

# **Methodisch-didaktische Entwicklung und Evaluation von interaktiven Lehr- und Lernmaterialien zur Mathematik im Bereich der Klimaforschung**

Zur Erlangung des akademischen Grades einer  
**Doktorin der Naturwissenschaften**  
von der KIT-Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**  
von

Dipl.-Gyml. Maren Hattebuhr

Tag der mündlichen Prüfung:

22.12.2021

Hauptreferent:

Prof. Dr. rer. nat. Martin Frank

1. Korreferent:

Prof. i. R. Dr. rer. nat. Norbert Henze

2. Korreferent:

Prof. Dr. rer. nat. Matthias Ludwig (Goethe Universität  
Frankfurt am Main)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorwort</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Aufbau . . . . .	4
<b>I Thematisches Hintergrundwissen</b>	<b>7</b>
<b>2 Das Klima</b>	<b>11</b>
2.1 Ein allgemeiner Einstieg in das Klimasystem der Erde . . . . .	11
2.2 Rückblick auf Erforschungen des Klimawandels und der IPCC . . . . .	15
2.3 Eine Temperaturzeitreihe als Datengrundlage für Trend- und Rekordwertanalysen	16
2.4 Physikalisches Hintergrundwissen zur meteorologisch wirksamen Strahlung . . . . .	18
2.4.1 Emissionsspektren . . . . .	18
2.4.2 Absorptionsspektren . . . . .	20
2.4.3 Reflexionsvermögen . . . . .	24
2.4.4 Eine mathematische Beschreibung der Strahlung . . . . .	26
2.5 Einordnung des Anwendungskontextes in den Schulunterricht . . . . .	28
<b>3 Mathematische Modellierung unter Einsatz digitaler Werkzeuge</b>	<b>31</b>
3.1 Mathematische Modellierung und der Modellierungskreislauf . . . . .	32
3.2 Lehrerkompetenzen bezüglich des mathematischen Modellierens . . . . .	37
3.3 Mathematische Modellierung im Programm CAMMP . . . . .	38
3.3.1 Veranstaltungsformate für Schülerinnen und Schüler und ihre üblichen Abläufe . . . . .	39
3.3.2 Veranstaltungsformate für Lehrkräfte und ihre üblichen Abläufe . . . . .	41
3.4 Das digitale Lernmaterial . . . . .	44
3.4.1 Bereitstellung des Lernmaterials auf der Workshop-Plattform und die Verwendung von Jupyter Notebooks . . . . .	44
3.4.2 Struktur und Elemente des digitalen Lernmaterials . . . . .	45
<b>II Mathematische Aufarbeitung ausgewählter Themen der Klimaforschung und ihre didaktische Umsetzung</b>	<b>51</b>
<b>4 Vorbemerkung zur Zeitreihenanalyse</b>	<b>53</b>
4.1 Ziele und Anwendungsgebiete der Zeitreihenanalyse . . . . .	53
4.2 Die Zeitreihenanalyse in der Schule . . . . .	54

<b>5 Trendbezogene Zeitreihenanalyse</b>	<b>59</b>
5.1 Analyseverfahren zur trendbezogenen Untersuchung einer Zeitreihe . . . . .	60
5.1.1 Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen . . . . .	61
5.1.2 Formulierung eines Modells . . . . .	62
5.1.3 Schätzung von Modellparametern . . . . .	64
5.1.4 Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung . . . . .	66
5.1.5 Aufstellen von Konfidenzbereichen . . . . .	69
5.1.6 Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung . . . . .	72
5.1.7 Erstellung von Prognosen . . . . .	74
5.2 Anwendung der mathematischen Inhalte auf eine reale Temperaturzeitreihe . . . . .	75
5.2.1 Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen . . . . .	78
5.2.2 Formulierung eines Modells . . . . .	83
5.2.3 Schätzung von Modellparametern . . . . .	84
5.2.4 Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung . . . . .	86
5.2.5 Aufstellen von Konfidenzbereichen . . . . .	92
5.2.6 Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung . . . . .	94
5.2.7 Erstellung von Prognosen . . . . .	97
5.3 Didaktische Reduktion der Analyse einer Temperaturzeitreihe . . . . .	102
5.3.1 Aufbau des Lernmaterials . . . . .	102
5.3.2 Arbeitsblatt 1: Kennenlernen der Temperaturzeitreihe . . . . .	103
5.3.3 Arbeitsblatt 2: Ein erstes Modell auf Basis eines Ausschnitts aus der Temperaturzeitreihe . . . . .	106
5.3.4 Arbeitsblatt 3: Modellverbesserung mithilfe der kompletten realen Temperaturzeitreihe . . . . .	114
5.3.5 Arbeitsblatt 4: Modellerweiterung durch einen Hypothesentest . . . . .	116
5.3.6 Arbeitsblätter 5/6: Zusatzaufgaben A/B . . . . .	117
5.3.7 Ausblick und Vorschläge für weiterführende Modellierungsaufgaben . . . . .	118
5.4 Erfahrungen mit den Lernmaterialien und deren Reflexion . . . . .	120
5.5 Einsatz und Erfahrungen mit den Lernmaterialien in Lehrerfortbildungen . . . . .	122
<b>6 Rekordanalyse einer Zeitreihe</b>	<b>125</b>
6.1 Ein mathematischer Blick auf die Zeitreihenanalyse . . . . .	126
6.1.1 Analyseverfahren zur ereignisbezogenen Untersuchung einer Zeitreihe . . . . .	127
6.2 Anwendung der mathematischen Inhalte auf eine reale Temperaturzeitreihe . . . . .	133
6.3 Didaktische Reduktion der Rekordanalyse einer Temperaturzeitreihe . . . . .	136
6.3.1 Aufbau des Workshops . . . . .	136
6.3.2 Arbeitsblatt 1: Basisarbeitsblatt . . . . .	138
6.3.3 Arbeitsblatt 2: Wahrscheinlichkeitsanalyse auf der Niveaustufe 1 . . . . .	141
6.3.4 Arbeitsblatt 3: Wahrscheinlichkeitsanalyse auf der Niveaustufe 2 . . . . .	144
6.3.5 Arbeitsblatt 1: Zurück zum Basisblatt . . . . .	147
6.3.6 Zusatzaufgaben . . . . .	147
6.3.7 Ausblick und Vorschläge für weiterführende Modellierungsaufgaben . . . . .	152
6.4 Erfahrungen mit und Reflexion der Lernmaterialien . . . . .	153
<b>7 Strahlungsbilanzgleichungen</b>	<b>157</b>
7.1 Das Finite-Volumen-Verfahren . . . . .	159
7.1.1 Das Finite-Volumen-Verfahren am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung .	161

7.2	Die Finite-Volumen-Methode am Beispiel der Strahlungstransportgleichung . . . . .	165
7.3	Didaktisch-methodische Umsetzung der Lehr- und Lernmaterialien . . . . .	171
7.3.1	Problembeschreibung zur Einführung der Schüleraufgabe . . . . .	172
7.3.2	Darstellung des Modells und seiner Erweiterungen einschließlich der Lösungen . . . . .	173
7.3.3	Modellierungswochen als mögliches Einsatzgebiet . . . . .	199
7.4	Fazit und Ausblick . . . . .	202
<b>III</b>	<b>Didaktische Analyse</b>	<b>205</b>
<b>8</b>	<b>Eine empirische Studie zum mathematischen Modellieren in der Klimaforschung</b>	<b>207</b>
8.1	Entwicklung eines Erwartungshorizontes zur Lösung der Aufgabe als Vorarbeit für die Erstellung eines Bewertungsschemas . . . . .	208
8.2	Forschungsfragen . . . . .	211
8.3	Forschungsdesign . . . . .	213
8.4	Bewertungsschema . . . . .	215
8.5	Schülerselbstevaluation . . . . .	217
8.6	Durchführung der Studie . . . . .	219
8.7	Empirische Auswertung der Selbstevaluation und der Schülerlösungen . . . . .	221
8.7.1	Überprüfung der Interraterreliabilität . . . . .	221
8.7.2	Ergebnisse der Schülerselbstevaluation . . . . .	224
8.7.3	Ergebnisse der Bewertungen der Schülerlösungen . . . . .	228
8.7.4	Ergebnisse und Bewertung der Forschungsfragen . . . . .	236
8.8	Resümee zur empirischen Studie . . . . .	254
<b>IV</b>	<b>Abschließende Bemerkungen</b>	<b>257</b>
<b>9</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>259</b>
<b>V</b>	<b>Anhang</b>	<b>263</b>
<b>A</b>	<b>Anhang zu: Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?</b>	<b>265</b>
A.1	Exemplarischer Stundenverlaufsplan . . . . .	265
A.2	Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung . . . . .	268
A.3	Präsentation für Diskussionsphasen . . . . .	270
A.4	Lernmaterialien . . . . .	272
A.5	Rückmeldungen der Lernenden zu den Durchführungen der CAMMP days . . . . .	290
<b>B</b>	<b>Anhang zu: Klimarekorde – Alles nur Zufall?</b>	<b>295</b>
B.1	Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung . . . . .	295
B.2	Kopiervorlage zum Arbeitsblatt 2 . . . . .	297
B.3	Präsentation für Diskussionsphasen . . . . .	298
B.4	Lernmaterialien . . . . .	299
B.5	Rückmeldungen der Lernenden zu den Durchführungen der CAMMP days . . . . .	313

## Inhaltsverzeichnis

<b>C Anhang zu: Ist der Klimawandel menschengemacht?</b>	<b>315</b>
C.1 Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung . . . . .	315
<b>D Anhang zu: Eine empirische Studie zum mathematischen Modellieren in der Klimaforschung</b>	<b>317</b>
D.1 Problemstellung des IM <sup>2</sup> C 2019 . . . . .	317
D.2 Schulmaterial im Rahmen der empirischen Studie . . . . .	318
D.3 Auswertung der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und in den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung . . . . .	329
D.4 Auswertung der Korrelationen zwischen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems „Mathematisieren“ und „Berechnen“ . . . . .	343
D.5 Auswertung der Korrelationen zwischen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung . . . . .	352
<b>Danksagung</b>	<b>365</b>
<b>Literatur</b>	<b>367</b>

# 1

## Vorwort

### 1.1 Motivation

Mathematik tritt in vielen Bereichen der Forschung, Wirtschaft, Industrie und Medizin auf (vgl. Bachem et al., 1995; Ortlieb et al., 2013). Ihre Anwendung besteht darin, mit ihrer Art Vorgänge unserer Welt sowie unseres alltäglichen, gesellschaftlichen und sozialen Lebens zu erfassen und zu beschreiben. Letztlich dient sie dazu, Lösungsvorschläge für Problemstellungen der genannten Themengebiete zu gewinnen. Die Fähigkeiten und Fertigkeiten, sich der Werkzeuge der Mathematik zu bedienen, werden unter der Kompetenz des mathematischen Modellierens zusammengefasst. Damit gehört die Mathematik mit ihren Methoden zu einer Fundamentalwissenschaft. Die *Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung* (OECD) formulierte es als ein Ziel der mathematischen Bildung, ein Verständnis der Relevanz von Mathematik zu erlangen (vgl. OECD, 2021). Diese Erziehung soll es Schülerinnen und Schülern ermöglichen, als mündige Bürgerinnen und Bürger an der Gesellschaft teilzuhaben und sie zu gestalten. Winter (1995) formulierte diese Ziele in den drei Grunderfahrungen aus, die Mathematikunterricht anstreben und jede und jeder Lernende aktiv erleben sollte:

1. „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
2. mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
3. in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

Die herausragende Rolle der mathematischen Modellierung auch für das zukünftige Berufsleben vieler Schülerinnen und Schüler gebietet es, junge Menschen darin zu unterrichten. So hat die Kultusministerkonferenz die mathematische Modellierung als prozessbezogene Kernkompetenz

in den Kernlehrplan aufgenommen. Die Modellierungskompetenz beschreibt die Fähigkeit, die jeweils nötigen Prozessschritte beim Hin- und Herwechseln zwischen Realität und Mathematik problemadäquat auszuführen sowie gegebene Modelle zu analysieren oder vergleichend zu beurteilen (vgl. Blum et al., 2007). Vor diesem Hintergrund ist es unerlässlich, geeignete Anwendungen und Problemfragen didaktisch so aufzubereiten, dass sie Teil des Mathematikunterrichts und damit der schulischen Bildung und Erziehung werden. Jedoch werden viele der im Unterricht eingesetzten Aufgaben dem Anspruch an echte Modellierungsaufgaben nicht gerecht (vgl. Greefrath et al., 2017). Lehrpersonen meldeten im Rahmen dieser Arbeit deutliche Mängel durch fehlende realitätsbezogene Modellierungsaufgaben für den direkten Einsatz im Unterricht zurück. Darüber hinaus mangelt es ihnen an bereitgestelltem aufgabenbezogenen Hintergrundwissen, sowie an Unterlagen zur zielgerichteten Einarbeitung in die Theorie der mathematischen Modellierung mit Schülerinnen und Schülern.

An diesem Punkt knüpft die vorliegende Arbeit an: Das Ziel besteht darin, Materialien für den Einsatz in der Schule zu erarbeiten, die Schülerinnen und Schüler an die mathematische Modellierung heranzuführen und ihnen die Bedeutung dieser Arbeitstechnik aufzuzeigen. Damit geht einher, auch die Relevanz von Mathematik im Alltag zu vermitteln. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt damit auf der methodisch-didaktischen Entwicklung von Lernmitteln, die Lehrkräften motivierend und mit vertretbarem Eigenaufwand zugänglich sind. Das Einsatzgebiet der Materialien in der Schule beschränkt sich dabei nicht nur auf einzelne Unterrichtsstunden. Die Bearbeitung verschiedener Fragestellungen ermöglicht unterschiedliche Einsatzformen. Lehrkräfte können mit den in dieser Arbeit aufgegriffenen Sachverhalten beispielsweise Unterrichtsreihen mit Anknüpfungspunkten zu weiteren Schulfächern, Projekttage oder -wochen, aber auch Seminar- oder Facharbeiten gestalten. Außerdem beschreibt diese Arbeit den Einsatz der erstellten Materialien in Schulungen von Lehrkräften zur mathematischen Modellierung.

Allerdings erfordert die Einbringung der mathematischen Modellierung als wissenschaftliche Disziplin in den Bildungsraum Schule auch eine für die Zielgruppe fassbare Form und eine motivierende Problemumgebung. Andere Arbeiten auf diesem Gebiet dokumentieren vielfältige Anknüpfungspunkte (vgl. Sube, 2019; Wohak et al., 2021). Diese Arbeit fokussiert die Klimaforschung. Das Klimageschehen, seine Änderung und seine Ursachen und Folgen sind in aller Munde und werden rege in der Öffentlichkeit, den Medien und der Politik diskutiert. Erst kürzlich ist die *Weltklimakonferenz von Glasgow* (COP 26) zuende gegangen, in der die Staaten der Welt ein Regelwerk verabschiedeten, um das Pariser Abkommen umzusetzen (vgl. Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und nukleare Sicherheit, 2021; Mihatsch, 2021). Aber auch seit der Bewegung von *Fridays for Future* zeigen Schülerinnen und Schüler öffentlich, welchen hohen Stellenwert das Thema der Klimasituation für sie persönlich hat.

Der *Klimawandel* beschreibt eine signifikante Änderung des Klimas, die sowohl auf natürlichen als auch auf nicht-natürlichen (anthropogenen) Ursachen beruht. Eine signifikante Änderung ist dann gegeben, wenn die Änderungen nicht mehr durch übliche Schwankungen oder Messfehler erklärt werden können. Die maßgeblichen Ergebnisse, die den aktuellen wissenschaftlichen Stand in Bezug auf die Ausprägung und die (zukünftige) Entwicklung des Klimas zusammenfassen, veröffentlicht der Weltklimarat *Intergovernmental Panel on Climate Change* (IPCC) etwa alle sechs Jahre in einem Bericht. Die dabei getroffenen Vorhersagen beruhen auf Simulationen aufgrund von Modellen, die einerseits den bisherigen Klimatrend abbilden und andererseits Aussagen über mögliche zukünftige Entwicklungsszenarien zulassen. Laut IPCC sagen diverse Modellergebnisse bis zum Jahr 2100 eine

Erwärmung der globalen Durchschnittstemperatur der Erdoberfläche um bis zu  $5.7^{\circ}\text{C}$ <sup>1</sup> gegenüber dem vorindustriellen Temperaturniveau vorher (s. IPCC, 2021b, S. 14). Eine solche Erwärmung ginge mit massiven Veränderungen unseres Planeten einher, wie beispielsweise der Entstehung von Wüsten, einem Artensterben bei Tieren und Pflanzen, dem Ansteigen des Meeresspiegels und damit dem Verschwinden ganzer Länder. Viele Menschen verdrängen jedoch den Klimawandel bzw. die dramatischen Folgen, die ein Nicht-Handeln hätte. Bestimmte Interessensgruppen stellen die Vorhersagekraft von Simulationen gerne in Frage. Die meisten Menschen vertrauen der Wettervorhersage, die ebenso auf Simulationen beruht. Hingegen werden Projektionen zur globalen Erwärmung teilweise stark angezweifelt, auch weil in Rede stehende Gegenmaßnahmen starke, ggf. als negativ empfundene, Auswirkungen auf Wirtschaft und Privatleben hätten. Die Öffentlichkeit scheint zudem unsicher, ob die in den letzten Jahrzehnten beobachteten Rekorde aller Art bereits statistische Indizien für einen Klimawandel sind oder lediglich temporäre Wetterphänomene (vgl. Björnberg et al., 2017, S. 237; Lindner und Schuster, 2018; Mast, 2019; Stern, 2016).

Es gehört zum kritischen Denken, das sich Lernende frühzeitig aneignen sollten, auch Meldungen über den Klimawandel, dessen Ursachen und die Auswirkungen zu hinterfragen. Darüber hinaus bietet dieser gesellschaftlich und politisch höchst relevante und angespannte Kontext die Möglichkeit, präzise Aussagen im Rahmen der Möglichkeiten der Mathematik zu treffen und deren Aussagekraft zu erfahren. Die vorliegende Arbeit zeigt, wie bereits Schülerinnen und Schüler (angeleitet) wissenschaftliche Methoden entwickeln und vor dem Hintergrund der mathematischen Modellierung evaluieren können, um so eine eigene fundierte Meinung zum Thema Klimawandel zu bilden.

Angesichts dieses aktuellen, relevanten, aber auch kontrovers diskutierten Themas bedarf es der Beantwortung bzw. der Untersuchung brisanter Aussagen über unseren Lebensraum. Die Klimaforschung hält darüber hinaus große (zeitorientierte) Datenmengen zur Beschreibung der Vergangenheit bereit, die auch einen Blick in die Zukunft zulassen. Sachgemäß aufbereitet, lassen sich die Daten mit schulnäher Mathematik und Arbeitstechniken analysieren, was dem Einsatz in der Schule zugute kommt.

Diese Arbeit bezieht sich auf mathematische Aspekte der Klimaforschung, insbesondere des Klimawandels und von Klimamodellen. Inhaltliche Schwerpunkte entstammen dabei der Statistik (trend- und ereignisbezogene Zeitreihenanalyse) und der Numerik (Lösen von partiellen Differentialgleichungen mit Kompartimentmodellen). Die mathematisch relevanten Inhalte werden problembezogen aufgegriffen und niemals um ihrer selbst Willen eingesetzt. Da sich diese mathematischen und die themenbezogenen meteorologischen Inhalte häufig nicht im aktiven Wissensschatz von Lehrpersonen befinden, ist die didaktische Aufbereitung der Themen für Lehrkräfte ebenfalls ein wichtiger Teil der Arbeit.

Die Arbeit konzentriert sich konkret auf folgende Fragestellungen:

- Gibt es den Klimawandel wirklich, und ist er signifikant?
- Sind die erlebten Klimarekorde allein durch den Zufall erklärbar?
- Ist der Klimawandel anthropogen?

---

<sup>1</sup>Dezimalzahlen werden in dieser Arbeit einheitlich in der englischen Schreibweise notiert, die den Punkt als Dezimaltrennzeichen nutzt. Sie wird in Konsistenz mit der Syntax der entwickelten digitalen Lehr- und Lernmaterialien verwendet, die in der Arbeit abgebildet werden.

- Wie groß ist die Kapazität der Erde für menschliches Leben?

Diese Fragestellungen erfüllen die Anforderungen an eine authentische, relevante und reichhaltige Modellierungsaufgabe. Sie eignen sich damit insbesondere dazu, die erste und die dritte Grunderfahrung nach Winter (1995), nach denen der Mathematikunterricht ausgerichtet sein sollte, umzusetzen. Die Arbeit liefert für die vierte Frage keine detaillierte Lösungsbeschreibung. Die Problemstellung bildet den Ausgangspunkt einer empirischen Studie, in der ein Bewertungsschema für mathematische Modellierungsaufgaben vorgestellt und getestet wird. Anhand des Erwartungshorizonts lassen sich die Fertigkeiten der Lernenden beurteilen und in Zusammenhang mit verschiedenen Kriterien wie beispielsweise das Alter, Geschlecht oder Interesse am Thema setzen.

Ich bin davon überzeugt, dass die erstellten Materialien eine Möglichkeit darstellen, die Macht der mathematischen Modellierung zu demonstrieren, natürliche Phänomene verständlich zu machen sowie zu politisch und gesellschaftlich höchst relevanten Diskussionen anzuregen und diese kritisch zu reflektieren. Darüber hinaus erhalten schulmathematische Inhalte eine Bedeutung und können damit Heranwachsende motivieren, sich mit Mathematik zu beschäftigen.

## 1.2 Aufbau

Zur Beantwortung der obigen Fragen wurden Lernmittel angefertigt, die in dieser Arbeit vorge stellt werden. Die Materialien umfassen neben konkreten, digital ausgearbeiteten Arbeitsblättern für den direkten Einsatz mit Schülerinnen und Schülern auch Begleitmaterialien für Lehrkräfte. Die Zusatzinformationen führen in das thematische und das mathematische Hintergrundwissen ein. Sie stellen die mathematische Modellierung als ein Werkzeug zur Lösung der Problemfragen vor. Die Arbeitsmaterialien wurden bereits von Heranwachsenden getestet und kamen in Lehrerfortbildungen als good-practice Beispiel vor. Die Einsatzmöglichkeiten werden beschrieben und evaluiert.

Konkret gliedert sich die Arbeit in drei Teile: Zunächst führt Teil I in thematisches Hintergrundwissen ein. Er stellt anwendungsorientiertes Wissen bereit, das sowohl den Aspekt der Klimaforschung als auch den der mathematischen Modellierung umfasst (s. Kapitel 2 und Kapitel 3). Das Ziel der in dieser Arbeit vorgestellten Lehr- und Lernmaterialien ist es, in der Forschung tatsächlich angewandte Methoden für Schülerinnen und Schüler authentisch abzubilden und zugänglich zu machen. Daher ist es notwendig, über die Mathematik hinausgehendes Wissen bereitzustellen, mit dem Lehrpersonen in die Lage versetzt werden, ein gewisses Verständnis des Anwendungsbereites zu erlangen und so eine eigenständige Umsetzung der Inhalte im Schulkontext zu ermöglichen. Kapitel 2 erläutert die Definitionen des Klimas und des Wetters sowie von atmosphärischen Prozessen (s. Abschnitt 2.1), gibt einen geschichtlichen Rückblick auf die Erforschung des Klimawandels und stellt in diesem Zug den Weltklimarat vor (s. Abschnitt 2.2). Zudem präsentiert es die für spätere Analysen benötigten Daten (s. Abschnitt 2.3). Zusätzlich liefert es physikalisches Basiswissen zur meteorologisch wirksamen Strahlung (s. Abschnitt 2.4).

Die Lerneinheiten bauen auf dem Prinzip der mathematischen Modellierung auf. Dabei legt Kapitel 3 den theoriegeleiteten Grundstein der mathematischen Modellierung mit Schülerinnen und Schülern unter Einsatz digitaler Werkzeuge. Der Abschnitt 3.1 definiert Grundbegriffe der mathematischen Modellierung. Dabei stellt er den Modellierungsprozess vor, der sich durch iterativ wiederholende Schritte auszeichnet. Daraus leiten sich Fähigkeiten und Fertigkeiten ab, die durch

das Modellieren (in der Schule) erlangt werden können. Die Kernkompetenzen, die Lehrkräfte für ein sicheres Modellieren mit Heranwachsenden benötigen, beschreibt Abschnitt 3.2. Daran anknüpfend präsentiert der Abschnitt 3.3 diverse Veranstaltungsformate für Lernende und Lehrende im Modellierungsprogramm CAMMP. In den Veranstaltungen wird das Lehr- und Lernmaterial angewandt. Das Konzept bestehender Lehrerfortbildungen greift Themen dieser Arbeit auf. Lehrkräfte erfahren die jeweiligen Kompetenzen unter Einsatz des in Teil II vorgestellten Materials und eignen sich die Fertigkeiten an. Es schließt sich eine Anleitung und Unterweisung zum Umgang mit dem digitalen Lernmaterial an, das auf einer online-Plattform zur Verfügung steht (vgl. Abschnitt 3.4).

Der II. Teil der Arbeit beschreibt das erstellte Lernmaterial, und er ist entsprechend der didaktisch aufbereiteten Fragestellungen gegliedert. Verschiedene Stellen der mathematischen und insbesondere der didaktischen Ausarbeitungen in diesem Teil der Arbeit greifen die in Teil I vorgestellten Kenntnisse auf bzw. setzen sie als bekannt voraus.

Die Kapitel wiederum folgen dem gleichen Aufbau. Allen Fragestellungen ist gemein, dass sie auf Hochschulmathematik zurückgreifen. Die Arbeit präsentiert innovative Ideen, um die Fragestellungen dennoch für Jugendliche zugänglich und dabei schülergerecht zu gestalten. Lernende sollen aktiv und selbstständig problemorientiert Mathematik nutzen, um reale Probleme zu lösen. So widmet sich Kapitel 5 der didaktisch-methodischen Umsetzung der Frage, ob es den Klimawandel wirklich gibt und ob dieser signifikant ist. Mit dieser Problemstellung geht die trendbezogene Zeitreihenanalyse einher. Zunächst ordnet die Arbeit Letztere in einen allgemeinen sowie einen schulischen Kontext ein und legt anschließend die für die Bearbeitung des Problems benötigte Mathematik dar. Das Ziel der Aufbereitung der mathematischen Inhalte besteht darin, Lehrpersonen einen selbstständigen Einstieg in die Materie sowie den Umgang damit zu ermöglichen. Umfangreiche und abschreckende Recherchen entfallen. Während in Abschnitt 5.1 die Theorie der trendbezogenen Zeitreihenanalyse im Fokus steht, erfolgt anschließend in Abschnitt 5.2 die Anwendung auf echte Zeitreihendaten. Die didaktische Reduktion, die eine Aufbereitung und Umsetzungsmöglichkeiten mit Schülerinnen und Schülern umfasst, vermittelt Abschnitt 5.3. Abschließend erfolgt eine Reflexion der Lernmaterialien und deren Einsatz mit Schülerinnen und Schülern sowie Lehrpersonen.

Das darauf folgende Kapitel wendet sich der Frage zu, ob die erlebten Klimarekorde durch den Zufall erklärbar sind. Dieser Fragestellung liegt mathematisch eine ereignisbezogene Zeitreihenanalyse zugrunde (s. Kapitel 6). Das Kapitel beginnt mit einer Aufbereitung der benötigten mathematischen Inhalte (s. Abschnitt 6.1). Es folgt die Anwendung der Inhalte auf reale Temperaturdaten (s. Abschnitt 6.2), die anschließend im Abschnitt 6.3 didaktisch reduziert wird. Die Lernmaterialien werden vorgestellt und mit didaktischen Hinweisen ergänzt. Erfahrungen mit dem Einsatz des Materials in Veranstaltungen mit Schülerinnen und Schülern sind Gegenstand von Abschnitt 6.4. Im Kapitel 7 steht die Analyse der dritten Fragestellung, ob der Klimawandel menschengemacht ist, im Fokus. Die Modellierung bildet den Energiehaushalt der Erde ab, was sich mathematisch durch partielle Integro-Differentialgleichungen, nämlich der Strahlungstransportgleichung, ausdrücken lässt. Eine Einführung in diese Gleichungen präsentiert Abschnitt 7.1. Zusätzlich stellt die Arbeit Lösungsmethoden vor, die sich besonders für den Einsatz mit Schülerinnen und Schülern eignen. Eine umfassende Darstellung von Herangehensweisen an Strahlungstransportgleichungen erfolgt nicht, da diese über die notwendigen Sachkenntnisse zum Verständnis und zur Betreuung des Lehrmaterials hinausginge. Anschließend erfolgt die konkrete Anwendung auf den Energiehaushalt der Erde (s. Abschnitt 7.2). Die didaktische Reduktion in Abschnitt 7.3 zeigt eine Aufbereitung

der Fragestellung für Schülerinnen und Schüler in Form einer offenen Modellierungsaufgabe und stellt einen möglichen Lösungsweg inklusive didaktischer Anmerkungen zur Betreuung vor. Der aufgezeigte Lösungsweg basiert auf einer echten Schülerlösung, die Lernende im Rahmen einer Modellierungswoche erforschten. Die Untersuchung der Auswirkungen verschiedener Einflussfaktoren auf den Energiehaushalt der Erde geschieht bewusst innerhalb der didaktischen Analyse, um eine Dopplung mit dem Abschnitt der Anwendung zu vermeiden. So liegt das zentrale Augenmerk auf den Ansätzen und Ideen, die bereits Schülerinnen und Schüler der Oberstufe umsetzen können.

Modellierungsaufgaben sind Teil des Kernlehrplans und sollen damit in den Schulunterricht integriert werden. Vor diesem Hintergrund greift der letzte Teil dieser Arbeit die Fragestellung auf, wie viele Menschen auf der Erde leben können, sodass sie genügend Platz und Nahrung zum Leben haben. Diese Problemstellung dient dazu, die Kenntnisse und Fähigkeiten von Schülerinnen und Schülern im mathematischen Modellieren empirisch zu untersuchen (s. Teil III). Zunächst legt Abschnitt 8.2 verschiedene Forschungsfragen dar, die es in den darauf folgenden Abschnitten zu untersuchen gilt. Gegenstand des Abschnitts 8.3 ist das Forschungsdesign der empirischen Studie. Auf die Forderung, Modellierungsaufgaben in den Unterricht einzubinden, folgt zwangsläufig der Ruf der objektiven Bewertbarkeit solcher Aufgaben. Daher unterbreitet die Arbeit ein mögliches Bewertungsschema, das Gutachterinnen und Gutachter zur Bewertung der Schülerlösungen einsetzen (s. Abschnitt 8.4). Durch die Beurteilung gleicher Lösungen von verschiedenen Gutachtern lässt sich die Reliabilität überprüfen. Daraus leitet sich ab, ob das Beurteilungskonzept prinzipiell für den Einsatz in der Schule in Frage kommt. Es schließt sich ein Überblick zur Durchführung der Studie an (s. Abschnitt 8.6). Abschließend werden die Ergebnisse präsentiert und zur Beantwortung der Forschungsfragen genutzt (s. Abschnitt 8.7). Im Vordergrund dieses Teils steht damit – im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln – nicht die Vorstellung von Lernmaterialien zu dieser Modellierungsaufgabe, deren Lösungsmöglichkeiten oder die Betreuung. Vielmehr liegt das Augenmerk auf dem Erkenntnisgewinn über den aktuellen Wissensstand der Lernenden über mathematische Modellierung und über deren Fertigkeiten, eine mathematische Modellierungsaufgabe zu lösen.

Die Hauptteile dieser Arbeit stehen für sich alleine. Um eine gedankliche Nähe zu wahren, schließen sie jeweils mit einem eigenen Fazit und Ausblick ab. Die Schlussbemerkungen in Kapitel 9 fassen die Ergebnisse von einem höheren Standpunkt aus zusammen und stellen die verbindenden Elemente in den Vordergrund.

Damit richtet sich diese Arbeit insbesondere an Lehrpersonen und angehende Lehrkräfte, die mathematische Modellierung in den Bildungsraum Schule integrieren wollen und dabei an dem aktuellen, authentischen und für ihre Lernenden relevanten Kontext der Klimaforschung interessiert sind. Zusätzlich liefert diese Arbeit erste Ansätze, Lehrkräften ein Hilfsmittel zur Bewertung von Modellierungsaufgaben an die Hand zu geben. Darüber hinaus bietet die Arbeit Studierenden die Möglichkeit, die im Studium häufig abstrakt bleibende Mathematik in einem Anwendungskontext zu erleben. Lehramtsstudierende können bereits frühzeitig in die mathematische Modellierung einsteigen und didaktische Reduktionen höherer Mathematik erfahren. So möchte diese Arbeit einen Beitrag dazu leisten, mathematische Modellierung in die Schule zu bringen.

## **Teil I**

# **Thematisches Hintergrundwissen**



# Vorbemerkung zum thematischen Hintergrundwissen

Der folgende Teil dieser Arbeit führt thematisches Hintergrundwissen auf. Er stellt anwendungsbezogenes Wissen bereit, das sowohl den Aspekt der Klimaforschung als auch den der mathematischen Modellierung umfasst (vgl. Kapitel 2 und Kapitel 3). Verschiedene Stellen der mathematischen und insbesondere der didaktischen Ausarbeitungen im Teil II knüpfen an die hier vorgestellten Kenntnisse an bzw. setzen sie als bekannt voraus.

Die Fragestellungen, die diese Dissertation darlegt und mathematisch-didaktisch aufbereitet, entstammen alle der anwendungsorientierten Forschung und greifen die hoch aktuelle Thematik des Klimawandels auf (vgl. Kapitel 2). Die in dieser Arbeit vorgestellten Lehr- und Lernmaterialien zielen darauf ab, in der Forschung tatsächlich angewandte Methoden für Schülerinnen und Schüler authentisch abzubilden und zugänglich zu machen. Daher ist es notwendig, über die Mathematik hinausgehendes Wissen bereitzustellen. Die Bildung von Lehrkräften in thematischem Hintergrundwissen stellt eine notwendige Voraussetzung für die eigenständige Umsetzung der Inhalte im Schulkontext dar. Etwaige Hürden durch fehlendes Wissen und Unsicherheiten bilden für Lehrkörper eine Hürde, die durch besondere Schulungen und adäquates Material überwunden werden kann.

Die Lerneinheiten sind nach dem Prinzip der mathematischen Modellierung aufgebaut. Die mathematische Modellierung mit Schülerinnen und Schülern bildet somit das Fundament dieser Arbeit und wird in Kapitel 3 theoriegeleitet vorgestellt. Das Kapitel definiert den Begriff der mathematischen Modellierung. Zusätzlich stellt es den Modellierungsprozess vor, der sich durch sich iterativ wiederholende Schritte auszeichnet. Daraus leiten sich Fähigkeiten und Fertigkeiten ab, die durch das Modellieren (in der Schule) erlangt werden können. Bestehende Lehrerfortbildungen, die durch Mitarbeitende des Programms *Computational and Mathematical Modeling Program* (CAMMP, vgl. Abschnitt 3.3) durchgeführt werden, greifen Themen dieser Arbeit auf. Lehrkräfte erfahren die jeweiligen Kompetenzen unter Einsatz des in Teil II vorgestellten Materials und eignen sich die Fertigkeiten an.



# 2

## Das Klima

### 2.1 Ein allgemeiner Einstieg in das Klimasystem der Erde

Aufzeichnungen des Wetters in Deutschland zeigen, dass es in den letzten Jahren häufig sehr warme und trockene Sommer und milde Winter gab: Kalte Temperaturextreme gehen zurück, während gleichzeitig ein Anstieg warmer Temperaturextreme beobachtet wird (vgl. Deutscher Wetterdienst, 2019; Umweltbundesamt, 2019). Lassen sich daraus bereits Rückschlüsse auf die Entwicklung des Klimas ziehen? Und können ursächliche Effekte für diesen Trend ausfindig gemacht werden? Um sich diesen Fragen widmen zu können, bedarf es eines Verständnisses des Begriffs *Klima*.

Der allgemeine Sprachgebrauch unterscheidet nicht immer sauber zwischen Klima und Wetter. Erst seit der medialen Aufmerksamkeit ist häufig von Klima – insbesondere vom Klimawandel – die Rede (vgl. Lindner und Schuster, 2018; Mast, 2019). Dieser Wandel scheint ursächlich für extreme Wetterlagen zu sein (vgl. Coumou und Rahmstorf, 2012; Fischer, 2021). Gemein haben beide Begriffe, dass sie einen Zustand der Atmosphäre beschreiben. Die *Atmosphäre* bildet die Lufthülle der Erde, abgeleitet aus dem Altgriechischen *atomós* (zu deutsch: Dampf, Dunst) und *sphaira* (zu deutsch: Kugel). So drückt sich der atmosphärische Zustand durch Größen wie die Lufttemperatur, den Luftdruck, die Luftdichte, die Luftfeuchtigkeit oder den dreidimensionalen Wind aus. Unterschiede ergeben sich jedoch in den betrachteten Zeiträumen und Regionen.

Unter dem Begriff *Wetter* versteht die Meteorologie den „Zustand der Atmosphäre über einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit“ (s. Kraus, 2004, S. 11). Beispielsweise betrachtet das Wetter die Atmosphäre über Deutschland oder gar einer Region in Deutschland an einem Tag oder in einer Stunde. Der Anwendung dieser Definition begegnet man im Allgemeinen beim (täglichen) Wetterbericht: Der Deutsche Wetterdienst (DWD) informiert über die in Deutschland lokal zu erwartende Temperatur und Niederschlagsmenge, sowie über die Windstärke und -richtung für die nächsten Tage. Diese Größen können sich räumlich und zeitlich schnell verändern: In Karlsruhe scheint die Sonne, während es zur selben Zeit in Aachen regnet. Eine halbe Stunde später kann es auch umgekehrt sein.

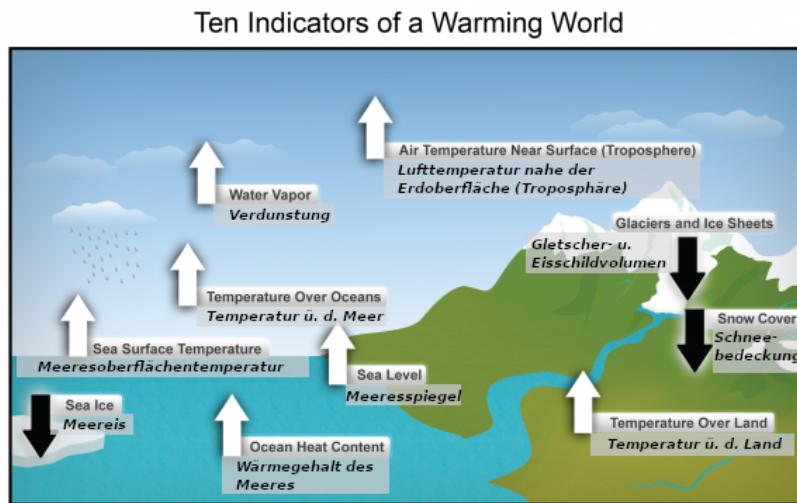
Zwischen den Begriffen Wetter und Klima macht die Meteorologie weitere Abstufungen. So beschreibt die *Witterung* den „Zustand der Atmosphäre über einem bestimmten Ort, [zum Beispiel in Karlsruhe,] welcher charakteristisch für ein kürzeres Zeitintervall von zum Beispiel einigen Tagen, einer Woche, einem Monat bis zu einer Jahreszeit ist“ (s. Kraus, 2004, S. 11). Solche charakteristischen Zustände werden durch statistische Größen für das entsprechende Zeitintervall gebildet, und sie betreffen eine atmosphärische Zustandsgröße. Zum Beispiel beschreibt die durchschnittliche Tageshöchsttemperatur, die im Juni 2021 in Karlsruhe gemessen wurde, die Witterung vor Ort. Bezieht man den atmosphärischen Zustand nicht auf einen größeren Zeitraum, sondern auf ein größeres Gebiet, so spricht die Meteorologie von *Großwetter*. Die betrachteten Zeitintervalle umfassen meist nur wenige Tage. Die räumlichen Gebiete sind größer und enthalten atmosphärische Zustandsinformationen beispielsweise über ganz Mitteleuropa (vgl. Kraus, 2004, S. 11).

Der Begriff *Klima* umfasst langfristige durchschnittliche atmosphärische Zustände, die global gemessen werden. Betrachtet man die Definition genauer, so ergeben sich folgende Eigenschaften des Klimas:

- Die Meteorologie spricht bei Zeitspannen von mindestens 30 Jahren von *langfristigen* Zeiträumen. Für die Abbildung des Klimas reicht es also nicht aus, atmosphärische Zustandsgrößen der letzten zehn Jahre zu untersuchen.
- Als *zeitlich durchschnittliche Prozesse* versteht man minütliche oder tägliche Aufzeichnungen, die zu gemittelten Werten über einen längeren Zeitraum, wie beispielsweise Jahre oder sogar Jahrzehnte, zusammengefasst werden. Temperaturschwankungen einzelner Tage, aber auch jahreszeitliche Änderungen, sind für langfristige Klimauntersuchungen von untergeordneter Bedeutung. Eine Mittelung der Werte kann deren Einfluss abmildern.
- An vielen Orten auf der gesamten Erde beobachten und dokumentieren Meteorologen die atmosphärischen Zustände. Mithilfe eines Modells fassen sie diese vielen lokalen Messwerte zu einem globalen Messwert zusammen. Man spricht hier von *räumlich gemittelten Prozessen*.

Das Klima variiert auf zeitlich und räumlich langfristigen Skalen. So zeigt die paläoklimatologische Forschung Schwankungen der globalen Mitteltemperatur der letzten Millionen Jahren zwischen 9 °C und 16 °C (vgl. Umweltbundesamt, 2014, 2021). Ursachen dieser über Millionen Jahre andauernden Änderungen lassen sich auf Variationen *geoastrophysikalischer Parameter*, wie beispielsweise der Solarkonstanten oder den Erdbahnparametern, der *Erdoberfläche* durch Kontinentaldrift oder der Landnutzung, sowie auf Änderungen des Stoffhaushaltes der Atmosphäre zurückführen. Letztere ergeben sich durch Schwankungen in den Anteilen an Treibhausgasen, wie Kohlenstoffdioxid (CO<sub>2</sub>), Methan (CH<sub>4</sub>), Lachgas (N<sub>2</sub>O), wasserstoffhaltige Fluorkohlenwasserstoffe (HFKW), perfluorierte Kohlenwasserstoffe (FKW), Schwefelhexafluorid (SF<sub>6</sub>) und Stickstofftrifluorid (NF<sub>3</sub>) (vgl. Umweltbundesamt, 2014, 2021).

Während sich das Wetter, die Witterung und das Großwetter auf Zustände der Atmosphäre konzentrieren, wird auf den Zeitskalen des Klimas die Interaktion der Atmosphäre mit anderen „Sphären“ relevant. Beispielsweise spielt sich die Aufnahme von CO<sub>2</sub> im Meer in Zeiträumen von Jahren ab. Sie wird also erst dann wichtig, wenn solche Zeiträume betrachtet werden. Auf deutlich kleineren Zeiträumen kann der aktuelle CO<sub>2</sub>-Wert in der Luft als konstant angenommen werden. Das Klimasystem umfasst daher neben der Atmosphäre auch die *Hydrosphäre*, die das Wasser auf der Erde beschreibt, also vor allem die Ozeane, Flüsse und Seen, die *Kryosphäre*, die das Eis der Erde und somit vor allem die großen kontinentalen Eisschilde der Antarktis und Grönlands, das Schelfeis, das Meereis, die Gletscher und den Schnee umfasst, die *Biosphäre*, die alle pflanzlichen und tierischen



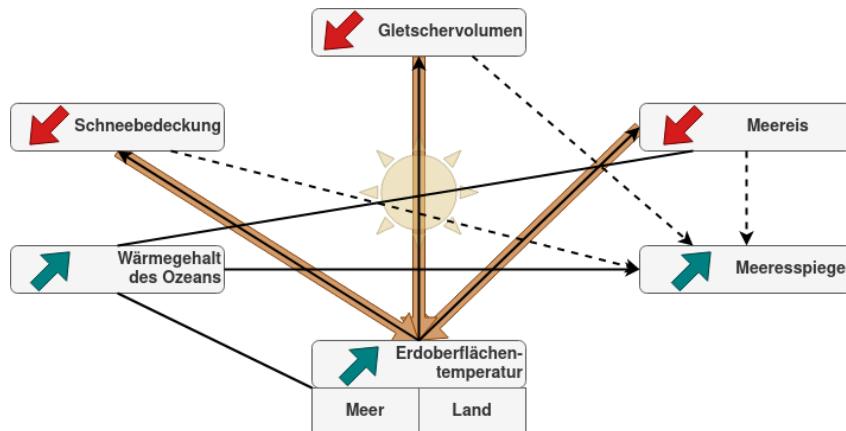
**Abbildung 2.1:** Durch den IPCC ausgezeichnete Klimaindikatoren und deren Änderungsrichtung innerhalb eines sich erwärmenden Klimas (vgl. NOAA NCDC, 2014, S. 7; basierend auf von Kennedy et al. (2010) aktualisierten Daten; unter Ergänzung der deutschen Übersetzung)

Lebewesen und den Menschen einschließt, und die *Lithosphäre*, die aus der festen Erde, vor allem den Landoberflächen, besteht (vgl. Kraus, 2004, S. 12).

Berichte des Weltklimarats Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) geben verschiedene messbare Größen (sogenannte Klimaindikatoren) an, anhand derer sich Klimaänderungen beobachten lassen. Dazu zählen unter anderem die Erdoberflächentemperatur, der Meeresspiegel und das Gletschervolumen. Die Entwicklungen dieser Größen entscheidet über die Änderung des Klimas. Wie sich die jeweiligen Größen in einem sich erwärmenden globalen Klima verhalten, zeigt Abbildung 2.1.

Die vielen verschiedenen Zustandsgrößen des Klimas (Temperatur, Niederschlag, ...) bedingen sich gegenseitig und befinden sich in ständiger Wechselwirkung miteinander. Dabei kann eine rasche Änderung in einer Größe Änderungen anderer Größen hervorrufen. Teilweise vollziehen sich diese sekundären Änderungen jedoch deutlich langsamer als die ursächlichen Änderungen oder sie treten erst mit großer Verzögerung ein. Die Zeitskalen, in denen diese Wechselwirkungen ablaufen, sind sehr unterschiedlich. Beispielhaft sei hier folgendes Szenario skizziert und in der Abbildung 2.2 veranschaulicht: Steigt die globale Erdoberflächentemperatur (rasche Änderung), so schmelzen Gletscher, Schneebedeckungen und das Meereis (langsame direkte Änderung, durchgehende Pfeile). Diese Änderungen offenbaren sich jedoch erst Jahre oder gar Jahrzehnte später einerseits zum Beispiel über Satellitenbilder, aber auch im Meeresspiegelanstieg (verzögerte sekundäre Änderung, gestrichelte Pfeile). Außerdem führt das Schmelzen von Schneeflächen insbesondere über dem Meer zu einer geringeren Reflexion des Sonnenlichts. Dadurch erwärmt sich die Erde: Die globale Erdoberflächentemperatur steigt (rasche Änderung, breite Pfeile). Ursache und Wirkung sind nicht immer eindeutig voneinander zu unterscheiden, was eine große Herausforderung in der Erforschung des Klimas darstellt.

Ein weiteres Problem der Klimaforschung besteht darin, dass viele Größen erst seit sehr kurzer Zeit relativ genau messbar sind. Dieser Umstand verlangt eine Rekonstruktion von weit in die



**Abbildung 2.2:** Beispielhafte Wechselwirkungen ausgewählter Klimaindikatoren, wobei der Anstieg der globalen Erdoberflächentemperatur als ursächlich angenommen wird. Direkte Folgen, wie beispielsweise das Sinken der Schneedeckung, des Gletschervolumens und des Meereises, sind durch → gekennzeichnet, sekundäre Folgen entsprechend mithilfe von ←. Die breiten gelben Pfeile symbolisieren Folgen, die unter Einwirkung der solaren Strahlung erzeugt werden. Eine ungerichtete Linie (—) steht für einen parallelen Effekt, bei dem nicht zwischen Ursache und Wirkung unterschieden werden kann.

Vergangenheit zurückreichenden Zeitreihen der Klimagrößen. Solche Rekonstruktionen benötigen ihrerseits wieder geeignete Modelle. Klimaforscherinnen und -forscher überführen aufgezeichnete Daten der Klimaindikatoren in ein Modell, das die Vergangenheit widerspiegelt, aber auch Prognosen unseres zukünftigen Klimas zulässt.

Damit wird auf den ersten Blick deutlich, dass das Klima ein sehr komplexes System ist, das ganz unterschiedliche Wissenschaftsbereiche integriert und miteinander verbindet. Es braucht Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler verschiedener Disziplinen, um ein ganzheitliches Abbild des Klimas zu schaffen. Daher kann und will diese Arbeit keinen Anspruch auf eine allumfassende Betrachtung des Klimasystems erheben. Vielmehr soll sie anhand ausgewählter Beispiele verdeutlichen, dass zum einen mathematische Betrachtungen einzelner Zustandsgrößen eine quantitative Beschreibung ermöglichen – was in Wissenschaftskreisen vermutlich kaum jemand bezweifelt – und zum anderen diese mathematischen Analysen keine abstrakte Theorie sind, sondern sich bereits von Heranwachsenden auf der Basis von Schulmathematik eigenständig aktiv entdecken lassen. Auf Letzterem liegt das Hauptaugenmerk und der Schwerpunkt dieser Dissertation.

Diese Arbeit betrachtet vereinfachend die Erdoberflächentemperatur. Dadurch ergeben sich in vielerlei Hinsicht Vorteile gegenüber anderen Zustandsgrößen: Die Erdoberflächentemperatur ist gut messbar, und sie ist bereits über einen langen Zeitraum dokumentiert und bietet damit eine gute Grundlage für statistische Analysen. Des Weiteren ist die Erdoberflächentemperatur eine atmosphärische Zustandsgröße, die einer breiteren Öffentlichkeit bekannt ist. Jede und jeder kommt alltäglich mit ihr in Berührung und erkundigt sich nach deren aktuellen Werten. Sie ist damit leicht begreifbar, was die Erfassung eines solch sonst sehr vielschichtigen Themas begünstigt. Diese vereinfachende Reduktion auf die Erdoberflächentemperatur erweist sich als eine reine Modellvereinfachung, die keine Fehler einführt. Sie ist legitim, da einerseits eine Berücksichtigung aller Indikatoren den Rahmen sprengen würde. Andererseits lassen sich die hier vorgestellten mathematischen Methoden auf Messreihen anderer Größen übertragen, was eine Erweiterung des Modells erlaubt. Allerdings sind dabei möglicherweise nicht-lineare Zusammenhänge zu

berücksichtigen, sodass das Modell entsprechend angepasst werden muss. Die Vereinfachung beschränkt die Aussagekraft des Modells in Bezug auf die Realität: Nur unter Einbeziehung aller genannten Klimakomponenten entsteht ein umfassendes und aussagekräftiges Klimamodell.

## 2.2 Rückblick auf Erforschungen des Klimawandels und das Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC)

Auch wenn das Thema des Klimawandels eine neumodische Erscheinung sein mag, so reichen seine Wurzeln bis ins 19. Jahrhundert zurück. Laut Aussage des Umweltbundesamtes erläuterte Jean-Baptiste Fourier im Jahr 1824, wie Spurengase in der Atmosphäre das Klima erwärmen (vgl. Umweltbundesamt, 2014). Svante Arrhenius berechnete im Jahr 1896, dass eine Verdopplung des Kohlenstoffdioxidgehalts der Atmosphäre zu einer Temperaturerhöhung um vier bis sechs Grad Celsius führen würde. Bereits 1933 beschrieb Kincer ungewöhnliche Erwärmungstrends, woraufhin Callendar im Jahr 1938 vermutete, dass diese Trends mit einer erhöhten Kohlenstoffdioxidkonzentration in der Atmosphäre in Verbindung stehen. Hermann Flohn diskutierte 1941 den menschengemachten Klimawandel, indem er die globale Klimawirkung von durch den Menschen verursachten erhöhten Kohlenstoffdioxidkonzentrationen in der Atmosphäre analysierte. Erste Belege, dass die Konzentration des CO<sub>2</sub> wirklich steigt, lassen sich auf die Jahre 1957 – 1958 datieren. 1979 fand die erste Weltklimakonferenz statt (vgl. Umweltbundesamt, 2014).

Die Gründung des Weltklimarats *Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC)* erfolgte im Jahr 1988 vom Umweltprogramm der Vereinten Nationen *United Nations Environment Programme (UNEP)* und der Weltorganisation für Meteorologie *World Meteorological Organization (WMO)*. Die Aufgabe des IPCC besteht darin, eine „umfassende Überprüfung und Empfehlungen in Bezug auf den Wissensstand der Wissenschaft über den Klimawandel, die sozialen und wirtschaftlichen Auswirkungen des Klimawandels sowie potenzielle Reaktionsstrategien und Elemente zur Aufnahme in ein mögliches zukünftiges internationales Klimaabkommen zu erarbeiten“ (s. IPCC, 2021a).

Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler weltweit, die auf den Gebieten der Klima- und Meeresforschung, Ökonomie, Gesundheit und Statistik arbeiten, tragen ihre Ergebnisse aus diversen Studien zum Klima in den Berichten zusammen. Dabei sammeln sie die neuesten Erkenntnisse zum Klimawandel, der Verwundbarkeit von sozioökonomischen und natürlichen Systemen gegenüber dem Klimawandel und dessen Folgen sowie mögliche politische und technologische Handlungsoptionen zur Abschwächung des Klimawandels.

So bilden die verschiedenen, etwa alle sechs Jahre erscheinenden Berichte, sowie die Methoden- und Sonderberichte und technischen Abhandlungen des IPCC wichtige Grundlagen, um Bewertungen des Klimageschehens auszusprechen, die von der *Klimarahmenkonvention der Vereinten Nationen (UNFCCC)*, Regierungen und internationalen Organisationen angefragt werden. Bereits der erste Bericht AR1<sup>1</sup> (1990), der die Bedeutung des Klimawandels als globale Herausforderung fokussierte, floss in die Schaffung des UNFCCC ein. Das Kyoto-Protokoll basiert auf dem zweiten Bericht AR2 (1995), das Post-Kyoto-Abkommen auf dem vierten Sachstandsbericht AR4 (2006). Der fünfte

---

<sup>1</sup>Die Sachstandsberichte (englisch: *assessment reports*) werden in der Literatur häufig abkürzend mit AR\* angegeben. Dabei steht \* stellvertretend für die Nummer des Berichts. Die Nummerierung der Berichte erfolgt aufsteigend beginnend mit eins.

Bericht AR5 (2013/2014) lieferte die wissenschaftlichen Hintergründe für das Pariser Abkommen. Während sich der AR4 auf die Begrenzung der Erderwärmung auf 2 °C konzentrierte, nahm der erste Sonderbericht (2019) die globale Erwärmung von 1.5 °C genauer unter die Lupe. Seitdem sind weitere Sonderberichte über Klimaänderungen und Land (SRCCL, 2019) und Ozean und Kryosphäre in einem sich ändernden Klima (SROCC, 2019) erschienen. Der nächste Sachstandsbericht AR6 erscheint voraussichtlich vollumfänglich im Jahr 2022. Aktuellen Meldungen zufolge präsentiert dieser verheerende Folgen, insbesondere für die Menschheit, bei einem Verfehlten des 1.5 °C-Ziels des Pariser Abkommens. Es steigen die Risiken für Hitzewellen, Überflutungen und Hungersnöte, Ökosysteme brechen zusammen, und es herrschen Wasser- und Lebensmittelknappheit. Außerdem nehmen Krankheiten und klimabedingtes Sterben zu. Zusätzlich untersucht der Bericht die Selbstverstärkung im Kippelement, sogenannte Kippunkte, „ab denen eine massive Beschleunigung des Klimawandels nicht mehr aufzuhalten ist – etwa durch das Schmelzen des Eisschildes in Grönland und der Westantarktis“ (s. Tagesschau, 2021; vgl. Focus, 2021; Merkur, 2021; taz, 2021).

Insbesondere der AR5<sup>2</sup>, sowie die Sonderberichte zur *Globalen Erwärmung von 1.5 °C und Klimawandel und Land* liefern eine Fülle an Hypothesen über das Klimageschehen, die sich zur selbstständigen Entdeckung durch Schülerinnen und Schülern gut eignen. So können junge Menschen auf der Basis eines sehr aktuellen und relevanten Themas an das wissenschaftliche Arbeiten herangeführt werden.

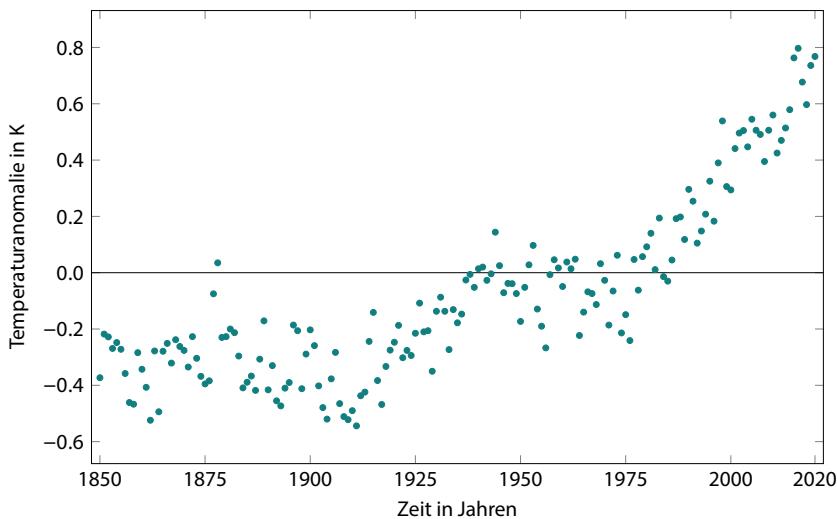
## 2.3 Eine Temperaturzeitreihe als Datengrundlage für Trend- und Rekordwertanalysen

Die Analysen und Prognosen, die die Berichte des IPCC zusammenfassen, gründen auf verschiedenen Temperaturzeitreihen und Szenarien und deren Vergleichen.

Diese Arbeit analysiert die Änderung der Erdoberflächentemperatur sowie damit zusammenhängender Rekorde mithilfe des Datensatzes *HadCRUT4* (vgl. Abbildung 2.3), den die Climatic Research Unit (University of East Anglia) in Kooperation mit dem Hadley Centre (UK Met Office) erstellte. Dieser Datensatz ist unter <https://crudata.uea.ac.uk/cru/data/temperature/> öffentlich zugänglich (vgl. Morice et al., 2012). Die Daten betreffen die durchschnittliche globale jährliche Erdoberflächentemperaturanomalie, die auf kombinierten Daten von Land- und Meeresoberflächentemperaturmessungen beruht. Die Temperaturanomalie definiert die Differenz zwischen gemessener Temperatur und einem Referenzwert. Der vorliegende Datensatz nutzt den gemittelten Temperaturwert der Jahre 1961 bis 1990 als Referenzwert. Dieser liegt bei etwa 14 °C. Der HadCRUT4-Datensatz reicht bis in das Jahr 1850 zurück. Der Erstellung der Daten liegt bereits ein Modell zugrunde, das alle im Verlaufe eines Jahres heutzutage an mehr als 5500 verschiedenen Wetterstationen erhobenen Messwerte zu einem globalen, jährlichen Temperaturwert zusammenfasst. Dabei werden die aufgezeichneten Messdaten der Landstationen zumeist von den nationalen meteorologischen Diensten gewonnen. Aktuelle Datensätze der Meeresoberflächentemperaturmessungen greifen auf meteorologische Daten zurück, die Schiffe und Bojen sammeln. Satellitenmessungen ergänzen diese Daten. Die Stationstemperaturmesswerte werden zunächst in eine Anomalie in Bezug auf die Durchschnittstemperatur von 1961 bis 1990 umgewandelt. Anschließend werden

---

<sup>2</sup>Im August 2021 ist ein Teil des sechsten und damit aktuellen Sachstandsberichtes erschienen, der jedoch keinen inhaltlichen Einfluss auf die Erstellung der Lehr- und Lernmaterialien hatte. Zukünftige Weiterentwicklungen des Materials greifen den aktuellen Stand der Forschung auf und orientieren sich am jüngsten Bericht.



**Abbildung 2.3:** Visualisierung der Temperaturanomaliedaten (HadCRUT4-Datensatz)

zu allen Gitterboxen, die wie ein Netz um die gesamte Erde gespannt sind, ein Mittelwert aller Stationsanomalien einer Zelle ermittelt (vgl. Morice et al., 2012). Dabei gilt es Unsicherheiten abzuschätzen, die sich beispielsweise aus der Genauigkeit der Thermometer, der Anzahl an verfügbaren Messungen, großräumigen Verzerrungen durch Verstädterungen oder einer unvollständigen globalen Messabdeckung ergeben. Die Vielzahl der unbekannten bzw. nicht exakt bestimmmbaren Faktoren offenbart, dass bereits der Ermittlung eines globalen Durchschnittsanomaliewertes ein komplexes Modell zugrunde liegt.

Die Berichte des Weltklimarats verlassen sich in der Analyse und Prognoserechnungen der Erdoberflächentemperatur nicht nur auf einen einzigen Datensatz. Die Forschungsergebnisse beruhen neben den beschriebenen HadCRUT4-Messdaten auf weiteren (vgl. Abbildung 5.2 und Tabelle 5.3). Die Nutzung verschiedener Datensätze ermöglicht einen Vergleich der den Messdaten zugrunde liegenden Modelle.

Klimaforschende geben Temperaturdifferenzen immer in Kelvin und nicht in Grad Celsius an. Damit ist auch die hier verwendete Temperaturanomalie eigentlich in Kelvin bestimmt. Da Kelvin und Grad Celsius jedoch die gleiche Metrik zugrunde liegt – 0 K entspricht  $-273.15^{\circ}\text{C}$  – verzichten die Lehr- und Lernmaterialien kürzeren Umfangs aus didaktischen Gründen auf die Einführung der Temperaturdaten in Kelvin und zeichnen die Temperaturanomaliedaten direkt in Grad Celsius aus (s. Kapitel 5 und 6). Die Einheit Grad Celsius ist den Lernenden häufig geläufiger. Eine kurze Anmerkung dazu kann aber mit Blick auf eine fächerübergreifende Verbindung zur Physik sinnvoll sein. Klimamodelle, die Schülerinnen und Schüler im Rahmen von Projektwochen erforschen, trainieren zwangsläufig den Umgang mit beiden Skalen, da einerseits die physikalischen Gesetze in SI-Einheiten formuliert sind und daher Kelvin genutzt wird. Andererseits fällt Schülerinnen und Schülern eine Interpretation der mathematischen Ergebnisse leichter, wenn diese in Grad Celsius angegeben sind. Die Heranwachsenden nehmen die Umrechnungen erfahrungsgemäß selbstständig vor und benötigen dabei keine Hilfe (s. Kapitel 7).

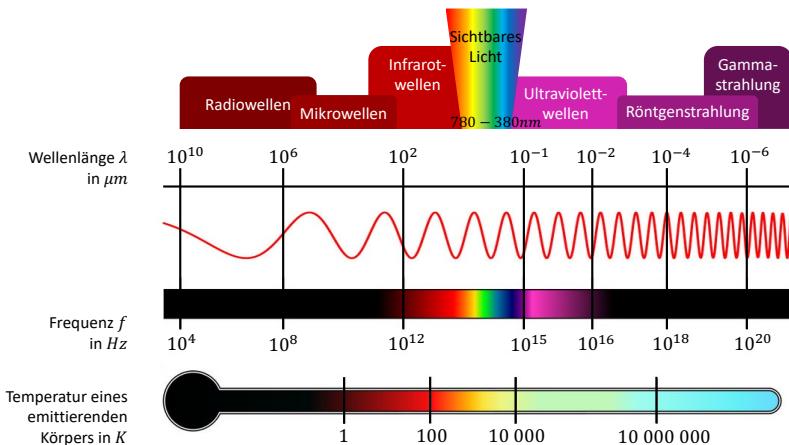
## 2.4 Physikalisches Hintergrundwissen zur meteorologisch wirksamen Strahlung

Der Einfluss natürlicher und anthropogener Ursachen verändert die Energiebilanz der Erde und damit die Temperatur auf der Erdoberfläche. Die Ursachen sind physikalische Treiber jeder Klimaveränderung. „Der Strahlungsantrieb quantifiziert die von diesen Treibern verursachte Störung der Energie des Erdsystems“ (s. IPCC, 2016, S. 44). Ist der Strahlungsantrieb positiv, so erwärmt sich die Erdoberfläche. Ist hingegen der Strahlungsantrieb negativ, so kühlt sie sich ab.

Der Austausch von Energie zwischen Körpern findet ausschließlich durch Strahlungsflüsse statt. Man spricht im allgemeinen von *elektromagnetischer Strahlung*. Sie „transportiert“ die Energie zwischen zwei Körpern und kann sich auch im Vakuum ausbreiten. Ihre Energie ist dabei durch die Wellenlänge und – im Vakuum – durch die Lichtgeschwindigkeit gegeben. Darüber hinaus lässt sich die *Strahlungsintensität*, auch *Strahlungsflussdichte* genannt, bestimmen. Sie charakterisiert die Energie, die pro Zeiteinheit durch einen bestimmten Querschnitt transportiert wird. Ihre Einheit ist damit  $\text{W/m}^2$ . Auf physikalischer Ebene wird die elektromagnetische Strahlung gleichermaßen durch die Eigenschaften von Wellen, sowie die von Teilchen beschrieben. Dieser Sachverhalt ist als Welle-Teilchen-Dualismus bekannt. Je nach Betrachtungsweise kann die elektromagnetische Strahlung als eine sich ausbreitende Welle oder als ein Teilchenstrom aufgefasst werden. Die Energie  $E$  der elektromagnetischen Strahlung ist von deren Wellenlänge  $\lambda$  bzw. Frequenz  $f$  abhängig und geht bei Ausbreitung im Vakuum nicht verloren. Bekannt ist diese Eigenschaft vor allem durch das elektromagnetische Spektrum (vgl. Abbildung 2.4). Das menschliche Auge kann Strahlung im Wellenlängenbereich vom sichtbaren Licht wahrnehmen und unterscheiden. Hierbei reicht der Wellenlängenbereich von etwa 380 nm (violett) bis zu etwa 780 nm (rot). Analog lässt sich der Frequenzbereich angeben. Um nicht zwischen verschiedenen Größen umrechnen zu müssen, beschränkt sich diese Arbeit darauf, die Energie der elektromagnetischen Strahlung über die zugehörige Wellenlänge auszudrücken. Licht kleinerer Wellenlängen wird in die ultraviolette Strahlung (UV), die Röntgenstrahlung oder die Gammastrahlung eingeteilt. Licht größerer Wellenlängen wird als Infrarotstrahlung (IR), Mikrowellen oder Radiowellen bezeichnet. UV-Strahlung verursacht beispielsweise Sonnenbrände, Röntgenstrahlung zeichnet sich durch den Einsatz in verschiedenen medizinischen Anwendungen aus, um „in“ einen Körper zu schauen. IR-Strahlung wird als Wärme wahrgenommen.

### 2.4.1 Emissionsspektren

Jeder Körper sendet in Abhängigkeit seiner eigenen Temperatur Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung aus. Die Strahlung ist nicht nur von einer einzigen Wellenlänge abhängig, sondern setzt sich aus einem Spektrum an Wellenlängen zusammen. Damit ergibt sich die Energieflussdichte als Integral über das gesamte Spektrum aller Wellenlängen. Strahlung unterschiedlicher Wellenlänge beeinflusst sich nicht gegenseitig. Wandlungen der Strahlung vollziehen sich nur bei Interaktion, wie etwa bei Absorption, Streuung oder Reflexion. Die Absorption drückt die Aufnahme von Strahlung bestimmter Wellenlängen durch einen Körper und die Umwandlung der Energie in eine andere Wellenlänge aus. Die Absorption sorgt somit für ein Abschwächen oder gar Auslöschen bestimmter Bereiche des Spektrums der einfallenden Strahlung. Man spricht von Reflexion, falls Strahlung von einem Körper zurückgeworfen, ohne dass sich deren Wellenlänge verändert. Strahlung, die durch kleine Partikel in verschiedene Richtungen abgelenkt wird, wird



**Abbildung 2.4:** Elektromagnetisches Spektrum in Abhängigkeit der Wellenlänge und der Frequenz (nicht maßstabsgetreue Bezeichnung der Bereiche). In Anlehnung an und unter Nutzung von Teilgraphiken der Temperatur-, Frequenz- und Wellendarstellung von Nielbock (2017).

gestreut. Sie ändert dabei ihre Wellenlänge nicht. Es wird die Rayleigh- und die Mie-Streuung unterschieden. Erstere vollzieht sich an kleinsten Partikeln, deren Durchmesser klein im Vergleich zur Wellenlänge der Strahlung ist. Die geringe Größe der Streuobjekte führt zu einer stärkeren Streuung von kurzwelligem Licht als langwelligem. Die Mie-Streuung findet an Partikeln statt, deren Durchmesser in etwa der Wellenlänge der Strahlung entspricht. Sie ist nahezu unabhängig von der Wellenlänge.

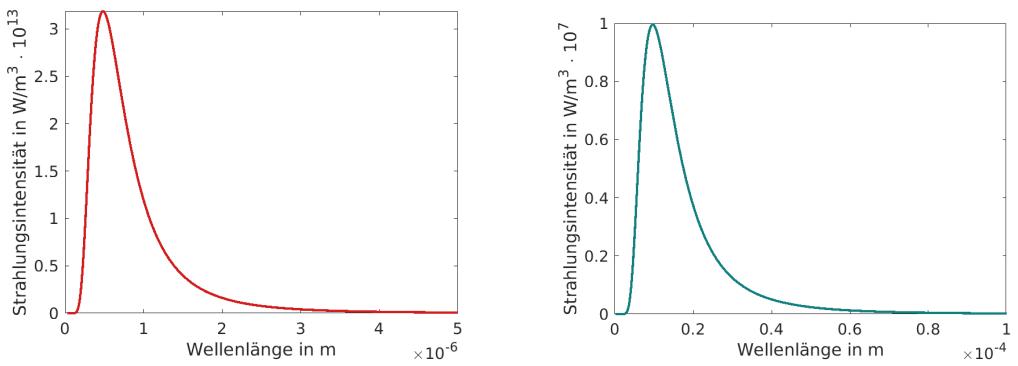
Für die Betrachtung der Energiebilanz der Erde sind folgende Körper von besonderem Interesse:

- die Sonnenoberfläche,
- die Erdoberfläche,
- die Atmosphäre, unterteilt in atmosphärische Gase, Wolken und Aerosole.

Es gilt dabei stets: Je höher die Temperatur des Körpers ist, desto größer ist die Intensität, mit welcher der Körper strahlt. Das Planck'sche Strahlungsgesetz beschreibt das Strahlungsspektrum eines Körpers (s. Gleichung 2.1).

Die Sonnenoberfläche hat eine Temperatur von etwa  $T = 6\,000 \text{ K}$ , womit sich das in den Abbildungen 2.5(a) und 2.6(a) (idealer schwarzer Körper) dargestellte kontinuierliche Spektrum ergibt. Das Maximum liegt dabei im Bereich des sichtbaren Lichts. Integriert man dieses solare Spektrum über alle Wellenlängen, so erhält man eine Strahlungsflussdichte von etwa  $1367 \text{ W/m}^2$  am Oberrand der Erdatmosphäre (vgl. 2.6(a), extraterrestrische Sonnenstrahlung). Diese Berechnung beinhaltet bereits die Abschwächung um den Faktor  $R_{\text{Sonne}}^2 / (\Delta x_{\text{Sonne-Erde}})^2 \approx 1/50000^3$ , die die Intensität auf dem Weg von der Sonne zur Erde hin erfährt. Die Strahlungsflussdichte schwankt genau genommen zeitlich. Sie hängt von der Sonnenaktivität, vom Abstand zwischen Sonne und Erde und der Neigung der Erde zur Sonne ab. Dennoch greift die Beschreibung häufig auf einen konstanten Wert zurück, der sich als ein langfristiger, bei einer durchschnittlichen Aktivität, einem mittlerem

<sup>3</sup>Hier wird ein mittlerer Abstand der Erde zur Sonne angenommen. Am weitesten liegt die Erde von der Sonne Anfang Juli entfernt. Dann beträgt der Abstand etwa  $152 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Der minimale Abstand von etwa  $147 \cdot 10^6 \text{ km}$  wird etwa Anfang Januar erreicht.



(a) (Ideales) Emittiertes solares Spektrum bei einer Temperatur von  $T = 6\,000\text{ K}$

(b) (Ideales) Emittiertes terrestrisches Spektrum bei einer Temperatur von  $T = 300\text{ K}$

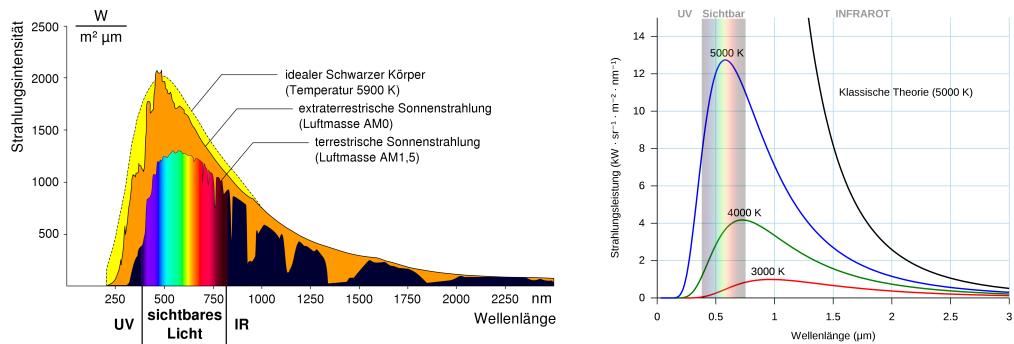
**Abbildung 2.5:** Kontinuierliche Emissionsspektren der Sonne und der Erde, die als ideale schwarze Körper angenommen werden, bestimmt nach dem Planck'schen Strahlungsgesetz

Abstand der Erde zur Sonne und ohne den Einfluss der Atmosphäre gebildeter Durchschnittswert ergibt. Daher findet man in der Literatur häufig den Begriff der *Solarkonstanten* für die solare Strahlungsflussdichte.

Die Erdoberfläche ist mit einer Temperatur von etwa  $T = 300\text{ K}$  deutlich kühler als die Sonnenoberfläche. Dementsprechend ist das von der Erde ausgesandte kontinuierliche Spektrum von niedrigerer Intensität, wie die Abbildung 2.5(b) im Vergleich zum solaren Spektrum in Abbildung 2.5(a) zeigt. Das Intensitätsmaximum wird im IR-Bereich erreicht. Einerseits bestimmen die Anteile der atmosphärischen Gase die Art der emittierten Strahlung der Atmosphäre. Dabei spielen Wechselwirkungen zwischen Energie und Gasmolekülen eine bedeutende Rolle, weshalb sich hier kein kontinuierliches Spektrum, sondern mehrere Bandspektren ergeben. „Die wichtigsten Strahler sind dabei die dreiatomigen Gase  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$  und  $\text{O}_3$ . Dagegen sind  $\text{N}_2$  und  $\text{O}_2$  wegen ihres Molekülaufbaus relativ unbedeutend“ (s. Kraus, 2004, S. 97). Andererseits strahlen in der Atmosphäre zusätzlich Wolken und Aerosole, jedoch mit einem kontinuierlichen Spektrum. Die atmosphärische Strahlung kann näherungsweise durch einen Bereich charakterisiert werden, der dem terrestrischen Spektrum entspricht.

## 2.4.2 Absorptionsspektren

Bislang wurde die Ausstrahlung (Emission) von Energie durch einen Körper betrachtet. Was passiert nun, wenn Strahlung auf einen Körper trifft? Ein Körper besteht im Prinzip aus vielen kleinen Oszillatoren, die durch einstrahlende Energie in Schwingung geraten. Die Energie wird dabei absorbiert. Ein Körper, der Strahlung jeglicher Wellenlänge vollständig absorbieren kann, wird *schwarzer Körper* genannt. Unter der Annahme, der Körper befände sich im thermischen Gleichgewicht, besagt das *Kirchhoff'sche Strahlungsgesetz*, dass die Absorption gleich der Emission des Körpers ist. Der *Absorptionsgrad  $a$* , auch *Absorptionsvermögen* genannt, setzt die absorbierte und die eingefallene Strahlungsenergie ins Verhältnis zueinander. Die Emission  $E$  eines Körpers steht in einem Verhältnis zu seinem Absorptionsvermögen, das materialunabhängig und gleich der



(a) Ideales emittiertes solares Spektrum (idealer schwarzer Körper), außerhalb der Atmosphäre gemessen (extraterrestrische Sonnenstrahlung) und nach Abschwächung durch die Atmosphäre gemessen (terrestrische Sonnenstrahlung)

(b) (Ideales) Emittiertes Spektrum von schwarzen Körpern unterschiedlicher Temperaturen (blau: 5000 K, grün: 4000 K, rot: 3000 K).

Abbildung 2.6: Emittierte kontinuierliche Spektren. a) s. Degreen, 2006; b) s. MikeRun, 2021.

Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers ist. Es gilt:

$$a = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{eingefallene Strahlungsenergie}},$$

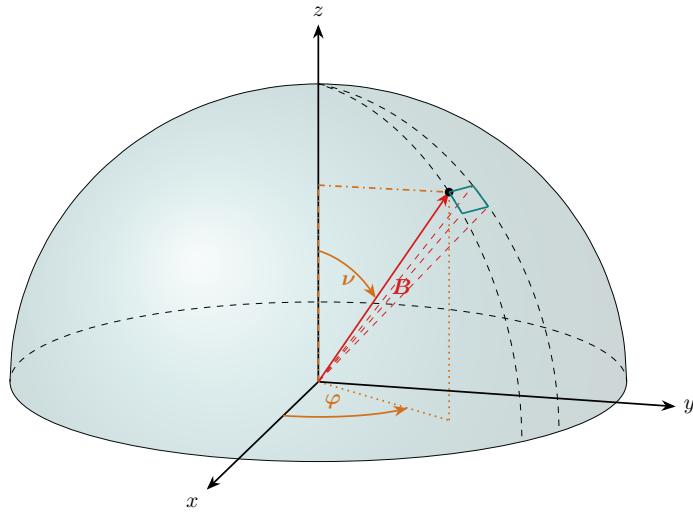
$$\frac{\text{Emission}}{\text{Absorptionsvermögen}} = \text{emittierte Strahlungsenergie eines schwarzen Strahlers}.$$

Ein idealer schwarzer Körper steht genau für den Grenzfall, dass eine perfekte Absorption auch zu einer perfekten Emission von Strahlung führt ( $\varepsilon = 1$ ). Das *Planck'sche Strahlungsgesetz* charakterisiert die (emittierte) Strahlungsflussdichte  $B_\lambda(\lambda, T)$  des schwarzen Körpers in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  und der Wellenlänge  $\lambda$ :

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{\partial B(\lambda, T)}{\partial \lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1}. \quad (2.1)$$

Dabei sind  $h \approx 6.6261 \cdot 10^{-34}$  Ws<sup>2</sup> das Planck'sche Wirkungsquantum,  $c \approx 2.9979 \cdot 10^8$  m/s die Lichtgeschwindigkeit und  $k \approx 1.3807 \cdot 10^{-23}$  Ws/K die Boltzmann-Konstante. Die oben beschriebenen und in der Abbildung 2.5 gezeigten Spektren der solaren und terrestrischen Strahlung beruhen genau auf der Annahme, dass die Sonne und die Erde jeweils einen schwarzen Körper darstellen. Die Abbildung 2.6(a) zeigt das von der Sonne emittierte Spektrum, wenn die Sonne ein idealer schwarzer Strahler wäre (gestrichelte schwarze Linie, gelb hinterlegt), darunter das gemessene extraterrestrische Spektrum (orange hinterlegt) und schließlich das Spektrum nach Absorptions- und Streuprozessen in der Erdatmosphäre.

Das Planck'sche Strahlungsgesetz gilt für Energie einer unpolarisierten Strahlung, die pro Zeit-, Flächen-, Raumwinkel- und Wellenlängen-Einheit in Normalenrichtung ausgeht. Häufig möchte man die Energie jedoch raumwinkelunabhängig und wellenlängenunabhängig bestimmen: Es interessiert die gesamte Strahlungsflussdichte, die ein (schwarzer) Körper pro Zeit- und Flächeneinheit emittiert.



**Abbildung 2.7:** Von einer Fläche in einen Halbraum ausgehende Strahlungsflussdichte  $B$

Die Integration des Planck'schen Strahlungsgesetzes über den Halbraum liefert die Raumwinkelunabhängigkeit (vgl. Abbildung 2.7). Man betrachte dabei eine von einer Fläche in Normalenrichtung ausgehende Strahlungsflussdichte  $B$ . Der Polarwinkel  $\nu$  ist in diesem Fall gleich null. Für alle Polarwinkel  $\nu \neq 0$  erscheint die Fläche, von der die Strahlungsflussdichte ausgeht, um  $\cos \nu$  verkleinert. Die in dem gesamten Halbraum emittierte Strahlung ist dann durch

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B \cos \nu d\Omega &= B \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \nu \cos \nu d\nu d\phi \\ &= B \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \nu \cos \nu d\phi d\nu \\ &= B \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \nu \cos \nu d\nu \\ &= 2\pi B \frac{1}{2} \sin^2 \nu \Big|_0^{\pi/2} = \pi B \end{aligned}$$

gegeben, wobei  $d\Omega$  das Raumwinkelement beschreibt.

Integriert man das Strahlungsgesetz (2.1) über alle Wellenlängen, erhält man die gesamte Strahlungsflussdichte. Es folgt

$$B = \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k\lambda T}) - 1} d\lambda.$$

Nutzt man die Substitutionsregel und setzt dabei  $s := \frac{hc}{k\lambda T}$ , so gelten  $\lambda = \frac{hc}{ksT}$  und  $d\lambda = -\frac{hc}{ks^2T} ds$ , dann folgt

$$\begin{aligned}
B &= - \int_0^\infty \frac{2hc^2 k^5 s^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{1}{\exp(s) - 1} \frac{hc}{ks^2 T} ds \\
&= -2 \frac{k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{s^3}{\exp(s) - 1} ds \\
&= -\frac{2k^4 \pi^4}{h^3 c^2 15} \cdot T^4.
\end{aligned}$$

Das Minuszeichen besagt dabei, dass diese Energie von dem Körper ausgestrahlt wird. Behält man die Raumwinkelunabhängigkeit bei, so ist die Strahlungsflussdichte, die über alle Wellenlängen in den Halbraum emittiert wird, durch

$$\pi B = -\frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \cdot T^4 =: -\sigma_{SB} T^4$$

gegeben. Es ist  $\sigma_{SB} \approx 5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$  die Stefan-Boltzmann-Konstante. Somit geht die gesamte Strahlungsflussdichte eines schwarzen Körpers mit der vierten Potenz der Temperatur des Körpers einher. Dieses Gesetz ist als *Stefan-Boltzmann-Gesetz* bekannt.

Diese Erkenntnisse sollen nun auf Körper angewandt werden, die nicht ideal schwarz sind. Der Körper absorbiert nun nicht mehr alle Wellenlängen gleichermaßen. Damit ist sein Absorptionsgrad  $a(\lambda)$  kleiner als eins. Das Kirchhoff'sche Gesetz erweitert das Planck'sche Strahlungsgesetz. Die Emission eines (beliebig schwarzen) Körpers lässt sich über

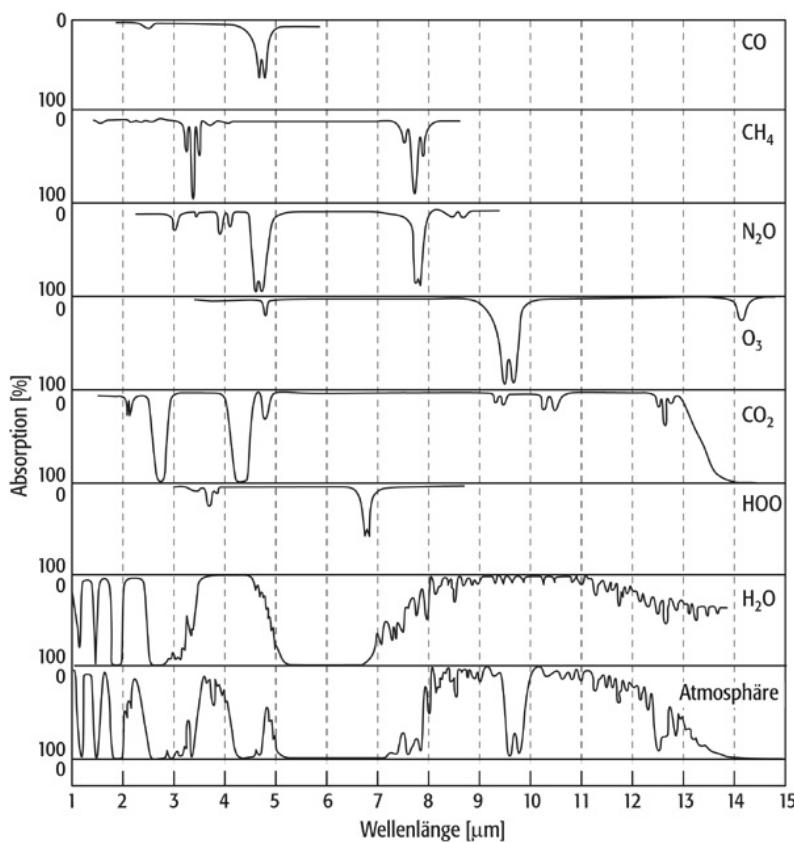
$$E_\lambda(\lambda, T) = a(\lambda) B_\lambda(\lambda, T)$$

bzw. raumwinkelunabhängig über

$$\pi E_\lambda(\lambda, T) = a(\lambda) \pi B_\lambda(\lambda, T)$$

bestimmen. Der Parameter  $a(\lambda)$  zeigt sich hier in Form eines *Emissionsvermögens* des Körpers. Er wird daher häufig auch als *Emissivität*  $\varepsilon(\lambda)$  bezeichnet.

Insbesondere bei der Betrachtung der Atmosphäre ist es wichtig, sich das Absorptionsvermögen anzuschauen. Die Abbildung 2.8 zeigt den Absorptionsgrad verschiedener atmosphärischer Gase in Abhängigkeit der Wellenlänge. Es wird deutlich, dass die Gase (aufgrund ihrer Molekülstruktur) nur Energien bestimmter Wellenlängen absorbieren. Für jedes Gas gibt es spezifische Wellenlängenbereiche, in denen es keine Strahlung (im Bereich von 1 bis 15  $\mu\text{m}$ ) absorbiert. Beispielsweise absorbiert CO<sub>2</sub> Strahlung mit einer Wellenlänge im Bereich von etwa 2.5 – 3  $\mu\text{m}$ , 4 – 4.5  $\mu\text{m}$  sowie 13.5 – 15  $\mu\text{m}$ , wobei es weitere Bereiche gibt, in denen eine schwächere Absorption stattfindet. Addiert man die verschiedenen Absorptionsspektren, so erhält man die Gesamtwirkung aller Gase, die in der letzten Zeile abgebildet ist. Auffällig sind nahezu absorptionsfreie Bereiche wie beispielsweise bei Wellenlängen von etwa 8 – 9.5  $\mu\text{m}$  und 10 – 12.5  $\mu\text{m}$ . Diese beiden Bereiche zusammen heißen *atmosphärisches Fenster*. Strahlung mit einer Wellenlänge in diesem Fenster gelangt ungehindert durch die Atmosphäre in den Weltraum. Dieses atmosphärische Fenster liegt im Infrarotbereich, wie ein Blick auf das elektromagnetische Spektrum zeigt (vgl. Abbildung 2.4). Vergleicht man das gesamte atmosphärische Absorptionsspektrum mit dem solaren und dem terrestrischen Emissionsspektrum, so erkennt man, dass vor allem Teile der von der Erde emittierten



**Abbildung 2.8:** Absorptionsspektren verschiedener atmosphärischer Gase (vgl. Armstrong et al., 2001; nach Valley, 1965)

Strahlung in der Atmosphäre aufgenommen werden. Hingegen gelangt die Sonnenstrahlung, die ihr Intensitätsmaximum bei etwa 500 nm hat, also im sichtbaren Lichtbereich, nahezu ungehindert durch die Atmosphäre. Diese Erkenntnis ist in den folgenden Abschnitten von enormer Bedeutung.

### 2.4.3 Reflexionsvermögen

Neben der Absorption und Emission beeinflusst ein weiterer Effekt den Strahlungshaushalt eines Körpers. Einfallende Strahlung, die ein Körper nicht aufnimmt, reflektiert er. Befindet sich ein undurchlässiger Körper im thermischen Gleichgewicht, so gilt damit nicht nur, dass die absorbierte und die emittierte Energie gleich groß sind, sondern darüber hinaus, dass sich die absorbierte und die reflektierte Energie zu der einfallenden Energie aufaddieren. „Das kurzwellige (im Wesentlichen im sichtbaren Spektralbereich) Reflexionsvermögen nennt man [die] Albedo“ (s. Kraus, 2004, S. 105ff). Die Albedo  $\alpha$  ist abhängig von der Oberfläche des bestrahlten Körpers (vgl. Abbildung 2.9). So hat beispielsweise Neuschnee eine sehr gute Albedo, wie der Leserin bzw. dem Leser möglicherweise aus dem Skiurlaub bekannt sein mag. Die Albedo von Neuschnee ist mit  $\alpha_{\text{Neuschnee}} = 75 - 90\%$  sehr hoch. Im Gegensatz dazu haben Meere und Seen, Asphalt oder dunkler Boden eine sehr geringe Albedo, die etwa bei  $\alpha_{\text{Meere, Seen, Asphalt, dunkler Boden}} = 5 - 20\%$  liegt. Die Tabelle 2.1 führt die Albedo verschiedener Oberflächen auf.

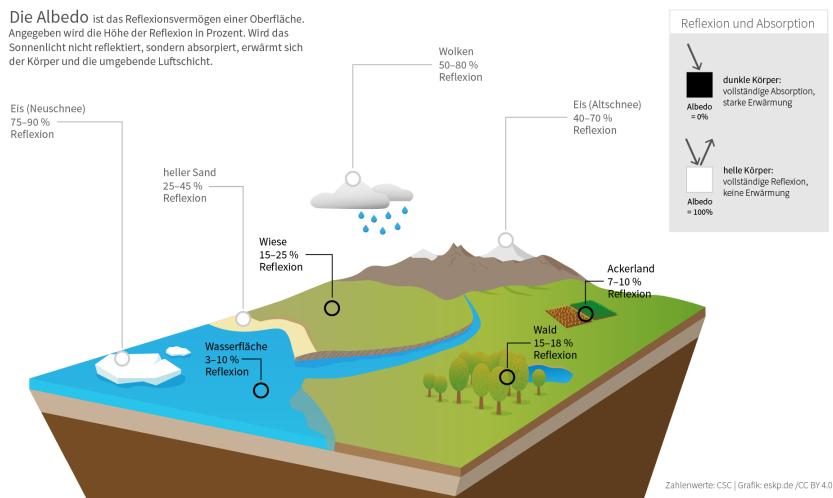


Abbildung 2.9: Albedo verschiedener Oberflächen (s. eskp.de – Wissensplattform, o. D.)

Tabelle 2.1: Albedo ausgewählter Oberflächen

Oberfläche	Albedo $\alpha$ in %
reiner Neuschnee <sup>1</sup>	75 – 90
reiner Nassschnee <sup>1</sup>	60 – 70
Altschnee <sup>1</sup>	40 – 70
reines Gletschereis <sup>1</sup>	30 – 45
unreines Gletschereis <sup>1</sup>	20 – 30
See-Eis <sup>1</sup>	30 – 40
Meer, Seen <sup>1</sup>	6 – 12
Wasserfläche (Neigungswinkel > 45 °) <sup>2</sup>	5
Wasserfläche (Neigungswinkel > 30 °) <sup>2</sup>	8
Wasserfläche (Neigungswinkel > 20 °) <sup>2</sup>	12
Wasserfläche (Neigungswinkel > 10 °) <sup>2</sup>	22
trockener Sand <sup>1</sup>	25 – 40
nasser Sand <sup>1</sup>	15 – 30
Wüste <sup>2</sup>	30
Savanne <sup>2</sup>	20 – 25
trockene Steppe <sup>1</sup>	20 – 30
Felsen <sup>1</sup>	10 – 40
Wiesen, Felder <sup>1</sup>	10 – 30
Rasen <sup>2</sup>	18 – 23
Wälder <sup>1</sup>	10 – 20
dunkler Boden <sup>1</sup>	5 – 10
Beton <sup>1</sup>	10 – 35
Asphalt <sup>1</sup>	5 – 20
Wolken <sup>2</sup>	60 – 90

<sup>1</sup> vgl. Kraus, 2004, S. 107

<sup>2</sup> vgl. Kasang, o. D.

## 2.4.4 Eine mathematische Beschreibung der Strahlung

Die allgemeine Strahlungstransportgleichung beschreibt die Bewegung von Teilchen, die mit Materie wechselwirken, also absorbiert oder gestreut werden. Sie betrachtet jedoch nicht einzelne Teilchenbewegungen, sondern die statistisch durchschnittliche Dichte von Teilchen in dem gesamten System. Interaktionen von Teilchen untereinander schließt die Betrachtung hier aus. Gesucht ist die Strahlungsverteilung, ausgedrückt durch  $\psi(\mathbf{x}, \Omega, E, t)$ , die von der Zeit  $t \in \mathbb{R}^+$ , der räumlichen Position  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$  und im Allgemeinen von der Bewegungsrichtung  $\Omega \in S_2$  abhängt. Die Größe  $\psi$  heißt *Intensität* und beschreibt die Strahlungsenergiedichte, die sich in eine bestimmte Richtung bewegt. Die Einheiten sind so gewählt, dass sich die Teilchen mit Einheitsgeschwindigkeit bewegen. Die Energie der Teilchen (Photonen) wird allgemein durch  $E = hc/\lambda$  ausgedrückt. Da eine Charakterisierung von elektromagnetischer Strahlung über die Wellenlänge im Alltag, aber auch im schulischen Kontext, geläufiger ist und  $h$  und  $c$  Naturkonstanten sind, gibt die hier verwendete Beschreibung die Intensität nicht in Abhängigkeit der Energie  $E$ , sondern der Wellenlänge  $\lambda$  an. Die Strahlungstransportgleichung ist im Allgemeinen dann durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda, t) + \Omega \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda, t) \\ &= -\sigma_t(\mathbf{x}, \lambda) \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda, t) + \frac{\sigma_s(\mathbf{x}, \lambda)}{4\pi} \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \Omega', \lambda, t) d\Omega' + \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_x, \lambda) + S \end{aligned} \quad (2.2)$$

gegeben. Dabei ist  $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$  die Summe des *Streuungs-* und *Absorptions-Wirkungsquerschnitts*, die auch als *Opazitäten* bezeichnet werden. Die Opazitäten sind vom Medium und damit vom Ort  $\mathbf{x}$  und der Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung  $\lambda$  abhängig. Einflüsse, die sich aus externen Strahlungsquellen ergeben, fasst der Parameter  $S$  zusammen. Die Größe  $B(T_x, \lambda)$  repräsentiert die Planck'sche Strahlungsgleichung, die durch Integration über die Raumwinkel und Wellenlängen durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz ausgedrückt wird (vgl. Abschnitt 2.4.2).

Die Gleichung

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = - \int_0^\infty \int_{4\pi} c \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) (B(T_x, \lambda) - \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda, t)) d\Omega d\lambda + Q_x$$

legt die Wechselwirkungen mit dem Hintergrundmaterial fest. Dabei sind  $u_x$  die im Hintergrund enthaltene Energie und  $T(\mathbf{x}, \lambda)$  die Temperatur des Hintergrundmaterials. Die Größe  $Q_x$  fasst externe Wärmequellen zusammen. Die Streuung wird als isotrop und elastisch angenommen. Isotrop bedeutet, dass die Streuung für alle Raumrichtungen gleich groß ist. Elastisch drückt aus, dass die Summe der kinetischen Energien vor und nach einem Stoß gleich groß ist. Der Term auf der linken Seite der Gleichung legt die zeitliche Änderungsrate der Energie im Hintergrundmaterial offen und entspricht anschaulich der zeitlichen Änderung zwischen absorbiertener und emittierter Strahlungsdichte.

In der Anwendung auf den Strahlungshaushalt der Erde vereinfachen sich die Strahlungstransportgleichungen. Das Modell vernachlässigt die physikalische Eigenschaft der Streuung; es folgt  $\sigma_s = 0$ . Darüber hinaus schließt die Anwendung Quellen im Raum aus, das heißt es gilt  $S = 0 = Q_x$ . Turbulenzen und latente Strahlung bleiben ebenso unberücksichtigt, da ansonsten das Modell horizontal ablaufende Prozesse berücksichtigen müsste. Darüber beschränkt sich das Modell auf ein stationäres System. Das bedeutet, dass die einfließende Strahlungsintensität genau der austretenden entspricht; die zeitliche Änderung der Intensität ist gleich null.

Unter den genannten Annahmen reduzieren sich die (gekoppelten) Strahlungstransportgleichungen auf

$$\Omega \cdot \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda) = \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda)(B(T_x, \lambda) - \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda)) \quad (2.3)$$

und

$$0 = - \int_0^\infty \int_{4\pi} c \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda)(B(T_x, \lambda) - \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda)) d\Omega d\lambda. \quad (2.4)$$

Für ein leichteres Verständnis der Gleichungen (2.3) und (2.4) greift man auf den Welle-Teilchen-Dualismus zurück. Dabei stellt man sich vor, ein Strom von Teilchen repräsentiere die Strahlung. Dann beschreiben die Strahlungstransportgleichungen die Ausbreitung dieser Teilchen. Jedes Teilchen befindet sich an einem Ort  $\mathbf{x}$ , bewegt sich in Richtung  $\Omega$  und besitzt eine Wellenlänge  $\lambda$ . Die Strahlungsdichte  $\psi$  gibt über die Anzahl an Teilchen der Wellenlänge  $\lambda$  Auskunft, die sich an einem Ort  $\mathbf{x}$  in Richtung  $\Omega$  bewegen. Der Advektionsterm  $\Omega \cdot \nabla_x \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda)$  verkörpert diese Teilchenströmung. Wechselwirken die Dichtepakete mit Materie, werden sie entweder absorbiert oder gestreut. Der Streuprozess ist kompliziert, da er die Bewegungsrichtung der Teilchen ändert. Ein Vernachlässigen dieses Prozesses führt zu einer vereinfachten Beschreibung. Die Opazität  $\sigma_a$  spielt die Rolle eines Absorptionskoeffizienten. Sie steuert die Wechselwirkungsstärke zwischen den Teilchen und den Hintergrundmaterialien. Offensichtlich sind diese Teilchen nach der Absorption nicht mehr Teil der ankommenden Dichtepakete. Der Term  $-\sigma_a \psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda)$  drückt diesen Teilchenverlust aus. Die Gesamtenergie der Teilchen geht jedoch nicht verloren. Materie, die mit Licht aller möglichen Wellenlängen wechselwirkt, nennt man einen *Schwarzkörper* (vgl. Abschnitt 2.4.2). Das Gesetz  $E_\lambda = a(\lambda)B(\lambda, T)$ , hergeleitet aus dem Planck'schen Strahlungsgesetz und dem Kirchhoff'schen Gesetz, charakterisiert die Emission von Strahlung durch einen Körper (vgl. Abschnitt 2.4.2). Insgesamt erweist sich die Erde als ein sehr guter schwarzer Körper und wechselwirkt mit Licht aller Wellenlängen. Im Gegensatz dazu stellt die Erdatmosphäre einen grauen Körper dar: Sie wechselwirkt nur mit bestimmten Wellenlängen des Lichts. Der Emissionsgrad quantifiziert die Güte eines Objekts, ein schwarzer Körper zu sein. Ein perfekter schwarzer Körper besitzt den Emissionsgrad  $\epsilon = 1$ . Diese Annahme gilt im weiteren Verlauf für die Erde. Die untere Grenze, ausgedrückt durch  $\epsilon = 0$ , repräsentiert den Fall, dass der Körper keinerlei Wechselwirkung mit Licht jeglicher Wellenlänge aufweist. Der Emissionsgrad der Atmosphäre liegt dazwischen. Das Wellenlängenspektrum des von einem Objekt emittierten Lichts hängt von der Temperatur  $T$  des Körpers ab. Zum Beispiel hat das von der Sonne emittierte Licht seine höchste Intensität im Bereich des sichtbaren Lichts. Die Erde hingegen strahlt Licht im Infrarotbereich ab, da sie viel kühler als die Sonne ist (vgl. Abschnitt 2.4.1). Die einfallende Strahlung ändert also ihr Gesicht. In diesem Fall greift man auf die Vorstellung zurück, dass die ausfallende Strahlung sich wie eine Welle vom Zentrum Erde in Richtung Weltall ausbreitet. Gleichung (2.4) verkörpert das Gleichgewicht zwischen der absorbierten und der emittierten Strahlungsmenge: Es geht über alle Richtungen und alle Wellenlängen hinweg keine Energie verloren. Diese Energie liegt entweder in Form einer Strahlungsflussdichte oder Wärmestrahlung vor.

## 2.5 Einordnung des Anwendungskontextes in den Schulunterricht

Die Erarbeitung mathematischer Inhalte in der Modellierung steht immer im Bezug zu einer realen Problemsituation. Die Inhalte greifen daher zwangsläufig verschiedene sowohl innermathematische als auch außermathematische Bereiche auf. Dadurch ergeben sich diverse Anknüpfungspunkte für einen fächerübergreifenden Unterricht. Der folgende Abschnitt ordnet die im Lernmaterial aufgegriffenen außermathematischen Inhalte in den schulischen Kontext ein. Ergänzend nimmt Abschnitt 4.2 eine Einordnung der Zeitreihenanalyse in den Mathematikunterricht vor. Neben inhaltlichen Anknüpfungspunkten an einzelne Fächer knüpft das Lernmaterial an die zentrale Leitperspektive *Bildung für nachhaltige Entwicklung* (BNE) an, die wiederum in den einzelnen Schulfächern ausformuliert ist. Allgemein heißt es dazu in den Bildungsplänen des Landes Baden-Württemberg:

„Bildung für nachhaltige Entwicklung befähigt Lernende, informierte Entscheidungen zu treffen und verantwortungsbewusst zum Schutz der Umwelt, für eine funktionierende Wirtschaft und eine gerechte Weltgesellschaft für aktuelle und zukünftige Generationen zu handeln. Dies betrifft vor allem die Beachtung der natürlichen Grenzen der Belastbarkeit des Erdsystems sowie den Umgang mit wachsenden sozialen und globalen Ungerechtigkeiten. Dies erfordert verantwortungsvoll eingesetzte Kreativität, intelligente Lösungen und Weitsicht. Nachhaltige Entwicklung setzt Lernprozesse voraus, die den erforderlichen mentalen und kulturellen Wandel befördern. Neben dem Erwerb von Wissen über (nicht-) nachhaltige Entwicklungen geht es insbesondere um folgende Kernanliegen: Bereitschaft zum Engagement und zur Verantwortungsübernahme, Umgang mit Risiken und Unsicherheit, Einfühlungsvermögen in Lebenslagen anderer Menschen und solide Urteilsbildung in Zukunftsfragen. Bildung für nachhaltige Entwicklung befähigt Schülerinnen und Schüler, als Konsumenten, im Beruf, durch zivilgesellschaftliches Engagement und politisches Handeln einen Beitrag zur nachhaltigen Entwicklung leisten zu können. Es geht daher nicht allein darum, auf die existenten Problemlagen reagieren zu können, sondern vor allem darum, vorausschauend mit Zukunft umzugehen sowie an innovativen Lebens- und Gesellschaftsentwürfen mitzuwirken, die einen zukunftsweisenden und verantwortlichen Übergang in eine nachhaltige Welt möglich machen“ (s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016a).

Die Lernmaterialien sind sowohl inner- wie auch außermathematisch reichhaltig und bieten damit die Möglichkeit, auch fächerübergreifende Projekte durchzuführen. Sie tangieren zusätzlich zu mathematischen Inhalten und Kompetenzen Themengebiete der Biologie, Ethik, Geographie, Naturwissenschaften & Technik (NwT) sowie der Physik und Gesellschaftslehre / Sozialwissenschaften. Darüber hinaus bietet sich auch der Einsatz der Materialien in Informatik an. Die folgenden Inhalte stellen Möglichkeiten für einen fächerübergreifenden Unterricht dar. Einige dieser Punkte sind in den didaktischen Ausarbeitungen ausgeführt, wie beispielsweise die *Auswahl und Auswertung von Daten*, andere sind als Vorschläge für Anknüpfungspunkte zu verstehen. Sie ermöglichen eine Be- trachtung des Themas aus unterschiedlichen Blickwinkeln und erlauben so einen interdisziplinären Schulunterricht.

- Einfluss des Menschen auf seine Umwelt und die Auswirkungen, Ökosysteme, Herkunft und Produktion der Nahrung, Nutzen und Risiken von Gentechnik (Biologie, Sek. I&II; s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016b, 2016i, S. 3/3f)

- Artensterben bei Tieren und Pflanzen (Biologie)
- Ressourcenschonender Umgang mit Stoffen, der sorgsame Umgang mit Energie, die Verantwortung gegenüber anderen Lebewesen sowie die Herstellung und Entsorgung technischer Produkte (Biologie, Naturphänomene und Technik (BNT), Sek. I&II; s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016c, 2016j, S. 3/3)
- Diskussion über Fragen der Gerechtigkeit, der Verantwortung und Freiheit; Erlangen von Urteilskompetenz und Handlungsmöglichkeiten; Teilhabe, Mitwirkung, Mitbestimmung, Demokratiefähigkeit und etwa Bedeutung und Gefährdung nachhaltiger Entwicklung sowohl im Nahbereich als auch in globaler Hinsicht (Ethik, Sek. I&II; s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016d, 2016k, S. 3/7)
- Förderung von Frieden und demokratischem Handeln; Bewältigung langfristiger Herausforderungen, etwa in der Umwelt-, Energie- und Wirtschaftspolitik; soziale und globale Ungleichheiten (Gemeinschaftskunde, Sek. II, s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016l, S. 3)
- Handlungskompetenz im System Mensch-Erde im Sinne einer nachhaltigen Entwicklung mit den damit verbundenen Kriterien, Werten, Normen, Mitwirkungs- und Teilhabemöglichkeiten (Geographie, Sek. I&II; s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016e, 2016m)
- Verständnis für die wachsende Bedeutung des Prinzips der nachhaltigen Entwicklung in soziokulturellen, ökologischen, ökonomischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fragestellungen; Erklärung des Zusammenhangs zwischen Bedürfnissen des Menschen und naturwissenschaftlichen wie technischen Entwicklungen; Verantwortungsbewusster Umgang mit Materialien und Energie; Abschätzen und Bewerten der Folgen der Wechselwirkungen eines technischen Systems mit Gesellschaft und Umwelt (Naturwissenschaft und Technik, Sek. I&II; s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016g, 2016o, S. 4/4)
- Wetter und Klima (Geographie)
- Grundgröße Temperatur (Jahrgangsstufen 5–6) und Umrechnung zwischen verschiedenen Einheiten der Temperatur (Jahrgangsstufen 9–10) (Physik)
- Strahlungsbilanzen (Physik)
- Denk- und Arbeitsweisen der Naturwissenschaften und der Technik (Physik, NWT)
- Auswahl und Auswertung von Daten (Physik)
- Einstieg in die (algorithmengeleitete) Programmierung (Variablen Deklaration, for-Schleifen, if-Abfragen) (Informatik)

Die Lernmaterialien bieten sich an, um bereits vorhandenes Wissen zum Thema Wetter und Klima, das beispielsweise durch Wetterbeobachtungen oder Verfolgen von aktuellem politischen Handeln erlangt wurde, zu vertiefen und kritisch durch die Augen der Mathematik zu reflektieren. Diese Reflexion versetzt Schülerinnen und Schüler in die Lage, darauf aufbauend Pressemeldungen zu weiteren klimabezogenen Aspekten auf deren Aussage hin zu untersuchen und objektiv zu bewerten. Durch den Einschub kleinerer programmiertechnischer Zusatzaufgaben kommen auch

programmierbegeisterte Heranwachsende auf ihre Kosten. Hinweise im Lernmaterial kennzeichnen diese Stellen.

In diesem Rahmen stellen die Materialien einen zentralen Baustein zur Umsetzung des gültigen Bildungsplans des Landes Baden-Württemberg dar. Sie folgen der fachlichen Leitperspektive und betonen sowohl inhaltsbezogene Kompetenzen jahrgangsstufenübergreifend als auch prozessbezogene Kompetenzen in einen anwendungsorientierten Zusammenhang ein. Dabei greifen sie eine sehr aktuelle Thematik des alltäglichen Lebens der Lernenden auf, die nicht nur aus mathematischer Sicht spannende Einblicke in einen verantwortungsvollen Umgang mit Daten sowie deren Analyse und Interpretation bietet. Das Lernmaterial umfasst in vollstem Maße Anforderungen, die in der Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) gefordert werden. Daneben sind Erweiterungen und Anknüpfungen an andere Fachgebiete kaum Grenzen gesetzt.

# 3

## Mathematische Modellierung unter Einsatz digitaler Werkzeuge

Mathematik ist Teil vieler Bereiche des alltäglichen Lebens in unserer Gesellschaft, in der Wissenschaft, Technik und Wirtschaft. Das Ziel der mathematischen Erziehung und Bildung umfasst ein Verständnis der Relevanz der Mathematik in der Welt, um so fundierte Beurteilungen und begründete Entscheidungen treffen zu können (vgl. OECD, 2021). Laut OECD sollen Schülerinnen und Schüler dazu befähigt werden, „Situationen mathematisch zu formulieren und Mathematik in vielfältigen Kontexten anzuwenden und zu interpretieren“ (s. OECD, 2021). Die Kontexte beziehen sich dabei auch auf berufliche, gesellschaftliche und wissenschaftliche Themenbereiche, in denen unter anderem Naturphänomene zu modellieren sind. Die verwendeten Testaufgaben greifen nicht nur inhaltliches Wissen und methodische Kompetenzen auf, die in der Lebenswelt von konstruktiven, engagierten und reflektierten Bürgerinnen und Bürgern erwartet werden, sondern setzen auch eine situationsbezogene und angemessene Verwendung von (digitalen) Werkzeugen voraus, genau wie es in Situationen in der zukünftigen Berufswelt der Fall wäre (vgl. OECD, 2021). Vor diesem Hintergrund definiert der Bildungsplan für Mathematik des Landes Baden-Württemberg zentrale kognitive Prozesse sowie die mit ihnen verbundenen Gegenstände, die für den Bildungsweg unverzichtbar sind. Danach sollen im schulischen Mathematikunterricht mathematische Inhalte mit prozessbezogenen Kompetenzen verknüpft vermittelt werden. Unter anderem betont der Bildungsplan die Kompetenz des Modellierens (s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016n, S. 13):

„Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten realitätsbezogene Fragestellungen, indem sie deren Struktur analysieren, sie [die Fragestellung] vereinfachen und Annahmen treffen. Sie übersetzen die Situation in ein mathematisches Modell, finden im mathematischen Modell ein Ergebnis und interpretieren es in der Realsituation. Sie überprüfen das Ergebnis im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit. Sie diskutieren die Tragweite von durch Modellierung gewonnenen Prognosen kritisch.“

Darüber hinaus sollen Lernende Hilfsmittel, wie beispielsweise den Taschenrechner und mathematische Software, sinnvoll und verständig zum Explorieren, Problemlösen und Modellieren einsetzen und die damit gewonnenen Ergebnisse kritisch prüfen können. Die Vermittlung der Kompetenz des

mathematischen Modellierens unter Einsatz digitaler Werkzeuge ist damit eine zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts (vgl. Kultusministerkonferenz, 2012).

An dieser Stelle knüpfen diverse Modellierungsprojekte an, die von außerschulischen Lernorten für Heranwachsende veranstaltet werden. Die mathematische Modellierung ist dabei häufig eng mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge verknüpft. Beispielsweise sind in Aachen und Karlsruhe das Programm *Computational and Mathematical Modeling Program* (CAMMP<sup>1</sup>), in Kaiserslautern das *Kompetenzzentrum für mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule* (KOMMS<sup>2</sup>) oder die Arbeitsgruppe *MATIS I*<sup>3</sup> der Goethe Universität Frankfurt am Main aktiv. Diese Projekte greifen solche relevanten Situationen aus der Lebenswelt der Lernenden, der Natur, Kultur Industrie und Wirtschaft auf, für deren Beschreibung und Verständnis Mathematik benötigt wird. Diese Gegebenheiten machen die Projektgruppen für Schülerinnen und Schüler zugänglich. Die Lernenden entwickeln die Mathematik dabei jeweils gemäß ihrer Notwendigkeit für die Problemstellung. Man spricht von einer problemorientierten Vorgehensweise, die sich in der ersten Winter'schen Grunderfahrungen widerspiegelt (vgl. Frank et al., im Druck; Winter, 1995).

Die Komplexität dieser Probleme macht eine Bearbeitung ohne den Einsatz digitaler Werkzeuge häufig unmöglich. Der Einsatz erleichtert zum Beispiel die Verarbeitung großer Datenmengen oder die Reduktion des Rechenaufwandes (vgl. Greefrath und Weitendorf, 2013). Die Möglichkeiten der Nutzung digitaler Werkzeuge im Unterricht wurden bereits vielfach erforscht (vgl. Barzel et al., 2005, S. 42 ff; Hirscher, 2002, S. 116 ff). Die dabei aufgedeckten Anwendungsmöglichkeiten zeigen ein vielfältiges Spektrum auf (vgl. Siller, 2013). Zusammenfassend heben Greefrath und Weitendorf (2013) die Bereiche des Experimentierens, Simulierens, Berechnens, Algebraisierens, Visualisierens, Kontrollierens und Recherchierens hervor. Auch bewegen sich die mathematischen Beschreibungen der abgebildeten (naturwissenschaftlichen) Phänomene oft auf Universitätsniveau. Damit stellt neben der Abbildung der Realität in die mathematische Sprache auch die Lösung innerhalb der Mathematik Schülerinnen und Schüler vor große Herausforderungen. Gerade vor dem Hintergrund der großen Bedeutung der mathematischen Modellierung nicht nur im Bildungsplan, sondern vor allem in der späteren Berufswelt gilt es daher, Möglichkeiten für Schulen, Lehrkräfte und Lernende aufzuzeigen, wie dennoch die Kompetenzen des mathematischen Modellierens erworben werden können.

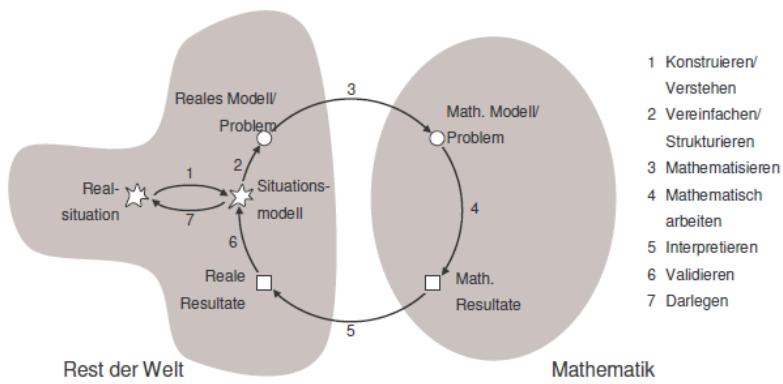
### 3.1 Mathematische Modellierung und der Modellierungskreislauf

Unter einem *Modell* versteht man in der Wissenschaft ein Objekt oder ein Gebilde, das die inneren Beziehungen und Funktionen abbildet bzw. schematisch veranschaulicht (vgl. Baer, 2001). Damit stellt ein Modell ein vereinfachtes, hier ein mathematisches Abbild der Realität dar, das nur bestimmte, einigermaßen objektivierbare Teilespekte berücksichtigt (vgl. Blum, 2007; Heiliö, 2016; Henn, 1998; IQB, 2009). Die *mathematische Modellierung* dient dazu, reale Probleme zu beschreiben, um sie zu lösen. Dabei stellt das Modell eine geeignete Repräsentation des Problems mithilfe mathematischer Konstrukte dar. Mathematische Konstrukte stellen Formeln, Gleichungen oder Algorithmen dar, die auf Basis der Realität entwickelt werden. Findet man zu diesem System eine Lösung, so hat

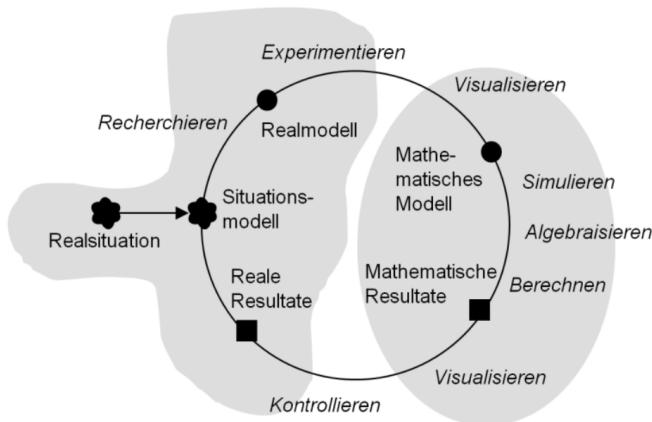
<sup>1</sup>Weitere Informationen sind zu finden unter: <https://www.cammp.online/>. Zugegriffen: 08. September 2021

<sup>2</sup>Weitere Informationen sind zu finden unter: <https://komms.uni-kl.de/>. Zugegriffen: 08. September 2021

<sup>3</sup>Weitere Informationen sind zu finden unter: <https://www.math.uni-frankfurt.de/~ludwig/arbeitsgruppe.html>. Zugegriffen: 08. September 2021



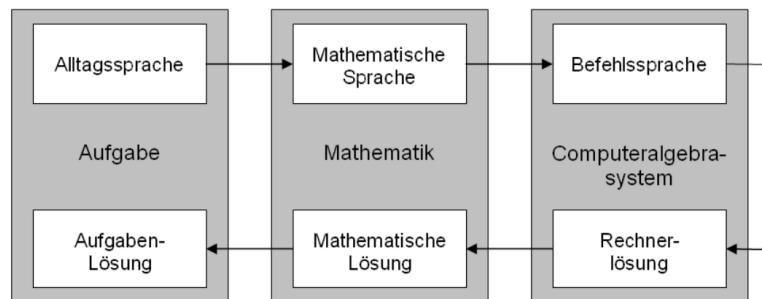
**Abbildung 3.1:** Idealer Modellierungskreislauf mit dem Ziel der empirischen Untersuchung von Modellierungskompetenzen nach Blum und Leiß (2005)



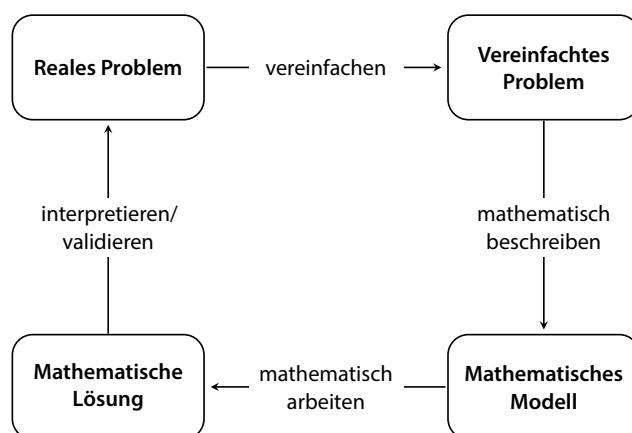
**Abbildung 3.2:** Idealer Modellierungskreislauf unter Einsatz digitaler Werkzeuge (s. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 184)

man auch eine Lösung für das ursprüngliche Problem gefunden. Reale Probleme sind häufig so komplex, dass sie zunächst durch Annahmen und Vereinfachungen reduziert und damit erfassbar und lösbar gemacht werden müssen. Weitere Einschränkungen ergeben sich häufig durch äußere Gegebenheiten, wie zum Beispiel durch mangelnde Ressourcen (Zeit, Arbeitskräfte, materielle Hilfsmittel), die zur Lösung des Problems zu Verfügung stehen. Nun gilt es, das reale Problem in die mathematische Sprache zu übersetzen und mathematisch zu lösen. Anschließend muss noch sichergestellt werden, dass die gefundene Lösung auch wirklich eine Lösung des ursprünglichen Problems ist. Kann dies verifiziert werden, so ist man fertig. In den meisten Fällen passt die Lösung aber noch nicht, und man muss entweder die Annahmen und Vereinfachungen oder sogar das Modell selbst überarbeiten. Diese iterative Vorgehensweise wird *Modellierungskreislauf* genannt (vgl. Engel, 2010, S. 9).

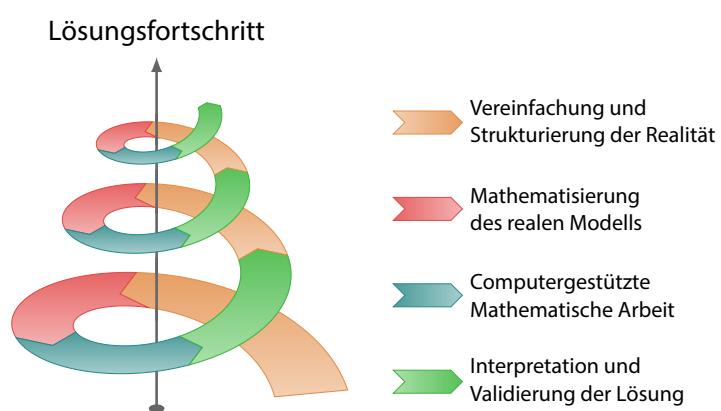
Der ideale Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005) besteht aus sieben linear (im Sinne von zyklisch) aufeinander folgenden Schritten (vgl. Abbildung 3.1). Meist springen die Modellierenden wiederholt zwischen Mathematik und Realität hin und her und durchlaufen mehrfach aktiv den Modellierungsprozess nicht-linear (vgl. IQB, 2009, S. 2ff). Weiterentwicklungen des



**Abbildung 3.3:** Übersetzungsprozesse beim Modellieren mit Computeralgebra systemen (s. Greefrath und Weitendorf, 2013, S. 184; Greefrath und Mühlenfeld, 2007; Savelbergh et al., 2008)



**Abbildung 3.4:** Modellierungskreislauf, der sich für den direkten Einsatz mit Schülerinnen und Schülern zur Erklärung des Modellierungsprozesses eignet, angelehnt an Blum (1985) (s. Frank et al., im Druck)



**Abbildung 3.5:** Modellierungsspirale nach Frank et al. (im Druck), angelehnt an die computergestützte Spirale, veröffentlicht durch computerbasedmath.org (o. D.)

Kreislaufs berücksichtigen unter anderem den Einsatz digitaler Werkzeuge (vgl. Abbildung 3.2). Blum und Leiß (2005) binden Arbeitsschritte, die der Computer übernimmt, in den idealisierenden Modellierungskreislauf ein. Diese Ergänzung des Kreislaufs betont, welche Schritte an digitale Rechensysteme ausgelagert werden können. Eine reduzierte Darstellung des computergestützten Modellierungskreislaufs beschränkt sich auf die Visualisierung der Übersetzungsprozesse (vgl. Abbildung 3.3). Solche detaillierten Beschreibungen des Modellierungsprozesses eignen sich insbesondere zur empirischen Erforschung kognitiver Fähigkeiten, die Schülerinnen und Schüler durch das Modellieren erwerben, oder um Hürden im Modellierungsprozess aufzudecken (vgl. Borromeo Ferri et al., 2013b). Um den Prozess für Schülerinnen und Schüler leicht zugänglich zu machen, ist eine Reduktion auf einen vierstufigen Kreislauf in Anlehnung an Blum (1985) nützlich (vgl. Abbildung 3.4). Dieser beschränkt sich auf die vier wesentlichen Schritte des Modellierens: das Vereinfachen und Strukturieren des realen Problems (Schritt *vereinfachen*), das Übersetzen des vereinfachten Problems in die mathematische Sprache (Schritt *mathematisch beschreiben*), das Nutzen mathematischer Methoden zur Lösung des mathematischen Modells (Schritt *mathematisch arbeiten*) und das Interpretieren und Validieren der mathematischen Lösung im Hinblick auf die ursprüngliche Realsituation (Schritt *interpretieren / validieren*). Eine Erklärung dieses Modells zu Beginn von Modellierungsveranstaltungen führt dazu, dass Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß während ihres Modellierungsprozesses darauf zurückgreifen, um ihre aktuelle Position in dem iterativen Prozess zu bestimmen und die nächsten Schritte zu planen. Genau diese Modellierungsschritte spiegelt die von der Kultusministerkonferenz ausgewiesene prozessbezogene Kompetenz des Modellierens wider (vgl. Kultusministerkonferenz, 2012). Ebenfalls eignet sich die sogenannte Modellierungsspirale zur Reflexion und Diskussion des Modellierungsprozesses auf der meta-kognitiven Ebene mit Schülerinnen und Schülern (vgl. Abbildung 3.5). Sie erweitert den vierstufigen Modellierungsprozess um eine weitere Dimension: Der iterative Prozess folgt einem sich der Lösung immer stärker annähernden Weg (vgl. Frank et al., 2018).

Nach VERA 8 ermöglichen Modellierungsaufgaben das Vermitteln von Kompetenzen und (heuristischen) Strategien, die zur Bewältigung und zum Verständnis mathematikhaltiger Umweltsituationen notwendig sind (vgl. IQB, 2009). Der Erwerb dieser verschiedenen Kompetenzen ist eng verbunden mit den Phasen des Modellierungsprozesses (vgl. Blum, 1996; Haines et al., 2001; Kaiser, 2007; Kaiser und Schwarz, 2010; Maaß, 2004). „Modellierungskompetenzen umfassen die Fähigkeiten und Fertigkeiten, Modellierungsprozesse zielgerichtet und angemessen durchführen zu können sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten in Handlungen umzusetzen“ (s. Maaß, 2004, S. 35). Obwohl die Wichtigkeit des Modellierens vielerorts betont wird, stellen nur wenige Aufgaben im Mathematikunterricht tatsächlich außermathematische oder inntermathematische Bezüge im Sinne des Modellierens her, wie unter anderem die COACTIV Studie unterstreicht (vgl. Blum, 2007; Brunner et al., 2006; Frank et al., im Druck; Jordan et al., 2008; Jordan et al., 2005).

Unter einer *mathematischen Modellierungsaufgabe* wird die Beschreibung und Abbildung einer außermathematischen, realen, relevanten und authentischen Erscheinung in der Welt verstanden (vgl. Frank et al., im Druck). Die eingesetzte Mathematik wird dabei nie um ihrer selbst willen betrieben, sondern problemorientiert angewandt. Ein *reales* Problem bildet ein in der Wirklichkeit echt vorkommendes Phänomen ab (vgl. Greefrath und Vorhölter, 2016; Vos, 2011). *Relevant* ist nach Maaß (2010) ein Problem, das entweder die Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler aufgreift oder zu dem die Lernenden wenigstens eine Beziehung oder Interesse für das Phänomen entwickeln können. Damit ist die Relevanz immer nur subjektiv beurteilbar und vom Modellierenden selbst und seiner individuellen Einstellung abhängig (vgl. Maaß, 2010). Ist das Problem für Experten relevant und setzen sie sich in ihrer Arbeit damit auseinander, so definiert Niss (1992) dieses als

ein *authentisches* Problem (vgl. auch Kaiser und Schwarz, 2010; Maaß, 2010). Darüber hinaus soll auch die zur Lösung des Problems eingesetzte Mathematik authentisch sein, also tatsächlich von Experten zur Lösung verwendet werden (vgl. Büchter und Leuders, 2006; Vos, 2011). Daher ist es kaum verwunderlich, dass über den Schulstoff hinausgehende Mathematik voneinander abweichen kann. Auf diesen Aspekt wird in der vorliegenden Arbeit Rücksicht genommen, indem die (höheren) mathematischen Inhalte, die zur Lösung der Fragestellungen erforderlich sind, für Lehrkräfte verständlich eingeführt, auf die Fragestellung angewandt und erst anschließend didaktisch reduziert werden. Ein weiteres Kriterium von Modellierungsaufgaben charakterisiert die *Offenheit* der Problemstellung, ausgedrückt durch eine vielfältige Lösungsmöglichkeiten (vgl. Büchter und Leuders, 2006; Greefrath und Siller, 2016). Während alle zuvor genannten Kriterien für die in dieser Arbeit präsentierten Fragestellungen uneingeschränkt gelten, wird die Lösungsvielfalt teilweise eingeschränkt. Diese Reduktion zeigt sich besonders im Workshop „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ und weniger stark im Workshop „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?“. Die Lernmaterialien des letztgenannten Workshops weisen auf Stellen hin, an denen Schülerinnen und Schüler ihre eigenen Wege verfolgen können. Die (stellenweise) Einschränkung der Lösungsvielfalt ist in beiden Workshops der begrenzten Zeit geschuldet, die den Teilnehmenden zur Bearbeitung zusteht. Vielfältige Lösungsmöglichkeiten ergeben sich hingegen im Lernmaterial zum Thema „Ist der Klimawandel menschengemacht?“. Daher bildet der in Abschnitt 7 vorgestellte Workshop lediglich eine mögliche Herangehensweise ab, wobei die Lernenden insbesondere die Vertiefungen selbstständig bestimmen und modellieren können. Ein noch stärkeres Öffnen solcher Modellierungsaufgaben auf Fälle, in denen kein Standardverfahren zum Lösen der Aufgabe angewandt werden kann, führt zu der Einordnung als Fermi-Aufgabe. Fermi-Aufgaben bilden komplexe Probleme, für deren Beantwortung keine oder nur unzureichend Angaben bereitgestellt werden. Die Lernenden sind gezwungen, eigenständig Vereinfachungen zu treffen, Daten zu erheben oder sich zu beschaffen, plausible Annahmen zu formulieren und benötigte Werte abzuschätzen und den Modellierungsprozess durchzuführen (vgl. Morherr und Lego, o. D.). Ebenso eignen sich Fermi-Aufgaben für eine „natürliche“ Differenzierung, indem sie unterschiedliche Zugänge ermöglicht (vgl. Bruder et al., 2015, S. 522; Maaß, 2007, S. 19). Die im Teil III vorgestellte Aufgabe entspricht damit den Kriterien von Modellierungsaufgaben in vollem Maße. Sie bietet sich daher besonders für die empirische Erforschung an, wie Heranwachsende unterschiedlicher Jahrgangsstufen den Modellierungsprozess durchlaufen und ob eine gerechte Beurteilung auf der Basis eines den Modellierungsprozess abbildenden Bewertungsschemas möglich ist.

Über die einleitende Beschreibung sind die Ziele des Modellierens festgelegt: Mathematisches Modellieren befähigt Schülerinnen und Schüler dazu, Erscheinungen der Welt wahrzunehmen, zu verstehen und mithilfe mathematischer Mittel auszudrücken (inhaltsorientiertes Ziel: Verständnis der Mathematik als Anwendung). Daneben erwerben Lernende Problemlösefähigkeiten, lernen heuristische Strategien und fördern ihre Kommunikations- und Argumentationsfähigkeiten. Studien zeigen, dass während der Modellierung angewandte Mathematik besser verstanden und länger behalten wird, und dass Modellierungsaufgaben darüber hinaus die Motivation und das Interesse von Heranwachsenden für Mathematik steigern können (vgl. Borromeo Ferri et al., 2013a). So kann Mathematik als kreatives und intellektuelles Handlungsfeld dienen (prozessbezogenes Ziel). Geht man von den drei Grunderfahrungen nach Winter (1995) aus, so kann der sonst methodisch-inhaltlich orientierte Mathematikunterricht durch die Ergänzung des Modellierens ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft vermitteln (allgemeines Ziel, vgl. auch Frank et al., im Druck).

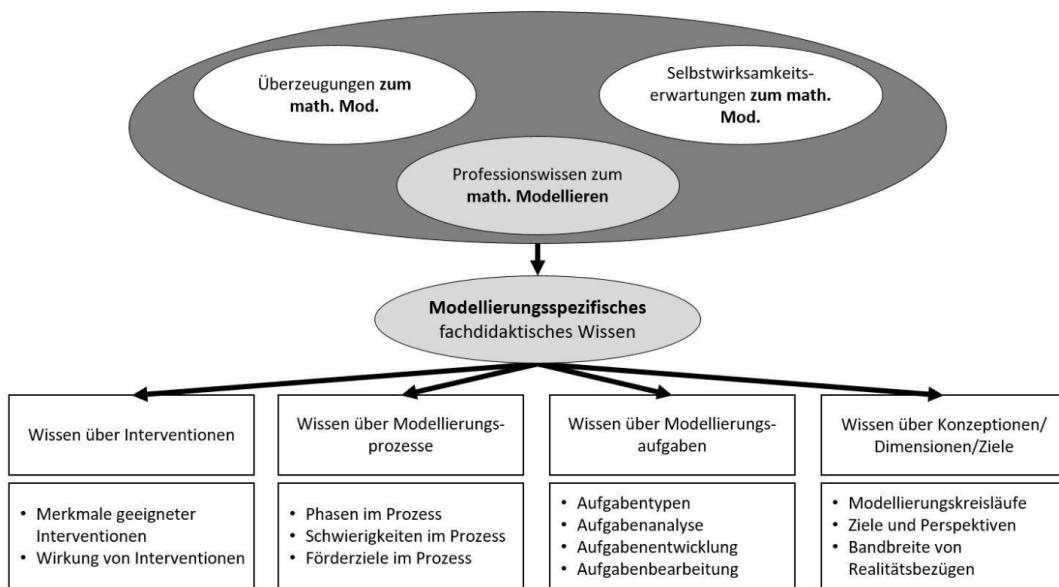
## 3.2 Lehrerkompetenzen bezüglich des mathematischen Modellierens

Obwohl mathematisches Modellieren einen wichtigen Stellenwert im Unterricht haben sollte, ist dieser Aspekt unterentwickelt. Blum (2007) nennt als Grund dafür, dass „Modellieren auch für Lehrkräfte schwer ist, der Unterricht hierdurch komplexer und weniger vorhersagbar wird, und es außermathematisches Sachwissen nötig ist“ (vgl. auch Blum, 1996; Burkhardt, 2004; Freudenthal, 1973; Pollak, 1979). Lehrkräfte geben auch fehlendes Material als Grund an. Zusätzlich berichten Lehrpersonen in Lehrerfortbildungen häufig von der Schwierigkeit, dass sie selbst nie oder nur in seltenen Fällen mit mathematischer Modellierung in Berührung gekommen sind. Das Unterrichten von mathematische Modellierung bringt damit neben den allgemeinen fachdidaktischen auch modellierungsspezifische Anforderungen an Lehrkräfte mit sich, die mitunter eine große Herausforderung darstellen (vgl. Blum, 2015). Umso wichtiger ist es, Lehrkräfte genau in diesen speziellen Themen fortzubilden.

Nach Borromeo Ferri et al. (2013a) sollten Lehrkräfte über verschiedene Kompetenzen verfügen, um erfolgreich mit jungen Menschen zu modellieren. Diese Fähigkeiten lassen sich vier allgemeingültigen unterrichtlichen Dimensionen zuordnen. Lehrkräfte sollten wissen, welche Ziele mathematische Modellierung im Unterricht verfolgt und den Sinn dahinter verstehen (theoretische Dimension). Abschnitt 3.1 stellt entsprechendes Hintergrundwissen zur Verfügung. Außerdem sollten Lehrpersonen die ebenfalls dort genannten Modellierungskompetenzen erwerben (aufgabenbezogene Dimension). Nur so sind sie überhaupt in der Lage, Modellierungsaufgaben zu erstellen, zu betreuen und die Schülerinnen und Schüler darin auszubilden. Zusätzlich benötigen Lehrkräfte eine Ausbildung in der Planung und Durchführung von realitätsbezogenem Unterricht und darin, wie Modellierungsaufgaben darin zum Einsatz kommen können (unterrichtsbezogene Dimension). Diese Arbeit stellt daher Modellierungsveranstaltungsformate und Möglichkeiten zur Einbettung des entwickelten Lernmaterials in der Schule anhand von Unterrichtsverlaufsplänen vor. Darüber hinaus ist für Lehrkräfte die Diagnosekompetenz wichtig. Sie müssen kognitive Hürden in Modellierungsaufgaben im Vorhinein erkennen, um Lernende entsprechend unterstützen zu können (diagnostische Dimension). Nach Blum (2007) stellt jeder Schritt im (siebenschrittigen) Modellierungskreislauf eine potentielle kognitive Hürde dar, die Heranwachsende überwinden müssen. Diese Kompetenz beinhaltet auch, geeignete Maßnahmen für Interventionen zu kennen. „Spontane Lehrerhilfen bei Schülerschwierigkeiten sind meist nicht adaptiv und minimal, im Allgemeinen geben Lehrkräfte inhaltliche statt *bloß* strategische Hilfen.“, bemängelt Blum (2007). Diverse empirische Studien untersuchten bereits geeignete Interventionen (vgl. Hattebuhr, 2014; Stender, 2016, 2018).

Über diese vier Dimensionen hinaus nimmt die Bewertung von Schülerlösungen einen wichtigen Teil der Lehrerarbeit ein. Es müssen Kriterien bekannt sein, auf deren Basis eine faire, objektive Begutachtung möglich ist. Gerade der letzte Punkt stellt in fachdidaktischen Diskussionen einen noch zu bewältigenden Punkt dar: Die jungen Modellierenden sollen ihre eigenen Lösungsideen möglichst frei verfolgen können. Im Gegensatz dazu muss eine Lehrkraft einen Maßstab zur Vergleichbarkeit offenlegen. Einen möglichen Ansatz dafür bietet das Bewertungsschema in Abschnitt 8.4. Diese bewertungsbezogene Dimension wurde eigenständig ergänzt.

Neben diesem Dimensionsmodell bildet das Strukturmodell nach Klock und Wess (o. D.) ebenfalls vier wesentliche Aspekte professioneller Kompetenzen zum Lehren von mathematischer Model-

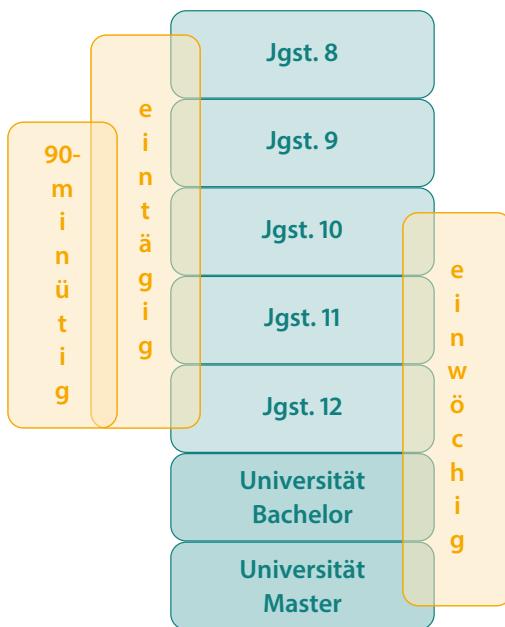


**Abbildung 3.6:** Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens (s. Klock und Wess, o. D. nach Klock et al., 2019; Wess et al., 2019)

lierung ab (vgl. Abbildung 3.6, Klock et al., 2019; Wess et al., 2019; Wess und Greefrath, 2019). Die Schwerpunkte sind jedoch anders ausgerichtet, da das Strukturmodell zur empirischen Erfassung von bereichsspezifischen professionellen Lehrerkompetenzen ausformuliert und für den Einsatz bei Mathematik-Lehramtsstudierenden entwickelt wurde. So findet sich insbesondere die unterrichtsbezogene Dimension darin nicht wieder, weshalb der Fokus in dieser Arbeit auf dem Dimensionsmodell liegen soll.

### 3.3 Mathematische Modellierung im Programm CAMMP

Bei dem *Computational And Mathematical Modelling Program*, abgekürzt CAMMP, handelt es sich um ein computergestütztes mathematisches Modellierungskonzept (vgl. Hattebuhr, 2014). Es wurde an der *Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen* (RWTH Aachen) im Jahr 2011 gegründet und ist dort seit 2013 als Schülerlabor anerkannt. Im Jahr 2018 erweiterte sich das Programm um einen Standort am *Karlsruher Institut für Technologie* (KIT). Wurzeln seiner Philosophie sind in der Arbeit von Neunzert zu finden. Sein Ziel war es, Schülerinnen und Schüler mithilfe von Projektwochen zur mathematischen Modellierung für technische und wirtschaftliche Fragestellungen zu begeistern. So erhalten Heranwachsende Einblicke in die Berufswelt der Mathematik, Informatik, Natur- und Ingenieurwissenschaften (vgl. Hattebuhr, 2014). Das Konzept der Verbindung mehrerer Interessenbausteine hat sich auch CAMMP zu eigen gemacht. In verschiedenen Veranstaltungsformaten erleben Lernende anhand realer, relevanter und authentischer Fragestellungen – oder kurz: mathematischer Modellierungsaufgaben – die gesellschaftliche Bedeutung von Mathematik. Sie steigen gemeinsam mit Lehrkräften aktiv in das Problemlösen ein, erkennen den Nutzen, den mathematische Modellierung und der Einsatz digitaler Werkzeuge dabei liefern, und sie erhalten so häufig einen ganz neuen Blick auf die Mathematik.



**Abbildung 3.7:** Veranstaltungsformate des Programm CAMMP für verschiedene Zielgruppen unter unterschiedlichen Rahmenbedingungen

### 3.3.1 Veranstaltungsformate für Schülerinnen und Schüler und ihre üblichen Abläufe

In allen Veranstaltungen schlüpfen Lernende in die Rolle einer Forscherin bzw. eines Forschers, erarbeiten sich ein Problem und durchlaufen dabei mehrfach den Modellierungskreislauf. Sie erleben aktiv das wesentliche Vorgehen bei der mathematischen Modellierung. Insgesamt lassen sich alle Herausforderungen nach Maaß (2010) in die Kategorie der authentischen – sowohl in Bezug auf die Fragestellung, als auch auf die angewandten Methoden – mathematischen Modellierung einordnen. Die eingesetzten Lernmaterialien richten sich an verschiedene Zielgruppen und variieren in den Rahmenbedingungen (vgl. Abbildung 3.7).

Einstiegen können Teenager ab der achten Jahrgangsstufe mit eintägigen Modellierungsveranstaltungen, den sogenannten *CAMMP days* (vgl. Frank et al., 2018; Sube, 2019; Wohak et al., 2021). Die Lernmaterialien sind dabei so vorbereitet, dass eine Bearbeitung innerhalb von etwa 5–6 Stunden ermöglicht wird. Die Modellierungstage finden häufig im Klassen- oder Kursverbund statt. Darüber hinaus bieten die Mitwirkenden von CAMMP etwa halbjährig sogenannte freie CAMMP days an, zu denen sich einzelne Schülerinnen und Schüler schulunabhängig anmelden können. Die Modellierungstage finden in der Regel in den Räumlichkeiten der Universitäten statt. Durch die vollständige Übersetzung des Lernmaterials in eine Cloud-Umgebung und die Nutzung von Videokonferenztools konnte das Angebot erweitert und für digitale Modellierungstage geöffnet werden (vgl. Hattebuhr und Schönbrodt, 2020; Schönbrodt et al., in Druck). (Lehramts-)Studierende oder wissenschaftliche Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter unterstützen die Heranwachsenden im Einstieg in die mathematische Modellierung. Dieser Zugang startet mit einem kurzen Einführungsvortrag durch eine wissenschaftliche Mitarbeiterin bzw. einen wissenschaftlichen Mitarbeiter, der ein Beispiel aus ihrer bzw. seiner eigenen Forschung vorstellt, in dem mathematische Modellierung zur Lösung verwendet wird. Dabei lernen die jungen Menschen den Modellierungskreislauf in der

viertschrittigen Form kennen (vgl. Abbildung 3.4) und erhalten wichtige strategische Tipps zur erfolgreichen Bewältigung der jeweiligen Schritte. Der Vortrag dauert etwa 20 Minuten. Anschließend steigen die Lernenden in die ausgewählte Problemstellung ein. Die Lehrkraft legt das Thema, teils in Absprachen mit der Klasse oder dem Kurs, vorab fest. Der Einstieg dient als Motivation der Fragestellung, die oft stark mit der Aktualität des Themas verknüpft ist. Außerdem werden dabei erste Vereinfachungen und Annahmen angesprochen. So entwickeln die Schülerinnen und Schüler in der sich anschließenden Arbeitsphase erst stark vereinfachte Modelle, die sie in späteren Iterationen verbessern oder erweitern. Besprechungsphasen im Plenum unterbrechen zeitweise diese Arbeitsphasen, in denen die Lernenden selbstständig arbeiten. Die Lerngruppe trägt wichtige Erkenntnisse zusammen, plant Modellerweiterungen oder führt abschließende Diskussionen. Die Lernmaterialien sind auf interaktiven Arbeitsblättern in der Oberfläche Jupyterlab<sup>4</sup> mit der Programmiersprache julia<sup>5</sup> realisiert und in sogenannten Jupyter-Notebooks gegliedert (vgl. Abschnitt 3.4.1). Sie strukturieren den Modellierungsprozess und enthalten Erklärungen, weiterführende Informationen, Tipps und Aufgabenstellungen. Die Struktur und Elemente des digitalen Lernmaterials werden ausführlich im Abschnitt 3.4.2 vorgestellt. Das digital umgesetzte Material eignet sich durch seine Differenzierungsmöglichkeiten (verschiedene Niveaus, Zusatzaufgaben, gestufte Hilfen, ...) und individuellen, automatischen Rückmeldungen zu den Lösungseingaben der Schülerinnen und Schüler besonders gut für ein heterogenes Lernklientel. Es ist online über einen Webbrowser auf einer Cloud-Plattform des KIT zugänglich und kann daher direkt sowohl im Präsenz- als auch Fernangebot eingesetzt werden (s. [www.cammp.online/214.php](http://www.cammp.online/214.php), zugegriffen: 08. September 2021). Das langfristige Ziel besteht darin, dass Lehrkräfte die Materialien direkt in ihren Unterricht integrieren. Daher gibt es unter anderem für den Workshop *Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant messbar?* eine Aufteilung in eine Doppelstundenstruktur (jeweils 90 Minuten). Damit steht Lehrpersonen ein Werkzeug zur direkten Umsetzung in einer Unterrichtsreihe zur Verfügung. Die Aufteilung ist bereits erfolgreich erprobt und im Anhang abgebildet (vgl. Anhang A.1). Insgesamt stehen mit den CAMMP days den Lehrkräften Materialien zur mathematischen Modellierung zur Verfügung, die mit einfachen Mitteln die längst geforderte, aber durch die Covid19-Pandemie neu ins Zentrum gerückte Digitalisierung im Schulunterricht berücksichtigen. Mögliche Rahmenbedingungen zum Einsatz der Modellierungsworkshops werden in Gerhard et al. (im Druck) diskutiert.

Eine Verdichtung des mathematischen Modellierungsprozesses findet in 90-minütigen Veranstaltungen statt. Dieses Doppelstundenformat ist relativ neu im Angebot, weshalb es daher nur wenige aufbereitete Themen gibt. Die Workshops mit den Kurztiteln *Klimarekorde – Alles Zufall?* und *Metallabkühlungsprozesse* bilden die Ausnahme. Die Lernmaterialien fügen sich in die Unterrichtslandschaft an der Schule ein, sodass Lehrkräfte die Materialien direkt in ihrem eigenen Unterricht einsetzen können. Umgesetzt sind die Lernmaterialien ebenfalls in Jupyter-Notebooks und unterscheiden sich lediglich in ihrer Länge und stärkeren Schließung der Aufgabenstellungen von den eintägigen Modellierungsmaterialien.

Junge Erwachsene lösen offene Modellierungsaufgaben in einwöchigen Modellierungsveranstaltungen (*CAMMP weeks*) geführt. Das Angebot richtet sich an mathematikbegeisterte und herausragende Heranwachsende ab der 10. Jahrgangsstufe. Die CAMMP week damit ein Forderangebot und

<sup>4</sup>Weiterführende Informationen können unter [https://jupyterlab.readthedocs.io/en/stable/getting\\_started/installation.html](https://jupyterlab.readthedocs.io/en/stable/getting_started/installation.html) nachgelesen werden. Zugegriffen: 08. September 2021

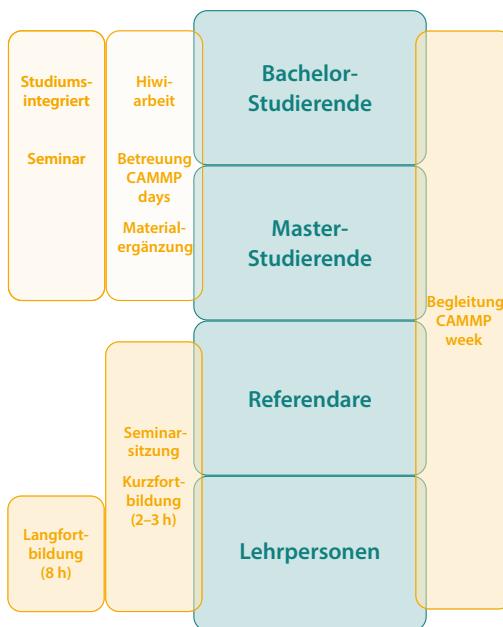
<sup>5</sup>Weiterführende Informationen können unter <https://julialang.org/downloads/> nachgelesen werden. Zugegriffen: 08. September 2021

kann auf der Grundlage der im Kernlehrplan genannten Ziele und Aufgaben als sinnvolle Ergänzung zum Alltagsunterricht angesehen werden (vgl. Hattebuhr, 2014). Innerhalb von einer Woche erforschen die durch einen Bewerbungsprozess ausgewählten Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Gruppen von etwa sechs Lernenden eine eigene komplexe, herausfordernde Problemstellung. Dabei dokumentieren sie ihre Arbeit in einem Bericht und präsentieren ihre Ergebnisse im Rahmen einer Abschlussveranstaltung. Jeweils zwei Lehrpersonen und eine wissenschaftliche Mitarbeiterin bzw. ein wissenschaftlicher Mitarbeiter begleiten die Schülergruppen.

Firmen oder Forschungseinrichtungen stellen ganz unterschiedliche Problemstellungen bereit, die typischerweise noch nicht oder nur unzureichend gelöst sind. Es werden folglich nach der Definition in Abschnitt 3.1 ausschließlich echte Modellierungsprobleme behandelt, die keine bekannte optimale oder gar eindeutige Lösung besitzen. Nach der Klassifikation von Kaiser und Schwarz (2010) wird ein realistischer, angewandter Modellierungsansatz verfolgt. Dadurch stehen pragmatisch-nützliche Ziele, wie zum Beispiel das Lösen und Verstehen von realen Problemen sowie die Förderung der Modellierungskompetenzen im Vordergrund (vgl. Hattebuhr, 2014; Kaiser und Schwarz, 2010, S. 54). Weitere Informationen zur CAMMP week werden problemspezifisch in Abschnitt 7.3.3 aufgeführt. Diese umfassen unter anderem Hinweise zum organisatorischen und inhaltlichen Ablauf sowie zur Betreuung der Schülerteams. Informationen rund um die Auswahl der Teilnehmenden auf der Basis eines kompetenzorientierten Anforderungsprofils stellt Hattebuhr (2014) ausführlich vor.

### **3.3.2 Veranstaltungsformate für Lehrkräfte und ihre üblichen Abläufe**

Damit mathematische Modellierung wirklich Einzug in die Schule erhalten kann, ist es besonders wichtig, auch Lehrkräfte darin zu schulen (vgl. Kaiser, 2007). Zukünftige Lehrpersonen „müssen mit Modellierungsbeispielen vertraut werden, denn falls nicht, werden die Barrieren für die Integration solcher Beispiele in den Unterricht zu hoch sein“, so Kaiser (2007, S. 112). Denn: Die Integration echter Modellierungsprobleme in den Mathematikunterricht führt häufig zu inhaltlichen, anstelle bloß strategischer Hilfen durch die Lehrpersonen. Dadurch sind viele Heranwachsende nicht in der Lage, selbstständig zu arbeiten und ihre Ergebnisse zu bewerten. Für die Beurteilung der Lösung ist die Lehrkraft verantwortlich. Beobachtungen zeigen, dass im Modellierungsprozess ungeschulte Lehrpersonen oft (unterbewusst) dazu tendieren, den Schülerinnen und Schülern ihre eigenen Modellierungsideen und deren Umsetzung „aufzudrängen“. Die Erwartungshaltung der Lehrkräfte gegenüber den Schülerteams deutet ein nicht-Zutrauen an, vermutlich weil oft Mathematik benötigt wird, die über den Lehrplan hinaus geht, oder sich die Mathematik aus unterschiedlichen Inhaltenfeldern zusammensetzt. Angemessenes Lehrerverhalten erfordert eine gute Balance zwischen größtmöglicher Schülerselbstständigkeit und geringstmöglicher Lehreranleitung nach dem Montessori-Prinzip („Hilf mir, es selbst zu tun!“) zu erreichen (vgl. Blum, 2007). Roeckerath (2012) zeigt die Lehrerfunktionen in Modellierungsprojektwochen in der Schule auf. Der Einfluss des Lehrerverhaltens auf Modellierungsprozesse speziell auf der CAMMP week diskutiert Hattebuhr (2014). Abschnitt 3.2 erörtert Kompetenzen, die Lehrpersonen nach aktuellen Forschungsergebnissen benötigen, um mit ihren Lernenden erfolgreich zu modellieren. Es ist ein wichtiges Anliegen, Lehrkräften diese Fähigkeiten und Fertigkeiten zu vermitteln. Die momentan von diversen Modellierungsdidaktikerinnen und -didaktikern eingesetzten Methoden unterscheiden sich vor allem in der Zielgruppenorientierung. Ein Ansatz besteht darin, bereits zukünftige Lehrpersonen während ihrer universitären Ausbildung mit Modellierungsaufgaben in Kontakt zu bringen und ihnen das benötigte theoretische Hintergrundwissen zu vermitteln. So bieten universitäre Institutionen



**Abbildung 3.8:** Veranstaltungsformate des Programm CAMMP für verschiedene Zielgruppen unter unterschiedlichen Rahmenbedingungen

beispielsweise Blockseminare oder Modellierungswochen an, in denen sich Lehramtsstudierende intensiv mit komplexen Modellierungsaufgaben auseinander setzen können. Weiterhin veranstalten sie Seminare, in denen Lehramtsstudierende Modellierungsaufgaben didaktisch reduzieren und für den Einsatz in Schülermodellierungstagen aufbereiten. In Modellierungswochen schlüpfen Studierende in die Rolle der Lehrperson und begleiten Schülergruppen im Modellierungsprozess (vgl. Didaktik der Mathematik und FDGM, 2021). Eine Beschreibung der Lehrerrolle auf der CAMMP week ist im Rahmen der Arbeit von Hattebuhr (2014, S. 58 f) entstanden, auf die an dieser Stelle verwiesen wird. Ergänzend zu den Studierendenangeboten sind Fortbildungen für Lehrpersonen von besonderer Bedeutung: Ziel ist es, Mathematiklehrkräfte in die Lage zu versetzen, mit ihren Klassen und Kursen mathematische Modellierung zu betreiben. In der Abbildung 3.8 sind alle Veranstaltungsformate aufgezeigt, die CAMMP in Karlsruhe für verschiedene Zielgruppen und unter unterschiedlichen Rahmenbedingungen anbietet. Dunkler hervorgehoben sind die Formate, in denen das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Lernmaterial bereits zum Einsatz kam.

Über das Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg (ZSL<sup>6</sup>) können Lehrkräfte an Fortbildungen unter anderem zur mathematischen Modellierung teilnehmen. Das Projekt *Simulierte Welten*<sup>7</sup>, in dem das Programm CAMMP in Karlsruhe integriert ist, organisiert diese. Die Veranstaltung umfasst zweieinhalb Tage, von denen etwa 8 Stunden für die Erarbeitung der mathematischen Modellierung mit Heranwachsenden zur Verfügung stehen. Die verbleibende Zeit wird durch Organisorisches und Beiträge zum Erstellen von Simulationen gefüllt. Der Modellierungsteil orientiert sich am Kompetenzkonzept von Borromeo Ferri et al. (2013a) (vgl. Abschnitt 3.2). Teilnehmende Lehrpersonen erhalten eine Einführung in die Theorie des mathematischen Modellierens (theoretische Dimension) und erkunden selbstständig fertiges Modellierungsmaterial (aufgabenbezogene Dimension). Sie bearbeiten aktiv das für einen CAMMP day entwickelte

<sup>6</sup>Weitere Informationen dazu sind unter <https://zsl-bw.de/Startseite> zu finden. Zugegriffen: 08. September 2021

<sup>7</sup>Weitere Informationen dazu sind unter <https://simulierte-welten.de/> zu finden. Zugegriffen: 08. September 2021

Lernmaterial aus der Schülerperspektive. Für einen breiteren Überblick können auch verschiedene Themen in unterschiedlicher Tiefe durchstöbert werden. Das Material ist für die Integration in den Unterricht ausgezeichnet und bietet den Vorteil, dass es ständig aktuell gehalten wird. Die Fortbildenden führen außerdem Vorschläge für den Einsatz im Unterricht auf (unterrichtsbezogene Dimension). Sowohl die diagnostische als auch die bewertungsbezogene Dimension werden zugunsten weiterer Modellierungsaktivitäten vernachlässigt. So bietet sich für Lehrkräfte die Chance, auch offene Modellierungsaufgaben, die für die CAMMP week entwickelt wurden, selbstständig zu erforschen und Lösungen zu generieren. Letztere werden abschließend in Bezug zu der Schülerlösung gesetzt, sodass Lehrpersonen auch die Leistung der jungen Menschen einschätzen können.

Für kürzere Fortbildungsformate (vgl. Abbildung 3.8: Kurzfortbildungen, Seminarsitzungen) kooperieren die Mitarbeitenden von CAMMP beispielsweise mit Referendarseminarleitern (Esslingen, Jülich), mit dem *MINTec*<sup>8</sup>, dem *Lehrerfortbildungstag Mathematik der RWTH Aachen*<sup>9</sup>, dem *Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts* (MNU<sup>10</sup>) oder dem *MINT-Kongress*<sup>11</sup>. Um Lehrkräften trotz der beschränkten Zeit von etwa 2 – 3 Stunden möglichst viel praktische Erfahrung im mathematischen Modellieren anzubieten, vermitteln die Fortbildungsleitenden die theoretische, unterrichtsbezogene und diagnostische Dimensionen verkürzt und lassen die bewertungsbezogene Dimension außen vor. Die aktive Erkundung von Modellierungsmaterialien zu einem Thema steht im Vordergrund. Lehrkräfte arbeiteten sich dazu vielfach in den Workshop „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?“ ein. Die Referentin förderte Diskussionen über den Einsatz des Materials in der Schule – inklusive fächerübergreifender Anknüpfungsmöglichkeiten – und zeigte kognitive Hürden, sowie Bewältigungsstrategien dieser auf. In Zukunft ist das Testen des doppelstündigen Workshops zum Thema „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ wünschenswert. Dieses Material hat den Vorteil, dass es kürzer ist, sodass Lehrpersonen den Modellierungsprozess vollständig einsehen können. Dieser Nachteil zeigte sich in den Erprobungen mit dem Tagesmaterial.

Die Begleitung der an der CAMMP week Teilnehmenden im Modellierungsprozess stellt ein weiteres Fortbildungsangebot dar. Hier dürfen auch bereits Studierende in die Rolle der Lehrkraft schlüpfen, die in Hattebuhr (2014) beschrieben steht. Neben der Mitwirkung in der Schülergruppenarbeit als pädagogische Mentorin bzw. pädagogischer Mentor erhalten die (zukünftigen) Lehrpersonen Sitzungsangebote, die alle fünf vorgestellten Dimensionen des Lehrerkompetenzmodells abdecken. Dadurch erfahren die Teilnehmenden einen umfassenden und vollständigen Blick auf die mathematische Modellierung.

In alle Veranstaltungsformaten ordnen die Kursleitenden die mathematische Modellierung immer in den Kontext der Schule ein.

---

<sup>8</sup>Weitere Informationen bietet die Homepage <https://www.mint-ec.de/>. Zugegriffen: 08. September 2021

<sup>9</sup>Weitere Informationen bietet die Homepage <https://www.mathematik.rwth-aachen.de/go/id/elyyr?>. Zugegriffen: 08. September 2021

<sup>10</sup>Weitere Informationen bietet die Homepage <https://www.mnu.de/fortbildungen>. Zugegriffen: 08. September 2021

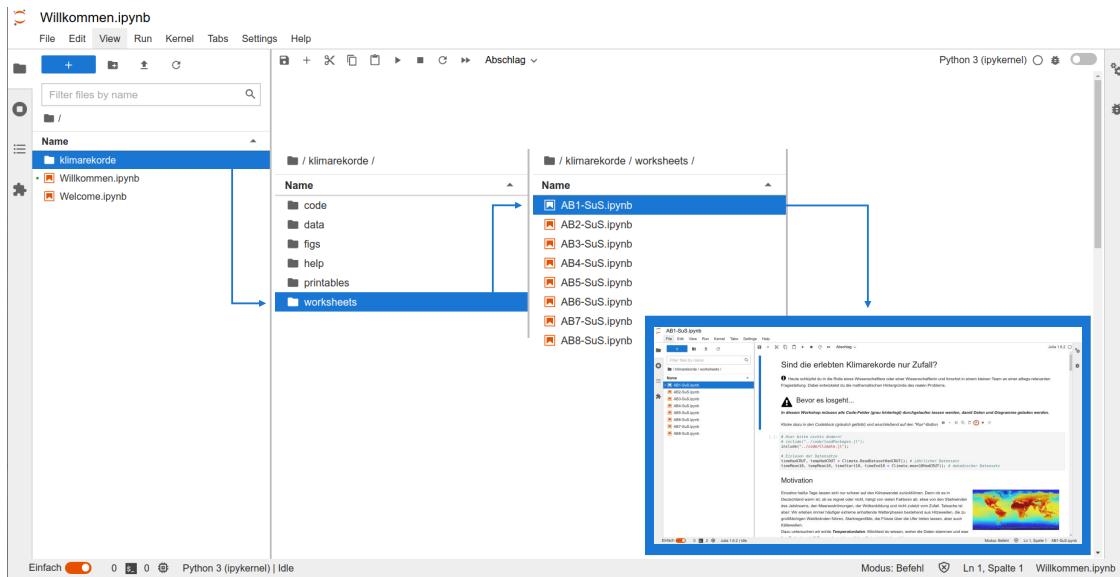
<sup>11</sup>Weitere Informationen bietet die Homepage <https://eveeno.com/digitale-mint-wochen>. Zugegriffen: 08. September 2021

## 3.4 Das digitale Lernmaterial

Das digitale Lernmaterial wurde bereits in diversen Veranstaltungen unterschiedlicher Jahrgangsstufen sowie im Rahmen eines von Luis Ramon Siero Gonzales (UABC) organisierten Modellierungsprojekts an der *Universidad Autonoma de Baja California* (UABC) durchgeführt (s. Abschnitt 5.4 und 6.4). Die vollständige Umsetzung als digitales Lernmaterial ermöglicht eine Bearbeitung ganz unabhängig vom Nutzungsort. Die Bereitstellung, Umsetzung und Struktur erläutert der folgende Abschnitt.

### 3.4.1 Bereitstellung des Lernmaterials auf der Workshop-Plattform und die Verwendung von Jupyter Notebooks

Das Lernmaterial steht auf einer Workshop-Plattform zur Verfügung, die auf dem bwUniCluster des KIT läuft und durch das Steinbuch Center for Computing (SCC) gehostet wird. So kann allzeit ein sicherer Umgang mit den Lernmaterialien und den Eingabedaten der Nutzer gewährleistet werden. Die Registrierung auf der Workshop-Plattform verzichtet auf die Erhebung personenbezogener Daten. Sie ist einfach gestaltet, indem der Zugriff über einen Webbrowser über [www.workshops.cammp.online](http://www.workshops.cammp.online) möglich ist. Hierbei haben sich die Browser Chrome und Firefox als besonders geeignet erwiesen. Der besondere Vorteil dieses Settings ist, dass Nutzende keinerlei Software lokal installieren müssen. Nachteilig ist die zwangsweise benötigte stabile Internetverbindung. Betreuende der Modellierungsveranstaltungen erläutern den Anmeldeprozess und führen diesen schrittweise vor, da sich jede Nutzerin und jeder Nutzer einen eigenen Account anlegen muss. Damit sichergestellt ist, dass nur erwünschte Aktivitäten auf der Workshop-Plattform stattfinden, ist der Zugriff durch ein Präfix geschützt. Nach erfolgreicher Registrierung öffnet sich ein Jupyter Notebook. Hier wählen die Nutzenden das Workshop-Thema aus. Außerdem können sich die Lehrenden Musterlösungen durch die Eingabe eines Passworts freischalten. So können sich auch Workshop-Betreuende auf den Einsatz des Materials vorbereiten oder während der Durchführung darauf spicken. Die Webseite lädt und öffnet den ausgewählten Workshop in einer Ordnerstruktur (vgl. Abbildung 3.9). Diese beinhaltet weitere Ordner, wie die Arbeitsblätter (Unterordner *worksheets*), Tipps und Informationsblätter (Unterordner *help*). Benötigte, im Hintergrund laufende Funktionen zur Rückmeldung und Überprüfung der Schülereingaben umfasst der Unterordner *code*. Datensätze speichert der Unterordner *data*, und verwendete Bilddateien der Unterordner *figs*. Falls benötigt, stehen auszudruckende Dokumentations- und Antwortblätter im Unterordner *printables* bereit. Die Musterlösungen sind ebenfalls Teil des Unterordners *worksheets*, falls Lehrkräfte sie durch eine Passworteingabe laden. Die Bearbeitung startet mit dem ersten Arbeitsblatt (Datei *AB1-SuS.ipynb*). Der Begriff Arbeitsblatt hat sich als gängig und sinnvoll erwiesen. Gemeint ist hier ein digitales Arbeitsblatt, das wie eine Art Lückentext zu füllen ist. Der Aufbau wird in diesem Abschnitt an späterer Stelle erläutert. Das Suffix „-SuS“ deutet auf die Schülerversion hin. Die Musterlösung enthält diesen Wortanhang nicht. Alle Änderungen am Material werden mit dem Ausführen der Codefelder automatisch gespeichert. Dies ist wichtig, falls die Bearbeitung durch Pausen unterbrochen oder der Workshop an mehreren Tagen bearbeitet wird, wie es im Schulunterricht zu erwarten ist. Außerdem kann es passieren, dass sich der Server aufhängt. Letzteres erwies sich als großes Problem, da so Workshops mittendrin unterbrochen oder sogar ganz abgebrochen werden mussten. An dieser Stelle sei daher darauf hingewiesen, dass die Workshop-Durchführungen, wie sie hier beschrieben und reflektiert werden, unter erschwerten Bedingungen zum Einsatz kamen.



**Abbildung 3.9:** Beispielhafter Aufbau der Ordnerstruktur des Lernmaterials zum Thema „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“. Öffnen eines blau hervorgehobenen Ordners führt zum Öffnen der Unterordner bzw. Dateien, dargestellt durch die Pfeile.

### 3.4.2 Struktur und Elemente des digitalen Lernmaterials

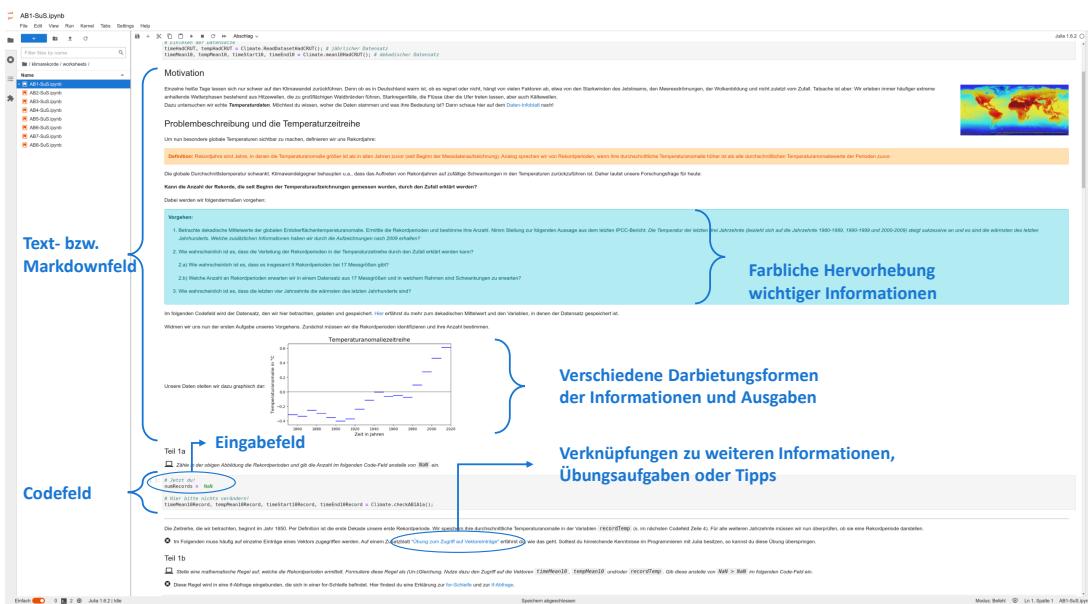
In diesem Abschnitt werden die digitalen Arbeitsmaterialien und deren zentrale Bausteine beschrieben, die in allen Workshops zu finden sind.

Die Umsetzung der Workshop-Materialien erfolgte in der Entwicklungsumgebung *Jupyter Notebooks*<sup>12</sup>. Jupyter Notebooks haben sich in den vergangenen Jahren als nutzerfreundliches Tool in vielen Wissenschaftsbereichen herausgestellt, da sich hier Text- und Codefelder in beliebiger Anordnung verknüpfen und sich Graphiken sowie Videos einbinden lassen. Außerdem erlauben sie die Nutzung gängiger Programmiersprachen, wie unter anderem *Python* oder *julia*. So haben sich Jupyter Notebooks zu einem Standardwerkzeug vieler Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler entwickelt. Das Workshop-Material ist inhaltlich strukturiert auf mehrere Arbeitsblätter verteilt, die jeweils ein Jupyter Notebook darstellen. Die Umsetzung erfolgt mithilfe der Programmiersprache *julia*<sup>13</sup>. Die Nutzung von *julia* erläutert der Abschnitt zu den Codefeldern.

Der folgende Abschnitt präsentiert die Bausteine der Jupyter Notebooks, die in Reihenfolge und Anzahl auf den einzelnen Arbeitsblättern variieren. Die Abbildung 3.10 zeigt einen Ausschnitt eines digitalen Arbeitsblattes und hebt die verwendeten Bausteine hervor.

<sup>12</sup>Weitere Informationen zu Jupyter gibt es unter: [www.jupyter.org](http://www.jupyter.org). Zugriffen: 07. September 2020

<sup>13</sup>Weitere Informationen zu Julia gibt es unter: [www.julialang.org](http://www.julialang.org). Zugriffen: 07. September 2020.



**Abbildung 3.10:** Beispielhafter Aufbau eines Arbeitsblattes zum Thema „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ mit hervorgehobenen Bausteinen des Jupyter Notebooks

### 3.4.2.1 Textfelder

Die auch *Markdownfelder* genannten Textfelder enthalten leicht lesbar formatierten Text (vgl. Abbildung 3.10 Klammer links oben). Sie leiten die Leserin bzw. den Leser durch das Lernmaterial und enthalten Einführungen in die Themen, mathematische oder inhaltliche Erläuterungen sowie die Aufgabenstellungen. Wichtige Informationen, wie beispielsweise Definitionen oder strukturierende Elemente, heben sich farblich ab (vgl. Abbildung 3.10 Klammer rechts oben). Bilder, Tabellen oder Drop-down-Menüs, die sich auch für kurze Tipps eignen, ergänzen Textfelder (vgl. Abbildung 3.10 Klammer rechts mittig). Dabei strukturieren Icons (kleine Bilder) den Text und deuten auf besondere Punkte hin. Beispielsweise lässt sich daran die Aufgabenstellung erkennen und ob diese schriftlich mit Stift und Papier im nächsten Codefeld oder im Rahmen einer Gruppendiskussion zu bearbeiten ist. Die Tabelle 3.1 stellt die Icons<sup>14</sup> und deren jeweilige Bedeutung vor. Die beiden Zeichen *Stift* und *Papier* und *Codeeingabe* können dabei auch kombiniert vorkommen. Sie sind dann durch ein &-Zeichen verknüpft.

### 3.4.2.2 Codefelder

Codefelder bilden neben den Textfeldern einen weiteren großen Baustein der Jupyter Notebooks (vgl. Abbildung 3.10 Klammer links unten). Wie ihr Name vermuten lässt, führen Codefelder Code aus. Einerseits wird dieses Element eingesetzt, um Daten oder Funktionen zu laden. Diese Stellen sind dann insbesondere durch den Kommentar „Hier bitte nichts verändern!“ gekennzeichnet. Andererseits müssen Lernende sie gemäß der vorangegangenen Aufgabenstellung ergänzen. Damit nehmen die Lernenden an genau diesen Stellen aktiv Änderungen im digitalen Arbeitsmaterial vor.

<sup>14</sup>Die Icons sind der Webseite [https://www.w3schools.com/icons/fontawesome\\_icons\\_webapp.asp](https://www.w3schools.com/icons/fontawesome_icons_webapp.asp) entnommen.

**Tabelle 3.1:** Zusammenfassung aller in Textfeldern auftauchenden Icons und deren Bedeutung. Sie strukturieren die Texte und weisen auf besondere Punkte hin.

Icon	Bedeutung
🔍	Diskussion mit Partner/in oder weiteren Kleingruppen
💡	Hier findest du einen Tipp.
ℹ️	Hier stehen weiterführende Informationen.
💻	Hier muss im folgenden Codefeld etwas eingegeben werden.
✍️	Hier muss mit Stift und Papier etwas entwickelt werden.
▶️	Hier muss das folgende Codefeld ausgeführt werden.
⚠️	Achtung, hier steht ein wichtiger Hinweis.
✓	Diese Antwort ist korrekt.
❗	Diese Antwort ist so leider noch falsch. Bitte korrigiere sie.

Dennoch sind an diesen Stellen die Codefelder nicht leer: Sie zeigen über eingebaute Kommentare „Jetzt du!“, dass Änderungen vorgenommen werden müssen und durch den Platzhalter „NaN“ (engl. *not a number*), an welcher Stelle die Eingabe getätigt werden soll (vgl. Abbildung 3.10 linke Ellipse). Auf eine Schülereingabe folgt in der Regel eine Überprüfe-Funktion. Diese ist im Codefeld wieder mit dem Hinweis „Hier bitte nichts verändern!“ abgehoben. Die Überprüfe-Funktionen bewerten im Hintergrund die Lösungeingabe der Lernenden und melden zurück, ob die Eingabe richtig war oder nicht. Die Ausgabe wird separat im Anschluss an die Codefelder detailliert beschrieben. Durch das aktive Bearbeiten der Codefelder durch die Lernenden treten in der Durchführung auch genau an diesen Stellen die meisten (programmiertechnischen) Schwierigkeiten auf. Änderungen des Codes an nicht vorgesehenen Stellen führen zu Fehlermeldungen. Darüber hinaus liefert eine fehlerhafte Syntax Fehler, auch wenn die mathematische Beschreibung korrekt ist. Eine Tabelle, die auf der Workshop-Plattform zur Einsicht zur Verfügung steht, fasst typische inkorrekte Eingaben zusammen.

Die Verwendung einer programmiersprachen-basierten Umgebung ermöglicht die Bearbeitung komplexer und datenlastiger Problemstellungen sowie eine einfache Visualisierung der Daten. Während Lernende mit Stift und Papier nur Rechnungen auf Schulniveau ausführen können, können solche, die das mathematische Niveau der Schülerinnen und Schüler überschreitet, vom Rechner übernommen werden. Beispielsweise wird im Workshop die Lösung des Minimierungsproblems in Abhängigkeit von zwei Variablen an den Computer abgegeben. Zusätzlich beugt dieses Vorgehen Rechenfehlern vor, die sich leicht auf dem Papier einschleichen können. So wird insgesamt der Fokus weg von der Berechnung hin zur mathematischen Modellierung gelenkt. Diese Vorgehensweise birgt die Gefahr, dass der Computereinsatz Aspekte berührt, die Lehrkräfte eher dem Informatikunterricht zuordnen. Ist beispielsweise die Berechnung des arithmetischen Mittels der Temperaturanomalien über einen langen Zeitraum gefordert, so ist hier die Summenbildung das zentrales mathematisches Element: Es ist  $1/n \sum_{i=1}^n temp_i$  zu bestimmen. Die Ausführung dieser Berechnung wird als mathematischer Algorithmus der Summenbildung verstanden. Gleichfalls verstehen Lehrkräfte die eigenständige Umsetzung der Summenbildung in einer Programmiersprache, beispielsweise über eine for-Schleife, als programmiertechnisches Element. Daher sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass Lernende zum Bearbeiten des Arbeitsmaterials keine Programmierkenntnisse vorweisen müssen. Eine solche Forderung würde mit einer großen Einschränkung des Teilnehmerkreises einher gehen. Vielmehr ist der Einsatz einer Programmiersprache dem Nutzen eines (mächtigen) grafischen Taschenrechners gleichzusetzen. Darüber hinausgehende

Codeeingaben treten nur selten auf. Das Arbeitsmaterial gibt dann entsprechend schrittweise Hilfestellungen. Beispielsweise enthält dieser Workshop einen Exkurs zu der Nutzung und Eingabe zum Zugriff auf Vektoreinträge (vgl. Abschnitt 5.3.3). Der große Vorteil in der Nutzung von Jupyter Notebooks gegenüber anderer Software, wie beispielsweise *GeoGebra*, ist die Möglichkeit große Datenmengen verarbeiten zu können. Insgesamt enthält julia eine einfache Programmierstruktur und Syntax, wenige Formalismen und stellt häufig genutzte Funktionen für den direkten Einsatz bereit, wie beispielsweise das Visualisieren von Daten. Dadurch ist sie einfach zu erlernen, sodass sich Betreuende mit möglicherweise keinen oder nur geringen Programmierkenntnissen schnell in das Material einarbeiten und es modifizieren können.

### 3.4.2.3 Ausgabe

Das Ausführen eines Codefeldes erzeugt in jedem Fall eine Ausgabe. Diese kann unterschiedlicher Art sein und spricht im Verlauf des Materials alle drei Repräsentationsformen (symbolisch, ikonisch, enaktiv) nach Bruner an (vgl. Heske, 2011, S. 186f.). Nach Hole (1998, S. 221ff.), der das Brunersche Unterrichtsprinzip um die weitere Dimension der Nutzung des Rechners erweitert hat, „wird zusätzliche Qualität vor allem durch Animierung und Simulierung gewonnen“. Das Workshopmaterial nutzt beispielsweise Diagramme zur Visualisierung von Daten, berechneten Funktionswerten oder Rechenergebnissen. Beispiele solcher Ausgaben zeigen die Abbildungen 3.11 (textliche Rückmeldung) und 3.12 (graphische Rückmeldung). Die Ausgabe dient neben der Überprüfe-Funktion als zentrales Rückmeldeelement und eigenständige Kontrolle. So können Schülerinnen und Schüler die Auswirkungen ihrer Eingaben eigenständig bewerten und ggf. entsprechend korrigieren. Die Überprüfe-Funktion weist im Falle einer falschen Eingabe, die auf einer häufiger auftretenden Fehlerursache beruht, auf diesen Fehler hin. So ergänzt sie zielgerichtet die selbstständige Eigenkontrolle durch eine individuelle Rückmeldung. Aus praktischer Sicht besticht die Entlastung der betreuenden Personen, da die Schülerinnen und Schüler nicht nach jeder ihrer Eingaben nachfragen (brauchen), ob diese richtig ist. Diese Erfahrungen wurden in vorhergehenden Modellierungstagen gesammelt, in denen es keine individualisierten Rückmeldungen gab. Die automatisierten Rückmeldungen führen somit zu einer deutlich selbstständigeren Bearbeitungsweise. Darüber hinaus kann so vorgebeugt werden, dass die Lernenden mit falschen Algorithmen oder Berechnungen fortfahren. Bei näherer Betrachtung zeigen sich in diesem Vorgehen weitere Vorteile. Die Individualisierung ist ein Mittel der inneren Differenzierung (vgl. Mattes, 2015, S. 38ff.). So kann laut Mattes (2015) eine kompetent angewendete Binnendifferenzierung zu einer höheren Lernmotivation sowie zu einem höheren individuellen und klassenbezogenen Leistungsniveau führen. Darüber hinaus kann sie das Lernklima in der Klasse verbessern und die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler erweitern. Ist eine Aufgabe sehr offen gestellt, wie es vor allem bei den Zusatzaufgaben vorkommt, ist eine solche automatische Überprüfung der Eingabe kaum angemessen umsetzbar und damit wenig sinnvoll. Hier liegt es dann in der Verantwortung der Lernenden, ihre Ergebnisse kritisch zu reflektieren.

### 3.4.2.4 Tipps

Neben den individuellen Rückmeldungen zu den Schülereingaben stellen Tipps ein weiteres Hilfsmittel der Binnendifferenzierung des Materials dar. Sie zeichnen sich häufig durch ihre gestufte Hilfe aus: So bietet der erste Tipp zu einer Aufgabenstellung eine grobe Richtschnur. Weitere, darauf

## Teil 1a

Zähle in der obigen Abbildung die Rekordperioden und gib die Anzahl im folgenden Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

```
# Jetzt du!
numRecords = 8

# Hier bitte nichts verändern!
timeMean10Record, tempMean10Record, timeStart10Record, timeEnd10Record = Climate.checkAB1A1a();

Deine Antwort lautet:
Von 1850 bis 2019 gibt es 8 Rekordperioden.
```

! Deine Antwort ist leider falsch. Korrigiere deine Antwort! Schau dir bei Bedarf nochmal die Definition von Rekordperioden an.

(a) Bei einer falschen Lösungseingabe

## Teil 1a

Zähle in der obigen Abbildung die Rekordperioden und gib die Anzahl im folgenden Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

```
# Jetzt du!
numRecords = 9

# Hier bitte nichts verändern!
timeMean10Record, tempMean10Record, timeStart10Record, timeEnd10Record = Climate.checkAB1A1a();

Deine Antwort lautet:
Von 1850 bis 2019 gibt es 9 Rekordperioden.

✓ Deine Antwort scheint richtig zu sein!
```

(b) Bei einer richtigen Lösungseingabe

**Abbildung 3.11:** Beispiele für eine textliche Rückmeldung auf eine Schülereingabe

folgende Tipps geben konkretere Hinweise. An anderen Stellen sind die als Tipps gleichwertig zu betrachten und sprechen unterschiedliche Repräsentationsformen und damit verschiedene Lerntypen an, oder sie beleuchten diverse Aspekte der Lösungsfindung. Konkret umgesetzt wurde dies in Hinweisen, Skizzen, Gleichungen oder Beispielen. Da die Tipps direkt nach den Aufgabenstellungen entweder über einen Link auf ein weiteres Jupyter Notebook oder ein Drop-Down-Menü erreichbar sind, können Teilnehmende individuell entscheiden, wann sie Unterstützung benötigen. Vorteilhaft ist, dass diese Art der stillen Hilfe keine (schwächeren) Lernenden vor der Klasse bloßstellt, falls diese Unterstützung suchen. Nachteilig ist, dass Schülerinnen und Schüler möglicherweise voreilig auf Tipps zugreifen und weniger über die Aufgabenstellung und deren Lösung nachdenken. Die Betreuenden erweitern das Angebot an einer bedarfsgerechten Unterstützung. Sie beantworten individuell und zielgerichtet auftretende Fragen der Schülerinnen und Schüler. So wird in der Regel eine Über- und Unterforderung vermieden.

### 3.4.2.5 Informationsmaterial

An geeigneten Stellen wurde zusätzliches Informationsmaterial in die Arbeitsblätter eingebaut. Das Material ist ebenfalls über Links erreichbar (vgl. Abbildung 3.10 rechte Ellipse). Das Ziel der Zusatzinformationen ist es nach Gerhard et al. (im Druck),

1. „mathematische Fähigkeiten zu vermitteln, die für die Bearbeitung des Workshops notwendig, aber ggf. bei den Lernenden noch nicht vorhanden sind. Alternativ können sie auch zur Wiederholung des Inhalts genutzt werden, oder“
2. „um interessierten Lernenden weiterführende (mathematische, wie auch außermathematische) Informationen anzubieten, die für die erfolgreiche Bearbeitung der Problemstellungen jedoch nicht benötigt werden.“

Insgesamt stellen auch sie ein Mittel zur Differenzierung dar.

## Kapitel 3 | Mathematische Modellierung unter Einsatz digitaler Werkzeuge

### Teil 1b

Stelle eine mathematische Regel auf, welche die Rekordperioden ermittelt. Formuliere diese Regel als (Un-)Gleichung. Nutze dazu den Zugriff auf die Vektoren `timeMean10`, `tempMean10` und/oder `recordTemp`. Gib diese anstelle von `NaN > NaN` im folgenden Code-Feld ein.

Diese Regel wird in einer If-Abfrage eingebunden, die sich in einer for-Schleife befindet. Hier findest du eine Erklärung zur `for-Schleife` und zur `If-Abfrage`.

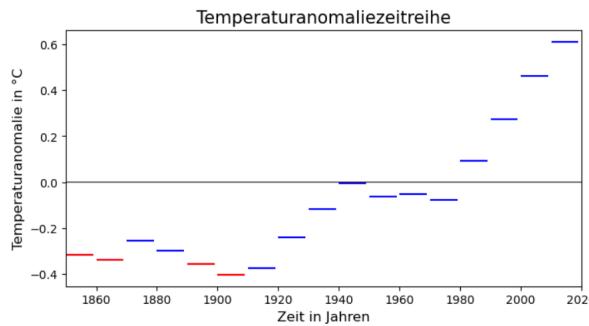
```
# Hier in den ersten vier Zeilen nichts verändern!
# Der erste Temperaturanomaliemittelwert steht bereits im Vektor timeMean10Record
j=1;
recordTemp = tempMean10[1];

# Jetzt du!
# Hier sollen alle weiteren Rekorde ermittelt werden
for i=2:17
    # Gib in der nächsten Zeile eine mathematische Bedingung ein, mit der du alle Rekorde erkennen kannst
    if recordTemp > tempMean10[i]

        # Falls die Bedingung stimmt, wird Rekordperiode auf den neuen Rekord gesetzt
        recordTemp = tempMean10[i];

        Climate.RecordFill10(i,j); # Hier werden alle ermittelten Rekordperioden gespeichert
        j=j+1;
    else
        j = j; # Falls die Bedingung nicht stimmt, dann passiert nichts weiter
    end
end

# Hier nichts verändern!
Climate.plotLinesMean10Records(); # Linienplot
```



(a) Bei einer falschen Lösungeingabe

### Teil 1b

Stelle eine mathematische Regel auf, welche die Rekordperioden ermittelt. Formuliere diese Regel als (Un-)Gleichung. Nutze dazu den Zugriff auf die Vektoren `timeMean10`, `tempMean10` und/oder `recordTemp`. Gib diese anstelle von `NaN > NaN` im folgenden Code-Feld ein.

Diese Regel wird in einer If-Abfrage eingebunden, die sich in einer for-Schleife befindet. Hier findest du eine Erklärung zur `for-Schleife` und zur `If-Abfrage`.

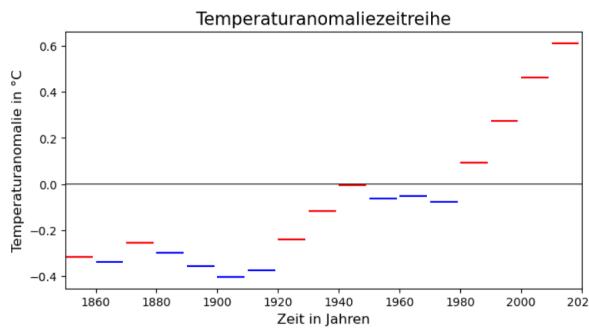
```
# Hier in den ersten vier Zeilen nichts verändern!
# Der erste Temperaturanomaliemittelwert steht bereits im Vektor timeMean10Record
j=1;
recordTemp = tempMean10[1];

# Jetzt du!
# Hier sollen alle weiteren Rekorde ermittelt werden
for i=2:17
    # Gib in der nächsten Zeile eine mathematische Bedingung ein, mit der du alle Rekorde erkennen kannst
    if tempMean10[i] > recordTemp

        # Falls die Bedingung stimmt, wird Rekordperiode auf den neuen Rekord gesetzt
        recordTemp = tempMean10[i];

        Climate.RecordFill10(i,j); # Hier werden alle ermittelten Rekordperioden gespeichert
        j=j+1;
    else
        j = j; # Falls die Bedingung nicht stimmt, dann passiert nichts weiter
    end
end

# Hier nichts verändern!
Climate.plotLinesMean10Records(); # Linienplot
```



(b) Bei einer richtigen Lösungeingabe

**Abbildung 3.12:** Beispiele für eine graphische Rückmeldung auf eine Schülereingabe

## **Teil II**

# **Mathematische Aufarbeitung ausgewählter Themen der Klimaforschung und ihre didaktische Umsetzung**



# 4

## Vorbemerkung zur Zeitreihenanalyse

Der Teil II beschreibt das entwickelte Lehr- und Lernmaterial. Er beinhaltet mathematische Grundlagen in einer Form, die es Lehrpersonen ermöglicht, die mathematischen Hintergründe des Materials schnell zu erfassen. Die Inhalte beschränken sich dabei auf das für die erfolgreiche Begleitung und Moderation benötigte Wissen. Lehrkräfte erhalten so eine leicht zugängliche Zusammenfassung. Des Weiteren ergänzen didaktische Anmerkungen die Beschreibung des Lehr- und Lernmaterials. Die Ziele des Materials sowie dessen Adressaten werden erläutert. Außerdem ergänzen Vorschläge für weiterführende Erarbeitungen und mögliche Erweiterungen des Materials die einzelnen Kapitel. Reflexionen der bisher erfolgten Einsätze runden die jeweiligen Kapitel ab.

### 4.1 Ziele und Anwendungsbereiche der Zeitreihenanalyse

Eine besondere Rolle kommt in dieser Arbeit der Zeitreihenanalyse zu, die vielfach in der Literatur vorgestellt wird. Die Werke von Backhaus et al. (2016), Bingham und Fry (2010), Handl und Kuhlenkasper (2017), Kreiß und Neuhaus (2006), Mudelsee (2014), Newman (2021), Paoletta (2018), Searle (1997), Seber und Lee (2003) sowie Stahel (2017) stellen nur eine Auswahl des viel beschriebenen Themas dar. Ausgehend von einer Fragestellung (Hypothese) untersucht die Zeitreihenanalyse über einen bestimmten Zeitraum beobachtete Daten auf bestimmte Eigenschaften hin. Diese Analysen lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Einerseits eignet sich die Zeitreihenanalyse, um Trends in den Beobachtungsdaten zu finden oder zu prüfen, um so Aussagen über eine langfristige Entwicklung des beobachteten Merkmals bzw. der beobachteten Merkmale zu treffen. Soll erstmals ein Trend in den Beobachtungsdaten aufgedeckt werden, spricht man von einer *struktur-entdeckenden* Analysemethode. Ist hingegen bereits ein Trend vorgegeben rückt eine Überprüfung der Trend-fortsetzung angewandt auf neue, hinzugefügte Daten in den Fokus. Eine solche Analyse heißt *struktur-prüfend*. Beide Verfahren leisten in vielfältigen Bereichen große Dienste. So erweist sich die Zeitreihenanalyse nicht nur als ein theoretisches Werkzeug der Statistik. Analysen beispielsweise von Finanzmärkten, beim Verkauf von Produkten, bei der Entwicklung von Studierendenzahlen oder der Demographie basieren auf den Methoden der Zeitreihenanalyse. Andererseits spürt die Zeitreihenanalyse besondere Ereignisse in Datenreihen auf. Sie stellt Methoden zur Verfügung, um

auffällig hohe oder niedrige Werte oder Werte mit einem besonders hohen Abstand zur Mehrheit der Daten zu untersuchen. Auch diese Zielsetzung greifen diverse Anwendungsgebiete auf, um beispielsweise das Auftreten von Extremereignissen oder Rekorden (Absätze von Produkten, Aktienkurse) zu erkunden, aber auch um Ausreißer oder Störgrößen aufzudecken. Letzteres ist unter anderem ein wichtiger Schritt zur Vorbereitung der Daten für Analysen. Ausreißer und Störgrößen gilt es ggf. vor der Untersuchung zu entfernen. Die beiden Analyseformen sind somit nicht strikt voneinander trennbar.

Die Klimaforschung stellt einen weiteren Bereich dar, in dem der Zeitreihenanalyse eine sehr wichtige Bedeutung zukommt. So führen Klimaforschende Trenduntersuchungen durch, um die zeitliche langfristige Entwicklung einer gemessenen (klimarelevanten) Größe zu beleuchten. Dadurch möchte man in einem ersten Schritt Änderungen, die nicht unbedingt direkt ersichtlich sind, finden und durch ein mathematisches Modell repräsentieren. Ein zweiter Schritt fokussiert eine Testung dieser Entwicklung auf verschiedene Fragestellungen hin. Grundsätzlich wird dabei die Annahme getroffen, das Modell spiegelt die vorliegenden Daten angemessen wider. Daher ist vorab eine Gütebestimmung des Modells nötig. Auf der Basis eines guten Modells und unter der Annahme, dass die im Modell abgebildete Entwicklung stabil fortgeführt wird, lassen sich Aussagen über zukünftiges Verhalten der untersuchten Größe erstellen. Dieses Vorgehen entspricht dem von *quantitativen Prognoseverfahren*. Man bezeichnet solche Verfahren auch als Extrapolationsverfahren (vgl. Backhaus et al., 2016, S. 138). Für die Extrapolation werden die Regressionsanalyse sowie Glättungs- und autoregressive Methoden angewandt. Diese Arbeit behandelt ausschließlich die Regressionsanalyse (s. Kapitel 5).

Darüber hinaus stellt die Klimaforschung ebenso ein Anwendungsfeld dar, das Zeitreihendaten auf besondere Ereignisse hin untersucht. Dabei ist von besonderem Interesse, die Häufigkeit des Auftretens von Extremereignissen im Laufe der Zeit zu beleuchten. So lassen sich klimatische Änderungen unter anderem durch die Ab- oder Zunahme von Starkniederschlagsereignissen und Temperaturrekorden beleuchten. Dieses Untersuchungsziel wird in Kapitel 6 in den Fokus gestellt.

## 4.2 Die Zeitreihenanalyse in der Schule

Der Bildungsplan für Mathematikunterricht in der Schule sieht die Einführung statistischer Analysemethoden bereits in frühen Jahren vor (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016f). In der 5. und 6. Jahrgangsstufe lernen Schülerinnen und Schüler Daten systematisch zu erheben und in geeigneter Form (Strichlisten, Häufigkeitstabellen, Balken-, Säulen-, Streifen-, Kreisdiagrammen) darzustellen. Sie bestimmen statistische Kenngrößen wie absolute und relative Häufigkeiten, den Mittelwert, das Maximum und Minimum. Auch formulieren sie statistische Aussagen mithilfe dieser Kenngrößen. Später erweitern sie dieses Repertoire um das obere und untere Quartil sowie den Median. Dieses Wissen erlaubt den Lernenden, die Kenngrößen in Boxplots darzustellen und sie zu interpretieren. Die Arbeitsschritte stellen einen Teil der erkundenden Zeitreihenanalyse dar. Insbesondere können Lernende mit diesem Wissen reale Daten visualisieren und deren Lage erkunden (vgl. Abschnitt 5.2.1). Werden diese mathematischen Inhalte auf Klimadaten angewandt, können die Heranwachsenden bereits in sehr jungen Jahren die Relevanz der gelernten Inhalte erfahren und sie in einen hoch relevanten Kontext einordnen.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird zusammen mit den Begriffen Ergebnis und Ereignis bei Zufallsexperimenten in der Mittelstufe eingeführt (7. bis 9. Jahrgangsstufe). Dabei betrachten die Teenager Laplace-Experimente. Sie lernen digitale Werkzeuge zur Durchführung und Auswertung von Zufallsexperimenten kennen, sodass auch eine selbstständige Erarbeitung dieser Thematik im Rahmen einer Seminar- oder Facharbeit denkbar ist.

Baumdiagramme und Pfadregeln bei mehrstufigen Zufallsexperimenten sowie Wahrscheinlichkeitsverteilungen begegnen Schülerinnen und Schülern in der 10. Jahrgangsstufe. Insgesamt findet das in der Mittelstufe zu erwerbende Wissen in der ereignisbezogenen Zeitreihenanalyse Anwendung (vgl. Kapitel 6).

Der Erwartungswert steht erst in der Oberstufe auf dem Lehrplan. Das Lernmaterial verfolgt eine Bestimmung über die Indikatorsumme, fängt dabei aber den Umstand auf, dass dieser Weg den Lernenden im Allgemeinen unbekannt ist.

Mittelstufeninhalte, die der trendbezogenen Zeitreihenanalyse zugute kommen, entstammen dem Bereich der Analysis. Heranwachsende studieren lineare und quadratische Funktionen in Abhängigkeit von einem Parameter sowie das Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen. Schülerinnen und Schüler lernen keine Funktionen in Abhängigkeit von zwei Parametern kennen, sodass Lernmaterialien dieses Fehlen auffangen müssen.

Die trendbezogene Zeitreihenanalyse greift weitere Inhalte auf, die nicht zwangsweise allen Lernenden zur Verfügung stehen. Während alle Schülerinnen und Schüler lernen, mit dem Ableitungsgriff sowie mit geometrischen Objekten in kartesischen Koordinaten umzugehen, erfahren lediglich solche Heranwachsenden, die Mathematik in den Jahrgangsstufen 11 und 12 als Leistungsfach wählen, das Prinzip des Hypothesentestens. Sie müssen Argumentationsmuster, die dem Testen von Hypothesen zugrunde liegen, erläutern, Nullhypotesen formulieren, Ablehnungsbereich und Irrtumswahrscheinlichkeiten erklären, ein- und zweiseitige Hypothesentests durchführen und beurteilen, Signifikanzniveau und Irrtumswahrscheinlichkeit gegeneinander abgrenzen, Fehler erster und zweiter Art im Kontext eines Hypothesentests erläutern und den Einfluss des Stichprobenumfangs auf die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art (das Risiko zweiter Art) angeben können (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016n). Während die lineare Regressionsanalyse für alle Heranwachsenden ein neues Werkzeug darstellt, können einige Schülergruppen beim Hypothesentesten auf Vorwissen zurückgreifen. Das Lernmaterial muss somit insbesondere beim Hypothesentesten einen breiten Spagat machen, um allen Leistungsständen gerecht zu werden.

Neben diversen inhaltlichen Themenbereichen deckt eine Bearbeitung des Lernmaterials alle im Bildungsplan für Mathematik genannten prozessbezogenen Kompetenzen ab. Der Schwerpunkt liegt auf dem *Modellieren*. Die weiteren Kompetenzen *Argumentieren und Beweisen*, *Probleme lösen, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* sowie *Kommunizieren* werden durch den kreativen Gebrauch von Mathematik und dem Ideenaustausch in kleinen Teams gefördert. Damit stellt die Mathematik Werkzeuge bereit,

„sodass Kinder und Jugendliche befähigt werden, in vielfältigen Kontexten und Lebensbereichen verantwortungsvoll und nachhaltig zu denken und zu agieren. Als Grundlagenfach leistet Mathematik im Prinzip mit all seinen Kompetenzbereichen Beiträge zur Bildung für nachhaltige Entwicklung, insbesondere im Rahmen der Leitideen *Funktionaler Zusammenhang* beziehungsweise *Daten und Zufall*. Durch entsprechende Themenauswahl bietet der Unterricht Anlass, über gesellschaftliche,

wirtschaftliche und wissenschaftliche Zusammenhänge und Entwicklungen nachzudenken. Die Mathematik stellt Werkzeuge zur Verfügung, um bei Fragen nachhaltiger Entwicklung fundierte Aussagen zu treffen und zu sachlich begründeten Bewertungen zu kommen“ (s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016f, S. 4).

In der Sekundarstufe II werden die in der Sekundarstufe I erwobenen Kompetenzen vertieft und ausgebaut, jedoch ergeben sich keine wesentlichen neuen Aspekte (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016h, 2016n, 2018b).

Die der Zeitreihenanalyse dienlichen mathematischen Inhalte verteilen sich somit über die gesamte Schulzeit und darüber hinaus. Sie werden im Laufe der Zeit vertieft und mathematisch immer präziser gefasst. Die Analyse von Temperaturdaten könnte einen roten Faden im Mathematikunterricht darstellen, der ein wohl noch länger sehr aktuelles Thema aufgreift, sofern weitere benötigte Methoden in den Lehrplan integriert würden.

Berufliche Schulen erkennen die Regressionsanalyse als eine Methode der Datenerfassung, -darstellung und -aufbereitung an. Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich Teile des Analyseverfahrens im Rahmen von Projektenarbeiten (vgl. Lehrerinnenfortbildung Baden-Württemberg, o. D.). Jedoch erfolgen hier die Berechnungen mit vorgefertigten Formeln, die die Steigung und den  $y$ -Achsenabschnitt direkt angeben. Eine Herleitung ist nicht vorgesehen. Darüber hinaus blenden viele Taschenrechner oder Tabellenkalkulationsprogramme die Trendgerade in der Datenanalyse auf Knopfdruck ein und geben die zugehörige mathematische Beschreibung an. Ob Schülerinnen und Schüler so ein Verständnis der Methode erlangen, ist zu bezweifeln.

Neben dem berufsbildenden Ziel der Zeitreihenanalyse bzw. der Regressionsanalyse, das eine Einbindung in den Unterricht verfolgt, verdeutlicht ein kurzer Blick in den Physikunterricht die Notwendigkeit, die Methoden der Regressionsanalyse eigentlich bereits in der Schule zu vermitteln. Es ist ein Ziel des Physikunterrichts (7. und 8. Jahrgangsstufe), Aussagen durch geeignete Fragestellungen und Hypothese zu überprüfen. Dabei ist der Unterschied zwischen Beobachtung (Messdaten) und Erklärung herauszustellen. Somit kommt der Funktion von Modellen eine besondere Bedeutung zu. Da viele physikalische Gesetze, die Lernende in der Schule erforschen, auf linearen Zusammenhängen beruhen, ist die Regressionsanalyse ein elementarer Bestandteil des Physikunterrichts. Leider erfolgt keine theoriegetriebene Herleitung dieser Modelle, sondern häufig eine Bestimmung durch reines Anlegen eines durchsichtigen Lineals nach „Gefühl“. Diese Denk- und Arbeitsweise wird in den höheren Jahrgangsstufen weiter vertieft, ohne mathematische Hintergründe zu berücksichtigen (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016h, 2016p). Die Zeitreihenanalyse als ein Teilgebiet der Regressionsanalyse ist also ein Werkzeug mit einem großen Nutzen für Schülerinnen und Schülern, das Anwendung in diversen Bereichen findet. Weitere Anwendungsvorschläge für die Regressionsanalyse und der Zeitreihenanalyse im schulischen Kontext präsentiert Eichler und Vogel (2013). Die selbstständige, mathematische Herleitung der Regressionsgerade bleibt dabei zugunsten eines niederschwelligeren Niveaus unangetastet. Leider zählt die Regressionsanalyse auch in den universitären Veranstaltungen häufig zu den Wahlbereichen und stellt damit auch für eine Mehrheit der Lehrkräfte ein neues mathematisches Werkzeug dar. Aus diesem Grund wird das Thema der trend- und ereignisbezogenen Regressionsanalyse in den Lernmaterialien didaktisch aufbereitet und schrittweise erarbeitet. Das benötigte mathematische Hintergrundwissen wird bereitgestellt und am Lernmaterial orientiert ausgerichtet (vgl. Abschnitte 5.1 und 6.1). Die mathematischen Inhalte bleiben aber nicht losgelöst von der hier vorgeschlagenen Anwendung stehen. Die vorgestellten Methoden der Zeitreihenanalyse finden in

den Abschnitten 5.2 bzw. 6.2 Anwendung, indem sie auf eine reale Zeitreihe übertragen werden. Diese Erarbeitung dient weiter als Ausgangspunkt für die Erstellung des Lehr- und Lernmaterials. Erst im Anschluss daran führt die didaktische Reduktion zu einem durchdachten Aufbau des Materials (vgl. Abschnitte 5.3 und 6.3). Sie stellt nicht nur die ausgearbeitete Form des Lernmaterials vor, sondern auch didaktische Hilfsmittel und Informationen für Lehrpersonen bereit, die diese für den selbstständigen Einsatz in der Schule benötigen. Lehrkräfte sollen durch diese Aufbereitung eine zielgerichtete Vorbereitung des Materials erfahren, die zu einem sicheren Umgang mit diesem und einer guten Betreuung der Lernenden führt. Daher gibt die didaktische Reduktion darüber hinaus detailliert Auskunft über die Inhalte, auf denen das Material aufbaut und die somit Voraussetzung für eine erfolgreiche Bearbeitung sind, sowie über Inhalte, die im Lernmaterial neu eingeführt werden. Die Arbeit ordnet die Inhalte ergänzend in den schulischen Kontext ein und erörtert dabei die Chancen des Materialeinsatzes für den Unterricht, aber auch die Hürden, die sich dadurch ergeben. Grundlage ist der Bildungsplan 2016 des Gymnasiums des Landes Baden-Württemberg für das Fach Mathematik (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016f, 2016n, Klassen 9/10, 11/12 (Leistungs- und Basisfach)).

Die Lernmaterialien sowohl zur trend- als auch zur ereignisbezogenen Zeitreihenanalyse verfolgen die Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen durch den Einsatz des Lernmaterials

1. einen Zugang zu einer objektiven und wissenschaftlich begründeten Untersuchung des Themas Klimawandel erfahren, indem sie
2. mathematische Herangehensweisen an wissenschaftliche Fragestellungen kennenlernen (Stichwort: mathematische Modellierung),
3. mathematische Methoden zur Evaluation und Validierung wissenschaftlicher Fragestellungen entwickeln sowie
4. sich mathematische Inhalte, die teilweise auf Schulniveau sind, und darüber hinaus gehende höhere Mathematik aneignen und problembezogen anwenden.

Ein ergänzendes Lernziel für die Lernmaterialien zur trendbezogenen Zeitreihenanalyse besteht darin, dass sich die Lernenden mathematische Inhalte, die teilweise auf Schulniveau sind, und darüber hinaus gehende höhere Mathematik aneignen und problembezogen anwenden. Die vorherige Einordnung der mathematischen Inhalte in die Bildungspläne wird in Abschnitt 2.5 um die Einordnung des Anwendungskontextes in den Schulunterricht ergänzt. Für die Lernmaterialien zur ereignisbezogenen Zeitreihenanalyse formuliert die Anforderung, dass die Heranwachsenden mathematische Inhalte des Schulunterrichts wie beispielsweise Wahrscheinlichkeitsberechnung, absolute und relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Erwartungswert problembezogen anwenden, ein zusätzliches Lernziel.

Damit kann und soll das im Rahmen der Dissertation entwickelte Lernmaterial nicht nur eine Aufarbeitung des Themas Klimawandel sein. Es hat zusätzlich das Ziel, eine Methodenschule zu sein, Zusammenhänge in Beobachtungen quantitativ zu formulieren und Erklärungen auf einer nachvollziehbaren und wiederholbaren Strategie zu entwerfen. Die Regressionsanalyse inklusive des Hypothesentestens ist inhaltlich reichhaltig und sehr umfangreich. Daher beschränkt sich das Lernmaterial in Kapitel 5 auf diese Inhalte. Das Material ließe sich um die Ermittlung von Lage- und Streumaßen erweitern (vgl. Abschnitt 5.2.1). So könnte das Lernmaterial auch für jüngere Schülerinnen und Schüler zugänglich gemacht werden. Es läge dann in der Aufgabe der Lehrkraft, die für die Jahrgangsstufe passenden Inhalte auszuwählen.



# 5

## Trendbezogene Zeitreihenanalyse am Beispiel der Fragestellung „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist dieser signifikant?“

Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler stellen im fünften Sachstandsbericht des IPCC fest, der Temperaturanstieg existiere seit Beginn der Industrialisierung und folge einem linearen Trend (vgl. IPCC, 2013a). Diese Aussage gibt Anlass zu fragen, wie Klimawissenschaftlerinnen und -wissenschaftler zu der Behauptung kommen. Das Lernmaterial motiviert Schülerinnen und Schüler dazu, selbstständig den Temperaturanstieg zu analysieren und ihn dazu durch einen linearen Trend zu beschreiben. Die Untersuchung beruht auf realen und authentischen Forschungsmethoden. Die Analyse nutzt den Datensatz *HadCRUT4*, der in Abschnitt 2.3 ausführlich vorgestellt wird. Lernende untersuchen die Temperaturzeitreihe entsprechend der Aussage des Berichts des IPCC (2013a) mithilfe der linearen Regressionsanalyse auf einen linearen Trend hin. Der Workshop zu dem Thema „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist dieser signifikant?“ spiegelt somit vor allem Methoden aus der Zeitreihenanalyse und dem Bereich des Hypothesentestens wider.

Der Abschnitt 5.5 thematisiert den Einsatz des Lernmaterials für Lehrerfortbildungen im Bereich der mathematischen Modellierung mit Schülerinnen und Schülern. Dadurch erfährt das Lernmaterial eine Wertsteigerung, da es sich nicht auf eine selbstständige Einarbeitung der Lehrpersonen verlässt, sondern diesen sogar zusätzliche Wege anbietet, das Material und dessen Einsatz mit Schülerinnen und Schülern von Fachpersonen dargelegt zu erhalten. Die Lehrerfortbildungen heben damit die vorangegangene Arbeit der Abschnitte 5.1–5.3 auf eine neue Ebene. Sie machen das Angebot, in die Thematik des Klimawandels forschungsbasiert und methodenorientiert einzusteigen. Eine anschließende selbstständige Weitererkundung des Materials durch die Lehrpersonen können ihnen jedoch die vorgestellten Formen der Lehrerfortbildungen nicht abnehmen, da diese zeitlich sehr beschränkt sind.

## 5.1 Analyseverfahren zur trendbezogenen Untersuchung einer Zeitreihe

Die Einführung in die mathematischen Inhalte des Workshops bildet eine Zusammenfassung der zugrunde liegenden Mathematik und ermöglicht Lehrpersonen einen leichten Einstieg in das benötigte Hintergrundwissen. Es werden Zusammenhänge in einer Tiefe dargestellt, die ihnen eine sichere Grundlage für die Durchführung ermöglicht. So finden nur solche Methoden der Zeitreihenanalyse Einzug in den folgenden Abschnitt, die im Lernmaterial angewandt werden. Eine allumfassende Betrachtung der Methoden wird nicht angestrebt.

Zu Beginn steht die Definition einer Zeitreihe im Fokus. Es folgen darauf aufbauend verschiedene Möglichkeiten zur Visualisierung und deren Vergleich vor dem Hintergrund ihres Zwecks (s. Abschnitt 5.1.1). Weitere Ausführungen erschließen die Formulierung eines Modells zur Darstellung der Daten und der anschließenden Schätzung der Modellparameter innerhalb des aufgestellten Modells (s. Abschnitt 5.1.2–5.1.3). Es schließt sich eine Beurteilung der aufgestellten Modelle an, in der gleichzeitig eine Untersuchung von Störgrößen wie Ausreißer und Hebel erfolgt (s. Abschnitt 5.1.4). Es werden weiterhin Konfidenzbereiche für die Modellparameter aufgestellt und Hypothesen für Parameter innerhalb des Modells getestet (s. Abschnitte 5.1.5–5.1.6). Abschließend werden Verfahren zur Prognosenerstellung behandelt (s. Abschnitt 5.1.7). Vorrangiges Ziel ist an dieser Stelle der Arbeit die Trenduntersuchung von Zeitreihen.

Ganz allgemein untersucht eine Zeitreihenanalyse Beobachtungen, die über einen gewissen Zeitraum an diskreten Zeitpunkten gemessen wurden. Die Ausprägungen der Daten werden durch Zahlen an  $n$  verschiedenen Zeitpunkten erfasst. Es liegen damit  $n$  Beobachtungspaare  $(y_i, x_i)$  mit  $i = 1, \dots, n$  vor. Die Beobachtung und Untersuchung verschiedener Merkmale innerhalb eines Zeitraums basiert auf *multivariaten Analysemethoden*. Beispielhaft stelle man sich die tägliche Dokumentation der durchschnittlichen Lufttemperatur in Deutschland vor. Ebenso liegen für den gleichen Zeitraum Messungen der Durchschnittstemperaturen in Frankreich, Spanien und Italien vor. Für im Allgemeinen  $k$  Merkmale zu  $n$  Beobachtungszeitpunkten bildet die Datenmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nk} \end{pmatrix}$$

alle erhobenen Werte ab. Im Beispiel stünde jede Spalte für ein Land und jede Zeile für einen Tag. Die Objekte  $d_{ij}$  repräsentieren dann die gemessenen Durchschnittstemperaturwerte für ein Land  $j \in \{1, \dots, k\}$  und einen Tag  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Für die multivariate Zeitreihenanalyse ist es unerlässlich, sich auch die einzelnen Merkmale separat voneinander anzusehen. Wird lediglich ein Merkmal  $y_i$  zu  $n$  verschiedenen Zeitpunkten betrachtet, so spricht man von *univariater Zeitreihenanalyse*. Auf diesen Fall beschränkt sich die vorliegende Arbeit.

Ein Datensatz  $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$  heißt *Zeitreihe*, wenn die als *Zeitpunkte* gedeuteten Werte  $x_1, \dots, x_n$  strikt nach aufsteigender Größe geordnet sind und der Beobachtungswert  $y_i$  zum Zeitpunkt  $x_i$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  erhoben wird. Strikt geordnet bedeutet, dass  $x_1 < \dots < x_n$  gilt. Die Zeitpunkte heißen *äquidistant*, wenn der Abstand zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten für alle Zeitpunkte gleich ist. Es gilt dann:  $x_{i+1} - x_i = \Delta x$  für jedes  $i = 1, \dots, n-1$  und ein  $\Delta x > 0$ .

Grundlage einer Zeitreihenanalyse ist also immer ein Datensatz von gemessenen, über einen festgelegten Zeitraum aufgenommenen Beobachtungen. Die Analyse einer Zeitreihe durchläuft üblicherweise die folgenden Schritte. Dabei können einzelne Schritte je nach Ziel der Untersuchung auch übersprungen werden. Zusätzlich kann eine Prüfung der Prognosegüte als letzter Schritt erfolgen. Dieser ist hier nicht aufgenommen, da er nicht Teil des Lernmaterials ist.

1. Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen (s. Abschnitt 5.1.1)
2. Formulierung eines Modells (s. Abschnitt 5.1.2)
3. Schätzung von Modellparametern (s. Abschnitt 5.1.3)
4. Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung (s. Abschnitt 5.1.4)
5. Aufstellen von Konfidenzbereichen (s. Abschnitt 5.1.5)
6. Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung (s. Abschnitt 5.1.6)
7. Erstellung von Prognosen (s. Abschnitt 5.1.7)

Die Untersuchung einer Zeitreihe kann verschiedene Ziele verfolgen. So kann sie rein zur Beschreibung und Erklärung zeitlicher Prozesse oder Abläufe dienen (*struktur-entdeckend*). Dazu reicht es aus, lediglich die Schritte 1–4 zu durchlaufen. Daneben besteht ein weiteres Ziel darin, eine Aussage zu überprüfen. In den ersten vier Schritten erfolgt die Aufstellung eines passenden Modells oder die Auswahl eines bereits bestehenden Modells. Anschließend wird eine Plausibilitätsaussage über die geschätzten Parameter unter der Modellannahme getroffen. Dazu stellt man Konfidenzbereiche auf oder wählt einen geeigneten Hypothesentest. Dieser Vorgang beschreibt einen *struktur-prüfenden* Ansatz. Soll darüber hinaus das zukünftige Verhalten der beobachteten Größe vorhergesagt werden, so wendet man zusätzlich noch den letzten Schritt (6) an.

Das Lernmaterial präsentiert beispielhaft eine alle Schritte umfassende Analyse einer Temperaturzeitreihe. Für den innerschulischen Einsatz bietet es sich an, die Arbeitsblätter in kleinere Einheiten zu zerlegen. Angepasst an den Unterrichtsverlauf lassen sich einzelne Analyseschritte einbauen. Die Zerlegung erfolgt im Rahmen der Zielorientierung der Analyse.

### **5.1.1 Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen**

Die Visualisierung einer Zeitreihe dient dazu, sich einen Überblick über die Datenlage zu verschaffen. Sie ist essenziell, um ein geeignetes Modell zu finden, denn die Modellergebnisse beruhen immer auf dem Modell selbst und können nur Interpretationen im Rahmen der getroffenen Modellannahmen liefern. Wird bereits ein Modell angenommen, das die Daten nicht ausreichend gut beschreibt, so ist die Aussagekraft der Modellergebnisse stark beschränkt. Das Modell sollte den Daten angepasst sein. Univariate Zeitreihen haben gegenüber multivariaten den deutlichen Vorteil, dass sie sich sehr gut ohne vorherige Kompression der Daten visualisieren lassen.

Das Säulendiagramm gehört zu den *Stabdiagrammen* und ist ein sehr bekannter Diagrammtyp. Typischerweise wird die Zeit auf der Abzisse abgetragen. Die Merkmalsausprägung wird dann auf der Ordinate als senkrechter Strich bzw. Säule symbolisiert. Dieser Diagrammtyp eignet sich besonders für die Abbildung von relativen oder absoluten Häufigkeiten. Kapitel 6 greift diese Art von Diagrammen auf.

Daneben können Zeitreihen in Form von *Streuungsdiagrammen* (sogenannten *Punktwolken*) visualisiert werden. Dabei werden die Beobachtungen als zweidimensionale Punkte aufgefasst und in ein Koordinatensystem eingetragen. Das Streudiagramm eignet sich besonders gut, um Entwicklungen und Trends darzustellen. Daher nutzen alle folgenden Visualisierungen von Zeitreihen diesen Diagrammtyp.

Zusätzlich zu der Visualisierung der Zeitreihe helfen Lage- und Streumaße bei der ersten Einschätzung der Datengrundlage. Sie geben bereits einen Überblick über die Lage der Daten und deren Streuung und dienen somit der erkundenden Datenanalyse. Das Wissen über ihre Definitionen und Bestimmungen wird als bekannt vorausgesetzt. Daher erhalten sie erst in der Anwendung in Abschnitt 5.2.1 Einzug in die Zeitreihenanalyse.

### 5.1.2 Formulierung eines Modells

Modelle der Form

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = X\beta + \varepsilon$$

bilden häufig (zeitabhängige) Beobachtungsdaten ab. Die auch als *Regressor* bezeichnete Matrix  $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$  ist fest und bekannt. Dabei steht  $k$  für die Anzahl der *Kovariablen*. Der Vektor  $\beta \in \mathbb{R}^k$  charakterisiert einen unbekannten Modellparameter, der gesucht wird. Der nicht-beobachtbare Zufallsvektor  $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$  modelliert den Fehler des Regressionsmodells. Dabei ist  $\varepsilon$   $n$ -dimensional normalverteilt mit dem Erwartungswertvektor  $0_n$  und der unbekannten Kovarianzmatrix  $\sigma^2 I_n$ , das heißt  $\varepsilon \sim \mathcal{N}_n(0_n, \sigma^2 I_n)$ , wobei  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix darstellt und  $\sigma^2 > 0$  unbekannt ist. Man bezeichnet  $\varepsilon$  als *Residuum* oder *Rauschkomponente*. Die Zufallsvariablen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  werden als stochastisch unabhängig und jeweils normalverteilt mit  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $i \in 1, \dots, n$ , angenommen. Man nennt  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  auch *Residuen*. Unter diesen Voraussetzungen beschreibt der sogenannte *Regressand*  $Y \in \mathbb{R}^n$  einen Zufallsvektor, der ebenfalls normalverteilt ist mit  $Y \sim \mathcal{N}_n(X\beta, \sigma^2 I_n)$ . Der Regressor  $X$  besitze vollen Rang, das heißt  $\text{rang}(X) = k$ , und es gelte  $n > k$ . Der Wert  $n - \text{rang}(X)$  wird auch als *Freiheitsgrad* bezeichnet. Ein solches Modell heißt *Regressionsmodell*. Bei Modellen für Zeitreihen wird die geforderte stochastische Unabhängigkeit der Residuen nicht angenommen, sondern, dass die  $Y_1, \dots, Y_n$  je nach Modell (beispielsweise einer autoregressiven Zeitreihe) eine bestimmte stochastische Unabhängigkeitsstruktur aufweisen.

Unter der Annahme eines solchen Regressionsmodells modellieren  $Y_1, \dots, Y_n$  die Beobachtungswerte. Der Modellparameter  $\beta$  ist unbekannt und so zu schätzen, dass das gewählte Modell die Beobachtungsdaten „bestmöglich“ widerspiegelt, wobei „bestmöglich“ zu definieren ist. Das Residuum modelliert dabei die Abweichungen der zufallsbehafteten Daten  $Y$  vom Erwartungswert  $E(Y) = X\beta$ .

Regressionsmodelle werden häufig genutzt, um eine langfristige Entwicklung in den Beobachtungsdaten aufzuspüren. Eine solche Entwicklung heißt *Trend*. Unterliegen die Daten saisonalen (periodischen) Schwankungen, müssen diese Variationen zunächst aus den Daten entfernt werden, bevor eine Trenduntersuchung möglich ist. Im Folgenden seien die Daten bereits saisonbereinigt.

Das Regressionsmodell spiegelt sich in einer Regressionsfunktion wider. Das einfachste Regressionsmodell beschreibt einen linearen Trend in den Daten. Das heißt, es wird eine Regressionsfunktion  $Reg(x_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i$  zur Beschreibung der Beobachtungsdaten  $(y_i, x_i)$ , für alle  $i = 1, \dots, n$  angenommen. Die Anzahl der Kovariablen kann aber auch für univariate Regressionsanalysen ungleich eins sein. So zählen neben Modellen mit linearer (genauer: affiner) Regressionsfunktion  $Reg(x) = \beta_1 + \beta_2 x$  auch beispielsweise Modelle mit polynomialer, exponentieller oder trigonometrischer Regressionsfunktion zu den linearen Regressionsmodellen. Eine Verdeutlichung erfolgt anhand der polynomiaalen Regression, genauer der quadratischen Regression.

**Beispiel 5.1** Es seien  $y_1, \dots, y_n$  Beobachtungswerte, die zu den Zeitpunkten  $x_1, \dots, x_n$  aufgenommen wurden. Die Visualisierung der Datenpunkte deute einen quadratischen Zusammenhang zwischen den Beobachtungswerten und der Zeit an. Es wird also vermutet, dass von Zufallsfehlern abgesehen

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 x_i^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

gilt. Diese Formulierung lässt sich umschreiben zu

$$y_i = (1, x_i, x_i^2) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Mit  $\mathbf{x}_i := (1, x_i, x_i^2)$  und  $X := (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$ ,  $Y := (Y_1, \dots, Y_n)^T$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$  und  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$  ergibt sich daraus das Modell

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

der quadratischen Regression. Dabei wird  $y_i$  als Realisierung von  $Y_i$  angesehen,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Das Beispiel 5.1 der quadratischen Regression kann verallgemeinert werden auf die polynomiale Regression:

**Beispiel 5.2** Seien  $y_1, \dots, y_n$  Beobachtungswerte, die zu den Zeitpunkten  $x_1, \dots, x_n$  aufgenommen wurden. Die Visualisierung der Datenpunkte deute einen polynomiaalen Zusammenhang vom Grad  $k$  zwischen den Beobachtungswerten und der Zeit an, sodass das Modell

$$\underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}}_{=Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_1^2 + \dots + \beta_k x_1^{k-1} + \varepsilon_1 \\ \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_2^2 + \dots + \beta_k x_2^{k-1} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \beta_1 + \beta_2 x_n + \beta_3 x_n^2 + \dots + \beta_k x_n^{k-1} + \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\substack{=Y \\ =\varepsilon}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{k-1} \end{pmatrix}}_{=X} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}}_{=\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{=\varepsilon}$$

angenommen wird. Dabei sei  $y_i$  eine Realisierung von  $Y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Es ist schnell ersichtlich, dass es sich um ein lineares Regressionsmodell handelt. Obwohl die Kovariablen von höherem Grad sind, so sind die Gleichungen doch linear in den Koeffizienten.

Die weiteren Schritte zur Zeitreihenanalyse beschränken sich daher auf die Untersuchung von linearen Regressionsmodellen. Wurde anhand der graphischen Darstellung ein lineares Modell mit geeigneter Regressionsfunktion ausgewählt, so erfolgt im nächsten Schritt eine Schätzung für den Modellparameter  $\beta$ .

### 5.1.3 Schätzung von Modellparametern

Gesucht ist im linearen Modell ein geeigneter Schätzer  $\hat{\beta}$  für den Regressionsparameter  $\beta$ . Dabei erscheint es sinnvoll, das Residuum möglichst klein zu halten. Da  $\{X\beta : \beta \in \mathbb{R}^k\} =: U$  einen  $k$ -dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  bildet und  $Y$  einen zufälligen Punkt im  $\mathbb{R}^n$  beschreibt, wird der minimale Abstand zwischen  $Y$  und  $U$  erreicht, indem von  $Y$  das Lot auf  $U$  gefällt wird. Damit stellt das folgende Minimierungsproblem einen geeigneten Ansatz für einen Schätzer von  $\beta$  dar: Wähle den Modellparameter  $\beta$  so, dass

$$\|Y - X\beta\|_2^2 \stackrel{!}{=} \min_{\beta} \quad (5.1)$$

gilt. Dabei steht  $\|\cdot\|_2$  für die Euklidische Norm. Diese Methode nennt sich *Methode der kleinsten Quadrate*. Gauß entwickelte sie in jungen Jahren, als er sich dem Problem der Wiederentdeckung des Planetoiden Ceres widmete (vgl. Hald, 1998, Bingham und Fry, 2010).

**Satz 5.3** Für das in Gleichung (5.1) formulierte Ausgleichsproblem beschreibt  $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^k$  genau dann eine Lösung, wenn  $\hat{\beta}$  die Normalgleichungen

$$X^T X \beta = X^T Y$$

löst. Damit liefert  $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$  einen geeigneten Schätzer für  $\beta$ .

Der Schätzer  $\hat{\beta}$  ist normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$E(\hat{\beta}) = E((X^T X)^{-1} X^T Y) = (X^T X)^{-1} X^T E(Y) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta \quad (5.2)$$

und damit erwartungstreu für  $\beta$ . Die Erwartungstreue des Schätzers besagt, dass der Erwartungswert des Schätzers gleich dem wahren Wert des Regressionsparameters ist. Diese Eigenschaft ist sehr sinnvoll, da der Schätzer ja gerade den wahren Wert schätzen soll. Die Kovarianzmatrix des Schätzers  $\hat{\beta}$  ist durch

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\beta}) &= Cov((X^T X)^{-1} X^T Y) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T Cov(Y) X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

gegeben.

Zusammengefasst ergibt sich, dass  $\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2(X^T X)^{-1})$  gilt (vgl. Searle, 1997, S. 99, Miller, 1980, S. 49).

Es gilt weiter

$$Y - X\widehat{\beta} = AY, \quad (5.4)$$

wobei

$$A := I_n - X(X^T X)^{-1}X^T. \quad (5.5)$$

Damit ist die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- symmetrisch, da

$$A^T = (I_n - X(X^T X)^{-1}X^T)^T = I_n - (X^T)^T (X^T X)^{-1} X^T = A$$

gilt, und

- idempotent, da

$$\begin{aligned} A^2 &= (I_n - X(X^T X)^{-1}X^T)^2 \\ &= I_n - 2X(X^T X)^{-1}X^T + X(X^T X)^{-1}X^T X(X^T X)^{-1}X^T \\ &= I_n - X(X^T X)^{-1}X^T \\ &= A \end{aligned}$$

gilt.

- Des Weiteren besitzt  $A$  den Rang  $n - k$ .

Mit diesen Eigenschaften vermittelt  $A$  eine orthogonale Projektion.

Die Besonderheit, dass

$$AX = (I_n - X(X^T X)^{-1}X^T)X = X - X(X^T X)^{-1}X^T X = \mathbf{0}_{n \times k} \quad (5.6)$$

gilt, wird sich an späterer Stelle ebenfalls als nützlich erweisen.

#### **Beispiel 5.4 Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf ein einfaches lineares Regressionsmodell**

Unter dem Regressionsmodell  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots, n$  vereinfacht sich das in Gleichung (5.1) niedergelegte Minimierungsproblem zu

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2 \stackrel{!}{=} \min_{\beta_1, \beta_2}.$$

Dieses Kriterium liefert einen Schätzer  $\widehat{\beta} =: (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)^T$  mit

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 &= \bar{Y} - \widehat{\beta}_2 \cdot \bar{x}, \\ \widehat{\beta}_2 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \bar{x} \cdot \bar{Y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $\bar{x}$  bzw.  $\bar{Y}$  die arithmetischen Mittel von  $x_1, \dots, x_n$  bzw. von  $Y_1, \dots, Y_n$ .

*Bemerkung:* Eine Herleitung des Schätzers auf Schulniveau führt Lösung 5.8 auf Seite 111 aus.

#### 5.1.4 Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung

Im Anschluss an die Schätzung des Modellparameters folgt eine Beurteilung des aufgestellten Modells im Hinblick auf eine angemessene Beschreibung der Daten.

Eine erste Begutachtung bezieht sich auf einzelne Datenpunkte, die entweder besonders stark von den entsprechenden Schätzwerten, das heißt den Realisierungen der Schätzer, abweichen oder die die Schätzwerte besonders stark beeinflussen. Dadurch lässt sich die *Stabilität des Modells* beurteilen.

Einzelne Beobachtungswerte, die deutlich von den übrigen Datenwerten abweichen, bezeichnet man als *Ausreißer*. Die Ursache liegt häufig in Messfehlern oder Datenübertragungsfehlern begründet. Streuungsmaße wie beispielsweise die empirische Varianz oder die Standardabweichung quantifizieren die Schwankungen in den Daten. Liefert die Untersuchung das Ergebnis, dass es sich wirklich um fehlerhafte Werte handelt, so ist ein Ausschluss dieser Werte von der Analyse legitim. Jedoch sollte dabei vorsichtig vorgegangen werden, da (fehlende) Beobachtungsdaten das Modell beeinflussen. Spiegelt ein Modell die Daten schlecht wider, gilt es nicht nur die Daten, sondern vor allem auch das Modell zu hinterfragen. Die Abweichung des Beobachtungswertes vom Regressionsfunktionswert beschreibt die Stärke eines Ausreißers. Die Abweichung  $(y_i - (X\beta)_i)^2$  heißt *Diskrepanz*. Dabei bezeichnet  $(X\beta)_i$  die  $i$ -te Komponente des Vektors  $X\beta$ .

Ebenso nimmt ein Beobachtungswert, der in  $x$ -Richtung weit entfernt vom Datenzentrum liegt, einen besonderen Einfluss auf das Modell, und er kann fehlerbehaftet sein. Die Abweichung in  $x$ -Richtung vom „wahren“ Wert nennt sich *Hebel*.

Insgesamt ist der Einfluss einzelner Datenpunkte auf das Regressionsmodell genau dann groß, wenn sowohl deren Diskrepanz als auch deren Hebel groß sind.

In den meisten Fällen streuen die Beobachtungen um die theoretische Regressionsfunktion. Im Allgemeinen gilt also  $y_i \neq (X\beta)_i$ . Es stellt sich damit die Frage, wie gut das Modell die Daten ausdrückt. Die Residuen quantifizieren die Anpassung der Regressionsfunktion an die Daten, sprich deren Güte. Das *Bestimmtheitsmaß*  $R^2$  stellt eine Maßzahl dar, die die Qualität der Anpassung beschreibt. Das bedeutet, sie stellt den Anteil der Streuung dar, der durch das Modell erklärt werden kann. Das Bestimmtheitsmaß trifft jedoch keine Aussage darüber, ob das Modell geeignet ist.

**Definition 5.5** Für ein Regressionsmodell  $Y = X\beta + \varepsilon$  bezeichne  $\bar{Y}$  das arithmetische Mittel von  $Y_1, \dots, Y_n$ . Dann heißt die Zufallsvariable

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - (\widehat{X}\beta)_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\|Y - \widehat{X}\beta\|_2^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

das *Bestimmtheitsmaß*.

Das Bestimmtheitsmaß beschreibt die Stärke des linearen (genauer: affinen) Zusammenhangs zwischen Regressand und Regressor. Es liegt immer zwischen 0 und 1. Je näher es an 1 liegt, desto besser ist die Anpassung des Modells an die Daten, und desto besser erklärt das Modell die Streuung. Ist das Bestimmtheitsmaß gleich 1, so liegen alle Daten auf der Regressionsfunktion. Ist hingegen das Bestimmtheitsmaß gleich 0, so existiert kein linearer Zusammenhang. Es folgt daraus aber nicht zwangsläufig, dass die Daten gar keinen Zusammenhang aufweisen. Beschränkt sich die Regressionsanalyse auf lediglich zwei Messwerte, existiert immer ein lineares Modell, das diese beiden Datenpunkte perfekt abbildet. Das Bestimmtheitsmaß wäre entsprechend eins. Über die statistische Signifikanz dieses scheinbar linearen Zusammenhangs kann das Bestimmtheitsmaß keine Aussage treffen. Ab welchem Wert das Bestimmtheitsmaß einen linearen Zusammenhang andeutet, hängt vom untersuchten Merkmal ab. In Situationen, die menschliches Verhalten abbilden, liegt das Bestimmtheitsmaß normalerweise unter 50 % (vgl. Minitab Blog Editor, 2020). Die Modellierung von physikalischen Prozessen fordert häufig ein deutlich höheres Bestimmtheitsmaß, da sich hier Größen direkt und relativ genau gemessen lassen (vgl. Pflieger, 2014). Es heißt, ab einem Bestimmtheitsmaß von etwa 0.8 könnte auf einen starken linearen Zusammenhang geschlossen werden. Das bedeutet, dass sich 20 % der Streuung in den Daten nicht durch einen linearen Zusammenhang erklären lassen. Ein linearer Zusammenhang ist dennoch auch bei niedrigeren Werten nicht auszuschließen. In diesem Fall sind weitere Untersuchungen nötig, die entweder den linearen Zusammenhang bekräftigen oder von diesem Modell abraten.

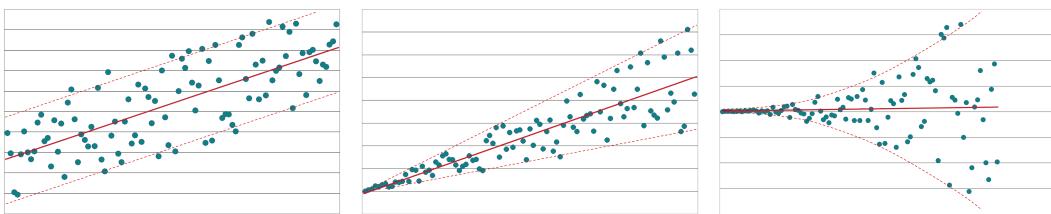
Das Residuum nimmt in der Regressionsanalyse eine besondere Rolle ein. Es beschreibt die Abweichung der Daten vom gewählten Modell. Ebenso wie die Modellparameter wird auch das Residuum geschätzt. Eine vollständige Residuenanalyse umfasst somit auch immer die Betrachtung der *Fehlervarianz*. Sie ist ein Maß der Konzentration der Beobachtungsdaten um die Regressionsfunktion und lässt sich über

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-k} \|Y - \widehat{X}\beta\|_2^2 \quad (5.7)$$

schätzen. Der Schätzer  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  wird auch als *Standardschätzfehler* bezeichnet. Der Begriff Fehler ist an dieser Stelle irreführend, da er eine Abweichung der Daten vom Modell aufgrund eines Fehlers in den Daten suggeriert. Möglicherweise wäre an dieser Stelle der Begriff (geschätzte) *Residuenvarianz* oder *standardisierter Redidualschätzer* besser gewählt. Mit Gleichung (5.4) und  $Y \sim \mathcal{N}_n(X\beta, \sigma^2 I_n)$  sowie  $A$  wie in Gleichung (5.5) gilt nach Searle (1997, S. 100)

$$(n-k)\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \|Y - \widehat{X}\beta\|_2^2 = \|AY\|_2^2 = Y^T AY \sim \sigma^2 \chi_{n-k}^2. \quad (5.8)$$

Der Bruch  $1/(n-k)$  in Gleichung (5.7) macht somit den Schätzer  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  erwartungstreu.



(a) Beispiel für Homoskedastizität: Residuen sind in etwa gleich groß. (b) Beispiel für Heteroskedastizität: Residuen steigen mit größeren Prädiktoren etwa linear an. (c) Beispiel für Heteroskedastizität: Residuen steigen mit größeren Prädiktoren stärker als linear an.

**Abbildung 5.1:** Tukey-Anscombe-Plots bilden die Residuen gegen die Prädiktoren ab und liefern Hinweise auf Homoskedastizität oder Heteroskedastizität. Unter Verwendung von Chrisqwq, 2006a, 2006b, 2006c, Trend der Residuen ergänzt.

Daneben liefern verschiedene graphische Darstellungen der Residuen die Möglichkeit für optische Einschätzungen der Anpassung (vgl. Cramer und Kamps, 2008). Zu den Residualplots zählen

- der *Residuenplot*, in dem die Schätzwerte der Residuen  $\hat{\epsilon}_i$  gegen die Regressorwerte aufgetragen werden (vgl. Cramer und Kamps, 2008; Steland, 2007). Stellen die Regressorwerte äquidistante Zeitpunkte dar, so bietet sich auch ein *Indexplot der Residuen* an. Dabei werden die Schätzwerte der Residuen  $\hat{\epsilon}_i$  gegen den Index  $i$  geplottet (vgl. Abbildung 5.8). So lassen sich Ausreißer in den Residuen einfacher identifizieren. Diese deuten wiederum auf Ausreißer in den ursprünglichen Daten hin. Treten Muster im Residuen- oder Indexplot auf, so können diese auf Korrelationen zwischen den Residuen aufmerksam machen. Eine (Auto-) Korrelation der Residuen bedeutet ihrerseits nicht vollständig durch das Regressionsmodell erklärte Zusammenhänge in den Daten. Deren Überprüfung erfolgt beispielsweise durch einen Durbin-Watson-Test (vgl. Backhaus et al., 2016, S. 105).
- der *Tukey-Anscombe-Plot*. Dieser plottet nach Seber und Lee (2003) die Schätzwerte der Residuen  $\hat{\epsilon}$  gegen die durch das Modell geschätzten Prädiktoren  $(X\hat{\beta})_i$  (vgl. Abbildung 5.9). Sind die Modellannahmen erfüllt, sollte der Tukey-Anscombe-Plot keinen Zusammenhang zwischen den Residuen- und den Prädiktorschätzwerten aufzeigen (vgl. Abbildung 5.9 & 5.1(a)). Ist dennoch eine systematische Beziehung sichtbar, so könnte diese auf Heteroskedastizität hinweisen. Heteroskedastizität liegt vor, wenn die Varianzen der Residuen unterschiedlich groß sind (vgl. Abbildungen 5.1(b) & 5.1(c)). Man beachte, dass die Homoskedastizität eine der Voraussetzungen für ein lineares Modell ist. Eine mögliche Ursache für Heteroskedastizität ist, dass ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen der abhängigen und den unabhängigen Variablen besteht (das Regressionsmodell wurde falsch gewählt). Ebenso führen fehlende relevante Prädiktoren, also Terme in der Regressionsfunktion, zu einer Heteroskedastizität (Regressionsfunktion unvollständig).
- der *Quantil-Quantil-Plot*, kurz QQ-Plot (vgl. Abbildung 5.10). Hier werden die der Größe nach geordneten Schätzwerte der Residuen  $\hat{\epsilon}_i$  gegen die Quantile einer Standardnormalverteilung aufgetragen. Man hält eine Normalverteilungsannahme für die Residuen für angemessen, falls alle Punkte in etwa auf einer Diagonalen liegen.

### 5.1.5 Aufstellen von Konfidenzbereichen

Häufig sind nicht die konkreten Schätzwerte für  $\beta$  oder  $\sigma^2$  von Interesse, sondern die Frage, ob  $\beta$  oder  $\sigma^2$  eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Beispielsweise möchte man prüfen, ob eine Komponente des Vektors  $\beta$  bzw.  $\sigma^2$  größer oder kleiner als eine festgelegte Grenze ist oder in bestimmten Intervallen liegt. Dazu werden sogenannte *Konfidenzintervalle* aufgestellt.

Satz 5.3 lieferte einen Schätzer  $\widehat{\beta} = BY$  mit  $B := (X^T X)^{-1} X^T$ . Folglich gilt mit Gleichung (5.4)

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta} \\ Y - X\widehat{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BY \\ AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \cdot Y \sim \mathcal{N}_{k+n} \left( \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} E(Y), \sigma^2 \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}^T \right).$$

Weiter gilt

$$\begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} BB^T & BA^T \\ AB^T & AA^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^T & \mathbf{0}_{k \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times k} & AA^T \end{pmatrix},$$

da mit Gleichung (5.6)

$$AB^T = A \left( (X^T X)^{-1} X^T \right)^T = AX(X^T X)^{-1} = \mathbf{0}_{n \times k}$$

und

$$BA^T = BA = (X^T X)^{-1} X^T - (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} X^T = \mathbf{0}_{k \times n}$$

folgt. Resultierend ergibt sich, dass der Schätzer  $\widehat{\beta}$  und  $Y - X\widehat{\beta}$  stochastisch unabhängig sind (vgl. Searle, 1997, S. 99). Der Residuenschätzer ist laut Gleichung (5.7) durch  $(n - k)\widehat{\sigma}_\epsilon^2 = \|Y - X\widehat{\beta}\|_2^2$  gegeben. Somit sind auch der Schätzer  $\widehat{\beta}$  und der Residuenschätzer  $\widehat{\sigma}_\epsilon^2$  stochastisch unabhängig.

Die Gleichungen (5.2) und (5.3) liefern das Resultat  $\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2(X^T X)^{-1})$  (vgl. Seite 65). Dieser Umstand führt zu der Verteilungsaussage (vgl. Searle, 1997, S. 49)

$$\frac{(\widehat{\beta} - \beta)^T X^T X (\widehat{\beta} - \beta)}{\sigma^2} \sim \chi_k^2.$$

Nach Gleichung (5.8) gilt  $\widehat{\sigma}_\epsilon^2 \sim \frac{\sigma^2}{(n-k)} \chi_{n-k}^2$ , was in der Verteilungsaussage

$$\frac{\widehat{\sigma}_\epsilon^2}{\sigma^2} \sim \frac{1}{n-k} \chi_{n-k}^2$$

resultiert. Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von  $\widehat{\beta}$  und  $\widehat{\sigma}_\epsilon^2$  ergibt sich für den Quotienten

$$\frac{\frac{(\widehat{\beta} - \beta)^T X^T X (\widehat{\beta} - \beta)}{k\sigma^2}}{\frac{\widehat{\sigma}_\epsilon^2}{\sigma^2}} = \frac{(\widehat{\beta} - \beta)^T X^T X (\widehat{\beta} - \beta)}{k\widehat{\sigma}_\epsilon^2} \sim F_{k, n-k}$$

eine  $F$ -Verteilung mit den beiden Freiheitsgraden  $k$  und  $n - k$  (vgl. Searle, 1997, S. 51)).

Mithilfe der bisherigen Erkenntnisse werden nun Konfidenzintervalle eingeführt. Definiert  $d_{ii}$  das  $i$ -te Element auf der Diagonalen von  $(X^T X)^{-1}$ , so gilt wegen  $\widehat{\beta} \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2(X^T X)^{-1})$  die Verteilungsaussage

$$\frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{d_{ii}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad i = 1, \dots, k.$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $\widehat{\beta}$  und  $\widehat{\sigma}_\varepsilon^2$  gilt darüber hinaus

$$\frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{d_{ii}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}} \sim t_{n-k}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (5.9)$$

mit der *Student'schen t-Verteilung* mit  $n - k$  Freiheitsgraden (vgl. Searle, 1997, S. 53). Es sei das  $(1 - \alpha/2)$ -Quantil von  $t_{n-k}$  mit  $t_{n-k, 1-\alpha/2}$  bezeichnet, wobei  $1 - \alpha$  das *Konfidenzniveau* beschreibt. Weitere gebräuchliche Namen für das Konfidenzniveau sind *Konfidenzwahrscheinlichkeit* oder *Signifikanzniveau*. Mithilfe der Verteilungsaussage in Gleichung (5.9) gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\beta, \sigma} \left( \left| \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{d_{ii}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}} \right| \leq t_{n-k, 1-\alpha/2} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\beta, \sigma} \left( \widehat{\beta}_i - \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2} \leq \beta_i \leq \widehat{\beta}_i + \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2} \right) \\ &= 1 - \alpha. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dabei deutet die Indizierung von  $\mathbb{P}$  mit  $\beta$  und  $\sigma$  an, dass für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit die Bedingung zugrunde gelegt wird, dass  $\beta$  und  $\sigma^2$  die wahren Parameter sind. Damit ist das beidseitige Konfidenzintervall für  $\beta_i$  zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  durch

$$[\widehat{\beta}_i - \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2}, \widehat{\beta}_i + \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2}]$$

gegeben. Einseitige Konfidenzintervalle können analog gebildet werden:

- $[\widehat{\beta}_i - \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha}, \infty)$  (linksseitig),
- $(-\infty, \widehat{\beta}_i + \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{d_{ii}} \cdot t_{n-k, 1-\alpha}]$  (rechtsseitig).

**Beispiel 5.6** Es seien  $y_1, \dots, y_n$  Beobachtungswerte, die zu den Zeitpunkten  $x_1, \dots, x_n$  aufgenommen wurden. Die Visualisierung der Datenpunkte deute einen linearen Zusammenhang zwischen den Beobachtungswerten und der Zeit an. Es wird also ein einfaches lineares Regressionsmodell

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

vermutet, wobei  $y_i$  eine Realisierung von  $Y_i$  darstellt,  $i = 1, \dots, n$ . Weiter seien  $\widehat{\beta}_1$  und  $\widehat{\beta}_2$  Schätzer für den Modellparameter  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ . Es soll untersucht werden, ob die unbekannten Parameter  $\beta_1$  und  $\beta_2$  zu einem  $(1 - \alpha)$ -Niveau in einem bestimmten Intervall liegen. Dazu fokussiert man die Quotienten

$$\frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_{\beta_1}} = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\widehat{\sigma}_\varepsilon} \sqrt{\frac{ns_x^2}{x^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\widehat{\beta}_2 - \beta_2}{\widehat{\sigma}_{\beta_2}} = \frac{\widehat{\beta}_2 - \beta_2}{\widehat{\sigma}_\varepsilon} \sqrt{ns_x^2}$$

mit

$$\widehat{\sigma}_{\beta_1}^2 = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{\bar{x}^2}{ns_x^2}, \text{ wobei } \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{ und } s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0, \text{ sowie } \widehat{\sigma}_{\beta_2}^2 = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{1}{ns_x^2}.$$

So lassen sich ein- und zweiseitige Konfidenzintervalle bilden. Unter den gemachten Annahmen besitzt  $(\widehat{\beta}_1 - \beta_1)/\widehat{\sigma}_{\beta_1}$  eine  $t_{n-2}$ -Verteilung. Nach Gleichung (5.10) sind die  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalle für den Modellparameter  $\beta_1$  zu einem  $(1-\alpha)$ -Niveau mit  $\alpha \in (0,1)$  durch

- $\left[ \widehat{\beta}_1 - t_{n-2, 1-\alpha} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{ns_x^2}}, \infty \right]$  (linksseitig),
- $\left( -\infty, \widehat{\beta}_1 + t_{n-2, 1-\alpha} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{ns_x^2}} \right]$  (rechtsseitig),
- $\left[ \widehat{\beta}_1 - t_{n-2, 1-\alpha/2} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{ns_x^2}}, \widehat{\beta}_1 + t_{n-2, 1-\alpha/2} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{ns_x^2}} \right]$  (beidseitig)

gegeben. Da  $(\widehat{\beta}_2 - \beta_2)/\widehat{\sigma}_{\beta_2} \sim t_{n-2}$  gilt, sind die  $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervalle für den Modellparameter  $\beta_2$  zu einem  $(1-\alpha)$ -Niveau mit  $\alpha \in (0,1)$  gegeben durch

- $\left[ \widehat{\beta}_2 - t_{n-2, 1-\alpha} \frac{\widehat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{ns_x^2}}, \infty \right]$  (linksseitig),
- $\left( -\infty, \widehat{\beta}_2 + t_{n-2, 1-\alpha} \frac{\widehat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{ns_x^2}} \right]$  (rechtsseitig),
- $\left[ \widehat{\beta}_2 - t_{n-2, 1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{ns_x^2}}, \widehat{\beta}_2 + t_{n-2, 1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}_\varepsilon}{\sqrt{ns_x^2}} \right]$  (beidseitig).

Das beidseitige Konfidenzintervall für den Wert  $\beta_1 + \beta_2 x$  der Regressionsfunktion für ein festes  $x$  ist zum Konfidenzniveau  $1-\alpha$  über

$$\left[ (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x) - t_{n-k, 1-\alpha/2} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{ns_x^2}}, (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x) + t_{n-k, 1-\alpha/2} \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{ns_x^2}} \right]$$

gegeben.

Es können jedoch nicht nur für die einzelnen Regressionsparameter Konfidenzintervalle erstellt werden, sondern auch für die gesamte Regressionsfunktion. Im Spezialfall  $k = 2$  erzeugt man so zwei, die geschätzte Regressionsfunktion einhüllende Funktionen, zwischen denen die wahre Regressionsfunktion zu einem bestimmten Signifikanzniveau liegt. Dieser durch die Konfidenzintervalle eingeschlossene Bereich heißt *Vertrauensband*. Eine größere Anzahl an Kovariablen erschwert die Vorstellung des Vertrauensbandes. Das einfache lineare Regressionsmodell hat die Gestalt  $Y_i = (1, x_i)(\beta_1, \beta_2)^T + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Da der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix von  $\widehat{\beta}$  bereits aus den Gleichungen (5.2) und (5.3) bekannt sind, folgt

$$E(\widehat{Y}) = E(X\widehat{\beta}) = XE(\widehat{\beta}) = X\beta$$

und für die Kovarianzmatrix

$$\text{Cov}(\widehat{Y}) = \text{Cov}(X\widehat{\beta}) = \sigma^2 X(X^T X)^{-1} X^T.$$

Um die Konfidenzintervalle aufzustellen, wird die Scheffé-Methode angewandt (vgl. Miller, 1980, S. 49, 59). Für Linearkombination von  $\beta_i$  ( $l_i \beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , wobei hier  $l_1 = 1$  und  $l_2 = x_i$ ) liefern die  $\mathcal{F}$ -Projektionen Konfidenzintervalle mit

$$\begin{aligned} l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 &\in l_1 \widehat{\beta}_1 + l_2 \widehat{\beta}_2 \pm \left(2\mathcal{F}_{2,n-2}^{\alpha}\right)^{1/2} \sigma_{\bar{\epsilon}} \left( \frac{l_1^2}{n} + \frac{(l_2 - l_1 \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \quad \beta_1 + x_i \beta_2 &\in \widehat{\beta}_1 + x_i \widehat{\beta}_2 \pm \left(2\mathcal{F}_{2,n-2}^{\alpha}\right)^{1/2} \sigma_{\bar{\epsilon}} \left( \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha$ . Im allgemeinen Regressionsmodell gilt mit Verwendung von  $X = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_n^T)^T$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\beta, \sigma} \left( \mathbf{x}_i^T \beta \in \mathbf{x}_i^T \widehat{\beta} \pm \left(k\mathcal{F}_{k,n-k}^{\alpha}\right)^{1/2} \sigma_{\bar{\epsilon}} \left( \mathbf{x}_i^T (X^T X)^{-1} \mathbf{x}_i \right)^{1/2} \forall \mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n \right) \\ = \mathbb{P}_{\beta, \sigma} \left( \mathbf{x}_i^T \widehat{\beta} - \left(k\mathcal{F}_{k,n-k}^{\alpha}\right)^{1/2} \sigma_{\bar{\epsilon}} \left( \mathbf{x}_i^T (X^T X)^{-1} \mathbf{x}_i \right)^{1/2} \leq \mathbf{x}_i^T \beta \right. \\ \left. \leq \mathbf{x}_i^T \widehat{\beta} + \left(k\mathcal{F}_{k,n-k}^{\alpha}\right)^{1/2} \sigma_{\bar{\epsilon}} \left( \mathbf{x}_i^T (X^T X)^{-1} \mathbf{x}_i \right)^{1/2} \right) \\ = 1 - \alpha \end{aligned}$$

mit der  $\mathcal{F}$ -Verteilung mit den beiden Freiheitsgraden  $k$  und  $n - k$ . Für den Spezialfall  $k = 1$  reduziert sich der kritische Wert von  $\left(k\mathcal{F}_{k,n-k}^{\alpha}\right)^{1/2}$  zu  $t_{n-k, 1-\alpha/2}$ , da  $t_{n-1}^2 \sim \mathcal{F}_{1, n-1}$  gilt.

### 5.1.6 Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung

Mithilfe eines Hypothesentests soll überprüft werden, ob zufallsbehaftete Daten mit dem Regressionsmodell verträglich sind. Dazu definiert die Menge  $\Theta = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma^2 > 0\}$  eine Klasse von Modellen, die von dem unbekannten Parameter  $\vartheta = (\beta, \sigma^2) \in \Theta$  abhängen. Zerlegt man diese Menge  $\Theta$  in zwei disjunkte Teilmengen  $\Theta_0$  und  $\Theta_1$ , können Hypothesen derart formuliert werden, dass der Test eine Entscheidung zwischen

$$H_0 : \quad \vartheta \in \Theta_0 \quad \text{und} \quad H_1 : \quad \vartheta \in \Theta_1$$

trifft. Die zu testende Hypothese nennt man *Nullhypothese* ( $H_0$ ). Die zu ihr gegenteilige Aussage bezeichnet man als *Alternativhypothese* ( $H_1$ ). Gegenteilig bedeutet, dass sich die beiden Hypothesen gegenseitig ausschließen. Allgemein ist der Hypothesentest ein Verfahren, das basierend auf einer Stichprobe entscheidet, ob die Nullhypothese für die Grundgesamtheit anzunehmen ist oder (mit den gegebenen Daten) nicht belegt werden kann (vgl. Cramer und Kamps, 2008). Diese Entscheidung ist im Allgemeinen jedoch fehlerbehaftet, sodass gegebenenfalls die falsche Entscheidung getroffen wird. Lehnt das Testverfahren die Nullhypothese ab und akzeptiert die Alternativhypothese, obwohl eigentlich die Nullhypothese richtig gewesen wäre, so spricht man von einem *Fehler 1. Art* oder  $\alpha$ -Fehler. Im Gegensatz dazu führt die Annahme der Nullhypothese, obwohl eigentlich die Alternativhypothese richtig gewesen wäre, zum *Fehler 2. Art* oder  $\beta$ -Fehler. Lediglich die beiden Fälle, dass die Nullhypothese korrekterweise abgelehnt bzw. nicht abgelehnt wird, stellen richtige Entscheidungen dar. Für eine bessere Übersicht kann dieses Verhalten in einer Wirkungstabelle

**Tabelle 5.1:** Wirkungstabelle eines Tests

		In Wirklichkeit richtig ist die Nullhypothese $H_0$		Alternativhypothese $H_1$
Testverfahren liefert	Akzeptanz von	Nullhypothese $H_0$	korrekte Entscheidung	Fehler 2. Art
		Alternativhypothese $H_1$	Fehler 1. Art	korrekte Entscheidung

zusammengefasst werden (vgl. Tabelle 5.1). Grundsätzlich gilt für statistische Tests, dass sie im Rahmen einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nur die Nullhypothese widerlegen können. Damit ist der Test nicht symmetrisch bezüglich der Vertauschung von  $H_0$  und  $H_1$ , und es muss vorher eine Festlegung der Nullhypothese erfolgen. Ein Zufallsvektor  $V$ , dessen Realisierungen man beobachten kann, hat unter jedem  $\vartheta \in \Theta$  eine von  $\vartheta$  abhängige Verteilung. Die Hypothese  $H_0$  wird abgelehnt, wenn  $V$  in einen kritischen Bereich  $C$  fällt. In diesem Fall wird die Nullhypothese zugunsten der Alternativhypothese verworfen. Wird hingegen die Nullhypothese nicht verworfen, bedeutet das lediglich, dass die Daten im Rahmen einer zugelassenen Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art nicht im Widerspruch zu  $H_0$  stehen.

Im Allgemeinen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Fehler nicht gleichzeitig minimieren. Der kritische Bereich  $C$  wird so konstruiert, dass unter jedem  $\vartheta \in \Theta_0$  die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $V \in C$  höchstens gleich  $\alpha$  ist. Das Signifikanzniveau  $\alpha$  legt somit eine Grenze für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art fest: Höchstens zu einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  soll die Nullhypothese abgelehnt werden, obwohl sie in Wirklichkeit zutrifft. Der Test heißt dann  $\alpha$ -Niveau-Test oder Test zum Niveau  $\alpha$ .

Im Fall des Regressionsmodells gilt  $\Theta = \{(\beta, \sigma^2) : \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma^2 > 0\}$ , und beobachtet wird eine Realisierung des Zufallsvektors  $Y = X\beta + \varepsilon$ . Ist  $\beta_i$  eine interessierende Komponente des Vektors  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$ , dann könnte mit

$$\Theta_0 := \{(\beta, \sigma^2) \in \Theta : \beta_i \leq c\} \quad \text{und} \quad \Theta_1 := \{(\beta, \sigma^2) \in \Theta : \beta_i > c\}$$

das Testproblem

$$H_0 : \vartheta \in \Theta_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \vartheta \in \Theta_1,$$

also  $H_0 : \beta_i \leq c$  gegen  $H_1 : \beta_i > c$ , interessant sein. Dann entspricht der Alternativbereich der Menge  $\Theta_1 := \{(\beta, \sigma^2) : \beta_i > c, \sigma^2 > 0\}$ . Der Hypothesenbereich ist durch  $\Theta_0 := \{(\beta, \sigma^2) : \beta_i \leq c, \sigma^2 > 0\}$  definiert. Sinnvollerweise greift der Hypothesentest auf den Quotienten

$$T_{\beta_i} := \frac{\widehat{\beta}_i - c}{\sqrt{d_{ii}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2}}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{5.11}$$

zurück, der im Fall  $\beta_i = c$   $t_{n-k}$ -verteilt ist. Daher spricht man hier von einem  $t$ -Test. Es bezeichne  $t_{n-k, 1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $t_{n-k}$ -Verteilung. Die Hypothese  $H_0$  wird genau dann zum Signifikanzniveau  $\alpha$  abgelehnt, wenn die Ungleichung  $(\widehat{\beta}_i - c)/\sqrt{d_{ii}\widehat{\sigma}_\varepsilon^2} > t_{n-k, 1-\alpha}$  erfüllt ist. Analoge Testprobleme können für  $\Theta_0 := \{(\beta, \sigma^2) \in \Theta : \beta_i \geq c\}$  bzw.  $\Theta_0 := \{(\beta, \sigma^2) \in \Theta : \beta_i = c\}$  aufgestellt werden. Die Tabelle 5.2 fasst die Entscheidungsregeln, die je nach Testfrage anzupassen sind,

**Tabelle 5.2:** Entscheidungsregeln für den  $t$ -Test, bei dem der Wert der Testgröße  $T$  jeweils mit dem kritischen Wert verglichen wird

Entscheidungsregelnummer	$H_0$	$H_1$	Entscheidungsregel: $H_0$ wird abgelehnt, falls
1	$\beta_i \leq c$	$\beta_i > c$	$T_{\beta_i} > t_{n-k, 1-\alpha}$
2	$\beta_i \geq c$	$\beta_i < c$	$T_{\beta_i} < t_{n-k, \alpha}$
3	$\beta_i = c$	$\beta_i \neq c$	$ T_{\beta_i}  > t_{n-k, 1-\alpha/2}$

übersichtlich zusammen.

### 5.1.7 Erstellung von Prognosen

*Prognosen sind immer schwierig, besonders wenn sie die Zukunft betreffen.*

Ursprung unklar  
(möglicherweise Niels Bohr, Mark Twain oder Karl Valentin)

Die bisher ermittelten Modelle erlauben, zukünftiges Verhalten vorherzusagen: Es werden Prognosen erstellt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass Prognosen nur so gut sein können, wie das Modell selbst! Ein falsch gewählter Modellansatz führt zu falschen Aussagen. Fehlerbehaftete oder falsche Beobachtungsdaten spiegeln sich in einem fehlerbehafteten Schätzwert des Modellparameters wider und ziehen fehlerbehaftete oder gar falsche Aussagen nach sich. Daher sind alle Prognosen immer unter dem ausgewählten Modell und den verwendeten Methoden zur Ermittlung des Schätzers zu betrachten.

Das Modell  $Y = X\beta + \varepsilon$  beschreibe zeitabhängige Beobachtungsdaten  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ein zukünftiger Beobachtungswert  $y_p$  mit  $p > n$  stelle eine Realisierung von  $Y_p$  mit dem zugehörigen Vektor der  $x$ -Werte  $X_p^T$  dar. Dann gilt unter dem angenommenen Modell  $Y_p = X_p^T \beta + \varepsilon_p$ , mit einem zufälligen, nicht beobachtbaren Wert  $\varepsilon_p$ . Unter dem geschätzten Modell  $\widehat{Y} = X\widehat{\beta}$  liefert  $\widehat{Y}_p = X_p^T \widehat{\beta}$  die beste Vorhersage für  $Y_p$  im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate. Im Allgemeinen ist die Vorhersage jedoch fehlerbehaftet. Daher ist es ein Ziel herauszufinden, wie stark die zukünftige Beobachtung  $Y_p$  von der Schätzung  $\widehat{Y}_p$  abweicht: Es gilt

$$Y_p - \widehat{Y}_p = X_p^T \beta + \varepsilon_p - X_p^T \widehat{\beta} = X_p^T (\beta - \widehat{\beta}) + \varepsilon_p.$$

Die Varianz dieser Differenz folgt aus der Tatsache, dass  $Y_p$  eine von den anderen zur Ermittlung des Schätzers  $\widehat{\beta}$  genutzten Zufallsvariablen  $Y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , stochastisch unabhängige Zufallsvariable darstellt. Somit sind  $\widehat{\beta}$  und  $\varepsilon_p$  voneinander unabhängig und die Kovarianz beträgt  $Cov(\widehat{\beta}, \varepsilon_p) = 0$ . Es ergibt sich für die Varianz der Differenz

$$Var(Y_p - \widehat{Y}_p) = Var(X_p^T (\beta - \widehat{\beta}) + \varepsilon_p) = X_p^T Var(\beta - \widehat{\beta}) + Var(\varepsilon_p) = \sigma^2 (X_p^T (X^T X)^{-1} X_p + 1).$$

Ist man nicht an einem konkreten prognostizierten Wert interessiert, sondern an einem Bereich, in dem der oder die zukünftigen Werte vermutlich liegen werden, so betrachtet man ein *Prognoseintervall*.

tervall. Es stellt ein Konfidenzintervall dar, wie es in Abschnitt 5.1.5 eingeführt wurde, und ist unter Verwendung von  $H := (X_p^T(X^T X)^{-1}X_p + 1)$  gegeben durch

$$\left[ X_p^T \widehat{\beta} - \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{H} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2}, \quad X_p^T \widehat{\beta} + \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{H} \cdot t_{n-k, 1-\alpha/2} \right].$$

Prognosen sind immer modellabhängig. Ihr Ziel ist es, unbekannte Werte mit einer gewissen Fehlertoleranz vorherzusagen. Zusätzlich beeinflusst die Datengrundlage die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse. Liegen mehrere Datensätze des gleichen Sachverhalts vor, so sollte die Regressionsanalyse auf die unterschiedlichen Datensätze angewandt und deren Ergebnisse miteinander verglichen werden. Außerdem sollten die Modellparameter mit fortschreitender Zeit hinterfragt und angepasst werden. Dazu sind aktuelle Beobachtungsdaten nötig, damit die Modelle möglichst akkurate Prognosen liefern. Ob die Vorhersage letztendlich zutrifft, lässt sich erst mit bzw. nach dem Eintritt des prognostizierten Zeitpunkts verifizieren.

## 5.2 Anwendung der mathematischen Inhalte auf eine reale Temperaturzeitreihe

Die im vorherigen Kapitel beschriebenen mathematischen Inhalte sollen keine abstrakten Konstrukte bleiben. Daher erfolgt in diesem Abschnitt ihre konkrete Anwendung. Der Anwendungskontext bestimmt dabei das Ziel dieser Zeitreihenanalyse: Es werden zentrale Aussagen des Weltklimarats IPCC hinterfragt.

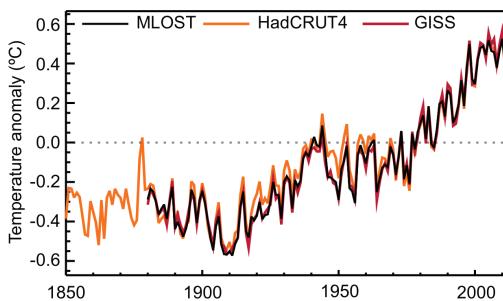
Grundlage ist der Sachstandsbericht AR5 der ersten Arbeitsgruppe des IPCC. Er präsentiert folgende Entwicklungen bezüglich der globalen Durchschnittstemperatur:

„It is certain that Global Mean Surface Temperature has increased since the late 19th century. Each of the past three decades has been successively warmer at the Earth's surface than all the previous decades in the instrumental record, and the first decade of the 21th century has been the warmest. The globally averaged combined land and ocean surface temperature data as calculated by a linear trend, show a warming of 0.85 [0.65 – 1.06] °C<sup>1</sup>, over the period 1880–2012, when multiple independently produced datasets exist, and about 0.72 [0.49 – 0.89] °C over the period 1951–2012. The total increase between the average of the 1850–1900 period and the 2003–2012 period is 0.78 [0.72 – 0.85] °C and the total increase between the average of the 1850–1900 period and the reference period for projections, 1986–2005, is 0.61 [0.55 – 0.67] °C, based on the single longest dataset available. For the longest period when calculation of regional trends is sufficiently complete (1901–2012), almost the entire globe has experienced surface warming“ (s. Hartmann et al., 2013, S. 161f).

Die beschriebene Modellierung der Temperaturdaten durch einen linearen Trend wird als grobe Näherung betrachtet. Eine feinere Betrachtung liefert das folgende Zitat:

---

<sup>1</sup>Die Quantifizierung der Unsicherheiten, dargestellt in der eckigen Klammer, erfolgt mit 90%-Unsicherheitsintervallen.



**Abbildung 5.2:** Temperaturzeitreihen basierend auf drei verschiedenen Datensätzen (MLOST, HadCRUT4 und GISS), die die jährlich global gemittelte Erdoberflächentemperaturanomalie mit einem Referenzzeitraum von 1961 bis 1990 angeben. Originale Bildunterschrift: Annual global mean surface temperature (GMST) anomalies relative to a 1961–1990 climatology from the latest version of the three combined land-surface air temperature (LSAT) and sea surface temperature (SST) data sets (HadCRUT4, GISS and NCDC MLOST). Published data set uncertainties are not included for reasons discussed in Box 2.1 (s. Hartmann et al., 2013, S. 193).

Data Set	Trends in °C per decade				
	1880–2012	1901–2012	1901–1950	1951–2012	1979–2012
HadCRUT4 (Morice et al., 2012)	0.062 ± 0.012	0.075 ± 0.013	0.107 ± 0.026	0.106 ± 0.027	0.155 ± 0.033
NCDC MLOST (Vose et al., 2012b)	0.064 ± 0.015	0.081 ± 0.013	0.097 ± 0.040	0.118 ± 0.021	0.151 ± 0.037
GISS (Hansen et al., 2010)	0.065 ± 0.015	0.083 ± 0.013	0.090 ± 0.034	0.124 ± 0.020	0.161 ± 0.033

**Abbildung 5.3:** Ermittelte Trends basierend auf drei verschiedenen Datensätzen (MLOST, HadCRUT4 und GISS), die auf jährlich global gemittelten Erdoberflächentemperaturanomalien mit einem Referenzzeitraum von 1961 bis 1990 beruhen. Originale Bildunterschrift: Same as Table 2.4, but for global mean surface temperature (GMST) over five common periods (s. Hartmann et al., 2013, S. 187).

„The global-mean trends are significant for all data sets and multi-decadal periods [...]. Since 1901 almost the whole globe has experienced surface warming. Warming has not been linear; most warming occurred in two periods: around 1900 to around 1940 and around 1970 onwards“ (s. Hartmann et al., 2013, S. 193).

Die deutsche Übersetzung fasst diese Informationen zusammen zu:

„Die global gemittelten kombinierten Land- und Ozean-Oberflächentemperaturdaten zeigen, berechnet als linearer Trend, eine Erwärmung von 0.85 [0.65 – 1.06 ]°C über den Zeitraum 1880 bis 2012, für den mehrere unabhängig erstellte Datensätze vorliegen. Der gesamte Anstieg zwischen dem Mittel der Periode 1850–1900 und der Periode 2003–2012 ist 0.78 [0.72 – 0.85 ]°C, basierend auf dem längsten verfügbaren Datensatz“ (s. IPCC, 2013b, S. WGI-3).

Es existieren verschiedene Prognosen zur Entwicklung klimatischer Einflüsse auf die Temperatur. Diese fließen zusätzlich zu den Ergebnissen der Zeitreihenanalyse in eine Vorhersage des zukünftigen Temperaturtrends ein.

„Die Änderung der globalen Erdoberflächentemperatur wird am Ende des 21. Jahrhun-

derts bezogen auf 1850–1900, für alle RCP-Szenarien<sup>2</sup> außer RCP2.6 wahrscheinlich<sup>3</sup> 1.5 °C übersteigen. Sie wird für RCP6.0 und RCP8.5 wahrscheinlich mehr als 2 °C sein und für RCP4.5 eher wahrscheinlich als nicht 2 °C übersteigen. Die Erwärmung wird unter allen RCP-Szenarien außer RCP2.6 über 2100 hinaus weitergehen. Die Erwärmung wird weiterhin Schwankungen auf Zeitskalen von Jahren bis Jahrzehnten aufweisen und regional nicht einheitlich sein“ (s. IPCC, 2013b, S. WGI-18).

Eine didaktische Reduktion der aufgeführten Aussagen führt zu der Hypothese, dass die Temperaturen seit Beginn der Industrialisierung ansteigen, und dass sich der Anstieg grob durch einen linearen Trend beschreiben lässt (vgl. IPCC, 2013a, 2016). Die in Abbildung 5.2 dargestellten Temperaturanomaliedaten bestärken die Wahl eines linearen Modellansatzes. Unter Annahme eines linearen Trends berichtet Hartmann et al. (2013) für den Zeitraum von 1901 bis 2012 von einem durchschnittlichen Temperaturanstieg von  $0.075 \pm 0.013$  °C pro Dekade für den HadCRUT4-Datensatz. Dieses Ergebnis entspricht einem durchschnittlichen Temperaturanstieg von etwa 0.0075 °C pro Jahr bzw. von etwa 0.84 °C über den gesamten betrachteten Zeitraum. Ein Hypothesentest testet die Steigung der Regressionsgerade in einem einfachen linearen Regressionsmodell. Die Regressionsanalyse verwendet den HadCRUT4-Datensatz. Dieser stellt, da die Temperaturanomaliewerte über die Zeit gemessen wurden, eine Zeitreihe dar (vgl. Kapitel 2.3). Die IPCC-Aussage beruht auf der Analyse verschiedener Temperaturzeitreihen. Neben dem hier verwendeten Datensatz HadCRUT4, erfolgten zusätzliche Analysen anhand weiterer Datensätze, wie beispielsweise die Datensätze *GISS Surface Temperature Analysis* (GISTEMP v4<sup>4</sup>) des *National Aeronautics and Space Administration – Goddard Institute for Space Studies* (NASA), *NOAA Merged Land Ocean Global Surface Temperature Analysis* (NOAAGlobalTemp<sup>5</sup>) des *National Centers for Environmental Information – National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA). Die Abbildung 5.2 stellt die Zeitreihen dar. Die Tabelle 5.3 fasst die Ergebnisse der Trenduntersuchungen zusammen, die in den obigen Zitaten erläutert stehen.

Gegenstand der Untersuchung ist eine Zeitreihe, deren Beobachtungen Temperaturanomalien mit dem Referenzzeitraum von 1961–1990 darstellen. Der Beobachtungszeitraum reicht vom Jahr 1850 bis 2020. Der Sonderbericht des IPCC nutzt den Bezugszeitraum 1850–1899 als Annäherung für die vorindustrielle mittlere globale Oberflächentemperatur (vgl. IPCC, 2018, S. 4). Dementsprechend liegt der Beginn der Industrialisierung auf dem Jahr 1900<sup>6</sup> (vgl. Abbildung 5.4). Darauf aufbauend definiert die Zeitspanne von 1850 bis 1899 die vorindustrielle und der Zeitraum von 1900 bis 2020 die industrielle Ära (vgl. Abbildung 5.4(a)).

Die entwickelten Lernmaterialien und damit auch diese Arbeit definieren für eine einfachere Darstellung und einen intuitiven Umgang mit den Daten im mathematischen Modell eine neue Zeitrechnung. Die Angabe der Einheit der Zeit erfolgt nicht mehr in *Jahren seit Christi Geburt*, sondern in *Jahren seit Beginn der Industrialisierung*, abgekürzt mit sBdI. Das heißt, der Zeitpunkt 0 Jahre sBdI entspricht dem Jahr 1900, der Zeitpunkt 10 Jahre sBdI entspricht dem Jahr 1910, ... und

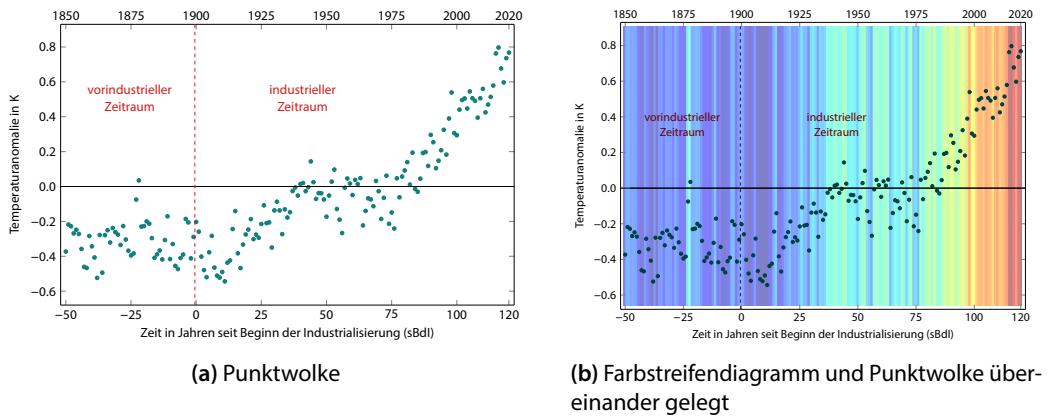
<sup>2</sup>RCP2.6, RCP4.5, RCP6.0, RCP8.5

<sup>3</sup>Dabei gilt: praktisch sicher: > 99 %; sehr wahrscheinlich: > 90 %; wahrscheinlich: > 66 %; etwa ebenso wahrscheinlich wie nicht: 33 – 66 %; unwahrscheinlich: < 33 %; sehr unwahrscheinlich: < 10 %; besonders unwahrscheinlich: < 1 %

<sup>4</sup>Die Daten sind unter <https://data.giss.nasa.gov/gistemp/> veröffentlicht.

<sup>5</sup>Die Daten sind unter <https://www.ncdc.noaa.gov/data-access/marineocean-data/noaa-global-surface-temperature-noaaglobaltemp> veröffentlicht.

<sup>6</sup>Mir ist bekannt, dass die industrielle Revolution bereits früher einsetzte. Die Anfänge waren jedoch noch lokal beschränkt. Sie begann in Großbritannien in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts mit einem raschen industriellen Wachstum und setzte sich erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts fast überall in Europa und den USA durch.



**Abbildung 5.4:** Zwei Visualisierungsmöglichkeiten der Temperaturzeitreihe HadCRUT4 für den Zeitraum von 1850 bis 2020 mit der Einteilung in eine vorindustrielle und eine industrielle Ära.

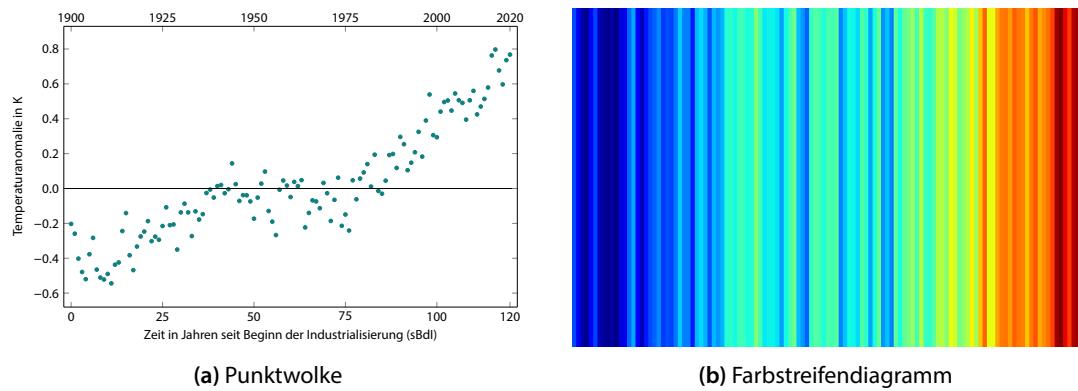
der Zeitpunkt 120 Jahre gehört zum letzten Messjahr 2020. Diese Vereinfachung führt keine Fehler ein. Die Abbildung  $t^* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $t \mapsto t - 1900$  beschreibt die Translation. Seien die ursprünglichen Beobachtungsdaten durch  $(T_i, t_i)$ , mit  $i = 1, \dots, 171$  gegeben, wobei  $t_1 = 1850, \dots, t_{171} = 2020$  gilt. Die Translation liefert dann die transformierten Datenpunkte  $(T_i, t_i - 1900)$ ,  $i = 1, \dots, 171$ , sodass  $t_1 = -50, \dots, t_{121} = 120$  gilt. Die neue Zeitrechnung ermöglicht einen direkten Vergleich des  $y$ -Koordinatenabschnitts mit dem vorindustriellen Niveau.

Der Hypothesentest wendet die vorgestellten Methoden der Zeitreihenanalyse konkret an und hinterfragt die Aussagen des IPCC-Berichts. Der Aufbau der folgenden Abschnitte greift die vorgestellte Struktur der Zeitreihenanalyse auf:

1. Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen (s. Abschnitt 5.2.1)
2. Formulierung eines Modells (s. Abschnitt 5.2.2)
3. Schätzung von Modellparametern (s. Abschnitt 5.2.3)
4. Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung (s. Abschnitt 5.2.4)
5. Aufstellen von Konfidenzbereichen (s. Abschnitt 5.2.5)
6. Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung (s. Abschnitt 5.2.6)
7. Erstellung von Prognosen (s. Abschnitt 5.2.7)

### 5.2.1 Erkundung der Datenreihe durch Visualisierungen

Die Visualisierung der Temperaturzeitreihe dient der ersten Einschätzung der Modellform. Sie gibt Auskunft darüber, ob ein Modell, das einen linearer Trend zur Beschreibung der Daten annimmt, überhaupt in Frage kommt. In Abbildung 5.5(a) ist die Zeitreihe der globalen Temperaturanomalien vom Jahr 1900 bis 2020 in einem Punktdiagramm dargestellt. Die Abbildung 5.5(b) zeigt eine weitere Darstellung der Temperaturanomaliedaten. Sie wurde erstmals durch Hawkins eingeführt, entspricht aber keinem klassischen Diagrammtyp (vgl. Wikipedia, o. D.). Die Daten werden dabei nicht mehr als Datenpunkte verstanden. Es erfolgt eine Abbildung der Temperaturanomalien auf



**Abbildung 5.5:** Zwei Visualisierungsmöglichkeiten der Temperaturzeitreihe HadCRUT4 eingeschränkt auf den Zeitraum von 1900 bis 2020

Temperaturanomalieintervalle, die beliebig klein sein können. In Abhängigkeit des zugehörigen Temperaturanomalieintervalls erhält jedes Jahr eine Einfärbung. Je niedriger eine Temperaturanomalie ist, desto dunkelblauer ist der Streifen eingefärbt. Über grün, gelb, orange hin zu rot steigen die Temperaturanomalien. Die Farbe dunkelrot steht für besonders heiße Temperaturanomalien. Hawkins nahm an, diese Darstellung sei im Vergleich zum Punktplot ästhetischer und leichter zugänglich (vgl. Science AF, 2018). Je nach Darstellungszeitraum und Einteilung der Temperaturanomalieintervalle ergeben sich verschiedene Farbstreifendiagramme, sodass sie nicht eindeutig sind. Analog zum Punktplot zeigt das Farbstreifendiagramm in Abbildung 5.5(b) die Temperaturentwicklung von 1900 bis 2020. Ein Übereinanderlegen der Punktfolge und des Farbstreifendiagramms verbindet beide Eigenschaften (vgl. Abbildung 5.4(b)).

*Ich wollte Temperaturänderungen auf einfache und intuitive Weise kommunizieren und alle Ablenkungen von Standard-Klimagrafiken beseitigen, damit die langfristigen Trends und Temperaturschwankungen kristallklar sind. Unser visuelles System wird die Interpretation der Streifen ohne diese Änderungen durchführen – wir denken sogar darüber nach.*

Ed Hawkins, Mai 2018

In beiden Diagrammen in Abbildung 5.5 ist ein Temperaturanstieg im Laufe der Zeit deutlich erkennbar. In der Abbildung der Punktfolge ist ein Plateau etwa vom Jahr 1940 bis 1975 gut sichtbar (vgl. Abbildung 5.5(a)). Dieser Sachverhalt spricht eher für zwei Temperaturanstiege, die sich von 1900 bis etwa 1940 und anschließend von etwa 1975 bis 2020 vollzogen. Diese Beobachtung spiegelt auch der IPCC-Bericht wider. Er legt jedoch den Beginn des zweiten Temperaturanstiegs auf das Jahr 1970: „Warming has not been linear; most warming occurred in two periods: around 1900 to around 1940 and around 1970 onwards“ (s. Hartmann et al., 2013, S. 193). Diese Erkenntnis erweitert die möglichen Modellbeschreibungen. Ob ein einfaches lineares Modell zur Beschreibung eines solchen zweiteiligen Temperaturanstiegs ausreichend ist, muss eine Analyse zeigen. Zusätzliche Untersuchungen greifen auf polynomiale Modelle zurück.

Es folgt eine mathematische Vertiefung des graphischen Eindrucks durch die Untersuchung von verschiedenen *Lagemaßen* und *Streuungsmaßen*. Dazu wird das *arithmetische Mittel*, das physikalisch den Schwerpunkt einer gegebenen Masseverteilung beschreibt, eingeführt. Das arithmetische

Mittel über die Temperaturanomalien  $\bar{T}$  berechnet sich im vorliegenden Datensatz zu

$$\bar{T}_{0-120} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \approx 0.0156 \text{ K},$$

wobei  $n = 121$  gilt. Dieser Wert spiegelt das mittlere Temperaturniveau von 1900 bis 2020 wider. Jede mittels der Methode der kleinsten Quadrate geschätzte Regressionsfunktion eines linearen Modells verläuft durch den Schwerpunkt des Datensatzes, also durch das arithmetische Mittel, der Temperaturanomalien. Das vorindustrielle Temperaturniveau bestimmt sich analog durch das arithmetische Mittel angewandt auf die Temperaturanomalien des Zeitraums von 1850 bis 1899. Hier ergibt sich mit dem HadCRUT4-Datensatz ein arithmetisches Mittel von  $\bar{T}_{-50-(-1)} \approx -0.3140 \text{ K}$ . Im Vergleich der beiden Temperaturniveaus (vorindustriell (vi) vs. industriell (i)) ist eine Temperaturerhöhung für den zweiten Zeitraum klar erkennbar. Diese Beobachtung ist ein erstes Indiz für eine Klimaerwärmung im industriellen gegenüber dem vorindustriellen Zeitraum. Die Differenz liegt bei etwa

$$\Delta \bar{T}_{i-vi} := \bar{T}_{0-120} - \bar{T}_{-50-(-1)} \approx 0.3296 \text{ K}.$$

Um den mit  $T_{1/2}$  bezeichneten (*empirischen*) Median der Temperaturanomalien zu bestimmen, sortiert man die Temperaturanomalien ihrer Größe nach und wählt anschließend den Zentralwert. Die Indizes der sortierten Daten werden in runde Klammern gesetzt, um sie von den ursprünglichen Daten unterscheiden zu können. Es gilt für den industriellen Zeitraum:

$$T_{\frac{1}{2}, 0-120} = T_{(\frac{n+1}{2})} \approx -0.0270 \text{ K},$$

da hier eine ungerade Anzahl an Datenpunkten vorliegt. Für den Zeitraum von 1850 bis 1899 liegt eine gerade Anzahl an Datenpunkten vor. Daher berechnet sich der Median zu

$$T_{\frac{1}{2}, 0-120} = \frac{1}{2} \left( T_{(\frac{n}{2})} + T_{(\frac{n}{2}+1)} \right) \approx -0.3055 \text{ K}.$$

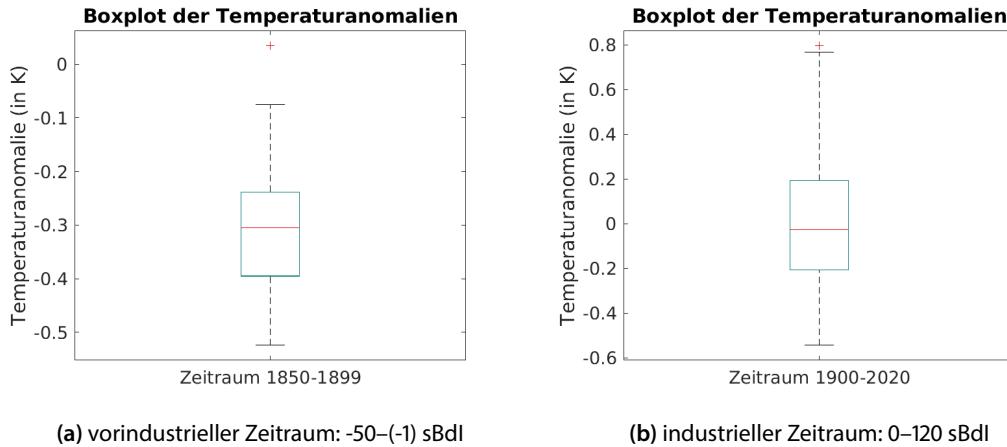
Auch hier offenbart sich eine Temperaturerhöhung zwischen dem „vorindustriellen“ und dem „industriellen Median“. Während der Median und das arithmetische Mittel im vorindustriellen Zeitraum relativ dicht beieinander liegen, weichen der Median und das arithmetische Mittel im industriellen Zeitraum deutlich voneinander ab: Der Median ist deutlich niedriger als das arithmetische Mittel. Somit ist mit einer Differenz von

$$\Delta T_{\frac{1}{2}, i-vi} := T_{\frac{1}{2}, 0-120} - T_{\frac{1}{2}, 0-120} \approx 0.2785 \text{ K}$$

der Unterschied der Mediane der beiden Zeiträume auch kleiner als die Differenz der arithmetischen Mittel. Dadurch deutet sich ein stärkerer Anstieg der Temperaturanomalien ab der zweiten Hälfte des späteren Zeitraums an, der rechnerisch ab dem Jahr 1960 beginnt. Prinzipiell könnten auch Ausreißer in den Daten Ursache für die Differenz zwischen Median und arithmetischen Mittel sein. Während das arithmetische Mittel alle Zahlenwerte gleichermaßen berücksichtigt, ist der Median robust gegenüber dem Auftreten von Ausreißern, da lediglich der zentrale Wert der geordneten Daten genutzt wird. Es sei hier vorweggenommen, dass die graphische Darstellung der Temperaturanomaliezeitreihe auf keine Ausreißer hindeutet. Daher wird diese Erklärung abgelehnt. Eine genaue Analyse der Datenreihe in Bezug auf Ausreißer wird im folgenden Abschnitt vorgenommen.

**Tabelle 5.3:** Zusammenfassung aller Lagemaße der Temperaturanomalien in K für die beiden Zeiträume von -50–(-1) sBdl (vorindustriell) und von 0–120 sBdl (industriell).

Zeitraum	arithmetisches Mittel	<i>p</i> -Quantile				
		0.1	0.25	0.5	0.75	0.9
-50–(-1)	-0.3140	-0.4580	-0.3950	-0.3055	-0.2380	-0.2030
0–120	0.0156	-0.3794	-0.2070	-0.0270	0.1925	0.5060

**Abbildung 5.6:** Visualisierung der Lagemaße der Temperaturanomalien in K für die beiden Zeiträume von -50–(-1) sBdl (vorindustriell) und von 0–120 sBdl (industriell).

Eine detailliertere Untersuchung der Lage der Datenpunkte erreicht die Betrachtung des (*empirischen*) *p*-Quantils. Der Median stellt ein Spezialfall für *p* = 0.5 dar. So lässt sich das *p*-Quantil allgemein über

$$T_{(p)} = \begin{cases} T_{(\lfloor np+1 \rfloor)}, & \text{falls } np \notin \mathbb{N}, \\ \frac{1}{2}(T_{(np)} + T_{(np+1)}), & \text{falls } np \in \mathbb{N} \end{cases}$$

berechnen. Es folgt die Ermittlung der 0.1- und 0.9-Perzentile und der Quartile mit *p* = 0.25 und *p* = 0.75 für sowohl den vorindustriellen als auch den industriellen Zeitraum. Tabelle 5.3 fasst die Ergebnisse zusammen. Die Angabe der arithmetischen Mittel und Medianen erleichtert den Vergleich der Werte untereinander.

Graphisch lassen sich diese Werte in *Boxplots* darstellen, die die Abbildungen 5.6 zeigen. Sowohl die Tabelle 5.3 als auch die Visualisierungen der Lagemaße in den Abbildungen 5.6 offenbaren in allen diesen Maßen einerseits einen deutlichen Temperaturanstieg im industriellen Zeitraum gegenüber dem vorindustriellen. Andererseits zeigt der Vergleich der Lagemaße innerhalb der Zeiträume eine größere Spannweite der Lagemaße im industriellen Zeitraum. Quantifiziert wird dieser Eindruck durch die Berechnung verschiedener Streuungsmaße, wie der *empirischen Varianz* oder *Stichprobenvarianz*, der *mittleren absoluten Abweichung*, der *Stichprobenspannweite* und dem *Quartilsabstand*. Ihre Einführung erfolgt zunächst für den Zeitraum von 0 bis 120 sBdI. Die Berechnung für den vorindustriellen Zeitraum vollzieht sich anschließend analog.

**Tabelle 5.4:** Zusammenfassung aller Streuungsmaße der Temperaturanomalien für die beiden Zeiträume von -50–(-1) sBdl (vorindustriell) und von 0–120 sBdl (industriell).

Zeitraum	empirische Varianz	mittlere absolute Abweichung	Stichprobenspannweite	Quartilsabstand
1850–1899	0.0118	0.0866	0.5590	0.1570
1900–2020	0.1023	0.2497	1.3410	0.3995

- empirische Varianz:

$$s_{0-120}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_{i,0-120} - \bar{T}_{0-120})^2$$

- mittlere absolute Abweichung:

$$mad_{0-120} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |T_{i,0-120} - \bar{T}_{0-120}|$$

- Stichprobenspannweite:

$$sr_{0-120} = \max_{1 \leq i \leq n} T_{i,0-120} - \min_{1 \leq i \leq n} T_{i,0-120}$$

- Quartilsabstand:

$$iqr_{0-120} = T_{3/4,0-120} - T_{1/4,0-120}$$

Tabelle 5.4 fasst die Streuungsmaße für beide Zeiträume zusammen. Es bestätigt sich das bisherige Bild der Datengrundlage: Sowohl die ausreißerempfindlichen Streuungsmaße (Varianz und Stichprobenspannweite) als auch das ausreißerunempfindliche Streuungsmaß (Quartilsabstand) der Temperaturanomaliewerte sind in dem zweiten Zeitraum deutlich größer als im ersten. Die empirische Varianz von 1900 bis 2020 liegt bei  $0.1023 \text{ K}^2$ . Hingegen liegt sie im vorindustriellen Zeitraum bei lediglich  $0.0118 \text{ K}^2$ . Die mittlere absolute Abweichung weist eine Differenz von etwa  $0.1631 \text{ K}$  zwischen dem vorindustriellen und industriellen Zeitraum auf. Während der maximale und minimale Temperaturanomaliewert im vorindustriellen Zeitraum um etwa  $0.5590 \text{ K}$  voneinander abweichen, liegen der maximale und minimale Temperaturanomaliewert im industriellen Zeitraum etwa  $1.3410 \text{ K}$  voneinander entfernt. Der Quartilsabstand berechnet sich im ersten Zeitraum etwa zu  $0.1570 \text{ K}$  und im zweiten Zeitraum etwa zu  $0.3995 \text{ K}$ .

Zusammenfassend präsentieren sowohl die graphische Darstellung als auch die Quantifizierung durch Lage- und Streuungsmaße ein höheres Temperaturniveau seit Beginn der Industrialisierung. Das vorindustrielle Temperaturniveau kann aufgrund der eher geringen Streuung der Temperaturanomaliewerte gut durch das arithmetische Mittel beschrieben werden. Daher erfolgt keine Regressionsanalyse des vorindustriellen Zeitraumes. Im Gegensatz dazu vernachlässigt eine Reduzierung der Temperaturanomaliedaten im industriellen Zeitraum auf einzelne Werte wichtige Informationen: So deutet sich hier ein Temperaturanstieg an, der in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ausgeprägter ist als in der ersten. Neben einem einfachen linearen Modell, das den

Trend der Temperaturanomalie seit Beginn der Industrialisierung aufzeigt, kommen stückweise einfache lineare, sowie polynomiale (quadratische und kubische) Regressionsmodelle für eine mathematische Abbildung der Beobachtungsdaten in Frage.

### 5.2.2 Formulierung eines Modells

*Everything should be as simple as possible, but no simpler.<sup>7</sup>*

nach Albert Einstein, 1950

Zur Untersuchung der vorliegenden Temperaturanomaliezeitreihe werden auf Basis der vorangegangenen Erkundung der Daten verschiedene lineare Regressionsmodelle aufgestellt und anschließend bewertet. Die im Modell geforderte stochastische Unabhängigkeit führt zu der Annahme, dass der Temperaturwert im Jahr  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nicht durch die weiteren Temperaturwerte, also auch insbesondere nicht vom Vorgängerjahr beeinflusst wird. Exponentziffern bezeichnen die unterschiedlichen Modelle.

Die Analyse beginnt basierend auf dem Vorschlag des IPCC-Berichts mit einem Modell, das einen linearen Trend in den Daten vermutet. Unter einem solchen Modell besitzt die Regressionsfunktion die Form

$$\text{reg}^{\text{lin}}(t) := \beta_1^{\text{lin}} + \beta_2^{\text{lin}} t.$$

Dabei stehen die Temperaturanomalien  $T$  in einem linearen Zusammenhang mit der Zeit  $t$ . Dieses Modell heißt im Folgenden *einfaches lineares Regressionsmodell*. Für die Daten ergeben sich im einfachen linearen Regressionsmodell die Beziehungen  $T_i = \text{reg}^{\text{lin}}(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 121\}$ .

Es schließt sich die Analyse eines zweistufigen linearen Trends an. Das bedeutet, die Modellierung der Daten erfolgt durch zwei einfache lineare Regressionen, jeweils separat angewandt auf die Zeitabschnitte von 0 bis 39 sBdI (1900 bis 1939) und von 75 bis 120 sBdI (1975 bis 2020). Das Jahr 0 sBdI erhält den Index 1, alle Folgejahre werden entsprechend aufsteigend durchnummieriert, sodass der Index 121 das Jahr 120 sBdI bezeichnet. Die Regressionsfunktion

$$\text{reg}^{\text{lin1}}(t) := \beta_1^{\text{lin1}} + \beta_2^{\text{lin1}} t$$

beschreibt den linearen Zusammenhang der Daten, die die Beziehung  $T_i = \text{reg}^{\text{lin1}}(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 40\}$ , aufweisen. In ähnlicher Weise drückt die Regressionsfunktion

$$\text{reg}^{\text{lin2}}(t) := \beta_1^{\text{lin2}} + \beta_2^{\text{lin2}} t$$

den linearen Zusammenhang der Daten mit der Beziehung  $T_i = \text{reg}^{\text{lin2}}(t_i) + \varepsilon_i$ ,  $i \in \{76, \dots, 121\}$  aus. Dieses Modell nennt sich *stückweises (einfaches) lineares Regressionsmodell*.

---

<sup>7</sup>Dieses Zitat wird (fälschlicherweise) Einstein zugeschrieben (1950). Im Originalen heißt es: „It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.“, s. Science, o. D.

Weitere Modellierungen verfolgen polynomiale Regressionsmodelle der Ordnung 2 und 3 zur Beschreibung der Temperaturdaten. Sie sind durch die Regressionsfunktionen

$$reg^{\text{quad}}(t) := \beta_1^{\text{quad}} + \beta_2^{\text{quad}} t + \beta_3^{\text{quad}} t^2 \quad \text{und} \quad reg^{\text{kub}}(t) := \beta_1^{\text{kub}} + \beta_2^{\text{kub}} t + \beta_3^{\text{kub}} t^2 + \beta_4^{\text{kub}} t^3$$

wiedergegeben. Sie erhalten die Namen *quadratisches Regressionsmodell* bzw. *kubisches Regressionsmodell*.

### 5.2.3 Schätzung von Modellparametern

Die Bestimmung des besten Schätzers erfolgt in allen vier Modellen über die Methode der kleinsten Quadrate. Minimiert man dazu die Residuumsfunktion

$$Res(\beta) := \sum_{i=1}^n (T_i - \beta_1 - t_i \beta_2)^2 \stackrel{!}{=} \min_{\beta},$$

so berechnet sich der Schätzer  $\widehat{\beta} := (\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$  in den Fällen des einfachen linearen und des stückweise lineares Regressionsmodells laut Beispiel 5.4 über

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_1 &= \bar{T} - \widehat{\beta}_2 \cdot \bar{t} \\ \widehat{\beta}_2 &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i T_i - \bar{t} \cdot \bar{T}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen  $\bar{t}$  und  $\bar{T}$  die arithmetischen Mittel der Zeitpunkte  $t_1, \dots, t_n$  und der Temperaturanomaliewerte  $T_1, \dots, T_n$ .

Einsetzen der Datenwerte liefert für das einfache lineare Modell  $\widehat{\beta}_1^{\text{lin}} \approx -0.4756$  K und  $\widehat{\beta}_2^{\text{lin}} \approx 0.0082$  K/Jahr. Damit modelliert die Funktion  $Reg^{\text{lin}}(t) = \widehat{\beta}_1^{\text{lin}} + \widehat{\beta}_2^{\text{lin}} t \approx -0.4756 + 0.0082t$  die Temperaturzeitreihe unter der Annahme, dass das gewählte Modell die Daten annähernd gut beschreibt. Die Modelfunktion beinhaltet noch keine Aussage über die Güte der Anpassung. Der  $y$ -Koordinatenabschnitt liegt mit einer Temperaturanomalie von  $-0.4756$  K niedriger als das vorindustrielle Temperaturniveau (arithmetisches Mittel:  $-0.3140$  K). Tatsächlich liegt der  $y$ -Koordinatenabschnitt sogar unterhalb des 0.1-Quantils, aber noch höher als der minimale vorindustrielle Temperaturanomaliewert. Die Steigung der Regressionsgerade beschreibt den durchschnittlichen Anstieg der Temperaturanomalie seit Beginn der Industrialisierung. Der durchschnittliche Anstieg liegt bei etwa 0.0082 K/Jahr. Im Vergleich dazu präsentierte der IPCC-Bericht für den etwas kürzeren Zeitraum von 1901 bis 2012 einen durchschnittlichen Anstieg von etwa  $0.075 \pm 0.013$  °C. Dieser Wert basiert ebenfalls auf dem HadCRUT4-Datensatz (vgl. Abbildung 5.3). Dadurch offenbart sich, dass die Jahre nach 2012 einen stärkeren mittleren Anstieg verursachen.

Die Ermittlung der Schätzwerte wird für die weiteren Regressionsmodelle nicht explizit vorgeführt. Die Schätzwerte im Fall des stückweise linearen Regressionsmodells lassen sich analog zu denen im einfachen linearen Regressionsmodell berechnen. Die Bestimmung der Schätzwerte im quadratischen und kubischen Regressionsmodell greift auf Satz 5.3 zurück. Tabelle 5.5 fasst die Ergebnisse zusammen. Alle Werte sind gerundet und wurden mit den in MATLAB bereits implementierten Funktionen *fitlm* bzw. *LinearModel.fit* erzeugt (vgl. MathWorks, o. D. a, o. D. b). Beide Funktionen bestimmen die Schätzwerte mithilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Sie geben zusätzlich zu

**Tabelle 5.5:** Schätzwerte der Modellparameter unter Annahme verschiedener Regressionsmodelle (linear, stückweise linear, quadratisch und kubisch), mittels der Methode der kleinsten Quadrate basierend auf dem HadCRUT4-Temperaturanomaliedatensatz bestimmt. Zusätzlich sind jeweils die Standardabweichung (Stdabw.) und der Schätzwert der Fehlervarianz angegeben.

Regressionsmodell	Schätzwerte				Fehlervarianz $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$
	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	
einfach linear	-0.4756	0.0082			0.0200
Stdabw.	0.0255	0.0004			
stückweise linear					
1900–1945	-0.4862	0.0108			0.0104
Stdabw.	0.0295	0.0011			
1975–2020	-1.4387	0.0181			0.0084
Stdabw.	0.1000	0.0010			
quadratisch	-0.3420	0.00145	$5.6145 \cdot 10^{-5}$		0.0162
Stdabw.	0.0343	0.0013	$1.0638 \cdot 10^{-5}$		
kubisch	-0.5021	0.0178	-0.0003	$1.9001 \cdot 10^{-6}$	0.0121
Stdabw.	0.0390	0.0028	$5.4922 \cdot 10^{-5}$	$3.0079 \cdot 10^{-7}$	

den Schätzwerten die Standardabweichung, in der Tabelle abgekürzt mit Stdabw., und den empirischen  $t$ -Wert der einzelnen Parameter mit aus. Die Schätzwerte der Fehlervarianz sind ebenfalls in der Tabelle 5.5 aufgeführt. Auch diese Bestimmung basiert auf den MATLAB-Funktionen.

Zunächst fällt auf, dass alle Schätzwerte der Parameter der verschiedenen Modelle in derselben Größenordnung liegen:  $\hat{\beta}_1$  ist in allen Modellen von der Ordnung  $10^{-1}$  und schwankt je nach Modell zwischen -0.5021 (kubisches Modell) und -0.3420 (quadratisches Modell). Lediglich das stückweise lineare Regressionsmodell weicht im Zeitraum von 75 bis 120 sBdI davon ab. Hier offenbart sich ein deutlich stärkerer Temperaturanstieg im zweiten Zeitraum gegenüber dem ersten. Die Standardabweichungen des konstanten Anteils der Regressionsmodelle liegen alle (bis auf das zweiten Modell des stückweise linearen Falls) zwischen 0.0255 und 0.0390. Sie sind damit etwa  $10^{-1}$  Größenordnungen kleiner als der Parameter selbst. Der Parameter  $\hat{\beta}_2$  hat in allen Modellen eine geringere Größenordnung, die im einfachen linearen und im quadratischen von  $10^{-3}$  und in beiden stückweise linearen und im kubischen von  $10^{-2}$  beträgt. Damit fällt der lineare Anteil gegenüber dem konstanten Anteil weniger ins Gewicht. Die Standardabweichungen liegen hier wieder  $10^{-1}$  Größenordnungen niedriger als die Parameterwerte. In der Betrachtung des quadratischen und kubischen Modells fällt der quadratische Anteil erneut deutlich geringer aus mit einer Größenordnung von  $10^{-5}$  für das quadratische und  $10^{-4}$  für das kubische Modell. Die Standardabweichung ist im quadratischen Modell von derselben Größenordnung wie der Parameter  $\hat{\beta}_3$ , im kubischen erneut  $10^{-1}$  Größenordnungen kleiner als der Parameter  $\hat{\beta}_3$ . Der kubische Anteil, der nur noch im kubischen Modell ermittelt wird, hat eine Größenordnung von  $10^{-6}$ . Die Fehlervarianzen liegen in allen Modellen bei einer Größenordnung von  $10^{-2}$ . Der Abschnitt 5.2.6 geht auf die Teststatistiken ein.

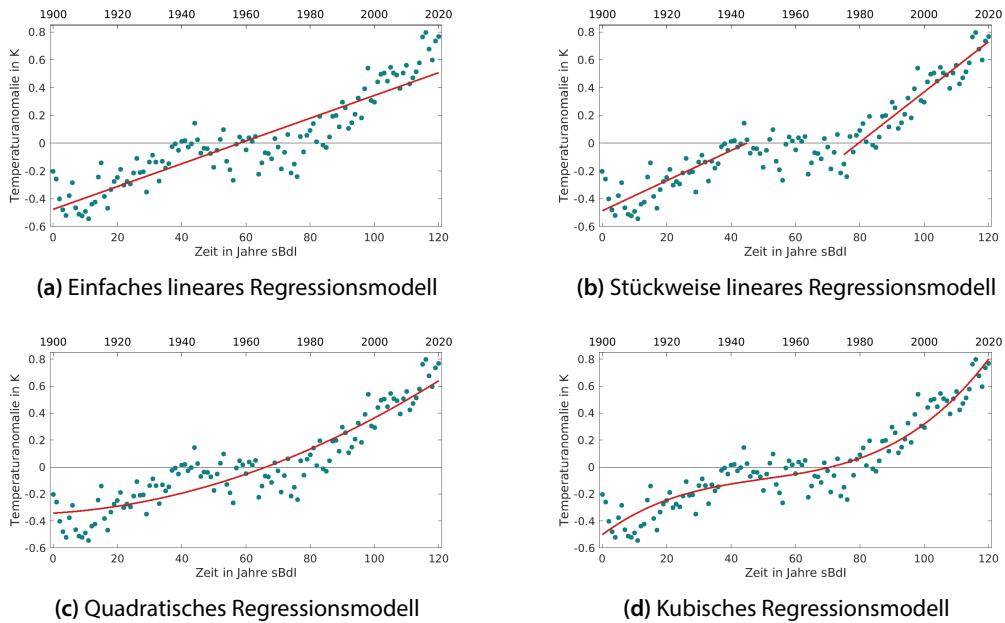
**Tabelle 5.6:** Größen zur Beurteilung der Anpassung der verschiedenen Regressionsmodelle (einfach linear, stückweise linear, quadratisch und kubisch) an den HadCRUT4-Datensatz.

Regressionsmodell	Residuumschätzwert	Kovarianzschätzwert	Bestimmtheitsmaß
(einfach) linear	2.3775	0.0198	0.8063
stückweise linear			
1900–1945	0.4560	0.0101	0.6759
1975–2020	0.3682	0.0082	0.8779
quadratisch	1.9235	0.0160	0.8433
kubisch	1.4343	0.0120	0.8831

### 5.2.4 Beurteilung des Modells und die Zerlegung der Streuung

Vor der mathematischen Analyse zur Beurteilung des Modells kann eine graphische Darstellung der Regressionsfunktionen in den Daten erste Anhaltspunkte liefern. Die Abbildungen 5.7) visualisieren die Regressionsfunktionen auf Basis der berechneten besten Schätzer unter der jeweiligen Modellannahme. Grob betrachtet spiegeln die Regressionsfunktionen in allen Fällen die Temperaturentwicklung wider: Die Temperaturen steigen mit der Zeit. Während sie im Jahr 0 sBdI eine negative Anomalie aufzeigen, deuten alle Modelle auf eine steigende Entwicklung hin, die – berechnet man die Temperaturdifferenz zwischen Endwert im Jahr 120 sBdI und Anfangswert im Jahr 0 sBdI der Regressionsfunktionen – zwischen 0.9825 K (im quadratischen Fall) und 1.2195 K (im stückweise linearen Fall) liegt. Auch wenn die  $y$ -Koordinatenabschnitte nicht genau auf dem vorindustriellen Niveau liegen, zeigt sich bereits durch diese erste Betrachtung ein deutlicher Temperaturanstieg. Eine detaillierte Anschauung offenbart Unterschiede zwischen den Modellen. Die einfache lineare Regression bildet das Temperaturanomaliplateau nur bedingt gut ab. Die Beobachtungswerte liegen etwa in den Jahren 36 – 48 sBdI ausschließlich oberhalb und etwa in den Jahren 64 – 89 sBdI ausschließlich unterhalb der Regressionsgerade. Insbesondere ab dem Jahr 113 sBdI liegen wieder alle Beobachtungswerte oberhalb der Regressionsfunktion. Dieses Phänomen deutet auf einen stärkeren Temperaturanstieg in dieser Zeit hin als der lineare Trend vorgibt. Ein ähnliches Bild zeigt sich auch im quadratischen Regressionsmodell: Das Temperaturanomaliplateau spiegelt sich nur bedingt gut im mathematischen Modell wider. Insbesondere in der Anfangszeit des Plateaus eröffnen sich deutliche Abweichungen der Regressionsfunktion von den Daten. Hingegen bildet das Modell den steigenden Temperaturtrend gegen Ende des Beobachtungszeitraums besser ab. Sowohl das stückweise lineare als auch das kubische Modell erzeugt Regressionsfunktionen, die – optisch betrachtet – gut den Verlauf der Daten modellieren. Man beachte jedoch, dass das Temperaturanomaliplateau in einen Zeitraum fällt, der im stückweise linearen Modell unbeachtet bleibt. Hier präsentiert sich der Vorteil der kubischen Regressionsfunktion, die das Temperaturanomaliplateau und zusätzlich den Temperaturanstieg gegen Ende des Beobachtungszeitraums, basierend auf visuellen Eindrücken, gut widerspiegelt. Nach den ersten Einschätzungen erscheinen alle Regressionsmodelle plausibel, um die Temperaturentwicklung auf dem betrachteten Zeitraum darzustellen. Ist man lediglich an einer groben Einschätzung interessiert, eignet sich bereits ein einfaches lineares Modell zur Beschreibung. Detaillierte Informationen birgt (im Vergleich der angesprochenen Modelle) das kubische Modell.

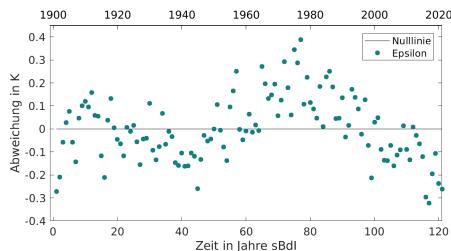
Dieser visuelle Eindruck wird nun durch eine mathematische Betrachtung ergänzt. Dazu erfolgt eine Berechnung der Schätzwerte der Residuen. Ihre Werte sind für alle Modelle in der Tabelle 5.6



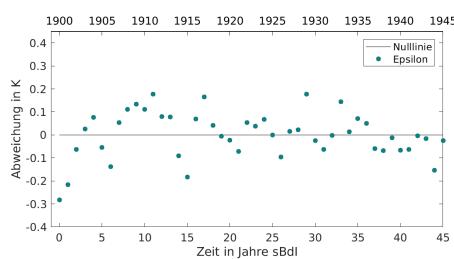
**Abbildung 5.7:** Visualisierung der Temperaturzeitreihe unter Anwendung verschiedener Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)

zusammengefasst und entsprechend der in Abschnitt 5.1.4 genannten Darstellungsmöglichkeiten in den Abbildungen 5.8–5.10 abgebildet. Als erstes ist festzuhalten, dass in allen Fällen weder die Indexplots noch die Tukey-Anscombe-Plots auf Ausreißer oder Hebel in den Daten hindeuten (s. Abbildung 5.8–5.9). Eine Analyse einzelner Datenpunkte findet daher nicht statt. Auch werden keine Datenpunkte für die (weitere) Zeitreihenanalyse ausgeschlossen. Die nachfolgenden Untersuchungsschritte erfolgen somit auf der Basis der bisher ermittelten Regressionsfunktionen. Da alle Modelle auf demselben Datensatz beruhen, lassen sich die Größenordnungen der Schätzwerte der Residuen direkt miteinander vergleichen. Die Residuen quantifizieren die Anpassung der Regressionsfunktion an die Daten. Die Summe der Quadrate der Residuenschätzwerte ist für die lineare Regressionsfunktion mit einem Wert von  $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 2.3775$  am größten. Die absoluten Abweichungen zwischen den Datenpunkten und der Regressionsfunktion im Quadrat sind demnach in diesem Fall am größten. Am geringsten ist die Summe der Quadrate der Residuenschätzwerte für die zweistufigen linearen Regressionsfunktionen mit einem Wert von  $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 0.4560$  für den Zeitraum von 0 bis 45 sBdI und  $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 0.3682$  für den Zeitraum von 75 bis 120 sBdI. In diese beiden Ergebnisse flossen weniger Datenpunkte ein als in den anderen Modellbeurteilungen. Die Summe der Quadrate der Residuenschätzwerte für die quadratische bzw. kubische Regressionsfunktion liegen mit  $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 1.9235$  bzw.  $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 \approx 1.4343$  im Mittelfeld. Diese Ergebnisse stützen den graphischen Eindruck.

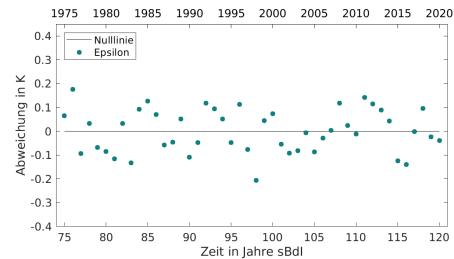
Festzuhalten ist weiterhin, dass die Schätzwerte der Kovarianzen der Residuen mit allen Regressionsfunktionen nahe bei null liegen. Ein (linearer / positiver) Zusammenhang zwischen den einzelnen Residuen muss somit nicht in einem Modell berücksichtigt werden. Das Ergebnis spricht für das Modell  $Y = X\beta + \varepsilon$  mit unabhängigen Komponenten des Vektors  $Y$ . Da die Kovarianz allerdings eine nicht-standardisierte Größe ist, erfolgt eine Betrachtung des Bestimmtheitsmaßes für eine stärkere Aussage über den Zusammenhang. Ein ähnliches Bild zeigen in allen vier Fällen die Tukey-Anscombe-Plots (s. Abbildung 5.9): In allen vier Fällen streuen die Schätzwerte der



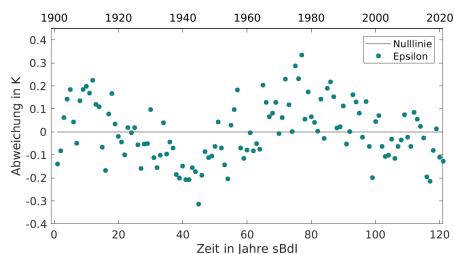
(a) Einfaches lineares Regressionsmodell



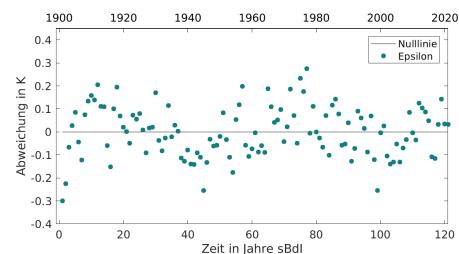
(b) Stückweise lineares Regressionsmodell, 1900–1945



(c) Stückweise lineares Regressionsmodell, 1975–2020

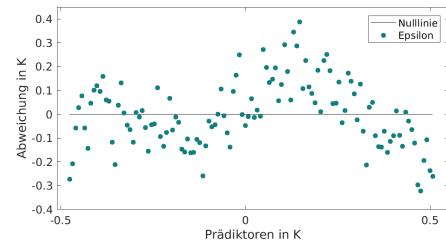


(d) Quadratisches Regressionsmodell

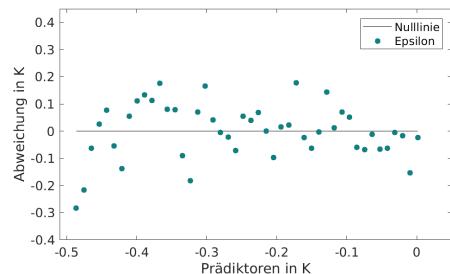


(e) Kubisches Regressionsmodell

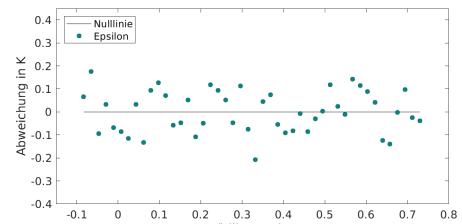
**Abbildung 5.8:** Indexplots der verschiedenen geschätzten Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)



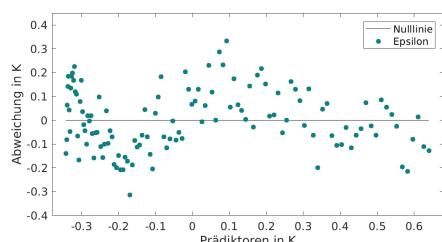
(a) Einfaches lineares Regressionsmodell



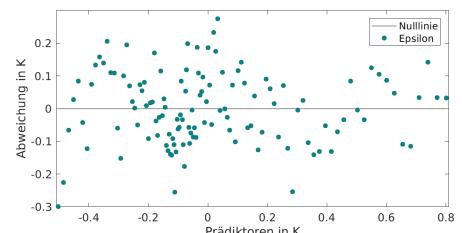
(b) Stückweise lineares Regressionsmodell, 1900–1945



(c) Stückweise lineares Regressionsmodell, 1975–2020



(d) Quadratisches Regressionsmodell



(e) Kubisches Regressionsmodell

**Abbildung 5.9:** Tukey-Anscombe-Plots der verschiedenen geschätzten Regressionsmodelle (einfache lineare,stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)

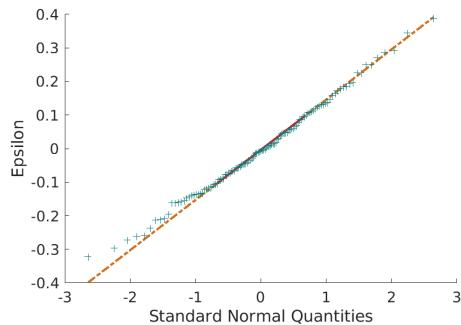
Residuen gleichmäßig um die Nulllinie. Ein Zusammenhang zwischen den Residuen und den Prädiktoren, wie ihn die Abbildungen 5.1(b) und 5.1(c) zeigen, lässt sich nicht ableiten. Für eine Heteroskedastizität ergeben sich somit keine Hinweise. Allerdings weisen der Indexplot und der Tukey-Anscombe-Plot für eine einfache lineare und die quadratische Regressionsfunktion eine gewisse Struktur ähnlich zu einer periodischen Funktion auf: Erklärbar ist diese Struktur durch das schrittweise Ansteigen der ursprünglichen Temperaturanomaliewerte von 0 bis 45 sBdI und von 75 bis 120 sBdI. Eine Anpassung der Regressionsfunktionen an diese Stufen, die sowohl im stückweise linearen als auch im kubischen Regressionsmodell stattfindet, zeigt nun im Rahmen der Indexplots und der Tukey-Anscombe-Plots eine sehr deutliche Unstrukturiertheit. Damit scheinen diese beiden Modellvarianten die Daten besser abzubilden.

Die Quantil-Quantil-Plots deuten in allen Modellen darauf hin, dass die Annahme einer Normalverteilung für die Residuen plausibel ist. Viele Punkte liegen auf der Diagonalen und nur wenige weichen leicht davon ab (s. Abbildung 5.10).

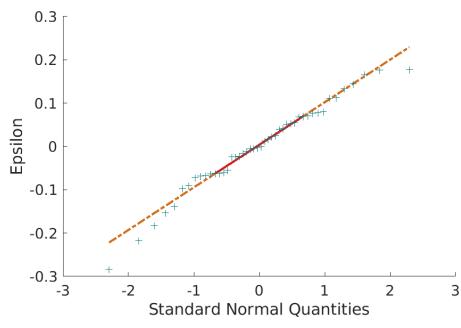
Das Bestimmtheitsmaß spiegelt für das stufenweise lineare Modell auf dem Zeitraum von 0 bis 45 sBdI mit einem Wert von  $R_{\text{lin}, 0-45}^2 \approx 0.6759$  eine deutlich schlechtere Abbildung der Daten wider als auf dem Zeitraum von 75 bis 120 sBdI (hier:  $R_{\text{lin}, 75-120}^2 \approx 0.8779$ ). Damit lassen sich für die erste Phase im zweistufigen Modell 40 % der Streuung nicht durch einen linearen Zusammenhang erklären. In diesem Fall muss eine gute Beschreibung der Daten durch das Modell in Frage gestellt werden. Es empfiehlt sich daher, entweder für den ersten Zeitraum ein anderes Modell zu wählen oder Aussagen ausschließlich auf Basis des Modells der zweiten Phase von 75 bis 120 sBdI abzuleiten. Unter letzterem Modell werden lediglich rund 12 % der Streuung nicht durch einen linearen Trend beschrieben. Es deutet sich ein linearer Zusammenhang an. Ebenso weist das Bestimmtheitsmaß mit einem Wert von  $R_{\text{lin}, 0-120}^2 \approx 0.8063$  basierend auf dem einfachen linearen Regressionsmodell auf einen linearen Zusammenhang der Daten hin. Dieser Modellsatz berücksichtigt einen deutlich längeren Zeitraum als die stückweise linearen Modelle. Daher eignet es sich besser für Aussagen über eine langfristige Temperaturentwicklung. Dieser Umstand gilt insbesondere, wenn sich die Aussagen auf den industriellen Zeitraum beziehen. Das zweistufige Modell betrachtet jedoch auch Phasen von immerhin jeweils 45 Jahren, sodass es auch klimabezogene Aussagen über die Temperaturentwicklung zulässt (vgl. Abschnitt 2.1).

Eine Interpretation der verschiedenen Regressionsfunktionen in Bezug auf den vorindustriellen Zeitraum stellt sich als schwierig heraus: Sowohl für das lineare und das stückweise lineare Modell bedeutete dies einen Temperaturanstieg bereits vor dem Jahr 0 sBdI. Ein noch deutlicherer Anstieg ergäbe sich mit einer kubischen Regressionsfunktion. Im Gegensatz dazu geht eine quadratische Regressionsfunktion davon aus, dass die Temperaturen vor 1900 im Laufe der Zeit zunächst sanken, es um das Jahr 0 sBdI einen Wendepunkt gab und Temperaturen, die heutzutage gemessen werden, auch vor nicht allzu langer Zeit vorherrschten. Die Analyse des vorindustriellen Zeitraums in Abschnitt 5.2.1 ergab, dass sich die zu der Zeit herrschenden Temperaturanomalien durch das arithmetische Mittel annähern lassen. Ein solches, relativ konstantes Niveau greift keine der angenommenen Modelfunktionen auf.

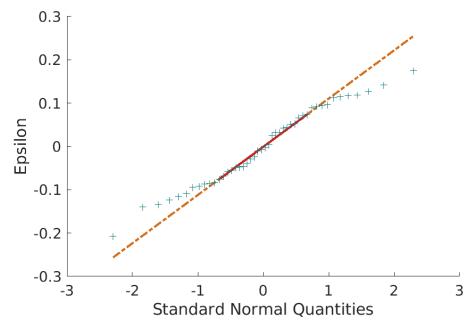
Die bisherigen Untersuchungsergebnisse werden mit Blick auf die eingangs angeführten Zitate der IPCC-Berichte interpretiert. Sowohl einige der in den IPCC-Berichten dargestellten als auch die in dieser Arbeit abgebildeten Resultate basieren auf demselben Datensatz. Das Zeitintervall der Jahre von 1850 bis 1899 gilt in beiden Analysen als vorindustriell. Die mathematische Beschreibung des vorindustriellen Temperaturniveaus erfolgte über das arithmetische Mittel in diesem Zeitraum. Die



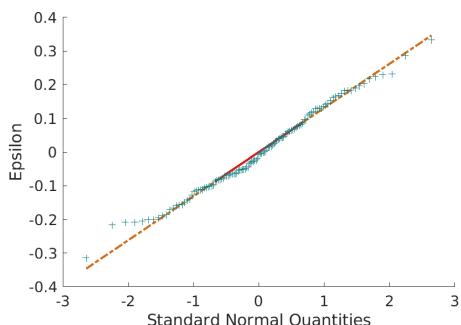
(a) Einfaches lineares Regressionsmodell



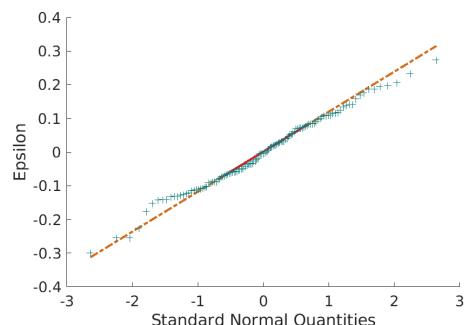
(b) Stückweise lineares Regressionsmodell, 1900–1945



(c) Stückweis lineares Regressionsmodell, 1975–2020



(d) Quadratisches Regressionsmodell



(e) Kubisches Regressionsmodell

**Abbildung 5.10:** QQ-Plots der verschiedenen geschätzten Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)

globale Erdoberflächentemperaturdaten zeigen – berechnet als linearer Trend – über den Zeitraum von 1900 bis 2020 eine Erwärmung von insgesamt  $0.9840 \pm 0.0735$  K. Im Vergleich dazu bescheinigt der IPCC-Bericht eine Erwärmung von  $0.85 [0.65-1.06]$  K über den Zeitraum von 1880 bis 2012. Der Temperaturanstieg, der sich im linearen Modell bis zum Jahr 2020 gegenüber dem vorindustriellen Niveau ergibt, liegt bei  $0.8224 \pm 0.0735$  K. Das bedeutet, dass die globale Erdoberflächentemperatur seit Beginn der Industrialisierung um durchschnittlich  $0.8224 \pm 0.0735$  K anstieg. Der IPCC-Bericht beschreibt den Anstieg zwischen dem vorindustriellen Niveau und dem arithmetischen Mittel der Periode von 2003 bis 2012 mit  $0.78 [0.72 - 0.85]$  °C. Die hier ermittelten Werte spiegeln somit – auch wenn ein direkter Vergleich aufgrund der unterschiedlich betrachteten Zeiträume nicht ganz korrekt ist – in etwa die im IPCC-Bericht ausgewiesene globale Temperaturänderung wider. Des Weiteren zeigt der schrittweise lineare Trend von 1900 bis 1945 eine globale Temperaturerhöhung von  $0.108 \pm 0.0904$  K pro Jahrzehnt auf (vgl. IPCC-Wert von 1901 bis 1950:  $0.107 \pm 0.026$  °C pro Jahrzehnt) und von 1975 bis 2020 einen globalen Temperaturanstieg von  $0.181 \pm 0.0099$  K pro Jahrzehnt (vgl. IPCC-Wert von 1951 bis 2012:  $0.106 \pm 0.027$  °C pro Jahrzehnt bzw. von 1979 bis 2012:  $0.155 \pm 0.033$  °C pro Jahrzehnt). Die Werte des IPCC-Berichts sind der Abbildung 5.3 für den HadCRUT4-Datensatz entnommen. Weiterhin bestätigt sich, dass der Temperaturanstieg in zwei Perioden stattfand: Die erste Phase dauerte von 1900 bis 1945 und die zweite ab 1975. Ein linearer Trend im ersten Zeitraum konnte allerdings aufgrund der geringeren Güte nicht verifiziert werden. Ein kubisches Modell bildet diesen zweistufigen Temperaturanstieg am besten ab.

### 5.2.5 Aufstellen von Konfidenzbereichen

Die QQ-Plots deuten an, dass die Annahme einer Normalverteilung für die Residuen plausibel ist. Eine solche Annahme erlaubt eine Nutzung der in den Abschnitten 5.1.5–5.1.6 eingeführten mathematischen Inhalte zu den Konfidenzbereichen und Hypothesentests, die im folgenden Abschnitt auf das einfache lineare Regressionsmodell angewandt werden.

Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler stellten im IPCC-Bericht die Hypothese auf, die Temperaturentwicklung ließe sich seit Beginn der Industrialisierung durch einen linearen Trend beschreiben. Die folgenden beiden Abschnitte widmen sich der Überprüfung dieser Aussage. Dazu werden die beidseitigen Konfidenzintervalle bestimmt. Man beachte, dass die Konfidenzintervalle für die beiden Parameter immer vom Konfidenzniveau abhängen. Das Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  gibt die unter dem Modell berechnete Mindestwahrscheinlichkeit an, mit der ein zufälliges Intervall den unbekannten Parameter enthält.

Für den Parameter  $\beta_1$  sind zu verschiedenen Konfidenzniveaus die Realisierungen der Konfidenzintervalle in Tabelle 5.7 bestimmt. Tabelle 5.8 gibt die konkreten Konfidenzintervalle zu verschiedenen Konfidenzniveaus für den Parameter  $\beta_2$  an. Das einfache lineare Regressionsmodell lieferte Schätzwerte  $\widehat{\beta} = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)^T = (-0.4756 \pm 0.0255, 0.0082 \pm 0.0004)$  des Parameters  $\beta$ . Ein Vergleich mit den Konfidenzintervallen in den Tabellen 5.7 und 5.8 zeigt, dass der ermittelte Schätzwert für alle angegebenen Konfidenzniveaus sowohl innerhalb der einseitigen als auch der beidseitigen Konfidenzbereiche liegt. Neben ihm sind aber auch alle weiteren Werte, die in den Konfidenzbereichen liegen, plausibel. So wären für den  $\gamma$ -Koordinatenabschnitt beispielsweise zu einem Vertrauensniveau von 0.99 alle Werte, die in dem Intervall  $[-0.5425, -0.4088]$  liegen (beidseitiges Konfidenzintervall), zur Beschreibung der Daten plausibel. Das Konfidenzintervall vergrößert sich, je größer das Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  gewählt wird. Analog verhält es sich mit den einseitigen Konfidenzintervallen, die jeweils auf einer Seite einen größeren Spielraum zulassen als die beidseitigen

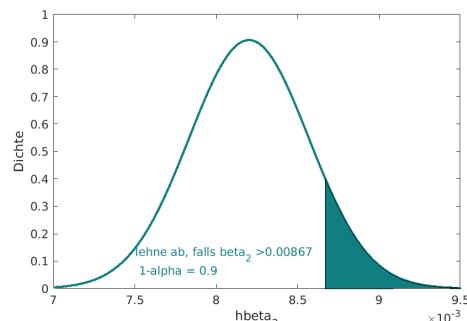
**Tabelle 5.7:** Realisierungen des beidseitigen Konfidenzintervalls und der einseitigen Konfidenzintervalle für den Parameter  $\beta_1$  zu verschiedenen Konfidenzniveaus

Konfidenz-niveau $\alpha$	Quantile von t-Verteilungen		beidseitiges Konf.-intervall		einseitiges Konf.-intervall	
	$t_{119, 1-\alpha/2}$	$t_{119, 1-\alpha}$	linke Grenze	rechte Grenze	linksseitig	rechtsseitig
0.9	1.6578	1.2887	-0.5180	-0.4333	-0.4427	-0.5086
0.95	1.9801	1.6578	-0.5262	-0.4251	-0.4333	-0.5180
0.99	2.6178	2.3581	-0.5425	-0.4088	-0.4154	-0.5359
0.995	2.8603	2.6178	-0.5487	-0.4026	-0.4088	-0.5425

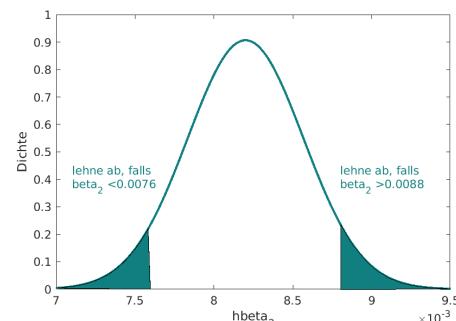
**Tabelle 5.8:** Realisierungen des beidseitigen Konfidenzintervalls und der einseitigen Konfidenzintervalle für den Parameter  $\beta_2$  zu verschiedenen Konfidenzniveaus

Konfidenz-niveau $\alpha$	Quantile von t-Verteilungen		beidseitiges Konf.-intervall		einseitiges Konf.-intervall	
	$t_{119, 1-\alpha/2}$	$t_{119, 1-\alpha}$	linke Grenze	rechte Grenze	linksseitig	rechtsseitig
0.9	1.6578	1.2887	0.0076	0.0088	0.0087	0.0077
0.95	1.9801	1.6578	0.0075	0.0089	0.0088	0.0076
0.99	2.6178	2.3581	0.0072	0.0091	0.0091	0.0073
0.995	2.8603	2.6178	0.0071	0.0092	0.0092	0.0072

Konfidenzintervalle. Zu einem Konfidenzniveau von  $1 - \alpha = 0.99$  liegt der beidseitige Konfidenzbereich für  $\beta_2$  bei  $[0.0072, 0.0091]$ . Damit sind alle Steigungen einer Regressionsgerade, die innerhalb dieses Intervalls liegen, zur Beschreibung der Daten zulässig, unter der Bereitschaft eine 10 %-ige Wahrscheinlichkeit für eine „Nicht-Überdeckung“ einzugehen. Anders ausgedrückt: Sehr wahrscheinlich beträgt der Temperaturanstieg in der Zeit von 1900 bis 2020 zwischen  $0.0072^\circ\text{C}$  und  $0.0091^\circ\text{C}$  pro Jahr. Hochgerechnet auf ein Jahrhundert liegt der Temperaturanstieg bei  $0.72 - 0.91^\circ\text{C}$ ! Es ist sogar praktisch sicher, dass der Temperaturanstieg bei  $0.0076 - 0.0088^\circ\text{C}$  pro Jahr liegt. Die Abbildungen 5.11 veranschaulichen diesen Sachverhalt. Die Abbildung 5.11(a) präsentiert das linksseitige Konfidenzintervall: Alle Werte, die links von der Grenze unter der Dichtevertteilung liegen, sind zulässig zu einem Konfidenzniveau von  $1 - \alpha = 0.99$ . Alle Werte, die in dem blau eingefärbten

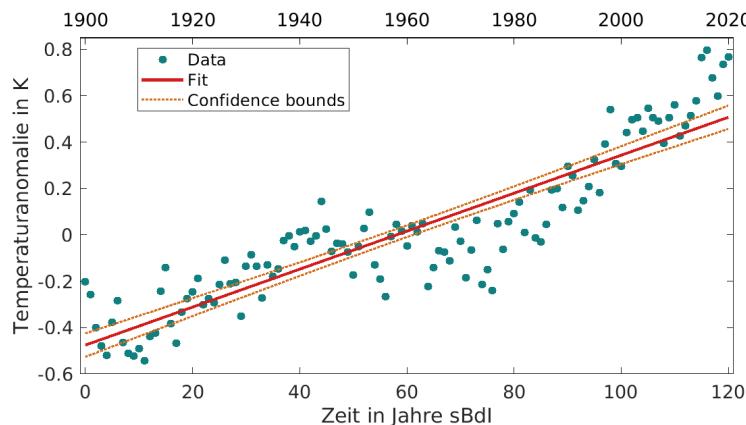


(a) Linksseitiges Konfidenzintervall



(b) Beidseitiges Konfidenzintervall

**Abbildung 5.11:** Rechts- und beidseitiges Konfidenzintervall für den Schätzer  $\widehat{\beta}_2$  zu einem Konfidenzniveau von  $1 - \alpha = 0.9$



**Abbildung 5.12:** Geschätzte Regressionsgerade und deren Datengrundlage, ermittelt durch die MATLAB-Methode `LinearModel.fit` inklusive des 95 %-Konfidenzintervalls

Bereich liegen, erfahren in diesem Fall eine Ablehnung und sich nicht plausibel. Analog schließt der beidseitige Konfidenzbereich auf beiden Seiten der Dichteverteilung Werte aus (blau eingefärbter Bereich). Der nicht eingefärbte Bereich unterhalb der Dichteverteilung entspricht dem Bereich, in dem der Parameter  $\beta_2$  als praktisch sicher angenommen wird.

Zur Erinnerung: Das beidseitige Konfidenzintervall für den Wert  $\beta_1 + \beta_2 x$  der Regressionsfunktion für ein festes  $x$  ist zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  über

$$\left[ (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x) - t_{n-k, 1-\alpha/2} \sigma_{\widehat{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{ns_x^2}}, \quad (\widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x) + t_{n-k, 1-\alpha/2} \sigma_{\widehat{\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{ns_x^2}} \right]$$

gegeben (vgl. Abschnitt 5.1.5). Damit ist es zusätzlich zu dem Konfidenzniveau vom Zeitparameter  $x$  abhängig. Dieser Umstand erschwert eine einfache tabellarische Darstellung analog zu den Konfidenzintervallen für die beiden Parameter  $\beta_1$  und  $\beta_2$ . Die Lösung erhält man durch Einsetzen der entsprechenden Parameter sowie aller jährlich gegebenen Zeitpunkte vom Jahr 0 – 120 sBdI. Daher wird erneut auf die in MATLAB implementierte Funktion `fitlm` bzw. `LinearModel.fit` zurückgegriffen, die bereits zur Bestimmung der besten Schätzer zum Einsatz kam. Sie gibt direkt die Regressionsfunktion in den Daten sowie das zur Regressionsfunktion zugehörige 95 %-Konfidenzintervall aus (vgl. Abbildung 5.12). Deutlich sichtbar ist das engere Anschmiegen des Konfidenzintervalls zum Datenschwerpunkt hing an die Regressionsgerade. Hingegen weitet es sich zu den Grenzbereichen hin. Alle Regressionsfunktionen, die innerhalb dieses Konfidenzbandes liegen, sind zur Beschreibung der Daten durch einen linearen Trend plausibel.

## 5.2.6 Wahl eines geeigneten Hypothesentests und dessen Durchführung

In den Abschnitten 5.2.3 und 5.2.4 erfolgte die Ermittlung der Regressionsgeraden zur gegebenen Temperaturzeitreihe und deren Güte über das Bestimmtheitsmaß. Dabei konnte ein linearer Trend in den Daten nicht ausgeschlossen werden. Dennoch gibt es viele Menschen, die nicht an einen Anstieg der Temperatur im Laufe des letzten Jahrhunderts glauben (vgl. Bals et al., 2008; Boykoff und Boykoff, 2004; Collomb, 2014; Doran und Zimmerman, 2009). Ziel ist es nun, ein Verfahren zu entwickeln, das die IPCC-Aussage kritisch beleuchtet. Die Behauptungen beruhen auf

Beobachtungsdaten. Da die Daten gemessen wurden, enthalten sie Fehler. Zusätzlich beruht der vorliegende Datensatz auf einem Modell, das aus vielen einzelnen Temperaturmesswerten einen globalen Jahresmittelwert erzeugt. Dieses Verfahren fügt weitere Fehlerquellen hinzu. Die Lage der Messwerte bestimmt aber den Verlauf der Regressionsgerade. Es muss also sichergestellt werden, dass nicht diese Fehler für den beobachteten positiven Trend verantwortlich sind. Daher wird im Folgenden angenommen, dass das Modell einer einfachen linearen Regression vorliegt, und man testet anschließend Hypothesen über die Steigung der Regressionsgerade. Eine Erklärung für die Ursachen liefert diese Statistik jedoch nicht – dafür sind andere wissenschaftliche Analysen notwendig.

Genau genommen erfolgt hier die Erarbeitung eines Niveau-alpha-Tests, den Abschnitt 5.1.6 behandelt. Im Folgenden wird der Einfachheit halber der allgemeine, weitere Testverfahren umfassende Begriff Hypothesentest verwendet. Die aus den IPCC-Berichten abgeleitete Hypothese lautet (vgl. S. 77):

*Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung an.*

Die Hypothese basiert auf einer realen Problemstellung und ist daher bislang nur „in Worten“ formuliert. Die Testung erfordert eine vorherige Mathematisierung. Dienenlich dafür ist die Formulierung der Alternativhypothese in Form einer (Un-)Gleichung. Sei die Regressionsfunktion durch eine Gerade gegeben, und es bezeichne  $\beta_2$  die Steigung der Regressionsgerade und  $c$  die kritische Grenze für den Hypothesentest. Außerdem wird die zugehörige Nullhypothese aufgestellt.

$H_1$ : Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung an.



$H_1$ : Die Steigung der Regressionsgerade, die den Temperaturtrend von 1900 bis 2018 approximiert, ist positiv.



$H_1: \beta_2 > 0 = c.$



$H_0$ : Der Temperaturanstieg (unter einem linearen Modell) seit Beginn der Industrialisierung ist nicht positiv.



$H_0: \beta_2 \leq 0 = c.$

Die Mathematisierung hebt deutlich hervor, dass in der aufgestellten Hypothese eine strikt positive Steigung zu überprüfen ist. Die Aussage, die Temperaturentwicklung weise keine oder sogar eine negative Steigung auf, steht in der Nullhypothese. Die Einführung der Variablen  $c$  erleichtert eine spätere Modifizierung des Hypothesentests für andere Steigungen  $c$ . Je nach Testfrage muss die Entscheidungsregel angepasst werden (vgl. Tabelle 5.2). Für den Test der obigen Aussage ist die Entscheidungsregel

$$H_0: \beta_i \leq c \quad \text{gegen} \quad H_1: \beta_i > c$$

zu wählen. Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls  $T_{\beta_i} > t_{n-k, 1-\alpha}$  (vgl. Tabelle 5.2). Da es sich um einen einseitigen Test handelt, müssen die Werte für  $t_{119, 1-\alpha}$  genutzt werden. Das Signifikanzniveau  $\alpha$  legt eine Grenze für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art fest: Mit einer Wahrscheinlichkeit

von höchstens  $\alpha$  soll die Nullhypothese abgelehnt werden, obwohl sie in Wirklichkeit korrekt ist. Die MATLAB-Funktion *LinearModel.fit* gibt die Realisierung von

$$T_{\beta_2} := \frac{\beta_2 - c}{d_{22}\widehat{\sigma}_\epsilon}$$

direkt mit aus (vgl. Tabelle 5.5, Gleichung (5.11)). Das folgende Verfahren stellt eine davon unabhängige Bestimmung vor, die dasselbe Ergebnis liefert. Das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der  $t$ -Verteilung ist zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.005$  durch  $t_{119, 0.995} \approx 2.6178$  gegeben. Die Realisierung der Teststatistik  $T_{\beta_2}$  weist einen Wert von 22.2556 auf. Da selbst bei einem sehr kleinen Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.005$  die Realisierung der Teststatistik  $T_{\beta_2}$  (deutlich) größer als das  $(1 - \alpha)$ -Quantil ist, wird die Nullhypothese  $H_0$  in diesen Fällen zugunsten der Alternativhypothese abgelehnt. Das bedeutet, bis zu einem sehr geringen Risiko für eine Falschaussage von etwa  $\alpha \approx 0.005$  wird die Hypothese  $\beta_2 \leq 0$  abgelehnt. Die Steigung der Regressionsgerade ist zu einem sehr hohen Vertrauen größer null. Der Anstieg der Temperatur um etwa  $0.0082^\circ\text{C}$  pro Jahr im Zeitraum von 1900 bis 2020 ist damit gegenüber von keinem Anstieg oder gar negativen Trend signifikant unterscheidbar.

Betrachtet man die Datengrundlage, so fällt es schwer, nicht an einen Temperaturanstieg von 1900 bis 2020 zu glauben. Die Zeitreihenanalyse zeigt einerseits die große und objektive Aussagekraft der Daten, wenn man sie mathematisch unter die Lupe nimmt. Andererseits fällt auch die Beschränktheit der Aussagekraft auf, da das verwendete Modell selbst beschränkt ist: Die vorangegangenen Untersuchungen wiesen bessere Approximationen der Daten durch andere Regressionsfunktionen auf. Außerdem beschränkt sich die Analyse rein auf Erdoberflächentemperaturdaten. Andere klimarelevante Faktoren werden außer Acht gelassen.

Das Pariser Klimaabkommen, das 196 Vertragsparteien auf der COP21 in Paris am 12.12.2015 verabschiedeten, erklärt zum Ziel, die globale Erwärmung auf deutlich unter  $2^\circ\text{C}$ , vorzugsweise auf  $1.5^\circ\text{C}$ , gegenüber dem vorindustriellen Niveau zu begrenzen (vgl. United Nations – Climate Change, o. D.). Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler behaupten im Sonderbericht des IPCC:

„Menschliche Aktivitäten haben etwa  $1^\circ\text{C}$  globale Erwärmung gegenüber vorindustriellem Niveau verursacht, mit einer vermutlichen Bandbreite von  $0.8^\circ\text{C}$  bis  $1.2^\circ\text{C}$ . Die globale Erwärmung erreicht  $1.5^\circ\text{C}$  vermutlich zwischen 2030 und 2052, wenn sie mit der aktuellen Geschwindigkeit weiter zunimmt. (hohes Vertrauen)“ (s. IPCC, 2018, S. 8)

Betrachtet man den Zeitraum von 1900 bis 2030 bzw. bis 2052 für einen Temperaturanstieg um  $1.5^\circ\text{C}$  gegenüber dem vorindustriellen Niveau, so liegt der sich daraus ergebende durchschnittliche Temperaturanstieg pro Jahr bei  $0.0115^\circ\text{C}$  bzw. bei  $0.0098^\circ\text{C}$ . Daraus abgeleitete Alternativhypotesen besagen Folgendes:

$H_1$ : Die Temperatur steigt, berechnet als linearer Trend, seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2020) bis zum Jahr 2030 mehr als  $0.0115^\circ\text{C/Jahr}$  an.  
und

$H_1$ : Die Temperatur steigt, berechnet als linearer Trend, seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2020) bis zum Jahr 2052 mehr als  $0.0098^\circ\text{C/Jahr}$  an.

**Tabelle 5.9:**  $(1 - \alpha)$ -Quantile von  $t$ -Verteilungen für eine Testgröße, die eine Hypothese bzgl. des Modellparameters  $\beta_2$  testet. Die Realisierung der Teststatistik  $T_{\beta_2}$  weist einen Wert von  $-9.0037$  für  $c_1 = 0.0115$  bzw. von  $-4.3828$  für  $c_2 = 0.0098$  auf.

Signifikanzniveau $\alpha$	Quantile von $t$ -Verteilungen $t_{119, 1-\alpha}$	Ablehnung der Nullhypothese? $c_1 = 0.0115$	Ablehnung der Nullhypothese? $c_2 = 0.0098$
0.10	1.2887	nein	nein
0.05	1.6578	nein	nein
0.01	2.3581	nein	nein

Daraus ergibt sich die mathematische Formulierung der Nullhypothese

$$H_0 : \beta_2 \leq c_1 = 0.0115 \quad \text{bzw.} \quad \beta_2 \leq c_2 = 0.0098$$

und der Alternativhypothese

$$H_1 : \beta_2 > c_1 = 0.0115 \quad \text{bzw.} \quad \beta_2 > c_2 = 0.0098.$$

Der einseitige Test wird erneut zu verschiedenen Signifikanzniveaus durchgeführt. Die Nullhypothese wird abgelehnt, falls die Ungleichung  $T_{\beta_2} > t_{n-k, 1-\alpha}$  erfüllt ist. Die Realisierung der Teststatistik beträgt für  $c_1 = 0.0115$  ungefähr  $T_{\beta_2} \approx -9.0037$  und für  $c_2 = 0.0098$  etwa  $T_{\beta_2} \approx -4.3828$ . Tabelle 5.9 stellt die  $(1 - \alpha)$ -Quantile der  $t$ -Verteilung für verschiedene Signifikanzniveaus übersichtlich zusammen. Der  $\alpha$ -Niveau-Test lehnt die Nullhypothese weder im Fall  $c_1 = 0.0115$  noch im Fall  $c_2 = 0.0098$  zu keinem (angenommenen) Signifikanzniveau ab. Dieses Testverfahren lässt damit keine Beurteilung der Aussage zu, dass die Temperatur bis 2052 um  $1.5^{\circ}\text{C}$  steigt.

## 5.2.7 Erstellung von Prognosen

Der IPCC-Bericht trifft nicht nur Aussagen über die Veränderung der Temperatur von 1850 bis heute, sondern auch über die zukünftige Entwicklung der globalen Erdoberflächentemperatur. Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler erstellen dazu Modelle, die weitere, die Temperatur beeinflussende Faktoren berücksichtigen. Unter anderem erfolgt eine Anwendung der Zeitreihenanalyse auch auf Messdaten zum CO<sub>2</sub>-Ausstoß. Anschließende Modelle ermitteln mögliche Änderungen des Ausstoßes in Abhängigkeit von politischen, wirtschaftlichen und sozialen Strukturen. Daraus werden verschiedene Szenarien abgeleitet. Diese Ergebnisse fließen wiederum in die Vorhersage der Entwicklung der globalen Erdoberflächentemperatur ein. Das Lernmaterial verzichtet bewusst auf eine solche komplexe Modellierung. Im Fokus stehen einfache Modelle, die bereits Prognosen über die zukünftige Temperaturtendenz erlauben. Obwohl diese Prognosen wohl kaum einen Anspruch auf die gleiche Aussagekraft haben wie die im IPCC-Bericht vorgestellten, bieten sie doch die Möglichkeit, die Methodik des Prognostizierens verständlich und für Schülerinnen und Schüler zugänglich zu machen. Am ehesten entsprechen die hier durchgeföhrten Prognosen dem IPCC-Szenario, welches annimmt, dass alle Einflüsse weiterhin wie bisher agieren.

**Tabelle 5.10:** Prognose der Temperaturanomalie mit Prognosefehler für die Zeitpunkte 2030, 2052 und 2100, jeweils auf Basis verschiedener Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)

Regressionsfunktion	Bestimme $Reg(x_p)$ für		
	$x_p = 2030$	$x_p = 2052$	$x_p = 2100$
(einfach) linear	$0.5888 \pm 0.1442$	$0.7689 \pm 0.1459$	$1.1619 \pm 0.1510$
stückweise linear			
1900–1945		keine Prognose sinnvoll	
1975–2020	$0.9104 \pm 0.0964$	$1.3079 \pm 0.0990$	$2.1753 \pm 0.1068$
quadratisch	$0.7954 \pm 0.1296$	$1.1756 \pm 0.1311$	$2.1938 \pm 0.1356$
kubisch	$1.1550 \pm 0.1118$	$2.2713 \pm 0.1131$	$6.8236 \pm 0.1170$

Der IPCC-Bericht fasst die Prognosen zu folgender Aussage zusammen:

„Die Änderung der globalen Erdoberflächentemperatur wird am Ende des 21. Jahrhunderts bezogen auf 1850–1900, für alle RCP-Szenarien<sup>8</sup> außer RCP2.6 wahrscheinlich<sup>9</sup>  $1.5^{\circ}\text{C}$  übersteigen. Sie wird für RCP6.0 und RCP8.5 wahrscheinlich mehr als  $2^{\circ}\text{C}$  sein und für RCP4.5 eher wahrscheinlich als nicht  $2^{\circ}\text{C}$  übersteigen. Die Erwärmung wird unter allen RCP-Szenarien außer RCP2.6 über 2100 hinaus weitergehen. Die Erwärmung wird weiterhin Schwankungen auf Zeitskalen von Jahren bis Jahrzehnten aufweisen und regional nicht einheitlich sein“ (s. IPCC, 2013b, S. WGI-18).

Es folgen Prognosen für verschiedene Zeitpunkte mithilfe der zuvor formulierten Modelle (einfache lineare Regression, stückweise lineare Regression, quadratische Regression und kubische Regression). Sie greifen zum einen die Zeitpunkte 2030 und 2052 aus dem vorherigen Abschnitt auf, da innerhalb dieser Zeitspanne laut United Nations – Climate Change (o. D.) ein Temperaturanstieg von  $1.5^{\circ}\text{C}$  gegenüber dem vorindustriellen Niveau erreicht wird. Diese Aussage beruht auf der Annahme, die Temperatur entwickle sich wie bisher weiter. Sie stützt das in dieser Arbeit vorgestellte Vorgehen. Zum anderen wird die Temperaturanomalie zum Zeitpunkt 2100 prognostiziert. Dieser Zeitpunkt entstammt dem vorherigen Zitat. Drei von vier Szenarien sagen voraus, dass der Temperaturunterschied zwischen dem vorindustriellen Niveau und der Temperatur im Jahr 2100 voraussichtlich  $1.5^{\circ}\text{C}$  übersteigen wird und zwei von vier Szenarien halten sogar einen Temperaturunterschied von mehr als  $2^{\circ}\text{C}$  für durchaus möglich. Zusätzlich sollen in den verschiedenen Regressionsmodellen die Zeitpunkte ermittelt werden, in denen voraussichtlich das  $1.5^{\circ}\text{C}$ - bzw.  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziel erreicht wird.

Die Temperaturanomalien zu verschiedenen Zeitpunkten erhält man, indem man die Zeitpunkte in die geschätzten Regressionsfunktionen einsetzt. Die Tabelle 5.10 fasst die Ergebnisse zusammen. Die Zeitpunkte, in denen voraussichtlich die  $1.5^{\circ}\text{C}$ - und  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziele erreicht werden, sind in Tabelle 5.11 festgehalten. Beide Untersuchungsgegenstände sind in den Abbildungen 5.13 visualisiert. Im Fall der einfachen linearen Regression liegen die Temperaturanomalieprognosen für die Zeitpunkte 2030 und 2052 unterhalb der bisher gemessenen Höchsttemperatur. Im Jahr 2100 stellt sich ein Temperaturanstieg um etwa  $1.4759 \pm 0.1510^{\circ}\text{C}$  gegenüber dem vorindustriellen Niveau ein. Das

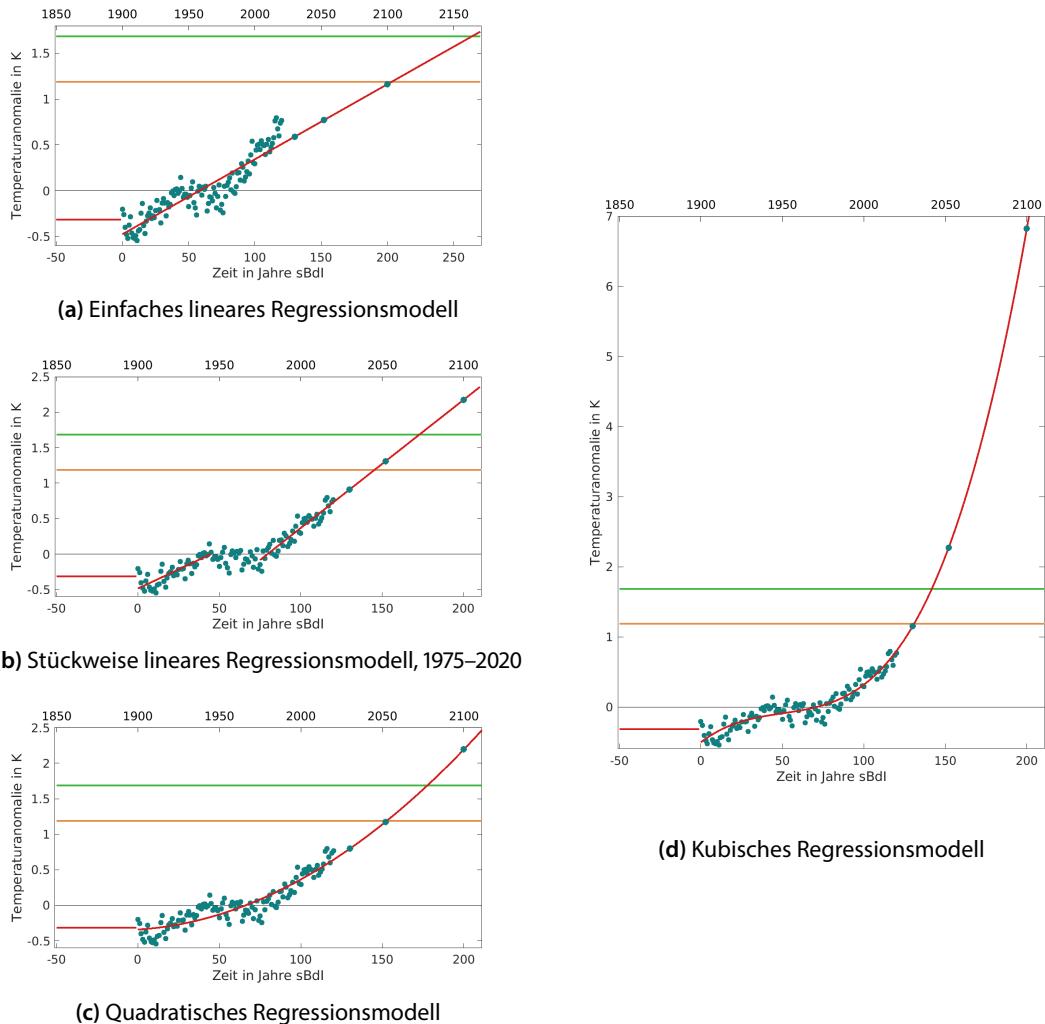
<sup>8</sup>RCP2.6, RCP4.5, RCP6.0, RCP8.5

<sup>9</sup>Dabei gilt: praktisch sicher: > 99 %; sehr wahrscheinlich: > 90 %; wahrscheinlich: > 66 %; etwa ebenso wahrscheinlich wie nicht: 33 – 66 %; unwahrscheinlich: < 33 %; sehr unwahrscheinlich: < 10 %; besonders unwahrscheinlich: < 1 %

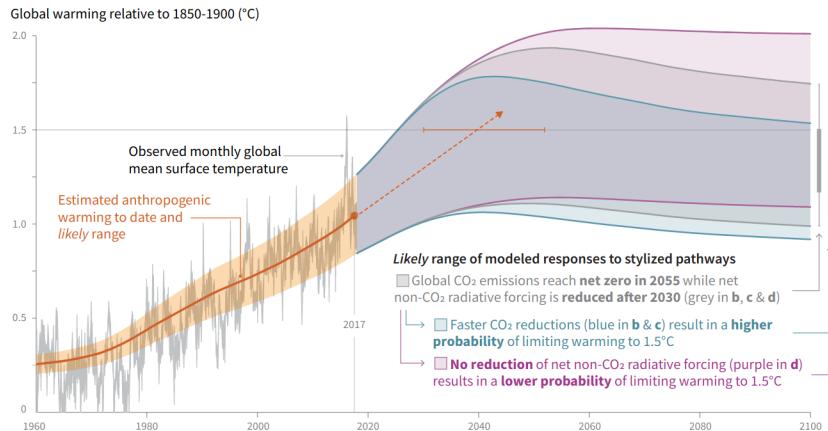
**Tabelle 5.11:** Prognose des Jahres, in dem ein Temperaturanstieg um  $1.5^{\circ}\text{C}$  bzw.  $2^{\circ}\text{C}$  stattfindet, jeweils auf Basis verschiedener Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression). Die Variable  $VI$  bezeichnet das vorindustrielle Niveau.

Regressionsfunktion	Bestimme $x_p$ für $\text{Reg}(x_p) = VI + 1.5^{\circ}\text{C}$ $\text{Reg}(x_p) = VI + 2.0^{\circ}\text{C}$	
(einfach) linear	2102	2164
stückweise linear		
1900–1945	keine Prognose sinnvoll	
1975–2020	2045	2072
quadratisch	2052	2077
kubisch	2030	2041

Erreichen des  $1.5^{\circ}\text{C}$ -Niveau vollzieht sich damit um die nächste Jahrhundertwende. Die drei anderen Modelle prognostizieren einen deutlich stärkeren Anstieg der Temperatur: Während die quadratische Regression im Jahr 2030 eine noch moderate Temperaturanomalie von etwa  $0.7954 \pm 0.1296^{\circ}\text{C}$  vorhersagt, die im Rahmen der bisher gemessenen Höchsttemperatur liegt, deuten die stückweise lineare Regression auf der Basis des linearen Trends von 1975 bis 2020 und noch stärker die kubische Regression auf starke Temperaturerhöhungen hin. Der Temperaturanstieg bis 2030 gegenüber dem vorindustriellen Niveau liegt im gleichen Bereich wie der Temperaturanstieg des einfachen linearen Regressionsmodells bis zum Jahr 2100. Ein Temperaturanstieg um  $1.5^{\circ}\text{C}$  wäre nach dem kubischen Modell bereits in den kommenden zehn Jahren erreicht. In diesem Modell steigt die Temperatur schon in den nächsten 20 Jahren um etwa  $2^{\circ}\text{C}$  gegenüber dem vorindustriellen Niveau an. Die Temperaturanomalie würde demnach in den kommenden 20 Jahren durchschnittlich um etwa  $0.0409^{\circ}\text{C}$  pro Jahr ansteigen. Im Vergleich dazu ist die Temperatur von 1900 bis 2020 durchschnittlich um  $0.0082^{\circ}\text{C}$  pro Jahr angestiegen. Nicht ganz so schnell nähert sich die Temperatur der  $2^{\circ}\text{C}$ -Grenze, falls das quadratische oder stückweise lineare Modell betrachtet wird: Im quadratischen Fall wird die Grenze im Jahr 2077 und im stückweise linearen Modell im Jahr 2072 erreicht. Nach dem einfachen linearen Modell verläuft der Temperaturanstieg am langsamsten. Dort wird die  $2^{\circ}\text{C}$ -Grenze erst im Jahr 2164 überschritten. Besonders die Erstellung der Prognosen unterstreicht den Einfluss des angenommenen Regressionsmodells. Lag die Güte aller Regressionsmodelle im Rahmen des Akzeptablen, ergeben sich sehr große Unterschiede für die prognostizierte Temperaturentwicklung. Diese Erkenntnis hebt hervor, wie wichtig es ist, Modelle immer wieder an neue Daten anzupassen und zu aktualisieren. Temperaturanstiege, wie sie das kubische Modell liefert, prognostiziert der IPCC-Bericht (glücklicherweise) nicht. Nach Abbildung 5.14 tritt das Überschreiten der  $1.5^{\circ}\text{C}$ -Grenze wahrscheinlich zwischen 2030 und 2052 ein. An die  $2^{\circ}\text{C}$ -Grenze nähert sich jedoch nur das worst-case-Szenario an, das keine Reduzierung des anthropogenen  $\text{CO}_2$ -Strahlungsantriebs beinhaltet.



**Abbildung 5.13:** Prognostizierte Temperaturentwicklung unter der Annahme verschiedener Regressionsmodelle (einfache lineare, stückweise lineare, quadratische und kubische Regression)



**Abbildung 5.14:** Beobachtete globale Temperaturveränderungen und modellierte Reaktionen auf anthropogene Emissions- und Treibhausgaspfade. Originale Bildunterschrift: Cumulative emissions of CO<sub>2</sub> and future non-CO<sub>2</sub> radiative forcing determine the probability of limiting warming to 1.5 °C. Panel a: Observed monthly global mean surface temperature (GMST, grey line up to 2017, from the HadCRUT4, GISTEMP, Cowtan–Way, and NOAA datasets) change and estimated anthropogenic global warming (solid orange line up to 2017, with orange shading indicating assessed likely range). Orange dashed arrow and horizontal orange error bar show respectively the central estimate and likely range of the time at which 1.5 °C is reached if the current rate of warming continues. The grey plume on the right of panel a shows the likely range of warming responses, computed with a simple climate model, to a stylized pathway (hypothetical future) in which net CO<sub>2</sub> emissions [...] decline in a straight line from 2020 to reach net zero in 2055 and net non-CO<sub>2</sub> radiative forcing [...] increases to 2030 and then declines. The blue plume in panel a) shows the response to faster CO<sub>2</sub> emissions reductions [...], reaching net zero in 2040, reducing cumulative CO<sub>2</sub> emissions [...]. The purple plume shows the response to net CO<sub>2</sub> emissions declining to zero in 2055, with net non-CO<sub>2</sub> forcing remaining constant after 2030. The vertical error bars on right of panel a) show the likely ranges (thin lines) and central terciles (33rd–66th percentiles, thick lines) of the estimated distribution of warming in 2100 under these three stylized pathways. [...] 1.2.1, 1.2.3, 1.2.4, 2.3, Figure 1.2 and Chapter 1 Supplementary Material, Cross-Chapter Box 2 in Chapter 1 (s. IPCC, 2018, S. 6 unter Auslassung der Graphiken b)–d)).

## 5.3 Didaktische Reduktion der Analyse einer Temperaturzeitreihe

Im folgenden Abschnitt erfolgt die didaktische Reduktion der vorgeführten Anwendung. Eine tiefgreifende Vorstellung des Lernmaterials findet nicht statt, da sie Teile der vorangegangenen Anwendung aufgreift, die sich sonst doppeln würden. Im Fokus steht die Motivation der Arbeitsschritte, mithilfe derer das komplexe Thema der Zeitreihenanalyse in Anwendung auf echte Temperaturdaten für Schülerinnen und Schüler zugänglich und erfahrbar gemacht wird. Didaktische Anmerkungen ergänzen diesen Abschnitt.

Der Abschnitt 4.2 ordnet die trendbezogene Zeitreihenanalyse in den Schulunterricht ein. Er offenbart, dass schulische Kenntnisse über mathematische Inhalte aus verschiedenen Inhaltenfeldern der Mathematik stammen. Die bekannten Inhalte müssen miteinander verknüpft und um über die Schulmathematik hinausgehende Inhalte ergänzt werden. Um diese Herausforderung bewerkstelligen zu können, ergänzen zusätzliche Information und in vielen Aufgaben gestufte Hilfen das Lernmaterial. Eine Binnendifferenzierung des Materials wird erreicht, indem das Lerntempo den Lerngruppen angepasst wird und Zusatzaufgaben bereitgestellt werden.

Die trendbezogene Zeitreihenanalyse erfolgt hier im Kontext des Klimawandels. Die Anwendung wird in Abschnitt 2.5 in die Bildungspläne diverser Schulfächer eingeordnet. Dabei offenbart sich, dass sich das Lernmaterial nicht auf rein mathematische Inhalte und Kompetenzen beschränkt. Der Anwendungsbezug eröffnet ein großes Feld, an dem verschiedene Schulfächer beteiligt sind. Vor diesem Hintergrund birgt das Lernmaterial großes Potential für den schulischen Einsatz.

### 5.3.1 Aufbau des Lernmaterials

Der selbstständigen Bearbeitung der digitalen Arbeitsblättern geht – wie in allen CAMMP Lernmaterialien – eine Einführung in die Problemstellung voraus. Die Thematik ist hochaktuell und relevant (vgl. Abschnitt 1.1). Das zur Beantwortung der Problemfrage „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist dieser signifikant?“ benötigte Hintergrundwissen zeigt Kapitel 2 auf. Dort werden ausführlich wissenschaftliche Grundlagen und Definitionen rund um den Klimawandel angeboten. Hattebuhr (im Druck) präsentiert eine gekürzte, prägnante Einweisung in das klimatische Hintergrundwissen. Die Vermittlung des Hintergrundwissens soll Lehrpersonen dazu befähigen, Lernenden einen motivationalen Einstieg in die Thematik des Klimawandels und der Notwendigkeit des Hinterfragens von öffentlich getätigten Aussagen anzubieten. Eine beispielhafte Präsentation mit passenden Notizen stehen den Lehrkräften im online-Material zur Verfügung (vgl. Anhang A.2). Die Präsentation stellt eine Zusammenfassung des Einstiegs in die Problemstellung dar und dient als Hinführung zu den Problemfragen, die die Teilnehmenden im Laufe des Workshops beantworten. Zusätzlich erhalten Lernende weitere zusammengefasste Informationen zur Datengrundlage und der Zeitreihenanalyse, auf die sie bei Bedarf über einen Link zugreifen können.

Dieser Workshop besteht aus vier grundlegenden Arbeitsblättern sowie weiterführenden Fragen, die in Form von Zusatzaufgaben ausformuliert sind.

- AB 1: Kennenlernen der Temperaturzeitreihe
- AB 2: Ein erstes Modell auf Basis eines Ausschnitts aus der Temperaturzeitreihe
- AB 3: Modellverbesserung mithilfe der kompletten realen Temperaturzeitreihe

- AB 4: Hinterfragen öffentlich getätigter Aussagen durch einen Hypothesentest
- AB 5/6: Zusatzaufgaben A/B

Dabei erarbeiten sich die Lernenden zunächst selbstständig eine mögliche Beschreibung des Verlaufs einer Zeitreihe durch einen linearen Trend, mathematisch ausgedrückt durch eine lineare Funktion. In diesem Zuge definieren sie den Gesamtabstand zwischen den gegebenen Messdaten und der (noch unbekannten) linearen Funktion. Zur Minimierung des Gesamtabstandes wird anschließend ein aus der Schulmathematik bekanntes Verfahren, nämlich die Differentiation, angewendet und die Regressionsgerade ermittelt. Daran schließt sich eine Bewertung der Güte der Regressionsgerade in Bezug auf die Daten an. Dazu erarbeiten sich die Teilnehmenden das Bestimmtheitsmaß. Zusatzaufgaben erweitern die statistische Datenanalyse und greifen die in den Medien häufig angesprochenen 1.5 °C- und 2.0 °C-Ziele auf. In allen Schritten ist der Bezug zur realen Problemstellung, nämlich dem Klimawandel, präsent. Schülerinnen und Schüler werden entsprechend des Modellierungskreislaufs an verschiedenen Stellen des Lernmaterials dazu aufgefordert, ihr mathematisches Ergebnis zu interpretieren. Dadurch wird hervorgehoben und durch die Lernenden interaktiv erlebt, dass die hier vorgestellte Modellierung ein authentisches und realistisches Beispiel für Winters erste Grunderfahrung ist (vgl. Winter, 1995).

Tabelle 5.12 fasst übersichtlich die auf den jeweiligen Arbeitsblättern genutzte Mathematik zusammen und deutet den direkten Zusammenhang zwischen der verwendeten, häufig höheren, Mathematik und der Schulmathematik an. Diesen Übersichtsplan können Lehrende verwenden, um zielgerichtet einzelne Inhalte des Lernmaterials in unterschiedliche Phasen des Unterrichtsgeschehens einzubinden.

Für den Einsatz des Lernmaterials im Zusammenhang mit einem Projekttag oder einer Unterrichtsreihe kann sich die Lehrkraft am exemplarischen Stundenverlaufsplan orientieren. Dieser Plan präsentiert eine Durchführung im Rahmen von fünf Doppelstunden (vgl. Anhang A.1). Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Jahrgangsstufen erprobten das Lernmaterial sowohl innerhalb eines Projekttages als auch im Kontext einer (außerunterrichtlichen) Unterrichtsreihe über mehrere Wochen erfolgreich. Die Erfahrungen sind in die didaktischen Reduktion eingeflossen. Auch kann das Lernmaterial in Seminar- oder Facharbeiten einfließen (vgl. Hattebuhr, akzeptiert b). Sowohl im Projektunterricht, als auch in Seminar- oder Facharbeiten steht das eigenständige Erkunden von Inhalten über eigene Lernpfade im Vordergrund (vgl. Frey, 1990; Ludwig, 1996). Die ersten beiden Aufgabenblätter können den Einstieg in eine solche Phase liefern. Davon ausgehend könnten weitere selbstständig gewählte Erarbeitungen folgen (vgl. Hattebuhr, akzeptiert b).

### 5.3.2 Arbeitsblatt 1: Kennenlernen der Temperaturzeitreihe

In diesem Lernmaterial untersuchen Schülerinnen und Schüler die Änderung des Klimageschehens anhand der Temperaturentwicklung. Dabei dienen Aussagen und methodische Vorgehensweisen aus dem IPCC-Bericht aus dem Jahr 2013 als Grundlage. Auf dem ersten Arbeitsblatt wird zunächst die Problemfrage in Form einer Hypothese konkretisiert. Diese These besagt, dass die Temperatur seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2020) linear ansteigt. Dies motiviert die Untersuchung einer Zeitreihe über globale Temperaturdaten. Im Rahmen eines Zusatzblattes erfahren die Schülerinnen und Schüler nähere Informationen über die Herkunft und Entstehung der Daten.

**Tabelle 5.12:** Übersicht zum Zusammenhang zwischen der verwendeten Mathematik und der Schulmathematik (AB: Arbeitsblatt, A: Aufgabe, Ü: Übung, Z: Zusatzaufgabe)

Arbeitsblatt	Inhalt	Schulbezug
AB 1 A1	Visualisierung von Daten; Forderung nach objektiver Methode zum Finden der „besten“ Geraden und Gütebestimmung	Visualisierung und Beschreibung der La-ge einer Punktfolge
AB 2 Ü	Eingabehinweis f. den Umgang mit julia (Zugriff Vektoreinträge)	
A1	Entwickeln einer eigenen Abstandsdefinition	Abstand zw. zwei Punkten bzw. Punkt und Gerade (Norm bzw. Abstand zweier Vektoren); lineare Funktionsgleichung aufstellen; ggf. Betragsfunktion oder quadratische Funktion
A2	Entwickeln einer allgemein gültigen Abstandsdefinition (Eindeutigkeit und Lösbarkeit v. Minimierungsproblemen)	Funktionaler Zusammenhang (Funktio-nen minimieren, Verständnis des Be-griffs Ableitung); quadratische Funkti-onsgleichung aufstellen
<b>Diskussion im Plenum</b>		
A3	Methode der kleinsten Abstandsquadrate und Finden einer Regressionsgerade (aus-gedünnter Datensatz)	s. AB 2 A2
A4	Gütebestimmung: Bestimmtheitsmaß (ausgedünnter Datensatz)	
AB 3 Ü	Summenfunktion in julia	
A1	Methode der kleinsten Abstandsquadrate und Finden einer Regressionsgerade (vol-ler Datensatz)	s. AB 2 A2
A2	Gütebestimmung: Bestimmtheitsmaß (voller Datensatz)	
<b>Diskussion im Plenum möglich</b>		
AB 4 A1	Hypothesentest (t-Test)	Hypothesen testen (bei binomialverteil-ten Zufallsgrößen)
<b>Diskussion im Plenum</b>		
AB 5/6 Z	Funktionenanalyse, Hypothesentest	Funktionenanalyse, Hypothesen testen
<b>ggf. Diskussion im Plenum</b>		

Es mag sich nun die Frage stellen, warum die These im IPCC-Bericht einen linearen Trend der Temperaturentwicklung annimmt. Man möchte eine langfristige, das bedeutet eine über mindestens 30 Jahre lange, Entwicklungstendenz der Temperatur angeben – im vorliegenden Fall sogar über einen Zeitraum von über 120 Jahren. Diese allgemeine Entwicklungsrichtung wird jedoch von jährlichen Fluktuationen überlagert, die es „herauszufiltern“ gilt. Neben der langfristigen Aussagekraft eines solchen Modells ist es vorteilhaft, dass sich ein linearer Trend schnell und effizient berechnen lässt. Auch didaktisch bietet ein lineares Modell Vorteile: Lineare Funktionen werden frühzeitig im Schulunterricht eingeführt, sodass sie zum alltäglichen Handwerkszeug der hier angesprochenen Lernenden gehört. Es ist eine lineare Funktion gesucht, die die Zeitreihe bestmöglich beschreibt. Dieses Verfahren nennt man lineare Regressionsanalyse. Die gesuchte Gerade nennt man auch Regressionsgerade. Die Steigung der Regressionsgerade soll vor dem Hintergrund des Klimawandels „signifikant positiv“ sein. Die Zeitreihenanalyse stellt ein mathematisches Verfahren dar, das zwar nicht Teil des Lehrplans ist, jedoch mit Schülkenntnissen bereits verstanden werden kann. Sie wird daher von den Lernenden selbstständig entwickelt.

Das Lernmaterial weist Schülerinnen und Schüler darauf hin, dass die Lage der Regressionsgerade von der Verteilung der Temperaturanomaliewerte abhängt. Eine Änderung der Datenpunkte führt zu einer Änderung der Regressionsgerade. Daher gilt es die Regressionsgerade nicht nur zu finden (s. AB 2, Aufg. 1–3 und AB 3, Aufg. 1), sondern auch auf deren Aussagekraft hin zu untersuchen. Wichtige Begriffe hierbei sind das Bestimmtheitsmaß (s. AB 2, Aufg. 4 und AB 3, Aufg. 2) und ein Hypothesentest (s. AB 4). Die entwickelten Modelle treffen allein auf Basis der vorgestellten Daten eine Aussage. Die Untersuchung der obigen Hypothese muss also immer vor dem Hintergrund betrachtet werden, dass auch hinter den Daten Modelle liegen. Liegen in diesen Modellen systematische und statistische Fehler oder falsche Annahmen vor, so sind auch die Schülermodelle fehlerbehaftet. Werden andere Daten als Grundlage zur Temperaturanalyse gewählt, können von den Schülererkenntnissen abweichende Ergebnisse erzielt werden.

Der Begriff *bestmöglich* wird im Workshop zunächst nicht näher definiert. Die erste Aufgabe regt die Lernenden dazu an, intuitiv eine Gerade durch die Datenpunkte zu legen. Die Schülerinnen und Schüler können den Verlauf der Gerade leicht über Schieberegler verändern. Sie erarbeiten sich auf diese Weise eigenständig Kriterien für eine Regressionsgerade. Auf dem ersten Arbeitsblatt gibt es nicht die einzige richtige Lösung. Dieser Umstand führt häufiger bei Lehrpersonen als bei Lernenden zu Nachfragen. Die Aufgaben bieten einen spielerischen Einstieg in die Regressionsanalyse und heben gleichzeitig die Notwendigkeit von mathematischen Methoden zur Untersuchung hervor. Vom ersten Aufgabenteil bis hin zum dritten Aufgabenteil konkretisieren sich die Kriterien, anhand derer die Regressionsgerade bestimmt werden kann. Während im ersten Aufgabenteil noch eine vage Beschreibung ausreicht (bspw. „Die Gerade sollte möglichst mittig durch die Punktwolke verlaufen.“ oder „Die Gerade sollte möglichst durch alle Punkte oder möglichst dicht an ihnen vorbei verlaufen.“), schließt der letzte Aufgabenteil mit einer exakten Beschreibung: „Die Abweichung eines Datenpunktes und des Funktionswertes der Gerade im zum Datenpunkt gehörenden Jahr sollte möglichst klein sein.“ An dieser Stelle bleibt es offen, wie die Abweichung mathematisch beschrieben wird.

Die Lernenden erfahren in dieser einleitenden Aufgabe eine visuelle Methode, mit der zwar eine Gerade gefunden werden kann, die jedoch keine direkte Möglichkeit für eine Beurteilung der Lage der Gerade bietet. Es bleibt offen, ob die eingestellte Gerade in irgendeinem Sinne „optimal“ ist. Diese unbefriedigende Situation ruft eine Forderung nach einem objektiven Maß zur Bestimmung der Regressionsgerade hervor. Dieses Maß sollte zum einen ermöglichen, die „beste“ unter den

**Tabelle 5.13:** Übersicht über die verwendeten Temperaturdaten: ausgedünnter Datensatz auf Basis des HadCRUT4-Datensatzes

Zeit (in Jahren)	Zeit sBdl (in Jahren)	Temperaturanomalie (in °C)
1900	0	-0.203
1925	25	-0.215
1950	50	-0.173
1975	75	-0.149
2000	100	0.294
2020	120	0.768

Regressionsgeraden zu finden. Zum anderen sollte am Maß ablesbar sein, ob die „beste Gerade“ den Verlauf der Temperatur überhaupt hinreichend genau beschreibt. Das heißt, es soll eine Überprüfung ermöglichen, ob sich die Daten tatsächlich – wie behauptet – durch eine lineare Funktion angemessen beschreiben lassen.

### 5.3.3 Arbeitsblatt 2: Ein erstes Modell auf Basis eines Ausschnitts aus der Temperaturzeitreihe

Dieses Arbeitsblatt fokussiert den Abstandsbegriff. Lernende definieren den Abstand kontextorientiert und entwickeln ein Gütemaß zur Beurteilung der Qualität des Regressionsmodells.

Da der vorliegende Datensatz sehr groß ist, verwendet das Lernmaterial ein in der Wissenschaft gängiges Verfahren: Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten sich die mathematischen Methoden an einem kleinen Datensatz. Dieses Vorgehen erleichtert eine Überprüfung des Modells in Bezug auf Plausibilität und Gültigkeit. Um weiterhin Aussagen über den Temperaturverlauf von 1900 bis heute machen zu können, werden die Temperaturanomaliewerte betrachtet, die ab 1900 (Startjahr) jeweils alle 25 Jahre, bzw. im letzten Schritt nach 20 Jahren (Endjahr), gemessen wurden (vgl. Tabelle 5.13).

Aus mathematischer Sicht ist die Auswahl der Daten für einen kleineren Datensatz, wie sie hier vorgenommen wurde, willkürlich. Ebenso hätten auch sechs direkt aufeinander folgende Datenpaare ausgewählt werden können (beispielsweise 1900–1905 oder 1950–1955). Der Vorteil des präsentierten Verfahrens in Bezug auf die reale Situation ist die (nahezu) äquidistante Verteilung der verwendeten Messwerte über den kompletten Datensatz. Diese Auswahl impliziert die Annahme, dass die sechs Datenpaare die gesamte Temperaturentwicklung hinreichend genau widerspiegeln und somit eine Interpretation der Ergebnisse hinsichtlich des Klimawandels weiterhin möglich ist. Eine bessere Beurteilung des Trends erlaubt die Verwendung von über mehrere Jahre gemittelten Temperaturanomaliewerten. Beispielsweise bietet sich ein dekadisches arithmetisches Mittel an. Das erlaubt darüber hinaus eine Untersuchung weiterer Aussagen des IPCC-Berichts, wie zum Beispiel „Jedes der letzten drei Jahrzehnte war an der Erdoberfläche sukzessive wärmer als alle vorangegangenen Jahrzehnte seit 1850.“ (vgl. IPCC, 2016, S. 2). Eine solche Analyse ist Teil des Lernmaterials zum Thema „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“, das Kapitel 6 vorgestellt. Es bietet sich am Ende des zweiten Arbeitsblattes an, die Datenauswahl mit Blick auf die Validität und Güte in Bezug zur Realität zu diskutieren.

Auch im Falle eines kleinen Datensatzes ist es hilfreich, die Zeitreihe graphisch darzustellen. Diesbezügliche Möglichkeiten wurden in den Abschnitten 5.1.1 und 5.2.1 erörtert. Der Vorteil gegenüber der tabellarischen Form besteht darin, eine bessere Übersicht über die Datenlage zu gewinnen. Auch unterstützt die graphische Darstellung die Lernenden dabei, sich die weiteren Schritte zum Bestimmen der bestmöglichen Gerade zu überlegen.

Trotz der Datenreduktion verfolgt die Analyse die Begutachtung der eingangs aufgestellten Hypothese: Gesucht ist eine lineare – genauer gesagt affine – Funktion, die die Daten bestmöglich beschreibt. Bestmöglich bedeutet hier die Minimierung der Abweichung zwischen der gesuchten Gerade und den Datenpunkten. Es folgt eine Definition der Regressionsgerade, der Regressionswerte und dem Residuum (vgl. Abschnitt 5.1.2). In der Beschreibung des Residiums wird bewusst auf die Einführung des Begriffs des Fehlers verzichtet und stattdessen der Begriff der Abweichungen verwendet. Auf diese Weise soll der Fehlvorstellung vorgebeugt werden, dass die Residuen aufgrund von Fehlern in den Daten auftreten. Die Daten sind zwar fehlerbehaftet, jedoch gehorchen sie keinem Naturgesetz. Eine Abweichung der Daten von der „besten“ Geraden stellt somit keinen Fehler dar. In den folgenden Arbeitsaufträgen entwickeln die Lernenden selbstständig eine mathematische Beschreibung dieser Abweichungen, die in einer exakten Definition mündet.

Die Suche nach der Regressionsgerade teilt sich in drei Abschnitte:

- Zunächst entwickeln die Lernenden eine eigene Definition der Abweichung und überlegen sich Methoden zur Minimierung der Abweichungsfunktion. In einer Diskussion vergleichen sie ihre Strategien. Gegebenenfalls ist hier die Einführung der Methode der kleinsten Quadrate nach Gauß durch die Lehrperson nötig. In diesem Zuge sollte auch die Eindeutigkeit der Lösung des Minimierungsproblems analysiert und diskutiert werden.
- Anschließend stellen die Teilnehmenden die Abweichungsfunktion in Abhängigkeit der Steigung und des  $y$ -Achsenabschnitts auf.
- Abschließend minimieren sie die Abweichungsfunktion und erhalten so die bestmögliche Regressionsgerade (unter den verwendeten Daten, Modellen und Methoden).

Daran schließt sich eine Bewertung durch das Bestimmtheitsmaß sowie die Interpretation der Ergebnisse an.

In der ersten Aufgabe legen die Schülerinnen und Schüler erneut über Schieberegler eine visuell bestmögliche Gerade durch die Daten. Die optisch beste Gerade dient ihnen an späterer Stelle als Referenz. Weicht die mathematisch entwickelte Gerade stark von der visuell ermittelten ab, findet der Rückschluss statt, dass die Mathematisierung noch fehlerhaft ist und motiviert dazu, den Fehler zu suchen und zu beheben.

Anschließend bestimmen die Lernenden das Residuum. Dazu greifen sie auf den ausgedünnten Datensatz zu. Auch wenn es hier noch machbar wäre, die einzelnen Werte aus der Tabelle abzutippen, birgt dieses Vorgehen Fehlerquellen. Zum Beispiel werden Zahlen falsch abgetippt. Daher sollte spätestens an dieser Stelle darauf geachtet und den Lernenden bewusst gemacht werden, welche Vorteile der allgemeine Zugriff auf Vektoreinträge, in denen die Temperaturdaten gespeichert sind, bietet. Das Lernmaterial stellt eine programmiertechnische Übung zum Zugriff auf Vektoreinträge zur Verfügung, auf die die Lehrpersonen bei Bedarf hinweisen können. Diese Übung dient darüber hinaus dazu, das Einstiegslevel in das Lernmaterial gering zu halten und etwaige Hürden durch

fehlende Kenntnisse vorzubeugen. Ein solches Vorgehen gewährleistet eine erfolgreiche Teilnahme für alle auch ohne Informatik- und insbesondere Programmierkenntnisse. Darüber hinaus unterscheiden sich Zugriffe auf Vektoren oder Arrays zwischen den Programmiersprachen häufig, sodass sich hier ein weiterer Vorteil durch die konkrete Einführung ergibt. Sind bereits ausreichend Kenntnisse vorhanden, ist ein Überspringen der Übung möglich.

An dieser Stelle ist die Mathematisierung des Residuums nicht eindeutig, da der Abstandsbegriff noch nicht genau definiert ist. Es werden hier drei verschiedene Eingaben vorgestellt. Eine davon bezieht sich auf einen häufig begangenen Fehler. Die beiden anderen werden an späterer Stelle einander gegenübergestellt (s. Lösung S. 110).

**Lösung 5.7** Dazu sei  $tempReg_j := (m \cdot timeRed_j + b)$  der Temperaturanomaliewert, der sich aus dem linearen Regressionsmodell zum Zeitpunkt  $timeRed_j$  ergibt.

1. Angenommen, die Gesamtabweichung würde sich über die Summe der einfachen Abstände  $\sum_{j=1}^6 tempReg_j - tempRed_j$  bestimmt. Der Algorithmus 5.1 zeigt die zugehörige Eingabe der Schülerinnen und Schüler. In allen folgenden Darstellungen der Schülereingaben sind die selbstständig einzugebenden Teile farblich hervorgehoben.

**Algorithmus 5.1:** Eingabe der Lernenden bei Nutzung der Summe der einfachen Abstände

---

```

1 DistSelf(m, b) = (m * timeRed[1] + b) - tempRed[1] +
2                               (m * timeRed[2] + b) - tempRed[2] +
3                               (m * timeRed[3] + b) - tempRed[3] +
4                               (m * timeRed[4] + b) - tempRed[4] +
5                               (m * timeRed[5] + b) - tempRed[5] +
6                               (m * timeRed[6] + b) - tempRed[6]

```

---

Diese Eingabe stellt keine gültige Definition eines Abstandes dar, da hier auch negative Abstände zugelassen werden. Für einen Abstand muss jedoch stets die positive Definitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung gelten. Eine Abbildung  $Dist : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Abstand*, wenn für beliebige Elemente  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  folgende Eigenschaften gelten (vgl. Koecher und Krieg, 2007):

- a) positiv definit und nicht-ausgeartet:  $Dist(x, y) \geq 0$  und  $Dist(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - b) symmetrisch:  $Dist(x, y) = Dist(y, x)$
  - c) Dreiecksungleichung:  $Dist(x, y) \leq Dist(x, z) + Dist(z, y)$
2. Die Summe der Beträge der Abstände  $\sum_{j=1}^6 |tempReg_j - tempRed_j|$  beschreibt die Gesamtabweichung. Der Algorithmus 5.2 zeigt die zugehörige Eingabe der Schülerinnen und Schüler.

**Algorithmus 5.2:** Eingabe der Lerndenden bei Nutzung der Summe der Beträge der Abstände

---

```

1 DistSelf(m, b) = abs((m * timeRed[1] + b) - tempRed[1]) +
2                               abs((m * timeRed[2] + b) - tempRed[2]) +
3                               abs((m * timeRed[3] + b) - tempRed[3]) +
4                               abs((m * timeRed[4] + b) - tempRed[4]) +
5                               abs((m * timeRed[5] + b) - tempRed[5]) +
6                               abs((m * timeRed[6] + b) - tempRed[6])

```

---

Wählen Lernende diesen Weg, ist ein Hinweis auf die bereits implementierte Funktion des Betrags  $\text{abs}(\dots)$  in Julia hilfreich. Ist Programmiererfahrung vorhanden, so kann auch die Information ausreichen, nach „Julia absolute value“ zu suchen.

3. Die Gesamtabweichung wird durch die Summe der Abstandsquadrate  $\sum_{j=1}^6 (\text{tempReg}_j - \text{tempRed}_j)^2$  bestimmt. Der Algorithmus 5.3 zeigt die zugehörige Eingabe der Schülerinnen und Schüler.

**Algorithmus 5.3:** Eingabe der Lernenden bei Nutzung der Summe der Abstandsquadrate

---

```

1 DistSelf(m, b) = ((m * timeRed[1] + b) - tempRed[1])^2 +
2                               ((m * timeRed[2] + b) - tempRed[2])^2 +
3                               ((m * timeRed[3] + b) - tempRed[3])^2 +
4                               ((m * timeRed[4] + b) - tempRed[4])^2 +
5                               ((m * timeRed[5] + b) - tempRed[5])^2 +
6                               ((m * timeRed[6] + b) - tempRed[6])^2

```

---

Für eine überschaubare Schreibweise definiert man

$$\begin{aligned} x &:= [m \cdot \text{timeRed}_1 + b, m \cdot \text{timeRed}_2 + b, \dots, m \cdot \text{timeRed}_6 + b]^t \in \mathbb{R}^{6 \times 1} && \text{und} \\ y &:= [\text{tempRed}_1, \text{tempRed}_2, \dots, \text{tempRed}_6]^t \in \mathbb{R}^{6 \times 1}. \end{aligned}$$

Es schließt sich die Bestimmung des Quadrats des normierten Residuums der Vektoren  $x$  und  $y$  an:

$$\|x - y\|_2^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Da das Abstandsmaß einen positiven Abstand verlangt, ist die Lösung des Minimierungsproblems  $\min_{m,b \in \mathbb{R}} \|x - y\|_2^2$  äquivalent zur Lösung des Minimierungsproblems  $\min_{m,b \in \mathbb{R}} \|x - y\|_2$ .

Ist das Summenzeichen  $\Sigma$  bzw. die Summenfunktion  $\text{sum}(\dots)$  in Programmiersprachen bereits bekannt, kann in der Eingabe darauf zurückgegriffen werden. Die Summenfunktion tritt offiziell erst auf dem dritten Arbeitsblatt auf (s. Abschnitt 5.3.4), da sie insbesondere bei der Summierung vieler ähnlicher Terme eine Erleichterung und Fehlervermeidung darstellt. Dort wird sie ausführlich vorgestellt.

Das eingeführte Minimierungsproblem greift den vertikalen Abstand zwischen den beobachteten Datenpunkten und den Regressionswerten zur Berechnung der Gesamtabweichung auf und nutzt die sich aus den einfachen Abständen ergebenden Flächen (vgl. Henze, 2021b, S. 170). Dies mag auffallen, da anschaulich ein minimaler Abstand zwischen den Datenpunkten und Regressionswerten eher über den geometrischen Abstand bestimmt werden würde. Dieser geometrische Abstand kann mithilfe des Lots berechnet werden und entspricht der kleinsten Entfernung zwischen Punkt und Gerade (vgl. Baum et al., 2015, S. 246). Auch die Anwendung des geometrischen Abstands wäre hier denkbar. Jedoch wird schnell ersichtlich, dass dieses Vorgehen keiner problembezogenen Lösungsstrategie entspricht. Die  $x$ -Koordinate des Schnittpunktes und  $x$ -Koordinate des Messpunktes stimmen in diesem Fall nicht überein. Das heißt, man würde Temperaturanomalien aus unterschiedlichen Jahren miteinander vergleichen. Die Gerade soll jedoch die Messwerte jeweils im Jahr  $j$  und nicht im Jahr  $j + \varepsilon$  approximieren. Problemunabhängig bieten die hier aufgezeigten

Begriffsdefinitionen über den vertikalen Abstand außerdem den Vorteil, dass keine Vorkenntnisse bzgl. der Bestimmung eines Lotfußpunktes auf einer Geraden nötig sind. Weiterhin lässt sich der Abstand schnell und einfach bestimmen. Schülerinnen und Schüler könnten in einer Zusatzaufgabe die Abweichung zwischen dem geometrischen und dem vertikalen Abstand untersuchen.

Erfahrungsgemäß begehen Teilnehmende häufig den Fehler den Abstand über die erste Variante der Lösung 5.7, nämlich  $DistSelf(m, b) = \sum_{j=1}^6 tempReg_j - tempRed_j$ , zu definieren. In diesem Fall weist eine einprogrammierte Rückmeldung auf die positive Definitheit des Abstandsmaßes hin. Auch den Betrag manchen bekannt. Selten wird die Anwendung der Quadratsumme vorgeschlagen.

Anhand der aufgestellten Regressionsfunktion, wobei die Parameter  $m$  und  $b$  aus der über die Schieberegler eingestellten graphischen Darstellung übernommen werden, berechnet das Lernmaterial den Gesamtabstand (Residuum). Der Wert des Gesamtabstandes ist von zwei Faktoren abhängig:

1. von der genutzten Abstandsdefinition und
2. von der über die Schieberegler eingestellten Regressionsgerade.

In einigen Fällen versuchten Lernende den Gesamtabstand zu minimieren, indem sie die Regressionsgerade über die Schieberegler anpassen und diesen Aufgabenteil mehrmals durchlaufen. Dieser Weg präsentiert eine iterative Lösungsstrategie, um die Regressionsgerade mit dem kleinsten Gesamtabstand zu finden.

Bisher wurde die Regressionsgerade über (gezielte) Variation der Regressionsparameter  $m$  und  $b$  gesucht. Diese Herangehensweise zur Bestimmung der Regressionsgerade garantiert nicht, eine optimale Lösung im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate zu finden. Daher wird ein mathematisches Verfahren zur Lösung des Minimierungsproblems benötigt, um die nach der Methode der kleinsten Quadrate bestmögliche Regressionsgerade zur Modellierung der Daten zu finden.

In der vorherigen Aufgabe entwickelten die Schülerinnen und Schüler eine eigene Abstandsdefinition und nutzten sie dazu, den Abstand zu bestimmen. In einer Diskussion vergleicht die Lerngruppe die eigens entwickelten Abstandsgriffe und die daraus resultierenden Minimierungsprobleme. Sie arbeiten die Vor- und Nachteile der Verfahren heraus. Am Ende steht eine gemeinsame Strategie, die weiter verfolgt wird.

**Lösung 5.8** Die Erfahrung mehrfacher Durchführungen zeigt, dass Teilnehmende häufig eine Brute-Force-Methode zur Minimierung des Gesamtabstandes vorschlagen. Dabei empfehlen sie die Parameter  $m$  und  $b$  (gezielt) zu variieren und so den minimalen Gesamtabstand zu finden. Dieses Verfahren führt in der Regel nur zu einem lokalen Minimum und ist zeitaufwendig. Abhilfe schafft die Frage, woran man erkennt, dass das Minimum gefunden wurde.

Es gibt verschiedene Verfahren zum Lösen von (linearen) Minimierungsproblemen, die zu den Optimierungsproblemen gehören. Das vorliegende Lernmaterial verfolgt nicht das Ziel, die vielfältigen Lösungsmöglichkeiten für Optimierungsprobleme aufzuzeigen. Stattdessen greift es eine Methode heraus, die sich speziell für die Regressionsanalyse eignet. Eine Vertiefung in Optimierungsprobleme und deren Lösungsmethoden sind im Lernmaterial zum Thema „Wie funktioniert eigentlich ein Solarkraftwerk und was hat das mit Mathematik zu tun?“ didaktisch aufbereitet und können beispielsweise in Schönbrodt (im Druck) nachgelesen werden. Ein möglicher Weg zur Bestimmung des Minimums einer Funktion nutzt die Methode des Differenzierens. Da Lernende

dieses Vorgehen aus dem Schulunterricht kennen, birgt es kaum Hürden. Es müssen  $m$  und  $b$  so gefunden werden, dass die Funktion  $\text{DistSelf}(m, b)$  in  $(m_{\min}, b_{\min})$  ihr Minimum annimmt. Haben die Lernenden die Abstandsfunktion über die erste gültige Lösungsvariante, nämlich unter Verwendung des Betrags, aufgestellt (vgl. Lösung S. 108), stoßen sie hier auf Probleme. Der folgende Abschnitt prüft die vorgestellten Methoden auf Differenzierbarkeit und Eindeutigkeit der Lösung hin und diskutiert sie. Am Ende liegt die Verwendung der Methode der kleinsten Abstandsquadrate nahe.

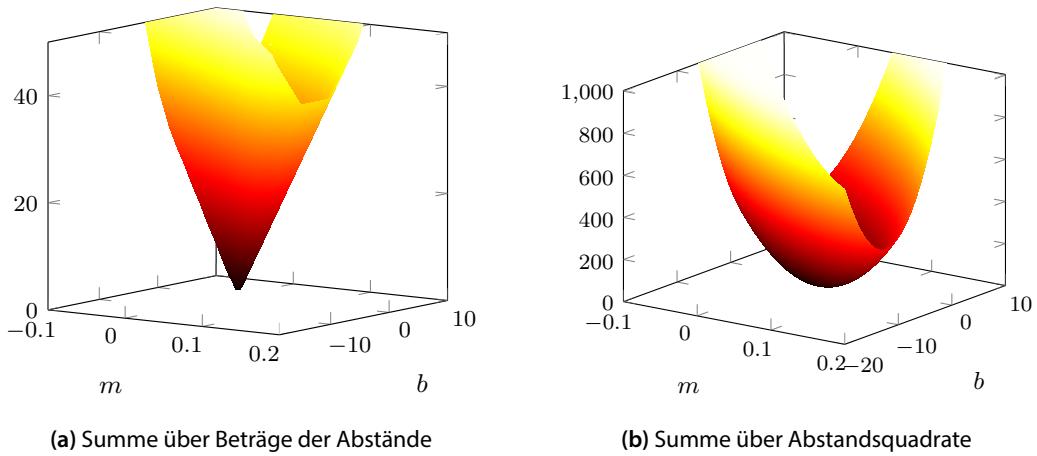
1. Die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$  ist nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar, da die linksseitige und rechtsseitige Ableitung an der Stelle  $x = 0$  nicht übereinstimmen. Somit ist auch die Abstandsfunktion, wie sie in der zweiten Methode (Summe über Beträge der Abstände) aufgestellt wurde, nicht überall differenzierbar. Dieses Phänomen veranschaulicht Abbildung 5.15(a): Die Abstandsfunktion hat im Minimum eine „Spitze“ und ist somit in diesem Punkt nicht differenzierbar. Mit Ausnahme der Brute-Force-Methode kennen die Lernenden keine Vorgehensweise, um dieses Minimierungsproblem zu lösen.
2. Die zweite Möglichkeit entspricht der Methode der kleinsten Abstandsquadrate, die von Gauß im Alter von 18 Jahren entwickelt wurde (vgl. Wikipedia, 2021). Die Abstandsfunktion ist stetig differenzierbar und hat ein eindeutiges Minimum. Sie stellt ein Paraboloid dar (s. Abbildung 5.15(b)). Auch kann es helfen, die Parabel als bekanntes Beispiel für eine quadratische Funktion zur Anschauung hinzu zu ziehen.

Die Schülerinnen und Schüler minimieren nun die Abstandsfunktion  $\text{DistSelf}(m, b)$  hinsichtlich der Steigung  $m$  und des  $y$ -Achsenabschnitts  $b$ . Daraus ergibt sich die Regressionsgerade, die von den beiden Parametern  $m$  und  $b$  abhängig ist. Da aus dem Schulunterricht in der Regel lediglich Verfahren zur Minimierung von Funktionen einer Veränderlichen bekannt sind, wird an dieser Stelle eine in Julia bereits implementierte Routine genutzt, die das Minimum einer Funktion von zwei Variablen berechnet. Eine analytische Berechnung wird nicht verlangt. Für Interessierte empfiehlt sich die eigenständige partielle Differentiation. Dazu wird zunächst die Variable  $m$  festgehalten und die Regressionsfunktion nach  $b$  abgeleitet. Anschließend wird  $b$  festgehalten und nach  $m$  differenziert. Die Ergebnisse werden gleich null gesetzt, und das sich ergebende Gleichungssystem gelöst. Am Ende stehen analytische Ausdrücke zur Berechnung der Schätzwerte von  $m$  und  $b$ , wie sie Beispiel 5.4 liefert. Programmierbegeisterte Teenager können dazu angeregt werden, dieses Lösungsvorgehen zu implementieren.

Eine alternative Herleitung der Schätzer für die beiden Parameter nutzt die Minimaleigenschaft des arithmetischen Mittels aus: Die Funktion  $f_1(a) := \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2$  nimmt für  $a = \bar{y}$  ihr Minimum an. Diese Eigenschaft lässt sich auf Schulniveau nachweisen (vgl. Henze, 2020a). Die Funktion  $f_1(a)$  kann unter Ausnutzung der binomischen Formel umgeformt werden zu

$$f_1(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} + \bar{y} - a)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + n(\bar{y} - a)^2.$$

Da alle Summanden nicht negativ sind und der letzte Summand nur dann gleich null ist, wenn  $a = \bar{y}$  gilt, nimmt die Funktion  $f_1(a)$  in genau diesem Fall ihr Minimum an. Man betrachtet nun die Funktion  $f_2(m, b) := \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$  und sucht deren Minimum in  $b$  unter Festhalten von  $m$ . Gesucht ist also das Minimum der Funktion  $f_2(b) := \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$ .



**Abbildung 5.15:** Abweichungsfunktion unter Verwendung verschiedener Abweichungsdefinitionen

Mit dem vorherigen Wissen nimmt diese Funktion ihr Minimum für  $b = \bar{y} - m\bar{x}$  an. Einsetzen liefert die Funktion

$$\begin{aligned} f_3(m) &:= \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - (\bar{y} - m\bar{x}))^2 = \sum_{i=1}^n (\underbrace{y_i - \bar{y}}_{=: \tilde{y}_i} - \underbrace{m(x_i - \bar{x})}_{=: \tilde{x}_i})^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^2}_{=: C} - 2m \underbrace{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \tilde{x}_i}_{=: B} + m^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2}_{=: A}, \end{aligned}$$

die bezüglich  $m$  zu minimieren ist. Diese Gleichung kann nun in die Scheitelpunktform gebracht werden. Da  $A > 0$  ist, folgt

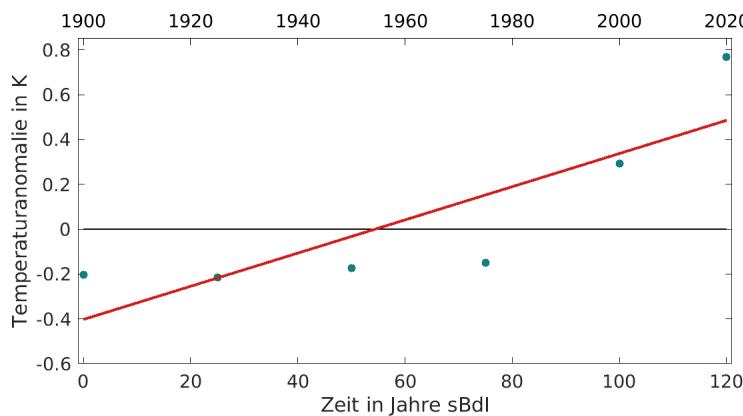
$$f_3(m) = \left( m - \frac{B}{A} \right)^2 - \left( \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{C}{A}.$$

Im Scheitelpunkt nimmt die Funktion ihr Extremum (hier Minimum) an, nämlich genau für

$$m = \frac{B}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n \tilde{y}_i \tilde{x}_i}{\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Viele gängige Programmiersprachen stellen Routinen zur Berechnung der Regressionsgerade mittels der Methode der kleinsten Abstandsquadrate zur Verfügung. Auch in Julia wird auf eine solche Routine zurückgegriffen. Alle aufgezeigten Methoden führen zum gleichen Ergebnis.

Insgesamt beschränkt sich die Suche nach der „bestmöglichen“ Gerade nicht auf die Nutzung der Summe der Abstandsquadrate. Anstelle der Quadratfunktion könnten ebenso andere konvexe Funktionen eingesetzt werden. Sie haben die besondere Eigenschaft, dass ihr lokales Minimum gleichzeitig auch das globale Minimum der Funktion ist. Diese Eigenschaft kann über Beispiele leicht veranschaulicht werden.



**Abbildung 5.16:** Lage der Regressionsgerade im ausgedünnten Datensatz bestimmt nach der Methode der kleinsten Quadrate

Die richtige Eingabe der zu minimierenden Abstandsfunktion liefert die Schätzwerte für die Steigung  $m$  und den  $y$ -Achsenabschnitt  $b$ . Für diese Werte nimmt die Funktion ihr Minimum an. Sie werden gespeichert und ausgegeben. Darüber bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Funktionsgleichung der geschätzten Regressionsgerade. Außerdem erfolgt eine graphische Ausgabe der Lösung, indem die gefundene geschätzte Regressionsgerade in die Zeitreihe eingezeichnet wird (s. Abbildung 5.16).

Die geschätzte Regressionsgerade ist die Gerade, die die Daten, im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate (nach Gauß), am besten beschreibt – in diesem Sinne ist sie also optimal. Das Lernmaterial motiviert dazu, das jeweilige mathematische Ergebnis auf die Ausgangsfrage zurückzuziehen. Die Steigung der Regressionsgerade spiegelt den Trend der Temperaturentwicklung wider. Da die Steigung der geschätzten Regressionsgerade positiv ist ( $m_{Best} \approx 0.0074$ ), steigt die Temperatur von 1900 bis 2020 um etwa  $0.0074^{\circ}\text{C}/\text{Jahr}$  an. Jedoch stellt sich die Frage, ob die geschätzte Regressionsgerade die Daten angemessen beschreibt, da die meisten Datenpunkte nicht auf der Regressionsgeraden liegen. Es fällt auf, dass zwei Werte sehr dicht an der geschätzten Regressionsgeraden liegen, die anderen Werte aber einen relativ großen Abstand haben. Außerdem liegen die ersten vier Datenpunkte sehr nahe um eine Temperaturanomalie von  $-0.2^{\circ}\text{C}$ , während die letzten beiden Datenpunkte stark davon abweichen. Wie gut ist die Qualität der Anpassung? Lässt sich die Temperaturentwicklung tatsächlich durch ein lineares Regressionsmodell beschreiben, so wären die Abweichungen zwischen den gemessenen Temperaturanomaliewerten und den Funktionswerten der geschätzten Regressionsgeraden durch (natürliche) Streuung erkläbar.

Um die Güte der Anpassung der geschätzten Regressionsgerade an die gemessenen Daten zu quantifizieren, verwendet das Lernmaterial das sogenannte Bestimmtheitsmaß  $R^2$ . Dieses setzt den Gesamtabstand (Summe der Abweichungen der einzelnen Temperaturanomaliewerte von der geschätzten Regressionsgeraden) ins Verhältnis zur Streuung der Messwerte (Summe der Abweichungen der einzelnen Temperaturanomaliewerte vom arithmetischen Mittel der Temperaturanomalien). Das Bestimmtheitsmaß ist nicht Teil der Schulmathematik. Daher fokussiert das Lernmaterial nicht die konkrete Berechnung – dies wird von einer vorprogrammierten Routine übernommen. Vielmehr leitet das Lernmaterial dazu an, dessen Bedeutung zu verstehen. Die Lernenden betrachten dazu verschiedene Fallunterscheidungen:

1. Wie verhält sich das Bestimmtheitsmaß, wenn alle Messwerte genau auf der Regressionsgerade liegen?
2. Wie verhält sich das Bestimmtheitsmaß, wenn alle Messwerte weit weg von der Regressionsgerade liegen?
3. Was sagt das Bestimmtheitsmaß über die Güte der ermittelten Regressionsgerade aus?

Das Bestimmtheitsmaß gibt an, wie gut die Daten durch ein lineares Regressionsmodell beschrieben werden können. Es gibt jedoch keinen Aufschluss darüber, ob das lineare Modell tatsächlich das geeignete Modell ist. Möglicherweise lassen sich die Daten besser durch einen quadratischen oder exponentiellen Zusammenhang beschreiben. Diesen Ideen geht ein ausführlicher didaktischer Kommentar zu Beginn des dritten Arbeitsblattes nach (s. Abschnitt 5.3.4).

Als kleine Programmierübung können Lernende selbstständig die Berechnung des Bestimmtheitsmaßes implementieren. Sie benötigen dazu eine for-Schleife, die sie sich über Zusatzmaterial erarbeiten können. Außerdem gibt es in Julia die implementierte Funktion „mean(...“), mittels derer sich das arithmetische Mittel eines Vektors direkt berechnen lässt.

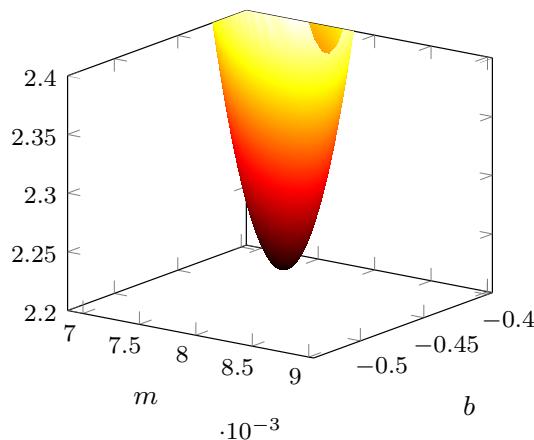
Es heißt, ab einem Bestimmtheitsmaß von etwa 0.8 könne auf einen starken linearen Zusammenhang geschlossen werden (vgl. Abschnitt 5.1.4). Das Bestimmtheitsmaß liegt hier bei etwa 0.71. Ein linearer Zusammenhang kann nicht ausgeschlossen werden, jedoch wären weitere Untersuchungen vonnöten.

Die Schülerinnen und Schüler stellten für einen ausgedünnten Datensatz ein lineares Regressionsmodell auf und bestimmten dessen Güte. Dieses Vorgehen stellt die Entdeckung der mathematischen Methoden in den Vordergrund. Die Erstellung eines kleinen Datensatzes über die Auswahl eines Datenpunktes alle 25 bzw. den letzten nach 20 Jahren wurde so einfach wie möglich gehalten. Hier könnte ergänzend diskutiert werden, wie sich beispielsweise die Verwendung von gemittelten Temperaturanomalien auf das Ergebnis auswirkt. Wer Programmiererfahrung besitzt, könnte dieses Vorgehen umsetzen.

#### 5.3.4 Arbeitsblatt 3: Modellverbesserung mithilfe der kompletten realen Temperaturzeitreihe

Das Ergebnis des zweiten Arbeitsblattes warf die Frage auf, ob trotz der bescheidenen Güte der Anpassung des Regressionsmodells an die Daten ein linearer Zusammenhang, also ein Trend, in den Beobachtungsdaten vorliegt. Mit Blick auf den Modellierungskreislauf ist es nun an der Zeit, nach Verbesserungsmöglichkeiten zu suchen (vgl. Abschnitt 3.1). Dabei gibt es zwei Stellschrauben:

- Vielleicht war die Annahme, dass die Temperaturanomaliedaten einem linearen Trend folgen, falsch. Zur Überprüfung dieser Annahme müssten weitere funktionale Zusammenhänge untersucht werden. Beispielsweise bietet sich die Analyse eines quadratischen oder exponentiellen Modells an, wie der Abschnitt 5.2 vorführt.
- Eine andere Möglichkeit ist, dass die Datenauswahl nicht gut war. Möglicherweise enthielt der ausgedünnte Datensatz ausgerechnet die sechs Datenpaare, die weiter weg vom Datenzentrum liegen (vgl. Hebel und Diskrepanz, Abschnitt 5.1.4). Damit wären sie für eine Analyse des langfristigen Temperaturverlaufes ungeeignet.



**Abbildung 5.17:** Abweichungsfunktion unter Verwendung der Summe der Abweichungsquadrate

Das Lernmaterial verwirft die Annahme, dass der kleine Datensatz die gesamte Zeitreihe gut repräsentiert. Die Lernenden überarbeiten die getroffene Vereinfachung (Weglassen von Datenpunkten) und verwenden alle vorhandenen Daten im Zeitraum von 1900 bis 2020. Die zuvor erarbeiteten mathematischen Verfahren übertragen sie auf die gesamte Temperaturzeitreihe (vgl. Abbildung 5.5(a)). Zu prüfen ist, ob ein solches Vorgehen zu einer höheren Güte des Regressionsmodells führt.

In der Abstandsfunktion  $DistGauss(m, b)$  summieren die Schülerinnen und Schüler die Terme  $((m \cdot timeRed_j + b) - tempRed_j)^2$  für  $j = 1, \dots, n$ . Ist  $n = 6$  wie im ausgedünnten Datensatz des letzten Arbeitsblattes (vgl. Abschnitt 5.3.3), kann die Summe schnell eingegeben werden. Möchte man nun für den kompletten HadCRUT4-Datensatz von 1900 bis 2020 die Abstandsfunktion aufstellen, so müssen  $n = 121$  Terme summiert werden. Eine ausführliche Eingabe jedes einzelnen Terms benötigt einerseits viel Zeit. Andererseits ergeben sich leicht Tippfehler, die wiederum gefunden und behoben werden müssen, was ebenfalls Zeit erfordert. Daher greifen die Lernenden auf eine in julia implementierte Funktion `sum()` der Summenbildung zurück. Diese Funktion stellt das Prinzip des Summenzeichens  $\sum$  nach und vereinfacht die Darstellung einer Summe. Die vierte Aufgabe des zweiten Arbeitsblattes führte bereits das Summenzeichen im Rahmen einer ausführlichen Beschreibung ein (vgl. Abschnitt 5.3.3). Es folgt eine Übung zum Nutzen der Summenfunktion von julia. Wer diese Schreibweise bereits beherrscht, kann die Übung überspringen. Natürlich könnte die implementierte Summenfunktion bereits für den ausgedünnten Datensatz genutzt werden. Darauf wurde im Material jedoch bewusst verzichtet: Die Abstandsfunktion und die Regressionsanalyse ist unbekannt, sodass auf dem zweiten Arbeitsblatt keine weitere Baustelle durch Einführung der Summenfunktion eröffnet werden sollte. Der ausführliche Aufschrieb führt außerdem zu einem besseren Verständnis der Abstandsfunktion. Ein didaktischer Mehrwert in der ausführlichen Eingabe von 121 Termen ist jedoch nicht erkennbar. Daher ist eine Übung zur Nutzung der implementierten Funktion `sum()` erst an dieser Stelle Teil des Materials.

Die Abstandsfunktion  $DistGauss(m, b)$  ist für den betrachteten HadCRUT4-Datensatz für den Zeitraum von 0 bis 120 sBdI in Abbildung 5.17 dargestellt: Hier wird analog zum ausgedünnten Datensatz offensichtlich, dass die Funktion ein Paraboloid darstellt und ein eindeutiges Minimum besitzt. Im Anschluss an die Bestimmung der Regressionsgerade für den vollen Datensatz interpretieren die Heranwachsenden ihr mathematisches Ergebnis. Eine ausführliche Darstellung der

Ergebnisse und deren Interpretation in Bezug auf Aussagen über die Temperaturentwicklung erfolgt in Abschnitt 5.2.3. Bereits die visuelle Analysemethode zeigte eine positive Temperaturentwicklung. Jedoch ergaben sich abhängig von der betrachtender Person leichte Unterschiede. Die numerische Methode liefert nun ein eindeutiges – im Sinne der Methode der kleinsten Abstandsquadrate optimales – Ergebnis.

Anschließend erfolgt eine Berechnung und Interpretation des Bestimmtheitsmaßes. Um eine Doppelung zu vermeiden sei auf die Ergebnisse und deren Interpretation in Abschnitt 5.2.4 verwiesen.

In einer weiterführenden Aufgabe können Schülerinnen und Schüler selbstständig weitere funktionale Zusammenhänge zwischen der Zeit und der Temperaturanomalie untersuchen. Diese Aufgabe wurde im vorliegenden Lernmaterial nicht umgesetzt, da sie sich nicht aus den IPCC-Aussagen ableiten lässt. Daher bietet sie sich vor allem als eigenständige Programmierübung an, beispielsweise in Informatikkursen. In anschließenden Diskussionen erörtern Lernende, inwiefern komplexere Modelle die Realität besser abbilden. Bei der Modellwahl ist immer der Zweck und das Ziel zu berücksichtigen: Gegebenenfalls führt ein Regressionsmodell, das von einem quadratischen, kubischen oder exponentiellen Zusammenhang zwischen Zeit und Temperaturanomalie ausgeht, zu einer höheren Güte (vgl. Abschnitt 5.2.4). Ist das Ziel jedoch wie hier, die Temperaturentwicklung auf einen linearen Trend hin zu untersuchen, dann wäre eine nichtlineare Regressionsfunktion eine falsche Annahme.

### 5.3.5 Arbeitsblatt 4: Modellerweiterung durch einen Hypothesentest

Das vierte Arbeitsblatt motiviert dazu, die Aussage, dass die globale Erdoberflächentemperatur seit Beginn der Industrialisierung ansteigt, als These aufzufassen und zu hinterfragen. Das zuvor erarbeitete Regressionsmodell stellt dafür die Grundlage.

Hypothesentests stehen häufig erst im zweiten Jahr der Oberstufe im Mathematikkernlehrplan – in einigen Bundesländern auch nur für Leistungs- bzw. Vertiefungskurse. Ein Großteil der Schülerschaft, die dieses Workshopmaterial erarbeiten, können somit diesbezüglich selten auf Vorwissen zurückgreifen. Die  $t$ -Funktion ist bereits in julia implementiert. Eine Beschreibung der  $t$ -Verteilung ist nicht Teil des Lernmaterials. Ihre Erkundung wäre mathematisch sicherlich interessant, jedoch könnte ein Verständnis angesichts der beschränkten Bearbeitungszeit nicht erwartet werden. Gleichzeitig lenkt dieser mathematische Aspekt vom eigentlichen Modellieren ab.

Von 1900 bis 2020 steigt die mittlere Jahrestemperatur um etwa  $0.0082^{\circ}\text{C}$  pro Jahr. Das entspricht  $0.82^{\circ}\text{C}$  in 100 Jahren. Ein statistischer Test zeigt, ob sich die Steigung tatsächlich so stark von der Nullhypothese  $\beta_2 \leq c$  unterscheidet, dass diese zu verwerfen ist (vgl. Abschnitt 5.2.6). Der IPCC-Bericht spricht von einem positiven Trend. Daher bezieht sich das Lernmaterial auf den Wert  $c = 0$  als untere Grenze. Die Schülerinnen und Schüler prüfen die (Null-)Hypothese  $H_0: \beta_2 \leq c = 0$  gegen die Alternativhypothese  $H_1: \beta_2 > c = 0$ . Einige probieren hier bereits andere Werte  $c$  aus, gegen die getestet wird. Es kann  $c$  auch so gewählt werden, dass der Referenzwert der Steigung des  $1.5^{\circ}\text{C}$ - oder  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziels entspricht. Diese Untersuchung fordert die Zusatzaufgabe A ein (s. Abschnitt 5.3.6).

Außerdem motiviert das Lernmaterial dazu, das Signifikanzniveau zu variieren, die Ergebnisse miteinander zu vergleichen und zu interpretieren. Wie sähe die Entscheidung aus, falls man risiko-freudiger oder zurückhaltender gewesen wäre? Was bedeutet das Ergebnis des Hypothesentests für

**Tabelle 5.15:**  $(1 - \alpha)$ -Quantile von  $t$ -Verteilungen für eine Testgröße, die eine Hypothese bzgl. des Modellparameters  $\beta_2 = m_{1.5}$  bzw.  $\beta_2 = m_{2.0}$  testet. Die Realisierung der Teststatistik  $T_{\beta_2}$  weist einen Wert von 1.2295 für  $T_{m_{1.5}}$  bzw. von -5.5491 für  $T_{m_{2.0}}$  auf.

Signifikanzniveau $\alpha$	Quantile von $t$ -Verteilungen $t_{119,1-\alpha}$	Ablehnung von $H_0$ ?	
		$m_{1.5}$	$m_{2.0}$
0.12	1.181	ja	nein
0.11	1.233	nein	nein

die Fragestellung, ob es einen Klimawandel gibt? Die Ergebnisse werden ausführlich in Abschnitt 5.2.6 diskutiert.

Das Vorgehen des Lernmaterials zeigt einerseits die große und objektive Aussagekraft der Daten unter einem mathematischen Blickwinkel. Andererseits fällt auch die Beschränktheit der Aussagekraft auf, da das verwendete Modell selbst beschränkt ist und beispielsweise andere klimarelevante Faktoren außer Acht lässt.

Zwei anschließende Zusatzaufgaben widmen sich der Frage, wie sich die Temperaturen bis zum Jahr 2100 entwickeln.

### 5.3.6 Arbeitsblätter 5/6: Zusatzaufgaben A/B

Es gibt eine auf dem fünften Arbeitsblatt umgesetzte Zusatzaufgabe A und eine im sechsten Arbeitsblatt implementierte Zusatzaufgabe B. Beide sind unabhängig voneinander, und ihre Bearbeitung kann in beliebiger Reihenfolge erfolgen. Beide Arbeitsblätter fokussieren die durch die Politik angestrebten sogenannten  $1.5^{\circ}\text{C}$ - bzw.  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziele. Die zugehörige Hypothese hält fest:

*Die Temperatur steigt bis 2100 signifikant stärker an, als es das  $1.5^{\circ}\text{C}$ - bzw. das  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziel vorgibt.*

Angenommen wird dabei, dass die gefundene Regressionsgerade den Temperaturtrend auch für die Zukunft prognostiziert. So treffen Lernende basierend auf den Temperaturdaten von 1850 bis 2020 sowie auf dem zuvor aufgestelltem linearen Regressionsmodell Prognosen über den zukünftigen Temperaturverlauf. In den folgenden Aufgaben gilt es, die neue Hypothese zu mathematisieren und die Alternativ- und Nullhypothese aufzustellen. Anschließend wird das Signifikanzniveau festgelegt und die  $(1 - \alpha)$ -Quantile von  $t$ -Verteilungen und Realisierungen der Teststatistik  $T_{\beta_2}$  jeweils für das  $1.5^{\circ}\text{C}$ - und das  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziel bestimmt.

Auffällig sind im Vergleich zu Arbeitsblatt 4 die deutlich niedrigeren empirischen  $t$ -Werte (vgl. Tabelle 5.14). Auf Basis des aufgestellten Regressionsmodells ist für das  $1.5^{\circ}\text{C}$ -Ziel die Nullhypothese zu Signifikanzniveaus  $\alpha \geq 0.12$  zu verwerfen. Somit besteht großes Vertrauen darin, dass das  $1.5^{\circ}\text{C}$ -Ziel nicht erreicht wird. Die Signifikanzniveaus  $\alpha = 0.11$  und  $\alpha = 0.12$  stellen unübliche Werte dar. Auch hier erfolgt die Berechnung der Quantile der  $t$ -Verteilung, um den Wechsel der nicht-Ablehnung der Nullhypothese hin zur Ablehnung sichtbar zu machen. Darüber hinaus ist selten das Wissen vorhanden, welche Signifikanzniveaus typischerweise angenommen werden. Im Falle des  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziels ist die Nullhypothese zu keinem der getesteten Niveaus abzulehnen. Ein Nachweis über das Verfehlen des  $2^{\circ}\text{C}$ -Ziels liefert der Hypothesentest nicht.

In einer weiteren Aufgabe untersuchen die Teenager die Weiterentwicklung der Temperaturanomalie bis 2100 unter der Annahme, dass sich die Regressionsgerade zur Vorhersage der Temperaturentwicklung eignet. Dazu stellen sie eine Formel zur Berechnung der Temperaturanomalie im Jahre 2100 auf. Außerdem bestimmen sie die Zeitpunkte, an denen die Temperaturanomalie genau um  $1.5^{\circ}\text{C}$  bzw.  $2^{\circ}\text{C}$  gegenüber dem vorindustriellen Niveau höher liegt. Die Ergebnisse werden im Kontext des Klimawandels diskutiert. Steigt die Temperatur bis ins Jahr 2100 so, wie es die Regressionsgerade prognostiziert, wird im Jahr 2100 eine Temperaturanomalie von etwa  $1.124^{\circ}\text{C}$  erreicht werden. Ein Vergleich mit der bisherigen Rekordtemperaturanomalie von  $0.979^{\circ}\text{C}$  im Jahr 2016 offenbart, dass ein solcher jetziger Rekordwert im Jahr 2100 um fast  $0.15^{\circ}\text{C}$  im Mittel überboten wird. Die Ergebnisse werden ausführlich in Abschnitt 5.2.7 vorgestellt und diskutiert. Sie sind in Abbildung 5.13(a) veranschaulicht.

Eine weitere Zusatzaufgabe motiviert die Schülerinnen und Schüler, Modellkritik zu üben. Sie nennen Gründe, warum sich die Aussagekraft des Modells in Grenzen hält und überlegen sich Möglichkeiten zur Modellverbesserung.

Die mathematische Untersuchung konnte nicht eindeutig ein Verfehlen der Ziele nachweisen. Warum schlagen dennoch so viele Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler Alarm? Alle Ergebnisse wurden unter der Annahme erzeugt, dass sich die Temperatur entlang der Regressionsgerade entwickelt. Eine solche Entwicklung kann jedoch bezweifelt werden. Einerseits legen die Daten nahe, dass der Temperaturanstieg eher in zwei Phasen verlief: Die erste Phase dauerte von etwa 1900 bis 1945 und die zweite Phase von 1975 bis heute. Zwischen 1945 und 1975 waren die Temperaturen eher konstant. Es stellt sich daher die Frage, ob eine Regressionsgerade, die lediglich die Daten ab 1975 bis heute verwendet, für eine Vorhersage der Temperaturentwicklung nicht deutlich besser geeignet ist (vgl. Abschnitt 5.2.7, stückweise lineares Regressionsmodell).

In einer weiterführenden Aufgabe werden Lernende dazu aufgefordert, den Datensatz zu variieren und eigene ausgedünnte Datensätze zu bilden. Basierend auf einer neuen Datengrundlage stellen sie ein lineares Regressionsmodell auf und untersuchen dessen Güte. Diese Herangehensweise ist nicht Teil des Lernmaterials, sodass sich diese Aufgabe vorrangig an Heranwachsende in Informatikkursen richtet. Es könnten auch andere Modelle, etwa ein quadratisches Modell, die Temperaturentwicklung möglicherweise besser beschreiben. Auch solche Modelle könnten Lernende entwickeln und auf die Daten anwenden. In einer Diskussion könnte die Lerngruppe die Modelle einander gegenüberstellen und herausarbeiten, welches Modell sich für eine Prognose am besten eignet. Dieses Vorgehen, verschiedene Modelle aufzustellen, deren Ergebnisse zu simulieren und miteinander zu vergleichen, ist in der Wissenschaft gängig: Der IPCC-Bericht stellt die Ergebnisse unterschiedliche Szenarien und die Auswirkungen für die Zukunft dar. Genau auf dieser Basis entstehen solch voneinander abweichende Aussagen von „Die Temperatur steigt bis 2100 um  $1.5^{\circ}\text{C}$  an.“ bis hin zu „Die Temperatur steigt bis 2100 um  $4.8^{\circ}\text{C}$  an“.

### 5.3.7 Ausblick und Vorschläge für weiterführende Modellierungsaufgaben

Die hier geschilderten Analysen der Temperaturzeitreihe von 1900 bis 2020 stellen einen wichtigen Teil in der Anwendung mathematischer Methoden am Beispiel des Klimawandels dar. Diese Methoden helfen zu erkennen, dass unter dem angenommenen Modell sehr hohes Vertrauen in die Aussage besteht, dass die globale Durchschnittstemperatur ansteigt. Schülerinnen und Schülern stehen damit Herangehensweisen zur Verfügung, weitere zeitabhängige Klimaindikatoren auf einen

linearen Trend hin zu untersuchen. Auf diese Weise entstünde mit den im Mittelpunkt bleibenden Methodenvarianten ein noch umfassenderes Bild der klimatischen Veränderungen.

Zusätzliche Analysen könnten sich der Frage widmen, wie sich dieser Temperaturanstieg erklären lässt: Wie groß sind natürliche Einflüsse auf den Temperaturanstieg, wie beispielsweise Sonnenereptionen, und welchen Anteil am Trend können sie nicht erklären? Wie groß ist der Einfluss des Menschen? Auch diese Fragen können ein methodisch-motivierender Ansatz sein, ein Abbild der Welt in der Sprache der Mathematik zu schaffen und dort zu analysieren. Ein einfaches Klimamodell betrachtet den Energiehaushalt der Erde und untersucht den Strahlungstransport. Ausgehend von der Bestrahlungsstärke der Sonne ermöglicht dieses Modell eine realistische Berechnung der Durchschnittstemperatur der Erde. Natürliche und nicht-natürliche Einflüsse lassen sich quantitativ abschätzen. Kapitel 7 präsentiert mathematischen Methoden dieser Analyse, wendet sie an und reduziert sie didaktisch. Vorhersagen des Klimas sind sehr komplex und schwierig. Sie müssen nicht nur die natürlichen Einflüsse prognostizieren, sondern auch das Verhalten der Menschen in der Zukunft (bspw. Emissionen, Umsiedlungen, Austrocknung von Landflächen, ...) berücksichtigen.

Weitere, bereits während der Erarbeitung der Arbeitsblätter genannten Vorschläge für weiterführende Modellierungsaufgaben lassen sich zu den folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Es ließe sich die Datenauswahl mit Blick auf andere wissenschaftliche Fragestellungen variieren. So böten sich weitere Aussagen des IPCC-Berichts an, mathematische Modellierung im Anwendungsbereich der Klimaforschung für Lernende zugänglich zu machen (vgl. Abschnitt 5.3.3, Einleitung).
2. Es stellt sich sicherlich die Frage, ob das Modell einer einfachen linearen Regression tatsächlich das geeignetste Modell ist, ein Abbild der globalen Temperaturdaten zu schaffen. Es könnten weitere Modelle (zum Beispiel quadratisch, kubisch, exponentiell) zur Beschreibung angenommen werden. Die kennengelernten mathematischen Methoden der Regressionsanalyse würden die Lernenden erweitern (vgl. Abschnitt 5.3.3, Aufg. 4a; Abschnitt 5.3.4, Einleitung).

So lässt sich auch diskutieren, welches Modell aussagekräftige Prognosen ermöglicht. Darüber hinaus können Heranwachsende die sich ergebenden Unterschiede zwischen den Prognosen prüfen und mit wissenschaftlichen Quellen vergleichen. Es sollte jedoch auf jeden Fall darauf hingewiesen werden, dass ein neues Modell in Bezug auf die Einstiegshypothese „Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung signifikant an und kann durch einen linearen Verlauf beschrieben werden“ keine neuen Erkenntnisse liefert (vgl. Abschnitt 5.3.6, Aufg. Ad).

3. Man könnte die lineare Regressionsanalyse auf die Temperaturanomaliezeitreihe von 1975 bis 2018 legen. Ein solches Vorgehen hätte den Vorteil, ausschließlich Temperaturanomalien nach der Anstiegspause, die etwa von 1940 bis 1975 dauerte, zu betrachten. Auf dieser Basis könnten neue Rückschlüsse auf die Temperaturentwicklung gezogen und ggf. bessere Prognosen aufgestellt werden. Nachteilig bleibt der klimatisch gesehen recht kurze Betrachtungszeitraum. Daher ist die Aussagekraft der Ergebnisse kritisch zu hinterfragen (vgl. Abschnitt 5.3.6, Aufg. Ad).

Schülerinnen und Schüler der Mittelstufe könnten den vorliegenden Datensatz nutzen, um verschiedene Lagemaße wie das arithmetische Mittel, Median,  $p$ -Quantile in der Praxis anzuwenden.

Außerdem bilden Boxplots diese Maße visuell ab. So können bereits junge Lernende die in der Schule vermittelten statistischen Kenntnisse auf echte Daten transferieren und festigen. Zusätzlich lassen sich Streuungsmaße motivieren. So könnten beispielsweise die Stichprobenspannweite, der Quartilsabstand, die Medianabweichung, die mittlere absolute Abweichung oder die empirische Varianz problemorientiert ermittelt werden. Abschnitt 5.2.1 präsentiert das mathematische Vorgehen im Anwendungskontext. Der frühe Einsatz von authentischen und alltagsnahen Problemstellungen steigert die Motivation der Lernenden, Mathematik zu betreiben. Sie entwickeln eine positive Meinung zum Schulfach Mathematik, und die angewandte Mathematik bleibt ihnen länger im Gedächtnis (vgl. Borromeo Ferri et al., 2013a).

## 5.4 Erfahrungen mit den Lernmaterialien und deren Reflexion

Das Material kam in verschiedenen Klassen, Kursen und Veranstaltungen zum Einsatz. Die dort gesammelten Erfahrungen flossen in einen iterativen Verbesserungsprozess ein. Zusätzlich wurden über einen Fragebogen direkte Rückmeldungen eingeholt. Den Fragebogen füllten die Teilnehmenden jeweils am Ende der Lerneinheit aus. In der folgenden Auswertung der Rückmeldungen treten einige Klassen bzw. Kurse nicht auf. In besonderer Weise zu nennen sind zwei Durchführungen mit mexikanischen Schülerinnen und Schülern bzw. Studentinnen und Studenten. Diese Gruppen werden aus der Bewertung ausgenommen, da deutliche Unterschiede im Vorwissen im Vergleich zu deutschen Schülerinnen und Schülern zu beobachten waren. So lag die Hauptschwierigkeit darin, dass die mexikanischen Gruppen nicht sicher mit linearen Funktionen in Abhängigkeit einer Variablen umgehen konnten, wodurch der Fokus deutlich verschoben werden musste. Darüber hinaus fließen in die Wertung drei weitere Kurse nicht mit ein, da die Evaluation bei externen Veranstaltern lag oder aufgrund zu geringer Teilnehmerinnen und Teilnehmer die Anonymität in der Evaluation nicht gewährleistet war. Die verbleibenden Rückmeldungen werden im Folgenden dargestellt. Sie stammen von 42 Schülerinnen und Schülern, verteilt auf vier Klassen bzw. Kurse. Die Jüngsten besuchten die achte Jahrgangsstufe im zweiten Schulhalbjahr. Sie lassen sich als überdurchschnittlich motiviert und für das Fach Mathematik begeistert einstufen, da sie an einen vom KIT angebotenen Zusatzkurs in Mathematik teilnehmen (Profi-Kurs Mathematik<sup>10</sup>). Der Evaluationsbogen befindet sich im Anhang A.5.

Der folgende Abschnitt greift Einschätzungen zu Items auf, bei denen eine 4-stufigen Likert-Skala zugrunde liegt. Dabei entspricht der Wert 4 der Beurteilung „sehr gut / in vollstem Maß / trifft voll zu“ und schwächt sich bis auf den Wert 1 ab „schlecht / trifft überhaupt nicht zu“. Angegeben wird das arithmetische Mittel und die Standardabweichung, auf eine Nachkommastelle gerundet. Darüber hinaus erfolgt eine Auswertung offener Fragefelder.

Die Schwierigkeit der Aufgaben lässt sich als passend einstufen, da sie als „eher nicht zu einfach“ ( $2.0 \pm 0.8$ ), aber auch als „eher nicht zu schwierig“ ( $2.4 \pm 0.8$ ) bezeichnet wurde. Obwohl sich das Material in erster Linie an Oberstufenschülerinnen und -schüler richtet, konnten jüngere fehlende Vorkenntnisse durch großen Eifer ausgleichen. Aus den offenen Rückmeldungen geht hervor, dass sich einige offenere Arbeitsaufträge wünschen, in denen sie ihre eigenen Ideen stärker verfolgen können. Diesen Anspruch erfüllen die erstellten Zusatzaufgaben. Eine stärkere Öffnung der Hauptaufgaben würde einerseits zu einer deutlich längeren Bearbeitungszeit führen und andererseits

<sup>10</sup>Weitere Informationen gibt es unter <https://www.math.kit.edu/didaktik/seite/mathe-kids/de>. Zugegriffen: 13. September 2021.

Schwächeren abhängen. Daher wird von einer Öffnung abgesehen. Insbesondere wünschen sich nur Wenige einen tieferen Einblick in die Mathematik. Das ausgearbeitete Material verweist daher auf die Möglichkeit, die Regressionsanalyse um den Beweis des besten Schätzers zu ergänzen (vgl. Satz 5.4, Lösung S. 110). Zusätzlich könnte die Mathematik des Hypothesentestens ausgeweitet werden, indem die Bestimmung von Konfidenzintervallen aufgenommen wird. Dieses steht jedoch weniger im Zusammenhang mit der konkreten Problemfrage, weshalb bislang noch keine Umsetzung erfolgte. Außerdem ist es unklar, ob sich ein tiefgehendes Verständnis im Rahmen eines Modellierungstages überhaupt erreichen lässt. Einer kleinen Gruppe erschienen die Aufgaben zu schwierig. Diese Herausforderung fangen gestufte Hilfen und eine persönliche Betreuung auf. Hilfekarten weisen noch Verbesserungs- und/oder Erweiterungspotential auf ( $2.5 \pm 0.9$ ). Insgesamt haben die Hilfen den Schülerinnen und Schülern gut gefallen. Da mehrfach eine stärkere Einführung in den Umgang mit Julia gefordert wurde, bleibt unklar, inwiefern sich die Schwierigkeiten nicht auf die Aufgabenstellung, sondern auf die Eingabe der selbst entwickelten Lösung bezieht. Daher stellt die Übung zum Umgang mit Vektoren in Julia eine gute Ergänzung des Materials dar. Darüber hinaus wurde im Programm CAMMP eine allgemeine Einführung in grundlegende Befehle in Julia erstellt. Bei Bedarf kann ihre Bearbeitung empfohlen werden. Eine Verteilung des Workshops auf mehrere Wochen erfordert eine Wiederholung der letzten Einheit. Die Mathe-Profis nahmen die Struktur sehr positiv auf und gaben dem Konzept herausragende Noten.

Besonders gut gefallen haben folgende Punkte:

- bezüglich der Struktur und des Aufbaus
  - die Anwendung mathematische Methoden (auf ein reales Problem),
  - ein freies, selbstständiges Arbeiten und Arbeiten in kleinen Teams,
  - den Anreiz, eine Aufgabe weiterzubearbeiten, auch wenn der Lösungsfortschritt stockte und die Neigung bestand, zur nächsten Aufgabe zu wechseln,
- bezüglich des Inhalts
  - die Temperaturänderung des vergangenen Jahrhunderts selbst zu beobachten und anhand von realen Daten auszuwerten,
  - die Aufgabenstellung und die Einordnung zum Thema waren leicht zu verstehen
  - die Gelegenheit, mit echten Daten zu arbeiten,
  - die offenen Fragestellungen und Zusatzaufgaben, in denen auch die Mathematik näher erforscht werden konnte,
  - die interessante Anwendung von Mathematik im Zusammenhang mit komplexen globalen Problemen.

Als negativ oder verbesserungswürdig hielten Schülerinnen und Schüler, dass der Workshop online durchgeführt wurde. Für dieses Manövo zeigten sie aufgrund der äußeren Umstände Verständnis. Darüber hinaus bemängelten sehr Wenige, dass das Thema Klimawandel zwar aktuell und wichtig ist, aber es keinen Spaß macht, sich damit zu beschäftigen (Schülerin, Jahrgangsstufe 10/EF).

Durch die Rückmeldungen zum jeweiligen Lernzuwachs können die Ziele des Workshops, aber auch die generellen Ziele eines Modellierungsworkshops bestätigt werden. Das Lernmaterial erreichte, dass die Teilnehmenden den iterativen Prozess des Modellierens kennengelernten und auf ein

reales Problem anwendeten. Sie erfuhren, „ein reales Problem durch mathematische Methoden zu lösen.“, Schülerin, Jahrgangsstufe 12/Q2. Darüber hinaus lernten sie, dass eine fächerübergreifende Verbindung wichtig bzw. nötig ist, um naturwissenschaftliche Probleme zu lösen oder Alltagssituationen zu beschreiben – auch in der Klimaforschung. Diese Seite der Mathematik war ihnen vorher (häufig) nicht bewusst, steigerte aber ihr Interesse. Das Lösen solcher allgegenwärtigen Probleme verknüpft verschiedene Inhalte der Mathematik. Diese Erfahrung überraschte manche Schülerinnen und Schüler. „Ich habe gelernt, [...] mit einem anderen Blickwinkel auf Aufgaben und Funktionen zu schauen und Querverbindungen zu ziehen.“, Schülerin, Jahrgangsstufe 11/Q1. Zusätzlich wurde die Bedeutung von „Fehlern“ in einer Statistik sowie die Aussagekraft von Daten und deren Einfluss auf das Ergebnis deutlich. Die Lernenden lernten weiterhin Schwachstellen eines Modells zu identifizieren. „Zahlen haben für mich die größte Aussagekraft, vor allem wenn ich weiß[,] wie sie entstanden sind.“, Schülerin oder Schüler des Mathe-Profi-Kurses. Dieser Lernzuwachs spiegelt sich noch deutlicher in der Aussage wider, dass eine Schülerin bzw. ein Schüler erfuhr, „dass man nur zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit sagen kann, ob es den Klimawandel anhand der Datengrundlage gibt“. Daneben wurden generelle Ziele erreicht, wie beispielsweise das Durchhaltevermögen zu steigern („Ich habe gelernt, dass es sich lohnt an den Aufgaben dran zu bleiben, auch wenn es einem schwer fällt.“), die Selbstwirksamkeit zu steigern („Ich habe meine eigenen mathematischen Interessen und Stärken kennengelernt [...]“, Schüler, Jahrgangsstufe 12/Q2) oder auch in einer Gruppe zu arbeiten.

Insgesamt war die Lern- und Arbeitsatmosphäre in allen Durchführungen angenehm ( $3.7 \pm 0.6$ ), die Inhalte ließen sich klar vermitteln ( $3.1 \pm 0.7$ ), die Lern- und Arbeitszeiten waren angemessen ( $3.4 \pm 0.8$ ) und der Kurs hat das Interesse an Naturwissenschaften eher gesteigert ( $2.8 \pm 1.1$ ). Hier fehlt jedoch eine Einschätzung über das anfangs vorliegende Interesse. Darüber hinaus haben die Lernenden eher interessante Berufs- und Studienmöglichkeiten erfahren ( $2.5 \pm 0.9$ ), sich eher etwas Neues angeeignet, das ihnen später im Beruf bzw. Studium weiterhelfen kann ( $2.7 \pm 1.0$ ). Der Workshop ist positiv zu bewerten, da Teilnehmenden ihn weiter empfehlen würden ( $2.9 \pm 0.9$ ). Diese Einschätzung stärkt abschließend auch das Schülerzitat, „Der Workshop hat richtig Spaß gebracht!“.

## 5.5 Einsatz und Erfahrungen mit den Lernmaterialien in Lehrerfortbildungen

Das vorgestellte Lernmaterial umfasst wichtige Kriterien, die von Modellierungsaufgaben gefordert werden (vgl. Abschnitt 3.1): Ihm liegt ein reales Problem zugrunde, das ein in der Wirklichkeit vorkommendes Phänomen abbildet und untersucht. Sie ist für die allgemeine Gesellschaft, aber insbesondere auch für viele Schülerinnen und Schüler persönlich relevant. Lernende erfahren in der Schule und im privaten Alltagsleben den Klimawandel auf unterschiedlichen Ebenen und zeigen häufig echtes Interesse an der Thematik. Das Problem des Klimawandels ist authentisch. Ebenso sind die eingesetzten Lösungsmethoden authentisch, da die Regressionsanalyse ein typisches Werkzeug zur Zeitreihenanalyse darstellt. Das Kriterium der Offenheit wird mindestens in den Zusatzaufgaben aufgegriffen, wobei auch im Rahmen der Regelaufgaben verschiedene Lösungsmöglichkeiten zugelassen werden. Damit kann die vorliegende Modellierungsaufgabe als Best Practice-Beispiel bezeichnet werden. Sie kam in Lehrveranstaltungen und Lehrerfortbildungen als eine erfolgreiche

Beispielaufgabe zum Einsatz, mithilfe derer echte mathematische Modellierung selbstwirksam erfahren werden kann.

Der Aufbau und der Rahmen der Lehrveranstaltungen, in denen diese Aufgabe bereits eingesetzt wurde, werden in Abschnitt 3.3.2 vorgestellt. An dieser Stelle werden die Erfahrungen reflektiert. Die Befragten stuften dabei in einer Evaluation Aussagen auf einer Likert-Skala von 1 bis 5 ein, wobei 1 einer vollsten und 5 keiner Zustimmung entspricht.

Das Material kam im Lehramtsstudiums im Rahmen eines fachdidaktischen Seminars zur mathematischen Modellierung mit Schülerinnen und Schülern über zwei Seminarstunden hinweg zum Einsatz. Voran ging eine Einführung in die theoretische Dimension der mathematischen Modellierung. Diese wurde von nahezu allen Studierenden erfolgreich durchdrungen: Sie kennen die einzelnen Modellierungsschritte, können die Kriterien auf unbekannte Aufgaben transferieren und die Ziele und Chancen des Einsatzes von Modellierungsaufgaben für Schülerinnen und Schüler entwickeln. Die aufgabenbezogene Dimension wurde neben dieser Aufgabe auch an drei weiteren Workshops erarbeitet. Dabei bildete das Material zum Klimawandel den Abschluss. Die Studierenden ordneten das Lernmaterial in den Lehrplan ein, hoben fächerübergreifende Verbindungen hervor und überlegten sich Möglichkeiten zum Einsatz in der Schule (unterrichtsbezogene Dimension). Es nahmen 28 Studierende an der Lehrveranstaltung teil, von denen lediglich zwei bereits vorher mit mathematischer Modellierung in anderen Veranstaltungen in Berührung gekommen sind. Alle fühlen sich durch den Besuch der Lehrveranstaltung gut darauf vorbereitet, neue ihnen bislang unbekannte Modellierungsaufgaben selbstständig zu lösen ( $2.1 \pm 0.6$ ). Auch traut sich die Hälfte eher zu, selbstständig Modellierungstage mit gegebenem Material als Dozenten durchzuführen ( $2.6 \pm 1.2$ ) und kleine Modellierungsaufgaben selbstständig zu entwickeln ( $2.9 \pm 0.9$ ). Vorhandenes Material zu ergänzen oder neues Material selbstständig zu erstellen trauen sich die Befragten auf dieser Basis eher nicht zu ( $3.5 \pm 1.1$  bzw.  $4.1 \pm 1.1$ ). Hier steht weiterhin Bedarf an, wie Modellierungsprobleme gefunden und welche Strategien zur didaktischen Reduktion eingesetzt werden können. Darüber hinaus wurde die Einarbeitung in ein (unbekanntes) Thema, das in der Modellierungsaufgabe aufgegriffen wird, als Herausforderung empfunden. Zusätzlich erwies sich die Umsetzung der Modellierungsaufgabe in einer Programmierumgebung als große Hürde. Daher wäre es vermutlich hilfreich, auch nicht-digitales Modellierungsmaterial in die Lehrveranstaltung einzubinden, da sonst ein sehr eingeschränktes Bild von mathematischer Modellierung entsteht. Anbieten könnte sich dazu die in Kapitel 8 vorgestellte Fermi-Aufgabe. Auch könnten in Schulbüchern als Modellierungsaufgaben gekennzeichnete Aufgaben auf die Modellierungskriterien hin untersucht und die Aufgaben so überarbeitet werden, dass einzelne verletzte Kriterien Berücksichtigung finden. Die Lehrveranstaltung bereitet Studierende gut vor, mit Schülerinnen und Schülern zu modellieren bzw. sie dabei zu betreuen ( $2.6 \pm 0.9$ ). Als Schwierigkeit identifizierten die Studierenden, den Spagat zu schaffen, unterstützende Tipps zu geben ohne sich dabei zu stark an der Beispiellösung zu orientieren.

Ein ähnliches Bild spiegeln die Rückmeldungen der weiteren Lehrerfortbildungen wider, die jedoch einen deutlich kürzeren Umfang hatten. Es nahmen 11 Lehrkräfte an der abschließenden Umfrage teil, wobei die Evaluation nicht immer vollständig ausgefüllt wurde. Daher sind die Ergebnisse nicht repräsentativ, geben aber erste Anhaltspunkte, ob der Umfang und Rahmen sinnvoll gewählt ist. Die Lehrenden fühlen sich durch die Teilnahme gut in der Lage, selbstständig neue, ihnen bislang unbekannte Modellierungsaufgaben zu lösen ( $2.2 \pm 0.4$ ), selbstständig eintägige Modellierungsworkshops mit gegebenem Material als Dozent durchzuführen ( $2.7 \pm 1.2$ ), Material für kleinere Modellierungsaufgaben selbstständig herzustellen ( $2.7 \pm 1.6$ ), frei im eigenen Unterricht zu

modellieren und Schülerinnen und Schüler dabei zu betreuen ( $2.2 \pm 1.2$ ) und sehr gut in der Lage vorhandenes Material zu nutzen um für eine Unterrichtseinheit aufzubereiten ( $1.7 \pm 0.8$ ). Es bleibt Hilfe gefordert, wie vorhandenes Material selbstständig weiterentwickelt oder ergänzt werden kann ( $3.0 \pm 1.1$ ). Auch hier identifizieren Lehrkräfte als größte Probleme, die Aufgaben mit einer Programmierumgebung umzusetzen, eine angemessene Schwierigkeit für die didaktische Reduktion zu erreichen und gleichzeitig ein Modell der Realität zu erstellen, das die Realität angemessen (nicht zu vereinfacht, und dennoch lösbar) beschreibt. Insgesamt spiegeln die Rückmeldungen eine sehr positive Bewertung der Fortbildungen wider. Lehrpersonen fühlen sich selbst motiviert Modellierungsaufgaben (wieder) stärker in ihren Unterricht zu integrieren, in Projekttagen, -wochen oder aber auch in Erholungsphasen nach einer Klausur einzusetzen. Positiv wird auch der freie Zugang zu den Materialien gesehen. Zusammenfassend wird eine Lehrperson zitiert: „Die Kontexte sind alle sehr motivierend für die SuS und die Materialien dazu sehr umfangreich. Toll, dass alles frei zugänglich ist!“.

# 6

## **Rekordanalyse einer Zeitreihe am Beispiel der Fragestellung „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“**

Das Kapitel 5 leitete die Regressionsanalyse ein. Dabei lag der Fokus auf Trenduntersuchungen. Dieses Kapitel rückt das Auftreten von besonderen (extremen) Ereignissen in den Vordergrund. Es erfolgt eine Vorstellung von Methoden zur Untersuchung von auffällig hohen oder niedrigen Werten einer Datenreihe, bekannt als Extremwerte oder Rekorde. Während Schülerinnen und Schüler den Begriff Extremwerte eher aus dem Mathematikunterricht kennen, stellt der Begriff Rekorde ein auch in vielen alltäglichen Bereichen geläufiges Wort dar. Der Sport beispielsweise liefert häufig neue Rekorde, etwa bei einer noch nie zuvor erreichten Anzahl an Toren in einem Fußballspiel, eine kürzeste Zeit bei Lauf-, Fahrrad- oder Schwimmwettbewerben oder die größte Weite beim Kugelstoßen oder Skispringen. Allen Rekordereignissen gemein ist, dass sie ein Ereignis in einer Reihe von mehreren darstellen und sich dabei von allen vorherigen Ereignissen abhebt (vgl. Wergen, 2013, S. 2). Der Begriff gibt noch keine Aussage darüber, ob ein Rekord als gut oder schlecht empfunden wird. Durch seine herausragende Eigenschaft wird einem Rekordereignis vielfach mehr Aufmerksamkeit geschenkt, und ein solches Ereignis bleibt länger in Erinnerung als andere Ereignisse der gleichen Beobachtungsreihe.

Aber auch in der Klimaforschung sind insbesondere Extremereignisse in Zeitreihen von besonderer Bedeutung, was unter anderem die Fülle an aktuellen Wettermeldungen verdeutlicht. Eine Häufung von Extremereignissen, wie beispielsweise besonders Hitze- oder Kältewellen, Starkniederschlagsereignisse, die zu Überschwemmungen führen, Dürreperioden etc., deutet einerseits auf eine klimatische Änderung hin. Andererseits stellen solche Ereignisse Momente mit hoher Ausstrahlkraft (medienwirksam, politisch wirksam etc.) dar. Wichtig ist dabei zu beachten, dass ein besonders heißer Tag alleine noch keine Aussagen über das Klima zulässt: Die Analysen müssen weiterhin auf langfristigen, global gemittelten Daten erfolgen. So ist es Teil aktuellster Forschung, einen Zusammenhang zwischen Rekordereignissen und der Klimaänderung nachzuweisen (vgl. European Commission, o. D. b; „Klimawandel: Ursachen, Folgen und Handlungsmöglichkeiten“, 2021). Analog zu der Regressionsanalyse in Kapitel 5 beschränkt sich die Analyse von Rekordereignissen auf Temperaturdaten.

Personen, die den Klimawandel leugnen, behaupten unter anderem, dass das Auftreten von Temperaturrekordjahren auf zufällige, natürliche Schwankungen in den Temperaturen zurückzuführen ist (vgl. Dettwiler, 2019; Odenwald, 2019; Team Weltverbesserer.de, 2020; von Rauchhaupt, 2015). In IPCC (2013a) fassen Klimawissenschaftlerinnen und -wissenschaftler unter anderem Analysen verschiedener Temperaturzeitreihen zusammen. Die Ergebnisse zeigen demnach einen sukzessiven Anstieg der Temperatur in den letzten drei Jahrzehnten. Es heißt, diese Jahrzehnte seien die wärmsten seit dem Jahr 1900. Die drei Jahrzehnte, von denen hier die Rede ist, beziehen sich auf die Jahre von 1980 bis 2009. Verfolgt man außerdem die Medien, so scheinen sich die extremen Wetterereignisse in den letzten Jahren zu häufen. Die Lernmaterialien nutzen diese Aussagen als Ausgangspunkt der Analyse besonderer Ereignisse auf der Grundlage des HadCRUT4-Datensatzes (vgl. Abschnitt 2.3). Da der Datensatz jährliche Mittelwerte angibt, wird er zunächst aufbereitet, und die jährlichen Temperaturwerte werden unter Verwendung des arithmetischen Mittels in Dekaden zusammengefasst. Das Startjahr der Dekaden liegt im ersten dokumentierten Jahr, also im Jahr 1850. Die Analyse der Daten erweitert sich so um eine Dekade im Vergleich zu der im IPCC-Bericht abgebildeten. Seit dem vergangenen Bericht vergingen so viele Jahre, dass zusätzlich Messdaten zur Dekade von 2010-2019 vorliegen. Daher soll die Analyse auch Informationen aufdecken, die der Erweiterung des Datensatzes um eine Dekade zu entnehmen sind. Eine anschließende Analyse untersucht die Temperaturzeitreihe auf das Auftreten von besonderen Ereignissen hin, nämlich Extremereignissen. Eine solche Analyse ist ebenfalls ein Ziel der Zeitreihenanalyse, das in Abschnitt 4.1 allgemein beschrieben wird. Kann die Anzahl der in der HadCRUT4-Zeitreihe auftretenden Rekorde allein durch den Zufall erklärt werden? Insgesamt bietet diese Herangehensweise Raum für Aussagen verschiedener Interessengruppen. Sowohl Behauptungen von Menschen, die den Klimawandel leugnen, als auch Behauptungen von denen, die ihn wissenschaftlich erklärbar halten, werden anhand realer Daten untersucht. So soll einerseits ein unvoreingenommenes Bild entstehen. Jede Meinung wird ernst genommen. Andererseits soll es helfen, eine Diskussion weg von Emotionen hin zu Fakten zu lenken. Die im Folgenden aufgeführten Methoden beruhen auf einem faktenbasierten, wissenschaftsgestützten Vorgehen. Dieses Vorgehen befähigt Schülerinnen und Schüler dazu, in der Öffentlichkeit publizierte Thesen zu hinterfragen und besser einzuschätzen.

Kapitel 5 stellt Trenduntersuchungen von Zeitreihen ausführlich dar. Daneben ist die Analyse von besonderen Ereignissen ein weiterer wichtiger Untersuchungsgegenstand der Zeitreihenanalyse. Diese besonderen Ereignisse können sich einerseits auf Werte beziehen, die weit von den übrigen Messdaten abweichen. So möchte man Daten, die auf Messfehlern beruhen oder unter Einfluss einer Störung aufgenommen wurden, von den weiteren Untersuchungen ausschließen, da sie diese – möglicherweise sehr stark – beeinflussen und so die Ergebnisse verfälschen. Diese Analyse war Teil des vorangegangenen Kapitels und soll hier nicht neu vorgenommen werden. Andererseits stellen zwar herausragende, aber nicht von der Grundgesamtheit zu weit entfernte Werte besondere Ereignisse dar. Das Aufspüren von Extremereignissen und Rekorden ist ein weiterer Gegenstand der Zeitreihenanalyse, und dieser steht in diesem Kapitel im Fokus.

## 6.1 Ein mathematischer Blick auf die Zeitreihenanalyse

Der folgende Abschnitt widmet sich herausragenden Temperaturereignissen und untersucht die Häufigkeit deren Auftretens. In einer umfassenden Analyse sollen Lernende herausfinden, ob das Erscheinen der im realen Datensatz abgebildeten Extremereignisse im Rahmen des blinden Zufalls liegt und damit durch natürliche Schwankungen erklärbar ist.

### 6.1.1 Analyseverfahren zur ereignisbezogenen Untersuchung einer Zeitreihe

Weiterhin ist eine Zeitreihe, deren Beobachtungen an  $n$  verschiedenen Zeitpunkten erhoben wurden, Gegenstand der Untersuchung. Es liegen damit  $n$  Paare  $(y_i, x_i)$  mit  $i = 1, \dots, n$  von Beobachtungen vor. Dieses Kapitel fokussiert herausragende Beobachtungen (Rekorde). Dazu wird angenommen, dass alle (Mess-)Werte  $y_i$  voneinander verschieden sind. Es gelte also  $y_i \neq y_j$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ .

**Definition 6.1** Ein Wert  $y_i$  einer Zeitreihe heißt *Rekord*, wenn er größer oder kleiner ist als alle Werte  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, i - 1$ , zuvor. Es gilt für ihn entweder

$$y_i > \max_{j=1, \dots, i-1} y_j, \quad \text{oder} \quad y_i < \min_{j=1, \dots, i-1} y_j.$$

Eine große Bedeutung hat damit der erste Wert  $y_1$  in der Zeitreihe, der einerseits per definitionem selbst ein Rekord ist. Andererseits markiert er den Temperaturwert zu Beginn des Untersuchungszeitraumes und legt damit eine Vergleichsmarke fest. Man beachte, dass sich der Begriff Rekord in seiner folgenden Verwendung ausschließlich auf Ereignisse bezieht, die größer sind als alle vorherigen. Eine Analyse von besonders niedrigen Extremwerten erfolgt analog.

Ziel ist es, eine Zeitreihe auf das Auftreten von Rekorden hin zu untersuchen. Sei  $k \leq n$  die Anzahl an Rekorden in der Zeitreihe  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Analyse betrachtet dann einerseits die Anzahl der Rekorde  $R_n$  und andererseits die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Rekords zum Zeitpunkt  $x_i$ . O. B. d. A. kann dabei  $x_1 = 1, \dots, x_n = n$  angenommen werden, das heißt, dass  $i$  den  $i$ -ten Zeitwert angibt,  $i = 1, \dots, n$ . Außerdem ist für eine solche Untersuchung, die lediglich einen Größenvergleich zwischen den Werten  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , anstellt, der eigentliche Wert  $y_i$  zum Zeitpunkt  $x_i$  unerheblich. Daher werden die Werte  $y_i$  auf die Zahlen  $j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , abgebildet. Die Zahlen von 1 bis  $n$  repräsentieren die Werte  $y_1, \dots, y_n$  derart, dass die Zahl 1 den kleinsten, die Zahl 2 den zweitkleinsten, … und  $n$  den größten Beobachtungswert repräsentiert. Damit erfolgt die Untersuchung des Auftretens von Rekorden anhand der Menge der Zahlen von 1 bis  $n$ . Man betrachtet dazu die Permutationen der Zahlen  $1, \dots, n$ . Die Menge aller dieser Permutationen, also aller bijektiven Abbildungen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  auf sich selbst, definiert die Ergebnismenge  $\Omega$ . Es gilt mit  $\omega_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\omega_i \neq \omega_j$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  mit  $i \neq j$

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : (\omega_1, \dots, \omega_n) \text{ ist eine Permutation der Zahlen } 1, \dots, n\}.$$

Ist  $\omega : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  bijektiv, so setzt man  $\omega(j) =: \omega_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , und schreibt  $\omega$  als  $n$ -Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ . Dabei darf jede der Zahlen  $1, \dots, n$  nur genau einmal vorkommen. Dementsprechend gibt es genau  $n!$  mögliche Vertauschungen.

Um den blinden Zufall zu modellieren, wird auf der Ergebnismenge  $\Omega$  eine Laplace-Verteilung, also eine diskrete Gleichverteilung, angenommen. Alle möglichen Permutationen sind gleich wahrscheinlich. Das Ereignis  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , bezeichne das Ereignis, dass an der  $j$ -ten Stelle des  $n$ -Tupels ein Rekord auftritt. Es steht somit an der  $j$ -ten Stelle die größte Zahl der ersten  $j$  Stellen. Bei dem Ereignis  $A_j$  handelt es sich also um die Teilmenge

$$A_j = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_j = \max_{i \leq j} \omega_i\} \tag{6.1}$$

von  $\Omega$ . Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , lässt sich durch eine Symmetrieüberlegung herleiten. Die Idee folgt einer heuristischen Betrachtung, die auf dem „Bauchgefühl“ beruht. Anschließend wird gezeigt, dass diese Intuition keineswegs falsch ist, sondern auch rechnerisch begründet werden kann. Im Fall des Ereignisses  $A_1$  tritt an der ersten Stelle ein Rekord auf. Definitionsgemäß – man erinnere sich daran, dass an der ersten Stelle immer ein Rekord steht – ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis im vorliegenden Laplace-Modell durch  $P(A_1) = 1$  gegeben. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A_2$  wird die Menge  $\{\omega_1, \omega_2\}$  betrachtet. Dann gilt entweder  $\omega_1 > \omega_2$ , und an der zweiten Stelle steht kein Rekord, oder es gilt  $\omega_2 > \omega_1$ , und es steht an der zweiten Stelle ein Rekord. Unter der Annahme einer Laplace-Verteilung auf der Ergebnismenge sind beide Fälle gleich wahrscheinlich, und somit ist die Wahrscheinlichkeit von  $A_2$  gleich  $P(A_2) = 1/2$ . Für die Wahrscheinlichkeitsberechnung von  $A_3$  betrachte die folgenden drei Fälle:

1. Es gelte  $\omega_1 > \omega_2$  und  $\omega_1 > \omega_3$ . Dann steht an der ersten Stelle die größte der drei ersten Zahlen, also steht insbesondere an der dritten Stelle kein Rekord.
2. Es gelte  $\omega_2 > \omega_1$  und  $\omega_2 > \omega_3$ . Dann steht an der zweiten Stelle die größte der drei ersten Zahlen, also steht auch in diesem Fall an der dritten Stelle kein Rekord.
3. Es gelte  $\omega_3 > \omega_1$  und  $\omega_3 > \omega_2$ . Nur in diesem Fall steht die größte der drei Zahlen an der dritten Stelle und führt dort zu einem Rekord.

Die Wahrscheinlichkeit, dass an der dritten Stelle ein Rekord auftritt, ist also  $P(A_3) = 1/3$ . Diese Symmetrieüberlegung kann nun fortgeführt werden, um so für alle Ereignisse  $A_j$  die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln. Eine der an den ersten  $j$  Stellen des  $n$ -Tupels stehenden Zahlen ist die größte. Dass sie an der  $j$ -ten Stelle auftritt, ist einer von  $j$  gleich möglichen Fällen. Somit gilt

$$P(A_j) = \frac{1}{j} \quad (6.2)$$

für  $j = 1, \dots, n$ .

Dieses Ergebnis kann rechnerisch folgendermaßen begründet werden: Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A_j$  lässt sich als Quotient der günstigen Fälle und aller möglichen Fälle angeben. Die günstigen Fälle zeichnen sich dadurch aus, dass an der  $j$ -ten Stelle die größte der ersten  $j$  Zahlen steht. Um die ersten  $j$  Plätze zu belegen, wählt man aus den Zahlen  $1, \dots, n$  genau  $j$  Zahlen aus. Diese Auswahl bildet eine  $j$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ . Daher gibt es  $\binom{n}{j}$  Möglichkeiten,  $j$  Zahlen aus der Menge der Zahlen  $1, \dots, n$  auszuwählen. Die größte Zahl belegt die  $j$ -te Stelle des Tupels der ausgewählten Zahlen. Alle weiteren ausgewählten Zahlen verteilen sich beliebig auf die  $j - 1$  Plätze davor. Dafür existieren  $(j - 1)!$  Möglichkeiten. Nun müssen noch die Stellen  $j + 1$  bis  $n$  besetzt werden. Dazu bleiben noch  $n - j$  Zahlen übrig, die ebenfalls auf beliebige Weise platziert werden können. Hierfür existieren  $(n - j)!$  Möglichkeiten. Das resultierende Produkt dieser Möglichkeiten bildet die gesuchte Anzahl der günstigen Möglichkeiten, die durch die Anzahl aller Permutationen, also  $n!$  dividiert werden muss. Man erhält insgesamt

$$P(A_j) = \frac{\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{n!(j-1)!(n-j)!}{j!(n-j)!n!} = \frac{1}{j},$$

also Gleichung (6.2).

Bislang reduzierte sich die Betrachtung darauf, ob an einer bestimmten Stelle im  $n$ -Tupel ein Rekord auftritt. Zur Berücksichtigung aller Rekorde in einem  $n$ -Tupel hilft eine Beschreibung durch die Indikatorfunktion. Die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}(A_j)$  nimmt den Wert 1 an, falls das Ereignis  $A_j$  eintritt und sonst den Wert 0. Das Auftreten der Rekorde im  $n$ -Tupel kann somit durch die beiden Zahlen 0 und 1 ausgedrückt werden, je nachdem, ob an der  $j$ -ten Stelle ein Rekord steht oder nicht. Die Zufallsgröße  $R_n$ , die die Anzahl der Rekorde in einem  $n$ -Tupel beschreibt, ist die Summe von Indikatorfunktionen

$$R_n = \sum_{r=1}^n \mathbb{1}(A_j)$$

mit  $A_j \subseteq \Omega$  wie in Gleichung (6.1).

**Beispiel 6.2** Sei  $n = 10$ . Dann ist  $(3, 7, 8, 2, 4, 1, 9, 6, 5, 10)$  eine mögliche Permutation der Zahlen  $1, \dots, n$  im obigen Sinne. Man markiere die Rekorde und merke sich die Stellen, an denen sie stehen.

10-Tupel:	$(3, 7, 8, 2, 4, 1, 9, 6, 5, 10)$
mit markierten Rekorden:	$(\color{red}{3}, \color{red}{7}, \color{red}{8}, 2, 4, 1, \color{red}{9}, 6, 5, \color{red}{10})$
	$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
Stelle:	$1. \quad 2. \quad 3. \quad \quad \quad 7. \quad \quad \quad 10.$

Dann ist die Anzahl der Rekorde gegeben durch

$$R_n = \sum_{j=1}^{10} \mathbb{1}(A_j) = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 = 5.$$

Dieses Verfahren ermöglicht eine einfache Berechnung der Anzahl der Rekorde in einem gegebenen  $n$ -Tupel. Wie wahrscheinlich ist aber eine bestimmte Anzahl an Rekorden in einem  $n$ -Tupel?

Für die diskrete Ergebnismenge  $\Omega$  ist die Verteilung von  $R_n$  durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(R_n = k) = \mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : R_n((\omega_1, \dots, \omega_n)) = k\})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , gegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass es  $k$  Rekorde in einem  $n$ -Tupel gibt, lässt sich schätzen, indem endlich viele Permutationen  $(\omega_1, \dots, \omega_n)^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , mit großem  $N$  erzeugt, jeweils die Anzahl der Rekorde gezählt werden und damit für  $k$  die relative Häufigkeit der Anzahl der Rekorde ermittelt wird. Trägt man anschließend die Auftretenshäufigkeiten in einem Histogramm über die Anzahl der Rekorde auf, kann daraus der Erwartungswert über die Bestimmung des Schwerpunktes abgeleitet werden. Diesen Ansatz greift das Lernmaterial in Abschnitt 6.3.3 auf und konkretisiert ihn im Rahmen eines Beispiels (vgl. Seite 142).

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass es  $k$  Rekorde in einem  $n$ -Tupel gibt, führt ein Alternativweg zu einer Rekursionsformel und nutzt dabei Symmetrieverlegungen aus. Dazu definiert man allgemein für die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen von 1 bis  $n$  genau  $k$  Rekorde ergeben,  $\mathbb{P}(R_n = k) =: p(n, k)$ .

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass genau ein Rekord auftritt. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die größte Zahl an der ersten Stelle steht. Die größte Zahl des  $n$ -Tupels ist aber gerade  $n$ . Aus vorherigen Überlegungen ist klar, dass die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(R_n = 1) = p(n, 1) = 1/n$  ist.

Als nächstes beleuchtet man den Fall, dass es genau  $n$  Rekorde gibt. Das bedeutet, dass an jeder Stelle ein Rekord steht. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn die Zahlen von 1 bis  $n$  der Reihe nach aufsteigend angeordnet sind. Diese Wahrscheinlichkeit ist durch  $p(n, n) = 1/n!$  gegeben.

Den allgemeine Fall  $p(n, k)$  erhält man über einen rekursiven Ansatz, indem  $p(n, k)$  über die beiden zuvor erörterten Fälle ausgedrückt wird. Auch an dieser Stelle ist eine Fallunterscheidung hilfreich, um anschließend den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit anwenden zu können (s. Henze, 2021b, S. 104).

### Satz 6.3 Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit (einfachster Fall)

Es seien  $(\Omega, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $B \subset \Omega$  ein Ereignis mit  $0 < P(B) < 1$ . Dann folgt für jedes Ereignis  $C$ :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(\bar{B})\mathbb{P}(C|\bar{B})$$

*Hinweis:* Im allgemeinen Fall betrachtet der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit disjunkte Ereignisse  $B_1, \dots, B_s$  mit  $\sum_{i=1}^s B_i = \Omega$ . Im vorliegenden Fall gelten  $B_1 = B$  und  $B_2 = \bar{B}$ .

Man betrachtet nun den Fall, dass an der letzten Stelle ein Rekord auftritt. Dieses Ereignis kann nur eintreten, wenn die Zahl  $n$  an der letzten Stelle steht. Mit dem obigen Wissen ist diese Wahrscheinlichkeit durch  $\mathbb{P}(A_n) = 1/n$  gegeben. Außerdem sind nun  $k - 1$  weitere Rekorde auf die vorherigen Plätze zu verteilen. Diese Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer zufälligen Permutation der Zahlen von 1 bis  $n - 1$  genau  $k - 1$  Rekorde ergeben, ist  $p(n - 1, k - 1)$ .

Der nächste Fall betrachtet die komplementäre Situation, nämlich dass an der letzten Stelle kein Rekord auftritt. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch  $\mathbb{P}(\bar{A}_n) = (n - 1)/(n - 1 + 1)$ . Alle  $k$  Rekorde verteilen sich auf die  $n - 1$  Plätze davor: Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt  $p(n - 1, k)$ .

Unter Anwendung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit können nun diese aufgezeigten Fälle zusammengefasst werden. Dabei stellt das Ereignis  $A_n$  das Ereignis  $B$  in Satz 6.3 dar. Das Ereignis, dass im  $n$ -Tupel  $k$  Rekorde auftreten, entspricht dem Ereignis  $C$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_n = k) &= p(n, k) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(R_n = k|A_n) + \mathbb{P}(\bar{A}_n)\mathbb{P}(R_n = k|\bar{A}_n) \\ &= \frac{1}{n} \cdot p(n - 1, k - 1) + \frac{n - 1}{n} \cdot p(n - 1, k)\end{aligned}\tag{6.3}$$

mit den Randbedingungen

$$p(n, 1) = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad p(n, n) = \frac{1}{n!}.$$

Auf diese Weise berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass  $k$  Rekorde in einem  $n$ -Tupel auftreten, rekursiv.

Eine andere Sichtweise fasst die Wahrscheinlichkeit  $p(n, k)$  als Quotient der günstigen Fälle zu allen möglichen Fällen auf. Bezeichnet man die Anzahl der günstigen Fälle mit  $s(n, k)$ , so kann die

Gleichung (6.3) durch  $s(n, k)$  ausgedrückt werden. Mit

$$p(n, k) = \frac{s(n, k)}{n!}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_n = k) &= p(n, k) = \frac{s(n, k)}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot s(n-1, k-1) + \frac{n-1}{n!} \cdot s(n-1, k) \\ \Leftrightarrow s(n, k) &= s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k) \end{aligned} \quad (6.4)$$

und für die Randbedingungen

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= \frac{s(n, 1)}{n!} = \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad s(n, 1) = (n-1)! \\ p(n, n) &= \frac{s(n, n)}{n!} \frac{1}{n!} \quad \Leftrightarrow \quad s(n, n) = 1. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Gleichung (6.4) entspricht genau der rekursiven Formel der Stirling-Zahlen erster Art. Die Gleichungen (6.5) stellen die Randbedingungen dar. Die Stirling-Zahl erster Art  $s(n, k)$  beschreibt für zwei natürliche Zahlen  $n$  und  $k$  mit  $k \leq n$  die Anzahl der Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ , die genau  $k$  Zyklen besitzen (vgl. Henze, 2021a, S. 85). Demnach existieren für die Zahlen  $1, \dots, n$  genauso viele Permutationen mit  $k$  Rekorden wie Permutationen mit  $k$  Zyklen.

Ist die Verteilung  $\mathbb{P}(R_n = k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , der Anzahl der Rekorde  $R_n$  bekannt, lässt sich mithilfe von  $\mathbb{E}(R_n) = \sum_{k=1}^n k \cdot \mathbb{P}(R_n = k)$  unmittelbar der Erwartungswert bestimmen. Dieser Wert stellt eine gute Prognose für die durchschnittliche Anzahl an Rekorden dar, die sich auf lange Sicht einstellt. Anschaulich beschreibt der Erwartungswert  $\mathbb{E}(R_n)$  den physikalischen Schwerpunkt des Stabdiagramms der Verteilung von  $R_n$ . Ist die Verteilung unbekannt, kann zunächst die Anzahl der Rekorde  $R_n$  durch die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}(A_j)$  ausgedrückt und anschließend die Additivität der Erwartungswertbildung ausgenutzt werden. Mit Gleichung (6.2) gilt

$$\mathbb{E}(R_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}. \quad (6.6)$$

Die Varianz der Rekorde-Verteilung ist ein Maß für die Stärke der Streuung der Verteilung um den Erwartungswert. Analog zum Erwartungswert wird zur Berechnung der Varianz die Anzahl der Rekorde zunächst durch die Indikatorfunktion beschrieben und anschließend Varianzeigenschaften im Zusammenhang mit der Indikatorfunktion angewandt. Außerdem wird die paarweise Unabhängigkeit der Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  ausgenutzt (vgl. Henze, 2021a, S. 81).

Die paarweise stochastische Unabhängigkeit kann leicht gezeigt werden: Angenommen, es stünde an der  $j$ -ten Stelle ein Rekord. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann an der  $i$ -ten Stelle mit  $i < j$  ebenfalls ein Rekord steht? Gesucht ist also die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $\mathbb{P}(A_i | A_j)$ . Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich  $1/i = \mathbb{P}(A_i)$ , da intuitiv betrachtet den ersten  $i$  Zahlen „vollkommen egal ist“, ob an einer späteren Stelle ein Rekord steht oder nicht. Damit sind die Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  stochastisch unabhängig. Für eine mathematische Untersuchung der Frage bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl an der  $i$ -ten, als auch an der  $j$ -ten Stelle ein Rekord auftritt. Diese Wahrscheinlichkeit ist durch  $P(A_i \cap A_j)$  gegeben, und sie berechnet sich aus dem Quotienten der Anzahl der günstigen Fälle und aller möglichen Fälle. Um aus allen  $n$  Zahlen  $j$  Zahlen für die ersten

$j$  Plätze auszuwählen, existieren  $\binom{n}{j}$  Möglichkeiten. Die größte dieser Zahlen soll an der  $j$ -ten Stelle stehen. Von den übrigen  $j - 1$  Zahlen werden  $i$  Zahlen ausgewählt, die auf die ersten  $i$  Plätze zu verteilen sind. Dafür gibt es  $\binom{j-1}{i}$  Möglichkeiten. Auch hier soll die größte der  $j - 1$  Zahlen an der  $i$ -ten Stelle stehen. Die verbleibenden  $i - 1$  Zahlen können beliebig auf die ersten  $i - 1$  Plätze verteilt werden, was auf  $(i - 1)!$  Weisen möglich ist. Ebenso können die  $(j - i - 1)$  Zahlen zwischen den beiden Rekordstellen  $i$  und  $j$  beliebig verteilt werden, wofür es  $(j - i - 1)!$  Möglichkeiten gibt. Auch die  $n - j$  Zahlen lassen sich beliebig auf den verbleibenden letzten  $n - j$  Plätzen verteilen. Das ist auf  $(n - j)!$  Arten realisierbar. Fasst man diese Erkenntnisse zusammen, so folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \frac{\binom{n}{j} \binom{j-1}{i} (i-1)! (j-i-1)! (n-j)!}{n!} = \frac{1}{ij} \\ &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j),\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Analog kann die stochastische Unabhängigkeit von drei Ereignissen gezeigt werden. Dazu betrachtet man die Wahrscheinlichkeit  $P(A_i \cap A_j \cap A_l)$ , das heißt, dass an der  $i$ -ten,  $j$ -ten und  $l$ -ten Stelle jeweils ein Rekord auftritt. Berechnet wird erneut zunächst die Anzahl der günstigen Fälle. Um aus allen  $n$  Zahlen genau  $l$  Zahlen für die ersten  $l$  Plätze auszuwählen, zählt man  $\binom{n}{l}$  Möglichkeiten. Die größte der ausgewählten Zahlen soll an der  $l$ -ten Stelle stehen. Es bleiben  $l - 1$  Zahlen übrig, von denen  $j$  ausgewählt und auf die ersten  $j$  Plätze verteilt werden, was auf  $\binom{l-1}{j}$  Arten möglich ist. Erneut soll die größte der ausgewählten Zahlen an der  $j$ -ten Stelle stehen. Nun wird aus den verbleibenden  $j - 1$  Zahlen  $i$  Zahlen ausgewählt, wobei die größte dieser an der  $i$ -ten Stelle platziert wird. Die Auswahl der Zahlen ist auf  $\binom{j-1}{i}$  Weisen denkbar. Die verbleibenden  $i - 1$  Zahlen können analog zur paarweisen Unabhängigkeit beliebig auf die ersten  $i - 1$  Plätze verteilt werden. Dafür existieren  $(i - 1)!$  Möglichkeiten. Die  $j - i - 1$  Zahlen zwischen den ersten beiden Rekordstellen  $i$  und  $j$  können beliebig verteilt werden. Hierfür gibt es  $(j - i - 1)!$  Möglichkeiten. Für die beliebige Verteilung der  $l - j - 1$  Zahlen zwischen den Rekordstellen  $j$  und  $l$  findet man  $(l - j - 1)!$  Möglichkeiten. Die verbleibenden  $n - l$  Zahlen lassen sich ebenfalls beliebig auf die verbleibenden  $n - l$  Plätze verteilen, wofür sich  $(n - l)!$  Möglichkeiten aufzeigen. Zusammenfassend erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_l) &= \frac{\binom{n}{l} \binom{l-1}{j} \binom{j-1}{i} (i-1)! (j-i-1)! (l-j-1)! (n-l)!}{n!} = \frac{1}{ijl} \\ &= \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j) \mathbb{P}(A_l).\end{aligned}$$

Nach gleichem Vorgehen kann auch die stochastische Unabhängigkeit von mehr als drei Ereignissen gezeigt werden (vgl. Henze, 2020c).

Wegen der paarweisen stochastischen Unabhängigkeit von  $A_1, \dots, A_n$  gilt für die Varianz nach Henze (2021a, S. 80)

$$\mathbb{V}(R_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2}\right). \quad (6.7)$$

Über die Standardabweichung  $\sigma(R_n) = \sqrt{\mathbb{V}(R_n)}$  berechnet sich die  $\sigma$ -Umgebung, in der eine bestimmte Anzahl an Rekorden  $k$  um den Erwartungswert liegt.

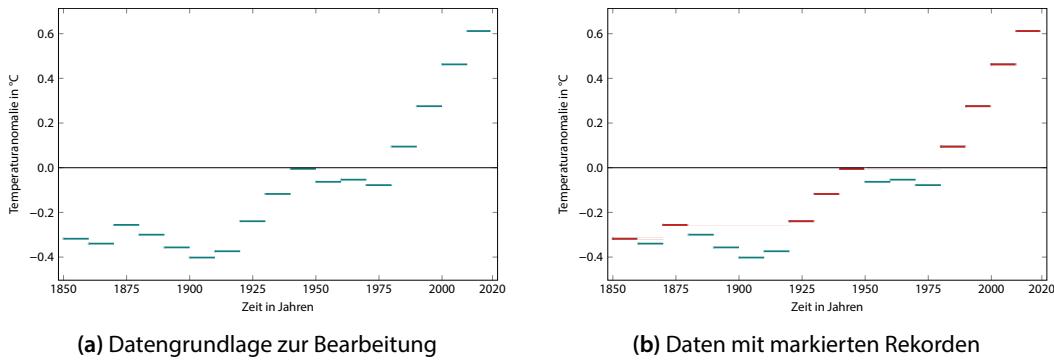
## 6.2 Anwendung der mathematischen Inhalte auf eine reale Temperaturzeitreihe

Damit die im vorherigen Abschnitt beschriebenen mathematischen Inhalte keine abstrakten Konstrukte bleiben, finden sie an dieser Stelle konkrete Anwendung. Das Ziel der Zeitreihenanalyse ist durch den Anwendungskontext vorgegeben: Es sollen zentrale Aussagen des IPCC überprüft und nachvollziehbar gemacht werden. Grundlage ist der Sachstandsbericht AR5 der ersten Arbeitsgruppe des IPCC. Dieser zeigt folgende Entwicklungen bezüglich der globalen Durchschnittstemperatur auf:

„Each of the last three decades has been successively warmer at the Earth’s surface than any preceding decade since 1850. In the Northern Hemisphere, 1983–2012 was likely the warmest 30-year period of the last 1400 years (medium confidence). [...] In addition to robust multi-decadal warming, global mean surface temperature exhibits substantial decadal and interannual variability. Due to natural variability, trends based on short records are very sensitive to the beginning and end dates and do not in general reflect long-term climate trends. As one example, the rate of warming over the past 15 years (1998–2012; 0.05 [−0.05 to 0.15] °C per decade), which begins with a strong El Niño, is smaller than the rate calculated since 1951 (1951–2012; 0.12 [0.08 to 0.14] °C per decade)“ (s. IPCC, 2013a, S. 5).

Die Untersuchung dieser Aussagen erfolgt weiterhin auf der Basis der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Temperaturanomaliezeitreihe. Da sich der erste Teil der Behauptung auf Dekaden bezieht, muss der HadCRUT4-Datensatz zunächst aufbereitet werden. Er wird in 10-Jahresperioden eingeteilt, beginnend im Jahr 1850, sodass die letzte (vollständige) Periode von 2010 bis zum Jahr 2019 dauert. Innerhalb dieser Dekaden wird jeweils das arithmetische Mittel verwendet, um einen Temperaturwert zu erhalten, der die jeweilige Dekade beschreibt. Der so entstehende Datensatz ist in Abbildung 6.3(a) veranschaulicht. Die Anwendung der Definition 6.1 eines Rekords auf die dekadische Zeitreihe liefert insgesamt neun Rekorde bzw. Rekordperioden (vgl. Abbildung 6.3(b)). Innerhalb der Dekadenzeitreihe, die aus insgesamt  $n = 17$  Perioden besteht, werden  $k = 9$  Rekorde gezählt. Außerdem offenbart das Diagramm drei aufeinander folgende Rekorddekaden von 1920 bis 1949 und weitere vier aufeinander folgende Rekordperioden von 1980 bis 2019. Diese Analyse bestätigt die erste Teilaussage des fünften Sachstandsberichts. Da hier ein umfangreicherer Datensatz analysiert wird, kann die Aussage sogar erweitert werden: Jede der letzten vier Jahrzehnte war im Durchschnitt sukzessive wärmer an der Erdoberfläche als die vorangegangenen seit 1850. Auch sind die Differenzen zwischen den mittleren dekadischen Temperaturanomaliewerten ab 1980 größer als zuvor. Einen solchen Temperaturanstieg, wie er hier durch die letzten vier Jahrzehnte abgebildet wird, gab es seit Beginn der Messdatenaufzeichnungen nicht.

Daher stellen sich die Fragen, ob ein solches Auftreten von Rekorden (noch) durch den Zufall erklärbar und damit auf natürliche Variabilitäten zurückzuführen ist und wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter einem Laplace-Modell (mindestens) neun Rekorde in einer aus 17 Perioden bestehenden Zeitreihe auftreten. Ebenso sind der Erwartungswert und die Varianz der Anzahl an Rekorden von Interesse. Darüber hinaus soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass in einer solchen Zeitreihe mit insgesamt neun Rekorden die letzten vier Dekaden Rekorde sind. Für diese Analysen sind die exakten durchschnittlichen Temperaturanomaliewerte unerheblich. Einem



**Abbildung 6.1:** Temperaturdatensatz HadCRUT4, in Dekaden zusammengefasst über arithmetisches Mittel

Rekord ist es egal, ob er nur knapp oder deutlich über den vorherigen Werten liegt. Somit lässt sich auch hier die Abbildung der Temperaturanomaliewerte auf die Zahlen von 1 bis 17 begründen.

Die Ergebnismenge  $\Omega$  beschreibt die Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis 17, auf der eine diskrete Gleichverteilung (Laplace-Verteilung) angenommen wird. Es gilt mit  $\omega_i \in \{1, \dots, 17\}$ ,  $\omega_i \neq \omega_j$  für alle  $i, j = 1, \dots, 17$  mit  $i \neq j$

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{17}) : (\omega_1, \dots, \omega_{17}) \text{ ist eine Permutation der Zahlen } 1, \dots, 17\}.$$

Dementsprechend gibt es genau  $17! \approx 3.5569 \cdot 10^{14}$  solche Permutationen. Die Wahrscheinlichkeit, dass in dem 17-Tupel an der Stelle  $j$  ein Rekord auftritt, ist  $\mathbb{P}(A_j) = 1/j$  (vgl. Gleichung (6.2)). Die Wahrscheinlichkeit, dass in dem 17-Tupel genau 9 Rekorde auftreten, kann über die Rekursionsformel (6.3) bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_{17} = 9) &= p(17, 9) = \frac{1}{17} \cdot p(16, 8) + \frac{16}{17} \cdot p(16, 9) \\ &= \frac{1}{17} \frac{1}{16} \cdot p(15, 7) + \frac{1}{17} \frac{15}{16} \cdot p(15, 8) + \frac{16}{17} \frac{1}{16} \cdot p(15, 8) + \frac{16}{17} \frac{15}{16} \cdot p(15, 9) \\ &= \dots \approx 0.00052. \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist mit einem Wert von etwa 0.00052 sehr gering. Ein Auftreten von neun Rekorden in einem 17-Tupel ist sehr unwahrscheinlich. In Bezug auf die Zeitreihe bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit in 17 Dekaden per Zufall 9 Rekordperioden zu finden, sehr klein ist. Auf rein natürliche Schwankungen ist ein solches Ansteigen der Temperatur kaum zurückzuführen. Das Argument von den Klimawandel leugnenden Personen, dass die gemessenen Temperaturrekorde reiner Zufall sind, kann also objektiv betrachtet entkräftet werden.

Bisher wurde die Wahrscheinlichkeit aufgedeckt, eine bestimmte Anzahl an Rekorden in einem Datensatz zu erhalten. Diese hatte sich aus echten Messdaten ergeben. Wie viele Rekorde können überhaupt unter der Annahme, dass der blinde Zufall wirkt, erwartet werden? Und: Wie groß ist die Streuung um den Erwartungswert? Sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz lassen sich über die Darstellung von  $R_{17}$  als Summe von Indikatorfunktionen erhalten, ohne dass die Verteilung bekannt ist (vgl. Gleichungen (6.6) und (6.7)). Zur Berechnung der Varianz wird die paarweise stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse  $A_i$  und  $A_j$  ausgenutzt. Mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler können diese durch logische Überlegungen herleiten (vgl. Seite 131).

**Tabelle 6.1:** Die  $\sigma$ -Umgebungen für die Anzahl der Rekorde im dekadischen Datensatz (1850–2019)

$\sigma$ -Umgebung $u$	1	2	3	4	5	6	7
$u\sigma = u\sqrt{\mathbb{V}(R_{17})}$	1.3608	2.7216	4.0824	5.4432	6.8039	8.1647	9.5255

Es gilt für den Erwartungswert im Falle des dekadischen Datensatzes (1850–2019):

$$\mathbb{E}(R_{17}) = \sum_{j=1}^{17} \mathbb{P}(A_j) \approx 3.4396.$$

Die Varianz berechnet sich für den dekadischen Datensatz (1850–2019) zu

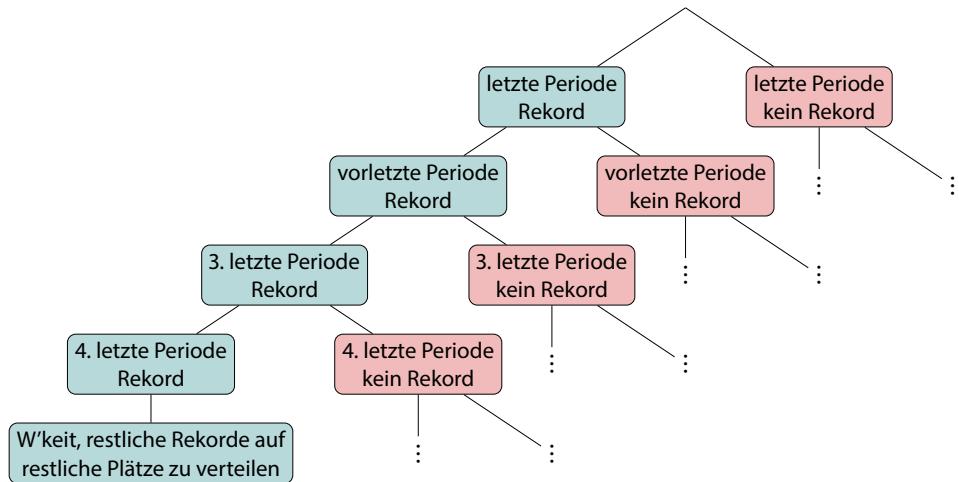
$$\mathbb{V}(R_{17}) = \sum_{j=1}^{17} \mathbb{P}(A_j)(1 - \mathbb{P}(A_j)) \approx 1.8517.$$

Für den dekadischen Datensatz, der 17 Perioden von 1850–2019 umfasst, erwartet man durchschnittlich etwa 3.4396 Rekorde auf lange Sicht. Mit einer Varianz von etwa 1.8517 liegt die aus den Daten ermittelte Anzahl an Rekorden (9 Rekorde) in einer  $5\sigma$ -Umgebung des Erwartungswerts.

Abschließend steht die Berechnung der Wahrscheinlichkeit im Blickpunkt, dass die letzten vier Dekaden Rekorde und damit die wärmsten seit Beginn der Messdatenaufzeichnung sind, und es insgesamt neun Rekorde gibt. Auch diese Analyse nutzt ein rekursives Vorgehen zur Lösung. Ein Rekord an der letzten Stelle kann nur dann auftreten, wenn dort die größte Zahl steht. Es muss also die Zahl 17 an der 17. Stelle stehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt  $\mathbb{P}(A_{17}) = 1/17$  (vgl. Abbildung 6.2: erstes grüne Feld von oben). Nun müssen auf die 16 Plätze davor noch 8 Rekorde verteilt werden. Dabei stehen die Zahlen 1, …, 16 zur Verfügung. Auch hier muss wieder die größte der Zahlen an der letzten Stelle stehen, damit auf diesem Platz ein Rekord steht. Die Wahrscheinlichkeit, dass an der 16. Stelle die Zahl 16 steht, ist gleich  $\mathbb{P}(A_{16}) = 1/16$  (vgl. Abbildung 6.2: zweites grüne Feld von oben). Für die 15. und 14. Stelle, an denen ebenfalls jeweils ein Rekord stehen soll, verfährt man analog (vgl. Abbildung 6.2: drittes und viertes grüne Feld von oben). Es bleiben nun noch 5 Rekorde übrig, die beliebig auf die ersten 13 Plätze zu verteilen sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass es  $\tilde{k} = 9 - 4 = 5$  Rekorde in  $\tilde{n} = 17 - 4 = 13$  Perioden gibt, berechnet sich durch  $\mathbb{P}(R_{\tilde{n}} = \tilde{k}) = p(\tilde{n}, \tilde{k}) = p(13, 5)$ . Da die Ereignisse  $A_i, A_j, A_l$  und  $A_m$ ,  $i, j, l, m \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j \neq l \neq m$ , stochastisch unabhängig sind (vgl. S. 132), erhält man über die Pfadregel insgesamt die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A_{17}) \cdot \mathbb{P}(A_{16}) \cdot \mathbb{P}(A_{15}) \cdot \mathbb{P}(A_{14}) \cdot p(13, 5) = \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{14} \cdot p(13, 5) \approx 1.8477 \cdot 10^{-6}.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den in der Temperaturzeitreihe abgebildeten Fall, nämlich eine Häufung der Rekorde an den letzten vier Perioden, sehr klein. Auf dieser mathematischen Basis ist eine Begründung der Häufung der Temperaturrekorde aufgrund von zufälligen Schwankungen nicht plausibel.



**Abbildung 6.2:** Baumdiagramm zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsberechnung, dass die vier letzten Perioden Rekorde sind und es insgesamt neun Rekorde im 17-Tupel gibt. Dabei steht W'keit abkürzend für Wahrscheinlichkeit.

## 6.3 Didaktische Reduktion der Rekordanalyse einer Temperaturzeitreihe

Der Abschnitt 4.2 ordnet die ereignisbezogene Zeitreihenanalyse in den Schulunterricht ein. Er offenbart, dass Lernmaterial bereits in den letzten Jahren der Mittelstufe einsetzbar ist. Erklärungen zum Erwartungswert stehen den Schülerinnen und Schülern über zusätzliches Informationsmaterial zur Verfügung. In vielen Aufgaben sind gestufte Hilfen eingebaut, um den Lernstand entsprechend zu unterstützen. Durch eine zusätzliche Differenzierung in zwei Niveaustufen ist das Material auch für ältere Lernende angemessen und dennoch herausfordernd gestaltet. Eine Möglichkeit zum Einsatz der Thematik in einem Seminarkurs zeigt Hattebuhr (akzeptiert a) auf.

Außerdem greifen die Lernmaterialien „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ ebenfalls den Kontext des Klimawandels auf. Die Anwendung wurde in Abschnitt 2.5 in die Bildungspläne diverser Schulfächer eingordnet. Auch dieses Lernmaterial verdeutlicht die fächerübergreifende Thematik.

### **6.3.1 Aufbau des Workshops**

Analog zum Workshop zum Thema „Gibt es den Klimawandel wirklich?“ erhalten die Schülerinnen und Schüler eine in die Thematik einführende Präsentation. Sie werden eingebunden, indem sie beispielsweise selbst aktuelle Rekordereignisse nennen und diese von klimatologischen Ereignissen abgrenzen. So rückt das Thema in einen aktuellen Kontext, da die Lernenden in den letzten Jahren auch persönlich Hitzerekorde mit Trockenperioden, Starkniederschläge mit Überschwemmungen und durch die große Medienpräsenz unter anderem Dürreperioden, Kältewellen, Abbrennen riesiger Waldflächen erleben. Solche Ereignisse treten lokal und häufig nur über kleine Zeiträume, zum Beispiel Tage, Wochen oder wenige Monate, auf. Damit stellen sie nach den Definitionen in Abschnitt 2.1 Wetter-, Witterungs- oder Großwetterereignisse dar. Sie treten gehäuft in den Medien

auf und werden am prägnantesten erlebt. Einzelne Ereignisse bleiben zudem länger im Gedächtnis als über einen längeren Zeitraum beobachtete – immerhin wird von klimatischen Zuständen erst ab einer Zeitspanne von über 30 Jahren gesprochen, die Schülerinnen und Schüler noch gar nicht selbst erlebt haben. Umso wichtiger ist es, die relativ kurz andauernden Ereignisse in einen größeren Kontext zu setzen und deren Entwicklung über große Zeiträume hinweg zu betrachten. Dieses Hintergrundwissen, gepaart mit denen allgemeinen Informationen zum Klima in Abschnitt 2.1, erlaubt Lehrpersonen, die selbstständige Überprüfung von Aussagen des Weltklimarats zu motivieren und eine wissenschaftsgeleitete Diskussion zu eröffnen, ob das Auftreten von Temperaturrekorden durch den Zufall erklärbar ist.

Um diese Fragen zu klären, wird folgende Vorgehensweise genutzt:

1. Nimm Stellung zur folgenden Aussage aus dem letzten IPCC-Bericht: Die Temperatur der letzten drei Jahrzehnte (bezieht sich auf die Jahrzehnte 1980-1989, 1990-1999 und 2000-2009) steigt sukzessive an und es sind die wärmsten des letzten Jahrhunderts. Welche zusätzlichen Informationen haben wir durch die Aufzeichnungen nach 2009 erhalten?
2. Wie wahrscheinlich ist die Anzahl an Rekorden in der Temperaturzeitreihe unter der Annahme, dass der blinde Zufall wirkt?
  - a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekordwerte bei 17 Messgrößen gibt?
  - b) Welche Anzahl an Rekorden erwarten wir durchschnittlich auf lange Sicht, wenn wir einen Datensatz aus 17 verschiedenen Messgrößen betrachten, die rein zufällig nacheinander gezogen werden? In welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?
3. Wie wahrscheinlich ist es unter einem Laplace-Modell, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind und es insgesamt 9 Rekordperioden gibt?

Dieses Lernmaterial ist für den direkten Einsatz in einer schulischen Doppelstunde konzipiert. Abschnitt 4.2 führte bereits die Differenzierungen nach unterschiedlichen Wissensständen der Schülerinnen und Schüler an. Daher besteht das Lernmaterial aus mehreren Arbeitsblättern, auf denen jeweils unterschiedliche Niveaustufen angeboten werden. Alle starten gemeinsam auf dem ersten Arbeitsblatt (vgl. Abschnitt 6.3.2). Es stellt einen niederschwelligen Einstieg in das Thema dar und dient dem Vertrautmachen sowohl mit dem Thema und ersten neuen Begriffen als auch mit der häufig unbekannten Arbeitsumgebung der Jupyter Notebooks. Außerdem ist dort die Struktur des Lernmaterials abgebildet. So können die Heranwachsenden die Vorgehensweise jederzeit nach Bedarf nachlesen. Vom ersten Arbeitsblatt aus werden alle ihrem gewählten Niveau entsprechend auf ein weiteres Arbeitsblatt geleitet. Das niedrigere Niveau ist auf Arbeitsblatt 2 (vgl. Abschnitt 6.3.3), das höhere auf Arbeitsblatt 3 (vgl. Abschnitt 6.3.4) umgesetzt. Das erste Niveau bietet einen spielerischen Umgang mit Daten an, während das höhere Niveau (vgl. Arbeitsblatt 3) mathematisch Begeisterte anspricht. Nach jeder thematischen Untereinheit erhalten die Lernenden die Möglichkeit, die Niveaustufe zu wechseln. Für alle gibt es einen gemeinsamen Abschluss, der wieder auf dem ersten Arbeitsblatt zu finden ist. Das Wechseln der Arbeitsblätter wird über Links angezeigt, die jeweils zur zugehörigen Stelle springen. An verschiedenen Stellen ergänzen situationsbezogene Tipps oder weiterführende Informationen das Lernmaterial.

- AB 1 (für alle): Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?
  - Einstieg in die Problemfragen

- Anzahl der Rekorde in der Datenreihe
- AB 2 (Niveau 1): Alles Zufall?
  - Wahrscheinlichkeiten einer bestimmten Anzahl an Rekorden über vielfaches Erzeugen von Permutationen eines 17-Tupels mithilfe des Computers schätzen und in ein Histogramm übertragen
  - Erwartungswert der Anzahl an Rekorden über Bilden des Schwerpunktes des Histogrammes schätzen
- AB 3 (Niveau 2): Alles Zufall?
  - Wahrscheinlichkeiten für eine bestimmte Anzahl an Rekorden über Rekursionsformel berechnen
  - Erwartungswert der Anzahl der Rekorde über die Indikatorfunktion ausdrücken und bestimmen
- AB 1 (für alle):
  - Wahrscheinlichkeitsbestimmung über Pfadregeln
- AB 4 (Zusatzaufgabe): Wie verändern sich die Ergebnisse, wenn ein anderes Startjahr für den Dekadenbeginn gewählt wird?
- AB 5 (Zusatzaufgabe): Wie verändern sich die Ergebnisse, wenn jährliche Daten untersucht werden?

Außerdem gibt es eine optionale Programmierübung zum Zugriff auf die Einträge eines Vektors.

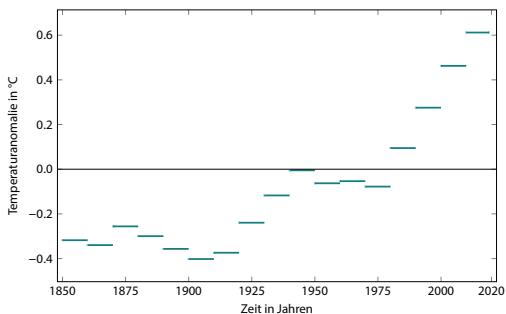
Tabelle 6.2 gibt einen Überblick über die mathematischen Inhalte auf den jeweiligen Arbeitsblättern. Außerdem zeigt sie an, welche Inhalte dabei vorausgesetzt und welche neu eingeführt werden. Auch bildet sie den Ablauf des Lernmaterials ab. Mithilfe dieses Plans können Lehrkräfte den Workshop zielgerichtet in den eigenen Unterricht einbauen.

### 6.3.2 Arbeitsblatt 1: Basisarbeitsblatt

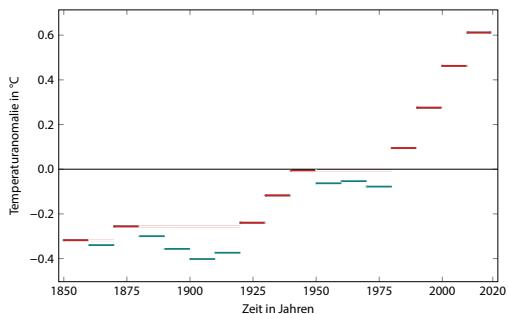
In der ersten Aufgabe identifizieren die Lernenden Rekordperioden im Datensatz. Anhand der Abbildung 6.3(a) zählen sie 9 Rekordperioden. Diese Aufgabe soll sicherstellen, dass alle den für sie neuen Begriff der Rekordperioden verstehen. Ein solches Verständnis ist unerlässlich, da sie diesen Begriff im darauf folgenden Schritt mathematisieren und anwenden sollen – schließlich möchte man nicht bei jedem neuen Datensatz, einer Änderung des vorliegenden Datensatzes oder Umformulierung der Fragestellung neu anfangen, in einer Datensatzvisualisierung Rekorde zu zählen. Denkt man außerdem an eine Ausweitung der Fragestellung auf jährliche Daten, sieht man leicht ein, dass sich dabei auch schnell Zählfehler einschleichen können. Verschiedene Möglichkeiten, einen Datensatz zu visualisieren, stellt der Abschnitt 5.1.1 vor. Die mathematische Regel ist als (Un-)Gleichung zu formulieren. Dabei wird der Zugriff auf Vektoren genutzt. Im Vektor timeMean10 sind alle Zeitmittelwerte, in tempMean10 alle Temperaturmittelwerte und in der Variablen recordTemp ist der zur ersten Dekade zugehörige Temperaturanomaliemittelwert gespeichert (vgl. Algorithmus 6.1, Zeile 2). Dieser ist nach Definition zeitlich gesehen der erste Rekordwert, der in der Zeitreihe auftritt. Jeder neue Rekord wird in der Variablen recordTemp gespeichert und

**Tabelle 6.2:** Übersicht zum Zusammenhang zwischen der verwendeten Mathematik und der Schulmathematik; in blau: vorausgesetzte Inhalte (AB: Arbeitsblatt, A: Aufgabe, A-F: Aufgabenfortsetzung, Ü: Übung, H: Hilfekarte mit Übungsaufgaben, Z: Zusatzaufgabe)

Arbeitsblatt	Inhalt	Schulbezug
AB 1	A1 Visualisierung von Daten; Anwenden und Mathematisieren des Begriffs <i>Rekorde</i> Ü Eingabehinweis f. den Umgang mit julia (Übung AB 6 optional)	Visualisierung und <b>Beschreibung von Punkten mit besonderen Merkmalen</b>
	A2 Einführung von Repräsentanten der dekadischen Zeitreihe	Abbildung zwischen Mengen
AB 2	Niveau 1: Schrittweise Analyse (parallel zu AB 3) A2-F Zufällige Permutationen erzeugen; Häufigkeitsbestimmung mit Wahrscheinlichkeitsübergang A3 Erwartungswertbestimmung	<b>Absolute und relative Häufigkeiten</b> , Gesetz der großen Zahlen Interpretation von Wahrscheinlichkeitshistogrammen
AB 3	Niveau 2: A2-F Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten (Fallunterscheidungen, Symmetrieüberlegungen) A3 Erwartungswertbestimmung	<b>Laplace-Modell</b> , <b>Baumdiagramm</b> , Satz der totalen Wahrscheinlichkeit, Rekursionen Indikatorfunktion
AB 1	A4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten Z1 Einordnung in einen größeren Kontext	Baumdiagramm (Pfadregeln) Transfer der ermittelten Ergebnisse
AB 4	Z2 parallel zu Z1 und Z3 Einfluss des Startjahres der Dekade auf die Wahrscheinlichkeiten	
AB 5	Z3 parallel zu Z1 und Z2 Einfluss der Periodenlänge auf die Wahrscheinlichkeiten	



(a) Datengrundlage zur Bearbeitung



(b) Daten mit markierten Rekorden

**Abbildung 6.3:** Temperaturdatensatz HadCRUT4, in Dekaden zusammengefasst über arithmetisches Mittel

der alte Wert überschrieben. So gilt es lediglich, jeden Eintrag des Temperaturanomalievektors `tempMean10` dahingehend zu überprüfen, ob der jeweilige Wert größer ist als der zuletzt gespeicherter Rekordwert `recordTemp` (vgl. Algorithmus 6.1, Zeile 4). Um die ermittelten Rekorde dennoch ausgeben zu können, speichert der selbstgeschriebene Programmcode alle Rekorde ab. Diese Tätigkeit übernimmt die Funktion `Climate.RecordFill10` (vgl. Algorithmus 6.1, Zeile 6). Sie erstellt außerdem eine graphische Ausgabe, die als Rückmeldung zur jeweiligen Eingabe dient. Dabei sind die Rekordperioden der in Zeile 5 nach aufgestellten Regel entsprechend rot eingefärbt. In blau sind alle weiteren Perioden eingezeichnet, die nach der eingegebenen Regel keine Rekordperioden darstellen. Wurde die Definition richtig angewandt, so ergibt sich die Abbildung 6.3(b).

---

**Algorithmus 6.1:** Algorithmus zur Bestimmung von Rekorden in Temperaturzeitreihen

---

```

1   j=1;
2   recordTemp = tempMean10[j];
3   for i=2:17
4     if tempMean10[i] > recordTemp
5       recordTemp = tempMean10[i];
6       Climate.RecordFill10(i,j);
7       j=j+1;
8     else
9       j = j;
10    end
11  end
```

---

Diese graphische Rückmeldung dient der selbstständigen Validierung des (mathematischen) Ergebnisses. Dem Modellierungskreislauf folgend schließt sich die Interpretation dieses Ergebnisses an. Abschnitt 6.2 bietet eine ausführliche Beschreibung der Interpretation an. Bereits an dieser Stelle werfen einige die Frage auf, welchen Einfluss das Startjahr auf die Anzahl der Rekorde hat.

In der zweiten Aufgabe gehen die Schülerinnen und Schüler der Frage nach, ob der reine Zufall für eine derart große Anzahl von Rekorden im betrachteten Zeitraum von 1850 bis 2019 verantwortlich sein kann. Dazu untersuchen sie die Verteilung von Rekorden unter einem Laplace-Modell. Es wird die Abbildung der Temperaturanomaliemittelwerte auf die Zahlen von 1 bis 17 motiviert und als Repräsentanten eingeführt. So lässt sich die verwendete Zeitreihe durch die Zahlenfolge

5 4 7 6 3 1 2 8 9 13 11 12 10 14 15 16 17

beschreiben. Dabei sind erneut die Rekorde markiert. Bei kognitiven Hürden kann an dieser Stelle auf ein ergänzendes Informationsblatt zurückgegriffen werden.

Ausgehend von diesem Kenntnisstand kann die Frage nach der Wahrscheinlichkeit von 9 Rekorden in einem Datensatz von 17 Werten auf zwei verschiedenen Niveaustufen erkundet werden. Die erste Stufe greift hauptsächlich Schulwissen auf (s. Abschnitt 6.3.3), wohin gegen die zweite Stufe über das Schulwissen hinausgehende Mathematik einsetzt (s. Abschnitt 6.3.4). Dieses Wissen wird problembezogen eingeführt und eignet sich insbesondere für mathematikinteressierte und motivierte Lernende.

**Tabelle 6.3:** Zusammenfassung möglicher Schülerlösungen. Dabei bezeichnet *abs. H.* die absolute und *rel. H.* die relative Häufigkeit.

Anzahl Rekorde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A	0	1	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	1	5	2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	2	4	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	3	4	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	3	2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
abs. H.	0	10	19	8	10	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
rel. H.	0	0.2	0.38	0.16	0.2	0.02	0	0.04	0	0	0	0	0	0	0	0	0

### 6.3.3 Arbeitsblatt 2: Wahrscheinlichkeitsanalyse auf der Niveaustufe 1

Auf dem niederschwelligen Niveau erzeugen die Schülerinnen und Schüler mehrfach zufällige Permutationen. Der Begriff der Permutationen wird schülergerecht eingeführt. Die Lernenden rufen eine shuffle-Funktion auf, die die Zahlen von 1 bis  $n$  zufällig vertauscht und ausgibt. Sie bestimmen jeweils die Anzahl der Rekorde. Es steht eine ausdruckbare Tabelle B.3 als Übersicht zur Verfügung, in der die jeweiligen Ergebnisse eingetragen werden können. Die Ergebnisse können auch durch den Einsatz weiterer Technik, wie beispielsweise einer Dokumentenkamera, eines Beamers, Smartboards oder einer Tafel für alle sichtbar präsentiert werden, wodurch ein Austausch der Ergebnisse ermöglicht wird.

Die Heranwachsenden bestimmen nun anhand ihrer notierten Ergebnisse die relative Häufigkeit des Ereignisses, dass 9 Rekorde in einem 17-Tupel auftreten. Das Schülerergebnis wird durch den Zufall und die Anzahl der erzeugten Permutationen beeinflusst. Beispielhafte Ergebnisse von fünf Schülergruppen A–E, sowie die Summe der absoluten und relativen Häufigkeiten sind in Tabelle 6.3 dargestellt.

Auf dieser Basis liegt die relative Häufigkeit für neun Rekorde in einem 17-Tupel bei 0. Es wurde in Durchführungen beobachtet, dass Lernende das Ziel verfolgen, möglichst viele Rekorde zu erzeugen und so lange würfeln, bis eine große Anzahl an Rekorden (etwa  $k > 6$ ) auftritt. Dieses Bestreben führte insbesondere zu einem Bewusstwerden über die sehr geringe Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse.

Je mehr Permutationen erzeugt werden, desto stärker nähert sich die relative Häufigkeit der wahren Wahrscheinlichkeit an. Einen sehr großen Stichprobenumfang zu analysieren ist jedoch sehr zeitaufwendig. Es müssen Vertauschungen immer wieder neu erzeugt und die Anzahl der Rekorde gezählt werden. Außerdem ist unklar, ab welcher Anzahl an Permutationen eine sehr große Stichprobe erreicht ist. Es stellt sich die Frage, wie sich das Ergebnis bei einer Stichprobe von 1 000, 100 000 oder gar 1 000 000 verändert. Eine solche Untersuchung ist per Hand nicht mehr möglich. Daher wird die Prozedur an den Rechner übergeben. Eine eigens erstellte Funktion erzeugt eine beliebige Anzahl  $N$  an Permutationen, die vom Lernenden festgelegt werden kann. Die Funktion untersucht jede erzeugte Permutation auf die Anzahl der Rekorde hin und speichert das Ergebnis. Am Ende gibt sie die absolute und relative Häufigkeit der einzelnen Ereignisse aus und bildet sie graphisch in einem Säulendiagramm ab. So erstellen die Lernenden unter geringem Zeitaufwand Häufigkeitsverteilungen von unterschiedlich großen Stichproben.

**Tabelle 6.4:** Mögliche Schülerlösung: Anzahl der Rekorde in  $N = 100$  zufälligen Permutationen sowie absolute und relative Häufigkeiten des Auftretens

Anzahl Rekorde	1	2	3	4	5	6	7	8–17
absolute Häufigkeit	5	18	26	32	11	3	5	0
relative Häufigkeit	0.05	0.18	0.26	0.32	0.11	0.03	0.05	0

**Tabelle 6.5:** Mögliche Schülerlösung: Anzahl der Rekorde in  $N = 10\,000$  zufälligen Permutationen sowie absolute und relative Häufigkeiten des Auftretens

Anzahl Rekorde	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11–17
absolute Häufigkeit	617	1897	2 887	2 478	1390	543	153	32	2	1	0
relative Häufigkeit $\cdot 10^3$	61.7	189.7	288.7	247.8	139	54.3	15.3	3.2	0.2	0.1	0

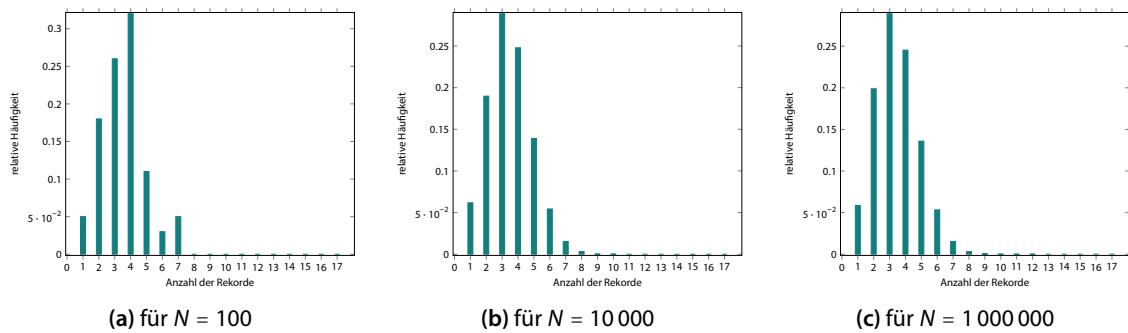
Die Tabellen 6.4 bis 6.6 geben beispielhaft für  $N \in \{100, 10\,000, 1\,000\,000\}$  zufällige Permutationen die Anzahl der Rekorde an, ausgedrückt durch die absolute Häufigkeit, sowie die relative Häufigkeit der jeweiligen Ereignisse. Die Abbildung 6.4 fasst die relativen Häufigkeiten der Ereignisse für die drei Durchläufe jeweils in einem Stabdiagramm zusammen.

Die relative Häufigkeit der jeweiligen Ereignisse nähert sich laut dem Gesetz der Großen Zahlen der Wahrscheinlichkeit der Ereignisse an. Ändert sich das Ergebnis bei mehrfachem Durchführen des Codes bei derselben Stichprobengröße nicht mehr oder nur sehr wenig, kann von einem wissenschaftlich zulässigen Ergebnis im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen gesprochen werden. Hier erhält man ab einer Stichprobe von etwa  $N = 1\,000\,000$  einen fundierten Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.

Mit diesem Wissen nähern sich die Lernenden der Antwort auf die Frage, wie wahrscheinlich es ist, 9 Rekorde bei 17 Messwerten zu erhalten. Sie erörtern darüber hinaus die Bedeutung für die Temperaturanomaliezeitreihe. Bereits das Ergebnis der eigenständig erzeugten Permutationen deutet auf eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit hin, 9 Rekorde in einem 17-Tupel zu erhalten. In den hier vorgestellten beispielhaften Schülerlösungen trat das Ereignis von 9 Rekorden kein einziges Mal auf. Wird eine hohe Anzahl an Permutationen erzeugt ( $N = 1\,000\,000$ ), kristallisiert sich eine relative Häufigkeit von etwa  $550 \cdot 10^{-6}$  heraus. Mit diesem fundierten Wissen ist das Auftreten von 9 Temperaturrekordperioden innerhalb der letzten 170 Jahre kaum noch mit dem reinen Zufall vereinbar. Einen Rückschluss auf die Ursachen des gehäuften Auftretens lassen diese Untersuchungen nicht zu.

**Tabelle 6.6:** Mögliche Schülerlösung: Anzahl der Rekorde in  $N = 1\,000\,000$  zufälligen Permutationen sowie die absolute Häufigkeit des Auftretens

Anzahl Rekorde	1	2	3	4	5	6	7	8
absolute Häufigkeit	58 597	198 852	289 079	245 282	135 930	53 281	15 194	3 153
9		10	11	12	13–17			
550		76	5	1	0			



**Abbildung 6.4:** Mögliche Schülerlösung: Anzahl der Rekorde in  $N$  zufälligen Permutationen im Stabdiagramm dargestellt

**Tabelle 6.7:** Mögliche Schülerlösung: Erwartungswertermittlung über den Schwerpunkt der Säulendiagramme

Tabelle	6.3	6.4	6.5	6.6
Säulendiagramm		6.4(a)	6.4(b)	6.4(c)
Erwartungswert	3	3.5-4	3.5	3.5

In der dritten Aufgabe erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler, welche durchschnittliche Anzahl an Rekorden in Datensatz aus 17 Messwerten sich auf lange Sicht einstellt. Sie bestimmen den Erwartungswert näherungsweise mithilfe der zuvor erzeugten Säulendiagramme.

Die Antwort ist von den vorherigen Ergebnissen abhängig. Daher wird hier beispielhaft der Erwartungswert zu den zuvor beschriebenen Schülerlösungen A–E angegeben (vgl. Tabelle 6.7). Der Erwartungswert entspricht anschaulich dem (physikalischen) Schwerpunkt des Stabdiagramms. Auf Basis der Tabelle 6.3 liegt er etwa bei 3 Rekorden. Für die Ergebnisse der  $N \in \{100, 10\,000, 1\,000\,000\}$  zufälligen Permutationen, die die Tabellen 6.4 bis 6.6 bzw. die Abbildungen 6.4 zusammenfassen, ergeben sich leicht unterschiedliche Ergebnisse: Bei  $N = 100$  deutet sich ein Erwartungswert von etwa 3.5 bis 4 Rekorden an. Ligt die Anzahl an Permutationen höher, so zeichnet sich ein Erwartungswert von etwa 3.5 Rekorden ab.

Abschließend und mit Blick auf den Modellierungskreislauf soll das Ergebnis interpretiert und Bezug auf den klimatischen Hintergrund genommen werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass neun Rekorde auftreten, liegt geschätzt zwischen  $0 - 0.55 \cdot 10^{-3}$ . Das Auftreten von Rekordperioden wie im aktuellen Datensatz von 1850 bis 2019 ist sehr unwahrscheinlich und – da hier ein Laplace-Modell angenommen wurde – kaum durch den Zufall erklärbar. Es muss also einen anderen Grund für die Häufung an Temperaturrekordperioden geben als den Zufall. Am häufigsten treten mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa  $2.6 \cdot 10^{-3} - 2.89 \cdot 10^{-3}$  drei Rekorde auf. Diese Anzahl an Rekorden liegt in der Nähe des Erwartungswertes der Rekordverteilung unter einem Laplace-Modell. Fände man in dem Temperaturdatensatz von 1850 bis 2019 also nur drei bis vier Rekordperioden, so könnte dies durchaus mithilfe natürlicher (zufälliger) Schwankungen erklärt werden.

### 6.3.4 Arbeitsblatt 3: Wahrscheinlichkeitsanalyse auf der Niveaustufe 2

Auf der zweiten Niveaustufe ist über das Schulwissen hinausgehende Mathematik nötig. Diese wird problembezogen eingeführt. Damit ist dient dieses Niveau vor allem der Differenzierung und Forderung aller Mathematik-Begeisterten.

Zunächst erkunden die Schülerinnen und Schüler, wie wahrscheinlich es ist, dass in einer rein zufälligen Vertauschung der Zahlen von 1 bis 17 an der  $j$ -ten Stelle ein Rekord auftritt. Dieses Ereignis wird mit  $A_j$  bezeichnet. Dieser Schritt wird erneut unterteilt in kleinere Aufgaben:

1. Bestimme dazu zunächst die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_1)$ , dass an der ersten Stelle ein Rekord steht.
2. Überlege anschließend, wie groß die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_2)$  ist, dass an der zweiten Stelle ein Rekord steht.
3. Wiederhole diese Überlegungen für die weiteren Fälle  $\mathbb{P}(A_3)$  bis  $\mathbb{P}(A_5)$ .
4. Verallgemeinere! Ergänze dazu den folgenden Satz: *Die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A_j)$ , dass an der  $j$ -ten Stelle ein Rekord steht, beträgt ...*

Der Abschnitt 6.1.1 stellt die schrittweisen Berechnungen der Wahrscheinlichkeiten vor. Diese Vorüberlegungen dienen dazu, sich der Symmetrievergleich bewusst zu werden.

Weiter untersuchen die Lernenden die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei einer zufälligen Permutation der Zahlen 1 bis 17 genau 9 Rekorde einstellen. Es wird allgemein für die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer rein zufälligen Permutation der Zahlen von 1 bis  $n$  genau  $k$  Rekorde ergeben, die Schreibweise  $\mathbb{P}(R_n = k) =: p(n, k)$  verwendet. Es wird darauf hingewiesen, zur Lösung ein rekursives Vorgehen zu nutzen. Ist dieser Begriff unbekannt, dient ein Informationsblatt seiner Einführung. Das digitale Blatt beinhaltet zudem Hinweise, wie in Julia Funktionen innerhalb der eigenen Funktion, also rekursiv, aufgerufen werden können. Darüber hinaus steht ein Tipp zur Fallunterscheidung bereit, der auf Seite 129 erläutert wird.

1. Überlege zunächst, wie wahrscheinlich es ist, dass es genau einen Rekord gibt.  
*Lösung:* Aus Symmetriegründen gilt  $p(17, 1) = 1/17$ , allgemein  $p(n, 1) = 1/n$  (vgl. Algorithmus 6.2, Zeile 5).
2. Ermittle dann die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 17 Rekorde gibt.  
*Lösung:* Diese Wahrscheinlichkeit ist durch  $p(17, 17) = 1/17!$  gegeben, allgemein  $p(n, 1) = 1/n!$  (vgl. Algorithmus 6.2, Zeile 8).

Wo müssen in diesen beiden Fällen die Rekorde stehen?

3. Wie können die restlichen Fälle auf diese beiden zurückgeführt werden?  
*Lösung:* Auch hier ist eine Fallunterscheidung hilfreich.
  - Wie wahrscheinlich ist es, dass an der letzten Stelle ein Rekord auftritt? Wie kann die Wahrscheinlichkeit rekursiv ausgedrückt werden, dass die übrigen Rekorde noch auf die ersten 16 Stellen zu verteilen sind?  
*Lösung:* Mit dem obigen Wissen ist diese Wahrscheinlichkeit durch  $\mathbb{P}(A_{17}) = 1/17$  gegeben. Die verbleibenden  $k - 1 = 8$  Rekorde sind auf die vorherigen 16 Plätze zu verteilen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt  $p(16, 8)$ .

- Wie wahrscheinlich ist es, dass an der letzten Stelle kein Rekord auftritt? Dies ist die zu dem vorherigen Punkt komplementäre Situation. Wie kann die Wahrscheinlichkeit rekursiv ausgedrückt werden, dass alle Rekorde auf die ersten 16 Stellen zu verteilen sind?

*Lösung:* Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch  $P(\bar{A}_{17}) = 16/(16+1)$ . Alle 9 Rekorde müssen auf die 16 Plätze davor verteilt werden: Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt  $p(16, 9)$ .

Unter Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit (Satz 6.3) können nun diese aufgezeigten Fälle zusammengefasst werden zu

$$P(R_{17} = 9) = p(17, 9) = \frac{1}{17} \cdot p(16, 8) + \frac{16}{16+1} \cdot p(16, 9) \approx 0.00052$$

(s. Algorithmus 6.2, Zeile 11 und Gleichung 6.3).

Zusätzlich werden die Lernenden auf die bereits implementierte Funktion factorial hingewiesen.

**Algorithmus 6.2:** Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(R_{17} = 9)$ , wobei ein rekursives Vorgehen eingesetzt wird

---

```

1 # Jetzt du!
2 function prob(y(n,k)
3   if k==1
4     # Bestimme die Wahrscheinlichkeit p(n,1), dass unter n=17 Messwerten genau k
      =1 Rekorde auftreten. Ueberlege dir dazu, wie dieser Fall/diese Faelle
      aussehen.
5   P = 1/n;
6   elseif k==n
7     # Bestimme nun die Wahrscheinlichkeit p(n,n), dass unter n=17 Messwerten
      genau k=n=17 Rekorde auftreten. Ueberlege dir dazu, wie dieser Fall/diese
      Faelle aussehen.
8   P = 1/factorial(n);
9   else
10    # Diese beiden Faelle werden als Randbedingungen bezeichnet. Wir wollen nun
        wissen, was in den anderen Faellen passiert: Wie gross ist die Wahrschein-
        lichkeit p(n,k) mit 1<k<n? Stelle dafuer eine Rekursionsformel auf.
11   P = 1/n * prob(y(n-1, k-1) + (n-1)/n * prob(y(n-1,k));
12   end
13 end
```

---

Es werden neben dem konkreten Wahrscheinlichkeitswert auch für allgemeine  $k = 1, \dots, 17$  die Wahrscheinlichkeiten in einem Histogramm ausgegeben. Es schließt sich eine Interpretation des Ergebnisses im klimatischen Kontext an. Das theoriegeleitete Ergebnis bestätigt das experimentell gewonnene Ergebnis des ersten Niveaus, weshalb diese Aufgabe hier nicht näher aufgeführt wird.

Bei Bedarf kann der obige Algorithmus auch an einem Beispiel verdeutlicht werden. Dazu betrachtet man anstelle des 17-Tupels ein 3- oder 4-Tupel, dokumentiert alle möglichen Permutationen und markiert die günstigen Permutationen.

**Beispiel 6.4** Sei  $n = 3$ . Alle möglichen Permutationen der Zahlen 1, 2, 3 sind in der Tabelle 6.8 aufgelistet. Sie bilden die Ergebnismenge  $\Omega$ , die aus insgesamt  $3! = 6$  Permutationen besteht. Die Rekorde sind rot eingefärbt. Insgesamt gibt es die Möglichkeiten, dass 1, 2 oder 3 Rekorde auftreten. Zunächst wird der Fall betrachtet, dass ein Rekord auftritt (Fall  $k = 1$ ). Aus der Tabelle kann man ablesen, dass genau ein Rekord auftritt, wenn die größte Zahl (3) an der ersten Stelle steht. Da es genau zwei solcher Fälle gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür  $p(3, 1) = 2/6 = 1/3$  (vgl. Algorithmus 6.2, Zeile 5). Die Wahrscheinlichkeit, dass es drei Rekorde gibt, beträgt  $p(3, 3) = 1/6 = 1/3!$ , da dieser Fall in genau einer Permutation auftritt (vgl. Algorithmus 6.2, Zeile 8). Wendet man sich nun dem Fall zu, dass es zwei Rekorde gibt, tritt die Fallunterscheidung ein, dass entweder an der letzten Stelle ein Rekord steht und der weitere Rekord auf eine der ersten beiden Stellen verteilt werden muss oder, dass an der letzten Stelle kein Rekord steht und dann beide Rekorde an den ersten beiden Stellen auftreten (vgl. Algorithmus 6.2, Zeile 8). Wie wahrscheinlich es ist, dass an der letzten Stelle ein Rekord auftritt? Dieser Fall ist dadurch gegeben, dass die größte Zahl, also die 3, an der letzten Stelle steht. Die günstigen Permutationen sind durch  $(1, 2, 3)$  und  $(2, 1, 3)$  gegeben. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich durch  $P(A_3) = 2/6 = 1/3$ . Die Wahrscheinlichkeit, noch einen Rekord auf die ersten beiden Plätze zu verteilen, ergibt sich durch  $p(2, 1)$ . Die Wahrscheinlichkeit beträgt  $1/2$ , da die günstigen Fälle hier durch die Permutationen  $(2, 1, 3)$ ,  $(3, 1, 2)$  und  $(3, 2, 1)$  beschrieben sind. Das Ereignis, dass an der letzten Stelle kein Rekord auftritt, ist zu dem vorherigen Fall komplementär. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich durch  $P(\bar{A}_3) = 1 - 1/3 = 2/3$ . Im Fall von insgesamt zwei Rekorden müssen beide Rekorde an den ersten beiden Stellen stehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt  $p(2, 2)$ . Die günstigen Fälle sind  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$  und  $(2, 3, 1)$ . Sie treten mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  auf. Daraus ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Rekorde auftreten,

$$P(R_3 = 2) = P(A_3)p(2, 1) + P(\bar{A}_3)p(2, 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Prüft man dieses Ergebnis nach, so müssen die Permutationen gezählt werden, in denen zwei Rekorde auftreten:  $(1, 3, 2)$ ,  $(2, 1, 3)$  und  $(2, 3, 1)$ . Schnell sieht man ein, dass sich hier das gleiche Ergebnis einstellt. Insgesamt führen diese Überlegungen in ihrer Verallgemeinerung auf den rekursiven Algorithmus.

Um den Erwartungswert von  $R_n$  zu bestimmen, wird die Anzahl der Rekorde  $R_n$  durch die Indikatorvariablen  $\mathbb{1}(A_j)$  ausdrückt und anschließend die Additivität der Erwartungswertbildung ausnutzt (vgl. Gleichung 6.6). Dieses Vorgehen den Lernenden auf einem Informationsblatt zur Verfügung gestellt. Auch wird auf Henze (2020b, 2020c) hingewiesen, wo die Mathematik adressatengerecht aufbereitet und erklärt ist. Das neu erlangte Wissen transferieren die Schülerinnen und Schüler und erhalten für den Erwartungswert

$$E(R_{17}) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{17} \approx 3.44.$$

**Tabelle 6.8:** Alle möglichen Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, wobei die Rekorde rot eingefärbt sind

Permutationen	$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(2, 1, 3)$	$(2, 3, 1)$	$(3, 1, 2)$	$(3, 2, 1)$
Anzahl der Rekorde	3	2	2	2	1	1

Dieser Wert stellt eine gute Prognose für den Durchschnitt der erwartenden Rekordanzahlen auf lange Sicht dar. Die Realität mit neun Rekorden liegt weit, genauer gesagt mehr als vier Standardabweichungen, vom Erwartungswert entfernt (vgl. Tabelle 6.1).

### 6.3.5 Arbeitsblatt 1: Zurück zum Basisblatt

Die letzte Aufgabe des regulären Arbeitsmaterials bearbeiten alle Schülerinnen und Schüler wieder gleichermaßen. Dabei steht abschließend die Berechnung der Wahrscheinlichkeit im Blickpunkt, dass die vier letzten Jahrzehnte die wärmsten der letzten 170 Jahre sind und es in dieser Zeitspanne insgesamt 9 Rekordperioden gab. Auch diese Aufgabe nutzt ein rekursives Vorgehen zur Lösung. Es ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die letzten vier Perioden Rekorde sind und es insgesamt 9 Rekorde in einem 17-Tupel gibt.

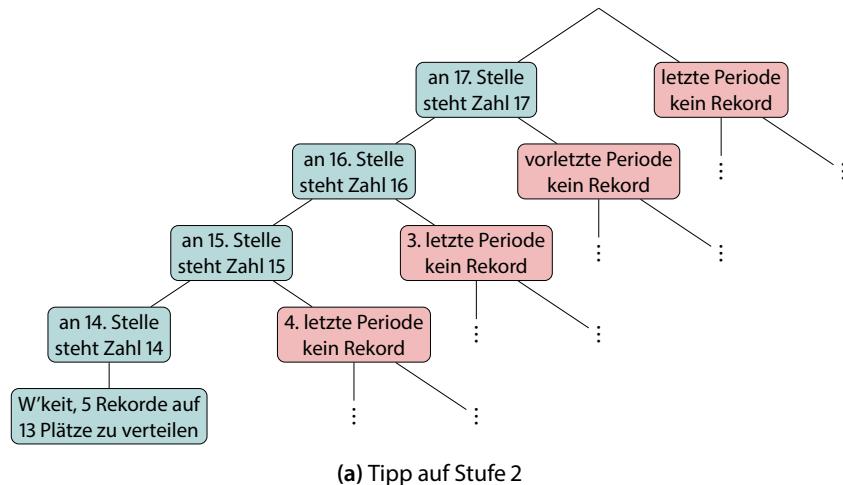
Ein Baumdiagramm veranschaulicht das Lösungsvorgehen (vgl. Abbildung 6.2). Lernenden steht es in einem Tipp als gestufte Hilfe zur Verfügung. Die grünen Pfade kennzeichnen dabei diejenigen, die zur Lösung der obigen Frage beitragen. Ihre Wahrscheinlichkeiten an den Ästen gilt es zu bestimmen. Die Hilfen geben die Wahrscheinlichkeiten immer konkreter an (vgl. Abbildungen 6.5). Der Weg wird auf Seite 6.2 ausführlich erläutert, ebenso wie die Interpretation des Ergebnisses. Über die Pfadregel erhält man dann insgesamt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit von etwa  $1.8477 \cdot 10^{-6}$ . Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den in der Temperaturzeitreihe abgebildeten Fall, nämlich eine Häufung der Rekorde an den letzten vier Perioden und insgesamt 9 Rekorde, sehr klein. Auf dieser mathematischen Basis ist eine Begründung des Temperaturanstiegs aufgrund von zufälligen Schwankungen in der Temperatur nicht plausibel.

### 6.3.6 Zusatzaufgaben

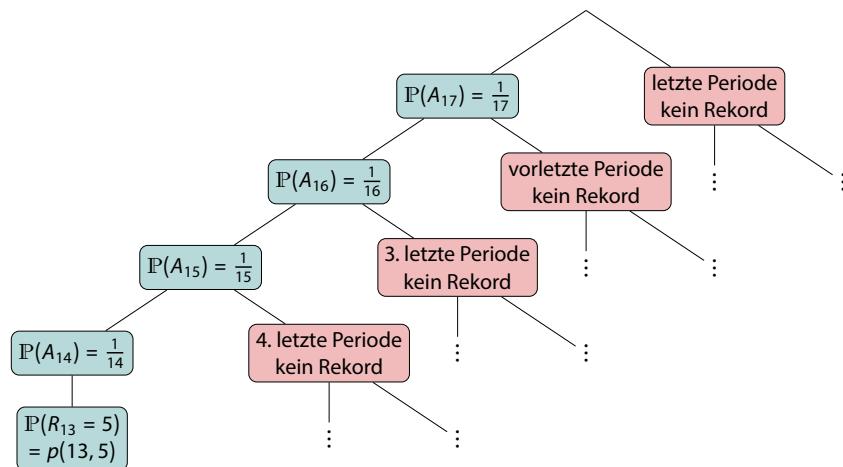
Sind einzelne Schülerinnen und Schüler schneller in der Bearbeitung der bislang vorgestellten Aufgaben oder ist eine Bearbeitungszeit über die vorgeschlagenen 90 Minuten hinaus möglich, bietet das Lernmaterial drei Zusatzaufgaben an. In diesen sind keine Lösungskontrollen enthalten. Die drei Zusatzaufgaben können unabhängig voneinander und in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.

Die erste Zusatzaufgabe öffnet das Thema des Klimawandels. Die Lernenden sollen ein Brief an eine Person schreiben, die behauptet, dass das Auftreten von Rekordjahren mit ganz normalen zufälligen Schwankungen in der Temperatur zu erklären ist. Dabei argumentieren sie schlüssig unter Berücksichtigung der zuvor gewonnenen (mathematischen) Erkenntnisse. Diese Methode regt dazu an, nochmal deutlicher als in den Interpretationsaufgaben über die erhaltenen Ergebnisse nachzudenken und sie mit einer Argumentationsstruktur zu versehen. Außerdem erweitert diese Aufgabe die bisherigen, in denen der Schwerpunkt auf einer mathematischen Betrachtung lag, um eine gesellschaftspolitische Sichtweise. Möglicherweise fühlen sich so Heranwachsende, deren Interessen eher auf politischer, gesellschaftswissenschaftlicher oder sprachlicher Ebene liegt, stärker angesprochen.

Die zweite vorgeschlagene Zusatzaufgabe, untersucht die Auswirkung des Startjahres der Dekaden auf das Auftreten von Rekorden hin. Die Periodenlänge bleibt weiterhin konstant bei 10 Jahren. Das Startjahr wird individuell selbstständig festgelegt. Wird das Startjahr nicht auf den Beginn eines Jahrzehnts gelegt, ergeben sich neue Temperaturanomaliemittelwerte. Startet man etwa im

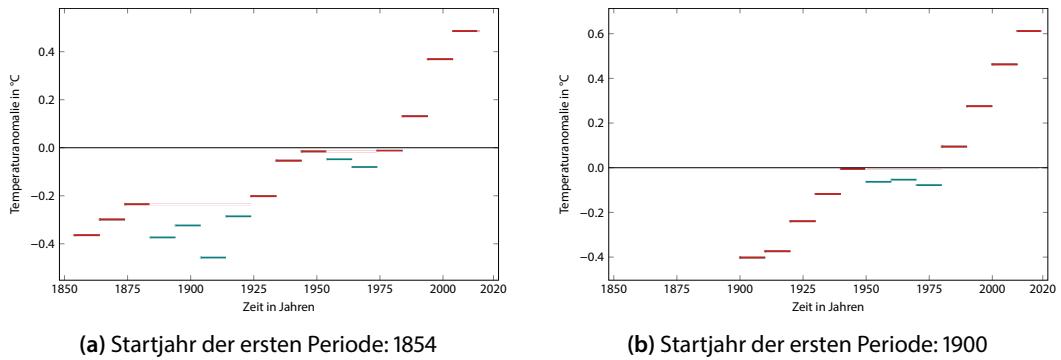


(a) Tipp auf Stufe 2



**(b)** Tipp auf Stufe 3

**Abbildung 6.5:** Baumdiagramme zur Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsberechnung, dass die vier letzten Perioden Rekorde sind und es insgesamt neun Rekorde im 17-Tupel gibt



**Abbildung 6.6:** Temperaturdatensatz HadCRUT4, in Dekaden zusammengefasst über arithmetisches Mittel; in rot: Rekordperioden, in blau: nicht-Rekordperioden

Jahr 1854, zeigen sich direkt zu Beginn von 1854–1883 drei Rekordperioden, auf die nach einer 40-jährigen Unterbrechung erneut drei Rekordperioden von 1924–1953 folgen. Weiterhin sind die letzten vier Dekaden Rekorde. Das Beispiel spiegelt eine Häufung der Rekorde in drei Phasen wider. Insgesamt stellt sich sogar ein Rekord mehr ein, obwohl der betrachtete Gesamtdatensatz eine Dekade weniger enthält verglichen mit den vorherigen Pflichtaufgaben (vgl. Abbildung 6.6(a)). Ausgegeben wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung, sowie die Wahrscheinlichkeit unter einem Laplace-Modell, innerhalb eines 16-Tupels zehn Rekorde zu erhalten. Sie liegt bei etwa  $0.4358 \cdot 10^{-6}$ . Auch lassen sich beispielsweise Aussagen über die Anzahl von Rekorden, deren Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten ab Beginn der Industrialisierung (ab dem Jahr 1900) treffen. Hier fällt besonders auf, dass direkt zu Beginn fünf Rekordperioden liegen, die nach einer 30-jährigen Pause von den Temperaturanomaliemittelwerten der letzten vier Dekaden sukzessive überragt werden (vgl. Abbildung 6.6(b)). Insgesamt treten hier neun Rekorde in einem 12-Tupel auf. Die Laplace-Wahrscheinlichkeit von neun Rekorden in einem 12-Tupel beträgt etwa  $0.1204 \cdot 10^{-3}$  (vgl. Abbildung 6.7(b)). In beiden Fällen liegt der Erwartungswert bei ungefähr drei Rekorden. Gleichermaßen kann auch hier nicht von einem gehäuften Auftreten von Rekorden aufgrund von rein zufälligen Schwankungen in der Temperatur gesprochen werden.

Der Bericht des Weltklimarats erklärt nicht die Gründe für die Analyse von Dekaden. Daher bietet das Lernmaterial die Möglichkeit, in der dritten Zusatzaufgabe die Periodenlänge zu variieren und sogar jährliche Temperaturanomaliedaten in Bezug auf das Auftreten von Rekorden hin zu erforschen. Analog zur zweiten Zusatzaufgabe kann das Startjahr der Betrachtungen frei gewählt werden. Die Analyse wird beispielhaft anhand der Startjahre 1850, 1900 und 2000 durchgeführt. Der jährliche Datensatz mit markierten Rekorden ist für verschiedene Startjahre in den Abbildungen 6.8 dargestellt. Betrachtet man die Zeitreihe von 1850 an, so zählt man 16 Rekordjahre innerhalb von 171 Jahren. Seit dem Jahr 1900 gab es 20 Rekordjahre innerhalb von 121 Jahren und seit dem Jahr 2000 gab es immerhin neun Rekordjahre innerhalb von 21 Jahren.

Der zuvor aufgestellte rekursive Algorithmus birgt Schwierigkeiten bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten. Er beinhaltet die Berechnung der Fakultät. Abhilfe schafft die bereits in julia implementierte Funktion `factorial(n)`, die die Fakultäten aus einer vorab gespeicherten Tabelle abliest. Allerdings ist für  $n > 20$  eine approximative Berechnung der Fakultät nötig. Diese wird über eine eigens selbstprogrammierte Funktion ermöglicht, wobei die Fakultät als Realnumber gespeichert wird. Für  $n = 171$  ist die Fakultät sogar so groß, dass sie gar nicht mehr bestimmt werden kann. Alternativ kann die Fakultät mithilfe einer anderen Software bestimmt und dann

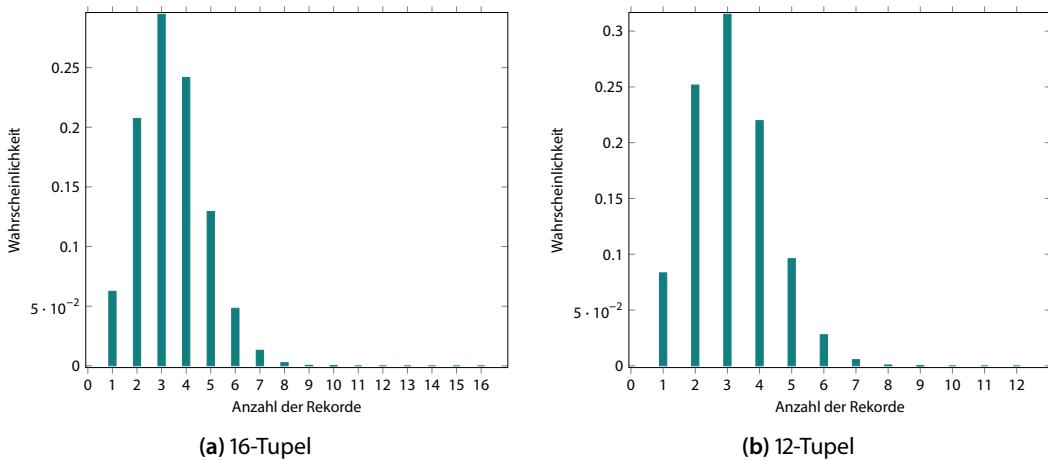
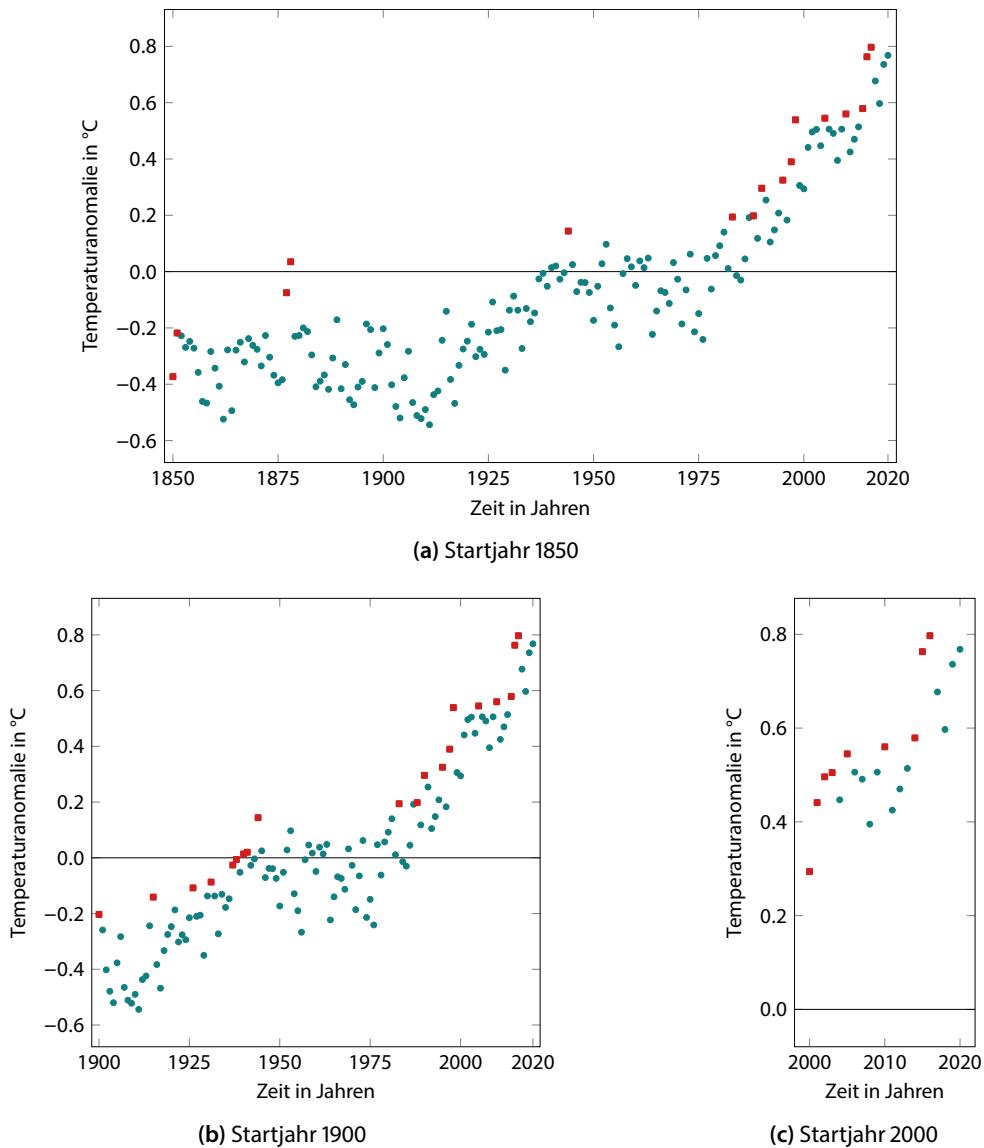


Abbildung 6.7: Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Rekorde bei einem Startjahr der ersten Periode im Jahr 1854 (16-Tupel) bzw. 1900 (12-Tupel)

im Programmcode eingelesen werden. Im vorliegenden Material wurde dieser Weg umgesetzt. So wurden mithilfe von Excel die Fakultäten für alle  $n = 1, \dots, 170^1$  erzeugt, im Vektor `fact` gespeichert und komponentenweise deren reziproke Werte bestimmt. Die Werte sind in dem Vektor `factinv` gespeichert. Die beiden Vektoren werden im Startfeld des Arbeitsblattes geladen. Prinzipiell ist für das weitere Vorgehen nur die reziproken Werte von Interesse. Um das Lernmaterial möglichst flexibel zu halten und beispielsweise den Lernenden zukünftig einzelne Berechnungen zu übergeben, wird ein umfangreicheres, über das notwendige hinausgehendes Grundgerüst erstellt. Eine zweite Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten liegt in dem Algorithmus selbst: Er ist rekursiv geschrieben und ruft in jedem Fall von  $1! = k < n$  sich selbst auf. Dabei werden jedes Mal erneut die Wahrscheinlichkeiten berechnet. Die Berechnung ist also sehr kostenintensiv. Eine Abhilfe schafft eine vorherige Bestimmung aller Wahrscheinlichkeiten für  $n = 1, \dots, 170$  und  $k \leq n$ . Bereits beim Start des Arbeitsblattes wird über die Funktion `probyMatrixfill()` eine Matrix `probyMatrixfull` erstellt, die alle Wahrscheinlichkeiten für  $n = 1, \dots, 170$  und  $k \leq n$  speichert.

Damit kann nun jede Wahrscheinlichkeit für die Anzahl an Rekorden  $k$  in einem  $n$ -Tupel berechnet bzw. ausgegeben werden (vgl. Abbildung 6.8). So können sich die Schülerinnen und Schüler auf die Interpretation des Ergebnisses konzentrieren. In beispielhaften jährlichen Temperaturanomaliezeitreihen ergeben sich die folgenden Wahrscheinlichkeiten: Ab dem Jahr 1850 bis 2020, das einem 171-Tupel entspricht, zählen die Lernenden 16 Rekorde. Die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten liegt bei etwa  $0.023465 \cdot 10^{-3}$ . Eine Reduktion des Zeitraums und eine Betrachtung erst ab dem Jahr 1900 liefern sogar mehr Rekorde, nämlich insgesamt 20. Der Grund dafür liegt in der deutlich niedrigeren Temperaturanomalie zu Beginn des 20. Jahrhunderts, die anschließend langsam ansteigt. Im Vergleich dazu liegen die Temperaturanomalien zwischen 1850 und 1900 alle etwa auf einer Höhe. Die Laplace-Wahrscheinlichkeit, 20 Rekorde in einem 121-Tupel zu zählen, liegt bei etwa  $6.9040 \cdot 10^{-9}$ . Werden lediglich die letzten 21 Jahre betrachtet, so war fast jedes zweite Jahr ein Rekordjahr: Es treten neun Rekordjahre auf! Die Wahrscheinlichkeit dafür liegt bei etwa 0.0012337.

<sup>1</sup>Leider kann aber auch hier die Fakultät von 171 nicht mehr bestimmt werden.



**Abbildung 6.8:** Temperaturanomaliezeitreihe mit markierten Rekorden

**Tabelle 6.9:** Schülerlösungen für die Wahrscheinlichkeitsberechnung  $\mathbb{P}(R_n = k)$  verschiedener  $n, k$ 

	Betrachtung der Temperaturzeitreihe ab dem Jahr 1850    ab dem Jahr 1900    ab dem Jahr 2000		
Anzahl der Rekorde $k$	16	20	9
$n$ -Tupel	171	121	21
Wahrscheinlichkeit	$2.3465 \cdot 10^{-5}$	$6.9040 \cdot 10^{-9}$	$1.2337 \cdot 10^{-3}$

Auffällig dabei ist vor allem die Abhängigkeit vom Startjahr. Intuitiv würde man auf kürzeren Zeitspannen weniger Rekorde erwarten, da es weniger Möglichkeiten für das Auftreten von Rekorden gibt. Jedoch kann der Wegfall eines einzelnen Rekordes, der ggf. eher als Ausreißer zu bewerten ist, für eine höhere Anzahl an Rekorden sorgen. Insgesamt kann in allen hier betrachteten Fällen der reine Zufall nicht als Erklärung für das Auftreten der Anzahl an Rekorden dienen.

### 6.3.7 Ausblick und Vorschläge für weiterführende Modellierungsaufgaben

In allen Schritten ist die reale Situation Ausgangs- und Endpunkt der statistischen Analyse. Die selbstständig erforschten Methoden lassen sich auf die Analyse der ursprünglichen Datenreihe mit jährlichen Temperaturanomaliewerten übertragen (vgl. Zusatzaufgabe 3 in Abschnitt 6.3.6).

Das beschriebene Lernmaterial bietet die Möglichkeit ein sehr aktuelles und schülerrelevantes Thema so in den Schulunterricht einzubinden, dass die Lernenden aktiv und selbstständig Forschungsmethoden hautnah erleben. Neben mathematisch-inhaltlichen Anknüpfungspunkten stellen akut auftretende Rekordereignisse eine passende Gelegenheit dar, das Material einzusetzen.

Der Workshop ist bewusst kurz gehalten, da er lediglich für eine Doppelstunde konzipiert ist. So bieten die beschriebenen Zusatzaufgaben erste Öffnungsmöglichkeiten für längere Arbeitsphasen. Damit zusammenhängend könnten Schülerinnen und Schüler Prognosen für die Entwicklung von Temperaturrekorden recherchieren und verständlich aufbereiten. Weiterhin ist es auch möglich, den Workshop auf die Analyse von regionalen Daten zu erweitern. Hierbei untersuchen Lernende, wie sich die Anzahl der (Temperatur-)Rekorde innerhalb von Deutschland oder ihrer Heimatstadt entwickelt. Darüber hinaus könnten Vergleiche zwischen globalen und lokalen Änderungen angestellt werden. Das Lernmaterial kann ebenfalls für einen Einstieg in einen fächerübergreifenden Unterricht oder Projektzeit zum Thema Klima und nachhaltige Entwicklung dienen. So beeinflussen Temperaturrekorde die (lokale) Umwelt. In welchen Bereichen, wie beispielsweise der Wasserversorgung, Flora und Fauna, sind direkte Folgen von Rekordtemperaturjahren sichtbar und welche Möglichkeiten gibt es, negative Auswirkungen für die Zukunft abzumildern? Neben Temperaturrekorden treten auch Rekorde in beispielsweise Hochwasser-, Waldbrand- oder Wirbelsturmzeitreihen auf. Schülerinnen und Schüler könnten entsprechende Daten erkunden, wobei zunächst die Analyse der Daten im Vordergrund steht. Werden diese Ereignisse lokalisiert und in parallel arbeitenden Kleingruppen erforscht, stünde am Ende der Reihe eine Weltkarte zur Verfügung, die Rekordereignisse auf der gesamten Welt widerspiegelt und in welchen Regionen mit bestimmten extremen Wetterereignissen zu rechnen ist. Ergänzend ließe sich untersuchen, wie das Auftreten von Rekordereignissen allgemein in politische Entscheidungen einfließt.

Bereits diese knapp formulierten Vorschläge zeigen die Fülle an weiterführenden Fragestellungen aus diversen Blickwinkeln auf. Darüber hinaus bietet sich auch eine Kombination mit den weiteren

in dieser Arbeit vorgestellten Problemstellungen an. Das vorliegende Lernmaterial könnte dabei als Einstieg ins Thema und Einarbeitung in die Nutzung neuer Computersoftware dienen. Darauf aufbauend könnte die Zeitreihenanalyse auf Trenduntersuchungen erweitert werden, wie sie im Workshop zur Fragestellung *Gibt es den Klimawandel wirklich und ist dieser signifikant?* vorgestellt sind (vgl. Kapitel 5). Ist erst untersucht, ob es den Klimawandel wirklich gibt, so drängt sich häufig die Frage auf, ob der Klimawandel vom Menschen verursacht ist (vgl. Kapitel 7). Abschließend stünde die sehr offene Modellierungsaufgabe, wie viele Menschen auf der Erde leben können (vgl. Kapitel 8). Diese Reihenfolge ist so gewählt, dass zunächst schulnahe Inhalte zu erarbeiten sind und die Modellierung geschlossener ist. Mit jedem weiteren Thema öffnen sich die Inhalte bis hin zu höherer Mathematik auf Universitätsniveau und/oder die Offenheit der Modellierung. So können sich Heranwachsende langsam mit dem Konzept der mathematischen Modellierung vertraut machen.

## 6.4 Erfahrungen mit und Reflexion der Lernmaterialien

Die Testung des Materials erfolgte in drei Schülergruppen. Weitere Veranstaltungen entfielen leider, da der Server, auf dem das Material bereitgestellt wird, zu Beginn der Einheit abstürzte und innerhalb der zur Verfügung stehenden Zeit von 90 Minuten nicht repariert werden konnte. Außerdem waren über einen sehr langen Zeitraum seit Fertigstellung des Materials außerschulische Veranstaltungen seitens des Bildungsministeriums nicht erlaubt. Zwei teilnehmende Gruppen setzten sich aus Motivierten zusammen, die entweder am Nachmittagsprogramm des Programms CAMMP oder im Hector-Seminar teilnahmen. Das Nachmittagsprogramm ist eine schulübergreifende Arbeitsgruppe, die sich wöchentlich für 90 Minuten trifft und verschiedene mathematische Modellierungsprojekte erkundet. Da es sich um ein freiwilliges Angebot für Lernende der Oberstufe handelt, sind hier eher mathematik-begeisterte Heranwachsende zu erwarten. Leider hat die Anzahl der aktiven Lernenden stark abgenommen, sodass lediglich etwa sechs Schülerinnen und Schüler dieses Lernmaterial bearbeiteten. Eine Weiterführung oder Wiederholung des Projekts scheiterte an zu geringen Anmeldungen. Das Hector-Seminar ist ebenfalls ein außerschulisches Angebot, das sich die Förderung hochbegabter junger Menschen in Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik auf die Fahne geschrieben hat. Es spricht bereits sehr junge Heranwachsende an. Die Testung des Materials erfolgte mit einer neunten Jahrgangsstufe. Auch hier ist von einem überdurchschnittlich interessierten Lernklientel auszugehen. Die dritte Gruppe setzt sich aus einer Abschlussklasse zusammen. Ein Physik-Leistungskurs eines Gymnasiums in Esslingen erprobte ebenfalls das Lernmaterial. Etwa die Hälfte des Kurses belegte gleichzeitig auch einen Mathematik-Leistungskurs.

Die betreuenden Personen holten die Reflexion des Lernmaterials gegen Ende der Veranstaltung ein. Die Evaluationen sind jedoch nicht von allen vollständig ausgefüllt worden. Es kann auf Rückmeldungen von 6 Teilnehmenden im Nachmittagsprogramm, 14 Schülerinnen und Schülern im Hector-Seminar und 11 Lernenden im Physik-Leistungskurs zurückgegriffen werden. In allen Kursen hat etwa Hälfte das niedrigere Niveau (AB 2) bzw. das höhere Niveau (AB 3) erfolgreich bearbeitet. Der Erfolg wird einerseits daran gemessen, dass ein Wechsel zwischen den Niveaus nur bei insgesamt zwei Teilnehmenden stattgefunden hat. Andererseits lassen die Rückmeldungen in den Diskussions- und Besprechungsphasen diesen Rückschluss zu. Da die Altersspanne der befragten Gruppen sehr groß ist und zwar ein naturwissenschaftliches, aber nicht zwangsläufig mathematisches Interesse vorliegt, erscheint das Niveau des Workshops für heterogene Kurse

unterschiedlichster Jahrgangsstufen ab der neunten Klasse angemessen zu sein. Die letzte Aufgabe wurde nicht mehr von allen innerhalb der vorgesehenen Zeitspanne von 90 Minuten bearbeitet. Dieser Effekt trat vor allem bei den jüngeren Schülerinnen und Schülern auf. Die Bearbeitung setzte sich in einer anschließenden Sitzung fort. Drei Personen des Physik-Leistungskurses bearbeiteten Zusatzaufgaben. Daher erscheint insgesamt auch die Länge des Workshops angemessen.

Der folgende Abschnitt greift Rückmeldungen auf, in denen einzelne Frageitems auf einer 5-stufigen Likert-Skala einstuft werden sollten. Dabei entspricht der Wert 5 der Beurteilung „sehr gut / in vollstem Maß / trifft voll zu“ und schwächt sich bis auf den Wert 1 ab „schlecht / trifft überhaupt nicht zu“. Angegeben wird das arithmetische Mittel und die Standardabweichung, auf eine Nachkommastelle gerundet.

Die Teilnehmenden bewerteten die Tipps durchweg positiv ( $3.9 \pm 0.9$ ). Auch fanden die Schülerinnen und Schüler die Informationsblätter eher interessant ( $3.8 \pm 0.9$ ) und unterstützend für den Lernfortschritt ( $3.6 \pm 0.9$ ). Insgesamt zwei Personen nutzten die verlinkten Videos, die diesen auch weiter halfen. Mängel in der Verständlichkeit von Hilfestellungen und Informationstexten, die im ersten Durchlauf genannt wurden, konnten offensichtlich beseitigt werden.

Die Schülerinnen und Schüler melden insgesamt ein hohes Interesse am Thema Klimawandel wieder ( $3.9 \pm 0.9$ ), wobei sich viele in ihrer Freizeit mit dem Thema Klimawandel beschäftigen ( $3.5 \pm 1.2$ ). Auf gleichem Niveau liegt das Interesse noch mehr zu dem Thema zu erfahren ( $3.5 \pm 1.0$ ). Dies zeigt insgesamt, dass auch Erweiterungen im Rahmen von ganzen Projekttagen oder -wochen, in denen eine Vertiefung möglich ist, auf Zustimmung stößt. Besonders punktet dabei die gesellschaftliche Relevanz, der Alltagsbezug für die Teilnehmenden selbst und die Aktualität des Themas. Daneben bewerteten die Lernenden positiv, dass sie ihr Stochastikwissen auf ein reales Problem transferieren konnten ( $3.7 \pm 0.8$ ): Sie gaben an, durch die mathematische Beschreibung einen neuen Blickwinkel erhalten zu haben, der eine objektive Auseinandersetzung zulässt (vgl. Schülerzitat aus dem Nachmittagsprogramm: „Ein emotionales und umstrittenes Thema aus so einer objektiven, mathematischen Perspektive zu betrachten“). Hierbei kamen Rückmeldungen, wie beispielsweise „[...] ich es sehr interessant fand, zu sehen, dass die Entwicklung auch mathematisch gesehen ziemlich besorgniserregend ist“ oder „Das Thema Klimawandel kann man sehr gut und anschaulich mit mathematischen Berechnungen untermauern“. Auch lernten die Teilnehmenden, „wie man mit Wahrscheinlichkeitsrechnung wahre Probleme analysieren und Aussagen über auffallende / besondere Ereignisse treffen kann“ (Schülerzitat aus dem Nachmittagsprogramm). Allgemein schätzten die Heranwachsenden die verwendete Mathematik als gesellschaftlich sehr relevant ein ( $4.7 \pm 0.6$ ).

Besonders gut gefielen folgende Punkte:

- bezüglich der Struktur und des Aufbaus
  - die Möglichkeit der Bearbeitung auf unterschiedlichen Niveaustufen
  - eine übersichtliche und hilfreiche Struktur der Arbeitsblätter
  - freies, selbstständiges Arbeiten
  - Beantwortung der Fragen (Betreuung, Hilfestellungen)
  - schnelle Einführung in ein neues Thema

- bezüglich des Inhalts
  - Einführung in das Thema (Vortrag)
  - geeignete Hilfestellungen, die das Verständnis erleichtert haben
  - Unterstützung der mathematischen Inhalte und Codeeingaben durch Tabellen und Graphiken
  - Arbeit an einem praktischen Beispiel, Umgang mit realen Daten und Zusammenhängen
  - Deutlichkeit des Ergebnisses, wie unwahrscheinlich es ist, dass Temperaturrekorde nur rein zufällig so gehäuft auftreten
  - verständliche Erklärtexte
  - gute Einführung in das Thema
  - das Thema ist generell sehr interessant
  - sehr ansprechendes und interessantes Material

Negativ empfanden die Teilnehmenden die kurze Bearbeitungszeit. So hätten sich einige mehr Zeit, aber auch einen tieferen Einblick in das Thema gewünscht. Auffällig war auch die hohe Häufigkeit in der Angabe, dass die Technik nicht einwandfrei funktioniert hat. Es gab außerdem vereinzelt Schwierigkeiten im Umgang mit der Eingabe. Insgesamt wurde sowohl das Lernmaterial ( $4.2 \pm 0.6$ ) als auch die Betreuung ( $4.8 \pm 0.5$ ) mit der Note sehr gut bewertet.

Die beschriebenen Rückmeldungen fallen sehr positiv aus. Es sollten dennoch weitere Durchführungen folgen, um die bisherigen Ergebnisse durch eine größere Anzahl an Bewertungen zu stützen.



# 7

## Erkundung von Strahlungsbilanzgleichungen am Beispiel der Fragestellung „Ist der Klimawandel menschengemacht?“

Bereits in der Sekundarstufe I erleben Schülerinnen und Schüler Grundlagen für eine nachhaltige Entwicklung. So ist

„physikalisches Wissen zum Verständnis sowie zur Lösung vieler globaler Entwicklungs- und Umweltfragen unabdingbar [und legt unter anderem durch die Erarbeitung von] Energie- und den Leistungsbegriff, die Zusammenhänge von Energieübertragung durch elektrische und thermische Prozesse, Strahlungsbilanzen etc. Grundlagen für das globale Denken und Handeln im Sinne der Agenda 21.“ (s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016h, S. 3).

Diese Inhalte formuliert der Bildungsplan des Wahlfachs Informatik, Mathematik und Physik (IMP) stärker aus und empfiehlt „Simulationen zum Treibhauseffekt durchzuführen und deren Ergebnisse mit komplexeren wissenschaftlichen Szenarien zu vergleichen.“ (s. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2018a, S. 4).

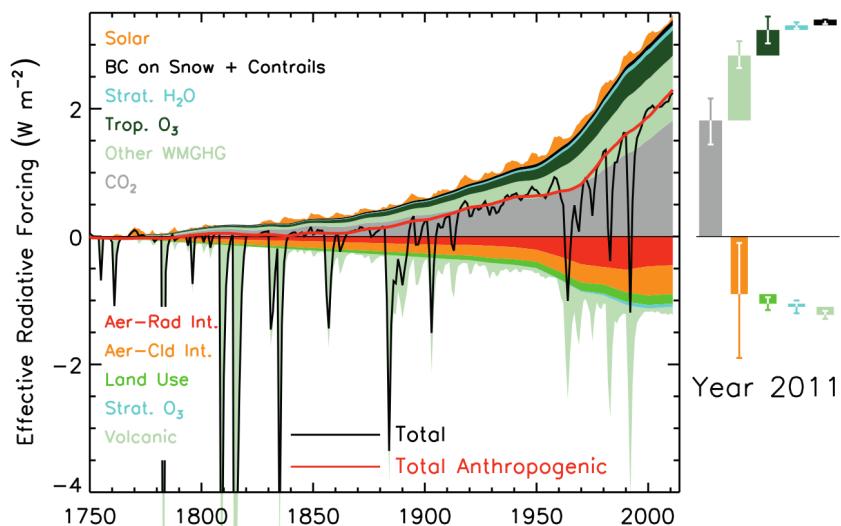
Das nachfolgend beschriebene Lernmaterial greift diese Ziele auf und präsentiert einen Rahmen, in dem Schülerinnen und Schüler die geforderten Inhalte mithilfe der Methoden der mathematischen Modellierung selbstständig erforschen können. Es fordert zu einer Untersuchung der Problemfrage „Ist der Klimawandel menschengemacht?“ auf. Dadurch erleben die Lernenden nicht nur einen fächerübergreifenden Unterricht, sondern auch eine wissenschaftsgeleitete Analyse eines sehr aktuellen Themas, das insbesondere für Schülerinnen und Schüler von hoher Relevanz ist. Das folgende Kapitel zeigt einen Weg auf, sich einer Lösung der Problemstellung mithilfe authentischer (mathematischer) Methoden anzunähern. Darüber hinaus eröffnet dieser Kontext reichhaltige Möglichkeiten zur Fokussierung und Vertiefung diverser Aspekte des Klimawandels. Das Lernmaterial, das sich durch seine große Offenheit von den beiden zuvor beschriebenen Lernmaterialien abhebt, entspricht genau den Kriterien einer guten Modellierungsaufgabe (vgl. Abschnitt 3.1). Es

beinhaltet eine ausformulierte Problemstellung und eine Vorstellung einer geeigneten Lernumgebung inklusive didaktischer Anmerkungen zur Betreuung (vgl. Abschnitt 7.3). Der Abschnitt 7.1 präsentiert für Lehrpersonen benötigte mathematische Grundlagen der partiellen Differentialrechnung zum Verständnis von Strahlungsbilanzgleichungen. Lehrkräfte kommen während ihres Studiums nur selten mit diesen Inhalten in Berührung, da ihr Fokus in den Wahlbereichen verständlicherweise häufig auf schulnäheren Gebieten liegt, wie beispielsweise der Stochastik. Umso wichtiger ist eine adressatengerechte Aufbereitung des Hintergrundwissens, das Lehrpersonen eine sichere Betreuung der Problemstellung ermöglicht. Daher führt der Abschnitt 7.1 ein Lösungsverfahren von partiellen Differentialgleichungen über Kompartimentmodelle, dem sogenannten *Finite-Volumen-Verfahren*, ein. Diese Methode eröffnet Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß einen Zugang zu offenen Problemstellungen diverser Anwendungen, die beispielsweise Strömungsflüsse, Wärmetransport oder Strahlungstransport beschreiben. Beispielhaft wird eine Problemstellung, die den Wärmetransport betrachtet, angerissen (vgl. Abschnitt 7.1.1). Abschnitt 7.2 zeigt das Vorgehen anhand des Strahlungshaushalts der Erde ausführlich auf. Dabei präsentiert er eine um didaktische Kommentare ergänzte Musterlösung. Die hier aufgezeigte Herangehensweise an die Lösung von partiellen Differentialgleichungen über die Finite-Volumen-Methode kann damit Lehrkräften auch als Grundlage weiterer, über den konkreten Anwendungsfall des Energiehaushalts der Erde hinausgehende Problemfragen dienen.

Sowohl das folgende Zitat als auch die Abbildung 7.1 zeigen verschiedene Faktoren auf, die den Strahlungshaushalt der Erde beeinflussen. Dabei differenziert man zwischen natürlichen und anthropogenen Einflüssen. Veränderungen der Sonneneinstrahlung und vulkanische Aktivitäten zählen eindeutig zu den natürlichen Faktoren. Der Mensch beeinflusst diese nicht. Während sich Variationen der Sonneneinstrahlung messen und damit relativ einfach quantifizieren lassen, beeinflussen Vulkanausbrüche die atmosphärischen Konzentrationen von Treibhausgasen, Rußpartikeln und Aerosolen. Auf diese Verhältnisse nimmt aber auch der Mensch Einfluss, in dem er Abgase produziert, neue Landflächen erschließt und bebaut oder Wälder abholzt. Die Überlagerung der unterschiedlichen Einflussfaktoren erschwert die ursachenbezogene Quantifizierung erheblich. Einen weiteren Faktor, der den Strahlungshaushalt der Erde beeinflusst, stellt das Abschmelzen von großen Schnee- und Eisflächen dar. Die direkte Ursache dafür ist eine sich erwärmende Erde. Als Ursachen der Erderwärmung können die zuvor genannten Einflüsse ausgemacht werden: Es zeigt sich deutlich, dass hier ein Kreislauf beschrieben wird und nicht eindeutig zwischen Ursache und Folge unterschieden werden kann.

„[...] Die atmosphärischen Konzentrationen von Treibhausgasen sind auf einem Niveau, wie es seit mindestens 800 000 Jahren noch nie vorgekommen ist. Die Konzentration von Kohlenstoffdioxid ( $\text{CO}_2$ ), Methan ( $\text{CH}_4$ ) und Lachgas ( $\text{N}_2\text{O}$ ) sind alle seit 1750 stark gestiegen (40 %, 150 % bzw. 20 %). [...] Der gesamte anthropogene Strahlungsantrieb für 1750–2011 ergibt einen erwärmenden Effekt von 2.3 [1.1 bis 3.3]  $\text{W}/\text{m}^2$  und ist seit 1970 schneller angestiegen als in den vorhergehenden Jahrzehnten. Kohlenstoffdioxid stellt den größten Beitrag zum Strahlungsantrieb über den Zeitraum 1750 bis 2011 und dessen Trend seit 1970. [...] Der Strahlungsantrieb durch Aerosole, der auch Wolken-Anpassungen enthält, ist besser verstanden und zeigt einen schwächeren Abkühlungseffekt als im AR4<sup>1</sup>. Der Strahlungsantrieb durch Aerosole über den Zeitraum 1750–2011 wird auf –0.9 [–1.9 bis –0.1]  $\text{W}/\text{m}^2$  geschätzt (mittleres

<sup>1</sup>Der AR4 beschreibt den vierten Sachstandsbericht des IPCC, der im Jahr 2007 veröffentlicht wurde (engl. *Assessment Report*). Damit nimmt die dargestellte Aussage Bezug zu dem letzten zuvor publizierten Bericht (vgl. Abschnitt 2.2).



**Abbildung 7.1:** Zeitliche Entwicklung der anthropogenen und natürlichen Strahlungseinflüsse (s. IPCC, 2013a, S. 699)

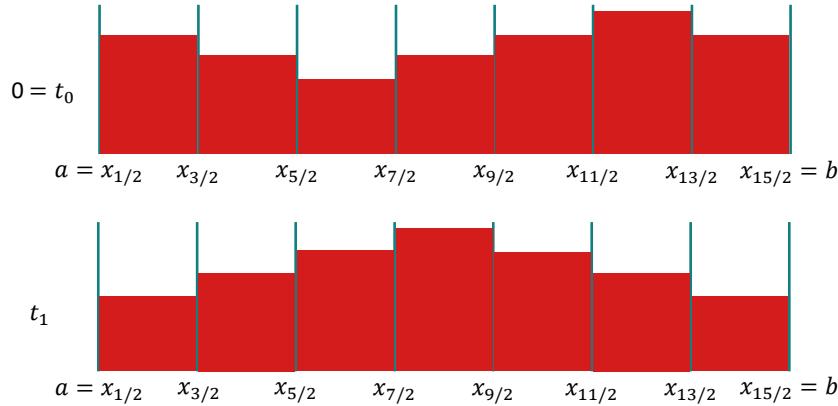
Vertrauen<sup>2</sup>). Der Strahlungsantrieb durch Aerosole hat zwei konkurrierende Komponenten: einen dominanten Abkühlungseffekt durch die meisten Aerosole und ihre Wolken-Anpassungen sowie einen erwärmenden Beitrag durch die Absorption von Sonneneinstrahlung durch Rußpartikel, welcher einen Teil der Abkühlung aufhebt. [...] Veränderungen der Sonneneinstrahlung und vulkanische Aerosole verursachen einen natürlichen Strahlungsantrieb“ (s. IPCC, 2016, S. 44).

Es ist das Ziel des Lernmaterials, ein einfaches Klimamodell zu entwickeln, das einerseits eine realistische Berechnung der Durchschnittstemperatur der Erde erlaubt. Das Modell offenbart den Einfluss des Treibhauseffekts auf die Erdoberflächentemperatur. Andererseits ermöglicht es eine Quantifizierung der Einflüsse der Faktoren auf die globale Erdoberflächentemperatur. Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten, dass verschiedene Ursachen auf dieselben Größen einwirken, ist eine detailgetreue Zuordnung der Effekte in die beiden Kategorien „anthropogen“ und „natürlich“ nicht möglich. Die Herangehensweise eröffnet jedoch einen Eindruck der sehr unterschiedlich großen Auswirkungen der genannten Faktoren.

## 7.1 Das Finite-Volumen-Verfahren

Die mathematische Modellierung von physikalischen Prozessen beruht (häufig) auf physikalischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Solche Bilanzgleichungen betrachten Änderungsraten der involvierten physikalischen Größen, die die Veränderung der Größen in Zeit und Ort beschreiben. Dadurch entstehen unter einer mathematischen Betrachtung Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die diese Prozesse abbilden. Anwendungen finden solche mathematische Beschreibungen von Bilanzgleichungen auf verschiedensten Gebieten, wie beispielsweise

<sup>2</sup>Jedes Ergebnis beruht auf einer Beurteilung der zugrundeliegenden Belege und der Übereinstimmung. Ein Vertrauensniveau wird unter der Verwendung von fünf Abstufungen angegeben: sehr gering, gering, mittel, hoch und sehr hoch.



**Abbildung 7.2:** Zerlegung des Orts- und Zeitraumes nach der Finite-Volumenmethode

bei Erwärmungs- oder Abkühlprozessen, beim Gießen oder Zerspanen von Bauteilen, in der Bestimmung von Strömungsverhältnissen in Flüssen für den Hochwasserschutz oder an Flugkörpern, in der Medizintechnik beim Bestrahlen von Tumorgewebe, ebenso wie in der Meteorologie. Ganz allgemein beschreibt eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div} F(\mathbf{x}, \psi(t, \mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}} \psi(t, \mathbf{x}), \dots) = 0 \quad (7.1)$$

die Dichte einer Größe, zum Beispiel die Massendichte oder Energiedichte, im Raum oder Medium. Dabei bezeichnet  $\psi(t, \mathbf{x})$  jene Dichte, die sich zur Zeit  $t \in \mathbb{R}^+$  an einem Ort  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  befindet.  $F$  ist eine beliebige, gegebene Funktion, der sogenannte Fluss, die die (unbekannte) Dichte und deren partiellen Ableitungen miteinander verknüpft. Der folgende Abschnitt thematisiert die Finite-Volumen-Methode als ein mögliches Lösungsverfahren für solche Gleichungen.

Die Erörterung beschränkt sich einfachheitshalber auf einen eindimensionalen Ort, das heißt  $\mathbf{x} \in X = [a, b]$ . Das Finite-Volumen-Verfahren approximiert die Lösung der Differentialgleichung, indem es die Verteilungsfunktion  $\psi$  in Zeit und Ort diskretisiert und mit einer endlichen Anzahl an Koeffizienten darstellt. Die Strategie besteht darin, den physikalischen Ortsbereich  $X$  in  $N_x$  Zellen mit  $X_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  mit  $a = x_{1/2} < \dots < x_{N_x+1/2} = b$  zu zerlegen. Die dadurch entstehenden Zellen heißen *Kontrollvolumina*. Ihre Breite definiert sich durch  $\Delta x_i := x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ . Analog wird auch der Zeitraum  $T = [t_0, t_{\text{Ende}}]$  in  $N_t$  Zellen mit  $0 = t_0 < \dots < t_{N_t} = t_{\text{Ende}}$  zerlegt. Die diskreten Zeitschritte besitzen die Schrittweite  $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$ . Die Abbildung 7.2 stellt diesen Diskretisierungsansatz beispielhaft für die beiden Zeitschritte  $t_0$  und  $t_1$  und 7 Kontrollvolumina dar. Interpretiert man die Teilchendichte als eine Art „Menge von Teilchen“, gibt die durch die rote Einfärbung dargestellte Höhe die Menge an Teilchen in jedem Kontrollvolumen an. Eine größere Höhe bedeutet demnach eine größere Teilchenzahl in dem Kompartiment. Die Verteilungsdichte innerhalb des Kontrollvolumens ist homogen und für jeweils einen Zeitschritt konstant (vgl. Abbildung 7.2, zur Zeit  $t_0$ ). Sie ändert sich aber in Abhängigkeit der Nachbarzellen im Laufe der Zeit (vgl. Abbildung 7.2, zur Zeit  $t_1$ ). Insgesamt nähert diese Form der Diskretisierung die wahre Lösung, nämlich die Teilchendichteverteilung in dem betrachteten Raum, an. So ergibt sich für die gesamte kontinuierliche Dichteverteilung eine diskrete Approximation. Für eine Zelle  $X_i$  approximiert das

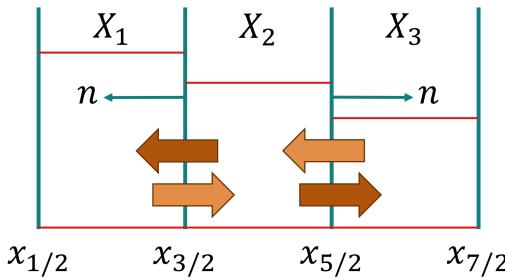


Abbildung 7.3: Modellierung des Flusstermes in der Finite-Volumenmethode

Zellmittel

$$\psi_i(t) := \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi(t, x) dx \quad (7.2)$$

zur Zeit  $t$  die gesuchte Teilchendichte. Angewandt auf Gleichung (7.1) ergibt sich unter einer Diskretisierung des Raumes durch Integration über die Zelle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  die Darstellung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) dx + \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} F(x, \psi(t, x), \dots) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \psi_i(t) + \frac{1}{\Delta x_i} (F_{i+1/2}(x, \psi(t, x), \dots) - F_{i-1/2}(x, \psi(t, x), \dots)) = 0. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $F_{i+1/2}$  bzw.  $F_{i-1/2}$  beschreiben die Flüsse über die Zellgrenzen  $x_{i+1/2}$  bzw.  $x_{i-1/2}$ . Sie müssen modelliert werden, da sie von der unbekannten, gesuchten Verteilungsdichte abhängen. Beispielhaft veranschaulicht Abbildung 7.3 für  $i = 2$  die Flussbetrachtung. Die blauen Pfeile zeigen die Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  an, die immer vom betrachteten Volumen aus nach außen gerichtet sind. Die orangenen Pfeile stellen den Fluss dar, der in die Zelle  $X_2$  hinein fließt: Da er jeweils der Normalenrichtung entgegengesetzt ist, folgt  $\mathbf{n} \cdot \Omega < 0$ . Die braunen Pfeile symbolisieren den Fluss, der aus der Zelle  $X_2$  hinaus strömt. Er zeigt jeweils in die gleiche Richtung wie die Normale. Es ist  $\mathbf{n} \cdot \Omega > 0$ .

Für die Zeitdiskretisierung kann beispielsweise der Ansatz

$$\psi_i(t) \approx \frac{\psi_i(t_{k+1}) - \psi_i(t_k)}{\Delta t_k} \quad (7.3)$$

gewählt werden. Für eine weitere Lösungsbestimmung benötigt die Funktion  $F$  konkretere Formen.

### 7.1.1 Das Finite-Volumen-Verfahren am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung

Als ein Beispiel wird die (homogene) Wärmeleitungsgleichung betrachtet, für die

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(t, x) = 0$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  gilt. Die gesuchte Lösung  $\psi$  entspricht der Temperaturverteilung. Es ist damit

$$F = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \psi(t, x).$$

Approximiert man den Fluss  $F$  über einen Diskretisierungsansatz, indem der Ort nach obiger Ausführung in Kontrollvolumen zerlegt wird, so beschreibt die Dichtevertelungsdifferenz zweier benachbarter Volumina näherungsweise für den Fluss über die gemeinsame Zellgrenze zur Zeit  $t$  mit

$$F_{i+1/2}(t) \approx -\lambda \frac{\psi_{i+1}(t) - \psi_i(t)}{\Delta x}. \quad (7.4)$$

In der Wärmeleitungsgleichung stellt der Fluss  $F(t, x)$  den Wärmestrom  $\dot{q}$  und die Dichtevertelung  $\psi$  die Temperaturverteilung  $T$  dar. Der Wärmestrom über eine Grenze  $x_{i+1/2}$  ergibt sich aus dem Temperaturunterschied der beiden benachbarten Zellen. Der Parameter  $\lambda$  beschreibt die Wärmeleitfähigkeit. Er ist über das Material, in dem die Temperaturverteilung ermittelt wird, bestimmt.

Gleichung (7.4) stellt eine diskrete Beschreibung der Wärmeleitungsgleichung dar, mit der Oberstufenschülerinnen und -schüler Temperaturverteilungen beispielsweise in Werkstücken ermitteln können. Ausgehend von der Flussgleichung wird zunächst die Zeitabhängigkeit vernachlässigt. Strömt der Wärmefluss über eine Grenzfläche  $A$ , so ergibt sich die Gleichung (7.4) in der Form

$$\dot{q} = \lambda A \frac{T_2 - T_1}{d}, \quad (7.5)$$

wobei  $T_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , die Temperatur zweier benachbarter Zellen darstellt. Mithilfe dieser Gleichung, die dem *Fourier'schen Gesetz* entspricht, können Lernende die Temperaturverteilung beispielsweise in einem zylindrischen Werkstück mit gegebener Wärmeleitfähigkeit bestimmen, wobei im Mittelpunkt des Zylinders eine Wärmequelle sitzt.

Abbildung 7.4 präsentiert die Aufgabenstellung, die die Heranwachsenden an die Problemstellung heranführt.

Aus der Aufgabenstellung leiten die Lernenden folgende Annahmen ab:

- Das Werkstück ist homogen (das heißt, dass die Temperaturverteilung in jedem Volumenkompartment homogen und unabhängig von der Höhe ist) und speichert keine Energie.
- Die Temperatur breitet sich winkelunabhängig aus.
- Die Energie bleibt erhalten.
- Die Anfangstemperatur ist (zeitlich) konstant.

Im vorliegenden Anwendungsfall entsprechen die Zellvolumina Kreisringen mit den Grenzradien  $r_{i-1/2}$  und  $r_{i+1/2}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , um den Zylindermittelpunkt (vgl. Abbildung 7.5). Die Kreisringe sind äquidistant gewählt, sodass der Abstand zwischen zwei Kreisringen durch  $r_{i+1/2} - r_{i-1/2} =: \Delta r$

## Understanding the torrefaction of biomass

Jonas Kusch



Die Torrefizierung von Biomasse kann man z.B. als Rösten von Holz verstehen. Durch die Torrefizierung erhält das Material einige wichtige Eigenschaften: Das geröstete Holz hat eine höhere Energiedichte von  $18 - 20 \text{ GJ/m}^3$  anstatt der ursprünglichen  $10 - 12 \text{ GJ/m}^3$ . Dies sorgt für sinkende Transportkosten von bis zu 50 Prozent. Des Weiteren besitzt die torrefizierte Biomasse eine homogene Materialverteilung und hat gute Zerstäubungseigenschaften. Hieraus resultieren verbesserte Verbrennungseigenschaften. Auch ist das torrefizierte Material wasserabweisend und wird nicht von biologischen Prozessen (wie zum Beispiel Verrottung) beeinflusst, was die Lagerung erheblich vereinfacht.

Die Prozesse, die bei der Torrefizierung auftreten sind noch nicht genau bekannt. So entstehen während der Torrefizierung unbekannte Wärmequellen im Holz, die dafür sorgen, dass das Holz zu heiß wird. Dies stellt ein Sicherheitsrisiko dar, da das torrefizierte Holz beim Kontakt mit Sauerstoff in Brand geraten kann. Um die Wärmequellen besser zu verstehen, wurde der Torrefizierungsprozess vom Lehrstuhl für Wärme und Stoffübertragung im Experiment genauer untersucht. Hierfür wurde ein Holzzylinder mit Messpunkten versehen, mit denen die Temperatur während des Prozesses der Torrefizierung ermittelt wurde. Die gemessenen Temperaturen deuten auch hier auf eine unbekannte Wärmequelle hin.



### Problem:

Mithilfe der gemessenen Temperaturen im Holzzylinder soll die Stärke der Wärmequelle ermittelt werden. Hierfür muss ein Computerprogramm geschrieben werden, welches die Temperaturverteilung im Zylinder bestimmt. Die Temperatur soll nur von der radialen Koordinatenachse abhängen und wird nur durch die Außentemperatur und eine gegebene Wärmequelle im Holz beeinflusst. Die durch die Wärmeleitung im Holz übertragene Wärmeleistung  $\dot{Q}$  kann durch das Fouriersche Gesetz

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \frac{T_2 - T_1}{d}$$

beschrieben werden. Hierbei ist  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $A$  ist die Fläche durch die die Wärme strömt,  $T_i$  ist die Temperatur an Position  $i$  und  $d$  ist der Abstand zwischen Position 1 und 2. Die Wärmeleitfähigkeit des untersuchten Holzes ist  $0,18 \text{ W/m}^2 \text{K}$

Mithilfe des Programmes sollen folgende Fragen beantwortet werden: Wie stark ist die Wärmequelle? Wo tritt die Wärmequelle auf? Wie hängt die Wärmequelle von der Außentemperatur und den

Materialeigenschaften ab? Wie kann man sich die Existenz dieser Quelle physikalisch erklären und wie kann sie mathematisch modelliert werden?

**Abbildung 7.4:** Problemstellung der CAMMP week 2016 zur Torrefizierung von Biomasse, in der die Wärmeleitungsgleichung genutzt wird, Seite 1–2

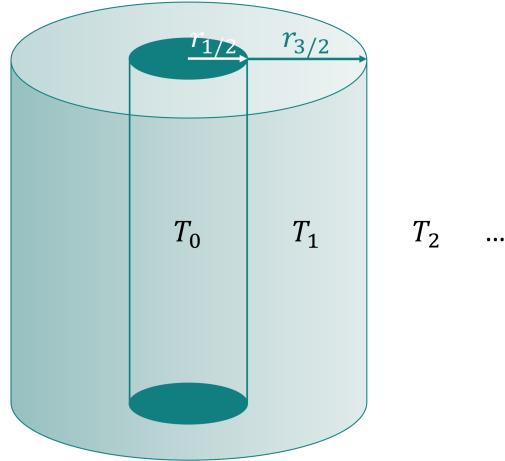


Abbildung 7.5: Zylindrisches Werkstück, räumlich in Kreisringe diskretisiert

gegeben ist. Die Temperatur innerhalb eines Kreisrings wird durch  $T_i$  angenähert. Der Wärmestrom über die Grenze  $r_{i+1/2}$  ist nach Gleichung (7.5) durch

$$\dot{q}(r_{i+1/2}) = 2\pi r_{i+1/2} \lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta r} \quad (7.6)$$

beschrieben. Insgesamt muss in jedem Kompartiment die Energieerhaltung gelten, das heißt, die einströmenden Wärmeflüsse sind gleich den ausströmenden. Für das innerste Zylindervolumen ergibt sich die Besonderheit, dass der einströmende Wärmefluss nur durch die externe Wärmequelle  $W$  gegeben ist. Diese Eigenschaft stellt eine Randbedingung dar. Allein mit diesen Überlegungen können die Lernenden über die Energiebilanz

$$\dot{q}(r_{i+1/2}) - \dot{q}(r_{i-1/2}) + W = 0$$

durch Einsetzen der Gleichung (7.6) und Umstellen die Temperatur in jedem Kreisring iterativ über

$$T_{i+1} = \underbrace{\frac{W}{2\pi\lambda} \frac{\Delta r}{r_{i+1/2}}}_{=:a_i} + \underbrace{\left(1 - \frac{r_{i-1/2}}{r_{i+1/2}}\right)}_{=:b_i} T_i - \underbrace{\frac{r_{i-1/2}}{r_{i+1/2}}}_{=:c_i} T_{i-1}$$

bestimmen. Die Vorfaktoren  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  richten sich nach der gewählten Diskretisierung.

Ist wie in der Aufgabenstellung beschrieben eine Temperaturmesskurve in Abhängigkeit des Radius gegeben und die Wärmequelle unbekannt, so können die Heranwachsenden durch Variieren des Wertes der Wärmequelle die gegebene Messkurve annähern und so die Wärmequelle bestimmen. Außerdem können Materialeigenschaften durch Ändern der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  untersucht werden.

Um die Zeitabhängigkeit der Temperaturverteilung zu berücksichtigen, kann der Zeitdiskretisierungsansatz aus Gleichung (7.3) gewählt werden. Für die Temperatur in einem Kreisring  $i$ ,

$i = 1, \dots, n$ , gilt dann approximativ

$$\frac{\partial}{\partial t} T_i(t_k) \approx \frac{T_i(t_{k+1}) - T_i(t_k)}{\Delta t_k}$$

mit den Zeitschritten  $t_k, k = 0, \dots, m$ . Berücksichtigung findet diese Modellerweiterung, indem nach jedem Iterationsschritt der Ortsdiskretisierung ein zeitliches Update der Temperatur vorgenommen wird.

Die Finite-Volumen-Methode eignet sich ebenfalls als Diskretisierungsverfahren für die Strahlungstransportgleichung. Der folgende Abschnitt präsentiert diesen Anwendungsfall.

## 7.2 Die Finite-Volumen-Methode am Beispiel der Strahlungstransportgleichung

Abschnitt 2.4.4 führt die Strahlungstransportgleichung ein, die an dieser Stelle aufgegriffen wird. Die Strahlungstransportgleichung ist nach Gleichung (2.2) durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) \\ &= -\sigma_t(\mathbf{x}, \lambda) \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) + \frac{\sigma_s(\mathbf{x}, \lambda)}{4\pi} \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}', \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}' + \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_{\mathbf{x}}, \lambda) + S \end{aligned} \quad (7.7)$$

gegeben. Eine Erklärung der Gleichung findet sich in Abschnitt 2.4.4. Die Strahlungstransportgleichung wirkt damit deutlich herausfordernder als die partielle Differentialgleichung des vorherigen Abschnitts. Die Strahlungstransportgleichung stellt eine inhomogene Integro-Differentialgleichung dar. Definiert man

$$\rho(\mathbf{x}, \lambda, t) = \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}$$

als neue Teilchendichte mit dem zugehörigen Fluss

$$F(\mathbf{x}, \lambda, t) = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \cdot \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}.$$

Die Integration über die Ausbreitungsrichtung  $\boldsymbol{\Omega}$  wird durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} + \nabla_{\mathbf{x}} \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \cdot \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} \\ &= -\sigma_t(\mathbf{x}, \lambda) \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} + \frac{\sigma_s(\mathbf{x}, \lambda)}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{4\pi} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}', \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Omega}' \\ &+ \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_{\mathbf{x}}, \lambda) \int_{4\pi} 1 d\boldsymbol{\Omega} + S \int_{4\pi} 1 d\boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

beschrieben und führt zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) + \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \lambda, t) \\ &= -\sigma_t(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) + \sigma_s(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) + 4\pi \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_{\mathbf{x}}, \lambda) + 4\pi S. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Für die Anwendung des Finite-Volumen-Verfahrens auf die neue Strahlungstransportgleichung (7.8) sei das örtliche Zellmittel  $\rho_i(t)$  analog zu Gleichung (7.2) definiert. Darüber hinaus definiert man

$$\sigma_i(\lambda) \rho_i(t) := \frac{1}{|X_i|} \int_{X_i} \sigma(\mathbf{x}, \lambda) \rho(t, \mathbf{x}) d^3x$$

für  $\sigma \in \{\sigma_a, \sigma_s, \sigma_t\}$ . Dann führt die Integration der Strahlungstransportgleichung (2.2) über ein Zellvolumen  $X_i \in \mathbb{R}^3$  zu

$$\begin{aligned} & \int_{X_i} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) d^3x + \int_{X_i} \operatorname{div} F(\mathbf{x}, \lambda, t) d^3x \\ &= \int_{X_i} -\sigma_t(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) d^3x + \int_{X_i} \sigma_s(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) d^3x + 4\pi \int_{X_i} \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_{\mathbf{x}}, \lambda) d^3x \\ &+ \int_{X_i} S d^3x. \end{aligned}$$

Ausnutzen des Gauß'schen Integralsatzes liefert

$$\begin{aligned} & \frac{|X|}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i(\lambda, t) + \int_{\partial X_i} \mathbf{n} \cdot F(\mathbf{x}, \lambda, t) d^2x \\ &= -|X| \sigma_{t,i}(\lambda) \rho_i(\lambda, t) + |X| \sigma_{s,i}(\lambda) \rho_i(\lambda, t) + 4\pi |X| \sigma_{a,i}(\lambda) B(T_i, \lambda) + |X| S. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ersetzt man nun noch den Fluss, so ergibt sich

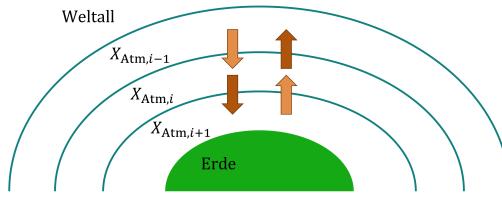
$$\begin{aligned} & \frac{|X|}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i(\lambda, t) + \int_{\partial X_i} \int_{4\pi} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} d^2x \\ &= -|X| \sigma_{t,i}(\lambda) \rho_i(\lambda, t) + |X| \sigma_{s,i}(\lambda) \rho_i(\lambda, t) + 4\pi |X| \sigma_{a,i}(\lambda) B(T_i, \lambda) + |X| S. \end{aligned}$$

Für die Modellierung des Flussterms nutzt man folgende Fallunterscheidung:

$$\text{Falls } \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \begin{cases} < 0, & \text{so strömt der Fluss in das Zellvolumen } X_i \text{ hinein,} \\ > 0, & \text{so strömt der Fluss aus dem Zellvolumen } X_i \text{ hinaus.} \end{cases}$$

Abbildung 7.6 präsentiert die Flussbetrachtung im Anwendungsfall. Die orangenen Pfeile stellen erneut den Fluss dar, der in die Zelle  $X_i$ , hier ein Atmosphärenkompartiment, hinein fließt: Da er jeweils der Normalenrichtung entgegengesetzt ist, folgt  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0$ . Die braunen Pfeile symbolisieren den Fluss, der aus der Zelle  $X_i$  in seine Nachbarzellen  $X_{i-1}$  und  $X_{i+1}$  hinaus strömt. Er zeigt in die gleiche Richtung wie die Normale. Es ist  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$ .

Der Gesamtfluss für eine Zelle  $X_i$  ermittelt sich aus der Summe der einströmenden und der ausströmenden Flüsse über alle Zellgrenzen. Da im Anwendungsfall jedes Kontrollvolumen nur



**Abbildung 7.6:** Modellierung des Flusstermes der Finite-Volumenmethode im Anwendungskontext des Strahlungshaushalts der Erde

zwei Nachbarzellen besitzt, gilt

$$\begin{aligned} F(X_i) &= \text{„Fluss in die Zelle hinein“} - \text{„Fluss aus der Zelle hinaus“} \\ &= \sum_{j=1}^2 \ell_{ij} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_j(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} - \sum_{j=1}^2 \ell_{ij} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_i(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}, \quad (7.10) \end{aligned}$$

wobei  $j = 1, \dots, 2$  die Nachbarvolumina „durchnummeriert“ und  $\ell_{ij}$  die Länge der gemeinsamen Kante zwischen den Volumina  $X_i$  und  $X_j$  beschreibt.

In dem in Abbildung 7.3 dargestellten Beispiel besitzt die Zelle  $X_i$  zwei Nachbarvolumina:  $X_{i-1}$  und  $X_{i+1}$ . Der Gesamtfluss für die Zelle  $X_i$  ermittelt sich durch

$$\begin{aligned} F(X_i) &= \underbrace{\ell_{i,i-1} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_{i-1}(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} + \ell_{i,i+1} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_i(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}}_{\text{linker orangener Pfeil}} \\ &\quad - \underbrace{\ell_{i,i-1} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_{i-1}(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega} - \ell_{i,i+1} \int_{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} |\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}| \psi_i(\boldsymbol{\Omega}, \lambda, t) d\boldsymbol{\Omega}}_{\text{rechter orangener Pfeil}}. \end{aligned}$$

linker brauner Pfeil rechter brauner Pfeil

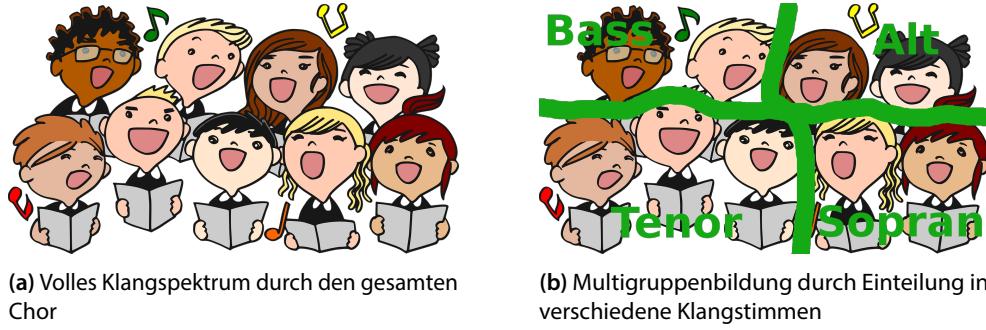
Für die Modellierung der Flüsse nimmt man im Anwendungsfall des Strahlungshaushalts der Erde an, dass  $\psi_i$  Planck'sch verteilt ist, das heißt die Dichte kann über das Planck'sche Strahlungsgesetz (2.1) bei einer bestimmten Temperatur  $T_i$  ausgedrückt werden. Daraus ergeben sich der Fluss  $F$  und  $\rho$  als Funktionen der Temperatur, was letztendlich zu einem Gleichungssystem für die Temperaturen der einzelnen Kompartimente führt. Zudem wird ein stationäres, das bedeutet zeitunabhängiges, System betrachtet und die Streuung vernachlässigt. Darüber hinaus wird angenommen, dass es keine Quellterme gibt. Damit vereinfacht sich die Gleichung (7.8) zu

$$\nabla_x F(\mathbf{x}, \lambda, t) = -\sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) \rho(\mathbf{x}, \lambda, t) + 4\pi \sigma_a(\mathbf{x}, \lambda) B(T_x, \lambda).$$

Nutzt man das Finite-Volumen-Verfahren aus, so ergibt mit Gleichung (7.9) sich eine Strahlungsflussgleichung für ein Zellvolumen  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit

$$\int_{\partial X_i} \mathbf{n} \cdot F(\mathbf{x}, \lambda) d^2x = -|X| \sigma_{a,i}(\lambda) \rho_i(\lambda) + 4\pi |X| \sigma_{a,i}(\lambda) B(T_i, \lambda). \quad (7.11)$$

Diese Gleichung liefert die Grundlage, mit der die Flussterme in Gleichung (7.10) modelliert werden können.



**Abbildung 7.7:** Analogie der Multigroup-Methode angewandt auf einen Chor. Entnommen von Rezende, 2018.

Die Strahlungstransportgleichung (7.7) hängt weiterhin von der Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung ab. Auch hier eignet sich eine Diskretisierung zur Dimensionsreduktion, nämlich die Multigroup-Methode. Man stelle sich dafür vor, das Lichtspektrum teile sich in bestimmte Spektralbereiche ein. Innerhalb eines Intervalls ist das Absorptions-, Emissions- und Reflexionsvermögen eindeutig festgelegt. Sie unterscheiden sich jedoch zwischen den Bereichen. Für eine bessere Übersichtlichkeit sei die Verteilungsdichte  $\psi(\mathbf{x}, \Omega, \lambda, t)$  durch  $\psi_\lambda$  abgekürzt. Der Index  $\lambda$  zeigt weiterhin die Abhängigkeit von der Wellenlänge an. Alle weiteren Parameter bleiben in der Multigroup-Methode unberührt, weshalb auf ihre Angabe in der Multigroup-Methode ohne Informationsverlust verzichtet wird. Die Multigroup-Methode teilt das Wellenlängenspektrum in  $M$  geeignete Intervalle  $\Lambda_g := [\lambda_{\min}^g, \lambda_{\max}^g]$ ,  $g = 1, \dots, M$ , ein. Diese sind in Anlehnung an den jeweiligen Anwendungsfall entsprechend zu wählen. Für eine Analogie aus der Musik denke man an einen Chor (vgl. Abbildung 7.7(a)). Alle Sängerinnen und Sänger zusammen erzeugen ein großes Klangspektrum. Eine geläufige Einteilung – sogesehen eine Multigruppierung – basiert auf den Tonhöhen (und damit den Wellenlängen der Töne), die die jeweiligen Chormitglieder singen können: Der Sopran fasst hohe und der Alt tiefe Frauenstimmen zusammen. Im Tenor singen hohe und im Bass tiefe Männerstimmen. Damit erhält man vier Multigruppen (vgl. Abbildung 7.7(b)). Die Diskretisierung der Wellenlänge im Strahlungstransport stellt sich analog dar. Jede Gruppe erzeugt eine eigene Strahlungstransportgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \psi_\lambda d\lambda + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \psi_\lambda d\lambda \\ &= \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} -\sigma_{t,\lambda} \psi_\lambda d\lambda + \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \int_{4\pi} \frac{\sigma_{s,\lambda}}{4\pi} \psi_\lambda d\Omega' d\lambda + \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{a,\lambda} B_\lambda d\lambda + \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} S_\lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Für  $M$  Multigruppen erhält man  $M$  Gleichungen. Zur weiteren Verwendung der Gleichungen definiert man

$$\psi^g := \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \psi d\lambda \quad \text{und} \quad S^g := \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} S d\lambda.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^g + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla_x \psi^g \\ &= - \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{t,\lambda} \psi_\lambda d\lambda + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{s,\lambda} \psi_\lambda d\lambda d\boldsymbol{\Omega}' + \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{a,\lambda} B_\lambda d\lambda + S^g. \end{aligned}$$

Um die Integrale zu bestimmen, benötigt man eigentlich die Lösung von  $\psi_\lambda$ . In den Termen auf der rechten Seite sind zusätzlich die Opazitäten  $\sigma_{t,\lambda}$ ,  $\sigma_{s,\lambda}$  und  $\sigma_{a,\lambda}$  und die Planck'sche Strahlung  $B_\lambda$  von der Wellenlänge abhängig. Die Integration ist ohne Kenntnis der Lösung unmöglich. Abhilfe schafft die Ergänzung einer Eins. So bildet man für die Opazitäten einen durchschnittlichen Wert. Dazu definiert man

$$\int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{t,\lambda} \psi_\lambda d\lambda = \underbrace{\frac{\int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{t,\lambda} \psi_\lambda d\lambda}{\int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \psi_\lambda d\lambda}}_{:=\sigma_t^g} \underbrace{\int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \psi_\lambda d\lambda}_{=\psi^g} = \sigma_t^g \psi^g.$$

Analog bildet man

$$\int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{s,\lambda} \psi_\lambda d\lambda = \sigma_s^g \psi^g \quad \text{und} \quad \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} \sigma_{a,\lambda} \psi_\lambda d\lambda = \sigma_a^g \psi^g.$$

Die hier dargestellten Durchschnitte

$$\psi^g = \int_{\lambda_{\min}^g}^{\lambda_{\max}^g} B_\lambda d\lambda$$

heißen gewichtete *Planck'sche Durchschnitte*, wobei  $B$  durch das Planck'sche Strahlungsgesetz (2.1) definiert ist. Man beachte, dass für den neuen Wirkungsquerschnitt  $\sigma_t^g$  nicht mehr die reine Addition des Streuungs- und des Absorptionsvermögens gilt.

Insgesamt liefert dieses Vorgehen die Strahlungstransportgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi^g + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla_x \psi^g = -\sigma_t^g \psi^g + \frac{\sigma_s^g}{4\pi} \int_{4\pi} \psi^g d\boldsymbol{\Omega}' + \sigma_a^g B^g + S^g. \quad (7.12)$$

Da die Dichtevertteilung  $\psi_\lambda$  gesucht und damit unbekannt ist, muss zur Lösung dieser Transportgleichung eine Annäherung getroffen werden. Die Annäherung unterscheidet sich je nach Anwendungsgebiet.

Verknüpft man die Multigroup-Methode mit dem Finite-Volumen-Verfahren, das heißt die Gleichungen (7.9) und (7.12), ergibt sich die Strahlungsgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{|X|}{c} \frac{\partial}{\partial t} \rho_i^g(t) + \int_{\partial X_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^g(\mathbf{x}, t) d^2x \\ &= -|X| \sigma_{t,i}^g \rho_i^g(t) + |X| \sigma_{s,i}^g \rho_i^g(t) + 4\pi |X| \sigma_{a,i}^g B^g(T_i) + |X| S^g. \end{aligned}$$

In der Anwendung auf den Strahlungshaushalt der Erde diskretisiert die Multigroup-Methode das Wellenlängenspektrum auf vier Intervallen. Das erste Intervall beschreibt die solare Strahlung mit  $\Lambda_1 = [\lambda_{\min}^1, \lambda_{\max}^1] = [\lambda_{\min}^{\text{solar}}, \lambda_{\max}^{\text{solar}}] \approx (240, 780) \text{ nm}$ . Das zweite Wellenlängenintervall behandelt die terrestrische Strahlung mit  $\Lambda_2 = [\lambda_{\min}^2, \lambda_{\max}^2] = [\lambda_{\min}^{\text{terra}}, \lambda_{\max}^{\text{terra}}] \approx (780, 3000) \text{ nm}$ . Alle Wellenlängen kleiner als  $\lambda_{\min}^{\text{solar}}$  fasst das dritte Intervall zusammen. Das vierte Intervall beinhaltet alle Wellenlängen größer als  $\lambda_{\max}^{\text{terra}}$ . Da die Sonne die einzige Strahlungsquelle darstellt und die Erde und die Atmosphäre lediglich im Wellenlängenbereich des zweiten Intervalls strahlen, tritt in diesem Anwendungsfall keine Strahlung im dritten oder vierten Wellenlängenspektrum auf: Sie liefern keinen Beitrag zur Strahlungsverteilungsdichte bzw. dem Strahlungsfluss. Die Anwendung der Multigroup-Methode auf die Gleichung (7.11) liefert das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \int_{\partial X_i} \mathbf{n} \cdot F^{\text{solar}}(\mathbf{x}) d^2x & = -|X|\sigma_{a,i}^{\text{solar}}\rho_i^{\text{solar}} + 4\pi|X|\sigma_{a,i}^{\text{solar}}B^{\text{solar}}(T_i) \\ & = |X|\sigma_{a,i}^{\text{solar}}(B^{\text{solar}}(T_i) - \rho_i^{\text{solar}}) \\ \\ \int_{\partial X_i} \mathbf{n} \cdot F^{\text{terra}}(\mathbf{x}) d^2x & = -|X|\sigma_{a,i}^{\text{terra}}\rho_i^{\text{terra}} + 4\pi|X|\sigma_{a,i}^{\text{terra}}B^{\text{terra}}(T_i) \\ & = |X|\sigma_{a,i}^{\text{terra}}(B^{\text{terra}}(T_i) - \rho_i^{\text{terra}}). \end{array} \right.$$

Erst zusätzliche Randbedingungen erlauben es, die Strahlungstransportgleichungen zu lösen. Sie sind durch physikalische Eigenschaften vorgegeben. Im Fall des Strahlungshaushalts der Erde gibt es genau zwei Ränder: die Sonne bzw. den Weltraum und die Erde. Da die Sonne die relevante Strahlungsquelle im Weltraum darstellt, wählt man als Randbedingung des Weltalls die Solarkonstante  $I_{\text{solar}}$ , das heißt, es gilt  $\psi_0^{\text{solar}}(\Omega_{\text{in}}) = I_{\text{solar}}\Omega_{\text{in}}$ . Da die Sonne keine Strahlung im terrestrischen Wellenlängenbereich emittiert, gilt zusätzlich die Randbedingung  $\psi_0^{\text{terra}} = 0$ . Die Erde reflektiert einen Teil der einfallenden solaren Strahlung. Somit ist die Randbedingung durch eine partielle Reflexion gegeben. Somit gilt

$$\psi_n^{\text{solar}}(\Omega_{\text{in}}) = \alpha\psi_{n-1}^{\text{solar}}(\Omega_{\text{in}} - (2\Omega_{\text{in}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}),$$

wobei  $\mathbf{n}$  die nach außen zeigende Oberflächennormale mit  $\Omega_{\text{in}} \cdot \mathbf{n} < 0$  (vgl. Abschnitt 2.4.3).

Um die Strahlungsflüsse explizit zu beschreiben, nimmt man eine Fallunterscheidung vor. Es sei zunächst  $\mathbf{n} \cdot \Omega < 0$  (vgl. Abbildung 7.6, orangene Pfeile). Dann ist der Fluss in die Zelle  $X_i$  über die Grenze  $x_{i-1/2}$  durch

$$F^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{solar}}(X_i) = l_{i, i-1} \int_{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| \psi_{i-1}^{\text{solar}}(\Omega, \lambda, t) d\Omega = \pi r_{\text{Erde}}^2 \rho_{i-1}^{\text{solar}}$$

mit  $B^{\text{solar}}(T_i) = 0$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  und

$$\begin{aligned} F^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}(X_i) &= l_{i, i-1} \int_{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| \psi_{i-1}^{\text{terra}}(\Omega, \lambda, t) d\Omega \\ &= 4\pi r_{\text{Erde}}^2 |X| \sigma_{a, i-1}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}(T_{i-1}) - \rho_{i-1}^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}) \end{aligned}$$

gegeben. Sei nun  $\mathbf{n} \cdot \Omega > 0$  (vgl. Abbildung 7.6, braune Pfeile). Dann ist der Fluss aus der Zelle  $X_i$  über die Grenze  $x_{i-1/2}$  durch

$$F^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{solar}}(X_i) = l_{i, i+1} \int_{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| \psi_i^{\text{solar}}(\Omega, \lambda, t) d\Omega = \pi r_{\text{Erde}}^2 \alpha \rho_i^{\text{solar}}$$

und

$$\begin{aligned} F^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{terra}}(X_i) &= l_{i, i+1} \int_{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0} |\mathbf{n} \cdot \Omega| \psi_i^{\text{terra}}(\Omega, \lambda, t) d\Omega \\ &= 4\pi r_{\text{Erde}}^2 |X| \sigma_{a, i}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}(T_i) - \rho_i^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}) \end{aligned}$$

gegeben.

Der Gesamtfluss über die Grenze  $x_{i-1/2}$  ermittelt sich dann durch

$$\begin{aligned} 0 &= \pi r_{\text{Erde}}^2 \rho_{i-1}^{\text{solar}} + 4\pi r_{\text{Erde}}^2 |X| \sigma_{a, i-1}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}(T_{i-1}) - \rho_{i-1}^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}) \\ &\quad - \pi r_{\text{Erde}}^2 \alpha \rho_i^{\text{solar}} - 4\pi r_{\text{Erde}}^2 |X| \sigma_{a, i}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{terra}}(T_i) - \rho_i^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{terra}}) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{4} \rho_i^{\text{solar}} &= - |X| \sigma_{a, i-1}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}(T_{i-1}) - \rho_{i-1}^{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0, \text{terra}}) \\ &\quad + |X| \sigma_{a, i}^{\text{terra}} (B^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{terra}}(T_i) - \rho_i^{\mathbf{n} \cdot \Omega > 0, \text{terra}}). \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert eine Basis, auf der Lernende die Strahlungstransportgleichungen erfolgreich lösen können.

### 7.3 Didaktisch-methodische Umsetzung der Lehr- und Lernmaterialien und ihr Einsatz in mehrtägigen Modellierungsveranstaltungen

Nicht nur die zur Modellierung des Energiehaushaltes notwendige Mathematik ist eine Herausforderung. Auch das Lösen von partiellen Differentialgleichungen behandelt die Schulmathematik in der Regel nicht. Eine zusätzliche Herausforderung stellt die Beschreibung des Erdklimas dar. Die Vorgänge auf der Erde und in der Atmosphäre sind miteinander verknüpft und beeinflussen sich gegenseitig. Dennoch zeigt die eigene Erfahrung, dass Oberstufenschülerinnen und -schüler bei entsprechender Anleitung nach Hattebuhr (2014), Stender (2016, 2018) in der Lage sind, selbständig ein diskretisiertes Modell (Kompartimentmodell) zu erstellen. Man unterteilt dazu die Erdatmosphäre in konzentrische Kugelschalen, sogenannte *Kompartimente*, mit der Annahme, die Strahlungsflussdichte sei in jeder Kugelschale konstant. Die Zerlegung führt zu Strahlungsflussbilanzgleichungen, die im vorherigen Abschnitt eingeführt wurden (vgl. Abschnitt 7.2). Für die Lernenden präsentieren sich die Terme dieser Gleichungen als Black-Box. Sie konstruieren damit – ohne es zu wissen – Diskretisierungen einer partiellen Differentialgleichung. Damit leiten sie ein einfaches Modell ab, das eine realistische Berechnung der durchschnittlichen Oberflächentemperatur der Erde auf der Basis der Sonneneinstrahlung ermöglicht.

Der Abschnitt 7.3.1 stellt eine ausformulierte Problembeschreibung vor. Eine Umsetzung erfuhren sie bereits im Rahmen einer Modellierungswoche für (Oberstufen-)Schülerinnen und Schüler (vgl. Abschnitt 3.3.1). Detailliertere Angaben zur Modellierungswoche beschreibt Abschnitt 7.3.3. Er spricht auch Empfehlungen für eine einführende Präsentation sowie eine Beschreibung weiterer denkbarer Einsatzgebiete im schulischen Rahmen aus. Die Erfahrungen beruhen auf der Umsetzung

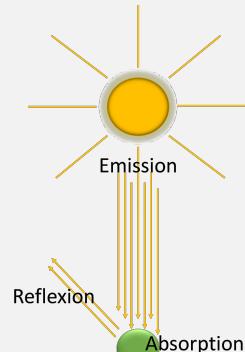
mit Lernenden ab etwa 16 Jahren, obwohl die Fragestellung auch für eine Lernklientel mit Abitur interessant und angemessen ist. Die an der Modellierungswoche Teilnehmenden durchliefen ein Bewerbungsverfahren. Ihre Auswahl erfolgte mithilfe eines Anforderungsprofils, das Auskunft über die Vorkenntnisse gibt. Auch kam das Lernmaterial während eines Schülerpraktikums in der Abteilung Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) zum Einsatz. Derzeit findet außerdem eine Erprobung des Einsatzes des Materials mit jüngeren Schülerinnen und Schülern (Anfang 9. Jahrgangsstufe) statt. Abschnitt 7.3.2 stellt einen möglichen Lösungsweg für die gestellte Aufgabe vor. Der Weg ist an das Vorgehen der Schülerinnen und Schüler angelehnt und spiegelt – sofern nicht anders gekennzeichnet – die Herangehensweise der Teilnehmenden der Modellierungswoche wider.

### 7.3.1 Problembeschreibung zur Einführung der Schüleraufgabe

Die in Abschnitt 7.2 eingeführten Strahlungstransportflussgleichungen finden folgend ihre Anwendung. Dabei steht die didaktische Reduktion im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten die Aufgabe anhand der folgenden Problembeschreibung.

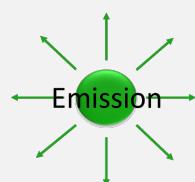
In Politik und Medien wird diskutiert, ob der Klimawandel maßgeblich durch natürliche Einflüsse verursacht wird und zum Beispiel aufgrund von Schwankungen der Solarkonstanten, Landnutzungsänderungen und Vulkanausbrüchen entsteht, oder ob Treibhausgase den Klimawandel verursachen.

Die Sonne ist der Hauptenergielieferant der Erde. Sie versorgt die Erde mit einer bestimmten Menge an Strahlungsenergie. Die Sonnenkonstante bezeichnet die solare Strahlungintensität (vgl. Abschnitt 2.4). Der auf der Erde an kommende Energiestrom ist durch  $I_{\text{solar}} = 1368 \text{ W/m}^2 \pi r_{\text{Erde}}^2$  gegeben. Der Faktor  $\pi r_{\text{Erde}}^2$  ergibt sich aus der Tatsache, dass die Erde von der Sonne aus gesehen eine Scheibe ist.



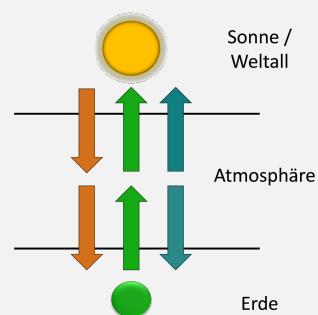
Die Erdoberfläche reflektiert einen Teil der einfallenden Sonnenstrahlung. Das Reflexionsvermögen der Erde heißt *Albedo*. Es wird mit  $\alpha$  bezeichnet. Die Erde absorbiert den verbleibenden Anteil  $(1 - \alpha)I_{\text{solar}}$ . Die Erdoberflächenbeschaffenheit bestimmt die reflektierte Energiemenge: Je heller die Oberfläche ist, desto mehr Sonnenlicht wird reflektiert, und desto größer ist die Albedo  $\alpha$ .

Die von der Erde absorbierte Energie wird in Wärmeenergie umgewandelt und wieder abgestrahlt. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschreibt die Wärmestrahlung: Die Strahlungsleistung der Erde ist durch  $F_{\text{Erde}} = 4\pi r_{\text{Erde}}^2 \sigma \epsilon_{\text{Erde}} T_{\text{Erde}}^4$  gegeben. Der Faktor  $4\pi r_{\text{Erde}}^2$  ergibt sich aus der Tatsache, dass die Erde eine Kugel ist und Wärmeenergie über ihre gesamte Oberfläche abstrahlt.



Die von der Erde abgestrahlte Energie wird teilweise von der Atmosphäre absorbiert (bezeichnet mit  $\epsilon_{\text{Atm}}$ ) und der Rest verlässt das betrachtete System und entschwindet in den Weltraum. Die Atmosphäre strahlt die absorbierte Energie wieder ab. Auch die Strahlungsleistung der Atmosphäre wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz bestimmt, da es sich auch hier um Wärmestrahlung handelt.

**Problem:** Mit Hilfe eines atmosphärischen (Mehrschichten-) Modells gilt es, die folgenden Fragen zu beantworten: Wie hoch ist die Temperatur der Erde? Welchen Einfluss haben die verschiedenen natürlichen Prozesse, wie zum Beispiel die Sonnenschwankungen oder die Beschaffenheit der Erdoberfläche? Wie wirken sich Vulkanausbrüche auf die Temperatur der Erde aus? Welche Rolle spielen die Treibhausgase?



Wichtige Werte und ihre Erklärungen:

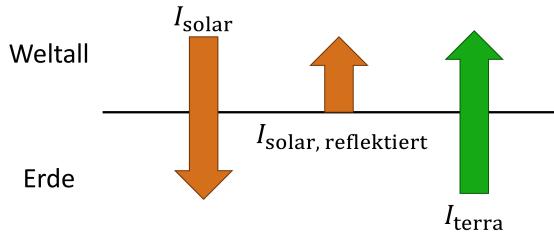
- Albedo: Die Erdoberfläche (einschließlich der Atmosphäre) hat eine durchschnittliche Albedo von etwa  $\alpha \approx 30\%$ . Verändert sich die Erdoberfläche, führt dies zu einer Änderung der Albedo. Die Albedo liegt immer zwischen 0 und 1.
- $\sigma_{SB} \approx 5.670374419 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ : Stefan-Boltzmann-Konstante
- $\varepsilon_{\text{Erde}}$ : Emissionsgrad der Erde. Der Emissionsgrad beschreibt, wie gut ein Körper Energie abstrahlt. Für die Erde beträgt er etwa 94 %, zur Vereinfachung kann er mit 100 % angenommen werden.
- $\varepsilon_{\text{Atm}}$ : Emissionsgrad der Atmosphäre<sup>a</sup>. Er hat einen Wert von 39 – 70 %, abhängig von der Zusammensetzung und den jeweiligen Anteilen von Gasen, Aerosolen, ... in der Atmosphäre.
- $T_{\text{Erde}}$ : Temperatur der Erde
- $T_{\text{Atm}}$ : Temperatur der Atmosphäre

**Viel Erfolg!**

<sup>a</sup>Anmerkung für Betreuende: Der Emissionsgrad der Atmosphäre setzt sich in der Diskretisierung des Raumes in Kompartimente aus der Opazität  $\sigma_{a,i}$  eines Zellvolumens und dem Zellabstand  $\Delta x$  zusammen.

### 7.3.2 Darstellung des Modells und seiner Erweiterungen einschließlich der Lösungen

Die oben vorgestellte Aufgabe ist bewusst als offene Fragestellung formuliert, um verschiedene Lösungsmöglichkeiten zuzulassen. Diese Arbeit präsentiert einen möglichen Lösungsansatz. Als Grundlage dienen erfolgreich umgesetzte Ideen der Schülerinnen und Schüler. Erfolgreich meint dabei die eigenständige Erstellung eines Kompartimentmodells und dessen Verbesserung durch diverse Modellerweiterungen. Mit diesen Modellen analysierten die Lernenden verschiedene Einflüsse auf die Temperatur der Erde und interpretierten die mathematischen Lösungen. Am Ende quantifizierten sie, welcher Prozess den größten Einfluss auf die Temperatur ausübt und bewerteten auf dieser Basis, ob der Klimawandel hauptsächlich auf natürlichen Einflüssen beruht oder nicht.



**Abbildung 7.8:** Ein- und ausgehenden Strahlungsflüsse im Bare-Rock-Modell. Orangene Pfeile repräsentieren die solare Strahlung und grüne Pfeile die von der Erde ausgehende terrestrische Strahlung.

Alle von den Lernenden entwickelten Modelle gehen von den folgenden Annahmen aus:

1. Es existiert ein Strahlungsgleichgewichtszustand. Das heißt, die eingehende Strahlungsmenge ist gleich der ausgehenden Strahlungsmenge. Mit anderen Worten, die absorbierte Energie ist in jedem Kompartiment gleich der emittierten. Wäre dies nicht der Fall, würde sich eines der Kompartimente im Laufe der Zeit von selbst aufheizen oder abkühlen, und äußere Einwirkungen könnten nicht nachvollzogen werden. Außerdem wird ein zeitunabhängiges System betrachtet
2. Die Strahlung ist eine gerichtete Größe. Es sind nur die beiden Richtungen *Sonne–Erde* und *Erde–Sonne* erlaubt.
3. Der Energieaustausch zwischen Körpern findet ausschließlich durch gerichtete Strahlungsflüsse statt. Strahlung ist nicht an Materie gebunden. Sie kann nur von einem Körper absorbiert oder emittiert werden. Streuung wird der Einfachheit halber vernachlässigt.
4. Die Erde ist eine perfekte Kugel mit einem Radius von  $r_{\text{Erde}} = 6371 \text{ km}$ .

Die Gruppe leitete die Annahmen 1–3 aus der Problembeschreibung und den Abbildungen dazu in einer Diskussion mit der Betreuerin ab. Annahme 4 fügte sie selbstständig hinzu.

### 7.3.2.1 Verständnis des Prinzips der (Strahlungs-)Fluss- und Kompartimentmodelle: Das Bare-Rock-Modell

Das einfachste Modell betrachtet ein System aus Erde und Weltraum inklusive der Sonne (s. Abbildung 7.8, vgl. Archer, 2012; Kraus, 2004). Es ignoriert das Vorhandensein einer Atmosphäre. Daher bezeichnet man dieses Modell als *Bare-Rock-Modell*. Die Sonne stellt die einzige Strahlungsquelle dar. Die solare Strahlungsleistung wird mit  $I_{\text{solar}}$  bezeichnet. Sie definiert die Strahlungsleistung pro Quadratmeter bezogen auf eine Fläche orthogonal zur einfallenden Strahlung. Auf dem Weg von der Sonne zur Erde schwächt sich die Strahlungsleistung um etwa das 50.000-fache ab. Die auf der Erde an kommende solare Strahlungsleistung beträgt etwa  $I_{\text{solar}} = 1368 \text{ W/m}^2$  (vgl. Deutscher Wetterdienst, o. D.). Diese Strahlungsleistung wird *Solarkonstante* genannt. Die Erdoberfläche reflektiert einen Teil der Strahlung, der mit  $I_{\text{solar, reflektiert}}$  bezeichnet wird. Das Reflexionsvermögen der Erde wird *Albedo* genannt und mit  $\alpha$  bezeichnet. Es gilt

$$I_{\text{solar, reflektiert}} = \alpha \cdot I_{\text{solar}}.$$

Man beachtet weiter, dass die Erde diese Strahlungsleistung mit ihrem Querschnitt empfängt. Der Querschnitt beschreibt näherungsweise einen Kreis mit dem Radius der Erde:  $\pi r_{\text{Erde}}^2$ . Da sich die Erde dreht, verteilt sich die Strahlungsleistung über die gesamte Erdoberfläche, die entsprechend als eine Kugel angenommen wird. Die Erde emittiert die Energie wieder. Daher wird das Verhältnis der Querschnittsfläche der Erde zur Fläche der Erdoberfläche betrachtet, die durch  $4\pi r_{\text{Erde}}^2$  gegeben ist. Es beträgt 1 zu 4. Damit steht im Mittel nur ein Viertel der solaren Strahlungsleistung pro Quadratmeter Erdoberfläche zur Verfügung. Gegenläufig zum einfallenden solaren Strahlungsfluss (in Abbildung 7.8 durch einen orangefarbenen Pfeil dargestellt) sind die reflektierte Sonnenstrahlung (ebenfalls orangefarben markiert) und die mit  $F_{\text{Erde}}$  bezeichnete terrestrische Strahlung (grüner Pfeil). Während die Sonnenstrahlung ihr Intensitätsmaximum im Bereich des sichtbaren Lichts hat, hat die terrestrische Strahlung ihr Intensitätsmaximum bei größeren Wellenlängen. Die Erde strahlt thermisch. Ihre Emission beschreibt das Stefan-Boltzmann-Gesetz.

Nach den oben genannten Annahmen befinden sich die absorbierten und die emittierten Strahlungsflüsse in einem Gleichgewicht. Das bedeutet, dass sich die Summe aller Ströme zu null addieren muss.

Das oben beschriebene Strahlungsgleichgewicht wird nun in die Sprache der Mathematik übersetzt und das Stefan-Boltzmann-Gesetz für die emittierte Erdstrahlung betrachtet. Hier ist die eingehende Strahlung gleich der ausgehenden Strahlung, es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha}{4} \cdot I_{\text{solar}} &= B_{\text{Erde}} \\ &= \varepsilon_{\text{Erde}} \cdot \sigma_{\text{SB}} \cdot T_{\text{Erde}}^4. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Die Temperatur der Erde  $T_{\text{Erde}}$  bestimmt sich durch Umstellen der Gleichung (7.13) zu

$$T_{\text{Erde}} = \sqrt[4]{\frac{1-\alpha}{4\sigma_{\text{SB}}} I_{\text{solar}}}.$$

und Einsetzen der folgenden Literaturwerte. Mit der

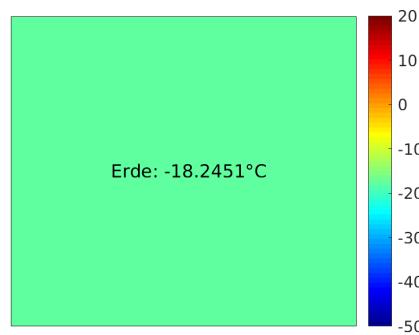
$$\text{Albedo (Reflexionsanteil)} \qquad \qquad \qquad \alpha = 0.3,$$

$$\text{Sonnenkonstante} \qquad \qquad \qquad I_{\text{solar}} = 1368 \frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

$$\text{Emissivität der Erde (schwarzer Körper)} \qquad \qquad \qquad \varepsilon_{\text{Erde}} = 1$$

$$\text{und Stefan-Boltzmann-Konstante} \qquad \qquad \qquad \sigma_{\text{SB}} = 5.670374419 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

erreicht die Erdoberfläche eine Temperatur von etwa  $255 \text{ K} \approx -18^\circ\text{C}$  (vgl. Abbildung 7.9). Die Gleichung (7.13) gibt die Temperatur in Kelvin an. Diese Temperatureinheit ist in der Meteorologie üblich. Für eine intuitivere Auswertung und Interpretation der Ergebnisse verwendeten die Schülerrinnen und Schüler die Temperatureinheit  $^\circ\text{C}$ . Die Interpretation dieses Ergebnisses führt zu der Aussage, dass die Erde an ihrer Oberfläche global gemittelt eine Temperatur von weniger als  $-18^\circ\text{C}$  aufwiese, wenn es keine Erdatmosphäre gäbe. Analog lassen sich auch die Oberflächentemperaturen anderer Planeten bestimmen. Besitzen diese keine Atmosphäre, so stimmt der mit dem Modell ermittelte Wert mit gemessenen Werten überein (vgl. Archer, 2012).



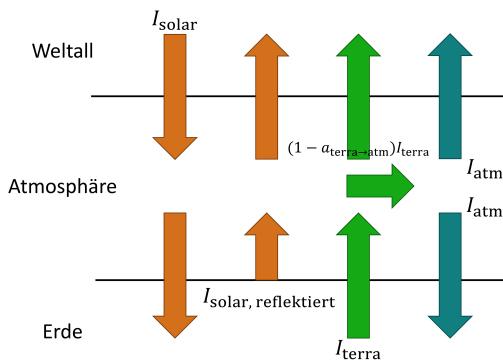
**Abbildung 7.9:** Darstellung der Erdoberflächentemperatur unter dem Bare-Rock-Modell

### 7.3.2.2 Verständnis der Atmosphäre: Das One-Layer-Modell

Das Bare-Rock-Modell vernachlässigt die Existenz einer Atmosphäre und damit auch deren Auswirkungen auf den Strahlungshaushalt. Für eine realitätsgerechte Abbildung ergänzt man daher das Modell um eine Atmosphäre (vgl. Abbildung 7.9). Dieses Modell heißt *One-Layer-Modell* (vgl. Archer, 2012). Die physikalischen Eigenschaften der Atmosphärenschicht stellen sich wie folgt dar: Laut Abschnitt 2.4.2 passiert die solare Strahlung die Atmosphäre ungehindert. Sie wird nicht absorbiert. Es gilt  $\sigma_{a, \text{Atm}}^{\text{solar}} = 0$ . Diese Forderung stellt eine Vereinfachung dar. Für die terrestrische Strahlung ist der Absorptionskoeffizient der Atmosphärenschicht durch  $0 < \sigma_{a, \text{Atm}}^{\text{terra}} \Delta x := \varepsilon_{\text{Atm}} < 1$  gegeben. Der Absorptionskoeffizient der Erde wird aus Abschnitt 7.3.2.1 übernommen.

In der didaktischen Reduktion stellen sich die zusätzlichen Modellannahmen wie folgt dar. Sie können von den Lernenden selbstständig aus der Problembeschreibung abgeleitet werden.

- Die Atmosphäre besteht aus einer einzigen, unendlich dünnen Schicht mit Glaseigenschaften. Die Sonnenstrahlung durchdringt sie ungehindert und wird nicht absorbiert.
- Die Albedo wirkt ausschließlich und vollständig an der Erdoberfläche. Das heißt, die Reflexion der Sonnenstrahlung erfolgt an der Erdoberfläche. Reflexionen innerhalb der Atmosphäre, zum Beispiel durch Wolken, sind nicht Teil dieses Modells.



**Abbildung 7.10:** Ein- und ausgehende Strahlungsflüsse im One-Layer-Modell. Orangene Pfeile repräsentieren die solare Strahlung, grüne Pfeile die von der Erde ausgehende terrestrische Strahlung und die blauen Pfeile die von der Atmosphäre emittierte terrestrische Strahlung.

Durch die ergänzte Atmosphäre ist ein Kompartiment hinzugekommen. Das Strahlungsgleichgewicht gilt weiterhin für das gesamte System. In Abbildung 7.10 sind die solare Strahlung durch die orangenen Pfeile, die terrestrische Strahlung durch die grünen Pfeile und die atmosphärische Strahlung durch die blauen Pfeile gekennzeichnet.

Die Sonnenkonstante  $I_{\text{solar}}$  trifft zuerst auf den atmosphärischen Bereich. Sie wird weder reflektiert noch absorbiert. Sie tritt mit der Erde in Wechselwirkung. Analog zum Bare-Rock-Modell reflektiert die Erdoberfläche einen Teil der Sonnenstrahlung und absorbiert den größeren Anteil. Die reflektierte Sonnenstrahlung passiert frei die Atmosphäre und verschwindet im Weltraum. Die Erde gibt ihre Energie  $B_{\text{Erde}}^{\text{terra}}$  als Wärmestrahlung an die Atmosphäre ab, in der sie teilweise mit der Absorptionsfähigkeit  $0.39 < \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} < 0.70$  absorbiert wird. Dabei spielen vor allem Wasserdampf, Kohlendioxid und Ozon, die als Treibhausgase bezeichnet werden, eine wesentliche Rolle. Strahlung in den Wellenlängenbereichen von  $3.4 - 4.1 \mu\text{m}$  und  $8 - 13 \mu\text{m}$  – beides im Spektrum der Wärmestrahlung – kann die Atmosphäre fast ungehindert passieren. Diese Intervalle nennt man die *atmosphärischen Fenster* (vgl. Armstrong et al., 2001). Die Atmosphäre selbst sendet Wärmestrahlung  $B_{\text{Atm}}^{\text{terra}}$  in Richtung Weltraum und Erde aus. Auch sie ermittelt sich durch Anwendung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes. Es gelten  $B_{\text{Erde}}^{\text{terra}} = \sigma_{\text{SB}} T_{\text{Erde}}^4$  und  $B_{\text{Atm}}^{\text{terra}} = \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} \sigma_{\text{SB}} T_{\text{Atm}}^4$ .

Für die mathematische Modellierung dieser Situation gibt es zwei gleichwertige Ansätze: Eine Be trachtung berücksichtigt die Flüsse an den beiden Grenzschichten und setzt diese ins Gleichgewicht. Eine Alternative betrachtet die aufgenommene und abgegebene Energie der beiden Kompartimente und setzt diese gleich. Die Lernenden wählten selbstständig eine Betrachtungsweise aus, die sich an der schematischen Darstellung des Modells orientierte. Da die Strahlungswege durch Pfeile dargestellt sind, die die Flüsse repräsentieren, wählten die Lernenden diesen Ansatz. In Konsistenz damit wird er hier vorgestellt.

Für die Flüsse zwischen Weltraum und Atmosphäre gilt

$$F_{\text{Atm}} = \frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \cdot B_{\text{Erde}}^{\text{terra}}. \quad (7.14)$$

Sowohl die von der Atmosphäre absorbierte Erdstrahlung als auch die von ihr emittierte Strahlung sind Wärmestrahlung. Daher ist das Absorptionsvermögen  $\alpha_{\text{Atm}}^{\text{terra}}$  gleich dem Emissionsvermögen  $\varepsilon_{\text{Atm}}$ . Es schwankt zwischen 39 – 70 %, je nach Zusammensetzung der jeweiligen Anteile von Gasen und Aerosolen.

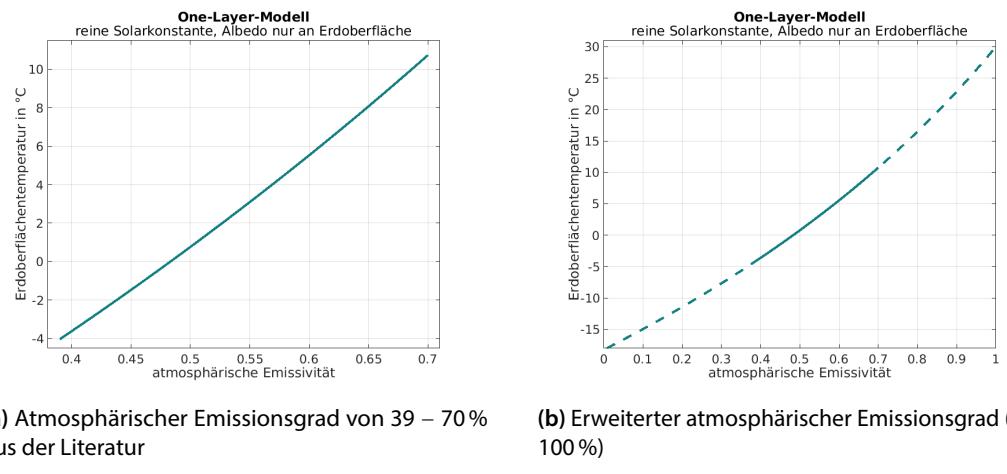
Für die Flüsse zwischen Atmosphäre und Erde gilt

$$F_{\text{Erde}} = \frac{1-\alpha}{4} \cdot I_{\text{solar}} + B_{\text{Atm}}^{\text{terra}}. \quad (7.15)$$

Analog zum Bare-Rock-Modell nutzt man die Albedo mit  $\alpha = 0.3$  und die Solarkonstante mit  $I_{\text{solar}} = 1368 \text{ W/m}^2$ . In den Gleichungen (7.14) und (7.15) sind die Temperaturen der Atmosphäre und der Erde unbekannte Parameter. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{4\sigma_{\text{SB}}} I_{\text{solar}} \\ \frac{1-\alpha}{4\sigma_{\text{SB}}} I_{\text{solar}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \\ -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\text{Atm}}^4 \\ T_{\text{Erde}}^4 \end{pmatrix}.$$

ergibt eine Erdoberflächentemperatur zwischen  $-4.04^\circ\text{C}$  und  $10.74^\circ\text{C}$  in Abhängigkeit der atmosphärischen Emissivität (vgl. Abbildung 7.11(a)).

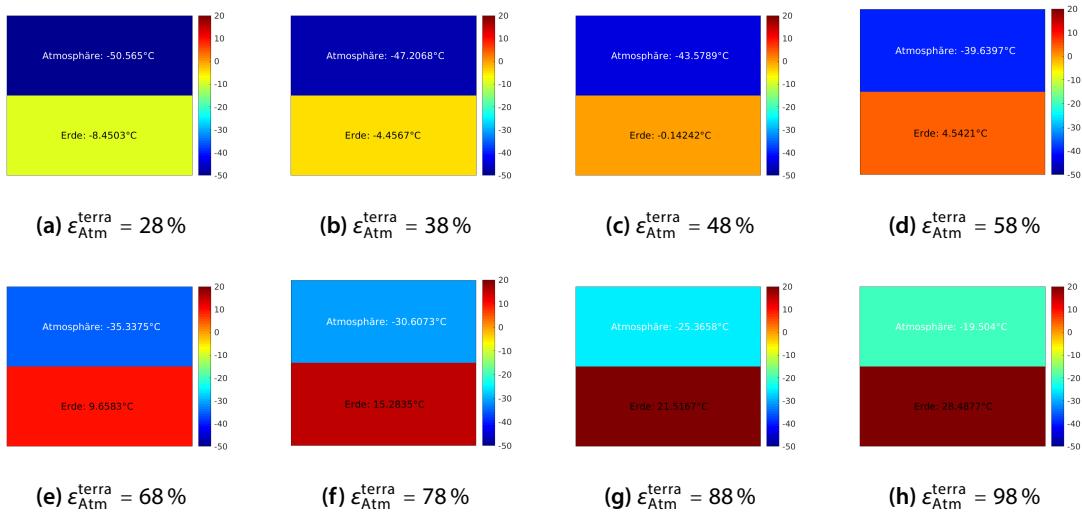


**Abbildung 7.11:** One-Layer-Modell: Oberflächentemperatur der Erde in Abhängigkeit vom atmosphärischen Emissionsgrad

Möchte man zusätzlich zur Erdoberflächentemperatur die Temperatur der Atmosphäre abbilden, bietet sich eine Darstellung für beispielhafte Parameterwerte  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}$  an (vgl. Abbildung 7.12).

Beide Darstellungen 7.11 und 7.12 eignen sich zur Untersuchung des Einflusses der Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre auf die Erdoberflächentemperatur. Beide Visualisierungsmöglichkeiten offenbaren eine steigende Erdoberflächentemperatur mit zunehmender Atmosphärenabsorptionsfähigkeit für terrestrische Strahlung. Damit geht ebenfalls ein Anstieg der Atmosphärenzellentemperatur einher. Während die Temperatur auf der Erde bei Absorptionsfähigkeit von  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} = 28\%$  bei etwa  $-8.5^\circ\text{C}$  liegt, weist sie bei einer fast vollständigen Absorption ( $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} = 98\%$ ) eine Temperatur von fast  $28.5^\circ\text{C}$  auf. Dieser Wert liegt um  $30^\circ\text{C}$  höher! In Abbildung 7.11(b) ist die Temperaturkurve für kleinere und größere Emissionsgrade der Atmosphäre erweitert. Sie zeigt die Konsistenz des One-Layer-Modells mit dem Bare-Rock-Modell bei einem Emissionsgrad von 0 % auf: Das One-Layer-Modell liefert korrekterweise eine Temperatur der Erde von etwa  $-18^\circ\text{C}$ . Dieses Ergebnis ist plausibel, da eine atmosphärische Emissivität von 0 % bedeutet, dass keine (terrestrische) Strahlung absorbiert wird und somit auf den Spezialfall des Bare-Rock-Modells zurückfällt.

Eine Erhöhung der Temperaturen mit zunehmender Absorptionsfähigkeit ist ebenfalls zu erwarten und lässt sich folgendermaßen erklären: Je stärker terrestrische Strahlung in der Atmosphäre absorbiert wird, desto höher ist ebenfalls die zurück emittierte Strahlung von der Atmosphäre zur Erde hin. Die Erde absorbiert ihrerseits die Rückstrahlung vollständig, da sie einen schwarzen Körper für infrarote Strahlung darstellt. Aufgrund der größeren aufgenommenen Strahlungsenergie muss die Erdoberflächentemperatur zwangsläufig steigen. Dieser Effekt ist als *Treibhauseffekt* bekannt. Die großen Temperaturunterschiede von bis zu fast  $15^\circ\text{C}$  enthalten, wie sensibel die Temperaturen auf eine Änderungen der atmosphärischen Absorptionsfähigkeit reagieren. Die atmosphärische Opazität ist ihrerseits durch die Konzentrationen der atmosphärischen Gase und Aerosole bestimmt. Daraus leitet sich ab, dass die Temperaturen sensibel auf Variationen des Treibhausgase-Vorkommens reagieren. Eine Absorptionsfähigkeit von etwa 76 – 78 % bewirkt eine Erdoberflächentemperatur von etwa  $15^\circ\text{C}$  (vgl. Abbildungen 7.11(b) und 7.12(f)). Dieser Wert spiegelt die momentane globale durchschnittliche Erdoberflächentemperatur der Erde wider.



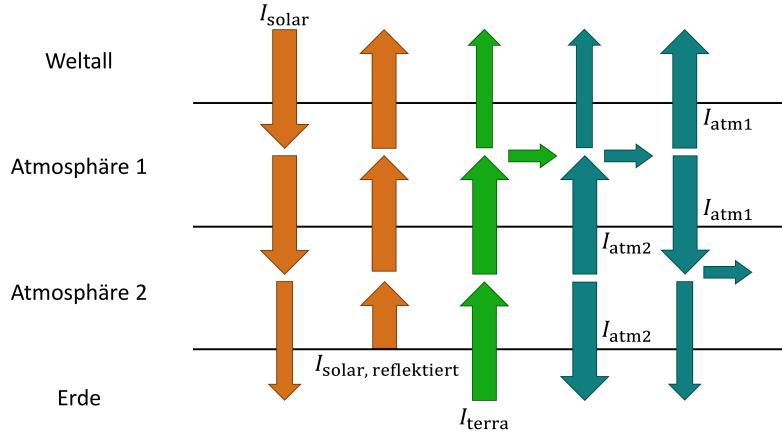
**Abbildung 7.12:** Darstellung der Temperaturen auf der Erde und in einem Atmosphärenkompartiment unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung

Insgesamt liegt die mithilfe des One-Layer-Modells ermittelte Erdoberflächentemperatur näher an der realen Erdoberflächentemperatur als die im Bare-Rock-Modell berechnete. Das One-Layer-Modell stellt eine Verbesserung dar.

An diesem Punkt bieten sich verschiedene weitere Vorgehensweisen an. Für eine bessere Beschreibung der Realität ist die atmosphärische Opazität für solare Strahlung  $\sigma_{a, \text{Atm}}^{\text{solar}}$  ebenfalls ungleich null zu wählen (vgl. Abschnitt 7.3.2.5). Darüber hinaus messen Satelliten eine atmosphärische Reflexion von solarer Strahlung von etwa  $1 - \alpha_{\text{Atm}} \approx 22.5\%$ . Der Anteil an solarer Strahlung, der in diesem Fall von der Erde reflektiert bzw. absorbiert wird, reduziert sich dadurch. Das Reflexionsvermögen der Erdoberfläche beträgt dann nur noch  $\alpha_{\text{Erde}} \approx 8.8\%$ . Diese Modellverbesserung fokussiert Abschnitt 7.3.2.4.

### 7.3.2.3 Verfeinerung der Kompartimente: Das n-Layer-Modell

Eine andere Möglichkeit der Modellerweiterung liegt in der Verfeinerung der Kompartimente. Man teilt dazu die Atmosphärenzelle zunächst in zwei Volumina (vgl. Abbildung 7.13). Dieses Modell bezeichnet man entsprechend als *Two-Layer-Modell* (vgl. Archer, 2012). Die physikalischen Eigenschaften der Atmosphärenzellen bleiben erhalten. Sie sind glassähnlich und lassen solare Strahlung ungehindert hindurch. Es gilt damit weiterhin  $\sigma_{a, \text{Atm}}^{\text{solar}} = 0$  und  $\alpha_{\text{Atm}} = 0$ . Die Emissivität der Atmosphäre für terrestrische Strahlung teilt sich auf die beiden Zellen auf, sodass  $0 < \sigma_{a, \text{Atm}_1}^{\text{terra}} \Delta x := \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}} < 1$  und  $0 < \sigma_{a, \text{Atm}_2}^{\text{terra}} \Delta x := \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}} < 1$  gelten. Diese Modellverbesserung wurde von den Lernenden in der Modellierungswöche nicht betrachtet. An dieser Stelle wird die Offenheit der Problemstellung sichtbar: Schülerinnen und Schüler können selbstständig Teilespekte auswählen und in ihren Lösungsprozess einbauen.



**Abbildung 7.13:** Ein- und ausgehende Strahlungsflüsse im Two-Layer-Modell. Orangene Pfeile repräsentieren die solare Strahlung, grüne Pfeile die von der Erde ausgehende terrestrische Strahlung und die blauen Pfeile die von der Atmosphäre emittierte terrestrische Strahlung.

Auf den vorherigen Überlegungen aufbauend ergibt sich im Fall des Two-Layer-Modells das Strahlungsgleichgewicht an der Zellgrenze zwischen Weltall und erster Atmosphärenzelle mit

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{!}{=} \frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} - \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) \\
 &\quad - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}}) (\varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}}) B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}})) \\
 &= \frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} - \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}}) \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) \\
 &\quad - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}}) (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}}) B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}),
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

an der Grenze zwischen der ersten und zweiten Atmosphärenschicht mit

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} + \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) - \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}}) B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}), \tag{7.17}$$

und an der Grenze zwischen der zweiten Atmosphärenschicht und der Erde mit

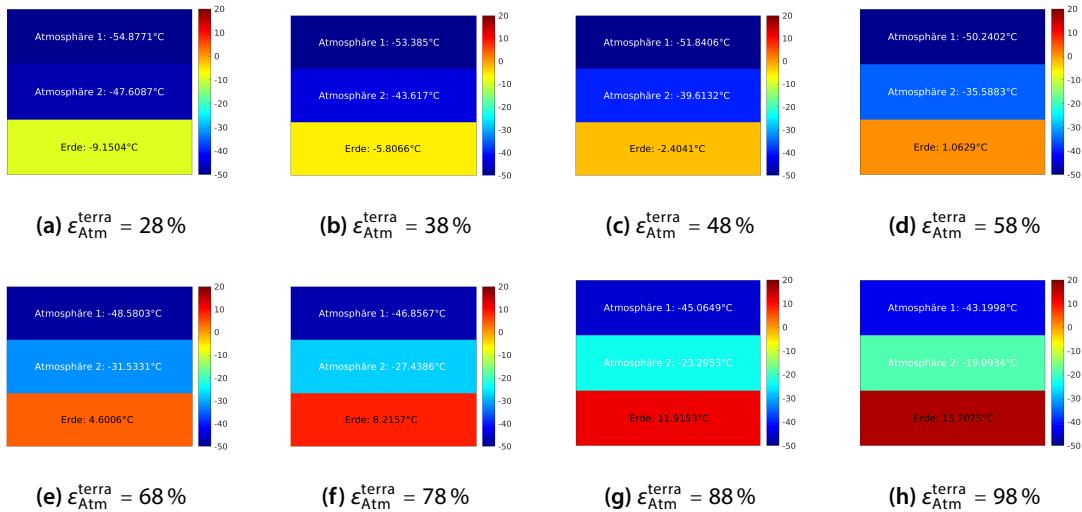
$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} + \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) + (1 - \varepsilon_{\text{Atm}_2}^{\text{terra}}) \varepsilon_{\text{Atm}_1}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) - B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}). \tag{7.18}$$

Bisher zeichnete sich jedes Atmosphärenvolumen durch seine eigene Emissivität aus. Möchte man die Diskretisierung verfeinern, nimmt man eine Gleichheit in den Opazitäten beider Kompartimente an. Daraus ergeben sich aus den Gleichungen (7.16), (7.17) und (7.18) die Gleichungen

$$\frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} \stackrel{!}{=} \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) + (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) + (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}})^2 B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}) \tag{7.19}$$

$$\frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} \stackrel{!}{=} -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) + \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) + (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}) \tag{7.20}$$

$$\frac{1-\alpha}{4} I_{\text{solar}} \stackrel{!}{=} -(1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_1}) - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} B^{\text{terra}}(T_{\text{Atm}_2}) + B^{\text{terra}}(T_{\text{Erde}}). \tag{7.21}$$



**Abbildung 7.14:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in zwei Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung

Durch Umformen der Gleichungen (7.19), (7.20) und (7.21) erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \\ \frac{1-\alpha}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \\ \frac{1-\alpha}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \\ \frac{1-\alpha}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}})\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}})^2 \\ -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \\ -(1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}})\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\text{Atm}_1} \\ T_{\text{Atm}_2} \\ T_{\text{Erde}} \end{pmatrix}.$$

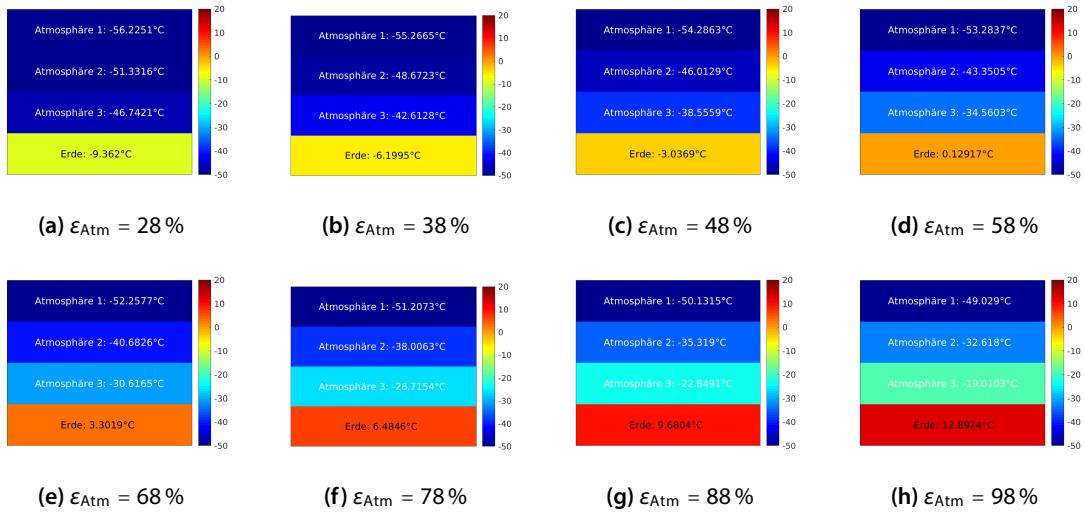
Die Abbildung 7.12 visualisiert die Erdoberflächen- sowie Atmosphärenzellentemperatur für verschiedene Parameterwerte  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}/2 \in [0.28, 0.98]$  der atmosphärischen Absorptionsfähigkeit für terrestrische Strahlung. Ähnlich wie im One-Layer-Modell zeigen die Ergebnisse des Two-Layer-Modells ebenfalls einen Anstieg der Temperaturen sowohl von den beiden Atmosphärenvolumina als auch von der Erde mit zunehmender Atmosphärenabsorptionsfähigkeit für terrestrische Strahlung. Während die Erdoberflächentemperatur bei einer atmosphärischen Opazität von  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}/2 = 28\%$  bei etwa  $-9.2^\circ\text{C}$  liegt, weist sie bei einer fast vollständigen Absorption ( $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}/2 = 98\%$ ) eine Temperatur von fast  $15.7^\circ\text{C}$  auf. Die Differenz der minimal und maximal bestimmten Erdoberflächentemperatur ist damit nicht so groß wie im Beispiel des One-Layer-Modells. Die Berechnungen zeigen jedoch weiterhin die hohe Sensibilität der Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit der atmosphärischen Opazität. Analog zum Beispiel One-Layer-Modell erzielt eine Modellerweiterung durch eine Einführung einer atmosphärischen Opazität für solare Strahlung  $\sigma_{a, \text{Atm}}^{\text{solar}} \neq 0$  und einer atmosphärischen Reflexion für solare Strahlung  $\alpha_{\text{Atm}} \neq 0$  eine realitätsnähere Abbildung des Strahlungshaushalts der Erde.

Die Abbildung 7.15 stellt die Ergebnisse der Berechnungen für drei atmosphärische Kontrollvolumina dar und entspricht einem Three-Layer-Modell. Auch dieses Modell reflektiert eine sensible Abhängigkeit der Erdoberflächentemperatur von der atmosphärischen Absorptionsfähigkeit für terrestrische Strahlung. Eine Überprüfung der numerischen Konvergenz des Verfahrens erfolgt hier, indem weitere Beispiele mit einer höheren Anzahl an atmosphärischen Kompartimenten berechnet werden (vgl. Abbildungen 7.16-7.22). Unabhängig von der angenommenen atmosphärischen Opazität ist eine Annäherung an einen Grenzwert mit einer steigenden Anzahl an Volumina klar

**Tabelle 7.1:** Angabe der Erdtemperatur bestimmt in einem Modell mit variierender Anzahl an Atmosphärenkompartimenten, einer angegebenen atmosphärischen Opazität für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung. Bestimmung der Temperaturdifferenz jeweils zum nachfolgenden Wert.

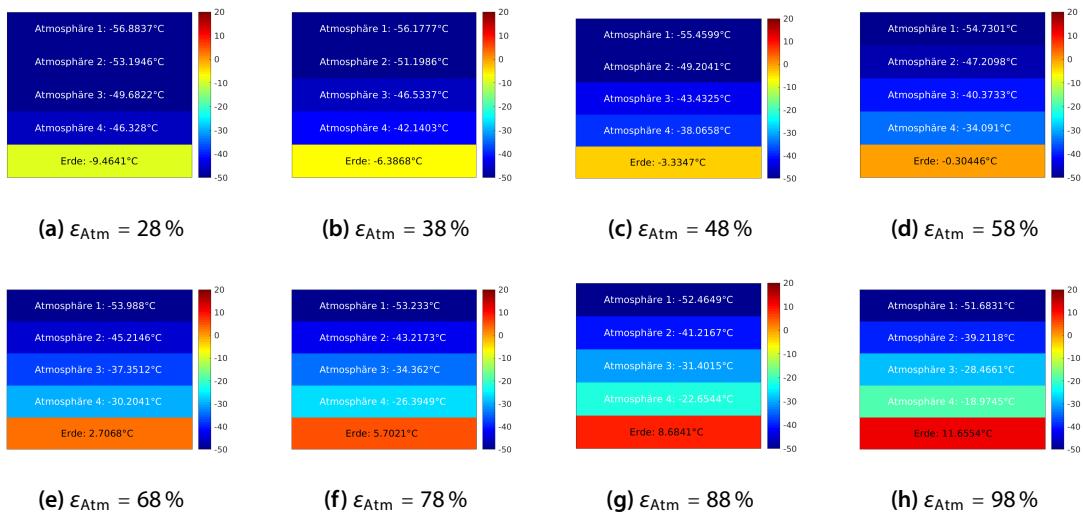
Anz. Layer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>28 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	-8.4503	-9.1504	-9.362	-9.4641	-9.5243	-9.564	-9.5921	-9.613	-9.6293	-9.6422
$\Delta T_{\text{Erde}}$	0.7001	0.2116	0.1021	0.0602	0.0397	0.0281	0.0209	0.0163	0.0129	
<b>38 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	-4.4567	-5.8066	-6.1995	-6.3868	-6.4964	-6.5683	-6.6192	-6.657	-6.6863	-6.7096
$\Delta T_{\text{Erde}}$	1.3499	0.3929	0.1873	0.1096	0.0719	0.0509	0.0378	0.0293	0.0233	
<b>48 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	-0.1424	-2.4041	-3.0369	-3.3347	-3.5078	-3.6209	-3.7007	-3.76	-3.8057	-3.8421
$\Delta T_{\text{Erde}}$	2.2617	0.6328	0.2978	0.1731	0.1131	0.0798	0.0593	0.0457	0.0364	
<b>58 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	4.5421	1.0629	0.1292	-0.3045	-0.5549	-0.718	-0.8326	-0.9176	-0.9832	-1.0353
$\Delta T_{\text{Erde}}$	3.4792	0.9337	0.4337	0.2504	0.1631	0.1146	0.085	0.0656	0.0521	
<b>68 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	9.6583	4.6006	3.3019	2.7068	2.3654	2.1440	1.9887	1.8738	1.7853	1.7151
$\Delta T_{\text{Erde}}$	5.0577	1.2987	0.5951	0.3414	0.2214	0.1553	0.1149	0.0885	0.0702	
<b>78 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	15.2835	8.2157	6.4846	5.7021	5.2562	4.968	4.7666	4.6178	4.5034	4.4127
$\Delta T_{\text{Erde}}$	7.0678	1.7311	0.7825	0.4459	0.2882	0.2014	0.1488	0.1144	0.0907	
<b>88 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	21.5167	11.9153	9.6804	8.6841	8.1201	7.7572	7.5041	7.3175	7.1743	7.0609
$\Delta T_{\text{Erde}}$	9.6014	2.2349	0.6804	0.564	0.3629	0.2531	0.1866	0.1432	0.1134	
<b>98 %</b>										
$T_{\text{Erde}}$	28.4877	15.7075	12.8924	11.6554	10.9598	10.5141	10.2041	9.9759	9.8011	9.6627
$\Delta T_{\text{Erde}}$	12.7802	2.8151	1.237	0.6956	0.4457	0.31	0.2282	0.1748	0.1384	

erkennbar (vgl. Tabelle 7.1). Auffällig ist, dass die momentane Erdoberflächentemperatur für keine zulässige Opazität mehr erreicht wird: Eine einfache Erhöhung der Anzahl der Atmosphärenzellen scheint nicht mit einer besseren Abbildung der Realität einher zu gehen. Diese Einschätzung stützt auch der Temperaturenverlauf der Atmosphärenzellen: In der Realität nimmt zwar die Temperatur mit zunehmender Höhe in der Troposphäre (erdnächste Atmosphärenschicht) ab, steigt jedoch beispielsweise in der Stratosphäre mit zunehmender Höhe wieder an (vgl. Abbildung 7.23). Begründungen dafür liegen in den unterschiedlichen Druckverhältnissen und Anreicherungen von Gasen und Aerosolen in verschiedenen Höhen. Diese Ergebnisinterpretation verdeutlicht die Beschränktheit des Modellansatzes: Er eignet sich sehr gut, um die Wirkung der Atmosphäre und damit der Treibhausgase auf die Erdoberflächentemperatur verständlich zu machen und die sensiblen Reaktionen zu quantifizieren. Ein Leben, wie wir es kennen, wäre ohne Atmosphäre kaum möglich. Darüber hinaus lassen sich Auswirkungen von weiteren Einflüssen, wie beispielsweise eine Variation der Solarkonstanten oder der Albedo, quantifizieren. Auch die Ursachen der Einflüsse kann das Modell nicht abbilden. Dieses Wissen muss von außen vorgegeben werden.

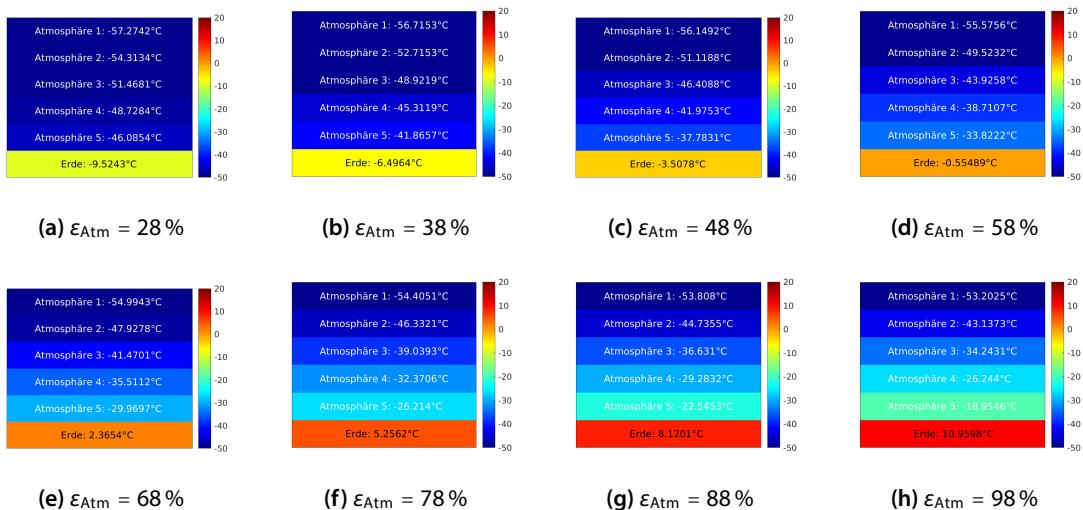


**Abbildung 7.15:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in drei Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung

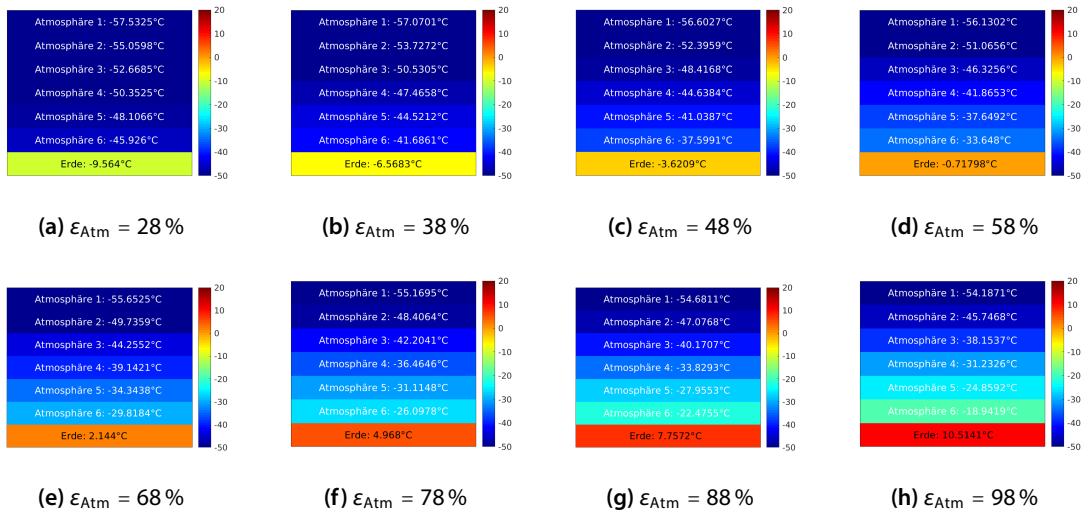
*Anmerkung:* Eine Idee, das Modell realitätsgetter zu gestalten, wäre, die getroffene Annahme, dass die atmosphärischen Opazitäten in allen Atmosphärenzellen gleich groß ist, abzuändern. Bestimmte Treibhausgase wirken in unterschiedlichen atmosphärischen Höhen, sodass sich eine Einteilung der Atmosphärenkompartimente entsprechend der Treibhausgaskonzentrationen anbietet. Die große Herausforderung dieses Ansatzes liegt in fehlenden Informationen über die Opazitäten, die für die jeweiligen Kompartimente nötig sind. Einzelne Literaturwerte konnten nicht gefunden werden, und ein Ablesen aus bestehenden schematischen Darstellungen führt Fehler ein, die sich kaum abschätzen lassen. Daher ist von der Umsetzung dieses Ansatzes insbesondere mit Schülerinnen und Schülern abzuraten – eine Inklusion im Rahmen einer Modelldiskussion ist empfehlenswert.



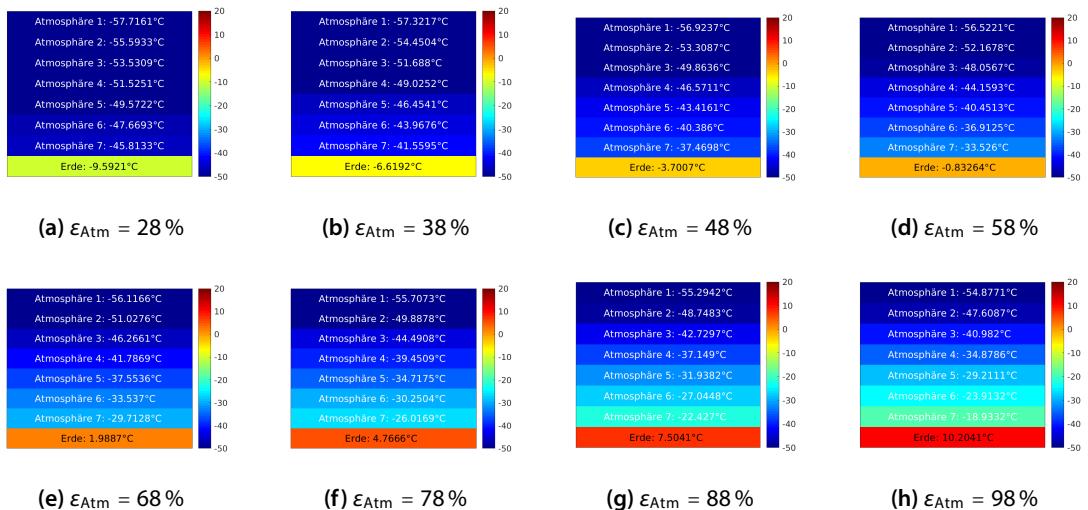
**Abbildung 7.16:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in vier Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



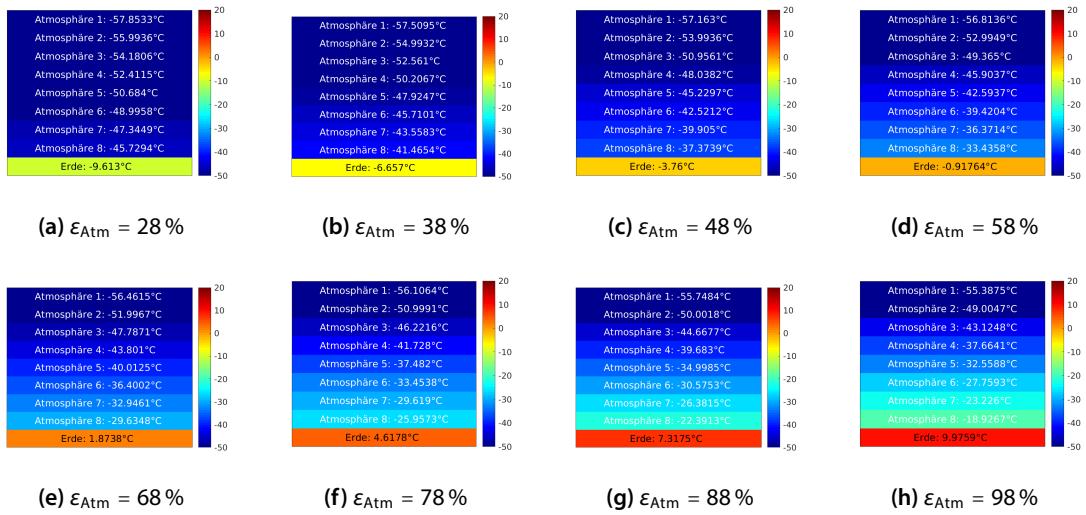
**Abbildung 7.17:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in fünf Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



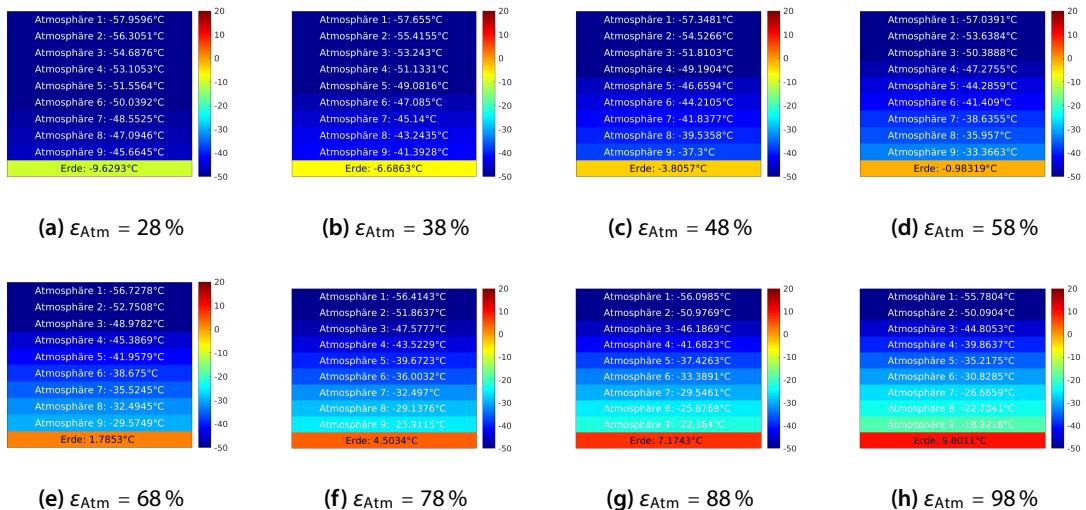
**Abbildung 7.18:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in sechs Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



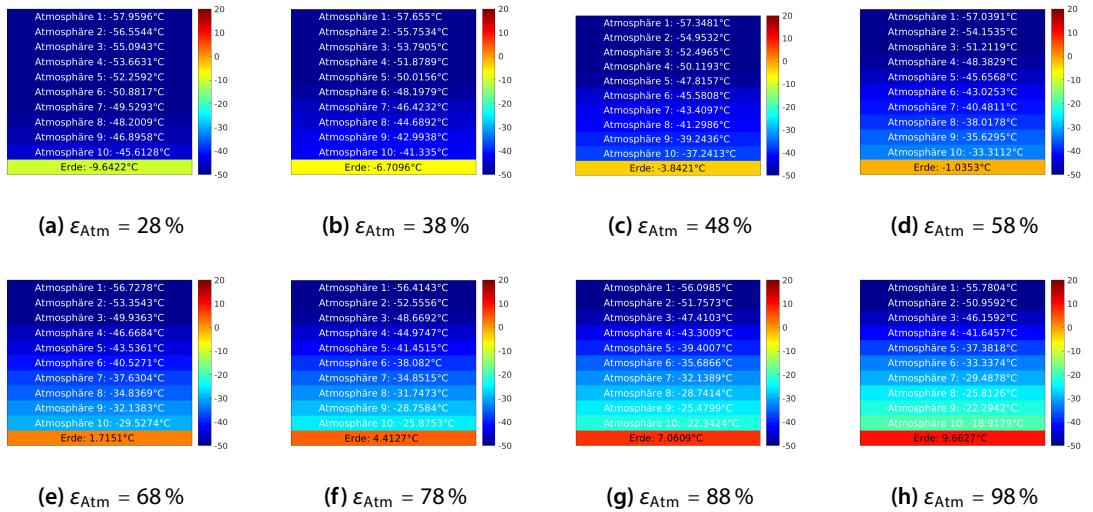
**Abbildung 7.19:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in sieben Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



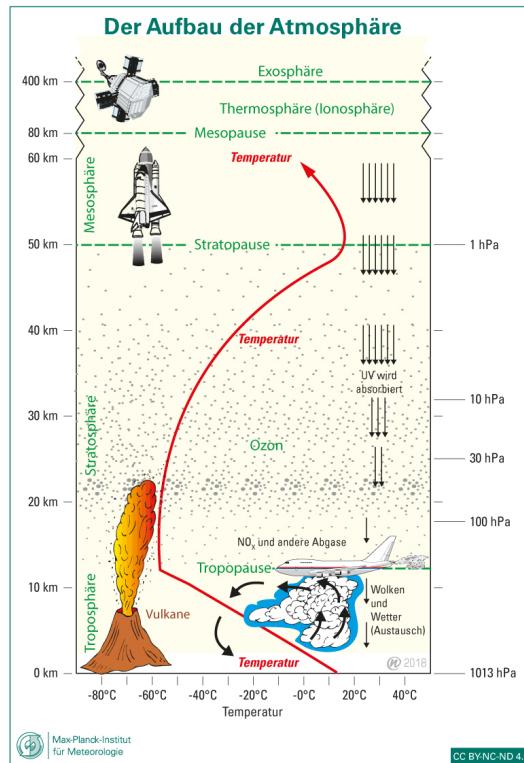
**Abbildung 7.20:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in acht Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



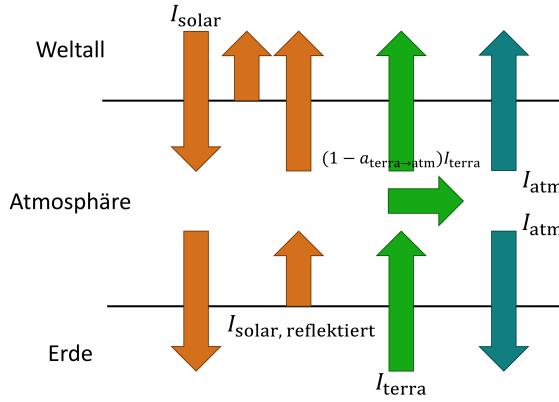
**Abbildung 7.21:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in neun Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



**Abbildung 7.22:** Darstellung der Temperatur auf der Erde und in zehn Atmosphärenkompartimenten unter Verwendung verschiedener Werte für die Absorptionsfähigkeit der Atmosphäre für terrestrische Strahlung und keiner Absorption von solarer Strahlung



**Abbildung 7.23:** Darstellung des Temperaturverlaufs in verschiedenen atmosphärischen Höhen. Entnommen von Noreiks, 2018.



**Abbildung 7.24:** Ein- und ausgehende Strahlungsflüsse im One-Layer-Modell mit einer terrestrischen und einer atmosphärischen Albedo. Orangene Pfeile repräsentieren die solare Strahlung, grüne Pfeile die von der Erde ausgehende terrestrische Strahlung und die blauen Pfeile die von der Atmosphäre emittierte terrestrische Strahlung.

### 7.3.2.4 Einschichtmodell mit terrestrischer und atmosphärischer Albedo

Anknüpfend an das einfache One-Layer-Modell verbesserten die Schülerinnen und Schüler ihr Modell weiter. Die Albedo wird nicht mehr ausschließlich an der Erdoberfläche reflektiert, sondern zusätzlich bereits in der Atmosphäre: In Wirklichkeit reflektieren Wolken und Aerosole in der Atmosphäre etwa  $\alpha_{\text{Atm}} := 22.5\%$  der einfallenden Sonnenstrahlung und die Erdoberfläche reflektiert lediglich  $\alpha_{\text{Erde}} := 8.8\%$ .

Analog zum ersten Einschichtmodell (vgl. Abschnitt 7.3.2.2) können die Strahlungsflussgleichungen auf der Grundlage von Abbildung 7.24 aufgestellt werden. Wiederum markieren gelbe Pfeile die Sonnenstrahlung, grüne Pfeile stellen die terrestrische Strahlung dar und blaue Pfeile beschreiben die atmosphärische Strahlung.

Für die Strahlungsflüsse zwischen Raum und Atmosphäre gilt

$$F_{\text{Atm}} = \frac{(1 - \alpha_{\text{Atm}})(1 - \alpha_{\text{Erde}})}{4} I_{\text{solar}} - (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \cdot B_{\text{Erde}}. \quad (7.22)$$

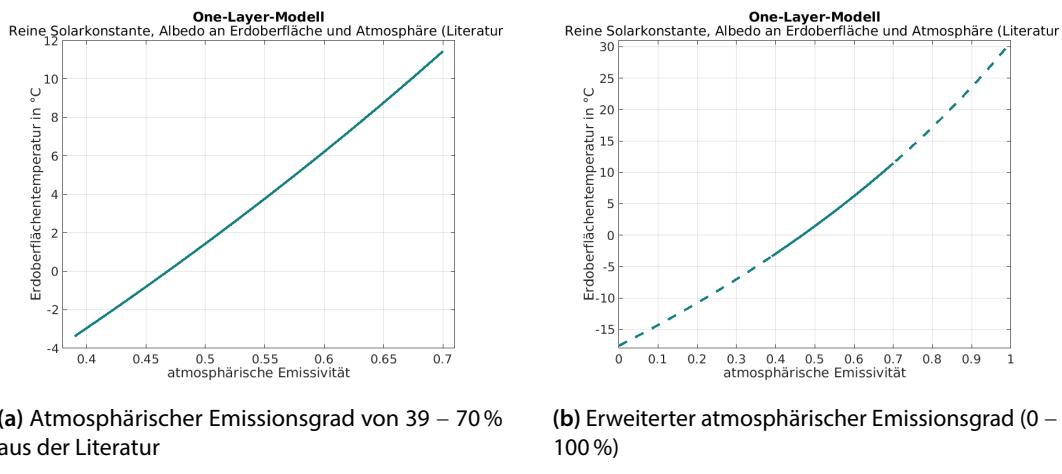
Für die Strahlungsflüsse zwischen Atmosphäre und Erde gilt

$$F_{\text{Erde}} = \frac{(1 - \alpha_{\text{Atm}})(1 - \alpha_{\text{Erde}})}{4} \cdot I_{\text{solar}} + B_{\text{Atm}}. \quad (7.23)$$

Die Gleichungen (7.22) und (7.23) bilden das neue zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha_{\text{Erde}})(1-\alpha_{\text{Atm}})}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \\ \frac{(1-\alpha_{\text{Erde}})(1-\alpha_{\text{Atm}})}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \\ -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\text{Atm}}^4 \\ T_{\text{Erde}}^4 \end{pmatrix}.$$

Dabei stellen die beiden unbekannten Temperaturen der Atmosphäre und der Erde die Unbekannten dar.



**Abbildung 7.25:** One-Layer-Modell mit Berücksichtigung der terrestrischen und atmosphärischen Albedo: Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit der atmosphärischen Emissivität

Außerdem variiert die Emissivität der Atmosphäre zwischen 39 – 70 %. Als Lösung schwankt die Oberflächentemperatur der Erde zwischen  $-3.38^{\circ}\text{C}$  und  $11.44^{\circ}\text{C}$  (s. Abbildung 7.25). Nach Abbildung 7.25(b) würde die reale Temperatur der Erde – etwa  $15^{\circ}\text{C}$  – bei einer atmosphärischen Emissivität von etwa 75 % erreicht werden.

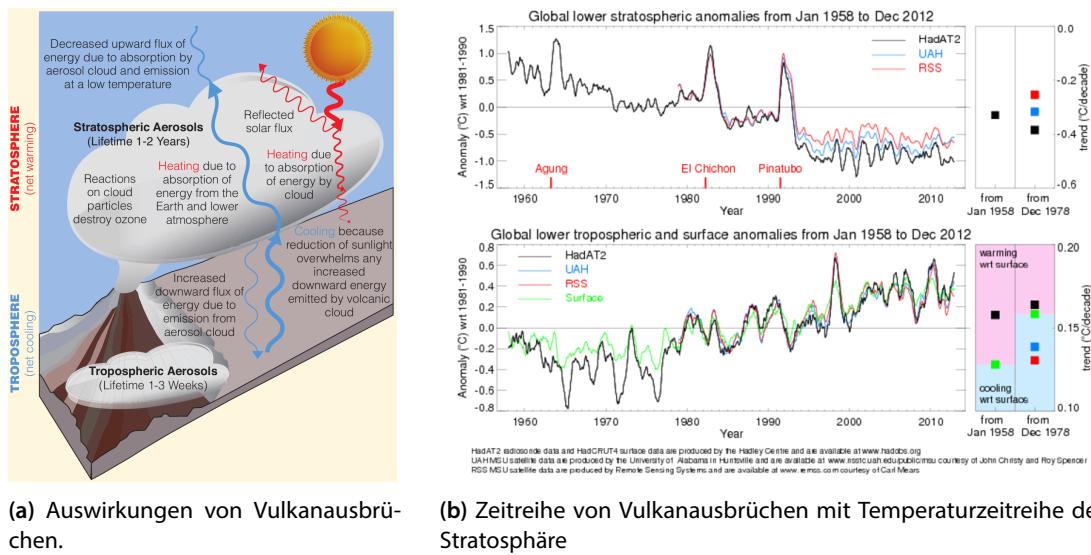
Die Berücksichtigung der atmosphärischen Albedo erzeugt ein realitätsgentreueres Modell, das atmosphärische Prozesse berücksichtigt. Diese Modellerweiterung führt zu einer Verschiebung der Lösungskurve des einfachen Einschichtmodells um ungefähr fast  $0.7^{\circ}\text{C}$  nach oben. Da die Veränderung des Ergebnisses relativ gering ist, stellten sich die Schülerinnen und Schüler die Frage, wie komplex sie ihr Modell gestalten müssten, um die realen Verhältnisse auf der Erde abzubilden und ob das mit diesem Ansatz überhaupt möglich ist. Der Einfluss der atmosphärischen Emissivität hat sich im Vergleich zum vorherigen Modell nicht maßgeblich verändert.

Vor diesem Hintergrund bieten sich verschiedene Möglichkeiten für das weitere Vorgehen an. Die Lernenden teilten sich in Kleingruppen von je 2–3 Personen auf und arbeiten parallel weiter. Dabei konzentrierte sich jede teilnehmende Person auf ihre eigenen Präferenzen. Dadurch stieg die Motivation der Gruppenmitglieder stark an. Wichtig in der Betreuung ist, darauf zu achten, dass sich die Kleingruppen weiterhin austauschen und die Ansätze und Ergebnisse der anderen hinterfragen. Kritische Fragen sind willkommen. Dazu ist es notwendig, eine nicht wertende Diskussionskultur zu schaffen. Alle Gruppenmitglieder sollten jederzeit in der Lage sein, das Vorgehen der Gruppe und den aktuellen Stand (in groben Zügen) zu erläutern.

Folgende weitere Aktionen werden vorgeschlagen:

1. Eine realistischere Abbildung im Rahmen des bestehenden Einschichtenmodells mit der atmosphärischen Albedo erhält man durch die Ergänzung einer Absorption der Sonnenstrahlung durch die Atmosphäre. Der Absorptionskoeffizient  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}}$  ist nun (real) größer als null. Insgesamt sollte diese Änderung zu einer niedrigeren Temperatur der Erde führen, da weniger Sonnenstrahlung absorbiert wird. Dennoch spiegelt das hiermit verbundene Modell die natürlichen Prozesse besser wider. Diesen Punkt setzt Abschnitt 7.3.2.5 um.

2. Bereits das One-Layer-Modells ermöglicht eine Abschätzung der Auswirkungen von natürlichen und anthropogenen Strahlungsantrieben.
  - a) Zu diesem Zweck analysieren die Schülerinnen und Schüler das Phänomen der solaren Schwankungen. Sie führen zu einer (natürlichen) Variation der Solarkonstante. Abschnitt 7.3.2.6 erläutert das Vorgehen und stellt eine mögliche Lösung vor.
  - b) Außerdem verändert das Schmelzen von Schnee und Eis die Albedo der Erde (vgl. Abschnitt 2.4.3). Helle, gut reflektierende Oberflächen weichen dunkleren, schlechter reflektierenden. Ein separat erstelltes Modell bildet den Schmelzprozess der polaren Eisschilde ab. Anschließend fließen die Lösungen dieses Modells, die eine neu bestimmte Albedo repräsentieren, in das bestehende One-Layer-Modell ein. Abschnitt 7.3.2.7 beschreibt diese Modellerweiterung. Andere Landnutzungsänderungen verursachen ebenfalls Variationen in der terrestrischen Albedo, die hier aber nicht weiter behandelt werden sollen. Insgesamt sind diese Effekte weniger gut zu bewerten. Zum Teil sind sie vom Menschen verursacht, zum Beispiel durch Abholzung von Wäldern. Aber auch Buschbrände, wie sie in den letzten Jahren in Australien und Teilen der USA ausgebrochen sind, beeinflussen die Albedo. Oft haben diese Veränderungen weitere Auswirkungen, die sich wiederum in der Atmosphärenchemie niederschlagen. Der IPCC berichtet von einem „robusten Nachweis, dass die anthropogene Landnutzungsänderung die Albedo der Landoberfläche erhöht hat, was zu einem Strahlungsantrieb von  $-0.15 \pm 0.1 \text{ W/m}^2$  führt“ (s. IPCC, 2013a, 2016).
  - c) Ebenso ist eine Analyse der Auswirkungen von Vulkanausbrüchen möglich. Gelangen Asche- und Rußpartikel nur in geringen atmosphärischen Höhen (in der Troposphäre) sinken sie relativ schnell wieder ab zum Erdboden oder der nächste Regen wäscht sie aus der Atmosphäre heraus. Ihre Aufenthaltsdauer in der Troposphäre ist kurz. Ihr Verbleib erstreckt sich daher eher auf lokale Regionen um den Vulkanausbruch bzw. das Feuer. Da die Aschepartikel auch als Kondensationskeime dienen, fördern sie die Wolkenbildung. Wolken in den niedrigen Höhen sorgen für einen stärkeren Verbleib der Strahlungsmenge in erdnahen Bereichen und führen so zu einer (kurzfristigen) Temperatursteigerung der Erdoberfläche. Anders stellt sich die Situation bei explosiven Vulkanausbrüchen dar: „Nur explosive Vulkanausbrüche haben einen signifikanten Einfluss auf das globale Klimasystem, weil dann große Mengen an Partikeln (Aerosole) bis in die Stratosphäre geschleudert werden können.“ (s. Kasang, 2014). Dort existiert nur ein geringer vertikaler Austausch der Luftmassen. Partikel, Aerosole und Gase, die sich in dieser Höhe anreichern, verbleiben über lange Zeiträume dort und verteilen sich durch den horizontalen Luftaustausch im Laufe der Fahre global. Zusätzlich „entsteht aus der schwefelhaltigen Vulkanasche sogenanntes Sulfataerosol, dass das einstrahlende Sonnenlicht zurück in den Weltraum reflektiert und so zu einer Abkühlung auf der Erde führt“ (s. wetter.de, 2017). Dieser Effekt hält jedoch nur wenige Jahre an, bis die Aerosole wieder in die Troposphäre absinken, von wo sie durch Regen ausgewaschen werden (vgl. Abbildung 7.26(a)). Eine Möglichkeit der Untersuchung besteht darin, die letzten 120 Jahre zu betrachten und zu schauen, ob und wann solche explosiven Vulkanausbrüche stattgefunden haben und ob ihre Auswirkungen in Zeitreihen der globalen Erdoberflächentemperatur sichtbar sind (vgl. Abbildung 7.26(b)). Diese Modellerweiterung setzte die Schülergruppe in der Modellierungswoche nicht um.



**Abbildung 7.26:** Einflüsse von Vulkanausbrüchen. Entnommen aus: (a) IPCC, 2013a, S. 1008, (b) Newman, 2021

- d) Um den Einfluss des Menschen auf das Klimasystem untersuchen, können die (anthropogenen) Kohlendioxid-Emissionen analysiert“ werden. Hier ist eine Literaturrecherche erforderlich. Einige Hinweise finden sich im Abschnitt 7.3.2.8.
- 3. Als letzter Punkt ist die Erweiterung des One-Layer-Modells um weitere atmosphärische Kompartimente zu nennen, die jeweils unterschiedliche Eigenschaften hinsichtlich Absorption, Reflexion und Emission von Strahlung haben (vgl. Abschnitt 7.3.2.3). Diesen Ansatz setzte die Lerngruppe aus Zeitgründen nicht um.

### 7.3.2.5 Einschichtmodell mit Absorption der Sonnenstrahlung in der Atmosphäre

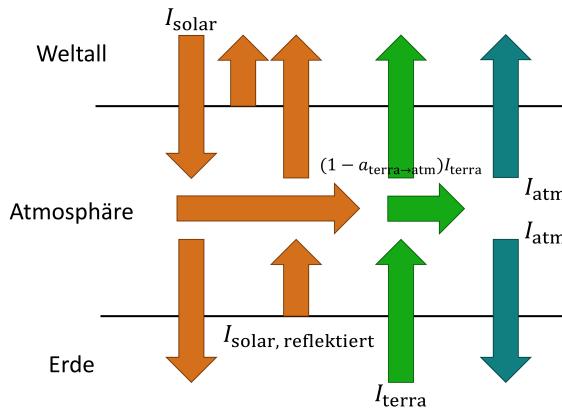
Als Erweiterung des vorherigen Modells ist die Atmosphäre nicht mehr transparent für die Sonnenstrahlung. Gase der Atmosphäre absorbieren 20 % der Sonnenstrahlung. Wolken absorbieren weitere 5 % der Sonnenstrahlung. Der Absorptionskoeffizient  $\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}} = 25 \%$  fasst diese Werte zusammen. Eine detaillierte Erklärung liefert Burger, 2018. Weiterhin ist das Ziel, das Strahlungsgleichgewicht aufzustellen. Die Abbildung 7.27 kann dabei helfen.

Für die Strahlungsflüsse zwischen Weltraum und Atmosphäre gilt

$$\frac{1 - \alpha_{\text{Atm}}}{4} I_{\text{solar}} = \frac{(1 - \alpha_{\text{Atm}})\alpha_{\text{Erde}}(1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}})^2}{4} I_{\text{solar}} + (1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}})B_{\text{Erde}} + B_{\text{Atm}}.$$

Für die Strahlungsflüsse zwischen Atmosphäre und Erde gilt

$$\frac{(1 - \alpha_{\text{Atm}})(1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}})}{4} I_{\text{solar}} + B_{\text{Atm}} = \frac{(1 - \alpha_{\text{Atm}})\alpha_{\text{Erde}}(1 - \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}})}{4} I_{\text{solar}} + B_{\text{Erde}}.$$



**Abbildung 7.27:** Ein- und ausgehende Strahlungsflüsse im One-Layer-Modell mit einer terrestrischen und einer atmosphärischen Albedo und einer Absorption der solaren Strahlung in der Atmosphäre. Orangene Pfeile repräsentieren die solare Strahlung, grüne Pfeile die von der Erde ausgehende terrestrische Strahlung und die blauen Pfeile die von der Atmosphäre emittierte terrestrische Strahlung.

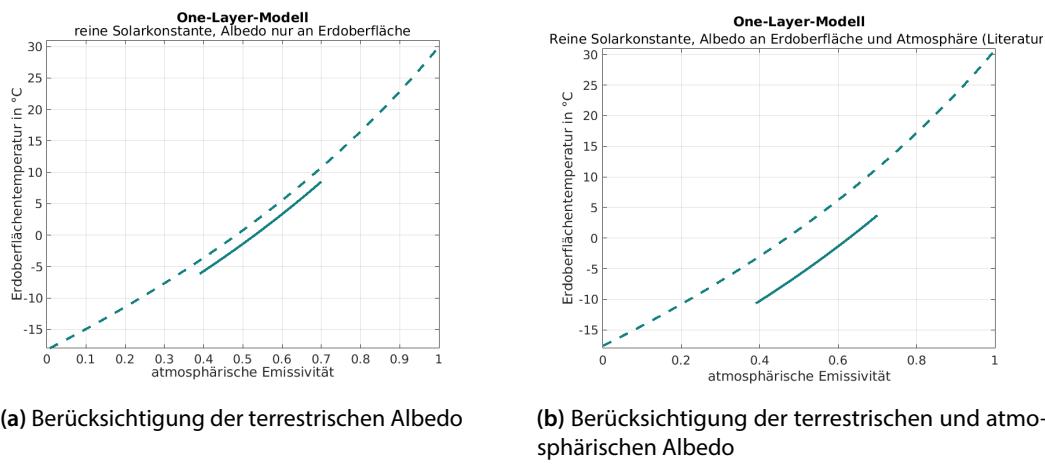
Lösen dieses Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{(1-\alpha_{\text{Atm}})-\alpha_{\text{Erde}}(1-\alpha_{\text{Atm}})(1-\varepsilon_{\text{Atm}})^2}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \\ \frac{(1-\alpha_{\text{Atm}})(1-\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}})-\alpha_{\text{Erde}}(1-\alpha_{\text{Atm}})(1-\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{solar}})}{4\sigma_{SB}} I_{\text{solar}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & (1-\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}}) \\ -\varepsilon_{\text{Atm}}^{\text{terra}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\text{Atm}}^4 \\ T_{\text{Erde}}^4 \end{pmatrix}.$$

liefert die folgenden Ergebnisse:

- a) Die ausschließliche Betrachtung der terrestrischen Albedo mit  $\alpha = 0.3$  liefert eine Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit der atmosphärischen Emissivität für terrestrische Strahlung zwischen  $-6.17^\circ\text{C}$  und  $8.50^\circ\text{C}$ . Die blaue durchgehende Linie in der Abbildung 7.28(a) zeigt genau dieses Ergebnis. Die gestrichelte Linie deutet die vorherige Lösung an (ohne Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption von Sonnenstrahlung, vgl. Abschnitt 7.3.2.4).
- b) Eine Berücksichtigung einer Reflexion an der Atmosphäre mit  $\alpha_{\text{Atm}} = 0.225$  zusätzlich zur terrestrischen Albedo  $\alpha_{\text{Erde}} = 0.088$  führt zu einer Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit der atmosphärischen Emissivität für terrestrische Strahlung zwischen  $-10.68^\circ\text{C}$  und  $3.20^\circ\text{C}$ . Auch hier zeigt die blaue durchgehende Linie in Abbildung 7.28(b) das Ergebnis. Die gestrichelte Linie repräsentiert die vorherige Lösung (ohne Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption von Sonnenstrahlung, vgl. Abschnitt 7.3.2.4).

Beide Ergebnisse stimmen mit der Vermutung überein, dass die Einführung eines Absorptionskoeffizienten für die Sonnenstrahlung in der Atmosphäre zu einer niedrigeren Erdoberflächentemperatur führt. Besonders im Fall b) ist der Unterschied mit einer Differenz von mehr als  $5^\circ\text{C}$  sehr groß. Dementsprechend spiegelt dieses Modell einen großen Einfluss der Atmosphäre auf die Temperatur der Erde wider.

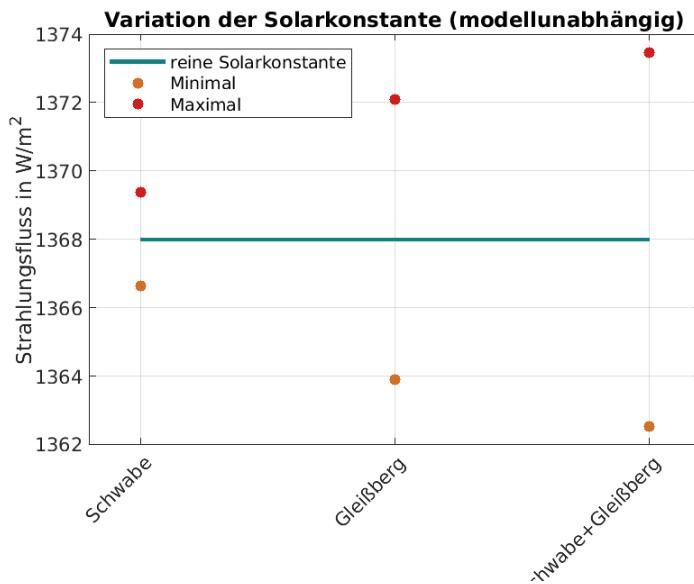


**Abbildung 7.28:** One-Layer-Modell der Erdoberflächentemperatur in Abhängigkeit der atmosphärischen Emissivität. Gestrichelte Linie: Lösung ohne Absorption der solaren Strahlung innerhalb der Atmosphäre, durchgängige Linie: Lösung mit Absorption der solaren Strahlung innerhalb der Atmosphäre.

### 7.3.2.6 Auswirkung von Variationen der Solarkonstante im Einschichtmodell

Die Sonnenkonstante  $I_{\text{solar}}$  ändert sich im Laufe der Zeit. So hat die Sonnenaktivität seit Entstehung der Erde um etwa 30–35 % zugenommen. Diese Änderung der Strahlungsintensität findet hier keine Berücksichtigung, da sich diese Entwicklung über einen so langen Zeitraum (4.5 Milliarden Jahre) erstreckt, dass sie wohl kaum als Ursache für einen plötzlichen Temperaturanstieg in den letzten 120 Jahren verantwortlich ist. Außerdem unterliegt die Sonnenstrahlung Schwankungen aufgrund von Änderungen der Erdbahnparameter (*Milanković-Zyklen*). Diese Variationen beziehen sich ebenfalls auf langfristige Zeitskalen von Zehntausenden von Jahren und führen beispielsweise zu Eiszeiten (vgl. Kasang, 2019). Daher vernachlässigt die folgende Analyse auch diesen Aspekt. Stattdessen werden kurzfristige Schwankungen der Sonnenaktivität betrachtet. Sie ergeben sich aus der periodischen Änderung des solaren Magnetfeldes. Etwa alle 11 Jahre dreht sich das Magnetfeld um, indem der Nord- und Südpol ihren Platz tauschen. Das sich ändernde Magnetfeld beeinflusst auch die Oberfläche der Sonne. Starke lokale Magnetfelder hindern heiße Materie daran, aus dem Sonneninneren zur Oberfläche aufzusteigen. Die Oberfläche kühlt lokal ab und emittiert weniger Strahlung: Es bilden sich dunkle Gebiete auf der Sonnenoberfläche. Die Anzahl der sogenannten *Sonnenflecken* variiert periodisch mit dem Magnetfeld. Zur selben Zeit, wenn die Anzahl der Sonnenflecken ihr Maximum erreichen, treten vermehrt heiße Fackeln und Protuberanzen auf, die heiße Materie in den Weltraum schleudern. Sie erhöhen die Energieabstrahlung so weit, dass dieser Effekt gegenüber dem kühlenden Effekt der Sonnenflecken überwiegt. Neben diesem 11-jährigen Zyklus, der auch unter dem Namen *Schwabe-Zyklus* bekannt ist, tritt der häufig weniger bekannte *Gleißberg-Zyklus* mit einer Periodizität von etwa 80 Jahren auf. Der Schwabe-Zyklus hat eine Amplitude von etwa 0.1 % der Sonnenkonstante, der Gleißberg-Zyklus von etwa 0.24 – 0.3 % (vgl. Cubasch, 2002).

Um die Auswirkung der beiden genannten Sonnenzyklen zu untersuchen, ist eine Variation der Solarkonstanten entsprechend den oben genannten Daten notwendig. Die Analyse berücksichtigt ausschließlich die maximale Änderung der Sonneneinstrahlung, die gleich der Amplitude der Zyklen ist. Für den Schwabe-Zyklus multipliziert sich die Solarkonstante mit dem Faktor 1.001 für



**Abbildung 7.29:** Variationen der solaren Intensität gemäß des Schwabe-Zyklus, des Gleißberg-Zyklus und der additiven Überlagerung beider Zyklen

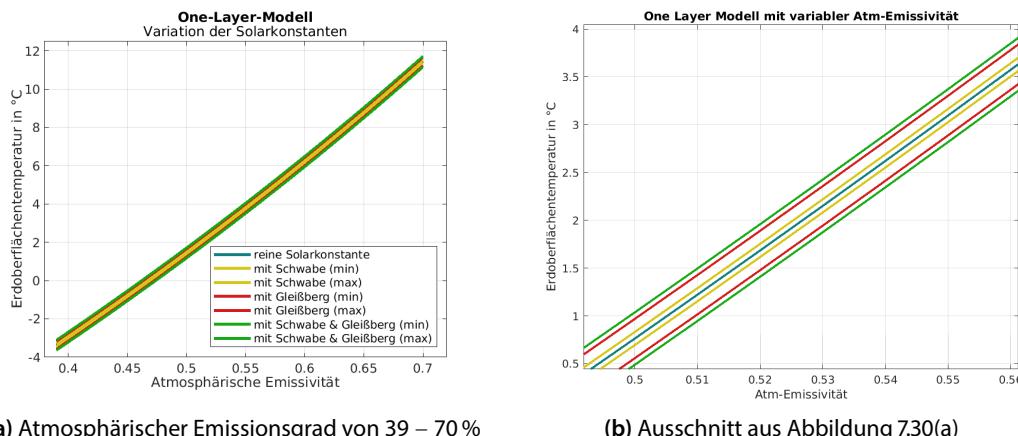
ein Aktivitätsmaximum und mit 0.999 für ein Aktivitätsminimum. Die Analyse des Einflusses des Gleißberg-Zyklus erfolgt analog.

*Hinweis:* Die folgenden Berechnungen verwenden das One-Layer-Modell mit sowohl atmosphärischer als auch terrestrischer Albedo. Die Werte der Albedos entsprechen ihren Literaturwerten von  $\alpha_{\text{Atm}} = 22.5\%$  und  $\alpha_{\text{Erde}} = 8.8\%$ . Die Emissivität der Atmosphäre für die terrestrische Strahlung bleibt weiterhin wie in den bisherigen Studien variabel.

Die sich daraus ergebenden Schwankungen in der Solarstrahlung veranschaulicht Abbildung 7.29.

nur die Solarkonstante:	$I_{\text{solar}} = 1368 \frac{W}{m^2}$	
inkl. Schwabe-Zyklus:	$I_{\text{solar, min}} = I_{\text{solar}} \cdot 0.999$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx -0.06^\circ\text{C}$
	$I_{\text{solar, max}} = I_{\text{solar}} \cdot 1.001$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx 0.06^\circ\text{C}$
inkl. Gleißberg-Zyklus:	$I_{\text{solar, min}} = I_{\text{solar}} \cdot 0.997$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx -0.19^\circ\text{C}$
	$I_{\text{solar, max}} = I_{\text{solar}} \cdot 1.003$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx 0.19^\circ\text{C}$
inkl. beider Zyklen:	$I_{\text{solar, min}} = I_{\text{solar}} \cdot 0.996$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx -0.25^\circ\text{C}$
	$I_{\text{solar, max}} = I_{\text{solar}} \cdot 1.004$	$\Delta T_{\text{Erde}} \approx 0.25^\circ\text{C}$

Wäre nur der Schwabe-Zyklus aktiv, würde sich die Oberflächentemperatur der Erde periodisch um maximal  $2 \cdot 0.06^\circ\text{C}$  ändern. Der Gleißberg-Zyklus allein betrachtet führt zu einer periodischen Temperaturänderung von maximal  $2 \cdot 0.19^\circ\text{C}$ . Selbst beide Zyklen überlagert führen zu einer maximalen Temperaturerhöhung von  $2 \cdot 0.25^\circ\text{C}$ . Diese Ergebnisse sind in Abbildung 7.30(a) dargestellt. Zur Unterscheidung der Diagramme zeigt Abbildung 7.30(b) einen Ausschnitt aus Abbildung 7.30(a). Sie ermöglicht ein leichteres Ablesen der Temperaturunterschiede zwischen den einzelnen Modellen.



**Abbildung 7.30:** Einflüsse auf die Erdoberflächentemperatur aufgrund von verschiedenen Sonnenzyklen

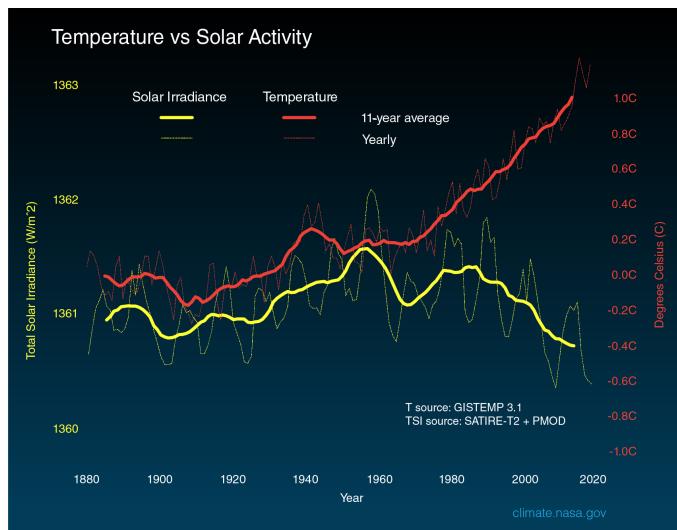
Die Berechnungen zeigen, dass die Temperaturschwankungen aufgrund von Sonnenzyklen nicht groß genug sind, um einen Temperaturanstieg von etwa 1°C während des letzten Jahrhunderts zu erklären. Selbst wenn die Sonnenzyklen so große Temperaturschwankungen verursachen würden, müssten sie sich regelmäßig periodisch in den Temperaturdaten ausdrücken. Der IPCC-Bericht von 2001 bestätigt, dass die Variabilität der Sonnenstrahlung nur etwa ein Drittel des Strahlungsantriebs ausmacht, der durch den Anstieg der anthropogenen Treibhausgase von 1880 bis heute verursacht wurde (vgl. IPCC, 2001).

Die Lernenden berücksichtigten den Gleißberg-Zyklus nicht. Stattdessen untersuchten sie Variationen der Erdbahnparameter, die sie aufgrund ihrer langen Wirkungsdauer anschließend wieder als Ursache für einen Temperaturanstieg in den letzten 120 Jahren ausschlossen.

Tatsächlich weisen Messdaten des auf der Erdoberfläche ankommenden solaren Strahlungsfluxes Schwankungen mit einer ungefähr 11-jährigen Periodizität auf. Bildet man das 11-jährige Mittel über diese Daten und vergleicht sie mit dem 11-jährigen Mittel der globalen Erdoberflächentemperatur, ist kaum von einer Korrelation auszugehen. Insbesondere seit etwa dem Jahr 1990 sinkt die durchschnittliche Sonnenintensität, während die ebenfalls durchschnittliche Erdoberflächentemperatur steigt (vgl. Abbildung 7.31).

### 7.3.2.7 Auswirkung von schmelzenden Eiskappen auf die terrestrische Albedo im One-Layer-Modell

Die terrestrische Albedo bestimmt sich durch die Oberflächeneigenschaften der Erde. Helle Oberflächen haben ein größeres Reflexionsvermögen als dunklere. Schnee reflektiert das Sonnenlicht sehr gut, während Asphalt es stark absorbiert. Wäre die Erde vollständig mit Eis bedeckt, hätte sie eine Albedo von etwa 84 %. Das meiste Sonnenlicht würde reflektiert. Wäre die Erde vollständig mit Wald bedeckt, betrüge die Albedo etwa 14 %. Das meiste Sonnenlicht würde absorbiert. Es ist also klar, dass Veränderungen der Erdoberfläche, wie zum Beispiel Eisbedeckung, Waldbedeckung, Wüstengebiete oder städtische Gebiete, zu einer Veränderung der Albedo und als Folge davon der Erdoberflächentemperatur der Erde führen.



**Abbildung 7.31:** The above graph compares global surface temperature changes (red line) and the Sun's energy that Earth receives (yellow line) in watts (units of energy) per square meter since 1880. The lighter/thinner lines show the yearly levels while the heavier/thicker lines show the 11-year average trends. Eleven-year averages are used to reduce the year-to-year natural noise in the data, making the underlying trends more obvious. *Übersetzt: Vergleich der Messdatenaufzeichnungen der Sonnenintensität (gelbe Linie) mit der globalen Erdoberflächentemperatur (rote Linie) seit 1880, jährlich vs. 11-jährig gemittelter Durchschnitt (s. NASA, o. D.).*

Das folgende Modell berücksichtigt den Schmelzprozess der polaren Eisflächen. Die modellierte terrestrische Albedo wird anschließend in das Strahlungsbilanzmodell integriert. Ein erster Schritt betrachtet das One-Layer-Modell mit nur der terrestrischen Albedo. Ein zweiter Schritt ergänzt die Reflexionseigenschaft der Atmosphäre für solare Strahlung.

Abbildung 7.32 zeigt die terrestrische Albedo als Funktion des Breitengrades. Die dargestellte Albedo ist über ein Jahr gemittelt, um saisonale Schwankungen auszuschließen. Die Grafik verdeutlicht die niedrigere Albedo von Ozeanen und tropischen Regionen. Hingegen liegt die Albedo in Polarregionen, die die meiste Zeit des Jahres mit Schnee und Eis bedeckt sind, deutlich höher. Diese Abbildung dient als Grundlage für das Albedo-Modell.

Für die Modellierung diskretisiert man die Breitengrade in Zellen der Breite  $10^\circ$ . Jede Zelle besitzt eine konstante Albedo, die durch den aus der Graphik geschätzten Mittelwert gegeben ist. Dabei wird angenommen, dass die Polargebiete näherungsweise durch den nördlichen und südlichen Polarkreis begrenzt werden. Das Modell, das die Schne- und Eisschmelze widerspiegelt, ist daher nur auf die Regionen nördlich von  $60^\circ\text{N}$  bzw. südlich von  $60^\circ\text{S}$  beschränkt.

Als Referenzzustand für den Schmelzprozess dient der gegenwärtige Zustand der Eis- und Schneedecke auf der Erde. Weiterhin gilt die Annahme, der Schmelzprozess könne durch einen linearen Verlauf beschrieben werden. Wasser mit einer deutlich geringeren Albedo ersetzt geschmolzenes Eis und Schnee. Die durchschnittliche Albedo von Wasser liegt bei etwa 11 %.

Die Neigung der Erdachse bleibt unberücksichtigt. Eine erste Näherung – Modell m1 – vernachlässigt auch die Krümmung der Erde. Alle Oberflächen der Erde sind senkrecht zur Sonne ausgerichtet. Ein nächster Schritt zur Verbesserung des Modells führt den Kosinus-Effekt ein. Dieser beachtet den effektiv kleineren Beitrag der nördlicheren bzw. südlicheren Erdoberflächen zur Albedo. Die

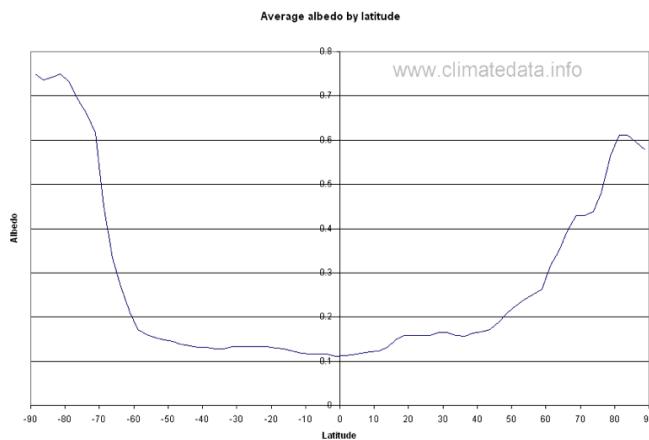


Abbildung 7.32: Durchschnittliche Albedo in Abhängigkeit des Breitengrads (s. climatedata.info, o. D.)

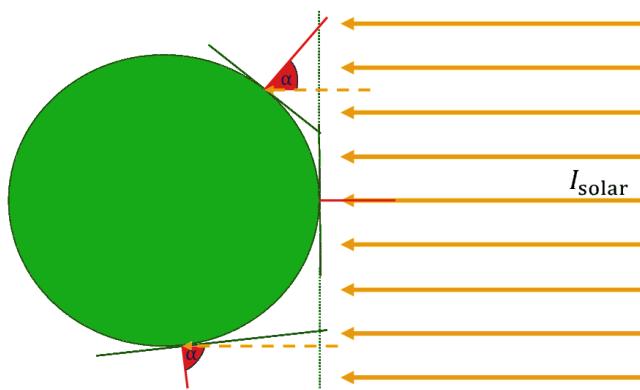


Abbildung 7.33: Erniedrigung der einfallenden solaren Strahlung aufgrund des Kosinuseffekts. In gelb: einfallende solare Strahlung; blaue Kreisfläche: die Erde; blaue Linien: Tangenten an die Erdoberfläche; in rot: Normalen auf die Erdoberfläche mit zugehörigem Winkel zur einfallenden solaren Strahlung.

Sonneneinstrahlung auf eine Fläche ist am höchsten, falls die Fläche direkt der Sonne zugewandt ist, oder mathematisch ausgedrückt, falls die Fläche orthogonal zu den einfallenden Sonnenstrahlen steht. Da die Erde eine Kugel ist, tritt dieser Fall lediglich am Äquator auf. Je weiter man sich vom Äquator aus den Polen nähert, desto stärker ist die Abweichung von der Normalen (s. Abbildung 7.33). Die Sonneneinstrahlung reduziert sich proportional zum Kosinus des Winkels. Dieses Modell wird mit  $m_2$  bezeichnet, um in der folgenden Diskussion die Referenzierung zu erleichtern.

Der Prozess der Enteisung ist für beide Modelle in Abbildung 7.34 dargestellt. In beiden Fällen ist eine Abnahme der Albedo zu erkennen. Die Abnahme ist im Modell  $m_1$  viel größer als im Modell  $m_2$ . Dies war zu erwarten: Die polaren Oberflächen sind für die Veränderung verantwortlich und haben einen relativ starken Einfluss durch das Modell. Die Albedo im Modell  $m_2$  sinkt von etwa 9.76 % auf 8.07 %.

Die beiden Abbildungen 7.35 stellen die Auswirkung auf die Temperatur als Funktion des atmosphärischen Emissionsgrades dar. Es wurden jeweils die maximale und minimale Albedo der beiden

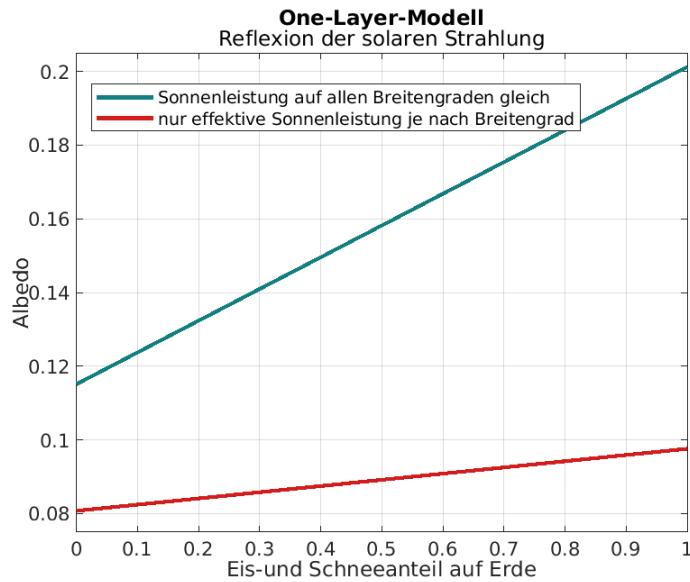
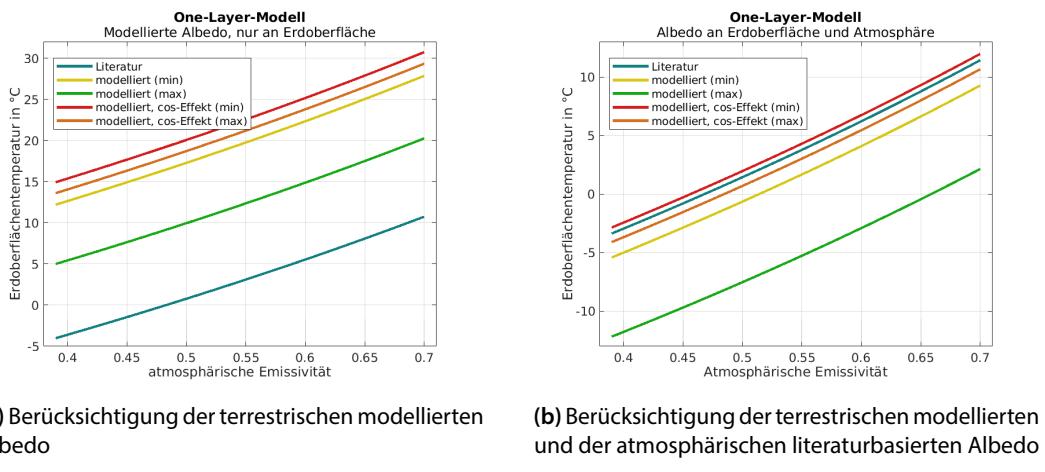


Abbildung 7.34: Darstellung des polaren Abschmelzprozesses. In blau: Modell m1; in rot: Modell m2.

Modelle m1 und m2 verwenden. Die maximale Albedo entspricht dem gegenwärtigen Zustand der Eisflächen (grüne und orangene Graphen), während die minimale Albedo vollständig geschmolzenen polaren Oberflächen entspricht (gelbe und rote Graphen). Der blaue Graph bezieht sich auf die terrestrische Albedo, die in der Literatur mit  $\alpha_{\text{Erde}} = 30\%$  angegeben ist. Abbildung 7.35(a) zeigt die Auswirkungen des Schmelzens des Polareises auf die Temperatur der Erde ohne atmosphärische Reflexion. Der Schmelzprozess in Modell m1 würde bei allen atmosphärischen Emissionsgraden zu einem Temperaturanstieg von etwa  $7^{\circ}\text{C}$  führen. Im Gegensatz dazu würde die Temperatur in Modell m2 um etwa  $1.3^{\circ}\text{C}$  ansteigen, falls alles Eis schmilzt. Abbildung 7.35(b) berücksichtigt die atmosphärische Albedo. Dennoch zeigt das Modell m1 einen großen Temperaturanstieg für den Schmelzvorgang. Dort führt die modellierte Albedo unter Berücksichtigung des Kosinus-Effekts näherungsweise zu einer Albedo der aktuellen realen Situation.

### 7.3.2.8 Auswirkung anthropogener Einflüsse auf den Strahlungshaushalt der Erde

Wie Abschnitt 7.3.2.4 erwähnt, hat der Mensch einen Einfluss auf die terrestrische Albedo. Diese Änderung der Landoberflächen-Albedo geht mit einem Strahlungsantrieb von  $-0.15 \pm 0.1 \text{ W/m}^2$  einher, was einer Änderung der Solarkonstante um  $0.01 \pm 0.007\%$  entspricht. „Die Menschheit beeinflusst das Klima und die Temperatur auf der Erde zunehmend durch die Nutzung fossiler Brennstoffe, die Abholzung von Regenwäldern und die Viehzucht. Dadurch steigt die Menge der Treibhausgase in der Atmosphäre enorm an, was den Treibhauseffekt und die globale Erwärmung verstärkt“ (s. European Commission, o. D. a). Eine Änderung der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre wirkt sich vor allem auf deren Emissionsgrad aus. Alle vorgestellten Modelle und deren Erweiterungen zeigen große Temperaturunterschiede von nahezu  $15^{\circ}\text{C}$ , die durch die Variation des atmosphärischen Emissionsgrades verursacht werden. Nach Literaturangaben hat der Mensch den  $\text{CO}_2$ -Gehalt in der Luft seit 1750 um etwa  $40 - 48\%$  erhöht. Etwa die Hälfte davon absorbieren Ozeane, Pflanzen und Böden. Die andere Hälfte gelangt in die Atmosphäre



**Abbildung 7.35:** Einflüsse auf die Erdoberflächentemperatur aufgrund eines terrestrischen Albedomodells

(vgl. European Commission, o. D. a; Kasang, 2020; Spiegel Wissenschaft, 2017). Die Bedeutung des Kohlenstoffdioxids wird aus physikalischer Sicht deutlicher: Aufgrund seiner chemischen Struktur absorbiert und emittiert er vor allem Wärmestrahlung. Je mehr Kohlendioxid in der Atmosphäre vorhanden ist, desto mehr Wärmestrahlung wird absorbiert. Eine steigende Kohlenstoffdioxidkonzentration in der Atmosphäre führt zu einer Erhöhung des atmosphärischen Emissionsgrades und damit zu einer Erhöhung der Oberflächentemperatur der Erde.

In der IPCC, 2013a steht: „Es ist eindeutig, dass der anthropogene Anstieg der gut gemischten Treibhausgase den Treibhauseffekt erheblich verstärkt hat, und der resultierende Antrieb nimmt weiter zu. Der gesamte anthropogene effektive Strahlungsantrieb während des Industriezeitalters seit 1750 beträgt  $2.3 \pm 1.0 \text{ W/m}^2$ .“ Dieser Strahlungsantrieb entspräche einer Erhöhung der Solarkonstante von  $0.17 \pm 0.07 \%$ .

### 7.3.3 Modellierungswochen als mögliches Einsatzgebiet

Die vorgestellte Modellierungsaufgabe kam bereits in einer Modellierungswoche zum Einsatz, der im folgenden Abschnitt präsentiert wird.

Während einer Modellierungswoc<sup>3</sup> arbeiten ausgewählte Schülerinnen und Schüler mit besonderem Interesse an Mathematik in kleinen Teams von 5–6 Teilnehmenden an realen Problemen aus der Wirtschaft oder Forschung. Die Probleme sind in der Regel ungelöst, und es wird keine Lösung vorgegeben. Jede Gruppe wird von einer wissenschaftlichen Mitarbeiterin bzw. einem wissenschaftlichen Mitarbeiter der Universität betreut. Zusätzlich steht eine Vertreterin bzw. ein Vertreter des für das Forschungsthema zuständigen Unternehmens oder Instituts den Lernenden für Rückfragen zur Verfügung. Die Betreuung erfolgt nach dem Prinzip der minimalen Hilfe (vgl. Zech, 2002). Vorrangige „Unterrichtsmethode“ ist eine schülerzentrierte und kooperative Gruppenarbeit, in der die Lernenden aktiv mathematische Methoden anhand von selbstgesteuerten Diskussionen erkunden. So entwickelt die Gruppe ihre eigenen Ideen. Fehler oder Verbesserungen findet sie im

<sup>3</sup>Weitere Informationen findet man unter <https://www.scc.kit.edu/forschung/CAMMPweek.php>, Zugriffen: 20.03.2021

Austausch untereinander. Diese Arbeitsweise kann von der betreuenden Person unterstützt werden, indem sie sich entweder zeitweise zurückzieht und die Gruppe alleine diskutieren lässt, oder indem sie gezielt nach einer Erklärung der Ideen und deren Umsetzung fragt. Die Erfahrung zeigt einen sehr positiven Effekt, falls Lernende ihre unsicher oder fehlerhaft erscheinenden Ideen anderen verständlich erklären sollen. So können falsche Annahmen beseitigt, aber auch richtige Ansätze weiter vorangetrieben werden (vgl. Hattebuhr, 2014).

Zu Beginn der Modellierungswoche geben die betreuenden Personen eine kurze Einführung in die Problemstellung in Form einer Präsentation. Sie motivieren das Thema und die Notwendigkeit der Problembehandlung, stellen aber auch die Komplexität und Schwierigkeit des Problems heraus. Angewandt auf den vorliegenden Fall bedeutet es, auf aktuelle, besondere Wetterereignisse wie Hitzeerekorde, Kältewellen, Überschwemmungen oder auf politische Aussagen von Klimakonferenzen, Politikern, Wissenschaftlern oder bekannten Persönlichkeiten Bezug zu nehmen. Darüber hinaus bindet die Frage, welche Rolle der Klimawandel im Alltag der Lernenden spielt, diese direkt mit ein. Die Präsentation beinhaltet auch die Vorstellung eines einfachen Kompartimentmodells des Strahlungsflusses und eine Einführung von nötigen Fachbegriffen:

- Der Hauptenergielieferant der Erde ist die Sonne.
- Die Sonne strahlt in verschiedenen Wellenlängen. Sie hat ihre höchste Intensität im Bereich des sichtbaren Lichts.
- Die Sonnenstrahlung wird von der Erde teilweise reflektiert und teilweise absorbiert. Der Koeffizient, der den Anteil der reflektierten Sonnenstrahlung beschreibt, heißt Albedo. Das Absorptionsvermögen gibt an, wie gut ein Körper (hier die Erde) die Energie aufnimmt.
- Die Erde selbst sendet Strahlung in Form von Wärmeenergie in alle Richtungen aus. Der Emissionsgrad besagt, wie gut ein Körper Energie abstrahlt.
- Der Einfluss der Atmosphäre ist unklar. Diesen gilt es unter anderem zu analysieren.
- Gesucht ist eine quantitative Beschreibung der natürlichen und anthropogenen Einflüsse auf die Strahlung mit dem Ziel, zu untersuchen, ob der Klimawandel vorrangig durch natürliche Einflüsse verursacht wird.
- Es ist empfehlenswert die natürlichen und anthropogenen Strahlungseinflüsse in der Gruppenarbeitsphase zu diskutieren. So geben die Schülerinnen und Schüler selbstständig die Ausrichtung der Analyse vor.
- Da jede Kompartimentschicht als homogen und zeitlich konstant angenommen wird, bleiben optische Phänomene in der Atmosphäre, wie Rayleigh- und Mie-Streuung, Lichtbrechung und Beugung unberücksichtigt. Ebenso vernachlässigt das Modell Wolkenbildung, thermodynamische und vertikal ablaufende Prozesse, die zu einem genaueren, aber auch wesentlich komplexeren Modell führen. Die hier vorgestellten Modelle sind nicht dazu gedacht, präzise Vorhersagen zu treffen. Sie dienen vielmehr dem Verständnis und der Untersuchung verschiedener Einflüsse auf die Erdtemperatur.

Die Problembeschreibung für die Lerngruppe enthält weitere Hintergrundinformationen sowie Hinweise auf verfügbare Daten (vgl. Abschnitt 7.3.1). Es ist durchaus gewollt, dass sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig weitere Informationen, zum Beispiel durch eine Recherche im Internet, beschaffen. Es sollte immer klar sein: Die Betreuerin bzw. der Betreuer ist nicht allwissend!

Das Projekt greift auf Wissen aus den unterschiedlichsten Bereichen zurück. Daher darf die betreuende Person durchaus zugeben: „Ich kenne die Antwort auf deine Frage nicht, aber wir finden sicherlich gemeinsam eine Antwort“. Sie spiegelt die Rolle eines Mentors wieder und unterstützt dabei, Hilfe zu finden, führt aber keinen Lösungsweg vor. Die Problemstellung ist absichtlich offen gehalten. Diese Vorgehensweise ermöglicht ein Verfolgen diverser Ansätze, die zu einer (guten) Lösung führen. Unter Umständen ist es hilfreich, den Lernenden gleich zu Beginn zu eröffnen, dass es viele mögliche Lösungswege gibt und nicht die eine richtige Lösung. Ist die betreuende Person aufgeschlossen und motiviert die Lerngruppe, ihren eigenen Ideen zu verfolgen, wachsen die Lernenden über sich hinaus und sind möglicherweise von ihrer eignen Leistung überrascht und überwältigt. Nach Roeckerath (2012) mündet ein solches Erlebnis in einer Verstärkung und Erhöhung der Selbstwirksamkeitserwartung.

Die mathematischen Modelle wurden mit der Software MATLAB implementiert<sup>4</sup>. Die Nutzung einer Software erleichtert es, aufgestellte Modelle zu verbessern und zu erweitern. Die Teilnehmenden benötigen für die Anwendung nicht zwangsläufig Programmierkenntnisse. Die Handhabung von MATLAB kommt dem Einsatz eines grafikfähigen Taschenrechners nahe. In der Vergangenheit gab es mehrere Gruppen, die gemeinsam über einen Beamer programmierten. Dadurch entstand der Begriff *Public-Coding*. Die Betreuerinnen und Betreuer sollten Grundlagen der Programmierung beherrschen und Hilfestellung geben können. Darüber hinaus erwies sich ein (digitales) Whiteboard oder Flipchart als äußerst hilfreich, und es wurde zum zentralen Element für das Sammeln und Bearbeiten von Ideen sowie für Erklärungen. Am Ende der Woche präsentieren die Schülergruppen ihre Ergebnisse einem breiten Publikum bestehend aus den Problemstellenden sowie interessierten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, Lehrkräften, Familienmitgliedern und Freunden. Dabei erfahren sie, wie sie innerhalb einer Woche selbst zu Experten in ihrem Thema werden. Insgesamt bildet diese Woche die Herangehensweise an Projektaufgaben in der Industrie und Wirtschaft nach und ist daher auch von der Arbeitsweise her authentisch.

Basierend auf den eigenen Erfahrungen ist der Einsatz der Aufgabenstellung in weiteren Modellierungswochen gut vorstellbar. Auch eignet sich die Problemstellung für online-Veranstaltungen. Heranwachsende bearbeiteten die Problemfrage in einem interaktiven Online-Workshop erfolgreich. Digitale Werkzeuge, die kollaboratives mathematisches Modellieren online im Allgemeinen ermöglichen, diskutiert Schönbrodt et al. (in Druck). Darüber hinaus eignen sich auch Projekte in der Schule oder an der Universität, die über einen längeren Zeitraum laufen, beispielsweise eine Woche mit Vollzeitarbeit oder ein halbes Jahr mit wöchentlichen Treffen. So steht den Teilnehmenden genügend Zeit zur Verfügung sich in das Thema einzuarbeiten und anschließend selbstständig (mathematische) Modelle zu entwickeln und zu implementieren. Das Thema ist prädestiniert für eine fächerübergreifende projektorientierte Arbeit, da es die Fächer Mathematik, Physik, Geographie und Informatik verbindet.

*Hinweis:* Ich betreute fast zehn Schülergruppen und leitete sieben Modellierungswochen. Im Rahmen der Vorbereitung habe ich an der Auswahl und Formulierung der Problemstellungen mitge-

<sup>4</sup>Das Studentenprogramm CAMMP, das zweimal im Jahr die hier vorgestellte Modellierungswoche veranstaltet, verwendet in der Regel MATLAB. MATLAB überzeugt zum einen durch seine einfache Handhabung und Syntax und ist somit auch für Personen mit geringen oder gar keinen Programmierkenntnissen schnell erfassbar. Zum anderen verfügt es über eine sehr gute Online-Dokumentation. Andererseits wird es von vielen Entwicklern in der Industrie eingesetzt und stellt somit ein authentisches Werkzeug dar. Lernende können MATLAB darüber hinaus auch online durch einen Zugriff über ein Browserfenster ohne vorherige Installation des Programms benutzen. Ebenfalls eignen sich auch weitere Programmiersprache wie Python oder Julia für den Rechnereinsatz, der vor allem komplexe Berechnungen abnehmen soll.

wirkt und war für die Auswahl der Schülerinnen und Schüler sowie die Einführung und Begleitung der Gruppenbetreuerinnen und -betreuer während der Woche verantwortlich.

## 7.4 Fazit und Ausblick

Die vorgestellte Problemstellung ermöglicht es Schülerinnen und Schülern, das hoch relevante Thema des Klimawandels mit wissenschaftlichen Werkzeugen zu erkunden. Einfache Modelle erlauben den Energiehaushalt der Erde abzubilden und deren Oberflächentemperatur zu berechnen.

In einem ersten Schritt wurde ein sehr vereinfachtes Modell entwickelt. Das Bare-Rock-Modell dient vor allem dazu, in das Thema einzusteigen und das Prinzip der (Strahlungs-)Fluss- und Kompartimentmodelle zu verstehen. Im Anschluss daran wurde das Modell um die Atmosphäre erweitert. Der Vergleich zwischen dem Bare-Rock-Modell und dem One-Layer-Modell ermöglicht ein Verständnis der Atmosphäre und ihrer allgemeinen Auswirkungen: Gäbe es keine Atmosphäre um die Erde, hätte sie eine Oberflächentemperatur von etwa  $-18^{\circ}\text{C}$ . Menschliches Leben ist bei diesen Temperaturen kaum denkbar. Es wurden Erweiterungen des Modells vorgenommen, die natürliche und anthropogene Einflüsse auf die Erdoberflächentemperatur darstellen: Zunächst wurde die atmosphärische Albedo in das One-Layer-Modell aufgenommen. Ein weiteren Modellierungsschritt berücksichtigte die Absorption der Sonnenstrahlung in der Atmosphäre. Beide Erweiterungen stellen eine bessere Darstellung der realen Situation dar.

Die Modelle erlaubten die Untersuchung verschiedener Einflüsse auf die Temperatur der Erdoberfläche. Dazu gehörten Variationen der Solarkonstante aufgrund natürlicher Prozesse, die zu einem maximalen Temperaturanstieg von  $0.25^{\circ}\text{C}$  führen. Anschließend wurde das Abschmelzen großer Schnee- und Eisflächen in den Polarregionen modelliert und in die bestehenden Modelle integriert. Ein realistisches Modell, das die Erdkrümmung mit Hilfe des Cosinus-Effekts berücksichtigt, ergibt einen Temperaturanstieg von etwa  $1.3^{\circ}\text{C}$ . Änderungen der Albedo aufgrund anthropogener Landnutzungsänderungen wurden vernachlässigt. Diese Einflüsse könnten in einer Modellerweiterung analog zu dem Einfluss durch die Polareisschmelze berücksichtigt werden. Beispielsweise könnten Lernende recherchieren, wie groß die Waldflächen sind, die jährlich abgeholt werden. Anschließend ermitteln die Heranwachsenden die weiteren Nutzungsformen dieser Flächen und modellieren die sich ergebende Albedoänderung. Außerdem gilt es noch, den Einfluss von Vulkanausbrüchen zu quantifizieren. Ansätze für eine qualitative Analyse macht Abschnitt 7.3.2.4. Der Einfluss des Menschen wurde anhand von Auswirkungen aufgrund von Änderungen des atmosphärischen Emissionsgrades diskutiert. Insgesamt lassen sich auch mit sehr einfachen Modellen die Auswirkungen von natürlichen und anthropogenen Einflüssen quantitativ vergleichen. Darüber hinaus geben sie spannende Einblicke in ein mathematisch anspruchsvolles Thema.

Die Umsetzung des Forschungsthemas im Rahmen einer Online-Modellierungswoche hat sehr gut funktioniert. Die Betreuung und der Austausch innerhalb der Gruppe erfolgte über das Tool Mattermost<sup>5</sup> in Kombination mit jitsi<sup>6</sup>. Dieses Tool ermöglichte Diskussionen im gesamten Team, aber auch ausgelagert in Breakout-Räumen. Zusätzlich machte die Chat-Funktion einen Austausch von Daten, wie Bilder oder Diagramme, möglich. Auf einem online-Whiteboard sammelten die

<sup>5</sup>Für weitere Informationen: <https://mattermost.com/>. Zugegriffen: 20. März 2021

<sup>6</sup>Für weitere Informationen: <https://meet.jit.si/>. Zugegriffen: 20. März 2021

Schülerinnen und Schüler aktiv ihre Ideen<sup>7</sup>, skizzierten schematisch Modellerweiterungen und entwickelten mathematische Beschreibungen. Diese waren für jedes Teammitglied jederzeit verfügbar, sodass jeder relativ leicht den Überblick behalten konnte. Den Einsatz des Bildschirmteilens nutzten die Heranwachsenden vor allem für die Programmierung, da MATLAB online<sup>8</sup> das gleichzeitige Bearbeiten des Codes mehrerer Benutzer nicht erlaubt. Dieser Umstand förderte vor allem das öffentliche Programmieren im Team, sodass sich jedes Teammitglied im Code zurechtfinden konnte. Insgesamt musste die Betreuerin nur wenig Hilfe zur Verfügung stellen. Die Betreuerin musste hauptsächlich zwischendurch motivieren, die eigenen Ideen weiterzuverfolgen, und selten indirekte allgemein-strategische Hilfe anbieten (vgl. Zech, 2002). Darüber hinaus förderte sie den Austausch: Sie rief zum Beispiel Diskussionsgruppen ein und regte zur Aufgabenteilung an. Außerdem erinnerte sie die Gruppe an die Vorbereitung einer Präsentation und eines Berichts. Besonders frustrierte die Heranwachsenden der große Definitionsbereich der atmosphärischen Emissivität, die durch keine Literatur weiter eingegrenzt werden konnte.

Obwohl durch den großen Variationsbereich der atmosphärischen Emissivität der vorherrschende Einfluss auf die Temperatur der Erde sehr deutlich wird, führte der Umstand zur Ernüchterung. Die Teilnehmenden wünschten sich eine bessere Annäherung an die Realität. Ein Wunsch, den diese Modelle nicht ermöglichen. Ideen, den Emissionsgrad über das chemische Gleichgewicht der Atmosphäre und das Absorptionsvermögen einzelner chemischer Elemente selbst zu modellieren, verfolgten die Teenager angesichts der kurzen zur Verfügung stehenden Zeit nicht. Eine Möglichkeit, die Modelle zu verbessern, wäre daher durch eine Erweiterung des Kompartimentmodells auf mehrere atmosphärische Schichten gegeben. Ein solches Modell könnte die Prozesse der Emission und Absorption detaillierter behandeln und den Einfluss von Wolken besser darstellen (vgl. Abschnitt 7.3.2.3).

Obwohl klimatreibende Einflüsse quantifiziert werden konnten, bleiben Vorhersagen des Klimas sehr komplex und schwierig. Sie müssen nicht nur natürliche Einflüsse berücksichtigen, sondern auch das Verhalten des Menschen in der Zukunft (zum Beispiel Emissionen, Umsiedlung, Austrocknung von Landflächen, ...).

Zusammenfassend präsentierte die vorgestellte Problemstellung eine hervorragende Möglichkeit für Schülerinnen und Schüler, sich mit einem hoch relevanten soziologischen und wissenschaftlichen Thema zu beschäftigen. Die Untersuchung des Energiehaushalts der Erde erlaubt es, natürliche und anthropogene Beiträge zur Oberflächentemperatur zu analysieren. Infolgedessen führt dieses Thema Lernende nicht nur in das Konzept der mathematischen Modellierung ein. Partielle Differentialgleichungen stellen, richtig aufbereitet, keine unüberwindbare Hürde für Schülerinnen und Schüler dar. Nach einer ersten Einschätzung mit Lernenden der neunten Jahrgangsstufe verstehen auch sie bereits das Prinzip des Strahlungsflusses. Sie lernen auch physikalische und chemische Prozesse in der Atmosphäre kennen und erfahren den Nutzen der Treibhausgase, die für ein angenehmes Klima auf der Erde sorgen. Darüber hinaus bemächtigt das Vorgehen die Heranwachsenden dazu, auf einer wissenschaftlich fundierten Grundlage zu einer lebhaften öffentlichen Diskussion beizutragen. Aus pädagogischer Sicht bringt somit diese Arbeitsweise viele Vorteile für die jungen Menschen.

<sup>7</sup>Für weitere Informationen: <https://miro.com/>. Zugriffen: 20. März 2021

<sup>8</sup>Für weitere Informationen: <https://de.mathworks.com/products/matlab-online.html>. Zugriffen: 20. März 2021



# **Teil III**

## **Didaktische Analyse**



# 8

## Eine empirische Studie zum mathematischen Modellieren in der Klimaforschung

Der internationale Modellierungswettbewerb *International Mathematical Modeling Challenge* (IM<sup>2</sup>C) verfolgt das Ziel, die Macht der Mathematik für Schülerinnen und Schülern sowie Lehrenden erlebbar zu machen. Lernende sollen Probleme der realen Welt besser verstehen, analysieren und lösen können – und zwar in realistischen Kontexten. Diese Anforderung ist eine zentrale Eigenschaft von authentischen mathematischen Modellierungsproblemen (vgl. Abschnitt 3). So ist es nicht verwunderlich, dass die Aufgaben des Wettbewerbs reale (mathematische Modellierungs-) Probleme widerspiegeln, in denen Heranwachsende verschiedene Kompetenzen und Wissen diverser (mathematischer) Bereiche anwenden. Für die Lösungsentwicklung der jährlich gestellten Aufgabe stehen den Jugendlichen, die sich in Teams von bis zu vier Personen organisieren dürfen, maximal fünf aufeinander folgende Tage zur Verfügung.

Die mathematische Modellierung ist ein zentraler Bestandteil in der Klimaforschung. Dass verschiedene Themenschwerpunkte sich eignen, um sie bereits für Schülerinnen und Schülern erfahrbar zu machen, zeigen die entwickelten Lehr- und Lernmaterialien im Teil II dieser Arbeit. Die Aktualität und Relevanz des Themas zeigt sich unter anderem darin, dass im Jahr 2019 Schülerinnen und Schüler in der IM<sup>2</sup>C dazu aufgefordert wurden, die Kapazität der Erde für menschliches Leben zu bestimmen (vgl. Anhang D.1). Laut Aufgabenstellung gilt es Hauptfaktoren, die die Bevölkerungsanzahl auf der Erde begrenzen, zu identifizieren und zu analysieren. Außerdem sollten die Teilnehmenden mathematische Modellierung nutzen, um die derzeitige Kapazität unter Berücksichtigung der aktuellen Konditionen und Technologien zu bestimmen. Darauf aufbauend galt es zu beurteilen, welche Maßnahmen das menschliche Leben zukünftig sichern und erhöhen. Für eine empirische Untersuchung des mathematischen Modellierens im Bereich der Klimaforschung erfolgte eine Anpassung der Fragestellung an ein heterogenes Schülerklientel. Sie sollte sowohl für junge Schülerinnen und Schüler (ab der 5. Jahrgangsstufe) verständlich als auch für ältere Lernende (bis einschließlich der Oberstufe) ansprechend formuliert sein. Dadurch wird gewährleistet, dass eine Einordnung der Modellierungskompetenzen unabhängig von mathematisch-inhaltlichen Kenntnisständen möglich ist. Diese Anforderungen führten zu der Formulierung „Analysiere, wie viele Menschen höchstens auf der Erde leben können, sodass sie genügend Nahrung (Essen

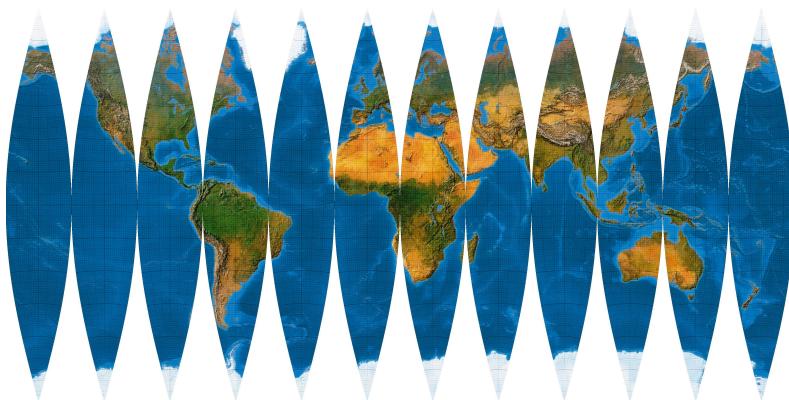


Abbildung 8.1: Projektion der Erde in 12 Globussegmente (s. R. Böhm, o. D.)

und Wasser) und Platz zum Leben haben“. Die an der Studie Teilnehmenden dokumentierten ihr Vorgehen stichpunktartig und beurteilten ihre Zwischen- sowie Endergebnisse. Zudem erhielten sie eine Karte der Erde (vgl. Anhang D.2). Eine Beschreibung der Erde als Kugel führt in der zweidimensionalen Abbildung zu Projektionsfehlern. Daher wurde hier eine Darstellung gewählt, die die Erde an den Längengraden auseinanderschneidet, und die (hier 12) Stücke dann aneinander gereiht abgebildet werden. Vorteilhaft ist eine weniger verzerrte Darstellung der Größenverhältnisse zwischen den Landmassen, den eisbedeckten Polen und dem Meer. Nachteilig erweisen sich die dadurch entstehenden Lücken zwischen den einzelnen Teilen. Dieser Nachteil wurde akzeptiert mit der Begründung, dass viele Lernende eine solche Abbildung bereits kennen. Die Aufgabe wurde im Rahmen einer empirischen Studie zum mathematischen Modellieren von freiwilligen Mathematiklehrkräften in den eigenen Klassen und Kursen eingesetzt. Da ich nicht persönlich in den Schulstunden bei der Durchführung anwesend war, erhielten die Lehrkräfte eine Anleitung mit Durchführungshinweisen (s. Anhang D.2, Abbildung D.2–D.7). Zur Bearbeitung standen den Schülerinnen und Schülern 30 Minuten zur Verfügung. Anschließend schätzten die Lernenden ihr Interesse in Bezug auf Mathematik, den Einsatz von Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht und die gestellte Aufgabe ein. Die Studie untersucht die Modellierungskompetenz von Schülerinnen und Schülern verschiedener Jahrgangsstufen anhand einer Fragestellung aus dem Bereich der Klimaforschung. Darüber hinaus soll der Einfluss der intrinsischen Motivation auf den Lösungsprozess beurteilt werden.

## 8.1 Entwicklung eines Erwartungshorizontes zur Lösung der Aufgabe als Vorarbeit für die Erstellung eines Bewertungsschemas

Die ursprüngliche Aufgabenstellung entstammt der IM<sup>2</sup>C. Durch eine Jury ausgezeichnete Lösungen von Schülerteams finden sich auf der Homepage des Wettbewerbs einsehbar<sup>1</sup>. Diese über 20 Seiten umfassenden Lösungen bilden keineswegs einen Maßstab für die hier untersuchte Modellierungsaufgabe. Einerseits entstanden die Wettbewerbslösungen in Teamarbeit, während in der

<sup>1</sup>Schülerlösungen befinden sich unter <http://immchallenge.org/Contests/2019/Solutions.html>. Zugriffen: 20. November 2021

vorliegenden Studie die Probanden in Einzelarbeit vorgehen mussten. Andererseits umfasste die maximale Bearbeitungszeit fünf volle Tage. Die Wettbewerbsteilnehmenden durften das Internet für Recherchearbeiten, Bücher, Daten sowie Computer für Berechnungen nutzen. Damit können die Jugendlichen auf vielfältige Ressourcen zugreifen. Ein Vergleich der Lösungen kann demnach nicht stattfinden. Dennoch enthalten die Lösungen Ansätze, die Lernende auch in einer 30-minütigen Bearbeitungszeit verfolgen können.

Mit Blick auf den Modellierungskreislauf vereinfachen die Lernenden im ersten Schritt die Problemstellung (vgl. Abschnitt 3.1, Abbildung 3.4). Dabei macht sich die bzw. der Modellierende mit der realen Situation vertraut. In Bezug auf die vorliegende Aufgabenstellung bedeutet dieser Schritt, problembezogene Einflüsse, die das menschliche Leben auf der Erde beschränken, festzulegen. Sinnvolle Faktoren zur Analyse der maximalen Tragfähigkeit an menschlichem Leben auf der Erde ergeben sich daher durch eine Benennung von Ressourcen, die Menschen zum Leben benötigen. Hierzu zählen (Trink-)Wasser, Nahrung, Energie, Platz zum Wohnen, Arbeiten und Erholen. Für diese bzw. einzelne ausgewählte Faktoren gilt es, Schätzungen oder auch Beschränkungen zu treffen. Dabei bietet es sich an, von eigenen Erfahrungen auszugehen, indem man beispielsweise die Frage beantwortet, wieviel Liter Wasser man selbst pro Tag benötigt. Diese Strategie beinhaltet eine Begründung für die getroffene Schätzung. Dieser Schritt des Begründens ist enorm wichtig im Modellierungsprozess, denn nur so kann die Modelliererin bzw. der Modellierer im Validierungsprozess fehlerhafte Annahmen identifizieren und korrigieren. Zusätzlich können weitere Erfahrungen einfließen, die sich aus der Betrachtung unterschiedlicher Lebensräume oder Kulturen ergeben. Erfahrungsgemäß steht Bewohnern ländlicher Regionen mehr Platz zum Leben zur Verfügung als denen innerhalb städtischer Strukturen. Asiatische Ballungsgebiete besitzen eine um ein Vielfaches dichtere Besiedlung als europäische. Eine Analyse des Platzbedarf berücksichtigt zusätzlich landwirtschaftliche Nutzflächen, unbewohnbare Regionen, Ökologie und Ökonomie. In eine Betrachtung des Nahrungsmittelangebots bzw. der Beschränkung dessen fließt ein, dass Nahrung (Getreide, Gemüse, Tiere) ebenfalls Platz und Wasser benötigt. Je nach Betrachtungswinkel entstehen unterschiedliche Schätzungen der einzelnen Faktoren. Gegebenenfalls verfügen Schülerinnen und Schüler über konkrete Werte in ihrem aktiven Wissensschatz. Dieser Umstand ist jedoch keine Voraussetzung für ein erfolgreiches Modellieren. Ein vollständig durchlaufender Modellierungsprozess unter ausschließlicher Betrachtung von Variablen bietet sogar den Vorteil, Parameter leicht anpassen zu können. Die Analyse des Trinkwasserbedarfs beinhaltet im besten Fall eine Differenzierung des Wasservorkommens auf der Erde. Die Erde ist etwa zu zwei Dritteln mit Wasser bedeckt. Jedoch besteht ein Großteil davon, nämlich etwa 97.5 %, aus Salzwasser. Süßwasser tritt hingegen viel seltener auf. Ein Großteil davon ist wiederum in Gletschern und polarem Eis gebunden und somit für den direkten Gebrauch durch den Menschen nicht zugänglich. Laut Schwenner (2021) beschränkt sich dieser Teil auf 0.105 Millionen Kubikkilometer Wasser. Weiterhin benötigt der Mensch Wasser nicht nur zum Trinken, sondern auch, um Landwirtschaft oder Viehzucht zu betreiben. Einfließen kann hier beispielsweise auch das nicht-mathematische Wissen, dass bereits jetzt viele Landbereiche durch Dürren betroffen sind – sich also nicht für Landwirtschaft oder Viehzucht eignen. Auf eine ähnliche Weise bestimmt sich die Menge an Nahrung und der Platz, den Menschen zum Leben brauchen. Nach Ludwig und Reit (2013) steigt die Schwierigkeit einer Aufgabe an, je mehr Rechenschritte Lernende ausführen müssen. Daher liefert die Untersuchung einzelner Parameter eine Möglichkeit zur Differenzierung von Lösungen unterschiedlicher Jahrgangsstufen. Einerseits bietet die Anzahl an betrachteten Faktoren die Chance, Lösungen qualitativ hochwertiger einzustufen und andererseits die Ausführlichkeit in der Betrachtung einzelner Einflussgrößen. Je umfassender die Analyse ausfällt, desto höher ist die

Güte der Lösung zu bewerten. Hier gilt es entsprechend der Jahrgangsstufe Abstufungen der Mindestanforderungen auszusprechen. Dieser Ansatz zur Differenzierung setzt sich in den folgenden Schritten fort. Die Anzahl an Rechenschritten steigt mit einer ausführlicheren Betrachtungsweise verschiedener Aspekte.

Im Modellierungskreislauf folgt das Mathematisieren (vgl. Abschnitt 3.1). Es gibt zwei zielführende Strategien: Nahmen die Schülerinnen und Schüler im vorherigen Schritt konkrete Werte für die Parameter an, so gilt es, diese zueinander ins Verhältnis zu setzen. Auf einem abstrakteren Niveau können Lernende aber auch Variablen einführen und sie in Gleichungen miteinander verknüpfen. Beispielsweise hat ein Lernender bestimmt, dass er zwei Liter Wasser pro Tag trinkt und weitere 100 Liter Wasser pro Tag zum Waschen, Kochen und zur Nahrungsherstellung benötigt. Unter der Annahme, dass das vorher geschätzte Süßwasservorkommen durch einen sich endlos wiederholenden Wasserkreislauf jeden Tag den Menschen zur Verfügung steht, berechnet sich die Anzahl der damit versorgbaren Menschen wie folgt: Das gesamte Süßwasservorkommen wird durch die benötigte Wassermenge eines Menschen dividiert. In ähnlicher Weise bestimmt sich die Anzahl an Menschen, die auf der Erde genügend Platz zum Leben hätten.

Heranwachsende lösen im nächsten Modellierungsschritt die aufgestellten Gleichungen und erhalten eine mathematische Lösung (vgl. Abschnitt 3.1). Im Falle der Betrachtung des Wasserbedarfs ergäbe sich

$$\frac{1.05 \cdot 10^{14} \text{ Liter}}{102 \frac{\text{Liter}}{\text{Mensch}}} = 1.029 \cdot 10^{12} \text{ Menschen.}$$

Weitere Faktoren lassen sich analog berechnen. Dabei fällt besonders auf, dass die benötigte Mathematik keineswegs eine Einschränkung der Lösbarkeit für jüngere Schülerinnen und Schüler darstellt. Hauptsächlich gilt es, Verhältnisse abzuschätzen, Bruchrechnungen, Multiplikationen, Divisionen und Additionen auszuführen, Einheiten umzurechnen oder mit Zehnerpotenzen zu rechnen. Zur Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den Modellierungs(teil)kompetenzen und den Jahrgangsstufen, ist es unerlässlich, dass sich die Aufgabe ausschließlich mit niederschwelligeren mathematischen Inhalten lösen lässt. Höhere Schulmathematik würde eine kognitive Hürde darstellen, die von jüngeren Lernenden nur schwierig selbstständig überwunden werden könnte. Da die Beurteilung der Modellierungskompetenzen auf der Bewertung der Schülerlösung basiert, ließen sich etwaig auftretende Zusammenhänge mit der Jahrgangsstufe nicht von der Mathematik losgelöst beurteilen. Eine Genauigkeit der Zahlen, wie sie hier impliziert wird, ist keineswegs für erfolgreiches Modellieren erforderlich. Auch Überschlagsrechnungen oder Vereinfachungen zur leichteren Berechnung stellen zulässige Lösungsverfahren dar – bedürfen aber einer Begründung.

Im vierten Modellierungsschritt interpretieren und bewerten Schülerinnen und Schüler ihr mathematisches Ergebnis (vgl. Abschnitt 3.1). Unter Zuhilfenahme nicht-mathematischen Vorwissens, das beispielsweise die aktuelle Anzahl an auf der Erde lebenden Menschen umfasst (knapp 8 Milliarden), ließe sich ermitteln, dass die Erde noch für weitere  $1.021 \cdot 10^{12}$  Menschen Trinkwasser zur Verfügung hätte. Es wird erwartet, dass Schülerinnen und Schüler diese Erkenntnis in Form eines Antwortes festhalten. Eine Bewertung des Ergebnisses könnte einbeziehen, dass bereits jetzt vielen Menschen nicht genügend (Trink-)Wasser zur Verfügung steht – das mathematische Ergebnis überschätzt demnach deutlich die mögliche Kapazität der Erde. In folgenden Schritten zeigen die Probanden auf, wie sich Annahmen verbessern lassen und wiederholen mit diesen Verbesserungen den Problemlöseprozess. Außerdem geben sie einen Ausblick auf weitere, bisher

unbeachtete Faktoren. Dazu könnte auch die Betrachtung der menschlichen Emissionen zählen, die die Kapazität der Erde einschränken. Auch die Erschließung neuer Nahrungsquellen, die Nutzung von Gentechnik oder die Betrachtung politischer Systeme stellen mögliche Szenarien dar, die sich für eine zukunftsweisende Analyse anbieten. Laut einer Diskussion von Roth (2019) leben bereits jetzt zu viele Menschen auf der Erde. In vielen Teilen der Erde gibt es Dürren, unfruchtbare Böden sowie Wasserknappheit, und es herrschen Hungersnöte. Sein Lösungsansatz verfolgt die Reduzierung der Weltbevölkerung durch einen leichteren Zugang zu Bildung – insbesondere für Frauen. Diese Betrachtungsweise mag unter sozio-politischen Blickwinkeln sicherlich interessant erscheinen. Sie lenkt jedoch von einer mathematischen Modellierung mit dem Ziel, die maximale Tragfähigkeit der Erde zu schätzen, ab. Eine Perspektive zur Differenzierung zwischen den Schülertlösungen stellt die Ausführlichkeit der Reflexion dar. Während jüngere Heranwachsende das mathematische Ergebnis mit der aktuellen Anzahl an Menschen, die auf der Erde, in Europa oder in Deutschland leben, vergleichen, sollten ältere Lernende Zusammenhänge zwischen mehreren Faktoren, mit ihrem eigenen Lebensstil oder dem ökologischen Fußabdruck in Verbindung setzen und so die Betrachtungen reflektieren.

## 8.2 Forschungsfragen

Verschiedene Studien untersuchten bereits mehrfach die Modellierungskompetenzen von Schülinnen und Schülern. Dabei lag in Iversen und Larson (2006) und Ludwig und Reit (2013) der Fokus darauf, den Zusammenhang zwischen dem gewählten Lösungsweg und dem erreichten Leistungslevel aufzudecken. So analysierten Ludwig und Reit (2013) die Vielfältigkeit der Lösungswege und prüften, welche Ansätze zu einem erfolgreichen Modellierungsprozess führten. Während sich die beiden zuvor genannten Studien auf den Einsatz von Modellierungsaufgaben im Sekundarbereich beziehen, liefert English (2010) Ergebnisse zur Fragestellung, ob Modellierungsaufgaben bereits im Primarbereich erfolgreich implementiert werden können. Borromeo Ferri (2010) bedient sich in ihrer Studie einer kognitiv-psychologischen Sichtweise und untersucht intrinsische Ursachen für das Anwenden eines Lösungsansatzes. Sie ging dabei von einem nicht-stringenten Durchlaufen des idealen Modellierungskreislaufes aus.

Die OECD betont seit längerem, dass mathematische Modellierung eine Kernkompetenz ist, um als mündige Bürger am gesellschaftlichen Leben teilzunehmen (vgl. OECD, 2021). Daher sollten bereits junge Menschen diese Fertigkeit erwerben. Die KMK hat diese Forderung aufgegriffen und in den aktuell geltenden Bildungsplänen verankert (vgl. Kultusministerkonferenz, 2012). Obwohl der Anspruch seit längerem besteht und die Wichtigkeit hervorgehoben wird, greift der Mathe-matikunterricht selten Modellierungsaufgaben auf (vgl. Blum, 2007; Brunner et al., 2006; Frank et al., im Druck; Jordan et al., 2008; Jordan et al., 2005). Daher überrascht es wohl wenig, dass Modellierungsaufgaben noch keinen Weg in Abiturprüfungen gefunden haben (vgl. Sube, 2019). Lehrkräfte berichten in Fortbildungen, dass sie selbst eher wenig mit ihren Schülerinnen und Schülern modellieren. Gründe dafür sind häufig fehlendes Material, zu wenig Zeit und mangelndes Wissen der Lehrpersonen (vgl. Abschnitt 3.3.2). Eine weitere große Hürde stellt die Bewertbarkeit von Modellierungsaufgaben dar. Lehrkörper führen an, dass gewöhnliche Mathematikaufgaben eine richtige Lösung haben, der Lösungsweg klar ist und Schülerinnen und Schüler die objektive Bewertung schätzen. Die Offenheit der Modellierungsaufgaben bietet Heranwachsenden die Möglichkeit, eigene Lösungswege aufzudecken und zu verfolgen. Antworten bestehen auch nicht mehr aus einer rein formalen Sprache. Dieser Umstand führt zu Verunsicherungen. Außerdem

sollen Modellierungsaufgaben außermathematische Realsituationen aufgreifen, die authentisch und für Lernende relevant sind. Damit ist zur Lösung Wissen aus sehr unterschiedlichen Themenbereichen nötig. Das thematische Hintergrundwissen kann der Mathematikunterricht nur begrenzt bereitstellen. Zur Lösung authentischer Probleme benötigen die Heranwachsenden häufig auch innermathematisches Wissen diverser Inhaltsfelder. Ein rezeptbuchartiges „Abarbeiten“ der Inhalte ist nicht möglich: Kenntnisse müssen miteinander vernetzt werden. Auch hier ist das notwendige Wissen von den Anwendungsgebieten abhängig, sodass kein gezieltes Training stattfinden kann.

Daher ergibt sich für Didaktikerinnen und Didaktiker der Modellierung zwangsläufig der Anspruch, Mathematiklehrkräfte zu unterstützen und Wege aufzuzeigen, die Hürden zu überwinden. Die vorherigen Kapitel widmeten sich der Aufgabe, geeignete Materialien zu Modellierungsaufgaben und ein Konzept für Lehrerfortbildungen vorzustellen. Die folgenden Absätze zielen darauf ab, einen Leitfaden zur Beurteilung von Modellierungsaufgaben bereitzustellen und Faktoren ausfindig zu machen, die das Modellieren begünstigen oder negativ beeinflussen. Diese Informationen könnten in Empfehlungen für einen motivierenden Unterricht einfließen, und Lehrkräften Hinweise liefern, an welchen Stellen gezielter Förderbedarf besteht. Daher wird die vorgestellte sehr offene Modellierungsaufgabe verwendet, um Hinweise zur Beantwortung der Fragen zu aufzudecken. Zunächst gilt es festzustellen, über welche Modellierungskompetenzen die Lernenden verfügen. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, ob die Probanden bereits mit der mathematischen Modellierung in Kontakt gekommen sind. Vermutlich weisen Teilnehmende, die über Kenntnisse der Modellierung verfügen, höhere Modellierungskompetenzen auf als ihre Mitschülerinnen und -schüler. Darüber hinaus soll die folgende Studie untersuchen, ob sich die Kenntnisse von der fünften Klasse bis zum Abitur erweitern, und ob Modellierungsaufgaben Geschlechtsstereotype bedienen. Vermutet wird, dass der Einsatz von unterschiedlichem Weltwissen zur Beantwortung der Modellierungsaufgabe zu einem besseren Abschneiden der höheren Jahrgangsstufen führt. Ältere Schülerinnen und Schüler verfügen über einen größeren Wissensschatz und mehr Erfahrung, was begünstigend wirken könnte. Zusätzlich können weichere Faktoren, wie die Affektivität zum Fach Mathematik und zum Thema untersucht werden.

Eine Beantwortung der Fragen ist nur mit einem Werkzeug möglich, dass die Modellierungskompetenzen objektiv beurteilen kann. Dazu wurde ein Bewertungsschema erstellt (vgl. Abschnitt 8.4) und auf seine Reliabilität hin geprüft (vgl. Abschnitt 8.7.1). Dieses für die Studie notwendige Hilfsmittel zeigte einen noch größeren Nutzen, wenn es als eine Art Schablone zur Bewertung von Modellierungsaufgaben im Schulunterricht genutzt werden könnte. Lehrkräften stünde damit ein Werkzeug zur Verfügung, Lernende an zu beachtende Kriterien heranzuführen. Die Übungsphasen des Mathematikunterrichts könnten gezielt diese Kriterien vermitteln, sodass Heranwachsende auch in Prüfungssituationen genaue Vorstellungen der Anforderungen bekannt sind.

Die Motivation, Antworten auf diese Thesen zu finden, mündet in den folgenden konkreten Forschungsfragen:

1. Über welche Modellierungskompetenzen verfügen aktuell die Probanden?
2. Lassen sich Zusammenhänge zwischen Jahrgangsstufe und Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen?
3. Lassen sich Zusammenhänge zwischen dem Geschlecht und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen?

4. Lassen sich Zusammenhänge zwischen dem allgemeinen Interesse für das Fach Mathematik und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsschritte erkennen?
5. Verfügen Probanden, denen direkt klar war, wie sie bei der Lösung der Aufgabe vorgehen, über größere Modellierungskompetenzen als solche, denen es nicht direkt klar war?
6. Verfügen Probanden, denen es schwer fiel, einen Lösungsansatz zu entwickeln, über geringere Modellierungskompetenzen als solche, denen es nicht schwer fiel?
7. Verfügen Probanden, die bereits von mathematischer Modellierung gehört haben, über größere Modellierungskompetenzen als solche, die zum ersten Mal mit mathematischer Modellierung in Berührung gekommen sind?
8. Lassen sich Zusammenhänge zwischen dem Interesse für das Thema und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen?
9. Eignet sich das erstellte Bewertungsschema zur reliablen Beurteilung der Schülerlösungen durch geschultes Personal?

Insgesamt dient diese empirische Forschungsarbeit der Entwicklung neuer Theorien (Hypothesenentwicklung). Sie ist damit von der Überprüfung bestehender Theorien (Hypothesenüberprüfung) abzugrenzen.

### 8.3 Forschungsdesign

Die Untersuchung der Forschungsfragen fand anhand einer Aufgabe im Rahmen einer Querschnittsstudie statt. An der Studie nahmen Heranwachsende der fünften bis zur elften Jahrgangsstufe teil. Das Verfahren ermöglicht eine Bewertung des Lösungsvorgehen eines weiten Spektrums verschiedener Jahrgangsstufen. Die Lösungsstrategien lassen sich miteinander vergleichen. Darüber hinaus beabsichtigte die Studie, dass die Teilnehmenden die Modellierungsaufgabe im Rahmen einer einzelnen Schulstunde lösen. Damit sollte die Akzeptanz bei den Lehrpersonen steigen, die Aufgabe während der Schulzeit zu stellen und in den Unterricht zu integrieren. Daher setzten die Lehrkräfte die Modellierungsaufgabe kurz vor den Sommerferien ein, um nicht in den Konflikt mit Lehrplaninhalten zu gelangen. Eine Reflexion der Modellierungsarbeit liegt durch eine Schülerselbst-evaluation vor (vgl. Abschnitt 8.5). Da die teilnehmenden Schulen sich in Baden-Württemberg, Nordrhein-Westfalen und Rheinland-Pfalz verteilen und sich die Durchführungen auf die Zeit kurz vor den Sommerferien beschränkte, gab es keine Möglichkeiten für flächendeckende Interviews zur Reflexion des Modellierungsprozesses sowie Videoanalysen mit den Teilnehmenden. Die Be-gutachtung beruht daher lediglich auf den niedergeschriebenen Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler selbst und kann nur Eindrücke dazu liefern.

In der Studie fand die Auswertung der Schülerlösungen durch geschultes Personal statt, das im Folgenden als *Interrater*, *Gutachtende* oder *Bewertende* bezeichnet wird. Um ein vom Interrater unabhängiges Ergebnis sicherzustellen, wurden die Schülerlösungen möglichst von zwei verschiedenen Gutachtern bewertet. Die Analyse der Beurteilerübereinstimmung, der sogenannten *Reliabilität*, basiert auf *Cohens Kappa* (vgl. Wirtz und Caspar, 2002, Gleichung (8.1)). Insgesamt gab es vier Interrater ( $I \in \{1, \dots, 4\}$ ), die jeweils paarweise die Schülerlösungen bewerteten. Die Reliabilität wurde anhand sogenannter Kontingenztafeln bestimmt, in denen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  die absoluten

**Tabelle 8.1:** Kontingenztafel zur Ermittlung der Interraterreliabilität mit den Häufigkeiten  $A, B, C$  und  $D$ , beispielhaft für die beiden Interratern 1 und 2

		Interrater 1		Randhäufigkeiten
		Bewertungsitem erfüllt		
Interrater 2	Bewertungsitem erfüllt	$A$	$B$	$A + B$
	Bewertungsitem nicht erfüllt	$C$	$D$	$C + D$
Randhäufigkeiten		$A + C$	$B + D$	$A + B + C + D$

Häufigkeiten der jeweiligen (nicht-)Übereinstimmungen zwischen zwei Interratern ausdrücken (vgl. Tabelle 8.1). Mit der tatsächlichen Übereinstimmung

$$p_0 = \frac{A + D}{A + B + C + D}$$

und der dem Zufall zugeschriebenen Übereinstimmung

$$p_e = \frac{A + C}{A + B + C + D} \cdot \frac{A + B}{A + B + C + D} + \frac{D + C}{A + B + C + D} \cdot \frac{D + B}{A + B + C + D}$$

berechnet sich Cohens Kappa durch

$$\kappa = \frac{p_0 - p_e}{1 - p_e}. \quad (8.1)$$

Die Auswertung beschreibt die Reliabilität sowohl für die Schülerlösungen, als auch für die Selbstevaluation. Der Zweck ist dabei unterschiedlicher Art: Die Reliabilitätsermittlung ermöglicht im Fall der Bewertungen der Schülerlösungen Rückschlüsse auf die objektive Bewertbarkeit zu ziehen. Im Fall der Selbstevaluation dient die Reliabilitätsprüfung lediglich dazu, fehlerhafte Eingaben aufzudecken, da die Umfrage händisch digitalisiert werden musste.

Die vorliegende Studie verfolgt das Ziel, quantitative Kriterien für das Erreichen einzelner Modellierungskompetenzen entsprechend des Modellierungskreislaufs zu formulieren. Die Beurteilung der Schülerlösungen mithilfe dieses Bewertungsschemas soll außerdem darüber Aufschluss geben, ob sich das Schema als objektives Instrument zur Beurteilung der Modellierungskompetenzen eignet. Trifft die Eignung zu, kann das Formular in zukünftigen Testungen mit Lehrkräften eingesetzt werden. Ausstehend bleibt ein Eignungstest des Schemas zur Bewertung im „normalen“ Mathe- matikunterricht gestellter Modellierungsaufgaben. Diese Studie liefert außerdem keine Aussagen darüber, ob mithilfe des Schemas eine verlässliche Bewertung in Klassenarbeiten, Klausuren oder gar im Abitur gegeben ist.

## 8.4 Bewertungsschema

In Rücksprache mit Lehrkräften wurde für unterschiedliche Jahrgangsstufen jeweils ein Erwartungshorizont zur Modellierungsaufgabe erstellt. Darauf aufbauend wurde ein Bewertungsschema entwickelt, mit dem Gutachter die Schülerlösungen auswerteten. Das Bewertungsschema basiert zusätzlich auf den Schritten des Modellierungskreislaufs (vgl. Abschnitt 3.1). Dadurch soll sichergestellt werden, dass es den schulischen Vorgaben entspricht. Für den Einsatz in der Schule ist diese Anforderung obligatorisch. Das Schema ordnet ähnlich zu Ludwig und Reit (2013) die Lösungen speziellen Modellierungsstufen zu. Im Gegensatz zum Schema von Ludwig und Reit (2013), das den Fortschritt im Modellierungskreislauf widerspiegeln soll, erlaubt das hier verwendete Bewertungsschema ein Überspringen von Modellierungsschritten. Das Ziel der Untersuchung liegt damit nicht auf der Frage, wie weit Teilnehmende im Modellierungsprozess kommen. Die Studie gibt vielmehr einen ersten Einblick, über welche Modellierungskompetenzen Lernende momentan verfügen. Dieser Fokus lehnt sich an den Bildungsplan an. Der Plan versteht das Modellieren als Kompetenz, die vier Teilschritte umfasst (vgl. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg, 2016f, 2016n). Entsprechende Aufgaben ermöglichen auch einen voneinander unabhängigen Erwerb dieser Teilschritte. Die empirische Studie soll daher Indizien liefern, welche Teilschritte stärker oder schwächer ausgeprägt erscheinen. Jeder der Modellierungsschritte kann eine potentielle Hürde darstellen (vgl. Blum, 2015; Galbraith und Stillman, 2006; Maaß, 2004). Ein weiterer Vorteil dieser Perspektive bewirkt, dass mögliche Schwierigkeiten in einzelnen Modellierungsschritten nicht direkt zum Abbruch des gesamten Modellierungsprozesses führen, sondern übersprungen werden können. In der Überwindung solcher Hürden waren die Teilnehmenden auf sich allein gestellt, da ihnen keine weiteren Hilfestellungen vorlagen. Eine Unterstützung des Modellierungsprozesses durch geeignete Lehrerinterventionen, wie beispielsweise nach dem Prinzip der minimalen Hilfe, fand nicht statt (vgl. Leiß, 2007, 2010; Stender, 2016, 2018). Dieses Vorgehen soll eine Vergleichbarkeit der Lösungen unterschiedlicher Lernenden gewährleisten und somit zu möglichst objektiven Studiendaten führen.

Das Bewertungsschema gliedert sich in die vier Schritte des *Vereinfachens*, des *Mathematisierens*, des *Berechnens* sowie des *Validierens und Interpretierens* (vgl. Abschnitt 3.1). Eine Unterteilung der Schritte in verschiedene Teileschritte, die sich durch den Erwartungshorizont ergaben, zielt auf eine Operationalisierung der Leistungen ab. Die Formulierung der erwarteten Aspekte verbindet einen konkreten Inhalt oder Gegenstand mit einem beobachtbaren Operator. Sie liefert damit Instrument, das eine Messung des Leistungsstandes ermöglicht. Die Teileschritte sehen dabei folgendermaßen aus: Die teilnehmende Person ...

- Vereinfachen
  - 1: versteht die Problemstellung in der Realität und
  - 2: vereinfacht die Problemstellung in der Realität.

Merkmale sind: Die Schülerin bzw. der Schüler ...

- 3: trifft eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren,
- 4: trifft Schätzungen für die Faktoren,
- 5: begründet ihre bzw. seine getroffenen Schätzungen,
- 6: liefert eine logische Argumentationsstruktur,

- 7: nutzt bekannte Größen und Kenntnisse für die Schätzungen,
  - 8: nutzt nicht-mathematische Kenntnisse,
  - 9: berücksichtigt den Faktor Platzbedarf (Faktor 1),
  - 10: berücksichtigt den Faktor Essensmenge (Faktor 2),
  - 11: berücksichtigt den Faktor Wasserbedarf (Faktor 3),
  - 12: berücksichtigt den Faktor Freizeitraum (Faktor 4),
  - 13: berücksichtigt den Faktor Arbeitsraum (Faktor 5),
  - 14: nutzt dazu die Abbildung,
  - 15: bestimmt dazu die Erdoberfläche über Kugeloberfläche,
  - 16: unterscheidet dazu zwischen bewohnbaren und unbewohnbaren Flächen,
  - 17: zeichnet dazu (landwirtschaftliche) Nutzflächen aus,
  - 18: berücksichtigt dabei die Essensherstellung oder
  - 19: unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser.
- Mathematisieren
    - 20: formuliert ein mathematisches Problem (Merkmal: stellt Terme und Gleichungen auf) und
    - 21: liefert dabei eine logische Argumentationsstruktur.
  - Berechnen
    - 22: entwickelt eine mathematische Lösung (Merkmal: es gibt ein Ergebnis),
    - 23: berechnet die Lösung korrekt
    - 24: unter Verwendung geeigneter Verfahren zur Lösungsbestimmung.
  - Validieren und Interpretieren
    - 25: interpretiert das Ergebnis / die Ergebnisse,
    - 26: bewertet das Ergebnis / die Ergebnisse,
    - 27: kennt die Bedeutung des Ergebnisses / der Ergebnisse.  
Merkmale sind: Die Schülerin bzw. der Schüler ...
    - 28: schreibt einen Antwortsatz (Niveau 1),
    - 29: bewertet das Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse (Niveau 2),
    - 30: bewertet das Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwartenden Allgemeinwissens und zeigt Zusammenhänge zwischen Faktoren auf (Niveau 3),
    - 31: nutzt dazu nichtmathematische Kenntnisse,

- 32: liefert eine logische Argumentationsstruktur,
- 33: hinterfragt das Ergebnis,
- 34: identifiziert problematische Annahmen,
- 35: verbessert die getroffenen Annahmen (zum Beispiel durch geeigneter Schätzungen),
- 36: wiederholt den Problemlöseprozess oder
- 37: gibt einen Ausblick auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren.

Die Gutachtenden nehmen in die Bewertung der Schülerlösungen nur auf, ob ein Kriterium vorhanden ist oder nicht. Die Stärke bzw. die Güte der Ausprägung beurteilen sie nicht. Indirekt ließe sich die erzielte Güte in einem Modellierungsschritt über die Anzahl an erfüllten Teilaspekten ableiten.

Zusätzlich ergänzten die Bewertenden für jede Schülerlösung,

- 38: ob die bzw. der Teilnehmende Hilfe durch die Lehrkraft bekam,
- 39: ob die bzw. der Teilnehmende strukturiert an die Aufgabe heran ging und
- 40: ob die bzw. der Teilnehmende alle Lösungsschritte ordentlich nachvollziehbar dokumentierte und
- 41: ob ein Lösungszettel abgegeben wurde.

Der Punkt 41 unterscheidet zwischen überhaupt keiner Abgabe und einer Lösungsabgabe, die jedoch keines der Modellierungskriterien erfüllt. Merkmale für letzteres sind ein leeres Blatt und Stichpunkte oder Texte ohne Modellierungsbezug. Über Lehrerrückmeldungen sollte nachvollziehbar sein, ob Schülerinnen oder Schüler während des Prozesses auf Hürden stießen und wie die jeweilige Lehrperson darauf reagierte (vgl. Anhang D.2, Abbildung D.7). Da jedoch nur einzelne Lehrkräfte Hilfen zurückmeldden, muss für die Evaluation der Schülerlösungen darauf verzichtet und davon ausgegangen werden, dass keine Hilfen stattgefunden haben. Damit entfällt das Bewertungsitem 38 in der Ergebnisbewertung.

## 8.5 Schülerselbstevaluation

Im Anschluss an die Bearbeitung der Aufgabe füllten die Probanden einen Fragebogen über die allgemeine Einstellung zum Fach Mathematik, aber auch insbesondere zur Aufgabe aus. Die dazu formulierten Aussagen bewerteten die Teilnehmenden auf einer vierstufigen Likertskala, die die Merkmalsausprägungen (MA) *trifft gar nicht zu* (MA 1), *trifft eher nicht zu* (MA 2), *trifft eher zu* (MA 3) und *trifft voll zu* (MA 4) enthält. Die Aussagen sind in ihrem sprachlichen Niveau an das Alter der Schülerinnen und Schüler angepasst. Die Aussagen, die im Folgenden aufgelistet sind, unterscheiden zwei sprachliche Niveaus, die durch einen Querstrich voneinander unterschieden werden können:

- 1: Geschlecht / Geschlecht
- 2: Ich rechne gerne. / Ich mag es, mich mit Mathematik zu beschäftigen.

- 3: Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung. / Die Problemstellungen, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.
- 4: Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet. / Ich habe noch nie so eine Problemstellung wie heute bearbeitet.
- 5: Ich wusste nicht, was ich tun soll. / Ich wusste nicht, was von mir erwartet wird.
- 6: Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen. / Mir war klar, wie ich anfange, die Problemstellung zu lösen.
- 7: Die Aufgabe war zu schwer. / Ich fand es schwierig, einen Lösungsansatz für die Problemstellung zu entwickeln.
- 8: Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht. / Ich fand es toll, mir verschiedene Aspekte selbst zu überlegen, die ich genauer analysieren konnte.
- 9: Ich weiß, was mathematische Modellierung ist. / Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.
- 10: Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt. / Ich hätte mich gerne länger mit der Problemstellung beschäftigt.
- 11: Das Thema der Aufgabe finde ich interessant. / Das Thema der Problemstellung finde ich interessant.
- 12: Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten. / Ich würde gerne solche komplexen Problemstellungen im Mathematikunterricht bearbeiten.
- 13: Ich fand die Art der Aufgabe motivierend. / Ich könnte mir vorstellen, dass Mathematikunterricht interessanter ist, wenn regelmäßig Problemstellungen wie die heutige gestellt werden.

Neben diesen geschlossenen Abfragen, gab es Raum für offene Fragen zu Hürden (*Besonders schwer war für mich ...*, *Ich hätte mehr Unterstützung benötigt bei ...*) und Leichtigkeiten (*Besonders leicht war für mich ...*) im Problemlöseprozess. Zusätzlich konnten die Teilnehmenden beschreiben, was ihnen an der Aufgabe gut gefiel (*Ich fand an der Aufgabe toll, dass ...*). Abschließend stand ein leeres Feld zur Verfügung, in dem weitere Kommentare hinterlassen werden konnten (*Was möchtest du uns noch sagen?*). Die Sichtung der Antworten zu den offenen Fragen offenbarte Antworten ohne Bezug zur Fragestellung („Quatschantworten“). Außerdem stellen die Textantworten ein nominatives Merkmal dar. Ein solches lässt sich allein mit Zahlen nicht angemessen wiedergeben. Es wäre ein detailliertes Klassifizierungsschema nötig. Ein solches zu erstellen und auf seine Validität hin zu prüfen, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deshalb findet eine Auswertung der offenen Fragen in dieser Arbeit keine Berücksichtigung. Ein solches zeitintensives Vorgehen ist eher bei Langzeitstudien anzudenken.

## 8.6 Durchführung der Studie

Für die Studie wurden Gymnasien und Gesamtschulen in Baden-Württemberg, Nordrhein-Westfalen und Rheinland-Pfalz, zu denen über verschiedene Modellierungsveranstaltungen Kontakt besteht, angeschrieben. In der Auswertung kann jedoch nur auf die Ergebnisse aus Baden-Württemberg und Nordrhein-Westfalen zurückgegriffen werden. Angesprochen wurden alle Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 5 bis 12 bzw. 13. Die Anzahl an begutachteten Teilnehmerrückmeldungen ist in Tabelle 8.2 aufgelistet. Insgesamt fanden in der Auswertung 522 Schülerinnen und Schüler aus 25 Klassen Berücksichtigung. Im Vorfeld erhielt keine der Klassen bzw. Kurse spezielle Modellierungstrainings. Die Schülerinnen und Schüler können somit größtenteils auf kein Vorwissen bzw. nur das Wissen zurückgreifen, das im normalen Schulunterricht vermittelt wird. Daher kann von einer Studie ausgegangen werden, die den aktuellen Stand der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Modellierungskompetenzen widerspiegelt. Da jedoch das Vorwissen nicht explizit überprüft wurde und sich lediglich durch die in der Schülerselbstevaluation gestellten Aussagen *Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.* und *Solche komplexen Problemstellungen bearbeiten wir ... im Unterricht.* Rückschlüsse auf den Einsatz von Modellierungsaufgaben im Unterricht ziehen lassen, kann nicht von einer repräsentativen Studie gesprochen werden. Dazu müssten weitere Rahmenbedingungen in einer Langzeitstudie berücksichtigt werden.

Die Lehrpersonen erhielten eine Anleitung zur Durchführung der Studie. Die Instruktion umfasst allgemeine Hinweise zum Ablauf der Stunde, zum Umgang mit Schülerfragen während der Durchführung und zum Umgang mit den Ergebnissen (vgl. Anhang D.2, Abbildung D.2). Zu Beginn der Unterrichtsstunde lasen die Lehrkräfte einen Text vor, der alle für die Teilnehmenden wichtigen Instruktionen für die Aufgabenbearbeitung und Hinweise zum Datenschutz enthält (vgl. Anhang D.2, Abbildung D.3). So wurde sichergestellt, dass alle Schülerinnen und Schüler die gleiche Ausgangssituation erleben. Anschließend erhielten die Lernenden ein Aufgabenblatt im DIN-A4-Format mit der Problem- und Frageformulierung (vgl. Anhang D.2, Abbildung D.1). Zur Dokumentation der Lösungen stand Platz auf der Vorder- und Rückseite zur Verfügung. Bei Bedarf erhielten die Probanden weitere Dokumentationsblätter. Die Aufgabenstellung wurde bewusst möglichst offen formuliert, um dem Anspruch an eine echte Modellierungsaufgabe gerecht zu werden. Die Bearbeitungszeit betrug 30 Minuten. So sollte der Einsatz im Rahmen einer üblichen Unterrichtsstunde (45 Minuten) möglich sein und die Studie eine hohe Akzeptanz bei Lehrkräften erhalten. Eine Besprechung der Aufgabe und möglicher Herangehensweisen fand im Rahmen der Studie nicht statt.

**Tabelle 8.2:** Zusammenfassung aller untersuchten Schülerlösungen und Selbstevaluationsbögen

Jahrgangsstufe	Klassen-/Kurskürzel	Anzahl Schülerinnen und Schüler	Interraterpaar
5	K5-K01	27	1 & 2 & 3
	K5-M01	24	2 & 3
		$\sum 51$	
6	K6-K01	29	1 & 2 & 3
	K6-M01	21	2 & 3
	K6-M02	23	3
		$\sum 73$	
7	K7-K01	20	1 & 2
	K7-K02	22	1 & 2
	K7-K03	26	1
	K7-K04	24	1
		$\sum 92$	
8	K8-K01	28	1 & 2
	K8-K02	18	1 & 2
		$\sum 46$	
9	K9-K01	14	1
	K9-K02	16	1 & 2
	K9-L01	17	2 & 4
		$\sum 47$	
10	K10-K01	15	1
	K10-K03	23	1
	K10-K04	21	1
	K10-L01	23	2 & 4
	K10-L02	20	2 & 4
		$\sum 102$	
11	K11-K01	21	1
	K11-K02	14	1
	K11-L01	16	2 & 4
	K11-L02	22	2 & 4
	K11-M01	16	3
	K11-M02	22	1 & 3
		$\sum 111$	

## 8.7 Empirische Auswertung der Selbstevaluation und der Schülerlösungen

In diesem Kapitel erfolgt die Auswertung der Schülerselbstevaluation und der Bewertungen der Schülerlösungen. Zunächst wird die paarweise Interraterreliabilität anhand von Cohens Kappa untersucht (vgl. Abschnitt 8.3). Da die Beurteilenden 1 & 4 sowie 3 & 4 nie als Interraterpaar auftraten, lassen sich für diese beiden Interraterkombinationen keine Reliabilitäten bestimmen (vgl. Tabelle 8.2). Anschließend werden die Ergebnisse mit Blick auf die aufgestellten Forschungsfragen ausgewertet.

### 8.7.1 Überprüfung der Interraterreliabilität

Für die Reliabilität der Schülerselbstevaluation ist ein Wert von 100 % zu erwarten, da die Gutachter den die Schülerantworten lediglich digitalisieren und keine Interpretationen oder Bewertungen vornehmen. Sie liegt für das Interraterpaar 1 & 2 am niedrigsten mit einem Cohens Kappa von 98.06 % und am höchsten für das Interraterpaar 1 & 3 mit einem Wert von 1. Damit deutet Cohens Kappa eine (fast) perfekte Übereinstimmung zwischen den Interratern an (vgl. Tabelle 8.3).

Auf der Suche nach einer Erklärung für die Abweichungen von den zu erwartenden 100 % wurde das Maß der Interraterreliabilität für alle Klassen bzw. Kurse getrennt bestimmt (vgl. Abbildung 8.3). Auf die Abweichungen in den Digitalisierungseingaben für das Paar 1 & 2 trifft man in der Klasse mit dem Kürzel *K5-K01-II2* (Cohens Kappa  $\approx$  93.11 %), und in der Klasse *K7-K02-II2* (Cohens Kappa  $\approx$  95.31 %). Ein Blick in die Digitalisierungen verrät, dass sich die größten Abweichungen in den Items *Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.* (Item 6), *Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.* (Item 11) und *Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.* (Item 3) feststellen lassen. Einige Probanden ordneten ihre Einschätzung nicht in die vorgegebenen Likert-Skala ein, sondern fügten weitere Abstufungen hinzu. Die Zwischenabstufungen der Merkmalsausprägungen übernahmen die Begutachtenden unterschiedlich (Einstufung als ungültige Antwort, Abschwächung auf die nächst niedrigere Stufe oder Hinzufügen einer halben Stufe). Zukünftige Digitalisierungen sollten den Umgang mit solchen Antworten berücksichtigen.

Der folgende Abschnitt untersucht die Interraterreliabilitäten für die Bewertungen der Schülerlösungen und präsentiert die Ergebnisse. Hier zeigt sich ein differenzierteres Bild. Tabelle 8.4 fasst die Cohens Kappa-Werte für alle Interraterpaare zusammen, die auf den Kontingenztafeln in Abbildung 8.2 beruhen. Am niedrigsten liegt Cohens Kappa für das Paar 2 & 3 mit einem Cohens Kappa von 54.1 %. Nach der Interpretation von Landis und Koch (1977) ist hier lediglich eine mäßige Übereinstimmung zu bescheinigen. Mit einem Cohens Kappa von 56.9 % liegt auch für das Interraterpaar 2 & 4 die Reliabilität im mäßigen Bereich. Für die Interraterpaare 1 & 2 und 1 & 3 liegt die Reliabilität in Cohens Kappa bei 67.0 % bzw. 68.84 %, womit von einer erheblichen Übereinstimmung gesprochen werden kann.

Die Interraterreliabilitäten wurden ebenfalls für einzelne Klassen bzw. Kurse oder sogar für einzelne Bewertungsitems differenziert betrachtet (vgl. Abbildung 8.4). Dabei zeigte Cohens Kappa teilweise bei nahezu perfekter Übereinstimmung zwischen beider Gutachtern negative Werte auf. Diesen Umstand beobachtet man bei einer besonderen Konzentration auf eine Merkmalsausprägung durch beide Beurteilenden (entweder *Kriterium erfüllt* oder *Kriterium nicht erfüllt*). In diesen Fällen liegt

**Tabelle 8.3:** Zusammenfassung der Interraterreliabilitäten unter Verwendung des Reliabilitätsmaßes Cohens Kappa für die Schülerselbstevaluation

Interraterpaar	1 & 2	1 & 3	2 & 3	2 & 4
Cohens Kappa	0.9806	1	0.9954	0.9933

**Tabelle 8.4:** Zusammenfassung der Interraterreliabilitäten unter Verwendung des Reliabilitätsmaßes Cohens Kappa für die Aufgabenbewertungen

Interraterpaar	1 & 2	1 & 3	2 & 3	2 & 4
Cohens Kappa	0.670	0.684	0.541	0.569

		Interrater 2		Gesamt
		0	1	
Interrater 1	.0	3578	540	4118
	.5	4	1	5
	1.0	384	1692	2076
Gesamt		3966	2233	6199

(a) Interrater 1 und 2

		Interrater 3		Gesamt
		0	1	
Interrater 1	.0	1134	117	1251
	.5	2	1	3
	1.0	140	478	618
Gesamt		1276	596	1872

(b) Interrater 1 und 3

		Interrater 3		Gesamt
		0	1	
Interrater 2	0	1175	93	1268
	1	240	325	565
	Gesamt	1415	418	1833

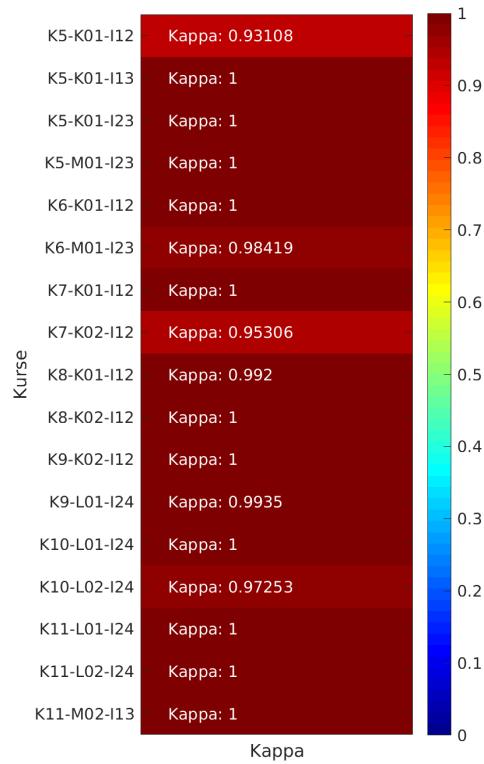
(c) Interrater 2 und 4

		Interrater 4		Gesamt
		0	1	
Interrater 2	0	2044	199	2243
	1	559	981	1540
	Gesamt	2603	1180	3783

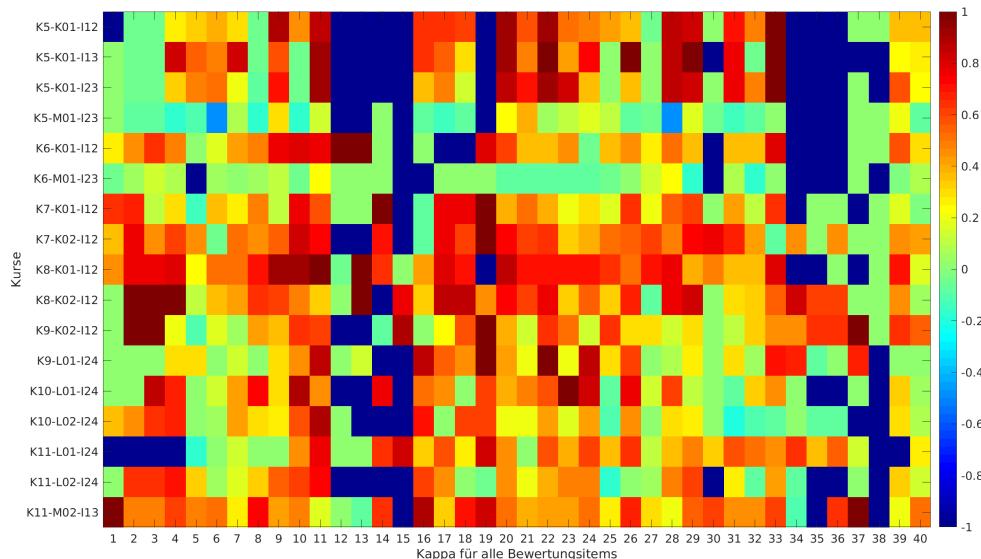
(d) Interrater 2 und 4

**Abbildung 8.2:** Absolute Anzahl der Beurteilung in den jeweiligen Merkmalsausprägungen für verschiedene Interraterpaare, angezeigt in Kontingenztafeln

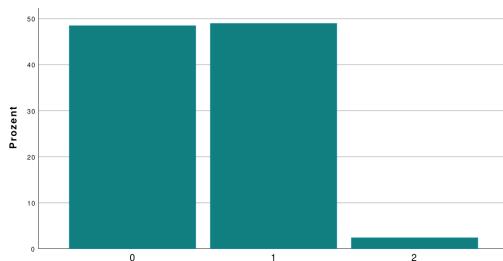
fast eine Einpunktverteilung vor, sodass auch unter reinem Zufall die beiden Bewertenden meistens übereinstimmen werden. Dementsprechend liefert Cohens Kappa Werte nahe null oder sogar im negativen Bereich. Daher kann für eine solche detailgetreue Auflösung in (zu) vielen Fällen eine Aussage über die Signifikanz der Übereinstimmung getroffen werden.



**Abbildung 8.3:** Übersicht über Cohens Kappa von jeweils zwei Interratenden pro Klasse bzw. Kurs in der Schülerselbstevaluation



**Abbildung 8.4:** Zusammenfassung der Interraterreliabilitäten unter Verwendung des Reliabilitätsmaßes Cohens Kappa für die Aufgabenbeurteilung, bestimmt pro Klasse bzw. Kurs und pro Bewertungsitem



**Abbildung 8.5:** Prozentuale Häufigkeit der Angaben zum Geschlecht mit den MA 0: weiblich, 1: männlich, 2: divers.

## 8.7.2 Ergebnisse der Schülerselbstevaluation

Dieser Abschnitt präsentiert die Ergebnisse der Selbstevaluation der Probanden. Alle berechneten Ergebnisse zur Auswertung der Schülerselbstevaluation sind tabellarisch aufgelistet im Anhang ergänzt (vgl. Anhang D.3). Die verschiedenen Aussagen der Schülerselbstevaluation stellen, abgesehen vom Geschlecht, ein ordinales Merkmal dar. Die Merkmalausprägungen (MA) werden anhand geeigneter statistischer Maße bestimmt. Die Analyse nutzt den Median und das arithmetische Mittel<sup>2</sup>. Das Minimum und Maximum bleiben unberücksichtigt, da diese in allen Fällen 1 bzw. 4 sind. Die Ursache für diese „extremen“ MA liegt in der gewählten vierstufigen Likertskala. Gepaart mit der hohen betrachteten Fallzahl sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass eine MA von keinem Probanden ausgewählt wird.

Die Abbildung 8.5 zeigt ein ausgeglichenes Verhältnis zwischen weiblichen (Angabe 0: 47.7 %) und männlichen (Angabe 1: 48.2 %) Teilnehmenden. Die Anzahl derjenigen Probanden, die sich dem diversen Geschlecht zuordnen, ist mit 2.4 % sehr gering (Angabe 2). Daher werden diese Schülerinnen und Schüler in einer geschlechtsspezifischen Untersuchung nicht weiter berücksichtigt, wohingegen Aussagen in Abhängigkeit der beiden anderen Geschlechtstypen aussagekräftig sind. 1.7 % der Teilnehmenden machten keine Angabe zu ihrem Geschlecht. Eine Betrachtung weiterer statistischer Maße ist hier nicht sinnvoll, da es sich um ein nominales Merkmal handelt.

In den folgenden Selbsteinstufungen führten Schülerinnen und Schüler selten selbstständig Zwischenstufen ein, die sich in halben Angaben äußern. Auffälliger Weise ergänzten sie am häufigsten ein mittleres Feld, das einem Wert von 2.5 entspricht. Aufgrund ihres geringen Auftretens ist ihr Effekt auf die folgende Analyse sehr gering.

Auf den überwiegenden Anteil an Probanden trifft die Aussage eher zu, dass sie gerne rechnen bzw. es mögen, sich mit Mathematik zu beschäftigen (MA 3: 47.2 %, vgl. Abbildung 8.6(a)). Der Anteil an Probanden, auf den diese Aussage eher weniger zutrifft (MA 2) ist etwa gleich hoch wie der Anteil an Probanden, auf den die Aussage voll zutrifft (MA 4). Er liegt bei knapp über 20 %. Ungern rechnen 10.5 % der Teilnehmenden (MA 1). Eine fehlende Angabe wiesen 0.6 % der Fälle

<sup>2</sup> Dem arithmetischen Mittel kommt hier die Bedeutung einer „Durchschnittsausprägung“ zu. Die Durchschnittsausprägung kann so ein Ergebnis haben, das als Ausprägung selbst nicht vorkommt. Da den Abständen zwischen den Ausprägungen keine Bedeutung zugeordnet werden kann – es liegt ein ordinates Merkmal vor – ist das Ergebnis nicht ohne Weiteres interpretierbar. Die durchschnittliche Merkmalsausprägung wird jedoch zum Vergleich der Gesamteinschätzung herangezogen. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Eingaben der Lernenden unter vergleichbaren äußeren Umständen (gleiches Verständnis der Frage) zustande kamen.

auf. Insgesamt liegen damit die durchschnittliche Ausprägung bei 2.8 und der Median bei 3. Der Schwerpunkt der Schülerangaben ist damit auf der Seite, „die Aussage trifft eher zu“.

Die Aussage, dass die Aufgaben bzw. Problemstellungen, die normalerweise im Mathematikunterricht bearbeitet werden, immer genau eine Lösung haben, stuften die meisten Schülerinnen und Schüler als eher zutreffend ein (MA 3: 53.4 %, vgl. Abbildung 8.6(b)). Voll zutreffend empfanden 22.0 % die Aussage (MA 4) und eher nicht zutreffend 17.4 % (MA 2). Immerhin 4.8 % bezeichneten die Aussage als gar nicht zutreffend (MA 1). Hier machten 1.7 % der Teilnehmenden keine Aussage. Die Durchschnittsausprägung und der Median sind beide mit einem Wert von 3 gleich. Ebenso wie in der ersten Aussage liegt hier der Schwerpunkt der Schülerangaben im Bereich, „die Aussage trifft eher zu“.

Die folgende Aussage bezieht sich darauf, ob die Schülerinnen und Schüler noch nie eine solche Aufgabe bzw. Problemstellung wie die vorliegende bearbeitet haben (vgl. Abbildung 8.6(c)). So gaben knapp 50 % der Probanden an, dass diese Aussage voll auf sie zutrifft (MA 4). Die niedrigeren Angaben wurden etwa gleich häufig gewählt (MA 1: 12.2 %, MA 2: 19.9 %, MA 3: 17.7 %). Es fehlen 1.7 % Fälle. Der Durchschnittswert beläuft sich damit auf etwa 3, ebenso wie der Median. Hier ist der Schwerpunkt der Schülerangaben deutlich in der MA „die Aussage trifft eher zu“ zu finden.

Etwa ein Drittel der Probanden stufte die Aussage, sie hätten nicht gewusst, was sie tun sollen bzw. was von ihnen erwartet wird, als eher zutreffend ein (MA 3: 33.7 %, vgl. Abbildung 8.6(d)). Etwa gleich viele Schülerinnen und Schüler gaben an, die Aussage trüfe voll auf sie zu (MA 4: 24.9 %) bzw. eher nicht auf sie zu (MA 2: 23.3 %). Weiterhin gaben 15.6 % der Probanden an, die Aussage trüfe gar nicht auf sie zu (MA 1). Insgesamt enthielten sich 1.8 % ihrer Aussage. Hier beziffert sich die durchschnittliche Ausprägung auf etwa 2.7. Der Median liegt bei 3. Der Schwerpunkt der Schülerangaben liegt damit fast mittig in der Likertskaala mit einer leichten Tendenz, dass die Aussage eher zutrifft.

Vielen war nicht klar (MA 1: 34.1 %) bzw. eher nicht klar (MA 2: 35.2 %), wie sie anfangen sollten, die Aufgabe zu lösen (vgl. Abbildung 8.6(e)). 19.1 % der Probanden wussten eher, wie sie anfangen sollten, die Aufgabe zu lösen (MA 3) und knapp 10 % der Probanden war dies direkt klar (MA 4). Eine fehlende Angabe weisen 1.6 % der Fälle auf. Der Mittelwert liegt bei einem Wert von 2, ebenso wie der Median. Somit spiegelt der Schwerpunkt der Schülerangaben die MA wider, dass die Aussage eher nicht zutrifft.

Ein Großteil der Schülerinnen und Schüler empfanden die Aufgabe als zu schwer (vgl. Abbildung 8.6(f)). Hier gaben 31.0 % der Probanden an, die Aussage trüfe voll auf sie zu (MA 4) und 33.9 % die Aussage trüfe eher auf sie zu (MA 3). Hingegen sagten 22.7 % der Probanden aus, die Aussage trüfe eher nicht auf sie zu (MA 2) und 10.6 % die Aussage trüfe gar nicht zu (MA 1). Hier enthielten sich 1.2 % der Probanden ihrer Aussage. Der Durchschnittswert beläuft sich auf 2.9 und der Median auf 3. Der Schwerpunkt der Schülerangaben ist in der MA „die Aussage trifft eher zu“ zu finden.

Die Aussage, dass das Bearbeiten der Aufgabe Spaß gemacht hat bzw. es toll war, verschiedene Aspekte selbst überlegen zu können und diese dann genauer zu analysieren, stuften die Probanden in alle vier MAn etwa gleichverteilt ein (vgl. Abbildung 8.6(g)). Am häufigsten wurde die MA 3 mit 30.5 % gewählt, knapp dahinter die MA 2 mit 28.4 %, anschließend MA 4 (20.0 %) und erneut mit nur sehr geringem Abstand MA 1 (18.7 %). Fehlend sind 1.8 % der Fälle. Die Durchschnittsausprägung kann mit einem Wert von 2.5 und der Median mit 3 angegeben werden. Der Schwerpunkt der Schülerangaben liegt damit mittig in der vierstufigen Likertskaala.

Über Wissen, was mathematische Modellierung ist, verfügen die wenigsten Probanden (vgl. Abbildung 8.6(h)). So sagten fast 50 % der Probanden aus, die Aussage trafe gar nicht zu (MA 1) und weitere 22.3 % die Aussage trafe eher nicht auf sie zu (MA 2). Nur 17.3 % verfügten eher (MA 3) bzw. 12.2 % voll über dieses Wissen (MA 4). Es enthielten sich 2.1 % der Probanden. Hier beziffert sich der Durchschnittswert auf 2 und entspricht damit dem Median. Auf den Schwerpunkt der Schülerangaben trifft die Aussage eher nicht zu.

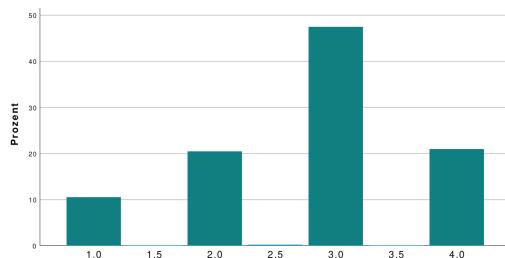
Die Aussage, die Probanden hätten sich gerne länger mit der Aufgabe bzw. der Problemstellung beschäftigt, ist relativ gleichverteilt eingeordnet worden (vgl. Abbildung 8.7(a)). Auf den überwiegenden Anteil, nämlich 29.0 %, trifft diese Aussage gar nicht zu (MA 1). Weitere 25.0 % gaben an, die Aussage trafe eher nicht auf sie zu (MA 2), wohingegen 24.3 % die Aussage voll zutreffend empfanden (MA 4). Knapp 20 % stuften die Aussage als eher zutreffend ein (MA 3). Es fehlen hier 1.7 % der Angaben. In diesem Fall sind die Durchschnittsausprägung durch 2.4 und der Median durch 2 gegeben. Der Schwerpunkt liegt damit erneut fast mittig in der Likertskaala.

Ein Großteil der Probanden empfand das Thema der Aufgabe bzw. der Problemstellung eher interessant (MA 3: 35.4 %) und ein weiteres Drittel sogar voll interessant (MA 4: 33.9 %, vgl. Abbildung 8.7(b)). 17.6 % der Probanden fanden das Thema eher nicht (MA 2) und nur 10.7 % gar nicht interessant. Es enthielten sich 1.5 % der Schülerinnen und Schüler ihrer Angabe. Die durchschnittliche Ausprägung liegt hier mit einem Wert von 2.9 dicht am Median, der den Wert 3 hat. Insgesamt fanden der Schwerpunkt der Probanden das Thema der Aufgabe eher interessant.

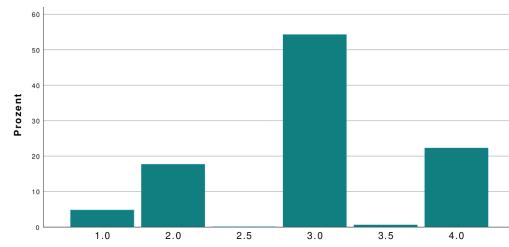
Die Aussage, solche komplexen Aufgaben bzw. Problemstellungen häufiger im Mathematikunterricht zu bearbeiten, trifft auf gemischtes Interesse (vgl. Abbildung 8.7(c)). Hier wählten jeweils knapp 30 % die MA 1 und die MA 3. 23.5 % kreuzten MA 2 an. Der geringste Anteil liegt in der MA 4 mit 16.8 %. Es machten 1.3 % der Probanden keine Angabe zu dieser Aussage. Der Durchschnittswert beziffert sich auf 2.3 und der Median auf 2. Damit ist der Schwerpunkt in der MA, die Aussage trifft eher nicht zu, zu finden.

Die Art der Aufgabe war für 33.4 % eher motivierend und dieser Anteil an Probanden würde eher gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten (MA 3, vgl. Abbildung 8.7(d)). Weitere 27.1 % stimmten dieser Aussage eher nicht zu (MA 2) und 20.4 % stimmten gar nicht zu (MA 1). Schlusslicht bildet mit 16.5 % die MA 4. Hier enthielten sich 2.2 % der Probanden. Hier beträgt die durchschnittliche Ausprägung 2.5, und der Median liegt bei 3. Der Schwerpunkt liegt erneut fast mittig in der Likertskaala.

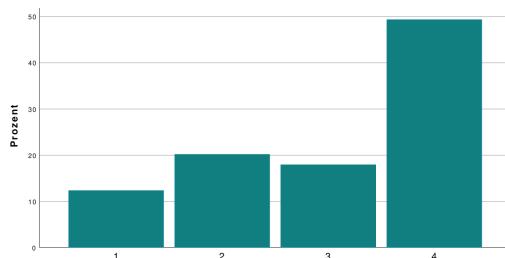
Da sich in allen betrachteten Aussagen der Anteil der enthaltenen Stimmen zwischen 0.6 % und 2.2 % bewegt, also etwa zwischen 5 und 18 Probanden, können die Ergebnisse als repräsentativ für die untersuchte Gruppe angesehen werden. Eine Verallgemeinerung ist nur in bedingtem Maße erlaubt. Dazu müsste eine Langzeitstudie mit der Kontrolle vieler Rahmenbedingungen erfolgen.



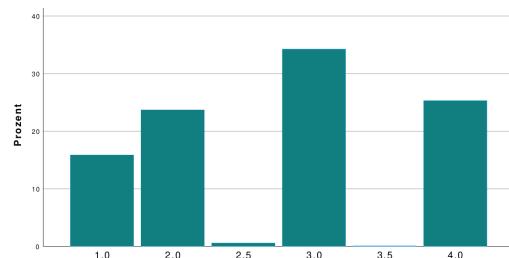
(a) Ich rechne gerne. / Ich mag es, mich mit Mathematik zu beschäftigen.



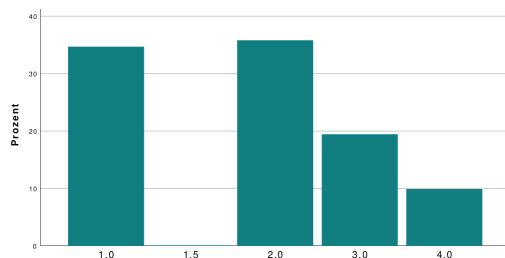
(b) Die Aufgaben / Problemstellungen, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.



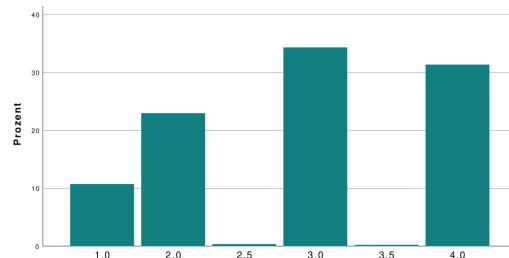
(c) Ich habe noch nie so eine Aufgabe / Problemstellung wie heute bearbeitet.



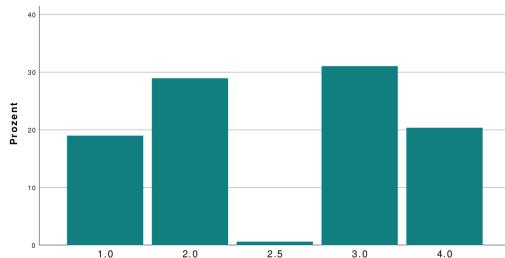
(d) Ich wusste nicht, was ich tun soll. / Ich wusste nicht, was von mir erwartet wird.



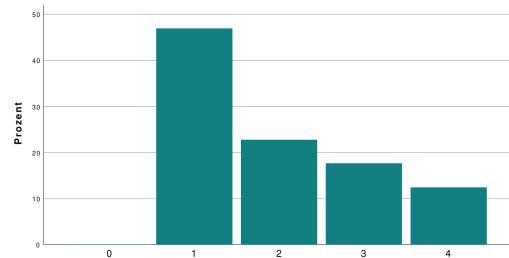
(e) Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen. / Mir war klar, wie ich anfange, die Problemstellung zu lösen.



(f) Die Aufgabe war zu schwer. / Ich fand es schwierig, einen Lösungsansatz für die Problemstellung zu entwickeln.

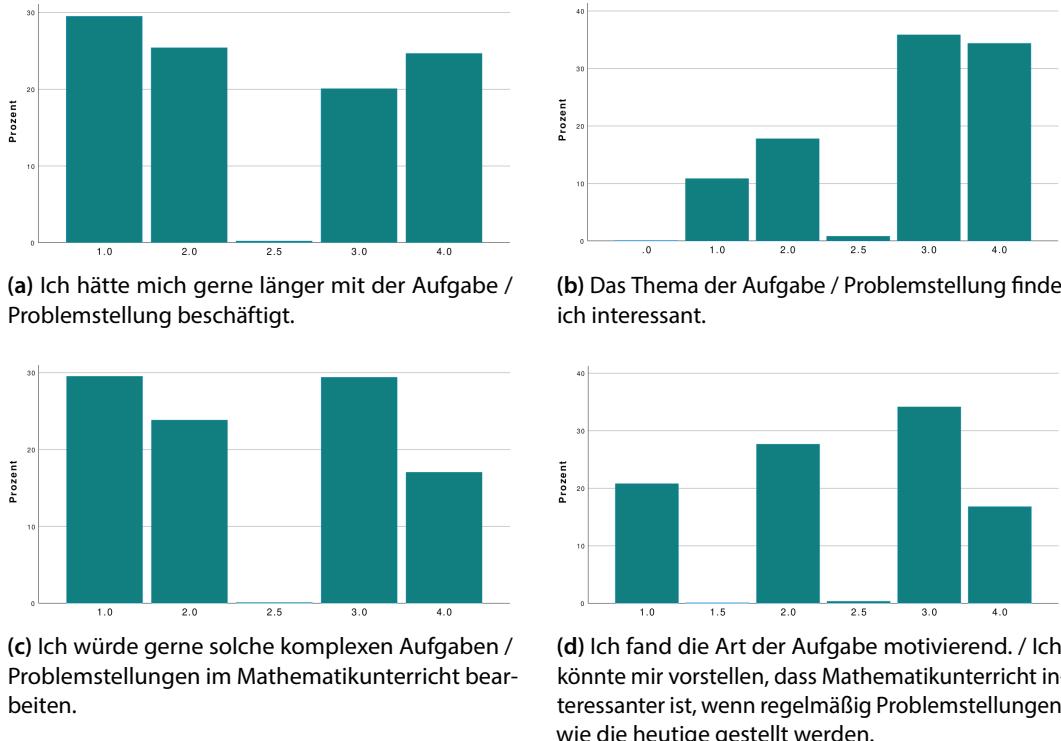


(g) Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht. / Ich fand es toll, mit verschiedenen Aspekten selbst zu überlegen, die ich genauer analysieren konnte.

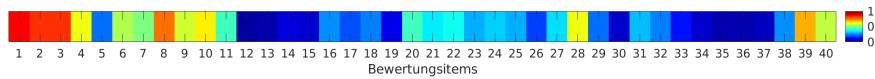


(h) Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.

**Abbildung 8.6:** Übersicht über die Selbsteinschätzungen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler zu diversen Aussagen. 1: trifft gar nicht zu, 2: trifft eher nicht zu, 3: trifft zum Teil zu, 4: trifft voll zu.



**Abbildung 8.7:** Übersicht über die Selbsteinschätzungen der teilnehmenden Schülerinnen und Schüler zu diversen Aussagen. 1: trifft gar nicht zu, 2: trifft eher nicht zu, 3: trifft zum Teil zu, 4: trifft voll zu.



**Abbildung 8.8:** Prozentualer Anteil aller Teilnehmenden über alle Jahrgangsstufen, der die jeweiligen Bewertungsitems erfüllt. Die Bewertungsitems entsprechen genau den Kriterien des Bewertungsschemas, die in der Aufzählung 8.4 vorgestellt werden.

### 8.7.3 Ergebnisse der Bewertungen der Schülerlösungen

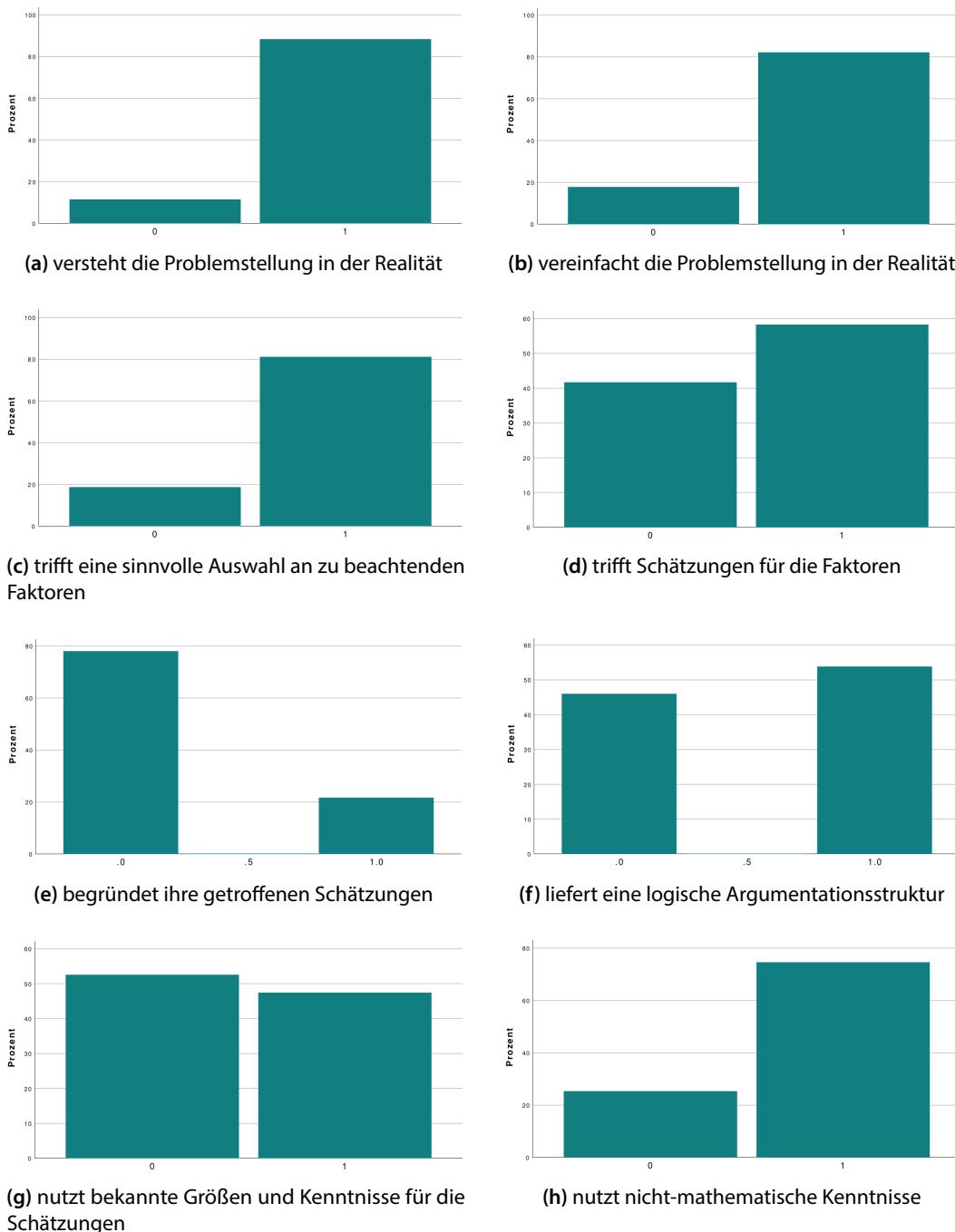
Der folgende Abschnitt präsentiert die Ergebnisse der Bewertungen der Schülerlösungen durch die Gutachter. Zunächst erfolgt eine Zusammenfassung über alle Probanden, insbesondere auch über alle Jahrgangsstufen hinweg, mit einer Ausdifferenzierung der einzelnen Bewertungsitems. Die Analyse berücksichtigt nur solche Bewertungen, bei denen die Probanden mindestens ein leeres Lösungsblatt abgaben. Die Darstellung der Ergebnisse lehnt sich an den vorherigen Abschnitt an. Die Angabe beschränkt sich zu allen Merkmalen auf den prozentualen Anteil aller Schülerinnen und Schüler, den die Begutachtenden positiv bewerteten (*Modellierungsteilkompetenz ist vorhanden*). Zusätzliche statistische Angaben liefern bei zwei MA kaum einen Mehrwert. Die Ergebnisse listet der Anhang ausführlich auf (vgl. Anhang D.3). Die Abbildung 8.8 fasst die relative Häufigkeit für alle MA zusammen. Dabei bedeutet eine Farbe, je stärker sie dunkel rot gefärbt ist, eine höhere relative Häufigkeit im Auftreten der MA *Modellierungsteilkompetenz ist vorhanden*. Hingegen spiegelt gegen eine Farbe, je stärker sie dunkel blau gefärbt ist, geringere Häufigkeiten in derselben MA wider. Für den ersten Modellierungsschritt, den des Vereinfachens, stellt sich das Ergebnis wie folgt dar

(vgl. Abbildung 8.9–8.11): Insgesamt scheinen viele Probanden die Aufgabenstellung in der Realität zu verstehen (Item 1, 88.4 %) und es ist ihnen möglich, diese zu vereinfachen (Item 2, 82.2 %) (vgl. Abbildung 8.8). Weiterhin scheint es für viele Teilnehmende kaum Schwierigkeiten zu bereiten, eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren zu treffen (Item 3, 81.2 %). Knapp drei Viertel der Probanden nutzt nicht-mathematische Kenntnisse (Items 8: 74.6 %). Deutlich weniger Teilnehmende erfüllen die weiteren Modellierungsteilkompetenzen des Vereinfachens. So bescheinigen die Gutachtenden noch etwa der Hälfte der Teilnehmenden die Items 4 (trifft Schätzungen für die Faktoren, 58.3 %), 6 (liefert eine logische Argumentationsstruktur, 53.7 %), 7 (nutzt bekannte Größen und Kenntnisse für die Schätzungen, 47.4 %), 9 (berücksichtigt den Faktor Platzbedarf (Faktor 1), 58.2 %), 10 (berücksichtigt den Faktor Essensmenge (Faktor 2), 62.9 %), 11 (berücksichtigt den Faktor Wasserbedarf (Faktor 3), 42.4 %) zu erfüllen. Bei deutlich weniger Teilnehmenden fanden die Gutachtenden die Modellierungsteilkompetenzen 5 (begründet ihre getroffenen Schätzungen, 21.7 %), 16 (unterscheidet dazu zwischen bewohnbaren und unbewohnbaren Flächen, 27.7 %), 17 (zeichnet dazu (landwirtschaftliche) Nutzflächen aus, 19.5 %) und 18 (berücksichtigt dabei die Essensherstellung, 22.9 %). Fast kein Proband erfüllt die Kriterien 12 (berücksichtigt den Faktor Freizeitraum (Faktor 4), 2.7 %), 13 (berücksichtigt den Faktor Arbeitsraum (Faktor 5), 4.6 %), 14 (nutzt dazu die Abbildung, 9.6 %), 15 (bestimmt dazu die Erdoberfläche über Kugeloberfläche, 7.0 %) und 19 (unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser, 10.9 %).

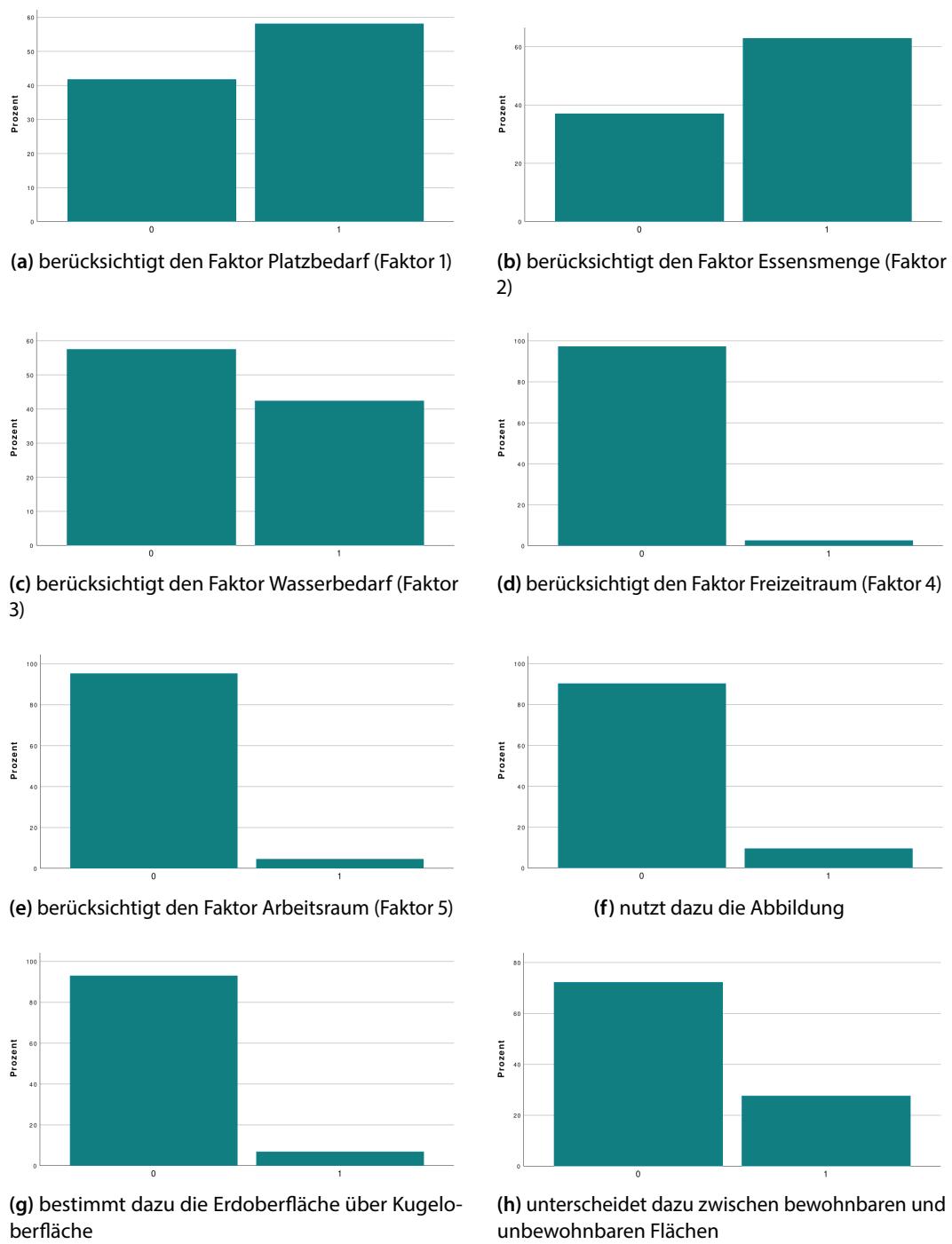
Die Gutachtenden bewerteten den Prozess des Mathematisieren bei etwa 35–45 % der Schülerinnen und Schülern positiv (Item 20, formuliert ein mathematisches Problem, 42.7 % und Item 21, liefert eine logische Argumentationsstruktur, 35.0 %) (vgl. Abbildung 8.12).

Modellierungsteilkompetenzen im Prozess des Berechnens weisen jeweils etwa ein Drittel aller Teilnehmenden auf (Items 22, entwickelt eine mathematische Lösung, 36.6 %, Item 23, berechnet die Lösung korrekt, 28.9 % und Item 24, Verwendung geeigneter Verfahren zur Lösungsbestimmung, 31.7 %) (vgl. Abbildung 8.13). Im Teilkompetenzbereich des Validierens und Interpretierens sticht lediglich das Kriterium 28 hervor, das einer Mehrheit der Teilnehmenden bescheinigt, dass sie einen Antwortatz geschrieben haben (60.0 %) (vgl. Abbildung 8.14–8.17). Zwischen 20 und 35 % der Probanden punkteten in den Items 25 (interpretiert das Ergebnis / die Ergebnisse, 29.4 %), 27 (kennt die Bedeutung des Ergebnisses / der Ergebnisse, 34.6 %), 29 (bewertet das Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse (Niveau 2), 23.4 %), 31 (nutzt dazu nichtmathematische Kenntnisse, 30.7 %) und 32 (liefert eine logische Argumentationsstruktur, 25.4 %). Unter 20 % der Teilnehmenden erzielten in den beiden Items 26 (bewertet das Ergebnis / die Ergebnisse, 18.0 %) und 33 (hinterfragt das Ergebnis, 14.1 %) positive Bewertungen. Die Bewertungsitems 30 (bewerten das Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwarteten Allgemeinwissens und zeigt Zusammenhänge zwischen Faktoren auf (Niveau 3), 7.2 %), 34 (identifiziert problematische Annahmen, 7.0 %), 35 (verbessert die getroffenen Annahmen (z. B. durch geeignete Schätzungen), 4.9 %), 36 (wiederholt den Problemlöseprozess, 4.8 %) und 37 (gibt einen Ausblick auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren, 6.5 %) erfüllten fast keine Schülerinnen und Schüler.

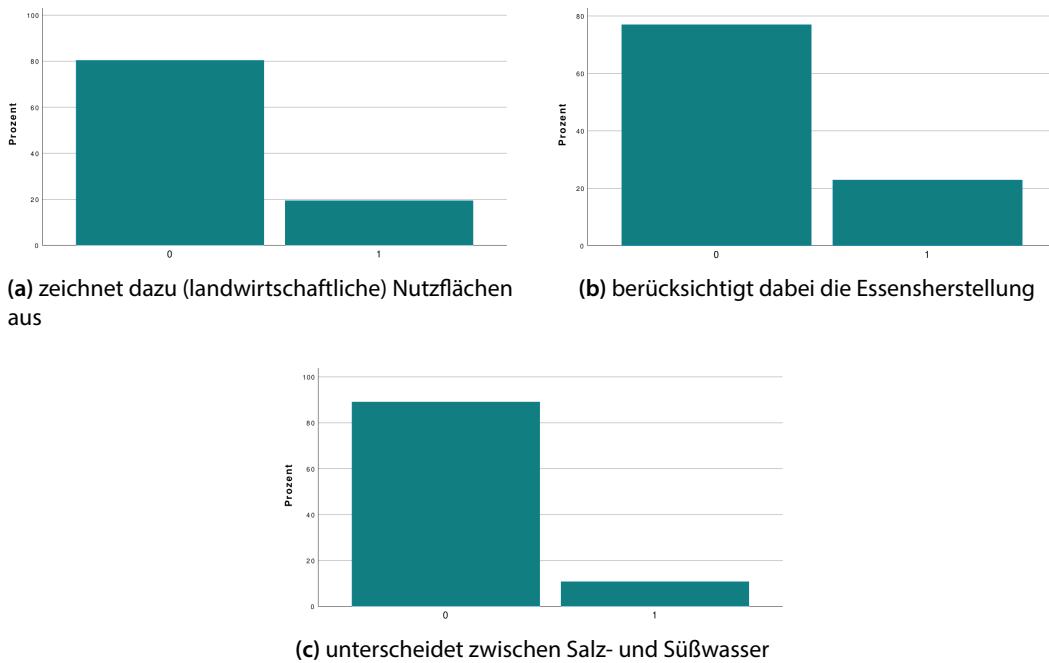
Deutlich besser schnitt die Mehrheit der Teilnehmenden in den allgemeinen Bewertungsitems ab. So gingen 70.2 % strukturiert an die Aufgabe heran (Item 39), und 55.0 % der Teilnehmenden dokumentierten ihre Lösungsschritte ordentlich und nachvollziehbar (Item 40) (vgl. Abbildung 8.18).



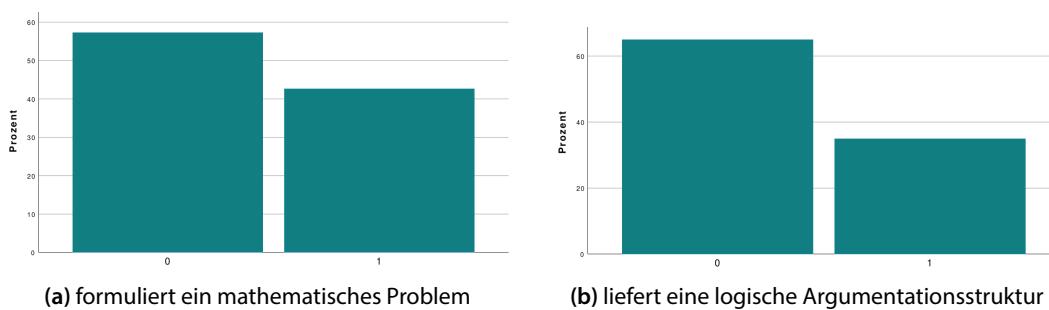
**Abbildung 8.9:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Vereinfachen* (Bewertungsitems 1–8). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



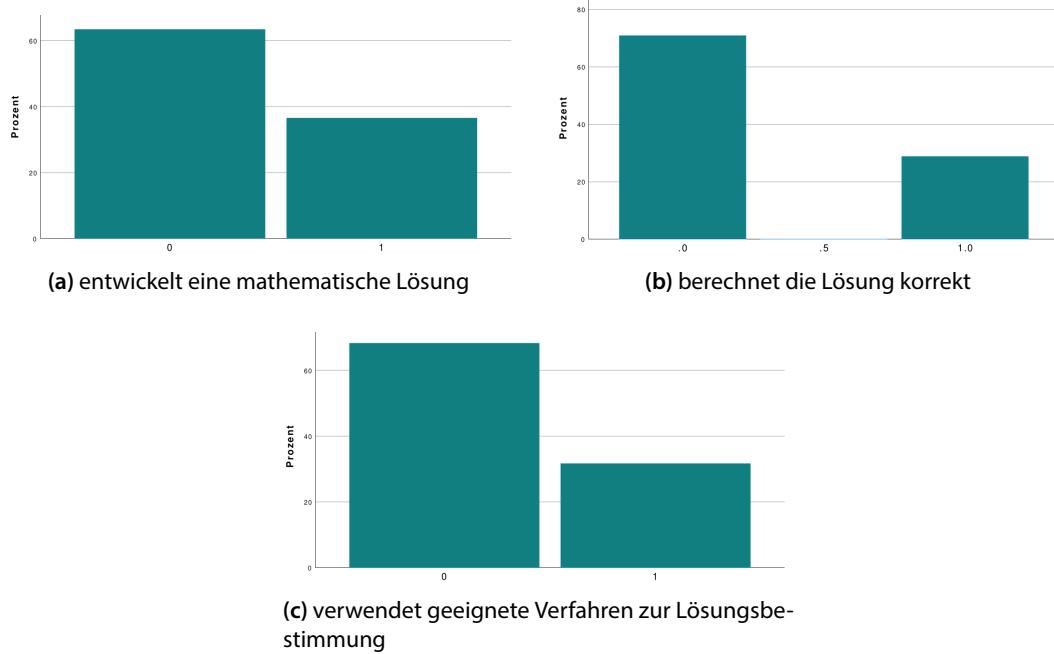
**Abbildung 8.10:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt Vereinfachen (Bewertungsitems 9–16). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



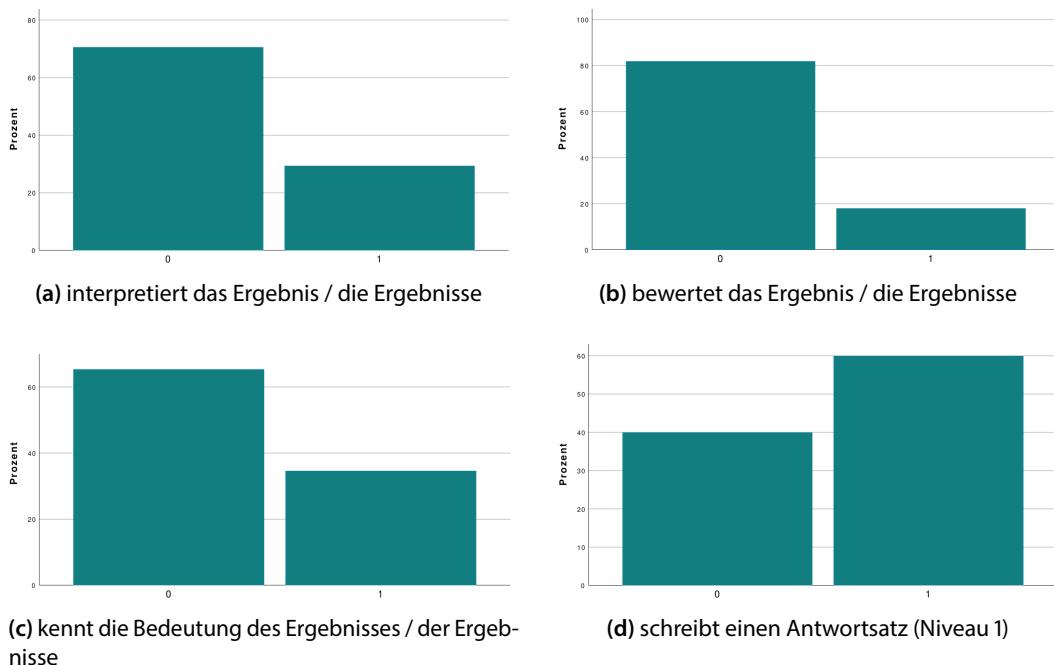
**Abbildung 8.11:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Vereinfachen* (Bewertungsitems 17–19). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



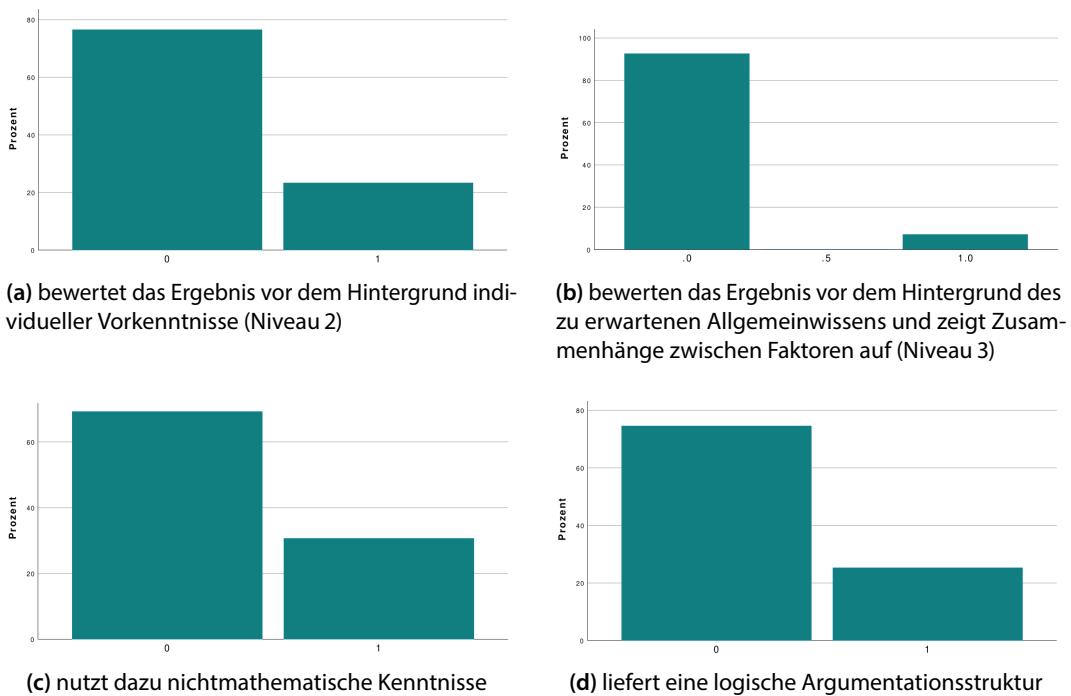
**Abbildung 8.12:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Mathematisieren* (Bewertungsitems 20–21). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



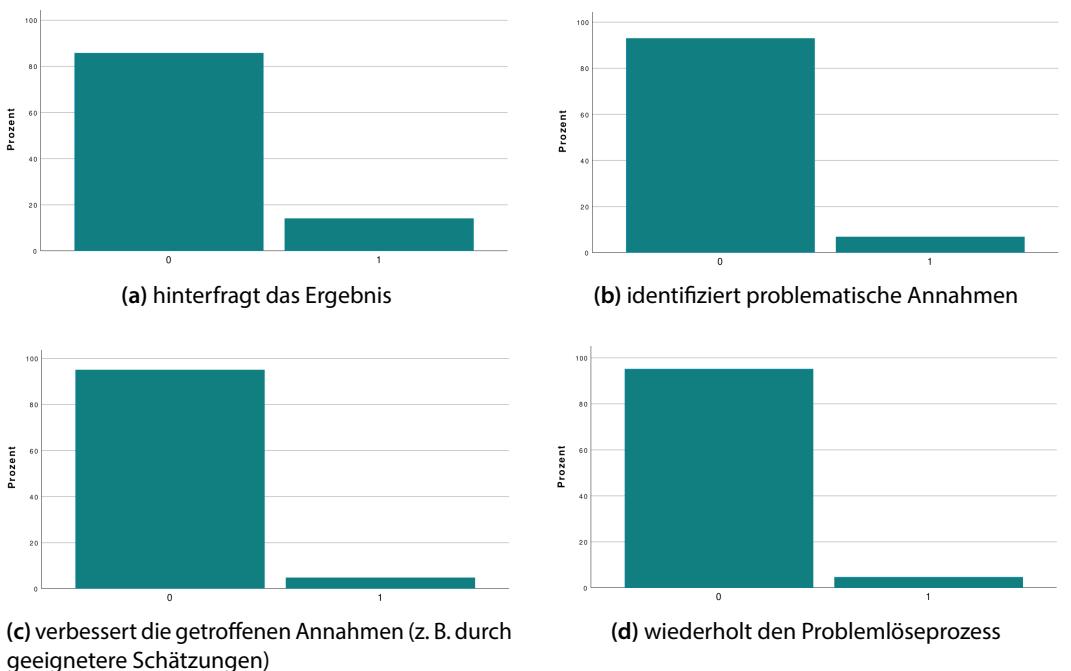
**Abbildung 8.13:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Berechnen* (Bewertungsitems 22–24). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



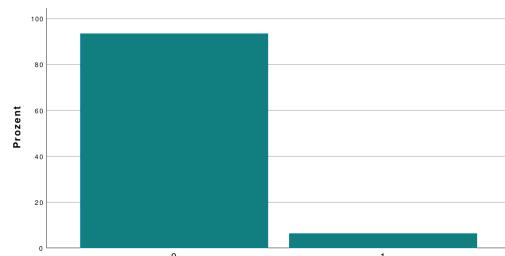
**Abbildung 8.14:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Validieren und Interpretieren* (Bewertungsitems 25–28). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



**Abbildung 8.15:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Validieren und Interpretieren* (Bewertungsitems 29–32). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.

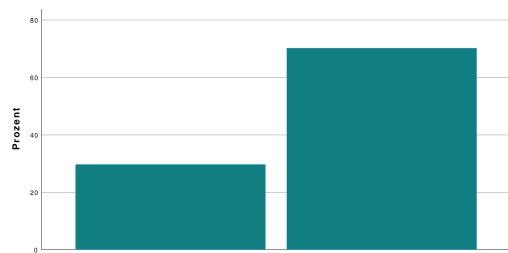


**Abbildung 8.16:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachtenden im Modellierungsschritt *Validieren und Interpretieren* (Bewertungsitems 33–36). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



(a) gibt einen Ausblick auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren

**Abbildung 8.17:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachter im Modellierungsschritt *Validieren und Interpretieren* (Bewertungsitem 37). 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.



(a) ist strukturiert an die Aufgabe herangegangen



(b) hat alle Lösungsschritte ordentlich nachvollziehbar dokumentiert

**Abbildung 8.18:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachter in den ergänzenden Items 39–40. 0: Modellierungsteilkompetenz nicht erfüllt, 1: Modellierungskompetenz erfüllt.

## 8.7.4 Ergebnisse und Bewertung der Forschungsfragen

Der folgende Abschnitt betrachtet die in Abschnitt 8.2 aufgestellten Forschungsfragen. Dabei gilt es, Korrelationen zwischen einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Items des Bewertungsschemas aus Abschnitt 8.4 aufzudecken. Dazu werden der  $\chi^2$ -Test und der Pearson-Korrelationskoeffizient ausführlich betrachtet. Der  $\chi^2$ -Test überprüft zu einem festgelegten Signifikanzniveau, ob zwei Variablen abhängig voneinander sind. Die Nullhypothese nimmt dabei an, dass die beiden betrachteten Variablen – modelliert als Zufallsgrößen – stochastisch unabhängig sind. Eine Aussage über die Stärke macht der Test nicht. Daher wird die Analyse um die Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson erweitert. Allerdings ist auch dieses Ergebnis nur mit Vorsicht zu genießen, da ordinale Merkmale verwendet wurden und nicht von einer (näherungsweisen) stetigen Verteilung gesprochen werden kann. Der Text führt lediglich die auffälligen Korrelationen auf. Eine vollständige Aufzeichnung aller Werte zu allen Korrelationsuntersuchungen befindet sich im (digitalen) Anhang.

### 8.7.4.1 Forschungsfrage 1: Über welche Modellierungskompetenzen verfügen die Probanden aktuell?

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage werden die Ergebnisse aus der Beurteilung der Schülerlösungen durch die Gutachter interpretiert (vgl. Anhang D.3). In den insgesamt 40 Bewertungskriterien schneiden die Probanden eher schlecht ab. In 29 von 40 Modellierungsteilkompetenzen erfüllt die Hälfte der Probanden das Kriterium nicht. Hingegen scheinen die Schülerinnen und Schüler besonders stark in Teilkompetenzen des Vereinfachens zu sein. Hier erzielen die Teilnehmenden die besten Ergebnisse: Mindestens 80 % der Probanden erfüllen die Modellierungs-teilkompetenzen 1–3. Die Analyse der von den Probanden gewählten Faktoren berücksichtigt die relativ kurze Bearbeitungszeit der Aufgabe. Eine Analyse mehrerer Faktoren fordert insbesondere jüngere Schülerinnen und Schüler zeitlich heraus, da die Ideen auch dokumentiert werden sollen. Daher kann davon ausgegangen werden, dass viele Probanden sich auf ein oder maximal zwei Faktoren konzentrierten. Die meisten Teilnehmenden, nämlich etwa 63 %, betrachteten den Faktor Essensmenge. Fast 60 % analysierten den Faktor Platzbedarf. Der Faktor Wasserbedarf wurde von etwa 42 % gewählt. Die weiteren Faktoren Freizeitraum und Arbeitsraum wurden nur selten (Faktor Freizeitraum: 3 %, Faktor Arbeitsraum: 5 %) untersucht. Damit weisen die Schülerlösungen darauf hin, dass die Teilnehmenden vor allem die in der Aufgabenstellung beispielhaft aufgelisteten Faktoren betrachteten. Für zukünftige Modellierungsaufgaben sollte demnach vorab geprüft werden, ob eine Vorprägung der Lösungsrichtung gewünscht ist. Die Alternative dazu erlaubt den Schülerinnen und Schülern, sich in ihrer Betrachtung komplett frei zu entfalten. Die Faktoren wurden in der Aufgabenbeschreibung bewusst aufgenommen, um Anhaltspunkte für die Untersuchung zu liefern. Es wurde befürchtet, dass fehlende Hinweise andernfalls eine zu hohe kognitive Hürde darstellen würden. Die Überwindung der Hürde wäre eventuell so zeitintensiv gewesen, dass kaum weitere Analysen hätten stattfinden können. Hingegen banden die Probanden die Graphik der Weltkarte auf dem Aufgabenblatt nur selten in ihren Lösungsweg ein. Das könnte einerseits daran gelegen haben, dass sie die Graphik unverständlich fanden. Andererseits hielt die Graphik etwaig keine über das Schülerwissen hinausgehenden Informationen bereit. Hier kann nur eine Schülernachbefragung weiteren Aufschluss geben. Auch die weiteren Bewertungskriterien 15–19 stellen mögliche, aber für ein erfolgreiches Modellieren nicht zwangsläufig notwendige, Bewertungskriterien dar. Das Bewertungsschema enthält lediglich die Möglichkeit, die Erdoberfläche über die Kugeloberfläche

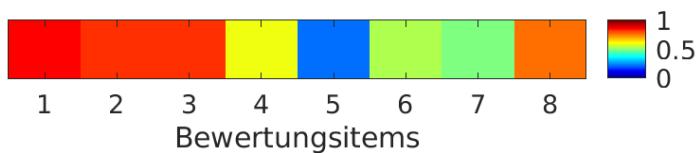


Abbildung 8.19: Beurteilungen der Schülerlösungen im Modellierungsschritt des Vereinfachens

zu bestimmen. Hingegen könnten auch Flächenabschätzungen über eine Hochrechnung der Fläche von Deutschland erfolgen. An dieser Stelle weist das Bewertungsschema Mängel auf. Es ist daher zu überlegen, entweder zu detaillierte Kriterien herauszunehmen oder weitere zu ergänzen. Letzteres bietet den Vorteil, dass ein möglichst präzises Abbild der Schülerlösung erstellt werden kann. Ein solches Verfahren eignet sich daher besonders gut für eine Analyse der Lösungswege. Liegt der Schwerpunkt auf einer Bewertung der Schülerlösungen, ist ein gekürztes Schema vorzuziehen: Die Zerlegung eines Modellierungsschrittes in zu viele kleine Teilkompetenzen führt dazu, dass sich die (vielen) positiv bewerteten Merkmale auf nur einzelne Teilkompetenzen aufteilen und so der Blick für das Gesamte verloren geht. Außerdem besteht die Gefahr, nicht alle Teilkompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler aufzeigen, mit dem erstellten Schema abzubilden. Vernachlässigt man die Teilkompetenzen 14–19, so verfügt ein überwiegender Anteil der Probanden über die Hälfte der Modellierungsteilkompetenzen des Prozess des Vereinfachens (vgl. Abbildung 8.19). Die Teilkompetenz, die getroffenen Schätzungen zu begründen, erfüllen lediglich knapp 22 %. Hier gibt es demnach noch Übungsbedarf.

Den Prozess des Mathematisierens kennen die Schülerinnen und Schülern aus der Bearbeitung von Textaufgaben. Unter Textaufgaben verstehen Radatz und Schipper (1983, S. 130) in „Textform dargestellte Aufgaben, bei denen die Sache weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist“. Das Ziel des Mathematisierens besteht darin, Zusammenhänge zwischen (angegebenen) Zahlen zu erörtern und in Form von Termen oder Gleichungen miteinander zu verknüpfen (vgl. Maaß, 2011, S. 6). Dabei ist die Übertragung der Textstruktur in eine mathematische Struktur hinsichtlich der Bearbeitung und der Lösung eindeutig. Der Unterschied im Mathematisieren zwischen Modellierungs- und Textaufgaben besteht vor allem in der Vorbereitung der Aufgabe: So müssen Heranwachsende in Modellierungsaufgaben die zu erfassenden Zahlen selbstständig im vorhergehenden Modellierungsschritt aufstellen. Hingegen extrahieren sie die Zahlen in Textaufgaben aus der Aufgabenstellung. Aufgrund der großen Nähe zu den aus dem Mathematikunterricht bekannten (eingekleideten) Textaufgaben scheint das Studienergebnis der Ausprägungen im Mathematisieren überraschend. Etwa 43 % der Probanden formulierte ein mathematisches Problem, und etwa ein Drittel der Probanden lieferte dabei eine logische Argumentationsstruktur. Plausibel wäre, dass die Probanden den eigenen Vorarbeiten nicht ausreichend vertraut waren, um darauf aufzubauen. An dieser Stelle könnte eine Ursachenforschung ansetzen.

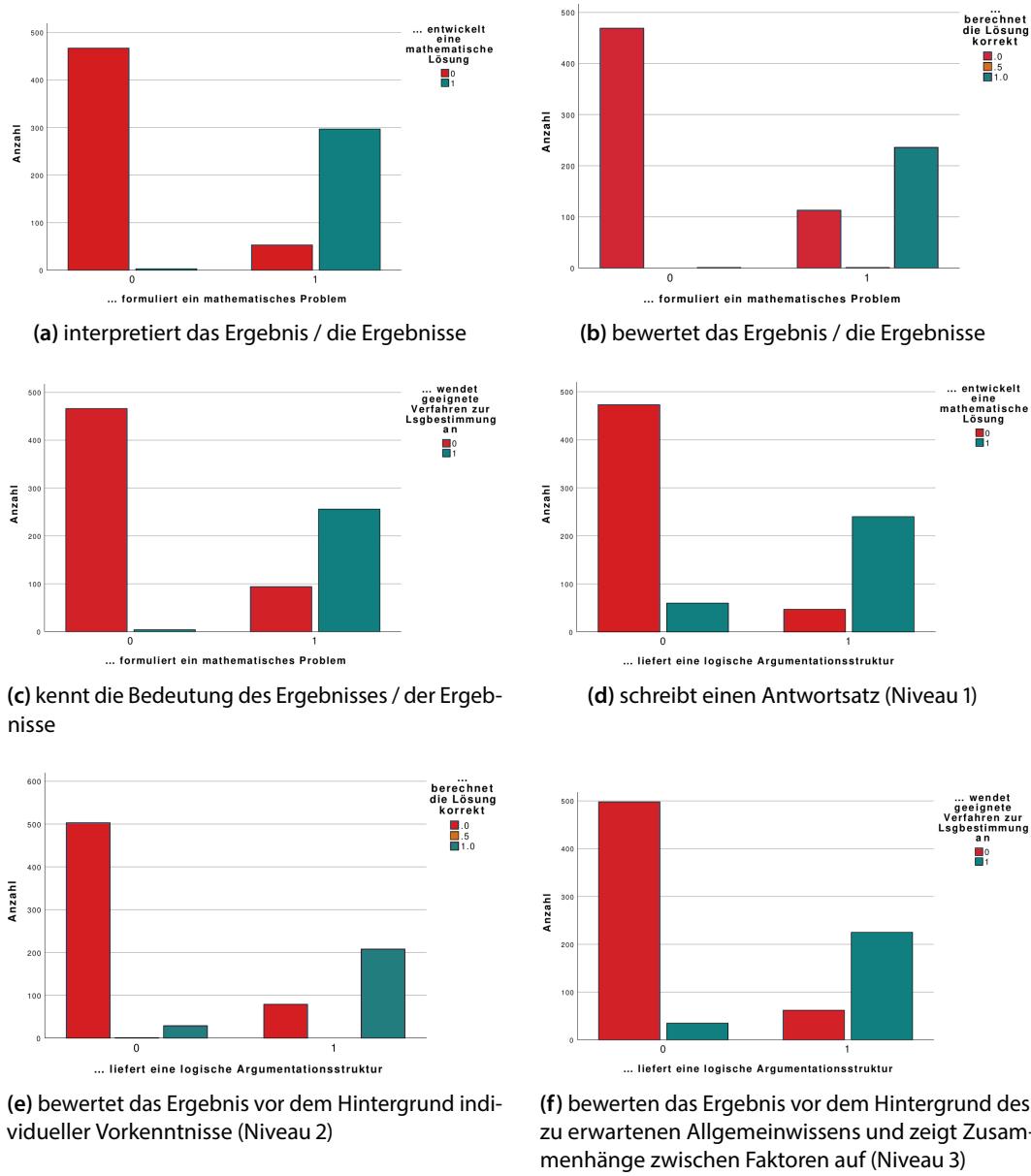
Ebenso unerwartet sind die geringen Ausprägungen der Modellierungskompetenz des Berechnens. In den jeweiligen Merkmalen bescheinigten die Gutachtenden etwa einem Drittel der Teilnehmenden eine positive MA. Das Berechnen ist ebenfalls fester Bestandteil des Mathematikunterrichts. Für das Erlernen dieser Kompetenz setzen Lehrpersonen vielfach Sachaufgaben ein (vgl. Franke und Ruwisch, 2010). Berücksichtigt man jedoch die schwachen Leistungen im vorherigen Modellierungsschritt, so stellt sich die Frage der Abhängigkeit der Modellierungsschritte untereinander: Lassen sich die Modellierungsteilschritte wirklich, wie hier angenommen, separat voneinander betrachten oder bedeutet das Erreichen der vorangegangenen Stufe eine notwendige Voraussetzung,

**Tabelle 8.5:** Pearson-Korrelationen zwischen den Teilkompetenzen des *Mathematisierens* und *Berechnens*. Ausgewertet mit SPSS. Eine vollständige Darstellung der Ergebnisse zeigt Anhang D.4.

	Item 21	Item 22	Item 23	Item 24
Item 20	0.84	0.87	0.74	0.77
Item 21	–	0.72	0.70	0.74
Item 22	–	–	0.84	0.88
Item 23	–	–	–	0.86

um den Modellierungsprozess weiter fortführen zu können? Diesen Ansatz verfolgten Ludwig und Reit (2013). Eine Analyse der Korrelation zwischen den Bewertungselementen des Mathematisierens und des Berechnens liefert folgendes Ergebnis: Der Pearson-Korrelationskoeffizient zwischen den Bewertungselementen liegt in allen Fällen bei über 70 %. Er ist positiv und deutet auf einen starken Zusammenhang der Merkmale hin (vgl. Tabelle 8.5). Eine unabhängige Betrachtung dieser beiden Modellschritte ist damit nicht mehr zulässig. Die Abbildungen 8.20 zeigen deutlich, dass Probanden, die die Merkmale des Mathematisierens nicht erfüllten ( $x$ -Achse, Ausprägung 0), auch nur in wenigen Ausnahmen in den Merkmalen des Berechnens erfolgreich waren (blaue Säulen). Um die Modellierungskompetenz des Berechnens losgelöst vom Mathematisieren beurteilen zu können, bedarf es anderer Aufgabenstellungen. Ähnlich wie der erste Modellierungsschritt mögliche Betrachtungen aufgezeigte, könnte der Aufgabentext mathematische Angaben beinhalten. Eine solche Spezifizierung steht jedoch auch immer im Gegensatz zu den Kriterien an eine offene Modellierungsaufgabe.

Aufbauend auf diesen Erfahrungen muss man auch den Prozess des Vereinfachens unter einem neuen Blickwinkel betrachten. Jegliche Kombinationen zwischen den Modellierungsteilkompetenzen des Mathematisierens bzw. Berechnens und des Interpretierens weisen unter Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson mindestens einen schwachen positiven Zusammenhang auf (vgl. Tabelle 8.6 bzw. Tabelle 8.7). Daher sind die in Abbildung 8.8 dargestellten und in Abschnitt 8.7.3 ausführlich beschriebenen Ergebnisse nur beschränkt aussagekräftig. Da die Korrelationen jedoch nur schwach oder moderat ausfallen, sollte eine Begründung für das schlechte Abschneiden der Probanden in den einzelnen Modellierungsteilkompetenzen des Interpretierens und Validierens nicht allein auf dem Fehlen der vorherigen Modellierungsprozessschritte fußen. Ein weiterer Grund könnte das Unwissen über diese Kompetenzen sein. Für eine Ursachenforschung müssten die Probanden zu ihren Kenntnissen über mathematische Modellierung befragt werden. Auch könnten weitere Studien analysieren, wie sich vorheriges Training im Lösen von Modellierungsaufgaben auf den Erfolg auswirkt.



**Abbildung 8.20:** Übersicht über die Aufgabenbeurteilung durch die Gutachter in einer Betrachtung unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen den Bewertungsitems

**Tabelle 8.6:** Pearson-Korrelationen zwischen den Teilkompetenzen des *Mathematisierens* und *Berechnens*. Ausgewertet mit SPSS.

	Item 20	Item 21
Item 25	0.39	0.37
Item 26	0.20	0.21
Item 27	0.38	0.43
Item 28	0.13	0.14
Item 29	0.13	0.16
Item 30	0.09	0.15
Item 31	0.17	0.20
Item 32	0.19	0.26
Item 33	0.21	0.26
Item 34	0.15	0.20
Item 35	0.18	0.20
Item 36	0.13	0.12
Item 37	0.16	0.19

**Tabelle 8.7:** Pearson-Korrelationen zwischen den Teilkompetenzen des *Mathematisierens* und *Berechnens*. Ausgewertet mit SPSS.

	Item 22	Item 23	Item 24
Item 25	0.43	0.43	0.44
Item 26	0.26	0.27	0.28
Item 27	0.37	0.41	0.40
Item 28	0.18	0.18	0.19
Item 29	0.17	0.16	0.18
Item 30	0.10	0.16	0.13
Item 31	0.20	0.20	0.22
Item 32	0.20	0.22	0.23
Item 33	0.23	0.24	0.27
Item 34	0.16	0.16	0.20
Item 35	0.19	0.21	0.21
Item 36	0.15	0.15	0.17
Item 37	0.18	0.17	0.21

### 8.7.4.2 Forschungsfragen 2 & 3: Lassen sich Zusammenhänge zwischen Jahrgangsstufe bzw. Geschlecht und Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen?

Um Zusammenhänge zwischen der Jahrgangsstufe mit den Modellierungsfähigkeiten aufzudecken, wurde ein  $\chi^2$ -Test durchgeführt. Dabei lautet die zu untersuchende Alternativhypothese, dass die Modellierungsfähigkeiten mit steigender Jahrgangsstufe ausgeprägter sind. Der  $\chi^2$ -Test deutet darauf hin, dass die Nullhypothese, es bestehe kein Zusammenhang, für alle Bewertungsmerkmale abzulehnen ist. Der Pearson-Korrelationskoeffizient zeigt die Stärke des Zusammenhangs an, unter der Annahme, dass die Abhängigkeit der beiden Merkmale durch ein lineares Modell beschrieben werden kann. Er deckt in den Merkmalen 1, 2, 6, 9, 14, 16, 19, 25–27, 29–35, 37, 39–40 einen nach Cohen (1988) schwachen positiven Zusammenhang auf (vgl. Tabelle 8.9). Betrachtet man den prozentualen Anteil aller Probanden, der pro Jahrgangsstufe die jeweiligen Bewertungselemente erfüllt, zeigt sich folgendes Bild: Einzelne Jahrgangsstufen weisen in einigen Bewertungskriterien deutlich schlechtere Bewertungen auf als niedrigere Jahrgangsstufen. Die Bildungspläne formulieren die zu erlernenden Inhalte und Kompetenzen jahrgangsstufenübergreifend und sortieren sie in die Kategorien Unter-, Mittel- und Oberstufe ein. Dementsprechend beruhen solche „nicht-linearen“ Kompetenzunterschiede möglicherweise darauf, dass Lehrkräfte den Erwerb der hier benötigten Kompetenzen anderen Inhalten oder Fertigkeiten vorzogen oder zurückstellten. Daher werden die Jahrgangsstufen 5 und 6 der Kategorie Unterstufe, die Jahrgangsstufen 7 bis 9 der Mittelstufe und die Jahrgangsstufen 10 und 11 der Oberstufe zugewiesen. Anschließend wird die Hypothese erneut getestet. Tabelle 8.10 fasst die Ergebnisse zusammen. Diese Betrachtungsweise ermöglicht jedoch keine Aussagen über stärkere Zusammenhänge. Es zeigt sich in all jenen Merkmalen ein schwacher positiver Zusammenhang, bei denen bereits die detailliertere Betrachtung einen schwachen Zusammenhang andeutete.

Die Zusammenhänge treten in den folgenden Merkmalen auf: Tendenziell verstehen und vereinfachen mehr Probanden die Problemstellung in der Realität, je höher die Jahrgangsstufe ist, der sie angehören<sup>3</sup>. Ebenso bauen häufiger ältere Schülerinnen und Schüler ihre Argumentationsstruktur logisch auf als jüngere. Diese drei Merkmale liegen alle im Bereich des Vereinfachens. Darüber hinaus validieren und interpretieren mehr ältere Probanden ihre Ergebnisse. In nahezu allen Merkmalen dieses Modellierungsschrittes deuten sich Zusammenhänge mit der Jahrgangsstufe an. In all den genannten Merkmalen bewerten die Gutachtenden besonders die bescheinende Ausdrucksweise der Teilnehmenden. Daher wäre eine mögliche, noch zu untersuchende Erklärung, dass auch die Sprache und Ausdrucksweise einen Einfluss auf die Bewertung von Modellierungsaufgaben nimmt.

Eine geschlechtergetrennte Analyse deutet wenige Unterschiede in den Modellierungsteilkompetenzen zwischen den weiblichen und den männlichen Teilnehmenden hin (vgl. Tabelle 8.8). Während der  $\chi^2$ -Test noch für zehn Merkmale einen Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und den Bewertungen andeutete, gibt der Pearson-Korrelationskoeffizient lediglich für ein Merkmal einen schwachen positiven Zusammenhang an. Hierbei bedeutet ein positiver Zusammenhang, dass tendenziell mehr männliche Probanden das Bewertungskriterium erfüllten als weibliche. Dieser Trend betrifft das Merkmal, dass die Erdoberfläche über die Kugeloberfläche bestimmt wurde. Der

<sup>3</sup>Für eine einfachere Schreibweise wird der Ausdruck „älter sein“ synonym zu „einer höheren Jahrgangsstufe angehören“ verwendet. Analog beschreibt der Ausdruck „jünger sein“ die Zugehörigkeit zu einer niedrigeren Jahrgangsstufe.

Trend bezieht sich damit auf ein Merkmal, das in Abschnitt 8.7.3 zur Bewertung der Modellierungsfähigkeiten in Frage gestellt wurde. Eine eindeutige Tendenz zugunsten eines Geschlechts ist mit den hier aufgezeigten Methoden nicht festzustellen. Eine Aussage über das Abschneiden derjenigen Heranwachsenden, die als Geschlecht divers angegeben hatten, kann aufgrund der zu geringen Datenlage nicht getroffen werden.

**Tabelle 8.8:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen dem Geschlecht (0: weiblich, 1: männlich, divers wurde aufgrund der geringen Anzahl herausgenommen) der Probanden und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter. Aufgelistet sind lediglich die Werte, für die der  $\chi^2$ -Test eine signifikante Abhängigkeit liefert. Der kritische Wert zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  ist für  $df = 1$  durch 2.71 gegeben.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(1)$ )	Pearson-Korrelation
5	4.049	-0.072
11	4.919	-0.079
15	8.695	0.105 <sup>1</sup>
17	2.919	0.061
18	2.912	0.061
19	3.621	0.068
29	5.862	-0.086
30	3.378	-0.066
32	3.261	-0.064
40	5.750	-0.086

<sup>1</sup> Schwache Korrelation nach Cohen (1988).

**Tabelle 8.9:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Jahrgangsstufe der Probanden und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter. Der kritische Wert zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  ist für  $df = 6$  durch 10.64 und für  $df = 12$  durch 18.55 gegeben.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(6)$ )	Pearson-Korrelation
1	58.203	0.103 <sup>2</sup>
2	40.098	0.104 <sup>2</sup>
3	48.248	0.096
4	63.791	-0.050
5	43.991	-0.006
6 <sup>1</sup>	41.154	0.132 <sup>2</sup>
7	54.832	-0.079
8	41.422	-0.010
9	90.663	0.278 <sup>2</sup>
10	45.303	0.063
11	18.604	0.054
12	10.889	-0.014
13	14.238	0.009
14	26.158	0.129 <sup>2</sup>
15	111.084	0.066
16	91.041	0.254 <sup>2</sup>
17	38.832	0.053
18	48.382	0.077
19	40.407	0.211 <sup>2</sup>
20	40.513	-0.050
21	33.651	0.053
22	36.860	-0.064
23	39.152	0.045
24	29.521	-0.011
25	43.496	0.108 <sup>2</sup>
26	23.906	0.129 <sup>2</sup>
27	65.220	0.180 <sup>2</sup>
28	14.120	0.083
29	30.187	0.179 <sup>2</sup>
30	25.223	0.156 <sup>2</sup>
31	36.842	0.189 <sup>2</sup>
32	44.750	0.195 <sup>2</sup>
33	24.914	0.149 <sup>2</sup>
34	44.269	0.181 <sup>2</sup>
35	19.696	0.138 <sup>2</sup>
36	15.638	0.099
37	51.186	0.181 <sup>2</sup>
39	40.494	0.148 <sup>2</sup>
40	36.893	0.152 <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Hier abweichende Anzahl der Freiheitsgrade:  $df = 12$ .

<sup>2</sup> Schwache Korrelation nach Cohen (1988).

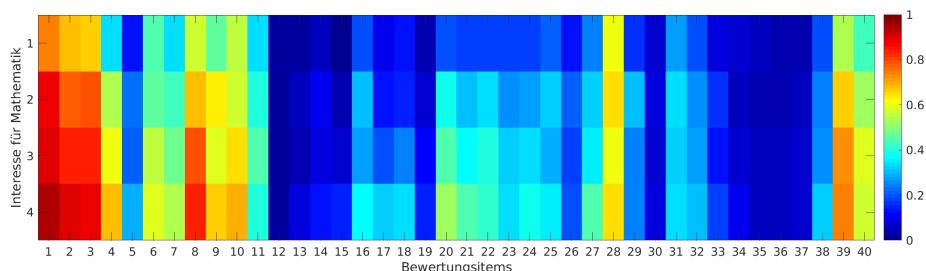
**Tabelle 8.10:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Jahrgangsstufengruppe (1: Unterstufe, 2: Mittelstufe, 3: Oberstufe) der Probanden und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter. Der kritische Wert zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  ist für  $df = 2$  durch 4.61 und für  $df = 4$  durch 7.78 gegeben.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(2)$ )	Pearson-Korrelation
1	13.374	0.120 <sup>3</sup>
2	11.423	0.118 <sup>3</sup>
3	7.959	0.096
4	4.896	-0.067
5	3.794 <sup>2</sup>	0.005
6 <sup>1</sup>	22.524	0.111 <sup>3</sup>
7	9.261	-0.083
8	5.732	-0.005
9	84.995	0.276 <sup>3</sup>
10	14.770	0.066
11	9.690	0.080
12	0.433 <sup>2</sup>	-0.021
13	7.315	-0.011
14	17.471	0.142 <sup>3</sup>
15	55.610	0.011
16	54.901	0.236 <sup>3</sup>
17	8.985	0.064
18	7.893	0.078
19	33.237	0.198 <sup>3</sup>
20	26.550	-0.054
21	23.889	0.036
22	19.916	-0.045
23	33.660	0.062
24	21.550	0.010
25	37.694	0.115 <sup>3</sup>
26	20.441	0.146 <sup>3</sup>
27	52.083	0.169 <sup>3</sup>
28	8.925	0.098
29	22.334	0.165 <sup>3</sup>
30	23.319	0.167 <sup>3</sup>
31	22.736	0.166 <sup>3</sup>
32	32.936	0.177 <sup>3</sup>
33	18.226	0.132 <sup>3</sup>
34	20.524	0.147 <sup>3</sup>
35	14.379	0.125 <sup>3</sup>
36	13.223	0.099
37	13.941	0.130 <sup>3</sup>
39	17.012	0.140 <sup>3</sup>
40	26.298	0.149 <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Hier abweichende Anzahl der Freiheitsgrade:  $df = 4$ .

<sup>2</sup> Hier liefert der  $\chi^2$ -Test keine signifikante Abhängigkeit.

<sup>3</sup> Schwache Korrelation nach Cohen (1988).



**Abbildung 8.21:** Übersicht über die Bewertung pro Umfrageitem über alle Jahrgangsstufen aufgeschlüsselt nach der Selbsteinschätzung der Aussage *Ich rechne gerne. / Ich mag es, mich mit Mathematik zu beschäftigen.*

#### 8.7.4.3 Forschungsfrage 4: Lassen sich Zusammenhänge zwischen dem allgemeinen Interesse für das Fach Mathematik und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsschritte erkennen?

Der folgende Abschnitt widmet sich der Forschungsfrage, ob sich ein Zusammenhang zwischen den Modellierungs(teil)kompetenzen und dem allgemeinen Interesse für das Fach Mathematik aus der Datengrundlage ergibt (vgl. Abbildung 8.21). Hier ist in diversen Items eine Tendenz, ein Bewertungsitem zu erfüllen, mit steigendem Interesse für das Fach Mathematik erkennbar. Laut dem  $\chi^2$ -Test ist für die Bewertungsitems 1–4, 7–8, 10, 15, 17–18, 20–24, 27 und 39 die Nullhypothese zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  abzulehnen (hier ist der kritische Wert der Teststatistik durch 10.64 gegeben), für die Items 1–4, 8, 10, 15, 17–18, 20–22, 24 und 39 sogar zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.01$  (hier liegt der kritische Wert der Teststatistik bei 16.81) (vgl. Tabelle 8.11). Eine Berechnung des Korrelationskoeffizienten nach Pearson liefert eine schwache positive Korrelation, unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs.

Zunächst fällt eine sichtbare Häufung an Korrelationen auf. Sie offenbart sich in insgesamt 17 von 40 Items. Dabei liegt ein Schwerpunkt auf den Modellierungsteilkompetenzen des Vereinfachens (Items 1–18), in dem insgesamt 10 Items eine Korrelation aufweisen. Die Modellierungsteilkompetenzen des Mathematisierens werden vollständig abgedeckt (Items 20–21), ebenso die des Berechnens (Items 22–24). Die Modellierungsteilkompetenzen des Validierens und Interpretierens weisen kaum eine Korrelation zu dem Interesse für das Fach Mathematik auf: Hier weist lediglich das Item *Die teilnehmende Person kennt die Bedeutung des Ergebnisses bzw. der Ergebnisse* einen Zusammenhang mit dem Interesse für das Fach Mathematik auf. Darüber hinaus gingen Probanden, die gerne Mathe machen, strukturierter an die Aufgabe heran (Item 39). Man beachte in der Ergebnisbetrachtung, dass der prozentuale Anteil über alle Probanden hinweg, das 5., 12.–19., 26., 29.–38. Item zu erfüllen, sehr gering ist.

Insgesamt deuten diese Ergebnisse darauf hin, dass Schülerinnen und Schüler über bessere Modellierungsteilkompetenzen verfügen, je lieber sie sich mit Mathematik beschäftigen. Die vollständige Abdeckung der Bereiche des Mathematisierens und Berechnens lassen vermuten, dass es sich hierbei um Techniken handelt, die einerseits im Unterricht vermittelt und andererseits entsprechend gut von den Schülerinnen und Schülern beherrscht werden, die sich damit auseinandersetzen. Hier wäre ein Vergleich interessant, ob diese Korrelation auch bei anderen, im Mathematikunterricht gängigen Aufgaben der Fall auftritt. Eine andere plausible Erklärung für die Korrelation in diesen Modellierungsteilkompetenzen wäre, dass Lernende, die eher weniger gerne rechnen, eben auch

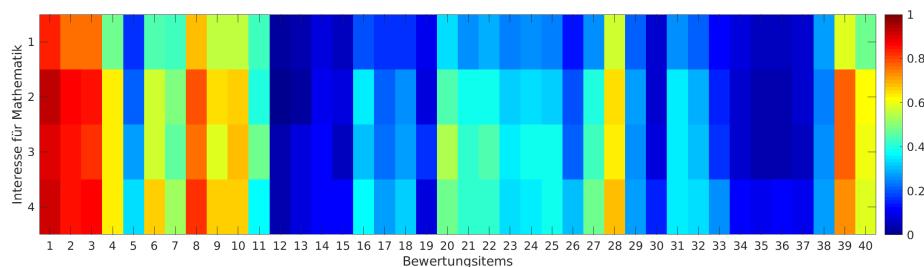
**Tabelle 8.11:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Schülerselbstevaluationsaussage *Ich rechne gerne / Ich mag es, mich mit Mathematik zu beschäftigen* und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(6)$ )	Korrelation (n. Pearson)
1	33.215	0.163
2	27.527	0.166
3	27.520	0.164
4	29.827	0.181
7	15.073	0.128
8	33.297	0.190
10	12.458	0.107
15	22.007	0.137
17	25.115	0.162
18	22.411	0.158
20	27.640	0.173
21	19.263	0.142
22	20.421	0.140
23	13.960	0.102
24	17.160	0.129
27	15.132	0.102
39	19.391	0.129

kein großes Interesse daran fanden, ein solches in der vorliegenden Aufgabe zu zeigen, da laut Aufgabentext eine Berechnung nicht explizit gefordert ist. Eine dritte alternative Erklärung bezieht den Modellierungskreislauf mit ein und berücksichtigt die kognitiven Hürden darin. Scheitern Probanden bereits im ersten Modellierungsschritt, nämlich dem des Vereinfachens, so ergibt sich eine größere Hürde, den zweiten und dritten Modellierungsschritt zu vollziehen. Diese Erklärung berücksichtigt, dass bereits im Prozess des Vereinfachens Schülerinnen und Schüler, die gerne Mathematik betreiben, signifikant besser abschneiden als jene, die nicht so gerne Mathematik betreiben. Hier ließ sich in über der Hälfte der Bewertungselemente eine Korrelation feststellen. Eine weitere Schülerbefragung, beispielsweise ein Interview, ließe erkennen, an welchen Stellen genau Hürden bestanden, und ob diese ursächlich für die Nichterfüllung späterer Kompetenzen sind.

#### 8.7.4.4 Forschungsfrage 5: Verfügen Probanden, denen direkt klar war, wie sie bei der Lösung der Aufgabe vorgehen, über größere Modellierungskompetenzen als solche, denen es nicht direkt klar war?

Die Analyse der fünften Forschungsfrage liefert folgende Ergebnisse (vgl. Abbildung 8.22): Der  $\chi^2$ -Test weist auf Korrelationen mit den Bewertungselementen 1–5, 8, 16, 18, 20–22, 25–27, 33 und 39 hin (vgl. Tabelle 8.12). Bis auf die beiden Items 8 und 33 ist die Korrelation signifikant zu einem Niveau von  $\alpha = 0.01$  (kritischer Wert der Teststatistik: 13.28) – in den beiden genannten Items zu einem Niveau von  $\alpha = 0.1$  (kritischer Wert der Teststatistik: 7.78). Die Stärke der Korrelation ist nach Pearson in allen aufgezeigten Bewertungselementen schwach positiv ausgeprägt unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen den betrachteten Items. Die Korrelation ist als signifikant anzunehmen.



**Abbildung 8.22:** Übersicht über die Bewertung pro Umfrageitem über alle Jahrgangsstufen aufgeschlüsselt nach der Selbsteinschätzung der Aussage *Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe / Problemstellung zu lösen.*

**Tabelle 8.12:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Schülerselbstevaluationsaussage *Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe / Problemstellung zu lösen* und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(4)$ )	Korrelation (n. Pearson)
1	16.859	0.110
2	17.393	0.109
3	17.180	0.111
4	21.197	0.122
5	28.111	0.141
8	12.571	0.101
16	19.479	0.122
18	15.179	0.109
20	22.636	0.134
21	17.425	0.117
22	16.833	0.115
25	13.773	0.109
26	17.042	0.122
27	19.939	0.142
33	9.241	0.101
39	34.873	0.154

Analog zu der intensiven Auseinandersetzung mit der ersten Forschungsfrage präsentiert sich hier eine Häufung an Korrelationen. Auch diese erstrecken sich vor allem auf die ersten drei Modellierungsschritte. Im ersten Modellierungsschritt treten in 8 von 18 möglichen Fällen Zusammenhänge auf, im zweiten in 100 % der Fälle, im dritten lediglich in einem von drei möglichen Fällen und im vierten Modellierungsschritt in 4 von 13 möglichen Fällen.

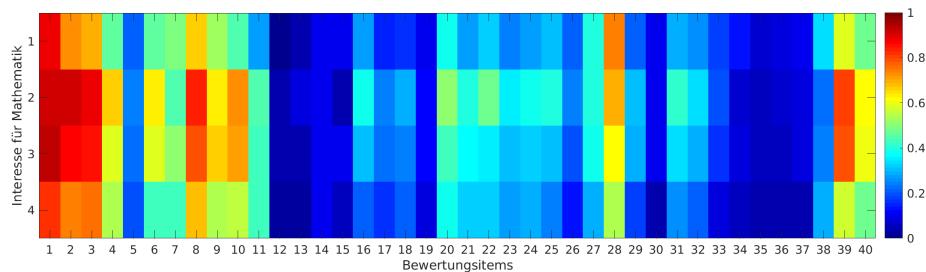
Ausgehend von der Aussage der Schülerselbstevaluation, dass den Probanden direkt klar war, wie sie anfangen, die Aufgabe zu lösen, ist eine Häufung an positiven Zusammenhängen zu Beginn des Modellierungskreislaufs zu erwarten. Jedoch bleibt unklar, in welchem zeitlichen Rahmen die Modellierungsteilschritte jeweils erfüllt wurden. So besteht auch die Möglichkeit, dass Schülerinnen und Schüler, die zunächst nicht wussten, wie sie an diese Problemstellung herangehen sollten, dennoch erfolgreich waren – nur mehr Zeit für einen Ansatz benötigten. Sichere Aussagen erfordern weitere Untersuchungen. Mit einer solchen weiterführenden Studie ließe sich ebenfalls untersuchen,

warum Schülerinnen und Schüler, die sowohl in großen Teilen des Vereinfachens als auch des Mathematisierens erfolgreich waren, nicht mehr wesentlich besser im Berechnen auffielen. Hier scheinen die Probanden, denen direkt klar war, wie sie an die Aufgabe herangehen sollten, lediglich in der Teilkompetenz, eine mathematische Lösung zu entwickeln, besser beurteilt zu sein als ihre Mitprobanden. In den Teilkompetenzen, eine Lösung korrekt zu berechnen und geeignete Verfahren zum Lösen anzuwenden, ist kein Zusammenhang mehr erkennbar. Es könnte also sein, dass solche Schülerinnen und Schüler, die direkt einen Ansatz für die Aufgabe wussten, zwar in den vorderen Modellierungskompetenzen Vorteile haben, jedoch in späteren Bereichen nicht mehr. Dagegen spricht die höhere Anzahl an Korrelationen im vierten Modellierungsschritt, unter der Berücksichtigung, dass dort insgesamt nur wenige Schülerinnen und Schüler überhaupt punkten konnten. Analog zu der vorherigen Forschungsfrage gingen auch hier die Lernenden strukturierter an die Problemstellung heran, die die Selbstevaluationsaussage höher bewerteten.

#### 8.7.4.5 Forschungsfrage 6: Verfügen Probanden, denen es schwer fiel, einen Lösungsansatz zu entwickeln, über geringere Modellierungskompetenzen als solche, denen es nicht schwer fiel?

Im Vergleich zu den beiden vorherigen Forschungsfragen offenbart die Analyse der sechsten Forschungsfrage nur in wenigen Bewertungsitems Zusammenhänge mit der Aussage, dass die Probanden die Aufgabe zu schwer fanden bzw. es schwierig fanden, einen Lösungsansatz zu entwickeln (vgl. Abbildung 8.23). Der  $\chi^2$ -Test weist für die Bewertungsitems 1 und 39 einen Zusammenhang mit der Aussage der Schülerselbstevaluation zu einem Signifikanzniveau von 1% (kritischer Wert der Teststatistik: 15.09) aus, sowie für das Bewertungsitem 28 zu einem Signifikanzniveau von 10% (kritischer Wert der Teststatistik: 9.24). Nach Pearson fällt die Korrelation jeweils schwach negativ aus. In zwei der drei Fälle liegt sie gerade so über der Grenze, dass überhaupt von einem schwachen Zusammenhang gesprochen werden kann (vgl. Tabelle 8.13). Die negative Korrelation geht mit der Aussage einher „Je höher die Bewertung des Selbstevaluationsitems ausfällt, desto seltener erfüllen die Probanden ein Bewertungsitem“.

Das erste Bewertungsitem bezieht sich auf das Kriterium, ob die Probanden die Problemstellung in der Realität verstehen. Eine negative Korrelation deutet an, dass Probanden die Problemstellung laut Beurteilungen der Gutachtenden umso schlechter verstanden, je treffender sie die Aussage einstuften, dass die Aufgabe zu schwer war. Analog schrieben die Teilnehmenden seltener einen Antwortswort (Item 28) und gingen weniger oft strukturiert an die Aufgabe heran (Item 39). Da



**Abbildung 8.23:** Übersicht über die Bewertung pro Umfrageitem über alle Jahrgangsstufen aufgeschlüsselt nach der Selbsteinschätzung der Aussage *Die Aufgabe war zu schwer. / Ich fand es schwierig einen Lösungsansatz zu entwickeln.*

**Tabelle 8.13:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Schülerselbstevaluationsaussage *Die Aufgabe war zu schwer / Ich fand es schwierig einen Lösungsansatz zu entwickeln* und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter.

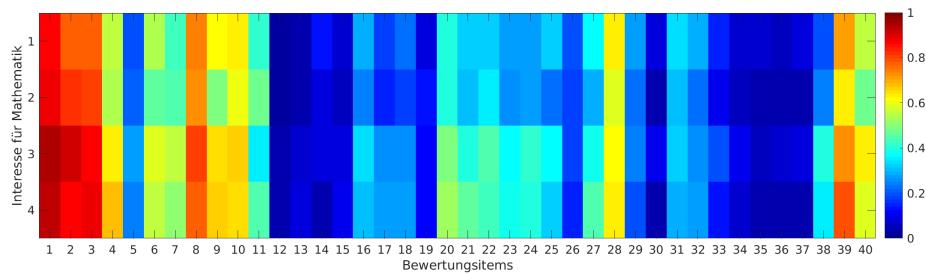
Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(5)$ )	Pearson-Korrelation
1	27.440	-0.100
28	14.811	-0.121
39	48.656	-0.104

die Bewertungsitems unterschiedlichen Modellierungsschritten angehören, lassen sich hier keine Aussagen treffen, die allgemein fehlende Modellierungskompetenzen in Abhängigkeit der Selbstevaluationsaussage bescheinigen. Probanden, die die Aufgabe als zu schwer einstuften und gleichzeitig laut den Gutachtenden die Problemstellung nicht verstanden, zeigten in der überwiegenden Anzahl der weiteren Modellierungsschritte keine nennenswerten Abweichungen in der Erfolgsgüte gegenüber ihren Mitstreitenden. Damit stellt sich die Frage, ob der Erfolg im mathematischen Modellieren wirklich ein Verständnis der Problemstellung in der Realität erfordert. Intuitiv wäre diese Frage zu bejahen, doch die Ergebnisse wecken Zweifel. Eine genauere Betrachtung des 28. Items führt zu der Einschätzung, dass Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe zu schwer fanden, zwar den Modellierungsprozess ausführen konnten, jedoch – möglicherweise in Ermangelung eines Verständnisses der Problemstellung in der Realität – nicht bzw. deutlich weniger gut in der Lage waren, ihre Ergebnisse in Form eines Antwortesatzes zu formulieren. Hier trafe der Leitgedanke zu, vorher genau die zu beantwortende Frage kennen zu müssen, um überhaupt eine Antwort geben zu können. Ebenso überrascht die negative Korrelation im Item 39 nicht. Auch hier zeigt sich, dass nur ein genaues Verstehen der Aufgabe ein strukturiertes Vorgehen zulässt.

#### 8.7.4.6 Forschungsfrage 7: Verfügen Probanden, die bereits von mathematischer Modellierung gehört haben, über größere Modellierungskompetenzen als solche, die zum ersten Mal mit mathematischer Modellierung in Berührung gekommen sind?

Die anschließende Untersuchung fokussiert die obige siebte Forschungsfrage (vgl. Abbildung 8.24). Hier deutet der  $\chi^2$ -Test auf Zusammenhänge in fünf Bewertungsitems hin (vgl. Tabelle 8.14). Drei von ihnen liegen in dem Modellierungsteilbereich des Vereinfachens (Items 1–3) und zwei beziehen sich auf den Modellierungsschritt des Berechnens (Items 23–24). Die Nullhypothese, keinen Zusammenhang aufzuweisen, wird lediglich für das erste Item zu einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0.1$  nicht abgelehnt (kritischer Wert der Teststatistik: 7.78), in allen weiteren Fällen zu  $\alpha = 0.01$  (kritischer Wert der Teststatistik: 13.28). Eine Korrelationsberechnung nach Pearson unterstützt das Ergebnis und bescheinigt eine positive schwache Korrelation unter der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen den betrachteten Merkmalen.

Diesem Ergebnis zufolge scheint es zu helfen die Problemstellung zu verstehen (Item 1), zu vereinfachen (Item 2) und eine sinnvolle Auswahl an zu betrachtenden Faktoren zu treffen (Item 3), wenn mindestens der Begriff der mathematischen Modellierung bereits bekannt ist. Trotz dieser gehäuften Anfangsschwierigkeiten im Modellierungsprozess weisen die weiteren Teilkompetenzen des Vereinfachens keine Zusammenhänge mit der Schülerselbstevaluationsaussage auf. Im Einklang



**Abbildung 8.24:** Übersicht über die Bewertung pro Umfrageitem über alle Jahrgangsstufen aufgeschlüsselt nach der Selbsteinschätzung der Aussage *Ich weiß, was mathematische Modellierung ist*.

**Tabelle 8.14:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Schülerselbstevaluationsaussage *Ich weiß, was mathematische Modellierung ist* und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(4)$ )	Pearson-Korrelation
1	11.612	0.113
2	16.889	0.129
3	13.715	0.126
23	18.299	0.106
24	17.600	0.107

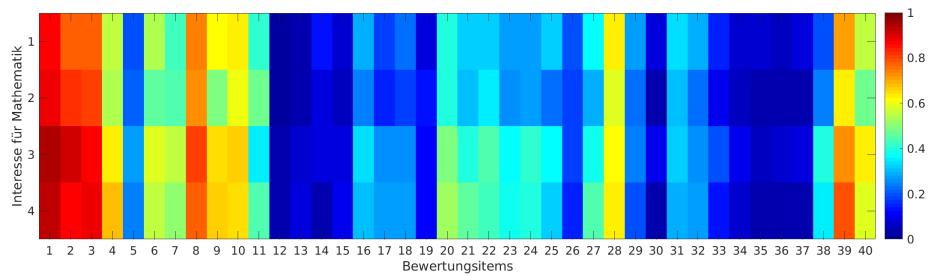
mit der vorherigen Forschungsfrage ist daher auch hier festzuhalten, dass der Modellierungsprozess (teilweise) ausgeführt werden kann, ohne diese – von mir als besonders wichtigen Schritte des Vereinfachens ausgezeichneten – Kriterien zu erfüllen. Umso stärker überrascht, dass Schülerinnen und Schüler, die nicht wissen, was mathematische Modellierung darstellt, im Prozess des Berechnens wesentlich schlechter abschneiden als solche Teilnehmenden, die diese Aussage treffender einstuften. Das Berechnen stellt einen vielfach im Unterricht trainierten Prozess dar. Daher wäre hier eine Korrelation eher weniger zu erwarten. Eine Erklärung könnte sein, dass Schülerinnen und Schüler, die bereits mit mathematischer Modellierung in Berührung gekommen sind, insgesamt im Mathematikunterricht bessere Leistungen erbringen und daher auch das Berechnen besser beherrschen. Um diese These zu stützen, müssten weitere Kenntnisse über allgemeine Bewertungen der Schülerinnen und Schüler vorliegen, deren Einforderung jedoch aus datenschutzrechtlichen Gründen schwierig sein dürfte.

#### 8.7.4.7 Forschungsfrage 8: Lassen sich Zusammenhänge zwischen dem Interesse für das Thema und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen?

Die anschließende Untersuchung fokussiert die Forschungsfrage, ob sich Zusammenhänge zwischen dem Interesse für das Thema und der Modellierungskompetenz bzw. einzelner Modellierungsfähigkeiten erkennen lassen (vgl. Abbildung 8.25). Hier deutet der  $\chi^2$ -Test erneut zahlreiche Zusammenhänge mit den verschiedenen Bewertungsitems an, nämlich mit den Items 1–10, 13, 15–18, 20–21, 25, 27, 30, 32–33, 39–40 und damit in 24 von 40 Items (vgl. Tabelle 8.15). Die Nullhypothese ist in den Fällen 1–4, 8, 10, 13, 15–18, 25, 27, 30, 32 und 39–40 zu einem Signifikanzniveau von 1%

abzulehnen (kritische Werte der Teststatistik: 15.09 bei 5 Freiheitsgraden, 23.21 bei 10 Freiheitsgraden, 30.58 bei 15 Freiheitsgraden) und in den übrigen Fällen (Items 5–7, 9, 20–21 und 33) zu einem Signifikanzniveau von 10 % (kritische Werte der Teststatistik: 9.24 bei 5 Freiheitsgraden, 15.99 bei 10 Freiheitsgraden, 22.31 bei 15 Freiheitsgraden). Bestätigung findet diese Einschätzung durch die Bestimmung des Pearson-Korrelationskoeffizientens. In allen genannten Fällen ist die Korrelation schwach positiv ausgeprägt.

Das Interesse für das Thema der Aufgabe zeichnet sich unter allen betrachteten Zusammenhängen als die Selbstevaluationsaussage mit den meisten Korrelationen aus. In der Phase des Vereinfachens dokumentieren 15 von 18 Bewertungsitems eine Korrelation. Lediglich die Items *Betrachtung des Faktors Wasserbedarf* (Item 11), *Betrachtung des Faktors Freizeitraum* (Item 12) und *Nutzung der Abbildung* (Item 14) korrelieren nicht mit der Schülerselbstevaluationsaussage. Ähnlich sieht es in der Phase des Mathematisierens auf, die genau wie in der ersten und zweiten Forschungsfrage in 100 % der möglichen Beurteilungsitems eine Korrelation aufweist. Hingegen ist die Phase des Berechnens mit überhaupt keinem Item vertreten. Es stellt sich so dar, dass in diesen Teilkompetenzen das Interesse für das Thema keinen signifikanten Einfluss auf einen Leistungserfolg hat. In der letzten Modellierungsphase, dem Validieren und Interpretieren, häufen sich erneut die Anzahl an Korrelationen. Die Aussagen *Bewertung der Ergebnisse* (Item 26), *Schreiben eines Antwortesatzes (Niveau 1)* (Item 28), *bewertet das Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse (Niveau 2)* (Item 29), *Nutzung von nicht-mathematischen Kenntnissen* (Item 31) sowie die Items 34–37 (*Identifizierung problematischer Annahmen*, *Verbesserung der getroffenen Annahmen*, *Wiederholung des Problemlöseprozesses* und *Geben eines Ausblicks auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren*) weisen keine Korrelation auf. Die nähere Betrachtung der Items 28–30 deutet an, dass sich nur auf dem höchsten Niveau, des Bewertens des Ergebnisses vor dem Hintergrund des zu erwartenden Allgemeinwissens und des Zeigen von Zusammenhängen zwischen den Faktoren, das Interesse für das Thema auswirkt. Das Interesse ist demnach wichtig für das Erreichen einer (sehr) hohen Leistung. Möglicherweise tritt das Fehlen der letzten vier Items durch einen Mangel an Zeit für die weitere Bearbeitung auf. Hier wäre eine Befragung der Schülerinnen und Schüler sinnvoll, um herauszufinden, ob sie an diese Kompetenzen zwar gedacht haben, aber es zeitlich nicht mehr schafften, sie zu berücksichtigen. Eine alternative Erklärung wäre, dass sie diese Modellierungs- teilbereiche nicht kennen und daher auch nicht wussten, dass eine Betrachtung dieser zu einem vollständigen Modellierungsprozess dazu gehören. Auch hier gäbe eine Befragung näheren Aufschluss darüber, welche Modellierungs(teil)schritte den Schülerinnen und Schülern bekannt sind – sofern sie überhaupt den Modellierungskreislauf kennen. Zu guter Letzt stehen auch die beiden vom Modellierungskreislauf unabhängigen Bewertungsitems der strukturierten Herangehensweise an die Aufgabe und die ordentlich und nachvollziehbare Dokumentation der Lösungsschritte in Zusammenhang mit dem Interesse für das Thema. Eine mögliche Erklärung dürfte sein, dass Schülerinnen und Schüler umso gewillter sind, sich strukturiert und ordentlich mit einer Aufgabe auseinander zu setzen, je höher ihr Interesse für die Aufgabe ist. Zusammenfassend stellt die hier sichtbare Häufung an Korrelationen ein Indiz für einen entscheidenden Einfluss des Interesses für das Thema der Modellierungsaufgabe auf die Bescheinigung von Modellierungskompetenzen dar. Die aufgestellten Thesen in dieser Forschungsfrage gilt es zukünftig durch die Testung weiterer Modellierungsaufgaben unterschiedlicher Themen abzusichern.



**Abbildung 8.25:** Übersicht über die Bewertung pro Umfrageitem über alle Jahrgangsstufen aufgeschlüsselt nach der Selbsteinschätzung der Aussage *Das Thema der Aufgabe / Problemstellung finde ich interessant*.

**Tabelle 8.15:** Zusammenfassung der Ergebnisse des  $\chi^2$ -Tests und des Pearson-Korrelationskoeffizienten zur Beurteilung der Korrelation zwischen der Schülerselbstevaluationsaussage *Das Thema der Aufgabe / Problemstellung finde ich interessant* und den verschiedenen Bewertungseinschätzungen durch die Gutachter.

Bewertungsitem	$\chi^2$ -Test ( $\chi^2(5)$ )	Pearson-Korrelation
1	27.329	0.168
2	32.969	0.189
3	36.839	0.190
4	36.839	0.127
5	19.596 <sup>1</sup>	0.141
6	23.370 <sup>2</sup>	0.121
7	10.722	0.107
8	32.470	0.184
9	14.564	0.108
10	20.185	0.149
13	25.278	0.144
15	25.805	0.160
16	26.588	0.138
17	38.967	0.190
18	54.734	0.213
20	13.149	0.105
21	11.425	0.109
25	25.958	0.153
27	23.627	0.144
30	30.826	0.160
32	16.092	0.111
33	10.273	0.106
39	23.668	0.161
40	25.209	0.126

<sup>1</sup> Hier ist die Anzahl der Freiheitsgrade durch 10 gegeben.

<sup>2</sup> Hier beträgt die Anzahl der Freiheitsgrade 15.

#### **8.7.4.8 Forschungsfrage 9: Eignet sich das erstellte Bewertungsschema zur reliablen Beurteilung der Schülerlösungen durch geschultes Personal?**

Abschnitt 8.7.1 präsentiert die Interraterreliabilität unter anderem für die Bewertungen der Schülerlösungen. Die dort vorgestellte Analyse prägt maßgebend die Beantwortung der Forschungsfrage 9. Die Interraterreliabilitäten lagen über alle Bewertungselementen und alle Teilnehmenden bei einem Cohens Kappa von etwa 50 – 70 %. Die obere Intervallgrenze bescheinigt eine erhebliche Übereinstimmung zwischen den Bewertungen der jeweiligen Gutachtenden. Die untere Intervallgrenze hingegen lässt nur auf eine mäßige Übereinstimmung schließen. Daher betrachtete eine detaillierte Analyse einzelne Klassen bzw. Kurse sowie Bewertungselemente bezüglich der Interraterreliabilität. Die Bewertungselemente *Die bewertete Person liefert eine logische Argumentationsstruktur* (Item 6) und *Die bewertete Person hat alle Lösungsschritte ordentlich nachvollziehbar dokumentiert* (Item 40) wiesen über alle Klassen bzw. Kurse große Abweichungen in den Bewertungen der verschiedenen Gutachtenden auf. Für eine zuverlässige Beurteilung ist daher eine Präzisierung dieser beiden Items nötig.

In einzelnen Klassen bzw. Kursen zeigten die Bewertungselemente *Die bewertete Person kennt die Bedeutung des Ergebnisses / der Ergebnisse* (Item 27) und *Die bewertete Person schreibt einen Antwortwortsatz (Niveau 1)* (Item 28) große Abweichungen auf. Nachforschungen in den Schülerlösungen deuten an, dass insbesondere kurze Antworten, deren Lösungsschritte kaum zusammenhängen, schwieriger und damit auch weniger zuverlässig zu beurteilen sind. Dies deckt sich mit dem vorhergehenden Befund der Items 6 und 40. Dokumentieren die Teilnehmenden ihre Lösungsschritte schlechter und zusammenhangslos, bleibt mehr Interpretationsspielraum für den Gutachtenden. Verbesserungsvorschläge für eine operationalisierte Formulierung der weniger zuverlässigen Items könnten lauten:

- 6 ... begründet die Auswahl an zu beachtenden Faktoren und verbindet diese mit den getroffenen Schätzungen,
- 27 ... setzt das Ergebnis / die Ergebnisse in Zusammenhang mit anderen bekannten Größen,
- 28 ... formuliert ein rechnerisch ermitteltes Ergebnis in einem Antwortwortsatz aus,
- 40 ... verbindet einzelne Lösungsschritte, indem sie bzw. er Überleitungen und Zusammenhänge zwischen ihnen dokumentiert.

Die Analyse der ersten Forschungsfrage liefert zusätzliche Informationen über das erstellte Bewertungsschema (vgl. Abschnitt 8.7.4.1). Daraus folgte ein Zusammenfassen der Items 9–13 zu *Die bzw. der Teilnehmende berücksichtigt verschiedene, aber mindestens einen Faktor* und ein Entfernen der Items 14–19.

Dieses angepasste Bewertungsschema gilt es nun auf die bisher untersuchten Schülerlösungen anzuwenden und neu zu bewerten. Darüber hinaus bedarf es einer Erweiterung des Interraterkreises um Lehrpersonen, da sie die Zielgruppe darstellen, die ein solches Bewertungsschema zukünftig im Schulunterricht einsetzen soll. In seiner in diesem Abschnitt vorgeschlagenen Form lässt sich das Schema auch leicht ohne Adaption auf weitere Modellierungsaufgaben übertragen, sodass ebenfalls über eine Erweiterung an Testaufgaben nachzudenken ist.

## 8.8 Resümee zur empirischen Studie

Ausgangspunkt dieser empirischen Studie war eine Aufgabenstellung der IM<sup>2</sup>C. Die Aufgabe wurde für den Einsatz in den Jahrgangsstufen 5 bis 13 sprachlich aufbereitet und für eine Bearbeitungszeit von 30 Minuten ausgelegt. Die empirische Studie fand unter freiwilliger Teilnahme von Klassen- bzw. Kursverbunden ohne vorherige Schulung der Probanden in mathematischer Modellierung statt. Aufgrund der hohen Rückläuferzahl gilt das Ergebnis als repräsentativ mit der Einschränkung, dass die Studie kurz vor den Sommerferien stattfand. Somit waren die Schülerinnen und Schüler möglicherweise weniger motiviert, die Aufgabe zu bearbeiten, als wenn sie im regulären Unterricht mit dem Ziel einer Leistungsüberprüfung durchgeführt worden wäre. In dem Fall wären jedoch auch Übungsaufgaben vorausgegangen, sodass das Vorwissen der Probanden hätte erhöht werden müssen. Vor diesem Hintergrund wurde ein Bewertungsschema für die vorgestellte Modellierungsaufgabe erstellt und auf dessen Reliabilität hin überprüft. Für Bewertungselementen mit mäßiger Reliabilität wurden Verbesserungsvorschläge aufgezeigt. Ein überwiegender Anteil der Bewertungselementen weist eine gute Reliabilität auf. Ebenso flossen Ergebnisse aus der Beurteilung der Schülerlösungen in Weiterentwicklung des Schemas ein. Insgesamt stellt das Bewertungsschema ein geeignetes Werkzeug dar, Modellierungsaufgaben verlässlich und objektiv zu beurteilen.

Die Auswertungen der Schülerlösungen offenbarten eine eher mäßige bis geringe Ausprägung der einzelnen Modellierungskompetenzen. Gute Kenntnisse wiesen die Probanden im Modellierungsschritt des Vereinfachens auf: Es scheint ihnen durchweg wenig Schwierigkeiten zu bereiten, die Problemstellung in der Realität zu verstehen, sie zu vereinfachen und eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren zu treffen. Auch der Einsatz von nicht-mathematischen Kenntnissen (im Vereinfachen) stellt den Ergebnissen nach zu urteilen keine Hürde dar. Überwiegend gingen die Probanden strukturiert an die Aufgabe heran. Die Modellierungskompetenzen des Mathematisierens und Berechnens sind – entgegen der Vermutung – lediglich schwach ausgeprägt. Diese Prozesse zeichnen sich in den Ergebnissen vielfach als (unüberwindbare) Herausforderungen aus. Zwischen diesen beiden Prozessschritten konnte eine Korrelation aufgedeckt werden. Eine unabhängige Betrachtung der Teilkompetenzen erscheint damit nicht (mehr) möglich. Die Begutachtung des Schrittes des Interpretierens deckt ebenfalls große Kompetenzlücken bei den Lernenden auf. Obwohl das mathematische Modellieren als eine der fünf prozessbezogenen Kompetenzen im Bildungsplan steht und somit Lernende aller Jahrgangsstufen ihrem Niveau entsprechend diese Fähigkeit vorweisen sollten, bescheinigen die Ergebnisse der empirischen Studie große Mängel. Die Ursachen gilt es weiter zu erforschen, um ihnen mit geeigneten Maßnahmen entgegen zu wirken.

Zusätzlich fand eine Selbsteinschätzung der Teilnehmenden statt. Ihr Meinungsbild wurde in Bezug zu ihrer Aufgabenlösung gesetzt. Die durchgeführten Tests wiesen auf keinen Zusammenhang zwischen den Modellierungskompetenzen und dem Geschlecht hin. Hingegen konnten in einigen Modellierungsfähigkeiten und der Jahrgangsstufenzugehörigkeit ein schwacher Zusammenhang aufgedeckt werden. Letzteres steht im Einklang mit den Ergebnissen von Ludwig und Xu (2010), in denen ebenfalls eine jahrgangsstufenabhängige Ausprägung der Modellierungskompetenzen ermittelt wurde. Im Gegensatz dazu konnten Ludwig und Reit (2013) keine statistisch signifikanten Unterschiede der Jahrgangsstufen aufweisen. Dieses diffuse Bild könnte in Zukunft differenzierter betrachtet werden. Ein Ansatz dabei wäre, die Hürden zu untersuchen, die sich durch die gestalterisch-sprachliche Ausdruckswise ergeben. Die Sprache spielt insbesondere in den Modellierungskompetenzen des Vereinfachens sowie des Interpretierens und Validierens eine größere Rolle. Interessieren sich die Probanden für das Fach Mathematik, deutet die Studie Korrelationen

mit mehreren Modellierungsteilkompetenzen an (in insgesamt 17 von 40 Items). Insbesondere mit den Teilprozessen des Vereinfachens, Mathematisierens und Berechnens konnten (schwache) Zusammenhänge aufgedeckt werden. Ebenso erzielten Lernende, denen direkt klar war, wie sie bei der Lösung der Aufgabe vorgehen, bessere Bewertungen in den Modellierungsteilkompetenzen. Korrelationen zeigten sich in insgesamt 16 von 40 Items. Auch hier lag der Schwerpunkt der Zusammenhänge im Bereich des Vereinfachens und Mathematisierens. Im Prozess des Berechnens präsentieren sich keine nennenswerten Unterschiede, dafür jedoch im Interpretieren und Validieren. Im Gegensatz dazu scheinen Lernende, denen es schwer fiel, einen Lösungsansatz zu entwickeln, kaum bis gar nicht schlechter gegenüber ihren Mitprobanden abzuschneiden. Anscheinend können diejenigen, denen sich der erste Modellierungsschritt als große Hürde darstellt, diese überwinden. Weitergehende Untersuchungen könnten zutage fördern, welche Eigenstrategien zur Überwindung beitragen. Die Ergebnisse der Studie deuten an, dass das Verständnis der Problemstellung keine Voraussetzung für erfolgreiches Modellieren ist. Dieses neu gewonnene Indiz sollte in zukünftigen Untersuchungen aufgegriffen werden. Ebenso besitzen auch Heranwachsende, die bereits von mathematischer Modellierung gehört haben, nur in wenigen Bewertungsitems deutlich höhere Kompetenzen als solche, die zum ersten Mal mit mathematischer Modellierung in Berührung gekommen sind. An dieser Stelle interessiert die Ausprägung bzw. der Kenntnisstand über mathematische Modellierung, über den die Lernenden verfügen. Ist lediglich der Begriff, aber nicht der Prozess des Modellierens bekannt sein, so wäre dies eine mögliche Erklärung für die geringen Korrelationen. Sollte den Teilnehmenden hingegen der Prozess bekannt, so ergäben sich weitere die Ursache ergründende Forschungsfragen. Einen besonderen Einfluss auf das Abschneiden in den Bewertungen scheint das Interesse für das Thema zu haben. Hier offenbarte sich in 24 von 40 Bewertungskriterien eine Korrelation. Insgesamt scheint damit eine positive Beurteilung der Aufgabenlösung motivational abhängig zu sein. Die Motivation kann einerseits im Interesse für das Fach Mathematik und andererseits am Thema der Problemstellung liegen.



## **Teil IV**

# **Abschließende Bemerkungen**



# 9

## Schlussbetrachtung

Vor dem Hintergrund, mathematische Modellierung in den Schulalltag zu integrieren, stand das Ziel, interaktive Lernmaterialien für Schülerinnen und Schülern unter methodisch-didaktischen Gesichtspunkten für den Einsatz in einer schulnahen Umgebung zu entwickeln, im Mittelpunkt dieser Arbeit. Für den Einsatz im schulischen Bildungsraum reicht die Bereitstellung von qualifiziertem Materialien jedoch nicht aus. Daher zielte die Arbeit zusätzlich darauf ab, das Lernmaterial derart zu ergänzen, dass es Lehrpersonen unter einem vertretbaren Eigenaufwand ermöglicht, das Material eigenständig mit Lernenden zu nutzen. Um Lehrpersonen beim Einstieg in die mathematische Modellierung zu unterstützen, wurde ein Konzept für Lehrerfortbildungen entwickelt. Für eine vollständige Integration der mathematischen Modellierung fehlt bislang ein Bewertungsplan für Modellierungsaufgaben. Die Entwicklung eines solchen Formulars und dessen Evaluation stand ergänzend im Zentrum der Arbeit.

Der Rahmen dieser Arbeit stellt damit die mathematische Modellierung mit Schülerinnen und Schülern dar. Die Modellierung wurde in allen Bereichen in den Anwendungskontext der Klimaforschung gesetzt. Sie greift ein authentliches, aktuelles und hoch relevantes Anwendungsgebiet auf. Die mathematische Modellierung erfordert häufig den Einsatz digitaler Werkzeuge: Um große Datenmengen handhaben zu können, erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler die Problemfragen unter Verwendung einer Programmierumgebung. Die vollständige digitale Umsetzung der Materialien erweitert das Angebot, die Dokumente auch im Rahmen von Homeschooling einzusetzen.

In Kapitel 5 lag das Augenmerk auf der Fragestellung, ob es den Klimawandel gibt, und ob dieser signifikant ist. Zur Untersuchung der Problemfrage wurde die trendbezogene Regressionsanalyse verwendet. Die sich daraus ergebenden Strategien stellen Werkzeuge bereit, die in vielfältigen Bereichen auch über den gewählten Anwendungskontext hinaus sinnvoll eingesetzt werden können. Bisher ist die Regressionsanalyse nicht Teil des Mathematikunterrichts, sodass die Entwicklung des Lernmaterials dazu beiträgt, Lernenden ein elementares Werkzeug der Mathematik zu vermitteln. Die Ergänzung um einen Hypothesentest ergänzt die Abbildung der wissenschaftlichen Arbeitsweise, die der Regressionsanalyse zugrunde liegt. Kapitel 6 fokussiert einen weiteren Aspekt der Regressionsanalyse, nämlich das Auftreten von Rekordereignissen in Daten, die zu verschiedenen

Zeitpunkten erhoben wurden. Die zugehörigen Analysemethoden basieren auf schulmathematischen Inhalten, die in diesem Kontext eine sinngebende Anwendung finden. Kapitel 7 greift eine weitere Problemfrage auf, die aktuell vielfach diskutiert wird: Ist der Klimawandel menschengemacht? Zur Beantwortung der Frage entwickeln die Lernenden ein Strahlungshaushaltsmodell der Erde. Die Zerlegung der Erdatmosphäre in Kompartimente führt zu Strahlungsflussbilanzgleichungen. Die Terme dieser Gleichungen präsentieren sich den Heranwachsenden als Black-Box. Lernende greifen damit, ohne es zu wissen, die Finite-Volumen-Methode als Werkzeug zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen auf. Einerseits ermöglicht dieses Vorgehen eine realistische Berechnung der Erdoberflächentemperatur. Andererseits können Schülerinnen und Schüler verschiedene Einflussfaktoren auf den Energiehaushalt der Erde quantifizieren.

Alle Lernmaterialien stehen für sich alleine. Daher wurden sie voneinander getrennt in den zugehörigen mathematischen Kontext gesetzt, didaktisch reduziert, evaluiert und iterativ verbessert. Der thematische Kontext bildet das verbindende Element und zieht sich wie ein roter Faden durch die Materialien. Sie zeigen, dass dieser rote Faden auch im schulischen Raum in unterschiedlichen Jahrgangsstufen aufgegriffen werden kann: Mathematische Inhalte erhalten eine Bedeutung.

Diese Arbeit erweitert das Lernmaterial zum einen um didaktische Anmerkungen, die Lehrpersonen im Umgang mit dem Lernmaterial unterstützen sollen. Zum anderen hält die Arbeit thematisches und mathematisches Hintergrundwissen für die Lehrkräfte bereit, sodass eine zielgerichtete und effiziente Einarbeitung in die fokussierten Problembereiche ermöglicht wird. Zusätzlich beschreibt die Arbeit Einsatzmöglichkeiten der Lernmaterialien in verschiedenen schulischen Situationen. Das Lehrerfortbildungskonzept greift in Anlehnung an die vier Dimensionen der Lehrerkompetenzen bezüglich des mathematischen Modellierens die Arbeitsmaterialien auf. Eingebunden als best-practice-Beispiele werden abstrakte Konstrukte der mathematischen Modellierung mit konkreten Aufgaben verwoben.

Um die noch bestehende Lücke der Bewertung von Modellierungsaufgaben zu verringern, wurde anhand einer sehr offenen Modellierungsaufgabe ein Bewertungsschema entwickelt und evaluiert. Die Testung dieses Plans kann als empirische Vorstudie betrachtet werden. Das Schema gilt es anhand weiterer Modellierungsthemen zu erproben, damit ein sicherer Einsatz für den bewertenden Unterricht möglich wird. Darüber hinaus lieferte die empirische Studie Hinweise, über welche Modellierungskompetenzen Schülerinnen und Schüler derzeit verfügen. Dabei wurden verschiedene mögliche Einflussfaktoren auf die Güte der Schülerlösung fokussiert und analysiert. Allerdings deuten sich in vielen Fällen – wenn überhaupt – nur schwache Korrelationen an. Gesicherte Aussagen lassen die Tests auf dieser Datengrundlage trotz der hohen Fallzahlen nicht zu. Damit liefert die empirische Studie Hinweise sowie wichtige und hilfreiche Anhaltspunkte für zukünftige, fortführende Untersuchungen und Lernstandserhebungen im Bereich der Kompetenzuntersuchung und Modellierungsaufgabenbewertung.

Zusätzliche Fortführungen der in dieser Arbeit beschriebenen Themen wurden jeweils in den Ausblicken der einzelnen Kapitel diskutiert. Ergänzende zentrale Punkte werden im Folgenden kurz zusammengefasst.

Der Bereich der Klimaforschung hält weitere Problemfragen bereit, die in den schulischen Kontext passen. So eignet sich die Fragestellung, wie viel CO<sub>2</sub> der Mensch im Vergleich zu den natürlichen Ausstößen emittiert, bereits für jüngere Lernende dazu, Größenordnungen abzuschätzen. Außerdem lassen sich die Materialien um Experimente ergänzen, die zusätzliche Einblicke in die

physikalisch-chemischen Prozesse der Atmosphäre oder der Meeresströmung (Golfstrom) zulassen und den Effekt der Albedo erfahrbar machen. Neben diesen thematischen Anknüpfungspunkten stellt die Aufarbeitung neuer Themenbereiche eine Aufgabe zukünftiger Forschungsarbeiten dar, um das Feld an geeigneten Modellierungsaufgaben zu erweitern.

Insgesamt steht diese Arbeit damit in einem größeren Modellierungsrahmen. Sie schließt sinnvoll an vorausgegangene Forschungsarbeiten an und eröffnet Perspektiven für weiterführende Forschungsaufträge.



# **Teil V**

# **Anhang**



# A

## Anhang zu: Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?

### A.1 Exemplarischer Stundenverlaufsplan

Im Folgenden wird eine exemplarische Aufteilung des Materials für Doppelstunden (90 Minuten-Einheiten) aufgezeigt. Der Verlaufsplan ist als grober Rahmen zu verstehen und für den durchschnittlichen Lernenden geplant. Wird der Workshop an einem Tag oder nur mit kurzen Abständen zwischen den Terminen durchgeführt, so kann die Einstiegsphase zeitlich verkürzt oder ganz weggelassen werden. In der aufgezeigten Form wurde der Workshop auch bereits erfolgreich durchgeführt.

Wichtig ist es, in den Besprechungsphasen auch immer wieder Bezug zum Modellierungskreislauf zu nehmen und mit den Lernenden zu diskutieren, in welchem Schritt sie sich gerade befinden. Ein solcher Rückbezug unterstützt die Lernenden in der Bearbeitung des Materials. Soweit es nicht anders angegeben ist, sollten die Plenumsphasen lernendenzentriert ablaufen, wobei die Lehrkraft als Moderator zum Einsatz kommt.

Zeitlicher Rahmen insgesamt: 5 Doppelstunden (jeweils 90 Minuten)

Benötigt werden in jeder Einheit

- eine der Lerngruppe entsprechende Anzahl an Computern mit Internetzugang, sodass jeweils in Partnerarbeit gearbeitet werden kann,
- ein interaktives Whiteboard oder ein Beamer für Einleitungs-, Wiederholungs- oder Besprechungsphasen (im Plenum),
- Vortrags- und Besprechungsnotizen sowie ggf. Musterlösungen für die betreuende Lehrkraft.

*Hinweis:* Der Ausblick (s. 3. Doppelstunde, Tabelle A.3) lässt sich leicht in die folgende Unterrichtseinheit verschieben. Dann ist das komplette vierte Arbeitsblatt in der fünften Doppelstunde verordnet.

**Tabelle A.1:** Exemplarischer Verlauf für die erste Doppelstunde (Zeitangabe in Minuten)

		<b>1. Doppelstunde</b>		
<b>Phase</b>	<b>Inhalt</b>		<b>Sozialform</b>	<b>Dauer</b>
Einstieg	Einführung in die mathematische Modellierung		Lehrervortrag, Plenum	15
Einstieg	Einführung in die Problemstellung		Lehrervortrag, Plenum	10
Organisatorisches	Einführung in die Nutzung von julia		Video, Plenum	10
Arbeitsphase	Bearbeitung von AB 1		Partnerarbeit	40
Sicherung	Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse		Plenum	15

**Tabelle A.2:** Exemplarischer Verlauf für die zweite Doppelstunde (Zeitangabe in Minuten)

		<b>2. Doppelstunde</b>		
<b>Phase</b>	<b>Inhalt</b>		<b>Sozialform</b>	<b>Dauer</b>
Einstieg	Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde		Plenum	10
Arbeitsphase	Bearbeitung von AB 2, Aufg. 1–2		Partnerarbeit	60
Sicherung	Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse (vgl. AB 2, Aufg. 2.b)		Plenum	20

**Tabelle A.3:** Exemplarischer Verlauf für die dritte Doppelstunde (Zeitangabe in Minuten)

		<b>3. Doppelstunde</b>		
<b>Phase</b>	<b>Inhalt</b>		<b>Sozialform</b>	<b>Dauer</b>
Einstieg	Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde		Plenum	5
Arbeitsphase	Bearbeitung von AB 2, ab Aufg. 3		Partnerarbeit	60
Sicherung	Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse		Plenum	15
Ausblick	Diskussion zu den Modellverbesserungsmöglichkeiten		Plenum	10

**Tabelle A.4:** Exemplarischer Verlauf für die vierte Doppelstunde (Zeitangabe in Minuten)

		<b>4. Doppelstunde</b>		
<b>Phase</b>	<b>Inhalt</b>		<b>Sozialform</b>	<b>Dauer</b>
Einstieg	Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde		Plenum	5
Arbeitsphase	Bearbeitung von AB 3/4		Partnerarbeit	70
Sicherung	Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse		Plenum	15

**Tabelle A.5:** Exemplarischer Verlauf für die fünfte Doppelstunde (Zeitangabe in Minuten)

5. Doppelstunde			
Phase	Inhalt	Sozialform	Dauer
Einstieg	Wiederholung der Ergebnisse der letzten Stunde	Plenum	5
Arbeitsphase	Bearbeitung von AB 4 (Rest), ggf. Bearbeitung der Zusatz- aufgaben	Partnerarbeit	55
Sicherung	Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse	Plenum	10
Abschluss	Abschlusspräsentation mit kontextorientierter Diskussion in Bezug auf Aussagekraft mathematischer Modelle, Be- trachtung weiterer Klimaindikatoren, Anknüpfungspunkt Ethik, Mensch & Umwelt, Biologie	Plenum	20

## A.2 Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung

Anhand der folgenden Folien leiten die Betreuenden des Moduls „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?“ Lernende in die Thematik des Klimawandels und der mathematischen Modellierung ein. Die Präsentation dient als Hinführung zu den Problemfragen, die die Teilnehmenden im Laufe des Workshops beantworten.



Abbildung A.1: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 1–2

**Gibt es den Klimawandel wirklich?**

Wir wollen es wissen und **wissenschaftliche Methoden** anwenden um diese Frage zu beantworten!

**Was unterscheidet Klima vom Wetter?**

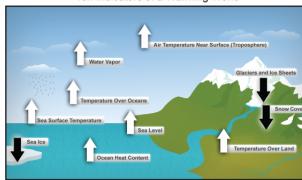
**Klima** beschreibt globale **langfristige** atmosphärische Prozesse.  
**Wetter** beschreibt **kurzfristige** atmosphärische Prozesse, die lokal ablaufen.

Die Klimaforschung betrachtet damit den **durchschnittlichen Zustand von meteorologische Phänomene über einen langen Zeitraum ( $\geq 30$  Jahre).**

 Workshop | Klimawandel | 3/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich?**

**Anhand welcher messbaren Größen lassen sich Klimaänderungen beobachten?**



Bildquelle: NOAA NCDC; based on data updated from Kennedy et al. 2010 (State of the Climate in 2009)

 Workshop | Klimawandel | 4/12

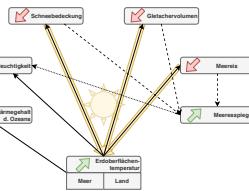
**Gibt es den Klimawandel wirklich? Mathematische Modellierung**

**Reales Problem**  
Klimaänderung?

 Workshop | Klimawandel | 5/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Mathematische Modellierung**

**Reales Problem**  
Klimaänderung?



 Workshop | Klimawandel | 6/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Mathematische Modellierung**

**Das reale Problem:**

- Viele verschiedene Einflussgrößen auf das Klima
- Rasche Änderungen einer Größe können in Änderungen in anderen Bereichen hervorrufen, die sich deutlich langsamer vollziehen oder mit großer Verzögerung eingetragen
- Die Größen können erst seit sehr kurzer Zeit (genau) gemessen werden

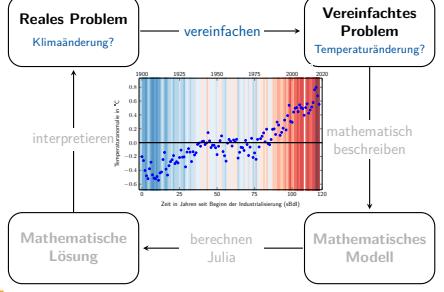
Daher: Vereinfachung des Problems der kompletten Beschreibung des Klimas

**Klimaänderung  $\rightarrow$  Temperaturänderung**

 Workshop | Klimawandel | 7/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Mathematische Modellierung**

**Reales Problem**  
Klimaänderung?  $\xrightarrow{\text{vereinfachen}}$  **Vereinfachtes Problem**  
Temperaturänderung?

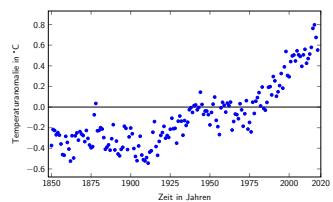


 Workshop | Klimawandel | 8/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Datengrundlage**

**Gegeben:** Temperaturdaten

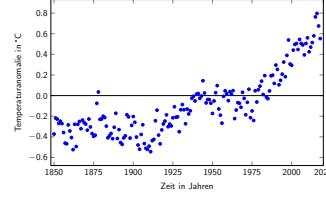
- durchschnittliche globale Oberflächentemperatur
- gemessen auf Land und Meeren
- Jährliche Mittelwerte (in  $^{\circ}\text{C}$ )
- Zeitspanne: 1850 – 2018



 Workshop | Klimawandel | 9/12

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Datengrundlage**

**Temperaturanomalie** ... beschreibt die Differenz zwischen dem gemessenen Temperaturwert und einem Referenzwert, der hier durch das arithmetische Mittel der Temperaturwerte von 1961–1990 gebildet wurde



 Workshop | Klimawandel | 10/12

Abbildung A.2: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 3–10

**Gibt es den Klimawandel wirklich? Ziel der Untersuchung**

**Signifikanztest der Hypothese** (Quelle: IPCC-Bericht, 2013)

Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung (etwa 1900) linear an.

Temperature anomalies in °C

Zeit in Jahren seit Beginn der Industrialisierung (sBdI)

CAMMP Workshop | Klimawandel | 11/12

**Wie findest du eine Antwort auf diese Frage?**

- Bearbeite die Arbeitsblätter in Julia!
- Arbeit mit deinem Partner/deiner Partnerin zusammen!
- Frage die Betreuer/innen!
- Benutze das Internet!
- Präsentiere deine Lösungen und diskutiere sie mit den anderen!
- Helft euch gegenseitig!

CAMMP Workshop | Klimawandel | 12/12

Abbildung A.3: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 11–12

### A.3 Präsentation für Diskussionsphasen

Anhand der folgenden Folien moderieren die Betreuenden des Moduls „Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?“ Diskussionsrunden unter den Lernenden. (Zwischen-)Ergebnisse werden besprochen und in einen größeren Zusammenhang gesetzt.

*Introduced by Prof. Ed Hawkins*

**Gibt es den Klimawandel wirklich?**  
Statistische Analyse von realen Temperaturdaten

CAMMP

**Welche Schritte sind wir heute durchlaufen?**

Reales Problem → vereinfachen → Vereinfachtes Problem

interpretieren → [Scatter plot] → mathematisch beschreiben → Mathematisches Modell

berechnen → Julia → Mathematische Lösung

CAMMP Workshop | Klimawandel | 2/1

Abbildung A.4: Präsentation für Diskussionsrunden, Folien 1–2

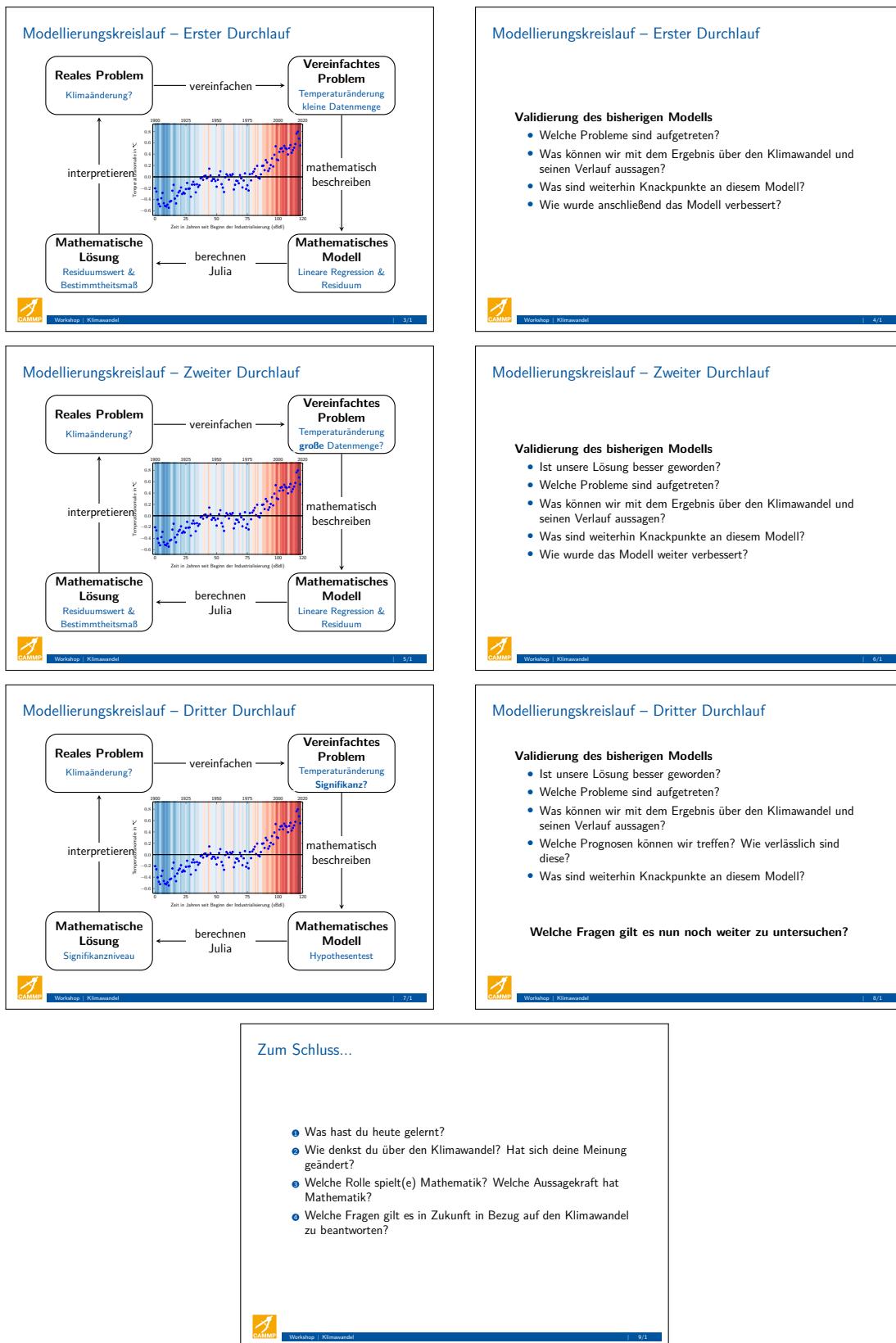


Abbildung A.5: Präsentation für Diskussionsrunden, Folien 3–9

## A.4 Lernmaterialien

Der folgende Abschnitt enthält die digitalen Arbeitsblätter für die Schülerinnen und Schüler.

### Gibt es den Klimawandel wirklich?

#### Statistische Analyse von realen Temperaturdaten

💡 Wie kommen Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler überhaupt zu einer verlässlichen Aussage, dass es den Klimawandel gibt? Hier schlüpft du in ihre Rolle: Du entwickelst Methoden, um echte Klimadaten zu analysieren und mathematische Verfahren zu validieren. Ziel ist es, kritisch und objektiv ein sehr emotionsgeladenes Thema zu reflektieren.

**A** Bevor es losgeht...

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

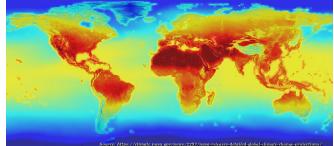
Klicke in den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.

```
|  +  %  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘ |
```

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 # include("../code/loadPackages.jl");
3 include("../code/Climate.jl");
```

#### Motivation

In diesem Workshop soll das Klimageschehen auf signifikante Änderungen hin untersucht werden. Es gibt sehr viele Faktoren, wie beispielsweise die Erd- und Meeresoberflächentemperatur, den atmosphärischen CO<sub>2</sub>-Haushalt oder den Meeresspiegel, die das Klima beschreiben. Bereits auf den ersten Blick wird deutlich, dass das Klima ein sehr komplexes System ist. Klimaforschende versuchen diese **Daten in ein Modell zu überführen**, um damit **Prognosen** für unser zukünftiges Klima zu formulieren.



Bildquelle: By Steve Cole, NASA Headquarters, and Darryl Waller, NASA's Ames Research Center: "NASA Global Climate Change and Global Warming: NASA releases detailed global climate change projections." Jet Propulsion Laboratory / National Aeronautics and Space Administration, 08 June 2015. <https://climate.nasa.gov/news/2293/nasa-releases-detailed-global-climate-change-projections/>. letzter Aufruf: 04.11.2020

#### Problembeschreibung und die Temperaturzeitreihe

Wir wollen uns heute den Temperaturverlauf genauer anschauen. Falls du wissen möchtest, wie unsere Temperaturdaten zustande kommen, schaue dir das Informationsblatt zu **Datengrundlage - Die Temperaturzeitreihe** ([./help/Datengrundlage.ipynb](#)) an. Wie können wir anhand dieser Daten den (menschengemachten) Klimawandel ganz einfach nachweisen? Dazu stellen wir folgende Hypothese auf, die auch von Klimaforschern untersucht und im **IPCC-Bericht** (<https://www.de-ipcc.de/>) diskutiert wurde, und untersuchen sie auf Signifikanz:

Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2018) linear an.

Wir suchen also eine Gerade, die die Zeitreihe bestmöglich beschreibt. Dieses Verfahren nennt man **lineare Regressionsanalyse**. Die gesuchte Gerade nennt man auch Regressionsgerade.

#### Aufgabe 1 | Kennenlernen der Temperaturzeitreihe

Die einfachste Möglichkeit, sich einen ersten Eindruck über die vorliegenden Daten zu verschaffen, besteht darin, die Zeitreihe in ein Koordinatensystem einzutragen (vgl. Abb. 4a). Diese Art der graphischen Darstellung nennt man Streudiagramm oder Punktwolke. Auf diese Weise kann der Blick auf die Untersuchungsfrage hin geschärft und eine Strategie zur Problemlösung entworfen werden.

💻 Gehe in das nächste Code-Feld und drücke auf den Run-Button. Dabei wird der echte Temperaturdatensatz von 1900 bis 2018 geladen. Bearbeite die sich anschließenden Aufgaben.

```
|  +  %  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘  ⌘ |
```

```
In [ ]: 1 # Hier nichts verändern!
2 time, temp = Climate.ReadDataIndustrialisation();
3 sm, sb, mobs, bobs = Climate.PlottenStartAB1();
4 f1 = figure(figsize = (8,4))
5 @manipulate for m = sm > onchange, b = sb > onchange Climate.plottenAB1!(m, b, f1) end
```

Abbildung A.6: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 1

**Teil 1a**

Zeichne in das Diagramm eine Gerade ein, die den Temperaturtrend seit Beginn der Industrialisierung (ab 1900) möglichst gut beschreibt. Die Steigung  $m$  der Geraden und den  $y$ -Achsenabschnitt  $b$  der Geraden kannst du über die Schieberegler einstellen.

Nenne Kriterien, an denen du dich bei der Optimierung der Geraden orientiert hast.

---

**Teil 1b**

An den Schieberegbern kann die Funktionsgleichung der eingezeichneten Geraden abgelesen werden.

Vergleiche deinen Graphen und die zugehörige Funktionsvorschrift mit denen deiner Nachbarn. Was fällt euch auf? Sammelt Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Wird der Workshop im Selbststudium bearbeitet, so kann die Gerade in [dieser Abbildung \(./help/deAB1Vergleichsgraph.ipynb\)](#) als Vergleichsgraph genutzt werden.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(./help/deAB1HilfeA1b1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(./help/deAB1HilfeA1b2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(./help/deAB1HilfeA1b3.ipynb\)](#) ansehen.

---

**Teil 1c**

Sicherlich unterscheiden sich die Graphen und ihre Funktionsvorschriften (leicht) voneinander. Um präzise Aussagen über die Temperaturzeitreihe treffen und den Verlauf quantifizieren zu können, soll die Gerade gefunden werden, die die Daten bestmöglich (in einem noch zu definierenden Sinne) beschreibt.

Nenne eine Eigenschaft, die die gesuchte Gerade erfüllen sollte.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(./help/deAB1HilfeA1c1.ipynb\)](#) und [Hinweis 2 \(./help/deAB1HilfeA1c2.ipynb\)](#) ansehen.

---

Wenn du fertig bist, beginne mit dem [Arbeitsblatt 2 \(./AB2-SuS.ipynb\)](#).

---


Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung A.7:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 2

## Bevor es losgeht...

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 include("../code/Climate.jl");
```

Wir haben auf dem vorherigen Arbeitsblatt ein Kriterium gefunden, mit dem wir auf die Suche nach der besten Geraden gehen können: Der Abstand zwischen Datenpunkten und gesuchter Geraden soll in einem bestimmten Sinne möglichst klein sein. Es handelt sich demnach um ein sogenanntes **Minimierungsproblem**.

Der nächste Schritt ist den Abstandsbeispiel im erarbeiteten Kriterium zu konkretisieren. Eine direkte Konsequenz ist die Berechenbarkeit des Gütemaßes.

## Ein erstes Modell auf Basis eines Ausschnitts aus der Temperaturzeitreihe

Da der vorliegende Datensatz sehr groß ist, wird hier ein in der Wissenschaft gängiges Verfahren gewählt: Die mathematischen Methoden werden zunächst an einem kleinen Datensatz erarbeitet. So kann leichter überprüft werden, ob das verwendete Modell plausibel und gültig ist. Anschließend werden auf dem dritten Arbeitsblatt die Analysetechniken auf den kompletten Temperaturdatensatz übertragen (vgl. Arbeitsblatt 3).

### Wir erkunden einen kleineren Datensatz und treffen Aussagen über den Trend

Um weiterhin Aussagen über den Temperaturverlauf von 1900 bis heute machen zu können, werden die Temperaturanomaliewerte betrachtet, die ab 1900 jeweils alle 25 Jahre, bzw. im letzten Schritt nach 18 Jahren, gemessen wurden (s. Tabelle).

Zeit (in Jahren)	Zeit sBdI (in Jahren)	Temperaturabweichung (in °C)
1900	0	-0.203
1925	25	-0.215
1950	50	-0.173
1975	75	-0.149
2000	100	0.294
2018	118	0.553

Analog zum ersten Arbeitsblatt ist die Zeitachse des Datensatz um 1900 Jahre verschoben, und es gilt die Zeitrechnung seit Beginn der Industrialisierung (sBdI). Die sechs Datenpaare aus der Tabelle werden in einem Zeitvektor `timeRed` (engl. time) und einem Temperaturanomalievektor `tempRed` (engl. temperature) gespeichert. Der Zusatz Red steht als Kennzeichnung des reduzierten Datensatzes (engl. reduced). Einen Vektor kann man sich wie eine einspaltige Tabelle oder eine Liste vorstellen.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button um den Temperaturdatensatz zu laden.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 timeRed, tempRed = Climate.ReadDataIndustrialisation25();
```

 Im Folgenden muss häufig auf einzelne Einträge eines Vektors zugegriffen werden. Daher wird an dieser Stelle eine kleine Vorübung eingeschoben. Solltest du hinreichende Kenntnisse im Programmieren mit Julia besitzen, so kannst du diese Übung überspringen.

### Programmiertechnische Vorübung für den Zugriff auf Einträge eines Vektors

Wir betrachten den Vektor `timeRed` genauer. Es bezeichnet `timeRed[k]` den k-ten Eintrag. Für  $k < l$  ist `timeRed[k : l]` der Teilvektor von `timeRed`, der aus den Komponenten k bis l besteht. Das folgende Beispiel veranschaulicht den Zugriff auf Einträge eines Vektors:

Wir wissen: `timeRed = [0, 25, 50, 75, 100, 118]`. Auf den dritten Eintrag wird über `timeRed[3]` zugegriffen. In dieser Komponente steht der Wert 50. Über `timeRed[3:5]` greift man auf den Teilvektor `timeRed[3:5] = [50, 75, 100]` zu.

Abbildung A.8: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 1

### Aufgabe VÜ

 Lasse dir das Jahr 100 (sBdI) mit zugehörigem Temperaturanomaliewert ausgeben. Nutze dazu den Zugriff auf Vektoreinträge. Ersetze dafür im folgenden Code-Feld die `NaN`.

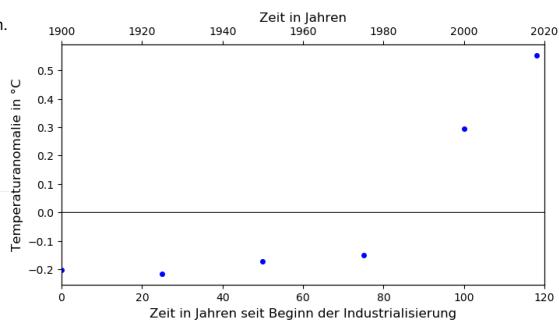
Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(..../help/deAB2HilfeA1a1.ipynb\)](#) und [Hinweis 2 \(..../help/deAB2HilfeA1a2.ipynb\)](#).

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2
3 timeRed100 = NaN ;
4 tempRed100 = NaN ;
5
6 # Hier bitte nichts ändern!
7 Climate.checkAB2entries(timeRed, timeRed100, tempRed, tempRed100);
```

### Aufgabe 1 | Modellierung des Abstands

 Auch im Falle eines kleinen Datensatzes ist es häufig hilfreich, die Zeitreihe graphisch darzustellen. Der Vorteil gegenüber der tabellarischen Form ist, dass eine bessere Übersicht über die Datenlage gewonnen werden kann. Auch unterstützt die graphische Darstellung, sich die weiteren Schritte zum Bestimmen der Regressionsfunktion zu überlegen.

Gesucht ist eine lineare Funktion, die die Daten **bestmöglich** beschreibt. Bestmöglich heißt hier, dass die **Abweichung zwischen der gesuchten Geraden und den Messdatenpunkten in einem bestimmten Sinn minimal** sein soll.



Die gesuchte lineare Funktion wird **Regressionsgerade** genannt. Ihre Funktionswerte heißen **Regressionswerte**. In der Realität stimmen die Regressionswerte selten mit den Messwerten überein.

Auch im vorliegenden Fall weichen einige Messwerte (hier: Temperaturanomaliewerte `tempRed[1], ..., tempRed[6]`) an den Stellen `timeRed[1], ..., timeRed[6]` von den zu erwartenden Regressionswerten ab. Diese Abweichungen bzw. Abstände werden als **Residuen** bezeichnet. Im Folgenden suchen wir nach einer mathematischen Beschreibung des Residuums.

Bevor wir uns überlegen, wie wir den *kleinsten Abstand* finden, suchen wir nach einer Formel, ihn zu bestimmen.

 Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button.



```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 sm, sb, mobs, bobs = Climate.PlotStartAB2();
3 f2 = figure(figsize = (8,4))
4 @manipulate for m = sm |> onchange, b = sb |> onchange Climate.plottenAB2A1a!(m, b, f2) end
```

#### Teil 1a

 Lege in das obige Koordinatensystem eine Gerade, die den Temperaturverlauf seit Beginn der Industrialisierung bis heute möglichst gut beschreibt. Verändere dazu über die Schieberegler die Steigung `m` und den y-Koordinatenabschnitt `b`.

Die Gerade wird im Plot angezeigt; über die Werte an den Schieberegeln kann die zugehörige Funktionsgleichung aufgestellt werden.

 Notiere dir die Funktionsgleichung.

Wir wollen nun den Gesamtabstand zwischen den Daten und Werten der eingezeichneten Gerade bestimmen.

#### Teil 1b

Die Funktionsgleichung zur allgemeinen Bestimmung des Gesamtabstandes in Abhängigkeit der Parameter `m` und `b` bezeichnen wir als Abstandsfunktion. Der Name der eigenständig zu entwickelnden Abstandsfunktion `DistSelF(m, b)` leitet sich aus der

**Abbildung A.9:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 2

Kombination der englischen Begriffe distance und self-made ab.

Stelle eine Funktionsgleichung  $DistSelf(m, b)$  auf, mit der sich der Gesamtabstand in Abhängigkeit der beiden Parameter  $m$  und  $b$  berechnen lässt. Verwende dabei die Vektoren  $timeRed$  und  $tempRed$ . Gib die Formel in das kommende Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

Falls du nicht mehr weißt, wie du auf die Jahres- und Temperaturanomaliedaten zugreifst, scrollle nach oben zur Vorübung.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(..../help/deAB2HilfeA1b1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(..../help/deAB2HilfeA1b2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(..../help/deAB2HilfeA1b3.ipynb\)](#) ansehen.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # 1b) Funktionsgleichung zur Bestimmung des Abstandes in Abhängigkeit von m und b
3
4 DistSelf(m, b) = NaN ;
5
6 # Hier bitte nichts ändern!
7 println("Der Gesamtabstand hat mit deinen Schiebereglereinstellungen und deiner Formel den Wert " + Climate.checkAB2A1b());
```

### Teil 1c

Notiere dir die Funktionsvorschrift der eingestellten Regressionsgeraden und den zugehörigen Abstand(-swert).

Ziel ist es nun, einen möglichst kleinen Gesamtabstand zu finden.

Variere dazu über die Schiebereglereinstellung der Gerade und führe das Code-Feld zum Aufgabenteil 1b erneut aus. Notiere dir wieder die Funktionsvorschrift und den zugehörigen Gesamtabstand. Wiederhole dieses Vorgehen.

Wie können wir sicherstellen, dass wir den kleinst möglichen Abstand gefunden haben? Lass uns also nach einer mathematischen Präzisierung des Begriffs *Abstand* suchen, die uns diese Eigenschaft garantiert.

### Aufgabe 2 | Diskussion zur Suche nach dem kleinsten Abstand

Wir vergleichen nun in einer Diskussion die in deiner Lerngruppe genutzten Abstandsbeziehungen und die daraus resultierenden Minimierungsprobleme für den Gesamtabstand miteinander. Dabei sollen die Vor- und Nachteile der Verfahren herausgearbeitet werden. Am Ende steht eine gemeinsame Strategie, die weiter verfolgt wird.

### Teil 2a

Überlege dir ein Verfahren, mit dem sich die Residuenfunktion minimieren lässt und skizziere es. Gehe dabei von deiner eigenen Abstandsdefinition aus der vorherigen Aufgabe 1b aus.

### Teil 2b

Diskutiert in der gesamten Lerngruppe eure Strategien.

Möglicherweise sind deine Mitschülerinnen und Mitschüler noch nicht so weit wie du. Du brauchst nicht warten, sondern kannst bereits mit der nächsten Aufgabe beginnen. Diskutiere mit ihnen, wenn auch sie bei dieser Aufgabe angekommen sind!

### Aufgabe 3 | Das Minimierungsproblem und die Suche nach dem kleinsten Abstand

Es soll nun die Regressionsgerade gefunden werden. Das ist die Gerade, für die der Gesamtabstand minimal ist. Eine Möglichkeit ist, den Gesamtabstand – nach Gauß – als **Summe der Abstandsquadrate** zu definieren. Die Regressionsgerade findet man dann, indem man die Abstandsfunction hinsichtlich der Steigung  $m$  und des y-Koordinatenabschnitts  $b$  minimiert.

### Teil 3a

Stelle basierend auf dem Vorschlag von Gauß eine Formel für den Abstand auf. Diese beschreibt die Abstandsfunction in Abhängigkeit der beiden Parameter  $m$  und  $b$ . Gib sie im nächsten Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(..../help/deAB2HilfeA3a1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(..../help/deAB2HilfeA3a2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(..../help/deAB2HilfeA3a3.ipynb\)](#) ansehen.

Abbildung A.10: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 3

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # 3a) Abstandsfunktion nach Gauß in Abhängigkeit von m und b
3
4 DistGauss(m, b) = NaN ;
5
6 # Hier bitte nichts ändern!
7 Climate.checkAB2A3a()
```

Den minimalen Abstand finden wir nun, indem wir die Stelle ermitteln, an der die Abstandsfunktion ihr Minimum annimmt. Die Funktion ist jedoch von den zwei Variablen `m` und `b` abhängig. In der Schule lernst du in der Regel lediglich Verfahren zur Minimierung von Funktionen einer Veränderlichen. Daher wird an dieser Stelle eine in Julia bereits implementierte Routine genutzt, die das Minimum einer Funktion von zwei Variablen berechnen kann.

Durch das Ausführen des folgenden Code-Felds wird das Minimum der Abstandsfunktion bestimmt. Die Werte der Steigung `m` und des y-Koordinatenabschnitts `b`, für welche die Funktion ihr Minimum annimmt, werden in den Variablen `mBest` bzw. `bBest` gespeichert und ausgegeben. Außerdem wird die gefundene Regressionsgerade nach Gauß in die Zeitreihe eingezeichnet.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.



```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 mBest, bBest, distBestValue = Climate.regression(DistGauss);
3 Climate.plottenAB2A3b();
```

Dir reicht die numerische Lösung nicht und du möchtest selbst herausfinden, wie man auch "per Hand" die Summe der Abstandsquadrate minimiert?

Kein Problem! Dann mache folgende Zusatzaufgabe!

### Zusatzaufgabe zu 3.a: Minimierung der Summe der Abstandsquadrate

Die Funktion, mithilfe derer die Summe der Abstandsquadrate berechnet werden kann, hast du bereits im regulären Teil 3.a aufgestellt - nämlich `ResGauss`. Diese Funktion ist allerdings von zwei Parametern `m` und `b` abhängig: Wir müssen die Funktion also in beiden Parametern minimieren.

Überlege dir zunächst per Hand (Stift und Zettel), wie du das Minimum bestimmst. Füll anschließend das folgende Code-Feld mit deinem Algorithmus.

**Hinweis:** Falls du viele Summanden, die aus verschachtelten Termen bestehen, aufsummieren möchtest und sich dabei nur der Index ändert, so kannst du eine sogenannte **for-Schleife** nutzen. Was das genau ist und wie sie funktioniert, erfährst du hier [for-Schleife \(./help/julia\\_forLoop.ipynb\)](#).

Mit `println("Variablename ist gleich ", Variablename);` kannst du dir auch die Werte deiner Variablen anzeigen lassen.

Überprüfe deine Antwort, in dem du dein Ergebnis mit dem aus Teil 3.a vergleichst.

```
In [ ]: 1 # Hier ist Platz für deinen eigenen Code!
2
3
4
```

HIER wieder weiter für alle!

### Teil 3b

Die gefundene Regressionsgerade ist die Gerade, welche die Daten im Sinne der kleinsten Abstandsquadrate (nach Gauß) am besten beschreibt – in diesem Sinne ist sie also optimal!

Lässt sich daraus eine Aussage über die Temperaturänderung von 1900 bis heute ableiten?

Beurteile dein Ergebnis! Interpretiere es in Bezug auf die anfangs aufgestellte Hypothese.  
Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2018) linear an.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(./help/deAB2HilfeA3b1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(./help/deAB2HilfeA3b2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(./help/deAB2HilfeA3b3.ipynb\)](#) ansehen.

**Abbildung A.11:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 4

**Aufgabe 4 | Das Bestimmtheitsmaß als Gütekriterium**

Es fällt auf, dass zwei Werte sehr dicht an der gefundenen Regressionsgerade liegen, die anderen Werte aber einen relativ großen Abstand haben. Außerdem liegen die ersten vier Datenpunkte sehr nahe um eine Temperaturanomalie von  $-0.2^{\circ}$ , während die letzten beiden Datenpunkte stark davon abweichen. Daher stellt sich die Frage, wie gut die Daten überhaupt durch die Gerade repräsentiert werden: Kann die Temperaturrentwicklung tatsächlich durch ein lineares Regressionsmodell beschrieben werden, so ließen sich die Abweichungen zwischen den gemessenen Temperaturanomaliewerten und den Funktionswerten der Regressionsgerade nur durch natürliche Streuung, Zufall oder Messfehler erklären.

**💡** Um die Güte der Anpassung der gefundenen Regressionsgeraden an die gemessenen Daten zu quantifizieren, wird das sogenannte **Bestimmtheitsmaß  $R^2$**  verwendet. Hier wird der Gesamtabstand ins Verhältnis zur Streuung der Messwerte (Abweichung der Temperaturwerte vom arithmetischen Mittel der Temperaturanomalien) gesetzt:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{distBestValue}}{\sum_{j=1}^n (\text{tempRed}[j] - \overline{\text{tempRed}})^2}$$

Dabei bezeichnet `tempRed` das arithmetische Mittel unserer Temperaturanomaliewerte. In Julia gibt es die implementierte Funktion `mean()`, mit deren Hilfe sich das arithmetische Mittel direkt berechnen lässt: `mean(tempRed)`. Das  $\sum_{j=1}^n$  ist ein **Summenzeichen**. Falls du es nicht kennst, findest du [hier \(./help/summenzeichen.ipynb\)](#) eine Erklärung.

Für das Bestimmtheitsmaß gilt  $R^2 \in [0, 1]$ . Mithilfe der folgenden Sätze wollen wir ein Gefühl für dieses Maß bekommen.

---

**Teil 4a**

**💡** Vervollständige die folgende Sätze, indem du **A1**, **A2**, **A3** und **A4** durch Zahlen oder Wörter ersetzt. Wörter werden dabei in englische Anführungszeichen, beispielsweise "Wort", gesetzt.

- Liegen die Messwerte genau auf der Regressionsgeraden, so ist  $R^2$  gleich **A1**.
- Liegen die Messwerte weit weg von der Regressionsgeraden, so geht  $R^2$  gegen **A2**.
- Je näher das Bestimmtheitsmaß am Wert **A3** liegt, desto **A4** ist die Güte der Schätzung.

**⚠️** Falls bei der Beantwortung dieser Aufgabe Hilfe benötigt wird, kann im Internet nach dem Bestimmtheitsmaß gesucht werden.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
         2 # 4a)
         3 A1 = NaN ;
         4 A2 = NaN ;
         5 A3 = NaN ;
         6 A4 = "String" ;
         7
         8 # Hier bitte nichts ändern!
         9 Climate.checkAB2A4a(A1, A2, A3, A4)
```

---

Im nächsten Code-Feld wird das Bestimmtheitsmaß des linearen Regressionmodells nach der Methode der kleinsten Abstandsquadrate zum reduzierten Datensatz ausgerechnet und in der Variablen `Rsqr` ausgegeben.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
         2 Rsqr = Climate.CoefficientOfDeterminationAB2(distBestValue, tempRed);
```

Du möchtest das selbst überprüfen?

Kein Problem! Dann mache folgende Zusatzaufgabe!

**Zusatzaufgabe zu 4a: Berechnung des Bestimmtheitsmaßes**

Oben ist bereits beschrieben, wie das Bestimmtheitsmaß definiert ist.

**💡** Setze die Berechnung im folgenden Code-Feld um.

**Hinweis:** Falls du viele Summanden, die aus verschachtelten Termen bestehen, aufsummieren möchtest und sich dabei nur der Index ändert, so kannst du eine sogenannte **for-Schleife** nutzen. Was das genau ist und wie sie funktioniert, erfährst du hier [for](#).

Abbildung A.12: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 5

278

**Schleife** ([./help/julia\\_forLoop.ipynb](#)).

Mit `println("Variablenname ist gleich ", Variablenname)`; kannst du dir auch die Werte deiner Variablen anzeigen lassen.

Überprüfe deine Antwort, in dem du dein Ergebnis mit dem aus Teil 4.a vergleichst.

```
In [ ]: 1 # Hier ist Platz für deinen eigenen Code!
```

---

HIER wieder weiter für alle!

### Teil 4b

Nun gilt es, dieses Ergebnis in Bezug auf die eingangs gestellte Hypothese zu interpretieren.

Wie gut beschreibt die Regressionsfunktion die Daten? Was kannst du über den Temperaturtrend von 1900 bis heute aussagen? Beurteile das Ergebnis.

Um diese Aufgabe zu lösen, musst du im Internet nach zusätzlichen Informationen über das Bestimmtheitsmaß suchen.

---

Wenn du fertig bist, beginne mit dem [Arbeitsblatt 3 \(./AB3-SuS.ipynb\)](#).

Falls du schneller bist, kannst du hier noch eine [Zusatzaufgabe \(./help/deAB2Zusatz1.ipynb\)](#) machen.

---


Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung A.13:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 6

**⚠️ Bevor es losgeht...**

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Gehe in das nächste Code-Feld und klicke anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
          2 include("../code/Climate.jl");
```

### Modellverbesserung mithilfe der kompletten realen Temperaturzeitreihe

Auf dem letzten Arbeitsblatt wurde ein Verfahren zur Bestimmung der Regressionsgerade entwickelt. Diese war genau die Gerade, welche die Daten im Sinne der Methode der kleinsten Abstandsquadrate am besten beschreibt. Für eine kleine Zeitreihe, bestehend aus sechs Datenpaaren, wurde die Regressionsgerade bestimmt. Die Steigung der Regressionsgerade war positiv, sodass zunächst ein positiver Temperaturtrend von 1900 bis heute naheliegend erscheint. Allerdings wurde auch festgestellt, dass der lineare Zusammenhang zwischen Zeit und Temperaturanomalie nicht stark ist ( $R^2 \approx 0.74$ ). Es ist daher fraglich, ob die (bescheidene) Güte der Regressionmodells eine Aussage über den Trend der Temperaturentwicklung erlaubt. Suchen wir also nun nach Verbesserungsmöglichkeiten. Es gibt dafür zwei Stellschrauben:

- Vielleicht war die **Annahme, dass die Temperaturanomaliedaten einem linearen Trend folgen, falsch**. Zur Überprüfung dieser Annahme müssten weitere funktionale Zusammenhänge untersucht werden. Beispielsweise könnte ein quadratisches oder exponentielles Modell getestet werden.
- Eine andere Möglichkeit ist, dass die **Datenauswahl nicht gut** war. Möglicherweise wurden ausgerechnet die sechs Datenpaare gewählt, die eher zu den Ausreißern gehören. Damit wären sie für eine Analyse des langfristigen Temperaturverlaufes ungeeignet.

Hier wird die Annahme verworfen, dass der kleine Datensatz die gesamte Zeitreihe gut repräsentiert. Die erarbeiteten mathematischen Verfahren sollen daher auf die gesamte Temperaturzeitreihe angewendet werden. Zu prüfen ist, ob dies zu einer höheren Güte des Regressionsmodells führt. Die Daten sehen nun wie folgt aus. Der Zeit-Vektor wird ab jetzt mit `time` und der Temperaturanomalie-Vektor mit `temp` bezeichnet.

Zeit (in Jahren)	Zeit sBdl (in Jahren)	Temperaturabweichung (in °C)
1900	0	-0.2030
1901	1	-0.2590
1902	2	-0.4020
1903	3	...
...	...	...
2017	117	0.675
2018	118	0.553

💡 In einer [Zusatzaufgabe \(..../help/deAB3Zusatzaufgabe.ipynb\)](#) kann die erste Verbesserungsmöglichkeit erkundet werden.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
          2 time, temp = Climate.ReadDataIndustrialisation();
```

In der Abstandsfunktion `DistGauss` müssen mehrere Terme aufsummiert werden. Sind dies nur sechs Terme wie im ausgedünnten Datensatz, so kann die Summe relativ schnell eingegeben werden. Möchte man für den **kompletten HadCRUT4-Datensatz von 1900 bis 2018** die Residuenfunktion aufstellen, so müssen 119 Terme summiert werden. Eine ausführliche Eingabe jedes einzelnen Terms benötigt einerseits viel Zeit. Andererseits ergeben sich leicht Tippfehler, die wiederum gefunden und behoben werden müssen, was ebenfalls Zeit erfordert. Vereinfachen wir also nun die Eingabe.

⚠️ Wir greifen auf eine in Julia implementierte Funktion `sum()` der Summenbildung zurück. Diese Funktion stellt das Prinzip des Summenzeichens  $\Sigma$  nach und vereinfacht die Darstellung einer Summe. Hier findest du eine [Übung \(..../help\)](#)

Abbildung A.14: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 3, Seite 1

280

[/deAB3UebungSumme.ipynb](#) zur Nutzung der implementierten Funktion `sum()`.

### Aufgabe 1 | Modellierung des minimalen Abstands

Die erarbeitete **Methode der Minimierung der Abstandsquadrate** wenden wir jetzt auf den vollen Datensatz an.

#### Teil 1a

Stelle eine Funktionsgleichung für den Gesamtabstand in Abhängigkeit von der Steigung  $m$  und dem y-Koordinatenabschnitt  $b$  nach Gauß auf. Benutze dabei die Summenfunktion von Julia. Gib sie im folgenden Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

Hier tritt eine Besonderheit der Programmiersprache Julia mit dem Umgang von Vektoren auf: Sollten die Fehlermeldung `MethodError: no method matching` auftauchen, so gib einen Punkt vor dem angegebenen Operator ein, beispielsweise `.+`

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(./help/deAB3HilfeA1a1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(./help/deAB3HilfeA1a2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(./help/deAB3HilfeA1a3.ipynb\)](#) ansehen.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # 1a Bestimme den Gesamtabstand
3
4 DistGauss(m,b) = NaN ;
5
6 # Hier bitte nichts ändern!
7 Climate.checkAB3A1a()
```

Mithilfe der vorgefertigten Routine wird das Minimum der Abstandsfunktion bestimmt, die Ergebnisse ausgeben und graphisch angezeigt. Die Werte für die Steigung und den y-Koordinatenabschnitt, für welche die Abstandsfunktion ihr Minimum annimmt, werden in den Variablen `mBest` und `bBest` gespeichert und ausgegeben. Diese werden auch auf dem folgenden Arbeitsblatt (AB4) benötigt. Zusätzlich wird das Ergebnis visuell ausgegeben.

Damit können wir die Funktionsgleichung der Regressionsgerade bestimmen.

Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 mBest, bBest, distBestValue = Climate.regression(DistGauss);
3 Climate.plottenAB3A1a();
```

Die dargestellten Ergebnisse müssen wieder in Bezug zur Sachsituation gesetzt werden.

#### Teil 1b

Beurteile dein Ergebnis! Was bedeutet dein Ergebnis in Bezug auf die anfangs aufgestellte Hypothese?

Vergleiche dein numerisches Ergebnis mit dem Resultat des visuellen Vorgehens auf dem [ersten Arbeitsblatt \(./AB1-SuS.ipynb\)](#).

### Aufgabe 2 | Das Bestimmtheitsmaß als Gütekriterium

Analog zum dem vorherigen Arbeitsblatt soll auch hier die Güte der Anpassung der gefundenen Regressionsgeraden an die Messdaten quantifiziert werden. Dazu wird erneut das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  genutzt. Es gilt:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{distBestValue}}{\sum_{j=1}^n (\text{temp}[j] - \bar{\text{temp}})^2}$$

Dabei bezeichnet  $\bar{\text{temp}}$  das arithmetische Mittel aller Temperaturanomaliewerte.

Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button. Das Bestimmtheitsmaß wird vom Computer berechnet und ausgegeben.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 Rsqr = Climate.CoefficientOfDeterminationAB3(distBestValue, temp, time);
```

Abbildung A.15: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 3, Seite 2

Dieses Ergebnis wollen wir wieder beurteilen:

**Teil 2a**

 Diskutiere, wie gut die Regressionsgerade die Daten beschreibt und was dein Ergebnis in Bezug auf die anfangs aufgestellte Hypothese bedeutet. Was kannst du über den Temperaturtrend von 1900 bis heute aussagen?

Beginne mit dem [Arbeitsblatt 4 \(./AB4-SuS.ipynb\)](#), wenn du mit diesem Blatt fertig bist.

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>).

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung A.16:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 3, Seite 3

**⚠️ Bevor es losgeht...**

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button.

In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!  
2 include("../code/Climate.jl");  
3 language = "deutsch"; # english, espanol

**Hypothesentest**

Auf dem vorherigen Arbeitsblatt wurde die Regressionsgerade zur gegebenen Temperaturzeitreihe und deren Güte über das Bestimmtheitsmaß ermittelt. Dabei konnte ein linearer Trend in den Daten bestätigt werden.

Dennoch gibt es viele Menschen, die nicht an einen Anstieg der Temperatur im Laufe des letzten Jahrhunderts glauben. Es soll nun ein Verfahren entwickelt werden um die Aussagekraft des Ergebnisses zu überprüfen.

Die Idee: Jede Messung hat Fehler. Die Lage der Messwerte bestimmt aber den Verlauf der Regressionsgeraden. Es muss also sicher gestellt werden, dass nicht diese Fehler für den beobachteten positiven Trend verantwortlich sind. Daher wird ein Hypothesentest durchgeführt und geprüft, ob die Steigung signifikant positiv ist.

Die Hypothese, die überprüft werden soll, lautet weiterhin:

**Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2018) linear an.**

 Diese nachzuweisende Hypothese nennt man **Alternativhypothese ( $H_1$ )**. Die zu ihr gegenteilige Aussage wird als **Nullhypothese ( $H_0$ )** bezeichnet. Gegenteilig bedeutet, dass sich die beiden Hypothesen gegenseitig ausschließen.

Der Hypothesentest soll die Aussagekraft der Regression prüfen. Allgemein ist der Hypothesentest ein Verfahren, das basierend auf einer Stichprobe - hier dem Temperaturanomaliedatensatz - entscheidet, ob die Alternativhypothese für die Grundgesamtheit anzunehmen ist oder (mit den gegebenen Daten) nicht belegt werden kann. Grundsätzlich gilt für statistische Tests, dass sie nur die Nullhypothese widerlegen können. Damit ist der Test nicht symmetrisch bezüglich der Vertauschung von  $H_0$  und  $H_1$  und es muss vorher festgelegt werden, welche Aussage geprüft werden soll.

Um die Koeffizienten einer Regressionsgerade zu testen, wird der sogenannte **t-Test** durchgeführt. Eine genauere Erklärung des t-Tests wird in den Aufgabeteilen 1c und 1d gegeben.

**Aufgabe 1 | Der Hypothesentest zur Prüfung der Signifikanz**

Die Hypothese basiert auf einer realen Problemstellung und ist daher bislang nur „in Worten“ formuliert. Für einen Test muss sie noch in mathematischer Form ausgedrückt werden.

**Abbildung A.17:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 4, Seite 1

**Teil 1a**

Formuliere die Alternativhypothese in Form einer (Un-)Gleichung. Es bezeichne  $m$  die Steigung der Regressionsgeraden und  $m_0$  die Steigung, gegen die wir testen wollen. In Code wird sie mit  $m\theta$  bezeichnet.

Stelle außerdem die zugehörige Nullhypothese auf.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(..../help/deAB4HilfeA1a1.ipynb\)](#), [Hinweis 2 \(..../help/deAB4HilfeA1a2.ipynb\)](#) und [Hinweis 3 \(..../help/deAB4HilfeA1a3.ipynb\)](#) ansehen.

---

**Teil 1b**

Wähle aus den folgenden Möglichkeiten anhand der Ungleichung zwischen der Steigung der Regressionsgerade  $m$  und der Steigung  $m_0$ , gegen die getestet werden soll, die passende Entscheidungsregel aus. Trage die Entscheidungsregelnummer im nächsten Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

**Info:** Die Entscheidungsregel besagt, in welchem Fall die Nullhypothese abgelehnt wird. Sie wird in den nächsten Aufgabenteilen betrachtet.

Entscheidungsregelnummer	$H_0$	$H_1$	Entscheidungsregel: $H_0$ wird abgelehnt, falls
1	$m \leq m_0$	$m > m_0$	$\frac{m-m_0}{\hat{\sigma}_m} > t(\alpha, \text{dof})$
2	$m \geq m_0$	$m < m_0$	$\frac{m-m_0}{\hat{\sigma}_m} < t(\alpha, \text{dof})$
3	$m = m_0$	$m \neq m_0$	$\left  \frac{m-m_0}{\hat{\sigma}_m} \right  > t(\alpha, \text{dof})$

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
         2 # 1b
         3
         4 number = NaN ;
         5
         6 # Hier bitte nichts ändern!
         7 Climate.checkAB4A1b();
```

Für den Hypothesentest werden die Ergebnisse des vorherigen Arbeitsblatts benötigt. Sie werden durch Ausführen des folgenden Code-Feldes geladen.

Hypothesentests werden häufig erst gegen Ende der Schulzeit im Mathematikunterricht behandelt. D. h. vermutlich kannst du diesbezüglich auf wenig oder sogar kein Vorwissen zurückgreifen. Die  $t$ -Funktion ist daher bereits in Julia implementiert und wir greifen einfach auf sie zu.



```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
         2 mBest, bBest, sigmaM, dof = Climate.laden();
```

---

**Teil 1c**

**Info:** Die Entscheidungsregel ist durch eine Ungleichung gegeben.

- Um sie zu überprüfen muss einerseits der Wert  $\frac{m-m_0}{\hat{\sigma}_m}$  berechnet werden. Dieser Wert wird als Realisierung der **Testgröße** oder **Prüfgröße der Teststatistik** bezeichnet. Er beinhaltet die Steigung der Regressionsgerade, sowie die Steigung, gegen die getestet werden soll. Ihre Differenz wird ins Verhältnis zur Standardabweichung gesetzt. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streubreite der Werte eines Merkmals rund um dessen Mittelwert (arithmetisches Mittel), die durch fehlerhafte Messwerte Zustandekommt. Um die Testgröße etwas greifbarer zu machen, stelle man sich vor, dass die Werte des Merkmals (hier: Steigung der Regressionsgerade) wenig streuen, d. h. sie liegen sehr dicht an ihrem arithmetischen Mittel: Die Standardabweichung  $\hat{\sigma}_m$  ist klein. Es kann also „einfacher“ eine Abweichung zwischen  $m$  und  $m_0$  festgestellt werden als wenn die Standardabweichung groß wäre. Dies ist der Fall, wenn die Werte des Merkmals breit um ihr arithmetisches Mittel streuen.
- Andererseits muss  $t(\alpha, \text{dof})$  ermittelt werden. Dieser Wert wird in Aufgabenteil 1d näher erläutert.

Ersetze im folgenden Code-Feld jeweils das `NaN` durch passende Werte oder Variablen und bestimme so die Testgröße. Es kann dabei auf die Variablen des vorherigen Arbeitsblattes zugegriffen werden. Es bezeichne  $m$  die Steigung der Regressionsgeraden und  $m\theta$  die Steigung, gegen die getestet wird.

**Abbildung A.18:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 4, Seite 2

283

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # 1c
3
4 # Linke Seite
5 m = NaN ; # Steigung der Regressionsgeraden
6 m0 = NaN ; # Steigung, gegen die getestet wird
7
8
9 # Hier bitte nichts ändern!
10 Climate.testgroesse();
```

### Teil 1d

ⓘ Es muss nun noch  $t(\alpha, dof)$  ermittelt werden. Dieser Wert wird als **kritischer Wert** bezeichnet und definiert einen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese. Man kann sich vorstellen, dass ein Wackeln an unseren Temperaturanomaliedaten zu unterschiedlichen Steigungen der Regressionsgerade führt. All diese unterschiedlichen Steigungen sollten aber um den wahren Steigungswert herum verteilt sein. Die  $t$ -Funktion beschreibt genau diese (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung. Sie ist von

den beiden Parametern  $\alpha$ , dem Signifikanzniveau, und  $dof$ , der Anzahl der Freiheitsgrade, abhängig.

Das Signifikanzniveau  $\alpha$  gibt an, wie hoch das Risiko (die Wahrscheinlichkeit) ist, das man bereit ist einzugehen, fälschlicherweise die Nullhypothese abzulehnen. Kurz: Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  abgelehnt wird, obwohl  $H_0$  in Wirklichkeit wahr ist, wird durch das Signifikanzniveau beschränkt. Hier bedeutet dies Folgendes: Man legt eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit fest, für die man annimmt, die Steigung wäre positiv, obwohl sie tatsächlich null oder negativ ist. Das Signifikanzniveau liegt immer zwischen 0 und 1. Ein sehr kleiner Wert besagt, dass man möglichst keine falsche Entscheidung treffen möchte. Ein sehr großer Wert besagt, dass es ok ist, wenn man eine falsche Entscheidung trifft. Beachte dabei: Die getroffene Entscheidung ist jedoch im Allgemeinen fehlerbehaftet. Für eine genauere Betrachtung der Fehler gibt es ein zusätzliches [Informationsblatt \(./help/Fehler.ipynb\)](#) (→ Fehler 1. Art, Fehler 2. Art).

Der Parameter  $dof$  bezeichnet die **Anzahl der Freiheitsgrade** (engl. *degrees of freedom*). Er beschreibt die Menge an Informationen, die zur Schätzung der unbekannten Modellparameter verwendet werden kann. Er ist daher durch unsere Messdatenreihe festgelegt und bestimmt sich aus Anzahl der Datenpaare - Anzahl der durch das Modell bestimmten Parameter .

💻💡 Lege ein Signifikanzniveau fest, zu dem du bereit bist fälschlicherweise die Nullhypothese abzulehnen. Dir wird der zugehörige kritische Wert für den Ablehnungsbereich ausgegeben. Notiere ihn dir.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # 1d
3
4 # Rechte Seite
5 significance = NaN ; # Signifikanzniveau α
6
7 # Hier bitte nichts ändern!
8 Climate.kritischerWert();
```

### Teil 1e

💻💡 Wie sähe die Entscheidung aus, wenn wir vorher risikofreudiger oder zurückhaltender gewesen wären? Variere dazu das Signifikanzniveau. Notiere dir das Signifikanzniveau und den jeweils zugehörigen kritischen Wert. Was bedeutet das Ergebnis des Hypothesentests für unsere Fragestellung? Diskutiere!

Du bist fertig und hast noch Lust auf mehr? Dann kannst du in zwei **Zusatzaufgaben** die Frage, wie sich die Temperaturen bis zum Jahr 2100 entwickeln werden, erörtern. Es gibt eine [Zusatzaufgabe A \(./AB5-SuS.ipynb\)](#) und eine [Zusatzaufgabe B \(./AB6-SuS.ipynb\)](#). Beide sind unabhängig voneinander, weshalb sie in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

Abbildung A.19: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 4, Seite 3

**⚠️ Bevor es losgeht...**

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
         2 include("../code/Climate.jl");
         3 mBest, bBest, sigma_m, dof = Climate.laden();
```

### Zusatzaufgaben

Auch bei einem sehr geringen Risiko falsch zu liegen (im Sinne des Fehlers 1. Art) wurde die Nullhypothese abgelehnt. Somit liefert der Test die Annahme der Alternativhypothese „Die Temperatur steigt seit Beginn der Industrialisierung (im Zeitraum von 1900 bis 2018) linear an.“ mit einer sehr hohen Signifikanz.

In den Medien wird häufig vom 1.5°C- oder 2°C-Ziel gesprochen – und davon, dass es sehr fragwürdig ist, ob diese Ziele eingehalten werden können. Hierbei ist ein Temperaturanstieg von maximal 1.5°C bzw. 2°C gegenüber dem vorindustriellen Niveau gemeint.

**Für die folgenden Aufgaben wird angenommen, dass die gefundene Regressionsgerade den Temperaturtrend auch für die Zukunft prognostiziert.**

- ❶ Auf die Variablen `mBest` sowie `bBest` und ihre Werte kann wie bisher zugegriffen werden.
- ❷ Du bist hier bei **Zusatzaufgabe A**. Die Zusatzaufgabe B findest du [hier \(./AB6-Lsg.ipynb\)](#). Beide sind unabhängig voneinander, weshalb sie in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können. Es werden keine Rückmeldungen mehr zur Richtigkeit der Eingaben gegeben.

---

### Zusatzaufgabe A

#### Teil Zusatz Aa

Die Temperatur entwickle sich bis 2100 entsprechend des Verlaufs, der durch die aufgestellte Regressionsgerade vorgegeben wird. Die reale Problemstellung kann in folgender Hypothese formuliert werden.

**Die Temperatur steigt bis 2100 signifikant stärker an, als es das 1.5°C- bzw. das 2°C-Ziel vorgibt.**

- ✍ Formuliere für beide Ziele jeweils die Alternativhypothese. Es bezeichne `m` weiterhin die Steigung der Regressionsfunktion und `m15` bzw. `m20` die Steigung, gegen die getestet wird. Dabei gehört `m15` zum 1.5°C-Ziel und `m20` zum 2°C-Ziel. Stelle außerdem die passende Nullhypothese auf.
- ❸ Falls du Platz zum Rechnen benötigst, kannst du das folgende Code-Feld ähnlich zu einem Taschenrechner benutzen. Eine Ausgabe erhältst du, indem du kein Semikolon am Ende der Rechnung aufführst. Benutze pro Rechnung ein separates Code-Feld. Du kannst neue Code-Felder hinzufügen, indem du in der Jupyter-Menüleiste auf den Reiter `Insert / Einfügen` gehst und dort `Insert Cell Below / Zelle unterhalb einfügen` auswählst.

```
In [ ]: 1
```

---

#### Teil Zusatz Ab

- ❹ Bestimme passende Werte für `m15` und `m20`. Lege außerdem ein Signifikanzniveau fest. Berechne so den Wert der Testgröße jeweils für das 1.5°C- und das 2°C-Ziel.
- ❺ ✎ Variiere außerdem erneut das Signifikanzniveau und prüfe, zu welchen Werten des Signifikanzniveaus die Hypothese gehalten werden kann. Mache dir Notizen!

Abbildung A.20: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 5, Seite 1

```
In [ ]:  
1 # Jetzt du!  
2 # Zusatz Ab  
3  
4 m = NaN ;  
5  
6 # Linke Seite: Testgröße  
7 m15 = NaN ; # Steigung, gegen die getestet wird, zugehörig zum 1.5 °C-Ziel  
8 m20 = NaN ; # Steigung, gegen die getestet wird, zugehörig zum 2.0 °C-Ziel  
9  
10 # Rechte Seite: kritischer Wert  
11 significance = NaN ; # Signifikanzniveau  $\alpha$   
12  
13 # Hier bitte nichts ändern!  
14 testvalue15 = (m-m15)/sigmam;  
15 testvalue20 = (m-m20)/sigmam;  
16  
17 println("Die Testgröße zum 1.5 °C-Ziel liegt bei ", testvalue15, ".");  
18 println("Der Testgröße zum 2.0 °C-Ziel liegt bei ", testvalue20, ".");  
19  
20 Climate.kritischerWert();
```

### Teil Zusatz Ac

Was bedeutet das Ergebnis des Hypothesentests für die Fragestellung, wie gut wir die Ziele einhalten können? Diskutiere!

### Teil Zusatz Ad

Es soll hier nochmal hervor gehoben werden, dass diese Aussagen auf Basis des linearen Regressionsmodells getroffen werden.

Warum hält sich die Aussagekraft unseres Modells in Grenzen? Nenne Gründe und diskutiere sie. Erläutere außerdem Möglichkeiten, wie das Modell verbessert werden kann.

Hier kommst du zur [Zusatzaufgabe B \(./AB6-SuS.ipynb\)](#).



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

Abbildung A.21: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 5, Seite 2



## Bevor es losgeht...

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Gehe in das nächste Code-Feld und drücke anschließend auf den "Run"-Button.



```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 include("../code/Climate.jl");
3 mBest, bBest, sigmam, dof = Climate.laden();
```

## Zusatzaufgaben

Auch bei einem sehr geringen Risiko falsch zu liegen im Sinne des Fehlers 1. Art wurde die Nullhypothese abgelehnt: Unter der Annahme von  $H_0$  sind die Daten so wenig wahrscheinlich, dass wir  $H_0$  verworfen haben.

In den Medien wird häufig vom 1.5°C- oder 2°C-Ziel gesprochen – und davon, dass es sehr fragwürdig ist, ob diese Ziele eingehalten werden können. Hierbei ist ein Temperaturanstieg von maximal 1.5°C bzw. 2°C gegenüber dem vorindustriellen Niveau gemeint.

**Für die folgenden Aufgaben wird angenommen, dass die gefundene Regressionsgerade den Temperaturtrend auch für die Zukunft prognostiziert.**

❶ Auf die Variablen mBest sowie bBest und ihre Werte kann wie bisher zugegriffen werden.

❷ Du bist hier bei **Zusatzaufgabe B**. Die erste Zusatzaufgabe findest du [hier \(./AB5-Lsg.ipynb\)](#). Beide sind unabhängig voneinander, weshalb sie in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden können. Es werden keine Rückmeldungen mehr zur Richtigkeit der Eingaben gegeben.

## Zusatzaufgabe B

### Teil Zusatz Ba

Wie entwickelt sich die Temperaturanomalie bis 2100 unter der Annahme, dass die Regressionsgerade zur Vorhersage der Temperaturrentwicklung verwendet werden kann?

☐ Stelle eine Formel zur Berechnung der Temperaturanomalie im Jahr 2100 auf. Bestimme außerdem die Zeitpunkte, wann die Temperaturanomalie genau um 1.5°C bzw. 2°C seit Beginn der Industrialisierung gestiegen ist. Diskutiere deine Ergebnisse im Kontext des Klimawandels.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # Zusatz Ba
3
4 # Temperaturanomalie im Jahr 2100
5 temp200 = NaN ;
6
7
8 # Jahr, in dem die Temperaturanomalie um 1.5 Grad Celsius gegenüber dem vorindustriellen Niv
9 time15 = NaN ;
10
11 # Jahr, in dem die Temperaturanomalie um 2.0 Grad Celsius gegenüber dem vorindustriellen Niv
12 time20 = NaN ;
13
14 # Hier bitte nichts ändern!
15 println("Deine Antworten sind: temp200 = " , temp200);
16 println("Deine Antworten sind: time15 = " , time15);
17 println("Deine Antworten sind: time20 = " , time20);
```

### Teil Zusatz Bb

Es soll hier nochmal hervorgehoben werden, dass diese Aussagen aufgrund der Regressionsgerade getroffen werden.

⌚ Nenne Anhaltspunkte, warum sich die Aussagekraft über die Regressionsgerade Prognosen zu erstellen in Grenzen hält und diskutiere sie. Nenne Möglichkeiten wie das Modell verbessert werden könnte.

Hier kommst du zur [Zusatzaufgabe A \(./AB5-SuS.ipynb\)](#).



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung A.22:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 6, Seite 1

## Bevor es losgeht...

In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.

In [ ]:

```
1 # Hier bitte nichts ändern!
2 include("../code/Climate.jl");
3 time, temp = Climate.ReadDataIndustrialisation();
```

## Arbeitsblatt 2 - Zusatzaufgabe 2

Hier kannst du ein eigenes Modell umsetzen.

Beachte dabei: Dies ist eine offene Aufgabe. Da wir deine Auswahl nicht vorausahnen können, wird dir keine Rückmeldung gegeben, ob dein Ansatz und deine Lösung richtig sind.

### Ein eigenes Modell auf Basis eines Ausschnitts aus der Temperaturzeitreihe

Da der vorliegende Datensatz sehr groß ist, wird hier ein in der Wissenschaft gängiges Verfahren gewählt: Die mathematischen Methoden werden zunächst an einem kleinen Datensatz erarbeitet. So kann leichter überprüft werden, ob das verwendete Modell geeignet ist und das beschreibt, was es beschreiben soll. Anschließend werden die Analysetechniken auf den kompletten Temperaturdatensatz übertragen (vgl. Arbeitsblatt 3).

#### Wir erkunden einen kleineren Datensatz und treffen Aussagen über den Trend

Zunächst kannst du selber einen kleinen Datensatz auswählen, an dem du dein Modell entwickelst. Analog zum ersten Arbeitsblatt sei die Zeitachse des Datensatzes um 1900 Jahre verschoben, und es gelte die Zeitrechnung seit Beginn der Industrialisierung (sBdl). Die kompletten jährlichen Temperaturanomalien und die zugehörigen Jahre sind in den Vektoren `temp` und `time` gespeichert.

#### Aufgabe 1

Wähle selbstständig Daten so aus, dass du

1. den Datensatz verkleinerst und
2. dennoch Aussagen über den Temperaturtrend treffen kannst.

#### Teil 1a

Speichere deine Daten in den beiden Vektoren `timeRed` und `tempRed`.

#### Teil 1b

Begründe deine Auswahl.

#### Teil 1c

Bestimme die Regressionsgerade, die deine Daten nach der Methode der kleinsten Abstandsquadrate am besten beschreibt.  
Bestimme außerdem deren Güte.

#### Teil 1d

Welche Aussagen kannst du über den Temperaturverlauf treffen?

In [ ]:

```
1 # 1a Hier hast du Platz deine eigene Datenauswahl zu treffen
2
3 timeRed = NaN ;
4 tempRed = NaN ;
```

**Abbildung A.23:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 7, Seite 1

```
In [1]: 1 # Jetzt du!
2 # 1c Bestimme hier das Residuum
3
4 DistGauss(m, b) = NaN ;
5
6 # Hier bitte nichts ändern!
7 mBest, bBest, distBestValue = Climate.regression(DistGauss);
8 Climate.plottenAB2A3b();
```

Im nächsten Code-Feld wird das Bestimmtheitsmaß der linearen Regression nach Gauß zum reduzierten Datensatz ausgerechnet und ausgegeben.

Klicke auf den nächsten Block und anschließend auf den "Run"-Button.



```
In [1]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 Rsqr = Climate.CoefficientOfDeterminationAB2(distBestValue, tempRed);
```

## Arbeitsblatt 5/6 - Zusatzaufgabe

Beginne mit diesem Teil erst, wenn du [Zusatzaufgabe A \(./AB5-SuS.ipynb\)](#) oder [Zusatzaufgabe B \(./AB6-SuS.ipynb\)](#) gemacht hast.

Erstelle auf Basis deines neuen Modells Prognosen über die Zukunft und reflektiere sie in Bezug auf das 1.5°C- oder 2°C-Ziel.

```
In [1]: 1 # Hier hast du Platz zum Rechnen
2
3
4
5
6
```



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung A.24:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 7, Seite 2

## A.5 Rückmeldungen der Lernenden zu den Durchführungen der CAMMP days

**Abbildung A.25:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 1/2

## Rückmeldungen der Lernenden zu den Durchführungen der CAMMP days | A.5

Kommentar											
11. Ich gebe den Betreuer die Schule:											
10.5. Abschließende Bewertung: Ich gebe dem CAMMP day die Schulnote:											
9. 4. Lernzweck: Was hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am Workshop gelernt?											
8. Hattest du gerne noch etwas anderes gesehen oder erfahren?											
7. Gab es etwas, was dir absolut nicht gefallen hat?											
6. Wie hat dir besonders gut gefallen?											
Alles in allem hat mir die Veranstaltung gut gefallen.											
Ich wurde an einen Kurs gerne noch einmal beschusen und wurde ihn auch anschauen.											
Ich kann mir vorstellen eine Ausbildung im Bereich der Haushaltswirtschaft oder der Technik zu beginnen.											
Ich kann mir vorstellen ein Studium im Bereich der Naturwissenschaften oder der Technik zu beginnen.											
Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt, das mir für die Schule, für ein Studium, für einen Beruf weiterhelfen kann.											
Durch den Kurs habe ich interessante Berufe und Studienmöglichkeiten kennen gelernt.											
Der Kurs hat mein Interesse an Denken, Problemlösen, Naturwissenschaften und Technik gesteigert.											
Die Lern- und Arbeitsziele waren angemessen (nicht zu lang oder kurz und genau definiert).											
Die Anleitungen zu den Experimenten waren verständlich und hilfreich.											
Die Inhalte wurden klar vermittelt.											
Die Lern- und Arbeitsatmosphäre war angenehm.											
Die Infokarten waren hilfreich.											
Die Aufgaben waren zu schwierig.											
Die Aufgaben waren zu einfach.											
Der Umgang mit Julia fiel mir schwer.											
Die Einführung in Julia war hilfreich.											
Der entzündende Kurzfilm war hilfreich. (falls es einen Kurzfilm gab)											
Der Vortrag über Modellierung war hilfreich.											
Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begreifen.											
3. Welche Schulfasse besuchst du?											
2. In welcher Schulfasse / Klassekennste best du?											
1. Bitte gib dein Geschlecht an:											
„Antwort-ID“											
7090609	weiblich	10EF	Gymnasium	2	3	1	3	3	3	2	3
7090604	männlich	10EF	Gymnasium	2	3	1	3	3	3	2	2
7090607	männlich	10EF	Gymnasium	3	3	1	2	3	3	1	2
7090601	männlich	10EF	Gymnasium	4	4	1	4	3	2	4	3
7090601	männlich	10EF	Gymnasium	4	4	1	4	3	2	4	3
7090612	weiblich	10EF	Gymnasium	7090619	männlich	10EF	Gymnasium	7090631	männlich	10EF	Gymnasium
7090621	männlich	10EF	Gymnasium	7090627	männlich	10EF	Gymnasium	7090634	männlich	10EF	Gymnasium
7090636	männlich	10EF	Gymnasium	7090639	männlich	10EF	Gymnasium	7090645	weiblich	10EF	Gymnasium
7090646	weiblich	10EF	Gymnasium	8090446	männlich	10EF	Gymnasium	8090448	männlich	10EF	Gymnasium
8090449	männlich	10EF	Gymnasium	8090449	männlich	10EF	Gymnasium	8090450	männlich	10EF	Gymnasium
8090452	männlich	10EF	Gymnasium	8090448	männlich	10EF	Gymnasium	8090443	männlich	10EF	Gymnasium
8090445	weiblich	10EF	Gymnasium	8090445	weiblich	10EF	Gymnasium	8090446	weiblich	10EF	Gymnasium
8090446	weiblich	10EF	Gymnasium	8090446	weiblich	10EF	Gymnasium	8090449	männlich	10EF	Gymnasium
8090449	männlich	10EF	Gymnasium	8090449	männlich	10EF	Gymnasium	8090450	männlich	10EF	Gymnasium
8090452	männlich	10EF	Gymnasium	8090452	männlich	10EF	Gymnasium	8090453	männlich	10EF	Gymnasium
8090453	männlich	10EF	Gymnasium	8090453	männlich	10EF	Gymnasium	8090456	männlich	10EF	Gymnasium
8090456	männlich	10EF	Gymnasium	8090456	männlich	10EF	Gymnasium	8090458	männlich	10EF	Gymnasium
8090458	männlich	10EF	Gymnasium	8090458	männlich	10EF	Gymnasium	8090460	männlich	10EF	Gymnasium
8090460	männlich	10EF	Gymnasium	8090460	männlich	10EF	Gymnasium	8090462	männlich	10EF	Gymnasium
8090462	männlich	10EF	Gymnasium	8090462	männlich	10EF	Gymnasium	8090463	männlich	10EF	Gymnasium
8090463	männlich	10EF	Gymnasium	8090463	männlich	10EF	Gymnasium	8090464	weiblich	10EF	Gymnasium
8090464	weiblich	10EF	Gymnasium	8090464	weiblich	10EF	Gymnasium	8090465	weiblich	10EF	Gymnasium
8090465	weiblich	10EF	Gymnasium	8090465	weiblich	10EF	Gymnasium	8090467	weiblich	10EF	Gymnasium
8090467	weiblich	10EF	Gymnasium	8090468	männlich	10EF	Gymnasium	8090475			
7090609	männlich	12/02		2	3	2	2	4	3	2	3
7090601	männlich	10/EE		4	3	2	3	1	4	3	4

**Abbildung A.26:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 2/3/4

Anhang A | Anhang zu: Gibt es den Klimawandel wirklich und ist er signifikant?

	Kommentar	
11. Ich gebe den Betreuer die Schulteile		
10. 5. Abschließende Bewertung: Ich gebe dem CAMPP-DoY die Schulteile.		
9. 4. Lernzwecke Was hast du für den praktisch durch die Teilnahme am Workshop gelernt?		
8. Hastest du gerne noch etwas anderes gehört oder erfahren?		
7. Gibt es etwas, was dir absolut nicht gefallen hat?		
6. Was hat dir besonders gut gefallen?		
Abs in allem hat mir die Veranstaltung gefallen		
Ich würde so einen Kurs gerne noch einmal besuchen und würde ihn auch anderen empfehlen		
Ich kann mir vorstellen eine Ausbildung im Bereich der Naturwissenschaften oder der Technik zu beginnen		
Ich kann mir vorstellen ein Studium im Bereich der Naturwissenschaften oder der Technik zu beginnen		
Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt, was mir für die Schule, für ein Studium oder für einen Beruf weiterhelfen kann.		
Durch den Kurs habe ich interessante Berufe- und Studienmöglichkeiten kennengelernt		
Der Kurs hat mich Interesse an Berufen und Naturwissenschaften und Technik gesteigert		
Die Lern- und Arbeitszeiten waren angemessen (nicht zu lang oder kurz mit ausreichend Pausen)		
Die Anleitungen zu den Experimenten waren verständlich und hilfreich		
Die Inhalte wurden klar vermittelt		
Die Lern- und Arbeitsatmosphäre war angenehm		
Die Hilfskarten waren hilfreich		
Die Aufgaben waren so schweig		
Die Aufgaben waren so einfach		
Der Umgang mit Julia fiel mir schwer		
Die Einführung in Julia war hilfreich		
Der einführende Kurzfilm war hilfreich (falls es einen Kurzfilm gab)		
Der Vortrag über Programmierung war hilfreich		
Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen		
3. Welche Schulform besuchst du?		
2. In welcher Schulklasse / Klassenstufe bist du?		
1. Bitte gib dein Geschlecht an		
AnredeID		
73033022 männlich 11/01		
73033033 männlich 11/01		
73033025 männlich 10/E/F		
73033026 männlich 11/01		
73033027 weiblich 10/E/F		
73033031 weiblich 11/01		
73033032 männlich 11/01	3	2
73033033 männlich 11/01	3	2
73033035 weiblich 11/01		
73033036 weiblich 12/02		
73033037 männlich 12/02		
73033039 weiblich 11/01		
73033040 männlich 12/02		
73033041 männlich 10/E/F		
73033042 weiblich 12/02		
73033043 männlich 13		
73033050 männlich 11/01		
73033052		
73033054 männlich 13		
73033055 männlich 10/E/F		
73033056 männlich 11/01	3	2
73033057 männlich 11/01	4	3
73033058 männlich 11/01		
73033059 weiblich 12/02		
73033063 weiblich 12/02		
73033071 weiblich 12/02		
73033072		
73033074 männlich 10/E/F		
73033075 männlich 11/01	3	2
73033076 männlich 11/01	3	2
73033077 männlich 11/01	3	2
73033078 männlich 11/01	3	2
73033079 männlich 11/01	3	2
73033080 männlich 11/01	3	2
73033081 männlich 11/01	3	2
73033082 männlich 11/01	3	2
73033083 männlich 11/01	3	2
73033084 männlich 11/01	4	3
73033085 männlich 11/01	4	3
73033086 männlich 11/01	4	3
73033087 männlich 11/01	4	3
73033088 männlich 11/01	4	3
73033089 männlich 11/01	4	3
73033090 männlich 11/01	4	3
73033091 männlich 11/01	4	3
73033092 männlich 11/01	4	3
73033093 männlich 11/01	4	3
73033094 männlich 11/01	4	3
73033095 männlich 11/01	4	3
73033096 männlich 11/01	4	3
73033097 männlich 11/01	4	3
73033098 männlich 11/01	4	3
73033099 männlich 11/01	4	3
73033100 männlich 11/01	4	3
73033101 männlich 11/01	4	3
73033102 männlich 11/01	4	3
73033103 männlich 11/01	4	3
73033104 männlich 11/01	4	3
73033105 männlich 11/01	4	3
73033106 männlich 11/01	4	3
73033107 männlich 11/01	4	3
73033108 männlich 11/01	4	3
73033109 männlich 11/01	4	3
73033110 männlich 11/01	4	3
73033111 männlich 11/01	4	3
73033112 männlich 11/01	4	3
73033113 männlich 11/01	4	3
73033114 männlich 11/01	4	3
73033115 männlich 11/01	4	3
73033116 männlich 11/01	4	3
73033117 männlich 11/01	4	3
73033118 männlich 11/01	4	3
73033119 männlich 11/01	4	3
73033120 männlich 11/01	4	3
73033121 männlich 11/01	4	3
73033122 männlich 11/01	4	3
73033123 männlich 11/01	4	3
73033124 männlich 11/01	4	3
73033125 männlich 11/01	4	3
73033126 männlich 11/01	4	3
73033127 männlich 11/01	4	3
73033128 männlich 11/01	4	3
73033129 männlich 11/01	4	3
73033130 männlich 11/01	4	3
73033131 männlich 11/01	4	3
73033132 männlich 11/01	4	3
73033133 männlich 11/01	4	3
73033134 männlich 11/01	4	3
73033135 männlich 11/01	4	3
73033136 männlich 11/01	4	3
73033137 männlich 11/01	4	3
73033138 männlich 11/01	4	3
73033139 männlich 11/01	4	3
73033140 männlich 11/01	4	3
73033141 männlich 11/01	4	3
73033142 männlich 11/01	4	3
73033143 männlich 11/01	4	3
73033144 männlich 11/01	4	3
73033145 männlich 11/01	4	3
73033146 männlich 11/01	4	3
73033147 männlich 11/01	4	3
73033148 männlich 11/01	4	3
73033149 männlich 11/01	4	3
73033150 männlich 11/01	4	3
73033151 männlich 11/01	4	3
73033152 männlich 11/01	4	3
73033153 männlich 11/01	4	3
73033154 männlich 11/01	4	3
73033155 männlich 11/01	4	3
73033156 männlich 11/01	4	3
73033157 männlich 11/01	4	3
73033158 männlich 11/01	4	3
73033159 männlich 11/01	4	3
73033160 männlich 11/01	4	3
73033161 männlich 11/01	4	3
73033162 männlich 11/01	4	3
73033163 männlich 11/01	4	3
73033164 männlich 11/01	4	3
73033165 männlich 11/01	4	3
73033166 männlich 11/01	4	3
73033167 männlich 11/01	4	3
73033168 männlich 11/01	4	3
73033169 männlich 11/01	4	3
73033170 männlich 11/01	4	3
73033171 männlich 11/01	4	3
73033172 männlich 11/01	4	3
73033173 männlich 11/01	4	3
73033174 männlich 11/01	4	3
73033175 männlich 11/01	4	3
73033176 männlich 11/01	4	3
73033177 männlich 11/01	4	3
73033178 männlich 11/01	4	3
73033179 männlich 11/01	4	3
73033180 männlich 11/01	4	3
73033181 männlich 11/01	4	3
73033182 männlich 11/01	4	3
73033183 männlich 11/01	4	3
73033184 männlich 11/01	4	3
73033185 männlich 11/01	4	3
73033186 männlich 11/01	4	3
73033187 männlich 11/01	4	3
73033188 männlich 11/01	4	3
73033189 männlich 11/01	4	3
73033190 männlich 11/01	4	3
73033191 männlich 11/01	4	3
73033192 männlich 11/01	4	3
73033193 männlich 11/01	4	3
73033194 männlich 11/01	4	3
73033195 männlich 11/01	4	3
73033196 männlich 11/01	4	3
73033197 männlich 11/01	4	3
73033198 männlich 11/01	4	3
73033199 männlich 11/01	4	3
73033200 männlich 11/01	4	3
73033201 männlich 11/01	4	3
73033202 männlich 11/01	4	3
73033203 männlich 11/01	4	3
73033204 männlich 11/01	4	3
73033205 männlich 11/01	4	3
73033206 männlich 11/01	4	3
73033207 männlich 11/01	4	3
73033208 männlich 11/01	4	3
73033209 männlich 11/01	4	3
73033210 männlich 11/01	4	3
73033211 männlich 11/01	4	3
73033212 männlich 11/01	4	3
73033213 männlich 11/01	4	3
73033214 männlich 11/01	4	3
73033215 männlich 11/01	4	3
73033216 männlich 11/01	4	3
73033217 männlich 11/01	4	3
73033218 männlich 11/01	4	3
73033219 männlich 11/01	4	3
73033220 männlich 11/01	4	3
73033221 männlich 11/01	4	3
73033222 männlich 11/01	4	3
73033223 männlich 11/01	4	3
73033224 männlich 11/01	4	3
73033225 männlich 11/01	4	3
73033226 männlich 11/01	4	3
73033227 männlich 11/01	4	3
73033228 männlich 11/01	4	3
73033229 männlich 11/01	4	3
73033230 männlich 11/01	4	3
73033231 männlich 11/01	4	3
73033232 männlich 11/01	4	3
73033233 männlich 11/01	4	3
73033234 männlich 11/01	4	3
73033235 männlich 11/01	4	3
73033236 männlich 11/01	4	3
73033237 männlich 11/01	4	3
73033238 männlich 11/01	4	3
73033239 männlich 11/01	4	3
73033240 männlich 11/01	4	3
73033241 männlich 11/01	4	3
73033242 männlich 11/01	4	3
73033243 männlich 11/01	4	3
73033244 männlich 11/01	4	3
73033245 männlich 11/01	4	3
73033246 männlich 11/01	4	3
73033247 männlich 11/01	4	3
73033248 männlich 11/01	4	3
73033249 männlich 11/01	4	3
73033250 männlich 11/01	4	3
73033251 männlich 11/01	4	3
73033252 männlich 11/01	4	3
73033253 männlich 11/01	4	3
73033254 männlich 11/01	4	3
73033255 männlich 11/01	4	3
73033256 männlich 11/01	4	3
73033257 männlich 11/01	4	3
73033258 männlich 11/01	4	3
73033259 männlich 11/01	4	3
73033260 männlich 11/01	4	3
73033261 männlich 11/01	4	3
73033262 männlich 11/01	4	3
73033263 männlich 11/01	4	3
73033264 männlich 11/01	4	3
73033265 männlich 11/01	4	3
73033266 männlich 11/01	4	3
73033267 männlich 11/01	4	3
73033268 männlich 11/01	4	3
73033269 männlich 11/01	4	3
73033270 männlich 11/01	4	3
73033271 männlich 11/01	4	3
73033272 männlich 11/01	4	3
73033273 männlich 11/01	4	3
73033274 männlich 11/01	4	3
73033275 männlich 11/01	4	3
73033276 männlich 11/01	4	3
73033277 männlich 11/01	4	3
73033278 männlich 11/01	4	3
73033279 männlich 11/01	4	3
73033280 männlich 11/01	4	3
73033281 männlich 11/01	4	3
73033282 männlich 11/01	4	3
73033283 männlich 11/01	4	3
73033284 männlich 11/01	4	3
73033285 männlich 11/01	4	3
73033286 männlich 11/01	4	3
73033287 männlich 11/01	4	3
73033288 männlich 11/01	4	3
73033289 männlich 11/01	4	3
73033290 männlich 11/01	4	3
73033291 männlich 11/01	4	3
73033292 männlich 11/01	4	3
73033293 männlich 11/01	4	3
73033294 männlich 11/01	4	3
73033295 männlich 11/01	4	3
73033296 männlich 11/01	4	3
73033297 männlich 11/01	4	3
73033298 männlich 11/01	4	3
73033299 männlich 11/01	4	3
73033300 männlich 11/01	4	3
73033301 männlich 11/01	4	3
73033302 männlich 11/01	4	3
73033303 männlich 11/01	4	3
73033304 männlich 11/01	4	3
73033305 männlich 11/01	4	3
73033306 männlich 11/01	4	3
73033307 männlich 11/01	4	3
73033308 männlich 11/01	4	3
73033309 männlich 11/01	4	3
73033310 männlich 11/01	4	3
73033311 männlich 11/01	4	3
73033312 männlich 11/01	4	3
73033313 männlich 11/01	4	3
73033314 männlich 11/01	4	3
73033315 männlich 11/01	4	3
73033316 männlich 11/01	4	3
73033317 männlich 11/01	4	3
73033318 männlich 11/01	4	3
73033319 männlich 11/01	4	3
73033320 männlich 11/01	4	3
73033321 männlich 11/01	4	3
73033322 männlich 11/01	4	3
73033323 männlich 11/01	4	3
73033324 männlich 11/01	4	3
73033325 männlich 11/01	4	3
73033326 männlich 11/01	4	3
73033327 männlich 11/01	4	3
73033328 männlich 11/01	4	3
73033329 männlich 11/01	4	3
73033330 männlich 11/01	4	3
73033331 männlich 11/01	4	3
73033332 männlich 11/01	4	3
73033333 männlich 11/01	4	3
73033334 männlich 11/01	4	3
73033335 männlich 11/01	4	3
73033336 männlich 11/01	4	3
73033337 männlich 11/01	4	3
73033338 männlich 11/01	4	3
73033339 männlich 11/01	4	3
73033340 männlich 11/01	4	3
73033341 männlich 11/01	4	3
73033342 männlich 11/01	4	3
73033343 männlich 11/01	4	3
73033344 männlich 11/01	4	3
73033345 männlich 11/01	4	3
73033346 männlich 11/01	4	3
73033347 männlich 11/01	4	3
73033348 männlich 11/01	4	3
73033349 männlich 11/01	4	3
73033350 männlich 11/01	4	3
73033351 männlich 11/01	4	3
73033352 männlich 11/01		

**Abbildung A.27:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 4/5

Kommentar	
1. Ich gebe den Beinamen die Schuhsohle.	2 1
10. 5. Abschließende Bewertung: Ich gebe dem CAMP Day die Schuhsohle.	2 1
9. 4. Lernzwecke Wie hast du für dich persönlich durch die Teilnahme am Workcamp gelernt?	2 2
8. Hastest du gerne noch etwas anderes gehört oder erfahren?	
7. Gab es etwas, was dir absolut nicht gefallen hat?	
6. Was hat dir besonders gut gefallen?	
Aber in allem hat mir die Veranstaltung gut gefallen.	
Ich würde so einen Kurs gerne noch einmal besuchen und würde ihn auch anderen empfehlen.	
Ich kann mir vorstellen eine Ausbildung im Bereich der Naturwissenschaften oder der Technik zu beginnen.	
Ich kann mir vorstellen ein Studium im Bereich der Naturwissenschaften oder der Technik zu beginnen.	
Ich habe in diesem Kurs viel Neues gelernt, was mir für die Schule, für ein Studium, für einen Beruf weiterhilft.	
Durch den Kurs habe ich interessante Berufe und Studienmöglichkeiten kennen gelernt.	
Der Kurs hat mein Interesse an Theorie der Naturwissenschaften und Technik gesteigert.	
Die Lern- und Arbeitsatmosphäre waren angemessen (nicht zu lang oder kurz am Computer).	
Die Anleitungen und die Experimenten waren verständlich und hilfreich.	
Die Inhalte wurden klar vermittelt.	
Die Lern- und Arbeitsatmosphäre war angenehm.	
Die HelferInnen waren hilfreich.	
Die Aufgaben waren zu schwierig.	
Die Aufgaben waren zu einfach.	
Der Umgang mit Julia fiel mir schwer.	
Die Einführung in Julia war hilfreich.	
Der eindringende Kurzfilm war hilfreich, (falls es einen Kurzfilm gab)	
Der Vortrag über Modellierung war hilfreich.	
Durch den Workshop habe ich mathematisches Modellieren besser begriffen.	
3. Welche Schuform besuchst du?	
2. In welcher Schulklasse / Klassenstufe bist du?	
1. Bitte gib dein Geschlecht an	
Antwort-ID	

**Abbildung A.28:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 6



# B

## Anhang zu: Klimarekorde – Alles nur Zufall?

### B.1 Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung

Anhand der folgenden Folien leiten die Betreuenden des Moduls „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ Lernende in die Thematik des Klimawandels und der mathematischen Modellierung ein. Die Präsentation dient als Hinführung zu den Problemfragen, die die Teilnehmenden im Laufe des Workshops beantworten.

The image shows two slides from a presentation. The left slide features a vertical color bar with blue and orange stripes, with the text "Introduced by Prof. Ed Hawkins" at the bottom. Below it, the title "Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?" and subtitle "Statistische Analyse von realen Temperaturdaten" are displayed, along with the CAMMP logo and a Creative Commons license icon. The right slide has the title "Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?" and four images illustrating climate events: a wildfire in California (2020), a heatwave in Europe (2019, 2020), flooding in Sudan (2020), and a cold wave in North America (2017). It also includes the CAMMP logo and a navigation bar.

Abbildung B.1: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 1–2

## Anhang B | Anhang zu: Klimarekorde – Alles nur Zufall?

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Wissenschaftliche Klimauntersuchungen  
IPCC  
INTERGOVERNMENTAL PANEL ON CLIMATE CHANGE  
Wissenschaftliche Klimauntersuchungen  
Regierungen, Wirtschaft, Industrie

Wissenschaftliche Klimauntersuchungen  
vandengner  
IPC  
INTERGOVERNMENTAL CLIMATE  
Klimauntersuchungen  
ungern, Wirtschaft, Industrie

**Sind die erlebten Klimarekorde Zufall?**

Mathematische Modellierung

Reales Problem  
Klimarekorde?

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Mathematische Modellierung

Reales Problem  
Klimarekorde → vereinfachen → Vereinfachtes Problem  
Temperaturrekorde

Temperaturanomaliezeitreihe  
Temperaturanomalie in °C  
Zeit in Jahren

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Was sind (Temperatur-)Rekordjahre?  
Rekordjahre sind die Jahre, in denen die Temperatur höher ist, als in allen (betrachteten) Jahren zuvor.

Temperaturanomaliezeitreihe  
Temperaturanomalie in °C  
Zeit in Jahren

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Was sind (Temperatur-)Rekordperioden?  
Rekordperioden sind Perioden (hier: Dekaden), in denen die Temperatur höher ist, als in allen (betrachteten) Perioden (hier: Dekaden) zuvor.

Temperaturanomaliezeitreihe  
Temperaturanomalie in °C  
Zeit in Jahren

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Mathematische Modellierung

Reales Problem  
Klimarekorde → vereinfachen → Vereinfachtes Problem  
Temperaturrekorde  
interpretieren  
mathematisch beschreiben  
berechnen Julia  
Mathematische Lösung → Mathematisches Modell

**Wie findest du eine Antwort auf diese Frage?**

- Bearbeite die Arbeitsblätter in Julia!
- Arbeit mit deinem Partner/deiner Partnerin zusammen!
- Frage die Betreuer/innen!
- Benutze das Internet!
- Präsentiere deine Lösungen und diskutiere sie mit den anderen!
- Helft euch gegenseitig!

Abbildung B.2: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 3–10

## B.2 Kopiervorlage zum Arbeitsblatt 2

----- Kopiervorlage zum Arbeitsblatt 2 -----

### Klimarekorde – Alles nur Zufall?

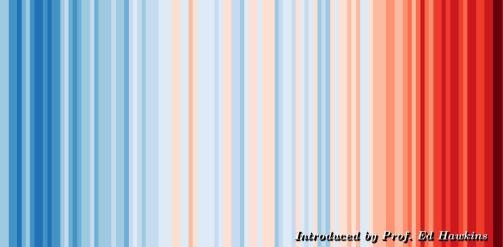
Zu Aufgabe: Permutationen erzeugen mithilfe des Computers

Zufallereignis	Absolute Häufigkeit des Auftretens	Relative Häufigkeit des Auftretens
1 Rekord		
2 Rekorde		
3 Rekorde		
4 Rekorde		
5 Rekorde		
6 Rekorde		
7 Rekorde		
8 Rekorde		
9 Rekorde		
10 Rekorde		
11 Rekorde		
12 Rekorde		
13 Rekorde		
14 Rekorde		
15 Rekorde		
16 Rekorde		
17 Rekorde		

Abbildung B.3: Kopiervorlage zum Arbeitsblatt 2, Aufgabe 2.a

### B.3 Präsentation für Diskussionsphasen

Anhand der folgenden Folien moderieren die Betreuenden des Moduls „Klimarekorde – Alles nur Zufall?“ Diskussionsrunden unter den Lernenden. (Zwischen-)Ergebnisse werden besprochen und in einen größeren Zusammenhang gesetzt.



**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**  
Statistische Analyse von realen Temperaturdaten

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Mathematische Modellierung

```

graph LR
    A[Reales Problem  
Klimarekorde] -- vereinfachen --> B[Vereinfachtes Problem  
Temperaturrekorde]
    
```

 Workshop | Klimawandel | 2/7

**Sind die erlebten Klimarekorde Zufall?**

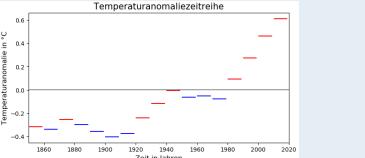
Kann die Anzahl der Rekorde, die seit Beginn der Temperaturaufzeichnungen gemessen wurden, durch den reinen Zufall erklärt werden?

- Wie Temperatur der letzten drei Jahrzehnte (bezieht sich auf die Jahrzehnte 1980-1998, 1990-1999 und 2000-2009) steigt sukzessive an und es sind die wärmsten des letzten Jahrhunderts. Welche zusätzlichen Informationen haben wir durch die Aufzeichnungen nach 2009 erhalten?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch den reinen Zufall erklärt werden kann?
  - Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekordperioden bei 17 Messgrößen gibt?
  - Welche Anzahl an Rekordperioden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen und in welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?
- Wie wahrscheinlich ist es, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind?

 Workshop | Klimawandel | 3/7

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Die Temperatur der letzten drei Jahrzehnte (bezieht sich auf die Jahrzehnte 1980-1998, 1990-1999 und 2000-2009) steigt sukzessive an und es sind die wärmsten des letzten Jahrhunderts. Welche zusätzlichen Informationen haben wir durch die Aufzeichnungen nach 2009 erhalten?



 Workshop | Klimawandel | 4/7

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Wie wahrscheinlich ist es, dass die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch den reinen Zufall erklärt werden kann?

- Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekordperioden bei 17 Messgrößen gibt?
- Welche Anzahl an Rekordperioden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen und in welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?

Harmonische Reihe:  
 $E \approx 3.44$

abgeschätzt über Histogramm:  
 $E \approx 3.0$

 Workshop | Klimawandel | 5/7

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Wie wahrscheinlich ist es, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind?

- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile  $P_{1\text{st}}$  ein.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die vorletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile  $P_{2\text{ndToLast}}$  ein.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die drittletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile  $P_{3\text{rdToLast}}$  ein.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die viertletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile  $P_{4\text{thToLast}}$  ein.
- Wie viele Rekordperioden  $k_{\text{rest}}$  gibt es nun noch und auf wie viele Perioden  $n_{\text{rest}}$  sind diese verteilt?
- Bestimme daraus die Gesamtwahrscheinlichkeit für das oben aufgeführte Ereignis.

 Workshop | Klimawandel | 6/7

Abbildung B.4: Präsentation für Diskussionsrunden, Folien 1–6

## B.4 Lernmaterialien

Der folgende Abschnitt enthält die zu bearbeitenden digitalen Arbeitsblätter.

**Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?**

Heute schlüpfst du in die Rolle eines Wissenschaftlers oder einer Wissenschaftlerin und forscht in einem kleinen Team an einer alltagsrelevanten Fragestellung. Dabei entwickelst du die mathematischen Hintergründe des realen Problems.

**⚠️ Bevor es losgeht...**

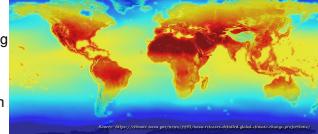
In diesem Workshop müssen alle Code-Felder (grau hinterlegt) durchgelaufen lassen werden, damit Daten und Diagramme geladen werden.

Klicke dazu in den Codeblock (gräulich gefärbt) und anschließend auf den "Run"-Button.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 # include("../code/loadPackages.jl");
3 include("../code/Climate.jl");
4
5 # Einlesen der Datensätze
6 timeHadCRUT, tempHadCRUT = Climate.ReadDatasetHadCRUT(); # jährlicher Datensatz
7 timeMean10, tempMean10, timeStart10, timeEnd10 = Climate.mean10HadCRUT(); # dekadischer Datensatz
```

**Motivation**

Einzelne heiße Tage lassen sich nur schwer auf den Klimawandel zurückführen. Denn ob es in Deutschland warm ist, ob es regnet oder nicht, hängt von vielen Faktoren ab, etwa von den Starkwinden des Jetstreams, den Meeresströmungen, der Wolkenbildung und nicht zuletzt vom Zufall. Tatsache ist aber: Wir erleben immer häufiger extreme anhaltende Wetterphasen bestehend aus Hitzzwellen, die zu großflächigen Waldbränden führen, Starkregenfälle, die Flüsse über die Ufer treten lassen, aber auch Kältewellen.



Dazu untersuchen wir echte **Temperaturdaten**. Möchtest du wissen, woher die Daten stammen und was ihre Bedeutung ist? Dann schaue hier auf dem [Daten-Infoblatt \(..../help/Datengrundlage.ipynb\)](#) nach!

**Problembeschreibung und die Temperaturzeitreihe**

Um nun besondere globale Temperaturen sichtbar zu machen, definieren wir Rekordjahre:

**Definition:** Rekordjahre sind Jahre, in denen die Temperaturanomalie größer ist als in allen Jahren zuvor (seit Beginn der Messdatenaufzeichnung). Analog sprechen wir von Rekordperioden, wenn ihre durchschnittliche Temperaturanomalie höher ist als alle durchschnittlichen Temperaturanomaliewerte der Perioden zuvor.

Die globale Durchschnittstemperatur schwankt. Klimawandelgegner behaupten u.a., dass das Auftreten von Rekordjahren auf zufällige Schwankungen in den Temperaturen zurückzuführen ist. Daher lautet unsere Forschungsfrage für heute:

**Kann die Anzahl der Rekorde, die seit Beginn der Temperaturaufzeichnungen gemessen wurden, durch den reinen Zufall erklärt werden?**

Dabei werden wir folgendermaßen vorgehen:

**Vorgehen:**

1. Betrachte dekadische Mittelwerte der globalen Erdoberflächentemperaturanomalie. Ermittle die Rekordperioden und bestimme deren Anzahl. Nimm Stellung zur folgenden Aussage aus dem letzten IPCC-Bericht: *Die Temperatur der letzten drei Jahrzehnte (bezieht sich auf die Jahrzehnte 1980-1989, 1990-1999 und 2000-2009) steigt sukzessive an und es sind die wärmsten des letzten Jahrhunderts. Welche zusätzlichen Informationen haben wir durch die Aufzeichnungen nach 2009 erhalten?*
2. Kann die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch den reinen Zufall erklärt werden?
  - 2.a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekordperioden bei 17 Messgrößen gibt?
  - 2.b) Welche Anzahl an Rekordperioden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen und in welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?
3. Wie wahrscheinlich ist es, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind?

Im folgenden Codefeld wird der Datensatz, den wir hier betrachten, geladen und gespeichert. [Hier \(..../help/DekadMittelwert.ipynb\)](#) erfährst du mehr zum dekadischen Mittelwert und den Variablen, in denen der Datensatz gespeichert ist.

**Abbildung B.5:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 1

299

Widmen wir uns nun der ersten Aufgabe unseres Vorgehens. Zunächst müssen wir die Rekordperioden identifizieren und ihre Anzahl bestimmen.

Unsere Daten stellen wir dazu graphisch dar:

**Teil 1a**

Zähle in der obigen Abbildung die Rekordperioden und gib die Anzahl im folgenden Code-Feld anstelle von `NaN` ein.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 numRecords = NaN
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 timeMean10Record, tempMean10Record, timeStart10Record, timeEnd10Record = Climate.checkAB1A1a();
```

Die Zeitreihe, die wir betrachten, beginnt im Jahr 1850. Nach Definition ist die erste Dekade unsere erste Rekordperiode. Wir speichern ihre durchschnittliche Temperaturanomalie in der Variablen `recordTemp` (s. im nächsten Codefeld Zeile 4). Für alle weiteren Jahrzehnte müssen wir nun überprüfen, ob sie eine Rekordperiode darstellen.

Im Folgenden muss häufig auf einzelne Einträge eines Vektors zugegriffen werden. Auf einem Zusatzblatt "[Übung zum Zugriff auf Vektorinträge](#)" ([./AB6-SuS.ipynb](#)) erfährst du, wie das geht. Solltest du hinreichende Kenntnisse im Programmieren mit Julia besitzen, so kannst du diese Übung überspringen.

**Teil 1b**

Stelle eine mathematische Regel auf, welche die Rekordperioden ermittelt. Formuliere diese Regel als (Un-)Gleichung. Nutze dazu den Zugriff auf die Vektoren `timeMean10`, `tempMean10` und/oder `recordTemp`. Gib diese anstelle von `NaN > NaN` im folgenden Code-Feld ein.

Diese Regel wird in eine if-Abfrage eingebunden, die sich in einer for-Schleife befindet. Hier findest du eine Erklärung zur [for-Schleife](#) ([./help/juliaforLoop-SuS.ipynb](#)) und zur [if-Abfrage](#) ([./help/juliaifCondition-SuS.ipynb](#)).

```
In [ ]: 1 # Hier in den ersten vier Zeilen nichts verändern!
2 # Der erste Temperaturanomaliemittelwert steht bereits im Vektor timeMean10Record
3 timeMean10Record, tempMean10Record, timeStart10Record, timeEnd10Record = Climate.RecordLoad10();
4 j=1;
5 recordTemp = tempMean10[1];
6
7 # Jetzt du!
8 # Hier sollen alle weiteren Rekorde ermittelt werden
9 for i=2:17
10     # Gib in der nächsten Zeile eine mathematische Bedingung ein, mit der du alle Rekorde erkennst
11     if NaN > NaN
12
13         # Falls die Bedingung stimmt, wird Rekordperiodenwert auf den neuen Rekord gesetzt
14         recordTemp = tempMean10[i];
15
16         Climate.RecordFill10(i,j); # Hier werden alle ermittelten Rekordperioden gespeichert
17         j=j+1;
18     else
19         j = j; # Falls die Bedingung nicht stimmt, dann passiert nichts weiter
20     end
21 end
22
23 # Hier nichts verändern!
24 Climate.plotLinesMean10Records(); # Liniendiagramm
```

**Teil 1c**

**Abbildung B.6:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 2

Als Ausgabe erhältst du eine Graphik, in der die **Rekordperioden deiner aufgestellten Regel** entsprechend **rot** eingefärbt sind. In **blau** sind alle weiteren Perioden eingezeichnet, die nach deiner Regel **keine Rekordperioden** darstellen.

Q Überprüfe, ob alle richtig markiert wurden.

1. Falls alles richtig markiert wurde, fahre fort mit dem nächsten Aufgabenteil.
2. Falls nicht alle Rekordperioden richtig markiert wurden, überprüfe deine Eingabe oben (1b) und korrigiere sie.

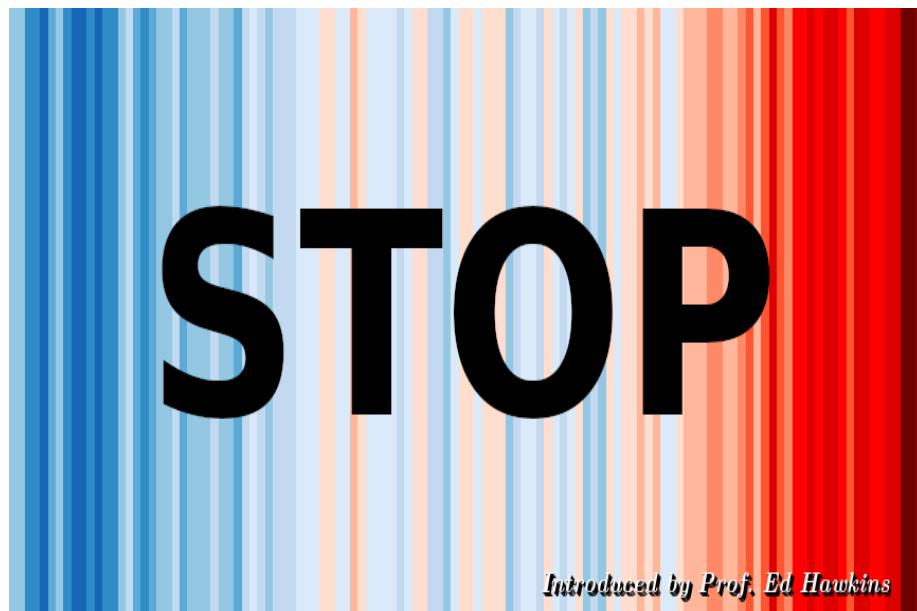
#### Teil 1d

Q Nimm Stellung zu der folgenden Aussage aus dem letzten IPCC-Bericht:

**Die Temperatur der letzten drei Jahrzehnte (bezieht sich auf die Jahrzehnte 1980-1989, 1990-1999 und 2000-2009) steigt sukzessive an und es sind die wärmsten des letzten Jahrhunderts.**

Welche Informationen haben wir durch die zusätzlichen Aufzeichnungen der Temperaturdaten vom Jahr 2010 bis heute (2019) erhalten?

**Bitte erst die Aufgabe 1d beantworten und dann weiterlesen!**



#### Zwischenfazit

Wir haben gesehen, dass nicht nur die im IPCC-Bericht genannten Jahrzehnte, sondern alle vier Jahrzehnte seit 1980 Rekordperioden sind. Das gab es noch nie zuvor. Sie treten also gehäuft auf. Jedoch können wir auch feststellen, dass die aufeinanderfolgenden Jahrzehnte von 1920-1950 bereits alle Rekordperioden waren. Auch sie stiegen sukzessive an und waren - betrachtet man lediglich die Temperaturanomaliewerte bis 1950 - die wärmsten Jahrzehnte seit Beginn der Aufzeichnungen. Anschließend sanken in den folgenden drei Jahrzehnten die Temperaturwerte (leicht). Die Frage 1 unseres Vorgehens ist damit beantwortet. Schauen wir uns den zweiten Punkt näher an ([hier zur Erinnerung](#)):

##### Vorgehen:

2. Kann die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch den reinen Zufall erklärt werden?
  - 2.a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekordperioden bei 17 Messgrößen gibt?
  - 2.b) Welche Anzahl an Rekordperioden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen und in welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?
3. Wie wahrscheinlich ist es, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind?

Es stellt sich also nun die Frage, ob der reine Zufall für eine solche Verteilung von Rekorden im betrachteten Zeitraum von Jahr 1850 bis 2019 verantwortlich sein kann.

**Abbildung B.7: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 3**

**Aufgabe 2 | Alles Zufall?**

Um uns dieser Frage zu nähern, abstrahieren wir die Messwertreihe: Wir betrachten nicht mehr einen speziellen Temperaturanomaliewert, sondern repräsentieren alle Werte durch die Zahlen 1 bis 17. Dabei repräsentiert die Zahl 1 den kleinsten Temperaturanomaliewert, 2 den zweitkleinsten, 3 den drittkleinsten, ... und 17 den höchsten Wert.

**Definition:** Die Zahlen 1 bis 17 nennen wir Repräsentanten der Temperaturanomaliewerte.

Die obige Abfolge von Repräsentanten der Temperaturanomalieperioden von 1850 bis 2019 sieht damit folgendermaßen aus. [Hier](#) ([../help/Repraesentant.ipynb](#)) gibt es eine Erklärung, wie diese Abfolge zustande kommt.

5 4 7 6 3 1 2 8 9 13 11 12 10 14 15 16 17

Wir untersuchen nun, wie wahrscheinlich diese Verteilung der Repräsentanten ist.

**Vorgehen:** Wie wahrscheinlich ist die Anzahl der Rekorde in der Temperaturzeitreihe? Kann sie durch den reinen Zufall erklärt werden?

Diese Aufgabe kann auf zwei Niveaustufen bearbeitet werden. Daher ist sie ausgelagert auf jeweils unterschiedliche Arbeitsblätter. Das Niveau 1 untersucht die Fragestellung mit schrittweisen Erläuterungen und ist eher experimenteller Art, wohin gegen beim Niveau 2 der Fokus auf einer mathematischen Analyse liegt.

1. [Hier kommst du zu dem Arbeitsblatt Niveau 1](#) ([./AB2-SuS.ipynb](#))
2. [Hier kommst du zu dem Arbeitsblatt Niveau 2](#) ([./AB3-SuS.ipynb](#))

**Ab hier wieder für alle!**

Fazit:  
Wir haben damit auch die zweite Frage unseres Vorgehens beantwortet. Bleibt nun noch die dritte Frage zu untersuchen:

**Vorgehen:**

3. Wie wahrscheinlich ist es, dass die letzten vier Jahrzehnte die wärmsten des letzten Jahrhunderts sind?

**Aufgabe 4**

Wir haben uns bislang nur auf die reine Anzahl der Rekorde konzentriert. Wir untersuchen nun, wie wahrscheinlich es ist, dass die letzten vier Jahrzehnte Rekordperioden sind.

**Teil 4a**

Bestimme wie wahrscheinlich es ist, dass die letzten vier Jahrzehnte Rekordperioden sind, wobei es insgesamt 9 Rekorde in den 17 Messdaten gibt.

Gehe dazu folgendermaßen vor:

1. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile `P_last` ein.
2. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die vorletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile `P_secondToLast` ein.
3. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die drittletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile `P_thirdToLast` ein.
4. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die viertletzte Periode eine Rekordperiode ist und trage diese in der Zeile `P_fourthToLast` ein.
5. Wie viele Rekordperioden `k_Rest` gibt es nun noch und auf wie viele Perioden `n_Rest` sind diese verteilt? Die entsprechende Wahrscheinlichkeit `P_Rest` wird über den Befehl `Climate.proby2(n_Rest, k_Rest)` für dich bestimmt.
6. Bestimme daraus die Gesamtwahrscheinlichkeit für das oben aufgeführte Ereignis.

 Für Tipps schaue [hier](#) ([./AB7-SuS.ipynb](#)) oder auf dem [Informationsblatt](#) ([../help/InfoHarmonisch.ipynb](#)) nach.

**Abbildung B.8: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 4**

```
In [ ]: 1 # Jetzt du! Ergänze!
2
3 P_last = NaN
4 P_secondToLast = NaN
5 P_thirdToLast = NaN
6 P_fourthToLast = NaN
7
8 k_Rest = NaN
9 n_Rest = NaN
10 P_Rest = Climate.proby2(n_Rest, k_Rest);
11
12 P_all = NaN
13
14 # Hier bitte nichts ändern!
15 Climate.checkAB1A4a();
```

**Teil 4b**

Interpreiere dein Ergebnis und nimm Bezug auf den klimatischen Hintergrund dieses Ergebnisses.

**Zusatzaufgaben**

Bist du schneller und hast noch Zeit für mehr Herausforderungen? Die folgenden Zusatzaufgaben können unabhängig voneinander gemacht werden.

**Teil Zusatz 1:**

Formuliere einen kurzen Brief an eine Person, die behauptet, dass das Auftreten von Rekordjahren auf zufällige Schwankungen in den Temperaturen zurückzuführen ist. Argumentiere dabei schlüssig unter Berücksichtigung der hier gewonnenen Erkenntnisse.

**Teil Zusatz 2 & 3:**

Wir haben bislang immer 10-Jahresperioden untersucht. Das lag daran, dass die Ausgangsthese im Bericht des IPCC eine Aussage über Dekaden gemacht hat.

Dabei stellt sich die Frage, ob die Ergebnisse, die wir zuvor erzielt haben, vom Anfangsjahr (und Endjahr) der Perioden abhängig ist. Genauer: Wie sieht die Verteilung der Temperaturanomalie-Rekorde aus, wenn nicht 1850 bis 1859 als Startperiode, sondern beispielsweise 1855 bis 1864 gewählt wird?

In dieser [Zusatzaufgabe 2 \(./AB4-SuS.ipynb\)](#) kannst du neue Verteilungen untersuchen, wie wahrscheinlich die Anzahl der Rekorde ist, in **Abhängigkeit des Startjahres**. Ändert sich die Aussagen der Ergebnisse im Vergleich zu den vorherigen?

Das Ergebnis ist möglicherweise nicht nur vom Anfangsjahr abhängig, sondern vl. auch oder eher davon, welche Zeitspannen betrachtet werden. Möchtest du wissen, wie viele Rekorde es im jährlichen Datensatz gibt und wie wahrscheinlich diese Anzahl ist?

In dieser [Zusatzaufgabe 3 \(./AB5-SuS.ipynb\)](#) kannst du die Verteilung untersuchen, wie wahrscheinlich die Anzahl der Rekorde ist, wenn der **jährliche Datensatz** zugrunde gelegt wird. Ändert sich die Aussage des Ergebnisses im Vergleich zu den vorherigen?



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz \(http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/\)](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung B.9:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 1, Seite 5

**Niveau 1: Schrittweise Analyse**

**Aufgabe 2 | Alles Zufall?**

Wir wollen nun untersuchen, wie wahrscheinlich diese Verteilung der Repräsentanten unter der Annahme eines Laplace-Modells ist und ob sie durch den einen Zufall erklärt werden kann.

Dazu klären wir zunächst die Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekorde bei 17 Messgrößen gibt?

**Teil 2a: Verteilungen würfeln**

Lasse dir eine zufällige Permutation der Zahlen 1 bis 17 "würfeln". Bestimme die Anzahl der Rekorde.

**Definition:** Eine Permutation der Zahlen 1, 2, ..., n ist eine Anordnung dieser Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge. Hier betrachten wir den Spezialfall n=17. Ordnen wir die Zahlen in einer bestimmten Reihenfolge an, bspw. aufsteigend: 1, 2, 3, ..., 15, 16, 17, so ist dies eine Permutation. Ebenso stellt aber auch eine andere Reihenfolge genau dieser Zahlen, bspw. 1, 3, 5, 7, ..., 15, 17, 2, 4, 6, ..., 14, 16, eine zulässige Permutation dar. Dabei darf jede Zahl nur genau einmal vorkommen. Es gibt daher hier 17! (gelesen: 17 Fakultät) Permutationen.

Notiere die Anzahl der Rekorde. Wiederhole das Experiment mindestens 10 mal und dokumentiere die Anzahl der Rekorde.

Hinweis: Hier steht dir eine [ausdruckbare Tabelle \(../printables/TabelleVerteilung.pdf\)](#) als Übersicht zur Verfügung. Frage ggf. bei deiner Lehrkraft nach.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 # include("../code/loadPackages.jl");
3 include("../code/Climate.jl");
4
5 # Einlesen der Datensätze
6 timeHadCRUT, tempHadCRUT = Climate.ReadDatasetHadCRUT(); # jährlicher Datensatz
7 timeMean10, tempMean10, timeStart10, timeEnd10 = Climate.mean10HadCRUT(); # dekadischer Datensatz
8
9 Climate.shuffleAB2();
```

**Teil 2b: Zufallsergebnisse austauschen**

Tauscht eure Ergebnisse aus dem Teil 2a mit euren Mitlernenden, die diesen Weg gewählt haben, aus. Ergänzt eure Tabelle.

Hinweis: Es kann helfen, die Ergebnisse an die Tafel zu schreiben.

**Teil 2c: Bestimmung der Wahrscheinlichkeit**

Bestimmt daraus die Wahrscheinlichkeit, dass es insgesamt 9 Rekorde bei 17 Messgrößen gibt.

**Teil 2d: Gesetz der großen Zahlen**

Je mehr Permutationen erzeugt werden, desto stärker nähert sich die relative Häufigkeit tendenziell der wahren Wahrscheinlichkeit an. Wird der Stichprobenumfang, das heißt hier die Anzahl an Permutationen, die betrachtet wird, groß genug gewählt, so ist das Ergebnis wissenschaftlich zulässig aufgrund des Gesetzes großer Zahlen. Somit können wir uns mit einem sehr großen Stichprobenumfang der unbekannten wahren Wahrscheinlichkeit der Anzahl der Rekorde annähern.

**Gesetz großer Zahlen:** Die relativen Häufigkeiten der einzelnen Rekord-Anzahlen der Rekorde bei N Versuchen nähern sich bei wachsendem N erfahrungsgemäß immer stärker den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten an. In mathematischer Sprache spricht man hier von stochastischer Konvergenz.

Allerdings ist es ziemlich lästig, die Vertauschungen immer wieder neu zu erzeugen und die Anzahl der Rekorde zu zählen, insbesondere, wenn wir sehr viele (1000, 50000 oder sogar noch mehr) Permutationen erzeugen wollen. Einfacher ist es, dies den Computer machen zu lassen.

Probier es aus!

Gib eine Stichprobengröße N ein, die besagt, wie viele Vertauschungen erstellt werden sollen.

Du bekommst die Verteilung der erzeugten Anzahl der Rekorde ausgegeben.

Probier verschiedene Stichprobengrößen aus. Ab welcher Stichprobengröße ändert sich das Ergebnis nicht mehr (oder nur noch wenig), sodass wir unter praktischen Gesichtspunkten von der wahren Wahrscheinlichkeit ausgehen können?

Vergleiche das neue Ergebnis mit dem aus der Aufgabe 2c.

Abbildung B.10: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 1

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 N = NaN
3
4 # Hier bitte nichts ändern!
5 Climate.AB2A2Zusatz();
```

### Teil 2e: Interpretation (gleich zum Niveau 2, Aufg. 2b)

Q Beantwortet damit nun die Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass es unter reinem Zufall insgesamt 9 Rekorde bei 17 Messgrößen gibt? Was bedeutet das für die Zeitreihe der Temperaturperioden?

## Aufgabe 3

Diese Aufgabe kann ebenfalls auf zwei Niveaustufen erarbeitet werden. Über diesen Link kannst du zum [Niveau 2 \(./AB3-SuS.ipynb/#Aufg3Niv2\)](#) wechseln. Alle, die ab hier neu einsteigen, greifen auf ihr Ergebnis aus ihrer Aufgabe 2a zurück.

Aber: Welche Anzahl an Rekorden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen?

Das vorherige Säulendiagramm stellt für n=17 Messwerte die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten der Anzahl der Rekorde dar.

### Teil 3a

█ Bestimme aus dem obigen Diagramm den Erwartungswert für die Anzahl der Rekorde bei 17 Messwerten. Trage den Erwartungswert in der Variable E17diagramm (abgeleitet von expectation value mit n=17 Messwerten abgelesen aus dem Diagramm) im folgenden Codefeld ein.

Hinweis: Eine ungefähre Abschätzung des Wertes ist ausreichend. Begründe diese mit Blick auf den Kontext.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 E17diagramm = NaN
3
4 # Hier bitte nichts ändern!
5 include("../code/Climate.jl");
6 Climate.checkAB2A3a1();
```

### Teil 3b: Interpretation

Q Überlege dir, welche Vor- und Nachteile dein Verfahren zur Bestimmung des Erwartungswertes hat.

Interpretiere dein Ergebnis und nimm Bezug auf den klimatischen Hintergrund dieses Ergebnisses.

[Hier kommst du wieder zurück zum Hauptarbeitsblatt! \(./AB1-SuS.ipynb/#Aufg4-alle\)](#)



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

Abbildung B.11: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 2, Seite 2

**Niveau 2: Ich will's mathematisch wissen!**

### Aufgabe 2 | Alles Zufall?

Wir wollen nun untersuchen, wie wahrscheinlich diese Verteilung der Repräsentanten unter der Annahme eines Laplace-Modells ist und ob sie durch den einen Zufall erklärt werden kann.

Dazu klären wir zunächst die Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt 9 Rekorde bei 17 Messgrößen gibt?

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 # include("../code/loadPackages.jl");
3 include("../code/Climate.jl");
```

#### Teil 2a

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 9 Rekorde in 17 Messgrößen gibt unter der Annahme eines Laplace-Modells?  
Bestimme die Wahrscheinlichkeit mathematisch/über ein rekursives Vorgehen.

Dazu machen wir eine Fallunterscheidung.

```
1. Fall: Wie wahrscheinlich ist es, dass bei n Werten genau ein Rekord auftritt?
💻 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 17 Werten genau ein Rekord auftritt?
Verallgemeinere anschließend für eine beliebige Anzahl an Werten, die wir mit n bezeichnen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Werten genau ein Rekord auftritt?
```

❶ Tipps findest du hier: [Tipp \(./AB8-SuS.ipynb\)](#)

Hinweis: Natürlich sind die Wahrscheinlichkeiten Zahlen. Um deine Eingabe jedoch kontrollieren zu können, wird hier die Eingabe hier zunächst als Wort aufgefasst, weshalb die Anführungszeichen stehen bleiben müssen.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 Pcase1 = "NaN"
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 Climate.checkAB3A2a1();
```

Betrachte nun den nächsten Fall:

```
2. Fall: Wie wahrscheinlich ist es, dass es genau 17 Rekorde (unter 17 Messwerten) gibt.
Oder allgemein formuliert:
💻 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau n Rekorde auftreten? Beachte, dass die Berechnung allgemein mit n zu formulieren ist.
```

❶ Klicke hier für einen Tipp!

Hinweis: Natürlich sind die Wahrscheinlichkeiten Zahlen. Um deine Eingabe jedoch kontrollieren zu können, wird hier die Eingabe hier zunächst als Wort aufgefasst, weshalb die Anführungszeichen stehen bleiben müssen.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 Pcase2 = "NaN"
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 Climate.checkAB3A2a2();
```

Der nächste Fall soll rekursiv definiert werden. Das bedeutet, dass er aus den vorherigen Fällen hergeleitet werden soll. Dazu verwenden wir den **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**, der Folgendes (auf unseren Fall angewandt) besagt:

Die Summe aus der Wahrscheinlichkeit, dass an der letzten Stelle **ein** Rekord auftritt und der Wahrscheinlichkeit, dass an der letzten Stelle **kein** Rekord auftritt, ist gleich 1.  
(Entweder es tritt der erste Fall ein, dass dort ein Rekord steht oder der zweite Fall, dass dort kein Rekord steht, tritt ein.)

Abbildung B.12: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 3, Seite 1

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 Pcase3 = "NaN"
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 Climate.checkAB3A2a();
```

Wir fassen nun alle Fälle in der Funktion proby(n,k) zusammen und lassen uns damit die Wahrscheinlichkeit ausgeben, dass es bei n=17 Messwerten k=9 Rekorde gibt.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 function proby(n,k)
3     if k==1
4         P = 1/n; # Dies war der erste Fall.
5     elseif k==n
6         P = 1/factorial(n); # Das war der zweite Fall (die Funktion factorial berechnet genau die
7     else
8         P = 1/n * proby(n-1, k-1) + (n-1)/n * proby(n-1,k) # Dies war der dritte Fall
9     end
10 end
11
12 # Die Wahrscheinlichkeit, dass es 9 Rekorde in 17 Messgrößen gibt:
13 P1709 = proby(17,9)
14 println("Die Wahrscheinlichkeit, dass es 9 Rekorde in 17 Messgrößen gibt ist ", P1709, ". ")
```

Man erhält damit folgende Verteilung für die Wahrscheinlichkeiten der Anzahl der Rekorde von insgesamt 17 Messwerten.

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts verändern.
2 Climate.AB3A2a();
```

### Teil 2b: Interpretation (gleich zum Niveau 1, Aufg. 2d)

⌚ Beantwortet damit nun die Frage: Wie wahrscheinlich ist es, dass es in einer Temperaturzeitreihe mit 17 Messgrößen 9 Rekorde auftreten?

## Aufgabe 3

Diese Aufgabe kann ebenfalls auf zwei Niveaustufen erarbeitet werden. Über diesen Link kannst du zum [Niveau 1 \(./AB2-SuS.ipynb/#Aufg3Niv1\)](#) wechseln.

Aber: Welche Anzahl an Rekorden erwarten wir in einem Datensatz aus 17 Messgrößen und in welchem Rahmen kann der erwartete Wert schwanken?

### Teil 3a

💻 Bestimme den Erwartungswert für die Anzahl der Rekorde. Informiere dich dazu über die n-te harmonische Zahl. Sie bietet eine Möglichkeit, den Erwartungswert (für eine große Anzahl an Werten) exakt zu bestimmen.

ⓘ Zusammengefasste Informationen findest du hier: [Informationsblatt \(./help/InfoHarmonisch.ipynb\)](#)

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 E17 = NaN
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 include("../code/Climate.jl");
6 Climate.checkAB3A3a();
```

### Teil 3b: Interpretation

⌚ Überlege dir, welche Vor- und Nachteile dein Verfahren zur Bestimmung des Erwartungswertes hat.

Interpretiere dein Ergebnis und nimm Bezug auf den klimatischen Hintergrund dieses Ergebnisses.

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung B.13:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 3, Seite 2

## Zusatzaufgabe zu: Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?

In den beiden Variablen `timeHadCRUT` und `tempHadCRUT` sind die jährlichen Zeit- und Temperaturanomaliedaten gespeichert.

Wir haben bislang immer 10-Jahresperioden untersucht. Dabei stellt sich die Frage, ob die Ergebnisse, die wir zuvor erzielt haben, vom Anfangsjahr (und Endjahr) der Perioden abhängig ist. Genauer: *Wie sieht die Verteilung der Temperaturanomalie-Rekorde aus, wenn nicht 1850 bis 1859 als Startperiode, sondern beispielsweise 1855 bis 1864 gewählt wird?*

Wir wollen auch für die neue Startperiode untersuchen, wie wahrscheinlich die verschiedenen Anzahlen der Rekorde sind. Ändern sich die Aussagen der Ergebnisse im Vergleich zu den vorherigen?

### Teil 1a

Wähle ein Startjahr, in dem die erste Dekade starten soll. Dir wird die Temperaturanomaliezeitreihe ausgegeben, wobei die Rekorddekaden rot markiert sind.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 # Wähle ein Startjahr (das Jahr, in dem die erste Dekade starten soll)
3
4 decadeStart = NaN
5
6 # Hier nichts verändern!
7 # include("../code/loadPackages.jl");
8 include("../code/Climate.jl");
9 timeHadCRUT, tempHadCRUT = Climate.ReadDatasetHadCRUT();
10 timeMean10, tempMean10, timeStart10, timeEnd10 = Climate.mean10HadCRUTZusatz();
11 timeMean10Record, tempMean10Record, timeStart10Record, timeEnd10Record = Climate.RecordLoad10()
12 Climate.Records();
13 Climate.plottenLinesMean10Records(); # Linienplot
14
```

### Teil 1b

Wie viele Rekorde (Parameter `k`) in wie vielen Dekaden (Parameter `n`) gibt es?

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 k = NaN
3 n = NaN
4
5 # Hier bitte nichts ändern!
6 println("Du hast in der obigen Abbildung ", k, " Rekorde in insgesamt ", n, " Dekaden gezählt.")
```

Kann die Anzahl der Rekorde, die seit Beginn der Temperaturaufzeichnungen gemessen wurden, durch den Zufall erklärt werden?

Gehe bei der Beantwortung der Frage wieder folgendermaßen vor:

#### Vorgehen:

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch blinden Zufall erklärt werden kann?
  - 1.a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt `k` Rekordperioden bei `n` Messgrößen gibt?
  - 1.b) Welche Anzahl an Rekordperioden erwarten wir in einem Datensatz aus `n` Messgrößen, und in welchem Rahmen sind Schwankungen zu erwarten?

### Teil 1c

Führe das folende Codefeld aus und beantworte die obigen Fragen in der Box "Vorgehen".

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2 Pnk = Climate.proby2(n,k);
3 println("Die Wahrscheinlichkeit, dass es ", k, " Rekorde in ", n, " Messgrößen gibt ist ", Pnk,
4 Climate.proby2draw(n,k);
```

Interpretiere dein Ergebnis und nimm Bezug auf den klimatischen Hintergrund dieses Ergebnisses.

Hier kommst du wieder zurück zu [Arbeitsblatt 1 \(./AB1/#AufgZusatz\)](#).

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung B.14:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 4, Seite 1

## Zusatzaufgabe zu: Sind die erlebten Klimarekorde nur Zufall?

In den beiden Variablen `timeHadCRUT` und `tempHadCRUT` sind die jährlichen Zeit- und Temperaturanomaliedaten gespeichert.

Wir haben bislang immer 10-Jahresperioden untersucht. Das lag daran, dass die Ausgangsthese im Bericht des IPCC eine Aussage über Dekaden gemacht hat. Möchtest du jetzt aber wissen, wie viele Rekorde es im jährlichen Datensatz gibt und wie wahrscheinlich diese Anzahl ist?

Genauer: **Wie sieht die Verteilung der Temperaturanomalie-Rekorde aus, wenn der jährliche Daten von 1850 (oder von 1900) bis 2021 untersucht werden?**

Wir wollen auch für die neue Startperiode untersuchen, wie wahrscheinlich die verschiedenen Anzahlen der Rekorde sind. Ändern sich die Aussagen der Ergebnisse im Vergleich zu den vorherigen?

### Teil 1a

Wählen ein (beliebiges) Startjahr, ab welchem der Datensatz untersucht werden soll. Dir wird die Temperaturanomaliezeitreihe ausgegeben, wobei die Rekorddekaden rot markiert sind.

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 yearStart = NaN
3
4 # Hier bitte nichts verändern!
5 # include("../code/loadPackages.jl");
6 include("../code/Climate.jl");
7 timeHadCRUT, tempHadCRUT = Climate.ReadDatasetHadCRUT();
8 fact, factinv = Climate.ReadFactorial();
9 probMatrixfull = Climate.probMatrixfull();
10 timeRecord = zeros(171);
11 tempRecord = zeros(171);
12 timeRecord, tempRecord, timeEntry = Climate.Records2(timeRecord, tempRecord);
13 Climate.plottenYearsRecords();
```

### Teil 1b

Wie viele Rekorde (Parameter `k`) in wie vielen Jahren (Parameter `n`) gibt es?

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2
3 k = NaN
4 n = NaN
```

Kann die Anzahl der Rekorde, die seit Beginn der Temperaturaufzeichnungen gemessen wurden, durch blinden Zufall, also unter einem Laplace-Modell, erklärt werden?

#### Achtung:

- Für  $n > 20$  wird die Berechnung der Wahrscheinlichkeit(en) schwierig: Die Fakultät von  $n$  wird dann sehr groß, sodass sie nicht mehr so einfach gespeichert werden kann. Für  $n=171$  ist die Fakultät so groß, dass sie gar nicht mehr bestimmt wird. Nimm deinen Taschenrechner und bestimme für einige  $n > 20$  die Fakultät.
- Für  $n > 54$  ist die Berechnung sehr aufwändig - man spricht von kostenintensiv. Dies liegt vor allem an den rekursiven Aufrufen für die Fälle,  $k>1$  und  $k$  ungleich  $n$ , da in jedem Schritt, die vorherigen Wahrscheinlichkeiten für kleinere  $k$  und  $n$  erneut bestimmt werden müssen.

Wie kann man dabei Abhilfe schaffen? Ganz einfach! Wir speichern alle vorherigen Wahrscheinlichkeiten für kleinere `k` und `n` in einer Tabelle (Matrix). Dann braucht in jedem Schritt nur noch in die Tabelle geschaut werden, und die Wahrscheinlichkeiten können schnell bestimmt werden.

#### Vorgehen:

1. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Verteilung der Rekordperioden in der Temperaturzeitreihe durch den Zufall erklärt werden kann?
- 1.a Wie wahrscheinlich ist es, dass es insgesamt `k` Rekordperioden bei `n` Messgrößen gibt?

### Teil 1c

**Abbildung B.15:** Lernmaterialien, Arbeitsblatt 5, Seite 1

Führe das folgende Codefeld aus und beantworte die obigen Fragen der Box "Vorgehen".

Beachte: Hier wird kein Säulendiagramm mehr erscheinen, welches für alle  $k=1, \dots, n$  die Wahrscheinlichkeiten ausgibt, da die

```
In [ ]: 1 # Hier bitte nichts ändern!
2
3 Pnk = probMatrixfull[k,n];
4 println("Die Wahrscheinlichkeit, dass es ", k, " Rekorde in ", n, " Messgrößen gibt ist ", Pnk,
```

Hier kommst du wieder zurück zu [Arbeitsblatt 1 \(./AB1/#AufgZusatz\)](#).

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

Abbildung B.16: Lernmaterialien, Arbeitsblatt 5, Seite 2

## Programmiertechnische Vorübung für den Zugriff auf Einträge eines Vektors

 Im Folgenden muss häufig auf einzelne Einträge eines Vektors zugegriffen werden. Daher wird an dieser Stelle eine kleine Vorübung eingeschoben. Solltest du hinreichende Kenntnisse im Programmieren mit Julia besitzen, so kannst du diese Übung überspringen.

Wir betrachten den Vektor  $t := [1900, 1925, 1950, 1975, 2000]$ . Es bezeichnet  $t[k]$  den  $k$ -ten Eintrag. Für  $k < l$  ist  $t[k : l]$  der Teilvektor von  $t$ , der aus den Komponenten  $k$  bis  $l$  besteht. Das folgende Beispiel veranschaulicht den Zugriff auf Einträge eines Vektors:

Auf den dritten Eintrag wird über  $t[3]$  zugegriffen. In dieser Komponente steht der Wert 1950. Über  $t[3:5]$  greift man auf den Teilvektor  $t[3:5] = [1950, 1975, 2000]$  zu.

Die Einträge des Vektors  $t$  stellen die Jahreszahlen 1900, 1925, 1950, 1975 und 2000 dar. In einem zweiten Vektor  $T$  sind die zu diesen Jahren gemessenen globalen durchschnittlichen Temperaturanomalien gespeichert.

### Aufgabe VÜ

Lasse dir das Jahr 1975 mit zugehörigem Temperaturanomaliewert anzeigen. Nutze dazu den Zugriff auf Vektoreinträge. Ersetze dafür im folgenden Code-Feld die `NaN`.

Falls du Tipps benötigst, kannst du dir hier [Hinweis 1 \(./help/deVektoreintragHilfe1.ipynb\)](#) und [Hinweis 2 \(./help/deVektoreintragHilfe2.ipynb\)](#) ansehen.

```
In [ ]: 1 # Hier in den ersten beiden Zeilen bitte nichts ändern - die beiden Vektoren werden geladen.
2 include("../code/Climate.jl")
3 t, T = Climate.ladenVUentries();
4
5 # Jetzt du!
6 time = NaN ;
7 Temp = NaN ;
8
9 # Hier bitte nichts ändern!
10 Climate.checkVUentries();
```

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

Abbildung B.17: Lernmaterialien, Vorübung für den Zugriff auf Einträge eines Vektors, Seite 1

**Tipp: Wie wahrscheinlich ist es, dass an der k-ten Stelle ein Rekord auftritt?**

Um diese Frage zu beantworten, unterscheiden wir die Fälle, dass

- an der ersten Stelle ein Rekord auftritt,
- an der zweiten Stelle ein Rekord auftritt,
- an der dritten Stelle ein Rekord auftritt,
- u.s.w.
- an der siebzehnten Stelle ein Rekord auftritt.

Beantworte zunächst die Frage, dass an der ersten Stelle ein Rekord auftritt.

```
In [ ]: 1 P1place = NaN
2
3 # Hier bitte nichts ändern:
4 include("../code/Climate.jl");
5 Climate.checkAB7help1();
```

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an der zweiten Stelle ein Rekord steht?

Klicke hier für einen **Tipp**!

Klicke hier für einen **Tipp**!

```
In [ ]: 1 P2place = NaN
2
3 # Hier bitte nichts ändern:
4 Climate.checkAB7help2();
```

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an der dritten Stelle ein Rekord steht?

Klicke hier für einen **Tipp**!

```
In [ ]: 1 P3place = NaN
2
3 # Hier bitte nichts ändern:
4 Climate.checkAB7help3();
```

Wir können so natürlich jetzt für alle Fälle per Hand durchgehen und die günstigen Fälle aus den möglichen Fällen extrahieren. Hast du vielleicht schon eine Regel erkannt und brauchst daher gar nicht mehr alles einzeln durchgehen? Dann versuche allgemein zu formulieren:

Die Wahrscheinlichkeit, dass an der k-ten Stelle ein Rekord auftritt, ist gleich "NaN". Bitte lasse hier die Anführungszeichen stehen, da deine Eingabe als Wort gewertet wird.

Hier kommst du zur **Antwort**!

```
In [ ]: 1 Pkplace = "NaN"
2
3 # Hier bitte nichts ändern:
4 Climate.checkAB7help4();
```

---

 Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung B.18:** Lernmaterialien, Tippkarte 1, Seite 1

**Tipp: Wie wahrscheinlich ist es, dass genau ein Rekord auftritt?**

Um diese Frage zu beantworten überlegen wir uns, wie die Abfolge der Zahlen von 1 bis 17 (allgemein: bis  $n$ ) aussehen muss.

Dazu machen wir uns das Leben einfacher und betrachten erst einmal den Fall, dass unsere Abfolge von Zahlen nur aus der Zahl 1 besteht ( $n=1$ ). *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Rekord auftritt?*

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 P1 = NaN
3
4 # Hier bitte nichts ändern:
5 include("../code/Climate.jl");
6 Climate.checkAB8help1();
```

Betrachte eine Abfolge von Zahlen, die aus der 1 und 2 besteht ( $n=2$ ). *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Rekord auftritt?*

Klicke hier für einen Tipp!

Klicke hier für einen Tipp!

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 P2 = NaN
3
4 # Hier bitte nichts ändern:
5 Climate.checkAB8help2();
```

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter einer Abfolge von drei Zahlen ( $n=3$ ) genau ein Rekord steht?

Klicke hier für einen Tipp!

```
In [ ]: 1 # Jetzt du!
2 P3 = NaN
3
4 # Hier bitte nichts ändern:
5 Climate.checkAB8help3();
```

Wir können so natürlich jetzt für alle Fälle per Hand durchgehen und die günstigen Fälle aus den möglichen Fällen extrahieren. Hast du vielleicht schon eine Regel erkannt und brauchst daher gar nicht mehr alles einzeln durchgehen? Dann versuche allgemein zu formulieren:

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter einer Abfolge von  $n$  Zahlen genau ein Rekord auftritt, ist gleich "NaN". Bitte lasse hier die Anführungszeichen stehen, da deine Eingabe als Wort gewertet wird.

Klicke hier für die Antwort!

```
In [ ]: 1 Pn = "NaN"
2
3 # Hier bitte nichts ändern:
4 Climate.checkAB8help4();
```

Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>)

Autorin: Maren Hattebuhr

**Abbildung B.19:** Lernmaterialien, Tippkarte 2, Seite 1

## B.5 Rückmeldungen der Lernenden zu den Durchführungen der CAMMP days

**Abbildung B.20:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 1

**Abbildung B.21:** Rückmeldungen der Lernenden zu den CAMMP day-Durchführungen, Klasse / Kurs 2

# C

## Anhang zu: Ist der Klimawandel menschengemacht?

### C.1 Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung

Anhand der folgenden Folien leitet die bzw. der Betreuende des Moduls „Ist der Klimawandel menschengemacht“ Lernende in die Thematik des Klimawandels und der mathematischen Modellierung ein. Die Präsentation dient als Hinführung zu den Problemfragen, die die Teilnehmenden im Laufe der Modellierungswoche beantworten.



Abbildung C.1: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 1–2

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

Waldbrand in Kalifornien  
2020

Hitzerekorde in Europa,  
..., 2019, 2020

Kältewelle in Nordamerika  
u. Kanada, 2017

Überschwemmungen im  
Sudan, 2020

Quelle: <https://www.bbc.com/news/world-us-canada-46351940>, BBC News, 2018

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 2/5

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

In October, President Trump accused climate change scientists of having a "political agenda", telling Fox News he was unconvinced that humans were responsible for the earth's rising temperatures.

Quelle: <https://www.bbc.com/news/world-us-canada-46351940>, BBC News, 2018

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 3/5

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

In October, President Trump accused climate change scientists of having a "political agenda", telling Fox News he was unconvinced that humans were responsible for the earth's rising temperatures.

Quelle: <https://www.bbc.com/news/world-us-canada-46351940>, BBC News, 2018

Wissenschaftler/innen gesucht!

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 3/5

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

**Gegeben:**

- Beschreibung des Energiehaushalts auf der Erde

Strahlung im UV und sichtbaren Bereich

Strahlung im IR-Bereich

Emission

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 4/5

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

**Gegeben:**

- Beschreibung des Energiehaushalts auf der Erde

Strahlung im UV und sichtbaren Bereich

Strahlung im IR-Bereich

Emission

Und die Atmosphäre?

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 4/5

**Ist der Klimawandel menschengemacht?** Steinbuch Centre for Computing

**Gegeben:**

- Prozesse zur Beschreibung des Energiehaushalts auf der Erde

**Gesucht: relevante natürliche vs anthropogene Ursachen**

Mögliche (nicht zwangsläufig relevante) Ursachen:

- Sonneneruptionen-Zyklus
- Erdbahnpараметer (Exzentrizität, Obliquität, Präzession)
- Reflexionsvermögen der Erdoberfläche
- Vulkanausbrüche
- Treibhausgase

KIT RWTH AACHEN UNIVERSITY Maren Hettelschr. | 5/5

Abbildung C.2: Präsentation zum Einstieg in die Problemstellung, Folien 3–8

# D

## Anhang zu: Eine empirische Studie zum mathematischen Modellieren in der Klimaforschung

### D.1 Problemstellung des IM<sup>2</sup>C 2019

**Problem:** What is the Earth's *carrying capacity* for human life?

1. Identify and analyze the major factors that you consider crucial to limiting the Earth's carrying capacity for human life under current conditions.
2. Use mathematical modeling to determine the current carrying capacity of the Earth for human life under today's conditions and technology.
3. What can mankind realistically do to raise the carrying capacity of the Earth for human life in perceived or anticipated future conditions? What would those conditions be?

Note that IM<sup>2</sup>C is aware of available resources and references that address and discuss this question. It is not sufficient to simply re-present any of these models or discussions, even if properly cited. Any successful paper must include development and analysis of your model.

Your submission should consist of:

- One-page Summary Sheet.
- Your solution of no more than 20 pages, for a maximum of 21 pages with your summary.
- A complete list of references with in-text citations.
- **Note:** Reference list and any appendices do not count toward the 21-page limit and should appear after your completed solution.

## Glossary:

**Carrying Capacity:** The carrying capacity of a biological species in an environment is the maximum population size of the species that the environment can sustain indefinitely, given the food, habitat, water, and other necessities available in the environment.

## D.2 Schulmaterial im Rahmen der empirischen Studie

Die Abbildung D.1 zeigt das Arbeitsblatt, das die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler im Rahmen der empirischen Studie erhielten. Es stand ihnen weiterer, über den hier sichtbaren Bereich hinausgehender Platz zur Dokumentation des Lösungsvorgehens zur Verfügung. Die Anleitung für Lehrkräfte ist in den Abbildungen D.2–D.7 angefügt.

**Abbildung D.1:** Aufgabenblatt, das Teilnehmende der empirischen Studie erhielten, mit weiterem Platz zur Dokumentation der Lösung

**E-Mail für Anschreiben an die Lehrkräfte:**

Sehr geehrte Frau/Herr ...

Wir vom Computational and Mathematical Modeling Program (CAMMP) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT) wollen in Kooperation mit CAMMP von der RWTH Aachen und dem Kompetenzzentrum für mathematische Modellierung (KOMMS) der TU Kaiserslautern (TUK) mehr Modellierung in den Schulalltag bringen. Unser Ziel ist, dass offene Problemstellungen, in denen mit Modellen gearbeitet wird und verschiedene Lösungswege existieren, vermehrt im Regelunterricht eingesetzt sowie in die Abiturprüfungen aufgenommen werden. Um dies zu ermöglichen, wollen wir zunächst die Durchführung und Bewertung einer solchen offenen Problemstellung in den verschiedenen Jahrgangsstufen (Klasse 5 bis zum Abitur) testen und erforschen, welche Bewertungskriterien umsetzbar und fair sind.

Dieser Test dauert insgesamt nicht länger als eine Schulstunde (45 Min.) und gliedert sich in eine Bearbeitungszeit von 30 Minuten und einen anschließenden Evaluationsbogen (ca. 10 Min.).

Zur Durchführung der Aufgabe benötigen die Schülerinnen und Schüler lediglich etwas zum Schreiben, ein Lineal und einen Taschenrechner (falls diese schon im Mathematikunterricht eingesetzt werden). Die Testung kann somit in der Schule in jedem Klassenraum stattfinden. Die Abgabe der Lösungen sowie der Fragebogen werden durch einen Buchstaben-Zahlen-Code anonymisiert. Bitte schicken Sie uns alle Ergebnisse per Post im beigefügten Umschlag zurück.

Außerdem wären wir an Ihrer Einschätzung zu möglichen Lösungsansätzen und Kriterien welche die Lernenden erfüllen sollen bzw. müssen interessiert.

Würden Sie uns unterstützen und mit Ihren Klassen einen Teil zur Forschung beitragen? Bei der Terminwahl sind wir sehr flexibel, da wir selbst bei der Durchführung nicht anwesend sein müssen. Uns wäre jedoch ein Termin noch vor den Sommerferien recht, falls das möglich ist. Wir würden uns über eine baldige Antwort freuen.

Bei Nachfragen können Sie sich gerne an uns wenden.

Vielen Dank im Voraus!

Viele Grüße

...

**Abbildung D.2:** Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 1

**Anleitung und Hinweise für Lehrkräfte zur Durchführung:**

Vielen Dank für Ihre Teilnahme an unserem Projekt zur Erforschung der Umsetzung von offenen Problemstellungen im Regelunterricht sowie deren Bewertung.

Der Ablauf der Stunde soll wie folgt aussehen:

- 1) Vorlesen der Instruktionen (s. u.)
- 2) Austeilern der Aufgabenstellung
  - Falls nötig, Operatoren erklären
- 3) Bearbeitung der Aufgabe (30 min)
  - Während dieser Zeit: Ausfüllen des Lehrkraftfragebogens
- 4) Einsammeln der Ergebnisse
- 5) Ausfüllen und Einsammeln des Schülerfragebogen (ca. 10 min.)
  - Falls nötig, Bewertungsskala erklären

**Umgang mit Schülerfragen während der Durchführung:**

Prinzipiell sollten die Schülerinnen und Schüler so weit wie möglich auf sich allein gestellt sein. Fragen zum grundlegenden Verständnis der Problemstellung können im Notfall beantwortet werden (diese bitte auf dem Lehrerfragebogen in der dafür vorgesehenen Tabelle „Schülermeldungen“ vermerken). Daten, wie beispielsweise Größenangaben zur Erde oder Ländern, Bevölkerungszahlen oder Ähnliches sollen nicht vorgegeben werden. Eine sinnvolle Schätzung mit Begründung wird hier von den Lernenden erwartet. Zur Ermutigung bei großen Problemen von Seiten der Schülerschaft können subtile Tipps gegeben werden. Beispielsweise besteht die Möglichkeit der Abschätzung oder Voraussetzen von gewissen Größen (dies bitte auch auf dem Lehrkraftfragebogen in der dafür vorgesehenen Tabelle „Schülermeldungen“ vermerken).

**Umgang mit den Ergebnissen:**

Die Ergebnisse, die ausgefüllten Schüler- und Lehrkraft-Fragebögen senden Sie bitte in dem beigefügten großen Umschlag (bereits frankiert) per Post an uns zurück. Es erhalten keine unbefugte Dritte Einsicht in die Daten.

Adresse:  
Karlsruher Institut für Technologie  
SCC  
z.Hd. Maren Hattebuhr  
Hermann-von-Helmholtz-Platz 1  
76344 Eggenstein-Leopoldshafen

Beim Einsammeln erinnern Sie bitte Ihre Klasse nochmal daran, dass auf dem Aufgabenblatt sowie dem Fragebogen das persönliche Kürzel steht.

Bei Interesse können wir Ihnen unsere erarbeiteten Bewertungskriterien und den Erwartungshorizont für eine Besprechung der Aufgabe im Unterricht zukommen lassen. Die Bewertung und weitere Fragen können gerne per E-Mail mit uns kommuniziert werden.

**Abbildung D.3: Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 2**

**Instruktionen (zum Vorlesen) (JGS 5. – 8.):**

„Liebe Schülerinnen und Schüler,  
ein herzliches Dankeschön für Eure Teilnahme an diesem Projekt.  
Ihr habt für die Bearbeitung der Aufgabe 30 Minuten Zeit. Die Aufgabe ist eine offene Problemstellung. Hierbei gibt es folglich verschiedene Möglichkeiten und Wege, sie zu lösen und auch die Lösung kann bei jedem von Euch sehr unterschiedlich sein. Also tastet Euch Schritt für Schritt an die Aufgabe heran, notiert Zwischenergebnisse und versucht in der kurzen Zeit so weit zu kommen wie ihr es schafft. Bei der Bearbeitung müsst ihr vielleicht auch mal etwas abschätzen oder Vermutungen aufstellen. Das notiert ihr dann bitte an der entsprechenden Stelle.  
Eure Ergebnisse sowie der im Anschluss ausgeteilte kurze Fragebogen werden anonymisiert. Das heißt, alles was ihr abgibt, kann weder von uns, noch von eurer Lehrkraft wieder mit Euch in Verbindung gebracht werden. Hierfür notiert ihr bitte auf dem Aufgabenblatt Euer persönliches Kürzel. Dieses besteht aus den zwei ersten Buchstaben des Straßennamens, in der ihr wohnt, gefolgt von eurer Lieblingszahl. Wohnt ihr beispielsweise in der Hauptstraße und ist Eure Lieblingszahl die 12, so würde Euer Kürzel: „HA12“ lauten.  
Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Problemstellung!“

**Instruktionen (zum Vorlesen) (JGS 9. – Abi):**

„Liebe Schülerinnen und Schüler,  
ein herzliches Dankeschön für Eure Teilnahme an diesem Projekt.  
Ihr habt für die Bearbeitung des folgenden Problems 30 Minuten Zeit. Da diese Aufgabe eine sehr offene Problemstellung ist, gibt es nicht nur einen Lösungsweg oder eine Lösung. Also tastet Euch Schritt für Schritt an die Aufgabe heran, notiert Zwischenergebnisse und versucht in der kurzen Zeit so weit zu kommen wie ihr es schafft. Dabei müsst ihr eventuell Abschätzungen treffen oder Vermutungen aufstellen, was ihr bitte an der entsprechenden Stelle kenntlich macht.  
Eure Ergebnisse sowie der im Anschluss ausgeteilte kurze Fragenbogen werden anonymisiert. Das heißt, alles was ihr abgibt, kann weder von uns noch von eurer Lehrkraft wieder mit Euch in Verbindung gebracht werden. Hierfür notiert ihr bitte, wie auf dem Aufgabenblatt beschrieben, ein Kürzel aus Buchstaben und Zahlen auf jedes Blatt.  
Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Problemstellung!“

**Abbildung D.4:** Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 3

## Bewertungskriterien

### Testaufgabe zur mathematischen Modellierung – Menschen auf der Erde

Vielen Dank, dass Sie mit Ihren Schüler\*innen eine neue Art von sehr offenen Modellierungsaufgaben testen. Während die Schüler\*innen die Problemstellung bearbeiten, würden wir Sie bitten sich ein paar Gedanken zu möglichen Bewertungskriterien der Problemstellung zu machen.

#### 1. Persönliche Angaben

Länge Ihrer Berufserfahrung: \_\_\_\_\_ Geschlecht:  weiblich  männlich  divers

Fächer: \_\_\_\_\_

#### 2. Bewertungskriterien

Lesen Sie sich selbst die Aufgabe durch und überlegen Sie sich, was mögliche Gedankengänge von Schüler\*innen sein könnten. Unser Ziel ist es später einen Erwartungshorizont zu erstellen wofür wir erst einmal sinnvolle Bewertungskriterien benötigen.

- Notieren Sie unten bitte stichpunktartig die Kriterien, die Sie zur Bewertung verwenden würden.
- Machen Sie dies bitte für die Jahrgangsstufe von der Sie gerade die Problemstellung bearbeiten lassen.
- Sie brauchen hierbei keine Bepunktung vorzunehmen.

Jahrgangsstufe: \_\_\_\_\_ Verwenden die Schüler\*innen einen Taschenrechner?  Ja  Nein

Falls ja, welches Modell? \_\_\_\_\_

1/2

Abbildung D.5: Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 4

**3. Abänderungen für andere Jahrgangsstufen**

An welchen Stellen würden Sie die Kriterien abändern, wenn sie für die Bewertung der gleichen Problemstellung aber für ältere oder jüngere Schüler\*innen sein soll? Wie würden Sie die Kriterien abändern?

Es reicht, wenn Sie die Änderungen bei Ihren Kriterien farblich ergänzen.

**4. Weiterführende Fragen**

Setzen Sie schon solche offenen Problemstellungen im Unterricht ein?  Ja  Nein

Würden Sie eine solche offene Problemstellung (häufiger) im Unterricht einsetzen? Welche Chancen sehen Sie, welche Nachteile?

---

---

---

---

Sehen Sie eine solche offene Aufgabe auch als Prüfungsaufgabe realisierbar?

---

---

---

---

Wie müsste man Schüler\*innen auf offene Prüfungsaufgaben vorbereiten? Wo sehen Sie Lücken?

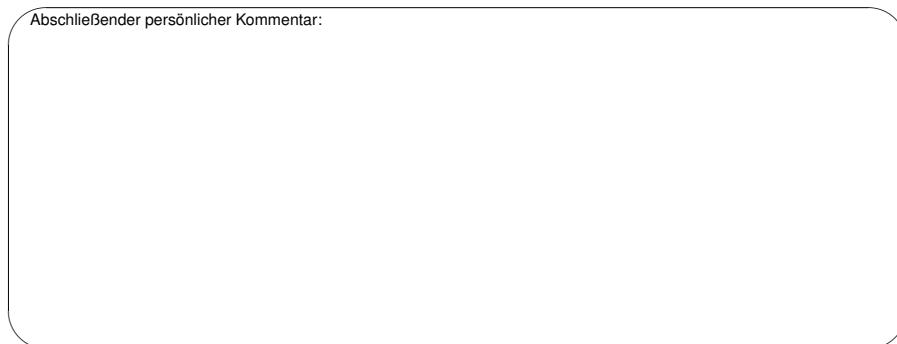
---

---

---

---

Abschließender persönlicher Kommentar:



**Abbildung D.6:** Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 5

<b>Schülermeldungen</b>		
<b>Testaufgabe zur mathematischen Modellierung – Menschen auf der Erde</b>		
<b>Kürzel</b>	<b>Frage</b>	<b>Antwort</b>

**Abbildung D.7:** Anleitung für Lehrkräfte zur Durchführung der Aufgabenbearbeitung, Seite 6

Die Evaluationsbögen, in denen sich die Teilnehmenden selbst einschätzen sollten, werden in den Abbildungen D.8–D.11 gezeigt. Dabei wurde eine sprachliche Anpassung der Formulierungen für die Jahrgangsstufen 5 – 8, sowie der Jahrgangsstufen 9 – 13<sup>1</sup> vorgenommen. Zusätzlich wurden in den höheren Klassen die Berufsperspektiven abgefragt.

<sup>1</sup>Man beachte, dass überwiegend das Abitur in der 12. Jahrgangsstufe verordnet war. Einige Schulen hatten bereits wieder auf G9 umgestellt, sodass in diesen wenigen Fällen das Abitur erst in der 13. Jahrgangsstufe abgelegt wurde.

## Evaluation

### Testaufgabe zur mathematischen Modellierung – Menschen auf der Erde

Vielen Dank, dass du unsere Aufgabe bearbeitet hast. Wir bitten dich um eine kurze Rückmeldung zu der Aufgabe. Bitte beantworte die folgenden Fragen und stufe die Aussagen nach deinem Gefühl ein.

Deine Anmerkungen werden geheim behandelt. Damit wir deinen Evaluationsbogen später deiner Lösung zuordnen können, bitten wir dich, hier ebenfalls die ersten zwei Buchstaben der Straße, in der du wohnst, und deine Lieblingszahl aufzuschreiben: \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_.

#### 1. Persönliche Angaben

Jahrgangsstufe: \_\_\_\_\_ Geschlecht:  weiblich  männlich  divers

Zwei Lieblingsfächer: \_\_\_\_\_ Schularl: \_\_\_\_\_

#### 2. Aussagen einstufen

	Trifft gar nicht zu (-)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)	Kommentar: Warum setzt du hier das Kreuz?
Ich rechne gerne.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich wusste nicht, was ich tun soll.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Die Aufgabe war schwer.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Das Bearbeiten der Aufgabe hat mir Spaß gemacht.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich habe mir die Aufgabe zum Bearbeiten in mehrere kleine Aufgaben unterteilt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich fand die Art der Aufgabe motivierend.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

- Wie oft hast du deinen Taschenrechner zur Bearbeitung der heutigen Aufgabe verwendet?

Sehr oft.       Häufig.       Kaum.       Nie.  
 Ich hatte keinen Taschenrechner.       Sonstiges: \_\_\_\_\_

**Abbildung D.8:** Evaluationsbogen für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 5 – 8 zur Selbsteinschätzung und Reflexion der Aufgabenstellung, Seite 1

• War der Taschenrechner hilfreich für die Bearbeitung der Aufgabe?  Ja  Nein

• Aufgaben, wie die heutige, bearbeiten wir im Mathematikunterricht...

wöchentlich  monatlich  einmal im Jahr  nie

Sonstiges: \_\_\_\_\_

**3. Weitere Fragen**

Besonders leicht / schwer war für mich ...

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ich fand an der Aufgabe toll, dass ...

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Ich hätte mehr Unterstützung benötigt bei ...

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Was möchtest du uns noch sagen? (z.B. Lob, Kritik, Verbesserungsvorschläge):

2/2

**Abbildung D.9:** Evaluationsbogen für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 5 – 8 zur Selbsteinschätzung und Reflexion der Aufgabenstellung, Seite 2

## Evaluation

### Testaufgabe zur mathematischen Modellierung – Menschen auf der Erde

Vielen Dank, dass du unsere Problemstellung getestet hast. Wir bitten dich um eine kurze Rückmeldung zu der Problemstellung. Bitte beantworte die folgenden Fragen und stufe die Aussagen nach deinem Empfinden ein.

Deine Anmerkungen werden anonym behandelt. Damit wir deinen Evaluationsbogen später deiner Lösung zuordnen können, bitten wir dich, hier ebenfalls die ersten zwei Buchstaben der Straße, in der du wohnst, und deine Lieblingszahl aufzuschreiben: \_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_.

**1. Persönliche Angaben**

Jahrgangsstufe: \_\_\_\_\_ Geschlecht:  weiblich  männlich  divers

Zwei Lieblingsfächer: \_\_\_\_\_ Schular: \_\_\_\_\_

späterer Berufswunsch: \_\_\_\_\_

**2. Aussagen einstufen**

	Trifft gar nicht zu (-)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)	Kommentar: Warum setzt du hier das Kreuz?
Ich mag es, mich mit Mathematik zu beschäftigen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich kann mir vorstellen, Mathematik zu studieren.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
In naturwissenschaftlichen Studiengängen werden mathematische Kenntnisse benötigt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Für meinen zukünftigen Beruf werde ich Mathematik benötigen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Die Problemstellungen, die wir im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer eindeutige Lösungen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich habe noch nie so eine Problemstellung bearbeitet.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich habe schon mal eine offene Problemstellung wie heute bearbeitet.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich wusste nicht, was von mir erwartet wird.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Problemstellung zu lösen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich fand es schwierig, einen Lösungsansatz für die Problemstellung zu entwickeln.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich fand es toll, mir verschiedene Aspekte selbst zu überlegen, die ich genauer analysieren konnte.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich habe den Begriff mathematische Modellierung schon einmal gehört.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich hätte mich gerne länger mit der Problemstellung beschäftigt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Das Thema der Problemstellung fand ich interessant.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich würde gerne solche komplexen Problemstellungen im Mathematikunterricht bearbeiten.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

1/2

**Abbildung D.10:** Evaluationsbogen für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 9 – 13 zur Selbst-einschätzung und Reflexion der Aufgabenstellung, Seite 1

	Trifft gar nicht zu (-)	Trifft eher nicht zu (-)	Trifft zum Teil zu (+)	Trifft voll zu (++)	Kommentar: Warum setzt du hier das Kreuz?
Ich finde mathematisches Verständnis für meinen Alltag wichtig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Ich könnte mir vorstellen, dass Mathematikunterricht interessanter ist, wenn regelmäßig Problemstellungen wie die heutige gestellt werden.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
Durch die Problemstellung weiß ich, wo Mathematik zum Einsatz kommt.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	

• Wie oft hast du deinen Taschenrechner zur Bearbeitung der heutigen Problemstellung verwendet?  
 Sehr oft.       Häufig.       Kaum.       Nie.  
 Ich hatte keinen Taschenrechner.       Sonstiges: \_\_\_\_\_

• War der Taschenrechner hilfreich für die Bearbeitung der Problemstellung?       Ja       Nein

• Diese Art der offenen Problemstellung bearbeiten wir im Mathematikunterricht ...  
 wöchentlich       monatlich       einmal im Jahr       nie  
 Sonstiges: \_\_\_\_\_

**3. Weitere Fragen**

Ich habe mir zum Bearbeiten der Problemstellung die folgenden Schritte überlegt:

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Besonders leicht / schwer fiel mir ...

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Ich fand an der Problemstellung toll, dass ...

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Ich hätte mehr Unterstützung benötigt bei ...

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Abschließender persönlicher Kommentar (z.B. Lob, Kritik, Verbesserungsvorschläge):

\_\_\_\_\_

**Abbildung D.11:** Evaluationsbogen für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 9 – 13 zur Selbst-einschätzung und Reflexion der Aufgabenstellung, Seite 2

### D.3 Auswertung der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und in den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung

Die folgenden Abbildungen stellen Ausgaben des Programms „SPSS“ dar, mit dem die Auswertung vorgenommen wurde. Dabei liefert das Programm mehr Ergebnisse, als eine sinnvolle Auswertung zulässt. Die Standardabweichung, die Varianz und Perzentile sind für ordinale Daten keine geeigneten Maße. Das arithmetische Mittel wird als Durchschnittsnote gewertet.

		Geschlecht	Ich rechne gerne.	Die Aufgaben, die wir normalerweise im Matheunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.	Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.
N	Gültig	806	815	806	806
	Fehlend	14	5	14	14
Mittelwert		.54	2.791	2.952	3.04
Median		1.00	3.000	3.000	3.00
Std.-Abweichung		.546	.8933	.7711	1.092
Varianz		.298	.798	.595	1.192
Minimum		0	1.0	1.0	1
Maximum		2	4.0	4.0	4
Perzentile	25	.00	2.000	3.000	2.00
	50	1.00	3.000	3.000	3.00
	75	1.00	3.000	3.000	4.00

**Abbildung D.12:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 1.

Statistiken					
		Ich wusste nicht, was ich tun soll.	Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.	Die Aufgabe war zu schwer.	Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht.
N	Gültig	805	807	810	805
	Fehlend	15	13	10	15
Mittelwert		2.696	2.045	2.869	2.531
Median		3.000	2.000	3.000	3.000
Std.-Abweichung		1.0184	.9682	.9789	1.0180
Varianz		1.037	.937	.958	1.036
Minimum		1.0	1.0	1.0	1.0
Maximum		4.0	4.0	4.0	4.0
Perzentile	25	2.000	1.000	2.000	2.000
	50	3.000	2.000	3.000	3.000
	75	4.000	3.000	4.000	3.000

Statistiken					
		Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.	Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt.	Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.	Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten.
N	Gültig	803	806	808	809
	Fehlend	17	14	12	11
Mittelwert		1.95	2.401	2.940	2.341
Median		2.00	2.000	3.000	2.000
Std.-Abweichung		1.072	1.1513	.9843	1.0760
Varianz		1.149	1.326	.969	1.158
Minimum		0	1.0	.0	1.0
Maximum		4	4.0	4.0	4.0
Perzentile	25	1.00	1.000	2.000	1.000
	50	2.00	2.000	3.000	2.000
	75	3.00	3.000	4.000	3.000

Seite 5

**Abbildung D.13:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 2.

<b>Statistiken</b>					
		Ich fand die Art der Aufgabe motivierend.	... versteht die Problemstellung in der Realität	... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren
N	Gültig	802	820	820	820
	Fehlend	18	0	0	0
Mittelwert		2.471	.88	.82	.81
Median		3.000	1.00	1.00	1.00
Std.-Abweichung		1.0018	.320	.383	.391
Varianz		1.004	.103	.147	.153
Minimum		1.0	0	0	0
Maximum		4.0	1	1	1
Perzentile	25	2.000	1.00	1.00	1.00
	50	3.000	1.00	1.00	1.00
	75	3.000	1.00	1.00	1.00
<b>Statistiken</b>					
		... treffen Schätzungen für die Faktoren	... begründen ihre getroffenen Schätzungen	... liefert eine logische Argumentationsstruktur	... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen
N	Gültig	820	820	817	820
	Fehlend	0	0	3	0
Mittelwert		.58	.218	.539	.47
Median		1.00	.000	1.000	.00
Std.-Abweichung		.493	.4126	.4985	.500
Varianz		.243	.170	.248	.250
Minimum		0	.0	.0	0
Maximum		1	1.0	1.0	1
Perzentile	25	.00	.000	.000	.00
	50	1.00	.000	1.000	.00
	75	1.00	.000	1.000	1.00

Seite 6

**Abbildung D.14:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 3.

		... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Faktor 1: Platzbedarf	Faktor 2: Essensmenge	Faktor 3: Wasserbedarf
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.75	.58	.63	.42
Median		1.00	1.00	1.00	.00
Std.-Abweichung		.435	.494	.483	.495
Varianz		.190	.244	.234	.245
Minimum		0	0	0	0
Maximum		1	1	1	1
Perzentile	25	.00	.00	.00	.00
	50	1.00	1.00	1.00	.00
	75	1.00	1.00	1.00	1.00

		Faktor 4: Freizeitraum	Faktor 5: Arbeitsraum	... nutzt dazu die Abbildung	... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.03	.05	.10	.07
Median		.00	.00	.00	.00
Std.-Abweichung		.162	.210	.295	.254
Varianz		.026	.044	.087	.065
Minimum		0	0	0	0
Maximum		1	1	1	1
Perzentile	25	.00	.00	.00	.00
	50	.00	.00	.00	.00
	75	.00	.00	.00	.00

Seite 7

**Abbildung D.15:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 4.

<b>Statistiken</b>					
		... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbarer Flächen	... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	... berücksichtigt die Essensherstellung	... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser
N	Gültig	820	820	819	820
	Fehlend	0	0	1	0
Mittelwert		.28	.20	.23	.11
Median		.00	.00	.00	.00
Std.-Abweichung		.448	.397	.421	.311
Varianz		.200	.157	.177	.097
Minimum		0	0	0	0
Maximum		1	1	1	1
Perzentile	25	.00	.00	.00	.00
	50	.00	.00	.00	.00
	75	1.00	.00	.00	.00

<b>Statistiken</b>					
		... formuliert ein mathematisches Problem	... liefert eine logische Argumentationsstruktur	... entwickelt eine mathematische Lösung	... berechnet die Lösung korrekt
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.43	.35	.37	.290
Median		.00	.00	.00	.000
Std.-Abweichung		.495	.477	.482	.4535
Varianz		.245	.228	.232	.206
Minimum		0	0	0	.0
Maximum		1	1	1	1.0
Perzentile	25	.00	.00	.00	.000
	50	.00	.00	.00	.000
	75	1.00	1.00	1.00	1.000

Seite 8

**Abbildung D.16:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 5.

		Statistiken			
		... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	... interpretieren ihre Ergebnisse	... bewerten ihre Ergebnisse	... kennt die Bedeutung ihrer Ergebnisse
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.32	.29	.18	.35
Median		.00	.00	.00	.00
Std.-Abweichung		.466	.456	.385	.476
Varianz		.217	.208	.148	.227
Minimum		0	0	0	0
Maximum		1	1	1	1
Perzentile	25	.00	.00	.00	.00
	50	.00	.00	.00	.00
	75	1.00	1.00	.00	1.00
		Statistiken			
		Niveau 1: ... schreiben einen Antwortatz	Niveau 2: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse	Niveau 3: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwarteten Allgemeinwissens (Zusammenhänge zwischen Faktoren aufzeigen)	... nutzt nichtmathematische Kenntnisse
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.60	.23	.073	.31
Median		1.00	.00	.000	.00
Std.-Abweichung		.490	.424	.2590	.462
Varianz		.240	.180	.067	.213
Minimum		0	0	.0	0
Maximum		1	1	1.0	1
Perzentile	25	.00	.00	.000	.00
	50	1.00	.00	.000	.00
	75	1.00	.00	.000	1.00

Seite 9

**Abbildung D.17:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstbeurteilung und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 6.

<b>Statistiken</b>					
		... liefert eine logische Argumentationsstruktur	... hinterfragt sein Ergebnis	... identifizieren problematische Annahmen	... verbessern ihre Annahmen (z. B. geeigneteren Schätzungen)
N	Gültig	820	820	820	819
	Fehlend	0	0	0	1
Mittelwert		.25	.14	.07	.05
Median		.00	.00	.00	.00
Std.-Abweichung		.435	.349	.254	.216
Varianz		.190	.122	.065	.047
Minimum		0	0	0	0
Maximum		1	1	1	1
Perzentile	25	.00	.00	.00	.00
	50	.00	.00	.00	.00
	75	1.00	.00	.00	.00

<b>Statistiken</b>					
		... wiederholen den Problemlöseprozess	... gibt einen Ausblick auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren	... bekam Hilfe durch die Lehrkraft	... ist strukturiert an die Aufgabe herangegangen
N	Gültig	820	820	820	820
	Fehlend	0	0	0	0
Mittelwert		.05	.06		.70
Median		.00	.00		1.00
Std.-Abweichung		.213	.246		.457
Varianz		.045	.061		.209
Minimum		0	0		0
Maximum		1	1		1
Perzentile	25	.00	.00		.00
	50	.00	.00		1.00
	75	.00	.00		1.00

**Abbildung D.18:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 7.

Statistiken		
... hat alle Lösungsschritte ordentlich/nachvollziehbar dokumentiert		
N	Gültig	818
	Fehlend	2
Mittelwert		.554
Median		1.000
Std.-Abweichung		.4962
Varianz		.246
Minimum		.0
Maximum		1.0
Perzentile	25	.000
	50	1.000
	75	1.000

Häufigkeitstabelle

Geschlecht		N	%
0		391	47.7%
1		395	48.2%
2		20	2.4%
Fehlend	System	14	1.7%
Gesamt		820	100.0%

Seite 11

**Abbildung D.19:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seite 8.

<b>Ich rechne gerne.</b>		
	N	%
1.0	86	10.5%
1.5	1	0.1%
2.0	167	20.4%
2.5	2	0.2%
3.0	387	47.2%
3.5	1	0.1%
4.0	171	20.9%
Fehlend System	5	0.6%
Gesamt	820	100.0%

<b>Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.</b>		
	N	%
1.0	39	4.8%
2.0	143	17.4%
2.5	1	0.1%
3.0	438	53.4%
3.5	5	0.6%
4.0	180	22.0%
Fehlend System	14	1.7%
Gesamt	820	100.0%

<b>Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.</b>		
	N	%
1	100	12.2%
2	163	19.9%
3	145	17.7%
4	398	48.5%
Fehlend System	14	1.7%
Gesamt	820	100.0%

  
 **Ich wusste nicht, was ich tun soll.** | | ||  | N | % |
1.0	128	15.6%
2.0	191	23.3%
2.5	5	0.6%
3.0	276	33.7%
3.5	1	0.1%
4.0	204	24.9%
Fehlend System	15	1.8%
Gesamt	820	100.0%
  

<b>Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.</b>		
	N	%
1.0	280	34.1%
1.5	1	0.1%
2.0	289	35.2%
3.0	157	19.1%
4.0	80	9.8%
Fehlend System	13	1.6%
Gesamt	820	100.0%

  
 **Die Aufgabe war zu schwer.** | | ||  | N | % |
1.0	87	10.6%
2.0	186	22.7%
2.5	3	0.4%
3.0	278	33.9%
3.5	2	0.2%
4.0	254	31.0%
Fehlend System	10	1.2%
Gesamt	820	100.0%

**Abbildung D.20:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 9/10.

<b>Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht.</b>		
	N	%
1.0	153	18.7%
2.0	233	28.4%
2.5	5	0.6%
3.0	250	30.5%
4.0	164	20.0%
Fehlend System	15	1.8%
Gesamt	820	100.0%

<b>Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.</b>		
	N	%
0	1	0.1%
1	377	46.0%
2	183	22.3%
3	142	17.3%
4	100	12.2%
Fehlend System	17	2.1%
Gesamt	820	100.0%

<b>Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt.</b>		
	N	%
1.0	238	29.0%
2.0	205	25.0%
2.5	2	0.2%
3.0	162	19.8%
4.0	199	24.3%
Fehlend System	14	1.7%
Gesamt	820	100.0%

<b>Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.</b>		
	N	%
.0	1	0.1%
1.0	88	10.7%
2.0	144	17.6%
2.5	7	0.9%
3.0	290	35.4%
4.0	278	33.9%
Fehlend System	12	1.5%
Gesamt	820	100.0%

<b>Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten.</b>		
	N	%
1.0	239	29.1%
2.0	193	23.5%
2.5	1	0.1%
3.0	238	29.0%
4.0	138	16.8%
Fehlend System	11	1.3%
Gesamt	820	100.0%

<b>Ich fand die Art der Aufgabe motivierend.</b>		
	N	%
1.0	167	20.4%
1.5	1	0.1%
2.0	222	27.1%
2.5	3	0.4%
3.0	274	33.4%
4.0	135	16.5%
Fehlend System	18	2.2%
Gesamt	820	100.0%

Abbildung D.21: Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 11/12.

<b>... versteht die Problemstellung in der Realität</b>			<b>... liefert eine logische Argumentationsstruktur</b>		
	N	%		N	%
0	95	11.6%	.0	376	45.9%
1	725	88.4%	.5	1	0.1%
			1.0	440	53.7%
			Fehlend System	3	0.4%
			Gesamt	820	100.0%

<b>... vereinfacht die Problemstellung in der Realität</b>			<b>... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen</b>		
	N	%		N	%
0	146	17.8%	0	431	52.6%
1	674	82.2%	1	389	47.4%

<b>... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren</b>			<b>... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse</b>		
	N	%		N	%
0	154	18.8%	0	208	25.4%
1	666	81.2%	1	612	74.6%

<b>... treffen Schätzungen für die Faktoren</b>			<b>Faktor 1: Platzbedarf</b>		
	N	%		N	%
0	342	41.7%	0	343	41.8%
1	478	58.3%	1	477	58.2%

<b>... begründen ihre getroffenen Schätzungen</b>			<b>Faktor 2: Essensmenge</b>		
	N	%		N	%
.0	640	78.0%	0	304	37.1%
.5	2	0.2%	1	516	62.9%
1.0	178	21.7%			

<b>Faktor 3: Wasserbedarf</b>		
	N	%
0	472	57.6%
1	348	42.4%

**Abbildung D.22:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 13/14.

<b>Faktor 4: Freizeitraum</b>		
	N	%
0	798	97.3%
1	22	2.7%

<b>Faktor 5: Arbeitsraum</b>		
	N	%
0	782	95.4%
1	38	4.6%

<b>... nutzt dazu die Abbildung</b>		
	N	%
0	741	90.4%
1	79	9.6%

<b>... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche</b>		
	N	%
0	763	93.0%
1	57	7.0%

<b>... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen</b>		
	N	%
0	593	72.3%
1	227	27.7%

<b>... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus</b>		
	N	%
0	660	80.5%
1	160	19.5%

  
 **... berücksichtigt die Essensherstellung** |  |  ||  | N | % |

<b>... berücksichtigt die Essensherstellung</b>		
	N	%
0	631	77.0%
1	188	22.9%
Fehlend	System	0.1%
Gesamt	820	100.0%

<b>... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser</b>		
	N	%
0	731	89.1%
1	89	10.9%

<b>... formuliert ein mathematisches Problem</b>		
	N	%
0	470	57.3%
1	350	42.7%

<b>... liefert eine logische Argumentationsstruktur</b>		
	N	%
0	533	65.0%
1	287	35.0%

<b>... entwickelt eine mathematische Lösung</b>		
	N	%
0	520	63.4%
1	300	36.6%

**Abbildung D.23:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 15/16.

<p><b>... berechnet die Lösung korrekt</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>.0</td> <td style="text-align: center;">582</td> <td style="text-align: center;">71.0%</td> </tr> <tr> <td>.5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0.1%</td> </tr> <tr> <td>1.0</td> <td style="text-align: center;">237</td> <td style="text-align: center;">28.9%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">560</td> <td style="text-align: center;">68.3%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">260</td> <td style="text-align: center;">31.7%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... interpretieren ihre Ergebnisse</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">579</td> <td style="text-align: center;">70.6%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">241</td> <td style="text-align: center;">29.4%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... bewerten ihre Ergebnisse</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">672</td> <td style="text-align: center;">82.0%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">148</td> <td style="text-align: center;">18.0%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... kennt die Bedeutung ihrer Ergebnisse</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">536</td> <td style="text-align: center;">65.4%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">284</td> <td style="text-align: center;">34.6%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Niveau 1: ... schreiben einen Antwortsatz</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">328</td> <td style="text-align: center;">40.0%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">492</td> <td style="text-align: center;">60.0%</td> </tr> </tbody> </table>		N	%	.0	582	71.0%	.5	1	0.1%	1.0	237	28.9%		N	%	0	560	68.3%	1	260	31.7%		N	%	0	579	70.6%	1	241	29.4%		N	%	0	672	82.0%	1	148	18.0%		N	%	0	536	65.4%	1	284	34.6%		N	%	0	328	40.0%	1	492	60.0%	<p><b>Niveau 2: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">628</td> <td style="text-align: center;">76.6%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">192</td> <td style="text-align: center;">23.4%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>Niveau 3: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwarteten Allgemeinwissens (Zusammenhänge zwischen Faktoren aufzeigen)</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>.0</td> <td style="text-align: center;">760</td> <td style="text-align: center;">92.7%</td> </tr> <tr> <td>.5</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0.1%</td> </tr> <tr> <td>1.0</td> <td style="text-align: center;">59</td> <td style="text-align: center;">7.2%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... nutzt nichtmathematische Kenntnisse</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">568</td> <td style="text-align: center;">69.3%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">252</td> <td style="text-align: center;">30.7%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... liefert eine logische Argumentationsstruktur</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">612</td> <td style="text-align: center;">74.6%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">208</td> <td style="text-align: center;">25.4%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... hinterfragt sein Ergebnis</b></p> <table border="1" style="margin-top: 10px; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th style="text-align: center;">N</th> <th style="text-align: center;">%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td style="text-align: center;">704</td> <td style="text-align: center;">85.9%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td style="text-align: center;">116</td> <td style="text-align: center;">14.1%</td> </tr> </tbody> </table>		N	%	0	628	76.6%	1	192	23.4%		N	%	.0	760	92.7%	.5	1	0.1%	1.0	59	7.2%		N	%	0	568	69.3%	1	252	30.7%		N	%	0	612	74.6%	1	208	25.4%		N	%	0	704	85.9%	1	116	14.1%
	N	%																																																																																																								
.0	582	71.0%																																																																																																								
.5	1	0.1%																																																																																																								
1.0	237	28.9%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	560	68.3%																																																																																																								
1	260	31.7%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	579	70.6%																																																																																																								
1	241	29.4%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	672	82.0%																																																																																																								
1	148	18.0%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	536	65.4%																																																																																																								
1	284	34.6%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	328	40.0%																																																																																																								
1	492	60.0%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	628	76.6%																																																																																																								
1	192	23.4%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
.0	760	92.7%																																																																																																								
.5	1	0.1%																																																																																																								
1.0	59	7.2%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	568	69.3%																																																																																																								
1	252	30.7%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	612	74.6%																																																																																																								
1	208	25.4%																																																																																																								
	N	%																																																																																																								
0	704	85.9%																																																																																																								
1	116	14.1%																																																																																																								

**Abbildung D.24:** Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 17/18.

<p><b>... identifizieren problematische Annahmen</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>763</td> <td>93.0%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>57</td> <td>7.0%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... verbessern ihre Annahmen (z.B. geeignete Schätzungen)</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>779</td> <td>95.0%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>40</td> <td>4.9%</td> </tr> <tr> <td>Fehlend System</td> <td>1</td> <td>0.1%</td> </tr> <tr> <td>Gesamt</td> <td>820</td> <td>100.0%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... wiederholen den Problemlöseprozess</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>781</td> <td>95.2%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>39</td> <td>4.8%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... gibt einen Ausblick auf weitere, bisher unbeachtete Faktoren</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>767</td> <td>93.5%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>53</td> <td>6.5%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... bekam Hilfe durch die Lehrkraft</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>NaN</td> <td>757</td> <td>92.3%</td> </tr> <tr> <td>NaN</td> <td>63</td> <td>7.7%</td> </tr> </tbody> </table>		N	%	0	763	93.0%	1	57	7.0%		N	%	0	779	95.0%	1	40	4.9%	Fehlend System	1	0.1%	Gesamt	820	100.0%		N	%	0	781	95.2%	1	39	4.8%		N	%	0	767	93.5%	1	53	6.5%		N	%	NaN	757	92.3%	NaN	63	7.7%	<p><b>... ist strukturiert an die Aufgabe herangegangen</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>244</td> <td>29.8%</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>576</td> <td>70.2%</td> </tr> </tbody> </table> <p><b>... hat alle Lösungsschritte ordentlich/nachvollziehbar dokumentiert</b></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th></th> <th>N</th> <th>%</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>.0</td> <td>363</td> <td>44.3%</td> </tr> <tr> <td>.5</td> <td>4</td> <td>0.5%</td> </tr> <tr> <td>1.0</td> <td>451</td> <td>55.0%</td> </tr> <tr> <td>Fehlend System</td> <td>2</td> <td>0.2%</td> </tr> <tr> <td>Gesamt</td> <td>820</td> <td>100.0%</td> </tr> </tbody> </table>		N	%	0	244	29.8%	1	576	70.2%		N	%	.0	363	44.3%	.5	4	0.5%	1.0	451	55.0%	Fehlend System	2	0.2%	Gesamt	820	100.0%
	N	%																																																																													
0	763	93.0%																																																																													
1	57	7.0%																																																																													
	N	%																																																																													
0	779	95.0%																																																																													
1	40	4.9%																																																																													
Fehlend System	1	0.1%																																																																													
Gesamt	820	100.0%																																																																													
	N	%																																																																													
0	781	95.2%																																																																													
1	39	4.8%																																																																													
	N	%																																																																													
0	767	93.5%																																																																													
1	53	6.5%																																																																													
	N	%																																																																													
NaN	757	92.3%																																																																													
NaN	63	7.7%																																																																													
	N	%																																																																													
0	244	29.8%																																																																													
1	576	70.2%																																																																													
	N	%																																																																													
.0	363	44.3%																																																																													
.5	4	0.5%																																																																													
1.0	451	55.0%																																																																													
Fehlend System	2	0.2%																																																																													
Gesamt	820	100.0%																																																																													

Abbildung D.25: Ausgabe der Häufigkeiten in den einzelnen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung. Bestimmt mit SPSS. Seiten 19/20.

## D.4 Auswertung der Korrelationen zwischen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungselementen „Mathematisieren“ und „Berechnen“

Die folgenden Abbildungen stellen Ausgaben des Programms „SPSS“ dar, mit dem die Auswertung vorgenommen wurde. Dabei liefert das Programm mehr Ergebnisse als eine sinnvolle Auswertung zulässt. Die Signifikanzen haben hier keinerlei Bedeutung. In die Auswertung ging von den  $\chi^2$ -Tests lediglich das Pearson-Chi-Quadrat ein.

		... formuliert ein mathematisches Problem	... liefert eine logische Argumentationsstruktur	... entwickelt eine mathematische Lösung
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	--		
	N	820		
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	.840 **	--	
	Sig. (2-seitig)	.000		
	N	820	820	
... entwickelt eine mathematische Lösung	Pearson-Korrelation	.865 **	.717 **	--
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	
	N	820	820	820
... berechnet die Lösung korrekt	Pearson-Korrelation	.735 **	.704 **	.841 **
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	820	820	820
... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	Pearson-Korrelation	.768 **	.736 **	.875 **
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	820	820	820

Korrelationen				
		... berechnet die Lösung korrekt	... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation			
	N			
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation			
	Sig. (2-seitig)			
	N			
... entwickelt eine mathematische Lösung	Pearson-Korrelation			
	Sig. (2-seitig)			
	N			
... berechnet die Lösung korrekt	Pearson-Korrelation	--		
	Sig. (2-seitig)			
	N	820		
... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	Pearson-Korrelation	.863 **	--	
	Sig. (2-seitig)	.000		
	N	820	820	

\*\*. Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0,01 (2-seitig) signifikant.

**Abbildung D.26:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 1.

Zusammenfassung der Fallverarbeitung						
	Gültig		Fälle		Gesamt	
	N	Prozent	N	Prozent	N	Prozent
... formuliert ein mathematisches Problem * ... entwickelt eine mathematische Lösung	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%
... formuliert ein mathematisches Problem * ... berechnet die Lösung korrekt	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%
... formuliert ein mathematisches Problem * ... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%
... liefert eine logische Argumentationsstruktur * ... entwickelt eine mathematische Lösung	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%
... liefert eine logische Argumentationsstruktur * ... berechnet die Lösung korrekt	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%
... liefert eine logische Argumentationsstruktur * ... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	820	100.0%	0	0.0%	820	100.0%

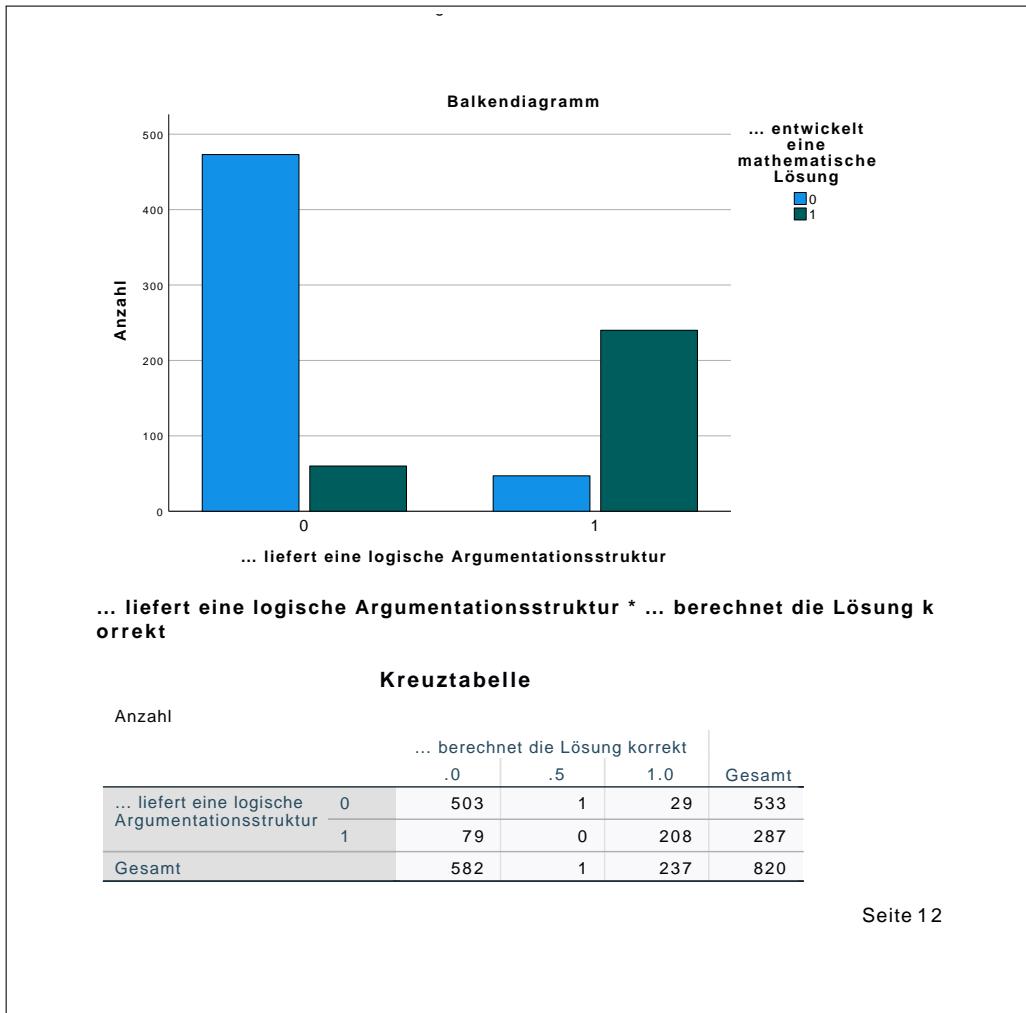
**... formuliert ein mathematisches Problem \* ... entwickelt eine mathematische Lösung**

**Kreuztabelle**

Anzahl	... entwickelt eine mathematische Lösung			Gesamt
	0	1		
... formuliert ein mathematisches Problem	0	467	3	470
	1	53	297	350
Gesamt		520	300	820

Seite 5

**Abbildung D.27:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 2.



**Abbildung D.28:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 3.

Hinweise		
Syntax		CROSSTABS /TABLES=...formuliertei nmathematischesProbl em ...lieferteineologischeAr gumentationsstruktur_ A BY  ...entwickelteinemathe matischeLösung ...berechnetdieLösungk orrekt  ...wendetgeeigneteVerf ahrenzurLsgbestimmun gan /FORMAT=AVALUE TABLES /STATISTICS=CHISQ PHI CORR /CELLS=COUNT /COUNT ROUND CELL /BARCHART.
Ressourcen		00:00:02.46
		00:00:02.00
Gewünschte Dimensionen		2
Verfügbare Zellen		524245

Seite 4

**Abbildung D.29:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 5.

**... formuliert ein mathematisches Problem \* ... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an**

**Kreuztabelle**

Anzahl	... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an		Gesamt
	0	1	
... formuliert ein mathematisches Problem	0	466	470
	1	94	350
Gesamt	560	260	820

**Chi-Quadrat-Tests**

	Wert	df	Asymptotisch e Signifikanz (zweiseitig)	Exakte Sig. (zweiseitig)	Exakte Sig. (einseitig)
Pearson-Chi-Quadrat	484.168 <sup>a</sup>	1	.000		
Kontinuitätskorrektur <sup>b</sup>	480.836	1	.000		
Likelihood-Quotient	571.035	1	.000		
Exakter Test nach Fisher				.000	.000
Zusammenhang linear-mit-linear	483.578	1	.000		
Anzahl der gültigen Fälle	820				

a. 0 Zellen (0.0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 110.98.

b. Wird nur für eine 2x2-Tabelle berechnet

**Abbildung D.30:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 6.

**Chi-Quadrat-Tests**

	Wert	df	Asymptotisch e Signifikanz (zweiseitig)
Pearson-Chi-Quadrat	408.008 <sup>a</sup>	2	.000
Likelihood-Quotient	423.386	2	.000
Zusammenhang linear-mit-linear	406.385	1	.000
Anzahl der gültigen Fälle	820		

a. 2 Zellen (33.3%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist .35.

**Abbildung D.31:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 7.

Chi-Quadrat-Tests				
	Wert	df	Asymptotisch e Signifikanz (zweiseitig)	Exakte Sig. (zweiseitig)
Pearson-Chi-Quadrat	613.301 <sup>a</sup>	1	.000	
Kontinuitätskorrektur <sup>b</sup>	609.676	1	.000	
Likelihood-Quotient	743.077	1	.000	
Exakter Test nach Fisher				.000
Zusammenhang linear-mit-linear	612.553	1	.000	
Anzahl der gültigen Fälle	820			

a. 0 Zellen (0.0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 128.05.  
b. Wird nur für eine 2x2-Tabelle berechnet

Abbildung D.32: Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 8.

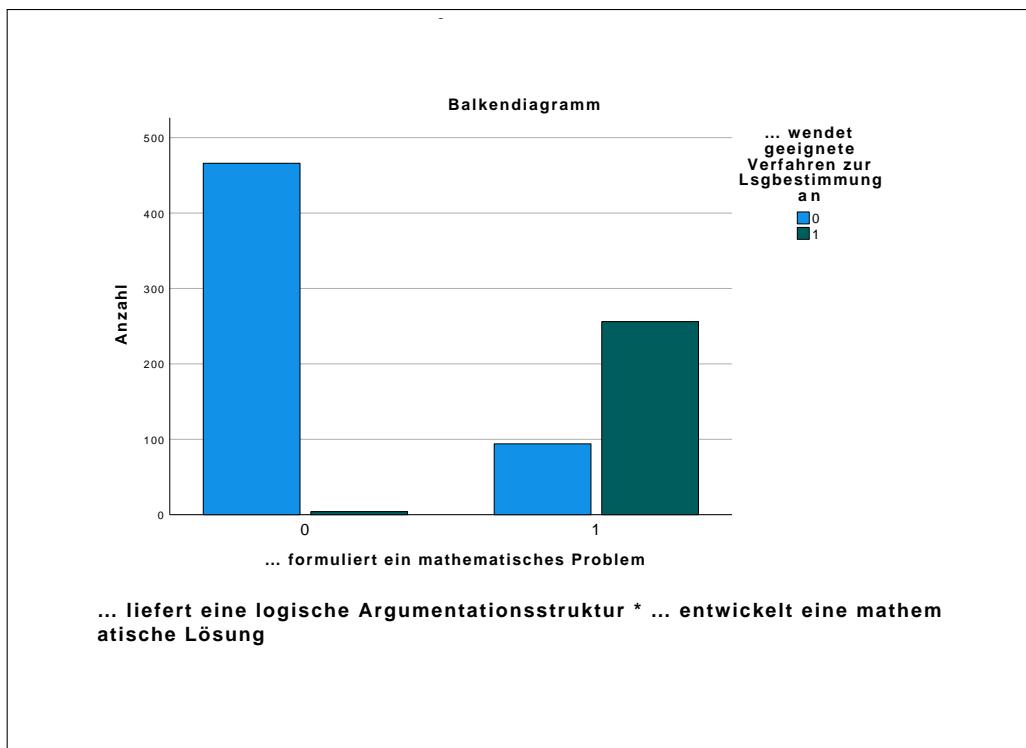
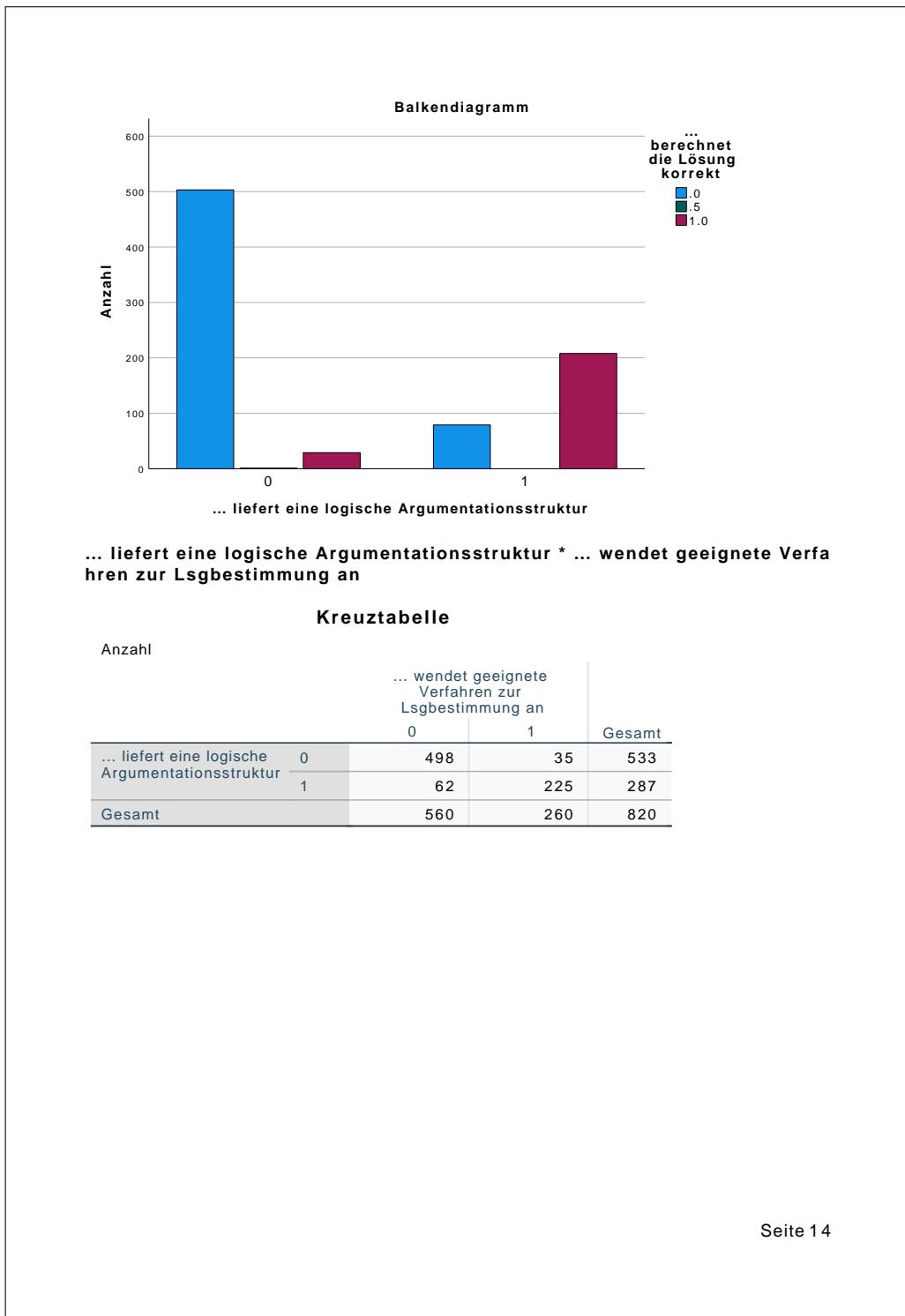
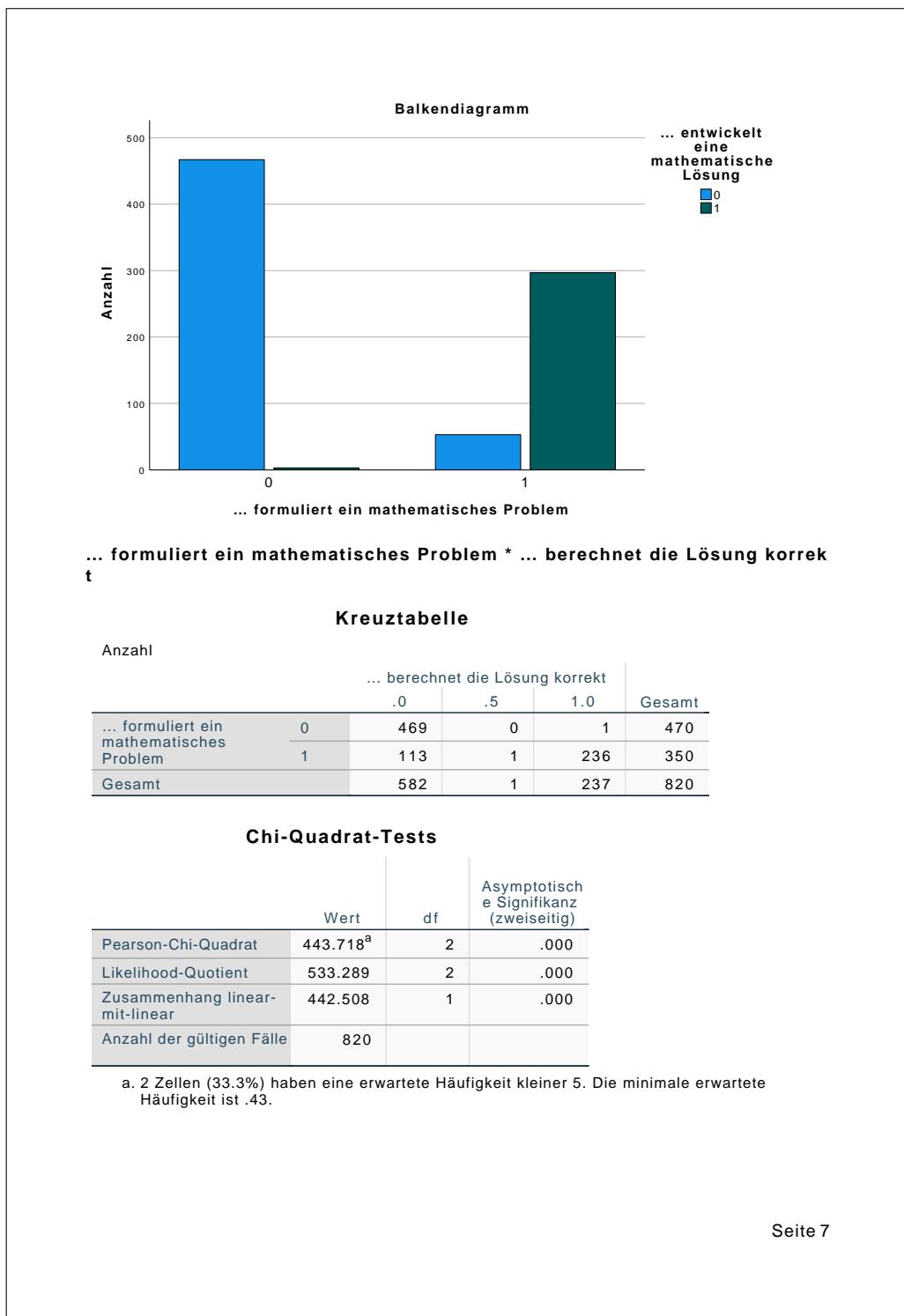


Abbildung D.33: Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 9.

Auswertung der Korrelationen zwischen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungselementen „Mathematisieren“ und „Berechnen“ | D.4



**Abbildung D.34:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 10.



Seite 7

**Abbildung D.35:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 11.

Kreuztabelle				
Anzahl	... entwickelt eine mathematische Lösung			Gesamt
	0	1		
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	0	473	60	533
	1	47	240	287
Gesamt		520	300	820

Chi-Quadrat-Tests					
	Wert	df	Asymptotisch e Signifikanz (zweiseitig)	Exakte Sig. (zweiseitig)	Exakte Sig. (einseitig)
Pearson-Chi-Quadrat	421.090 <sup>a</sup>	1	.000		
Kontinuitätskorrektur <sup>b</sup>	417.977	1	.000		
Likelihood-Quotient	446.007	1	.000		
Exakter Test nach Fisher				.000	.000
Zusammenhang linear-mit-linear	420.577	1	.000		
Anzahl der gültigen Fälle	820				

a. 0 Zellen (0.0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 105.00.  
 b. Wird nur für eine 2x2-Tabelle berechnet

**Abbildung D.36:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 12.

Chi-Quadrat-Tests					
	Wert	df	Asymptotisch e Signifikanz (zweiseitig)	Exakte Sig. (zweiseitig)	Exakte Sig. (einseitig)
Pearson-Chi-Quadrat	444.509 <sup>a</sup>	1	.000		
Kontinuitätskorrektur <sup>b</sup>	441.198	1	.000		
Likelihood-Quotient	466.611	1	.000		
Exakter Test nach Fisher				.000	.000
Zusammenhang linear-mit-linear	443.967	1	.000		
Anzahl der gültigen Fälle	820				

a. 0 Zellen (0.0%) haben eine erwartete Häufigkeit kleiner 5. Die minimale erwartete Häufigkeit ist 91.00.  
 b. Wird nur für eine 2x2-Tabelle berechnet

**Abbildung D.37:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 13.

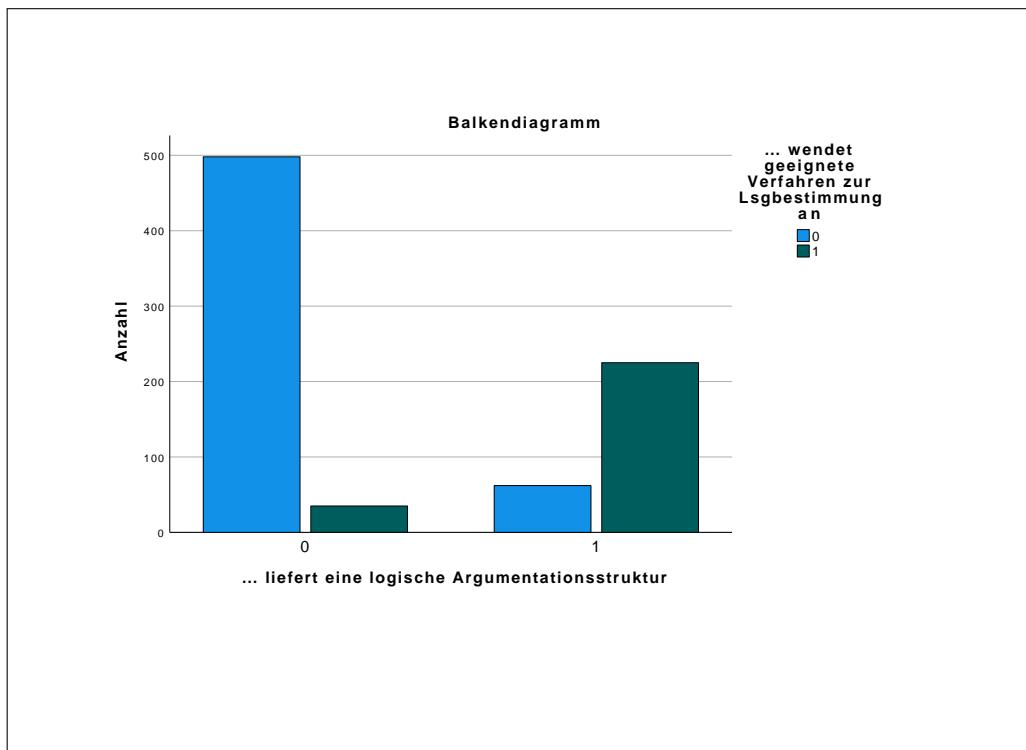


Abbildung D.38: Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items „Mathematisieren“ und „Berechnen“. Bestimmt mit SPSS. Seite 13.

## D.5 Auswertung der Korrelationen zwischen Aussagen der Schülerselbstevaluation und den Bewertungsitems der Aufgabenbeurteilung

Die folgenden Abbildungen stellen Ausgaben des Programms „SPSS“ dar, mit dem die Auswertung vorgenommen wurde. Dabei liefert das Programm mehr Ergebnisse, als eine sinnvolle Auswertung zulässt. Die Signifikanzen haben hier keinerlei Bedeutung.

		Korrelationen		Die Aufgaben, die wir normalerweise im Matheunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.
		Geschlecht	Ich rechne gerne.	
... versteht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.026	.163	.008
	Sig. (2-seitig)	.459	.000	.830
	N	806	815	806
... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.007	.166	.042
	Sig. (2-seitig)	.843	.000	.232
	N	806	815	806
... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren	Pearson-Korrelation	.017	.164	.048
	Sig. (2-seitig)	.625	.000	.174
	N	806	815	806
... treffen Schätzungen für die Faktoren	Pearson-Korrelation	.011	.181	.084
	Sig. (2-seitig)	.752	.000	.017
	N	806	815	806
... begründen ihre getroffenen Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.085	.089	.072
	Sig. (2-seitig)	.015	.011	.041
	N	806	815	806
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	-.006	.092	.070
	Sig. (2-seitig)	.863	.008	.046
	N	803	812	803
... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.041	.128	.072
	Sig. (2-seitig)	.241	.000	.040
	N	806	815	806
... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Pearson-Korrelation	.032	.190	.052
	Sig. (2-seitig)	.366	.000	.140
	N	806	815	806
Faktor 1: Platzbedarf	Pearson-Korrelation	.023	.087	.046
	Sig. (2-seitig)	.517	.013	.191
	N	806	815	806

Seite 4

**Abbildung D.39:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 4.

Korrelationen		
		Ich fand die Art der Aufgabe motivierend.
... versteht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.138
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.163
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren	Pearson-Korrelation	.155
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... treffen Schätzungen für die Faktoren	Pearson-Korrelation	.173
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... begründen ihre getroffenen Schätzungen	Pearson-Korrelation	.120
	Sig. (2-seitig)	.001
	N	802
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	.086
	Sig. (2-seitig)	.015
	N	799
... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen	Pearson-Korrelation	.146
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Pearson-Korrelation	.151
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
Faktor 1: Platzbedarf	Pearson-Korrelation	.070
	Sig. (2-seitig)	.046
	N	802

Seite 8

**Abbildung D.40:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 8.

		Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt.	Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.	Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Matheunterricht bearbeiten.
Faktor 2: Essensmenge	Pearson-Korrelation	.110	.149	.034
	Sig. (2-seitig)	.002	.000	.333
	N	806	808	809
Faktor 3: Wasserbedarf	Pearson-Korrelation	.102	.072	.041
	Sig. (2-seitig)	.004	.042	.247
	N	806	808	809
Faktor 4: Freizeitraum	Pearson-Korrelation	.087	.072	.071
	Sig. (2-seitig)	.013	.041	.043
	N	806	808	809
Faktor 5: Arbeitsraum	Pearson-Korrelation	.131	.144	.074
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.036
	N	806	808	809
... nutzt dazu die Abbildung	Pearson-Korrelation	.085	.037	.024
	Sig. (2-seitig)	.016	.293	.502
	N	806	808	809
... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche	Pearson-Korrelation	.117	.160	.108
	Sig. (2-seitig)	.001	.000	.002
	N	806	808	809
... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen	Pearson-Korrelation	.144	.138	.129
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	Pearson-Korrelation	.178	.190	.123
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... berücksichtigt die Essensherstellung	Pearson-Korrelation	.189	.213	.156
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	805	807	808
... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser	Pearson-Korrelation	.094	.078	.094
	Sig. (2-seitig)	.008	.027	.007
	N	806	808	809
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	.135	.105	.088
	Sig. (2-seitig)	.000	.003	.012
	N	806	808	809

Seite 12

**Abbildung D.41:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstbeurteilung durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 12.

Korrelationen				
		Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.	Ich wusste nicht, was ich tun soll.	Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.
... versteht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	-.086	-.126	.110
	Sig. (2-seitig)	.014	.000	.002
	N	806	805	807
... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	-.110	-.132	.109
	Sig. (2-seitig)	.002	.000	.002
	N	806	805	807
... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren	Pearson-Korrelation	-.057	-.115	.111
	Sig. (2-seitig)	.103	.001	.002
	N	806	805	807
... treffen Schätzungen für die Faktoren	Pearson-Korrelation	-.075	-.092	.122
	Sig. (2-seitig)	.033	.009	.000
	N	806	805	807
... begründen ihre getroffenen Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.032	-.026	.141
	Sig. (2-seitig)	.363	.456	.000
	N	806	805	807
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	-.079	-.099	.086
	Sig. (2-seitig)	.024	.005	.015
	N	803	802	804
... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.040	-.059	.052
	Sig. (2-seitig)	.252	.096	.144
	N	806	805	807
... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Pearson-Korrelation	-.048	-.118	.101
	Sig. (2-seitig)	.171	.001	.004
	N	806	805	807
Faktor 1: Platzbedarf	Pearson-Korrelation	-.052	-.066	.055
	Sig. (2-seitig)	.144	.060	.119
	N	806	805	807

Seite 5

**Abbildung D.42:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 5.

		Geschlecht	Ich rechne gerne.	Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.
Faktor 2: Essensmenge	Pearson-Korrelation	-.041	.107	.035
	Sig. (2-seitig)	.245	.002	.320
	N	806	815	806
Faktor 3: Wasserbedarf	Pearson-Korrelation	-.039	.058	.046
	Sig. (2-seitig)	.263	.096	.196
	N	806	815	806
Faktor 4: Freizeitraum	Pearson-Korrelation	.010	.003	-.059
	Sig. (2-seitig)	.788	.925	.096
	N	806	815	806
Faktor 5: Arbeitsraum	Pearson-Korrelation	.011	.051	-.054
	Sig. (2-seitig)	.751	.146	.123
	N	806	815	806
... nutzt dazu die Abbildung	Pearson-Korrelation	-.028	.063	-.040
	Sig. (2-seitig)	.431	.074	.253
	N	806	815	806
... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche	Pearson-Korrelation	.102	.137	.080
	Sig. (2-seitig)	.004	.000	.022
	N	806	815	806
... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen	Pearson-Korrelation	-.053	.082	-.010
	Sig. (2-seitig)	.134	.019	.774
	N	806	815	806
... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	Pearson-Korrelation	.030	.162	.029
	Sig. (2-seitig)	.401	.000	.407
	N	806	815	806
... berücksichtigt die Essensherstellung	Pearson-Korrelation	.025	.158	.047
	Sig. (2-seitig)	.470	.000	.183
	N	805	814	805
... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser	Pearson-Korrelation	.059	.093	-.007
	Sig. (2-seitig)	.095	.008	.843
	N	806	815	806
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	-.028	.173	.080
	Sig. (2-seitig)	.425	.000	.023
	N	806	815	806

Seite 9

Abbildung D.43: Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 9.

Korrelationen		
		Ich fand die Art der Aufgabe motivierend.
Faktor 2: Essensmenge	Pearson-Korrelation	.069
	Sig. (2-seitig)	.050
	N	802
Faktor 3: Wasserbedarf	Pearson-Korrelation	.014
	Sig. (2-seitig)	.682
	N	802
Faktor 4: Freizeitraum	Pearson-Korrelation	.032
	Sig. (2-seitig)	.366
	N	802
Faktor 5: Arbeitsraum	Pearson-Korrelation	.057
	Sig. (2-seitig)	.108
	N	802
... nutzt dazu die Abbildung	Pearson-Korrelation	.030
	Sig. (2-seitig)	.390
	N	802
... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche	Pearson-Korrelation	.062
	Sig. (2-seitig)	.078
	N	802
... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen	Pearson-Korrelation	.153
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	Pearson-Korrelation	.157
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	802
... berücksichtigt die Essensherstellung	Pearson-Korrelation	.180
	Sig. (2-seitig)	.000
	N	801
... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser	Pearson-Korrelation	.095
	Sig. (2-seitig)	.007
	N	802
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	.119
	Sig. (2-seitig)	.001
	N	802

Seite 13

**Abbildung D.44:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 13.

Korrelationen					
		Die Aufgabe war zu schwer.	Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht.	Ich weiß, was mathematische Modellierung ist.	
... versteht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	-.100	.209	.113	
	Sig. (2-seitig)	.004	.000	.001	
	N	810	805	803	
... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	-.079	.214	.129	
	Sig. (2-seitig)	.025	.000	.000	
	N	810	805	803	
... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren	Pearson-Korrelation	-.048	.176	.126	
	Sig. (2-seitig)	.171	.000	.000	
	N	810	805	803	
... treffen Schätzungen für die Faktoren	Pearson-Korrelation	-.021	.182	.093	
	Sig. (2-seitig)	.558	.000	.008	
	N	810	805	803	
... begründen ihre getroffenen Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.032	.123	.037	
	Sig. (2-seitig)	.367	.000	.298	
	N	810	805	803	
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	-.080	.114	.003	
	Sig. (2-seitig)	.022	.001	.923	
	N	807	802	800	
... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen	Pearson-Korrelation	-.033	.184	.085	
	Sig. (2-seitig)	.341	.000	.016	
	N	810	805	803	
... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Pearson-Korrelation	-.064	.186	.074	
	Sig. (2-seitig)	.070	.000	.036	
	N	810	805	803	
Faktor 1: Platzbedarf	Pearson-Korrelation	-.009	.096	.034	
	Sig. (2-seitig)	.788	.006	.333	
	N	810	805	803	

Seite 6

**Abbildung D.45:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 6.

Korrelationen					
		Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.	Ich wusste nicht, was ich tun soll.	Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.	
Faktor 2: Essensmenge	Pearson-Korrelation	.000	-.063	.097	
	Sig. (2-seitig)	.995	.074	.006	
	N	806	805	807	
Faktor 3: Wasserbedarf	Pearson-Korrelation	.005	.025	.007	
	Sig. (2-seitig)	.893	.472	.834	
	N	806	805	807	
Faktor 4: Freizeitraum	Pearson-Korrelation	-.056	-.055	.016	
	Sig. (2-seitig)	.109	.121	.655	
	N	806	805	807	
Faktor 5: Arbeitsraum	Pearson-Korrelation	-.085	-.072	.074	
	Sig. (2-seitig)	.016	.042	.035	
	N	806	805	807	
... nutzt dazu die Abbildung	Pearson-Korrelation	.029	-.032	.034	
	Sig. (2-seitig)	.412	.364	.332	
	N	806	805	807	
... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche	Pearson-Korrelation	.025	.125	.053	
	Sig. (2-seitig)	.480	.000	.134	
	N	806	805	807	
... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen	Pearson-Korrelation	-.116	-.088	.122	
	Sig. (2-seitig)	.001	.013	.000	
	N	806	805	807	
... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	Pearson-Korrelation	-.031	.022	.083	
	Sig. (2-seitig)	.376	.533	.019	
	N	806	805	807	
... berücksichtigt die Essensherstellung	Pearson-Korrelation	-.005	-.013	.109	
	Sig. (2-seitig)	.885	.706	.002	
	N	805	804	806	
... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser	Pearson-Korrelation	-.043	-.003	.029	
	Sig. (2-seitig)	.222	.926	.419	
	N	806	805	807	
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	-.023	-.080	.134	
	Sig. (2-seitig)	.515	.024	.000	
	N	806	805	807	

Seite 10

**Abbildung D.46:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 10.

		Korrelationen		Die Aufgaben, die wir normalerweise im Mathematikunterricht bearbeiten, haben immer genau eine Lösung.
	Geschlecht	Ich rechne gerne.		
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	-.039	.142	.075
	Sig. (2-seitig)	.272	.000	.034
	N	806	815	806
... entwickelt eine mathematische Lösung	Pearson-Korrelation	.018	.140	.064
	Sig. (2-seitig)	.612	.000	.068
	N	806	815	806
... berechnet die Lösung korrekt	Pearson-Korrelation	-.013	.102	.008
	Sig. (2-seitig)	.720	.004	.821
	N	806	815	806
... wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	Pearson-Korrelation	-.001	.129	.036
	Sig. (2-seitig)	.982	.000	.308
	N	806	815	806
... interpretieren ihre Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.022	.067	-.026
	Sig. (2-seitig)	.530	.054	.457
	N	806	815	806
... bewerten ihre Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.011	.024	-.074
	Sig. (2-seitig)	.755	.485	.035
	N	806	815	806
... kennt die Bedeutung ihrer Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.010	.102	-.001
	Sig. (2-seitig)	.782	.004	.973
	N	806	815	806
Niveau 1: ... schreiben einen Antwortensatz	Pearson-Korrelation	.008	.011	-.086
	Sig. (2-seitig)	.814	.749	.015
	N	806	815	806
Niveau 2: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse	Pearson-Korrelation	-.083	.016	-.048
	Sig. (2-seitig)	.018	.641	.173
	N	806	815	806
Niveau 3: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwarteten Allgemeinwissens (Zusammenhänge zwischen Faktoren aufzeigen)	Pearson-Korrelation	-.053	-.006	.015
	Sig. (2-seitig)	.131	.869	.677
	N	806	815	806

Seite 14

**Abbildung D.47:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 14.

		Ich hätte mich gerne länger mit der Aufgabe beschäftigt.	Das Thema der Aufgabe finde ich interessant.	Ich würde gerne solche komplexen Aufgaben im Mathematikunterricht bearbeiten.
... versteht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.175	.168	.157
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... vereinfacht die Problemstellung in der Realität	Pearson-Korrelation	.190	.189	.138
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... treffen eine sinnvolle Auswahl an zu beachtenden Faktoren	Pearson-Korrelation	.178	.190	.138
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... treffen Schätzungen für die Faktoren	Pearson-Korrelation	.211	.127	.134
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... begründen ihre getroffenen Schätzungen	Pearson-Korrelation	.165	.141	.123
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	.095	.121	.106
	Sig. (2-seitig)	.007	.001	.002
	N	803	805	806
... nutzen bekannte Größen/ Kenntnisse für die Schätzungen	Pearson-Korrelation	.195	.107	.123
	Sig. (2-seitig)	.000	.002	.000
	N	806	808	809
... nutzt nicht-mathematische Kenntnisse	Pearson-Korrelation	.161	.184	.140
	Sig. (2-seitig)	.000	.000	.000
	N	806	808	809
Faktor 1: Platzbedarf	Pearson-Korrelation	.085	.108	.090
	Sig. (2-seitig)	.015	.002	.010
	N	806	808	809

Seite 7

**Abbildung D.48:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 7.

<b>Korrelationen</b>				
		Die Aufgabe war zu schwer.	Das Bearbeiten der Aufgabe hat mit Spaß gemacht.	Ich weiß, was mathemati- che Modellierung ist.
Faktor 2: Essensmenge	Pearson-Korrelation	-.023	.132	.018
	Sig. (2-seitig)	.507	.000	.616
	N	810	805	803
Faktor 3: Wasserbedarf	Pearson-Korrelation	.054	.084	.039
	Sig. (2-seitig)	.125	.017	.264
	N	810	805	803
Faktor 4: Freizeitraum	Pearson-Korrelation	-.010	.091	.029
	Sig. (2-seitig)	.780	.010	.419
	N	810	805	803
Faktor 5: Arbeitsraum	Pearson-Korrelation	-.055	.090	.048
	Sig. (2-seitig)	.116	.011	.175
	N	810	805	803
... nutzt dazu die Abbildung	Pearson-Korrelation	.008	.044	-.076
	Sig. (2-seitig)	.820	.216	.032
	N	810	805	803
... bestimmt die Erdoberfläche über Kugeloberfläche	Pearson-Korrelation	.002	.097	.048
	Sig. (2-seitig)	.959	.006	.172
	N	810	805	803
... unterscheidet zwischen bewohnbarer und unbewohnbaren Flächen	Pearson-Korrelation	-.083	.155	.032
	Sig. (2-seitig)	.018	.000	.367
	N	810	805	803
... zeichnet (landwirtschaftl.) Nutzflächen aus	Pearson-Korrelation	-.020	.192	.094
	Sig. (2-seitig)	.560	.000	.007
	N	810	805	803
... berücksichtigt die Essensherstellung	Pearson-Korrelation	-.005	.231	.045
	Sig. (2-seitig)	.888	.000	.202
	N	809	804	802
... unterscheidet zwischen Salz- und Süßwasser	Pearson-Korrelation	-.013	.074	.078
	Sig. (2-seitig)	.705	.036	.027
	N	810	805	803
... formuliert ein mathematisches Problem	Pearson-Korrelation	-.060	.150	.080
	Sig. (2-seitig)	.090	.000	.024
	N	810	805	803

Seite 11

**Abbildung D.49:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 11.

Korrelationen				
		Ich habe noch nie so eine Aufgabe wie heute bearbeitet.	Ich wusste nicht, was ich tun soll.	Mir war direkt klar, wie ich anfange, die Aufgabe zu lösen.
... liefert eine logische Argumentationsstruktur	Pearson-Korrelation	-.027	-.017	.117
	Sig. (2-seitig)	.447	.638	.001
	N	806	805	807
... entwickelt eine mathematische Lösung	Pearson-Korrelation	-.021	-.060	.115
	Sig. (2-seitig)	.555	.090	.001
	N	806	805	807
... berechnet die Lösung korrekt	Pearson-Korrelation	-.017	-.014	.090
	Sig. (2-seitig)	.637	.696	.010
	N	806	805	807
...wendet geeignete Verfahren zur Lsgbestimmung an	Pearson-Korrelation	-.042	-.030	.096
	Sig. (2-seitig)	.236	.403	.006
	N	806	805	807
... interpretieren ihre Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.073	-.092	.109
	Sig. (2-seitig)	.038	.009	.002
	N	806	805	807
... bewerten ihre Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.101	-.107	.122
	Sig. (2-seitig)	.004	.002	.001
	N	806	805	807
... kennt die Bedeutung ihrer Ergebnisse	Pearson-Korrelation	-.089	-.069	.142
	Sig. (2-seitig)	.012	.052	.000
	N	806	805	807
Niveau 1: ... schreiben einen Antwortatz	Pearson-Korrelation	-.077	-.036	.064
	Sig. (2-seitig)	.030	.306	.068
	N	806	805	807
Niveau 2: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund individueller Vorkenntnisse	Pearson-Korrelation	-.036	-.049	.042
	Sig. (2-seitig)	.313	.166	.236
	N	806	805	807
Niveau 3: ... bewerten ihr Ergebnis vor dem Hintergrund des zu erwarteten Allgemeinwissens (Zusammenhänge zwischen Faktoren aufzeigen)	Pearson-Korrelation	-.007	-.077	.056
	Sig. (2-seitig)	.845	.030	.115
	N	806	805	807

Seite 15

**Abbildung D.50:** Ausgabe der Pearson-Korrelation zwischen den Items der Aufgabenbeurteilung und der Selbstevaluation durch die Probanden. Bestimmt mit SPSS. Seite 15.

# Danksagung

An dieser Stelle ist es nun Zeit, mich bei denjenigen zu bedanken, die mich in dieser spannenden Phase meiner akademischen Laufbahn begleitet und bei der Anfertigung dieser Dissertation unterstützt haben.

Ein besonderes Dankeschön spreche ich meinen Gutachtern aus, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

- Mein erster Gutachter, Prof. Dr. rer. nat. Martin Frank, hat mir die Möglichkeit zur Promotion gegeben. Seine Anregungen zu Forschungsgegenständen waren eine sehr gute Grundlage. Darauf aufbauend hat mir seine Betreuung viele Möglichkeiten zur eigenständigen Entfaltung und Umsetzung meiner Ideen geboten.
- Prof. Dr. rer. nat. Norbert Henze hat das erste Korreferat übernommen und mich insbesondere gegen Ende der Promotion sehr intensiv betreut. Das Korrekturlesen und die konstruktive Kritik an meiner Arbeit waren eine Bereicherung und haben mich sehr unterstützt, die Arbeit zu überdenken und zu verbessern.
- Mein zweiter Korreferent, Prof. Dr. rer. nat. Matthias Ludwig, betreute mich in der didaktischen Analyse.

Ein weiterer großer Dank gilt meinen Kolleginnen und Kollegen.

- In das Team des Projekts Simulierte Welten, das vom Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert wird und mir so meine Promotion ermöglicht hat, habe mich sehr gut aufgenommen gefühlt.
- Das Team des Programms CAMMP in Karlsruhe und in Aachen, in deren Veranstaltungen ich meine Lehr- und Lernmaterialien erproben durfte, gab mir zielgerichtete Rückmeldungen. Der Austausch insbesondere mit meinen Kolleginnen Dr. Sarah Schönbrodt und Dr. Kirsten Wohak haben meine Arbeit auf der didaktischen Seite bereichert.
- Zahlreiche fruchtbare und spannende Diskussionen führte ich mit meinen Kollegen der Arbeitsgruppe Computational Science and Mathematical Methods, insbesondere mit Dr. Thomas Camminady, Alexander Jesser und Dr. Jonas Kusch.
- Lea Ganser, Dr. Bastian Häger und Dr. Kirstin Wohak übernahmen Korrekturen von Schülerlösungen, was mir eine Auswertung innerhalb der empirischen Studie in der vorliegenden Art und Weise erlaubt hat.
- Für zahlreiche Gespräche über Klimamodelle stand mir Dr. Michael Weimer bei, der immer gerne und mit großer Freude mit mir meine Fragen diskutiert hat. Der Austausch über die Einflussgrößen des Klimawandels und die zugehörigen Modelle hat mich um die Perspektive eines Meteorologen bereichert und dabei geholfen, die komplexen Systeme didaktisch zu reduzieren.

## Danksagung

- Dr. Marco Berghoff teilte gerne sein Wissen über mathematische Modellierung aus Anwendersicht und stellte mir die LaTeX-Vorlage für diese Arbeit zur Verfügung. Damit hat mir das Schreiben Freude bereitet und die Arbeit deutlich erleichtert.
- Dr. Mehmet Soysal verpflegte mich mit Kaffee, Tee und viel Nervennahrung – eine bessere Versorgung ist nicht möglich!
- Das angenehme Arbeitsklima am Steinbuch Centre for Computing hat mir während dieser Arbeit geholfen und viel Freude bereitet.

Ich danke von ganzem Herzen allen, die mir im Leben außerhalb der Arbeit beistanden und mir Zuneigung, Freude und Glück schenkten: Insbesondere gilt meiner Familie, Basti, der Schwimm- und Bouldergruppe sowie den Aachener Mädels ein herzlichstes Dankeschön.

# Literatur

- Archer, D. (2012). *Global warming – understanding the forecast* (2. Aufl.). Danvers, USA, Wiley.
- Armstrong, P., Baldenhofer, K., Bar-Gal, Y., Becker, C., Beierkuhnlein, C., Bendix, J., . . . & Wrede, V. (2001). *Atmosphärische Fenster* (E. Brunotte, H. Gebhardt, M. Meurer, P. Meusburger & J. Nipper, Hrsg.) [Zugegriffen: 18. März 2021]. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag. <https://www.spektrum.de/lexikon/geographie/atmosphaerische-fenster/547>
- Bachem, A., Jünger, M. & Schrader, R. (Hrsg.). (1995). *Mathematik in der Praxis – Fallstudien aus Industrie, Wirtschaft, Naturwissenschaften und Medizin*. Berlin Heidelberg, Springer.
- Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W. & Weiber, R. (2016). *Multivariate Analysemethoden – Eine anwendungsorientierte Einführung* (14. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer Gabler. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-46076-4>
- Baer, D. (2001). *Duden, Fremdwörterbuch: auf der Grundlage der neuen amtlichen Rechtschreibregeln* (Bd. 5). Bibliographisches Institut.
- Bals, C., Kier, G. & Treber, M. (2008). „*Klimaskeptiker“ und ihre Argumente – Eine Kurzeinführung mit Literaturhinweisen* [Zugegriffen: 12. August 2020]. [https://www.germanwatch.org/sites/germanwatch.org/files/die\\_skeptiker.pdf](https://www.germanwatch.org/sites/germanwatch.org/files/die_skeptiker.pdf)
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., Bescherer, C., Böer, H., Elschenbroich, H.-J. & Gawlick, T. (2005). *Neue Medien im Fachunterricht: Praxishilfen: Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht* (B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders, Hrsg.). Cornelsen Scriptor.
- Baum, M., Bellstedt, M., Brandt, D., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Greulich, D., Haug, F., Jörgens, T., Jürgensen-Engl, T., Riemer, W., Sandmann, R., Schmitt-Hartmann, R., Sonntag, R., Spielmanns, H., Wollmann, A., Zimmermann, P. & Zinser, M. *Lambacher Schweizer – Mathematik Qualifikationsphase NRW*. Stuttgart, 2015.
- Bingham, N. H. & Fry, J. M. (2010). *Regression – Linear Models in Statistics*. Springer-Verlag London.
- Björnberg, K. E., Karlsson, M., Gilek, M. & Hansson, S. O. (2017). *Climate and environmental science denial: A review of the scientific literature published in 1990–2015*. Journal of Cleaner Production, 167, 229. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.08.066>
- Blum, W. *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion?* Göttingen, 1985, 195.
- Blum, W. (1996). Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In *Trends und Perspektiven: Beiträge zum 7. Internationalen Symposium zur Didaktik der Mathematik* (S. 15–38). Wien, Hölder-Pichler-Tempsky.
- Blum, W. (2007). *Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer?* Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Blum.pdf>
- Blum, W. (2015). *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?* (P. J. Cho, Hrsg.). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME), 73.
- Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study*.

- Blum, W. & Leiß, D. *Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe*. 2005.
- Böhm, R. (o. D.). Die Welt projiziert in 12 Globussegmente [Mit vorliegender Abbildungserlaubnis. Zugriffen: 02. November 2021]. [http://www.boehmwanderkarten.de/kartographie/netze/world\\_globussegmente\\_012\\_100mio.jpg](http://www.boehmwanderkarten.de/kartographie/netze/world_globussegmente_012_100mio.jpg)
- Böhm, U. (2013). *Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern – Tätigkeits theoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I* (G. Kaiser, R. Borromeo Ferri & W. Blum, Hrsg.) [Zugriffen: 19. Oktober 2021]. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01821-4>
- Borromeo Ferri, R. (2010). *On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour*. Journal for Didactics of Mathematics, 31(1), 99.
- Borromeo Ferri, R. *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens. Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden, 2011.
- Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (2013a). Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – Theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.). Wiesbaden, Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0>
- Borromeo Ferri, R., Grünwald, S. & Kaiser, G. (2013b). Effekte kurzzeitiger Interventionen auf die Entwicklung von Modellierungskompetenzen. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.). Wiesbaden, Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0>
- Boykoff, M. T. & Boykoff, J. M. (2004). *Balance as bias: Global warming and the US prestige press* [Zugriffen: 12. August 2020]. Global environmental change, 14(2), 125. <http://www.julesboykoff.org/wp-content/uploads/2013/06/B-as-B-2004-in-GEC.pdf>
- Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H. & Reibold, J. (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebecker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.). Berlin Heidelberg, Springer Spektrum.
- Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Voss (Dubberke), T., Jordan, A., Loewen, K. & Tsai, Y.-M. (2006). Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften: Konzeptualisierung, Erfassung und Bedeutung für den Unterricht. Eine Zwischenbilanz des COACTIV-Projekts. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.). Münster, Waxmann.
- Büchter, A. & Leuders, T. (2006). *Ein Aufgabenmodell für die Praxis – Einschätzung, Auswahl und Entwicklung von Mathematikaufgaben* [Zugriffen: 19. Oktober 2021]. Praxis der Naturwissenschaften – Chemie in der Schule, 55. [https://www.researchgate.net/publication/233978459\\_Ein\\_Aufgabenmodell\\_fur\\_die\\_Praxis\\_Einschattung\\_Auswahl\\_und\\_Entwicklung\\_von\\_Mathematikaufgaben](https://www.researchgate.net/publication/233978459_Ein_Aufgabenmodell_fur_die_Praxis_Einschattung_Auswahl_und_Entwicklung_von_Mathematikaufgaben)
- Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und nukleare Sicherheit. (2021). COP 26: Alles tun, um Klimaerwärmung auf 1,5 Grad zu begrenzen [Zugriffen: 20. November 2021]. <https://www.bmu.de/cop26>
- Burger, S. (2018). Absorption [Zugriffen: 15. März 2021]. <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Absorption>
- Burkhardt, H. (2004). *Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers* (H.-W. Henn & W. Blum, Hrsg.). In H.-W. Henn & W. Blum (Hrsg.), *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Pre-Conference Volume*. Universität Dortmund.
- Chrisqwq. (2006a). Heteroskedastizität [Creative Commons-Lizenz: CC-BY-SA. Zugriffen: 01. November 2021]. <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Heterosk1.png>
- Chrisqwq. (2006b). Heteroskedastizität [Creative Commons-Lizenz: CC-BY-SA. Zugriffen 01. November 2021]. <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Heteroske2.png>

- Chrisqwq. (2006c). Homoskedastizität [Creative Commons-Lizenz: CC-BY-SA. Zugriffen 01. November 2021]. <https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Homosk.png>
- climatedata.info. (o. D.). Climate Data Information – Albedo [Zugriffen: 07. März 2021]. <http://www.climatedata.info/forcing/albedo/>
- Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Routledge.
- Collomb, J.-D. (2014). *The Ideology of Climate Change Denial in the United States* [Zugriffen: 12. August 2020]. European Journal of American Studies. <https://doi.org/10.4000/ejas.10305>
- computerbasedmath.org. (o. D.). The Computational Thinking Process [Zugriffen: 08. September 2021]. <https://www.computerbasedmath.org/computational-thinking-process-poster/>
- Coumou, D. & Rahmstorf, S. (2012). *A decade of weather extremes*. nature climate change.
- Cramer, E. & Kamps, U. (2008). *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik – Ein Skript für Studierende der Informatik, der Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften* (2. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer.
- Cubasch, U. (2002). *Variabilität der Sonne und Klimaschwankungen [Variability of the sun and climate fluctuations]* (Deutscher Wetterdienst, Hrsg.) [Zugriffen: 15. März 2021]. Offenbach am Main, Deutscher Wetterdienst. [https://www.dwd.de/DE/leistungen/pbfb\\_verlag\\_promet/pdf\\_promethefte/28\\_3\\_4\\_pdf.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=3](https://www.dwd.de/DE/leistungen/pbfb_verlag_promet/pdf_promethefte/28_3_4_pdf.pdf?__blob=publicationFile&v=3)
- Dahmen, W. & Reusken, A. (2008). *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* (2. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer.
- Degreen. (2006). Farbspektrum – Sonne Strahlungsintensität [Creative Commons-Lizenz: CC-BY-SA. Zugriffen: 22. Oktober 2021]. [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Sonne\\_Strahlungsintensitaet.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Sonne_Strahlungsintensitaet.svg)
- Dettwiler, G. (2019). „Klimahysterie!“, „Klimapropaganda!“ – Was Klimaforscher zu den häufigsten Argumenten von Skeptikern sagen [Zugriffen: 19. November 2021]. Neue Zürcher Zeitung. <https://www.nzz.ch/wissenschaft/klimawandel-forscher-antworten-auf-die-argumente-von-skeptikern-ld.1468011>
- Deutscher Wetterdienst. (2019). Klimaentwicklung in Deutschland – Monitoringbericht 2019 zur Deutschen Anpassungsstrategie an den Klimawandel [Zugriffen: 09. November 2020]. <https://www.umweltbundesamt.de/monitoringbericht-2015-klimaentwicklung-in%5C#die-klimaentwicklung-in-deutschland-seit-dem-ende-des-19-jahrhunderts->
- Deutscher Wetterdienst. (o. D.). Wortlexikon – Solarkonstante [Zugriffen: 15. März 2021]. <https://www.dwd.de/DE/service/lexikon/Functions/glossar.html?lv2=102248%5C&lv3=102520>
- Didaktik der Mathematik und FDGM. (2021). Mathematisches Modellieren [Zugriffen: 10. September 2021]. <https://www.ew.uni-hamburg.de/einrichtungen/ew5/didaktik-der-mathematik/kooperationen/modellieren.html>
- Doran, P. T. & Zimmerman, M. K. (2009). *Examining the scientific consensus on climate change*. Eos, Transactions American Geophysical Union, 90(3), 22. <https://doi.org/10.1029/2009EO030002>
- Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall – Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik* (2. Aufl.). Wiesbaden, Springer Spektrum. <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-658-00118-6.pdf>
- Engel, J. (2010). *Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion* (J. Engel, Hrsg.; 1. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer.
- English, L. D. (2010). Modeling with Complex Data in the Primary School. In R. Lesh, C. R. Haines, A. Hurford & P. L. Galbraith (Hrsg.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (S. 287–299). Germany, Springer.

- eskp.de – Wissensplattform. (o. D.). Erde und Umwelt: Albedo-Rückstrahlung Infografik. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=48547503>
- European Commission. (o. D. a). Causes of climate change [Zugegriffen: 15. März 2021]. [https://ec.europa.eu/clima/change/causes\\_en](https://ec.europa.eu/clima/change/causes_en)
- European Commission. (o. D. b). Wetterextreme sind Folge des Klimawandels [Zugegriffen: 22. November 2021]. <https://cordis.europa.eu/article/id/34448-study-suggests-climate-change-behind-extreme-weather-events/de>
- Fischer, L. (2021). Klimafakten – Ist der Klimawandel wirklich (so) schlimm? <https://www.helmholtz-klima.de/klimafakten/behauptung-der-zusammenhang-von-extremwettern-und-klimawandel-ist-nicht-eindeutig-belegt>
- Focus. (2021). „Das Schlimmste kommt erst noch“: Weltklimarat warnt vor dreifach erhöhtem Sterberisiko – Berichtsentwurf über 4000 Seiten [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. [https://www.focus.de/panorama/ipcc-legt-berichtsentwurf-vor-weltklimarat-warnt-verfehlten-des-%201-5-grad-ziels-haette-irreversible-folgen\\_id\\_13427441.html](https://www.focus.de/panorama/ipcc-legt-berichtsentwurf-vor-weltklimarat-warnt-verfehlten-des-%201-5-grad-ziels-haette-irreversible-folgen_id_13427441.html)
- Frank, M., Richter, P., Roeckerath, C. & Schönbrodt, S. (2018). Wie funktioniert eigentlich GPS? – Ein Computergestützter Modellierungsworkshop. In G. Greefrath & H.-S. Siller (Hrsg.). Wiesbaden, Springer-Verlag.
- Frank, M., Roeckerath, C. & Schönbrodt, S. (im Druck). Einführung. In M. Frank & C. Roeckerath (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 9 (ISTRON)* (1. Aufl.). Berlin, Springer-Verlag GmbH Germany.
- Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens*. Heidelberg, Spektrum Akademischer Verlag.
- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Springer Spektrum.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Stuttgart, Klett.
- Frey, K. (1990). *Die Projektmethode*. Weinheim Basel, Beltz.
- Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). *A Framework for Identifying Student Blockages during Transitions in the Modelling Process*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 143.
- Gerhard, M., Hattebuhr, M., Schönbrodt, S. & Wohak, K. (im Druck). Aufbau und Einsatzmöglichkeiten des Lehr- und Lernmaterials. In M. Frank & C. Roeckerath (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 9 (ISTRON)* (1. Aufl.). Berlin, Springer-Verlag GmbH Germany.
- Greefrath, G. & Mühlenfeld, U. (2007). *Relitätsbezogene Aufgaben für die Sekundarstufe 2*. CASIO, 1.
- Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2016). *Kriterien für Modellierungsaufgaben* [Präsentationsbeitrag, ISTRON-Tagung]. Präsentationsbeitrag, ISTRON-Tagung.
- Greefrath, G., Siller, H.-S. & Ludwig, M. (2017). *Modelling problems in German grammar school leaving examinations (Abitur) – Theory and practice*, In *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 10, 2017)*.
- Greefrath, G. & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries*. Springer International Publishing.
- Greefrath, G. & Weitendorf, J. (2013). *Modellieren mit digitalen Werkzeugen* (R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser, Hrsg.). Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule – Theoretische und didaktische Hintergründe, 181. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-01580-0>
- Haines, C., Crouch, R. & Davis, J. (2001). *Understanding students' modelling skills*, In *Modelling and Mathematics Education: ICTMA9 Applications in Science and Technology*, Chichester, Horwood.

- Hald, A. (1998). *A history of mathematical statistics – From 1750 to 1930*. New York, USA, Wiley.
- Handl, A. & Kuhlenkasper, T. (2017). *Multivariate Analysemethoden – Theorie und Praxis mit R* (H. Dette & W. Härdle, Hrsg.). Springer Spektrum.
- Hansen, J., Ruedy, R., Sato, M. & Lo, K. (2010). *Global surface temperature change* [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. Rev. Geophys. 48(RG4004). <https://doi.org/10.1029/2010RG000345>
- Hartmann, D. L., Klein Tank, A. M. G., Rusticucci, M., Alexander, L. V., Brönnimann, S., Charabi, Y., Dentener, F. J., Dlugokencky, E. J., Easterling, D. R., Kaplan, A., Soden, B. J., Thorne, P. W., Wild, M. & Zhai, P. M. (2013). Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. In T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex & P. M. Midgley (Hrsg.). Cambridge, United Kingdom und New York, NY, USA, Cambridge University Press.
- Hattebuhr, M. (2014). *Entwicklung eines kompetenzorientierten Anforderungsprofils für die Teilnahme an der Modellierungswoche CAMMP week* (Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen). RWTH Aachen. Aachen.
- Hattebuhr, M. (im Druck). Gibt es den Klimawandel wirklich? – Statistische Analyse von realen Temperaturdaten. In M. Frank & C. Roeckerath (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 9 (ISTRON)* (1. Aufl.). Berlin, Springer-Verlag GmbH Germany.
- Hattebuhr, M. (akzeptiert a). *Klimaerwärmung 1: Temperaturrekorde und Zufallswahrscheinlichkeit* (Projekt „Simulierte Welten“, Hrsg.).
- Hattebuhr, M. (akzeptiert b). *Klimaerwärmung 2: Beschreibung des Temperaturverlaufs* (Projekt „Simulierte Welten“, Hrsg.).
- Hattebuhr, M. & Frank, M. (2019a). *Complex modeling: Does climate change really exist? – Perspectives of a project day with high school students*, In *11th Congress of the European Society for Researchin Mathematics Education*, Utrecht, Niederlande, Utrecht University. 11th Congress of the European Society for Researchin Mathematics Education (CERME 2019). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02410379/document>
- Hattebuhr, M. & Frank, M. (2019b). *Computergestützte mathematische Workshops für Oberstufenschüler/innen zum Thema Klimawandel* [Postervorstellung], Berlin-Nauen. Postervorstellung. Deutsche IPCC-Jahrestagung.
- Hattebuhr, M. & Frank, M. (2020). Computergestützte mathematische Workshops für Oberstufenschüler/innen zum Thema Klimawandel. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (1515 ff). Paderborn, WTM-Verlag. GDM.
- Hattebuhr, M. & Frank, M. (2022). *Compartment models to study human impact on climate change* (H. Humenberger & H.-S. Siller, Hrsg.). Modelling in Science, Education and Learning (MSEL), 15 (1), 93. <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>
- Hattebuhr, M., Frank, M. & Roeckerath, C. (2014). Kompetenzzuwachs bei Schülerinnen und Schülern durch die Teilnahme an einer Modellierungswoche. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 487). Münster, WTM-Verlag. GDM.
- Hattebuhr, M., Frank, M. & Roeckerath, C. (2017). Komplexe Modellierung: Nachhaltigkeitsforschung mit Mathematik. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 243). Münster, WTM-Verlag. GDM.
- Hattebuhr, M., Frank, M. & Roeckerath, C. (2018). Komplexe Modellierung: Trump gegen die Wissenschaft – Gibt es den Klimawandel wirklich? In *Beiträge zum Mathematikunterricht*

- 2018 (S. 731). Paderborn, Fachdidaktik der Mathematik der Universität Paderborn. WTM-Verlag. GDM.
- Hattebuhr, M., Henze, N. & Frank, M. (2021). Rekorde in zufälligen Permutationen – Material zur statistischen Analyse von Temperaturrekorden (Sek. II). In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 279). WTM Verlag. GDM.
- Hattebuhr, M. & Schönbrodt, S. (2020). *CAMMP goes online* [Zugegriffen: 09. September 2021]. SCC news, 1, 65. [https://www.scc.kit.edu/downloads/oko/SCCnews\\_01\\_2020\\_web.pdf](https://www.scc.kit.edu/downloads/oko/SCCnews_01_2020_web.pdf)
- Heiliö, M. (2016). Mathematical Modelling. In S. Pohjolainen (Hrsg.). Springer International Publishing.
- Henn, H.-W. (1998). *Mathematik und der Rest der Welt*. ZDM, 30(4), 119.
- Henze, N. (2020a). Arithmetisches Mittel und Median: Minimaleigenschaften [Zugegriffen: 08. November 2021]. <https://www.youtube.com/watch?v=lZ9IRxL7SfQ>
- Henze, N. (2020b). Rekorde in zufälligen Permutationen I [Zugegriffen: 16. Juli 2021]. <https://www.youtube.com/watch?v=ukBDpXbitTs>
- Henze, N. (2020c). Rekorde in zufälligen Permutationen II [Zugegriffen: 16. Juli 2021]. [https://www.youtube.com/watch?v=mN9RIyNVY\\_4](https://www.youtube.com/watch?v=mN9RIyNVY_4)
- Henze, N. (2021a). Rekorde bei Temperaturdaten: Alles reiner Zufall? In N. Henze, K. Müller & J. Schilling (Hrsg.), *Stochastik rezeptfrei unterrichten – Anregungen für spannende Lehre über den Zufall* (S. 71–92). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62744-0>
- Henze, N. (2021b). *Stochastik für Einsteiger – Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls* (13. Aufl.) [Zugegriffen: 19. November 2021]. Wiesbaden, Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-63840-8>
- Heske, H. (2011). Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. In T. Leuders (Hrsg.). Berlin, Cornelsen Verlag Scriptor GmbH & Co. KG.
- Hirscher, H. *Mathematikunterricht und Neue Medien – Hintergründe und Begründungen in fachdидактической и фахуergreifender Sicht*. Hildesheim Berlin, 2002.
- Hole, V. *Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer*. Donauwörth, 1998.
- IPCC. (2001). *Climate Change 2001: The Scientific Basis. Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (J. T. Houghton, Y. Ding, D. J. Griggs, M. Noguer, P. J. van der Linden, X. Dai, K. Maskell & C. A. Johnson, Hrsg.). Cambridge, United Kingdom, New York, NY, USA, Cambridge University Press.
- IPCC. (2013a). *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex & P. M. Midgley, Hrsg.). Cambridge, United Kingdom, New York, NY, USA, Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324>
- IPCC. (2013b). *Zusammenfassung für politische Entscheidungsträger* (T. F. Stocker, D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex & P. M. Midgley, Hrsg.) [Deutsche Übersetzungen durch Deutsche IPCC-Koordinierungsstelle, Österreichisches Umweltbundesamt, ProClim. (2016)]. Klimaänderung 2013: Naturwissenschaftliche Grundlagen. Beitrag der Arbeitsgruppe I zum Fünften Sachstandsbericht des Zwischenstaatlichen Ausschusses für Klimaänderungen (IPCC).
- IPCC. (2016). *Klimaänderung 2014: Synthesebericht – Beitrag der Arbeitsgruppen I, II und III zum Fünften Sachstandsbericht des Zwischenstaatlichen Ausschusses für Klimaänderungen (IPCC) [Climate Change 2014: Synthesis Report – Contribution of Working Groups I, II, and III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC)]*

- (R. K. Pachauri & L. A. Meyer, Hrsg.). Genf, Schweiz, IPCC, Deutsche Übersetzung durch Deutsche IPCC-Koordinierungsstelle (Bonn).
- IPCC. (2018). *Zusammenfassung für politische Entscheidungsträger* (V. Masson-Delmotte, P. Zhai, H. O. Pörtner, D. Roberts, J. Skea, P. R. Shukla, A. Pirani, W. Moufouma-Okia, C. Péan, R. Pidcock, S. Connors, J. B. R. Matthews, Y. Chen, X. Zhou, M. I. Gomis, E. Lonnoy, T. Maycock, M. Tignor & T. Waterfield, Hrsg.). Bonn Bern Wien, World Meteorological Organization, Genf, Schweiz. Deutsche Übersetzung auf Basis der Version vom 14.11.2018. Deutsche IPCC-Koordinierungsstelle, ProClim/SCNAT, Österreichisches Umweltbundesamt.
- IPCC. (2021a). History of the IPCC [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://www.ipcc.ch/about/history/>
- IPCC. (2021b). *Summary for Policymakers. In: Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* (V. Masson-Delmotte, P. Zhai, A. Pirani, S. Connors, C. Péan, S. Berger, N. Caud, Y. Chen, L. Goldfarb, M. Gomis, M. Huang, K. Leitzell, E. Lonnoy, J. Matthews, T. Maycock, T. Waterfield, O. Yelekçi, R. Yu & B. Zhou, Hrsg.).
- IQB. (2009). Kompetenzentwicklung im Mathematik-Unterricht: Modellieren. Handreichungen zu VERA 8 Mathematik 2009 [Zugegriffen: 16. August 2014]. [http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/upload/download/mat\\_mathematik/Kompetenzentwicklung\\_Modellieren.pdf](http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lernstand8/upload/download/mat_mathematik/Kompetenzentwicklung_Modellieren.pdf)
- Iversen, S. M. & Larson, C. J. (2006). *Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math – A study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities*. Zentralblatt Didaktik der Mathematik, 38(3), 281.
- Jordan, A., Krauss, S., Löwen, K., Blum, W., Neubrand, M., Brunner, M., Kunter, M. & Baumert, J. (2008). *Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht*. Journal für Mathematik-Didaktik, 29, 83. <https://doi.org/10.1007/BF03339055>
- Jordan, A., Ross, N., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M., Löwen, K., Brunner, M. & Kunter, M. (2005). *Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben. Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt*. Materialien aus der Bildungsforschung, 81.
- Kaiser, G. (2007). *Modelling and modelling competencies in school*. Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics, 110.
- Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). *Authentic modelling problems in mathematics education – examples and experiences*. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(1), 51.
- Kasang, D. (2014). Vulkanismus [Zugegriffen: 15. März 2021]. <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Vulkanismus>
- Kasang, D. (2019). Sonnenenergie [Zugegriffen: 15. März 2021]. <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Sonnenenergie>
- Kasang, D. (2020). Kohlendioxid Konzentration [Zugegriffen: 15. März 2021]. <https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Kohlendioxid-Konzentration>
- Kasang, D. (o. D.). Albedo (einfach) [Zugegriffe: 22. Juli 2021]. [https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Albedo\\_\(einfach\)](https://wiki.bildungsserver.de/klimawandel/index.php/Albedo_(einfach))
- Kennedy, J. J., Thorne, P. W., Peterson, T. C., Reudy, R. A., Stott, P. A., Parker, D. E., Good, S. A., Titchner, H. A. & Willett, K. M. (2010). *How do we know the world has warmed? – State of the Climate in 2009*. Bulletin of the American Meteorological Society, 91, 26. <https://doi.org/10.1175/BAMS-91-7-StateoftheClimate>

- Klimawandel: Ursachen, Folgen und Handlungsmöglichkeiten* (Techn. Ber.) [Zugegriffen: 22. November 2021]. (2021). Nationale Akademie der Wissenschaften Leopoldina. Zugegriffen: 22. November 2021. Halle (Saale). [https://doi.org/https://www.leopoldina.org/uploads/tx\\_leopublication/2021\\_Factsheet\\_Klimawandel\\_web\\_01.pdf](https://doi.org/https://www.leopoldina.org/uploads/tx_leopublication/2021_Factsheet_Klimawandel_web_01.pdf)
- Klock, H., Wess, R., Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2019). *Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischer Modellierung bei (angehenden) Lehrkräften – Erfassung und Evaluation* (T. Leuders, E. Christophel, M. Hemmer, F. Korneck & P. Labudde, Hrsg.). Fachdidaktische Forschungen zur Lehrerbildung.
- Klock, H. & Wess, R. (o. D.). Lehrerkompetenzen zum mathematischen Modellieren – Test zur Erfassung von Aspekten professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens [Zugegriffen: 09. September 2021]. <https://d-nb.info/1180496310/34>
- Koecher, M. & Krieg, A. (2007). *Ebene Geometrie* (3. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer-Verlag.
- Kraus, H. (2004). *Die Atmosphäre der Erde – Eine Einführung in die Meteorologie* (3. Aufl.). Berlin Heidelberg, Springer.
- Kreiß, J.-P. & Neuhaus, G. (2006). *Einführung in die Zeitreihenanalyse*. Berlin Heidelberg, Springer.
- Kultusministerkonferenz. (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife [Zugegriffen: 08. September 2021]. [www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2012/2012\\_10\\_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf](http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf)
- Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). *The measurement of observer agreement for categorical data*. Biometrics, 33, 159.
- Lehrerinnenfortbildung Baden-Württemberg, Z. (o. D.). Regression [Zugegriffen: 25. August 2021]. [https://lehrerfortbildung-bw.de/st\\_kompetenzen/weiteres/projekt/projektkompetenz/methoden\\_a\\_z/daten/regression.htm](https://lehrerfortbildung-bw.de/st_kompetenzen/weiteres/projekt/projektkompetenz/methoden_a_z/daten/regression.htm)
- Leiß, D. „*Hilf mir es selbst zu tun“ Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Hildesheim, 2007.
- Leiß, D. (2010). *Adaptive Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren – empirische Befunde einer vergleichenden Labor- und Unterrichtsstudie*. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(2), 197.
- Lenssen, N. J. L., Schmidt, G. A., Hansen, J. E., Menne, M. J., Persin, A., Ruedy, R. & Zyss, D. (2019). *Improvements in the GISTEMP Uncertainty Model* [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. JGR Atmospheres, 124(12), 6307. <https://doi.org/10.1029/2018JD029522>
- Lindner, M. & Schuster, A. (2018). Zehn Fakten zum Klimawandel – Klima [Zugegriffen: 12. August 2020]. <https://www.zeit.de/wissen/umwelt/2018-11/klimagipfel-in-katowice-klimawandefakten-mythen-globale-erwaermung-wissenschaft>
- Ludwig, M. (1996). *Projektorientierter Mathematikunterricht*. Mathematik in der Schule, 34.
- Ludwig, M. & Reit, X.-R. (2013). Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule. In R. Borromeo Ferri (Hrsg.). Wiesbaden, Springer Fachmedien. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-01579-4\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-658-01579-4_5)
- Ludwig, M. & Xu, B. (2010). *A comparative study of modelling competencies among Chinese and German students* [Zugegriffen: 31. Oktober 2021]. Journal für Mathematik-Didaktik, 31, 77. <https://link.springer.com/article/10.1007/s13138-010-0005-z>
- Maaß, K. (2004). *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie*. Franzbecker.
- Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin, Cornelsen Scriptor.
- Maaß, K. (2010). *Classification Scheme for Modelling Tasks*. Journal für Mathematik-Didaktik, 31(2), 285.

- Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule – Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen* (Techn. Ber.). Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) an der Universität Kiel.
- Mast, M. (2019). So geht es nicht weiter – Sonderbericht zum Klimawandel [Zugegriffen: 12. August 2020]. <https://www.zeit.de/wissen/umwelt/2019-08/sonderbericht-klimawandel-ipcc-landflaechen-nutzung-nachhaltigkeit>
- MathWorks. (o. D. a). fitlm – Fit linear regression model [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://de.mathworks.com/help/stats/fitlm.html>
- MathWorks. (o. D. b). LinearModel – Linear regression model [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://de.mathworks.com/help/stats/linearmodel.html>
- Mattes, W. (2015). *Routiniert planen – effizient unterrichten – Ein Ratgeber*. Braunschweig Paderborn Darmstadt, Schöningh Verlag im westermann druck GmbH.
- Merkur. (2021). Weltklimarat warnt mit düsterer Prognose vor irreversiblen Klimafolgen: „Das Schlimmste kommt erst noch“ – BERICHTSENTWURF ZUR ERDERWÄRMUNG [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://www.merkur.de/welt/weltklimarat-erdewaermung-klimafolgen-berichtsentwurf-ipcc-sterberate-90819586.html>
- Mihatsch, C. (2021). Die Ergebnisse der Klimakonferenz 2021 [Zugegriffen: 20. November 2021]. Helmholtz Klima Initiative. <https://www.helmholtz-klima.de/aktuelles/klimagipfel-2021-ergebnisse>
- MikeRun. (2021). Black body curves of Planck for various temperatures and comparison with classical theory of Rayleigh-Jeans [Creative Commons-Lizenz: frei nutzbar. Zugegriffen: 22. Oktober 2021]. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Black\\_body\\_DE.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Black_body_DE.svg)
- Miller, R. G. (1980). *Simultaneous Statistical Inference* (2. Aufl.). New York (USA), Springer-Verlag.
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016a). Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) [Zugegriffen: 09. Oktober 2021].
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016b). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Biologie [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_BIO.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_BIO.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016c). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Biologie, Naturphänomene und Technik (BNT) [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_BNT.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_BNT.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016d). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Ethik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_ETH.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_ETH.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016e). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Geographie [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_GEO.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_GEO.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016f). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Mathematik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_M.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf)

- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016g). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Naturwissenschaft und Technik (NwT) [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_NWTPROFIL.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_NWTPROFIL.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016h). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Physik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_PH.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_PH.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016i). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Biologie [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_BIO.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_BIO.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016j). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Biologie, Naturphänomene und Technik (BNT) [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_BNT.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_BNT.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016k). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Ethik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_ETH.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_ETH.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016l). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Gemeinschaftskunde [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_GK.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_GK.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016m). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Geographie [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_GEO.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_GEO.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016n). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Mathematik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_M.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_M.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016o). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Naturwissenschaft und Technik (NwT) [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_NWT.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_NWT.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2016p). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Physik [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_PH.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_PH.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2018a). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I – Bildungsplan 2016 – Informatik, Mathematik, Physik (IMP) – Profilfach an der Gemeinschaftsschule [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag

- GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_SEK1\\_IMP.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_IMP.pdf)
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg. (2018b). Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe II – Bildungsplan 2016 – Informatik, Mathematik, Physik (IMP) – Profilfach an der Gemeinschaftsschule [Zugegriffen: 12. Juli 2021]. Stuttgart, Neckar-Verlag GmbH. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW\\_ALLG\\_GYM\\_IMP.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_IMP.pdf)
- Minitab Blog Editor. (2020). Wie interpretieren Sie das R-Quadrat in Regressionanalysen? [Zugegriffen: 07. Oktober 2021]. <https://blog.minitab.com/de/regressionsanalyse-wie-interpretiere-ich-das-r-quadrat-und-bewerte-die-gute-der-anpassung>
- Morherr, F. & Lego, C. (o. D.). Modellieren im Mathematik-Unterricht [Zugegriffen: 08. September 2021]. <https://tu-dresden.de/mn/math/analysis/das-institut/memberbereiche/frank-martin.morherr/ressourcen/dateien/vortraege-und-workshops/ModellierenimMathematikunterricht.pdf?lang=de>
- Morice, C. P., Kennedy, J. J., Rayner, N. A. & Jones, P. D. (2012). Quantifying uncertainties in global and regional temperature change using an ensemble of observational estimates: The HadCRUT4 dataset, *J. Geophys. Res.* and 117, D08101. <https://doi.org/10.1029/2011JD017187>
- Mudelsee, M. (2014). *Climate Time Series Analysis – Classical Statistical and Bootstrap Methods* (2. Aufl., Bd. 51). Cham Heidelberg New York Dordrecht London, Springer.
- NASA. (o. D.). The Causes of Climate Change [Zugegriffen: 18. Oktober 2021]. <https://climate.nasa.gov/causes/>
- Newman, A. (2021). Solar forcing is not the main cause of current global warming, contrary to claim [Zugegriffen: 18. Oktober 2021]. <https://climatefeedback.org/claimreview/solar-forcing-is-not-the-main-cause-of-current-global-warming-contrary-to-claim-by-alex-newman-in-the-epoch-times/>
- Nielbock, M. (2017). Ein Diagramm des elektromagnetischen Spektrums, mit Angabe der Benennung, Wellenlänge (mit Beispielen), Frequenz, Temperatur der entsprechenden Schwarzkörperstrahlung [In Anlehnung an eine Vorlage der NASA. Creative Commons-Lizenz: CC-BY-SA. Zugegriffen: 22. Oktober 2021]. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM\\_Spectrum\\_Properties\\_edit\\_de.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM_Spectrum_Properties_edit_de.svg)
- Niss, M. (1992). *Applications and modelling in school mathematics – directions for future development. Development in School Mathematics Education Around the World*, 3.
- NOAA NCDC. (2014). *Climate Change Impacts in the United States: The Third National Climate Assessment* (J. M. Melillo, T. ( Richmond & G. W. Yohe, Hrsg.) [Abbildungserlaubnis mit Urheberschaftsangabe]. U.S. Global Change Research Program. <https://doi.org/10.7930/J0Z31WJ2>
- Noreiks, N. (2018). Aufbau der Atmosphäre [Nutzungslizenz: CC BY-NC-ND 4.0. Zugegriffen: 18. Oktober 2021]. Max-Planck-Institut für Meteorologie. <https://mpimet.mpg.de/kommunikation/mediathek/abbildungen/aufbau-der-atmosphaere>
- Odenwald, M. (2019). Fakten oder Fake – Argumente widerlegt: Was Sie Klimaskeptikern auf krude Theorien antworten sollten [Zugegriffen: 19. November 2021]. focus. [https://www.focus.de/wissen/klima/fakten-oder-fake-argumente-der-klimaskeptiker-widerlegt\\_id\\_11161392.html](https://www.focus.de/wissen/klima/fakten-oder-fake-argumente-der-klimaskeptiker-widerlegt_id_11161392.html)
- OECD. (2021). *Mathematics performance (PISA) (indicator)* (Techn. Ber.). Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD). <https://doi.org/10.1787/04711c74-en>

- Ortlieb, C. P., von Dresky, C., Gasser, I. & Günzel, S. (Hrsg.). (2013). *Mathematische Modellierung – Eine Einführung in zwölf Fallstudien*. Springer Spektrum.
- Paoletta, M. S. (2018). *Linear Models and Time-Series Analysis – Regression, ANOVA, ARMA and GARCH* (D. J. Balding, N. A. C. Cressie, G. Fitzmaurice, H. Goldstein, G. Givens, G. Molenberghs, D. W. Scott, R. S. Tsay & A. F. M. Smith, Hrsg.; 1. Aufl.). John Wiley; Sons.
- Pfleiger, V. (2014). Bestimmtheitsmaß  $R^2$  – Teil 5: Wie hoch muss mein  $R^2$  sein? [Zugegriffen: 07. Oktober 2021]. INWT Statistics. [https://www.inwt-statistics.de/blog-artikel-lesen/Bestimmtheitsmass\\_R2-Teil5.html](https://www.inwt-statistics.de/blog-artikel-lesen/Bestimmtheitsmass_R2-Teil5.html)
- Pollak, H. (1979). *The Interaction between Mathematics and Other School Subjects* (UNESCO, Hrsg.). New Trends in Mathematics Teaching IV, 232.
- Radatz, H. & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Schroedel.
- Rasch, B., Hofmann, W., Friese, M. & Naumann, E. (2010). Quantitative Methoden 1 – Einführung in die Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler. Berlin Heidelberg, Springer.
- Rezende, G. (2018). Chor [Pixaby License: Freie kommerzielle Nutzung ohne Bildnachweis. Zugegriffen: 11. Oktober 2021]. <https://pixabay.com/de/vectors/chorwerke-singen-kinderchor-3871734/>
- Roeckerath, C. (2012). *Mathematische Modellierung der Spiegel eines solarthermischen Kraftwerks im Rahmen einer Modellierungswoche und einer Projektwoche in der Sek. II* (Techn. Ber.). Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen.
- Roth, J. (2019). *Wie viel Mensch (er)trägt die Erde?* [Zugegriffen: 13. August 2019]. h/pd Humanistischer Pressedienst. <https://hpd.de/artikel/viel-mensch-ertraegt-erde-16728>
- Savelsbergh, E. R., van Joolingen, W. R. & van Borkulo, S. P. (2008). What is learned from computer modeling? Modeling modeling knowledge in an experimental study. In G. Kanselaar, V. Jonker, P. A. Kirschner & F. J. Prins (Hrsg.), *International Perspectives in the Learning Sciences: Cre8ing a learning world – Proceedings of the Eighth International Conference for the Learning Sciences* (S. 140–142). International Society of the Learning Sciences. <https://doi.org/10.22318/icles2008.3.140>
- Schmidt, G. A. (O. (2021). GISS Surface Temperature Analysis (GISTEMP v4) [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://data.giss.nasa.gov/gistemp/>
- Schönbrodt, S. (im Druck). Erneuerbare Energien – Modellierung und Optimierung eines Solarkraftwerks. In M. Frank & C. Roeckerath (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 9 (ISTRON)* (1. Aufl.). Berlin, Springer-Verlag GmbH Germany.
- Schönbrodt, S. & Frank, M. (2020). *Schüler/innen forschen zu erneuerbaren Energien – Optimierung eines Solarkraftwerks* (H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler, Hrsg.). In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster, WTM-Verlag.
- Schönbrodt, S., Wohak, K. & Frank, M. (in Druck). Digital Tools to Enable Collaborative Mathematical Modeling Online. In H. Humenberger & H.-S. Siller (Hrsg.), *Modelling in Science, Education and Learning (MSEL)*. Universitat Politècnica de València: Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>
- Schwenner, L. (2021). So viel Wasser gibt es auf der Erde [Zugegriffen: 01. November 2021]. <https://www.quarks.de/umwelt/faq-so-viel-wasser-gibt-es-auf-der-erde/>
- Science, C. (o. D.). In honor of Albert Einstein's birthday – Everything should be made as simple as possible, but no simpler [Zugegriffen: 26. August 2021]. <https://www.championingscience.com/2019/03/15/everything-should-be-made-as-simple-as-possible-but-no-simpler/>

- Science AF, S. (2018). This Has Got to Be One of The Most Beautiful And Powerful Climate Change Visuals We've Ever Seen [Zugegriffen: 08. November 2021]. <https://www.sciencealert.com>this-has-got-to-be-one-of-the-most-beautiful-and-powerful-climate-change-visuals-we-ve-ever-seen>
- Searle, S. R. (1997). *Linear Models*. New York, USA, Wiley & Sons.
- Seber, G. A. F. & Lee, A. J. (2003). *Linear Regression Analysis* (D. J. Balding, P. Bloomfield, N. A. C. Cressie, N. I. Fisher, I. M. Johnstone, J. B. Kadane, L. M. Ryan, D. W. Scott, A. F. M. Smith & J. L. Teugels, Hrsg.; 2. Aufl., Bd. 329). Wiley.
- Siller, H.-S. (2013). *Digitale Medien und Modellbildung – Herausforderung für einen modernen Mathematikunterricht* (H. Henning, Hrsg.; Realität und Modell, Bd. 59). Friedrich-Verlag.
- Spiegel Wissenschaft. (2017). Klima – CO<sub>2</sub>-Konzentration steigt so schnell wie nie [Zugegriffen: 15. März 2021]. <https://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/co2-konzentration-steigt-so-schnell-wie-nie-a-1175568.html>
- Stahel, W. *Statistische Regressionsmodelle* [Zugegriffen: 01. Juli 2021]. Zugegriffen: 01. Juli 2021. ETH Zürich, 2017.
- Steland, A. (2007). *Basiswissen Statistik – Kompaktkurs für Anwender aus Wirtschaft, Informatik und Technik*. Berlin Heidelberg, Springer.
- Stender, P. (2016). *Wirkungsvolle Lehrerinterventionsformen bei komplexen Modellierungsaufgaben* (G. Kaiser, Hrsg.). Wiesbaden, Springer Spektrum.
- Stender, P. (2018). *Lehrerinterventionen bei der Betreuung von Modellierungsfragestellungen auf Basis von heuristischen Strategien* (R. Borromeo Ferri & W. Blum, Hrsg.; Lehrerkompetenzen zum Unterrichten mathematischer Modellierung). Springer Spektrum. [https://doi.org/10.1007/978-3-658-22616-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-658-22616-9_5)
- Stern, P. C. (2016). *Sociology. Impacts on climate change views*. Nature Climate Change, 6, 341. <https://doi.org/10.1038/nclimate2970>
- Sube, M. (2019). *Entwicklung und Evaluation von Unterrichtsmaterial zu Data Science und mathematischer Modellierung mit Schülerinnen und Schülern* (Dissertation) [Zugegriffen: 09. September 2021]. RWTH Aachen. Aachen. Zugegriffen: 09. September 2021. <http://publications.rwth-aachen.de/record/771553/files/771553.pdf>
- Tagesschau. (2021). „Das Schlimmste kommt erst noch“ – Berichtsentwurf des Weltklimarats [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://www.tagesschau.de/ausland/weltklimarat-erderwaermungsbilanz-101.html>
- taz. (2021). Das Schlimmste kommt erst noch – Zusammenbruch ganzer Ökosysteme, Wassers- und Lebensmittelknappheit sowie Krankheiten werden Folgen der Erderwärmung sein. – Weltklima nahe der 1,5-Grad-Grenze [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://taz.de/Weltklima-nahe-der-15-Grad-Grenze/!5778903/>
- Team Weltverbesserer.de. (2020). Klimawandel-Fakten: 7 Klimaleugner-Argumente im Faktencheck [Zugegriffen: 19. November 2021]. <https://www.weltverbesserer.de/klimawandel-fakten-klimaluege-62/>
- Umweltbundesamt. (2014). Klima und Treibhauseffekt [Zugegriffen: 31. August 2021]. [umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimawandel/klima-treibhauseffekt%5C#textpart-1](https://www.umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimawandel/klima-treibhauseffekt%5C#textpart-1)
- Umweltbundesamt. (2019). Klimawandel in Deutschland: Neuer Monitoringbericht belegt weitreichende Folgen – Die Folgen der globalen Erderwärmung werden in Deutschland spürbarer und lassen sich immer besser belegen [Zugegriffen: 24. August 2021]. <https://www.umweltbundesamt.de/presse/pressemitteilungen/klimawandel-in-deutschland-neuer-monitoringbericht>

- Umweltbundesamt. (2021). Die Treibhausgase [Zugegriffen: 24. August 2021]. <https://www.umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimaschutz-energiepolitik-in-deutschland/treibhausgas-emissionen/die-treibhausgase>
- United Nations – Climate Change. (o. D.). The Paris Agreement [Zugegriffen: 08. Juli 2021]. <https://unfccc.int/process-and-meetings/the-paris-agreement/the-paris-agreement>
- Valley, S. L. (1965). *Handbook of geophysics and space environments*. McGraw-Hill.
- von Rauchhaupt, U. (2015). Klimawandel – Die Zeugen der Zweifler [Zugegriffen: 19. November 2021]. Frankfurter Allgemeine. <https://www.faz.net/aktuell/wissen/erde-klima/klimawandel-als-luege-wie-skeptische-wissenschaftler-kritik-ueben-13456636.html>
- Vos, P. (2011). What is 'Authentic' in the Teaching and Learning of Mathematical Modeling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.). Dordrecht Heidelberg London New York, Springer.
- Wergen, G. (2013). *Records in stochastic processes – Theory and applications* (Techn. Ber. PACS numbers: 02.50.Ey, 02.50.-r, 05.45.Tp). Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln. Köln. <https://arxiv.org/pdf/1211.6005.pdf>
- Wess, R., Klock, H., Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2019). *Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens bei (angehenden) Lehrkräften – Theoretische und empirische Fundierung* (M. Zimmermann & W. Paravicini, Hrsg.). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2016/2017.
- Wess, R. & Greefrath, G. (2019). *Aspekte förderdiagnostischer Kompetenz im Bereich des Lehrens mathematischen Modellierens bei angehenden Lehrkräften* (A. Frank, S. Krauss & K. Binder, Hrsg.). Münster, WTM-Verlag.
- wetter.de. (2017). Klimafaktor Vulkanausbruch – So können Vulkane das Klima beeinflussen [Ursprungsquelle: DWD. Zugegriffen: 14. Oktober 2021]. <https://www.wetter.de/cms/klimafaktor-vulkanausbruch-so-koennen-vulkane-das-klima-beeinflussen-2207716.html>
- Wikipedia. (2021). Methode der kleinsten Quadrate – Wikipedia, Die freie Enzyklopädie [Zugegriffen: 17. Juni 2021]. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Methode\\_der\\_kleinsten\\_Quadrat&oldid=212820337](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Methode_der_kleinsten_Quadrat&oldid=212820337)
- Wikipedia. (o. D.). Wärmestreifen – Warming stripes [Zugegriffen: 05. Juli 2021]. [https://de.vvikipedia.com/wiki/Warming\\_stripes](https://de.vvikipedia.com/wiki/Warming_stripes)
- Winter, H. (1995). *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung*. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 21(61), 37.
- Wirtz, M. A. & Caspar, F. *Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität: Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen* [Zugegriffen: 27. September 2021]. Zugegriffen: 27. September 2021. 2002.
- Wohak, K. (2021). *Didaktisch-methodische Entwicklung und Evaluation von computergestützten Lehr- und Lernmaterialien zur Mathematik inverser Probleme* (Diss.). Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Karlsruhe. <http://dx.doi.org/10.5445/IR/1000136535>
- Wohak, K., Sube, M., Schönbrodt, S., Roeckerath, C. & Frank, M. (2021). Authentische und relevante Modellierung mit Schülerinnen und Schülern an nur einem Tag?! In M. Bracke, M. Ludwig & K. Vorhölter (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 8 (ISTRON-Schriftenreihe)*. Berlin, Springer-Verlag GmbH Germany. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-33012-5>
- Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (Bd. 10). Weinheim und Basel, Beltz Verlag.

Zhang, H.-M., Huang, B. & Lawrimore, J. (2021). NOAA Merged Land Ocean Global Surface Temperature Analysis (NOAAGlobalTemp) [Zugegriffen: 28. Juni 2021]. <https://www.ncdc.noaa.gov/data-access/marineocean-data/noaa-global-surface-temperature-noaaglobaltemp>