KITopen (2021), 4 pp.
DOI: 10.5445/IR/1000139060

Quasimonotonie und Vergleichssätze

Peter Volkmann

Meinem Sohn Stefan zum 50. Geburtstag

1. Einleitung. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$; für $x \in D,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$ schreiben wir $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \ldots, \Phi_n(x))$. Eine solche Funktion Φ nennt Wolfgang Walter [11] quasimonoton wachsend, wenn für $k \in \{1, \ldots, n\}$ aus $x, y \in D,\ x \leq y$ (d.h. $x_1 \leq y_1, \ldots, x_n \leq y_n$), $x_k = y_k$ stets $\Phi_k(x) \leq \Phi_k(y)$ folgt.

Der Raum $\mathbb{R}^n$ wird nun durch einen geordneten topologischen Vektorraum E ersetzt, und wie in [7] wird obige Definition unter Verwendung des topologischen Duals E^* auf Funktionen $\Phi : D \to E$ mit $(D \subseteq E)$ übertragen; siehe unten die Definition in Nr. 2.

Dieser Quasimonotonie-Begriff gestattet es, für $\mathbb{R}^n$ bekannte Vergleichssätze auch für allgemeine geordnete topologische Vektorräume zu erhalten: Vgl. [7] für gewöhnliche Differentialgleichungen, [6] für parabolische Differentialgleichungen (mit Ursprung bei Mitio Nagumo [5]), und [2], [8] für Funktionalgleichungen; [9] stellt diese Ergebnisse einheitlich dar, vgl. auch [4]. Weiteres über Quasimonotonie bringt der Übersichtsartikel [3] von Gerd Herzog.

In [1], [10] werden Vergleichssätze für Integralgleichungen behandelt. Am Ende von [1] steht die Bemerkung, dass es interessant wäre, die Zusammenhänge des dortigen Satzes 2 mit den Resultaten der hier zitierten [2], [4], [7], [8], [9] zu untersuchen. Wir werden nun zeigen, dass dieser Satz 2 sich mit Hilfe des Ergebnisses von [8] beweisen lässt (welches auch ein Spezialfall von Satz 2.1 in [4] ist).

2. Abstrakter Vergleichssatz. Satz 2 aus [1] wird dort "abstrakter Vergleichssatz" genannt. Wir geben ihn hier als Satz A wieder (und werden ihn genauso formulieren wie in [1]).

Dazu sei E ein reeller separierter topologischer Vektorraum, E^* bezeichne seinen topologischen Dual. Es sei K ein Keil in E, also $\phi \neq K \subseteq E$ mit

$$\lambda \geq 0,\ \xi \in K,\ \eta \in K \Rightarrow \lambda(\xi + \eta) \in K.$$

Wir setzen noch

$$K = \bar{K},\ \text{Int}\ K \neq \phi$$

voraus (d.h. K ist abgeschlossen, sein Inneres ist nicht leer). Für $\xi, \eta \in E$ definieren wir

$$\xi \leq \eta \Leftrightarrow \eta - \xi \in K, \quad \xi << \eta \Leftrightarrow \eta - \xi \in \operatorname{Int} K.$$

Schließlich sei K^* der zu K duale Keil, d.h.

$$K^* = \{\varphi \mid \varphi \in E^*,\ \varphi(\xi) \geq 0\ (\xi \in K)\}.$$

Definition ([7]). *Eine Funktion $\Phi : D \to E$ mit $D \subseteq E$ heißt quasimonoton wachsend, wenn gilt: Aus $\xi, \eta \in D,\ \xi \leq \eta,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ folgt $\varphi(\Phi(\xi)) \leq \varphi(\Phi(\eta))$.*

Nun sei $T > 0$, und für $t \in]0, T]$ sei

$$E^{[0,t]} = \{g \mid g : [0, t] \to E\}.$$

Für $g, h \in E^{[0,t]}$ definieren wir $g \leq h$ durch

$$g(s) \leq h(s) \quad (0 \leq s \leq t),$$

und für $W \subseteq E^{[0,t]}$ wird eine Funktion $F : W \to E$ (monoton) wachsend genannt, falls gilt:

$$g, h \in W,\ g \leq h \Rightarrow F(g) \leq F(h).$$

Satz A. *Es sei $T > 0$, und für alle $t \in]0, T]$ sei $D_t \subseteq E,\ W_t \subseteq E^{[0,t]}, F(t, \cdot, \cdot) : W_t \times D_t \to E$. Dabei wird $F(t, g, \xi)$ (für jedes $\xi \in D_t$) als monoton wachsend bezüglich $g \in W_t$ vorausgesetzt.*
Es seien $v, w : [0, T] \to E$ stetige Funktionen mit

$$v(t), w(t) \in D_t \quad (0 < t \leq T)$$

und

$$v\,|_{[0,t]},\ w\,|_{[0,t]} \in W_t \quad (0 < t \leq T)$$

(wobei $v\,|_{[0,t]},\ w\,|_{[0,t]}$ Einschränkungen auf das Intervall $[0, t]$ bedeuten). Außerdem sei für jedes $t \in]0, T]$ mindestens eine der beiden Funktionen

$$(1) \qquad F(t, v\,|_{[0,t]}, \cdot),\ F(t, w\,|_{[0,t]}, \cdot) : D_t \to E$$

quasimonoton wachsend. Dann folgt aus den Ungleichungen

$$(2) \qquad v(0) << w(0),$$

$$(3) \qquad F(t, w\,|_{[0,t]},\ w(t)) << F(t, v\,|_{[0,t]},\ v(t)) \quad (0 < t \leq T)$$

die Beziehung

$$v(t) << w(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

3. Ein Beweis zu Satz A. Wir benutzen den Satz aus [8]. Im Folgenden nennen wir ihn Satz B, der in [8] gegebene Beweis ist kurz. Es sei wieder $T > 0$, und $C([0,T],E)$ bezeichne den Raum aller stetigen $u : [0,T] \to E$.

Satz B. *Es sei* $\Omega \subseteq C([0,T],E)$, $\Phi :]0,T] \times \Omega \to E$, *und es seien* $v, w \in \Omega$ *mit folgender Eigenschaft:*
(P) *Aus* $0 < t \le T$, $\varphi \in K^*$, $v(s) << w(s) \quad (0 \le s < t)$, $\varphi(v(t)) = \varphi(w(t))$ *folgt* $\varphi(\Phi(t,v)) \le \varphi(\Phi(t,w))$.
Dann ergibt sich aus

$$v(0) << w(0),\ \Phi(t,w) << \Phi(t,v) \quad (0 < t \le T) \tag{4}$$

die Ungleichung

$$v(t) << w(t) \quad (0 \le t \le T). \tag{5}$$

Nun seien $v, w : [0,T] \to E$ wie in der Voraussetzung des Satzes A, insbesondere seien (2), (3) erfüllt. Wir bilden $\Omega = \{v, w\}$ und definieren $\Phi :]0,T] \times \Omega \to E$ durch

$$\Phi(t,u) = F(t, u\,|_{[0,t]},\ u(t)) \quad (0 < t \le T,\ u \in \{v,w\}).$$

Mit (2), (3) folgt dann (4). Wir können nun (P) aus Satz B nachweisen, dieser Satz liefert dann (5), und damit ist Satz A bewiesen.

Nachweis von (P). Es sei also $0 < t \le T$, $\varphi \in K^*$,

$$v(s) << w(s) \quad (0 \le s < t),\ \varphi(v(t)) = \varphi(w(t)).$$

Unser Ziel ist

$$\varphi(F(t, v\,|_{[0,t]},\ v(t))) \le \varphi(F(t, w\,|_{[0,t]},\ w(t))). \tag{6}$$

Es ist $v(t) \le w(t)$, und die Quasimonotonie einer der Funktionen (1) liefert

$$\varphi(F(t, v\,|_{[0,t]},\ v(t))) \le \varphi(F(t, v\,|_{[0,t]},\ w(t))) \tag{7}$$

oder

$$\varphi(F(t, w\,|_{[0,t]},\ v(t))) \le \varphi(F(t, w\,|_{[0,t]},\ w(t))). \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich (6) mit Hilfe der Monotonie von $F(t, g, \xi)$ bezüglich $g \in W_t$: In W_t ist

$$v\,|_{[0,t]} \le w\,|_{[0,t]}\ .$$

Gilt (7), so folgt (6), wenn nach rechts durch $\varphi(F(t, w\,|_{[0,t]},\ w(t)))$ abgeschätzt wird; im Falle (8) kann nach links durch $\varphi(F(t, v\,|_{[0,t]},\ v(t)))$ abgeschätzt werden.

Literatur

[1] Antoni Markus, Herzog Gerd, Volkmann Peter: *Integralungleichungen bei Verwendung allgemeinerer Integralbegriffe.* KITopen, 5pp. (2019), DOI: 10.5445/IR/1000098449

[2] Baron Karol, Volkmann Peter: *Characterization of quasimonotonicity by means of functional inequalities.* Sem. LV, Nr. 22, 5 pp. (2005), http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/∼semlv, DOI:10.5445/IR/1000003621

[3] Herzog Gerd: *Quasimonotonicity.* Nonlinear Analysis **47**, 2213-2224 (2001).

[4] —, Volkmann Peter: *Quasimonotonicity and functional inequalities.* Ann. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comput. **47**, 293-296 (2018).

[5] Nagumo Mitio (南雲道夫): *Miszellen über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, III.* Kansū-Hōteisiki **15**, 15-26 (1939) [Japanisch].

[6] Simon Alice, Volkmann Peter: *Parabolic inequalities in ordered topological vector spaces.* Nonlinear Analysis **25**, 1051-1054 (1995).

[7] Volkmann Peter: *Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. **127**, 157-164 (1972), DOI:10.1007/BF01112607

[8] —, *Funktionalungleichungen in topologischen Vektorräumen.* Sem. LV, Nr. 12, 4 pp. (2002), http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/∼semlv, DOI:10.5445/IR/492002

[9] —, *Quasimonotonicity as a tool for differential and functional inequalities.* Inequalities and Applications 2010, herausgegeben von Catherine Bandle et al., International Series of Numerical Mathematics 161, Springer Basel, 269-273 (2012), DOI: 10.1007/978-3-0348-0249-9_21

[10] —, *Ein Vergleichssatz für Integralgleichungen.* KITopen, 3 pp. (2016), DOI:10.5445/IR/1000061837

[11] Walter Wolfgang: *Differential and integral inequalities.* Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1970 [Übersetzung aus dem Deutschen].

Adresse des Autors: Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland