modellfunktion mit M Eingangparameter im Einheitsraum gegeben:

$$y = \mathcal{M}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^M \quad . \quad (7.114)$$

In [296, 297] führt SOBOL' den Begriff ANOVA-HDMR ein, wenn bei der Zerlegung der Modellfunktion in eine Summenentwicklung nach Gleichung (7.91) folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Das Integral jeder Teilsummenfunktion über die unabhängigen Variablen ist Null

$$\int_0^1 \mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_s}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}) dx_i = 0 \quad \text{für } i = k_1 \dots k_s \quad (7.115)$$

- und die unterschiedlichen Teilsummenfunktionen sind orthogonal zueinander

$$\int_0^1 \mathcal{M}_{k_1 k_2 \dots k_s}(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_s}) \mathcal{M}_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_t}(x_{\ell_1}, x_{\ell_2}, \dots, x_{\ell_t}) d\mathbf{x} = 0 \quad (7.116)$$

für $(k_1 \dots k_s) \neq (\ell_1 \dots \ell_t) \quad .$

Wird die Summenentwicklung nach Gleichung (7.91) über den Einheitsraum integriert und wird zusätzlich die Bedingung nach Gleichung (7.115) berücksichtigt, folgt der konstante Term \mathcal{M}_0 als Mittelwert der Zerlegung

$$\mathcal{M}_0 = \int_{[0,1]^M} \mathcal{M}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7.117)$$

mit $d\mathbf{x}$ für $dx_1 \dots dx_M$. Die eindimensionalen Teilsummenfunktionen

$$\mathcal{M}_i(x_i) = \int_{[0,1]^{M-1}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{\sim i} - \mathcal{M}_0 \quad (7.118)$$

und die zweidimensionalen Teilsummenfunktionen

$$\mathcal{M}_{ij}(x_i, x_j) = \int_{[0,1]^{M-2}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_{\sim \{ij\}} - \mathcal{M}_i(x_i) - \mathcal{M}_j(x_j) - \mathcal{M}_0 \quad (7.119)$$

können analytisch durch das Lösen der Integrale ermittelt werden. Wie nach den Gleichungen (7.95) bis (7.97) müssen auch hier die Effekte niedriger Ordnung subtrahiert werden. Zur Vermeidung der Darstellung mit mehrdimensionalen Integralen wird die kompakte Schreibweise nach SUDRET [309] gewählt. Hierbei ist $\int_{[0,1]^{M-2}} d\mathbf{x}_{\sim\{ij\}}$ eine Integration über alle Variablen außer den Variablen x_i und x_j . Da später mit den Varianzen die Sensitivitätsmaße beschrieben werden, werden für deren Herleitung die Eingangsparameter als unabhängige gleichverteilte Zufallsvariablen definiert:

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_k \dots, X_M\}^T, \quad X_k \sim \mathcal{U}(0, 1), \quad k = 1, \dots, M \quad . \quad (7.120)$$

Daraus folgt, dass auch die Ergebnisgröße $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ eine Zufallsvariable ist. Alternativ kann damit der Mittelwert in Gleichung (7.117) auch mithilfe Gleichung (6.7) für den Erwartungswert und der Beziehung $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} E[Y] = \mathcal{M}_0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^M f_k(X_k) d\mathbf{x} \\ &= \int_{[0,1]^M} \mathcal{M}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (7.121)$$

Die Varianz der Ausgangsgröße kann analog mithilfe der Gleichung (6.8) und der Orthogonalitätsbedingung nach Gleichung (7.116) angegeben werden zu

$$\begin{aligned} D = \text{Var}[\mathcal{M}(\mathbf{X})] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{M}(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_0)^2 \prod_{k=1}^M f_k(X_k) d\mathbf{x} \\ &= \int_{[0,1]^M} (\mathcal{M}(\mathbf{x}) - \mathcal{M}_0)^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{[0,1]^M} \mathcal{M}(\mathbf{x})^2 - \mathcal{M}_0^2 d\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (7.122)$$

Die Varianz D wird auch als totale Varianz bezeichnet. Wird die Gleichung (7.91) quadriert und integriert, kann die totale Varianz mithilfe der Orthogonalitätsbedingung (7.116) wie folgt zerlegt werden:

$$D = \sum_{k=1}^M D_k + \sum_{k_2=2}^M \sum_{k_1=1}^{k_2-1} D_{k_1 k_2} + \dots + D_{k_1 k_2 \dots k_M} \quad . \quad (7.123)$$

Die partiellen Varianzen können mit der Beziehung

$$\begin{aligned} D_{k_1 \dots k_s} &= \int_{[0,1]^s} \mathcal{M}_{k_1 \dots k_s}^2(x_{k_1} \dots x_{k_s}) dx_{k_1} \dots dx_{k_s} \\ \text{für } 1 &\leq k_1 < \dots < k_s \leq M, \quad s = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (7.124)$$

berechnet werden. Die Anzahl der partiellen Varianzen ist nach Gleichung (7.92) $2^M - 1$. Das Ergebnis einer Normierung mit der totalen Varianz sind die *Sobol'-Indizes*

$$S_{k_1 \dots k_s} = \frac{D_{k_1 \dots k_s}}{D} \quad , \quad (7.125)$$

die als Sensitivitätsmaße verwendet werden. Für die Summe aller Indizes gilt:

$$\sum_{k=1}^M S_k + \sum_{k_2=2}^M \sum_{k_1=1}^{k_2-1} S_{k_1 k_2} + \dots + S_{k_1 k_2 \dots k_M} = 1 \quad . \quad (7.126)$$

Die Indizes erster Ordnung S_k sind die Effekte jeder einzelnen Variable auf die Varianz der Ergebnisgröße. Diese Effekte werden als Haupteffekte bezeichnet. Durch die Effekte höherer Ordnung $S_{k_1 k_2 \dots k_M}$ werden die Einflüsse der Interaktion der Eingangsparameter untereinander berücksichtigt. Die Indizes der totalen Varianz werden von HOMMA & SALTELLI [136] zur Beschreibung aller Einflüsse einer bestimmten Variable X_k eingeführt. Diese beinhalten alle partiellen Varianzen mit dem Index k und sind in der Schreibweise nach SUDRET [309] wie folgt definiert:

$$S_{T_k} = \sum_{\mathcal{I}} S_{k_1 \dots k_s}, \quad \mathcal{I} = \{\{k_1, \dots, k_s\} \supset \{k\}\} \quad . \quad (7.127)$$

Folgende Indizes der totalen Varianz werden beispielsweise für eine Problemstellung mit drei Eingangsvariablen erhalten:

$$\begin{aligned} S_{T_1} &= S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123} \\ S_{T_2} &= S_2 + S_{12} + S_{23} + S_{123} \\ S_{T_3} &= S_3 + S_{13} + S_{23} + S_{123} \quad . \end{aligned} \quad (7.128)$$

Außerdem gilt:

$$S_{T_k} = 1 - S_{\sim k} \quad (7.129)$$

mit $S_{\sim k}$ der Summe aller Indizes der partiellen Varianzen, die nicht den Index k enthalten. Ist ein Index der totalen Varianz nahezu Null, hat die dazugehörige Eingangsgröße keinen Einfluss auf die Ausgangsgröße des Modells. Diese Variable kann dann vernachlässigt werden und damit die Dimension der Problemstellung reduziert werden [300]. Das ist vor allem bei hochdimensionalen Modellfunktionen von großem Interesse.

7.5.2 Monte-Carlo-Integration

Die Berechnung der *Sobol'-Indizes* erfordert z.B. die Lösung der Integration in Gleichung (7.122). Diese kann mithilfe einer *Monte-Carlo-Simulation* durchgeführt werden. Dazu werden zufällige Auswertungspunkte in zwei unabhängige

Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N_{\text{mcs}} \times M}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N_{\text{mcs}} \times M}$ im Definitionsbereich der Eingangsparameter generiert:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11}^a & \cdots & x_{1k}^a & \cdots & x_{1M}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\ell 1}^a & \cdots & x_{\ell k}^a & \cdots & x_{\ell M}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{\text{mcs}} 1}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} k}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} M}^a \end{bmatrix} \quad (7.130)$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{11}^b & \cdots & x_{1k}^b & \cdots & x_{1M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\ell 1}^b & \cdots & x_{\ell k}^b & \cdots & x_{\ell M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{\text{mcs}} 1}^b & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} k}^b & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} M}^b \end{bmatrix} \quad (7.131)$$

mit $k = 1 \dots M$ Eingangsparameter und $\ell = 1 \dots N_{\text{mcs}}$ Auswertungspunkte. Zur Generierung der Auswertungspunkte empfiehlt sich ein *Random Sampling* oder die *Sobol'-Sequenzen* in [294]. Diese werden in diesem Kapitel nicht vorgestellt, kommen aber in der Literatur zur Berechnung der Sensitivitätsmaße oft zum Einsatz, um eine bessere Konvergenz der *Sobol'-Indizes* zu erreichen. Zusätzlich werden aus den Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} drei weitere Matrizen konstruiert:

$$\mathbf{B}_A^{(k)} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} x_{11}^b & \cdots & x_{1k}^a & \cdots & x_{1M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\ell 1}^b & \cdots & x_{\ell k}^a & \cdots & x_{\ell M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{\text{mcs}} 1}^b & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} k}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} M}^b \end{array} \right], \quad (7.132)$$

$$\mathbf{A}_B^{(k)} = \left[\begin{array}{cc|c|cc} x_{11}^a & \cdots & x_{1k}^b & \cdots & x_{1M}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\ell 1}^a & \cdots & x_{\ell k}^b & \cdots & x_{\ell M}^a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{\text{mcs}} 1}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} k}^b & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} M}^a \end{array} \right] \quad (7.133)$$

und

$$\mathbf{B}_A^{(kj)} = \left[\begin{array}{cc|c|c|cc} x_{11}^b & \cdots & x_{1k}^a & \cdots & x_{1j}^a & \cdots & x_{1M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\ell 1}^b & \cdots & x_{\ell k}^a & \cdots & x_{\ell j}^a & \cdots & x_{\ell M}^b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{\text{mcs}} 1}^b & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} k}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} j}^a & \cdots & x_{N_{\text{mcs}} M}^b \end{array} \right] \quad (7.134)$$

für $1 \leq k < j \leq M$.

Dabei sind die Spalten der Matrix \mathbf{B} bis auf die k -te-Spalte in der Matrix $\mathbf{B}_A^{(k)}$ enthalten. Die k -te-Spalte wird der Matrix \mathbf{A} entnommen. Für die Matrix $\mathbf{B}_A^{(kj)}$ werden die Spalten k und j der Matrix \mathbf{A} entnommen. Sinngemäß sind die Spalten der Matrix \mathbf{A} bis auf die k -te-Spalte in der Matrix $\mathbf{A}_B^{(k)}$ enthalten. Die k -te-Spalte wird der Matrix \mathbf{B} entnommen. Mit der Einführung dieser Matrizen können der Mittelwert nach Gleichung (7.121), die totale Varianz nach Gleichung (7.122) und die partiellen Varianzen nach Gleichung (7.124) mit einer *Monte-Carlo-Simulation* wie folgt berechnet werden:

$$\widehat{\mathcal{M}}_0^2 \approx \frac{1}{N_{\text{mcs}}} \sum_{\ell=1}^{N_{\text{mcs}}} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}(\ell, :)) \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{B}(\ell, :)) \quad , \quad (7.135)$$

$$\widehat{D} \approx \frac{1}{N_{\text{mcs}}} \sum_{\ell=1}^{N_{\text{mcs}}} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}(\ell, :))^2 - \widehat{\mathcal{M}}_0^2 \quad , \quad (7.136)$$

$$\widehat{D}_k \approx \frac{1}{N_{\text{mcs}}} \sum_{\ell=1}^{N_{\text{mcs}}} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}(\ell, :)) \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{B}_A^{(k)}(\ell, :)) - \widehat{\mathcal{M}}_0^2 \quad , \quad (7.137)$$

$$\widehat{D}_{\sim k} \approx \frac{1}{N_{\text{mcs}}} \sum_{\ell=1}^{N_{\text{mcs}}} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}(\ell, :)) \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}_B^{(k)}(\ell, :)) - \widehat{\mathcal{M}}_0^2 \quad , \quad (7.138)$$

$$\widehat{D}_{kj} \approx \frac{1}{N_{\text{mcs}}} \sum_{\ell=1}^{N_{\text{mcs}}} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{A}(\ell, :)) \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{B}_A^{(kj)}(\ell, :)) - \widehat{D}_k - \widehat{D}_j - \widehat{\mathcal{M}}_0^2 \quad . \quad (7.139)$$

Die Notation $\mathbf{A}(\ell, :)$ mit dem Doppelpunkt-Operator bedeutet, dass die komplette ℓ -te Zeile aus der Matrix \mathbf{A} entnommen wird. Der Index der totalen Varianz kann anschließend mithilfe der Gleichung (7.138) berechnet werden:

$$\widehat{S}_{T_k} = 1 - \frac{\widehat{D}_{\sim k}}{\widehat{D}} \quad . \quad (7.140)$$

Da mit einer *Monte-Carlo-Simulation* je nach Gestalt der Modellfunktion viele Auswertungen nötig sind und diese deshalb sehr rechenintensiv ist, findet die Integration auf dem Metamodell $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ statt. In der Praxis ist es meist ausreichend die Indizes erster Ordnung und die der totalen Varianz zu berechnen. Mit dem Vergleich beider Indizes ist erkennbar, ob Effekte höherer Ordnung eine Rolle spielen. Dennoch wird versucht, wie Indizes höherer Ordnung ohne zusätzlichen numerischen Aufwand erhalten werden können, siehe z.B.: [216]. SUDRET zeigt in [310, 311] wie auf Basis des *Polynomial Chaos* Metamodells die *Sobol'-Indizes* als Nachlaufrechnung analytisch ermittelt werden können und damit eine *Monte-Carlo-Integration* vermieden werden kann.

7.6 Numerische Beispiele

7.6.1 Benchmark-Funktionen

Zur Validierung eines Metamodells werden *Benchmark-Funktionen* eingesetzt. Dazu werden die Fehlergrößen zum Beispiel nach Tafel 7.2 herangezogen. Folgend wird an der *Runge-*, *Exp-Tanh-* und der *Ishigami-Funktion* die Funktionalität der implementierten Metamodelle für unterschiedliche DoEs gezeigt. Für alle untersuchten *Benchmark-Funktionen* basiert das *Kriging-Modell* auf einem konstanten Regressionsmodell und der *Gauß-Korrelationsfunktion*. Das Neuronale Netz (ANN) aus Kapitel 7.3.5 ist aus einer versteckten Schicht mit $n_2 = 20$ Neuronen aufgebaut.

Rungefunktion

Gegeben ist die zweidimensionale *Runge-Funktion*:

$$\mathcal{M}(x_1, x_2) = \frac{1}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \quad , \quad x_1, x_2 \in [-5, 5] \quad . \quad (7.141)$$

In Abbildung 7.21 wird das Ergebnis einer Polynominterpolation mit einem Polynomgrad $K = 10$ gezeigt. An dieser Funktion ist das *Runge-Phänomen* sicht-

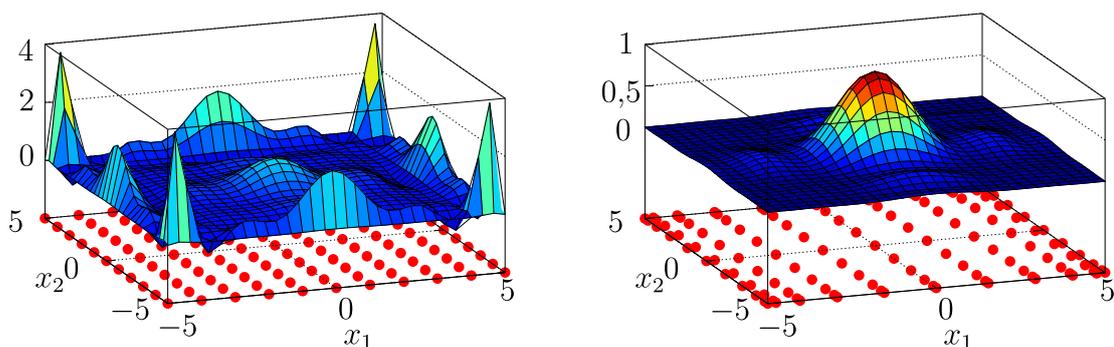


Abbildung 7.21: Die zweidimensionale *Runge-Funktion* mit einem Polynomgrad $K = 10$ für eine äquidistante (links) und *Tschebyschow-Versuchsplanung* (rechts)

bar. Die „Überschwingungen“ an den Rändern können mit einer unregelmäßigen *Tschebyschow-Versuchsplanung* nach Gleichung (7.20) unterdrückt werden. In Abbildung 7.22 wird der Verlauf des MSE- und des AAE-Fehlers in Abhängigkeit der Anzahl der Stützstellen dargestellt. Für die Fehlerauswertung werden $N_{\text{test}} = 20$ Testpunkte mit der MLHS-Methode erzeugt. Für das *Kriging-Modell*

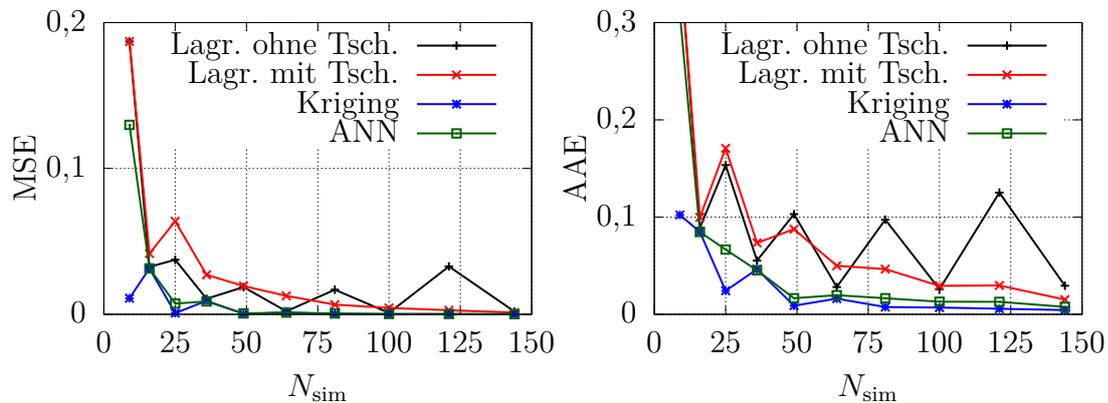


Abbildung 7.22: Fehleranalyse verschiedener Metamodelle zur Abbildung der Rungefunktion: MSE als globaler Fehler (links) und AAE als lokaler Fehler (rechts)

und das Neuronale Netz (ANN) wird zum Vergleich eine vollfaktorielle Versuchsplanung gewählt. Die Überschwingungen können vor allem beim Verlauf des lokalen AAE-Fehlers beobachtet werden. Das *Kriging-Modell* und das Neuronale Netz liefern ähnlich gute Ergebnisse.

Exp-Tanh-Funktion

Eine weitere Testfunktion ist die Exp-Tanh-Funktion, siehe Abbildung 7.23. Diese Funktion wird zum Beispiel in [221] zur Validierung der Ersatzmodelle *Polynomial Chaos* und *Kriging* verwendet.

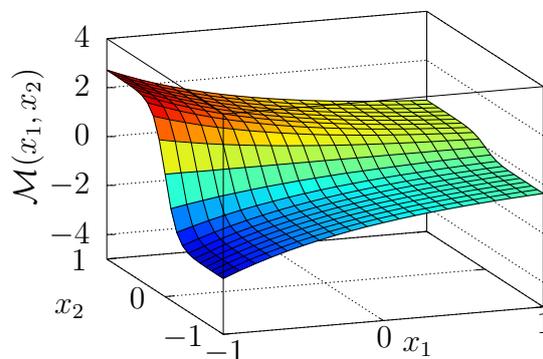


Abbildung 7.23: Exp-Tanh-Funktion als Benchmark-Testfunktion

Der Abbildungsoperator ist

$$\mathcal{M}(x_1, x_2) = \exp(-x_1) \tanh(5x_2) \quad , \quad x_1, x_2 \in [-1, 1] \quad . \quad (7.142)$$

Das Ergebnis der Validierung ist in Abbildung 7.24 dargestellt.

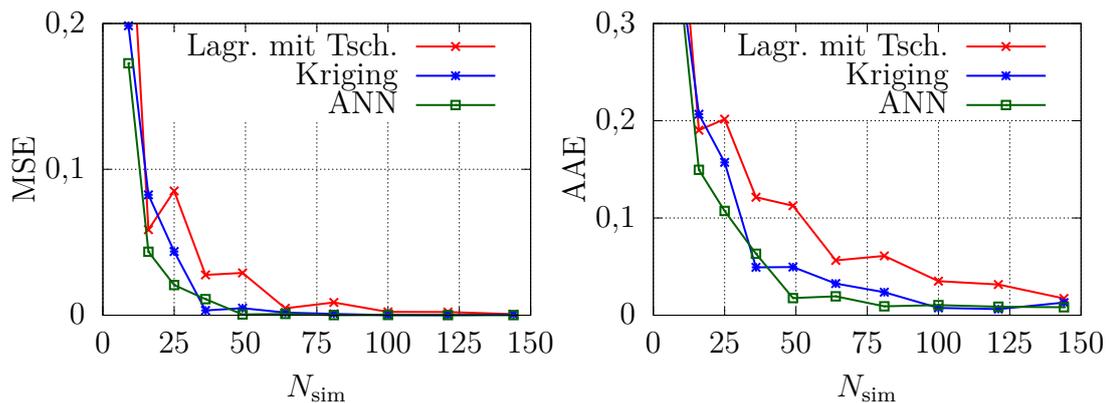


Abbildung 7.24: Fehleranalyse verschiedener Metamodelle zur Abbildung der Exp-Tanh-Funktion: MSE als globaler Fehler (links) und AAE als lokaler Fehler (rechts)

Eine vollfaktorielle Versuchsplanung wird angewendet. Für die Fehlerauswertung werden $N_{\text{test}} = 20$ Testpunkte mit der MLHS-Methode erzeugt. Auch bei dieser Funktion liefern das *Kriging-Modell* und das Neuronale Netz ähnlich gute Ergebnisse. Dennoch sollte – wie bereits diskutiert – für eine vorliegende Problemstellung immer mehrere Metamodelle getestet werden.

Ishigami-Funktion

Die *Ishigami-Funktion* wird oft als Testfunktion im Rahmen der globalen Sensitivitätsanalyse eingesetzt, siehe z.B. in [143, 299, 314]. Die stark nichtlineare Funktion wird folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \sin(x_1) + a \sin^2(x_2) + b x_3^4 \sin(x_1) \quad (7.143)$$

mit den drei Eingangsgrößen $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \in [-\pi, \pi]^3$ und den Konstanten $a = 7$ und $b = 0,1$. Zunächst wird der Einfluss unterschiedlicher DoEs auf die Güte des *Kriging-Modells* und des Neuronalen Netzes untersucht. Dazu wird die Anzahl der Testpunkte, die mit der MLHS-Methode erzeugt werden, auf $N_{\text{test}} = 100$ gesetzt. In Abbildung 7.25 wird eine Konvergenzstudie bezüglich des MSE-Fehlers für eine vollfaktorielle Versuchsplanung, einem *Simple Random Sampling* mit der *Monte-Carlo-Methode* und der MLHS-Methode gezeigt. Dabei konvergiert der MSE beim *Random Sampling* und der MLHS-Methode schneller gegen Null als

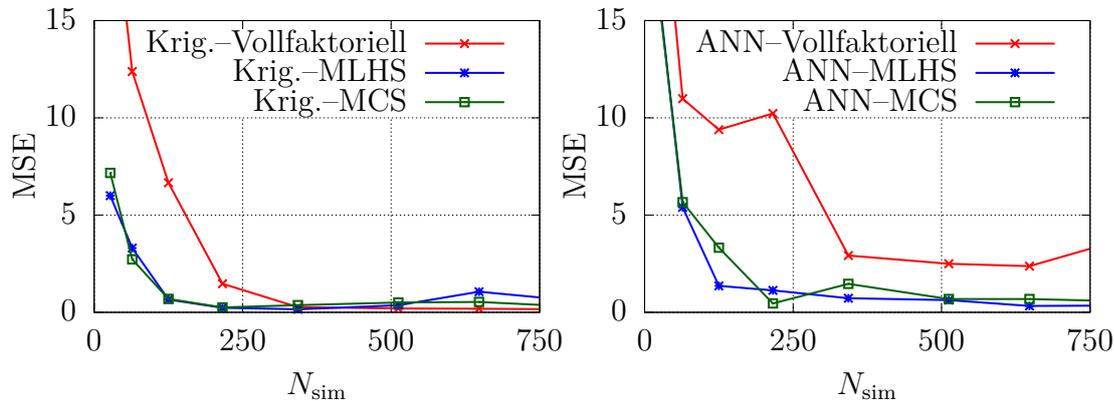


Abbildung 7.25: Fehleranalyse verschiedener DoEs zur Abbildung der *Ishigami-Funktion*: MSE-Verlauf mit dem *Kriging-Modell* (links) und dem ANN-Modell (rechts)

bei der vollfaktoriellen Versuchsplanung. Damit können Stützstellen gespart werden. Nachfolgend wird die Effizienz des HDMR-Metamodells an dieser Funktion demonstriert. Das entsprechende Ergebnis der Fehlerauswertung ist in Abbildung 7.26 dargestellt. Zur Erstellung der HDMR-Schnittfunktionen werden verschiedene Metamodelle wie das *Kriging*, das Neuronale Netz (ANN) und die *Lagrange-Interpolation* mit *Tschebyschow-Versuchsplanung* verwendet. Im Vergleich zu den anderen Metamodellen ohne Anwendung der HDMR unter äquivalenter Versuchsplanung werden mit Anwendung des HDMR-Modells bereits für eine niedrige Anzahl an Stützstellen kleine Werte des MSE- und AAE-Fehlers erhalten. Die

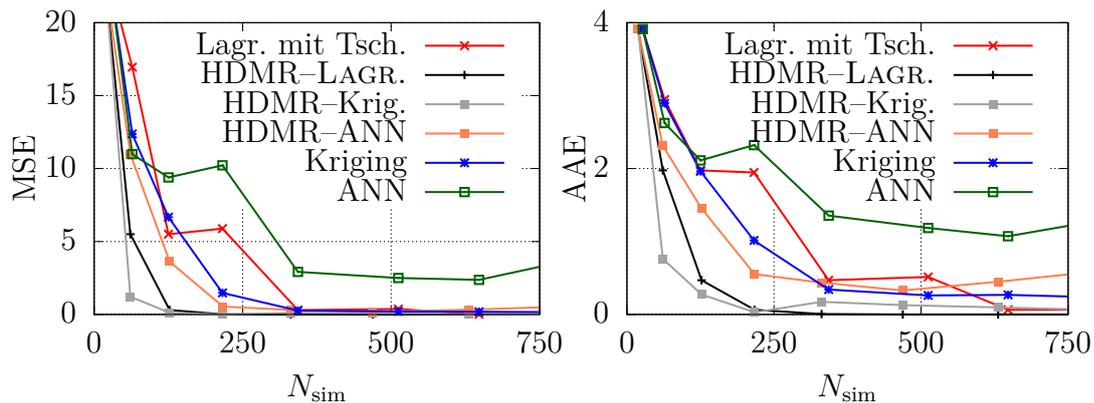


Abbildung 7.26: Fehleranalyse verschiedener Metamodelle zur Abbildung der *Ishigami-Funktion*: MSE als globaler Fehler (links) und AAE als lokaler Fehler (rechts)

Schnittfunktionen der HDMR auf Basis eines *Lagrange-Metamodells* mit einem Polynomgrad $K = 8$ sind in Abbildung 7.27 dargestellt.

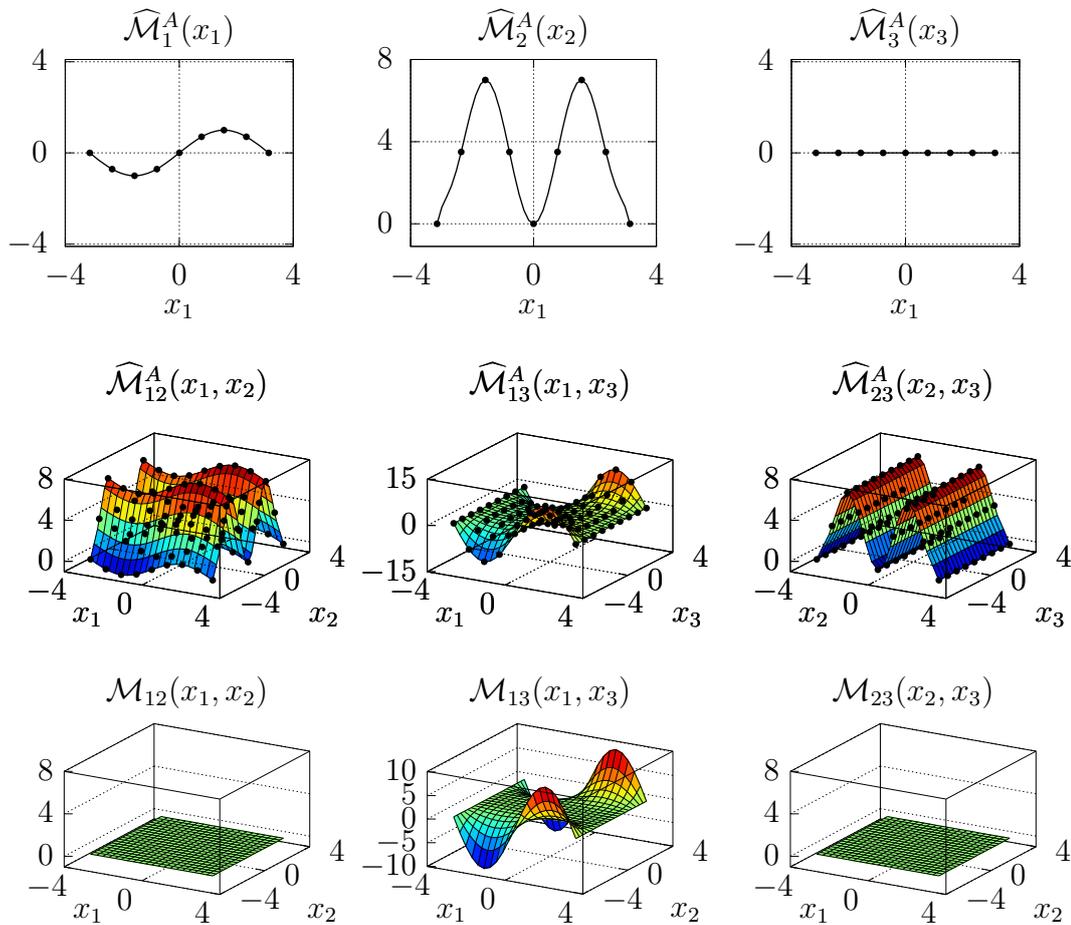


Abbildung 7.27: Schnittfunktionen der HDMR auf Basis eines *Lagrange-Metamodells* mit einem Polynomgrad $K = 8$ der *Ishigami-Funktion*: 1D-Schnittfunktionen (oben), 2D-Schnittfunktionen (mitte) und Ergebnis der Teilsummenfunktionen (unten)

Darin sind auch die Lösungen an den Stützstellen als schwarze Punkte dargestellt. Zusätzlich sind die Teilsummenfunktionen mit den „bereinigten“ Einflüssen abgebildet. Diese werden erhalten durch entsprechender Subtraktion der ein-dimensionalen Schnittfunktionen von den zweidimensionalen Schnittfunktionen. Dabei verschwinden die Funktionen $\mathcal{M}_{12}(x_1, x_2)$ und $\mathcal{M}_{23}(x_2, x_3)$. Dieses Ergebnis kann bei der globalen Sensitivitätsanalyse für die Funktion beobachtet werden, siehe hierzu Abbildung 7.28. Die entsprechenden *Sobol'-Indizes* S_{12} und S_{23} sind Null. Die globale Sensitivitätsanalyse beruht hierbei auf Basis des HDMR-Metamodells. Die Schnittfunktionen werden mit dem *Kriging-Modell* erstellt. Für die Anzahl der Stützstellen wird $N_{\text{sim}} = 15^M$ gewählt. Zur Berechnung der *Sobol'-Indizes* wird für die *Monte-Carlo-Integration* ein *Random Sampling* als DoE mit 150^3 Auswertungspunkten verwendet. Die numerische Lösung kann mit der ana-

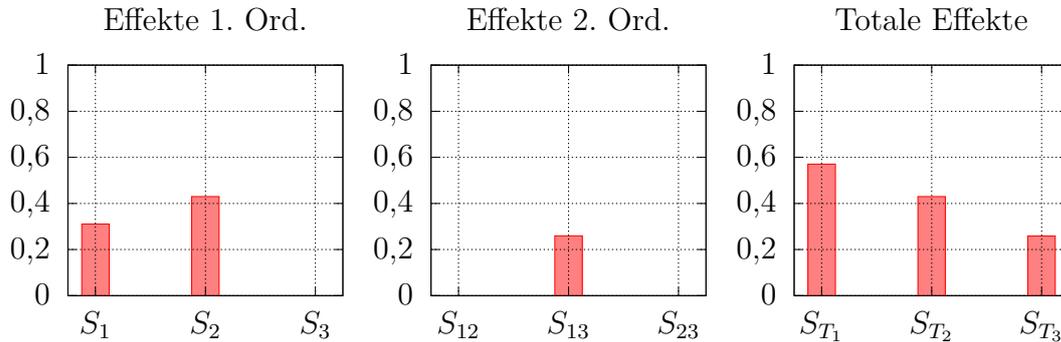


Abbildung 7.28: Numerische Lösungen der *Sobol'-Indizes* für die *Ishigami-Funktion*

lytischen Lösung der *Sobol'-Indizes* verglichen werden. Die analytischen Lösungen der totalen Varianz und der partiellen Varianzen nach den Gleichungen (7.122) und (7.124) sind

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{M}^2(x_1, x_2, x_3) - \mathcal{M}_0^2 dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \dots = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{8} + \frac{b\pi^4}{5} + \frac{b^2\pi^8}{18} = 13,8446 \\
 D_1 &= \int_{-\pi}^{+\pi} \mathcal{M}_1^2(x_1) dx_1 = \dots = \frac{1}{2} + \frac{b\pi^4}{5} + \frac{b^2\pi^8}{50} = 4,3459 \\
 D_2 &= \dots = \frac{a^2}{8} = 6,1250, \quad D_3 = \dots = 0, \\
 D_{12} &= \dots = 0, \quad D_{13} = \dots = \frac{b^2\pi^4}{18} - \frac{b^2\pi^8}{50} = 3,3737, \quad D_{23} = \dots = 0 \\
 D_{123} &= \dots = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{7.144}$$

Werden die partiellen Varianzen mit der totalen Varianz normiert, resultieren die *Sobol'-Indizes*

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 0,3139, \quad S_2 = 0,4424, \quad S_3 = 0,0000, \\
 S_{12} &= 0,0000, \quad S_{13} = 0,2437, \quad S_{23} = 0,0000, \quad S_{123} = 0,0000, \\
 S_{T1} &= 0,5576, \quad S_{T2} = 0,4424, \quad S_{T3} = 0,2437 \quad .
 \end{aligned} \tag{7.145}$$

Die Einflüsse der Variable x_1 sind nur in S_1 und S_{13} enthalten und damit kann der Index der totalen Varianz wie folgt angegeben werden:

$$S_{T1} = S_1 + S_{13} = 0,3139 + 0,2437 = 0,5576 \quad . \tag{7.146}$$

7.6.2 Elastisch gebetteter Bohrpfehl mit Imperfektion

Als baupraktisches Beispiel sei ein elastisch gebetteter Bohrpfehl mit einer kleinen Auslenkung φ_0 als Imperfektion gegeben, siehe Abbildung 7.29. Gesucht ist die kritische Last P_{cr} des Systems. Der Bohrpfehl mit der Länge $L = 20\text{ m}$ ist im

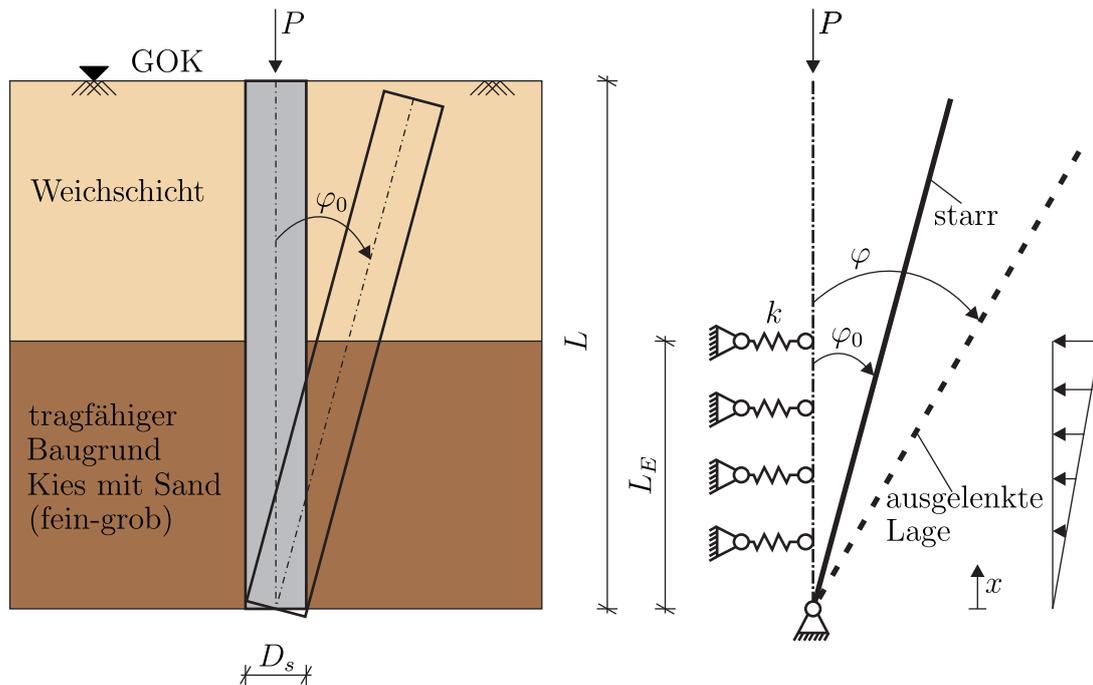


Abbildung 7.29: System eines Bohrpfehls mit kleiner Auslenkung als Imperfektion (links) und das statische Modell (rechts)

Bereich des tragfähigen Baugrunds über die Einbindetiefe L_E elastisch gebettet. Der Bettungsmodul für den angegebenen Boden, bestehend aus fein-groben Kies mit Sand, kann mit $c = 80 - 200\text{ MN/m}^3$ angegeben werden. Darüber befindet sich eine Weichschicht bis zur Geländeoberkante (GOK) ohne Tragfähigkeit. Der Pfahldurchmesser beträgt $D_s = 0,5\text{ m}$. Die senkrecht zur Pfahlachse wirkende Spannung wird näherungsweise als konstant angenommen. Demzufolge kann die Federkonstante der Linienfeder mit $k = c \cdot D_s$ berechnet werden. Zunächst soll mit der Energiemethode eine analytische Lösung der kritischen Last gefunden werden. Die Ausgangslage des Systems wird mit der Imperfektion φ_0 beschrieben und wird als unbelasteter Zustand definiert. Ausgehend von dieser Lage wird das System in einen Nachbarzustand ausgelenkt. Der Winkel φ wird von der senkrechten Achse aus gemessen. Das äußere Potential der Druckkraft ist durch

$$\Pi_{\text{ext}} = -P L (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad (7.147)$$

gegeben. Das innere Potential der Linienfeder ist

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{int}} &= \int_0^{L_E} \mathcal{W}_{\text{Feder}} dx \\ &= \int_0^{L_E} \frac{1}{2} k u^2(x) dx \quad \text{mit} \quad u(x) = (\sin \varphi - \sin \varphi_0) x \\ &= \frac{1}{6} k L_E^3 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \quad .\end{aligned}\tag{7.148}$$

Damit kann das Gesamtpotential und die Ableitung angegeben werden mit

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_{\text{int}} + \Pi_{\text{ext}} \\ &= \frac{1}{6} k L_E^3 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) - P L (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad \text{und} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{3} k L_E^3 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0) - P L \sin \varphi \quad .\end{aligned}\tag{7.149}$$

Die Gleichgewichtslagen für den Winkel φ im Nachbarzustand folgen aus der Bedingung $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$ zu

$$\frac{3 L}{k L_E^3} P(\varphi) = \frac{\cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{\sin \varphi} \quad .\tag{7.150}$$

Die verschiedenen Last-Winkelbeziehungen in Abhängigkeit der Imperfektion sind in Abbildung 7.30 dargestellt. Ist das System imperfekt, verschwindet der Ver-

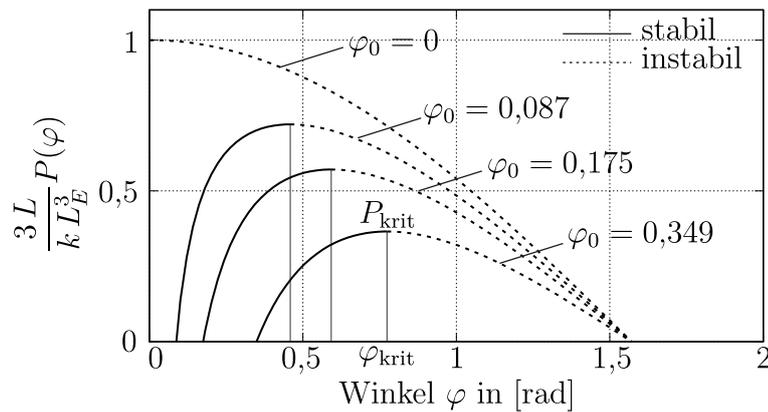


Abbildung 7.30: Überkritisches Verhalten in Abhängigkeit der Imperfektion φ_0

zweigungspunkt. Dennoch stellt der Extremwert der Kurven ein Stabilitätspunkt dar. Die kritische Last P_{cr} kann über die Ableitung der Gleichung (7.150) ermittelt werden:

$$\frac{\partial P(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin \varphi + \sin \varphi_0}{\sin^2 \varphi} \quad .\tag{7.151}$$

Aus der Bedingung $\frac{\partial P(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ folgt

$$\sin \varphi_{\text{cr}} = \sqrt[3]{(\sin \varphi_0)} \quad . \quad (7.152)$$

Dies eingesetzt in Gleichung (7.150), liefert einen Ausdruck für die kritische Last

$$P_{\text{cr}} = \frac{k L_E^3}{3 L} \left(1 - (\sin \varphi_0)^{2/3}\right)^{3/2} \quad . \quad (7.153)$$

Durch diesen Ausdruck wird im Rahmen einer Fuzzy-stochastischen Analyse der Abbildungsoperator gebildet:

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = P_{\text{cr}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \{k, L_E, \varphi_0\} \quad . \quad (7.154)$$

Dabei soll der Einfluss der drei Eingangsparameter k , L_E und φ_0 auf die kritische Last gezeigt werden. Die für die Eingangsparameter ausgewählten Unschärfemodelle sind in Tabelle 7.5 aufgeführt.

Parameter	Unschärfemodell
Federkonstante $k [MN/m^2]$	fp-r-Modell, <i>Gauß-Verteilung</i> $k = \mathcal{N}(\mu_k = \langle 40, 70, 100 \rangle, \sigma_k = 7000)$
Einbindetiefe $L_E [m]$	Fuzzy-Variable $L_E = \langle 4, 6, 7 \rangle$
Imperfektion $\varphi_0 [\text{rad}]$	Fuzzy-Variable $\varphi_0 = \langle 0,087, 0,175, 0,349 \rangle$

Tabelle 7.5: Unschärfemodelle der Eingangsparameter für den Bohrpfahl

Die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsvariablen sind in der Abbildung 7.31 dargestellt. Die Dicke der nicht tragfähigen Weichschicht kann nicht „scharf“ definiert werden und wird deshalb wie die Imperfektion als Fuzzy-Variable angegeben. Die Verteilung der Federkonstante k ist eine *Gauß-Verteilung*. Allerdings wird der Mittelwert μ_k als Fuzzy-Variable beschrieben und die Standardabweichung σ_k als deterministische Variable definiert. Für die Federsteifigkeit wird eine Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (fp-r) festgelegt. Um das Ergebnis der kritischen Last P_{cr} als fp-r-Variable zu erhalten, muss eine *Monte-Carlo-Simulation* mit einem ausreichend großen Stichprobenumfang N_{mcs} durchgeführt werden. Für die α -Level-Optimierung werden zunächst die Metamodelle *Kriging*, ANN und die HDMR getestet. Hierbei basiert das *Kriging-Modell* wieder auf einem linearen Korrelationsmodell und der *Gauß-Korrelationsfunktion*. Das Neuronale Netz (ANN) mit dem *Backpropagation-Algorithmus* besteht aus einer

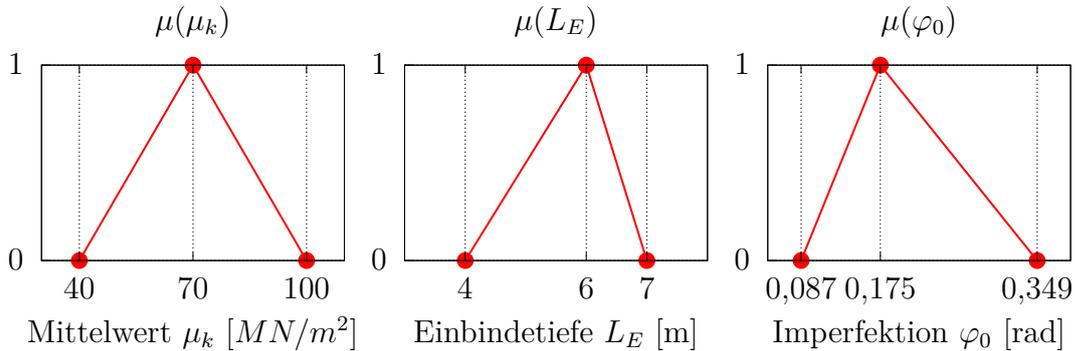


Abbildung 7.31: Fuzzy-Eingangsvariablen für den Bohrpfahl

Hidden Layer mit 20 Neuronen. Für die Lernrate wird $\eta = 0,02$ gewählt. Ein LSQ-Metamodell mit kubischen Polynomen bildet die Schnittfunktionen der HDMR. Für alle Metamodelle werden 5 Stützstellen pro Dimension gewählt. Für die vollfaktorielle Versuchsplanung werden $N_{\text{sim}} = 5^3$ Stützstellen erhalten und für das HDMR-Modell resultieren $N_{\text{sim}} = 61$. In Abbildung 7.32 wird das Ergebnis der Fuzzy-stochastischen Analyse für den Mittelwert und der Standardabweichung der kritischen Last gezeigt. Der Stichprobenumfang der *Monte-Carlo-Simulation*

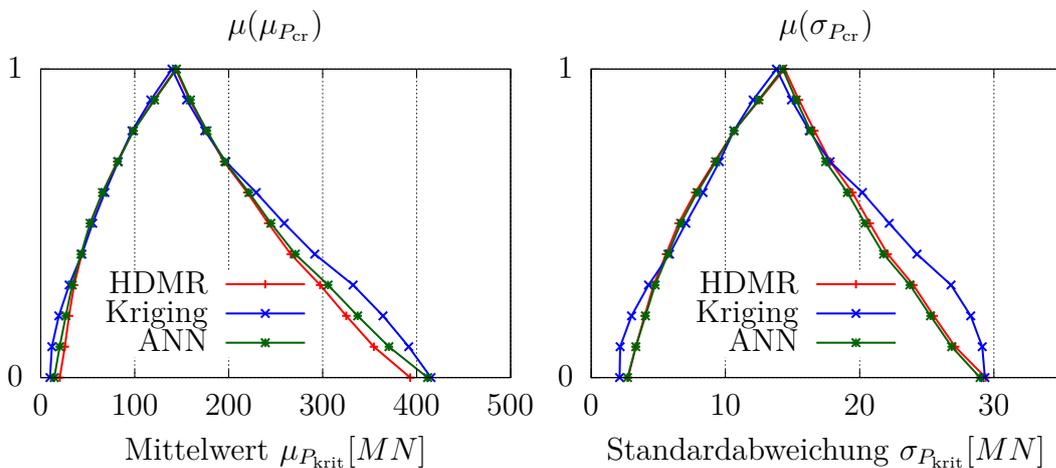


Abbildung 7.32: Fuzzy-Ergebnisgrößen der kritischen Last entwickelt mit verschiedenen Metamodellen: Mittelwert (links) und Standardabweichung (rechts)

ist $N_{\text{mcs}} = 10000$. Eine gute Übereinstimmung ist für die Lösungen des HDMR-Modells und des Neuronalen Netzes (ANN) zu beobachten. Hingegen ist bei der Anwendung des *Kriging-Modells* vor allem bei der Fuzzy-Standardabweichung eine größere Abweichung der Zugehörigkeitsfunktionen zu erkennen. Allerdings sei an dieser Stelle auch erwähnt, dass dies keine zu verallgemeinerte Aussage gegen das *Kriging-Modell* ist. Möglicherweise können andere Einstellungen für dieses

Metamodell bessere Ergebnisse liefern. Das soll hier aber nicht weiter untersucht werden. In Abbildung 7.33 werden die funktionalen Zusammenhänge zwischen den drei Eingangsparametern und dem Mittelwert der kritischen Last als Ergebnisgröße durch die Schnittfunktionen der HDMR gezeigt. Diese Zusammenhänge sind auch durch den analytisch hergeleiteten Abbildungsoperator in Gleichung (7.153) gegeben. Dabei ist der Mittelwert der kritischen Last linear abhängig

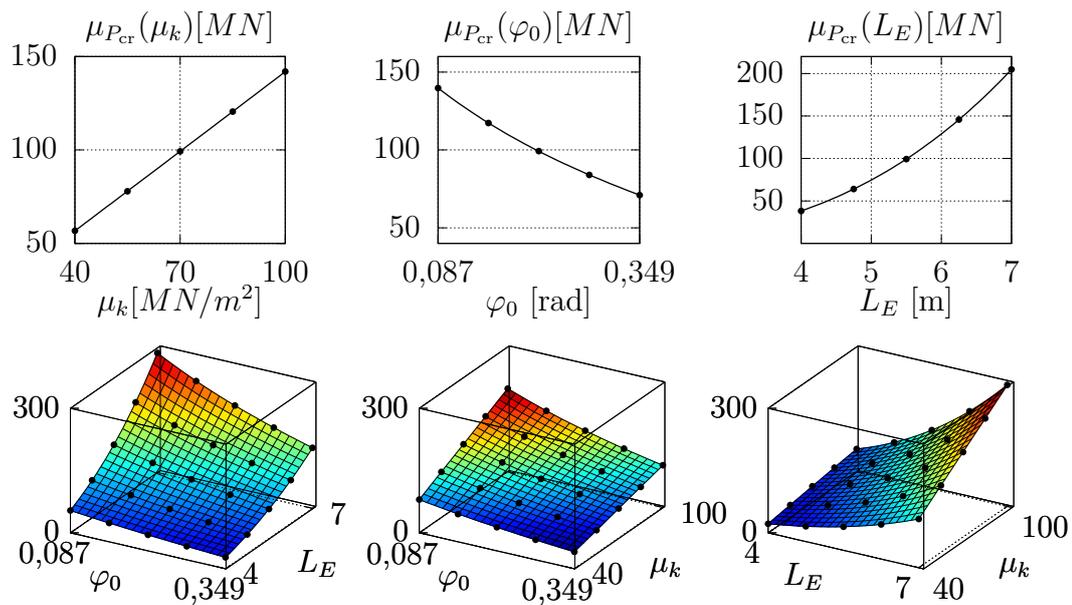


Abbildung 7.33: Schnittfunktionen der HDMR auf Basis des LSQ-Metamodells mit kubischen Polynomen für den Mittelwert der kritischen Last: eindimensionale Schnittfunktionen (oben) und zweidimensionale Schnittfunktionen (unten)

vom Mittelwert der Federsteifigkeit μ_k und nichtlinear von der Einbindetiefe L_E und der Imperfektion φ_0 .

Zusätzlich sind die Ergebnisse einer globalen Sensitivitätsanalyse für den Mittelwert in Abbildung 7.34 und der Standardabweichung in Abbildung 7.35 dargestellt. Die Ergebnisse der varianzbasierten Sensitivitätsanalyse werden dem *Support* des Fuzzy-Eingangsraums ($\alpha = 0$) zugeordnet. Da varianzbasierte Sensitivitätsanalysen für stochastische Ausgangsgrößen eingesetzt werden, werden hier die Fuzzy-Größen als gleichverteilte Zufallsvariablen aufgefasst. Durch diese Vereinfachung wird die Unschärfe in den Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse nicht berücksichtigt. Die varianzbasierte Sensitivitätsanalyse muss daher getrennt von der Fuzzy-Strukturanalyse betrachtet werden. Allerdings kann damit eine erste Abschätzung der Einflüsse angegeben werden. Die GSA basiert auf dem HDMR-Metamodell mit dem LSQ-Ausgleichsmodell für die Schnittfunktionen. Für die

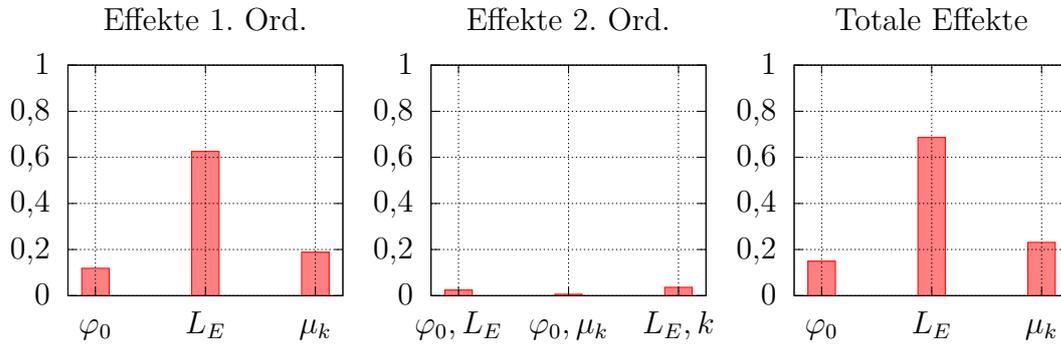


Abbildung 7.34: Ergebnisse der globalen Sensitivitätsanalyse für den Mittelwert der kritischen Last

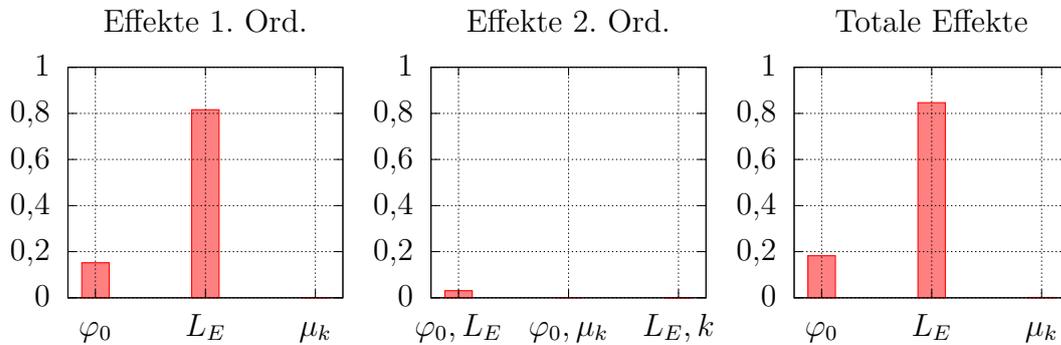


Abbildung 7.35: Ergebnisse der globalen Sensitivitätsanalyse für die Standardabweichung der kritischen Last

Monte-Carlo-Integration auf dem Metamodell werden 100^3 Auswertungspunkte für ein *Random Sampling* gewählt. Die größte Sensitivität auf den Mittelwert der kritischen Last hat die Einbindetiefe L_E . Die Effekte 2. Ordnung spielen hingegen kaum eine Rolle. Die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse bezüglich des Mittelwerts unterscheiden sich zudem von den Ergebnissen der Standardabweichung. Die Steifigkeit k in Abbildung 7.35 hat beispielsweise keinen Einfluss auf die Standardabweichung der kritischen Last.

Zusätzlich wird an diesem Beispiel der Vorteil der Ausgleichsmodelle gegenüber den Interpolationsmodellen bei gestörten Daten gezeigt. Solche gestörte Daten in Form von „Ausreißern“ können zum Beispiel bei der MCS aufgrund eines zu geringen Stichprobenumfangs N_{mcs} auftreten. Daraus folgen Instabilitäten bei den Interpolationspolynomen [236]. Mit den Ausgleichsmodellen können solche „Ausreißer“ in einem gewissen Umfang ausgeglichen werden. Dieses Phänomen wird im Rahmen der Unschärfemodellierung gezeigt und kann bei der Fuzzy-Ergebnisgröße der Standardabweichung der kritischen Last beobachtet werden. Hierzu sind in Abbildung 7.36 die Zugehörigkeitsfunktionen dieser Ergebnisgröße für einen

unterschiedlichen Stichprobenumfang gegenübergestellt.

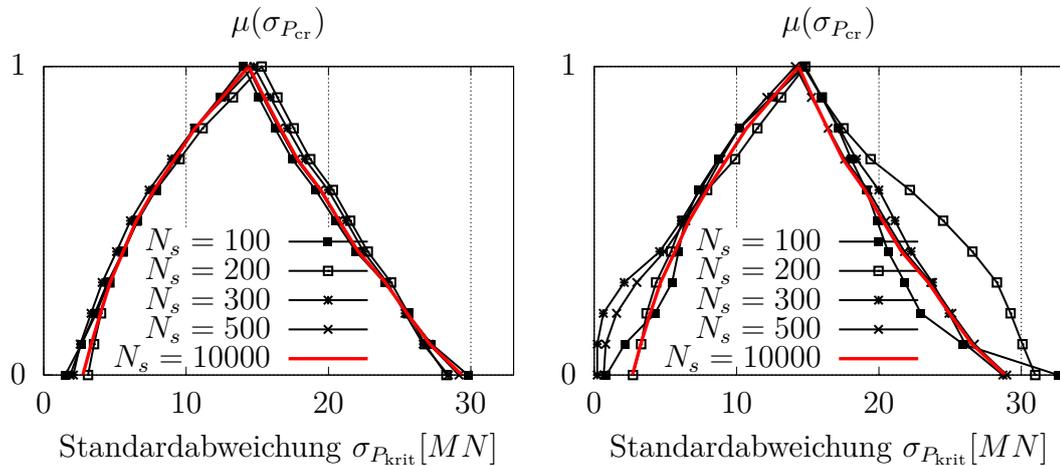
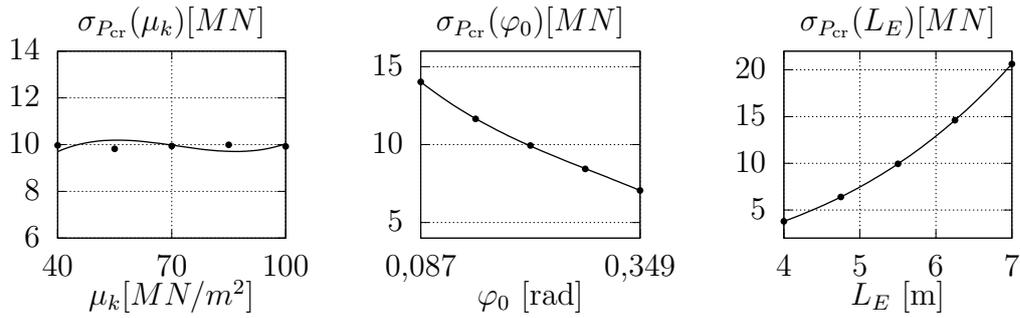


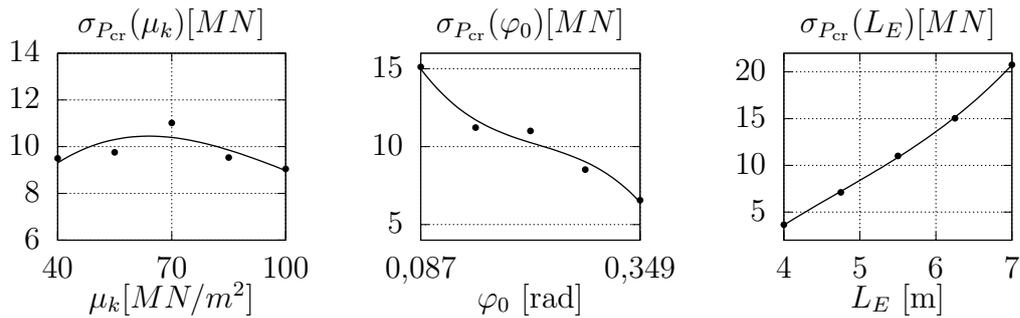
Abbildung 7.36: Fuzzy-Ergebnisgröße der Standardabweichung der kritischen Last für einen unterschiedlichen Stichprobenumfang der MCS: HDMR mit LSQ (links) und HDMR mit *Lagrange-Interpolation* (rechts)

Bei der Anwendung eines LSQ-Metamodells als Vertreter der Ausgleichsmodelle zur Berechnung der Schnittfunktionen der HDMR werden die Ergebnisgrößen in der Abbildung (links) erhalten. Die Ergebnisgrößen in der Abbildung (rechts) entstehen bei der Anwendung von *Lagrange-Interpolationspolynomen* für die Schnittfunktionen. Dabei wird die Lösung für einen Stichprobenumfang mit $N_{\text{mcs}} = 10000$ als Referenzlösung angesehen. Zur Vergleichbarkeit sind alle Ergebnisgrößen mit dem gleichen *seed-Wert* berechnet. Bereits mit dem Ausgleichsmodell kann für kleine Stichprobenumfänge eine stabile Fuzzy-Ergebnisgröße erzielt werden. Hingegen kann es bei Anwendung von Interpolationsmodellen vor allem auf dem *Support* der Ergebnisgröße zu großen Abweichungen kommen. Der Ausgleichseffekt kann gut an den eindimensionalen Schnittfunktionen in Abbildung 7.37 beobachtet werden. Die Schnittfunktion für den Mittelwert der Federsteifigkeit μ_k ist näherungsweise ein konstanter Verlauf. Bei einem zu geringen Stichprobenumfang sind bei der Berechnung der Standardabweichung „Ausreißer“ zu beobachten. Diese können mit der Forderung (7.12), dass ein *Lagrange-Polynom* durch die Stützstellen verlaufen muss, erklärt werden. Damit können die „Ausreißer“ nicht mehr ausgeglichen werden. Als Fazit wird deshalb empfohlen für die α -Level-Optimierung bei einer Fuzzy-stochastischen Analyse die Ausgleichsmodelle zu verwenden.

HDMR/LSQ-Metamodell, Monte-Carlo-Simulation: $N_{\text{mcs}} = 10000$



HDMR/LSQ-Metamodell, Monte-Carlo-Simulation: $N_{\text{mcs}} = 200$



HDMR/Lagrange-Metamodell, Monte-Carlo-Simulation: $N_{\text{mcs}} = 200$

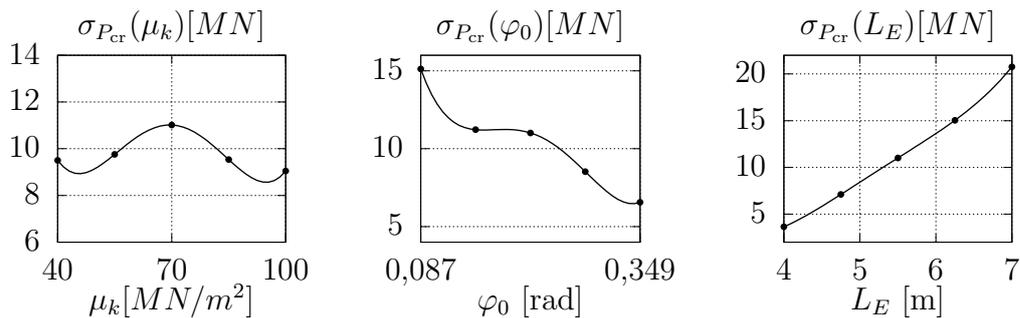


Abbildung 7.37: Eindimensionale Schnittfunktionen für die Standardabweichung der kritischen Last als Ergebnisgröße mit unterschiedlichem Stichprobenumfang N_{mcs}

7.6.3 Einmassenschwinger

Am Beispiel eines linearen Einmassenschwingers soll die Anwendung der Metamodellierung für einen unscharfen Ergebnisprozess diskutiert werden. Der lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad ist ein vereinfachtes Modell zur Schwingungsuntersuchung eines Bauwerks. Durch diesen können wesentliche Eigenschaften eines Bauwerks wie die Trägheitskraft $m\ddot{u}$, die Dämpfungskraft $d\dot{u}$ und die Rückstellkraft $c_B u$ erfasst werden. In Abbildung 7.38 ist der Einmassenschwinger als Kragträger mit einer Endmasse und das Ersatzfedermodell dargestellt.

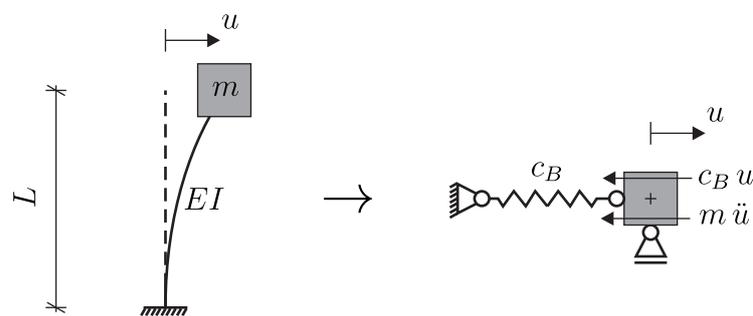


Abbildung 7.38: Kragträger mit Einzelmasse (links) und Ersatzfedermodell mit Freischnitt der Trägheitskraft $m\ddot{u}$ und der Rückstellkraft $c_B u$ (rechts)

Aus dem Kräftegleichgewicht kann die Bewegungsgleichung für eine ungedämpfte Eigenschwingung

$$m\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{c_B}{m} \quad (7.155)$$

hergeleitet werden. Obwohl reale Bauwerke dissipativ sind, wird die Dämpfungskraft $d\dot{u}$, die auch entgegen der Bewegungsrichtung wirkt, vernachlässigt. Bei der Untersuchung der Eigenschwingung wird keine Erregerkraft angesetzt. Der Kragträger wird bis zum Zeitpunkt $t = 0$ um $u_0 = 0,01 \text{ m}$ ausgelenkt. Vor dem Loslassen gilt für die Anfangsgeschwindigkeit: $\dot{u}_0 = 0$. Mithilfe dieser Anfangsbedingungen und des Lösungsansatzes

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (7.156)$$

kann das Anfangswertproblem gelöst werden. Als Abbildungsoperator für den unscharfen Ergebnisprozess wird die Lösung der Beschleunigung

$$\mathcal{M}(x, t) = \ddot{u}(x, t) = -0,01 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (7.157)$$

verwendet. Die Eingangsgröße wird durch die Variable x beschrieben. Für die Fuzzy-Analyse wird die Biegesteifigkeit EI als Fuzzy-Eingangsgröße

$$EI = \langle 1000, 3000, 5000 \rangle \text{ kNm}^2 \quad (7.158)$$

und die Masse m als Konstante $m = 1000 \text{ kg}$ definiert. Die Biegesteifigkeit des Kragträgers wird mit der Federsteifigkeit

$$c_B = \frac{3EI}{L^3} \quad (7.159)$$

im Ersatzfedermodell berücksichtigt. Damit kann die Eigenkreisfrequenz, die eine wesentliche Systemeigenschaft des Einmassenschwingers ist, und die Schwingungsdauer T des Systems wie folgt berechnet werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{c_B}{m}} = \sqrt{\frac{3EI}{L^3 m}} \quad , \quad (7.160)$$

$$T = 2\pi/\omega \quad . \quad (7.161)$$

Untersucht wird der Beschleunigungs-Zeit-Verlauf für eine Dauer von $t_{\max} = 5 \text{ s}$ und einer Zeitschrittweite von $dt = 0,01 \text{ s}$. Ein LSQ-Metamodell mit dem Polynomgrad $K = 5$ wird für jeden Zeitschritt aufgestellt. Dabei wird jeweils die gleiche äquidistante Versuchsplanung mit zehn Stützstellen gewählt. In Abbildung 7.39 ist das Ergebnis für den eindimensionalen unscharfen Ergebnisprozess dargestellt. Der Abstand der Stützfunktionen $\mu = 0$ bzw. die Unschärfe wird

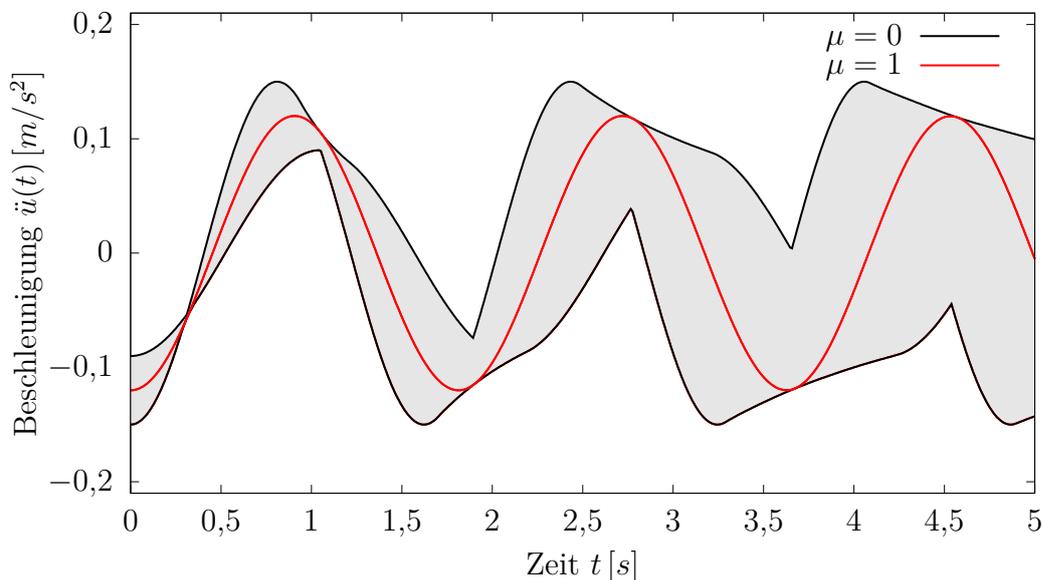


Abbildung 7.39: Unscharfer Ergebnisprozess der Beschleunigung $\ddot{x}(t)$

mit fortschreitender Zeit größer. Mit dem gewählten Metamodell muss für jeden Zeitschritt der nichtlineare Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße EI und der Ausgangsgröße $\ddot{u}(t)$ abgebildet werden können. Hierzu können die Qualitätskriterien in Tafel 7.2 für jeden Zeitschritt berechnet werden. Für dieses Beispiel

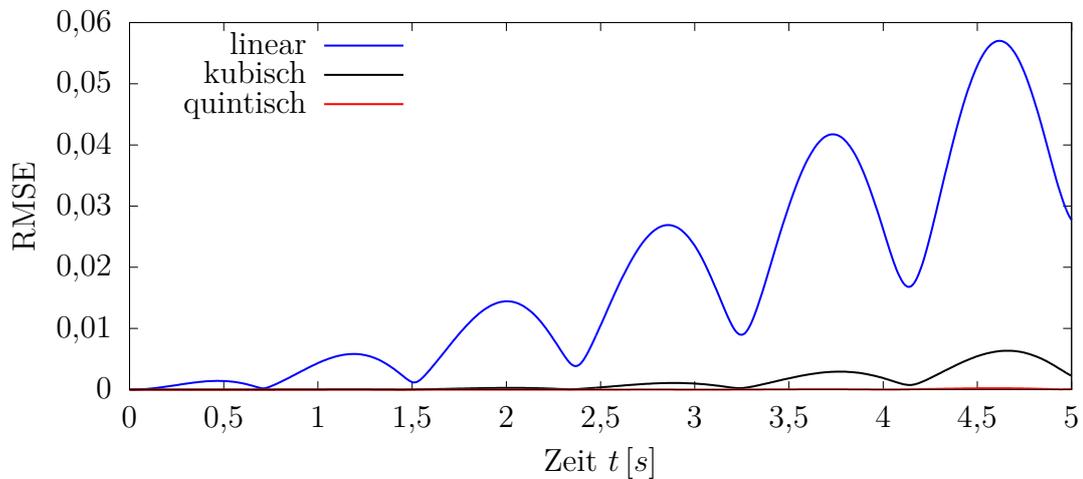


Abbildung 7.40: Zeitlicher Verlauf der Fehlergröße RMSE für verschiedene Polynomgrade

ist der zeitliche Verlauf der Fehlergröße RMSE für verschiedene Polynomgrade in Abbildung 7.40 dargestellt. Zur Fehlerberechnung werden jeweils 100 zufällige Testpunkte generiert. Der RMSE-Fehler steigt mit fortschreitender Zeit. Allerdings ist zu erkennen, dass das LSQ-Metamodell mit einem quintischen Polynom ($K = 5$) ausreichend ist. Ein zu großer Fehler wirkt sich zudem auf die Gestalt der Fuzzy-Variable an einem betrachteten Zeitschritt aus. In Abbildung 7.41 ist hierzu die Fuzzy-Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2,5 s$ für die Anwendung des LSQ-Metamodells mit einem linearen, kubischen und quintischen Polynom dargestellt. Die Anwendung eines kubischen Polynoms führt auf gute Ergebnisse.

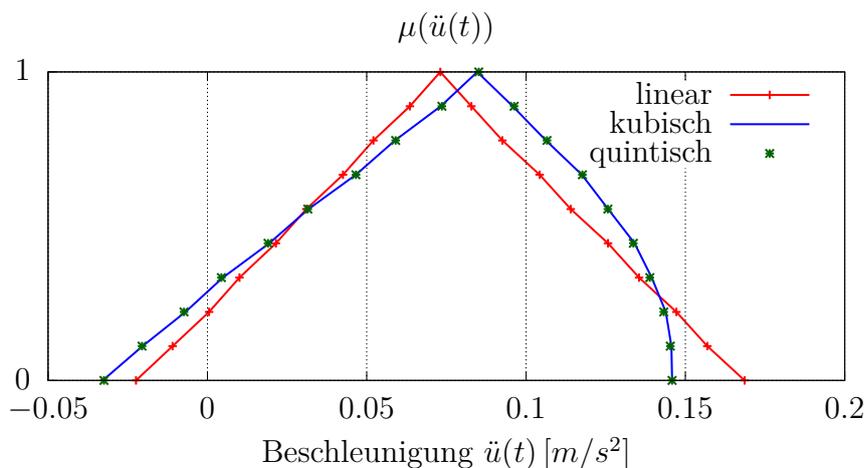


Abbildung 7.41: Fuzzy-Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2,5 s$ für die Anwendung des LSQ-Metamodells mit unterschiedlichen Polynomgraden

8 Zylinderschale mit Imperfektionen

Ein größeres Anwendungsbeispiel in dieser Arbeit stellt die Zylinderschale mit Imperfektionen dar. Nach einem historischen Überblick wird in diesem Kapitel gezeigt, wie die polymorphe Unschärfemodellierung einen Beitrag zur Verbesserung der computergestützten Beulbemessung von Schalentragswerken leisten kann. Die Forschung für einen sicheren Entwurf beulgefährdeter Schalen ist noch lange nicht abgeschlossen. Bisher existiert noch kein umfassendes Regelwerk, wie vor allem die unbekanntenen Imperfektionen in einer numerischen Stabilitätsuntersuchung zu behandeln sind. In diesem Kapitel werden Unschärfemodelle für folgende Imperfektionen vorgestellt:

- Abweichungen von der ideellen Oberfläche der Schale
- Variationen der Schalendicke
- Aufstandsimperfektionen
- Variation der Materialparameter

Da das Tragverhalten einer Schale gleichzeitig von vielen Größen abhängt, ist eine Vorhersage der kritischen Last sehr schwierig. Die Zylinderschale wird daher in der Literatur auch als *prima donna* der Tragstrukturen bezeichnet [242]. Die kritische Last hängt dabei maßgeblich von der Ausbildung der Imperfektionen ab. Über deren Form und Größe können keine zuverlässigen Aussagen getroffen werden. Die grundlegende Idee besteht darin, die bereits vorgestellten polymorphen Unschärfemodelle zu verwenden, um auch die Unschärfen der Eingangsparameter für Stabilitätsuntersuchungen von Schalenstrukturen zu quantifizieren. Da in der Regel nur wenige Messdaten vorhanden sind, können damit in der numerischen Berechnung neben den aleatorischen auch die epistemischen Unschärfen abgebildet werden.

In diesem Kapitel werden auf Basis realer Messdaten zunächst die Unschärfen der Eingangsparameter quantifiziert, um anschließend eine Fuzzy-stochastische Analyse durchzuführen. Diese ist sehr rechenintensiv und erfordert deshalb die Anwendung der Metamodellstrategien aus dem vorherigen Kapitel. Die Mantelimperfektionen werden dabei als Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder dargestellt. Dazu wird erläutert wie die Korrelationseigenschaften zur Beschreibung solcher Zufallsfelder aus wenig Messdaten gewonnen werden können. Zudem wird ein Gesamtmodell präsentiert, in dem weitere Imperfektionen, wie Randimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variationen der Schalendicke modelliert werden. Die Ergebnisse der Unschärfemodellierung sind die stochastischen Größen als unscharfe Parameter, wie z.B. der Mittelwert der kritischen Last. Das

Ziel soll sein, dass zukünftig auch die Unschärfe bei der Bemessung im Schalenbeulen mit berücksichtigt werden kann.

8.1 Historischer Überblick

Folgend wird eine Zusammenfassung zur Geschichte des Schalenbeulens gegeben. Dazu geben u.a. SCHMIDT [279, 280], ELISHAKOFF [78] und ROTTER [258] eine gute Übersicht.

8.1.1 Deterministisches vs. probabilistisches Bemessungskonzept

Die *klassische Stabilitätstheorie* der Kreiszylinderschale wurde Anfang des 20. Jahrhunderts unabhängig voneinander von LORENZ (1911) [187], TIMOSHENKO (1910) [318] und SOUTHWELL (1914) [302] entwickelt. Als ein Ergebnis der Arbeiten ging u.a. die kritische Last einer ideal elastischen Zylinderschale unter Axialdruck hervor:

$$P_{\text{cr,perf}} = \frac{2 \pi E t^2}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (8.1)$$

mit E dem Elastizitätsmodul, t der Schalendicke und R dem Radius der Schale. Die Gleichung gilt für eine perfekt kreiszylindrische Schale, daher auch die Abkürzung „perf“ im Index. Eine Diskrepanz der Beullasten zwischen der klassischen Theorie und den Experimenten wurde erstmals von ROBERTSON [254] wahrgenommen. WILSON & NEWMARK [352] modifizierten daraufhin die Gleichung (8.1) mit einem Abminderungsfaktor von $\alpha = 0,3$ ohne die Ursache für die geringeren Beullasten aus den Versuchen zu kennen. KOITER [164] erkannte, dass die Imperfektionen, wie Abweichungen von der Sollgeometrie der Schale, Lastvariationen und Materialabweichungen die Ursache für die große Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis sind. DONNELL & WAN [67] kamen zur gleichen Erkenntnis, dass die reale Beullast von Art und Größe der Imperfektion abhängen muss. Die bis dahin entwickelten nichtlinearen Schalentheorien ermöglichten zwar Stabilitätsuntersuchungen von Schalen, aber schon damals existierte das Dilemma mit den unbekanntenen Imperfektionen. Das Problem bestand darin, dass die Imperfektionen aus dem Herstellungsprozess nicht erfassbar waren. In den 1960er Jahren wurden zur Lösung des Dilemmas vor allem in der Luft- und Raumfahrtbranche für die Auslegung von Raketen und anderer Trägersysteme viele Versuchsprogramme durchgeführt. In WEINGARTEN ET AL. [349] und SEIDE ET AL. [284] sind beispielsweise verschiedene Versuchsergebnisse von Beuluntersuchungen zusammengefasst. Daraus ging die heute noch weit verbreitete Bemessungsrichtlinie der NASA hervor [351]. Ein Ergebnis ist die berühmte *Knock-Down-Kurve* für

isotrope, unausgesteifte Kreiszyinderschalen unter Axialdruck, siehe Abbildung 8.1.

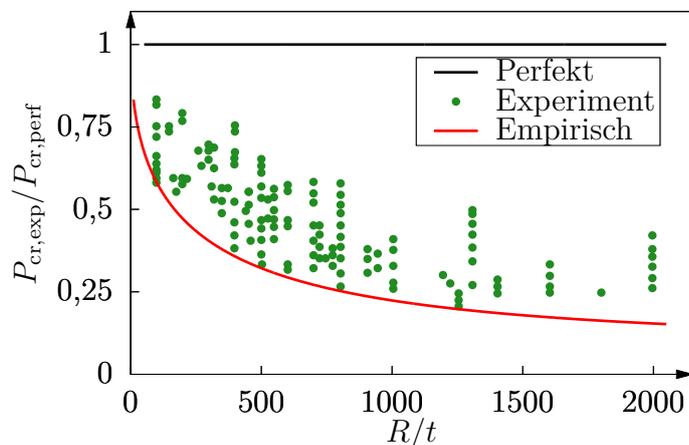


Abbildung 8.1: NASAs *Knock-Down-Kurve* isotroper Zylinderschalen unter Axialdruck [351] mit den hinterlegten Versuchsdaten aus [284]

Die Kurve ist eine untere Grenze aller Versuchsergebnisse. Die Berechnung des empirischen Abminderungsfaktors $\alpha_{cr,emp}$ (engl.: *knockdown factor*, KDF) erfordert lediglich das R/t -Verhältnis der Schale:

$$\alpha_{cr,emp} = \frac{P_{cr,emp}}{P_{cr,perf}} = 1 - 0,901 \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{t}} \right) \right) \quad \text{für } R/t < 1500 \quad . \quad (8.2)$$

Ein elastisches Beulen sehr dünner Schalen findet bereits bei einem Abminderungsfaktor von $\alpha_{cr,emp} \cong 0,2$ statt [140]. Diese Schalen sind auch sehr empfindlich gegenüber von Imperfektionen. BUDIANSKY & HUTCHINSON [44] erkannten, dass eine deterministische Beschreibung der Imperfektionen zur Vorhersage der Beullasten solch imperfektionsempfindlicher Schalen keine zuverlässigen Ergebnisse liefert. Sie empfahlen deshalb einen probabilistischen Ansatz. Auch BOLOTIN versucht in [33,34] die Imperfektionen mit statistischen Methoden zu erfassen. Er erwähnt außerdem, dass für das Ergebnis der Berechnung der kritischen Last auch ein Wert angegeben werden kann, mit dem eine Grenze für die „Wahrscheinlichkeit des Beulens“ definiert wird. Ungefähr ab diesem Zeitraum entwickelte sich parallel zu den semi-empirischen Ansätzen ein probabilistisches Bemessungskonzept. In [79] stellten ELISHAKOFF & ARBOCZ die gemessenen Imperfektionen in Form von *Fourier-Reihen* dar und definierten die *Fourier-Koeffizienten* als Zufallsvariablen. Sie erreichten dadurch mithilfe der *Monte-Carlo-Methode* eine Verbesserung der unteren Grenze der Beullast [77]. Dieser Ansatz unter Verwendung der

statistischen Eigenschaften 2. Ordnung der *Fourier-Koeffizienten* führte zur Entwicklung der *First-order second-moment-Methode* (FOSM), siehe z.B. in [80]. Allerdings wird bei dieser Methode vorausgesetzt, dass die Zufallsvariablen normalverteilt sind. ELISHAKOFF beschreibt bereits in [76] eine alternative Möglichkeit wie räumlich veränderliche Imperfektionen mit homogenen Zufallsfeldern und einer gegebenen Autokorrelationsfunktion dargestellt werden können. Ungefähr ab Beginn der 2000er Jahre wird verstärkt untersucht, wie Imperfektionen als homogene *Gauß-Zufallsfelder* oder auch als nicht *Gaußsche Zufallsfelder* beschrieben werden können. Hierfür werden häufig die Methoden wie die spektrale Darstellung oder die Karhunen-Loève-Erweiterung (KLE) eingesetzt. Anwendungen der Methode der spektralen Darstellung finden sich in [151, 224, 303]. Die benötigte spektrale Leistungsdichte wird dabei aus Messergebnissen gewonnen. In [43, 272, 273] sind Arbeiten, in denen die KLE Anwendung findet. Darin wird die benötigte Kovarianzmatrix ebenfalls aus vermessenen Mantelimperfektionen gewonnen. Bei beiden Methoden haben die Korrelationsparameter einen großen Einfluss auf die Imperfektionsform und damit auch auf die Streuung der Beullasten. Hierzu untersuchte LAUTERBACH in [178, 179] den Einfluss dieser Korrelationsparameter, auch Korrelationslängen genannt. Dennoch wird bei all den Methoden aufgrund zu wenig vorhandener Daten das Zufallsfeld meist als homogen angenommen und die Korrelationsparameter werden schlussendlich so gewählt, damit ein Worst-Case-Szenario in der Simulation abgedeckt wird. Für moderne Schalenstrukturen ist der KDF nach Gleichung (8.2) ein sehr konservativer Abminderungsfaktor [130]. Deshalb wird heute noch in zahlreichen Forschungsarbeiten ein zuverlässiger und gleichzeitig wirtschaftlicher KDF gesucht [168, 169, 330, 331]. Als weiteren Forschungszweig ist das Störlastkonzept zu nennen, siehe z.B. [128, 329]. Bei dieser Methode wird eine Störlast als Ersatzimperfektion gesucht, die die reale Beullast wiedergeben soll.

8.1.2 Schalenbeulen in der aktuellen Norm

Nicht nur in der Luft- und Raumfahrtbranche werden robuste Schalenstrukturen benötigt, sondern auch in Bereichen des Bauingenieurwesens. Der wachsende Bedarf an Speichermöglichkeiten verschiedener Produkte, lässt hier beispielsweise die Nachfrage an Silos und Tanks steigen. Aber auch Schornsteine und Türme von Windkraftanlagen sind Schalentragwerke, die auf Stabilität untersucht werden müssen. Mit dem Ziel dem Ingenieur für die Bemessung solcher Tragwerke ein umfassendes Regelwerk zur Verfügung zu stellen, begannen die Arbeiten von ROTTER, SCHMIDT und GREINER. Die Arbeiten sind die Grundlage des aktuellen Eurocodes 3 (EC3): Festigkeit und Stabilität von Schalen [65]. Im EC3 sind zwei Möglichkeiten der Nachweisführung beschrieben: ein spannungsbasierter Beulsi-

a) Geometrische Imperfektionen:

- Abweichungen von der Nenngeometrie der Schalenmittelfläche (Verformungen/Vorbeulen, Unrundheiten);
- Unregelmäßigkeiten an und nahe Schweißnähten (kleine Exzentrizitäten, Schrumpfeinziehungen, Krümmungsfehler vom Walzen);
- Abweichungen von der Nenndicke
- mangelnde Ebenheit der Auflagerung

b) Materielle Imperfektionen:

- durch Walzen, Pressen, Schweißen, Richten usw. verursachte Eigenstressungen;
- Inhomogenitäten und Anisotropien.

Tafel 8.1: In einer GMNIA- (oder GNIA-) Berechnung abzudeckende Imperfektionen nach EN 1993-1-6 [65]

cherheitsnachweis für eine Handrechnung und ein numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis. Der Kern des spannungsbasierten Nachweises ist ein auf der Fließspannung $f_{y,k}$ bezogener Abminderungsfaktor χ als Funktion der dimensionslosen Schlankheit $\lambda = (f_{y,k}/\sigma_{cr})^{0,5}$. Dieser wurde von ROTTER eingeführt und modifiziert [256,257]. Beim numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweis können die Imperfektionen explizit in der geometrisch und/oder materiell nichtlinearen FE-Berechnung mit modelliert werden. Als Beispiel sei das GNIA (Geometrisch nichtlineare elastische Berechnung mit Imperfektionen) und das vollständig nichtlineare Berechnungskonzept GMNIA (Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnung mit Imperfektionen) genannt. Im EC3 wird zwischen geometrischen und materiellen Imperfektionen unterschieden, siehe Tafel 8.1. Allerdings besteht auch hier das Dilemma mit den unbekanntenen Imperfektionen. In Tafel 8.2 ist ein Auszug der aktuellen Norm [65] zur Behandlung von Imperfektionen in einer globalen GMNIA-Berechnung abgebildet. Die Amplitude der Ersatzimperfektion kann beispielsweise über die Klassen der Herstelltoleranz-Qualität ermittelt werden. Die Norm erlaubt außerdem für den Fall, wenn keine ungünstige Imperfektionsform gefunden werden kann, eine eigenformaffine Imperfektionsform aufzubringen. Allerdings ist das Ergebnis einer Eigenwertanalyse der Zylinderschale oft eine Clusterbildung der Eigenwerte [282]. Das bedeutet, dass es nahezu unmöglich ist die

8.8.2 Bemessungswert des Widerstandes

(14) Die Form der geometrischen Ersatzimperfectionen ist so zu wählen, dass sie den bezogenen elastisch-plastischen Beulwiderstand der imperfekten Schale **so ungünstig wie möglich** beeinflussen. Falls die ungünstigste Imperfektionsform nicht ohne weiteres zweifelsfrei erkennbar ist, sollte die Berechnung für eine ausreichende Anzahl verschiedener Imperfektionsformen wiederholt werden, um den ungünstigsten Fall [...] zu identifizieren.

(15) Wenn keine andere ungünstigere Imperfektionsform begründet werden kann, darf eine **eigenformaffine Imperfektionsform** angesetzt werden.

ANMERKUNG Die eigenformaffine Form ist die kritische Beulform, die zu dem basierend auf einer LBA-Berechnung der perfekten Schale ermittelten idealen bezogenen elastischen Beulwiderstand R_{cr} gehört.

Tafel 8.2: Auszug der Norm EN 1993-1-6 [65] zur Behandlung von Imperfectionen in einer globalen GMNIA-Berechnung

ungünstigste Eigenform als Imperfektion zu finden. SCHNEIDER schreibt hierzu deutlich in [281, 282], dass es die eine ungünstige Imperfektionsform überhaupt nicht gäbe. SCHMIDT [280] möchte das Dilemma der unbekanntenen Imperfektionsformen mit einer Doppelstrategie lösen. Bei dieser Strategie werden Herstellertoleranzen definiert, in denen der Tragwerksplaner mit geeigneten Berechnungsverfahren die ungünstigen Imperfektionsformen aufspüren kann. Dennoch besteht Einigkeit darin, dass die Forschung zum Schalenbeulen noch lange nicht abgeschlossen ist. Auch ROTTER schreibt in [258], dass das aktuelle Regelwerk noch verbessert werden muss. Die Regeln zur Behandlung von Imperfectionen seien mit begrenzten Wissen und unter Zeitdruck entstanden.

8.1.3 Einführung der Unschärfemodellierung im Schalenbeulen

In Abbildung 8.2 ist die historische Entwicklung des Schalenbeulens zusammenfassend dargestellt. Das Hauptproblem vieler Forschungsarbeiten zur Entwick-

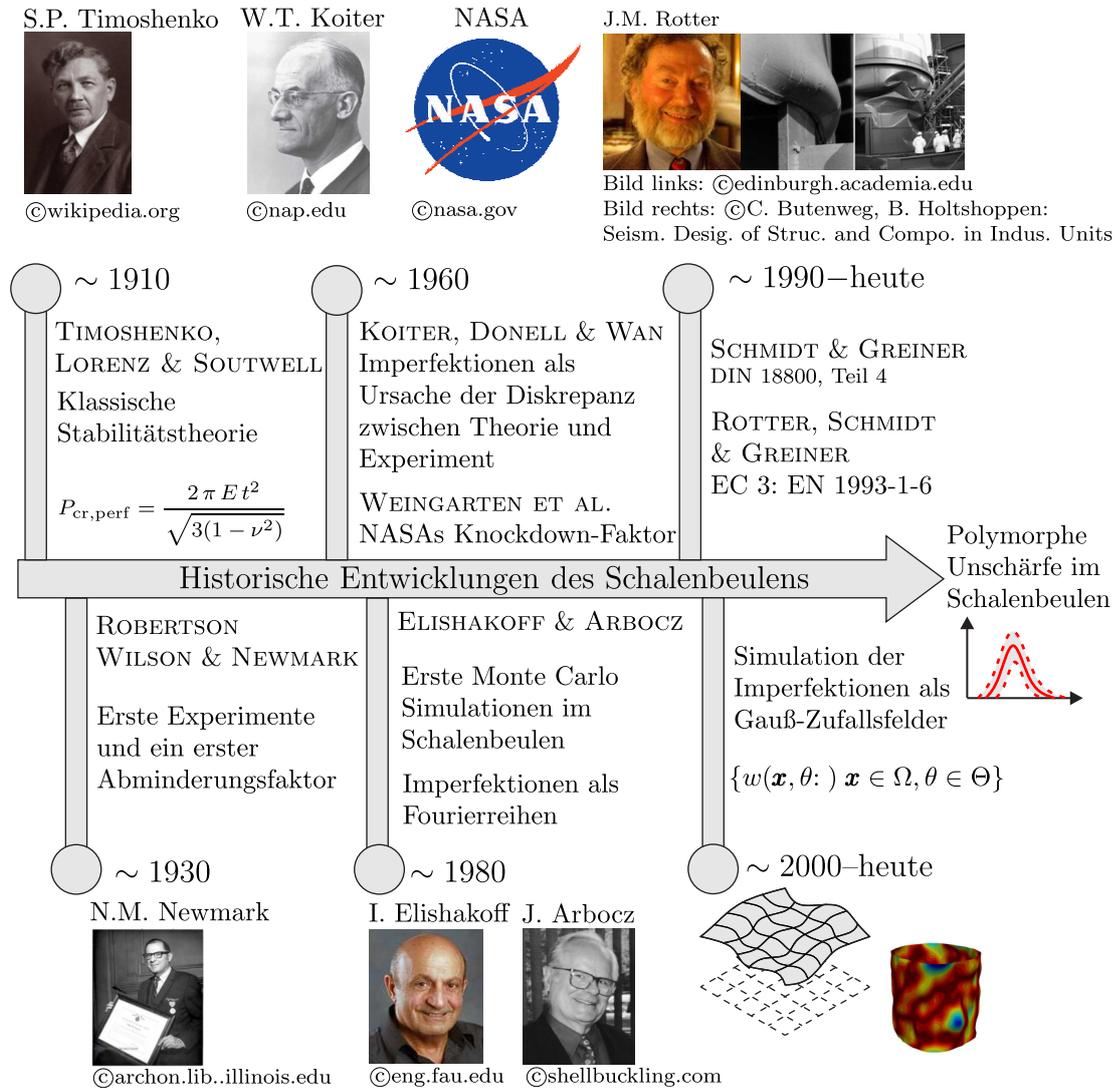


Abbildung 8.2: Zeitstrahl zur Geschichte des Schalenbeulens: Der Weg vom deterministischen zu einem probabilistischen Bemessungskonzept mit Unschärfe

lung eines deterministischen und auch probabilistischen Bemessungskonzeptes ist, dass nur wenige Versuchsdaten zur Validierung vorhanden sind. Zudem entspricht ein vermessener Modellzylinder unter Laborbedingungen auch nicht einer realen Struktur wie z.B. einer Rakete oder eines Silos. Für eine probabilistische Modellierung können zwar unter gewissen Annahmen die Korrelationsparameter für eine Darstellung der Imperfektionen als Zufallsfelder aus Versuchen gewonnen werden,

aber bei einer schwachen Datengrundlage sollten die Ergebnisse immer hinterfragt werden. Nicht zuletzt hat der Herstellprozess einer Zylinderschale einen großen Einfluss auf die Imperfektionsform. Daher ist es auch generell schwierig, eine umfassende Aussage über die Korrelationseigenschaften zu treffen. In der Literatur wird darauf hingewiesen, dass die vorhandenen Unschärfen unbedingt beschrieben werden müssen. Dazu schreibt ROTTER am Ende seines Artikels [258] zur Behandlung von Imperfektionen in einem FE-Modell:

‘Because of the uncertainty concerning the final imperfection patterns and amplitudes that may appear in the final construction, it is vital that a computational model adopts safe assumptions concerning imperfection forms and amplitudes.’

Als ein Vertreter des Forschungszweigs zur probabilistischen Modellierung des Schalenbeulproblems schreibt ARBOCZ in [11]:

‘Clearly, if one could quantify and understand the “problem uncertainties“ for each application and their influence on the problem design variables, one could obtain a better engineered, better designed and, ultimately, a safer product.’

KRIEGESMANN geht in [167] auf das Problem ein, dass die Ergebnisse bei einem zu geringen Stichprobenumfang sehr stark streuen:

‘If for instance 100 samples of a structure are manufactured, but only 10 are considered in a probabilistic analysis, the result will differ depending on whether the first 10 samples, or the 11 – 20 sample, or the last 10 samples are considered. The larger the samples size, the smaller the scatter of the design load.’

Das Problem mit den Unschärfen ist also erkannt und scheint nur lösbar mit einer sehr großen Anzahl an Versuchen vor jeder Herstellung eines Tragwerks. Das ist aber niemals umsetzbar und scheitert nicht zuletzt an wirtschaftlichen Gründen. In dieser Arbeit wird daher ein neuer Weg vorgeschlagen. Der klassische probabilistische Ansatz zur Lösung des Schalenbeulproblems wird durch die Einführung der bereits im Kapitel 6 vorgestellten polymorphen Unschärfemodelle von GRAF ET AL. [105, 106] erweitert. Die Unschärfemodellierung soll zur Lösung des Dilemmas mit den unbekanntem Imperfektionen beitragen. Hier ist die Unschärfe nicht allein der zu geringe Stichprobenumfang, sondern auch beispielsweise das schon begrenzte Wissen über den Herstellprozess. Daher ist es wichtig, dass verschiedene Arten von Unschärfen im Modell berücksichtigt werden und zwar

aleatorische sowie epistemische Unschärfen. Genau das wird durch Anwendung der polymorphen Unschärfemodelle ermöglicht. Mit der aleatorischen Unschärfe, die bereits beim herkömmlichen probabilistischen Bemessungskonzept simuliert wird, wird die natürliche Variabilität beschrieben. Dieser Typ von Unschärfe kann nicht reduziert werden und muss vom „Schalenbauer“ in Kauf genommen werden. Das bedeutet, dass schon allein der Herstellungsprozess einer Zylinderschale ein Zufallsprozess mit teilweise unvermeidbarer Unschärfe darstellt. Mit der epistemischen Unschärfe wird hingegen die Unvollständigkeit und die Ungenauigkeit der vorhandenen Daten beschrieben. Im Gegensatz zur aleatorischen Unschärfe lassen sich diese reduzieren, z.B. durch das Testen von mehr Schalen oder durch das Festlegen strengerer Toleranzen. Die epistemischen Unschärfen können durch Fuzzy-Variablen im Modell beschrieben werden. Die Beschreibung „unscharfer“ Imperfektionen führt zum Ergebnis „unscharfer“ Beullasten. Das Ziel ist, dass diese Unschärfen bei der Bemessung stabilitätsgefährdender Tragwerke zukünftig besser berücksichtigt werden können.

8.2 Unschärfemodell für Mantelimperfektionen

Das folgende Unschärfemodell für Mantelimperfektionen, d.h. für die Abweichungen von der ideellen Oberfläche der Zylinderschale, basiert auf real vermessener Imperfektionen. Das Vorgehen von der Auswertung einer Imperfektionsdatenbank bis hin zur Beschreibung der Unschärfen in einem Korrelationsmodell und der numerischen Umsetzung soll in diesem Abschnitt vorgestellt werden.

8.2.1 Auswertung einer Imperfektionsdatenbank

In einem Korrelationsmodell sind die Informationen über die Form der Mantelimperfektionen enthalten. Damit hat diese einen großen Einfluss auf das Beulverhalten. Das bedeutet, dass bereits die Beschreibung eines Korrelationsmodells eine Schlüsselaufgabe ist, um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten [59]. In dieser Arbeit wird die Imperfektionsdatenbank der Technischen Universität Delft (TU Delft) von ARBOCZ & ABRAMOVICH [10] angewendet. Das folgende Vorgehen kann auch für beliebige und aktuellere Datenbanken mit Imperfektionsmessungen, wie z.B. für die vermessenen Imperfektionen der Modellzylinder von UMMENHOFER [321], durchgeführt werden. Die angewendete Datenbank der TU Delft ist öffentlich zugänglich und sehr umfangreich. In dieser sind Versuchsergebnisse von Kreiszylinderschalen mit unterschiedlichen Abmessungen und Herstellungsprozessen enthalten. Das macht die Datenbank so interessant, um den Einfluss des Herstellungsprozesses auf die Korrelationseigenschaften der Mantelimperfektionen zu untersuchen. Die unterschiedlichen Herstellungsprozesse der unausgesteiften isotropen Schalen mit der Anzahl der Versuchsschalen sind in Tabelle 8.1 aufgelistet.

Schalentyp	Material und Herstellungsprozess	Anzahl der Versuchsschalen N_{sh}
A-7 – A-14	kupfergalvanisiert	7
N-6, N-9, N-11	nickelgalvanisiert	3
B-1 – B-4	gefräste Messingschalen	4
ST-1 – ST-6	geschweißte Edelstahlschalen	6

Tabelle 8.1: Übersicht der untersuchten Schalen aus der Imperfektionsdatenbank der TU Delft [10]

Die A-Schalen und N-Schalen haben eine galvanisierte Beschichtung. Die B-Schalen sind von einem dickwandigen Messingrohr abgeschnitten und durch anschließendes Fräsen in die gewünschte Form gebracht. Die geschweißten ST-Schalen

sind durch eine plastische Ausweitung geformt. Die Mantelimperfektionen sind Messungen der radialen Abweichungen eines definierten „perfekten“ Zylinders. Diese Abweichungen von der perfekten Schalengeometrie $w(x, y)$ können als *Fourier-Reihen* dargestellt werden. Hierzu wird die in der Datenbank gegebene Halbwellen-Cosinus-Darstellung in Axialrichtung angewendet:

$$w(x, y) = t \sum_{i=0}^{N_k} A_{i0} \cos\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + t \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{\ell=1}^{N_\ell} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(A_{k\ell} \cos\left(\frac{\ell y}{R}\right) + B_{k\ell} \sin\left(\frac{\ell y}{R}\right) \right) \quad (8.3)$$

Darin sind A_{i0} , $A_{k\ell}$ und $B_{k\ell}$ die *Fourier-Koeffizienten* für die Anzahl der Halbwellen i, k in Axialrichtung und ℓ der Anzahl der Vollwellen in Umfangsrichtung. Die Koordinaten x und y in Axial- und Umfangsrichtung beziehen sich auf die gemittelte Oberfläche der „perfekten“ Schale. Zudem ist R der Radius, L die Höhe und t die Dicke der Schale. Für das FE-Modell werden die Geometrie- und Materialdaten der Versuchsschalen für jeden Schalentyp gemittelt. Diese sind zusätzlich mit der maximal gemessenen Imperfektionsamplitude $|w(x, y)|$ und der Anzahl der Messpunkte $N_C \times N_R$ in Tabelle 8.2 aufgeführt.

Schalentyp	R [mm]	L [mm]	t [mm]	$ w(x, y) $ [mm]	E [N/mm ²]	ν [-]	$N_C \times N_R$
A-Schalen	101,60	202,29	0,1160	0,3672	104410	0,3	49x31
N-Schalen	101,60	196,85	0,0980	0,4393	172400	0,3	49x29
B-Schalen	101,60	155,89	0,2007	0,4685	106500	0,3	49x41
ST-Schalen	118,16	148,62	0,4559	1,4339	180600	0,3	49x41

Tabelle 8.2: Gemittelte Schalenabmessungen und Materialparameter nach [10]: Radius R , Schalenhöhe L , Schalendicke t , maximal gemessene Imperfektionsamplitude $|w(x, y)|$, E-Modul E , Querdehnzahl ν und die Anzahl der Messpunkte N_C in Umfangsrichtung und N_R in Axialrichtung

Mithilfe der *Fourier-Koeffizienten* in Gleichung (8.3), die in der Datenbank abgedruckt sind, können die Mantelimperfektionen aus der Messung rekonstruiert werden. Für jeden Schalentyp ist hierzu in Abbildung 8.3 eine aufgerollte Imperfektionsform dargestellt. Die abgebildeten Mantelimperfektionen unterscheiden sich in der Form und Amplitude. Die B-Schalen sind in der *Fourier-Reihe* durch Moden niedriger Ordnung dominiert, d.h. deren Form ist durch eine höhere Welligkeit gekennzeichnet. Bei den ST-Schalen ist die Schweißnaht im Imperfektionsmuster zu erkennen. Die größte Imperfektionsamplitude kann bei den

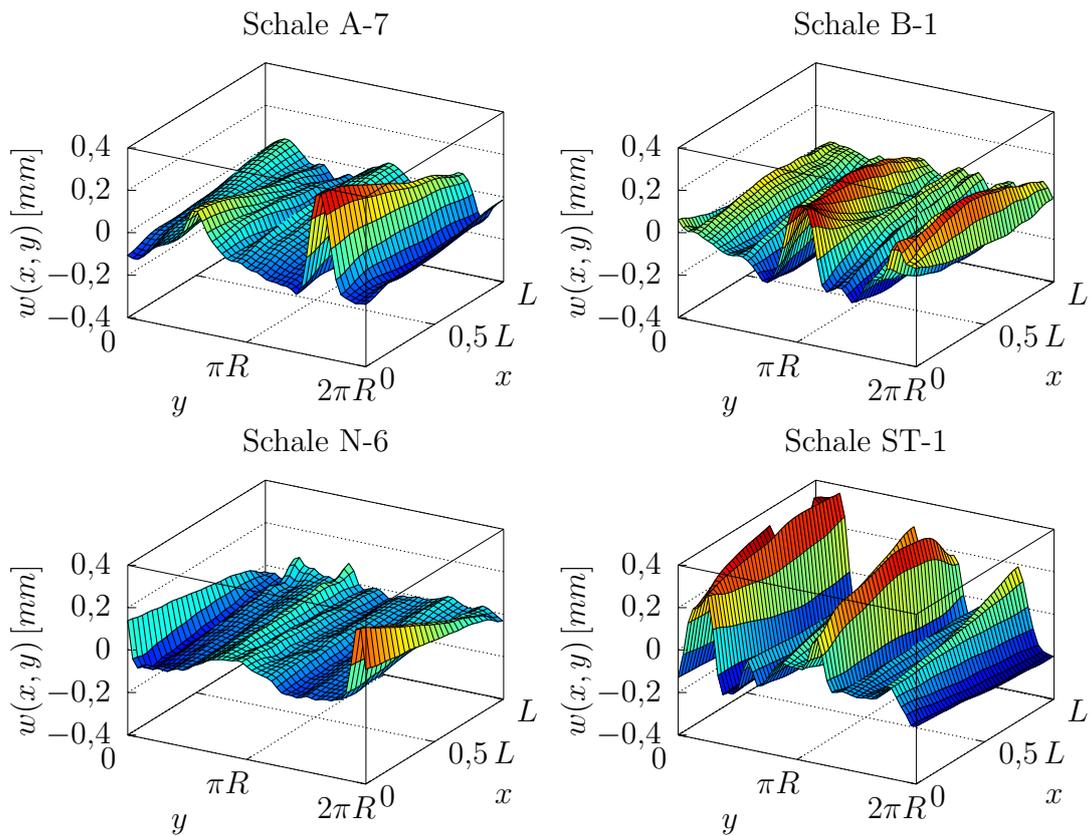


Abbildung 8.3: Auswahl gemessener Mantelimperfectionen in aufgerollter Konfiguration der vier untersuchten Schalentypen aus der Imperfektionsdatenbank der TU Delft [10]

N-Schalen beobachtet werden mit einem Verhältnis der maximal gemessenen Abweichung bezogen auf die Schalendicke $|w(x, y)|/t = 4,48$. Außerdem korrelieren die *Fourier-Koeffizienten* mit dem Herstellungsprozess. Damit können nach ARBOCZ & ABRAMOVICH [10] die charakteristischen Imperfektionsformen einem Herstellungsprozess zugeordnet werden.

8.2.2 Ein Korrelationsmodell für Mantelimperfectionen

Ein erster Schritt zur direkten Ermittlung der Korrelationscharakteristiken aus vorliegenden Messungen ist die Anwendung der korrigierten Stichprobenkovarianz

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{1}{N_{\text{sh}} - 1} \sum_{n=1}^{N_{\text{sh}}} (w(\mathbf{x}_{i,n}) - \bar{\mu}(\mathbf{x}_i))(w(\mathbf{x}_{j,n}) - \bar{\mu}(\mathbf{x}_j)) \quad (8.4)$$

mit $\bar{\mu}$ dem Stichprobenmittelwert. Aufgrund der zu kleinen Stichprobengröße ist es wichtig, den erwartungstreuen Schätzer $1/(N_{\text{sh}} - 1)$ anstelle von $1/N_{\text{sh}}$ zu verwenden. Die Anzahl der Versuchsschalen N_{sh} kann für jeden Schalentyp

entsprechend aus Tabelle 8.1 entnommen werden. In Abbildung 8.4 werden die Kovarianzmatrizen mit 7×7 Knoten der sieben A-Schalen und der vier B-Schalen dargestellt. In den Abbildungen der Kovarianzmatrizen wird deutlich eine inho-

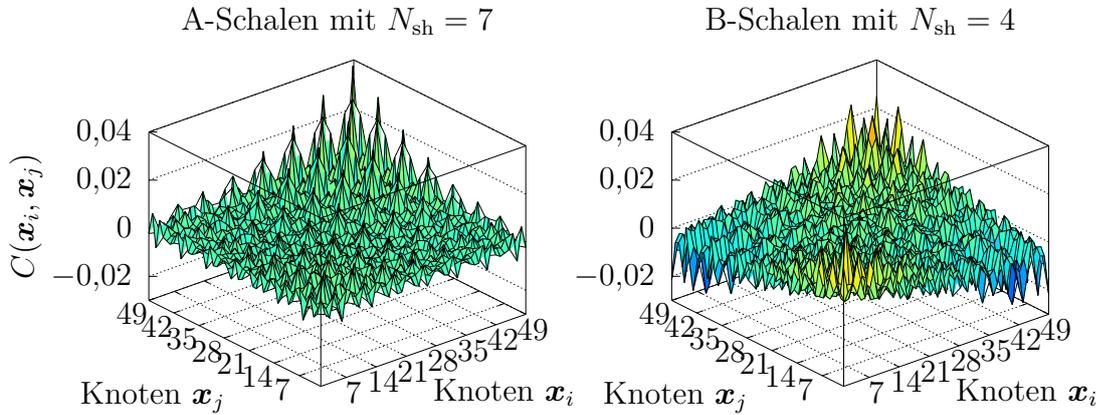


Abbildung 8.4: Stichprobenkovarianzmatrix der A-Schalen (links) und B-Schalen (rechts)

mogene Struktur gezeigt. Damit ist auch das Zufallsfeld der Imperfektion inhomogen. Ein Zufallsfeld ist homogen, wenn die Kovarianzfunktion nur von dem relativen Abstand zweier Punkte \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j abhängig ist [322]:

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = C(d) \quad \text{mit} \quad d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad . \quad (8.5)$$

Das ist bei den Kovarianzstrukturen in Abbildung 8.4 nicht der Fall. Dies kann festgestellt werden, wenn die Kovarianzen auf der Hauptdiagonalen der Matrix betrachtet werden. Hier ist der relative Abstand der Knoten zu sich selbst gleich Null. Im Fall einer homogenen Struktur muss die Kovarianz aber gleich sein. SCHENK & SCHUËLLER schlussfolgern in [272], dass die Kovarianzen für geometrische Imperfektionen auch vom Ort abhängig seien und durch ein inhomogenes Zufallsfeld beschrieben werden sollten. Allerdings muss aufgrund des zu kleinen Stichprobenumfangs mit solchen Aussagen sehr vorsichtig umgegangen werden. Zusätzlich wird in einem zweiten Teil der Imperfektionsdatenbank [57] der Stichprobenumfang erhöht, um zuverlässigere Ergebnisse zu erhalten. Dazu sind in dieser Datenbank die Imperfektionsmessungen von 33 einfachen Dosen als Zylinderschalen veröffentlicht. Das Ergebnis der Berechnung der zugehörigen Stichprobenkovarianzmatrix ist in Abbildung 8.5 zu sehen. Die Struktur ist zwar regelmäßiger, aber dennoch nicht homogen. Um eine sichere Aussage über die Eigenschaften der Korrelationsstruktur treffen zu können, werden weitaus mehr Versuchsschalen benötigt. Das ist bei komplexeren Schalenstrukturen aus wirtschaftlichen Gründen nicht durchführbar. Eine Anwendung solcher Kovarianzstrukturen auf Basis eines zu geringen Stichprobenumfangs für eine probabilistische Modellierung kann

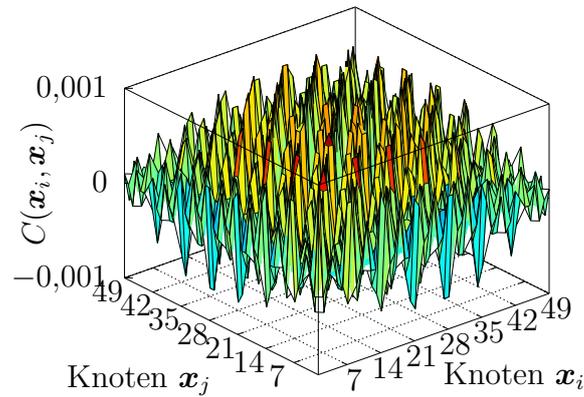


Abbildung 8.5: Stichprobenkovarianzmatrix für einen größeren Stichprobenumfang mit $N_{\text{sh}} = 33$ Schalen aus der Datenbank Teil 2 der TU Delft [57]

zu sehr unsicheren Ergebnissen führen. Zusätzlich dürfen hier auch nicht die numerischen Probleme, die bei der Lösung des Eigenwertproblems einer solchen Kovarianzmatrix auftreten können, außer Acht gelassen werden. Der im späteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellte Fuzzy-stochastische Ansatz erfordert eine funktionale Darstellung der Korrelationsstruktur mithilfe von Korrelationsparametern, die aus den Messungen evaluiert werden sollen. Hierfür werden an das Zufallsfeld zusätzlich zur Annahme eines *Gaußschen Zufallsfelds* folgende Bedingungen gestellt:

- Homogenität
- Separierbarkeit und
- Ergodizität .

Aus der Annahme der Separierbarkeit folgt die Bedingung der Homogenität der Form

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = C(\boldsymbol{\tau}), \quad \boldsymbol{\tau} = \left\{ \begin{array}{l} |x_i - x_j| \\ |y_i - y_j| \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta x \\ \Delta y \end{array} \right\} \quad (8.6)$$

mit $\boldsymbol{\tau}$ dem Vektor der Abstände eines Knotenpaares. Das bedeutet, dass die Kovarianz nur für Knotenpunkte, die den gleichen Abstand Δx und Δy haben, gleich ist. Aus der getrennten Abstandsberechnung folgt auch, dass die Struktur der Imperfektion entlang der x -Koordinate (Axialrichtung) unabhängig von der Struktur entlang der y -Koordinate (Umfangsrichtung) ist. Diese Annahme stellt eine Vereinfachung dar, kann aber durch den Herstellungsprozess begründet werden. Zum Beispiel kann das Blech einer Zylinderschale in den zwei Richtungen

unterschiedlich gewalzt sein. Genauere Untersuchungen hierzu gibt es noch nicht. SCHENK & SCHUËLLER führen in [272] zur probabilistischen Simulation von Mantelimperfectionen mit der KLE die vollständig getrennte Korrelationsstruktur

$$C_n(\boldsymbol{\tau}) = \sigma_n^2 \rho_n(\Delta x) \rho_n(\Delta y) \quad (8.7)$$

ein. Darin sind $\rho_n(\Delta x)$ und $\rho_n(\Delta y)$ eindimensionale Autokorrelationsfunktionen entlang der Axialrichtung und Umfangsrichtung des Zylinders. Die benötigte Varianz σ_n^2 ist gegeben durch die Stichprobenvarianz der Mantelimperfectionen der n -ten Versuchsschale

$$\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M (w(\mathbf{x}_k) - \bar{\mu}_n)^2 \quad (8.8)$$

mit dem Stichprobenmittelwert $\bar{\mu}_n$ der Mantelimperfection einer Versuchsschale. M entspricht der Anzahl der Knotenpunkte für die Diskretisierung des Zufallsfelds, z.B. mit der EOLE-Methode. Dabei bietet es sich an für M die Anzahl der Messpunkte aus Tabelle 8.2 zu verwenden: $M = N_C \times N_R$. Aus der Annahme der Separierbarkeit folgt die Beschreibung der Abweichungen von der perfekten Schengeometrie als unabhängige eindimensionale stochastische Prozesse. Für die Axialrichtung wird der eindimensionale stochastische Prozess mit $w(x_r)$ bezeichnet und die Anzahl der Beobachtungen des Prozesses sind mit $r = 1 \dots N_R$ definiert. $w(y_c)$ entspricht dem stochastischen Prozess in Umfangsrichtung mit $c = 1 \dots N_C - 1$ Beobachtungen. Da der aufgewickelte Zylinder eine geschlossene Struktur ist, muss hier eine Knotenreihe der Naht gelöscht werden. Folglich kann die Schätzung der Autokorrelationsfunktion in Bezug auf die Knotenabstände in Axialrichtung definiert werden zu

$$\rho_c(\xi \Delta x_0) = \frac{1}{N_R} \sum_{r=1}^{N_R-\xi} (w(x_r + \xi \Delta x_0, y_c) - \bar{\mu}_n)(w(x_r, y_c) - \bar{\mu}_n) \quad (8.9)$$

mit $\xi = 0 \dots N_R - 1$ der Anzahl der Vielfache eines konstanten Abstands Δx_0 . Die Notation der Vielfache ist in Abbildung 8.6 (links) dargestellt. Für jedes Vielfache der Abstände muss die Korrelation zwischen einem Knotenpaar ermittelt werden. Für die Autokorrelationsfunktion wird der verzerrte Schätzer mit $1/N_R$ gewählt. Damit strebt die Autokorrelationsfunktion vor allem für die geringere Anzahl an großen Abstände zweier Knoten schneller gegen Null. Hingegen wird bei einem erwartungstreuen (unverzerrten) Schätzer mit $1/(N_R - \xi)$ für größere Abstände durch eine noch geringere Anzahl geteilt. Dadurch wird die überschätzte Korrelation nicht korrigiert. Das bedeutet für Knotenpaare mit großem Abstand eine große Korrelation. Angenommen wird, dass so ein Korrelationsverhalten nicht der Realität entspricht und deshalb wird der verzerrte Schätzer bevorzugt. Zudem sollte darauf geachtet werden, dass das globale Korrelationsverhalten gut

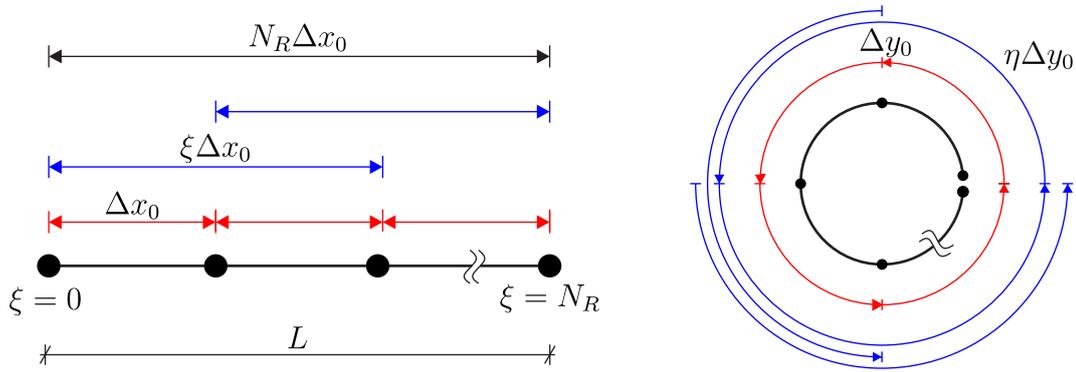


Abbildung 8.6: Notation der Vielfachen der Knotenabstände zur Berechnung der Autokorrelation in Axialrichtung (links) und Umfangsrichtung (rechts) einer Zylinderschale

abgebildet wird. Die Schätzung einzelner Korrelationen nur bestimmter Knotenabstände spielt bei diesem Ansatz eine untergeordnete Rolle.

Weiter kann die Autokorrelationsfunktion in Bezug auf die Knotenabstände in Umfangsrichtung wie folgt definiert werden:

$$\rho_r(\eta\Delta y_0) = \frac{1}{N_C - 1} \sum_{c=1}^{N_C-1} (w(x_r, y_c + \eta\Delta y_0) - \bar{\mu}_n)(w(x_r, y_c) - \bar{\mu}_n) \quad (8.10)$$

mit $\eta = 0 \dots N_C - 1$ der Anzahl der Vielfache eines konstanten Abstands Δy_0 . Dabei wird die obere Grenze der Summe definiert zu $N_C - 1$. Das bedeutet, dass aufgrund der geschlossenen Struktur die Anzahl für jedes mögliche Vielfache von Δy_0 im Gegensatz zur Axialrichtung gleich bleibt, siehe hierzu Abbildung 8.6 (rechts). Mit den Gleichungen (8.9) und (8.10) wird eine Autokorrelationsfunktion pro Knotenreihe erhalten. Durch eine Mittelwertbildung kann so eine Gesamtkorrelationsfunktion pro Versuchsschale aufgestellt werden. Die Grundlage hierfür ist die Annahme der Ergodizität. Diese ist erlaubt, wenn ein stochastischer Prozess in unabhängige Abschnitte aufgeteilt werden kann und durch die Darstellung eines Abschnittes die Informationen des kompletten stochastischen Prozesses wiedergegeben werden können. Diese unabhängigen Abschnitte des stochastischen Prozesses der Zylinderschale sind hier die Variationen der Imperfektionen jeder Knotenreihe. Aus der Mittelung folgt die Autokorrelationsfunktion einer Versuchsschale in Axialrichtung

$$\rho(\xi\Delta x_0) = \frac{1}{N_C - 1} \sum_{c=1}^{N_C-1} \rho_c(\xi\Delta x_0) \quad (8.11)$$

und in Umfangsrichtung

$$\rho(\eta\Delta y_0) = \frac{1}{N_R} \sum_{r=1}^{N_R} \rho_r(\eta\Delta y_0) \quad (8.12)$$

Das Vorgehen zur Ermittlung der Autokorrelationsfunktion einer Zylinderschale ist in Abbildung 8.7 dargestellt. Die evaluierten Autokorrelationsfunktionen aus

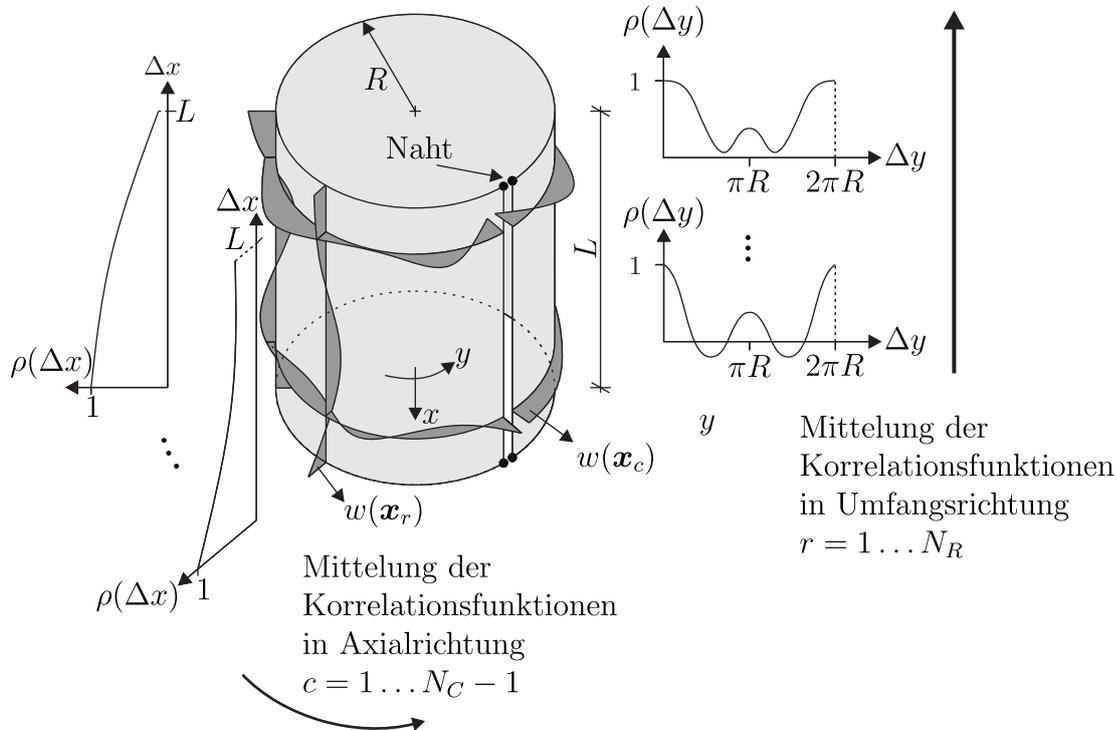


Abbildung 8.7: Evaluierung der separierten Autokorrelationsfunktionen in Umfangsrichtung und Axialrichtung an einer Versuchsschale

den Imperfektionsmessungen für die vier getesteten Schalentypen nach Tabelle 8.1 werden in Abbildung 8.8 gezeigt. Die einzelnen Funktionen variieren von Schale zu Schale. Dennoch sind in der Korrelationsstruktur der unterschiedlichen Schalentypen typische Merkmale zu erkennen, die auf den Herstellungsprozess zu führen sind. Zum Beispiel streuen die Funktionen der A-Schalen stärker als die der ST-Schalen. Bei den ST-Schalen ist außerdem die Lage der Schweißnaht durch die geraden Linien im Imperfektionsmuster zu erkennen. Des Weiteren haben die Autokorrelationsfunktionen in Axialrichtung verschiedene Krümmungsverläufe. Einige Kurven sind konkav, andere wieder konvex. Dennoch streben alle Funktionen in Axialrichtung aufgrund der Anwendung des verzerrten Schätzers zügig gegen Null für große Abstände Δx . Die Funktionen in Umfangsrichtung haben eine unterschiedliche Welligkeit. Für den Abstand zur Berechnung der Korrelationen wird stets der kleinste Weg um den Zylinder gewählt:

$$\Delta y = \min \begin{cases} |y_i - y_j| \\ 2\pi R - |y_i - y_j| \end{cases} \quad (8.13)$$

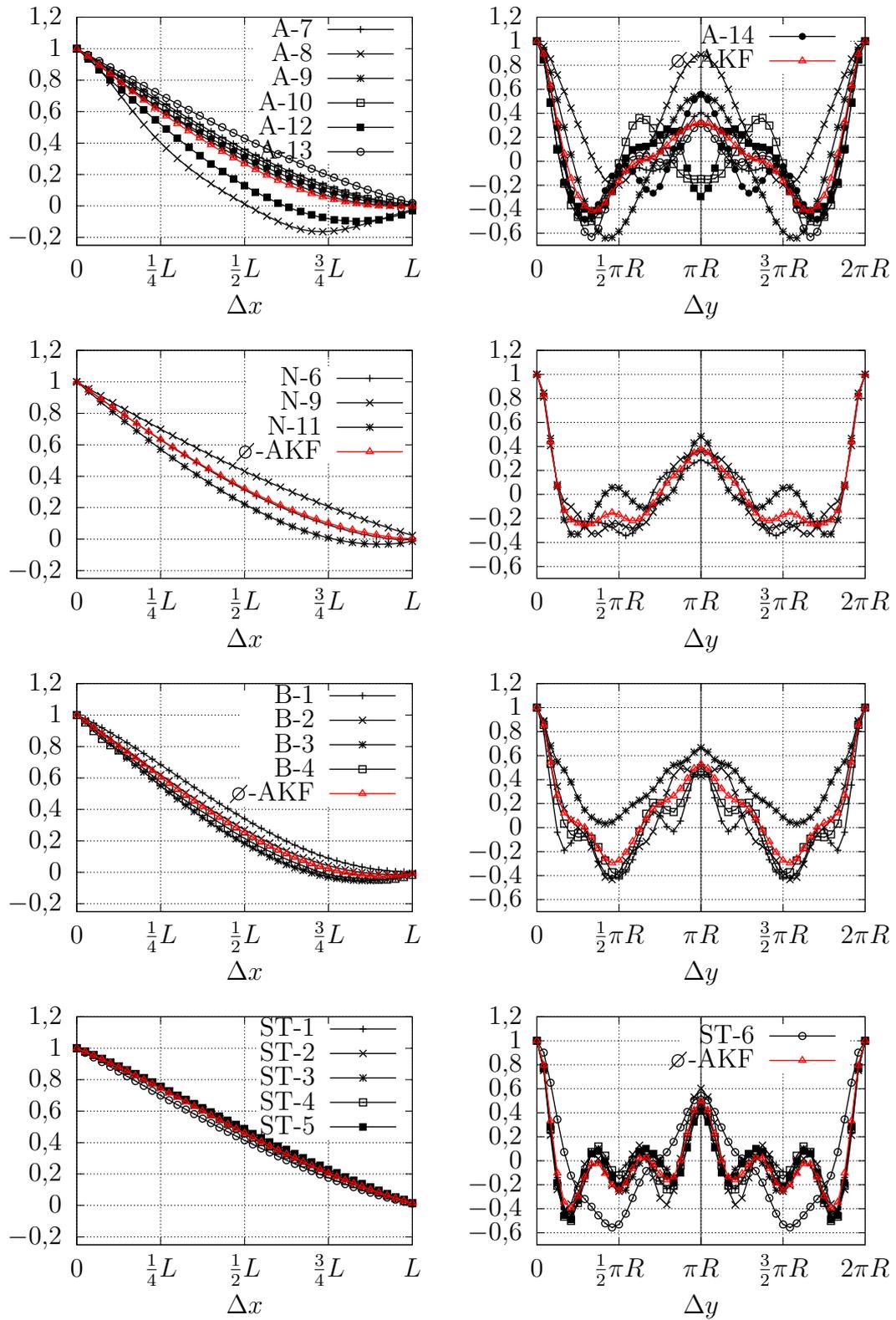


Abbildung 8.8: Aus Messungen der Schalen nach Tabelle 8.1 evaluierte Autokorrelationsfunktionen in Axialrichtung $\rho(\Delta x)$ (links) und in Umfangsrichtung $\rho(\Delta y)$ (rechts)

Daraus folgt die Symmetrie bezüglich der Achse des halben Umfangs der Autokorrelationsfunktionen in Umfangsrichtung. Zusammenfassend gilt, dass die Art des Herstellungsprozesses nicht nur in der Imperfektionsform sichtbar wird, sondern offenbar auch in der Korrelationsstruktur. Falls eine repräsentative Korrelationsfunktion einer Versuchsreihe benötigt wird, können alle evaluierten Korrelationsfunktionen zusätzlich gemittelt werden. Diese Funktion ist in Abbildung 8.8 mit „ \emptyset -AKF“ bezeichnet.

Abschließend kann das gesamte Korrelationsmodell nach Gleichung (8.7) durch Einsetzen der gemittelten Korrelationsfunktionen nach den Gleichungen (8.11), (8.12) und der Stichprobenvarianz nach Gleichung (8.8) aufgestellt werden. Hierzu können die einzelnen Kovarianzen bezüglich der Abstände in Axialrichtung Δx und in Umfangsrichtung Δy aufgetragen werden. In Abbildung 8.9 (links) ist entsprechend das Ergebnis einer solchen zweidimensionalen Autokovarianzfunktion mit den Kovarianzen aus der gemittelten Kurve (\emptyset -AKF) für die B-Schalen dargestellt. Werden die einzelnen Kovarianzen nach den Abständen in eine Matrix einsortiert, wird eine Kovarianzmatrix erhalten, die zur Simulation der Imperfektionen als Zufallsfelder verwendet werden kann. Eine Darstellung der Kovarianzmatrix für die B-Schalen mit einem Netz von $7 \times 7 = 49$ Knoten ist in Abbildung 8.9 (rechts) zu sehen. Aufgrund der getroffenen Annahme der Homogenität wird bei der zurückgerechneten Kovarianzmatrix im Gegensatz zur direkt berechneten korrigierten Stichprobenkovarianzmatrix in Abbildung 8.4 eine homogene Kovarianzstruktur dargestellt.

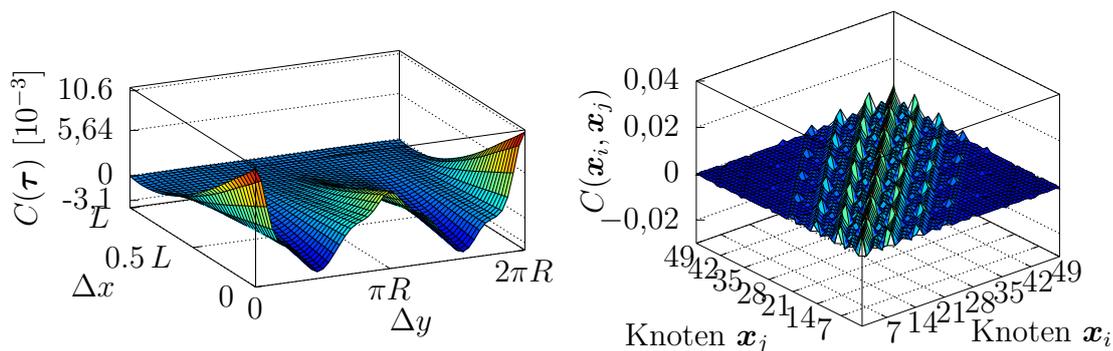


Abbildung 8.9: Gemittelte zweidimensionale Autokovarianzfunktion (links) und dazugehörige Kovarianzmatrix (rechts) für die B-Schalen

8.2.3 Definition geeigneter Korrelationsfunktionen und Fitting

Als nächster Schritt werden die Autokorrelationsfunktionen in Abbildung 8.8 „gefitet“. Die „Fitting-Parameter“ entsprechen den Korrelationsparametern zur Beschreibung der Imperfectionen als Zufallsfelder. Diese Parameter sollen später als unscharfe Variablen definiert werden. Als erstes ist eine Wahl von Korrelationsfunktionen nötig. Die quadratische Exponentialfunktion eignet sich gut als Näherung der Autokorrelationsfunktionen in Axialrichtung:

$$\rho(\Delta x, \ell_{c,h}) = \exp\left(-\frac{\Delta x^2}{\ell_{c,h}}\right) \quad (8.14)$$

mit dem Korrelationsparameter $\ell_{c,h}$. Die Ableitung der Funktion ist an der Stelle $\Delta x = 0$ Null. Das heißt, dass das Zufallsfeld im quadratischen Mittel differenzierbar ist [308]. Daraus folgen glatte Realisationen des Zufallsfelds bzw. glatte Imperfectionsmuster. Das Beulverhalten einer Zylinderschale unter Axialdruck wird maßgeblich durch die Glattheit einer Realisation in Axialrichtung beeinflusst. Für das „Fitting“ der Korrelationsfunktionen in Umfangsrichtung wird eine lineare Kosinusfunktion gewählt:

$$\rho(\Delta y, \ell_{c,u}, T) = \left(1 - \frac{\Delta y}{\ell_{c,u}}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi\Delta y}{T}\right) \quad (8.15)$$

mit dem Korrelationsparameter $\ell_{c,u}$ und der Periodenlänge T . Diese Funktion ist nicht im quadratischen Mittel differenzierbar. Die Korrelationsparameter $\ell_{c,h}$ und $\ell_{c,u}$ sind die „Fitting-Parameter“. Die Periodenlänge T wird für jede Schale innerhalb einer Versuchsreihe konstant gehalten, um die Anzahl der Eingangsparameter zu beschränken. Für das „Fitting“ wird die Nichtlineare Methode der kleinsten Fehlerquadrate nach Kapitel 7.3.3 angewendet. Das Minimierungsproblem für $\ell_{c,h}$ ist

$$\min_{\ell_{c,h}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_R} (z_i - \rho(\Delta x_i, \ell_{c,h}))^2 \right] \quad (8.16)$$

und für $\ell_{c,u}$

$$\min_{\ell_{c,u}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_C-1} (z_i - \rho(\Delta y_i, \ell_{c,u}))^2 \right] \quad (8.17)$$

mit z_i den berechneten Korrelationen nach den Gleichungen (8.11) und (8.12) für die zugehörigen Abstände Δx_i und Δy_i . Zum „Fitting“ der Korrelationsfunktion in Umfangsrichtung wird lediglich die halbe Funktion $\Delta y \in [0, \pi R]$ verwendet und danach an der Symmetrieachse bei $\Delta y = \pi R$ gespiegelt. Die „Fitting“-Ergebnisse der Korrelationsparameter für die vier untersuchten Schalentypen mit

Schale	$\bar{\sigma}^2$ [mm^2]	$\ell_{c,h}$ [mm^2]	$\ell_{c,u}$ [mm]	$T=\text{konst.}$ [mm]
A-7	0,0070	9234	210	217
A-8	0,0100	2744	180	217
A-9	0,0035	7179	199	217
A-10	0,0029	8630	327	217
A-12	0,0070	4211	307	217
A-13	0,0113	11862	234	217
A-14	0,0041	7733	187	217

Tabelle 8.3: Korrelationsparameter und Stichprobenvarianz der A-Schalen

Schale	$\bar{\sigma}^2$ [mm^2]	$\ell_{c,h}$ [mm^2]	$\ell_{c,u}$ [mm]	$T=\text{konst.}$ [mm]
N-6	0,0028	7442	197	199
N-9	0,0026	11422	188	199
N-11	0,0045	5365	197	199

Tabelle 8.4: Korrelationsparameter und Stichprobenvarianz der N-Schalen

Schale	$\bar{\sigma}^2$ [mm^2]	$\ell_{c,h}$ [mm^2]	$\ell_{c,u}$ [mm]	$T=\text{konst.}$ [mm]
B-1	0,0073	5216	198	203
B-2	0,0076	4054	184	203
B-3	(0,0233)	2943	187	203
B-4	0,0044	3307	198	203

Tabelle 8.5: Korrelationsparameter und Stichprobenvarianz der B-Schalen

unterschiedlichem Herstellungsprozess sind zusammen mit der Stichprobenvarianz nach Gleichung (8.8) in den Tabellen 8.3 bis 8.6 aufgeführt. Die Periodenlänge wird mit der gemittelten Autokorrelationsfunktion berechnet und für alle Schalen in der jeweiligen Versuchsreihe als konstant angenommen. Zudem gilt für die Periodenlänge näherungsweise:

$$T \approx \frac{2\pi R}{3} \quad . \quad (8.18)$$

In den Tabellen sind mit Klammern die Ausreißer markiert, siehe Schale B-3 oder ST-6. Die gewählten Funktionen für das „Fitting“ bilden nicht immer exakt den Korrelationsverlauf ab. Hier kann eine Verbesserung durch die Wahl von Funktionen mit zusätzlichen „Fitting“-Parametern erreicht werden.

Schale	$\bar{\sigma}^2$ [mm ²]	$\ell_{c,h}$ [mm ²]	$\ell_{c,u}$ [mm]	$T=\text{konst.}$ [mm]
ST-1	0,0199	7232	222	256
ST-2	0,0163	7012	208	256
ST-3	0,0235	7152	226	256
ST-4	0,0131	6982	221	256
ST-5	0,0201	7542	235	256
ST-6	(0,1601)	6054	234	256

Tabelle 8.6: Korrelationsparameter und Stichprobenvarianz der ST-Schalen

Eine Studie zu verschiedenen Korrelationsfunktionen muss unbedingt noch durchgeführt werden, ist aber nicht Bestandteil dieser Arbeit. Allerdings sollte bei der Einführung von vielen Parametern auch immer der Rechenaufwand einer Fuzzy-stochastischen Analyse beachtet werden.

8.2.4 Das Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern

Eine sinnvolle Wahl geeigneter Funktionen für eine traditionelle Modellierung mit Zufallsfeldern ist aufgrund der großen Streuung der Korrelationsfunktionen in Abbildung 8.8 sehr schwierig. Deshalb wird das Korrelationsmodell nach Gleichung (8.7) nun mithilfe unscharfer Parameter beschrieben:

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\tau}) = \tilde{\sigma}^2 \tilde{\rho}(\Delta x) \tilde{\rho}(\Delta y) \quad . \quad (8.19)$$

Dabei wird die Stichprobenvarianz $\tilde{\sigma}^2$ und die Korrelationsparameter $\tilde{\ell}_{c,h}$ in $\rho(\Delta x)$ nach Gleichung (8.14) und $\tilde{\ell}_{c,u}$ in $\rho(\Delta y)$ nach Gleichung (8.15) als Fuzzy-Variablen definiert. Eine Fuzzifizierung, d.h. die Definition einer Zugehörigkeitsfunktion kann mit den Ergebnissen der Parameter aus den Tabellen 8.3 bis 8.6 durchgeführt werden. Sinnvoll ist, dass zunächst einzelne Histogramme für die Korrelationsparameter $\ell_{c,h}$, $\ell_{c,u}$ und der Stichprobenvarianz $\bar{\sigma}^2$ erstellt werden. Die Zugehörigkeitsfunktionen mit den hinterlegten Histogrammen sind hierzu in Abbildung 8.10 dargestellt. Gewählt werden konvexe Fuzzy-Dreieckszahlen mit linearem Verlauf. Alternativ können auch Fuzzy-Trapezzahlen zur Definition der Zugehörigkeitsfunktionen mit linearen, quadratischen oder polygonalem Verlauf verwendet werden. Auch nicht konvexe Fuzzy-Zahlen sind denkbar, siehe z.B. in [246]. Diese erfordern aber einen modifizierten Algorithmus für die α -Level-Optimierung.

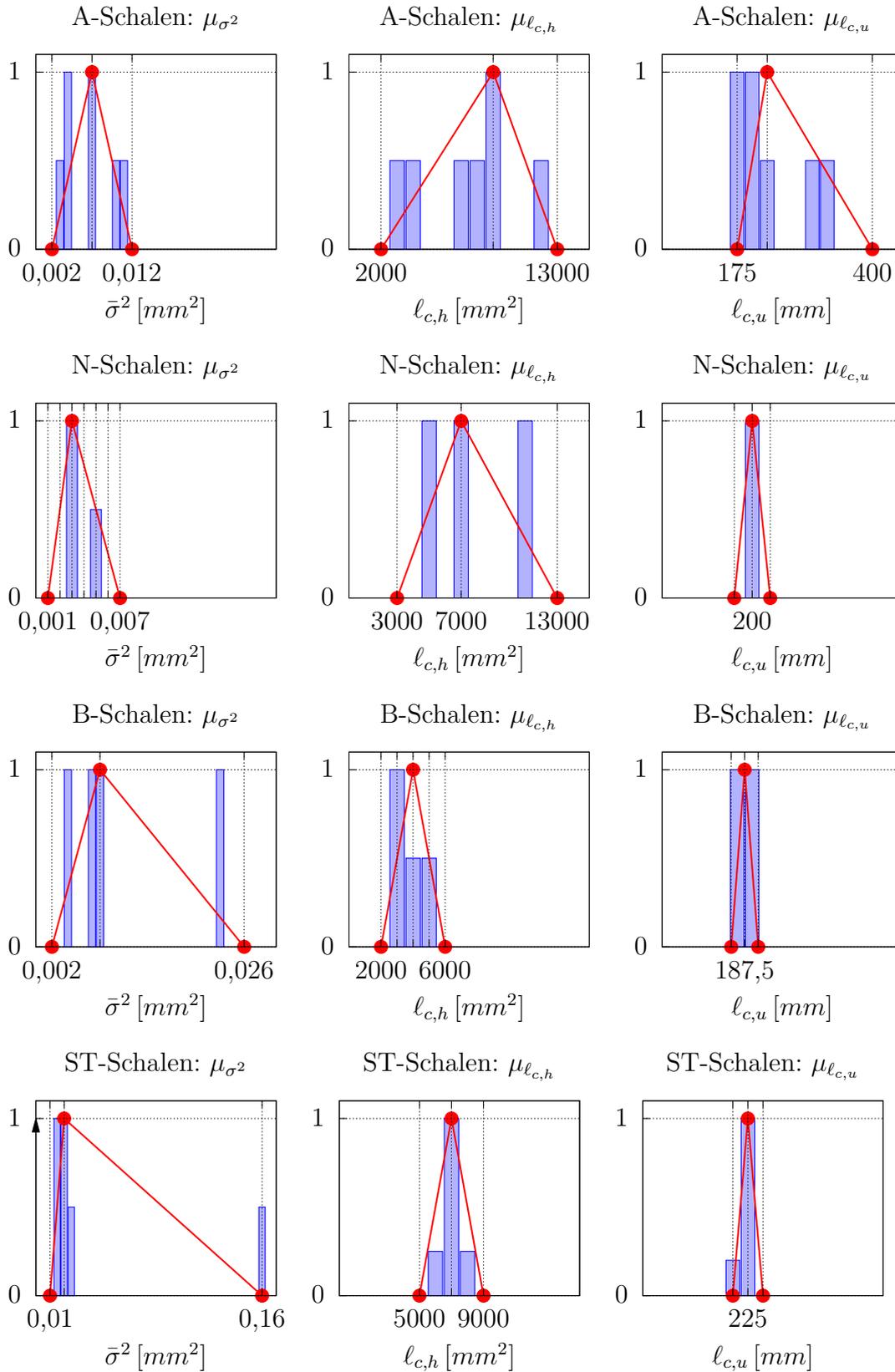


Abbildung 8.10: Zugehörigkeitsfunktionen und Histogramme der Stichprobenvarianz (links) und der Korrelationsparameter in Axialrichtung (Mitte) und in Umfangsrichtung (rechts)

Die Festlegung geeigneter Zugehörigkeitsfunktionen kann in diesem Kontext die Aufgabe eines „Schalenkonstruktors“ sein. Bei einer zu schwachen Datengrundlage kann dieser beispielsweise auch anordnen, dass weitere Schalen getestet werden müssen. Damit können nachträglich die Zugehörigkeitsfunktionen modifiziert werden, um die Unschärfe in der Ergebnisgröße zu reduzieren. Die Fuzzifizierung ist hier eher konservativ durchgeführt, d.h. es sind immer alle Versuchswerte aus den Tabellen 8.3 bis 8.6 im *Support* der Eingangsvariablen enthalten. Zusätzlich wird an der linken und rechten Grenze der Zugehörigkeitsfunktion ein kleiner Überhang gewählt. Das wird durch fehlendes Expertenwissen begründet. Außerdem sind die Korrelationsparameter für einen Schalenkonstrukteur eher schwierig erfassbar. Für die Fuzzifizierung – die Festlegung einer Zugehörigkeitsfunktion – existieren keine festen Regeln. Allerdings wird ein konsistentes Vorgehen empfohlen, das stets begründet werden kann. Bei einer Fuzzifizierung auf Grundlage eines Histogramms muss zudem darauf geachtet werden, dass die Form der Zugehörigkeitsfunktion auch von der gewählten Balkenbreite abhängig ist. Ausreißer können durch die Vorgabe von strengeren Herstellungstoleranzen ausgeschlossen werden, sind hier aber immer im *Support* enthalten. Zur Vergleichbarkeit der vier Schalentypen untereinander, haben die x -Achsen der Diagramme bis auf das μ - σ^2 -Diagramm der ST-Schalen aufgrund des großen Ausreißers, die gleiche Skalierung. Bei der Fuzzifizierung des Korrelationsparameters $\ell_{c,u}$ muss außerdem darauf geachtet werden, dass der Wertebereich der Autokorrelationsfunktionen in Umfangsrichtung nach Gleichung (8.15) wie folgt eingehalten wird:

$$-1 \leq \rho(\Delta y) \leq 1 \quad . \quad (8.20)$$

Das ist sichergestellt, wenn für den Korrelationsparameter $\ell_{c,u}$ gilt:

$$\ell_{c,u} \geq \frac{\pi R}{2} \quad \text{für} \quad T = \frac{2\pi R}{3} \quad . \quad (8.21)$$

Diese Voraussetzung ist für die angewendete quadratische Exponentialfunktion nach Gleichung (8.14) für alle $\ell_{c,h} > 0$ gültig. Das Ergebnis der Fuzzy-Stichprobenvarianz und der Fuzzy-Korrelationsparameter der vier untersuchten Schalentypen ist in Tabelle 8.7 zusammengefasst. Neben der Definition der Zugehörigkeitsfunktionen mithilfe von Expertenwissen existieren noch andere Möglichkeiten der Fuzzifizierung. Als Beispiel ist die *Percentage-Intervals-Methode* aus [120,138] zu nennen. Das Vorgehen der Methode wird für die A-Schalen gezeigt. Die Daten $[s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(N_{\text{sh}})}]$ der drei Eingangsparameter $s_1 := \sigma^2$, $s_2 := \ell_{c,h}$ und $s_3 := \ell_{c,u}$ werden aus der Tabelle 8.3 entnommen. Dem Median der Daten eines Parameters wird eine Zugehörigkeit von $\mu = 1$ zugewiesen. Mit den verbleibenden Daten $N_{\text{sh}} - 1$ werden die Intervalle $I_{ij} = [s_i^{(j)}, s_i^{(N_{\text{sh}}+1-j)}]$, $j = 1, \dots, N_{\text{alev}}$ der α -Levels definiert. Die Gesamtanzahl der α -Levels berechnet sich mit $N_{\text{alev}} = (N_s - 1)/2$

Schalentyp	Fuzzy-Eingangsvariablen
A-Schalen	$\tilde{\sigma}^2 = \langle 0,002, 0,007, 0,012 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,h} = \langle 2000, 9000, 13000 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,u} = \langle 175, 225, 400 \rangle$
N-Schalen	$\tilde{\sigma}^2 = \langle 0,001, 0,003, 0,007 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,h} = \langle 3000, 7000, 13000 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,u} = \langle 170, 200, 230 \rangle$
B-Schalen:	$\tilde{\sigma}^2 = \langle 0,002, 0,008, 0,026 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,h} = \langle 2000, 4000, 6000 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,u} = \langle 165, 187.5, 210 \rangle$
ST-Schalen	$\tilde{\sigma}^2 = \langle 0,01, 0,02, 0,16 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,h} = \langle 5000, 7000, 9000 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,u} = \langle 200, 225, 250 \rangle$

Tabelle 8.7: Fuzzy-Stichprobenvarianz und Fuzzy-Korrelationsparameter als Fuzzy-Dreieckszahlen der vier untersuchten Schalentypen

und die Zugehörigkeit der Intervalle wird wie folgt ermittelt:

$$\mu_{s_i}(I_{ij}) = 1 - \frac{1}{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} \chi_{I_{ij}}(s_i^{(k)}) \quad (8.22)$$

mit der Indikatorfunktion

$$\chi_{I_{ij}}(s_i^{(k)}) = \left\{ \begin{array}{l} 1, s_i^{(k)} \in I_{ij} \\ 0, s_i^{(k)} \notin I_{ij} \end{array} \right\} . \quad (8.23)$$

Der Wert der Zugehörigkeit eines α -Levels ist von der Anzahl der Daten abhängig. Die Intervallgrenzen werden anschließend linear interpoliert. Das Ergebnis einer solchen Fuzzifizierung wird in Abbildung 8.11 gezeigt. Die *Percentage-Intervals-Methode* ist einfach umsetzbar und bietet ein konsistentes Vorgehen der Fuzzifizierung. Die Anwendung der Methode bietet sich an, wenn zu Beginn einer Problemstellung noch kein Expertenwissen vorhanden ist. In [250] wird als weitere Möglichkeit die Angabe von $l_\alpha r_\alpha$ -Intervallen (Links-Rechts-Intervalle) beschrieben. Diese Methode ist bei der Definition von Fuzzy-Zufallsvariablen hilfreich.

Abschließend sind die Fuzzy-Autokorrelationsfunktionen (Fuzzy-AKFs) in Abbildung 8.12 dargestellt. Diese resultieren durch das Einsetzen der Ergebnisse aus Tabelle 8.7 in die Gleichungen (8.14) und (8.15). In der Abbildung wird gezeigt, dass mit den gewählten Fuzzy-AKFs der Verlauf der Korrelationsfunktionen der evaluierten AKFs aus den Messungen in Abbildung 8.8 mit ausreichender Genauigkeit abgedeckt werden kann. Die Fuzzy-AKFs in Axialrichtung konvergieren

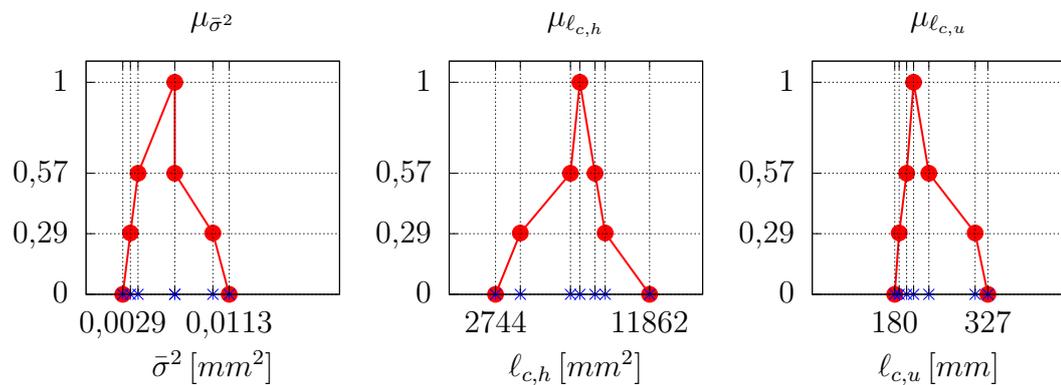


Abbildung 8.11: Fuzzifizierung mit der *Percentage-Intervals-Methode* am Beispiel der A-Schalen

gegen Null unter Vernachlässigung negativer Korrelationen. Die Funktionen in Umfangsrichtung weisen im Bereich kleiner Abstände kaum Streuungen auf. Zudem liegen abhängig von der konstant gewählten Periodenlänge feste Nullstellen vor. Vor allem der Verlauf der Korrelationsfunktionen in Umfangsrichtung sollte noch verbessert werden, denn dieser Verlauf kann bei weiteren Lastfällen einen großen Einfluss haben.

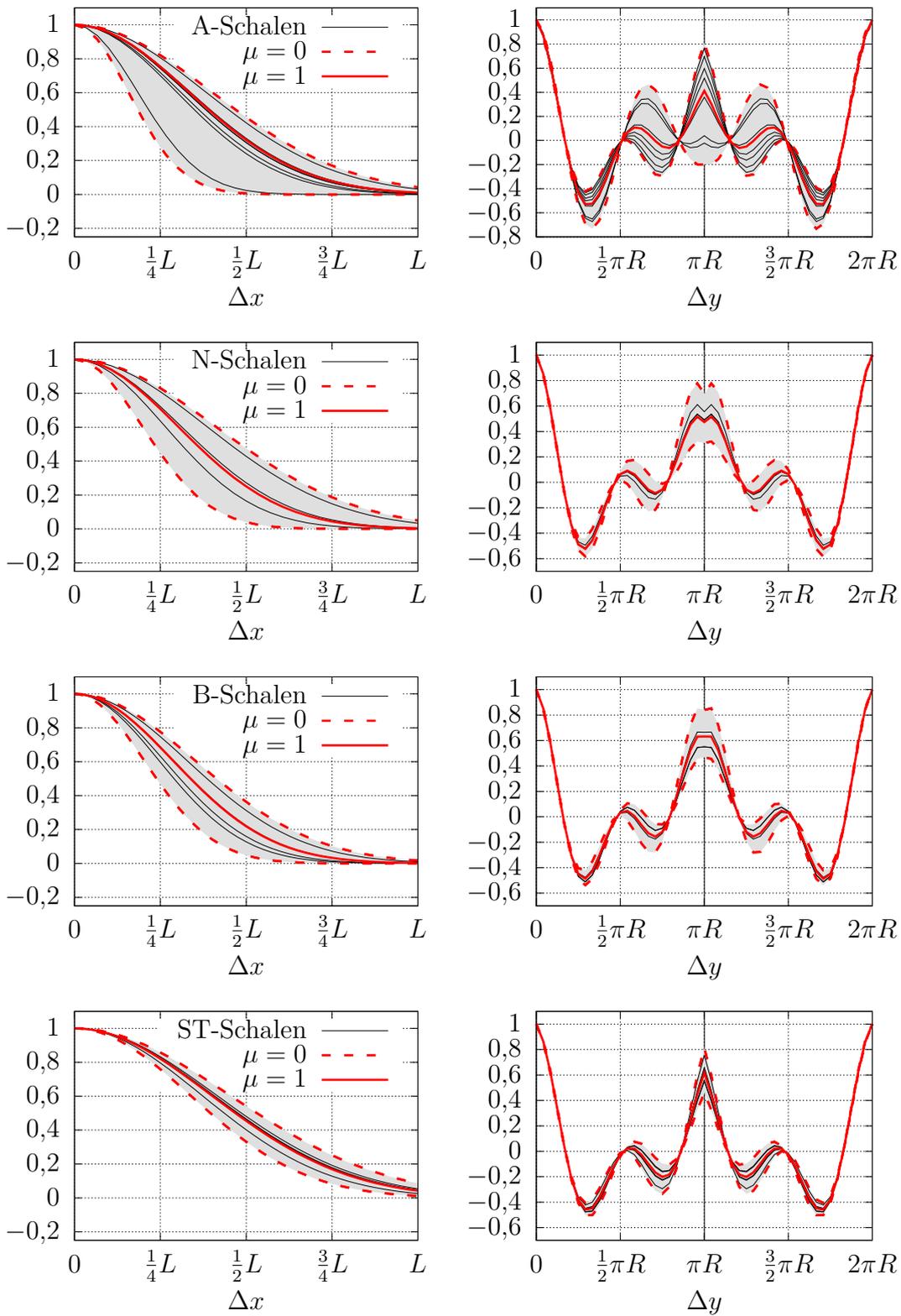


Abbildung 8.12: Fuzzy-Autokorrelationsfunktionen (Fuzzy-AKFs) in Axialrichtung (links) und in Umfangsrichtung (rechts)

8.2.5 Darstellung der Imperfektionen als fp-rf-Zufallsfeld

Die Erweiterung des Korrelationsmodells mit unscharfen Parametern führt auf eine Darstellung der Imperfektionen mit fp-rf-Zufallsfeldern. Ergänzend zu den theoretischen Grundlagen üblicher Zufallsfelder in Kapitel 6.4 und Fuzzy-Zufallsfelder in Kapitel 6.4 wird die Simulation von Imperfektionen mit Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeldern detaillierter erläutert. Bei einer üblichen probabilistischen Modellierung ist ein Zufallsfeld eine Menge von Zufallsvariablen $w(\mathbf{x}, \theta)$. Dies wird in Abbildung 8.13 durch die kumulative Verteilungsfunktion (cdf) dargestellt. Die Abweichungen von der Sollgeometrie der Schale stellen

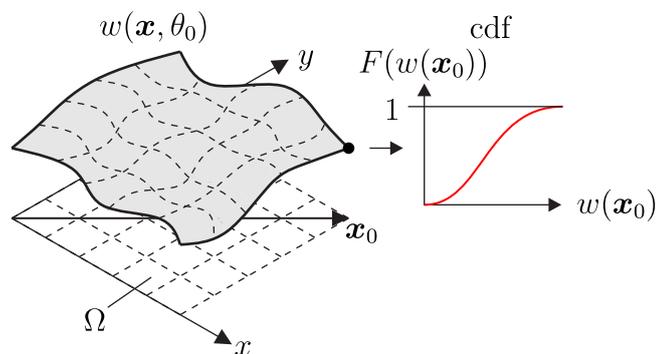


Abbildung 8.13: Darstellung einer geometrischen Imperfektion als Realisation eines Zufallsfelds

Realisationen an jedem Knoten des Zufallsfelds dar. Die Fuzzifizierung der Eingangsparemeter führt auf ein Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld (fp-rf) zur Modellierung der Mantelimperfectionen. Mithilfe einer Menge von Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariablen (fp-r) wird ein fp-rf-Feld beschrieben:

$$\{\tilde{w}(\mathbf{x}, \theta) : \mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta\} \quad . \quad (8.24)$$

Die fp-r-Variable ermöglicht zusätzlich eine Fuzzy-Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsmaßes einer Zufallszahl als eine Menge von Wahrscheinlichkeitsfunktionen [105]. Das heißt, bezogen auf die Anwendung geometrischer Imperfectionen, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß des zufälligen Ereignisses „Mantelimperfection“ nun auch ein Fuzzy-Charakter haben kann. An jedem Ort des Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfelds wird das Ereignis durch die Fuzzy-EingangsvARIABLEN $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\ell}_{c,h}$ und $\tilde{\ell}_{c,u}$ definiert. Das ermöglicht neben der natürlichen räumlichen Variabilität nun auch die Beschreibung der Unvollständigkeit der Daten. Für die numerische Umsetzung wird die Fuzzy-Scharparameterdarstellung angewendet. Das Fuzzy-Zufallsfeld ist damit eine Schar von Zufallsfunktionen

$$\tilde{w}(\mathbf{x}, \theta) = w(\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{x}, \theta) \quad (8.25)$$

mithilfe des Scharparameters $\tilde{\mathbf{s}}$. In diesem werden die drei Fuzzy-Eingangsparameter gebündelt:

$$\tilde{\mathbf{s}} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\sigma}^2 \\ \tilde{\ell}_{c,h} \\ \tilde{\ell}_{c,u} \end{array} \right\} . \tag{8.26}$$

Eine entsprechende Darstellung des Fuzzy-Zufallsfelds mit der Scharparameterdarstellung wird in Abbildung 8.14 gezeigt. In dieser Abbildung ist die Realisation

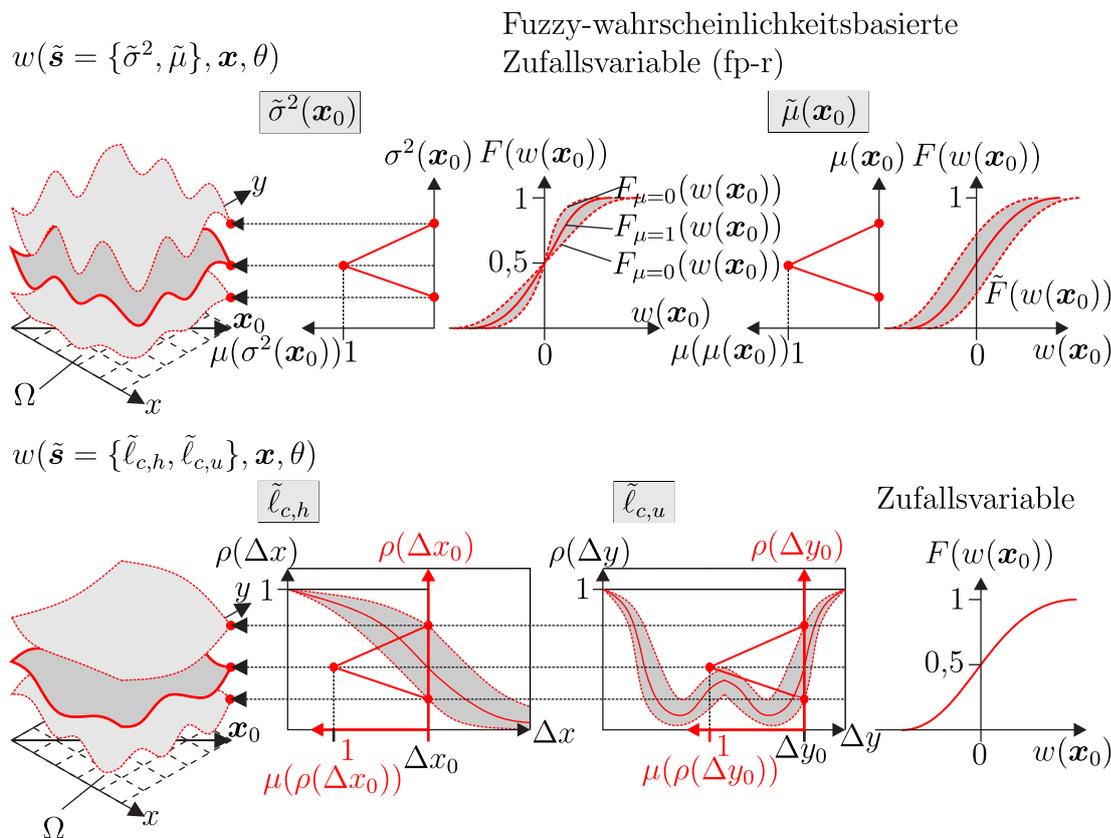


Abbildung 8.14: Realisation eines Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfelds (fp-rf) als Scharparameterdarstellung in Anlehnung an [200]: Trennung in $w(\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}\}, \mathbf{x}, \theta)$ mit einer fp-r-Variable (oben) und $w(\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\ell}_{c,h}, \tilde{\ell}_{c,u}\}, \mathbf{x}, \theta)$ mit einer Zufallsvariable (unten)

des Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfelds in zwei Darstellungen aufgeteilt. Bei der oberen Scharparameterdarstellung mit

$$w(\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\sigma}^2, \tilde{\mu}\}, \mathbf{x}, \theta) \tag{8.27}$$

ist lediglich die Stichprobenvarianz $\tilde{\sigma}^2(\mathbf{x}_0)$ als Fuzzy-Variable definiert. Zusätzlich kann auch der Mittelwert $\tilde{\mu}(\mathbf{x}_0)$ des Zufallsfelds fuzzifiziert werden. Dieser wird

hier aber stets zu Null gesetzt. Nur durch die Fuzzy-Varianz ist an jedem Knoten des Zufallsfelds auch das Wahrscheinlichkeitsmaß fuzzifiziert. Die Amplitude der Realisation wird mithilfe der Varianz gesteuert. In der unteren Darstellung der Abbildung sind die Fuzzy-Korrelationsparameter $\tilde{\ell}_{c,h}$ und $\tilde{\ell}_{c,u}$ im Vektor des Scharparameters enthalten:

$$w(\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\ell}_{c,h}, \tilde{\ell}_{c,u}\}, \mathbf{x}, \theta) \quad . \quad (8.28)$$

Diese kontrollieren die Welligkeit des Zufallsfelds, haben aber keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Imperfektion“ an den Knoten. Außerdem kann wie dargestellt für jeden Abstand Δx_0 und Δy_0 in der entsprechenden Fuzzy-Autokorrelationsfunktion eine Fuzzy-Variable definiert werden. Im Gegensatz zur oberen Darstellung ist an jedem Knoten des Zufallsfelds eine Zufallsvariable und keine fp-r-Variable definiert.

8.2.6 Schleifenalgorithmus der Stabilitätsanalyse unter Unschärfe

Eine Stabilitätsanalyse mit der Darstellung der Imperfektionen als Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder erfordert die Lösung der Abbildung

$$w(\tilde{\mathbf{s}}, \mathbf{x}, \theta) \rightarrow \tilde{P}_{\text{cr}}(\theta) \quad (8.29)$$

in der Notation der Scharparameterdarstellung. Der numerische Aufwand besteht in der Durchführung der *Monte-Carlo-Simulation* (MCS) und der α -Level-Optimierung (ALO). Für eine spezifische Konfiguration des Scharparameters \mathbf{s}_0 wird mit der MCS eine gewünschte stochastische Ausgangsgröße berechnet, z.B. der Stichprobenmittelwert $\bar{P}_{\text{cr}}(\mathbf{s} = \mathbf{s}_0)$ oder der Quantilwert $P_{\text{cr},0,05}(\mathbf{s} = \mathbf{s}_0)$ der Beullast. Die Grenzen der Scharparameter sind zugleich die Grenzen der α -Levels α_k der Eingangsparameter

$$\mathbf{s} \in [\mathbf{s}_{\alpha_k,l}, \mathbf{s}_{\alpha_k,r}] = \{\mathbf{s}_{\alpha_k}\} \quad . \quad (8.30)$$

Die Fuzzy-Ausgangsgrößen, wie z.B. der Fuzzy-Stichprobenmittelwert, werden durch die Anwendung der ALO wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{cr},\alpha_k,l} &= \min_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}_{\alpha_k}\}} [\bar{P}_{\text{cr}}(\mathbf{s})] \\ \bar{P}_{\text{cr},\alpha_k,r} &= \max_{\mathbf{s} \in \{\mathbf{s}_{\alpha_k}\}} [\bar{P}_{\text{cr}}(\mathbf{s})] \quad . \end{aligned} \quad (8.31)$$

Für die Lösung des rechenaufwendigen Optimierungsproblems wird das HDMR-Metamodell eingesetzt:

$$\hat{\tilde{P}}_{\text{cr}}(\mathbf{s}) \approx \tilde{P}_{\text{cr}}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} \in S(\tilde{\mathbf{s}}) \quad . \quad (8.32)$$

Da der Verlauf zwischen den drei Eingangsparametern σ^2 , $\ell_{c,h}$, $\ell_{c,u}$ und den stochastischen Ausgangsgrößen der Beullast P_{cr} zunächst unbekannt ist, müssen die Einstellungen für das Metamodell in einer umfangreichen Parameterstudie gefunden werden. Wird für die Approximation der Schnittfunktionen einer HMDR 2. Ordnung die LSQ-Methode mit kubischen Polynomen angewendet, resultieren bereits mit einer Anzahl von $n_{\text{sim}} = 5$ Stützstellen pro Variable gute Ergebnisse. Der numerische Aufwand der HDMR für die drei Eingangsparameter kann in Abbildung 7.18 für $n_{\text{sim}} = 5$ abgelesen werden. Im Raum der drei Eingangsparameter müssen 61 *Monte-Carlo-Simulationen* durchgeführt werden. Im Vergleich dazu sind für eine vollfaktorielle Versuchsplanung $5^3 = 125$ Stützstellen notwendig. Eine MCS mit 500 Simulationen, d.h. 500 Berechnungen der Beullast, liefert brauchbare Ergebnisse der stochastischen Größen. Insgesamt werden $61 \times 500 = 30500$ kritische Lasten berechnet. Der Schleifenalgorithmus für die numerische Umsetzung der Fuzzy-stochastischen Analyse ist in Abbildung 8.15

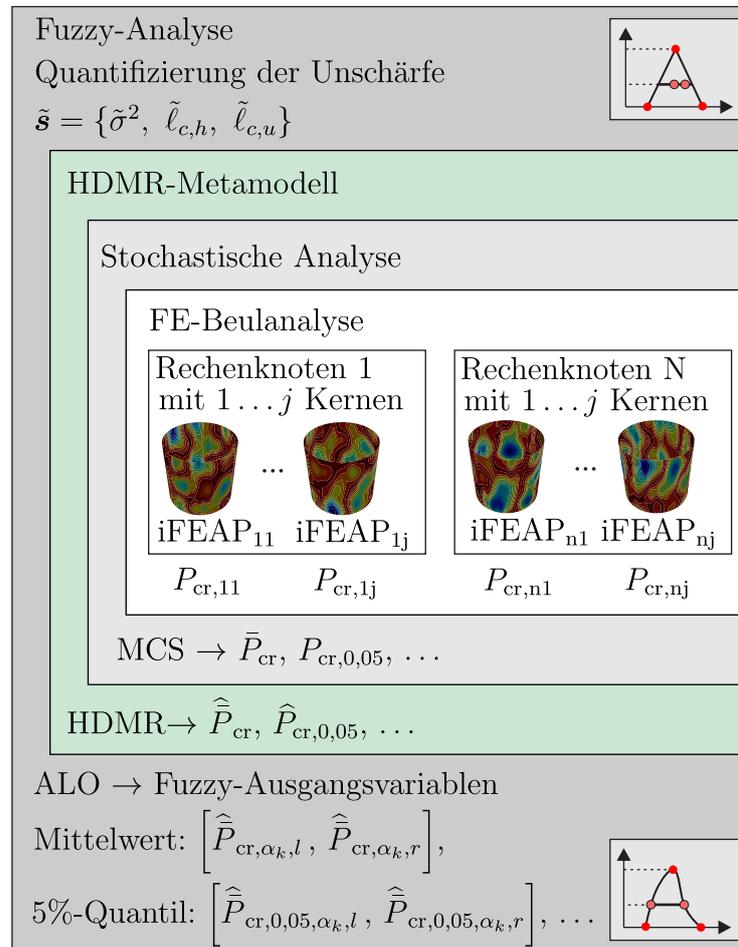


Abbildung 8.15: Schleifenalgorithmus der Fuzzy-stochastischen Stabilitätsanalyse

dargestellt. Die äußere Schleife stellt die Fuzzy-Analyse mit der ALO dar, die mithilfe des HDMR-Metamodells durchgeführt wird. Die mittlere Schleife ist eine parallelisierte *Monte-Carlo-Simulationsschleife*. Der Abbildungsoperator ist die innere Schleife mit einem nichtlinearem FE-Modell zur Lösung der numerischen Stabilitätsanalyse. Die programmtechnische Umsetzung erfolgt mit einem entwickelten Programm, das ein Zusammenspiel mit FEAP [316] und MATLAB [193] erlaubt. Die FE-Modellierung wird mit FEAP durchgeführt. Die Algorithmen der Unschärfemodellierung, der Stochastik und der Metamodelle sind in MATLAB umgesetzt. Die Berechnungszeit wird erheblich durch die Parallelisierung der MCS-Schleife reduziert. Zur Parallelisierung wird der MATLAB Parallel Pool angewendet. Um eine Beeinträchtigung der Parallelisierung zu verhindern, muss die Parallelisierung der Elementschleife in FEAP deaktiviert werden.

8.2.7 FE-Modell der Zylinderschale

In diesem Abschnitt wird das FE-Modell der Zylinderschale unter Axialdruck vorgestellt. Die Theorie und Numerik zur Stabilitätsuntersuchung einer Zylinderschale ist recht anspruchsvoll. Zusätzlich muss gewährleistet sein, dass die Vielzahl an numerischen Beulanalysen in einer Fuzzy-stochastischen Analyse alle korrekt und möglichst schnell durchgeführt werden. Die benötigten Grundlagen zur Schale und zu numerischen Stabilitätsuntersuchungen sind bereits in den Kapiteln 3 und 4 beschrieben. Das verwendete Schalenelement basiert auf der Elementformulierung nach WAGNER & GRUTTMANN [340,341] und GRUTTMANN & WAGNER [115]. Durch die folgenden Eigenschaften des Elements wird eine stabile und effiziente Berechnung der Grundlösung im Rahmen einer Fuzzy-stochastischen Analyse ermöglicht:

- geometrisch nichtlinear mit moderaten Rotationen
- kleine Verzerrungen, *St. Venant-Kirchhoff Material*
- isoparametrische Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen
- ANS-Ansätze zur Vermeidung von *Locking-Effekten*
- Berücksichtigung der Elementverwölbung nach TAYLOR [315] .

Das FE-Modell der untersuchten Zylinderschale ist in Abbildung 8.16 dargestellt. Die gemittelten Abmessungen und Materialdaten für das FE-Modell der vier Schalentypen können aus der Tabelle 8.2 entnommen werden. Bei sehr dünnen Schalen kann plastisches Beulen ausgeschlossen werden, d.h. die kritische Beulspannung aller untersuchten Schalen ist unterhalb der Fließspannung des Materials. Die Zylinderschale ist *Navier-gelagert* mit den Randbedingungen $u = v = w = 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0$ für die Unterseite des Zylinders und für den oberen Rand gilt: $u = \Delta u, v = w = 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0$. Die axiale Belastung wird durch eine Verschiebungssteuerung mit Δu an der Oberseite des Zylinders simuliert. Ist der Stabilitätspunkt erreicht, kann aus der Summe der Reaktionskräfte an der unteren Lagerung die kritische Last berechnet werden. Die Mantelimperfectionen werden durch spannungsfreie Knotenverschiebungen in w -Richtung modelliert. Die Zylinderschale ist zwar rotationssymmetrisch, aber die die Symmetrieebenen können nicht ausgenutzt werden. Bei der Darstellung der Mantelimperfectionen als Zufallsfelder ist keine Symmetrie mehr gegeben. Daher wird von einer Fuzzy-stochastischen Analyse mit nur einem Segment des Zylinders abgeraten. Für alle Schalentypen wird ein Finite-Element-Netz mit 200 Elementen in Umfangsrichtung und 100 Elementen in Axialrichtung verwendet. Das gewählte FE-Netz ist

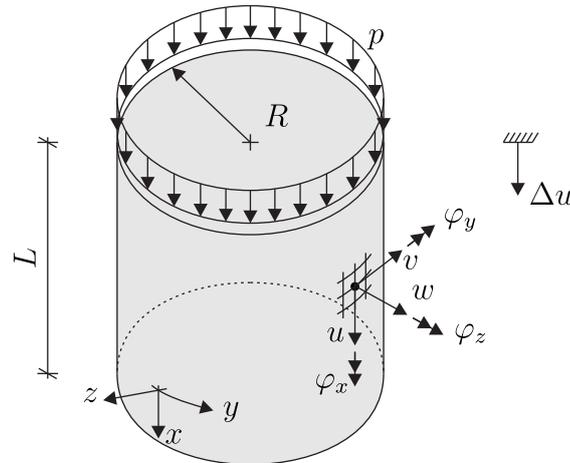


Abbildung 8.16: FE-Modell der Zylinderschalen unter Axialdruck: Oberflächenkoordinaten x, y ; Mantelimperfectionen in w -Richtung; verschiebungsgesteuert mit Δu ; Randbedingungen: $u = v = w = 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0$ (unterer Rand) und $u = \Delta u, v = w = 0, \varphi_x \neq 0, \varphi_y \neq 0$ (oberer Rand)

ausreichend fein, um die kritischen Beulformen darstellen zu können. Unter Berücksichtigung der Rechenzeit wird ein sehr kleiner Diskretisierungsfehler unter 5% akzeptiert. Ein Konvergenztest der gemittelten A-Schalen mit unterschiedlicher Querdehnzahl ist hierzu in Abbildung 8.17 dargestellt.

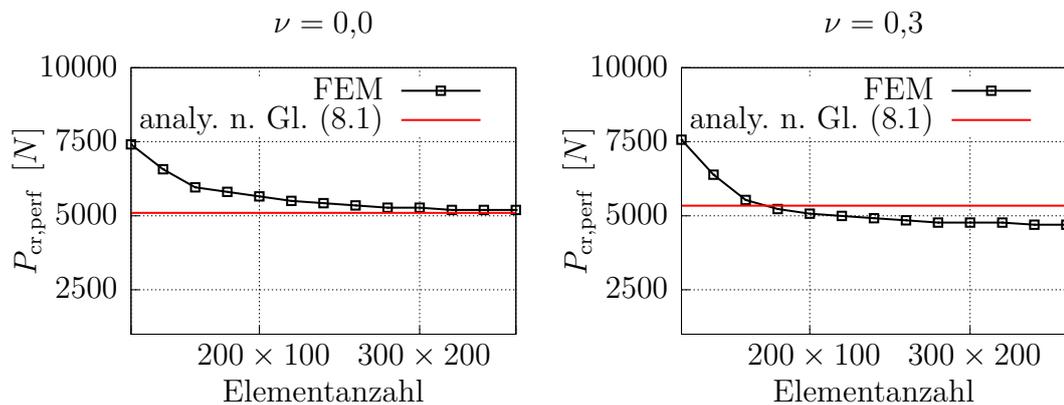


Abbildung 8.17: Konvergenztest zur Beullast der A-Schalen mit einer Querdehnzahl $\nu = 0,0$ (links) und $\nu = 0,3$ (rechts)

In beiden Diagrammen ist auch die analytische Referenzlösung der ideellen kritischen Last nach Gleichung (8.1) eingetragen. Bei einer Querdehnzahl $\nu = 0$ konvergiert die FE-Lösung zur Referenzlösung. In diesem Fall sind die radialen Verschiebungen des Zylinders unter Axialdruck gleich Null. Das entspricht auch

den Randbedingungen zur Herleitung der Referenzlösung nach Gleichung (8.1). Im rechten Diagramm der Abbildung 8.17 ist für den Fall $\nu = 0,3$ eine Konvergenz der FE-Lösung der ideellen Beullasten gegen einen Grenzwert unterhalb der analytischen Lösung zu beobachten. In diesen Fall treten radiale Verschiebungen auf. Jedoch wird mit der Modellierung einer *Navier-Lagerung* an der Unterseite und Oberseite eine radiale Aufweitung des Zylinders verhindert. Dieses Phänomen ist einer Imperfektion gleichzusetzen und ist im ersten Eigenvektor φ_1 am Stabilitätspunkt der A-Schale sichtbar, siehe Abbildung 8.18. Deshalb resultieren auch schon bereits ohne aufgebrauchte Mantelimperfektionen geringere Beullasten. Zur Berechnung des Stabilitätspunkts werden, wie in [338, 339, 342]

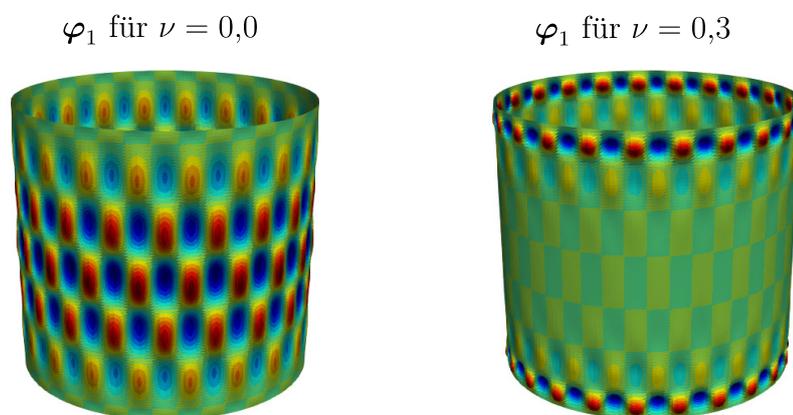


Abbildung 8.18: Der erste Eigenvektor φ_1 am Stabilitätspunkt der perfekten A-Schale für eine Querdehnzahl $\nu = 0,0$ (links) und $\nu = 0,3$ (rechts)

empfohlen, die Diagonalelemente D_{ii} der Steifigkeitsmatrix beobachtet. Findet ein Vorzeichenwechsel in einem der Diagonalelemente statt, ist der Stabilitätspunkt erreicht. Negative Diagonalelemente werden von einigen Lösern als Nebenprodukt der Gleichungslösung ausgewiesen. Am Stabilitätspunkt wird dann die FE-Berechnung innerhalb der parallelisierten *Monte-Carlo-Schleife* durch einen *Taskkill-Befehl* abgebrochen. Vom vorherigen Schritt wird die Last als Beullast abgespeichert. Die Ergebnisse der ideellen Beullast $P_{cr,perf}$ der vier Schalentypen sind in der Tabelle 8.8 für $\nu = 0,3$ und in Tabelle 8.9 für $\nu = 0,0$ aufgelistet.

Schalentyp	A-Schalen	N-Schalen	B-Schalen	ST-Schalen
a) $P_{cr} = \Lambda_{cr}P$	5839 N	6976 N	16931 N	144287 N
b) <i>Taskkill</i> , wenn $D_{ii} \leq 0$	5073 N	6080 N	14797 N	125500 N

Tabelle 8.8: Lineare Stabilitätsanalyse vs. *Taskkill* (wenn $D_{ii} \leq 0$) für die vier Schalentypen mit einer Querdehnzahl $\nu = 0,3$

Schalentyp	A-Schalen	N-Schalen	B-Schalen	ST-Schalen
a) $P_{cr} = \Lambda_{cr}P$	5680 N	6790 N	16441 N	140071 N
b) <i>Taskkill</i> , wenn $D_{ii} \leq 0$	5656 N	6678 N	16251 N	138540 N

Tabelle 8.9: Lineare Stabilitätsanalyse vs. *Taskkill* (wenn $D_{ii} \leq 0$) für die vier Schalentypen mit einer Querdehnzahl $\nu = 0,0$

Dabei werden die kritischen Lasten aus einer linearen Stabilitätsanalyse unter a) mit den Lasten bei einem ersten Vorzeichenwechsel eines Diagonalelements unter b) verglichen. Für den Fall $\nu = 0,0$ stimmen die Ergebnisse näherungsweise überein. Hingegen liefert eine Beobachtung der Diagonalelemente für den realen Fall $\nu = 0,3$ etwas geringere Beullasten wegen der Behinderung der vorhandenen Radialverschiebungen. In den Last-Verschiebungskurven der perfekten und imperfekten A-Schale in Abbildung 8.19 kann ein lineares Vorbeulverhalten beobachtet werden.

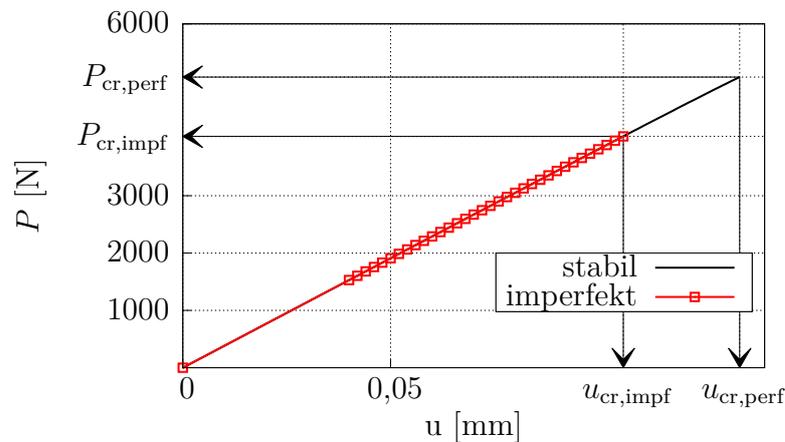


Abbildung 8.19: Last-Verschiebungskurve der perfekten und imperfekten Zylinderschale mit einer zufällig generierten Imperfektion ($\sigma^2 = 0,01, \ell_{c,h} = 3000, \ell_{c,u} = 200, T = 217$) der A-Schalen

Unter anderem hat die Schrittweite der Verschiebungssteuerung neben der Elementanzahl einen sehr großen Einfluss auf die Gesamtrechenzeit der Fuzzy-stochastischen Analyse. Deshalb wird zuerst ein grober Verschiebungsschritt durchgeführt und dann weiter bis zum Stabilitätspunkt eine feine Schrittweite von $\Delta = 0,002 \text{ mm}$ eingestellt. In Abhängigkeit der Eingangsparameter, die den größten Einfluss auf die Beullast haben, muss die Größe des ersten Verschiebungsschritts abgeschätzt werden. Zusätzlich zum FE-Netz muss auch noch ein

stochastisches Netz zur Diskretisierung der Zufallsfelder gewählt werden. Die Berechnung der Zufallsfelder erfolgt hierbei mit der EOLE-Methode. Zur Diskretisierung werden die Messstellen aus Tabelle 8.2 verwendet. In Abbildung 8.20 ist das FE-Netz mit 201×101 Knoten und das stochastische Netz mit 49×31 Knoten für die A-Schalen gegenübergestellt. Das stochastische Netz ist deutlich

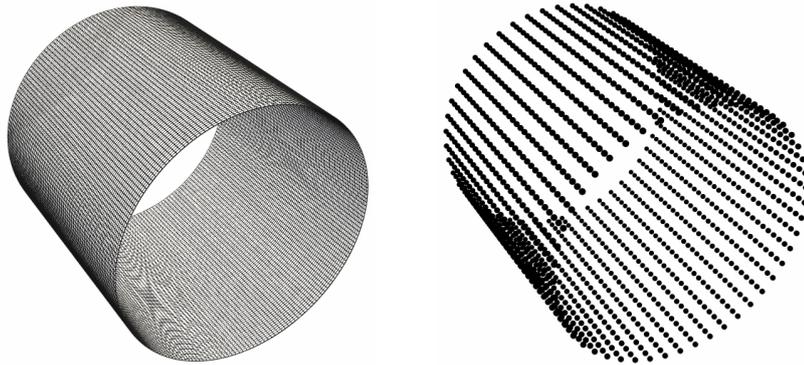


Abbildung 8.20: FE-Netz mit 200×100 Elementen (links) und EOLE-Netz mit 49×31 stochastischen Knoten (rechts) der A-Schalen

größer. Je kleiner die Korrelationsparameter, desto unregelmäßiger wird die Form der Imperfektion und desto mehr Knoten zur Darstellung des Zufallsfelds sind erforderlich. Da die Messpunkte zum Aufstellen der *Fourier-Reihen* als Basis des Korrelationsmodells verwendet werden, können diese auch für das stochastische Netz verwendet werden. Abschließend werden in Abbildung 8.21 drei Realisationen der Mantelimperfektionen in den Grenzen der Fuzzy-Eingangsparameter für die A-Schalen dargestellt.

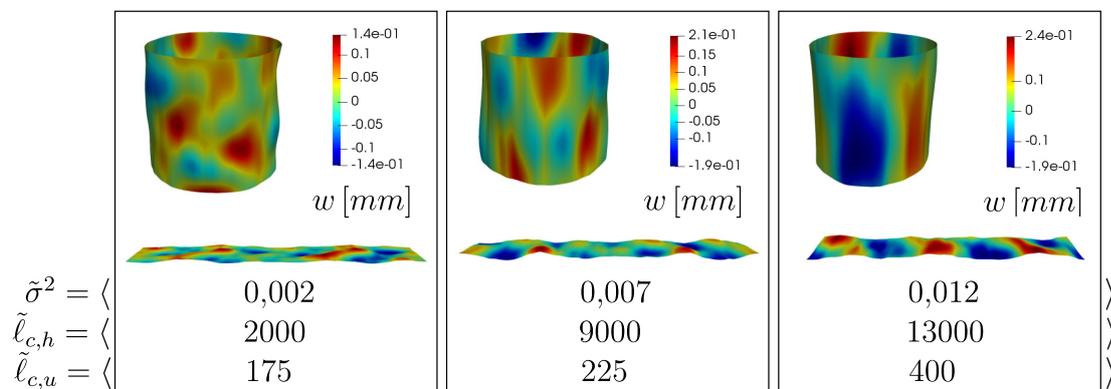


Abbildung 8.21: Realisationen der Mantelimperfektionen mit aufgerollter Konfiguration für die gewählten Fuzzy-Eingangsparameter der A-Schalen (50-fach überhöht dargestellt)

Mit der Darstellung der Realisationen kann gezeigt werden, in welchem Maße mit der Varianz die Imperfektionsamplitude und mit den Korrelationsparametern die Imperfektionsform gesteuert werden kann.

Für die folgenden Ergebnisse werden alle Beullasten mit der ideellen Beullast der Versuchsschalen aus Tabelle 8.8 b) normiert:

$$\alpha_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr,impf}}}{P_{\text{cr,perf}}} \quad (8.33)$$

Das Verhältnis α_{cr} wird als kritischer Beulfaktor bezeichnet.

8.2.8 Ergebnisse einer probabilistischen Modellierung

Bevor die Ergebnisse einer Unschärfemodellierung präsentiert werden, soll anhand einer klassischen probabilistischen Modellierung gezeigt werden, wie schwierig und unsicher es sein kann, eine Aussage über die Verteilung der Beullasten zu treffen. Dazu wird eine MCS durchgeführt mit gewählten Werten für die Stichprobenvarianz und der Korrelationsparameter aus Tabelle 8.3 der A-Schalen. Die Ergebnisse der MCS für die Schale a) A-8, b) A-12 und für c) den Mittelwert der Parameter aller sieben A-Schalen sind in Abbildung 8.22 dargestellt. Zusätzlich sind in Tabelle 8.10 die Ergebnisse des normierten Beulfaktors der probabilistischen Analyse aufgeführt. Die *Monte-Carlo-Simulation* umfasst 500 Simulationen. Die drei

Schale	Mittelwert $\bar{\alpha}_{\text{cr}} [-]$	CoV $\sigma/\mu [\%]$	5%-Quantil $\alpha_{\text{cr},0,05} [-]$
a) A-8	0,78	7,98	0,67
b) A-12	0,95	2,44	0,89
c) Mittelwert	0,96	1,19	0,94

Tabelle 8.10: Ergebnisse der MCS des normierten Beulfaktors für ausgewählte Werte der Stichprobenvarianz und der Korrelationsparameter aus den Messergebnissen nach Tabelle 8.22

Ergebnisse zeigen völlig unterschiedliche Verteilungen der Beullast. Der niedrigste Mittelwert und Quantilwert werden bei einer MCS mit den Parametern der Schale A-8 erhalten. Werden diese Parameter für eine Beulbemessung gewählt, wird damit eine konservative Bemessung durchgeführt. Das Ergebnis der Schale A-12 ist eine viel geringere Abminderung und Streuung der Beullasten. Eine Simulation mit den gemittelten Parametern führt auch nicht zu einer sicheren Bemessung. Mit dem Beispiel wird gezeigt, dass durch eine probabilistische Modellierung nicht alle „Unschärfen“ quantifiziert werden können. Dieses fehlende Wissen soll daher nachfolgend in den Ergebnissen der Unschärfemodellierung abgebildet werden.

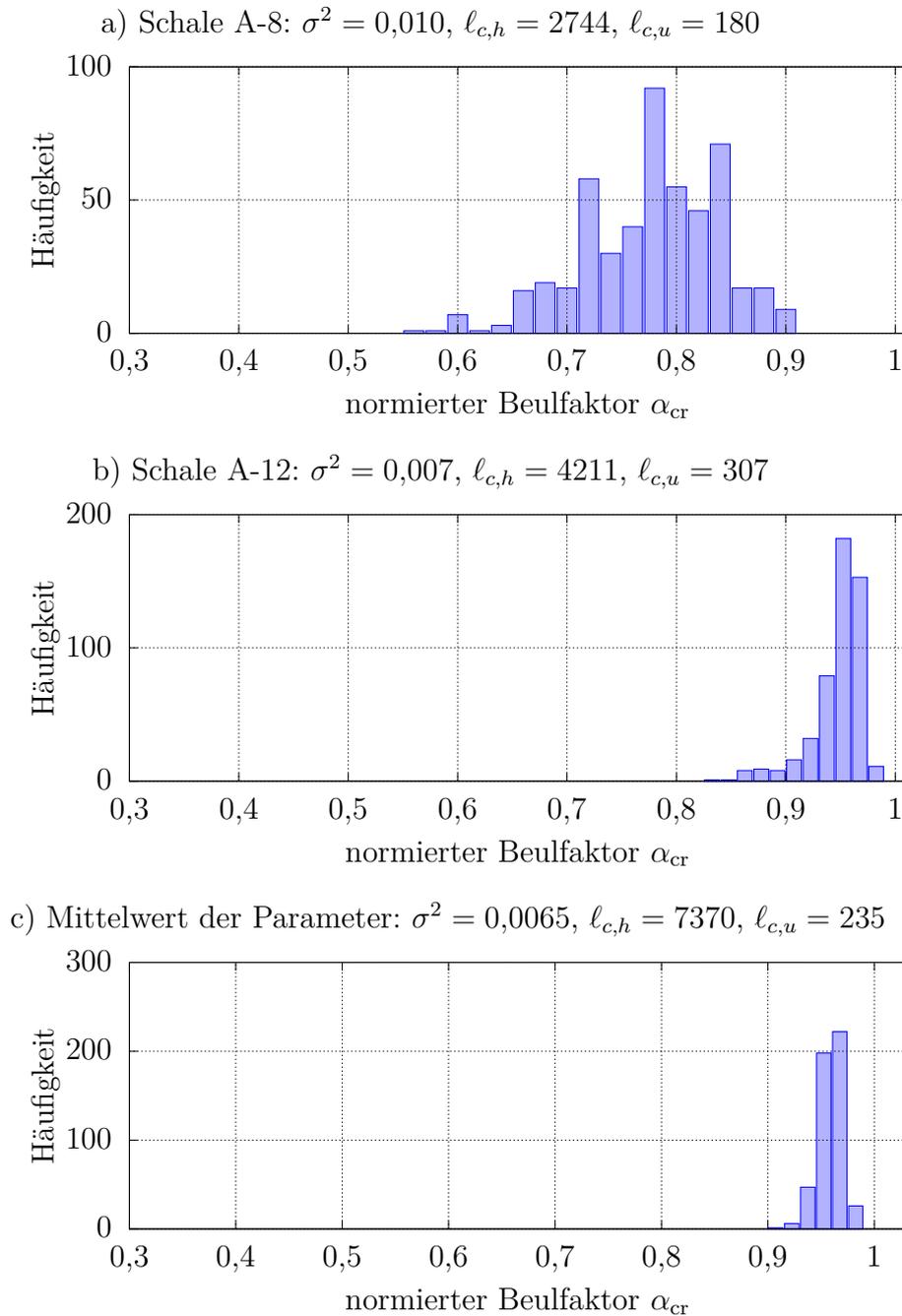


Abbildung 8.22: Histogramme (MCS mit 500 Simulationen) zum normierten Beulfaktor mit den evaluierten Korrelationsparametern und der Stichprobenvarianz aus Tabelle 8.3 der A-Schalen: a) Schale A-8, b) Schale A-12 und c) Mittelwert der sieben Parameter

8.2.9 Ergebnisse der Unschärfemodellierung

Die Ergebnisse der Unschärfemodellierung für die vier untersuchten Schalentypen sind in Abbildung 8.23 dargestellt. Die zugehörigen Fuzzy-Eingangsparameter können aus Abbildung 8.10 entnommen werden. Auf Basis des HDMR-Metamodells werden der Fuzzy-Mittelwert $\bar{\alpha}_{cr}$ und der Fuzzy-5%-Quantilwert $\alpha_{cr,0,05}$ ausgewertet. Zusätzlich werden die gemessenen Mantelimperfectionen als *Fourier-Reihen* modelliert und in das FE-Modell integriert. In Abbildung 8.3 sind Beispiele der *Fourier-Reihen* dargestellt. Die entsprechenden Ergebnisse werden als *Fourier-Imperfektionen* gekennzeichnet. Für alle Schalen kann eine gute Übereinstimmung zu den gemessenen *Fourier-Imperfektionen* beobachtet werden. Die *Fourier-Imperfektionen* sind auch die Grundlage des aufgestellten Fuzzy-Korrelationsmodells. Die Beullasten, die mit diesen Imperfektionen berechnet werden, sind im Bereich der größten Zugehörigkeit, d.h. im Bereich des Trendwerts der Zugehörigkeitsfunktion. Zusätzlich ist in Abbildung 8.24 eine Fuzzy-Verteilungsfunktion dargestellt.

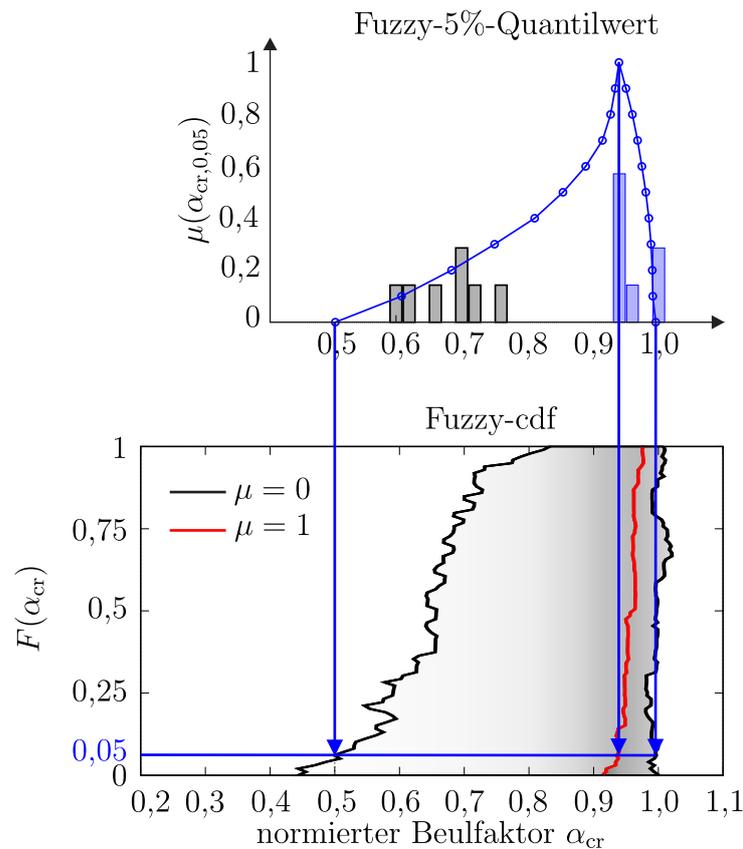


Abbildung 8.24: Fuzzy-Verteilungsfunktion mit Fuzzy-5%-Quantilwert der A-Schalen

An der Stelle $F(\alpha_{cr}) = 0,05$ kann die Fuzzy-Ergebnisgröße des 5%-Quantilwerts

abgelesen werden. Zudem sind in Abbildung 8.23 die experimentellen Ergebnisse der Versuchsschalen aus der Imperfektionsdatenbank [10] enthalten. Die Testergebnisse liegen außerhalb der Fuzzy-Ergebnisgrößen oder im Bereich geringer Zugehörigkeiten. Die Begründung für die immer noch vorhandene Diskrepanz ist, dass beim bisher vorgestellten Modell lediglich die Mantelimperfektionen abgebildet werden. Die Abminderung der Beullasten mit der größten Zugehörigkeit liegt bei allen Schalentypen um die 10%. Für eine möglichst realitätsnahe Modellierung müssen weitere Imperfektionen wie Variation der Schalendicke, materielle Imperfektionen und Aufstandsimperfektionen berücksichtigt werden. Außerdem werden andere Faktoren wie Messungenauigkeiten oder sonstige unscharfe Parameter des Herstellungsprozesses, wie z.B. menschliche Fehler, im vorgestellten Unschärfemodell nicht erfasst. In Tabelle 8.11 sind die Berechnungszeiten der Fuzzy-stochastischen Beulanalyse für die Berechnung einer Fuzzy-Ergebnisgröße enthalten.

Schalentypen	A-Schalen	N-Schalen	B-Schalen	ST-Schalen
CPU-Zeit [h]	296	201	280	373

Tabelle 8.11: Berechnungszeiten der Fuzzy-stochastischen Beulanalysen

Dazu wird eine Workstation mit folgender Ausstattung verwendet:

- 2 CPUs Intel Xeon E5-2667 v4 mit je 8 Kernen @ 3.20 GHz, 128 GB RAM, Win 10 x64
- Erweiterte IBS-Version FEAP [316], Intel Pardiso Gleichungslöser
- MATLAB [193] Parallel Pool .

Die Berechnungszeit ist vor allem abhängig von den Einstellungen des FE-Modells wie Elementtyp, Elementanzahl, Verschiebungsschrittweite, Anzahl der Newton-Iterationen zur Lösung der nichtlinearen FE-Gleichungen und dem Gleichungslöser. Für eine gute Konvergenz der Fuzzy-Ausgangsvariablen werden $61 \times 500 = 30500$ Beulanalysen durchgeführt. Bei aufwendigen Grundlösungen kann also schon sehr viel Rechenzeit durch die Verwendung eines optimierten FE-Modells eingespart werden.

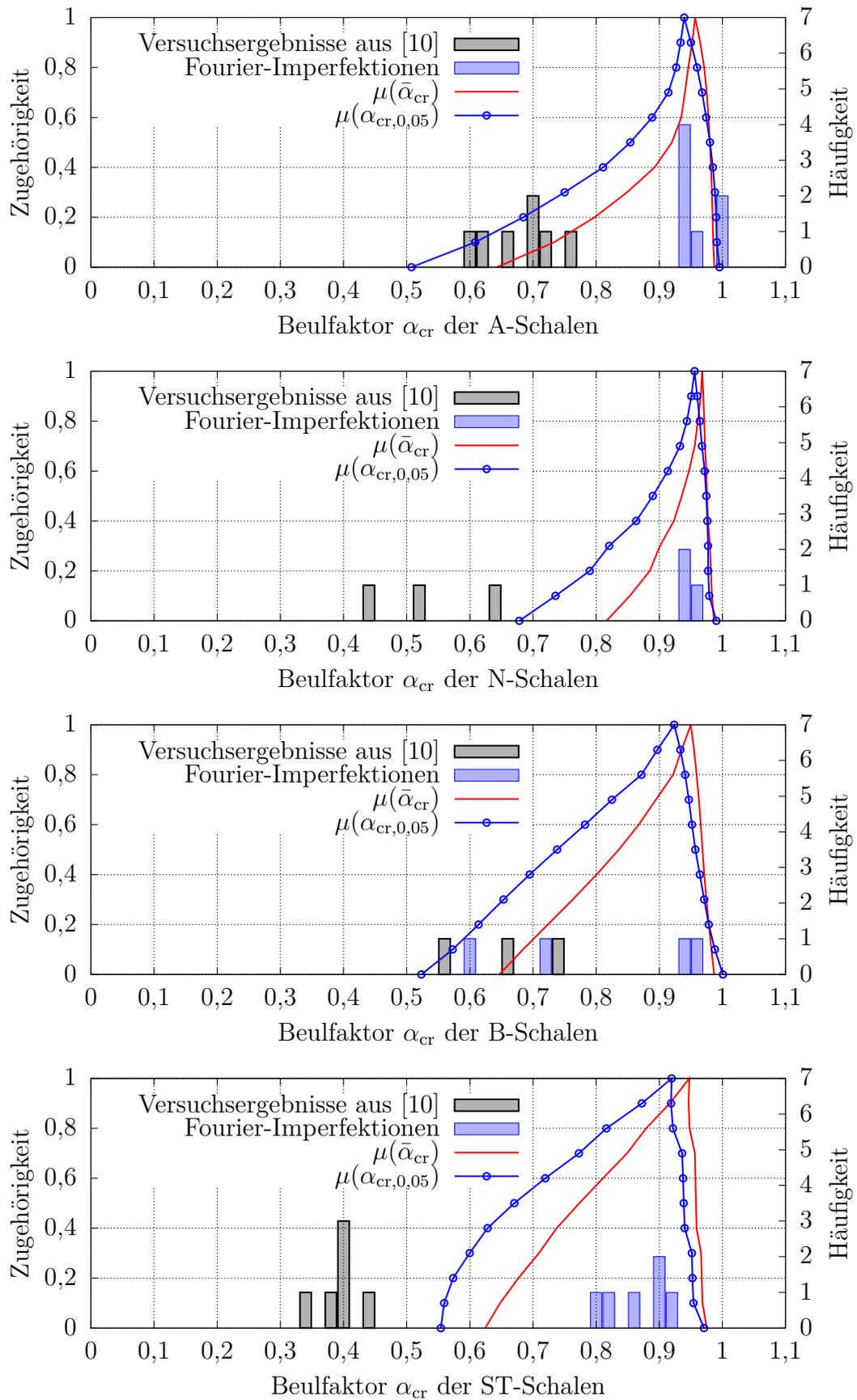


Abbildung 8.23: Fuzzy-Beulfaktoren der vier untersuchten Schalentypen

8.2.10 Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse

Ein Schalenkonstrukteur kann mit den Fuzzy-Ergebnisgrößen des Beulfaktors die vorhandenen Unschärfen einschätzen. Der Fuzzy-Mittelwert $\bar{\alpha}_{cr}$ und der Fuzzy-5%-Quantilwert $\alpha_{cr,0,05}$ der A-Schalen in Abbildung 8.23 (oben) haben einen breiten *Support*. Deshalb lohnt es sich für einen Schalenbauer die Unschärfen mit nur wenig Aufwand zu reduzieren. Dazu ist die Kenntnis über die einzelnen Einflüsse der drei Eingangsparameter σ^2 , $\ell_{c,h}$ und $\ell_{c,u}$ auf den kritischen Beulfaktor α_{cr} nötig. Diese Zusatzinformation wird mit einer Sensitivitätsanalyse erhalten. Hierfür wird die ANOVA-HDMR eingesetzt. Varianzbasierte Sensitivitätsanalysen werden üblicherweise für stochastische Ausgangsgrößen angewendet. Eine Anwendung für epistemische Unschärfen ist nicht möglich. Als Datengrundlage wird daher lediglich der *Support* des Fuzzy-Eingangsraums definiert. Dabei werden die Fuzzy-Variablen als gleichverteilte Zufallsvariablen aufgefasst. Dies ist eine starke Vereinfachung, bei der die Unschärfe in den Ergebnissen nicht berücksichtigt wird. Allerdings kann damit der Einfluss abgeschätzt werden. Die *Sobol'-Indizes* werden mit einer *Monte-Carlo-Integration* auf dem HDMR-Metamodell berechnet. Für diese wird ein *Simple Random Sampling* mit 100^3 Auswertungspunkten angewendet. In Abbildung 8.25 sind die *Sobol'-Indizes* bezogen auf den Fuzzy-Mittelwert $\bar{\alpha}_{cr}$ des kritischen Beulfaktors dargestellt. Der Korrelationsparameter

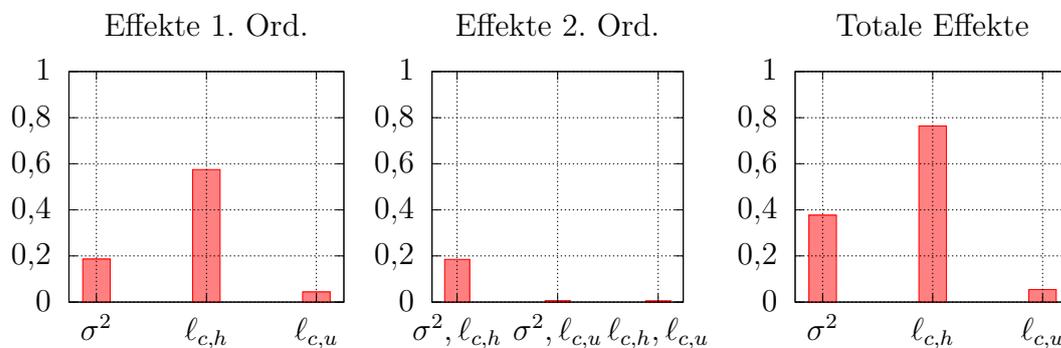


Abbildung 8.25: Ergebnisse der globalen Sensitivitätsanalyse bezogen auf den Mittelwert des kritischen Beulfaktors $\bar{\alpha}_{cr}$

in Axialrichtung $\ell_{c,h}$ hat den größten Einfluss auf die Beullast. Das erscheint für eine Zylinderschale unter Axialdruck auch plausibel. Zusätzlich darf auch nicht der Einfluss der Stichprobenvarianz σ^2 unterschätzt werden. Denn dieser Parameter kontrolliert die Amplitude der Mantelimperfection. Die Stichprobenvarianz hat zusammen mit dem Korrelationsparameter $\ell_{c,h}$ auch noch einen gekoppelten Einfluss. Weitere Effekte 2. Ordnung können vernachlässigt werden. Der Korrelationsparameter in Umfangsrichtung $\ell_{c,u}$ hat für die axialbelastete Zylinderschale einen geringen Einfluss. Durch das HDMR-Metamodell sind die funktionalen

Zusammenhänge bekannt. Diese werden bei Betrachtung der Schnittfunktionen bzw. Teilsammenfunktionen in Abbildung 8.26 sichtbar. Die Stichprobenvarianz

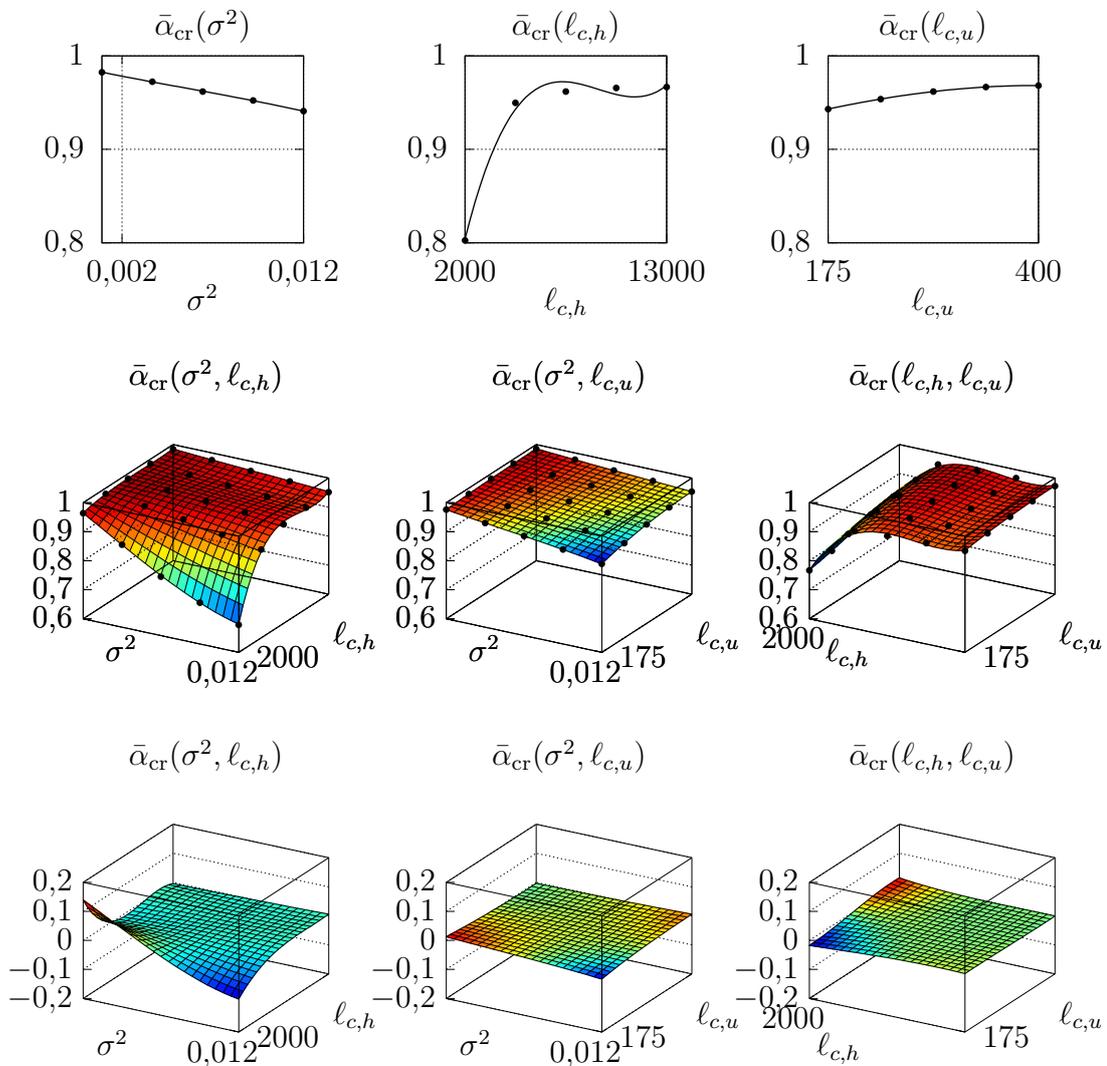


Abbildung 8.26: Schnittfunktionen der HDMR auf Basis des LSQ-Metamodells mit kubischen Polynomen und 5^M Stützstellen bezogen auf den Mittelwert des Beulfaktors: 1D-Schnittfunktionen (oben), 2D-Schnittfunktionen (mitte) und das Ergebnis der Teilsammenfunktionen (unten)

wird näherungsweise durch einen linearen Verlauf beschrieben. Je größer die Varianz, desto kleiner die Beullasten. Hingegen haben die Korrelationsparameter einen nichtlinearen Einfluss auf den Beulfaktor. In Abbildung 8.26 (oben) wird mit der 1D-Schnittfunktion des Parameters $\ell_{c,h}$ die große Sensitivität dieses Parameters gezeigt. Kleine Werte für $\ell_{c,h}$ führen in der Schnittfunktion zu einer

Abminderung von ca. 20% der Beullast. Die gekoppelten Einflüsse der Parameter werden mithilfe der 2D-Schnittfunktionen dargestellt. Hieraus ist ersichtlich, dass nur bei einer entsprechend großen Varianz die Korrelationsparameter einen Einfluss haben. Das Ergebnis der Teilsummenfunktionen wird mit dem Ergebnis der *Sobol'-Indizes* der Effekte 2. Ordnung in Abbildung 8.25 bestätigt. Dabei ist nur eine Änderung im Verlauf der Teilsummenfunktion $\sigma^2 - \ell_{c,h}$ zu erkennen.

8.3 Ein Gesamtmodell für geometrische und materielle Imperfektionen

Bei den vier Ergebnissen der Unschärfemodellierung in Abbildung 8.23 besteht immer noch eine Diskrepanz zwischen den real getesteten Zylindern aus der Datenbank [10] und der jeweiligen Fuzzy-Ergebnisgröße. Auch wenn mit dem Unschärfemodell für Mantelimperfektionen die *Fourier-Imperfektionen* gut abgebildet werden können, liegen die realen Experimente zum Teil außerhalb des *Supports* der Fuzzy-Ergebnisgröße oder nur im Bereich sehr geringer Zugehörigkeit. Der Grund hierfür ist, dass noch nicht alle Imperfektionsarten berücksichtigt werden. Daher werden nachfolgend mögliche Unschärfemodelle für Aufstandsimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variationen der Schalendicke vorgestellt. Das Gesamtmodell wird beispielhaft für die A-Schalen entwickelt.

8.3.1 Unschärfemodell für Aufstandsimperfektionen

Aufstandsimperfektionen können zu einer drastischen Reduktion der Beullast führen. Diese sind in der Literatur auch unter dem Synonym Lastimperfektionen bekannt. FLÜGGE [94] untersuchte schon 1932 den Einfluss ungleichmäßiger Belastung auf das Beulverhalten isotroper Zylinderschalen [127]. In [233] sind beispielsweise auch analytische Lösungen für Zylinderschalen mit beliebig verteilter Axialbelastung zu finden. UMMENHOFER [321] und KNEBEL [162] stellten ebenfalls in ihren numerischen und experimentellen Untersuchungen einen großen Abfall der Beullast infolge Auflagerimperfektionen fest. Nach UMMENHOFER [321] ist außerdem die Interaktion von Randaufstandsimperfektionen mit den Mantelimperfektionen ein wesentlicher Faktor, der die Beullast deutlich beeinflusst. Der Einfluss der Randaufstandsimperfektionen wächst also mit zunehmenden R/t -Verhältnis. In [161] schreibt KNÖDEL: „Möglicherweise gelingt ein entsprechendes „Hinunter-rechnen“, wenn man auch Aufstandsimperfektionen einbezieht.“ Allerdings ist in der aktuellen Norm EN 1993-1-6 [65] noch keine zufriedenstellende Vorgehensweise zur Behandlung von Aufstandsimperfektionen beschrieben, siehe Tafel 8.3. Ein Wert wird für einen Neigungswinkel der Imperfektion in Umfangsrichtung angegeben. Zur Form wird aber keine Aussage getroffen. UMMENHOFER

8.4.5 Toleranz für Auflager-Unebenheit

(1) Wenn ein anderes Tragelement kontinuierlich eine Schale unterstützt (wie z. B. ein Fundament), sollte seine Ebenheitsabweichung örtlich keinen größeren Neigungswinkel in Umfangsrichtung als β_θ aufweisen.

ANMERKUNG Der Wert von β_θ darf im Nationalen Anhang festgelegt werden. Es wird ein Wert von $\beta_\theta = 0,1\% = 0,001$ rad empfohlen.

Tafel 8.3: Auszug aus der Norm EN 1993-1-6 [65] zur Behandlung von Aufstandsimperfektionen

geht in seiner Doktorarbeit [321] davon aus, dass die Unebenheiten der Lasteinleitungsplatten am unteren Zylinderrand Ursache für die Ungleichförmigkeit der Membranlängsspannungsverteilungen sind. Aus den vermessenen Membranlängsspannungen kurz vor Versagen der Schale entwickelt UMMENHOFER eine äquivalente Randlast als *Fourier-Reihe* zur Berücksichtigung in seinem FE-Modell. Eine Ursache für Aufstandsimperfektionen können auftretende Setzungen sein. Das ist vor allem beim Bau von Silos oder Tanks relevant. Als Beispiel sind hierzu die Arbeiten von ESSLINGER & MELZER [82] und KAMYAB & PALMER [148] zu nennen. ESSLINGER & MELZER haben in [82] Bodensetzungen vermessen und halten als Ergebnis ihrer Simulation fest, dass aufgrund von Unebenheiten vor allem bei schlanken Behältern unter hoher Belastung eine Abminderung von bis zu 40% der Beullast beobachtet werden kann. Generell sind wenige Messungen zu Aufstandsimperfektionen in der Fachliteratur vorhanden. Trotzdem wird nachfolgend eine Möglichkeit beschrieben, wie Aufstandsimperfektionen als homogenes 1D-Zufallsfeld modelliert werden können. In [9] ist hierzu eine Messung einer Randimperfektion von einer Zylinderschale mit ähnlichen Abmessungen der A-Schalen veröffentlicht. Das Messergebnis der Unebenheit der Auflager und die für die weitere Berechnung benötigte genäherte Funktion ist in Abbildung 8.27 dargestellt. Für das Fitting wird die LSQ-Methode mit 75 Stützstellen und einem Polynomgrad von $K = 10$ angewendet. Danach kann mithilfe der Gleichung (8.10) aus der genäherten Funktion der Aufstandsimperfektion eine Autokorrelationsfunktion in Umfangsrichtung entwickelt werden. Analog zur Ermittlung der AKFs für die Mantelimperfektionen wird die lineare Kosinusfunktion

$$\rho(\Delta y, \ell_{c,bd}, T_{bd}) = \left(1 - \frac{\Delta y}{\ell_{c,bd}}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi\Delta y}{T_{bd}}\right) \quad (8.34)$$

für ein Fitting mit der NLLSQ-Methode verwendet. Die Fitting-Ergebnisse der Korrelationslänge $\ell_{c,bd}$ und der Periodenlänge T_{bd} sind

$$\ell_{c,bd} = 494 \quad \text{und} \quad T_{bd} = 349 \quad . \quad (8.35)$$

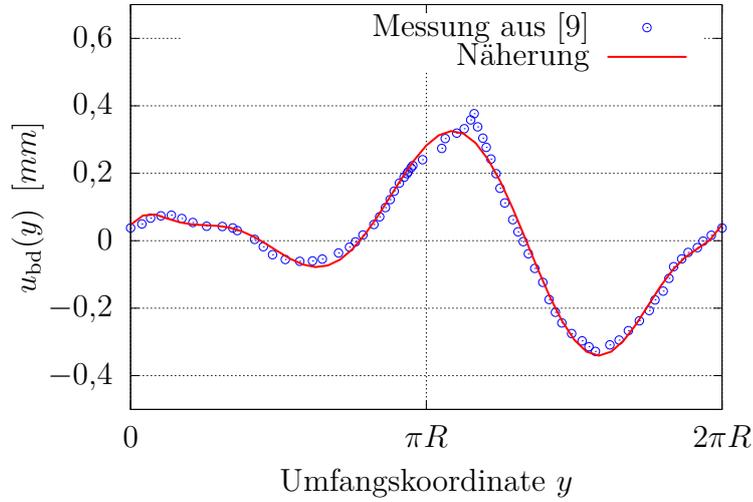


Abbildung 8.27: Messung der Aufstandsimperfection von ARBOCZ [9] mit Näherung

Die aus der Messung evaluierte und genäherte AKF für eine Knotenanzahl von $N_C = 49$ sind in Abbildung 8.28 dargestellt. Die lineare Kosinusfunktion ist eine gute Näherung für die AKF. Mit der AKF kann die Kovarianzmatrix

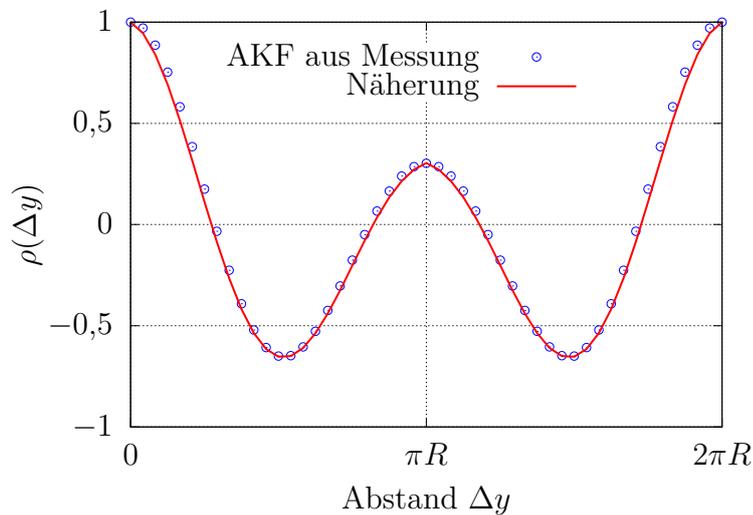


Abbildung 8.28: Autokorrelationsfunktion für die gemessene Aufstandsimperfection in Abbildung 8.27 und Näherung mit der Funktion nach Gleichung (8.34) für die Parameter $\ell_{c,bd} = 494$ und $T_{bd} = 349$

$$C(\Delta y) = \sigma^2 \rho(\Delta y, \ell_{c,bd}, T_{bd}) \quad (8.36)$$

für die Simulation der Aufstandsimperfektionen mit einem homogenen standard-normalverteilten Zufallsfeld

$$u_{\text{bd}}(\mathbf{y}, \theta) \sim \mathcal{N}(0, 1) \tag{8.37}$$

berechnet werden. Die einzige Messung ist ein Anhaltswert zur Abschätzung der Korrelationseigenschaften und auch zur Form der Aufstandsimperfektionen. Zur Varianz und Amplitude sind keine näheren Informationen gegeben. Deshalb werden die Realisationen des Zufallsfelds mit einem Amplitudenfaktor a_{bd} in Abhängigkeit der kritischen Verschiebung u_{cr} wie folgt skaliert:

$$u_{0,\text{bd}}^a(y_i) = \frac{u_{\text{bd}}(y_i)}{\|u_{0,\text{bd}}(\mathbf{y})\|_{\text{max}}} \cdot \frac{u_{\text{cr}}}{a_{\text{bd}}} \quad \text{mit } i = 1 \dots N_C \quad . \tag{8.38}$$

Die kritische Verschiebung am Stabilitätspunkt der idealen A-Schale ist $u_{\text{cr}} = 0,134 \text{ mm}$. In Abbildung 8.29 sind exemplarisch zwei Realisationen des Zufallsfelds für die Parameter $a_{\text{bd}} = 10$, $\ell_{c,\text{bd}} = 494$ und $T_{\text{bd}} = 349$ dargestellt. Zudem

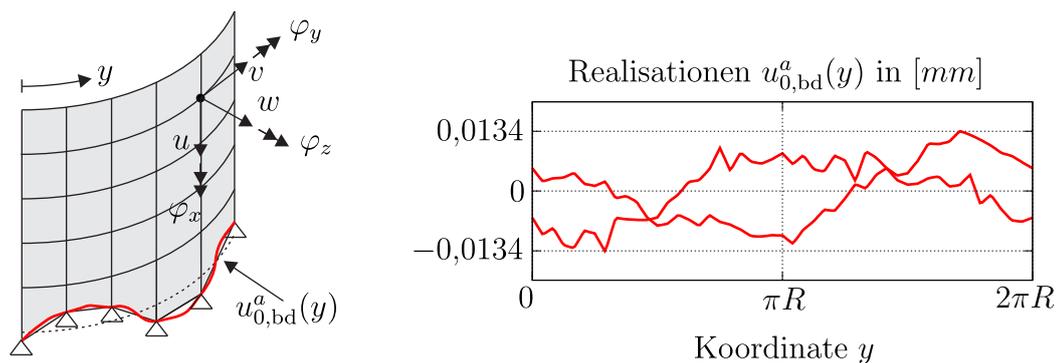


Abbildung 8.29: Modellierung der Aufstandsimperfektionen im FE-Modell (links) mit zwei Realisationen des Zufallsfelds (rechts)

ist in der Abbildung 8.29 (links) dargestellt, wie die Aufstandsimperfektionen im FE-Modell berücksichtigt werden. Diese werden in Form von Auflagerverschiebungen in u -Richtung am unteren Rand des Zylinders aufgebracht. Durch die eingprägten Verschiebungen als Realisation eines Zufallsfelds entsteht ein ungleichmäßiger Spannungszustand in der Schale, der einer Imperfektion gleicht. Diese Lagerverschiebungen werden bei der Verschiebungssteuerung nicht mit gesteigert. Zur Wahl der Unschärfemodelle wird der Einfluss der Parameter T_{bd} , $\ell_{c,\text{bd}}$ und a_{bd} auf den Mittelwert des kritischen Beulfaktors untersucht. Hierfür wird eine MCS mit 500 Realisationen durchgeführt. Zur Diskretisierung des 1D-Zufallsfelds wird die EOLE-Methode angewendet. Die Verläufe der Ergebnisse werden in den Abbildungen 8.30, 8.31 und 8.32 gezeigt. Der Verlauf des Korrelationsparameter $\ell_{c,\text{bd}}$ ist für den untersuchten Definitionsbereich konstant. Für die

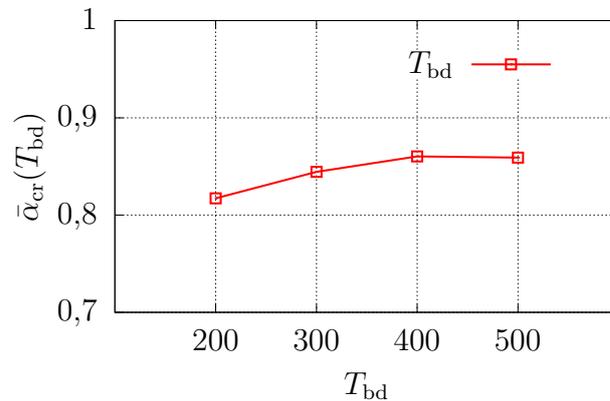


Abbildung 8.30: Einfluss des Parameters T_{bd} auf den Mittelwert des Beulfaktors mit $\ell_{c,bd} = 494$ und $a_{bd} = 15$

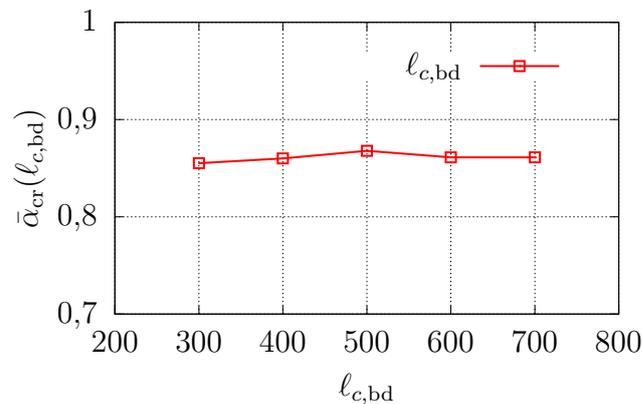


Abbildung 8.31: Einfluss des Parameters $\ell_{c,bd}$ auf den Mittelwert des Beulfaktors mit $T_{c,bd} = 349$ und $a_{bd} = 15$

Parameter T_{bd} und a_{bd} gilt je kleiner sie sind, desto geringer sind die Beullasten. Auf Basis der Messung und der Parameterstudie wird ein Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld als Unschärfemodell für die Modellierung der Aufstandsimperfectionen gewählt. Da nur eine Messung zur Korrelationseigenschaft vorhanden ist, werden die Parameter nicht als Fuzzy-Variablen beschrieben. Mit nur einem Messwert ist keine Bewertung der Daten möglich. Die eingeführten Parameter werden als Intervalle definiert:

$$T_{bd} \in [100, 500]$$

$$a_{bd} \in [10, 20] \quad .$$

Der Korrelationsparameter $\ell_{c,bd}$ wird aufgrund des unveränderlichen Verlaufs als konstante Variable gewählt: $\ell_{c,bd} = 494$. Zusammenfassend wird nochmal darauf hingewiesen, dass das Vorgehen zur Modellierung der Aufstandsimperfectionen

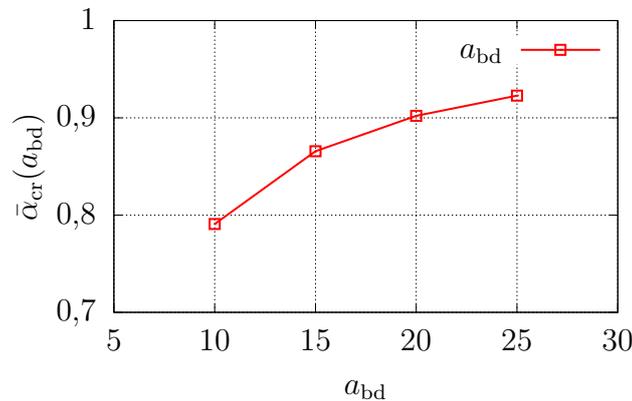


Abbildung 8.32: Einfluss des Parameters a_{bd} auf den Mittelwert des Beulfaktors mit $T_{c,bd} = 349$ und $\ell_{c,bd} = 494$

hier nur auf einer Messung basiert. Damit können die Parameter zur Korrelationseigenschaft abgeschätzt werden. Der Amplitudenfaktor a_{bd} ist frei gewählt, weil keine Messungen zu den Amplituden vorhanden sind. Ein ähnliches Vorgehen ist beispielsweise auch denkbar für Messungen zur Verteilung der Membranspannungen an den Rändern. Eine verbesserte Quantifizierung der Unschärfen für die Aufstandimperfektionen ist nur mit weiteren Untersuchungen möglich.

8.3.2 Unschärfemodell für materielle Imperfektionen

Die Messung der räumlichen Variation der Materialparameter gestaltet sich äußerst schwierig. Die Forscher der Stochastischen Finite Elemente Methode (SFEM), die sich mit der Berücksichtigung der Materialparameter in Form von Zufallsfeldern beschäftigen, sind daher gezwungen die Korrelationsparameter nur qualitativ anzunehmen [47]. In [172, 225, 304] werden z.B. für die Simulation der räumlichen Variabilität der Materialparameter mit der Methode der spektralen Darstellung die Korrelationsparameter, bezogen auf die Abmessungen der Schale, frei gewählt. LAUTERBACH [178] wählt aus Anschauung mithilfe einer Messung für welche Korrelationslänge plausible materielle Imperfektionen erzeugt werden können. In der Imperfektionsdatenbank [10] sind Messergebnisse zum E-Modul der sieben A-Schalen gegeben, siehe Tabelle 8.12. Da kein Wissen über die Korrelationseigen-

Schale	A-7	A-8	A-9	A-10	A-12	A-13	A-14
E-Modul [N/mm ²]	104110	104800	101350	102730	104800	104110	108940

Tabelle 8.12: Die gemessenen Werte des E-Moduls der A-Schalen aus [10]

schaften vorhanden ist, wird der E-Modul als eine epistemische Größe definiert. Zur Orientierung werden die Messwerte für den E-Modul als Histogramm dargestellt. Die festgelegte Zugehörigkeitsfunktion und das Histogramm des E-Moduls sind in Abbildung 8.33 dargestellt. Als linke und rechte Grenze des *Supports* wird

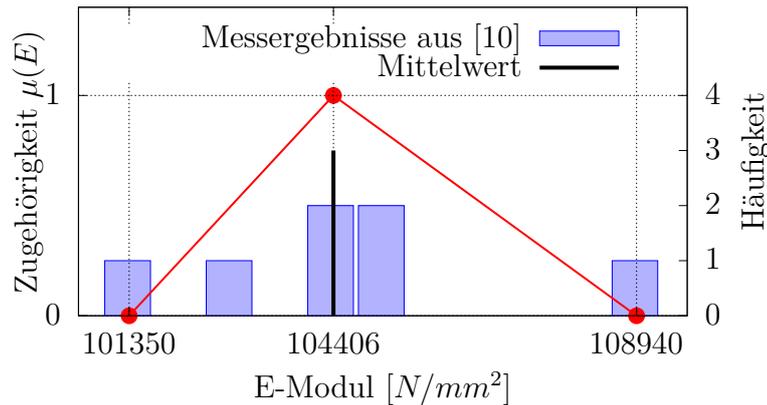


Abbildung 8.33: Histogramm und Zugehörigkeitsfunktion für den E-Modul der A-Schalen

der minimale und maximale gemessene E-Modul definiert. Als Trendwert wird der Mittelwert der Messwerte festgelegt. Die Fuzzy-Dreieckszahl des E-Moduls ist definiert zu

$$\tilde{E} = \langle 101350, 104406, 108940 \rangle \quad [N/mm^2] \quad . \quad (8.39)$$

Im Gegensatz zur eher konservativen Wahl der Korrelationsparameter für die Mantelimperfectionen wird für den Materialparameter eine strengere Wahl getroffen. Die Begründung hierfür ist, dass es für den E-Modul leichter ist Toleranzvorgaben zu machen als für die Korrelationsparameter. Deshalb werden den Werten außerhalb des Bereichs der Messwerte auch keine Zugehörigkeitswerte zugewiesen.

8.3.3 Unschärfemodell für Imperfectionen der Schalendicke

In der Imperfectionsdatenbank sind ebenfalls für die A-Schalen die gemessenen Schalendicken angegeben, siehe Tabelle 8.13. Allerdings sind keine Messungen zur Verteilung der Dicke der Schale vorhanden. Jedoch sind solche Dickenmessungen leichter durchführbar als Messungen zum E-Modul und daher in der Literatur einfacher zu finden. Zum Beispiel wird in [60] eine Dickenmessung an einer Zylinderschale aus Faserverbundmaterial durchgeführt. Hierbei kann eine Korrelation

Schale	A-7	A-8	A-9	A-10	A-12	A-13	A-14
Schalendicke t [mm]	0,1140	0,1179	0,1153	0,1204	0,1204	0,1128	0,1110

Tabelle 8.13: Die gemessenen Schalendicken der A-Schalen aus [10]

der Schalendicke über das Bauteil beobachtet werden. Da für die A-Schalen aber auch keine Messungen mit vergleichbaren Schalen gefunden werden können, wird die Schalendicke als Fuzzy-Variable definiert. Die Messergebnisse in Form eines Histogramms und die Zugehörigkeitsfunktion sind dazu in Abbildung 8.34 dargestellt. Der Mittelwert wird als Trendwert verwendet und der minimale und

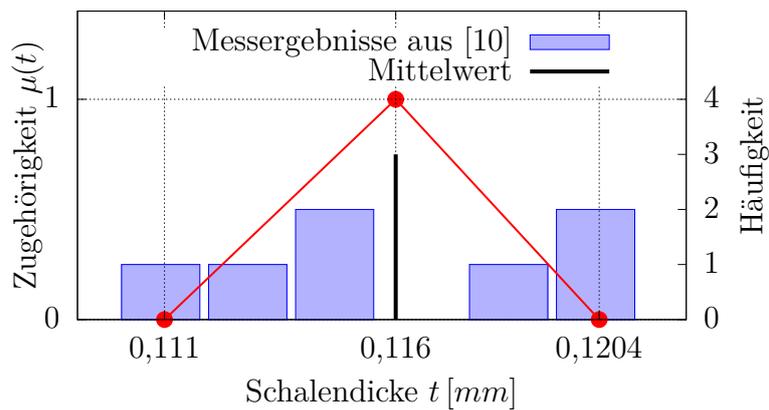


Abbildung 8.34: Histogramm und Zugehörigkeitsfunktion für die Schalendicke der A-Schalen

maximale Messwert als *Support-Grenzen*. Dabei wird hier wieder angenommen, dass es für die Schalendicke leichter ist, Toleranzen zu definieren. Die Fuzzy-Dreieckszahl ist definiert zu

$$\tilde{t} = \langle 0,111, 0,116, 0,1204 \rangle \quad [mm] \quad . \quad (8.40)$$

8.3.4 Ergebnisse der Unschärfemodellierung

In Abbildung 8.35 sind die polymorphen Unschärfemodelle der Eingangsparameter zur Beschreibung aller Imperfektionsarten dargestellt. Zusätzlich zur Model-

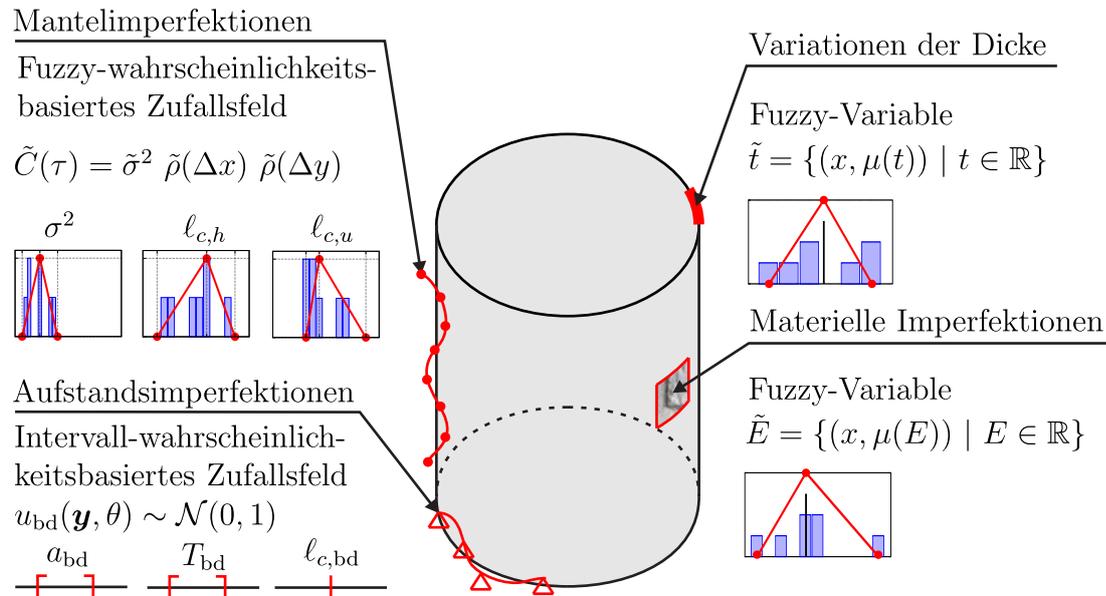


Abbildung 8.35: Übersicht der Unschärfemodelle zur Beschreibung von Imperfektionen am Gesamtmodell

lierung der natürlichen Variabilität der Imperfektionen mit Zufallsfeldern kann mithilfe dieser Modelle die vorhandene Unschärfe aufgrund zu wenig vorhandener Daten für eine Beulanalyse erfasst werden. Eine Zusammenfassung der Unschärfemodelle für das Gesamtmodell mit Anmerkungen zur deren Wahl für die einzelnen Imperfektionsarten ist in Tabelle 8.14 gegeben. Insgesamt sind für die Unschärfemodellierung sieben Eingangsparameter definiert. Die Scharparameterdarstellung ist

$$\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{\sigma}^2, \tilde{\ell}_{c,h}, \tilde{\ell}_{c,u}, T_{bd}, a_{bd}, \tilde{E}, \tilde{t}\} . \quad (8.41)$$

Ein HDMR-Metamodell mit der LSQ-Methode und $n_{\text{sim}} = 5$ Stützstellen pro Eingangsvariable wird für die Näherung der Schnittfunktionen angewendet. Der Berechnungsaufwand für die sieben Eingangsvariablen kann in Abbildung 7.18 abgelesen werden. An 365 Stützstellen ist eine MCS erforderlich. Für jede MCS werden 500 Realisationen berechnet. Insgesamt werden $365 \times 500 = 182500$ Beulanalysen durchgeführt. Die Ergebnisse der Unschärfemodellierung für den Mittelwert und den 5%-Quantilwert des kritischen Beulfaktors sind in Abbildung 8.36 dargestellt. Die Versuchsergebnisse werden durch den Bereich großer Zugehörig-

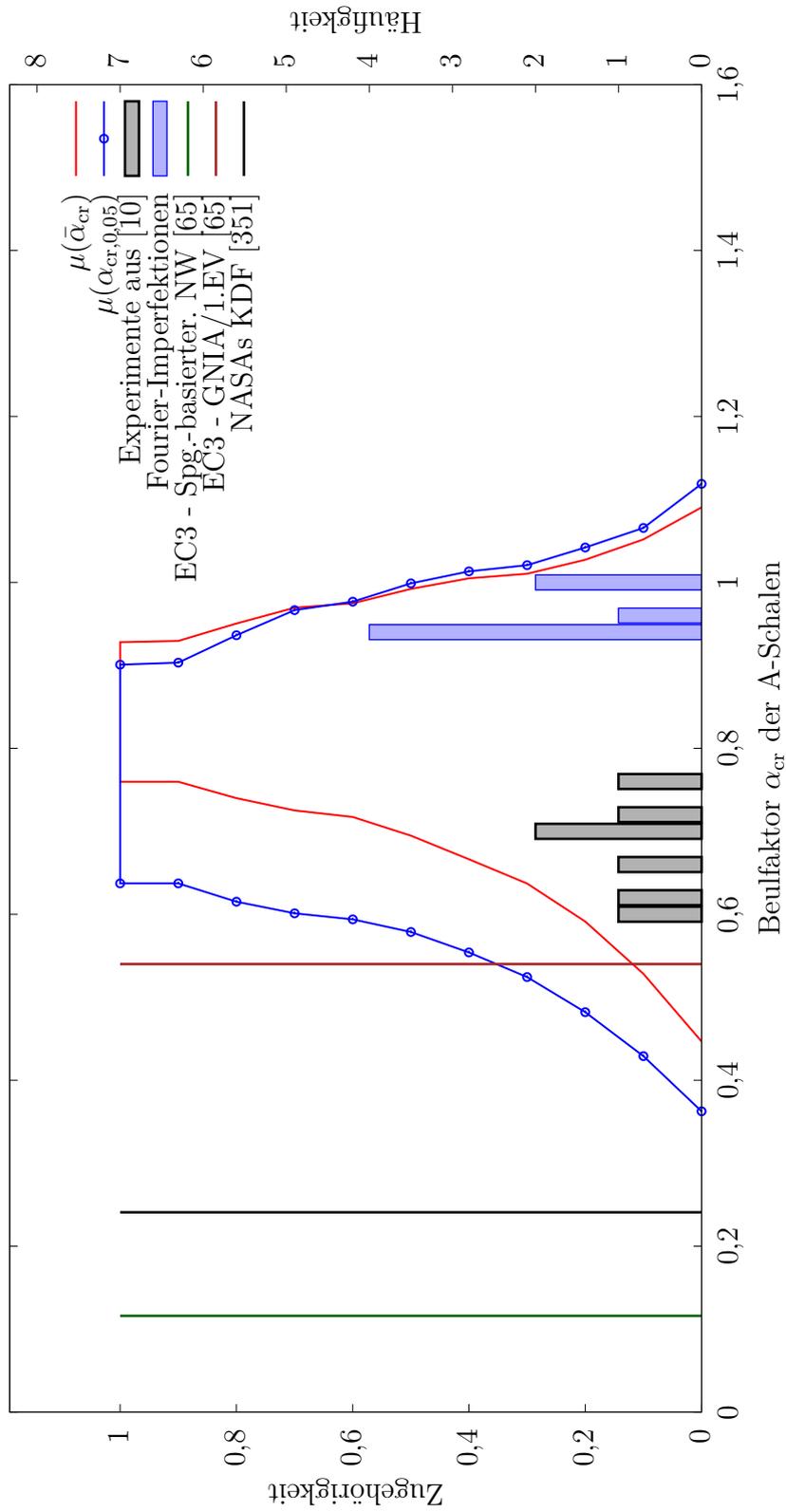


Abbildung 8.36: Fuzzy-Beulfaktor des Gesamtmodells der A-Schalen

keit beider Ergebnisgrößen abgedeckt. In Abbildung 8.36 ist ebenfalls das Ergebnis des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises für eine Herstelltoleranz-Qualitätsklasse C dargestellt. Aus diesem Nachweis folgt eine starke Abminderung der ideellen Beullast von $\alpha_{cr} = 0,12$. Zudem wird ein numerisch gestützter Beulsicherheitsnachweis durchgeführt. Bei der geometrisch nichtlinearen, elastischen Berechnung mit Imperfektionen (GNIA) wird der erste Eigenvektor φ_1 aus Abbildung 8.18 (rechts) aufgebracht. Die Skalierung der Imperfektionsamplitude erfolgt ebenfalls mit der Herstelltoleranz-Qualitätsklasse C. Hierfür ist die maximale Vorbeultiefe der Zylinderschale $\Delta w_{0,EQ} = 0,3433 \text{ mm}$. Damit kann der kritische Beulfaktor mit dem Wert $\alpha_{cr} = 0,54$ angegeben werden. Zusätzlich wird der *Knock-Down-Faktor* $\alpha_{cr} = 0,24$ aus der NASA-Richtlinie [351] angegeben. Die Bemessungsgröße des spannungsbasierten Beulsicherheitsnachweises und der *Knock-Down-Faktor* der NASA liegen außerhalb der berechneten Zugehörigkeitsfunktionen.

Beim numerisch gestützten Beulsicherheitsnachweis ist der erste Eigenvektor nicht zwangsläufig die kritischste Beulform. Nach Norm müssen weitere Beulformen untersucht werden. Bei einer großen Anzahl möglicher Beulformen gleicht das sprichwörtlich der „Suche einer Nadel im Heuhaufen“. Die Anwendung verschiedener Bemessungsvarianten führt zu unterschiedlichen Beulfaktoren. Hiermit soll deutlich gemacht werden, dass eine „sichere“ Bemessung sehr schwierig ist. Aufgrund der Normierung der Beullasten mit der ideellen Beullast aus Tabelle 8.8 sind in der Fuzzy-Ergebnisgröße auch Beulfaktoren größer Eins enthalten. Beispielsweise können in der Fuzzy-stochastischen Analyse größere Werte als die gemittelten Werte nach Tabelle 8.2 für die Schalendicke oder des E-Moduls auftreten.

Beim Ergebnis der Fuzzy-AusgangsvARIABLE des Quantilwerts ist ein starker Abfall der Zugehörigkeitsfunktion vom Plateau $\mu = 1$ zu beobachten. Das ist ein Hinweis darauf, dass die Unschärfen mit nur wenig Aufwand reduziert werden können. Um den größten Einfluss der sieben Eingangsparameter auf den kritischen Beulfaktor zu zeigen, wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Das *Random Sampling* für die *Monte-Carlo-Integration* umfasst $N_{mcs} = 15^7 = 170859375$ Auswertungsstellen auf dem Metamodell. Da als Datengrundlage der Sensitivitätsanalyse lediglich der *Support* des Fuzzy-Eingangsraums ($\alpha = 0$) verwendet wird, wird die Unschärfe in den Ergebnissen der *Sobol'-Indizes* nicht berücksichtigt. Die Fuzzy-Strukturanalyse muss daher getrennt von der Sensitivitätsanalyse betrachtet werden. Das Ergebnis der *Sobol'-Indizes* ist in Abbildung 8.37 dargestellt. Der Korrelationsparameter in Axialrichtung $\ell_{c,h}$, die Schalendicke t und die Periodenlänge T_{bd} der Aufstandsimperfektionen haben den größten Einfluss. Die Effekte 2. Ordnung können bis auf den gekoppelten Effekt $\sigma^2 - \ell_{c,h}$ vernachlässigt werden. Aus den Indizes der totalen Effekte kann der Gesamteinfluss einer Imperfektionsart abgelesen werden. Für die Summe der Parameter der Matelimperfektionen resul-

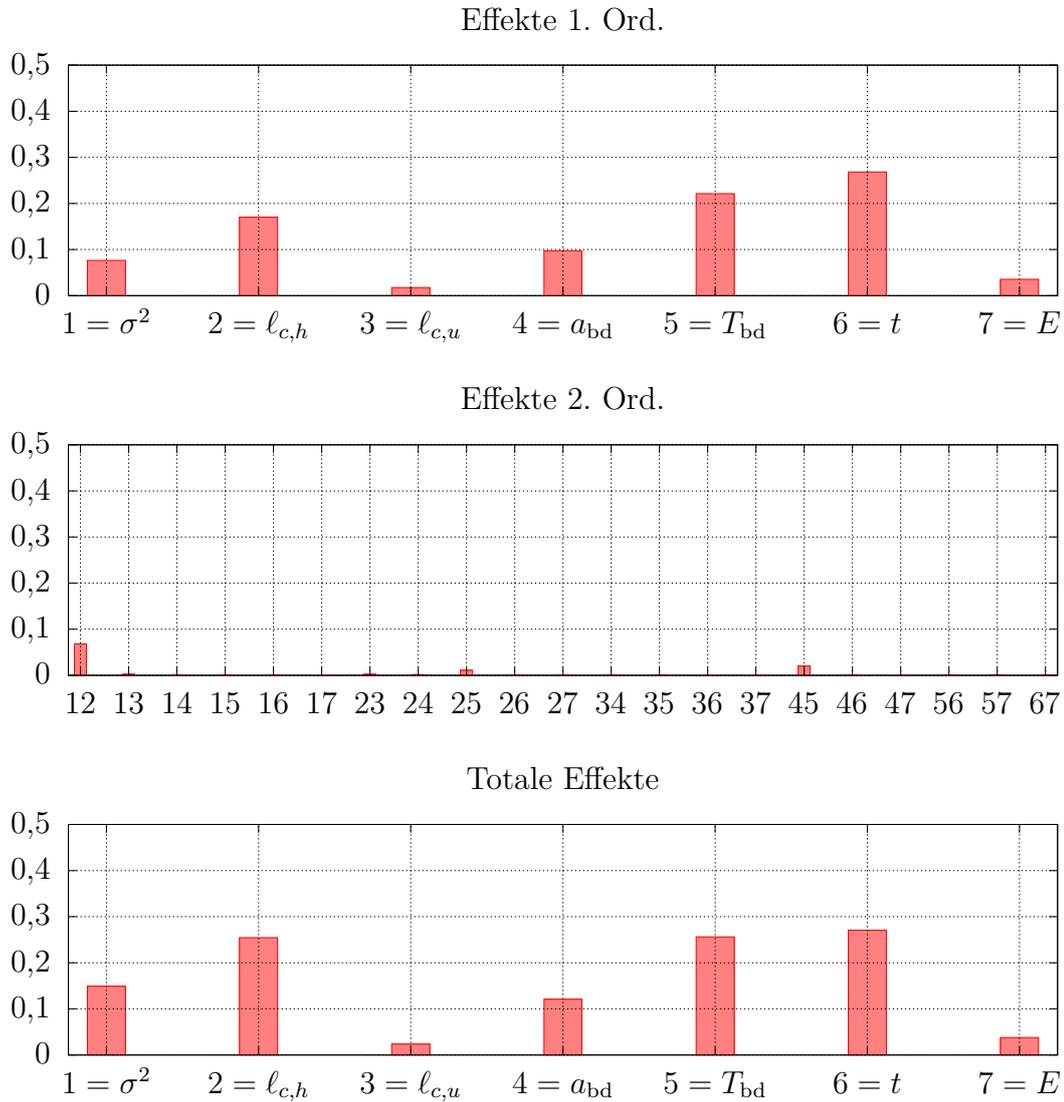


Abbildung 8.37: Sobol'-Indizes der Eingangsparameter des Gesamtmodells bezogen auf den Fuzzy-Quantilwert

tiert ein Einfluss dieser Imperfektionsart von 38,4%. Der prozentuale Anteil der Aufstandsimperfektionen ist 33,9%. Die Dicke hat einen Einfluss von 24,3%. Im Vergleich dazu ist der Einfluss des E-Moduls mit 3,4% eher gering.

Imperfektionsart	Unschärfenmodell	Charakteristik	Anmerkungen zur Wahl
Mantel-imperfektionen	Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld $\tilde{\sigma}^2 = \langle 0,002, 0,007, 0,012 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,h} = \langle 2000, 9000, 13000 \rangle$ $\tilde{\ell}_{c,w} = \langle 175, 225, 400 \rangle$	aleatorisch & epistemisch, zu wenig Daten, räumliche Variabilität durch ein <i>Gauß-Zufallsfeld</i> , Korrelationsmodell: $\tilde{C}(\tau) = \tilde{\sigma}^2 \tilde{\rho}(\Delta x) \tilde{\rho}(\Delta y)$	konservative Wahl der Parameter, nur wenig Expertenwissen zu den Korrelationseigenschaften vorhanden
Aufstands-imperfektionen	Intervall-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld $T_{bd} \in [100, 500]$ $a_{bd} \in [10, 20]$ $\ell_{c,bd} = 494$	aleatorisch & epistemisch, wenig unbewertete Daten, räumliche Variabilität durch ein <i>Gauß-Zufallsfeld</i> , Korrelationsmodell: $C(\Delta y) = \sigma^2 \rho(\Delta y, \ell_{c,bd}, T_{bd})$	nur eine Messung vorhanden, keine Wertung der Daten möglich, keine Informationen über die Amplitude der Imperfektion vorhanden
Materielle Imperfektionen	Fuzzy-Variablen $\tilde{E} = \langle 101350, 104406, 108940 \rangle$	epistemisch, zu wenig Daten, Bewertung der Daten möglich	Korrelationseigenschaften unbekannt und nur schwer messbar
Variationen der Schalendicke	Fuzzy-Variablen $\tilde{t} = \langle 0,111, 0,116, 0,1204 \rangle$	epistemisch, zu wenig Daten, Bewertung der Daten möglich	Korrelationseigenschaften unbekannt, aber messbar

Tabelle 8.14: Zusammenstellung der eingesetzten polymorphen Unschärfenmodelle und Diskussion zu deren Wahl für das Gesamtmodell verschiedener Imperfektionsarten

8.3.5 Diskussion zur Entscheidungsfindung

Nach der Berechnung der unscharfen Ergebnisgröße muss der Ingenieur nun eine Aussage treffen, ob die Struktur beulgefährdet ist oder nicht. Oder anders ausgedrückt, ob das Tragwerk (die Zylinderschale) „sicher“ oder „unsicher“ ist. Beim semiprobabilistischen Sicherheitskonzept wird eine Sicherheitszone zwischen der Dichtefunktion der Einwirkungen und des Tragwiderstands definiert, siehe Abbildung 8.38. Die Größe der Sicherheitszone wird durch Teilsicherheitsbeiwerte

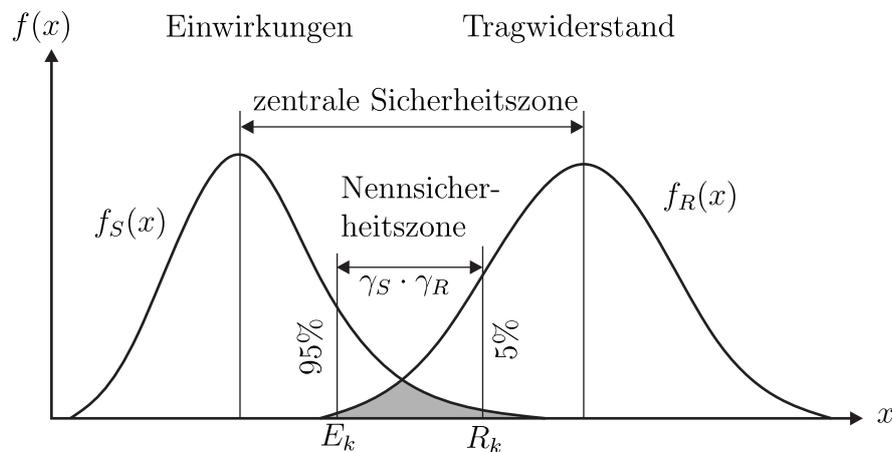


Abbildung 8.38: Semiprobabilistisches Sicherheitskonzept [158]

te beeinflusst. Die Überschneidungsfläche beider Dichtefunktionen entspricht der Versagenswahrscheinlichkeit der Konstruktion. Wie bereits in der Einleitung in diese Arbeit erläutert, sollte bei diesem Sicherheitskonzept vor allem bei der Beulsicherheit von Zylinderschalen die wahre Sicherheit stets hinterfragt werden. Bei der durchgeführten Unschärfemodellierung wird die quantifizierte Unschärfe der Eingangsparameter vollständig auf das Ergebnis des kritischen Beulfaktors in Abbildung 8.36 übertragen. Das Ergebnis kann mit einem festgelegten Beulsicherheitsniveau überlagert werden, siehe Abbildung 8.39. Dabei wird eine Zugehörigkeitsfunktion mit nicht akzeptierten Beulfaktoren (5%-Quantilwerte) exemplarisch festgelegt. Der 5%-Quantilwert ist ein mögliches Fuzzy-Beulsicherheitsniveau. Hier erweist sich nun das Ergebnis der Beulfaktoren in Form einer Fuzzy-Menge als besonders vorteilhaft. Damit können z.B. verbale Aussagen zur Imperfektionsempfindlichkeit, wie „hoch“, „mittel“ oder „gering“, numerisch erfasst werden. Der Überschneidungsbereich mit der Ergebnisgröße des 5%-Quantilwerts kennzeichnet ein mögliches „Beulrisiko“. Weitere verbale Aussagen zum finanziellen, gesellschaftlichen sowie Leib und Leben betreffenden Gefahrenpotentials können zusätzlich mit dem Modell der Fuzzy-Mengen beschrieben werden [108]. Abschließend seien noch die verschiedenen Methoden der *Defuzzifizierung* für die

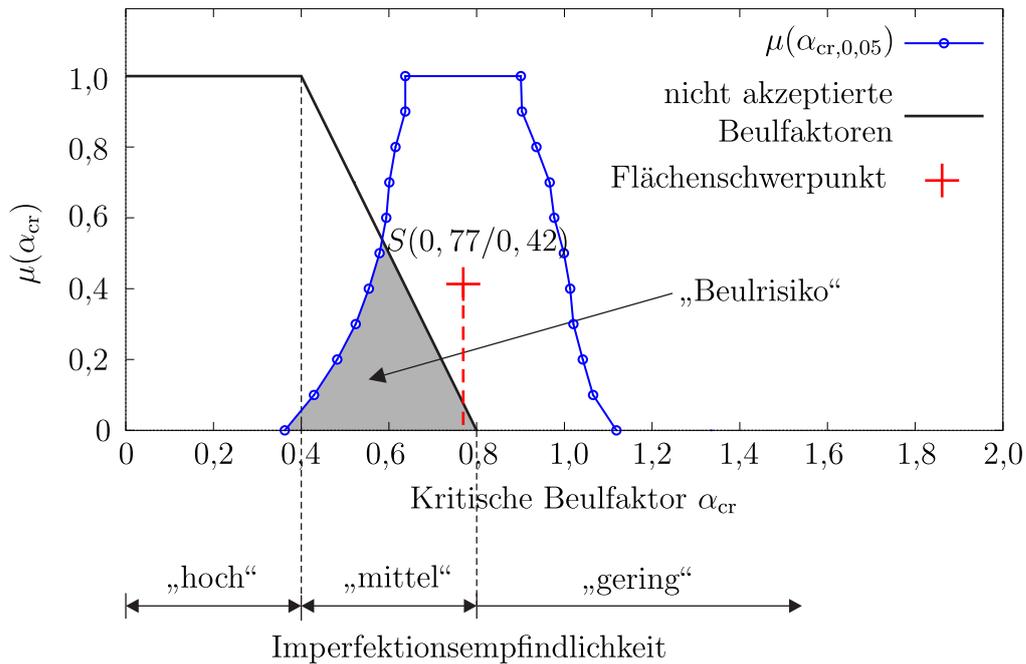


Abbildung 8.39: „Beulrisiko“ als Überschneidungsflächen zwischen berechneter Fuzzy-Beulsicherheit (5%-Quantilwert) und festgelegte Zugehörigkeitsfunktion nicht akzeptierter kritischer Beulfaktoren

Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) genannt, siehe z.B. in [181, 260]. Ein Kriterium ist der Flächenschwerpunkt der Zugehörigkeitsfunktion. Der Abszissenwert des Flächenschwerpunkts des Fuzzy-5%-Quantilwerts ist

$$\alpha_{cr,S} = \frac{\int \alpha_{cr} \cdot \mu(\alpha_{cr}) d\alpha_{cr}}{\int \mu(\alpha_{cr}) d\alpha_{cr}} = 0,77 \quad . \quad (8.42)$$

Dieser „scharfe“ Ergebniswert kann mit einem festgelegten Grenzwert als „Sicherheitsniveau“ verglichen werden.

8.3.6 Zusammenfassung

Durch die Einführung der polymorphen Unschärfemodelle im Schalenbeulen wird gezeigt wie zukünftig aleatorische und epistemische Unschärfen bei der Modellierung von Imperfektionen berücksichtigt werden können. Die Wahl der Unschärfemodelle für verschiedene Imperfektionsarten wie Mantelimperfektionen, Aufstandsimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variation der Schalendicke, wurde diskutiert. Das Vorgehen ist in Abbildung 8.40 dargestellt. Der erste Schritt ist die Unschärfequantifizierung. Die Informationen zur Korrelation für eine Modellierung der räumlichen Variabilität können aus der Darstellung der Imperfektionen als *Fourier-Reihen* gewonnen werden. Die Anwendung effizienter

Metamodelle, wie das HDMR-Metamodell, ermöglicht die Lösung der α -Level-Optimierung für eine größere Anzahl von Eingangsparametern. Ist das Metamodell aufgestellt, kann dieses für die Sensitivitätsanalyse verwendet werden. Das vorgestellte Gesamtmodell ermöglicht mithilfe verschiedener Unschärfemodelle eine bessere Abbildung der experimentellen Beuluntersuchungen. Um diese Aussage zu bestätigen, müssen allerdings noch zahlreiche Untersuchungen gemacht werden. Das Modell basiert auf einer Versuchsreihe mit nur sieben Schalen. Zudem ist vor allem das entwickelte Unschärfemodell für die Randimperfektionen noch sehr vage. Außerdem werden auch nur die Unvollständigkeit und noch nicht die Ungenauigkeit der Daten abgebildet. Dazu kann der Einsatz weiterer Unschärfemodelle untersucht werden. Abschließend wird eine Diskussion zur Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) geführt. Die Darstellung der kritischen Beulfaktoren als Fuzzy-Mengen ermöglicht die numerische Beschreibung von verbalen Aussagen zur Beulsicherheit. Allerdings sind weitere Untersuchungen erforderlich, um eine sichere Bemessung unter Berücksichtigung der Unschärfe im Schalenbeulen durchführen zu können.

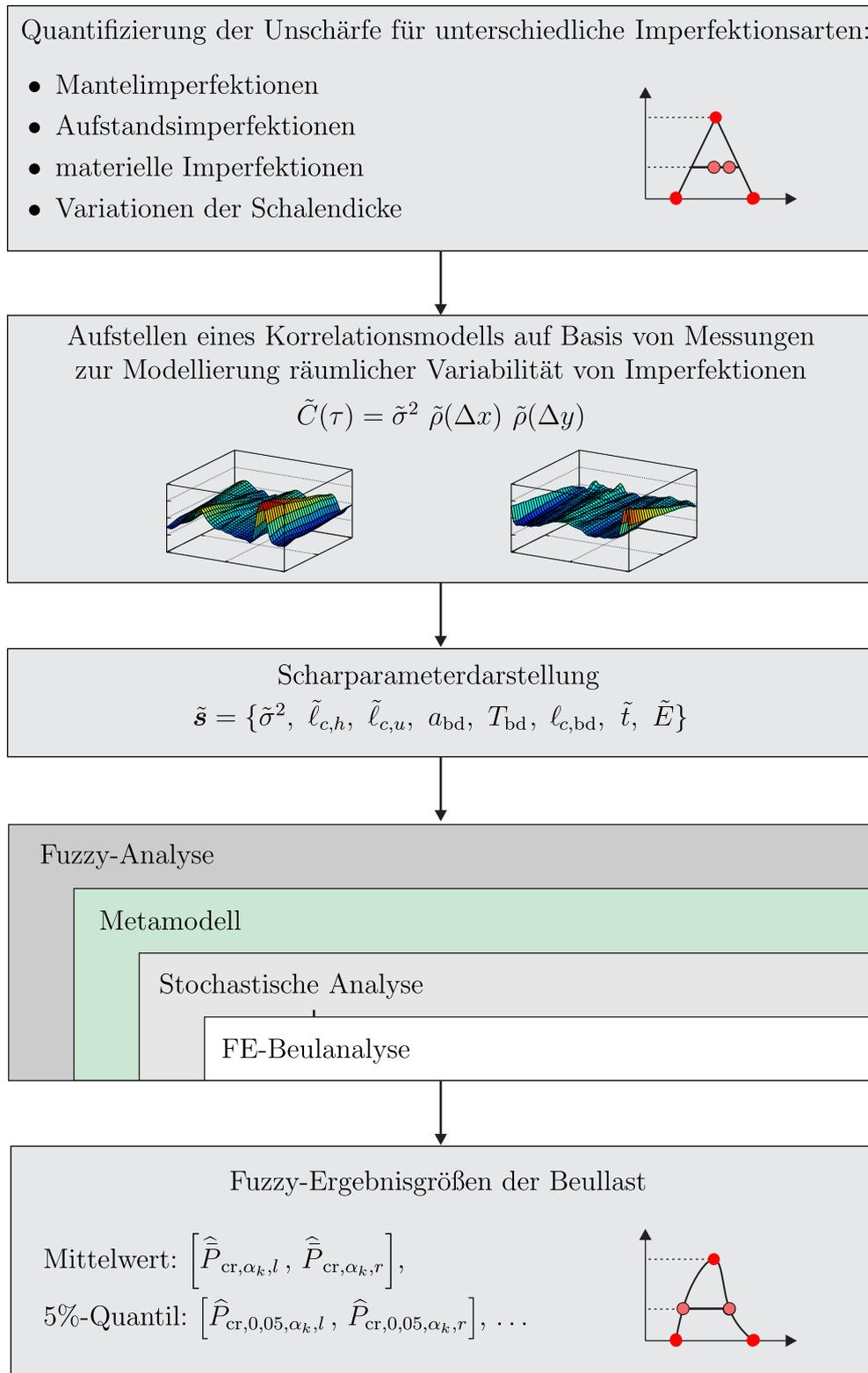


Abbildung 8.40: Ein mögliches Vorgehen zur Berücksichtigung der Unschärfe im Schalenbeulen

9 Weitere Beispiele aus dem Ingenieurwesen

Nachdem im vorherigen Kapitel 8 die Unschärfemodellierung an einer Zylinderschale vorgestellt wurde, wird hier das Vorgehen an weiteren praxisrelevanten Beispielen diskutiert. Das erste Beispiel ist eine Kegelschale der Zwischenstufe der Ariane-Rakete. Auf Basis einer weiteren Imperfektionsdatenbank der TU Delft [160] wird die Unschärfe in den Korrelationsparametern zur Modellierung der Mantelimperfectionen als fp-r-Zufallsfelder quantifiziert. Das zweite Beispiel kann ebenfalls der Luft- und Raumfahrtbranche zugeordnet werden und umfasst eine dynamische Analyse eines Propfans für ein Transportflugzeug. Mit diesem Beispiel soll die Funktionsweise der vorgestellten Methoden auch für zeitlich abhängige Problemstellungen demonstriert werden. Zudem soll gezeigt werden, wie stochastische Imperfektionen auf beliebig gekrümmten Oberflächen erzeugt werden können.

9.1 Zwischenstufe der Ariane-Rakete

Das Beispiel ist motiviert durch die frei zugänglichen Messergebnisse in [160] zu den Mantelimperfectionen einer Zwischenstufe der Ariane-3-Rakete. Nach Erläuterungen zum FE-Modell werden Korrelationseigenschaften für die Quantifizierung der Unschärfe aus den vorliegenden Messungen gewonnen.

9.1.1 FE-Modell der Kegelschale

Die Zwischenstufe kann als Kegelschale modelliert werden und wird für den Lastfall Axialdruck bezüglich der Stabilität untersucht. In der Kegelschale sind drei Aussparungen für den Einbau von Luken enthalten. Das Modell mit den Abmessungen und der Belastung ist in Abbildung 9.1 dargestellt. Die Lage der Luken kann aus der Datenbank [160] entnommen werden. Die Schale ist *Navier-gelagert* mit folgenden Randbedingungen für die Unterseite: $u = v = w = 0$, $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$ und für den oberen Rand gilt: $u = \Delta u$, $v = w = 0$, $\varphi_x \neq 0$, $\varphi_y \neq 0$. Dabei erfolgt die axiale Belastung durch eine Verschiebungssteuerung mit Δu an der Oberseite. Die isotrope Kegelschale ist aus zehn gekrümmten Aluminium-Segmenten zusammengesetzt. Die Verbindungen der Segmente sind mit sogenannten „Hut“-Steifen in Längsrichtung genietet. Der E-Modul ist $E = 60000 \text{ N/mm}^2$ und für die Querdehnzahl wird $\nu = 0,34$ angegeben. Auch in diesem Beispiel wird aufgrund der geringen Schalendicke von $t = 1,8 \text{ mm}$ ein plastisches Beulen ausgeschlossen. Für die numerische Stabilitätsuntersuchung wird ebenfalls das Schalenelement nach WAGNER & GRUTTMANN [340, 341] und GRUTTMANN & WAGNER [115] angewendet. Ein FE-Netz mit verzerrten Elementen wird mit dem

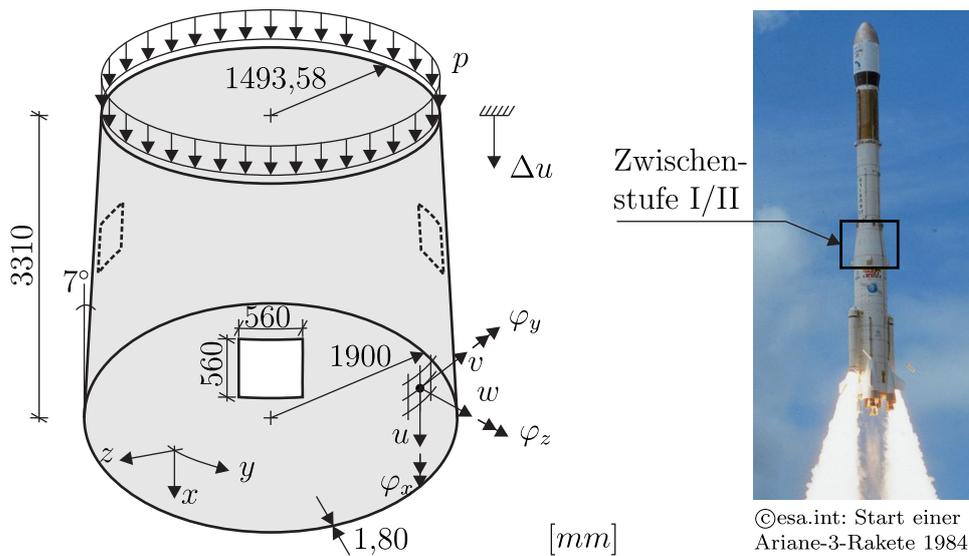


Abbildung 9.1: Zwischenstufe einer Ariane-3-Rakete aus [160]: Geometrie und Belastung

Netzgenerator NEGE [291] erstellt. Mit einem Konvergenztest kann gezeigt werden, dass 22546 Knoten und 22032 Schalenelemente zur Berechnung der kritischen Last ausreichend sind. Die stochastischen Imperfektionen werden mit der EOLE-Methode erzeugt. Im Gegensatz zum unregelmäßigem FE-Netz wird ein gleichmäßiges Netz mit 81×21 Knoten für die stochastische Diskretisierung gewählt. Die beiden Netze sind in Abbildung 9.2 dargestellt. Unter der Annahme, dass bei den

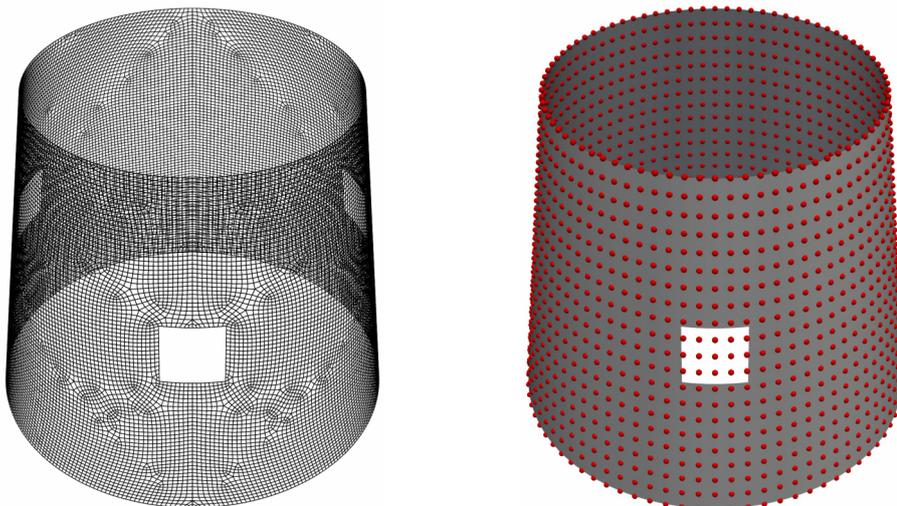


Abbildung 9.2: FE-Modell der Kegelschale: FE-Netz mit 22546 Knoten und 22032 Elementen (links) und Netz der stochastischen Diskretisierung mit 81×21 Knoten (rechts)

Messungen der Imperfektionen noch keine Aussparungen vorhanden waren, werden stochastische Knoten auch im Bereich der Aussparungen (Luken) gesetzt. Die Wahl des stochastischen Netzes kann hierbei durch den Herstellprozess begründet werden. Außerdem wird eine geringere Anzahl an stochastischen Knoten gewählt als Messstellen für die Imperfektionsmessungen. Damit werden Rechenaufwand und Speicherbedarf des Eigenwertproblems der Kovarianzmatrix reduziert. Zur Darstellung der Imperfektionsmuster ist aber die gewählte Anzahl der stochastischen Knoten ausreichend. Eine nichtlineare Stabilitätsanalyse liefert die ideelle Beullast $P_{\text{cr,perf}} = 248,92 \text{ kN}$ bei einer kritischen Verschiebung $u_{\text{cr,perf}} = 0,92 \text{ mm}$. Der Stabilitätspunkt ist erreicht, wenn ein erster Vorzeichenwechsel der Diagonalelemente der Steifigkeitsmatrix identifiziert wird. Eine analytische Lösung für die ideelle Beullast einer geschlossenen Kegelschale unter Axialdruck mit einem Neigungswinkel $\alpha = 7^\circ$ kann wie folgt berechnet werden [350]:

$$P_{\text{cr,perf}} = \frac{2 \pi E t^2 \cos^2(\alpha)}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} = 738,74 \text{ kN} \quad . \quad (9.1)$$

Zum Vergleich führen die drei Aussparungen zur einer großen Reduktionen der Stabilitätslast: $248,92/738,74 = 0,34$. Der kleine Neigungswinkel $\alpha = 7^\circ$ hat dabei keinen großen Einfluss. In der Bemessungsrichtlinie der NASA [350] kann beispielsweise bei einem Neigungswinkel $\alpha < 10^\circ$ die Bemessungslast auch an einer äquivalenten Zylinderschale berechnet werden. Ein ähnliches Vorgehen für Kegelschalen ist auch im EC3 [65] beschrieben.

9.1.2 Unschärfemodell für Mantelimperfektionen

In der Datenbank [160] sind die Messergebnisse von insgesamt acht originalen Kegelschalen der Ariane-Zwischenstufe dokumentiert. Mit den gegebenen *Fourier-Koeffizienten* können die Imperfektionen als *Fourier-Reihen* dargestellt werden. In Abbildung 9.3 sind zwei Imperfektionen der acht Schalen dargestellt. Dafür werden 121×31 Auswertungsstellen für die *Fourier-Reihen* verwendet. Die Nahtstellen in Axialrichtung zwischen den einzelnen Segmenten sind auch im Imperfektionsmuster zu erkennen. Alle Imperfektionsbilder der acht Schalen sind geprägt durch eine große Welligkeit in Umfangsrichtung. Die Form der Imperfektion wird durch den Herstellungsprozess definiert. Die *Fourier-Reihen* basieren auf der Halbwellen-Cosinus-Darstellung nach Gleichung (8.3) aus dem vorherigen Kapitel. Für die Kegelschale kann in dieser Gleichung die Umfangskoordinate y durch $\theta = y/R_i$ ersetzt werden. R_i entspricht dem Radius der Kegelschale an einer beliebigen Koordinate in Axialrichtung. Die Gleichung der *Fourier-Reihen* ist auch in der Datenbank [160] angegeben. Die Abstandsberechnung zum Aufstellen der Korrelationsfunktionen kann vereinfacht auf der projizierten Fläche

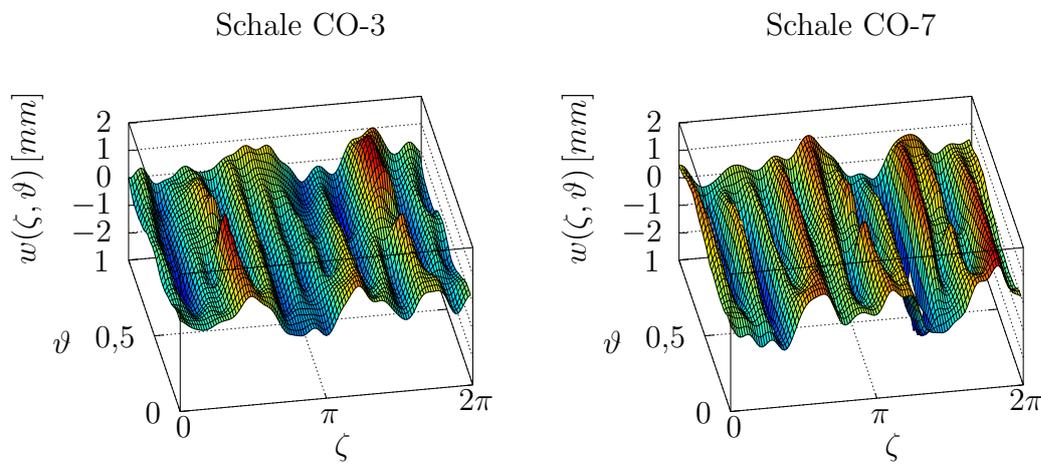


Abbildung 9.3: Zwei Mantelimperfectionen der Ariane-Zwischenstufe aus [160]

der Kegelschale durchgeführt werden. Die projizierte Fläche ist ein Trapez. Die Koordinaten werden zusätzlich in einen Parameterraum $\vartheta \in [0, 1]$ und $\zeta \in [0, 2\pi]$ transformiert, siehe Abbildung 9.4. Alternativ kann das Abtasten der Abstände

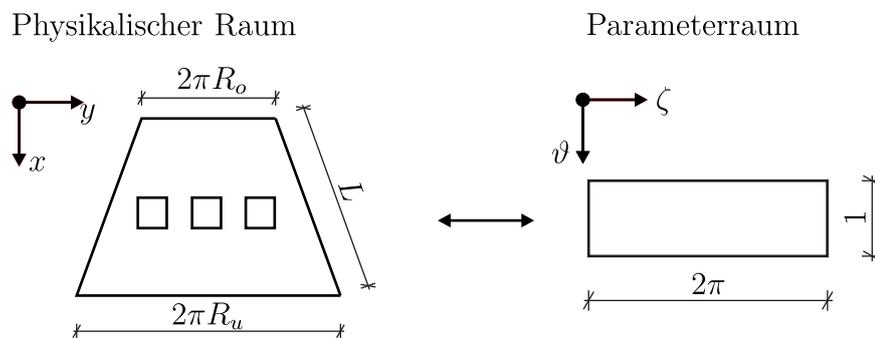


Abbildung 9.4: Transformation der Koordinaten der Kegelschale in einen Parameterraum: Projizierte Fläche der Kegelschale im physikalischen Raum (links) und Parameterraum (rechts)

für die Korrelationsfunktionen auch auf der abgewickelten Mantelfläche des Kegelstumpfs erfolgen. Zur Simulation der Mantelimperfectionen mittels Zufallsfelder wird auch hier, wie für die Zylinderschale, die vollständig getrennte Korrelationsstruktur nach Gleichung (8.7) angewendet. Die Näherung der Autokorrelationsfunktionen wird mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate durchgeführt. Die quadratische Exponentialfunktion nach Gleichung (8.14) wird für die Funktion in Axialrichtung eingesetzt. Für die Umfangsrichtung wird die lineare Kosinusfunktion nach Gleichung (8.15) gewählt. Die Periodenlänge wird für alle acht

Funktionen definiert zu $T = 2/3\pi$. Die Ergebnisse der Korrelationsfunktionen bezüglich des Parameterraums sind in Abbildung 9.5 dargestellt. In den Funktionen

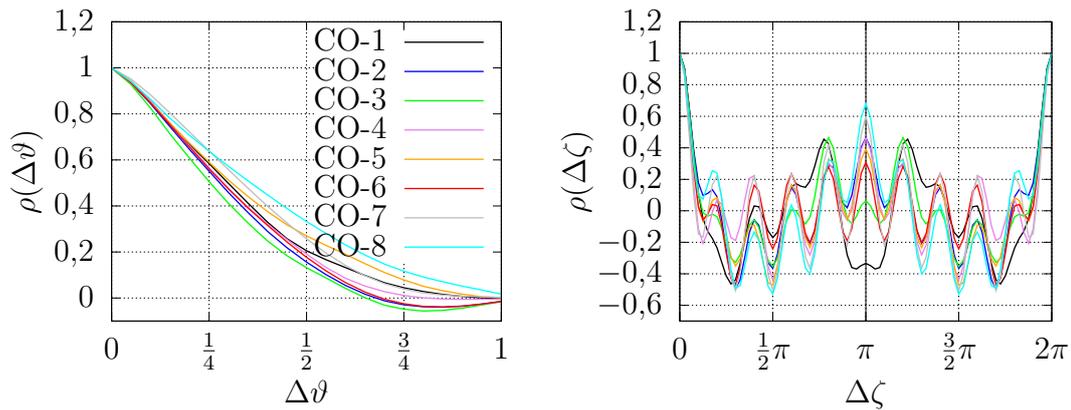


Abbildung 9.5: Autokorrelationsfunktionen in Axialrichtung $\rho(\Delta\vartheta)$ (links) und in Umfangsrichtung $\rho(\Delta\zeta)$ (rechts) der Ariane-Zwischenstufe

der Umfangsrichtung wird eine große Welligkeit festgestellt. Die dazugehörigen Korrelationsparameter als Fitting-Ergebnisse und die Stichprobenvarianz sind in Tabelle 9.1 aufgelistet. Zur Ermittlung der Zugehörigkeitsfunktionen der drei Pa-

Schale	C0-1	C0-2	C0-3	C0-4	C0-5	C0-6	C0-7	C0-8
$\bar{\sigma}^2 [mm^2]$	0,263	0,314	0,256	0,344	0,401	0,426	0,503	0,358
$\ell_{c,h} [mm^2]$	0,139	0,116	0,101	0,129	0,164	0,124	0,167	0,208
$\ell_{c,u} [mm]$	3,146	2,090	2,370	1,955	2,124	0,225	2,018	1,876

Tabelle 9.1: Korrelationsparameter und Stichprobenvarianz der Ariane-Zwischenstufe

rameter $\ell_{c,h}$, $\ell_{c,u}$ und $\bar{\sigma}^2$ des Korrelationsmodells werden die Fitting-Ergebnisse in einem Histogramm dargestellt, siehe Abbildung 9.6.

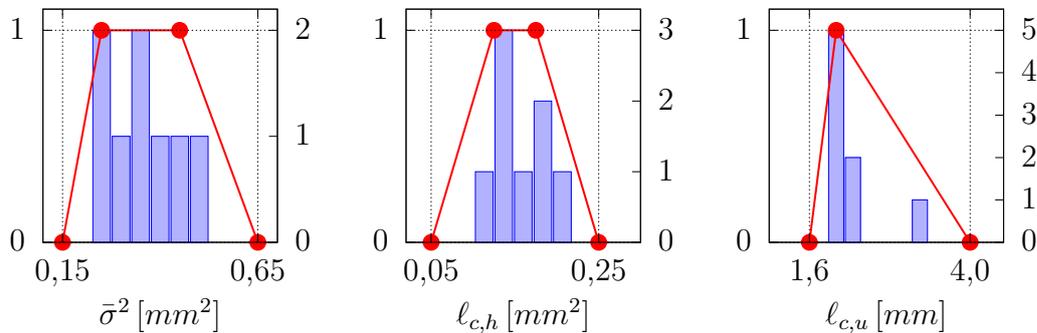


Abbildung 9.6: Zugehörigkeitsfunktionen und Histogramme der Stichprobenvarianz (links) und der Korrelationsparameter in Axialrichtung (Mitte) und in Umfangsrichtung (rechts)

Die Zugehörigkeitsfunktionen orientieren sich am jeweiligen Histogramm und werden wie folgt durch Fuzzy-Trapezintervalle und einer Fuzzy-Dreieckszahl beschrieben:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}^2 &= \langle 0,15, 0,25, 0,45, 0,65 \rangle \\
 \tilde{\ell}_{c,h} &= \langle 0,05, 0,125, 0,175, 0,250 \rangle \\
 \tilde{\ell}_{c,u} &= \langle 1,6, 2,0, 4,0 \rangle \quad .
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Die linke und rechte Grenze der Fuzzy-Größen werden aufgrund mangelndem Expertenwissen über die Korrelationsstruktur einer Kegelschale konservativ gewählt. Die zugehörigen Fuzzy-Autokorrelationsfunktionen in Abbildung 9.7 resultieren durch Einsetzen der Fuzzy-Korrelationsparameter in die gewählten Funktionen für das Fitting. Die Funktionen in Axialrichtung sind eine gute Näherung. Hingegen ist die gewählte Fitting-Funktion für die Umfangsrichtung nicht geeignet, die Welligkeit der aus den Messungen evaluierten AKFs abzubilden. Auch eine Verringerung der Periodenlänge führt mit der gewählten Funktion zu keiner Verbesserung der Näherung. Wenn die Welligkeit gut dargestellt wird, wird hingegen die Näherung der Amplitude schlechter. Zur Verbesserung des Fittings müssen daher alternative Funktionen getestet werden, die bei Bedarf auch mehr Parameter erfordern. In diesem Beispiel wird davon ausgegangen, dass die Welligkeit der Korrelationsfunktion für den Lastfall Axialdruck eher einen geringen Einfluss auf die Beullast hat. Abschließend sind in Abbildung 9.8 zwei Realisationen der Kegelschale für die linke und rechte Grenze der festgelegten Fuzzy-Eingangsgrößen dargestellt.

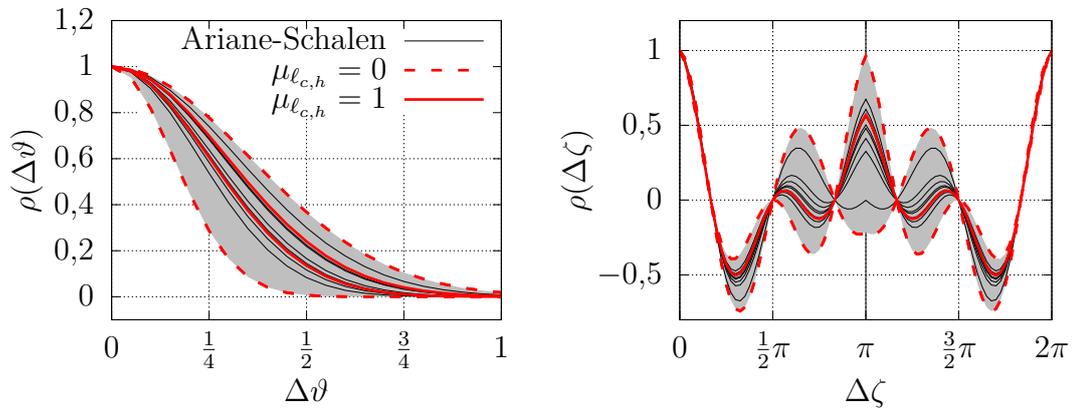


Abbildung 9.7: Fuzzy-Autokorrelationsfunktionen (Fuzzy-AKFs) in Axialrichtung (links) und in Umfangsrichtung (rechts)

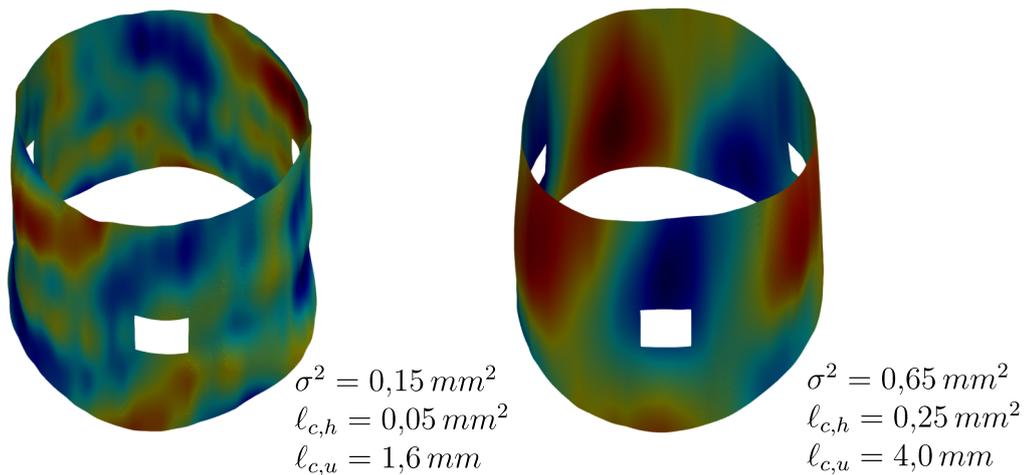


Abbildung 9.8: Realisationen der Kegelschale (100-fach überhöht dargestellt) für die linke und rechte Grenze der Fuzzy-Eingangsgrößen

9.1.3 Ergebnisse und Diskussion

Die α -Level-Optimierung der Fuzzy-stochastischen Analyse wird auf Basis eines HDMR-Metamodells 2. Ordnung gelöst. Zur Approximation der Schnittfunktionen wird die LSQ-Methode mit kubischen Polynomen und einer Anzahl von $n_{\text{sim}} = 5$ Stützstellen pro Variable angewendet. Der numerische Aufwand mit drei Fuzzy-Eingangsparameter wird mit 61 *Monte-Carlo-Simulationen* definiert. Dazu werden 500 Realisationen pro MCS durchgeführt. In Abbildung 9.9 sind die Ergebnisse des Fuzzy-Mittelwerts und des Fuzzy-5%-Quantilwerts des kritischen Beulfaktors dargestellt.

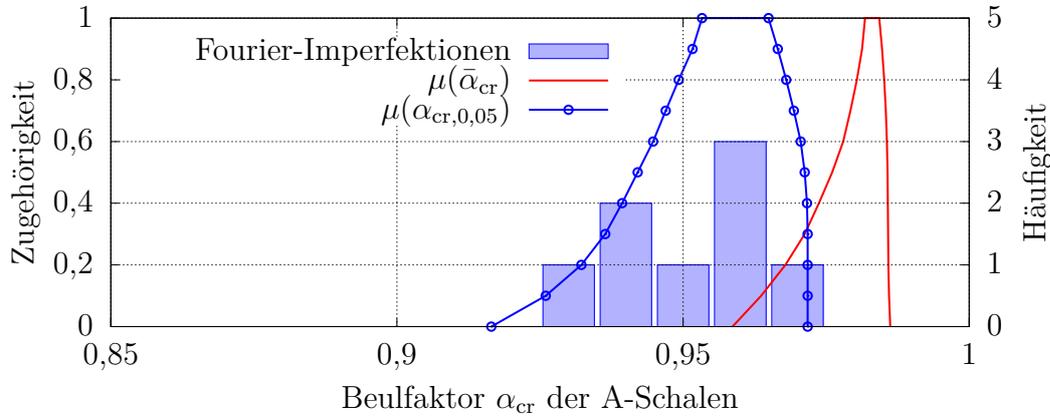


Abbildung 9.9: Fuzzy-Beulfaktor der Ariane-Zwischenstufe

Zusätzlich werden die real gemessenen Imperfektionen als *Fourier-Reihen* auf das FE-Modell aufgebracht. Diese Ergebnisse des kritischen Beulfaktors werden im Histogramm gezeigt. Eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit dem Fuzzy-5%-Quantilwert wird gezeigt. Der Fuzzy-Mittelwert korreliert hingegen weniger mit den *Fourier-Imperfektionen*. An dieser Stelle muss vor allem das mangelhafte Fitting der AKFs in Umfangsrichtung hinterfragt werden. Die Wahl einer alternativen Fitting-Funktion kann hier zu einer Verbesserung der Ergebnisse führen. Die Annahme, dass die Welligkeit der AKF in Umfangsrichtung einen geringeren Einfluss auf die Beullast hat, muss an dieser Stelle überprüft werden. Die linke Grenze des Fuzzy-5%-Quantilwerts liegt bei $\alpha_{cr} \approx 0,92$.

Das Stabilitätsverhalten dieser Kegelschale ist weniger sensitiv bezüglich den vorhandenen Mantelimperfektionen aus dem Herstellungsprozess. Dennoch sollten weitere Imperfektionsformen und deren Unschärfe modelliert werden. Allerdings sind für dieses Beispiel zur Modellierung der Aufstandsimperfektionen, Variationen der Schalendicke und den materiellen Imperfektionen keine Messungen vorhanden.

9.2 Dynamische Untersuchung eines Propfans

Probabilistische Methoden für die strukturmechanische Auslegung sind bei der Entwicklung robuster Turbinenschaufeln und Rotorblättern schon weit verbreitet, siehe z.B. [196, 245, 328]. Einsatzgebiete sind große Gasturbinen im Kraftwerksbau, Turbinen oder Propeller im Flugzeugbau, Rotorblätter von Windrädern oder auch Ventilatoren in der Klimatechnik. Dabei haben materielle und geometrische Imperfektionen einen großen Einfluss auf die Laufzeit. In aufwendigen dynamischen Untersuchungen können Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet werden. Aber auch hier sind die Eingangsgrößen mit Unschärfen behaftet, die unbedingt berücksichtigt werden müssen.

Ein mögliches Vorgehen wird beispielhaft am Modell eines Propfans diskutiert. Ein Propfan zeichnet sich durch die große Anzahl (8–10) stark verwundener und teils überlappender Schaufelblätter aus. Ein Propfan-Triebwerk wird bei Flugzeugen mit Antriebsgeschwindigkeiten weit unter der Schallgeschwindigkeit eingesetzt. Diese Art von Triebwerk ermöglicht im Vergleich zu einem herkömmlichen Propeller eine verbesserte Antriebsleistung bei geringerer Drehzahl. Dadurch wird der Strömungswiderstand an den Blattspitzen verringert. Bei modernen Transport- oder Kurzstreckenflugzeugen kann damit der Treibstoffverbrauch um bis zu 25% sowie der Lärmpegel reduziert werden.

Der simulierte Propfan ist aus LAMMERING [174] und WAGNER & GRUTTMANN [340] entnommen. Dieser ist eine Entwurfsversion des SR3-Propfans der Firma Hamilton Standard mit einem Durchmesser von ca. 2,70 m. In einer neueren Ausführung wird der Propfan auch beim Airbus A400M eingesetzt, siehe Abbildung 9.10. Folgend wird die Rotation eines einzelnen Schaufelblatts als Fuzzy-



©bnn.de/Holger Hollemann/dpa



©julianherzog.com

Abbildung 9.10: Transportflugzeug A400M mit Propfan-Triebwerk

stochastischer Prozess simuliert. Die Abweichung von der Geometrie des Schaufelblatts wird mit einem Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsfeld modelliert.

Dabei wird diskutiert, wie Korrelationseigenschaften von Imperfektionen auch bei beliebig gekrümmten Oberflächen gewonnen werden können. Weitere Fuzzy-Eingangsgrößen sind das Antriebsmoment und die Dichte des Rotorblatts. Das Rotorblatt ist an der Antriebsnabe eingespannt. An dieser Stelle wird die zeitlich veränderliche Auflagergröße als unscharfe Variable untersucht.

9.2.1 FE-Modell des Propfans

Der untersuchte Propfan besteht aus einem Faserverbundmaterial (CFK). Durch die Leichtbauweise wird eine Reduzierung der auftretenden Zentrifugalkräfte während der Rotation ermöglicht. LAMMERING [174] untersucht hierzu z.B. den Einfluss des Materials auf das Verhalten eines Rotorblatts bei konstanter Drehzahl. Aufgrund der vorhandenen Symmetrie des Gesamtmodells kann eine dynamische Untersuchung an einem einzelnen Rotorblatt durchgeführt werden. Das Rotorblatt wird mit $\text{numnp} = 802$ Knoten und $\text{numel} = 740$ Schalenelementen diskretisiert. Durch die geometrisch nichtlineare Formulierung des Elements nach WAGNER & GRUTTMANN [340] werden die finiten Rotationen berücksichtigt. Das FE-Modell des räumlich gekrümmten Rotorblatts und der Schichtaufbau des Laminats werden in Abbildung 9.11 dargestellt. Die steife Verbindung bis zur

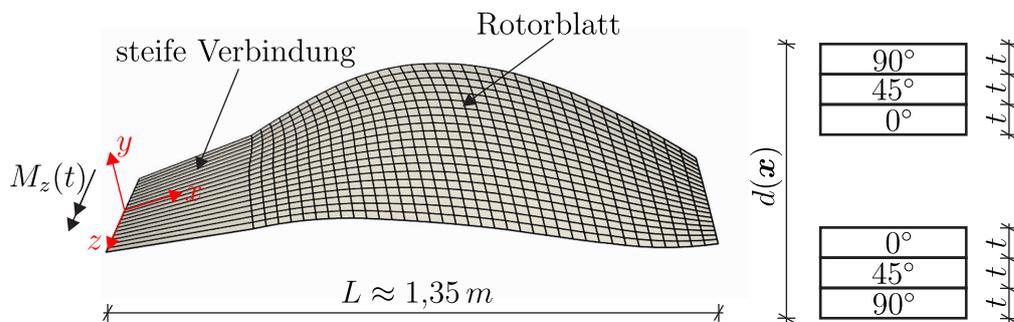


Abbildung 9.11: FE-Modell des räumlich gekrümmten Rotorblatts mit 802 Knoten und 740 Schalenelementen (links) und der Schichtaufbau des Laminats (rechts)

Rotationsachse im Schwerpunkt der Nabe des Propellers wird mit starren Elementen modelliert. Der Querschnitt des Propfans ist ein Hohlprofil mit räumlich variabler Gesamtdicke $d(\mathbf{x})$ mit dem Vektor der Knotenkoordinaten $\mathbf{x} = [x, y, z]$. Das Laminat besteht in Dickenrichtung aus sechs Einzelschichten mit einem Schichtaufbau von $[90^\circ, 45^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ]$. Die Schichtdicke einer Einzelschicht ist $t = 0,8 \text{ mm}$. Die dazugehörigen Materialparameter des transversal isotropen Faserverbundmaterials sind in Tabelle 9.2 dargestellt.

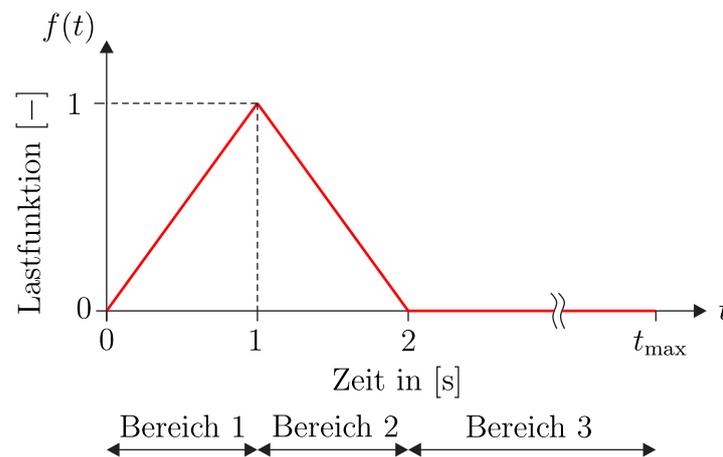
E_1 [kN/cm ²]	E_2 [kN/cm ²]	$G_{12} = G_{23}$ [kN/cm ²]	ν_{12} [-]	ρ [kg/m ³]
13 500	1 000	540	0,3	1 600

Tabelle 9.2: Propfan: Materialparameter

Die Rotation des Propfans wird mit einem Antriebsmoment an der Rotationsachse um die z -Achse initialisiert.

$$M_z(t) = M_0 f(t) \quad \text{mit} \quad M_0 = 10 \text{ Nm} \quad (9.3)$$

Die Lastfunktion $f(t)$ wird in Abbildung 9.12 dargestellt.

**Abbildung 9.12:** Lastfunktion $f(t)$ zur Initialisierung der Bewegung des Rotorblatts

Das Rotorblatt des Propfans ist durch eine hohe Steifigkeit charakterisiert. Deshalb kann ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit einer analytischen Lösung einer Starrkörperbewegung durchgeführt werden. Zusätzlich wird mithilfe des Faserverbundwerkstoffs eine Konstruktion mit geringer Massendichte ermöglicht. Das Rotorblatt wird unter der Annahme einer unendlich großen Biegesteifigkeit $EI \rightarrow \infty$ vereinfacht und durch ein starres Modell ersetzt, siehe Abbildung 9.13. Die Gesamtmasse des Rotorblatts $m = 3,77 \text{ kg}$ wird als Punktmasse im Massenschwerpunkt S modelliert. Das starre Vergleichsmodell ist ein Pendel. Die Pendellänge ℓ_S wird mit den Koordinaten des Massenschwerpunkts $S(x, y, z)$ ermittelt.

$$\ell_S = \sqrt{0,772^2 + 0,246^2 + 0,0173^2} = 0,81 \text{ m} \quad (9.4)$$

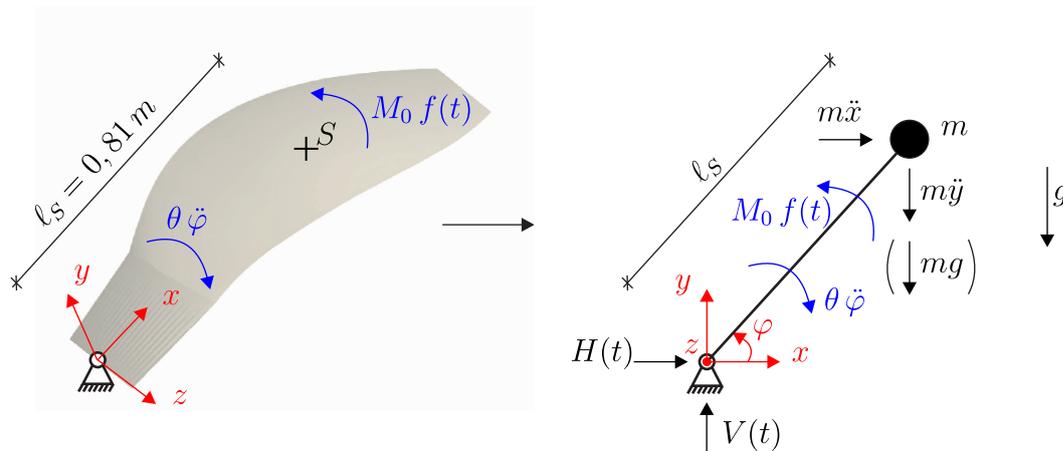


Abbildung 9.13: Starres Vergleichsmodell des Rotorblatts

Das Massenträgheitsmoment

$$\theta_z = \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_V r^2 \rho dV \quad (9.5)$$

wird numerisch mit den Ansätzen des 4-Knoten-Schalenelements wie folgt berechnet:

$$\theta_{z,\text{FEM}} = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \sum_{I=1}^4 \sum_{K=1}^4 \int_{\Omega^e} \int_{\zeta} r^2 \rho N_I N_K t(\zeta) d\zeta dA = 2,826 \text{ kg m}^2 \quad (9.6)$$

Untersucht wird der Verlauf der vertikalen Auflagerkraft $V(t)$ während der Rotation des Rotorblatts. Dieser kann aus dem dynamischen Gleichgewicht (Momentensatz/Drallsatz) ermittelt werden.

$$\theta \ddot{\varphi}(t) - M_0 f(t) = 0 \quad (9.7)$$

Durch Integration und Berücksichtigung der Bereiche der Lastfunktion $f(t)$ nach Abbildung 9.12 können die Funktionen von $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$ aufgestellt werden. Dabei gilt für die Anfangsbedingungen: $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt eine analytische Lösung für den zeitlichen Verlauf der vertikalen Auflagerkraft.

$$V(t) = m l_s [\cos(\varphi(t)) \ddot{\varphi}(t) - \sin(\varphi(t)) \dot{\varphi}^2(t)] \quad (9.8)$$

Für eine Abschätzung wird der Anteil der Gewichtskraft vernachlässigt. In Abbildung 9.14 wird die analytische Lösung mit der numerischen Lösung von drei Zeitintegrationsverfahren verglichen. Dazu werden bei der numerischen Lösung die Knoten-Reaktionskräfte an der Rotationsachse aufsummiert. Die Zeitschrittweite wird zu $\Delta t = 0,05 \text{ s}$ gewählt. Die Bewegung des Rotorblatts wird bis zu

einer Zeit $t_{max} = 5 \text{ s}$ berechnet. Das entspricht etwa zwei Umdrehungen des Rotorblatts.

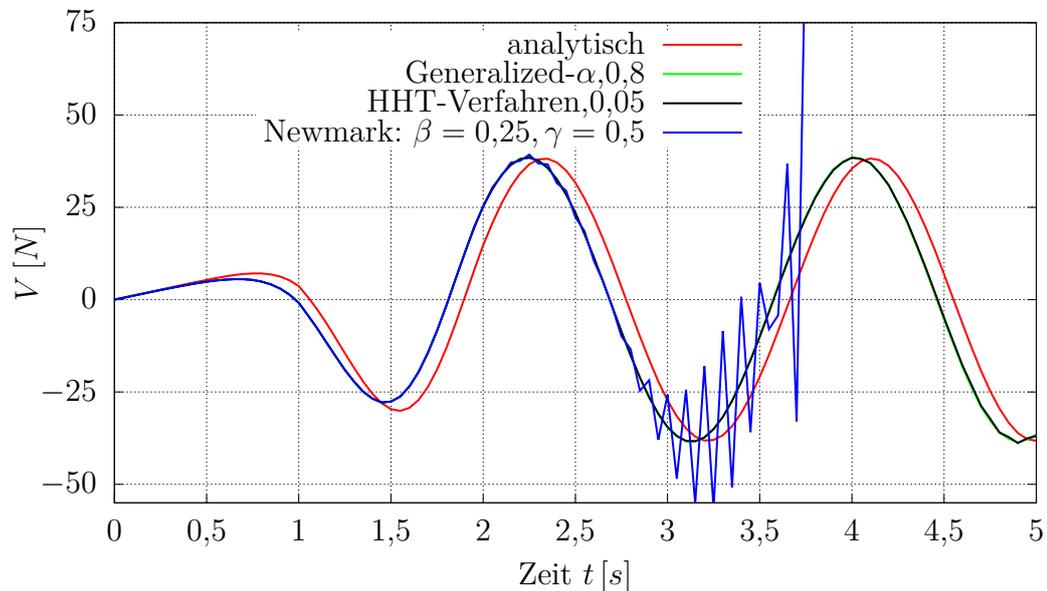


Abbildung 9.14: Verlauf der vertikalen Auflagerkraft $V(t)$: Vergleich der analytischen Lösung mit numerischen Lösungen verschiedener Zeitintegrationsverfahren

Die analytische Lösung des starren Vergleichsmodells stimmt gut mit der FE-Lösung überein. Die Annahme eines starren Körpers für das Rotorblatt ist zulässig. Eine mögliche Begründung der geringen Abweichungen ist u.a. das nicht vollkommen starre Verhalten des FE-Modells. Vor allem beim Anfahrprozess führt dies zu etwas geringeren Auflagerreaktionen. Bei der numerischen Lösung mit dem *Newmark-Verfahren* ist bereits nach einer ersten Umdrehung bei einer Zeit von ca. $t \approx 2,2 \text{ s}$ eine numerische Dissipation zu beobachten. Die berechneten Verläufe mit dem HHT-Verfahren und dem Generalized- α -Verfahren sind nahezu deckungsgleich. Durch die Anwendung dieser Verfahren werden stabile Lösungen für den gewählten Zeitbereich gewährleistet. Damit können sie für Unschärfemodellierung angewendet werden. Für dieses Beispiel werden weitere Untersuchungen zur Stabilität der Verfahren z.B. in [155] durchgeführt. Vor allem in einer Unschärfemodellierung muss sichergestellt sein, dass für den gewählten Definitionsbereich der Eingangsgrößen die Methoden nicht divergieren. Sonst ist eine Divergenz auch in der Fuzzy-Ergebnisgröße zu beobachten.

9.2.2 Geometrische Imperfektionen des gekrümmten Rotorblatts

Die Abweichungen von der ideellen Geometrie des Rotorblatts werden orthogonal zur gekrümmten Oberfläche aufgebracht. Zudem ist eine Abstandsberechnung für

die Berechnung einer Korrelationsmatrix erforderlich. Für die Geometrie wird ein Ersatzmodell mit den gegebenen Knotenkoordinaten aufgestellt:

$$[\mathbf{x}_i, z_i]^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = [x, y]^T \quad . \quad (9.9)$$

Zur Approximation wird die LSQ-Methode angewendet. Bei geschickter Drehung der Struktur ist eine Approximation mit biquadratischen Polynomen ausreichend.

$$\hat{z}(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 a_{m,n} x^m y^n \quad (9.10)$$

Durch den vorhandenen Funktionsausdruck der Geometrie kann mithilfe der Ableitungen

$$\begin{aligned} \hat{z}_{,x} &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^2 a_{mn} m x^{m-1} y^n \\ \hat{z}_{,y} &= \sum_{m=0}^2 \sum_{n=1}^2 a_{mn} n x^m y^{n-1} \end{aligned} \quad (9.11)$$

an jedem Knoten \mathbf{x}_i durch das Kreuzprodukt der normierte Normalenvektor

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y}{|\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y|} \quad (9.12)$$

berechnet werden. Dabei sind $\mathbf{t}_x = [1 \ 0 \ \hat{z}_{,x}]^T$ und $\mathbf{t}_y = [0 \ 1 \ \hat{z}_{,y}]^T$ die linear unabhängigen Tangentialvektoren. Der Abstand, der zur Berechnung der Korrelationen erforderlich ist, wird über eine projizierte Bogenlänge angegeben, siehe Abbildung 9.15. Dabei wird angenommen, dass die projizierte gerade Verbindungslinie der geringste Abstand zweier Punkte ist. Die Verbindungslinie der

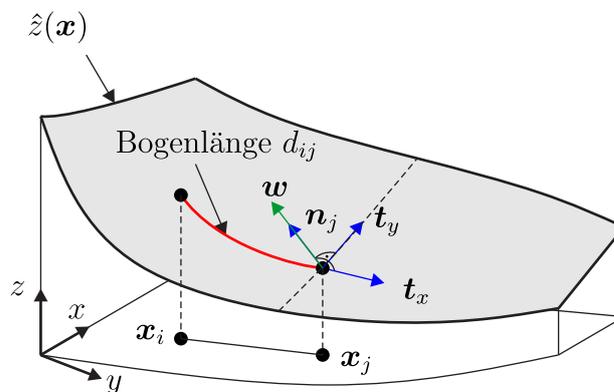


Abbildung 9.15: LSQ-Approximation der Geometrie des gekrümmten Rotorblatts, Normalenvektoren für Imperfektionsrichtung und Abstandsberechnung

Koordinaten $[\mathbf{x}_i, \hat{z}_i]$ und $[\mathbf{x}_j, \hat{z}_j]$ wird durch eine Kurve in der Parameterdarstellung

$$K(s) : \begin{cases} x(s) = x_i + s(x_j - x_i) \\ y(s) = y_i + s(y_j - y_i) \\ z(s) = \hat{z}(x(s), y(s)) \end{cases} \quad s \in [0, 1] \quad (9.13)$$

beschrieben. Der Abstand d_{ij} ist wie folgt definiert:

$$d_{ij} = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) + \dot{z}^2(s)} ds \quad . \quad (9.14)$$

Das Integral wird numerisch mit einer *Newton-Cotes-Integration* gelöst. Die geometrischen Imperfektionen werden durch das normalverteilte Zufallsfeld

$$w(\mathbf{x}, \theta) \sim \mathcal{N}(\mu(\mathbf{x}), \sigma) \quad (9.15)$$

modelliert. Da keine Messungen zu den Imperfektionen vorliegen, wird eine konstante Standardabweichung von $\sigma = 0,3 m$ frei gewählt. Durch diese wird maßgeblich die Amplitude der Imperfektion gesteuert. Das homogene Zufallsfeld soll symmetrisch bezüglich der ideellen Geometrie sein. Daher gilt für den Mittelwert: $\mu(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Um eine endgültig mittelwertfreie Imperfektion zu erhalten, muss das arithmetische Mittel des Feldes wie folgt subtrahiert werden:

$$\bar{w}(\mathbf{x}, \theta) = w(\mathbf{x}, \theta) - \frac{1}{N_w} \sum_{i=1}^{N_w} [w]_i \quad (9.16)$$

mit der Anzahl $N_w = \text{numnp} - 25 = 777$ ohne die FE-Knoten an der Rotationsachse. Diese 25 Knoten sind imperfektionsfrei. Für die stochastische Diskretisierung wird die KLT angewendet. Die Korrelationsmatrix wird mit der quadratischen exponentiellen Korrelationsfunktion

$$[\rho]_{ij} = \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{\ell_c}\right), \quad i, j = 1, \dots, N_w \quad (9.17)$$

berechnet. Da keine Messergebnisse vorhanden sind, muss die Korrelationslänge ℓ_c frei gewählt werden. Zur Wahl werden Realisationen der Zufallsfelder für verschiedene Korrelationslängen betrachtet. In Abbildung 9.16 sind drei Realisationen mit dem Netz der ursprünglichen Geometrie des Rotorblatts für die Korrelationslängen $\ell_c \in [100, 500, 1000]$ dargestellt. Für die kleinste Korrelationslänge $\ell_c = 100 m^2$ kann eine maximale Abweichung zur Referenzgeometrie des Rotorblatts (Gesamtlänge $L \approx 1,35 mm$) von $\Delta w \approx 17 mm$ beobachtet werden. Für die größte Korrelationslänge ist die Abweichung nahezu Null.

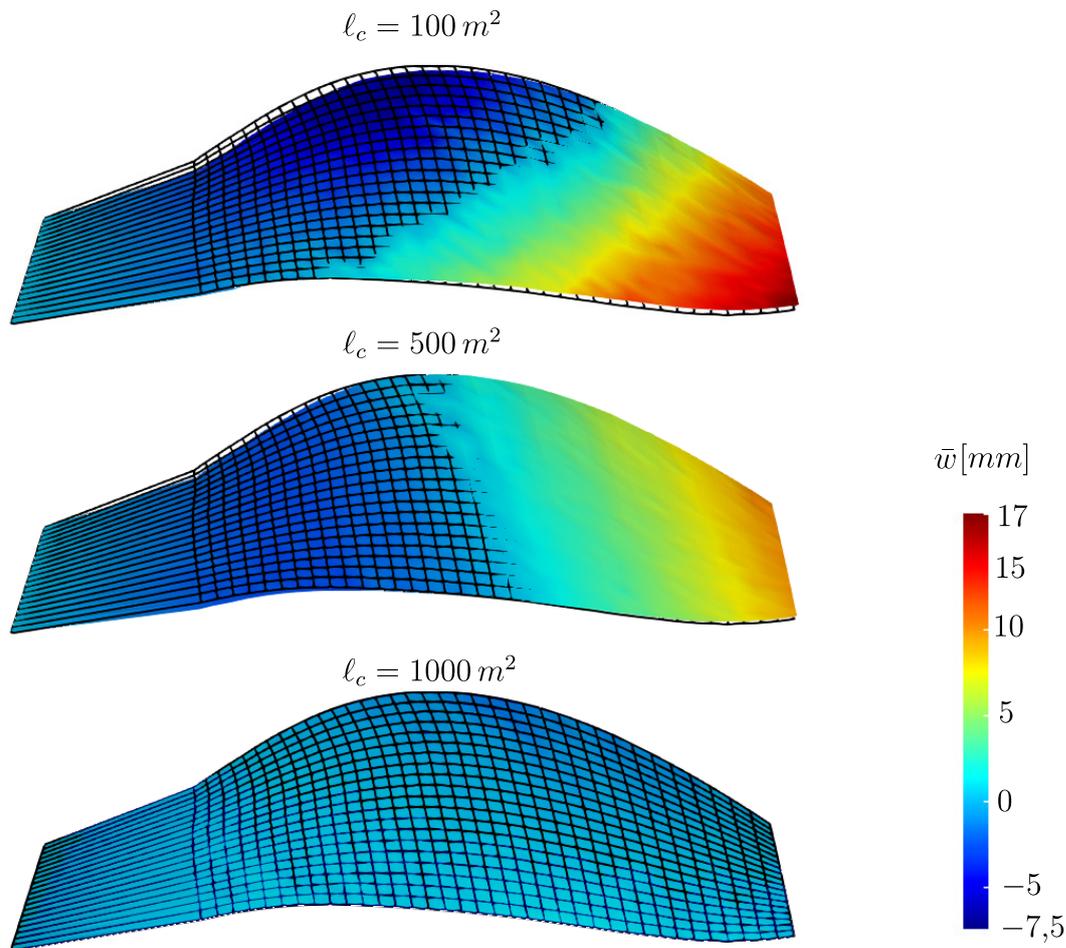


Abbildung 9.16: Realisationen geometrischer Imperfektionen für verschiedene Korrelationslängen $\ell_c \in [100, 500, 1000]$ und der Standardabweichung $\sigma = 0,3 \text{ m}$ mit dem Netz der Ausgangsgeometrie des Rotorblatts

9.2.3 Fuzzy-stochastische Analyse der Propfan-Rotation

Für die Unschärfemodellierung werden die Wichte ρ , das Antriebsmoment M_0 und die Korrelationslänge ℓ_c als Fuzzy-Dreieckszahlen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \rho &= \langle 1500, 1600, 1700 \rangle \\ M_0 &= \langle 9, 10, 11 \rangle \\ \ell_c &= \langle 100, 500, 1000 \rangle \end{aligned} \quad (9.18)$$

Diese sind auch in Abbildung 9.17 dargestellt. Durch die Fuzzifizierung der Korrelationslänge werden die Imperfektionen durch ein Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasiertes Zufallsfeld beschrieben. Die Ergebnisgröße des Fuzzy-stochastisches Prozesses ist der Erwartungswert der vertikalen Auflagerkraft $E[V]$. An jedem Zeitschritt wird ein HDMR-Metamodell 2. Ordnung aufgestellt. Die Näherung der

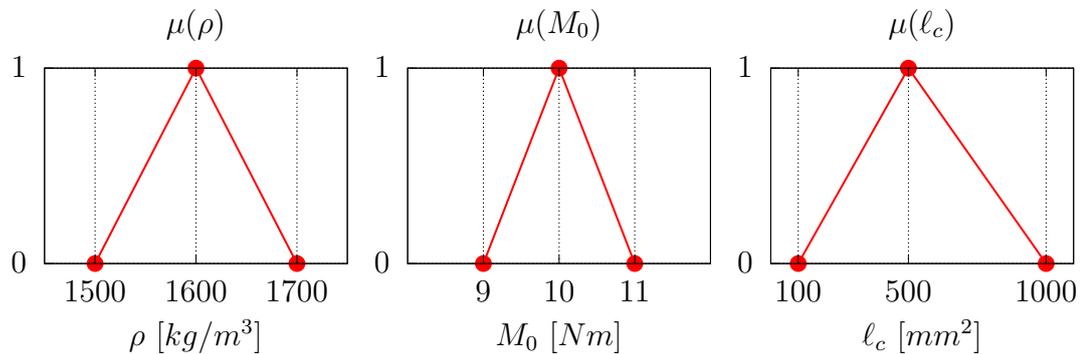


Abbildung 9.17: Fuzzy-Eingangsgrößen für den Fuzzy-stochastischen Prozess: Wichte ρ (links), Antriebsmoment M_0 (mitte) und Korrelationslänge ℓ_c (rechts)

Schnittfunktionen erfolgt mit der LSQ-Methode unter Verwendung kubischer Polynome. Für die drei Eingangsgrößen und fünf Stützstellen pro Variable müssen an insgesamt 61 Stützstellen *Monte-Carlo-Simulationen* durchgeführt werden. Jede Simulation umfasst 500 Realisationen. Die Grundlösungen des Fuzzy-stochastischen Prozesses werden mit dem HHT-Verfahren und einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0,05$ s berechnet. Die Gesamtlänge des Prozesses ist $t_{max} = 5$ s. Damit muss das HDMR-Metamodell 100-mal aufgestellt werden, wobei die statistische Versuchsplanung unverändert bleibt. In Abbildung 9.18 ist die zeitliche Entwicklung der Unschärfe für den Erwartungswert der vertikalen Auflagerkraft dargestellt.

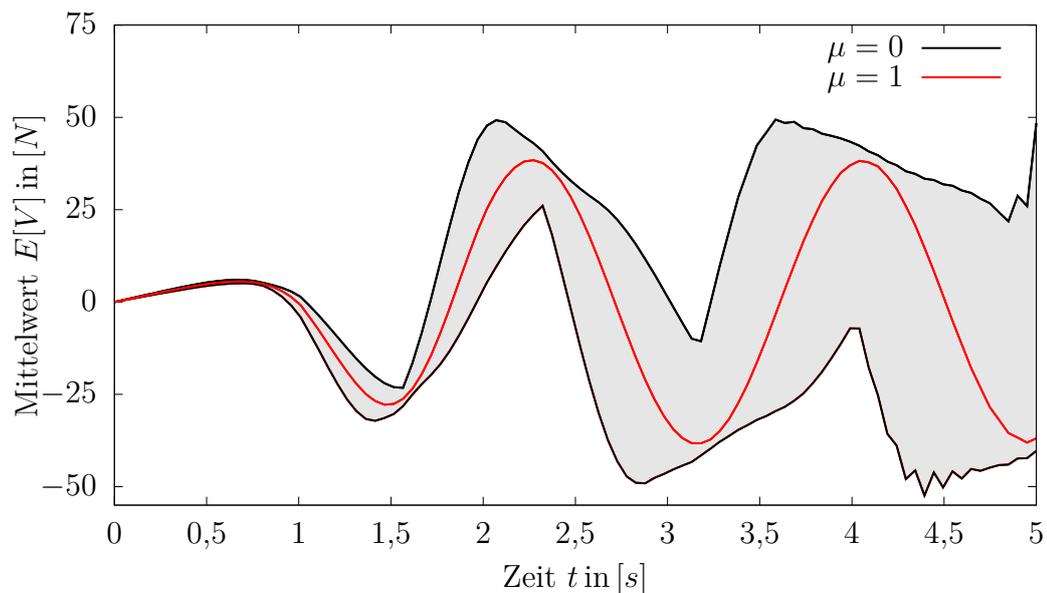


Abbildung 9.18: Fuzzy-stochastischer Prozess für den Erwartungswert der vertikalen Auflagerkraft $E[V]$

Nach dem Anfahrprozess nimmt die Unschärfe mit fortschreitender Zeit stetig zu. Zur Überprüfung, ob das Metamodell an unterschiedlichen Zeitpunkten das Verhalten abbilden kann, können die Schnittfunktionen der HDMR an unterschiedlichen Zeitpunkten betrachtet werden. In Abbildung 9.19 sind an den Zeitpunkten $t = 1,5\text{ s}$ und $t = 2,5\text{ s}$ die Näherungen der 2-D-Schnittfunktionen für die Wichte ρ und das Antriebsmoment M_0 ausgewertet. Der Funktionsverlauf ändert sich

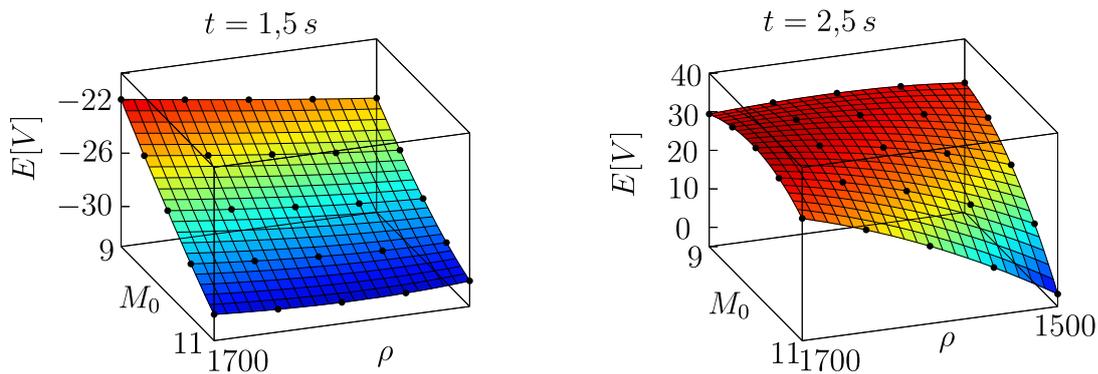


Abbildung 9.19: HDMR-Schnittfunktionen ρ - M_0 an den unterschiedlichen Zeitpunkten $t = 1,5\text{ s}$ (links) und $t = 2,5\text{ s}$ (rechts)

deutlich. Zu jedem Zeitpunkt muss dennoch gewährleistet sein, dass das Metamodell das Verhalten abbilden kann. Des Weiteren ändern sich auch die Einflüsse der drei Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße in jedem Zeitschritt. Die Frage, wann eine ausgesuchte Eingangsgröße den größten Einfluss hat, kann mit einem zeitlichen Verlauf der *Sobol'-Indizes* beantwortet werden.

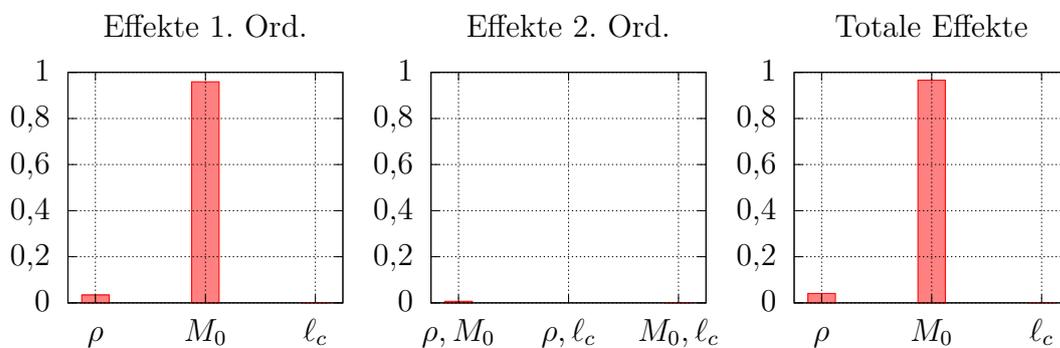


Abbildung 9.20: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse bezogen auf den Mittelwert der vertikalen Auflagerkraft am Zeitpunkt $t = 1,5\text{ s}$

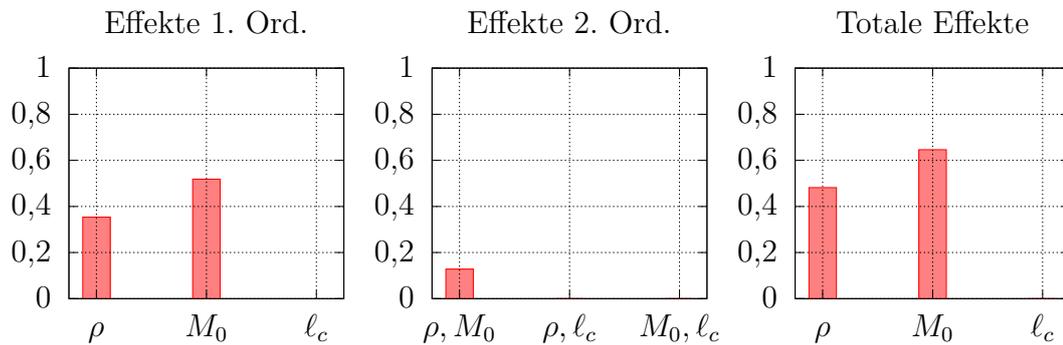


Abbildung 9.21: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse bezogen auf den Mittelwert der vertikalen Auflagerkraft am Zeitpunkt $t = 2,5$ s

An den Zeitpunkten $t = 1,5$ s und $t = 2,5$ s wird jeweils eine Sensitivitätsanalyse mit 100^3 generierten Auswertungsstellen mittels *Random-Sampling* für die *Monte-Carlo-Integration* durchgeführt. Als Datengrundlage der Sensitivitätsanalyse wird lediglich der *Support* des Fuzzy-Eingangsraums ($\alpha = 0$) verwendet. Durch diese starke Vereinfachung wird die Unschärfe in den Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse vernachlässigt. Allerdings können damit die Einflüsse an verschiedenen Zeitpunkten abgeschätzt werden. Die Ergebnisse der *Sobol'-Indizes* sind in den Abbildungen 9.20 und 9.21 dargestellt. Bei dem Zeitpunkt $t = 1,5$ s findet noch der Anfahrprozess statt, siehe Abbildung 9.12. Das Antriebsmoment hat an diesem Zeitpunkt einen sehr großen Einfluss auf die Auflagerkraft. Werden die *Sobol'-Indizes* eine Sekunde später zum Zeitpunkt $t = 2,5$ s betrachtet, haben sich diese bereits stark verändert. Der Einfluss der Wichte nimmt zu und Effekte 2. Ordnung treten auf. Die Korrelationslänge hat an beiden Zeitpunkten keinen Einfluss. Durch die große Steifigkeit des untersuchten Propfans können geometrische Imperfektionen vernachlässigt werden.

10 Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung

Ein realitätsnahes Tragverhalten erfordert die Berücksichtigung von Unschärfen. Mithilfe der polymorphen Unschärfemodellierung können aleatorische und epistemische Unschärfen klar unterschieden werden. In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Unschärfemodelle für unterschiedliche Problemstellungen aus der nichtlinearen Strukturmechanik eingesetzt. Zusammenfassend werden drei Themenschwerpunkte bearbeitet:

- Modellierung räumlicher Variabilität mit Unschärfe
- Metamodelle und Sensitivitätsanalyse
- Unschärfemodellierung im Schalenbeulen

Für eine effiziente Modellierung der räumlichen Variabilität werden geeignete Diskretisierungsmethoden für die Simulation von Zufallsfeldern im Rahmen der Finiten Elemente Methode benötigt. Die Grundlagen werden in Kapitel 6 gegeben. Die Anwendung der EOLE-Methode erweist sich als sehr vorteilhaft. Mit dieser Methode ist eine einfache Trennung zwischen dem FE-Netz und einem stochastischen Netz möglich. Je nach Variabilität kann dieses Netz wesentlich gröber sein als das FE-Netz. Dadurch kann der Rechenaufwand beim Lösen des Eigenwertproblems der Kovarianzmatrix erheblich reduziert werden. Eine Fuzzy-Analyse erfordert zudem die Durchführung der α -Level-Optimierung. Werden zusätzlich aleatorische Unschärfen berücksichtigt, ist z.B. ein *Sampling* mit der *Monte-Carlo-Methode* erforderlich. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, wird die Strategie der Metamodellierung angewendet. Die Grundlösung wird durch ein einfacheres Modell ersetzt. Dabei hat das gewählte Metamodell einen großen Einfluss auf die Qualität der Ergebnisgrößen. In Kapitel 7 werden die Grundlagen der fünf gängigsten Metamodelle: *Polynominterpolation*, *Methode der kleinsten Fehlerquadrate*, *Kriging*, *Künstlich Neuronale Netze* mit *Feed Forward-Struktur* und das *HDMR-Metamodell* detailliert beschrieben. Die Metamodelle werden in zwei Klassen eingeteilt: Interpolationsmodelle und Ausgleichsmodelle. Als Fazit können die folgenden Erkenntnisse zur Anwendung der Metamodelle im Rahmen der Unschärfemodellierung festgehalten werden:

- Durch die Anwendung der Ausgleichsmodelle können auftretende Fluktuationen bei einer *Monte-Carlo-Simulation* ausgeglichen werden. Damit können stabilere unscharfe Ergebnisgrößen erzielt werden. Deshalb wird empfohlen für Fuzzy-stochastische Analysen mit der *Monte-Carlo-Methode* oder

alternativer Sampling-Methoden die Metamodelle aus der Klasse der Ausgleichsmodelle zu wählen.

- Das HDMR-Metamodell hat sich als besonders effizient erwiesen. Die Anzahl der Stützstellen kann bei diesem Metamodell für hochdimensionale Problemstellungen erheblich reduziert werden. Eine HDMR 2. Ordnung ist für die meisten physikalischen Problemstellungen ausreichend. Zusätzlich kann mit den Schnittfunktionen der HDMR der funktionale Zusammenhang der einzelnen Eingangsparameter dargestellt werden.

Als Hilfsmittel bei der Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) wird die ANOVA-HDMR als varianzbasierte Sensitivitätsanalyse empfohlen. Diese wird auf Basis der Metamodelle durchgeführt. Mithilfe der *Sobol'-Indizes* wird der Einfluss der Eingangsparameter auf die Ergebnisgrößen angegeben.

Ein großes Thema dieser Arbeit ist die Anwendung der Unschärfemodellierung im Schalenbeulen. Im Gegensatz zu den semi-empirischen und klassischen probabilistischen Ansätzen werden neben den aleatorischen auch epistemische Unschärfen bei der Modellierung von Imperfektionen berücksichtigt. Für die Modellierung der Mantelimperfektionen wird das Vorgehen anhand von vorliegenden Imperfektionsmessungen vorgestellt. Ein Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern wird entwickelt, in dem die Korrelationsparameter und die Varianz als Fuzzy-Größen definiert werden. Der Ansatz führt auf die Darstellung der räumlich korrelierten Mantelimperfektionen als Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder. In einem Gesamtmodell werden weitere Imperfektionsarten wie Aufstandsimperfektionen, materielle Imperfektionen und Variationen der Schalendicke berücksichtigt. Hierfür werden verschiedene Unschärfemodelle eingesetzt. Die Wahl der Modelle wird anhand der vorhandenen Datenbasis diskutiert. Dadurch werden keine falschen Voraussetzungen implementiert. Das ist ein wesentlicher Vorteil der polymorphen Unschärfemodellierung. Die experimentellen Ergebnisse der Beullasten können mit den Ergebnissen der Beullasten aus der Unschärfemodellierung abgebildet werden. Zur Diskussion werden die unscharfen Ergebnisgrößen mit den herkömmlichen Bemessungsgrundlagen, wie dem *Knock-Down-Factor* und dem Beulsicherheitsnachweis nach EC3, gegenübergestellt. Die wichtigsten Punkte zur Unschärfemodellierung im Schalenbeulen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Aleatorische und epistemische Unschärfen können mithilfe der polymorphen Unschärfemodellierung für die Modellierung der Imperfektionen von Schalentragwerken quantifiziert werden.
- Entwicklung eines Korrelationsmodells für die Modellierung der räumlichen Variabilität von Imperfektionen.

- Die Wahl eines Unschärfemodells für eine bestimmte Imperfektionsart erfolgt auf Basis vorhandener Daten. Damit wird eine angemessene Quantifizierung der Unschärfen, ohne dass falsche Voraussetzungen generiert werden, ermöglicht.
- Die experimentellen Ergebnisse der Beullasten können mit den Ergebnissen aus der Fuzzy-stochastischen Analyse abgebildet werden. Die aktuellen Bemessungsgrundlagen können eingeordnet werden. Ein *decision-making* wird diskutiert.
- Der Einfluss der Eingangsparameter auf die Beullast wird mithilfe einer Sensitivitätsanalyse auf Basis der Metamodelle abgebildet. Für die axialgedrückte Zylinderschale hat der Korrelationsparameter in Axialrichtung und die Schalendicke den größten Einfluss. Effekte zweiter Ordnung werden lediglich beim Korrelationsparameter in Axialrichtung gekoppelt mit der Varianz beobachtet.
- Durch die Darstellung der kritischen Beulfaktoren als Fuzzy-Mengen wird eine numerische Beschreibung von verbalen Aussagen zur Beulsicherheit ermöglicht.

Abschließend werden in Kapitel 9 weitere Beispiele aus der Ingenieurpraxis vorgestellt. Das vorgestellte Korrelationsmodell mit unscharfen Parametern wird am Modell einer Kegelschale der Zwischenstufe einer Ariane-Rakete angewendet. Mit diesem Beispiel wird gezeigt, dass Strukturen mit Aussparungen kein Problem darstellen. Zudem wird die Anwendbarkeit der behandelten Methoden für zeitlich abhängige Problemstellungen mit einer dynamischen Analyse eines Propfans demonstriert. Die Modellierung von Imperfektionen mittels Zufallsfelder ist auch bei der gekrümmten Oberfläche des Rotorblatts möglich.

10.2 Ausblick für weitere Forschungsvorhaben

Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten könnten folgende Punkte sein:

- **Themen zur Modellierung der räumlichen Variabilität**

- **Nicht Gaußsche Zufallfelder und Kreuzkorrelationen**

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich homogene *Gaußsche Zufallfelder* betrachtet. Aufgrund einer zu geringen Datengrundlage kann noch keine Aussage darüber getroffen werden, ob z.B. Mantelimperfektionen durch nicht *Gaußsche Zufallfelder* dargestellt werden müssen. Dafür ist eine Transformation des Zufallfelds erforderlich, siehe z.B. in [111, 173, 226]. Ein *Gaußsches Zufallfeld* zur Darstellung der Imperfektionen $w(\mathbf{x})$ kann in ein nicht *Gaußsches Zufallfeld* wie folgt transformiert werden:

$$\bar{w}(\mathbf{x}, \theta) = F^{-1}\Phi[w(\mathbf{x}, \theta)] \quad (10.1)$$

mit F der nicht *Gaußschen* bedingten Verteilungsfunktion von $\bar{w}(\mathbf{x}, \theta)$ und $\Phi[w(\mathbf{x}, \theta)]$ der standardnormalverteilten *Gaußschen* Zufallsvariable. Ein weiterer Punkt ist die Berücksichtigung von Kreuzkorrelationen (engl.: cross correlation) zwischen einzelnen Zufallfeldern, siehe z.B. [327]. Damit kann beispielsweise eine Korrelation zwischen räumlich korrelierten geometrischen und materiellen Imperfektionen beschrieben werden.

- **Bedingte Zufallfelder**

Viele Bauteile im Bauwesen bestehen aus zusammengesetzten Querschnitten. Für den Zusammenbau müssen bei den Imperfektionsfeldern gewisse Randbedingungen eingehalten werden. Diese können bei der Beschreibung der Zufallfelder direkt berücksichtigt werden. Beispiele für bedingte Zufallfelder sind in [66, 165, 215] gegeben. Der Einbau von Randbedingungen ist vor allem bei der Trennung eines stochastischen Netzes vom FE-Netz interessant. Die Bedingungen müssen nicht nur an den stochastischen Knoten erfüllt werden, sondern auch an den entsprechenden FE-Knoten. Dafür könnte eine Formulierung im Rahmen der EOLE-Methode entwickelt werden. In der Literatur ist hierfür bisher kein Ansatz bekannt.

- **Entwicklung geeigneter Netzgeneratoren für das stochastische Netz**

Bei komplexen Strukturen kann durch eine geschickte Wahl der stochastischen Knoten zur Diskretisierung der Zufallfelder viel Rechen-

zeit bei der Lösung des Eigenwertproblems der Kovarianzmatrix eingespart werden. Hierbei können geeignete Netzgeneratoren für das stochastische Netz weiterhelfen.

- **Unschärfemodellierung im Schalenbeulen**

- **Entwicklung weiterer Korrelationsmodelle zur Modellierung der räumlichen Variabilität von Imperfektionen**

Die in Kapitel 3 aufgestellten Korrelationsfunktionen in Axial- und Umfangsrichtung sind voneinander unabhängig. Diese Annahme kann mit dem Herstellungsprozess einer Zylinderschale begründet werden. Das aufgerollte Schalenblech kann in zwei Richtungen unterschiedlich gewalzt sein. Die Annahme stellt in dieser Arbeit eine wesentliche Vereinfachung dar, weil keine näheren Informationen zum Herstellungsprozess der Schalen vorliegen. Eine Abhängigkeit in beide Richtungen muss dann bei der Abstandsberechnung der Knoten zum Aufstellen der Korrelationsfunktionen auf Basis der *Fourier-Reihen* berücksichtigt werden. Die Zusammenhänge können auch begleitend zu Experimenten untersucht werden.

- **Überprüfung der Modelle an aktuellen Versuchsdaten**

Das Vorgehen der Unschärfemodellierung im Schalenbeulen wird anhand der Imperfektionsdatenbank der TU Delft [10] aus dem Jahre 1979 gezeigt. Jedoch ist die Übertragung auf beliebige Datenbanken zur Beuluntersuchung von Schalenträgwerken problemlos möglich. Eine aktuellere Datenbank kann daher zu einem erweiterten Expertenwissen für die Definition der Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsparemeter beitragen. Zudem sind die unbekanntenen Korrelationseigenschaften der materiellen Imperfektionen immer noch ein offener Punkt. Hingegen können die Korrelationseigenschaften der Schalendicke einfacher ermittelt werden. Untersuchungen für Schalenträgwerke bestehend aus anderen Materialien, wie z.B. Faserverbundmaterialien, können u.a. für die Luft- und Raumfahrtindustrie von Interesse sein.

- **Fortentwicklung polymorpher Unschärfe**

Bisher werden aleatorische Unschärfen und unvollständige Daten als Teil epistemischer Unschärfe berücksichtigt. Messungenauigkeiten werden in dieser Arbeit vernachlässigt, d.h. die Messung der *Fourier-Reihen* wird als ausreichend genau angenommen. Durch die Anwendung eines fp-fr-Modells können ungenaue Daten quantifiziert werden.

– **Unschärfemodelle bei alternativen Ansätzen zur Berücksichtigung von Imperfektionen**

Ein Schweißnahteinzug ist für geschweißte Schalen die maßgebende Imperfektionsform. Kenntnisse über die Lage und Ausbildung der Schweißnaht können in einem Unschärfemodell ebenfalls beschrieben werden. In [332] wird ein Überblick zu verschiedenen Bemessungskonzepten im Schalenbeulen gegeben. Das Konzept der polymorphen Unschärfe kann bei verschiedenen Bemessungskonzepten angewendet werden.

– **Beulsicherheitsnachweis mit Unschärfe**

Das höhere Ziel ist ein umfassendes Bemessungskonzept für die Praxis zur Berücksichtigung der Unschärfe im Schalenbeulen. Dazu sollten durch weitere Beispiele mit einer umfangreicheren Datengrundlage die Wahl der Unschärfemodelle für die einzelnen Imperfektionsarten überprüft werden. Dann kann auch eine Strategie für eine „sichere“ Bemessung entwickelt werden.

• **Modellunschärfe**

Ein weiterer Aspekt ist die Modellunschärfe. In der vorliegenden Arbeit werden die Eingangsparameter als unscharfe Parameter definiert, aber das Modell ist nicht unscharf. Eine Berücksichtigung der Modellunschärfe ist beim numerischen Modell und dem Korrelationsmodell möglich.

• **Decision-making in der Tragwerksanalyse unter Unschärfe**

Die Bewertung der Sicherheit eines Tragwerks wird mithilfe der aktuellen Bemessungsrichtlinien, wie dem Eurocode [64], durchgeführt. Die Sicherheitsbeurteilung basiert darin auf den klassischen probabilistischen Methoden und erfolgt durch die Definition von Zuverlässigkeitsindizes und Versagenswahrscheinlichkeiten. Das ultimative Ziel der Unschärfemodellierung ist die Unterstützung der Entscheidungsfindung (engl.: *decision-making*) in einem Bemessungsprozess [227]. Die Frage, wie ein Ingenieur in der Praxis mit einer unscharfen Antwortgröße umgehen soll, wird meist offen gelassen. In [227] wird an einem einfachen Beispiel die epistemische Unschärfe mit verschiedenen Modellen (Fuzzy-Variablen, Intervalle, BAYES-Stochastik) quantifiziert und das *decision-making* diskutiert. Ähnliche Untersuchungen für das Schalenbeulen müssen noch durchgeführt werden.

• **Management der Unschärfen**

Eine weitere interessante Idee ist das „Management von Unschärfen“, das in [230] diskutiert wird. Die explizite Unterscheidung von aleatorischen und epistemischen Unschärfen wird mit der polymorphen Unschärfemodellierung ermöglicht. Die Quantifizierung des Einflusses der epistemischen Unschärfe auf eine bestimmte Ergebnisgröße ist von großem Interesse. Hierzu

müssen in einer Sensitivitätsanalyse die Einflüsse in einen epistemischen und aleatorischen Anteil separiert werden. Da epistemische Unschärfen reduziert werden können, ermöglicht dies dann eine gezielte Reduktion der Unschärfen.

- **Metamodelle, Multifidelity und High-Performance Computing**

- **Metamodelle für hochdimensionale Eingangsräume**

Das HDMR-Metamodell hat sich zwar für die Problemstellungen in dieser Arbeit bewährt, aber ein Vergleich zu speziellen Metamodellen für hochdimensionale Eingangsräume muss noch durchgeführt werden. Metamodelle für hochdimensionale Eingangsräume sind z.B. optimierte *Künstliche Neuronale Netze*, *Low Rank Tensoren* und *Polynomial Chaos*, siehe [75, 149, 166].

- **Multilevel-Metamodellierung**

Die Metamodelle für hochdimensionale Eingangsräume können für eine Multilevel-Metamodellierung eingesetzt werden. In dieser Arbeit wird die Metamodell-Strategie ausschließlich zur Abbildung stochastischer Größen eingesetzt. Zur Durchführung der *Monte-Carlo-Simulation* sind immer noch zahlreiche FE-Rechnungen notwendig. Mit einem weiteren Metamodell für die Grundlösung kann der Aufwand weiter reduziert werden. Die *Monte-Carlo-Simulation* wird dann nicht mit dem FE-Modell durchgeführt, sondern mit dem zusätzlichen Metamodell. Das Prinzip ist am Beispiel der Beulanalyse als Grundlösung in Abbildung 10.1 dargestellt. Die Beulanalyse in der inneren Schleife wird durch das

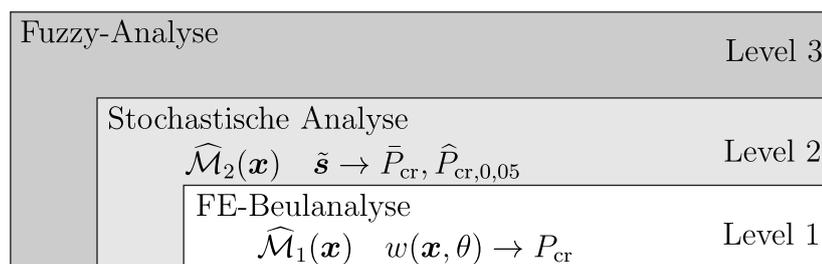


Abbildung 10.1: Multilevel-Metamodellierung in der Fuzzy-stochastischen Analyse

Metamodell 1 ersetzt und die stochastische Analyse durch ein zweites Metamodell. Vor allem für die Abbildung $w(\mathbf{x}, \theta) \rightarrow P_{cr}$ muss mit dem Metamodell 1 ein hochdimensionales Problem gelöst werden. Hierfür werden die speziellen Metamodelle benötigt.

– **Multifidelity-Ansätze**

Eine weitere Möglichkeit zur Effizienzsteigerung sind *Multifidelity-Ansätze*, siehe z.B.: [231, 232, 235]. Die Idee wird am Beispiel der Zylinderschale in Abbildung 10.2 gezeigt. Wenn der Zusammenhang mit

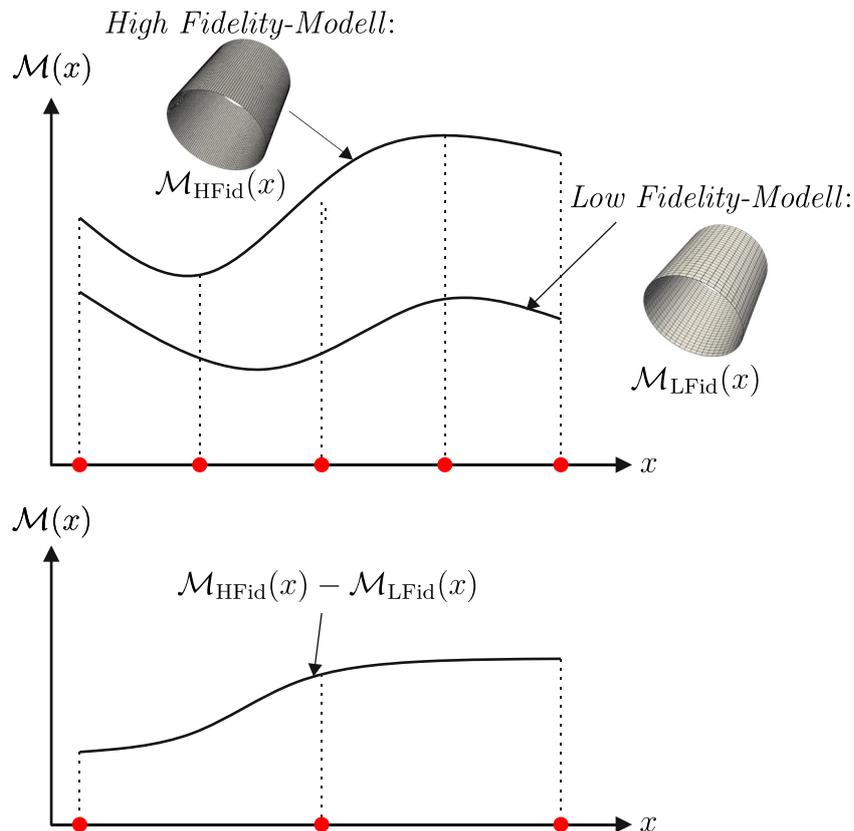


Abbildung 10.2: Idee des Multifidelity-Ansatzes am Beispiel der Zylinderschale

einem Metamodell zwischen dem *Low Fidelity-Modell* (Zylinderschale mit groben FE-Netz) und dem *High Fidelity-Modell* (Zylinderschale mit feinem FE-Netz) gefunden wird, sind nur noch Berechnungen am *Low Fidelity-Modell* notwendig. Als Größe für den Zusammenhang kann z.B. die Differenz zwischen der *Low Fidelity-* und *High Fidelity-Lösung* verwendet werden. Der Vorteil ist, dass der Verlauf der Differenz besser abgebildet werden kann. Damit sind weniger Stützstellen zum Aufstellen des Metamodells notwendig, siehe Abbildung 10.2 (unten).

– **Parallel Computing, Cloud Computing und Clusteranalyse für die Unschärfemodellierung**

Die Unschärfemodellierung ist besonders bei komplexen Abbildungsmodellen sehr rechenaufwendig. Mithilfe der Methoden aus der Infor-

matik wie *Clusteranalysen*, *Parallel Computing* oder *Cloud Computing* und der Anwendung der vorher beschriebenen Ansätze kann die Berechnungszeit weiter reduziert werden.

- **Sensitivitätsmaße für unscharfe Ergebnisgrößen**

In dieser Arbeit wird im Rahmen der Fuzzy-Strukturanalyse eine varianzbasierte Sensitivitätsanalyse durchgeführt. Damit kann der Einfluss der Eingangsparameter auf den Ausgang abgeschätzt werden. Die Datengrundlage der Sensitivitätsanalyse ist der *Support* des Fuzzy-Eingangsraums. Die Ergebnisse müssen einem α -Level zugeordnet werden. Dabei werden die Fuzzy-Variablen als gleichverteilte Zufallsvariable aufgefasst. Durch diese starke Vereinfachung wird die Unschärfe in den Ergebnissen der Sensitivitätsanalyse vernachlässigt. Die Fuzzy-Strukturanalyse muss hier getrennt von der Sensitivitätsanalyse betrachtet werden. Varianzbasierte Sensitivitätsanalysen werden üblicherweise für stochastische Ausgangsgrößen angewendet und nicht für epistemische Unschärfen. In weiteren Forschungsarbeiten kann daher untersucht werden, wie Sensitivitäten für unscharfe Ergebnisgrößen dargestellt werden können.

- **Optimierung dünner Schalenstrukturen mit Unschärfe**

Ein weiteres interessantes Forschungsfeld ist die Optimierung mit unscharfen Daten. In zahlreichen Arbeiten wird dieses Thema bereits diskutiert, siehe z.B. [98, 99, 116]. Eine Optimierung dünner Schalenstrukturen mit Unschärfe kann ebenfalls durchgeführt. Ein Beispiel ist die Untersuchung beulgefährdeter Schalen aus Faserverbundmaterial. Eine Fragestellung könnte sein, wie ein optimaler Schichtaufbau definiert sein muss, um den Widerstand gegen Stabilitätsversagen zu erhöhen, siehe z.B. [333]. Die vorgestellten Methoden zur Berücksichtigung der Unschärfe können in einem Optimierungsalgorithmus angewendet werden. Der Schleifenalgorithmus in Abbildung 10.1 wird durch eine weitere äußere Optimierungsschleife erweitert. Vor allem für die meist rechenaufwendige Optimierung sind effiziente Metamodelle gefragt.

Literatur

- [1] ADELI, H.: *Neural Networks in Civil Engineering: 1989–2000*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering 16(2) (2001), S. 126–142.
- [2] ADHIKARI, S. / CHOWDHURY, R. / FRISWELL, M.I.: *High dimensional model representation method for fuzzy structural dynamics*. Journal of Sound and Vibration 330(7) (2011), S. 1516–1529.
- [3] ALEXANDERIAN, A.: *A brief note on the Karhunen-Loève expansion*. 2015.
- [4] ALLAIX, D.L. / CARBONE, V.I.: *Development of a numerical tool for random field discretization*. Advances in Engineering Software 51 (2012), S. 10–19.
- [5] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. SpringerVieweg, 3. Auflage, 2015.
- [6] ANDERS, U.: *Statistische neuronale Netze*. Dissertation, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften, 1997.
- [7] ANDERSON, L.D.: *Chapter on The history of latin squares*. Research Report Series R-2007-32, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, 2007.
- [8] ANSYS, INC.: <https://www.ansys.com>. 2020.
- [9] ARBOCZ, J.: *The effect of imperfect boundary conditions on the collapse behavior of anisotropic shells*. International Journal of Solids and Structures 37(46) (2000), S. 6891–6915.
- [10] ARBOCZ, J. / ABRAMOVICH, H.: *The initial imperfection data bank at the Delft University of Technology: Part I*. 1979.
- [11] ARBOCZ, J. / STARNES JR, J.H.: *Future directions and challenges in shell stability analysis*. Thin-Walled Structures 40(9) (2002), S. 729–754.
- [12] ARCHER, G.E.B. / SALTELLI, A. / SOBOL', I.M.: *Sensitivity measures, anova-like Techniques and the use of bootstrap*. Journal of Statistical Computation and Simulation 58(2) (1997), S. 99–120.
- [13] BACHOC, F.: *Cross Validation and Maximum Likelihood estimations of hyperparameters of Gaussian processes with model misspecification*. Computational Statistics & Data Analysis 66 (2013), S. 55–69.
- [14] BAGHERI, M. / MIRI, M. / SHABAKHTY, N.: *Fuzzy reliability analysis using a new alpha level set optimization approach based on particle swarm optimization*. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 30(1) (2016), S. 235–244.
- [15] BAITSCH, M.: *Optimierung druckbeanspruchter Stabtragwerke unter Berücksichtigung geometrischer Imperfektionen*. Dissertation, Lehrstuhl für Ingenieurinformatik im Bauwesen, Ruhr-Universität Bochum, 2003.

- [16] BALU, A.S. / RAO, B.N.: *High dimensional model representation based formulations for fuzzy finite element analysis of structures*. Finite Elements in Analysis and Design 50 (2012), S. 217–230.
- [17] BAMBERG, G. / BAUR, F. / KRAPP, M.: *Statistik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 17. Auflage, 2015.
- [18] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
- [19] BATHE, K.-J. / BOLOURCHI, S.: *A geometric and material nonlinear plate and shell element*. Computers & Structures 11(1) (1980), S. 23–48.
- [20] BATHE, K.-J. / HO, L.-W.: *A simple and effective element for analysis of general shell structures*. Computers & Structures 13(5) (1981), S. 673–681.
- [21] BATHE, K.-J. / HO, L.W.: *Some Results in the Analysis of Thin Shell Structures*. In: WUNDERLICH, W. / STEIN, E. / BATHE, K.-J., (HRSG.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, S. 122–150, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.
- [22] BATOZ, J.-L. / DHATT, G.: *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 14(8) (1979), S. 1262–1267.
- [23] BAŽANT, Z.P. / CEDOLIN, L.: *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific, 2010.
- [24] BEER, M.: *Fuzziness und Fuzzy-Zufälligkeit bei der Sicherheitsbeurteilung von Tragwerken*. Dissertation, Lehrstuhls für Statik, TU Dresden, 2002.
- [25] BEER, M.: *Uncertain structural design based on nonlinear fuzzy analysis*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 84(10–11) (2004), S. 740–753.
- [26] BEER, M. / FERSON, S. / KREINOVICH, V.: *Imprecise probabilities in engineering analyses*. Mechanical Systems and Signal Processing 37(1) (2013), S. 4 – 29.
- [27] BEER, M. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Safety and robustness assessment of structures with generalized data uncertainty*. In: *GACM Report - German Association for Computational Mechanics*, 7, S. 23–28, 2012.
- [28] BELYTSCHKO, T. / LIU, W.K. / MORAN, B. / ELKHODARY, K.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, 2013.
- [29] BETSCH, P. / STEIN, E.: *An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element*. Communications in Numerical Methods in Engineering 11(11) (1995), S. 899–909.

- [30] BETZ, W. / PAPAIOANNOU, I. / STRAUB, D.: *Numerical methods for the discretization of random fields by means of the Karhunen–Loève expansion*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 271 (2014), S. 109–129.
- [31] BISCHL, B. / MERSMANN, O. / TRAUTMANN, H. / WEIHS, C.: *Resampling Methods for Meta-Model Validation with Recommendations for Evolutionary Computation*. Evolutionary Computation 20(2) (2012), S. 249–275.
- [32] BLETZINGER, K.-U. / BISCHOFF, M. / RAMM, E.: *A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements*. Computers & Structures 75(3) (2000), S. 321–334.
- [33] BOLOTIN, V.V.: *Statistical methods in the nonlinear theory of elastic shells*. National Aeronautics and Space Administration, Washington, 1962.
- [34] BOLOTIN, V.V.: *Statistical aspects in the theory of structural stability*. In: HERRMANN, G., (HRSG.), *Dynamic Stability of Structures*, S. 67–81, Pergamon Press Ltd., 1967.
- [35] BOX, G.E.P. / BEHNKEN, D.W.: *Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables*. Technometrics 2(4) (1960), S. 455–475.
- [36] BOX, G.E.P. / JENKINS, G.M. / REINSEL, G.C. / LJUNG, G.M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley, 5. Auflage, 2015.
- [37] BOX, G.E.P. / MULLER, M.E.: *A Note on the Generation of Random Normal Deviates*. Annals of Mathematical Statistics 29(2) (1958), S. 610–611.
- [38] BOX, G.E.P. / WILSON, K.B.: *On the Experimental Attainment of Optimum Conditions*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) 13(1) (1951), S. 1–45.
- [39] BREITKOPF, P. / NACEUR, H. / RASSINEUX, A. / VILLON, P.: *Moving least squares response surface approximation: Formulation and metal forming applications*. Computers & Structures 83(17) (2005), S. 1411–1428.
- [40] BRENDDEL, B.: *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [41] BRENNER, C.E.: *Ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Systemuntersuchungen mit Hilfe der Methode der Stochastischen Finiten Elemente*. Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur, Universität Innsbruck, 1995.
- [42] BROGGI, M. / FAES, M. / PATELLI, E. / GOVERS, Y. / MOENS, D. / BEER, M.: *Comparison of Bayesian and interval uncertainty quantification: Application to the AIRMOD test structure*. In: *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, S. 1–8, 2017.

- [43] BROGGI, M. / SCHUËLLER, G.I.: *Efficient modeling of imperfections for buckling analysis of composite cylindrical shells*. Engineering Structures 33(5) (2011), S. 1796–1806.
- [44] BUDIANSKY, B. / HUTCHINSON, J.W.: *A survey of some buckling problems*. AIAA Journal 4(9) (1966), S. 1505–1510.
- [45] BUDIANSKY, B. / HUTCHINSON, J.W.: *Buckling of circular cylindrical shells under axial compression*. In: *Contributions to the Theory of Aircraft Structures*, S. 239–260, Delft Univ. Press, 1972.
- [46] BUSCEMA, M.: *Back Propagation Neural Networks*. Substance Use & Misuse 33(2) (1998), S. 233–270.
- [47] CHARMPIS, D.C. / SCHUËLLER, G.I. / PELLISSETTI, M.F.: *The need for linking micromechanics of materials with stochastic finite elements: A challenge for materials science*. Computational Materials Science 41(1) (2007), S. 27–37.
- [48] CHEN, J. / WAN, Z.: *A compatible probabilistic framework for quantification of simultaneous aleatory and epistemic uncertainty of basic parameters of structures by synthesizing the change of measure and change of random variables*. Structural Safety 78 (2019), S. 76–87.
- [49] CHOWDHURY, R. / ADHIKARI, S.: *Fuzzy parametric uncertainty analysis of linear dynamical systems: A surrogate modeling approach*. Mechanical Systems and Signal Processing 32 (2012), S. 5–17.
- [50] CHOWDHURY, R. / RAO, B.N. / PRASAD, A.M.: *High-dimensional model representation for structural reliability analysis*. Communications in Numerical Methods in Engineering 25(4) (2009), S. 301–337.
- [51] CHUNG, J. / HULBERT, G.M.: *A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method*. Journal of Applied Mechanics 60(2) (1993), S. 371–375.
- [52] COOLEN, F.P.A.: *On the Use of Imprecise Probabilities in Reliability*. Quality and Reliability Engineering International 20(3) (2004), S. 193–202.
- [53] CRISFIELD, M.A.: *A fast incremental/iterative solution procedure that handles „snap-through“*. In: NOOR, A.K. / MCCOMB, H.G., (HRSG.), *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, S. 55–62, Pergamon Press Ltd., 1981.
- [54] CUKIER, H. / LEVINE, R. / SHULER, K.: *Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems*. Journal of Computational Physics 26(1) (1978), S. 1–42.

- [55] CUKIER, R. / FORTUIN, C. / SHULER, K. / PETSCHKE, A. / SCHAIBLY, J.: *Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I Theory.* The Journal of Chemical Physics 59(8) (1973), S. 3873–3878.
- [56] CURBACH, M. / PROSKE, D.: *Einführung in die Sicherheitsbetrachtungen von Bauwerken.* In: PROSKE, D., (HRSG.), *1. Dresdner Probabilistik-Symposium Sicherheit und Risiko im Bauwesen*, Dresden, 2003.
- [57] DANCY, R. / JACOBS, D.: *The initial imperfection data bank at the Delft University of Technology: Part II.* 1988.
- [58] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
- [59] DE GROOF, V. / OBERGUGGENBERGER, M. / HALLER, H. / DEGENHARDT, R. / KLING, A.: *Quantitative Assessment of Random Field Models in FE Buckling Analyses of Composite Cylinders.* In: J. EBERHARDSTEINER ET AL., (HRSG.), *Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, 2012.
- [60] DEGENHARDT, R. / KLING, A. / BETHGE, A. / ORF, J. / KÄRGER, L. / ZIMMERMANN, R. / ROHWER, K. / CALVI, A.: *Investigations on imperfection sensitivity and deduction of improved knock-down factors for unstiffened CFRP cylindrical shells.* Composite Structures 92(8) (2010), S. 1939–1946.
- [61] DEMPSTER, A.P.: *A Generalization of Bayesian Inference.* Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological) 30(2) (1968), S. 205–232.
- [62] DENG, T.-B.: *Linear approach to the least-squares multidimensional polynomial fitting.* Proceedings of ICICS, 1997 International Conference on Information, Communications and Signal Processing. Theme: Trends in Information Systems Engineering and Wireless Multimedia Communications 3 (1997), S. 1288–1292.
- [63] DEY, S. / MUKHOPADHYAY, T. / ADHIKARI, S.: *Metamodel based high-fidelity stochastic analysis of composite laminates: A concise review with critical comparative assessment.* Composite Structures 171 (2017), S. 227–250.
- [64] DIN-NORMENAUSSCHUSS BAUWESEN (NABAU): *Eurocode - Grundlagen der Tragwerksplanung; Deutsche Fassung EN 1990:2002 + A1:2005 + A1:2005/AC:2010.* Deutsches Institut für Normung e.V., 2010.
- [65] DIN-NORMENAUSSCHUSS BAUWESEN (NABAU): *Eurocode 3 - Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen; Deutsche Fassung EN 1993-1-6:2007 + AC:2009 + A1:2017.* Deutsches Institut für Normung e.V., 2017.
- [66] DITLEVSEN, O.: *Random Field Interpolation Between Point by Point Measured Properties.* In: SPANOS P.D., BREBBIA C.A., (HRSG.), *Computational Stochastic Mechanics* Springer, Dordrecht, 1991.

- [67] DONNELL, L.H. / WAN, C.C.: *Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression*. Journal of Applied Mechanics 17 (1950), S. 73.
- [68] DUBOIS, D.: *Possibility theory and statistical reasoning*. Computational Statistics & Data Analysis 51(1) (2006), S. 47–69.
- [69] DUBOIS, D. / PRADE, H.: *Possibility theory: An approach to computerized processing of uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [70] DUBOURG, V.: *Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization*. Dissertation, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2011.
- [71] DVORKIN, E.N. / BATHE, K.-J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*. Engineering Computations 1(1) (1984), S. 77–88.
- [72] DYNAMORE: <https://www.dynamore.de>. 2020.
- [73] DYNARDO: <https://www.dynardo.de>. 2020.
- [74] EDLER, P. / FREITAG, S. / KREMER, K. / MESCHKE, G.: *Optimization Approaches for the Numerical Design of Structures Under Consideration of Polymorphic Uncertain Data*. ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems Part B: Mechanical Engineering 5(4) (2019).
- [75] EIGEL, M. / GRASEDYCK, L. / GRUHLKE, R. / MOSER, D.: *Low rank surrogates for polymorphic fields with application to fuzzy-stochastic partial differential equations*. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik (WIAS), 2019.
- [76] ELISHAKOFF, I.: *Simulation of space-random fields for solution of stochastic boundary-value problems*. The Journal of the Acoustical Society of America 65(2) (1979), S. 399–403.
- [77] ELISHAKOFF, I.: *How to introduce the imperfection sensitivity concept into design*. In: THOMPSON, J.M.T. / HUNT, G.B., (HRSG.), *Collapse buckling of structures in theory and practice*, S. 345–357, Cambridge, 1983.
- [78] ELISHAKOFF, I.: *Probabilistic resolution of the twentieth century conundrum in elastic stability*. Thin-Walled Structures 59 (2012), S. 35–57.
- [79] ELISHAKOFF, I. / ARBOCZ, J.: *Reliability of axially compressed cylindrical shells with random axisymmetric imperfections*. International Journal of Solids and Structures 18(7) (1982), S. 563–585.
- [80] ELISHAKOFF, I. / VAN MANEN, S. / VERMEULEN, P.G. / ARBOCZ, J.: *First-order second-moment analysis of the buckling of shells with random imperfections*. AIAA Journal 25(8) (1987), S. 1113–1117.

-
- [81] ERINGEN, A.C.: *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- [82] ESSLINGER, M. / MELZER, H.W.: *Über den Einfluß von Bodensenkungen auf den Spannungs- und Deformationszustand von Silos*. Stahlbau (1980), S. 129–134.
- [83] FABER, M.H.: *On the Treatment of Uncertainties and Probabilities in Engineering Decision Analysis*. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering 127(3) (2005), S. 243–248.
- [84] FAES, M. / MOENS, D.: *Cross-dependence between interval fields in Finite Element models: definition and analysis*. In: *Proceedings of ESREL*, Hannover, 2019 Research Publishing Services; Singapore.
- [85] FAES, M. / MOENS, D.: *Imprecise random field analysis with parametrized kernel functions*. Mechanical Systems and Signal Processing 134 (2019).
- [86] FAHRMEIR, L. / HEUMANN, C. / KÜNSTLER, R. / PIGEOT, I. / TUTZ, G.: *Statistik – Der Weg zur Datenanalyse*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- [87] FANG, H. / HORSTEMEYER, M.F.: *Global response approximation with radial basis functions*. Engineering Optimization 38(4) (2006), S. 407–424.
- [88] FERRARI, S. / STENGEL, R.F.: *Smooth function approximation using neural networks*. IEEE Transactions on Neural Networks 16(1) (2005), S. 24–38.
- [89] FERSON, S. / KREINOVICH, V. / GRINZBURG, L. / MYERS, D. / SENTZ, K.: *Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures*. Sandia journal manuscript, 2015.
- [90] FERSON, S. / TUCKER, W.T.: *Probability boxes as info-gap models*. In: *NAFIPS 2008 - 2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*, S. 1–6, 2008.
- [91] FINA, M. / WEBER, P. / WAGNER, W.: *A fuzzy stochastic correlation model for geometric imperfections of cylindrical shells*. In: *13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP13)*, Seoul, 2019.
- [92] FINA, M. / WEBER, P. / WAGNER, W.: *Modeling of Aleatory and Epistemic Uncertainties in Probabilistic Design of Cylindrical Shells*. In: *Proceedings of ESREL*, Hannover, 2019.
- [93] FINA, M. / WEBER, P. / WAGNER, W.: *Polymorphic uncertainty modeling for the simulation of geometric imperfections in probabilistic design of cylindrical shells*. Structural Safety 82 (2020).
- [94] FLÜGGE, W.: *Die Stabilität der Kreiszylinderschale*. Ingenieur-Archiv 3 (1932), S. 463–506.

- [95] FORRESTER, A.I.J. / KEANE, A.J.: *Recent advances in surrogate-based optimization*. Progress in Aerospace Sciences 45(1) (2009), S. 50–79.
- [96] FORRESTER, A.I.J. / SÓBSTER, A. / KEANE, A.J.: *Engineering design via surrogate modelling: A practical guide*. Wiley, 2008.
- [97] FREITAG, S.: *Modellfreie numerische Prognosemethoden zur Tragwerksanalyse*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2010.
- [98] FREITAG, S. / EDLER, P. / KREMER, K. / HOFMANN, M. / MESCHKE, G.: *Optimization Approaches for Durable Reinforced Concrete Structures considering Interval and Stochastic Parameter Uncertainty*. PAMM 18(1) (2018).
- [99] FREITAG, S. / EDLER, P. / KREMER, K. / MESCHKE, G.: *Multilevel surrogate modeling approach for optimization problems with polymorphic uncertain parameters*. International Journal of Approximate Reasoning 119 (2020), S. 81–91.
- [100] FREITAG, S. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Recurrent neural networks for fuzzy data*. Integrated Computer-Aided Engineering 18(3) (2011), S. 265–280.
- [101] FREUDENTHAL, A.M.: *The Safety of Structures*. Transactions of the American Society of Civil Engineers 112(1) (1947), S. 125–159.
- [102] FRIEDMAN, J.H.: *Multivariate Adaptive Regression Splines*. The Annals of Statistics 19(1) (1991), S. 1–67.
- [103] GANO, S. / KIM, H. / BROWN, D.: *Comparison of Three Surrogate Modeling Techniques: Datascape, Kriging, and Second Order Regression*. In: *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, 2006.
- [104] GRAF, W. / FREITAG, S. / SICKERT, J.-U. / KALISKE, M.: *Structural Analysis with Fuzzy Data and Neural Network Based Material Description*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering 27(9) (2012), S. 640–654.
- [105] GRAF, W. / GÖTZ, M. / KALISKE, M.: *Structural design with polymorphic uncertainty models*. In: *6th International Conference on Reliable Engineering Computing*, Chicago, 2014.
- [106] GRAF, W. / GÖTZ, M. / KALISKE, M.: *Analysis of dynamical processes under consideration of polymorphic uncertainty*. Structural Safety 52 (2015), S. 194–201.
- [107] GRAF, W. / MÖLLER, B. / RUGE, P.: *Unschärfe Tragstrukturen in Raum und Zeit*. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 53(3–4) (2004), S. 121–126.
- [108] GRAF, W. / MÖLLER, B. / BEER, M.: *Zum Einfluss der Datenbasis auf Tragwerkssicherheit und Versagensrisiko*. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität Dresden 3–4(55) (2006), S. 49–53.

-
- [109] GRAF, W. / VASSILEV, T.: *Einführung in computerorientierte Methoden der Baustatik*. Ernst & Sohn Verlag, 2006.
- [110] GREVE, R.: *Kontinuumsmechanik – Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.
- [111] GRIGORIU, M.: *Crossings of Non-Gaussian Translation Processes*. Journal of Engineering Mechanics 110(4) (1984), S. 610–620.
- [112] GRUHN, V. / FRANZ, T.: *Es gibt nicht die eine künstliche Intelligenz*. Erschienen in Computerwoche online, Juni 2019.
- [113] GRUTTMANN, F.: *Theorie und Numerik schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen*. Bericht Nr. F88/1, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1988.
- [114] GRUTTMANN, F. / STEIN, E. / WRIGGERS, P.: *Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations*. Ingenieur-Archiv 59(1) (1989), S. 54–67.
- [115] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194(39) (2005), S. 4279–4300.
- [116] GÖTZ, M.: *Numerische Entwurfmethoden unter Berücksichtigung polymorpher Unschärfe – Aspekte zeitlicher und räumlicher Abhängigkeiten*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2017.
- [117] GÖTZ, M. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Structural analysis with spatial varying polymorphic uncertain parameters – fuzzy fields using spectral decomposition*. In: *Proceedings of 6th Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications (APSSRA)*, S. 528–533, 2016.
- [118] GÖTZ, M. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Enhanced uncertain structural analysis with time- and spatial-dependent (functional) fuzzy results*. Mechanical Systems and Signal Processing 119 (2019), S. 23–38.
- [119] HAN, S.: *Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse als Beitrag zur Bewertung der Zuverlässigkeit adaptronischer Struktursysteme*. Dissertation, Fachbereich Maschinenbau, TU Darmstadt, 2011.
- [120] HANSELOWSKI, A. / IHRLE, S. / HANSS, M.: *A fuzzy model updating technique motivated by Bayesian inference*. In: *Proceedings of the 1st ECCOMAS Thematic Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering*, S. 548–559, 2015.
- [121] HANSEN, N.: *The CMA Evolution Strategy: A Comparing Review*. S. 75–102, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

- [122] HANSEN, N.: *The CMA Evolution Strategy: A Tutorial*. Cornell University, arXiv, 2016.
- [123] HANSEN, P.C. / PEREYRA, V. / SCHERER, G.: *Least squares data fitting with applications*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.
- [124] HARDY, R.L.: *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*. Journal of Geophysical Research 76(8) (1971), S. 1905–1915.
- [125] HENNING, C. / RICKEN, T.: *Polymorphic uncertainty quantification for stability analysis of fluid saturated soil and earth structures*. PAMM 17(1) (2017), S. 59–62.
- [126] HERMANN, M.: *Numerische Mathematik*. 3. überarbeitete und erweiterte Auflage Oldenbourg, 2012.
- [127] HÜHNE, C.: *Robuster Entwurf beulgefährdeter, unversteifter Kreiszyklinderschalen aus Faserverbundwerkstoff*. Dissertation, Technischen Universität Carolowilhelmina zu Braunschweig, 2005.
- [128] HÜHNE, C. / ROLFES, R. / BREITBACH, E. / TESSMER, J.: *Robust design of composite cylindrical shells under axial compression – Simulation and validation*. Thin-Walled Structures 46(7) (2008), S. 947–962.
- [129] HILBER, H.M. / HUGHES, T.J.R. / TAYLOR, R.L.: *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*. Earthquake Engineering & Structural Dynamics 5(3) (1977), S. 283–292.
- [130] HILBURGER, M.W. / STARNES, J.H.: *Effects of imperfections on the buckling response of compression-loaded composite shells*. International Journal of Non-Linear Mechanics 37(4) (2002), S. 623–643.
- [131] HILL, W.J. / HUNTER, W.G.: *A Review of Response Surface Methodology: A Literature Survey*. Technometric 8(4) (1966), S. 571–590.
- [132] HÄMMERLIN, G. / HOFFMANN, K.-H.: *Numerische Mathematik*. Springer, 4. Auflage, 1994.
- [133] HOFER, E.: *When to separate uncertainties and when not to separate*. Reliability Engineering & System Safety 54(2) (1996), S. 113–118.
- [134] HOFFMAN, F.O. / HAMMONDS, J.S.: *Propagation of Uncertainty in Risk Assessments: The Need to Distinguish Between Uncertainty Due to Lack of Knowledge and Uncertainty Due to Variability*. Risk Analysis 14(5) (1994), S. 707–712.
- [135] HOLZAPFEL, A.G.: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.

- [136] HOMMA, T. / SALTELLI, A.: *Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models*. Reliability Engineering & System Safety 52(1) (1996), S. 1–17.
- [137] HORNIK, K. / STINCHCOMBE, M. / WHITE, H.: *Multilayer feedforward networks are universal approximators*. Neural Networks 2(5) (1989), S. 359–366.
- [138] HOSE, D. / HANSS, M.: *Towards a general theory for data-based possibilistic parameter inference*. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering*, Crete, 2019.
- [139] HUGHES, T.J.R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 2012.
- [140] HUTCHINSON, J.W.: *Knockdown factors for buckling of cylindrical and spherical shells subject to reduced biaxial membrane stress*. International Journal of Solids and Structures 47(10) (2010), S. 1443–1448.
- [141] IGUSA, T. / BUONOPANE, S.G. / ELLINGWOOD, B.R.: *Bayesian analysis of uncertainty for structural engineering applications*. Structural Safety 24(2) (2002), S. 165–86.
- [142] IOOSS, B. / BOUSSOUF, L. / FEUILLARD, V. / MARREL, A.: *Numerical studies of the metamodel fitting and validation processes*. International Journal of Advances in Systems and Measurements 3 (2010), S. 11–21.
- [143] ISHIGAMI, T. / HOMMA, T.: *An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models*. In: *Proceedings. First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis*, S. 398–403, 1990.
- [144] JAHN, H. / REULKE, R.: *Systemtheoretische Grundlagen optoelektronischer Sensoren*. John Wiley & Sons, 2009.
- [145] JANCZYK, M. / PFISTER, R.: *Inferenzstatistik verstehen – Von A wie Signifikanztest bis Z wie Konfidenzintervall*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 3. Auflage, 2013.
- [146] JIN, R. / CHEN, W. / SIMPSON, T.W.: *Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modelling criteria*. Structural and Multidisciplinary Optimization 23(1) (2001), S. 1–13.
- [147] JOHNSON, M.E. / MOORE, L.M. / YLVISAKER, D.: *Minimax and maximin distance designs*. Journal of Statistical Planning and Inference 26(2) (1990), S. 131–148.
- [148] KAMYAB, H. / PALMER, S.C.: *Analysis of Displacements and Stresses in Oil Storage Tanks Caused by Differential Settlement*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Mechanical Engineering Science 203(1) (1989), S. 61–70.

- [149] KASTIAN, S. / MOSER, D. / REESE, S. / GRASEDYCK, L.: *Proper orthogonal decomposition (POD) combined with hierarchical tensor approximation (HTA) in the context of uncertain parameters*. Cornell University, arXiv, 2019.
- [150] KELLER, H.B.: *Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems*. In: RABINOWITZ, P., (HRSG.), *Applications of Bifurcation Theory*, S. 359–384, Academic Press, New York, 1977.
- [151] KEPPLER, J. / HERATH, M. / PEARCE, G. / PRUSTY, G. / THOMSON, R. / DEGENHARDT, R.: *Improved stochastic methods for modelling imperfections for buckling analysis of composite cylindrical shells*. *Engineering Structures* 100 (2015), S. 385–398.
- [152] KERSAUDY, P. / SUDRET, B. / VARSIER, N. / PICON, O. / WIART, J.: *A new surrogate modeling technique combining Kriging and polynomial chaos expansions – Application to uncertainty analysis in computational dosimetry*. *Journal of Computational Physics* 286 (2015), S. 103–117.
- [153] KIENCKE, U. / SCHWARZ, M. / WEICKERT, T.: *Signalverarbeitung: Zeit-Frequenz-Analyse und Schätzverfahren*. 2009.
- [154] KIUREGHIAN, A.D. / DITLEVSEN, O.: *Aleatory or epistemic? Does it matter?* *Structural Safety* 31(2) (2009), S. 105–112.
- [155] KLARMANN, S. / WAGNER, W.: *Enhanced studies on a composite time integration scheme in linear and non-linear dynamics*. *Computational Mechanics* 55(3) (2015), S. 455–468.
- [156] KLEIJNEN, J.P.C.: *Statistical tools for simulation practitioners*. Dekker, 1987.
- [157] KLEIJNEN, J.P.C. / SARGENT, R.G.: *A methodology for fitting and validating metamodels in simulation*. *European Journal of Operational Research* 120 (2000), S. 14–29.
- [158] KLINGMÜLLER, O. / BOURGUND, U.: *Sicherheitskonzept auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1992.
- [159] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3d material models*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74(6) (2008), S. 945–970.
- [160] KLOMPÉ, A.W.H. / DEN REYER, P.C.: *The initial imperfection data bank at the Delft University of Technology: Part III*. 1989.
- [161] KNÖDEL, P. / UMMENHOFER, T.: *Regeln für die Berechnung von Behältern mit der FEM*. *Stahlbau* 86(4) (2017), S. 325–339.
- [162] KNEBEL, K.: *Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1997.

-
- [163] KOHAVI, R.: *A study of cross-validation and bootstrap for accuracy estimation and model selection*. In: *International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, S. 1137–1143, 1995.
- [164] KOITER, W.T.: *On the stability of elastic equilibrium*. Dissertation, Polytechnic Institute Delft, English Translation (1967): NASA TT F-10, 1945.
- [165] KOLANEK, K. / JENDO, S.: *Random field models of geometrically imperfect structures with “clamped” boundary conditions*. *Probabilistic Engineering Mechanics* 23(2) (2008), S. 219–226.
- [166] KONAKLI, K. / SUDRET, B.: *Reliability analysis of high-dimensional models using low-rank tensor approximations*. *Probabilistic Engineering Mechanics* 46 (2016), S. 18–36.
- [167] KRIEGESMANN, B. / MÖHLE, M. / ROLFES, R.: *Sample size dependent probabilistic design of axially compressed cylindrical shells*. *Thin-Walled Structures* 74 (2014), S. 222–231.
- [168] KRIEGESMANN, B. / ROLFES, R. / HÜHNE, C. / KLING, A.: *Fast probabilistic design procedure for axially compressed composite cylinders*. *Composite Structures* 93(12) (2011), S. 3140–3149.
- [169] KRIEGESMANN, B. / ROLFES, R. / HÜHNE, C. / TESSMER, J. / ARBOCZ, J.: *Probabilistic design of axially compressed composite cylinders with geometric and loading imperfections*. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 10(04) (2010), S. 623–644.
- [170] KRIGE, D.G.: *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy* 52(6) (1951), S. 119–139.
- [171] KÜTTING, H. / SAUER, M.J.: *Elementare Stochastik – Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [172] LAGAROS, N.D. / PAPADOPOULOS, V.: *Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections*. *International Journal of Solids and Structures* 43(22) (2006), S. 6948–6964.
- [173] LAGAROS, N.D. / STEFANOPOULOS, G. / PAPADRAKAKIS, M.: *An enhanced hybrid method for the simulation of highly skewed non-Gaussian stochastic fields*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(45) (2005), S. 4824–4844.
- [174] LAMMERING, R.: *Structural analysis and optimization of a propfan-blade by use of the finite element method*. *Engineering Computations* 7(4) (2020), S. 327–337.
- [175] LANCASTER, P. / SALKAUSKAS, K.: *Surfaces generated by moving least squares methods*. *Mathematics of Computation* 37(155) (1981), S. 141–158.

- [176] LATANIOTIS, C. / MARELLI, S. / SUDRET, B.: *The Gaussian process modelling module in UQLab*. Soft Computing in Civil Engineering 2(3) (2017), S. 91–116.
- [177] LATANIOTIS, C. / WICAKSONO, D. / MARELLI, S. / SUDRET, B.: *UQLab user manual – Kriging (Gaussian process modeling)*. Chair of Risk, Safety and Uncertainty Quantification, ETH Zurich, Switzerland, 2019.
- [178] LAUTERBACH, S.: *Numerische Stabilitätsuntersuchung dünnwandiger Tragwerke unter dem Einfluss stochastischer Imperfektionen*. Dissertation, KIT, Institut für Baustatik, 2014.
- [179] LAUTERBACH, S. / FINA, M. / WAGNER, W.: *Influence of stochastic geometric imperfections on the load-carrying behaviour of thin-walled structures using constrained random fields*. Computational Mechanics 62(5) (2018), S. 1107–1125.
- [180] LEE, T. / JUNG, J.: *Kriging Metamodel Based Optimization*. In: ARORA, J. S., (HRSG.), *Optimization of Structural and Mechanical Systems*, S. 445–484, World Scientific, 2007.
- [181] LEEKWIJCK, W.V. / KERRE, E.E.: *Defuzzification: Criteria and classification*. Fuzzy Sets and Systems 108(2) (1999), S. 159–178.
- [182] LEHN, J. / WEGMANN, H.: *Einführung in die Statistik*. Teubner, Wiesbaden, 5. Auflage, 2006.
- [183] LEICHSENRING, F. / FUCHS, A. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Application of Recurrent Neural Networks in the numerical analysis of reinforced concrete structures considering polymorphic uncertainty*. PAMM 19(1) (2019).
- [184] LEICHSENRING, F. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Numerical Simulation of Wooden Structures with Polymorphic Uncertainty in Material Properties*. In: *7th International Conference on Reliable Engineering Computing*, Bochum, 2016.
- [185] LI, C.-C. / KIUREGHIAN, A.D.: *Optimal Discretization of Random Fields*. Journal of Engineering Mechanics 119(6) (1993), S. 1136–1154.
- [186] LI, G. / ROSENTHAL, C. / RABITZ, H.: *High Dimensional Model Representations*. The Journal of Physical Chemistry A 105(33) (2001), S. 7765–7777.
- [187] LORENZ, R.: *Die nichtachsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder*. Physikalische Zeitschrift 13 (1911), S. 241–261.
- [188] MACNEAL, R.H.: *A simple quadrilateral shell element*. Computers & Structures 8(2) (1978), S. 175–183.
- [189] MAES, M.A. / FABER, M.H.: *Bayesian framework for managing preferences in decision-making*. Reliability Engineering & System Safety 91(5) (2006), S. 556–569.

- [190] MARREL, A. / IOOSS, B. / VAN DORPE, F. / VOLKOVA, E.: *An efficient methodology for modeling complex computer codes with Gaussian processes*. Computational Statistics & Data Analysis 52(10) (2008), S. 4731–4744.
- [191] MARSDEN, J.E. / HUGHES, T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1994.
- [192] MARTIN, J.D.: *Computational Improvements to Estimating Kriging Metamodel Parameters*. Journal of Mechanical Design 131(8) (2009).
- [193] MATHWORKS: *Matlab. R2019b*. <http://www.mathworks.com>. 2019.
- [194] MAYER, M.: *Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften an-statt nach zulässigen Spannungen*. J. Springer, 1926.
- [195] MCKAY, M.D. / BECKMAN, R.J. / CONOVER, W.J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics 21(2) (1979), S. 239–245.
- [196] MÜCKE, R. / HEGER, A.: *Probabilistische Methoden in der strukturmechanischen Auslegung grosser stationärer Gasturbinen – Anwendung und produktspezifische Anwendungsgrenzen*. In: 1. Dresdner Probabilistik-Workshop, 2008.
- [197] MECKESHEIMER, M.: *A Framework for Metamodel-Based Design: Subsystem Metamodel Assessment and Implementation Issues*. Dissertation, The Pennsylvania State University, Harold and Inge Marcus Department of Industrial and Manufacturing Engineering, 2001.
- [198] MECKESHEIMER, M. / BOOKER, A.J. / BARTON, R.R. / SIMPSON, T.W.: *Computationally Inexpensive Metamodel Assessment Strategies*. AIAA Journal 40(10) (2002), S. 2053–2060.
- [199] MÖLLER, B.: *Fuzzy randomness – a contribution to imprecise probability*. ZAMM–Journal of Applied Mathematics and Mechanics 84(10–11) (2004), S. 754–764.
- [200] MÖLLER, B. / BEER, M.: *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer, 2004.
- [201] MÖLLER, B. / BEER, M.: *Engineering computation under uncertainty – Capabilities of non-traditional models*. Computers & Structures 86(10) (2008), S. 1024–1041.
- [202] MÖLLER, B. / GRAF, W. / BEER, M.: *Fuzzy structural analysis using α -level optimization*. Computational Mechanics 26(6) (2000), S. 547–565.
- [203] MÖLLER, B. / GRAF, W. / BEER, M.: *Fuzzy-Tragwerksanalyse. Tragwerksanalyse mit unscharfen Parameter*. Bauingenieur 75(11) (2000), S. 697–708.

- [204] MÖLLER, B. / GRAF, W. / BEER, M. / SICKERT, J.-U.: *Fuzzy stochastic finite element method*. In: BATHE, K.-J., (HRSG.), *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*, S. 2074–2077, Elsevier Science Ltd., Oxford, 2003.
- [205] MÖLLER, B. / GRAF, W. / BEER, M. / SICKERT, J.-U.: *Das Datenmodell Fuzzy-Zufälligkeit und seine Anwendungsmöglichkeiten im Ingenieurbau*. In: PROSKE, D., (HRSG.), *2. Dresdner Probabilistik-Symposium–Sicherheit und Risiko im Bauwesen*, S. 5, 2004.
- [206] MOENS, D. / DE MUNCK, M. / DESMET, W. / VANDEPITTE, D.: *Numerical dynamic analysis of uncertain mechanical structures based on interval fields*. In: BELYAEV, A.K. / LANGLEY, R.S., (HRSG.), *IUTAM Symposium on the Vibration Analysis of Structures with Uncertainties*, S. 71–83, Dordrecht, 2011 Springer Netherlands.
- [207] MOENS, D. / VANDEPITTE, D.: *A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(12) (2005), S. 1527–1555.
- [208] MONTGOMERY, D.C.: *Design and analysis of experiments*. Wiley, 7. Auflage, 2009.
- [209] MORRIS, M.D. / MITCHELL, T.J.: *Exploratory designs for computational experiments*. *Journal of Statistical Planning and Inference* 43(3) (1995), S. 381–402.
- [210] MULLINS, J. / LING, Y. / MAHADEVAN, S. / SUN, L. / STRACHAN, A.: *Separation of aleatory and epistemic uncertainty in probabilistic model validation*. *Reliability Engineering & System Safety* 147 (2016), S. 49–59.
- [211] MYERS, R.H. / KHURI, A.I. / CARTER, W.H.: *Response Surface Methodology: 1966-1988*. *Technometrics* 31(2) (1989), S. 137–157.
- [212] MYERS, R.H. / MONTGOMERY, D.C.: *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. Wiley Series in Probability and Statistics Wiley, New York, 2. Auflage, 2002.
- [213] NEWMARK, N.M.: *A method of computation for structural dynamics*. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 3(85) (1959), S. 67–94.
- [214] NOOR, A.K. / PETERS, J.M.: *Mixed models and reduced/selective integration displacement models for nonlinear analysis of curved beams*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17(4) (1981), S. 615–631.
- [215] NORDGREN, R.P. / CONTE, J.P.: *On one-dimensional random fields with fixed end values*. *Probabilistic Engineering Mechanics* 14(4) (1999), S. 301–310.
- [216] OAKLEY, J.E. / O’HAGAN, A.: *Probabilistic sensitivity analysis of complex models: A Bayesian approach*. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 66(3) (2004), S. 751–769.

- [217] OBERGUGGENBERGER, M.: *Engineering*. In: AUGUSTIN, T. / COOLEN, F.P.A. / DE COOMAN, G. / TROFFAES, M.C.M., (HRSG.), *Introduction to Imprecise Probabilities*, S. 291–304, Wiley & Sons, Ltd., 2014.
- [218] OBERGUGGENBERGER, M.: *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*. In: *7th International Conference on Reliable Engineering Computing*, Bochum, 2016.
- [219] OBERKAMPF, W.L. / DELAND, S.M. / RUTHERFORD, B.M. / DIEGERT, K.V. / ALVIN, K.F.: *Error and uncertainty in modeling and simulation*. Reliability Engineering & System Safety 75(3) (2002), S. 333–357.
- [220] OWEN, A.B.: *Controlling Correlations in Latin Hypercube Samples*. Journal of the American Statistical Association 89(428) (1994), S. 1517–1522.
- [221] OWEN, N.E. / CHALLENGOR, P. / MENON, P.P. / BENNANI, S.: *Comparison of Surrogate-Based Uncertainty Quantification Methods for Computationally Expensive Simulators*. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification 5(1) (2017), S. 403–435.
- [222] PANNIER, S.: *Effizienter numerischer Entwurf von Strukturen und Prozessen bei Unschärfe*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2011.
- [223] PANNIER, S. / WAURICK, M. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Solutions to problems with imprecise data – An engineering perspective to generalized uncertainty models*. Mechanical Systems and Signal Processing 37(1) (2013), S. 105–120.
- [224] PAPADOPOULOS, V. / IGLESIS, P.: *The effect of non-uniformity of axial loading on the buckling behaviour of shells with random imperfections*. International Journal of Solids and Structures 44(18) (2007), S. 6299–6317.
- [225] PAPADOPOULOS, V. / PAPADRAKAKIS, M.: *The effect of material and thickness variability on the buckling load of shells with random initial imperfections*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194(12) (2005), S. 1405–1426.
- [226] PAPADOPOULOS, V. / STEFANOPOULOS, G. / PAPADRAKAKIS, M.: *Buckling analysis of imperfect shells with stochastic non-Gaussian material and thickness properties*. International Journal of Solids and Structures 46(14) (2009), S. 2800–2808.
- [227] PAPAIOANNOU, I. / DAUB, M. / DRIESCHNER, M. / DUDDECK, F. / EHRE, M. / EICHNER, L. / EIGEL, M. / GÖTZ, M. / GRAF, W. / GRASEDYCK, L. / GRUHLKE, R. / HÖMBERG, D. / KALISKE, M. / MOSER, D. / PETRYNA, Y. / STRAUB, D.: *Assessment and design of an engineering structure with polymorphic uncertainty quantification*. GAMM-Mitteilungen 42(2) (2019).
- [228] PARISCH, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik – Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2003.

- [229] PARRY, G.W.: *The characterization of uncertainty in Probabilistic Risk Assessments of complex systems*. Reliability Engineering & System Safety 54(2) (1996), S. 119–126.
- [230] PATELLI, E. / ALVAREZ, D.A. / BROGGI, M. / DE ANGELIS, M.: *Uncertainty Management in Multidisciplinary Design of Critical Safety Systems*. Journal of Aerospace Information Systems 12(1) (2015), S. 140–169.
- [231] PEHERSTORFER, B. / WILLCOX, K. / GUNZBURGER, M.: *Optimal Model Management for Multifidelity Monte Carlo Estimation*. SIAM Journal on Scientific Computing 38(5) (2016), S. A3163–A3194.
- [232] PEHERSTORFER, B. / WILLCOX, K. / GUNZBURGER, M.: *Survey of Multifidelity Methods in Uncertainty Propagation, Inference, and Optimization*. SIAM Review 60(3) (2018), S. 550–591.
- [233] PETER, J.: *Zur Stabilität von Kreiszyinderschalen unter ungleichmäßig verteilten axialen Randbelastungen*. Mitteilungen des Instituts für Statik der Technischen Universität Hannover Nr. 19, 1974.
- [234] PFLÜGER, A.: *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 1975.
- [235] PROPPE, C.: *Reliability Estimation with Multi-Fidelity Simulation Methods*. In: *Proceedings of ESREL*, Hannover, 2019.
- [236] QUARTERONI, A. / SACCO, R. / SALERI, F.: *Numerische Mathematik*. Band 2, Springer, 2002.
- [237] QUEIPO, N.V. / HAFTKA, R.T. / SHYY, W. / GOEL, T. / VAIDYANATHAN, R. / TUCKER, P.K.: *Surrogate-based analysis and optimization*. Progress in Aerospace Sciences 41(1) (2005), S. 1–28.
- [238] RABITZ, H. / ALIŞ, Ö.F.: *General foundations of high-dimensional model representations*. Journal of Mathematical Chemistry 25(2) (1999), S. 197–233.
- [239] RABITZ, H. / ALIŞ, Ö.F. / SHORTER, J. / SHIM, K.: *Efficient input-output model representations*. Computer Physics Communications 117(1) (1999), S. 11–20.
- [240] RAFIQ, M.Y. / BUGMANN, G. / EASTERBROOK, D.J.: *Neural network design for engineering applications*. Computers & Structures 79(17) (2001), S. 1541–1552.
- [241] RAMM, E.: *Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points*. In: WUNDERLICH, W. / STEIN, E. / K.-J., BATHE, (HRSG.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.

- [242] RAMM, E. / WALL, W.A.: *Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 60(1) (2004), S. 381–427.
- [243] RASMUSSEN, C.E. / WILLIAMS, C.K.I.: *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, 2006.
- [244] RATZERSDORFER, J.: *Buchbesprechung: Dr.-Ing. Max Mayer, Duisburg. Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 6(5) (1926), S. 421.
- [245] REH, S.: *Zuverlässigkeitsanalyse komplexer Bauteile mit Hilfe der stochastischen Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1994.
- [246] REUTER, U.: *Application of Non-convex Fuzzy Variables to Fuzzy Structural Analysis*. In: DUBOIS, D. / LUBIANO, M.A. / PRADE, H. / GIL, M.Á. / GRZEGORZEWSKI, P. / HRYNIEWICZ, O., (HRSG.), *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*, S. 369–375 Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [247] REUTER, U.: *Modellierung ungewisser Daten des Bauingenieurwesens und Anwendung der Modelle in Statik und Dynamik*. Habilitationsschrift, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2009.
- [248] REUTER, U.: *Ungewissheit im Bauingenieurwesen–Spezifikation, Modellierung und Berechnung*. In: JESCHKE, S. / JAKOBS, E.-M. / DRÖGE, A., (HRSG.), *Exploring Uncertainty*, S. 179–208, Springer, 2013.
- [249] REUTER, U. / SCHIRWITZ, U. / SCHERER, R.J.: *Fuzzy Methoden zur Berücksichtigung epistemischer Ungewissheit in Planung und Controlling*. S. 289–305, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [250] REUTER, U. / SICKERT, J.-U. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Modeling and Processing of Uncertainty in Civil Engineering by Means of Fuzzy Randomness*. In: ERMOLIEV, Y. / MAKOWSKI, M. / MARTI, K., (HRSG.), *Managing Safety of Heterogeneous Systems*, S. 291–306, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [251] RIEDMILLER, M. / BRAUN, H.: *A direct adaptive method for faster backpropagation learning: the RPROP algorithm*. In: *IEEE International Conference on Neural Networks*, S. 586–591, 1993.
- [252] RIKS, E.: *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*. Journal of Applied Mechanics 39(4) (1972), S. 1060–1065.
- [253] RIKS, E.: *Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 47(3) (1984), S. 219–259.

- [254] ROBERTSON, A.: *The strength of tubular struts*. Proceedings of the Royal Society of London 121(788) (1928), S. 558–585.
- [255] ROJAS, R.: *Theorie der neuronalen Netze: Eine systematische Einführung*. Springer-Lehrbuch Springer, Berlin, 4. Auflage, 1996.
- [256] ROTTER, J.M.: *Advances in understanding shell buckling phenomena and their characterisation for practical design*. In: GIZEJOWSKI, M.A. / KOWLOWSKI, A. / MARCINOWSKI, J. / ZIOLKO, J., (HRSG.), *Recent Progress in Steel & Composite Structures*, Taylor & Francis Group, London, 2016.
- [257] ROTTER, J.M.: *The new method of Reference Resistance Design for shell structures*. In: *International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures*, S. 623–630, Timisoara, 2016.
- [258] ROTTER, J.M.: *Shell buckling transformed: Mechanics, design processes and their inter-relation*. Stahlbau 86(4) (2017), S. 315–324.
- [259] RUNGE, C.: *Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten*. Zeitschrift für Mathematik und Physik 46 (1901), S. 224–243.
- [260] RUNKLER, T.A. / GLESNER, M.: *Defuzzification As Crisp Decision Under Fuzzy Constraints – New Aspects of Theory and Improved Defuzzification Algorithms*. In: KRUSE, R. / GEBHARDT, J. / PALM, R., (HRSG.), *Fuzzy-Systems in Computer Science, Artificial Intelligence / Künstliche Intelligenz*, S. 255–264, Vieweg+Teubner Verlag, 1994.
- [261] RYBERG, A.-B. / DOMEIJ BÄCKRYD, R. / NILSSON, L.: *Metamodel-Based Multidisciplinary Design Optimization for Automotive Applications*. Division of Solid Mechanics, Linköping University, 2012.
- [262] SACKS, J. / WELCH, W.J. / MITCHELL, T.J. / WYNN, H.P.: *Design and Analysis of Computer Experiments*. Statistical Science 4(4) (1989), S. 409–423.
- [263] SALTELLI, A. / ANNONI, P. / AZZINI, I. / CAMPOLONGO, F. / RATTO, M. / TARANTOLA, S.: *Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index*. Computer Physics Communications 181(2) (2010), S. 259–270.
- [264] SALTELLI, A. / CHAN, K. / SCOTT, E.M.: *Sensitivity Analysis*. John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [265] SALTELLI, A. / RATTO, M. / ANDRES, T. / CAMPOLONGO, F. / CARIBONI, J. / GATELLI, D. / SAISANA, M. / TARANTOLA, S.: *Global Sensitivity Analysis – The Primer*. John Wiley & Sons Ltd., 2008.
- [266] SALTELLI, A. / SOBOLOV, I.M.: *About the use of rank transformation in sensitivity analysis of model output*. Reliability Engineering & System Safety 50(3) (1995), S. 225–239.

- [267] SALTELLI, A. / TARANTOLA, S. / CHAN, K.P.-S.: *A Quantitative Model-Independent Method for Global Sensitivity Analysis of Model Output*. Technometrics 41(1) (1999), S. 39–56.
- [268] SANSOUR, C.: *A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of a rotation tensor*. Archive of Applied Mechanics 65(3) (1995), S. 194–216.
- [269] SANTNER, T. / WILLIAMS, B. / NOTZ, W.: *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Springer Series in Statistics, 2003.
- [270] SCHÖBI, R. / SUDRET, B.: *Structural reliability analysis for p-boxes using multi-level meta-models*. Probabilistic Engineering Mechanics 48 (2017), S. 27–38.
- [271] SCHÖBI, R. / SUDRET, B. / WIART, J.: *Polynomial-Chaos-Based Kriging*. International Journal for Uncertainty Quantification 5(2) (2015), S. 171–193.
- [272] SCHENK, C.A. / SCHUËLLER, G.I.: *Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections*. International Journal of Non-Linear Mechanics 38(7) (2003), S. 1119–1132.
- [273] SCHENK, C.A. / SCHUËLLER, G.I.: *Buckling analysis of cylindrical shells with cutouts including random boundary and geometric imperfections*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 196(35) (2007), S. 3424–3434.
- [274] SCHENK, O. / GÄRTNER, K.: *Parallel Sparse Direct Solver PARDISO – User Guide Version 6.0.0*, <https://pardiso-project.org>. 2018.
- [275] SCHIETZOLD, F.N. / GRAF, W. / KALISKE, M.: *Polymorphic Uncertainty Modeling for Optimization of Timber Structures*. PAMM 18(1) (2018).
- [276] SCHIETZOLD, F.N. / SCHMIDT, A. / DANNERT, M.M. / FAU, A. / FLEURY, R.M.N. / GRAF, W. / KALISKE, M. / KÖNKE, C. / LAHMER, T. / NACKENHORST, U.: *Development of fuzzy probability based random fields for the numerical structural design*. GAMM-Mitteilungen 42(1) (2019).
- [277] SCHMIDT, A. / HENNING, C. / HERBRANDT, S. / KÖNKE, C. / ICKSTADT, K. / RICKEN, T. / LAHMER, T.: *Numerical studies of earth structure assessment via the theory of porous media using fuzzy probability based random field material descriptions*. GAMM-Mitteilungen 42(1) (2019).
- [278] SCHMIDT, A. / NGUYEN-TUAN, L. / KÖNKE, C. / LAHMER, T.: *Application of Polymorphic Cross-Correlated Random Fields to Material Parameters of Heterogeneous Hydro-Mechanical Coupled Systems*. In: *15th International Probabilistic Workshop & 10th Dresdner Probabilistik Workshop*, Dresden, 2017.
- [279] SCHMIDT, H.: *Stability of steel shell structures: General Report*. Journal of Constructional Steel Research 55(1) (2000), S. 159–181.

- [280] SCHMIDT, H.: *Schalenbeulen im Stahlbau*. Essener Unikate 23 (2004), S. 70–85.
- [281] SCHNEIDER, W.: *Die „ungünstigste“ Imperfektionsform bei stählernen Schalen-tragwerken – eine Fiktion?* Bauingenieur 79(H. 10) (2004), S. 436–442.
- [282] SCHNEIDER, W.: *Ersatzimperfektionen für den numerischen Beulsicherheits-nachweis stählerner Schalentragwerke – State of the Art*. Stahlbau 75(9) (2006), S. 754–760.
- [283] SCHWEIZERHOF, K. / HAUPTMANN, R. / KNEBEL, K. / RAABE, M. / ROTTNER, T.: *Statische und dynamische FE-Stabilitätsuntersuchungen an Siloschalen mit ungleichförmiger Schüttgutfüllung*. Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik, 1998.
- [284] SEIDE, P. / WEINGARTEN, V.I. / MORGAN, E.J.: *The development of design criteria for elastic stability of thin shell structures*. Report STL/TR-60-0000-19425, Space Technology Laboratory (TRW Systems), 1960.
- [285] SERNA, A. / BUCHER, C.: *Advanced Surrogate Models for Multidisciplinary Design Optimization*. In: *6th Weimar Optimization and Stochastic Days*, 2009.
- [286] SHAFER, G.: *A mathematical theory of evidence*. Band 42, Princeton University Press, Princeton, London, 1976.
- [287] SHIELDS, M.D. / ZHANG, J.: *The generalization of Latin hypercube sampling*. Reliability Engineering & System Safety 148 (2016), S. 96–108.
- [288] SICKERT, J.-U.: *Fuzzy-Zufallsfunktionen und ihre Anwendung bei der Tragwerks-analyse und Sicherheitsbeurteilung*. Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Tragwerke, TU Dresden, 2005.
- [289] SICKERT, J.-U. / GRAF, W. / MÖLLER, B.: *Entwicklung und Anwendung der Fuzzy-stochastischen Finite-Elemente-Methode (FSFEM)*. In: HÜLSEMANN, F. / KOWARSCHIK, M. / RÜDE, U., (HRSG.), *18. Symposium Simulationstechnik*, Erlangen, 2005.
- [290] SIEBERTZ, K. / VAN BEBBER, D. / HOCHKIRCHEN, T.: *Statistische Versuchs-planung*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [291] SIENZ, J.: *Netzgenerierungsprogramm NEGE*. University College, Department of Civil Engineering, University of Swansea, 1992.
- [292] SIMPSON, T.W. / POPLINSKI, J.D. / KOCH, P.N. / ALLEN, J.K.: *Metamodels for Computer-based Engineering Design: Survey and recommendations*. Engineering with Computers 17(2) (2001), S. 129–150.
- [293] SMOLA, A.J. / SCHÖLKOPF, B.: *A tutorial on support vector regression*. Statistics and Computing 14(3) (2004), S. 199–222.

-
- [294] SOBOL', I.M.: *On the Systematic Search in a Hypercube*. SIAM Journal on Numerical Analysis 16(5) (1979), S. 790–793.
- [295] SOBOL', I.M.: *Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models*. Mathematical Modeling and Computational Experiment 18(2) (1993), S. 115–155.
- [296] SOBOL', I.M.: *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and Computers in Simulation 55(1) (2001), S. 271–280.
- [297] SOBOL', I.M.: *Theorems and examples on high dimensional model representation*. Reliability Engineering & System Safety 79(2) (2003), S. 187–193.
- [298] SOBOL', I.M. / KUCHERENKO, S.: *Derivative based global sensitivity measures and their link with global sensitivity indices*. Mathematics and Computers in Simulation 79(10) (2009), S. 3009–3017.
- [299] SOBOL', I.M. / LEVITAN, Y.L.: *On the use of variance reducing multipliers in Monte Carlo computations of a global sensitivity index*. Computer Physics Communications 117(1) (1999), S. 52–61.
- [300] SOBOL', I.M. / TARANTOLA, S. / GATELLI, D. / KUCHERENKO, S. / MAUNTZ, W.: *Estimating the approximation error when fixing unessential factors in global sensitivity analysis*. Reliability Engineering & System Safety 92(7) (2007), S. 957–960.
- [301] SONNEVELD, P.: *CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear systems*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 10(1) (1989), S. 36–52.
- [302] SOUTHWELL, R.V.: *On the General Theory of Elastic Stability*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 213 (1914), S. 187–244.
- [303] STEFANO, G.: *Response variability of cylindrical shells with stochastic non-Gaussian material and geometric properties*. Engineering Structures 33(9) (2011), S. 2621–2627.
- [304] STEFANO, G. / PAPADRAKAKIS, M.: *Stochastic finite element analysis of shells with combined random material and geometric properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193(1) (2004), S. 139–160.
- [305] STEIN, E. / BARTHOLD, F.-J.: *Elastizitätstheorie*. In: MEHLHORN, G., (HRSG.), *Der Ingenieurbau / Werkstoffe / Elastizitätstheorie – Grundwissen*, S. 165–434, Ernst, Wilhelm & Sohn, Berlin, 1996.
- [306] STEIN, E. / LAMMERING, R. / WAGNER, W.: *Stability problems in continuum mechanics and their numerical computation*. Ingenieur-Archiv 59(2) (1989), S. 89–105.

- [307] STEIN, M.: *Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling*. Technometrics 29(2) (1987), S. 143–151.
- [308] STEIN, M.: *Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging*. Springer, 1999.
- [309] SUDRET, B.: *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Habilitationsschrift, Université Blaise-Pascal, Clermont-Ferrand, 2007.
- [310] SUDRET, B.: *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering & System Safety 93(7) (2008), S. 964–979.
- [311] SUDRET, B.: *Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods*. In: PHOON, K.-K. / CHING, J., (HRSG.), *Risk and Reliability in Geotechnical Engineering*, S. 265–300, CRC Press, 2015.
- [312] SUDRET, B. / KIUREGHIAN, A.: *Stochastic Finite Element Methods and Reliability - A State-of-the-Art Report*. Department of Civil Environmental Engineering University of California, Berkeley, 2000.
- [313] SUDRET, B. / MARELLI, S. / WIART, J.: *Surrogate models for uncertainty quantification: An overview*. In: *2017 11th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, S. 793–797, 2017.
- [314] TANG, K. / CONGEDO, P.M. / ABGRALL, R.: *Sensitivity analysis using anchored ANOVA expansion and high-order moments computation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 102(9) (2015), S. 1554–1584.
- [315] TAYLOR, R.L.: *Finite element analysis of linear shell problems*. In: WHITEMAN, J.R., (HRSG.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications VI. MA-FELAP 1987*, S. 191–204, Academic press, London, 1988.
- [316] TAYLOR, R.L.: *FEAP*. <http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/>. 2020.
- [317] THOMPSON, J.M.T. / HUNT, G.W.: *A general theory of elastic stability*. Wiley, 1973.
- [318] TIMOSHENKO, S.: *Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie*. Zeitschrift für Mathematik und Physik 58 (1910).
- [319] TIMOSHENKO, S.: *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, London, 1936.
- [320] TURNER, C.J. / CRAWFORD, R.H.: *Selecting an Appropriate Metamodel: The Case for NURBs Metamodels*. In: *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, S. 759–771, 2008.

- [321] UMMENHOFER, T.: *Stabilitätsverhalten imperfekter zylindrischer Stahlsiloschalen: Experimentelle und numerische Untersuchungen*. Dissertation, Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Universität Karlsruhe, 1996.
- [322] VANMARCKE, E.: *Random fields: analysis and synthesis*. World Scientific, 2010.
- [323] VAPNIK, V.N. / VAPNIK, V.: *Statistical learning theory*. Band 2, Wiley, New York, 1998.
- [324] VERHAEGHE, W. / DESMET, W. / VANDEPITTE, D. / MOENS, D.: *Interval fields to represent uncertainty on the output side of a static FE analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 260 (2013), S. 50–62.
- [325] VERLET, L.: *Computer „Experiments“ on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules*. Physical Review 1(159) (1967), S. 98–103.
- [326] VIERTL, R.: *Statistical methods for non-precise data*. CRC Press, 1995.
- [327] VOŘECHOVSKÝ, M.: *Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods*. Structural Safety 30(4) (2008), S. 337–363.
- [328] VOIGT, M. / MÜCKE, R. / VOGELER, K. / OEVERMANN, M.: *Probabilistic Lifetime Analysis for Turbine Blades Based on a Combined Direct Monte Carlo and Response Surface Approach*. Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 2004.
- [329] WAGNER, H.N.R. / HÜHNE, C.: *Single Perturbation Load Approach (SPLA) to Determine Buckling Loads of Composite Shells Under Axial Compression*. In: OUWEHAND, L., (HRSG.), *Proceedings of the 13th European Conference on Spacecraft Structures, Materials & Environmental Testing*, S. 165, Braunschweig, 2014.
- [330] WAGNER, H.N.R. / HÜHNE, C. / ELISHAKOFF, I.: *Probabilistic and deterministic lower-bound design benchmarks for cylindrical shells under axial compression*. Thin-Walled Structures 146 (2020).
- [331] WAGNER, H.N.R. / HÜHNE, C. / NIEMANN, S.: *Robust knockdown factors for the design of axially loaded cylindrical and conical composite shells – Development and Validation*. Composite Structures 173 (2017), S. 281–303.
- [332] WAGNER, H.N.R. / HÜHNE, C. / NIEMANN, S.: *Buckling of launch-vehicle cylinders under axial compression: A comparison of experimental and numerical knockdown factors*. Thin-Walled Structures 155 (2020).
- [333] WAGNER, H.N.R. / KÖKE, H. / DÄHNE, S. / NIEMANN, S. / HÜHNE, C. / KHAKIMOVA, R.: *Decision tree-based machine learning to optimize the laminate stacking of composite cylinders for maximum buckling load and minimum imperfection sensitivity*. Composite Structures 220 (2019), S. 45–63.

- [334] WAGNER, W.: *Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Element-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Baumechanik, 1985.
- [335] WAGNER, W.: *A finite element model for non-linear shells of revolution with finite rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 29(7) (1990), S. 1455–1471.
- [336] WAGNER, W.: *A path-following algorithm with quadratic predictor*. Computers & Structures 39(3) (1991), S. 339–348.
- [337] WAGNER, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Habilitationsschrift, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1991.
- [338] WAGNER, W.: *Nonlinear Stability Analysis of Shells with the Finite Element Method*. In: RAMMERSTORFER, F.G., (HRSG.), *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*, S. 91–130, Springer-Verlag Wien, 1992.
- [339] WAGNER, W.: *A note on FEM buckling analysis*. Communications in Numerical Methods in Engineering 11(2) (1995), S. 149–158.
- [340] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A simple finite rotation formulation for composite shell elements*. Engineering Computations 11(2) (1994), S. 145–176.
- [341] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 64(5) (2005), S. 635–666.
- [342] WAGNER, W. / WRIGGERS, P.: *A simple method for the calculation of postcritical branches*. Engineering Computations 5(2) (1988), S. 103–109.
- [343] WALZ, N.-P. / BURKHARDT, M. / EBERHARD, P. / HANSS, M.: *A Comprehensive Fuzzy Uncertainty Analysis of a Controlled Nonlinear System With Unstable Internal Dynamics*. Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems 1(4) (2015).
- [344] WANG, G.G. / SHAN, S.: *Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization*. Journal of Mechanical Design 129(4) (2006), S. 370–380.
- [345] WASSILEW, T.: *Nichtlineare Statik räumlicher Stabtragwerke, Beiträge zu den Programmsystemen STATRA (Baustein 8) und STATRA-FEM*. Dissertation, TU Dresden, Fakultät für Bau-, Wasser- und Forstwesen, 1982.
- [346] WEBER, P. / FINA, M. / WAGNER, W.: *Time domain simulation of earthquake excited buildings using a fuzzy stochastic approach*. In: *Proceedings of ESREL*, 2019.

-
- [347] WEBER, PATRICK: *Zur Fuzzy-stochastischen Analyse in der Strukturdynamik mittels Metamodellen*. Masterarbeit, Institut für Baustatik, KIT, 2018.
- [348] WEICHSELBERGER, K.: *The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty*. International Journal of Approximate Reasoning 24(2) (2000), S. 149–170.
- [349] WEINGARTEN, V.I. / MORGAN, E.J. / SEIDE, P.: *Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression*. AIAA Journal 3(3) (1965), S. 500–505.
- [350] WEINGARTEN, V.I. / SEIDE, P.: *Buckling of thin-walled truncated cones*. NASA, 1968.
- [351] WEINGARTEN, V.I. / SEIDE, P. / PETERSON, J.P.: *Buckling of thin-walled circular cylinders*. SP-8007, NASA, 1965.
- [352] WILSON, W.M. / NEWMARK, N.W.: *The Strength of Thin Cylindrical Shells as Columns*. Report 255, The Engineering Experimental Station, University of Illinois, 1933.
- [353] WISNIEWSKI, K.: *Finite rotation shells*. Springer, 2010.
- [354] WOLMIR, A.S.: *Biegsame Platten und Schalen*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.
- [355] WRIGGERS, P.: *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [356] WRIGGERS, P. / SIMO, J.C.: *A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 30(1) (1990), S. 155–176.
- [357] WRIGGERS, P. / WAGNER, W. / MIEHE, C.: *A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 70(3) (1988), S. 329–347.
- [358] WYTHOFF, B.J.: *Backpropagation neural networks: A tutorial*. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems 18(2) (1993), S. 115–155.
- [359] YU, H. / WILAMOWSKI, B.: *Levenberg-Marquardt Training*. In: WILAMOWSKI, B. / IRWIN, J.D., (HRSG.), *Intelligent Systems*, Kapitel 12, S. 1–16, CRC Press, 2011.
- [360] ZADEH, L.A.: *Fuzzy sets*. Information and Control 8(3) (1965), S. 338–353.
- [361] ZADEH, L.A.: *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*. Fuzzy Sets and Systems 100 (1999), S. 9–34.

- [362] ZELL, A.: *Einführung in Künstliche Neuronale Netze*. In: BIETHAHN, J. / HÖNERLOH, A. / KUHL, J. / LEISEWITZ, M.-C. / NISSEN, V. / TIETZE, M., (HRSG.), *Betriebswirtschaftliche Anwendungen des Soft Computing. Computational Intelligence*, S. 3–34, Vieweg+Teubner Verlag, 1998.
- [363] ZHUNG, J. / ELLINGWOOD, B.: *Orthogonal Series Expansion of Random Fields in Reliability Analysis*. *Journal of Engineering Mechanics* 120 (1994), S. 2660–2677.
- [364] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L. / ZHU, J.Z.: *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.
- [365] ZIMMERMANN, H.-J.: *Von der Fuzzy Set Theorie zur Computational Intelligence*. S. 161–181, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1999.

Berichte des Instituts für Baustatik, Karlsruher Institut für Technologie

Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der kriechabhängigen Spannungen von Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen Platten mit Randbalken, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.
- 64/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer und durch Wandscheiben ausgesteifter rechteckiger Gründungsplatten, Dissertation, Artur Deninger, 1964.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für allseitig gestützte, mehrfeldrige schiefwinklige Platten unter Gleichlast, Dissertation, Jahidul Alum, 1964.

- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 69/16: Operatorenkalkül zur Berechnung von Stab- und Flächentragwerken, Dissertation, Günter Eisenbiegler, 1969.
- 72/17: Umlagerungen der Schnittkräfte und Verformungen von biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen im Zustand II infolge Kriechens und Schwindens, Dissertation, Walter H. Schneider, 1972.
- 73/18: Berechnungssystematik für Rechteckscheiben, Habilitation, Günter Eisenbiegler, 1973.
- 1/75: Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, Jürgen Hanisch, 1975.
- 2/75: Der Plattenbalken mit Lastangriff innerhalb des Steges, Dissertation, Hans-Erich Heining, 1975.
- 3/76: Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitation, Helmut Rubin, 1976.
- 4/78: Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 5/79: Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 6/79: Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 7/81: Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.
- 8/83: Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.

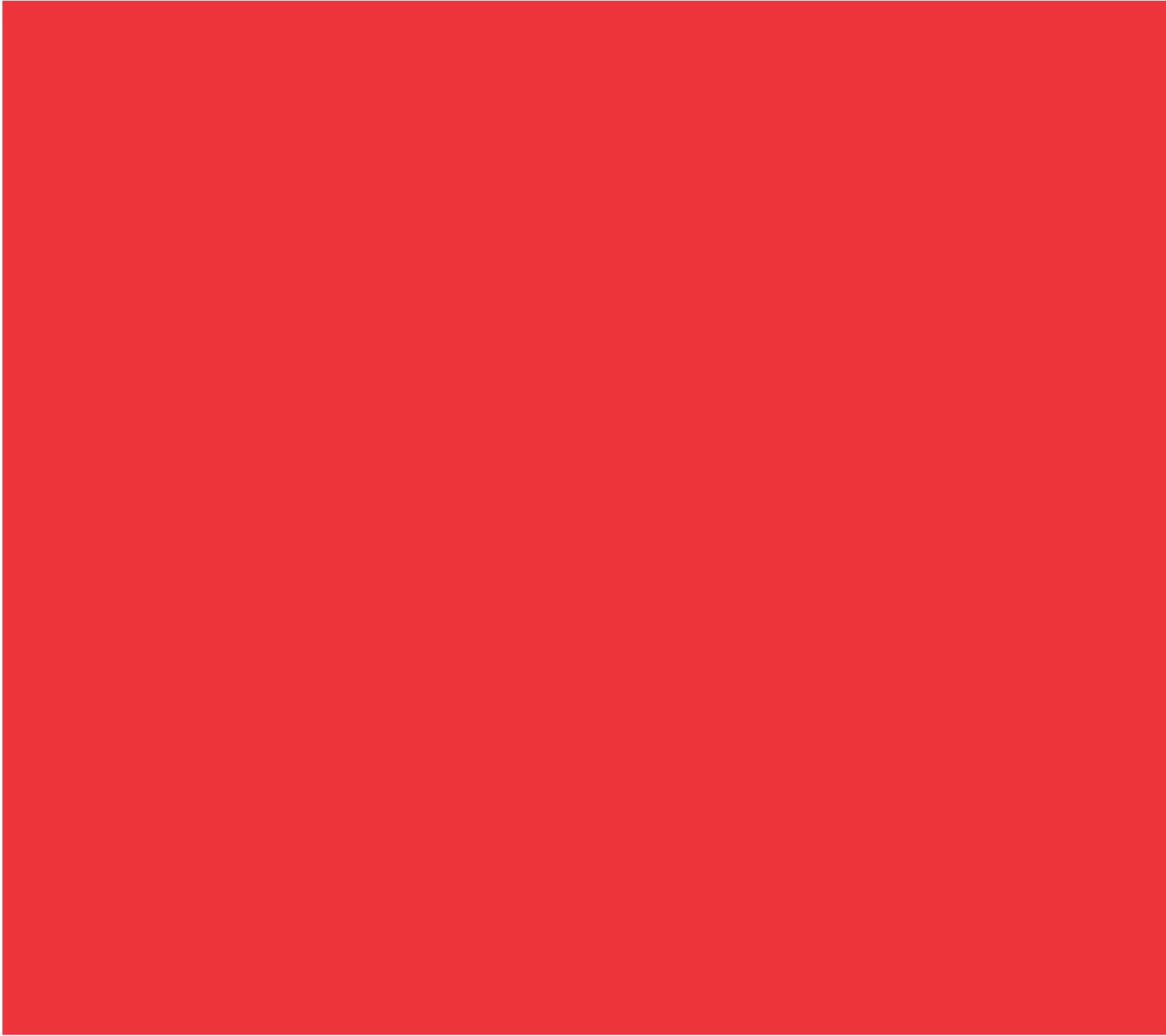
- 9/86: Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 10/89: Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 11/89: Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 12/90: Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 13/91: Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 14/91: Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarmann, 1991.
- 15/94: Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalentragwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995): Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996): Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997): Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998): Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.
- 5 (1999): Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000): Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000): Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.

- 8 (2001): Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005): Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006): Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.
- 11 (2006): Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007): Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.
- 13 (2007): Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell – Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten, Dissertation, Ingo Münch, 2007, ISBN: 978-3-935322-12-6.
- 14 (2008): Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien – Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung, Dissertation, Konrad Linnemann, 2008, ISBN: 978-3-935322-13-3.
- 15 (2008): Theorie und Numerik unidirektional verstärkter Faserverbundwerkstoffe: 3D Finite-Elemente-Untersuchungen der Faser-Matrix Mikroinstabilitäten, Dissertation, Jens Harich, 2008, ISBN: 978-3-935322-15-7.
- 16 (2009): Finite Element Modeling of Intra- and Interlaminar Damage Growth in Composite Laminates, Dissertation, Claudio Balzani, 2009, ISBN: 978-3-935322-16-4.
- 17 (2010): Theorie und Finite-Elemente-Modellierung geometrisch und materiell nichtlinearer piezoelektrischer Schalenstrukturen, Dissertation, Katrin Schulz, 2010, ISBN: 978-3-935322-17-1.
- 18 (2011): Finite-Elemente-Formulierung mit abgestimmten Approximationsräumen für die Modellierung piezoelektrischer Stab- und Schalenstrukturen, Dissertation, Dieter Legner, 2011, ISBN: 978-3-935322-18-8.
- 19 (2014): Nichtlineare elektromechanisch gekoppelte Viskoelastizität bei großen Verformungen am Beispiel dielektrischer Elastomere – Konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung, Dissertation, Alexander Büschel, 2014, ISBN: 978-3-935322-19-5.

- 20 (2014): Duroplastische Kunststoffe mit Elastomerzusätzen - Konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung, Dissertation, Stefan Lacher, 2014, ISBN: 978-3-935322-20-1.
- 21 (2014): Numerische Stabilitätsuntersuchung dünnwandiger Tragwerke unter dem Einfluss stochastischer Imperfektionen, Dissertation, Stefan Lauterbach, 2014, ISBN: 978-3-935322-21-8.
- 22 (2017): Entwicklung robuster Ein- und Mehrskalen-Modelle zur Simulation von Delaminationsprozessen faserverstärkter Lamine, Dissertation, Tillmann Herwig, 2017, ISBN: 978-3-935322-22-5.
- 23 (2017): Entwurf und Finite-Elemente-Modellierung ferroelektrischer Nanostrukturen zur Transformation mechanischer Deformationen in elektrische Energie, Dissertation, Matthias Krauß, 2017, ISBN: 978-3-935322-23-2.
- 24 (2018): Entwicklung eines gradientenbasierten Modells zur netzunabhängigen Schädigungssimulation geschichteter Faserverbundstrukturen, Dissertation, Jonas Läufer, 2018, ISBN: 978-3-935322-24-9.
- 25 (2018): Ein gemischtes FE-Modell zur Untersuchung des nichtlinearen Deformations- und Spannungsverhaltens schubweicher Lamine, Dissertation, Max Köppler, 2018, ISBN: 978-3-935322-25-6.
- 26 (2020): Metaheuristische Form- und Systemoptimierung von Stabtragwerken mit Evolutionsstrategien, Dissertation, Alexander Keller, 2020, ISBN: 978-3-935322-26-3.

Lebenslauf

Name	Marc Fina
Geburtsdatum	14. Dezember 1987
Geburtsort	Karlsruhe
1999–2008	Schulbildung Carl-Engler-Schule, Technisches Gymnasium, Karlsruhe Abitur
2008–2014	Studium des Bauingenieurwesens Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau Diplomarbeit am Institut für Baustatik
2009–2014	Werkstudent EnBW Kraftwerke AG in Karlsruhe, Abteilung Bautechnik BVH: Neubau des Steinkohleblocks RDK8 am Rheinhafen Karlsruhe
2009–2012	Wissenschaftliche Hilfskraft Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Institut für Baustatik
seit 2014	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Institut für Baustatik



ISBN 978-3-935322-27-0