

Sarah SCHÖNBRODT, Karlsruhe & Martin FRANK, Karlsruhe

## **Klassifizierungsprobleme: Maschinelles Lernen und KI im Mathematikunterricht**

Zahlreiche Anwendungen aus unserem Alltag basieren auf Methoden des maschinellen Lernens (ML), einem Teilbereich der Künstlichen Intelligenz (KI): sei es, wenn Mails automatisch als Spam erkannt werden oder sich unser Smartphone per Gesichtserkennung entsperrt. Was sich hinter diversen ML-Methoden verbirgt, sind mathematische Konzepte, die in elementarer Form in zahlreichen deutschen Lehrplänen verankert sind. Dies macht das Themengebiet ML zu einem aussichtsreichen Kandidaten, um ...

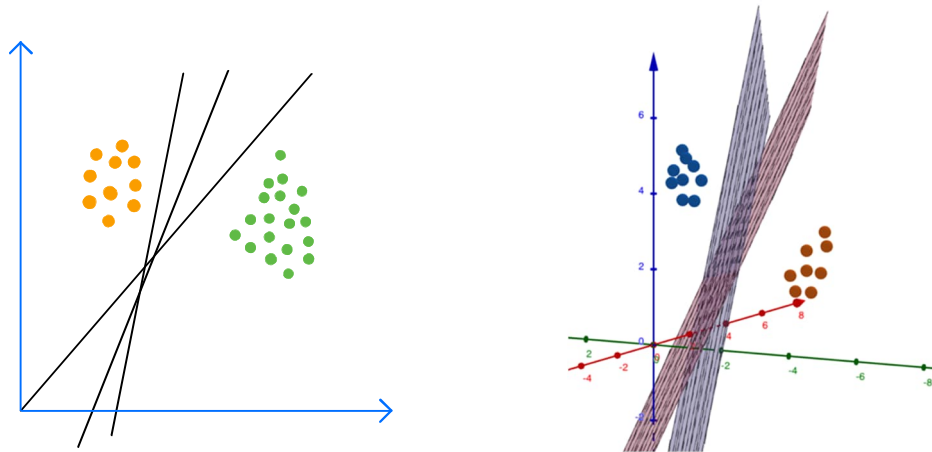
- ... Lernenden das mathematische Modellieren realer, hochaktueller Probleme zu ermöglichen und damit sogleich zu einer guten Möglichkeit die Bedeutung von Mathematik für Gesellschaft, Alltag und Technik erfahrbar zu machen (Schönbrodt et al., 2022, S. 74).
- ... Lernenden frühzeitig einen Einblick in die Funktionsweise von ML-Methoden sowie Grenzen und Chancen von KI-Systemen zu geben – mit dem Fokus auf der Bedeutung, die die Mathematik für derartige Systeme innehat (KI entmystifizieren).
- ... Lernende im kritischen, verständigen Umgang mit und der Nutzung von Daten zu schulen und damit den Aufbau von Data Literacy im Sinne einer umfassenden Datenkompetenz zu unterstützen (Schüller et al., 2021, S. 1).

Eine wichtige Klasse von Problemen, die mit ML-Methoden gelöst werden, sind *Klassifizierungsprobleme*. Sie treten u. a. bei der automatischen Diagnose von Krankheiten, bei der Klassifizierung von Objekten auf Bildern oder beim Filtern von Spamnachrichten auf. In diesem Beitrag wird am Beispiel von Klassifizierungsproblemen aufgezeigt, welche schulmathematischen Inhalte unterschiedlicher Klassenstufen (7 und 11/12) aufgegriffen werden können, um mit Lernenden in die Entwicklung eines Klassifizierungsmodells einzusteigen und dabei zentrale Bausteine von ML-Methoden herauszuarbeiten. Zudem gehen wir kurz auf geeignete Werkzeuge für die Gestaltung digitalen Lernmaterials sowie erste Erfahrungen aus Erprobungen mit Lernenden ein.

### **Die Daten**

Ausgangspunkt für das Lösen von Klassifizierungsproblemen basierend auf ML-Methoden sind Datenpunkte zahlreicher Objekte der relevanten Klassen. Von diesen Datenpunkten sollte die Zuordnung zur jeweiligen Klasse

bekannt oder händisch festzulegen sein. In diesem Beitrag werden Klassifizierungsprobleme betrachtet, bei denen lediglich zwei Klassen unterschieden werden: bspw. Mails in Spam vs. Nicht-Spam, Daten einer Blutanalyse in gesund vs. erkrankt oder Bilder von Ampeln in rot vs. grün. Um Lernenden die Entwicklung eines Klassifizierungsmodells zu erlauben, bietet es sich an zunächst niedrigdimensionale Probleme und einfache Datensätze zu betrachten – z. B. solche, mit zwei- oder dreidimensionalen Daten, bei denen sich die Datenpunkte der beiden Klassen nicht überlappen (vgl. Abb. 1).



**Abb. 4:** Datenpunkte zweier Klassen. Verschiedene Trenngeraden (links) bzw. Trennebenen (rechts) sind bereits eingezeichnet.

## Das Modell

Ziel ist es, basierend auf den bekannten Daten eine Funktion zu „lernen“, die die Datenpunkte der beiden Klassen bestmöglich voneinander trennt (vgl. Abb. 1). Ist diese Funktion gefunden, so kann sie genutzt werden, um bei Objekten (Mails, Blutanalysen, Bildern etc.), von denen die Klassenzuordnung gänzlich unbekannt ist, die (hoffentlich richtige) Klasse vorherzusagen. Dazu ist festzulegen, aus welcher Funktionenklasse die „beste“ Funktion zum Trennen der Datenpunkte gefunden werden soll (bspw. lineare, quadratische oder komplexe nichtlineare Modelle).

Wird mit *dreidimensionalen* Daten gearbeitet, so lässt sich das Problem im Oberstufenunterricht zur Linearen Algebra verankern. Als Trennfunktionen können Ebenen in Normalenform  $\vec{n} \cdot \vec{x} + b = 0$  eingesetzt werden (Schönbrodt et al., 2022, S. 79f.). Abbildung 1 macht deutlich, dass womöglich verschiedene Ebenen zum Trennen der Datenpunkte geeignet sind. Ein *Optimalitätskriterium* wird benötigt, mit dem festgelegt werden kann, wann eine Ebene besser ist als alle anderen. Eine Möglichkeit ist es, die Trennebene so zu wählen, dass ...

- ... der *datenpunktfreie Bereich* zwischen der Ebene und den Datenpunkten beider Klassen *maximal* wird. Dazu ist der Abstand zwischen den

nächstgelegenen Datenpunkten und der Ebene mathematisch zu beschreiben.

- ... die Datenpunkte der einen Klasse auf der einen Seite, die der anderen Klasse auf der anderen Seite der Trennebene liegen.

Das Problem kann als quadratisches Optimierungsproblem unter linearen Nebenbedingungen formuliert werden. Dieses muss nicht mit Lernenden formalisiert werden. Stattdessen kann das Lösen des Optimierungsproblems durch den Einsatz geeigneter digitaler Werkzeuge dem Computer überlassen werden. Alternativ ließe sich die optimale Trennebene durch computergestützte Variation der Parameter von den Lernenden bestimmen. Ist die optimale Ebene gefunden, so lässt sich die Klassenzuordnung eines beliebigen neuen Datenpunktes über das Skalarprodukt zwischen Normalenvektor  $\vec{n}$  und Ortsvektor des zu klassifizierenden Punktes bestimmen (Schönbrodt et al., 2022, S. 81). Das hier beschriebene Vorgehen ist angelehnt an die Stützvektormethode – eine ML-Methode, die zum Lösen von Klassifizierungsproblemen eingesetzt wird (Bishop, 2006, S. 325ff.; Schönbrodt, 2019).

Wird mit *zweidimensionalen* Daten gearbeitet, so lassen sich Klassifizierungsprobleme bereits mit Lernenden der Mittelstufe angehen. Anstelle von Trennebenen können Geraden als Trennfunktionen eingesetzt werden.

### **Validierung und kritische Diskussion**

Üblicherweise werden nicht alle bekannten Daten verwendet, um die optimale Trennfunktion zu bestimmen. Stattdessen wird der Datensatz unterteilt in Daten, die zum „Lernen“ der Trennfunktion eingesetzt werden (*Lerndaten*) und Daten, die zum anschließenden Validieren des gefundenen Modells genutzt werden (*Testdaten*). Die Eignung des Modells auf gänzlich unbekannte Daten soll so bewertet und Grenzen aufgezeigt werden. Die Verwendung von Testdaten zur Validierung des Modells entspricht einem wichtigen Schritt, der über ML-Methoden hinaus bei mathematischen Modellierungsprozessen (auch von Lernenden) vollzogen und beherrscht werden sollte: das Validieren und Interpretieren mathematischer Resultate!

Nicht zuletzt ist die Diskussion *gesellschaftskritischer / ethischer Aspekte* der intendierten Anwendung des Modells zentraler Baustein bei der Entwicklung von KI-Systemen im Allgemeinen bzw. eines Klassifizierungsmodells im Besonderen. So lässt sich diskutieren, dass falschen Klassifizierungen im Bereich Spamfilter eine andere Bedeutung zukommt als falschen Krebs-Diagnosen und dass Auswahl und Diversität der Lerndaten einen enormen Einfluss auf die Verstärkung von Diskriminierungen haben können (Schönbrodt et al., 2022, S. 97f.).

## **Digitales Lernmaterial, Erfahrungen und Fazit**

Ein Werkzeug, welches sich für die Entwicklung digitalen Lernmaterials zu Klassifizierungsproblemen und KI eignet, sind Jupyter Notebooks. Diese werden in zahlreichen Branchen von Technik, Forschung und Wirtschaft eingesetzt. Vereinfacht ausgedrückt sind Jupyter Notebooks digitale Dokumente, die zum Schreiben von Text und zum Ausführen von Code (u. a. zur Visualisierung großer Datensätze) verwendet und von Lernenden interaktiv bearbeitet werden können. Zu dem Problem der Klassifizierung von Ampeln (rot vs. grün) haben wir Jupyter Notebooks entwickelt und im Rahmen von eintägigen Workshops mit mehr als 60 Lernenden der Oberstufe erprobt. Die engagierte Partizipation der Lernenden und eine schriftliche Evaluation machten deutlich, dass seitens der Lernenden großes Interesse an Fragestellungen aus dem Bereich KI besteht.

Das Beispiel der Klassifizierung zeigt, dass es durchaus möglich ist mit schulmathematischem Wissen in die Entwicklung von KI-Systemen einzusteigen. Werden Klassifizierungsprobleme in der Oberstufe angegangen, so finden Vektoren, Ebenen in Normalenform, Abstände zwischen Punkten und Ebenen sowie das Skalarprodukt eine problemorientierte Anwendung. Durch den Einsatz linearer Funktionen als Trennfunktionen lassen sich bereits in der Mittelstufe wichtige Bausteine zahlreicher ML-Methoden diskutieren: Lern- und Testdaten, (Trenn-)Funktionen, Optimalität, Validierung via Testdaten sowie kritische / ethische Diskussionen der Anwendungen. Darüber hinaus unterstreichen Beiträge von Biehler & Fleischer (2021), Hofmann & Frank (im Druck) und Schönbrodt et al. (2022), dass sich auch weitere Fragestellungen und Methoden aus dem Bereich KI (Entscheidungsbäume, Wortvorhersagen, Empfehlungssysteme) für die Einbindung in den Unterricht eignen.

## **Literatur**

- Biehler, R. & Fleischer, Y. (2021). Introducing students to machine learning with decision trees using CODAP and Jupyter Notebooks. *Teaching Statistics*, 43, 133–142.
- Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
- Hofmann, S. & Frank, M. (im Druck). Teaching data science in school: Digital learning material on predictive text systems. In *Proceedings of the 12th CERME conference*.
- Schönbrodt, S. (2019). *Maschinelle Lernmethoden für Klassifizierungsprobleme – Perspektiven für die mathematische Modellierung mit Schülerinnen und Schülern*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-25137-6>
- Schönbrodt, S., Camminady, T. & Frank, M. (2022). Mathematische Grundlagen der Künstlichen Intelligenz im Schulunterricht. *Mathematische Semesterberichte*, 69, 73–101. <https://doi.org/10.1007/s00591-021-00310-x>
- Schüller, K., Koch, H. & Rampelt, F. (2021). Data-Literacy Charta. [www.stifterverband.org/sites/default/files/data-literacy-charta\\_v1\\_2.pdf](http://www.stifterverband.org/sites/default/files/data-literacy-charta_v1_2.pdf)