

# Trajektorienplanung: Manöveridentifikation anhand der Topologie des Freiraums

Philipp Bender\* und Christoph Stiller†

## Zusammenfassung:

Im Bereich der Trajektorienplanung sind lokale Optimierungsverfahren bekannt, die unter Ausnutzung der Ableitung einer Zielfunktion sehr schnell zum der Initialisierung nächstgelegenen Minimum konvergieren. Für komplexere Fahrsituationen – wie das Überholen im Gegenverkehr – ist aber nicht ausgeschlossen, dass eine bessere Lösung sehr weit von der Initialisierung entfernt liegt und diese aufgrund der Lokalität nicht gefunden wird. Dieses Problem ist Gegenstand des vorliegenden Beitrags. Wir schlagen ein Verfahren vor, um den Planungsraum so zu segmentieren, dass für jede mögliche Lösungsklasse eine Initialisierung gefunden werden kann. Das Verfahren beruht auf topologischen, graphentheoretischen und geometrischen Grundlagen. Anschließend wird mit jeder dieser Initialisierungen eine lokale, kontinuierliche Optimierung durchgeführt; hierfür gelten die gleichen Konvergenzregeln wie für jedes andere lokale Verfahren. Die so gefundenen Lösungsklassen (wir sagen: *Manövervarianten*) sind intuitiv plausibel und lassen sich sehr leicht im alltäglichen Straßenverkehr wiederfinden.

**Schlüsselwörter:** Trajektorienplanung, Kombinatorik, Manöverplanung

## 1 Einleitung

Im Bereich der Trajektorienplanung für automatische Fahrzeuge sind Verfahren bekannt, die durch Diskretisierung des Planungsraums (deterministisch, z. B. *state lattices* [10] oder randomisiert, z. B. *RRTs* [6]) versuchen, eine bezüglich eines frei wählbaren Gütekriteriums optimale Lösung des Trajektorienplanungsproblems zu finden. Im Falle der erschöpfenden Suche in einem Graphen sind diese Lösungen global optimal, im Falle der RRTs wird durch geeignete Heuristiken versucht, dem globalen Optimum möglichst nahe zu kommen. Im Rahmen der Bertha-Benz-Fahrt wurden die Vorteile eines kontinuierlichen Verfahrens aufgezeigt [9]. Hier wurde das Planungsproblem als Variationsproblem formuliert, dessen Gütekriterium und die einzuhaltenden Nebenbedingungen zweimal stetig differenzierbar sind. Dies erlaubt die Nutzung lokal quadratisch konvergierender Verfahren wie z. B. den LAGRANGE-Multiplikatoren. Neben den Vorteilen darf aber nicht verschwiegen werden, dass immer nur lokale Optima gefunden werden. Bei alltäglichen und einfachen Fahrsituationen reichen diese Lösungen jedoch meist aus und erfüllen die Erwartungen eines Passagiers und anderer Verkehrsteilnehmer. Außerdem sind globale

---

\*Philipp Bender ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Forschungszentrum Informatik, 76131 Karlsruhe (e-mail: pbender@fzi.de).

†Christoph Stiller ist Leiter des Instituts für Mess- und Regelungstechnik am Karlsruher Institut für Technologie (e-mail: stiller@kit.edu).

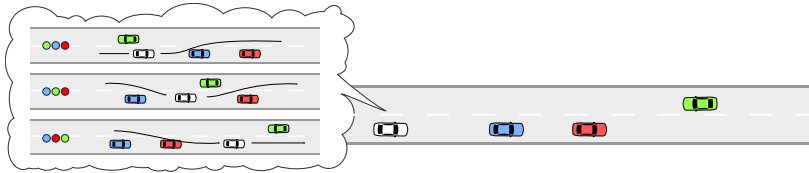


Abbildung 1: Überholen im Gegenverkehr. Für das weiße Fahrzeug ergeben sich drei Handlungsoptionen. Die Punkte zeigen die Reihenfolge an, in denen das weiße Fahrzeug die anderen Fahrzeuge passiert.

Optima nur bezüglich des jeweiligen Gütekriteriums optimal und stimmen nicht notwendigerweise mit der Erwartungshaltung aller Fahrer überein. Darüber hinaus ist die Wahl eines Gütekriteriums immer subjektiv und nicht etwa durch physikalische Gesetzmäßigkeiten beweisbar.

Bei komplexeren Manövern, wie etwa einem Überholvorgang im Gegenverkehr, wie er in Abb. 1 gezeigt ist, ist diese Eigenschaft jedoch unbefriedigend, da intuitiv zu erwarten ist, dass unterschiedliche lokale Optima weit voneinander entfernt liegen können: jede der Varianten ist plausibel, und ein menschlicher Fahrer kann sich für jede Variante eine *beste* Lösung vorstellen. Diese Arbeit verknüpft beide Sichtweisen. Durch geschickte Segmentierung des Planungsraums werden Manöverklassen identifiziert. Innerhalb dieser (abzählbaren) Klassen wird jeweils eine lokale Lösung gefunden. Aus diesen Lösungen wird in einer nachfolgenden Stufe eine Lösung ausgewählt, was jedoch nicht mehr Teil des Verfahrens ist. Schränkt man diesen Algorithmus in einer Vorzugsrichtung ein, wie es im Straßenverkehr der Fall ist, ergeben sich interessante und intuitive Regeln, wie sich die Manöver identifizieren und unterscheiden lassen. Beim vorgeschlagenen Verfahren bleibt Interaktion zwischen den Objekten unberücksichtigt. Unsicherheiten der Wahrnehmung oder Prädiktion werden ebenso nicht behandelt, beide Aspekte müssen zuvor in ein deterministisches Lagebild integriert worden sein.

## 2 Identifikation von Manövervarianten

*Manövervarianten* bezeichnen Mengen zusammengehöriger Trajektorien. Innerhalb der Menge aller Trajektorien gehören diejenigen zur gleichen Manövervariante, die sich kontinuierlich ineinander überführen lassen, ohne ihren Definitionsbereich zu verlassen. Der Definitionsbereich ist in diesem Fall der gesamte Konfigurationsraum abzüglich aller Hindernisse. Im Gegensatz zu den Trajektorien sind die Manövervarianten abzählbar. Abb. 2a verdeutlicht diesen Sachverhalt. Mathematisch betrachtet handelt es sich hier um eine *relative Homotopie*, also eine stetige Deformation zwischen zwei Trajektorien *relativ* zum Startpunkt  $S$  und der Zielmenge  $T$  [1]. Anschaulich entspricht das einer Trajektorienplanung, bei der ein fester Startzustand existiert, und für den Endpunkt ein bestimmter örtlicher Bereich vorgegeben wird.

Die Deformation oder Überführbarkeit ist die zentrale Eigenschaft, die sich jedoch sehr schwer praktisch nutzen lässt. Denn gesucht ist nicht der Beweis, dass eine gegebene Funktion diese Transformation bewirkt, sondern der Beweis *der Existenz* einer solchen



(a) Wird bei den hier eingezeichneten Pfaden der Anfangspunkt  $S$  festgehalten und der Endpunkt ist nur innerhalb der grauen Zone  $T$  verschiebbar, so lässt sich vermuten, dass eine Homotopie existiert, die rot in braun überführt, ohne das Hindernis zu schneiden. Für rot und grün wird solche eine Funktion nicht existieren.

(b) Trajektoriencharakter, jeweils repräsentiert durch ein quintisches Polynom. Der Anfangspunkt ist festgehalten, der Endpunkt frei. Eine mögliche Homotopie könnte jetzt die Funktion  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$  sein, die die Koeffizienten  $\mathbf{c}$  der Polynome linear ineinander überführt:  $H(\lambda) = \mathbf{c}_0 + \lambda(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0)$ .

Abbildung 2

Funktion – die Funktion selbst ist für die Trajektorienplanung nicht weiter von Interesse. Doch selbst unter Kenntnis einer geeigneten Deformationsfunktion und der Annahme, die Forderung der Existenz einer Homotopie ließe sich in eine (Un-)Gleichheitsbedingung fassen: beides wäre hier nutzlos ohne einen Funktionsprototypen der geforderten Klasse.

Um diesem Problem zu entgehen, schlagen wir eine Methode vor, mit der sich topologisch gültige Initialisierungen für jede Variante gewinnen lassen, die als Startpunkt für eine kontinuierliche Optimierung dienen. Topologisch gültig heißt, dass die gewonnenen Initialisierungen sich in unterschiedlichen Homotopieklassen befinden, jedoch keinerlei fahrdynamischen oder kausalen Bedingungen gehorchen. Die Lösung, zu der die Initialisierung konvergiert, muss diesen Bedingungen genügen und sich außerdem in der gleichen Homotopieklasse befinden.

## 2.1 Überblick

Die Methode gliedert sich in folgende Schritte, die in den nachfolgenden Abschnitten behandelt werden. Zuerst wird das verfügbare Planungsvolumen  $\in x \times y \times t$  diskret angenähert (Abschnitt 2.2). Danach werden anhand des Planungsvolumens mit Hilfe der Mittelachsentransformation topologisch gültige Initialisierungen erzeugt (Abschnitt 2.3). Diese Initialisierungen haben jedoch in der  $t$ -Komponente nicht die erforderlichen Eigenschaften. Daher wird die Initialisierung in zwei Schritten optimiert (Abschnitt 2.4): zuerst werden alle drei Komponenten so optimiert, dass die Zeitkomponenten monoton steigen und annähernd äquidistant sind. Danach werden die Zeitkomponenten festgehalten und lediglich  $x$  und  $y$  so optimiert, dass ein für Trajektorien geeignetes Gütekriterium möglichst gut erfüllt wird. Die Optimierungsschritte werden auf jede Manövervariante angewandt, sodass am Ende für jede Variante eine Optimaltrajektorie zur Verfügung steht und zwischen den Varianten gewählt werden kann.

## 2.2 Diskrete Approximation des Planungsvolumens

Zu Beginn nehmen wir eine Start-Ziel-Planung an, halten also sowohl Start- als auch Zielpunkt fest. Wir interpretieren das Planungsproblem als dreidimensionales Problem

im  $x \times y \times t$ -Raum, schränken unseren Zustand also auf zwei örtliche Komponenten ein und suchen eine geeignete Trajektorie. Der *Freiraum* soll der Teil des Planungsvolumens sein, der verbleibt, wenn alle Hindernisse abgezogen wurden. Die Eingabe hierfür ist eine Belegungskarte, welche den Raum diskretisiert und bestimmte Zellen zu bestimmten Zeiten als frei oder belegt angibt.

### 2.3 Identifikation von Manövervarianten: Skelett des Freiraums

Zur Identifikation der Manövervarianten wird die Topologies dieses Freiraums herangezogen. Diese erhalten wir aus der diskreten Mittelachsentransformation. Hierbei wird innerhalb der 26er-Nachbarschaft einer Zelle nach bestimmten Mustern gesucht und eine Zelle so als *entfernbar* oder *nicht entfernbare* klassifiziert. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis keine entfernbaren Zellen mehr gefunden werden [7, 8]. Für diese Art der Mittelachsentransformation wurde gezeigt, dass sie die Topologie des erodierten Volumens und grundlegende geometrische Eigenschaften erhält. Übrig bleiben zusammenhängende Liniensegmente, entlang derer das Planungsvolumen mit jeweils maximaler Distanz zu einer Grenzfläche durchschritten werden kann.

Ein solches Skelett zeigt Abb. 3a. Die magentafarbenen Volumenelemente sind das Ergebnis der Transformation. Sie werden zu einem Graphen vernetzt. Jeder Pfad durch diesen Graphen entspricht einer Manövervariante. Führen wir nun noch einen Start- und einen Zielknoten ein und verbinden diese mit den jeweils nächstgelegenen Knoten des Skeletts, so stellt jeder mögliche Pfad durch diesen Graphen eine Manövervariante dar. Es sollen nur einfache Manöver betrachtet werden (kein alternierendes Überholen beispielsweise), hierzu werden alle Pfade im Graphen gesucht, die *zyklenfrei* sind. Dies wird mit Hilfe des Algorithmus von Bron und Kerbosch erreicht [4].

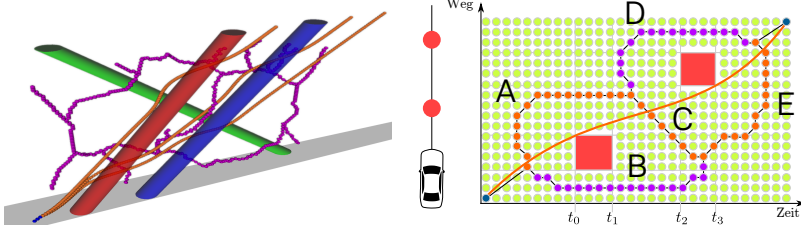
Abb. 3b zeigt dieses Vorgehen anhand einer einfachen Längsplanung, da in diesem Fall eine Dimension verschwindet und das Verfahren besser verständlich wird. In der Szene werden zwei Hindernisse betrachtet, die nur zu bestimmten Zeitpunkten vorhanden sind, aber jeweils am gleichen Ort.

## 2.4 Zweistufige Optimierung

### 2.4.1 Optimierung der Zeitkomponente

Für jede Manövervariante liegt eine Initialisierung vor, also ein Pfad, dessen Punkte in gewünschter Weise um die Hindernisse führen. Leider genügt diese Initialisierung keiner weiteren Bedingung, also fahrdynamischen Bedingungen oder der trivialen Forderung, dass einem nachfolgenden Sample auch immer ein später liegender Zeitpunkt zugeordnet sein muss.

Daher wird in zwei Stufen optimiert. Im ersten Schritt wird dafür gesorgt, dass die Initialisierung in ihrer zeitlichen Koordinate monoton ansteigt und die Schritte möglichst äquidistant sind. Hierfür wird die Summe der euklidischen Distanzen zwischen den einzelnen Punkten minimiert. Die Schwierigkeit liegt an dieser Stelle in der Formulierung einer geeigneten Nebenbedingung, die sicherstellt, dass die Punkte das Planungsvolumen und damit ihre Homotopieklasse nicht verlassen. Denn die Aufgabe lautet *minimiere eine Gütefunktion unter der Nebenbedingung, dass eine Homotopie zwischen der Initialisierung und der Lösung existiert*, was in der Praxis einige Probleme mit sich bringt. Dies lösen wir



(a) Beispiel in 3-D. Zu sehen sind drei Hindernisse (gescherte Zylinder), das Ego-Fahrzeug plant von links unten nach rechts oben (die Zeit steht senkrecht zur Straßenebene). Eingezeichnet sind drei mögliche Lösungen, die den Varianten aus Abb. 1 entsprechen. Die Mittellachsentransformation ist magentafarben dargestellt.

(b) Zuerst wird der Planungsraum diskretisiert, die Hindernisse werden abgezogen, die verbleibenden Punkte werden der Mittellachsentransformation unterzogen, welche die grünen Punkte entfernt. Die übrigen Punkte werden vernetzt, einschließlich der Start- und Endpunkte. Alle einfachen Pfade werden gesucht, beispielhaft ist einer der vier Pfade eingezeichnet (orange). Dieser dient als Initialisierung für die kontinuierliche Optimierung, das Ergebnis ist als durchgezogene Linie dargestellt.

Abbildung 3: Skelett des Freiraums in 2-D und 3-D.

durch eine geeignete Einstellung des Optimierers: die Schrittweite wird auf die minimale Ausdehnung eines Hindernisses begrenzt, sodass diese nicht übersprungen werden können. Folgt die Initialisierung der gewünschten Variante und wird kein Hindernis im Laufe der Optimierung geschnitten, so wird eine Homotopie zwischen beiden Trajektorien bestehen. Das Ergebnis dieses ersten Schrittes erinnert an ein Gummiband, welches zwischen Start und Ziel gespannt ist und an bestimmten Punkten die Hindernisse berührt.

Anhand dieses Ergebnisses kann nun für jede Variante entschieden werden, ob sie durchführbar ist. Hierzu muss lediglich überprüft werden, ob die optimierte Zeitkomponente streng monoton steigend ist.

#### 2.4.2 Optimierung der Ortskomponenten

In diesem Schritt wird die nun topologisch und temporär gültige Initialisierung im Sinne einer Trajektorie für ein Fahrzeug optimiert. Die folgende Herleitung des Optimierungsproblems basiert auf der Arbeit von Ziegler *et al.*, wo auch eine Diskussion der einzelnen Terme stattfindet [9]. Im Anschluss daran wird das Problem so umformuliert, dass ein Löser für nicht-lineare Ausgleichsprobleme eingesetzt werden kann.

Eine fahrbare Trajektorie soll das Integral

$$J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_0+T} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) dt, \quad (1)$$

minimieren, wobei  $\mathbf{x}(t)$  die Position in kartesischen Koordinaten angibt. Das Funktional

$L$  ist gegeben durch

$$L = w_{\text{offs}} j_{\text{offs}}^2 + w_{\text{vel}} j_{\text{vel}}^2 + w_{\text{acc}} j_{\text{acc}}^2 + w_{\text{jerk}} j_{\text{jerk}}^2. \quad (2)$$

Die einzelnen Summanden verursachen Kosten für Außermittigkeit relativ zum Fahrstreifen, Abweichung von der Wunschgeschwindigkeit und für dynamische Aspekte wie Beschleunigung, Gierrate und Ruck. Der Einfluss der Summanden wird durch die Gewichtungsfaktoren  $w_{\text{offs}}, w_{\text{vel}}, \dots$  gesteuert.

Die Kosten für die Abweichung von der Mittellinie ergeben sich zu

$$j_{\text{offs}}(\mathbf{x}(t)) = w_{\text{offs}} \left| \frac{1}{2} (d_{\text{left}}(\mathbf{x}(t)) + d_{\text{right}}(\mathbf{x}(t))) \right|^2,$$

wobei  $d_{\text{left}}$  und  $d_{\text{right}}$  vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen von den jeweiligen Fahrstreifenrändern links und rechts darstellen. Die Kosten für die Geschwindigkeitsabweichungen, Beschleunigung und Ruck berechnen sich wie folgt:

$$j_{\text{vel}}(\mathbf{x}(t)) = w_{\text{vel}} |\mathbf{v}_{\text{des}}(\mathbf{x}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t)|^2, \quad (3)$$

$$j_{\text{acc}}(\mathbf{x}(t)) = w_{\text{acc}} |\ddot{\mathbf{x}}(t)|^2, \quad (4)$$

$$j_{\text{jerk}}(\mathbf{x}(t)) = w_{\text{jerk}} |\dddot{\mathbf{x}}(t)|^2. \quad (5)$$

Nicht berücksichtigt wurde bisher, dass die Trajektorie durch einzelne Punkte angenähert wird. Hierdurch lässt sich das Integral durch eine Summe approximieren, die Ableitungen durch finite Differenzen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_i) \approx \dot{\mathbf{x}}_d = \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{\Delta}, \quad (6a)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t_i) \approx \ddot{\mathbf{x}}_d = \frac{\mathbf{x}_{i-1} - 2\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}}{\Delta^2}, \quad (6b)$$

$$\dddot{\mathbf{x}}(t_i) \approx \dddot{\mathbf{x}}_d = \frac{-\mathbf{x}_i + 3\mathbf{x}_{i+1} - 3\mathbf{x}_{i+2} + \mathbf{x}_{i+3}}{\Delta^3}. \quad (6c)$$

Das  $\Delta$  ist hierbei der zeitliche Abstand zweier gesampelter Trajektorienpunkte. Zu beachten ist an dieser Stelle, dass die Trajektorien nicht äquidistant abgetastet werden, sodass im Nenner der Gleichungen jeweils das  $\Delta$  durch das Produkt der tatsächlichen Zeitdifferenzen ersetzt werden muss.

Da alle Beiträge zur Summe im Quadrat stehen, kann Gl. 2 zu

$$\arg \min_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N} (\mathbf{W}\mathbf{r})^\top \mathbf{r} \quad (7)$$

umgeformt werden. Hierbei ist  $\mathbf{r}$  eine Menge von Residuen und  $\mathbf{W}$  eine Diagonalmatrix mit den entsprechenden Gewichten. Auf diese Weise erhalten wir ein *nichtlineares Least-Squares-Problem*, welches mit Ceres[2] gelöst werden kann. Ceres ist ein eleganter und effizienter Löser für derartige Probleme.

Variante	#Samples	#Param	#Iter	Kosten	Strecke	(t/s)
( <span style="color:blue">●</span> , <span style="color:green">●</span> , <span style="color:red">●</span> )	179	352	522	$1,66 \cdot 10^3$	149	(0,98)
( <span style="color:blue">●</span> , <span style="color:red">●</span> , <span style="color:green">●</span> )	184	362	46	$3,02 \cdot 10^3$	168	(0,10)
( <span style="color:green">●</span> , <span style="color:blue">●</span> , <span style="color:red">●</span> )	189	372	938	$1,41 \cdot 10^3$	110	(1,02)

Tabelle 1: Ergebnis des kontinuierlichen Planers. Nach dem gewählten Kriterium wäre die letzte Zeile die beste Variante. Die Strecke gibt hier den Fortschritt entlang der Straße an, dieser Wert wird jedoch implizit über die Kosten auf der Abweichung von der Wunschgeschwindigkeit berücksichtigt und sollte bei der Auswahl keine Rolle mehr spielen. Sie dient hier lediglich der Orientierung.

Hierbei sind  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  und  $\mathbf{x}_3$  keine freien Parameter: sie werden festgehalten, um eine Initialdynamik vorzugeben.

Soll die Trajektorie durch  $N$  Punkte angenähert werden, so ergeben sich die Residuen aus:

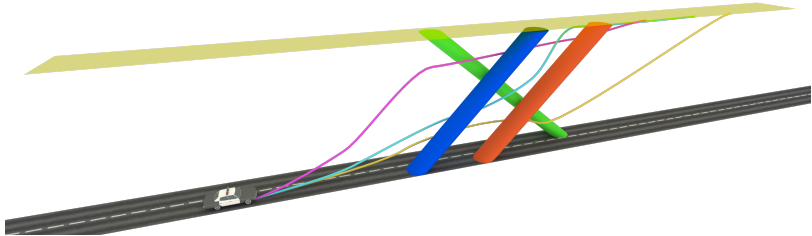
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{\text{offs},1}, \dots, r_{\text{offs},N}, \\ r_{\text{vel},1}, \dots, r_{\text{vel},N-1}, \\ r_{\text{acc},1}, \dots, r_{\text{acc},N-2}, \\ r_{\text{jerk},1}, \dots, r_{\text{jerk},N-3} \end{pmatrix}^{\top} \quad (8)$$

Ceres erlaubt nur Nebenbedingungen auf den Parametern selbst. Daher müssen die erforderlichen Nebenbedingungen durch weitere Kostenterme angenähert werden. Hierbei wird für jede Ungleichheitsnebenbedingung ein Residuum gebildet, dessen Wert 0 ist, falls die Bedingung erfüllt ist, oder eine langsam ansteigender Wert, der den Grad der Verletzung der Bedingung angibt. Wird dieses Residuum geeignet (stark) gewichtet, kann Ceres sehr gut mit dieser Approximation umgehen (diese Art des Vorgehens ist als *Barrier-Methode* bekannt [5]).

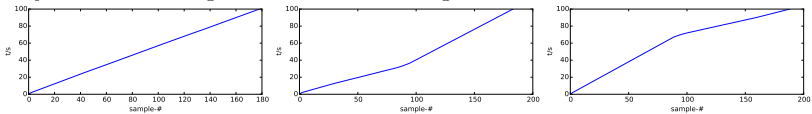
### 3 Experimente

Dieser Beitrag ergänzt die kontinuierliche Trajektorienplanung um einen diskreten Aspekt, der mit Hilfe der Freiraumdiskretisierung und der Mittelachsentransformation gelöst wurde. Der kontinuierliche Teil wird als Least-Squares-Problem ohne Nebenbedingungen formuliert.

Als Szenario wurde wieder der Überholvorgang im Gegenverkehr gewählt, der sich insbesondere dadurch auszeichnet, dass er auch im Alltag oft Gegenstand riskanter Manöver ist und es hier sehr stark vom Fahrer abhängt, wie der Vorgang gestaltet wird. In Tabelle 1 und den Abb. 4 und 5 werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst. Die verwendete Notation zur Identifikation von Manövervarianten greift dem nächsten Abschnitt vor.

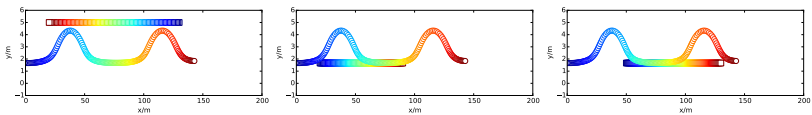


(a) Qualitative Ergebnistrajektorien als Pfad durch das Planungsvolumen. Der letzte Punkt der Trajektorie wird in der gelb schattierten Ebene festgehalten.

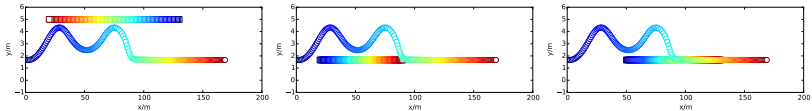


(b) Zeitkomponente der Trajektorien nach der ersten Optimierungsstufe. Auf der Abszisse aufgetragen ist die Nummer des Samples, auf der Ordinate die zugehörige Zeit.

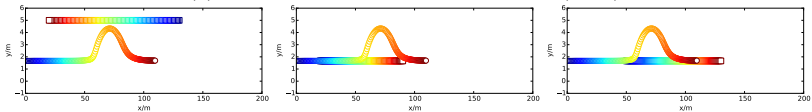
Abbildung 4



(a) Ausweichtrajektorie für die Reihenfolge  $(\bullet, \bullet, \bullet)$ .



(b) Ausweichtrajektorie für die Reihenfolge  $(\bullet, \bullet, \bullet)$ .



(c) Ausweichtrajektorie für die Reihenfolge  $(\bullet, \bullet, \bullet)$ .

Abbildung 5: Ausweichtrajektorien für die drei identifizierten Manövervarianten. Die Zeilen zeigen jeweils die Ego-Trajektorien der Manövervarianten, die Spalten zeigen eine Hindernistrajektorie. Zur besseren Übersichtlichkeit sind die Ausdehnungen der Objekte jeweils verkleinert. Die Achsen zeigen Orte an, die Farben kodieren die absoluten Zeiten.



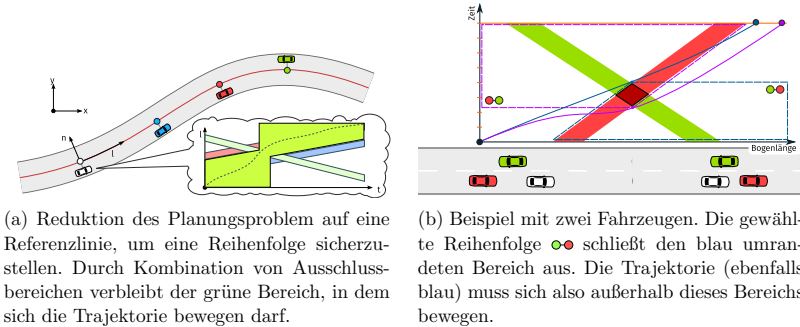


Abbildung 6

## 4 Vereinfachungen für den strukturierten Raum

In den letzten Abschnitten wurde ein Verfahren vorgestellt, welches für allgemeine Fahrmanöver im unstrukturierten Raum gelten soll, also ohne Vorzugsrichtung und ohne Fahrstreifen. Doch bezieht man diese Forderung mit ein, ergeben sich einfache Regeln, mit der die Manöveridentifikation vereinfacht werden kann. Eingeführt wurden diese Regeln in [3], hier sollen sie nur kurz vorgestellt werden.

Die Kernidee ist, die Begegnungsreihenfolge als Manöver unterscheidendes Merkmal heranzuziehen. Um die Varianten zu unterscheiden verwenden wir die in [3] eingeführte Notation, welche die Reihenfolge der passierten Fahrzeuge aus Sicht des Ego-Fahrzeugs angibt. Die Variante (●, ●, ●) adressiert beispielsweise das Manöver, in welchem das Ego-Fahrzeug zuerst das blaue Fahrzeug überholt, dann in der Lücke zwischen blau und rot einschert, um das grüne Fahrzeug passieren zu lassen, bevor es den Vorgang fortsetzt. Durch den Bezug der Begegnungsreihenfolge auf eine Referenzlinie wird das Planungsproblem Ungleichheitsnebenbedingungen entlang dieser Linie unterworfen. Die auf die Referenzlinie projizierte Position muss also zu bestimmten Zeitpunkten innerhalb bestimmter Intervalle liegen, wie es in Abb. 6a dargestellt ist.

Jede mögliche Begegnungsreihenfolge stellt eine Manövervariante dar. In jeder Variante werden die anderen Fahrzeuge paarweise betrachtet. Hieraus ergeben sich die Nebenbedingungen, welche die jeweilige Begegnungsreihenfolge erzwingen. Aus der obigen Begegnungsreihenfolge resultieren die Paarungen (●, ●, ●). Wir betrachten die Paarung ●, ●, die auch in Abb. 6b dargestellt wird. Hier wird gefordert, dass das Ego-Fahrzeug zuerst das grüne Fahrzeug passiert, also hinter dem roten Fahrzeug verbleiben muss, bis sich die beiden Fahrzeuge begegnet sind. Diese Forderung schließt den blau umrandeten Bereich aus. Bei mehreren solcher zeitlicher Forderungen werden diese *und*-verknüpft.

## 5 Ausblick

Diese Arbeit zeigt eine Möglichkeit, komplexe Szenarien so zu segmentieren, dass mehrere, zu Manövern korrespondierende, lokale Minima mit größerer Wahrscheinlichkeit gefunden

werden, als es ohne die Segmentierung der Fall wäre. Trotzdem bleibt der Rechenaufwand bestehen, er erhöht sich sogar noch, und zwar linear in der Anzahl der gefundenen Manövertvarianten. Es ist also notwendig, ausgehend vom Ergebnis der Topologieanalyse Heuristiken zu finden, mit denen die Güteerwartung einer Trajektorie abgeschätzt werden kann und somit weniger Optimierungen durchlaufen werden müssen.

Weiterhin wurde die Segmentierung auf diskretisierte Lagebilder angewandt und es ist bei der recht geringen Anzahl von Objekten und deren bekannter oder grob als Rechteck anzunähernden Form zu erwarten, dass eine kontinuierliche Version dieser Transformation geringere Laufzeiten ermöglicht als die diskrete Variante.

Die topologischen und geometrischen Eigenschaften der Mittelachsentransformation und der daraus resultierenden Graphen könnten auch Verwendung in der Beschreibung von Fahrsituationen finden.

## Literatur

- [1] Encyclopaedia of mathematics. <http://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Homotopy>.
- [2] S. Agarwal, K. Mierle, and Others. Ceres solver. <http://ceres-solver.org>.
- [3] P. Bender, Ö. Ş. Taş, and C. Stiller. The combinatorial aspect of motion planning: Maneuver variants in structured environments. In *Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE*. IEEE, 2015.
- [4] C. Bron and J. Kerbosch. Algorithm 457: finding all cliques of an undirected graph. *Communications of the ACM*, 16(9):575–577, 1973.
- [5] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. Practical optimization. 1981.
- [6] S. M. LaValle and J. J. Kuffner Jr. Rapidly-exploring random trees: Progress and prospects. 2000.
- [7] T.-C. Lee, R. L. Kashyap, and C.-N. Chu. Building skeleton models via 3-d medial surface axis thinning algorithms. *CVGIP: Graphical Models and Image Processing*, 56(6):462–478, 1994.
- [8] C. Pudney. Distance-ordered homotopic thinning: a skeletonization algorithm for 3d digital images. *Computer Vision and Image Understanding*, 72(3):404–413, 1998.
- [9] J. Ziegler, P. Bender, T. Dang, and C. Stiller. Trajectory planning for bertha – a local, continuous method. In *Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE*, pages 450–457. IEEE, 2014.
- [10] J. Ziegler and C. Stiller. Spatiotemporal state lattices for fast trajectory planning in dynamic on-road driving scenarios. In *Intelligent Robots and Systems, 2009. IROS 2009. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 1879–1884. IEEE, 2009.