

Chirale elastische Metamaterialien: Grundlegende Mechanismen und deren Nutzung zur Strukturoptimierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN
(DR.-ING.)**

von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des

Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

angenommene

DISSERTATION

von

M.Sc. Patrick Ziemke

Tag der mündlichen Prüfung:	14.06.2022
Hauptreferent:	Prof. Dr. rer. nat. Peter Gumbsch
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Institute of Nanotechnology* des Karlsruher Instituts für Technologie. Die Forschung wurde finanziert durch das Helmholtz-Projekt *Virtual Materials Design* sowie durch den Exzellenzcluster *3D Matter Made to Order*. Allen an der Organisation dieser Projekte beteiligten Personen möchte ich meinen Dank dafür aussprechen, dass sie durch ihren Einsatz die grundlegenden Mittel für meine Arbeit bereitgestellt haben.

Bei Prof. Peter Gumbsch bedanke ich mich vielmals für die Betreuung meiner Arbeit. Vielen Dank für die hilfreichen wissenschaftlichen Diskussionen, für die Schaffung der Rahmenbedingungen für die Promotion und für das mir entgegengebrachte Vertrauen. All das erlaubte es mir, mein Thema aus unterschiedlichen Perspektiven zu betrachten und mich während meiner Zeit als Doktorand sowohl persönlich als auch fachlich weiterzuentwickeln.

Prof. Thomas Seelig danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit, für die Zeit, die er als Korreferent aufgebracht hat, und für die hilfreichen Kommentare und Anmerkungen.

Bei Dr. Tobias Frenzel, Prof. Martin Wegener, Prof. Ruth Schwaiger, Chantal Kurpiers, Dr. Nikolay Garabedian und Dr. Rafaela Debastiani möchte ich mich für die produktive und angenehme Zusammenarbeit bedanken.

Bei meinen Bürokollegen Dominik Horny, Dr. Taymour El-Achkar, Dr. Johannes Dornheim, Hannes Holey und Mohamed Tarek Elewa bedanke ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre, für die gegenseitige Hilfsbereitschaft und für den interessanten fachlichen Austausch.

Dr. Johannes Schneider, Andrea Doer, Dr. Daniel Weygand sowie Yiyue Li danke ich für ihre Hilfe bei organisatorischen Abläufen und IT-Fragen.

Zuletzt gebührt mein Dank all jenen, die durch ihren Rückhalt dafür gesorgt haben, dass ich diese Herausforderung mit einem sicheren Gefühl angehen konnte. Hierfür danke ich meiner Freundin Marion, meinem Vater Peter, meiner Schwester Stefanie und meinen Freunden Sebastian, Nigora, David, Ann-Kristin, Jan und Nicolas. Jede Zusammenkunft mit euch war eine willkommene Gelegenheit für mich, neue Kraft zu tanken.

Karlsruhe, Juli 2022

Patrick Ziemke

Kurzfassung

Chirale Metamaterialien können reine Translationsbewegungen in Rotationen übersetzen. Wie stark diese Kopplung ist, wird über die chirale Antwort quantifiziert. Diese beschreibt, um welchen Winkel sich ein gerader prismatischer Stab verdreht, wenn er einer reinen Zug- oder Druckbelastung ausgesetzt wird. Das Blockiermoment beschreibt, welches Drehmoment benötigt wird, um die Verdrehung des Stabes zu verhindern. Für die kontinuumsmechanische Modellierung einer chiralen Antwort sind erweiterte Modelle wie zum Beispiel die mikropolare Kontinuumstheorie nötig. In der mikropolaren Elastizität existieren verschiedene charakteristische Längen, die es erlauben, größenabhängige Materialeigenschaften zu modellieren. Ist die Abmessung einer Probe um ein Vielfaches größer als die auf die Chiralität bezogene charakteristische Länge, verschwindet die chirale Antwort. Dabei nähert sie sich ihrem Grenzwert mit einem charakteristischen Abfall invers proportional zur Probengröße an.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte mit Finite-Elemente-Simulationen einer idealisierten Gitterstruktur unter Zugbelastung gezeigt werden, dass sich die charakteristische Länge über Größenordnungen hinweg einstellen lässt, wenn chirale Einheitszellen über nachgiebige achirale Verbindungselemente aneinander gekoppelt werden. Dabei wird die charakteristische Länge größer, wenn die Verbindungselemente nachgiebiger werden. Mit der charakteristischen Länge wird auch die chirale Antwort größer. Außerdem nehmen der Einfluss von geometrischen Nichtlinearitäten und die Sensitivität gegenüber Randbedingungen mit steigender charakteristischer Länge zu. Das an der idealisierten Gitterstruktur hergeleitete Designprinzip wurde genutzt, um ein mittels Zwei-Photonen-Stereolithographie herstellbares chirales Metamaterial zu entwerfen. Durch einen direkten Vergleich mit Experimenten an Gitterstrukturen aus mehr als 10^5 Einheitszellen wurden die von den Finite-Elemente-Simulationen vorhergesagten Zusammenhänge validiert. Zuletzt wurden nicht-periodische chirale Strukturen betrachtet und es wurde gezeigt, dass diese insbesondere bezüglich des Blockiermoments vorteilhafte Eigenschaften gegenüber periodischen Strukturen aufweisen können.

Abstract

Chiral metamaterials can translate purely translational motions into rotations. The strength of this coupling is quantified by the chiral response, which describes the angle by which a straight prismatic rod twists when subjected to a pure tensile or compressive load. The blocking torque describes how much torque is required to prevent the rod from twisting. For continuum mechanical modeling of a chiral response, generalized models such as micropolar continuum theory are needed. In micropolar elasticity, various characteristic lengths exist, allowing size-dependent material properties to be modeled. If the dimension of a sample is much larger than the characteristic length related to chirality, the chiral response vanishes. In this case, it approaches its limit with a characteristic decay inversely proportional to the sample size.

In this work, finite element simulations of an idealized lattice structure under tensile load were used to show that the characteristic length can be tailored over orders of magnitude when chiral unit cells are connected via compliant achiral coupling elements. The characteristic length increases as the connecting elements become more compliant. As the characteristic length increases, so does the chiral response. In addition, the influence of geometric nonlinearities and the sensitivity to boundary conditions increase with increasing characteristic length. The design principle derived from the idealized lattice structure has been used to design a chiral metamaterial fabricatable by two-photon stereolithography. Through direct comparison with experiments on lattice structures consisting of more than 10^5 unit cells, the relationships predicted by the finite element simulations were validated. Lastly, non-periodic chiral structures were considered and it was shown that they can have advantageous properties over periodic structures, especially with respect to the blocking torque.

Veröffentlichungen

Fernandez-Corbaton, I.; Rockstuhl, C.; Ziemke, P.; Gumbsch, P.; Albiez, A.; Schwaiger, R.; Frenzel, T.; Kadic, M.; Wegener, M. New Twists of 3D Chiral Metamaterials. *Adv. Mater.* 2019, 31 (26), 1807742.

Ziemke, P.; Frenzel, T.; Wegener, M.; Gumbsch, P. Tailoring the Characteristic Length Scale of 3D Chiral Mechanical Metamaterials. *Extreme Mechanics Letters* 2019, 32, 100553.

Frenzel, T.; Hahn, V.; Ziemke, P.; Schneider, J. L. G.; Chen, Y.; Kiefer, P.; Gumbsch, P.; Wegener, M. Large Characteristic Lengths in 3D Chiral Elastic Metamaterials. *Communications Materials* 2021, 2, 4.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	v
Veröffentlichungen	vii
1. Motivation	1
2. Theorie und Stand des Wissens	3
2.1. Notation	3
2.2. Metamaterialien	4
2.3. Chirale elastische Metamaterialien	5
2.4. Nicht-klassische Kontinuumstheorien	9
2.5. Skalierungsverhalten und charakteristische Längen	15
2.6. Zielsetzung und Aufbau	17
3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen	19
3.1. Hypothese	20
3.2. Aufbau der Struktursimulationen	24
3.3. Ergebnisse der Struktursimulationen	27
3.4. Diskussion	39
4. Realisierbare Strukturen und Validierung	51
4.1. Design des Metamaterials	51
4.2. Finite-Elemente-Simulationen	55
4.2.1. Struktursimulationen mit Kontinuumselementen	55
4.2.2. Struktursimulation mit Balkenelementen	55
4.2.3. Mikropolare Kontinuumsmechanik	59
4.3. Experimentelle Validierung	63
4.4. Diskussion	65

5. Nicht-periodische Strukturen	71
5.1. Ringförmige Strukturen	71
5.2. Helixförmige Schalenstrukturen	75
5.3. Diskussion	79
6. Zusammenfassung und Ausblick	83
A. Anhang zu idealisierten Strukturen	87
A.1. Methodik	87
A.2. Ergebnisse	90
B. Anhang zu realisierbaren Strukturen und Validierung	95
C. Anhang zu nicht-periodischen Strukturen	99
D. Forschungsdaten	103
Literatur	105

1. Motivation

Die Urgeschichte der Menschheit beginnt mit dem Aufkommen der ersten Steinwerkzeuge vor rund 2,6 Millionen Jahren [1]. Mit dem Beginn der Bronzezeit circa 3000 vor Christus wurde Stein als Werkstoff immer mehr von der Legierung Bronze verdrängt. Diese wurde später wiederum vom Eisen abgelöst [2]. Steinzeit, Bronzezeit, Eisenzeit – die Benennung der Epochen macht deutlich, welch großen Einfluss die Entdeckung neuer Materialien auf unseren technologischen Fortschritt hat [3]. Die für die Entdeckung neuer Materialien benötigten Zeiträume wurden im Lauf der Geschichte immer kürzer: Bis sich Metalle gegenüber Stein zur Herstellung von Werkzeugen mit dem Beginn der Bronzezeit durchsetzten, vergingen mehr als zwei Millionen Jahre [1, 2]; von der ersten Formulierung des modernen Periodensystems der Elemente mit ursprünglich 63 Elementen durch Dimitri Mendelejew im neunzehnten Jahrhundert bis zum heutigen Stand mit 118 bekannten Elementen benötigten wir weniger als zwei Jahrhunderte [4].

Die Entwicklung eines neuen Werkstoffs ist oft ein iterativer Prozess, der mit einem großen Ressourceneinsatz verbunden ist [5]. Wäre es nicht möglich, ein Material mit maßgeschneiderten Eigenschaften vorab, quasi auf Bestellung, zu entwerfen und herzustellen? Wer eine Antwort auf diese Frage sucht, wird sich zunächst damit auseinandersetzen müssen, wie die effektiven Eigenschaften eines Materials zustande kommen. Eine entscheidende Rolle kommt hier der Art und Weise zu, wie sich die Atome aneinander binden und wie sie sich räumlich anordnen. Letzteres entscheidet zum Beispiel darüber, ob ein Material piezoelektrisch auf eine Belastung reagiert, ob es transparent ist, oder ob es sich duktil oder spröde verhält. Der Aufbau der diskreten Struktur der Materie wird durch die Chemie der Elemente bestimmt. Kunststoffe bestehen zum Beispiel meistens aus Ketten kovalent gebundener Kohlenstoff- und Wasserstoffatome, die sich in amorphen bis teilkristallinen Strukturen anordnen. Metalle bevorzugen hingegen einen kristallinen Aufbau. Zusätzlich zur Auswahl der Zusammensetzung eines Stoffgemisches stehen uns Methoden wie zum Beispiel die Wärmebehandlung zur Verfügung, um unterschiedliche Mikrostrukturen und damit unterschiedliche Materialeigenschaften zu

1. Motivation

erzeugen. Bei der Entwicklung von Metamaterialien gehen wir noch einen Schritt weiter. Die Mikrostruktur eines Metamaterials wird vorab sorgfältig ausgelegt und dann mittels moderner Fertigungsverfahren wie zum Beispiel dem 3D-Druck mit hoher Präzision hergestellt. Dadurch lässt sich das Materialverhalten nicht nur präzise einstellen, sondern es sind aufgrund der großen Gestaltungsfreiheit auch Eigenschaften möglich, die bisher als unerreichbar galten. Ein besonders exotisches Beispiel hierfür sind Metamaterialien mit chiraler, das heißt nicht spiegelsymmetrischer Mikrostruktur. Sie besitzen die Fähigkeit eine lineare Bewegung in eine Rotation zu übersetzen, was intuitiv eher von einer Maschine als von einem Material zu erwarten wäre [6]. Insbesondere im Zuge der fortschreitenden Miniaturisierung technischer Systeme ist eine solche Eigenschaft interessant, da sie das Potential besitzt, aus mehreren Teilen bestehende Mechanismen zur Umwandlung von Translationen in Rotationen durch eine einzelne Komponente zu ersetzen. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich die Eigenschaften von chiralen Metamaterialien mit Hilfe von einem rationalen Designansatz maßschneidern lassen.

2. Theorie und Stand des Wissens

In diesem Kapitel wird der Stand der Forschung zu chiralen Metamaterialien zusammengefasst. Außerdem werden einige Begriffe, die in den nachfolgenden Kapiteln verwendet werden, definiert. In Abschnitt 2.1 wird auf die verwendete Notation eingegangen. Abschnitt 2.2 gibt eine Einführung in das Feld der Metamaterialien, wobei der Fokus auf deren mechanischen Eigenschaften liegt. In Abschnitt 2.3 wird das Konzept der Chiralität und deren Einfluss auf die Eigenschaften mechanisch belasteter Strukturen erklärt. Abschnitt 2.4 behandelt nicht-klassische Kontinuumstheorien. Aus diesen lassen sich viele Eigenschaften von periodischen chiralen Gitterstrukturen ableiten. In Abschnitt 2.5 wird das Konzept von charakteristischen Längen erläutert und wie diese das Materialverhalten von chiralen Metamaterialien beeinflussen. In Abschnitt 2.6 ist die Zielsetzung dieser Arbeit formuliert.

2.1. Notation

Es werden eine rein symbolische, eine indexbasierte und eine gemischte Notation verwendet, um Gleichungen angepasst an den Einzelfall möglichst kompakt zu halten. In der symbolischen Notation werden skalare Größen normal und tensorielle Größen fett geschrieben. In der indexbasierten Notation gilt die Einstein'sche Summationskonvention. Bei δ_{ij} handelt es sich um das Kronecker-Symbol, ϵ_{ijk} ist das Levi-Civita-Symbol. Das Skalarprodukt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_i w_i$ wird mit einem Punkt gekennzeichnet. Der Ausdruck $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \epsilon_{ijk} v_i w_j \mathbf{e}_k$ beschreibt das Kreuzprodukt zweier Vektoren. Bei skalaren Größen beschreibt der Ausdruck $v \times w \times \dots$ entweder das Kartesische Produkt oder die zueinander rechtwinkligen Abmessungen eines Körpers. Allgemeine Vektoren $\underline{v} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ werden durch einen einfachen Unterstrich und Matrizen $\underline{\underline{V}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch zwei Unterstriche gekennzeichnet. Doppelte vertikale Striche $\|\underline{v}\|$ symbolisieren die euklidische Norm von Vektoren oder die Frobeniusnorm von Tensoren.

2.2. Metamaterialien

Der Begriff Metamaterial ist erst ungefähr zwanzig Jahre alt und es existiert noch keine einheitlich verwendete Definition [5]. Allgemein gefasst sind Metamaterialien rational gestaltete Verbundwerkstoffe mit effektiven Eigenschaften, die über die Materialeigenschaften der Basismaterialien hinausgehen [3, 5]. Bezogen auf diese allgemein gefasste Definition sind in der englischsprachigen Literatur synonym die Begriffe *architected/architected materials* [7, 8] oder *designer composites* [9] gebräuchlich.

Der Geometrie der Mikro- beziehungsweise Mesostruktur kommt bei Metamaterialien eine entscheidende Rolle zu. Deren rationales Design erlaubt es, extreme oder exotische effektive Eigenschaften zu erzielen [3, 5, 10, 11]. Beispiele hierfür sind Materialien mit negativer Querkontraktionszahl (auxetische Materialien) [12, 13, 14], mit negativem thermischem Ausdehnungskoeffizient [15, 16, 17], mit negativer effektiver Kompressibilität [18, 19, 20], Materialien mit einem sehr kleinen Schub- und gleichzeitig sehr großen Kompressionsmodul (*pentamode materials*) [10, 21, 22, 23] und Metamaterialien mit dissipativen und zugleich reversiblen Deformationsmoden [24, 25, 26].

Der Aufbau von Metamaterialien kann sowohl periodisch als auch nicht-periodisch sein [5]. Es wird in manchen Quellen argumentiert, dass ein Metamaterial nur als solches zu bezeichnen ist, wenn dem heterogenen Verbund effektive Materialeigenschaften in Form von Konstitutivgleichungen zugewiesen werden können [5]. Da es jedoch schwierig ist zu beweisen, dass eine bestimmte diskrete Struktur prinzipiell nicht homogenisierbar ist, verzichtet diese Arbeit auf eine solche Präzisierung um die Diskussion nicht unnötig kompliziert zu gestalten. Wenn im Folgenden der Begriff Struktur verwendet wird, soll damit nicht ausgedrückt werden, dass kein Material gemeint ist, sondern lediglich, dass es sich um eine Beschreibung auf diskreter, das heißt auf mikro- oder mesoskopischer Ebene des Materials, handelt. Der Begriff Metamaterial wird in dieser Arbeit immer in der allgemein gefassten Definition verwendet. Für periodische Strukturen wird äquivalent der Begriff Gitterstruktur verwendet. Der Aufbau von Metamaterialien mit periodischer Struktur erfolgt, analog zum atomaren Aufbau kristalliner Festkörper [27], durch die Translation einer Einheitszelle auf einem periodischen Gitter, weshalb sie manchmal als künstliche Kristalle bezeichnet werden [28]. Die globalen Materialeigenschaften von Metamaterialien mit periodischer Struktur leiten sich sowohl aus der Einheitszelle als auch aus deren Interaktion mit ihrer Umgebung, das heißt den benachbarten Einheitszellen,

ab [29]. Insbesondere die Interaktion zwischen Einheitszellen wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine große Rolle spielen. Prinzipiell können beliebig viele Phasen mit unterschiedlichen Aggregatzuständen, wie zum Beispiel bei akustischen Metamaterialien [30], am Aufbau beteiligt sein. Ein besonders einfacher und häufig verwendeter Aufbau ist eine poröse feste Phase, die wie ein Schaum mit einem Gas befüllt ist. Der Einfluss des Gases auf die mechanischen Eigenschaften des Metamaterials ist dabei häufig vernachlässigbar. Auf theoretischer Seite sind rational gestaltete Verbundwerkstoffe bereits seit über einem Jahrhundert ein Thema, viele Konzepte konnten jedoch erst in den letzten Jahren praktisch umgesetzt werden [5, 31].

Die zwei maßgeblichen technologischen Treiber, die dies ermöglichten, sind zum einen die Fortschritte in der additiven Fertigung, welche es erlauben nahezu beliebige dreidimensionale Strukturen herzustellen, und zum anderen immer mächtigere Simulationswerkzeuge, mit denen unterschiedliche Designs vorab evaluiert werden können [5]. Metamaterialien stellen somit einen Paradigmenwechsel in den Materialwissenschaften dar [29], wo sonst häufig aufwändige *trial-and-error* Prozesse für die Optimierung von Materialeigenschaften nötig sind [5]. Die Anwendungsmöglichkeiten für Metamaterialien sind vielfältig und reichen von der Luft- und Raumfahrttechnik [32, 33] bis hin zur Mikrosystemtechnik [34]. Ein große Hürde für die Anwendung von Metamaterialien in der Industrie stellt die Skalierbarkeit bezüglich der Materialeigenschaften, der Herstellbarkeit und der Charakterisierung dar [6, 29].

2.3. Chirale elastische Metamaterialien

Der Begriff Chiralität stammt vom griechischen Wort *kheir* (deutsch: Hand) ab und wird daher auch als Händigkeit bezeichnet [35]. Die rein geometrische Definition von Chiralität wurde durch William Thompson (Lord Kelvin) eingeführt. Er nennt Objekte chiral, wenn diese nicht mit ihrem Spiegelbild in Kongruenz gebracht werden können.[36]Für eine ausführliche Abhandlung zur Begriffsherkunft sei auf die Referenz [35] verwiesen.

Zwei nicht deckungsgleiche Spiegelbilder heißen Enantiomere. Ob ein Objekt chiral ist, hängt im Allgemeinen von der Dimension des Raumes, in dem es betrachtet wird, ab [37]. So erfüllen zum Beispiel die einer Zipfelmütze nachempfundenen Figuren in Abbildung 2.1a Thompsons Definition im zweidimensionalen Fall, da sich eine Deckungsgleichheit zwischen zwei Spiegelbildern nicht durch reine Translationen oder Rotationen in der Be-

2. Theorie und Stand des Wissens

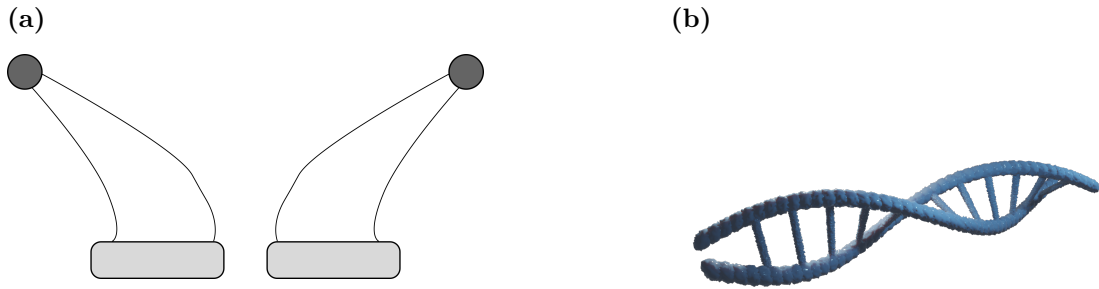


Abbildung 2.1.: Beispiele für chirale Objekte. (a) Zweidimensionales Bild einer Zipfelmütze. Diese sind nur im zweidimensionalen Raum chiral. (b) Vereinfachte schematische Darstellung der Struktur der Desoxyribonukleinsäure (DNA) als Beispiel für Chiralität im dreidimensionalen euklidischen Raum.

trachtungsebene erreichen lässt. Bei einer Erweiterung des Raumes um eine Dimension senkrecht zur Betrachtungsebene lassen sich die Spiegelbilder jedoch durch eine einfache Rotation aufeinander abbilden. Im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 ist ein Objekt chiral, wenn es keine Symmetrie bezüglich einer Ebenen-, Dreh-, sowie Punktspiegelung besitzt [38]. Ist eine dieser Symmetrieeen vorhanden, ist das Objekt achiral [38]. Es existiert eine generalisierte, für beliebige n -dimensionale metrische Räume gültige Definition von Chiralität [37]. Für die in dieser Arbeit untersuchten Strukturen ist die Definition für \mathbb{R}^3 ausreichend.

Ein anschauliches Beispiel für Chiralität in \mathbb{R}^3 ist die menschliche Hand. Es gibt keine Möglichkeit, eine rechte Hand so zu verschieben und zu drehen, dass sie sich nicht von der linken Hand unterscheiden lässt. Um dies zu erreichen, müsste die rechte Hand gespiegelt werden. Ein weiteres Beispiel für ein chirales Objekt in \mathbb{R}^3 ist die in Abbildung 2.1b schematisch dargestellte Desoxyribonukleinsäure (DNA). Im Zusammenhang mit bio-chemischen Prozessen kommt chiralen Molekülen eine große Bedeutung zu, da diese, abhängig davon welches Enantiomer vorliegt, sehr unterschiedliche Auswirkungen auf Organismen haben können [39]. Luis Pasteur untersuchte bereits im neunzehnten Jahrhundert chirale Moleküle [40] und auch in der Gegenwart wird noch an deren Detektion geforscht [41].

In der klassischen Kontinuumsmechanik spielte der Einfluss von Chiralität auf die mechanischen Eigenschaften von Materialien über lange Zeit eine untergeordnete Rolle. Dies manifestiert sich darin, dass gängige Konstitutivgleichungen wie das dreidimensionale

Hooke'sche Gesetz Chiralität gänzlich vernachlässigen [42]. Die elastischen Eigenschaften von Materialien mit chiraler Mikrostruktur zeichnen sich dadurch aus, dass eine Kopplung von Translations- und Rotationsfreiheitsgraden möglich ist. Interessante Anwendungsmöglichkeiten für diese Materialeigenschaft ergeben sich zum Beispiel in der Aktuatorik [43] und in der Sensorik [44, 45].

Ein Effekt von zentraler Bedeutung ist die Kopplung von Zug- oder Druckbelastungen und Torsionsverformungen [42]. Diese führt dazu, dass ein Stab auf eine quasi-statische Zugbelastung mit einem globalen Torsionsmoment reagiert. In Abbildung 2.2 ist diese Kopplung am einfachen Beispiel eines zylindrischen Stabes schematisch dargestellt. Der Stab wird in axialer Richtung mit einer Kraft F belastet, was eine axiale Dehnung $\varepsilon = \Delta L/L_0$ zur Folge hat. Durch die Zug-Torsions-Kopplung entsteht ein zur Kraft F koaxiales inneres Torsionsmoment. Wird der Stab an seinen Enden nicht festgehalten, verdreht sich dieser global um den Winkel φ . Dies geschieht, ohne dass ein äußeres Torsionsmoment auf den Stab einwirkt. Die dünnen Linien auf den Mantelflächen der Zylinder dienen ausschließlich dazu, die Makrorotation φ zu illustrieren. Sie beinhalten jedoch keine Information über die Heterogenität des Materials. Da ein solches Verhalten nur möglich ist, wenn das Material des Zylinders auf diskreter Ebene eine chirale Struktur hat, wird die Zug-Torsions-Kopplung im Folgenden als chirale Antwort bezeichnet. Als Metrik für die chirale Antwort dient der Quotient

$$\frac{\varphi}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

aus der Makrorotation und der axialen Dehnung.

In der klassischen Kontinuumsmechanik ist eine solche Deformationsmode nicht möglich, da keine Rotationsfreiheitsgrade existieren, die über eine Konstitutivgleichung an eine Translation gekoppelt werden können. Roderic Lakes berichtete 1981 erstmals von Proben aus menschlichem Knochen, die sich bei einem Zugversuch verdrehten [46]. Er schloss daraus, dass die Mikrostruktur der untersuchten Knochen chiral sein muss [46]. Desweiteren konnten Lakes u. a. [47] zeigen, dass es möglich ist, dieses Verhalten mit Hilfe der mikropolaren Kontinuumstheorie zu modellieren.

Durch das gesteigerte Interesse an mechanischen Metamaterialien rückte das Thema Chiralität vermehrt in den Fokus der Mechanik. Zur Anwendung kamen chirale Struk-

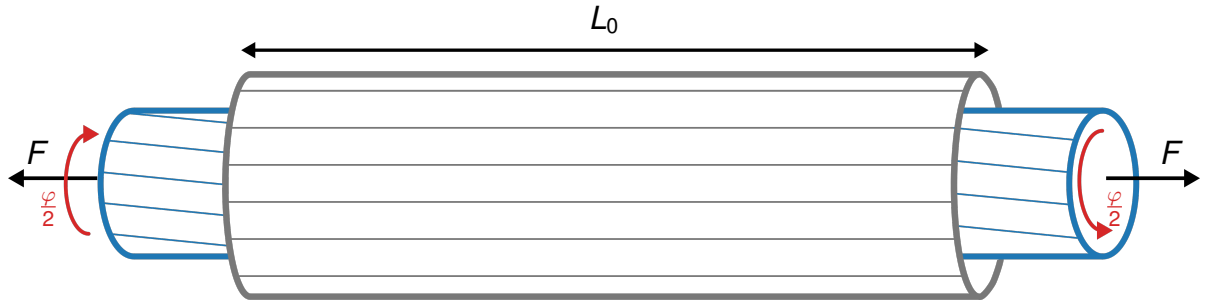


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung der Zug-Torsions-Kopplung. Durch die Kraft in axialer Richtung wird der Stab um die Ingenieursdehnung $\varepsilon = \Delta L/L_0$ gedehnt. Bei einem chiralen Material führt dies zu einem Torsionsmoment und der Stab verdreht sich um den Winkel φ , ohne dass von außen ein Moment als Randbedingung aufgebracht wird.

turen zum Beispiel bei der Konstruktion von zweidimensionalen [48, 49] und dreidimensionalen [50] auxetischen Metamaterialien. Dabei wurde die Kopplung von Translations- und Rotationsmoden gezielt eingesetzt, um eine negative effektive Querkontraktionszahl zu erreichen. Ha u.a. [51] stellten ein Konzept für eine chirale Gitterstruktur vor, anhand derer mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen eine chirale Antwort demonstriert werden konnte. Frenzel u.a. [52] veröffentlichten 2017 die ersten Experimente an einem Metamaterial, das eine chirale Antwort zeigte. In beiden Untersuchungen [51, 52] wurde festgestellt, dass die mechanischen Eigenschaften von chiralen Metamaterialien eine stark ausgeprägte Größenabhängigkeit aufweisen. Das bedeutet, dass die Materialeigenschaften davon abhängen, wie groß die Einheitszelle im Vergleich zur Gesamtgröße einer Probe ist.

Als Beispiel hierfür zeigt Abbildung 2.3a unterschiedliche Zusammensetzungen der von Frenzel u.a. [52] entworfenen Gitterstruktur. Die äußere Kontur der Gitter in Abbildung 2.3a hat stets die gleiche Abmessung $B \times B \times 2B$; sie unterscheiden sich jedoch in der Anzahl der Einheitszellen. Die relative Dichte ist bei allen Zusammensetzungen gleich. Die Reaktion auf eine äußere mechanische Last hängt jedoch davon ab, ob das Gitter aus wenigen großen oder vielen kleinen Einheitszellen besteht. Insbesondere die chirale Antwort weist sehr starke Größeneffekte auf [52]. Neben der chiralen Antwort selbst sind diese Größeneffekte ein weiteres Phänomen, das in der klassischen Kontinuumsmechanik verboten ist. In den folgenden beiden Abschnitten wird darauf eingegangen, wie eine Kontinuumstheorie grundsätzlich aussehen muss, um eine chirale Antwort abbilden zu können, und wie sich die Größeneffekte über charakteristische Längen beschreiben lassen.

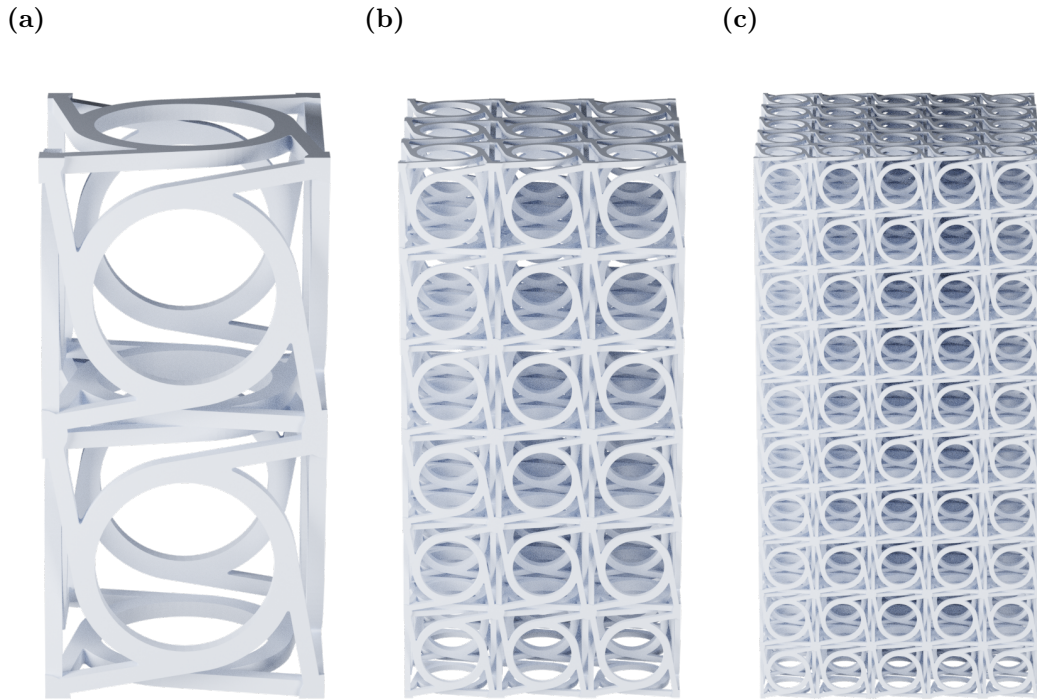


Abbildung 2.3.: Design für ein chirales Metamaterial nach Frenzel u.a. [52]. Die periodischen Gitter bestehen aus $N \times N \times 2N$ Einheitszellen. **(a)** $N = 1$ **(b)** $N = 3$ **(c)** $N = 5$. Obwohl die äußeren Abmessungen in allen drei Abbildungen gleich sind, reagieren die Gitter mit unterschiedlichen N unterschiedlich auf eine Last.

2.4. Nicht-klassische Kontinuumstheorien

In der Kontinuumsmechanik wird der diskrete Aufbau von Materie bei der Modellierung nicht direkt berücksichtigt. Stattdessen werden Objekte als kontinuierliches Medium, genannt materieller Körper, beschrieben. Diesem werden gemittelte Eigenschaften wie zum Beispiel eine Massendichte zugeordnet [53]. Mathematisch wird ein materieller Körper als eine kontinuierliche Menge von materiellen Punkten definiert [54]. Die Bewegung eines materiellen Körpers wird durch die Kinematik beschrieben [53]. Bei der Formulierung der Kinematik wird festgelegt, wie viele Freiheitsgrade ein materieller Punkt besitzt. Über Bilanzgleichungen wird die Interaktion eines materiellen Körpers mit seiner Umwelt modelliert [54]. Die Kinematik und die Bilanzgleichungen sind materialunabhängig und innerhalb der jeweiligen Kontinuumstheorie allgemein gültig [53, 54]. Die effektiven physikalischen Eigenschaften sowie die Symmetrie eines Materials werden über phänomenologisch motivierte Konstitutivgleichungen beschrieben [53]. Diese Art der Modellierung ist im Vergleich zu diskreten Methoden sehr effizient und ermöglicht

2. Theorie und Stand des Wissens

es, dass viele Probleme überhaupt auf einer in der Praxis relevanten Skala gelöst werden können [53].

Es wird in der Literatur häufig zwischen der klassischen Kontinuumsmechanik und nicht-klassischen Kontinuumstheorien unterschieden [54, 53]. Nicht-klassische Kontinuumsmodelle zeichnen sich gegenüber dem klassischen Modell entweder durch die Berücksichtigung von Dehnungsgradienten höherer Ordnung [55] oder durch die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade [56, 57] aus. Es sei darauf hingewiesen, dass sich diese Unterteilung explizit auf dreidimensionale Kontinua im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 bezieht. In den klassischen Ansätzen der Strukturmechanik [58] wird die Dimension eines eigentlich dreidimensionalen Objekts reduziert und bestimmte Deformationen werden durch zusätzliche Freiheitsgrade eines Punktes parametrisiert. In diesen Modellen, wie zum Beispiel den klassischen Balken [59, 60] oder Platten und Schalen [59, 61], besitzen materielle Punkte dadurch bis zu sechs Freiheitsgrade. Diese können jedoch, im Gegensatz zu den Freiheitsgraden von nicht-klassischen Theorien vollständig aus der klassischen Kontinuumsmechanik abgeleitet werden.

In der klassischen Kontinuumsmechanik besitzt jeder materielle Punkt eines dreidimensionalen Körpers in \mathbb{R}^3 drei Freiheitsgrade der Translation [54, 53]. Eine räumliche Orientierung wird einem Punkt in dieser Kinematik nicht zugeordnet. Folglich hat er keine Rotationsfreiheitsgrade. Demnach können auf ein infinitesimales Volumenelement Spannungen und Volumenkräfte, jedoch keine Drehmomente wirken. Aus der Drehimpulsbilanz ergibt sich daher, dass der Cauchy'sche Spannungstensor symmetrisch sein muss. Die klassische Kontinuumsmechanik ermöglicht die Formulierung von Konstitutivgleichungen zur Beschreibung einer Vielzahl von linearen und nichtlinearen (siehe z.B. [62, 63]) Materialeigenschaften und ist der Standard in den Ingenieursdisziplinen. Bei chiralen Metamaterialien versagt sie jedoch. Da es keine Momentendichten gibt, können globale Drehmomente nur durch eine asymmetrische Geometrie oder Randbedingung, aber nicht durch eine Materialantwort hervorgerufen werden.

Um eine chirale Antwort abbilden zu können, sind nicht-klassische Kontinuumstheorien mit zusätzlichen Freiheitsgraden nötig. Eine umfangreiche Übersicht über moderne nicht-klassische Kontinuumstheorien und deren Entwicklung ist in den Referenzen [64, 65] gegeben. Frühe Arbeiten auf diesem Gebiet stammen von den Gebrütern Cosserat (Die Originalquellen aus dem Ende des neunzehnten und dem Anfang des zwanzigsten

Jahrhunderts waren nicht zugänglich, weshalb hier auf die Zusammenfassungen in [64, 65] verwiesen sei). Weitere einflussreiche Beiträge wurden unter anderem von Mindlin [66] und Eringen [56, 57] verfasst. Im Folgenden werden die Grundzüge der mikropolaren Elastizität nach Eringen [57, 67] skizziert. An dieser lassen sich einige wichtige Interpretationen zu den mechanischen Eigenschaften von chiralen elastischen Materialien motivieren.

Die grundlegende Idee nicht-klassischer Kontinuumsmodelle nach Eringen [67] besteht darin, mehr Informationen über die Mikrostruktur eines Materials in Form von zusätzlichen unabhängigen Freiheitsgraden bei der Modellierung zu berücksichtigen. Abbildung 2.4 stellt diese verallgemeinerte Kinematik dar. Ein materieller Körper \mathcal{B} ist eine Menge materieller Punkte $\{P(\mathbf{X}, \Xi)\}$. Der Vektor \mathbf{X} (blau) beschreibt die Lage eines materiellen Punktes und Ξ (rot) dessen innere Struktur. Aufgrund dieser zusätzlichen Information über die innere Struktur ist in der Literatur der Begriff Punktpartikel gebräuchlich, aus physikalischer Sicht sind P aber infinitesimale materielle Punkte [67]. Durch die Berücksichtigung der Strukturinformation ist es möglich, einem materiellen

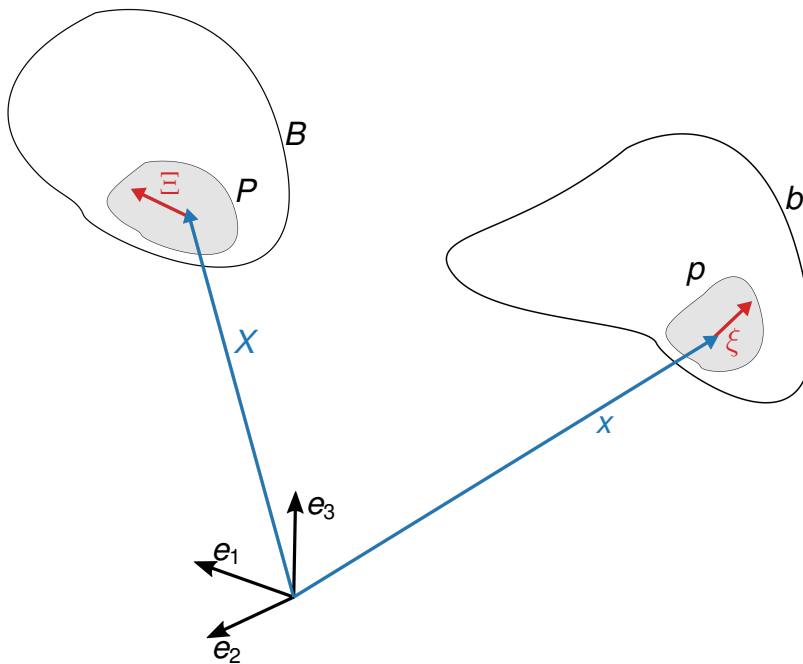


Abbildung 2.4.: Kinematik eines Mikrokontinuums nach Eringen [67]. Die Vektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} (blau) beschreiben die Lage des Schwerpunktes eines materiellen Punktes. Die Vektoren Ξ und ξ beschreiben die innere (Mikro-)Struktur.

2. Theorie und Stand des Wissens

Punkt zusätzlich zu der klassischen Translationsbewegung eine Mikrodeformation oder Mikrorotation zuzuweisen.

Wird der Körper bewegt oder deformiert, wird jeder Punkt $P(\mathbf{X}, \Xi)$ von seiner Referenzplatzierung zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Abbildungen

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

und

$$\Xi \rightarrow \xi = \hat{\xi}(\mathbf{X}, \Xi, t) \quad (2.3)$$

in seine momentane Platzierung $p(\mathbf{x}, \xi, t)$ überführt. Gleichung 2.2 beschreibt die klassische Makrobewegung (aus dem Englischen *macromotion*) und Gleichung 2.3 die Mikrobewegung (aus dem Englischen *micromotion*) [67]. Da die materiellen Punkte infinitesimal klein sind, lässt sich die Mikrobewegung in der linearisierten Form

$$\xi_k \approx \chi_{kK}(\mathbf{X}, t) \Xi_K \quad (2.4)$$

darstellen [56, 67]. Unter Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von $\hat{\mathbf{x}}$ werden die Deformation und Rotation eines materiellen Körpers beschrieben durch den klassischen Deformationsgradienten

$$F_{kK} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \quad (2.5)$$

und den analog definierten Mikrodeformationstensor χ_{kK} . Über die Eigenschaften von χ_{kK} wird festgelegt, wie sich ein materieller Punkt verformen kann. Im allgemeinsten Fall, dem mikromorphen Kontinuum, sind Mikroschub- und Mikrostretchverformungen sowie Mikrorotationen möglich [67]. Die Existenz einer Mikrorotation ist die Grundvoraussetzung dafür, dass eine chirale Antwort möglich ist. Die einfachste Formulierung, die diese Bedingung erfüllt, ist das mikropolare Kontinuum. In der mikropolaren Kontinuumstheorie kann ein materieller Punkt lediglich Starrkörperrotationen, aber keine Verzerrungen aufweisen. Dies kann über die Bedingungen

$$\chi_{kK} \chi_{lK} = \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \chi_{kK} \chi_{kL} = \delta_{KL} \quad (2.6)$$

ausgedrückt werden [67]. Die Unterscheidung zwischen groß und klein geschriebenen Indices weist darauf hin, dass es sich bei F_{kK} und χ_{kK} im Allgemeinen um Zweipunktensoren handelt, die vom Bezugssystem $\{\mathbf{e}_K\}$ der Referenzplatzierung in das Bezugssystem

$\{\mathbf{e}_k\}$ der Momentanplatzierung abbilden. Im Folgenden wird von einem gemeinsamen Bezugssystem ausgegangen, wodurch diese Unterscheidung hinfällig ist.

Für kleine Deformationen und Rotationen berechnet sich der linearisierte Verzerrungstensor \mathbf{e} eines mikropolaren Kontinuums nach Eringen [67] über die Verschiebung

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.7)$$

und die Mikrorotation

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\Xi} \quad (2.8)$$

gemäß der Vorschrift

$$e_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \epsilon_{jik}\phi_k. \quad (2.9)$$

Der linearisierte Krümmungstensor $\boldsymbol{\gamma}$ ist gegeben durch [67]

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}. \quad (2.10)$$

Sowohl \mathbf{e} als auch $\boldsymbol{\gamma}$ sind im Allgemeinen unsymmetrisch. Zusätzlich zum klassischen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ mit der Einheit Kraft pro Fläche existiert in der mikropolaren Theorie das Spannungsmaß \mathbf{m} . Bei dessen Komponenten m_{ij} handelt es sich um Drehmomente pro Flächeneinheit. Wie die Dehnungsmaße sind auch die Spannungsmaße $\boldsymbol{\sigma}$ und \mathbf{m} im Allgemeinen unsymmetrisch.

Die mikropolare Impulsbilanz und Drehimpulsbilanz nach Eringen [57, 67] lauten für den quasi-statischen Fall ohne Volumenkräfte

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (2.11)$$

und

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_i} + \epsilon_{jkl}\sigma_{kl} = 0. \quad (2.12)$$

Die Konstitutivgleichung der linearen mikropolaren Elastizität leitet sich aus dem Potential

$$U = \frac{1}{2}(A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + B_{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} + 2C_{ijkl}e_{ij}\gamma_{kl}) \quad (2.13)$$

gemäß

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} = A_{ijkl}e_{kl} + C_{ijkl}\gamma_{kl} \quad (2.14)$$

und

$$m_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \gamma_{ji}} = B_{jikl}\gamma_{kl} + C_{klji}e_{kl} \quad (2.15)$$

ab, wobei die Tensoren vierter Stufe \mathbf{A} und \mathbf{B} die Symmetrieeigenschaften

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad B_{ijkl} = B_{klij} \quad (2.16)$$

besitzen [67]. Der Tensor \mathbf{C} koppelt die Gleichungen 2.14 und 2.15, indem er Krümmungen auf Spannungen und Dehnungen auf Momente pro Flächeneinheit abbildet. Es ist genau diese Kopplung, die eine chirale Antwort ermöglicht. Es sei angemerkt, dass \mathbf{C} ein Pseudotensor ist, das heißt bei einer Spiegelung wechselt er sein Vorzeichen. Mit dieser Eigenschaft lässt sich argumentieren, dass die Komponenten von \mathbf{C} nur bei chiralen Materialien ungleich null sein können [46, 47, 42, 68, 69].

Die Charakterisierung mikropolarer Materialien ist deutlich aufwändiger als die Charakterisierung von klassischen Materialien, da aufgrund der zusätzlichen Freiheitsgrade mehr unabhängige elastische Moduli bestimmt werden müssen. Bei der experimentellen Bestimmung der Moduli wurde häufig die vereinfachende Annahme eines isotropen Materialverhaltens getroffen, obwohl die untersuchten Materialien diese Bedingung nicht immer exakt erfüllen [70, 71, 72, 73, 74]. In einer Vielzahl von theoretischen Studien wurden für anisotrope achirale Gitterstrukturen verschiedene Homogenisierungsansätze vorgeschlagen, um mikropolare Moduli zu ermitteln. (siehe z.B. [75, 76, 77]) Für zweidimensionale chirale isotrope Gitter konnten die mikropolaren elastischen Moduli ebenfalls analytisch aus einer Homogenisierung bestimmt werden [78]. Frenzel u. a. [52] gelang es, das chirale Metamaterial aus Abbildung 2.3 als mikropolares Kontinuum mit kubischer Symmetrie zu modellieren. Allerdings wurden die Moduli nicht eindeutig bestimmt, sondern lediglich durch eine systematische Variation angepasst, sodass das Kontinuumsmodell die uniaxialen Druckversuche reproduziert. Duan u. a. [68] stellten am Beispiel einer idealisierten chiralen Struktur den bisher einzigen Ansatz vor, um alle mikropolaren Moduli für ein Material mit kubischer Symmetrie eindeutig zu bestimmen.

2.5. Skalierungsverhalten und charakteristische Längen

Aus Sicht der klassischen Kontinuumsmechanik sind Größeneffekte nicht möglich. Die Folge dieser Skalunenabhängigkeit in der klassischen Kontinuumsmechanik lässt sich am Beispiel eines Stabes mit kreisförmigem Querschnitt unter Torsion verdeutlichen. Die klassische elastische Energie ist in diesem Fall gegeben durch

$$W_T = \frac{M_T^2 L}{2GJ} \quad (2.17)$$

wobei M_T das Torsionsmoment, L die Länge, G der klassische Schubmodul und J das klassische polare Flächenträgheitsmoment ist [79]. Für verschiedene Homothetien dieses Stabes, das heißt für verschiedene Stäbe, bei denen der Radius und die Länge um den gleichen Faktor verändert wurden, ist die auf das Volumen V normierte klassische Energie W_T/V konstant. In anderen Worten besitzen geometrisch ähnliche Stäbe auf ihr Volumen bezogen immer die gleiche Steifigkeit. Bei nicht-klassischen Kontinuumsmodellen wie der mikropolaren Theorie ist dies nicht der Fall. Hier haben kleinere Stäbe bezogen auf ihr Volumen eine höhere Steifigkeit, obwohl die mikropolaren elastischen Moduli konstant bleiben [70, 71, 72, 73, 74]. Aus den elastischen Moduli der nicht-klassischen Theorien können verschiedene charakteristische Längen berechnet werden, die sich auf die jeweilige Belastungsart wie zum Beispiel Biegung oder Torsion beziehen [51, 52, 70, 71, 72, 73, 74]. Diese charakteristischen Längen quantifizieren das Skalierungsverhalten von mikropolaren Materialien. Ist die Abmessung eines Körpers viel größer als die charakteristische Länge, verhält sich dieser wie ein klassisches Kontinuum. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, ist das Materialverhalten durch die zusätzlichen Freiheitsgrade beeinflusst. Viele heterogene Materialien, wie zum Beispiel Schäume [80, 71, 70], weisen solche Größeneffekte auf. Die mikropolaren charakteristischen Längen sind häufig ähnlich groß wie die Heterogenitäten des Materials [67, 81]. Es wurden jedoch im achiralen Fall auch deutlich größere charakteristische Längen bestimmt [72]. Bezogen auf die chirale Antwort ist aus der Sichtweise der Kontinuumsmechanik zu erwarten, dass sie verschwindet, wenn die Abmessung der Zugprobe D viel größer ist als die charakteristische Länge l_t . Es sei angemerkt dass diese Aussage nur für quasi-statische Verformungsprozesse gilt. Bei einer dynamischen Anregung weisen chirale Metamaterialien den nicht-klassischen Effekt der akustischen Aktivität [82, 83, 28] auf, bei dem die Polarisationsebene einer eingehenden Transversalwelle, ähnlich wie bei der optischen Aktivität,

2. Theorie und Stand des Wissens

um einen bestimmten Winkel gedreht wird. In diesem Fall ist neben dem Verhältnis aus Probengröße und Einheitszelle beziehungsweise charakteristischer Länge auch das Verhältnis aus der Wellenlänge der Anregung und charakteristischer Länge entscheidend [83]. Lakes u.a. [47] konnten in einer analytischen Lösung für den in Abbildung 2.2 dargestellten quasi-statischen Lastfall für ein isotropes linear elastisches mikropolares Material zeigen, wie sich die chirale Antwort ihrem Grenzwert

$$\lim_{l_t/D \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\varepsilon} = 0 \quad (2.18)$$

annähert. Diese Lösung ist in Abbildung 2.5 auf einer doppelt logarithmischen Skala

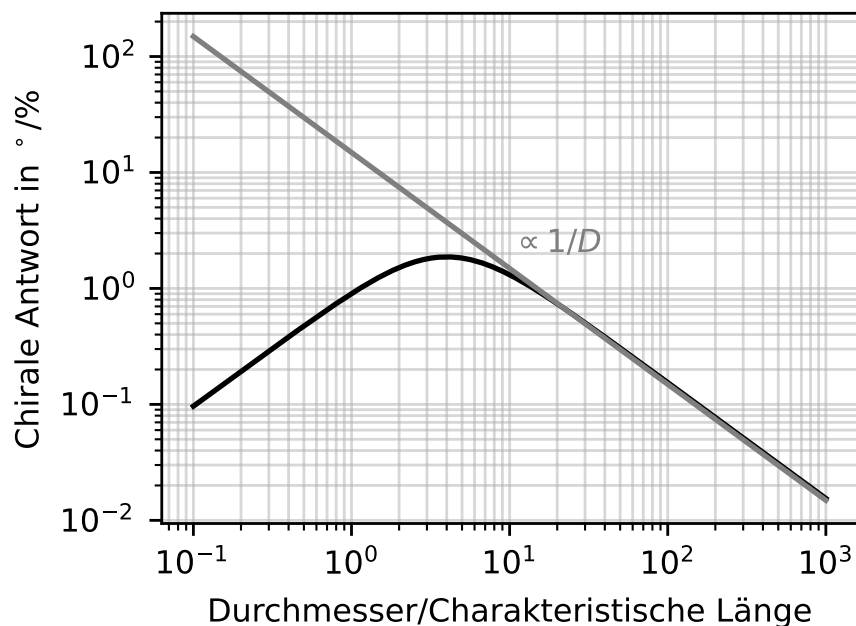


Abbildung 2.5.: Chirale Antwort eines zylindrischen mikropolaren Stabes in Abhängigkeit seines Durchmessers nach der analytischen Lösung von Lakes u.a. [47]. Der Punkt, an dem der Durchmesser genau der charakteristischen Länge entspricht, befindet sich auf der Abszisse aufgrund der Normierung bei $10^0 = 1$.

dargestellt. Auf der Abszisse ist das Verhältnis aus Durchmesser und charakteristischer Länge bezüglich Torsion D/l_t und auf der Ordinate die chirale Antwort aufgetragen. Die absoluten Werte in Abbildung 2.5 haben keine besondere physikalische Bedeutung, da für die Erstellung der Grafik nach der Lösung von Lakes u.a. [47] mikropolare Moduli ausgewählt wurden, die sich nicht auf ein bestimmtes Material beziehen, sondern lediglich die Bedingung einer positiven elastischen Energie ($U > 0$ in Gleichung 2.13) erfüllen. An dieser Stelle ist ausschließlich der qualitative Zusammenhang wichtig. Für Durch-

messer, die kleiner als die charakteristische Länge l_t sind, nimmt die chirale Antwort mit steigendem Durchmesser zunächst zu. Beträgt der Durchmesser des Stabs ungefähr das Vierfache der charakteristischen Länge nimmt die chirale Antwort ihr Maximum an. Die chirale Antwort skaliert invers proportional zum Durchmesser, wenn dieser sehr viel größer ist als die charakteristische Länge.

2.6. Zielsetzung und Aufbau

Das Ziel dieser Arbeit ist die Herstellung einer Verbindung zwischen der (Gitter-)Struktur und dem globalen Materialverhalten von chiralen Metamaterialien. Der Fokus liegt dabei auf den stark ausgeprägten Größeneffekten, die aus der Sichtweise der mikropolaren Kontinuumsmechanik über charakteristische Längen quantifiziert werden. In den Pionierarbeiten [51, 52] zu chiralen Metamaterialien wurden charakteristische Längen demonstriert, die sich in der Größenordnung von einer Einheitszelle befinden, was sich darin zeigte, dass die chirale Antwort bereits kleiner wurde, wenn Proben im Durchmesser dicker als zwei Einheitszellen waren. Um zu untersuchen, wie sich die charakteristische Länge chiraler Gitterstrukturen verändern lässt, werden in Kapitel 3 Finite-Elemente-Simulationen an einer idealisierten, numerisch effizient modellierbaren Gitterstruktur betrachtet. Aus den Ergebnissen der numerischen Simulationen wird ein mikromechanisch motivierter Designansatz abgeleitet, der es erlaubt, die charakteristische Länge über eine Größenordnung hinweg einzustellen. In Kapitel 4 wird dieser Ansatz auf eine mittels additiver Fertigung herstellbare Gitterstruktur übertragen, um den Ansatz aus Kapitel 3 zu validieren. In Kapitel 4 wird das von den Simulationen vorhergesagte Verhalten mit Ergebnissen aus Experimenten verglichen. In Kapitel 5 werden die Eigenschaften von nicht-periodischen chiralen Strukturen behandelt. Dabei wird gezeigt, wie sich der charakteristische Abfall der chiralen Antwort vollständig verhindern lässt. Außerdem werden chirale Schalenstrukturen vorgestellt, deren Eigenschaften sich durch die Variation einfacher Parameter in weiten Grenzen einstellen lassen. In Kapitel 6 werden alle Ergebnisse zusammengefasst und Anregungen zu weiteren Forschungsarbeiten formuliert.

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

In diesem Kapitel wird ein Verständnis für die mikromechanischen Mechanismen, die für die stark ausgeprägte Größenabhängigkeit der Materialantwort in chiralen Metamaterialien verantwortlich sind, erarbeitet. Ausgehend von diesem Verständnis wird eine periodische Gitterstruktur abgeleitet, die es erlaubt, die Größeneffekte gezielt über mehrere Größenordnungen hinweg einzustellen. Die Grundlage für die Untersuchung bilden numerische Struktursimulationen mittels Finite Elemente Methode. Die Herausforderung besteht darin, dass stets endlich große Systeme aus miteinander interagierenden Einheitszellen betrachtet werden müssen. Ein Ansatz, die Beziehung zwischen Struktur und globalen Materialeigenschaften über einen Homogenisierungsansatz aus einer einzelnen Einheitszelle herzuleiten, ist ungeeignet, da dabei stets a priori Annahmen über die auftretenden Deformationsmoden gemacht werden. Dieses Problem wird offensichtlich, wenn periodische Randbedingungen aus der klassischen Cauchy'schen Kontinuumsmechanik auf eine chirale Einheitszelle angewendet werden. In diesem Fall würde die chirale Antwort vollständig durch die Randbedingungen unterdrückt werden, da eine Kopplung von Dehnung und Rotation nicht möglich ist [52]. Prinzipiell besteht dieses Problem auch bei nicht-klassischen Kontinuumsmodellen. Es konnte im Einzelfall zwar gezeigt werden, dass sich ein chirales Metamaterial wie ein mikropolares Kontinuum verhält und dass die entsprechenden elastischen Konstanten über eine Homogenisierung bestimmbar sind [68], es gibt jedoch keine hinreichenden Belege dafür, dass die Freiheitsgrade eines mikropolaren oder mikromorphen Mediums im Allgemeinen ausreichen, um alle Deformationsmoden eines chiralen Metamaterials abzubilden. Um den Rechenaufwand der numerischen Simulationen an Systemen aus mehr als einhunderttausend Einheitszellen in Grenzen zu halten, wird eine idealisierte Gitterstruktur betrachtet. In Abschnitt 3.1 wird ein Designansatz formuliert, der es erlaubt, die charakteristische Länge gezielt zu verändern. In Abschnitt 3.2 werden die zur Charakterisierung der Gitterstrukturen verwendeten numerischen Methoden und der Aufbau der Simulationen erläutert. Die

Ergebnisse der numerischen Simulationen sind in Abschnitt 3.3 zusammengefasst. Diese werden im Bezug zu der formulierten Hypothese in Abschnitt 3.4 diskutiert. Die in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse sind zum Teil bereits in den Fachartikeln [69, 84] veröffentlicht. In Abschnitt 3.4 wird ein Modell zur Interpretation der Ergebnisse diskutiert, das von Martin Wegener und Tobias Frenzel vorgeschlagen wurde und unter Einbeziehung von Ergänzungen des Autors dieser Arbeit bereits in dem Fachartikel [85] veröffentlicht wurde.

3.1. Hypothese

Als Grundlage für die nachfolgenden Betrachtungen dient ein würfelförmiger Rahmen mit der Kantenlänge a , wie er in Abbildung 3.1a in grau dargestellt ist. Die Balken, aus denen der Würfel aufgebaut ist, haben einen quadratischen Querschnitt mit den Abmessungen $d_A \times d_A$ und verformen sich linear elastisch. Durch das Hinzufügen von vier weiteren diagonalen Balken in den Seiten des Würfels ergibt sich der in Abbildung 3.1b in blau dargestellte chirale Würfel. Die Balken dieses Würfels sind ebenfalls linear elastisch und haben einen quadratischen Querschnitt der Dimension $d_C \times d_C$. Abbildung 3.1c zeigt, wie sich der chirale Würfel unter uniaxialer Zugbelastung elastisch verformt. Im Detail verursachen die diagonalen Balken ein Abscheren der Seitenflächen des Würfels, was in Summe zu einer Rotation um die vertikale Achse führt.

Abbildung 3.2 zeigt drei Möglichkeiten, die beiden Würfel aus Abbildung 3.1 auf einem zweidimensionalen Gitter mit den Abmessungen $B \times B$ in der horizontalen Ebene zu platzieren. Durch Stapeln dieser quasi-zweidimensionalen Strukturen entlang der vertikalen Achse, das heißt senkrecht zur Betrachtungsebene, ergeben sich unterschiedliche dreidimensionale Gitterstrukturen mit der Dimension $B \times B \times H$. Die Anordnung der Würfel hat einen entscheidenden Einfluss auf die globalen Eigenschaften der Gitterstruktur.

Ein intuitiver Weg, ein chirales Metamaterial zu konstruieren, besteht darin, analog zum Vorgehen von Frenzel u.a. [52], ausschließlich fest miteinander verbundene chirale Würfel zu verwenden. Abbildung 3.2a zeigt einen solchen Aufbau. In diesem Fall ist der chirale Würfel die Einheitszelle des Gitters. Auf eine globale Zugdehnung ε_{33} reagiert jeder chirale Würfel mit einer Mikrorotation, das heißt einer Rotation um seinen Schwerpunkt. Da die chiralen Würfel fest miteinander verbunden sind, werden Kräfte und Momente

zwischen den Würfeln übertragen, was zu einer Makrorotation φ_3 , das heißt zu einem globalen Verdrehen der Gitterstruktur führt. Die Bewegungsrichtung der Seiten der einzelnen Würfel ist in Abbildung 3.2a durch Pfeile gekennzeichnet. Die helleren Pfeile im Inneren des Gitters besitzen jeweils einen Nachbar, der in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Diese Anteile der Mikrorotationen der Würfel heben sich gegenseitig auf. Würfel, die vollständig von weiteren Würfeln umgeben sind, leisten somit keinen Beitrag zur Makrorotation, da sie sich gegenseitig blockieren. Die Würfel am Rand des Gitters besitzen jeweils mindestens eine Seite an der spannungsfreien Oberfläche. Die Bewegungen dieser Seiten sind durch die dunkleren schwarzen Pfeile dargestellt. Da die Verschiebungen an der freien Oberfläche nicht durch eine gegensätzliche Bewegung kompensiert werden, tragen sie zur Makrorotation bei. Die chirale Antwort $\varphi_3/\varepsilon_{33}$ skaliert daher proportional zum Verhältnis von freier Oberfläche A zu Volumen V . Für eine endlich große Gitterstruktur mit den Dimensionen $B \times B \times H$ und $N = B/a$ ergibt sich so ein Skalierungsverhalten der chiralen Antwort $\varphi_3/\varepsilon_{33} \propto N^2/N^3 \propto 1/N$ [52, 69, 86, 84, 85].

Werden die Würfel wie in Abbildung 3.2b in horizontaler Richtung nicht verbunden, rotiert jeder chirale Würfel ungehindert um seinen eigenen geometrischen Schwerpunkt. Diese Mikrorotationen können jedoch nicht in eine Makrorotation übertragen werden,

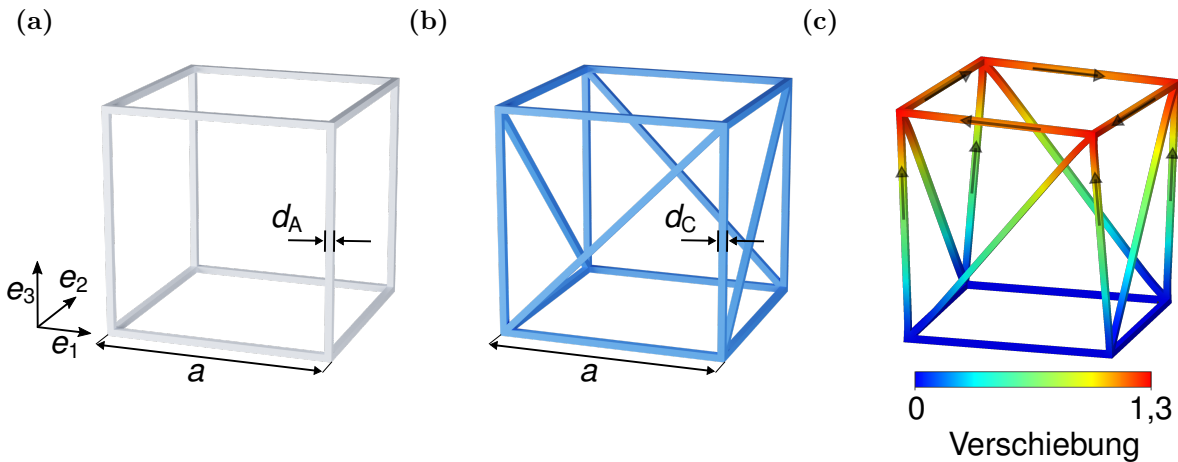


Abbildung 3.1.: Würfelförmige Rahmen in Anlehnung an [84] (a) Achiraler Würfel. Die Balken haben einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge d_A . (b) Chiraler Würfel. Die Balken haben einen quadratischen Querschnitt mit Kantenlänge d_C . (c) Finite Elemente Simulation des chiralen Würfels unter Zugbelastung. Die Farbskala gibt den auf die Gitterkonstante normierten Betrag der Verschiebung $\|\mathbf{u}\|/a$ an. Die Pfeile zeigen den entscheidenden Mechanismus der Deformation. Die diagonalen Balken sorgen dafür, dass die Seiten des Würfels mit einer Schubverformung auf eine Zugbelastung reagieren, was in Summe zu einer Rotation führt.

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

da keine Kraftübertragung zwischen den Würfeln stattfindet.

In Abbildung 3.2c ist eine aus chiralen (blauen) und achiralen (grauen) Würfeln zusammengesetzte Gitterstruktur dargestellt. Sie ist so aufgebaut, dass sich zwischen allen chiralen (blauen) Würfeln ein achiraler (grauer) Würfel befindet. Die Einheitszelle dieser chiral-achiralen Gitterstruktur ist in Abbildung 3.2c durch das schwarze Quadrat gekennzeichnet. Die Gitterkonstante eines nach diesem Schema aufgebauten Gitters beträgt in e_1 - und e_2 -Richtung $2a$, in e_3 -Richtung beträgt sie a . Es handelt sich somit um eine tetragonale Einheitszelle. Dieser Aufbau ist ein Kompromiss aus den in Abbildung 3.2a und 3.2b beschriebenen Extremfällen. Die achiralen (grauen) Anteile der Gitterstruktur ermöglichen eine Kraftübertragung zwischen den chiralen (blauen) Anteilen. Durch die Steifigkeit der achiralen Anteile kann festgelegt werden, wie stark sich die chiralen Anteile bei der Rotation gegenseitig behindern, wodurch sich das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort bezüglich der Anzahl von Einheitszellen in der Gitterstruktur einstellen lässt [69, 86, 84, 85]. Aus der Sichtweise der mikropolaren Kontinuumstheorie nutzt dieser Ansatz aus, dass die Mikrorotationen und die Makrorotation im Allgemeinen verschieden sind um, die charakteristische Länge der Gitterstruktur einzustellen [67]. Aus materialwissenschaftlicher Perspektive ergeben sich bei diesem Ansatz Parallelen zur Legierungslehre. Die Würfel sind dann als (Meta-)Atome oder (Meta-)Partikel zu betrachten und die chiral-achirale Gitterstruktur ist eine geordnete Legierung.

Der Extremfall aus Abbildung 3.2b eignet sich gut um zu zeigen, wie Randbedingungen einen entscheidenden Einfluss auf die globale Materialantwort nehmen können. In den experimentellen Arbeiten von Frenzel u.a. [52] wurden die Proben an der Ober- und Unterseite an einer im Vergleich zum Metamaterial sehr steifen Platte befestigt. Diese war dort notwendig, um eine sauber definierte Randbedingung aufbringen zu können [52, 84]. Das Problem bei dieser Randbedingung ist, dass die Platte für eine Kraftübertragung zwischen den einzelnen Würfeln sorgt und daher die Mikrorotationen an die Makrorotation koppelt. In dem Extremfall aus Abbildung 3.2b ist es offensichtlich, dass eine chirale Antwort nur ein durch die Randbedingung erzeugtes Artefakt und keine echte Materialeigenschaft sein kann [84]. Bei der chiral-achiralen Architektur aus Abbildung 3.2c ist der Einfluss einer Platte am Ende einer Probe jedoch a priori nicht absehbar. In diesem Fall stellt sich die Frage, inwieweit die Steifigkeit der achiralen Anteile des Gitters ausreicht, um die Mikrorotationen der chiralen Würfel in eine Makrorotation zu übertragen [84].

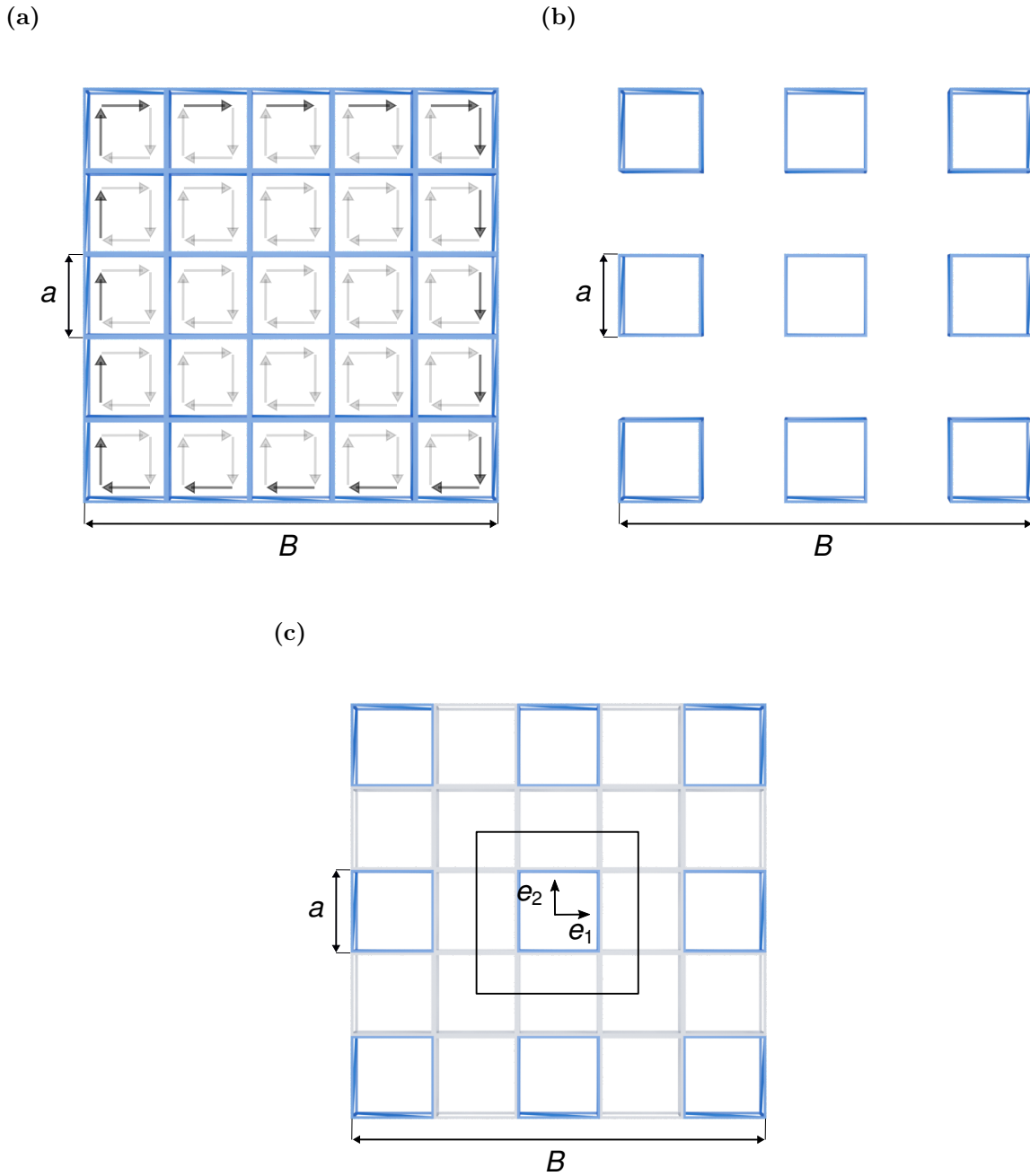


Abbildung 3.2.: Möglichkeiten zur Anordnung chiraler und achiraler Würfel auf einem Gitter in der e_1 - e_2 -Ebene in Anlehnung an [84]. **(a)** Direkt miteinander verbundene chirale Würfel. Die Gitterkonstante ist gleich der Kantenlänge a eines chiralen Würfels. Die Pfeile geben die Richtung an, in die sich die Seiten der Würfel auf Grund der diagonalen Balken bewegen wollen **(b)** Extremfall, bei dem die chiralen Würfel nicht verbunden sind. **(c)** Kompromiss, bei dem die chiralen Würfel mit achiralen Würfeln verbunden werden. Die Gitterkonstante in e_1 - und e_2 -Richtung beträgt $2a$.

3.2. Aufbau der Struktursimulationen

Das Vorgehen zur Charakterisierung der in Abschnitt 3.1 vorgestellten Gitterstrukturen orientiert sich an der Systematik von Ha u.a. [51] und Frenzel u.a. [52]. Es wurden uniaxiale Zugversuche an Gitterstrukturen mit den Abmessungen $B \times B \times H$ simuliert. Die Anzahl von Einheitszellen im Gitter wurde systematisch variiert, um Größeneffekte zu untersuchen. Es gibt dabei zwei mögliche Vorgehensweisen. Entweder bleiben die Abmessungen der Probe gleich und die Größe der Einheitszelle wird variiert, oder die Größe der Einheitszelle bleibt gleich und die Abmessung der Probe verändert sich durch das Hinzufügen von Einheitszellen zu der Gitterstruktur. Solange die Zugversuche dehnungskontrolliert erfolgen, sind beide Vorgehensweisen äquivalent [52, 85]. In dieser Arbeit wurde die zweite Methode, also eine konstante Größe der Einheitszellen, angewendet.

Die Umrisse der Probengeometrie und das für die nachfolgenden Definitionen und Berechnungen verwendete Koordinatensystem sind in Abbildung 3.3a gegeben. Wie in den Untersuchungen von Frenzel u.a. [52] werden Größeneffekte daran gemessen, wie sich die globale Materialantwort mit dem Skalierungsfaktor N ändert. Der Skalierungsfaktor N beschreibt die Anzahl an Einheitszellen entlang einer der horizontalen Richtungen und berechnet sich aus dem Quotienten der Breite der Probe und der jeweiligen Gitterkonstanten. Für ein Gitter, das ausschließlich aus chiralen Würfeln aufgebaut ist (vgl. Abbildung 3.2a), ergibt sich $N = B/a$. Die dreidimensionale chiral-achirale Gitterstruktur, die sich aus den Überlegungen zu Abbildung 3.2c ergibt, ist in Abbildung 3.3b dargestellt. Bei dieser Gitterstruktur stehen an den freien Oberflächen Balken in horizontaler (1 und 2) Richtung ab. Sie übertragen keine Kräfte, und wurden deshalb in den Simulationen weggelassen. Bei der Berechnung der Breite B der Probe wurden sie jedoch berücksichtigt. Somit gilt für die chiral-achirale Gitterstruktur $N = B/(2a)$. Bleibt das Aspektverhältnis H/B konstant, lassen sich die beiden unterschiedlichen Gitterstrukturen direkt vergleichen.

Um den Rechenaufwand bei den numerischen Simulationen zu minimieren, haben die Balken, aus denen sich der chirale Würfel aus Abbildung 3.1b zusammensetzt, einen quadratischen Querschnitt mit einer Kantenlänge $d_C = 0.03a$. Dadurch ist sichergestellt, dass sich diese gemäß der Balkentheorie nach Timoshenko [60] verformen und somit effizient modelliert werden können. Für die Simulationen wurde die kommerzielle Finite Elemente Software ABAQUS 3DEXPERIENCE 2018x eingesetzt. Für die Diskre-

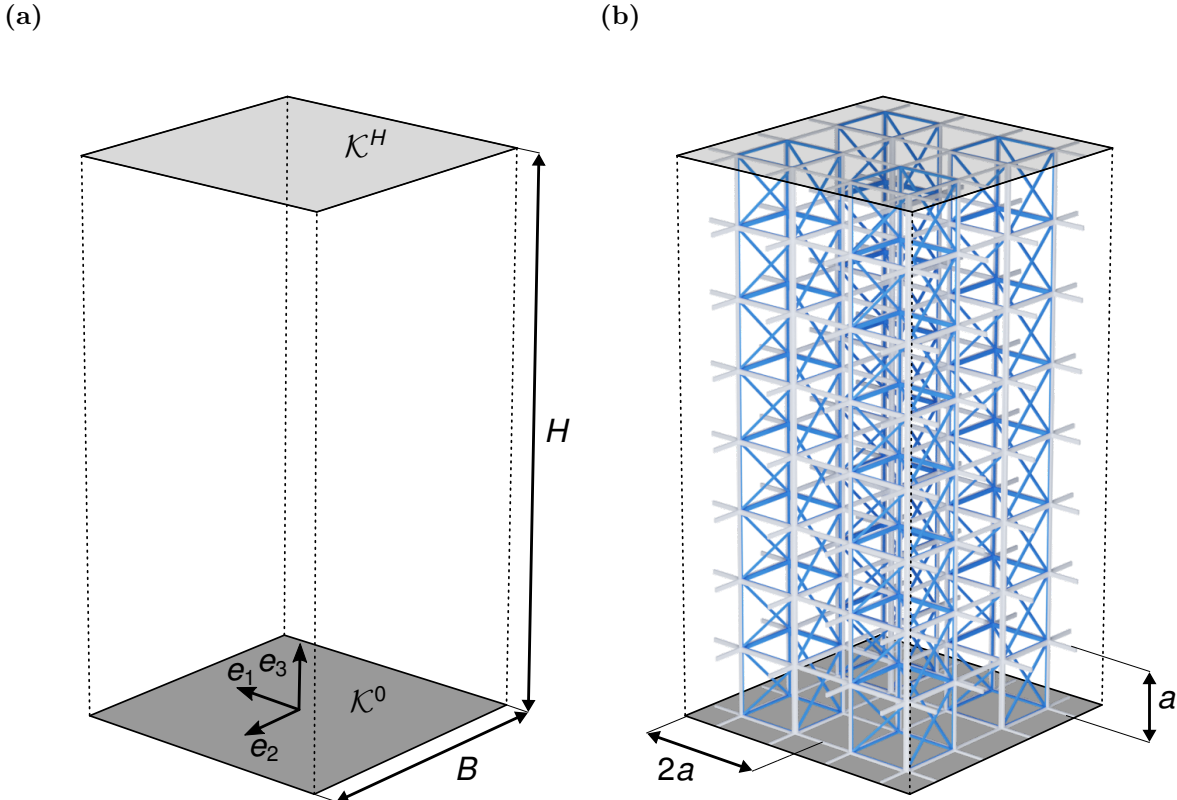


Abbildung 3.3.: Aufbau der Simulation in Anlehnung an [84]. **(a)** Schematische Darstellung mit Koordinatenursprung und globalen Abmessungen der Probe. **(b)** Dreidimensionales chirales Gitter bestehend aus $2 \times 2 \times 8$ Einheitszellen ($N = 2$).

tisierung wurden Timoshenko-Balken-Elemente (ABAQUS B32) verwendet. Netzstudien haben gezeigt, dass mindestens zwei Finite Elemente pro Balken benötigt werden, um die Deformation hinreichend aufzulösen. Die Ergebnisse der Netzstudie und weitere Informationen zur Diskretisierung sind dem Anhang A.1 zu entnehmen. Das Materialverhalten der Balken wurde als isotrop linear elastisch modelliert. Dabei wurden den chiralen (blauen) und den achiralen (grauen) die gleichen Materialparameter zugewiesen. Die Kantenlänge d_A der Balken des achiralen (grauen) Würfels wurden variiert, um die Stärke der Kopplung zwischen den chiralen Würfeln einzustellen, wobei stets gilt $d_C > d_A$. Alle Simulationen wurden unter Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Deformationen durchgeführt.

Der Ortsvektor eines Knotens K wird im Folgenden im undeformierten Zustand mit

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

$\mathbf{K} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ und im deformierten Zustand mit $\mathbf{k} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ angegeben. Alle Freiheitsgrade der Knoten am unteren Ende der Probe, das heißt alle Translationen und Rotationen aller Knoten $K \in \mathcal{K}^0 = \{K | \mathbf{K} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2\}$, wurden eingeschränkt. Alle Oberflächen parallel zur 3-Achse wurden als spannungsfrei modelliert. Am oberen Ende der Probe, das heißt für alle Knoten $K \in \mathcal{K}^H = \{K | \mathbf{K} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + H\mathbf{e}_3\}$, wurde für alle Knoten $K \in \mathcal{K}^H$ eine konstante Verschiebung $\bar{u}_3\mathbf{e}_3$ vorgegeben. Das verwendete Dehungsmaß ergibt sich aus dem Verhältnis von Verschiebung zu Ausgangshöhe $\bar{u}_3/H =: \varepsilon_{33}$. In Abhängigkeit von der Behandlung aller weiteren Freiheitsgrade am oberen Ende der Probe wird zwischen einem freien und einem eingeschränkten Zugversuch unterschieden.

Freier Zugversuch. Mit Ausnahme der konstanten Verschiebung $\bar{u}_3\mathbf{e}_3$ wurden keine weiteren Verschiebungen oder Rotationen an den Knoten $K \in \mathcal{K}^H$ vorgegeben. Die Probe kann sich somit frei verdrehen. In Abschnitt 3.1 wurde diskutiert, wie eine Platte am Ende der Probe die Ergebnisse eines Zugversuchs verfälschen kann, weil sie Mikrorotationen an die Makrorotation koppelt. Um abschätzen zu können, inwieweit die chirale Antwort bei einer experimentellen Charakterisierung durch diese Kopplung unter Umständen überschätzt wird, wurden Zugversuche mit und ohne Platte am oberen Ende der Probe simuliert. Die Platte wurde mit dem Schalenelement ABAQUS S8R modelliert. Die Schalenelemente wurden auf denselben Knoten definiert, wie die Balkenelemente am oberen Ende der Probe. Sie sind somit starr mit den Balkenelementen verbunden.

Um die Makrorotation $\varphi_3(X_3)$ eines zu 3-Achse orthogonalen Probenquerschnitts zu berechnen, wurde nach dem im Folgenden erläuterten Schema vorgegangen. Sei M eine natürliche positive Zahl, dann ist $K \in \mathcal{K}^M = \{K | \mathbf{K} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + M\mathbf{e}_3\}$ die Menge aller Knoten, die einen Probenquerschnitt beschreibt, für den die Makrorotation berechnet werden soll. Jeder chirale Würfel C , der an diesen Querschnitt angrenzt, besitzt vier Eckknoten $K_i^C \in \mathcal{K}^M$. Der Orstvektor \mathbf{S}^C des geometrischen Schwerpunkts S^C dieser vier Knoten berechnet sich gemäß

$$\mathbf{S}^C = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_i^C. \quad (3.1)$$

Analog zu Gleichung 3.1 lässt sich \mathbf{s}^C für den deformierten Zustand angeben. Das Maß

$$\varphi_3^C := \arcsin \left(\frac{|\mathbf{S}^C \times \mathbf{s}^C|}{|\mathbf{S}^C| |\mathbf{s}^C|} \right) \frac{\mathbf{S}^C \times \mathbf{s}^C}{|\mathbf{S}^C \times \mathbf{s}^C|} \cdot \mathbf{e}_3 \quad (3.2)$$

beschreibt die Rotation eines Schwerpunkts S^C um die z -Achse. Die homogenisierte Makrorotation ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel [84]

$$\varphi_3(X_3) := \frac{1}{N^2} \sum_{C=1}^{N^2} \varphi_3^C. \quad (3.3)$$

Durch dieses Vorgehen geht die Mikrorotation der Einheitszellen, das heißt die Rotation jeder Einheitszelle um ihren eigenen Schwerpunkt, nicht in die Makrorotation ein. Daher ergibt das hier eingeführte Maß für den Extremfall, bei dem die Einheitszellen nicht verbunden sind (siehe Abbildung 3.2b), trotz potentiell sehr großer Mikrorotationen eine Makrorotation von null [84].

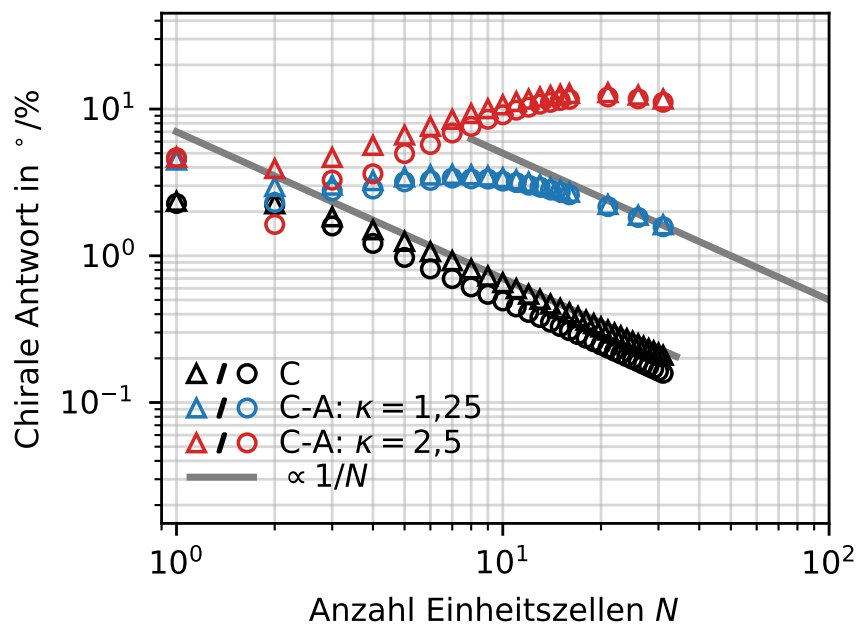
Eingeschränkter Zugversuch. Bei den eingeschränkten Zugversuchen wurden alle Knoten $K \in \mathcal{K}^H$ ebenfalls um $\bar{u}_3 \mathbf{e}_3$ verschoben. Alle anderen Freiheitsgrade wurden eingeschränkt, wodurch sich eine Probe im Gegensatz zum freien Zugversuch nicht verdrehen kann. In Folge der Zug-Torsions-Kopplung wird dann ein Drehmoment, genannt Blockiermoment, gemessen.

3.3. Ergebnisse der Struktursimulationen

Abbildung 3.4 zeigt die aus der Simulation des freien Zugversuchs ermittelte chirale Antwort $\varphi_3/\varepsilon_{33}$ als Funktion der Anzahl an Einheitszellen N auf einer doppel-logarithmischen Skala. Die axiale Dehnung beträgt $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$. Sie ist bewusst klein gewählt, um ein näherungsweise lineares Verformungsverhalten zu erreichen. Simulationen mit einer Platte am oberen Ende der Probe werden durch Dreiecke, Proben ohne Platte durch Kreise repräsentiert. Die Ergebnisse der Gitterstrukturen, die ausschließlich aus chiralen Würfeln aufgebaut sind (siehe Abbildung 3.2a), sind in schwarz dargestellt. Die roten und blauen Symbole repräsentieren eine abwechselnd aus chiralen und achiralen Würfeln aufgebaute Gitterstruktur, wie sie in Abbildung 3.3b dargestellt ist. Das Verhältnis der Dicke der Balken in den chiralen und den achiralen Würfeln wird durch den Parameter $\kappa = d_C/d_A$ ausgedrückt.

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

(a)



(b)

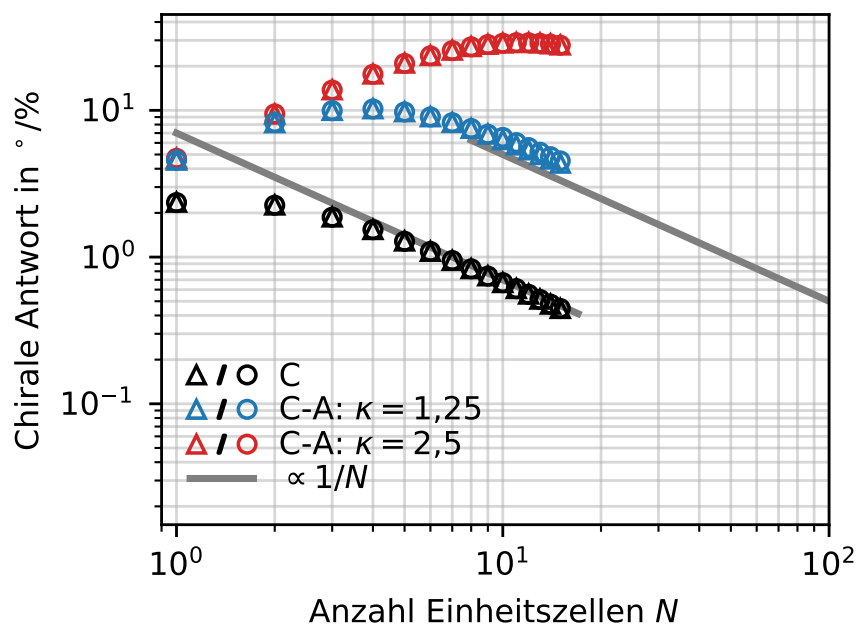


Abbildung 3.4.: Skalierungsverhalten der chiralen Antwort $\varphi_3/\varepsilon_{33}$ in Abhängigkeit der Anzahl an Einheitszellen N in Anlehnung an [84]. Dreiecke und Kreise repräsentieren Proben mit und ohne Platte. (a) Aspektverhältnis $H/B = 2$. Makrorotation $\varphi_3(H)$ gemessen am oberen Ende der Probe. (b) Aspektverhältnis $H/B = 18$. Makrorotation gemessen in der Mitte der Probe gemäß Gleichung 3.4. Auf der Ordinate ist zur Vergleichbarkeit der skalierte Werte $4Na\varphi_3^0/\varepsilon_{33}$ aufgetragen.

Abbildung 3.4a zeigt das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort bei Proben mit einem Aspektverhältnis $H/B = 2$. Die Makrorotation $\varphi_3(H)$ wurde am oberen Ende der Proben gemessen. Diese Versuchsparemetrier reproduzieren die Verhältnisse aus der Arbeit von Frenzel u.a. [52]. Das Skalierungsverhalten der rein chiralen Gitterstruktur (schwarz) ist qualitativ identisch zu dem von Frenzel u.a. [52] vorgeschlagenen Metamaterial. Bis $N = 2$ ist die Makrorotation konstant, ab einschließlich $N = 3$ Einheitszellen beginnt ein durch die grauen durchgezogenen Linien dargestellter Abfall $\propto 1/N$. Werden achirale Würfel zwischen den chiralen Würfeln platziert (blau und rot) ist zu beobachten, dass sich das Skalierungsverhalten sowohl qualitativ als auch quantitativ ändert. Im Schritt von $N = 1$ auf $N = 2$ nimmt die chirale Antwort zunächst ab. Danach nimmt die chirale Antwort von $N = 2$ bis zu einem Maximum zu, und nähert sich danach dem Abfall $\propto 1/N$ an. Das Maximum verschiebt sich mit steigendem κ , das heißt einer sinkenden Steifigkeit der achiralen Anteile, hin zu größeren N und größeren $\varphi_3/\varepsilon_{33}$.

Beim Vergleich zwischen Proben mit und ohne Platte ist zu beobachten, dass die chirale Antwort bei den chiral-achiralen Gitterstrukturen (blau und rot) kleiner ist, wenn keine Platte am oberen Ende der Probe angebracht ist. Dieser Effekt ist bei kleinen N stärker ausgeprägt und verschwindet bei sehr großen N . Bei den rein chiralen Gitterstrukturen ist ebenfalls ein Unterschied zwischen Proben mit und ohne Platte zu beobachten, er ist jedoch in umgekehrter Weise von N abhängig. Bei kleinen N verhalten sich rein chirale Gitterstrukturen mit und ohne Platte gleich, bei größeren N weisen Proben ohne Platte eine geringere chirale Antwort als Proben mit Platte auf.

Der Unterschied zwischen Proben mit und ohne Platte am oberen Ende deutet auf einen starken Einfluss der Randbedingungen hin. Sowohl aus der klassischen, als auch aus der mikropolaren Kontinuumsmechanik ist bekannt, dass sich quadratische Querschnitte bei Torsion verwölben [59, 87]. Das bedeutet für die freien Zugversuche, dass sich mehrere zur Zugachse (\mathbf{e}_3 -Richtung) parallele Verschiebungsfelder überlagern. Durch die vorgegebene Zugbelastung ergibt sich ein über den Probenquerschnitt homogenes mittleres Verschiebungsfeld $u_{\text{Hom}}(X_3)\mathbf{e}_3 = X_3\varepsilon_{33}\mathbf{e}_3 = \frac{X_3}{H}\bar{u}_3\mathbf{e}_3$, welches bei inhomogenen Materialien im Allgemeinen mit einer Fluktuation $u_{\text{Flukt}}(X_1, X_2, X_3)\mathbf{e}_3$ überlagert wird. Dieses wird wegen der aus der Torsion resultierenden Verwölbung zusätzlich mit einer über den Querschnitt inhomogenen Verschiebung $u_{\text{Wölb}}(X_1, X_2, X_3)\mathbf{e}_3$ überlagert. Eine Visualisierung des vom Mittelwert abweichenden Anteils $u_{\text{Flukt}} + u_{\text{Wölb}}$ ist dem Anhang A.2 zu entnehmen. An den Rändern, an denen Verschiebungsrandbedingungen in z -Richtung

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

vorgegeben werden, gilt $\mathbf{u}(X_1, X_2, 0) \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ und $\mathbf{u}(X_1, X_2, H) \cdot \mathbf{e}_3 = \bar{u}_3$. Daraus folgt wiederum, dass am oberen und unteren Ende der Probe $u_{\text{Flukt}} + u_{W_{oelb}} = 0$ gelten muss. Durch das Erzwingen dieser Bedingung wird die freie Verwölbung unterdrückt. Außerdem werden Mikrorotationen, wie in Abschnitt 3.1 diskutiert, durch die Platte an die Makrorotation gekoppelt. Es ist jedoch durch die Betrachtung der in Abbildung 3.4a gezeigten Ergebnisse nicht zu klären, wie sich diese beiden Effekte getrennt voneinander auf die chirale Antwort auswirken.

Um die Einflüsse der Ranbedingung genauer zu charakterisieren, wurde das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort bezüglich N unter idealisierten Bedingungen betrachtet. Da die Unterdrückung der Verwölbung mit steigendem Abstand zum Dirichlet-Rand abnimmt, gibt es ein kritisches Aspektverhältnis $(H/B)_{\text{krit}}$, ab dem sich Querschnitte in der Mitte der Probe frei verwölben können. Um sicherzustellen, dass die Bedingung $H/B > (H/B)_{\text{krit}}$ erfüllt ist, wurden sehr schlanke Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ simuliert. Die Änderung der Makrorotation über die Länge a der Gitterkonstante in \mathbf{e}_3 -Richtung wurde in der Mitte der Probe ($X_3 = H/2$) mit dem Vorwärts-Differenzen Schema [84]

$$\left. \frac{d\varphi_3}{dX_3} \right|_{H/2} \approx \frac{\varphi_3(H/2 + a) - \varphi_3(H/2)}{a} =: \varphi_3^0, \quad (3.4)$$

gemessen. Dieses Vorgehen bewirkt, dass die Einschränkung der Verwölbung am oberen und unteren Ende der Probe das Ergebnis nicht beeinflusst. Abbildung 3.4b zeigt das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort in Abhängigkeit von N unter diesen idealisierten Bedingungen. Um einen direkten Vergleich zwischen Abbildung 3.4a und Abbildung 3.4b zu ermöglichen, ist in Abbildung 3.4b auf der Ordinatenachse der skalierte Wert $2B\varphi_3^0/\varepsilon_{33} = 4Na\varphi_3^0/\varepsilon_{33}$ aufgetragen. Die Skalierung mit dem Faktor $B = 2Na$ ist notwendig, damit ein direkter Vergleich zwischen Proben mit unterschiedlichem N möglich ist. Die zusätzliche Skalierung um den Faktor 2 ermöglicht den direkten Vergleich mit Proben mit dem Aspektverhältnis $B \times B \times 2B$.

Es ist festzustellen, dass eine steife Platte am Ende der Probe bei diesen idealisierten Versuchparametern keinen Unterschied in der chiralen Antwort bewirkt. Dies gilt sowohl für die rein chirale Gitterstruktur (schwarz), als auch für die chiral-achirale Gitterstruktur (blau und rot). Abgesehen von diesem Unterschied sind für die rein chirale Struktur keine Unterschiede im Vergleich zu den Daten aus Abbildung 3.4a zu beob-

achten. Für die chiral-achirale Struktur ergeben sich jedoch deutliche Unterschiede. Es ist zu beobachten, dass die chirale Antwort bei der chiral-achiralen Architektur um ungefähr einhundert Prozent größer ist, wenn sie weit entfernt von den Rändern gemessen wird. Außerdem steigt die chirale Antwort im Gegensatz zu Abbildung 3.4a bereits ab $N = 1$ bis zu einem Maximum monoton an, bevor sie sich danach einem Abfall $\propto 1/N$ annähert. Insgesamt führt dieses Skalierungsverhalten dazu, dass die chirale Antwort bei der chiral-achiralen Architektur (blau und rot) um mehr als eine Größenordnung größer sein kann als bei der rein chiralen Architektur (schwarz).

Es ergibt sich nun die Frage, wie groß das Aspektverhältnis einer Probe mindestens sein muss, damit die in der Mitte der Probe gemessene Makrorotation nicht durch die eingeschränkte Verwölbung am Rand beeinflusst ist. Abbildung 3.5a zeigt die chirale Antwort für ein festes $N = 5$ und $\kappa = 2.5$ über die Höhe der Probe für die Aspektverhältnisse $H/B = 2$ (schwarze Linie), $H/B = 6$ (rote Linie) und $H/B = 18$ (blaue Linie). Um einen direkten Vergleich zwischen den unterschiedlichen Aspektverhältnissen zu ermöglichen, ist sowohl die Abszisse als auch die Ordinate auf die Ausgangshöhe H normiert. Der Ursprung der Abszisse ist entlang der e_3 -Achse um $H/2$, das heißt in die Mitte der Probe, verschoben und es gilt

$$\tilde{X}_3 = X_3 + H/2. \quad (3.5)$$

Analog dazu ist der Ursprung der Ordinate um $\varphi_3(H/2)$ verschoben und es gilt

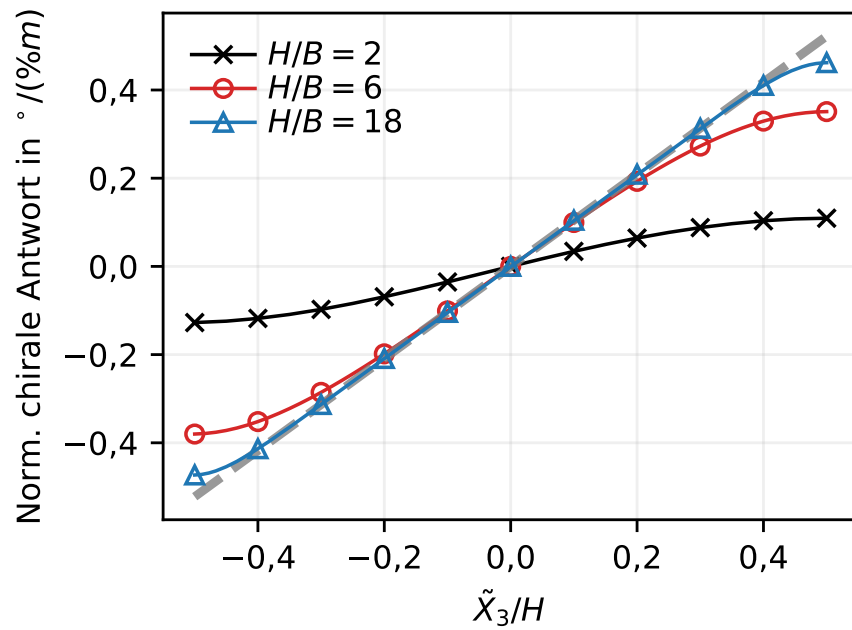
$$\tilde{\varphi}_3(\tilde{X}_3) = \varphi_3(X_3) - \varphi_3(H/2). \quad (3.6)$$

Ohne den Einfluss von Randbedingungen müssten die in Abbildung 3.5a gezeigten Kurven identisch sein [84]. Außerdem ist zu erwarten, dass die Makrorotation in einem Bereich, der nicht von den Randbedingungen beeinflusst ist, linear entlang der e_3 -Richtung ansteigt [84]. Für die Probe mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ ist dieses lineare Verhalten im Bereich zwischen $\tilde{X}_3/H = \pm 0.4$ zu beobachten. Außerhalb von diesem Bereich, das heißt nahe am oberen und unteren Rand, ist die Kurve nichtlinear mit einer geringeren Steigung. Bei kleineren Aspektverhältnissen $H/B = 2$ und $H/B = 6$ ist über die gesamte Höhe der Probe kein linearer Bereich vorhanden.

Die Steigung der Kurven im Koordinatenursprung des Graphen aus Abbildung 3.5a entspricht der nach Gleichung 3.4 berechneten chiralen Antwort $\varphi_3^0/\varepsilon_{33}$ in der Mitte der

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

(a)



(b)

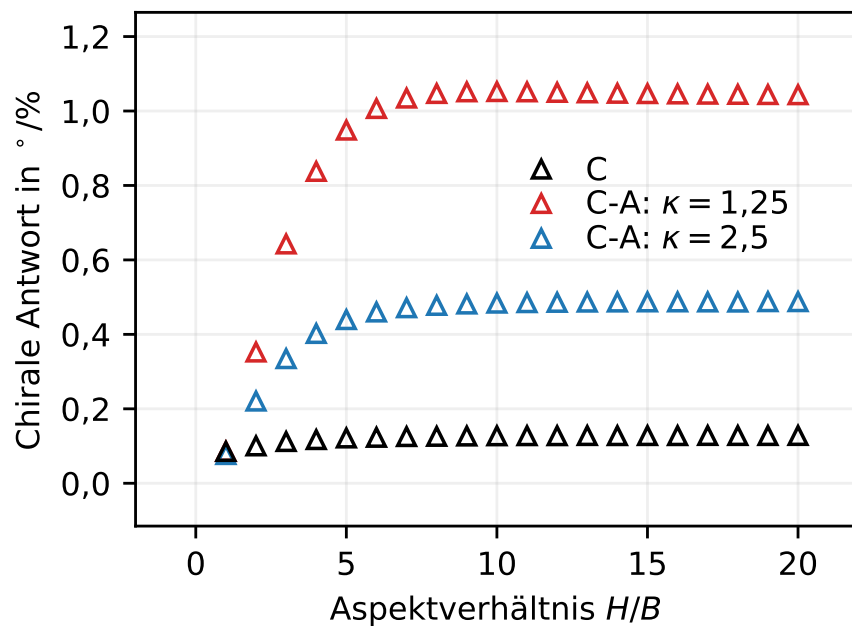


Abbildung 3.5.: Abhängigkeit der chiralen Antwort vom Aspektverhältnis in Anlehnung an [84]. Simulationen durchgeführt mit Proben ohne Platte bei einer Dehnung von $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$. (a) Normierte chirale Antwort $\varphi_3^0/(\varepsilon_{33}H)$ für einen chiral-achirale Gitterstruktur mit $\kappa = 2.5$ entlang der vertikalen (X_3) Achse. (b) Chirale Antwort für ein festes $N = 5$ und variables Aspektverhältnis.

Probe. Abbildung 3.5b zeigt die chirale Antwort als Funktion des Aspektverhältnisses H/B für ein festes $N = 5$. Die chirale Antwort nimmt bei kleineren Aspektverhältnissen zunächst stark zu, bevor sie sich einem konstanten Regime annähert. Mit dem Beginn von diesem konstanten Regime hat die Einschränkung der Verwölbung an den Rändern keinen Einfluss mehr auf die chirale Antwort, da diese nicht mehr von der Probenhöhe abhängt [84]. Der Bereich, in dem sich die chirale Antwort um weniger als 0,5% zwischen zwei Aspektverhältnissen verändert, beginnt sowohl bei der rein chiralen Gitterstruktur (schwarz) als auch bei beiden chiral-achiralen Gitterstrukturen (blau und rot) bei $H/B = 8$, das heißt $(H/B)_{\text{krit}}$ ist unabhängig von der Architektur. Unterschiede zwischen den Architekturen ergeben sich darin, wie stark die chirale Antwort im Bereich zwischen $H/B = 1$ und $H/B = 8$ verändert. Am geringsten fällt der Unterschied bei der rein chiralen Architektur (schwarz) aus. Hier ändert sich die chirale Antwort von $H/B = 1$ bis zum konstanten Regime lediglich um den Faktor 1,5. Bei der chiral-achiralen Architektur mit $\kappa = 2.5$ (rot) beträgt dieser Faktor ungefähr 12 und ist damit deutlich größer. Die chiral-achirale Struktur mit $\kappa = 1.25$ (blau) liegt dazwischen. Zusammenfassend nimmt also der Einfluss der Randbedingung mit einer schwächeren Kopplung zwischen den chiralen Würfeln zu.

Um eine mögliche Abhängigkeit von $(H/B)_{\text{krit}}$ von N zu untersuchen, wurden Kurven wie in Abbildung 3.5b für verschiedene N berechnet. Für jedes N wurde mit dem Rückwärts-Differenzen-Schema

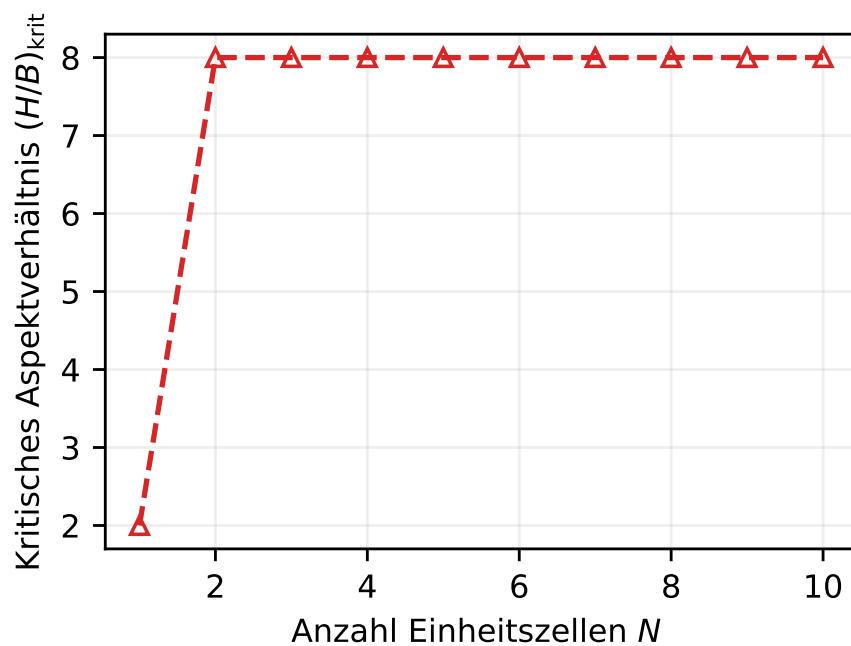
$$\frac{d\varphi_3^0}{d(H/B)} \approx \frac{\varphi_3^0(H/B) - \varphi_3^0(H/B - 1)}{\varphi_3^0(H/B)} \quad (3.7)$$

die relative Änderung der chiralen Antwort in Abhängigkeit von H/B berechnet. Das kritische Aspektverhältnis wurde als erreicht angesehen, wenn die Änderungsrate nach Gleichung 3.7 kleiner als 0,5% ist. Abbildung 3.6a zeigt die so ermittelten kritischen Aspektverhältnisse bis $N = 10$ für die chiral-achirale Gitterstruktur bei $\kappa = 2,5$. Abgesehen von dem Sonderfall $N = 1$ beträgt $(H/B)_{\text{krit}} = 8$ bei allen betrachteten N . Das kritische Aspektverhältnis ist also unabhängig von N . Abbildung 3.6b zeigt, wie stark die chirale Antwort von der Randbedingung beeinflusst wird in Abhängigkeit von N . Auf der Ordinate des Graphen in Abbildung 3.6b wurde der Quotient

$$\frac{\frac{\varphi_3}{\varepsilon_{33}}\left(\frac{H}{B} = 8\right)}{\frac{\varphi_3}{\varepsilon_{33}}\left(\frac{H}{B} = 1\right)} \quad (3.8)$$

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

(a)



(b)

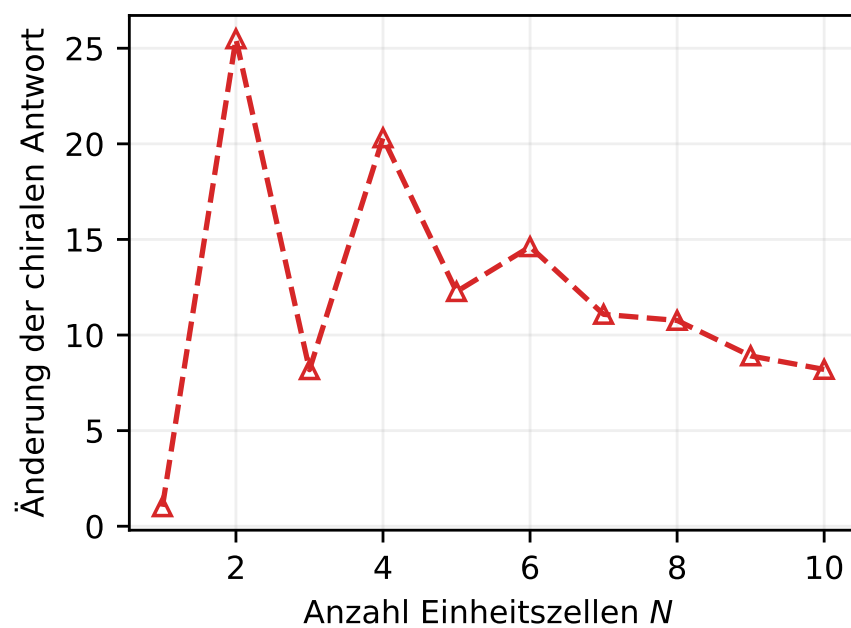


Abbildung 3.6.: Einfluss der Randbedingung in Abhängigkeit von N für chiral-achirale Gitterstruktur mit $\kappa = 2.5$. (a) Kritisches Aspektverhältnis, ab dem die chirale Antwort unabhängig vom Aspektverhältnis wird. (b) Quotient aus der chiralen Antwort bei $H/B = 8$ und $H/B = 1$.

aus den chiralen Antworten beim kritischen Aspektverhältnis $H/B = 8$ und bei $H/B = 1$ aufgetragen. Es sind zwei Trends zu erkennen. Zum einen nimmt der Einfluss der Randbedingung im Mittel mit steigendem N ab. Zum anderen hat die Randbedingung bei ungeraden N einen schwächeren Effekt als bei geraden.

Der effektive Elastizitätsmodul (E-Modul) der Gitterstruktur ist gemäß

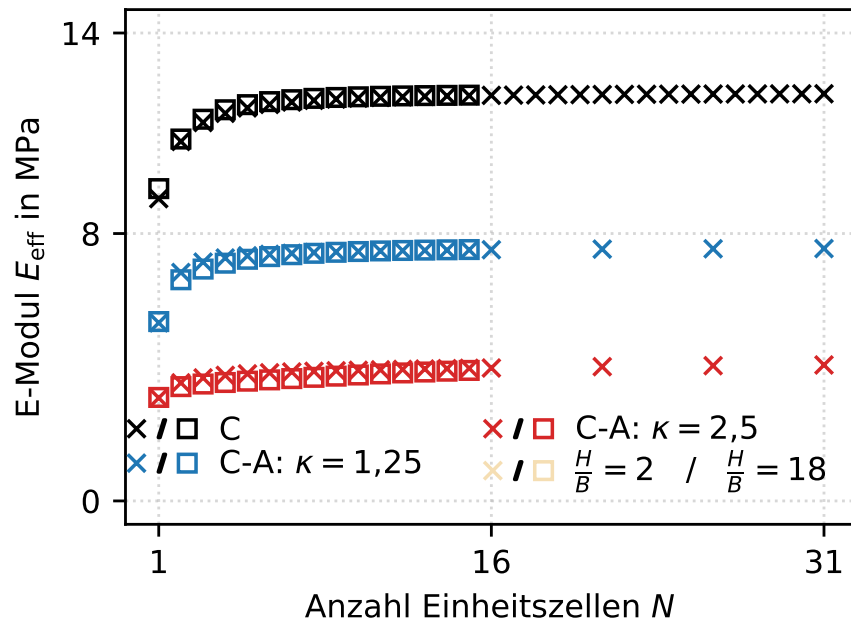
$$E_{\text{eff}} = \frac{F_{\text{Ges}}}{B^2 \varepsilon_{33}} = \frac{2W_{\text{Ges}}}{B^2 H \varepsilon_{33}^2} \quad (3.9)$$

definiert, wobei F_{Ges} die Summe aller Reaktionskräfte am oberen Ende einer Probe und W_{Ges} die gesamte elastische Formänderungsenergie ist. Wie die chirale Antwort ist auch diese globale Materialeigenschaft größenabhängig. In Abbildung 3.7 ist das Skalierungsverhalten des effektiven E-Modul, bestimmt durch Simulationen mit Proben ohne Platte und bei einer Dehnung von $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$, dargestellt. Abbildung 3.7a zeigt den effektiven E-Modul für $H/B = 2$ (Kreuze) und $H/B = 18$ (Quadrate) über N . Im Gegensatz zu der Makrorotation ist beim effektiven E-Modul nahezu kein Unterschied zwischen Proben mit großem und kleinem Aspektverhältnis vorhanden. Im Allgemeinen ist die rein chirale Architektur (schwarz) deutlich steifer als die chiral-achirale Architektur (blau und rot), wobei bei letzterer die Steifigkeit mit steigendem κ abnimmt.

In den Untersuchungen von Ha u. a. [51], Frenzel u.a. [52] und Duan u.a. [68] wurde gezeigt, dass der effektive Elastizitätsmodul zunächst mit der Anzahl an Einheitszellen N ansteigt und dann gegen einen konstanten Wert konvergiert. Die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Gitterstrukturen aus [84] reproduzieren diesen Größeneffekt. Bei der chiral-achiralen Architektur ist die Größenabhängigkeit der Materialantwort bezüglich der Steifigkeit stärker ausgeprägt, das heißt es dauert länger bis sich der effektive Elastizitätsmodul seinem konstanten klassischen Regime annähert. Dies ist auf Grund der linearen Achsenskalierung in Abbildung 3.7a nicht gut zu erkennen. Abbildung 3.7b zeigt deshalb den Verlauf des Quotienten $\frac{E_{\text{eff}}(N)}{E_{\text{eff}}(1)}$ über N für Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 2$. Bei der rein chiralen Architektur (schwarz) nimmt der effektive E-Modul von $N = 1$ bis zu einem konstanten Regime um ungefähr 35% zu. Der effektive E-Modul der chiral-achiralen Architektur mit $\kappa = 1,25$ nimmt für $N \rightarrow \infty$ einen ungefähr 42% größeren Wert ein, als bei $N = 1$. Für ein $\kappa = 2,5$ (rot) ist das konstante Regime bei $N = 31$ noch nicht erreicht, da die entsprechende Kurve in Abbildung 3.7b noch sichtbar steigt. Die Frage, ob das Verhältnis $\frac{E_{\text{eff}}(N)}{E_{\text{eff}}(1)}$ für $\kappa = 2,5$ für $N \rightarrow \infty$ noch

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

(a)



(b)

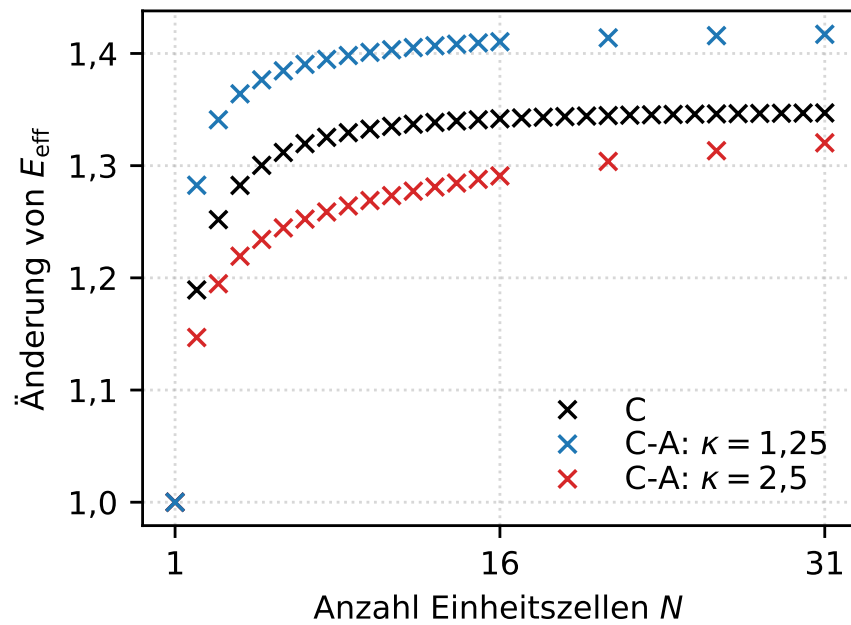


Abbildung 3.7.: Effektiver Elastizitätsmodul in Abhängigkeit der Anzahl von Einheitszellen N gemäß Gleichung 3.9. (a) $E_{\text{eff}}(N)$ für kleine ($H/B = 2$) und große ($H/B = 18$) Aspektverhältnisse. (b) $\frac{E_{\text{eff}}(N)}{E_{\text{eff}}(1)}$ für ein kleines Aspektverhältnis ($H/B = 2$).

größer wird als jenes für $\kappa = 1,25$ konnte durch numerische Simulationen, bei dem das gesamte Kristallgitter aufgelöst wird, nicht abschließend geklärt werden, da die dafür benötigte Anzahl an Einheitszellen einen zu großen numerischen Aufwand darstellt.

In Abbildung 3.8 ist zusammengefasst, wie sich die Gitterstrukturen bei größeren Dehnungen verhalten. In allen drei Grafiken beträgt das Apektverhältnis der Proben $H/B = 18$. In Abbildung 3.8a ist die Makrorotation $\varphi_3(H/2)$ über der Ingenieurdehnung ε_{33} für unterschiedliche Gitterstrukturen mit $N = 5$ Einheitszellen aufgetragen. Bei der rein chiralen Gitterstruktur (schwarz) ist die Beziehung zwischen Makrorotation und Dehnung bis zu einem Prozent Dehnung vollständig linear. Die chiral-achirale Gitterstruktur (blau und rot) weist ein nichtlineares Verhalten zwischen Makrorotation und Dehnung auf. Die Nichtlinearität ist stärker ausgeprägt, wenn nachgiebigere Kopplungselemente, das heißt ein größeres κ , vorhanden sind. Der Trend dabei ist, dass die Makrorotation bei größer Dehnung weniger stark zunimmt, das heißt es gilt $\frac{d^2\varphi_3}{d\varepsilon_{33}^2} < 0$. Bei einer Druckbelastung (siehe Anhang A.2) ist der Trend umgekehrt, allerdings ist es nicht möglich, eine Druckdehnung $> 0.1\%$ auf die Struktur aufzubringen, da die schlanken Balken zum elastischen Knicken neigen und die Simulation dadurch nicht konvergiert. Desweiteren ist die Nichtlinearität bei größeren N stärker ausgeprägt. Es sei angemerkt, dass es sich hier um eine rein geometrische Nichtlinearität handelt. Das Materialverhalten der Balken ist isotrop linear elastisch modelliert. Da die Makrorotation eine Starrkörperrotation beschreibt, muss sie grundsätzlich nichtlinear von der Dehnung abhängen. In Abbildung 3.8b ist die Makrorotation über die Dehnung bis zu einer Dehnung von $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$ für verschiedene N aufgetragen. Eine lineare Regression liefert in diesem Bereich für $N = 1, 5, 10$ jeweils ein Bestimmtheitsmaß von $R^2 > 0.99$. Außerdem konvergiert der zur Lösung verwendete Newton-Raphson-Algorithmus bei allen in diesem Abschnitt gezeigten Simulationen mit $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$ innerhalb von einem Schritt. Innerhalb der numerischen Genauigkeit der angewandten Methodik ist die Verformung im globalen Mittel somit für Dehnungen $\leq 10^{-4}$ hinreichend linear. Abbildung 3.8c zeigt die Spannung, die sich analog zum effektiven E-Modul (siehe Gleichung 3.9) aus der elastischen Energie berechnet, in Abhängigkeit von der Dehnung. Im Gegensatz zur Makrorotation sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven für alle untersuchten Strukturen bis zu einem Prozent Dehnung näherungsweise linear.

Für die Anwendung von chiralen Metamaterialien in der Aktuatorik ist neben der chiralen Antwort das in einem eingeschränkten Zugversuch ermittelte Blockiermoment M_S eine wichtige Kenngröße [88]. Damit das Blockiermoment von Gitterstrukturen aus einer

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

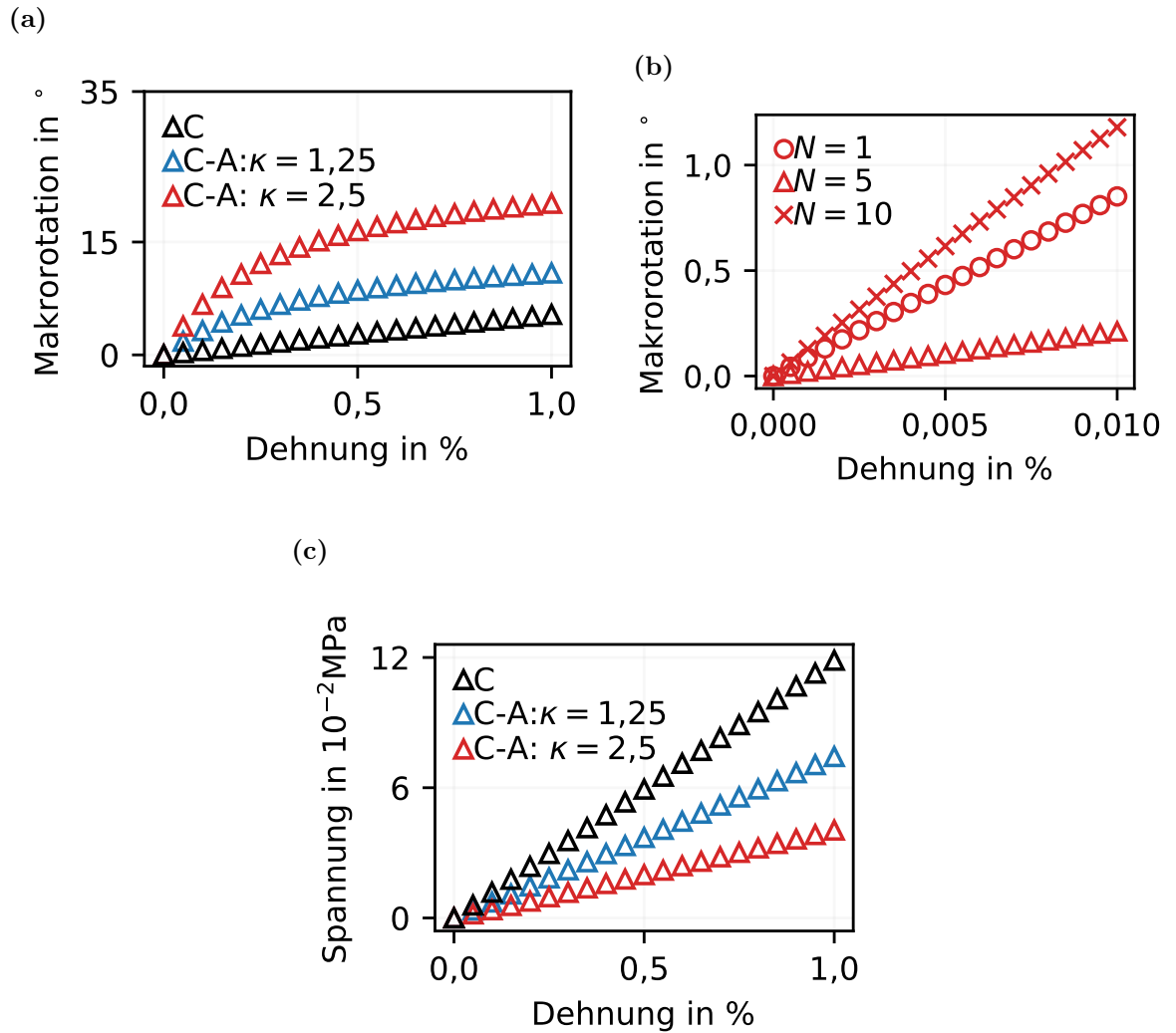


Abbildung 3.8.: Makrorotation und Spannung als Funktion der Dehnung in Anlehnung an [84]. Simulationen durchgeführt mit Proben mit Aspektverhältnis $H/B = 18$ ohne Platte. C-A ist das chiral-achirale Gitter, C das Gitter aus direkt verbundenen chiralen Würfeln. In den Grafiken (a) und (b) ist $N = 5$. (a) Makrorotation gemäß Gleichung 3.4 über axialer Dehnung. (b) Spannung über Dehnung. (c) Absolute Rotation bei $Z = H/2$ für $\kappa = 2,5$ und unterschiedliche N .

unterschiedlichen Anzahl von Einheitszellen vergleichbar ist, muss dieses auf das Probenvolumen $V = B^2H$ normiert werden. Das normierte Blockiermoment ist in Abbildung 3.9 über die Anzahl an Einheitszellen N auf einer doppel-logarithmischen Skala für ein Aspektverhältnis von $H/B = 18$ aufgetragen. Das Blockiermoment skaliert wie die chirale Antwort invers proportional zum Verhältnis aus Probenbreite B und Gitterkonstante $2a$, das heißt $M_S \propto 1/N$. Allerdings beginnt dieser schnelle Abfall, unabhängig davon ob eine rein chirale oder eine chiral-achirale Gitterstruktur vorliegt, bereits ab $N = 1$. Da

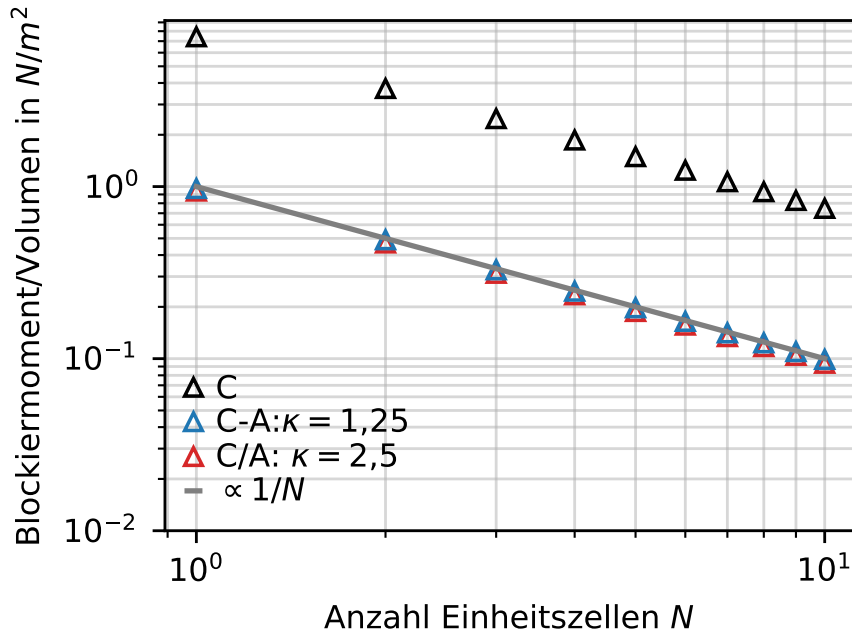


Abbildung 3.9.: Blockiermoment pro Volumen $M_S/V = M_S/(18(2Na)^3)$ ermittelt im eingeschränkten Zugversuch bei der chiral-achiralen Gitterstruktur mit den Parametern $\varepsilon_{33} = 10^{-4}$ und $H/B = 18$.

der effektive E-Modul mit N zunimmt, wird das Übersetzungsverhältnis mit steigendem N kleiner.

3.4. Diskussion

In diesem Kapitel wurden idealisierte dreidimensionale chirale Gitterstrukturen mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen hinsichtlich ihrer mechanischen Eigenschaften unter einachsiger Belastung untersucht. Im ersten Schritt wurden Simulationen betrachtet, die direkt mit den Versuchsbedingungen einer vorangegangenen Arbeit [52] vergleichbar sind (Abbildung 3.4a). Dabei wurden sehr kleine Dehnungen ($\varepsilon_{33} = 10^{-4}$) aufgebracht, um ein geometrisch lineares Verformungsverhalten zu bewirken. Wurden ausschließlich direkt miteinander verbundene chirale Würfel für den Aufbau der Gitterstruktur verwendet, konnte das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort in Abhängigkeit von der Anzahl an Einheitszellen in einer Gitterstruktur aus [52] nahezu perfekt reproduziert werden. In diesem Fall beginnt der charakteristische Abfall der chiralen Antwort $\propto 1/N$ bereits bei kleinen N . Werden nachgiebige Kopplungselemente zwischen chiralen Würfeln platziert ändert sich das Skalierungsverhalten. Die chirale Antwort steigt zunächst an und das

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

charakteristische Skalierungsverhalten $\propto 1/N$ beginnt erst bei deutlich größeren N . Der Vergleich dieser Ergebnisse mit der analytischen Lösung von Lakes [47] (siehe Abbildung 2.5) lässt darauf schließen, dass sich die mikropolare charakteristische Länge durch das Hinzufügen von nachgiebigen Kopplungselementen vergrößern lässt.

Allerdings entsprechen die chiral-achiralen Gitterstrukturen aus diesem praxisnahen Szenario nicht exakt dem aus der mikroploaren Theorie vorhergesagten Verhalten, da sie im Schritt von $N = 1$ auf $N = 2$ einen Abfall der chiralen Antwort zeigen, bevor diese bis zu ihrem globalen Maximum wieder ansteigt. Außerdem hat eine steife Platte am oberen Ende einer Probe insbesondere bei kleineren N einen Einfluss auf die chirale Antwort. Diese Beobachtungen lassen darauf schließen, dass das Materialverhalten unter versuchsnahen Bedingungen (siehe Abbildung 3.4a) von Randbedingungen beeinflusst wird. Dabei wird der Einfluss der Randbedingung mit steigendem κ , das heißt mit schwächerer Kopplung, größer. Der Einfluss der Randbedingung kann damit begründet werden, dass die Verwölbung der Probenquerschnitte am oberen und unteren Ende behindert wird, wodurch sich die Struktur im Einflussbereich der Randbedingung versteift. Dieser Effekt wird zur Mitte der Probe hin schwächer. Deshalb wird bei kleineren Aspektverhältnissen eine geringere chirale Antwort beobachtet. Bei einem kleinen Aspektverhältnis von $H/B = 2$, wie es in dem versuchsnahen Szenario verwendet wurde, propagiert dieser Effekt durch die gesamte Probe. Deshalb kommt es zu Artefakten wie dem Abfall der chiralen Antwort von $N = 1$ auf $N = 2$ und dem starken Einfluss der steifen Platte.

Die Beobachtung, dass die Randeffekte stärker sind, wenn κ größer wird, lässt sich anhand der in Abbildung 3.10 gezeigten Vereinfachung der Struktur aus Abbildung 3.3b motivieren. In diesem Bild verhält sich die chiral-achirale Gitterstruktur ähnlich wie ein unidirektional endlosfaserverstärkter Kunststoff. Die chiralen Anteile (blau) sind in dieser Analogie die steifen Fasern, die achiralen Anteile sind die weiche Matrix, die für eine Kraftübertragung zwischen den Fasern sorgt. Der effektive Schubmodul quer zur Faserrichtung ist dominiert durch die Steifigkeit der Fasern. Längs der Faserrichtung ist er dominiert durch die Steifigkeit der Matrix und damit deutlich kleiner als quer zur Faser. Übertragen auf die chiral-achirale Gitterstruktur bedeutet dies, dass sie sich durch nachgiebigere achirale Kopplungselemente leichter entlang der Zugachse (z -Richtung) scheren lässt. Demnach ist bei einem größeren κ eine größere Verwölbung und damit ein stärkerer Einfluss der Randbedingung zu erwarten. Wie stark sich der Effekt der

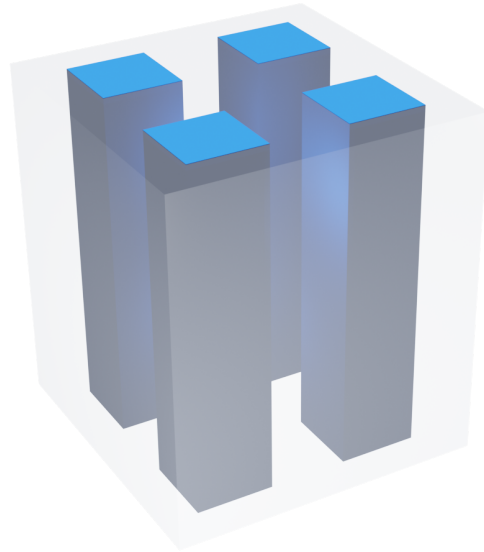


Abbildung 3.10.: Analogie der chiral-achiralen Gitterstruktur zu einem unidirektional gerichteten Endlosfaserverbund. Die blauen „Fasern“ repräsentieren die steifen chiralen Würfel. Die graue „Matrix“ ist die Analogie zu den weichen achiralen Elementen.

Randbedingung auf die chirale Antwort auswirkt, hängt in komplexer Weise von N ab. Zum einen nimmt der Effekt insgesamt mit steigendem N ab, zum anderen ist er bei geraden N deutlich stärker als bei ungeraden. Ein solches alternierendes Verhalten kann ein interessanter Ansatzpunkt für über Randbedingungen programmierbare Materialeigenschaften sein [89].

Ab einem hinreichend großen Aspektverhältnis $(H/B)_{\text{krit}} = 8$ können sich Querschnitte in der Mitte der Probe frei verwölben. Interessanterweise ist dieses kritische Aspektverhältnis weder von N noch von der Architektur (chiral oder chiral-achiral) abhängig. Um den Einfluss der eingeschränkten Verwölbung zu eliminieren, wurden sehr schlanke Proben ($H/B = 18 > (H/B)_{\text{krit}}$) betrachtet. Außerdem wurde die chirale Antwort in der Mitte der Probe gemessen, wo sich Querschnitte frei verwölben können. Unter diesen idealisierten Bedingungen verschwinden die Randeffekte und die chirale Antwort skaliert wie von der mikropolaren Elastizität vorausgesagt (Vgl. Abbildungen 3.4b und 2.5). Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, dass in diesem Fall die steife Platte am Ende der Probe keinen Einfluss auf die chirale Antwort hat. Das bedeutet, dass die nachgiebigen Kopplungselemente steif genug sind, um die Mikrorotationen in eine Makrorotation

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

umzusetzen. Das in Abbildung 3.4b gezeigte Verhalten ist demnach als reine Materialantwort zu beurteilen [84].

Neben der chiralen Antwort ist auch der effektive E-Modul von N abhängig. Dieser nimmt mit steigendem N zu und konvergiert gegen einen konstanten Wert, wobei die Anzahl an Einheitszellen N , bei der er diesen Grenzwert erreicht, mit sinkender Steifigkeit der Kopplungselemente zunimmt. Im Gegensatz zur chiralen Antwort hat die Randbedingung auf den effektiven E-Modul keinen großen Einfluss. Insgesamt stützen beide Beobachtungen aus der Sichtweise der mikropolaren Elastizität die Interpretation, dass sich die charakteristische Länge eines chiralen Metamaterials durch das Hinzufügen nachgiebiger Kopplungselemente erhöht, da sich dann sowohl die chirale Antwort als auch der effektive E-Modul erst bei größeren N ihrem Grenzwert annähern. Umgekehrt verringert sich die charakteristische Länge, wenn steifere Kopplungselemente verwendet werden (siehe Anhang A.2).

Die in Abschnitt 3.1 formulierte Hypothese ist daher zu bestätigen. Das in Kapitel 2 beschriebene Phänomen, dass die effektiven Eigenschaften von Metamaterialien aufgrund ihrer rational gestalteten Architektur über die Eigenschaften des Basismaterials hinausgehen können, zeigt sich hier zweifach. Zum einen lassen sich klassisch linear elastische Balken zu einer Gitterstruktur zusammenfügen, die ein nicht-klassisches Materialverhalten in Form der chiralen Antwort aufweist, zum anderen wird dieses Verhalten verstärkt, in dem der Anteil der Komponenten der Gitterstruktur, die für die chirale Antwort verantwortlich sind, verkleinert wird. Im Gegensatz zu dieser Beobachtung zeigte eine Architektur, bei der anstatt nachgiebiger achiraler Würfel wie in Abbildung 3.2c nachgiebige chirale Würfel zur Kopplung eingesetzt wurden, eine verringerte chirale Antwort (siehe Anhang A.2).

Es wurde in Abschnitt 3.1 argumentiert, dass der charakteristische Abfall der chiralen Antwort $\propto 1/N$ durch Kompensationseffekte im Volumen des Metamaterials verursacht wird. Daraus wurde die Idee entwickelt, dass sich der charakteristische Abfall durch eine schwächere Kopplung der chiralen Elemente der Gitterstruktur verzögern lässt [52, 69, 86, 84, 85]. Diese Betrachtungsweise erklärt jedoch nicht, warum die chirale Antwort in den chiral-achiralen Gitterstrukturen zunächst ansteigt, bevor sie sich ihrem charakteristischen Abfall $\propto 1/N$ annähert. Dieses Verhalten wird zwar für Materialien mit großer charakteristischer Länge von der mikropolaren Elastizität vorhergesagt [47] (sie-

he Abbildung 2.5), die komplizierten Gleichungen machen die Herstellung eines direkten Zusammenhangs zwischen dem beobachteten Skalierungsverhalten und der Architektur jedoch schwierig.

Ein von Frenzel u.a. [85] entwickeltes semi-analytisches Modell liefert hierfür eine intuitive Erklärung. In diesem Modell wird eine chirale Gitterstruktur bestehend aus $N_{12} \times N_{12} \times N_3$ Einheitszellen betrachtet. Unter einer konstanten Dehnung ε_{33} verformt sich die Struktur elastisch. Die dabei gespeicherte elastische Energie

$$W := W_1 + W_2 + W_3 \quad (3.10)$$

ist in drei Teile aufgeteilt, die sich aus der axialen Dehnung, der Makrorotation und der Differenz aus Makro- und Mikrorotation ergeben. Auf eine konstante uniaxiale Dehnung ε_{33} reagiert das Material für $N_{12} > 1$ mit einer Makrorotation $\varphi(N_{12}, N_3)$, die von der Anzahl an Einheitszellen in horizontaler und vertikaler Richtung abhängt. Die Mikrorotation ist gegeben durch $\phi(1, N_3)$. Die Rotation einer einzelnen Einheitszelle $\phi(1, 1)$ ist ein Eingangsparameter des Modells. Durch Stapeln einzelner Einheitszellen entlang der z -Achse ergibt sich

$$\phi(1, N_3) = N_3 \phi(1, 1). \quad (3.11)$$

Gleichermaßen gilt für das Stapeln von ganzen Schichten bestehend aus $N_{12} \times N_{12}$ Einheitszellen

$$\varphi(N_{12}, N_3) = N_3 \varphi(N_{12}, 1). \quad (3.12)$$

Der erste Term

$$W_1 = c_1 N_{12}^2 N_3 \varepsilon_{33}^2 \quad (3.13)$$

beinhaltet die Anteile der axialen Dehnung und der Querkontraktion. Der zweite Term

$$W_2 = c_2 \frac{N_{12}^4}{N_3} \varphi(N_{12}, N_3)^2 \quad (3.14)$$

beschreibt die in der globalen Torsion gespeicherte Energie eines prismatischen Stabes gemäß [59]. Der dritte Term

$$W_3 = c_3 N_{12}^2 N_3 (\varphi(N_{12}, 1) - \phi(1, 1))^2 \quad (3.15)$$

ergibt sich aus der Differenz zwischen der Makro- und der Mikrorotation [85]. In der Struktur aus Abbildung 3.2c entsteht solch ein Energieeintrag dadurch, dass die Seiten-

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

flächen benachbarter chiraler Würfel (blau) in die entgegengesetzte Richtung abscheren und die achiralen Würfel (grau) dazwischen dadurch verzerren. Über die Bedingung, dass die gesamte elastische Energie ein Minimum einnehmen muss, kann die Makrorotation $\varphi_3(N_{12}, N_3)$ für eine konstante Dehnung ε_{33} aus der Bedingung

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi(N_{12}, N_3)} = 0 \quad (3.16)$$

berechnet werden. Für den Vergleich mit Abbildung 3.4b gilt $N_3 = 4N_{12} = 4N$. Die Konstanten c_2 und c_3 lassen sich zu der charakteristischen Zahl $N_c^2 = c_3/c_2$ zusammenfassen. Mit der vereinfachten Schreibweise $\varphi(N) := \varphi(N, 4N)$ und $\varphi(1) := 4\phi(1, 1)$ ergibt sich für die Makrorotation die Funktion

$$\varphi(N) = \begin{cases} \varphi(1) & \text{wenn } N = 1 \\ = \varphi(1) \frac{NN_c^2}{N^2 + N_c^2} & \text{wenn } N > 1 \end{cases}. \quad (3.17)$$

Abbildung 3.11 zeigt einen Vergleich zwischen dem einfachen Modell von Frenzel u.a. [85] und den Struktursimulationen aus Abbildung 3.4b. Über die Eingangsparameter $\varphi(1)$ und N_c lässt sich das Modell gut an die Ergebnisse der Simulation anpassen. Die beiden Parameter beinhalten keine explizite Information über die Geometrie, das heißt es lässt sich auf andere chirale Gitterstrukturen, wie zum Beispiel auf das Metamaterial [52], anwenden.

Nach dem Satz von l'Hospital [90] folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_c^2}{2} \frac{1}{N} = 0. \quad (3.18)$$

neben der mikropolaren Elastizitätstheorie sagt somit auch das einfache Modell voraus, dass die chirale Antwort verschwindet, wenn die Gesamtabmessung des Gitters sehr viel größer wird als die Gitterkonstante. Die charakteristische Zahl N_c bestimmt die Lage des Maximums der chiralen Antwort $\varphi(N_c) = \varphi(1) \frac{N_c}{2}$ und damit, wann sich die chirale Antwort ihrem Grenzwert annähert. Aus der Beziehung $N_c^2 = c_3/c_2$ folgt für die Maximierung der charakteristischen Zahl ein Zielkonflikt. Zum einen muss c_3 maximiert werden, das bedeutet die Einheitszellen einer chiralen Gitterstruktur müssen so stark an einander gekoppelt werden, dass die Mikrorotationen möglichst stark auf die Makrorotation übertragen werden, zum anderen muss c_2 , das heißt die Torsionssteifigkeit des Verbunds, minimiert werden. Werden chirale Würfel direkt oder durch sehr steife

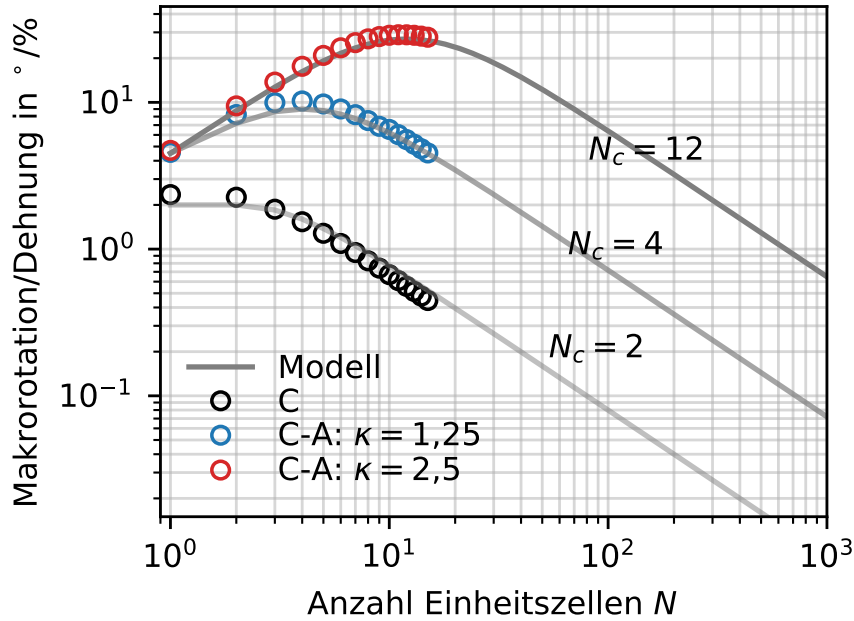


Abbildung 3.11.: Vergleich der Simulationen aus [84] mit dem Modell aus [85]. Die Datenpunkte der Simulationen entsprechen den Kreisen in Abbildung 3.4b.

achirale Würfel miteinander verbunden, wird c_3 sehr groß. Der Modul c_2 wird ebenfalls größer, wenn die achiralen Würfel steifer werden. Das Verhältnis der Moduli $N_c^2 = c_3/c_2$ vergrößert sich bei den im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Gitterstrukturen, wenn die achiralen Würfel nachgiebiger werden, das heißt wenn sich κ vergrößert. Allerdings verkleinert sich das lineare Regime bei einer Erhöhung von κ und der Einfluss von Randbedingungen nimmt zu. Deshalb ist es schwierig zu beurteilen, ob bei $\kappa \gg 2.5$ weiterhin größere N_c , beziehungsweise größere charakteristische Längen zu erwarten sind, oder ob es ein optimales κ gibt. Insbesondere die Bewertung des Grenzfalles $\kappa \rightarrow \infty$ ist problematisch, weil dieser mit einem sehr kleinen linearen Regime und einem sehr großen Einfluss von Randbedingungen einhergeht. [84]

Das Blockiermoment skaliert im Gegensatz zur chiralen Antwort streng monoton $\propto 1/N$. Kompensationseffekte wie bei der chiralen Antwort sind in diesem Fall jedoch nicht für dieses Verhalten verantwortlich. Das Momentengleichgewicht erfordert, dass das Blockiermoment gleich dem Drehmoment einer einzelnen Schicht von Einheitszellen ist. Dieses ergibt sich aus der Summe der Drehmomente aller Einheitszellen in der Schicht und ist daher $\propto N^2$. Das Volumen skaliert mit N^3 , wodurch das Blockiermoment normiert auf das Probenvolumen $\propto 1/N$ ist. Außerdem ist das Blockiermoment unabhängig

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

von der Steifigkeit der Kopplungselemente. Es wird in der in diesem Kapitel untersuchten Struktur ausschließlich von den chiralen Anteilen des Gitters bestimmt.

Ein weiterer Effekt, den die Erhöhung von κ mit sich bringt, ist die Verkleinerung des Bereichs, in dem die Makrorotation linear von der axialen Dehnung abhängt. Da das Basismaterial der Gitterstruktur als linear elastisch modelliert wurde, kann es sich dabei nur um eine geometrische Nichtlinearität handeln. Unter Zugbelastung verlangsamt sich die Zunahme der chiralen Antwort mit steigender Dehnung; unter Druckbelastung ist der Trend umgekehrt. Ein ähnliches Verhalten wurde bei vergleichbaren Strukturen festgestellt [91].

Die Asymmetrie bezüglich Zug- und Druckbelastung ergibt sich aus dem Verhalten einer einzelnen Einheitszelle. Um das Verhalten zu erklären eignet sich das in Abbildung 3.12 dargestellte einfache Federmodell. Es besteht aus zwei elastischen Stäben mit den Anfangslängen l_1^0, l_2^0 und den Steifigkeiten k_1, k_2 , für die gilt

$$k_2 = \frac{l_1^0}{l_2^0} k_1. \quad (3.19)$$

Die Kraft-Weg-Beziehung

$$F_i = k_i \ln \left(\frac{l_i}{l_i^0} \right) \quad (3.20)$$

wird mit der wahren Dehnung $\varepsilon_t = \ln \left(\frac{l_i}{l_i^0} \right)$ formuliert. Dies entspricht einer physikalisch linearen aber geometrisch nichtlinearen Formulierung ähnlich einem Saint-Venant-Kirchhoff-Modell [92]. Die geometrisch nichtlineare Modellierung ist nötig, um zu garantieren, dass keiner der beiden Stäbe auf eine Länge ≤ 0 reduziert wird. Durch eine vertikale Verschiebung v verschiebt sich das Gelenk, das die beiden Stäbe verbindet, in horizontaler Richtung um u . Dieser Mechanismus imitiert das Abscheren der Seitenflächen eines chiralen Würfels, das für die chirale Antwort verantwortlich ist. Die Längen der Stäbe

$$l_1 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ l_1^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| \quad (3.21)$$

und

$$l_2 = \left\| \begin{pmatrix} (l_2^0)^2 - (l_1^0)^2 \\ l_1^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| \quad (3.22)$$

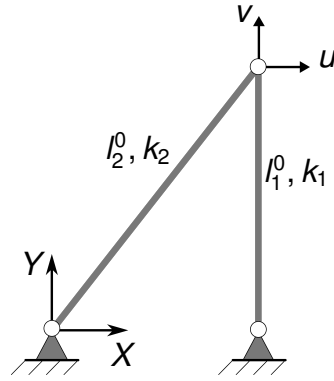


Abbildung 3.12.: Einfaches Bild des Mechanismus der chiralen Würfel. Eine vertikale Verschiebung v wird in eine horizontale Verschiebung u übersetzt. Dies imitiert die Kinematik der Seitenflächen eines chiralen Würfels. Die Stäbe werden physikalisch linear und geometrisch nichtlinear modelliert.

ergeben sich aus den Ausgangslängen l_1^0, l_2^0 und den Verschiebungen u, v . Aus der gesamten elastischen Energie

$$W = \frac{1}{2}k_1 \left(\left(\ln \left(\frac{l_1}{l_1^0} \right) \right)^2 + \frac{l_1^0}{l_2^0} \left(\ln \left(\frac{l_2}{l_2^0} \right) \right)^2 \right) \quad (3.23)$$

lässt sich über die Bedingung

$$\frac{\partial W}{\partial u} = 0 \quad (3.24)$$

die horizontale Verschiebung u für eine vorgegebene vertikale Verschiebung v mit Hilfe von numerischen Verfahren (siehe [93, 94]) berechnen. Abbildung 3.13 zeigt die Verschiebungen für unterschiedliche Verhältnisse der Ausgangslängen l_2^0/l_1^0 .

Abbildung 3.13a zeigt das Verhalten für moderate Dehnungen zwischen $v/l_1^0 \pm 4\%$. Der Fall $l_2^0/l_1^0 = \sqrt{2}$ (rote Linie) entspricht den Längenverhältnissen in den chiralen Würfeln aus Abbildung 3.1b. Die Asymmetrie bezüglich Zug und Druck ist eindeutig zu erkennen. Bei Zug ($v > 0$) gilt $\frac{d^2|u|}{dv^2} < 0$, das heißt die Kurve wird flacher, bei Druck ($v < 0$) ist es umgekehrt. Neben der Erklärung des asymmetrischen Verhaltens im geometrisch nichtlinearen Bereich liefert diese vereinfachte Darstellung Hinweise, wie das chirale Metamaterial aus Abschnitt 3.1 bezüglich der chiralen Antwort optimiert werden kann. Verändert sich das Verhältnis zu $l_2^0/l_1^0 = \sqrt{5}$ (schwarze Linie), dann ist die Breite des Mechanismus doppelt so groß wie seine Höhe. In diesem Fall übersetzt der Mechanismus eine vertikale Verschiebung v weniger stark in eine Schubverformung. Umgekehrt wird die Übersetzung von vertikaler Verschiebung zu horizontaler Schubverformung größer,

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

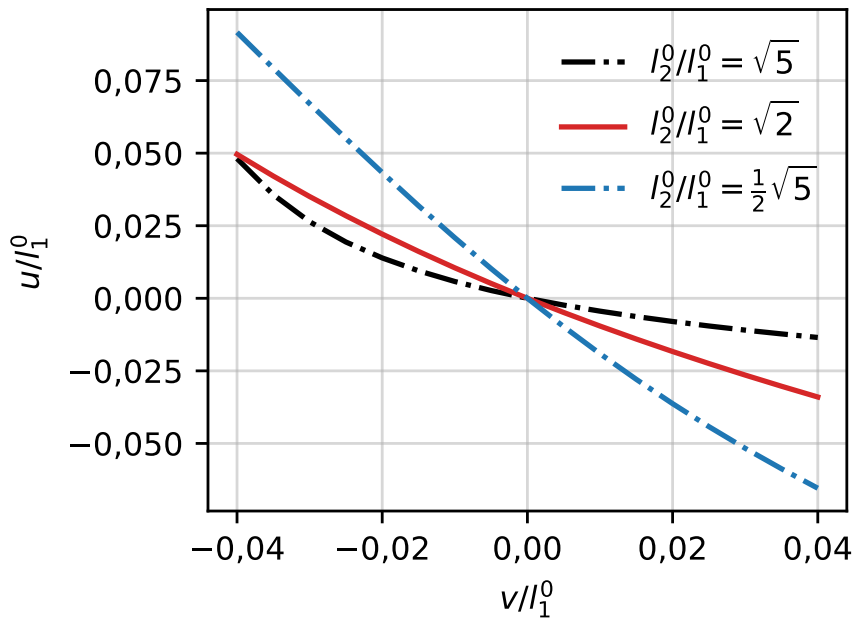
wenn sich das Längenverhältnis auf $l_2^0/l_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (blaue Linie) verkleinert. Übertragen auf das chirale Metamaterial ist demnach zu erwarten, dass flache und breite Einheitszellen bei moderaten Dehnungen eine geringere chirale Antwort liefern als hohe und schmale Einheitszellen.

Abbildung 3.13b zeigt das Verhalten für sehr große Dehnungen. Es ist zu erkennen, dass die Kurven im Druckbereich ($v/l_1^0 < 0$) einen Wendepunkt aufweisen. An diesem Wendepunkt werden sie nicht mehr steiler sondern flachen ab. Dieses Verhalten ist plausibel, da am Totpunkt bei $v = -l_1^0$ die Bedingung $\frac{du}{dv} = 0$ gelten muss. In der Praxis ist dieser Punkt offensichtlich nicht erreichbar, da dafür das Gitter auf ein unendlich kleines Volumen komprimiert werden müsste. Somit ist die axiale Dehnung und damit die Makrorotation im Druckbereich nach oben beschränkt. Im Zugbereich sind abhängig vom Basismaterial prinzipiell axiale Dehnungen deutlich größer als 100% möglich, die horizontale Verschiebung u hat hier jedoch auch eine obere Schranke. Diese kommt dadurch zustande, dass sich das Verbindungsgelenk der Kinematik bei einer vorgegebenen vertikalen Verschiebung geometrisch bedingt immer zwischen den beiden Punkten befinden muss, an denen die zwei Stäbe befestigt sind. Übertragen auf die Gitter aus Abschnitt 3.1 bedeutet dies, dass die Makrorotation im Zugbereich ebenfalls eine obere Grenze hat.

Am Beispiel einer Spiralfeder lässt sich leicht erklären, warum dies nicht nur für diese spezielle Struktur sondern für alle chiralen Strukturen gelten muss. Wird die Feder einer Zugbelastung ausgesetzt, dreht sie sich auf, bis der Draht vollständig gestreckt ist. Chirale Strukturen verdrehen sich also unter Zug so lange, bis sie nicht mehr chiral sind. Für den Anwendungsfall lässt sich aus dieser sehr einfachen analytischen Rechnung ableiten, dass immer der Lastfall mit berücksichtigt werden muss. Soll zum Beispiel eine möglichst große Makrorotation bereits bei sehr kleinen Dehnungen erreicht werden, wären hohe und schmale Einheitszellen optimal, da die chirale Antwort $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ in einem kleinen Bereich um $\varepsilon = 0$ maximal ist. Soll eine möglichst große absolute Makrorotation erreicht werden, sind eher flache und breite Einheitszellen von Vorteil.

Zusammenfassend konnte gezeigt werden, dass sich die charakteristische Länge durch die Steifigkeit der Verbindung zwischen chiralen Einheitszellen maßschneidern lässt. Die Erhöhung der charakteristischen Länge bringt zwei Vorteile mit sich. Zum einen weisen Gitter mit mehr Einheitszellen noch eine chirale Antwort auf, zum anderen konnte die chirale Antwort aufgrund des Anstiegs bei kleinen N insgesamt um mehr als das

(a)



(b)

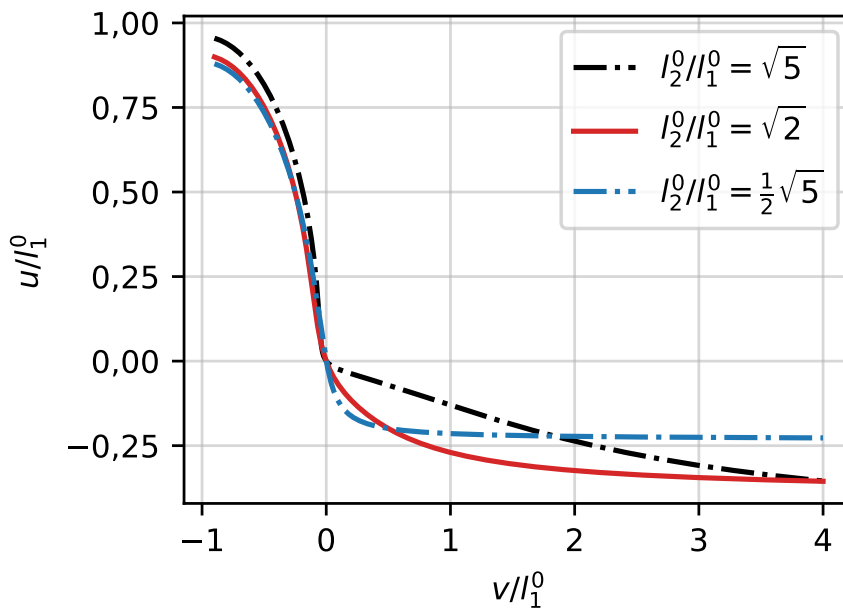


Abbildung 3.13.: Horizontale Verschiebung u als Funktion der vertikalen Verschiebung v für den in Abbildung 3.12 dargestellten Mechanismus. **(a)** Moderate Dehnungen. **(b)** Sehr große Dehnungen.

zehnfache erhöht werden. Insgesamt wird das Materialverhalten deutlich komplexer, da sowohl der Einfluss von Randbedingungen als auch von Nichtlinearitäten zunimmt, was

3. Untersuchungen an idealisierten periodischen Strukturen

die Modellierung schwieriger macht. Außerdem wirkt sich das Einbringen der nachgiebigen Kopplungselemente negativ auf das Blockiermoment aus, was Nachteile für die Anwendung als Aktuator mit sich bringt. Diese Problematik wird in Kapitel 5 nochmals aufgegriffen und es werden Lösungsansätze aufgezeigt, zuerst wird jedoch im folgenden Kapitel (Kapitel 4) auf die Validierung der hier vorgestellten theoretischen Ergebnisse eingegangen.

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

Im vorangegangenen Kapitel wurde anhand einer idealisierten Struktur beschrieben, wie sich die charakteristische Länge eines chiralen Metamaterials durch eine Schwächung der Kopplung zwischen den chiralen Elementen des Gitters über Größenordnungen verändern lässt. Dieses Prinzip soll nun auf eine Struktur, die praktisch realisierbar ist, angewandt werden. Die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse wurden in enger Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe von Prof. Martin Wegener am Institut für Angewandte Physik erarbeitet und sind im Fachartikel [85] veröffentlicht. Das neu erarbeitete Design des Metamaterials wird in Abschnitt 4.1 erläutert. In Abschnitt 4.2 werden unterschiedliche Ansätze zur Modellierung des Materialsverhaltens vorgestellt. Abschnitt 4.3 behandelt kurz die am Institut für Angewandte Physik durchgeführten Experimente zur mechanischen in-situ Charakterisierung. In Abschnitt 4.4 werden alle theoretischen und experimentellen Ergebnisse verglichen und diskutiert.

4.1. Design des Metamaterials

An das Design des Metamaterials werden zwei Anforderungen gestellt: Zum einen muss es herstellbar sein, zum anderen muss es auch bei moderaten Dehnungen robust gegen Versagen sein. Um Proben aus mehr als einhunderttausend Einheitszellen in hinnehmbarer Zeit herstellen zu können, wurde das von Hahn u.a. [95] entwickelte Zwei-Photonen-Stereolithographie Verfahren mit 3×3 parallelen Laserfoci ausgewählt. Für dieses Verfahren ist die in Kapitel 3 gezeigte Struktur ungünstig, da sich die Kombination aus der Dicke der Balken und der Gesamtgröße der Einheitszelle mit den festen Abständen zwischen den parallelen Laserfoci aus dem Aufbau von Hahn u.a. [95] schlecht abbilden lässt. Da die mit diesem Verfahren hergestellten Proben zwischen einigen hundert bis tausend Mikrometern groß sind, ist es einfacher einen Druck- anstelle eines Zugversuchs durchzuführen. Hierfür ist die Struktur aus Kapitel 3 ebenfalls ungeeignet, da die schlan-

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

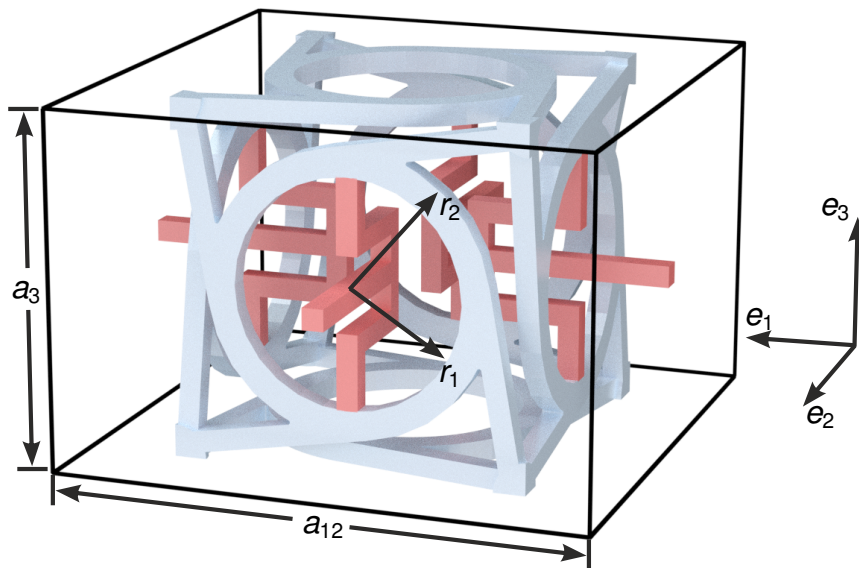
ken Balken unter Druck zum elastischen Knicken neigen.

Aus diesem Grund wurde das Design von Frenzel u.a. [52] wie in Abbildung 4.1 um ein nachgiebiges Kopplungselement erweitert. Dieses erfüllt die gleiche Aufgabe wie die achiralen Würfel im vorangegangenen Kapitel. Der graue Teil der Einheitszelle ist die alte Struktur, die neu hinzugefügten Kopplungselemente sind in rot dargestellt. Die Abmessungen der Zelle betragen $a_1 = a_2 = a_{12}$ in der horizontalen und a_3 in der vertikalen Richtung und es gilt $a_3 = \frac{2}{3}a_{12}$. Damit handelt es sich um eine tetragonale Zelle mit vierzähliger Rotationssymmetrie um die z -Achse. Der Winkel δ bestimmt die Chiralität der Einheitszelle, für $\delta = 0$ ist die Zelle achiral [52, 85]. Wird die Einheitszelle einer Druckbelastung ausgesetzt, wird die Kraft über die in den Ecken verbundenen Balken auf die Ringe in der Mitte der Seitenflächen übertragen. Für $\delta > 0$, das heißt bei chiralen Zellen, wirkt dadurch ein Drehmoment auf den Ring, was zu einem Abscheren der Seitenfläche des grauen Würfels in Abbildung 4.1 führt. Insgesamt kommt es dadurch zu einer chiralen Antwort. Der Vorteil dieser Struktur besteht darin, dass die Deformationen hauptsächlich durch Biegung geprägt sind, wodurch das elastische Knicken unter Druckbelastungen vermieden wird. Die Stärke der Kopplung zwischen einzelnen Einheitszellen in einem Gitter ist durch die Länge c des horizontalen Balkens und dessen Dicke d_T bestimmt. Die weiteren Abmessungen der Einheitszelle sind Tabelle 4.1 zu entnehmen. Durch das nach innen gezogene Design des Kopplungselements (rot) kann die Länge c variiert werden, ohne dass sich die Gesamtabmessungen der Zelle verändern. Dies ist praktisch, da sich mit dem Verhältnis $a_3 = \frac{2}{3}a_{12}$ aus $N \times N \times 3N$ Einheitszellen direkt vergleichbare Proben mit den Abmessungen $B \times B \times 2B$ aus verschiedenen N konstruieren lassen.

Tabelle 4.1.: Parameter zur Beschreibung der Geometrie der Einheitszelle. Alle Werte sind gerundet auf eine Dezimalstelle.

Parameter	Verhältnis/Wert
$\frac{a_3}{a_{12}}$	66,7%
$\frac{r_1}{a_{12}}$	21,3%
$\frac{r_2}{a_{12}}$	26,7%
$\frac{b}{a_{12}}$	14,2%
$\frac{c}{a_{12}}$	34,2%
$\frac{d}{a_{12}}$	4,0%
$\frac{d_T}{a_{12}}$	4,0%
$\frac{h}{a_{12}}$	14,2%
δ	34,8°

(a)



(b)

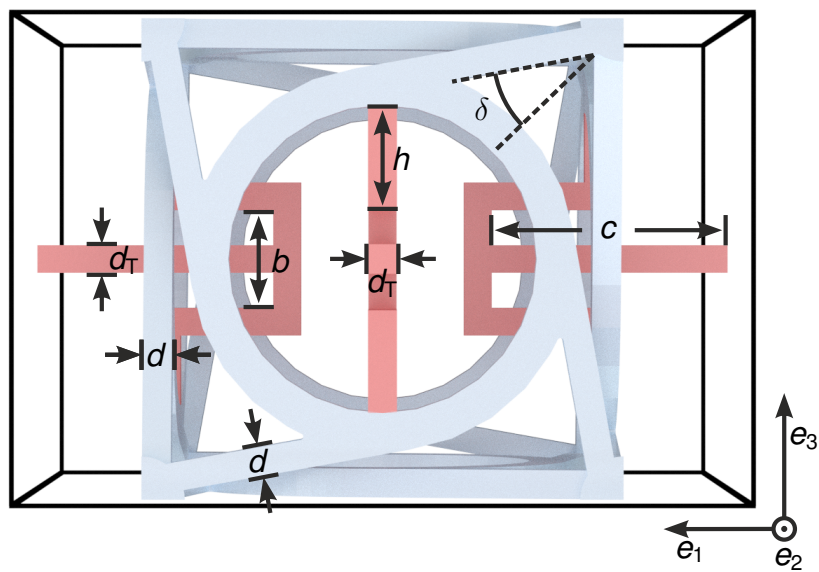


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung der Einheitszelle. Diese wird periodisch auf einem tetragonalen Gitter platziert, um das Metamaterial aufzubauen. Die Zelle besteht aus einem einzigen Material. Die unterschiedlichen Farben dienen der Veranschaulichung. Grau ist identisch zu [52]. Die roten Anteile sind die neu hinzugefügten Kopplungselemente. Grafiken in Anlehnung an [85]

4.2. Finite-Elemente-Simulationen

Zur Charakterisierung des Metamaterials wurden drei verschiedene Modellierungsansätze implementiert. Als Benchmark dienen Finite-Elemente-Simulationen, bei denen die gesamte Gitterstruktur mit Kontinuumselementen vernetzt wurde (Abschnitt 4.2.1). Um diese Simulationen zu ergänzen und Proben mit mehr Einheitszellen numerisch zu untersuchen, wurde ein vereinfachtes Modell basierend auf Timoshenko-Balken implementiert (Abschnitt 4.2.2). Zusätzlich wurde die Struktur als linear elastisches mikropolares Kontinuum modelliert (Abschnitt 4.2.3).

4.2.1. Struktursimulationen mit Kontinuumselementen

Die Struktursimulationen mit Kontinuumselementen wurden von Tobias Frenzel am Institut für Angewandte Physik mit Hilfe der Software COMSOL Multiphysics durchgeführt. Die Struktur wurde mit Tetraederelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen vernetzt. Das Materialverhalten wurde als isotrop linear elastisch mit einem Elastizitätsmodul von 2,6 GPa und einer Querkontraktionszahl von 0,4 modelliert. Betrachtet wurden Proben aus $N \times N \times 3N$ Einheitszellen mit den Abmessungen $B \times B \times 2B$ und einer Gitterkonstante $a_{12} = 150 \mu\text{m}$. Diese wurden am unteren Ende fest eingespannt. Am oberen Ende wurden die Proben an eine im Verhältnis zur restlichen Struktur sehr steifen Platte befestigt, was dem Aufbau in den Experimenten entspricht (siehe Abschnitt 4.3). Die Platte wurde um \bar{u} nach unten verschoben, wodurch sich mit $H = 2B$ die Dehnung $\varepsilon_{33} = \frac{\bar{u}}{H}$ ergibt. Die Makrorotation ergibt sich aus der Starrkörperrotation der steifen Platte. Mit diesem Modell war es möglich, Proben mit bis zu $N = 6$ Einheitszellen zu simulieren.

4.2.2. Struktursimulation mit Balkenelementen

Für die Simulationen mit Timoshenko-Balken wurde die Software ABAQUS 3DEXPERIENCE 2018x und das Balkenelement B32 mit geometrisch nichtlinearer Formulierung verwendet. Wie in den Simulationen mit Kontinuumselementen wurde das Basismaterial als linear elastisch mit einem Elastizitätsmodul von 2,6 GPa und einer Querkontraktionszahl von 0,4 modelliert. Eine Längeneinheit im Modell entspricht $150 \mu\text{m}$. Die Einheiten zur Interpretation der Ergebnisse ergeben sich aus diesen Angaben. Am unteren Ende der Proben wurde eine feste Einspannung modelliert. Am oberen Ende der Probe wurden alle Freiheitsgrade fest an einen Referenzpunkt gekoppelt. Dieser wurde um \bar{u}

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

nach unten verschoben. Über diese Randbedingung wird der Einfluss der steifen Platten am Ende der experimentell charakterisierten Proben reproduziert (siehe Abschnitt 4.3). Die Makrorotation ist in diesem Fall identisch mit der Rotation des Referenzpunkts.

Abbildung 4.2 zeigt den Aufbau des vereinfachten Modells. Die Balken der in rot dargestellten Kopplungselemente haben einen Querschnitt mit den Abmessungen $d_T \times d_T$. Die Ringe in den Seitenflächen wurden durch aus Balken zusammengesetzte Achtecke ersetzt. Diese Balken haben einen Querschnitt mit den Abmessungen $d \times d_R$ mit $d_R = r_2 - r_1$. An der Ober- und Unterseite sind die abgebildeten Balken der Achtecke doppelt so dick. Werden zwei Zellen in e_3 -Richtung aufeinander gestapelt, wird das Achteck von entweder der unteren oder der oberen Zelle weggelassen. Auf diesem Weg sind weniger Elemente zur Modellierung nötig. Die Struktur in Abbildung 4.2 repräsentiert deshalb etwas mehr als nur die Einheitszelle des Gitters. Der effektive Elastizitätsmodul der Struktur kann mit diesem Modell auf Grund der starken Vereinfachungen nicht mehr zuverlässig abgeschätzt werden. Zum einen sind viele der Balken zu dick, sodass die kinematischen Annahmen der Timoshenko-Balken nicht vollständig erfüllt sind, zum anderen ist der effektive Elastizitätsmodul sehr sensitiv gegenüber kleinen Veränderung in der Verbindung zwischen den Balken und den Ringen, was über Balkenelemente nicht abgebildet werden kann. Insgesamt besteht die Tendenz, dass das Balkenmodell den effektiven Elastizitätsmodul unterschätzt [85].

Bei der Abschätzung der chiralen Antwort liefert das Modell jedoch brauchbare Ergebnisse, was aus Abbildung 4.3a hervorgeht. Die Grafik zeigt die chirale Antwort in Abhängigkeit von N , wie sie von den Simulationen mit Kontinuumselementen (Dreiecke) und Balkenelementen (Linien) vorhergesagt wird. Die orangenen Dreiecke und die blauen Linien repräsentieren die Struktur, wie sie in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt ist. Die Ergebnisse beider Modelle sind fast identisch. Allerdings kann für diese Konfiguration nur der Bereich des Anstiegs der chiralen Antwort mit den Simulationen mit Kontinuumselementen abgedeckt werden. Um zu untersuchen, ob das Balkenmodell auch das Maximum und den Abfall der chiralen Antwort richtig abschätzen kann, wurden zusätzliche Simulationen durchgeführt, bei denen das Kopplungselement verkürzt wurde (rote Dreiecke und grüne Linien). Durch diese Änderung wird die Kopplung zwischen den Einheitszellen stärker. Wegen der stärkeren Kopplung werden das Maximum und der Abfall der chiralen Antwort zu kleineren N verschoben, was es erlaubt, alle Bereiche des Skalierungsverhaltens mit beiden Modellen abzubilden. Wie in Abbildung

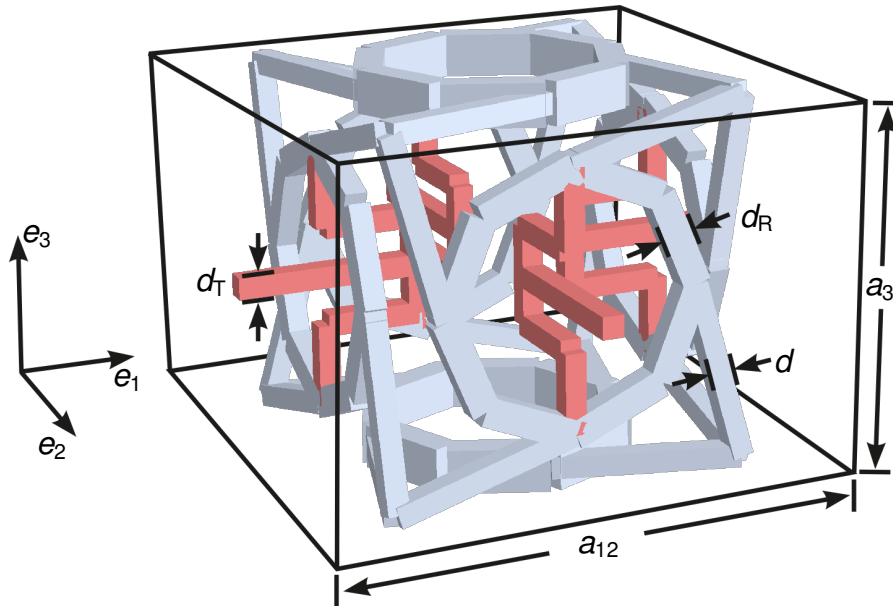


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung einer erweiterten Einheitsszelle des Timoshenko-Balkenmodells. Dieser Ansatz stellt eine starke Vereinfachung der Struktur aus Abbildung 4.1 dar, erlaubt aber, Simulationen mit bis zu 24000 Einheitsszellen zu simulieren. Grafik in Anlehnung an [85].

4.3a zu sehen ist, stimmen beide sowohl qualitativ als auch quantitativ gut überein.

Abbildung 4.3b zeigt, wie sich die Struktur bezüglich kleiner Variationen in der Balkendicke d_T des Kopplungselements verhält. Die blauen Linien zeigen das Verhalten für die Solldicke des Balkens. Die schwarzen und roten Linien ergeben sich für einen Balken, der zehn Prozent zu dick, beziehungsweise zu dünn ist. Die unterschiedlichen Linienarten (durchgezogen, gestrichelt und gepunktet) stehen jeweils für die Dehnungen von $-0,1\%$, $-0,5\%$ und -1% . Es ist in allen Fällen zu beobachten, dass die chirale Antwort mit einer betragsmäßig größeren Dehnung größer wird. Diese Nichtlinearität setzt erst dann ein, wenn sich die chirale Antwort ihrem Maximum nähert und wird danach mit steigendem N immer größer. Für Dehnungen $|\varepsilon_{33}| \leq 0,1\%$ ist das Verhalten näherungsweise linear. Bei dünneren Balken, das heißt einer schwächeren Kopplung, verschiebt sich das Maximum der chiralen Antwort hin zu größeren Verdrehungen und größeren N . Außerdem ist die Nichtlinearität bei dünneren Balken stärker ausgeprägt. Das Metamaterial verhält sich somit qualitativ identisch zu der idealisierten Strukturen aus dem vorangegangenen Kapitel. Im näherungsweise linearen Bereich (Dehnungen $|\varepsilon_{33}| \leq 0,1\%$) verschiebt sich das Maximum der chiralen Antwort bei einer Änderung von $d_T \pm 10\%$ sowohl auf der Abszisse als auch auf der Ordinate um ungefähr $\pm 30\%$. Im geometrisch nichtli-

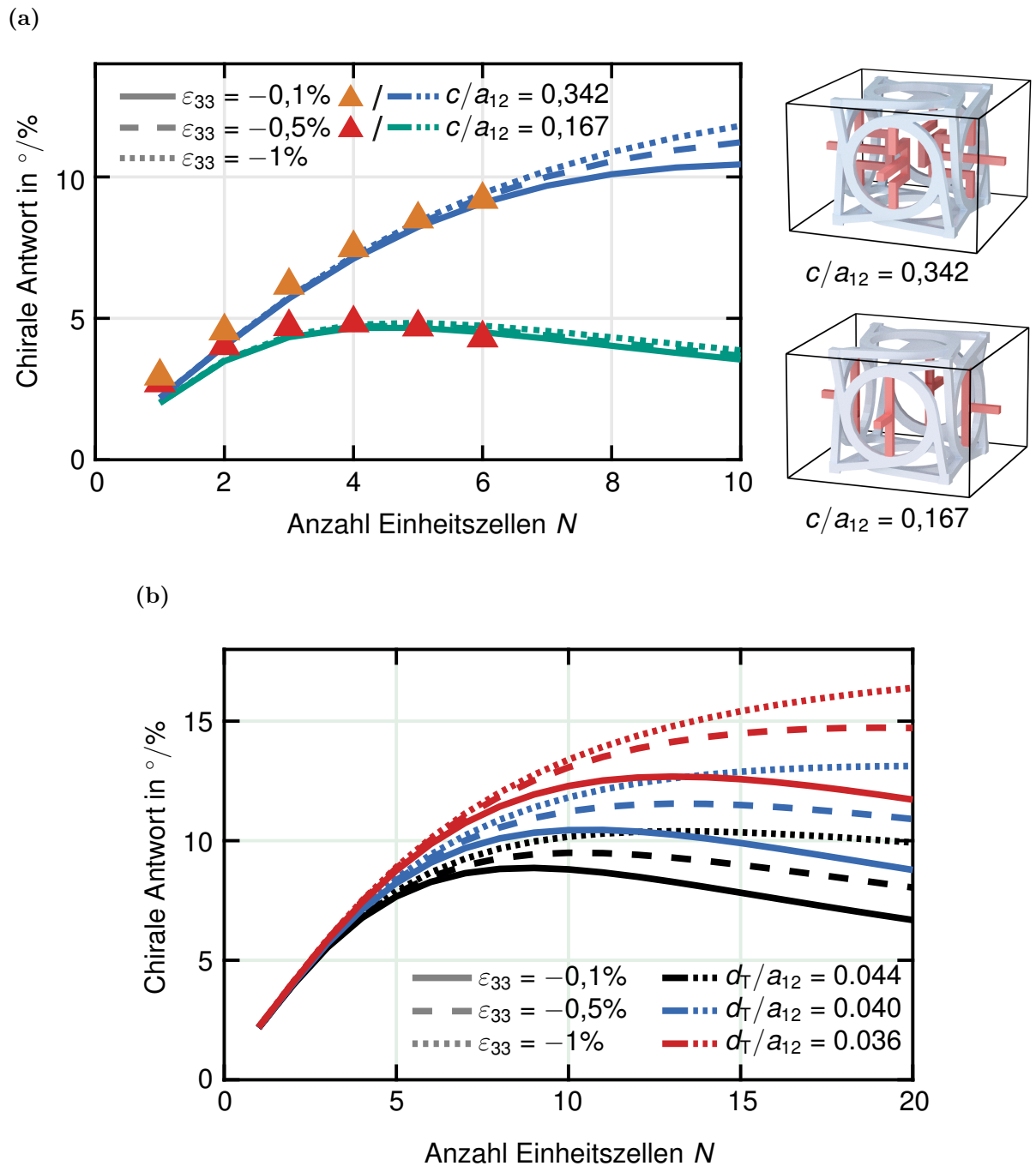


Abbildung 4.3.: Ergebnisse aus den Simulationen, in denen die Struktur des Metamaterials vollständig aufgelöst ist. (a) Vergleich des mit Volumenelementen vernetzten Modells mit dem Timoshenko-Balkenmodell. (b) Timoshenko-Balkenmodell für verschiedene Balkendicken d_T . Grafiken in Anlehnung an [85].

neeren Bereich (Dehnungen $|\varepsilon_{33}| \geq 0,1\%$) liegt der Unterschied der chiralen Antwort zwischen den unterschiedlichen d_T in einer ähnlichen Größenordnung. Die Biegesteifig-

keit der langen horizontalen Balken in den Kopplungselementen skaliert $\propto d_T^4$. Bei einer Änderung von $d_T \pm 10\%$ verändert sich die Biegesteifigkeit somit um ungefähr $\pm 50\%$. Kleine Veränderungen in der Balkendicke d_T haben somit einen verhältnismäßig großen Einfluss auf die chirale Antwort. Dieser Einfluss liegt jedoch im zu erwartenden Rahmen und lässt nicht auf die Existenz von elastischen Instabilitäten schließen. Mit der hier beschriebenen Vereinfachung der Einheitszelle auf ein Balkenmodell konnten Proben bis $N = 20$, das heißt $20 \times 20 \times 60 = 24000$ Einheitszellen, simuliert werden. Mit einem größeren Ressourceneinsatz ließe sich die Größe der Modelle noch um einige N steigern. Da die Gesamtanzahl der Einheitszellen $\propto N^3$ skaliert, sind die Grenzen der Numerik jedoch selbst mit Hochleistungsrechnern schnell erreicht, weshalb es effizienterer Kontinuumsmodelle bedarf.

4.2.3. Mikropolare Kontinuumsmechanik

Wie in Kapitel 2 diskutiert, eignet sich die klassische Kontinuumsmechanik nicht für eine Beschreibung chiraler Metamaterialien. In anderen Arbeiten [52, 68, 96] wurde eine linear elastische mikropolare Kontinuumsbeschreibung erfolgreich zur Modellierung chiraler Metamaterialien angewandt. Um zu testen, inwiefern sich das in Abbildung 4.1 gezeigte Metamaterial durch ein mikropolares Kontinuum modellieren lässt, wurde das von Yi Chen implementierte Modell aus Referenz [96] auf Materialien mit tetragonaler Symmetrie erweitert. In diesem Modell wird eine Probe anstatt als diskrete Gitterstruktur als homogener Körper mit den Abmessungen $B \times B \times 2B$ betrachtet, wobei eine Längeneinheit der Gitterkonstante $a_{12} = 150 \mu\text{m}$ in horizontaler Richtung entspricht. Es wurden Lösungen für die schwache Form der quasi-statischen mikropolaren Impulsbilanz ohne Volumenkräfte und -momente

$$\int_V -\frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} - \frac{\partial \delta \phi_j}{\partial x_i} m_{ij} + \epsilon_{ijk} \delta \phi_i \sigma_{jk} dV = \oint_{\partial V} -\sigma_{ij} \delta u_j n_i - m_{ij} \delta \phi_j n_i dS \quad (4.1)$$

mit Hilfe der Software COMSOL Multiphysics berechnet, wobei δu_j und $\delta \phi_j$ die Testfunktionen für die Verschiebungen und Mikrorotationen sind. Bei n_i handelt es sich um einen zur freien Oberfläche normalen dimensionslosen Vektor mit Einheitslänge. Für eine Herleitung der schwachen Form sei auf die Referenz [97] verwiesen.

Der prismatische Stab wurde mit lagrangeschen Hexaederelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen vernetzt. Die Elementkantenlänge wurde auf ein Fünftel der Breite B festgelegt. Am unteren Ende wurde der Stab fest eingespannt. Am oberen Ende wurde

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

eine über die Querschnittsfläche konstante Verschiebung \bar{u} aufgebracht. Um wie in den diskreten Simulationen die steifen Platten aus dem Experiment zu modellieren, wurden die horizontalen Verschiebungen am oberen Ende des Stabes über die Gleichung

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0 \quad (4.2)$$

gekoppelt. Zum Vergleich mit den diskreten Finite-Elemente-Simulationen und den Experimenten errechnet sich die axiale Dehnung durch $\varepsilon_{33} = \bar{u}/(2B)$, die Makrorotation ergibt sich aus dem Verschiebungsfeld

$$\varphi_3 = \frac{-u_1 x_2 + u_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (4.3)$$

am oberen Ende der Probe.

Zur anschaulichen Darstellung des Konstitutivgesetzes wird für den mikropolaren Spannungs-, Momenten-, Dehnungs- und Krümmungstensor die Voigt-Notation

$$\underline{\sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{pmatrix} \quad \underline{m} := \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{33} \\ m_{23} \\ m_{13} \\ m_{12} \\ m_{32} \\ m_{31} \\ m_{21} \end{pmatrix} \quad \underline{e} := \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix} \quad \underline{\gamma} := \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

eingeführt. Es sei auf die veränderte Reihenfolge für $\underline{\gamma}$ hingewiesen. In dieser Notation hat der Tensor $\underline{\mathbf{A}}$ in 2.14 für eine tetragonale Symmetrie die Form

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & A_{47} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & A_{69} \\ 0 & 0 & 0 & A_{47} & 0 & 0 & A_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{47} & 0 & 0 & A_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{69} & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Der Tensor $\underline{\mathbf{B}}$ in 2.15 nimmt die gleiche Form ein. Im Gegensatz zu $\underline{\mathbf{A}}$ und $\underline{\mathbf{B}}$ besitzt $\underline{\mathbf{C}}$ keine Hauptsymmetrie. Für diesen gilt

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & C_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & C_{47} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & C_{69} \\ 0 & 0 & 0 & C_{74} & 0 & 0 & C_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{74} & 0 & 0 & C_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{69} & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Die elastische Formänderungsenergie ist in dieser Darstellung gegeben durch [96]

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{e}^T & \underline{\gamma}^T \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} \begin{bmatrix} \underline{e} \\ \underline{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Um für die Einträge A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} die entsprechenden Tensorkomponenten $A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl}$ zu erhalten, sodass Gleichung 4.7 Gleichung 2.13 entspricht, sei auf Anhang B verwiesen. Insgesamt gibt es 29 unabhängige elastische Konstanten, die durch die Stabilitätsbedingung, dass die zusammengesetzte Matrix $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ symmetrisch positiv definit sein muss, beschränkt sind [85, 96].

Die Bestimmung der elastischen Konstanten ist deutlich schwieriger als bei klassischen elastischen Materialien. Es existieren Homogenisierungsansätze für nicht-klassische Kontinua (für eine Übersicht siehe z.B. [98]), allerdings wird häufig eine achirale Mikrostruktur angenommen. Der bisher einzige Ansatz für dreidimensionale chirale Strukturen wurde von Duan u.a. [68] entwickelt. Für die in diesem Kapitel gezeigten mikropolaren Kontinuumsmechaniksimulationen wurde dieser Ansatz in leicht angepasster Form genutzt, um eine grobe Abschätzung für die 29 elastischen Konstanten zu erhalten. Die so ermittelten Konstanten wurden systematisch variiert, um das in den diskreten Struktursimulationen beobachtete Skalierungsverhalten zu reproduzieren. Die mikropolaren elastischen Konstanten wurden somit mit diesem Vorgehen nicht eindeutig bestimmt, sondern lediglich an die uniaxialen Druckversuche angepasst. Die Werte der Konstanten und das genaue Vorgehen im ersten Schritt sind Anhang B zu entnehmen. Es wurde bei der Parameteridentifikation stets darauf geachtet, dass alle Eigenwerte von \underline{M} positiv sind, um die Stabilität des Materialverhaltens zu gewährleisten. Es kann jedoch mit der hier beschriebenen Vorgehensweise nicht garantiert werden, dass das mikropolare Kontinuumsmodell die effektiven Eigenschaften des Metamaterials für beliebige Lastfälle quantitativ hinreichend genau abbildet. Prinzipiell ist deshalb eine direkte numerische Homogenisierung dem hier beschriebenen Prozess zu bevorzugen, es konnte jedoch mit dem von Duan u. a. [68] adaptierten Homogenisierungsansatz kein repräsentatives Volumenelement gefunden werden. In Abschnitt 4.4 werden die Gründe für dieses Problem genauer diskutiert. Abbildung 4.4 zeigt den Vergleich zwischen dem Timoshenko-Balkenmodell und der mikropolaren Kontinuumsmechanik am Beispiel einer Probe aus $10 \times 10 \times 30 = 3000$ Einheitszellen, beziehungsweise mit den Dimensionen $1,5 \text{ mm} \times 1,5 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$. Die Farbskala gibt den Betrag des Verschiebungsvektors an. Da das mikropolare Kontinuumsmodell sowohl geometrisch als auch physikalisch linear ist, wurde für den Vergleich eine axiale Dehnung von $\varepsilon_{33} = 0,1\%$ ausgewählt. Sowohl qualitativ als auch quantitativ stimmen die Verschiebungsfelder gut überein.

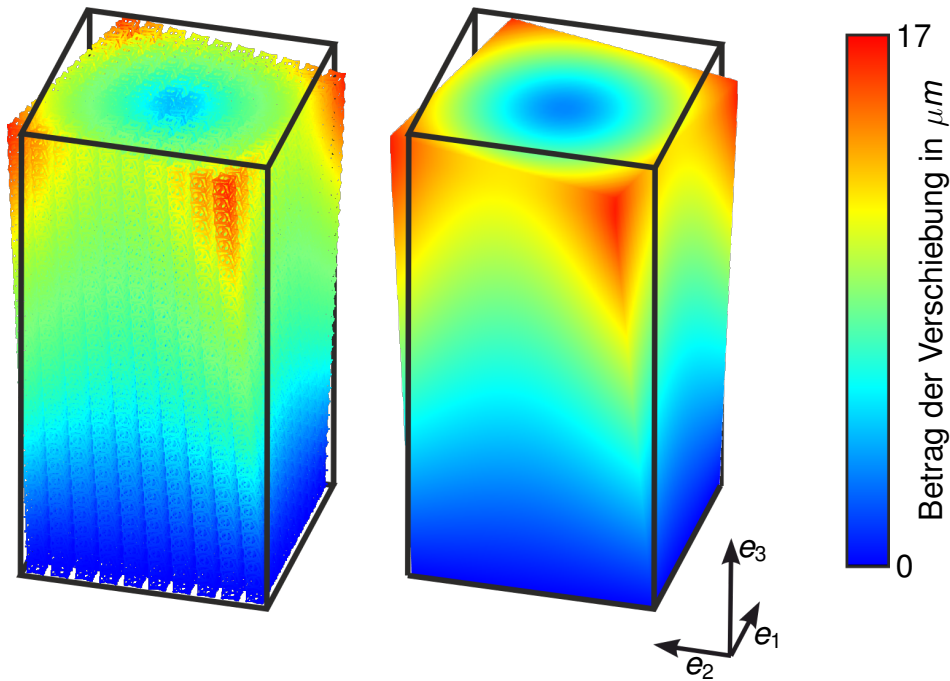


Abbildung 4.4.: Vergleich der Verschiebungen aus dem Timoshenko-Balkenmodell (links) und der mikropolaren Elastizität (rechts). Dargestellt für $N = 10$ im diskreten Modell und $B = 1,5 \text{ mm}$ im mikropolaren Kontinuumsmodell. Die axiale Dehnung beträgt $\varepsilon_{33} = 0,1\%$. Die Deformationen wurden zur besseren Sichtbarkeit mit dem Faktor 15 skaliert. Grafik in Anlehnung an [85].

4.3. Experimentelle Validierung

Zur Validierung der Simulationen wurden von Tobias Frenzel, Vincent Hahn, Jonathan L. G. Schneider und Pascal Kiefer am Institut für Angewandte Physik verschiedene Proben auf Polymerbasis mittels Zwei-Photonen-Stereolithographie hergestellt und mechanisch charakterisiert. Es wurden bei der Herstellung zwei unterschiedliche Prozesse verwendet. Kleinere Proben (bis $N = 6$) wurden mit dem kommerziellen System Photonic Professional GT (Nanoscribe GmbH) und dem Fotolack IP-S (Nanoscribe GmbH) gefertigt. Die Größe einer Einheitszelle beträgt in diesem Fall $a_{12} = 150 \mu\text{m}$. Die Herstellung von Proben mit $N = 6$ (insgesamt 648) Einheitszellen mit diesem Verfahren dauert etwa 19 Stunden [85]. Eine lineare Extrapolation ergibt damit für Proben mit $N = 20$ (insgesamt 24000) Einheitszellen eine impraktikable Prozesszeit von 30 Tagen. Um kürzere Prozesszeiten zu erreichen, wurde zur Fertigung von Proben mit $N \geq 6$ Einheitszellen das von Hahn u. a. [95] vorgestellte Multi-Focus-Verfahren mit dem Fotolack IP-Dip (Nanoscribe GmbH) benutzt. Bei diesem System wird eine Matrix aus 3×3 Laserfoci anstelle eines einzelnen Laserfokus zum 3D-Drucken der Proben verwen-

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

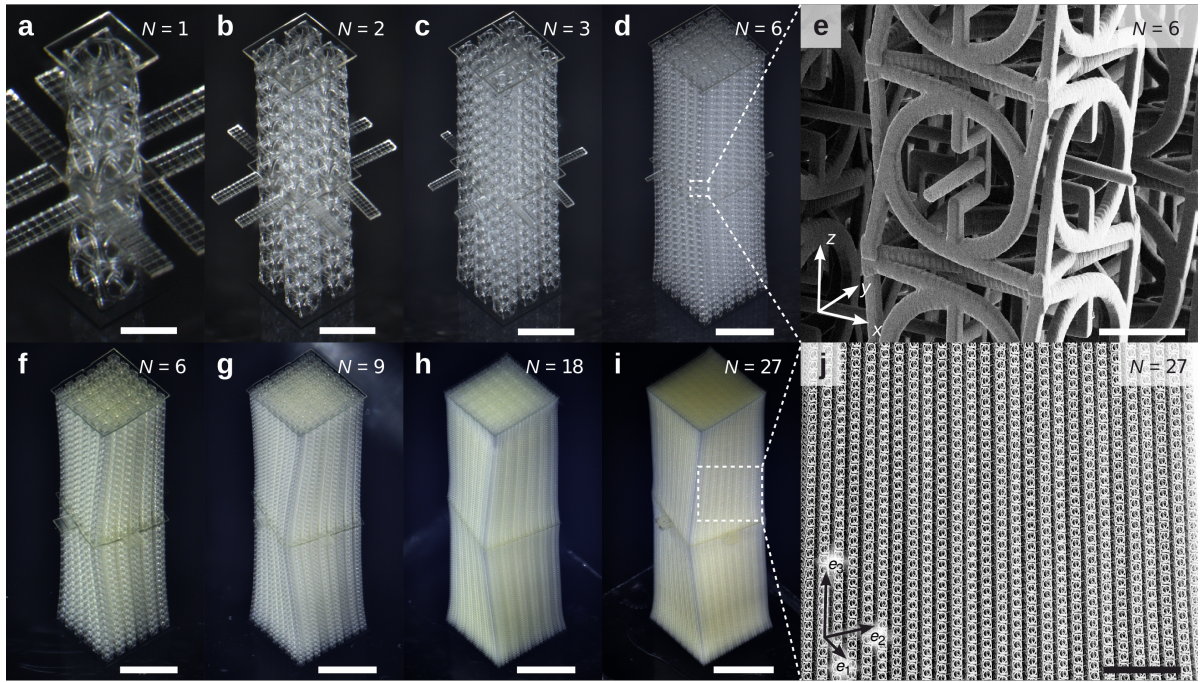


Abbildung 4.5.: Am Institut für Angewandte Physik hergestellte Proben des chiralen Metamaterials. (a),(b),(c),(d),(e) Mit kommerziellem System und IP-S gefertigte Proben mit $N = 1, 2, 3, 6, 6$ Einheitszellen. Maßstabsbalken: $100\ \mu\text{m}, 200\ \mu\text{m}, 300\ \mu\text{m}, 600\ \mu\text{m}, 40\ \mu\text{m}$. (a)-(d) Mit einem Lichtmikroskop aufgenommen. (e) Stark vergrößerte Aufnahme aus dem Rasterelektronenmikroskop der Probe aus (d). (f),(g),(h),(i),(j) Mit experimentellem Multi-Focus und IP-Dip hergestellte Proben mit $N = 6, 9, 18, 27$ Einheitszellen. Maßstabsbalken: $300\ \mu\text{m}, 450\ \mu\text{m}, 900\ \mu\text{m}, 1350\ \mu\text{m}, 300\ \mu\text{m}$. (f)-(i) Mit einem Lichtmikroskop aufgenommen. (j) Stark vergrößerte Aufnahme aus dem Rasterelektronenmikroskop der Probe aus (i). Abbildung in Anlehnung an [85].

det, was die Druckgeschwindigkeit deutlich erhöht. Die Größe einer Einheitszelle der mit diesem Verfahren hergestellten Strukturen beträgt $a_{12} = 74\ \mu\text{m}$. Abbildung 4.5 zeigt einige lichtmikroskopische und rasterelektronenmikroskopische Aufnahmen von Proben. Bei der oberen Reihe handelt es sich um die mit dem kommerziellen System hergestellten Proben. Die Aufnahmen in der unteren Reihe zeigen die mit dem Setup von Hahn u. a. [95] gefertigten Proben. Die Proben wurden mit einem flachen Metallstempel komprimiert. Um den Einfluss der Reibung zwischen Stempel und Probe zu umgehen, wurde eine linkshändige auf eine rechtshändige Struktur gedruckt. So verdreht sich die Probe in der Mitte und nicht im Kontakt zwischen Stempel und Probe. Die seitlich abstehenden Balken in der Mitte der Proben dienen der Messung der Rotation [85]. In den Finite-Elemente-Simulationen lässt sich eine Verschiebungsrandbedingung komplett reibungsfrei aufbringen, weshalb dort jeweils nur die unteren Hälften der hier zu sehenden Proben betrachtet wurden.

4.4. Diskussion

In Abbildung 4.6 sind die Ergebnisse der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Methoden zur Charakterisierung des Metamaterials gegenübergestellt. In dem Graphen ist die chirale Antwort für eine Gitterstruktur aus $N \times N \times 3N$ über N aufgetragen. Die Abbildung enthält die folgenden Daten:

- (1) **Timoshenko-Balkenmodell.** Die Ergebnisse des Timoshenko-Balkenmodells sind als schwarze Linien dargestellt. Diese entsprechen den schwarzen Linien aus Abbildung 4.3b. Auf Grund des hohen numerischen Aufwands wurden diese Simulationen nur bis $N = 20$ durchgeführt. Die Daten sind zur besseren Sichtbarkeit als Linien dargestellt, obwohl nur positive natürliche Zahlen für N in Frage kommen [85].
- (2) **Mikropolare Kontinuumsmechanik.** Die Finite-Elemente Simulationen mit einem linear-elastischen mikropolaren Kontinuumsmodell entsprechen der roten durchgezogenen Linie. Da hier ein homogener Körper betrachtet wird, entspricht die Skala der Abszisse in diesem Fall einer Längeneinheit im Kontinuumsmodell, die wiederum der Gitterkonstante $a_{12} = 150 \mu\text{m}$ entspricht. Für dieses Modell sind prinzipiell alle positiven reellen Zahlen auf der Abszisse möglich [85].
- (3) **Einfaches semi-analytisches Modell.** Das von Frenzel u. a. [85] eingeführte Modell wurde bereits in Kapitel 3 diskutiert und ist in Abbildung 4.6 durch die blauen durchgezogenen Linien gekennzeichnet. Die untere blaue Linie ergibt sich für $\varphi(1) = 2.4^\circ/\%$ und $N_c = 7$, die obere blaue Linie für $\varphi(1) = 2.4^\circ/\%$ und $N_c = 10$.
- (4) **Experimentelle Daten.** Die experimentellen Daten sind als Symbole dargestellt. Die hell- und dunkelblauen Symbole stehen für Proben, die mit dem Fotolack IP-S und einer Gitterkonstanten $a_{12} = 150 \mu\text{m}$ hergestellt wurden. Die hell- und dunkelroten Symbole stehen für mit dem Multi-Focus-Aufbau aus Referenz [95] gefertigte Proben mit einer Gitterkonstante $a_{12} = 75 \mu\text{m}$. Die unterschiedlichen Symboltypen (Dreiecke, Kreuze, Kreise, Sterne, Vierecke) stehen für unterschiedliche Dehnungen. Doppelt vorkommende Symbole (siehe zum Beispiel hellrote Dreiecke bei $N = 9$) stehen für verschiedene Messungen an der selben Probe. Gleiche Symboltypen mit gleicher Farbe, aber unterschiedlicher Helligkeit (siehe zum Beispiel hell- und dunkelrote Dreiecke bei $N = 15$) stehen für Proben gleichen Typs (gleiches N und gleiche Herstellungsmethode, aber unterschiedliche Proben).

- (5) **Referenzdaten.** Die grün gestrichelte Linie steht für die Ergebnisse aus [52]. Die blau gestrichelte Linie zeigt das einfache Modell mit den Eingangsparametern $\varphi(1) = 2^\circ/\%$ und $N_c = 1, 7$.

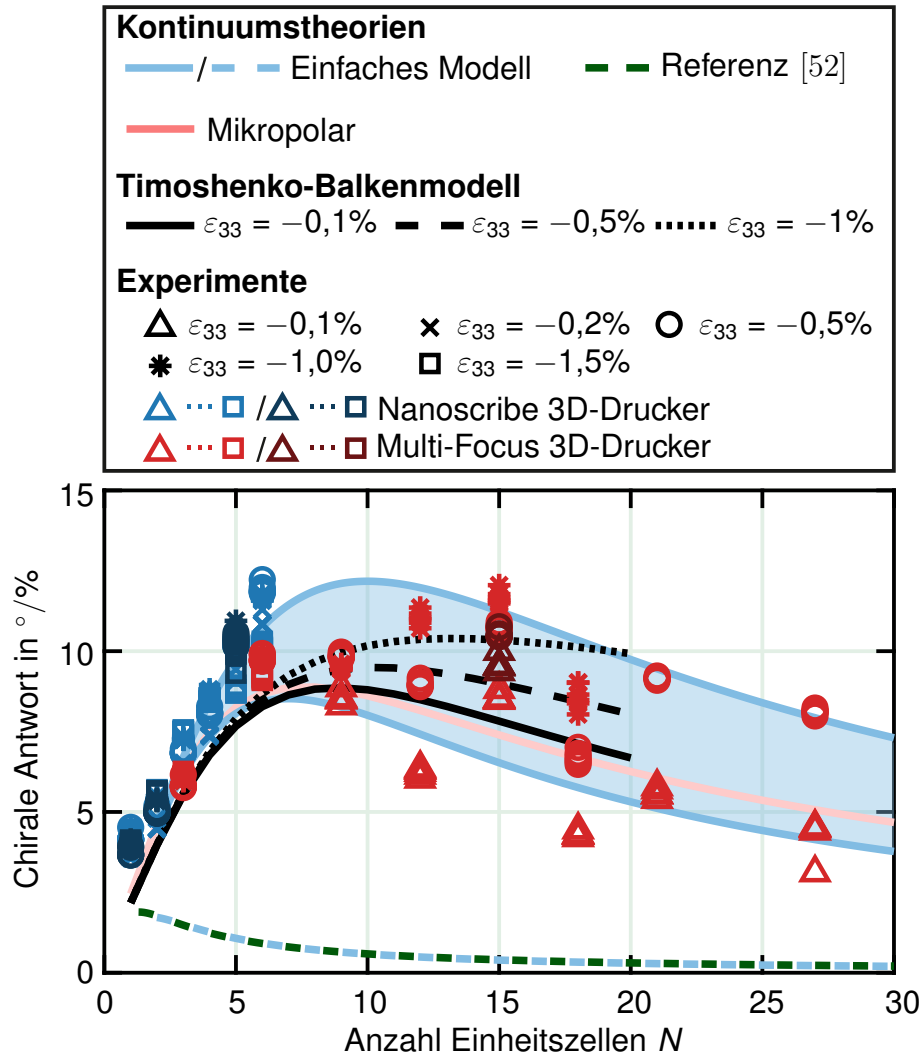


Abbildung 4.6.: Gegenüberstellung der theoretisch vorhergesagten Ergebnisse mit Experimenten. Theoretisch vorhergesagte Ergebnisse sind als Linien dargestellt, Experimente als Symbole. Unterschiedliche Symboltypen stehen für unterschiedliche Dehnungen. Gleiche Symboltypen für gleiche N repräsentieren unterschiedliche Proben. Grafik in Anlehnung an [85].

Qualitativ zeigen alle Daten (1)-(4) einen Anstieg der chiralen Antwort, ein Maximum und einen Abfall. Das in Kapitel 3 an einer idealisierten Gitterstruktur erarbeitete Konzept, die charakteristische Länge eines chiralen Metamaterials durch eine schwächere Kopplung chiraler Elemente zu erhöhen, ist somit validiert. Neben der reinen experimentellen Validierung bestätigen die hier gezeigten Daten, dass dieses Konzept auf

beliebige chirale Gitterstrukturen angewandt werden kann. Das einfache Modell (3) und das mikropolare Kontinuumsmodell (2) beschreiben linear elastische Zusammenhänge und sind somit nur bei kleinen Dehnungen (durchgezogene Linie für das Timoshenko-Balkenmodell (1) und Sterne und Dreiecke für die experimentellen Daten (4)) mit den restlichen Daten vergleichbar. Für größere Dehnungen zeigen sowohl das Timoshenko-Balkenmodell als auch die experimentellen Daten den nichtlinearen Trend, dass die chirale Antwort mit steigender Dehnung zunimmt. In den Experimenten wurde eine deutlich stärkere Nichtlinearität beobachtet, als dies von den Simulationen vorhergesagt wurde.

Bei genauer Betrachtung der Proben (Abbildung 4.5) ist zu erkennen, dass diese im unbelasteten Zustand bereits verdreht sind, was auf die anisotrope Schrumpfung nach dem 3D-Druck zurückzuführen ist [85]. Zusammen mit anderen fertigungsbedingten Imperfektionen, wie zum Beispiel Abweichungen in der Dicke der Balken, kann dies zu verstärkten geometrischen Nichtlinearitäten führen. Außerdem ist, im Gegensatz zu den Simulationen, ein physikalisch nichtlineares Verhalten des Basismaterials möglich [85].

Das einfache Modell ermöglicht eine intuitive Quantifizierung der charakteristischen Länge. Bei einem Vergleich der Referenzdaten (5) mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Metamaterial, ergibt sich mit dem einfachen Modell eine Erhöhung der charakteristischen Länge um einen Faktor von ungefähr 3 bis 5. Im Bereich des Maximums der chiralen Antwort führt dies zu einer Vergrößerung der chiralen Antwort um einen Faktor zwischen 4 und 6. Viel interessanter ist jedoch der Unterschied bei großen N . Dort liegt er bei einem Faktor von etwa 17 bis 35. Das Bemerkenswerte ist, dass es gelungen ist, eine Gitterstruktur mit nicht-klassischen mechanischen Eigenschaften auf einer Skala ($N = 27$) zu entwerfen und herzustellen, auf der einzelne Einheitszellen in einer Simulation selbst mit drastischen Vereinfachungen wie dem Timoshenko-Balkenmodell auf Grund des großen Rechenaufwands nicht mehr aufgelöst werden können. Für die Modellierung der Proben bleibt somit nur die Option, der Gitterstruktur effektive Materialeigenschaften in Form eines Konstitutivgesetzes zuzuweisen und sie somit wie ein kontinuierliches Material zu behandeln.

Aus dieser Erkenntnis ergibt sich die Frage nach einer geeigneten Kontinuumsbeschreibung. In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass sich die uniaxialen Druckversuche mit einem mikropolaren linear elastischen Modell abbilden lassen. Allerdings wurden die dafür notwendigen mikropolaren elastischen Konstanten nicht aus einer Homogeni-

4. Realisierbare Strukturen und Validierung

sierung, sondern lediglich aus einer systematischen Parametervariation ermittelt. Eine Homogenisierung eines dreidimensionalen chiralen Metamaterials gelang bisher in nur einem Fall. Der von Duan u.a. [68] entwickelte Ansatz nutzt das Konzept der asymptotischen Homogenisierung [99]. Die Anwendung dieser Methode erfordert, dass ein repräsentatives Volumenelement existiert, von dem die effektiven Materialeigenschaften abgeleitet werden können. Ein repräsentatives Volumenelement ist ein Ausschnitt aus einem heterogenen Material, der [100]

- (a) alle relevanten Strukturinformationen über das Material enthält und
- (b) an dessen Oberfläche die Verschiebungs- und Spannungsfelder um einen Mittelwert fluktuieren, wobei die Wellenlänge der Fluktuation viel kleiner als die Abmessung des Ausschnitts ist.

Bei einem periodisch aufgebauten Material mit klassischen Eigenschaften sind diese Bedingungen für gewöhnlich durch die Einheitszelle erfüllt. Bedingung (b) wird auch als Skalenseparation bezeichnet und kann nur erfüllt sein, wenn der betrachtete Ausschnitt so groß gewählt ist, dass eine weitere Vergrößerung keine Änderung in den effektiven Eigenschaften hervorruft. In anderen Worten verlangt die Skalenseparation, dass die charakteristische Länge der Mikrostruktur viel kleiner ist als das repräsentative Volumenelement [99]. Das von Duan u.a. [68] betrachtete Material hat in diesem Fall den Vorteil, dass die charakteristische Länge deutlich kleiner als die Einheitszelle ist. Dies ist daran zu erkennen, dass die chirale Antwort bereits bei kleinen N einen sehr kleinen Wert annimmt und der effektive Elastizitätsmodul sehr schnell gegen einen konstanten Wert konvergiert. Somit war dort die Betrachtung einer einzelnen Einheitszelle als repräsentatives Volumenelement ausreichend, um die mikropolaren Konstanten durch das Aufbringen verschiedener Dehnungs- und Krümmungszustände mit Hilfe von periodischen Randbedingungen direkt zu bestimmen. Bei dem in diesem Kapitel betrachteten Metamaterial sind die Größeneffekte über mehr als eine Größenordnung hinweg ausgeprägt, was auf eine charakteristische Länge schließen lässt, die deutlich größer ist als die Einheitszelle. Die große charakteristische Länge führt dazu, dass mit dem von Duan u. a. [68] adaptierten Verfahren (für eine genaue Beschreibung siehe Anhang B) kein repräsentatives Volumenelement gefunden werden konnte, weil die Materialantwort trotz periodischer Randbedingungen stark von der Anzahl an Einheitszellen in den betrachteten Ausschnitten des Materials abhing. Es ist auf Basis der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen nicht auszuschließen, dass ein repräsentatives Volumenelement gefunden werden kann. Es müsste dann aber, um die Bedingung der Skalenseparation zu

erfüllen, vermutlich so viele Einheitszellen beinhalten, dass eine numerische Untersuchung mittels Finite-Elemente-Methode auf Grund des Speicherbedarfs unrealistisch erscheint. Abschließend sind die in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse zur mikropolaren Kontinuumsmechanik so zu beurteilen, dass diese als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen dienen können. Mögliche Methoden, die bereits bei achiralen Metamaterialien mit einem nicht-linearen größenabhängigen Materialverhalten angewandt wurden, sind zum Beispiel FE^2 oder Quasi-Kontinuumsansätze [101, 102].

5. Nicht-periodische Strukturen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden ausschließlich periodisch aufgebaute chirale Metamaterialien betrachtet. Diese haben den Nachteil, dass die chirale Antwort für sehr große Strukturen verschwindet. Es konnte zwar gezeigt werden, dass sehr große charakteristische Längen möglich sind, so dass sich der Abfall der chiralen Antwort hin zu Gitterstrukturen aus vielen Einheitszellen verschieben lässt, er kann jedoch nicht gänzlich vermieden werden. Außerdem skaliert das Blockiermoment ab der ersten Einheitszelle invers proportional zur Kantelänge einer Probe, was im potentiellen Anwendungsfall als Aktuator ungünstig ist. Als Lösungsvorschlag zur Umgehung dieser Probleme wird in Abschnitt 5.1 eine nicht-periodische ringförmige Struktur diskutiert. In Abschnitt 5.2 werden helixförmige Schalen vorgestellt, die sich besonders gut als Aktuator eignen, da sich wichtige Größen wie die chirale Antwort und das Blockiermoment unabhängig voneinander über einfache geometrische Parameter einstellen lassen.

5.1. Ringförmige Strukturen

Eine Möglichkeit, nicht-periodische chirale Metamaterialien zu konstruieren, besteht darin, eine zweidimensionale chirale Struktur zu einem Zylindermantel zu rollen [43, 103, 104]. Im Folgenden wird ein vollständig dreidimensionaler, nicht-periodischer Aufbau ähnlich zu der von Jenett u.a. [105] vorgeschlagenen Architektur beschrieben. Als Grundlage des Aufbaus dient der bereits in Kapitel 3 eingeführte graue achirale Würfel (siehe Abbildung 3.1a). Der achirale Würfel wird um einen diagonalen Balken in einer der Seitenflächen ergänzt, woraus sich der in Abbildung 5.1a gezeigte einseitig verspannte chirale Würfel ergibt. Dieser ist ähnlich zu dem chiralen Würfel aus Abbildung 3.1b, besitzt jedoch keine Rotationssymmetrie. Achirale (graue) und chirale (blaue) Würfel mit einseitigem Balken werden wie in Abbildung 5.1b in der Ebene angeordnet und entlang der e_3 -Achse gestapelt. Die chiralen Würfel (blau) werden in Ringen um den geometrischen Schwerpunkt der Struktur platziert und immer so gedreht, dass die Seitenflächen, in denen sich der diagonale Balken befindet, nach außen zeigt, was durch die schwarzen

5. Nicht-periodische Strukturen

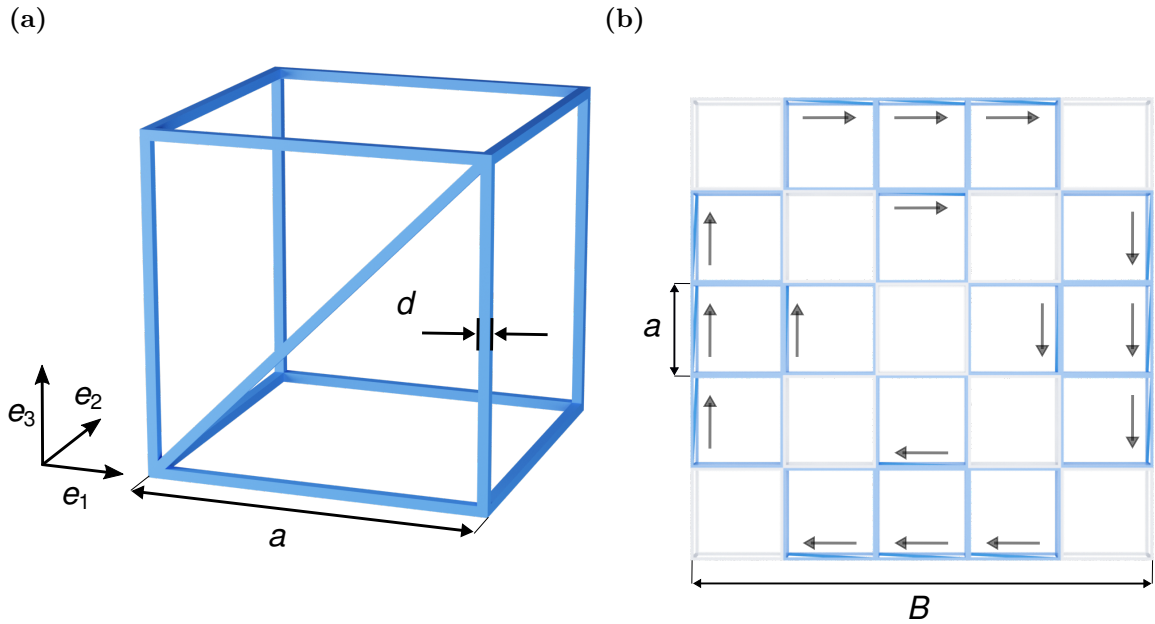


Abbildung 5.1.: Aufbau einer nicht-periodischen chiralen Gitterstruktur. (a) Einseitig verspannter chiraler Würfel. (b) Kombination aus einseitig verspannten chiralen Würfeln (blau) und achiralen Würfeln (grau). Die schwarzen Pfeile geben die Seite und die Orientierung des diagonalen Balkens im chiralen Würfel an.

Pfeile illustriert wird. Auf den Diagonalen der gesamten Struktur befinden sich achirale (graue) Würfel. Ähnlich wie Quasikristalle [106] hat diese Struktur eine Ordnung die jedoch nicht strikt periodisch ist.

Nach diesem Konzept aufgebaute Proben wurden mit den gleichen numerischen Methoden untersucht wie die Strukturen aus Kapitel 3. Einige größere Simulationen wurden mit einer neueren Version der Finite-Elemente-Software (ABAQUS 3DEXPERIENCE 2022x) durchgeführt. Der Grund hierfür besteht lediglich in der Verfügbarkeit der Software auf den Hochleistungsrechnern, auf denen die großen Simulationen durchgeführt wurden. Vergleiche anhand kleinerer Beispielrechnungen ergaben keine Unterschiede in den hier betrachteten Größen zwischen der neueren und der älteren Software. Der einzige inhaltliche Unterschied zu der Methodik aus Abschnitt 3.2 besteht in der Messung der Makrorotation φ_3 . Diese wurde in der Mitte der Proben mit dem arithmetischen Mittel

$$\varphi_3 = \frac{1}{N_K} \sum_K \theta_3^K, \quad (5.1)$$

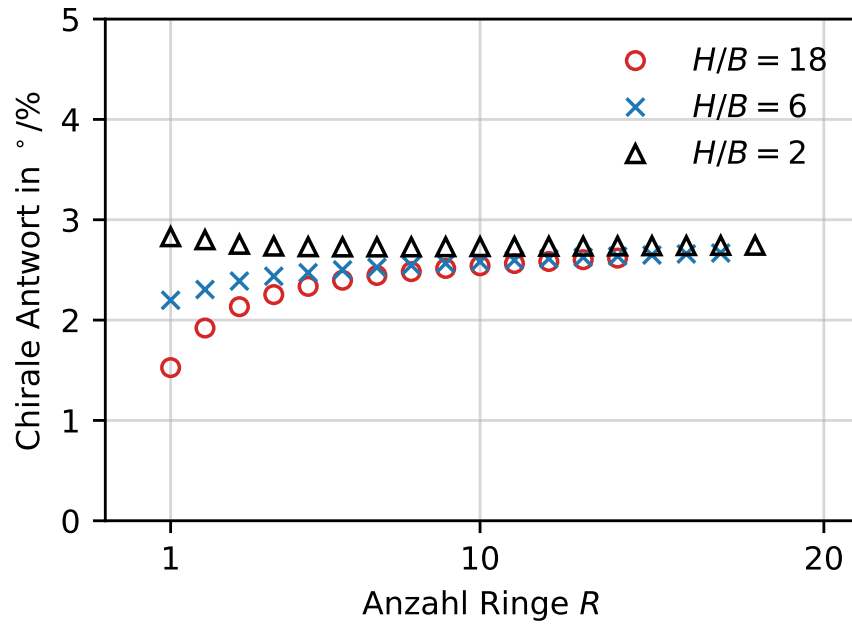
über die Rotationen θ_3^K aller N_K Knoten K um die e_3 -Achse bestimmt. Diese Definition einer Makrorotation ist nur möglich, weil die einzelnen Knotenrotationen in einer Ebene nur geringfügig von diesem Mittelwert abweichen. Als Skalierungsfaktor dient die Anzahl an Ringen R , die durch die Anordnung der chiralen Würfel um den geometrischen Schwerpunkt entstehen. Nach dieser Zählweise gilt für die Struktur in Abbildung 5.1 $B = (2R + 1)a$. Die Wirkmechanismen der einzelnen Bausteine dieser Struktur sind ähnlich wie die der periodischen Struktur in Kapitel 3. Allerdings werden die Kompensationseffekte im Volumen durch die ringförmige Anordnung vollständig umgangen anstatt dass sie nur abgeschwächt werden.

In Abbildung 5.2a ist die chirale Antwort als Funktion der Anzahl an Ringen aufgetragen. In den Simulationen wurden Proben mit den Aspektverhältnissen $H/B = 2$ (schwarze Dreiecke), $H/B = 6$ (blaue Kreuze) und $H/B = 18$ (rote Kreise) betrachtet. Für ein Aspektverhältnis von $H/B = 2$ beträgt die chirale Antwort für alle R ungefähr $3^\circ/\%$. Bei einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ fällt die chirale Antwort für kleine R geringer aus und nähert sich für größere R ebenfalls einem konstanten Regime mit ungefähr $3^\circ/\%$ an. Die Ergebnisse der Proben mit $H/B = 6$ liegen dazwischen.

Abbildung 5.2b zeigt das Blockiermoment in Abhängigkeit von R . Um verschiedene Aspektverhältnisse vergleichen zu können, wurde in dieser Darstellung, im Gegensatz zu Abbildung 3.9, auf eine Normierung auf das Probenvolumen verzichtet. Zur Beurteilung des Verhaltens bezüglich dem Probenvolumen wurden graue Linien mit der Steigung R^3 eingezeichnet. Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 2$ (schwarz) folgen dem Trend $\propto R^3$, was ein konstantes Blockiermoment pro Probenvolumen zur Folge hat. Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ (rot) unterscheiden sich deutlich von diesem Verhalten. Zunächst beginnen diese bei $R = 1$ bei einem um eine Größenordnung kleineren Moment, steigen dann aber deutlich schneller als R^3 an. Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 6$ (blau) beginnen ebenfalls bei einem kleineren Drehmoment und steigen zunächst schneller als R^3 an. Allerdings scheint sich der Anstieg in diesem Fall bei größeren R dem Verhalten $\propto R^3$ anzunähern. Ob sich Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ bei größeren R ebenfalls dem Anstieg $\propto R^3$ annähern, konnte nicht ermittelt werden, da die dafür notwendigen Simulationen die verfügbare Rechenkapazität übersteigen. Insgesamt ergibt sich, dass das Blockiermoment bezogen auf das Probenvolumen konstant bleibt oder sogar ansteigt, was in starkem Kontrast zu dem bei periodischen Strukturen beobachteten Skalierungsverhalten steht.

5. Nicht-periodische Strukturen

(a)



(b)

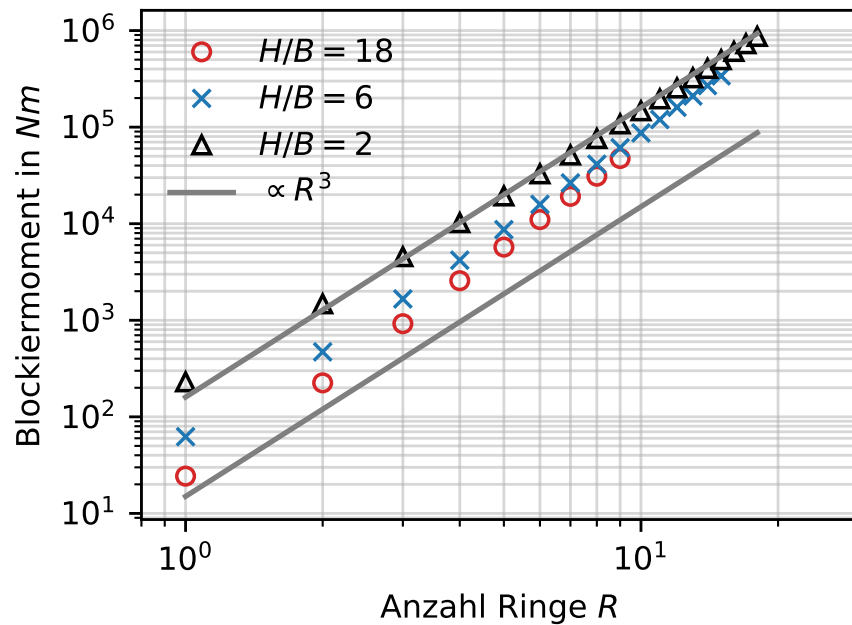


Abbildung 5.2.: Skalierungsverhalten der ringförmigen nicht-periodischen Struktur für verschiedene Aspektverhältnisse. (a) Chirale Antwort. (b) Blockiermoment. Ermittelt bei einer axialen Dehnung von 10^{-4} .

5.2. Helixförmige Schalenstrukturen

Die in den vorangegangenen Kapiteln betrachteten Metamaterialien sind aus Balken aufgebaut. Alternativ besteht die Möglichkeit, ein chirale Struktur aus Schalen aufzubauen. Abbildung 5.3a zeigt eine Schale, die in sich verdreht ist und somit die Form einer Helix annimmt. Die Struktur ist definiert durch die Wandstärke w , die Breite B , die Höhe H und die Ganghöhe S . Eine Kurve entlang der Kante der Struktur (blaue Linie in Abbildung 5.3a) ist mit diesen Angaben parametrisiert durch die Gleichung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{B}{2} \cos(2\pi t) \\ \frac{B}{2} \sin(2\pi t) \\ St \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

wobei der t die Anzahl der Umläufe beschreibt. Der Gangwinkel ist gegeben durch

$$\alpha = \arctan\left(\frac{S}{B\pi}\right). \quad (5.3)$$

Das Verhältnis aus Höhe und Breite wurde für alle folgenden Betrachtungen auf $H/B = 2$ festgelegt. Bei allen in Abbildung 5.3 dargestellten Strukturen ist die maximale Anzahl an Umläufen $t_{\max} = \frac{H}{S} = \frac{1}{6}$, was einer normierten Ganghöhe von $S/H = 6$, beziehungsweise einem Gangwinkel von $\alpha \approx 75^\circ$ entspricht. Abbildung 5.3b zeigt eine Struktur, die aus zwei senkrecht zueinander angeordneten Schalen besteht. In Abbildung 5.3c ist eine Struktur aus drei Schalen dargestellt. Der Winkel zwischen den drei Schalen beträgt immer 60° . Mit der Fortsetzung dieses Schemas lassen sich Strukturen aus P Schalen erstellen, wobei der Winkel zwischen den Schalen durch $180^\circ/P$ gegeben ist. Nach diesem Schema erstellte Strukturen wurden mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen mit der Software ABAQUS 3DEXPERIENCE 2020x unter einachsiger Zugbelastung charakterisiert. Für die Diskretisierung wurden quaderförmige Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen (ABAQUS C3D20) verwendet. Die Elementgröße wurde auf die Hälfte der Wandstärke w festgelegt. In allen Simulationen wurde ein geometrisch nichtlineares Dehnungsmaß verwendet. Das Materialverhalten wurde als linear elastisch mit einem Elastizitätsmodul von $E = 2,6 \text{ GPa}$ und einer Querkontraktionszahl von 0,4 angenommen. Am unteren Ende wurden die Strukturen fest eingespannt, am oberen Ende wurden alle Knoten an einen Referenzpunkt gekoppelt, auf den eine Verschiebung \bar{u}_3 in vertikaler (\mathbf{e}_3 -) Richtung aufgebracht wurde. Wie in Kapitel 3 wurden freie und eingeschränkte Zugversuche simuliert, um die chirale Antwort und das Blockiermoment zu ermitteln.

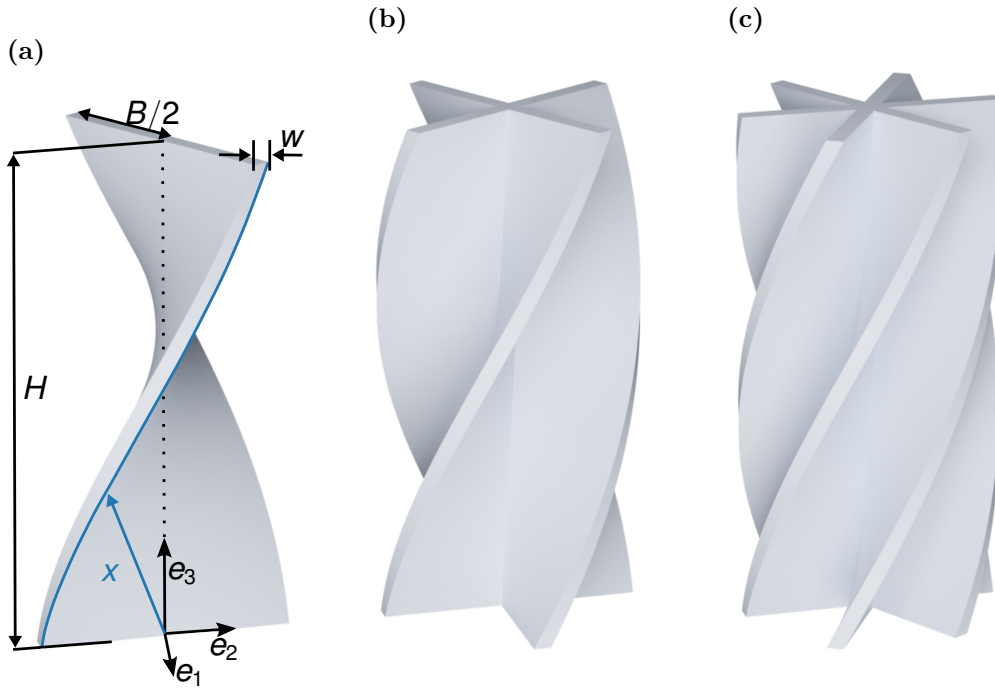
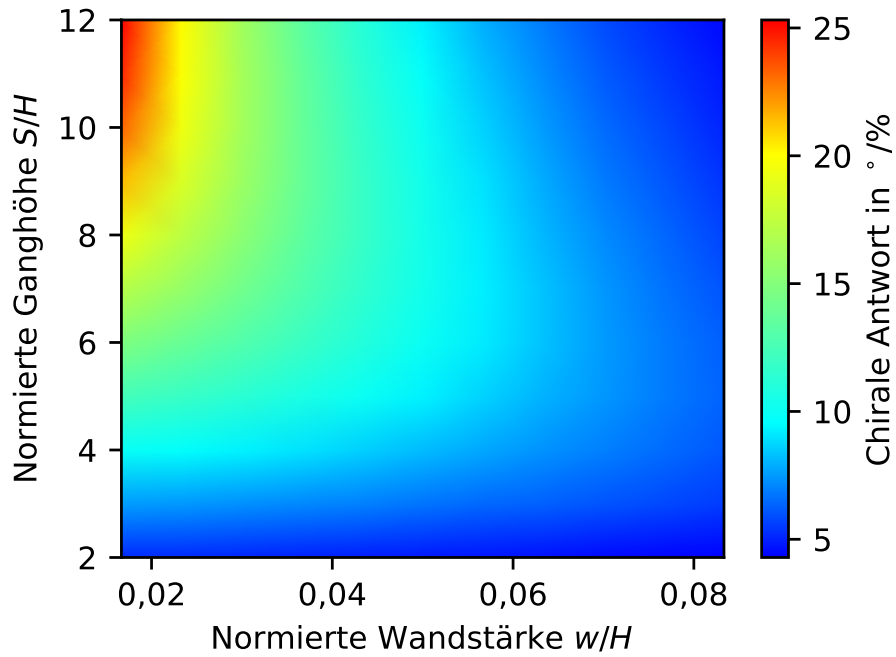


Abbildung 5.3.: Elastische, helixförmige Schalenstrukturen. Für alle Strukturen gilt $S/H = 6$, was $t_{\max} = \frac{1}{6}$, beziehungsweise $\alpha \approx 75^\circ$ entspricht. (a) $P = 1$. (b) $P = 2$. (c) $P = 3$.

Es sei angemerkt, dass die Wahl der Einheiten der Abmessungen der Strukturen für die im Folgenden gezeigten Zusammenhänge keine besondere Bedeutung hat. Für die chirale Antwort sind lediglich die Aspektverhältnisse relevant. Da ein physikalisch lineares Materialmodell verwendet wurde, lässt sich das Blockiermoment beliebig skalieren.

Abbildung 5.4 zeigt eine Variation der Wandstärke w und der Ganghöhe S bei konstanter Höhe H für eine einzelne Schale ($P = 1$). Für die Erstellung der Grafiken wurde jeweils eine diskrete Menge von 11×11 Simulationen ausgewertet. Zur Erstellung der kontinuierlichen Farbskala wurden die Werte zwischen zwei Punkten interpoliert. Abbildung 5.4a zeigt die chirale Antwort, Abbildung 5.4b das auf das Volumen eines Zylinders und den Elastizitätsmodul E normierte Blockiermoment $\hat{M}_S = \frac{4M_S}{\pi E B^2 H}$. Die dargestellten Werte für die chirale Antwort und das Blockiermoment wurden bei einer axialen Dehnung von $\bar{u}_3/H = 0,5\%$ ermittelt. In diesem Bereich besteht für beide Größen ein näherungsweise linearer Zusammenhang mit der Dehnung. Die chirale Antwort wird größer, wenn die Ganghöhe (bzw. der Gangwinkel) größer wird oder wenn die Wandstärke kleiner wird. Im Extremfall von $w/H = \frac{1}{60}$ und $S/H = 12$ ($\hat{=} \alpha \approx 83^\circ \hat{=} t_{\max} = \frac{1}{12}$) ergibt sich eine chirale Antwort von rund 25% . Trotz dieser großen globalen Verdrehung treten nur kleine lokale Dehnungen in der Struktur auf (siehe Anhang C).

(a)



(b)

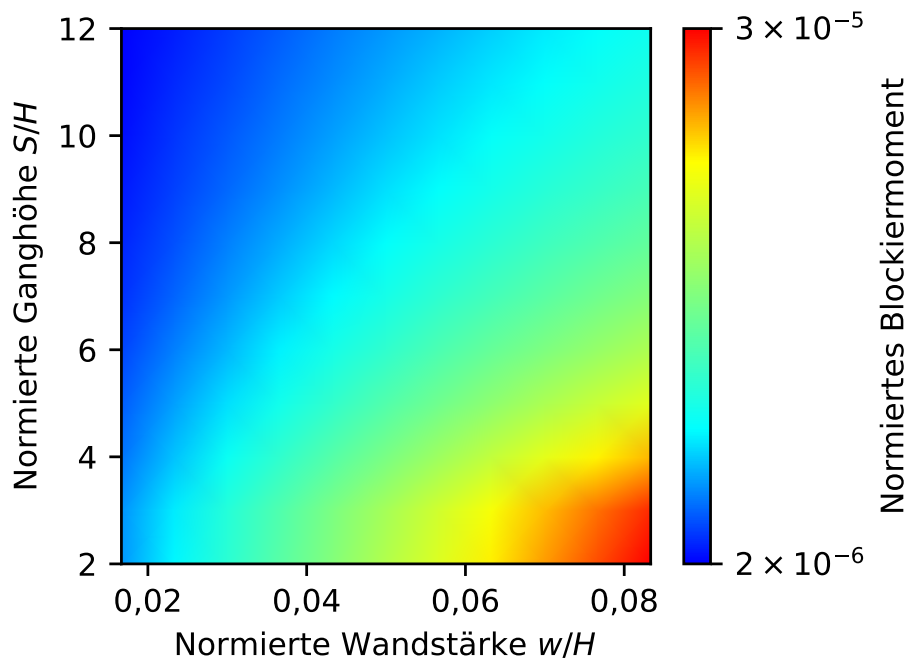
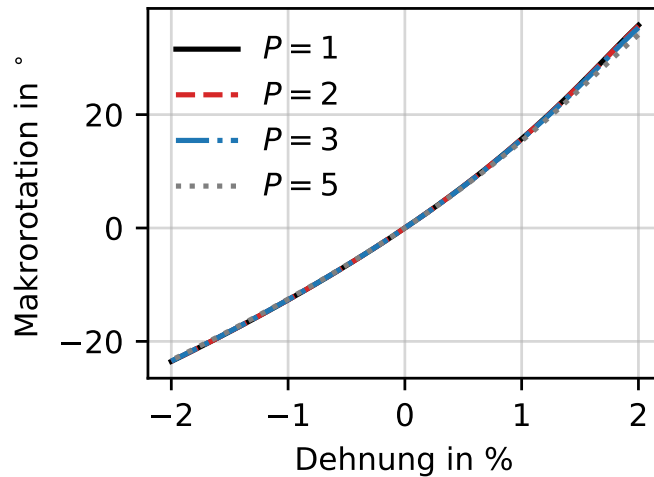


Abbildung 5.4.: Mechanische Eigenschaften der Schalenstrukturen unter Zug. $P = 1$. (a) Chirale Antwort. (b) Normiertes Blockiermoment \bar{M}_S . Ermittelt bei einer axialen Dehnung von 0,5%.

5. Nicht-periodische Strukturen

Beim Blockiermoment ist die Abhängigkeit von w und S genau umgekehrt, das heißt größere Wandstärken und kleinere Ganghöhen (kleinere Gangwinkel) führen zu einem größeren Moment. Daraus entsteht ein Zielkonflikt, da sich die Struktur über die Wandstärke und die Ganghöhe entweder für einen möglichst großen Bewegungsspielraum oder auf die Ausübung eines möglichst großen Drehmoments optimieren lässt.

(a)



(b)

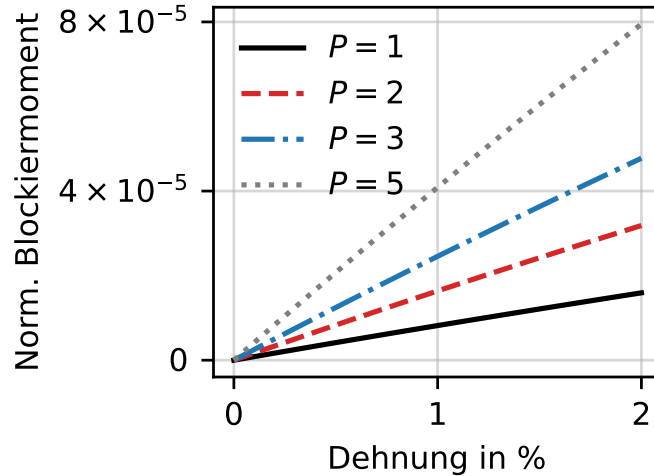


Abbildung 5.5.: Zug-/Druckverhalten der Schalenstrukturen für $P = 1, 2, 3, 5$, $w/H = \frac{1}{60}$ und $S/H = 6$ ($\hat{=} t_{\max} = \frac{1}{6} \hat{=} \alpha \approx 75^\circ$). (a) Chirale Antwort. (b) Normiertes Blockiermoment \hat{M}_S .

Um diesen Zielkonflikt zu umgehen, können Strukturen mit mehreren Schalen verwendet werden. Abbildung 5.5a zeigt die Makrorotation als Funktion der Dehnung für Strukturen mit unterschiedlich vielen Schalen ($P = 1, 2, 3, 5$; schwarz, rot, blau, grau), mit konstanter Wandstärke $w/H = \frac{1}{60}$ und mit konstanter Ganghöhe $S/H = 6$ ($\hat{=} \alpha \approx 75^\circ \hat{=} t_{\max} = \frac{1}{6}$). Unter Zugbelastung wächst die Makrorotation schneller als linear an, unter Druck wächst sie langsamer. Die Spiralstrukturen weisen bezüglich der Beziehung zwischen Makrorotation und Dehnung somit ein zu den zuvor betrachteten periodischen Strukturen spiegelbildliches Verhalten auf. Die entscheidende Beobachtung in Abbildung 5.5a ist, dass der Verlauf der Makrorotation für alle P nahezu identisch ist. Abbildung 5.5b zeigt das Blockiermoment für die selben Strukturen wie in Abbildung 5.5a für Zugdehnungen im Bereich von null bis zwei Prozent. Der Zusammenhang zwischen dem Blockiermoment und der Dehnung ist für alle P linear. Außerdem nimmt das Blockiermoment direkt proportional zu P zu. Es lässt sich somit durch das Hinzufügen von Schalen zu der Struktur der gleiche Stellwinkel bei einem gleichzeitig höheren Drehmoment erreichen. Für einen Nachweis, dass dies für alle betrachteten w und S gilt, sei auf Anhang C verwiesen.

5.3. Diskussion

Durch den Wechsel von einem periodischen auf einen nicht-periodischen Aufbau konnte in Abschnitt 5.1 eine Struktur entworfen werden, bei der sich die chirale Antwort für $R \rightarrow \infty$ einem konstanten Regime > 0 annähert. Der grundlegende Gedanke, der zu dem in Abbildung 5.1 gezeigten Konzept führt, beruht auf dem in Kapitel 3 erörterten Zusammenhang, dass der charakteristische Abfall der chiralen Antwort durch Kompensationseffekte im Inneren der Struktur verursacht wird. Bei Strukturen mit periodischem Aufbau konnten die Kompensationseffekte lediglich durch eine schwächere Kopplung zwischen den chiralen Elementen einer Gitterstruktur abgeschwächt werden. Dies führt zu endlich großen charakteristischen Längen und somit zu einem Verschwinden der chiralen Antwort in unendlich großen Gitterstrukturen [69, 84, 85, 86]. Durch den Verzicht auf die Periodizität ist es möglich, die Kompensationseffekte vollständig zu vermeiden und so eine konstante chirale Antwort bei großen R zu erreichen. Ob sich dieses Verhalten auf eine kontinuumsmechanische Beschreibung abbilden lässt, ist fraglich. Die erweiterten Theorien nach Eringen [67] sind dafür nicht geeignet, da diese kein konstantes Skalierungsverhalten der chiralen Antwort vorhersagen. Strengere Definitionen würden die ringförmige Struktur daher eher als Mechanismus und nicht als (Meta-)Material bezeich-

5. Nicht-periodische Strukturen

nen [5], es finden sich in der Literatur jedoch auch mit der hier betrachteten Struktur vergleichbare Beispiele, die als Metamaterial bezeichnet wurden [43, 105]. Die eher philosophisch anmutende Frage, was im Allgemeinen als Material und was als Struktur oder Mechanismus zu bezeichnen ist, geht über den Horizont dieser Arbeit hinaus. Für die ringförmige Struktur aus Abbildung 5.1 ist vielleicht die Interpretation von Corentin Coulais [6] am zutreffendsten. Diese platziert Metamaterialien als fließenden Übergang zwischen den klassischen Materialien und Maschinen.

Die chirale Antwort und deren Skalierungsverhalten erhielten seit den ersten Experimenten von Frenzel u. a. [52] viel Aufmerksamkeit [69, 84, 85, 86, 105, 103, 104, 107, 108], das Blockiermoment findet jedoch nur in wenigen Publikationen Beachtung (siehe z. B. [88]). Das Blockiermoment ist eine wichtige Kenngröße für Aktuatoren, da es in der Praxis nicht nur wichtig ist, wie groß der maximale Stellwinkel ist, sondern auch, welche Lasten bewegt werden können. Bei periodischen Strukturen skaliert das auf das Volumen bezogene Blockiermoment ab einer Einheitszelle $\propto 1/N$ (siehe Diskussion in Abschnitt 3.4). Bei der ringförmigen Struktur steigt das Blockiermoment bei Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 2$ (schwarze Dreiecke) proportional zu R^3 , bei einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ steigt es schneller als R^3 . Bezogen auf das Probenvolumen bedeutet dies einen konstanten oder steigenden Verlauf, was einen Vorteil gegenüber periodischen Strukturen darstellt. Die Unterschiede zwischen den Aspektverhältnissen sind vermutlich auf Randbedingungen zurückzuführen. Ohne den Einfluss der Randbedingungen sollte das Blockiermoment bei allen Aspektverhältnissen identisch sein.

Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 6$ weisen für kleine R ebenfalls einen Anstieg des Blockiermoments schneller als R^3 auf. Der Anstieg scheint sich bei größeren R aber R^3 anzunähern. Ob dies auch bei Proben mit einem Aspektverhältnis $H/B = 18$ passiert, ist abschließend nur durch größere Simulationen zu klären. Für die Hypothese, dass das Blockiermoment bei der ringförmigen Struktur für alle Aspektverhältnisse bei großen R proportional zu R^3 zunehmen muss, spricht die folgende kontinuumsmechanisch motivierte Überlegung. Gleichsetzen der elastische Energie aus Gleichung 2.17 mit der Arbeit des Torsionsmoments $\int M_T d\varphi$ ergibt für einen Stab mit der Länge L unter Torsionsbelastung die Makrorotation

$$\varphi = \frac{M_T L}{GJ}. \quad (5.4)$$

Übertragen auf die Geometrie der in Abschnitt 5.1 betrachteten Proben gilt $L = H \propto R$ und $J \propto B^4 \propto R^4$. Somit ergibt sich für $M_T = R^3$ unter der Annahme eines konstanten klassischen Schubmoduls G eine von R unabhängige Makrorotation, was dem in Abbildung 5.2a gezeigten Verhalten der chiralen Antwort für große R entspricht. Da in den freien Zugversuchen kein äußeres Drehmoment aufgebracht wird, muss M_T vollständig von der chiralen Struktur verursacht werden und ist somit identisch zu dem im eingeschränkten Zugversuch gemessenen Blockiermoment M_S . Ein weiteres Argument für die Hypothese $M_S \propto R^3$ für $R \gg 1$ liefert ein Blick auf die diskrete Ebene der Struktur. In einer Struktur bestehend aus R Ringen befinden sich im r -ten Ring

$$N_r = 4(2r - 1) \quad (5.5)$$

einseitig verspannte chirale Würfel (blau in Abbildung 5.1). Auf der Seite, auf der sich der Diagonalbalken befindet, verursacht eine axiale Dehnung ε_{33} eine orthogonal zur Dehnung gerichtete Kraft F_D (siehe schwarze Pfeile in Abbildung 5.1b). Bezüglich dem geometrischen Schwerpunkt der Probe übt somit jeder Würfel ein Drehmoment $(r + \frac{1}{2})aF_D$ aus. Für das globale Blockiermoment ergibt sich somit

$$M_S = \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^{N_r} (r + \frac{1}{2})aF_D. \quad (5.6)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 5.5 in Gleichung 5.6 folgt

$$M_S = \sum_{r=1}^R 4(2r - 1)(r + \frac{1}{2})aF_D \in \mathcal{O}(R^3). \quad (5.7)$$

Diese Betrachtung vernachlässigt den Einfluss der achiralen (grauen) Würfel auf den Diagonalen der Probenquerschnitte. Deshalb ist Gleichung 5.7 nur für $R \gg 1$ sinnvoll, da der Anteil an achiralen Würfeln in der Struktur dann vernachlässigbar klein wird.

Bei kleinen R verändert sich das Verhältnis von einseitig verspannten chiralen zu achiralen Würfeln mit dem Hinzufügen eines weiteren Ringes deutlich hin zu einem höheren chiralen Anteil, was bei kleinen R vermutlich zu einem schnelleren Anstieg als R^3 führt. Dass dieser Effekt bei $H/B = 2$ nicht und bei $H/B = 6$ nur in abgeschwächter Form zu beobachten ist, könnte mit dem Einfluss der Verschiebungsrandbedingungen am Ende der Proben zusammenhängen. Diese Interpretation passt auch zu der Beobachtung, dass sich die chirale Antwort bei Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 18$ und

5. Nicht-periodische Strukturen

$H/B = 6$ erst mit größeren R einem konstanten Regime annähert, während Proben mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 2$ bereits ab $R = 1$ eine konstante chirale Antwort aufweisen.

Ungeachtet dessen, ob das Blockiermoment $\propto R^3$ oder schneller steigt und somit bezogen auf das Volumen konstant bleibt oder ansteigt, bietet die ringförmige Struktur hier einen klaren Vorteil gegenüber periodischen Strukturen. Dieser Vorteil geht jedoch zulasten der chiralen Antwort, da bei der periodischen Struktur aus Kapitel 3 beim Maximum der chiralen Antwort bis zu $30^\circ/\%$ erreicht wurden, was dem zehnfachen der bei der ringförmigen Struktur beobachteten $3^\circ/\%$ entspricht.

Die in Abschnitt 5.2 vorgestellten helixförmigen Schalenstrukturen bieten die Möglichkeit, das Blockiermoment unabhängig von der chiralen Antwort einzustellen, indem mehrere identische Schalen kombiniert werden (siehe Abbildung 5.3). Aus diesen Strukturen ließen sich somit chirale Aktuatoren mit einem großen Stellwinkel und großem Blockiermoment konstruieren. Eine weitere vorteilhafte Eigenschaft dieser Schalenstrukturen ist, dass die lokalen Dehnungen selbst bei großen Makrorotationen klein sind ($1,2\%$ bei rund $12,6^\circ$ Verdrehung, siehe Anhang C). Diese Eigenschaft ist aus zwei Gründen von Vorteil. Zum einen besteht durch kleinere Dehnungen ein geringeres Risiko für das Eintreten einer Schädigung des Materials, zum anderen neigen Polymere bei großen Dehnungen zu einem viskoplastischen Verhalten, was immer mit der Dissipation von Energie und dauerhafter plastischer Verformung einhergeht [109].

6. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden chirale Metamaterialien unter uniaxialer Zug- und Druckbelastung untersucht. Bei Strukturen mit periodischem Aufbau wurde festgestellt, dass sich deren charakteristische Länge vergrößert, wenn chirale Einheitszellen über nachgiebige achirale Kopplungselemente verbunden werden. Dieser Zusammenhang wurde durch den Vergleich von Finite-Elemente-Simulationen mit Experimenten validiert. Im Vergleich zu der ersten experimentellen Arbeit zu chiralen Metamaterialien konnten durch die Vergrößerung der charakteristische Länge Verbesserungen in zwei Aspekten erreicht werden: Zum einen wurde eine bis zu sechsfach größere maximale chirale Antwort erzielt, zum anderen konnte sowohl numerisch als auch experimentell gezeigt werden, dass Gitterstrukturen aus mehr als einhunderttausend Einheitszellen eine messbare chirale Antwort aufweisen können. Letzteres ist eine Beobachtung von grundlegender Bedeutung, da sie beweist, dass die durch die Chiralität verursachten nicht-klassischen Eigenschaften auf einer Größenskala möglich sind, die um ein Vielfaches größer ist als die Dimension einer Einheitszelle. Diese Skala ist durch Simulationen auf diskreter Ebene nicht mehr zugänglich. Zur Modellierung bleibt somit nur eine kontinuumsmechanische Beschreibung, bei der den Gitterstrukturen effektive Materialeigenschaften zugeordnet werden.

Da eine chirale Antwort in der klassischen Kontinuumsmechanik verboten ist, müssen erweiterte Modelle angewandt werden. In dieser Arbeit wurde die mikropolare Elastizität als Option diskutiert. Ein Problem bei der Anwendung dieses Modells stellt die Identifizierung der vielen unabhängigen mikropolaren elastischen Konstanten dar. Es konnte eine stabile Kombination von Konstanten bestimmt werden, mit der sich das bei den Struktursimulationen und den Experimenten beobachtete Skalierungsverhalten der chiralen Antwort reproduzieren ließ. Die Konstanten konnten jedoch nicht eindeutig durch eine Homogenisierung sondern nur durch eine systematische Variation hergeleitet werden. An dieser Stelle besteht Bedarf an weiteren Forschungsarbeiten, um zu klären, welche Kontinuumsmodelle sich für die Beschreibung chiraler Gitterstrukturen eignen und wie die dafür benötigten effektiven Materialeigenschaften eindeutig bestimmt wer-

6. Zusammenfassung und Ausblick

den können. Dabei sollten in Zukunft nicht nur die linear elastischen Eigenschaften betrachtet werden, sondern auch die stark ausgeprägten Nichtlinearitäten und die hohe Sensitivität gegenüber unterschiedlichen Randbedingungen.

Neben den periodischen chiralen Strukturen wurden auch nicht-periodische Strukturen untersucht. Es konnte am Beispiel einer ringförmigen chiralen Struktur gezeigt werden, dass es möglich ist, Strukturen zu entwerfen, bei denen die chirale Antwort keinen charakteristischen Abfall aufweist. Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Struktur ist, dass das Blockiermoment nicht abfällt, wenn sie hochskaliert wird. Dies ist ein entscheidender Vorteil gegenüber periodischen Strukturen, da das Blockiermoment bei diesen invers proportional zur Kantenlänge einer Probe skaliert. Gleichzeitig können periodische Strukturen aufgrund des ausgeprägten globalen Maximums eine größere maximale chirale Antwort erreichen.

Ein naheliegendes Anwendungsszenario für chirale Metamaterialien sind Aktuatoren, die eine lineare Bewegung in eine Rotation übersetzen. In diesem Fall sind ein großer Stellwinkel, das bedeutet eine große chirale Antwort, und ein großes Blockiermoment vorteilhaft. Um dies zu erreichen wurden helixförmige Schalenstrukturen entwickelt, bei denen sich das Blockiermoment unabhängig von der chiralen Antwort einstellen lässt. Zukünftige Arbeiten können an dieser Stelle anknüpfen und die Schalenstrukturen in komplexere Systeme integrieren. Zusätzlich könnte es interessant sein, die Schalenstrukturen um nachgiebige Kopplungselemente zu ergänzen und sie als Einheitszelle für eine periodische Struktur zu verwenden, bei der das Blockiermoment durch die Anpassung der Einheitszelle einstellbar ist.

In den hier vorgestellten Untersuchungen wurde stets ein linear elastisches Verhalten des Basismaterials vorausgesetzt. Außerdem wurde angenommen, dass die Strukturen geometrisch perfekt, das heißt frei von statistisch bedingten Schwankungen, sind. In der Realität sind aber selbst die präzisesten Fertigungsverfahren fehlerbehaftet. Damit der Schritt aus dem Labor hin zu einer industriellen Anwendung gelingt, ist es unabdingbar, zu untersuchen, welchen Einfluss Defekte auf die elastischen und inelastischen Eigenschaften chiraler Metamaterialien haben.

Insgesamt konnten mit dieser Arbeit grundlegende Zusammenhänge zwischen der Struktur und den effektive Eigenschaften von chiralen Metamaterialien hergestellt werden.

Durch die gewonnen Erkenntnisse konnten diese Eigenschaften insbesondere bezüglich ihrer Skalierbarkeit deutlich verbessert werden.

A. Anhang zu idealisierten Strukturen

A.1. Methodik

Abbildung A.1 zeigt eine Visualisierung der Diskretisierung. Die Verbindung zweier Würfel erfolgte, indem sich benachbarte parallele Elemente alle drei Knoten teilen. Dadurch liegt die Referenzlinie eines Elements nicht in der Mitte der Querschnittsfläche eines Balkens. Dies wurde in den Simulationen durch eine Korrektur der entsprechenden Flächenträgheitsmomente gemäß dem Satz von Steiner berücksichtigt. Abbildung A.2 zeigt die Ergebnisse einer Netzstudie, die mit der rein chiralen Architektur durchgeführt wurde. Es wurden Proben mit Platte (wie in Abschnitt 3.2 beschrieben) und einem Aspektverhältnis $H/B = 2$ betrachtet. Die unterschiedlichen Marker (schwarze Kreuze, rote Kreise, blaue Dreiecke, graue Boxen) stehen für Diskretisierungen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Elementen pro Balken (1, 2, 3, 4). Abbildung A.2a zeigt die chirale Antwort als Funktion der Anzahl an Einheitszellen N (wie Abbildung 3.4a, aber auf einer linearen Skala). Bei der chiralen Antwort ist keine Abhängigkeit von der Diskretisierung zu erkennen. Abbildung A.2b zeigt die gesamte elastische Energie einer Probe als Funktion der Anzahl an Einheitszellen N . In diesem Fall ist zu erkennen, dass die Gitterstruktur deutlich steifer ist, wenn nur ein Element pro Balken verwendet wird. Für alle anderen Diskretisierungen ist kein Unterschied zu erkennen, was bedeutet, dass zwei Elemente pro Balken ausreichend sind. Es werden mindestens zwei Elemente pro Balken benötigt, weil die diagonalen Balken in den Würfeln eine S-förmige Verformung aufweisen. Diese kann von einem einzelnen Element mit quadratischen Ansatzfunktionen nicht abgebildet werden.

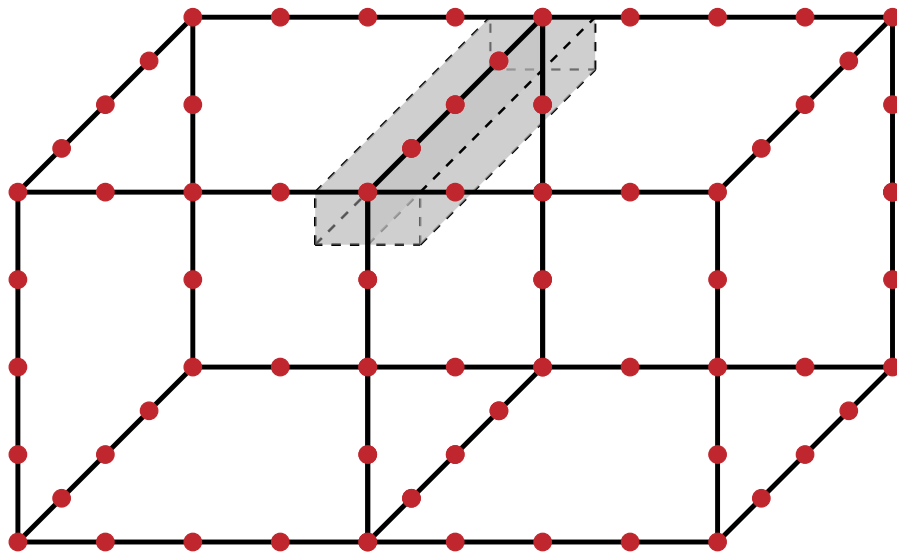
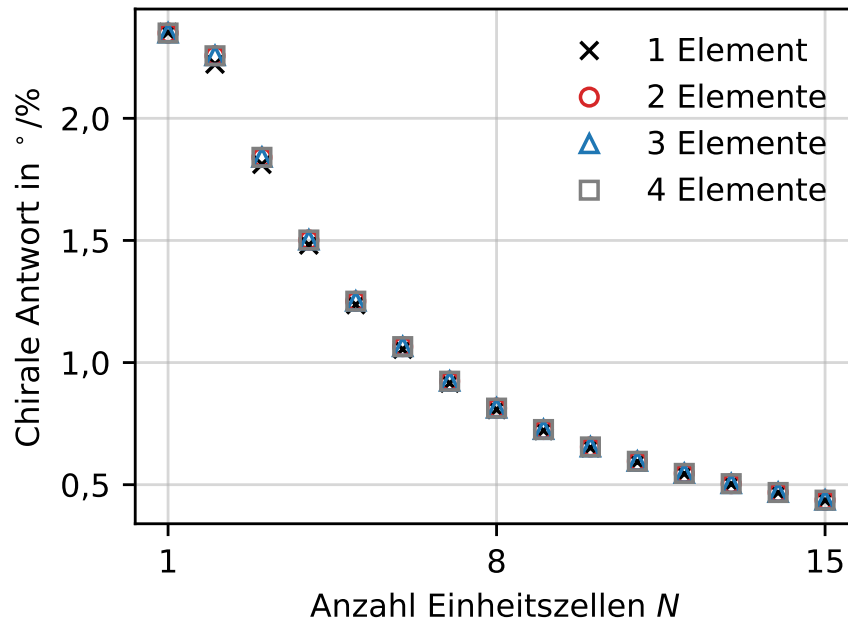


Abbildung A.1.: Visualisierung der Diskretisierung am Beispiel von zwei direkt verbundenen achi-ralen Würfeln. Die schwarzen Linien beschreiben die Referenzlinien der Elemente, die roten Punkte die Knoten. Die grauen Boxen visualisieren die Balkengeometrie. Grafik übernommen aus [84].

(a)



(b)

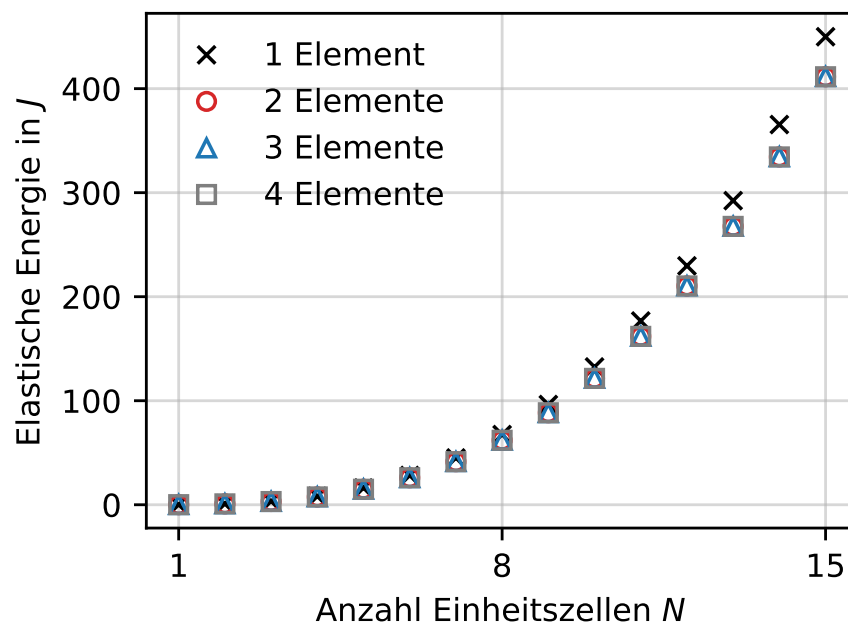
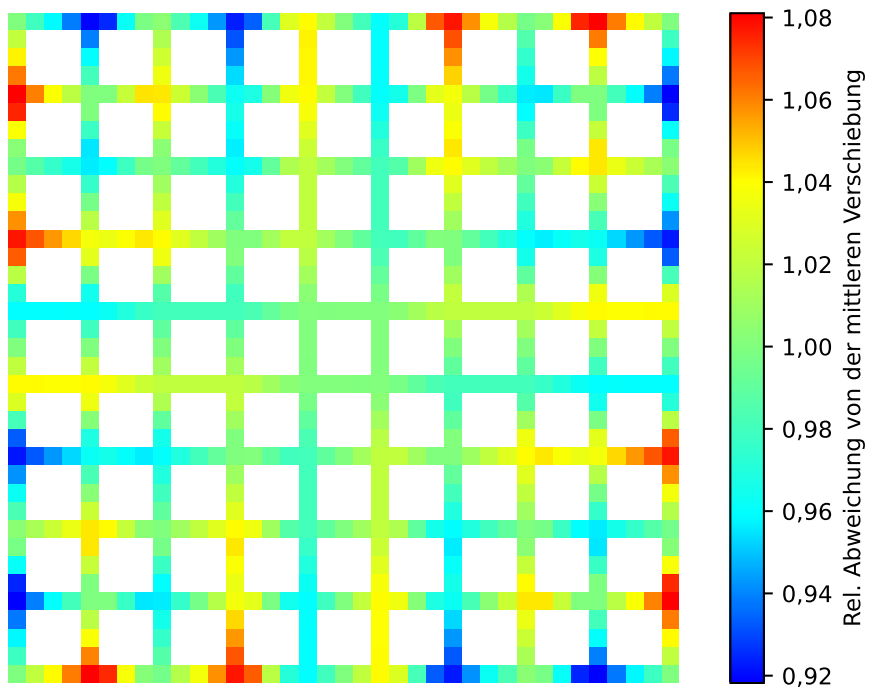


Abbildung A.2.: Netzstudie an der rein chiralen Struktur mit einem Aspektverhältnis von $H/B = 2$, mit Platte. Axiale Dehnung 10^{-4} . Ab zwei Elementen pro Balken ist die h-Konvergenz erreicht.

A.2. Ergebnisse

Abbildung A.3 zeigt das Muster der Verwölbung. Die Farbskala beschreibt, wie stark die Verschiebung u_3 in einem Querschnitt in der Mitte einer Probe relativ betrachtet von dem durch die Randbedingung vorgegebenen Mittelwert $\frac{1}{2}\bar{u}_3$ abweicht. Abbildung A.3a zeigt das Muster für $N = 5$, Abbildung A.3b für $N = 6$. Abbildung A.4 zeigt den Verlauf der chiralen Antwort in Abhängigkeit von der axialen Dehnung für eine chiral-achirale Gitterstruktur mit $\kappa = 2.5$ und $H/B = 18$ unter Druckbelastung. Das Vorzeichen der Nichtlinearität ist umgekehrt gegenüber dem im Zugversuch festgestellten Verhalten. Abbildung A.5a zeigt das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort für eine Gitterstruktur, die durch eine alternierende Abfolge chiraler Würfel mit unterschiedlichen Steifigkeiten aufgebaut wurde. Im Gegensatz zu der chiral-achiralen Gitterstruktur ergibt sich aus der chiral-chiralen Abfolge sogar eine etwas kleinere charakteristische Länge. Abbildung A.5b zeigt das Skalierungsverhalten für $\kappa = 0,3$. Wie erwartet ergibt sich für steifere Kopplungselemente ebenfalls eine kleinere charakteristische Länge.

(a)



(b)

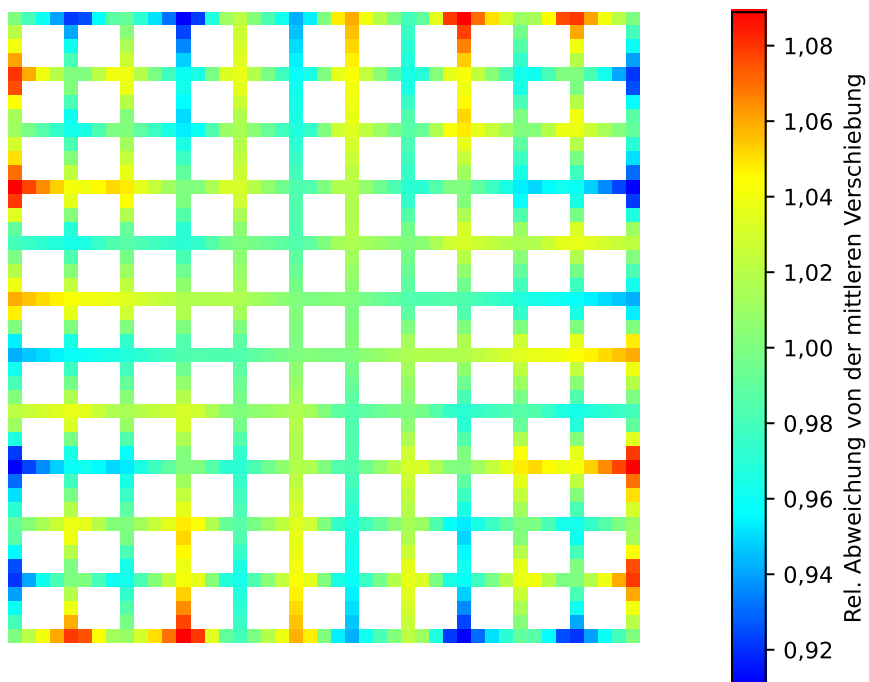


Abbildung A.3.: Muster der Verwölbung. Die Farbskala zeigt die relative Abweichung von u_3 gegenüber dem Mittelwert $\frac{1}{2}\bar{u}_3$ für einen Querschnitt in der Mitte einer Probe. Parameter: $H/B = 18$, $\kappa = 2.5$. (a) $N = 5$. (b) $N = 6$.

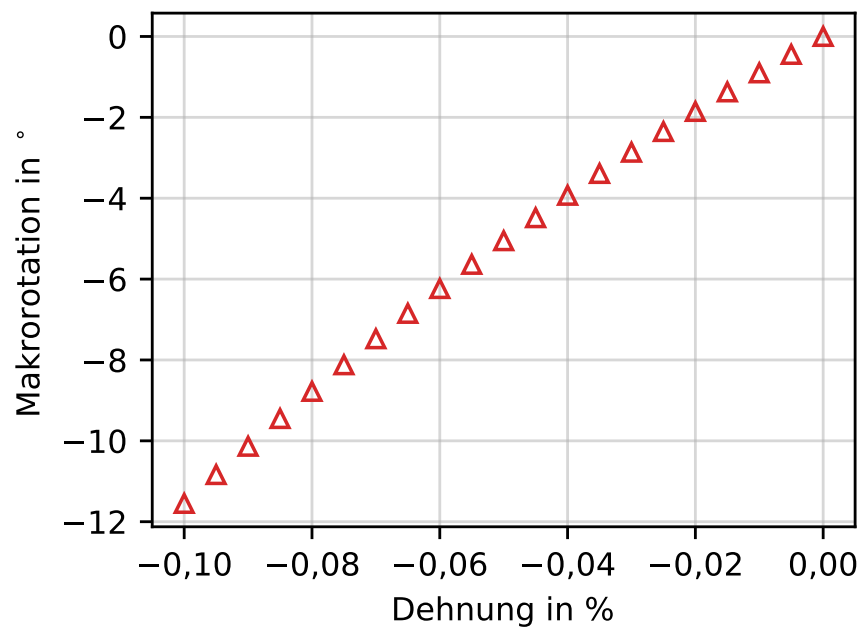
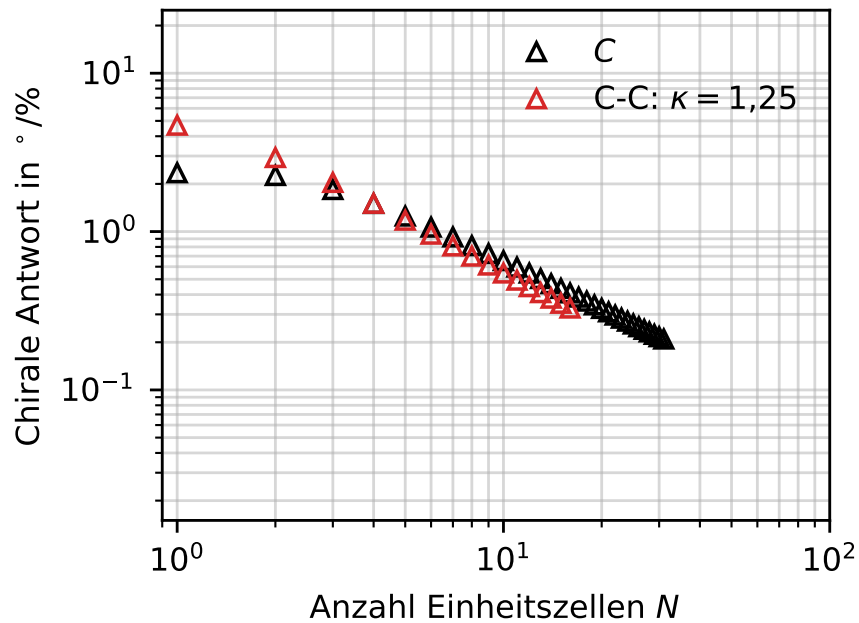


Abbildung A.4.: Beziehung zwischen Makrorotation und Dehnung bei Druck. Chiral-achirale Gitterstruktur mit $\kappa = 2.5$ und $H/B = 18$.

(a)



(b)

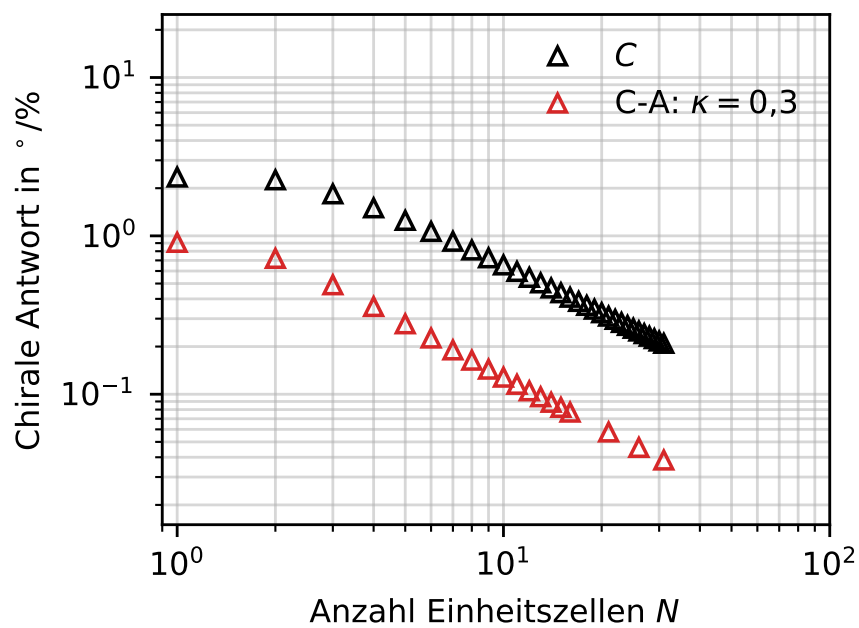


Abbildung A.5.: (a) Skalierungsverhalten einer chiral-chiralen Struktur (C-C) in Anlehnung an [84]. Wie Abbildung 3.4a, aber für eine rein chirale Struktur, bei der die Balkendicke der chiralen Würfel nach dem Muster von Abbildung 3.2c variiert wurde. Das heißt, an die Stellen der grauen achiralen Würfel in Abbildung 3.2c wurden chirale Würfel mit dünneren Balken platziert. κ gibt das Verhältnis der Balkendicken an. (b) Wie Abbildung 3.4a in Anlehnung an [84].

B. Anhang zu realisierbaren Strukturen und Validierung

Der angepasste Homogenisierungsansatz zur Bestimmung der 29 Konstanten wurde auf ein Timoshenko-Balkenmodell angewendet, wie es in Abschnitt 4.2.2 beschrieben wurde. Es sei angemerkt, dass hierfür nicht exakt die in Abbildung 4.2 dargestellte Diskretisierung verwendet wurde, sondern eine vorangegangene Variante. Diese unterscheidet sich geringfügig von der Diskretisierung aus Abbildung 4.2. Da dieser Schritt nur eine grobe Abschätzung liefern soll und die Unterschiede in beiden Diskretisierungen lediglich kleine quantitative Unterschiede im Materialverhalten verursachen, wurde der aufwändige Prozess nicht mit der finalen Variante des Timoshenko-Balkenmodells aus Abbildung 4.2 wiederholt. Wie mikropolare Kontinua besitzen Timoshenko-Balken drei Freiheitsgrade der Translation und der Rotation. Somit lassen sich die Verschiebungen und Rotationen für eine aus $N_1 \times N_2 \times N_3$ aufgebaute Mikrostruktur Ω durch die Taylorreihenentwicklungen

$$u_i(x_j) = u_i(x_j = 0) + \left. \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|_{x_j=0} x_j + O(x_j^2) \quad (\text{B.1})$$

und

$$\phi_i(x_j) = \phi_i(x_j = 0) + \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right|_{x_j=0} x_j + O(x_j^2) \quad (\text{B.2})$$

beschreiben. [68, 101] Der jeweils erste Term auf der rechten Seite von Gleichung B.1 und B.2 beschreibt eine Starrkörpertranslation, beziehungsweise eine Starrkörperrotation. Diese können durch die Fixierung eines einzelnen Knotens in der Mikrostruktur eliminiert werden. Die Terme erster Ordnung beschreiben einen gemittelten mikropolaren Verschiebungsgradienten

$$\hat{H}_{ij}^M := \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \hat{e}_{ji} - \epsilon_{ijk} \phi_k \quad (\text{B.3})$$

und Krümmungstensor

$$\hat{\gamma}_{ij} := \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}. \quad (\text{B.4})$$

B. Anhang zu realisierbaren Strukturen und Validierung

Die Terme höherer Ordnung beschreiben die Fluktuation der Verschiebungs- und Rotationsfelder. Mit Hilfe der Gleichungen B.1 - B.4 lassen sich periodische Randbedingungen

$$u_i^+ = u_i^- + (\hat{e}_{ji} - \epsilon_{ijk}\phi_k^-)\Delta x_j \quad (\text{B.5})$$

und

$$\phi_i^+ = \phi_i^- + \hat{\gamma}_{ij}\Delta x_j \quad (\text{B.6})$$

formulieren, wobei Δx_j dem Produkt der Anzahl an Einheitszellen N_j und der Gitterkonstanten a_j in der jeweiligen Richtung entspricht. Die hochgestellten Symbole + und – unterscheiden zwischen Feldgrößen auf gegenüberliegenden Seiten von Ω . Durch das Aufbringen von 29 linear unabhängigen Dehnungs- und Krümmungszuständen können die mikropolaren elastischen Konstanten durch die Bedingung [68]

$$\frac{1}{2}(A_{ijkl}\hat{e}_{ij}\hat{e}_{kl} + B_{ijkl}\hat{\gamma}_{ij}\hat{\gamma}_{kl} + 2C_{ijkl}\hat{e}_{ij}\hat{\gamma}_{kl}) = \frac{1}{V^\Omega}W^\Omega \quad (\text{B.7})$$

bestimmt werden, wobei

$$V^\Omega = \prod_{i=1}^3 N_i a_i \quad (\text{B.8})$$

das Volumen und W^Ω die elastische Formänderungsenergie der Mikrostruktur sind. Es tritt jedoch das Problem auf, dass die volumenspezifische Formänderungsenergie $\frac{1}{V^\Omega}W^\Omega$ von der Größe der Mikrostruktur, das heißt von N_i , abhängt. Somit ergeben sich unterschiedliche elastische Konstanten für unterschiedliche N_i . Die aus dem hier beschriebenen Verfahren bestimmten mikropolaren elastischen Konstanten wurden als Startpunkt für eine systematische Parametervariation genutzt, in der die Konstanten so angepasst wurden, dass das mikropolare Modell das Skalierungsverhalten der chiralen Antwort aus den Timoshenko-Balken-Simulationen reproduziert. In der in Abschnitt 4.2.3 eingeführten erweiterten Voigt-Notation ergeben sich für die in Abbildung 4.6 gezeigte Kurve (rote

Linie) die folgenden Werte[85]:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= 5,1 \times 10^5 \text{ Pa}, & A_{12} &= 6,6 \times 10^4 \text{ Pa}, & A_{13} &= -5,8 \times 10^4 \text{ Pa} \\
A_{33} &= 4,8 \times 10^6 \text{ Pa}, & A_{44} &= 3,2 \times 10^7 \text{ Pa}, & A_{47} &= -1,8 \times 10^2 \text{ Pa} \\
A_{66} &= 2,2 \times 10^4 \text{ Pa}, & A_{69} &= -1,6 \times 10^2 \text{ Pa}, & A_{77} &= 5,5 \times 10^4 \text{ Pa} \\
B_{11} &= 5,1 \times 10^{-5} \text{ N}, & B_{12} &= 3,7 \times 10^{-8} \text{ N}, & B_{13} &= 3,5 \times 10^{-6} \text{ N} \\
B_{33} &= 9,4 \times 10^{-3} \text{ N}, & B_{44} &= 1,7 \times 10^{-4} \text{ N}, & B_{47} &= -3,4 \times 10^{-6} \text{ N} \\
B_{66} &= 2,6 \times 10^{-4} \text{ N}, & B_{69} &= 4,9 \times 10^{-7} \text{ N}, & B_{77} &= 3,5 \text{ N} \\
C_{11} &= -1,3 \times 10^{-1} \text{ N/m}, & C_{12} &= -8,5 \times 10^{-3} \text{ N/m}, & C_{13} &= -3,2 \text{ N/m} \\
C_{31} &= 2,9 \times 10^{-1} \text{ N/m}, & C_{33} &= -1,8 \times 10^2 \text{ N/m}, & C_{44} &= -2,7 \times 10^{-2} \text{ N/m} \\
C_{47} &= 5,1 \times 10^{-2} \text{ N/m}, & C_{66} &= 2,7 \times 10^{-2} \text{ N/m}, & C_{69} &= -2,8 \times 10^{-4} \text{ N/m} \\
C_{74} &= -5,2 \times 10^{-3} \text{ N/m}, & C_{77} &= -4,5 \text{ N/m}
\end{aligned}$$

Für die Übersetzung der erweiterten Voigt-Notation in die Indexnotation gilt

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1113} & A_{1112} & A_{1132} & A_{1131} & A_{1121} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2213} & A_{2212} & A_{2232} & A_{2231} & A_{2221} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3323} & A_{3313} & A_{3312} & A_{3332} & A_{3331} & A_{3321} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & A_{2323} & A_{2313} & A_{2312} & A_{2332} & A_{2331} & A_{2321} \\ A_{1311} & A_{1322} & A_{1333} & A_{1323} & A_{1313} & A_{1312} & A_{1332} & A_{1331} & A_{1321} \\ A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & A_{1223} & A_{1213} & A_{1212} & A_{1232} & A_{1231} & A_{1221} \\ A_{3211} & A_{3222} & A_{3233} & A_{3223} & A_{3213} & A_{3212} & A_{3232} & A_{3231} & A_{3221} \\ A_{3111} & A_{3122} & A_{3133} & A_{3123} & A_{3113} & A_{3112} & A_{3132} & A_{3131} & A_{3121} \\ A_{2111} & A_{2122} & A_{2133} & A_{2123} & A_{2113} & A_{2112} & A_{2132} & A_{2131} & A_{2121} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

B. Anhang zu realisierbaren Strukturen und Validierung

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & B_{1133} & B_{1132} & B_{1131} & B_{1121} & B_{1123} & B_{1113} & B_{1112} \\ B_{2211} & B_{2222} & B_{2233} & B_{2232} & B_{2231} & B_{2221} & B_{2223} & B_{2213} & B_{2212} \\ B_{3311} & B_{3322} & B_{3333} & B_{3332} & B_{3331} & B_{3321} & B_{3323} & B_{3313} & B_{3312} \\ B_{3211} & B_{3222} & B_{3233} & B_{3232} & B_{3231} & B_{3221} & B_{3223} & B_{3213} & B_{3212} \\ B_{3111} & B_{3122} & B_{3133} & B_{3132} & B_{3131} & B_{3121} & B_{3123} & B_{3113} & B_{3112} \\ B_{2111} & B_{2122} & B_{2133} & B_{2132} & B_{2131} & B_{2121} & B_{2123} & B_{2113} & B_{2112} \\ B_{2311} & B_{2322} & B_{2333} & B_{2332} & B_{2331} & B_{2321} & B_{2323} & B_{2313} & B_{2312} \\ B_{1311} & B_{1322} & B_{1333} & B_{1332} & B_{1331} & B_{1321} & B_{1323} & B_{1313} & B_{1312} \\ B_{1211} & B_{1222} & B_{1233} & B_{1232} & B_{1231} & B_{1221} & B_{1223} & B_{1213} & B_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

und

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1132} & C_{1131} & C_{1121} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2232} & C_{2231} & C_{2221} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3332} & C_{3331} & C_{3321} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2332} & C_{2331} & C_{2321} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1332} & C_{1331} & C_{1321} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1232} & C_{1231} & C_{1221} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3232} & C_{3231} & C_{3221} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3132} & C_{3131} & C_{3121} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2132} & C_{2131} & C_{2121} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

C. Anhang zu nicht-periodischen Strukturen

Abbildung C.1 zeigt die maximale logarithmische Hauptdehnung für eine ausgewählte Schalenstruktur. Trotz großer Makrorotation ($12,6^\circ$) sind die Dehnungen klein ($\leq 1,2\%$). Abbildung C.2 zeigt die chirale Antwort und das Blockiermoment in Abhängigkeit von der Wandstärke und von der Ganghöhe für $P = 2$. Die chirale Antwort ist identisch zu $P = 1$, das Blockiermoment ist doppelt so groß.

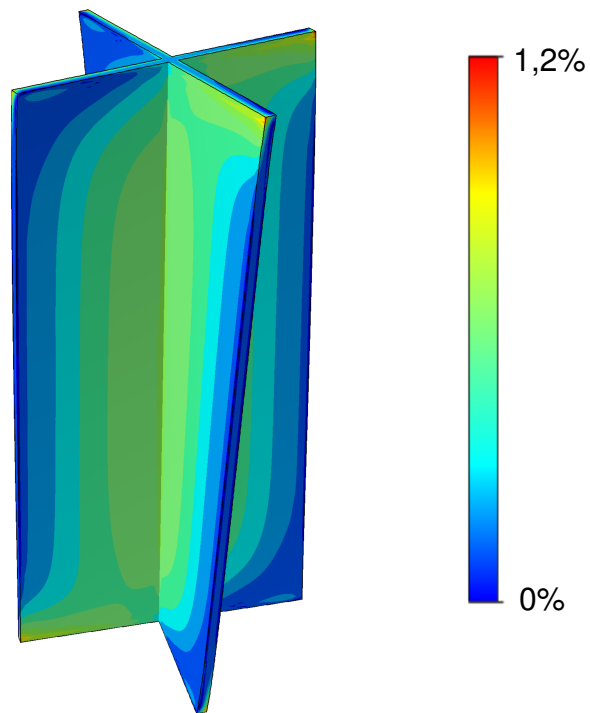
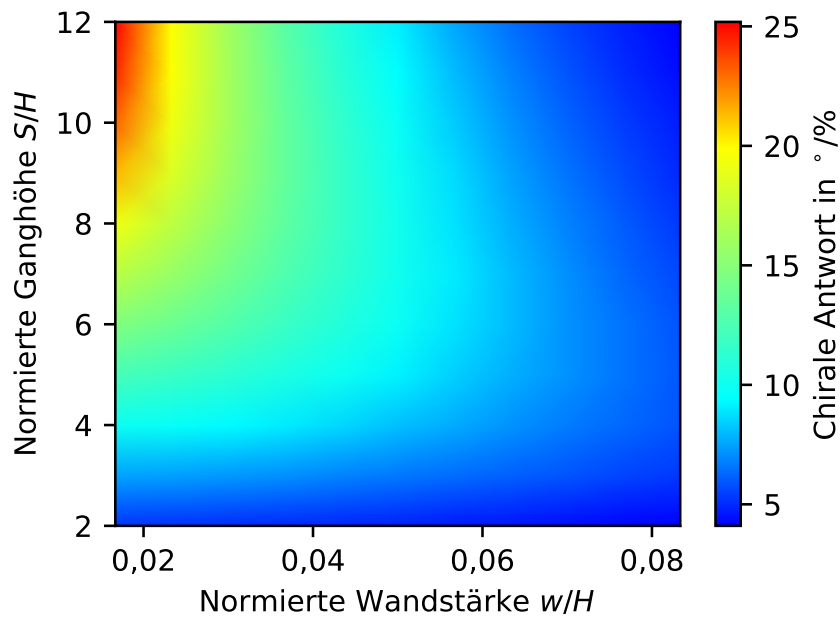


Abbildung C.1.: Maximale Hauptdehnung (logarithmisch) bei einer Spiralstruktur mit $P = 2$, $w = 0,5$ m und $S = 360$ m. Axiale Dehnung 0,5%. Makrorotation $12,6^\circ$.

(a)



(b)

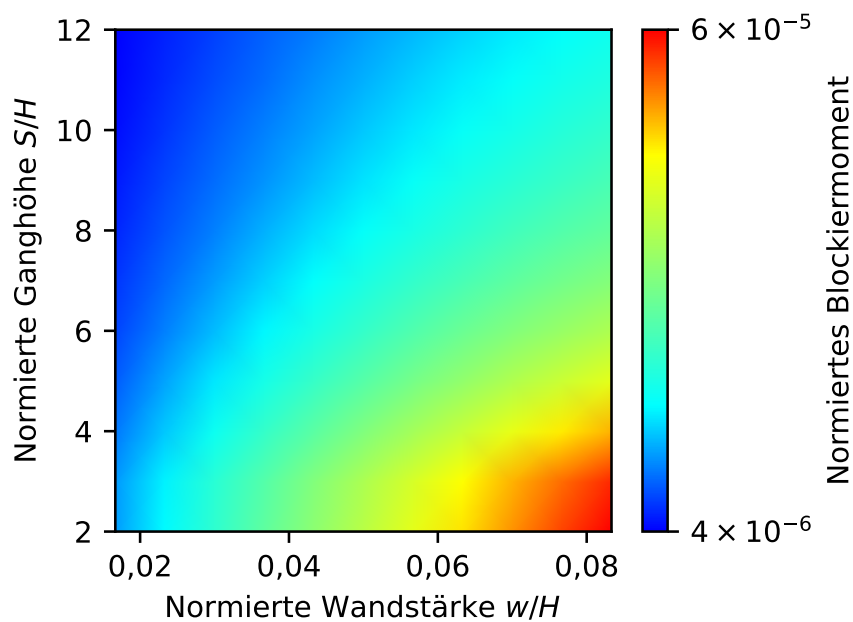


Abbildung C.2.: Mechanische Eigenschaften der Schalenstrukturen unter Zug. $P = 2$. (a) Chirale Antwort. (b) Normiertes Blockiermoment \hat{M}_S . Ermittelt bei einer axialen Dehnung von 0,5%. Für die Erstellung der Grafiken wurde jeweils eine diskrete Menge von 11×11 Simulationen ausgewertet. Zur Erstellung der kontinuierlichen Farbskala wurden die Werte zwischen zwei Punkten interpoliert.

D. Forschungsdaten

Die Forschungsdaten zu Kapitel 4 wurden bereits zusammen mit dem Fachartikel [85] veröffentlicht. Weitere in dieser Arbeit gezeigten Daten sind mit dem DOI [10.35097/577](https://doi.org/10.35097/577) veröffentlicht.

Literatur

- [1] S. Semaw. „The world’s oldest stone artefacts from Gona, Ethiopia: their implications for understanding stone technology and patterns of human evolution between 2·6–1·5 million years ago“. *Journal of Archaeological Science* 27.12 (2000), S. 1197–1214.
- [2] F. Neukirchen. *Von der Kupfersteinzeit zu den Seltenen Erden: eine kurze Geschichte der Metalle*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2016. ISBN: 978-3-662-49346-5.
- [3] J. Christensen, M. Kadic, O. Kraft und M. Wegener. „Vibrant times for mechanical metamaterials“. *MRS Communications* 5.3 (2015), S. 453–462.
- [4] J. K. Felixberger. *Chemie für Einsteiger*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. ISBN: 978-3-662-52821-1.
- [5] M. Kadic, G. W. Milton, M. van Hecke und M. Wegener. „3D metamaterials“. *Nature Reviews Physics* 1.3 (2019), S. 198–210.
- [6] C. Coulais. „As the extension, so the twist“. *Science* 358.6366 (2017), S. 994–995.
- [7] C. Völlmecke, M. Todt und S. Yiatros. „Buckling and postbuckling of architected materials: A review of methods for lattice structures and metal foams“. *Composites and Advanced Materials* 30 (2021). DOI: 10.1177/26349833211003904.
- [8] J. R. Greer und V. S. Deshpande. „Three-dimensional architected materials and structures: Design, fabrication, and mechanical behavior“. *MRS Bulletin* 44.10 (2019), S. 750–757.
- [9] G.W. Milton. *The theory of composites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-78125-6.
- [10] G. W. Milton und A. V. Cherkaev. „Which Elasticity Tensors are Realizable?“. *Journal of Engineering Materials and Technology* 117.4 (1995), S. 483–493.

- [11] G. W. Milton, M. Briane und D. Harutyunyan. „On the possible effective elasticity tensors of 2-dimensional and 3-dimensional printed materials“. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems* 5.1 (2017), S. 41–94.
- [12] R. Lakes. „Foam structures with a negative Poisson’s ratio“. *Science* 235.4792 (1987), S. 1038–1040.
- [13] K. K. Saxena, R. Das und E. P. Calius. „Three decades of auxetics research- materials with negative Poisson’s ratio: a review“. *Advanced Engineering Materials* 18.11 (2016), S. 1847–1870.
- [14] S. Babae, J. Shim, J. C. Weaver, E. R. Chen, N. Patel und K. Bertoldi. „3D soft metamaterials with negative Poisson’s ratio“. *Advanced Materials* 25.36 (2013), S. 5044–5049.
- [15] J. Qu, M. Kadic, A. Naber und M. Wegener. „Micro-structured two-component 3D metamaterials with negative thermal-expansion coefficient from positive constituents“. *Scientific reports* 7.1 (2017), 40643.
- [16] R. Lakes. „Cellular solids with tunable positive or negative thermal expansion of unbounded magnitude“. *Applied physics letters* 90.22 (2007), 221905.
- [17] Q. Wang, J. A. Jackson, Q. Ge, J. B. Hopkins, C. M. Spadaccini und N. X. Fang. „Lightweight mechanical metamaterials with tunable negative thermal expansion“. *Physical review letters* 117.17 (2016), 175901.
- [18] J. Qu, M. Kadic und M. Wegener. „Poroelastic metamaterials with negative effective static compressibility“. *Applied Physics Letters* 110.17 (2017), 171901.
- [19] J. Qu, A. Gerber, F. Mayer, M. Kadic und M. Wegener. „Experiments on metamaterials with negative effective static compressibility“. *Physical Review X* 7.4 (2017), 041060.
- [20] J. Qu, M. Kadic und M. Wegener. „Three-dimensional poroelastic metamaterials with extremely negative or positive effective static volume compressibility“. *Extreme Mechanics Letters* 22 (2018), S. 165–171.
- [21] M. Kadic, T. Bückmann, N. Stenger, M. Thiel und M. Wegener. „On the practicability of pentamode mechanical metamaterials“. *Applied Physics Letters* 100.19 (2012), 191901.
- [22] R. Schittny, T. Bückmann, M. Kadic und M. Wegener. „Elastic measurements on macroscopic three-dimensional pentamode metamaterials“. *Applied Physics Letters* 103.23 (2013), 231905.

- [23] T. Bückmann, M. Thiel, M. Kadic, R. Schittny und M. Wegener. „An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials“. *Nature communications* 5.1 (2014), 4130.
- [24] D. M. Correa, T. Klatt, S. Cortes, M. Haberman, D. Kovar und C. Seepersad. „Negative stiffness honeycombs for recoverable shock isolation“. *Rapid Prototyping Journal* 21.2 (2015), S. 193–200.
- [25] T. Frenzel, C. Findeisen, M. Kadic, P. Gumbsch und M. Wegener. „Tailored Buckling Microlattices as Reusable Light-Weight Shock Absorbers“. *Advanced Materials* 28.28 (2016), S. 5865–5870.
- [26] C. Findeisen, J. Hohe, M. Kadic und P. Gumbsch. „Characteristics of mechanical metamaterials based on buckling elements“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 102 (2017), S. 151–164.
- [27] G. Gottstein. *Physikalische Grundlagen der Materialkunde*. 3. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-540-71105-6.
- [28] J. Reinbold, T. Frenzel, Alexander Münchinger und M. Wegener. „The rise of (chiral) 3D mechanical metamaterials“. *Materials* 12.21 (2019), 3527.
- [29] S. C. L. Fischer, L. Hillen und C. Eberl. „Mechanical Metamaterials on the Way from Laboratory Scale to Industrial Applications: Challenges for Characterization and Scalability“. *Materials* 13.16 (2020), 3605.
- [30] S. A. Cummer, J. Christensen und A. Alù. „Controlling sound with acoustic metamaterials“. *Nature Reviews Materials* 1.3 (2016), 16001.
- [31] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny und M. Wegener. „Metamaterials beyond electromagnetism“. *Reports on Progress in physics* 76.12 (2013), 126501.
- [32] A. A. Phoenix und E. Wilson. „Adaptive thermal conductivity metamaterials: Enabling active and passive thermal control“. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications* 10.5 (2018), 051020.
- [33] K. Günaydin, Z. Eren und F. Scarpa. „Experimental investigation of auxetic structures subjected to quasi static axial load“. In: *2017 8th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*. IEEE. Istanbul, 2017, S. 7–10.
- [34] X. Zhao, G. Duan, A. Li, C. Chen und X. Zhang. „Integrating microsystems with metamaterials towards metadevices“. *Microsystems and nanoengineering* 5.1 (2019), 5.

- [35] P. Cintas. „Tracing the Origins and Evolution of Chirality and Handedness in Chemical Language“. *Angewandte Chemie International Edition* 46.22 (2007), S. 4016–4024.
- [36] W. Thomson. *The molecular tactics of a crystal*. Oxford: Clarendon Press, 1894.
- [37] M. Petitjean. „Chirality in metric spaces“. *Optimization Letters* 14.2 (2020), S. 329–338.
- [38] J. P. Riehl. *Mirror-image asymmetry : an introduction to the origin and consequences of chirality*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2010. ISBN: 978-0-470-38759-7.
- [39] E. Sanganyado, Z. Lu, Q. Fu, D. Schlenk und J. Gan. „Chiral pharmaceuticals: A review on their environmental occurrence and fate processes“. *Water research* 124 (2017), S. 527–542.
- [40] J. Gal. „Pasteur and the art of chirality“. *Nature chemistry* 9.7 (2017), S. 604–605.
- [41] J. Feis, D. Beutel, J. Köpfler, X. Garcia-Santiago, C. Rockstuhl, M. Wegener und Ivan Fernandez-Corbaton. „Helicity-preserving optical cavity modes for enhanced sensing of chiral molecules“. *Physical review letters* 124.3 (2020), 033201.
- [42] R. S. Lakes. „Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials“. *International journal of mechanical sciences* 43.7 (2001), S. 1579–1589.
- [43] J. I. Lipton, R. MacCurdy, Z. Manchester, L. Chin, D. Cellucci und D. Rus. „Handedness in shearing auxetics creates rigid and compliant structures“. *Science* 360.6389 (2018), S. 632–635.
- [44] J. Köpfler, T. Frenzel, M. Kadic, J. Schmalian und M. Wegener. „Topologically protected twist edge states for a resonant mechanical laser-beam scanner“. *Physical Review Applied* 11.3 (2019), 034059.
- [45] J. Köpfler, T. Frenzel, J. Schmalian und M. Wegener. „Fused-Silica 3D Chiral Metamaterials via Helium-Assisted Microcasting Supporting Topologically Protected Twist Edge Resonances with High Mechanical Quality Factors“. *Advanced Materials* 33.40 (2021), 2103205.
- [46] R. S. Lakes. „Is bone elastically noncentrosymmetric“. In: *Proceedings of the 34th ACEMB*. Houston, Texas, 1981, S. 286.

- [47] R. S. Lakes und R. L. Benedict. „Noncentrosymmetry in micropolar elasticity“. *International Journal of Engineering Science* 20.10 (1982), S. 1161–1167.
- [48] Y. J. Chen, F. Scarpa, Y. J. Liu und J. S. Leng. „Elasticity of anti-tetrachiral anisotropic lattices“. *International Journal of Solids and Structures* 50.6 (2013), S. 996–1004.
- [49] J. N. Grima, R. Gatt und P. Farrugia. „On the properties of auxetic meta-tetrachiral structures“. *physica status solidi (b)* 245.3 (2008), S. 511–520.
- [50] F. Warmuth, F. Osmanlic, L. Adler, M. A. Lodes und C. Körner. „Fabrication and characterisation of a fully auxetic 3D lattice structure via selective electron beam melting“. *Smart Materials and Structures* 26.2 (2016), 025013.
- [51] C. S. Ha, M. E. Plesha und R. S. Lakes. „Chiral three-dimensional isotropic lattices with negative Poisson’s ratio“. *physica status solidi (b)* 253.7 (2016), S. 1243–1251.
- [52] T. Frenzel, M. Kadic und M. Wegener. „Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist“. *Science* 358.6366 (2017), S. 1072–1074.
- [53] H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik : Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2018. ISBN: 978-3-662-57504-8.
- [54] P. Haupt. *Continuum mechanics and theory of materials*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. ISBN: 978-3-642-07718-0.
- [55] R. D. Mindlin. „Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity“. *International Journal of Solids and Structures* 1.4 (1965), S. 417–438.
- [56] A. C. Eringen und E. S. Suhubi. „Nonlinear theory of simple micro-elastic solids—I“. *International Journal of Engineering Science* 2.2 (1964), S. 189–203.
- [57] A. C. Eringen. „Linear theory of micropolar elasticity“. *Journal of Mathematics and Mechanics* 15.6 (1966), S. 909–923.
- [58] M. Linke. *Festigkeitslehre für den Leichtbau : Ein Lehrbuch zur Technischen Mechanik*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. ISBN: 978-3-642-53865-0.
- [59] S. P. Timošenko und J. N. Goodier. *Theory of elasticity*. 3. Auflage, internat. ed., Auckland: McGraw-Hill, 1970. ISBN: 0-07-085805-5.

- [60] C. Spura. *Einführung in die Balkentheorie nach Timoshenko und Euler-Bernoulli*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2019. ISBN: 978-3-658-25216-8.
- [61] J. N. Reddy. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2. Auflage. Boca Raton: CRC Press, 2006. ISBN: 978-0-4291-2760-1.
- [62] C. Truesdell und W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. ISBN: 978-3-642-05701-4.
- [63] D. Gross und T. Seelig. *Bruchmechanik : Mit einer Einführung in die Mikro-mechanik*. 4. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-540-37113-7.
- [64] J. Altenbach, H. Altenbach und V. A. Eremeyev. „On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography“. *Archive of Applied Mechanics* 80.1 (2010), S. 73–92.
- [65] H. Altenbach und V. A. Eremeyev. „Cosserat Media“. In: *Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications*. Wien: Springer Vienna, 2013, S. 65–130.
- [66] R. D. Mindlin. *Microstructure in linear elasticity*. Techn. Ber. Columbia University, New York, 1963.
- [67] A. C. Eringen. *Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids*. New York: Springer-Verlag, 2012. ISBN: 0-387-98620-0.
- [68] S. Duan, W. Wen und D. Fang. „A predictive micropolar continuum model for a novel three-dimensional chiral lattice with size effect and tension-twist coupling behavior“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 121 (2018), S. 23–46.
- [69] I. Fernandez-Corbaton, C. Rockstuhl, P. Ziemke, P. Gumbsch, A. Albiez, R. Schwaiger, T. Frenzel, M. Kadic und M. Wegener. „New twists of 3D chiral metamaterials“. *Advanced Materials* 31.26 (2019), 1807742.
- [70] Z. Rueger und R. S. Lakes. „Cosserat elasticity of negative Poisson’s ratio foam: experiment“. *Smart Materials and Structures* 25.5 (2016), 054004.
- [71] Z. Rueger und R. S. Lakes. „Experimental Cosserat elasticity in open-cell polymer foam“. *Philosophical Magazine* 96.2 (2016), S. 93–111.
- [72] Z. Rueger und R. S. Lakes. „Strong Cosserat elastic effects in a unidirectional composite“. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 68.3 (2017), 54.

- [73] Z. Rueger, D. Li und R. S. Lakes. „Observation of Cosserat elastic effects in a tetragonal negative Poisson’s ratio lattice“. *physica status solidi (b)* 254.12 (2017), 1600840.
- [74] W. J. Drugan und R. S. Lakes. „Torsion of a Cosserat elastic bar with square cross section: theory and experiment“. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 69.2 (2018), 24.
- [75] D. Bigoni und W. J. Drugan. „Analytical Derivation of Cosserat Moduli via Homogenization of Heterogeneous Elastic Materials“. *Journal of Applied Mechanics* 74.4 (2006), S. 741–753.
- [76] D. Branke, J. Brummund, G. Haasemann und V. Ulbricht. „Obtaining Cosserat material parameters by homogenization of a Cauchy continuum“. In: *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. Wiley Online Library. Gdansk, 2009, S. 425–426.
- [77] H. Chen, X. Liu, G. Hu und H. Yuan. „Identification of material parameters of micropolar theory for composites by homogenization method“. *Computational Materials Science* 46.3 (2009), S. 733–737.
- [78] A. Spadoni und M. Ruzzene. „Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 60.1 (2012), S. 156–171.
- [79] R. C. Hibbeler. *Technische Mechanik 2 : Festigkeitslehre*. München: Pearson Studium, 2006. ISBN: 978-3-8273-7134-8.
- [80] S. Diebels und A. Geringer. „Micromechanical and macromechanical modelling of foams: Identification of Cosserat parameters“. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 94.5 (2014), S. 414–420.
- [81] R. D. Gauthier. „Experimental investigations on micropolar media“. In: *Mechanics of micropolar media*. Singapur: World Scientific, 1982, S. 395–463.
- [82] S. K. Yang, V. V. Varadan, V. K. Varadan und S. Moghe. „Transverse waves in structurally chiral media“. In: *IEEE 1988 Ultrasonics Symposium Proceedings*. IEEE. Chicago, Illinois, 1988, S. 431–434.
- [83] T. Frenzel, J. Köpfler, E. Jung, M. Kadic und M. Wegener. „Ultrasound experiments on acoustical activity in chiral mechanical metamaterials“. *Nature communications* 10.1 (2019), 3384.

- [84] P. Ziemke, T. Frenzel, M. Wegener und P. Gumbsch. „Tailoring the characteristic length scale of 3D chiral mechanical metamaterials“. *Extreme Mechanics Letters* 32 (2019), 100553.
- [85] T. Frenzel, Vincent Hahn, P. Ziemke, J. L. G. Schneider, Y. Chen, P. Kiefer, P. Gumbsch und M. Wegener. „Large characteristic lengths in 3D chiral elastic metamaterials“. *Communications materials* 2.1 (2021), 4.
- [86] R. Zhong, M. Fu, X. Chen, B. Zheng und L. Hu. „A novel three-dimensional mechanical metamaterial with compression-torsion properties“. *Composite Structures* 226 (2019), 111232.
- [87] R. S. Lakes. „Reduced warp in torsion of reticulated foam due to Cosserat elasticity: experiment“. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 67.3 (2016), 46.
- [88] F. Chen, Y. Miao, G. Gu und X. Zhu. „Soft Twisting Pneumatic Actuators Enabled by Freeform Surface Design“. *IEEE Robotics and Automation Letters* 6.3 (2021), S. 5253–5260.
- [89] C. Coulais, C. Kettenis und M. van Hecke. „A characteristic length scale causes anomalous size effects and boundary programmability in mechanical metamaterials“. *Nature Physics* 14.1 (2018), S. 40–44.
- [90] A. Deitmar. *Analysis*. 3., Auflage. Berlin: Springer-Verlag, 2021. ISBN: 978-3-662-62858-4.
- [91] D. Qi, P. Zhang, W. Wu, K. Xin, H. Liao, Y. Li, D. Xiao und R. Xia. „Innovative 3D chiral metamaterials under large deformation: Theoretical and experimental analysis“. *International Journal of Solids and Structures* 202 (2020), S. 787–797.
- [92] J. Bonet, A. J Gil und R. D. Wood. *Nonlinear solid mechanics for finite element analysis: statics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 978-1-107-11579-8.
- [93] *scipy.optimization.minimize Dokumentation*. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>. Abgerufen (JJJJ/MM/TT): 2021/08/09.
- [94] J. Nocedal und S. J. Wright. *Numerical Optimization*. 2. Auflage. New York, New York: Springer Science+Business Media, 2006. ISBN: 0-387-30303-0.

- [95] V. Hahn, P. Kiefer, T. Frenzel, J. Qu, E. Blasco, C. Barner-Kowollik und M. Wegener. „Rapid assembly of small materials building blocks (voxels) into large functional 3D metamaterials“. *Advanced Functional Materials* 30.26 (2020), 1907795.
- [96] Y. Chen, T. Frenzel, S. Guenneau, M. Kadic und M. Wegener. „Mapping acoustical activity in 3D chiral mechanical metamaterials onto micropolar continuum elasticity“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 137 (2020), 103877.
- [97] N. Sachio, R. Benedict und R. S. Lakes. „Finite element method for orthotropic micropolar elasticity“. *International Journal of Engineering Science* 22.3 (1984), S. 319–330.
- [98] S. Forest und D. K. T. „Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods“. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 91.2 (2011), S. 90–109.
- [99] G. Chatzigeorgiou, N. Charalambakis, Y. Chemisky und F. Meraghni. „Periodic homogenization for fully coupled thermomechanical modeling of dissipative generalized standard materials“. *International Journal of Plasticity* 81 (2016), S. 18–39.
- [100] R. Hill. „Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11.5 (1963), S. 357–372.
- [101] R. N. Glaesener, E. A. Träff, B. Telgen, R. M. Canonica und D. M. Kochmann. „Continuum representation of nonlinear three-dimensional periodic truss networks by on-the-fly homogenization“. *International Journal of Solids and Structures* 206 (2020), S. 101–113.
- [102] G. P. Phlipot und D. M. Kochmann. „A quasicontinuum theory for the nonlinear mechanical response of general periodic truss lattices“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 124 (2019), S. 758–780.
- [103] W. Wu, L. Geng, Y. Niu, D. Qi, X. Cui und D. Fang. „Compression twist deformation of novel tetrachiral architected cylindrical tube inspired by towel gourd tendrils“. *Extreme Mechanics Letters* 20 (2018), S. 104–111.
- [104] Y. Wang, H. Liu und Z. Zhang. „Rotation spring: Rotation symmetric compression-torsion conversion structure with high space utilization“. *Composite Structures* 245 (2020), 112341.

- [105] B. Jenett, C. Cameron, F. Tourlomousis, A. P. Rubio, M. Ochalek und N. Gershenfeld. „Discretely assembled mechanical metamaterials“. *Science advances* 6.47 (2020), eabc9943.
- [106] D. Levine und P. J. Steinhardt. „Quasicrystals: a new class of ordered structures“. *Physical review letters* 53.26 (1984), S. 2477–2480.
- [107] L. Wang und H. Liu. „3D compression–torsion cubic mechanical metamaterial with double inclined rods“. *Extreme Mechanics Letters* 37 (2020), 100706.
- [108] W. Chen und X. Huang. „Topological design of 3D chiral metamaterials based on couple-stress homogenization“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 131 (2019), S. 372–386.
- [109] B. Mosadegh, P. Polygerinos, C. Keplinger, S. Wennstedt, R. F. Shepherd, U. Gupta, J. Shim, K. Bertoldi, C. J. Walsh und G. M. Whitesides. „Pneumatic networks for soft robotics that actuate rapidly“. *Advanced functional materials* 24.15 (2014), S. 2163–2170.