

# Eine elementare Einführung in die Physik des Drehimpulses<sup>1</sup>

VON FRIEDRICH HERRMANN

Mit 8 Abbildungen und 3 Tabellen

Anhand zahlreicher Experimente wird eine einfache Einführung in die Physik des Drehimpulses vorgestellt. Dabei wird sehr stark von einer Analogie Gebrauch gemacht, in der sich Drehimpuls und elektrische Ladung sowie Winkelgeschwindigkeit und elektrisches Potential entsprechen. Jedes Experiment wird in zwei Versionen dargestellt: zuerst das elektrische Experiment und dann das mechanische Analogon.

## 1 Einleitung

Nach allgemeiner Auffassung gehört der Drehimpuls zu den schwierigen physikalischen Größen. Im traditionellen Aufbau der Physik wird der Drehimpuls  $L$  eines Massenpunkts definiert als

$$L = r \times p, \quad (1)$$

wo  $r$  der Ortsvektor und  $p$  der Impuls des Massenpunkts ist<sup>2</sup>. Der Impuls selbst wird definiert als

$$p = mv. \quad (2)$$

Daß der Drehimpuls bei diesem Vorgehen als schwieriger Begriff erscheint, hat zwei Gründe, einen mathematischen und einen physikalischen.

Da der Drehimpuls über ein Vektorprodukt mit dem Impuls zusammenhängt, scheint eine Voraussetzung für seine Einführung im Physikunterricht die Kenntnis des Vektorprodukts zu sein. Das ist die mathematische Schwierigkeit. – Eine größere Schwierigkeit bei der Einführung über Gleichung (1) ist physikalischer Natur. Nach dieser Gleichung erscheint der Drehimpuls als eine aus dem Impuls und dem Ortsvektor abgeleitete Größe, wobei der Impuls selbst nach (2) aus Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  abgeleitet wird. Man kann von den Schülern nicht erwarten, daß

sie sich über diese beiden Beziehungen vom Drehimpuls eine direkte Anschauung bilden. Der Drehimpuls erscheint also nicht nur als mathematisch schwierige, sondern auch als physikalisch unanschauliche Größe. Dies ist der Grund dafür, daß der Drehimpuls im Schulunterricht ein Stiefmütterchendasein führt.

Nun spielt aber der Drehimpuls als extensive Größe [1] für die Mechanik der Drehbewegungen dieselbe fundamentale Rolle wie etwa die elektrische Ladung für die Elektrizitätslehre. Daher führt die Nichtbehandlung des Drehimpulses dazu, daß die ganze Rotationsmechanik im Unterricht sehr schlecht wekommt, – und das ist bedauerlich. Schließlich ist ein großer Teil der Technik Mechanik der Drehbewegungen. Motoren, Getriebe, Wellen und viele andere Geräte gehören zu den Systemen, bei denen Drehbewegungen eine wichtige Rolle spielen.

Im vorliegenden Aufsatz wird ein Ausschnitt aus einem Physikkurs über Drehbewegungen vorgestellt.

Es ist dabei unser wichtigstes Anliegen zu zeigen, daß der Drehimpuls weder begrifflich noch mathematisch schwierig sein muß.

Unsere Darstellung der Rotationsmechanik zeichnet sich durch zwei Merkmale aus:

- Der Drehimpuls wird als selbständige, nicht abgeleitete Größe eingeführt.
- Die in der traditionellen Darstellung als Drehmoment bezeichnete Größe wird Drehimpulsstrom genannt.

Diese Art des Vorgehens hat zur Folge, daß die Rotationsmechanik dieselbe Struktur bekommt wie die Elektrizitätslehre. Es liegt daher nahe, sich bei der Einführung des einen Gebietes am anderen zu orientieren. Der vorliegende Aufsatz ist so angelegt, daß die Beschreibungen sich entsprechender Experimente aus der Elektrizitätslehre und aus der Rotationsmechanik immer abwechselnd aufeinander folgen.

So wie der Kurs hier geschildert wird, war er Teil einer Mechanikvorlesung für Physikstudenten im ersten

<sup>1</sup> Nach einem Vortrag auf der 75. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts 1984 in Saarbrücken.

<sup>2</sup> Vektoren sind bis auf  $\epsilon$  und  $\omega$  halbfett gesetzt.

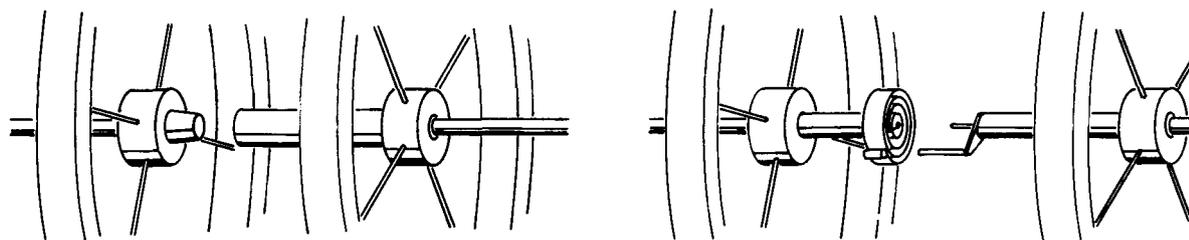


Abb. 1. a) Zwei Schwungräder können über eine Rutschkupplung miteinander verbunden werden.  
b) Zwei Schwungräder können über eine Feder miteinander verbunden werden.

Semester. Die Darstellung ist aber so elementar, daß sie zum größten Teil nicht nur für den Oberstufen-, sondern auch für den Mittelstufen-Unterricht übernommen werden kann. Teile davon wurden sogar schon in der Orientierungsstufe verwendet [2], [3]. Der hier vorgestellte Aufbau der Rotationsmechanik hat übrigens dieselbe Struktur wie die an anderer Stelle beschriebene Neudarstellung der Translationsmechanik [4].

Vor der Beschreibung des Kurses in Abschnitt 3 werden im 2. Abschnitt einige technische Bemerkungen zu den Experimenten gemacht. Die Begründung des Unterrichtsaufbaus geschieht in Abschnitt 4.

## 2 Technische Bemerkungen zu den Experimenten

Die Beschreibung des Kurses in Abschnitt 3 geschieht zum größten Teil anhand von Experimenten. Das Material für die Experimente ist in den meisten Schulsammlungen zu finden.

Für die mechanischen Experimente werden unter anderem zwei Schwungräder gebraucht, die man an einem Griff halten oder auch fest einspannen kann. Sie werden meistens einfach mit der Hand angeworfen. Manchmal, wenn ein Schwungrad sehr schnell laufen soll, flanscht man an eine elektrische Handbohrmaschine eine Gummischeibe an und läßt diese auf dem Schwungrad abrollen.

In mehreren Versuchen müssen die Räder mit einer Rutschkupplung verbunden werden. Man befestigt dazu an dem einen Rad in der Verlängerung der Achse ein Stück Rohr, am anderen einen Korken. Zum Einkuppeln drückt man den Korken in das Rohr (Abb. 1a).

In einem Experiment müssen die Schwungräder elastisch aneinandergesekelt werden. Als Koppelfeder eignet sich eine breite Uhrfeder (Abb. 1b).

Die Anordnung für das Experiment in 3.3 (Abb. 3b) kann man leicht mit einem Technik-Baukasten aufbauen.

Für die elektrischen Experimente braucht man unter anderem Kondensatoren. In einigen Versuchen soll beim Entladen eine Glühlampe zum Leuchten gebracht werden. Die Kapazität sollte daher einige mF

betragen. Es genügt dann, die Kondensatoren auf etwa 6 Volt zu laden.

Für die Experimente in Abschnitt 3.10 sind Elektrolytkondensatoren ungeeignet. Man verwendet daher Metallpapierkondensatoren von mindestens  $40\ \mu\text{F}$ . Damit sich die Kondensatoren über die Voltmeter nicht merklich entladen, müssen diese einen hohen Innenwiderstand haben. Meßgeräte mit einem Vorverstärker sind geeignet. Die Induktivität der Spule in Abschnitt 3.10 beträgt etwa 500 H.

## 3 Beschreibung des Kurses

### 3.1 Drehimpuls als Schwung

Auf einer Kugel, die mit Hilfe eines Bandgenerators geladen wurde, sitzt Elektrizität. Ist die Kugel gut isoliert, so behält sie diese Elektrizität. Trägt man die Kugel im Raum herum, so wird auch die Elektrizität im Raum herumgetragen. Elektrizität wird vom Physiker auch »elektrische Ladung« genannt.

Ein Rad, das man in Drehung versetzt hat, hat Schwung. Ist das Rad gut gelagert, so behält es seinen Schwung. Trägt man das Rad im Raum herum, so wird auch der Schwung im Raum herumgetragen (bei diesem Experiment hält man das Rad so, daß die Radachse immer parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung bleibt). Der Schwung eines Rades wird vom Physiker »Drehimpuls« genannt.

### 3.2 Der Drehimpulsstrom

Wir berühren mit einer elektrisch geladenen Kugel die Erde. Die Kugel entlädt sich, die elektrische Ladung fließt in die Erde. Da sie sich in der Erde weit verteilt, merkt man jetzt nichts mehr von ihr.

Wir berühren mit einem sich drehenden Schwungrad die Erde. Das Rad kommt zum Stillstand, der Drehimpuls geht in die Erde. Da er sich in der Erde weit verteilt, merkt man jetzt nichts mehr von ihm.

Verbindet man eine elektrisch geladene Kugel über einen Draht und einen Widerstand mit einer ungeladenen Kugel, so nimmt die Ladung der einen Kugel ab, die der anderen zu. Wir schließen daraus, daß ein Ladungsstrom, ein »elektrischer Strom«, von der einen

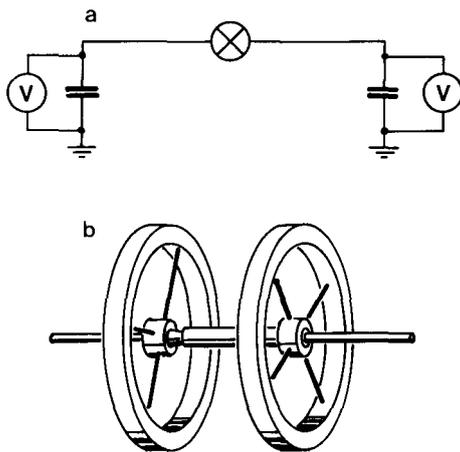


Abb. 2. a) Zwei Kondensatoren sind über eine Glühlampe miteinander verbunden. An den Voltmetern erkennt man, ob sich die Ladung der Kondensatoren ändert. Der elektrische Strom hat zur Folge, daß der Glühdraht der Lampe warm wird.

b) Zwei Schwungräder sind über eine Rutschkupplung miteinander verbunden. An der Winkelgeschwindigkeit erkennt man, ob sich der Drehimpuls der Schwungräder ändert. Der Drehimpulsstrom hat zur Folge, daß die Rutschkupplung warm wird.

zur anderen geflossen ist. Um den Strom der elektrischen Ladung deutlicher zu machen, führen wir das Experiment nun mit Geräten aus, auf denen mehr Ladung Platz hat als auf Kugeln: mit Kondensatoren. Wir ersetzen jede Kugel durch einen Kondensator (Abb. 2a). Als Widerstand wird in die Verbindung eine Glühlampe eingebaut. Ob und wie stark die Kondensatoren geladen sind, erkennen wir qualitativ an den beiden Voltmetern. Aus der Tatsache, daß die Ladung des einen Kondensators ab- und die des anderen zunimmt, schließen wir auf das Fließen eines elektrischen Stroms in der Leitung zwischen den Kondensatoren. Wir beobachten außerdem, daß die Glühlampe leuchtet, solange sich die Ladung der Kondensatoren ändert, d. h. solange der Strom fließt. Das Fließen des Stroms hat also eine Wärmewirkung zur Folge.

Verbindet man ein sich drehendes, d. h. mit Drehimpuls geladenes Schwungrad über eine Welle und eine Rutschkupplung mit einem ruhenden Schwungrad (Abb. 2b), so nimmt der Drehimpuls des einen Schwungrades ab, der des anderen zu. Man erkennt das an der Rotationsgeschwindigkeit der Räder. Drehimpuls ist offenbar von dem einen zum anderen Schwungrad gelangt. Da die einzige Verbindung zwischen den Schwungrädern die Welle mit der Rutschkupplung ist, muß der Drehimpuls hier hindurch gelangt sein. Wir sagen, der Drehimpuls sei durch Welle und Kupplung geflossen. Durch Welle und Kupplung ist ein Drehimpulsstrom geflossen. Bei genauerer Untersuchung würde man feststellen, daß die Rutschkupplung durch das Fließen des Drehimpulsstroms

warm wird. Auch ein Drehimpulsstrom hat also eine Wärmewirkung zur Folge. Der Physiker nennt den Drehimpulsstrom gewöhnlich Drehmoment. Statt »vom einen zum anderen Rad fließt ein Drehimpulsstrom« sagt er, »das eine Rad übt auf das andere ein Drehmoment aus«.

Wir laden nun beide Kondensatoren von Abbildung 2a an einem Netzgerät auf, und zwar so, daß wir sie verschieden herum an die Anschlüsse des Netzgeräts halten. Die Voltmeter schlagen in die entgegengesetzte Richtung aus. Schließt man nun den Schalter, so gehen beide Meßinstrumente auf Null zurück - beide Kondensatoren entladen sich. Wir erkennen daran, daß die elektrische Ladung positive und negative Werte annehmen kann und daß sich gleiche Beträge positiver und negativer Ladung zu Null addieren.

Wir laden beide Schwungräder mit Drehimpuls, und zwar so, daß sie sich gleich schnell, aber in entgegengesetzter Richtung drehen. Verbindet man nun die Schwungräder über die Rutschkupplung, so kommen sie beide zum Stillstand. Wir erkennen daran, daß der Drehimpuls positive und negative Werte annehmen kann, und daß sich gleiche Beträge positiven und negativen Drehimpulses zu Null addieren.

### 3.3 Die Drehimpulsleitfähigkeit

Wir laden einen Kondensator mit einem Netzgerät, bauen aber in den Stromkreis nacheinander verschiedene andere Elemente ein (Abb. 3a). Die Zeit, die das Laden des Kondensators braucht, hängt davon ab, was man eingebaut hat. Ist es ein Stück Cu-Draht, so geht es schnell; ist es eine Salzlösung, so geht es langsamer; ist es Luft, so lädt er sich gar nicht auf. Wir schließen, daß das Kupfer den Strom besser leitet als die Salzlösung, und diese leitet ihn besser als Luft. Luft ist ein Nichtleiter für elektrische Ladung. Ob ein Gegenstand gut oder schlecht leitet, hängt u. a. von dem Material ab, aus dem er besteht. Diese Eigenschaft wird quantitativ durch die elektrische Leitfähigkeit des Materials beschrieben.

Wir laden ein Schwungrad mit Hilfe einer Kurbel mit Drehimpuls, bauen aber in die Leitung nacheinander verschiedene Materialien ein (Abb. 3b). Die Zeit, die das Laden braucht, hängt davon ab, was wir eingebaut haben. Wird eine feste Verbindung hergestellt, so geschieht das Aufladen sofort; ist die Verbindung z. B. ein Ölbad, so geht es langsamer, besteht die Verbindung nur aus Luft, so lädt sich das Schwungrad gar nicht auf. Wir schließen, daß feste Gegenstände den Drehimpuls sehr gut leiten, dickflüssiges Öl nicht so gut und Luft gar nicht. Ob ein Körper den Drehimpuls leitet oder nicht, hängt u. a. von dem Material ab, aus dem er besteht. Diese Eigenschaft wird quantitativ durch die Viskosität des Materials beschrieben.

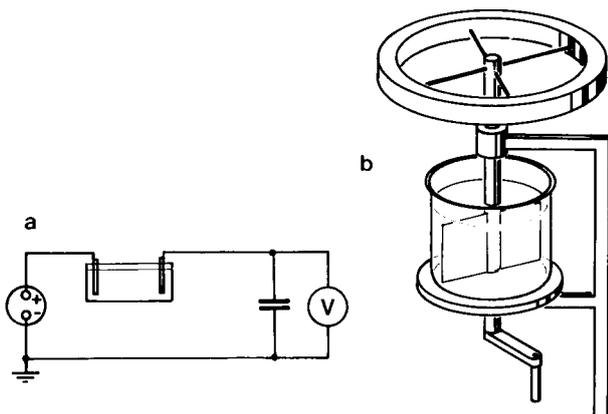


Abb. 3. a) Die Platten des Kondensators werden mit Hilfe des Netzgerätes mit Elektrizität geladen. Der Ladevorgang wird durch das Salzwasser verzögert.  
 b) Das Schwungrad wird mit Hilfe der Kurbel mit Drehimpuls geladen. Der Ladevorgang wird durch das Ölbad verzögert.

### 3.4 Die Messung der Drehimpulsstromstärke

Wenn man einen elektrischen Strom durch eine Spule schickt, entsteht ein Magnetfeld. Diese Erscheinung kann dazu benutzt werden, die Stärke des elektrischen Stroms zu messen (Abb. 4 a). Das geschieht in den meisten elektrischen Meßinstrumenten.

Wenn man einen Drehimpulsstrom durch eine elastische Welle schickt, so wird diese verdrillt (Abb. 4 b). Diese Erscheinung kann dazu benutzt werden, die Stärke des Drehimpulsstroms zu messen.

### 3.5 Die Kontinuitätsgleichung

Ändert sich die in einem Raumgebiet  $R$  enthaltene Ladungsmenge, so muß durch die Oberfläche von  $R$  ein Ladungsstrom fließen (Abb. 5 a). Die Änderung  $\Delta Q$  der Ladung  $Q$  pro Zeitintervall  $\Delta t$  plus die Stärke des Stroms  $I_Q$  durch die Oberfläche ergibt Null:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} + I_Q = 0.$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für die elektrische Ladung.

Ändert sich die in einem Raumgebiet  $R$  enthaltene Drehimpulsmenge, so muß durch die Oberfläche von  $R$  ein Drehimpulsstrom fließen (Abb. 5 b). Die Änderung  $\Delta L$  des Drehimpulses  $L$  pro Zeitintervall  $\Delta t$  plus die Stärke des Stroms  $I_L$  durch die Oberfläche ergibt Null:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} + I_L = 0.$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für den Drehimpuls.

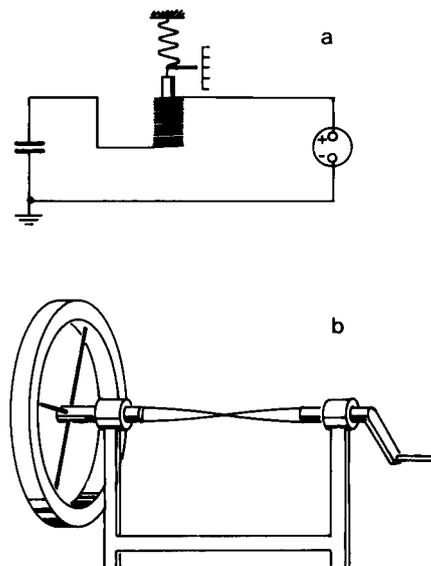


Abb. 4. a) Messung der elektrischen Stromstärke über das Magnetfeld einer Spule.  
 b) Messung der Drehimpulsstromstärke (des Drehmoments) über die Verdrillung eines elastischen Stabes.

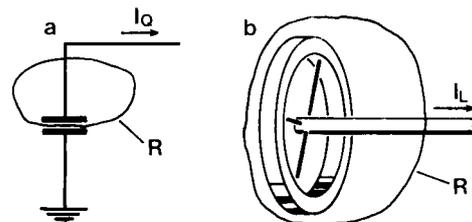


Abb. 5. a) Die elektrische Ladung im Innern des Raumbereichs  $R$  kann sich nur dadurch ändern, daß ein elektrischer Strom durch die Oberfläche von  $R$  fließt.  
 b) Der Drehimpuls im Innern des Raumbereichs  $R$  kann sich nur dadurch ändern, daß ein Drehimpulsstrom durch die Oberfläche von  $R$  fließt.

### 3.6 Drehimpulsleichgewicht

Von zwei verschieden gebauten Kondensatoren wird der eine geladen, der andere bleibt ungeladen. Die Kondensatoren werden nun durch Schließen eines Schalters miteinander verbunden (Versuchsaufbau wie in Abbildung 2 a). Man beobachtet, daß sich die Ladungen beider Kondensatoren ändern, es fließt ein Strom vom einen zum andern. Dieser Vorgang ist aber nach kurzer Zeit beendet: obwohl die Verbindung noch existiert, fließt kein elektrischer Strom mehr. Den Zustand, der sich jetzt eingestellt hat, nennt man »elektrisches Gleichgewicht«. Man sagt, zwischen den beiden Kondensatoren herrscht elektrisches Gleichgewicht. Die Beobachtung der Meßinstrumente zeigt, daß im Gleichgewicht die Spannungen an den Kondensatoren gleich sind.

Von zwei verschieden gebauten Schwungrädern wird das eine mit Drehimpuls geladen, das andere nicht. Die Schwungräder werden nun über die Rutschkupplung miteinander verbunden. Man beobachtet, daß sich der Drehimpuls beider Schwungräder ändert, es fließt ein Drehimpulsstrom vom einen zum andern. Dieser Vorgang hört aber nach kurzer Zeit wieder auf: obwohl die Verbindung noch existiert, fließt kein Drehimpulsstrom mehr. Den Zustand, der sich jetzt eingestellt hat, nennt man Rotationsgleichgewicht. Zwischen den beiden Schwungrädern herrscht Rotationsgleichgewicht. Die Beobachtung zeigt, daß im Rotationsgleichgewicht die Winkelgeschwindigkeiten der Schwungräder gleich sind.

### 3.7 Die Drehimpulskapazität

Wir machen den in 3.6 beschriebenen Versuch noch einmal, aber jetzt mit zwei gleich gebauten Kondensatoren. Die Ladung des einen sei am Anfang  $Q$ , seine Spannung  $U$ . Ladung und Spannung des anderen Kondensators seien Null. Wenn sich das elektrische Gleichgewicht eingestellt hat, muß, aus Symmetriegründen, jeder Kondensator die Ladung  $Q/2$  haben. Die Beobachtung des Voltmeters an dem anfangs geladenen Kondensator zeigt, daß die Spannung dieses Kondensators beim Einstellen des Gleichgewichts auf den halben Wert abnimmt. Die Abnahme der Ladung auf den halben Wert ist also mit der Abnahme der Spannung auf den halben Wert verbunden. Wir schließen, daß für einen Kondensator die Spannung proportional zur Ladung ist:

$$Q = C \cdot U.$$

Den Proportionalitätsfaktor  $C$ , der den Kondensator charakterisiert, nennt man die (Ladungs-)Kapazität des Kondensators.

Wir führen den in 3.6 beschriebenen Schwungradversuch mit zwei gleich gebauten Schwungrädern aus. Der Drehimpuls des einen sei am Anfang  $L$ , seine Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit des anderen seien am Anfang Null. Wenn sich das Rotationsgleichgewicht eingestellt hat, muß, aus Symmetriegründen, jedes Schwungrad den Drehimpuls  $L/2$  haben. Die Messung der Winkelgeschwindigkeit des anfangs geladenen Schwungrads (mit einem Stroboskop) zeigt, daß die Winkelgeschwindigkeit dieses Rades beim Einstellen des Gleichgewichts auf den halben Wert abnimmt. Die Abnahme des Drehimpulses auf den halben Wert ist also mit der Abnahme der Winkelgeschwindigkeit auf den halben Wert verbunden. Wir schließen, daß für ein Schwungrad die Winkelgeschwindigkeit proportional zum Drehimpuls ist:

$$L = J \cdot \omega.$$

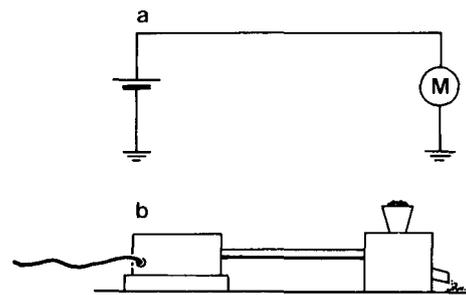


Abb. 6. a) Mit Hilfe eines Drahtes wird Energie von der Batterie zum Motor übertragen.

b) Mit Hilfe einer Welle wird Energie vom Motor zur Kaffeemühle übertragen.

Den Proportionalitätsfaktor  $J$ , der das Schwungrad charakterisiert, nennt man das Trägheitsmoment des Schwungrads. Man könnte ihn auch »Drehimpulskapazität« nennen.

### 3.8 Energieübertragung durch rotierende Wellen

Abbildung 6a zeigt, wie Energie von einer Batterie zu einem Elektromotor übertragen wird. Die Energie fließt von der Batterie zum Motor; die Elektrizität dagegen fließt »im Kreis herum«: durch den Draht von der Batterie zum Motor und durch die Erde vom Motor zurück zur Batterie. Der Energiestrom  $P$  (die »Leistung«) hängt mit dem Potentialunterschied  $\Delta\varphi = U$  zwischen Draht und Erde und dem elektrischen Strom  $I_Q$  zusammen über

$$P = U \cdot I_Q.$$

Da man  $\varphi_{\text{Erde}} = 0$  festlegt, ist hier der Wert von  $\Delta\varphi$  gleich dem Wert von  $\varphi_{\text{Draht}}$ .

Abbildung 6b zeigt, wie Energie von einem Motor zu einer Kaffeemühle übertragen wird. Die Energie fließt vom Motor zur Kaffeemühle; der Drehimpuls dagegen fließt »im Kreis herum«: durch die Welle vom Motor zur Mühle und durch die Erde von der Mühle zurück zum Motor. Der Energiestrom  $P$  hängt mit dem Winkelgeschwindigkeitsunterschied zwischen Welle und Erde und dem Drehimpulsstrom  $I_L$  zusammen über

$$P = \Delta\omega \cdot I_L.$$

Legt man  $\omega_{\text{Erde}} = 0$  fest, so ist hier der Wert von  $\Delta\omega$  gleich dem Wert von  $\omega_{\text{Welle}}$ .

Im Fall von Abbildung 6a sagt man, von der Batterie zum Motor werde Energie in elektrischer Form übertragen. Wir ziehen vor zu sagen, die elektrische Ladung sei der »Energieträger«, denn der Ausdruck »elektrische Energie« suggeriert, es gebe verschiedene physikalische Größen Energie [5].

Im Fall von Abbildung 6b sagt man, der Motor leiste an der Kaffeemühle Arbeit. Diese Sprechweise stammt aus einer Zeit, in der man die Energie als physikalische Größe noch nicht kannte. Wir ziehen vor zu sagen, der Drehimpuls sei der »Energieträger«.

Anhand von Abbildung 7 erkennt man, daß das Getriebe das Rotationsanalogon des elektrischen Transformators ist.

### 3.9 Schwungrad und Aufziehmotor als Energiespeicher

Fließt ein elektrischer Strom auf die eine Platte eines Kondensators (und ein ebenso starker Strom von der anderen herunter), so fließt ein Energiestrom zum Kondensator. Im Feld des Kondensators wird Energie gespeichert. Die gespeicherte Energiemenge erhält man durch Integration des hineinfließenden Energiestroms über die Zeit:

$$E = \int_0^t P dt = \int_0^t U I_Q dt = C \int_0^U U dU = (C/2) U^2.$$

Wir haben die Beziehung  $I_Q = C \cdot \dot{U}$  (aus  $Q = C \cdot U$ ) benutzt.

Liegt zwischen den Enden einer Spule eine Spannung, so fließt ein Energiestrom zur Spule. Im Feld der Spule wird Energie gespeichert. Die gespeicherte Energiemenge erhält man wieder durch Integration von  $P$  über die Zeit:

$$E = \int_0^t P dt = \int_0^t U I_Q dt = L \int_0^{I_Q} I_Q dI_Q = (L/2) I_Q^2.$$

Hier wurde die Beziehung  $U = L \cdot \dot{I}_Q$  benutzt.  $L$  ist die Induktivität der Spule (nicht zu verwechseln mit dem Drehimpuls, der durch dasselbe Symbol dargestellt wird).

Fließt ein Drehimpulsstrom in ein Schwungrad, so fließt auch ein Energiestrom in das Schwungrad hinein. Im Schwungrad wird Energie gespeichert. Die gespeicherte Energiemenge ist:

$$E = \int_0^t P dt = \int_0^t \omega I_L dt = J \int_0^\omega \omega d\omega = (J/2) \omega^2.$$

Hier wurde die Beziehung  $I_L = J \dot{\omega}$  (aus  $L = J \cdot \omega$ ) benutzt.

Verdrillt man einen elastischen Stab oder zieht man eine Uhrfeder auf, so fließt während des Verdrillens bzw. Aufziehens ein Energiestrom in den Stab bzw. die Feder hinein. Im Stab bzw. in der Feder wird Energie gespeichert. Die gespeicherte Energiemenge ist:

$$E = \int_0^t P dt = \int_0^t \omega I_L dt = D \int_0^{I_L} I_L dI_L = (D/2) I_L^2.$$

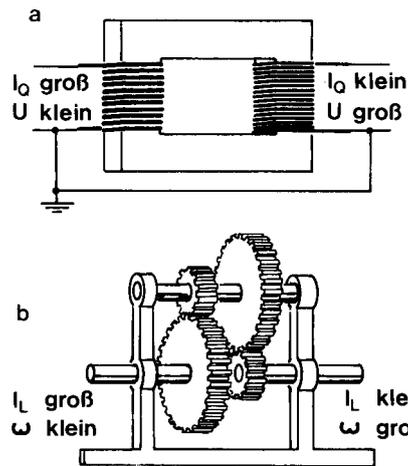


Abb. 7. a) Elektrischer Transformator. Der Energiestrom  $P = U \cdot I_Q$  ist am Eingang und am Ausgang gleich groß.  
b) Getriebe. Der Energiestrom  $P = \Delta\omega \cdot I_L$  ist am Eingang und am Ausgang gleich groß.

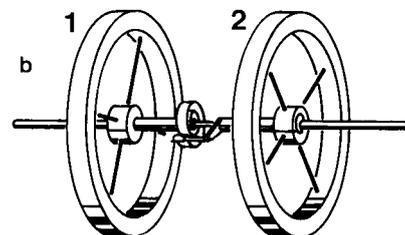
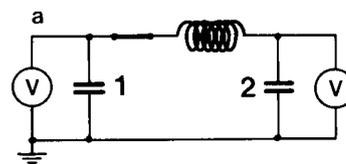


Abb. 8. a) Das elektrische Gleichgewicht stellt sich erst ein, nachdem die Ladung zwischen den beiden Kondensatoren ein paarmal hin- und hergeflossen ist.  
b) Das Rotationsgleichgewicht stellt sich erst ein, nachdem der Drehimpuls zwischen den beiden Schwungrädern ein paarmal hin- und hergeflossen ist.

Hier wurde die Beziehung  $\omega = D \cdot \dot{I}_L$  (aus  $\alpha = D \cdot I_L$ , wo  $\alpha$  der Verdrillungswinkel ist) benutzt.  $D$  ist das Richtmoment der Feder.

### 3.10 Schwingungen und der elastische Stoß

Zwei Kondensatoren gleicher Kapazität sind über einen Schalter und eine Spule miteinander verbunden. Der Ladungszustand der Kondensatoren kann an zwei Voltmetern verfolgt werden (Abb. 8a). Der Schalter ist zunächst offen, Kondensator 1 ist geladen und Kon-

densator 2 entladen. Nach dem Schließen des Schalters beobachtet man, daß die Ladung zwischen den Kondensatoren ein paarmal hin- und herpendelt, bis sich schließlich elektrisches Gleichgewicht einstellt: an beiden Kondensatoren liegt dieselbe Spannung.

Zwei Schwungräder gleichen Trägheitsmoments sind über eine Feder miteinander verbunden (Abb. 8b). Schwungrad 1 wird nun durch einen kurzen Anstoß in Drehung versetzt, d. h. mit Drehimpuls geladen, Schwungrad 2 dagegen hat am Anfang keinen Drehimpuls. Man beobachtet, daß der Drehimpuls zwischen den Schwungrädern viele Male hin- und herpendelt, bis sich schließlich Rotationsgleichgewicht einstellt: beide Räder drehen sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit.

In die Anordnung von Abbildung 8a wird nun in Reihe mit dem Schalter eine Diode eingebaut. Wieder wird Kondensator 1 geladen, Kondensator 2 nicht, und der Schalter wird geschlossen. Diesmal gelangt das System nicht ins elektrische Gleichgewicht: Die Ladung schwingt von Kondensator 1 auf Kondensator 2 hinüber, kann aber nicht wieder zurück, da die Diode den Weg versperrt. Am Ende sitzt also die Ladung fast vollständig auf Kondensator 2.

Wir koppeln nun die Schwungräder von Abbildung 8b so, daß sie sich von allein trennen, sobald der Drehimpulsstrom seine Richtung ändert. (Die Feder klinkt aus, sobald sie entspannt ist. Denselben Effekt hätte ein Freilauf.) Schwungrad 1 wird mit Drehimpuls geladen. Der Drehimpuls fließt durch die Feder vollständig auf Schwungrad 2, kann aber nicht wieder zurückfließen, da die Feder ausgekuppelt hat. Am Ende sitzt also der Drehimpuls vollständig auf Schwungrad 2. Den analogen Vorgang in der Translationsmechanik nennt man einen elastischen Stoß. Das zuvor geschilderte Experiment mit der Diode ist also das elektrische Analogon des elastischen Stoßes.

#### 4 Diskussion

Der im vorigen Abschnitt skizzierte Kurs hat, wie bereits in der Einleitung erklärt wurde, drei Besonderheiten: 1) Der Drehimpuls wird als eigene Größe eingeführt, 2) das Drehmoment wird als Drehimpulsstrom bezeichnet, und 3) es wird von einer Analogie zwischen Elektrizitätslehre und Rotationsmechanik Gebrauch gemacht. – Da diese drei Merkmale recht unabhängig voneinander sind, sollen sie auch unabhängig voneinander, d. h. eins nach dem anderen, begründet werden.

##### 4.1 Der Drehimpuls als nicht abgeleitete Größe

Der Einführung des Drehimpulses durch Definition nach Gleichung (1) kann man zwei Vorwürfe

machen: Erstens kann man  $L$  als  $r \times p$  gar nicht definieren, denn es gibt Systeme, deren Drehimpuls sich nicht auf diese Art darstellen läßt: der Spin eines Elementarteilchens läßt sich nicht auf den Impuls irgendwelcher Teile des Elementarteilchens zurückführen [6]. Zweitens ist es, selbst wenn man sich auf die makroskopische Mechanik beschränkt, unzweckmäßig, den Drehimpuls nach (1) einzuführen, denn wenn man versucht, sich über  $mr \times v$  eine Anschauung von  $L$  zu bilden, hat man Schwierigkeiten, gerade die einfachsten Eigenschaften von  $L$  zu begreifen: daß  $L$  Mengencharakter hat und daß  $L$  eine Erhaltungsgröße ist. Die Erhaltung erscheint dann nämlich als das Ergebnis eines merkwürdigen Zusammenspiels der Größen  $r$ ,  $m$  und  $v$ . Betont man dagegen den Mengencharakter und die Eigenständigkeit von  $L$  von Anfang an, so ist die Drehimpulserhaltung eine ganz natürliche Erwartung der Schüler.

##### 4.2 Das Drehimpulsstrombild

Wenn man von einem Drehmoment spricht, das ein Körper  $A$  auf einen anderen, entfernten Körper  $B$  ausübt, benutzt man eine Sprache, die noch aus einer Zeit stammt, als physikalische Wechselwirkungen als Fernwirkungen aufgefaßt wurden. Die Beschreibung im »Drehimpulsstrombild« bringt zum Ausdruck, wie wichtig die zwischen  $A$  und  $B$  befindliche Verbindung ist. Sie ist daher unserer modernen nahewirkungstheoretischen Auffassung der Mechanik angemessener.

##### 4.3 Die Wahl der Analogie

Daß zwischen Teilgebieten der Physik Analogien existieren, ist seit langem bekannt, und es gibt Bücher, die ausschließlich der Untersuchung solcher Analogien gewidmet sind [7]. Am bekanntesten sind die Analogien zwischen Translationsmechanik, Rotationsmechanik und Elektrizitätslehre. Viele Lehrbücher der Physik nutzen solche Analogien aus. Besonders beliebt sind sie bei der Diskussion von Schwingungen und Wellen.

Bei einer Analogie zwischen Mechanik und Elektrizitätslehre wird stets ein Vektor auf einen Skalar abgebildet. Man hat es darum eigentlich immer mit drei Analogien zu tun: jede der drei Komponenten eines Vektors aus der Mechanik wird auf einen Skalar in der

$\vec{\alpha}$	$Q$
$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}$	$I_Q$
$M$	$\varphi$

Tab. 1

Elektrische Ladung $Q$	Drehimpuls $L$	Impuls $p$	Entropie $S$	Menge $n$
Elektrische Stromstärke $I_Q$	Drehimpulsstromstärke (= Drehmoment) $I_L(M)$	Impulsstromstärke (= Kraft) $I_P(F)$	Entropiestromstärke $I_s$	Mengenstromstärke $I_n$
Elektrisches Potential $\varphi$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$	Geschwindigkeit $v$	Temperatur $T$	Chemisches Potential $\mu$

Tab. 2

Elektrizitätslehre abgebildet. In der Kursbeschreibung in Abschnitt 3 haben wir uns auf eine einzige Komponente des Drehimpulses beschränkt. Die Verallgemeinerung auf 3 Komponenten wird im weiteren Verlauf des Kurses geschehen.

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, zwei gegebene Teilgebiete der Physik aufeinander abzubilden. Unter den Abbildungen Rotationsmechanik → Elektrizitätslehre ist diejenige am weitesten verbreitet, bei der dem Drehwinkel  $\vec{\alpha}$  die elektrische Ladung  $Q$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  der elektrische Strom  $I_Q$  und dem Drehmoment  $M$  das elektrische Potential  $\varphi$  entspricht (Tab. 1). (Wir nennen sie hier die  $\vec{\alpha}$ - $Q$ -Analogie.) Welche Größen sich bei der Analogie entsprechen, die dem hier vorgeschlagenen Mechanikkurs zugrunde liegt, geht aus den Spalten 1 und 2 von Tabelle 2 hervor. (Wir nennen sie die  $L$ - $Q$ -Analogie.) Tabelle 3 enthält noch eine detailliertere Gegenüberstellung.

Mathematisch sind die  $\vec{\alpha}$ - $Q$ - und die  $L$ - $Q$ -Analogie völlig äquivalent, physikalisch aber nicht. Während die  $\vec{\alpha}$ - $Q$ -Analogie lediglich Beziehungen gleicher mathematischer Struktur aufeinander abbildet, gestattet es die  $L$ - $Q$ -Analogie, daß man sich von Erscheinungen der Elektrizitätslehre und von der Mechanik dieselbe Anschauung bildet. Daß das möglich ist, liegt daran, daß die Größen  $L$  und  $Q$  viel mehr gemeinsam haben als die Größen  $\vec{\alpha}$  und  $Q$ :

- Sowohl  $Q$  als auch  $L$  sind Größen mit Mengeneigenschaften [8], nicht aber  $\vec{\alpha}$ .
- Sowohl  $Q$  als auch  $L$  sind Erhaltungsgrößen.
- Beide Größen haben ein Elementarquantum: die Elementarladung  $e$  bzw. die Plancksche Konstante  $h$ .

Elektr. Ladung $Q$ Elektr. Stromstärke $I_Q$	Drehimpuls $L$ Drehimpulsstromstärke $I_L$
Elektr. Leitfähigkeit $\sigma$ Magnetfeld $\frac{dQ}{dt} + I_Q = 0$	Viskosität $\eta$ Verdrillung $\frac{dL}{dt} + I_L = 0$
Elektr. Potential $\varphi$ Elektr. Spannung $U = \Delta\varphi$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigkeitsdifferenz $\Delta\vec{\omega}$
Elektr. Gleichgewicht $\varphi_1 = \varphi_2$ $P = U \cdot I_Q$	Rotationsgleichgewicht $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$ $P = \Delta\vec{\omega} \cdot I_L$
Kondensator Kapazität $C$ $Q = C \cdot U$	Schwungrad Trägheitsmoment $J$ $L = J \cdot \vec{\omega}$
$E = \frac{C}{2} U^2$	$E = \frac{J}{2} \vec{\omega}^2$
Spule Induktivität $L$ $U = L \cdot \dot{I}_Q$	Torsionsfeder Richtmoment $D$ $\vec{\omega} = D \cdot \dot{I}_L (= D\dot{M})$
$E = \frac{L}{2} I_Q^2$	$E = \frac{D}{2} I_L^2$

Tab. 3

Daß die  $L$ - $Q$ -Analogie eine größere physikalische Bedeutung hat, erkennt man auch daran, daß weitere Analogien dieses Typs gebildet werden können, nämlich Analogien, bei denen mengenartige Größen, deren Ströme und die zugehörigen intensiven Größen jeweils aufeinander abgebildet werden. Damit haben nicht nur Elektrizitätslehre, Translations- und Rotationsmechanik dieselbe Struktur, sondern auch Wärmelehre und chemische Thermodynamik [3], [8], [9], [10].

Literatur

- [1] G. FALK - W. RUPPEL: Energie und Entropie. S. 45. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976.
- [2] G. FALK - F. HERRMANN: Das Energiebuch. S. 86-95. - Hannover: Schroedel 1981.
- [3] F. HERRMANN - W. MÖLLER - D. PLAPPERT: Konzepte eines zeitgemäßen Physikunterrichts. Heft 3. - Hannover: Schroedel 1979.
- [4] G. FALK - F. HERRMANN (Hg.): Konzepte eines zeitgemäßen Physikunterrichts. Heft 5. - Hannover: Schroedel 1982.
- [5] G. FALK - F. HERRMANN - G. SCHMID: Energy forms or energy carriers? - Am. J. Phys. 51 (1983) 1074.

- [6] G. FALK - W. RUPPEL: *Mechanik Relativität Gravitation*. 3. Aufl. S. 249. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983.
- [7] H. F. OLSON: *Dynamical Analogies*. - Princeton, New Jersey: van Nostrand Co. 1958.
- [8] G. FALK - W. RUPPEL: *Energie und Entropie*. S. 43-115 und S. 153-197. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1976.
- [9] G. SCHMID: An up-to-date approach to physics. - *Am. J. Phys.* **52** (1984) 794.
- [10] G. JOB: *Neudarstellung der Wärmelehre*. - Frankfurt: Akad. Verlagsges. 1972.

---

*Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. F. Herrmann, Institut für Didaktik der Physik, Universität Karlsruhe, Kaiserstraße 12, 7500 Karlsruhe*