

Minima und untere Schranken der Volumenentropie singulärer Räume

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

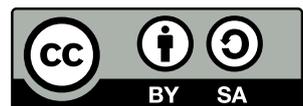
DISSERTATION

von

Sebastian Plenz

Tag der mündlichen Prüfung: 22. März 2023
1. Referent: Prof. Dr. Enrico Leuzinger
2. Referent: Prof. Dr. Alexander Lytchak
3. Referentin: PD Dr. Gabriele Link

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons
„Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen
4.0 International“ Lizenz.



Einleitung

Die Volumenentropie misst den exponentiellen Anteil des Volumenwachstums von Bällen in der universellen Überlagerung metrischer Räume. Historisch wurde die Volumenentropie besonders für Mannigfaltigkeiten studiert und man interessiert sich hierbei insbesondere für die Frage, welche Metriken die Volumenentropie minimieren. Die Definition der Volumenentropie kann auf metrische Räume erweitert werden und man kann auch hier die Minimalitätseigenschaften studieren. In diesem allgemeineren Kontext sind noch viele grundlegende Fragen offen und das Ziel dieser Arbeit ist es, neue Resultate in diesem Bereich zu beschreiben. Insbesondere werden wir Metriken auf natürlichen Verallgemeinerungen von Graphen anschauen und neue Minimalitätsresultate für deren Volumenentropie beweisen. Bevor wir unsere genauen Resultate präsentieren, führen wir zunächst die wichtigsten Begriffe ein und geben einen Überblick zur Geschichte dieses Forschungsfelds.

Die Volumenentropie wurde zunächst für Riemannsche Mannigfaltigkeiten definiert [Man79]. Wir bezeichnen mit $B_r(\tilde{x})$ einen Ball mit Radius r um $\tilde{x} \in \tilde{M}$, wobei \tilde{M} die universelle Überlagerung der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, d) beschreibt. Präziser ist somit die Volumenentropie $h_{vol}(M, d)$ gegeben durch

$$h_{vol}(M, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{x})))}{r}.$$

Dieser Grenzwert existiert und ist unabhängig von \tilde{x} [Man79].

Ein naheliegendes Problem ist das Studium der Minimalitätseigenschaften der Volumenentropie für eine gegebene Mannigfaltigkeit M unter Variation der Metrik. Konkret interessiert man sich dafür, welche Metrik die Volumenentropie auf einer gegebenen Mannigfaltigkeit minimiert und welcher Wert dabei angenommen wird. Da die Reskalierung einer Metrik stets die reziproke Volumenentropie liefert, betrachtet man die minimale Volumenentropie bezüglich der Normierung, dass die Mannigfaltigkeit Volumen 1 hat. Daher minimiert man für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit den Term

$$h_{vol}(M, d) \cdot \sqrt[n]{\text{vol}(M, d)}.$$

Die minimale Volumenentropie ist eine topologische Invariante, welche ein weitreichendes Interesse hervorgerufen hat. So stammt etwa von Gromov [Gro82] die Vermutung, dass unter allen Riemannschen Metriken auf einer geschlossenen, negativ gekrümmten Mannigfaltigkeit, die eine lokal symmetrische Metrik zulässt, stets die lokal symmetrische Metrik die Volumenentropie minimiert. Dies wurde zunächst von Katok [Kat82] für Flächen bewiesen. Ein weiterer großer Schritt wurde von Besson, Courtois und Gallot [BCG95] erzielt, welche die Vermutung für Mannigfaltigkeiten bewiesen haben, auf denen eine symmetrische Metrik vom Rang eins existiert. Connell und Farb [CF03] bewiesen die Vermutung für das Produkt von Mannigfaltigkeiten, auf welchen eine Rang eins symmetrische Metrik existiert. Somit wurde die Vermutung für Spezialfälle gezeigt, bleibt allerdings in ihrer Allgemeinheit bis heute unbewiesen.

Die Volumenentropie ist auch deshalb von Interesse, weil sie im engen Zusammenhang mit anderen Invarianten steht. So ist sie unter anderem nah verwandt mit der topologischen Entropie des geodätischen Flusses, woher auch der Name rührt. Die Volumenentropie gibt eine untere Schranke der topologischen Entropie des geodätischen Flusses an, wobei sogar Gleichheit gilt, wenn die Mannigfaltigkeit kompakt und nicht positiv gekrümmt ist [Din71; Man79].

Neben dem Zusammenhang zur topologischen Entropie gibt es auch einen direkten Zusammenhang zur thermodynamischen Entropie. In der Thermodynamik ist die Entropie proportional zum Logarithmus der Anzahl möglicher Zustände definiert. In der vorliegenden Arbeit werden wir eine Charakterisierung über den Logarithmus der Anzahl geschlossener Wege in Lemma 1.0.8 angeben. Heuristisch kann man die Anzahl geschlossener Wege als die Anzahl möglicher Zustände ansehen.

Neben der topologischen Entropie hängt die Volumenentropie auch eng mit zahlreichen anderen Größen zusammen. Beispiele sind das Wachstum und der kritische Exponent der Fundamentalgruppe. Für kompakte, negativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten sind diese drei Größen sogar gleich, siehe [Dal+09; Man81; You82].

In dieser Arbeit betrachten wir eine Verallgemeinerung der Definition der Volumenentropie. So wird die Volumenentropie nicht nur auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, sondern allgemeiner auf metrischen Räumen definiert. Wir betrachten nun also einen metrischen Raum (X, d) zusammen mit einem Volumen vol , das üblicherweise ein passendes Hausdorff-Maß ist. Wie zuvor betrachten wir die universelle Überlagerung \tilde{X} und den Ball $B_r(\tilde{x})$ mit Radius r um $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Die Volumenentropie $h_{\text{vol}}(X, d)$ ist dann, wie im Fall von Mannigfaltigkeiten, definiert als

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{x})))}{r}.$$

Ebenfalls wie im Fall von Mannigfaltigkeiten ist diese Definition unabhängig vom Basispunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$, wie wir in Lemma 1.0.6 zeigen werden.

Erneut interessieren wir uns für Minimalitätseigenschaften der Volumenentropie von metrisierbaren Räumen. Hierfür betrachten wir für einen n -dimensionalen metrisierbaren Raum erneut die Minimierung des Terms

$$h_{\text{vol}}(X, d) \cdot \sqrt[n]{\text{vol}(X, d)}.$$

Dies entspricht der Betrachtung aller Metriken d mit Volumen 1.

Eine erste Klasse von solchen metrisierbaren Räumen sind metrische Graphen oder 1-dimensionale Simplizialkomplexe. Für Graphen wurden unabhängig voneinander von Lim [Lim08] und von Kapovich und Nagnibeda [KN07] Minimalitätseigenschaften gezeigt. Das weitreichendste Ergebnis zur Volumenentropie von Graphen stammt von Lim und gibt eine scharfe untere Schranke der minimalen Volumenentropie für alle Graphen an, bei denen jede Ecke mindestens Grad 3 hat (hier Satz 2.2.3).

Ziel dieser Arbeit ist es, für geeignete Verallgemeinerungen von metrischen Graphen die minimale Volumenentropie zu untersuchen. Dazu sind bisher erst relativ wenig Resultate bekannt.

In der Literatur werden zur Verallgemeinerung von Graphen meist Simplicialkomplexe betrachtet. Hier wurde zum Beispiel von Babenko und Sabourau [BS21] eine Charakterisierung gefunden, wann die Volumenentropie verschwindet und wann sie positiv ist. Dazu wird eine Abbildung in einen Simplicialkomplexen von geringerer Dimension benutzt.

Spezielle Simplicialkomplexe sind euklidische und hyperbolische Gebäude. Da diese sehr symmetrisch sind, bieten sie einen leichteren Zugang als allgemeine Simplicialkomplexe. Ledrappier und Lim [LL10] haben eine untere Schranke der Volumenentropie von hyperbolischen und euklidischen Gebäuden gefunden, welche von der Verzweigungszahl und dem Fundamentalbereich abhängt.

Des Weiteren hat Leuzinger [Leu06] die Volumenentropie von Bruhat-Tits-Gebäuden mittels des Wurzelsystems des Gebäudes bestimmt.

Das erste unserer Ergebnisse betrifft Hypergraphen, eine weitere natürliche Verallgemeinerung von Graphen. Hypergraphen entsprechen Graphen, allerdings kann eine Kante aus beliebig vielen Elementen statt aus zwei bestehen. Da Wege stets über Ecken verlaufen, ist ihre Struktur immer noch sehr ähnlich zu Graphen. Wir zeigen die folgende Abschätzung für die Volumenentropie des metrischen Hypergraphen.

Satz A (vergleiche Satz 3.2.5). *Sei H ein Hypergraph und d eine Metrik auf H mit Volumen 1. Weiter bezeichne mit $V(H)$ die Menge der Ecken von H und mit $E(H)$ die Menge der Kanten von H .*

Dann gilt mit $m_{max} = \max_{e \in E(H)} \#e$

$$h_{vol}(H, d) \geq \frac{1}{m_{max}} \left(\sum_{e \in E(H)} \#e \log(\#e - 1) + \sum_{v \in V(H)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1) \right).$$

Dieses Ergebnis ist für uniforme und reguläre Hypergraphen scharf und liefert eine eindeutige minimierende Metrik. Die obige Schranke ist jedoch im Allgemeinen nicht scharf, entspricht aber im Spezialfall von 2-uniformen Hypergraphen, also für Graphen, genau dem Ergebnis aus [Lim08]. Damit ist es eine direkte Verallgemeinerung dieses Resultats.

Als nächstes betrachten wir Simplicialkomplexe. Der entscheidende Unterschied zu Hypergraphen ist, dass auch Wege möglich sind, die nicht nur über Ecken verlaufen. Im Gegensatz zu dem Resultat aus [BS21] ist das Ziel, eine rein kombinatorische untere Schranke für die Volumenentropie zu finden. Im folgenden Resultat betrachten wir

stückweise euklidische Metriken und fordern zusätzlich, dass Simplizes nicht zu spitz werden, also dass der Quotient aus der längsten und der kürzesten 1-dimensionalen Facette beschränkt ist. Diesen Quotienten nennen wir maximalen Quotienten.

Satz B (vergleiche Satz 4.4.7). *Sei X ein abstrakter Simplizialkomplex. Weiter sei $\#S_n(X)$ die Anzahl an n -dimensionalen Simplizes und $\deg_{\max}(S_0(X))$ der maximale Grad der Ecken.*

Dann gilt

$$\inf_d h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{c(n, k)(\#S_n(X))^{\frac{1-n}{n}}}{\deg_{\max}(S_0(X))} h(X)$$

mit

$$h(X) = (n + 1) \log(n) \#S_n(X) + \sum_{S \in S_{n-1}(X)} \deg(S) \log(\deg(S) - 1)$$

und $c(n, k)$ einer Konstanten, welche nur von der Dimension und dem maximalen Quotienten abhängt. Hierbei wird das Infimum über alle stückweise euklidischen Metriken d mit Volumen auf 1 normiert, betrachtet. Diese sind so, dass für den maximalen Quotienten $k < 2$ für $n = 2$, beziehungsweise $k < \sqrt{2}$ sonst, gilt.

Für eine genaue Beschreibung der Konstanten $c(n, k)$ verweisen wir auf Kapitel 4 und speziell auf Satz 4.4.7.

Trotz exponentiell wachsender Fundamentalgruppe ist es im Allgemeinen nicht möglich, eine positive untere Schranke der Volumenentropie anzugeben. In Satz B wird eine positive untere Schranke für die Volumenentropie für stückweise euklidische Metriken mit gewissem maximalen Quotienten angegeben. Lässt man alle stückweise euklidischen Metriken zu, so ist es im Allgemeinen nicht möglich. Dies wird in Abschnitt 4.6 illustriert.

Da uns somit Simplizialkomplexe zu wenig Struktur bieten für eine allgemeine untere Schranke, wenden wir uns im folgenden speziellen Komplexen zu, den Graphenprodukten. Dies sind kubische Komplexe, welche als kartesisches Produkt aus n Graphen entstehen. Hierbei betrachten wir erneut das Minimum der Volumenentropie unter stückweise euklidischen Metriken.

Für n -dimensionale Graphenprodukte werden zwei unterschiedliche Normierungen betrachtet. Zum einen betrachten wir die Normierung bezüglich des 1-dimensionalen Hausdorff-Maßes vol_1 des 1-Skeletts des Simplizialkomplexes und zum anderen das n -dimensionale Hausdorff-Maß vol_n .

Zunächst schränken wir uns auf Produktmetriken ein. Es gibt also auf den zu Grunde liegenden Graphen jeweils Metriken und für jede Auswahl an Kanten aus den Graphen spannen diese einen Hyperquader auf. Hierdurch erhalten wir die folgenden beiden Ergebnisse, abhängig von der gewählten Normierung.

Satz C (vergleiche Satz 5.3.2). Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt mit beliebiger Produktmetrik $d_p = d_1 \times \cdots \times d_n$ für welche $\text{vol}_1(X, d_p) = 1$ gilt.

Dann folgt

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^4}{\#V(G_i)}} \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}.$$

Das Minimum wird hierbei genau dann angenommen, wenn die Metriken d_i auf den Graphen G_i den minimierenden Metriken aus Satz 2.2.3 entsprechen, wobei die Graphen so normiert sind, dass

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{\sqrt[3]{h_{\min}(G_i)^2 \#V(G_i)}}{\prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}$$

gilt.

Das eben präsentierte Ergebnis nutzt die Normierung bezüglich des 1-Volumens. Bei Betrachtung einer Normierung bezüglich des n -Volumens gilt das nachfolgende Resultat.

Satz D (vergleiche Satz 5.5.2). Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt mit beliebiger Produktmetrik $d_p = d_1 \times \cdots \times d_n$ für welche $\text{vol}_n(X, d) = 1$ gilt.

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_i)}}.$$

Das Minimum wird hierbei genau dann angenommen, wenn die Metriken d_i auf den Graphen G_i den minimierenden Metriken aus Satz 2.2.3 entsprechen, wobei die Graphen so normiert werden, dass

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{h_{\min}(G_i)}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_j)}}$$

gilt.

In beiden Fällen betrachten wir im Anschluss allgemeine euklidische Metriken und erhalten die folgenden unteren Schranken der Volumenentropie.

Korollar E (vergleiche Korollar 5.4.4). Sei (X, d) ein beliebiges stückweise euklidisches Graphenprodukt mit $\text{vol}_1(X, d) = 1$.

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^4}{\#V(G_i)}} \prod_{i=1}^n \#V(G_i) \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^2}{\#V(G_i)^2}}}{n}}.$$

Im zweiten Ergebnis beschränken wir uns auf Parallelmetriken und den 2-dimensionalen Fall, da für höhere Dimensionen die Winkel komplexer werden. Mit Parallelmetriken bezeichnen wir solche Metriken, sodass jedes Viereck isometrisch zu einem Parallelogramm ist. Daher gibt es nur zwei unterschiedliche Winkel im Viereck und in dem Korollar bezeichnen wir mit α_{\min} den kleinsten Innenwinkel, welcher in einem euklidischen Parallelogramm in X vorkommt.

Korollar F (vergleiche Korollar 5.6.3). *Sei (X, d) ein beliebiges Graphenprodukt mit Parallelmetrik und $\text{vol}_2(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \sqrt{h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2)} \sqrt{\sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1)L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij})} \\ &\geq \sqrt{h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2) \sin(\alpha_{\min})}. \end{aligned}$$

Somit finden wir im Fall des 2-Volumens lediglich eine winkelabhängige untere Schranke, welche für beliebig kleine Winkel gegen 0 konvergiert.

Um ein besseres Ergebnis zu erhalten, schränken wir uns weiter ein und betrachten k -Rosengraphen, also Graphen mit einer Ecke und k Kanten. Hierdurch können wir Korollar F verbessern und erhalten sowohl eine winkelunabhängige, als auch erneut eine winkelabhängige untere Schranke der Volumenentropie. Die winkelabhängige untere Schranke hat allerdings den Vorteil gegenüber der vorangegangenen, dass sie für kleine Winkel gegen ∞ strebt. Somit kann das Minimum nicht für beliebig kleine Winkel angenommen werden.

Satz G (vergleiche Satz 5.8.4). *Es sei $X = G_1 \times G_2$ ein Graphenprodukt aus Rosengraphen und d eine beliebige stückweise euklidische Metrik auf X , sodass $\text{vol}_2(X, d) = 1$ gilt.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}.$$

Im nächsten Ergebnis benötigen wir α_{\max} , dies ist das Maximum über alle minimalen Winkel im Parallelogramm. Das heißt, wir betrachten stets den kleineren der beiden Innenwinkel im Parallelogramm und nehmen dann das Maximum über alle Vierecke im kubischen Komplex.

Satz H (vergleiche Satz 5.8.8). *Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus einem k -Rosengraphen G_1 und einem l -Rosengraphen G_2 mit $\text{vol}_2(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}{\sin(\alpha_{\max}) \cdot k^3 \cdot l^3}}.$$

All diese Resultate zur Volumenentropie von Graphenprodukten legen die Vermutung nahe, dass die Volumenentropie im „symmetrischen“ Fall minimiert wird. Dies bedeutet, dass auf dem Graphenprodukt die Produktmetrik betrachtet wird und die Volumenentropie bereits auf den Graphen minimiert wird.

Vermutung I (vergleiche Vermutung 5.8.11). *Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt.*

Dann gibt es eine eindeutige Metrik d_{\min} , welche die Volumenentropie unter allen stückweise euklidischen Metriken minimiert und es gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d_{\min}) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n h_{\min}(G_i)}.$$

Die Metrik entspricht genau der Produktmetrik, wobei auf den jeweiligen Graphen die Volumenentropie minimiert wird. Die Graphen sind dabei so normiert, dass

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{h_{\min}(G_i)}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_j)}}$$

gilt.

Die universelle Überlagerung eines Graphenprodukts aus Rosengraphen mit Produktmetrik ist ein Produkt von regulären Bäumen und somit ein Gebäude vom Typ $\widehat{A}_1 \times \cdots \times \widehat{A}_1$. Unser nächstes Ziel ist es, eine untere Schranke der Volumenentropie für Gebäude zu finden. Im Unterschied zu den Ergebnissen in [BS21; Leu06; LL10] bestimmen wir eine untere Schranke, welche nur von den kombinatorischen Eigenschaften des Gebäudes abhängt. Im folgenden Satz J benutzen wir spezielle Ecken eines Gebäudes. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Stern durch Translate das ganze Gebäude überdeckt. Hierbei normieren wir die Standard-Metrik auf einem Gebäude so, dass eine fundamentale Kammer Δ Volumen 1 hat, also $\text{vol}_F(\Delta) = 1$.

Satz J (vergleiche Satz 6.3.1). *Sei (X, d) ein irreduzibles, n -dimensionales, euklidisches Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X und Verzweigungszahl λ . Sei weiter $\text{vol}_F(X, d) = 1$ und $v \in V(G_X)$, sodass die zugehörige Ecke eine spezielle Ecke ist. Wir bezeichnen mit $c(X_v)$ die irreduziblen Komponenten des sphärischen Gebäudes X_v . Dann gilt*

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

Im nachfolgenden Satz benutzen wir statt spezieller Ecken beliebige Ecken.

Satz K (vergleiche Satz 6.3.2). *Sei (X, d) ein irreduzibles, n -dimensionales, euklidisches Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X und Verzweigungszahl λ . Sei weiter $\text{vol}_F(X, d) = 1$ und außerdem $v \in V(G_X)$ beliebig. Wir bezeichnen wie im vorherigen Satz mit $c(X_v)$ die irreduziblen Komponenten des sphärischen Gebäudes X_v . Dann gilt*

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

Für die Definitionen der Konstanten verweisen wir auf Kapitel 6. All diese Konstanten lassen sich entweder direkt aus dem Coxeter-Dynkin-Diagramm ablesen oder wurden in [CKW20] bereits bestimmt.

Im Anschluss betrachten wir die verschiedenen Typen von Gebäuden und bestimmen die Schranken aus den Sätzen J und K explizit. Dabei zeigen wir, dass die Schranke aus Satz J im Fall von \widetilde{A}_2 scharf ist. Zum Abschluss dieser Arbeit ergänzen wir die Ergebnisse für den Fall reduzibler Gebäude. Wir erhalten ähnlich zu Graphenprodukten ein Ergebnis, welches die Volumenentropie auf die irreduziblen Komponenten zurückführt.

Satz L (vergleiche Satz 6.4.3). *Sei $(X, d) = (X_1 \times \cdots \times X_m, d_1 \times \cdots \times d_m)$ ein euklidisches Gebäude und seien (X_i, d_i) für $i = 1, \dots, m$ irreduzible Gebäude. Außerdem gelte $\text{vol}_F(X) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{\dim(X)}{2}} \prod_{i=1}^m \left(h_{\text{vol}}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\frac{\dim(X_i)}{\dim(X)}}.$$

Die untere Schranke ist scharf und wird genau dann angenommen, wenn auf den jeweiligen irreduziblen Teilen die Metrik so gewählt wird, dass für das fundamentale Volumen

$$\text{vol}_F(X_i) = \left(h_{\text{vol}}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\dim(X_i)} \left(\prod_{j=1}^m \left(h_{\text{vol}}(X_j) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_j)}} \right)^{-\frac{\dim(X_i) \dim(X_j)}{\dim(X)}} \right)$$

gilt.

Diese untere Schranke hängt nur von den Volumenentropien der einzelnen irreduziblen Gebäude sowie den jeweiligen Dimensionen ab.

Zum Inhalt und Aufbau der Arbeit:

In Kapitel 1 führen wir die Volumenentropie für allgemeine kompakte metrische Räume ein, welche in den folgenden Kapiteln genutzt wird. In Kapitel 2 schließt sich dann die Betrachtung von Graphen an, wobei die Ergebnisse aus [Lim08] präsentiert werden. In den nachfolgenden Kapiteln werden eigene Ergebnisse präsentiert, beginnend mit Minimalitätseigenschaften der Volumenentropie für Hypergraphen in Kapitel 3. Im anschließenden Kapitel 4 werden Simplicialkomplexe behandelt und in Kapitel 5 betrachten wir Graphenprodukte. Zum Abschluss behandeln wir in Kapitel 6 Gebäude.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Volumenentropie	15
2 Graphen	21
2.1 Definitionen – Graphen	22
2.2 Minimale Volumenentropie von Graphen	24
3 Hypergraphen	29
3.1 Definitionen – Hypergraphen	30
3.2 Untere Schranke und minimale Volumenentropie von Hypergraphen . . .	34
4 Simplizialkomplexe	41
4.1 Definitionen – Simplizialkomplexe	42
4.2 Definitionen – Galerienentropie	46
4.3 Zusammenhang zwischen Galerienentropie und Volumenentropie eines Simplizialkomplexes	50
4.4 Dualer Graph und untere Schranke für die minimale Galerienentropie eines Simplizialkomplexes	56
4.5 Obere Schranke der minimalen Volumenentropie von Simplizialkomplexen	60
4.6 Simplizialkomplex mit verschwindender minimaler Volumenentropie . . .	63
5 Graphenprodukte	65
5.1 Definitionen – Graphenprodukte	66
5.2 Produktmetriken auf Graphenprodukten	70
5.3 Minimale Volumenentropie von Graphenprodukten mit Produktmetriken normiert bezüglich des 1-Volumens	75
5.4 Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten mit stückweise euklidischen Metriken normiert bezüglich des 1-Volumens	79

5.5	Minimale Volumenentropie von Graphenprodukten mit Produktmetriken normiert bezüglich des n -Volumens	83
5.6	Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten mit stückweise euklidischen Metriken normiert bezüglich des 2-Volumens	86
5.7	Graphenprodukte aus Rosengraphen	89
5.8	Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen normiert bezüglich des 2-Volumens	92
5.8.1	Winkelunabhängige untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen	94
5.8.2	Winkelabhängige untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen	96
5.9	Volumenentropie ist keine Homotopieinvariante für Komplexe	101
6	Gebäude	105
6.1	Definitionen – Gebäude	106
6.2	Graphenprodukte als Gebäude	114
6.3	Untere Schranke der Volumenentropie von irreduziblen Gebäuden verschiedener Typen	116
6.4	Untere Schranke der Volumenentropie reduzibler Gebäude	137
	Literatur	145

Kapitel 1

Volumenentropie

Zentraler Begriff dieser Arbeit ist die Volumenentropie, welche den exponentiellen Anteil des Wachstums von Bällen in der universellen Überlagerung eines metrischen Raums angibt. Dieses Kapitel dient der Definition der Volumenentropie sowie der Erarbeitung erster Ergebnisse zur Volumenentropie. Diese Ergebnisse sind unabhängig von dem metrischen Raum, welchen wir betrachten.

Insbesondere werden wir in Lemma 1.0.7 sehen, dass die Volumenentropie unabhängig vom gewählten Basispunkt ist und in Lemma 1.0.8 eine alternative Charakterisierung der Volumenentropie über geschlossene Wege aufstellen, für welche kein Übergang zur universellen Überlagerung nötig ist.

Konvention 1.0.1. In dieser Arbeit betrachten wir stets metrische Räume, welche wegzusammenhängend und lokal endlich sind. Zusätzlich sind in den Kapiteln 2 bis 5 die Räume kompakt. Bei den betrachteten Räumen handelt es sich um Graphen, Hypergraphen, Simplicialkomplexe, kubische Komplexe und in Kapitel 6 um affine Gebäude. Letztere sind nicht kompakt, wodurch hier einige Ergebnisse aus diesem Kapitel erneut gezeigt werden müssen.

Definition 1.0.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Dann definieren wir mit $B_r(x)$ den *Ball mit Radius r um x in X* oder formaler

$$B_r(x) = B_r(x, d) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}.$$

Ein *metrischer Weg* ist eine stetige Abbildung eines reellen Intervalls $I = [a, b]$ in den metrischen Raum X . Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir oft einfach Weg.

Sei γ ein metrischer Weg. Sind Anfangs- und Endpunkt von γ identisch, also $\gamma(a) = \gamma(b)$, so nennen wir den Weg *geschlossen*.

Darüber hinaus definieren wir außerdem den *Durchmesser* $\text{diam}(X)$ eines metrischen Raums mit

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} d(x, y).$$

Definition 1.0.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei γ ein beliebiger rektifizierbarer Weg. Wir bezeichnen die *Länge von γ bezüglich der Metrik d* mit $L(\gamma, d)$.

Außerdem bezeichnen wir zu einem geschlossenen Weg γ in X , welcher in $x \in X$ beginnt und endet, die *Homotopieklasse von γ* mit $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$.

Dann definieren wir die *Anzahl geschlossener Wege durch x der Länge maximal r* als

$$N_r(x) = N_r(x, d) = \#\{[\gamma] \in \pi_1(X, x) \mid \exists \varphi \in [\gamma] \text{ mit } L(\varphi, d) \leq r\}.$$

Definition 1.0.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Wir nennen \tilde{X} die *universelle Überlagerung von X* mit der *zugehörigen Überlagerung* $p: \tilde{X} \rightarrow X$, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- a) \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.

b) p ist stetig und surjektiv.

c) Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $p|_{B_\varepsilon(\tilde{x})}$ injektiv ist.

Wir definieren eine Metrik \tilde{d} auf \tilde{X} , sodass $p|_{B_\varepsilon(\tilde{x})}$ aus c) stets eine Isometrie ist. Diese Metrik nennen wir die *induzierte Metrik* der Metrik d . Da die Metriken lokal übereinstimmen, schreiben wir auch d statt \tilde{d} .

Definition 1.0.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und \tilde{X} die universelle Überlagerung mit induzierter Metrik \tilde{d} . Sei nun $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig.

Dann definieren wir die *Volumenentropie* $h_{vol}(X, d)$ von (X, d) als den exponentiellen Anteil des Volumenwachstums von Bällen in der universellen Überlagerung. Hierbei bezeichnen wir mit dem Volumen vol ein geeignetes Hausdorff-Maß. Somit ist die Volumenentropie formal definiert als

$$h_{vol}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B_r(\tilde{x}, \tilde{d})}{r} \in [0, \infty].$$

Lemma 1.0.6. Sei (X, d) ein geodätischer metrischer Raum mit endlichem Durchmesser $\text{diam}(X) < \infty$.

Dann gilt, dass $h_{vol}(X, d)$ unabhängig von der Wahl von \tilde{x} ist.

Beweis. Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ zwei unterschiedliche Basispunkte. Wir benennen die jeweiligen Volumenentropien mit $h_{vol}(\tilde{x})$ und $h_{vol}(\tilde{y})$. Sei außerdem γ ein kürzester Weg, welcher von \tilde{x} nach \tilde{y} geht. Damit gilt mit $|\gamma| = L(\gamma, d)$

$$\text{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d})) \leq \text{vol}(B_{r+|\gamma|}(\tilde{y}, \tilde{d})) \leq \text{vol}(B_{r+2|\gamma|}(\tilde{x}, \tilde{d})),$$

da so zunächst γ durchlaufen werden und dann das Volumenwachstum von der anderen Ecke aus betrachtet werden kann. Der Weg γ hat endliche Länge, da der Durchmesser von X endlich ist. Für den Fall, dass die Volumenentropie von X entweder 0 oder ∞ ist, folgt die Gleichheit direkt, da in diesem Fall alle 3 Terme übereinstimmen. Im anderen Fall kann somit das Volumenwachstum des Balls beschrieben werden durch $\text{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d})) = \exp(h_{vol}(\tilde{x})r + f(r))$ mit $f(r) \in o(r)$, wobei $o(r)$ das Landau-Symbol bezeichnet. Diese Abschätzung folgt durch Umformung der Definition nach dem Volumen des Balls. Analog gilt das Ganze auch für die beiden anderen Argumente aus der obigen Ungleichung.

Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d})) &\leq \text{vol}(B_{r+|\gamma|}(\tilde{y}, \tilde{d})) \leq \text{vol}(B_{r+2|\gamma|}(\tilde{x}, \tilde{d})) \\ \Leftrightarrow \frac{\log \text{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r} &\leq \frac{\log \text{vol}(B_{r+|\gamma|}(\tilde{y}, \tilde{d}))}{r} \leq \frac{\log \text{vol}(B_{r+2|\gamma|}(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r}. \end{aligned}$$

Weiter folgt mit $f_1, f_2, f_3 \in o(r)$

$$\begin{aligned}\frac{\log \operatorname{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r} &= \frac{\log \exp(h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})r + f_1(r))}{r} = \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})r + f_1(r)}{r}, \\ \frac{\log \operatorname{vol}(B_{r+|\gamma|}(\tilde{y}, \tilde{d}))}{r} &= \frac{\log \exp(h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y})(r+|\gamma|) + f_2(r))}{r} = \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y})(r+|\gamma|) + f_2(r)}{r}, \\ \frac{\log \operatorname{vol}(B_{r+2|\gamma|}(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r} &= \frac{\log \exp(h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})(r+2|\gamma|) + f_3(r))}{r} = \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})(r+2|\gamma|) + f_3(r)}{r}.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \operatorname{vol}(B_r(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})r + f_1(r)}{r} = h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \operatorname{vol}(B_{r+|\gamma|}(\tilde{y}, \tilde{d}))}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y})(r+|\gamma|) + f_2(r)}{r} = h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y}) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \operatorname{vol}(B_{r+2|\gamma|}(\tilde{x}, \tilde{d}))}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})(r+2|\gamma|) + f_3(r)}{r} = h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x})\end{aligned}$$

und daher folgt insgesamt

$$h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x}) \leq h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y}) \leq h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x}).$$

Daraus ergibt sich nun wie behauptet $h_{\operatorname{vol}}(\tilde{x}) = h_{\operatorname{vol}}(\tilde{y})$ und daher die Unabhängigkeit vom betrachteten Basispunkt. \square

Lemma 1.0.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und αd die Metrik auf X , welche durch Strecken aller Längen um $\alpha > 0$ aus d entsteht.

Dann gilt

$$\alpha h_{\operatorname{vol}}(X, \alpha d) = h_{\operatorname{vol}}(X, d)$$

Beweis. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\begin{aligned}h_{\operatorname{vol}}(X, \alpha d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \operatorname{vol} B_r(\tilde{x}, \alpha \tilde{d}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \operatorname{vol} B_{\frac{r}{\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{d}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha r} \log \operatorname{vol} B_r(\tilde{x}, \tilde{d}) \\ &= \frac{1}{\alpha} h_{\operatorname{vol}}(X, d).\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichheit wird r durch αr substituiert. Dies ist bei Grenzwerten möglich, ohne das Ergebnis zu ändern, da $\alpha > 0$ gilt. \square

Im nachfolgenden Lemma zeigen wir eine Charakterisierung der Volumenentropie über geschlossene Wege. So entspricht die Volumenentropie dem exponentiellen Anteil des Wachstums der Anzahl von Homotopieklassen $N_r(x, d)$ durch x der Länge maximal r .

Lemma 1.0.8. Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $x \in X$ beliebig. Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N_r(x, d)}{r}.$$

Beweis. Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $x = p(\tilde{x})$ der zugehörige Punkt in X . Wir schätzen, um das Resultat zu zeigen, $N_r(x)$ und $B_r(\tilde{x})$ gegeneinander ab. Hierfür wählen wir einen kleinen Ball um \tilde{x} mit Radius $\varepsilon > 0$. $N_r(x)$ gibt die Anzahl der Homotopieklassen kürzer als r an. Das heißt, zu jeder Homotopiekategorie gehört ein kürzester Weg in der universellen Überlagerung, der bei \tilde{x} startet und bei $\tilde{y} \in \tilde{X}$ endet mit $p(\tilde{y}) = x$. Wir wählen nun r größer als ε . Wenn wir nun ε klein genug wählen, so bilden die Bälle mit Radius ε um jedes solche \tilde{y} eine Teilmenge des Balls mit Radius r . Daher gilt für r groß genug und ε klein genug

$$\text{vol}(B_\varepsilon(x))N_r(x) \leq \text{vol } B_r(\tilde{x}).$$

Für die andere Richtung nehmen wir an jedem \tilde{y} das Volumen des ganzen Raums, also

$$\text{vol } B_r(\tilde{x}) \leq \text{vol}(X)N_r(x).$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B_r(\tilde{x})}{r} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (\text{vol}(X)N_r(x))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (\text{vol}(X)) + \log (N_r(x))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (N_r(x))}{r}. \end{aligned}$$

Außerdem erhalten wir auch die Abschätzung in die andere Richtung wie folgt

$$\begin{aligned} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (N_r(x))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol}(B_\varepsilon(x)) + \log (N_r(x))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (\text{vol } B_\varepsilon(x)N_r(x))}{r} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B_r(x)}{r} \\ &= h_{vol}(X, d). \end{aligned}$$

Hierbei fallen jeweils die ersten Summanden in der dritten und fünften Zeile im Grenzwert weg, da dies Konstanten geteilt durch r sind und sie somit gegen 0 konvergieren. Daher gilt wie behauptet

$$h_{vol}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N_r(x, d)}{r}.$$

□

Bemerkung 1.0.9. Anschaulich bedeutet das vorherige Lemma, dass für die Volumenentropie die Anzahl an Homotopieklassen eine entscheidende Rolle spielt. In anderen Worten besagt das obige Ergebnis, dass wir nur die Anzahl an Homotopieklassen benötigen, wenn wir uns mit der Volumenentropie beschäftigen. Wir können somit zu einem Zählmaß übergehen. Wir nutzen weiterhin das Volumen des betrachteten metrischen Raums, um eine Normierung, und damit Vergleichbarkeit, zu erhalten.

Aus der Erkenntnis, dass die Anzahl an Homotopieklassen genügt, um die Volumenentropie zu bestimmen, lassen sich leicht Beispiele konstruieren, für welche die Volumenentropie gegen 0 strebt, trotz positivem Volumen des metrischen Raums. Explizit wird dies im Abschnitt 4.6 für Simplicialkomplexe gezeigt.

Bemerkung 1.0.10. Die Bedingungen $\text{diam}(X) < \infty$ aus Lemma 1.0.6 und $\text{vol}(X) < \infty$ aus Lemma 1.0.8 sind für kompakte Räume stets erfüllt. In dieser Arbeit werden, außer in Kapitel 6, ausschließlich kompakte Räume betrachtet und somit sind die beiden Ergebnisse aus Lemma 1.0.6 und Lemma 1.0.8 in den Kapiteln 2 bis 5 stets anwendbar. Für Kapitel 6 gelten entsprechende Ergebnisse ebenfalls. Da es sich in diesem Kapitel um nicht kompakte metrische Räume handelt, müssen die angepassten Ergebnisse neu gezeigt werden.

Kapitel 2

Graphen

Dieses Kapitel befasst sich mit dem Paper „Minimal volume entropy on graphs“ von Seonhee Lim [Lim08].

In diesem Artikel wird zu einem beliebigen Graphen die minimale Volumenentropie bestimmt und eine konkrete Längenzuordnung für die Kanten angegeben, welche dieses Minimum realisiert. Darüber hinaus wird gezeigt, dass dieses Minimum eindeutig ist.

2.1 Definitionen – Graphen

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Notationen zu Graphen eingeführt. Graphen werden insbesondere in diesem Kapitel als zentrales Objekt, aber auch in den darauf folgenden Kapiteln benötigt.

Wir geben nur die für diese Arbeit notwendigen Definitionen und Notationen. Für eine ausführliche Übersicht zu Graphen verweisen wir auf beispielsweise das Buch „Graph Theory“ von Reinhard Diestel [Die05].

Definition 2.1.1. Sei G ein endlicher ungerichteter Graph. Wir bezeichnen mit $V(G)$ die Menge der Ecken von G , mit $E(G)$ die Menge der ungerichteten Kanten von G und mit $\bar{E}(G)$ die Menge der gerichteten Kanten von G .

Zu einer gerichteten Kante $e \in \bar{E}(G)$ bezeichnen wir außerdem mit $i(e)$ die Anfangsecke und mit $t(e)$ die Endecke sowie mit e^{-1} die umgekehrte Kante, welche die Kante ist, sodass $t(e)$ die Anfangsecke und $i(e)$ die Endecke ist. Da stets ein ungerichteter Graph zugrunde liegt, existiert zu jedem $e \in \bar{E}(G)$ solch eine umgekehrte Kante $e^{-1} \in \bar{E}(G)$. Des Weiteren definieren wir zu $v \in V(G)$ den Grad $\deg(v)$ einer Ecke v als die Anzahl an Kanten in dieser Ecke im ungerichteten Graphen. Somit ist der Grad formal definiert als

$$\deg(v) = \#\{e \in E(G) | v \in e\}.$$

Wir nennen einen Graphen k -regulär, wenn unabhängig von der Wahl von $v \in V(G)$ stets $\deg(v) = k$ gilt.

Definition 2.1.2. Ein metrischer Graph (G, d_L) ist ein endlicher Graph zusammen mit einer Abbildung $L : \bar{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, die jeder Kante eine positive Länge zuordnet. Hierbei erfüllt die Abbildung $L(e) = L(e^{-1})$ für alle $e \in \bar{E}(G)$. Somit induziert diese Abbildung auch eine Längenzuordnung auf $E(G)$. Diese Längenzuordnung induziert eine Metrik d_L auf G durch die Betrachtung kürzester Wege zwischen zwei Punkten.

Sei $S \subseteq G$ eine Teilmenge von G . Wir definieren das Volumen $\text{vol}(S)$ von S , wie in Kapitel 1 beschrieben, als das 1-dimensionale Hausdorff-Maß von S , also als die Summe der Längen der ungerichteten Kanten in S . Kanten, die nur zum Teil in S liegen, zählen anteilig in $\text{vol}(S)$. Da wir das Volumen als die Summe der Kantenlängen definiert haben, schreiben wir auch $L(S) = \text{vol}(S)$.

Somit können wir zu einem metrischen Graphen (G, d_L) das Volumen $\text{vol}(G, d_L)$ des Graphen (G, d_L) betrachten. Dies ist nach der vorangegangenen Definition das 1-dimensionale

Hausdorff-Maß des Graphen und somit die Summe der Längen der ungerichteten Kanten von G , also

$$\text{vol}(G, d_L) = \sum_{e \in E(G)} L(e) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \bar{E}(G)} L(e).$$

Bemerkung 2.1.3. Man kann bei der Längenzuordnung auch eine Kantenlänge von 0 zulassen. Dies induziert eine Semi-Metrik, welche via Kontraktion der Kanten mit Länge 0 zu einer Metrik wird. Wir unterscheiden in dieser Arbeit nicht, ob es sich um eine Metrik oder Semi-Metrik handelt, da es für die Beweise unerheblich ist.

Bemerkung 2.1.4. Wenn die entsprechende Abbildung klar ist, schreiben wir zur vereinfachten Lesbarkeit oft d statt d_L und G statt (G, d_L) .

Bemerkung 2.1.5. Die Fundamentalgruppe $\pi_1 G$ eines zusammenhängenden Graphen G ist eine freie Gruppe. Die Kardinalität des Erzeugendensystems dieser Gruppe heißt *Rang*. Wenn G keine Ecken von Grad 1 hat und kein Kreisgraph ist, so ist für die Fundamentalgruppe der zugehörige Rang $k \geq 2$. In einem Kreisgraph hat jede Ecke Grad 2 und die entsprechende Fundamentalgruppe hat Rang 1.

Dies kann man zeigen, indem man einen Spannbaum des Graphen kontrahiert. Weiteres findet man in dem Buch „Trees“ von Jean-Pierre Serre [Ser80] auf Seite 23.

Bemerkung 2.1.6. Nach Lemma 1.0.7 gilt für einen metrischen Graphen (G, d_L) und $\alpha > 0$

$$\alpha h_{\text{vol}}(G, d_{\alpha L}) = h_{\text{vol}}(G, d_L),$$

wobei αL die Streckung jeder Kantenlänge um den Faktor α bedeutet. Für das Volumen gilt außerdem

$$\text{vol}(G, d_{\alpha L}) = \alpha \text{vol}(G, d_L).$$

Daher folgt, dass für einen metrischen Graphen $h_{\text{vol}}(G, d_{\alpha L}) \cdot \text{vol}(G, d_{\alpha L})$ unabhängig von α ist. Weiterhin genügt zur Untersuchung der Minimalitätseigenschaften der Volumenentropie lediglich die metrischen Graphen (G, d_L) bezüglich einer Normierung, nämlich mit $\text{vol}(G, d_L) = 1$, zu einem gegebenen Graphen G zu betrachten. Hierdurch erhalten wir eine Normierung des Volumens und somit eine Möglichkeit, die Volumenentropie zu vergleichen. Die Menge der Metriken auf G , für die das Volumen 1 beträgt, bezeichnen wir mit $\Delta(G)$ und die der Semi-Metriken mit $\Delta_0(G)$.

2.2 Minimale Volumenentropie von Graphen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Ergebnisse aus „Minimal volume entropy on graphs“ von Seonhee Lim [Lim08] ohne Beweise zitiert.

Im Fall von Graphen ist das Minimum der Volumenentropie zu einem gegebenen Graphen eindeutig und darüber hinaus kann die zugehörige minimierende Metrik explizit angegeben werden. Dies ist in Satz 2.2.3 festgehalten.

Im Anschluss an diesen Satz werden zwei Folgerungen aufgeführt, welche im weiteren Verlauf dieser Arbeit relevant werden. Zum einen wird das Minimum für reguläre Graphen bestimmt und zum anderen das Minimum der Volumenentropie über alle Graphen mit gleichem Rang der Fundamentalgruppe betrachtet. Hierbei wird die Volumenentropie stets von den 3-regulären Graphen minimiert.

Satz 2.2.1 (Satz 4, [Lim08]). *Sei (G, d_L) ein zusammenhängender metrischer Graph ohne Ecken von Grad 1, der kein Kreisgraph ist. Das lineare Gleichungssystem für $e \in \bar{E}(G)$*

$$x_e = \sum_{f \in \bar{E}(G)} x_f \rho_{ef} e^{-hL(f)}$$

mit

$$\rho_{ef} = \begin{cases} 1 & \text{für } t(e) = i(f) \text{ und } e \neq f^{-1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar für $x_e > 0$ genau für ein $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und es gilt $h = h_{\text{vol}}(G, d_L)$.

Der vorherige Satz wird später in Abschnitt 4.5 zitiert. Auch wenn an dieser Stelle kein Beweis gegeben wird, sondern auf [Lim08] verwiesen wird, kann man an diesem Satz die Struktur des Beweises des Hauptresultats erkennen. So wird die Übereinstimmung der Volumenentropie mit dem h aus dem Gleichungssystem genutzt und auch die Beweise zu den Sätzen 2.2.2 und 2.2.3 verwenden dieses Gleichungssystem und lösen es nach h auf.

Satz 2.2.2 (Satz 5 erster Teil, [Lim08]). *Sei G ein zusammenhängender Graph, wobei jede Ecke mindestens Grad 3 hat, und sei $d \in \Delta(G)$ eine beliebige Volumen 1 Metrik auf G .*

Dann gilt für die Volumenentropie

$$h_{\text{vol}}(G, d) \geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1).$$

Satz 2.2.3 (Satz 5, [Lim08]). *Sei G ein zusammenhängender Graph, wobei jede Ecke mindestens Grad 3 hat.*

Dann existiert eine eindeutige Volumen 1 Metrik $d \in \Delta(G)$, für welche die Volumenentropie

$$h_{\text{vol}}(G, d) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1)$$

beträgt. Diese wird realisiert durch die Längenzuordnung

$$L(e) = \frac{\log((\deg(i(e)) - 1)(\deg(t(e)) - 1))}{\sum_{v \in V(G)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1)}.$$

Bemerkung 2.2.4. Somit ist die Abschätzung aus Satz 2.2.2 scharf und das Minimierungsproblem der Entropie auf einem gegebenen Graphen mit den obigen Eigenschaften ist eindeutig lösbar.

Bemerkung 2.2.5. Die Ergebnisse aus Satz 2.2.2 und Satz 2.2.3 lassen sich auch auf einen Graphen G verallgemeinern, der keine Ecken von Grad 1 hat und zusätzlich kein Kreis ist, das heißt es existiert mindestens eine Ecke von Grad 3 oder höher. Für solch einen Graphen kann man einen neuen Graphen definieren, indem man jede Ecke von Grad 2 und die beiden anliegenden Kanten sukzessive durch eine neue Kante ersetzt, welche die beiden anderen Ecken der Kanten verbindet. Der resultierende Graph hat keine Ecken von Grad 2 und erfüllt somit die Voraussetzungen der Sätze 2.2.2 und 2.2.3.

Die Längenzuordnung ist dann eindeutig auf dem neuen Graph und kann bis auf Aufteilung auf die vorherigen Kanten eindeutig auf den ursprünglichen Graphen übertragen werden. Durch die obige Konstruktion erhalten wir nicht zwingend einen einfachen Graphen, sondern können auch mehrfache Kanten oder Zyklen erhalten. Hierfür funktionieren die Beweise allerdings analog, wodurch das Ergebnis das gleiche bleibt.

Auch Ecken von Grad 1 verursachen keine Probleme, wenn wir Semi-Metriken zulassen. Da der Übergang zu Semi-Metriken zu keinen Unterschieden in den Beweisen führt, lassen wir diese Verallgemeinerung zu. Hierbei muss allerdings berücksichtigt werden, dass der Graph nach sukzessivem Kontrahieren der Grad 1 Ecken kein Kreisgraph ist. In diesem Fall ist die Volumenentropie 0, da die universelle Überlagerung isometrisch zur reellen Achse ist und daher das Volumen von Bällen nicht exponentiell, sondern linear wächst.

Definition 2.2.6. Sei G ein Graph.

Wir benennen die *eindeutige minimierende Metrik* auf G aus Satz 2.2.3 mit d_{min} und bezeichnen somit mit (G, d_{min}) den *minimierenden metrischen Graphen* bezüglich der Volumenentropie. Hierbei unterscheiden wir nicht, ob es sich um eine Metrik oder eine Semi-Metrik handelt.

Korollar 2.2.7 (Korollar 7, [Lim08]). *Sei G ein k -regulärer zusammenhängender Graph mit $k \geq 3$.*

Dann wird die Volumenentropie-minimierende Metrik $d_L \in \Delta(G)$ von der Längenzuordnung induziert, welche jeder Kante $e \in \bar{E}(G)$ die gleiche Länge zuordnet, also

$$L : \bar{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad e \mapsto \frac{2}{\#\bar{E}(G)}.$$

Die zugehörige Volumenentropie beträgt

$$h_{vol}(G, d_L) = \frac{\#\bar{E}(G)}{2} \log(k - 1) = \#E(G) \log(k - 1).$$

Das nachfolgende Korollar gibt das globale Minimum für Graphen an. Hierbei werden alle Graphen berücksichtigt mit positiver minimaler Volumenentropie und gleichem Rang der Fundamentalgruppe. Die zugelassenen Metriken sind hierbei alle Metriken, sodass der metrische Raum Volumen 1 bezüglich dieser Metrik hat.

Korollar 2.2.8 (Korollar 8, [Lim08]). *Sei $k \in \mathbb{N}$. Unter den metrischen Graphen mit Volumen 1 Metriken, welche keine Ecken von Grad 1 oder 2 und eine zugehörige Fundamentalgruppe von Rang $k \geq 2$ haben, wird die Volumenentropie durch jeden beliebigen 3-regulären Graphen minimiert. Die zugehörige Längenabbildung ordnet jeder Kante die gleiche Länge zu.*

Bemerkung 2.2.9. Für $k = 2$ handelt es sich nicht um einen einfachen Graphen, sondern um zwei Ecken, welche mit drei Kanten verbunden sind. Alternativ kann der Graph auch ein Graph aus zwei Knoten sein, welche mit einer Kante verbunden sind und jeweils einen Zykel an der Ecke haben. Somit ist bereits in diesem Fall der 3-reguläre Graph nicht eindeutig.

Für $k = 3$ gibt es einen eindeutigen zusammenhängenden einfachen Graphen, nämlich den vollständigen Graphen mit 4 Ecken.

Die 3-regulären Graphen aus Korollar 2.2.8 sind für $k \geq 4$ ebenfalls nicht eindeutig.

Die konkrete Anzahl an Ecken und Kanten für ein beliebiges $k \geq 2$ lässt sich durch die beiden Formeln

$$3\#V(G) = 2\#E(G) \quad \text{und} \quad \#V(G) - 1 + k = \#E(G)$$

für einen 3-regulären Graphen explizit berechnen.

Die erste Formel folgt daraus, dass der Graph 3-regulär ist und die zweite Gleichung folgt aus dem Zusammenhang zwischen Fundamentalgruppe und Spannbaum, wie man auch im Beweis auf Seite 23 in „Trees“ von Jean-Pierre Serre [Ser80] nachlesen kann.

Beispiel 2.2.10. Gegeben sei der vollständige Graph mit vier Ecken K_4 . Das heißt, wir betrachten den Graphen, welcher aus 4 Ecken besteht und jede Ecke ist mit jeder anderen Ecke durch eine Kante verbunden. Dargestellt ist dieser Graph in Abbildung 2.1 mit einer Benennung der Ecken.

Zur Betrachtung der Volumenentropie benötigen wir den Übergang zur universellen Überlagerung. Dies ist ein 3-regulärer Baum, welcher in Abbildung 2.2 skizziert ist. Die Ecken in der universellen Überlagerung sind so benannt, dass A' auf A mit der Überlagerung projiziert wird und für die übrigen Ecken analog.

Da wir nun in der universellen Überlagerung sind, können wir die Volumenentropie des Graphen bestimmen, wenn wir eine Längenzuordnung auf dem Graphen betrachten. Nach Korollar 2.2.7 wird das Minimum der Volumenentropie genau dann angenommen, wenn alle Kanten die gleiche Länge haben. Somit erhalten wir mit der Normierung des Volumens auf 1 die Länge für $e \in E(K_4)$

$$L(e) = \frac{1}{\#E(K_4)} = \frac{1}{6}.$$

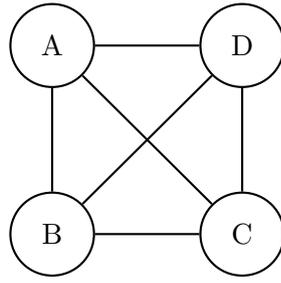


Abbildung 2.1 Der Graph K_4 mit Ecken A, B, C, D .

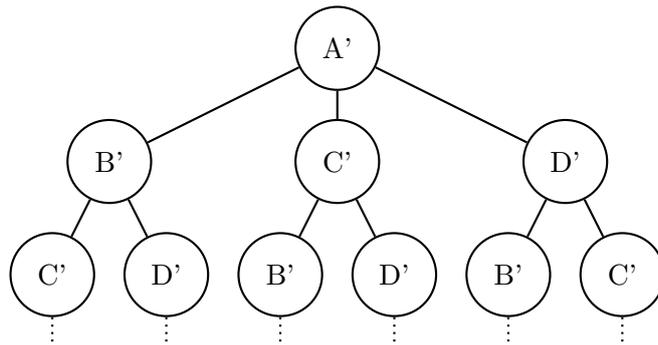


Abbildung 2.2 Universelle Überlagerung zu K_4 aus Abbildung 2.1.

Diese Länge überträgt sich auch auf die Länge jeder Kante in der universellen Überlagerung. Die resultierende minimale Volumenentropie für K_4 ist somit erneut nach Korollar 2.2.7 gegeben durch

$$h_{\min}(K_4) = \#E(G) \log(2) = 6 \log(2).$$

Kapitel 3

Hypergraphen

Wir versuchen das vorherige Ergebnis zu erweitern und benötigen dafür passende Verallgemeinerungen von Graphen. Hier gibt es mehrere mögliche Ansätze und wir betrachten zunächst Hypergraphen. Hypergraphen sind ähnlich zu Graphen definiert, allerdings gibt es Kanten mit beliebig vielen Elementen statt nur mit zwei. Dadurch stellt das Ergebnis für Hypergraphen eine direkte Verallgemeinerung des Ergebnisses für Graphen dar.

3.1 Definitionen – Hypergraphen

In diesem Abschnitt beginnen wir mit einer Einführung der Begriffe, welche im Zusammenhang mit Hypergraphen relevant sind. Darüber hinaus definieren wir den abgeleiteten Graphen zu einem Hypergraphen. Dies ist ein Graph, welcher das gleiche Wachstumsverhalten wie der zugehörige Hypergraph hat und somit bei der Betrachtung der Volumenentropie genutzt wird.

Definition 3.1.1. Ein *Hypergraph* $H = (V(H), E(H))$ ist ein geordnetes Paar mit einer Menge von Ecken $V(H)$ und einer Menge von Hyperkanten $E(H) \subseteq \mathcal{P}(V(H))$, welche eine Teilmenge der Potenzmenge der Ecken darstellt. Eine Hyperkante wird oft auch schlicht Kante genannt, unabhängig von der Anzahl an Elementen, aus denen die Hyperkante besteht.

Gilt $\#e = m \in \mathbb{N}$ für alle $e \in E(H)$, das heißt jede Kante besteht aus genau m Elementen, so nennen wir H *m-uniform*.

Zu jeder Kante $e \in E(H)$ existieren $m = \#e$ gerichtete Kanten \bar{e} , nämlich die mit Anfangsecke $i(\bar{e}) = v$ und Endecken $t(\bar{e}) = e \setminus \{v\}$ für $v \in e$. Wir nennen die Kante e die zugrunde liegende Kante von \bar{e} und wir bezeichnen die Menge aller gerichteten Kanten von H wie bei Graphen mit $\bar{E}(H)$. Wir definieren die maximale Kantengröße m_{\max} von H als

$$m_{\max} = \max_{e \in E(H)} \#e$$

Bemerkung 3.1.2. Ein 2-uniformer Hypergraph entspricht genau einem Graphen aus dem vorangegangenen Kapitel. Daher ist ein Hypergraph eine naheliegende Verallgemeinerung von Graphen, auch wenn man Hypergraphen nicht ohne weiteres eine Dimension zuordnen kann.

Beispiel 3.1.3. In Abbildung 3.1 ist ein Hypergraph dargestellt. Hierbei sind die schwarzen Punkte die Ecken, wovon der gezeigte Hypergraph neun hat. Die Hyperkanten sind jeweils als farbige Umrandung der jeweiligen zugehörigen Ecken eingezeichnet. Das heißt, in diesem Fall hat der Hypergraph sechs Hyperkanten.

Der Hypergraph ist nicht uniform, da es Kanten mit Kardinalität drei und vier gibt.

Definition 3.1.4. Sei H ein Hypergraph. Wir definieren zu H den *abgeleiteten Graphen* G_H als ungerichteten Graphen mit Ecken- und Kantenmenge wie folgt:

- $V(G_H) = V(H) \cup E(H)$

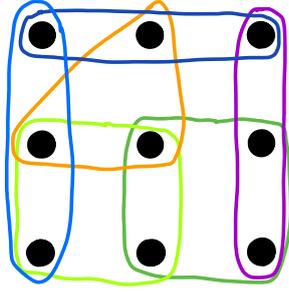


Abbildung 3.1 Beispiel eines Hypergraph mit 9 Ecken und 6 Hyperkanten, dargestellt in den verschiedenen Farben.

- $E(G_H) = \{\{v, w\} \mid v \in V(H), w \in E(H) \text{ mit } v \in w\}$

Bezeichne für $e \in E(H)$ die Menge der *abgeleiteten Kanten von e* mit $E_H(e)$. Diese definieren wir als

$$E_H(e) := \{\{v, w\} \in E(G_H) \mid w = e\}.$$

Beispiel 3.1.5. Wir betrachten erneut den Hypergraphen aus Beispiel 3.1.3. Zu dem gegebenen Hypergraphen ist in Abbildung 3.2 der zugehörige abgeleitete Graph dargestellt. Hierbei wurde jede Hyperkante durch einen Sterngraphen ersetzt, welcher die Ecken verbindet. Die Ecke und Kanten sind jeweils in der Farbe der jeweiligen Hyperkante eingezeichnet. Die Kanten sind somit die abgeleiteten Kanten zu der jeweiligen Hyperkante der gleichen Farbe.

Der abgeleitete Graph hat daher $\#V(H) + \#E(H)$ Ecken und $\sum_{e \in E(H)} \#e$ Kanten.

Um die Definition der Volumenentropie aus Kapitel 1 zu nutzen, benötigen wir eine Metrik auf dem Hypergraphen und die Definitionen von Wegen und Volumen, da ein Hypergraph nicht in natürlicher Weise zu einem metrischen Raum wird und das Hausdorff-Maß nicht definiert ist. Diese erläutern wir in den folgenden Definitionen.

Definition 3.1.6. Sei H ein Hypergraph und $n \in \mathbb{N}$.

Ein *kombinatorischer n -Weg* ist ein Kantenzug $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ mit $e_i \in \bar{E}(H)$ und $i(e_{i+1}) \in t(e_i)$ für alle $i = 1, \dots, n-1$. Des Weiteren dürfen zwei aufeinander folgende Hyperkanten nicht die gleiche zugrunde liegende Hyperkante haben.

Für einen kombinatorischen n -Weg ist seine *Länge* $L(p)$ definiert als

$$L(p) = \sum_{i=1}^n L(e_i).$$

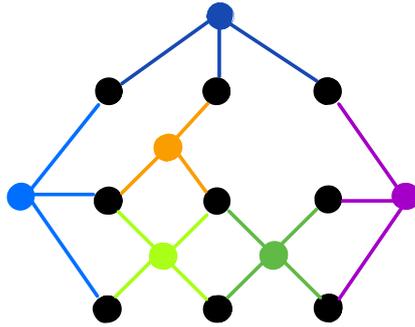


Abbildung 3.2 Der abgeleitete Graph zum Hypergraphen aus Beispiel 3.1.3 mit abgeleiteten Kanten und neuer Ecke in der jeweiligen Farbe der Hyperkante.

Wir nennen solch einen Weg *kombinatorischer n -Weg der Länge r* , wenn außerdem für die Länge gilt

$$L(p) - L(e_n) < r \leq L(p).$$

Die Anzahl der kombinatorischen Wege der Länge r beginnend in einem $\tilde{v} \in V(\tilde{H})$ definieren wir als

$$K_r(\tilde{v}) = \#\{p = e_1 \cdots e_n \mid i(e_1) = \tilde{v}, L(p) - L(e_n) < r \leq L(p)\}.$$

Definition 3.1.7. Sei H ein Hypergraph und $L: E(H) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine Längenzuordnung zu den Hyperkanten. Daraus leitet sich wie auch für Graphen eine Metrik auf den Ecken des Hypergraphen ab, die Längenmetrik. So gilt für zwei Ecken $v, w \in V(H)$, dass die Metrik d gegeben ist durch

$$d(v, w) = \inf_p L(p)$$

über alle Wege $p = e_1 \dots e_n$ mit $v = i(e_1)$, $w \in t(e_n)$ und $n \in \mathbb{N}$. Den Hypergraphen mit Metrik nennen wir dann *metrischen Hypergraphen* und die Metrik bezeichnen wir mit d_L . Sei (H, d_L) nun ein metrischer Hypergraph.

Wir definieren weiter das Volumen von H mit

$$\text{vol}(H) = \sum_{e \in E(H)} L(e).$$

Analog definieren wir auch das Volumen für eine Teilmenge $S \subseteq H$ als die Summe der Länge der ungerichteten Hyperkanten

$$\text{vol}(S) = \sum_{e \in E(S)} L(e).$$

Wenn S eine Teilmenge gerichteter Hyperkanten ist, so betrachten wir die zugehörigen ungerichteten Kanten und darüber das Volumen. Außerdem definieren wir den zugehörigen *metrischen abgeleiteten Graphen* (G_H, d_L) , welcher gegeben ist durch den abgeleiteten Graphen zusammen mit der Längenzuordnung

$$\bar{L} : E(G_H) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \{v, w\} \mapsto \frac{L(w)}{2}$$

mit $v \in V(H)$ und $w \in E(H)$.

Durch diese Definition von Wegen können wir auch über *einfach zusammenhängende* Hypergraphen sprechen, was wir für die universelle Überlagerung und somit für die Volumenentropie benötigen. Ein einfach zusammenhängender Hypergraph ist somit ein Hypergraph ohne Kreise, wobei auch eine doppelte Kante, also zwei Kanten, welche das gleiche Paar von Ecken $\{x, y\}$ enthalten, als Kreis gewertet wird.

Beispiel 3.1.8. Durch unsere Definition von einfach zusammenhängenden Hypergraphen haben diese noch eine sehr ähnliche Struktur zu Graphen.

Beispielhaft sind in Abbildung 3.3 ein einfach zusammenhängender und einer, der es nicht ist, abgebildet. Der zweite Hypergraph ist nicht einfach zusammenhängend, da zum Beispiel die beiden grünen Hyperkanten zwei gemeinsame Ecken haben, oder auch, weil die beiden blauen und die orangefarbene Hyperkante einen Kreis bilden mit der Ecke links oben und den beiden benachbarten.

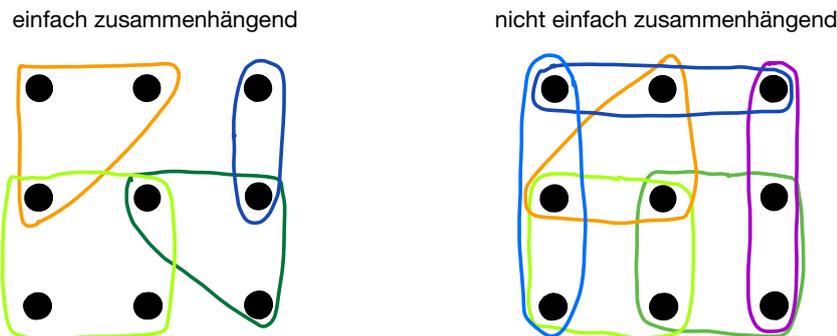


Abbildung 3.3 Ein Beispiel für einen einfach zusammenhängenden und einen nicht einfach zusammenhängenden Hypergraphen

Bemerkung 3.1.9. Wie auch für Graphen gilt nach Lemma 1.0.7 für $\alpha > 0$

$$h_{\text{vol}}(H, d_{\alpha L}) \text{vol}(H, d_{\alpha L}) = h_{\text{vol}}(H, d_L) \text{vol}(H, d_L).$$

Aus diesem Grund ist es ausreichend die Metriken mit Volumen 1 zu betrachten, wenn wir die Frage nach dem Minimum der Volumenentropie stellen.

3.2 Untere Schranke und minimale Volumenentropie von Hypergraphen

In diesem Abschnitt erarbeiten wir Resultate für die minimale Volumenentropie von Hypergraphen. In Satz 3.2.5 finden wir eine untere Schranke zu jedem Hypergraphen und somit eine Verallgemeinerung von Satz 2.2.3. Im Spezialfall von uniformen, regulären Hypergraphen ist diese Schranke auch scharf.

Das folgende Lemma ist analog zu Lemma 1.0.8 zu sehen. Hierbei werden die metrischen Wege durch kombinatorische Wege ersetzt.

Lemma 3.2.1. *Sei (H, d) ein Hypergraph mit universeller Überlagerung \tilde{H} und $\tilde{v} \in V(\tilde{H})$. Dann gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}))}{r} = h_{\text{vol}}(H, d).$$

Beweis. Aus der Definition der Volumenentropie folgt

$$\text{vol}(B_r(\tilde{v})) = e^{(rh_{\text{vol}}(H, d) + f(r))}$$

mit $f(r) \in o(r)$ und somit gilt für $t > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{v}) \setminus B_{r-t}(\tilde{v})))}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{v})) - \text{vol}(B_{r-t}(\tilde{v})))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(e^{rh_{\text{vol}}(H, d) + f(r)} - e^{(r-t)h_{\text{vol}}(H, d) + f(r-t)})}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(e^{rh_{\text{vol}}(H, d) + f(r)}(1 - e^{-th_{\text{vol}}(H, d) + g(r)}))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{rh_{\text{vol}} + f(r) + \log(1 - e^{-th_{\text{vol}}(H, d) + g(r)})}{r} \\ &= h_{\text{vol}}. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun die Anzahl kombinatorischer Wege der Länge r gegen das Volumen von Bällen ab. Genauer betrachten wir den Ring $B_r(\tilde{v}) \setminus B_{r-t}(\tilde{v})$. Dieser hat mindestens das Volumen von $tK_r(\tilde{v})$, da jeder Weg um die Länge t weiter geht und somit zum Volumen beiträgt. Für die obere Schranke betrachten wir entsprechend alle kombinatorischen Wege, welche es am äußeren Rand gibt und multiplizieren diese mit t , also $tK_{r+t}(\tilde{v})$. Dies ergibt formaler ausgedrückt die Ungleichungen

$$tK_r(\tilde{v}) \leq \text{vol}(B_r(\tilde{v}) \setminus B_{r-t}(\tilde{v})) \leq tK_{r+t}(\tilde{v})$$

und somit im Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}))}{r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(tK_r(\tilde{v}))}{r} \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{v}) - B_{r-t}(\tilde{v})))}{r} \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(tK_{r+t}(\tilde{v}))}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}))}{r}
\end{aligned}$$

und daher erneut Gleichheit. Die beiden Gleichheiten folgen wie vorher daraus, dass konstante Faktoren vernachlässigbar sind im Grenzwert.

Insgesamt folgt daher

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}))}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{v}) - B_{r-t}(\tilde{v})))}{r} = h_{\text{vol}}(H, d).$$

□

Bemerkung 3.2.2. Da Hypergraphen eine Verallgemeinerung von Graphen sind, gilt dieses Lemma insbesondere auch für Graphen. Somit können wir ohne eigenen Beweis Lemma 3.2.1 auch für Graphen nutzen.

Lemma 3.2.3. *Für einen metrischen Hypergraphen (H, d) und den zugehörigen abgeleiteten metrischen Graphen (G_H, d) gilt*

$$h_{\text{vol}}(H, d_L) = h_{\text{vol}}(G_H, d_{\bar{L}}).$$

Beweis. Wir nutzen den Zusammenhang für Graphen G zwischen der Volumenentropie und der Anzahl kombinatorischer Wege der Länge $r > 0$, also Lemma 3.2.1 mit der zugehörigen Bemerkung

$$h_{\text{vol}}(G, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_r(\tilde{v}))}{r}$$

für $\tilde{v} \in V(\tilde{G})$. Dieser Zusammenhang gilt für Graphen und Hypergraphen analog.

Sei $\tilde{v} \in V(\tilde{H})$. Aus der Konstruktion von $G_{\tilde{H}}$ folgt $v \in V(\tilde{G}_H)$. Bezeichne mit $K_r(\tilde{v}, \tilde{H})$ die Anzahl der kombinatorischen Wege in \tilde{H} der Länge r mit Anfangspunkt \tilde{v} und mit $K_r(\tilde{v}, \tilde{G}_H)$ das Analoge für \tilde{G}_H .

Sei m_{\max} die maximale Kantengröße von H . Dann gilt

$$K_r(\tilde{v}, \tilde{H}) \leq K_r(\tilde{v}, \tilde{G}_H) \leq m_{\max} \cdot K_r(\tilde{v}, \tilde{H}).$$

Hierbei folgt die erste Ungleichung, da es für jeden kombinatorischen Weg in \tilde{H} auch einen Weg in \tilde{G}_H gibt aufgrund der Definition des abgeleiteten Graphen. Die zweite Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass ein kombinatorischer Weg sich in maximal $m_{\max} - 1$ kombinatorische Wege in einer Kante aufspaltet, da dies die Anzahl an möglichen

Endecken für den Weg ist. Die Abschätzung gegen m_{\max} wurde aufgrund der besseren Lesbarkeit als tatsächliche Schranke gewählt.

Somit folgt

$$\begin{aligned}
h_{\text{vol}}(H, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}, \tilde{H}))}{r} \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}, \tilde{G}_H))}{r} \\
&= h_{\text{vol}}(G_H, d) \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(m_{\max} \cdot K_r(\tilde{v}, \tilde{H}))}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(K_r(\tilde{v}, \tilde{H}))}{r} \\
&= h_{\text{vol}}(H, d).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde in der vorletzten Gleichheit erneut ausgenutzt, dass man Produkte aus dem Logarithmus in eine Summe umformen kann und konstante Terme asymptotisch wegfallen.

Daher gilt

$$h_{\text{vol}}(H, d) = h_{\text{vol}}(G_H, d).$$

□

Lemma 3.2.4. *Sei H ein Hypergraph und G_H der abgeleitete Graph von H . Dann gilt zwischen dem Infimum der Volumenentropie des Hypergraphen und der minimalen Entropie aus Satz 2.2.3 des abgeleiteten Graphen der Zusammenhang*

$$\inf_d h_{\text{vol}}(H, d) \geq \frac{2}{m_{\max}} h_{\text{min}}(G_H, d_{\text{min}}).$$

Hierbei wird das Infimum über alle Metriken d auf H mit $\text{vol}(H, d) = 1$ betrachtet.

Beweis. Sei H zunächst ein m -regulärer Hypergraph mit beliebiger Metrik d mit $\text{vol}(H, d) = 1$. Zu jeder Längenzuordnung L auf H gehört eine abgeleitete Längenzuordnung \bar{L} auf G_H , wobei für $e \in E(H)$ und $e_G \in E_H(e)$ nach Definition gilt

$$\bar{L}(e_G) = \frac{1}{2}L(e).$$

Sei nun $d_{\bar{L}}$ die Metrik auf G_H , welche von der Metrik d_L auf H abgeleitet ist.

Dann gilt für diese Metriken der Zusammenhang der Volumen

$$\begin{aligned}
\text{vol}(G_H, d_{\bar{L}}) &= \sum_{e_G \in E(G_H)} \bar{L}(e_G) = \sum_{e \in E(H)} \sum_{e_G \in E_H(e)} \bar{L}(e_G) \\
&= \sum_{e \in E(H)} \sum_{e_G \in E_H(e)} \frac{1}{2}L(e) = \frac{m}{2} \sum_{e \in E(H)} L(e) \\
&= \frac{m}{2} \text{vol}(H, d_L).
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt mit Lemma 3.2.3 und Bemerkung 3.1.9

$$h_{vol}(H, d) = h_{vol}(G_H, \bar{d}) \geq \frac{2}{m} h_{min}(G_H, d_{min}).$$

Da die Metrik d beliebig gewählt wurde, ändert die Betrachtung des Infimums über alle Metriken nichts an der Ungleichung und daher gilt

$$\inf_d h_{vol}(H, d) \geq \frac{2}{m} h_{min}(G_H, d_{min}),$$

wobei das Infimum über alle Metriken d auf H betrachtet wird mit $\text{vol}(d) = 1$.

Sei H nun ein beliebiger Hypergraph mit Volumen 1 Metrik d . Betrachte den uniformisierten Graphen \hat{H} , welcher aus H entsteht, indem man zu jeder Kante $e \in E(H)$ weitere $m_{max} - \#e$ isolierte Ecken hinzufügt, also Ecken, welche ausschließlich in dieser Kante liegen. \hat{H} ist somit m_{max} -uniform und es gilt $h_{vol}(H, d) = h_{vol}(\hat{H}, d)$, da Ecken von Grad 1 die Volumenentropie invariant lassen. Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$h_{vol}(H, d) = h_{vol}(\hat{H}, d) \geq \frac{2}{m_{max}} h_{min}(G_{\hat{H}}, d_{min}) = \frac{2}{m_{max}} h_{min}(G_H, d_{min}).$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass sich G_H und $G_{\hat{H}}$ nur darin unterscheiden, dass für jede hinzugefügte Ecke von \hat{H} eine Ecke von Grad 1 hinzu kommt. Die anliegenden Kanten ändern nicht die Volumenentropie und sind somit kontrahierbar und können mit Länge 0 betrachtet werden. \square

Satz 3.2.5 (Satz A). *Zu einem gegebenen Hypergraphen H mit beliebiger Volumen 1 Metrik d gilt*

$$h_{vol}(H, d) \geq \frac{1}{m_{max}} \left(\sum_{e \in E(H)} \#e \log(\#e - 1) + \sum_{v \in V(H)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1) \right).$$

Beweis. Sei $G = G_H$ der abgeleitete Graph zu H . Für jedes $v_G \in V(G)$ gibt es nach der Definition des abgeleiteten Graphen genau ein zugehöriges $v_H \in V(H)$ oder $e_H \in E(H)$. Wir bezeichnen die beiden disjunkten Mengen mit $V_V(G)$, wenn sie zu einer Ecke in H gehören und mit $V_E(G)$, wenn sie zu einer Kante in H gehören. Im Fall von $v_G \in V_V(G)$ gilt $\deg(v_G) = \deg(v_H)$ und im Fall von $v_G \in V_E(G)$ gilt $\deg(v_G) = \#e_H$.

Aus dem Satz über minimale Volumenentropie eines Graphen von Seonhee Lim 2.2.3 folgt nun

$$\begin{aligned}
h_{min}(G, d_{min}) &= \frac{1}{2} \sum_{v_G \in V(G)} \deg(v_G) \log(\deg(v_G) - 1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v_G \in V_V(G)} \deg(v_G) \log(\deg(v_G) - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{v_G \in V_E(G)} \deg(v_G) \log(\deg(v_G) - 1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{v_H \in V(H)} \deg(v_H) \log(\deg(v_H) - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_H \in E(H)} \#e_H \log(\#e_H - 1).
\end{aligned}$$

Sei nun d_L eine beliebige Volumen 1 Metrik auf H und \bar{L} die abgeleitete Längenzuordnung auf G . Es gilt

$$\text{vol}(G, d_{\bar{L}}) = \sum_{e \in E(G)} \bar{L}(e) \leq \sum_{e \in E(H)} \frac{m_{max}}{2} L(e) = \frac{m_{max}}{2} \text{vol}(H, d) = \frac{m_{max}}{2}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
h_{vol}(H, d_L) &= h_{vol}(G, d_{\bar{L}}) \\
&\geq \frac{2}{m_{max}} h_{min}(G, d_{min}) \\
&= \frac{1}{m_{max}} \left(\sum_{e \in E(H)} \#e \log(\#e - 1) + \sum_{v \in V(H)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1) \right).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.6. Seien $E_i = \#\{e \in E(H) \mid \#e = i\}$ und $V_i = \#\{v \in V(H) \mid \deg(v) = i\}$. Dann kann alternativ das Ergebnis aus Satz 3.2.5 auch als

$$h_{vol}(H, d) \geq \frac{1}{m_{max}} \sum_{i=2}^{\infty} (E_i + V_i) i \log(i - 1)$$

geschrieben werden. Dabei werden lediglich die Summen umsortiert.

Korollar 3.2.7. *Sei H ein m -uniformer Hypergraph. Dann gilt für die Volumenentropie*

$$h_{vol}(H, d) \geq \#E(H) \log(m - 1) + \frac{1}{m} \sum_{v \in V(H)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus $m = m_{max} = \#e$ für alle $e \in E(H)$. \square

Bemerkung 3.2.8. Für $m = 2$ entspricht dieser Satz dem Ergebnis von Seonhee Lim 2.2.3, und ergibt in diesem Fall eine scharfe untere Schranke, da dies für Satz 2.2.3 bereits bekannt ist. Der abgeleitete Graph ist hierbei der normale Graph, wobei jede Kante um eine Ecke von Grad 2 erweitert wird. Somit kann der Satz 3.2.5 als direkte Verallgemeinerung von Satz 2.2.3 angesehen werden.

Der folgende Satz entspricht Korollar 2.2.7 für Graphen. Allerdings benötigen wir hier, um ein konkretes Minimum zu erhalten, neben der Eigenschaft, dass der Hypergraph regulär ist, zusätzlich die Einschränkung auf einen uniformen Hypergraphen. Dies ist notwendig, damit vom abgeleiteten Graphen der Übergang zurück zum Hypergraphen funktioniert.

Lemma 3.2.9. *Sei H ein m -uniformer und k -regulärer Hypergraph.*

Dann existiert eine Metrik d_{min} auf H , welche die Volumenentropie minimiert. Für das Minimum der Volumenentropie gilt

$$h_{min}(H, d_{min}) = \#E(H) \log((k-1)(m-1))$$

und die zugehörige Längenzuordnung ist eindeutig und ordnet jeder Hyperkante die gleiche Länge $\frac{1}{\#E(H)}$ zu.

Beweis. Sei H ein m -uniformer und k -regulärer Hypergraph. Nach Satz 3.2.5 gilt

$$\begin{aligned} h_{vol}(H) &\geq \frac{1}{m} \left(\sum_{e \in E(H)} m \log(m-1) + \sum_{v \in V(H)} k \log(k-1) \right) \\ &= \#E(H) \log(m-1) + \#V(H) \frac{k}{m} \log(k-1) \\ &= \#E(H) \log(m-1) + \#E(H) \log(k-1) \\ &= \#E(H) \log((k-1)(m-1)). \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit nutzt für k -reguläre, m -uniforme Hypergraphen den Zusammenhang

$$m \cdot \#E(H) = k \cdot \#V(H).$$

Im Folgenden sehen wir, dass dieses Minimum auch angenommen wird. Aus Satz 2.2.3 erhalten wir wie im Beweis zu Satz 3.2.5, dass auf dem abgeleiteten Graphen das Minimum angenommen wird, wenn jede Kante $e \in E(G_H)$ die gleiche Länge hat. Dies gilt, da für alle Kanten der Grad an einem Ende m und am anderen k beträgt. Somit haben zu einer Hyperkante $e \in E(H)$ alle abgeleiteten Kanten $E_H(e)$ die gleiche Länge. Daher erhalten wir eine Längenzuordnung auf dem Hypergraphen durch $L(e) = 2 \cdot L(e_G)$ mit $e_G \in E_H(e)$. Durch Normieren des Hypergraphen um den Faktor $\frac{m}{2}$ erhalten wir die auf 1 normierte Metrik, welche die Volumenentropie minimiert. Da für Graphen das Minimum nach Satz 2.2.3 eindeutig ist, folgt dies auch für den abgeleiteten Graphen und somit nach Lemma 3.2.3 auch für den Hypergraphen. \square

Bemerkung 3.2.10. Aus Lemma 3.2.9 sehen wir, dass die untere Schranke aus Satz 3.2.5 in bestimmten Fällen scharf ist, insbesondere auch für $m > 2$. Für $m = 2$ entspricht dies dem Ergebnis von Lim aus Korollar 2.2.7. Somit ist es eine direkte Verallgemeinerung dieses Korollars 2.2.7.

Kapitel 4

Simplizialkomplexe

Bei den in Kapitel 3 betrachteten Hypergraphen sind nur Wege über die Ecken zugelassen. Im Folgenden wollen wir Wege auch über Kanten und Hyperkanten zulassen. Somit betrachten wir statt Hyperkanten, wie im vorherigen Kapitel, nun Simplizes. Hierdurch erhalten wir Simplicialkomplexe, welche in diesem Kapitel behandelt werden.

Um eine untere Schranke der Volumenentropie zu finden, definieren wir uns die Galerienentropie. Diese ist ähnlich zur Charakterisierung der Volumenentropie über Wege aus Lemma 1.0.8 definiert, allerdings werden hierbei kombinatorische Wege, sogenannte Galerien, betrachtet.

4.1 Definitionen – Simplicialkomplexe

In diesem Abschnitt führen wir Simplicialkomplexe und dazu verwandte Konzepte ein. Auf Simplicialkomplexen erhalten wir eine Metrik, indem wir jedem m -Simplex die induzierte Metrik aus dem \mathbb{R}^m von $m + 1$ affin unabhängigen Punkten zuordnen. Hierbei müssen die Metriken auf den Simplizes so gewählt werden, dass sie auf den Schnitten von je zwei beliebigen Simplizes übereinstimmen.

Um einen intuitiven Volumenbegriff zu haben, sind alle Simplizes Facetten eines maximalen Simplizes von Dimension n . Dadurch kann man das n -dimensionale euklidische Volumen je Simplex betrachten, welches dem n -dimensionalen Hausdorff-Maß entspricht.

Definition 4.1.1. Ein *abstraktes m -Simplex* S ist eine $m + 1$ -elementige Menge. Echte Teilmengen eines Simplex nennen wir *Facetten* des Simplexes und diese sind erneut Simplizes.

Ein n -dimensionaler *abstrakter Simplicialkomplex* X ist eine endliche Menge von Simplizes, sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- a) Es existiert für jedes $S \in X$ ein n -Simplex $\sigma \in X$ mit $S \subseteq \sigma$.
- b) Für jedes $S \in X$ ist jede Facette von S ein Element von X .
- c) Für alle $S, S' \in X$ ist der Schnitt von S und S' entweder leer oder eine Teilmenge von S und S' .

Wir bezeichnen mit $S_k(X)$ die *Menge der k -Simplizes* von X . $S_0(X)$ heißen *Ecken* und $S_n(X)$ *Flächen* von X .

Bemerkung 4.1.2. In der Definition von Simplicialkomplexen wird in der Literatur oft auf die Eigenschaft a) verzichtet. Der Unterschied ist dann, dass nicht alle maximalen Simplizes die gleiche Dimension haben. Dies führt jedoch zu Problemen bei der Definition des Volumens, weshalb wir für diese Arbeit die obige Definition gewählt haben.

Definition 4.1.3. Wir definieren auf einem n -Simplex S eine Metrik, sodass S isometrisch ist zur konvexen Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten im euklidischen Raum. Durch diese Zuordnung einer Metrik zu jedem Simplex $S \in X$, wobei die Metriken zweier Simplizes auf ihren Schnitten übereinstimmen, erhalten wir eine *stückweise euklidische*

Metrik d auf X . Wir bezeichnen mit (X, d) den *stückweise euklidischen Simplicialkomplex*. Definiere den *maximalen Quotienten k zu einem n -dimensionalen metrischen Simplex S* als

$$k_S = \frac{\max_{v,w \in S_0(S)} d(v,w)}{\min_{v,w \in S_0(S)} d(v,w)}$$

und das Maximum über alle Simplizes als *maximalen Quotienten von einem n -dimensionalen Simplicialkomplex X*

$$k = \max_{S \in S_n(X)} k_S = \max_{S \in S_n(X)} \frac{\max_{v,w \in S_0(S)} d(v,w)}{\min_{v,w \in S_0(S)} d(v,w)}$$

Bemerkung 4.1.4. Der maximale Quotient eines Simplexes S entspricht dem maximalen Seitenverhältnis des Simplexes, also dem maximalen Quotienten der Länge der 1-dimensionalen Facetten.

Konvention 4.1.5. In dieser Arbeit werden nur n -dimensionale Simplicialkomplexe betrachtet, welche über ihre $n - 1$ Facetten zusammenhängend sind, das heißt $X \setminus (S_0(X) \cup \dots \cup S_{n-2}(X)) = X \setminus S_{n-2}(X)$ ist zusammenhängend.

Wir nennen zwei Simplizes *Nachbarn* oder *benachbart*, wenn ihr Schnitt eine gemeinsame $n - 1$ dimensionale Facette von beiden Simplizes ist.

Definition 4.1.6. Sei X ein n -dimensionaler Simplicialkomplex und $S \in S_k(X)$ ein k -Simplex mit $k < n$.

Der *Grad* von S in X , $\deg(S)$, ist definiert als

$$\deg(S) = \#\{S' \in S_n(X) \mid S \subset S'\}.$$

Wir definieren weiter den *maximalen Grad* von X durch

$$\deg_{\max}(S_k(X)) = \max_{S \in S_k(X)} \deg(S).$$

Ist $S \in S_n(X)$, so bezeichnen wir mit dem *Grad* von S

$$\deg_n(S) = \#\{S' \in S_n(X) \mid S \cap S' \in S_{n-1}(X)\}.$$

Bemerkung 4.1.7. Beachte hier, dass wir den Grad für $S \in S_k(X)$ unterschiedlich für $k < n$ und für $k = n$ definiert haben. Dies rührt daher, dass die Definition für $k < n$ im Fall von $k = n$ hinfällig wird, da der Grad stets 1 wäre. Stattdessen ist für Flächen die Anzahl an Flächen relevant, welche die betrachtete Fläche in einer $n - 1$ Facette schneiden. Dies ist die Anzahl von benachbarten Flächen zur betrachteten Fläche.

Daher kommen die unterschiedlichen Beschreibungen in der vorherigen Definition zustande.

Definition 4.1.8. Sei S ein euklidisches n -Simplex.

Wir bezeichnen mit

$$\partial S = \bigcup_{S' \text{ Facette von } S} S'$$

den *Rand* von S und mit $S^\circ = S \setminus \partial S$ das *Innere* von S .

Bemerkung 4.1.9. Beachte, dass nach dieser Definition das Innere einer Ecke $v \in S_0(X)$ wieder die Ecke selbst ist, also $v^\circ = v$ gilt. Dies gilt, da Ecken keine Facetten haben und somit die Ecke unverändert bleibt.

Definition 4.1.10. Sei X ein n -dimensionaler abstrakter Simplicialkomplex für $n \geq 2$. Wir bezeichnen mit $\text{cl}(S)$ den *Abschluss der Menge* S . Dies bedeutet, dass zu jedem Simplex auch alle Facetten des Simplexes zur Menge hinzugefügt werden. Damit definieren wir zu einem beliebigen $x \in X$ den *Stern* von x als

$$\text{st}(x) = \text{cl}\{S \in S_n(X) \mid x \in S\}.$$

Mit Hilfe des Sterns können wir nun den *Link* $\text{Lk}(x)$ definieren als

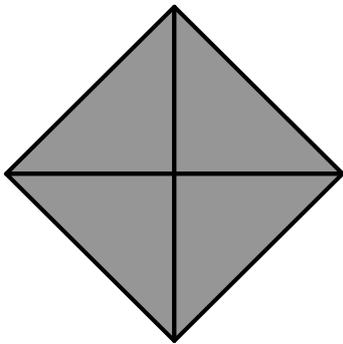
$$\text{Lk}(x) = \{S \in \text{st}(x) \mid x \notin S\}.$$

Wir bezeichnen im Folgenden auch die lokal euklidischen Realisierungen dieser Mengen im Simplicialkomplex mit Stern und Link.

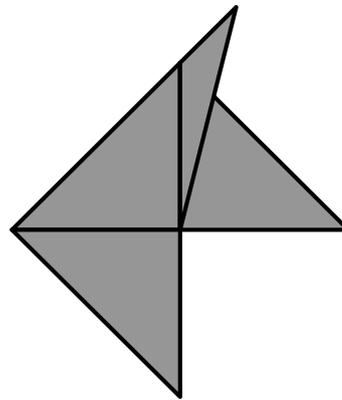
Wir nennen ein $n - 2$ dimensionales Simplex $S \in S_{n-2}(X)$ *flach*, wenn für ein, und somit für alle, $x \in S^\circ$ gilt, dass eine $n - 1$ Sphäre im Link liegt, also $S^{n-1} \subseteq \text{Lk}(x)$.

Ein Simplicialkomplex X heißt *nicht flach*, wenn kein $S \in S_{n-2}(X)$ flach ist.

Beispiel 4.1.11. Ein Beispiel für den Fall $n = 2$ zu flachen und nicht flachen Simplicialkomplexen ist in Abbildung 4.1 zu finden. Hierbei ist im linken Beispiel die mittlere Ecke flach und somit ist auch der Simplicialkomplex flach. Alle anderen Ecken in beiden Simplicialkomplexen und somit insbesondere der rechte Simplicialkomplex sind nicht flach.



flach



nicht flach

Abbildung 4.1 Ein flacher und ein nicht flacher Simplicialkomplex.

4.2 Definitionen – Galerienentropie

Aufgrund der kombinatorischen Struktur von Simplizialkomplexen kann man statt metrischer Wege auch Galerienwege untersuchen. Diese sind eine Aneinanderreihung von benachbarten Flächen.

In diesem Abschnitt definieren wir neben der Volumenentropie noch ein kombinatorisches Analogon bezüglich der Galerienwege, die Galerienentropie. Außerdem führen wir, ähnlich zu Hypergraphen, erneut einen abgeleiteten Graphen zu einem abstrakten Simplizialkomplex mit Galerienabstand ein, sodass zwischen der Galerienentropie des Hypergraphen und der Volumenentropie des abgeleiteten Graphen Gleichheit bezüglich der Volumenentropie gilt.

Definition 4.2.1. Sei X ein abstrakter n -dimensionaler Simplizialkomplex.

Wir definieren einen *Galerienweg* der Länge k als eine Folge $p = f_1 \dots f_k$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- a) $f_i \in S_n(X)$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$
- b) $f_i \cap f_{i+1} \in S_{n-1}(X)$ für alle $i \in \{1, \dots, k-1\}$
- c) $f_i \neq f_{i+2}$ für alle $i \in \{1, \dots, k-2\}$

Wir bezeichnen die *Länge* von p mit $\#p = k$ als die Anzahl der maximalen Simplizes in p .

Bemerkung 4.2.2. In der vorherigen Definition sorgt die Bedingung b) dafür, dass aufeinanderfolgende Simplizes im Galerienweg auch benachbart über eine $n-1$ Facette sind. Die Bedingung c) sorgt dafür, dass der Galerienweg nicht den gleichen Weg wieder zurück geht, also ähnlich zu den bisher betrachteten Wegen.

Definition 4.2.3. Sei X ein abstrakter n -dimensionaler Simplizialkomplex. Der *Galerienabstand* L_{gal} ist eine Abbildung, die zwei benachbarten maximalen Simplizes einen Abstand > 0 zuordnet, also

$$L_{gal}: S_n(X) \times S_n(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (f, g) \mapsto \begin{cases} L_{gal}(f, g) & , f \cap g \in S_{n-1}(X) \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $A \subseteq X$ definieren wir

$$\text{vol}_{gal}(A) = \frac{1}{2} \sum_{f, g \in S_n(A)} L_{gal}(f, g).$$

Der Galerienabstand heißt *regulär*, wenn es eine Abbildung $L': S_{n-1}(X) \times S_n(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt, sodass für alle $f, g \in S_n(X)$ mit $f \cap g = e \in S_{n-1}(X)$ gilt

$$L_{gal}(f, g) = L'(e, f) + L'(e, g).$$

Definition 4.2.4. Seien $A, B \in S_n(X)$ zwei Simplizes. Wir definieren die *Menge der Wege* $P(A, B)$ von A nach B mit

$$P(A, B) = \{p = f_1 f_2 \dots f_k \text{ Galerienweg} \mid k \in \mathbb{N}, f_1 = A \text{ und } f_k = B\}$$

und außerdem für einen Galerienweg $p = f_1 f_2 \dots f_k$

$$L_{gal}(p) = \sum_{i=1}^{k-1} L_{gal}(f_i, f_{i+1}).$$

Der *Galerienabstand* induziert eine Metrik auf $S_n(X)$, indem der Abstand zwischen zwei Simplizes $A, B \in S_n(X)$ gegeben ist durch

$$d(A, B) = \min_{p \in P} L_{gal}(p).$$

Definition 4.2.5. Sei X ein Simplicialkomplex mit Galerienabstand L_{gal} . Wir bezeichnen hier mit $B_{gal}(r, \tilde{f})$ den metrischen Ball bezüglich des Galerienabstands in der universellen Überlagerung \tilde{X} von X mit Radius r und Mittelpunkt $\tilde{f} \in S_n(\tilde{X})$. Damit definieren wir für $\tilde{f} \in S_n(\tilde{X})$ die *Galerientropie* $h_{gal}(X, L_{gal})$ von X als

$$h_{gal}(X, L_{gal}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(\text{vol}_{gal}(B_{gal}(r, \tilde{f}))).$$

Bemerkung 4.2.6. Die Galerientropie ist unabhängig von der Wahl von \tilde{f} . Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 1.0.6.

Wir wollen nun aus stückweise euklidischen Simplicialkomplexen einen abstrakten Simplicialkomplex mit Galerienabstand erhalten. Hierfür definieren wir, was den verschiedenen Längen zwischen zwei maximalen Simplizes entspricht. Dafür definieren wir zunächst den Schwerpunkt und betrachten im Anschluss die Abstände der Schwerpunkte.

Definition 4.2.7. Bezeichne zu einem euklidischen n -Simplex S seinen *Schwerpunkt* mit $m(S)$, also

$$m(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{v \in S_0(S)} v.$$

Hierbei ist die Summe so zu verstehen, dass wir eine isometrische Einbettung des Simplexes in den \mathbb{R}^n haben und dort die Summe bilden können.

Der Schwerpunkt eines Simplexes ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems und liegt nach der Definition stets innerhalb eines Simplexes, wodurch wir diese Punkte als Koordinaten für unseren Galerienabstand nutzen können.

Zu einem abstrakten Simplicialkomplex wollen wir erneut einen Graphen finden, welcher zur Abschätzung der Volumenentropie des Simplicialkomplexes genutzt werden kann. Dies ist ähnlich zum abgeleiteten Graphen im Fall von Hypergraphen und die Details sind in der folgenden Definition festgehalten. Die gleiche Namenswahl wurde aufgrund dieser Analogie gewählt.

Definition 4.2.8. Sei (X, d) ein stückweise euklidischer Simplicialkomplex. Definiere für den zugehörigen abstrakten Simplicialkomplex den *abgeleiteten Galerienabstand* L_{gal} für $f, g \in S_n(X)$ und $f \cap g = e \in S_{n-1}(X)$ durch

$$L_{gal}(f, g) = d(m(f), m(e)) + d(m(e), m(g)).$$

Diese Abbildung erfüllt die Bedingungen aus der Definition des regulären Galerienabstands.

Bemerkung 4.2.9. Der abgeleitete Galerienabstand ist stets regulär. Hierfür können wir auch gleich eine Abbildung L' angeben. Diese ist, für $e \in f$ und $f \in S_n(X)$, gegeben durch

$$L'(e, f) = d(m(e), m(f)).$$

Definition 4.2.10. Sei (X, L_{gal}) ein Simplicialkomplex mit Galerienabstand L_{gal} . Definiere den *abgeleiteten Graphen* G_X durch

- $V(G_X) = S_n(X) \cup S_{n-1}(X)$,
- $E(G_X) = \{\{e, f\} \mid e \in S_{n-1}(X), f \in S_n(X) \text{ und } e \subset f\}$.

Ist der Galerienabstand regulär, so wird aus G_X ein *abgeleiteter metrischer Graph* durch $L: E(G_X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \{e, f\} \mapsto L'(e, f)$. Hierbei kann es mehrere mögliche Wahlen für L' geben und der abgeleitete metrische Graph ist nicht eindeutig.

Bemerkung 4.2.11. Zu einem gegebenen stückweise euklidischen Simplicialkomplex (X, d) existiert somit ein zugehöriger abstrakter metrischer Simplicialkomplex (X, L_{gal}) und dazu wiederum ein abgeleiteter metrischer Graph (G_X, L) . Bezeichne mit (G_X, L) auch den abgeleiteten metrischen Graphen zum metrischen Simplicialkomplex (X, d) , welcher aus ebendieser Konstruktion entsteht.

Beispiel 4.2.12. In Abbildung 4.2 ist beispielhaft ein Simplicialkomplex gegeben. Dieser ist nicht flach, da zu keiner Ecke eine Teilmenge einer offenen Umgebung existiert, welche isometrisch zu einer offenen Teilmenge im \mathbb{R}^2 ist. Somit ist jede Ecke nicht flach. Aus diesem Simplicialkomplex erhalten wir einen metrischen Simplicialkomplex mit der euklidischen Metrik auf jeder Fläche. Hierbei nehmen wir die stückweise euklidische Metrik, welche sich aus den eingezeichneten Dreiecken ergibt. Somit können wir zu jedem 1- und 2-dimensionalen Simplex den Schwerpunkt bestimmen, da diese für den abgeleiteten metrischen Simplicialkomplex mit Galerienabstand und somit auch für den abgeleiteten metrischen Graphen relevant sind. Diese sind mit Blau eingezeichnet und die Punkte entsprechen somit den Ecken des abgeleiteten Graphen. In Grün sind dann die Kanten des Graphen eingezeichnet, wobei hier die Kanten stets von einer Fläche zu den drei benachbarten Kanten gehen und hierbei stets die Schwerpunkte verbinden. Dieser so gefundene Graph wird zu einem metrischen Graphen, indem man jeder Kante ihre euklidische Länge zuordnet.

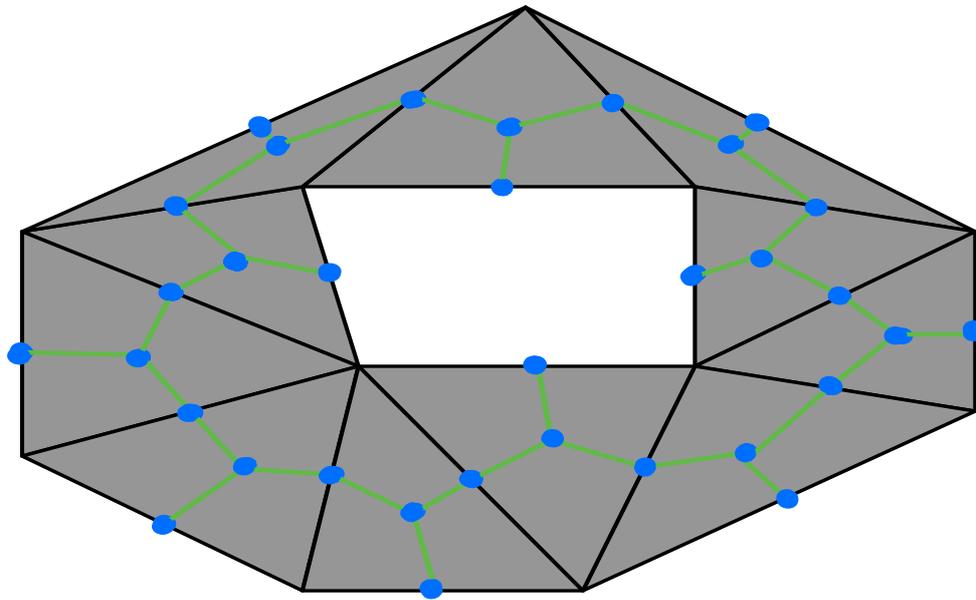


Abbildung 4.2 Simplicialkomplex X mit Schwerpunkten in Blau und abgeleitetem Graphen in Grün.

4.3 Zusammenhang zwischen Galerientropie und Volumenentropie eines Simplicialkomplexes

In diesem Abschnitt erarbeiten wir einen Zusammenhang zwischen der Volumenentropie eines stückweise euklidischen Simplicialkomplexes und der Galerientropie des abgeleiteten abstrakten Simplicialkomplexes. Hierfür nutzen wir die Ähnlichkeiten von beiden zum abgeleiteten Graphen aus.

Lemma 4.3.1. *Sei S ein n -Simplex mit maximalem Quotienten $k_S < \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$ und minimaler Seitenlänge l_{\min} .*

Dann gilt für den Median m , also die Verbindung zwischen einer Ecke und dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seite,

$$m \geq l_{\min} \cdot k_S^{n-1} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k_S^2}.$$

Beweis. Wir benutzen im Beweis zur besseren Lesbarkeit die Notation $k = k_S$.

Aufgrund der Symmetrie wird bezüglich fester Größen k und l_{\min} der Median m minimal, wenn die Seitenlängen der Grundseite allesamt möglichst groß sind, also $k \cdot l_{\min}$ betragen, und die übrigen Seitenlängen möglichst kurz sind, also l_{\min} betragen. Dies gilt, da das Verlängern einer Seite in der Grundfläche bei Beibehalten aller anderen Längen stets den Median verkürzt. Analog liefert das Verlängern einer beliebigen anderen Seite ein Verkürzen des Medians. Die Einschränkung an den Quotienten kommt daher, dass für einen größeren Quotienten ein Simplex kollabieren kann. Das heißt, das Simplex hat trotz positiver Seitenlängen ein Volumen von 0. Somit wäre dann auch die Länge des Median 0.

In dem betrachteten Spezialfall stimmt der Median mit der Höhe überein und es genügt somit, die Höhe zu berechnen.

Um diese abzuschätzen, werden die folgenden zwei Ergebnisse benötigt.

Zum einen kann das Volumen eines Simplexes durch Integration der Querschnittsfläche entlang einer Höhe h berechnet werden, also

$$\text{vol}(S) = \int_0^h G \frac{y^{n-1}}{h^{n-1}} dy = \frac{G \cdot h}{n}, \quad (4.1)$$

wobei G den Flächeninhalt der Grundseite von S bezeichnet, wozu h die Höhe ist. Die im Integral genutzte Formel ergibt sich hierbei aus dem Strahlensatz. Nun stimmen, wie bereits erwähnt, in dem eben beschriebenen Fall die Höhe und der Median überein, weshalb wir $h = m$ nutzen können.

Zum anderen liefert die Cayley-Menger-Determinante [Men28] die Möglichkeit, das Volumen eines Simplexes zu berechnen. Demnach ist das Volumen des oben beschriebenen Simplexes S gegeben durch

$$\text{vol}(S) = \sqrt{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} \det(B)}$$

mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (ka)^2 & \cdots & (ka)^2 & a^2 \\ 1 & (ka)^2 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (ka)^2 & a^2 \\ 1 & (ka)^2 & \cdots & (ka)^2 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & \cdots & a^2 & a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

für $a = l_{\min}$.

Es gilt mit Subtraktion der ersten Zeile multipliziert mit $(ka)^2$ von den zweiten bis zur vorletzten Zeile und mit a^2 multipliziert von der letzten Zeile das Nachfolgende. Im Anschluss wird nach der zweiten Spalte entwickelt, um die Determinante weiter zu berechnen. Mit der geschweiften Klammer wird unterhalb der Matrizen die Zeilen- und Spaltenanzahl der quadratischen Matrizen angezeigt. Somit gilt

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -(ka)^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & -(ka)^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(ka)^2 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}}_{n+2} \right) \\ &= -\det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & -(ka)^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & -(ka)^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(ka)^2 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}}_{n+1} \right) \\ &= -(ka)^2 \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -(ka)^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & -(ka)^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(ka)^2 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}}_{n+1} \right). \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt durch Entwickeln nach der zweiten bis n -ten Spalte nacheinander, da stets nur ein Eintrag ungleich 0 ist

$$\begin{aligned}
& - \det \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & -(ka)^2 & 0 & \cdots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & -(ka)^2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(ka)^2 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}}_{n+1} \right) \\
& = (-1)^n (ka)^{2n-2} \det \begin{pmatrix} 1 & a^2 - (ka)^2 \\ 1 & -a^2 \end{pmatrix} \\
& = (-1)^n a^{2n} (k^{2n} - 2k^{2n-2}).
\end{aligned}$$

Der zweite Summand entspricht der ursprünglichen Matrix in einer Dimension weniger und somit folgt induktiv

$$\begin{aligned}
\det(B) & = (-ka)^{2n} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a^2 \end{pmatrix} + \sum_{i=0}^{n-1} (-ka)^{2i} (-1)^{n-i} a^{2n-2i} (k^{2n-2i} - 2k^{2n-2i-2}) \\
& = (-1)^{n+1} (ka)^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^n a^{2n} (k^{2n} - 2k^{2n-2}) \\
& = (-1)^{n+1} (ka)^{2n} + n(-1)^{n+1} a^{2n} (2k^{2n-2} - k^{2n}) \\
& = (-1)^{n+1} a^{2n} (2nk^{2n-2} - (n-1)k^{2n}).
\end{aligned}$$

Daher folgt als zweite Formel für das Volumen mit Gleichung 4.2

$$\text{vol}(S) = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{2nk^{2n-2} - (n-1)k^{2n}}{2^n}}.$$

Die Grundfläche G muss für die erste Formel noch bestimmt werden. Hierbei handelt es sich um ein gleichseitiges n -dimensionales Simplex und das lässt sich analog zu dem vorherigen Ergebnis berechnen für eine Dimension kleiner und $k = 1$. Somit ergibt sich

$$G = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}.$$

Zusammen mit der Formel 4.1 liefert das für diese spezielle Höhe die Formel

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\text{vol}(S) \cdot n}{G} \\
&= a \sqrt{\frac{2nk^{2n-2} - (n-1)k^{2n}}{2n}} \\
&= a \sqrt{k^{2n-2} - \frac{n-1}{2n}k^{2n}} \\
&= k^{n-1} a \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}k^2}
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. \square

Lemma 4.3.2. *Sei (X, d) ein stückweise euklidischer, n -dimensionaler Simplicialkomplex mit maximalem Quotienten $k < \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$ und γ ein kürzester, nicht trivialer, geschlossener Weg durch $m(f)$ für ein $f \in S_n(X)$ sowie φ der dazugehörige Galerienzug mit abgeleittem Galerienabstand.*

Dann gilt

$$\frac{n \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil}{2k\#\varphi} L_{gal}(\varphi) \leq L(\gamma) \leq \frac{n}{2k^{n-1} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}k^2}} L_{gal}(\varphi).$$

Beweis. Seien x_{\max} und x_{\min} das Maximum und das Minimum des Galerienabstands im Zykel φ und l_{\max} und l_{\min} das Maximum und Minimum der Seitenlängen der durchlaufenen Simplizes. γ durchläuft im Extremfall $\left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil$ Simplizes und innerhalb dieser hat es eine Mindestlänge von l_{\min} , also

$$L(\gamma) \geq \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil l_{\min}.$$

Außerdem gilt

$$L_{gal}(\varphi) \leq 2 \cdot x_{\max} \#\varphi.$$

Daraus folgt insgesamt

$$\frac{\left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil l_{\min}}{\#\varphi 2x_{\max}} L_{gal}(\varphi) \leq L(\gamma). \quad (4.3)$$

Darüber hinaus kann man die Länge von γ nach oben abschätzen durch

$$L(\gamma) \leq \frac{l_{\max}}{2 \cdot x_{\min}} L_{gal}(\varphi). \quad (4.4)$$

Da die Galerienentropie über aus X abgeleiteten Längen definiert ist, können wir x_{\max} und x_{\min} nach oben, beziehungsweise unten, gegen die Seitenlängen der Simplizes abschätzen.

Somit entspricht $x_{\max} \cdot n$ der Länge des zugehörigen Medians. Diese ist zum einen stets kürzer als die längste Seite des Simplexes und somit gilt

$$x_{\max} \leq \frac{l_{\max}}{n}. \quad (4.5)$$

Andererseits ist die Länge des zugehörigen Medians nach Lemma 4.3.1 nach unten beschränkt und somit ergibt sich

$$x_{\min} \geq \frac{k^{n-1} l_{\min}}{n} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}. \quad (4.6)$$

Die Abschätzungen 4.3 und 4.5 zusammen ergeben die erste Ungleichung

$$\frac{n \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil}{2k\#\varphi} L_{gal}(\varphi) \leq L(\gamma).$$

Weiter erhalten wir aus den Abschätzungen 4.4 und 4.6 die zweite Ungleichung

$$L(\gamma) \leq \frac{n}{2k^{n-1} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} L_{gal}(\varphi).$$

Somit ist die Behauptung gezeigt. \square

Im nachfolgenden Satz schätzen wir die Volumenentropie $h_{vol}(X, d)$ eines metrischen Simplizialkomplexes gegen die Galerientropie $h_{gal}(X, L_{gal})$ des abgeleiteten abstrakten Simplizialkomplexes mit Galerienabstand ab.

Satz 4.3.3. *Sei (X, d) ein stückweise euklidischer, nicht flacher Simplizialkomplex mit maximalem Quotienten $k < \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$ und L_{gal} der abgeleitete Galerienabstand.*

Dann gilt

$$\frac{n}{2k \deg_{\max}(S_0(X))} h_{gal}(X, L_{gal}) \leq h_{vol}(X, d) \leq \frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} h_{gal}(X, L_{gal}).$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die zugrunde liegenden Basispunkte $x \in X$ für die Volumenentropie und $f \in S_n(X)$ für die Galerientropie die Bedingung $x = m(f)$ erfüllen.

Der Simplizialkomplex ist nicht flach und somit gibt es eine kanonische Bijektion zwischen $\pi_1(X, x)$ bezüglich metrischen Wegen und $\pi_1(X, f)$ bezüglich kombinatorischer Wege, denn zu jedem kombinatorischen Weg können wir den metrischer Weg betrachten, welcher die Mittelpunkte der maximalen Simplizes verbindet. Andersrum nehmen wir den Galerienweg, welcher dem kombinatorischen Weg entspricht. Hier gibt es, da der Simplizialkomplex nicht flach ist, stets einen eindeutigen kombinatorischen Weg. Wir müssen nun die Längen gegeneinander abschätzen.

Sei γ ein kürzester geschlossener nicht trivialer Zykel durch x in (X, d) . Bezeichne mit φ

den Galerienweg, welcher diesem Zykel entspricht, d.h. die Verkettung aller maximalen Simplizes, welche γ schneidet.

Nach Lemma 4.3.2 gilt

$$\frac{n \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil}{2k\#\varphi} L_{gal}(\varphi) \leq L(\gamma) \leq \frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} L_{gal}(\varphi).$$

Somit gilt auch für $r > 0$

$$r \frac{n \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil}{2k\#\varphi} L_{gal}(\varphi) \leq rL(\gamma) \leq r \frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} L_{gal}(\varphi).$$

Daher gilt weiter für $r \rightarrow \infty$ und mit Lemma 1.0.8

$$\begin{aligned} \frac{n}{2k \deg_{\max}(S_0(X))} h_{gal}(X, L_{gal}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left(\frac{n}{2k \deg_{\max}(S_0(X))} \cdot \text{vol } B_{gal}(r, \tilde{f}) \right) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left(\frac{n \left\lceil \frac{\#\varphi}{\deg_{\max}(S_0(X))} \right\rceil}{2k\#\varphi} \cdot \text{vol } B_{gal}(r, \tilde{f}) \right) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x)) \\ &= h_{vol}(X, d) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} h_{gal}(X, L_{gal}) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log \left(\frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} \cdot B_{gal}(r, \tilde{f}) \right) \\ &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x)) \\ &= h_{vol}(X, d). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit die Behauptung, da beide Ungleichungen gezeigt sind. \square

4.4 Dualer Graph und untere Schranke für die minimale Galerientropie eines Simplicialkomplexes

In diesem Abschnitt nutzen wir das Ergebnis aus Satz 4.3.3, um eine untere Schranke der Volumenentropie für einen abstrakten Simplicialkomplex zu erhalten. In diesem Satz haben wir bereits den Zusammenhang zwischen Volumenentropie und Galerientropie festgestellt. Durch die Übereinstimmung der Galerientropie des Simplicialkomplexes mit der Volumenentropie des abgeleiteten Graphen finden wir eine Abschätzung zwischen den Volumenentropien des Simplicialkomplexes und dem abgeleiteten Graphen.

Die Volumenentropie des abgeleiteten Graphen können wir schlussendlich durch Satz 2.2.3 abschätzen und erhalten in Satz 4.4.7 eine Abschätzung der Volumenentropie für Simplicialkomplexe.

Lemma 4.4.1. *Sei (X, L_{gal}) ein Simplicialkomplex mit regulärem Galerienabstand L_{gal} und (G_X, d_L) der abgeleitete metrische Graph.*

Dann gilt

$$h_{gal}(X, L_{gal}) = h_{vol}(G_X, d_L).$$

Beweis. Es gibt eine Bijektion zwischen Galerienwegen und Wegen im Graphen. Diese sind aufgrund der Definition des abgeleiteten Graphen gleich lang und somit folgt die Behauptung mit Lemma 1.0.8. \square

Lemma 4.4.2. *Sei (X, d) ein n -dimensionaler Simplicialkomplex.*

Dann gilt für die um den Faktor $\alpha > 0$ gestreckte Metrik αd

$$\text{vol}(X, d)^{\frac{1}{n}} h_{vol}(X, d) = \text{vol}(X, \alpha d)^{\frac{1}{n}} h_{vol}(X, \alpha d).$$

Beweis. Es gilt $\text{vol}(X, \alpha d) = \alpha^n \text{vol}(X, d)$ und aus Lemma 1.0.7 ist bekannt, dass $h_{vol}(X, \alpha d) = \frac{1}{\alpha} h_{vol}(X, d)$ erfüllt ist. Gemeinsam folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.4.3. Ein Graph G ist ein 1-dimensionaler Simplicialkomplex und somit ist nach obigem Lemma unter Streckung der Metrik um einen Skalar $\alpha > 0$ der Ausdruck $\text{vol}(G, \alpha d) h_{vol}(G, \alpha d)$, wie schon in Lemma 2.1.6 gesehen, konstant.

Bemerkung 4.4.4. Im folgenden Lemma gilt die erste Ungleichung für $k < 2$ im Fall von $n = 2$ und sonst für $k < \sqrt{2}$, da für größere k die Simplizes kollabieren können und somit Volumen 0 haben, wobei das Volumen des Graphen weiter positiv ist. Mit kollabieren ist hier, wie auch bereits vorher beschrieben, gemeint, dass ein Simplex trotz positiver Seitenlängen Volumen 0 hat.

Für die zweite Ungleichung muss $k < \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$ gelten, da ansonsten Lemma 4.3.1 nicht anwendbar ist. Dies ist allerdings mit den vorherigen Bedingungen stets erfüllt.

Lemma 4.4.5. Sei (X, d) ein metrischer n -dimensionaler Simplicialkomplex mit maximalem Quotienten k , wie in der vorherigen Bemerkung 4.4.4 beschrieben, und (G_X, d_L) der abgeleitete metrische Graph. Bezeichne mit $v_{\min}(n, k)l_{\min}^n$ das minimale Volumen eines n -Simplexes mit kürzester Seite l_{\min} unter der Beschränkung des maximalen Quotienten durch k .

Dann gilt,

$$\frac{v_{\min}(n, k)}{k^n (\#S_n(X))^{n-1}} \text{vol}(G_X, L)^n \leq \text{vol}(X, d) \leq \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \frac{\left(1 - \frac{n+1}{2n} k^2\right)^{-n/2}}{n! k^{n^2-2n} (\#S_n(X))^{n-1}} \text{vol}(G_X, L)^n.$$

Beweis. Für den Beweis wird erneut die Formel für das Volumen eines n -Simplexes mit Seitenlänge a

$$\text{vol}(S) = \frac{a}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$

benötigt, welche mit Hilfe der Cayley-Menger-Determinante [Men28] wie im Beweis zu Lemma 4.3.1 hergeleitet werden kann. Wir bezeichnen außerdem mit l_{\min} und l_{\max} die minimale und die maximale Seitenlänge eines Simplexes in X , also

$$l_{\min} = \min_{e \in S_1(X)} L(e) \quad \text{und} \quad l_{\max} = \max_{e \in S_1(X)} L(e).$$

Betrachten wir zunächst die erste Ungleichung. Bezeichne hierfür mit S_{\min} das Simplex in X mit minimalem Volumen. Für das Volumen des Simplicialkomplexes gilt damit

$$\begin{aligned} \text{vol}(X, d) &= \sum_{S \in S_n(X)} \text{vol}(S) \\ &\geq \#S_n(X) \text{vol}(S_{\min}) \\ &\geq \#S_n(X) v_{\min}(n, k) l_{\min}^n. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}(G_X, L) &= \sum_{s \in S_n(X)} \left(\sum_{e \in S_{n-1}(X), e \subset s} L(e, s) \right) \\ &\leq \sum_{s \in S_n(X)} l_{\max} \\ &\leq \#S_n(X) \cdot k \cdot l_{\min}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt die erste Ungleichung, da $L(e, s) \cdot n$ der Länge des zugehörigen Medians entspricht und dieser höchstens l_{\max} beträgt, da ein Median nicht länger als die maximale Seitenlänge sein kann. Durch Auflösen nach l_{\min} und anschließendes Einsetzen in die vorherige Ungleichung erhalten wir

$$\frac{v_{\min}(n, k)}{k^n (\#S_n(X))^{n-1}} \text{vol}(G_X, L)^n \leq \text{vol}(X, d).$$

Die zweite Ungleichung geht mit analogen Abschätzungen in die andere Richtung. So gilt

$$\begin{aligned}\text{vol}(X, d) &= \sum_{S \in S_n(X)} \text{vol}(S) \\ &\leq \#S_n(X) \text{vol}(S_{\max}) \\ &\leq \#S_n(X) \sqrt{\frac{n+1}{2^n} \frac{l_{\max}^n}{n!}}\end{aligned}$$

und für den minimalen Median m_{\min}

$$\begin{aligned}\text{vol}(G_X, L) &= \sum_{s \in S_n(X)} \sum_{e \in S_{n-1}(X), e \subset s} L(e, s) \\ &\geq \sum_{s \in S_n(X)} m_{\min} \\ &\geq \#S_n(X) \cdot l_{\max} \cdot k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}.\end{aligned}$$

Hier geht in die erste Ungleichung ein, dass der Median stets mindestens so lang wie die Höhe ist und die zweite Ungleichung folgt aus Lemma 4.3.1. Auflösen, dieses Mal nach l_{\max} , und Einsetzen ergibt die zweite Ungleichung

$$\text{vol}(X, d) \leq \sqrt{\frac{n+1}{2^n} \frac{\left(1 - \frac{n-1}{2n} k^2\right)^{-n/2}}{n! k^{n^2-2n} (\#S_n(X))^{n-1}}} \text{vol}(G_X, L)^n.$$

□

Korollar 4.4.6. *Sei (X, d) ein stückweise euklidischer, nicht flacher Simplicialkomplex und (G_X, L) der abgeleitete metrische Graph.*

Dann gilt

$$\frac{n}{2k \deg_{\max}(S_0(X))} h_{\text{vol}}(G_X, L) \leq h_{\text{vol}}(X, d) \leq \frac{n}{2k^{n-2} \sqrt{1 - \frac{n-1}{2n} k^2}} h_{\text{vol}}(G_X, L).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 4.3.3 und Lemma 4.4.1.

□

Satz 4.4.7 (Satz B). *Sei X ein abstrakter Simplicialkomplex.*

Dann gilt

$$\inf_d h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{c(n, k) (\#S_n(X))^{\frac{1-n}{n}}}{\deg_{\max}(S_0(X))} h(X)$$

mit

$$h(X) = (n+1) \log(n) \#S_n(X) + \sum_{S \in S_{n-1}(X)} \deg(S) \log(\deg(S) - 1)$$

und

$$c(n, k) = \frac{n}{4k^2} (v_{\min}(n, k))^{1/n}.$$

Hierbei wird das Infimum über alle Metriken d betrachtet, welche das Volumen auf 1 normieren, sodass X den maximalen Quotienten $k < 2$ für $n = 2$, beziehungsweise $k < \sqrt{2}$ sonst, hat.

Beweis. Sei (G_X, d_L) der abgeleitete metrische Graph zu einer beliebigen Metrik d mit den obigen Voraussetzungen an X und $(G_X, d_{L_{\min}})$ die für den Graphen auf 1 normierte minimierende Metrik.

Mit $\text{vol}(X, d) = 1$ und Lemma 4.4.5 gilt

$$\text{vol}(G_X, L) \leq k \left(\frac{(\#S_n(X))^{n-1}}{v_{\min}(n, k)} \right)^{1/n}.$$

Daraus folgt mit Lemma 4.4.2

$$h_{\text{vol}}(G_X, L) \geq \frac{1}{k} \left(\frac{v_{\min}(n, k)}{(\#S_n(X))^{n-1}} \right)^{1/n} h_{\text{vol}}(G_X, d_{L_{\min}}).$$

Des Weiteren gilt mit Korollar 4.4.6

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \frac{n}{2k \deg_{\max}(S_0(X))} h_{\text{vol}}(G_X, L) \\ &\geq \frac{n}{2k^2 \deg_{\max}(S_0(X))} \left(\frac{v_{\min}(n, k)}{(\#S_n(X))^{n-1}} \right)^{1/n} h_{\text{vol}}(G_X, d_{L_{\min}}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes 2.2.3 können wir $h_{\text{vol}}(G_X, d_{L_{\min}})$ explizit bestimmen. Hierfür erhält man

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(G_X, d_{L_{\min}}) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G_X)} \deg(v) \log(\deg(v) - 1) \\ &= \frac{1}{2} \left((n+1) \log(n) \#S_n(X) + \sum_{e \in S_{n-1}(X)} \deg(e) \log(\deg(e) - 1) \right). \end{aligned}$$

Da d beliebig ist, folgt die Behauptung insbesondere auch für das Infimum über alle solchen Metriken. \square

4.5 Obere Schranke der minimalen Volumenentropie von Simplizialkomplexen

Wir haben im vorherigen Abschnitt eine untere Schranke der Volumenentropie von stückweise euklidischen Simplizialkomplexen bestimmt.

Eine obere Schranke erhalten wir durch die explizite Abschätzung der Volumenentropie im Fall von gleichseitigen Simplizes. Hierfür wird der Beweis von Satz 2.2.2 genutzt, welcher in „Minimal volume entropy on graphs“ von Seonhee Lim [Lim08] zu finden ist. Die Idee ist hierbei, das Gleichungssystem, welches auch in Satz 2.2.1 gegeben ist, zu nutzen und durch Umformen und Ausnutzen der Symmetrie hiermit auf eine Lösung der Volumenentropie zu kommen.

Erinnerung 4.5.1. Aus Satz 2.2.1 haben wir bereits das folgende Ergebnis. Sei (G, L) ein metrischer zusammenhängender Graph ohne Blätter, bei dem mindestens eine Ecke Grad ≥ 3 hat.

Dann existiert für die gerichtete Kantenadjazenzmatrix A mit geordneten Kanten e_1, \dots, e_n ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit x komponentenweise größer 0 und

$$\text{diag}(e^{-h_{\text{vol}}(G,L)L(e_1)}, \dots, e^{-h_{\text{vol}}(G,L)L(e_n)})Ax = x.$$

diag bezeichnet hierbei die Diagonalmatrix, wobei die Argumente die entsprechenden Diagonalelemente sind.

In anderen Worten bedeutet dies, dass die Matrix $\text{diag}(e^{-h_{\text{vol}}(G,L)L(e_1)}, \dots, e^{-h_{\text{vol}}(G,L)L(e_n)})A$ Eigenwert 1 hat mit möglichem positiven Eigenvektor x .

Satz 4.5.2. *Sei X ein abstrakter n -dimensionaler Simplizialkomplex.*

Dann gilt

$$\inf_d h_{\text{vol}}(X, d) \leq \frac{n^3}{n+1} \sqrt[n]{\frac{\#S_n(X)}{n!}} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \log(\sigma)$$

mit $\sigma = \max\{n, \deg_{\max}(S_{n-1})\} - 1$, wobei das Infimum über alle stückweise euklidischen Metriken d mit Volumen 1 geht.

Beweis. Sei d_Δ die Metrik, für welche jedes Simplex ein gleichseitiges Simplex und somit alle Simplizes auch gleich groß sind. Durch die Normierung auf 1 ist diese Metrik eindeutig. Wir bezeichnen die Seitenlänge dieses Simplexes mit a . Dann gilt für die gleiche Menge an Metriken wie im Satz

$$\inf_d h_{\text{vol}}(X, d) \leq h_{\text{vol}}(X, d_\Delta).$$

Des Weiteren wissen wir durch Satz 4.4.6, da $k = 1$ gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d_\Delta) \leq \frac{n}{2\sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}}} h_{\text{vol}}(G_X, L),$$

wobei (G_X, L) den abgeleiteten metrischen Graphen zu (X, d_Δ) bezeichnet.

Das Volumen eines Simplexes S beträgt $\text{vol}(S) = \frac{1}{\#S_n(X)}$ aufgrund der Symmetrie des

Simplizialkomplexes. Die Längen im abgeleiteten Graphen sind daher auch alle gleich. Diese können durch die Einbettung in den \mathbb{R}^{n+1} berechnet werden, sodass die Ecken auf den Achsen liegen. Daher entspricht die Länge für alle $e \in E(G_X)$ dem n -ten Teil des Abstands einer beliebigen Ecke zum gegenüberliegenden Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt den Median im Verhältnis 1 zu n , wobei die längere Seite auf der Seite der Ecke liegt. Dies wurde bereits in Formel 4.5 im Beweis von Lemma 4.3.2 eingesehen. Also gilt

$$L(e) = \frac{1}{n} \left\| \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{a}{n\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{a}{n\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

Außerdem gilt mit der Cayley-Menger-Determinante [Men28]

$$\text{vol}(S) = \frac{a^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}$$

und somit insgesamt für die normierte Kantenlänge

$$L(e) = \sqrt[n]{\frac{n!}{\#S_n(X)} \sqrt{\frac{2^n}{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{2n}}.$$

Nach Satz 2.2.1, welcher nochmals in der vorangegangenen Bemerkung aufgegriffen wurde, kann die Volumenentropie über die Lösung des Gleichungssystems bestimmt werden. Sei A die Kantenadjazenzmatrix aus diesem Satz und $\sigma = \max\{n, \deg_{\max}(S_{n-1})\} - 1$. Da

$$e^{-h_{\text{vol}}(G_X, L) \cdot L(e)} I_n A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leq e^{-h_{\text{vol}}(G_X, L) \cdot L(e)} \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

folgt mit dem Satz von Perron-Frobenius (vergleiche Proposition 4.1 in [KN07]), wobei $r(M)$ den Perron-Frobenius-Eigenwert einer Matrix M bezeichnet,

$$1 = r(e^{-h_{\text{vol}}(G_X, L) \cdot L(e)} A) \leq e^{-h_{\text{vol}}(G_X, L) \cdot L(e)} (\sigma).$$

Einsetzen und Auflösen nach der Volumenentropie liefert

$$h_{\text{vol}}(G_X, L) \leq \sqrt[n]{\frac{\#S_n(X)}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \log(\sigma)$$

und somit insgesamt

$$\begin{aligned}
\inf_d h_{vol}(X, d) &\leq h_{vol}(X, d_\Delta) \\
&\leq \frac{n}{2\sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}}} h_{vol}(G_X, L) \\
&\leq \frac{n}{2\sqrt{1 - \frac{n-1}{2n}}} \sqrt[n]{\frac{\#S_n(X)}{n!}} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \cdot \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \log(\sigma) \\
&= \frac{n^3}{2n+2} \sqrt[n]{\frac{\#S_n(X)}{n!}} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \log(\sigma).
\end{aligned}$$

□

Somit ist die minimale Volumenentropie zu jedem beliebigen, aber fest gewählten Simplicialkomplex nach oben beschränkt. Es gibt somit zu jedem abstrakten Simplicialkomplex eine endliche obere Schranke der minimalen Volumenentropie, welche nur von der Dimension und der Anzahl an Flächen abhängt.

4.6 Simplicialkomplex mit verschwindender minimaler Volumenentropie

Im Allgemeinen lässt sich keine untere Schranke für die Volumenentropie von Simplicialkomplexen angeben, welche nur vom Rang der Fundamentalgruppe abhängt, wie für Graphen in Korollar 2.2.8.

Um dies zu zeigen, wird in diesem Abschnitt zu einem gegebenen Simplicialkomplex eine Folge von Metriken mit konstantem Volumen definiert, sodass die Volumenentropie bezüglich dieser Metriken gegen 0 konvergiert. Dies lässt sich im Allgemeinen nicht ohne eine Einschränkung an den maximalen Quotienten k verhindern.

Satz 4.6.1. *Ohne die Einschränkung aus Satz 4.4.7 an den maximalen Quotienten k eines Simplicialkomplexes X gibt es im Allgemeinen keine untere Schranke größer 0 für die zugehörige minimale Volumenentropie.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch die explizite Konstruktion einer Familie von Metriken auf dem Simplicialkomplex X aus Abbildung 4.3.

Als Anfangsmetrik d_1 , betrachte die stückweise euklidische Metrik, für welche alle Kanten

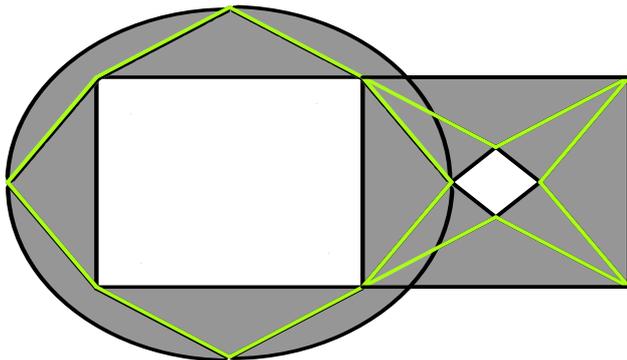


Abbildung 4.3 Simplicialkomplex X mit gleich langen Kanten gleich eingefärbt.

gleiche Länge haben und das Volumen des Simplicialkomplexes 1 ist.

Bezeichne die schwarzen Kanten mit a und die grünen mit b . Bezeichne mit a_1 die Länge von a und mit b_1 die Länge von b bezüglich d_1 .

Definiere die Metrik \tilde{d}_n , sodass alle Kanten a ihre Länge behalten und die Kanten b die Länge $\tilde{b}_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\right) b_1$. Hierdurch bleibt die Volumenentropie für alle n konstant, da die geschlossenen Wege ihre Länge nicht ändern und dies nach Lemma 1.0.8 genügt. Das Volumen bezüglich \tilde{d}_n geht allerdings für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Aus $\text{vol}(X, \alpha d) h_{\text{vol}}(X, \alpha d)$ konstant folgt für die auf 1 normierte Metrik d_n , dass die Volumenentropie gegen 0

konvergiert für den metrischen Simplizialkomplex (X, d_n) .
Außerdem gilt für den Grenzwert des maximalen Quotienten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} = 2.$$

Somit ist auch die Einschränkung an den maximalen Quotienten optimal. □

Bemerkung 4.6.2. Das Beispiel lässt sich analog auch für höhere Dimensionen und den Wert $k < \sqrt{2}$ erweitern. Die Idee bleibt hierbei die gleiche und das Beispiel kann analog ausgeführt werden.

Kapitel 5

Graphenprodukte

Wie in Satz 4.6.1 gesehen, kann es für allgemeine Simplizialkomplexe keine untere Schranke geben, welche nur vom Rang der Fundamentalgruppe abhängt. Daher betrachten wir in diesem Kapitel, als Beispiele von Komplexen mit mehr Struktur, Graphenprodukte. Graphenprodukte sind das kartesische Produkt von Graphen. Im Zweidimensionalen bedeutet dies, dass zwei Kanten aus den beiden Graphen ein Viereck aufspannen. Der resultierende Komplex ist somit kein Simplizialkomplex, sondern ein kubischer Komplex. Allerdings kann jeder kubische Komplex durch Unterteilen der maximalen Flächen wieder in einen Simplizialkomplex zerlegt werden.

5.1 Definitionen – Graphenprodukte

Definition 5.1.1. Ein n -dimensionales Graphenprodukt X ist das kartesische Produkt von n Graphen G_1, G_2, \dots, G_n , wobei Graphen hier als metrische Räume aufgefasst werden. Wir schreiben dafür $X = G_1 \times \dots \times G_n$.

Zu einem Graphenprodukt definieren wir die Mengen der k -Würfel für $k = 0, \dots, n$ wie folgt:

$$S_k(X) = \{a_1 \times \dots \times a_n \in X \mid a_i \in E(G_i) \text{ für } k \text{ Indizes und } a_i \in V(G_i) \text{ für } n - k \text{ Indizes}\}.$$

Für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ nennen wir ein Element aus diesen Mengen einen *Würfel* oder eine *kubische Zelle*.

Wir geben den folgenden drei Mengen analog zu Simplizialkomplexen zusätzliche Namen:

- *Ecken:* $V(X) = S_0(X)$
- *Kanten:* $E(X) = S_1(X)$
- *Flächen:* $F(X) = S_n(X)$

Um eine Metrik zu definieren, benötigen wir den n -dimensionalen *Standardwürfel*, welchen wir als n -faches Produkt des Einheitsintervalls definieren, also als $[0, 1]^n$.

Sei d eine Metrik auf X , dann heißt diese Metrik *stückweise euklidisch*, wenn die Einschränkung auf beliebige Flächen isometrisch zu einem geodätischen, konvexen n -Würfel im \mathbb{R}^n ist und die Längen in allen Schnitten von zwei Würfeln übereinstimmen. Hierbei bezeichnet ein Würfel im \mathbb{R}^n die Einbettung eines n -dimensionalen Standardwürfels in den \mathbb{R}^n , wobei alle Seitenlängen durch die Einbettung angepasst werden können, aber stets zwei Ecken des Standardwürfels auf unterschiedlichen Punkten landen. Dabei muss aber stets gewährleistet sein, dass die Flächen nicht kollabieren, das heißt, dass jede Seitenfläche des ursprünglichen Würfels auch mit den eingebetteten Seitenlängen noch positives $n - 1$ -dimensionales Hausdorff-Maß besitzt. Wir nennen ein Graphenprodukt mit stückweise euklidischer Metrik ein *stückweise euklidisches Graphenprodukt*.

Beispiel 5.1.2. In Abbildung 5.1 ist links ein 2-dimensionaler Standardwürfel dargestellt und neben dran drei Beispiele für 2-Würfel, welche sich von dem Standardwürfel unterscheiden. Dies soll illustrieren, dass bei einem n -Würfel die Kanten beliebige Längen annehmen können. Da wir stets konvexe, geodätische n -Würfel betrachten, bleiben die Kanten Geodätische und wir bekommen keine überschlagenen Vierecke.

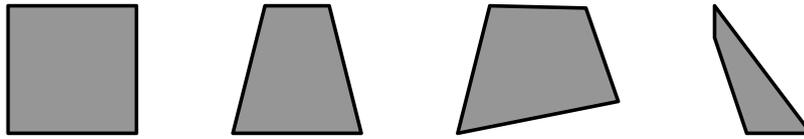


Abbildung 5.1 Links der 2-dimensionale Standardwürfel und daneben Beispiele für 2-Würfel.

Beispiel 5.1.3. Gegeben seien zwei Graphen, wie in Abbildung 5.2 dargestellt. Das heißt, wir haben einen Sterngraphen mit 3 äußeren Ecken und den vollständigen Graphen mit 3 Ecken, den K_3 .

Zu diesen beiden Graphen können wir das Graphenprodukt betrachten. Das zugehörige 1-

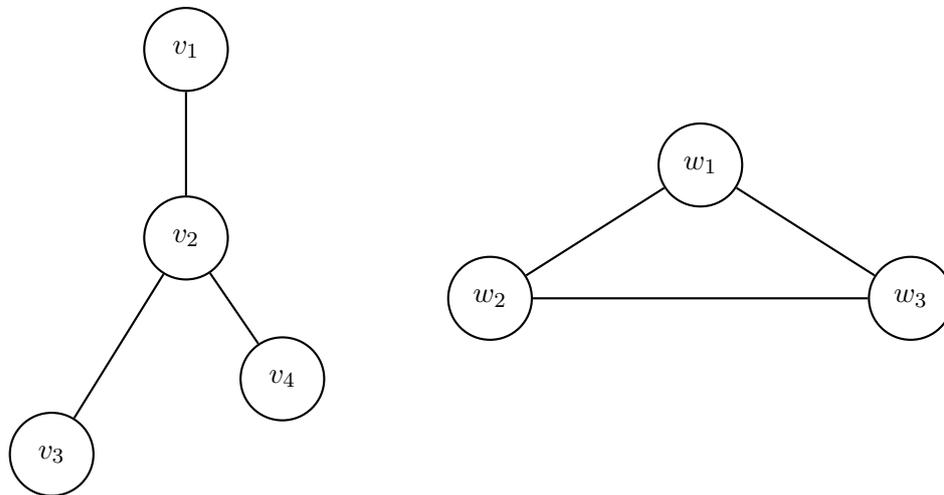


Abbildung 5.2 Zwei Graphen G_1 und G_2 .

Skelett mit entsprechender Benennung der Ecken ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Darüber hinaus sind in diesem Graphenprodukt noch Flächen vorhanden. Zur besseren Übersicht wurden sie in der Abbildung nicht dargestellt. Es gibt stets eine Fläche, aufgespannt von vier Ecken, wenn die Ecken $v_i \times v_j, v_i \times v_l, v_k \times v_j$ und $v_k \times v_l$ sind. Hierbei sind $i \neq k, j \neq l$ und $i, k \in \{1, 2, 3, 4\}, j, l \in \{1, 2, 3\}$. In diesem Beispiel sind das alle 4-Zykel im Graphenprodukt, auch wenn das allgemein nicht gilt. Wenn einer der ursprünglichen Graphen bereits 4-Zykel hatte, so werden diese dennoch nicht zu Flächen.

Dieses Graphenprodukt wird zu einem stückweise euklidischen Graphenprodukt, wenn wir jede solche Fläche mit der Metrik eines geodätischen euklidischen Vierecks ausstatten, sodass diese in den jeweiligen Kanten übereinstimmen.

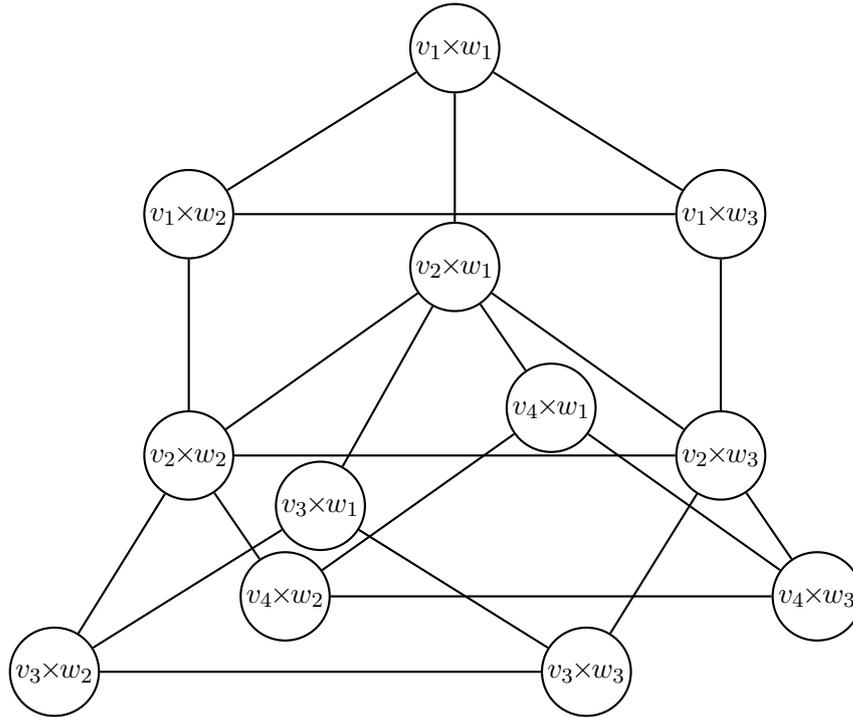


Abbildung 5.3 Das 1-Skelett des Graphenprodukts $G_1 \times G_2$.

Definition 5.1.4. Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt und γ ein metrischer Weg in X . Wir beschreiben, wie in Definition 1.0.3, mit $L(\gamma, d)$ die Länge von γ bezüglich der Metrik d . Sei γ nun ein geschlossener Weg und definiere für die Homotopieklasse $[\gamma]$ die *minimale Länge der Homotopieklasse*

$$L([\gamma], d) = \inf\{L(\varphi, d) \mid \varphi \in [\gamma]\}.$$

Sei γ nun ein metrischer Weg beginnend in einem $x \in X$ und sei außerdem $r > \text{length}(\gamma, d)$. Die Anzahl auf γ folgende Wege $N_r(x; \gamma)$ der Länge r beginnend in $x \in X$ ist

$$N_r(x; \gamma) = \#\{[\varphi] \in \pi_1(X, x) \mid \varphi \text{ durchläuft zunächst } \gamma \text{ und } L([\varphi], d) \leq r\}.$$

In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Begriffe von Volumen für Graphenprodukte genutzt, welche im Folgenden eingeführt werden. Dies ist zum einen das n -dimensionale Hausdorff-Maß und zum anderen das 1-dimensionale Hausdorff-Maß des 1-Skeletts.

Definition 5.1.5. Sei (X, d) ein n -dimensionales stückweise euklidisches Graphenprodukt und $S \subset X$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen mit $\text{vol}_{\mathbb{R}^n}(f)$ das euklidische Volumen der

kubischen Zelle f .

Definiere das 1-Volumen von S als

$$\text{vol}_1(S, d) = \sum_{e \in E(S)} \text{length}(e, d)$$

und das n -Volumen von S als

$$\text{vol}_n(S, d) = \sum_{f \in F(S)} \text{vol}_{\mathbb{R}^n}(f),$$

wobei hier Teilmengen von Kanten und Flächen jeweils anteilig mit einfließen.

Da wir nun zwei Definitionen von Volumen haben, benötigen wir eine Spezifikation, welches zur Bestimmung der Volumenentropie genutzt wird. Hier wählen wir wie in Kapitel 1 ein Hausdorff-Maß. Das n -dimensionale Hausdorff-Maß eines n -dimensionalen Graphenprodukts entspricht dem n -Volumen, woraus sich die folgende Definition ergibt.

Definition 5.1.6. Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt.

Dann wird für die Definition der Volumenentropie das n -Volumen genutzt, also gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol}_n B_r(\tilde{x}, \tilde{d})}{r}.$$

5.2 Produktmetriken auf Graphenprodukten

Bevor wir uns allgemeinen stückweise euklidischen Metriken zuwenden, betrachten wir Produktmetriken auf Graphenprodukten. Dies sind Metriken, in welchen jede Fläche isometrisch zu einem Hyperquader ist. Das heißt, es gibt zu Grunde liegende Metriken auf den Graphen und eine Fläche wird aufgespannt von den Seitenlängen der Graphen, wobei die unterschiedlichen Seiten jeweils im rechten Winkel zueinander stehen.

Hierdurch erhalten wir eine sehr symmetrische Metrik auf dem Graphenprodukt mit eindeutigen zugehörigen Metriken auf den zu Grunde liegenden Graphen, da jede Kopie einer Kante somit gleich lang ist.

Definition 5.2.1. Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt und seien d_1, \dots, d_n jeweils Metriken auf G_1, \dots, G_n . Definiere die Produktmetrik $d = d_1 \times \cdots \times d_n$ für $x = x_1 \times \cdots \times x_n, y = y_1 \times \cdots \times y_n \in X$ durch

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2}.$$

Bemerkung 5.2.2. Im Zweidimensionalen bedeutet dies anschaulich, dass die Kanten $e_1 \in E(G_1), e_2 \in E(G_2)$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $L(e_1, d_1)$ und $L(e_2, d_2)$ aufspannen und wir den euklidischen Abstand betrachten.

Lemma 5.2.3. *Es sei $h_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Die Funktion*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_i$$

nimmt unter den Nebenbedingungen $x_i > 0$ und

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

das Maximum bei

$$x_i = \frac{h_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2}}$$

an.

Beweis. Wir nutzen das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren. Somit ist die Nebenbedingung gegeben durch

$$g(x_1, \dots, x_n) = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Nach dem Verfahren erfüllt eine lokale Extremstelle unter Nebenbedingung die Gleichungen

$$h(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla f(x_1, \dots, x_n) = -\lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n).$$

Die zweite Bedingung liefert für $i = 1, \dots, n$

$$h_i = 2\lambda x_i.$$

Auflösen dieser Gleichungen nach x_i und anschließendes Einsetzen in die Nebenbedingung führt zu der Gleichung

$$1 = \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{4\lambda^2}.$$

Hierbei lässt sich λ aus der Summe ziehen und danach auflösen. Somit erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{4\lambda^2} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n h_i^2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}. \end{aligned}$$

Somit gibt es zwei Extrempunkte. Diese lauten

$$x_i = \frac{h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}}$$

und

$$x_i = -\frac{h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}},$$

wobei das zweite Ergebnis der Forderung, dass $x_i \geq 0$ gilt, widerspricht. Somit ist die einzige Extremstelle bei

$$x_i = \frac{h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass es sich hierbei um ein Maximum handelt. Bezeichne mit $x = (x_1, \dots, x_n)$ die gerade bestimmte Extremstelle. Wähle einen anderen Punkt, welcher die Nebenbedingung erfüllt, zum Beispiel $v = (1, 0, \dots, 0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(v) &= h_1 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{h_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2}} \\ &= h(x). \end{aligned}$$

Da es sich bei x um die einzige Extremstelle handelt, muss somit gelten, dass x ein Maximum unter Nebenbedingung ist. \square

Dieses technische Lemma ist für den Beweis des folgenden Satzes notwendig.

Satz 5.2.4. *Seien $(G_1, d_1), \dots, (G_n, d_n)$ metrische Graphen und $(X, d) = (G_1 \times \dots \times G_n, d_1 \times \dots \times d_n)$ das entsprechende Graphenprodukt mit Produktmetrik.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{\text{vol}}(G_i, d_i)^2}.$$

Beweis. Im Beweis nutzen wir die Charakterisierung der Volumenentropie aus Lemma 1.0.8. Bezeichne zu einem kürzesten geschlossenen Weg γ in X mit γ_i die orthogonale Projektion von γ auf G_i , also auf die i -te Komponente. Nach Definition der Produktmetrik gilt

$$L(\gamma, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n L(\gamma_i, d_i)^2}, \quad (5.1)$$

da γ lokal geodätisch ist.

Sei $x = x_1 \times \dots \times x_n \in X$. Es gilt für die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(G_i, x_i)$ für $i = 1, \dots, n$ der Zusammenhang $\pi_1(X, x) = \pi_1(G_1, x_1) \times \dots \times \pi_1(G_n, x_n)$.

Hierdurch lässt sich $N_r(x)$ abschätzen. Seien dafür $a_1, \dots, a_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Nach Gleichung 5.1 geben die a_i die anteilige maximale Länge der Projektionen von geschlossenen Wegen in G_i an.

Dann folgt aus dem Zusammenhang der Fundamentalgruppen zusammen mit Gleichung 5.1

$$N_r(x) \geq \prod_{i=1}^n N_{a_i \cdot r}(x_i).$$

Daraus folgt mit Lemma 1.0.8

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_r(x))}{r} \\ &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\prod_{i=1}^n N_{a_i \cdot r}(x_i))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \log(N_{a_i \cdot r}(x_i))}{r} \\ &= \sum_{i=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{a_i \cdot r}(x_i))}{r} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_{\text{vol}}(G_i, d_i). \end{aligned}$$

Wir wählen nun a_i so, dass der letzte Term maximal wird. Nach dem vorangegangenen Lemma 5.2.3 wird dies erfüllt für

$$a_i = \frac{h_{\text{vol}}(G_i, d_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_{\text{vol}}(G_j, d_j)^2}}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &\geq \sum_{i=1}^n \frac{h_{vol}(G_i, d_i)^2}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_{vol}(G_j, d_j)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2},
\end{aligned}$$

also

$$h_{vol}(X, d) \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2}. \quad (5.2)$$

Nun schätzen wir die Volumenentropie in die andere Richtung ab. Betrachte hierfür \tilde{X} als gewurzelt Graphenprodukt, das heißt, wir betrachten die gewurzelten Bäume \tilde{G}_i bezüglich beliebiger Ecken $\tilde{v}_i \in V(\tilde{G}_i)$ und das Graphenprodukt aus diesen. Seien die a_i erneut

$$a_i = \frac{h_{vol}(G_i, d_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n h_{vol}(G_j, d_j)^2}}.$$

So ist für r groß genug das Volumenwachstum in diese Richtung am größten. Daher folgt aus der Definition der Volumenentropie

$$\text{vol}_n(B_r(\tilde{v}_1 \times \cdots \times \tilde{v}_n), d) \leq V_n r^n \exp\left(r \left(\sum_{i=1}^n a_i h_{vol}(G_i, d_i) + f(r)\right)\right),$$

wobei $f(r) \in o(r)$ und dies das Landau-Symbol bezeichnet. $V_n r^n$ bezeichnet hierbei außerdem das Volumen des Balls mit Radius r im \mathbb{R}^n , beziehungsweise V_n das Volumen des Einheitsballs im \mathbb{R}^n . Daraus folgt

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\text{vol}_2(B_r(\tilde{v}_1 \times \cdots \times \tilde{v}_n), d)\right)}{r} \\
&\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log\left(V_n r^n \exp\left(r\left(\sum_{i=1}^n a_i h_{vol}(G_i, d_i) + f(r)\right)\right)\right)}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(V_n r^n) + r\left(\sum_{i=1}^n a_i h_{vol}(G_i, d_i) + f(r)\right)}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \sum_{i=1}^n a_i h_{vol}(G_i, d_i)}{r} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(V_n r^n) + f(r)}{r} \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \cdot h_{vol}(G_i, d_i) \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2}.
\end{aligned}$$

Somit folgt mit Ungleichung 5.2

$$h_{vol}(X, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{vol}(G_i, d_i)^2}.$$

□

5.3 Minimale Volumenentropie von Graphenprodukten mit Produktmetriken normiert bezüglich des 1-Volumens

In diesem Abschnitt betrachten wir nun Graphenprodukte mit der vorher definierten Produktmetrik und suchen hierfür eine untere Schranke für die Volumenentropie.

Dazu benötigen wir eine Normierung und befassen uns in diesem und dem nächsten Abschnitt mit der Normierung bezüglich des 1-Volumens, also der Einschränkung, dass die Summe der Kantenlängen 1 ergibt. Das 1-Volumen entspricht dem eindimensionalen Hausdorff-Maß des 1-Skeletts des Graphenprodukts.

Hierbei finden wir mit Satz 5.3.2 eine untere Schranke der Volumenentropie zu einem gegebenen Graphenprodukt sowie die eindeutige Metrik, welche die Volumenentropie minimiert.

Analog zu Lemma 5.2.3 benötigen wir für den nächsten Satz erneut ein Extremum unter Nebenbedingung, welches im folgenden Lemma bestimmt wird.

Lemma 5.3.1. *Seien $h_1, \dots, h_n, v_1, \dots, v_n > 0$. Die Funktion*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2}}$$

nimmt mit $v = \prod_{i=1}^n v_i$ unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot v}{v_i} = 1 \quad \text{und} \quad x_i > 0$$

das Minimum bei

$$x_i = \frac{\sqrt[3]{h_i^2 v_i}}{v \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_j^2}{v_j^2}}}$$

an.

Beweis. Da $f \geq 0$ gilt, betrachten wir stattdessen die Funktion $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)^2$, welche an den gleichen Stellen ihre Extrema annimmt. Durch Nutzen des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren unter der Nebenbedingung $h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot v}{v_i} - 1$ folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla g(x_1, \dots, x_n) + \lambda \nabla h(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ h(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$-2 \frac{h_i^2}{x_i^3} + \lambda \frac{v}{v_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i \cdot v}{v_i} \cdot v_1 = 1.$$

Auflösen der ersten Gleichung nach x_i führt zu

$$x_i^3 = \frac{2h_i^2 v_i}{\lambda v}$$

$$\Leftrightarrow x_i = \sqrt[3]{\frac{2h_i^2 v_i}{\lambda v}}$$
(5.3)

und Einsetzen in die dritte liefert

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{2h_i^2 v_i}{\lambda v}} \frac{v}{v_i} = 1.$$

Vereinfacht ergibt dies

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{2h_i^2 v^2}{\lambda v_i^2}} = 1$$

Diese Gleichung können wir nach λ auflösen, was

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{2h_i^2 v^2}{v_i^2}} \right)^3$$

ergibt. Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichung 5.3 liefert eine Extremstelle bei

$$x_i = \frac{\sqrt[3]{h_i^2 v_i}}{v \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_j^2}{v_j^2}}}.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass x_1 gegen 0 strebt und wählen die übrigen x_i entsprechend, sodass die Nebenbedingung erfüllt ist. Dann konvergiert $f(x_1, \dots, x_n)$ gegen ∞ und somit handelt es sich bei der gefundenen Extremstelle um ein Minimum. \square

Im nachfolgenden Satz geben wir eine untere Schranke der Volumenentropie eines Graphenprodukts an, welche nur von den Graphen des Graphenprodukts abhängt. So ist die Schranke abhängig von der Anzahl an Ecken $\#V(G)$ eines Graphen G sowie seiner minimalen Volumenentropie $h_{\min}(G)$, welche in Satz 2.2.3 bestimmt und in Definition 2.2.6 festgehalten wurde.

Satz 5.3.2 (Satz C). Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt mit beliebiger Produktmetrik $d_p = d_1 \times \cdots \times d_n$, für welche $\text{vol}_1(X, d_p) = 1$ gilt.

Dann folgt

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^4}{\#V(G_i)}} \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}.$$

Das Minimum wird hierbei genau dann angenommen, wenn die Metriken d_i auf den Graphen G_i den minimierenden Metriken aus Satz 2.2.3 entsprechen, wobei die Graphen so normiert sind, dass

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{\sqrt[3]{h_{\min}(G_i)^2 \#V(G_i)}}{\prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}$$

gilt.

Beweis. Nach Satz 5.2.4 wissen wir bereits

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) = \sqrt{\sum_{i=1}^n h_{\text{vol}}(G_i, d_i)^2}.$$

Mit Hilfe des Satzes 2.2.3 und Definition 2.2.6 zusammen mit Lemma 1.0.7 folgt

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n h_{\text{vol}}(G_i, d_i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2}{\text{vol}(G_i, d_i)^2}}. \quad (5.4)$$

Eine untere Schranke erhalten wir durch Minimieren der Funktion f , gegeben durch

$$f(\text{vol}(G_1, d_1), \dots, \text{vol}(G_n, d_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2}{\text{vol}(G_i, d_i)^2}},$$

unter der Bedingung, dass das 1-Volumen bezüglich der zugehörigen Produktmetrik 1 ergibt. Somit erhalten wir die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} h(\text{vol}(G_1, d_1), \dots, \text{vol}(G_n, d_n)) &= \text{vol}_1(G_1 \times \cdots \times G_n, d_1 \times \cdots \times d_n) - 1 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\text{vol}_1(G_i, d_i)}{\#V(G_i)} \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Formel für das Volumen ergibt sich daraus, dass es von jedem Graphen für jede Ecke der anderen Graphen eine neue Kopie gibt, also $\frac{\prod_{j=1}^n \#V(G_j)}{\#V(G_i)}$ Kopien. Daher muss das Volumen des ursprünglichen Graphen damit multipliziert werden, um auf die gesamte

Kantenlänge zu kommen. Da dies für alle Graphen gilt, ergibt sich die obige Formel. Hierbei liefert uns Lemma 5.3.1 das Minimum bei

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{\sqrt[3]{h_{\min}(G_i)^2 \#V(G_i)}}{\prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}.$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d_p)^2 &\geq \sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2}{\text{vol}(G_i, d_i)^2} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2 \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}{\sqrt[3]{h_{\min}(G_i)^2 \#V(G_i)}} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^4}{\#V(G_i)}} \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}. \end{aligned}$$

Dieses Minimum wird nach Satz 5.2.4, Satz 2.2.3 und Lemma 1.0.7 für die angegebene Metrik auch angenommen. Diese Metrik ist eindeutig, da nach Satz 2.2.3 die Ungleichung 5.4 für alle anderen Produktmetriken strikt ist und somit keine andere Produktmetrik dieses Minimum annimmt. \square

Bemerkung 5.3.3. Dieses Ergebnis gilt für alle Graphen. Somit sind hier auch Graphen mit Volumenentropie 0 zugelassen sowie weitere Graphen, welche in Satz 2.2.3 ausgeschlossen sind. Dies gilt nicht nur für diesen Satz, sondern auch für alle weiteren Sätze in diesem Kapitel 5, wenn die Schranke in Abhängigkeit von h_{\min} angegeben wird.

In Satz 5.3.2 zeigen wir, dass die Volumenentropie eines Graphenprodukts mit Produktmetrik genau dann größer 0 ist, wenn mindestens ein Graph, aus dem das Graphenprodukt besteht, positive minimale Volumenentropie hat.

Das einzige sich bei der Betrachtung von Graphen mit Volumenentropie 0 ergebende Problem ist, dass in diesem Fall die Metrik auf den Graphen zu einer Semi-Metrik wird, da diese Graphen Volumen 0 haben für die minimierende Metrik.

Im Spezialfall, dass alle Graphen minimale Volumenentropie von 0 haben, hat das Graphenprodukt stets eine Volumenentropie von 0. Die minimierende Produktmetrik ist in diesem Sonderfall auch nicht mehr eindeutig, sondern jede beliebige Produktmetrik auf dem Graphenprodukt erfüllt, dass die Volumenentropie des Graphenprodukts 0 ergibt.

5.4 Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten mit stückweise euklidischen Metriken normiert bezüglich des 1-Volumens

Nachdem wir im vorherigen Abschnitt das Minimum der Volumenentropie für Produktmetriken gefunden haben, wollen wir in diesem Abschnitt allgemeinere Metriken betrachten. Die Klasse der betrachteten Metriken sind die stückweise euklidischen Metriken, welche den Fall der Produktmetriken aus dem vorherigen Abschnitt beinhalten.

Hierbei geht allerdings die eindeutige minimierende Metrik der Volumenentropie verloren und wir verlieren außerdem, dass die Abschätzung scharf ist, erhalten aber dennoch zu einem Graphenprodukt eine allgemeine untere Schranke in Korollar 5.4.4.

Lemma 5.4.1. *Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt und γ ein geschlossener Weg in X .*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x)) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x; \gamma)).$$

Beweis. Sei γ ein geschlossener Weg mit Start- und Endpunkt im gleichen $x \in X$ wie in der Definition von $N_r(x)$ und $N_r(x; \gamma)$. Definiere $|\gamma| = \text{length}(\gamma, d)$. Da aus einem geschlossenen Weg der Länge t , welcher mit γ beginnt, durch Abschneiden des Anfangs ein geschlossener Weg der Länge $t - |\gamma|$ entsteht, gilt

$$N_r(x) \geq N_{r+|\gamma|}(x; \gamma).$$

Des Weiteren kann jeder geschlossene Weg an γ oder γ^{-1} ohne Zurücklaufen in den Projektionen angehängt werden, wobei γ^{-1} den Weg, welcher γ entgegengesetzt durchläuft, bezeichnet. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit für ausreichend großes r $N_{r+|\gamma|}(x; \gamma) \geq N_{r+|\gamma|}(x; \gamma^{-1})$, dann gilt

$$N_r(x) \leq N_{r+|\gamma|}(x; \gamma) + N_{r+|\gamma|}(x; \gamma^{-1}) \leq 2N_{r+|\gamma|}(x; \gamma).$$

Die Erhöhung des Radius um eine Konstante oder das Multiplizieren mit einer Konstanten sind asymptotisch vernachlässigbar. Somit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x; \gamma)) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_{r+|\gamma|}(x; \gamma)) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x)) \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(2 \cdot N_{r+|\gamma|}(x; \gamma)) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log(N_r(x; \gamma)). \end{aligned}$$

Daher folgt mit Lemma 1.0.8 die Behauptung, da die erste Gleichheit, also die Übereinstimmung mit der Volumenentropie, bereits in diesem Lemma gezeigt wurde. \square

Satz 5.4.2. Sei (X, d) ein beliebiges stückweise euklidisches Graphenprodukt. Dann existiert eine Produktmetrik d_p auf X mit $\text{vol}_1(X, d) = \text{vol}_1(X, d_p)$ und

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} h_{\text{vol}}(X, d_p).$$

Beweis. Wir konstruieren im Folgenden die Metrik d_p explizit und schätzen das zugehörige Volumen und die Weglängen ab und erhalten somit mit Lemma 1.0.7 die obige Abschätzung.

Sei $v = v_1 \times \cdots \times v_n \in V(X)$ eine beliebige Ecke. Wir bezeichnen mit $G_i(v)$ die Kopie von G_i , welche durch v geht, also

$$G_i(v) = v_1 \times \cdots \times v_{i-1} \times G_i \times v_{i+1} \times \cdots \times v_n.$$

Somit ist $G_i(v)$ unabhängig von v_i und wir definieren die Menge V_i , welche jeweils einen Repräsentanten aus jeder Menge wählt. Sei nun v so gewählt, dass $G_i(v)$ mit der induzierten Metrik von X minimales Volumen hat, also

$$\text{vol}(G_i(v), d) = \min_{w \in V(X)} \text{vol}(G_i(w), d).$$

Wir definieren die Metrik d_i auf G_i , sodass (G_i, d_i) isometrisch zu $(G_i(v), d)$ ist. Damit können wir die Produktmetrik auf X definieren durch $\bar{d}_p = d_1 \times \cdots \times d_n$ mit den Metriken wie soeben definiert.

Zunächst schätzen wir das 1-Volumen von (X, \bar{d}_p) gegen das 1-Volumen von (X, d) ab. Nach Definition der Metriken d_i gilt

$$\text{vol}(G_i, d_i) \leq \text{vol}(G_i(v), d) \text{ mit } v \in V(X) \text{ und } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}_1(X, d) &= \sum_{e \in E(X)} L(e, d) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V_i} \sum_{e \in E(G_i(v))} L(e, d) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V_i} \text{vol}(G_i(v), d) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V_i} \text{vol}(G_i, d_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{v \in V_i} \sum_{e \in E(G_i(v))} L(e, \bar{d}_p) \\ &= \sum_{e \in E(X)} L(e, \bar{d}_p) \\ &= \text{vol}_1(X, \bar{d}_p). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen Weg, welcher zunächst in einer Kopie von G_1 alle Kanten in einem geschlossenen Weg durchläuft, anschließend in G_2 und so weiter bis G_n . Das Ergebnis ist somit ein geschlossener Weg, welcher für jede Kante mindestens eine Kopie durchläuft für alle Graphen G_i .

Sei φ nun ein Weg, welcher homotop zu dem gerade beschriebenen Weg und ein kürzester Repräsentant ist.

Nach Lemma 5.4.1 zusammen mit dem Beweis von Lemma 1.0.7 genügt es nun, Wege zu betrachten, welche mit φ beginnen. Sei daher γ ein geschlossener Weg, welcher zunächst φ durchläuft. Bezeichne mit γ_i jeweils den Weg, welchen γ in der Projektion auf G_i zurücklegt. Nun wollen wir die Länge von γ_i in den Metriken d und \bar{d}_p abschätzen. Die Länge von γ_i bezüglich der Metrik \bar{d}_p entspricht genau der Länge des Weges in (G_i, d_i) . Einen isometrischen Weg finden wir auch in (X, d) , da (G_i, d_i) isometrisch eingebettet werden kann. Somit gilt

$$L([\gamma_i], d) \leq L(\gamma_i, \bar{d}_p) = L([\gamma_i], \bar{d}_p).$$

Hiermit gilt

$$\begin{aligned} L([\gamma], d) &\leq \sum_{i=1}^n L([\gamma_i], d) \\ &\leq \sum_{i=1}^n L([\gamma_i], \bar{d}_p) \\ &\leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n L([\gamma_i], \bar{d}_p)^2} \\ &= \sqrt{n} L([\gamma], \bar{d}_p). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da in der Produktmetrik die kürzeste Strecke nach der Definition über den Satz des Pythagoras bestimmt werden kann und die vorherige Ungleichung nutzt die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel. Genaueres hierzu ist in der nachfolgenden Bemerkung 5.4.3 festgehalten.

Definiere die Metrik d_p als die normierte Metrik \bar{d}_p auf $\text{vol}_1(X, d_p) = \text{vol}_1(X, d)$. Somit gilt insgesamt mit Lemma 1.0.7 und 5.4.1

$$\text{vol}_1(X, d_p) h_{\text{vol}}(X, d_p) = \text{vol}_1(X, \bar{d}_p) h_{\text{vol}}(X, \bar{d}_p) \leq \sqrt{n} \text{vol}_1(X, d) h_{\text{vol}}(X, d).$$

Aus der Gleichheit von $\text{vol}_1(X, d_p)$ und $\text{vol}_1(X, d)$ folgt dann die Behauptung. \square

Bemerkung 5.4.3. Die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel besagt für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$$

Dies kann man mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigen, indem man einen Vektor mit x_i betrachtet und einen Vektor nur aus 1. Dies ergibt

$$\left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot x_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Teilen beider Seiten durch n^2 und anschließendes Wurzelziehen liefert die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel, welche im vorherigen Beweis genutzt wurde.

Korollar 5.4.4 (Korollar E). *Sei (X, d) ein beliebiges stückweise euklidisches Graphenprodukt mit $\text{vol}_1(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_i)^4}{\#V(G_i)}} \prod_{j=1}^n \#V(G_j) \sum_{j=1}^n \sqrt[3]{\frac{h_{\min}(G_j)^2}{\#V(G_j)^2}}}{n}}.$$

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 5.4.2 zusammen mit Satz 5.3.2 □

Somit existiert unter den Bedingungen aus Korollar 5.4.4 eine untere Schranke der Volumenentropie bezüglich Normierung des 1-Volumens, welche nur von den kombinatorischen Eigenschaften des Graphenprodukts abhängt. Genauer gesagt ist diese Schranke nur von kombinatorischen Eigenschaften der Graphen abhängig, aus welchen das Graphenprodukt besteht. Somit ist dies eine universelle untere Schranke zu jedem Graphenprodukt, unabhängig der betrachteten stückweise euklidischen Metrik.

5.5 Minimale Volumenentropie von Graphenprodukten mit Produktmetriken normiert bezüglich des n -Volumens

Wie im Abschnitt 5.3 lässt sich auch mit Normierung auf das n -Volumen eine untere Schranke für die Volumenentropie von Graphenprodukten mit Produktmetriken angeben. Somit betrachten wir ab diesem Abschnitt in diesem Kapitel die Normierung bezüglich des n -Volumens. Zunächst befassen wir uns erneut mit Produktmetriken, bevor wir allgemeinere Metriken zulassen.

Das Verfahren zur Bestimmung der minimalen Volumenentropie von Produktmetriken ist analog zu Abschnitt 5.3 und beginnt daher erneut mit einem Hilfslemma, um ein Minimum unter Nebenbedingung zu finden.

Lemma 5.5.1. *Seien $h_1, \dots, h_n > 0$. Die Funktion*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^2}}$$

nimmt unter den Nebenbedingungen

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{und} \quad x_i > 0$$

das Minimum bei

$$x_i = \frac{h_i}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_j}}$$

an.

Beweis. Der erste Teil dieses Beweises erfolgt analog zum Beweis von Lemma 5.3.1. Da $f \geq 0$ gilt, betrachten wir stattdessen die Funktion $g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)^2$ und bestimmen das Minimum unter Nebenbedingung für g statt f . Durch Nutzen des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren unter der Nebenbedingung $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i - 1$ folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla g(x_1, \dots, x_n) + \lambda \nabla h(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ h(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} -2 \frac{h_i^2}{x_i^3} + \lambda \frac{\prod_{j=1}^n x_j}{x_i} &= 0 \\ \prod_{i=1}^n x_i &= 1. \end{aligned}$$

Einsetzen der letzten Gleichung in die andere liefert

$$\begin{aligned} & -2\frac{h_i^2}{x_i^3} + \frac{\lambda}{x_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & -2h_i^2 + \lambda x_i^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x_i = \sqrt{\frac{2h_i^2}{\lambda}}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in unsere Nebenbedingung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{2h_i^2}{\lambda}} \\ &= \sqrt{\frac{2^n}{\lambda^n}} \prod_{i=1}^n h_i. \end{aligned}$$

Auflösen nach λ führt zu

$$\lambda = 2 \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{h_i^2}.$$

Erneutes Einsetzen liefert

$$x_i = \frac{h_i}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_j}}.$$

Hierbei handelt es sich tatsächlich um ein Minimum, da für x_1 gegen 0 und die übrigen x_i , entsprechend der Nebenbedingung, die Funktion gegen ∞ strebt. Somit muss es sich bei der Extremstelle um ein Minimum handeln. \square

Satz 5.5.2 (Satz D). *Sei $X = G_1 \times \dots \times G_n$ ein Graphenprodukt mit beliebiger Produktmetrik $d_p = d_1 \times \dots \times d_n$ für welche $\text{vol}_n(X, d) = 1$ gilt.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n h_{\min}(G_i)}.$$

Das Minimum wird hierbei genau dann angenommen, wenn die Metriken d_i auf den Graphen G_i den minimierenden Metriken aus Satz 2.2.3 entsprechen, wobei die Graphen so normiert werden, dass

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{h_{\min}(G_i)}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_j)}}$$

gilt.

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 5.3.2 erhalten wir erneut, dass die Funktion

$$g(\text{vol}(G_1, d_1), \dots, \text{vol}(G_n, d_n)) = \sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2}{\text{vol}(G_i, d_i)^2}$$

minimiert werden muss, um eine untere Schranke der Volumenentropie zu bestimmen. Durch die Bedingung der Normierung des n -Volumens ergibt sich die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} h(\text{vol}(G_1, d_1), \dots, \text{vol}(G_n, d_n)) &= \text{vol}_n(G_1 \times \dots \times G_n, d_1 \times \dots \times d_n) - 1 \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \text{vol}(G_i, d_i) \right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Hierbei liefert uns Lemma 5.5.1 das Minimum bei

$$\text{vol}(G_i, d_i) = \frac{h_{\min}(G_i)}{\prod_{j=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_j)}}.$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d_p)^2 &\geq \sum_{i=1}^n \frac{h_{\min}(G_i)^2}{\text{vol}(G_i, d_i)^2} \\ &\geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n h_{\min}(G_i)^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt wie behauptet

$$h_{\text{vol}}(X, d_p) \geq \sqrt{n} \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{h_{\min}(G_i)}.$$

Wie im Beweis zu Satz 5.3.2 folgt mit Satz 5.2.4, Satz 2.2.3 und Lemma 1.0.7, dass das Minimum mit der angegebenen Metrik auch angenommen wird. Analog folgt ebenfalls, dass diese Metrik nach Satz 2.2.3 eindeutig ist, da die Ungleichung 5.4 im Beweis zu Satz 5.3.2 für alle anderen Produktmetriken strikt ist und somit keine andere Produktmetrik dieses Minimum annimmt. \square

Bemerkung 5.5.3. Nach Bemerkung 5.3.3 gilt dieses Ergebnis erneut für alle Graphen, auch solche, welche in Satz 2.2.3 ausgeschlossen wurden.

Auch hier ist es erneut eine interessante Frage, wann die minimale Volumenentropie positiv ist. An dem vorherigen Satz sehen wir, dass die minimale Volumenentropie genau dann positiv ist, wenn sie für alle Graphen des Graphenprodukts positiv ist.

Dies ist ein deutlicher Unterschied zum Ergebnis in Bemerkung 5.3.3, da es hier genügt, wenn ein Graph positive minimale Volumenentropie besitzt. Dies zeigt die Relevanz der genutzten Normierung bei der Betrachtung der minimalen Volumenentropie, da das Ergebnis stark von der betrachteten Normierung abhängt.

5.6 Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten mit stückweise euklidischen Metriken normiert bezüglich des 2-Volumens

Für den Rest des Kapitels betrachten wir ausschließlich den Fall $n = 2$. Der Grund hierfür ist, dass wir zur Beschreibung des n -Volumens des Graphenprodukts die Winkel benötigen und die Winkel zwischen den Flächen für beliebige Dimensionen wesentlich komplizierter werden.

Als neues Objekt führen wir nun Parallelmetriken ein. Diese Metriken unterscheiden sich von der Produktmetrik insofern, dass die Winkel zwischen zwei Kanten nicht mehr $\frac{\pi}{2}$ betragen, sondern beliebig gewählt werden können. Wir behalten dennoch die Anforderung, dass jede Kopie einer Kante weiterhin gleich lang ist. Hierdurch sind gegenüberliegende Kanten in einem Viereck stets parallel und die Vierecke sind somit Parallelogramme.

Auch hier erhalten wir wieder eine untere Schranke, welche allerdings nicht scharf ist. Diese ist in Korollar 5.6.3 festgehalten.

Definition 5.6.1. Seien $X = G_1 \times G_2$ ein Graphenprodukt und seien weiter p_1 die Projektion auf G_1 und p_2 die auf G_2 .

Eine Metrik d auf X heißt *Parallelmotrik*, wenn Metriken d_1, d_2 auf G_1 und G_2 existieren, sodass für alle $v \in V(G_2)$ gilt, dass $p_2^{-1}(v)$ isometrisch zu (G_1, d_1) ist und analog für alle $v \in V(G_1)$, dass $p_1^{-1}(v)$ isometrisch zu (G_2, d_2) ist. Nenne die Metriken d_1 und d_2 die *zugehörigen Metriken* auf G_1 und G_2 zur Parallelmotrik d .

Somit ist jede Fläche isometrisch zu einem geodätischen Parallelogramm in \mathbb{R}^2 , da jede Kopie einer Kante stets die gleiche Länge in X hat.

In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Winkel stets gleich groß. Beschreibe zu einem $f \in F(X)$ den kleineren der beiden Innenwinkel von f mit $\sphericalangle f$. Wir definieren hierfür den *maximalen* und *minimalen Winkel* des Graphenprodukts mit

$$\alpha_{\max} = \max_{f \in F(X)} \sphericalangle f \quad \text{und} \quad \alpha_{\min} = \min_{f \in F(X)} \sphericalangle f.$$

Gilt für alle $f, g \in F(X)$, dass $\sphericalangle f = \sphericalangle g = \sin(\alpha)$, so nennen wir die Metrik eine *homogene Parallelmotrik* mit Winkel α .

Satz 5.6.2. Sei $(X = G_1 \times G_2, d = d_1 \times d_2)$ ein Graphenprodukt mit beliebiger Parallelmotrik und $\text{vol}_2(X, d) = 1$. Bezeichne mit \bar{d}_p die Produktmetrik auf X , welche für $e \in E(X)$ die gleiche Länge wie d zuordnet. Sei weiter d_p die Metrik, welche aus \bar{d}_p entsteht durch Normieren auf $\text{vol}_2(X, d_p) = 1$. Außerdem bezeichnet hier α_{ij} den kleineren

Winkel des Parallelogramms, welches von e_i und e_j aufgespannt wird, also $\alpha_{ij} = \angle(e_i \times e_j)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq \frac{h_{vol}(X, d_p)}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij})} \\ &\geq h_{vol}(X, d_p) \sqrt{\frac{\sin(\alpha_{\min})}{2}}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich zu dem Beweis von Satz 5.4.2. Da die Metrik d_p bereits gegeben ist, werden im Folgenden noch die Abschätzungen gezeigt.

Die Abschätzung der Weglänge von geschlossenen Wegen funktioniert wie im Beweis von Satz 5.4.2 und somit erhalten wir erneut den Faktor $\sqrt{2}$.

Zur Abschätzung des Volumens erhalten wir nun eine Abhängigkeit vom Winkel. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(X, \bar{d}_p) &= \sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \\ &\geq \sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij}) \\ &= \text{vol}_2(X, d) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(X, d) &= \sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij}) \\ &\geq \sin(\alpha_{\min}) \sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \\ &= \sin(\alpha_{\min}) \text{vol}_2(X, \bar{d}_p). \end{aligned}$$

Mit Lemma 1.0.7 folgt dann

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq h_{vol}(X, d_p) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{e_i \in E(G_1), e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij})} \\ &\geq h_{vol}(X, d_p) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin(\alpha_{\min}) \sum_{e_i \in E(G_1), e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1) L(e_j, d_2)} \\ &= h_{vol}(X, d_p) \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sin(\alpha_{\min}) \text{vol}(H, d)} \\ &= h_{vol}(X, d_p) \sqrt{\frac{\sin(\alpha_{\min})}{2}}. \end{aligned}$$

□

Korollar 5.6.3 (Korollar F). Sei (X, d) ein beliebiges Graphenprodukt mit Parallelmetrik und $\text{vol}_2(X, d) = 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \sqrt{h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2)} \sqrt{\sum_{e_i \in E(G_1)} \sum_{e_j \in E(G_2)} L(e_i, d_1)L(e_j, d_2) \sin(\alpha_{ij})} \\ &\geq \sqrt{h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2) \sin(\alpha_{\min})}. \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt direkt aus Satz 5.6.2 zusammen mit Satz 5.5.2 □

5.7 Graphenprodukte aus Rosengraphen

Für Normierung bezüglich des 2-Volumens erhalten wir somit lediglich eine winkelabhängige untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten, welche für kleine Winkel beliebig klein wird und gegen 0 konvergiert.

Um hier ein besseres Ergebnis zu erzielen, schränken wir uns in den folgenden beiden Abschnitten auf Rosengraphen ein. Dies sind Graphen, welche nur eine Ecke haben. Hierdurch ist jede Fläche isometrisch zu einem flachen Torus und dadurch lässt sich das Volumenwachstum der universellen Überlagerung besser beschreiben.

Definition 5.7.1. Ein Graph G heißt *Rosengraph*, wenn $\#V(G) = 1$ gilt. Wir nennen ihn k -*Rosengraph*, wenn zusätzlich $\#E(G) = k$ erfüllt ist. Die k -Rosengraphen sind somit Graphen, welche nur eine Ecke haben mit k geschlossenen Kanten, den sogenannten Blättern des Rosengraphs.

Bemerkung 5.7.2. Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus Rosengraphen.

Dann handelt es sich bei d stets um eine Parallelmotrik. Dies folgt, da jede Fläche $f \in F(X)$ isometrisch zu einem flachen Torus ist und somit gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.

Sei d nun außerdem homogen mit Winkel α . Dann lässt sich das Volumen direkt berechnen durch

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(X, d) &= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} \sin(\alpha) L(e_1, d_1) L(e_2, d_2) \\ &= \sin(\alpha) \sum_{e_1 \in E(G_1)} L(e_1, d_1) \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_2, d_2) \\ &= \sin(\alpha) \text{vol}(G_1, d_1) \text{vol}(G_2, d_2). \end{aligned}$$

Satz 5.7.3. *Es sei $(X = G_1 \times G_2, d)$ ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus Rosengraphen und seien d_1, d_2 die zugehörigen Metriken auf G_1 und G_2 . Sei außerdem die Menge der Kanten $E(G_1) = \{e_1, \dots, e_k\}$ und $E(G_2) = \{f_1, \dots, f_l\}$ gegeben und definiere die Familien von Metriken $d_j(G_1)$ auf G_1 und $d_i(G_2)$ auf G_2 für $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$ durch die Längenzuordnung für $e \in E(G_1)$ und $f \in E(G_2)$*

$$\begin{aligned} L(e, d_j(G_1)) &= \sin(\angle(e \times f_j)) L(e, d_1), \\ L(f, d_i(G_2)) &= \sin(\angle(e_i \times f)) L(f, d_2). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \max_{i,j} \{h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)), h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2))\},$$

wobei das Maximum über alle $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$ geht.

Beweis. Die Motivation der Metriken ist im nachfolgenden Beispiel genauer beschrieben. Aus Gründen der Symmetrie genügt es, G_1 zu betrachten und der Beweis überträgt sich

dann analog auf G_2 .

Sei $f_j \in E(G_2)$ beliebig und betrachte $G_1 \times f_j \subset X$. Da es sich um Rosengraphen handelt, ist für jedes $e \in E(G_1)$ die Fläche $e \times f_j \in F(X)$ isometrisch zu einem Rechteck mit Seitenlängen $L(f_j, d_2)$ und $\sin(\angle e \times f_j)L(e, d_1)$. Dies folgt daraus, dass jede Fläche isometrisch zu einem flachen Torus ist. Daher ist $(G_1 \times f_j, d)$ isometrisch zu $(G_1 \times f_j, d_j(G_1) \times d_2)$. Somit ist das Volumenwachstum für beide gleich und die Metriken können bei der Betrachtung der Volumenentropie durcheinander ersetzt werden. Insgesamt gilt für ein $\tilde{v} \in V(\widetilde{G_1 \times f_j})$

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}_2(B_r(\tilde{v}, \widetilde{X}), d))}{r} \\
&\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}_2(B_r(\tilde{v}, \widetilde{G_1 \times f_j}), d))}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}_2(B_r(\tilde{v}, \widetilde{G_1 \times f_j}), d_j(G_1) \times d_2))}{r} \\
&= h_{vol}(G_1 \times f_j, d_j(G_1) \times d_2) \\
&= \sqrt{h_{vol}(G_1, d_j(G_1))^2 + h_{vol}(f_j, d_2)^2} \\
&= h_{vol}(G_1, d_j(G_1)).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Formel der Volumenentropie für Produktmetriken aus Satz 5.2.4 genutzt. Da f_j beliebig war und alle Rechnungen mit $e_i \in E(G_1)$ analog ablaufen, liefert das die Behauptung, da somit die Ungleichung

$$h_{vol}(X, d) \geq \max\{h_{vol}(G_1, d_j(G_1)), h_{vol}(G_2, d_i(G_2))\}$$

für jede einzelne betrachtete Metrik und somit auch für das Maximum darüber gilt. \square

Beispiel 5.7.4. In Abbildung 5.4 ist beispielhaft das Produkt einer Kante mit einem Liniengraphen abgebildet. Ein Liniengraph besteht aus Grad-2-Ecken und an den Enden zwei Ecken von Grad 1.

Die obere Abbildung zeigt das Graphenprodukt mit einer beliebigen Metrik und die untere Abbildung das gleiche Graphenprodukt mit der entsprechenden Metrik aus Satz 5.7.3.

Man kann zeigen, dass beide gleiches Volumen haben und dass das Volumen sich auch gleich verhält. Zur Anschauung ist hierfür in Abbildung 5.5 exemplarisch ein geodätischer Weg im ursprünglichen Graphenprodukt eingezeichnet.

Aus dem vorherigen Satz ergibt sich eine einfache Folgerung, welche im nächsten Satz beschrieben ist.

Satz 5.7.5. *Es sei $(X = G_1 \times G_2, d)$ ein Graphenprodukt aus Rosengraphen mit Parallelmetrik und seien d_1, d_2 die zugehörigen Metriken auf G_1 und G_2 .*

Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) \geq \frac{\max\{h_{vol}(G_1, d_1), h_{vol}(G_2, d_2)\}}{\sin(\alpha_{\max})} \geq \max\{h_{vol}(G_1, d_1), h_{vol}(G_2, d_2)\}.$$

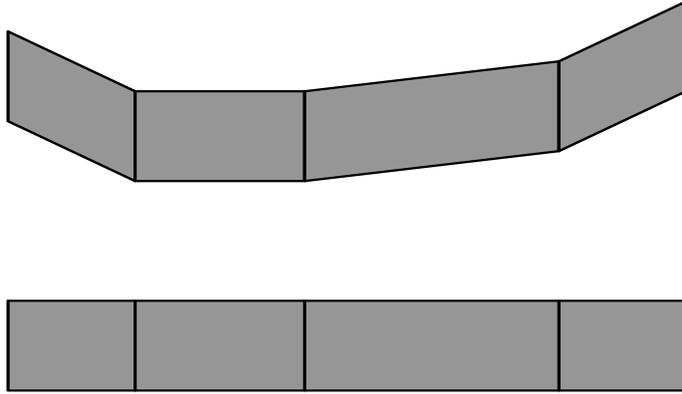


Abbildung 5.4 Graphenprodukt mit ursprünglicher Metrik (oben) und abgeleiteter Metrik (unten) aus Satz 5.7.3

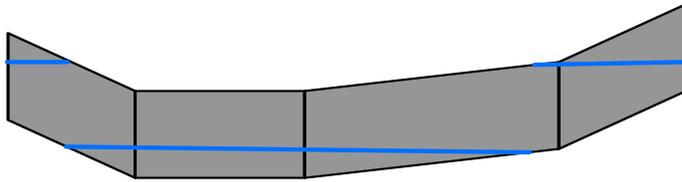


Abbildung 5.5 Graphenprodukt mit ursprünglicher Metrik und geodätischem Weg orthogonal zur Kante.

Beweis. Zum Beweis nutzen wir Satz 5.7.3 und betrachten erneut die Metriken $d_j(G_1)$ auf G_1 und $d_i(G_2)$ auf G_2 für $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$, wie sie in diesem Satz definiert sind. Das Folgende gilt stets für alle $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$. Für diese Metriken erhalten wir nach ebendiesem Satz

$$h_{vol}(X, d) \geq \max\{h_{vol}(G_1, d_j(G_1)), h_{vol}(G_2, d_i(G_2))\}.$$

Sei $\alpha = \alpha_{\max}$ der maximale Winkel. Dann gilt für alle $e \in E(G_1)$

$$L(e, d_j(G_1)) = \sin(\angle e \times f_j) L(e, d_1) \leq \sin(\alpha) L(e, d_1).$$

Entsprechend folgt auch für alle $f \in E(G_2)$

$$L(f, d_i(G_2)) = \sin(\angle e_i \times f) L(f, d_2) \leq \sin(\alpha) L(f, d_2).$$

Aus Lemma 1.0.7 und mit $\sin(\alpha) \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq \max\{h_{vol}(G_1, d_j(G_1)), h_{vol}(G_2, d_i(G_2))\} \\ &\geq \frac{\max\{h_{vol}(G_1, d_1), h_{vol}(G_2, d_2)\}}{\sin(\alpha)} \\ &\geq \max\{h_{vol}(G_1, d_1), h_{vol}(G_2, d_2)\}. \end{aligned}$$

□

5.8 Untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen normiert bezüglich des 2-Volumens

In diesem Abschnitt finden wir zwei untere Schranken der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen mit stückweise euklidischer Metrik.

Zunächst erarbeiten wir eine untere Schranke, welche unabhängig von den Winkeln der Metrik ist und anschließend noch eine winkelabhängige untere Schranke, sodass für kleine Winkel die Schranke beliebig groß wird.

Eine erste untere Schranke ist bereits in diesem Teil gegeben, bevor, wie gerade beschrieben, in den nachfolgenden Unterabschnitten die beiden Ergebnisse folgen.

Satz 5.8.1. *Es sei $X = G_1 \times G_2$ ein Graphenprodukt aus Rosengraphen und d eine beliebige stückweise euklidische Metrik auf X , sodass $\text{vol}_2(X, d) = 1$ gilt.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)} \frac{\sqrt{\sin(\alpha_{\min})}}{\sin(\alpha_{\max})}.$$

Beweis. Seien $\alpha = \alpha_{\max}$ und $\beta = \alpha_{\min}$. Dann gilt mit Satz 5.7.5

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{\max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_1), h_{\text{vol}}(G_2, d_2)\}}{\sin(\alpha)}.$$

Wir suchen im Folgenden das Minimum von $\max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_1), h_{\text{vol}}(G_2, d_2)\}$. Mit Lemma 1.0.7 und Satz 2.2.3 folgt

$$\max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_1), h_{\text{vol}}(G_2, d_2)\} \geq \max\left\{\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, d_1)}, \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, d_2)}\right\}.$$

Somit sind beide Argumente streng monoton fallend für wachsendes Volumen der jeweiligen Graphen und in das Volumen von X gehen beide linear ein. Daher wird das Maximum genau dann minimal, wenn beide Terme gleich sind und somit

$$\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, d_1)} = \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, d_2)} \quad (5.5)$$

gilt. Aus der Normierung erhalten wir die zusätzliche Bedingung

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) \cdot L(e_2, d_2) \cdot \sin(\angle e_1 \times e_2) \\ &\geq \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) \cdot L(e_2, d_2) \cdot \sin(\beta) \\ &= \sin(\beta) \sum_{e_1 \in E(G_1)} L(e_1, d_1) \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_2, d_2) \\ &= \sin(\beta) \text{vol}(G_1, d_1) \text{vol}(G_2, d_2). \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\text{vol}(G_2, d_2) \leq \frac{1}{\sin(\beta) \text{vol}(G_1, d_1)}.$$

Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung 5.5 ergibt

$$\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, d_1)} = \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, d_2)} \geq \sin(\beta) \text{vol}(G_1, d_1) h_{\min}(G_2).$$

Anschließendes Auflösen nach $\text{vol}(G_1, d_1)$ liefert

$$\text{vol}(G_1, d_1) \leq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1)}{\sin(\beta) h_{\min}(G_2)}}.$$

Analog folgt ebenfalls

$$\text{vol}(G_2, d_2) \leq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_2)}{\sin(\beta) h_{\min}(G_1)}}$$

und somit

$$\max \left\{ \frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, d_1)}, \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, d_2)} \right\} \geq \sqrt{\sin(\beta) h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}.$$

Daher folgt zusammen mit Satz 5.7.5

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)} \frac{\sqrt{\sin(\beta)}}{\sin(\alpha)}.$$

□

Korollar 5.8.2. *Es sei $X = G_1 \times G_2$ ein Graphenprodukt aus Rosengraphen und d eine beliebige homogene stückweise euklidische Metrik auf X mit Winkel α .*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}{\sin(\alpha)}} \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vorherigen Satz 5.8.1, da im homogenen Fall $\alpha = \alpha_{\min} = \alpha_{\max}$ gilt und sich somit der Sinus des Winkels kürzen lässt. Der zweite Teil folgt dann wieder unmittelbar aus $\sin(\alpha) < 1$. □

Bemerkung 5.8.3. Sei $\alpha < \frac{\pi}{6}$ und d eine homogene Produktmetrik mit Winkel α auf einem Graphenprodukt aus Rosengraphen X . Sei außerdem $d_p = d_1 \times d_2$ die Produktmetrik der abgeleiteten Metriken d_1 und d_2 .

Dann folgt aus Korollar 5.8.2 zusammen mit Satz 5.5.2

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq h_{\text{vol}}(X, d_p).$$

Somit wird das Minimum der Volumenentropie zu einem gegebenen Graphenprodukt aus Rosengraphen nicht für beliebig kleine Winkel angenommen, wenn wir alle Parallelmetriken betrachten.

5.8.1 Winkelunabhängige untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen

In diesem Unterabschnitt erarbeiten wir eine winkelunabhängige untere Schranke, welche analog zu Korollar 5.8.2 ist. Hierbei sind aber im Gegensatz zu vorher alle stückweise euklidischen Metriken auf dem Graphenprodukt aus Rosengraphen zugelassen anstatt nur homogener.

Satz 5.8.4 (Satz G). *Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus Rosengraphen G_1 und G_2 mit $\text{vol}_2(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2)}.$$

Beweis. Da es sich bei Graphenprodukten aus Rosengraphen stets um Parallelmetriken handelt, existieren die abgeleiteten Metriken d_1 auf G_1 und d_2 auf G_2 . Wir definieren erneut wie in Satz 5.7.3 für eine Ordnung der Kanten $E(G_1) = \{e_1, \dots, e_k\}$ und $E(G_2) = \{f_1, \dots, f_l\}$ die Metriken $d_j(G_1)$ auf G_1 und $d_i(G_2)$ auf G_2 für $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$ durch die Längenzuordnung für $e \in E(G_1)$ und $f \in E(G_2)$

$$\begin{aligned} L(e, d_j(G_1)) &= \sin(\angle e \times f_j) L(e, d_1), \\ L(f, d_i(G_2)) &= \sin(\angle e_i \times f) L(f, d_2). \end{aligned}$$

Wähle $s \in \{1, \dots, l\}$ so, dass

$$\text{vol}(G_1, d_s(G_1)) = \min_{j \in \{1, \dots, l\}} \text{vol}(G_1, d_j(G_1))$$

und nenne zur besseren Lesbarkeit diese Metrik $D_1 = d_s(G_1)$. Entsprechend wählen wir auch $s \in \{1, \dots, k\}$ so, dass

$$\text{vol}(G_2, d_s(G_2)) = \min_{i \in \{1, \dots, k\}} \text{vol}(G_2, d_i(G_2))$$

und nennen diese Metrik $D_2 = d_s(G_2)$. Nach Satz 5.7.3 gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)), h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2))\},$$

wobei das Maximum über alle $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$ geht. Für die gleiche Indexmenge für das Maximum gilt außerdem

$$\max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)), h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2))\} \geq \max\{h_{\text{vol}}(G_1, D_1), h_{\text{vol}}(G_2, D_2)\}.$$

Somit folgt zusammen mit Satz 2.2.3 und Lemma 1.0.7

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \max\{h_{\text{vol}}(G_1, D_1), h_{\text{vol}}(G_2, D_2)\} \\ &\geq \max\left\{\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)}, \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, D_2)}\right\}. \end{aligned}$$

Um dies zu minimieren, betrachten wir die Nebenbedingungen an das Volumen. Dies ist nach Definition

$$\begin{aligned}
1 &= \text{vol}_2(X, d) \\
&= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) L(e_2, d_2) \sin(\angle e_1 \times e_2) \\
&\geq \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) L(e_2, D_2) \\
&\geq \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, D_1) L(e_2, D_2) \\
&= \sum_{e_1 \in E(G_1)} L(e_1, D_1) \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_2, D_2) \\
&= \text{vol}(G_1, D_1) \text{vol}(G_2, D_2).
\end{aligned}$$

Da sowohl $\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)}$ als auch $\frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, D_2)}$ wie im Beweis von Satz 5.8.1 monoton fallend im Volumen sind, wird der Term $\max \left\{ \frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)}, \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, D_2)} \right\}$ im Falle von Gleichheit der beiden Argumente minimal. Somit lösen wir

$$\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)} = \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, D_2)}$$

unter Berücksichtigung von

$$\text{vol}(G_1, D_1) \text{vol}(G_2, D_2) \leq 1.$$

Hieraus folgt

$$\text{vol}(G_2, D_2) \leq \frac{1}{\text{vol}(G_1, D_1)}$$

und eingesetzt liefert das

$$\frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)} \geq h_{\min}(G_2) \text{vol}(G_1, D_1).$$

Auflösen nach $\text{vol}(G_1, D_1)$ führt zu

$$\text{vol}(G_1, D_1) \leq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1)}{h_{\min}(G_2)}}.$$

Entsprechend erhalten wir für

$$\text{vol}(G_2, D_2) \leq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_2)}{h_{\min}(G_1)}}.$$

Daher gilt

$$\max \left\{ \frac{h_{\min}(G_1)}{\text{vol}(G_1, D_1)}, \frac{h_{\min}(G_2)}{\text{vol}(G_2, D_2)} \right\} \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}$$

und somit zusammen mit dem obigen Resultat

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}.$$

□

5.8.2 Winkelabhängige untere Schranke der Volumenentropie von Graphenprodukten aus Rosengraphen

Im Folgenden wird zu einer stückweise euklidischen Metrik auf einem Graphenprodukt aus Rosengraphen eine weitere untere Schranke für die Volumenentropie gefunden, welche vom Winkel abhängt. Diese Schranke wird für kleine Winkel beliebig groß und zeigt somit, dass die Volumenentropie nicht für den Grenzwert aller Winkel gegen 0 minimal werden kann.

Definition 5.8.5. Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus Rosengraphen mit zugehörigen Metriken d_1 auf G_1 und d_2 auf G_2 . Ordne die Kanten $\{e_1, \dots, e_k\}$ von G_1 und $\{f_1, \dots, f_l\}$ von G_2 und definiere zur besseren Lesbarkeit $a_{ij} = \sin(\angle e_i \times f_j)$. Wir definieren die *symmetrische Metrik* D auf X als die homogene Metrik, sodass für den zugehörigen Winkel α gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_{ij}}{k \cdot l}$$

und jeder Kante eines Graphen die gleiche Länge zugeordnet wird, sodass das Volumen von G_1 und G_2 gleich bleibt, also für $e_i \in E(G_1)$ und $f_j \in E(G_2)$

$$L(e_i, D) = \frac{\text{vol}(G_1, d_1)}{k} \quad \text{und} \quad L(f_j, D) = \frac{\text{vol}(G_2, d_2)}{l}.$$

Bemerkung 5.8.6. Die symmetrische Metrik aus der vorherigen Definition ist eine symmetrische Version der ursprünglichen Metrik. Die Idee ist, dass man den durchschnittlichen Winkel über alle Winkel nimmt und allen Kanten pro Graph die gleiche Länge zuordnet. Hierdurch erhält man im Graphenprodukt, dass alle Flächen Parallelogramme mit gleichen Winkeln und Seitenlängen sind und somit zueinander isometrisch sind. Diese symmetrische Version des Graphen lässt sich gut abschätzen.

Lemma 5.8.7. Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus einem k -Rosengraphen (G_1, d_1) und einem l -Rosengraphen (G_2, d_2) . Sei D die symmetrische Metrik auf X .

Dann gilt

$$\text{vol}_2(X, d) \leq k \cdot l \cdot \text{vol}_2(X, D).$$

Beweis. Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(X, d) &= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) L(e_2, d_2) \sin(\angle e_1 \times e_2) \\ &\leq \left(\sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, d_1) L(e_2, d_2) \right) \left(\sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} \sin(\angle e_1 \times e_2) \right) \\ &= \text{vol}(G_1, d_1) \text{vol}(G_2, d_2) \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} \sin(\angle e_1 \times e_2). \end{aligned}$$

Für das Volumen bezüglich D folgt

$$\begin{aligned}
\text{vol}_2(X, D) &= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} L(e_1, D) L(e_2, D) \sin(\angle e_1 \times e_2) \\
&= \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} \frac{\text{vol}(G_1, d_1)}{k} \frac{\text{vol}(G_2, d_2)}{l} \sin(\angle e_1 \times e_2) \\
&= \frac{\text{vol}(G_1, d_1)}{k} \frac{\text{vol}(G_2, d_2)}{l} \sum_{e_1 \in E(G_1)} \sum_{e_2 \in E(G_2)} \sin(\angle e_1 \times e_2).
\end{aligned}$$

Die beiden Summen in den jeweils letzten Termen stimmen überein, obwohl die Winkel bezüglich unterschiedlicher Metriken betrachtet werden. Dies gilt nach Definition der Metrik D , da im zweiten Fall über den Mittelwert des ersten Falls summiert wird. Somit unterscheiden sich die beiden Terme um den Faktor $k \cdot l$ und es gilt

$$\text{vol}_2(X, d) \leq k \cdot l \cdot \text{vol}_2(X, D).$$

□

Satz 5.8.8 (Satz H). *Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus einem k -Rosengraphen G_1 und einem l -Rosengraphen G_2 mit $\text{vol}_2(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}{\sin(\alpha_{\max}) \cdot k^3 \cdot l^3}} \geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) \cdot h_{\min}(G_2)}{k^3 \cdot l^3}}.$$

Beweis. Im Beweis zeigen wir, dass für die unteren Schranken der Volumenentropie aus Satz 5.7.3 bis auf Konstanten eine Ungleichung für die Metriken d und D besteht, wobei wir die Änderung des Volumens, wie in Lemma 5.8.7 bestimmt, berücksichtigen müssen. Nach Satz 5.7.3 gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)), h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2))\}$$

für die Metriken $d_j(G_1)$ und $d_i(G_2)$ aus ebendiesem Satz. Das Maximum läuft hier wieder über alle $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$. Seien $D_j(G_1)$ und $D_i(G_2)$ die entsprechenden Metriken für die Metrik d . Im Folgenden schätzen wir diese Metriken gegeneinander ab. Sei $j \in \{1, \dots, l\}$ beliebig. Bezeichne mit $l_1 = \max_{e \in E(G_1)} L(e, d_1)$ und $\alpha_j = \max_{e \in E(G_1)} \angle e \times f_j$.

Dann wird durch den Wechsel der Metrik d auf die Metrik D die Strecke am stärksten in $G_1 \times f_j$ verkürzt, wenn es sich vorher um den größten Winkel und die längste Kante gehandelt hat. Somit gilt für einen geschlossenen Weg γ in G_1

$$L(\gamma, d_j(G_1)) \leq \frac{\sin(\alpha_j)}{\sin(\alpha)} \frac{l_1 \cdot k}{\text{vol}(G_1, d_1)} L(\gamma, D_j(G_1)),$$

wobei α den zugehörigen Winkel zur homogenen Metrik D beschreibt. Auf die gleiche Weise erhält man auch für $i \in \{1, \dots, k\}$ die Abschätzung für einen geschlossenen Weg γ in G_2

$$L(\gamma, d_i(G_2)) \leq \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha)} \frac{l_2 \cdot l}{\text{vol}(G_2, d_2)} L(\gamma, D_i(G_2))$$

mit $l_2 = \max_{e \in E(G_2)} L(e, d_2)$ und $\alpha_i = \max_{f \in E(G_2)} \angle e_i \times f$. Da $l_1 \leq \text{vol}(G_1, d_1)$ und $l_2 \leq \text{vol}(G_2, d_2)$ gilt, vereinfachen sich die Ungleichungen zu

$$L(\gamma, d_j(G_1)) \leq \frac{\sin(\alpha_j)}{\sin(\alpha)} k L(\gamma, D_j(G_1))$$

und

$$L(\gamma, d_i(G_2)) \leq \frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha)} l L(\gamma, D_i(G_2)).$$

Nach Lemma 1.0.7 folgt somit

$$h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)) \geq \frac{\sin(\alpha)}{k \sin(\alpha_j)} h_{\text{vol}}(G_1, D_j(G_1))$$

und

$$h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2)) \geq \frac{\sin(\alpha)}{l \sin(\alpha_i)} h_{\text{vol}}(G_2, D_i(G_2)).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_j(G_1)), h_{\text{vol}}(G_2, d_i(G_2))\} \\ &\geq \max\left\{\frac{\sin(\alpha)}{k \sin(\alpha_j)} h_{\text{vol}}(G_1, D_j(G_1)), \frac{\sin(\alpha)}{l \sin(\alpha_i)} h_{\text{vol}}(G_2, D_i(G_2))\right\}, \end{aligned}$$

wobei hier erneut, wie auch stets im Folgenden, das Maximum über alle $j = 1, \dots, l$ und $i = 1, \dots, k$ betrachtet wird. Des Weiteren gilt $\sin(\alpha_j) \leq \sin(\alpha_{\max})$ und $\sin(\alpha_i) \leq \sin(\alpha_{\max})$ und somit

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_{\max})} \max\left\{\frac{h_{\text{vol}}(G_1, D_j(G_1))}{k}, \frac{h_{\text{vol}}(G_2, D_i(G_2))}{l}\right\}.$$

Die Metriken $D_j(G_1)$ und $D_i(G_2)$ sind von der Wahl von i und j aufgrund der Definition von D unabhängig. Somit wird hier das Maximum lediglich über zwei Terme betrachtet. Diesen Term schätzen wir analog zum Beweis von Satz 5.8.1 ab. Im Beweis erhalten wir

$$\max\{h_{\text{vol}}(G_1, d_1), h_{\text{vol}}(G_2, d_2)\} \geq \sqrt{\sin(\beta) h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)},$$

wobei es sich um eine homogene Metrik mit Winkel β handelt mit abgeleiteten Metriken d_1 und d_2 . Um das Volumen aus Lemma 5.8.7 auszugleichen, erhalten wir auf der rechten Seite den Faktor $\frac{1}{\sqrt{k \cdot l}}$. Des Weiteren bezeichnen die Metriken $D_j(G_1)$ und $D_i(G_2)$ die um den Faktor $\sin(\alpha)$ gestauchten Metriken. Daher muss die rechte Seite außerdem durch $\sin(\alpha)$ dividiert werden. Somit erhalten wir in diesem Fall

$$\max\left\{\frac{h_{\text{vol}}(G_1, D_j(G_1))}{k}, \frac{h_{\text{vol}}(G_2, D_i(G_2))}{l}\right\} \geq \frac{\sqrt{\sin(\alpha) h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}}{\sin(\alpha) \cdot k \cdot l}.$$

Da es sich bei $\sin(\alpha)$ um den Mittelwert über alle Winkel handelt, gilt außerdem $k \cdot l \cdot \sin(\alpha) \geq \sin(\alpha_{\max})$ und somit folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_{\max})} \max \left\{ \frac{h_{\text{vol}}(G_1, D_j(G_1))}{k}, \frac{h_{\text{vol}}(G_2, D_i(G_2))}{l} \right\} \\
&\geq \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha_{\max})} \frac{\sqrt{\sin(\alpha) h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}}{\sin(\alpha) \cdot k \cdot l} \\
&= \frac{\sqrt{\sin(\alpha) h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}}{\sin(\alpha_{\max}) \cdot k \cdot l} \\
&\geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}{\sin(\alpha_{\max}) \cdot k^3 \cdot l^3}} \\
&\geq \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1) h_{\min}(G_2)}{k^3 \cdot l^3}}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.8.9. Wir können nun die Schranken aus den Sätzen 5.8.8 und 5.8.4 vergleichen. Für kleine Winkel ist die Schranke aus Satz 5.8.8 besser. Im Fall von größeren Winkeln ist die Schranke aus Satz 5.8.4 besser, da in der gerade gewonnenen Ungleichung sehr grobe Abschätzungen gemacht wurden. Dies zeigt sich auch darin, dass die Version der winkelunabhängigen Schranke aus Satz 5.8.8 wesentlich schlechter ist als jene aus Satz 5.8.4.

Dennoch gibt das winkelabhängige Ergebnis Aufschluss darüber, dass das Minimum nicht angenommen werden kann, wenn alle Winkel klein werden. Dies hatten wir für homogene Metriken auf Graphenprodukten aus Rosengraphen bereits gesehen, erhalten es aber nun auch für beliebige nicht homogene Metriken auf Graphenprodukten aus Rosengraphen. Da dieser Satz eine sehr grobe Abschätzung angibt, ist auch das nachfolgende Korollar keine optimale untere Schranke.

Korollar 5.8.10. *Sei (X, d) ein stückweise euklidisches Graphenprodukt aus einem k -Rosengraphen G_1 und einem l -Rosengraphen G_2 mit $\text{vol}_2(X, d) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \frac{\sqrt{\log(2k-1) \log(2l-1)}}{k \cdot l}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 5.8.8 unter Verwendung der Formel für h_{\min} aus Satz 2.2.3. Beachte, dass ein k -Rosengraph nur eine Ecke v hat mit $\deg(v) = 2k$. □

Aus all diesen gewonnenen Ergebnissen ergibt sich die Vermutung, dass eine möglichst symmetrische Metrik die Volumenentropie minimiert. Dies bedeutet, dass auf den Graphen die minimierende Metrik wie in Satz 2.2.3 angenommen wird und die Produkte stets rechtwinklig sind. Für diese Metriken ist die Volumenentropie explizit bestimmbar durch Satz 5.5.2. Formaler ist dies in der nachfolgenden Vermutung festgehalten.

Vermutung 5.8.11 (Vermutung I). *Sei $X = G_1 \times \cdots \times G_n$ ein Graphenprodukt. Dann gibt es eine eindeutige Metrik d_{\min} , welche die Volumenentropie unter allen stückweise euklidischen Metriken minimiert und es gilt*

$$h_{\text{vol}}(X, d_{\min}) = \sqrt{n} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n h_{\min}(G_i)}.$$

Die Metrik entspricht genau der Metrik aus Satz 5.5.2.

5.9 Volumenentropie ist keine Homotopieinvariante für Komplexe

Die Volumenentropie ist eine Homotopieinvariante für Mannigfaltigkeiten. Dies wurde bereits von Anthony Manning [Man79] gezeigt. Ivan Babenko zeigt in „Asymptotic Invariants of smooth Manifolds“ [Bab93], dass die minimale Volumenentropie bei Graphen keine Homotopieinvariante ist. An sein Beispiel angelehnt zeigen wir hier, dass es für höhere Dimensionen, also für Graphenprodukte und somit auch kubische Komplexe, ebenfalls keine Homotopieinvariante ist.

Satz 5.9.1. *Die Volumenentropie ist für Graphenprodukte und somit auch für kubische Komplexe keine Homotopieinvariante.*

Genauer gilt, dass wir den k -Rosengraph R_k und den 3-regulären Graphen G_k betrachten, welche die gleiche Homotopiegruppe von Rang k haben. Hierfür gilt für $k \geq 7$

$$\min_d h_{\text{vol}}(G_k \times G_k, d) < \min_d h_{\text{vol}}(R_k \times R_k, d),$$

wobei das Minimum über alle stückweise euklidischen Volumen-1-Metriken d geht.

Beweis. Die beiden Graphenprodukte haben die gleiche Homotopiegruppe. Dies lässt sich einsehen, indem man die Graphen betrachtet und die Homotopiegruppe von G_k und R_k übereinstimmen. Dies sieht man durch sukzessives Kontrahieren eines Spannbaums in G_k . Das Ergebnis ist dann ebenfalls ein k -Rosengraph. Die Fundamentalgruppe ist beim kartesischen Produkt ebenfalls das kartesische Produkt und somit folgt die gleiche Fundamentalgruppe der Graphenprodukte.

Nach Satz 5.8.4 gilt für den Rosengraphen und eine stückweise euklidische Metrik d auf $R_k \times R_k$ und einer abgeleiteten Metrik \hat{d} auf R_k

$$h_{\text{vol}}(R_k \times R_k, d) \geq h_{\text{vol}}(R_k, \hat{d}) \geq h_{\text{min}}(R_k) = k \cdot \log(2k - 1).$$

Da die Metrik d eine beliebige stückweise euklidische Metrik ist, gilt

$$\min_d h_{\text{vol}}(R_k \times R_k, d) \geq k \cdot \log(2k - 1),$$

wobei das Minimum über die gleichen Metriken wie im Satz betrachtet wird.

Außerdem können wir die Volumenentropie von G_k nach oben abschätzen, indem wir eine spezielle Metrik anschauen, und zwar die rechtwinklige Produktmetrik bezüglich der minimierenden Metrik auf den Graphen. Sei also d_{min} die minimierende Metrik auf G_k wie in Satz 2.2.3. Wir definieren außerdem die rechtwinklige Produktmetrik $d_p = d_{\text{min}} \times d_{\text{min}}$ auf $G_k \times G_k$. Sei außerdem d eine beliebige stückweise euklidische Metrik auf $G_k \times G_k$. Dann gilt nach Satz 5.2.4

$$\begin{aligned} \min_d h_{\text{vol}}(G_k \times G_k, d) &\leq h_{\text{vol}}(G_k \times G_k, d_p) \\ &= \sqrt{2} h_{\text{vol}}(G_k, d_{\text{min}}) \\ &= \sqrt{2} h_{\text{min}}(G_k) \\ &= 3\sqrt{2}(k - 1) \log(2). \end{aligned}$$

Somit wächst die untere Schranke der Volumenentropie für R_k schneller als die obere Schranke der Volumenentropie von G_k . Daher gilt für $k \geq 7$

$$\min_d h_{vol}(G_k \times G_k, d) \leq 3\sqrt{2}(k-1)\log(2) < k \cdot \log(2k-1) \leq \min_d h_{vol}(R_k \times R_k, d),$$

wobei das Minimum über alle stückweise euklidischen Volumen-1-Metriken geht.

In Abbildung 5.6 ist ein Beispiel für einen 3-regulären Graphen mit Fundamentalgruppe von Rang 8 dargestellt. Dieser Graph hat somit 14 Ecken und 21 Kanten. In Abbildung 5.7 ist außerdem der Rosengraph mit 8 Blättern abgebildet. Diese beiden Graphen, jeweils im kartesischen Produkt mit sich selbst, bilden somit ein Beispiel für Graphenprodukte, welche homotop zueinander sind, aber unterschiedliche minimale Volumenentropie aufweisen. \square

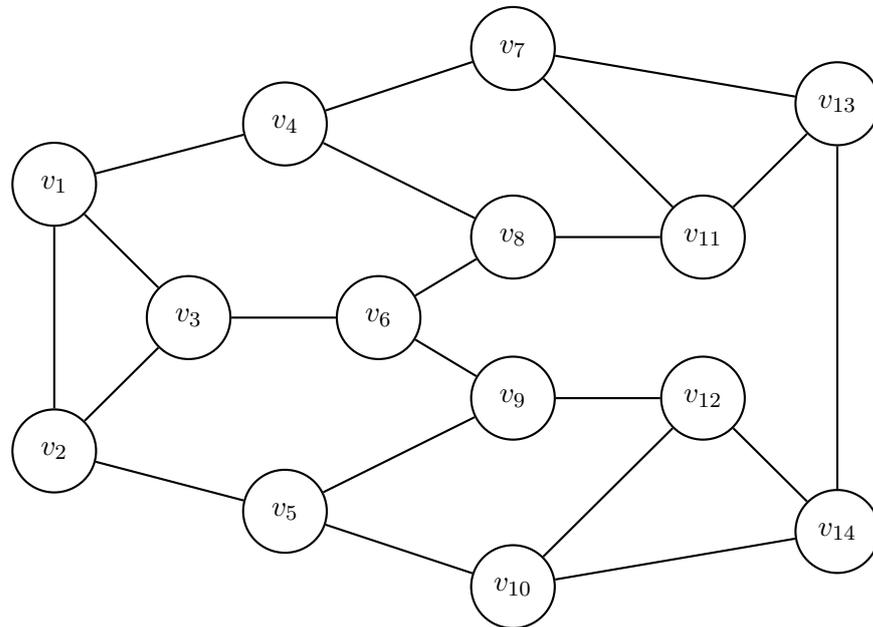


Abbildung 5.6 Ein möglicher 3-regulärer Graph mit Rang 8 der Fundamentalgruppe, also ein Beispiel für G_8 .

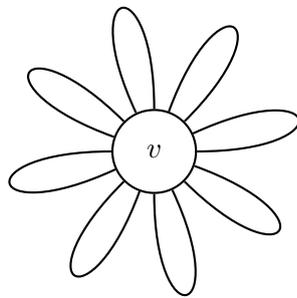


Abbildung 5.7 Ein Rosengraph mit Rang 8 der Fundamentalgruppe, also ein Beispiel für R_8 .

Kapitel 6

Gebäude

Gebäude sind sehr symmetrische Komplexe. Sie werden in diesem Kapitel eingeführt mit dem Ziel, über deren Volumenentropie Aussagen treffen zu können.

Es gibt spezielle Graphenprodukte, welche in der universellen Überlagerung auch Gebäuden entsprechen. Dies sind insbesondere Rosengraphen und deren Produkte.

Dadurch wurden bereits manche Gebäude implizit durch den vorherigen Abschnitt behandelt, weshalb wir in Abschnitt 6.2 die vorherigen Ergebnisse mit Resultaten aus der Literatur vergleichen.

Im Anschluss betrachten wir allgemeine Gebäude. Hierbei fokussieren wir uns zunächst auf euklidische, irreduzible Gebäude und werden allgemein für euklidische, irreduzible Gebäude eine untere Schranke der Volumenentropie in den Sätzen 6.3.1 und 6.3.2 finden, welche nur von den kombinatorischen Eigenschaften des Gebäudes abhängt.

Anschließend konkretisieren und verbessern wir diese Schranke für die unterschiedlichen Typen von affinen Gebäuden. Hierbei stellt sich die Frage nach geeigneten Normierungen, weshalb wir die Ergebnisse in zwei Formen angeben.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir reduzible, euklidische Gebäude und erarbeiten hier ähnliche Ergebnisse zu denen der Volumenentropie von Graphenprodukten.

6.1 Definitionen – Gebäude

Die folgenden Definitionen geben eine sehr kurze Einführung in die Theorie der Gebäude, wobei hier Coxeter-Komplexe und Coxeter-Gruppen bereits vorausgesetzt werden. Für eine ausführliche Behandlung dieses Gebiets verweisen wir auf das Buch „Buildings“ von Abramenko und Brown [AB08] und für weitere detaillierte Informationen zu Coxeter-Komplexen auf „Combinatorics of Coxeter Groups“ von Björner und Brenti [BB05].

Definition 6.1.1. Ein *Gebäude* ist ein Simplicialkomplex X , welcher eine Vereinigung von Teilkomplexen Σ ist, welche *Apartments* genannt werden. Diese Apartments müssen die folgenden Axiome für zwei beliebige Simplexe $A, B \in X$ erfüllen:

- a) Jedes Apartment Σ ist ein Coxeter-Komplex.
- b) Es existiert ein Apartment Σ , welches A und B enthält.
- c) Für zwei Apartments Σ und Σ' , die beide A und B enthalten, existiert ein Isomorphismus $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma'$, welcher A und B punktweise fixiert.

Auf Coxeter-Komplexen gibt es stets eine Metrik, bezüglich welcher Σ isometrisch zur Sphäre S^n , dem euklidischen Raum \mathbb{R}^n oder dem hyperbolischen Raum \mathbb{H}^n ist. In dieser Arbeit betrachten wir lediglich die ersten beiden Fälle, wobei wir den ersten Fall sphärisch und den zweiten euklidisch oder affin nennen.

Daraus erhalten wir eine Metrik auf den Apartments, welche sich auf das Gebäude fortsetzen lässt. Wir bezeichnen nun mit (X, d) das *metrische Gebäude*.

Bemerkung 6.1.2. In der vorherigen Definition können wir A und B als leere Simplexe wählen. Somit müssen nach Bedingung c) zwei beliebige Apartments isomorph zueinander sein.

Definition 6.1.3. Sei (X, d) ein Gebäude. Bezeichne mit G_X das zugehörige *Coxeter-Dynkin-Diagramm*, welches wir der Einfachheit halber als Graphen ansehen, wobei die Kanten beschriftet sein können. Wir verwenden hier die Coxeter-Dynkin-Diagramme, wie sie auch in „Coxeter Triangulations Have Good Quality“ [CKW20] genutzt werden. Eine Übersicht über die sphärischen Coxeter-Dynkin-Diagramme gibt es in Abbildung 6.1 und die Coxeter-Dynkin-Diagramme im affinen Fall sind in Abbildung 6.2 dargestellt.

Für Graphen haben wir bereits den Grad einer Ecke definiert. Nun benötigen wir im Fall

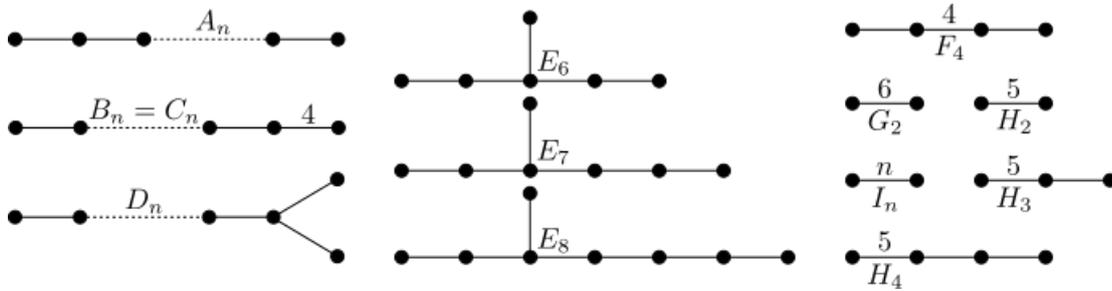


Abbildung 6.1 Die Coxeter-Dynkin-Diagramme zu den sphärischen Coxeter-Komplexen mit Benennung aus [Cox14].

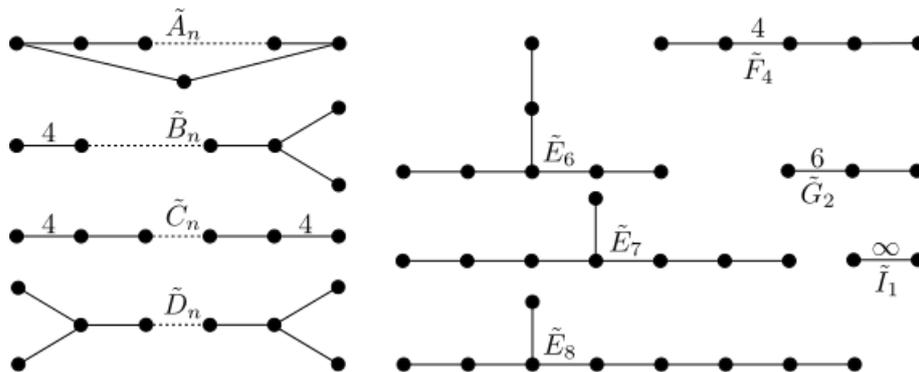


Abbildung 6.2 Die Coxeter-Dynkin-Diagramme zu den affinen Coxeter-Komplexen mit Benennung aus [Cox14].

von Coxeter-Dynkin-Diagrammen noch eine weitere Abwandlung davon. Wir definieren daher zu einer Ecke $v \in V(G_X)$ den *3-Grad* $\deg_3(v)$ der Ecke als

$$\deg_3(v) = \#\{e \in E(G_X) \mid v \in e \text{ und } e \text{ ist unbeschriftet}\}.$$

Der Name kommt daher, dass die zugehörige Potenz in der Coxeter-Gruppe zwischen den zugehörigen Kodimension-1-Flächen 3 ist.

Ein Gebäude heißt *irreduzibel*, wenn es sich nicht als Produkt von zwei Gebäuden schreiben lässt. Dies ist äquivalent dazu, dass das Coxeter-Dynkin-Diagramm zusammenhängend ist.

Sei Σ_X der Coxeter-Komplex, zugehörig zum Gebäude X . Wir definieren die *Dimension*

von X als $\dim(X) = \dim(\Sigma_X)$. Der Einfachheit und besseren Lesbarkeit halber wird der Index beim Coxeter-Komplex im Folgenden meist weggelassen.

Sei weiter f ein Simplex mit Kodimension 1. Wir definieren die *Verzweigungszahl* λ als

$$\lambda = \#\{\delta \text{ ist ein maximales Simplex in } X \mid f \subset \delta\} - 1.$$

Wir betrachten nur Gebäude, in denen die Verzweigungszahl unabhängig von der Wahl des Kodimension-1-Simplexes ist, also Gebäude, bei denen die Verzweigungszahl überall gleich ist. Dies ist eine Einschränkung, welche oft allgemein an Gebäude gestellt wird, da dies zu einer stärkeren Symmetrie führt.

Analog zu Simplicialkomplexen bezeichnen wir mit $V(X)$ und $V(\Sigma_X)$ die Dimension-0-Simplizes des jeweiligen Objekts und entsprechend mit $E(X)$ und $E(\Sigma_X)$ die der Dimension 1 und nennen diese Mengen Ecken und Kanten des jeweiligen Objekts.

Definition 6.1.4. Sei (X, d) nun ein euklidisches Gebäude, das heißt, Σ_X ist isometrisch zu \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}$. Diese Art von Gebäuden wird auch affine Gebäude genannt.

Sei Δ eine fundamentale Kammer von X . Wir definieren das *fundamentale Volumen* von X als $\text{vol}_F(X, d) = \text{vol}(\Delta)$. Wenn d klar ist, schreiben wir oft nur $\text{vol}_F(X)$.

Sei $v \in V(G_X)$. In Δ entspricht jedes Kodimension-1-Simplex einer Ecke in G_X . Wir bezeichnen mit h_v die *Höhe* der fundamentalen Kammer bezüglich der Grundseite, welche zu v gehört. Dies entspricht dem Abstand des Kodimension-1-Simplexes zu der nicht in diesem Simplex liegenden, und somit gegenüberliegenden, Ecke. Wir nennen h_v die *Höhe bezüglich v in der Fundamentalkammer*. Wir definieren weiter auch die *maximale Höhe* h_{\max} als das Maximum über all diese Höhen, also

$$h_{\max} = \max_{v \in V(G_X)} h_v.$$

Definiere außerdem zu $v \in V(G_X)$ ein Gebäude X_v . Dies ist ein Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm $G_X - v$ und gleicher Verzweigungszahl wie X . Hierbei bezeichnet $G_X - v$ den Graphen und somit das Diagramm, welches aus G_X entsteht, indem die Ecke v und alle damit verbundenen Kanten entfernt werden.

Sei γ ein Weg in X . Wir nennen diesen Weg *typgerecht*, wenn er an einer Ecke $v \in V(X)$ beginnt und in einer Ecke $w \in V(X)$ endet, wobei sich v auf w durch Verkettung simplicialer Spiegelungen in X aufeinander abbilden lassen. Wir nennen zwei Ecken, welche so aufeinander abgebildet werden können, *Ecken vom gleichen Typ*. Ein typgerechter Weg γ von v nach w heißt *kürzester typgerechter Weg*, wenn $L(\gamma, d) = d(v, w)$ gilt.

Bemerkung 6.1.5. Ist (X, d) ein euklidisches Gebäude, so ist für alle $v \in V(G_X)$ das Gebäude X_v ein sphärisches Gebäude. Dies ist der vorher angegebenen Literatur [AB08] zu entnehmen. Man kann es sich aber auch überlegen, indem man bei einer fundamentalen Kammer eine Kodimension-1-Facette entfernt. Dies entspricht der Entfernung einer Ecke aus dem Coxeter-Dynkin-Diagramm. Es gibt in dieser fundamentalen Kammer genau eine Ecke w , welche nicht in der entfernten Facette liegt. Alle übrigen Kodimension-1-Facetten enthalten somit diese Ecke w . Daher sind alle Facetten um die gegenüberliegende Ecke

zur entfernten Facette zentriert und der Coxeter-Komplex und somit auch das Gebäude sind sphärisch, da mit den Spiegelungen stets w fixiert wird.

Definition 6.1.6. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude und γ ein Weg beginnend in einem $x \in X$. Wir nennen einen weiteren Weg φ einen *analogen Weg zu γ in X* , wenn φ ebenfalls in x beginnt und es einen Isomorphismus von zwei Apartments gibt, welcher γ auf φ abbildet.

Wir betrachten nun zu einem Weg γ von $x \in X$ nach $y \in X$ einen kürzesten Galerieweg $p = \delta_1 \cdots \delta_k$ mit δ_i maximale Simplizes und $x \in \delta_1, y \in \delta_k$. Dann definieren wir die *Anzahl an Reflexionen entlang des Wegs* als $k - 1$. Dies entspricht genau der Anzahl an Kodimension-1-Facetten von δ_1 , an denen δ_1 gespiegelt werden muss, um δ_1 auf δ_k abzubilden.

Die übliche Definition von Volumenentropie nutzt die universelle Überlagerung. Da euklidische Gebäude einfach zusammenhängend sind und somit die universelle Überlagerung wieder dem euklidischen Gebäude selbst entspricht, ist hier für die Volumenentropie kein Übergang zur universellen Überlagerung notwendig. Wir können daher direkt die Volumenentropie wie in der nächsten Definition betrachten.

Definition 6.1.7. Sei (X, d) ein n -dimensionales, euklidisches Gebäude und $x \in X$ beliebig. Mit vol bezeichnen wir erneut ein Hausdorff-Maß, präziser das n -dimensionale Hausdorff-Maß.

Definiere die *Volumenentropie* $h_{\text{vol}}(X, d)$ von (X, d) als den exponentiellen Anteil des Volumenwachstums von Bällen, also

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol}(B_r(x))}{r}.$$

Bemerkung 6.1.8. In [LL10] betrachten Ledrappier und Lim nicht die Volumenentropie von affinen Gebäuden direkt. Stattdessen betrachten sie kompakte Quotienten von affinen Gebäuden. Für diesen kompakten Quotienten passt die ursprüngliche Definition der Volumenentropie. Diese stimmt in diesem Fall mit der hier definierten Volumenentropie überein, da die universelle Überlagerung des kompakten Quotienten wieder dem euklidischen Gebäude entspricht.

Bemerkung 6.1.9. Aufgrund der Symmetrie des Gebäudes ist die Definition der Volumenentropie unabhängig von der Wahl von x . Dies ist analog zu Lemma 1.0.6.

Definition 6.1.10. Sei X ein sphärisches Gebäude und Σ_X der zugehörige sphärische Coxeter-Komplex. Sei d_W die Wortmetrik auf Σ_X bezüglich eines Erzeugendensystems aus Reflexionen an den Kodimension-1-Facetten einer Fundamentalkammer Δ . Definiere den *Durchmesser* $\text{diam}(X)$ von X als den Durchmesser des Coxeter-Komplexes, also

$$\text{diam}(X) = \text{diam}(\Sigma_X) = \max\{d_W(\Delta_1, \Delta_2) \mid \Delta_1 \text{ und } \Delta_2 \text{ sind Kammern von } \Sigma_X\}.$$

Zu einer Kammer Δ_1 in X bezeichne jede Kammer Δ_2 in X als *gegenüberliegende Kammer*, wenn der maximale Abstand, also Abstand dieser beiden Kammern, realisiert wird. Also gilt $d(\Delta_1, \Delta_2) = \text{diam}(X)$ für die Einschränkung des Abstands auf ein jeweiliges Apartment, in dem Δ_1 und Δ_2 liegen, wenn es sich um gegenüberliegende Kammern handelt. Solch ein Apartment existiert stets nach der Definition von Gebäuden.

Definition 6.1.11. Definiere für ein euklidisches Gebäude (X, d) die *normierte Volumenentropie* $h_{\text{vol}}(X)$ als

$$h_{\text{vol}}(X) = h_{\text{vol}}(X, d) \text{vol}_F(X, d)^{\frac{1}{\text{dim}(X)}}.$$

Dies entspricht nach Lemma 1.0.7 der Volumenentropie der auf fundamentales Volumen 1 normierten Metrik des Gebäudes.

Definition 6.1.12. Sei (Σ, d) ein affiner Coxeter-Komplex und sei W die Gruppe der Automorphismen des abstrakten Coxeter-Komplexes Σ . Sei $v \in V(\Sigma)$ eine Ecke des Coxeter-Komplexes. Dann bezeichnen wir die *Stabilisatorengruppe von v* mit W_v , also

$$W_v = \{f \in W \mid f(v) = v\},$$

und mit T die Gruppe der simplizialen Translationen.

Wir nennen die Ecke v *spezielle Ecke*, wenn sich W als semidirektes Produkt $W = T \rtimes W_v$ schreiben lässt. Dies bedeutet, dass man mit einer speziellen Ecke mit simplizialen Translaten des Sterns den vollständigen Coxeter-Komplex überdecken kann, sodass sich die Translate nur im Rand schneiden.

Wir übertragen diese Definition in natürlicher Weise auf Gebäude. Somit heißt eine Ecke *speziell*, wenn sie eine spezielle Ecke eines beliebigen Apartments ist, welches diese Ecke enthält.

Lemma 6.1.13. *Sei (X, d) ein affiner Coxeter-Komplex. Dann existieren stets spezielle Ecken.*

Beweis. Dies ist in Proposition 10.17 in „Buildings“ von Abramenko und Brown [AB08] enthalten. \square

Bemerkung 6.1.14. Nun stellt sich die Frage, welche Ecken in einem gegebenen Coxeter-Komplex speziell sind. Ein Kriterium, dass eine Ecke speziell ist, wird in „Reflection Groups and Coxeter Groups“ von James Humphreys [Hum90] in Kapitel 4.2 gegeben. Demnach handelt es sich um eine spezielle Ecke, wenn der sphärische Coxeter-Komplex an dieser Ecke den gleichen Typ hat wie der affine Coxeter-Komplex, welcher betrachtet wird. Dies entspricht im Coxeter-Dynkin-Diagramm dem Entfernen einer Ecke, sodass das entsprechende Coxeter-Dynkin-Diagramm von sphärischem Typ entsteht. Ist also beispielsweise X vom Typ \widetilde{A}_n , dann ist v eine spezielle Ecke, wenn X_v vom Typ A_n ist.

Bemerkung 6.1.15. Aus der Definition ergibt sich, dass wir für eine spezielle Ecke durch Translate mit dem Stern einer Ecke den ganzen Coxeter-Komplex überdecken können, sodass sich die Translate maximal in den Kodimension-1-Seiten schneiden. Insbesondere sind dadurch gegenüberliegende Seiten im Stern, also die äußeren $n - 1$ -Facetten von gegenüberliegenden Kammern, parallel.

Lemma 6.1.16. *Sei X ein sphärisches Gebäude. Bezeichne mit $|\Phi_+|$ die Anzahl positiver Wurzeln von X .*

Dann gilt

$$\text{diam}(X) = |\Phi_+|.$$

Beweis. Dieses Ergebnis findet man in „Reflection Groups and Coxeter Groups“ von James Humphreys [Hum90] auf Seite 16. \square

Lemma 6.1.17. *Die sphärischen Gebäude sind vollständig nach ihrem zugrunde liegenden Coxeter-Komplex klassifiziert und die Tabelle 6.1 gibt für jeden Typ die Anzahl positiver Wurzeln $|\Phi_+|$ an.*

Tabelle 6.1 Anzahl der positiven Wurzeln nach Typ des sphärischen Coxeter-Komplexes. Der Index des Typs gibt jeweils die Anzahl an Ecken im Coxeter-Dynkin-Diagramm an. Die Dimension des zugehörigen Gebäudes beträgt stets 1 weniger.

Typ	$ \Phi_+ $
A_n ($n \geq 1$)	$\frac{n(n+1)}{2}$
B_n ($n \geq 2$)	n^2
C_n ($n \geq 3$)	n^2
D_n ($n \geq 4$)	$n(n - 1)$
G_2	6
F_4	24
E_6	36
E_7	63
E_8	120

Beweis. Die Klassifikation findet man beispielsweise in [AB08] und die entsprechenden Wurzeln findet man unter anderem in „Combinatorics of Coxeter Groups“ von Björner und Brenti [BB05] auf Seite 125. \square

Bemerkung 6.1.18. Auch die affinen Gebäude sind durch ihre zugrunde liegenden Coxeter-Komplexe vollständig klassifiziert und heißen entsprechend ihrer sphärischen Gegenstücke $\widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n, \widetilde{C}_n, \dots$, sofern diese existieren. Dies findet man ebenfalls in „Buildings“ [AB08].

Das folgende Lemma ist das Pendant zu Lemma 1.0.8. Da wir nun bereits in der universellen Überlagerung sind, müssen wir geschlossene Wege entsprechend angepasst definieren und haben dafür die typgerechten Wege eingeführt.

Definition 6.1.19. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude und $v \in V(X)$ eine Ecke von X . Wir definieren die Menge $P_r(v)$ der Ecken gleichen Typs mit Abstand maximal r zu v , durch

$$P_r(v) = \{w \in V(X) \mid \text{Es existiert ein typgerechter Weg } \gamma \text{ von } v \text{ nach } w \text{ mit } L(\gamma, d) \leq r\}.$$

Lemma 6.1.20. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude und $v \in V(X)$ eine Ecke von X . Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\#P_r(v))}{r}.$$

Beweis. Der Beweis ist analog dazu, dass die Anzahl geschlossener Wege in endlichen Simplicialkomplexen asymptotisch gleich zum Volumen von Bällen wächst, also wie Lemma 1.0.8.

Sei $v \in X$ beliebig. Wir wählen erneut wie im Beweis von Lemma 1.0.8 $\varepsilon > 0$ klein genug und $r > 0$ groß genug und erhalten die Abschätzung

$$\text{vol}(B_\varepsilon(v))P_r(v) \leq \text{vol}(B_r(v)).$$

Dies gilt, da wir die Bälle so klein wählen können, dass nur Teile von $B_r(v)$ getroffen werden und die einzelnen Bälle sich nicht schneiden.

Für die Abschätzung in die andere Richtung müssen wir erneut einen Bereich nehmen, welcher groß genug ist. Damit es auch für die Übergängen gilt, fügen wir eine Konstante ein. Somit gilt für $C \geq 1$

$$\text{vol}(B_r(v)) \leq C \text{vol}_F(X)P_r(v).$$

Insgesamt folgt somit

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B_r(x)}{r} \\ &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (C \text{vol}_F(X) \#P_r(v))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (C \text{vol}_F(X)) + \log (\#P_r(v))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log (\#P_r(v))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol}(B_\varepsilon(v)) + \log (\#P_r(v))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol} (B_\varepsilon(v) \#P_r(v))}{r} \\ &\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \text{vol } B_r(x)}{r} \\ &= h_{vol}(X, d). \end{aligned}$$

Daher gilt wie behauptet

$$h_{vol}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\#P_r(v))}{r}.$$

□

6.2 Graphenprodukte als Gebäude

In diesem Abschnitt betrachten wir Gebäude vom Typ \widetilde{A}_1 und das kartesische Produkt von zwei solchen Gebäuden. Hierfür bestimmen wir die Volumenentropie mit den vorherigen Sätzen zu Graphenprodukten und vergleichen diese Ergebnisse mit den Ergebnissen in „Volume entropy of hyperbolic buildings“ von Ledrappier und Lim [LL10]. Hier wird eine untere Schranke der Volumenentropie von Gebäuden bestimmt, was wir im Spezialfall mit unserem Ergebnis vergleichen.

Lemma 6.2.1. *Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ ungerade und seien zwei Gebäude X_1, X_2 jeweils vom Typ \widetilde{A}_1 mit Verzweigungszahlen λ_1 und λ_2 gegeben. Sei $(X = X_1 \times X_2, d)$ das entsprechende Gebäude, sodass die Metrik auf fundamentales Volumen $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ normiert ist. Dann gilt für die Volumenentropie*

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}{2} \log(\lambda_1) \log(\lambda_2)}$$

und dieses Minimum wird für eine eindeutige Metrik angenommen.

Beweis. In diesem Beweis nutzen wir aus, dass die universelle Überlagerung eines k -Rosengraphen ein Gebäude vom Typ \widetilde{A}_1 ist mit Verzweigungszahl $2k - 1$. Daher kommt auch die Einschränkung an die Verzweigungszahlen, dass diese ungerade sind. Die fundamentale Kammer hat Volumen $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$, wenn alle Kantenlängen innerhalb eines Graphen gleich sind und das Produkt der Graphenvolumen über beide Graphen 1 ergibt.

Betrachte nun also 2 Rosengraphen G_1 und G_2 mit Kantenzahl k_i jeweils entsprechend zu λ_i aus dem Lemma und sei $X = G_1 \times G_2$. Dann gilt für die Volumenentropie eines Graphen mit entsprechender oben beschriebener Metrik d_i

$$h_{\text{vol}}(G_i, d_i) = \frac{k_i \log(2k_i - 1)}{\text{vol}(G_i, d_i)}.$$

Dieses Ergebnis folgt aus Satz 2.2.3 zusammen mit Lemma 1.0.7.

Nach Satz 5.5.2 wird die gesamte Volumenentropie minimal, wenn sie pro Graph minimal wird und für das Volumen gilt, dass

$$\text{vol}(G_1) = \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1)}{h_{\min}(G_2)}} \quad \text{und} \quad \text{vol}(G_2) = \sqrt{\frac{h_{\min}(G_2)}{h_{\min}(G_1)}}.$$

Somit wird in diesem Fall die Volumenentropie eindeutig minimal und es ergibt sich daher für eine allgemeine Metrik

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \sqrt{2h_{\min}(G_1)h_{\min}(G_2)} \\ &= \sqrt{2k_1 k_2 \log(2k_1 - 1) \log(2k_2 - 1)}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Verzweigungszahl liefert dann die Behauptung.

Das Minimum wird nach eben gemachter Konstruktion ebenfalls angenommen. \square

Lemma 6.2.2. Für das minimierende Gebäude (X, d) aus Lemma 6.2.1 gilt für die Schranke aus dem Artikel „Volume entropy of hyperbolic buildings“ von Ledrappier und Lim [LL10]

$$h_{vol}(X, d) \geq \left(\sqrt{\frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1}} + \sqrt{\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1}} \right) \sqrt{\log(\lambda_1) \log(\lambda_2)}.$$

Beweis. Wir verwenden Korollar 1.3 aus „Volume entropy of hyperbolic buildings“ von Ledrappier und Lim [LL10]. Dazu betrachten wir zwei Sternengraphen G_i mit $\lambda_i + 1$ Kanten mit Länge in G_1 von

$$L(e) = \sqrt{\frac{h_{\min}(G_1)}{h_{\min}(G_2)}} \frac{1}{\lambda_1 + 1}$$

und für G_2 entsprechend mit Länge

$$L(e) = \sqrt{\frac{h_{\min}(G_2)}{h_{\min}(G_2)}} \frac{1}{\lambda_2 + 1}.$$

Somit hat der Fundamentalbereich Volumen 1, was der Betrachtung des gleichen Gebäudes wie im vorherigen Lemma entspricht. Es gibt dann zwei Arten von Kanten, welche für das Lemma berücksichtigt werden müssen. Damit gilt erneut mit k_i wie im vorherigen Satz

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq k_1 \log(\lambda_1) \sqrt{\frac{\log(\lambda_2)}{k_1 k_2 \log(\lambda_1)}} + k_2 \log(\lambda_2) \sqrt{\frac{\log(\lambda_1)}{k_1 k_2 \log(\lambda_2)}} \\ &= \left(\sqrt{\frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1}} + \sqrt{\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1}} \right) \sqrt{\log(\lambda_1) \log(\lambda_2)}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 6.2.3. Nun kann man die beiden Ergebnisse aus Lemma 6.2.1 und Lemma 6.2.2 miteinander vergleichen. Beide Terme haben den gemeinsamen Faktor $\sqrt{\log(\lambda_1) \log(\lambda_2)}$. Die Vorfaktoren sind im Fall von Lemma 6.2.1 $\sqrt{\frac{(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)}{2}}$ und im Fall von Lemma 6.2.2 $\sqrt{\frac{\lambda_1+1}{\lambda_2+1}} + \sqrt{\frac{\lambda_2+1}{\lambda_1+1}}$. Man sieht leicht ein, dass für $\lambda_1, \lambda_2 \geq 2$ die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)}{2}} > \sqrt{\frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_2 + 1}} + \sqrt{\frac{\lambda_2 + 1}{\lambda_1 + 1}}$$

gilt. Somit ist die angegebene Schranke aus [LL10] nicht scharf für diese Klasse von Gebäuden. Im Fall von $\lambda_1 = \lambda_2$ beträgt der Faktor, um welchen die Schranke zu klein ist, minimal $\sqrt{2}$ und im allgemeinen Fall ist dieser Faktor noch größer.

6.3 Untere Schranke der Volumenentropie von irreduziblen Gebäuden verschiedener Typen

Nachdem wir in Abschnitt 6.2 für ausgewählte Gebäude die Volumenentropie explizit berechnet haben, wollen wir hier allgemeine euklidische Gebäude betrachten.

Wie bereits erwähnt, gibt es für Gebäude eine natürliche Metrik und daher werden wir, im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln, die Volumenentropie für diese Metriken explizit abschätzen.

In diesem Abschnitt geben wir eine kombinatorische untere Schranke für die Volumenentropie an. Im Spezialfall von \widetilde{A}_2 zeigen wir außerdem, dass diese Schranke auch scharf ist.

Im Anschluss geben wir die Ergebnisse bezüglich einer angepassten Basis des Logarithmus und ohne Normierung an, was die Formeln wesentlich vereinfacht. Als Basis des Logarithmus wählen wir hier die Verzweigungszahlen. Statt der Normierung des Fundamentalbereichs betrachten wir die Coxeter-Komplexe wie in [CKW20] und daher die Gebäude entsprechend, sodass jedes Apartment isometrisch zu diesen Komplexen ist.

Im folgenden Satz wollen wir die Geometrie spezieller Ecken in einem affinen Coxeter-Komplex ausnutzen, um eine untere Schranke der Volumenentropie zu bestimmen. Die Idee ist hierbei, dass wir einen ausgewählten Weg im Coxeter-Komplex gehen und zählen, wie viele analoge Wege es im Gebäude gibt.

Somit bekommen wir nach Lemma 6.1.20 eine untere Schranke für die Volumenentropie. Wir betrachten hierbei spezielle Ecken, da in diesem Fall der betrachtete Weg ein geodätischer Weg ist und somit der Verlauf und die Anzahl an Spiegelungen gut bestimmt werden können. Der genaue Weg wird im Beweis des nächsten Satzes beschrieben und ist in Abbildung 6.3 dargestellt.

Um diese Schranke zu betrachten, benötigen wir den 3-Grad $\deg_3(v)$, welcher die Anzahl an unbeschrifteten Kanten bezeichnet, die an einer Ecke v im Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X liegen. Darüber hinaus benötigen wir das sphärische Gebäude X_v , welches zum Coxeter-Dynkin-Diagramm $G_X - v$ gehört, sowie die Höhe h_v bezüglich v in der fundamentalen Kammer.

Satz 6.3.1 (Satz J). *Sei (X, d) ein irreduzibles, n -dimensionales, affines Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X und Verzweigungszahl λ . Sei weiter $\text{vol}_F(X, d) = 1$ und außerdem $v \in V(G_X)$, sodass die zugehörige Ecke eine spezielle Ecke ist. Wir bezeichnen mit $c(X_v)$ die irreduziblen Komponenten des sphärischen Gebäudes X_v .*

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $v \in V(G_X)$ und Δ eine fundamentale Kammer von X . Wir bezeichnen die eindeutige $n - 1$ -dimensionale Facette der Kammer, welche zur Ecke v gehört mit E_v und die Ecke, welche nicht in E_v liegt, mit V_v . Sei nun $w \in V(G_X)$ so, dass V_w eine spezielle Ecke in X ist.

Wir betrachten nun einen Weg in einem Apartment, also in einem Coxeter-Komplex. Anschließend zählen wir die Anzahl an analogen Wegen. Der konkrete Weg wird im Folgenden für ein Apartment, welches die fundamentale Kammer enthält, beschrieben. Somit befinden wir uns in einem Coxeter-Komplex und betrachten zunächst nur diesen. Wir betrachten den Weg γ , welcher in V_v beginnt und orthogonal durch E_v verläuft bis zum Bild der Ecke V_v unter der Spiegelung an der Facette E_v . Zur betrachteten fundamentalen Kammer gibt es eine eindeutige Kammer, welche an E_v gespiegelt ist. Hier gibt es eine Spiegelung von V_v , welche wir mit V_w bezeichnen. Bezüglich V_w gibt es eine gegenüberliegende Kammer zu unserer betrachteten gespiegelten Kammer. Dies ist über den Galerienweg, welcher dem maximalen Wort in X_v entspricht, zu erreichen. Wir bezeichnen eine beliebige Verkettung von Spiegelungen, welche dem maximalen Wort entsprechen, mit W . In dieser neuen Kammer verläuft der Weg erneut orthogonal zur Facette, welche nicht die Ecke vom gleichen Typ wie V_v enthält. Hierdurch kommen wir erneut zu einer gespiegelten Kopie von V_v , wodurch wir den Weg iterativ weiter gehen können. Da es sich um eine spezielle Ecke handelt, ist dieser Weg nach Bemerkung 6.1.15 ein geodätischer Weg. Dies gilt, da der Weg vom Stern einer Ecke V_v in den gespiegelten Stern geht, also den Stern einer gespiegelten Kopie von V_v . Diese sind nach der genannten Bemerkung Translate. In diesem Fall sind im Stern gegenüberliegende Kanten parallel. Somit verläuft der Weg geodätisch durch einen Stern durch und der Weg führt weiter vom Ursprung weg.

Beispielhaft für \widetilde{G}_2 ist dies in Abbildung 6.3 zu sehen. Hier ist solch ein Weg in Blau sowie die Ecke V_v in Rot und die Kante E_v in Blau eingezeichnet.

Wir betrachten nun die Anzahl an Reflexionen entlang dieses Weges. Für jede dieser Reflexionen spaltet sich das Gebäude entsprechend der Verzweigungszahl auf und es gibt somit mehrere Möglichkeiten im Gebäude, einen solchen Weg zu gehen und daher entsprechend viele analoge Wege. Dies ergibt dann eine untere Schranke der Anzahl an Wegen und somit auch eine untere Schranke der Volumenentropie nach Lemma 6.1.20 an. Um von V_v zu V_w zu kommen, haben wir genau eine Reflexion an der Facette E_v , wobei wir die Spiegelung ebenfalls mit E_v bezeichnen.

Die nächste Verzweigung befindet sich dann in der an E_v gespiegelten Ecke V_v , welche wir bereits mit V_w bezeichnet haben. Die Anzahl an Reflexionen, um in die gegenüberliegende Kammer zu kommen, durch V_w beträgt $\text{diam}(X_v)$. Somit ist es die Anzahl an simplizialen Reflexionen, die benötigt werden, um eine Kammer auf die gegenüberliegende Kammer in X_v abzubilden. Die zugehörigen Spiegelungen bezeichnen wir mit W . Da es sich bei X_v um ein sphärisches Gebäude handelt, ist die Anzahl der Reflexionen endlich. Bezeichne wie im Satz mit $c(X_v)$ die irreduziblen Komponenten von X_v . Diese entsprechen genau den Gebäuden zugehörig zu den Zusammenhangskomponenten in G_{X_v} . Da diese Gebäude irreduzible Komponenten des reduziblen Gebäudes X_v sind, ist der Durchmesser für die

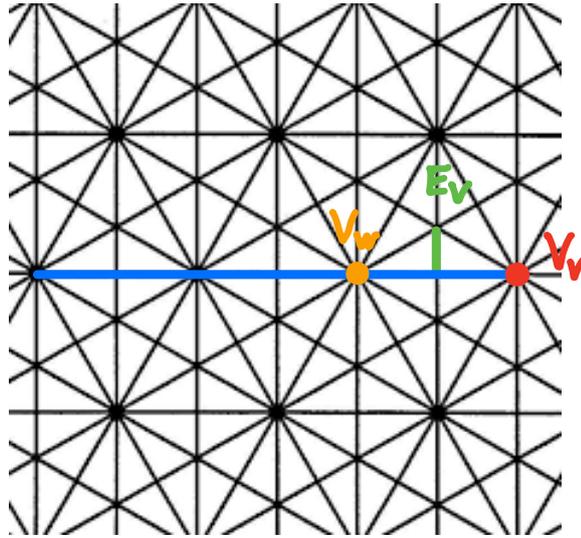


Abbildung 6.3 Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \tilde{G}_2 .

einzelnen Zusammenhangskomponenten additiv. Somit erhalten wir für $\text{diam}(X_v)$ mit obiger Notation der irreduziblen Komponenten den Zusammenhang

$$\text{diam}(X_v) = \sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B).$$

Dies entspricht der Anzahl an Reflexionen, welche maximal nötig sind für den Weg in die gegenüberliegende Kammer. Somit sind wir insgesamt bei den Spiegelungen $E_v \circ W$, wobei \circ die nacheinander Ausführung der Spiegelungen von links nach rechts bezeichnet. Hierbei wurde allerdings noch nicht berücksichtigt, dass sich der Weg in einer Spiegelebene befinden kann, so wie es auch in Abbildung 6.3 der Fall ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn diese Spiegelebene orthogonal zu E_v steht, da der Weg orthogonal zu E_v verläuft. Im Coxeter-Dynkin-Diagramm entspricht dieser Fall nach Definition genau der Anzahl an Ecken, welche nicht mit v durch eine unbeschriftete Kante verbunden sind. Weitere mit ungeraden Kanten verbundene Ecken würden hier ebenfalls abgezogen. Allerdings gibt es in euklidischen Gebäuden keine weiteren Kanten mit ungerader Beschriftung. Somit bleiben nur die unbeschrifteten Kanten an der Ecke v übrig, welche man zählen muss. In diesem Fall stehen die maximalen Facetten der Kammer orthogonal auf E_v und enthalten V_v . Somit liegt der Weg von V_v orthogonal zu E_v in diesen Facetten. Für jeden dieser Fälle muss zum Erreichen der gegenüberliegenden Kammer eine Reflexion weniger vorgenommen werden, da wir bereits in der Facette starten. Es gilt $\#V(G_X) = n + 1$ und jede über eine unbeschriftete Kante verbundene Ecke sowie die Ecke selbst müssen abgezogen werden, um auf die Anzahl dieser Fälle zu kommen. Daher gibt es

$n + 1 - \deg_3(v) - 1 = n - \deg_3(v)$ solcher Fälle.

Somit folgt für die Anzahl an Reflexionen entlang des Wegs, dass es

$$\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) - (n - \deg_3(v)) = \left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) - n + \deg_3(v)$$

sind, um in eine Kammer zu gelangen, in welcher der Weg weiter führt.

Wenn wir die zugehörigen Spiegelungen betrachten wollen, brauchen wir alle Spiegelungen an maximalen Facetten der fundamentalen Kammer, in welchen unser Weg bereits verläuft, also die orthogonalen zu E_v , da diese, wie gerade beschrieben, nicht nochmals berücksichtigt werden müssen. Wir benennen diese Spiegelungen mit S_\perp . Beachte, dass S_\perp aus mehreren simplizialen Spiegelungen bestehen kann, nämlich aus genau $n - \deg_3(v)$. Die Spiegelungen für den Weg durch die Ecke werden dann beschrieben durch $S_\perp \circ W$. Dies ist kein reduziertes Wort, sondern S_\perp verkürzt das Wort W für jede Spiegelung nach der Definition eines maximalen Wortes W .

Nun haben wir die Anzahl an Spiegelungen pro Wegabschnitt bestimmt. An jeder Reflexion gibt es analoge Wege entsprechend der Verzweigungszahl λ . Dies führt dazu, dass wir eine untere Schranke für die Anzahl an Wegen und somit auch für die Volumenentropie erhalten. Die Anzahl an analogen Wegen ist gegeben durch

$$\lambda \cdot \lambda^{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) - n + \deg_3(v)}.$$

Die Länge eines solchen Wegs von Ecke zu gespiegelter Ecke entspricht genau zweimal der Höhe h_v der fundamentalen Kammer bezüglich der Facette E_v . Insgesamt gilt somit nach Lemma 6.1.20 zusammen mit Lemma 1.0.7 die untere Schranke der Volumenentropie

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v}.$$

□

Im nachfolgenden Satz wollen wir das Ergebnis aus Satz 6.3.1 auch auf nicht spezielle Ecken übertragen. Die Beweisidee mit der Abschätzung der Anzahl der analogen Wege bleibt hierbei die gleiche. Nun handelt es sich aber um nicht spezielle Ecken. Von daher können wir nicht wie im vorherigen Fall einfach einen geodätischen Weg durch die Translate betrachten.

Daher betrachten wir erneut einen Weg, welcher stets eine Ecke mit einem geodätischen Weg mit der an der übrigen Facette der Kammer gespiegelten verbindet. Auf diese Art erhalten wir einen Weg, allerdings kann dieser Weg nicht immer geodätisch sein, wie man auch in Abbildung 6.4 sieht. Dadurch wird die Anzahl an Reflexionen, um in die Kammer zu gelangen, mit welcher es weiter geht, reduziert, weshalb die untere Schranke der Volumenentropie kleiner wird.

Nun müssen wir garantieren, dass dieser Weg nicht zurück führt, obwohl er abknickt. Der Weg soll somit den Abstand zum Ursprung immer vergrößern. Dies gelingt, indem

wir den Weg entlang von Translaten von Sternen einer speziellen Ecke führen. Diese Translate können wir, wie im vorherigen Beweis, so wählen, dass sie stets weiter vom Ursprung weg verlaufen. Dies ist exemplarisch in Abbildung 6.5 dargestellt. Da sich die Translate nicht zum Ursprung zurück bewegen, gilt dies auch für den so betrachteten Weg.

Daher muss im Vergleich zu vorher nur berücksichtigt werden, dass der Weg nur noch stückweise geodätisch ist. Beim Durchqueren der Ecke wird nicht mehr die gegenüberliegende Kammer durchlaufen, sondern eine mit geringerem Abstand bezüglich des Galerienabstands, weshalb weniger Reflexionen nötig sind. Durch Berücksichtigen dieses Korrekturterms erhalten wir dann erneut eine untere Schranke der Volumenentropie.

Satz 6.3.2 (Satz K). *Sei (X, d) ein irreduzibles, n -dimensionales, affines Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X und Verzweigungszahl λ . Sei weiter $\text{vol}_F(X, d) = 1$ und außerdem $v \in V(G_X)$ beliebig. Wir bezeichnen wie im vorherigen Satz mit $c(X_v)$ die irreduziblen Komponenten des sphärischen Gebäudes X_v .*

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren V_v, V_w und E_v wie im Beweis des vorherigen Satzes. Ist V_v eine spezielle Ecke, so liefert Satz 6.3.1 bereits das Ergebnis, da die dort gefundene Schranke größer ist als die in diesem Satz. Es gilt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v} \\ &\geq \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v}, \end{aligned}$$

da $n > \deg_3(v)$ stets erfüllt ist.

Wir betrachten somit im Folgenden ein $v \in V(G_X)$, sodass V_v nicht speziell ist. Wir betrachten erneut einen Weg im Coxeter-Komplex, welcher stets zwei Ecken des gleichen Typs verbindet. Hierbei muss im Allgemeinen der Weg von einem geodätischen Weg abweichen. Der Weg soll dennoch in gewisser Weise nah an einem geodätischen Weg sein, was im Folgenden beschrieben ist. Ein solcher Weg im Beispiel einer nicht speziellen Ecke von \widetilde{G}_2 ist in Abbildung 6.4 dargestellt.

Für eine nicht spezielle Ecke V_v sind gegenüberliegende Kanten im Stern nicht parallel, da es sich sonst um eine spezielle Ecke handeln würde. Der Weg kann somit nicht geodätisch sein, sondern nur stückweise geodätisch. Wir betrachten daher den Weg in einem Apartment, also im Coxeter-Komplex, welcher an der Außenseite eines Sterns zu einer speziellen Ecke entlang führt. Genauer verbindet der Weg stets zwei Ecken vom gleichen Typ, welche im Stern einer speziellen Ecke liegen, beziehungsweise zwei Ecken

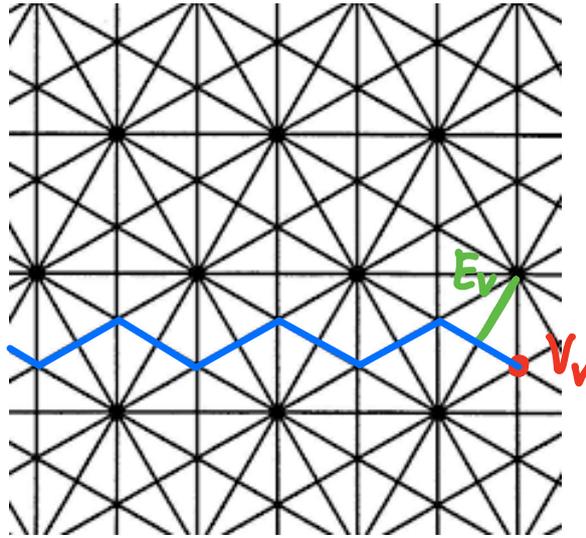


Abbildung 6.4 Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \tilde{G}_2 .

von aufeinanderfolgenden Sternen der Translate einer speziellen Ecke. Die Translate der Sterne der speziellen Ecke schneiden sich hierbei genau in Kodimension-1-Facetten. Diese gibt es, da nach Lemma 6.1.13 stets spezielle Ecken existieren und die Translate der Sterne den Komplex vollständig überdecken.

In der Abbildung 6.5 ist erneut exemplarisch für die Ecke V_v die Spiegelebene E_v eingezeichnet sowie in Blau ein möglicher Weg skizziert. In Orange gepunktet sind jeweils die Sterne der speziellen Ecken sowie deren Translate eingezeichnet, wobei die Translation durch den orangenen Pfeil angedeutet wird.

Der betrachtete Weg beschreibt erneut den Übergang von Stern zu Stern des gleichen Typs von Ecken. Da für den Austritt aus dem einen Stern erneut der Weg in Spiegelebenen liegen kann, sodass die Anzahl an Reflexionen reduziert wird, muss die Anzahl an Reflexionen weiter angepasst werden. Hierbei handelt es sich um den gleichen Korrekturterm wie im Beweis zu Satz 6.3.1, welcher erneut berücksichtigt werden muss. Dies entspricht dem, dass der Weg durch die neue Richtung in der Ecke in den Kodimension-1-Facetten verläuft und daher diese Reflexionen nicht berücksichtigt werden für den Galerienweg. Die Anzahl an Reflexionen ändert sich somit zu

$$\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) - 2n + 2 \deg_3(v).$$

Auch hier können wir erneut konkret die simplizialen Spiegelungen betrachten, welche den Galerienweg beschreiben. Hierfür brauchen wir wieder die Spiegelungen S_\perp wie im vorherigen Beweis, allerdings müssen sie dieses Mal an das Ende des Wortes hinzugefügt

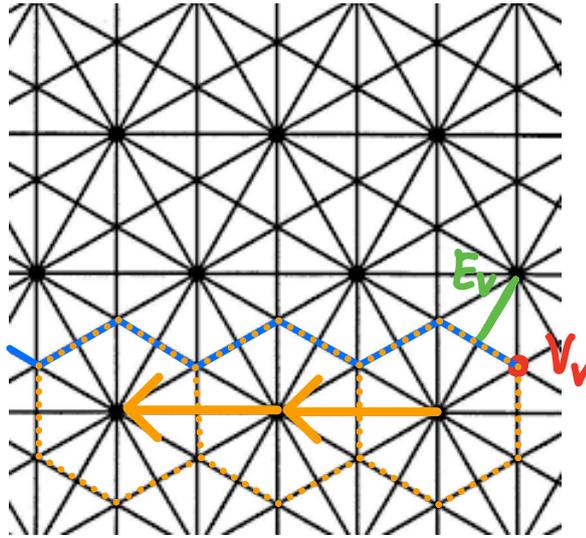


Abbildung 6.5 Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \tilde{G}_2 . Die jeweiligen Sterne zu der speziellen Ecke und deren Translaten sind in Orange eingezeichnet.

werden. Der Weg durch die Ecke ist somit beschrieben mit der gleichen Notation wie im vorherigen Beweis durch $S_\perp \circ W \circ S_\perp$, wobei hier erneut S_\perp das Wort maximal um die Anzahl von Spiegelungen in S_\perp verringert.

Die Gesamtheit der Spiegelungen für einen Abschnitt des Weges ist somit gegeben durch $E_v \circ S_\perp \circ W \circ S_\perp$.

Damit ist die Anzahl an Reflexionen entlang des Weges bestimmt. Bezeichne mit $|\cdot|$ die Anzahl an Spiegelungen. Damit werden

$$|E_v \circ S_\perp \circ W \circ S_\perp| \geq |E_v| + |W| - 2|S_\perp|$$

Spiegelungen benötigt. Da in X die Verzweigungszahl stets λ beträgt, gilt für die Anzahl analoger Wege, nachdem der Weg einmal durch die Ecke von V_w gekommen ist, dass es

$$\lambda^{1 + \left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) - 2n + 2 \deg_3(v)}$$

gibt. Hierbei wurde genutzt, dass $|E_v| = 1$, $|W| = \text{diam}(X_v) = \sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)$ und $|S_\perp| = n - \deg_3(v)$ gilt.

Die Länge des Weges beträgt von Ecke bis Ecke, wie auch im vorherigen Beweis, $2 \cdot h_v$, wobei h_v die Höhe der fundamentalen Kammer bezüglich E_v ist, also genau der Abstand von V_v und E_v . Dies gilt, da der Weg orthogonal durch E_v und durch V_v und V_w geht und somit genau die Höhe zweimal durchläuft.

Nach Lemma 6.1.20 gibt der exponentielle Anteil dieses Wachstums eine untere Schranke für das Volumenwachstum an. Somit gilt

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq \frac{\log \left(\left(\lambda \cdot \lambda \left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right)^{-2n+2 \deg_3(v)} \right)^{\frac{r}{2h_v}} \right)}{r} \\ &= \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

Da das Ergebnis für spezielle und nicht spezielle Ecken gilt, gilt es für jede Ecke im Gebäude und die Behauptung ist gezeigt. \square

Bemerkung 6.3.3. Im Ergebnis der beiden vorangegangenen Sätze werden die irreduziblen Komponenten $c(X_v)$ von X_v betrachtet. Diese entsprechen den Zusammenhangkomponenten im Coxeter-Dynkin-Diagramm zum sphärischen Gebäude X_v .

In Satz 6.3.2 wurden Wege betrachtet, welche nur stückweise Geodätische sind, aber nicht Geodätische. Statt eines solchen Wegs kann man auch den stückweise geodätischen Weg betrachten, welcher jeweils die ersten Ecken aus den Sternen der speziellen Ecken miteinander verbindet. Dies ist nach der Definition des Weges sogar ein geodätischer Weg, da es sich bei den Sternen der speziellen Ecken um Translate handelt. Man sieht dies, da sich der Weg entlang von parallelen Verschiebungen bewegt. Somit gibt es einen geodätischen Weg, welcher jeweils den ersten Eckpunkt aus den parallelen Translate des Sterns einer speziellen Ecke verbindet. Somit schneidet dieser neue Weg den Weg aus Beweis 6.3.2 in regelmäßigen Abständen. Daher wächst die Anzahl analoger Wege für diesen und den ursprünglichen Weg gleich schnell, der neue Weg ist allerdings kürzer und somit wird die untere Schranke verbessert. Erneut exemplarisch im Fall von \tilde{G}_2 ist dieser neue Weg in Abbildung 6.6 in Orange gestrichelt dargestellt gegenüber dem vorherigen Weg in Blau.

Da dieser Weg kürzer ist, aber die gleiche Verzweigung berücksichtigt, wird hierdurch die untere Schranke der Volumenentropie größer und somit verbessert.

Korollar 6.3.4. Sei (X, d) ein irreduzibles, n -dimensionales, euklidisches Gebäude mit Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X und Verzweigungszahl λ . Sei weiter $\text{vol}_F(X, d) = 1$ und außerdem $v \in V(G_X)$ beliebig. Bezeichne außerdem mit α den Winkel zwischen den geodätischen Segmenten von γ aus Satz 6.3.2.

Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B) \right) + 1 - 2n + 2 \deg(v)}{2h_v \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Beweis. Wie vor dem Korollar beschrieben, ist die Idee, dass man den Teil zwischen zwei Sternen spezieller Ecken durch ein geodätisches Segment ersetzt und dadurch zunächst eine stückweise geodätische Verbindung entsteht. Diese ist, wie auch bereits erwähnt, eine

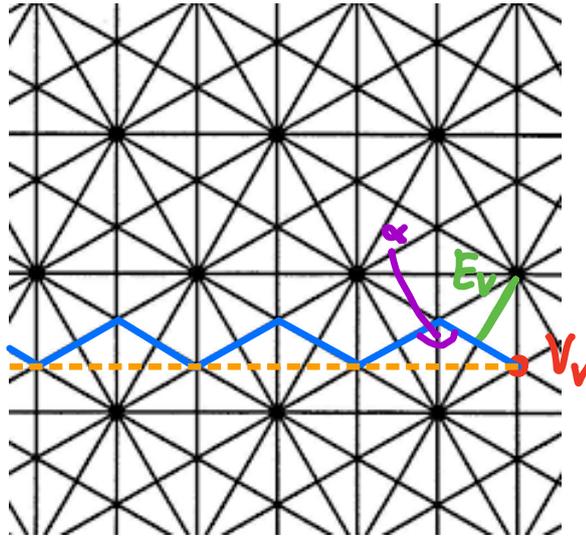


Abbildung 6.6 Geodätischer Weg in Orange zum betrachteten Weg aus dem Beweis zu Satz 6.3.2 in Blau mit Winkel α in \tilde{G}_2 .

Geodätische, da die Sterne parallel verschoben sind. Die Anzahl analoger Wege stimmt mit der des ursprünglichen Wegs überein, allerdings verkürzt sich der Weg, welcher hierfür zurückgelegt werden muss.

Beachte, dass alle Segmente gleich lang sind und die Winkel aufgrund der Symmetrie des Coxeter-Komplexes zwischen den Segmenten stets gleich sind.

Betrachten wir nun den Weg induktiv, das heißt, wir haben bereits einen Weg gegeben und fügen ein weiteres Segment hinzu. Hierbei wird der Abstand des neuen Endpunkts zum Startpunkt maximal, wenn der Winkel zwischen direkter Verbindung des Anfangs- und des alten Endpunkts minimalen Winkel zu dem neuen Segment aufweist. Somit haben wir eine minimale Verkürzung in dem Fall, wenn der Winkel immer zwischen gegenüberliegenden Richtungen wechselt, also der Weg in Stufenform vorliegt.

In diesem Fall verkürzen sich 2 Segmente stets zu der dritten Seite eines gleichschenkligen Dreiecks mit Länge der Schenkel von $2 \cdot h_v$ und Winkel α zwischen den Schenkeln. Hierbei beträgt die Länge der übrigen Seite $2h_v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Dies entspricht der Länge des neuen Weges. Somit ist der neue Weg im schlechtesten Fall um den Faktor

$$\frac{2h_v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2h_v} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

kürzer. Aus Lemma 1.0.7 folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 6.3.5. Der Winkel aus dem vorherigen Korollar lässt sich explizit berechnen. Dies folgt, da die Winkel der Spiegelebenen alle durch das Coxeter-Dynkin-Diagramm gegeben sind. Durch das Verketteten mehrerer Spiegelungen wird der Winkel zwischen

einem Segment und dem nächsten stets größer als die ursprünglichen Winkel, da alle Winkel mindestens $\frac{\pi}{2}$ betragen. Nach oben beschränkt bleibt der Winkel durch die Gerade, also den Winkel π . Da der Winkel zwischen den Spiegelebenen, welche berücksichtigt werden, höchstens $\frac{\pi}{3}$ beträgt, beträgt der Winkel α mindestens $\frac{2\pi}{3}$. Daher liegt α zwischen $\frac{2\pi}{3}$ und π . Daraus ergibt sich für den Faktor aus dem vorherigen Korollar

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Insgesamt verbessert sich somit das Ergebnis im besten Fall zu

$$h_{vol}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - 2n + 2 \deg_3(v)}{\sqrt{3}h_v}.$$

Im Folgenden werden nun die unteren Schranken für die verschiedenen Typen von affinen, irreduziblen Gebäuden explizit bestimmt. Zunächst werden hierbei die Klassen von euklidischen Gebäuden behandelt, also $\widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n, \widetilde{C}_n$ und \widetilde{D}_n , und im Anschluss die Sonderfälle $\widetilde{G}_2, \widetilde{F}_4$ und \widetilde{E}_n für $n = 6, 7, 8$. Wir nutzen jeweils aus, bei welchen Ecken wir wissen, dass sie nach Bemerkung 6.1.14 speziell sind und somit Satz 6.3.1 statt Satz 6.3.2 genutzt werden kann. Für alle übrigen Ecken nutzen wir Satz 6.3.2.

Die nötigen Werte, welche in den Schranken vorkommen, werden Lemma 6.1.17 und Artikel [CKW20] entnommen.

Außerdem zeigen wir für A_2 , dass die angegebene Schranke auch scharf ist.

Korollar 6.3.6. *Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude mit Verzweigungszahl λ des Typs \widetilde{A}_n mit $\text{vol}_F(X) = 1$.*

Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{n^2 - n + 6}{2\sqrt{2} \sqrt[n]{n!} \sqrt{n+1}}.$$

Beweis. Sei X ein Gebäude vom Typ \widetilde{A}_n mit Metrik d , sodass das fundamentale Volumen auf 1 normiert ist. Aufgrund der Symmetrie ist es für die untere Schranke egal, welche Ecke im Coxeter-Dynkin-Diagramm genutzt wird. X_v ist dann ein sphärisches Gebäude von Typ A_n und somit handelt es sich bei der betrachteten Ecke nach Bemerkung 6.1.14 um eine spezielle Ecke. Die entsprechenden Coxeter-Dynkin-Diagramme sind in Abbildung 6.7 und 6.8 dargestellt.

Wir können somit Satz 6.3.1 anwenden und erhalten daher

$$\begin{aligned} h_{vol}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\left(\sum_{B \in c(X_v)} \text{diam}(B)\right) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v}. \end{aligned}$$

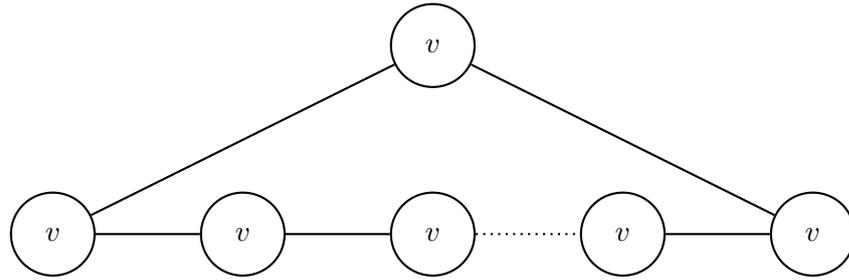


Abbildung 6.7 Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{A}_n mit $n + 1$ Ecken.



Abbildung 6.8 Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X_v vom Typ A_n mit n Ecken.

Der 3-Grad an jeder Ecke ist gleich und beträgt $\deg_3(v) = 2$. Nach Lemma 6.1.16 entspricht $\text{diam}(X_v)$ der Anzahl positiver Wurzeln von X_v . Hierbei handelt es sich um ein sphärisches Gebäude vom Typ A_n und mit Lemma 6.1.17 folgt somit

$$\text{diam}(X_v) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somit bleibt nur h_v zu bestimmen. Dies ist in „Coxeter Triangulations Have Good Quality“ [CKW20] bereits geschehen. Durch die Normierung des Fundamentalbereichs auf 1 erhalten wir

$$h_v = \frac{\sqrt[n]{n! \sqrt{n+1}}}{\sqrt{2}}.$$

Somit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &\geq \log(\lambda) \frac{\text{diam}(X_v) + 1 - n + \deg_3(v)}{2h_v} \\ &= \log(\lambda) \frac{\frac{n(n+1)}{2} + 1 - n + 2}{\sqrt{2} \sqrt[n]{n! \sqrt{n+1}}} \\ &= \log(\lambda) \frac{n^2 - n + 6}{2\sqrt{2} \sqrt[n]{n! \sqrt{n+1}}}. \end{aligned}$$

□

Satz 6.3.7. *Die Schranke aus Korollar 6.3.6 ist für den Fall $n = 2$ scharf. Das heißt, gegeben sei ein euklidisches Gebäude X vom Typ \widetilde{A}_2 mit $\text{vol}_F(X) = 1$ und Verzweigungszahl λ .*

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \log(\lambda) \frac{2}{\sqrt[4]{3}}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt über die Betrachtung eines Balles bezüglich der Wortmetrik. Die Idee hierbei ist, dass es zu einem Weg entsprechend der Wortlänge analoge Wege gibt. Somit findet auf einem euklidischen Weg die Verzweigung am schnellsten statt, wenn dieser Wortball auf möglichst kurze euklidische Distanz verlassen wird. Im Beweis werden wir sehen, dass dies genau der gewählte Weg aus Korollar 6.3.6 ist. Somit finden wir eine untere Schranke und da dies der Weg des schnellsten Wachstums ist, können wir als obere Schranke dieses Wachstum in alle Richtungen voraussetzen. Da dies gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, ist somit die gefundene Schranke scharf.

Sei Σ der zugehörige Coxeter-Komplex zum Gebäude X vom Typ \widetilde{A}_2 . Betrachte eine beliebige Ecke $v \in V(\Sigma)$ und definiere die Menge

$$U = \bigcup \Delta,$$

wobei die Vereinigung über alle Kammern Δ in Σ geht, sodass $v \in \Delta$ gilt. Sei d_S die Wortmetrik bezüglich der Spiegelungen an den Wänden einer fundamentalen Kammer. Definiere weiter

$$U_k = \{\Delta \in \Sigma \mid d_S(\Delta, U) \leq 2 \cdot k\}.$$

Somit beschreibt U_k den Wortball von Radius $2k$ um U .

Im Folgenden geht es darum, die Geometrie von U_k zu beschreiben, insbesondere darum, dass die Form für alle k der Form von U entspricht.

Beachte, dass U aus euklidischer Sicht ein Sechseck ist, wie in Abbildung 6.9 dargestellt. Wir wollen nun mittels vollständiger Induktion einsehen, dass U_k die gleiche Form wie U hat, also dass sich die Form alle 2 Schritte wiederholt. Als Skizze dient hierbei Abbildung 6.10.

Der Induktionsanfang ist klar, wie in Abbildung 6.9 gesehen. Somit bleibt es für die vollständige Induktion zu zeigen, dass im Schritt von U_k auf U_{k+1} die sechseckige Form erhalten bleibt. Wir betrachten hierfür lediglich den Rand von U_k , da für alle inneren Simplex keine Veränderung eintritt, da keine weiteren benachbarten Simplex hinzukommen.

In einem Sektor, wie in Abbildung 6.11 zu sehen, gibt es bei U_k zwei Arten von äußeren 1-dimensionalen Kanten, an welchen U_k weiter wächst. Zum einen solche, welche im Sektor am Rand liegen und zum anderen, welche im Sektor in der Mitte liegen.

Betrachte zunächst den Fall einer Kante, welche im Sektor in der Mitte liegt. Im Abstand eins kommt nur eine neue Kammer hinzu und im Abstand zwei nochmals zwei weitere. Zwei der neuen Kanten bilden eine Gerade parallel zur ursprünglichen Kante. Da von benachbarten Kanten der ursprünglichen Kanten der Vorgang analog verläuft, bildet sich somit eine parallele Kante zu der von U_k . Auch dies ist in Abbildung 6.11 zu sehen.

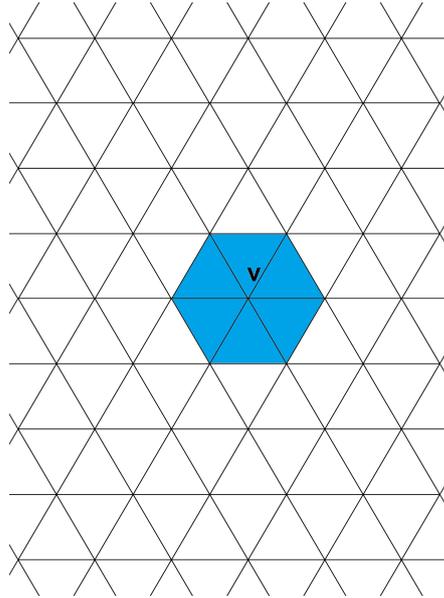


Abbildung 6.9 v in Schwarz und U in Blau

Es bleibt zu zeigen, dass sich dies auch im Rand des Sektors analog verhält. Hier sieht man allerdings, dass durch die Kegelform des Zuwachses alles abgedeckt wird und somit U_k aus euklidischer Sicht stets ein Sechseck bildet.

Das Gebäude verzweigt sich bei jeder Spiegelung um λ , wodurch die Anzahl an analogen Wegen im Gebäude X ungefähr $\lambda^{|S|}$ entspricht, wobei $|S|$ der Wortlänge dieses Wegs entspricht. Von daher wächst ein euklidischer Weg asymptotisch am schnellsten, wenn er U_k für alle k auf kürzester euklidischer Distanz verlässt. Da wir gerade gezeigt haben, dass U_k stets ein Sechseck ist, ist dies mit einem Weg orthogonal zu einer Seite des Sechsecks erfüllt. Der Weg aus 6.3.6 entspricht genau solch einem Weg. Von daher wächst das Volumen in die dort betrachtete Richtung am schnellsten..

Nehme nun für eine obere Schranke an, dass das Volumen in jede Richtung so schnell wächst wie im Fall der unteren Schranke der Volumenentropie. Dann folgt

$$\text{vol}(B_r(v)) \leq \pi r^2 \lambda^{\frac{2r}{\sqrt{3}} + f(r)}$$

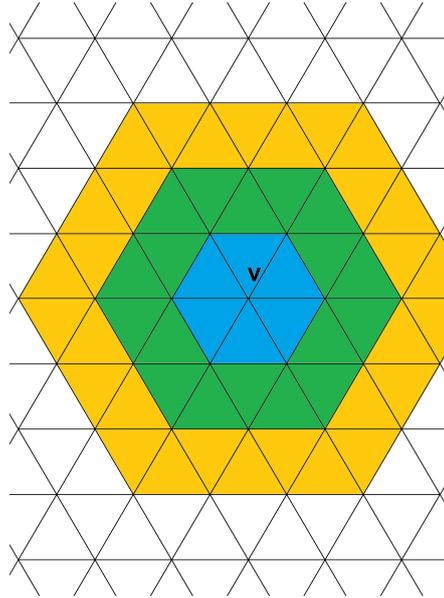


Abbildung 6.10 v in Schwarz, U in Blau, U_1 in Grün, U_2 in Orange

mit $f \in o(r)$, wobei hier das Ergebnis aus Korollar 6.3.6 verwendet wurde für den Fall $n = 2$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 h_{\text{vol}}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(v)))}{r} \\
 &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\pi r^2 \lambda^{\frac{2r}{\sqrt{3}} + f(r)}\right)}{r} \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\pi r^2)}{r} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\lambda^{\frac{2r}{\sqrt{3}} + f(r)}\right)}{r} \\
 &= \log(\lambda) \frac{2}{\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

Zusammen mit Korollar 6.3.6 für den Fall $n = 2$ folgt somit, dass die obere und untere Schranke übereinstimmen und daher die Abschätzungen scharf sind. Für die Volumenen-tropie von X gilt somit

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \log(\lambda) \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

□

Der vorherige Beweis lässt sich nicht ohne weiteres auf beliebige Dimensionen verallgemeinern, wobei die Idee bestehen bleibt. Für einen Coxeter-Komplex vom Typ \widetilde{A}_n müsste man erneut den schnellsten Weg aus den Wortbällen finden. Hierbei ist es naheliegend, U

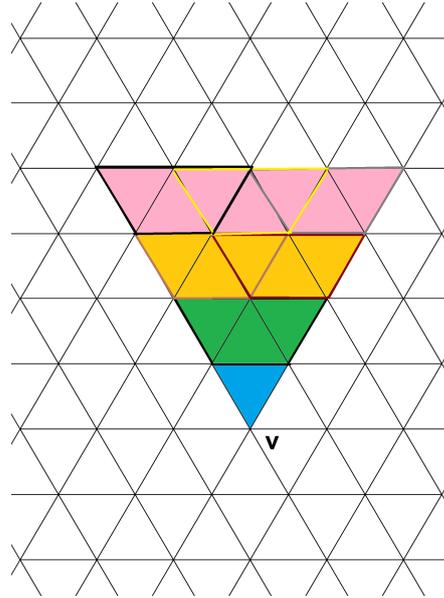


Abbildung 6.11 Ein Sektor mit eingezeichneten Halbkugeln, also den Zuwachs pro Seite in 2 Schritten (Schwarz, Braun, Lila, Gelb, Grau)

analog zu definieren und dann U_k jeweils als alles mit Wortabstand $n \cdot k$. Allerdings lässt sich im allgemeinen Fall die Form dieser U_k nicht mehr so gut beschreiben. Es bleibt dennoch die Vermutung, dass der im Beweis von Korollar 6.3.6 gewählte Weg diesen Wortball auf dem kürzesten Weg verlässt, da der Weg orthogonal zur Außenseite ist. Von daher wäre dann die untere Schranke für alle Gebäude von Typ \widetilde{A}_n exakt und daher vermuten wir das Folgende.

Vermutung 6.3.8. *Für alle irreduziblen euklidischen Gebäude X vom Typ \widetilde{A}_n mit $\text{vol}_F(X) = 1$ ist die Schranke aus Korollar 6.3.6 exakt, das heißt, es gilt*

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \log(\lambda) \frac{n^2 - n + 6}{2\sqrt{2} \sqrt[n]{n!} \sqrt{n+1}}.$$

Entsprechend zu Korollar 6.3.6 kann auch für die anderen Gebäude die Schranke explizit angegeben werden, was im Folgenden gemacht wird. Alle zitierten Werte stammen aus „Coxeter Triangulations Have Good Quality“ von Aruni Choudhary, Siargey Kachaonich und Mathijs Wintraecken [CKW20] und aus Lemma 6.1.17.

Korollar 6.3.9. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude mit Verzweigungszahl λ des Typs \widetilde{B}_n mit $\text{vol}_F(X) = 1$.

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \begin{cases} \log(\lambda) \frac{2\sqrt{2}(n^2-n+2)}{\sqrt[n]{2^{n-1}n!}} & , n < 9 \\ \log(\lambda) \frac{4\sqrt{2}(n^2-6n+11)}{\sqrt[n]{2^{n-1}n!}} & , n \geq 9 \end{cases}.$$

Beweis. Es gibt im Fall von \widetilde{B}_n verschiedene Typen von Ecken im Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X . Diese müssen getrennt betrachtet werden und für jeden Fall die Schranke bestimmt werden, je nachdem mit den Sätzen 6.3.1 oder 6.3.2. Das Maximum über diese Fälle gibt dann die beste obere Schranke.

Die verschiedenen Ecken, welche betrachtet werden, sind mit $v_1, v_2, v_k, v_{n-1}, v_n$ bezeichnet,

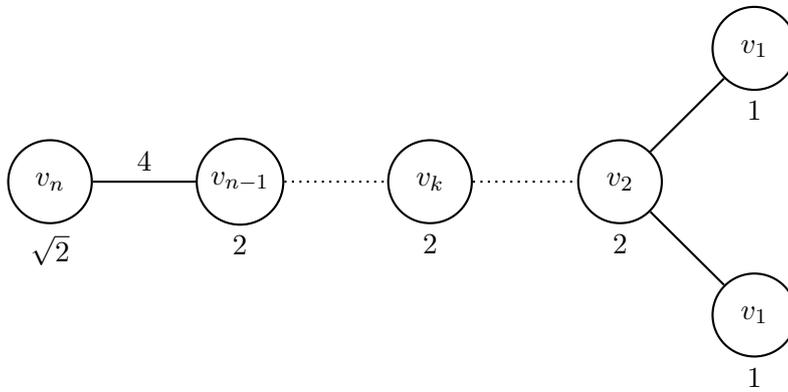


Abbildung 6.12 Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{B}_n mit $n+1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung

wobei $k = 3, \dots, n - 2$ gilt. Unterhalb jeder Ecke ist jeweils der inverse Faktor der zugehörigen Höhe in Relation zur maximalen Höhe angegeben. Die Tabelle 6.2 gibt die jeweiligen Werte an, welche zur Berechnung der Volumenentropie nach Satz 6.3.2 benötigt werden. Die Durchmesser werden mit Hilfe der Lemmata 6.1.16 und 6.1.17 bestimmt. h_{max} bezeichnet hierbei die Länge der maximalen Höhe und h die zur jeweiligen betrachteten Ecke.

Hierbei ist v_1 eine spezielle Ecke nach Bemerkung 6.1.14. Daher lassen sich alle unteren Schranken zugehörig zu den jeweiligen Ecken berechnen.

Hieraus ergibt sich, dass die maximale untere Schranke im Fall von v_1 angenommen wird, wenn $n < 9$ gilt und sonst im Fall von v_2 .

Für die maximale Höhe h_{max} erhalten wir aus [CKW20]

$$h_{\text{max}} = \frac{\sqrt[n]{2^{n-1}n!}}{2\sqrt{2}}.$$

Tabelle 6.2 Relevante Werte für \widetilde{B}_n

v	X_v	$\text{diam}(X_v)$	$\text{deg}(v)$	$\frac{h_{\max}}{h}$
v_1	B_n	n^2	1	1
v_2	$B_{n-2} \cup A_1 \cup A_1$	$(n-2)^2 + 2$	3	2
v_k	$B_{n-k} \cup D_k$	$(n-k)^2 + k(k-1)$	2	2
v_{n-1}	$D_{n-1} \cup A_1$	$(n-1)(n-2) + 1$	2	2
v_n	D_n	$n(n-1)$	1	$\sqrt{2}$

Hieraus ergibt sich die untere Schranke zu

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \begin{cases} \log(\lambda) \frac{2\sqrt{2}(n^2-n+2)}{\sqrt[2n-1]{n!}} & , n < 9 \\ \log(\lambda) \frac{4\sqrt{2}(n^2-6n+11)}{\sqrt[2n-1]{n!}} & , n \geq 9 \end{cases}.$$

□

Korollar 6.3.10. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude mit Verzweigungszahl λ des Typs \widetilde{C}_n mit $\text{vol}_F(X) = 1$.

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \begin{cases} \log(\lambda) \frac{2(n^2-6n+13)}{\sqrt[n]{n!}} & , n \geq 16 \\ \log(\lambda) \frac{10}{\sqrt{2}} & , n = 2 \\ \log(\lambda) \frac{\sqrt{2}(n^2-n+2)}{\sqrt[n]{n!}} & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Genau wie vorher gibt es im Fall von \widetilde{C}_n verschiedene Typen von Ecken im Coxeter-Dynkin-Diagramm G_X , welche getrennt betrachtet werden müssen. Für jeden Fall bestimmen wir erneut die Schranke und erhalten als das Maximum über diese Fälle die beste obere Schranke.

Die verschiedenen Ecken, welche betrachtet werden, sind mit v_1, v_2, v_k bezeichnet, wobei

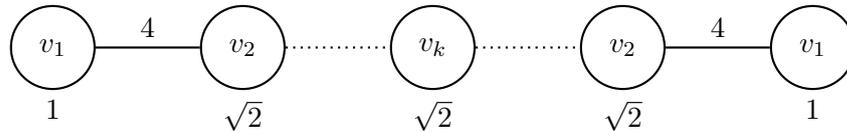


Abbildung 6.13 Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{C}_n mit $n+1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung

$k = 3, \dots, n-2$ gilt. Unter den jeweiligen Ecken ist jeweils der inverse Faktor der zugehörigen Höhe in Relation zur maximalen Höhe h_{\max} angegeben. Die Tabelle 6.3 gibt

die jeweiligen Werte an, welche zur Berechnung der Volumenentropie für v_1 nach Satz 6.3.1 und Satz 6.3.2 benötigt werden. Die Durchmesser werden mit Hilfe der Lemmata 6.1.16 und 6.1.17 bestimmt.

Tabelle 6.3 Relevante Werte für \widetilde{C}_n

v	X_v	diam(X_v)	deg(v)	$\frac{h_{\max}}{h}$
v_1	B_n	n^2	1	1
v_2	$B_{n-1} \cup A_1$	$(n-1)^2 + 1$	2	$\sqrt{2}$
v_k	$B_{n-k+1} \cup B_{k-1}$	$(n-k+1)^2 + (k-1)^2$	2	$\sqrt{2}$

Beachte hierbei, dass im sphärischen Fall für die Typen $B_n = C_n$ gilt. Hier wird die untere Schranke maximal im Fall von v_2 für $n = 2$ und für $n > 15$ angenommen. Ansonsten wird das Maximum für v_1 angenommen, was durch explizites Nachrechnen bestimmt wird. Somit gilt mit der maximalen Höhe

$$h_{\max} = \frac{\sqrt[n]{2^n n!}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{2}}$$

für die Volumenentropie die untere Schranke

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \begin{cases} \log(\lambda) \frac{2(n^2-6n+13)}{\sqrt[n]{n!}} & , n \geq 16 \\ \log(\lambda) \frac{10}{\sqrt{2}} & , n = 2 \\ \log(\lambda) \frac{\sqrt{2}(n^2-n+2)}{\sqrt[n]{n!}} & , \text{sonst} \end{cases} .$$

□

Korollar 6.3.11. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude mit Verzweigungszahl λ des Typs \widetilde{D}_n mit $\text{vol}_F(X) = 1$.

Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \begin{cases} \log(\lambda) \frac{2\sqrt{2}(n^2-2n+2)}{\sqrt[n]{2^{n-2}n!}} & , n < 9 \\ \log(\lambda) \frac{4\sqrt{2}(n^2-7n+13)}{\sqrt[n]{2^{n-2}n!}} & , n \geq 9 \end{cases} .$$

Beweis. Analog zu den vorherigen beiden Korollaren gibt es in diesem Fall die Typen v_1, v_2, v_k für $k = 3, \dots, n-4$. Diese und die zugehörigen inversen Höhen sind wieder in Abbildung 6.14 dargestellt. Im Fall von v_1 handelt es sich erneut um eine spezielle Ecke und somit wird hier Satz 6.3.1 genutzt, während für die anderen Ecken Satz 6.3.2 verwendet wird.

Die daraus resultierenden Werte sind in Tabelle 6.4 dargestellt.

Dies ist für $n < 9$ für v_1 maximal und sonst für v_2 . Für die maximale Höhe erhalten wir

$$h_{\max} = \frac{\sqrt[n]{2^{n-2}n!}}{2\sqrt{2}} .$$

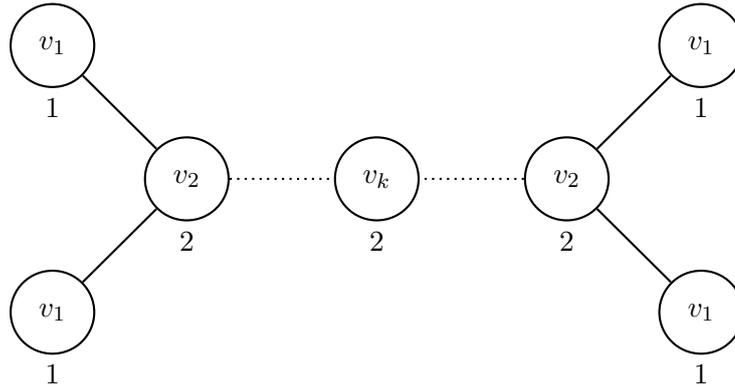


Abbildung 6.14 Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{D}_n mit $n+1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung

v	X_v	$\text{diam}(X_v)$	$\text{deg}(v)$	$\frac{h_{\max}}{h}$
v_1	D_n	$n(n-1)$	1	1
v_2	$D_{n-2} \cup A_1 \cup A_1$	$(n-2)(n-3) + 2$	3	2
v_k	$D_{n-k} \cup D_k$	$(n-k)(n-k-1) + k(k-1)$	2	2

Tabelle 6.4 Relevante Werte für \widetilde{D}_n

Daher ergibt sich für $n < 2$ die untere Schranke als

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{2\sqrt{2}(n^2 - 2n + 2)}{\sqrt[n]{2^{n-2}n!}}$$

und ansonsten zu

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \log(\lambda) \frac{4\sqrt{2}(n^2 - 7n + 13)}{\sqrt[n]{2^{n-2}n!}}.$$

□

Bemerkung 6.3.12. Auch für die Fälle, dass X ein euklidisches Gebäude von Typ $\widetilde{G}_2, \widetilde{F}_4$ oder \widetilde{E}_n mit $n = 6, 7, 8$ ist, lässt sich die untere Schranke analog zu den vorherigen Korollaren berechnen.

Es gelten mit analoger Herangehensweise wie in den vorherigen Korollaren durch direkte Berechnung der Schranken aus Satz 6.3.1 und Satz 6.3.2 die Ergebnisse aus Tabelle 6.5. Nur der Fall von I_1 wird anderweitig bestimmt. Hierbei kann man ausnutzen, dass es sich um einen $\lambda + 1$ -regulären Graphen handelt, wobei jede Kante Seitenlänge 1 hat. Hierdurch kann mit Satz 2.2.3 die Volumenentropie über die Betrachtung eines endlichen Quotienten bestimmt werden.

Tabelle 6.5 Werte der Volumenentropie spezieller Gebäude

Typ des Gebäudes X	Untere Schranke für $h_{vol}(X)$
\tilde{I}_1	$\log(\lambda)$
\tilde{G}_2	$\log(\lambda)\sqrt{3}$
\tilde{F}_4	$\log(\lambda)\frac{33}{\sqrt{3}}$
\tilde{E}_6	$\log(\lambda)\frac{192\sqrt[12]{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{51846}}$
\tilde{E}_7	$\log(\lambda)\frac{464\sqrt[14]{2}}{\sqrt{2}\sqrt[7]{2903040}}$
\tilde{E}_8	$\log(\lambda)\frac{1368}{\sqrt{2}\sqrt[8]{696729600}}$

Anstatt der üblichen Definition der Volumenentropie kann man diese auch abändern, sodass der Logarithmus zu einer anderen Basis gewählt wird. Im Fall von Gebäuden ist es naheliegend, die Volumenentropie zur Basis λ zu betrachten, wobei λ die Verzweigungszahl ist.

Darüber hinaus stellt sich die Frage nach der Normierung. Die gewählte Normierung liefert für große Dimensionen eine sehr kleine Volumenentropie, da hierdurch der Fundamentalbereich schrumpft. Man kann daher auch einen festen Fundamentalbereich betrachten, welcher von Dimension zu Dimension erweitert wird. So wird es auch in [CKW20] getan. Wir wollen uns daher nochmal die Ergebnisse aus dieser Arbeit anschauen und dieses Mal Bezug nehmen auf die angepasste Volumenentropie, welche im Folgenden definiert wird, und die veränderte Normierung, nämlich die Normierung aus dem Artikel [CKW20]. In Tabelle 1 in diesem Artikel findet man eine Liste der betrachteten Eckpunkte für die jeweiligen Fundamentalbereiche.

Definition 6.3.13. Sei (X, d) ein Gebäude mit Verzweigungszahl λ . Wir definieren die *angepasste Volumenentropie* $h_{\text{Gebäude}}(X, d)$ als

$$h_{\text{Gebäude}}(X, d) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{\lambda} \text{vol}(B_r(x))}{r}.$$

Hierbei bezeichnet \log_{λ} den Logarithmus zur Basis λ .

Satz 6.3.14. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude mit Normierung wie in [CKW20]. Dann gelten für die angepassten Volumenentropien die Abschätzungen für die jeweiligen Typen aus Tabelle 6.6.

Beweis. Dies folgt direkt aus den Beweisen der Korollare 6.3.6, 6.3.9, 6.3.10, 6.3.11 sowie der Bemerkung 6.3.12. Hierbei muss lediglich $\log(\lambda)$ auf Grund der Definition der angepassten Volumenentropie weggelassen werden und der Normierungsfaktor des

Tabelle 6.6 Werte der angepassten Volumenentropie

Typ des Gebäudes X	Untere Schranke für $h_{\text{Gebäude}}(X)$
\widetilde{A}_n	$\frac{n^2-n+6}{\sqrt{2}}$
\widetilde{B}_n	$\begin{cases} 2\sqrt{2}(n^2 - n + 2) & \text{für } n < 9 \\ 2\sqrt{2}(n^2 - 6n + 11) & \text{für } n \geq 9 \end{cases}$
\widetilde{C}_n	$\begin{cases} \frac{10}{\sqrt{2}} & \text{für } n = 2 \\ n^2 - 6n + 13 & \text{für } n \geq 16 \\ \frac{n^2-n+2}{\sqrt{2}} & \text{sonst} \end{cases}$
\widetilde{D}_n	$\begin{cases} 2\sqrt{2}(n^2 - 2n + 2) & \text{für } n < 9 \\ 4\sqrt{2}(n^2 - 7n + 13) & \text{für } n \geq 9 \end{cases}$
\widetilde{I}_1	1
\widetilde{G}_2	$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$
\widetilde{F}_4	$66\sqrt{2}$
\widetilde{E}_6	$\frac{192}{\sqrt{2}}$
\widetilde{E}_7	$\frac{464}{\sqrt{2}}$
\widetilde{E}_8	$\frac{1368}{\sqrt{2}}$

fundamentalen Volumens wieder herausgerechnet werden, welcher in den jeweiligen Beweisen benötigt wurde. Die Ergebnisse sind dann die in Tabelle 6.6 festgehaltenen Werte. □

6.4 Untere Schranke der Volumenentropie reduzibler Gebäude

Nachdem bisher stets irreduzible Gebäude eines festen Typs betrachtet wurden, werden in diesem Kapitel auch reduzible Gebäude, also Produkte von irreduziblen Gebäuden zugelassen.

Hierbei gibt es starke Ähnlichkeiten zu Graphenprodukten. Der folgende Satz ist das Analogon zu Satz 5.2.4 für Graphenprodukte. Daher nutzen wir erneut das technische Lemma 5.2.3. Dies wird benötigt zur Bestimmung der minimalen Volumenentropie von Produkten.

Das Resultat ist ähnlich zu Satz 5.2.4, allerdings müssen die unterschiedlichen Dimensionen der irreduziblen Faktoren berücksichtigt werden. Daher ist die Formel aus Satz 6.4.3 komplizierter. Wie auch für Graphenprodukte mit rechtwinkliger Produktmetrik ist die hier angegebene untere Schranke scharf.

Satz 6.4.1. *Sei $(X, d) = (X_1 \times \cdots \times X_m, d_1 \times \cdots \times d_m)$ ein euklidisches Gebäude und seien (X_i, d_i) für $i = 1, \dots, m$ irreduzible Gebäude.*

Dann gilt

$$h_{vol}(X, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{vol}(X_i, d_i)^2}.$$

Beweis. Sei γ ein Weg in X . Bezeichne mit γ_i für $i = 1, \dots, m$ die Projektion von γ auf X_i . Dann gilt für die Länge

$$L(\gamma, d)^2 = \sum_{i=1}^m L(\gamma_i, d_i)^2.$$

Des Weiteren gilt eine Bijektion zwischen einem kürzesten typgerechten Weg γ in X der Länge r und kürzesten typgerechten Wegen γ_i in X_i mit

$$\sum_{i=1}^m L(\gamma_i, d_i)^2 = r^2,$$

sodass das nacheinander Durchlaufen der γ_i ein typgerechter Weg homotop zu γ ist. Die γ_i sind hierbei genau die Orthogonalprojektionen von γ auf X_i .

Definiere für $v \in V(Y)$, wobei (Y, d) sowohl ein irreduzibles als auch ein reduzibles Gebäude sein kann, die Zahl

$$N_v(r) = \#P_v(r) = \#\{\gamma \text{ kürzester typgerechter Weg in } Y \text{ beginnend in } v \mid L(\gamma, d) \leq r\}.$$

Sei nun $v \in V(X)$. So lässt sich v schreiben als $v = v_1 \times \cdots \times v_m$ mit $v_i \in V(X_i)$ für alle $i = 1, \dots, m$. Mit dieser Definition und der vorherigen Feststellung zum Zusammenhang der typgerechten Wege in X und X_i gilt für beliebige $a_i \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$ die Relation

$$N_v(r) \geq \prod_{i=1}^m N_{v_i}(a_i \cdot r).$$

Die Wahl der a_i entspricht den unterschiedlichen anteiligen Längen in X_i , also in den Längen von Projektionen von typgerechten Wegen auf X_i .

Somit folgt mit Lemma 6.1.20

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_v(r))}{r} \\
&\geq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\prod_{i=1}^m N_{v_i}(a_i \cdot r))}{r} \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^m \log(N_{v_i}(a_i \cdot r))}{r} \\
&= \sum_{i=1}^m \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{v_i}(a_i \cdot r))}{r} \\
&= \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{vol}(X_i, d_i).
\end{aligned}$$

Hier folgt die letzte Gleichheit aus Lemma 1.0.7.

Nun ist das Ziel, diese untere Schranke maximal werden zu lassen. Hierfür maximieren wir

$$\sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{vol}(X_i, d_i)$$

unter der Nebenbedingung an die a_i , dass $a_i \geq 0$ gilt und $\sum_{i=1}^m a_i^2 = 1$. Nach dem Resultat aus Lemma 5.2.3 wird diese erreicht für

$$a_i = \frac{h_{vol}(X_i, d_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m h_{vol}(X_j, d_j)^2}}.$$

Für diese Wahl der a_i gilt dann

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &\geq \sum_{i=1}^m \frac{h_{vol}(X_i, d_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m h_{vol}(X_j, d_j)^2}} \cdot h_{vol}(X_i, d_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{h_{vol}(X_i, d_i)^2}{\sqrt{\sum_{j=1}^m h_{vol}(X_j, d_j)^2}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^m h_{vol}(X_i, d_i)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^m h_{vol}(X_i, d_i)^2}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{vol}(X_i, d_i)^2}.
\end{aligned}$$

Somit bleibt noch zu zeigen, dass diese untere Schranke scharf ist und tatsächlich angenommen wird. Daher benötigen wir eine obere Schranke für das Volumenwachstum, sodass der exponentielle Anteil ebenfalls dagegen konvergiert. Hierfür betrachten wir erneut die a_i aus Lemma 5.2.3, also

$$a_i = \frac{h_{vol}(X_i, d_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^m h_{vol}(X_j, d_j)^2}}.$$

Wie dort gezeigt, wächst die Anzahl der Wege in diese Richtung am schnellsten. Nun können wir hiermit das Volumen eines Balls von Radius r in X abschätzen. Sei dafür $v \in V(X)$ beliebig. Schreibe $n = \dim X$, dann gilt für das Volumen eines Balls mit Radius r um v

$$\text{vol}(B_r(v)) \leq V_n r^n \exp\left(r \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{\text{vol}}(X_i, d_i) + f(r)\right).$$

Hierbei bezeichnet V_n das Volumen des Einheitsballs im \mathbb{R}^n und $f(r) \in o(r)$ eine Funktion bezüglich des Landau-Symbols.

Dies entspricht dem Fall, dass jede Richtung so schnell wächst wie in Richtung der a_i . Somit ist das Volumen für diesen Fall das Volumen des Einheitsballs multipliziert mit dem Wachstum in diese Richtung. Durch diese obere Schranke an das Volumenwachstum eines Balls erhalten wir daher

$$\begin{aligned} h_{\text{vol}}(X, d) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(\text{vol}(B_r(\tilde{x})))}{r} \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(V_n r^n \exp(r \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{\text{vol}}(X_i, d_i) + f(r)))}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(V_n r^n)}{r} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{\text{vol}}(X_i, d_i)}{r} + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r} \\ &= \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_{\text{vol}}(X_i, d_i) \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{\text{vol}}(X_i, d_i)^2}. \end{aligned}$$

Somit wird das Minimum auch angenommen und es gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{\text{vol}}(X_i, d_i)^2}.$$

□

Ähnlich zu Lemma 5.2.3 benötigen wir eine weitere Extremstelle unter Nebenbedingungen im folgenden Satz, um eine allgemeine untere Schranke zu erhalten. Diese Rechnung ist in das folgende Lemma ausgelagert.

Lemma 6.4.2. Sei $h_i > 0$ und $d_i \in \mathbb{N}_{>0}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Dann nimmt die Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{h_i^2}{x_i^{d_i}}$$

unter den Nebenbedingungen $x_i \geq 0$ und

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1$$

das eindeutige Minimum an bei

$$x_i = \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{d_i} \prod_{j=1}^n \left(h_j \sqrt{\frac{2}{d_j}} \right)^{-\frac{d_i d_j}{\sum_{k=1}^n d_k}}.$$

Beweis. Sei f wie in dem Lemma definiert und sei die Nebenbedingung gegeben durch

$$g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i - 1.$$

Wie in Lemma 5.2.3 nutzen wir hier wieder die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und erhalten somit die Gleichungen, welche von den Extremstellen unter Nebenbedingung erfüllt werden müssen mit

$$h(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla f(x_1, \dots, x_n) = -\lambda \nabla g(x_1, \dots, x_n).$$

Die zweite Gleichung entspricht

$$-\frac{2h_i^2}{d_i x_i^{\frac{2}{d_i}+1}} = -\lambda \frac{\prod_{j=1}^n x_j}{x_i}$$

für $i = 1, \dots, n$. Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{2h_i^2}{d_i x_i^{\frac{2}{d_i}+1}} &= -\lambda \frac{\prod_{j=1}^n x_j}{x_i} \\ \Leftrightarrow \frac{2h_i^2}{d_i x_i^{\frac{2}{d_i}}} &= \lambda \prod_{j=1}^n x_j \\ \Leftrightarrow x_i^{\frac{2}{d_i}} &= \frac{1}{\lambda} \frac{2h_i^2}{d_i} \\ \Leftrightarrow x_i &= \left(h_i \sqrt{\frac{2}{\lambda d_i}} \right)^{d_i}. \end{aligned}$$

Hierbei nutzt die vorletzte Umformung die Nebenbedingung

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1$$

aus und durch $x_i \geq 0$ ist die Wurzel eindeutig.

Im nächsten Schritt setzen wir die letzte Gleichung für alle $i = 1, \dots, n$ in die Nebenbedingung ein und erhalten

$$1 = \prod_{i=1}^n \left(h_i \sqrt{\frac{2}{\lambda d_i}} \right)^{d_i} = \sqrt{\lambda}^{-\sum_{j=1}^n d_j} \prod_{i=1}^n \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{d_i}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach λ auflösen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}^{\sum_{j=1}^n d_j} &= \prod_{i=1}^n \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{d_i} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \left(\prod_{i=1}^n \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{d_i} \right)^{\frac{2}{\sum_{j=1}^n d_j}} \\ \Leftrightarrow \lambda &= \prod_{i=1}^n \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{\frac{2d_i}{\sum_{j=1}^n d_j}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x_i = \left(h_i \sqrt{\frac{2}{d_i}} \right)^{d_i} \prod_{j=1}^n \left(h_j \sqrt{\frac{2}{d_j}} \right)^{\frac{-d_i d_j}{\sum_{k=1}^n d_k}}$$

als einzige Extremstelle unter den Nebenbedingungen.

Betrachte nun einen anderen Punkt, welcher die Nebenbedingungen erfüllt und zeige, dass hierfür die Funktion größer ist. Definiere für $a > 0$

$$x_1 = \frac{1}{a^{n-1}} \quad \text{und} \quad x_2 = \dots = x_n = a.$$

Dies erfüllt für alle $a > 0$ die Nebenbedingungen. Für diese x_i gilt

$$f(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{h_1^2 a^{\frac{2(n-1)}{d_1}}}_{\rightarrow \infty} + \sum_{i=2}^n \underbrace{\frac{h_i^2}{a^{\frac{2}{d_i}}}}_{\rightarrow 0} \rightarrow \infty$$

für $a \rightarrow \infty$ und somit handelt es sich bei der Extremstelle um ein Minimum. \square

Satz 6.4.3 (Satz L). Sei $(X, d) = (X_1 \times \dots \times X_m, d_1 \times \dots \times d_m)$ ein euklidisches Gebäude und seien (X_i, d_i) für $i = 1, \dots, m$ irreduzible Gebäude. Außerdem gelte $\text{vol}_F(X) = 1$. Dann gilt

$$h_{\text{vol}}(X, d) \geq \sqrt{\frac{\dim(X)}{2}} \prod_{i=1}^m \left(h_{\text{vol}}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\frac{\dim(X_i)}{\dim(X)}}.$$

Die untere Schranke ist scharf und wird genau dann angenommen, wenn auf den jeweiligen irreduziblen Teilen die Metrik so gewählt wird, dass für das fundamentale Volumen

$$\text{vol}_F(X_i) = \left(h_{\text{vol}}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\dim(X_i)} \left(\prod_{j=1}^m \left(h_{\text{vol}}(X_j) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_j)}} \right)^{-\frac{\dim(X_j)}{\dim(X)}} \right)$$

gilt.

Beweis. Sei (X, d) ein euklidisches Gebäude. Dann gilt nach Satz 6.4.1 für die Volumenentropie der Zusammenhang

$$h_{\text{vol}}(X, d) = \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{\text{vol}}(X_i, d_i)^2},$$

wobei (X_i, d_i) die irreduziblen Gebäude bezeichnet, aus denen X besteht. Dies lässt sich unter der Berücksichtigung der Dimensionen von X_i mit Lemma 1.0.7 umschreiben zu

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m h_{\text{vol}}(X_i, d_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{h_{\text{vol}}(X_i)^2}{\text{vol}_F(X_i, d_i)^{\frac{2}{\dim(X_i)}}}}.$$

Nun wollen wir die obige Formel für die Volumenentropie minimieren. Hierfür minimieren wir die Funktion

$$f(\text{vol}_F(X_1, d_1), \dots, \text{vol}_F(X_m, d_m)) = \sum_{i=1}^m \frac{h_{\text{vol}}(X_i)^2}{\text{vol}_F(X_i, d_i)^{\frac{2}{\dim(X_i)}}}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\text{vol}_F(X_i, d_i) \geq 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^m \text{vol}_F(X_i, d_i) = 1.$$

Mit Lemma 6.4.2 folgt dann, dass das Minimum für

$$v_i = \left(h_{\text{vol}}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\dim(X_i)} \prod_{j=1}^m \left(h_{\text{vol}}(X_j) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_j)}} \right)^{-\frac{\dim(X_i) \dim(X_j)}{\dim(X)}}$$

angenommen wird. Hierbei wird ausgenutzt, dass

$$\sum_{k=1}^n \dim(X_k) = \dim(X)$$

gilt. Nun folgt durch Einsetzen der Minimalstelle in die Funktion

$$\begin{aligned}
h_{vol}(X, d) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m h_{vol}(X_i, d_i)^2} \\
&\geq \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{h_{vol}(X_i)^2}{\text{vol}_F(X_i, d_i)^{\frac{2}{\dim(X_i)}}}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{h_{vol}(X_i)^2}{h_{vol}(X_i)^2 \frac{2}{\dim(X_i)} \prod_{j=1}^m \left(h_{vol}(X_j) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_j)}} \right)^{-\frac{2 \dim(X_j)}{\dim(X)}}}} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\dim(X_i) \prod_{j=1}^m \left(h_{vol}(X_j)^2 \frac{2}{\dim(X_j)} \right)^{\frac{\dim(X_j)}{\dim(X)}}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\dim(X) \prod_{j=1}^m \left(h_{vol}(X_j)^2 \frac{2}{\dim(X_j)} \right)^{\frac{\dim(X_j)}{\dim(X)}}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\dim(X)}{2}} \prod_{i=1}^m \left(h_{vol}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\frac{\dim(X_i)}{\dim(X)}},
\end{aligned}$$

was der erste Teil des Satzes ist. Mit Satz 6.4.1 sieht man durch direktes Nachrechnen, dass dieses Minimum angenommen wird, wenn für das jeweilige fundamentale Volumen

$$\text{vol}_F(X_i) = \left(h_{vol}(X_i) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_i)}} \right)^{\dim(X_i)} \left(\prod_{j=1}^m \left(h_{vol}(X_j) \sqrt{\frac{2}{\dim(X_j)}} \right)^{-\frac{\dim(X_i) \dim(X_j)}{\dim(X)}} \right)$$

gilt. Da dieses Minimum in Lemma 6.4.2 eindeutig ist, folgt dies auch für die Wahl der fundamentalen Volumen. Daher nimmt das reduzible Gebäude diese minimale Volumenen- tropie genau für obiges Ergebnis an. \square

Literatur

- [AB08] P. Abramenko und K. S. Brown. *Buildings, Theory and applications*. Bd. 248. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2008.
- [Bab93] I. Babenko. „ASYMPTOTIC INVARIANTS OF SMOOTH MANIFOLDS“. In: (1993). URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1070/IM1993v041n01ABEH002181/pdf>.
- [BB05] A. Björner und F. Brenti. *Combinatorics of Coxeter Groups*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2005.
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois und S. Gallot. „Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative“. In: *Geometric and Functional Analysis* 5 (Sep. 1995), S. 731–799. DOI: 10.1007/BF01897050.
- [BS21] I. Babenko und S. Sabourau. *Minimal volume entropy and fiber growth*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2102.04551. URL: <https://arxiv.org/abs/2102.04551>.
- [CF03] C. Connell und B. Farb. *Minimal entropy rigidity for lattices in products of rank one symmetric spaces*. 2003. DOI: 10.4310/CAG.2003.v11.n5.a7. URL: <https://doi.org/10.4310/CAG.2003.v11.n5.a7>.
- [CKW20] A. Choudhary, S. Kachanovich und M. Wintraecken. „Coxeter Triangulations Have Good Quality“. In: *Mathematics in Computer Science* 14.1 (2020), S. 141–176. ISSN: 1661-8289. DOI: 10.1007/s11786-020-00461-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s11786-020-00461-5>.
- [Cox14] Coxeter–Dynkin diagram. *Coxeter–Dynkin diagram* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [Online; accessed 21-November-2022]. 2014. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter-Dynkin_diagram.
- [Dal+09] F. Dal'Bo u. a. „On the growth of nonuniform lattices in pinched negatively curved manifolds“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 2009.627 (2009). DOI: 10.1515/crelle.2009.010. URL: <https://doi.org/10.1515%2Fcrelle.2009.010>.

- [Die05] R. Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2005. ISBN: 3540261826. URL: <http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike04-20{\&}path=ASIN/3540261826>.
- [Din71] E. Dinaburg. „ON THE RELATIONS AMONG VARIOUS ENTROPY CHARACTERISTICS OF DYNAMICAL SYSTEMS“. In: *Mathematics of The Ussr-izvestiya* 5 (1971), S. 337–378.
- [Gro82] M. Gromov. „Volume and bounded cohomology“. en. In: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 56 (1982), S. 5–99. URL: http://www.numdam.org/item/PMIHES_1982__56__5_0/.
- [Hum90] J. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1990. ISBN: 9780511623646.
- [Kat82] A. Katok. „Entropy and closed geodesics“. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 2.3-4 (1982), 339–365. DOI: 10.1017/S0143385700001656.
- [KN07] I. Kapovich und T. Nagnibeda. „The Patterson–Sullivan Embedding and Minimal Volume Entropy for Outer Space“. In: *Geometric and Functional Analysis* 17.4 (2007), S. 1201–1236. DOI: 10.1007/s00039-007-0621-z. URL: <https://doi.org/10.1007%2Fs00039-007-0621-z>.
- [Leu06] E. Leuzinger. „Entropy of the geodesic flow for metric spaces and Bruhat–Tits buildings“. In: 6.3 (2006), S. 475–491. DOI: doi:10.1515/ADVGEOM.2006.029. URL: <https://doi.org/10.1515/ADVGEOM.2006.029>.
- [Lim08] S. Lim. „Minimal volume entropy for graphs“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 360.10 (2008), S. 5089–5100. ISSN: 0002-9947. DOI: 10.1090/S0002-9947-08-04227-X. URL: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-08-04227-X>.
- [LL10] F. Ledrappier und S. Lim. „Volume entropy of hyperbolic buildings“. In: *J. Mod. Dyn.* 4.1 (2010), S. 139–165. ISSN: 1930-5311. DOI: 10.3934/jmd.2010.4.139. URL: <https://doi.org/10.3934/jmd.2010.4.139>.
- [Man79] A. Manning. „Topological Entropy for Geodesic Flows“. In: *Annals of Mathematics* 110.3 (1979), S. 567–573. ISSN: 0003486X. URL: <http://www.jstor.org/stable/1971239>.
- [Man81] A. Manning. „A relation between Lyapunov exponents, Hausdorff dimension and entropy“. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 1.4 (1981), 451–459. DOI: 10.1017/S0143385700001371.
- [Men28] K. Menger. „Untersuchungen über allgemeine Metrik“. In: (1928). DOI: 10.1007/BF01448840. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01448840>.
- [Ser80] J.-P. Serre. *Trees*. Translated from the French by John Stillwell. Berlin: Springer-Verlag, 1980. ISBN: 3-540-10103-9.
- [You82] L.-S. Young. „Dimension, entropy and Lyapunov exponents“. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 2.1 (1982), 109–124. DOI: 10.1017/S0143385700009615.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Der Graph K_4 mit Ecken A, B, C, D	27
2.2	Universelle Überlagerung zu K_4 aus Abbildung 2.1.	27
3.1	Beispiel eines Hypergraph mit 9 Ecken und 6 Hyperkanten, dargestellt in den verschiedenen Farben.	31
3.2	Der abgeleitete Graph zum Hypergraphen aus Beispiel 3.1.3 mit abgeleiteten Kanten und neuer Ecke in der jeweiligen Farbe der Hyperkante. . .	32
3.3	Ein Beispiel für einen einfach zusammenhängenden und einen nicht einfach zusammenhängenden Hypergraphen	33
4.1	Ein flacher und ein nicht flacher Simplizialkomplex.	45
4.2	Simplizialkomplex X mit Schwerpunkten in Blau und abgeleitetem Graphen in Grün.	49
4.3	Simplizialkomplex X mit gleich langen Kanten gleich eingefärbt.	63
5.1	Links der 2-dimensionale Standardwürfel und daneben Beispiele für 2-Würfel.	67
5.2	Zwei Graphen G_1 und G_2	67
5.3	Das 1-Skelett des Graphenprodukts $G_1 \times G_2$	68
5.4	Graphenprodukt mit ursprünglicher Metrik (oben) und abgeleiteter Metrik (unten) aus Satz 5.7.3	91
5.5	Graphenprodukt mit ursprünglicher Metrik und geodätischem Weg orthogonal zur Kante.	91
5.6	Ein möglicher 3-regulärer Graph mit Rang 8 der Fundamentalgruppe, also ein Beispiel für G_8	102
5.7	Ein Rosengraph mit Rang 8 der Fundamentalgruppe, also ein Beispiel für R_8	103
6.1	Die Coxeter-Dynkin-Diagramme zu den sphärischen Coxeter-Komplexen mit Benennung aus [Cox14].	107

6.2	Die Coxeter-Dynkin-Diagramme zu den affinen Coxeter-Komplexen mit Benennung aus [Cox14].	107
6.3	Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \widetilde{G}_2	118
6.4	Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \widetilde{G}_2	121
6.5	Ein möglicher Weg in Blau zur Ecke V_v und Facette E_v in \widetilde{G}_2 . Die jeweiligen Sterne zu der speziellen Ecke und deren Translaten sind in Orange eingezeichnet.	122
6.6	Geodätischer Weg in Orange zum betrachteten Weg aus dem Beweis zu Satz 6.3.2 in Blau mit Winkel α in \widetilde{G}_2	124
6.7	Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{A}_n mit $n + 1$ Ecken.	126
6.8	Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X_v vom Typ A_n mit n Ecken.	126
6.9	v in Schwarz und U in Blau	128
6.10	v in Schwarz, U in Blau, U_1 in Grün, U_2 in Orange	129
6.11	Ein Sektor mit eingezeichneten Halbkugeln, also den Zuwachs pro Seite in 2 Schritten (Schwarz, Braun, Lila, Gelb, Grau)	130
6.12	Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{B}_n mit $n + 1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung	131
6.13	Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{C}_n mit $n + 1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung	132
6.14	Das Coxeter-Dynkin-Diagramm zu X vom Typ \widetilde{D}_n mit $n + 1$ Ecken und zugehörige Höhe geteilt durch die längste Höhe als Beschriftung	134

Tabellenverzeichnis

6.1	Anzahl der positiven Wurzeln nach Typ des sphärischen Coxeter-Komplexes. Der Index des Typs gibt jeweils die Anzahl an Ecken im Coxeter-Dynkin-Diagramm an. Die Dimension des zugehörigen Gebäudes beträgt stets 1 weniger.	111
6.2	Relevante Werte für \widetilde{B}_n	132
6.3	Relevante Werte für \widetilde{C}_n	133
6.4	Relevante Werte für \widetilde{D}_n	134
6.5	Werte der Volumenentropie spezieller Gebäude	135
6.6	Werte der angepassten Volumenentropie	136