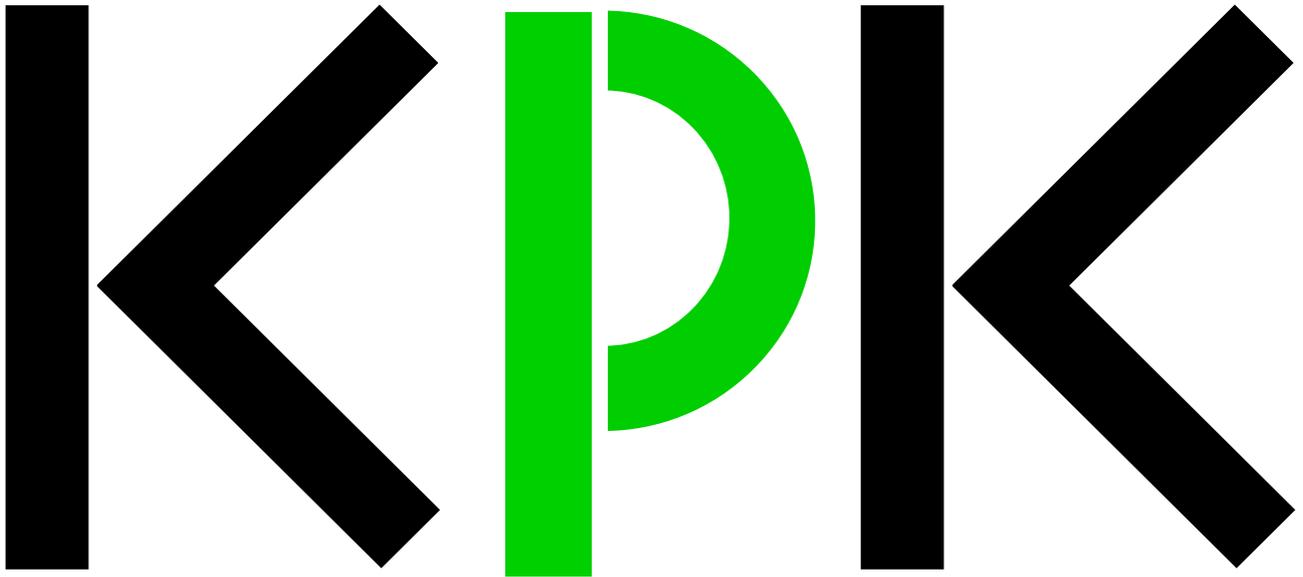


*Friedrich Herrmann*



Der Karlsruher Physikkurs

Hochschulsripten

**Elektrodynamik**

---

## Der Karlsruher Physikkurs

*Hochschulsripten*

- Mechanik
- Thermodynamik
- **Elektrodynamik**
- Optik

**Der Karlsruher Physikkurs**

Auflage 2015

Prof. Dr. *Friedrich Herrmann*



*Lizenziert unter Creative Commons*

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

## Vorwort

Dieses Skriptum gehört zu einer Experimentalphysikvorlesung. Was ist der Unterschied zwischen Experimentalphysik und theoretischer Physik? Statt diese Frage direkt zu beantworten, geben wir Maxwell das Wort. Er macht in seinem berühmten „Treatise on Electricity & Magnetism“ einige Bemerkungen über zwei Physiker, von denen man den einen, nämlich Faraday, als typischen Experimentalphysiker, den anderen, Ampère, als typischen Theoretiker bezeichnen kann:

### Cap. III.

#### Induction der electricen Ströme.

##### Ampère und Faraday.

528. Oerstedts Entdeckung, dass ein electricer Strom magnetische Wirkungen ausübt, führte durch eine Reihe directer Schlüsse zu der weitem Entdeckung, dass electriche Ströme das Vermögen zu magnetisiren haben, und ferner, dass sie auf einander mechanische Kräfte ausüben können. Indessen sind die Bedingungen, unter denen eine magneto-electriche Induction stattfindet, von Faraday, nachdem er sich eine Zeitlang abmühte, electriche Ströme durch magnetische oder electriche Wirkungen hervorzubringen, erst im Jahre 1831 aufgefunden worden. In seinen Untersuchungen hat Faraday stets die Methode befolgt, einerseits die Richtigkeit seiner Ansichten und Ideen durch das Experiment zu prüfen und andererseits sich durch Experimente direct zu weitem Ueberlegungen führen zu lassen. Daraus erklärt sich, dass er in seinen Veröffentlichungen seinen Ideen einen Ausdruck verleiht, der sich ganz besonders einer entstehenden Wissenschaft anpasst. In der That entfernt sich auch seine Schreibweise beträchtlich von der der Physiker, die wie Ampère dazu berufen waren, ihre Ideen in mathematische Form zu kleiden.

Ampères Untersuchungen, durch die er die Gesetze der mechanischen Wirkung electricer Ströme auf einander begründete, gehören zu den glänzendsten Taten, die je in der Wissenschaft vollbracht worden sind. Theorie und Experiment scheinen in voller Macht und Ausbildung dem Hirn des ‚Newton der Electricität‘ entsprungen zu sein. Seine Schrift ist in der Form vollendet, in der Präcision des Ausdrucks unerreichbar, und ihre Bilanz besteht in einer Formel, aus der man alle Phänomene, die die Electricität bietet, abzuleiten vermag, und die in allen Zeiten als Cardinal-Formel der Electrodynamik bestehen bleiben wird.

Obgleich er nun bei seinen Auseinandersetzungen der inductiven Methode folgt, so gestattet er uns doch keinen Einblick in die Werkstatt seiner

529.]

Ampère und Faraday.

217

Gedanken. Wir sehen nicht, wie sich bei ihm selbst Schluss an Schluss gereiht hat, und können kaum glauben, dass Ampère sein Gesetz wirklich mit Hilfe der Experimente ergründet hat, die er uns beschreibt. Wir müssen vermuten — und er erzählt es sogar selbst\*) — dass er sein Gesetz auf einem andern Wege, von dem er uns nichts mitteilt, entdeckt hat, und dass er dann, als er für dasselbe einen vollständigen Beweis aufbaute, vom Gerüst, das ihm zur Aufrichtung seines Gebäudes diente, alle Spuren entfernt hat.

Ganz anders verfährt Faraday. Er berichtet von seinen erfolglosen Versuchen nicht minder wie von den erfolgreichen, er teilt seine noch rohen Vorstellungen ebenso wie seine schon ausgebildeten mit. Deshalb fühlt der Leser, wenn er ihn auch an inductiver Kraft bei weitem nicht erreicht, doch mehr Sympathie als Bewunderung für den Forscher, und er wird fast zu dem Glauben verleitet, dass er selbst, wenn ihm nur die Gelegenheit geboten würde, auch ein solcher Entdecker werden könnte.

Der Studirende soll Ampères Schrift lesen, um an einem glänzenden Vorbild zu lernen, wie man bei der Begründung und dem Ausbau einer Entdeckung zu verfahren hat. Er soll aber auch, wenn er seinen wissenschaftlichen Geist bilden will, Faradays Untersuchungen eifrig studiren, denn, indem ihn der Verfasser in die Geschichte seiner Entdeckung und in seinen Ideengang einführt, fordert er ihn zur Kritik des Weges, auf dem er zu seinen Resultaten gelangt ist, heraus und zeigt ihm, wie man wissenschaftlich Forschungen anzustellen hat.

Vielleicht ist es als ein für die Wissenschaft glücklicher Umstand zu bezeichnen, dass Faraday, wenn er auch völlig vertraut mit den Begriffen von Raum, Zeit und Kraft gewesen ist, kein eigentlicher Mathematiker war. So konnte er sich nicht versucht fühlen, in so manche interessante, aber rein mathematische Untersuchungen, zu denen ihn seine Entdeckungen anforderten, einzudringen. Auch lag es ihm fern, seine Resultate in mathematische Formeln zu kleiden, weder in solche, die von den Mathematikern seiner Zeit gebilligt werden, noch in solche, die ihnen Grund zu Angriffen geben konnten. Dadurch gewann er Musse, die seiner Geistesrichtung zusagenden Arbeiten zu fördern, seine Ideen mit den von ihm entdeckten Tatsachen in Einklang zu bringen und sich zum Ausdruck seiner Resultate eine, wenn nicht technische, doch natürliche Sprache zu schaffen.

Das Skriptum gliedert sich in zwei Teile, **A** und **B**.

Teil **A** könnte man einfach Elektrizitätslehre nennen. Er befasst sich mit der elektrischen Ladung und ihrem Strom. Die Tatsache, dass Ladung nie allein fließen kann, dass ein Ladungsstrom stets von Strömen anderer Größen begleitet ist, spielt hier eine wichtige Rolle.

Der Gegenstand von Teil **B** ist ein einziges physikalisches System: das elektromagnetische Feld. Es werden zunächst spezielle Zustandsklassen dieses Systems behandelt: das elektrostatische und das magnetostatische Feld. Es zeigt sich, dass die Struktur der Theorien dieser beiden Felder identisch ist. Danach wird der Zusammenhang zwischen diesen Feldern beschrieben, der durch das Ampèresche und das Faradaysche Gesetz (1. und 2. Maxwellsche Gleichung) geregelt wird. Die Behandlung des elektromagnetischen Feldes lehnt sich eng an Maxwells eigene Darstellung seiner Theorie an. Demzufolge sind die Feldstärken **E** und **H** bequeme Hilfsmittel, andere physikalisch interessanten Größen des Feldes auszudrücken: Energie, Energiestrom, Impuls und Impulsstrom (mechanische Spannung). Alle Kraftgesetze können aus Maxwells Ausdruck für die Impulsstromdichte hergeleitet werden.

Die Elektrodynamik steckt voller Strukturen und Symmetrien. Je mehr dieser Strukturen man kennt, desto besser versteht man die Elektrodynamik. Als Anfänger wird man aber nicht alle Strukturen gleichzeitig zu verstehen versuchen. Diese Vorlesung macht vor allem von der Symmetrie Gebrauch, bei der sich die elektrische Feldstärke **E** und die magnetische Feldstärke **H** entsprechen. Sie gestattet ein fast blindes Übersetzen vieler Gesetze der Elektrodynamik in ein Analogon. Eine weitere Symmetrie, die wir Dualismus nennen, hatten wir bereits in der Mechanik kennengelernt: Bei ihr entsprechen sich elektrische Stromstärke und Spannung, Induktivität und Kapazität, Knoten und Masche usw. Wir treffen sie in diesem Skriptum wieder an. Die Behandlung einer dritten Symmetrie, bei der sich die Ladungsdichte und die elektrische Stromdichte entsprechen, überlassen wir der Vorlesung über theoretische Physik.

---

# A

**DIE ELEKTRISCHE LADUNG**

---

---

# 1

## **Elektrische Ladung und elektrische Stromstärke**

---

## 1.1 Die Bilanzgleichung der elektrischen Ladung

So wie der Impuls für die Mechanik, ist die elektrische Ladung, oder Elektrizität, für die Elektrizitätslehre charakteristisch.

Das Symbol der elektrischen Ladung ist  $Q$ , die Maßeinheit Coulomb (C).

Wie  $p$ , so ist auch  $Q$  mengenartig, d.h.

- der Wert der Ladung ist einem Raumbereich zugeordnet;
- es gibt eine Ladungsdichte  $\rho_Q$ ;
- es gibt eine Ladungsstromstärke  $I_Q$  (= elektrische Stromstärke);
- es gibt eine Ladungsstromdichte  $j_Q$  (= elektrische Stromdichte).

Besteht keine Verwechslungsgefahr, so lassen wir den Index  $Q$  weg, schreiben also einfach  $\rho$ ,  $I$  bzw.  $j$ . Im Fachjargon nennt man die elektrische Stromstärke auch einfach „Stromstärke“, „elektrischer Strom“ oder, noch kürzer, „Strom“. Die Maßeinheit der elektrischen Stromstärke ist das Ampere (A).

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s.}$$

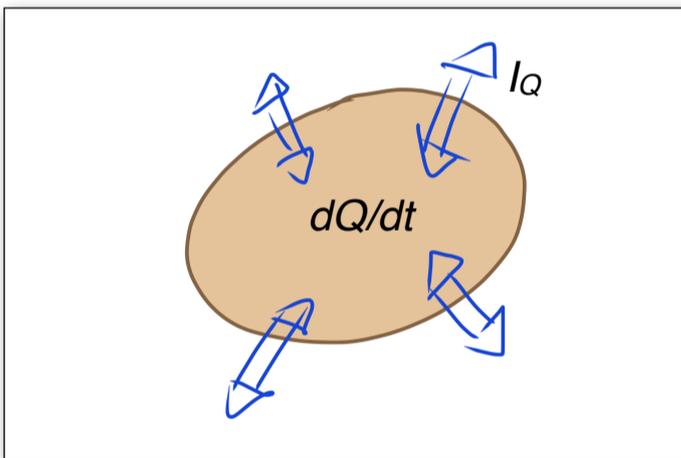
Man misst die elektrische Stromstärke mit dem Amperemeter. Dabei geht man so vor wie bei jeder anderen Stromstärkemessung auch:

- Leitung, in der der Strom fließt, durchtrennen;
- neu entstandene Enden mit den Anschlüssen des Messgeräts verbinden. Der Strom fließt jetzt durch das Messgerät hindurch.

Wie der Impuls, so ist auch die elektrische Ladung eine Erhaltungsgröße. Für einen beliebigen Raumbereich gilt der Erfahrungssatz

$$\frac{dQ}{dt} + I_Q = 0 \tag{1.1}$$

Dies ist die *Bilanzgleichung* für die elektrische Ladung. Sie bezieht sich auf einen Raumbereich, Abb. 1.1.  $dQ/dt$  ist die zeitliche Änderung der elektrischen Ladung innerhalb des Bereichs,  $I_Q$  ist die Stärke des elektrischen Stroms durch die nach außen orientierte Berandungsfläche des Bereichs.



**Abb. 1.1**

Die elektrische Ladung im Innern des Bereichs kann sich nur dadurch ändern, dass ein Strom durch die Oberfläche des Bereichs fließt.

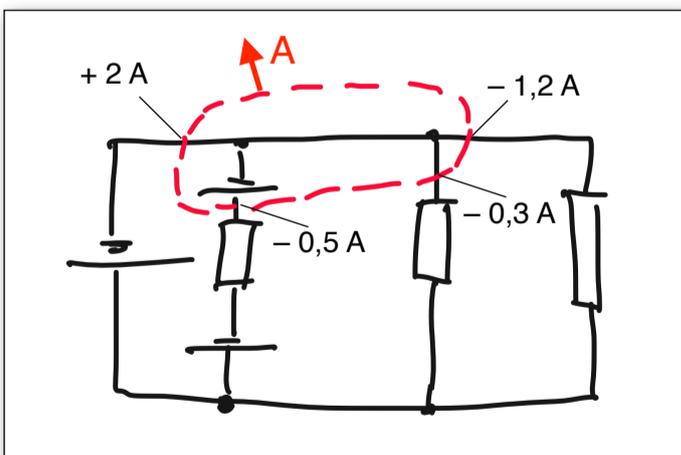
(Der Schreibweise von Gleichung (1.1) liegt die Konvention zugrunde, geschlossene Flächen nach außen zu orientieren. In der Mechanik hatten wir geschlossene Flächen nach innen orientiert.)

Wir werden in den nächsten Abschnitten eine „lokale“ Version der Bilanzgleichung, die so genannte Kontinuitätsgleichung kennenlernen.

In dem Stromkreis von Abb. 1.2 ist  $dQ/dt$  überall gleich Null (in den Energiequellen ist zwar  $dE/dt \neq 0$ , aber  $dQ/dt = 0$ ). Damit vereinfacht sich Gleichung (1.1) zu

$$I_Q = \sum_i I_{Q,i} = 0 \tag{1.2}$$

für jeden geschlossenen Raumbereich, für den  $dQ/dt = 0$  ist. Gleichung (1.2) heißt „Kirchhoffsche Knotenregel“.



**Abb. 1.2**

Der Gesamtstrom durch die gestrichelt gezeichnete Fläche hat die Stärke null.

Die physikalische Größe  $Q$  kann positive und negative Werte annehmen. Man sagt daher manchmal leider, es gebe „zwei Arten elektrischer Ladung“, nämlich positive und negative. (Gibt es auch 2 Arten von Geschwindigkeiten oder zwei Arten von Impuls?)

## 1.2 Fluss eines Vektorfeldes – Stromdichte

Gegeben sei ein Vektorfeld  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ . Man versteht unter dem Fluss des Vektorfeldes durch die Fläche  $S$  das Integral

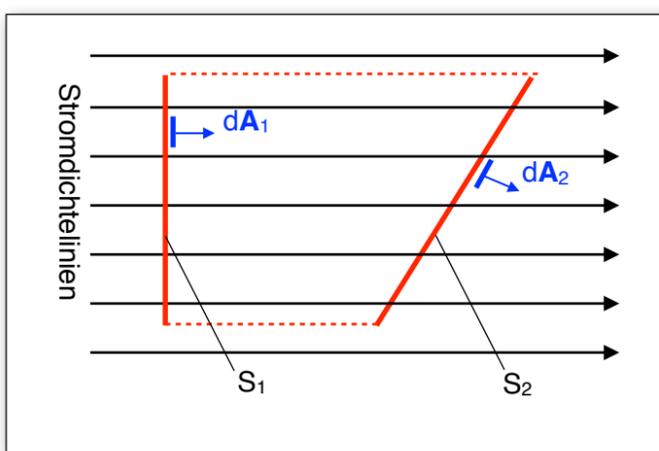
$$\int_S \mathbf{V}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} \quad (1.3)$$

Man kann sich von dieser Größe leicht eine Anschauung bilden, wenn es sich bei dem Vektorfeld um ein Stromdichtefeld handelt. Der Fluss eines Stromdichtefeldes ist nämlich einfach gleich der Stromstärke. Im Fall eines elektrischen Stroms gilt also:

$$I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{A} \quad (1.4)$$

Diese Gleichung gestattet es, die Stärke  $I$  des Stroms, der durch die Fläche  $S$  hindurchfließt, aus der Stromdichteverteilung  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  zu berechnen.

In Abb.1.3 fließt durch die Flächen  $S_1$  und  $S_2$  derselbe Strom. Wie zu erwarten, liefert das Integral (1.4) auch für beide Flächen denselben Wert, denn es trägt nur die zu  $\mathbf{j}$  parallele Komponente von  $d\mathbf{A}$  zum Integral bei.



**Abb. 1.3**  
Die Stärke des Stroms durch die Flächen  $S_1$  und  $S_2$  ist dieselbe.

Die Berechnung des Integrals (1.3) in kartesischen Koordinaten geschieht nach der folgenden Formel

$$\iint_S \mathbf{V} d\mathbf{A} = \iint_{S_{yz}} V_x dy dz + \iint_{S_{zx}} V_y dz dx + \iint_{S_{xy}} V_z dx dy$$

Hier ist  $S_{yz}$  die Projektion der Fläche  $S$  auf die  $y$ - $z$ -Koordinatenebene.  $S_{zx}$  ist die Projektion auf die  $z$ - $x$ - und  $S_{xy}$  die Projektion auf die  $x$ - $y$ -Ebene.

Man kann sich bei manchen Strömungen vorstellen, dass sich die strömende Größe an jeder Stelle des Strömungsfeldes mit einer eindeutig bestimmten Geschwindigkeit bewegt. So hat das Wasser eines Flusses an jeder Stelle des Flusses eine eindeutige Geschwindigkeit, und wir sagen auch, die Masse des Wassers bewege sich mit dieser Geschwindigkeit. Es gibt Fälle, in denen es vernünftig ist, der strömenden Größe an einem festen Ort mehr als eine einzige Geschwindigkeit zuzuordnen. So unterscheidet man im Fall eines elektrischen Stroms in einem metallischen Leiter zwischen der Geschwindigkeit der sogenannten beweglichen und der unbeweglichen Ladungsträger. (Im Bezugssystem des Leiters ist die Geschwindigkeit der unbeweglichen Ladungsträger Null). Schließlich gibt es Strömungen bei denen es sinnlos ist, von einer Strömungsgeschwindigkeit zu sprechen, obwohl die Stromdichte eine eindeutig bestimmte Größe ist.

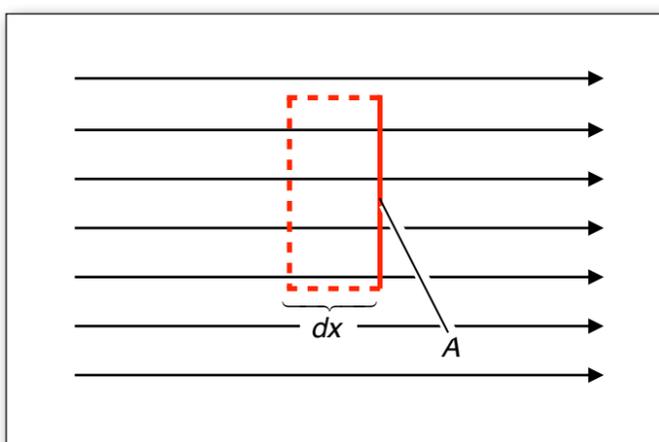
Existiert eine Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , so gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen  $\mathbf{v}$  und der Stromdichte:

$$\mathbf{j}_X = \rho_X \mathbf{v}$$

Hier ist  $\rho_X$  die Dichte der strömenden Größe  $X$  und  $\mathbf{j}_X$  ihre Stromdichte.

Wir erläutern die Beziehung an Hand von Abb. 1.4. Durch die kleine Fläche  $A$  strömt in der Zeit  $dt$  die in dem Raumbereich des Volumens  $A dx = A v dt$  enthaltene Menge  $dX = \rho_X A v dt$ . Die Stärke des Stroms ist also

$$I_X = \frac{dX}{dt} = \rho_X A v$$



**Abb. 1.4**  
Im Zeitintervall  $dt$  strömt die in dem Bereich mit dem Volumen  $A dx$  enthaltene Menge durch die Fläche  $A$ .

Der Betrag der Stromdichte ist  $j_X = I_X/A = \rho_X v$ . Da Stromdichtevektor und Strömungsgeschwindigkeitsvektor parallel sind, ergibt sich

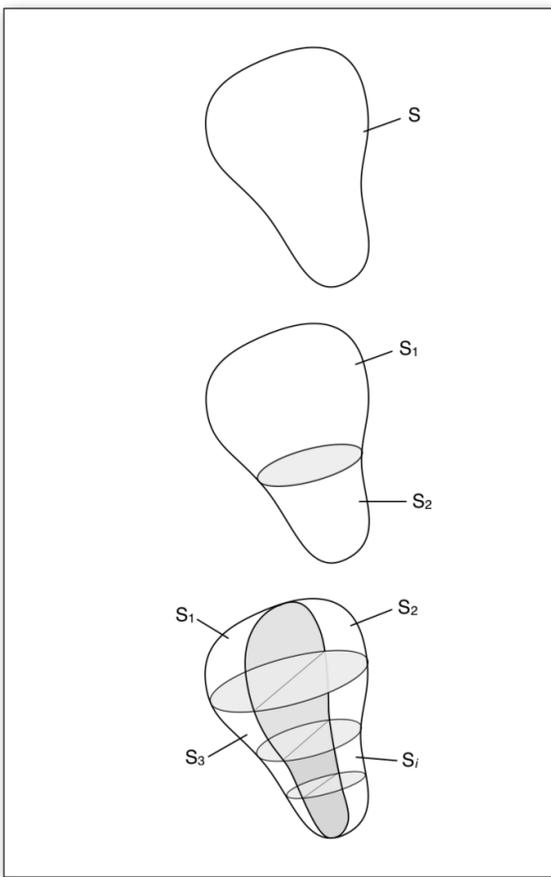
$$\mathbf{j}_X = \rho_X \cdot \mathbf{v} \quad (1.5)$$

### 1.3. Die Divergenz eines Vektorfeldes – der Gaußsche Integralsatz

Die folgende Herleitung gilt für jedes Vektorfeld. Sie ist besonders leicht zu durchschauen, wenn man sich das Stromdichtefeld eines elektrischen Stroms vorstellt:  $\mathbf{j}(x,y,z)$ .

Die Stärke  $I$  des elektrischen Stroms durch die geschlossene Fläche  $S$  in Abbildung 1.5 ist

$$I = \oiint_S \mathbf{j} d\mathbf{A}$$



**Abb. 1.5**  
Der von S eingeschlossene Raumbereich wird unterteilt.

Wir teilen das von S eingeschlossene Gebiet in zwei Gebiete auf mit den Begrenzungsflächen  $S_1$  und  $S_2$ . Ein Teil von  $S_1$  fällt mit einem Teil von  $S_2$  zusammen. Es ist

$$I = I_1 + I_2 = \oiint_{S_1} \mathbf{j} d\mathbf{A} + \oiint_{S_2} \mathbf{j} d\mathbf{A}$$

da sich der Anteil von  $I_1$ , der durch die  $S_1$  und  $S_2$  gemeinsame Fläche fließt, gegen den entsprechenden Anteil von  $I_2$  weghebt. Wir teilen das Gebiet weiter auf in immer kleinere Teilgebiete und erhalten

$$I = \sum I_i = \sum_i \oiint_{S_i} \mathbf{j} d\mathbf{A}$$

wo  $I_i$  die Stärke des Stroms durch die Oberfläche  $S_i$  des  $i$ -ten Teilbereichs ist. Wir nennen das Volumen des  $i$ -ten Teilbereichs  $V_i$ . Für immer kleinere Teilungen werden die  $I_i$  immer kleiner. Der Quotient  $I_i/V_i$  dagegen geht gegen einen Grenzwert:

$$\frac{dI}{dV} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{V_i} \oiint_{S_i} \mathbf{j} d\mathbf{A} \right] = \text{div } \mathbf{j}$$

Man nennt diesen Grenzwert die *Divergenz* des Feldes  $\mathbf{j}$  an der Stelle, auf die man das Volumen zusammenschrumpfen lassen hat.

$$I = \oiint_S \mathbf{j} d\mathbf{A}$$

ist ein Maß dafür, wie viel der strömenden Größe –hier die elektrische Ladung– aus dem durch S begrenzten Bereich heraus- oder in den Bereich hineinfließt; ein Maß für die „Quellstärke“ der Strömung. Man nennt daher  $\text{div } \mathbf{j}$  auch die *Quelldichte* des  $\mathbf{j}$ -Feldes, und zwar auch dann, wenn das  $\mathbf{j}$ -Feld gar kein Strömungsfeld ist. Wir schreiben nun die Summe:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i V_i \frac{\oiint_{S_i} \mathbf{j} d\mathbf{A}}{V_i}$$

Für  $V_i \rightarrow 0$  geht die rechte Seite über in

$$\iiint_{V_S} \text{div } \mathbf{j} dV$$

wobei  $V_S$  das Volumen des von S eingeschlossenen Raumbereichs ist. Damit wird

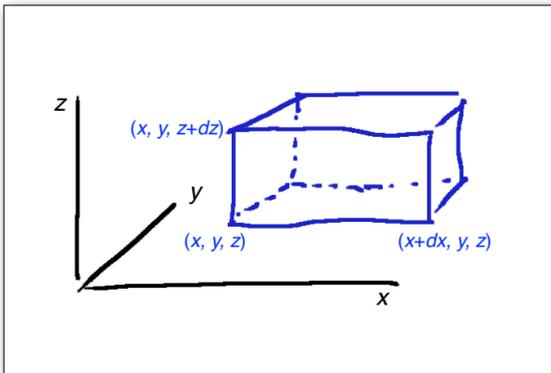
$$\oiint_S \mathbf{j} d\mathbf{A} = \iiint_{V_S} \text{div } \mathbf{j} dV \tag{1.6}$$

Dieses ist der *Gaußsche Integralsatz*. In Worten: Die Stärke des Stroms durch die Oberfläche eines Gebietes ist gleich dem Volumenintegral über die Quelldichte in dem Gebiet. Ist das Feld  $\mathbf{j}$  in kartesischen Koordinaten gegeben, so kann das Skalarfeld  $\text{div } \mathbf{j}$  leicht berechnet werden. Es ist

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

Zum Beweis berechnen wir die Stärke  $I$  des Stroms durch die Wände eines Quaders mit den Kantenlängen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  (Abb. 1.6): Durch die beiden zur  $z$ -Achse senkrechten Flächen fließt (Achtung: Orientierung der Flächen nach außen):

$$\begin{aligned} dl_{z, \text{unten}} - dl_{z, \text{oben}} &= - \left[ j_z(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial j_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dy \\ &\quad + \left[ j_z(x,y,z+dz) + \frac{\partial j_z}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{\partial j_z}{\partial y} \frac{dy}{2} \right] dx dy \\ &= \left[ -j_z(x,y,z) + j_z(x,y,z) + \frac{\partial j_z}{\partial z} dz \right] dx dy = \frac{\partial j_z}{\partial z} dV \end{aligned}$$



**Abb. 1.6**  
Zur Berechnung der Stärke des Stroms durch die Wände eines Quaders

Für die beiden zur  $x$ -Achse und die beiden zur  $y$ -Achse senkrechten Flächen erhält man entsprechende Ausdrücke, so dass sich für den Gesamtstrom durch alle 6 Flächen ergibt:

$$dI = \left[ \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right] dV$$

Mit der Definitionsgleichung der Divergenz folgt daraus:

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

## 1.4 Die Kontinuitätsgleichung der elektrischen Ladung

Die Bilanzgleichung für die elektrische Ladung lautet

$$\frac{dQ}{dt} + I = 0$$

Wir ersetzen  $Q$  durch

$$\iiint \rho dV$$

und, mit dem Gaußschen Integralsatz,

$$I = \iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$$

durch

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{j} dV$$

und erhalten:

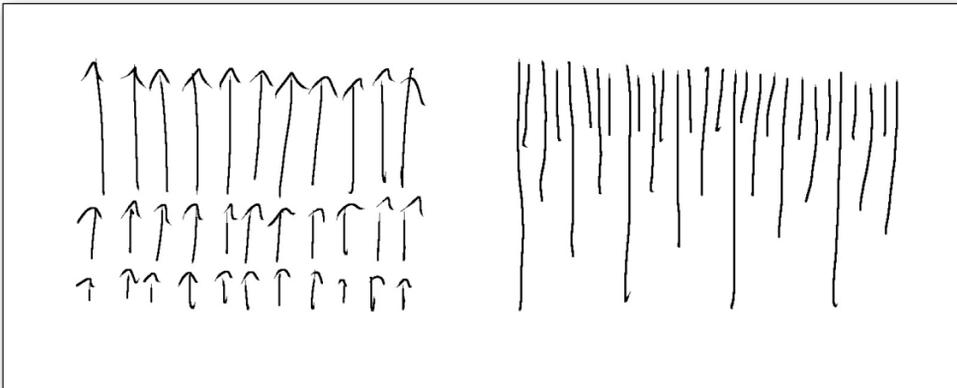
$$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0$$

Da diese Gleichung für jeden beliebigen Raumbereich gilt, muss für die Integranden gelten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.7)$$

Dies ist die Bilanzgleichung in lokaler Form. Man nennt sie auch *Kontinuitätsgleichung*. Sie sagt: Die Quellen des Stromdichtefeldes befinden sich dort, wo sich die Ladungsdichte zeitlich ändert. Eine entsprechende Gleichung gilt für jede andere Erhaltungsgröße.

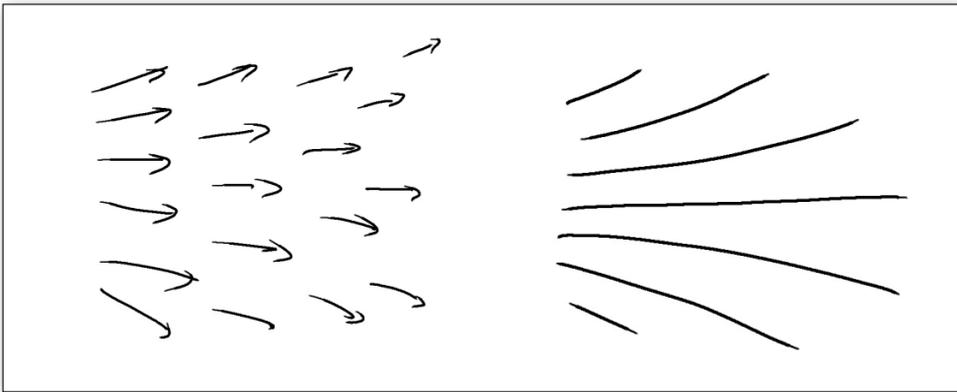
Abb. 1.7 zeigt ein Feld, dessen Divergenz überall ungleich Null ist, und zwar links in Vektorpfeildarstellung und rechts in Feldliniendarstellung.



**Abb. 1.7**

Vektorpfeil- und Feldliniendarstellung eines Feldes, dessen Divergenz überall ungleich Null ist

Die Divergenz des Feldes von Abb. 1.8 ist überall gleich Null.

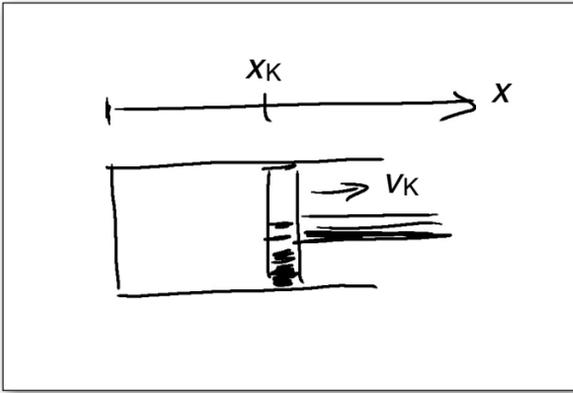


**Abb. 1.8**

Vektorpfeil- und Feldliniendarstellung eines Feldes, dessen Divergenz überall gleich Null ist

Wir wenden die Kontinuitätsgleichung schließlich noch auf eine Massenströmung an. Man kann sich den entsprechenden Versuch besonders leicht vorstellen.

In einem Zylinder ist Luft eingeschlossen, Abb. 1.9. Der Kolben (Ortskoordinate  $x_K$ ) wird mit der Geschwindigkeit  $v_K$  bewegt. ( $v_K$  muss klein gegen die Schallgeschwindigkeit sein, damit die Dichte im ganzen Kolben dieselbe ist). Die Ortskoordinate der Luft ist  $x$ , ihre Geschwindigkeit  $v(x)$ .



**Abb. 1.9**

Zur Anwendung der Kontinuitätsgleichung auf die Masse der Luft im Innern eines Zylinders

Aus

$$\frac{v(x)}{v_K} = \frac{x}{x_K}$$

erhält man das Geschwindigkeitsfeld:

$$v(x) = \frac{x}{x_K} v_K$$

Die Massendichte ist

$$\rho_m = \frac{m}{Ax_K}$$

Mit (1.5) kann man die Massenstromdichte berechnen:

$$\mathbf{j}_m = \rho_m \mathbf{v} = \frac{m}{Ax_K} \frac{x}{x_K} v_K = \frac{m v_K}{A x_K^2} x$$

Daraus ergibt sich die Divergenz zu:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m = \frac{\partial j_{mx}}{\partial x} = \frac{\partial j_m}{\partial x} = \frac{m v_K}{A x_K^2}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{m}{A} \frac{\partial (1/x_K)}{\partial t} = -\frac{m}{A x_K^2} \frac{\partial x_K}{\partial t} = -\frac{m v_K}{A x_K^2}$$

$\operatorname{div} \mathbf{j}_m$  ist also, wie zu erwarten war, gleich  $-\partial \rho_m / \partial t$ .

---

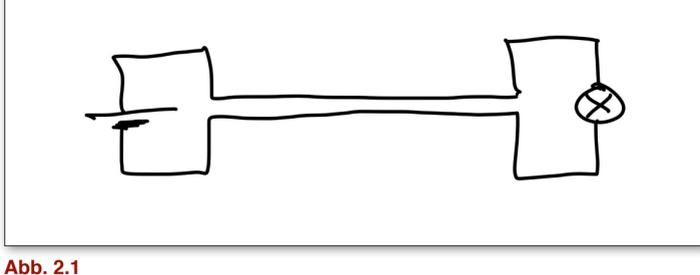
# 2

## **Elektrischer Strom und Energiestrom**

---

## 2.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Stromstärke und Energiestromstärke

Von der Batterie zur Lampe in Abb. 2.1 fließt ein Energiestrom. Außerdem fließt in jedem der beiden Drähte ein elektrischer Strom, und zwar im oberen von links nach rechts und im unteren von rechts nach links.

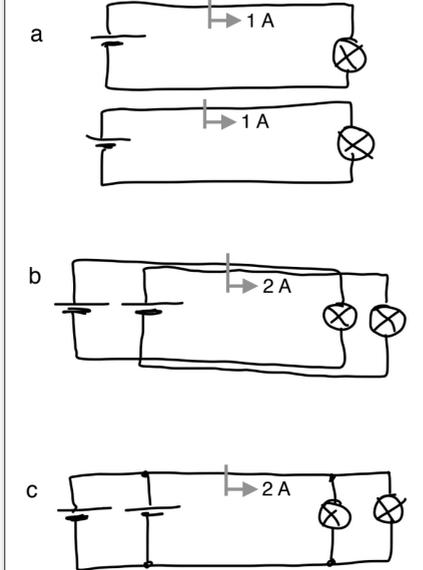


**Abb. 2.1**

Von links nach rechts fließt ein Energiestrom, und in jedem Draht fließt ein elektrischer Strom.

Legt man zwei Stromkreise so übereinander, dass die Drähte zusammenfallen, so verdoppelt sich sowohl der Energiestrom, als auch der elektrische Strom in jeder Leitung, Abb. 2.2. Es gilt also

$$P \sim I$$



**Abb. 2.2**

Zwei gleiche Stromkreise (a) werden übereinander gelegt (b), und die aufeinander liegenden Drahtstücke werden durch je einen einzigen Draht ersetzt (c).

Da die gesamte elektrische Stromstärke (Hin- und Rückleitung zusammengenommen) den Wert Null hat, muss die Beziehung zwischen  $P$  und  $I$  die folgende Form haben:

$$P = -\phi_1 I + \phi_2 I$$

$\phi$  ist eine Größe, die für einen zusammenhängenden Leiter einen bestimmten Wert hat. Für die beiden Leitungen in Abb. 2.1 muss  $\phi$  verschiedene Werte haben. Anderenfalls würde

$$P = 0.$$

Es ist also

$$P = (\phi_2 - \phi_1) I. \tag{2.1}$$

$\phi$  ist das *elektrische Potential*. Durch Gleichung (2.1) werden nur Potentialdifferenzen definiert. Der Potentialnullpunkt kann willkürlich festgelegt werden. Man setzt gewöhnlich das Potential der Erde gleich null. Die Differenz  $U = \phi_2 - \phi_1$  heißt *elektrische Spannung*. Ihre Maßeinheit ist Volt = Watt/Ampere = Joule/Coulomb.

Die elektrische Spannung zwischen den beiden Leitungen eines elektrischen Kabels gibt also an, wie groß der mit Hilfe des Kabels übertragene Energiestrom ist, bei fester Stärke des elektrischen Stroms. Bildlich kann man diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Die Elektrizität „trägt“ die Energie. Die elektrische Spannung gibt an, wie stark der Träger mit Energie „beladen“ ist.

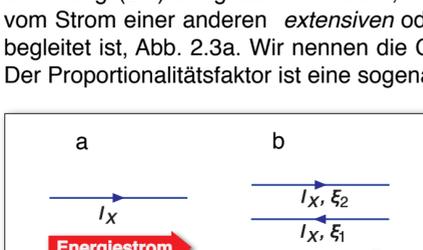
Gleichung (2.1) hat dieselbe Struktur wie die aus der Mechanik bekannte Gleichung

$$P = (v_2 - v_1) F. \tag{2.2}$$

Dass die Gleichungen (2.1) und (2.2) dieselbe Form haben ist kein Zufall. Jeder Energietransport lässt sich nämlich durch eine Gleichung dieses Typs beschreiben:

$$P = \xi \cdot I_X. \tag{2.3}$$

Gleichung (2.3) bringt zum Ausdruck, dass ein Energiestrom stets vom Strom einer anderen *extensiven* oder mengenartigen Größe  $X$  begleitet ist, Abb. 2.3a. Wir nennen die Größe  $X$  den *Energieträger*. Der Proportionalitätsfaktor ist eine sogenannte *intensive Größe*.



**Abb. 2.3**

(a) Neben dem Energiestrom fließt noch ein Energieträgerstrom.

(b) Der Trägerstrom hat eine Rückleitung.

Viele Energietransporte sind so beschaffen, dass die Trägergröße  $X$  in einem geschlossenen Stromkreis fließt, dass es für  $X$  eine Hin- und eine Rückleitung gibt, Abb. 2.3b. Damit ein Nettoenergiestrom resultiert, muss die intensive Größe in Hin- und Rückleitung verschiedene Werte haben. Die Stärke des Nettoenergiestroms ist dann:

$$P = (\xi_2 - \xi_1) I_X. \tag{2.4}$$

Ein Beispiel hierfür ist der gerade behandelte Energietransport mit einem zweiadrigen elektrischen Kabel.

Wir betrachten noch zwei weitere Arten von Energietransporten, d. h. zwei weitere Beispiele für Gleichungen vom Typ der Gleichung (2.3) oder (2.4).

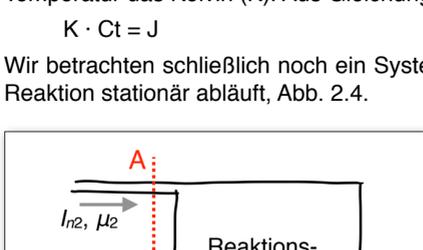
Wird Energie „in Form von Wärme“ übertragen (zum Beispiel durch die Wand eines schlecht isolierten Hauses), so fließt außer der Energie noch *Entropie*. Der Energieträger  $X$  in Gleichung (2.3) ist also die Entropie  $S$ . Die zugehörige intensive Größe ist die *absolute Temperatur*  $T$ . Es ist also

$$P = T \cdot I_S. \tag{2.5}$$

Die Maßeinheit der Entropie ist das Carnot (Ct), die der absoluten Temperatur das Kelvin (K). Aus Gleichung (2.5) folgt daher

$$K \cdot Ct = J$$

Wir betrachten schließlich noch ein System, in dem eine chemische Reaktion stationär abläuft, Abb. 2.4.



**Abb. 2.4**

Reaktionsbehälter mit Zuleitung für die Ausgangsstoffe und Wegleitung für die Reaktionsprodukte

Durch eine Leitung werden dem Reaktionsraum die Ausgangsstoffe der Reaktion zugeführt, durch eine andere werden die Reaktionsprodukte weggeleitet. Durch die Fläche  $A$  fließt ein Energiestrom, und auch dieser ist vom Typ der Gleichung (2.4):

$$P = (\mu_2 - \mu_1) I_n. \tag{2.6}$$

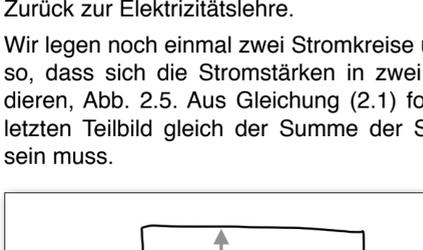
Hier ist  $\mu$  das *chemische Potential*.  $\mu$  ist eine Größe, die einem Stoff oder einem *Stoffgemisch* zugeordnet ist.  $n$  ist der *Reaktionsumsatz*. Die Maßeinheit von  $n$  ist das Mol (mol). Die Maßeinheit der *Umsatzrate*  $I_n$  ist daher mol/s. Die Maßeinheit von  $\mu$  ergibt sich aus Gleichung (2.6) zu Joule/mol. Man kürzt diese Einheit manchmal ab durch Gibbs (G). Es ist also

$$G \cdot \text{mol} = J.$$

Das chemische Potential eines Stoffes hängt ab vom Druck, von der Temperatur und vom Aggregatzustand des Stoffes. Falls der Stoff gelöst vorliegt, hängt es noch ab von der Konzentration und von der Natur des Lösungsmittels.

Zurück zur Elektrizitätslehre.

Wir legen noch einmal zwei Stromkreise übereinander. Diesmal aber so, dass sich die Stromstärken in zwei der Leitungen zu null addieren, Abb. 2.5. Aus Gleichung (2.1) folgt, dass die Spannung im letzten Teilbild gleich der Summe der Spannungen im ersten Bild sein muss.



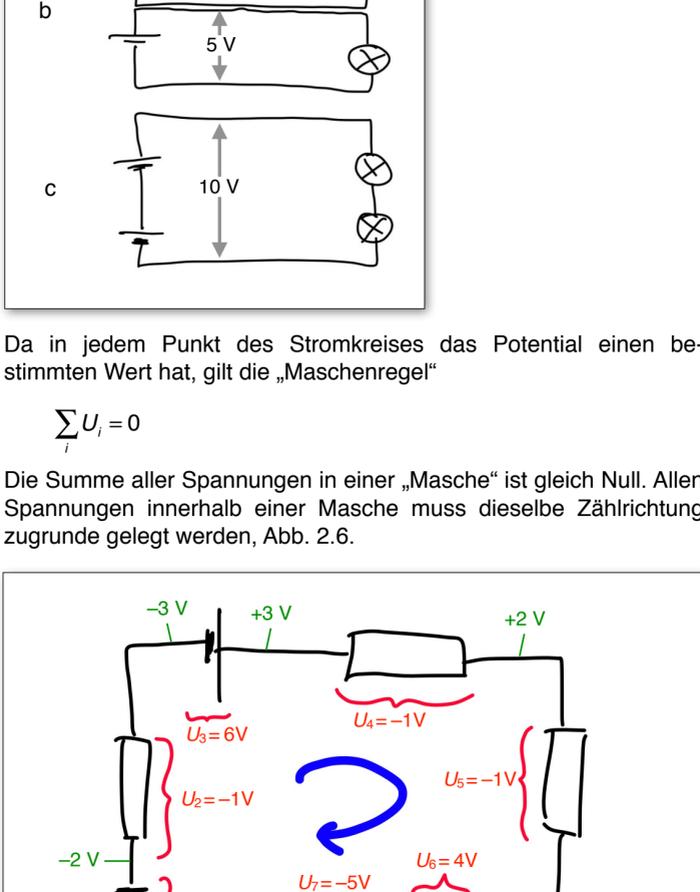
**Abb. 2.5**

Zwei gleiche Stromkreise werden so zusammengefasst, dass sich die Stromstärken in zwei Leitungen zu null addieren.

Da in jedem Punkt des Stromkreises das Potential einen bestimmten Wert hat, gilt die „Maschenregel“

$$\sum_i U_i = 0$$

Die Summe aller Spannungen in einer „Masche“ ist gleich Null. Allen Spannungen innerhalb einer Masche muss dieselbe Zählrichtung zugrunde gelegt werden, Abb. 2.6.



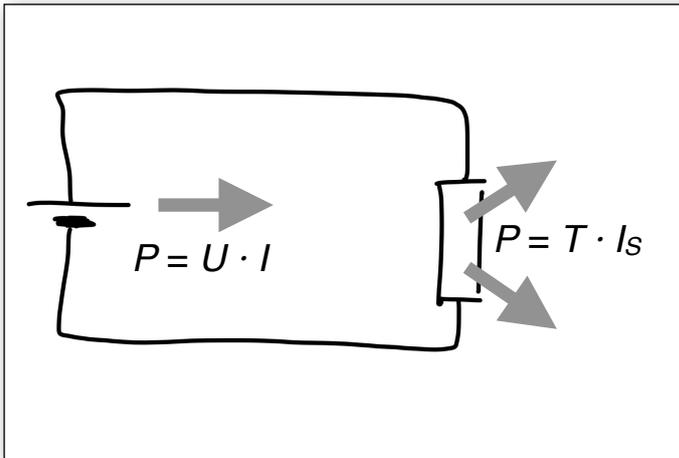
**Abb. 2.6**

Den Spannungen innerhalb einer Masche muss dieselbe Zählrichtung zu Grunde gelegt werden.

Spannungen misst man mit dem Voltmeter. Man verbindet die beiden Anschlüsse des Voltmeters mit den beiden Punkten, zwischen denen die Spannung gemessen werden soll. Die Frage nach dem Absolutwert des Potentials ist sinnlos, genauso sinnlos wie die Frage nach dem Absolutwert einer Geschwindigkeit. (Ein Tachometer hat, genauso wie ein Voltmeter, zwei Anschlüsse; es misst die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Auto und Erde). Genauso wie man zur Angabe einer Geschwindigkeit ein Bezugssystem, d. h. einen Geschwindigkeitsnullpunkt wählen muss, muss man zur Angabe eines elektrischen Potentials das „elektrische Bezugssystem“, d. h. den Potentialnullpunkt, festgelegt haben.

## 2.2 Energiedissipation

In das Gerät von Abb. 2.7 fließt Energie elektrisch hinein. Diese Energie wird im Gerät vollständig dissipiert. Energie dissipieren heißt, mit Hilfe der Energie Entropie erzeugen.



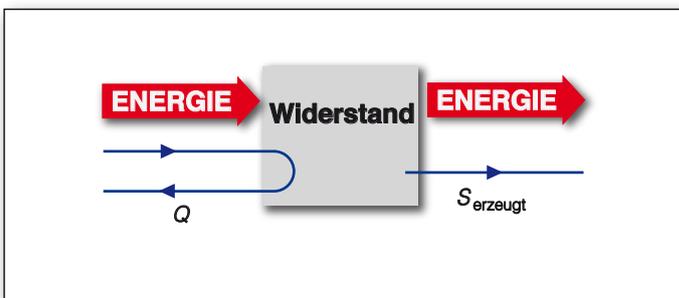
**Abb. 2.7**

Die ganze ankommende Energie wird in dem Widerstand dissipiert.

Es könnte sich bei dem Gerät handeln um eine Glühlampe, die Heizspirale eines Bügeleisens oder einen technischen Widerstand, aber nicht um einen Elektromotor oder eine Batterie, die gerade geladen wird. Da in dem Gerät die ganze ankommende Energie  $U \cdot I$  dissipiert wird, gilt:

$$U \cdot I = T \cdot I_S$$

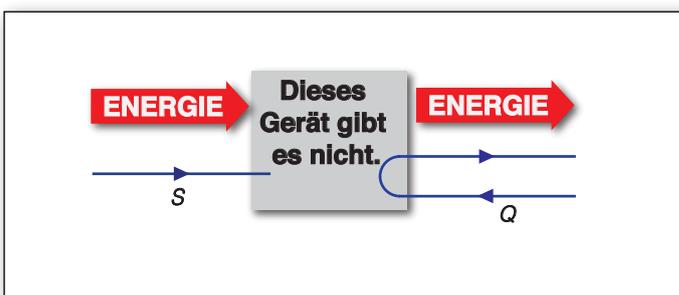
$I_S$  ist die Stärke des Entropiestroms, der das Gerät verlässt und  $T$  die absolute Temperatur des Geräts. Abb. 2.8 zeigt das Flussbild des Vorgangs.



**Abb. 2.8**

Flussdiagramm des elektrischen Widerstandes

Es ist eine Erfahrungstatsache, dass man Entropie zwar erzeugen, aber nicht vernichten kann. Der Vorgang von Abb. 2.8 kann daher nicht rückwärts ablaufen, er ist *irreversibel*, Abb. 2.9.



**Abb. 2.9**

Die Umkehrung des Vorgangs, der in einem elektrischen Widerstand abläuft, ist unmöglich.

## 2. Elektrischer Strom und Energiestrom

---

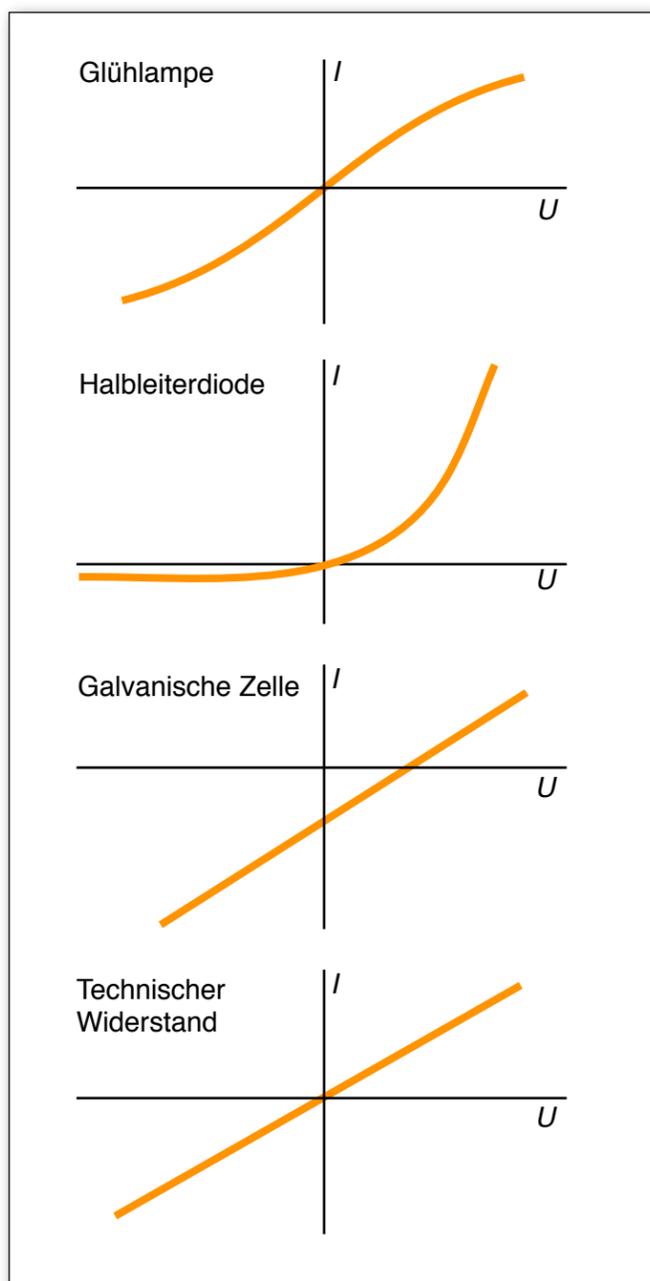
### **2.3 Die elektrische Spannung als Antrieb eines elektrischen Stroms**

Von einem System, in dem Energie dissipiert wird, sagt man, es habe einen Widerstand. Das Wort Widerstand beinhaltet, ebenso wie das Wort Spannung, ein Bild. Danach wird das Fließen des Stroms durch den Widerstand behindert. Dass der Strom trotz der Behinderung fließt, liegt an der Spannung. Sie stellt einen „Antrieb“ dar, sie ist die „Ursache“ des Stroms. Dieses Bild ist zwar sehr brauchbar, ist aber reine menschliche Erfindung. Man könnte genauso gut sagen, der Strom sei die Ursache der Spannung (man sagt sogar oft, der Strom rufe einen Spannungs-„Abfall“ hervor).

---

## 2.4 Kennlinien – das Ohmsche Gesetz

Wir betrachten Gegenstände mit zwei elektrischen Anschlüssen: Widerstände, Drahtstücke, Dioden und andere Dinge. Stellt man für einen solchen Gegenstand den Zusammenhang zwischen der Stärke des Stroms, der durch ihn fließt, und der Spannung zwischen seinen Anschlüssen graphisch dar, so erhält man seine *Kennlinie*, Abb. 2.10.



**Abb. 2.10**  
Beispiele für Strom-Spannungs-Kennlinien

Für manche Gegenstände gilt unter bestimmten Voraussetzungen – konstante Temperatur, Stromdichte nicht zu hoch – ein besonders einfacher Zusammenhang:

$$U \sim I.$$

Man sagt, für den Gegenstand gelte das *Ohmsche Gesetz*. Es gilt z. B. für Metalldrähte (bei festgehaltener Temperatur). Man nennt in diesem Fall den Quotienten

$$R = U/I$$

den Widerstand des Gegenstandes. Die Maßeinheit des Widerstandes ist das Ohm, abgekürzt  $\Omega$ . ( $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ ).

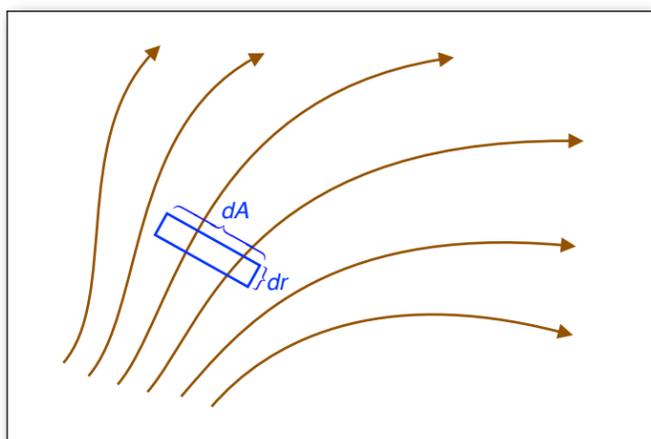
Für einen „Ohmschen Leiter“ der Länge  $l$  mit konstantem Querschnitt  $A$  gilt

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A}$$

$\rho$  heißt *spezifischer Widerstand* (Achtung: dasselbe SI-Symbol wie für Massen- und für Ladungsdichte). Der Kehrwert  $\sigma$  des spezifischen Widerstandes heißt *elektrische Leitfähigkeit*.

Das Ohmsche Gesetz macht eine globale Aussage über einen Leiter. Wir wollen daraus eine lokale Beziehung zwischen Stromdichte und Potentialdifferenz herleiten.

Wir betrachten ein rechtwinkliges Volumenelement in einer Strömung mit der Länge  $dr$  (in Strömungsrichtung) und der Querschnittsfläche  $dA$ , Abb. 2.11.



**Abb. 2.11**  
Zum Zusammenhang zwischen Stromdichte und Potentialgradient

Die Stärke  $dI = |\mathbf{j}|dA$  des Stroms durch diesen Querschnitt ist mit dem Ohmschen Gesetz:

$$|\mathbf{j}|dA = \frac{d\Phi}{dR} = \frac{d\Phi}{dr} \sigma dA$$

wo  $d\Phi$  die Potentialdifferenz zwischen den beiden um  $dr$  voneinander entfernten Flächen ist. Hieraus folgt  $|\mathbf{j}| = \sigma d\Phi/dr$ . Da der Strom in die Richtung fließt, in der  $\Phi$  am stärksten abnimmt, ist

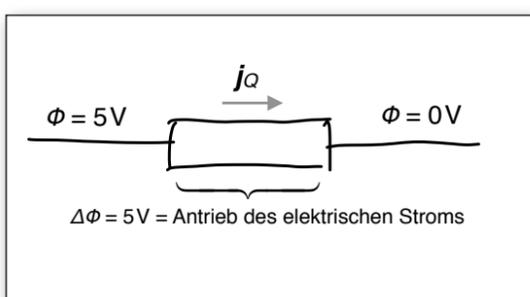
$$\mathbf{j} = -\sigma \text{grad } \Phi. \quad (2.8)$$

## 2.5 Die Differenz der Werte der intensiven Größe als Antrieb des Stroms der extensiven

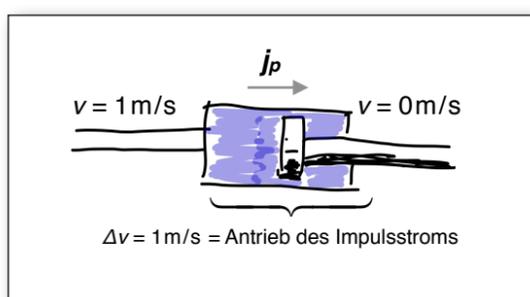
Damit ein elektrischer Strom durch einen elektrischen Widerstand fließt, braucht er einen Antrieb: eine elektrische Spannung, Abb. 2.12. Manchmal ist  $I \sim U$  bzw.  $j \sim \text{grad } \phi$  (Ohmsches Gesetz). Im elektrischen Widerstand wird Entropie erzeugt:

$$T I_{S,erzeugt} = \Delta\phi \cdot I$$

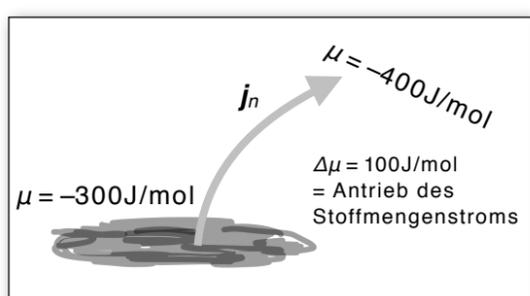
Name des Vorgangs: *Erzeugung Joulescher Wärme*



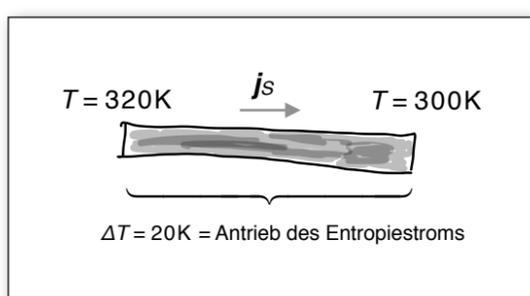
**Abb. 2.12**  
Elektrische Potentialdifferenz als Antrieb eines elektrischen Stroms



**Abb. 2.13**  
Geschwindigkeitsdifferenz als Antrieb eines Impulsstroms



**Abb. 2.14**  
Chemische Potentialdifferenz als Antrieb eines Stoffmengenstroms



**Abb. 2.15**  
Temperaturdifferenz als Antrieb eines Entropiestroms

Damit ein Impulsstrom  $F$  durch einen mechanischen Widerstand (Stoßdämpfer, viskoses Medium) fließt, braucht er einen Antrieb: eine Geschwindigkeitsdifferenz, Abb. 2.13. Manchmal ist  $F = \Delta v/R_p$ . Im mechanischen Widerstand wird Entropie erzeugt:

$$T I_{S,erzeugt} = \Delta v \cdot F$$

Name des Vorgangs: *Reibung*

Damit ein Stoffmengenstrom durch einen „chemischen Widerstand“ fließt (z.B. gasförmiges Wasser von einer Stelle eines Zimmers durch die Luft zu einer anderen), braucht er einen Antrieb: eine Differenz der chemischen Potentiale  $\mu$  („chemische Spannung“), Abb. 2.14. Manchmal ist  $j_n \sim \text{grad } \mu$  (1. Ficksches Gesetz). Bei dem Vorgang wird Entropie erzeugt:

$$T I_{S,erzeugt} = \Delta\mu \cdot I_n$$

Name des Vorgangs: *Diffusion*

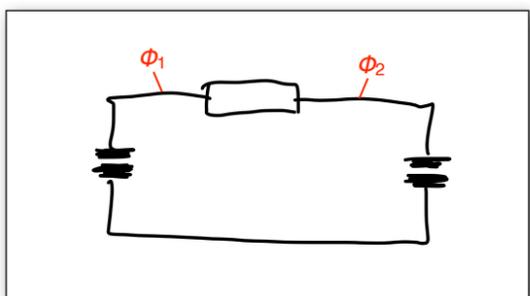
Damit ein Entropiestrom durch einen Wärmewiderstand (z.B. Hauswand, Kupferstab) fließt, braucht er einen Antrieb: eine Temperaturdifferenz („Thermische Spannung“), Abb. 2.15. Manchmal ist  $I_s \sim \text{grad } T$  (Wärmeleitungsgleichung). Bei dem Vorgang wird Entropie erzeugt:

$$T I_{S,erzeugt} = \Delta T \cdot I_s$$

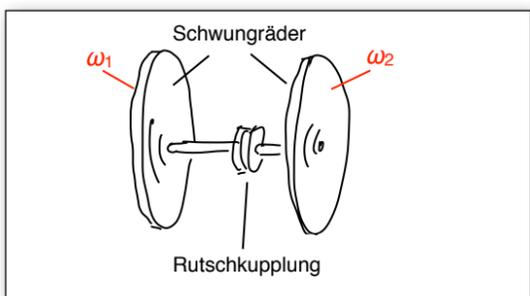
Name der Vorgangs: *Wärmeleitung*

Wir fassen zusammen: Eine Differenz der Werte der intensiven Größe stellt einen Antrieb für einen Strom der zugehörigen extensiven Größe dar.

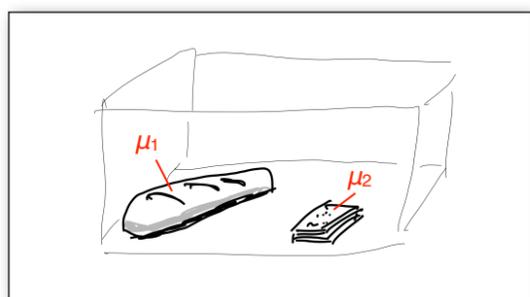
Die Ströme der extensiven Größen fließen nur solange, wie der Antrieb, d.h. die Differenz der intensiven Größen, von null verschieden ist. Ist diese Differenz gleich null, so sagt man es bestehe Gleichgewicht bezüglich der zugehörigen extensiven Größe, Abb. 2.16 - 2.19.



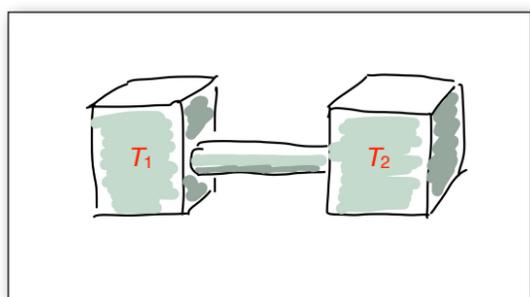
**Abb. 2.16**  
Elektrisches Gleichgewicht: Es fließt kein  $Q$  mehr wenn  $\phi_1 = \phi_2$ .



**Abb. 2.17**  
Rotationsgleichgewicht: Es fließt kein  $L$  mehr wenn  $\omega_1 = \omega_2$ .



**Abb. 2.18**  
Chemisches Gleichgewicht: Es fließt keine Stoffmenge mehr wenn  $\mu_{\text{Brot}} = \mu_{\text{Knäckebrötchen}}$ .



**Abb. 2.19**  
Thermisches Gleichgewicht: Es fließt kein  $S$  mehr wenn  $T_1 = T_2$ .

---

# 3

## **Elektrischer Strom und Stoffmengenstrom**

---

## 3.1 Das chemische Potential

Wie ein elektrischer Potentialunterschied einen Antrieb für einen  $Q$ -Strom darstellt, so stellt eine Differenz des chemischen Potentials  $\Delta\mu$  einen Antrieb für einen  $n$ -Strom dar. Der Wert des chemischen Potentials bezieht sich stets auf einen bestimmten Stoff. Man schreibt daher im Zweifelsfall den Stoffnamen in Klammern hinter das  $\mu$ . Um eine qualitative Vorstellung von den Werten des chemischen Potentials und dem Zusammenhang zwischen  $\mu$  und anderen physikalischen Größen zu bekommen, braucht man nur nachzusehen, von wo nach wo Stoffe fließen.

Ein Gas oder eine Flüssigkeit fließt in einem Rohr von Stellen hohen zu Stellen niedrigen Drucks. Das chemische Potential hängt also vom Druck ab, es wächst mit zunehmendem Druck.

Wasserdampf, der mit Luft vermischt ist, „diffundiert“ von Stellen hoher zu Stellen niedriger Konzentration. Ebenso diffundiert in Wasser gelöstes Salz von Stellen hoher zu Stellen niedriger Konzentration.  $\mu$  nimmt also mit der Konzentration zu.

Bei trockener Luft verdunstet eine Wasserpfütze. Das chemische Potential des Wassers in der Pfütze ist also höher als in der Luft.

Benutzt man Silicagel zum Trocknen der Luft, so ist das chemische Potential des Wassers im Silicagel niedriger als in der Luft. Das chemische Potential eines Stoffes hängt also auch von dem Medium ab, in dem sich der Stoff befindet.

---

## 3.2 Stoffe und Teilchen

Kommt es bei einem System nicht auf die Menge an, so spricht man von einem Stoff. 1 g Luft ist derselbe Stoff wie 1 kg Luft. Um einen Stoff zu charakterisieren, kommt es aber sehr wohl auf den Zusammenhang der Werte der mengenartigen Größen untereinander an:

So ist zum Beispiel für

Wasser:  $m/n = 18 \text{ g/mol}$

freie Elektronen  $m/n = 0,55 \text{ mg/mol}$  und  $Q/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$

Licht  $E/p = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Einige der mengenartigen Größen sind quantisiert. Was heißt das? Kann ein System von einer Größe nichts abgeben oder aufnehmen, so ist der Wert der Größe ein ganzzahliges Vielfaches eines Elementarquantums z.B.:

$$Q = k_1 \cdot e \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C (Elementarladung)}$$

$$L = k_2 \cdot \frac{\hbar}{2} \quad \hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Js (Drehimpulsquantum, Planck – Konstante)}$$

$$n = k_3 \cdot \tau \quad \tau = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ mol (Elementarmenge, 1/Avogadrokonstante)}$$

$k_1, k_2, k_3 = \text{ganze Zahlen}$

Der Quotient  $F = e/\tau = 0,965 \cdot 10^5 \text{ C/mol}$  heißt *Faraday-Konstante*.

Ein System, bei dem die Stoffmenge den Wert  $n = 1\tau$  hat, nennt man ein *Teilchen*. Unter bestimmten Umständen darf man sich darunter ein kleines lokalisierbares Individuum vorstellen, oft versagt aber diese Vorstellung.

Das Teilchen Elektron z.B. ist ein System mit

$$n = 1\tau, Q = 1e, L = \hbar/2, E = \dots, \text{etc.}$$

Teilchen für die  $Q \neq 0$  ist, nennt man *Ladungsträger*.

Beispiele für Ladungsträger:

freies Elektron  
bewegliches Elektron in Halbleiter  
Defektelektron in Halbleiter  
freies Positron  
Cu<sup>++</sup>-Ion in wässriger Lösung  
Myon

So wie zu einer bestimmten Menge eines Stoffs ein Ensemble der Werte aller mengenartigen Größen gehört, so gehört zu einem Stoffstrom ein Ensemble von Strömen der entsprechenden mengenartigen Größen. So gehören zu einem Elektronenstrom ein elektrischer Strom (Stärke  $I$ ), ein Massenstrom (Stärke  $I_m$ ), ein Stoffmengenstrom (Stärke  $I_n$ ), ein Entropiestrom (Stärke  $I_S$ )... Manche der Stromstärken hängen für einen bestimmten Stoff wieder auf charakteristische Art zusammen. So ist für einen Strom freier Elektronen

$$I/I_m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg.}$$

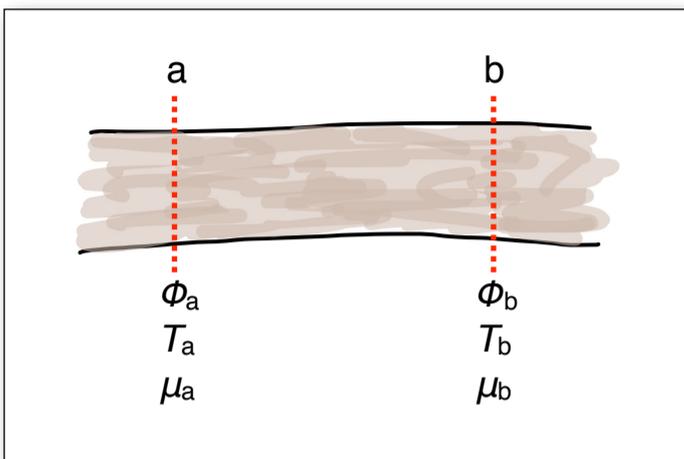
Die mengenartigen Größen sind mehr oder weniger stark „aneinander gekoppelt“. So ist elektrische Ladung stets fest an Stoffmenge und an Masse gekoppelt. Es gibt keinen elektrischen Strom ohne Massenstrom und ohne Stoffmengenstrom. Es gibt also keinen rein elektrischen Strom. Daraus folgt, dass man einen Stoff- oder Teilchenstrom auf verschiedene Arten antreiben kann.

So kann man einen Elektronenstrom antreiben:

- indem man einen elektrischen Potentialgradienten erzeugt; dieser Potentialgradient „zieht“ an der Ladung der Elektronen;
  - indem man einen Gradienten des chemischen Potentials erzeugt; dieser zieht an der Stoffmenge der Elektronen;
  - indem man einen  $T$ -Gradienten erzeugt; dieser zieht an der Entropie der Elektronen.
-

### 3.3 Das elektrochemische Potenzial

Wir betrachten den Strom irgendwelcher Ladungsträger zwischen den Stellen a und b einer Leitung, Abb. 3.1.



**Abb. 3.1**

Ein Stoffstrom kann verschiedene Antriebe haben.

Haben alle intensiven Variablen bei a und b denselben Wert, bis auf das elektrische Potential, ist also  $T_a = T_b$ ,  $\mu_a = \mu_b, \dots$  und  $\Phi_a \neq \Phi_b$ , so wird der Teilchenstrom durch die elektrische Spannung  $\Delta\Phi = \Phi_a - \Phi_b$  angetrieben. In der Leitung wird Energie dissipiert gemäß

$$P = T \cdot I_{S,erzeugt} = (\Phi_a - \Phi_b) I.$$

Haben dagegen alle intensiven Variablen außer  $\mu$  bei a und b denselben Wert, ist also  $T_a = T_b$ ,  $\Phi_a = \Phi_b$  etc. und  $\mu_a \neq \mu_b$ , so wird der Teilchenstrom durch die chemische Spannung  $\Delta\mu = \mu_a - \mu_b$  angetrieben, und in der Leitung wird Energie dissipiert gemäß

$$P = T \cdot I_{S,erzeugt} = (\mu_a - \mu_b) I_n.$$

Diese Gleichung kann als Definitionsgleichung des chemischen Potenzials angesehen werden. Für die Maßeinheit von  $\mu$  ergibt sich J/mol, für das auch die Abkürzung Gibbs (G) gebräuchlich ist:

$$1 \text{ G} = 1 \text{ J/mol}$$

Haben sowohl  $\Phi$  als auch  $\mu$  bei a und b unterschiedliche Werte, so hat der Strom zwei Antriebe:  $\Delta\Phi$  und  $\Delta\mu$ . Diese können an den Elektronen in dieselbe oder in die entgegengesetzte Richtung „ziehen“.

Die dissipierte Energie ist dann

$$P = T \cdot I_{S,erzeugt} = (\Phi_a - \Phi_b) I + (\mu_a - \mu_b) I_n.$$

Nun sind  $I$  und  $I_n$  aneinander gekoppelt. Ein Teilchen ( $n = 1 \tau$ ) trägt eine ganze Zahl  $z$  von Elementarladungen:

$$Q = ze.$$

Für Elektronen zum Beispiel ist  $z = -1$ .

Elektrischer und Stoffmengenstrom hängen also zusammen gemäß

$$\frac{I}{I_n} = \frac{ze}{\tau}$$

und mit  $e/\tau = F$  (= Faraday-Konstante) folgt

$$I = zFI_n. \quad (3.1)$$

Damit wird die dissipierte Energie

$$P = [(\Phi_a - \Phi_b)zF + (\mu_a - \mu_b)]I_n$$

Man nennt die Größe

$$\eta = \mu + zF\Phi \quad (3.2)$$

das *elektrochemische Potential* der Ladungsträger in der entsprechenden Umgebung. Damit wird

$$P = (\eta_a - \eta_b) I_n \quad (3.3)$$

Der Gesamtantrieb des Teilchenstroms ist also durch die *elektrochemische Spannung*

$$\Delta\eta = \eta_a - \eta_b$$

gegeben.

Es fließt kein Teilchenstrom, wenn  $\Delta\eta = 0$ , wenn also  $\eta_a = \eta_b$  ist. Das bedeutet, dass

$$\mu_a - \mu_b = -zF(\Phi_a - \Phi_b)$$

ist. „Stromlosigkeit“ erhält man also nicht, wenn das elektrische, sondern wenn das elektrochemische Potential überall gleich ist.

### 3.4 Die Kontaktspannung

Das chemische Potential der Elektronen ist in unterschiedlichen Leitern verschieden. Es besteht also für die Elektronen zwischen zwei Metallen eine chemische Potentialdifferenz. Legt man fest, dass das chemische Potential freier Elektronen im Vakuum den Wert 0 G hat, so gelten die Werte von Tabelle 3.1.

Stoff	$\mu$ (in kG)
Ag	-460
Cs	-170
Cu	-430
Ni	-445
Pt	-515
W	-435

**Tabelle 3.1**  
Chemisches Potenzial der Elektronen in einigen Metallen

Zwischen Kupfer und Platin z.B. besteht für Elektronen eine chemische Potentialdifferenz  $\mu(\text{Cu}) - \mu(\text{Pt}) = 85 \text{ kG}$ . Das chemische Potential der Elektronen ist im Cu höher als im Pt. Bringt man einen Körper aus Kupfer und einen aus Platin miteinander in Berührung, so fließen zunächst Elektronen, dem chemischen Potentialgefälle nach, vom Kupfer zum Platin. Dadurch laden sich die beiden Metalle entgegengesetzt auf, und zwar das Kupfer positiv und das Platin negativ. Das elektrische Potential des Kupfers nimmt dabei zu, das des Platins ab. Es entsteht also ein elektrischer Antrieb in die dem chemischen Antrieb entgegengesetzte Richtung. Wenn

$$F\Delta\phi = \Delta\mu,$$

also  $\Delta\eta = 0$  geworden ist, wenn also elektrischer und chemischer Antrieb entgegengesetzt gleich sind, fließt kein Teilchenstrom mehr. Es herrscht *elektrochemisches Gleichgewicht*.

Zwischen zwei Körpern aus verschiedenen Metallen, die sich berühren, besteht also eine elektrische Spannung, die *Kontaktspannung* oder *Voltaspannung*. Wir berechnen die Kontaktspannung zwischen Kupfer und Platin.

Aus

$$\eta = 0$$

folgt

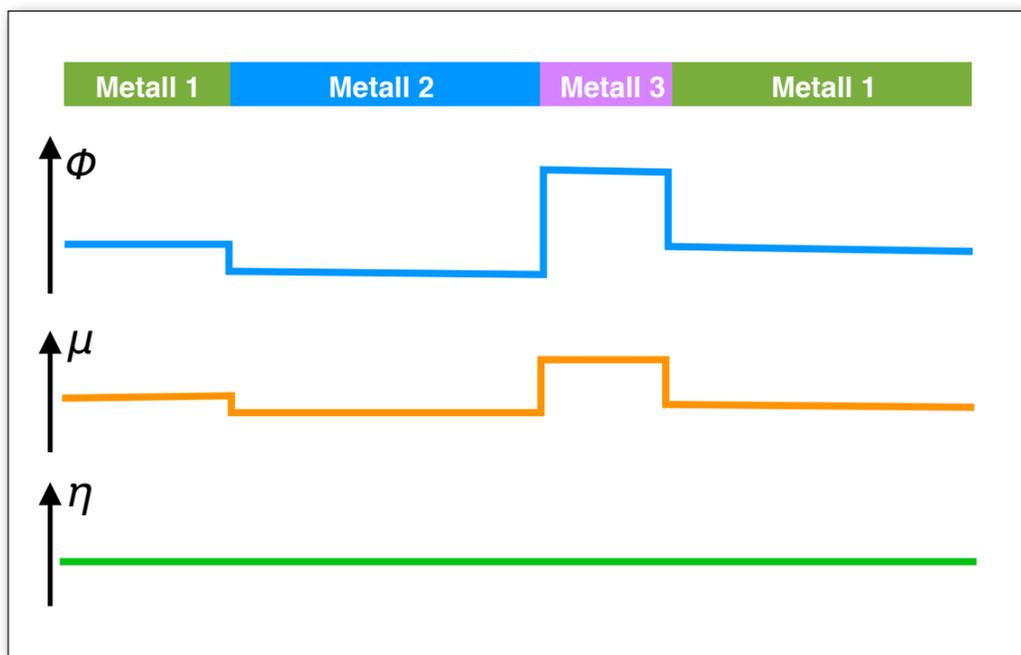
$$\Delta\phi = (1/F)\Delta\mu.$$

Mit  $F = 0,965 \cdot 10^5 \text{ C/mol}$  und  $\Delta\mu = 85 \text{ kG}$  erhält man

$$\Delta\phi = \phi(\text{Cu}) - \phi(\text{Pt}) = 0,88 \text{ V}.$$

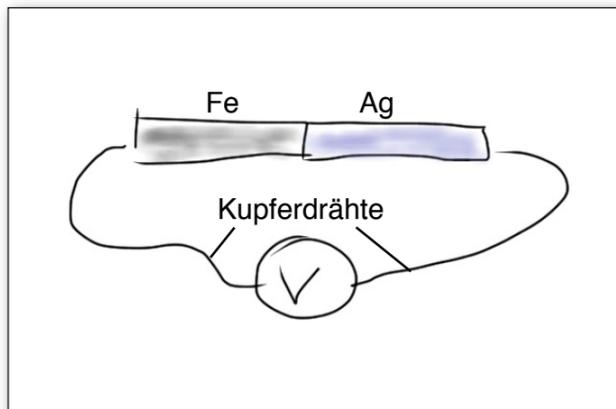
Trotz (oder besser: wegen) dieser Spannung fließt kein elektrischer Strom.

Baut man aus verschiedenen Metallen einen geschlossenen „Kreis“ auf, so fließt kein Strom, Abb. 3.2.



**Abb. 3.2**  
Elektrisches, chemisches und elektrochemisches Potenzial eines geschlossenen „Stromkreises“, der nur aus drei Leitern aus unterschiedlichen Metallen besteht

Man kann die Kontaktspannung nicht einfach mit einem Voltmeter messen. Abbildung 3.3 zeigt, warum. Ein Voltmeter zeigt immer die elektrochemische Spannung an. Nur wenn das chemische Potential in den beiden Punkten, zwischen denen man misst, dasselbe ist, sind die elektrochemische und elektrische Spannung bis auf den Faktor  $zF$  gleich.



**Abb. 3.3**  
Das Voltmeter misst nicht die elektrische Spannung zwischen Eisen und Silber, sondern die elektrochemische.

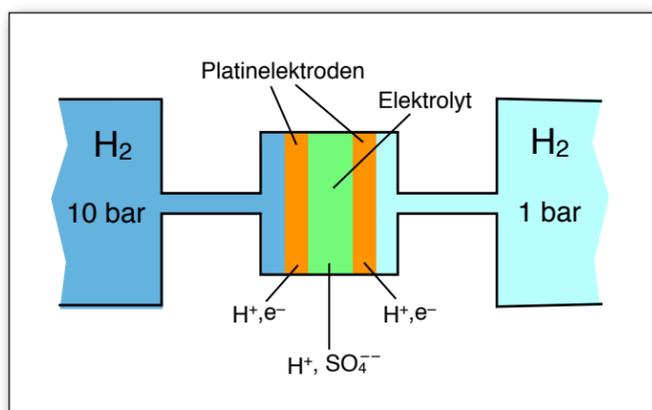
Wenn man trotzdem so tut, als zeige das Voltmeter die elektrische Spannung an, so gibt es in der Regel kein Unglück, denn in vielen Fällen, in denen man glaubt, man brauche die elektrische Spannung, braucht man tatsächlich die elektrochemische; etwa zur Berechnung der elektrischen Stromstärke nach dem Ohmschen Gesetz.

Die Messung der elektrischen Potentialdifferenz zwischen zwei Materialien ist recht schwierig. Die Werte von Tabelle 3.1 sind daher mit Unsicherheiten behaftet.

### 3.5 Die Funktionsweise der Galvanischen Zelle

Auch wenn die Geräte oder „Zellen“ unterschiedlich aufgebaut sind, ist das Wesentliche ihrer Funktionsweise in allen Fällen gleich. Wir versuchen es im folgenden zu verstehen an Hand eines Systems, das aus technischen Gründen schwer zu realisieren, das aber sehr übersichtlich ist, so dass man die Funktionsweise leicht durchschaut.

Die Zelle nutzt die chemische Potenzialdifferenz die ein Gas – in unserem Fall Wasserstoff – durchläuft, wenn es sich entspannt, Abb. 3.4.



**Abb. 3.4**

Elektrochemische Zelle. Das chemische Potenzial des Wasserstoffs ist im linken Reservoir höher als im rechten.

Im linken Reservoir befindet sich Wasserstoff auf hohem Druck, zum Beispiel 10 bar. Im rechten Reservoir ist der Wasserstoffdruck 1 bar.

Die Zelle hat an ihrer linken Seite einen Einlass für den Wasserstoff auf hohem Druck, und an der rechten einen Auslass für den Wasserstoff auf niedrigem Druck. Wegen der Druckdifferenz, und damit der chemischen Potenzialdifferenz „möchte“ der Wasserstoff durch die Zelle hindurch strömen. Das wird ihm aber nicht leicht gemacht.

Hinter dem Einlass befindet sich zunächst eine Wand aus Platin, eine so genannte *Elektrode*. Ebenso vor dem Ausgang.

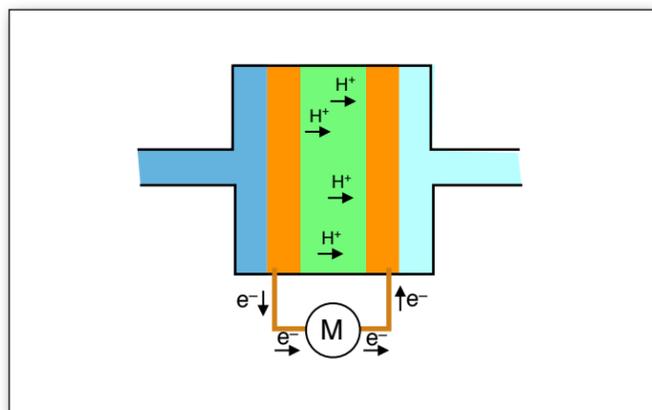
Platin hat die Eigenschaft, dass es Wasserstoff aufnehmen kann. Zwischen den Platinatomen ist zwar nicht genug Platz für die recht großen Wasserstoffmoleküle. Beim Eintreten zerfallen aber die Wasserstoffmoleküle in Elektronen und Protonen, und diese Teilchen können sich im Platin relativ frei bewegen.

Zwischen den Platinelektroden befindet sich eine Säure, z.B. Schwefelsäure. Säuren haben die Eigenschaft, dass sie für Protonen leitfähig sind, für Elektronen dagegen nicht.

Könnten also nicht wenigstens die Protonen dem chemischen Antrieb folgen und durch die Säure nach rechts strömen? Tatsächlich fließt ganz am Anfang eine kleine Menge Protonen durch die Säure von der linken zur rechten Platinelektrode. Dadurch wird aber eine elektrische Potenzialdifferenz aufgebaut, die für die Protonen einen Antrieb in die entgegengesetzte Richtung darstellt. Nach sehr kurzer Zeit heben sich die beiden Antriebe auf, und der Protonenstrom hört auf zu fließen. Für die Protonen herrscht *elektro-chemisches Gleichgewicht*. Das bedeutet, dass das elektrische Potenzial der linken Platinelektrode höher ist als das der rechten.

Es ist nun einfach, auch für die Elektronen einen Weg von links nach rechts zu öffnen: Man verbindet die beiden Platinelektroden über einen Kupferdraht. Kupfer ist, wie die meisten Metalle, ein Leiter für Elektronen und ein Nichtleiter für Protonen. (Wir hatten gerade Platin als Ausnahme kennen gelernt, es leitet sowohl Elektronen als auch Protonen.)

Diesen Elektronenstrom durch das Kupfer kann man nun durch einen elektrischen Energieverbraucher leiten, Abb. 3.5.



**Abb. 3.5**

Der elektrische Stromkreis ist geschlossen.

Praktisch funktioniert diese Zelle deshalb sehr schlecht, weil das Platin für die Protonen kein so guter Leiter ist wie wir angenommen haben.

Die wirklich guten Zellen nutzen kompliziertere chemische Reaktionen aus.

Auch eine chemische Reaktion wird von einer chemischen Potenzialdifferenz angetrieben. Man richtet es bei diesen Zellen so ein, dass die Reaktanten räumlich voneinander getrennt sind. Sie können nur zueinander kommen, indem einer der Stoffe in oder an einer Elektrode zerlegt wird in Elektronen plus Ionen. Die Ionen gehen durch den Elektrolyten, die Elektronen durch die Leitung des äußeren Teils des Stromkreises.

Es ist nicht schwer, die elektrische Spannung zu berechnen, wenn man die chemische Spannung der Reaktion, die in der Zelle abläuft, kennt. Die chemischen Potenziale entnimmt man Tabellen.

### 3.6 Brennstoffzelle und Elektrolysezelle

Ist die chemische Reaktion



im Gleichgewicht, so ist die Summe der chemischen Potentiale der linken Seite gleich der der rechten:

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(C) + \mu(D) .$$

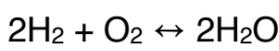
Für eine Reaktion  $A + B \rightarrow C$  gilt im Gleichgewicht

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(C)$$

und für eine Reaktion  $A + B \rightarrow 2C$  ist

$$\mu(A) + \mu(B) = 2\mu(C) .$$

Wir betrachten die Reaktion

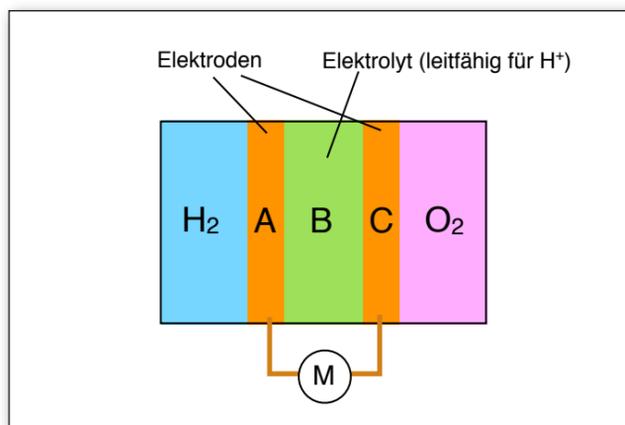


Aus einer Tabelle entnimmt man, dass das chemische Potential der rechten Seite bei Normaldruck und Zimmertemperatur um 474 kG niedriger ist als das der linken. Es besteht also ein Antrieb von

$$\Delta\mu = (2\mu(\text{H}_2) + \mu(\text{O}_2)) - 2\mu(\text{H}_2\text{O}) = 474 \text{ kG}$$

Diesen Antrieb nutzt man in der Wasserstoff-Sauerstoff-Brennstoffzelle aus, um einen elektrischen Strom anzutreiben. Bei der Elektrolyse, d.h. elektrischen Zerlegung von Wasser in Wasserstoff und Sauerstoff, muss man diesen Antrieb überwinden.

Abbildung 3.6 zeigt den Aufbau einer Wasserstoff-Sauerstoff-Zelle. In jede der porösen Elektroden kann von der einen Seite das Gas und von der anderen der Elektrolyt eintreten, aber weder Gas noch Elektrolyt können auf der jeweils anderen Seite die Elektrode wieder verlassen. Der Elektrolyt ist für  $\text{H}^+$ -Ionen leitfähig, nicht dagegen für Elektronen und Sauerstoffionen.



**Abb. 3.6**  
Wasserstoff-Sauerstoff-Zelle

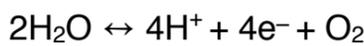
In den Elektroden herrschen chemische Gleichgewichte, die durch die folgenden Reaktionsgleichungen beschrieben werden:

*Elektrode A*



$$2\mu(\text{H}_2) = 4\mu_{\text{A}}(\text{H}^+) + 4\mu(\text{e}^-)$$

*Elektrode C*



$$2\mu(\text{H}_2\text{O}) = 4\mu_{\text{C}}(\text{H}^+) + 4\mu(\text{e}^-) + \mu(\text{O}_2)$$

Das chemische Potential der Elektronen ist in A und C gleich, da die Elektroden aus demselben Material bestehen mögen. Das chemische Potential von  $\text{H}^+$  dagegen ist sehr verschieden, denn durch die Oxidationsreaktion in C wird seine Konzentration in C niedrig gehalten. Wir suchen die elektrische Potentialdifferenz zwischen A und C. Wir ziehen dazu die rechte Gleichung von der linken ab:

$$\begin{aligned} (2\mu(\text{H}_2) + \mu(\text{O}_2)) - 2\mu(\text{H}_2\text{O}) &= 4\mu_{\text{A}}(\text{H}^+) - 4\mu_{\text{C}}(\text{H}^+) \\ &= 4(\eta_{\text{A}}(\text{H}^+) - F\Phi_{\text{A}}) - 4(\eta_{\text{C}}(\text{H}^+) - F\Phi_{\text{C}}) \end{aligned}$$

Im letzten Gleichungsschritt wurde  $\eta = \mu + zF\Phi$  verwendet. Weil die  $\text{H}^+$ -Ionen zwischen A und C durch den Elektrolyten hindurch frei hin- und herströmen können, herrscht für  $\text{H}^+$  zwischen A und C elektrochemisches Gleichgewicht:  $\eta_{\text{A}}(\text{H}^+) = \eta_{\text{C}}(\text{H}^+)$ . Man erhält also

$$\Delta\mu = (2\mu(\text{H}_2) + \mu(\text{O}_2)) - 2\mu(\text{H}_2\text{O}) = 4F(\Phi_{\text{C}} - \Phi_{\text{A}}) = 4FU$$

Die elektrische Spannung zwischen A und C ist damit:

$$U = \frac{1}{4F} \Delta\mu \quad (3.4)$$

wo  $\Delta\mu$  die chemische Spannung der in der Zelle insgesamt ablaufenden Reaktion ist. Mit  $\Delta\mu = 474 \text{ kG}$  und  $F = 96500 \text{ C/mol}$  erhält man  $U = 1,23 \text{ V}$ .

Dieser Wert gilt für den Fall, dass für  $\text{H}^+$  zwischen den Elektroden elektrochemisches Gleichgewicht herrscht. Es fließt kein Teilchenstrom und kein elektrischer Strom.

Schließt man den Stromkreis über einen Verbraucher, so ist der chemische Antrieb für die  $\text{H}^+$ -Ionen größer als der elektrische, und es fließt ein  $\text{H}^+$ -Strom von A nach C. In der Elektrode C wird Wasser gebildet. Die Zelle arbeitet als Brennstoffzelle.

Sorgt man dagegen durch eine äußere Energiequelle dafür, dass der elektrische Antrieb der  $\text{H}^+$ -Ionen von C nach A größer wird als der chemische von A nach C, so fließt  $\text{H}^+$  von C nach A, und in der Elektrode C wird Wasser zersetzt. Die Zelle arbeitet jetzt als *Elektrolysezelle*.

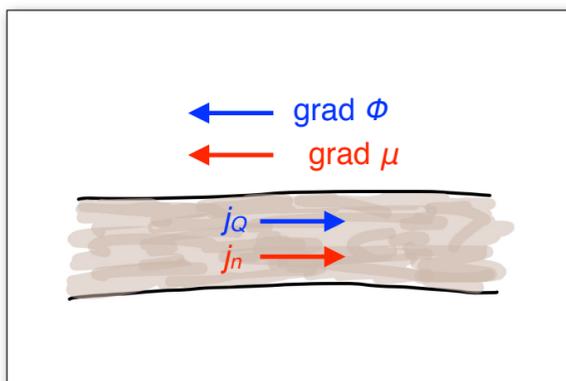
In technischen Galvanischen Elementen (Bleiakkumulator, Leclanché-Element, Daniell-Element, Weston-Element) stellen die Elektroden gleichzeitig das „Brennstoffreservoir“ dar. Das Elektrodenmaterial löst sich im Elektrolyten auf. Es hat, solange es Bestandteil der Elektrode ist, ein anderes chemisches Potential als in der Lösung. Diese chemische Potentialdifferenz benutzt man als Antrieb für den elektrischen Strom.

### 3.7 Kopplung zwischen Strömen – die Onsager-Beziehung

Wir wollen den mathematischen Formalismus an einem einfachen Beispiel kennenlernen: an der bereits behandelten Kopplung zwischen elektrischem Strom und Stoffmengenstrom.

Ein Stoffmengenstrom, der in einer Leitung fließt, kann auf zwei Arten angetrieben werden, Abb. 3.7:

- durch ein Gefälle  $\text{grad } \mu$  des chemischen Potentials;
- durch ein Gefälle  $\text{grad } \Phi$  des elektrischen Potentials, das an der fest an die Stoffmenge gekoppelten Ladung zieht.



**Abb. 3.7**

Da  $n$  an  $Q$  gekoppelt ist, kann sowohl der  $n$ -Strom als auch der  $Q$ -Strom durch einen  $\Phi$ - oder einen  $\mu$ -Gradienten angetrieben werden.

Entsprechend gilt, dass ein Ladungsstrom angetrieben werden kann:

- durch einen  $\Phi$ -Gradienten;
- durch einen  $\mu$ -Gradienten.

Mathematisch kann man das so ausdrücken:

$$j_n = L_{11} \text{ grad } \mu + L_{12} \text{ grad } \Phi \quad (3.5a)$$

$$j_Q = L_{21} \text{ grad } \mu + L_{22} \text{ grad } \Phi \quad (3.5b)$$

$j_n$  und  $j_Q$  sind die Stoffmengen- und die Ladungsstromdichte. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass die Gradienten von  $\mu$  und von  $\Phi$  parallel zur  $x$ -Richtung liegen. Die Gleichungen (3.5a) und (3.5b) vereinfachen sich dann zu:

$$j_n = L_{11} \frac{d\mu}{dx} + L_{12} \frac{d\phi}{dx} \quad (3.6a)$$

$$j_Q = L_{21} \frac{d\mu}{dx} + L_{22} \frac{d\phi}{dx} \quad (3.6b)$$

Da  $Q$  fest an  $n$  gekoppelt ist, sind die Gleichungen linear abhängig:  $j_Q = zFj_n$  ( $F$  = Faradaykonstante,  $z$  = ganze Zahl). Das Analoge wird nicht mehr der Fall sein, wenn wir andere Ströme wählen, etwa wenn wir statt  $j_n$  die Entropiestromdichte  $j_s$  betrachten (Abschnitt 3.8).

Wir interpretieren zunächst die Koeffizienten  $L_{ik}$ .

$L_{11}$  ist ein Maß für die Stärke des  $n$ -Stroms, der durch ein gegebenes  $\mu$ -Gefälle verursacht wird, für den Fall, dass kein weiterer Antrieb vorhanden ist ( $d\phi/dx = 0$ ). Es hat die Bedeutung einer Stoffleitfähigkeit.

$L_{22}$  ist entsprechend ein Maß für die Stärke des elektrischen Stroms, der durch ein gegebenes  $\Phi$ -Gefälle verursacht wird, solange kein  $\mu$ -Gefälle vorhanden ist. Für  $d\mu/dx = 0$  ist  $j_Q = L_{22} d\phi/dx$ . Der Vergleich mit  $j_Q = -\sigma d\phi/dx$  (siehe Gleichung (2.8)) zeigt, dass  $L_{22} = -\sigma$ , also gleich der elektrischen Leitfähigkeit ist.

$L_{12}$  und  $L_{21}$  bringen zum Ausdruck, dass zwischen  $j_n$  und  $j_Q$  eine Kopplung besteht.  $L_{12}$  gibt an, wie stark ein  $n$ -Strom durch einen  $\Phi$ -Gradienten beeinflusst wird und  $L_{21}$ , wie stark ein  $Q$ -Strom durch einen  $\mu$ -Gradienten angetrieben wird. Es ist einleuchtend, dass, falls  $L_{12}$  groß ist, auch  $L_{21}$  groß sein muss, und umgekehrt. Es gibt ein allgemeines Theorem, das behauptet, dass grundsätzlich

$$L_{12} = L_{21} \quad (3.7)$$

gilt, und zwar immer, wenn sich zwei Ströme in der Form der Gleichungen (3.6a) und (3.6b) schreiben lassen. Diese Beziehung heißt nach ihrem Entdecker *Onsager-Beziehung*. Sie kann in unserem konkreten Fall leicht bewiesen werden.

Der Antrieb eines Teilchenstroms ist durch  $d\eta/dx$  gegeben:

$$j_n = L_1 \frac{d\eta}{dx} = L_1 \frac{d(\mu + zF\phi)}{dx} = L_1 \frac{d\mu}{dx} + L_1 zF \frac{d\phi}{dx}$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten mit denen in Gleichung (3.6a) folgt:

$$L_{11} = L_1 \quad \text{und} \quad L_{12} = L_1 zF$$

und daraus ergibt sich

$$L_{12} = zFL_{11}$$

Mit  $j_Q = zFj_n$  wird, wenn man den Fall mit  $d\phi/dx = 0$  betrachtet, aus Gln. (3.6a) und (3.6b):

$$j_n = L_{11} \frac{d\mu}{dx}$$

$$j_Q = zFj_n = L_{21} \frac{d\mu}{dx}$$

Dividiert man durcheinander, so ergibt sich:

$$L_{21} = zFL_{11}$$

Es ist also  $L_{12} = L_{21}$  q. e. d.

Dividiert man Gleichung (3.6b) durch Gleichung (3.6a), nachdem man  $d\mu/dx = 0$  gesetzt hat, so erhält man

$$L_{22} = zFL_{12}$$

Wir können nun alle 4 Koeffizienten  $L_{ik}$  durch die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  und die Faraday-Konstante  $F$  ausdrücken:

$$L_{22} = -\sigma \quad L_{12} = L_{21} = -\frac{\sigma}{zF} \quad L_{11} = -\frac{\sigma}{z^2 F^2}$$

Wir beschreiben nun die Stärke der Kopplung zwischen  $Q$ - und  $n$ -Strom durch eine dimensionslose Konstante  $m$ :

$$m = \left( \frac{j_n}{j_Q} \right)_{d\mu/dx=0} \cdot \left( \frac{j_Q}{j_n} \right)_{d\phi/dx=0}$$

Der erste Faktor drückt aus, wie stark  $n$  von  $Q$  mitgenommen wird, wenn für  $n$  kein eigener Antrieb besteht ( $d\mu/dx = 0$ ), der zweite ist entsprechend ein Maß dafür, wie stark  $Q$  von  $n$  mitgenommen wird. Aus den Gleichungen (3.6a) und (3.6b) ergibt sich

$$m = \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}$$

Wir setzen die Ausdrücke für  $L_{21}$ ,  $L_{12}$  und  $L_{22}$  ein:

$$m = \frac{\sigma^2 / (zF)^2}{[-\sigma / (z^2 F^2)](-\sigma)} = 1$$

In unserem Fall der festen Kopplung ist  $m = 1$ . Bei anderen Strömen erwarten wir kleinere Werte für  $m$ .

### 3.8 Kopplung zwischen elektrischem Strom und Entropiestrom

Die Kopplung zwischen  $n$  und  $Q$  ist ein trivialer Sonderfall. Man kann die Gleichungen (3.6a) und (3.6b) im vorigen Abschnitt durch eine einzige Gleichung ersetzen:

$$j_n = -\frac{\sigma}{z^2 F^2} \frac{d\eta}{dx}$$

$j_Q$  berechnet man aus  $j_n$  einfach durch Multiplikation mit  $zF$ .

Besteht nun neben dem  $\eta$ -Gefälle noch ein Temperaturgefälle, so können wir auf Gleichungen vom Typ der Gleichungen (3.6a) und (3.6b) nicht mehr verzichten:

$$j_n = L_{11} \frac{d\eta}{dx} + L_{12} \frac{dT}{dx} \quad (3.8a)$$

$$j_S = L_{21} \frac{d\eta}{dx} + L_{22} \frac{dT}{dx} \quad (3.8b)$$

Die Koeffizienten  $L_{ik}$  haben jetzt natürlich andere Bedeutungen als im vorigen Abschnitt. Um die Gleichungen zu interpretieren, betrachten wir einige Spezialfälle:

$$(1) dT/dx = 0, d\eta/dx \neq 0$$

$dT/dx = 0$  bedeutet: Die Temperatur des Leiters ist überall dieselbe. Gleichung (3.8a) sagt, was wir schon wussten: Ein  $\eta$ -Gradient hat einen Stoffstrom zur Folge, z.B. einen Elektronenstrom. Gleichung (3.8b) sagt nun, dass dieser Stoffstrom einen Entropiestrom mitschleppt.

$$(2) d\eta/dx = 0, dT/dx \neq 0$$

Gleichung (3.8b) sagt, was wir schon wussten: Ein  $T$ -Gradient hat einen  $S$ -Strom zur Folge (siehe Abschnitt 2.5). Gleichung (3.8a) behauptet, dass ein  $T$ -Gradient einen Elektronenstrom antreibt, obwohl keine elektrochemische (und auch keine elektrische) Potentialdifferenz besteht.

$$(3) j_n = 0$$

Wir verhindern das Fließen eines Teilchenstroms, indem wir den Leiter einfach nicht in einen Stromkreis einbauen. Aus Gleichung (3.8a) folgt:

$$\frac{d\eta/dx}{dT/dx} = -\frac{L_{12}}{L_{11}}$$

Ein  $T$ -Gradient hat also einen Gradienten des elektrochemischen Potentials zur Folge.

Wir suchen nun den Zusammenhang zwischen den  $L_{ik}$  und den Materialkonstanten, die man in Tabellen findet.

Wir vergleichen Gleichung (3.8a) für  $dT/dx = 0$  mit der für  $dT/dx = 0$  gültigen Gleichung

$$j_n = -\frac{\sigma_Q}{z^2 F^2} \frac{d\eta}{dx}$$

und erhalten

$$L_{11} = -\frac{\sigma_Q}{z^2 F^2}$$

(Wir versehen hier die elektrische Leitfähigkeit mit dem Index  $Q$ , um sie von der Entropieleitfähigkeit  $\sigma_S$  zu unterscheiden).

Die experimentell gefundene Wärmeleitungsgleichung lautet

$$j_S = -\sigma_S \frac{dT}{dx}$$

(Siehe auch Abschnitt 2.5).

$\sigma_S$  ist die Entropieleitfähigkeit. In Tabellen wird gewöhnlich die „Wärmeleitfähigkeit“  $\lambda = T \sigma_S$  angegeben.

Vergleich mit Gleichung (3.8b) für  $d\eta/dx = 0$  liefert

$$L_{22} = -\sigma_S$$

Die Größe

$$\alpha = -\frac{1}{zF} \left( \frac{d\eta/dx}{dT/dx} \right)_{j_n=0} \quad (3.9)$$

heißt „Thermokraft“ oder „Thermospannung“. Sie ist tabelliert und gibt für den stromlosen Zustand die (elektrochemische) Spannung zwischen zwei Punkten pro Temperaturdifferenz zwischen den Punkten an (Maßeinheit V/K). Aus Gleichung (3.8a) folgt:

$$\frac{L_{12}}{L_{11}} = -\alpha z F$$

Wir berechnen noch die Kopplungsstärke  $m$ :

$$m = \left( \frac{j_n}{j_S} \right)_{d\eta/dx=0} \cdot \left( \frac{j_S}{j_n} \right)_{dT/dx=0} = \frac{L_{12}}{L_{22}} \cdot \frac{L_{21}}{L_{11}} = \frac{L_{12}^2}{L_{11} L_{22}}$$

$$m = \alpha^2 \frac{\sigma_Q}{\sigma_S}$$

Tabelle 3.2 enthält die Werte von  $\sigma_Q$ ,  $\sigma_S$  und  $\alpha$  für einige Metalle bei Normaltemperatur ( $\approx 300$  K).

Was bedeutet die Tatsache, dass manche  $\alpha$  positiv, manche negativ sind? In Gleichung (3.9) ist der Faktor

$$\left( \frac{d\eta/dx}{dT/dx} \right)_{j_n=0}$$

stets negativ, da das Temperaturgefälle ein entgegengesetzt gerichtetes elektrochemisches Potentialgefälle aufbaut.  $\alpha < 0$  heißt daher  $z < 0$ , d.h. die Ladungsträger sind negativ, nämlich Elektronen. Ist  $\alpha > 0$ , so ist  $z > 0$ . Die Ladungsträger sind positiv. Man nennt sie „Defektelektronen“.

Der Quotient  $\sigma_Q/\sigma_S$  (letzte Spalte von Tabelle 3.2) ist annähernd temperaturunabhängig, obwohl  $\sigma_Q$  und  $\sigma_S$  einzeln stark von  $T$  abhängen. Außerdem ist  $\sigma_Q/\sigma_S$  für alle Metalle nahezu gleich. Diese Tatsache heißt *Wiedemann-Franz'sches Gesetz*. Man erkennt daran, dass die Leitung von  $Q$  und von  $S$  durch dieselben Träger bewerkstelligt wird.

Für den Wert von  $m$  ergibt sich größenordnungsmäßig:

$$m \approx 2,5 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^7 \approx 10^{-4}$$

Die Kopplung zwischen Entropie- und Mengenstrom ist also sehr schwach.

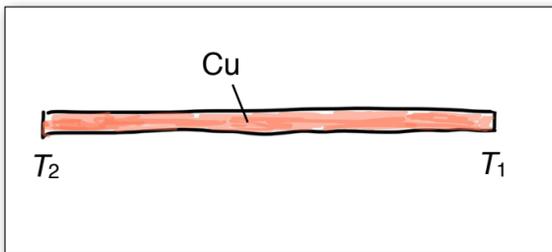
Stoff	$10^{-7} \sigma_Q$ ( $\Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ )	$\sigma_S$ ( $\text{JK}^{-2} \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$ )	$10^6 \alpha$ ( $\text{VK}^{-1}$ )	$10^{-7} \sigma_Q/\sigma_S$ ( $\text{K}^2 \text{V}^{-2}$ )
Ag	6,29	1,43	+1,5	4,4
Al	3,77	0,79	-1,7	4,8
Cs	0,5	0,12	+0,1	4,2
Cu	6,0	1,34	+1,86	4,5
Fe	1,03	0,27	+16,6	3,8
Hg	0,10	0,028	+8,6	3,6
Mg	2,25	0,52	+4,3	4,3
Na	2,38	0,47	-8,7	5,0
Ni	1,46	0,303	-20,0	4,8
Pb	0,48	0,118	-1,26	4,1
Pt	0,94	0,239	-5,13	3,9

**Tabelle 3.2**

Elektrische Leitfähigkeit, Entropieleitfähigkeit und Thermokraft für einige Metalle

### 3.9 Thermoelement und Peltier-Wärmepumpe

Zwischen den Enden eines Kupferdrahtes, die sich auf den unterschiedlichen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  befinden, Abb. 3.8, besteht nach Gleichung (3.8a) eine elektrochemische Potentialdifferenz.



**Abb. 3.8**  
Kupferdraht, dessen Enden sich auf verschiedener Temperatur befinden

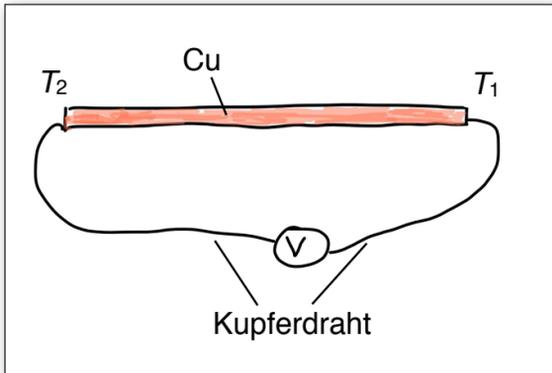
Ist der Temperaturunterschied nicht zu groß, so dass man die  $T$ -Abhängigkeit von  $\sigma$  vernachlässigen kann, so ist:

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta T} = \frac{d\eta/dx}{dT/dx} = -zF\alpha$$

Und daraus folgt:

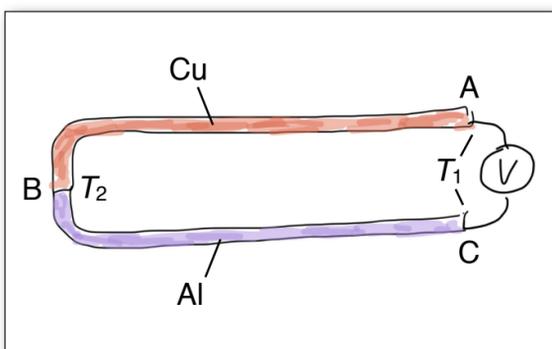
$$\Delta\eta = -zFa\Delta T$$

Wir versuchen,  $\Delta\eta$  mit dem Voltmeter zu messen. Es ergibt sich aber  $\Delta\eta = 0$ . Aus Abbildung 3.9 geht hervor, warum.



**Abb. 3.9**  
Die Differenz des elektrochemischen Potentials zwischen den Anschlüssen des Voltmeters ist Null.

Wir ersetzen nun die zweite Verbindung zwischen der hohen und der niedrigen Temperatur durch ein anderes Metall, Abb. 3.10.



**Abb. 3.10**  
Zwischen A und C herrscht eine messbare Differenz des elektrochemischen Potentials.

Es ist dann

$$\eta_A - \eta_B = -zFa_{Cu}(T_1 - T_2)$$

und

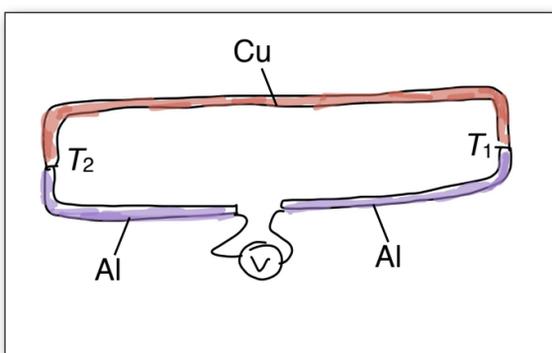
$$\eta_B - \eta_C = -zFa_{Al}(T_2 - T_1)$$

Daraus folgt

$$\eta_A - \eta_C = (\eta_A - \eta_B) + (\eta_B - \eta_C) = -zF(\alpha_{Cu} - \alpha_{Al})(T_1 - T_2)$$

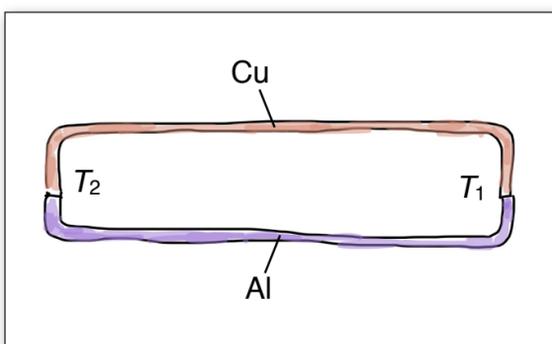
Zwischen den Punkten A und C herrscht also eine messbare elektrochemische Potentialdifferenz. Eine solche Anordnung von zwei Leitern aus verschiedenem Material heißt *Thermoelement*. Sie wird u.a. zur Messung von Temperaturen verwendet.

Man findet dieselbe Spannung, wenn man den Kreis an irgendeiner anderen Stelle unterbricht, Abb. 3.11. Entscheidend ist, dass die Kontaktstellen zwischen den beiden Metallen die unterschiedlichen Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  haben.



**Abb. 3.11**  
Man findet stets dieselbe Potentialdifferenz, egal an welcher Stelle man den Stromkreis unterbricht.

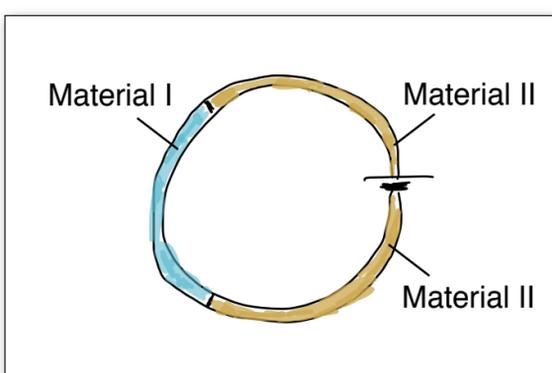
Schließt man die beiden Metalle zu einem geschlossenen Kreis zusammen, Abb. 3.12, so fließt ein Strom. Seine Stärke hängt vom Widerstand, also von Querschnitt und Länge der Leiter ab.



**Abb. 3.12**  
Kurzgeschlossenes Thermoelement

Schließt man statt des Voltmeters einen elektrischen Energieverbraucher an, so arbeitet die Anordnung als „Energiewandler“. In den Kontakt der hohen Temperatur  $T_2$  fließt ein Energiestrom der Stärke  $T_2 I_{S2}$  hinein. Am Kontakt der niedrigen Temperatur fließt ein Energiestrom  $T_1 I_{S1} < T_2 I_{S2}$  heraus. Der Differenzbetrag fließt über die Drähte „in Form von elektrischer Energie“ heraus. Wegen der schwachen Kopplung zwischen  $S$  und  $n$  „rutscht“ die Entropie im Wesentlichen den  $T$ -Berg hinunter und erzeugt dabei neue Entropie, statt den elektrischen Strom anzutreiben. Thermoelemente sind also stark irreversible Energiewandler. Ihr Wirkungsgrad ist viel schlechter als etwa der von Dampfturbine plus Generator.

Man kann das Thermoelement auch umgekehrt betreiben: Man „pumpt“ mit einer elektrischen Energiequelle einen Teilchenstrom durch die beiden Kontakte, Abb. 3.13.



**Abb. 3.13**  
Peltier-Wärmepumpe

Da der Teilchenstrom in den beiden Materialien die Entropie verschieden gut mitnimmt, kommt ein Nettoentropiestrom zwischen den beiden Kontakten zustande. Sind die Kontakte gegen die Umgebung thermisch isoliert, so erwärmt sich der eine, während sich der andere abkühlt. Diesen Vorgang nennt man *Peltier-Effekt*. Eine solche Wärmepumpe ist zwar einfach und robust, sie hat aber einen schlechten Wirkungsgrad.

---

# B

**DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD**

---

---

# 4

## **Ladung und Polarisation als Quellen des elektrischen Feldes**

---

## 4.1 Der Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und elektrischer Ladung

An elektrischer Ladung hängt stets ein elektrisches Feld. Das System elektrisches Feld ist erkennbar an

- den Kräften, die es auf elektrisch geladene Körper ausübt;
- der Energie, die in ihm enthalten ist.

Das elektrische Feld ist ein Teilsystem des elektromagnetischen Feldes: Seine Zustände bilden eine Teilmannigfaltigkeit der Zustände des elektromagnetischen Feldes.

Bringt man in ein gegebenes Feld an eine bestimmte Stelle einen punktförmigen, elektrisch geladenen Körper, so wirkt auf diese „Punktladung“ eine Kraft (man erkennt sie daran, dass sich der Impuls des geladenen Körpers ändert). Verdoppelt man den Wert der Ladung  $Q$ , so verdoppelt sich auch der Betrag der Kraft  $F$

$$F \sim Q.$$

Der vektorielle Proportionalitätsfaktor ist also für das Feld ohne die zusätzliche Punktladung charakteristisch. Man nennt ihn die Stärke des elektrischen Feldes. Das SI-Symbol der elektrischen Feldstärke ist  $E$ , die Maßeinheit  $N/C = V/m$ :

$$F = EQ \quad (4.1)$$

Das  $E$ -Vektorfeld beschreibt das elektrische Feld eindeutig. Aus  $E$  können mechanische Spannung (Impulsstromdichte) und Energiedichte berechnet werden. Die Energiestromdichte im rein elektrischen Feld ist Null.

Die  $E$ -Feldverteilung einer Punktladung  $Q$  folgt aus dem Coulombschen Gesetz:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{r}{r} \quad (4.2)$$

$r$  ist der Abstandsvektor von der Punktladung, und

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{C}/(\text{Vm})$$

ist die *elektrische Feldkonstante*. Addiert man zu einer Ladungsverteilung  $\rho_1(r)$  eine andere Ladungsverteilung  $\rho_2(r)$ , so addieren sich die dazugehörigen Feldstärkeverteilungen vektoriell:

$$\rho(r) = \rho_1(r) + \rho_2(r) \quad \Rightarrow \quad E(r) = E_1(r) + E_2(r) .$$

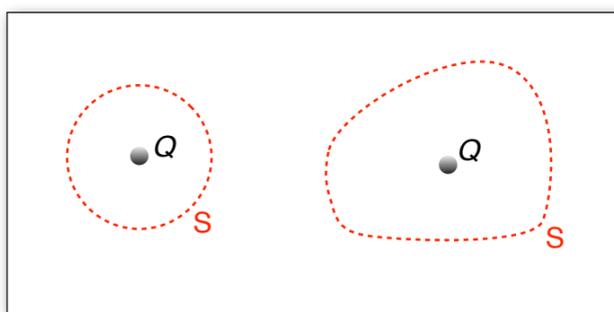
Unter dem Fluss eines beliebigen Vektorfeldes  $V(r)$  durch die Fläche  $S$  versteht man das Integral

$$\iint_S V(r) dA$$

Ist  $V(r)$  eine Stromdichte, so ist der Fluss die dazugehörige Stromstärke.

Wir berechnen den Fluss des  $E$ -Feldes einer Punktladung durch eine geschlossene Kugelfläche, deren Mittelpunkt am Ort der Punktladung liegt, Abb. 4.1:

$$\oiint_S E(r) dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} \frac{dA}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \oiint_{\text{Kugeloberfläche}} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



**Abb. 4.1**

Flächen, die eine Punktladung einschließen

Bei der Rechnung wurde benutzt, dass  $dA$  überall zu  $r$  parallel ist.

Der Fluss durch eine beliebig geformte andere geschlossene Fläche, die um die Punktladung herumgelegt wird, hat denselben Wert, da außerhalb der Ladung nirgends Feldlinien beginnen oder enden.

Wir setzen nun ins Innere der geschlossenen Fläche eine beliebige andere Ladungsverteilung und nähern sie durch eine Menge von Punktladungen an. Da sich die Feldstärken addieren, wenn man die Ladungen addiert, gilt

$$\oiint_S E(r) dA = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i$$

$\sum Q_i$  ist die gesamte Ladung, die sich innerhalb der Fläche  $S$  befindet. Beschreiben wir nun die Ladung im Innern der Fläche durch die Ladungsdichteverteilung  $\rho(r)$ , so ist

$$\oiint_S E(r) dA = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(r) dV \quad (4.3)$$

Mit dem Gaußschen Satz

$$\oiint_S E(r) dA = \iiint \text{div } E dV$$

wird aus (4.3)

$$\iiint \text{div } E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

Da diese Beziehung für jeden beliebigen Raumbereich richtig ist, muss gelten

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.4)$$

Die Gleichungen (4.3) und (4.4) sind Ausdruck der Tatsache, dass die elektrische Ladung die Stelle ist, an der das elektrische Feld an der Materie „befestigt“ ist.

## 4.2 Der Zusammenhang zwischen elektrischem Potenzial und elektrischer Feldstärke

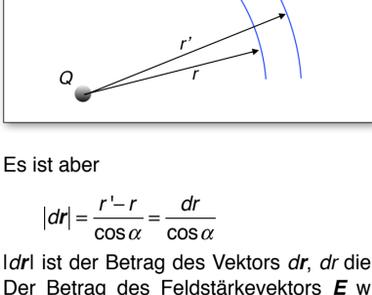
Gegeben sei eine Punktladung. Wir wollen zeigen, dass der Wert des Integrals

$$\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r}$$

nur vom Anfangs- und Endpunkt, nicht aber vom Integrationsweg abhängt.

Der Beitrag zum Integral auf dem Wegstück zwischen den Radien  $r$  und  $r'$ , Abb. 4.2, ist

$$\mathbf{E} \, d\mathbf{r} = |\mathbf{E}| \, |d\mathbf{r}| \cos \alpha.$$



**Abb. 4.2**  
Der Beitrag zum Integral auf dem Wegstück zwischen den Radien  $r$  und  $r'$  hängt nicht von der Richtung dieses Wegstücks ab.

Es ist aber

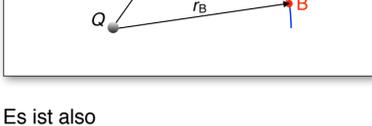
$$|d\mathbf{r}| = \frac{r' - r}{\cos \alpha} = \frac{dr}{\cos \alpha}$$

$|d\mathbf{r}|$  ist der Betrag des Vektors  $d\mathbf{r}$ ,  $dr$  die Differenz  $r' - r$  der Radien. Der Betrag des Feldstärkevektors  $\mathbf{E}$  wird mit  $|\mathbf{E}|$  bezeichnet, um Verwechslungen mit der Energie  $E$  zu vermeiden.

Damit wird

$$\mathbf{E} \, d\mathbf{r} = |\mathbf{E}| \, dr.$$

Der Beitrag hängt also nur von den beiden Radien  $r$  und  $r'$  ab, nicht aber von der Richtung des Integrationsweges. Das gesamte Integral setzt sich aus solchen Beiträgen zusammen. Sein Wert hängt damit nur vom Abstand der Punkte A und B von der Punktladung ab. Insbesondere hat das Integral über den Weg  $S'$  in Abb. 4.3 denselben Wert wie über den Weg  $S$ .



**Abb. 4.3**  
Das Wegintegral über die elektrische Feldstärke hat auf dem Weg  $S$  denselben Wert wie auf dem Weg  $S'$ .

Es ist also

$$\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_A^{B'} \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = \int_A^{B'} |\mathbf{E}| \, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Man kann sich nun eine beliebige Ladungsverteilung in Punktladungen zerlegt denken. Da sich die Feldstärken dieser Punktladungen zur Gesamtfeldstärke addieren, gilt allgemein:

$$\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} \text{ ist unabhängig vom Integrationsweg}$$

Man kann damit eine Potentialfunktion  $\Phi(r)$  definieren:

$$\int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -[\Phi(r_B) - \Phi(r_A)] \tag{4.5}$$

Hiermit sind allerdings nur  $\Phi$ -Differenzen definiert. Der Nullpunkt von  $\Phi$  darf noch beliebig festgelegt werden.

Für eine Punktladung erhält man

$$\Phi(r_A) - \Phi(r_B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Setzt man  $\Phi(r = \infty) = 0$ , so ergibt sich für die Punktladung

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \tag{4.6}$$

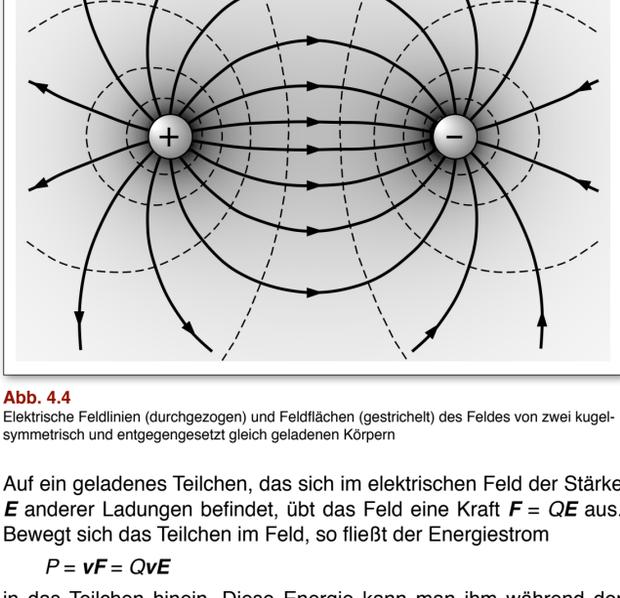
Die Definitionsgleichung (4.5) hat zur Folge:

$$\mathbf{E}(r) = -\text{grad } \Phi(r) \tag{4.7}$$

Durch  $\Phi(r) = \text{const}$  wird eine Schar von Flächen definiert. Jede  $\mathbf{E}$ -Feldlinie verläuft in jedem Punkt orthogonal zur entsprechenden Fläche. Wir nennen die zu den *Feldlinien* orthogonalen Flächen *Feldflächen*. Die Feldflächen sind also Flächen konstanten elektrischen Potentials. Man nennt sie deshalb auch *Äquipotenzialflächen*.

(Wir werden später Felder betrachten, für die kein Potential definiert werden kann, die man aber trotzdem mit Hilfe von Feldlinien und Feldflächen graphisch darstellen kann. Der Begriff Feldfläche ist also allgemeiner als der Begriff Äquipotenzialfläche.)

In Abb. 4.4 sind die  $\mathbf{E}$ -Feldlinien und die Schnitte der Feldflächen mit der Zeichenebene für zwei Körper mit kugelsymmetrischer Ladungsverteilung dargestellt.



**Abb. 4.4**  
Elektrische Feldlinien (durchgezogen) und Feldflächen (gestrichelt) des Feldes von zwei kugelsymmetrisch und entgegengesetzt gleich geladenen Körpern

Auf ein geladenes Teilchen, das sich im elektrischen Feld der Stärke  $\mathbf{E}$  anderer Ladungen befindet, übt das Feld eine Kraft  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  aus. Bewegt sich das Teilchen im Feld, so fließt der Energiestrom

$$P = \mathbf{v}\mathbf{F} = Q\mathbf{v}\mathbf{E}$$

in das Teilchen hinein. Diese Energie kann man ihm während der Bewegung abnehmen. Bewegt sich das Teilchen dissipativ, also in einem elektrischen Leiter mit Widerstand, so wird die Energie zur Entropieerzeugung verwendet. Bewegt sich das Teilchen von einer Stelle A nach einer Stelle B, so beträgt diese Energie

$$\Delta E = \int P \, dt = \int \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = Q \int \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = Q[\Phi(r_A) - \Phi(r_B)]$$

Fließt ein ganzer Teilchenstrom, und damit ein elektrischer Strom von A nach B, so wird ständig der Energiestrom

$$P = I(\Phi(r_A) - \Phi(r_B))$$

dissipiert. Das hier definierte elektrische Potential ist also mit dem durch Gleichung (2.1) definierten identisch. Wir sehen jetzt aber, dass man nicht nur einem elektrischen Leiter ein Potential zuordnen kann, sondern dass jeder Punkt eines statischen elektrischen Feldes ein Potential hat.

Mit  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$  können wir die Gleichung  $\mathbf{j} = -\sigma \text{grad } \Phi$  (Ohmsches Gesetz, Gleichung (2.8)) vereinfachen:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{4.8}$$

Das Ohmsche Gesetz gilt in dieser Form

- nur für isotrope Medien; im Allgemeinen ist  $\sigma$  ein Tensor;
- nur, wenn man das elektrochemische Potential durch das elektrische Potential darstellt, also für Leiter mit konstantem chemischem Potential.

Aus  $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  und  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$  folgt eine Beziehung zwischen  $\rho$  und  $\Phi$ :

$$\text{div grad } \Phi = -\rho/\epsilon_0.$$

Den Operator  $\text{div grad}$  kürzt man ab durch  $\Delta$ ; man nennt ihn den *Laplace-Operator*. Es ist also

$$\Delta \Phi = -\rho/\epsilon_0.$$

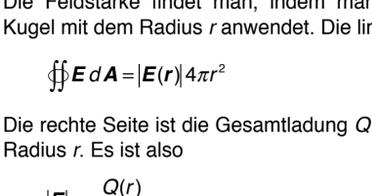
Diese Gleichung heißt *Poisson-Gleichung*. Der Laplace-Operator ist in kartesischen Koordinaten:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Oft ist die Ladungsverteilung  $\rho(r)$  bekannt und die Feldstärkeverteilung  $\mathbf{E}(r)$  gesucht.

*Beispiel: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung*

Das  $\mathbf{E}$ -Feld ist radialsymmetrisch, Abb. 4.5.



**Abb. 4.5**  
Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Die Feldstärke findet man, indem man Gleichung (4.3) auf eine Kugel mit dem Radius  $r$  anwendet. Die linke Seite ist

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = |\mathbf{E}(r)| 4\pi r^2$$

Die rechte Seite ist die Gesamtladung  $Q(r)$  innerhalb der Kugel vom Radius  $r$ . Es ist also

$$|\mathbf{E}| = \frac{Q(r)}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

Die Feldstärke im Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der Verteilung hängt also nur von der Gesamtladung innerhalb der Kugel vom Radius  $r$  ab, nicht aber davon, wie die Ladungsdichte von  $r$  abhängt. Auch wenn die ganze Ladung, die sich innerhalb der Kugel befindet, im Kugelmittelpunkt vereinigt wäre, wäre die Feldstärke dieselbe. Die Feldstärke ist also dieselbe wie die einer Punktladung, die sich im Mittelpunkt befindet. Ist die Ladungsdichte im Innern der Ladungsverteilung zwischen  $r = 0$  und  $r = r_0$  gleich Null, so ist dieser ganze Innenraum feldfrei.

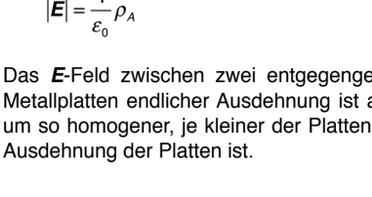
*Beispiel: Feld zwischen zwei unendlich ausgedehnten parallelen Metallplatten*

Die Ladung pro Fläche  $\rho_A$  sei überall gleich. Die Ladung der einen Platte habe aber das entgegengesetzte Vorzeichen der Ladung der anderen. Für den gestrichelten Bereich in Abbildung 4.6 ist

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{A} = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{A}|$$

und

$$\iiint \rho \, dV = \rho_A A$$



**Abb. 4.6**  
Ausschnitt aus zwei unendlich ausgedehnten Metallplatten

Mit (4.3) folgt daraus

$$|\mathbf{E}| \cdot A = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_A A$$

und

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_A \tag{4.9}$$

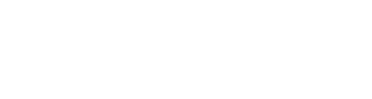
Das  $\mathbf{E}$ -Feld zwischen zwei entgegengesetzt geladenen parallelen Metallplatten endlicher Ausdehnung ist annähernd homogen. Es ist um so homogener, je kleiner der Plattenabstand gegen die seitliche Ausdehnung der Platten ist.

*Beispiel: Feld eines Metallkörpers einheitlicher Zusammensetzung*

Lädt man einen elektrisch leitenden, gegen die Umgebung elektrisch isolierten Gegenstand auf, so verschiebt sich die Ladung solange, bis elektrochemisches Gleichgewicht herrscht, d.h. bis  $\eta$  überall denselben Wert hat.

Ist der Gegenstand stofflich einheitlich zusammengesetzt, besteht er also z.B. aus einem einzigen Metall, so hat das chemische Potential überall denselben Wert und es folgt aus  $\eta = \text{const}$  auch  $\Phi = \text{const}$ .

Alle Punkte des Gegenstandes befinden sich also auf demselben elektrischen Potential. Insbesondere ist auch seine Oberfläche eine Äquipotenzialfläche, Abb. 4.7.



**Abb. 4.7**  
Die Oberfläche des Metallkörpers ist eine Feldfläche.

Bei nicht einheitlicher Zusammensetzung ist die Oberfläche nur noch eine Fläche konstanten elektrochemischen Potentials. Da die Abweichung der Oberfläche von einer Äquipotenzialfläche nur einige Volt beträgt, kann man aber, wenn man es mit hohen Spannungen zu tun hat, die Oberfläche praktisch mit einer Äquipotenzialfläche identifizieren.

### 4.3 Die Kapazität

Wir betrachten einen geladenen, elektrisch leitenden Gegenstand. Sein Potential sei  $\Phi_1$ . In seiner Umgebung sollen sich keine anderen geladenen Gegenstände befinden. Für große Entfernungen vom Gegenstand geht die Feldstärke gegen Null, das Potential gegen einen konstanten Wert:  $\Phi(r \rightarrow \infty) = \Phi_\infty$ .

Verändert man die Ladungsdichte überall auf dem Gegenstand um den Faktor  $k$  von  $\rho_0$  auf  $\rho = k \rho_0$ , so verändert sich

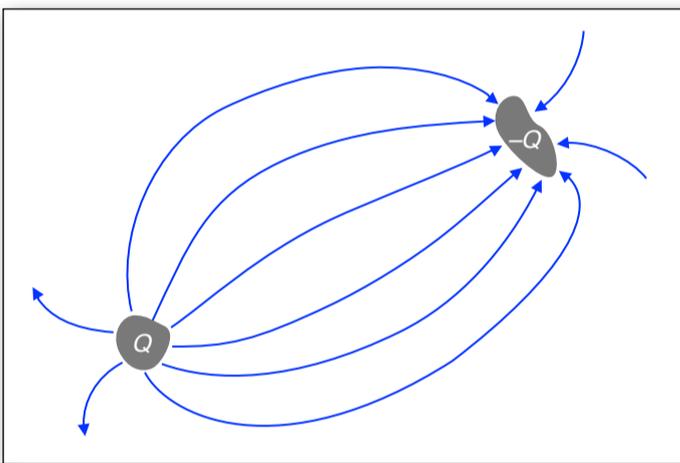
- die Gesamtladung von  $Q_0$  auf  $Q = kQ_0$ ;
- die Feldstärke in jedem Punkt des Feldes um denselben Faktor  $k$ ;
- die elektrische Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten um denselben Faktor  $k$ .

Die neue Ladungsverteilung ist wieder eine Gleichgewichtsverteilung, denn für den Gegenstand ist nach wie vor  $\Phi = \text{const.}$

Die Spannung  $U = \Phi_1 - \Phi_\infty$  hat sich auch um den Faktor  $k$  verändert. Es ist also  $Q/Q_0 = U/U_0$ , oder  $U \sim Q$ , oder  $Q = CU$ .

Der von  $Q$  unabhängige Proportionalitätsfaktor  $C$  heißt *Kapazität* des Gegenstandes. Er drückt aus, wie viel Ladung bei gegebener Spannung zwischen dem Körper und einem unendlich weit entfernten Punkt auf dem Gegenstand sitzt.

Wir betrachten nun zwei elektrisch leitende Gegenstände, deren Gesamtladung immer Null sei, Abb. 4.8.



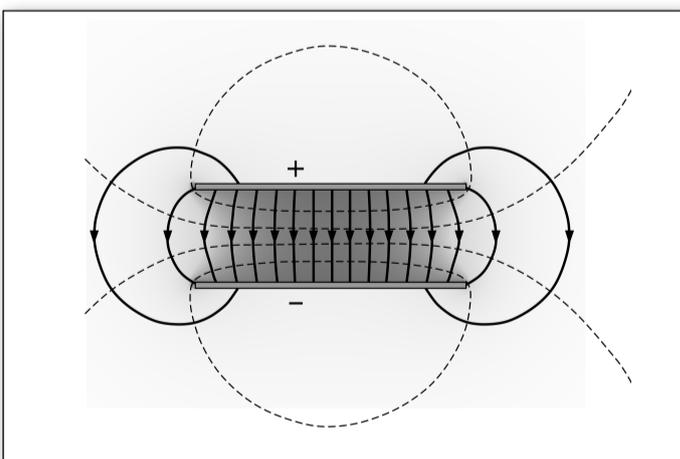
**Abb. 4.8**  
Feld von zwei entgegengesetzt gleich geladenen Körpern

Ändert man die Ladung jedes einzelnen Gegenstandes um den Faktor  $k$ , so ändert sich die Feldstärke überall und die Spannung zwischen den Gegenständen auch um den Faktor  $k$ :

$$Q = CU \tag{4.10}$$

$C$  heißt die *Kapazität* der Anordnung. Ist diese Kapazität groß gegen die, die die beiden Gegenstände einzeln haben, so nennt man die Anordnung einen *Kondensator*.

Abb. 4.9 zeigt einen sogenannten Plattenkondensator.



**Abb. 4.9**  
Feld des Plattenkondensators

Da sein  $\mathbf{E}$ -Feld annähernd homogen ist, gilt für ihn

$$\int_{\text{Platte 1}}^{\text{Platte 2}} \mathbf{E} \, dr = |\mathbf{E}| \cdot d = U$$

Hier ist  $d$  der Plattenabstand. Mit Gleichung (4.9) wird daraus

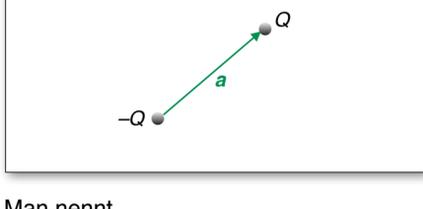
$$Q = \epsilon_0 AU/d,$$

und mit (4.10) schließlich

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

### 4.4 Dipole, Dipoldichte und Polarisation

Eine Anordnung aus zwei punktförmigen Körpern von entgegengesetzt gleich großer Ladung heißt *Dipol*, Abb. 4.10.



**Abb. 4.10**  
Elektrischer Dipol

Man nennt

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{a} \tag{4.12}$$

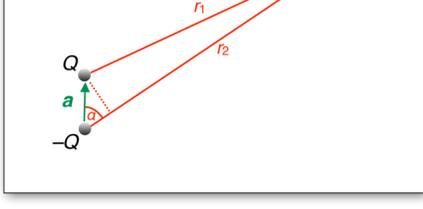
das elektrische Moment, oder das elektrische *Dipolmoment*. (Vergleiche:  $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i^{(S)}$  ist das Impulsmoment = Drehimpuls). Achtung: Die SI-Symbole von Impuls und elektrischem Moment sind identisch!

Genauso, wie es mathematisch besonders einfach ist, mit Punktladungen umzugehen, ist es auch besonders einfach, mit Punktdipolen zu operieren: Man erhält einen Punktdipol aus einem „echten“, hantelförmigen Dipol, indem man  $\mathbf{a} \rightarrow 0$  gehen lässt, wobei man gleichzeitig  $Q$  so vergrößert, dass  $\mathbf{p}$  konstant bleibt. Für Abstände, die groß sind gegen den Abstand der Punktladungen der Hantel, sind die Felder von Hantel- und Punktdipol identisch.

Wir berechnen das Feld eines Punktdipols, indem wir die Felder von zwei Punktladungen überlagern und den Grenzübergang  $\mathbf{a} \rightarrow 0$  mit  $\mathbf{p} = \text{const}$  durchführen.

Für  $r \rightarrow \infty$  sei das Potential Null. Mit Gleichung (4.6) ergibt sich für das Potential im Punkt A (Abb. 4.11)

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}$$

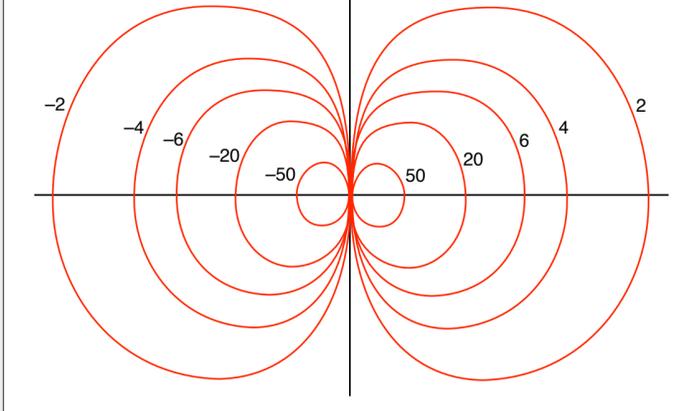


**Abb. 4.11**  
Zur Berechnung der Potentialverteilung des Feldes eines elektrischen Dipols

Für  $\mathbf{a} \rightarrow 0$  ist  $r_2 - r_1 = a \cos \alpha$  und  $r_1 \cdot r_2 \approx r^2$ , also

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qa \cos \alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Die Äquipotentialflächen (Feldflächen) sind in Abb. 4.12 dargestellt.



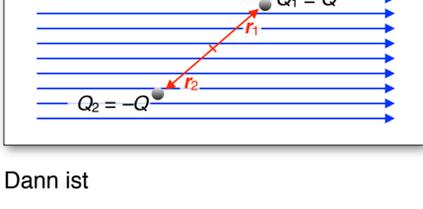
**Abb. 4.12**  
Schnitt durch die Äquipotentialflächen eines Punktdipols

So wie in einen punktförmigen Körper der Ladung  $Q$  in einem Feld der Stärke  $\mathbf{E}$  ein Impulsstrom der Stärke  $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$  hineinfließt, so fließt in einen punktförmigen Körper mit dem Dipolmoment  $\mathbf{p}$  ein Drehimpulsstrom der Stärke

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

hinein. (Achtung  $\mathbf{p}$  ist hier das elektrische Dipolmoment, nicht der Impuls.)

Beweis: Wir stellen uns den Dipol zunächst ausgedehnt vor, Abb. 4.13.



**Abb. 4.13**  
Das Feld übt auf den Dipol ein Drehmoment aus

Dann ist

$$\mathbf{M} = \sum_{1,2} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{1,2} \mathbf{r}_i \times Q_i \mathbf{E} = 2Q(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{E})$$

und mit  $2r_1 Q = \mathbf{p}$

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{4.13}$$

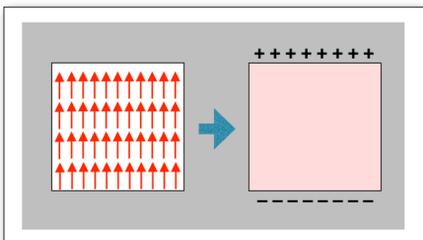
Viele Stoffe bestehen aus Molekülen, deren Dipolmoment von Null verschieden ist. Bringt man nun einen Körper, der aus solchen Molekülen besteht, in ein „äußeres“ Feld, so werden seine Dipole teilweise ausgerichtet. In manchen Stoffen liegen die Dipolmomentvektoren schon von Natur aus parallel.

Wir untersuchen das Feld eines Stücks solcher polarisierter Materie. Jedes Molekül habe das Dipolmoment  $\mathbf{p}$ . Das Feld eines kleinen Volumenelements entsteht durch Überlagerung der Felder der  $n$  Elementardipole, die sich in ihm befinden. Es ist in hinreichend großer Entfernung dasselbe, welches ein einziger Dipol mit dem Dipolmoment  $d\mathbf{p} = n\mathbf{p}$  hätte. Wir definieren die Dipolmomentdichte  $\mathbf{P}$ :

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV \tag{4.14}$$

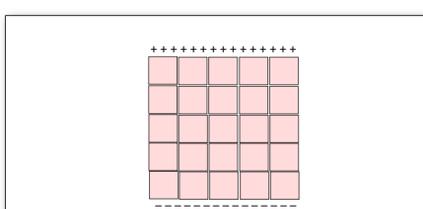
$\mathbf{P}$  heißt auch elektrische Polarisation oder kurz *Polarisation*.  $\mathbf{P}$  ist einem Punkt eines Körpers zugeordnet.  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  ist also ein Vektorfeld.

Wir können die polarisierte Materie im Volumenelement  $dV$  ersetzen durch nichtpolarisierte Materie, die an den beiden Stirnflächen entgegengesetzt geladen ist, Abb. 4.14.



**Abb. 4.14**  
Das in seinem Innern polarisierte Volumenelement ist äquivalent zu einem an den Stirnflächen geladenen Volumenelement.

Setzt man an die Flächen Ladung vom Betrag  $|\mathbf{P}d\mathbf{A}|$  bzw.  $-|\mathbf{P}d\mathbf{A}|$ , so hat das neue Materieelement dasselbe Feld wie das ursprüngliche polarisierte Materieelement. Wir bauen nun aus vielen Volumenelementen einen makroskopischen Körper zusammen. Das Ergebnis ist ein Körper, der im Innern neutral, dessen Grund- und Deckfläche aber geladen ist, Abb. 4.15.



**Abb. 4.15**  
Ein polarisierter Körper ist im Innern neutral und an der Oberfläche geladen.

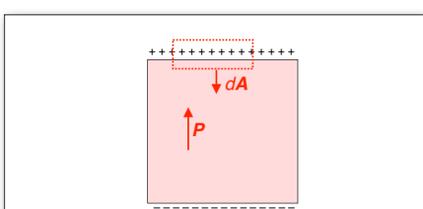
Ein gleichmäßig polarisierter Körper trägt also an seiner Grund- und an seiner Deckfläche Ladungen, wobei

$$|Q_P| = |\mathbf{P}|A$$

Es ist üblich, diese Polarisationsladung  $Q_P$  von der gewöhnlichen Ladung  $Q$  zu unterscheiden. Da sich  $Q_P$  nicht frei bewegen kann, nennt man sie „gebundene“ Ladung, manchmal auch Scheinladung.

Die letzte Gleichung lässt sich verallgemeinern zu (Abb. 4.16):

$$Q_P = -\iint \mathbf{P} d\mathbf{A} \tag{4.15}$$



**Abb. 4.16**  
Zum Zusammenhang zwischen Polarisation und Oberflächenladung

In dieser Form gilt sie auch dann, wenn die Dipoldichte nicht mehr räumlich konstant ist. Die Beziehung  $|Q_P| = |\mathbf{P}|A$  ergibt sich daraus als Sonderfall.

Wir wollen Gleichung (4.15) noch in eine lokal gültige Beziehung umformen.

Mit

$$Q_P = \iiint \rho_P dV$$

( $\rho_P$  = Dichte der Polarisationsladung) wird aus Gleichung (4.15):

$$\iiint \rho_P dV = -\iint \mathbf{P} d\mathbf{A}$$

Wir formen die rechte Seite mit dem Gaußschen Satz um:

$$\iiint \rho_P dV = -\iiint \text{div} \mathbf{P} dV$$

Da diese Gleichung für jeden Raumbereich gilt, ist

$$\rho_P = -\text{div} \mathbf{P} \tag{4.16}$$

Wir können nun die Gleichung  $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  (Gleichung 4.4) verallgemeinern. Da man mit dem Symbol  $\rho$  nur die Dichte der freien Ladung meint, da also die Polarisationsladung in  $\rho$  nicht enthalten ist, kommt zur rechten Seite von Gleichung (4.4) im Fall, dass polarisierte Materie vorhanden ist, noch der Term  $\rho_P/\epsilon_0$  hinzu:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\rho_P}{\epsilon_0}$$

Hieraus folgt

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \text{div} \mathbf{P} \tag{4.17}$$

Befindet sich an einer Stelle keine freie Ladung, so ist dort

$$\text{div} \mathbf{E} = - (1/\epsilon_0) \text{div} \mathbf{P}$$

Das heißt, dort wo das  $\mathbf{E}$ -Feld Quellen hat, hat das  $\mathbf{P}$ -Feld Senken und umgekehrt. Es ist üblich, Gleichung (4.17) noch eine andere Form zu geben. Wir schreiben zunächst

$$\text{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

Man kürzt nun die Summe hinter dem div-Zeichen ab:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{4.18}$$

Die Größe  $\mathbf{D}$  heißt die *elektrische Verschiebung*. Damit wird Gleichung (4.17) kürzer und einprägsamer:

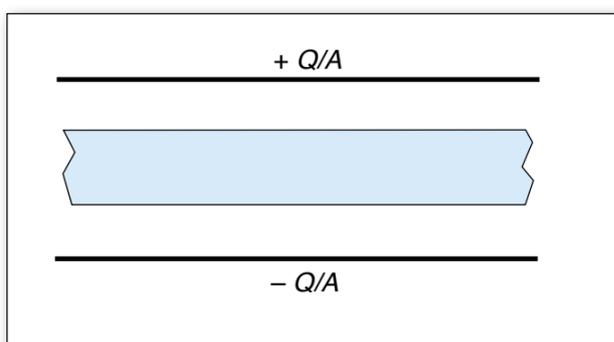
$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \tag{4.19}$$

Integration und Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert schließlich

$$\iint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q \tag{4.20}$$

## 4.5 Induzierte Polarisation, Influenz

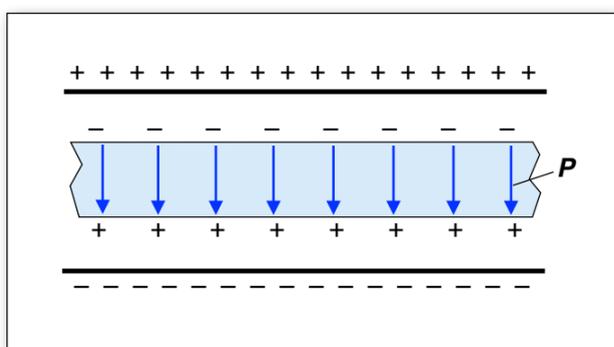
Wir untersuchen im Folgenden das Verhalten eines Stücks Materie, das in ein elektrisches Feld, welches von anderen Körpern herrührt, gebracht wird. Um eine möglichst durchsichtige Situation zu erhalten, wählen wir die Anordnungen stets so, dass homogene Felder entstehen: Die felderzeugenden Körper sind zwei unendlich ausgedehnte, entgegengesetzt gleich geladene Platten, deren Ladung pro Fläche einen ein für allemal festgelegten Wert hat. Das zu untersuchende Materiestück ist eine unendlich ausgedehnte Platte, die sich zwischen den Kondensatorplatten befindet, Abb. 4.17.



**Abb. 4.17**

Eine Platte aus dem zu untersuchenden Material befindet sich zwischen den Platten eines Kondensators

Zwischen den Kondensatorplatten befindet sich zunächst eine Platte aus polarisierter Materie, Abb. 4.18. Gesucht ist die elektrische Feldstärke innerhalb der Materie.



**Abb. 4.18**

Polarisierte Materie zwischen den Platten eines Kondensators

Die elektrische Feldstärke im materiefreien Raum zwischen den Kondensatorplatten ist (Gleichung (4.9)):

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

An der Oberfläche des Materiestücks sitzen Quellen des  $\mathbf{P}$ -Feldes, aber keine freien Ladungen. Daher ist  $\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = 0$ . Daraus folgt, dass der Ausdruck  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  auf beiden Seiten der Oberfläche der Materie, d.h. innerhalb (i) und außerhalb (a), denselben Wert hat. Da außerhalb  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  ist, folgt

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_i + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}$$

und daraus

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_a - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \quad (4.21)$$

Wir befassen uns nun mit der Frage, wie die Polarisation von Materie zustande kommt. Polarisierte Materie, wie die, von der wir bisher gesprochen haben, trifft man normalerweise gar nicht an: die Polarisationsladungen an den Endflächen werden durch die allgegenwärtigen freien Ladungen kompensiert. Andererseits kann man aber Materie polarisieren, indem man sie in ein elektrisches Feld bringt, man kann eine Polarisation induzieren. Je nach Stoff geschieht das auf verschiedene Weise.

**Verschiebungspolarisation:** Die positive Ladung innerhalb der Materie wird gegen die negative unter dem Einfluss des  $\mathbf{E}$ -Feldes etwas verschoben. Solange  $\mathbf{E}$  nicht zu groß ist, ist die Verschiebung, und damit die Polarisation, proportional zur Feldstärke in der Materie.

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (4.22)$$

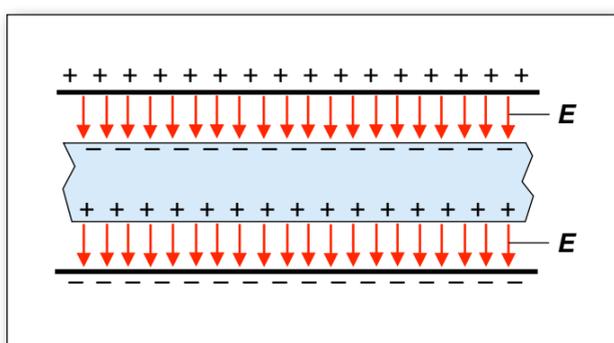
Der dimensionslose Faktor  $\chi_e$  heißt *elektrische Suszeptibilität*. Je größer  $\chi_e$  ist, desto stärker ist bei gegebener  $\mathbf{E}$ -Feldstärke die Polarisation.

**Orientierungspolarisation:** Manche Stoffe bestehen aus Molekülen, die ein von Null verschiedenes Dipolmoment haben, im Allgemeinen aber ungeordnet durcheinanderliegen, z.B. Wasser. Bei Anlegen eines elektrischen Feldes werden diese Dipole teilweise ausgerichtet. Auch hier gilt näherungsweise Gleichung (4.22).

Verschiebungs- und Orientierungspolarisation können nur in Nichtleitern auftreten. In ihnen ist die elektrische Feldstärke nicht Null, die Feldlinien laufen durch die Materie hindurch. Nichtleiter heißen deshalb auch „Dielektra“ (von  $\delta\iota\alpha$  = durch).

Die Werte von  $\chi_e$  liegen für die meisten Nichtleiter in der Gegend zwischen 2 und 10. Der Wert für Wasser ist ungewöhnlich groß, er beträgt 80. Diese Größe hat ihre Ursache in dem großen Dipolmoment der Wassermoleküle.

**Influenz:** Bringt man elektrisch leitende Materie, d.h. einen Stoff, der frei bewegliche Ladungsträger enthält, zwischen die Kondensatorplatten, Abb. 4.19, so verschiebt sich die Ladung solange, bis die Feldstärke in der Materie gleich Null ist.



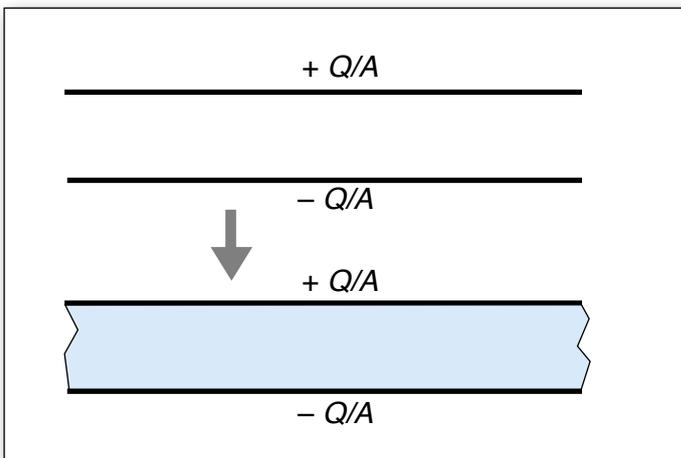
**Abb. 4.19**

Elektrisch leitende Materie zwischen den Platten eines Kondensators

Obwohl dieser Vorgang dem Polarisieren eines Nichtleiters ähnlich ist, bezeichnet man ihn anders. Man nennt den Vorgang *Influenz* und beschreibt ihn nicht durch ein  $\mathbf{P}$ -Feld. Man sagt vielmehr, an den Begrenzungsflächen des Materials sitzen *wahre* Ladungen.

## 4.6 Die Kapazität eines Kondensators, der mit Materie gefüllt ist

Wir machen nun die Platte aus polarisiertem Material in Abb. 4.18 immer dicker, so dass sie schließlich den ganzen Raum zwischen den Kondensatorplatten ausfüllt, Abb. 4.20.



**Abb. 4.20**

Durch Einschleiben des Dielektrikums wird die Feldstärkle vermindert.

Die Feldstärkle in dem jeweils noch nicht von Materie erfüllten Raum bleibt bei diesem Vorgang konstant. Nach Gleichung (4.9) ist dort immer

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

Nachdem das Gebiet mit Materie gefüllt worden ist, hat dort die Feldstärkle auf den durch Gleichung (4.21) gegebenen Wert abgenommen. Wenn wir die Feldstärkle an einer Stelle vor dem Einschleiben der Materie mit  $\mathbf{E}_v$  und die danach mit  $\mathbf{E}_n$  bezeichnen, haben wir also:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n &= \mathbf{E}_v - (1/\epsilon_0) \mathbf{P} \\ &= \mathbf{E}_v - \chi_e \mathbf{E}_n \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_n + \chi_e \mathbf{E}_n = (1 + \chi_e) \mathbf{E}_n$$

Der Faktor

$$\epsilon = 1 + \chi_e,$$

um den die Feldstärkle abnimmt, heißt *Dielektrizitätskonstante*. (Die um 1 vergrößerte Materialkonstante hat einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol! Glücklicherweise ist so etwas sonst in der Physik nicht üblich).

Wegen  $U = \int \mathbf{E} d\mathbf{r} = |\mathbf{E}| d$  nimmt die Spannung um denselben Faktor ab:

$$U_v = \epsilon U_n.$$

Da  $Q = CU$ , und da  $Q$  konstant bleibt, nimmt die Kapazität um  $\epsilon$  zu:

$$C_n = \epsilon C_v.$$

Wir können damit Gleichung (4.11), die nur für den materiefreien Kondensator galt, verallgemeinern:

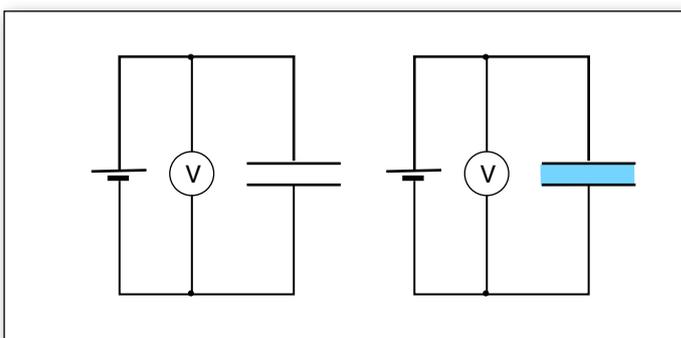
$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.23)$$

Außerdem wird aus Gleichung (4.9)

$$\rho_A = \epsilon \epsilon_0 |\mathbf{E}| \quad (4.24)$$

Schiebt man die Materie in einen Kondensator, dessen Spannung konstant gehalten wird, so vergrößert sich, wegen  $Q = CU$  seine Ladung um den Faktor  $\epsilon$ , Abb. 4.21:

$$Q_n = \epsilon Q_v.$$



**Abb. 4.21**

Schiebt man in einen Kondensator bei konstanter Spannung ein Dielektrikum hinein, so vergrößert sich die Ladung.

### 4.7 Piezo- und pyroelektrischer Effekt

Materialien, deren Kristallstruktur hinreichend unsymmetrisch ist, werden polarisiert wenn sie verformt werden. Durch das Verformen entsteht zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen eine elektrische Spannung. Dieser Effekt heißt *piezoelektrischer Effekt*. Umgekehrt resultiert eine Verformung des Kristalls, wenn man zwischen den entsprechenden Flächen eine elektrische Spannung anlegt.

Kristalle mit noch niedrigerer Symmetrie zeigen den *pyroelektrischen Effekt*: Bei Änderung der Temperatur ändert sich die Polarisation; zwischen zwei gegenüberliegenden Flächen entsteht eine elektrische Spannung.

---

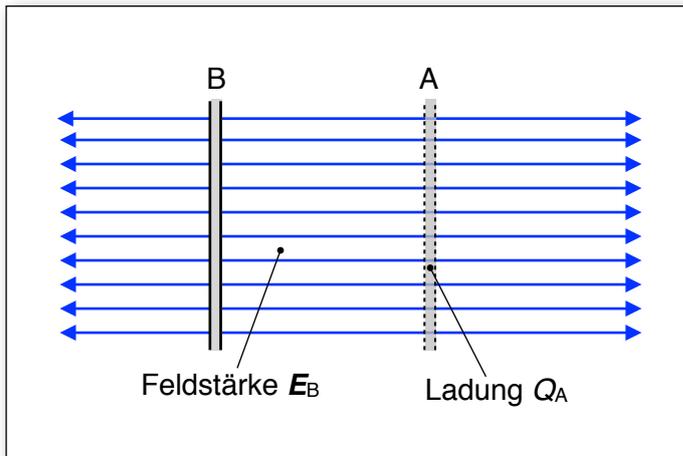
## 4.8 Die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt

Wir wollen die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt, mit Hilfe von Gleichung (4.1) berechnen:

$$F = QE$$

Wir betrachten dazu die eine der Platten, Platte A, im Feld der anderen, Platte B. Platte A trägt die Ladung  $Q_A$ , die Stärke des Feldes von Platte B ist  $E_B$ . Ist aber diese Gleichung hier überhaupt anwendbar? Die Voraussetzung dafür, dass Gleichung (4.1) benutzt werden darf, ist, dass wir es mit einem einzigen Feldstärkewert  $E_B$  zu tun haben. Und das heißt, dass die Feldstärke an allen Orten, über die sich die Ladung  $Q_A$  erstreckt, denselben Wert hatte, bevor die Ladung dort hin gebracht wurde.

Dies ist nun bei unserem Kondensator der Fall. Das Feld der linken Platte allein zeigt Abb. 4.22.



**Abb. 4.22**

Beitrag einer der beiden Platten eines Kondensators zum Gesamtfeld

Überall rechts von dieser Platte hat das Feld die Stärke  $E_B$ , wobei  $E_B$  halb so groß ist wie die Feldstärke  $E$  im kompletten Kondensator:

$$E_B = \frac{E}{2}$$

Man findet dies unter Verwendung von Gleichung (4.3). Man erhält dann für die Kraft:

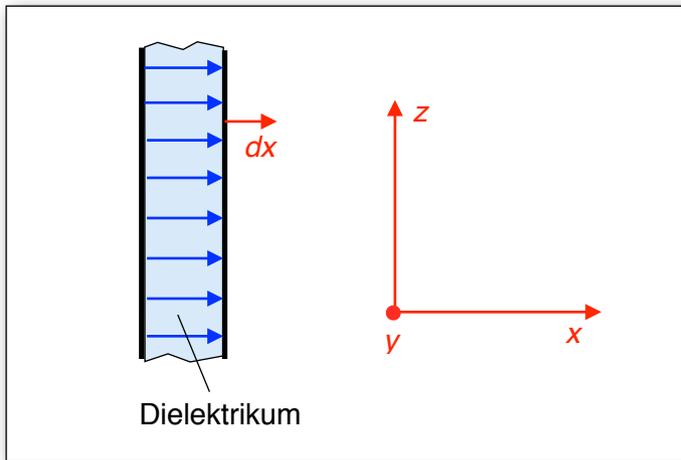
$$F = \frac{E \cdot Q}{2}$$

Mit Gleichung (4.24) und  $Q = \rho_A A$  wird daraus

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A} \quad (4.25)$$

### 4.9 Die Energie im Feld des Kondensators

Man erhält die Energie, indem man eine Platte gegen die andere senkrecht zur Plattenebene bei konstant gehaltener Ladung verschiebt, Abb. 4.23.



**Abb. 4.23**

Zum Verschieben der rechten Platte nach rechts wird Energie gebraucht.

Dabei soll der Raum zwischen den Platten vollständig mit Materie ausgefüllt bleiben. Man stellt sich deshalb das Dielektrikum am besten als Flüssigkeit vor, in die die ganze Anordnung eingetaucht ist.

Aus

$$dE = F dx.$$

wird mit (4.25)

$$dE = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A} dx$$

Integriert von  $x = 0$  bis  $x = d$  wird die gesamte Energie im Feld:

$$E = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A} d \quad (4.26)$$

Mit (4.23) erhalten wir schließlich

$$E = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.27)$$

---

---

# 5

## **Energiedichte und mechanische Spannung im elektrischen Feld**

Wir berechnen in diesem Kapitel die lokalen Größen Energiedichte und mechanische Spannung. Zur Berechnung ziehen wir die einfachste Feldverteilung heran, die es gibt: das homogene Feld. Da wir den Zusammenhang zwischen Größen berechnen, die sich auf Raumpunkte, und nicht auf Raumbereiche beziehen, beschränkt sich aber die Gültigkeit unserer Ergebnisse nicht auf homogene Felder.

---

## 5. Energiedichte und mechanische Spannung im elektrischen Feld

---

### 5.1 Die Energiedichte

Nach Gleichung (4.26) ist die Energie im homogenen Feld eines Kondensators mit dem Plattenabstand  $d$  und der Plattenfläche  $A$

$$E = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A} d$$

Wir ersetzen die Ladung  $Q$  mit Gleichung (4.24) und mit  $\rho_A = Q/A$ :

$$E = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \cdot A \cdot d$$

Da  $V = A \cdot d$  das felderfüllte Volumen ist, ergibt sich für die Energiedichte

$$\rho_E = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \tag{5.1}$$

---

## 5.2 Die Zugspannung in Richtung der Feldlinien

Die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt, ist nach Gleichung (4.25):

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A}$$

Diese Kraft übt nicht nur eine Platte auf die andere aus, sondern auch die eine Platte auf den Feldbereich, der unmittelbar vor ihr liegt, und dieser auf den nächsten usw. Im Feld herrscht demzufolge eine mechanische Zugspannung in Richtung der Feldlinien. Man erhält diese, indem man die Kraft durch die Fläche  $A$  dividiert:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0 A^2} = \frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} \rho_A^2$$

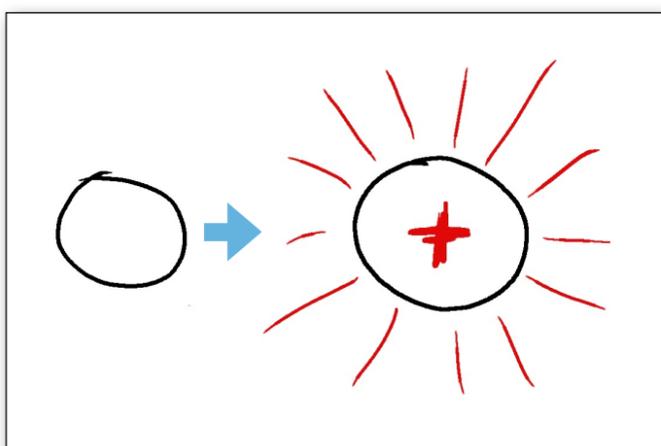
Das positive Vorzeichen bedeutet, dass es sich um eine Zugspannung handelt.

Mit Gl. (4.24) erhalten wir schließlich

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (5.2)$$

Aus der Tatsache, dass an Ladungen immer elektrische Feldlinien beginnen oder enden, schließen wir, dass das elektrische Feld an geladener Materie zieht.

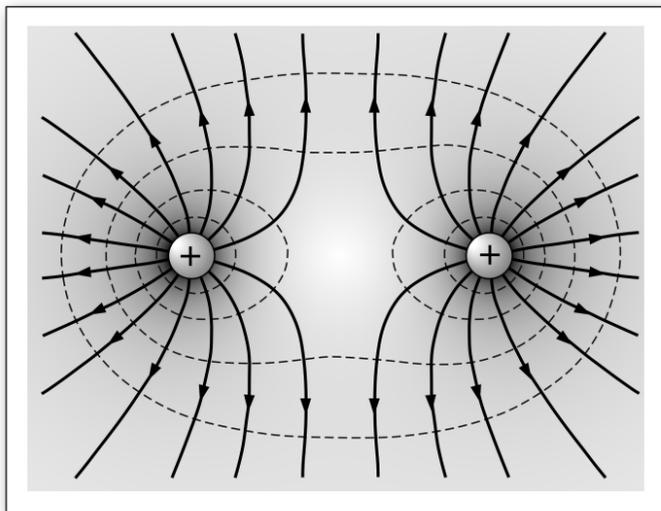
Lädt man eine Seifenblase elektrisch auf, so wird sie größer. Das elektrische Feld zieht die Flüssigkeitslamelle nach außen, Abb. 5.1.



**Abb. 5.1**

Das elektrische Feld zieht an der Oberfläche der Seifenblase.

Wie erklärt sich aber die Abstoßung zwischen zwei gleichnamig geladenen Körpern? Man entnimmt Abb. 5.2 die Antwort auf diese Frage. Wir betrachten den linken Körper: Das Feld *zieht* an allen Teilen seiner Oberfläche. Da die Feldstärke links größer ist als rechts, zieht es aber stärker nach links als nach rechts, und es resultiert eine Nettokraft nach links. Entsprechendes gilt für den rechten Körper.



**Abb. 5.2**

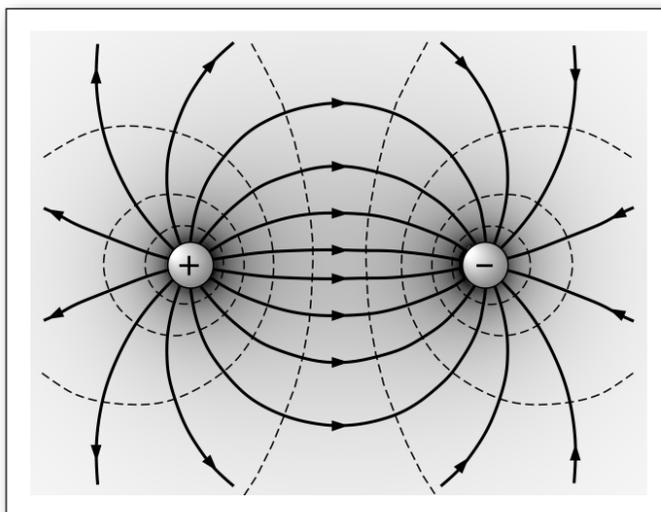
Zwei gleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld voneinander weggezogen.

Statt „Gleichnamig geladene Körper stoßen sich ab“, wäre es also richtiger zu sagen:

*Gleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld voneinander weggezogen.*

Auf analoge Art interpretieren wir Abb. 5.3. Wieder zieht das Feld am linken Körper nach allen Richtungen. Diesmal sind aber die Feldstärke rechts vom Körper größer als links, und es resultiert eine Nettokraft nach rechts. Statt „die Körper ziehen sich an“ sagen wir also richtiger:

*Ungleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld zueinander hingezogen.*

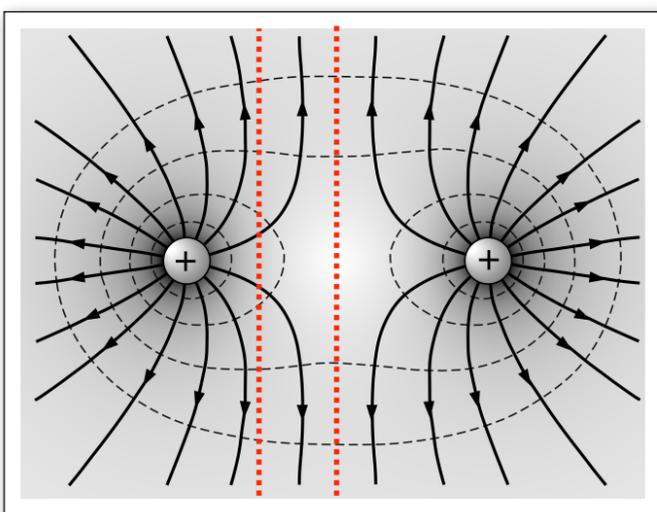


**Abb. 5.3**

Zwei ungleichnamig geladene Körper werden vom elektrischen Feld zueinander hingezogen.

### 5.3 Die Druckspannung quer zu den Feldlinien

Wir betrachten zwei entgegengesetzt gleich geladene, kleine Körper, Abb. 5.4.

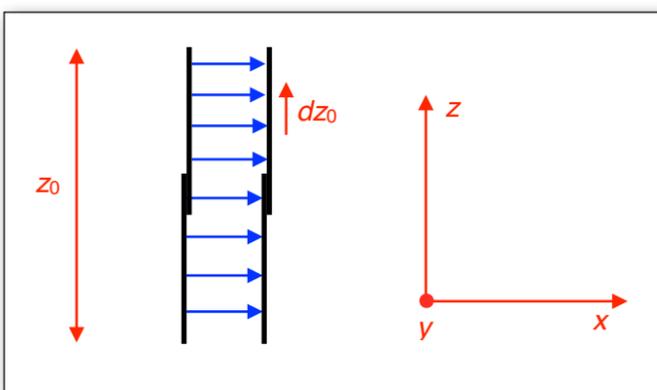


**Abb. 5.4**  
In der Symmetrieebene herrscht eine reine Druckspannung.

Wir denken uns nun eine unendlich ausgedehnte Fläche, die so liegt, dass einer der geladenen Körper auf der einen, die andere auf der anderen Seite der Fläche liegt (linke gestrichelte Linie). Die Nettokraft, die das Feld auf der einen Seite auf das Feld auf der anderen Seite der Fläche ausübt, muss eine Druckkraft sein. Sie wird sich aber im Allgemeinen auf komplizierte Art aus den Druck- und Zugspannungsbeiträgen der verschiedenen Flächenelemente unserer Trennfläche zusammensetzen.

Nun gibt es eine Trennfläche bei der die Verhältnisse einfacher sind: die Symmetrieebene zwischen den beiden Körpern (rechte gestrichelte Linie). Hier liegen alle Feldstärkevektoren in der Ebene der Fläche, d. h. senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen den Körpern. Aus der Tatsache, dass auch in dieser Fläche eine Nettodruckkraft herrscht, können wir schließen, dass im elektrischen Feld *quer zu den Feldlinien* eine Druckspannung herrscht. Wir wollen diese als Funktion der Feldstärke berechnen.

Bei dem Kondensator von Abb. 5.5 lassen sich die Platten auseinanderziehen, so dass sich ihre Fläche  $y_0 z_0$  auf  $y_0(z_0 + dz_0)$  vergrößert. Dabei werde die Ladung konstant gehalten. Beim Auseinanderziehen vermindert sich die Energie des Feldes.



**Abb. 5.5**  
Beim Vergrößern der Plattenflächen gibt das Feld Energie ab.

Aus Gleichung (5.1) folgt für die Energie des Feldes

$$E = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 x_0 y_0 z_0 \quad (5.3)$$

(Achtung:  $E$  steht für Energie,  $\mathbf{E}$  für elektrische Feldstärke). Wir wollen nun die Feldstärke durch die Ladung ausdrücken, denn die Ladung bleibt bei dem betrachteten Prozess konstant. Wir benutzen dazu (4.24):

$$\frac{Q}{y_0 z_0} = \rho_A = \varepsilon\varepsilon_0 |\mathbf{E}|$$

Damit wird aus (5.3):

$$E = \frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0 z_0}$$

Bei einer Verschiebung  $dz_0$  ändert sich die Energie um:

$$dE = -\frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0 z_0^2} dz_0$$

Der Vergleich mit  $dE = F_z dz_0$  ergibt die Kraft, die das Feld auf seine Aufhängung, nämlich die Platten, ausübt:

$$F_z = -\frac{Q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{x_0}{y_0 z_0^2}$$

Wir ersetzen mit Gleichung (4.24)  $Q$  wieder durch  $|\mathbf{E}|$ :

$$F_z = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 x_0 y_0$$

Die mechanische Spannung  $\sigma_{\perp} = F_z / (x_0 y_0)$  ergibt sich damit zu

$$\sigma_{\perp} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$$

Quer zu den  $\mathbf{E}$ -Feldlinien herrscht also eine Druckspannung vom Betrag  $\varepsilon\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 / 2$ .

---

# 6

## Die Quellen des magnetischen Feldes

---

## 6.1 Die magnetische Feldstärke

Die Erscheinungen der Magnetostatik sind denen der Elektrostatik formal sehr ähnlich. Außer der strukturellen Übereinstimmung scheint es aber keinen Zusammenhang zwischen diesen beiden Erscheinungsbereichen zu geben, solange man sich auf statische Phänomene beschränkt. Ein Unterschied zwischen Elektrizität und Magnetismus folgt daraus, dass man bisher keine isolierten magnetischen Ladungen beobachtet hat. Die Suche danach ist aber nach wie vor aktuell und wird heute mit mehr finanziellem Aufwand betrieben als je zuvor. Praktisch operieren kann man daher bisher nur mit magnetischen Polarisationsladungen, also dem Analogon zu den elektrischen gebundenen oder Scheinladungen. Der Umgang mit gebundener magnetischer Ladung ist allerdings viel bequemer als der mit gebundener elektrischer. Permanente elektrische Dipole sind schwer aufzubewahren, weil sie schnell durch freie Ladungen neutralisiert werden. Da es keine freie magnetische Ladung gibt, kann man permanente Magneten sehr gut aufbewahren.

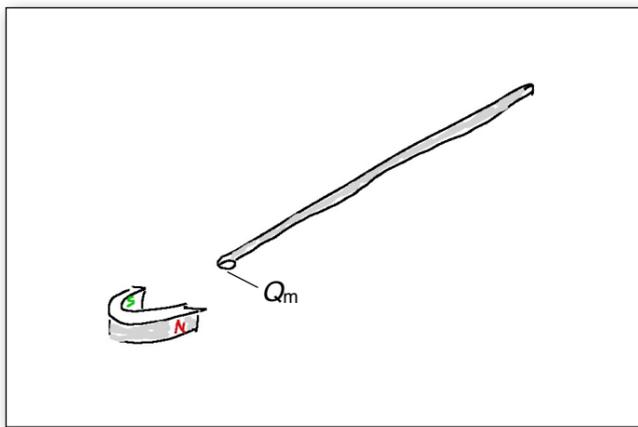
Magnetische oder magnetisierte Materie besteht aus magnetischen Dipolen, die man nicht zerlegen kann. Hier ist sogar der punktförmige Dipol realisiert: Elektronen z.B. haben ein magnetisches Dipolmoment (= magnetisches Moment) und verhalten sich manchmal wie punktförmige Teilchen (Elektronen haben auch ein von Null verschiedenes Impulsmoment ohne eine räumlich ausgedehnte Impulsverteilung zu haben. Impulsmomentvektor und magnetischer Momentvektor liegen antiparallel.)

Wir bezeichnen die magnetische Ladung mit  $Q_m$  (kein SI-Symbol; die Größe wird auch Polstärke genannt). Die SI-Maßeinheit ist Weber (Wb), mit  $1 \text{ Wb} = \text{Vs}$ . Die Maßeinheit des magnetischen Moments  $m$  ist demzufolge  $\text{Wb} \cdot \text{m}$ . Dass hier Kombinationen von Maßeinheiten auftreten, mit denen auch elektrische Größen gemessen werden, können wir erst begründen, wenn der Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus behandelt wird. Wir nehmen voraus, dass man magnetische Einheiten dadurch erhält, dass man in der Einheit der analogen elektrischen Größe Volt durch Ampere ersetzt und umgekehrt. So ist die Einheit der elektrischen Ladung As (abgekürzt Coulomb). Daraus erhält man die der magnetischen Ladung Vs (abgekürzt Weber).

Den magnetisch positiv geladenen Teil eines Magneten ( $Q_m > 0$ ) nennt man Nordpol, den magnetisch negativ geladenen ( $Q_m < 0$ ) Südpol. Die magnetische (Schein-)Ladung am Pol eines Permanentmagneten ist größenordnungsmäßig  $10^{-4} \text{ Wb}$ , das magnetische Moment eines Elektrons beträgt  $1,166766 \cdot 10^{-29} \text{ Wb} \cdot \text{m}$ .

Bringt man in ein gegebenes Magnetfeld an eine bestimmte Stelle eine „magnetische Punktladung  $Q_m$ “ (z.B. das Ende eines sehr langen, dünnen Stabmagneten), so wirkt auf diese eine Kraft, Abb. 6.1. Verdoppelt man den Wert der Ladung, so verdoppelt sich auch der Wert der Kraft:

$$F \sim Q_m.$$



**Abb. 6.1**

Um die Stärke des Feldes zu bestimmen, misst man die Kraft auf die magnetische Probeladung  $Q_m$ .

Der vektorielle Proportionalitätsfaktor ist also für das Feld ohne Punktladung charakteristisch. Man nennt ihn die magnetische Feldstärke  $H$ :

$$F = H Q_m \quad (6.1)$$

Für die Maßeinheit von  $H$  ergibt sich A/m.

Coulomb fand nicht nur das nach ihm benannte Gesetz der Kraftwirkung von elektrischen Punktladungen aufeinander, sondern auch das entsprechende magnetische Gesetz:

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_{m1} Q_{m2}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.2)$$

Hier ist  $\mu_0$  die *magnetische Feldkonstante*:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$$

Aus (6.2) folgt die  $H$ -Feldverteilung einer magnetischen Punktladung:

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

In Analogie zum elektrischen Dipolmoment (Gleichung (4.12)) definieren wir das magnetische Dipolmoment

$$\mathbf{m} = Q_m \mathbf{a}.$$

Achtung: Die Definition von  $\mathbf{m}$  ist in der Literatur nicht einheitlich! Wir folgen ausnahmsweise *nicht* der SI-Konvention.

So wie auf einen einzelnen Magnetpol eine Kraft wirkt, wirkt auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$$

Vergleiche mit Gleichung (4.13).

## 6.2 Die Magnetisierung

Die atomaren Bausteine mancher Stoffe haben ein von Null verschiedenes magnetisches Moment. Manchmal sind die magnetischen Dipole so ausgerichtet, dass ihre Dipolmomentvektoren parallel liegen. Dann hat auch ein makroskopischer Körper ein von Null verschiedenes Dipolmoment. Man nennt einen solchen Körper einen *Magneten*. Wir definieren die Dichte  $\mathbf{M}$  des magnetischen Dipolmoments (Vergleiche mit Gleichung (4.14)):

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M} dV \quad (6.3)$$

Die Größe  $\mathbf{M}$  heißt *Magnetisierung*.  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  ist ein Vektorfeld. Die Maßeinheit von  $\mathbf{M}$  ist das Tesla (T). Man findet  $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$ .

(Unser  $\mathbf{M}$  ist das  $\mu_0$ -fache der nach dem SI definierten Magnetisierung, genauso wie unser  $\mathbf{m}$  das  $\mu_0$ -fache des nach dem SI definierten magnetischen Dipolmoments ist; verschiedene Bücher benutzen verschiedene Namen für dieselbe Größe, geben verschiedenen Größen denselben Namen und benutzen verschiedene Symbole für dieselbe Größe; diese Uneinigkeit herrscht nur bei der magnetischen Polstärke, dem magnetischen Dipolmoment und dessen Dichte; bei den elektrischen Feldgrößen, sowie bei  $\mathbf{H}$  und der noch einzuführenden Größe  $\mathbf{B}$  ist man sich einig.)

Genauso wie die gebundene elektrische Ladung an den Enden eines elektrisch polarisierten Körpers Quellen des  $\mathbf{E}$ -Feldes sind, sind die magnetischen Scheinladungen an den Enden eines Magneten die Quellen des  $\mathbf{H}$ -Feldes. Der mathematische Formalismus, der den Zusammenhang zwischen Quellen und Feld beschreibt, ist in beiden Fällen identisch, und wir können die Gleichungen aus Abschnitt 4.4 direkt übernehmen, wobei wir die folgenden Übersetzungsregeln anwenden:

$$\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{H}$$

$$\epsilon_0 \Rightarrow \mu_0$$

$$\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{M}$$

$$\rho \Rightarrow \text{Null} \quad (\text{denn es gibt keine freie magnetische Ladung}).$$

Aus Gleichung (4.17) erhalten wir

$$\text{div } \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathbf{M} \quad (6.4)$$

oder

$$\text{div} (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0,$$

und mit der Abkürzung

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (6.5)$$

(in Analogie zu (4.18)) erhalten wir die zu (4.19) analoge Beziehung:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (6.6)$$

Die Größe  $\mathbf{B}$  heißt *magnetische Induktion* oder *magnetische Flussdichte*. Ihre Maßeinheit ist dieselbe wie die der Magnetisierung, nämlich Tesla.

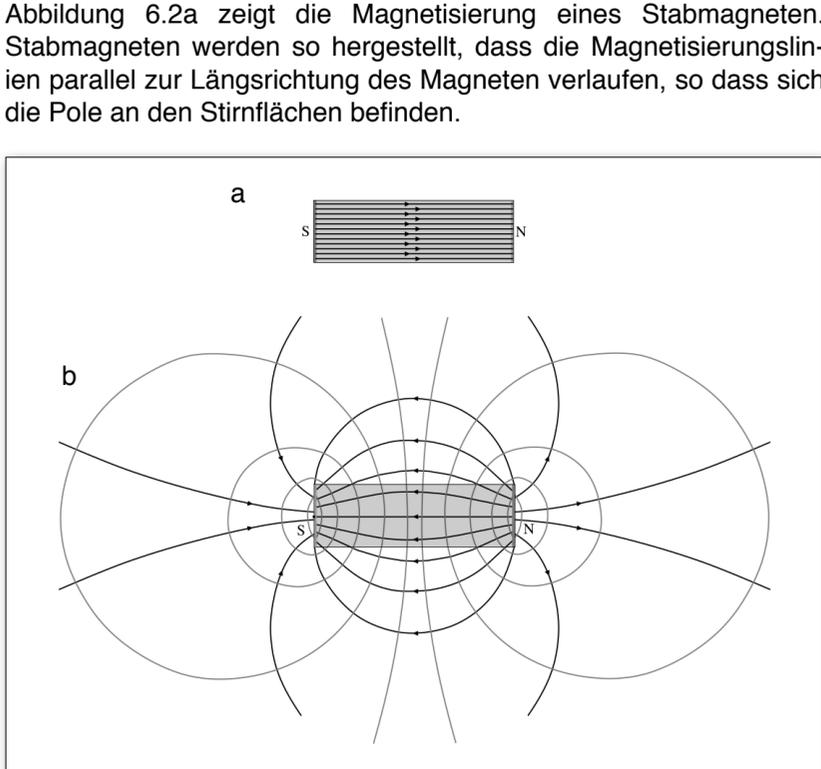
Die Gleichungen (6.4) und (6.6) besagen, dass das  $\mathbf{H}$ -Feld seine Quellen dort hat, wo das  $\mathbf{M}$ -Feld seine Senken hat, und umgekehrt. Unter Zuhilfenahme des Gaußschen Satzes verwandeln wir die lokale Gleichung (6.4) in eine integrale Beziehung:

$$\oiint \mathbf{H} d\mathbf{A} = -\frac{1}{\mu_0} \oiint \mathbf{M} d\mathbf{A}$$

Aus (6.6) wird entsprechend

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad (6.7)$$

Abbildung 6.2a zeigt die Magnetisierung eines Stabmagneten. Stabmagneten werden so hergestellt, dass die Magnetisierungslinien parallel zur Längsrichtung des Magneten verlaufen, so dass sich die Pole an den Stirnflächen befinden.

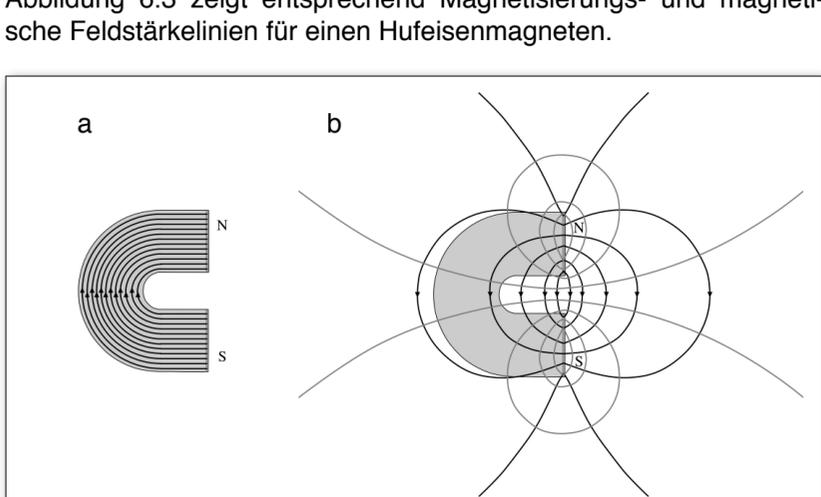


**Abb. 6.2**

Stabmagnet; (a) Magnetisierungslinien; (b)  $\mathbf{H}$ -Feldlinien und magnetische Äquipotenzialflächen

Abbildung 6.2b zeigt das  $\mathbf{H}$ -Feldlinienbild. (Außerdem sind die magnetischen Äquipotenzialflächen dargestellt, siehe Abschnitt 6.3). Wenn man die magnetische Polladung an den Stirnflächen durch elektrische Ladung ersetzt erhält man ein elektrisches Feld, dessen Feldlinienverlauf derselbe ist wie der in der Abbildung.

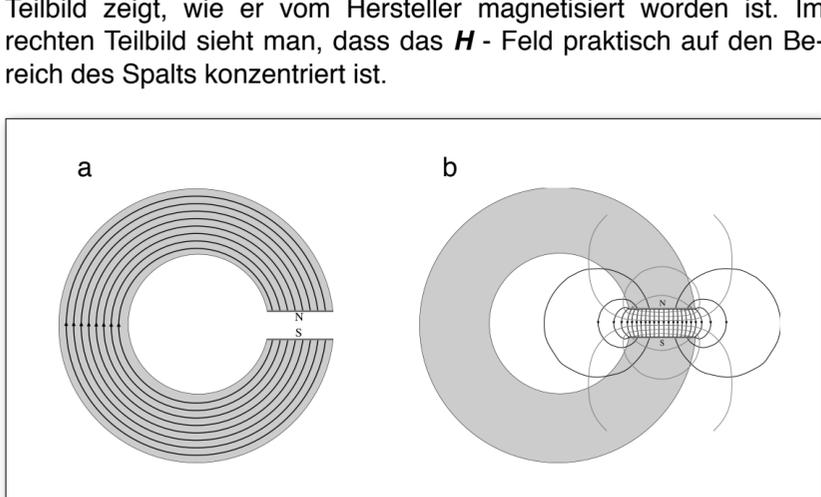
Abbildung 6.3 zeigt entsprechend Magnetisierungs- und magnetische Feldstärkelinien für einen Hufeisenmagneten.



**Abb. 6.3**

Hufeisenmagnet; (a) Magnetisierungslinien; (b)  $\mathbf{H}$ -Feldlinien und magnetische Äquipotenzialflächen

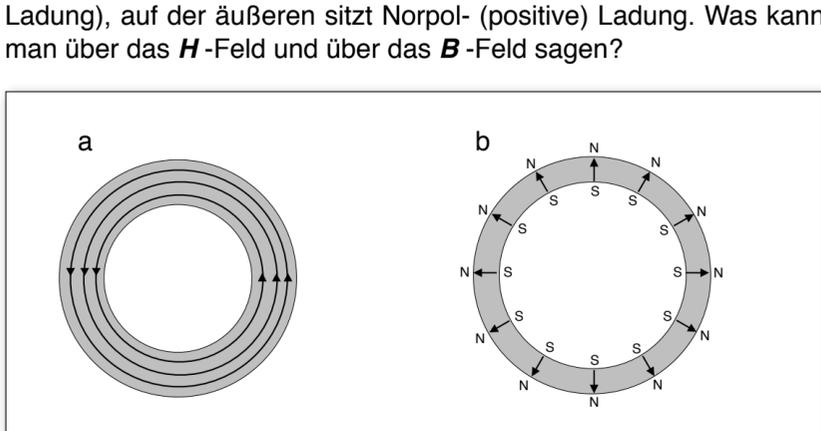
In Abbildung 6.4 ist ein Ringmagnet mit Spalt dargestellt. Das linke Teilbild zeigt, wie er vom Hersteller magnetisiert worden ist. Im rechten Teilbild sieht man, dass das  $\mathbf{H}$ -Feld praktisch auf den Bereich des Spalts konzentriert ist.



**Abb. 6.4**

Ringmagnet; (a) Magnetisierungslinien; (b)  $\mathbf{H}$ -Feldlinien und magnetische Äquipotenzialflächen

Abbildung 6.5a zeigt einen Ring, ähnlich wie der in Abb. 6.4a; nur hat dieser Ring keinen Spalt. Was kann man über das  $\mathbf{H}$ -Feld und über das  $\mathbf{B}$ -Feld sagen? Abbildung 6.5b zeigt eine magnetisierte Kugelschale; auf der inneren Oberfläche sitzt Südpol- (negative) Ladung, auf der äußeren sitzt Nordpol- (positive) Ladung. Was kann man über das  $\mathbf{H}$ -Feld und über das  $\mathbf{B}$ -Feld sagen?



**Abb. 6.5**

(a) Ringmagnet ohne Spalt; (b) magnetisierte Kugelschale. Was lässt sich über die magnetische Feldstärke und über die magnetische Flussdichte sagen?

### 6.3 Das magnetische Potenzial

Genauso wie

$$\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{r}$$

im elektrostatischen Feld, so ist

$$\int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{r}$$

im magnetostatischen Feld unabhängig vom Integrationsweg.

Folglich kann man ein magnetisches Potential  $\Phi_m(\mathbf{r})$  definieren (vergleiche Gl. (4.5)):

$$\int_A^B \mathbf{H} d\mathbf{r} = -[\Phi_m(\mathbf{r}_B) - \Phi_m(\mathbf{r}_A)] = U_m \quad (6.8)$$

$U_m$  ist die magnetische Spannung zwischen A und B. Aus der letzten Gleichung folgt weiter (vergleiche Gl. (4.7)):

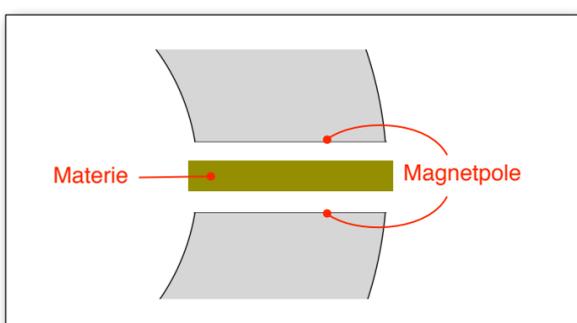
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \Phi_m(\mathbf{r})$$

Die Maßeinheit der magnetischen Spannung ist Ampere.  $U_m$  ist ein SI-Symbol, für das magnetische Potential gibt es kein genormtes Symbol.

---

## 6.4 Die induzierte Magnetisierung

Wir untersuchen, wie sich Materie im Magnetfeld verhält. Das Feld sei homogen und habe außerhalb der Materie einen festen Wert. Ein solches Feld realisiert man zum Beispiel dadurch, dass man ein plattenförmiges Stück Materie in den schmalen Spalt zwischen den breiten Polen eines homogen magnetisierten Magneten bringt, Abb. 6.6.



**Abb. 6.6**  
Magnetisierbare Materie zwischen den Polen eines Magneten

Wegen  $\text{div}(\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0$  hat der Ausdruck  $\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$  auf beiden Seiten der Oberfläche der Materie, d.h. innerhalb (i) und außerhalb (a), denselben Wert. Da außerhalb  $\mathbf{M} = 0$  ist folgt:

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_i + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{M}$$

und daraus

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_a - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{M} \quad (6.9)$$

Ist die Materie nicht selbst ein Magnet, d. h. ist sie nicht von vornherein magnetisch polarisiert (= magnetisiert), so findet man, dass sie unter dem Einfluss eines  $\mathbf{H}$ -Feldes magnetisiert wird. Es gilt näherungsweise

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H} \quad (6.10)$$

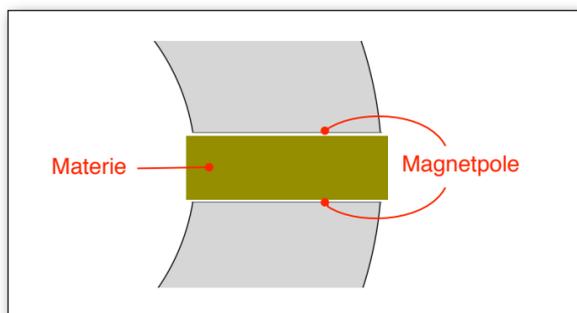
$\chi_m$  ist die *magnetische Suszeptibilität*. Damit wird aus (6.9)

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_a - \chi_m \mathbf{H}_i$$

und

$$\mathbf{H}_a = (1 + \chi_m) \mathbf{H}_i$$

Die Materie soll nun den ganzen Raum zwischen den Magnetpolen ausfüllen, Abb. 6.7.



**Abb. 6.7**  
Durch Einschieben magnetisierbarer Materie wird die Feldstärke vermindert.

Vergleicht man die  $\mathbf{H}$ -Feldstärke vor dem Einschieben der Materie (v) mit der nachher (n), so ist

$$\mathbf{H}_v = (1 + \chi_m) \mathbf{H}_n$$

Die Feldstärke wird also durch das Einbringen der Materie um den Faktor  $1 + \chi_m$  verändert. Man nennt diesen Faktor  $\mu$  die Permeabilität des Materials:

$$\mu = 1 + \chi_m.$$

Wegen  $U_m = \int \mathbf{H} d\mathbf{r}$  ändert sich auch die magnetische Spannung zwischen den beiden Magnetpolen um diesen Faktor:  $U_{mv} = \mu U_{mn}$ . Die magnetische Spannung ist weniger gebräuchlich als die elektrische, da sie schwerer zu messen ist. Alle Voltmeter machen davon Gebrauch, dass es frei verschiebbare elektrische Ladung gibt. Dank der Verschiebbarkeit von  $Q$  kann man einen Potentialwert mit Hilfe von Drähten übertragen. Dagegen ist die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  praktisch leichter messbar als die elektrische (etwa mit einer Hall-Sonde).

Wie bei der elektrischen Polarisation gibt es auch bei der magnetischen Polarisation durch ein  $\mathbf{H}$ -Feld unterschiedliche Mechanismen. Das Elektron hat ein magnetisches Moment. In vielen Stoffen stellen sich die Elektronen jedes Atoms oder Moleküls so ein, dass das Atom bzw. Molekül insgesamt das magnetische Moment null hat. In anderen Stoffen haben die Moleküle ein resultierendes magnetisches Moment. Diese heißen *paramagnetische* Stoffe. Bringt man sie in ein magnetisches Feld, so werden die magnetischen Momente in Feldrichtung orientiert (die paramagnetische Polarisation im  $\mathbf{H}$ -Feld entspricht also der Orientierungspolarisation im  $\mathbf{E}$ -Feld). In Tabelle 6.1 sind die Suszeptibilitätswerte einiger paramagnetischer Stoffe aufgeführt.

Stoff	$\chi_m$
Sauerstoff (unter Normalbedingungen)	$0,14 \cdot 10^{-6}$
flüssiger Sauerstoff	$360 \cdot 10^{-6}$
Aluminium	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Mangan	$80 \cdot 10^{-6}$
Natrium	$0,5 \cdot 10^{-6}$
Platin	$19,3 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 6.1**  
Beispiele für paramagnetische Stoffe

$\chi_m$  nimmt mit abnehmender Temperatur zu. Die Ausrichtung der magnetischen Momente ist bei Normaltemperatur weit davon entfernt, vollständig zu sein.

Aber auch die Stoffe, deren Moleküle normalerweise kein resultierendes magnetisches Moment haben, werden im  $\mathbf{H}$ -Feld magnetisch, nämlich so, dass  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{H}$  in die entgegengesetzte Richtung weisen,  $\chi_m$  ist also negativ. Man nennt diesen Vorgang *diamagnetische* Polarisation. Er tritt auch bei den paramagnetischen Stoffen auf, wird dort aber von der paramagnetischen Polarisation überdeckt. Tabelle 6.2 enthält die  $\chi_m$ -Werte einiger diamagnetischer Stoffe.

Stoff	$\chi_m$
Blei	$-0,12 \cdot 10^{-6}$
Gold	$-3,1 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	$-0,8 \cdot 10^{-6}$
Silber	$-1,5 \cdot 10^{-6}$
NaCl	$-1 \cdot 10^{-6}$
Wasser	$-0,72 \cdot 10^{-6}$
Wismut	$-14 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 6.2**  
Beispiele für diamagnetische Stoffe

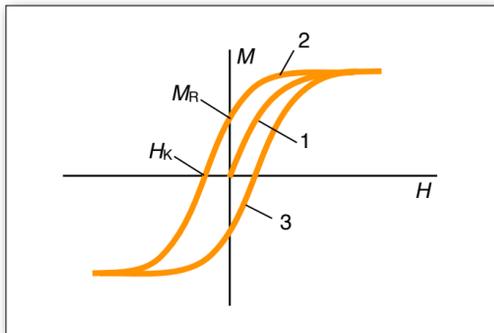
## 6.5 Ferromagnetismus

Es gibt Stoffe, deren Atome ein resultierendes magnetisches Moment haben, und bei denen sich die magnetischen Dipole aller Atome von allein parallel einstellen. Bei ihnen ist  $\mathbf{M} \neq 0$ , auch wenn  $\mathbf{H} = 0$  ist. Da die Ausrichtung der elementaren magnetischen Momente vollständig ist (im Gegensatz zu den paramagnetischen Stoffen), ist  $\mathbf{M}$  sehr groß.

Diese Stoffe heißen *ferromagnetisch*. Zu ihnen gehören Fe, Ni, Co und Legierungen dieser und anderer Stoffe.

Dass ein gewöhnliches Stück Eisen kein magnetisches Moment hat, liegt daran, dass die Ausrichtung der atomaren Dipole domänenweise geschieht. Diese Domänen heißen *Weißsche Bezirke*. Sie sind unterschiedlich orientiert, so dass makroskopisch keine Magnetisierung feststellbar ist. Bringt man ein Stück Eisen in ein magnetisches Feld, so wachsen die Domänen, die in Feldrichtung liegen, auf Kosten der Domänen, die in anderen Richtungen liegen.

Abb. 6.8 zeigt die Magnetisierung in Abhängigkeit von der Feldstärke.



**Abb. 6.8**

M-H-Zusammenhang mit Hysterese

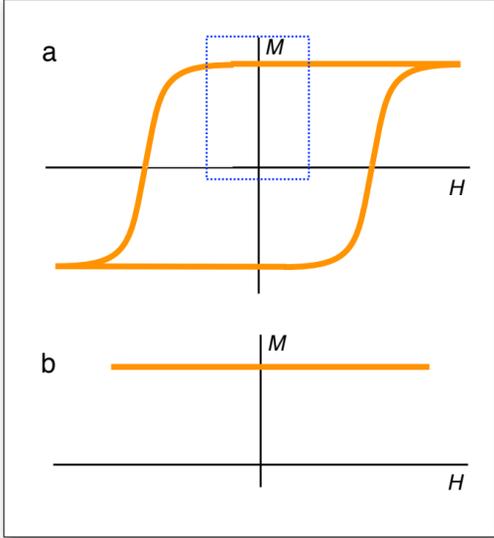
Wenn man von einem unmagnetischen Stück Eisen ausgehend die Feldstärke wachsen lässt, bewegt man sich auf dem Kurvenstück 1. Lässt man dann  $H$  abnehmen bis zu negativen Werten, so folgt man dem Kurvenstück 2. Lässt man darauf  $H$  wieder wachsen, so wird Kurve 3 durchlaufen. Die bei  $H = 0$  zurückbleibende Magnetisierung  $M_R$  heißt *remanente Magnetisierung*, die Feldstärke  $H_K$ , die notwendig ist, um das Material auf die Magnetisierung Null zurückzubringen, heißt *Koerzitivfeldstärke*.

Die Magnetisierung in einem gegebenen Zeitpunkt hängt also von der Feldstärke in früheren Zeitpunkten ab. Das Material hat somit ein „Gedächtnis“. Man nennt eine solche Erscheinung „Hysterese“. Der Effekt wird zur Datenspeicherung benutzt.

Der  $M$ - $H$ -Zusammenhang ist für verschiedene ferromagnetische Materialien verschieden. Abbildung 6.9 und 6.10 zeigt zwei Beispiele.

Abb. 6.9a entspricht einem magnetisch „harten“ Material. Es ist zur Herstellung von Permanentmagneten geeignet. Ein Permanentmagnet soll die Magnetisierung, die ihm vom Hersteller aufgeprägt worden ist, nicht ändern wenn man ihn einem magnetischen Feld aussetzt. In Abb. 6.9b ist nur der durch den blauen Kasten markierte Ausschnitt dargestellt. Man sieht, dass in dem entsprechenden  $H$ -Bereich die Magnetisierung unabhängig von der Feldstärke ist. (Natürlich kann man die Magnetisierung „gewaltsam“ ändern, wie man aus Abb. 6.9a ablesen kann.)

Man erreicht heute Werte von  $M_R$  bis über 1 T und von  $H_K$  bis über 150 kA/m.



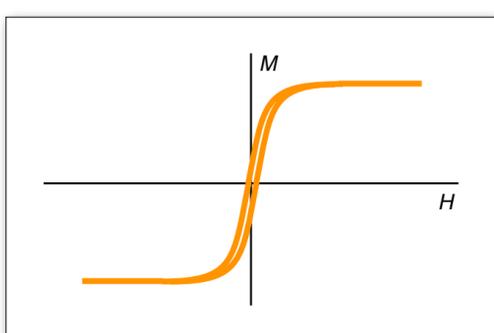
**Abb. 6.9**

(a) M-H-Zusammenhang für einen hartmagnetischen Stoff.  
(b) Der in (a) blau eingerahmte Kasten entspricht dem H-Bereich, in dem das Material normalerweise benutzt wird.

Abbildung 6.10 zeigt den  $M$ - $H$ -Zusammenhang für ein magnetisch „weiches“ Material (Weicheisen,  $\mu$ -Metall). Solange  $M$  klein ist gegen die Sättigungsmagnetisierung, gilt hier  $M = \mu_0 \chi_m H$ , wie für diamagnetische und paramagnetische Stoffe.  $\chi_m$  ist hier aber viel größer, nämlich einige Zigtausend. Bringt man ein solches Material in ein Magnetfeld, das vorher den Wert  $H_v$  hatte, so ist

$$H_v = (1 + \chi_m) H_n \Rightarrow H_n \approx 1/10^4 H_v.$$

Die Feldstärke im Material wird also praktisch Null. Ein Körper aus weichmagnetischem Material verdrängt das Magnetfeld aus seinem Innern.



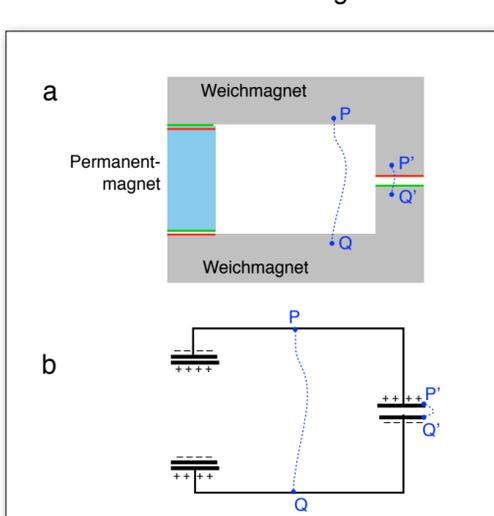
**Abb. 6.10**

M-H-Zusammenhang für einen weichmagnetischen Stoff. Solange das Material nicht gesättigt ist, verdrängt es das magnetische Feld aus seinem Innern, d.h. die Feldstärke ist sehr klein.

Ein weichmagnetischer Stoff verhält sich demnach im  $H$ -Feld analog zu elektrischen Leitern im elektrischen Feld. Genauso wie die Oberfläche eines elektrischen Leiters eine elektrische Äquipotentialfläche bildet, so ist die Oberfläche von Weicheisen nahezu eine Fläche konstanten magnetischen Potentials (vgl. Abschnitt 4.2 und 4.5).

Bei einer für jeden ferromagnetischen Stoff charakteristischen Temperatur, der Curie-Temperatur, verschwindet der Ferromagnetismus. Der Stoff ist oberhalb dieser Temperatur (bei Eisen 1047 K) ein gewöhnlicher Paramagnet.

Mit Hilfe von Teilen aus magnetisch weichem Material, kann man auf bequeme Art das Feld eines Permanentmagneten verändern. Wir stellen uns vor, Permanentmagnet und Weichmagnet bestehen aus idealem Material. Abbildung 6.11a zeigt ein Beispiel, Abbildung 6.11b das elektrische Analogon.



**Abb. 6.11**

Zwei- und runder: Positive Anordnungen.  
Rot und grün: Positive und negative magnetische Polladung

Wie in Abbildung 6.11b die Drähte auf konstantem elektrischem Potential sind, so sind die Weicheisenteile in Abbildung 6.11a auf konstantem magnetischem Potential. Die elektrische Feldstärke in den Drähten in Abb. 6.11b ist Null und die magnetische Feldstärke in den Weicheisenteilen in Abb. 6.11a ist nahezu Null.

Es ist in Abb. 6.11b

$$\int_P^Q \mathbf{E} \, dr = \int_{P'}^{Q'} \mathbf{E} \, dr$$

und in Abb. 6.11a

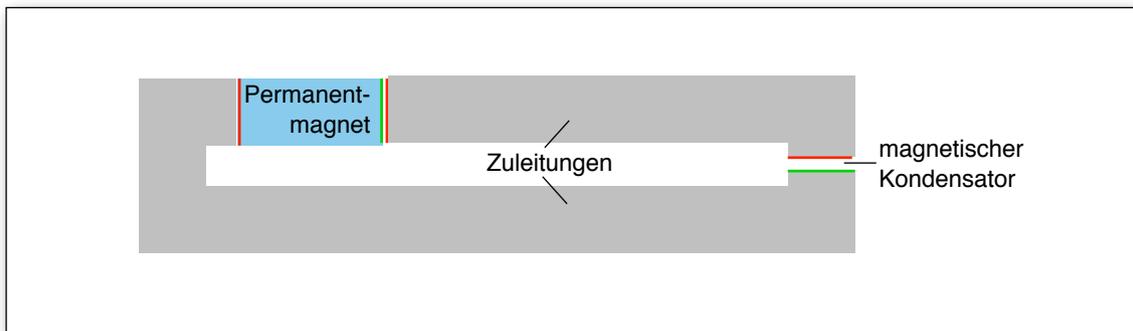
$$\int_P^Q \mathbf{H} \, dr = \int_{P'}^{Q'} \mathbf{H} \, dr$$

Da der Weg PQ viel länger ist als der Weg P'Q' ist die Feldstärke  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{H}$  auf dem Weg P'Q' viel größer als auf dem Weg PQ. Daher sitzt auch auf den Flächen rechts der größte Teil der elektrischen Influenzladung bzw. der magnetischen Polarisationsladung. Das Feld in dem Spalt auf der rechten Seite ist nahezu homogen.

Mit Hilfe der Weicheisenstücke haben wir also aus dem ursprünglich inhomogenen Feld des Stabmagneten ein starkes homogenes Feld gemacht.

### 6.6 Die magnetische Kapazität

In Analogie zu  $C = Q/U$  könnte man eine magnetische Kapazität definieren:  $C_m = Q_m/U_m$ . Diese Größe ist allerdings nicht gebräuchlich. Die Maßeinheit der magnetischen Kapazität ist  $\text{Wb}/\text{A} = \text{Henry}$  (H). Wir werden aber später eine Größe derselben Dimension, die *Induktivität*, kennenlernen. Dass die magnetische Kapazität eine sinnvolle Größe ist, sieht man am Beispiel des Ringmagneten im vorigen Abschnitt. Um einen wohldefinierten Raum hoher magnetischer Feldstärke zu bekommen, kann man einen magnetischen Kondensator bauen und über magnetische Leitungen mit einem Permanentmagneten (oder auch Elektromagneten) verbinden. Die Kapazität der Leitungen muss dabei klein sein gegenüber der des „Kondensators“. Da  $C_m = \mu_0 A/d$  ist (analog zu  $C = \epsilon_0 A/d$ ), legt man die Leitungen im großen Bogen zum Kondensator, d.h. so, dass  $d$  für die Leitungen möglichst groß ist. Abb. 6.12 zeigt, wie man es nicht machen darf: die (magnetische) Leitungskapazität ist zu groß.



**Abb. 6.12**

Die Kapazität der Zuleitungen zum magnetischen Kondensator ist zu groß.

---

---

# 7

## **Energiedichte und mechanische Spannung im magnetostatischen Feld**

---

### 7. Energiedichte und mechanische Spannung im magnetostatischen Feld

Wir können die Argumente von Abschnitt 5 fast wörtlich übersetzen. Wir müssen nur ersetzen:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$$

$$\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$$

$$\chi_e \rightarrow \chi_m$$

$$\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0$$

Für die Energiedichte erhalten wir, in Analogie zu Gleichung (5.1):

$$\rho_E = \frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 \quad (7.1)$$

Parallel zu den Feldlinien des  $\mathbf{H}$ -Feldes herrscht eine Zugspannung (vergleiche mit (5.2)):

$$\sigma_{\parallel} = \frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 \quad (7.2)$$

und quer zu den Feldlinien eine Druckspannung (siehe auch (5.4)):

$$\sigma_{\perp} = -\frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 \quad (7.3)$$

Da an Magnetpolen stets magnetische Feldlinien beginnen oder enden, schließen wir, dass das magnetische Feld an Magnetpolen immer zieht.

*Gleichnamige Magnetpole werden vom Magnetfeld voneinander weggezogen, ungleichnamige werden zueinander hingezogen.*

---

---

# 8

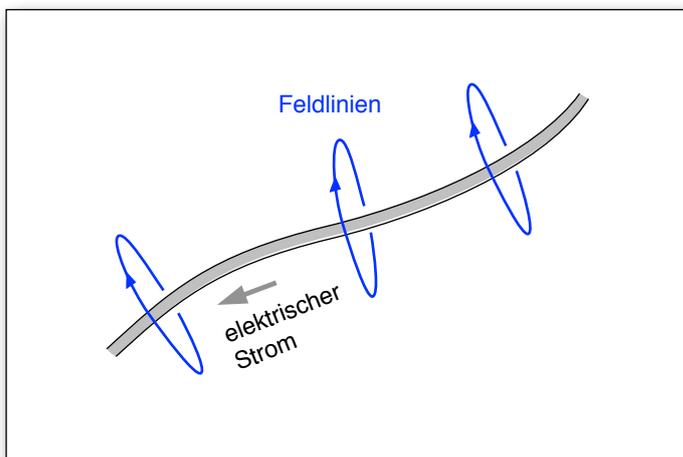
## **Die erste und die zweite Maxwellsche Gleichung**

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit dem Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen.

---

## 8.1 Das Ampèresche Gesetz

Oersted entdeckte 1820, dass ein elektrischer Strom auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment ausübt. Ampère beschrieb die Kraftwirkung von Drähten, in denen Elektrizität fließt, durch eine elegante Theorie. Faraday erkannte, dass man aus diesen Erscheinungen auf die Existenz eines Feldes schließen konnte. Maxwell schließlich verallgemeinerte Ampères und Faradays Gedanken. In moderner Sprache lässt sich Oersteds Entdeckung folgendermaßen beschreiben: Ein Leiter, in dem elektrische Ladung fließt, ist von einem Magnetfeld umgeben, das keine Quellen oder Senken hat; es ist  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ , Abb. 8.1. Die  $\mathbf{H}$ -Feldlinien haben weder Anfang noch Ende.



**Abb. 8.1**

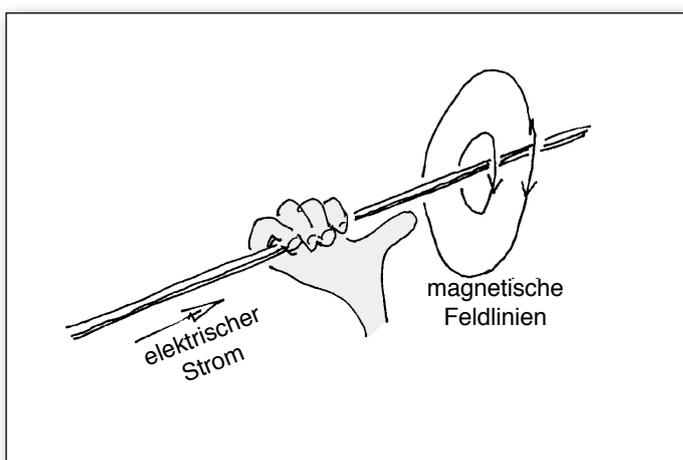
Magnetisches Feld eines Drahtes, der von einem elektrischen Strom durchflossen wird

Aus Ampères Theorie folgt die Beziehung zwischen Stromstärke und  $\mathbf{H}$ -Feld:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = I \quad \text{Ampèresches Gesetz (Durchflutungsgesetz)} \quad (8.1)$$

In Worten: Das Integral  $\int \mathbf{H} d\mathbf{r}$  über einen geschlossenen Weg ist gleich der Stärke des elektrischen Stroms, der durch diese Fläche fließt. Dieser Gleichung liegt die Konvention zu Grunde, dass der geschlossene Integrationsweg zusammen mit der Ebene, auf die sich die Stromstärke bezieht, eine Rechts-Schraube definiert.

Dies lässt sich auch mit der „Rechte-Hand-Regel“ formulieren: Weist der Daumen der rechten Hand in die Richtung des elektrischen Stroms (= Richtung der Stromdichtevektoren), so zeigen die gekrümmten Finger den Drehsinn der magnetischen Feldlinien an, Abb. 8.2.



**Abb. 8.2**

Weist der Daumen der rechten Hand in die Richtung des elektrischen Stroms, so zeigen die gekrümmten Finger die Richtung der magnetischen Feldstärke an.

Mit  $I = \iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$  lautet das Ampèresche Gesetz:

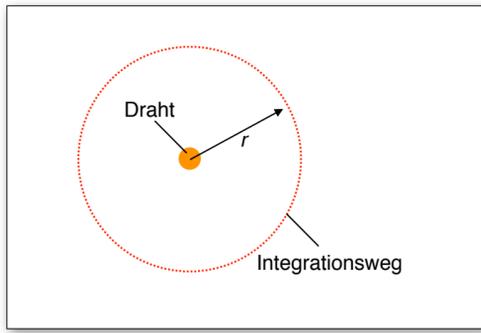
$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$$

**Achtung:** In einem  $\mathbf{H}$ -Feld, das durch einen elektrischen Strom verursacht wird, ist  $\int \mathbf{H} d\mathbf{r}$  nicht vom Integrationsweg unabhängig. Ein Potential kann deshalb nur noch in begrenzten Gebieten definiert werden.

## 8.2 Berechnung magnetischer Feldstärken

### Der gerade Draht

Man wählt als Integrationsweg einen Kreis mit dem Radius  $r$ , der senkrecht zur Drahrichtung liegt, und dessen Mittelpunkt sich in der Mitte des Drahtes befindet, Abb. 8.3.



**Abb. 8.3**  
Integrationsweg bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung eines geraden Drahtes.

Aus Symmetriegründen ist der Betrag von  $\mathbf{H}$  auf dem gesamten Integrationsweg konstant. Die Richtung von  $\mathbf{H}$  muss tangential zum Kreis sein, andernfalls hätte das  $\mathbf{H}$ -Feld am Draht Quellen oder Senken, was nicht der Fall ist. Es ist also

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = |\mathbf{H}| 2\pi r = I \Rightarrow |\mathbf{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

### Die lange Spule

Wir wählen den in Abb. 8.4 gestrichelt gezeichneten Weg als Integrationsweg: Im Innern der Spule folgen wir einer Feldlinie; außerhalb ist die Feldstärke sehr klein, wir vernachlässigen ihren Beitrag zum Integral:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = H \cdot l = N \cdot I$$

$N$  = Zahl der Windungen, die durch den Integrationsweg laufen.



**Abb. 8.4**  
Integrationsweg bei der Berechnung der magnetischen Feldstärke in einer langen Spule

Damit wird

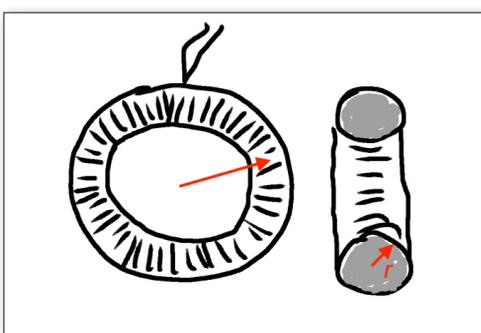
$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

$\mathbf{H}$  hängt innerhalb der Spule nicht vom Ort ab, insbesondere nicht davon, welche Stelle innerhalb eines Spulenquerschnitts man betrachtet. Das  $\mathbf{H}$ -Feld ist also homogen. Außerdem hängt  $\mathbf{H}$  nicht vom Querschnitt der Spule ab, und bei fester Windungszahl pro Länge nicht von der Länge der Spule.

### Die torusförmige Spule

Der Durchmesser  $R$  des Rings sei groß gegen den „Rohrdurchmesser“  $r$ , Abb. 8.5. Dann ist das Feld nahezu homogen. Die Feldstärke außerhalb der Spule ist Null. Für das Innere erhält man durch Integration über einen im Torusrohr verlaufenden, kreisförmigen Weg der Länge  $l = 2\pi R$ :

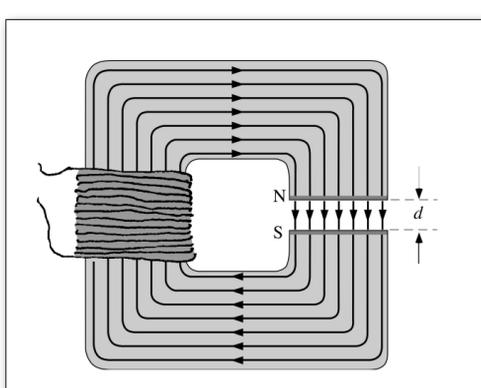
$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = |\mathbf{H}| \cdot l = N \cdot I \Rightarrow H = \frac{N \cdot I}{l}$$



**Abb. 8.5**  
Torusförmige Spule

### Der ringförmige Elektromagnet

Der Abstand der ebenen Polflächen sei klein gegen die seitliche Ausdehnung dieser Flächen. Das  $\mathbf{H}$ -Feld zwischen den Polen ist daher nahezu homogen, Abbildung 8.6. Wir berechnen die Feldstärke  $H_a$  zwischen den Polen und die Feldstärke  $H_i$  im Weich-eisenkern.



**Abb. 8.6**  
Elektromagnet mit schmalen Spalt. Die Feldlinien gehören zur magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$ .

Mit

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

erhalten wir

$$\mu_0 H_a = M + \mu_0 H_i$$

Mit  $M = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$  (Gleichung (6.10)) wird daraus

$$\mu_0 H_a = \mu_0 \chi_m H_i + \mu_0 H_i = \mu_0 (1 + \chi_m) H_i$$

Da  $\chi_m \gg 1$  ist, wird

$$\mu_0 H_a \approx \mu_0 \chi_m H_i,$$

also

$$H_i = \frac{H_a}{\chi_m}$$

Wir integrieren über den gestrichelten Weg. Das Wegstück innerhalb des Eisens habe die Länge  $l_i$ , die außerhalb  $l_a$ :

$$H_i l_i + H_a l_a = N \cdot I$$

Wir vernachlässigen  $H_i$  hier nicht gegen  $H_a$ , da vor  $H_i$  der Faktor  $l_i$  steht, der groß  $l_a$  ist.

Ersetzen von  $H_i$  mit Hilfe der vorletzten Gleichung ergibt:

$$H_a = \frac{NI}{\frac{l_i}{\chi_m} + l_a}$$

Mit  $H_i = H_a/\chi_m$  erhält man daraus die Feldstärke im Eisenkern:

$$H_i = \frac{NI}{l_i + \chi_m l_a}$$

Wir betrachten zwei Extremfälle:

$$\frac{l_i}{\chi_m} \ll l_a \Rightarrow H_a = \frac{NI}{l_a}, \quad H_i = \frac{NI}{\chi_m l_a}$$

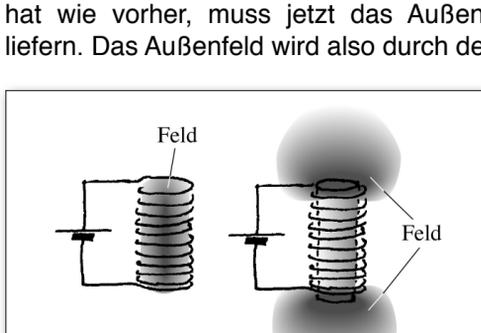
Ist der Spalt nicht zu schmal, so ist das Feld im Spalt gerade so stark, als wäre die gesamte Spule über der kurzen Länge  $l_a$  aufgewickelt. Im Eisen ist die Feldstärke sehr klein.

$$\frac{l_i}{\chi_m} \gg l_a \Rightarrow H_a = \frac{NI}{l_i} \chi_m, \quad H_i = \frac{NI}{l_i}$$

Die Feldstärke im Eisen ist dieselbe wie in einer Ringspule derselben Windungszahl. Im Spalt ist  $H$  um den Faktor  $\chi_m$  größer.

### Der lange Elektromagnet (Spule mit Eisenkern)

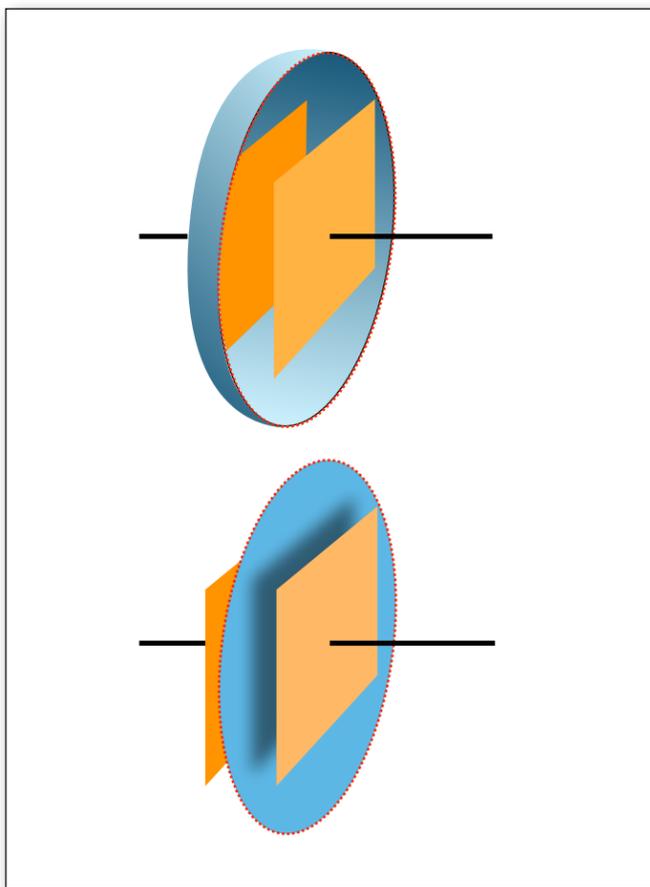
Da das Feld inhomogen ist, ist es schwerer zu berechnen. Der Effekt des Eisenkerns lässt sich qualitativ so beschreiben, Abb. 8.7: Bei einer leeren Spule kommt der größte Beitrag zu  $\int \mathbf{H} d\mathbf{r}$  vom Innern der Spule her. Ist die Spule mit einem weichmagnetischen Material gefüllt, so wird im Innern  $\mathbf{H}$  sehr klein. Da  $\int \mathbf{H} d\mathbf{r} = NI$  denselben Wert hat wie vorher, muss jetzt das Außenfeld einen großen Beitrag liefern. Das Außenfeld wird also durch den Eisenkern verstärkt.



**Abb. 8.7**  
Der Eisenkern verdrängt das magnetische Feld aus der Spule.

### 8.3 Die erste Maxwellsche Gleichung

Das Ampèresche Gesetz ist ein Provisorium, das nur solange gilt, wie der Stromkreis geschlossen ist. Im Fall von Abbildung 8.8, in dem eine Leitung durch den leeren Raum zwischen den Platten eines Kondensators unterbrochen ist, führt es zu einer Inkonsistenz. Durch die Leitung fließe ein Strom konstanter Stärke  $I$ , so dass sich der Kondensator auflädt.



**Abb. 8.8**

Zwei Möglichkeiten für die Wahl der Integrationsfläche bei festgehaltener Berandung

Während dieser Strom fließt, hat das Integral  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{r}$  auf dem eingezeichneten Weg einen wohldefinierten, von Null verschiedenen Wert. Die rechte Seite des Ampèreschen Gesetzes, nämlich  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$  hat aber verschiedene Werte, je nachdem, wie die Fläche, deren Rand die gestrichelte rote Linie ist, gelegt wird. Schneidet die Fläche den Draht (oberes Teilbild) so ist  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A} = I$ ; läuft sie dagegen durch den Raum zwischen den Kondensatorplatten (unteres Teilbild), so ist  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A} = 0$ . Bei dieser zweiten Wahl der Fläche kann also  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{r}$  nicht gleich  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$  sein. Dieses Problem tritt nur auf, wenn der Stromkreis nicht geschlossen ist, wenn also  $\mathbf{j}$  Quellen oder Senken hat. Maxwell verallgemeinerte deshalb das Ampèresche Gesetz, indem er auf der rechten Seite zu  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$  zwei Terme hinzufügte:

$$\oint_{\text{Rand von } S} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{j} d\mathbf{A} + \iint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \iint_S \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{A} \quad (8.3)$$

Mit Gleichung (4.18) lassen sich die beiden letzten Summanden zusammenfassen:

$$\oint_{\text{Rand von } S} \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{j} d\mathbf{A} + \iint_S \dot{\mathbf{D}} d\mathbf{A} \quad \text{1. Maxwellsche Gleichung} \quad (8.4)$$

Der gewöhnliche elektrische Strom  $\iint \mathbf{j} d\mathbf{A}$  ist ergänzt worden durch zwei weitere Terme, die zum Magnetfeld beitragen:

- $I_p = dQ_p/dt = \iint (\partial \mathbf{P}/\partial t) d\mathbf{A}$  ist der Strom, der durch die Verschiebung von Polarisationsladungen zustande kommt.
- Selbst wenn keine polarisierbare Materie vorhanden ist, liefert der Raum zwischen den Kondensatorplatten einen Beitrag zum magnetischen Feld; der Term  $\varepsilon_0 \iint (\partial \mathbf{E}/\partial t) d\mathbf{A}$  verhält sich, was das Magnetfeld betrifft, wie ein elektrischer Strom. Dieser Term ist, bis auf den Faktor  $\varepsilon_0$ , die Zeitableitung des Flusses des  $\mathbf{E}$ -Feldes durch die Fläche  $S$ .

Ist damit die oben angesprochene Inkonsistenz beseitigt? Wir berechnen die rechte Seite der 1. Maxwellschen Gleichung für den Fall, dass die Integrationsfläche zwischen den Kondensatorplatten liegt. Da hier  $\mathbf{j} = 0$  und  $\partial \mathbf{P}/\partial t = 0$  ist, bleibt nur der Term  $\varepsilon_0 \iint (\partial \mathbf{E}/\partial t) d\mathbf{A}$ .

Mit  $|\mathbf{E}| = Q/(\varepsilon_0 A)$  und  $Q = I \cdot t$  wird

$$\varepsilon_0 \iint \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \iint \frac{\dot{Q}}{\varepsilon_0 A} d\mathbf{A} = I$$

Es ist also  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = I$ , in Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das man erhält, wenn die Integrationsfläche die Leitung schneidet.

Maxwell interpretierte auch den Beitrag  $\iint (\partial \mathbf{D}/\partial t) d\mathbf{A}$  als elektrischen Strom und nannte ihn *Verschiebungsstrom*.

Die Summe  $I + \iint (\partial \mathbf{D}/\partial t) d\mathbf{A}$  nannte er den *wahren Strom*. Nach dieser Vorstellung gibt es überhaupt nur geschlossene Stromkreise. Bezeichnet man mit Maxwell die Stromdichte dieses wahren Stroms mit  $\mathbf{C}$  (Current), so vereinfacht sich die 1. Maxwellsche Gleichung zu:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint \mathbf{C} d\mathbf{A}$$

Nach dieser Auffassung ist die Ursache für  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{r}$  immer ein elektrischer Strom.

Wir erinnern daran, dass die Rechte-Hand-Regel für alle Beiträge zum Strom in Gleichung (8.3) gilt.

## 8.4 Die zweite Maxwellsche Gleichung

Faraday erkannte die strukturelle Übereinstimmung von elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Diese Erkenntnis führte ihn zur Entdeckung des Induktionsgesetzes. Er hat dieses Gesetz nicht durch Zufall gefunden, sondern bewusst gesucht. Die Suche hat mehr als 10 Jahre gedauert. Hätte er den Teil des Maxwellschen Formalismus zur Verfügung gehabt, den wir bisher behandelt haben, so wäre seine Suche schneller gegangen. Er hätte das Induktionsgesetz einfach durch formales Übersetzen der ersten Maxwellschen Gleichung (8.3) finden können:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint \mathbf{j} d\mathbf{A} + \iint \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{A} + \varepsilon_0 \iint \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{A} \quad \text{1. Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint \mathbf{j}_m d\mathbf{A} + \iint \dot{\mathbf{M}} d\mathbf{A} + \mu_0 \iint \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{A} \quad ?? \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{noch nicht ganz korrekte} \\ \text{Version der} \\ \text{2. Maxwellschen Gleichung} \end{array} \right.$$

Den einzigen Fehler, den man bei dieser formalen Übersetzung macht, ist ein Vorzeichenfehler: Die erhaltene Gleichung erweist sich als richtig, wenn man vor  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  ein Minuszeichen setzt. (Wäre das Vorzeichen der elektrischen oder der magnetischen Ladung andersherum festgelegt worden, so stünde das Minuszeichen in der *ersten* Maxwellschen Gleichung. In einer der beiden muss es aber stehen, sonst entsteht ein Konflikt mit dem Energiesatz.)

Da es keine einzelnen magnetischen Ladungen gibt, gibt es auch keinen gewöhnlichen magnetischen Strom, wir können deshalb den Term  $\iint \mathbf{j}_m d\mathbf{A}$  weglassen. (Sobald jemand ein magnetisches Monopolteilchen entdeckt hat, fügen wir ihn wieder hinzu).

Es bleibt also

$$-\oint_{\text{Rand von S}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint_S \dot{\mathbf{M}} d\mathbf{A} + \mu_0 \iint_S \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{A} \quad (8.5)$$

Mit Gleichung (6.5) lassen sich die beiden Summanden auf der rechten Seite zusammenfassen:

$$-\oint_{\text{Rand von S}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint_S \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{2. Maxwellsche Gleichung} \\ \text{(Faradaysches Gesetz, Induktionsgesetz)} \end{array} \right. \quad (8.6)$$

Wie die erste Maxwellsche Gleichung macht auch die zweite eine Aussage über eine Fläche, genauer: über einen Zusammenhang zwischen dem Rand und dem Inneren der Fläche. Das Integral  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  über den Rand kommt zustande durch zwei Beiträge:

- die zeitliche Änderung des Flusses von  $\mathbf{M}$  durch S
- die zeitliche Änderung des Flusses von  $\mathbf{H}$  (mal  $\mu_0$ ) durch S.

Auch hier kann man die rechte Seite interpretieren als einen Verschiebungsstrom: einen *magnetischen Verschiebungsstrom*. Danach entsteht um einen magnetischen Strom herum ein elektrisches Feld, dessen Feldlinien um den magnetischen Strom herumlaufen.

*Achtung:* In einem  $\mathbf{E}$ -Feld, das durch Induktion verursacht wird, ist  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  *nicht* vom Integrationsweg unabhängig. Ein Potential kann deshalb nur noch in begrenzten Gebieten definiert werden.

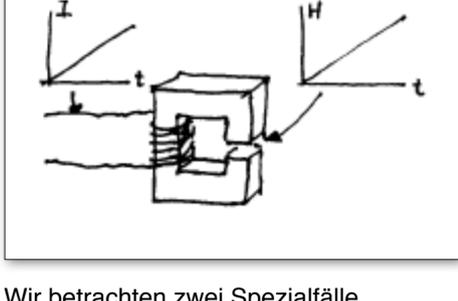
Um die Richtung der elektrischen Feldstärke des induzierten Feldes zu erhalten, kann man wieder eine Hand-Regel anwenden; wegen des Minuszeichen in den Gleichungen (8.5) und (8.6) aber eine Linke-Hand-Regel: *Weist der Daumen der linken Hand in die Richtung des magnetischen Stroms (d.h. in die Richtung von  $\partial \mathbf{B} / \partial t$ ), so zeigen die gekrümmten Finger den Drehsinn der elektrischen Feldlinien an.*

### 8.5 Elektrische Leiter im induzierten elektrischen Feld

Um das durch die 2. Maxwellsche Gleichung beschriebene elektrische Feld nachzuweisen, könnte man eine „Probeladung“ benutzen. Dieser Nachweis ist aber schwierig, da  $E$ , und demzufolge auch  $F = EQ$  in den üblichen praktischen Anordnungen zu klein ist. Wir bringen deshalb in den zu untersuchenden Raum einen elektrischen Leiter. Wir erkennen das  $E$ -Feld dann indirekt an einer zwischen den Enden des Leiters auftretenden „Induktionsspannung“, oder an einem im Leiter fließenden „Induktionsstrom“.

Um eine mathematisch übersichtliche Situation zu erhalten, betrachten wir ein Magnetfeld  $H_a$  (Abb. 8.9),

- das homogen ist;
- dessen Feldstärke gleichmäßig zunimmt (etwa in einem Elektromagneten, dessen elektrische Stromstärke gleichmäßig zunimmt):  $\partial H_a / \partial t = \text{const}$



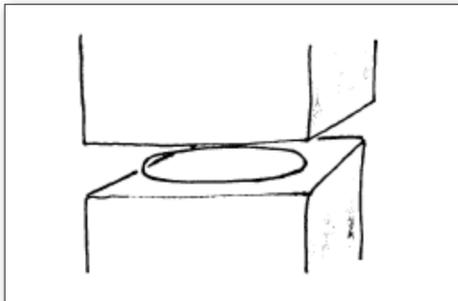
**Abb. 8.9**  
Das Feld im Spalt des Elektromagneten sei homogen und nehme gleichmäßig zu.

Wir betrachten zwei Spezialfälle

#### Kurzschluss

Der Leiter ist ein geschlossener Ring, Abb. 8.10. Wegen des entstehenden  $E$ -Feldes fließt im Leiter ein elektrischer Strom, und dieser verursacht ein Magnetfeld  $H_i$ . Wir setzen die 2. Maxwellsche Gleichung an:

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\mu_0 \iint \mathbf{H} \, d\mathbf{A} = -\mu_0 \iint (\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_i) \, d\mathbf{A}$$



**Abb. 8.10**  
Kurzgeschlossene Leiterschleife in einem Magnetfeld, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt

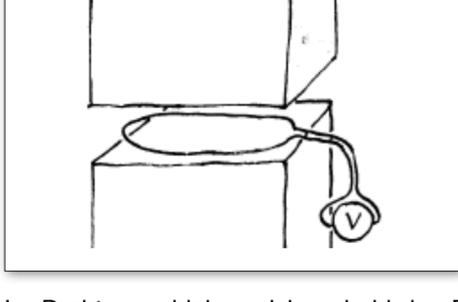
Nun ist  $H_i$  zunächst noch unbekannt. Man findet aber leicht eine konsistente Lösung. Wir nehmen an, dass  $\partial H_i / \partial t = 0$ , also  $H_i$  zeitlich konstant ist. Dann ist auch überall  $E$  zeitlich konstant und mit  $j = \sigma E$  auch die Stromstärke im Draht und folglich auch  $H_i$ , wie vorausgesetzt. Damit wird also

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = -\mu_0 \iint \mathbf{H}_a \, d\mathbf{A}$$

Die Gleichung hat also dieselbe Gestalt, als befände sich gar kein Leiter im Magnetfeld. Der Leiter ruft ein zusätzliches zeitlich konstantes Magnetfeld hervor, das aber keinen Einfluss auf den Induktionsvorgang hat.

#### Leerlauf

Die Leiterschleife ist unterbrochen, es fließt kein elektrischer Strom, Abb. 8.11. Dass kein Strom fließt, hat aber wegen  $j = \sigma E$  zur Folge, dass die elektrische Feldstärke im Draht gleich Null ist. Wie ist das mit der 2. Maxwellschen Gleichung zu vereinbaren? An der rechten Seite der Gleichung, d.h. am  $H$ -Feld kann es nicht liegen, denn es fließt ja kein Strom, der das  $H$ -Feld modifizieren könnte.

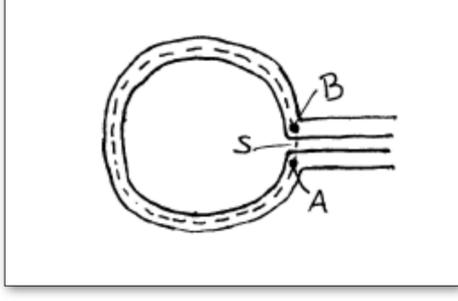


**Abb. 8.11**  
Offene Leiterschleife in einem Magnetfeld, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt

Im Draht verschieben sich, sobald das Experiment beginnt, Ladungen, und zwar gerade so, dass die  $E$ -Feldstärke im Draht null wird. Dafür tritt aber zwischen den offenen Enden der Schleife ein  $E$ -Feld auf, Abb. 8.12. Dieses ist gerade so stark, dass das Integral auf dem Wegstück S über die offene Stelle zwischen A und B gleich

$$\mu_0 \iint (\partial \mathbf{H} / \partial t) \, d\mathbf{A}$$

ist. Bildet man  $\int \mathbf{E} \, d\mathbf{r}$  über den geschlossenen, gestrichelten Weg, so liefert nur dieses Wegstück S einen Beitrag. Man nennt dieses Integral Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$ .



**Abb. 8.12**  
Im Leiter ist die elektrische Feldstärke null.

Die Induktionsspannung kann zwischen den herausgeführten Drähten mit einem Voltmeter gemessen werden. In diesem Fall kann man die 2. Maxwellsche Gleichung so formulieren:

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0 \iint \mathbf{H} \, d\mathbf{A}$$

oder allgemeiner, falls  $\chi_m \neq 0$  ist,

$$U_{\text{ind}} = -\iint \dot{\mathbf{B}} \, d\mathbf{A}$$

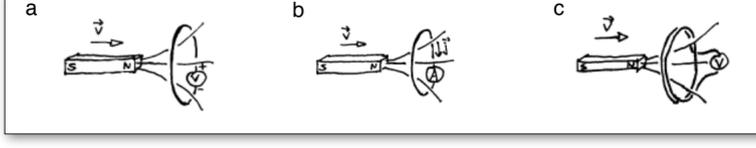
Man nennt

$$\phi = \iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A}$$

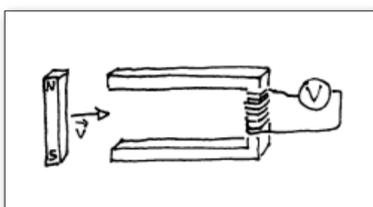
den magnetischen Fluss. Damit wird

$$U_{\text{ind}} = -\dot{\phi}$$

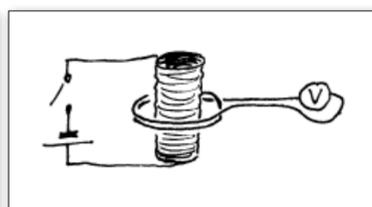
Die Abbildungen 8.13 bis 8.17 zeigen einige Induktionsversuche.



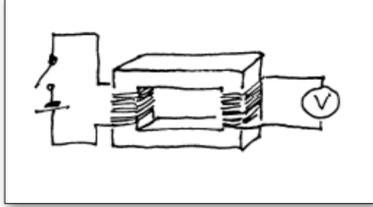
**Abb. 8.13**  
(a) Der Dauermagnet wird bewegt, der Stromkreis ist offen.  
(b) Der Dauermagnet wird bewegt, der Stromkreis ist geschlossen.  
(c) Die Induktionsspannung ist proportional zur Windungszahl.



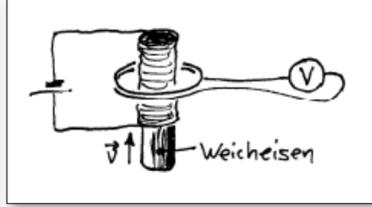
**Abb. 8.14**  
Die induzierte Spannung kommt durch eine Änderung der Magnetisierung zustande



**Abb. 8.15**  
Die  $H$ -Feldänderung kommt durch Schließen eines Stromkreises zustande.

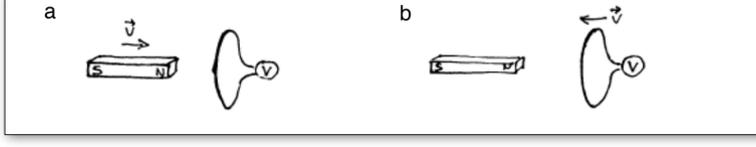


**Abb. 8.16**  
Das Prinzip des Transformators



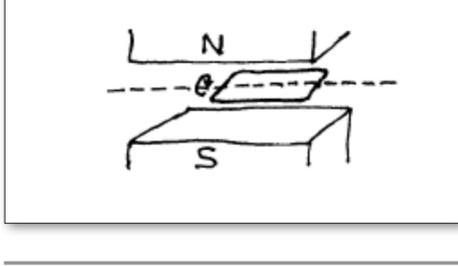
**Abb. 8.17**  
Die Änderung der  $B$ -Feldverteilung kommt zustande durch das Verschieben des weichmagnetischen Spulenkerns..

In der Anordnung von Abb. 8.18b wird statt des Magneten die Leiterschleife bewegt. Der Ausschlag des Voltmeters ist natürlich derselbe wie in Abb. 8.18a, denn der Unterschied zwischen rechts und links besteht allein darin, dass zur Beschreibung ein anderes Bezugssystem gewählt wurde. Während man zur Beschreibung der linken Abbildung die 2. Maxwell-Gleichung heranzieht, braucht man zur Beschreibung der rechten, bei der das  $H$ -Feld des Permanentmagneten konstant ist, die 1. Maxwell-Gleichung. Die Beschreibung mit Hilfe der 2. Maxwell-Gleichung ist aber handlicher; man wird daher das Bezugssystem so wählen, dass die Leiterschleife ruht.



**Abb. 8.18**  
Je nach Bezugssystem braucht man zur Beschreibung die zweite (a) oder die erste (b) Maxwellsche Gleichung.

Auch bei der Anordnung von Abb. 8.19 ist das  $H$ -Feld des Magneten zeitlich konstant. Man berechnet die Induktionsspannung daher in dem Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht und der Magnet rotiert.



**Abb. 8.19**  
Das  $H$ -Feld ist zeitlich konstant. Zur Berechnung der Induktionsspannung geht man in das Bezugssystem, in dem die Leiterschleife ruht.

## 8.6 Die Induktivität

Die Induktivität ist eine technisch wichtige Größe. Sie charakterisiert einen unverzweigten Stromkreis, in dem der elektrische Strom keine Quellen oder Senken hat, oder einen Teil eines solchen Stromkreises. Der Stromkreis definiert eine Fläche  $S$ , durch die der Fluss

$$\iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \iint_S (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) d\mathbf{A}$$

hindurchtritt.

Nach der 1. Maxwellschen Gleichung ist die Feldstärke an jedem Ort proportional zur elektrischen Stromstärke  $I$  im Stromkreis. Solange  $\mathbf{M} \sim \mathbf{H}$ , ist auch  $\mathbf{M}$  überall proportional zu  $I$ . Daraus folgt, dass sowohl der Fluss  $\iint_S \mathbf{H} d\mathbf{A}$  als auch  $\iint_S \mathbf{M} d\mathbf{A}$  proportional zu  $I$  ist:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A} = \iint_S (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}) d\mathbf{A} \propto I$$

Wir schreiben diese Beziehung

$$\Phi = L \cdot I \quad (8.8)$$

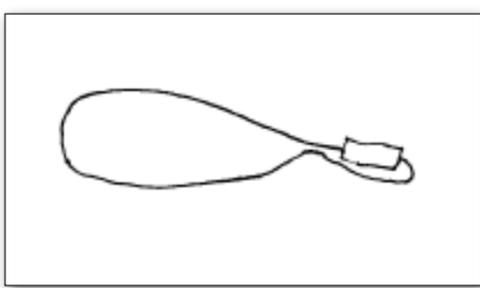
Der Proportionalitätsfaktor  $L$  heißt die *Induktivität* des Stromkreises. Die Maßeinheit ist  $\text{Vs/A} = \text{H}$  (Henry). Da es keine echten magnetischen Ströme gibt, gibt es auch die zu  $L$  analoge elektrische Größe nicht.

Mit der 2. Maxwellschen Gleichung (8.6) wird

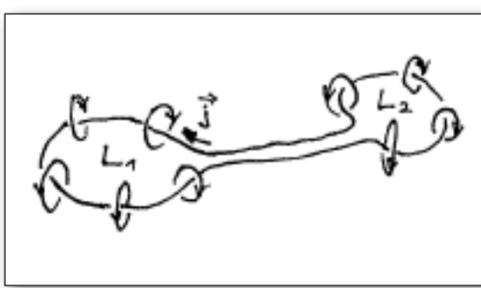
$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = -L \dot{I} \quad (8.9)$$

Befindet sich im Stromkreis ein großer Widerstand, d.h. ein kurzes Teilstück, dessen Widerstand groß ist gegen den des Restes der Leitung, Abb. 8.20, so trägt nur dieses Teilstück zu  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  bei, und die Spannung über diesem Widerstand ist

$$U = -L \dot{I}$$



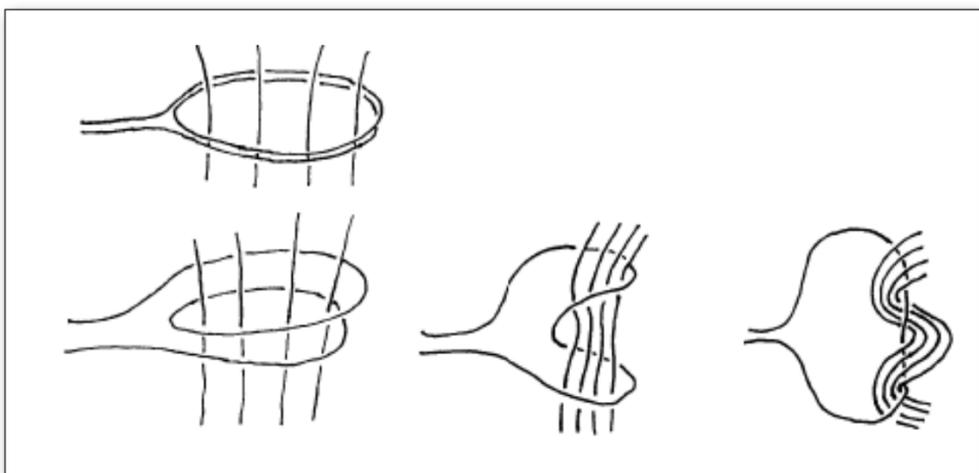
**Abb. 8.20**  
Der Widerstand eines kleinen Abschnitts des Stromkreises ist groß gegen den des Restes.



**Abb. 8.21**  
Die Induktivität des Stromkreises ist in zwei Teile zerlegbar.

Oft ist ein Stromkreis so in Teile zerlegbar, wie es Abbildung 8.21 zeigt: in zwei nahezu geschlossene Flächen, bei denen der Fluss, der durch den einen Teil verursacht wird, nicht durch den anderen geht. In diesem Fall ist auch die Induktivität zerlegbar, man kann jedem Teil seine eigene Induktivität zuordnen.

Bei einer Spule mit  $N$  Windungen tritt jede  $\mathbf{B}$ -Feldlinie  $N$  mal durch ein und dieselbe Fläche des Stromkreises hindurch. Sie trägt damit  $N$  mal zum Integral  $\iint_S \mathbf{B} d\mathbf{A}$  bei. Abbildung 8.22 zeigt, dass die Leiterfläche von 4 Feldlinien 8 mal durchstoßen wird: Alle 4 Teilbilder sind topologisch äquivalent.



**Abb. 8.22**  
Die durch den Stromkreis definierte Fläche wird von jeder Feldlinie zweimal durchstoßen.

Wir berechnen die Induktivität einer langen Spule. Im Innern der Spule ist  $H = (N/l)I$ . Mit  $B = \mu_0 H$  ist der  $B$ -Fluss, der die Gesamtfläche der Spule durchsetzt,

$$\phi = \mu_0 \cdot N \cdot A \cdot H = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} I$$

Durch Vergleich mit  $\Phi = LI$  ergibt sich

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}$$

Bezeichnet man den Fluss durch einen einzigen Spulenquerschnitt  $A$  mit  $\Phi'$ , so ist  $\Phi' = \Phi/N$ , und aus (8.8) wird:

$$N\Phi' = LI$$

Ist die Spule auf einen *geschlossenen* Eisenkern gewickelt, so ist (siehe Abschnitt 8.2)  $H = (N/l)I$ ,  $M = \mu_0 \chi_m H$  und folglich

$$B = \mu_0 H + M = \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{N}{l} I = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I$$

Damit wird

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad (8.11)$$

Wir berechnen noch den Energieinhalt einer Spule mit geschlossenem Eisenkern. Das Feld befindet sich im Wesentlichen im Eisenkern, und damit auch die Energie. Mit Gleichung (7.1), sowie  $H = (N/l)I$  und  $V = A \cdot l$  (wobei  $V$  das Volumen ist) wird:

$$E = \rho_E \cdot V = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} I^2 A l = \frac{\mu \mu_0}{2} \frac{N^2 A}{l} I^2$$

Daraus wird, wenn man (8.11) benutzt,

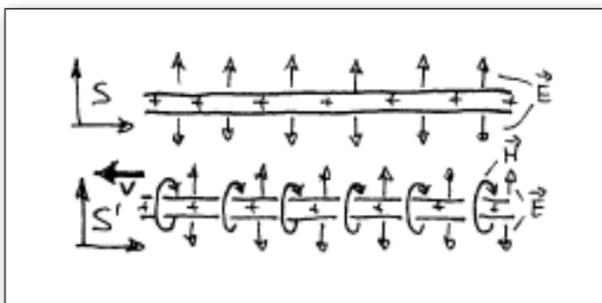
$$E = \frac{L}{2} I^2 \quad (8.12)$$

Der Gültigkeitsbereich dieser Gleichung ist größer, als es nach unserer Herleitung den Anschein hat. Sie gilt immer, wenn wir es mit dem magnetischen Feld eines einzigen unverzweigten Stromkreises zu tun haben.

## 8.7 Bezugssysteme

Dieses Thema wird hier nur angerissen. Eine ausführliche Behandlung würde direkt zur Relativitätstheorie führen.

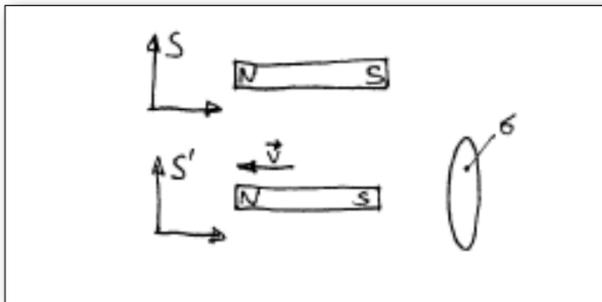
1. Wir betrachten einen gleichmäßig elektrisch geladenen Draht, der im Bezugssystem  $S$  ruht, Abb. 8.23. In diesem Bezugssystem stellt man ein von Null verschiedenes elektrisches Feld fest, während  $\mathbf{H}$  überall gleich Null ist. Im Bezugssystem  $S'$ , das sich gegen  $S$  in Richtung des Drahtes bewegt, bewegt sich die Ladung. Es fließt ein elektrischer Strom und es ist  $\mathbf{H} \neq 0$ .



**Abb. 8.23**

In Bezugssystem  $S$  ist nur die elektrische, in Bezugssystem  $S'$  auch die magnetische Feldstärke von Null verschieden.

2. Wir betrachten einen Stabmagneten, der im Bezugssystem  $S$  ruht, Abb. 8.24. In  $S$  ist  $\mathbf{H} \neq 0$ , aber  $\mathbf{E}$  ist überall gleich Null. Im Bezugssystem  $S'$  ändert sich der  $\mathbf{H}$ -Fluss durch die Fläche  $\sigma$  mit der Zeit, es ist also  $\int \mathbf{E} d\mathbf{r}$  über den Rand dieser Fläche ungleich Null. In  $S'$  ist also die elektrische Feldstärke von Null verschieden.

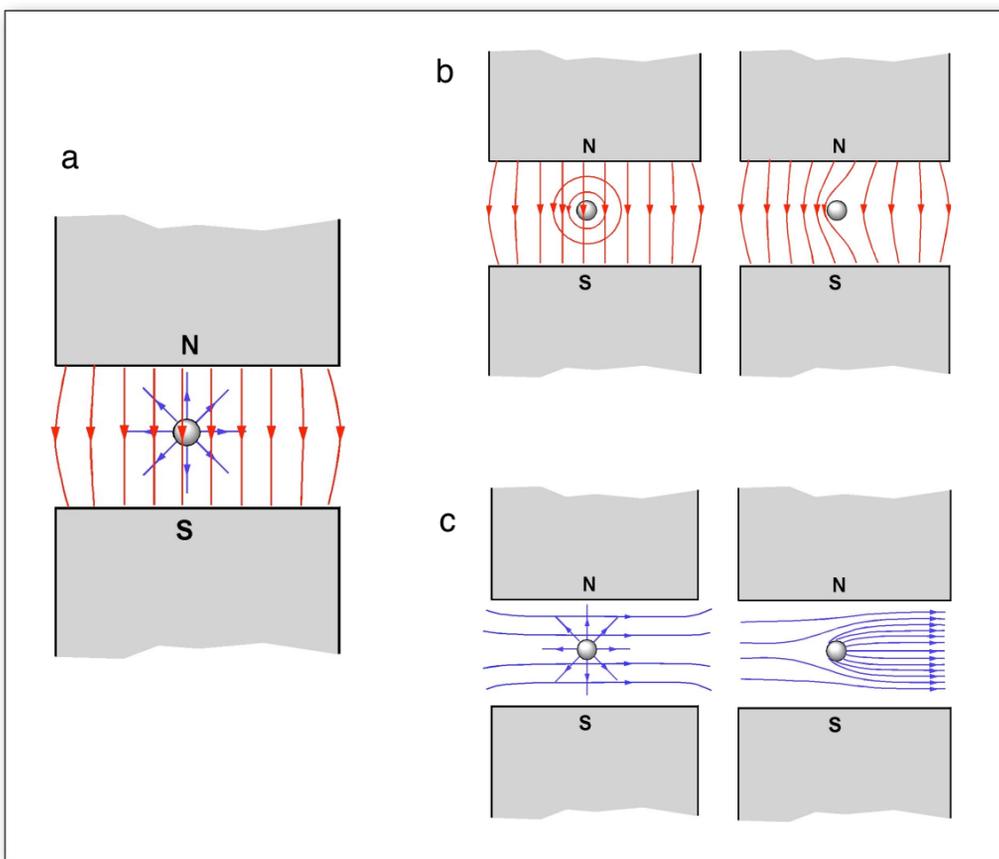


**Abb. 8.24**

In Bezugssystem  $S$  ist nur die magnetische, in Bezugssystem  $S'$  auch die elektrische Feldstärke von Null verschieden.

Wir sehen an diesen beiden Beispielen, dass  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  nicht nur durch irgendwelche physikalischen Gesetze miteinander verknüpft sind, etwa wie  $\mathbf{F}$  und  $Q$  im Coulombschen Gesetz.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  transformieren sich vielmehr ineinander bei Wechsel des Bezugssystems. Das elektrische und das magnetische Feld stellen nicht zwei verschiedene physikalische Systeme dar, sondern ein einziges: das *elektromagnetische Feld*. Der Zustand dieses Systems ist abhängig vom Bezugssystem.

3. Wir betrachten abschließend noch eine dritte Situation in zwei verschiedenen Bezugssystemen: Eine elektrisch positiv geladene Kugel befindet sich, zunächst in Ruhe, im homogenen magnetischen Feld zwischen den Polen eines Magneten, Abb. 8.25a. Die Kugel soll sich nun relativ zum Magneten und senkrecht zur Bildebene bewegen. Wir betrachten den Vorgang in zwei verschiedenen Bezugssystemen.



**Abb. 8.25**

(a) Eine geladene Kugel befindet sich in Ruhe zwischen den Polen eines Magneten.  
 (b) Der Magnet ruht; die Kugel bewegt sich in die Bildebene hinein.  
 (c) Die Kugel ruht; der Magnet bewegt sich aus der Bildebene heraus.

Einmal ruht der Magnet und die Kugel bewegt sich aus der Bildebene heraus. Der bewegten elektrischen Ladung entspricht ein Strom und zu diesem gehört ein magnetisches Feld. Das linke Teilbild von Abb. 8.25b zeigt die beiden, noch nicht zusammengefassten magnetischen Felder: das Feld des Magneten und das der bewegten Kugel. Im rechten Teilbild wurden die Feldstärken addiert. Das resultierende Feld ist links von der Kugel stärker als rechts. Da quer zu den Feldlinien eine Druckspannung herrscht, wird die Kugel *nach rechts gedrückt*. Wir haben zur Deutung des Experiments die *erste Maxwellsche Gleichung* gebraucht.

Wir gehen nun ins Bezugssystem der Kugel. Die Kugel ruht, und der Magnet bewegt sich in die Bildebene hinein. Dadurch wird ein elektrisches Feld induziert, das im Bereich zwischen den Polen nahezu homogen ist. Das linke Teilbild von Abb. 8.25c zeigt die beiden, noch nicht zusammengefassten elektrischen Felder: das Feld der geladenen Kugel und das durch die Bewegung des Magneten induzierte elektrische Feld. Im rechten Teilbild wurden die Feldstärken addiert. Das resultierende elektrische Feld ist rechts von der Kugel stärker als links. Da in Feldlinienrichtung eine Zugspannung herrscht, wird die Kugel *nach rechts gezogen*. Wir haben zur Deutung des Experiments die *zweite Maxwellsche Gleichung* gebraucht.

Dieselbe Erscheinung wird also, je nach Bezugssystem, einmal mit der ersten und einmal mit der zweiten Maxwellschen Gleichung erklärt. Deutet man ein solches Experiment mit Hilfe der ersten Maxwellschen Gleichung, so nennt man die auftretende Kraft *Lorentzkraft*.

### 8.8 Zusammenfassung der Gleichungen

Wir wollen die wichtigsten Gleichungen der Elektrodynamik noch einmal zusammenstellen. Dies sind an erster Stelle die 1. und die 2. Maxwellsche Gleichung. Hinzu kommen die Gleichungen (4.20) und (6.7), die als 3. bzw. 4. Maxwellsche Gleichung bezeichnet werden. Die vier Maxwellgleichungen regeln das Zusammenspiel von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Quellen.

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = \iint \mathbf{j} d\mathbf{A} + \iint \dot{\mathbf{D}} d\mathbf{A} \quad 1. \text{ Maxwellsche Gleichung}$$

$$-\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{A} \quad 2. \text{ Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = \iiint \rho dV \quad 3. \text{ Maxwellsche Gleichung}$$

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0 \quad 4. \text{ Maxwellsche Gleichung}$$

Wir haben hier die Maxwellschen Gleichungen „integral“ formuliert. Für die 3. und 4. Maxwellsche Gleichung hatten wir schon früher eine lokale oder „differentielle“ Formulierung angegeben, nämlich die Gleichungen (4.19) und (6.6). Man kann auch die 1. und 2. Maxwellsche Gleichung mit Hilfe des rot-Operators lokal formulieren. Die vier Maxwellgleichungen lauten in differentieller Schreibweise

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$$

$$-\text{rot } \mathbf{E} = \dot{\mathbf{B}}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

---

---

# 9

## **Kräfte auf Ströme und bewegte Ladung**

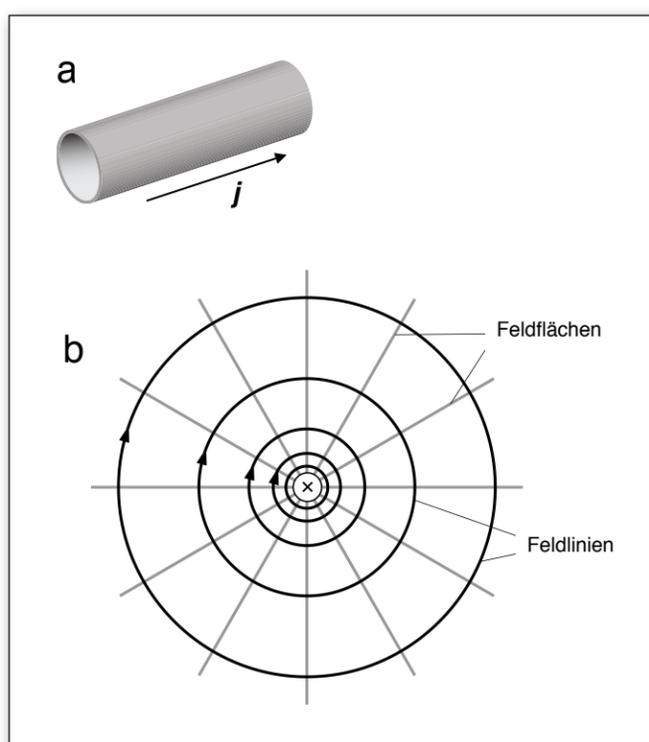
---

## 9.1 Der Druck des Magnetfeldes auf einen elektrischen Strom

Ein Feld drückt auf oder zieht an Materie immer dann, wenn das Feld „an der Materie hängt“, das heißt wenn die Quellen des Feldes auf der Materie sitzen. Wir hatten in den Kapiteln 4 und 6 die elektrische und magnetische Ladung als Quellen des elektrischen bzw. magnetischen Feldes kennengelernt und in den Kapiteln 5 und 7 gefunden, dass die Felder an elektrisch oder magnetisch geladener Materie stets ziehen.

Wir haben nun im vorigen Kapitel als weitere Feldquellen Ströme kennengelernt: den elektrischen Strom  $\mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$  und den magnetischen  $\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Felder müssen also auch auf Ströme oder auf Materie, durch die Elektrizität fließt, Kräfte ausüben. Von praktischer Bedeutung sind hier allerdings nur diejenigen Kräfte, die auf einen gewöhnlichen elektrischen Leitungsstrom ausgeübt werden. Wir beschränken uns daher auf die Diskussion dieses Falles.

Eine besonders einfache Situation liegt vor, wenn der elektrische Strom in einem zylindrischen Hohlleiter in Richtung der Zylinderachse fließt, Abb. 9.1a. Das Magnetfeld ist im Innern null. Außen ist es ungleich null. Die Feldlinien liegen parallel zur Zylinderoberfläche, die Feldflächen stehen senkrecht auf ihr, Abb. 9.1b. Wegen Gleichung (7.3) drückt das Feld auf den Leiter.

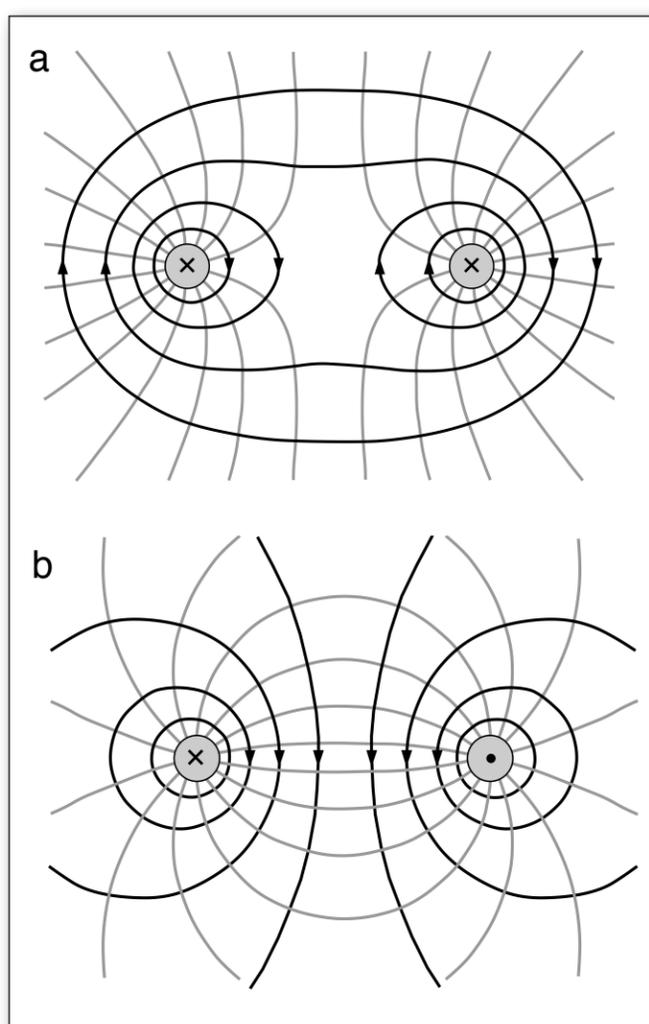


**Abb. 9.1**

(a) Von einem elektrischen Strom durchflossener Hohlzylinder.  
(b) Querschnitt mit Feldlinien und Feldflächen

Wir schließen, dass das Magnetfeld auf elektrische Ströme immer drückt.

Die beiden in Abb. 9.2a im Querschnitt gezeigten Drähte „ziehen sich an“. Wir können diese Tatsache jetzt erklären: Wir betrachten dazu den linken Draht. Das Magnetfeld drückt von allen Seiten auf den Draht. Aber links von ihm liegen die Feldlinien dichter als rechts. Daher resultiert eine Nettokraft nach rechts. Entsprechendes gilt für den rechten Draht. Auf gleiche Weise erklären wir, warum sich die Drähte von Abb.9.2b abstoßen. Wieder betrachten wir den linken Draht. Das Magnetfeld drückt auf ihn von allen Seiten, aber von rechts stärker als von links. Es resultiert also eine Nettokraft nach links.



**Abb. 9.2**

Die beiden Drähte werden vom Magnetfeld zueinander hingedrückt (a) bzw. voneinander weggedrückt (b).

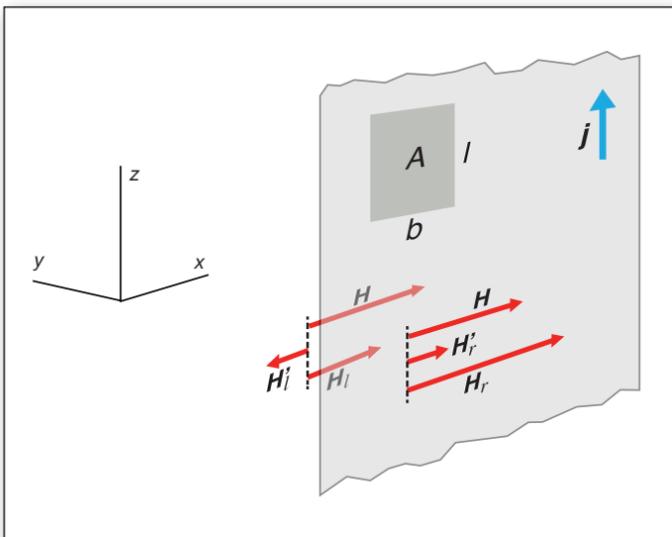
Wir können damit die folgenden Regeln formulieren.

Zwei Drähte, in denen ein elektrischer Strom in dieselbe Richtung fließt, werden vom Magnetfeld zueinander hingedrückt. Fließen die Ströme in entgegengesetzte Richtungen, so werden die Drähte vom Feld voneinander weggedrückt.

## 9.2 Die Lorentzkraft

Gleichung (7.3) ist zur Berechnung der Kraft auf einen Leiter nur dann geeignet, wenn die Feldverteilung geometrisch einfach ist, wie etwa im Fall von Abb. 9.1. In vielen anderen Fällen kommt man mit einer anderen Formel leichter zum Ziel. Wir wollen diese andere Formel herleiten.

Wir wählen zunächst noch einmal eine geometrisch sehr einfache Anordnung, Abb. 9.3: eine unendlich ausgedehnte, von einem elektrischen Strom mit homogener Stromdichteverteilung durchflossene Platte (Stromdichte in z-Richtung, Stromstärke durch Breite =  $I/b$ ).



**Abb. 9.3**  
Auf einen ebenen Leiter, durch den ein elektrischer Strom fließt, wirkt in einem äußeren Magnetfeld eine Kraft.

Wir bringen die Platte in ein Magnetfeld der Stärke  $H$ , dessen Richtung parallel zur Platte und senkrecht zur Stromrichtung ist. Die Suszeptibilität des Mediums, und damit  $\mu$ , sei auf beiden Seiten der Platte gleich. Bei dieser Konfiguration sind nur die x-Komponente von  $H$ , die y-Komponente der Kraft  $F$  und die z-Komponente der Stromdichte  $j$  von Null verschieden. Wir beschränken uns daher bei der Rechnung auf diese Komponenten und lassen die Indices x, y und z weg.

Wir berechnen die Kraft, die auf die Platte wirkt:

$$F = (\sigma_r - \sigma_l)A$$

(„l“ bedeutet links, „r“ rechts.)

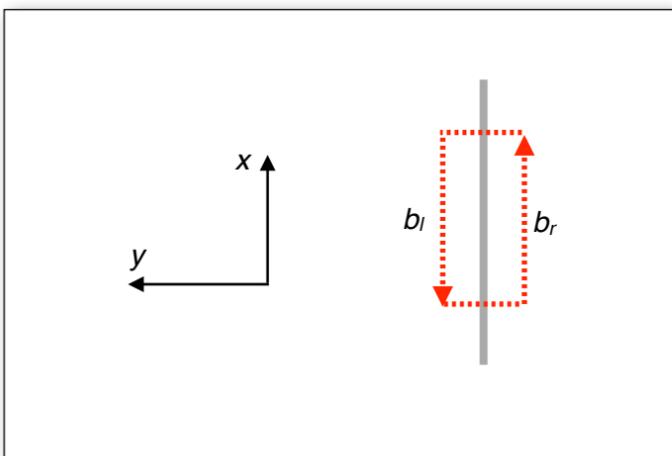
Zur Berechnung von  $\sigma = -(\mu\mu_0/2)H^2$  brauchen wir die links und rechts tatsächlich herrschende Feldstärke. Diese setzt sich zusammen aus der Feldstärke  $H$  des „äußeren“ Feldes und der Stärke  $H'$  des Feldes, dessen Quelle der elektrische Strom in der Platte ist.

Die von der Platte verursachte Feldstärke  $H'$  berechnen wir mit Hilfe der 1. Maxwellgleichung, Abb. 9.4:

$$H'_r b_r + H'_l b_l = (I/b) b$$

und mit  $b_r = b$  und  $b_l = -b$  wird  $H'_r - H'_l = I/b$ . Aus Symmetriegründen ist  $H'_r = -H'_l$ . Es ist also

$$H'_r = I/(2b) \text{ und } H'_l = -(I/2)b.$$



**Abb. 9.4**  
Zur Berechnung des Wegintegrals über die magnetische Feldstärke

Damit wird die Gesamtfeldstärke

links  $H_l = H - I/(2b)$  und rechts  $H_r = H + I/(2b)$ .

Hiermit erhält man die Differenz der mechanischen Spannungen

$$\sigma_r - \sigma_l = -\frac{\mu\mu_0}{2}(H_r^2 - H_l^2) = -\frac{\mu\mu_0}{2} \left[ 4 \frac{HI}{2b} \right] = -\frac{\mu\mu_0}{2} H \frac{I}{b}$$

und mit  $A = l \cdot b$

$$F = -(\sigma_r - \sigma_l)A = \mu\mu_0 l I H$$

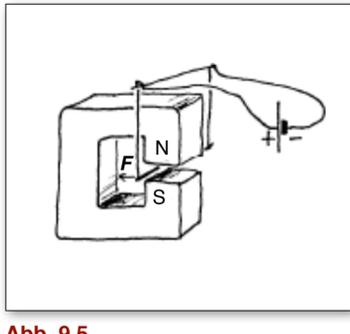
Diese Gleichung ist ein Spezialfall der vektoriellen Beziehung

$$\mathbf{F} = \mu\mu_0 l (\mathbf{l} \times \mathbf{H}) = l (\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (9.1)$$

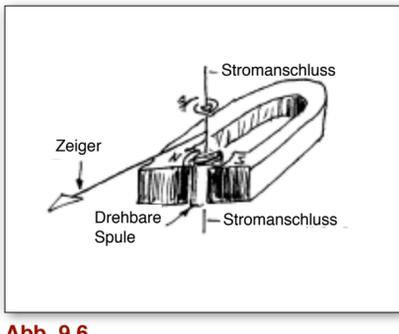
Der Vektor  $l$  hat dieselbe Richtung wie die elektrische Stromdichte. Gleichung (9.1) gilt nicht nur unter den der Rechnung zu Grunde liegenden einfachen Bedingungen. Sie beschreibt in jedem Fall die Kraft, die auf einen Leiter wirkt, in welchem ein elektrischer Strom fließt und der sich in einem Magnetfeld befindet. Die Feldstärke  $H$ , die in die Gleichung einzusetzen ist, ist die Feldstärke, die in Abwesenheit des Leiters vorhanden wäre. Man nennt die Kraft, die man mit Gleichung (9.1) berechnet, die *Lorentzkraft*.

### 9.3 Beispiele zur Lorentzkraft

Kraft auf einen Draht, in dem ein elektrischer Strom fließt (Abb. 9.5)



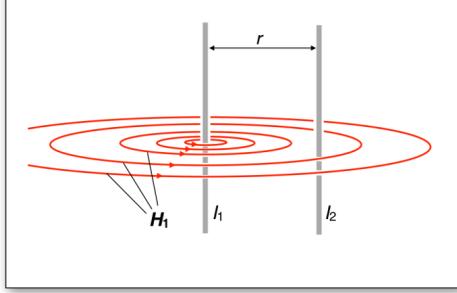
**Abb. 9.5**  
Das Magnetfeld drückt den Draht nach links.



**Abb. 9.6**  
Drehspulgalvanometer

Auf diesem Prinzip beruht das *Drehspulgalvanometer*, Abb. 9.6. Es befindet sich in fast allen analogen Strom-, Spannungs- und Widerstandsmessern.

Kraft zwischen parallelen Leitern, in denen elektrische Ströme fließen



**Abb. 9.7**  
Draht 2 im Feld von Draht 1

Wir betrachten Draht 2 im Feld von Draht 1, Abb. 9.7, und wenden Gleichung (9.1) an. In unserem Fall ist  $F = \mu_0 I_2 l H_1$ . Mit  $H_1 = I_1 / (2\pi r)$  wird

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 \cdot I_2}{2\pi r} \quad (9.2)$$

Ist die Richtung des elektrischen Stroms in den beiden Drähten dieselbe, so ziehen sich die Drähte an, andernfalls stoßen sie sich ab.

Kraft auf bewegte, elektrisch geladene Teilchen

Wir nehmen an, der elektrische Strom in einem Leiter komme zustande durch die Bewegung elektrischer Ladungsträger mit der einheitlichen Geschwindigkeit  $v$ :

$$I = \rho v A = \frac{Q}{V} v A = \frac{Q}{l} v$$

Damit wird die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{l} v (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

Da der Vektor  $v$  dieselbe Richtung hat wie  $l$ , kann man schreiben

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (9.3)$$

In dieser Gleichung steckt keine geometrische Größe des Leiters mehr. Sie gilt deshalb auch für einzelne Ladungspakete, und damit auch für Teilchen. Ist das Teilchen ein Elektron, so wird

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (9.4)$$

Elektronen im homogenen Magnetfeld

Ein Elektron bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einem Magnetfeld, das ohne die Gegenwart des Elektrons homogen wäre und die Stärke  $H$  hätte.  $v$  stehe senkrecht auf  $H$ . Auf das Elektron wirkt die Kraft  $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Das hat eine Impulsänderung zur Folge. Da  $F$  senkrecht auf  $v$  steht, ist

$$dp/dt = -m\omega^2 r.$$

$r$  ist der Krümmungsradius der kreisförmigen Bahn des Elektrons,  $\omega$  die zugehörige Kreisfrequenz.

Mit der Impulsbilanzgleichung

$$dp/dt = F$$

wird

$$-m\omega^2 r = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

oder

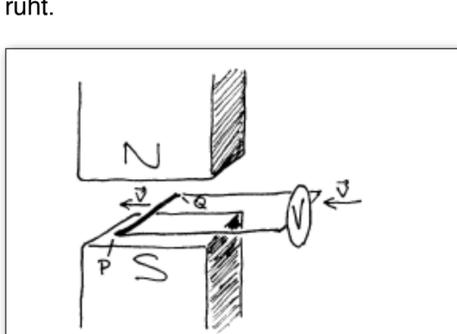
$$m\omega^2 r = evB$$

Mit  $v = \omega r$  erhalten wir schließlich die sogenannte Zyklotron-Frequenz:

$$\omega = \frac{e}{m} B$$

Erklärung von Induktionsvorgängen mit Hilfe der Lorentzkraft

Eine Leiterschleife wird in ein Magnetfeld hineinbewegt wie es Abb. 9.8 zeigt. Das Magnetfeld ist zeitlich konstant. Trotzdem tritt eine Induktionsspannung auf. Das erkennt man leicht, wenn man den Vorgang in dem Bezugssystem betrachtet, in dem die Leiterschleife ruht.



**Abb. 9.8**  
Im Bezugssystem des Dauermagneten kann die Induktion nicht mit der 2. Maxwell'schen Gleichung erklärt werden.

Stattdessen kann man den Vorgang aber auch in dem Bezugssystem, in dem der Magnet ruht, mit Hilfe der Lorentzkraft erklären: Wir betrachten den Teil PQ der Leiterschleife. Im Draht befinden sich bewegliche Ladungsträger. Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $v$  im Magnetfeld nach links. Daher wirkt die Lorentzkraft

$$\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

auf sie. Hierdurch werden die Ladungsträger solange verschoben, bis  $F_L$  durch  $F_{el} = QE$  kompensiert wird. Es entsteht also ein elektrisches Feld der Stärke:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$E$  liegt in Richtung des Leiters.

Der Halleffekt

Ein elektrischer Leiter, der sich in einem Magnetfeld befindet, werde von einem elektrischen Strom durchflossen, Abb. 9.9.



**Abb. 9.9**  
Zum Halleffekt

Bewegen sich die Ladungsträger mit der Geschwindigkeit  $v$ , so wirkt auf sie die Lorentzkraft  $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , quer zur Richtung des Leiters. Da in dieser Richtung kein elektrischer Strom fließen kann, häuft sich auf den Seiten des Leiters elektrische Ladung an, und zwar gerade so, dass  $F_L$  durch  $F_{el} = QE$  kompensiert wird. Die elektrische Spannung zwischen den beiden Seiten des Leiters, die so entsteht, heißt *Hall-Spannung*  $U_H$ . Es gilt:

$$Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = QE_H \Rightarrow \mathbf{E}_H = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{oder} \quad |\mathbf{E}_H| = v \cdot B.$$

Mit  $v = I / (\rho db)$  und  $U_H = |\mathbf{E}_H| b$  wird

$$U_H = v B b = \frac{1}{\rho} \frac{I B}{d}$$

Durch Messen von  $I$ ,  $B$ ,  $U_H$  und  $d$  kann man damit die Dichte der beweglichen Ladung bestimmen. Insbesondere erhält man so auch das Vorzeichen der beweglichen Ladung.

Kräfte auf induzierte Ströme

Bewegt man eine geschlossene Leiterschleife in ein Magnetfeld hinein, Abb. 9.10, so wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Auf den Draht, in dem jetzt ein elektrischer Strom fließt, wirkt im Magnetfeld die Lorentzkraft. Sie ist so gerichtet, dass sie die Bewegung der Leiterschleife „zu hindern versucht“.



**Abb. 9.0**  
Lorentzkraft auf induzierten Strom (a) in Leiterschleife und (b) in Metallplatte

Auch wenn man eine volle Metallplatte in das Magnetfeld hineinbewegt, wird ein elektrischer Strom induziert. Da diesem Weg durch die Geometrie des Leiters nicht vorgeschrieben ist, nennt man ihn Wirbelstrom. Sonst gilt aber dasselbe wie für die Leiterschleife: Auf die Metallplatte wirkt eine Lorentzkraft, die die Bewegung zu hindern versucht.

---

# 10

**Supraleiter**

---

## 10.1 Die supraleitende Phase

Es gibt Stoffe, die sich in ihren elektromagnetischen Eigenschaften von den bisher betrachteten deutlich unterscheiden: die Supraleiter. Es gibt zahlreiche Varianten der Supraleitung. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung eines einfachen Idealfalls, der realisiert ist durch die sogenannten *Supraleiter erster Art*.

Die Supraleitung ist ein Zustand, der dem betrachteten Stoff nicht unabänderlich anhängt, sondern in dem sich der Stoff nur unter bestimmten Bedingungen befindet, ähnlich wie der ferromagnetische Zustand, oder der feste, flüssige oder gasige Zustand. Insbesondere darf die Temperatur einen bestimmten Wert nicht überschreiten; sonst verliert der Stoff seine supraleitende Eigenschaft. Genauso, wie ein Stoff nur fest ist, wenn die Temperatur nicht höher als die Schmelztemperatur ist, oder ferromagnetisch, solange die Temperatur die Curietemperatur nicht überschreitet, so ist ein Material auch nur supraleitend, wenn seine Temperatur nicht höher ist als die sogenannte *Sprungtemperatur*. Am Phänomen der Supraleitung nehmen nicht alle Elektronen teil, die im Normalzustand für die elektrische Leitung verantwortlich sind, sondern im Allgemeinen nur ein Teil von ihnen.

Es gibt sehr viele Stoffe, die eine supraleitende Phase haben. In Tabelle 10.1 sind die Sprungtemperaturen für einige chemische Grundstoffe aufgeführt. Es gibt Legierungen und chemische Verbindungen mit viel höheren Sprungtemperaturen.

Stoff	Sprungtemperatur (K)
Hg	4,15
La	4,8
Nb	9,2
Ta	4,39
Tc	7,8
V	5,3

**Tabelle 10.1**

Sprungtemperaturen einiger chemischer Grundstoffe

Hier die Eigenschaften der Supraleiter:

(1) Ihr elektrischer Widerstand ist Null. Statt der Gleichung

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

gilt die 1. Londonsche Gleichung:

$$\Lambda \cdot \frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \mathbf{E}$$

$\mathbf{j}_s$  ist die elektrische Stromdichte der supraleitenden Ladungsträger,  $\Lambda$  eine Materialkonstante. Die Gleichung sagt, dass ein elektrisches Feld zeitlich konstanter Stärke nicht einen Strom konstanter Stärke zur Folge hat, sondern einen Strom, dessen Stärke gleichmäßig zunimmt, einen „gleichmäßig beschleunigten Strom“ sozusagen.

(2) Supraleiter verdrängen aus ihrem Innern magnetische Felder. Diese Eigenschaft nennt man *Meißner-Ochsenfeld-Effekt*. Die Feldverdrängung bewerkstelligt der Supraleiter dadurch, dass an seiner Oberfläche elektrische Ströme fließen. Das magnetische Feld dieser Ströme ist gerade so, dass es das Feld im Innern des Supraleiters zu Null kompensiert. Genauso wie ein elektrisches Feld in einen Körper mit freien Ladungsträgern bis zu einer gewissen Tiefe eindringt, falls die Ladungsträgerkonzentration nicht sehr groß ist, so dringt auch das magnetische Feld in eine dünne Oberflächenschicht eines Supraleiters ein. Die Dicke dieser Schicht lässt sich berechnen mit Hilfe der 2. Londonschen Gleichung

$$\Lambda \operatorname{rot} \mathbf{j}_s = -\mathbf{B}$$

Da  $\Lambda$  von der Konzentration der supraleitenden Ladungsträger abhängt, hängt auch die Dicke dieser Schicht davon ab.

## 10.2 Idealtypen magnetischer Materialien

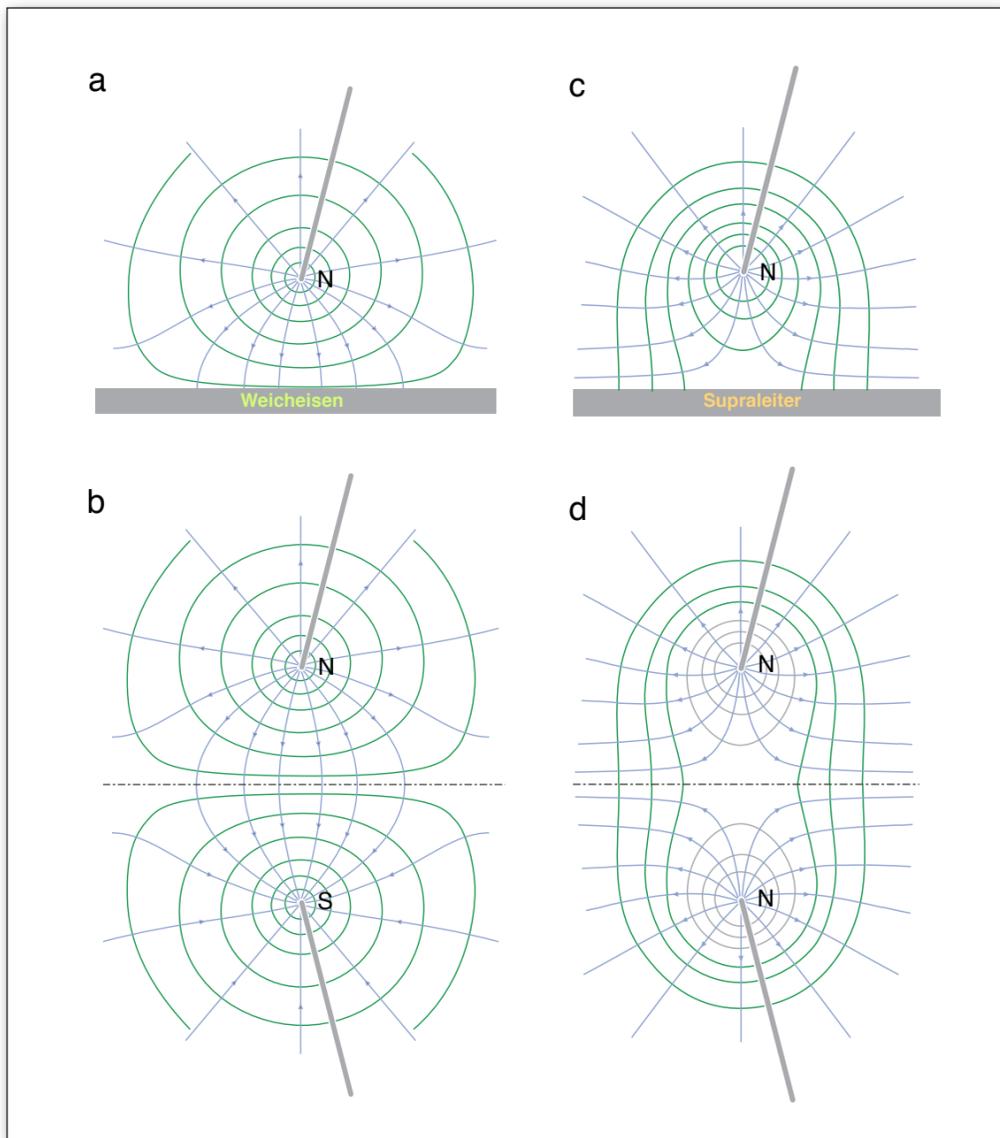
Wir hatten früher zwei Idealformen des Magnetismus kennengelernt: den Magnetismus ideal weichmagnetischer Stoffe und den ideal hartmagnetischer Stoffe. Mit den Supraleitern haben wir einen dritten magnetischen Idealstoff kennengelernt. Wir wollen die drei Stoffe miteinander vergleichen.

Alle drei verlieren ihren Magnetismus bei hinreichend großen Temperaturen.

Den weichmagnetischen Stoff kann man auffassen als Idealform des paramagnetischen Stoffs, den Supraleiter als Idealform des diamagnetischen Stoffs.

Weichmagnetische und supraleitende Stoffe haben gemeinsam, dass sie ein magnetisches Feld in ihrem Innern nicht zulassen. Sie verhindern aber das Eindringen von Magnetfeldern auf verschiedene Art.

Der Weichmagnet kompensiert ein Feld, das eigentlich in seinem Innern sein möchte, dadurch, dass er an seiner Oberfläche Pole bildet. Der Supraleiter erreicht dasselbe Resultat, indem er an seiner Oberfläche Ströme fließen lässt. Die Folge für die Feldstärkeverteilung an der Außenseite ist in den beiden Fällen sehr verschieden.



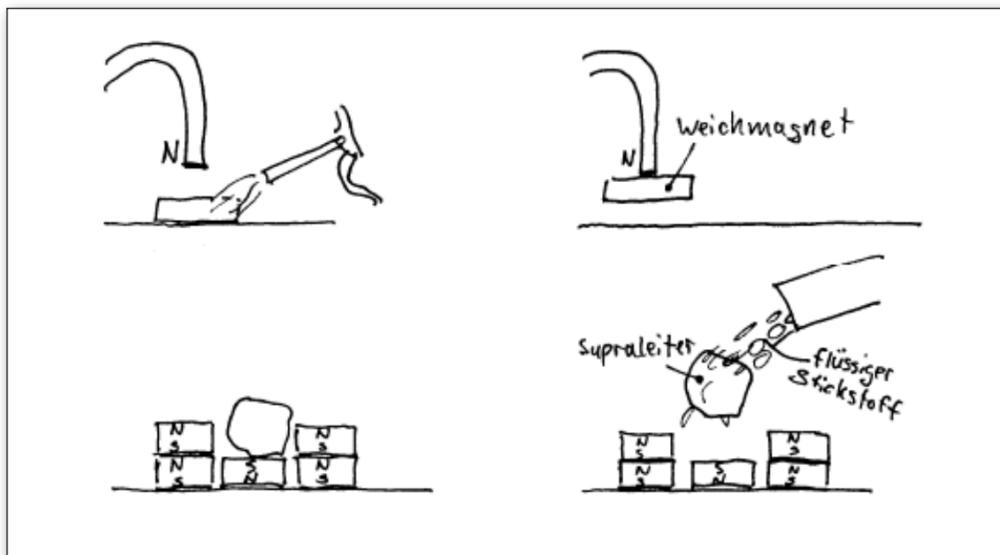
**Abb. 10.1**

Ein einzelner Magnetpol befindet sich vor der ebenen Oberfläche eines Weicheisenkörpers (a). Die Feldstärkeverteilung bleibt dieselbe, wenn man das Weicheisen durch einen Spiegelpol entgegengesetzten Vorzeichens ersetzt (b). Ein einzelner Magnetpol befindet sich vor der ebenen Oberfläche eines Supraleiters (c). Die Feldstärkeverteilung bleibt dieselbe, wenn man den Supraleiter durch einen Spiegelpol desselben Vorzeichens ersetzt (d).

Abb. 10.1a zeigt die Feldstärkeverteilung, die entsteht, wenn man einen einzelnen Magnetpol der ebenen Oberfläche eines Weicheisenkörpers nähert. Man erhält außerhalb des Weicheisens dieselbe Feldstärkeverteilung, wie wenn man das Weicheisen durch eine magnetische „Spiegelladung“ ersetzt, eine Ladung desselben Betrages wie die erste Punktladung, aber des entgegengesetzten Vorzeichens, Abb. 10.1b.

Abb. 10.1c zeigt den Magnetpol vor der ebenen Oberfläche eines Supraleiters. Die Ströme an der Oberfläche bewirken ein Abbiegen der magnetischen Feldlinien, so dass sie tangential zur Oberfläche verlaufen. Man erhält dieselbe Feldstärkeverteilung, wenn man den Supraleiter ersetzt durch einen Spiegelpol desselben Betrages und desselben Vorzeichens, Abb. 10.1d.

Abb. 10.2 zeigt zwei zueinander analoge Versuche. Das Weicheisenstück in Abb. 10.2a hat eine Temperatur, die über seiner Curietemperatur liegt. Es ist also (fast) unmagnetisch. Man lässt nun die Temperatur abnehmen. Sobald sie die Curietemperatur unterschreitet, wird das Weicheisenstück vom Dauermagneten angezogen, Abb. 10.2b.



**Abb. 10.2**

Die Temperatur des Weicheisenstücks liegt über der Curietemperatur (a). Die Temperatur des Weicheisenstücks wurde unter die Curietemperatur abgesenkt (b). Die Temperatur des Supraleiters liegt über der Übergangstemperatur (c). Die Temperatur des Supraleiters wurde unter die Übergangstemperatur abgesenkt (d).

Die Temperatur des „Supraleiters“ in Abb. 10.2c ist höher als die Übergangstemperatur. Das Material ist also noch nicht supraleitend. Seine Temperatur wird nun abgesenkt. Sobald sie die Übergangstemperatur unterschreitet, springt der Supraleiter in die Höhe und bleibt über den Dauermagneten in der Schwebe.

---

# 11

## **Energiestrom und Impuls im elektromagnetischen Feld**



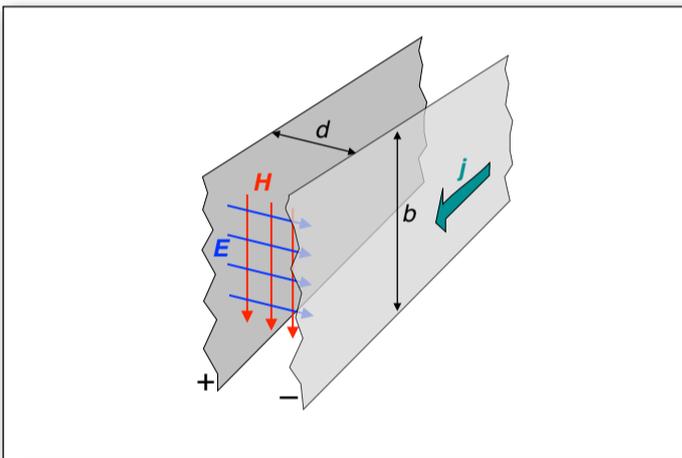
## 11.1 Die Energiestromdichte

Wird ein Kondensator geladen, so fließt Energie in den Raum zwischen den Platten. Wird ein Elektromagnet eingeschaltet, so fließt Energie in den Raum zwischen den Polen. Während ein Elektromotor läuft, fließt Energie in den Rotor hinein, um durch die Motorwelle wegzufließen. Beim Generator ist es umgekehrt. In allen diesen Fällen fließt Energie im materiefreien Raum: im elektromagnetischen Feld. Ist das Feld durch  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  (und  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$ ) eindeutig beschrieben, so muss sich auch der Energiestrom aus diesen Größen berechnen lassen. Da  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  lokale Größen sind, muss sich aus ihnen die lokale Größe Energiestromdichte  $\mathbf{j}_E$  berechnen lassen.

Wir gehen aus von der bekannten Gleichung für die Energiestromstärke

$$P = U \cdot I.$$

Sie ist gültig für den Fall, dass der Energiestrom von einem Ladungsstrom begleitet ist. Diese Gleichung kann prinzipiell keine Aussage über den Ort machen, an dem die Energie fließt, denn sie enthält nur „integrale“ Größen. Um diese durch lokale Größen zu ersetzen, betrachten wir eine geometrisch besonders einfache Anordnung: Der elektrische Strom fließt durch zwei ebene, parallele Leiter, deren Abstand klein ist gegen die seitliche Ausdehnung, Abb. 11.1.



**Abb. 11.1**

Zur Berechnung der Energiestromdichte

Den Zusammenhang zwischen elektrischer Spannung und elektrischer Feldstärke erhält man durch Anwendung von Gleichung (4.5):

$$U = |\mathbf{E}| \cdot d$$

und den zwischen elektrischer Stromstärke und magnetischer Feldstärke durch Anwendung von Gleichung (8.1):

$$I = |\mathbf{H}| \cdot b \quad (11.1)$$

Damit wird:

$$P = |\mathbf{E}| \cdot d \cdot |\mathbf{H}| \cdot b$$

und mit  $|j_E| = P/(db)$

$$|j_E| = |\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{H}|.$$

Die Energie fließt senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und zu  $\mathbf{H}$ , also in der Abbildung nach hinten. Es ist in unserem Fall

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (11.2)$$

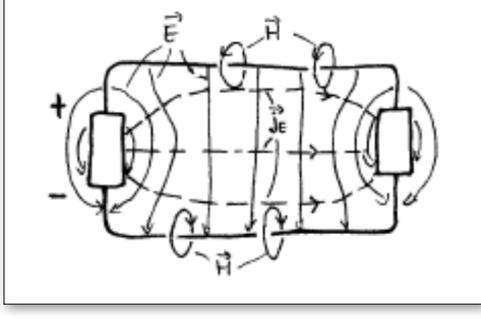
Diese Gleichung gilt für jedes elektromagnetische Feld, also nicht nur unter den einfachen Voraussetzungen unserer Rechnung. Die Größe  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  nennt man auch den *Poyntingvektor*.

Gleichung (11.2) enthält nur lokale Größen. Sie macht nicht nur eine Aussage darüber, ob und wie viel Energie fließt, sie sagt auch, wo sie fließt.  $\mathbf{j}_E(\mathbf{r})$  ist ein Vektorfeld. Die Stromlinien dieses Feldes veranschaulichen die Energieströmung genauso, wie die  $\mathbf{j}_Q$ -Stromlinien die Ladungsströmung veranschaulichen.

## 11.2 Beispiele für Energieströme

### Energieübertragung mit Kabeln

Eine galvanische Zelle sei über zwei ideal leitende Drähte mit einem Widerstand verbunden. Ausgangsstation der Energie ist also die Zelle, Endstation der Widerstand. Wir beschreiben qualitativ den Weg der Energie zwischen diesen beiden Stationen. In Abbildung 11.2 sind  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{H}$ -Feld angedeutet. Die  $\mathbf{j}_E$ -Linien verlaufen senkrecht zu  $\mathbf{E}$  und senkrecht zu  $\mathbf{H}$ . Drei  $\mathbf{j}_E$ -Linien sind eingezeichnet. Man sieht, dass ihre Quellen in der Zelle liegen und ihre Senken im Widerstand.

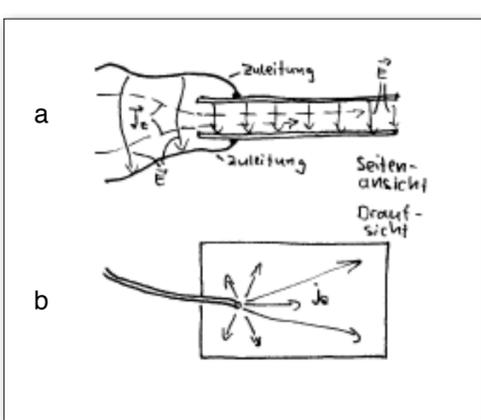


**Abb. 11.2**  
Elektrische Feldstärke, magnetische Feldstärke und Energiestromdichte in einem einfachen Stromkreis: links die galvanische Zelle, rechts ein Ohmscher Widerstand

Im Widerstand wird die ankommende Energie dissipiert, d.h. es wird Entropie erzeugt. Wenn die Zuleitungen nicht den Widerstand Null haben, hat die elektrische Feldstärke eine Komponente in Drahrichtung und einige  $\mathbf{j}_E$ -Linien münden in die Zuleitungsdrähte ein.

### Die Energieströmung beim Laden eines Kondensators

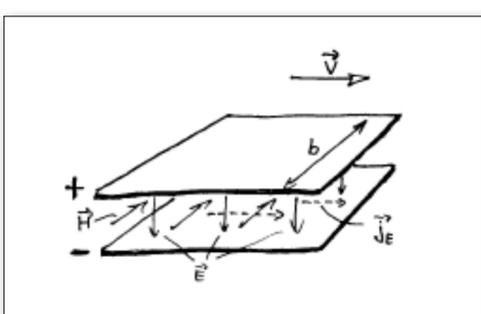
Die elektrische Stromdichte nimmt von der Stelle, an der die Zuleitungen der Kondensatorplatten befestigt sind, ausgehend ab, und zwar so, dass sie an den Rändern der Platte Null ist, Abb. 11.3. Das Magnetfeld nimmt also auch zu den Rändern hin ab, und damit auch die Energiestromdichte  $\mathbf{j}_E$ . Die Energiestromdichte hat also zwischen den Kondensatorplatten Senken. Das muss so sein, denn hier wird ja die Energie deponiert.



**Abb. 11.3**  
(a) Elektrische Feldstärke und Energiestromdichte;  
(b) Ladungsstromdichte

### Der bewegte Kondensator

Ein Kondensator mit der Ladung pro Fläche  $Q/A = \rho_A$  werde parallel zu seinen Plattenebenen mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, Abb. 11.4. Gesucht ist das  $\mathbf{j}_E$ -Feld. Dazu müssen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  berechnet werden.



**Abb. 11.4**  
Ein Kondensator wird zusammen mit seiner Energie parallel zur Plattenrichtung bewegt.

Überall zwischen den Platten ist nach Gleichung (4.9)

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho_A}{\epsilon_0}$$

und nach Gleichung (11.1)

$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{b}$$

Wir berechnen zunächst noch  $I$  als Funktion der bekannten Größen.  $\rho_A$  ist die Ladung pro Fläche,  $\rho_{Ab}$  demzufolge die Ladung pro Länge (in Bewegungsrichtung). Die Stromstärke ist Ladung pro Länge mal Geschwindigkeit:

$$I = \rho_{Ab} v$$

Damit wird

$$|\mathbf{H}| = \rho_A v$$

und mit (11.2) schließlich

$$|\mathbf{j}_E| = \frac{\rho_A^2}{\epsilon_0} |\mathbf{v}|$$

Drückt man die Flächenladung durch die elektrische Feldstärke aus, so erhält man

$$|\mathbf{j}_E| = \epsilon_0 \mathbf{E}^2 |\mathbf{v}|$$

Dieses Ergebnis ist erstaunlich, denn nimmt man an, dass die Feldenergie des Kondensators einfach mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  verschoben wird, so erhält man für die Energiestromdichte gerade den halben Wert, nämlich

$$\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 |\mathbf{v}|$$

Was geschieht mit der anderen Hälfte? Sie fließt mechanisch durch die Platten zurück. Die Platten stehen unter Zugspannung und bewegen sich. Also fließt in ihnen ein Energiestrom, der sich nach

$$P = v F$$

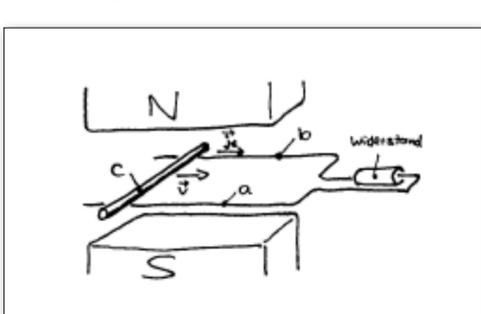
berechnen lässt.

### Die Energieströmung in Motor und Generator

Die Beschreibung ist je nach Bezugssystem anders. Wir wählen für die Beschreibung das Bezugssystem, in dem der Magnet ruht und sich der Leiter bewegt.

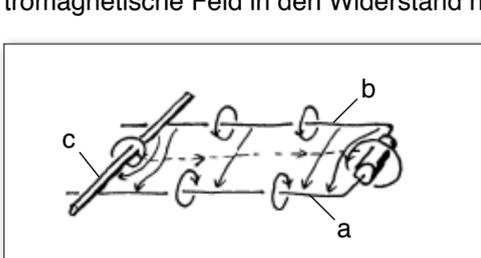
#### (a) Generator

Der stabförmige Leiter  $c$ , Abb. 11.5, wird nach rechts bewegt, so dass er auf den beiden Leitern  $a$  und  $b$  gleitet. Der Stromkreis sei zunächst offen. Auf die freien Ladungsträger in  $c$ , die wir uns positiv geladen denken, wirkt die Lorentz-Kraft und verschiebt sie in die Richtung von Leiter  $b$ , so dass das elektrische Potential von  $b$  gegen das von Leiter  $a$  ansteigt. Zwischen  $a$  und  $b$  befindet sich ein elektrisches Feld. Die Feldlinien laufen von  $b$  nach  $a$ . Wir schalten nun einen Energieempfänger ein. Ist dessen Widerstand groß gegen den restlichen Widerstand des Stromkreises, so bleibt die Spannung zwischen  $a$  und  $b$  unverändert. Durch  $c$  fließt nun ein elektrischer Strom gegen das elektrische Feld.



**Abb. 11.5**  
Leiter  $c$  wird nach rechts bewegt; er gleitet dabei auf den Leitern  $a$  und  $b$ .

Abbildung 11.6 zeigt qualitativ das  $\mathbf{E}$ -, das  $\mathbf{H}$ - und das  $\mathbf{j}_E$ -Feld. Die Energie fließt aus dem bewegten Stab heraus und durch das elektromagnetische Feld in den Widerstand hinein.

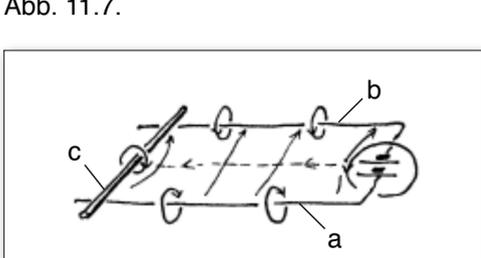


**Abb. 11.6**  
 $\mathbf{E}$ -,  $\mathbf{H}$ - und  $\mathbf{j}_E$ -Feld beim Generator

#### (b) Motor

Wir ersetzen den Widerstand durch eine elektrische Energiequelle. Die Quelle sei stromstabilisiert. Der Strom fließe zuerst durch  $a$ , dann durch  $c$  und durch  $b$  zurück zur Quelle. Auf die beweglichen Ladungsträger in Leiter  $c$  wirkt eine Lorentzkraft, deren Richtung parallel zu den Leitern  $a$  und  $b$  ist. Dadurch beginnt Leiter  $c$ , sich nach links zu bewegen. Bewegt sich  $c$ , so wirkt auf die Ladungsträger in  $c$  noch eine Lorentzkraft, die parallel zu  $c$  nach  $a$  gerichtet ist. Diese führt dazu, dass ein elektrisches Feld entsteht, dessen Feldlinien von  $a$  nach  $b$  laufen.

Die resultierenden  $\mathbf{j}_E$ -Feldlinien laufen von der Quelle zum Leiter  $c$ , Abb. 11.7.

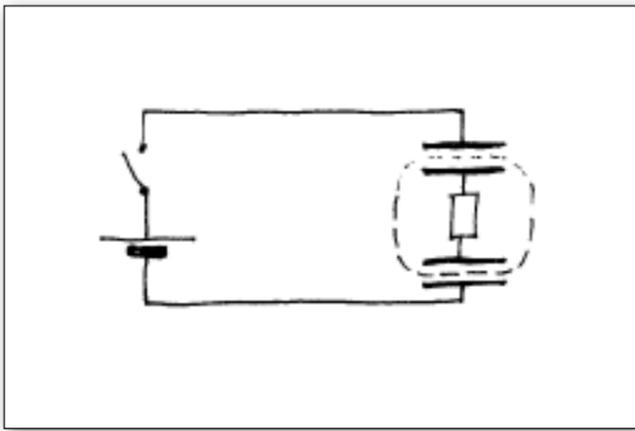


**Abb. 11.7**  
 $\mathbf{E}$ -,  $\mathbf{H}$ - und  $\mathbf{j}_E$ -Feld beim Motor

### 11.3 Energieübertragung mit magnetischen Verschiebungsströmen

In der Gleichung  $P = U \cdot I$  müsste statt  $I$  eigentlich der gesamte elektrische Strom im Maxwellschen Sinn, nämlich  $I + \iint (\partial \mathbf{D} / \partial t) d\mathbf{A}$ , stehen. Das erkennt man an Hand von Abb. 11.8. Der Energiestrom, der in den gestrichelt umrandeten Bereich hineinfließt, soll berechnet werden. Wir betrachten den Zeitpunkt kurz nach dem Einschalten, zu dem die Kondensatoren noch nicht geladen sind. Die gesamte Spannung der Quelle liegt dann noch am Widerstand, und damit fließt der gesamte Energiestrom, der von der Quelle kommt, zum Widerstand. Man erhält seinen Wert mit

$$P = U \cdot \iint \dot{\mathbf{D}} d\mathbf{A}$$

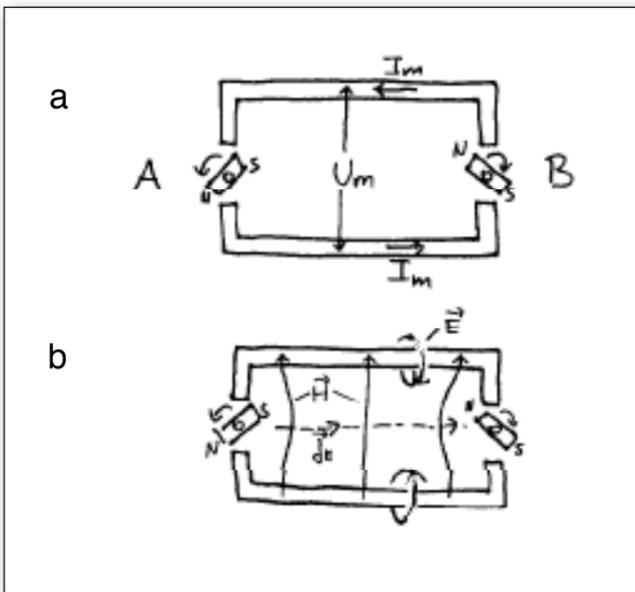


**Abb. 11.8**  
Zur Verallgemeinerung der Gleichung  $P = U \cdot I$

Man kann Energie auch mit Hilfe *magnetischer* Verschiebungsströme übertragen, und es gilt die analoge Gleichung:

$$P = U_m \cdot \iint \dot{\mathbf{B}} d\mathbf{A}$$

Abbildung 11.9a zeigt ein Beispiel. Ein Permanentmagnet bei A beeinflusst in einem magnetischen Leiter (Weicheisen) magnetische Ladungen. Dreht man den Permanentmagneten, so fließt im Weicheisen ein magnetischer Wechsel(verschiebungs-)strom. Dieser führt dazu, dass der magnetische Kondensator bei B mit wechselndem Vorzeichen geladen wird. Der Permanentmagnet bei B wird dadurch in Drehung versetzt.



**Abb. 11.9**  
Energieübertragung mit magnetischen Verschiebungsströmen.  
(a) Magnetische Spannung und magnetische Stromstärke;  
(b)  $\mathbf{E}$ -,  $\mathbf{H}$ - und  $\mathbf{j}_E$ -Feld

Die Stärke des Energiestroms, der mit Hilfe der Weicheisenleitungen übertragen wird, ist durch die oben stehende Gleichung gegeben. Jede der beiden magnetischen Leitungen befindet sich auf räumlich nahezu konstantem magnetischem Potential.  $U_m$  ist die Potentialdifferenz zwischen den Leitungen. Da

$$\mu_0 \partial \mathbf{H} / \partial t \ll \partial \mathbf{M} / \partial t$$

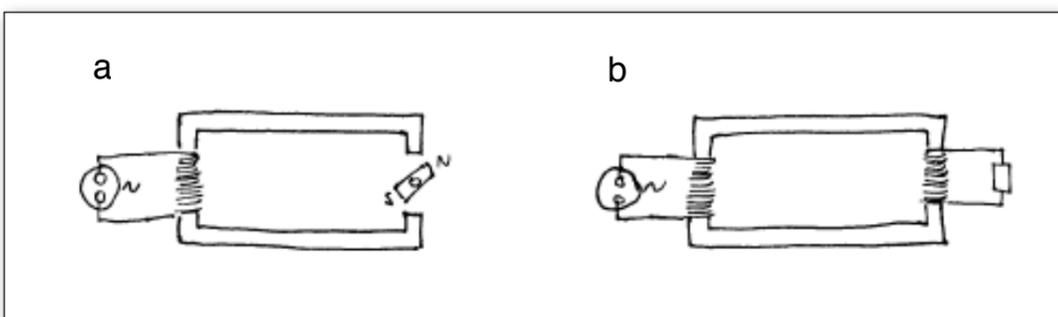
ist, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$P = U_m \cdot \iint \dot{\mathbf{M}} d\mathbf{A}$$

Das Flächenintegral erstreckt sich über eine einzige der beiden Leitungen.

Auch diese Gleichung macht keine Aussage über den Weg, den der Energiestrom nimmt. Dieser Weg ist wieder durch  $\mathbf{j}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  gegeben. Um jede der beiden Leitungen befinden sich nach der zweiten Maxwellschen Gleichung geschlossene elektrische Feldlinien. Vom einen zum anderen Leiter laufen magnetische Feldlinien. Die  $\mathbf{j}_E$ -Linien laufen von A nach B, Abb. 11.9b.

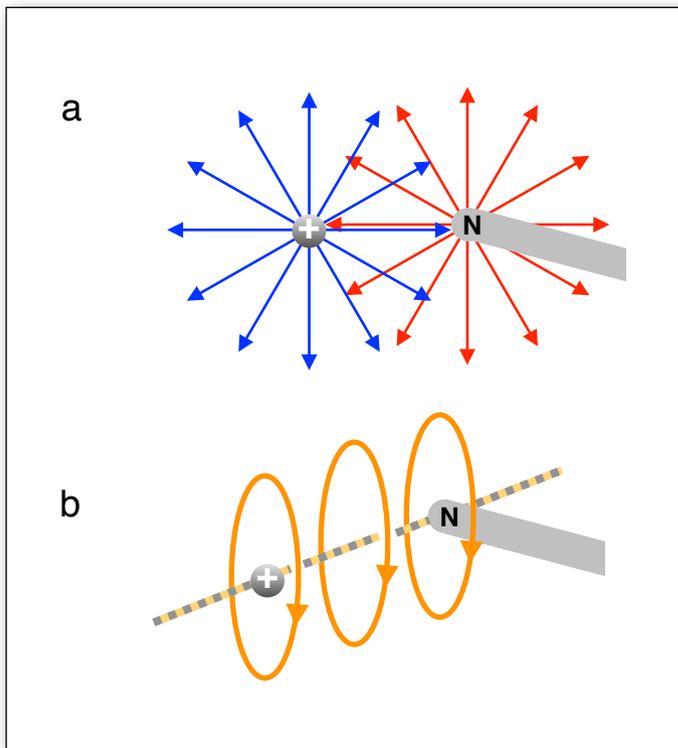
Ersetzt man einen der beiden Magneten durch eine Spule, durch die ein Wechselstrom fließt, Abb. 11.10a, so erhält man einen Elektromotor. Ersetzt man beide Magneten durch Spulen, Abb. 11.10b, so erhält man einen Transformator. In jedem Fall wird die Energie von links nach rechts mit Hilfe magnetischer Verschiebungsströme übertragen, und die  $\mathbf{j}_E$ -Stromlinien verlaufen im Wesentlichen außerhalb der magnetischen Leitungen.



**Abb. 11.10**  
Energieübertragung mit magnetischen Leitern; (a) Elektromotor; (b) Transformator

### 11.4 Geschlossene Energiestromkreise im elektromagnetischen Feld

Eine positive elektrische und eine positive magnetische „Punktladung“ befinden sich nebeneinander, und zwar in Ruhe, Abb. 11.11. Überall in der Umgebung der beiden Ladungen ist  $\mathbf{E} \neq 0$  und  $\mathbf{H} \neq 0$ , und  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  sind, von der Verbindungslinie der beiden Ladungen abgesehen, nirgends parallel zueinander. Es ist also überall  $\mathbf{j}_E \neq 0$ . Die  $\mathbf{j}_E$ -Feldlinien bilden konzentrische Kreise um die Verbindungslinie der beiden Ladungen herum. Das  $\mathbf{j}_E$ -Feld hat also keine Quellen oder Senken. Das muss auch so sein, denn es gibt kein anderes System, dessen Energie ab- oder zunimmt.



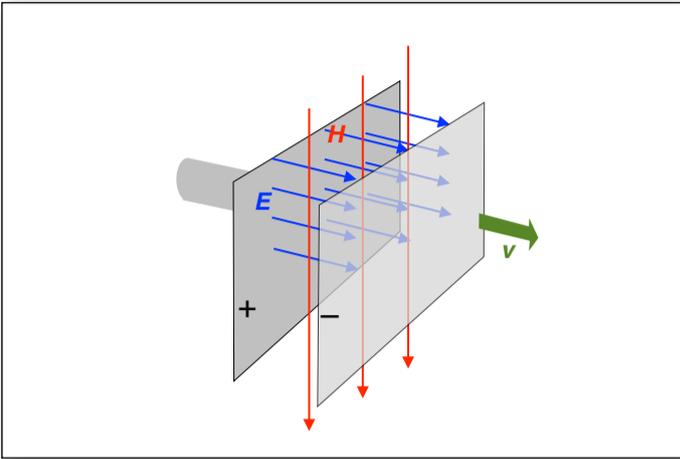
**Abb. 11.11**

Elektrische und magnetische Punktladung.

- (a)  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{H}$ -Feld in Seitenansicht;
- (b)  $\mathbf{j}_E$ -Feld perspektivisch

## 11.5 Der Impuls des elektromagnetischen Feldes

Ein geladener Kondensator befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, Abb. 11.12. Die linke Platte wird festgehalten, die rechte mit konstanter Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nach rechts bewegt. Während der Bewegung muss man auf die rechte Platte eine Kraft ausüben, die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt.



**Abb. 11.12**

Während die rechte Platte nach rechts bewegt wird, nimmt das Volumen und der Impuls des elektromagnetischen Feldes zwischen den Platten zu.

Die eine Komponente liegt parallel zu den Feldstärkevektoren des elektrischen Feldes. Sie wird kompensiert durch die elektrostatische Kraft, die die linke auf die rechte Platte ausübt. Die zweite Komponente liegt parallel zur Plattenfläche und weist in der Abbildung nach hinten. Sie hält der Lorentzkraft das Gleichgewicht. In der Tat wirkt ja auf die Platte eine Lorentzkraft, denn es wird ein elektrisch geladener Körper durch ein Magnetfeld bewegt. Hier gibt es nun aber keinen anderen Körper, auf den diese Kraft ausgeübt wird. Es ist vielmehr das bei der Bewegung neu entstehende Feld, das den entsprechenden Impuls aufnimmt. Wir schließen also, dass das elektromagnetische Feld zwischen den Platten Impuls hat. Da sein Volumen während der Bewegung linear mit der Zeit zunimmt, nimmt auch sein Impuls linear mit der Zeit zu. Wir wollen diesen Impuls berechnen.

Da die relevanten Vektoren alle parallel oder senkrecht zueinander liegen, genügt es, mit den Beträgen zu rechnen.

Die Impulszunahme des Feldes in der Zeit  $\Delta t$  ist

$$\Delta p = F \Delta t$$

Mit der Gleichung für die Lorentzkraft

$$F = Q \cdot v \cdot B$$

und

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

wird

$$p = Q \cdot B \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t = Q \cdot B \cdot \Delta s$$

Wir ersetzen

$$Q = \varepsilon_0 E A$$

und

$$B = \mu_0 H$$

und erhalten

$$p = \varepsilon_0 E A \cdot \mu_0 H \cdot \Delta s = \varepsilon_0 E \cdot \mu_0 H \cdot \Delta V.$$

Hier ist

$$\Delta V = A \cdot \Delta s$$

die Volumenzunahme des Feldes. Die Impulsdichte ergibt sich damit zu

$$\rho_p = \varepsilon_0 \mu_0 E H.$$

Allgemein steht für Vektoren beliebiger Orientierung das Kreuzprodukt der beiden Feldstärken:

$$\rho_p = \varepsilon_0 \mu_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (11.3)$$

Die Impulsdichte ist also, bis auf einen konstanten Faktor, gleich der Energiestromdichte.

### 11.6 Zusammenfassung

Wir haben jetzt Ausdrücke für die Dichten und Stromdichten sowohl der Energie als auch des Impulses des elektromagnetischen Feldes. Energiedichte und Energiestromdichte sind durch die Gleichungen (5.1), (7.1) und (11.2) gegeben. Die Impulsstromdichte ist identisch mit der mechanischen Spannung. Sie wird durch die Gleichungen (5.2), (5.4), (7.2) und (7.3) beschrieben. Die Impulsdichte schließlich berechnet sich nach Gl. (11.3). Wir fassen die Gleichungen noch einmal zusammen.

Wir haben damit alle Komponenten des so genannten *Energie-Impuls-Tensors* des elektromagnetischen Feldes, der in der Relativitätstheorie eine große Rolle spielt.

$\rho_E = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$	$\rho_E = \frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2$	Energiedichte
$\mathbf{j}_E = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$		Energiestromdichte
$\rho_p = \epsilon_0\mu_0(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$		Impulsdichte
$\sigma_{\parallel} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$	$\sigma_{\parallel} = \frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2$	{ mechanische Spannung parallel zu den Feldlinien
$\sigma_{\perp} = -\frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$	$\sigma_{\perp} = -\frac{\mu\mu_0}{2} \mathbf{H}^2$	

---

---

# 12

## Strukturen in der Elektrodynamik

---

## 12.1 Die Gibbsche Fundamentalform des elektromagnetischen Feldes

Wir betrachten einen Raumbereich vom Volumen  $V$ , in dem sich ein homogenes elektromagnetisches Feld befindet. Aus der Energiedichte

$$\frac{E}{V} = \rho_E = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}^2$$

erhält man

$$dE = V(\epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H})$$

Diese Beziehung gibt an, um welchen Betrag  $dE$  sich die Energie ändert, wenn die elektrische oder magnetische Feldstärke geändert wird.

Wir wollen diese Energieänderung durch nichtlokale Größen ausdrücken und betrachten dazu zunächst den magnetischen Term

$$dE = V\mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H}.$$

Ist  $dE$  die Änderung der Energie in einer Spule, so gilt

$$dE = V\mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H} = V \mathbf{H} d\mathbf{B} = V \frac{NI}{l} \frac{d\phi}{NA} = I d\phi$$

Ist dagegen  $dE$  die Änderung der Energie in einem „magnetischen Kondensator“, so ist mit  $U_m/d = H$  und  $Q_m/A = \mu_0 H$ :

$$dE = V \frac{U_m}{d} \frac{dQ_m}{A} = U_m dQ_m$$

Allgemein kann man also ersetzen:

$$V\mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H} = I d\phi + U_m dQ_m.$$

Auf analoge Art kann man den lokalen Ausdruck für die Änderung der Energie des elektrischen Feldes durch einen nichtlokalen Ausdruck ersetzen.

$$V\epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} = I_m d\phi_{el} + U dQ,$$

wo  $\phi_{el}$  der Fluss von  $D$  ist.

Insgesamt ist also

$$dE = I d\phi + U_m dQ_m + I_m d\phi_{el} + U dQ.$$

Eine Beziehung dieser Art heißt Gibbsche Fundamentalform.

In dieser Beziehung sind zwei Terme nicht wichtig:

$U_m dQ_m$  ist selten von Bedeutung, da magnetische Kondensatoren nicht als technische Bauelemente benutzt werden.

$I_m d\phi_{el}$  ist praktisch gar nicht realisierbar, da es schwierig ist, magnetische Ströme zu erzeugen.

In praktischen Anwendungen bleibt also gewöhnlich nur der Ausdruck

$$dE = I d\phi + U dQ.$$

Er beschreibt zum Beispiel die Energieänderung in einer Spule (1. Term) und in einem elektrischen Kondensator (2. Term). Dieser Ausdruck hat nicht mehr die Symmetrie zwischen elektrischen und magnetischen Größen, die wir bisher stets betrachtet haben, denn es fehlt das Analogon  $I_m d\phi_{el}$  zu  $I d\phi$  und das Analogon  $U_m dQ_m$  zu  $U dQ$ .

Zwischen  $I d\phi$  und  $U dQ$  besteht aber eine Symmetrie anderer Art. Dies ist genau diejenige Symmetrie, die im Physik-I-Kurs ausgenutzt wurde und die wir „Dualismus“ genannt hatten (und die ihr Analogon in der Mechanik hat). Bei dieser Abbildung sind nicht nur Größen durcheinander zu ersetzen, sondern auch topologische Beziehungen, etwa „Knoten  $\leftrightarrow$  Masche“, „parallel  $\leftrightarrow$  hintereinander“. Schließlich sind auch Größen durch ihren Kehrwert zu ersetzen, nämlich „Widerstand  $\leftrightarrow$  Leitwert“, und hieraus folgen die Ersetzungen „Kurzschluss  $\leftrightarrow$  Leerlauf“, und „Leiter  $\leftrightarrow$  Nichtleiter“.

Während die Betrachtung der Symmetrie, bei der sich  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  entsprechen, für das Verständnis der physikalischen Grundlagen besonders hilfreich ist, ist der Dualismus, in dem sich  $U$  und  $I$  entsprechen, für das Verständnis technischer Anwendungen nützlich.

### 12.2 Die Analogie zwischen Ladungsdichte und Stromdichte

In der theoretischen Physik ist eine weitere Analogie sehr beliebt. Sie beruht auf einem Vergleich zwischen  $\rho_Q$  und  $j_Q$ . So wie  $\rho_Q$  die Quelle des  $\mathbf{E}$ -Feldes ist, so ist  $j_Q$  die Quelle des  $\mathbf{B}$ -Feldes. Hier entsprechen sich also  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . In Analogie zum elektrischen Potential  $\Phi$  definiert man das Vektorpotential  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} .$$

In Analogie zur Poissongleichung

$$\Delta \Phi = - \rho / \epsilon_0$$

gilt dann (ohne Beweis)

$$\Delta \mathbf{A} = - \mu_0 \mathbf{j} .$$

---

---

# 13

## **Elektrische Schwingungen – Wechselstrom**



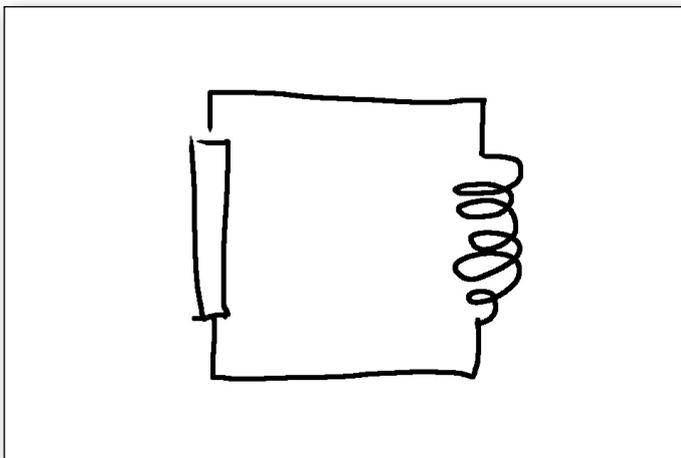
## 13.1 Die Maschenregel in Stromkreisen, die Induktivitäten enthalten

In Stromkreisen, in denen ein Gleichstrom fließt, oder in denen Spannungen, die durch zeitlich veränderliche Ströme induziert werden, gegen die anderen auftretenden Spannungen vernachlässigt werden können, ist  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r}$  auf jedem geschlossenen Weg, insbesondere entlang jeder „Masche“, gleich Null. Es kann ein Potential definiert werden, und es gilt die Maschenregel (Gleichung (2.7):

$$\sum_i U_i = 0$$

Die Maschenregel gilt aber nicht mehr, sobald sich Induktivitäten im Stromkreis befinden. In dem in Abb. 13.1 dargestellten Stromkreis ist (Gleichung (8.9)):

$$\oint_{\text{Stromkreis}} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -L\dot{I} \neq 0$$



**Abb. 13.1**

Stromkreis mit Induktivität

Da aber die Maschenregel sehr praktisch ist, rettet man sie mit Hilfe eines Tricks. Im Stromkreis von Abb. 13.1 liegt der volle Beitrag zum Integral  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r}$  am Widerstand. Es ist also

$$-L\dot{I} = RI$$

oder

$$RI + L\dot{I} = 0$$

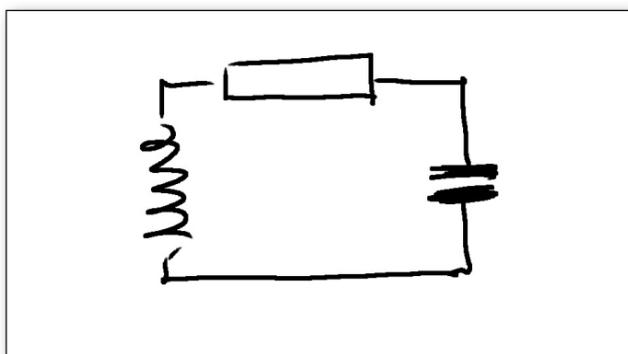
Man tut nun so, als ob es in dem Stromkreis ein Potential gäbe; man tut so, als ob das negative von  $(-L\dot{I})$ , also  $L\dot{I}$ , eine Spannung sei, die von einem elektrischen Feld in der Spule herrührt. Man interpretiert also die Gleichung  $RI + L\dot{I} = 0$  folgendermaßen: Am Widerstand fällt die Spannung  $U_{\text{Wid}} = RI$  ab, und an der Spule fällt die Spannung  $U_{\text{Sp}} = L\dot{I}$  ab.

Mit dieser Festlegung gilt also wieder

$$\sum_i U_i = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Verallgemeinerte Maschenregel;} \\ \text{gilt, wenn } U_{\text{Spule}} = +L\dot{I} \text{ eingesetzt wird} \end{array} \right.$$

## 13.2 Elektrische Schwingkreise

Abbildung 13.2 zeigt einen elektrischen Schwingkreis.



**Abb. 13.2**  
Elektrischer Schwingkreis (Serien-  
schwingkreis)

Zu seiner rechnerischen Behandlung benutzen wir die verallgemeinerte Maschenregel:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

Wir leiten die Gleichung nach der Zeit ab und benutzen  $dQ/dt = I$  (die Beziehung zwischen Kondensatorladung und Ladestrom):

$$L\ddot{I} + RI + \frac{I}{C} = 0$$

Wir dividieren schließlich noch durch  $L$ :

$$\ddot{i} + \frac{R}{L}i + \frac{I}{LC} = 0$$

Dies ist eine Differentialgleichung für gedämpfte Schwingungen. Die Lösung geschieht nach dem bekannten Rezept.

Für  $R = 0$  sind die Schwingungen ungedämpft, und es ist

$$I = I_0 \sin \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mit  $U = L \partial I / \partial t$  ergibt sich

$$U = U_0 \cos \omega t \quad \text{mit} \quad U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0$$

Mit der Beziehung

$$E_{\text{Kond}} = \frac{C}{2} U^2$$

die man aus (4.10) und (4.27) gewinnt und mit Gleichung (8.12)

$$E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} I^2$$

erhält man

$$E_{\text{Kond}} = \frac{C}{2} U_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{L}{2} I_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{L}{2} I_0^2 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

und

$$E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} I_0^2 \sin^2 \omega t = \frac{L}{2} I_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$$

Die Summe

$$E_{\text{Kond}} + E_{\text{Spule}} = \frac{L}{2} I_0^2 = \frac{C}{2} U_0^2$$

ist also zeitlich konstant.

Die Energie fließt mit der Frequenz  $2\omega$  zwischen Spule und Kondensator hin und her. Das sieht man auch am Energiestrom:

$$P = U \cdot I = I_0 \cdot U_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = I_0 U_0 \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

Für  $R \neq 0$  ist

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

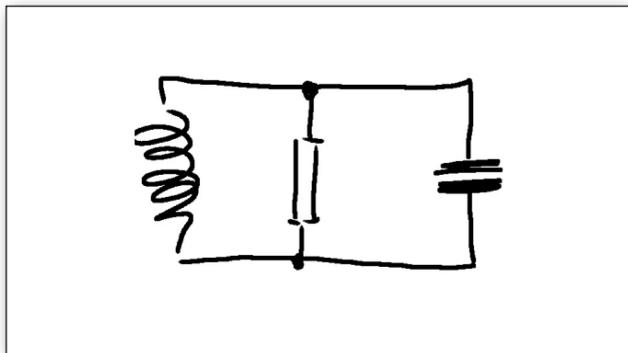
Die Amplituden des elektrischen Stroms und der Spannung klingen ab gemäß

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

und die des Energiestroms gemäß

$$e^{-\frac{R}{L}t}$$

Abbildung 13.3 zeigt den Schwingkreis, den man durch „duales Übersetzen“ erhält:  $C \leftrightarrow L$ ,  $R \leftrightarrow 1/R$ , parallel  $\leftrightarrow$  hintereinander.



**Abb. 13.3**  
Parallelschwingkreis

Statt diese Schaltung mit der zur Maschenregel dualen Knotenregel zu berechnen, kann man einfach die Ergebnisse der vorigen Rechnung übersetzen. So ergibt sich z.B. für die Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}$$

### 13.3 Wechselstrom und Wechselspannung

Wenn sich die Stromstärke (oder die Spannung) zeitlich gemäß einer Sinusfunktion ändert, wenn also  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$  (oder  $U(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi)$ ) ist, so spricht man von einem Wechselstrom (bzw. einer Wechselspannung). Der Wechselstrom hat aus verschiedenen Gründen eine große technische Bedeutung.

Man verwendet Wechselstrom hoher Frequenz als Datenträger, und Wechselstrom niedriger Frequenz (meist 50 Hz) als Energieträger.

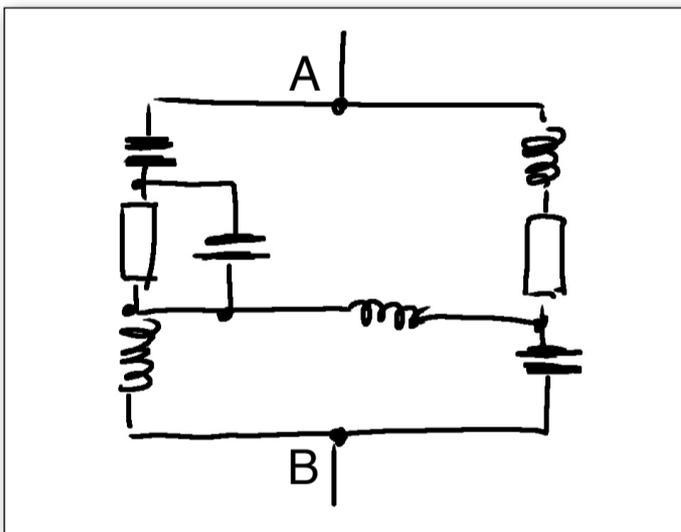
Die Vorteile des Wechselstroms beruhen zum großen Teil darauf, dass die durch die 1. und 2. Maxwell'sche Gleichung beschriebenen Gesetze wirksam werden, denn in diesen Gleichungen stehen Zeitableitungen. Da die Zeitableitung einer harmonischen Funktion wieder eine harmonische Funktion ist, sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen elektrischen Größen besonders einfach.

Sind zwei Punkte A und B eines elektrischen Netzwerks durch eine beliebige Anordnung von Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen miteinander verbunden, Abbildung 13.4, und liegt zwischen A und B die Wechselspannung

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

so fließt durch die Anordnung ein Wechselstrom derselben Frequenz:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi).$$



**Abb. 13.4**

Elektrisches Netzwerk mit Spulen, Kondensatoren und Widerständen

Der Strom ist im Allgemeinen gegen die Spannung phasenverschoben. Wir werden sehen, dass  $I_0$  zu  $U_0$  proportional ist. Der Quotient  $U_0/I_0$  heißt der *Scheinwiderstand* der Anordnung. Er wird mit  $X$  bezeichnet.

Wir untersuchen im Folgenden den Zusammenhang zwischen  $U(t)$ ,  $I(t)$  und  $P(t)$  für

- einen Ohmschen Widerstand;
- einen Kondensator;
- eine Spule;
- Widerstand, Kondensator und Spule hintereinander geschaltet;
- Widerstand, Kondensator und Spule parallel geschaltet.

### 13.4 Der Wechselstromwiderstand

#### (a) Ohmscher Widerstand

Für den Ohmschen Widerstand gilt:

$$U = RI.$$

Zwischen die Enden des Widerstandes wird die Wechselspannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  gelegt. Die Konsequenz: Es fließt ein Wechselstrom der Stärke

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

wobei  $I_0 = U_0/R$  ist.

Die Stromstärke der im Widerstand dissipierten Energie ist:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 I_0 \sin^2 \omega t = \frac{U_0^2}{R} \sin^2 \omega t$$

Der zeitliche Mittelwert von  $P(t)$  ist

$$\overline{P(t)} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

Welchen Wert  $U_{\text{eff}}$  müsste eine Gleichspannung haben, die dieselbe Dissipation im Widerstand verursacht?

$$\frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \Rightarrow U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

Die entsprechende elektrische Stromstärke wäre

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{U_0}{\sqrt{2}R} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Man nennt  $U_{\text{eff}}$  und  $I_{\text{eff}}$  die *Effektivwerte* der Wechselspannung bzw. des Wechselstroms. Wechselstrom- und Wechselspannungsmessgeräte sind in Effektivwerten von Strom bzw. Spannung geeicht. Man kann also mit den gemessenen Werten den mittleren Energiestrom als Produkt aus (Effektiv-)Spannung und (Effektiv-)Stromstärke nach der Formel  $P = UI$  berechnen.

Die 220 V der Steckdose stellen ebenfalls die Effektivspannung dar.

#### (b) Kondensator, kapazitiver Widerstand

Für den Kondensator gilt Gleichung (4.10):

$$Q = CU.$$

Ableitung nach der Zeit und Einsetzen von  $I$  für  $\partial Q/\partial t$  ergibt:

$$I = C\dot{U}$$

Wir legen die Spannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  an und erhalten einen elektrischen Strom der Stärke

$$I(t) = \omega C U_0 \cos \omega t = \omega C U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

wo  $I_0 = \omega C U_0$  ist.

Ändert sich die Spannung am Kondensator harmonisch, so ändert sich also auch die Stärke des Stroms durch den Kondensator harmonisch,  $I(t)$  ist aber gegen  $U(t)$  um  $\pi/2$  phasenverschoben:  $U(t)$  liegt gegen  $I(t)$  um  $\pi/2$  zurück.

Den *Scheinwiderstand*

$$X_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

nennt man auch *kapazitiven Widerstand*.

Wir berechnen noch den Energiestrom, der in den Kondensator fließt:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \omega C U_0^2 \sin \omega t \cos \omega t = \omega C \frac{U_0^2}{2} \sin 2\omega t$$

Es fließt Energie abwechselnd in den Kondensator hinein und aus ihm heraus. Der zeitliche Mittelwert der Energiestromstärke ist Null.

#### (c) Spule, induktiver Widerstand

Für die Spule gilt Gleichung:

$$U = L\dot{I}$$

Mit  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  wird

$$U(t) = \omega L I_0 \cos \omega t = \omega L I_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ändert sich die Stärke des Stroms durch die Spule harmonisch, so ändert sich auch die Spannung zwischen den Enden der Spule harmonisch,  $U(t)$  ist aber gegen  $I(t)$  um  $\pi/2$  phasenverschoben:  $I(t)$  liegt gegen  $U(t)$  um  $\pi/2$  zurück.

Den *Scheinwiderstand*

$$X_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

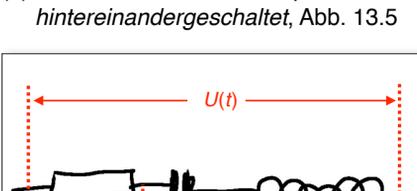
nennt man *induktiven Widerstand*.

Der Energiestrom, der in die Spule fließt, ist:

$$P(t) = U(t) I(t) = \omega L I_0^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

Es fließt Energie abwechselnd in die Spule hinein und aus ihr heraus. Der zeitliche Mittelwert der Energiestromstärke ist Null.

#### (d) Ohmscher Widerstand, Spule und Kondensator hintereinandergeschaltet, Abb. 13.5



**Abb. 13.5**  
Widerstand, Kondensator und Spule hintereinandergeschaltet

Die elektrische Stromstärke ist in allen drei Elementen dieselbe:

$$I(t) = I_0 \sin \omega t.$$

Gesucht ist die Spannung

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t).$$

Da  $U(t)$  die Summe von drei harmonischen Spannungen derselben Frequenz ist, muss sie die folgende Form haben:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t - \phi).$$

Wir wollen  $U_0$  und  $\phi$  bestimmen.

$$\begin{aligned} U_0 \sin(\omega t - \phi) &= U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) \\ &= RI_0 \sin \omega t - \frac{1}{\omega C} I_0 \cos \omega t + \omega L I_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

$$U_0 (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) = I_0 \left[ R \sin \omega t + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \right]$$

Vergleich der Faktoren vor  $\sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  liefert:

$$U_0 \cos \phi = I_0 R$$

und

$$U_0 \sin \phi = I_0 \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)$$

Daraus folgt

$$\tan \phi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

und

$$U_0^2 = I_0^2 \left[ R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 \right]$$

und schließlich

$$U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}$$

Der *Scheinwiderstand* der Anordnung ist also

$$X = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}$$

Der gesamte Energiestrom in die Anordnung ergibt sich zu

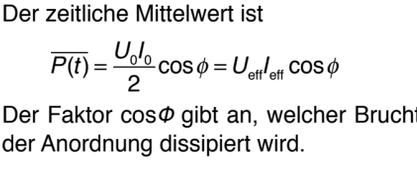
$$P(t) = U_0 \sin(\omega t - \phi) I_0 \sin \omega t = U_0 I_0 \sin \omega t (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi)$$

Der zeitliche Mittelwert ist

$$\overline{P(t)} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$$

Der Faktor  $\cos \phi$  gibt an, welcher Bruchteil des Produkts  $U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$  in der Anordnung dissipiert wird.

#### (e) Ohmscher Widerstand, Spule und Kondensator parallel geschaltet, Abb. 13.6



**Abb. 13.6**  
Widerstand, Kondensator und Spule parallel geschaltet

Die Spannung an allen drei Elementen ist dieselbe:

$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Gesucht ist die elektrische Stromstärke

$$I(t) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t).$$

Da  $I(t)$  die Summe von drei harmonischen Stromstärken derselben Frequenz ist, muss sie die folgende Form haben:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t - \phi).$$

Wir wollen  $I_0$  und  $\phi$  berechnen.

$$I_0 \sin(\omega t - \phi) = I_R(t) + I_C(t) + I_L(t) = \frac{U_0}{R} \sin \omega t + \omega C U_0 \cos \omega t - \frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t$$

$$I_0 (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) = U_0 \left[ \frac{1}{R} \sin \omega t + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \cos \omega t \right]$$

Vergleich der Faktoren vor  $\sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  liefert:

$$I_0 \cos \phi = \frac{U_0}{R}$$

und

$$I_0 \sin \phi = U_0 \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)$$

Daraus folgt

$$\tan \phi = \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right) R$$

und

$$I_0^2 = U_0^2 \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right]$$

und schließlich

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}$$

Der *Scheinwiderstand* dieser Anordnung ist also

$$X = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}}$$

Wir hätten uns diese Rechnung sparen können, wenn wir die Ergebnisse von Abschnitt (d) dual übersetzt hätten.

Für den mittleren Energiestrom ergibt sich wieder

$$\overline{P(t)} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \phi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$$

### 13.5 Die Beschreibung von Wechselstromnetzwerken mit komplexen Größen

Ist die Frequenz eines Wechselstromkreises ein für allemal festgelegt, so braucht man zur Charakterisierung eines Wechselstroms nur noch zwei Werte: die Amplitude und die Phase. Dasselbe gilt für Wechselspannungen. Die Beschreibung durch die Zeitfunktion

$$I_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

ist also unnötig umständlich. Es gibt nun einen Kalkül, der nur mit diesen beiden Zahlen, nämlich Amplitude und Phase, operiert. Die Darstellung von Wechselströmen und Wechselspannungen wird dann besonders einfach. Man verwendet dabei komplexe Zahlen:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \Phi) \quad \text{wird dargestellt durch} \quad \underline{I} = I_0 e^{i\Phi}$$

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \Phi) \quad \text{wird dargestellt durch} \quad \underline{U} = U_0 e^{i\Phi}$$

Es ist also

$$I = \operatorname{Re}[\underline{I}e^{i\omega t}] \quad \text{und} \quad U = \operatorname{Re}[\underline{U}e^{i\omega t}]$$

Nun wissen wir, dass sich bei Addition von zwei komplexen Zahlen Realteile und Imaginärteile einzeln addieren. Wir erhalten damit ein einfaches Verfahren, Ströme (oder Spannungen), die gegeneinander phasenverschoben sind, graphisch zu addieren. Wir stellen die Ströme (oder Spannungen) in der Gaußschen Zahlenebene durch Vektorpfeile dar und addieren sie nach den Regeln der Vektoraddition, Abb. 13.7.

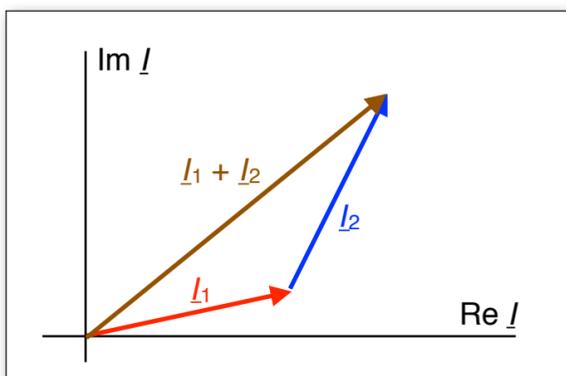


Abb. 13.7

Darstellung der Summe von zwei Wechselstromstärken in der Gaußschen Zahlenebene

Auch die Darstellung der zeitlichen Ableitung einer solchen Größe ist in komplexer Schreibweise sehr bequem. Es sei

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

also

$$\underline{I} = I_0 e^{i\Phi}$$

Die zeitliche Ableitung von  $I$  ist

$$\dot{I}(t) = -\omega I_0 \sin(\omega t + \Phi) = \omega I_0 \cos\left(\omega t + \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Die zeitliche Ableitung in komplexer Schreibweise ist

$$\underline{\dot{I}} = \omega I_0 e^{i\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega e^{i\frac{\pi}{2}} \underline{I} = i\omega \underline{I}$$

Man erhält also die Zeitableitung durch Multiplikation mit  $i\omega$ .

Auch der Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung kann mit komplexen Zahlen beschrieben werden. Wir definieren den komplexen elektrischen Widerstand oder die *Impedanz*  $Z$ :

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

Für einen Ohmschen Widerstand ergibt sich

$$Z_R = R.$$

Für einen Kondensator, an dem die Spannung  $U = U_0 \cos \omega t$  liegt, ist

$$\underline{U} = U_0$$

und

$$\underline{I} = C \dot{\underline{U}} = C i\omega \underline{U} = i\omega C U_0$$

also

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Für eine Spule, durch die ein Strom der Stärke  $I = I_0 \cos \omega t$  fließt, ist

$$\underline{I} = I_0$$

und

$$\underline{U} = L \dot{\underline{I}} = L i\omega \underline{I} = i\omega L I_0$$

also

$$Z_L = i\omega L$$

Sind mehrere Elemente 1, 2, 3 . . . mit den Impedanzen  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$  hintereinander geschaltet, so ist die komplexe Gesamtspannung:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 + \dots = Z_1 \underline{I} + Z_2 \underline{I} + Z_3 \underline{I} + \dots = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots) \underline{I}$$

Die Gesamtimpedanz ist daher

$$Z = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

Die Impedanzen addieren sich also beim Hintereinanderschalten. Auch sie können deshalb in der komplexen Zahlenebene zusammengesetzt werden. So ist beispielsweise die Impedanz der Anordnung der Abbildung 13.8:

$$Z = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

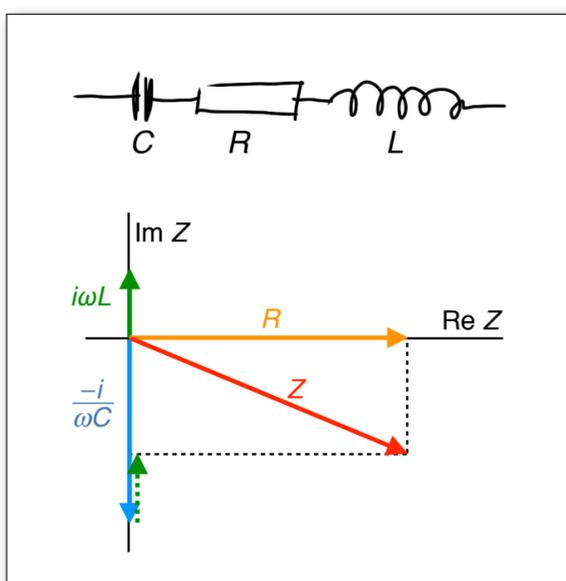


Abb. 13.8

Addition von Impedanzen in der Gaußschen Zahlenebene

Der Betrag der Impedanz einer Anordnung aus Ohmschen Widerständen, Kondensatoren und Spulen ist gleich dem Scheinwiderstand der Anordnung. Für  $R, C$  und  $L$  hintereinander geschaltet ist zum Beispiel:

$$|Z| = \left| R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = X$$

## 13.6 Der Transformator

Wir benutzen die komplexe Darstellung von Wechselspannungen, Wechselströmen und Wechselstromwiderständen zur Berechnung des Transformators. Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, die auf einen gemeinsamen Eisenkern, Abb. 13.9, gewickelt sind, so dass der gesamte magnetische Fluss  $\Phi$  (Fluss des  $\mathbf{B}$ -Feldes) der einen Spule durch die andere Spule läuft, und umgekehrt.

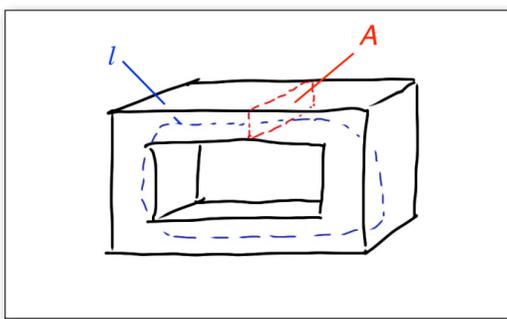


Abb. 13.9  
Eisenkern eines Transformators

Die Induktivität der beiden einzelnen Spulen ist (Gleichung (8.11)):

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} A \quad (13.1)$$

$$L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} A \quad (13.2)$$

Fließt durch Spule 1 ein Strom der Stärke  $I_1$ , so entsteht auch ein Fluss  $\Phi_2$  durch Spule 2:

$$\Phi_2 = N_2 B_1 A = N_2 \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 A = L_{12} I_1$$

Die Größe

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} A \quad (13.3)$$

heißt *gegenseitige Induktivität*.

Fließt ein Strom der Stärke  $I_2$  durch Spule 2, so entsteht auch ein Fluss in Spule 1:

$$\Phi_1 = L_{21} I_2$$

mit

$$L_{21} = L_{12}$$

Die Induktionsspannungen sind also

$$\text{an Spule 1 (Primärspule)} \quad L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$$

$$\text{an Spule 2 (Sekundärspule)} \quad L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$$

Die Spulen haben außer einem induktiven noch einen Ohmschen Widerstand  $R_1$  bzw.  $R_2$ . Dieser verhält sich so, als wäre er zum induktiven Widerstand in Reihe geschaltet (warum?), Abb. 13.10.

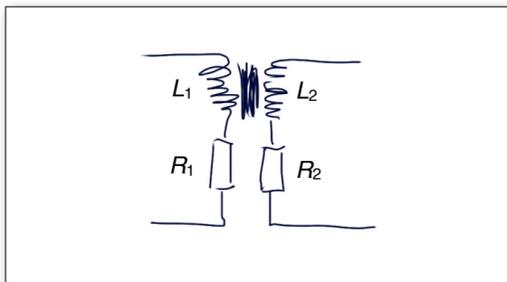


Abb. 13.10  
Ersatzschaltbild des Transformators

Für die komplexe Spannung an den beiden Spulen ergibt sich damit:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + i\omega L_1) \underline{I}_1 - i\omega L_{12} \underline{I}_2 \quad (13.4a)$$

$$\underline{U}_2 = -i\omega L_{12} \underline{I}_1 + (R_2 + i\omega L_2) \underline{I}_2 \quad (13.4b)$$

Die Primärspule des Transformators sei nun an eine Quelle der Spannung  $\underline{U}_1$  fester Amplitude (und natürlich auch fester Frequenz) liefert. An die Sekundärspule ist ein Ohmscher Verbraucherwiderstand  $R$  angeschlossen, Abb. 13.11, so dass

$$\underline{U}_2 = -R \underline{I}_2 \quad (13.5)$$

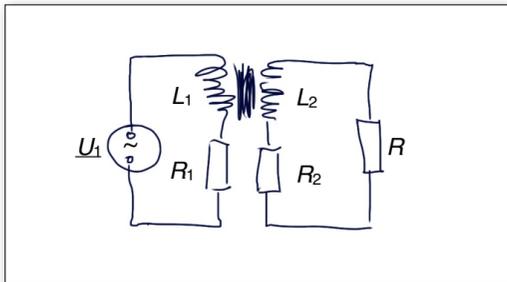


Abb. 13.11  
Der Transformator ist mit einer Quelle der Spannung  $\underline{U}_1$  und einem Verbraucherwiderstand  $R$  verbunden.

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_2$  und zwischen  $I_1$  und  $I_2$ .

Wir ersetzen  $\underline{U}_2$  in (13.4b) mit (13.5):

$$0 = -i\omega L_{12} \underline{I}_1 + (R + R_2 + i\omega L_2) \underline{I}_2$$

und erhalten

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R + R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_{12}} \quad (13.6)$$

Wir fragen nun nach dem Quotienten  $I_1/I_2$  der Amplituden der Stromstärken. Dieser ist gleich  $|I_1/I_2|$ , d. h. gleich dem Betrag von (13.6):

$$\frac{I_1}{I_2} = \left| \frac{R + R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_{12}} \right| = \left| \frac{L_2}{L_{12}} - i \frac{R + R_2}{\omega L_{12}} \right| = \frac{1}{\omega L_{12}} \sqrt{\omega^2 L_2^2 + (R + R_2)^2}$$

Transformatoren sind gewöhnlich so gebaut, dass bei der verwendeten Frequenz gilt:

$$R_1 \ll \omega L_1 \quad \text{und} \quad R_2 \ll \omega L_2 \quad (13.7)$$

(Man erreicht das dadurch, dass man die Windungszahlen hinreichend groß macht. Der Widerstand  $R$  geht linear, die Induktivität  $L$  aber quadratisch mit der Windungszahl.)

Damit wird

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{1}{\omega L_{12}} \sqrt{\omega^2 L_2^2 + R^2}$$

Ist auch der Verbraucherwiderstand klein gegen den induktiven Widerstand der Sekundärspule, ist also

$$R \ll \omega L_2,$$

so wird

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{L_{12}} = \frac{N_2}{N_1} \quad (13.8)$$

Wir eliminieren nun  $I_1$  und  $I_2$  in (13.4a) mit Hilfe von (13.5) und (13.6):

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + i\omega L_1) \frac{R + R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_{12}} \underline{I}_2 - i\omega L_{12} \underline{I}_2 \\ &= \left[ (R_1 + i\omega L_1) \frac{R + R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_{12}} - i\omega L_{12} \right] \left( -\frac{\underline{U}_2}{R} \right) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von  $L_1 L_2 = L_{12}^2$ , was aus den Gleichungen (13.1), (13.2) und (13.3) folgt, erhält man

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{(R_1 + i\omega L_1)(R + R_2) + i\omega L_2 R_1}{i\omega L_{12} R} = -\frac{L_1(R + R_2) + L_2 R_1}{L_{12} R} + j \frac{R_1(R + R_2)}{\omega L_{12} R}$$

Wieder fragen wir nach dem Quotienten der Amplituden des Ausdrucks:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{\omega L_{12} R} \sqrt{[\omega L_1(R + R_2) + \omega L_2 R_1]^2 + [R_1(R + R_2)]^2}$$

Mit (13.7) wird daraus näherungsweise:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1(R + R_2) + L_2 R_1}{L_{12} R}$$

Wenn man die Spulenwiderstände vernachlässigen kann, vereinfacht sich die Beziehung noch weiter. Dieses Vernachlässigen ist möglich, wenn die beiden folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$R \gg R_2 \quad \text{und} \quad R \gg \frac{L_2}{L_1} R_1 = \frac{N_2^2}{N_1^2} R_1$$

Unter diesen Voraussetzungen wird:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_{12}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13.9)$$

Gleichungen (13.8) und (13.9) gelten gleichzeitig wenn

$$R_2, \frac{L_2}{L_1} R_1 \ll R \ll \omega L_2$$

---

# 14

## Elektromagnetische Wellen

---

## 14.1 Kinematik harmonischer Wellen

Ist der zeitliche Verlauf des Wertes einer physikalischen Größe  $f$  an einem beliebigen Ort  $x$  derselbe wie bei  $x = 0$ , jedoch um  $x/v$  zeitlich verschoben:

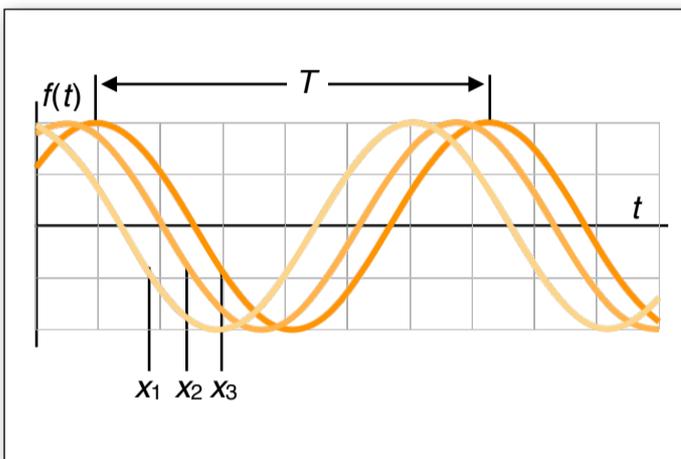
$$f(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

so spricht man von einer Welle. Wenn  $f$  eine Sinusfunktion ist, wenn also

$$f(t,x) = f_0 \sin [\omega(t - x/v)] = f_0 \sin (\omega t - kx),$$

so bildet die raumzeitliche Verteilung von  $f$  eine *harmonische Welle*.

Betrachtet man einen festen Ort  $x_1$ , so beschreibt  $f(t,x_1)$  eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , Abb. 14.1.

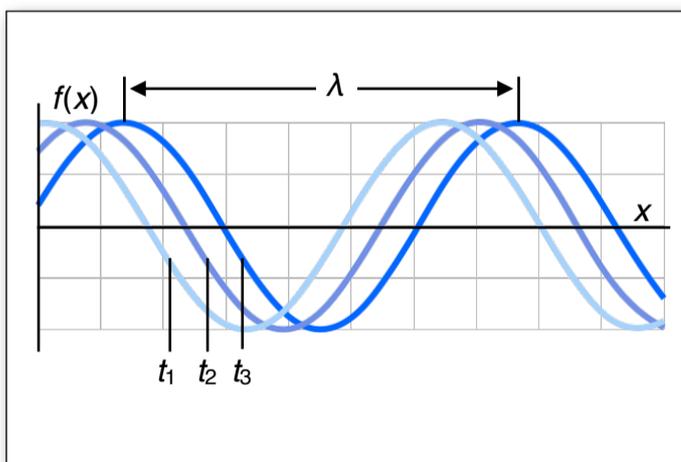


**Abb. 14.1**

Die Funktionen, die den drei Stellen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  entsprechen, sind gegeneinander phasenverschoben.

Für einen anderen Ort  $x_2$  oder  $x_3$  beschreibt sie eine Sinusschwingung derselben Frequenz, nur sind die Sinusfunktionen gegeneinander phasenverschoben.

Betrachtet man den Verlauf von  $f$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_1$ , Abb. 14.2, so stellt  $f(t_1,x)$  eine sinusförmige Variation von  $f$  mit  $x$  dar.



**Abb. 14.2**

Die Funktionen, die den drei Zeitpunkten  $t_1$ ,  $t_2$  und  $t_3$  entsprechen, sind gegeneinander phasenverschoben.

$k = 2\pi/\lambda$  ist die *Wellenzahl* (nach SI *Kreiswellenzahl*),  $\lambda$  die Wellenlänge. Wenn man zwei solche „Momentaufnahmen“ kurz nacheinander im zeitlichen Abstand  $\Delta t$  macht, erhält man denselben Verlauf als Funktion von  $x$ , nur in  $x$ -Richtung um  $\Delta x = v\Delta t$  verschoben.

Macht man viele Momentaufnahmen nacheinander, so zeigt die Folge dieser Aufnahmen eine scheinbare Bewegung der Sinusfunktion in  $x$ -Richtung mit der *Phasengeschwindigkeit*:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

## 14.2 Harmonische Wellen als Lösungen der Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen haben unter anderem harmonische Wellen als Lösung. Wir machen den Ansatz

$$\mathbf{E}(z,t) = (E_x(z,t), 0, 0) \quad E_x(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$\mathbf{H}(z,t) = (0, H_y(z,t), 0) \quad H_y(z,t) = H_0 \cos(kz - \omega t)$$

Wir verifizieren diesen Ansatz durch Einsetzen in die erste und in die zweite Maxwellgleichung. Es wird über die in Abbildung 14.3 eingezeichneten Wege bzw. Flächen integriert.

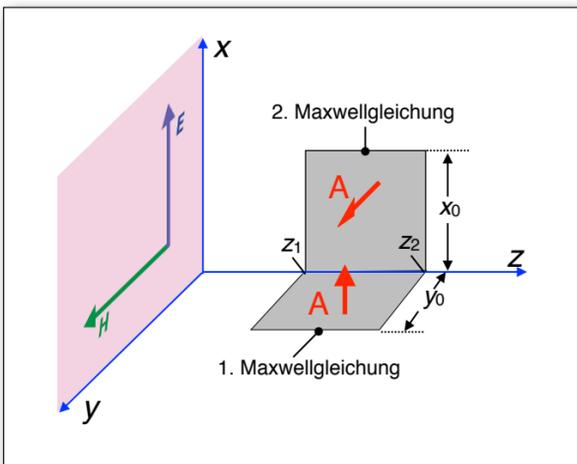


Abb. 14.3

Integrationswege und -flächen für die Verifikation des Wellenansatzes

Es sei  $\mathbf{j}_Q = 0$  und  $\chi_e = \chi_m = 0$ , so dass sich die Maxwellgleichungen vereinfachen zu

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = \varepsilon_0 \iint \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{A}$$

und

$$-\oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = \mu_0 \iint \dot{\mathbf{H}} d\mathbf{A}$$

### 1. Maxwellsche Gleichung

$$\begin{aligned} y_0 H_0 \cos(kz_1 - \omega t) - y_0 H_0 \cos(kz_2 - \omega t) &= \varepsilon_0 y_0 \int_{z_1}^{z_2} \omega E_0 \sin(kz - \omega t) dz \\ &= \varepsilon_0 y_0 \omega E_0 \frac{1}{k} [\cos(kz - \omega t)]_{z_2}^{z_1} \end{aligned}$$

$$H_0 = \varepsilon_0 \frac{\omega}{k} E_0 \quad (14.1)$$

### 2. Maxwellsche Gleichung

$$\begin{aligned} -x_0 E_0 \cos(kz_2 - \omega t) + x_0 E_0 \cos(kz_1 - \omega t) &= \mu_0 x_0 \int_{z_1}^{z_2} \omega H_0 \sin(kz - \omega t) dz \\ &= \mu_0 x_0 \omega H_0 \frac{1}{k} [\cos(kz - \omega t)]_{z_2}^{z_1} \end{aligned}$$

$$E_0 = \mu_0 \frac{\omega}{k} H_0 \quad (14.2)$$

Aus (14.1) und (14.2) folgt

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (14.3)$$

$c = \omega/k$  ist die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Es ist also

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Außerdem folgt aus (14.1) und (14.2)

$$\varepsilon_0 E_0^2 = \mu_0 H_0^2 \quad (14.4)$$

Unser Ansatz erfüllt also die Maxwellgleichungen, d.h. die Maxwellgleichungen haben harmonische Wellen als Lösung, für die die Zusammenhänge (14.3) und (14.4) gelten. Diese Wellen heißen *elektromagnetische Wellen*. Sie bilden eine Klasse von Zuständen des Systems „elektromagnetisches Feld“. Wir diskutieren nun diese Lösung der Maxwellgleichungen.

#### (a) Geschwindigkeit

Es zeigt sich, dass der Ausdruck (14.3) gleich der „Ausbreitungsgeschwindigkeit“ des Lichts ist. Dies ist der stärkste Hinweis darauf, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Die Vereinigung der Optik mit der Theorie des elektromagnetischen Feldes ist Maxwells Verdienst. Die ersten Abschnitte seiner elektromagnetischen Theorie des Lichts sind in Abschnitt 14.4 wiedergegeben.

#### (b) Phasenbeziehung zwischen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ , Polarisation

Die elektrische und die magnetische Feldstärke sind in Phase.  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  stehen senkrecht aufeinander. Die Welle läuft senkrecht zur Richtung von  $\mathbf{E}$  und den von  $\mathbf{H}$ . Man sagt, sie ist „transversal“.

#### (c) Energiedichte, Energiestromdichte, Impulsdichte und Impulsstromdichte

Aus Gleichung (14.4) folgt, dass das elektrische Feld und das magnetische Feld zu gleichen Teilen zur Energiedichte der Welle beitragen. Auch die Energiedichte bildet eine harmonische Welle, ihre Frequenz ist  $2\omega$ , die Wellenzahl  $2k$ .

Der Energiestromdichtevektor  $\mathbf{j}_E$  steht senkrecht auf  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ , er weist in die Laufrichtung der Welle. Die Energie fließt also in dieselbe Richtung, in die sich die Phase der Welle ausbreitet. Auch  $\mathbf{j}_E$  bildet eine harmonische Welle mit der Frequenz  $2\omega$  und der Wellenzahl  $2k$ .

Die Impulsdichte ist bis auf den Faktor  $1/c^2$  mit der Energiestromdichte identisch.

In Laufrichtung der Welle fließt ein Impulsstrom. (Benachbarte Bereiche der Welle „üben Kräfte aufeinander aus“.) Die zugehörige Stromdichte ist

$$\sigma = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}|^2) = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \mu_0 |\mathbf{H}|^2$$

Dieser Impulsstrom entspricht einer Druckspannung; man nennt ihn auch den *Lichtdruck*.

### 14.3 Die Abstrahlung elektromagnetischer Wellen – der Hertzsche Oszillator

Es gibt viele Methoden, elektromagnetische Wellen zu erzeugen. Wir beschreiben hier eine Möglichkeit, die physikalisch und technisch besonders wichtig ist. Ihre rechnerische Behandlung ist aber schwieriger als die anderer Methoden, und wir überlassen die Berechnung der Vorlesung der theoretischen Physik. Die Methode funktioniert folgendermaßen: Die Punktladungen eines elektrischen Dipols werden sinusförmig hin- und herbewegt, so dass das Dipolmoment den zeitlichen Verlauf

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \sin \omega t \quad (14.5)$$

hat.

Heinrich Hertz wies nicht nur die elektromagnetischen Wellen zum ersten Mal experimentell nach, er berechnete auch die Feldverteilung für den schwingenden Dipol (Ann. d. Phys. 36, 51, 1888). Wir geben hier nur ein Teilergebnis seiner Rechnungen wieder: Wir stellen uns den schwingenden Dipol unendlich klein vor; das ist äquivalent dazu, dass man bei einem nicht unendlich kleinen Dipol nur nach dem sogenannten *Fernfeld* fragt. Für das Fernfeld gilt in Polarkoordinaten (der Dipol liege in z-Richtung):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E_r, E_\vartheta, E_\varphi) \\ E_r &\approx 0 \\ |E_\vartheta| &= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \vartheta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \\ E_\varphi &= 0 \\ \mathbf{H} &= (H_r, H_\vartheta, H_\varphi) \\ H_r &= 0 \\ H_\vartheta &= 0 \\ |H_\varphi| &= \frac{\omega^2 p_0}{4\pi c r} \sin \vartheta \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

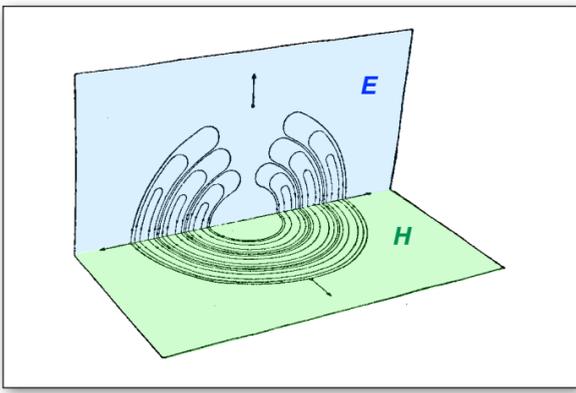
Wir diskutieren dieses Ergebnis.

#### (a) lokale Eigenschaften

Lokal ist dieses Feld von dem der ebenen Welle von Abschnitt 14.2 nicht zu unterscheiden:  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  stehen senkrecht aufeinander, und  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  stehen beide senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Außerdem gilt überall  $\epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \mu_0 \mathbf{H}^2$ .

#### (b) Verteilung von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ im Raum

Die Phase, d.h. das Argument der Sinusfunktion, hat auf Kugelschalen (Dipol im Kugelmittelpunkt) einen konstanten Wert. Die  $\mathbf{H}$ -Feldlinien bilden geschlossene „Breitenkreise“, Abb. 14.4.



**Abb. 14.4**  
E- und H-Feldverteilung des strahlenden Hertzschen Dipols

Die  $\mathbf{E}$ -Feldlinien folgen, außer in Polnähe, „Längskreisen“. Das Umkehren der  $\mathbf{E}$ -Feldlinien geschieht an Stellen schwacher Feldstärke.

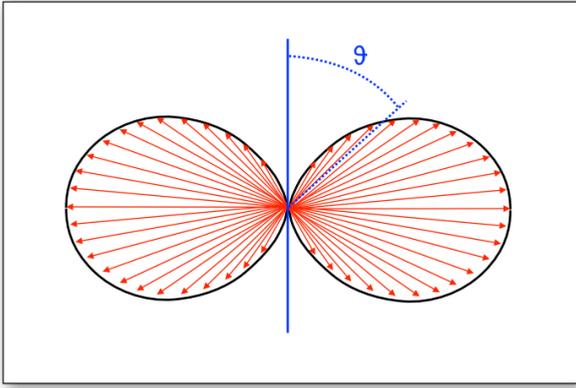
#### (c) Verteilung der Energiestromdichte

Die  $\mathbf{j}_E$ -Vektoren weisen radial nach außen. Ihr Betrag ist

$$|\mathbf{j}_E| = \frac{\omega^4 p_0^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (14.6)$$

Die Amplitude nimmt nach außen mit  $1/r^2$  ab, in Übereinstimmung mit dem Energiesatz.

Die  $\vartheta$ -Abhängigkeit für ein festes  $r$ , Abbildung 14.5, ist so, dass  $|\mathbf{j}_E|$  in der Äquatorialebene maximal ist. In Richtung der Dipolachse ist die Energiestromdichte gleich null.



**Abb. 14.5**  
Richtungsabhängigkeit der Energiestromdichte des Hertzschen Oszillators

#### (d) Die Frequenzabhängigkeit der Energiestromdichte

$|\mathbf{j}_E|$  ist proportional zu  $\omega^4$ , Gleichung (14.6), d.h. die abgestrahlte Energie wächst sehr stark mit der Schwingungsfrequenz des Dipols an, oder in anderen Worten: Schwingt der Dipol langsam, so strahlt er nicht. Ein langsam schwingender Dipol baut einfach das aus der Elektrostatik bekannte Dipolfeld auf und wieder ab. Die beim Aufbau in das Feld hineingesteckte Energie bekommt man beim Abbau wieder heraus.

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass für die Abstrahlung die zweite zeitliche Ableitung des Dipolmoments zuständig ist. Daraus folgt, dass zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen ein harmonisch schwingendes Dipolmoment nicht nötig ist, sondern dass auch eine gleichmäßig beschleunigte Ladung, z.B. ein gleichmäßig beschleunigtes geladenes Teilchen ein elektromagnetisches Feld erzeugt, in dem Energie ständig vom Teilchen wegfließt.

#### (e) Magnetische Dipolstrahlung

Man kann elektromagnetische Wellen auch mit einem schwingenden magnetischen Dipol erzeugen. Das Feld sieht genauso aus wie das des elektrischen Dipols, nur sind elektrische und magnetische Feldstärke gegeneinander vertauscht. Man erkennt also an der *Feldverteilung*, ob ein Feld von einem elektrischen oder von einem magnetischen Dipol herrührt.

## 14.4 Bemerkungen Maxwells zur elektromagnetischen Theorie des Lichts

### Cap. XX.

#### Electromagnetische Theorie des Lichtes.

##### Berechtigung der Annahme eines besondern raumerfüllenden Mediums.

781. Ich habe an verschiedenen Stellen dieses Werkes die electromagnetischen Erscheinungen durch eine mechanische Einwirkung der Körper auf einander zu erklären versucht und bin dabei der Conception gefolgt, dass diese Einwirkungen von Körper zu Körper durch ein den Raum zwischen den Körpern ausfüllendes Medium fortgeleitet werden. Da nun auch die Undulationstheorie des Lichtes die Existenz eines den Raum erfüllenden Mediums annimmt, so werde ich im folgenden zu zeigen haben, dass die Eigenschaften unseres electromagnetischen Mediums mit denen des lichttragenden identisch sind.

Es wäre philosophisch nicht zu rechtfertigen, wollte man, so oft es eine neue Erscheinung zu erklären giebt, den ganzen Raum auch mit einem neuen Medium füllen, hat aber das Studium zweier verschiedener Wissenszweige unabhängig zu der Conception eines Mediums geführt und ist man zudem gezwungen, dem Medium, wenn es zur Erklärung der einen Erscheinungsklasse, der des Electromagnetismus, dienen soll, dieselben Eigenschaften, wie wenn es zum Verständnis der andern Erscheinungsklasse, der des Lichtes, benutzt wird, zuzusprechen, dann dürfte die Wahrscheinlichkeit für die physikalische Existenz eines solchen Mediums erheblich verstärkt werden.

Die Eigenschaften der Körper sind einer quantitativen Messung zugänglich, daher werden wir auch bei unserem Medium für einige seiner Eigenschaften numerische Daten zu erlangen vermögen. Man kann nun die Geschwindigkeit, mit der eine Störung sich in ihm fortpflanzt, sowohl aus electromagnetischen Experimenten berechnen, als auch direct aus der Schnelligkeit, mit der das Licht sich durch dasselbe verbreitet, ableiten. Findet sich dann, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für electromagnetische Störungen

ebenso gross wie die für Lichtschwankungen ist, und zwar nicht bloß in der Luft, sondern auch in andern durchsichtigen Medien, so hat man hinreichenden Grund zu der Annahme, das Licht sei eine electromagnetische Erscheinung. Zugleich giebt die Verbindung, in die dadurch zwei sonst so distincte Erscheinungsklassen, wie die des Electromagnetismus und die der Optik zu einander treten, die Ueberzeugung von der Realität eines Mediums, das in seinen Eigenschaften der durch unsere Sinne sich uns bemerkbar machenden Materie ähnelt.

##### Optische und electromagnetische Eigenschaften des Mediums.

782. Schickt ein Körper Licht aus, so giebt er damit einen gewissen Betrag von Energie fort, absorbiert dann ein anderer Körper das von jenem emittirte Licht, so nimmt er, wie daraus erhellt, dass er sich dabei erwärmt, eine gewisse Menge Energie in sich auf. In dem Zeitintervall, welches zwischen der Emission des Lichtes durch den einen und seiner Absorption durch den andern Körper verfließt, muss es also irgendwo in dem Raume, der sich zwischen den beiden Körpern erstreckt, als Energie existirt haben.

Die Emissionstheorie des Lichtes nimmt an, dass die Energie durch Lichtkörperchen, die von dem leuchtenden zu dem erleuchteten Körper wirklich übergehen, und die dabei sowohl ihre kinetische Energie als auch eine gewisse andere Art Energie, die sie in sich aufzunehmen im Stande sind, mit sich führen, übertragen wird.

Nach der Undulationstheorie des Lichtes füllt ein materielles Medium den den leuchtenden von dem erleuchteten Körper trennenden Raum, und dieses Medium ist es, welches durch die Wirkung seiner Theilchen auf einander die Energie, die der leuchtende Körper ausgiebt, von Theilchen zu Theilchen fortleitet und bis zum erleuchteten Körper hinschafft. Darnach würde also dieses Medium während des Ueberganges des Lichtes von dem einen zu dem andern Körper der Träger der Energie sein.

Was die Art der im Medium während der Fortpflanzung des Lichtes befindlichen Energie anbetrifft, so sollte sie gemäss der Entwicklung, die Huyghens, Fresnel, Young, Green, Neumann u. A. der Undulationstheorie verliehen haben, theils potentieller, theils kinetischer Natur sein. Die potentielle nahm man als durch die Verdrehung der einzelnen Theilchen des Mediums gegen einander entstanden an; hiernach würde das Medium als elastisch zu betrachten sein. Die kinetische sollte durch vibratorische, in dem Medium vor sich gehende Bewegungen wachgerufen werden; und das setzt voraus, dass das Medium eine endliche Dichtigkeit besitzt.

Auch in der Theorie der Electricität und des Magnetismus, wie sie in diesem Werke adoptirt worden ist, hat man es mit zwei Arten von Energie, der electrostatischen und der electrokinetischen, zu tun, und diese beiden Energiearten sollten ihren Sitz nicht so sehr in den electricirten oder

magnetisirten Körpern als vielmehr in jedem Teile des diese umgebenden Raumes, wo nur die electriche oder magnetische Kraft sich in ihrer Wirkung zeigt, haben. Unsere Theorie der Electricität und des Magnetismus stimmt also mit der Undulationstheorie des Lichtes schon darin überein, dass sie die Existenz eines Mediums voraussetzt, das als Träger zweier Energieformen auftreten kann.\*)