

# Chromatische Korrektur einer Elektronenstrahlführung für den Laser-Wakefield-Beschleuniger in Jena

DIPLOMARBEIT IM FACH PHYSIK

vorgelegt von

Bastian Härer

16. April 2013

durchgeführt am

LABORATORIUM FÜR APPLIKATIONEN  
DER SYNCHROTRONSTRAHLUNG

Referent: Prof. Dr. Tilo Baumbach

Koreferent: Prof. Dr. Willem de Boer

Betreuer: Dr. Axel Bernhard, Christina Widmann



Hiermit versichere ich, dass ich vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, noch nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und wörtliche sowie sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe.

Karlsruhe, den 16. April 2013

Bastian Härer



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vorstellung des Experiments</b>	<b>3</b>
2.1	Das Experiment . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>9</b>
3.1	Koordinatensystem . . . . .	9
3.2	Elemente der Strahlführung . . . . .	9
3.2.1	Dipolmagnete . . . . .	11
3.2.2	Quadrupole . . . . .	11
3.2.3	Sextupole . . . . .	13
3.2.4	Combined-Function-Magnete . . . . .	13
3.3	Lineare Strahldynamik . . . . .	15
3.3.1	Bewegungsgleichung und Matrixformalismus . . . . .	15
3.3.2	Teilchen mit Energieabweichung . . . . .	17
3.3.3	Strahldynamik im Phasenraum . . . . .	17
3.3.4	Statistische Berechnung der Emittanz und Twissparameter . . . . .	21
3.4	Nicht-lineare Strahldynamik . . . . .	22
3.5	MAD-X . . . . .	22
3.5.1	Strahlführungselemente . . . . .	23
3.5.2	Funktionen zur Berechnung der Strahlführung . . . . .	25
3.6	Die Downhill-Simplex-Methode . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Simulation der Strahlführung mit MAD-X</b>	<b>29</b>
4.1	Randbedingungen . . . . .	30
4.2	Die lineare Strahlführung in der Näherung dünner Linsen . . . . .	32
4.2.1	Berechnung mit Transfermatrizen . . . . .	32
4.2.2	Implementierung in MAD-X . . . . .	34
4.2.3	Berechnung der Twissparameter mit Hilfe von Tracking . . . . .	36
4.3	Chromatische Korrektur mit <i>Combined-Function-Magneten</i> . . . . .	38
4.4	Berechnung der Strahlführung mit dicken Linsen . . . . .	40

4.5	Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken . . . . .	41
4.5.1	Optimierung mit gleicher Gewichtung aller Zielparameter . . . . .	43
4.5.2	Variation der Zielfunktion . . . . .	45
4.6	Separate Optimierung der Multipolstärken . . . . .	50
4.6.1	Optimierung der Sextupolstärken . . . . .	50
4.6.2	Iterative Optimierung von Sextupol- und Quadrupolstärken . . . . .	52
4.7	Analyse des Phasenraums und des Strahlprofils . . . . .	57
4.8	Transversal verschobene Sextupole . . . . .	64
4.8.1	Beurteilung der bereits optimierten Strahlführungen . . . . .	64
4.8.2	Berechnung der Strahlführung mit transversal verschobenen Sextu- polen . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>71</b>

# 1 Einleitung

Synchrotronstrahlung ist auf Grund ihres breiten Spektrums, ihrer Polarisierung und ihrer Zeitstruktur für eine Vielzahl von bildgebenden, spektroskopischen Verfahren und Beugungsmethoden nutzbar. Dies macht sie für sehr viele Anwendungsbereiche in der Festkörperphysik, Molekularbiologie, Materialwissenschaften oder Medizin äußerst interessant. Zur Erzeugung von Synchrotronstrahlung sind bislang große und teure Beschleunigeranlagen wie zum Beispiel Synchrotrons oder Freie-Elektronen-Laser notwendig. Daher wird an neuen Technologien für günstigere und kompaktere Strahlungsquellen geforscht. Eine dieser Technologien ist die Laser-Wakefield-Beschleunigung. Dabei wird von einem hochintensiven Laserpuls eine Plasmawelle angeregt, in die Elektronen injiziert werden. Die elektrischen Felder der Plasmawelle erreichen die Größenordnung von mehreren Hundert Gigavolt, wodurch die Elektronen innerhalb weniger Millimeter auf mehrere Hundert Megaelektronenvolt beschleunigt werden können [SCH10]. Dies entspricht einer 10000-fachen Steigerung des Beschleunigungsgradienten von 10 MV/m bei konventionellen Beschleunigern auf 100 GV/m [ESA09]. Der Nachteil dieser Technologie ist die Energiebandbreite der beschleunigten Elektronen im Bereich einiger Prozent. Außerdem beruht die Beschleunigung auf unterschiedlichsten nichtlinearen Effekten, wodurch die Energievariation der Elektronen von Bunch zu Bunch ebenfalls sehr groß ist. Aus diesem Grund müssen die Techniken zur sekundären Strahlungserzeugung und zur Strahlführung an diesen Sachverhalt angepasst werden. Ein Kooperationsprojekt des Karlsruher Instituts für Technologie mit der Friedrich-Schiller-Universität in Jena hat genau dieses Ziel: Die schmale Linienbreite eines Undulators soll durch die Anpassung der Magnetfeldamplitude an die Energie der Elektronen erreicht werden. Dazu wird ein Undulator entwickelt, der einen transversalen Gradienten in der Magnetfeldamplitude aufweist. Die Elektronen passieren den Undulator in energieabhängigem Abstand zum Undulatorzentrum, wodurch Magnetfeldamplitude und Energie aufeinander abgestimmt werden können. Dieses Prinzip zur Erzeugung monochromatischer Strahlung soll in einem Demonstrationsexperiment gezeigt werden.

Durch die große Energiebandbreite und die hohe Divergenz des Laser-Wakefield-Beschleunigers werden spezielle Anforderungen an die Strahlführung der Elektronen gestellt. Sie muss Elektronen einer großen Energiebandbreite transportieren und deren Divergenz kompensieren. Bei der hierfür notwendigen Fokussierung sind große chromatische Fehler zu erwarten.

Diese Arbeit untersucht den Einfluss chromatischer Fehler auf die Strahlführung und deren Korrektur. Hierfür wird die Strahlführung vom Laser-Wakefield-Beschleuniger zum Undulator in MAD-X implementiert. MAD-X ist ein vom CERN entwickeltes Programm zur Berechnung von Magnetooptiken für Beschleuniger. Das Ziel der Arbeit ist, die chromatische Korrektur zu optimieren, um gleiche Strahleigenschaften für Elektronen mit der Designenergie und  $\pm 10\%$  Energieabweichung zu erreichen.

Im folgenden Kapitel werden das Experiment und seine Komponenten vorgestellt. Nach einer allgemeinen Beschreibung der Laser-Wakefield-Beschleunigung und eines Undulators wird die Funktionsweise der Dipolschikane und des zylindrischen Undulators erläutert. Das dritte Kapitel gibt eine kurze Einführung in die für die Arbeit relevanten Grundlagen. Das Koordinatensystem und die Strahlführungselemente werden vorgestellt, bevor auf die lineare Strahldynamik und MAD-X eingegangen wird. Das vierte Kapitel beginnt mit einem Überblick über die Rahmenbedingungen am Anfang und am Ende der Strahlführung, bevor die chromatischen Fehler der Strahlführung und die Korrektur in der Näherung dünner Linsen vorgestellt werden. Anschließend werden die Optimierungen der chromatischen Korrektur mit ihren Ergebnissen präsentiert, wobei die Strahlführung mit Magneten realer Länge simuliert wird. Nach der Analyse des Phasenraums und des Strahlprofils wird die Strahlführung mit transversal verschobenen Sextupolen implementiert, wie sie im Experiment realisiert werden soll.

In der Arbeit wird gezeigt, dass die chromatische Korrektur im Idealfall mit kombinierten Quadrupol-Sextupol-Magneten erreicht werden kann. Erste Schritte in Richtung technische Realisierung werden untersucht, erlauben zwar keine abschließende Beurteilung, sind aber eine gute Basis für weitere Untersuchungen.

## 2 Vorstellung des Experiments

Moderne Synchrotronquellen wie Speicherringe oder Freie-Elektronen-Laser sind große Maschinen, die sehr teuer in Bau und Unterhalt sind. Zur Reduzierung von Platz und Investitionskosten ist daher die Entwicklung kompakterer Strahlungsquellen attraktiv. Das Laboratorium für Applikationen der Synchrotronstrahlung (LAS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) arbeitet zusammen mit der Friedrich-Schiller-Universität in Jena an der Entwicklung einer solchen Quelle, bei der ein Undulator mit Bunchen aus einem Laser-Wakefield-Beschleuniger betrieben werden soll. Für ein besseres Verständnis des Experiments folgt zunächst eine kurze Einführung zur Laser-Wakefield-Beschleunigung und zur Strahlungserzeugung mit Undulatoren.

**Laser-Wakefield-Beschleunigung** In einem Laser-Wakefield-Beschleuniger werden Elektronen mit Hilfe eines Hochleistungslasers beschleunigt. Dies sind meist gepulste Ti:Sa-Laser mit Spitzenleistungen in der Größenordnung von 10 bis 100 TW bei der Pulsdauer  $\tau_L$  im Bereich von 30 fs. Die hohen, rein transversalen elektrischen Felder des Lasers können nicht direkt zur Beschleunigung eingesetzt werden. Stattdessen werden die Laserpulse auf Helium- oder Wasserstoffgas fokussiert, in dem sie ein Plasma erzeugen. Im Plasma werden die Elektronen durch die ponderomotorische Kraft vom Laserpuls verdrängt, während die positiven Ionenrümpfe zurückbleiben. Dies führt zur Anregung einer Plasmawelle mit der Plasmawellenlänge  $\lambda_p \approx \frac{2\pi c}{\omega_p}$  und der Plasmafrequenz  $\omega_p$  [SCH10], die dem Laserpuls nachfolgt. Die Anregung der Plasmawelle ist besonders effizient, wenn der Laserpuls in die erste Hälfte einer Wellenperiode passt. Das führt zu der Resonanzbedingung für Pulsdauer  $\tau_L$  und Plasmawellenlänge  $\omega_p$  von [SCH10]

$$\omega_p \cdot \tau_L = \pi. \quad (2.1)$$

Mit zunehmender Laserintensität steigt die Amplitude an und die Welle wird immer anharmonischer bis ein Regime erreicht wird, in dem die Welle bricht. Dabei verlieren die Elektronen die Bindung an die Plasmawelle und gelangen in den elektronenfreien Bereich, in dem sehr starke positive Felder herrschen. Diese Felder beschleunigen die Elektronen.

Die Beschleunigungsgradienten bei der Laser-Wakefield-Beschleunigung erreichen Werte von einigen 100 GV/m [ESA09]. Gegenüber konventionellen Beschleunigern mit Beschleunigungsgradienten in der Größenordnung von 10 MV/m entspricht das einer 10000-fachen

Steigerung. Elektronen können daher innerhalb von wenigen Millimetern auf Energien im Bereich von  $\sim 100$  MeV beschleunigt werden. Dadurch sind Laser-Wakefield-Beschleuniger sehr kompakt sind. Da die Elektronen innerhalb der Plasmawelle beschleunigt werden, sind die Bunche kürzer als die Plasmawellenlänge also in der Größenordnung von wenigen Mikrometern.

Die Nachteile von Laser-Wakefield-Beschleunigern sind die Divergenz im Bereich von einigen Milliradian und die große Energiebandbreite der Elektronen von einigen Prozent. Wegen Intensitätsschwankungen des Lasers und der nichtlinearen Prozesse bei der Erzeugung der Plasmawelle und beim Wellenbrechen sind die Bedingungen außerdem nicht für jeden Laserpuls gleich. Trotz deutlicher Verbesserungen in den letzten Jahren sind die Parameter dadurch nicht so stabil wie bei konventionellen Beschleunigern, was zusätzliche Herausforderungen bei zukünftigen Anwendungen darstellt.

**Der Undulator** In modernen Synchrotronstrahlungsquellen wird durch den Einbau spezieller Magnetstrukturen eine Mehrfachablenkung der Elektronen erreicht, die zur Erzeugung besonders intensiver Synchrotronstrahlung und zur Veränderung des emittierten Spektrums führt. Diese Magnetstrukturen werden allgemein *Insertion Devices* genannt.

Der Undulator ist eines dieser Insertion Devices. Er besteht aus einer periodischen Magnetstruktur, die die Elektronen auf eine annähernd sinusförmige Bahn zwingt und dadurch zur Abstrahlung anregt. Die Periodenlänge des Undulators wird mit  $\lambda_u$  und die maximale Magnetfeldamplitude mit  $B_0$  beschrieben. Ein Undulator zeichnet sich durch ein schwach moduliertes Magnetfeld und kleine Ablenkwinkel  $\psi$  zur Strahlachse aus, der Undulatorparameter  $K_u = \frac{e}{2\pi m_0 c} \lambda_u B_0 \approx \gamma \cdot \psi_{\max}$  hat etwa den Wert Eins. Der daraus resultierende Überlapp der Strahlungskegel führt zu einer teilkohärenten Überlagerung und konstruktiver Interferenz für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2} \left( 1 + \frac{K_u^2}{2} \right). \quad (2.2)$$

Gleichung (2.2) ist die sogenannte *Undulatorgleichung* [HOF04]. Die Wellenlänge der vom Undulator emittierten Strahlung kann folglich über drei Größen variiert werden:

1. die Energie der Elektronen, die über den relativistischen Faktor  $\gamma$  eingeht,
2. die Magnetfeldamplitude  $B_0$  des Undulator und
3. die Periodenlänge  $\lambda_u$  des Undulators. Sie kann allerdings nur beim Design des Undulators verändert werden und bleibt dann fest.

Das Spektrum des Undulators ist wegen der konstruktiven Interferenz für die durch (2.2) gegebene Wellenlänge  $\lambda$  quasimonochromatisch. Die natürliche Linienbreite hängt von der

## 2.1. DAS EXPERIMENT

Anzahl der Perioden  $N$  des Undulators ab [HOF04]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N} \quad (2.3)$$

Die konstruktive Interferenz führt außerdem zu einer Verstärkung der Strahlungsintensität. Der Photonenfluss ist proportional zum Quadrat der Periodenanzahl  $N$  [HOF04].

## 2.1 Das Experiment

In dem Kooperationsprojekt des Laboratoriums für Applikationen der Synchrotronstrahlung (LAS) mit der Friedrich-Schiller-Universität in Jena werden die notwendige Technik und die Physik einer kompakten Strahlungsquelle untersucht. Das Ziel ist, in einem Demonstrationsexperiment zu zeigen, dass mit einem Laser-Wakefield-Beschleuniger monochromatische Undulatorstrahlung erzeugt werden kann. Im Gegensatz zu bisherigen Experimenten [FUC09] soll die Energie der Elektronen nicht mit einem Energiefilter festgelegt, sondern eine große Energiebandbreite genutzt werden.

In einem planaren Undulator ist die maximale Magnetfeldamplitude  $B_0$  transversal homogen. Wird ein solcher Undulator mit einem Laser-Wakefield-Beschleuniger kombiniert, so wirkt sich die Energiebandbreite der Elektronen nach der Undulatorgleichung (2.2) negativ auf Linienbreite der Undulatorstrahlung aus. Die Erzeugung monochromatischer Strahlung ist nicht möglich. Um dies zu umgehen, soll die Magnetfeldamplitude des Undulators an die Energie der Elektronen angepasst werden. Hierfür wird ein zylindrischer Undulator eingesetzt, dessen Magnetfeldamplitude einen Gradienten in der transversalen  $x$ -Richtung aufweist. Der vom Laser-Wakefield-Beschleuniger erzeugte Elektronenstrahl soll in  $x$ -Richtung aufgespalten und die Elektronen nach ihrer Energie sortiert werden. Die Elektronen passieren den Undulator dann in energieabhängigem Abstand zum Undulatorzentrum, wobei sie je nach Abstand eine andere Magnetfeldamplitude spüren (vgl. Abbildung 2.1). Die modifizierte Undulatorgleichung

$$\lambda = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2(x)} \left( 1 + \frac{K_u^2(x)}{2} \right) = const. \quad \text{mit} \quad K_u = \frac{e}{2\pi m_0 c} \lambda_u B_0(x) \quad (2.4)$$

zeigt, dass Magnetfeldamplitude und Energie der Elektronen so aufeinander abgestimmt werden können, dass die Erzeugung monochromatischer Strahlung möglich wird.

Die Anpassung der Magnetfeldamplitude an Elektronen der Energie von  $120 \text{ MeV} \pm 10\%$  ist in Abbildung 2.2 (a) gezeigt. Dargestellt sind die mit zunehmendem Abstand abnehmende Magnetfeldamplitude sowie die für eine konstante Wellenlänge notwendigen Magnetfeldwerte innerhalb des Energieintervalls. Bei Abständen von etwa 4,5-9 mm vom Zentrum des Undulators stimmen die Werte sehr gut überein. Abbildung 2.2 (b) zeigt,

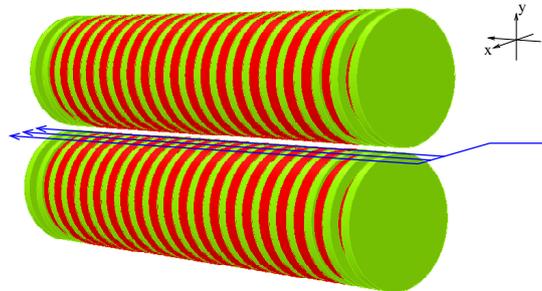


Abbildung 2.1: Die Verwendung eines zylindrischen Undulators ermöglicht die Anpassung der Magnetfeldamplitude an die Energie der Elektronen durch den unterschiedlichen Abstand zum Undulatorzentrum [Abbildung von P. Peiffer].

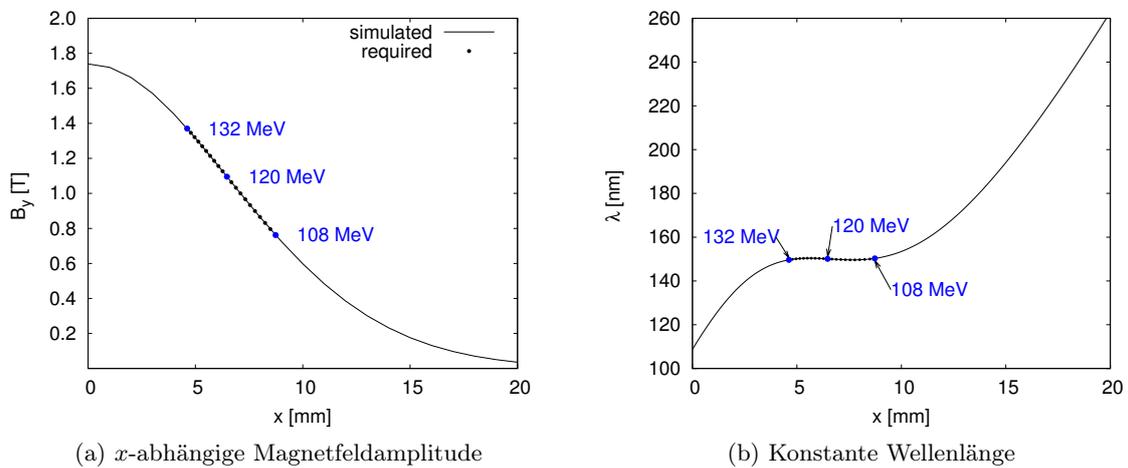


Abbildung 2.2: Durch die Aufspaltung der Elektronen nach ihrer Energie kann die Magnetfeldamplitude an die Energie der Elektronen angepasst werden. In einem bestimmten Bereich ist eine konstante Wellenlänge für die Elektronen erreichbar [Abbildungen von V. Afonso Rodriguez].

## 2.1. DAS EXPERIMENT

dass die emittierten Wellenlängen annähernd konstant sind. Das Ziel ist eine Bandbreite von  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{N}$ , womit die Schwankung der zentralen Wellenlänge auf Grund der Energiebandbreite des Laser-Wakefield-Beschleunigers kleiner als die natürliche Linienbreite des Undulators wäre.

Das Layout des Demonstrationsexperimentes ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Beschleunigung der Elektronen findet mit dem Laser-Wakefield-Beschleuniger am TiSa-Laser JETI in Jena statt. Das Experiment ist für eine Energie von 120 MeV und eine Energiebandbreite von  $\pm 10\%$  ausgelegt. Die Aufspaltung der Elektronen wird in einer Schikane aus zwei Dipolmagneten erreicht. Im ersten Dipol werden die Elektronen abhängig von ihrer Energie unterschiedlich stark abgelenkt, der zweite kollimiert sie wieder. Nach der Schikane passieren die Elektronen in ihrer Energie angepasstem Abstand den Undulator und emittieren monochromatische Strahlung. Der supraleitende Undulator ist einen Meter lang und hat 100 Perioden. Er erzeugt Vakuum-UV-Strahlung mit der Wellenlänge 150 nm. Am Ausgang des Undulators sollen sowohl die Elektronenbunche als auch die Undulatorstrahlung räumlich und spektral untersucht werden.

Neben der Aufspaltung und Sortierung der Elektronen nach ihrer Energie hat die Strahlführung der Schikane eine weitere Aufgabe: Für eine effiziente Strahlungserzeugung muss der Elektronenstrahl bestimmte Strahlparameter erfüllen, die vom Undulator festgelegt werden: Die Strahlen sollen im Wesentlichen klein und leicht konvergent sein. Für den Erhalt der Linienbreite ist auf Grund des Magnetfeldgradienten und Gleichung (2.4) in  $x$ -Richtung eine maximale Strahlgröße von 0,09 mm erlaubt.

Die Strahlführung für dieses Experiment gestaltet sich als schwierig, da divergente Elektronen mit großer Energiebandbreite unter kontrollierten Bedingungen zu einem Undulator geführt werden sollen, der durch seine Geometrie sehr genaue Forderungen an die Strahlparameter stellt. Für diesen Strahltransport sind sehr starke fokussierende Magnete notwendig, deren Wirkung von der Energie der Elektronen abhängt und für eine gleichmäßige Fokussierung korrigiert werden muss. Das Design einer solchen Strahlführung ist bisher einzigartig und daher eine interessante wissenschaftliche Herausforderung.

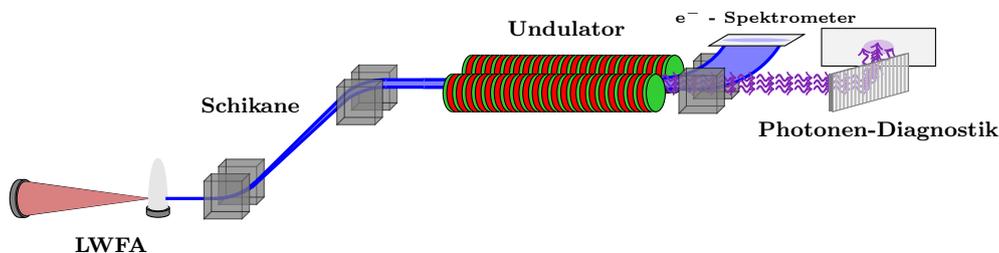


Abbildung 2.3: Aufbau des Demonstrationsexperimentes [Abbildung von C. Widmann]

## 2.1. DAS EXPERIMENT

# 3 Grundlagen

## 3.1 Koordinatensystem

In der Beschleunigerphysik wird gewöhnlich das krummlinige rechtshändige Frenet-Serret-Koordinatensystem verwendet, das in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Es bewegt sich mit dem Referenzteilchen mit, das sich stets im Ursprung befindet. Das Referenzteilchen hat die Designenergie des Beschleunigers und beschreibt die sogenannte Solltrajektorie. Die Koordinate  $s$  zeigt tangential zur momentanen Bewegungsrichtung, die  $x$ - und  $y$ -Achse stehen senkrecht zur Bewegungsrichtung und beschreiben die Position des beobachteten Teilchens auf der Trajektorie  $\sigma$ .  $x$  gibt die Ablage von der Solltrajektorie in der Ablenkebene an,  $y$  die Ablage senkrecht zur Ablenkebene.

## 3.2 Elemente der Strahlführung

In diesem Abschnitt werden die Elemente beschrieben, die für den Strahltransport vom Laser-Wakefield-Beschleuniger zum Undulator eingesetzt werden. Nach einer kurzen Einführung zur Strahlführung allgemein wird jedes Element einzeln vorgestellt.

Die Führung elektrisch geladener Teilchen entlang eines vordefinierten Pfades erfolgt mit magnetischen Feldern. In solchen wirkt auf die Teilchen die Lorentzkraft, die stets senkrecht zur Bewegungsrichtung und somit als Zentripetalkraft wirkt. Dies wird mit der Gleichung

$$\gamma m v^2 \vec{\kappa} + e[\vec{v} \times \vec{B}] = 0 \quad (3.1)$$

beschrieben.  $\vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, 0)$  ist der lokale Krümmungsvektor der Trajektorie mit

$$\kappa_{x,y} = \frac{1}{\rho_{x,y}}. \quad (3.2)$$

und dem Krümmungsradius der Kreisbahn  $\rho$  [WIE07].

Die Strahlführungsmagnete, die für die Erzeugung der Magnetfelder eingesetzt werden, sind in dem Bereich, der vom Teilchenstrahl durchquert wird, materiefrei, sodass die Teilchen weder absorbiert noch gestreut werden. Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  aus Gleichung (3.1) kann deshalb lokal als Ableitung einer skalaren Potentialfunktion  $V$  dargestellt werden, die eine Lösung der freien Laplace-Gleichung  $\Delta V \equiv 0$  ist [JAC99]. Die Potentialfunk-

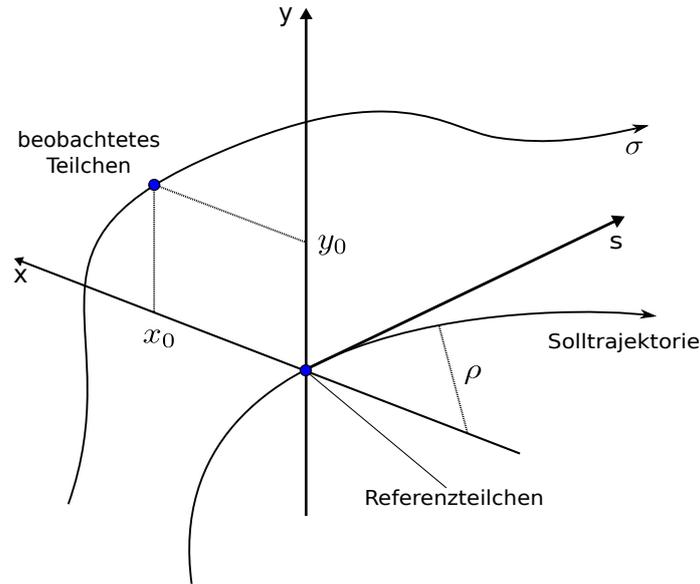


Abbildung 3.1: Frenet-Serret-Koordinatensystem nach H. Wiedemann, „Particle Accelerator Physics“ [WIE07]

Tabelle 3.1: Potentiale der drei niedrigsten senkrechten Multipolkomponenten

Dipol:	$-\frac{e}{p}V_1 = \kappa_x y$
Quadrupol:	$-\frac{e}{p}V_2 = kxy$
Sextupol:	$-\frac{e}{p}V_3 = \frac{1}{6}m(3x^2y - y^3)$

tion kann in eine Summe aus Multipolen entwickelt werden. Dies wird z.B. in „Particle Accelerator Physics“ von Helmut Wiedemann [WIE07] gezeigt. Die realen und die imaginären Terme der Entwicklung bilden zwei linear unabhängige Lösungen der Laplacegleichung. Die Felder der imaginären Lösung werden senkrecht orientiert genannt, die der realen Lösung heißen rotiert. In „normalen“ Beschleunigern werden die senkrecht orientierten Multipole verwendet. Sie erfüllen die Symmetriebedingung  $\text{Im}V_n(x, y) = -\text{Im}V_n(x, -y)$ , wodurch die Dynamik in  $x$ - und  $y$ -Richtung in den Mittelebenen entkoppelt ist [WIE07]. Die rotierten Felder werden in dieser Arbeit nicht näher behandelt. Ihre Komponenten liefern z.B. Beiträge bei der Berechnung von Aufstellungsfehlern [WIE07], die durch Rotation der Magneten in der  $xy$ -Ebene entstehen, oder werden gezielt eingesetzt, um Kopplung in den transversalen Richtungen zu erzeugen.

Die ersten drei Multipolpotentiale der imaginären Lösung sind in Tabelle 3.1 aufgelistet.  $\kappa_x$ ,  $k$  und  $m$  sind Koeffizienten aus der Multipolentwicklung und werden Multipolstärken genannt. Die magnetische Flussdichte der Multipole kann wegen  $\vec{B} = -\nabla V(x, y)$  durch Ableitung des Potentials berechnet werden. Das magnetische Feld entwickelt nach seinen

## 3.2. ELEMENTE DER STRAHLFÜHRUNG

Multipolen lautet damit

$$\begin{aligned}\frac{e}{p}B_x &= 0 + ky + mxy + \dots \\ \frac{e}{p}B_y &= \kappa_x + kx + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2) + \dots\end{aligned}\tag{3.3}$$

Jeder der Multipole hat in Bezug auf die Strahlführung eine bestimmte Funktion, die im Folgenden näher erläutert werden soll.

### 3.2.1 Dipolmagnete

Wegen des Verbots magnetischer Monopole durch die Maxwell'schen Gleichungen ist der erste magnetische Multipolterm der Dipol. Sein Potential ist in  $x$ -Richtung konstant, sein Magnetfeld ist homogen und zeigt in  $y$ -Richtung. Bei der Konstruktion von eisendominierten Magneten ist zu beachten, dass ferromagnetische Oberflächen Äquipotentialflächen für magnetische Felder sind [WIE07]. Um Magnete einer bestimmte Multipolordnung zu bauen, muss die Polform den Äquipotentialflächen des Multipols entsprechen. Aus diesem Grund wird ein Dipol aus zwei flachen, parallel gegenüber liegenden Polen im Abstand  $d$  konstruiert, die durch ein Eisenjoch miteinander verbunden sind. Um die Pole sind Spulen angebracht, deren Strom das Magnetfeld induziert [WIL96].

Wegen des homogenen Magnetfeldes werden die Strahlteilchen von einem Dipol kreisförmig in der  $xs$ -Ebene abgelenkt. Dipole werden in Strahlführungen verwendet, um die Bewegungsrichtung des Strahls um einen bestimmten Winkel zu verändern. Der Radius der Kreisbahn  $\rho$  kann unter Verwendung des relativistischen Impulses  $p = \gamma mv$  aus Gleichung (3.1) berechnet werden und ist

$$\frac{1}{\rho} = \kappa_x = \frac{e}{p} \cdot B.\tag{3.4}$$

Im Falle großer Ablenkradien, d.h. wenn der Dipol nur einen kleinen Kreisbogen ausfüllt, ist der Ablenkwinkel

$$\varphi \approx \sin \alpha = \frac{l}{\rho}.\tag{3.5}$$

Aus den Gleichungen (3.4) und (3.5) folgt, dass der Ablenkradius und damit auch der Ablenkwinkel vom Impuls abhängt. Genau dieser Sachverhalt wird in der Schikane zur Aufspaltung der Elektronen nach ihrer Energie genutzt.

### 3.2.2 Quadrupole

Der zweite Multipolterm  $-\frac{e}{p}V_2 = kxy$  beschreibt einen Quadrupol. Er besteht aus vier Polen, die im Winkel von je  $90^\circ$  angeordnet und abwechselnd gepolt sind. Die Äquipotentiallinien sind hyperbelförmig, das heißt die von den Spulen umschlossenen Pole haben ebenfalls eine hyperbolische Kontur [TUR94].

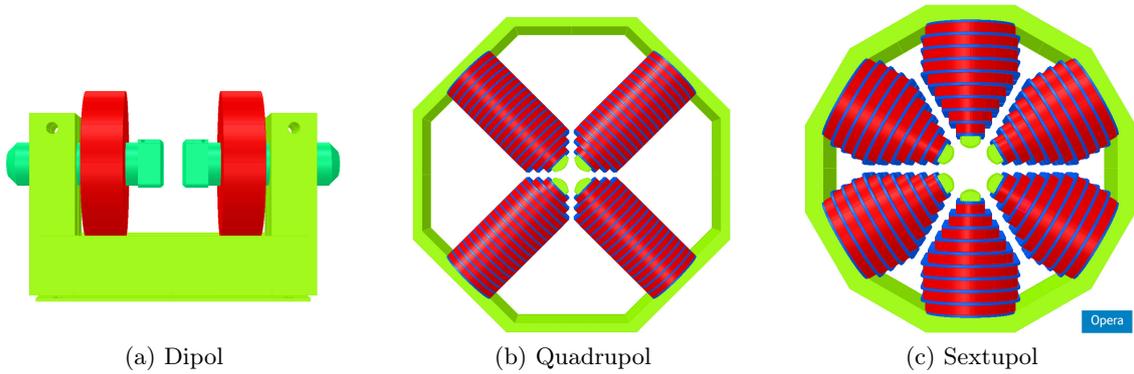


Abbildung 3.2: Diese Darstellungen zeigen Modelle der Magnete, die in der Strahlführung verwendet werden sollen [WER13]. In grün sind jeweils Pole und Eisenjoch dargestellt, die Spulen sind rot.

Der magnetische Fluss  $B$  steigt mit zunehmendem Abstand von der Strahlachse linear an.

$$\frac{e}{p} B_x = ky \quad (3.6)$$

$$\frac{e}{p} B_y = kx \quad (3.7)$$

Der Quadrupol hat damit die Eigenschaft einer Linse, deren Fokussierstärke durch die Quadrupolstärke  $k$  ausgedrückt wird. Die Quadrupolstärke ist abhängig vom Gradienten des magnetischen Flusses  $g$  und über den Impuls  $p$  von der Energie.

$$k = \frac{e}{p} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{e}{p} g \quad (3.8)$$

Zu beachten ist, dass die Quadrupolstärke in  $x$ - und  $y$ -Richtung ein unterschiedliches Vorzeichen hat. Der Quadrupol ist damit in einer Ebene fokussierend und in der anderen defokussierend. Für eine insgesamt fokussierende Strahlführung ist ein System aus Quadrupolen mit alternierenden Quadrupolstärken notwendig.

In Analogie zur geometrischen Optik kann der Quadrupol als dünne Linse betrachtet werden. Der Punkt, an dem alle parallelen Teilstrahlen vereinigt werden, wird Brennpunkt genannt. Der Abstand zwischen Brennpunkt und Zentrum des Quadrupols heißt Brennweite  $f$  und kann aus Quadrupolstärke  $k$  und Länge des Quadrupols  $l$  berechnet werden [WIE07].

$$f = 1/kl \quad (3.9)$$

Voraussetzung für diese Betrachtung ist, dass die Brennweite viel größer als die Pollänge ist.

## 3.2. ELEMENTE DER STRAHLFÜHRUNG

Der Gradient des Magnetfeldes  $g$  ist für eine konstante Bestromung des Magneten konstant. Weicht die Energie der Strahlteilchen voneinander ab, werden sie unterschiedlich stark fokussiert. Teilchen mit höherer Energie werden schwächer fokussiert als solche mit geringerer Energie. Diese Verschiebungen des Brennpunktes mit der Energie wird in Anlehnung an die Lichtoptik als chromatischer Fehler bezeichnet.

### 3.2.3 Sextupole

Es liegt nahe, die durch Quadrupole hervorgerufenen chromatischen Fehler mit der nächst höheren Multipolkomponente  $-\frac{e}{p}V_3 = \frac{1}{6}m(3x^2y - y^3)$  zu korrigieren. Der zugehörige Magnet ist der Sextupol mit dem magnetischen Fluss

$$\frac{e}{p}B_x = mxy \quad (3.10)$$

$$\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}m(x^2 - y^2). \quad (3.11)$$

$m$  ist hierbei die Sextupolstärke mit

$$m = \frac{e}{p} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \frac{e}{p} s. \quad (3.12)$$

Ein Sextupol besteht aus sechs abwechselnd gepolten Polen, die im Winkel von je  $60^\circ$  angeordnet sind. Er hat entlang der x-Achse einen quadratischen Feldverlauf. Wie die Quadrupolstärke ist sie von der Energie der Teilchen abhängig. Für  $x > 0$  haben Sextupole eine zusätzliche defokussierende Komponente und für  $x < 0$  eine zusätzliche fokussierende Komponente. In einem dispersiv aufgespaltenen Strahl können sie daher zur Korrektur chromatischer Fehler eingesetzt und auf diese Weise die Brennweiten wieder angeglichen werden. Betrachtungen der Ablenkwinkel für verschiedene Energien haben gezeigt [LAS11], dass die chromatische Korrektur in Näherung dann gegeben ist, wenn

$$s = 2 \cdot \frac{g}{D}, \quad (3.13)$$

also wenn die Sextupolkomponente  $s$  dem doppelten Quotienten aus Quadrupolkomponente  $g$  und der Dispersionsfunktion  $D$  (siehe Kapitel 3.3.2) entspricht.

### 3.2.4 Combined-Function-Magnete

Simulationen der linearen Strahlführung haben gezeigt, dass die Quadrupolstärken sehr groß sind [LAS11]. Zusammen mit der Energiebandbreite von  $120 \text{ MeV} \pm 10\%$  sind daher sehr große chromatische Fehler zu erwarten, die entsprechend starke Sextupole zur Korrektur erfordern. Um die Auswirkungen der chromatischen Fehler auf den Strahl gering zu halten, ist es sinnvoll die Fehler direkt an ihrem Ursprungsort zu korrigieren. Aus diesem

Grund werden in die Strahlführung *Combined-Function*-Magnete eingebaut. *Combined-Function*-Magnete sind Magnete, deren Magnetfeld anders als bei den bisher beschriebenen Magneten nicht aus einer einzelnen sondern aus mehreren Multipolkomponenten besteht. Die Verwendung von *Combined-Function*-Magneten erschwert die unabhängige Einstellung des Verhältnisses der Magnetstärken zueinander, ist im Hinblick auf die begrenzte Länge der Strahlführung aber erforderlich.

*Combined-Function*-Magnete können auf verschiedene Weise gebaut werden. Werden Magnete mit Eisenpolen verwendet, so ist die einfachste Möglichkeit, deren Form und somit die Form der Äquipotentialflächen zu verändern, was das Verhältnis der Multipolkomponenten zueinander eindeutig festlegt. Numerische Berechnungen haben ergeben, dass die Abweichung der Äquipotentialflächen der für die Strahlführung der Schikane benötigten *Combined-Function*-Magnete zu denen von reinen Sextupolen unterhalb der möglichen Fertigungsgenauigkeit liegt [WER13]. Grund dafür ist das hohe Sextupol-Quadrupol-Verhältnis von 60:1 (Ergebnis der Strahlführungsberechnung mit Matrizen und Gleichung (3.13)). Deshalb sollen die Magnete mit starken Sextupolen realisiert werden, die transversal in x-Richtung verschoben werden.

**Transversal verschobene Sextupole** Mit einer Verschiebung von  $x_v$  ergeben sich die magnetischen Flussdichten der verschobenen Sextupole zu

$$\begin{aligned}
 B_x \rightarrow B_{xv} &= s(x - x_v)y \\
 &= \underbrace{sxy}_{\text{Sextupol}} - \underbrace{sx_v \cdot y}_{\text{Quadrupol}} \\
 B_y \rightarrow B_{yv} &= \frac{1}{2}s((x - x_v)^2 - y^2) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}s(x^2 - y^2)}_{\text{Sextupol}} - \underbrace{sx_v \cdot x}_{\text{Quadrupol}} + \underbrace{\frac{1}{2}sx_v^2}_{\text{Dipol}}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Verschiebung des Sextupols erzeugt Komponenten niedrigerer Multipolordnungen. Für die  $x$ -Komponente kommt ein Quadrupolterm hinzu, für die  $y$ -Komponente ein Quadrupol- und ein Dipolterm. Im Experiment wird die Stärke des Sextupols durch die Bestromung der Spulen und die Quadrupolkomponente durch Verschiebung in  $x$ -Richtung  $x_v$  eingestellt. Diese kann aus dem Quadrupolterm berechnet werden.

$$x_v = \frac{g}{s} = \frac{k}{m} \tag{3.15}$$

Die zusätzliche Dipolkomponente kann einen störenden Einfluss auf den Strahl haben, der untersucht werden muss.

### 3.3 Lineare Strahldynamik

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Grundbegriffe der linearen Strahldynamik, die in der Arbeit zur Beschreibung des Teilchenstrahls verwendet werden.

Lineare Strahldynamik beschreibt das Verhalten eines Teilchenstrahls in Strahlführungen aus Dipolen, Quadrupolen und Driftstrecken, sogenannten linearen Strahloptiken. Eine solche Strahloptik wird linear genannt, weil nur Kräfte wirken, die entweder konstant sind oder mit transversalem Abstand vom Strahlzentrum linear zunehmen [WIL96]. Solange in der Strahlführung nur senkrechte Dipole und Quadrupole eingebaut sind, kann die Kopplung in  $x$ - und  $y$ -Richtung vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung kann dann für beide transversalen Richtungen getrennt aufgestellt und gelöst werden.

#### 3.3.1 Bewegungsgleichung und Matrixformalismus

Die Bewegungsgleichung für die transversale Dynamik eines geladenen Teilchens im Magnetfeld folgt aus der Lorentzkraft mit der paraxialen Näherung. Diese Näherung geht von einem kleinen Verhältnis von transversalem zu longitudinalem Impuls aus, das Teilchen bewegt sich also mit kleinem Winkel zur longitudinalen Achse. Nach der Umparametrisierung der Zeit zur longitudinalen Ortskoordinate  $s$  ist die Bewegungsgleichung in dem verwendeten Koordinatensystem die Differentialgleichung [BER13, WIL96]

$$u''(s) + K(s) u(s) = 0. \quad (3.16)$$

$u(s)$  steht für eine der transversalen Koordinaten  $x$  oder  $y$ , für die die Gleichung gleichermaßen gilt.  $K(s)$  enthält die transversalen Kräfte, die von den Dipolen und Quadrupolen ausgeübt werden. Diese sind gegeben durch die Magnetstärken der entlang der Solltrajektorie angeordneten Magneten. Bei Dipolen ist dies der reziproke Ablenkradius  $\kappa$  und bei Quadrupolen die Quadrupolstärke  $k$ . Die Ablage des Teilchens und die transversalen Kräfte sind abhängig von der longitudinalen Koordinate  $s$ . Aufgrund der ungleichmäßig verteilten, ortsabhängigen Magnetfelder ist es unmöglich eine globale Lösung der Gleichung zu finden. Die Annahme stückweise konstanter Magnetstärken führt zu stückweise konstanten Werten von  $K$  und ermöglicht eine analytische Berechnung von Teillösungen in den einzelnen Bereichen. Dieses Modell wird *hard-edge-model* oder *Rechteckmodell* genannt. Die allgemeinen Lösungen der Bewegungsgleichung (3.16) haben dann trigonometrische Form [WIE07]:

$$C(s) = \cos(\sqrt{K}s) \quad \text{und} \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}s) \quad \text{für } K > 0 \quad (3.17)$$

$$C(s) = \cosh(\sqrt{|K|}s) \quad \text{und} \quad S(s) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|}s) \quad \text{für } K < 0 \quad (3.18)$$

Sie sind linear unabhängig und erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} C(0) &= 1, & C'(0) &= \frac{dC}{ds} = 0 \\ S(0) &= 0, & S'(0) &= \frac{dS}{ds} = 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Eine beliebige Lösung  $u(s)$  kann als Linearkombination der allgemeinen Lösungen geschrieben werden

$$\begin{aligned} u(s) &= C(s)u_0 + S(s)u'_0 \\ u'(s) &= C'(s)u_0 + S'(s)u'_0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sind die Anfangsbedingungen  $u_0$  und  $u'_0$  bekannt, können Position und die Geschwindigkeit nach beliebiger Wegstrecke  $s$  berechnet werden. In Matrixschreibweise lauten die beiden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0(s) \\ u'_0(s) \end{bmatrix} = \mathcal{M} \cdot \mathbf{U}_0. \quad (3.21)$$

Dies entspricht einer Transformation des Anfangszustandes mit Hilfe einer Transfermatrix. Jedem Strahlführungselement und jeder Driftstrecke kann eine solche Matrix zugewiesen werden. Sie wird unter Verwendung der entsprechenden Magnetstärke in den Ansätzen (3.18) aus der Matrix  $\mathcal{M}$  berechnet. Die Transfermatrizen für die einzelnen Strahlführungselemente sind z. B. in „Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen“ von K. Wille [WIL96] berechnet. Alle Transfermatrizen haben die Determinante Eins und sind symplektisch. Ein Matrix der Dimension  $(2n \times 2n)$  heißt symplektisch, wenn sie die Gleichung

$$\mathcal{M}^\dagger S \mathcal{M} = S \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

erfüllt [MUE01].  $\mathbb{1}$  ist die  $n$ -dimensionale Einheitsmatrix. Die Transformation durch eine symplektische Matrix ist längentreu und invertierbar. Das Produkt zweier symplektischer Matrizen ist ebenfalls symplektisch. Das hat zur Folge, dass durch Multiplikation der einzelnen Matrizen in entgegengesetzter Reihenfolge wie in der Strahlführung eine Transfermatrix für die gesamte Strahlführung berechnet werden kann.

Der Matrixformalismus ermöglicht die Berechnung der Teilchentrajektorien entlang der Strahlführung. Die Annahme stückweise konstanter Magnetfelder ist zwar eine Näherung, die abgesehen von der Kantenfokussierung von rechteckigen Dipolen keine Randfelder beim Übergang von Driftstrecke zu Magnet berücksichtigt, Vergleiche mit realen Strahlführungen ergeben für kleine Impulsabweichungen und kleine Strahldurchmesser im Allgemeinen aber eine gute Übereinstimmung [WIL96].

### 3.3. LINEARE STRAHLDYNAMIK

#### 3.3.2 Teilchen mit Energieabweichung

Teilchen mit dem Referenzimpuls  $p_0$  bewegen sich entlang der Referenztrajektorie, die von den Dipolen und den Driftstrecken festgelegt wird. Im Unterkapitel „Dipolmagnete“ wurde bereits erwähnt, dass die Ablenkung in den Dipolen vom Teilchenimpuls abhängt. Diese Abhängigkeit wird *Dispersion* genannt. Teilchen mit der Impulsabweichung  $\delta = (p - p_0)/p_0$  bewegen sich entlang einer von der Referenztrajektorie verschiedenen *Dispersionbahn*. Die Dispersionsfunktion  $D(s)$  bildet die Impulsabweichung auf die Ablage  $x_\delta$  der Dispersionsbahn von der Referenztrajektorie ab. Mit anderen Worten, ist die Dispersionsfunktion bekannt, kann die Ablage für jede Impulsabweichung in linearer Näherung berechnet werden:

$$x_\delta = D(s)\delta \quad (3.23)$$

Die Abweichung von der Referenztrajektorie durch die Dispersion addiert sich zu der Ablage  $x_0(s)$ :

$$x(s) = x_0(s) + x_\delta(s) = x_0(s) + \delta D(s) \quad (3.24)$$

Die Dispersion wird hauptsächlich in der Ablenkebene von den Dipolen generiert [BER12] und hängt für kleine Impulsabweichungen linear von deren Feldstärke ab [WIE07]. Diese Annahme wurde in der Herleitung der Gleichung (3.13) für die chromatische Korrektur der Quadrupole verwendet. Für nichtlineare Rechnungen z.B. mit Sextupolen müssen auch höhere Ordnungen berücksichtigt werden (siehe hierzu H. Wiedemann, „Particle Accelerator Physics“).

#### 3.3.3 Strahldynamik im Phasenraum

Der Matrixformalismus ermöglicht die Berechnung einzelner Teilchentrajektorien, gibt aber keine Auskunft über den Strahl als Kollektiv vieler Teilchen [WIL96]. Auf der Suche nach einer Beschreibung des kompletten Teilchenstrahls wird die Lösung der Bewegungsgleichung (3.16) zunächst über Variation der Konstanten berechnet. Der Ansatz gleicht dem für den harmonischen Oszillator, verfügt aber über eine  $s$ -abhängige Amplitude  $\sqrt{\beta(s)}$  und Phase  $\psi(s)$  [WIE07]:

$$u(s) = \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta(s)} \cos[\psi(s) - \psi_0] \quad (3.25)$$

Die Größen  $\epsilon$  und  $\psi_0$  sind Integrationskonstanten. Nach zweifacher Ableitung kann der Ansatz in die Bewegungsgleichung (3.16) eingesetzt werden. Eine für alle Phasen  $\psi$  gültige Lösung erfordert das separate Verschwinden der Vorfaktoren der Sinus- und Cosinusterme. Dies führt zu zwei Bedingungen:

$$\frac{1}{2}(\beta\beta'' - \frac{1}{2}\beta'^2) - \beta^2\psi'^2 + \beta^2 K(s) = 0 \quad (3.26)$$

### 3.3. LINEARE STRAHLDYNAMIK

$$\beta'\psi' + \beta\psi'' = 0 \quad (3.27)$$

Gleichung (3.27) kann sofort integriert werden, da  $\beta'\psi' + \beta\psi'' = (\beta\psi)'$ . Sie ist für

$$\beta\psi' = \text{const.} = 1 \quad (3.28)$$

erfüllt. Mit der Wahl des Wertes Eins für die Konstante wurde eine bestimmte Normierung für die Phasenfunktion  $\psi$  gewählt, welche durch erneute Integration berechnet werden kann.

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})} + \psi_0 \quad (3.29)$$

Wird Gleichung (3.28) in Gleichung (3.26) eingesetzt, so ergibt sich mit  $\alpha = -\frac{1}{2}\beta'$  und  $\gamma = (1 + \alpha^2)/\beta$  eine Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion  $\beta(s)$ :

$$\beta'' + 2k\beta - 2\gamma = 0 \quad (3.30)$$

Jede Lösung, die diese Gleichung erfüllt, macht den Ansatz (3.25) zusammen mit der Phasenfunktion  $\psi(s)$  zu einer realen Lösung der Bewegungsgleichung. Sie beschreibt die transversale Bewegung als eine Schwingung um die Solltrajektorie mit ortsabhängiger Amplitude und Frequenz, die *Betatronschwingung* genannt wird.

Um zu einer Beschreibung der Teilchenbewegung im Phasenraum zu gelangen, wird der Ansatz (3.25) nach  $\cos[\psi(s) - \psi_0]$  aufgelöst und in seine Ableitung eingesetzt (s. [WIL96]). Dies führt nach einigen Umformungen zu einer Bewegungskonstanten, der sogenannten *Courant-Snyder-Invariante*  $\epsilon$  [WIE07]:

$$\gamma u^2 + 2\alpha uu' + \beta u'^2 = \epsilon \quad (3.31)$$

Die Courant-Snyder-Invariante beschreibt die möglichen Bewegungszustände des Teilchens und hat die Form einer Ellipsengleichung mit der Ellipsenfläche  $\pi\epsilon$ . Die Exzentrizität und die Neigung der Ellipse sind durch die drei Funktionen

$$\beta(s) \quad (3.32)$$

$$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) \quad (3.33)$$

$$\gamma(s) = \frac{1 + \alpha^2(s)}{\beta(s)} \quad (3.34)$$

bestimmt (vergleiche hierzu Abbildung 3.3). Ihre ortsabhängigen Funktionswerte werden auch *Twissparameter* genannt. Zusammen mit der Phase

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{d\bar{s}}{\beta(\bar{s})} + \psi_0 \quad (3.35)$$

### 3.3. LINEARE STRAHLDYNAMIK

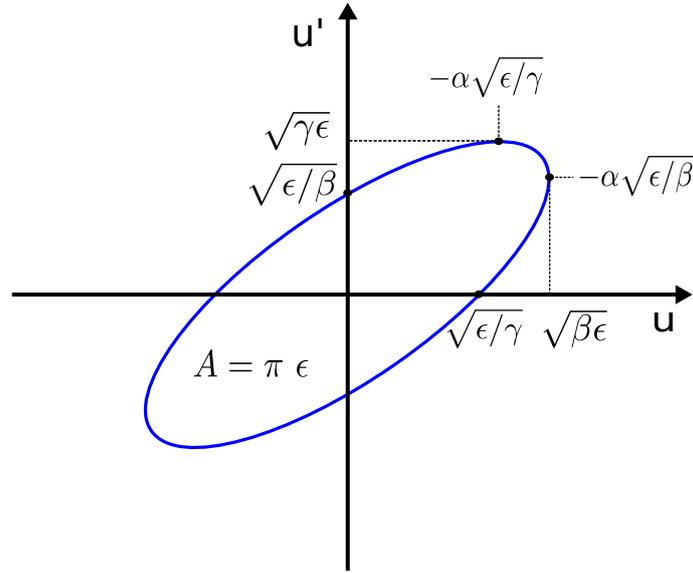


Abbildung 3.3: Größe und Form der Phasenraumellipse lassen sich in der linearen Strahldynamik durch die Twissparameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  und die Emittanz  $\epsilon$  beschreiben.

bilden sie die *Betatronfunktionen* [BER12].

**Emittanz** Die bisherigen Rechnungen beziehen sich immer noch auf ein einzelnes Strahlteilchen. Zur Beschreibung des gesamten Strahls wird dieser als Teilchendichte im Phasenraum  $(u, u')$  betrachtet. In der linearen Strahldynamik ist diese Teilchendichte ein Ensemble aus ähnlichen Systemen. Die von der Courant-Snyder-Invariante (3.31) beschriebenen Ellipsen haben an einer Stelle der Strahlführung für jedes Teilchen die gleiche Exzentrizität und Neigung, lediglich die Flächen der Ellipsen sind unterschiedlich und hängen von der Amplitude der Betatronschwingung ab. Abbildung 3.4 (a) zeigt das am Beispiel von drei Teilchen mit unterschiedlicher Schwingungsamplitude. Ein Teilchen mit Betatronschwingung kleinerer Amplitude bewegt sich auf einer kleineren Ellipse als eines mit größerer Schwingung [WIE07].

In einem konservativen System, das heißt in Abwesenheit von beschleunigenden Elementen und Abstrahlung von Synchrotronstrahlung, bleibt das von den möglichen Zuständen eines Teilchens eingeschlossene Phasenraumvolumen nach dem Liouvilleschen Theorem gleich. Dieses Phasenraumvolumen kann in linearen Systemen mit der Fläche der von (3.31) beschriebenen Ellipse identifiziert werden [BER13]. Dies hat zur Folge, dass sich die Form der Ellipse entlang der Strahlführung verändern kann, die Fläche aber konstant bleibt. Jedes Teilchen, das sich zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb der Ellipse befindet, wird diese später nicht verlassen haben. Aus diesem Grund genügt zur Beschreibung des kompletten Teilchenstrahls die Betrachtung des äußersten Teilchens. Für einen gaußver-

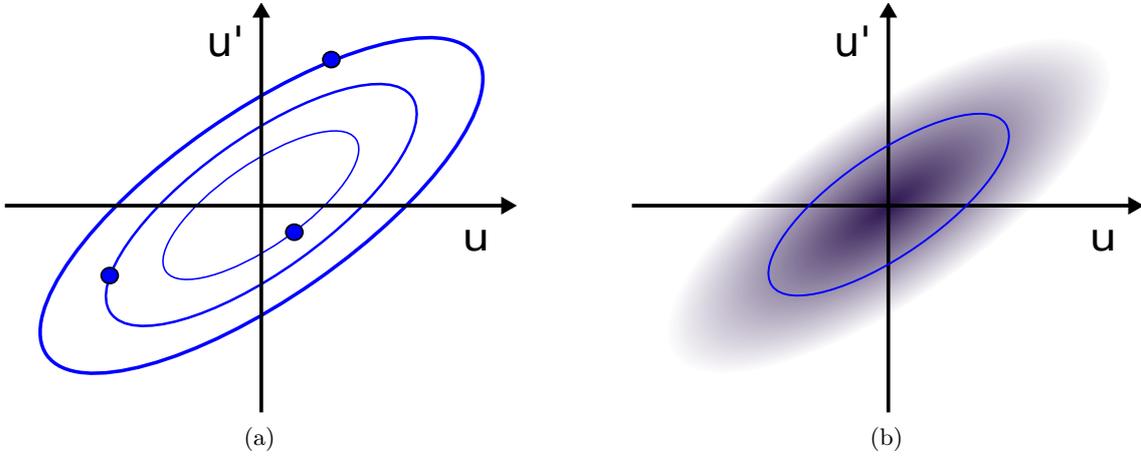


Abbildung 3.4: (a) zeigt die Phasenraumellipsen dreier Teilchen mit unterschiedlichen Amplituden der Betatranschwingung. In (b) sind eine Teilchendichte und die Phasenraumellipse eines Teilchens auf dem  $1-\sigma$ -Niveau dargestellt, die die Emittanz des Strahls definiert.

teilten Strahl ist die Strahlgröße  $\sigma$  als Standardabweichung der Teilchendichte definiert. Das Phasenraumvolumen, das vom gesamten Strahl eingenommen wird, entspricht damit der Ellipsenfläche eines Teilchens auf dem  $1-\sigma$ -Niveau. Die zu dieser Fläche gehörende Courant-Snyder-Invariante wird *Emittanz*  $\epsilon$  genannt. Da das vom Strahl eingenommene Phasenraumvolumen in konservativen Systemen konstant bleibt, ist die Emittanz eine Erhaltungsgröße. Sie kann als „transversale Temperatur“ des Strahls angesehen werden, die von den Eigenschaften der Teilchenquelle abhängt.

Um die Veränderung des Strahls entlang der Strahlführung zu beschreiben müssen lediglich die Twissparameter transformiert werden. Aus der inversen Transformation von (3.21) und der Courant-Snyder-Invariante kann eine Transformationsmatrix für die Twissparameter aufgestellt werden [WIE07]:

$$\begin{bmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \\ \gamma(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & -2CS & S^2 \\ -CC' & CS' + C'S & SS' \\ C'^2 & -2C'S' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta(s_0) \\ \alpha(s_0) \\ \gamma(s_0) \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

In einer sogenannten Strahltaile nimmt die Strahlgröße

$$\sigma = \sqrt{\epsilon\beta} \quad (3.37)$$

den kleinstmöglichen Wert an. Die Betafunktion wird minimal, wenn ihre Änderung  $\alpha$  gleich Null ist. Die Phasenraumellipse steht in diesem Fall senkrecht.

### 3.3. LINEARE STRAHLDYNAMIK

#### 3.3.4 Statistische Berechnung der Emittanz und Twissparameter

Die Emittanz und die Twissparameter können auch statistisch aus einer Teilchenverteilung berechnet werden. Die sogenannte *RMS-Emittanz*  $\epsilon_{RMS}$  beschreibt dann nicht mehr die Fläche des Strahls im Phasenraum, sondern ist ein Maß der Streuung der Teilchenverteilung. Sie ist über die Standardabweichungen der Teilchenposition und des Winkels der Bewegungsrichtung definiert [TUR94]:

$$\epsilon_{RMS} = \sigma_u \cdot \sigma_{u'} = \sqrt{\langle u^2 \rangle \langle u'^2 \rangle - \langle uu' \rangle^2} \quad (3.38)$$

Dabei sind  $\langle u \rangle$  und  $\langle u' \rangle$  die Erwartungswerte der Position bzw. des Transversalimpulses und  $\langle uu' \rangle$  ist ihre Korrelation. Der Ausdruck unter der Wurzel entspricht der Determinante der Kovarianzmatrix  $C$  der Verteilung, deren Elemente durch  $C_{ij} = \langle ij \rangle - \langle i \rangle \langle j \rangle$  gegeben sind [MUE01].  $i$  und  $j$  stehen hierbei für Position oder den Transversalimpuls. Aus Symmetriegründen ist  $C_{uu'} = C_{u'u}$ .

In einem gaußverteilten Strahl entspricht die Korrelation außerdem der Neigung der Phasenraumellipse, die von der Courant-Snyder-Invarianten eines Teilchen auf dem 1- $\sigma$ -Niveau  $\epsilon = \gamma u^2 + 2\alpha uu' + \beta u'^2$  beschrieben wird. Die Courant-Snyder-Invariante kann mit  $U^\top = (u, u')$  auch in Matrixschreibweise dargestellt werden:

$$1 = U^\top \sigma^{-1} U \quad (3.39)$$

Die Matrix  $\sigma^{-1}$  ist die inverse Matrix der sogenannten *beam matrix*  $\sigma$  [WIE07], die der Kovarianzmatrix entspricht:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \epsilon\beta & -\epsilon\alpha \\ -\epsilon\alpha & \epsilon\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{uu} & C_{uu'} \\ C_{u'u} & C_{u'u'} \end{pmatrix} = C \quad (3.40)$$

Der Vergleich der Matrixelemente ermöglicht die Berechnung der Twissparameter aus der Teilchenverteilung:

$$\beta = \frac{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2}{\epsilon_{RMS}} \quad (3.41)$$

$$\alpha = -\frac{\langle uu' \rangle - \langle u \rangle \langle u' \rangle}{\epsilon_{RMS}} \quad (3.42)$$

In den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden Emittanz und Twissparameter auf statistische Weise berechnet. Der Vorteil dieser Berechnungsmethode ist, dass sie sich nicht auf eine den Strahl einhüllende Kontur bezieht, sondern unabhängig von der Form der Teilchenverteilungen ist [TUR94]. Emittanz und Twissparameter sind damit für jede Teilchenverteilung berechenbar. Die statistische Definition der Emittanz

führt aber zu einigen Unterschieden. Wird der Strahl zum Beispiel durch nichtlineare Effekte im Verlauf der Strahlführung verzerrt, so nimmt aus statistischer Sicht die Streuung der Verteilung zu. Der Wert der RMS-Emittanz wird daher größer, obwohl das vom Strahl eingenommene Phasenraumvolumen konstant bleibt. Die RMS-Emittanz ist deshalb keine Erhaltungsgröße.

### 3.4 Nicht-lineare Strahldynamik

Der Berechnung der Strahlführung mit linearer Strahldynamik sind Grenzen gesetzt. Magnetfelder höherer Ordnung führen zu Kopplungen der transversalen Ebenen und Verzerrungen im Phasenraum, wodurch der Strahl nicht mehr die Form einer Ellipse hat. Ohne beschleunigende Elemente und Synchrotronstrahlungsverluste bleibt das System zwar konservativ, das Liouillesche Theorem gilt aber nur noch im vierdimensionalen Phasenraum  $(x, x', y, y')$  [BER13]. Im zweidimensionalen Phasenraum ist die Teilchendichte nicht mehr konstant, weil die Bewegung in  $x$ - und  $y$ -Richtung gekoppelt ist.

Im Matrixformalismus kann die Kopplung bei Verwendung von  $4 \times 4$ -Matrizen mit einbezogen werden, für Magnete, deren Feld nichtlinear vom Ort abhängt, können aber keine Transfermatrizen aufgestellt werden. Die Berechnung der Twissparameter und den Strahleigenschaften ist damit nicht mehr auf analytische Weise durch ihre Transformation möglich. Sie müssen stattdessen wie oben beschrieben statistisch aus der Streuung einer Teilchenverteilung berechnet werden. Die Verteilung an bestimmten Positionen entlang der Strahlführung kann dazu durch Tracking bestimmt werden. Tracking ist eine Rechenmethode zur Nachverfolgung der Spur eines Teilchens. Die Berechnung der Teilchentrajektorien erfolgt mit Hilfe von *Transfer-Maps* (s. Polymorphic Tracking Code (PTC)). Der Vorteil des Trackings ist, dass nichtlineare Effekte auch berücksichtigt werden.

### 3.5 MAD-X

Zur Untersuchung des Einflusses chromatischer Fehler wird die Elektronenstrahlführung vom Laser-Wakefield-Beschleuniger zum Undulator in MAD-X implementiert. Der maßstabgetreue Aufbau der Strahlführung ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Er wird in Kapitel 4.2.1 näher beschrieben. Für ersten Überblick genügt es zu sagen, dass die Strahlführung aus zwei Dipolmagneten und sieben fokussierenden Quadrupol- bzw. *Combined-Function*-Magneten bestehen soll. Im Folgenden werden das Programm MAD-X und die zur Implementierung der Strahlführung verwendeten Elemente vorgestellt. Anschließend wird ein kurzer Überblick über die Funktionen gegeben, die zur Berechnung der Strahlparameter eingesetzt werden.

MAD-X ist ein am CERN entwickeltes Programm zur Berechnung der Magnetooptik

### 3.5. MAD-X

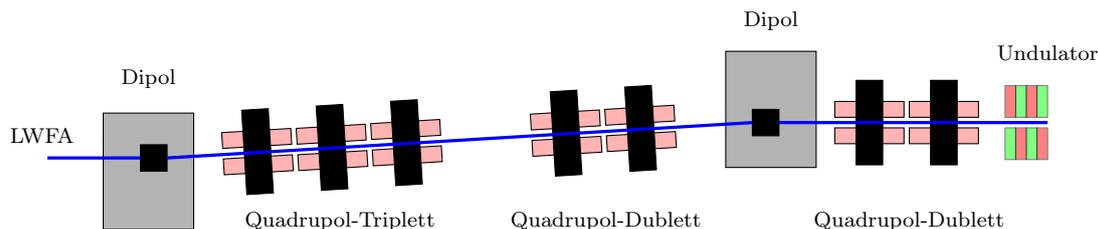


Abbildung 3.5: Maßstabgetreuer Aufbau der Elektronenstrahlführung

in Beschleunigern. Als Eingabe müssen der Referenzstrahl und die Strahlführung des Beschleunigers beschrieben werden. Der Referenzstrahl beinhaltet die Design-Werte des Beschleunigers und wird mit dem BEAM-Befehl definiert. Hier werden Teilchenmasse in  $\text{GeV}/c^2$ , Teilchenladung als Vielfache der Elementarladung  $e$  (positiv), Teilchenenergie in  $\text{GeV}$  und die Werte der transversalen und der longitudinalen Emittanz angegeben. Für Teilchen wie Elektronen sind Masse und Ladung hinterlegt, hier genügt die Angabe der Teilchenart.

Beispiel: Elektronenstrahl mit der Energie von  $120 \text{ MeV}$  und der transversalen Emittanz  $10^{-8} \text{ mrad}$ :

```
BEAM, PARTICLE = electron, ENERGY = 0.12,
      EX = 1e-8, EY = 1e-8,
      SEQUENCE = schikane;
```

Die Strahlführung wird als eine Abfolge von Elementen wie z.B. Strahlführungsmagneten beschrieben und bei „sequence“ übergeben. Diese Elemente werden wie Bausteine hintereinander gesetzt. Es gibt dicke Elemente, die eine bestimmte Länge haben, und es gibt dünne Elemente mit der Länge  $l = 0$ . Unabhängig davon hat die Definition aller Elemente die gleiche Struktur: dem Element wird ein Name, z.B. „q1“, und eine Klasse, z.B. „quadrupole“, zugeordnet. Unter dem Namen wird das Element aufgerufen, die Klasse ermöglicht die Definition der Eigenschaften wie z.B. der Fokussierungsstärke.

#### 3.5.1 Strahlführungselemente

Im Folgenden werden die Elemente näher beschrieben, die zur Simulation der Strahlführung genutzt werden. Dabei wird nur auf die Eigenschaften eingegangen, die zur Implementierung der Strahlführung benutzt werden. Ausführlichere Beschreibungen zu den Elementen sind im *MAD-X-User's Guide* nachzulesen [SCH90], dem auch die folgenden Angaben entnommen sind.

**Driftstrecke** Eine Driftstrecke ist eine feldfreie Strecke mit festgelegter Länge. Es findet keine externe Wirkung auf den Strahl statt, die Teilchen bewegen sich gleichförmig weiter. Driftstrecken füllen die Bereiche zwischen den Magneten.

**Multipol** Multipole sind dünne Elemente, denen eine oder mehrere Multipolkomponenten zugeordnet werden können. Strahlführungen aus Multipolen werden in der Näherung dünner Linsen berechnet, bei der die ansonsten über die Länge des realen Magneten verteilte Multipolstärke an einem Punkt wirkt. Die Dipolstärke wird über den Ablenkwinkel definiert. Die Stärke höherer Multipolkomponenten wird daher in integrierter Form als Produkt der Multipolkomponenten und der Länge des realen Magneten angegeben.

Multipole werden bei der ersten Implementierung der Strahlführung in der Näherung dünner Linsen eingesetzt.

Beispiel: Definition des ersten *Combined-Function*-Magneten mit Quadrupol- und Sextupolkomponente als Multipol:

```
q1: MULTIPOLE, kn1 = {0, -3.333, 569.908};
```

**Dipole** Mad-X verfügt über zwei verschiedene Typen von Dipol-Ablenkmagneten. Es gibt zum einen rechteckige Magnete mit parallelen Stirnflächen (*rectangular bending magnet*, RBEND) und Sektormagneten, die entlang des Ablenkradius gebogen sind, sodass der Strahl beim Ein- und Austritt jeweils senkrecht auf den Stirnflächen des Magneten steht (*sector bending magnet*, SBEND). Die für das Experiment vorgesehenen Dipole sind rechteckig, daher wurden in der Simulation RBEND-Magnete verwendet. RBEND-Magnete sind dicke Elemente mit einer vorgegebenen Länge  $L$  in Meter. Anstatt der Dipolstärke wird der Ablenkwinkel  $\alpha$  in Radian angegeben mit

$$\alpha \approx \frac{L}{\rho} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} \cdot B.$$

Die Winkel der Stirnflächen zum Strahl sind in der Standardeinstellung halb so groß wie der Ablenkwinkel und können über die Rotationswinkel  $E1$  und  $E2$  relativ zur Standardeinstellung verändert werden.

Die RBEND-Dipole sind wie die anderen Elemente mit ausgedehnter Länge im Strahlführungsmodell mit dicken Linsen eingebaut, das bei den Optimierungen verwendet wird.

Beispiel: Definition des ersten Dipols:

```
dipol1: RBEND, L=0.05, ANGLE=-0.0570, E1=-0.0285, E2=+0.0285;
```

**Quadrupol** Quadrupole in MAD-X sind dicke Elemente mit bestimmter Länge  $L$  und der über diese Länge gleichmäßig verteilten Quadrupolstärke

$$K1 = k = \frac{e}{p} g.$$

Die lineare Strahlführung aus Quadrupolen ist im Modell mit dicken Linsen Grundlage zur Berechnung der linearen Dispersion.

### 3.5. MAD-X

Beispiel: Definition des vierten Quadrupols:

```
q4: QUADRUPOLE, L=0.08, K1 = 52.787;
```

**Sextupol** Sextupole haben in der Beschreibung die gleiche Form wie die Quadrupole, außer dass die Quadrupolstärke durch die nächst höhere Multipolstärke, die Sextupolstärke, ersetzt ist:

$$K2 = m = \frac{e}{p} s.$$

Sowohl Quadrupolen als auch Sextupolen können in der PTC-Umgebung (siehe unten) weitere Multipolkomponenten hinzugefügt werden. Zusätzliche Dipolkomponenten werden über den Ablenkwinkel definiert (siehe Abschnitt Dipole), Quadrupolkomponenten als integrierte Quadrupolstärke  $kl = K1 \cdot L$  angegeben. Auf diese Weise werden die *Combined-Function*-Magnete im Modell mit dicken Linsen definiert. Beispiel: Definition des vierten *Combined-Function*-Magnetes:

```
q4: SEXTUPOLE, L=0.08, K2=-2758.778, KNL = {0, 4.223};
```

**Marker** Marker haben keine Wirkung auf den Strahl. Sie definieren lediglich einen Ort in der Strahlführung, an der die Position des Strahls oder die Twissparameter ausgewertet werden können. Werden keine Marker verwendet, werden dicke Elemente an deren Ende und dünne Elemente nach ihrer Wirkung ausgewertet.

Nachdem alle Elemente definiert sind, wird deren Abfolge (*sequence*) festgelegt. Dabei werden die Namen der Elemente in der Reihenfolge hintereinander aufgeführt, in der sie in der Strahlführung aufeinander folgen. Die Namen können mehrfach verwendet werden, dann werden gleiche Elemente mehrfach eingebaut. Die Position der Elemente wird nicht über Koordinaten festgelegt, die Elemente werden entlang der Referenztrajektorie entsprechend ihrer Länge eingesetzt. Die Referenztrajektorie besteht aus geraden Strecken und kreisförmigen Bögen. Sie wird damit durch Driftstrecken und Dipole festgelegt. Verändert sich die Referenztrajektorie zum Beispiel durch Änderung der Energie oder einer Dipolstärke, wird die Position der nachfolgenden Magnete automatisch angepasst.

#### 3.5.2 Funktionen zur Berechnung der Strahlführung

Zur Berechnung der Strahleigenschaften und der Trajektorien wurden folgende Funktionen eingesetzt.

**Twiss Modul** Das *Twiss* Modul berechnet die linearen optischen Funktionen entlang einer vorgegebenen Strahlführung. Position und Richtung des Strahls zu Beginn der Berechnung können ebenso vorgegeben werden wie die Twissparameter  $\alpha$  und  $\beta$ . Außerdem

kann eine relative Energieabweichung angegeben werden. Die Berechnung ist nur für lineare Strahlführungen möglich. Das Twiss Modul arbeitet mit den in Kapitel 3.3.1 vorgestellten Transfermatrizen. Sextupole werden in der Berechnung vernachlässigt, daher wird es nur bei der Untersuchung der chromatischen Effekte eingesetzt. Die Twissparameter werden am Ende jeden Elements berechnet. Alternativ kann mit der Angabe des Arguments „center“ die Berechnung auch in der Mitte der Elemente erfolgen.

**EALIGN** Nach der Auswahl eines bestimmten Elements mit dem SELECT-Befehl können ihm mit dem EALIGN-Befehl Aufstellungsfehler zugewiesen werden. Die Aufstellungsfehler beziehen sich auf das krummlinige Koordinatensystem und können allen Strahlführungselementen mit Ausnahme von Driftstrecken zugewiesen werden. Mögliche Aufstellungsfehler sind Verschiebungen entlang der drei Koordinatenachsen und Rotationen um die Koordinatenachsen. Der Effekt von Aufstellungsfehlern wird bis zur linearen Ordnung berücksichtigt. Diese Funktion wird bei der Implementierung der verschobenen Sextupole in Kapitel 4.8 eingesetzt.

**Thin-lens Tracking Modul** Das *Thin-lens Tracking* Modul ermöglicht das Tracking einzelner Teilchen durch eine Strahlführung aus Driftstrecken und dünnen Elementen. Es sind nur dünne Elemente erlaubt. Die Befehle TRACK und ENDTRACK markieren den für das Tracking relevanten Bereich. Folgende Befehle müssen innerhalb dieses Bereichs erteilt werden: einzelne Teilchen werden mit dem START-Befehl initialisiert, der die Startposition, Winkel und Energieabweichung enthält. Teilchenverteilungen können mit einer Schleife und den zufälligen Werten einer Verteilungsfunktion erzeugt werden. Mit dem Befehl OBSERVE werden Elemente in der Strahlführung benannt, an denen Position und Winkel der einzelnen Teilchen gespeichert werden. Es empfiehlt sich dafür Marker einzusetzen. RUN startet das Tracking.

**Polymorphic Tracking Code (PTC)** PTC ist eine auf Tracking basierende Umgebung in MAD-X, die Tracking mit dicken Elementen ermöglicht. Zuerst muss die Umgebung gestartet und einige Optionen wie die Anzahl der Integrationsschritte eingestellt werden. Für die folgenden Rechnungen wurden für jedes dicke Element zehn Integrationsschritte verwendet. Die Definitionen von Referenzstrahl und Strahlführung werden von MAD-X an PTC übergeben. Zum Einbau von *Combined-Function*-Magneten können den Magneten zusätzliche Multipolkomponenten (außer Dipolkomponenten) hinzugefügt werden. Die Definition erfolgt wie bei den dünnen Multipolen in MAD-X über die integrierte Multipolstärke. Für das Tracking der Teilchen werden sogenannte *Transfer-Maps* verwendet [HER11]. Diese können unterschiedliche Gestalt haben. Beispiele dafür sind Lineare Transformationen, Taylorreihen, Lie-Transformationen, Integrationsalgorithmen höherer Ordnung oder

### 3.6. DIE DOWNHILL-SIMPLEX-METHODE

Computerprogramme mit Subroutinen. Die Wahl der Rechenmethode ist je nach Problemstellung unterschiedlich.

Die Implementierung des Tracking erfolgt analog zum *Thin-lens Tracking* Modul. Mit dem Befehl PTC\_START werden einzelne Teilchen initialisiert, mit PTC\_OBSERVE werden die beobachteten Elemente festgelegt. Wird die Funktion PTC\_ALIGN aufgerufen, werden die Aufstellungsfehler aus MAD-X übernommen. Das Tracking wird mit PTC\_TRACK gestartet und mit PTC\_END beendet.

Die Tracking-Funktionen werden zur Berechnung der Teilchenverteilungen am Anfang des Undulators genutzt, aus denen die Twissparameter auf statistische Weise bestimmt werden.

## 3.6 Die Downhill-Simplex-Methode

Die Downhill-Simplex-Methode nach J.A. Nelder und R. Mead wird in Kapitel 4.5 zur Optimierung der Strahlführung unter Berücksichtigung der chromatischen Korrektur eingesetzt. Sie ist ein Minimierungsalgorithmus für nichtlineare Funktionen mit mehr als einer unabhängigen Variablen. Der große Vorteil dieser Methode ist, dass sie nur mit Funktionswerten arbeitet und keine Ableitungen berechnet werden müssen.

Werden  $n$  Variablen optimiert, so ist der Simplex ein  $n$ -dimensionaler geometrischer Körper im Parameterraum mit  $n + 1$  Ecken. Bei zwei Variablen ist er ein Dreieck, bei drei ein Tetraeder und so weiter. Jede dieser  $n + 1$  Ecken wird von einem Punkt definiert, der einem Satz der zu optimierenden Variablen entspricht. Den Eckpunkten wird jeweils der Funktionswert der zu minimierenden Zielfunktion zugeordnet.

Der Algorithmus verändert den Simplex in jedem Iterationsschritt. Dabei hat er vier Möglichkeiten: Die am häufigsten angewandte Veränderung ist die Reflexion des Punktes mit dem höchsten Funktionswert an dem Unterraum, den die  $n - 1$  anderen Punkte aufspannen. Dadurch bewegt sich der Simplex über die  $n$ -dimensionale Oberfläche quasi bergab („downhill“) hin zu kleineren Funktionswerten. Eine zusätzliche Möglichkeit nach einer Reflexion ist die Streckung des Simplex weg vom hohen Funktionswert. Dies ermöglicht eine schnellere Fortbewegung des Simplex und dadurch eine Reduzierung der Rechenschritte. Diese beiden Veränderungen werden ausgeführt, bis der Simplex in die Umgebung eines Minimums bewegt wurde. Hier kann er entweder entlang einer Dimension oder entlang mehrerer Dimensionen zum geringsten Funktionswert hin kontrahiert werden. Der Algorithmus bricht ab, wenn der Simplex auf eine als Abbruchkriterium angegebene Größe geschrumpft ist.

Der Algorithmus kann in lokalen Minima konvergieren, gilt aber ansonsten als robust. Er wurde für dieses Problem ausgewählt, weil er ohne die Berechnung von Ableitungen

### 3.6. DIE DOWNHILL-SIMPLEX-METHODE

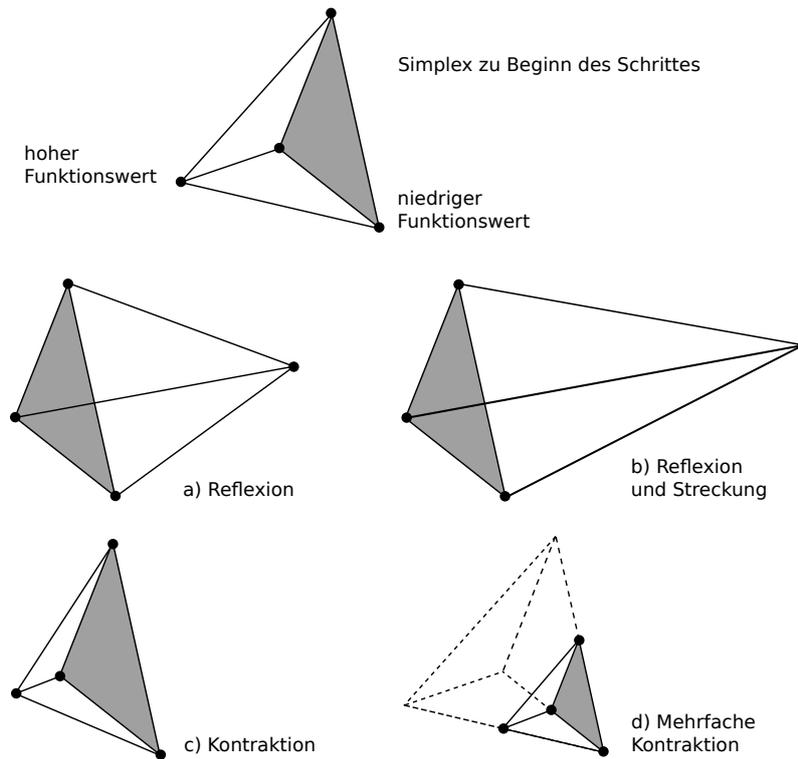


Abbildung 3.6: Oben gezeigt ist einen dreidimensionalen Simplex zu Beginn eines Iterationsschrittes und darunter die vier Veränderungsmöglichkeiten nach „Numerical Recipes in C++“ [PRE02].

auskommt und die Funktionswerte über Tracking leicht berechnet werden können. Näheres ist in „Numerical Recipes in C++“ von W. H. Press et al. nachzulesen.

## 4 Simulation der Strahlführung mit MAD-X

In diesem Kapitel werden die Vorgehensweise und die Ergebnisse der in der Arbeit durchgeführten Simulationen vorgestellt. Die Untersuchung der Strahlführungen erfolgt in folgenden Schritten:

- Die Berechnung der linearen Strahlführung mit Transfermatrizen lag bereits vor [WID14]. Diese wird als erstes in MAD-X nachgebaut und ihre Ergebnisse werden mit dem MAD-X-*Twiss* Modul verifiziert. Die Magnete werden in der Näherung dünner Linsen implementiert.
- Nach der Untersuchung der chromatischen Effekte wird die Korrektur entsprechend der Näherung (3.13) getestet. Die Berechnung der Teilcentrajektorien und Strahlparameter erfolgt mit dem *Thin-lens Tracking* Modul. Auf diese Weise werden nichtlineare Effekte berücksichtigt, wodurch der Einbau von Sextupolkomponenten möglich wird. Die Magnete werden als ideale *Combined-Function*-Magnete angenommen.
- Zur nachfolgenden Optimierung der chromatischen Korrektur soll ein realistischeres Modell eingesetzt werden. Die Magnete werden dafür mit dicken Elementen beschrieben und das Tracking findet in der PTC-Umgebung statt.
- In der ersten Optimierung werden die Quadrupolstärken variiert und die Sextupolstärken nach der Näherung für die chromatische Korrektur berechnet. Die Sextupolstärken sind somit in einem von der Dispersion abhängigen Zusammenhang an die Quadrupolstärken gekoppelt.
- In der zweiten Optimierung wird diese Kopplung aufgegeben.
- Die *Combined-Function*-Magnete sollen in diesem Experiment als transversal verschobene Sextupole realisiert werden. Dies führt zu zusätzlichen Randbedingungen. Die idealen *Combined-Function*-Magnete werden daher durch reine Sextupolmagnete ersetzt.

Abschließend erfolgt eine Analyse der Lösungen im Hinblick auf zukünftige Schritte.

## 4.1 Randbedingungen

**Spezifikation der Magnete** Für die Strahlführung der Elektronen werden zwei verschiedene Arten von Magneten verwendet. Die Aufspaltung der Elektronen wird mit kommerziell erhältlichen Dipolen der Firma GMW erreicht. Mit Spulen und Kühlsystem haben sie eine Gesamtlänge von 250 mm. Die Polflächen sind quadratisch und haben eine Länge von 50 mm. Ihr Abstand beträgt 20 mm. Das erzeugte Magnetfeld hat den maximalen Wert 0,46 T. Für Elektronen mit der Energie von 120 MeV erreicht man damit einen maximalen Ablenkwinkel von etwa 60 mrad [WID11].

Zur Fokussierung des Elektronenstrahls und zur Korrektur der chromatischen Fehler werden *Combined-Function*-Magnete verwendet. Sie sollen, wie in Kapitel 3.2.4 beschrieben, in Form von transversal verschobenen Sextupolen realisiert werden. Die Sextupole werden für dieses Experiment selbst entwickelt und gefertigt. Hierbei gibt es zwei Ausführungen. Die eine hat mit 42 mm einen großen Polabstand, der große Verschiebungen erlaubt, die andere hat den kleineren Polabstand 29 mm, wodurch höhere Sextupolkomponenten bis  $s = 3200 \text{ Tm}^{-2}$  ermöglicht werden. Die Pole haben in beiden Ausführungen eine Länge von 80 mm [WER13]. Die Gesamtlänge der Sextupole inklusive der Spulenkörper ist 140 mm.

Die Spezifikationen aller Strahlführungsmagnete sind in Tabelle 4.1 noch einmal zusammengefasst.

**Strahlparameter am Anfang** Die Dipolschikane wird im Experiment direkt nach dem Laser-Wakefield-Beschleuniger aufgebaut. Die Strahleigenschaften am Anfang der Schikane werden also vom Beschleuniger vorgegeben, sind allerdings nicht genau bekannt. Sie werden daher aus der Größe der Plasma-Blase und bisher gemessenen Divergenzen abgeschätzt. Mit einer Quellgröße von 10  $\mu\text{m}$  und der Divergenz 1 mrad ergibt sich die Emittanz-Obergrenze 10 nm rad, die allen folgenden Rechnungen zu Grunde liegt. Genauere Messungen der Strahlemittanz sind in Vorbereitung.

Am Ausgang des Laser-Wakefield-Beschleunigers, der die Teilchenquelle ist, liegt eine

Tabelle 4.1: Die Tabelle fasst die für die Strahlführung relevanten Daten der Magnete zusammen.

	Dipol	Sextupol
Länge der Pole (mm)	50	80
Gesamtlänge (mm)	250	140
Polsabstand (mm)	20	29/42
Maximales Magnetfeld $B$ (T)	0,46	-
Sextupolstärke $s$ ( $\text{Tm}^{-2}$ )	-	1500/3200

#### 4.1. RANDBEDINGUNGEN

Tabelle 4.2: Aufgelistet sind Strahlparameter am Anfang der Schikane, wie sie vom Laser-Wakefield-Beschleuniger vorgegeben werden.

Strahlgröße (1- $\sigma$ -Breite):	10 $\mu\text{m}$
Divergenz:	1 mrad
Emittanz:	10 nm rad
$\beta$ :	0,01 m
$\alpha$ :	0

Strahltaile (vgl. Kapitel 3.3.3), in der die Phasenraumellipse senkrecht steht. Die Position und der Transversalimpuls sind deshalb nicht korreliert und können unabhängig voneinander definiert werden.

Der Teilchenstrahl wird als rotationssymmetrisch angenommen und hat aus diesem Grund in beiden transversalen Richtungen dieselben Eigenschaften. Sowohl Position der Elektronen als auch Transversalimpuls werden als gaußförmig verteilt angenommen. Die Standardabweichungen sind durch die Quellgröße und die Divergenz bestimmt.

Mit den Werten der Strahlgröße und der Emittanz hat der Twissparameter  $\beta$  nach Gleichung (3.37) den Wert 0,01 m. Weil die Phasenraumellipse senkrecht steht, ist  $\alpha$  Null.

**Zielparameter am Undulator** Der Elektronenstrahl kann als Zusammensetzung einzelner monoenergetischer Teilstrahlen mit verschiedener Energie angesehen werden, die unabhängig voneinander untersucht werden können. Im Idealfall passiert jeder Teilstrahl genau in der  $x$ -Position in den Undulator, an dem die Magnetfeldamplitude zu seiner Energie passt. Die transversale Position des Strahlschwerpunktes soll entlang des Undulators gleich bleiben, deshalb wird ein konstanter Wert der Dispersion gefordert. Die Ableitung der Dispersion  $D'$  muss daher Null sein [WID11]. Der Undulator ist für eine Aufspaltung der Teilstrahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung von  $d = 4\text{ mm}$  optimiert.

Wegen der transversalen Teilstrahlausdehnung  $\sigma_x$  ist die Magnetfeldamplitude nicht für alle Elektronen eines Teilstrahls genau gleich. Die Wellenlänge der emittierten Strahlung ist damit auch leicht verschieden. Um die Bandbreite der Undulatorstrahlung klein zu halten, muss deshalb die Differenz in der Wellenlänge kleiner als die natürliche Bandbreite der Undulatorstrahlung sein. Der angestrebte Wert der Strahlgröße ist 0,09 mm [AFO11].

In der  $ys$ -Ebene wirkt der Undulator fokussierend. Dadurch kann bei entsprechender Wahl der Anfangsparameter erreicht werden, dass die Divergenz des Elektronenstrahls und die fokussierenden Kräfte des Undulators sich genau aufheben, die Strahlgröße entlang des Undulators also konstant bleibt. In diesem Fall muss am Anfang des Undulators eine Strahltaile liegen. Der Zielwert für  $\alpha_y$  ist demnach Null. Für Teilstrahlen unterschiedlicher Energien ergeben sich leicht unterschiedliche konstante Betafunktionen. Berechnungen der Betafunktion entlang des Undulators haben für minimale Strahlgröße aller Teilstrahlen den

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

Tabelle 4.3: In dieser Tabelle sind die am Anfang des Undulators angestrebten Strahlparameter zusammengefasst.  $\sigma_x$  ist die Strahlgröße in  $x$ -Richtung,  $d$  ist der Abstand der Teilstrahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung.  $\beta$  und  $\alpha$  sind die Twissparameter.

$\sigma_x$ :	0,09 mm
$d$ :	4 mm
$\beta_x$ :	1,05 m
$\alpha_x$ :	1,05
$\beta_y$ :	0,6 m
$\alpha_y$ :	0

optimalen Wert von  $\beta_y = 0,6$  m ergeben. [WID13].

In der  $xs$ -Ebene kann der Undulator als Driftstrecke betrachtet werden. Der Verlauf der Betafunktion ist dann parabolisch. Um eine kleinst mögliche Strahlgröße entlang des Undulators zu erreichen, muss in der Mitte des Undulators eine Strahltaile liegen und die Betafunktion gleich der halben Länge der Driftstrecke sein [WIE07]. Die Twissparameter haben dann am Anfang des Undulators die Werte  $\alpha_x = 1,05$  und  $\beta_x = 1,05$  m [WID14].

## 4.2 Die lineare Strahlführung in der Näherung dünner Linsen

### 4.2.1 Berechnung mit Transfermatrizen

Vor dem Beginn dieser Arbeit wurde die lineare Strahlführung in der Schikane in Matlab optimiert [WID14]. Zur Berechnung der Strahldynamik wurden Transfermatrizen eingesetzt. Die *Combined-Function*-Magnete wurden auf Quadrupole reduziert und zur Vereinfachung zunächst als dünne Linsen betrachtet. Jedem Quadrupol wurde eine energieunabhängige Brennweite  $f$  zugeordnet, welche seine Fokussierungseigenschaft beschreibt. Anzahl, Position und Stärke der Quadrupole wurden variiert.

Das Ergebnis der Optimierung ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Der erste Dipol befindet sich 30 cm von der Gasdüse des LWFA entfernt. Der Abstand zwischen den Dipolen beträgt 1,1 m und ist durch den gewünschten Höhenversatz der Elektronenstrahlen von 6 cm festgelegt. Die Strahlführung enthält zusätzlich zu den beiden Dipolen sieben Quadrupole mit alternierenden Gradienten. Fünf der Quadrupole sind zwischen den beiden Dipolen platziert. Sie sind zu einem Triplett hinter dem ersten Dipol und ein Duplett vor dem zweiten Dipol kombiniert. Die verbleibenden zwei Quadrupole stehen als Duplett hinter dem zweiten Dipol. Im Triplett beziehungsweise Duplett stehen die Quadrupole direkt aneinander, ihr Abstand ist also durch ihre Länge festgelegt. Der Abstand zwischen dem letzten Quadrupol und dem Undulator ist 40 cm.

Der Strahlverlauf der Strahlführung im krummlinigen Koordinatensystem ist in Abbil-

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

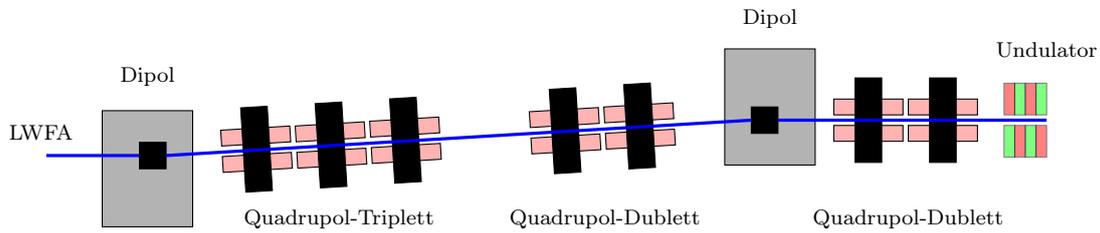


Abbildung 4.1: Gezeigt ist der maßstabgetreue Aufbau der Schikane. Der Elektronenstrahl (blau) tritt von links in die Schikane ein und wird vom ersten Dipol nach oben abgelenkt. Der zweite Dipol lenkt ihn zurück auf eine horizontale Bahn mit dem zur  $x$ -abhängigen Magnetfeldamplitude passenden Abstand zum Zentrum des Undulators. Das Quadrupoltriplett für die Kollimierung des Elektronenstrahls befindet sich hinter dem ersten Dipol, die beiden Dubletts für die Einstellung der Strahlparameter vor beziehungsweise hinter dem zweiten Dipol. Rechts ist der Undulator angedeutet.

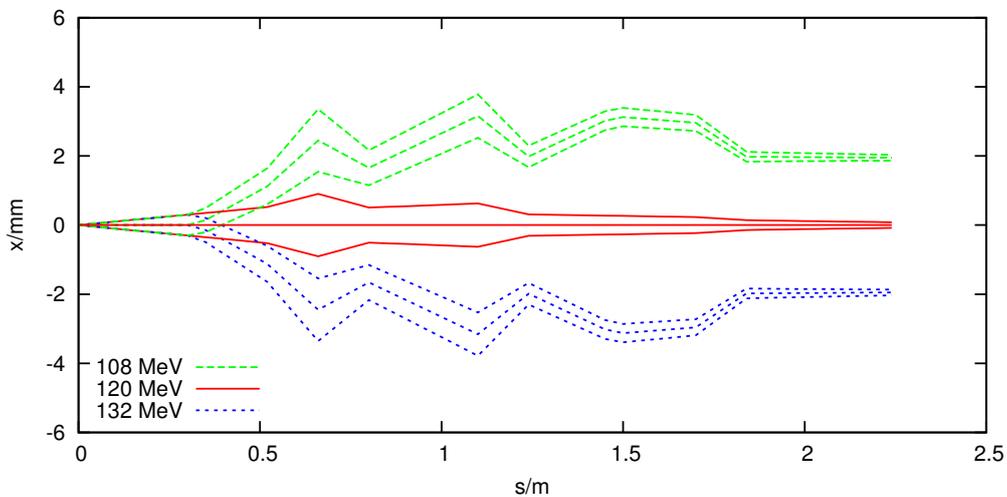


Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt den Strahlverlauf in  $x$ -Richtung entlang der Strahlführung mit energieunabhängigen Brennweiten der Quadrupole. Gezeigt sind der Strahl mit der Designenergie 120 MeV (rot) sowie die Strahlen mit den Energien 108 MeV (grün) und 132 MeV (blau), die Strahlen mit maximaler Energieabweichung von  $\pm 10\%$ . Die mittleren Trajektorien sind die Solltrajektorie beziehungsweise die Dispersionsbahnen, die äußeren sind die Strahleinhüllenden.

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

dung 4.2 zu sehen. Gezeigt sind ein Elektronenstrahl mit der Designenergie 120 MeV sowie die Strahlen mit maximaler Energieabweichung von  $\pm 10\%$ , also 108 MeV und 132 MeV. Die mittlere Linie jedes Strahls führt entlang des Strahlzentrums, die beiden äußeren Strahlen beschreiben die nach Gleichung (3.37) berechnete Strahleinhüllende. Diese Darstellung wird auch im Folgenden bei den Abbildungen der Strahlführung verwendet werden. In der Abbildung gut zu erkennen ist die unterschiedliche Ablenkung der Teilstrahlen am ersten Dipol. Der Strahl der 108 MeV-Elektronen wird nach oben, der Strahl der 132 MeV-Elektronen genau entgegengesetzt nach unten abgelenkt. Da die Wirkung der Quadrupole in dieser Rechnung nicht von der Energie der Elektronen abhängt, sondern lediglich linear mit ihrem Abstand zur optischen Achse skaliert, ist die Strahlführung symmetrisch. Dies gilt auch am Ende der Strahlführung. Die drei Teilstrahlen verlaufen parallel zueinander und sind zu ihrem Zentrum hin fokussiert.

Bei der Berücksichtigung der chromatischen Eigenschaften der Quadrupole ist zu erwarten, dass diese Symmetrie aufgehoben wird. Das Ziel der in dieser Arbeit implementierten chromatischen Korrektur wird es sein, sie wiederherzustellen.

### 4.2.2 Implementierung in MAD-X

Für die Implementierung der Strahlführung in MAD-X wurden Ort und Stärke der Magnete aus obiger Strahlführung übernommen. Die Näherung dünner Linsen wurde zunächst beibehalten, alle Magnete wurden als Multipole mit reiner Dipol- beziehungsweise Quadrupolkomponente implementiert. Der Ablenkwinkel der Dipol-Multipole beträgt  $57,7$  mrad, die integrierten Quadrupolstärken  $kl$  der Quadrupol-Multipole werden aus den Brennweiten  $f$  berechnet:

$$kl = 1/f \quad (4.1)$$

Die Brennweiten und die integrierten Quadrupolstärken sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

Die Berechnung der Twissparameter entlang der Strahlführung wird mit dem MAD-X-*Twiss* Modul durchgeführt. Die Abweichung der Energie der Elektronen von der Desi-

Tabelle 4.4: Folgende Tabelle zeigt die Brennweiten  $f$ , die integrierten Quadrupolstärken  $kl$  und die Quadrupolstärken  $k$  der Quadrupole der linearen Strahlführung.

Magnet	$f$ in m	$kl$ in $m^{-1}$	$k$ in $m^{-2}$
Q1	-0,30	-3,33	-41,67
Q2	0,16	6,17	77,07
Q3	-0,16	-6,36	-79,82
Q4	0,24	4,22	52,76
Q5	-0,15	-6,67	-83,33
Q6	0,48	2,08	25,96
Q7	-0,29	-3,49	-43,65

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

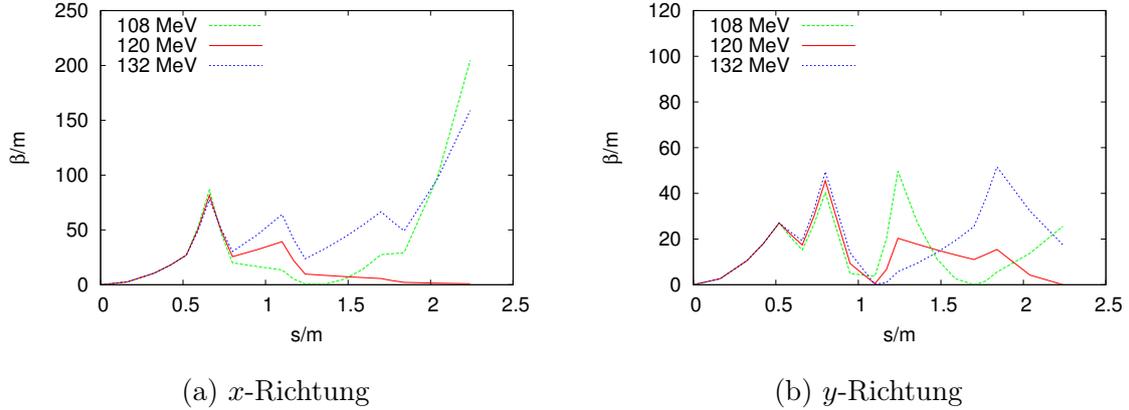


Abbildung 4.3: Die Abbildung vergleicht die Werte der Betafunktion entlang der Strahlführung. Gezeigt sind die Werte der drei Teilstrahlen mit 108, 120 und 132 MeV in  $x$ -Richtung (a) und in  $y$ -Richtung (b).

gnenergie kann bei der Berechnung angegeben werden. Neben den Twissparametern der Elektronen mit Designenergie wurden zusätzlich die der Elektronen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung berechnet. Die Energieabhängigkeit der Quadrupolstärken

$$k(E) = \frac{e}{p(E)}g \quad (4.2)$$

wird dabei berücksichtigt, die chromatischen Auswirkungen werden also beachtet.

Die Ergebnisse der Simulation sind in Abbildung 4.3 zu sehen, die den Verlauf der Betafunktion entlang der Strahlführung in  $x$ - und in  $y$ -Richtung zeigen. Der Verlauf des 120 MeV-Strahls stimmt mit dem des Matrizenmodells überein, der Nachbau in MAD-X ist somit gelungen.

Wegen der Berücksichtigung der chromatischen Effekte hängt die Betafunktion stark von der Energie ab. Für den 120 MeV-Strahl nimmt sie am Anfang des Undulators den Wert 0,91 m an und liegt damit in der Größenordnung des Zielwertes. Für den 108 MeV-Strahl hingegen erreicht sie 204,56 m und für den 132 MeV-Strahl 158,89 m. Damit beträgt der Strahldurchmesser des 108 MeV-Strahls nach Gleichung (3.37) etwa 2,86 mm. Das Aufblähen der Randstrahlen kann man auch in Abbildung 4.4 erkennen. Gezeigt sind wieder die Strahlen der drei berechneten Energien. Der mittlere Strahl zeigt die erwartete Position der jeweiligen Energie, die äußeren beiden Strahlen die Strahleinhüllenden.

Die weitaus problematischere Auswirkung der chromatischen Fehler ist die Änderung der Position des 108 MeV-Strahls. Bei etwa  $s = 1,8$  m wird seine  $x$ -Koordinate negativ. Er befindet sich damit zwischen dem 120 MeV- und dem 132 MeV-Strahl, damit ist die Sortierung der Elektronen in  $x$ -Richtung nach der Energie nicht mehr gegeben und eines der Hauptziele der Schikane verfehlt.

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

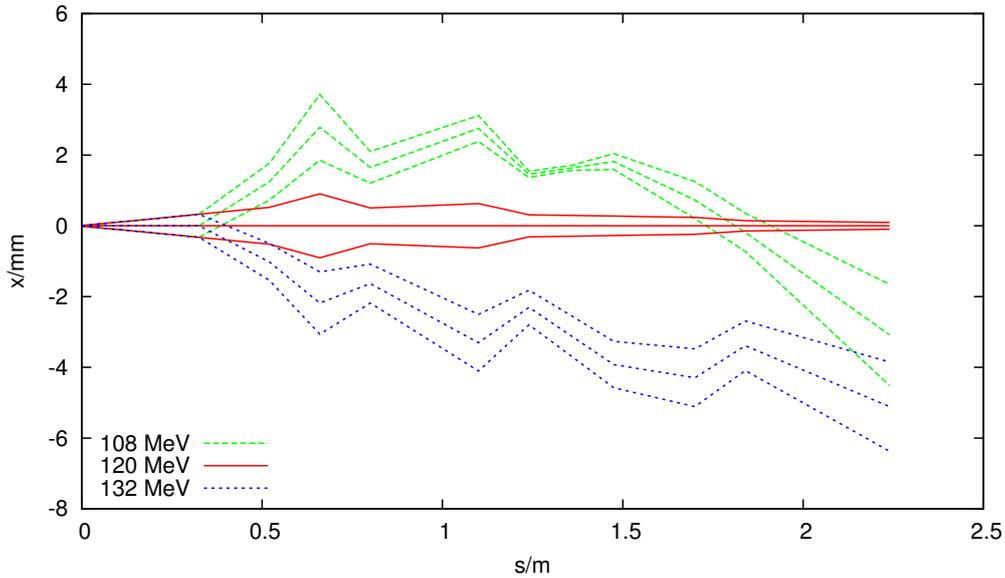


Abbildung 4.4: Gezeigt wird der Strahlverlauf in der Schikane in x-Richtung unter Berücksichtigung der chromatischen Eigenschaften der Quadrupole. Diese führen zur Aufweitung der Strahlen mit Energieabweichung und das Abdriften des Strahls mit der Energie 108 MeV.

Die Implementierung der Strahlführung in MAD-X unter Berücksichtigung der chromatischen Effekte zeigt also, dass die Energieabhängigkeit der Quadrupolstärken zu großen Fehlern führt. Die Auswirkungen dieser Fehler sind die dramatische Vergrößerung der Randenergiestrahlen sowie der Verlust der Sortierung nach der Energie. Im Folgenden gilt es diese Fehler zu korrigieren.

### 4.2.3 Berechnung der Twissparameter mit Hilfe von Tracking

In Abschnitt 3.5 wurde bereits erwähnt, dass das MAD-X-*Twiss* Modul nur für die Berechnung linearer Strahlführungen geeignet ist. Die Twissparameter der Strahlführung mit chromatischer Korrektur durch Sextupole werden daher statistisch aus einer Teilchenverteilung berechnet. Die Veränderung der Teilchenverteilung entlang der Strahlführung wird mit Tracking bestimmt. Hierfür wird das MAD-X-*Thin-lens Tracking* Modul für das Tracking durch dünne Linsen verwendet. Bevor dieses Verfahren auf die Strahlführung mit Sextupolen angewandt wird, soll es für die lineare Strahlführung getestet und die Ergebnisse mit denen des MAD-X-*Twiss* Moduls verglichen werden. Die Twissparameter beschreiben einen Teilchenstrahl mit konstanter Energie. Deshalb wird das Tracking für drei Teilchenverteilungen mit den Energien 108 MeV, 120 MeV und 132 MeV durchgeführt. Die Verteilungen bestehen aus je 10000 Elektronen, deren Position und Bewegungsrichtung normalverteilt

## 4.2. DIE LINEARE STRAHLFÜHRUNG IN DER NÄHERUNG DÜNNER LINSEN

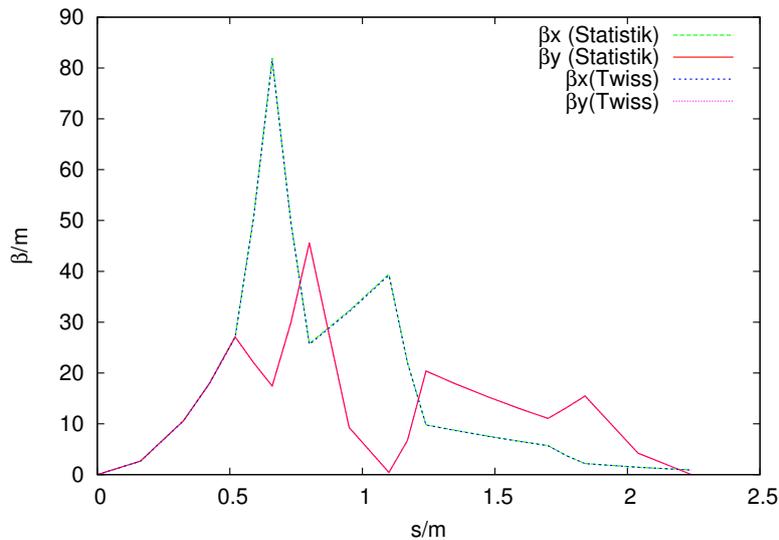


Abbildung 4.5: Diese Abbildung zeigt die Werte der Betafunktion des 120 MeV-Strahls entlang der Strahlführung. Die Werte wurden mit dem MAD-X-*Twiss* Modul (rote Line, grün gestrichelt) und statistisch aus einer Teilchenverteilung berechnet (blau, pink gepunktet).

ist. Für die Verteilung der Positionen wurde als Standardabweichung die Quellgröße  $10\ \mu\text{m}$  angenommen, für die Verteilung der Winkel die Divergenz des Beschleunigers  $1\ \text{mrad}$ .

Die Werte der Betafunktion des *Twiss* Moduls und der statistischen Berechnung mit Tracking werden in den Graphen 4.5 - 4.6 verglichen. Sie zeigen den Verlauf der Betafunktion entlang der Strahlführung für je eine Energie. Abbildung 4.5 zeigt die Betafunktionen für 120 MeV. Beim Vergleich der Werte lässt sich feststellen, dass  $\beta_x$  durchschnittlich nur  $0,46\%$  größer und  $\beta_y$  durchschnittlich  $0,07\%$  größer ist als der Wert des *Twiss* Moduls. Für den 108 MeV-Strahl ist der Unterschied deutlich größer, hier sind die Werte um  $24\%$  beziehungsweise  $24\%$  größer. Beim 132 MeV-Strahl sind die Strahlen in x- und y-Richtung um  $17\%$  kleiner.

Die Tatsache, dass die Werte der Twissparameter für den 120 MeV-Strahl gut übereinstimmen, lässt den Schluss zu, dass die statistische Berechnung aus einer Teilchenverteilung von 10000 Elektronen funktioniert. Um im Weiteren zuverlässige Simulationen durchführen zu können, muss die große Abweichung bei den Randenergien erklärt werden. Zwar sind der Startwert der Betafunktion sowie die Emittanzwerte wegen der statistischen Schwankungen leicht verschieden, dieser Unterschied bewirkt jedoch keine Abweichung von nahezu  $25\%$ . Der Grund hierfür ist die unterschiedliche Rechenmethode. Das MAD-X-*Twiss* Modul berechnet die Twissparameter in linearer Näherung, das heißt über die Multiplikation von Transfermatrizen. Diese Rechnung schließt die Annahme ein, die Ablage des Strahls sei viel kleiner als die Brennweite des Quadrupols. Die Verlängerung des Weges, die ein

### 4.3. CHROMATISCHE KORREKTUR MIT *COMBINED-FUNCTION*-MAGNETEN

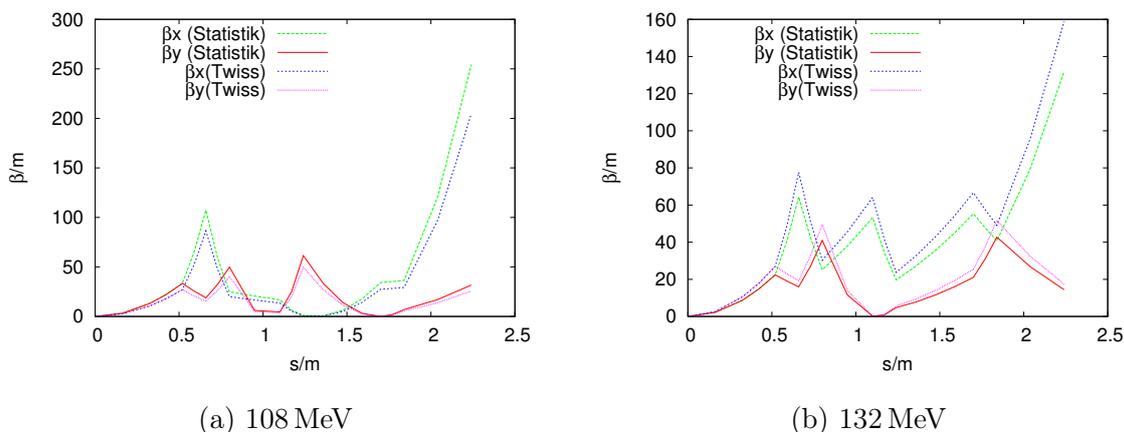


Abbildung 4.6: Vergleich der Werte der Betafunktion entlang der Strahlführung aus der statistischen Berechnung mit denen des *Twiss* Moduls. Gezeigt sind die Werte des 108 MeV-Strahls in (a) und die des 132 MeV-Strahls in (b).

Elektron auf einer äußeren Bahn erfährt, wird darin vernachlässigt. Das ist bei der Berechnung des *Thin-lens Tracking* Modul anders. Die Elektronen bewegen sich durch die Strahlführung ohne die lineare Näherung. Haben sie eine von der Designenergie verschiedene Energie, so bewegen sie sich auf einer Dispersionsbahn, die weiter außen verläuft. Der Weg bis zum nächsten Magneten ist damit länger als für ein Elektron mit Designenergie. Dieser Sachverhalt lässt sich einfach nachprüfen, indem bei der Berechnung der Twissparameter mit dem *Twiss* Modul die Driftstrecken verlängert werden. Diese Rechnung wurde qualitativ durchgeführt. Bei einer pauschalen Verlängerung um 1,05 % konnten die mit Tracking berechneten Werte der Betafunktion am Ende der Strahlführung bereits bis auf eine Genauigkeit von 0,03 % in  $x$ -Richtung und 0,2 % in  $y$ -Richtung erreicht werden. Für eine genauere Untersuchung müsste die Verlängerung der Wegstrecke für jede Driftstrecke über den Winkel der Bewegungsrichtung berechnet werden. Darauf wurde verzichtet, weil die statistische Berechnung ohne lineare Näherung exakter ist als die des *Twiss* Moduls.

### 4.3 Chromatische Korrektur mit *Combined-Function*-Magneten

Zur chromatischen Korrektur der Strahlführung werden Sextupole eingesetzt. Wie bereits erwähnt, werden sie in diesem Experiment in Form von *Combined-Function*-Magneten eingebaut. Um die chromatische Korrektur zunächst unabhängig von der technischen Realisierung (verschobene Sextupole) zu untersuchen, werden ideale *Combined-Function*-Magnete angenommen, die nur über zwei Multipolkomponenten verfügen. In der Implementierung der Strahlführung in MAD-X werden die bisher benutzten Quadrupol-Multipole deshalb

### 4.3. CHROMATISCHE KORREKTUR MIT *COMBINED-FUNCTION*-MAGNETEN

Tabelle 4.5: Die Quadrupol- und Sextupolstärken der *Combined-Function*-Magnete

Magnet	$kl$ in $\text{m}^{-1}$	$k$ in $\text{m}^{-2}$	$ml$ in $\text{m}^{-2}$	$m$ in $\text{m}^{-3}$
CF1	-3,33	-41,67	569,91	7123,85
CF2	6,17	77,07	-490,97	-6137,08
CF3	-6,39	-79,82	724,24	9053,04
CF4	4,22	52,76	-244,38	-3054,76
CF5	-6,67	-83,33	593,02	7412,81
CF6	2,08	25,96	-112,04	-1400,52
CF7	-3,49	-43,65	258,59	3232,37

durch Multipole mit Quadrupol- und Sextupolkomponente ersetzt. Die Berechnung der Sextupolstärken erfolgt in erster Näherung mit Gleichung (3.13). Zusammen mit  $m = \frac{e}{p}s$  ist die integrierte Sextupolstärke

$$ml = \frac{e}{p} \frac{2g}{D} l. \quad (4.3)$$

Die Quadrupolgradienten  $g$  und Dispersionswerte  $D$  werden der linearen Strahlführung des letzten Abschnitts entnommen.

Ziel der Korrektur chromatischer Fehler ist es, die Fokussierung der Quadrupolmagnete für alle Energien anzugleichen. In diesem Fall würden für alle drei Teilstrahlen die gleichen Strahleigenschaften erreicht werden. Das führt zugleich dazu, dass die Teilstrahlen wie im linearen Matrizenmodell wieder nach der Energie sortiert wären.

Die Abbildung 4.7 zeigt den Strahlverlauf entlang Schikane mit Sextupolkorrektur. Die Sortierung der Teilstrahlen nach ihrer Energie ist wieder hergestellt. Ein wichtiges Ziel der chromatischen Korrektur ist damit erfüllt. Am 120 MeV-Strahl ist zu erkennen, dass die Teilstrahlen abdriften. Dieser Effekt ist eine Folge der Verzerrung des Strahls durch die nichtlinearen Elemente und wird in Kapitel 4.7 bei der Analyse des Phasenraums und des Strahlprofils näher erläutert.

Der Einbau der Sextupolkomponenten hat gezeigt, dass die chromatische Korrektur prinzipiell funktioniert. Die Teilstrahlen sind nach ihrer Energie sortiert. Nicht gelöst ist das Problem der Divergenz der Teilstrahlen. Außerdem wirkt sich der Einbau der Sextupolkomponenten wie erwartet negativ auf den 120 MeV-Strahl aus. Die Strahlgröße wird in beiden transversalen Richtungen größer und der Strahl ist in  $x$ -Richtung divergent. Die Quadrupolstärken wurden ohne die Sextupolkomponenten optimiert, insofern wirken diese für den 120 MeV-Strahl als Störung. Aus diesem Grund folgt als nächster Schritt die Optimierung der Quadrupolstärken in Anwesenheit der Sextupolkomponenten.

#### 4.4. BERECHNUNG DER STRAHLFÜHRUNG MIT DICKEN LINSEN

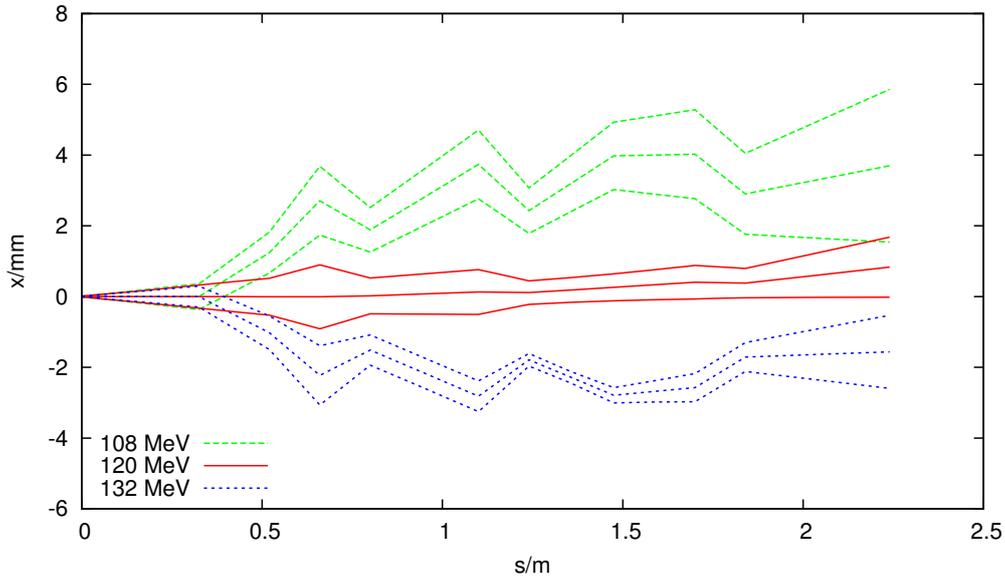


Abbildung 4.7: Die Abbildung zeigt den Strahlverlauf entlang der Schikane mit chromatischer Korrektur durch die Sextupole. Die Sortierung der Teilstrahlen in  $x$ -Richtung nach ihrer Energie ist wieder hergestellt. Die nichtlinearen Elemente bewirken eine Drift der Teilstrahlen (s. Kapitel 4.7).

#### 4.4 Berechnung der Strahlführung mit dicken Linsen

Die vereinfachte Berechnung mit dünnen Linsen war ein erster Schritt zur Überprüfung der chromatischen Korrektur, deren Optimierung soll jedoch in einem realistischeren Modell durchgeführt werden. Aus diesem Grund wird die Strahlführung im Folgenden mit dicken Linsen berechnet, die die endliche Länge der realen Magnete berücksichtigen.

Für den Übergang zu dicken Linsen wurde die in Matlab mit Transfermatrizen berechnete Strahlführung neu optimiert [WID14]. Die Transfermatrizen für dünne Linsen wurden durch solche für dicke Linsen ersetzt. Die neue Optimierung führte zu veränderten Quadrupolstärken und der Verlängerung der Strahlführung auf 2,55 m.

Die Implementierung in MAD-X erfolgt mit RBEND-Dipolen und Sextupolmagneten. Der Ablenkwinkel der Dipole bleibt konstant bei 57,5 mrad. Die Stirnflächen der Dipole werden so angepasst, dass die Dipole im Laborsystem waagrecht stehen, das heißt, die Stirnfläche am Eingang des ersten Dipols und die Stirnfläche am Ausgang des zweiten Dipols stehen senkrecht zum Strahl (s. Abbildung 4.1). Die *Combined-Function*-Magnete werden als Sextupole mit zusätzlicher Quadrupolkomponente definiert. Mit der linearen Strahlführung des vorigen Kapitels werden zuerst die Dispersionswerte an der Position der Magnete bestimmt, die Sextupolstärken werden dann mit der Näherung  $s = \frac{2g}{D}$  berechnet. Das Tracking der Teilchenverteilungen mit dicken Linsen findet in der PTC-Umgebung

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.6: Die Quadrupol- und Sextupolstärken aus dem Matrizenmodell mit dicken Linsen.

Magnet	k in m <sup>-2</sup>	m in m <sup>-3</sup>
CF1	-41,67	5993,01
CF2	70,54	-5311,62
CF3	-70,42	7118,79
CF4	52,79	-2758,80
CF5	-83,33	7612,16
CF6	26,52	-1530,59
CF7	-41,68	4022,38

statt. Zur Auswertung werden vor und nach jedem Magneten Marker eingebaut.

Die als Ausgangspunkt verwendeten Quadrupol- und Sextupolstärken sind in Tabelle 4.6 aufgeführt.

### 4.5 Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken

Der Einsatz von Sextupolen zur chromatischen Korrektur hat vielversprechende Ergebnisse geliefert: Das Abdriften des 108 MeV-Strahls wurde verhindert und die energieabhängige Sortierung der Teilstrahlen in  $x$ -Richtung wurde wieder hergestellt. Die Strahlen sind aber noch stark divergent. Die bisher verwendeten Quadrupolstärken wurden im Matrizenmodell ohne die Berücksichtigung des Einflusses der Sextupole berechnet. Im Folgenden sollen daher die Quadrupol- und Sextupolstärken in einem festen Verhältnis mit Berücksichtigung der Dispersion optimiert werden. Dafür werden die Quadrupolstärken variiert und die Sextupolstärken mit der Bedingung (3.13) für die chromatische Korrektur je neu berechnet (vgl. Abbildung 4.8). Sie sind also nach wie vor an die Quadrupolstärken gekoppelt.

**Zielfunktion** Zur Optimierung der Strahlführung wird ein Kriterium benötigt, das beschreibt, wie nahe die Lösung den Zielparametern ist. Dazu wird eine Zielfunktion aufgestellt, die die Abweichung der einzelnen Parameter von den Sollwerten angibt. Sie ist aus sechs Termen zusammengesetzt, die nach Multiplikation mit einem Gewichtungsfaktor addiert werden. Die zu optimierenden Parameter sind die Twissparameter  $\beta$  für die Strahlgröße und  $\alpha$  für die Strahldivergenz. Betrachtet werden die Parameter des 120 MeV-Strahls in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Des Weiteren gehen der Abstand  $d$  der beiden Strahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung und die maximale Ableitung der Dispersion  $D'$  ein. Diese ist ein Maß für den Winkel der Dispersionsbahnen zur Solltrajektorie, unter dem der Strahl im Undulator verläuft. Um die gleiche Größenordnung der Terme zu erreichen, werden die Werte von  $d$  und  $D'$  mit 1000 multipliziert. Sie sind in der Größenordnung von Millimetern bzw. Milliradian, während die Twissparameter in der Größenordnung von Metern oder 1 sind.

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

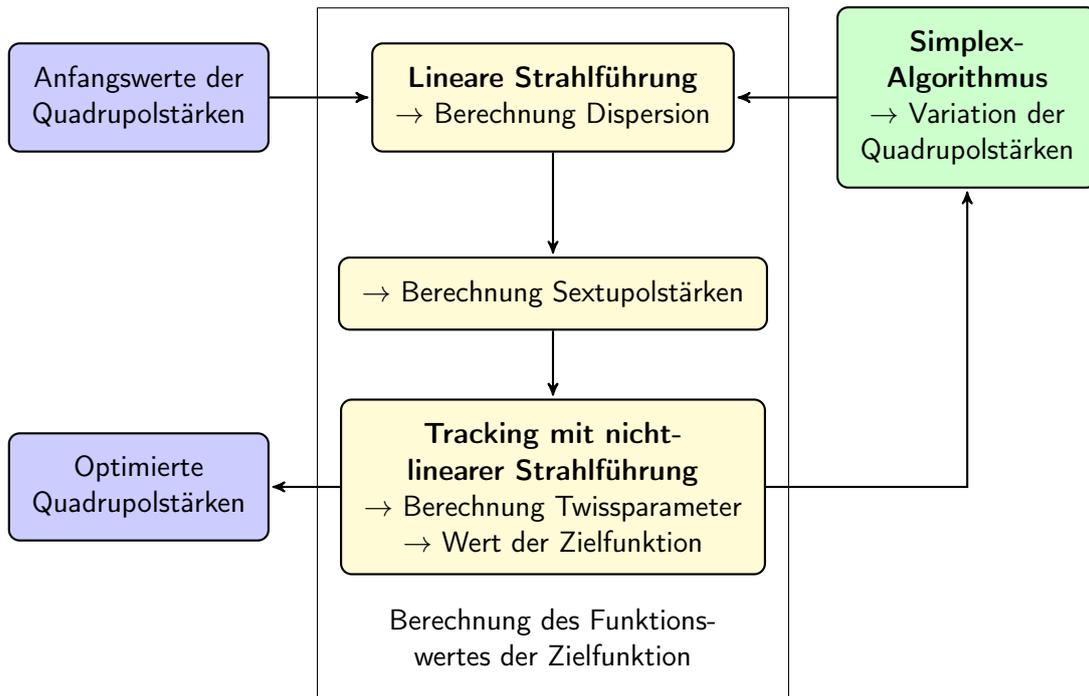


Abbildung 4.8: Diese Abbildung zeigt den Ablauf des Perl-Skripts, das den Simplex-Algorithmus aufruft und die Funktionswerte der Zielfunktion berechnet.

Die Gewichtungparameter  $g_i$  sind vorgesehen, um einzelne Terme stärker oder schwächer gewichten zu können und so die Lösung zu beeinflussen.

Die Zielfunktion hat die Form:

$$\begin{aligned}
 \min = & g_{\beta_x} \cdot (\beta_x/m - 1,05)^2 + g_{\beta_y} \cdot (\beta_y/m - 0,60)^2 \\
 & + g_{\alpha_x} \cdot (\alpha_x - 1,05)^2 + g_{\alpha_y} \cdot (\alpha_y)^2 \\
 & + g_d \cdot ((d/m - 0.0040) \cdot 1000)^2 + g_{D'} \cdot (D'/\text{rad} \cdot 1000)^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ziel der Optimierung ist es nun, den Funktionswert dieser Zielfunktion zu minimieren.

**Implementierung** Zur Minimierung der Zielfunktion wird der Downhill-Simplex-Algorithmus eingesetzt. Der Algorithmus ist in der *Perl Data Language* (PDL) bereits als Funktion implementiert [PDL13]. Aus diesem Grund wurde ein Perl-Skript geschrieben, um den Algorithmus aufzurufen und die Funktionswerte am Anfang des Undulators zu berechnen. Das Schema des Ablaufs ist in Abbildung 4.8 gezeigt.

Die Berechnung des Funktionswertes der Zielfunktion läuft folgendermaßen ab: Zunächst werden mit der linearen Strahlführung in MAD-X die Dispersionswerte an den Quadrupolen berechnet. Mit den Quadrupolgradienten und den Dispersionswerten können nach Gleichung 4.3 die Sextupolstärken berechnet werden, mit denen die Quadrupole durch die

## 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

*Combined-Function*-Magnete ersetzt werden. Das Tracking wird für die Elektronenstrahlen mit Designenergie und  $\pm 10\%$  Energieabweichung durchgeführt. Aus der Verteilung werden die Werte der Zielparameter berechnet und in die Zielfunktion eingesetzt.

Sechs Quadrupolstärken sollen vom Simplex-Algorithmus variiert werden. Die Optimierung der linearen Strahlführung im Matrizenmodell hatte gezeigt, dass der Wert des ersten Quadrupols hauptsächlich die Gesamtstrahlgröße beeinflusst und daher während der Optimierungen stets einen gleich bleibenden Wert behielt [WID14]. Aus diesem Grund wird die Stärke des ersten Quadrupols konstant gehalten. Dies verringert die Zahl der freien Parameter auf sechs. Damit hat der Simplex sieben Eckpunkte. Die weiteren sechs Sätze von Quadrupolstärken, die zur Definition des Simplex notwendig sind, werden von der Perl-Funktion selbst erzeugt.

### 4.5.1 Optimierung mit gleicher Gewichtung aller Zielparameter

Bei der ersten Optimierung der Quadrupolstärken sind die Zielparameter gleich gewichtet.

Die Ergebnisse der Optimierung sind in Abbildung 4.9 sowie in den Tabellen 4.8 und 4.7 dargestellt. Die Twissparameter des 120 MeV-Strahls werden ihren Zielwerten deutlich angenähert. Durch die chromatische Korrektur werden die Verbesserungen auf die Twissparameter der Strahlen mit Energieabweichung übertragen. Die Werte von  $\alpha_x$  sind nach der Optimierung deutlich größer. Das hat zur Folge, dass die Divergenz der Strahlen kleiner ist als in der nicht optimierten Strahlführung (vgl. Abbildung 4.9). Im Falle der 108- und 120 MeV-Strahlen haben sie einen positiven Wert. Die Strahlen sind daher leicht fokussiert. Die Werte der Betafunktion in  $x$ -Richtung sind für alle drei Energien kleiner und erreichen für den 120- und den 132 MeV-Strahl die Größenordnung des Zielwertes. Der Wert des 108 MeV-Strahls kann um 45% reduziert werden. Die Verbesserungen von  $\beta_x$  sind nicht für alle Energien gleich. Während für den 132 MeV-Strahl die Größenordnung des Zielwertes erreicht wird, weicht der Wert des 108 MeV-Strahls immer noch um einen Faktor Fünf ab.

Der Vergleich der Multipolstärken vor und nach der Optimierung in Tabelle 4.8 zeigt, dass die Polung des sechsten und siebten *Combined-Function*-Magneten durch die Optimierung geändert wird. Die Quadrupolstärken des fünften und des sechsten *Combined-Function*-Magneten sind nach der Optimierung beide divergent, was zu einer Reduzierung der Stärke des fünften Magneten führt. Zwischen den beiden *Combined-Function*-Magneten steht der zweite Dipol, der in  $x$ -Richtung als leicht fokussierendes Element wirkt, was die Ursache für den Wechsel der Polung sein kann.

Das größte Problem der hier gezeigten Strahlführung sind die Eintrittswinkel der Teilstrahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung. Sie sind mit  $-3,7\text{ mrad}$  und  $3,3\text{ mrad}$  viel zu groß. Der angestrebte Aufspaltung wird zwar erreicht, ist wegen der großen Winkel nach kürzester Strecke aber nicht mehr an den Gradienten der Magnetfeldamplitude angepasst.

Mit einer veränderten Gewichtung der Terme der Zielfunktion sollen im Folgenden die

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.7: Vergleich der mit dem Simplex-Algorithmus optimierten Zielparameter mit den nicht optimierten Werten

108 MeV	Nicht optimiert	Optimiert	Zielwerte
$\beta_x$ in m:	10,82	5,99	1,05
$\beta_y$ in m:	1,70	2,48	0,60
$\alpha_x$ :	-10,81	0,26	1,05
$\alpha_y$ :	-0,04	-2,91	0,00
$D'$ in mrad:	1,3	-3,7	0,0
120 MeV			
$\beta_x$ in m:	3,87	1,63	1,05
$\beta_y$ in m:	0,40	0,60	0,60
$\alpha_x$ :	-5,04	0,54	1,05
$\alpha_y$ :	0,14	-0,16	0,00
$D'$ in mrad:	1,1	0,0	0,0
132 MeV			
$\beta_x$ in m:	8,33	1,24	1,05
$\beta_y$ in m:	1,34	0,37	0,60
$\alpha_x$ :	-13,42	-0,46	1,05
$\alpha_y$ :	-1,21	-1,90	0,00
$D'$ in mrad:	0,1	3,3	0,0
$D$ in mm:	5,0	4,0	4,0

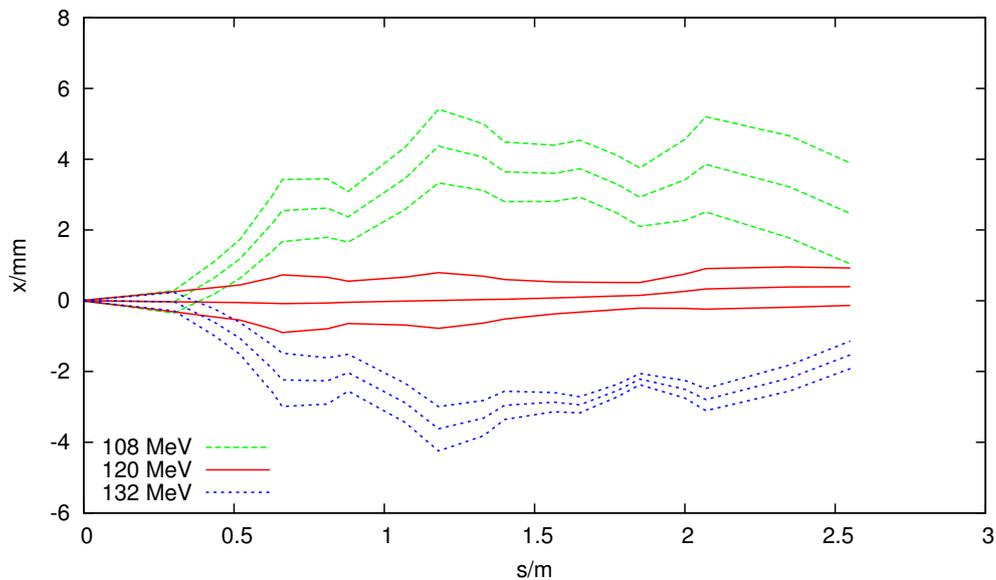


Abbildung 4.9: Strahlverlauf nach der Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.8: Vergleich der optimierten und der nicht optimierten Multipolstärken

Magnet	$k$ in $\text{m}^{-2}$		$m$ in $\text{m}^{-3}$	
	nicht optimiert	optimiert	nicht optimiert	optimiert
CF1	-41,67	-41,67	5993,01	5993,01
CF2	70,54	66,61	-5311,62	-5000,80
CF3	-70,42	-62,07	7118,79	5797,65
CF4	52,79	39,80	-2758,80	-1945,35
CF5	-83,33	-26,97	7612,16	1763,88
CF6	26,52	-49,94	-1530,59	4282,39
CF7	-41,68	32,75	4022,38	-2047,49

Abhängigkeiten der optimierten Parameter untersucht und damit die Strahlführung weiter verbessert werden.

##### 4.5.2 Variation der Zielfunktion

Die Untersuchung der Abhängigkeiten der optimierten Parameter erfolgte über die Veränderung der Gewichtungparameter in der Zielfunktion. Dabei wurde die Gewichtung jedes Parameters erhöht bzw. bis auf Null reduziert, wobei nicht immer Lösungen gefunden werden konnten. Wie erwartet waren die Werte bei höherer Gewichtung dem Zielwert näher und bei der Reduzierung der Gewichtung weiter entfernt. Darüber hinaus ergaben sich einige allgemeine Aussagen, die im Folgenden diskutiert werden. Die Zahlenwerte der dafür relevanten Optimierungen sind in den Tabellen 4.9 und 4.10 aufgeführt.

**Zusammenhang von  $x$  und  $y$**  Eine Verkleinerung der Strahlgröße in  $x$ -Richtung bewirkt eine Vergrößerung in  $y$ -Richtung. Dies entspricht den Erwartungen, da in den Quadrupolen eine größere Fokussierung in  $x$ -Richtung eine größere Defokussierung in  $y$ -Richtung bedeutet. Dieser Sachverhalt ist in Tabelle 4.9 gut zu erkennen, in der die optimierten Parameter bei veränderter Gewichtung von  $\beta_x$  (im Folgenden Optimierungen B und C) mit den nicht optimierten Werten und den Werten nach Optimierung mit gleich gewichteten Zielparametern (Optimierung A) verglichen werden. Der Zusammenhang der Strahlgrößen in  $x$ - und  $y$ -Richtung ist auch bei der Optimierung mit gleich gewichteten Zielparametern zu erkennen. Die Tabelle zeigt außerdem, dass eine höhere Gewichtung von  $\beta_x$  zu einem größeren Wert von  $\alpha_x$  führt und somit eine stärkere Fokussierung in  $x$ -Richtung zur Folge hat.

**Zusammenhang zwischen Twissparametern und Aufspaltung  $d$**  Eine höhere Gewichtung des Abstandes der Strahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung ergibt keine nennenswerte Änderung. Wird der Abstand jedoch vernachlässigt (Optimierung D), so können die Twiss-

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.9: Vergleich der Werte der Optimierung mit veränderter Gewichtung der Betafunktion in  $x$ -Richtung mit den Werten der Optimierung mit gleicher Gewichtung aller Zielwerte

		Optim. A	Optim. B	Optim. C	Zielwert
	Nicht optimiert	Gleiche Gew.	$g_{\beta_x} = 10$	$g_{\beta_x} = 0$	
108 MeV					
$\beta_x$ in m:	10,82	5,99	4,62	8,29	1,05
$\beta_y$ in m:	1,70	2,48	2,68	1,87	0,60
$\alpha_x$ :	-10,81	0,26	1,19	-0,84	1,05
$\alpha_y$ :	-0,04	-2,91	-3,32	-2,27	0,00
$D'$ in mrad:	1,3	-3,7	-4,8	-3,2	0,0
120 MeV					
$\beta_x$ in m:	3,87	1,63	1,27	3,38	1,05
$\beta_y$ in m:	0,40	0,60	0,62	0,60	0,60
$\alpha_x$ :	-5,04	0,54	0,70	0,74	1,05
$\alpha_y$ :	0,14	-0,16	-0,25	-0,13	0,00
$D'$ in mrad:	1,1	0,0	-0,1	0,1	0,0
132 MeV					
$\beta_x$ in m:	8,33	1,24	1,50	0,97	1,05
$\beta_y$ in m:	1,34	0,37	0,52	0,19	0,60
$\alpha_x$ :	-13,42	-0,46	-0,05	0,54	1,05
$\alpha_y$ :	-1,21	-1,90	-2,55	-0,80	0,00
$D'$ in mrad:	0,1	3,3	4,0	2,9	0,0
$d$ in mm:	5,0	4,0	3,7	4,1	0,0

parameter in beiden transversalen Richtungen verbessert werden. Tabelle 4.10 zeigt, dass die Werte der Betafunktion des 108 MeV-Strahls um etwa 13% abnehmen und die des 132 MeV-Strahls sogar um etwa 30%. In  $y$ -Richtung nimmt außerdem die Divergenz deutlich ab.

Durch die Vernachlässigung des Abstandes wird dieser mit 2,1 mm nahezu halbiert. Der angestrebte Abstand von 4 mm scheint also einen negativen Einfluss auf die Werte der Twissparameter zu haben. Die Eintrittswinkel werden nicht wesentlich beeinflusst.

**Veränderte Gewichtung von  $D'$**  Bei der Vernachlässigung des Winkels in der Zielfunktion (Optimierung E) können die Zielwerte der Twissparameter für den 120 MeV-Strahl erreicht werden (s. Tabelle 4.10). In der  $x$ -Richtung können sie auch für die Strahlen mit einer Energie von 108 MeV und 132 MeV deutlich verbessert werden. Diese Lösung ist allerdings nicht realisierbar. Die Eintrittswinkel am Undulator sind mit -14,8 mrad bzw. 12,2 mrad viel zu groß und der Abstand der Teilstrahlen am sechsten *Combined-Function*-Magneten ist größer als 20 mm. Das Zentrum des 108 MeV-Strahls hat eine Ablage von 13 mm, was zusammen mit der Strahlgröße von  $\sigma = 3$  mm nicht mit der Apertur des Magneten zu vereinbaren ist. Außerdem sind die notwendigen Multipolstärken technisch nicht realisierbar.

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

bar. Diese Lösung wird hier trotzdem erwähnt, weil sie den Einfluss des Winkels auf die Strahlführung zeigt.

Die höhere Gewichtung des Winkels (Optimierung F) vergrößert die Werte von  $\beta_x$  beträchtlich. Die Strahlen sind außerdem wieder stark divergent, was an den negativen Werten von  $\alpha$  zu erkennen ist. Im Vergleich zu Optimierung A mit gleich gewichteten Parametern ist mit der Verschlechterung der Twissparameter in  $x$ -Richtung eine Verbesserung in  $y$ -Richtung verbunden. Im Vergleich zu der nicht optimierten Strahlführung haben sich die Werte der Twissparameter des 108 MeV-Strahls durch die Optimierung von den Zielwerten entfernt, während die des 132 MeV-Strahls verbessert wurden. Dies lässt auch eine Korrelation der Werte des 108- und des 132 MeV-Strahls vermuten.

Insgesamt scheint die Parallelität der einzelnen Teilstrahlen eine Fokussierung innerhalb der Strahlen auszuschließen. Die Strahlführungen mit fokussierten Teilstrahlen haben einen großen Eintrittswinkel, während die Strahlführungen mit kleinem Eintrittswinkel divergente Teilstrahlen aufweisen. Anhand der Strahlverläufe der Optimierungen A und F ist das gut zu erkennen. Sie sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 dargestellt. Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu den Berechnungen mit dem Matrizenmodell und ist problematisch, weil sich zwei der Hauptziele der Schikane gegenseitig ausschließen. Die Parallelität ist eine Anforderung mit höchster Priorität, deshalb wird trotz der Verschlechterung der Twissparameter die Lösung aus der Optimierung mit höher gewichtetem  $D'$  übernommen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die vergleichsweise schlechten Werte trotzdem deutlich besser sind als im nicht optimierten Fall. Im Folgenden soll untersucht werden, ob die Strahlparameter mit einer zusätzlichen Veränderung der Zielfunktion verbessert werden können.

**Variation der Zielfunktion mit höherer Gewichtung von  $D'$**  In diesem Abschnitt wird der Einfluss weiterer Variationen in der Gewichtung der optimierten Parameter zusätzlich zu der erhöhten Gewichtung des Eintrittswinkels  $D'$  untersucht. Die Werte der Parameter am Anfang des Undulators sind in Tabelle 4.11 aufgeführt.

Zuerst wird die Gewichtung des Abstandes  $d$  der Strahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung erhöht (Optimierung G). Hiermit kann der Abstand von 4,9 mm auf 4,2 mm verkleinert werden, ohne dass sich die Winkel dramatisch verändern. Die Verbesserung des Abstandes wird allerdings mit einer weiteren Vergrößerung der Twissparameter in  $x$ -Richtung erkaufte. Als Reaktion darauf wurde  $\beta_x$  zusätzlich höher gewichtet (Optimierung H). Das führt zu einer Verkleinerung von 20% für den 108 MeV-Strahl, 12% für den 120 MeV-Strahl und 2% im Fall des 132 MeV-Strahls. Außerdem wird die Aufspaltung bis auf einen Zehntel Millimeter erreicht. Die erhöhte Gewichtung von  $\beta_x$  hat demnach vor allem eine Auswirkung auf den 108 MeV-Strahl, wobei der dabei erzielte Wert von  $\beta_x = 12,6$  m trotzdem eine Größenordnung zu groß ist. Die bei der Optimierung erreichten Eintrittswinkel der Strahlen mit

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

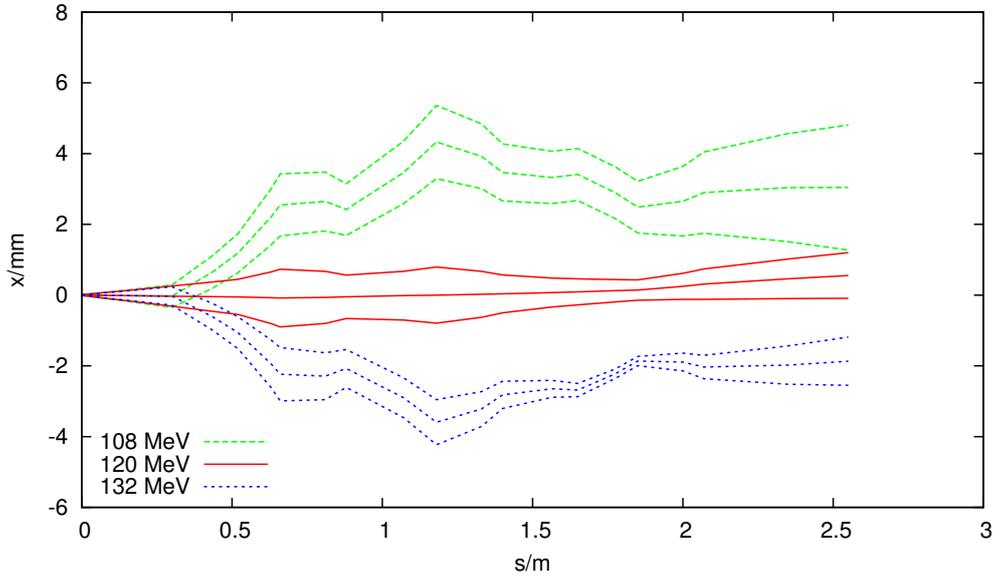


Abbildung 4.10: Strahlverlauf nach Optimierung mit höherer Gewichtung des Winkels  $D'$

Tabelle 4.10: Vergleich der Werte der Optimierung mit veränderter Gewichtung des Abstandes  $d$  und des Winkels  $D'$  mit den Werten der Optimierung mit gleicher Gewichtung aller Zielwerte

		Optim. A	Optim. D	Optim. E	Optim. F	
	Nicht opt.	Gl. Gew.	$g_d = 0$	$g_{D'} = 0$	$g_{D'} = 100$	Zielwert
108 MeV						
$\beta_x$ in m:	10,82	5,99	5,16	2,58	14,93	1,05
$\beta_y$ in m:	1,70	2,48	2,17	5,74	2,36	0,60
$\alpha_x$ :	-10,81	0,26	0,07	1,52	-9,07	1,05
$\alpha_y$ :	-0,04	-2,91	-2,59	-2,80	-3,30	0,00
$D'$ in mrad:	1,3	-3,7	-3,8	-14,8	0,0	0,0
120 MeV						
$\beta_x$ in m:	3,87	1,63	1,40	1,05	2,76	1,05
$\beta_y$ in m:	0,40	0,60	0,60	0,60	0,78	0,60
$\alpha_x$ :	-5,04	0,54	0,57	1,05	-1,87	1,05
$\alpha_y$ :	0,14	-0,16	-0,16	0,00	-0,44	0,00
$D'$ in mrad:	1,1	0,0	0,1	-0,2	0,5	0,0
132 MeV						
$\beta_x$ in m:	8,33	1,24	0,79	0,63	4,18	1,05
$\beta_y$ in m:	1,34	0,37	0,27	1,96	0,23	0,60
$\alpha_x$ :	-13,42	-0,46	-0,52	0,68	-4,76	1,05
$\alpha_y$ :	-1,21	-1,90	-1,35	-4,85	-0,96	0,00
$D'$ in mrad:	0,1	3,3	3,4	12,2	0,5	0,0
$d$ in mm:	5,0	4,0	2,1	4,4	4,9	0,0

#### 4.5. OPTIMIERUNG MIT GEKOPPELTEN MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.11: Endwerte der Optimierungen mit erhöhter Gewichtung der Aufspaltung  $d$  und des Winkels  $D'$

108 MeV	Nicht opt.	Opt. F	Opt. G	Opt. H	Opt. I	Zielwert
$\beta_x$ in m:	10,82	14,93	15,73	12,60	12,55	1,05
$\beta_y$ in m:	1,70	2,36	2,18	2,44	2,47	0,60
$\alpha_x$ :	-10,81	-9,07	-10,45	-7,14	-7,01	1,05
$\alpha_y$ :	-0,04	-3,30	-3,16	-3,48	-3,51	0,00
$D'$ in mrad:	1,3	0,0	-0,1	-0,6	-0,6	0,0
120 MeV						
$\beta_x$ in m:	3,87	2,76	2,69	2,36	2,38	1,05
$\beta_y$ in m:	0,40	0,78	0,80	1,17	1,17	0,60
$\alpha_x$ :	-5,04	-1,87	-2,04	-1,57	-1,55	1,05
$\alpha_y$ :	0,14	-0,44	-0,46	-0,76	-0,76	0,00
$D'$ in mrad:	1,1	0,5	0,5	0,4	0,4	0,0
132 MeV						
$\beta_x$ in m:	8,33	4,18	4,34	4,26	4,25	1,05
$\beta_y$ in m:	1,34	0,23	0,20	0,22	0,21	0,60
$\alpha_x$ :	-13,42	-4,76	-5,37	-4,78	-4,71	1,05
$\alpha_y$ :	-1,21	-0,96	-0,75	0,04	0,02	0,00
$D'$ in mrad:	0,1	0,5	0,6	1,0	1,0	0,0
$d$ in mm:	5,0	4,9	4,2	4,1	4,2	4,0

- Optimierung F:  $g_{D'} = 100$   
 Optimierung G:  $g_{D'} = 100, g_d = 10$   
 Optimierung H:  $g_{D'} = 100, g_{\beta_x} = 10, g_d = 10$   
 Optimierung I:  $g_{D'} = 100, g_{\beta_x} = 10$

Energieabweichung sind bis zu 0,6 mrad größer als ohne die zusätzlichen Gewichtungen von  $d$  und  $\beta_x$ .

Der letzte Fall, der untersucht wurde, war die zusätzliche Gewichtung von  $\beta_x$  ohne  $d$  (Optimierung I). Die erreichten Werte gleichen in diesem Fall ziemlich genau denen der vorigen Optimierung H.

**Ergebnis der Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken** Die Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken ermöglicht Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Strahlführung. So bewirkt eine Verbesserung der Twissparameter in einer transversalen Richtung häufig eine Verschlechterung in der anderen und die vorgegebene Aufspaltung behindert die Optimierung der Twissparameter in beiden Richtungen. Die größte Schwierigkeit für weitere Optimierungen liegt in der Erkenntnis, dass die Parallelität der Teilstrahlen ihre Fokussierung ausschließt. Die höhere Gewichtung des Eintrittswinkels in den Undulator ist notwendig, da im gleich gewichteten Fall die Winkel zu groß sind. Die Verbesserung eines

weiteren Parameter durch eine zusätzliche Veränderung der Zielfunktion ist nur zu Lasten eines anderen Parameters möglich. Aus diesem Grund bleibt nur der Eintrittswinkel höher gewichtet. Dies hat zur Folge, dass die Teilstrahlen am Ende sehr groß werden. Vor allem für Elektronen mit geringerer Energie als der Designenergie ist eine starke Vermischung zu erwarten, die sich negativ auf die Linienbreite des Undulators auswirkt. Die Strahlgröße muss aus diesem Grund reduziert werden.

Bisher sind die Sextupolstärken über die in der Näherung linearer Dispersion berechnete Bedingung  $s = \frac{2g}{D}$  an die Quadrupolstärken gekoppelt. Diese Kopplung ist bei der Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus notwendig, weil sie bei der hier vorgenommenen Minimierung der Zielfunktion für den 120 MeV-Strahl die Korrektur der Strahlen mit Energieabweichung garantiert. Gleichzeitig bedeutet sie aber eine Einschränkung der Freiheitsgrade. Eine Aufgabe dieser Kopplung ermöglicht eventuell eine feinere Einstellung der Multipolstärken und dadurch weitere Möglichkeiten für die Korrektur der Strahlführung. Aus diesem Grund ist der nächste Schritt die Optimierung der Strahlführung mit nicht gekoppelten Multipolstärken.

## 4.6 Separate Optimierung der Multipolstärken

### 4.6.1 Optimierung der Sextupolstärken

Das Ergebnis der bisherigen Optimierungen der Multipolstärken ist eine Strahlführung, deren Teilstrahlen zwar parallel zueinander, aber jeweils divergent und sehr groß waren. Eine weitere Verbesserung eines bestimmten Parameters ist in der bisher verfolgten Strategie nur zu Lasten eines anderen Parameters möglich. Bei der Berechnung dieser Optimierungen sind die Sextupolstärken über Bedingung 3.13 für die chromatische Korrektur an die Quadrupolstärken gekoppelt. Möglicherweise kann durch die Aufgabe dieser Kopplung eine flexiblere Einstellung der Multipolstärken erfolgen, mit der die Strahlparameter noch weiter verbessert werden können. Deshalb wird in diesem Schritt untersucht werden, welchen Einfluss die Entkopplung der Multipolstärken auf die Sextupolstärke hat. Die Quadrupolstärken bleiben konstant und werden aus der mit der höheren Gewichtung des Winkels  $D'$  optimierten Strahlführung übernommen. Sie weist die kleinsten Eintrittswinkel in den Undulator auf und soll daher weiterentwickelt werden. Die Sextupolstärken werden in der Umgebung der Simplex-Lösung in einem Intervall von  $\Delta m = \pm 1000 \text{ m}^{-3}$  nach der Monte-Carlo-Methode zufällig variiert. Wie bei der Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken wird für jede Strahlführung der Wert der Zielfunktion (4.4) berechnet. Die höhere Gewichtung des Winkels wird dabei beibehalten. Pro Durchlauf werden 10000 verschiedene Strahlführungen berechnet und die besten fünf Ergebnisse abgespeichert.

#### 4.6. SEPARATE OPTIMIERUNG DER MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.12: Die Tabelle zeigt die mit nicht gekoppelten Multipolstärken optimierten Parameter am Ende der Strahlführung im Vergleich zur Lösung mit gekoppelten Multipolstärken.

	Optim. F $g_{D'} = 100$ (Simplex)	Optim. J $g_{D'} = 100$	Optim. K $g_{D'} = 100,$ $g_{\beta_x} = 10$	Optim. L $g_{D'} = 100,$ $g_d = 50$	Zielwert
108 MeV					
$\beta_x$ in m:	14,93	19,51	18,82	8,44	1,05
$\beta_y$ in m:	2,36	3,01	2,94	2,40	0,60
$\alpha_x$ :	-9,07	-9,69	-9,20	-5,78	1,05
$\alpha_y$ :	-3,30	-3,60	-3,22	-3,91	0,00
$D'$ in mrad:	0,0	0,1	0,0	-0,1	0,0
120 MeV					
$\beta_x$ in m:	2,76	2,58	2,51	2,88	1,05
$\beta_y$ in m:	0,78	0,84	0,87	0,73	0,60
$\alpha_x$ :	-1,87	-1,62	-1,58	-1,95	1,05
$\alpha_y$ :	-0,44	-0,42	-0,38	-0,62	0,00
$D'$ in mrad:	0,5	0,4	0,4	0,5	0,0
132 MeV					
$\beta_x$ in m:	4,18	4,02	4,60	2,39	1,05
$\beta_y$ in m:	0,23	0,18	0,19	0,52	0,60
$\alpha_x$ :	-4,76	-4,97	-5,65	-2,76	1,05
$\alpha_y$ :	-0,96	-0,51	-0,50	-2,24	0,00
$D'$ in mrad:	0,5	0,7	0,8	0,7	0,0
$d$ in mm:	4,9	5,0	4,8	4,5	4,0

**Ergebnisse** Die optimierten Parameter einer Auswahl der Rechnungen sind in Tabelle 4.12 dargestellt. Durch die Optimierung J mit entkoppelten Sextupolstärken können die Twissparameter des 120 MeV-Strahls in  $x$ -Richtung leicht verbessert werden. Der Wert  $\beta_x$  wird um 6 % auf 2,58 m verkleinert. Der Betrag von  $\alpha_x$  wird um 13 % reduziert, die Divergenz des Strahls ist dadurch kleiner. Die Verbesserung der Twissparameter in  $x$ -Richtung hat einen negativen Einfluss auf die Twissparameter in  $y$ -Richtung und die Eintrittswinkel in den Undulator. Dies stimmt mit den Ergebnissen des vorigen Kapitels überein.

Die Teilstrahlen mit Energieabweichung reagieren unterschiedlich auf die separate Optimierung der Sextupolstärken. Während  $\beta_x$  des 132 MeV-Strahls um 3 % reduziert wird, nimmt der Wert des 108 MeV-Strahls um 30 % zu. Der Vergleich der Sextupolstärken vor und nach der Optimierung in Tabelle 4.13 zeigt, dass bis auf den vierten *Combined-Function*-Magneten alle Sextupolstärken verringert werden. Die des fünften und siebten Magneten werden sogar fast um den maximalen Betrag von  $1000 \text{ m}^{-3}$  reduziert. Eine Verkleinerung der Sextupolstärken trägt vermutlich zur Verbesserung des Funktionswertes der Zielfunktion bei, weil nach wie vor nur die Twissparameter des 120 MeV-Strahls zu deren Berechnung benutzt werden. Durch die Verkleinerung weichen die Sextupolstärken bis zu

Tabelle 4.13: Vergleich der Sextupolstärken  $m$  in den mit gekoppelten und nicht gekoppelten Multipolstärken optimierten Strahlführungen.

Optimierung F $g_{D'} = 100$ (Simplex)	Optimierung J $g_{D'} = 100$	Optimierung K $g_{D'} = 100,$ $g_{\beta_x} = 10$	Optimierung L $g_{D'} = 100,$ $g_d = 50$
$m$ in $\text{m}^{-3}$ :			
5992,97	5732,35	5098,47	6911,66
-4902,16	-4249,50	-3944,03	-4018,59
5253,83	4507,34	4311,86	5830,91
-2033,00	-2094,99	-2402,67	-2747,07
2003,70	1098,66	1805,81	2478,73
5117,69	4958,63	5904,60	5090,35
-1336,26	-377,12	-652,84	-1854,40

72 % von den nach der Näherung 4.3 berechneten Werten der gekoppelten Optimierung ab. Dies könnte die scheinbare Beeinträchtigung der chromatischen Korrektur erklären, wegen der die Angleichung der Strahlparameter erschwert wird.

Bei der zusätzlichen höheren Gewichtung des Abstandes  $d$  (Optimierung L) ist genau das Gegenteil zu beobachten. Die Multipolstärken werden durch die Optimierung um durchschnittlich 15 % vergrößert, während die Differenz der Werte von  $\beta_x$  um 44 % auf 6,05 m zurückgeht. In diesem Fall ist die Angleichung der Twissparameter insbesondere deshalb ein schönes Ergebnis, weil bei dieser Optimierung die beiden für die Strahlungserzeugung wichtigsten Parameter höher gewichtet sind. Leider wird dafür der Eintrittswinkel 108 MeV-Strahls fast verdreifacht.

Die Optimierung mit entkoppelten Sextupolstärken ermöglicht zwar eine leichte Verbesserung der Strahlparameter im Vergleich zur Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken, ein entscheidender Durchbruch ist aber nicht gelungen. Der Punkt, an dem eine Verbesserung des einen Parameters wieder eine Verschlechterung des anderen hervorruft, wird auch hier sehr schnell erreicht.

#### 4.6.2 Iterative Optimierung von Sextupol- und Quadrupolstärken

Die Optimierung mit entkoppelten Sextupolstärken allein führte nicht zu einer deutlichen Verkleinerung der Strahlgröße. Als Nächstes werden daher sowohl Sextupol- als auch Quadrupolstärken im entkoppelten Fall optimiert. Hierzu wird ein iteratives Verfahren gewählt: Zuerst werden wie im letzten Schritt die Sextupolstärken mit konstanten Quadrupolstärken variiert, danach werden die Sextupolstärken festgehalten und die Quadrupolstärken variiert. Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden. Die Zielfunktion enthält die höhere Gewichtung des Winkels  $g_{D'} = 100$ , die anderen Terme sind gleich gewichtet. Nach wie vor werden nur die Twissparameter des 120 MeV-Strahls berücksichtigt. Dies

#### 4.6. SEPARATE OPTIMIERUNG DER MULTIPOLSTÄRKEN

ist nicht optimal, weil die Strahlparameter der Teilstrahlen mit Energieabweichung nicht betrachtet werden. Da die Multipolstärken aber in der Umgebung der Simplex-Lösung variiert werden, sollte die chromatische Korrektur erhalten bleiben. Die Intervalle, in denen die Multipolstärken variiert werden, sind  $\Delta k = \pm 5 \text{ m}^{-2}$  für die Quadrupolstärken und  $\Delta m = \pm 1000 \text{ m}^{-3}$  für die Sextupolstärken.

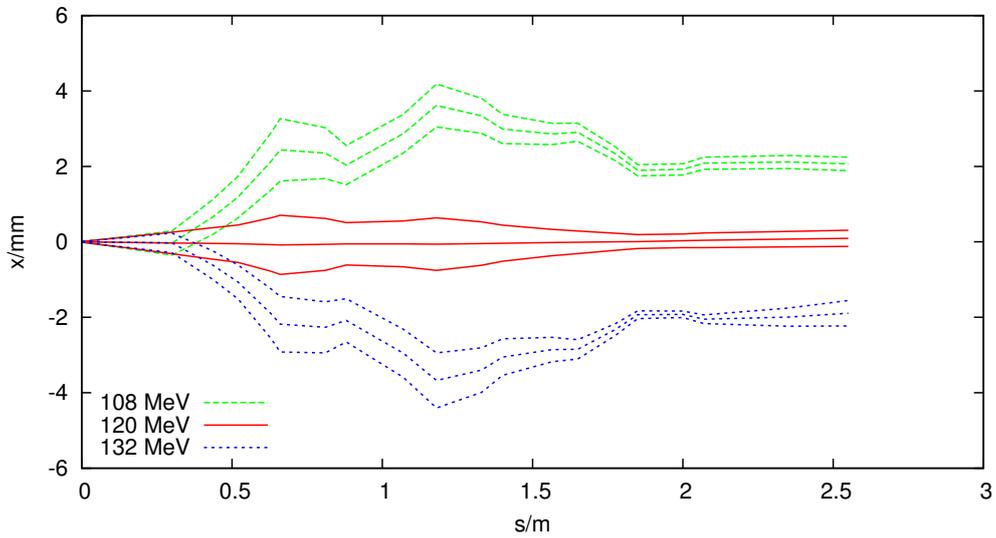
**Ergebnisse** Im Folgenden werden drei Strahlführungen verglichen. Die Strahlführung von Optimierung M ist das Resultat von zehn Durchläufen, bei denen für Sextupole und Quadrupole je 10000 Variationen berechnet wurden. Die Rechenzeit hierfür betrug 17 Stunden und 12 Minuten. Optimierung N ist ein Zwischenergebnis aus der Berechnung von Optimierung M. Optimierung O umfasste zehn Durchläufe mit je 5000 Variationen. Der Strahlverlauf der Optimierungen N und O ist in den Abbildungen 4.11 und 4.12 gezeigt. Die dazugehörigen Werte sind in Tabelle 4.14 aufgelistet. Die Strahlgrößen in  $x$ -Richtungen sind bei allen drei Lösungen signifikant kleiner als bei der Strahlführung mit gekoppelten Multipolstärken (Optimierung F). Der 120 MeV-Strahl ist weniger als halb so groß, der 108 MeV-Strahl kann sogar um eine Größenordnung verkleinert werden.

**Optimierung M** Die kleinsten Strahlgrößen in  $x$ -Richtung werden nach Optimierung M erreicht. In  $y$ -Richtung ist der 120 MeV-Teilstrahl, wenn auch leicht divergent, fast eine Größenordnung kleiner als der Zielwert. Der 132 MeV-Strahl ist etwa dreimal so groß wie der Zielwert, dafür aber fokussiert. Problematisch an dieser Lösung ist der 108 MeV-Strahl in der  $y$ -Richtung. Er hat am Anfang des Undulators bereits die Größe von fast einem Millimeter und ist mit  $\alpha_y = -195,58$  sehr stark divergent.

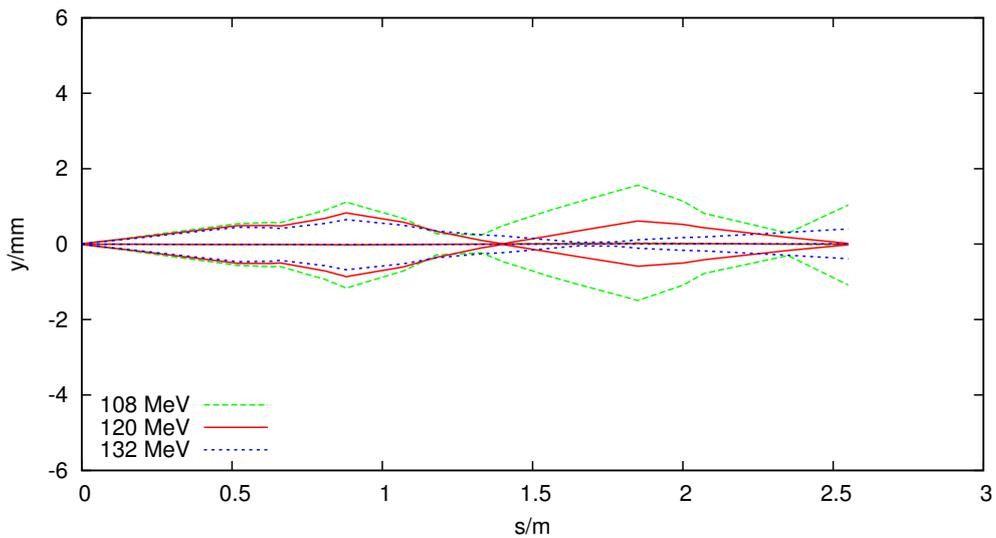
**Optimierung N** Die Strahlgrößen nach Optimierung N sind durchschnittlich 15 % größer als die nach Optimierung M. Dies liegt zum einen an den größeren Werten der Betafunktion zum anderen aber auch am höheren Wert der RMS-Emittanz. In  $y$ -Richtung ist daher auch der 108 MeV-Strahl größer, obwohl  $\beta_y$  kleiner ist. Außerdem ist dieser Strahl wie auch nach Optimierung M sehr divergent, was durch den Wert  $\alpha_y = -130$  ausgedrückt wird. Der Vorteil dieses Ergebnisses im Vergleich zu Optimierung M ist, dass der Zielwert der Aufspaltung erreicht wird.

**Optimierung O** Das Ergebnis von Optimierung O weicht von dem der beiden vorigen Optimierungen deutlich ab. Der 108 MeV-Strahl ist wegen der großen Emittanz in  $x$ -Richtung mehr als doppelt so groß, dafür ist er weit weniger divergent als in den vorigen Strahlführungen. Der Wert von  $\alpha_y$  ist um drei Größenordnungen kleiner. Gleichzeitig verfügt dieses Ergebnis über die kleinsten Eintrittswinkel. Leider ist die Aufspaltung der Teilstrahlen mit 5 mm um 25 % zu groß.

#### 4.6. SEPARATE OPTIMIERUNG DER MULTIPOLSTÄRKEN



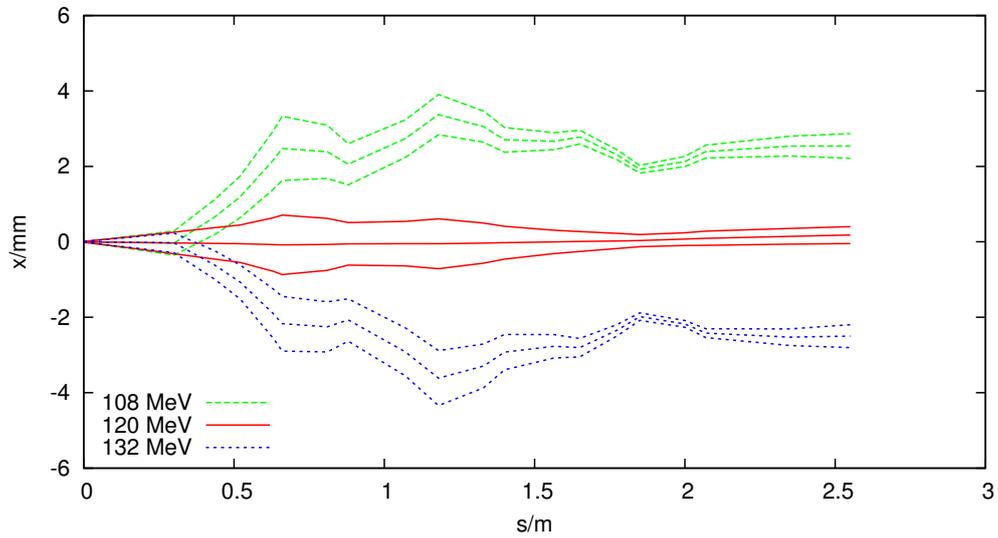
a)



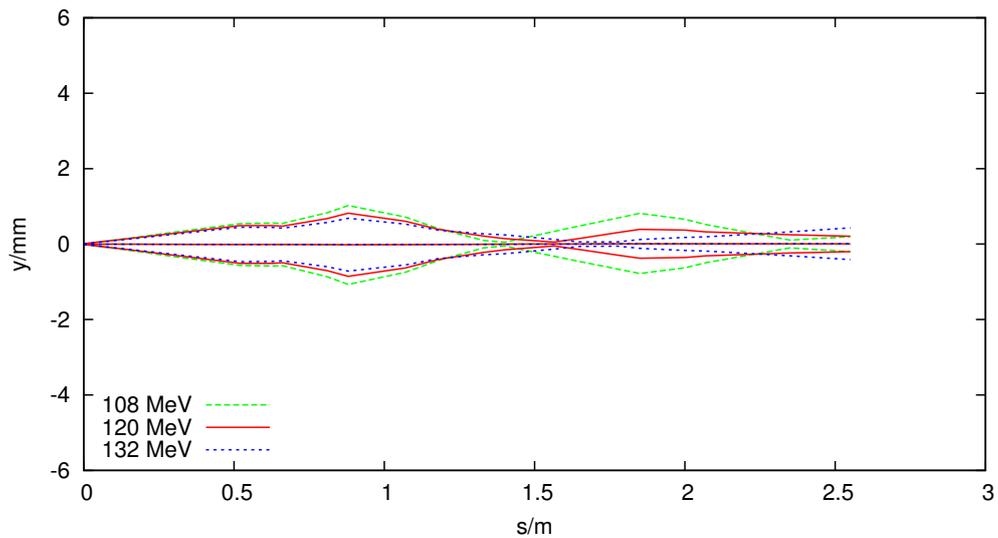
b)

Abbildung 4.11: Diese Abbildung zeigt den Strahlverlauf entlang der Strahlführung nach Optimierung N. Quadrupol- und Sextupolstärken wurden mit der Monte-Carlo-Methode optimiert. In Teil a) ist der Strahlverlauf in  $x$ -Richtung gezeigt. Teil b) zeigt den Strahlverlauf in  $y$ -Richtung. Die Divergenz des 108 MeV-Strahls ist deutlich zu erkennen.

#### 4.6. SEPARATE OPTIMIERUNG DER MULTIPOLSTÄRKEN



a)



b)

Abbildung 4.12: Diese Abbildung zeigt den Strahlverlauf entlang der Strahlführung nach Optimierung O. Quadrupol- und Sextupolstärken wurden iterativ mit der Monte-Carlo-Methode optimiert. In Teil a) ist der Strahlverlauf in  $x$ -Richtung gezeigt, in Teil b) der Strahlverlauf in  $y$ -Richtung. Der Abstand der Teilstrahlen ist größer als in Abbildung 4.11, dafür ist der 108 MeV-Strahl in  $y$ -Richtung weniger divergent.

#### 4.6. SEPARATE OPTIMIERUNG DER MULTIPOLSTÄRKEN

Tabelle 4.14: Die Tabelle vergleicht die Endwerte der mit nicht gekoppelten Multipolstärken iterativ optimierten Strahlführungen mit den Endwerten der gekoppelten Optimierung. Zusätzlich zu den optimierten Parametern  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $d$  und  $D'$  sind die Emittanzwerte  $\epsilon$  und die Strahlgrößen  $\sigma$  gezeigt.

	Optim. F (gekoppelt)	Optim. M (nicht gek.)	Optim. N (nicht gek.)	Optim. O (nicht gek.)	Zielwert
108 MeV					
$\beta_x$ in m:	14,93	1,49	1,83	2,53	1,05
$\beta_y$ in m:	2,36	56,53	40,17	0,62	0,60
$\alpha_x$ :	-9,07	-0,35	-0,31	-2,32	1,05
$\alpha_y$ :	-3,30	-195,58	-130,22	-3,83	0,00
$D'$ in mrad:	0,0	-0,2	-0,3	0,0	0,0
$\epsilon_x$ in nm rad:	209,00	14,50	17,20	42,20	-
$\epsilon_y$ in nm rad:	186,50	17,30	28,00	63,10	-
$\sigma_x$ in mm :	1,43	0,15	0,18	0,33	0,09
$\sigma_y$ in mm :	0,72	0,99	1,06	0,20	-
120 MeV					
$\beta_x$ in m:	2,76	1,23	1,19	1,21	1,05
$\beta_y$ in m:	0,78	0,01	0,02	1,12	0,60
$\alpha_x$ :	-1,87	-0,47	-0,34	-0,51	1,05
$\alpha_y$ :	-0,44	-0,16	0,27	0,93	0,00
$D'$ in mrad:	0,5	0,1	0,1	0,2	0,0
$\epsilon_x$ in nm rad:	151,30	36,50	38,10	41,90	-
$\epsilon_y$ in nm rad:	137,20	14,30	13,30	37,40	-
$\sigma_x$ in mm :	0,53	0,21	0,21	0,22	0,09
$\sigma_y$ in mm :	0,32	0,01	0,02	0,20	-
132 MeV					
$\beta_x$ in m:	4,18	1,52	2,18	1,85	1,05
$\beta_y$ in m:	0,23	8,77	12,56	7,95	0,60
$\alpha_x$ :	-4,76	-2,76	-3,51	-2,80	1,05
$\alpha_y$ :	-0,96	5,47	-16,11	-10,78	0,00
$D'$ in mrad:	0,5	0,4	0,5	0,1	0,0
$\epsilon_x$ in nm rad:	111,30	48,00	52,40	49,60	-
$\epsilon_y$ in nm rad:	92,00	13,20	12,40	22,40	-
$\sigma_x$ in mm :	0,39	0,27	0,34	0,30	0,09
$\sigma_y$ in mm :	0,21	0,34	0,40	0,42	-
$d$ in mm	4,9	3,7	4,0	5,0	4,0

## 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

Die iterative Optimierung mit nicht gekoppelten Multipolstärken war erfolgreich. Durch die Entkopplung der Magnete konnten die Strahlgrößen bis zu einer Größenordnung reduziert werden. Die Optimierung mit den gekoppelten Multipolstärken war dafür nicht flexibel genug. Jede der vorgestellten Strahlführungen hat ihre Vorzüge, da in jeder bestimmte Zielwerte für die Strahlungserzeugung sehr gut erreicht werden. Welche Zielwerte wichtiger sind als andere, kann aus strahldynamischer Betrachtung schwer beurteilt werden. Hierfür ist eine Untersuchung des Strahlungsspektrums notwendig.

### 4.7 Analyse des Phasenraums und des Strahlprofils

In diesem Kapitel soll der Einfluss der nichtlinearen Elemente auf den Teilchenstrahl untersucht werden. Sowohl im Phasenraum als auch in der transversalen  $xy$ -Ebene sind nicht zu vernachlässigende Auswirkungen zu erwarten.

**Verzerrung des Strahls im Phasenraum** In Strahlführungen mit Magnetfeldern senkrechter Multipole bis maximal linearer Ordnung hat der Teilchenstrahl im Phasenraum die Form einer Ellipse, deren Form und Neigung sich entlang der Strahlführung verändert. Durch Elemente mit nichtlinearen Feldern wie z.B. Sextupolen kommt es zu einer Kopplung der transversalen Ebenen und der Strahl wird verzerrt.

Die Verzerrung wird umso stärker, je mehr nichtlineare Elemente durchquert werden. In Abbildung 4.13 sind drei Beispiele des Phasenraums des 120 MeV-Strahls in  $x$ -Richtung gezeigt. Aufgetragen sind die Teilchenposition  $x$  sowie der Winkel der Bewegungsrichtung zur Solltrajektorie  $x'$ . Die Daten stammen von der iterativ mit nicht gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung O und zeigen die Teilchenverteilung aus 500 Elektronen an verschiedenen Punkten entlang der Strahlführung. Zu sehen sind die einzelnen Teilchen der Verteilung nicht die Teilchendichte. Nach dem ersten Dipol hat der Strahl

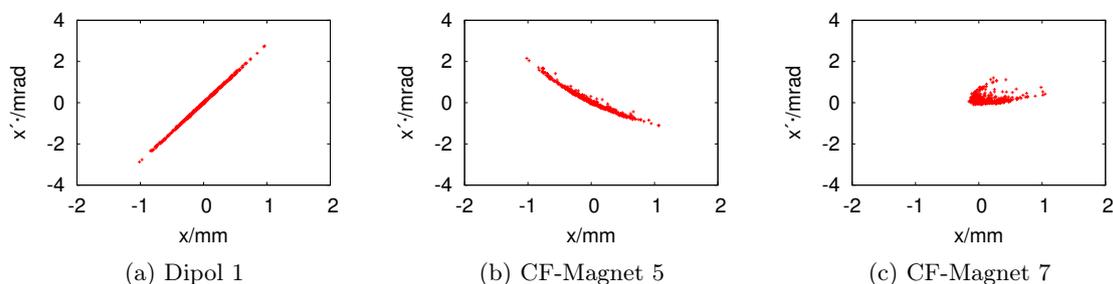


Abbildung 4.13: Verzerrung des 120 MeV-Strahls im Phasenraum (Optimierung O): Nach dem ersten Dipol hat der Strahl noch die Form einer Ellipse. Die nicht linearen Felder der *Combined-Function*(CF)-Magnete verformen den Strahl zunehmend.

nur ein lineares Element durchquert und ist daher noch ellipsenförmig. Nach dem fünften *Combined-Function*-Magnet ist bereits eine Krümmung zu erkennen, bei der Elektronen mit größerer Ablage hin zu größeren Impulswerten verschoben sind. Nach dem siebten *Combined-Function*-Magneten ist die Krümmung so stark, dass der Strahlteil mit vorher negativem  $x$ -Wert auf die positive Seite geklappt wird.

**Vergrößerung der RMS-Emittanz** Die Verzerrung des Strahls führt dazu, dass die Streuung der Teilchenverteilung größer wird und die RMS-Emittanz ansteigt (vergleiche Tabelle 4.14). Die Emittanzwerte des 120 MeV-Strahls am Ende der iterativ optimierten Strahlführungen sind in  $x$ -Richtung fast viermal so groß wie am Ausgang des Laser-Wakefield-Beschleunigers ( $\epsilon_0 \approx 10$  nm rad). In der Strahlführung mit gekoppelten Magnetstärken ist der Effekt noch größer, hier hat die Emittanz den Wert  $\epsilon_x = 151,3$  nm rad. Die Vergrößerung der Emittanz muss bei der Berechnung der Strahlgröße  $\sigma$  berücksichtigt werden. Anders als in der linearen Strahldynamik ist die Strahlgröße nicht proportional zu  $\sqrt{\beta}$ , sondern gleich  $\sqrt{\epsilon\beta}$ .

**Phasenraum am Anfang des Undulators** Die Verzerrungen des Strahls im Phasenraum hängen stark von der Einstellung der Sextupole ab. Dementsprechend sind die Auswirkungen in den bereits diskutierten Strahlführungen unterschiedlich stark. Im Folgenden wird der Phasenraum am Anfang des Undulators nach den Optimierungen F, N und O verglichen. Optimierung F beinhaltet gekoppelte Magnetstärken, in den Optimierungen M, N und O wurden Quadrupol- und Sextupolstärken iterativ und ungekoppelt variiert. Alle Optimierungen beinhalteten die höhere Gewichtung des Eintrittswinkels in den Undulator. Die Unterschiede zwischen den Optimierungen M und N sind im Phasenraum so gering, dass auf die Betrachtung von M verzichtet werden kann. Abbildung 4.14 zeigt den Phasenraum der Teilstrahlen mit 108 MeV, 120 MeV und 132 MeV in  $x$ -Richtung. Die Teilstrahlen sind für alle Energien sehr breit und zu großen  $x$ -Werten hin ausgewischt. Der Strahl ist dadurch nicht mehr symmetrisch.

Das bereits erwähnte Überlappen der Teilstrahlen nach Optimierung F ist vor allem für die Energien 108 MeV und 120 MeV zu sehen. In den iterativ optimierten Strahlführungen N und O ist die Verzerrung der Ellipse besser zu erkennen, weil die Streuung der Teilchenverteilung geringer ist. Dies führt zu kleineren Strahlgrößen und zu einem geringeren Anstieg der Emittanz als in Strahlführung F. Am größten ist der Unterschied für den 108 MeV-Strahl. Die Emittanz in Strahlführung O hat den Wert 42,2 nm rad anstatt 209,0 nm rad in Strahlführung F. In Strahlführung N wird sogar der Wert 17,2 nm rad erreicht, womit die Emittanz im Vergleich zum Anfang der Strahlführung nicht einmal verdoppelt wird.

In  $y$ -Richtung sind die größten Verzerrungen in Strahlführung F zu beobachten (siehe

#### 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

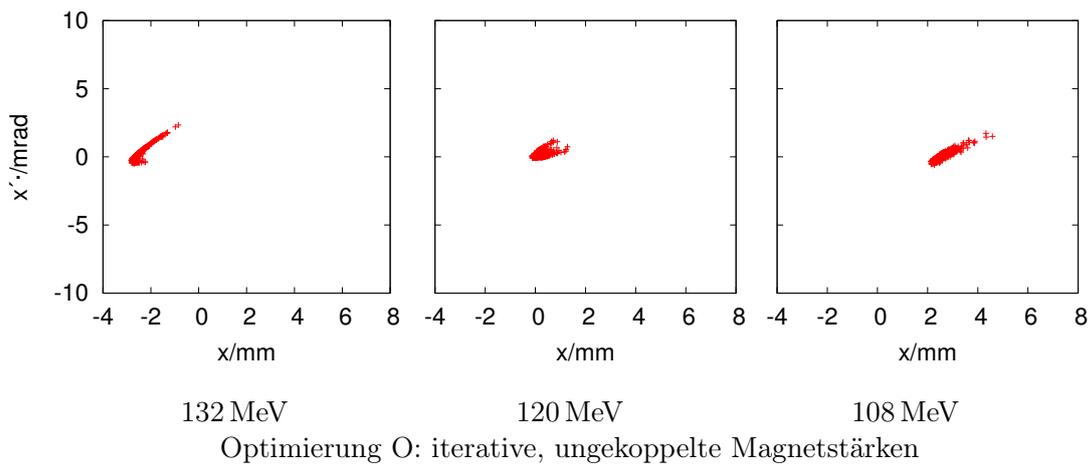
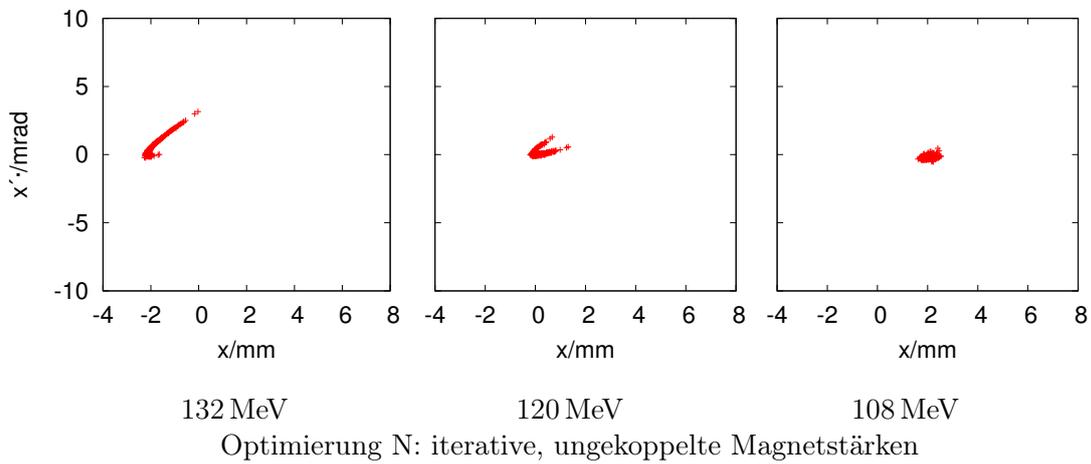
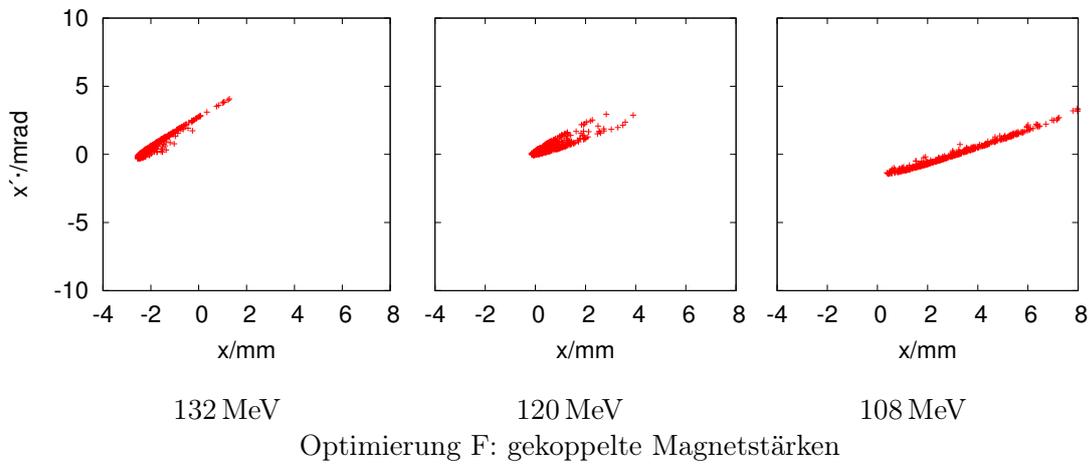


Abbildung 4.14: Die Abbildungen zeigen den Phasenraum in  $x$ -Richtung am Anfang des Undulators.

#### 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

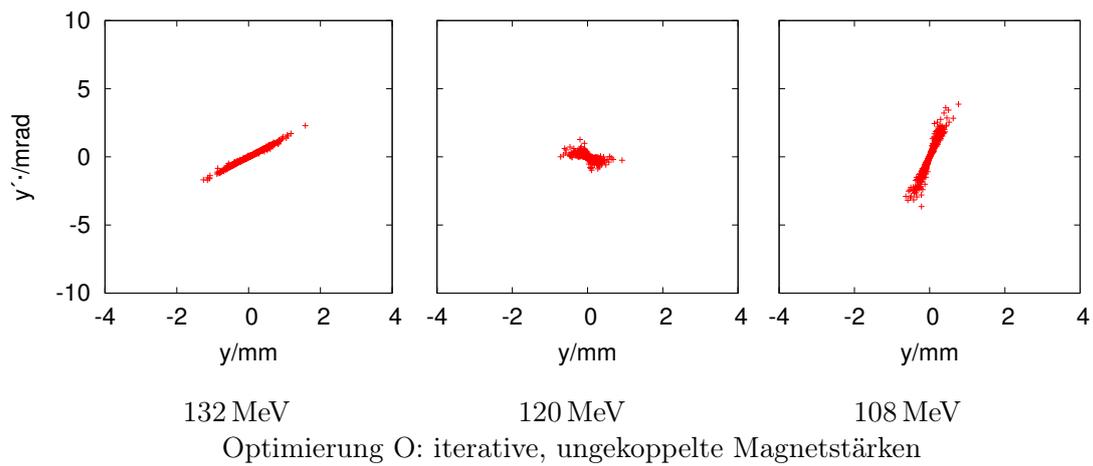
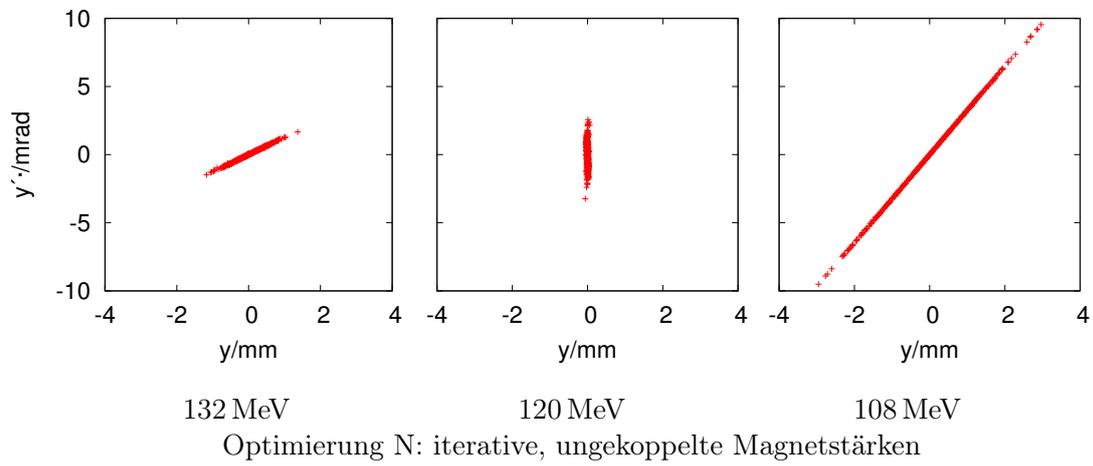
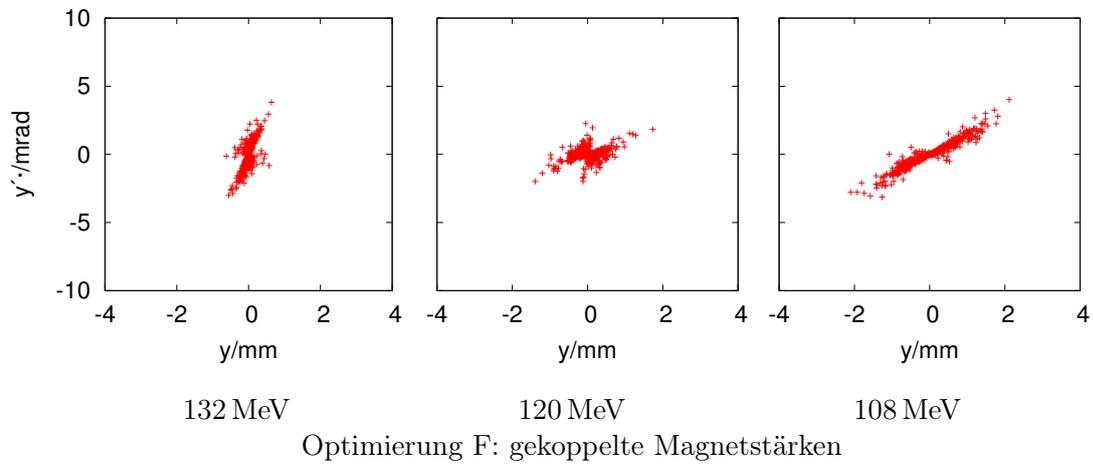


Abbildung 4.15: Die Abbildungen zeigen den Phasenraum in  $y$ -Richtung am Anfang des Undulators.

#### 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

Abbildung 4.15). Der 120 MeV- und der 132 MeV-Strahl haben ihre Ellipsenform vollständig verloren und haben jetzt die Form einer Schleife. Tendenzen hierzu sind auch für den 108 MeV-Strahl erkennbar, er ist jedoch deutlich weniger verzerrt.

In den iterativ optimierten Strahlführungen sind die Verzerrungen deutlich geringer als in Strahlführung F. Während in Strahlführung O nur leichte Verwaschungen zu erkennen ist, bleibt die Ellipsenform des Strahl in Strahlführung N erhalten. Die Emittanz hat mit den Werten 28,0 nm rad, 13,3 nm rad und 12,4 nm rad für den 108 MeV-, 120 MeV- bzw. 132 MeV-Strahl nur einen kleinen Anstieg verzeichnet. In dieser Strahlführung steht die Phasenraumellipse senkrecht. Der Twissparameter  $\alpha_y = 0.27$  bestätigt, dass die angestrebte Strahltaile nahezu realisiert wurde. Die Teilstrahlen mit Energieabweichung sind dagegen divergent, was an der Neigung der Ellipse nach rechts zu erkennen ist. Abbildung 4.15 (f) zeigt außerdem das in Kapitel 4.6.2 beschriebene Problem dieser Strahlführung: Die Strahlgröße in  $y$ -Richtung wird sehr groß und durch den Wert von  $\alpha_y = -130,22$  werden auch sehr große Divergenzwinkel bis 10 mrad erreicht.

**Strahlprofil am Anfang des Undulators** Die Verformung des Strahls durch die nichtlinearen Felder ist auch im transversalen Strahlprofil in der  $xy$ -Ebene zu beobachten. Abbildung 4.16 zeigt die Teilstrahlen am Anfang des Undulators bestehend aus 500 Elektronen. In horizontaler Richtung ist die  $y$ -Koordinate aufgetragen und in vertikaler Richtung die  $x$ -Koordinate. Diese Anordnung entspricht der später im Laborsystem verwendeten Ausrichtung.

Die zu Beginn rotationsymmetrischen und gaußverteilten Teilstrahlen werden in allen Strahlführungen verzerrt. Bei den kleinsten  $x$ -Werten ist die Teilchendichte am höchsten, nach oben nimmt die Dichte der Elektronen ab und der Strahl wird oft breiter. Dieser Effekt ist für den 108 MeV-Strahl der Strahlführung F in Abbildung 4.16 besonders stark. Die Profile der Teilstrahlen in Strahlführung O zeigen, dass dieser Effekt bei Verkleinerung der Strahlgrößen erhalten bleibt. Vor allem die Verkleinerung des 108 MeV-Strahls war hier erfolgreich. Ist der Strahl in  $y$ -Richtung breiter als in  $x$ -Richtung wie zum Beispiel beim 132 MeV-Strahl, dann ist keine Verbreiterung nach oben zu beobachten, wohl aber die Ausdünnung.

Die Teilstrahlen nach Optimierung N weisen wesentliche Unterschiede auf. Während Strahlform und Strahlgröße für den 132 MeV-Strahl noch vergleichbar mit dem Teilstrahl aus Optimierung O sind, unterscheiden sich die anderen beiden Strahlen vor allem durch ihre Strahlgröße in  $y$ -Richtung. Der 120 MeV-Strahl wird mit  $\sigma_y = 0,02$  mm außerordentlich klein. Die zugehörige Betafunktion hat den Wert 0,02 m und ist damit eine Größenordnung kleiner als der Zielwert. Im Undulator kann daher trotz der erreichten Strahltaile keine konstante Strahlgröße erzielt werden. Der 132 MeV-Strahl ist in  $x$ -Richtung mit Abstand am kleinsten, allerdings wird die Verkleinerung in  $x$ , wie schon in Kapitel 4.6.2 und im

#### 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

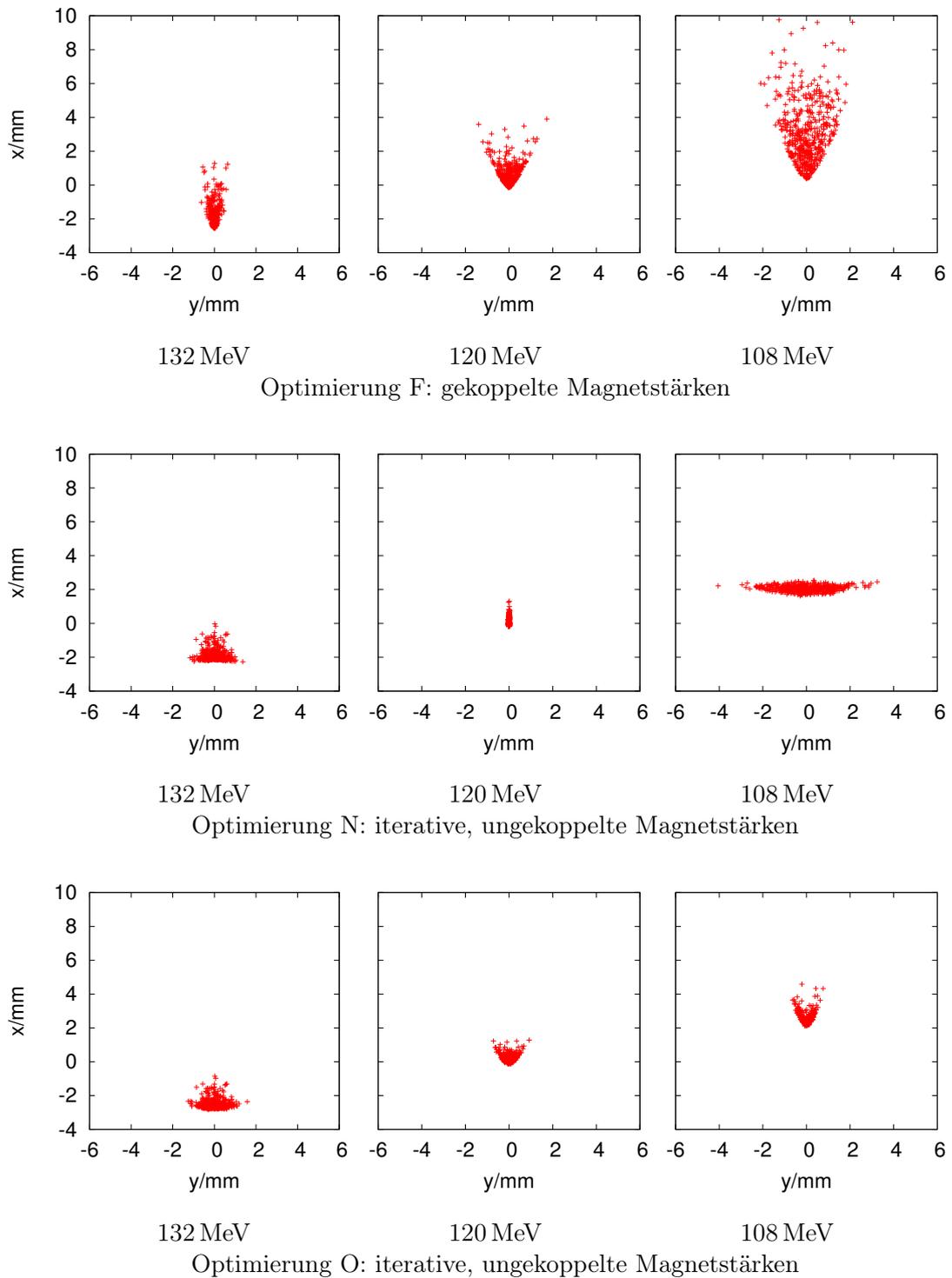


Abbildung 4.16: Die Abbildungen zeigen das Strahlprofil am Anfang des Undulators.

#### 4.7. ANALYSE DES PHASENRAUMS UND DES STRAHLPROFILS

vorigen Abschnitt beschrieben, durch einen sehr breiten Strahl in  $y$ -Richtung erkauft.

**Drift der Erwartungswerte** Die asymmetrische Verzerrung der Strahlen in  $x$ -Richtung führt dazu, dass die Erwartungswerte der Teilchenposition nicht mehr dem Wert des idealen Teilchens entspricht, das an der Quelle ohne Transversalimpuls gestartet ist. Die Drift des Erwartungswertes der Position wurde bereits in Zusammenhang mit der chromatisch korrigierten Strahlführung in der Näherung dünner Linsen (Abbildung 4.7) erwähnt. Darin driftet der 120 MeV-Strahl um  $\Delta x \approx +0,8$  mm ab. Im Strahlverlauf nach Optimierung F mit gekoppelten Magnetstärken (Abbildung 4.10) ist das ebenfalls zu sehen. Hier ist der Unterschied mit  $\Delta x \approx +0,5$  mm jedoch kleiner.

Da sich in der Umgebung des Erwartungswertes gewöhnlich die meisten Teilchen aufhalten, sollten bei der Berechnung des Abstandes  $d$  die Erwartungswerte als Grundlage dienen und nicht der Ort der idealen Teilchen. Diese werden jeweils statistisch aus einer Teilchenverteilungen mit entsprechender Energie berechnet. Der Vergleich der verschiedenen Energien zeigt jedoch, dass die Drift für alle Energien näherungsweise gleich groß ist. Der über die Referenzteilchen berechnete Abstand weicht daher bei Optimierung O um weniger als  $50 \mu\text{m}$  von dem Wert der Berechnung über die Erwartungswerte ab. Aus diesem Grund wird während der Optimierungen der Abstand mit den Referenzteilchen berechnet. So ist nur noch das Tracking und die statistische Auswertung des Teilstrahls mit 120 MeV nötig, wodurch die Rechenzeit auf ein Drittel reduziert wird. Die Auswertung der Lösung erfolgt dann mit den Erwartungswerten.

**Ergebnis** Die Analyse des Phasenraums und des Strahlprofils zeigen die Verzerrungen der Teilstrahlen durch die nichtlinearen Elemente. Aus den Verzerrungen resultiert ein Anstieg des Emittanzwertes, der bei der Berechnung der Strahlgröße berücksichtigt werden muss. Da die Verformung der Strahlen in  $x$ -Richtung asymmetrisch ist, kommt es zu einer Drift des Erwartungswertes der Teilchenposition weg von dem Ort der idealen Teilchen.

Durch die Verkleinerung der Strahlen mit Hilfe der iterativen Optimierung mit ungekoppelten Magnetstärken können die Verzerrungen reduziert werden. Dies hat vermutlich zwei Gründe: Ersten haben die Effekte der nichtlinearen Felder wegen der kleineren Ausdehnung des Strahls weniger Einfluss. Zweitens zeigt der Vergleich der Sextupolstärken in Tabelle 4.15, dass die nichtlinearen Felder während der Optimierungen N und O zum Teil deutlich verkleinert werden. Hierdurch werden auch die nichtlinearen Effekte reduziert. Dies liefert vermutlich den größeren Beitrag für die erreichten Verbesserungen.

Welche Auswirkungen die Verformung des Strahls auf die Qualität der im Undulator erzeugten Strahlung hat, muss über die Analyse des Strahlungsspektrums untersucht werden.

## 4.8 Transversal verschobene Sextupole

In den bisherigen Simulationen wurden ideale *Combined-Function*-Magnete verwendet, die eine Quadrupol- und eine Sextupolkomponente haben. Reine Quadrupol-Sextupol-Magnete mit den erforderlichen Multipolstärken sind allerdings sehr schwierig zu konstruieren [WER13]. Deshalb werden die *Combined-Function*-Magnete in diesem Experiment mit transversal verschobenen reinen Sextupolen realisiert. Die Dipolkomponente, die durch die Verschiebung hinzukommt, wurde in den bisherigen Optimierungen nicht berücksichtigt. Als nächstes wird die Strahlführung mit verschobenen Sextupolen implementiert, um eine realistischere Simulation zu ermöglichen.

### 4.8.1 Beurteilung der bereits optimierten Strahlführungen

Als erstes soll der Einfluss der Dipolkomponente auf die bereits optimierten Strahlführungen untersucht werden. Die Sextupolstärken werden direkt übernommen. Die für die Einstellung der Quadrupolstärke notwendige Verschiebung jedes Magneten

$$x_v = \frac{k}{m} \quad (4.5)$$

wird aus seiner Quadrupolstärke  $k$  und Sextupolstärke  $m$  berechnet. Durch die Verschiebung wird auch die Dipolkomponente erzeugt. Zur Beurteilung der Stärke der Dipolkomponenten werden zusätzlich die Ablenkwinkel berechnet. Mit den Gleichungen (3.14) und (3.5) ist der Ablenkwinkel

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{m} \cdot l. \quad (4.6)$$

Die berechneten Werte sind zusammen mit den Magnetstärken der Ergebnisse der Optimierungen in Tabelle 4.15 aufgeführt.

**Analyse der Quadrupolstärken** Die Veränderung der Quadrupolstärken durch die iterative Optimierung mit ungekoppelten Magnetstärken ist moderat. Ihr Betrag verändert sich um maximal  $8,02 \text{ m}^{-2}$ , und die Reihenfolge der Polung bleibt erhalten. Dies war nicht unbedingt zu erwarten, die Optimierung mit gekoppelten Magnetstärken hatte einen Wechsel der Polung der letzten beiden Magnete hervorgerufen. Dass die Stärke der Quadrupole sich nicht grundlegend verändert hat, bedeutet, dass die in der ersten Optimierung gefundenen Quadrupolstärken schon eine gute Führung der Elektronenstrahlen ermöglichen.

**Analyse der Sextupolstärken** Der Vergleich der Sextupolstärken in Tabelle 4.15 zeigt, dass die Sextupolstärken durch die iterative Optimierung stark verändert wurden. Der höchste Wert tritt in Optimierung N auf. Die Stärke des ersten Sextupols wird darin von  $m = 5992,97 \text{ m}^{-3}$  auf  $m = 7924,35 \text{ m}^{-3}$  erhöht. Das aktuelle Design der Sextupole [WER13]

#### 4.8. TRANSVERSAL VERSCHOBENE SEXTUPOLE

Tabelle 4.15: Neben den Magnetstärken  $k$  und  $m$  sind die berechneten Verschiebungen  $v_x$  der Sextupole und die Ablenkwinkel  $\varphi$  der Dipolkomponenten aufgelistet. Die Daten stammen von der mit gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung und den iterativ optimierten Strahlführungen.

Optimierung F (gekoppelt)	Optimierung M (nicht gekoppelt)	Optimierung N (nicht gekoppelt)	Optimierung O (nicht gekoppelt)
$k$ in $\text{m}^{-2}$ :			
-41,67	-33,73	-34,83	-35,52
65,36	64,80	65,08	65,44
-57,52	-64,26	-62,37	-58,98
41,10	39,44	38,53	38,85
-28,88	-22,50	-22,17	-27,65
-48,64	-48,06	-52,30	-56,66
15,36	9,72	14,43	18,36
$m$ in $\text{m}^{-3}$ :			
5992,97	7286,38	7924,35	5088,05
-4902,16	-2152,57	-2208,08	-1511,29
5253,83	-1311,80	-1877,96	171,29
-2033,00	-1376,73	-1589,84	-2139,48
2003,70	-121,20	419,54	225,86
5117,69	835,69	1604,24	3508,31
-1336,26	-1149,27	-929,15	-1229,45
$v_x$ in mm:			
-6,95	-4,63	-4,40	-6,98
-13,33	-30,1	-29,47	-43,30
-10,95	48,98	33,21	-344,31
-20,22	-28,65	-24,24	-18,16
-14,41	185,68	-52,83	-122,41
-9,50	-57,51	-32,60	-16,15
-11,5	-8,46	-15,53	-14,93
$\varphi$ in mrad:			
11,59	6,24	6,12	9,92
-34,85	-78,03	-76,72	-113,34
25,19	-125,90	-82,87	812,27
-33,24	-45,20	-37,35	-28,23
16,65	-167,15	46,84	135,37
18,49	110,56	68,19	36,61
-7,06	-3,29	-8,96	-10,96

ermöglicht eine maximale Sextupolkomponente von  $s = 3200 \text{ Tm}^{-2}$ , das bedeutet umgerechnet eine Sextupolstärke von  $m = 8000 \text{ m}^{-3}$ . Alle in den Strahlführungen verwendeten Sextupolstärken sind damit technisch erreichbar.

**Schwierigkeiten bei der Verschiebung** Im Ergebnis der gekoppelten Optimierung waren die Sextupole abwechselnd gepolt. Die Sextupolstärken wurden aus den Quadrupolstärken berechnet und hatten immer das entgegengesetzte Vorzeichen zur zugehörigen Quadrupolstärke. Bei der iterativen Optimierung M haben die Sextupolstärken  $m_2$  bis  $m_5$  dagegen die gleiche Polung, in Optimierung N  $m_2$  bis  $m_4$ . Das ist für die Erzeugung der Quadrupolstärken kein Problem, weil das Vorzeichen des Quadrupolterms durch die Richtung der Verschiebung frei gewählt werden kann. Es muss allerdings beachtet werden, dass bei gleich gepolten Sextupolstärken auch die Dipolkomponenten das gleiche Vorzeichen haben und die Elektronen dadurch in dieselbe Richtung abgelenkt werden.

Die ungekoppelte Optimierung führt an manchen Stellen zur Verkleinerung der Sextupolstärken bei gleich bleibenden oder sogar größer werdenden Quadrupolstärken. Diese Flexibilität ermöglicht auf der einen Seite die erreichten Verbesserungen der Zielparameter, bringt auf der anderen Seite aber zwei Probleme bei der Verschiebung mit sich:

1. Wenn sich der Betrag der Sextupolstärken verkleinert, ist eine größere Verschiebung notwendig, um die gleiche Quadrupolstärke zu erzeugen. So werden bei Magnet 5 in Optimierung M und O Verschiebungen von mehr als 120 mm benötigt. In Optimierung O muss der dritte Magnet sogar um 344 mm verschoben werden. Die Verschiebung ist aber durch die Apertur der Magnete begrenzt. Der Gappradius der Sextupole beträgt in der größeren Ausführung 24 mm, wovon etwa 5 mm Platz für den Elektronenstrahl gebraucht wird. Demnach ist die maximal mögliche Verschiebung 19 mm. Vor diesem Hintergrund sind alle drei iterativ optimierten Strahlführungen nicht umsetzbar. Die mit gekoppelten Magnetstärken optimierte Strahlführung beinhaltet mit der Verschiebung des vierten Sextupols von  $x_v = 20,02 \text{ mm}$  nur einen kritischen Wert.
2. Die großen Verschiebungen haben große Dipolkomponenten zur Folge. Die in Tabelle 4.15 gezeigten Werte der Ablenkungswinkel erreichen mehr als das Dreifache der Ablenkungswinkel der Schikane-Dipole, deren Ablenkungswinkel 57 mrad ist. Auch in der mit gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung mit den kleinsten Verschiebungen sind die Dipolkomponenten schon in der gleichen Größenordnung. Die dritte Dipolkomponente in Optimierung O hat sogar den Ablenkungswinkel 812 mrad.

Die Berechnungen lassen einen bedeutenden Einfluss der Dipolkomponenten vermuten. Die iterativ optimierten Strahlführungen haben drei Schwachstellen: Erstens zeigen in den

## 4.8. TRANSVERSAL VERSCHOBENE SEXTUPOLE

Optimierungen M und N viele aufeinanderfolgende Dipolkomponenten in die gleiche Richtung, zweitens liegen die für die Erzeugung der Quadrupolkomponenten notwendigen Verschiebungen nicht innerhalb der Apertur der Sextupole und drittens sind die Dipolkomponenten größer als die Dipolstärke der Schikane-Dipole. Aus diesen Gründen ist bei der Implementierung dieser Strahlführungen in MAD-X kein brauchbares Ergebnis zu erwarten. Für die Berechnung der Strahlführung in MAD-X wird deshalb zunächst die mit gekoppelten Magnetstärken optimierte Strahlführung implementiert.

### 4.8.2 Berechnung der Strahlführung mit transversal verschobenen Sextupolen

Die Implementierung der mit gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung erfolgt mit den in Tabelle 4.15 dargestellten Sextupolstärken und Verschiebungen. Die Verschiebung der Sextupole wird in MAD-X mit dem EALIGN-Befehl erreicht. Dieser ist eigentlich zur Simulation von Aufstellungsfehlern gedacht (s. Kapitel 3.5) und ermöglicht daher eine Verschiebung des Magneten in die Richtungen aller drei Koordinatenachsen. Zur Erzeugung der Quadrupolkomponenten werden die Sextupole entlang der  $x$ -Achse verschoben. Mit der Funktion PTC\_ALIGN werden die Verschiebungen in die Umgebung für das Tracking mit dicken Linsen übernommen. Bei der Berechnung der Trajektorie des Referenzteilchens werden sie nicht berücksichtigt. Die Koordinaten im krummlinigen Koordinatensystem werden also relativ zur Solltrajektorie der perfekt ausgerichteten Strahlführung angegeben.

**Ergebnisse** Wie erwartet, ist der Einfluss der Dipolkomponenten gravierend. Der Strahlverlauf der mit gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Ein Blick auf die Abbildung macht klar, dass die Werte der Zielparameter gar nicht analysiert werden müssen. Der Teilstrahl mit 120 MeV hat am Ende der Strahlführung eine Ablage von mehr als 10 mm. Da seine Energie am geringsten ist, reagiert der 108 MeV-Strahl am sensibelsten auf die Dipolkomponenten. Die Ablenkungen sind so stark, dass seine Ablage nach dem zweiten Schikane-Dipol bei  $s = 1,7$  m größer als die Apertur der Strahlführungsmagnete ist. Die Abhängigkeit von der Energie zeigt sich besonders am zweiten und dritten Sextupol bei  $s = 0,7$  m bzw.  $s = 0,92$  m.

**Weitere Optimierung** Eine weitere Optimierung der Strahlführung unter Berücksichtigung der Dipolkomponenten ist offensichtlich notwendig. Als Ausgangspunkt wird allerdings eine Strahlführung benötigt, in der die Teilstrahlen näherungsweise ihr Ziel erreichen. Die Stärken der Sextupole und die Verschiebungswerte wurden daher von Hand so angepasst, dass die Teilstrahlen mit weniger als  $\pm 5\%$  Ablage den Anfang des Undulators eintreffen. Der Strahlverlauf dieser Strahlführung ist in Abbildung 4.18 gezeigt. Der energieabhängige Einfluss der Dipolkomponenten führt zu einem Abdriften des 108 MeV-Strahls,

#### 4.8. TRANSVERSAL VERSCHOBENE SEXTUPOLE

wie er bereits bei der linearen Strahlführung beobachtet wurde. Der erste Ansatz für die Korrektur wäre die Erhöhung der Sextupolstärken. Als angenehmer Nebeneffekt würden dadurch gleichzeitig die notwendigen Verschiebungen verkleinert und die Dipolkomponenten reduziert. Die Korrektur des Einflusses der Dipolkomponenten scheint demnach möglich zu sein. Die Durchführung der Optimierung war in dieser Arbeit aber zeitlich nicht mehr möglich.

#### 4.8. TRANSVERSAL VERSCHOBENE SEXTUPOLE

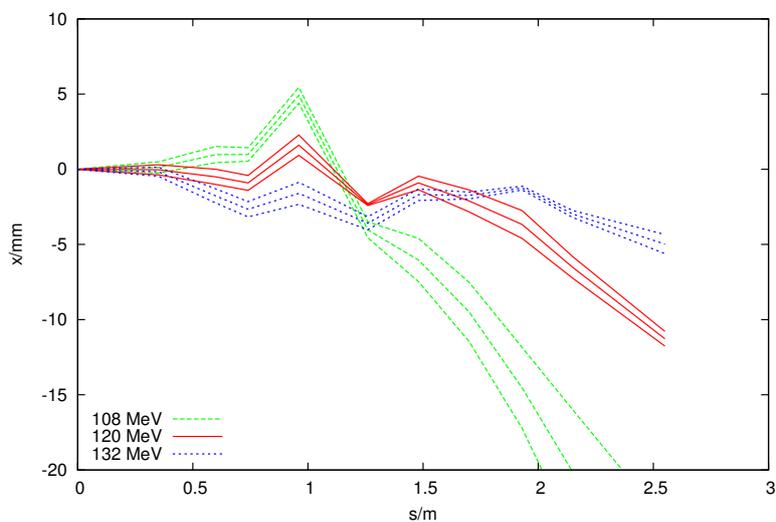


Abbildung 4.17: Die Abbildung zeigt den Strahlverlauf entlang der mit gekoppelten Magnetstärken optimierten Strahlführung. Die Strahlführung wurde mit in  $x$ -Richtung verschobenen Sextupolen in MAD-X implementiert und zeigt den Einfluss der Dipolkomponenten.

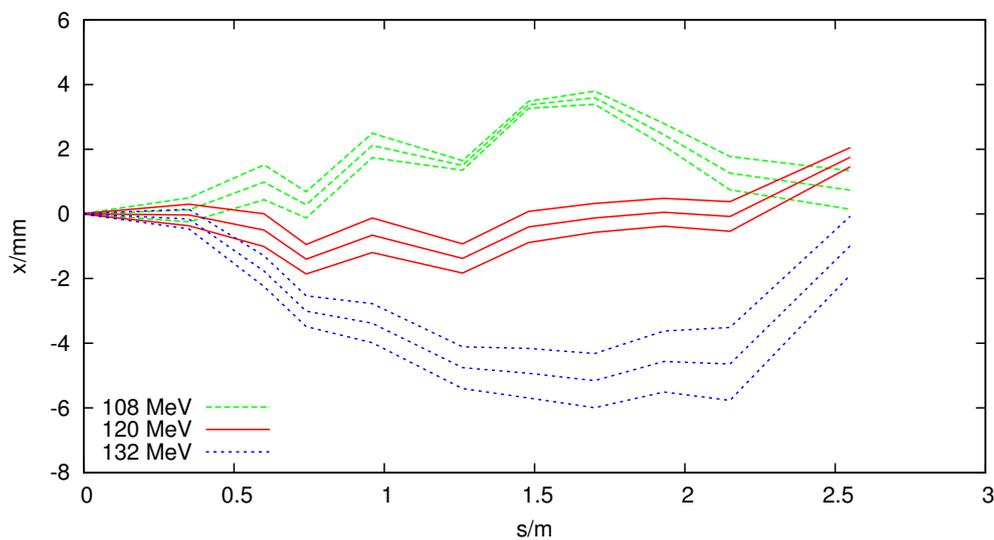


Abbildung 4.18: Diese Abbildung zeigt den Strahlverlauf entlang einer von Hand eingestellten Strahlführung. Sie bildet die Grundlage für eine weitere Optimierung. Das Abdriften des 108 MeV-Strahls ist bekannt aus der linearen Strahlführung und ein Indiz dafür, dass die chromatische Korrektur nicht groß genug ist.

#### 4.8. TRANSVERSAL VERSCHOBENE SEXTUPOLE

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die chromatische Korrektur der Elektronenstrahlführung für den Laser-Wakefield-Beschleuniger des TiSa-Lasers Jeti in Jena untersucht und optimiert. Elektronen mit breitbandigem Energiespektrum wurden zur Erzeugung monochromatischer Strahlung zu einem nichtplanaren Undulator geführt.

Ausgehend von den bereits vorliegenden Berechnungen der Strahlführung mit Transfermatrizen wurde die lineare Strahlführung in Abschnitt 4.2.2 in der Näherung dünner Linsen in MAD-X implementiert. Dadurch existiert nun die Möglichkeit, die Strahlführung in einem zur Berechnung von Strahloptiken ausgelegten Programm zu untersuchen. Das Ergebnis des Matrizenmodells wurde für den Teilstrahl mit der Designenergie 120 MeV reproduziert. Wie erwartet, waren die Auswirkungen der chromatischen Fehler auf die Teilstrahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung sehr groß: Beide waren stark divergent, außerdem konnte die energieabhängige Sortierung der Teilstrahlen nicht umgesetzt werden.

Für die chromatische Korrektur der Strahlführung wurden in Kapitel 4.3 die Quadrupole durch ideale Quadrupol-Sextupol-*Combined-Function*-Magnete ersetzt. Die Sextupolkomponenten hierzu wurden aus der linearen Dispersion und den Quadrupolkomponenten abgeschätzt. Nichtlineare Effekte wurden beim Tracking berücksichtigt. Diese chromatische Korrektur war prinzipiell erfolgreich. Die energieabhängige Aufspaltung der Teilstrahlen konnte wieder hergestellt werden, die Teilstrahlen waren allerdings noch immer stark divergent. Aus diesem Grund wurde die chromatische Korrektur mit zwei unterschiedlichen Optimierungsverfahren verbessert. Hierfür wurde zur Beurteilung einer Strahlführung eine Zielfunktion eingeführt, deren Wert kleiner wird, je besser die Zielparameter des Undulators erreicht werden. Die Zielparameter waren die Twissparameter des 120 MeV-Strahls am Anfang des Undulators sowie die Aufspaltung der Teilstrahlen mit  $\pm 10\%$  Energieabweichung und deren Eintrittswinkel in den Undulator. Vor der Optimierung wurde für eine realistischere Betrachtung die Näherung dünner Linsen aufgegeben und ein Modell aus Magneten mit endlicher Länge implementiert. Die Berechnung der Twissparameter am Anfang des Undulators ist auf statistische Weise mit Hilfe von Tracking einer Teilchenverteilung erfolgt.

In Abschnitt 4.5 ist beschrieben, dass im ersten Optimierungsverfahren die Quadrupolstärken unter Berücksichtigung der Sextupolkomponenten festem Verhältnis optimiert wur-

de. Dieses Optimierungsverfahren hat die Untersuchung der Abhängigkeiten der Zielparame- ter voneinander durch ihre unterschiedliche Gewichtung in der Zielfunktion ermöglicht. Obwohl damit sehr breite, divergente Teilstrahlen verbunden waren, wurde eine Strahlfüh- rung mit kollimierten Strahlen ausgewählt, denn für das Funktionsprinzip des Undulators ist die Parallelität der Teilstrahlen unbedingt erforderlich. Weil die Kopplung der Multi- polstärken die Optimierung begrenzte, wurde sie mit dem Ziel einer flexibleren Einstellung aufgegeben.

Für das zweite Optimierungsverfahren nach dem Monte-Carlo-Prinzip wurde ein ande- res Programm geschrieben, in dem Quadrupol- und Sextupolstärken in der Umgebung der Lösung der ersten Optimierung zufällig variiert wurden. Wie in Kapitel 4.6.2 beschrieben, konnten mit dieser Methode die Strahlgrößen deutlich verkleinert werden. Als Ergebnis werden drei Strahlführungen mit kollimierten Teilstrahlen vorgestellt, von denen jede einen bestimmten Zielparame- ter besonders gut erreicht. Aus strahldynamischer Sicht kann die Qualität der Strahlführungen nicht weiter beurteilt werden. Für die Toleranzgrenzen der Zielparame- ter ebenso wie für die Untersuchung des Einflusses der Verzerrung des Strahlpro- fils und des Phasenraums durch die nichtlinearen Elemente, die in Kapitel 4.8 beschrieben werden, sind Betrachtungen des Strahlungsspektrums notwendig.

Zuletzt wurde in Kapitel 4.8 untersucht, ob die berechneten Strahlführungen wie geplant mit dem Einsatz transversal verschobener, reiner Sextupole realisierbar sind. Berechnungen der nötigen Verschiebungen haben ergeben, dass die iterativ optimierten Strahlführungen in dieser Weise technisch nicht umgesetzt werden können, weil viele der Verschiebungswerte größer als die Apertur der Magnete sind. Mit der Implementierung einer Strahlführung konnte gezeigt werden, dass die durch die Verschiebung zusätzlich erzeugten Dipolkom- ponenten die Strahlen abdriften lassen. Unabhängig von bisherigen Lösungen wurde ein Satz aus Sextupolstärken und Verschiebungswerten gefunden, bei dem die Teilstrahlen nä- herungsweise ihr Ziel erreichen. Diese Daten sind eine vielversprechende Grundlage für weitere Optimierungen einer Strahlführung mit verschobenen Sextupolen.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass eine Strahlführung für divergente Elektronen großer Energiebandbreite aus idealen Quadrupol-Sextupol-Magneten aufgebaut werden kann. Die Strahlparameter der Teilstrahlen können angeglichen werden, wodurch ein symmetrischer Strahlverlauf mit kleinen aufgespalteten Strahlen erreicht wird. Dies ist ein entschei- dender Schritt in Richtung Realisierung des dem Experiment zu Grunde liegenden Konzepts und des Einsatzes eines Laser-Wakefield-Beschleunigers als Teil einer kompakten Strah- lungsquelle. Die Ergebnisse der Arbeit sind darüber hinaus von grundsätzlicher Bedeutung für den Transport von Elektronen aus einem Laser-Wakefield-Beschleuniger und anderen Beschleunigern mit großer Energiebandbreite.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Der zylindrische Undulator . . . . .	6
2.2	Anpassung der Magnetfeldamplitude an die Energie der Elektronen . . . . .	6
2.3	Aufbau des Demonstrationsexperimentes . . . . .	7
3.1	Koordinatensystem . . . . .	10
3.2	Modelle der verwendeten Strahlführungsmagnete . . . . .	12
3.3	Beschreibung der Phasenraumellipse durch die Twissparameter . . . . .	19
3.4	Phasenraumellipse und Emittanz . . . . .	20
3.5	Aufbau der Strahlführung . . . . .	23
3.6	Downhill-Simplex-Methode . . . . .	28
4.1	Aufbau der Strahlführung . . . . .	33
4.2	Strahlverlauf nach der Matrizenrechnung . . . . .	33
4.3	Betafunktion entlang der linearen Strahlführung . . . . .	35
4.4	Lineare Strahlführung mit chromatischen Fehlern . . . . .	36
4.5	Vergleich der Betafunktionen des 120 MeV-Strahls . . . . .	37
4.6	Vergleich der Betafunktionen des 108 MeV- und des 132 MeV-Strahls . . . . .	38
4.7	Strahlverlauf mit chromatischer Korrektur . . . . .	40
4.8	Schema der Arbeitsweise des Simplex-Programms . . . . .	42
4.9	Strahlverlauf nach der Optimierung mit gekoppelten Multipolstärken . . . . .	44
4.10	Strahlverlauf nach Optimierung mit höherer Gewichtung des Winkels $D'$ . . . . .	48
4.11	Strahlverlauf nach iterativer Optimierung N . . . . .	54
4.12	Strahlverlauf nach iterativer Optimierung O . . . . .	55
4.13	Verzerrung des Strahls entlang der Strahlführung . . . . .	57
4.14	Phasenraum in $x$ -Richtung am Anfang des Undulators . . . . .	59
4.15	Phasenraum in $y$ -Richtung am Anfang des Undulators . . . . .	60
4.16	Strahlprofil am Anfang des Undulators . . . . .	62
4.17	Strahlführung F mit verschobenen Sextupolen . . . . .	69
4.18	Ausgangsstrahlführung für Optimierung mit verschobenen Sextupolen . . . . .	69



# Tabellenverzeichnis

3.1	Potentiale der drei niedrigsten senkrechten Multipolkomponenten . . . . .	10
4.1	Kenndaten der Strahlführungsmagnete . . . . .	30
4.2	Strahlparameter am Anfang der Strahlführung . . . . .	31
4.3	Zielparameter am Anfang des Undulators . . . . .	32
4.4	Brennweiten und Quadrupolstärken der linearen Strahlführung . . . . .	34
4.5	Die Quadrupol- und Sextupolstärken der <i>Combined-Function</i> -Magnete . . .	39
4.6	Die Quadrupol- und Sextupolstärken aus dem Matrizenmodell mit dicken Linsen. . . . .	41
4.7	Vergleich der mit gekoppelten Multipolstärken optimierten Zielparameter mit den nicht optimierten Werten . . . . .	44
4.8	Vergleich der optimierten und der nicht optimierten Multipolstärken . . . .	45
4.9	Vergleich der Parameter nach Optimierung mit veränderter Gewichtung der Zielwerte . . . . .	46
4.10	Vergleich der Parameter nach Optimierung mit veränderter Gewichtung der Zielwerte (2) . . . . .	48
4.11	Endwerte der Optimierungen mit erhöhter Gewichtung der Aufspaltung $d$ und des Winkels $D'$ . . . . .	49
4.12	Endwerte nach separater Optimierung der Sextupolstärken . . . . .	51
4.13	Die Sextupolstärken vor und nach der separaten Optimierung . . . . .	52
4.14	Werte der Zielparameter nach den iterativen Optimierungen . . . . .	56
4.15	Analyse der Magnetstärken, Verschiebungswerte und Dipolkomponenten . .	65



# Literaturverzeichnis

- [AFO11] V. Afonso Rodriguez, T. Baumbach, A. Bernhard, A. Keilmann, R. Rossmanith, P. Peiffer, C. Widmann, M. Nicolai, M.C. Kaluza und G. Fuchert: Design Optimization for a non-planar Undulator for the JETI-Laser-Wakefield-Accelerator in Jena, In *Proceedings of the IPAC'11*, TUPO005, 2011
- [BER12] A. Bernhard: Vorlesungsskript „Beschleunigerphysik II“, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Karlsruhe, 2012/2013
- [BER13] A. Bernhard: Persönliches Gespräch
- [FUC09] M. Fuchs, R. Weingartner, A. Popp, Z. Major, S. Becker, J. Osterhoff, I. Cortrie, B. Zeitler, R. Hörlein, G. D. Tsakiris, U. Schramm, T. P. Rowlands-Rees, S. M. Hooker, D. Habs, F. Krausz, S. Karsch und F. Grüner: Laser-driven soft-X-ray undulator source, *Nature Physics* 5, 826 - 829 (2009), DOI: 10.1038/nphys1404
- [HER11] W. Herr: Vorlesungsfolien „CAS, Cern Accelerator School, Mathematical and Numerical Methods for Non-linear Dynamics (an introduction)“, CERN, Genf, 2011
- [HOF04] A. Hofmann: *The Physics of Synchrotron Radiation*, Cambridge University Press, 2004
- [JAC99] J. D. Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, 4. Auflage, de Gruyter, Berlin
- [LAS11] C. Widmann und A. Bernhard: Herleitung einer Näherungsformel für die Sextupolkorrektur, KIT - LAS, 2011-12-12\_Sextupolkomponente, 2011
- [MUE01] A.-S. Müller: Description of Beam-Matter Interaction in the Covariance Matrix Formalism, CERN/PS 2001-0013 (AE), Genf, 2001
- [PDL13] Dokumentation: <http://pdl.perl.org>, Funktion PDL::Opt::Simplex
- [PRE02] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C++*, *The Art of Scientific Computing*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [SCH10] H.-P. Schlenvoigt, O. Jäckel, S. M. Pfotenhauer und M. C. Kaluza: Laser-based Particle Acceleration, Advances in Solid State Lasers Development and Applications, Mikhail Grishin (Ed.), ISBN: 978-953-7619-80-0, InTech, DOI: 10.5772/7965, 2010

- [SCH90] F. Schmidt: MAD-X User's Guide, CERN, Genf, 1990
- [TUR94] S. Turner: CAS, Cern Accelerator School, Fifth General Accelerator Physics Course, CERN, Genf, 1994
- [WER13] W. Werner: Diplomarbeit in Arbeit, 2013
- [WID11] C. Widmann, V. Afonso Rodriguez, A. Bernhard, T. Baumbach, P. Peiffer, R. Rossmanith, W. Werner, M. Nicolai und M.C. Kaluza: Design Of a Dispersive Beam Transport Line for the JETI Laser Wakefield Accelerator, In *Proceedings of the IPAC'11*, TUPO006, 2011
- [WID13] C. Widmann, In *Proceedings of the IPAC'13*, Veröffentlichung in Arbeit, 2013
- [WID14] C. Widmann: Dissertation in Arbeit, 2013
- [WIE07] H. Wiedemann: *Particle Accelerator Physics*, Third Edition, Springer, Berlin, 2007
- [WIL96] K. Wille: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Synchrotronstrahlungsquellen, Eine Einführung*, 2. Auflage, Teubner, Stuttgart, 1996
- [ESA09] E. Esarey, C. B. Schroeder und W. P. Leemans: Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators, *Reviews Of Modern Physics*, Volume 81, DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1229, 2009

# Danksagungen

Zum Abschluss meiner Arbeit möchte ich mich bei allen bedanken, die mich im letzten Jahr unterstützt und damit zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Hier seien zuerst Prof. Dr. Tilo Baumbach und Prof. Dr. Willem de Boer genannt, die mir diese Arbeit ermöglicht haben. Außerdem möchte ich mich bei Dr. Axel Bernhard für die Vergabe des spannenden Themas und die hilfreichen Diskussionen bedanken. Sein fachlicher Rat war stets wertvoll.

Ganz besonders möchte ich mich bei Christina Widmann für die engagierte Betreuung bedanken. Sie hatte stets ein offenes Ohr für alle Fragen und hat in den letzten Wochen viel Zeit für das Korrekturlesen der Arbeit geopfert.

Des Weiteren gilt mein Dank der gesamten Undulatorgruppe für die konstruktiven Diskussionen und die angenehme Arbeitsatmosphäre, aber auch meinen Freunden, die stets aufbauende Worte für mich übrig hatten. Ein großes Dankeschön insbesondere an Verena Verestek, die mich während der stressigsten Zeit mit Nervennahrung versorgt hat und noch sehr kurzfristig zum Korrekturlesen bereit war.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die mir stets einen starken Rückhalt bot und mich während meines gesamten Studiums unterstützt hat.