Kraftgesetze der Elektrodynamik

Eine physikalische und didaktische Analyse

Friedrich Herrmann

Es gibt drei Möglichkeiten, elektrostatische Kräfte zu berechnen: Erstens mit dem Coulomb'schen Gesetz, zweitens mit der namenlosen Gleichung $F = Q \cdot E$ und drittens mit der Formel für die mechanischen Spannungen im Feld. Die Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit der drei Formeln wird unter zwei Gesichtspunkten diskutiert:

- **Mit welchem Kraftgesetz lässt sich ein gegebenes Problem am leichtesten lösen?**
- **Durch welches Kraftgesetz wird das Verständnis des Feldbegriffs am besten gefördert?**

Es wird auch gezeigt, dass die Kraftgesetze der Magnetostatik und der Gravitation weitgehend analog zu denen der Elektrostatik sind.

1 Einleitung

Im Physikunterricht begegnen den Schüler/inne/n verschiedene »Kraftgesetze«. Mit Kraftgesetz meinen wir eine Formel, die es gestattet, die Kraft, die auf einen Körper wirkt und durch ein Feld vermittelt wird, zu berechnen. Im Fall der Elektrostatik sind es

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \qquad (1)$$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} \qquad (2)$$

Die Buchstabensymbole haben die übliche Bedeutung: F ist die Kraft, Q die elektrische Ladung, r der Abstand zwischen den geladenen Körpern, E die elektrische Feldstärke und ε_0 die elektrische Feldkonstante.

Bei dem F auf der linken Seite der beiden Gleichungen kann es sich um dieselbe Kraft handeln, denn man kann ein und dieselbe Kraft auf verschiedene Arten berechnen. Man wird sich für die eine oder andere Formel entscheiden, je nachdem, was für Werte – Ladungen oder Feldstärken – gegeben sind, und je nachdem, wie die Symmetrie oder Geometrie des Problems ist.
Außer den Formeln (1) und (2) gibt es noch eine dritte, die allerdings so formuliert wird, dass man nicht die Kraft berechnet, sondern die »Kraft pro Fläche«, d. h. die mechanische Spannung σ. In der Schule wird sie gewöhnlich nicht behandelt. Mit ihr haben wir eine dritte Möglichkeit, eine elektrostatische Kraft zu berechnen.

Es ist im Folgenden mein Anliegen, die Brauchbarkeit oder Zweckmäßigkeit dieser drei Formeln miteinander zu vergleichen. Dabei spielen zwei Kriterien eine Rolle:

- Mit welchem Kraftgesetz lässt sich ein Problem am leichtesten lösen?
- Mit welchem Kraftgesetz wird das Verständnis des Feldbegriffs am besten gefördert?

Es wird auch gezeigt, dass die Kraftgesetze der Magnetostatik und der Gravitation weitgehend analog zu denen der Elektrostatik sind. Alle Schlüsse, die wir im Zusammenhang mit der Elektrostatik ziehen, lassen sich auch auf diese Themenbereiche übertragen.
Zunächst stelle ich die drei Kraftgesetze der Elektrostatik vor; zwei davon nur kurz, denn sie sind den Leserinnen und Lesern wohlbekannt, das dritte etwas ausführlicher.

2 Die drei Kraftgesetze der Elektrostatik

2.1 Das Coulomb-Gesetz

Im Coulomb-Gesetz, Gleichung (1), treten zwei Ladungen auf, aber keine Feldstärken. Es macht eine Aussage über zwei Kräfte: Die Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt, und die, die Körper 2 auf Körper 1 ausübt (Abb. 1).

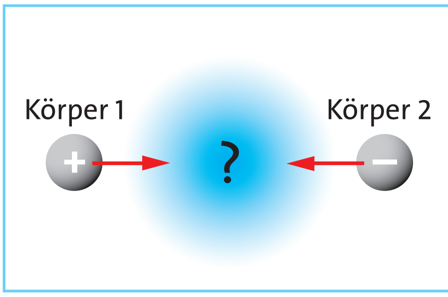


Abb. 1.
Mit dem Coulomb-Gesetz berechnet man die Kräfte auf zwei Körper.

Wichtig in unserem Zusammenhang ist, dass es keinerlei Aussage über irgendetwas macht, das sich in dem Bereich zwischen den geladenen Körpern befinden könnte.

2.2 Die namenlose Gleichung $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$

Gleichung (2) wird oft als Definitionsgleichung der elektrischen Feldstärke eingeführt. Sie ist beliebt im Zusammenhang mit der Formulierung von Rechenaufgaben, insbesondere auch Abitur-Aufgaben.
In der Gleichung tritt nur eine einzige Ladung auf, dafür aber auch eine Feldstärke. Wenn wir sie anwenden zur Berechnung

MNU Journal – Ausgabe 03.2019 – ISSN 0025-5866 – © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

der Kraft auf den rechten Körper in Abbildung 2, können wir sie auch so schreiben:

$$\vec{F}_2 = Q_2 \cdot \vec{E}_1$$

$\vec{F}_2$ ist die Kraft, die auf Körper 2 wirkt, Q_2 ist die Ladung von Körper 2, $\vec{E}_1$ ist »das Feld von Körper 1«, wie man gewöhnlich sagt. Besser ist es, sich klarer auszudrücken: Das Feld, das an Körper 1 hängen würde, wenn dieser allein da wäre, wenn also Körper 2 weg wäre. Das tatsächlich vorhandene Feld sieht anders aus als das des isolierten Köpers 1. Damit ist auch die Feldstärke am Ort von Körper 2 nicht gleich $\vec{E}_1$. Trotzdem steht in der Formel $\vec{E}_1$.

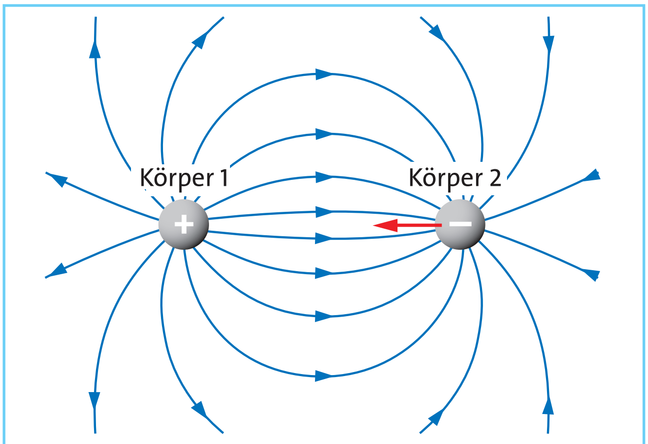


Abb. 2. Die Formel $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ gestattet die Berechnung einer Kraft auf einen Körper aus der elektrischen Ladung dieses Körpers und der Feldstärke, die andere geladene Körper verursachen würden.

2.3 Druck- und Zugspannungen im elektrischen Feld

Nun zu unserem dritten Kraftgesetz. Es wird in der Schule gewöhnlich nicht behandelt – zu Unrecht, wie ich versuchen werde zu zeigen. Wie schon gesagt, wird es so formuliert, dass man nicht eine Kraft, sondern eine »Kraft pro Fläche«, d. h. eine mechanische Spannung berechnet.
Es empfiehlt sich, die mechanischen Spannungen in Materie im Mechanikunterricht einzuführen, siehe etwa (Herrmann, 2016a). Die Anschauung, die die Schüler/innen aus dem Alltagsleben von mechanischen Spannungen haben, ist zuverlässiger als die, die sie von der Kraft haben.

Mechanische Spannungen herrschen nicht nur in Materie, sondern auch in jedem elektrischen (und auch magnetischen) Feld: In Richtung der Feldlinien steht das Feld unter Zugspannung, in allen Richtungen quer dazu unter Druckspannung. Diese Spannungen sind dem Betrage nach gleich und lassen sich leicht aus der Feldstärke berechnen:

$$\sigma_{\parallel} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 \qquad (3a)$$

$$\sigma_{\perp} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 \qquad (3b)$$

$\sigma_{\parallel}$ ist die Spannung in Feldlinienrichtung, $\sigma_{\perp}$ die in der Querrichtung. Es fällt auf, dass der Ausdruck derselbe ist, wie der für die Energiedichte. Man braucht sich hier nicht um den »Verursacher« des Feldes zu kümmern. $\vec{E}$ ist einfach die Feldstärke des Feldes, das vorhanden ist.
Zu den mechanischen Spannungen im Feld gehört kein Pfeil. Die Zugspannung in Feldlinienrichtung hat dieselbe Richtung wie die Feldlinie, ist aber im Gegensatz zu ihr nicht orientiert[1]. Das kommt in den Gleichungen (3) zum Ausdruck: Die mechanischen Spannungen hängen vom Quadrat der Feldstärke ab. Das Minuszeichen steht für Zug-, das Pluszeichen für Druckspannung.
Die Gleichungen (3) sind einfach und benutzerfreundlich. Sie werden zu Unrecht in den Lehrbüchern (auch denen der Hochschule) nur stiefmütterlich behandelt. Schuld daran ist wohl die Tatsache, dass σ eine Tensorgröße ist. Die Aussage, eine Größe sei ein Tensor ist für viele abschreckend: Vektoren ja, Tensoren nein. Nun braucht man aber für die einfachen Anwendungen, um die es in der Schule geht, von Tensorrechnung gar nichts zu wissen.
Dass die Gleichungen das wiedergeben, was man erwarten würde, sei an Hand von Abbildung 3 erläutert. Zwei elektrisch geladene Platten; die eine übt auf die andere eine Kraft aus, und die andere auf die eine, Abbildung 3a. Man kann es auch

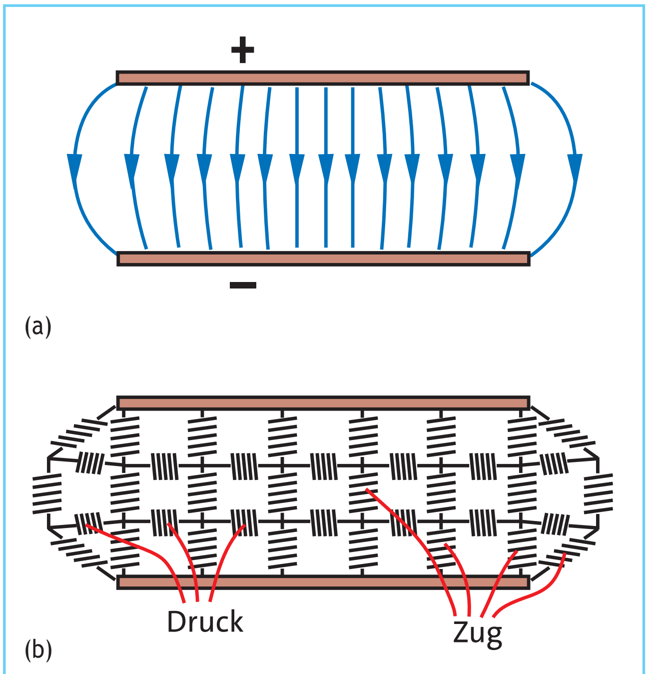
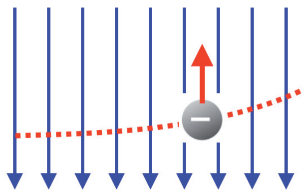
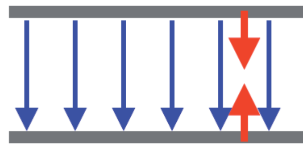


Abb. 3. (a) Das Feld ist ein real existierendes Gebilde, wie ein Gegenstand. Im Feld herrschen mechanische Spannungen: in Feldlinienrichtung Zug-, quer dazu Druckspannungen. (b) Materielles Ersatzsystem. Die Spannungsverteilung wurde diskretisiert: Die mechanischen Spannungen sind hier nicht kontinuierlich verteilt, sondern auf die Federn konzentriert.

[1] Man muss unterscheiden zwischen »Richtung« und »Orientierung«: Eine Straße, die in Ost-West-Richtung verläuft, entspricht einer Geraden. So wie eine Gerade hat auch sie keine Orientierung. Die »Richtungsfahrbahnen« einer Autobahn dagegen haben eine Orientierung: Die eine in Richtung West, die anderen in Richtung Ost. Man kann sie durch eine Gerade mit einem Pfeil darstellen.

			
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}$	😀	😟	😟
$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	😏	😀	😏
$\sigma_{\parallel} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$	😟	😟	😀

Tab. 1. Jede der drei Formeln in der linken Spalte ist zur Lösung eines der Probleme der oberen Zeile besonders geeignet.

so sagen: Die eine Platte zieht an der anderen. Immer wenn irgendein A an irgendeinem B zieht, muss es eine Verbindung zwischen A und B geben, die unter Zugspannung steht. Im Fall unseres Kondensators ist die einzige Verbindung, die in Frage kommt, das elektrische Feld. Das Feld muss also in vertikaler Richtung unter Zugspannung stehen. Die untere Platte zieht über das Feld an der oberen, oder die obere zieht mit Hilfe des Feldes an der unteren, oder das Feld zieht die beiden Platten zur Mitte hin – man kann es ausdrücken wie man will.
Die Wirkung der Druckspannung quer dazu ist etwas subtiler. Um sie zu verstehen, betrachten wir ein »Ersatz-System« (Abb. 3b). Statt die Platten zu laden, sodass sich zwischen ihnen ein Feld befindet, bilden wir die Wirkung des Feldes mit Hilfe von Federn nach. Die in der Abbildung etwas längeren stehen unter Zug-, die kürzeren unter Druckspannung. Man sieht, wie sich der Druck der Querfedern (parallel zu den Platten) auf die Platten auswirkt: Die gestauchten, d. h. unter Druckspannung stehenden Federn halten sich außen an den schräg liegenden Federn fest, die selbst unter Zugspannung stehen, und die sich wiederum an den Platten festhalten. Sie bewirken damit eine Zugspannung innerhalb der Kondensatorplatten parallel zur Plattenrichtung. Existiert denn aber in einem echten Kondensator eine solche Zugspannung? Selbstverständlich. Und sie wird durch das elektrische Feld verursacht.

3 Bewertung der Kraftgesetze

Wir haben damit die drei Gleichungen (1), (2) und (3), mit denen eine elektrostatische Kraft berechnet werden kann.

Wir wollen uns nun vorstellen, wir seien nicht in unserer Lehrtradition, oder Tradition des Aufgabenstellens und -lösens befangen. Es würde sich dann die Frage stellen: Wozu ist jedes der drei Gesetze gut? Dabei hängt unsere Antwort von zwei Kriterien ab, die schon in der Einleitung erwähnt wurden:

- Mit welchem Kraftgesetz lässt sich ein Problem am leichtesten lösen?
- Mit welchem Kraftgesetz wird das Verständnis des Feldbegriffs am besten gefördert?

3.1 Welche Formel für welche Probleme

Grundsätzlich müssen wir uns eingestehen, dass wir im Unterricht nicht unbedingt die Probleme lösen, die uns als besonders interessant und wichtig erscheinen. Vielmehr suchen wir uns solche Probleme und Fragestellungen aus, die zu den Werkzeugen passen, welche wir vorher aus irgendwelchen Gründen eingeführt haben. Etwas überspitzt formuliert: Wir lösen nicht die Probleme, die wir lösen wollen, sondern die, die wir lösen können.

In diesem Sinn wollen wir für die folgende Diskussion drei Probleme wählen, von denen jedes typisch ist für eine der drei Kraft-Formeln, d. h. jedes kann mit einer von ihnen besonders leicht gelöst werden. Der Übersichtlichkeit halber sind die drei Probleme, die drei Formeln und unser Urteil über die Lösbarkeit in Tabelle 1 dargestellt. Die drei Probleme (erste Zeile von links nach rechts) noch einmal in Worten:

1. Berechne die Kraft, die ein elektrisch geladener Körper auf einen anderen ausübt. Gegeben sind die Ladungen. Beide Körper sind klein im Vergleich zu ihrem Abstand.
2. Berechne die Kraft, die auf einen geladenen Körper ausgeübt wird, den man in ein homogenes Feld hineinbringt (wodurch die Homogenität zerstört wird).
3. Berechne die Kraft, die eine Kondensatorplatte auf die andere ausübt.

Die Smileys bringen zum Ausdruck, ob die Formel zur Berechnung des Problems der entsprechenden Spalte geeignet ist. Wir gehen die Einträge spaltenweise durch.
Die Kraft einer Punktladung auf eine andere berechnet man am bequemsten mit dem COULOMBschen Gesetz, das Smiley lächelt. Mit Gleichung (2) ist es etwas umständlicher, denn man müsste zuerst die Feldstärke des COULOMBfeldes berechnen, was aber mit den Mitteln der Schulphysik durchaus möglich ist. Die letzte Gleichung dagegen würde erfordern, dass

man σ (d. h. die Kraft pro Fläche) über die Oberfläche der Körper integriert. Das kann man zwar im Prinzip tun, kommt aber für die Schule nicht in Frage, zumal man es viel bequemer haben kann.
Nun die nächste Spalte: Die »Probeladung im homogenen Feld« (das in Wirklichkeit nicht homogen ist). Man könnte die Kraft mit dem COULOMBschen Gesetz berechnen, müsste dann aber die Ladung, die das »homogene Feld« erzeugt in viele kleine Ladungspakete zerlegen, auf jedes von ihnen das COULOMB-Gesetz anwenden und dann aufsummieren. Das wäre sehr ungeschickt, und nichts für die Schule. Mit Formel (2) geht es, wie jeder weiß, ganz einfach. Die dritte Formel würde wieder eine Integration erfordern.
Schließlich die letzte Spalte: Das COULOMBsche Gesetz kommt wieder nicht in Frage, denn auch hier müsste integriert werden. Gleichung (2) lässt sich benutzen, aber die dann nötige Begründung ist schwieriger: eine Platte in dem Feld, das vorhanden wäre, wenn nur die andere Platte vorhanden wäre. Es muss also begründet werden, dass man es dann mit der halben Feldstärke zu tun hat. Und man muss begründen, warum man die Formel benutzen darf, obwohl die »Probeladung« räumlich weit ausgedehnt ist. Dagegen ist das Problem sehr leicht lösbar mit der dritten Formel. Man setzt die Feldstärke des tatsächlich vorhandenen Feldes ein und multipliziert mit der Fläche der Kondensatorplatten – das Smiley lächelt.
Was können wir bisher schließen? Zu jeder der Formeln gibt es einen passenden Aufgabentyp.

3.2 Welche Formel ist für das Verständnis des Feldbegriffs am besten geeignet?

Wir möchten, dass die Schüler/innen eine Vorstellung vom Feld bekommen, die einer modernen Auffassung entspricht: das Feld als real existierendes physikalisches System.

Wir gehen die drei Formeln durch.

Die erste nimmt keinerlei Bezug auf ein Feld. Sie ist verträglich mit der Vorstellung von Fernwirkungen, und ihre Verwendung, sowie die begleitende Sprache fördert eine solche Vorstellung.

Die zweite ist in dieser Hinsicht die tückischste. Einerseits könnte man glauben, dass die Kraft hier nicht mit einer Fernwirkung begründet wird, schließlich setzt man doch in die Formel den Wert der Feldstärke am Ort des Körpers ein, für den man die Kraft berechnen will. Das Dumme ist, dass es nicht die Feldstärke des tatsächlich existierenden Feldes ist, sondern die des Feldes ohne Körper. Obwohl mathematisch die einfachste Formel, ist sie die begrifflich verwirrendste. Man mag versuchen, sich herauszureden (und tatsächlich findet man diese Argumente auch in der Literatur): Der »Probekörper« solle nur hinreichend klein sein, und vor allem solle seine Ladung gering sein, sodass er das ursprüngliche Feld nicht stört. Man weiß ja auch von anderen Messverfahren, dass das Messinstrument das zu untersuchende System nicht stören soll. (So soll ein Voltmeter einen hohen Innenwiderstand haben, ein Thermometer eine geringe Wärmekapazität etc.) Das ist aber eine schlechte Ausrede, und zwar aus zwei Gründen:

- Man kann eine Punktladung so klein machen wie man will. Am Ort der Ladung wird die zu ihr gehörende Feldstärke immer beliebig groß.
- Die Ladung des Probekörpers stört die Messung gar nicht. Gleichung (2) gilt, egal, wie groß die Ladung ist. Sie kann tausend mal größer sein als die Ladung, DIE DAS äußere Feld erzeugt.

Ich empfehle daher, den Feldbegriff nicht an Hand dieser Gleichung einzuführen.

Schließlich die dritte Gleichung. Sie ist die Gleichung meiner Wahl (HERRMANN, 2016b) Sie ist die einzige, die eine Eigenschaft des tatsächlich vorhandenen Feldes beschreibt. Sie bringt zum Ausdruck, dass das Feld ein »Objekt« ist, das existiert, egal ob irgendjemand eine Probeladung hineintut oder nicht. Darüber hinaus hat sie noch einen anderen begrifflichen Vorteil: Sie macht eine lokale Aussage. Wobei ich hier ganz allgemein dafür plädieren möchte, in der Schule lokale Aussagen stärker in den Vordergrund zu stellen. Lokale Aussagen sind die robusteren. Das gilt für die Formulierung von Erhaltungssätzen genau so, wie für Zustands- und Materialgleichungen, wie etwa für das Ohmschen Gesetz, oder in der Hochschullehre für die Maxwellschen Gleichungen.

Dass die Gleichung die »gesündere« Vorstellung vom Feld erzeugt, wollen wir noch an einem Beispiel zeigen: Eine Situation, die wir einmal mit dem COULOMBschen Gesetz interpretieren und einmal mit Hilfe der mechanischen Spannungen im Feld. Wir betrachten eine hohle, elektrisch geladene Kugel (Abb. 4). Wir stellen uns vor, dass die Kugel elastisch ist. Wird sie elektrisch geladen, so dehnt sie sich etwas aus.

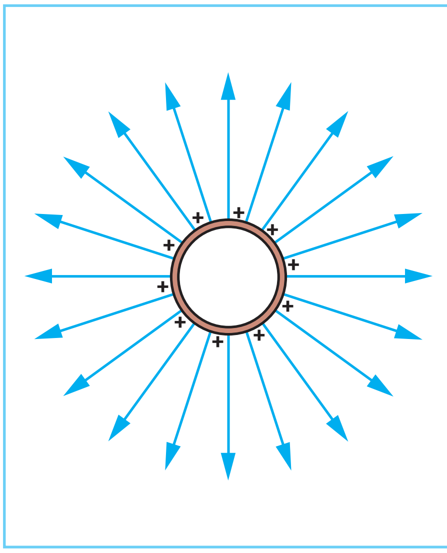


Abb. 4. Das elektrische Feld zieht an der Kugeloberfläche nach außen.

Hier zunächst die Deutung mit dem COULOMBschen Gesetz. Wir zerlegen die Ladung in Gedanken in kleine auf der Oberfläche verteilte Portionen oder Elemente. Wir betrachten nun eine dieser Ladungsportionen. Auf sie wirkt eine Kraft, die die Resultierende der Kräfte ist, die alle anderen Ladungsportionen ausüben. (Die Berechnung ist umständlich, liefert aber selbstverständlich das korrekte Resultat.) Nur eine begriffliche

Elektrostatik	Magnetostatik	Gravitostatik
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{Q_{m1} \cdot Q_{m2}}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}$
$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$	$\vec{F} = Q_m \cdot \vec{H}$	$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$
$\sigma_\parallel = -\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 \quad \sigma_\perp = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$	$\sigma_\parallel = -\frac{\mu_0}{2}\vec{H}^2 \quad \sigma_\perp = \frac{\mu_0}{2}\vec{H}^2$	$\sigma_\parallel = \frac{1}{8\pi G}\vec{g}^2 \quad \sigma_\perp = -\frac{1}{8\pi G}\vec{g}^2$

Tab. 2. Die Kraftgesetze der Elektrostatik, Magnetostatik und Gravitostatik haben dieselbe Gestalt.

Schwierigkeit ergibt sich. Wie die Kraft »übertragen« wird, sagt man zwar nicht, aber nach allem, was der oder die Lernende erwartet, geschieht es durch das Innere der Kugel hindurch, zumal man sich erinnert, dass eine Kraft angeblich außer durch ihren Betrag, noch durch Angriffspunkt und Wirkungslinie bestimmt ist. Die Wirkungslinie läuft hier nun gerade durch den feldfreien Raum. Also wird man schließen: Es ist besser man fragt nicht danach, wie die Kraft die Strecke überwindet, d. h. man macht sich am besten gar keine Vorstellung davon, wie die Welt funktioniert. Augen zu und durch. Die Gleichung wird schon das richtige Ergebnis liefern.

Ganz anders die Deutung, wenn man das Feld als physikalisches Objekt ernst nimmt. Das Feld ist nur außen. Es steht in Feldlinienrichtung unter Zugspannung. Da es an der Oberfläche aufhört, wird dieser Zug an die Kugel weiter gegeben; das Feld zieht an der Kugeloberfläche nach außen. Mit Gleichung (3) lässt sich die Kraft, die auf ein vorgegebenes Flächenelement wirkt, leicht berechnen, wenn Ladung und Kugelradius gegeben sind.

4 Kräfte im magnetischen Feld

In der Magnetostatik ist alles wie in der Elektrostatik, auch wenn die Lehrtradition einen anderen Eindruck entstehen lässt. Man ersetzt einfach die elektrische Ladung durch die magnetische Ladung (oft Polstärke genannt), die elektrische durch die magnetische Feldstärke und ε_0 durch μ_0, und erhält die den elektrischen Gleichungen entsprechenden magnetischen, siehe die erste und die zweite Spalte in Tabelle 2. Hier steht Q_m für die magnetische Ladung bzw. Polstärke. H ist die magnetische Feldstärke und μ_0 die magnetische Feldkonstante.

Das erste Kraftgesetz ist das magnetische Coulomb-Gesetz. Wir haben es so genannt, nicht nur weil es dieselbe Struktur hat wie das elektrische Coulomb-Gesetz, sondern weil es wie dieses von Coulomb entdeckt und zusammen mit dem elektrischen publiziert worden ist (Coulomb, 1788). Es ist also nicht nur zum Coulombschen Gesetz analog, wie es manche Bücher schreiben, sondern es ist eines von zwei Coulombschen Gesetzen (Abb. 5). Ein didaktischer Vorteil des magnetischen Coulombschen Gesetzes gegenüber dem elektrischen ist, dass man es viel leichter im Experiment bestätigen kann.

Auch das zu Gleichung (2) analoge Gesetz ist sehr einfach, und im Experiment viel leichter und eindrucksvoller zu bestätigen als das elektrische Analogon, und es könnte im Unterricht sehr nützlich sein, sowohl zur Messung der magnetischen Feldstärke als auch der magnetischen Ladung (bei gegebener Feldstärke). Nur einige historische Zufälle haben dazu geführt, dass diese Gesetze in der Schule nicht behandelt werden.

Das dritte Kraftgesetz ist wieder das von mir bevorzugte. Es gestattet, den Druck des magnetischen Feldes auf einen elektrischen Strom zu berechnen, technisch wichtig unter anderem in der Plasmaphysik. Auch dieses Gesetz stand in meinem Unterricht im Vordergrund, da es eine Anschauung vom magnetischen Feld fördert.

5 Kräfte im Gravitationsfeld

Nur der Vollständigkeit halber möchte ich noch die drei Kraftgesetze für das Gravitationsfeld anführen, siehe die dritte Spalte von Tabelle 2.

Das erste ist das Newtonsche Gravitationsgesetz. Das zweite ist analog zu Gleichung (2). Diese Analogie wird im Unterricht

Récapitulation des objets contenus dans ce Mémoire.

Des recherches qui précèdent il résultera :

1° Que l'action, soit répulsive, soit attractive de deux globes électrisés et, par conséquent, de deux molécules électriques, est en raison composée des densités du fluide électrique des deux molécules électrisées et inverse du carré des distances ;

4° Que la force attractive et répulsive du fluide magnétique est exactement, ainsi que dans le fluide électrique, en raison composée de la directe des densités, et inverse du carré des distances des molécules magnétiques.

Zusammenfassung der Gegenstände dieser Abhandlung.

Aus den vorangegangenen Untersuchungen folgt:

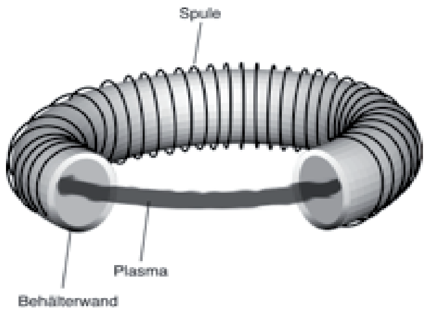
1.° Dass sich die Wirkung, sei sie abstoßend oder anziehend, von zwei elektrisierten Kugeln, & folglich von zwei elektrischen Molekülen, zusammengenommen ergibt aus den Dichten des elektrischen Fluids der beiden elektrisierten Moleküle, & dem Kehrwert des Quadrats der Abstände.

4.° Dass sich die anziehende & abstoßende Kraft des magnetischen Fluids exakt ergibt, so wie im elektrischen Fluid, direkt aus den Dichten & umgekehrt aus dem Quadrat der Abstände der magnetischen Moleküle.

Abb. 5. Coulombs Formulierung seiner beiden Kraftgesetze (Coulomb, 1879), rechts in der deutschen Übersetzung

Fusionsreaktoren sollen eines Tages mit Hilfe einer Kernreaktion Wärme für die Erzeugung elektrischer Energie liefern. Sie sind noch im Versuchsstadium. Das größte Projekt ist zur Zeit der ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), der in Cadarache in Frankreich gebaut wird. Ausgenutzt wird dabei die Reaktion von Tritium ^3_1H und Deuterium ^2_1H zu Helium ^4_2He.

Damit die Reaktion von selbst hinreichend schnell abläuft, muss die Temperatur etwa 100 000 000 K betragen. Bei dieser Temperatur sind alle beteiligten Stoffe vollständig ionisiert, sie bilden ein »Plasma«. Das Plasma befindet sich in einem torusförmigen Behälter, siehe die Abbildung.



Wegen der hohen Temperatur darf das Plasma mit der Behälterwand nicht in Kontakt kommen. Man hält es daher durch ein magnetisches Feld zusammen. Dieses Feld wird durch eine Spule, die um den Torusbehälter herum liegt, erzeugt. Das Plasma wird mit mehreren Verfahren aufgeheizt. Wir kümmern uns zunächst noch nicht um das Aufheizen.

Einige Daten:

Magnetische Feldstärke des von den Spulen erzeugten Feldes: $4{,}2 \cdot 10^6$ A/m

Mittlere Geschwindigkeit der Teilchen bei $T = 100\,000\,000$ K:

Elektronen	$v = 3{,}9 \cdot 10^7$ m/s
Deuteriumkerne	$v = 6{,}4 \cdot 10^5$ m/s
Tritiumkerne	$v = 5{,}2 \cdot 10^5$ m/s
Heliumkerne	$v = 4{,}6 \cdot 10^5$ m/s

Teilchenmassen:

Elektronen	$m = 0{,}9110 \cdot 10^{-30}$ kg
Deuteriumkerne	$m = 3343 \cdot 10^{-30}$ kg
Tritiumkerne	$m = 5007 \cdot 10^{-30}$ kg
Heliumkerne	$m = 6644 \cdot 10^{-30}$ kg

Elektrische Leitfähigkeit des heißen Plasmas (Mittelwert): $10^7\ (\Omega \cdot m)^{-1}$

Querschnittsfläche des Plasmas: 20 m^2

Teilaufgaben 1 und 2

1. Beschreiben Sie die mechanischen Spannungen im magnetischen Feld einer geraden (also nicht torusförmigen) Spule. (Dieser Aufgabenteil hat nur indirekt etwas mit dem Fusionsreaktor zu tun.) Die Spule habe einen Radius von 10 cm, eine Länge von 120 cm und 200 Windungen. Es fließt ein elektrischer Strom von 25 A. Skizzieren Sie Feldlinien und Feldflächen. Berechnen Sie die Druck- und die Zugspannung im Feld im Innern der Spule. Berechnen Sie die Stärke des Impulsstroms, der in Längsrichtung der Spule durch das Feld fließt. Welche Druck- oder Zugspannungen »spürt« die Spule?
2. Zurück zum Fusionsreaktor: Wie stark drückt das Feld von innen auf die torusförmige Spule? (Geben Sie den Druck auch in bar an.)

Lösung von Teilaufgabe 1

Das Feld drückt nach außen, d. h. es versucht, den Radius der Spulenwindungen zu vergrößern. In Spulenrichtung herrscht im Feld eine Zugspannung, das Feld hält sich an den Spulenenden fest, d. h. es drückt die Spule wie eine Schraubenfeder zusammen.

$$H = I \cdot \frac{n}{l} = \ldots = 4167 \text{ A/m}$$

$$|\sigma| = \frac{\mu_0}{2}\hat{H}^2 = \ldots = 10{,}9 \text{ N/m}^2$$

$$F = \sigma \cdot A = \ldots = 0{,}34 \text{ N}$$

Lösung von Teilaufgabe 2

$$|\sigma| = \frac{\mu_0}{2}\hat{H}^2 = \ldots = 11{,}1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 111 \text{ bar}$$

Kasten 1. Teil einer Abituraufgabe zum Thema Fusionsreaktor und Sonne (Einführung in das Thema, zwei Teilaufgaben, Lösungen)

Ein Blitz habe einen Durchmesser von 2 cm. Die Temperatur der (ionisierten) Luft im Blitz betrage 20 000 K. Im Blitz fließe ein elektrischer Strom von 15 000 A.

Wie hoch ist der Druck dieses Plasmas (in bar)?

In der kurzen Zeit, in der der elektrische Strom durch das Plasma fließt, hatte dieses noch keine Zeit, sich auszudehnen. Für das molare Volumen (Stoffmenge durch Volumen) nehmen wir vereinfachend den Wert von n/V für normale Luft.

Wie groß ist der Druck des entsprechenden magnetischen Feldes (in bar) direkt an der Oberfläche des Plasmas? Reicht er, um das Gas zusammenzuhalten?

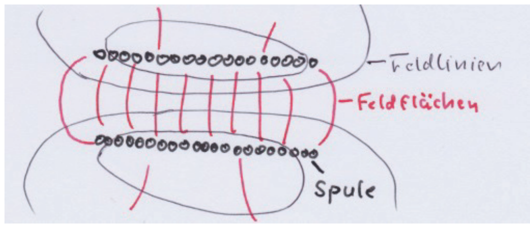
Lösung

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T = \frac{1\,\text{mol}}{25\,\text{l}} \cdot 8{,}31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 20000\,\text{K} = 6{,}65 \cdot 10^6\,\text{Pa} = 66{,}5\,\text{bar}$$

$$H = \frac{I}{l} = \frac{15000\,\text{A}}{\pi \cdot 0{,}02\,\text{m}} = 2{,}4 \cdot 10^5\,\text{A/m}$$

$$\sigma = \frac{\mu_0}{2} H^2 = \frac{1{,}257 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot 2{,}4^2 \cdot 10^{10}\,\text{Pa} = 3{,}62 \cdot 10^4\,\text{Pa} = 0{,}36\,\text{bar}$$



Der Druck des magnetischen Feldes (0,36 bar) ist viel zu klein, um das Gas, das einen Druck von 66,5 bar hat, zusammenzuhalten.

Kasten 2. Teil einer Abituraufgabe zum Thema Die Erdatmosphäre (Unterthema Gewitter, Teilaufgaben, Lösungen)

leider zu wenig betont. Der Name Ortsfaktor für die Gravitationsfeldstärke g ist dabei eher hinderlich. Beim dritten ist zu beachten, dass im Gravitationsfeld Druck und Zug gegenüber dem elektrischen und dem magnetischen Feld vertauscht sind. Dass das Gravitationsfeld in Feldlinienrichtung unter Druck steht, macht man sich leicht klar. Wenn man statt der elektrisch geladenen Kugelschale von Abbildung 4 eine »Hohlkugel mit Masse« betrachtet, so hat man eine ähnlich Situation: Der Innenraum ist feldfrei; das äußere Feld muss diesmal auf die Schale drücken.

6 Abitur-Aufgaben

Zum Schluss in Kasten 1 und 2 noch zwei Aufgaben, die ich in einem Leistungskurs Physik im Abitur gestellt hatte. (Wir haben bei uns in Rheinland-Pfalz kein Zentralabitur.)

Das allgemeine Thema der ersten lautete *Fusionsreaktor und Sonne*, das der zweiten *Die Erdatmosphäre*. Es sind nur die Teile der Aufgaben wiedergegeben, bei denen es um die mechanische Spannung des Feldes geht; außerdem auch die Lösungen. Die vollständige Aufgabe und weitere Aufgaben zu unserem Thema aus demselben Abitur, einschließlich Lösungsskizzen, siehe unter (HERRMANN, 2015).
Man sieht dreierlei: 1. Das Lösen der Aufgaben ist einfach. Sie wurden von den Schüler/inne/n gut bewältigt. 2. Die Aufgaben sind mit den traditionell behandelten Formeln nicht zu lösen. 3. Die Fragestellung ist nicht weniger interessant und relevant als die in traditionellen Abitur-Aufgaben.

7 Schlussbemerkungen

Ich fasse noch einmal zusammen. Im Bereich der Elektrostatik kann man verschiedene Kraftgesetze formulieren. Ein Problem, das mit dem einen gelöst werden kann, kann auch mit den beiden anderen gelöst werden. Die Lösung ist aber unterschiedlich aufwändig. Keines der drei Gesetze hat einen prinzipiellen Vorteil gegenüber den anderen. Was allerdings ihren Beitrag zur Bildung einer modernen Vorstellung vom Feld betrifft, so unterscheiden sie sich stark. Das Gesetz, mit dem man die mechanischen Spannungen im Feld berechnet, ist besonders geeignet. Das COULOMBsche Gesetz fördert eine Fernwirkungsanschauung, und die Gleichung (2) ist begrifflich recht heimtückisch.

Literatur

COULOMB, C. (1788). Mémoires de l'Académie royale des sciences (vol. 88, 569–611).

HERRMANN, F. (2016a). *Der Karlsruher Physikkurs für die Sekundarstufe II, Band Mechanik*, Version für den Tablett-Computer, S. 29.; *http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/dl-counter/download/Elektrodynamik_SekII.pdf* [15.8.2017].

HERRMANN, F. (2016b). *Der Karlsruher Physikkurs für die Sekundarstufe II, Band Mechanik*, Version für den Tablett-Computer, S. 21. *http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/dl-counter/download/Elektrodynamik_SekII.pdf* [15.8.2017].

HERRMANN, F. (2015). *http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/KPK-Aufgaben/Abitur%202012.html* [15.8.2017].

Prof. Dr. FRIEDRICH HERRMANN, f.herrmann@kit.edu, ist jetzt im Ruhestand. Er hat am KIT Studentinnen und Studenten der Physik und des Lehramts Physik ausgebildet und war gleichzeitig Physiklehrer am Europagymnasium in Wörth am Rhein.