

ÜBER DAS TRAGVERHALTEN VON BIEGETRÄGERN UND DRUCKSTÄBEN  
MIT  
ZUSAMMENGESETZTEN QUERSCHNITTEN UND NACHGIEBIGEN VERBINDUNGSMITTELN

Als wissenschaftliche Arbeit  
zur  
Erlangung der  
venia legendi  
vorgelegt der Fakultät für Bauwesen  
an der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe  
im Juli 1956

von Karl Möhler

Referent: Professor Dr.-Ing. O. Steinhardt  
Korreferenten: Professor Dr.-Ing. G. Franz  
Professor Dr.-Ing. B. Fritz



*Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit  
zusammengesetztem Querschnitt und nachgiebigen Verbindungsmitteln*

*Dr.-Ing. K.Möhler*



Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit  
zusammengesetztem Querschnitt und nachgiebigen Verbindungsmitteln

Dr.-Ing. Karl Möhler

Karlsruhe im Juni 1956



Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Einleitung . . . . .	1
2 Die Nachgiebigkeit der verschiedenen Verbindungsmittel . . . . .	5
3 Berechnung von Biegeträgern mit nachgiebig verbundenen Einzelteilen . . . . .	12
3.1 Allgemeine Ableitung der Grundgleichungen für den zweiteiligen Verbundträger-Querschnitt . . . . .	13
3.2 Allgemeine Ableitung der Grundgleichungen für den dreiteiligen Träger-Querschnitt aus zwei verschiedenen Materialien . . . . .	16
3.3 Lösung der Grundgleichungen für den frei aufliegenden Verbundträger unter Einzellast oder Streckenlast . . . . .	18
3.31 Lösung der Grundgleichung für die Verschiebung $\delta$ . . . . .	19
3.32 Lösung der Grundgleichung für die Durchbiegung $y$ . . . . .	20
3.33 Zusammenstellung der maßgebenden Verschiebungs- und Schnittgrößen . . . . .	21
3.4 Auswertung der Lösungsgleichungen für zwei- und dreiteilige Holzträger . . . . .	24
3.41 Vergleich der Durchbiegungen sowie der Normal- und Schubkräfte bei starrem und nachgiebigem Verbund für einen zweiteiligen Holzträger . . . . .	25
3.42 Untersuchungen über den Einfluß der Belastungsanordnung, der Querschnittsform und des Verschiebungsmoduls $C_v$ auf das wirksame Trägheitsmoment bei verschiedenen Abmessungsverhältnissen . . . . .	29
3.5 Berechnung der Spannungen bei Verbundträgern aus dem wirksamen Trägheitsmoment . . . . .	32
3.6 Zusammengesetzte Holzträger bei statisch unbestimmter Lagerung . . . . .	40
3.61 Lösung der Grundgleichungen für den Durchlaufträger über zwei gleiche Felder unter Streckenlast . . . . .	40
3.62 Vergleich der Durchbiegungen sowie der Normal- und Schubkräfte bei starrem und nachgiebigem Verbund für einen zweiteiligen Träger . . . . .	42
3.7 Maßgebende Abminderungswerte $\gamma$ für den Durchbiegungs- und Spannungsnachweis . . . . .	45
4 Berechnung von Druckstäben mit nachgiebig verbundenen Einzelteilen . . . . .	48
4.1 Lösung der Grundgleichungen für den mittig gedrückten Stab . . . . .	49
4.2 Rechnerische und versuchstechnische Bestimmung der Verschiebungsgröße $1/C$ für die üblichen Konstruktionsformen mehrteiliger Druckstäbe . . . . .	53

	Seite
4.21 Kontinuierlich verbundene Einzelstäbe . . . . .	55
4.211 Stahlstützen mit kontinuierlich verbundenen Einzelteilen . . . . .	56
4.212 Holzdruckstäbe mit kontinuierlich verbundenen Einzelteilen . . . . .	58
4.22 Stäbe mit Futterblechen oder Zwischenhölzern . . . . .	60
4.23 Stäbe mit Bindeblechen oder Bindehölzern . . . . .	64
4.24 Stäbe mit fachwerkartiger Vergitterung . . . . .	66
4.3 Zusammenstellung der Berechnungsgleichungen für mehrteilige Holzdruckstäbe bei Anwendung der versuchstechnisch erhaltenen $C_T$ -Werte . . . . .	68
5 Zusammenfassung . . . . .	71
Schrifttum . . . . .	73



## 1 Einleitung

Im Stahlbau sowohl wie im Ingenieurholzbau werden die Tragwerkselemente nach den statischen Erfordernissen aus einzelnen oder mehreren miteinander verbundenen Profilen bestimmter Abmessungen gebildet, während der Stahlbetonbau seine Tragwerksformen in endgültiger Form praktisch aus einem Guß herstellt, wobei die Stahleinlagen durch den allseitig umgebenden und festhaftenden Beton mit diesem zusammen einen einheitlichen Tragquerschnitt darstellen. Biegeträger, Stützen und Fachwerkstäbe können im Stahl- oder Holzbau nur bei verhältnismäßig geringen Belastungen aus einem Einzel-Querschnitt bestehen, in der Regel weisen sie einen zusammengesetzten Querschnitt auf. Hierbei werden die gleichen Verbindungsmittel verwendet, die auch für den Anschluß von Stäben sowie für die Ausbildung von Stößen zur Anwendung kommen. Im Stahlbau sind dies die Niete und Schrauben sowie die Schweißnähte, im Ingenieurholzbau die Dübel, Nägel und Schraubenbolzen sowie der Leim. Neuerdings werden im Stahlbau auch hochfeste, vorgespannte Schrauben als Verbindungsmittel verwendet, während die Verbindung zwischen Betonplatte und Stahlträger bei der Verbund-Bauweise durch Dübel mannigfacher Ausführungsart vorgenommen wird.

Die Verbindungsmittel sind somit bei allen zusammengesetzten Tragwerksformen notwendige Konstruktionselemente, von deren Formänderungs- und Tragverhalten die Steifigkeit und die Tragfähigkeit des einzelnen Bauteiles weitgehend beeinflußt wird. Hierbei sind die starren, d.h. unnachgiebigen Verbindungsmittel von den nachgiebigen Verbindungsmitteln zu unterscheiden. Bisher hat man die Verbindungsmittel des Stahlbaues in ihrer Wirksamkeit bei zusammengesetzten Trägern und Druckstäben praktisch als starr betrachtet, diejenigen des Holzbaues zwar als nachgiebig erkannt, ohne im einzelnen die durch den verschiedenen Grad der Nachgiebigkeit ausgelösten Einflüsse auf das Tragverhalten näher zu berücksichtigen.

Bei der Berechnung zusammengesetzter Biegeträger und Druckstäbe wurde somit im Stahlbau die klassische Biegelehre für homogene Querschnitte zugrunde gelegt, welche auf der Bernoulli'schen Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte und dem Hooke'schen Gesetz über die Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung beruht und erlaubt, die Größe der Spannungen anzugeben und die Biegelinie zu bestimmen. Dabei wurde eine mögliche Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel nicht berücksichtigt. Auch der Ingenieurholzbau, der seit etwa 30 bis 40 Jahren die auf handwerkliche Überlieferung und Erfahrung aufbauende Zimmermanns-Bauweise

in immer stärkerem Maße beim Bauen in Holz ersetzte, indem er die Bemessung seiner Bauformen aufgrund statischer Berechnungen vornahm, hat diese Berechnungsweise für einteilige und anfänglich auch für zusammengesetzte Querschnitte übernommen, wobei man das durch wissenschaftliche Versuche namhafter Forscher ermittelte Formänderungs- und Festigkeitsverhalten des Baustoffes Holz in die Berechnung einführte. Als bei Versuchen mit zusammengesetzten Trägern infolge der Nachgiebigkeit der Verbindungen eine geringere Tragkraft und Steifigkeit gegenüber dem Vollbalken festgestellt wurde, hat man diesen Einfluß durch Einführung von Wirkungsgraden für das Trägheitsmoment und Widerstandsmoment zu erfassen versucht, ohne sich aber über die tatsächlichen Gesetzmäßigkeiten bei nachgiebigen Verbindungen ausreichende Klarheit zu verschaffen. In ähnlicher Weise ging man bei den zusammengesetzten Holzdruckstäben vor. Hier wurde nur für gegliederte, durch verschraubte Zwischenhölzer verbundene Stäbe eine aus wenigen Versuchen abgeleitete <sup>Näherungs-</sup>Formel zur Berechnung des wirksamen Trägheitsmomentes <sup>an</sup> gegeben, welche weder die maßgebenden Einflußgrößen enthielt noch die tatsächlichen Verhältnisse auch nur annähernd richtig erfaßte. Die übrigen Stabformen der verschiedensten Ausführungsmöglichkeiten sollten nach der gleichen Formel berechnet werden, so daß den jeweils vorliegenden Gegebenheiten keineswegs Rechnung getragen wurde. Auch bei der insbesondere nach dem Kriege in großem Umfange zur Anwendung gelangenden Stahlträger-Verbundweise wurde die Berechnung der auf Biegung beanspruchten Verbundquerschnitte unter der Annahme einer starren kontinuierlichen Verbindung zwischen Betonplatte und Stahlträgerquerschnitt durchgeführt.

Die vor rd. 15 Jahren im Hinblick auf die Anwendung der Nagelbauweise für schwer belastete Brückentragwerke in Karlsruhe durchgeführten Versuche von Biegeträgern und Druckstäben ließen vermuten, daß die durch die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel hervorgerufenen Abminderungen an Steifigkeit und Tragkraft von mannigfachen Einflüssen abhängen müssen. Die verhältnismäßig geringe Zahl der durchgeführten Versuche ließ bei den beim Baustoff Holz vorliegenden Schwankungen der Werkstoffeigenschaften aber noch keine Gesetzmäßigkeit erkennen. Nachdem durch versuchstechnische und theoretische Untersuchungen an Verbundträgern die Wirksamkeit der Dübelnachgiebigkeit von Stüssi aufgezeigt worden war, konnten auch Versuche mit Holzträgern einer systematischen Auswertung unterworfen werden. Etwa gleichzeitig (1949 und 1950) in Karlsruhe durchgeführte Temperatur- und Belastungsversuche an Verbundkörpern mit Dübelreihen brachten wertvolle Erkenntnisse über den Einfluß der Dübelnachgiebigkeit auf die Kraftverteilung bei Dübelreihen, über die Steinhardt erst-

mals auf der Stahlbautagung in Karlsruhe 1950 berichtet hat. Hoischen hat auf theoretischem Wege den beim frei aufliegenden Träger auftretenden Einfluß der Nachgiebigkeit des Verbundes für die üblichen Lastfälle (Einzellast und Streckenlast) sowie für Kriechen, Schwinden und Temperaturänderung nachgewiesen. Schließlich hat man bewußt den sogenannten elastischen Verbund, d.h. die elastische Nachgiebigkeit der Verbindung zwischen Stahlträger und Betonplatte durch Anordnung von elastisch verformbaren Schubübertragungsteilen (z.B. Fachwerkträgern) bei der Verbundweise zur Anwendung gebracht, um hierdurch eine in manchen Fällen willkommene Entlastung der Betonplatte, vor allem im Bereich der Zwischenunterstützung von Durchlaufträgern (Homborg) zu erzielen. Hierdurch war es möglich, den Anwendungsbereich der Verbundbauweise wesentlich zu erweitern. Auch bei der Aufnahme der durch Schwind- und Temperatureinflüsse auftretenden Beanspruchungen wirkt sich die Nachgiebigkeit der Verdübelung günstig aus, da hierdurch eine Entlastung des Enddübels erreicht wird. Andererseits führt aber die Nachgiebigkeit zu einer höheren Beanspruchung im Stahlträger, so daß u.U. bei der üblichen Berechnung für starren Verbund örtliche Überbeanspruchungen in demselben auftreten können. Auf alle Fälle zeigten die für den Stahlbeton-Verbundträger und den zusammengesetzten Holzträger durchgeführten Ableitungen, daß die Voraussetzungen der klassischen Biegelehre für derartig nachgiebig verbundene Querschnitte nicht mehr zutreffend sind. Die Querschnitte bleiben nach dem Belasten nicht mehr eben und die Spannungen verlaufen nicht mehr geradlinig über den Gesamtquerschnitt. Es entstehen vielmehr Spannungssprünge in den Berührungsfugen der Teilquerschnitte, welche durch die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel hervorgerufen und von der Belastungsanordnung, Stützweite, den Querschnittsabmessungen und dem Grad der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel beeinflußt werden.

Um bei den Gegebenheiten des natürlichen Baustoffes Holz zuverlässige Grundlagen für die Berechnung nachgiebig verbundener zusammengesetzter Träger oder Druckstäbe zu erhalten, war es klar, daß hier nur durch Versuche einigermaßen allgemein gültige Berechnungsverfahren begründet werden konnten. Die komplexen Einflüsse, die bei der Anisotropie des Holzes das Verhalten eines Verbindungsmittels bei einer bestimmten konstruktiven Anordnung bestimmen, machten es erforderlich, die Versuche jeweils am betreffenden Tragwerkselement selbst durchzuführen. Dabei dürfte es auch nicht von allzu schwerwiegendem Einfluß sein, wenn bezüglich der Annahmen des Berechnungsverfahrens Vereinfachungen getroffen werden mußten, welche beim Baustoff Holz und der Mehrzahl seiner Verbindungsmittel nicht in vollem Maße zutreffen. Es zeigte sich nämlich, daß das Verhalten

der mannigfachen nachgiebig verbundenen Träger- und Stabformen für die meisten Belastungsfälle rechnerisch noch mit einem tragbaren Aufwand erfaßt werden kann, wenn man eine sogenannte „Nachgiebigkeitszahl  $C_V$ “ des Verbindungsmittels einführt, d.h. eine geradlinige Last-Verschiebungslinie annimmt. Wenn auch diese Voraussetzung für die meisten Holzverbindungen nicht voll oder nur in einem beschränkten Bereich zutrifft, so ergibt sich durch dieses Vorgehen doch für jeden Versuch die tatsächlich wirksame Nachgiebigkeitszahl  $C_V$ . Mit ihrer Hilfe kann das Tragverhalten der entsprechenden Bauformen weit zuverlässiger beurteilt und rechnerisch erfaßt werden, als es nach den heutigen Berechnungsvorschriften für zusammengesetzte Biegeträger und Druckstäbe im Ingenieurholzbau der Fall ist. Da bei der Anlage und Durchführung einschlägiger Versuche jeweils die besonderen Gegebenheiten des Baustoffes Holz berücksichtigt wurden, war es möglich, den Einfluß der Nachgiebigkeit weitgehend zu bestimmen und allgemein gültige Bemessungsvorschläge für die verschiedenen Bauformen aufzustellen.

Das Ziel der nachstehenden Abhandlung wird also im wesentlichen darin gesehen, die bisher üblichen Bauformen, insbesondere des Holzbaues mit seinen von Hause aus nachgiebigen Verbindungsmitteln, kritisch zu untersuchen und die für die Baupraxis z.Zt. geltenden Berechnungsgrundlagen der einschlägigen DIN-Bestimmungen nach den gewonnenen Erkenntnissen auszurichten.

## 2 Die Nachgiebigkeit der verschiedenen Verbindungsmittel

Unter der Nachgiebigkeit der verschiedenen Verbindungsmittel wird die Abhängigkeit der zwischen den Einzelteilen auftretenden Verschiebungen von der jeweils aufgebrachten Belastung verstanden. Sie kann in den meisten Fällen nur auf dem Versuchswege festgestellt werden. Hierbei werden ein- oder zweischnittige Stoß- oder Scherverbindungen stufenweise unter Messung der jeweils auftretenden Verschiebungen belastet. Die derart gewonnene Lastverschiebungslinie gibt für die untersuchte Verbindung die zwischen Belastung und Verschiebung bestehende Gesetzmäßigkeit.

Bei den im Stahlbau, Holzbau und Verbundbau gebräuchlichen Verbindungsarten müssen die praktisch unnachgiebigen und die nachgiebigen Verbindungen unterschieden werden. Normalerweise kann man die flächenhaften Verbindungen, bei denen vorwiegend nur Schubbeanspruchungen in den Verbindungsflächen auftreten als unnachgiebige, die punkt- oder stabförmigen Verbindungen, bei denen das Verbindungsmittel durch Scher- und Biegekräfte sowie Lochleibungskräfte beansprucht wird, als nachgiebige Verbindungsmittel bezeichnen. Bei zahlreichen stabförmigen Verbindungen, wie bei den Nieten im Stahlbau und den Nagel- und Bolzenverbindungen im Holzbau treten noch mehr oder minder unkontrollierbare Reibungskräfte auf, die eine teilweise Unnachgiebigkeit der betreffenden Verbindung erzielen lassen. Da diese Reibungseinflüsse in der Regel kaum mit Sicherheit erfaßt werden können, wird man sie beim rechnungsmäßigen Nachweis des Steifigkeits- und Tragverhaltens von Konstruktionen nicht in Rechnung stellen können. Anders liegen die Verhältnisse bei Verbindungen, bei denen man die Klemmkräfte in einwandfreier Weise aufbringen und dauernd erhalten kann, so daß stets bis zu einem gewissen Grade mit Reibungsübertragung gerechnet werden kann, wie es z.B. bei der hochfesten vorgespannten Schraubenverbindung der Fall ist. Hier liegt eine unterhalb der Gleitgrenze ebenfalls unverschiebliche Verbindung vor.

Wie Versuche gezeigt haben, müssen aber alle übrigen durch Schubkräfte beanspruchten Verbindungen als nachgiebige Verbindungen bezeichnet werden, wobei allerdings das Maß der Nachgiebigkeit sehr verschieden sein kann.

Für Kehlnähte wurden von Gaber z.B. die in Bild 2.1 dargestellten Last-Verschiebungslinien an zweischnittigen Laschenstößen von 30, 60 und 90 mm Nahtlänge festgestellt. Bis zu Schweißnahtspannungen von etwa 700 - 900 kg/cm<sup>2</sup> traten vorwiegend elastische Verschiebungen auf, darüber waren in zunehmendem Maße auch bleibende Verschiebungen festzustellen. Für den elastischen Bereich kann man auf der sicheren Seite bleibend

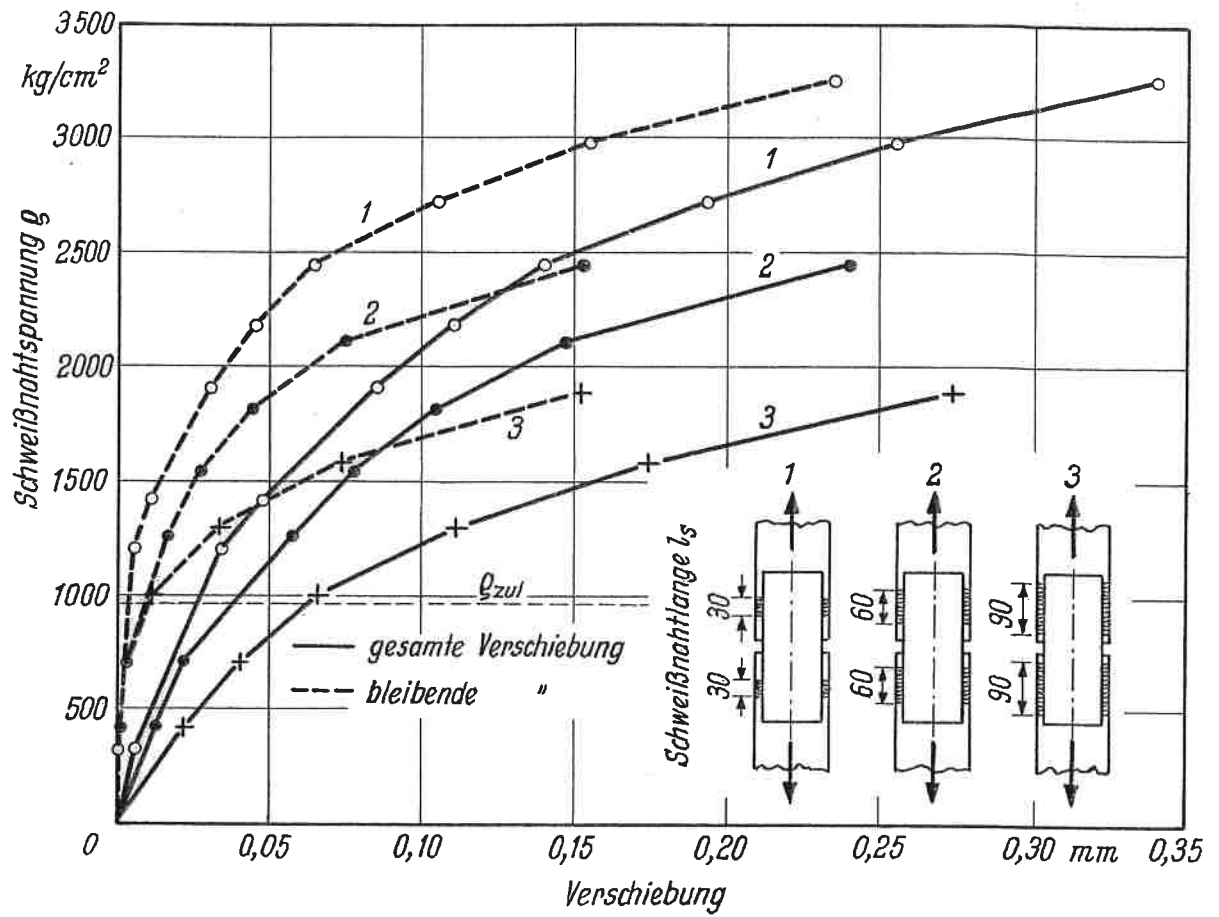


Bild 2.1

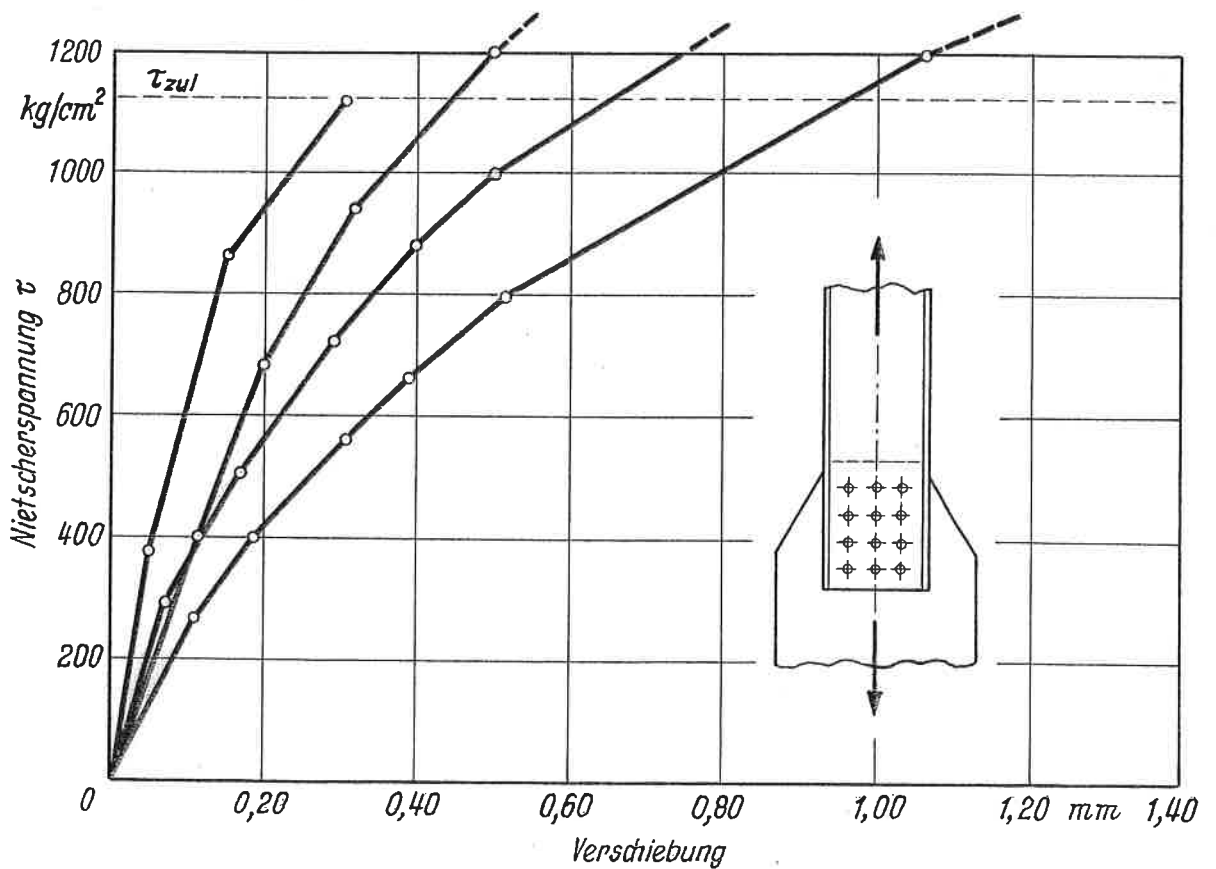


Bild 2.2

etwa mit einem Verschiebungsmodul (= Federkonstante) der Naht von

$$C = \frac{\tau}{\delta} = 250\,000 \text{ kg/cm}^3$$

rechnen, wobei  $\delta$  (cm) die unter der Schubspannung  $\tau$  (kg/cm<sup>2</sup>) auftretende Verschiebung ist. Das bedeutet, daß bei einer Belastung von 250 000 kg je cm<sup>2</sup> Nahtquerschnitt eine Verschiebung von 1 cm auftreten würde.

Bei Nietverbindungen wirkt sich die durch die Klemmkraft hervorgerufene Reibungsübertragung auf den anfänglichen Verlauf der Lastverschiebungslinie in ausschlaggebender Weise aus. Da die Höhe der Klemmkraft sehr verschieden sein kann, und bei unsachgemäßer Nietung oder verschmutzten oder gestrichenen Berührungsflächen die Reibung praktisch unwirksam wird, sollen die bei einer reibungslosen Nietverbindung vorliegenden Verhältnisse zur Beurteilung der Nachgiebigkeit herangezogen werden. Dann treten bereits mit Beginn der Belastung gewisse Verschiebungen der Einzelteile infolge mangelnder Lochfüllung und infolge der Scher-, Biege- und Lochleibungsverformung der Nietschäfte auf. Für derartige Nietverbindungen und für Paßschrauben wurden Verschiebungslinien nach Bild 2.2 festgestellt, bei denen ebenfalls nur im Bereich der zulässigen Scherbeanspruchungen vorwiegend ein elastisches Verhalten auftrat. Aus den Versuchen kann entnommen werden, daß bei der zulässigen Belastung ungünstigerweise Verschiebungen bis zu rd.  $\frac{d^2}{50}$  ( $d$  = Niet- oder Schraubendurchmesser in cm) bei einschnittiger Anordnung auftreten können. Bei zweischnittiger Nietung kann etwa mit den gleichen Verschiebungen bei doppelter Belastung gerechnet werden. Die sich hieraus im Bereich der zulässigen Niet- und Schraubenkräfte ergebenden Verschiebungsmoduli betragen:

für einschnittige Verbindungen:  $C_{N1} = 50\,000 \text{ kg/cm}$

für zwei „ „ :  $C_{N2} = 100\,000 \text{ kg/cm}$

Bleich hat aus Versuchen von Rudeloff mittlere Werte von 450 000 kg/cm entnommen, die nach den getroffenen Feststellungen nur für gute Nietarbeit zutreffen.

Auch die Verdübelungen des Stahlträger-Verbundbaues weisen eine gewisse Nachgiebigkeit auf. Hierbei setzt sich die mögliche Verschiebung zwischen Betonplatte und Stahlträger aus den Verformungen des Stahldübels selbst und denjenigen des umgebenden Betons vor allem vor der Dübelstirnfläche zusammen. So wurden auch wiederholt Verschiebungen bei Vierkantdübeln festgestellt, aus denen sich aber naturgemäß ein höherer Verschiebungsmodul ergab als bei dünnwandigen, aus Winkel- oder T-Profilen bestehenden Dübeln. Einige Versuchskurven sind in Bild 2.3 für die hauptsächlichsten Dübelformen dargestellt. Auch hier ist streng ge-

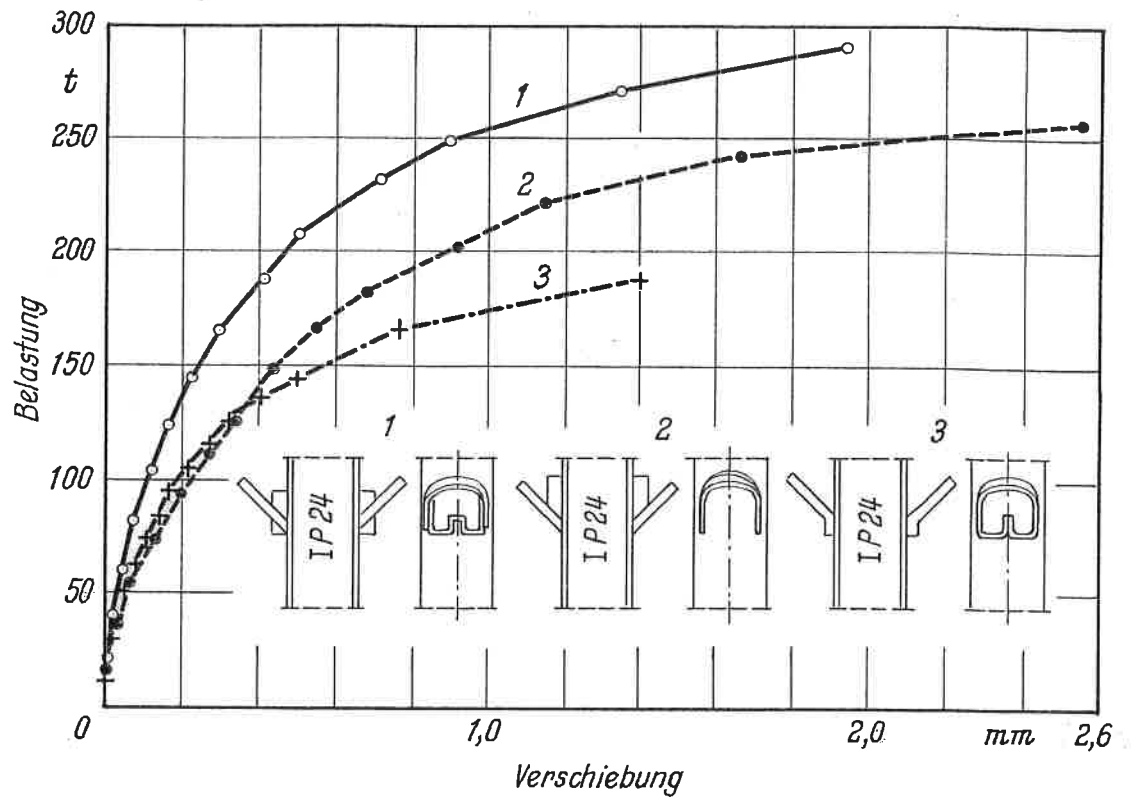


Bild 2.3

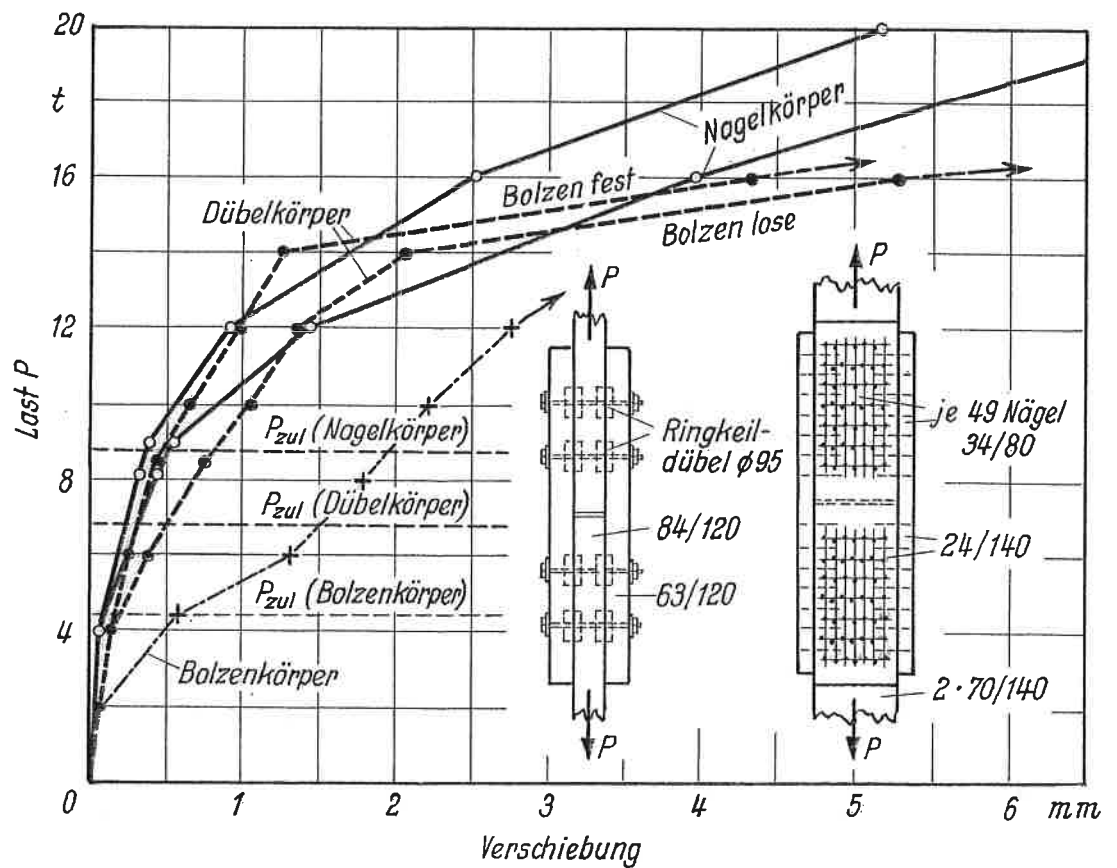


Bild 2.4



nommen zu unterscheiden zwischen dem praktisch elastischen Bereich bis etwa in Höhe der zulässigen Belastung und dem bei höherer Belastung vorwiegend plastischen Verschiebungsbereich. Durch Versuche an Dübelreihen konnte die tatsächliche Nachgiebigkeit der im Einzelversuch verhältnismäßig starren Dübel ebenfalls nachgewiesen werden.

Die im Holzbau gebräuchlichen Verbindungen sind mit Ausnahme der Leimverbindungen als ausgesprochen nachgiebige Verbindungen zu bezeichnen. Bei den Stabdübeln, den Nägeln und Schraubenbolzen werden die Verschiebungen der miteinander verbundenen Hölzer durch die Verbiegung des Verbindungsmittels selbst und die Lochleibungsverformungen des Holzes hervorgerufen. Bei den Fräs- und Einpreßdübeln sind vorwiegend die Lochleibungsverformungen des Holzes maßgebend, wobei bei Fräsdübeln auch noch ein gewisser Schlupf durch ein anfängliches Spiel zwischen Dübel und Ausfräsung hinzukommen kann. Als besonders weich muß die Schraubenbolzenverbindung angesehen werden, die bei Wegfall der Klemmkraft infolge Schwinden bereits durch das unvermeidliche Lochspiel und die Verbiegungen des Bolzens relativ große Verschiebungen aufweist. Die charakteristischen Last-Verschiebungslinien der hauptsächlichsten Holzverbindungen sind in Bild 2.4 aufgezeichnet. Hier tritt in der Regel bis zur 1,0 bis 1,25fachen zulässigen Belastung ein verhältnismäßig steiler Anstieg der Lastverschiebungslinie auf, der dann bei der Nagelung in einen langsamen ansteigenden Teil der Kurve übergeht, während bei den Dübelverbindungen eine stetige Krümmung bis zum Erreichen der Höchstlast beobachtet wird. In beiden Fällen sind die Verschiebungen vorwiegend bleibender Art, da sie zu einem großen Teil von den örtlichen plastischen Stauchungen des Holzes im Dübel- oder Nagelbett herrühren. Da bei den Nägeln in der Regel die Verschiebungen unter den zulässigen Lasten mit zunehmender Nageldicke größer werden und - ähnlich wie bei den Nietverbindungen des Stahlbaues - beim einschnittigen Nagel mindestens etwa so groß sind wie beim zweischnittigen Nagel unter der doppelten Belastung, ergeben sich bei reinen Scherverbindungen *in diesem Bereich*

für einschnittige Nägel:  $C_{N1} = 1200 \text{ bis } 2400 \text{ kg/cm}$

für zwei " "  $C_{N2} = 2400 \text{ bis } 4800 \text{ kg/cm}$

Je nach Holzbeschaffenheit und Vorhandensein von Reibungsübertragung infolge der durch die Nägel hervorgerufenen Klemmwirkung können diese Werte auch noch bedeutend überschritten werden. In der Regel besitzen die Nagelverbindungen 2,7 bis 3,5fache Bruchsicherheit. Bei Erreichen der Höchstlast sind die Verschiebungen dann bereits auf das 8 bis 10fache des bei der zulässigen Last festgestellten Wertes angestiegen. Dies würde bei Zugrundelegung einer bis zur Höchstlast geradlinigen Last-Ver-

schiebungslinie einer Verringerung des Verschiebungsmoduls  $C$  auf ein Drittel des im zulässigen Bereich gültigen Wertes entsprechen.

Bei den Dübelverbindungen treten in der Regel Verschiebungen von 1 bis 1,5 mm unter den zulässigen Belastungen auf, wobei die kleineren Dübelabmessungen die geringeren Verschiebungen aufweisen. Das bedeutet, daß hier mit  $C$ -Werten von etwa 15 000 bis 30 000 kg/cm gerechnet werden muß, die aber auch je nach Holzbeschaffenheit, Dübelart und Sorgfalt des Einbaues über- oder unterschritten werden können.

Sämtliche an ein- und zweischnittigen Scherkörpern versuchsmäßig festgestellten Last-Verschiebungslinien weisen bei den hauptsächlichsten Verbindungsmitteln des Stahlbaues, des Stahlverbundbaues und des Ingenieurholzbaues einen ähnlichen Verlauf auf, wenn man die Verschiebungen in Abhängigkeit von der zulässigen Belastung des Verbindungsmittels aufträgt. Im Bereich der zulässigen Belastung und meist noch ein gewisses Maß darüber hinaus, kann bei Außerachtlassung der oft unsicheren Reibungseinflüsse genau genug mit einem geradlinigen Verlauf der Last-Verschiebungslinien gerechnet werden, so daß die Abhängigkeit zwischen Last und Verschiebung durch die „Nachgiebigkeitszahl“ des Verbindungsmittels

$$C_V(\text{kg/cm}) = \frac{P_{zul}}{\delta_{zul}} \quad (2.1)$$

gegeben werden kann. Bei völlig elastischem Verhalten der Verbindung entspricht diese Nachgiebigkeitszahl  $C_V$  der Federkonstanten einer Verbindung. Man hat schon frühzeitig die Kraftverteilung in Anschlüssen und Stößen, bei denen mehrere Verbindungsmittel hintereinander angeordnet sind, mit Hilfe des  $C_V$ -Wertes rechnerisch zu erfassen versucht und mit den Ergebnissen von Versuchen verglichen. Während bei den praktisch unnachgiebigen Verbindungen (z.B. Schweißnähte, Leim und HV-Verschraubung) sich eine sehr ungleichmäßige Beanspruchung über der Anschlußlänge ergibt, wobei an den Anschlüssen eine oft mehrfache Überschreitung der mittleren rechnerischen Beanspruchung auftritt, liegen bei den nachgiebigen Verbindungsmitteln geringere Überbeanspruchungen der Endverbindungsmittel vor. Im Stahlbau hat man sogar von einer Berücksichtigung dieses Einflusses bei den zulässigen Belastungen der Niete und Schrauben bei reihenweiser Anordnung abgesehen, während für die Dübel- und Nagelanschlüsse im Holzbau eine Ermäßigung von  $P_{zul}$  um 10 und 20 % je nach der Zahl der hintereinander liegenden Verbindungsmittel vorgeschrieben ist.

Nach Überschreiten der zulässigen Belastung treten bei den einzelnen Verbindungsarten mehr oder weniger rasch größere Verschiebungen auf, so

daß bei Erreichen der Bruchlast in der Regel die mehrfachen Formänderungen des zulässigen Bereiches vorliegen.

Bei den nachgiebig verbundenen zusammengesetzten Biegeträgern und Druckstäben kann insbesondere bei den für Beton und Holz vorliegenden Werkstoffeigenschaften nicht von vornherein damit gerechnet werden, daß die Nachgiebigkeit des Verbindungsmittels im Tragwerkselement mit derjenigen im einfachen Scherkörper übereinstimmt. Die zur Beurteilung dieser Frage auswertbaren Versuche, insbesondere an Holzträgern, ließen zwar erkennen, daß grundsätzlich ein ähnliches Verhalten des Verbindungsmittels im Träger oder Druckstab und im Scherkörper vorliegt, nämlich praktisch geradlinige Verschiebungszunahme bis zur Höhe der zulässigen Last oder um ein gewisses Maß darüber hinaus, die wirksame Nachgiebigkeitszahl  $C_v$  des gleichen Verbindungsmittels aber je nach der angewendeten Konstruktionsform verschieden sein könne. Es mußten daher zur Gewinnung <sup>ver</sup> zulässiger Unterlagen für die jeweils anzuwendenden  $C_v$ -Werte diese aus entsprechend angelegten Biege- und Knickversuchen selbst bestimmt werden. Durch die vereinfachende Annahme eines geradlinigen Zusammenhanges zwischen der Belastung des Verbindungsmittels und der auftretenden Verschiebung konnten für alle praktisch bedeutsamen Tragwerksformen zusammengesetzter Querschnitte entsprechende Berechnungsformeln aufgestellt werden, mit deren Hilfe durch Auswertung der zugehörigen Versuche die tatsächlich wirksamen Nachgiebigkeitszahlen der Verbindungsmittel zu erhalten waren.

### 3 Berechnung von Biegeträgern mit nachgiebig verbundenen Einzelteilen

Bei der Ableitung der Berechnungsverfahren für nachgiebig verbundene Trägerquerschnitte wird eine kontinuierliche Verbindung zwischen den Einzelteilen angenommen. Diese Annahme trifft bei der heute üblichen Ausführung zusammengesetzter Holzbiegeträger weitgehend zu, bei denen die Verwendung von Nägeln oder kleinen Dübeleinheiten, teilweise auch von kontinuierlich in die Berührungsfuge eingelegten Dübelbändern bevorzugt wird, so daß praktisch die gleiche Nachgiebigkeit auf die ganze Trägerlänge erzielt werden kann. Allerdings würde bei stark schwankendem Verbindungsmittelabstand der Verschiebungswiderstand innerhalb der Trägerlänge in gewissem Grade schwanken. Auch im Stahlbeton-Verbundbau bevorzugt man in immer stärkerem Maße die Verwendung von kleineren Dübeleinheiten, die in verhältnismäßig enger Teilung angebracht werden. Mit Rücksicht auf die bei starken, weit auseinander liegenden Dübeln in die Betonplatte örtlich einzuleitenden großen Kräfte und die dadurch entstehenden Spannungsanhäufungen ist der vorerwähnten Bauart auf alle Fälle der Vorzug zu geben. Im übrigen zeigt ein Vergleich der bei einem Dübelbalken mit verhältnismäßig großen Dübelabständen nach genauer Rechnung auftretenden Beanspruchungen mit den bei kontinuierlichem Verbund sich ergebenden Randspannungen, daß die Unterschiede gering sind und in der Regel innerhalb der durch die getroffenen Annahmen bedingten Streuungen liegen werden. Wie bereits dargelegt, wird mit einer in dem betrachteten Belastungsbereich konstanten Nachgiebigkeitszahl  $C_V$  (kg/cm) des einzelnen Verbindungsmittels gerechnet, so daß in der Berührungsfuge der Verschiebungswiderstand

$$\bar{C} \text{ (kg/cm}^3\text{)} = \frac{C_V}{t b} \quad (3.1)$$

bei Auftreten einer Schubspannung  $\tau$  zur Wirksamkeit kommt. Eine Schubkraft  $T_x$  (kg/cm) an einer beliebigen Stelle  $x$  entspricht somit einer Verschiebung  $\delta_x$  zwischen den nachgiebig verbundenen Teilen

$$\delta_x \text{ (cm)} = \frac{T_x t}{C_V} = \frac{\tau_x}{\bar{C}} \quad (3.2)$$

worin  $t$  den Abstand eines Verbindungsmittels bei einreihiger Anordnung bedeutet. Bei  $n$ -reihiger Anordnung ist anstelle  $t$  der Wert  $\frac{t}{n}$  einzuführen. Die Verschiebung  $\delta$  ist damit unmittelbar ein Maß für die jeweils auftretende Beanspruchung des Verbindungsmittels, wodurch auch die Schubbeanspruchung  $\tau$  in der Berührungsfuge bestimmt ist.

### 3.1 Allgemeine Ableitung der Grundgleichungen für den zweiteiligen Verbundträger-Querschnitt

Bei einem Verbundquerschnitt nach Bild 3.1 sei  $\delta_x$  die Verschiebung,  $y_x$  die Durchbiegung an der Stelle  $x$ . Diese Verschiebung  $\delta_x$  in der Berührungsfuge (zweier im unbelasteten Zustande übereinander liegender Punkte) infolge der äußeren Belastung kann man sich entstanden denken

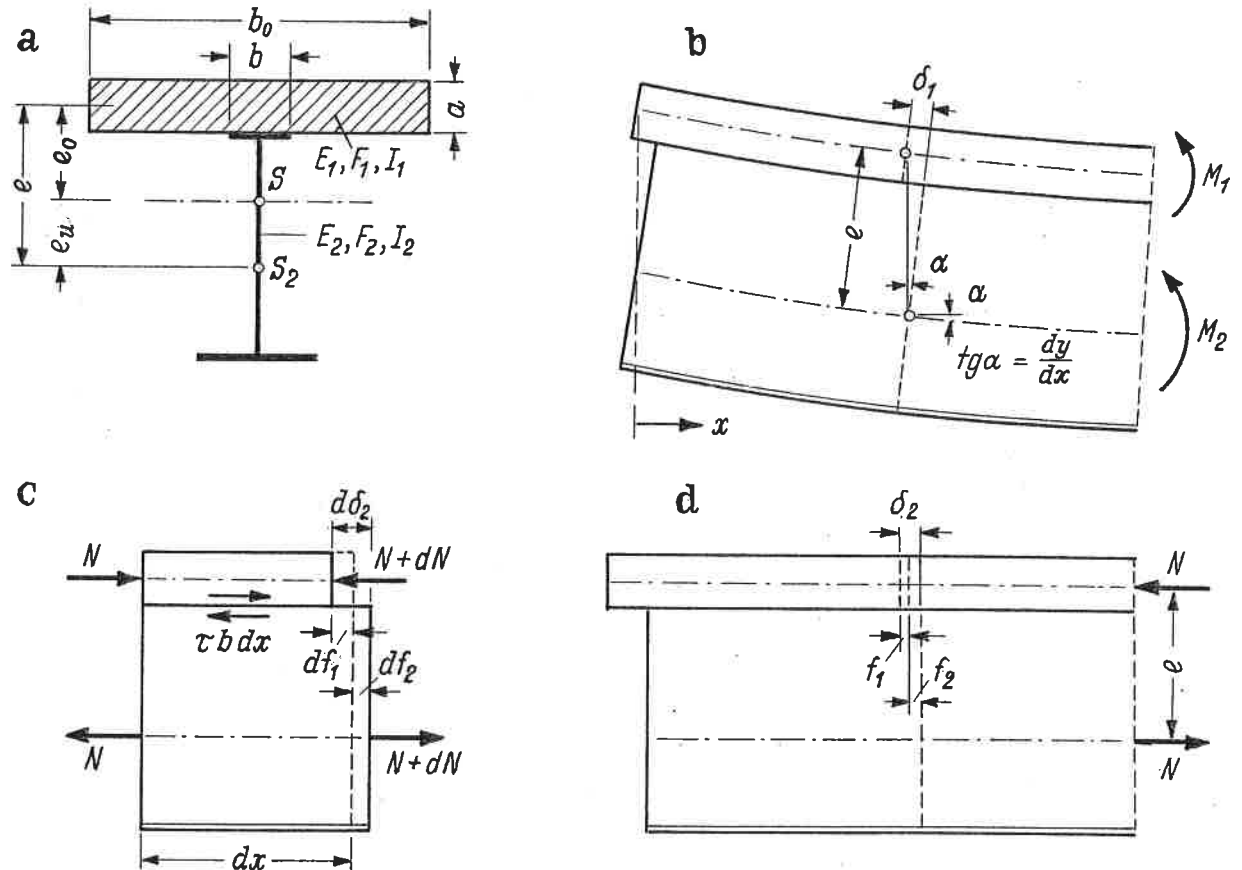


Bild 3.1

aus der Verschiebung  $\delta_1$ , die bei der wirklichen Durchbiegung der beiden unverbunden gedachten Trägerteile auftreten würde und der Verschiebung  $\delta_2$ , die aus den unterschiedlichen Faserdehnungen der beiden Teile herührt, welche durch die Normalspannungen bewirkt werden:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \quad (3.3)$$

Mit den Bezeichnungen nach Bild 3.1 wird

$$\delta_1 = (e_0 + e_u) \frac{dy}{dx} = e \frac{dy}{dx}, \quad (3.4)$$

$$\delta_2 = f_1 + f_2, \quad (3.5)$$

$$d\delta_2 = df_1 + df_2. \quad (3.6)$$

Die in den Teilquerschnitten wirkenden Normalkräfte  $N_1$  und  $N_2$  müssen

gleich sein ( $N_1 = N_2 = N$ ). Die Normalspannungen betragen  $\sigma_1^N$  und  $\sigma_2^N$ . Dann gilt

$$N = \sigma_1^N F_1 = \sigma_2^N F_2.$$

An einem Balkenelement  $dx$  treten unter den obigen Normalspannungen die Längenänderungen  $df_1 = \sigma_1^N dx / E_1$  und  $df_2 = \sigma_2^N dx / E_2$  auf, deren Summe  $df_1 + df_2$  nach Gl.(3.6) den Zuwachs der Verschiebung  $\delta_2$  darstellt:

$$d\delta_2 = \frac{\sigma_1^N}{E_1} dx + \frac{\sigma_2^N}{E_2} dx. \quad (3.7)$$

Für  $E_2 = n E_1$  und  $\sigma_2^N = \frac{F_1}{F_2} \sigma_1^N$  erhält man

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\sigma_1^N}{E_1} \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right) \quad (3.8)$$

und

$$\sigma_1^N = \frac{E_1}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \cdot \frac{d\delta_2}{dx}. \quad (3.9)$$

Die Schubkraft  $T$  in der Fuge entspricht dem Zuwachs der Normalkraft  $N$  und beträgt

$$T = \tau b = \frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx} (\sigma_1^N F_1) \quad (3.10)$$

und wird bei konstantem  $F_1$

$$\tau b = \frac{E_1 F_1}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \cdot \frac{d^2 \delta_2}{dx^2}. \quad (3.11)$$

Mit  $\tau = \bar{c} \delta$  und  $\delta = \delta_1 + \delta_2 = e \frac{dy}{dx} + \delta_2$  wird

$$\bar{c} b \delta = \frac{E_1 F_1}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \cdot \frac{d^2 \delta_2}{dx^2} \quad (3.12)$$

und

$$\frac{d^2 \delta_2}{dx^2} = \frac{d^2 \delta}{dx^2} - e \frac{d^3 y}{dx^3}. \quad (3.13)$$

Durch Einsetzen von Gl.(3.13) in (3.12) erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} - \frac{\bar{c} b \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right)}{E_1 F_1} \delta = e \frac{d^3 y}{dx^3}. \quad (3.14)$$

Diese Differentialgleichung gibt die Abhängigkeit der beiden Unbekannten  $\delta$  und  $y$ . Eine weitere Bedingung erhält man aus der Aufteilung des äußeren Momentes  $M$  in die Teilmomente  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3 = Ne$ . Hierbei bedeuten  $M_1$  und  $M_2$  die von den beiden Einzelteilen infolge der Durchbie-

gung  $y$  aufgenommenen Teilmomente,  $M_3$  das von der Normalkraft herrührende Moment:

$$M = M_1 + M_2 + M_3, \quad (3.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} M_1 &= -E_1 I_1 y'', & M_2 &= -E_2 I_2 y'' \\ M_3 &= Ne = \sigma_1^N F_1 e = \frac{E_1 F_1 e}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \cdot \frac{d\delta_2}{dx}. \end{aligned}$$

Aus  $\delta = e \frac{dy}{dx} + \delta_2$  folgt

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{d\delta}{dx} - e \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.16)$$

und

$$M_3 = \frac{E_1 F_1 e}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \left( \frac{d\delta}{dx} - e \frac{d^2 y}{dx^2} \right). \quad (3.17)$$

Damit wird aus Gl.(3.15)

$$M = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) y'' + \frac{E_1 F_1 e}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} (\delta' - e y'') \quad (3.18)$$

Mit  $E_2 = n E_1$  und  $I_1 + n I_2 = I'$  erhält man hieraus

$$y'' - \frac{\frac{F_1 e^2}{1 + \frac{F_1}{n F_2}}}{I' + \frac{F_1 e^2}{1 + \frac{F_1}{n F_2}}} \cdot \frac{\delta'}{e} = \frac{-M}{E_1 \left( I' + \frac{F_1 e^2}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} \right)}. \quad (3.19)$$

Setzt man

$$I' + \frac{F_1 e^2}{1 + \frac{F_1}{n F_2}} = I_V, \quad (3.20)$$

so ergibt sich schließlich mit Gl.(3.14) und (3.19) das Gleichungssystem

$$\delta'' - \frac{\bar{C}b \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right)}{E_1 F_1} \cdot \delta = e y''', \quad (3.21)$$

$$y'' - \frac{F_1 e^2}{I_V \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right)} \cdot \frac{\delta'}{e} = -\frac{1}{E_1 I_V} M. \quad (3.22)$$

Führt man die Abkürzungen

$$\omega^2 = \frac{\bar{C}b \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right)}{E_1 F_1} \quad (3.23) \quad \alpha^2 = \frac{F_1 e^2}{I_V \left( 1 + \frac{F_1}{n F_2} \right)} \quad (3.24)$$

ein, so erhält man das Gleichungssystem in der Form

$$\boxed{\begin{aligned} \delta'' - \omega^2 \delta &= e y''' \\ y'' - \frac{\alpha^2}{e} \delta' &= -\frac{1}{E_1 I_V} M \end{aligned}} \quad (3.25)$$

$$(3.26)$$

### 3.2 Allgemeine Ableitung der Grundgleichungen für den dreiteiligen Trägerquerschnitt aus zwei verschiedenen Materialien

Während bei den Verbundkonstruktionen des Stahlbaues der zweiteilige Querschnitt bestehend aus Stahlträger und Betonplatte bisher praktisch ausschließlich zur Anwendung gelangte, sind im Holzbau vorwiegend die symmetrischen dreiteiligen Querschnitte üblich, bei denen u.U. auch verschiedene Materialien gleichzeitig angewendet werden können. So ist man in den letzten Jahren verschiedentlich dazu übergegangen, Träger mit Stegen aus Stahlblech, Sperrholz- oder sonstigen Holzwerkstoffplatten herzustellen. Es soll daher die Ableitung der Grundgleichungen für den allgemeinen Fall eines Trägers, bei welchem das Gurt- und Stegmaterial verschieden ist, durchgeführt werden.

Bei dem nach Bild 3.2 ausgebildeten Querschnitt und mit den darin festgelegten Bezeichnungen wird die in der Gurtschwerlinie auftretende

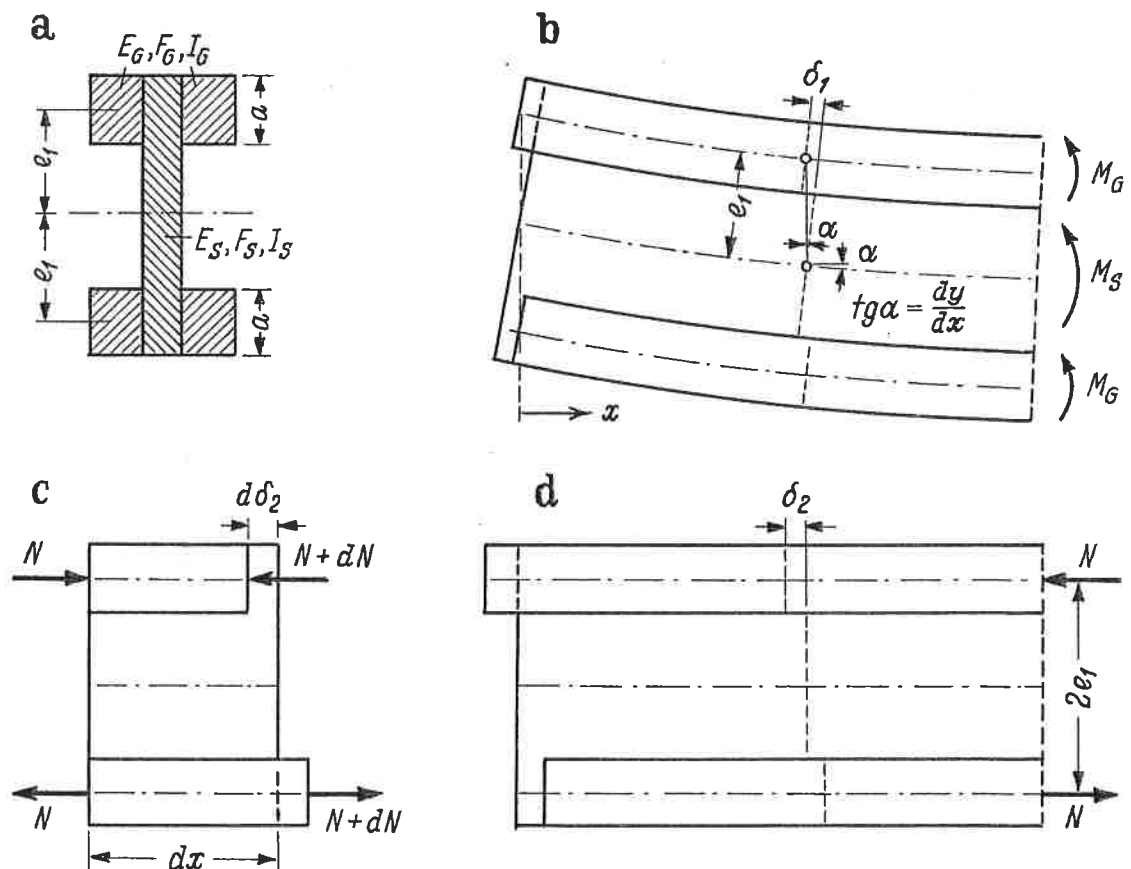


Bild 3.2

Verschiebung  $\delta$  wiederum aufgeteilt in den Anteil  $\delta_1$  infolge der Durchbiegungen und in den Anteil  $\delta_2$  infolge der in den Gurten wirkenden Normalkräfte (Gl. 3.3). Die Verbindungsmittel werden in der Gurtschwerlinie vereinigt angenommen, so daß bei mehrreihiger Anordnung anstelle des tatsächlichen Abstandes der einzelnen Verbindungsmittel der Wert  $t$  den re-



duzierten Abstand darstellt. Es ist (Bild 3.2)

$$\delta_1 = e_1 \frac{dy}{dx} \quad (3.27)$$

und

$$d\delta_2 = \frac{\sigma_G^N}{E_G} dx, \quad \sigma_G^N = E_G \frac{d\delta_2}{dx}, \quad (3.28)$$

$$N = \sigma_G^N F_G = E_G F_G \frac{d\delta_2}{dx}. \quad (3.29)$$

Die in den beiden Berührungsflächen zu übertragende Schubkraft  $T$  ist

$$T = \tau \cdot 2a = \frac{d}{dx} (\sigma_G^N F_G) = E_G F_G \frac{d^2 \delta_2}{dx^2}$$

und mit Gl.(3.2)

$$2\bar{C}a\delta = E_G F_G \frac{d^2 \delta_2}{dx^2}. \quad (3.30)$$

Hieraus und mit den Gln.(3.3) und (3.27) erhält man

$$\frac{d^2 \delta}{dx^2} - \frac{2\bar{C}a}{E_G F_G} \cdot \delta = e_1 \frac{d^3 y}{dx^3}. \quad (3.31)$$

Für die Momente gilt

$$2M_G + M_S = - (2E_G I_G + E_S I_S) y'' = -E_G (2I_G + nI_S) y'', \quad (3.32)$$

$$M^N = N_G \cdot 2e_1 = \sigma_G^N F_G \cdot 2e_1 = 2E_G F_G e_1 \frac{d\delta_2}{dx}. \quad (3.33)$$

Aus der Momentenbedingung

$$M = 2M_G + M_S + N_G \cdot 2e_1$$

ergibt sich dann mit  $E_S = n \cdot E_G$

$$M = -E_G (2I_G + nI_S) y'' + 2E_G F_G e_1 \frac{d\delta_2}{dx}$$

$$M = -E_G (2I_G + nI_S) y'' - 2E_G F_G e_1^2 y'' + 2E_G F_G e_1 \frac{d\delta}{dx}. \quad (3.34)$$

Mit

$$2I_G + nI_S = I' \quad (3.35) \quad I' + 2F_G e_1^2 = I_V \quad (3.36)$$

erhält man aus Gl.(3.34)

$$y'' - \frac{2F_G e_1^2}{I_V} \cdot \frac{\delta'}{e_1} = - \frac{M}{E_G I_V}. \quad (3.37)$$

Führt man die Abkürzungen

$$\omega^2 = \frac{2\bar{C}a}{E_G F_G} \quad (3.38) \quad \alpha^2 = \frac{2F_G e_1^2}{I_V} \quad (3.39)$$

ein, so ergibt sich mit Gl.(3.31) und (3.37) das Gleichungssystem

$$\delta'' - \omega^2 \delta = e_1 y''' \quad (3.40)$$

$$y'' - \frac{\alpha^2}{e_1} \delta' = - \frac{1}{E_G I_V} M \quad (3.41)$$

Es ergibt sich somit die gleiche Form wie bei (3.25,26), wobei lediglich die Konstanten andere Zahlenwerte darstellen.

Das Gleichungssystem ermöglicht für jeden Belastungsfall unter Beachtung der Randbedingungen eine geschlossene Lösung für die Durchbiegung  $y(x)$  und die Verschiebung  $\delta(x)$  anzuschreiben. Aus der Verschiebung  $\delta(x)$  kann unmittelbar die Schubkraft  $T(x) = \bar{c}b \delta(x)$  bzw.  $T(x) = 2\bar{c}a \delta(x)$  sowie die Normalkraft  $N(x) = \int_0^x \bar{c}b \delta(x) dx$  erhalten werden. Damit sind die für den Spannungsnachweis erforderlichen Größen bekannt.

Im folgenden werden die für den beiderseits frei aufliegenden Verbundträger zutreffenden Lösungen entwickelt, wobei die beiden Lastfälle: Einzellast in Trägermitte und gleichmäßig verteilte Streckenlast über die Gesamtlänge untersucht werden.

### 3.3 Lösung der Grundgleichungen für den frei aufliegenden Verbundträger unter Einzellast oder Streckenlast

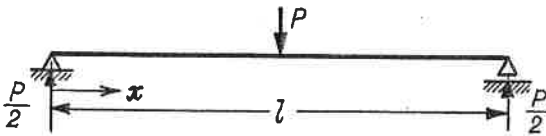
Das System der beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen kann allgemein geschrieben werden

$$\delta'' - \omega^2 \delta = e y''' \quad (3.42)$$

$$y'' - \frac{\alpha^2}{e} \delta' = -\frac{1}{EI_V} M \quad (3.43)$$

da es sich für 2- und 3-teilige Querschnitte lediglich in den Zahlenwerten der Konstanten unterscheidet. Es enthält die gesuchten Funktionen

Lastfall a)

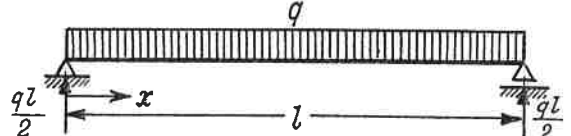


$$M(x) = \frac{P}{2} x$$

$$Q(x) = \frac{P}{2}$$

$$q(x) = 0$$

Lastfall b)



$$M(x) = \frac{ql^2}{2} \left[ \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right]$$

$$Q(x) = \frac{ql}{2} \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)$$

$$q(x) = q$$

Bild 3.3

$\delta(x)$  und  $y(x)$  und die gegebene Funktion  $M(x)$ . Durch Differenzieren und Einsetzen gelingt es, das System zu entkoppeln, so daß man jeweils eine Differentialgleichung für  $\delta(x)$  und  $y(x)$  erhält:

$$\delta'' - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \delta = -\frac{e}{\beta^2 EI_V} Q(x) \quad (3.44)$$

$$y'''' - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 y'' = \frac{1}{\beta^2 EI_V} (\omega^2 M(x) + q(x)) \quad (3.45)$$

Neben den bereits angeführten Abkürzungen bedeuten:

$$\beta^2 = \frac{\sum I_1}{I_V} = 1 - \alpha^2, \quad \alpha^2 = \frac{\sum F_1 e_1^2}{I_V}$$

$Q(x)$  = Querkraft

$q(x)$  = Streckenlast

$I_V$  = Trägheitsmoment des Gesamtquerschnitts bei starrem Verbund

$I_1$  = Trägheitsmoment des Einteilteles

Für die beiden zu untersuchenden Lastfälle sind die Funktionen  $Q(x)$ ,  $M(x)$  und  $q(x)$  in Bild 3.3 angegeben.

### 3.31 Lösung der Grundgleichung für die Verschiebung $\delta$

Zur Ermittlung der Verschiebung  $\delta(x)$  muß zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3.44) bekannt sein. Diese besteht aus der allgemeinen Lösung  $\delta_h$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\delta'' - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \delta = 0 \quad (3.46)$$

und aus einer partikularen Lösung  $\delta_p$  der inhomogenen Gleichung (3.44):

$$\delta = \delta_h + \delta_p.$$

Die allgemeine Lösung  $\delta_h$  lautet

$$\delta_h = A_1 e^{\frac{\omega}{\beta}x} + A_2 e^{-\frac{\omega}{\beta}x}. \quad (3.47)$$

Die zugehörigen Partikularlösungen  $\delta_p$  errechnen sich nach Einführung der Funktionen  $Q(x)$  gemäß Bild 3.3:

$$\text{Lastfall a)} \quad \delta_p = \frac{Pe}{2\omega^2 EI_V}.$$

$$\text{Lastfall b)} \quad \delta_p = \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right).$$

Damit erhält man für die allgemeine Lösung von Gl.(3.44):

$$\text{Lastfall a)} \quad \delta = A_1 e^{\frac{\omega}{\beta}x} + A_2 e^{-\frac{\omega}{\beta}x} + \frac{Pe}{2\omega^2 EI_V}. \quad (3.48)$$

$$\text{Lastfall b)} \quad \delta = A_1 e^{\frac{\omega}{\beta}x} + A_2 e^{-\frac{\omega}{\beta}x} + \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right). \quad (3.49)$$

Die Integrationskonstanten  $A_1, A_2$  ergeben sich für beide Lastfälle aus den Randbedingungen

$$\delta(l/2) = 0, \quad \delta'(0) = 0.$$

Sie lauten:

Lastfall a)

$$A_1 = A_2 = -\frac{Pe}{4\omega^2 EI_V} \cdot \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}}.$$

Lastfall b)

$$A_1 = \frac{qe}{2\omega^2 EI_V} \cdot \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{e^{-\frac{\omega l}{2\beta}}}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}},$$

$$A_2 = -\frac{qe}{2\omega^2 EI_V} \cdot \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{e^{\frac{\omega l}{2\beta}}}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}}.$$

Mit den Gln.(3.48) und (3.49) folgt dann für die Verschiebung  $\delta$ :

Lastfall a)

$$\delta(x) = \frac{Pe}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.50)$$

Lastfall b)

$$\delta(x) = \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - 2\frac{x}{l} - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.51)$$

### 3.32 Lösung der Grundgleichung für die Durchbiegung $y$

Die Lösung für die Durchbiegung  $y(x)$  kann analog dem obigen Rechen-gang für die Verschiebung  $\delta(x)$  aus der Differentialgleichung (3.45) ge-wonnen werden. Es ist jedoch zweckmäßiger, wenn man auf die Gleichung (3.43) des Systems zurückgreift und hier die bereits bekannte Lösung für  $\delta$  einführt. Aus Gl.(3.43) folgt durch Auflösung nach  $y''$

$$y'' = \frac{\alpha^2}{e} \delta' - \frac{1}{EI_V} M. \quad (3.52)$$

Durch Differenzieren der Gln.(3.50) und (3.51) ergibt sich

Lastfall a)

$$\delta' = -\frac{Pe}{2\omega\beta EI_V} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}}.$$

Lastfall b)

$$\delta' = \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left( -\frac{2}{l} + \frac{2}{l} \cdot \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right).$$

Nach Einsetzen in Gl.(3.52) und Einführen der Funktion  $M(x)$  erhält man:

Lastfall a)

$$y'' = -\frac{P}{2EI_V} \left( \frac{\alpha^2}{\omega\beta} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} + x \right).$$

Lastfall b)

$$y'' = \frac{q}{2EI_V} \left[ \frac{2\alpha^2}{\omega^2} \left( -1 + \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) - lx + x^2 \right].$$

Durch formale Integration und Erfüllen der Randbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(l/2) = 0$$

ergibt sich dann für die Durchbiegung  $y$ :

Lastfall a)  $A_1 = \frac{P}{2EI_V} \left( \frac{\alpha^2}{\omega^2} + \frac{l^2}{8} \right), \quad A_2 = 0$

$$y(x) = \frac{Pl^3}{48EI_V} \left[ 3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{24\alpha^2}{(\omega l)^2} \left( \frac{x}{l} - \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \right] \quad (3.53)$$

Lastfall b)  $A_1 = \frac{q}{2EI_V} \left( \frac{\alpha^2 l}{\omega^2} + \frac{l^3}{12} \right), \quad A_2 = -\frac{q}{2EI_V} \cdot \frac{2\alpha^2 \beta^2}{\omega^2}$

$$y(x) = \frac{ql^4}{24EI_V} \left\{ \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{12\alpha^2}{(\omega l)^2} \left[ \frac{2\beta^2}{(\omega l)^2} \left( \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} - 1 \right) + \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \right\} \quad (3.54)$$

### 3.33 Zusammenstellung der maßgebenden Verschiebungs- und Schnittgrößen

Bezeichnet man die bei starrem Verbund auftretenden Verschiebungs- und Schnittgrößen mit  $y_0, T_0, N_0$ , so erhält man für die beiden Lastfälle des frei aufliegenden Trägers folgende Berechnungsformeln:

Lastfall a)

a) Durchbiegung

$$y(x) = y_0(x) \left\{ 1 + \frac{24\alpha^2}{(\omega l)^2 \left[ 3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]} \left[ \frac{x}{l} - \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right] \right\}. \quad (3.55)$$

Hierin bedeutet  $y_0(x)$  die Durchbiegung des starr verbundenen Trägers:

$$y_0(x) = \frac{Pl^3}{48EI_V} \left[ 3\frac{x}{l} - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]. \quad (3.56)$$

Die größte Durchbiegung in  $l/2$  wird

$$y_{max} = y_{0max} \left[ 1 + \frac{12\alpha^2}{(\omega l)^2} \left( 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \operatorname{Tgh} \frac{\omega l}{2\beta} \right) \right], \quad (3.57)$$

wobei

$$y_{0max} = \frac{Pl^3}{48EI_V} \quad (3.58)$$

Die Klammerwerte, mit denen die Durchbiegung  $y(x)$  des starr verbundenen Trägers multipliziert werden muß, sind nicht konstant über die Trägerlänge, die wirksamen Trägheitsmomente also verschieden.

b) Verschiebung

$$\delta(x) = \frac{Pe}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.59)$$

Die größte Verschiebung am Auflager ( $x = 0$ ) wird

$$\delta_{max} = \frac{Pe}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.60)$$

c) Schubkraft

$$T(x) = \bar{C} b \delta(x),$$

$$T(x) = \frac{Pe \bar{C} b}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.61)$$

Mit  $T_0(x) = \tau_0(x) b = \frac{QS}{I_V} = \frac{PS}{2I_V}$  wird

$$T(x) = T_0(x) \frac{\bar{C} b e}{\omega^2 ES} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.62)$$

Die größte Schubkraft am Auflager ( $x = 0$ ) wird

$$T_{max} = T_{0max} \frac{\bar{C} b e}{\omega^2 ES} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.63)$$

d) Normalkraft

$$N(x) = \int_0^x C b \delta(x) dx,$$

$$N(x) = \frac{P l e \bar{C} b}{2\omega^2 EI_V} \left( \frac{x}{l} - \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} x}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.64)$$

Die größte Normalkraft in  $l/2$  wird

$$N_{max} = \frac{P l e \bar{C} b}{4\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \tanh \frac{\omega l}{2\beta} \right) \quad (3.65)$$

Die Normalkraft  $N_0$  des starr verbundenen Trägers läßt sich hier erst nach näherer Angabe der Querschnittsform einführen.

Lastfall b)

a) Durchbiegung

$$y(x) = y_0(x) \left\{ 1 + \frac{12\alpha^2}{(\omega l)^2 \left[ \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right]} \left[ \frac{2\beta^2}{(\omega l)^2} \left( \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} - 1 \right) + \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.66)$$

Hierin ist  $y_0(x)$  die Durchbiegung des starr verbundenen Trägers

$$y_0(x) = \frac{ql^4}{24EI_V} \left[ \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right] \quad (3.67)$$

Die größte Durchbiegung in  $l/2$  wird

$$y_{max} = y_{0max} \left\{ 1 + \frac{384}{5} \cdot \frac{\alpha^2}{(\omega l)^2} \left[ \frac{\beta^2}{(\omega l)^2} \left( \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} - 1 \right) + \frac{1}{8} \right] \right\} \quad (3.68)$$

$$y_{0max} = \frac{5ql^4}{384EI_V} \quad (3.69)$$

Auch hier erhält man einen über die Trägerlänge veränderlichen Faktor für die Berechnung der Durchbiegung aus derjenigen des starr verbundenen Trägers.

b) Verschiebung

$$\delta(x) = \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - 2\frac{x}{l} - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.70)$$

Die größte Verschiebung am Auflager ( $x = 0$ ) wird

$$\delta_{max} = \frac{qle}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \tanh \frac{\omega l}{2\beta} \right) \quad (3.71)$$

c) Schubkraft

$$T(x) = \bar{C}b \delta(x)$$

$$T(x) = \frac{qle \bar{C}b}{2\omega^2 EI_V} \left( 1 - 2\frac{x}{l} - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.72)$$

Mit  $T_0(x) = \frac{QS}{I_V} = \frac{qls}{2I_V} \left( 1 - 2\frac{x}{l} \right)$  wird

$$T(x) = T_0(x) \frac{\bar{C}be}{\omega^2 Es} \left( 1 - \frac{2\beta}{\omega l \left( 1 - 2\frac{x}{l} \right)} \cdot \frac{\sinh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \quad (3.73)$$

Die größte Schubkraft am Auflager ( $x = 0$ ) wird

$$T_{max} = T_{0max} \frac{\bar{C} b e}{\omega^2 E S} \left( 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot Tgh \frac{\omega l}{2\beta} \right). \quad (3.74)$$

d) Normalkraft

$$N(x) = \int_0^x \bar{C} b \delta(x) dx$$

$$N(x) = \frac{q l^2 e \bar{C} b}{2 \omega^2 E I_V} \left[ \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{2\beta^2}{(\omega l)^2} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{\omega}{\beta} \left( \frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \right]. \quad (3.75)$$

Die größte Normalkraft in  $l/2$  wird

$$N_{max} = \frac{q l^2 e \bar{C} b}{8 \omega^2 E I_V} \left[ 1 - \frac{8\beta^2}{(\omega l)^2} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{2\beta}} \right) \right]. \quad (3.76)$$

Auch hier läßt sich die Normalkraft  $N_0$  erst nach näherer Angabe der Querschnittsform einführen.

Mit den vorstehend zusammengestellten Bestimmungsgleichungen für  $y$ ,  $T$  und  $N$  sind die für den Durchbiegungs- und Spannungsnachweis des Trägers und der Verbindungsmittel erforderlichen Größen bekannt. Die auf ein im Abstand  $t$  liegendes Verbindungsmittel entfallende Belastung berechnet sich zu

$$T_V = T \cdot t \quad (3.77)$$

### 3.4 Auswertung der Lösungsgleichungen für zwei- und dreiteilige Holzträger

Die für den Durchbiegungs- und Spannungsnachweis maßgebenden Bestimmungsgleichungen für  $y_{max}$ ,  $T_{max}$  und  $N_{max}$  stellen komplizierte Ausdrücke dar, in welchen eine Reihe von Größen, nämlich Querschnittsabmessungen, Stützweite und der Verschiebungswiderstand  $\bar{C}$  auftreten. Hinzu kommt noch, daß selbst beim frei aufliegenden Träger je nach der Belastungsart verschiedene Gleichungen zur Berechnung heranzuziehen sind. Damit würde der Rechenaufwand für die allgemein üblichen Trägerformen und Belastungsarten einen derart erheblichen Umfang annehmen, daß er in der Praxis in dieser Weise nur für besondere Fälle in Frage käme. Wie aber nachstehend gezeigt wird, sind die Unterschiede gegenüber starrem Verbund oder gegenüber dem bisherigen Verfahren, nach dem ein jeweils einheitlicher Abminderungswert des theoretischen Trägheits- und Widerstandsmomentes eingeführt werden darf je nach den vorliegenden Verhältnissen bedeutend und können keineswegs vernachlässigt werden.



### 3.41 Vergleich der Durchbiegungen sowie der Normal- und Schubkräfte bei starrem und nachgiebigem Verbund für einen zweiteiligen Holzträger

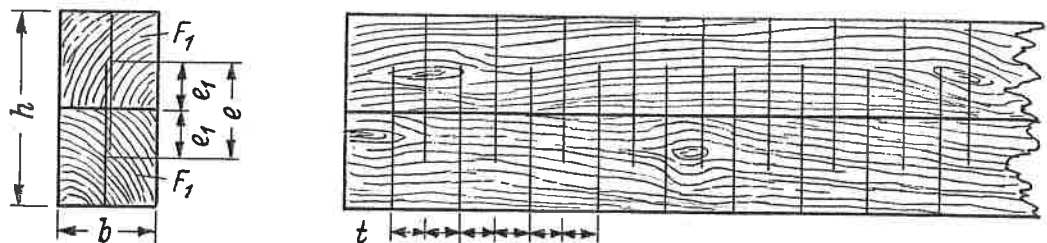
Beim zweiteiligen Holzbiegeträger, dessen gleiche Einzelteile unmittelbar aufeinander liegen (Bild 3.4), erhält man für  $F_1 = F_2$ ,  $E_1 = E_2 = E$  nach Gl.(3.23)

$$\omega^2 = \frac{\bar{C}b \left(1 + \frac{F_1}{nF_2}\right)}{E_1 F_1} = \frac{2\bar{C}b}{E F_1}.$$

Bei einem Verbindungsmittelabstand von  $t$  wird  $\bar{C} = \frac{C_V}{tb}$  und

$$\omega^2 = \frac{2C_V}{E F_1 t}. \quad (3.78)$$

Für einen Träger von  $l = 400$  cm,  $F_1 = 100$  cm<sup>2</sup>,  $C_V = 600$  kg/cm ergeben sich für die Abstände der Verbindungsmittel von  $t = 1,0 - 3,0 - 6,0$  cm und die beiden Lastfälle a) und b) die in Bild 3.5 und 3.6 dargestellten Durchbiegungslinien und die Linien für den Verlauf der Normalkraft und der Schubkraft über die Trägerlänge. Die jeweils bei starrem Verbund auftretenden Größtwerte sind gleich 1 gesetzt. Außerdem sind die nach den heutigen Berechnungsvorschriften der DIN 1052 für verdübelte Balken aus dem abgeminderten Trägheitsmoment  $I_w = 0,6I$  sich ergebenden Durchbiegungen und die aus  $W_w = 0,85W$  berechneten Normalkräfte eingetragen.



$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{2be^3}{3} = \frac{2}{3}e^2 F_1 \quad \beta^2 = \frac{2I_1}{I} = 0,25 \quad \bar{I} = I_V,$$

$$I_1 = \frac{be^3}{12} = \frac{e^2}{12} F_1 = \frac{1}{8}I \quad \alpha^2 = 1 - \beta^2 = 0,75$$

Bild 3.4

Beachtet man, daß die in Trägermitte wirklich auftretende Durchbiegung sich umgekehrt verhält wie das wirksame Trägheitsmoment  $I_w$ , da  $y_w = \frac{\kappa}{I_w}$  und  $y_0 = \frac{\kappa}{I}$ , so kann geschrieben werden:

$$\frac{y_0}{y_w} = \eta = \frac{I_w}{I}$$

$$I_w = \eta I$$

(3.79)

Dieser  $\eta$ -Wert ist in den heutigen Berechnungsvorschriften für zusammengesetzte Holzbiegeträger als konstanter Wert angegeben. In dem obigen Zahlenbeispiel ergeben sich für die einzelnen Lastfälle bei verschiedenem

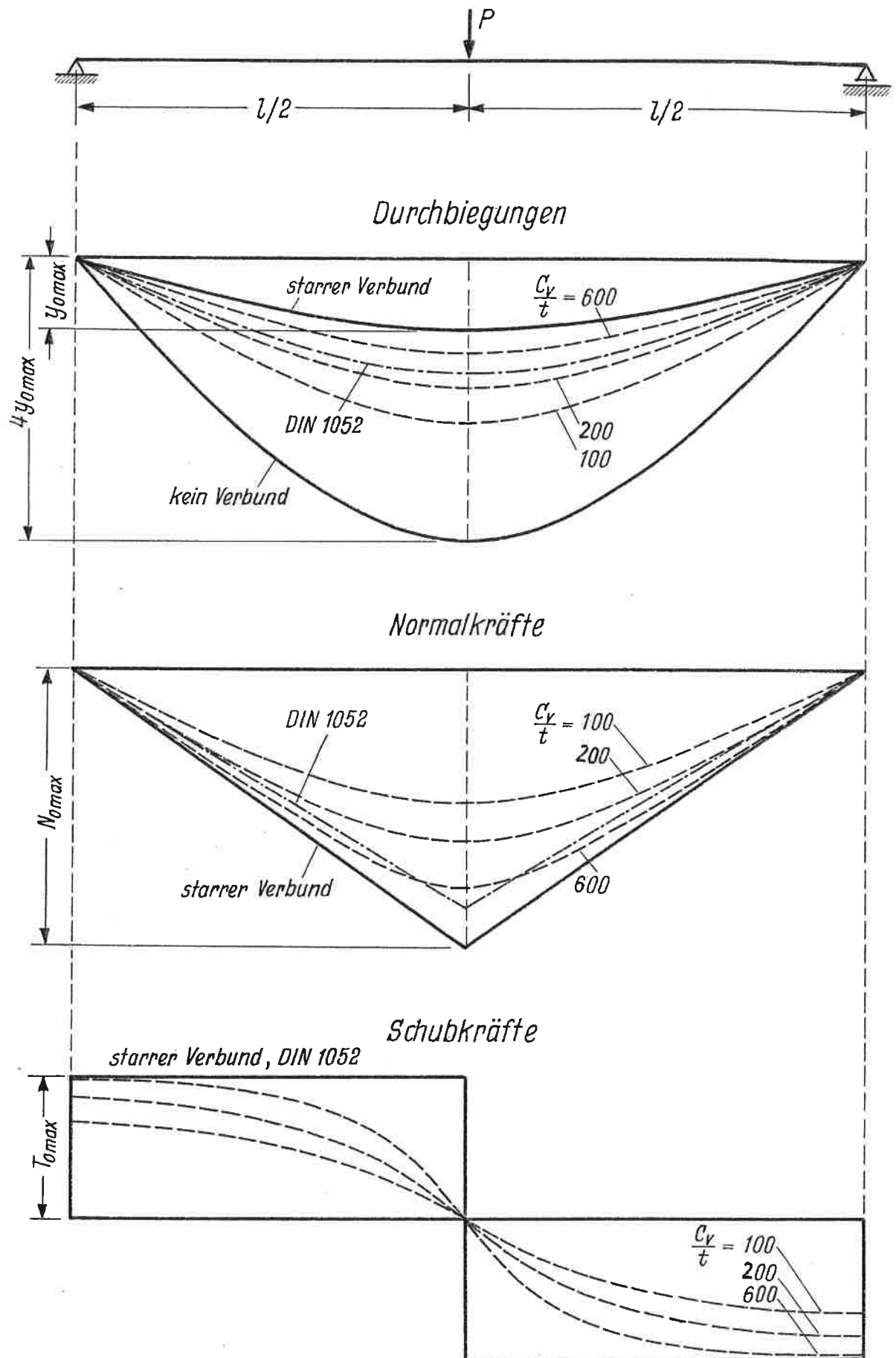


Bild 3.5

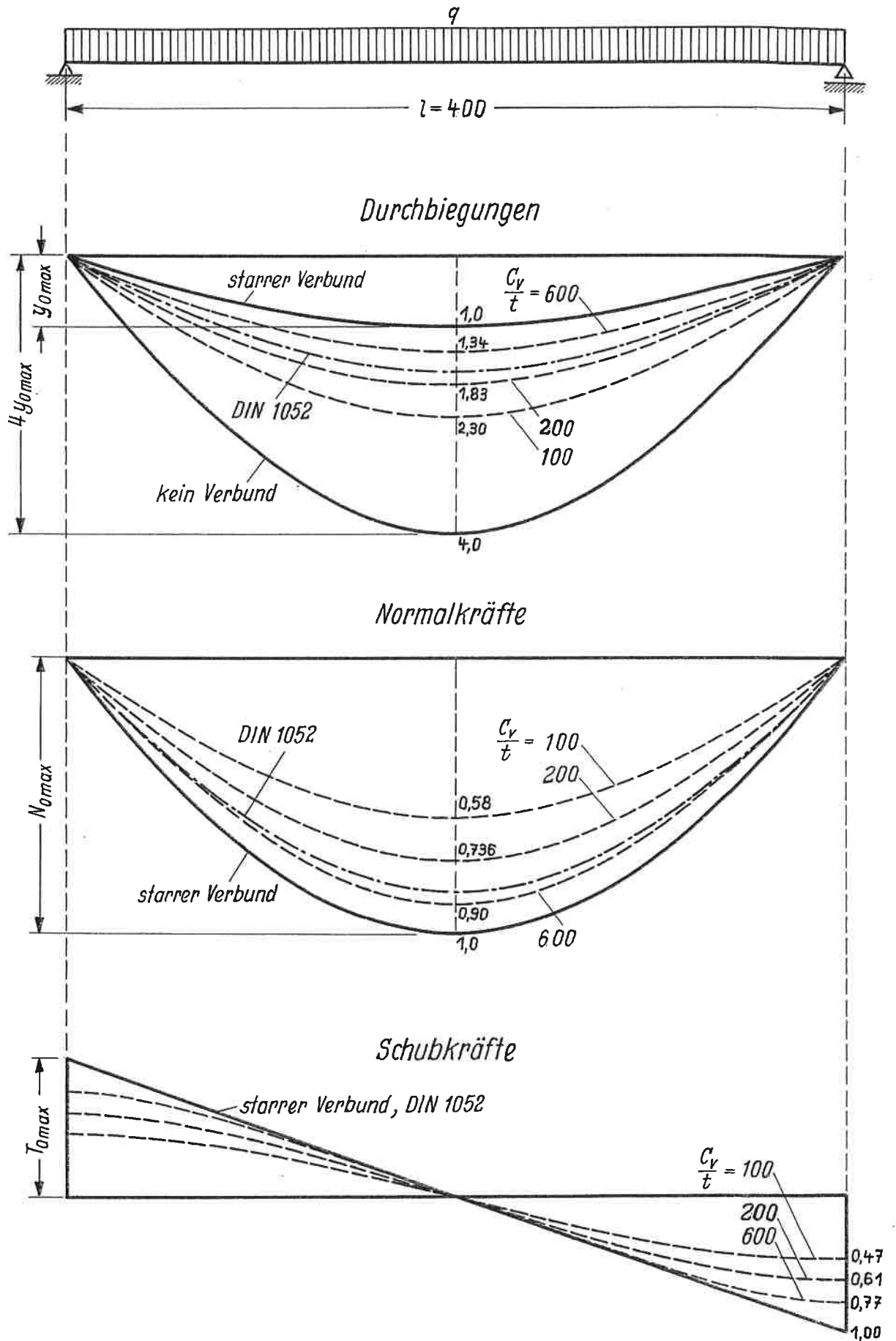


Bild 3.6

Abstand  $t$  der Verbindungsmittel und damit verschiedenem Verschiebungswiderstand  $\frac{C_V}{t}$  (kg/cm<sup>2</sup>) die in Tafel 1 zusammengestellten Verhältnisswerte. Diese Tafel enthält auch die für die Normalkraft  $N_{max}$  und die Schubkraft  $T_{max}$  gegenüber starrem Verbund und konstanter Abminderung des Trägheits- und Widerstandsmomentes sich ergebenden Verhältnisswerte.

Tafel 1. Vergleich der Trägheitsmomente, der maximalen Normal- und Schubkräfte eines zweiteiligen Holzträgers bei starrem und nachgiebigem Verbund sowie nach DIN 1052.

	$\frac{C_V}{t}$ kg/cm <sup>2</sup>	Lastfall a) Einzellast			Lastfall b) Streckenlast		
		starr	nachg.	DIN 1052	starr	nachg.	DIN 1052
$\frac{I_W}{I}$	6,00 2,00 1,00 -	1,0	0,735 0,539 0,430 (0,250)	0,60	1,0	0,747 0,546 0,435 (0,250)	0,60
$\frac{N_{max}}{N_{0max}}$	6,00 2,00 1,00 -	1,0	0,775 0,610 0,470 (0)	0,85	1,0	0,900 0,736 0,580 (0)	0,85
$\frac{T_{max}}{T_{0max}}$	6,00 2,00 1,00 -	1,0	0,975 0,842 0,675 (0)	1,00 <sup>1)</sup>	1,0	0,772 0,610 0,471 (0)	1,00 <sup>1)</sup>

- 1) Nach DIN 1052 müssen die Verbindungsmittel mit dem vollen rechnerische Trägheitsmoment bemessen werden.

Die Klammerwerte gelten, wenn die Einzelteile ohne Verbund aufeinander gelegt werden.

Die Gegenüberstellung zeigt für das gewählte Beispiel, in welchem Maße bei verschiedenem Verschiebungswiderstand das wirksame Trägheitsmoment, sowie die Normalkraft und die Schubkraft gegenüber starrem Verbund abgemindert werden. Hierbei ist die Feststellung wichtig und bemerkenswert, daß sich das wirksame Trägheitsmoment praktisch unabhängig vom Belastungsfall ändert, während die Abminderung der Schubkraft beim Lastfall a) (Einzellast) geringer ist als bei Lastfall b) (Streckenlast), bei der Normalkraft aber die umgekehrten Verhältnisse vorliegen. Die heutigen Berech-

nungsvorschriften bleiben zwar hinsichtlich der Bemessung der Verbindungsmittel stets auf der sicheren Seite, bezüglich der Durchbiegung und der Spannungen berücksichtigen sie aber in keiner Weise die tatsächlichen Verhältnisse.

Die Berechnung der Biegelinie für den nachgiebigen Verbund ermöglichte auch eine Beurteilung der wirksamen Trägheitsmomente hinsichtlich der innerhalb der Stützweite auftretenden Veränderungen, die aus der Gleichung für  $y(x)$  vermutet werden konnten. Die jeweils in den Zehntelpunkten der Stützweite aufgetretenen Verhältnisse  $y_{starr}/y_{nachg.}$ , die gleichzeitig den Abminderungswert  $\eta$  zur Berechnung des wirksamen Trägheitsmomentes darstellen, sind für die beiden untersuchten Lastfälle nach Bild 3.3 in nachstehender Tafel 2 zusammengestellt.

Tafel 2. Verhältnis der Durchbiegungen  $y_{starr}/y_{nachg.}$  in den Zehntelpunkten eines frei aufliegenden Trägers ( $l = 4,00$  m) bei verschiedenem Verschiebungswiderstand  $\frac{C_V}{t}$

$\frac{C_V}{t}$ kg/cm <sup>2</sup>	Lastfall a) (Einzellast)					Lastfall b) (Streckenlast)				
	$x/l$					$x/l$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
600	0,759	0,760	0,744	0,740	0,734	0,737	0,741	0,745	0,746	0,747
200	0,557	0,554	0,548	0,541	0,539	0,538	0,542	0,544	0,545	0,546
100	0,440	0,438	0,435	0,431	0,430	0,430	0,432	0,433	0,434	0,435

Es zeigt sich, daß das wirksame Trägheitsmoment in beiden Belastungsfällen sich über die Trägerlänge nur wenig ändert, die Änderung bei Streckenlast aber in umgekehrter Richtung wie bei Einzellast verläuft.

### 3.42 Untersuchungen über den Einfluß der Belastungsanordnung, der Querschnittsform und des Verschiebungsmoduls $C_V$ auf das wirksame Trägheitsmoment bei verschiedenen Abmessungsverhältnissen

Die im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten Vergleichsrechnungen lassen erkennen, daß für das gewählte Beispiel die  $I_W$ -Werte praktisch unabhängig vom Belastungsfall bleiben, während sowohl bei der Normalkraft als auch bei der Schubkraft beträchtliche Unterschiede auftreten. Da sich, wie später noch gezeigt wird, auch die Spannungen unmittelbar aus  $I_W$  berechnen lassen, erscheint es zur Vereinfachung des Rechenaufwandes zweckmäßig, den Bemessungsvorschlag auf die Ermittlung des wirksamen Trägheitsmomentes auszurichten. Es ist hierzu erforderlich, den Einfluß der verschiedenen in den Gleichungen (3.55) und 3.66) zur Berechnung der Durch-

biegungen vorkommenden Größen kennen zu lernen. Hierbei ist es nach Tafel 2 beim freiaufliegenden Träger ausreichend, sich auf die jeweils größte Durchbiegung in Trägermitte zu beschränken. Diese Untersuchungen sind letzten Endes auch für die versuchsmäßige Schaffung von Unterlagen über den bei den einzelnen Verbindungsmitteln einzuführenden  $C_v$ -Wert von Bedeutung.

Die Durchbiegungen in  $l/2$  ergeben sich nach den Gleichungen (3.57) und (3.68) in der allgemeinen Form

$$y = y_w = y_0[F].$$

Der Klammerausdruck  $[F]$  enthält die Querschnittsgrößen  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$  sowie den Wert  $\omega l$ , in dem der Verschiebungswiderstand, die Stützweite, der Elastizitätsmodul, der Gurtquerschnitt und der Verbindungsmittelabstand auftreten. Schreibt man für den starr verbundenen Träger

$$y_{starr} = y_0 = \frac{k}{I}$$

und für den nachgiebig verbundenen Träger

$$y_{nachg.} = y_w = \frac{k}{I_w},$$

so erhält man

$$\eta = \frac{I_w}{I} = \frac{y_0}{y_w} = \frac{y_0}{y_0[F]} = \frac{1}{[F]} \quad (3.80)$$

Der Wirkungsgrad  $\eta$  des rechnerischen Trägheitsmomentes ist damit gleich dem reziproken Wert des Klammerwertes  $[F]$ .

Für das wirksame Trägheitsmoment eines nachgiebig verbundenen Querschnittes kann allgemein geschrieben werden

$$I_w = \sum I_1 + \gamma \sum F_1 e_1^2 \quad (3.81)$$

Hierdurch wird zum Ausdruck gebracht, daß die nur über die Verbindungsmittel wirksam werdenden Querschnittsteile eine gewisse Abminderung erfahren können, der Abminderungswert  $\gamma$  also Werte zwischen Null (ohne Verbund) und 1,0 (starrer Verbund) annehmen kann. Der  $\gamma$ -Wert läßt sich aus dem  $\eta$ -Wert unter Benutzung der Abkürzungen

$$\alpha^2 = \frac{\sum F_1 e_1^2}{I} \quad (3.82)$$

$$\beta^2 = \frac{\sum I_1}{I} \quad (3.83)$$

bestimmen zu

$$\gamma = \frac{\eta - \beta^2}{\alpha^2}$$

(3.84)

Da eine völlige Trennung der verschiedenen Einflüsse auf die Größe des Abminderungswertes  $\gamma$  schwer möglich ist, wird dieser in Abhängigkeit von  $\frac{F_1 t}{l^2}$  für den praktisch in Frage kommenden Bereich von 0,0001 bis 0,01 berechnet. Für die Verschiebungsgröße wird der Wert  $C_V = 600 \text{ kg/cm}$  eingeführt, der aus Versuchen mit zusammengesetzten, genagelten Stäben ermittelt wurde. Als Trägerformen werden zwei- und dreiteilige Querschnitte angenommen.

In Bild 3.7 sind für die beiden Belastungsfälle (Einzellast und Streckenlast) die  $\gamma$ -Werte in Abhängigkeit von  $\frac{F_1 t}{l^2}$  für  $C_V = 600 \text{ kg/cm}$  aufgetragen. Man erkennt, daß in dem gesamten praktisch in Frage kommenden Bereich nur ein geringer Einfluß der Belastungsanordnung auftritt, wobei die bei Einzellast auftretenden  $\gamma$ -Werte etwas geringer sind als diejenigen bei Streckenlast.

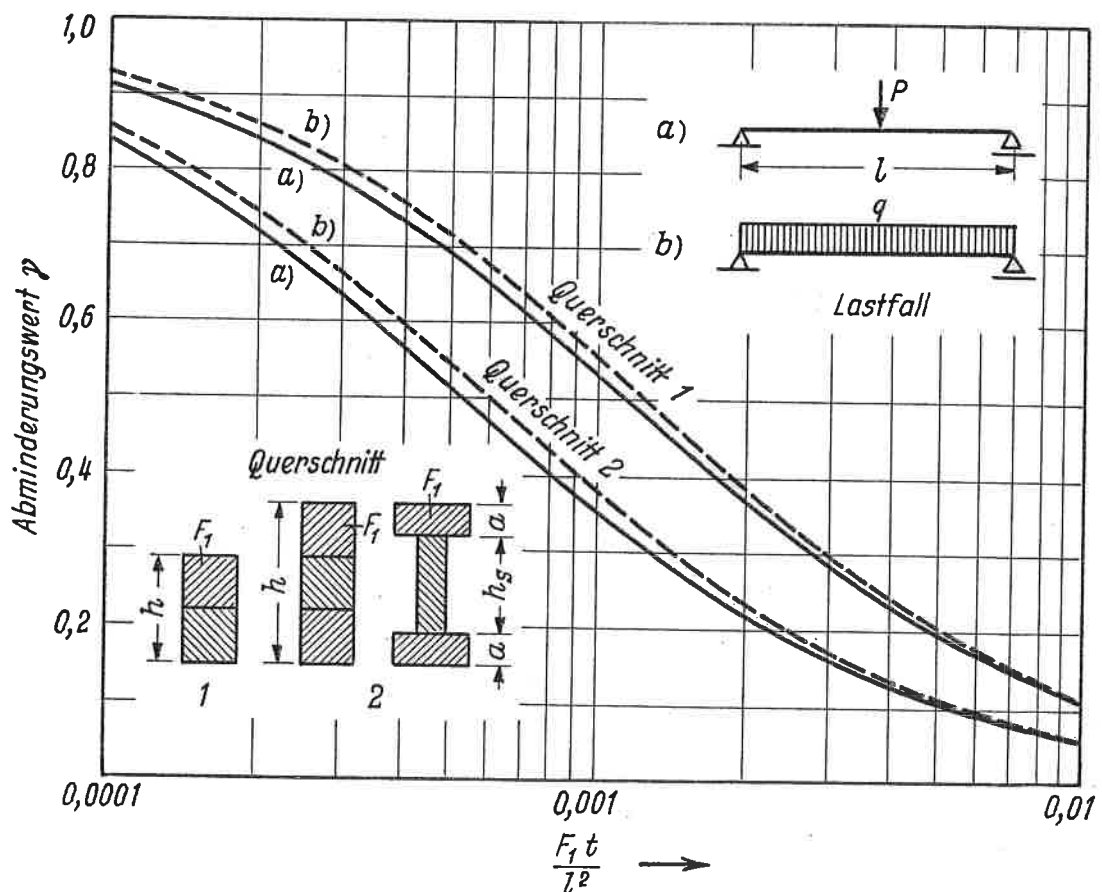


Bild 3.7

Damit ist auch der Nachweis erbracht, daß Versuche zur Bestimmung des im fertigen Träger wirksamen Verschiebungswiderstandes mit Einzellast in Trägermitte Ergebnisse liefern, die stets auf der sicheren Seite liegen.

Andererseits kann auch aus der weitgehenden Übereinstimmung der beiden Kurvenscharen geschlossen werden, daß bei allen praktisch vorkommenden Belastungsfällen für den frei aufliegenden Träger mit einem einheitlichen  $\gamma$ -Wert gerechnet werden kann.

Die Untersuchungen über den Einfluß der Querschnittsform wurden beim dreiteiligen Stab auch auf den I-Querschnitt mit verhältnismäßig großer Steghöhe ausgedehnt. Für die Spreizungen  $h_s/a$  von 1,0 und 5,0 ergaben sich für gleiche  $\frac{F_1 t}{l^2}$ -Werte die gleichen  $\gamma$ -Werte. Der Unterschied, der zwischen den  $\gamma$ -Werten des zwei- und dreiteiligen Querschnittes nach Bild 3.7 bei gleichen  $\frac{F_1 t}{l^2}$ -Werten besteht, wird bei der praktischen Anwendung größtenteils verschwinden, wenn man bei gleichem Gurtquerschnitt  $F_1$  die Stützweite  $l$  des dreiteiligen Querschnittes etwa im Verhältnis der Trägerhöhen gegenüber dem zweiteiligen Querschnitt vergrößert.

Der Einfluß verschiedener  $C_V$ -Werte auf die Größe von  $\gamma$  zeigt Bild 3.8 für den zweiteiligen, Bild 3.9 für den dreiteiligen Träger. Hierbei sind bei beiden Trägerformen die  $C_V$ -Werte mit 600 kg/cm und 200 kg/cm eingesetzt worden, die sich im Mittel bei Versuchen mit einschnittiger Nagelung ergeben hatten. Die Auswertung der bei der zulässigen Belastung der Verbindungsmittel gemessenen Durchbiegungen in Trägermitte brachte den mittleren Verschiebungswert  $C_V = 600$  kg/cm für den einschnittigen Nagel, während aus den kurz vor Eintreten des Bruches gemessenen Durchbiegungen wirksame Verschiebungsgrößen von etwa ein Drittel der für den zulässigen Bereich festgestellten Werte berechnet wurden. Bei zweischnittig genagelten I-Trägern können nach den Versuchen mindestens die doppelten Werte, also  $C_V = 1200$  kg/cm für den zulässigen Bereich und 400 kg/cm für den Bruchversuch als zutreffend angenommen werden (Bild 3.9).

### 3.5 Berechnung der Spannungen bei Verbundträgern aus dem wirksamen Trägheitsmoment

Um die umständliche und langwierige Berechnung der Spannungen aus den auf die einzelnen Querschnittsteile entfallenden Teilmomenten  $M_1, M_2, \dots$  und den in diesen auftretenden Normalkräften zu vermeiden, ist es zweckmäßiger, das wirksame Trägheitsmoment  $I_w$  einzuführen, zumal dieses in den meisten Fällen für den Nachweis der Durchbiegungen benötigt wird.

Bei bekanntem  $I_w$  ergeben sich (aus der für die verbundenen Teile gleichen Biegelinie) die aus den Teilmomenten herrührenden Randspannungen zu

$$\sigma_1^M = \frac{M}{I_w} \cdot \frac{h_1}{2} \quad (3.85)$$



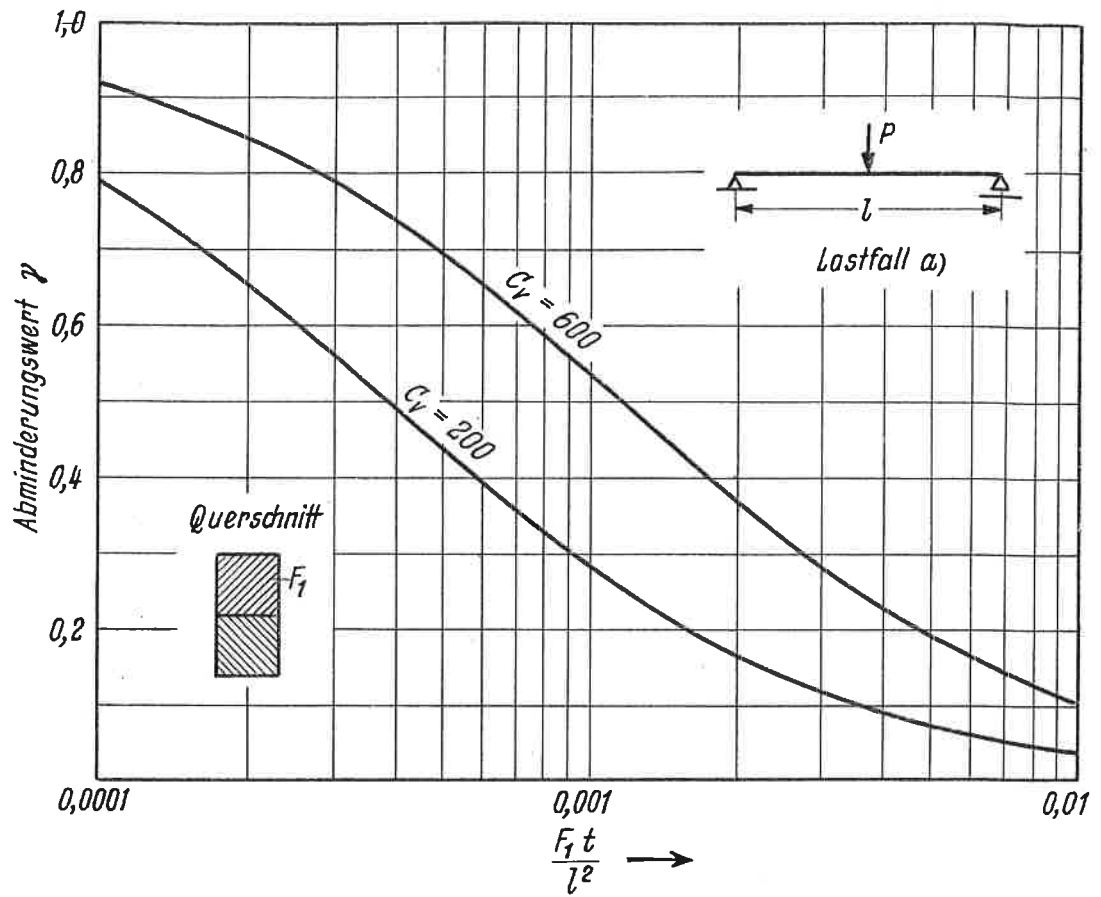


Bild 3.8

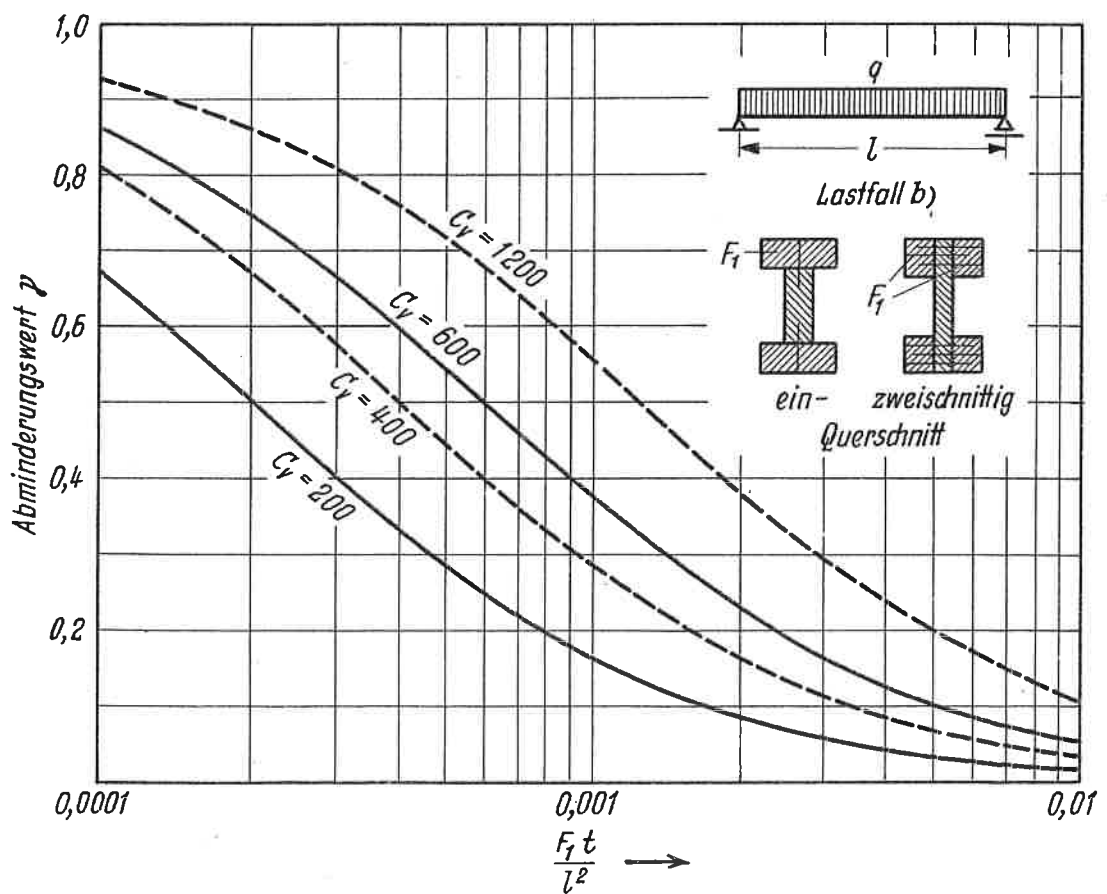


Bild 3.9

wobei  $M$  das Gesamtmoment und  $h_1$  die Höhe des jeweiligen Teilquerschnittes bedeutet. Das durch die Normalkraft aufzunehmende Restmoment ist

$$M^N = M - \sum M_1 = M - M \frac{I_1}{I_W} - M \frac{I_2}{I_W} - \dots$$

$$M^N = \frac{M}{I_W} (I_W - I_1 - I_2 - \dots) = \frac{M}{I_W} (I_W - \sum I_1).$$

Da  $I_W = \sum I_1 + \gamma \sum F_1 e_1^2$  wird

$$M^N = \frac{M}{I_W} \cdot \gamma \sum F_1 e_1^2. \quad (3.86)$$

Für den zwei- und dreiteiligen Querschnitt ist

$$M^N = N \cdot 2e_1, \quad \sum F_1 e_1^2 = 2F_1 e_1^2.$$

Für die Spannungen infolge der Normalkraft in den Gurten erhält man damit

$$\sigma_1^N = \frac{N}{F_1} = \frac{M^N}{2F_1 e_1} = \frac{M}{I_W} \cdot \frac{\gamma 2F_1 e_1^2}{2F_1 e_1}$$

$$\sigma_1^N = \frac{M}{I_W} \cdot \gamma e_1 \quad (3.87)$$

Für die in Bild 3.10 dargestellten Querschnitte ergeben sich dann folgende Spannungsformeln:

Zweiteiliger Querschnitt

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M e_1}{I_W} (\gamma + 1) \quad (3.88)$$

Dreiteiliger Querschnitt

$$\sigma_{max}^{Steg} = \pm \frac{M}{I_W} \cdot \frac{h_g}{2} \quad (3.89)$$

$$\sigma_{max}^{Gurt} = \pm \frac{M}{I_W} \left( \gamma e_1 + \frac{a}{2} \right) \quad (3.90)$$

Um die Größe der Spannungen bei verschiedenen  $\gamma$ -Werten beurteilen und mit denjenigen bei Trägern mit starrem Verbund vergleichen zu können, werden im folgenden aus den jeweils größten Randspannungen die zugehöri-

gen wirksamen Widerstandsmomente  $W_W$  für drei bestimmte Trägerquerschnitte ermittelt:

$$W_W = \varphi W$$

(3.91)

Hierin bedeutet  $W$  das Widerstandsmoment bei starrem Verbund. Die wirksamen Widerstandsmomente können dann auch in einfacher Weise mit den nach den heutigen Berechnungsvorschriften gültigen Werten verglichen werden.

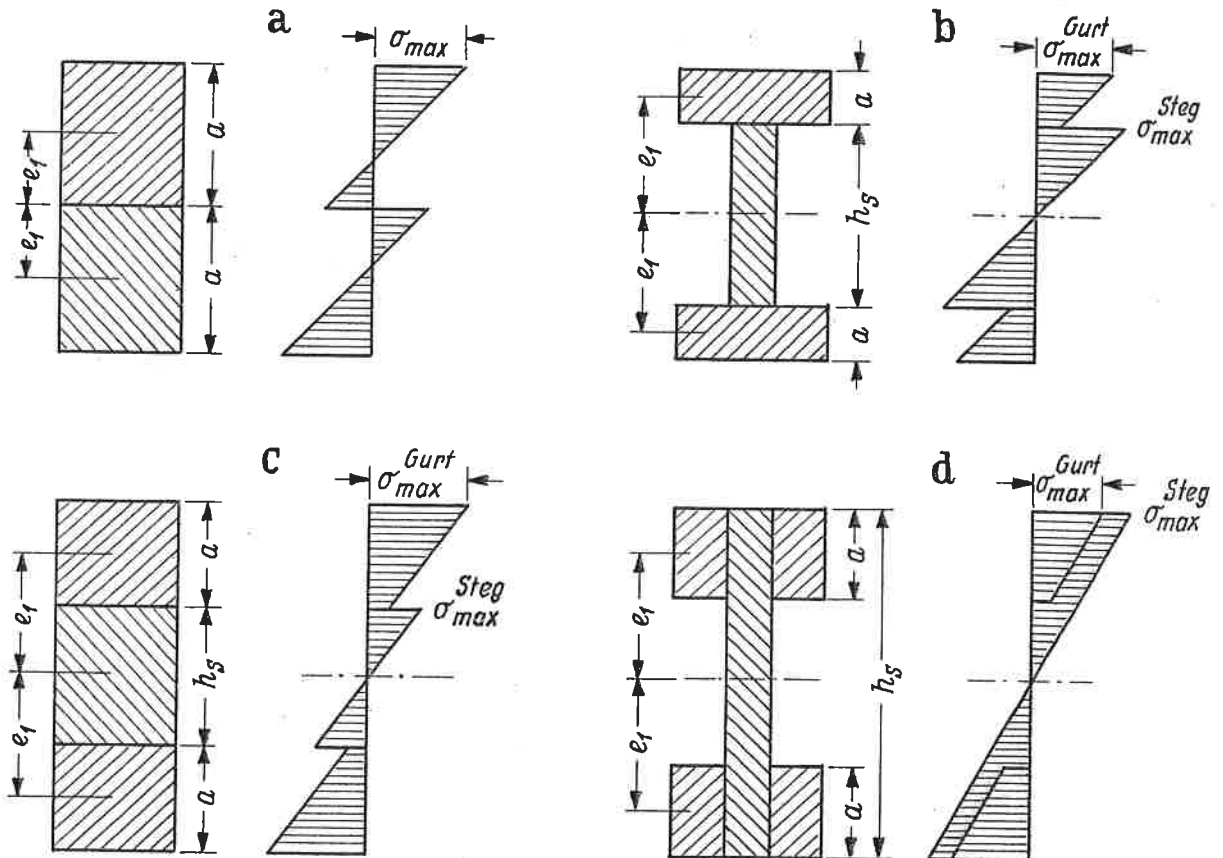


Bild 3.10

Für den zweiteiligen Querschnitt nach Bild 3.11a wird mit Gl. (3.88)

$$\sigma_{max} = \frac{M e_1}{I_W} (\gamma + 1) = \frac{M e_1}{\eta I} (\gamma + 1)$$

Für  $W = \frac{I}{2e_1}$  ergibt sich

$$\sigma_{max} = \frac{M e_1}{\eta W 2e_1} (\gamma + 1) = \frac{M}{W} \left( \frac{\gamma + 1}{2\eta} \right) = \frac{M}{W_W}$$

Damit wird der Wirkungsgrad  $\varphi_2$  für das Widerstandsmoment  $W$  des zweiteiligen Trägers ( $\eta = \alpha^2 \gamma + \beta^2 = 0,75 \gamma + 0,25$ )

$$\varphi_2 = \frac{2\eta}{\gamma+1} = \frac{1,5\gamma+0,5}{\gamma+1} \quad (3.92)$$

Für den dreiteiligen Querschnitt werden die Querschnittswerte  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  je nach den Abmessungen verschieden. Es sollen daher die  $\varphi$ -Werte für die beiden Querschnittsformen nach Bild 3.11 abgeleitet werden

Für den Querschnitt nach Bild 3.11b erhält man mit den Gleichungen (3.89), (3.90) und für  $\eta = \frac{8}{9}\gamma + \frac{1}{9}$ :

Mittelholz

$$\varphi_3^{\text{Steg}} = 3\eta = \frac{8\gamma+1}{3} \quad (3.93)$$

Gurtholz

$$\varphi_3^{\text{Gurt}} = \frac{3\eta}{2\gamma+1} = \frac{8\gamma+1}{6\gamma+3} \quad (3.94)$$

Bei dieser Form ist stets die Spannung im Gurtholz maßgebend, da  $\varphi_3^{\text{Gurt}} < \varphi_3^{\text{Steg}}$  wird.

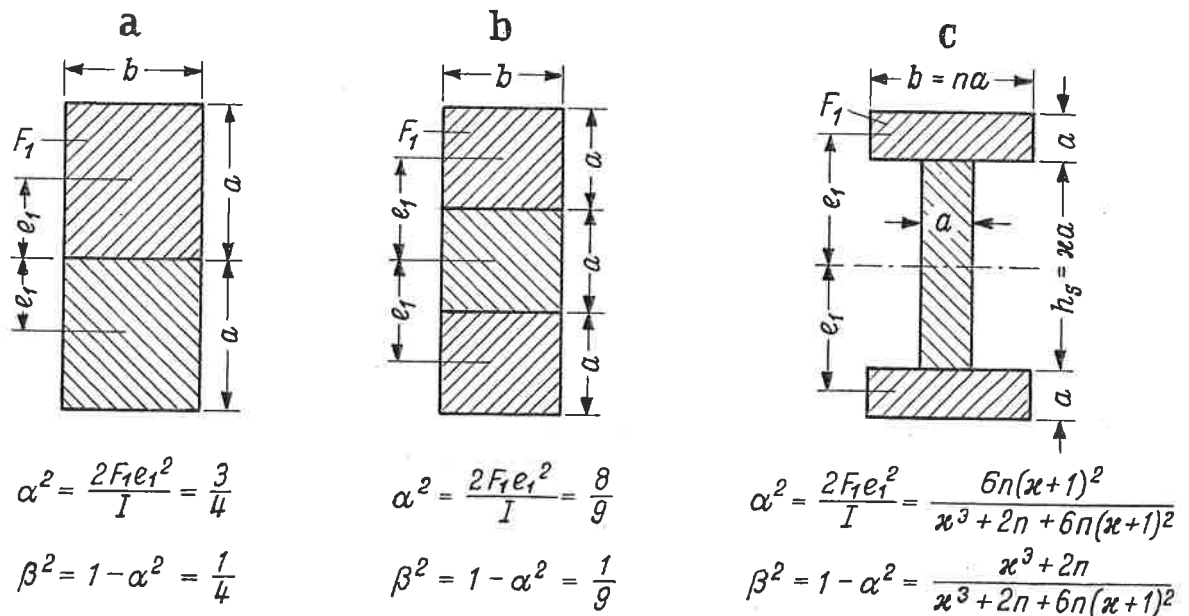


Bild 3.11

Für den Querschnitt nach Bild 3.11c ergeben sich die Wirkungsgrade je nach der Steghöhe ( $\kappa$ -Wert) zu:

Stegholz

$$\varphi_3^{\text{Steg}} = \frac{\eta(\kappa+2)}{\kappa} \quad (3.95)$$

Gurtholz

$$\varphi_3^{\text{Gurt}} = \frac{\eta(\kappa+2)}{\gamma(\kappa+1)+1} \quad (3.96)$$

Für den Sonderfall  $\kappa = 5$ ,  $n = 4$ , erhält man mit  $\alpha^2 = 0,867$  und  $\beta^2 = 0,133$

$$\varphi_3^{\text{Steg}} = \frac{7\eta}{5} = \frac{6,07\gamma + 0,93}{5}$$

$$\varphi_3^{\text{Gurt}} = \frac{7\eta}{6\gamma + 1} = \frac{6,07\gamma + 0,93}{6\gamma + 1}$$

In diesem Falle bleiben die Gurtspannungen nur solange maßgebend, als der Nenner  $6\gamma + 1 > 5$  bleibt, also für  $\gamma > \frac{2}{3}$ . Bei kleinen  $\gamma$ -Werten werden die Stegspannungen stets größer als die Gurtspannungen.

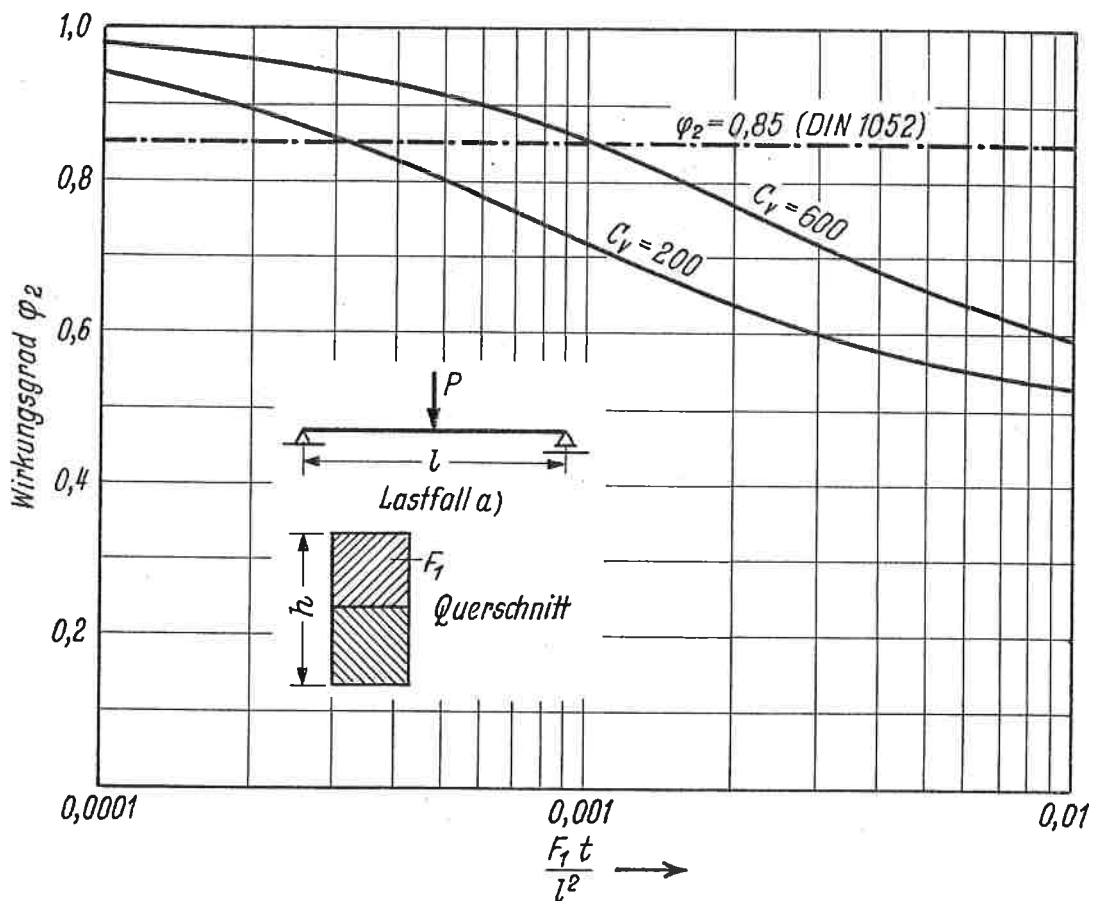


Bild 3.12

Die Berechnung der Wirkungsgrade  $\varphi$  wurde für die in Abschnitt 3.4 berechneten  $\gamma$ -Werte durchgeführt. In Bild 3.12 sind die  $\varphi$ -Werte für den zweiteiligen Träger unter Einzellast in  $l/2$  für einen Verschiebungsmodul des Verbindungsmittels von  $C_\gamma = 600$  und  $200$  kg/cm in Abhängigkeit von  $\frac{F_1 t}{l^2}$  aufgetragen. Man erkennt den verhältnismäßig geringen Einfluß der Verringerung des  $C_\gamma$ -Wertes, da der Unterschied zwischen  $\varphi$  maximal 15 % beträgt, während sich die  $C_\gamma$ -Werte um 67 % unterscheiden. Der nach DIN 1052 anzusetzende konstante Abminderungswert von  $\varphi = 0,85$  trifft nur für einen engen Bereich zu.

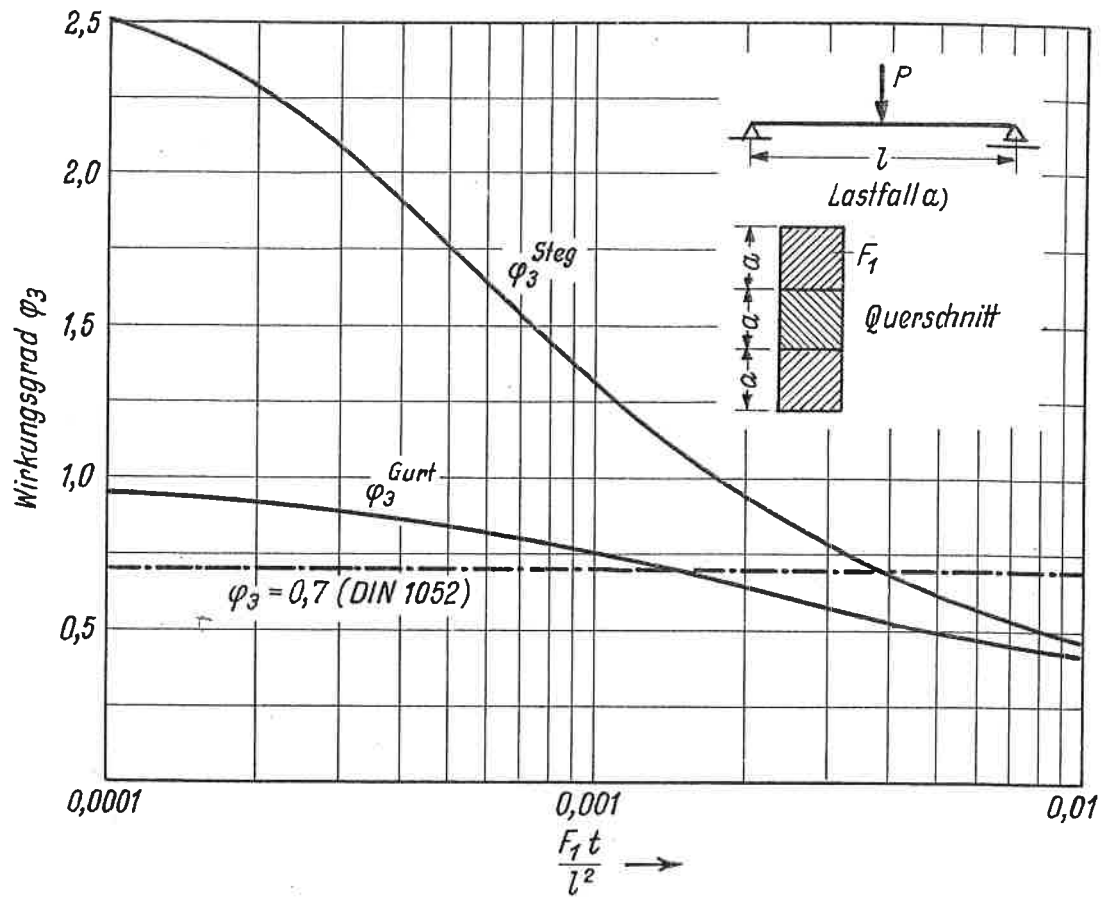


Bild 3.13

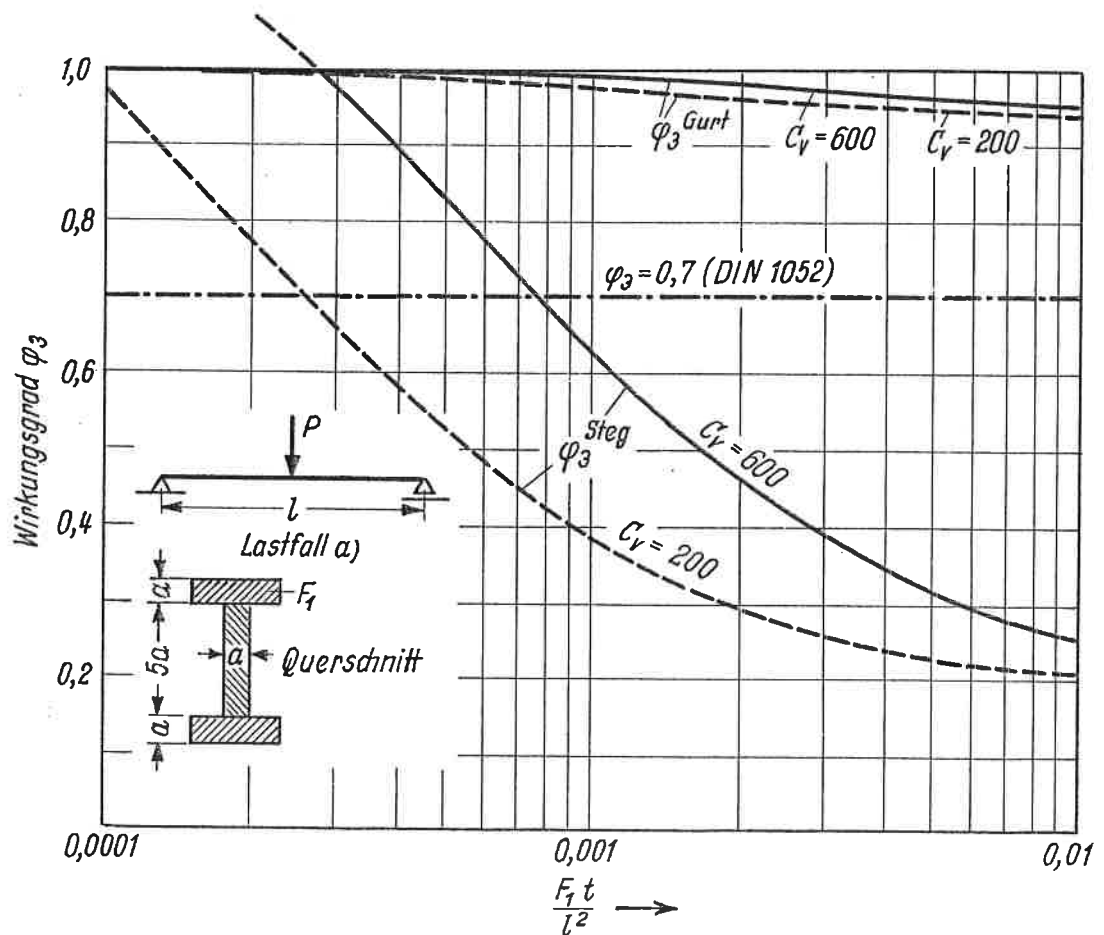


Bild 3.14

In den Bildern 3.13 und 3.14 sind die für dreiteilige Querschnitte in **Frage** kommenden  $\varphi$ -Werte für Steg und Gurte dargestellt. Auch hier ist der nach DIN 1052 anzusetzende  $\varphi$ -Wert von 0,70 nur in einem kurzen Bereich zutreffend. Bei dem aus 3 gleich hohen Einzelhölzern bestehenden Querschnitt (Bild 3.13) nimmt der für die Berechnung der Randspannungen in den Gurthölzern maßgebende  $\varphi$ -Wert von 0,96 auf 0,43 ab, während das mittlere Holz stets geringere Spannungen aufweist ( $\varphi^s > \varphi^g$ ). Bei größeren Steghöhen ist vorwiegend die Stegspannung größer als die Gurtspannung, für welche mit einem praktisch konstanten  $\varphi^g$ -Wert von 1,0 auch für den Nachweis der Bruchsicherheit gerechnet werden könnte (Bild 3.14). Ein geringerer  $C_V$ -Wert macht sich hier bedeutend stärker bemerkbar als beim zweiteiligen Querschnitt.

Die Berechnung der Wirkungsgrade  $\varphi$  des rechnerischen Widerstandsmomentes zwei- und dreiteiliger Träger ermöglicht einen Vergleich mit den von Stüssi für zwei Träger mit größeren Dübelabständen anhand der genauen Elastizitätsgleichungen gefundenen Spannungswerten, die er für die Angabe der Abminderungswerte benützt. Bei diesen Berechnungen waren die Dübelsteifigkeiten mit  $C_V = 30\,000 \text{ kg/cm}$  angenommen, der Dübelabstand war 90 cm. Die Einzelquerschnitte betrugen einheitlich  $300 \text{ cm}^2$ , wobei der zweiteilige Dübelbalken 7,20 m, der dreiteilige 10,80 m weit gestützt war. Der E-Modul des Holzes war mit  $100\,000 \text{ kg/cm}^2$  eingesetzt. Der für die Bestimmung des wirksamen Trägheitsmomentes aus  $y_w$  maßgebende Hilfswert  $\omega^2$  ergibt sich hiernach für den zweiteiligen Träger zu

$$\omega^2 = \frac{2C_V}{EF_1 l} = \frac{2 \cdot 30\,000}{105 \cdot 300 \cdot 90} = 2,2 \cdot 10^{-5}$$

und

$$(\omega l)^2 = 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 720^2 = 11,5$$

$$\varphi_2 = 0,855$$

Für den dreiteiligen Balken ergibt sich

$$(\omega l)^2 = 1,1 \cdot 10^{-5} \cdot 1080^2 = 12,8$$

$$\varphi_3 = 0,870$$

Stüssi ermittelte mit  $\varphi_2 = 0,864$  und  $\varphi_3 = 0,863$  praktisch die gleichen Werte. Der Unterschied gegenüber den bei der Annahme kontinuierlicher Verbindung errechneten Werte ist jedenfalls sehr gering.

### 3.6 Zusammengesetzte Holzträger bei statisch unbestimmter Lagerung

#### 3.6.1 Lösung für den Durchlaufträger über zwei gleiche Felder unter Streckenlast

Als Beispiel werden für den über zwei gleiche Felder durchlaufenden Träger unter konstanter Streckenlast die maßgebenden Werte für  $y$ ,  $T$  und  $N$  berechnet. Dieser Fall tritt bei Deckenbalken und Pfetten am häufigsten auf. Mit den Bezeichnungen nach Bild 3.15 erhält man bei über die Trägerlänge gleichbleibendem Trägheitsmoment (starrer Verbund) folgende Gleichungen für Querkraft, Moment und Durchbiegung:

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= C_a - qx = \frac{ql}{8} \left( 3 - 8 \frac{x}{l} \right), \\ M_0(x) &= C_a x - \frac{q}{2} x^2 = \frac{ql^2}{8} \left[ 3 \frac{x}{l} - 4 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right], \\ y_0(x) &= \frac{ql^4}{48EI} \left[ \frac{x}{l} - 3 \left( \frac{x}{l} \right)^3 + 2 \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Für  $x = \frac{l}{16} (1 + \sqrt{33}) \approx 0,42l$  ergibt sich die maximale Durchbiegung zu

$$y_{0max} \approx \frac{ql^4}{185EI}.$$

Da bei nachgiebigem Verbund bereits beim frei aufliegenden Träger das wirksame Trägheitsmoment über die Trägerlänge nicht mehr konstant ist, können beim Durchlaufträger die Querkräfte und Momente nicht mit den oben angeschriebenen Werten für konstantes  $I$  übereinstimmen. Die Funktionen  $Q(x)$  und  $M(x)$  in den Differentialgleichungen (3.44) und (3.45) enthalten damit zunächst den Auflagerdruck  $C_a$  als Unbekannte.

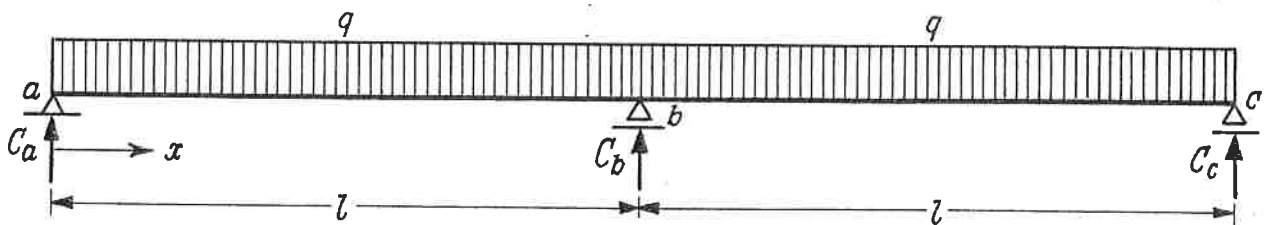


Bild 3.15

Die allgemeine Lösung von Gl. (3.44) lautet

$$\delta = A_1 e^{\frac{\omega}{\beta} x} + A_2 e^{-\frac{\omega}{\beta} x} + \frac{e}{\omega^2 EI} (C_a - qx). \quad (3.97)$$

Nach Bestimmung der Integrationskonstanten  $A_1$  und  $A_2$  aus den Randbedingungen  $\delta(l) = 0$ ,  $\delta'(0) = 0$  ergibt sich mit



$$C_a = \mu \cdot ql$$

(3.98)

die Lösung für die Verschiebung  $\delta$  zu

$$\delta(x) = \frac{ql^2}{\omega^2 EI} \left\{ \mu - \frac{x}{l} - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left[ \frac{\beta}{\omega l} \sinh \frac{\omega}{\beta} (l-x) - (1-\mu) \cosh \frac{\omega}{\beta} x \right] \right\} \quad (3.99)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (3.45) wird am einfachsten, wenn Gl.(3.99) in Gl.(3.43) eingesetzt wird. Man erhält

$$y'' = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{\alpha^2}{\omega^2} \left[ -1 + \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left( \cosh \frac{\omega}{\beta} (l-x) + (1-\mu) \frac{\omega l}{\beta} \sinh \frac{\omega}{\beta} x \right) \right] - \mu l x + \frac{1}{2} x^2 \right\} \quad (3.100)$$

Nach zweimaliger Integration und Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Randbedingungen  $y(0) = 0$ ,  $y'(l) = 0$  ergibt sich

$$y = \frac{q}{EI} \left\{ \frac{\alpha^2}{\omega^2} \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left( \frac{\beta^2}{\omega^2} \cosh \frac{\omega}{\beta} (l-x) + (1-\mu) \frac{\beta l}{\omega} \sinh \frac{\omega}{\beta} x \right) \right] - \mu l \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mu l \left( \frac{\alpha^2}{\omega^2} + \frac{l^2}{2} \right) x - \frac{l^3}{6} x - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\omega^4} \right\}$$

$$y(x) = y_0(x) + \frac{ql^4}{EI} \left[ \frac{\alpha^2}{(\omega l)^2} \left\{ \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left[ \frac{\beta^2}{(\omega l)^2} \cosh \frac{\omega}{\beta} (l-x) + (1-\mu) \frac{\beta}{\omega l} \sinh \frac{\omega}{\beta} x \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \mu \frac{x}{l} - \frac{\beta^2}{(\omega l)^2} \right\} - \frac{1}{48} (3-8\mu) \left[ 3 \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right] \right] \quad (3.101)$$

Die dritte Randbedingung  $y(l) = 0$  ergibt die Bestimmungsgleichung für  $\mu$ :

$$\mu = \frac{3}{8} \cdot \frac{1 + \frac{4\alpha^2}{(\omega l)^2} \left[ 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \operatorname{Tgh} \frac{\omega l}{\beta} + \frac{2\beta^2}{(\omega l)^2} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \right) \right]}{1 + \frac{3\alpha^2}{(\omega l)^2} \left( 1 - \frac{\beta}{\omega l} \operatorname{Tgh} \frac{\omega l}{\beta} \right)} \quad (3.102)$$

Dieser Wert kann auch erhalten werden, wenn man den Stützendruck  $C_b = \frac{\sigma_{b0}}{\sigma_{bb}}$  aus den Durchbiegungen des nachgiebig verbundenen frei aufliegenden Trägers mit der Stützweite  $2l$  nach Gl.(3.57) und (3.68) ermittelt.

Aus der Verschiebung  $\delta(x)$  nach Gl.(3.99) kann wie unter 3.33 die Schubkraft und die Normalkraft bestimmt werden.

Für die Schubkraft wird

$$T(x) = \bar{C} b \delta(x)$$

$$T(x) = \frac{ql^2 \bar{C} b}{\omega^2 EI} \left[ \mu - \frac{x}{l} - \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left( \frac{\beta}{\omega l} \sinh \frac{\omega}{\beta} (l-x) - (1-\mu) \cosh \frac{\omega}{\beta} x \right) \right] \quad (3.103)$$

Für die Normalkraft wird

$$N(x) = \int_0^x \bar{C} b \sigma(x) dx \quad (3.104)$$

$$N(x) = \frac{q l^2 \bar{C} b e}{\omega^2 E I} \left\{ \frac{1}{\cosh \frac{\omega l}{\beta}} \left[ \frac{\beta^2}{(\omega l)^2} \cosh \frac{\omega}{\beta} (l-x) + (1-\mu) \frac{\beta}{\omega l} \sinh \frac{\omega}{\beta} x \right] - \frac{\beta^2}{(\omega l)^2} + \mu \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right\}$$

### 3.62. Vergleich der Durchbiegungen sowie der Normal- und Schubkräfte bei starrem und nachgiebigem Verbund für einen zweiteiligen Träger

Wie im Abschnitt 3.41 soll nachstehend der Verlauf der Durchbiegungen sowie der Normal- und Schubkräfte für den zweiteiligen Trägerquerschnitt (**Bild 3.4**) bei drei verschiedenen  $\frac{C_V}{t}$ -Werten ermittelt und mit dem bei starrem Verbund verglichen werden. Außerdem wird der Vergleich mit dem nachgiebig verbundenen frei aufliegenden Träger durchgeführt. Die Berechnung der  $\mu$ -Werte nach Gl. (3.102) ergab nur einen geringen Einfluß der Nachgiebigkeitszahl  $\frac{C_V}{t}$  (Tafel 3).

Tafel 3.  $\mu$ -Werte zur Bestimmung des  
Auflagerdruckes  $C_a = \mu \cdot q l$

$\frac{C_V}{t} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	600	200	100
$\mu$	0,382	0,384	0,387

Bei starrem Verbund bzw. konstantem  $I_W$  würde sich  $\mu = \frac{3}{8} = 0,375$  ergeben. In Bild 3.16 sind die Durchbiegungen sowie die Normal- und Schubkräfte aufgetragen. Vergleichsweise sind die Linien für starren Verbund, ohne Verbund und bei konstanter Abminderung von  $I$  und  $W$  gemäß den heutigen Vorschriften aufgezeichnet. Setzt man wiederum wie beim frei aufliegenden Träger die bei starrem Verbund auftretenden Werte gleich 1, so ergeben sich die in Tafel 4 zusammengestellten Verhältniszahlen.

Tafel 4. Vergleich der Trägheitsmomente, der maximalen Normal- und Schubkräfte des zweiteiligen Durchlaufträgers nach Bild 3.15 bei starrem und nachgiebigem Verbund sowie nach DIN 1052

	$\frac{C_V}{t}$ kg/cm <sup>2</sup>	Feld ( $x = 0,4l$ )			Stütze b		
		starr	nachg.	DIN 1052	starr	nachg.	DIN 1052
$\frac{I_W}{I}$	600		0,595				
	200	1,0	0,434	0,60	-	-	-
	100		0,343				

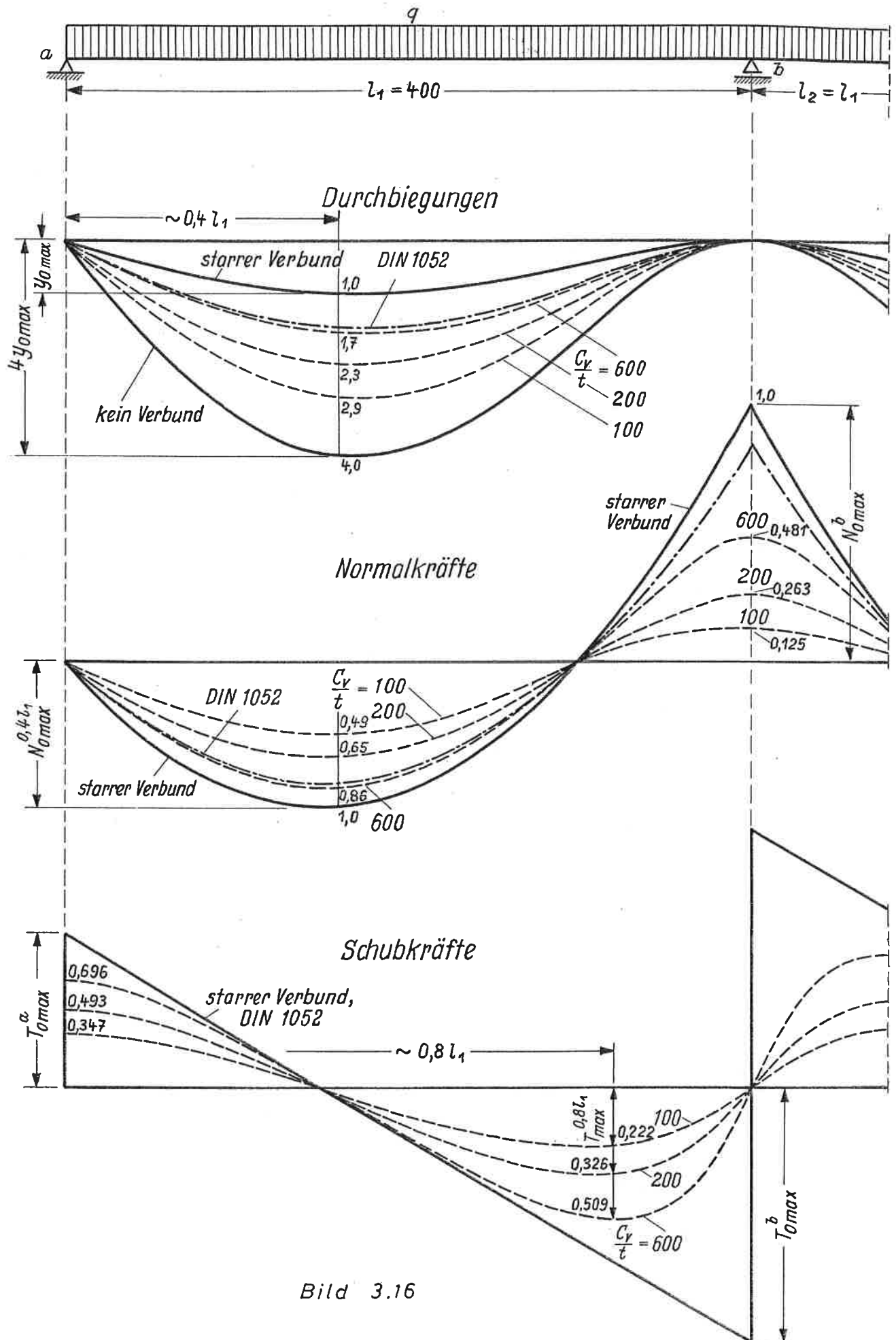


Bild 3.16

Tafel 4. Fortsetzung.

	$\frac{C_y}{t}$ kg/cm <sup>2</sup>	Feld ( $x = 0,4l$ )			Stütze b		
		starr	nachg.	DIN 1052	starr	nachg.	DIN 1052
$\frac{N_{max}}{N_{0max}}$	600		0,865			0,481	
	200	1,0	0,650	0,85	1,0	0,263	0,85
	100		0,490			0,125	
$\frac{T_{max}}{T_{0max}}$		Stütze a					
	600		0,696			0,509	
	200	1,0	0,493	1,00	1,0	0,326	1,00
	100		0,347			0,222	

Es zeigt sich, daß die Durchbiegungen im Feld im Verhältnis zum Maximalwert bei starrem Verbund größer sind als beim frei aufliegenden Träger, die Abminderung des Trägheitsmomentes sich also stärker bemerkbar macht. Die Abminderung der Normal- und Schubkräfte ist stärker als beim frei aufliegenden Träger und für die Normalkräfte über der Stütze b wesentlich größer als im Feld. Die Schubkräfte  $T_{max}$  für die Stütze b sind die Maximalwerte in  $x \approx 0,8l$ .

Der Spannungsnachweis mit Hilfe des wirksamen Trägheitsmomentes nach der Formel (3.88)

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M e_1}{I_w} (\gamma + 1)$$

kann hier beim Durchlaufträger nur noch für den Feldquerschnitt geführt werden.

Über der Stütze müssen die Spannungen aus dem Gesamtmoment und der Normalkraft berechnet werden. Für den vorliegenden Querschnitt wird

$$\sigma_{max} = \frac{M_s e_1}{I} \left( 4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{N e_1}{M_s} \right). \quad (3.105)$$

Hierbei ist das Stützmoment  $M_s$  nicht mehr - wie beim frei aufliegenden Träger - identisch mit  $M_{0s}$  bei starrem Verbund, sondern das Moment, das sich unter Berücksichtigung des über die Stützweite veränderlichen Trägheitsmomentes  $I_w$  ergibt. Es beträgt

$$M_s = (\mu - 0,5) q l^2.$$

Setzt man in Gl. (3.105)

$$4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{N e_1}{M_s} = \frac{\gamma_s + 1}{\eta},$$

so erhält man

$$\sigma_{max} = \frac{M_S e_1}{I_W} (\gamma_S + 1) = \frac{M_S e_1}{I_W} (\gamma_S + 1) \quad (3.106)$$

Die Spannungsberechnung für den Stützenquerschnitt kann damit mit der gleichen Formel wie für den Feldquerschnitt durchgeführt werden, nur daß jetzt  $\gamma_S$  und  $I_W$  über die Normalkraft und das Moment zu bestimmen sind. Mit  $\eta = \frac{3}{4} \gamma_S + \frac{1}{4}$  erhält man aus Gl.(3.105)

$$\gamma_S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{M_S}{2Ne_1} - 1} \quad (3.107)$$

womit auch  $I_W$  nach Gl.(3.81) bestimmt ist.

### 3.7 Maßgebende Abminderungswerte $\gamma$ für den Durchbiegungs- und Spannungsnachweis

Die vorstehenden Untersuchungen haben ergeben, daß das wirksame Trägheitsmoment  $I_W$  zusammengesetzter nachgiebig verbundener Stäbe auch für den einfachen frei aufliegenden Träger nicht durch einen konstanten Abminderungswert erfaßt werden kann. Sieht man von den geringen, durch die Belastungsanordnung hervorgerufenen Unterschieden ab, so bestimmen neben der Nachgiebigkeitszahl  $C_V$  des verwendeten Verbindungsmittels selbst die Stützweite, der Abstand der Verbindungsmittel und die Querschnitte der Einzelteile die Höhe des erreichbaren Trägheitsmomentes  $I_W$ , festgelegt durch den Abminderungswert  $\gamma$ . Faßt man diese Einflüsse in dem Wert

$$R = \omega^2 l^2 \quad (3.108)$$

zusammen, der in den Bestimmungsgleichungen für die Durchbiegung vorkommt, so ergibt sich die in Bild 3.17 dargestellte  $\gamma$ -Linie für die praktisch in Frage kommenden Werte  $R$  zwischen 0,2 bis 1000. Da der  $\gamma$ -Wert mit abnehmendem  $R$  anfangs stark abfällt, ist für die Darstellung als Maßstab der Abszisse der Wert  $\frac{1}{R}$  im logarithmischen Maßstab aufgetragen, so daß in dem am meisten vorkommenden Bereich bis  $\frac{1}{R} = 1,0$  die  $\gamma$ -Werte mit ausreichender Genauigkeit entnommen werden können.

Das Schaubild kann auf alle Arten von frei aufliegenden zusammengesetzten Trägern angewendet werden, wobei der Wert  $R$  sich folgendermaßen berechnet:

- a) Für Stahlbeton-Verbundquerschnitte nach Bild 3.1 ( $E_1 F_1 = E_b F_b$ ,  $E_2 F_2 = E_{st} F_{st}$ )

$$R = \frac{C_v}{t} \cdot \frac{l^2 \left( 1 + \frac{F_b}{n F_{st}} \right)}{E_b F_b} \quad (3.109)$$

- b) Für symmetrische Verbundquerschnitte nach Bild 3.2

$$R = \frac{C_v}{t} \cdot \frac{l^2}{E_G F_G} \quad (3.110)$$

- c) Für zweiteilige symmetrische Biegeträger ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $F_1 = F_2$ )

$$R = \frac{2 C_v}{t} \cdot \frac{l^2}{E F_1} \quad (3.111)$$

- d) Für dreiteilige symmetrische Biegeträger ( $E_s = E_G = E$ )

$$R = \frac{C_v}{t} \cdot \frac{l^2}{E F_1} \quad (3.112)$$

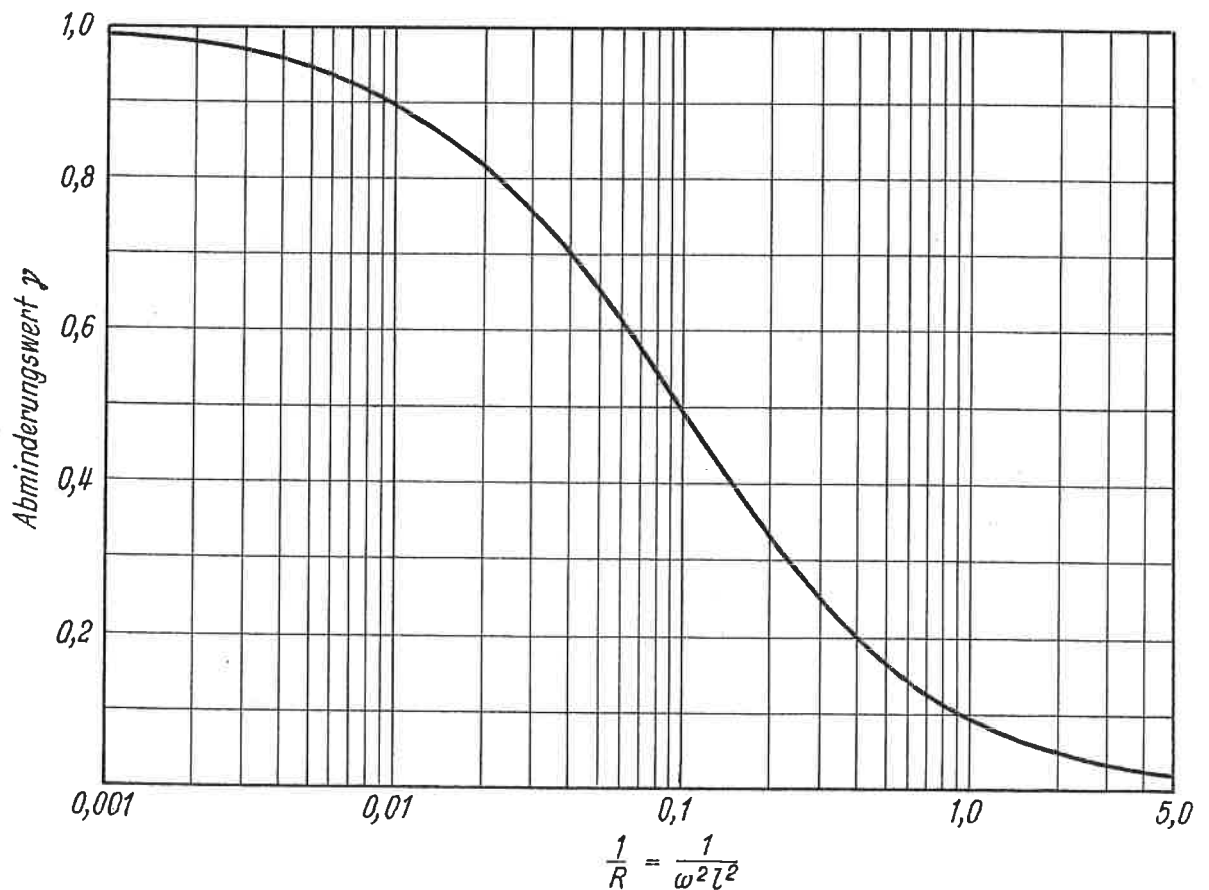


Bild 3.17

Für die zusammengesetzten Holzbiegeträger nach Bild 3.10 wird  $E = 100\,000 \text{ kg/cm}^2$  und je nach dem zur Anwendung gelangenden Verbindungsmittel der Verschiebungsmodul  $C_V$  in die Gl. (3.111) bzw. (3.112) eingesetzt. Nach den bisher vorliegenden Versuchsergebnissen kommen für  $C_V$  folgende Werte in Frage.

Für einschnittige Nagelung:  $C_V = 600 \text{ bis } 900 \text{ kg/cm}$

Für zweisechnittige Nagelung:  $C_V = 1\,200 \text{ bis } 1\,800 \text{ kg/cm}$

Für Dübel:  $C_V = 15\,000 \text{ bis } 30\,000 \text{ kg/cm}$

Nach der Berechnung von  $R$  wird aus Bild 3.17 der  $\gamma$ -Wert entnommen und damit kann das wirksame Trägheitsmoment

$$I_W = \sum I_1 + \gamma \sum F_1 e_1^2$$

bestimmt und der Spannungsnachweis nach

$$\sigma_s = \frac{M}{I_W} \cdot \frac{h_s}{2}$$

$$\sigma_G = \frac{M}{I_W} \left( \gamma e_1 + \frac{a}{2} \right)$$

geführt werden.

In ähnlicher Weise könnte man für den Durchlaufträger die  $\gamma$ -Werte in Abhängigkeit von  $R$  für die hauptsächlichsten Lastfälle ermitteln und in halblogarithmischem Maßstab darstellen. Hierbei wäre auch zu untersuchen, inwieweit jeweils die für das größte Feldmoment und für die Stütze sich ergebenden  $\gamma$ -Werte voneinander abweichen und welchen Einfluß diese Abweichungen auf die Spannungsverteilung ausüben.

#### 4 Berechnung von Druckstäben mit nachgiebig verbundenen Einzelteilen

Stützen und auf Druck beanspruchte Fachwerkstäbe werden vorwiegend im Stahlbau und im Holzbau meist aus zwei oder mehreren Einzelstäben zusammengesetzt. Die möglichen Konstruktionsformen sind hierbei in beiden Anwendungsgebieten praktisch die gleichen, nämlich

1. kontinuierlich verbundene Einzelstäbe
2. durch Futterstücke oder Zwischenhölzer rahmenartig verbundene Stäbe bei verhältnismäßig geringem Lichtabstand
3. durch Bindebleche oder Bindehölzer rahmenartig verbundene Stäbe bei größerem Lichtabstand
4. Stäbe mit fachwerkartiger Vergitterung bei großem Lichtabstand

Im Stahlbau hat man bisher bei sämtlichen Konstruktionsformen die Nachgiebigkeit der Anschlußmittel nicht berücksichtigt, sondern nur die aus den Querkraften entstehenden Formänderungen der Einzelstäbe, der Bindebleche und der Vergitterung erfaßt. Engesser hat schon 1909 eine theoretisch abgeleitete Formel veröffentlicht, in der sämtliche maßgebenden Einflüsse berücksichtigt sind. Unter Vernachlässigung der wenig Einfluß nehmenden Glieder schlug er für den praktischen Gebrauch bei rahmenartig verbundenen Einzelstäben die einfache Gleichung

$$\lambda_w^2 = \lambda_y^2 + \lambda_1^2 + \lambda_B^2 \quad (4.1)$$

vor, in welcher  $\lambda_1 = \frac{l_1}{i_1}$  die Schlankheit des Einzelstabes,  $\lambda_B$  die spezifische Schlankheit eines Bindebleches bedeutet und den Wert

$$\lambda_B = \frac{\pi^2 l_1 h F_B}{12 I_B}$$

besitzt. Bei normal ausgeführten Bindeblechen kann  $\lambda_B^2$  vernachlässigt werden, zumal in dem Glied  $\lambda_1^2$  schon die Aufrundung von  $\frac{\pi^2}{12}$  auf 1 vorgenommen wurde, so daß die einfache Beziehung

$$\lambda_w^2 = \lambda_y^2 + \lambda_1^2 \quad (4.2)$$

entsteht, die auch heute noch in DIN 4114 in erweiterter Form für die Berechnung mehrteiliger Rahmenstäbe maßgebend ist. Es wird später im einzelnen der Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit der im Stahlbau gebräuchlichen Verbindungsmittel auf die Größe des wirksamen Trägheitsmomentes zusammengesetzter Druckstäbe untersucht werden.

Im Holzbau können mit Ausnahme der Leimung, die allerdings z.Zt. für Baukonstruktionen noch eine untergeordnete Bedeutung hat, die Verbindungsmittel nicht mehr als praktisch unnachgiebig angesehen werden. Hier ist im Gegensatz zu den Verbindungen des Stahlbaues der Einfluß der Nach-



giebigkeit der Verbindungsmittel in der Regel größer als derjenige aus den Formänderungen der Holzteile.

#### 4.1 Lösung der Grundgleichungen für den mittig gedrückten Stab

Das für die Berechnung nachgiebig verbundener Biegeträger abgeleitete System der beiden Differentialgleichungen (Gl. 3.42/43), durch welche die Abhängigkeit zwischen der Verschiebung  $\delta(x)$  der Einzelteile und der Durchbiegung  $y(x)$  sowie dem Biegemoment  $M(x)$  gegeben ist, läßt sich auch für die Berechnung der Knicklast  $P_K$  verwenden, womit das wirksame Trägheitsmoment bestimmbar ist. Mit den früher eingeführten Bezeichnungen erhält man folgende Ableitungen:

System der beiden Differentialgleichungen

$$\delta'' - \omega^2 \delta = e y''', \quad (4.3)$$

$$y'' - \frac{\alpha^2}{e} \delta' = -\frac{1}{EI} M. \quad (4.4)$$

Beim mittig gedrückten Stab wird  $M = Py$ , so daß Gl.(4.4) lautet

$$y'' - \frac{\alpha^2}{e} \delta' = -\frac{P}{EI} y. \quad (4.4a)$$

Die Entkoppelung des Systems und Zurückführung auf eine Differentialgleichung für  $y$  kann wie folgt durchgeführt werden:

Auflösen von Gl.(4.4a) nach  $\delta'$  und Differenzieren

$$\delta' = \frac{e}{\alpha^2} \left( y'' + \frac{P}{EI} y \right), \quad (4.5)$$

$$\delta''' = \frac{e}{\alpha^2} \left( y''' + \frac{P}{EI} y'' \right). \quad (4.6)$$

Durch Differenzieren von Gl.(4.3) erhält man

$$\delta''' - \omega^2 \delta' = e y'''. \quad (4.7)$$

Setzt man in diese Gleichung die Werte  $\delta'$  und  $\delta'''$  nach Gl.(4.5) und (4.6) ein, so wird nach einigen Umformungen

$$\boxed{y'''' + \left[ \frac{P}{\beta^2 EI} - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \right] y'' - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \frac{P}{EI} y = 0} \quad (4.8)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung enthält 4 Konstante. Die Bestimmung dieser 4 Konstanten anhand der vorgegebenen Randbe-

dingungen führt auf 4 lineare Gleichungen, deren Koeffizientendeterminante, die sog. Knickdeterminante, die Knicklast ergibt.

Im vorliegenden Falle soll durch Annahme einer sinusförmigen Knickbiegeline, die bei Stäben mit gleichbleibendem Trägheitsmoment und mittlerer Belastung als zutreffend angesehen werden kann, die Knicklast  $P_K$  unmittelbar aus Gl.(4.8) bestimmt werden. Als Knicklinie wird angenommen

$$y = a \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (4.9)$$

$a$  ist hierbei noch eine unbestimmte Größe, die von Null verschieden sein muß. Denn  $a = 0$  würde die Ausbiegung  $y = 0$  auf die ganze Stablänge bedeuten, also den stabilen Zustand vor Erreichen der Knicklast darstellen (triviale Lösung).

Nach Einsetzen der Ableitungen  $y', y'', y'''$  und  $y''''$  in Gl.(4.8) erhält man

$$\begin{aligned} a \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 \sin \frac{n\pi}{l} x - \left[ \frac{P}{\beta^2 EI} - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \right] a \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{l} x - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \frac{P}{EI} a \sin \frac{n\pi}{l} x &= 0, \\ a \sin \frac{n\pi}{l} x \left\{ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 - \left[ \frac{P}{\beta^2 EI} - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \right] \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \frac{P}{EI} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit  $a \neq 0$  folgt hieraus

$$\left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 - \left[ \frac{P}{\beta^2 EI} - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \right] \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 - \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 \frac{P}{EI} = 0. \quad (4.11)$$

Die Auflösung nach  $P$  führt nach einigen Umformungen zu

$$P = P_K = n^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\beta^2 + \left( \frac{\omega l}{n\pi} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega l}{n\pi} \right)^2} \quad (4.12)$$

Damit ist die kritische Last, unter welcher der Stab ausknickt, bestimmt. Dabei können noch verschiedene Formen, nämlich eine oder mehrere Halbwellen als Knickfiguren auftreten (Bild 4.1). Die kleinste maßgebende Belastung ergibt sich für  $n = 1$  zu

$$P_{Kmin} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{\beta^2 + \left( \frac{\omega l}{\pi} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega l}{\pi} \right)^2} \quad (4.13)$$

$$P_{Kmin} = P_{Kstarr} \cdot \frac{\beta^2 + \left( \frac{\omega l}{\pi} \right)^2}{1 + \left( \frac{\omega l}{\pi} \right)^2} = P_{Kstarr} \cdot \eta. \quad (4.13a)$$

Da  $\beta^2 = \frac{\sum I_1}{I}$  stets kleiner ist als 1, liegt die Knicklast bei nachgiebig verbundenen Einzelteilen auch stets unterhalb der Knicklast des Sta-

bes mit unnachgiebiger Verbindung. Die Grenzwerte der Abminderung  $\eta$  sind gegeben durch

$$\eta_{\max} = 1,0 \quad \text{für} \quad \frac{\omega l}{\pi} \rightarrow \infty$$

$$\eta_{\min} = \beta^2 \quad \text{für} \quad \frac{\omega l}{\pi} \rightarrow 0.$$

Bei den Knickformen mit zwei oder mehreren Halbwellen, wie sie beispielsweise durch gelenkige Querstützung von Stäben in der Stabmitte, in den Drittels- oder Viertelpunkten erzwungen werden können, ist nicht mehr

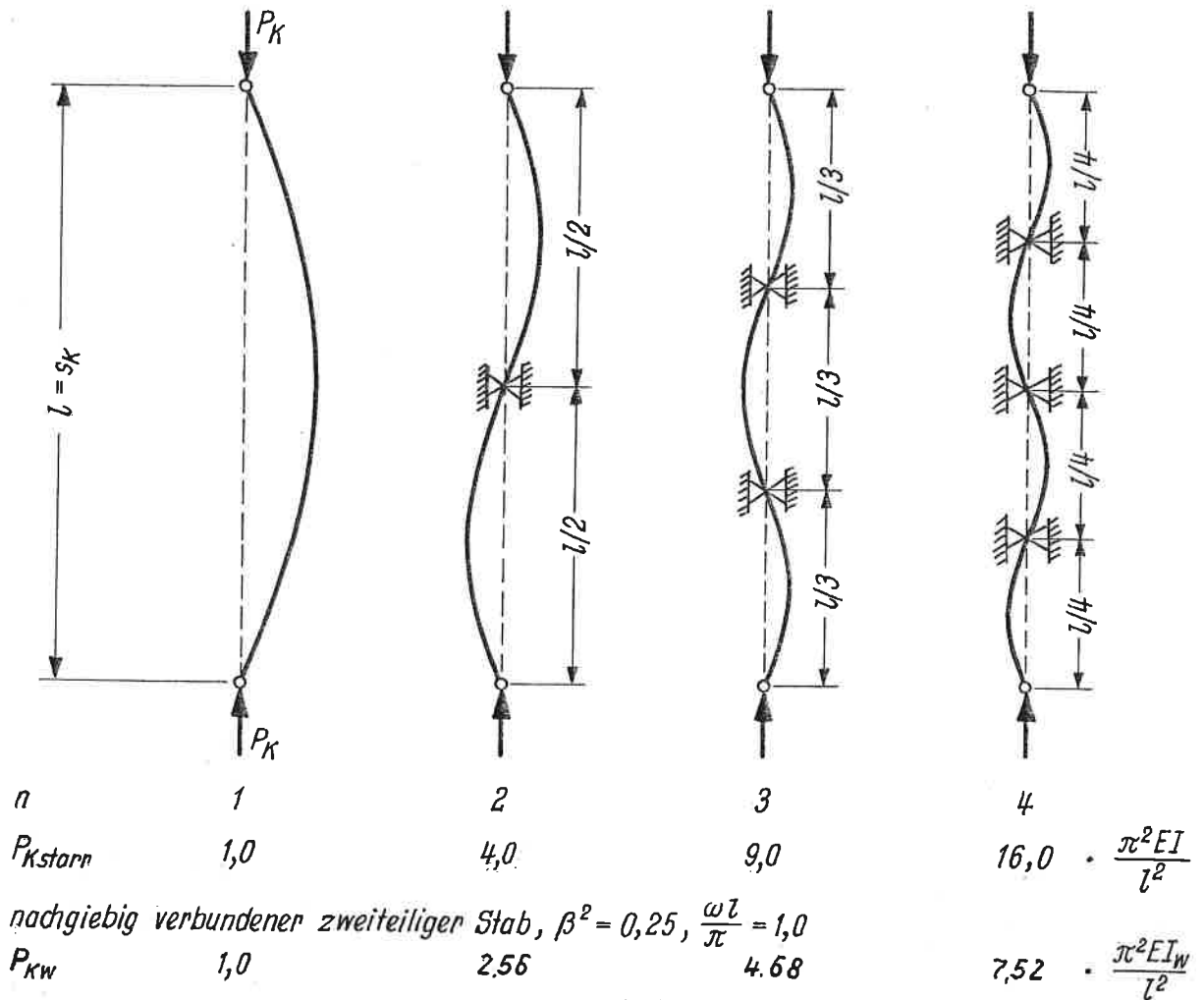


Bild 4.1

wie bei einteiligen Stäben, selbst im elastischen Bereich, mit einem quadratischen Ansteigen der Knicklast zu rechnen, sondern je nach der Größe von  $\beta^2$  und  $\frac{\omega l}{\pi}$  muß mit einem erheblich langsameren Ansteigen der Knicklast des quergestützten Stabes gerechnet werden. Als Beispiel sind in Bild 4.1 die Verhältnisswerte der Knicklasten für  $n = 1$  bis 4 für einen aus zwei unmittelbar miteinander verbundenen Einzelstäben bestehenden Stab bestimmter Nachgiebigkeit ( $\beta^2 = 0,25$ ,  $\frac{\omega l}{\pi} = 1$ ) eingetragen. Man ersieht hieraus, daß in diesem Falle bei einer Querstützung in  $l/2$  eine Erhöhung der Tragfähigkeit auf das 2,56fache eintreten würde, während bei drei- und vierfacher Querstützung nur eine 4,68- und 7,52fache

Steigerung möglich wäre. Die gleichen Werte liefert Gl.(4.13), wenn man hier jeweils die Länge der Halbwellen  $l/n$  einsetzt.

Es kann damit den weiteren Betrachtungen der normale Euler'sche Knickfall des beiderseits gelenkig gelagerten Stabes zugrunde gelegt werden.

Gl.(4.13) kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$P_{Kmin} = \frac{\pi^2 E}{l^2} I \frac{\beta^2 + \left(\frac{\omega l}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega l}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{l^2} I_W. \quad (4.14)$$

Damit ergibt sich die Bestimmungsgleichung für das wirksame Trägheitsmoment in der Form

$$I_W = I \eta = I \frac{\beta^2 + \left(\frac{\omega l}{\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega l}{\pi}\right)^2}. \quad (4.15)$$

Mit  $\beta^2 = \frac{\sum I_1}{I}$  und  $\omega^2 = \frac{C}{EF_1 t}$  wird

$$I_W = \sum I_1 + \frac{\sum F_1 e_1^2}{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{EF_1 t}{C}} \quad (4.16)$$

Hierbei ist zu beachten, daß bei zweiteiligen Stäben ohne Spreizung der Wert  $C = 2C'$  eingesetzt werden muß. Diese Beziehung ergibt in der Schreibweise der eingeführten Grundformel Gl.(3.81) für die Berechnung von  $I_W$  den Abminderungswert  $\gamma$  aus

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{EF_1 t}{C}} = \frac{1}{1+k} \quad (4.17)$$

und

$$k = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{EF_1 t}{C} \quad (4.17a)$$

Die Gl.(4.16) läßt sich nun als einheitliche Berechnungsformel für die Bestimmung des wirksamen Trägheitsmomentes  $I_W$  verwenden, wenn die Verschiebungsgröße  $\frac{1}{C}$  (cm/kg) bekannt ist, welche an den im Abstand  $t$  voneinander entfernten Querverbindungsstellen infolge der Schubkraft 1 auftritt. Bei den kontinuierlich verbundenen Stäben ist diese Verschiebung allein durch den Verschiebungsmodul  $C_V$  des verwendeten Verbindungsmittels bestimmt, während bei den übrigen Stabformen die Verschiebungsgröße die Summe der Einzelverschiebungen infolge der Formänderungen der Stäbe, der Querverbindungen und der Anschlüsse, soweit dieselben nachgiebig sind, darstellt. Sind die Verschiebungsgrößen  $\frac{1}{C}$  bekannt, wobei man insbesondere bei den Stabformen des Holzbaues auf eine versuchsmäßige Er-

mittlung angewiesen ist, so lassen sich für alle praktisch bedeutsamen Stabformen einheitliche Berechnungsgrundlagen aufstellen, die insbesondere auch eine Abschätzung der Wirtschaftlichkeit der einzelnen Ausführungsformen bei gewissen Bauaufgaben ermöglichen, was bisher im Holzbau nur unter völlig unzutreffenden Voraussetzungen möglich war.

#### 4.2 Rechnerische und versuchstechnische Bestimmung der Verschiebungsgröße $1/C$ für die üblichen Konstruktionsformen mehrteiliger Druckstäbe

Für die heute gebräuchlichsten Konstruktionsformen mehrteiliger Druckstäbe werden nachstehend die Verschiebungsgrößen  $\frac{1}{C}$  berechnet, die bei Einwirken einer Schubkraft  $T = 1 \text{ kg}$  auftreten. Hierbei wird wie bei den zusammengesetzten Biegeträgern der Verschiebungsmodul des einzelnen Verbindungsmittels mit  $C_V$  bezeichnet, welche diejenige Belastung darstellt, bei der die Verschiebung 1 cm auftritt.

Bei den Stahlverbindungen (Nietung und Schweißung) soll der Einfluß der Nachgiebigkeit dieser Verbindungsarten anhand der aus einfachen La-

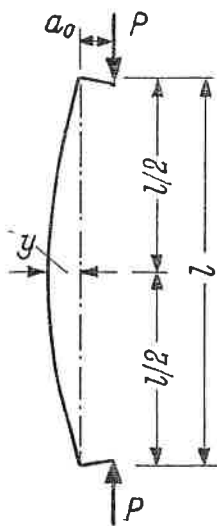


Bild 4.2

schenversuchen gewonnenen Verschiebungsmoduli  $C$  (Federkonstanten) aufgezeigt werden, während bei Holzdruckstäben die  $C$ -Werte unmittelbar aus Knickversuchen mit entsprechend ausgebildeten Versuchstäben bestimmt werden. Dieser Weg erweist sich als notwendig, da bei den komplexen Einflüssen auf die Nachgiebigkeit der verschiedenen Bauarten eine einfache Übernahme der aus reinen Scherversuchen mit ein- oder zweischnittigen Probekörpern gewonnenen Verschiebungsmoduli  $C_V$  nicht in allen Fällen zutreffend erscheint. Diese Vermutung wird zumindest bei einigen Bauarten bestätigt. Für die Auswertung der Knickversuche können aber nicht die

unmittelbar erhaltenen Knicklasten  $P_K$  herangezogen werden, da deren Größe infolge der vor allem bei mehrteiligen Holzdruckstäben stets vorhandenen Einflüsse, die einen ideal-mittigen Knickversuch nicht verwirklichen lassen, in weiten Grenzen schwankt. Das wirksame Trägheitsmoment wurde vielmehr nach dem Southwell-Verfahren aus der beim Knickversuch gemessenen Last-Aus-biegunslinie bestimmt. Hierbei wird von einer sinusförmigen Knickbiegeline des Stabes ausgegangen, bei dem eine geringe Anfangsausbiegung  $a_0$  oder beiderseitige geringe Außermittigkeiten  $a_0$  des Kraftangriffes vorliegen - Voraussetzungen wie sie auch bei sorgfältigsten vorbereiteten Versuchen mit Holzdruckstäben in der Regel vorliegen werden. Für einen derartig nach Bild 4.2 belasteten Stab erhält man folgen-

die Beziehung zwischen der Belastung  $P$  und der Ausbiegung  $y$  in Stabmitte

$$y = a_0 \frac{1}{\frac{P_K}{P} - 1} \quad (4.18)$$

Hierin bedeutet

$$P_K = \frac{\pi^2 EI_W}{l^2}$$

die Euler'sche Knicklast des mittig gedrückten Stabes mit dem wirksamen Trägheitsmoment  $I_W$ , das bestimmt werden soll. Durch Umformen erhält man

$$y = P_K \frac{y}{P} - a_0. \quad (4.19)$$

Die durch das wirksame Trägheitsmoment  $I_W$  festgelegte Knicklast  $P_K$  stellt also die Steigung der Geraden dar, die sich ergibt, wenn man die

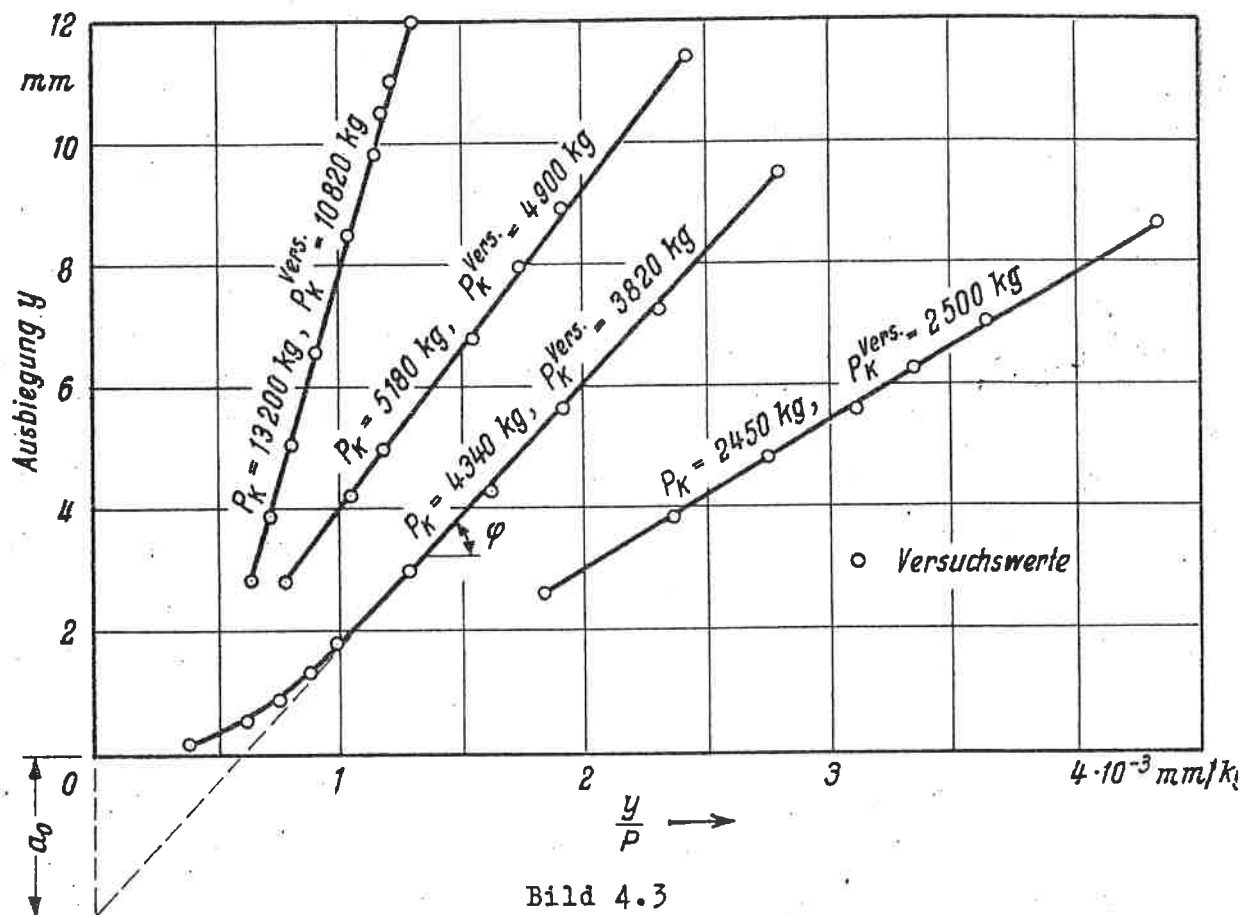


Bild 4.3

bei den einzelnen Laststufen  $P$  gemessenen Ausbiegungen  $y$  und die Werte  $\frac{y}{P}$  in einem Achsenkreuz aufträgt. Es gilt nämlich

$$\text{tg } \varphi = \frac{y}{y/P} = P_K.$$

Damit erhält man nach Gl. (4.14)

$$I_W = \frac{P_K l^2}{\pi^2 E}. \quad (4.20)$$

Dieses Verfahren kann in gewissem Umfange auch noch bei gedrunenen Stäben angewandt werden, die man erforderlichenfalls mit einer geringen Außermittigkeit belastet. In der Regel werden aber zusammengesetzte Holzstäbe schon frühzeitig eine Ausbiegungszunahme mit steigender Belastung aufweisen, wie dies bei den Versuchen immer wieder festgestellt werden konnte.

Die nach dem Southwell-Verfahren aufgetragenen Werte  $P$  und  $\frac{y}{P}$  ergaben bei nahezu allen Stäben eine Gerade, zumindest im Bereich größerer Ausbiegungen, wie sie kurz vor Erreichen der Tragkraft fast stets auftraten. In Bild 4.3 sind einige Versuchslinien aufgezeichnet.

#### 4.21 Kontinuierlich verbundene Einzelstäbe

Bei diesen Konstruktionsformen, die vorwiegend im Holzbau als I-Querschnitte oder Kastenquerschnitte nach Bild 4.4 ausgebildet sind, wird

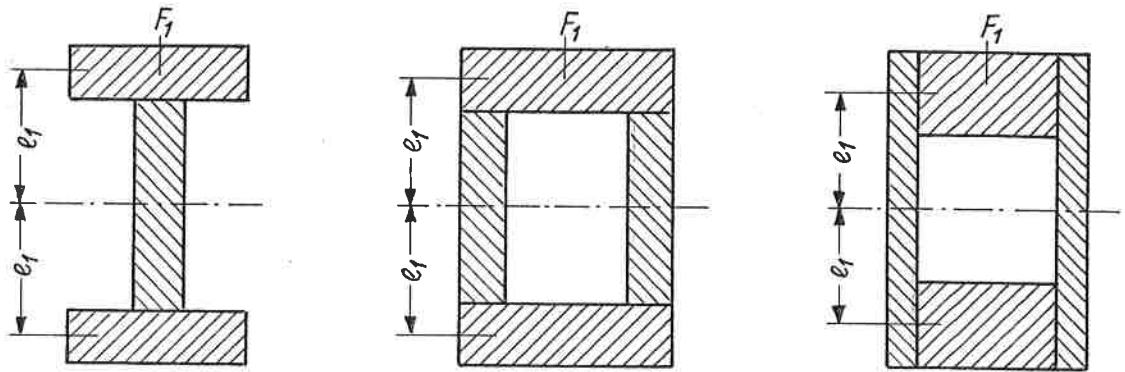


Bild 4.4

die Verschiebung zwischen den Einzelstäben allein durch die Nachgiebigkeit des Verbindungsmittels bestimmt. Sie beträgt

$$\delta(\text{cm}) = \frac{1}{C_V} \quad (4.21)$$

Setzt man diesen Wert in Gl.(4.16) ein, so erhält man

$$I_W = \sum I_1 + \frac{\sum F_1 e_1^2}{1 + \frac{\pi^2 \cdot E F_1 t}{l^2 \cdot C_V}} \quad (4.22)$$

Sind in der Verbindungsfuge mehrere Verbindungsmittel nebeneinander angeordnet (z.B.  $n$  Nagelreihen), so muß für  $t$  anstelle des tatsächlichen Abstandes der wert  $t' = \frac{t}{n}$  eingeführt werden.

Für eine unnachgiebige Verbindung der Einzelteile in der Berührungsfuge wird mit  $C_V = \infty$  der Nenner in Gl.(4.22) gleich 1 und  $I_W = I$ . Dies ist z.B. bei der Leimung im Holzbau oder der HV-Verschraubung im Stahlbau zutreffend. Bei völliger Nachgiebigkeit, also lose nebeneinander gestellten Einzelteilen ( $C_V = 0$ ) wird  $I_W = \sum I_1$ . Die Mitwirkung der

Flanschteile ist in diesem Falle nur durch das Trägheitsmoment  $\Sigma I_1$  gegeben

#### 4.211 Stahlstützen mit kontinuierlich verbundenen Einzelteilen

Als Verbindungsmittel werden im Stahlbau Nietung, Schweißung und Verschraubung angewendet. Bei der Verschraubung kommen neuerdings neben den Paßschrauben die hochfesten, vorgespannten Schrauben in Frage, deren Tragfähigkeit in erster Linie durch die Gleitgrenze der Verbindung festgelegt ist. Unterhalb dieser Gleitgrenze muß die HV-Verschraubung als starr ( $C_V = \infty$ ) angesehen werden.

Bei der Nietverbindung wird zwar bei sachgemäßer Ausführung eine Klemmwirkung vorliegen, so daß bis zu einer gewissen Höhe Kräfte durch Reibungsübertragung in den Berührungsflächen aufgenommen werden können. Die früheren Karlsruher Versuche zeigten aber, daß hier die Gleitgrenzen sehr unterschiedlich liegen und meist kaum mehr als 0,5 bis 0,8 der zulässigen Nietbelastung erreichen. Nach den versuchsmäßig festgestellten Last-Verschiebungslinien muß bei der Nietung mit gegenseitigen Verschiebungen der vernieteten Teile gerechnet werden, die sich aus dem oft unvermeidlichen Lochspiel, der Biege- und Scherverformung des Niefschaftes und der Lochleibungsverformung zusammensetzen. Aus den Versuchen muß im ungünstigsten Falle eine mittlere Verschiebung unter  $N_{zul}$  von

$$\delta \text{ (cm)} = \frac{d^2}{50}, \quad d \text{ (cm)} = \text{Nietdurchmesser}$$

erwartet werden. Damit errechnet sich unter der Annahme einer geradlinigen Last-Verschiebungslinie, wie sie unter Außerachtlassung des Reibungseinflusses in der Regel vorliegt, der Verschiebungsmodul der Nietverbindung zu

$$C_{Niet} \text{ (kg/cm)} = \frac{50}{d^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \tau_{zul} \cdot m, \quad (4.23)$$

wobei  $m$  die Schnittigkeit der Verbindung bedeutet.

Hiermit erhält man die Werte:

$$C_{N1} \text{ (kg/cm)} \approx 40 \tau_{zul} \quad \text{für die einschnittige Nietverbindung}$$

$$C_{N2} \text{ (kg/cm)} \approx 80 \tau_{zul} \quad \text{für die zwei „ „ „}$$

Setzt man für  $\tau_{zul}$  den Mittelwert der zulässigen Scherbeanspruchung aus dem Hoch- und Brückenbau für Niete St 34 ein, so kann man mit folgenden Werten rechnen

$$C_{N1} = 40 \cdot 1250 = 50\,000 \text{ kg/cm},$$

$$C_{N2} = 80 \cdot 1250 = 100\,000 \text{ kg/cm}.$$

Diese Werte, die unter Vernachlässigung der Klemmwirkung ermittelt wur-



den, sind verhältnismäßig niedrig. Bleich hat aus den Versuchen von Rudeloff für zweischnittige Niete den Verschiebungsmodul mit  $C_{N2} = 450\,000$  kg/cm errechnet.

Der Hilfswert  $k$  zur Bestimmung des Abminderungswertes  $\gamma$  wird somit nach Gl.(4.17a) (für  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\pi^2 \approx 10$ )

bei einschnittigem Anschluß

$$k_{N1} = 420 \frac{F_1 t}{l^2}, \quad (4.24a)$$

bei zweischnittigem Anschluß

$$k_{N2} = 210 \frac{F_1 t}{l^2}. \quad (4.24b)$$

In Bild 4.5 sind die zugehörigen  $\gamma$ -Werte in Abhängigkeit von  $\frac{F_1 t}{l^2}$  für den praktisch in Frage kommenden Bereich aufgetragen. Man erkennt, daß der Einfluß der Nachgiebigkeit der Nietverbindung auf das wirksame Trägheitsmoment und damit auf die Tragfähigkeit zusammengesetzter Stahlprofile bei unvollkommener Nietausführung bedeutsam werden kann.

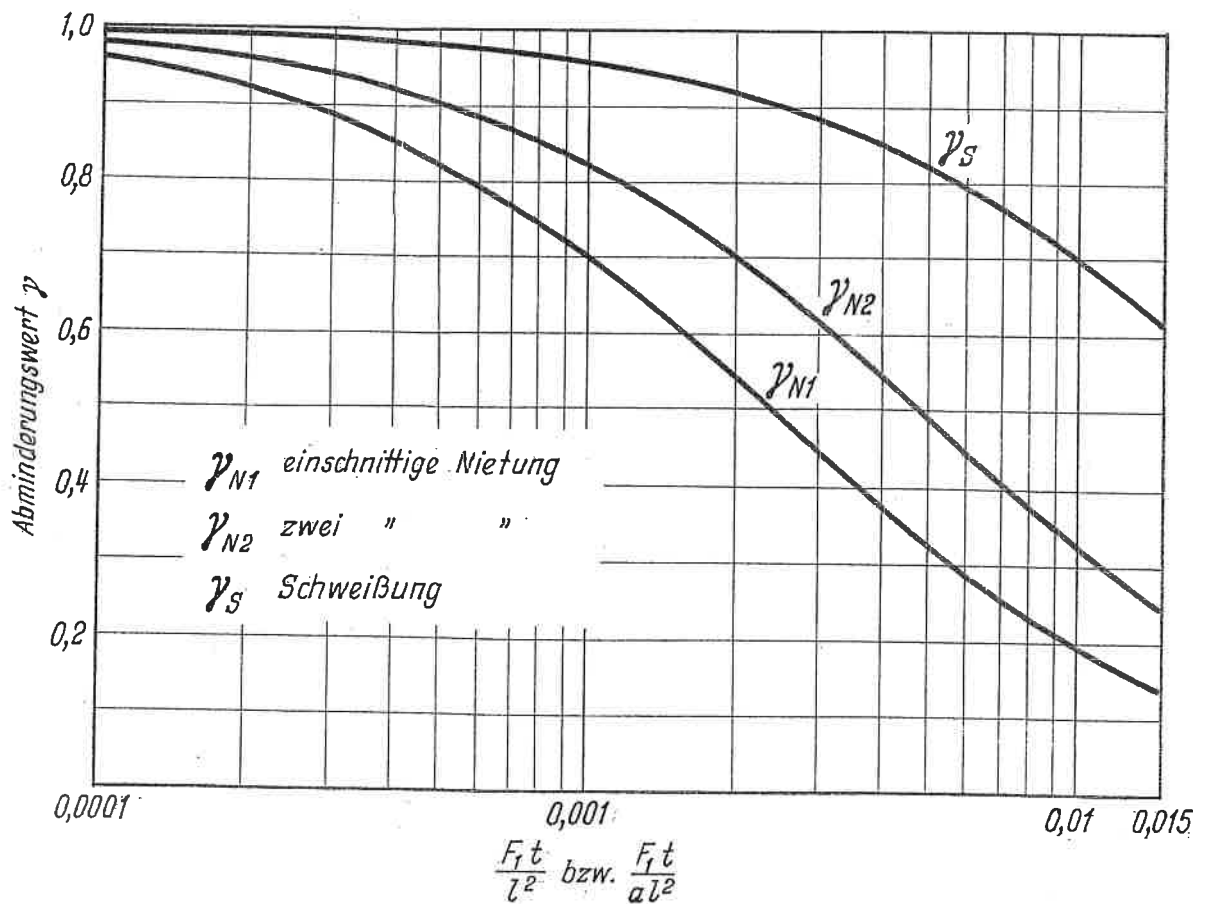


Bild 4.5

Bei der Schweißung ist eine Verbindung möglich, die sich durch eine große Steifigkeit auszeichnet. Bei den unmittelbar durch V- oder

X-Nähte verschweißten Profilen wird ein einheitlicher Querschnitt erzielt. Lediglich die Kehlnaht ist einer gewissen Schubverformung unterworfen, die an Laschenversuchen einen mittleren Verschiebungsmodul von etwa  $250\,000\text{ kg/cm}^3$  für den Nahtquerschnitt ergab. Der Verschiebungsmodul für eine Kehlnaht von der Dicke  $a$  ergibt sich somit für den laufenden cm Nahtlänge zu

$$C_S (\text{kg/cm}) = 250\,000 a.$$

Für die in Bild 4.6 dargestellten Bauformen mit zwei Kehlnähten erhält man damit die  $k_S$ -Werte zu:

$$k_S = 42 \frac{F_1 t}{a l^2}. \quad (4.25a)$$

Bei ununterbrochenen Kehlnähten wird  $t = 1\text{ cm}$ . Bei nur abschnittsweiser unterbrochener Schweißung mit einer Schweißraupenlänge von  $z$  und einem Mittenabstand von  $t$  wird

$$k_S = 42 \frac{F_1 t}{z a l^2}. \quad (4.25b)$$

Die zugehörigen  $\gamma$ -Werte können ebenfalls aus Bild 4.5 entnommen werden.

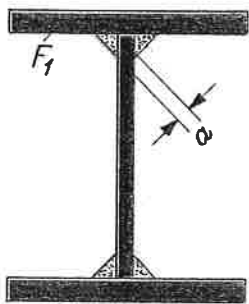


Bild 4.6

Hier wird in der Regel der praktisch in Betracht kommende Bereich bei geringeren Abszissenwerten liegen als bei der Nietung, so daß nur in Ausnahmefällen eine Berücksichtigung der Abminderung in Frage kommen wird.

Bei guter Nietung mit  $C_{N2} = 450\,000\text{ kg/cm}$  werden aber bereits die Werte der  $\gamma_S$ -Linie erreicht. Bei voller Wirkung des Reibungsschlusses kann die Nietung sogar noch günstigere Werte als die Kehlnahtschweißung aufweisen. Die vollkommene Unnachgiebigkeit dürfte aber nur bei der hochfesten, vorgespannten Verschraubung vorliegen, bei welcher die Gleitgrenze durch entsprechende Maßnahmen genügend hoch liegt, um eine gegenseitige Bewegung der Einzelteile auszuschalten.

#### 4.212 Holzdruckstäbe mit kontinuierlich verbundenen Einzelteilen

Aus Knickversuchen mit genagelten I-Stäben wurden die in Bild 4.7 aufgetragenen  $C_V$ -Werte erhalten. Es zeigte sich eine deutliche Abnahme des  $C_V$ -Wertes mit zunehmender Spreizung. Diese wird einerseits dadurch bedingt, daß bei diesen Versuchen der Einfluß der Schubverformungen der Holzteile selbst mit zunehmender Querschnittshöhe von Bedeutung werden kann. Aus der versuchsmäßig nach dem Southwell-Verfahren ermittelten

Knicklast  $P_K$  wurde das wirksame Trägheitsmoment aus der einfachen Eulerformel berechnet. Bei Berücksichtigung der Schubverformung wäre aber die Beziehung

$$P_K = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{I_w}{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{EI_w}{GF'}} = \frac{\pi^2 E}{l^2} \cdot \frac{I_w}{1 + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{EI_w^2 F}{GF'}} \quad (4.26)$$

zu benutzen. Da bei Holz das Verhältnis  $G/E$  im Mittel zu etwa  $1/15$  bis  $1/20$  angenommen werden muß, während es bei Stahl etwa  $3/8$  beträgt, macht sich der Einfluß bei höheren Stabquerschnitten und bei kleineren Knick-

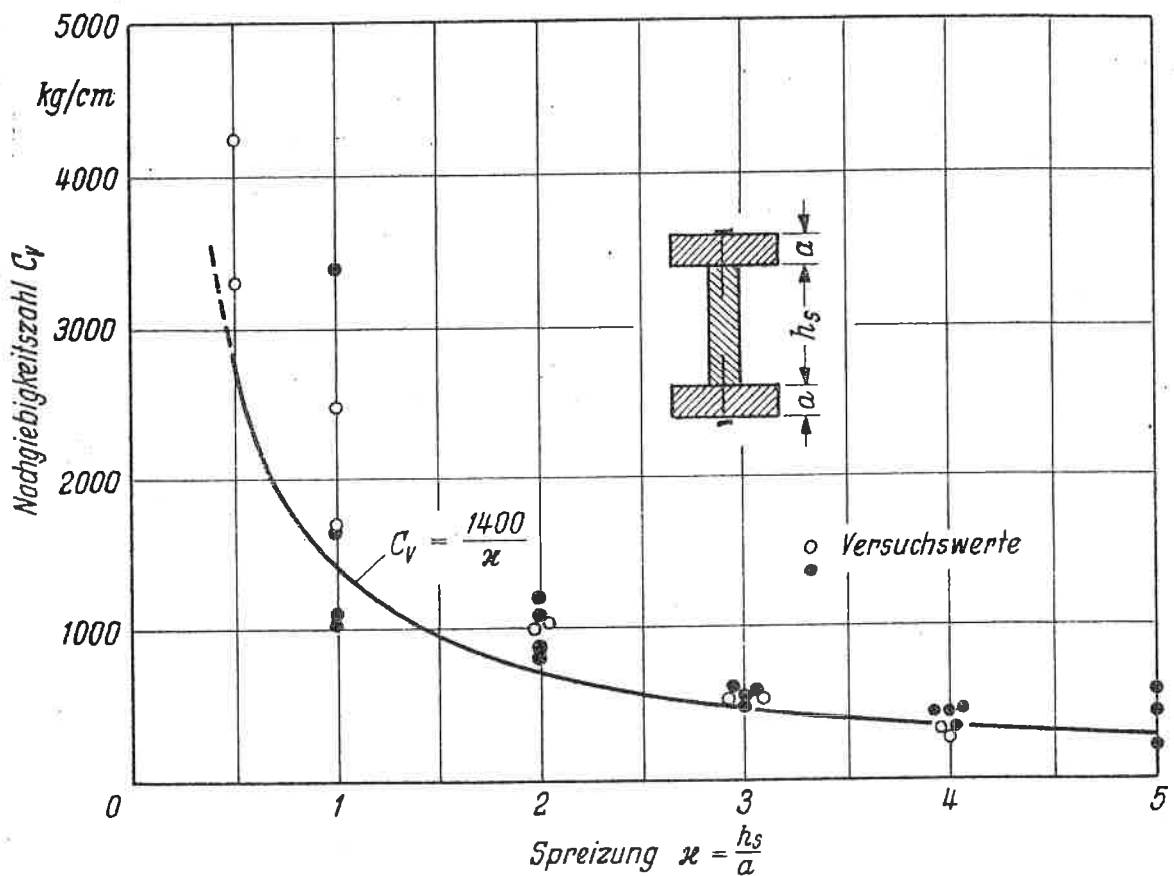


Bild 4.7

längen schon deutlich bemerkbar. So erhält man zum Beispiel für einen Rechteckquerschnitt mit  $F' = \frac{5}{6} F$  die Vergrößerung der Knicklänge bzw. der Schlankheit zu ( $G = E/20$ )

$$1 + \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \frac{6EI_w^2}{5G} = 1 + \frac{\pi^2 \cdot 24}{\lambda_w^2} \approx 1 + \frac{240}{\lambda_w^2}$$

Bei den zwischen  $\lambda = 70$  bis  $150$  liegenden I-förmigen Versuchsstäben wäre somit eine Vergrößerung des wirksamen Schlankheitsgrades von 5 o/o bis 1 o/o eingetreten, was teilweise eine erhebliche Vergrößerung des  $C_v$ -Wertes ergeben würde. Um eine Erschwerung der Knickberechnung zu vermei-

den, erscheint es aber einfacher, diesen Einfluß durch den  $C_V$ -Wert zu erfassen, der mit zunehmender Spreizung abnimmt.

Der hauptsächliche Einfluß, der zu einer Verringerung des  $C_V$ -Wertes bei Stäben mit höheren Stegen beiträgt, ist die Wirkung der Reibung in den Berührungsflächen, die mit zunehmender Steghöhe zurückgeht. Man kann genau genug den Wert  $C_V = \frac{1400}{\alpha}$  einführen (Bild 4.7), wobei bei Spreizungen  $\alpha > 4$  der  $C_V$ -Wert unverändert mit 350 kg/cm beibehalten werden kann.

Für verdübelte und verschraubte zweiteilige Stäbe wurden  $C_V$ -Werte aus den Versuchen zwischen 15 000 und 30 000 kg/cm erhalten, während unmittelbar miteinander vernagelte Stäbe Werte von etwa 2500 kg/cm ergaben. Bei nicht fest angezogenen Schrauben <sup>bolzen</sup> war praktisch keine Verbundwirkung der Einzelstäbe mehr vorhanden.

#### 4.22 Stäbe mit Futterblechen oder Zwischenhölzern

Der Rahmenstab wird als statisch bestimmtes Rahmensystem betrachtet, das in der Mitte der Querverbindungen und der Stabfelder Momentennullpunkte hat. An dem so nach Bild 4.8 erhaltenen Abschnitt erhält man un-

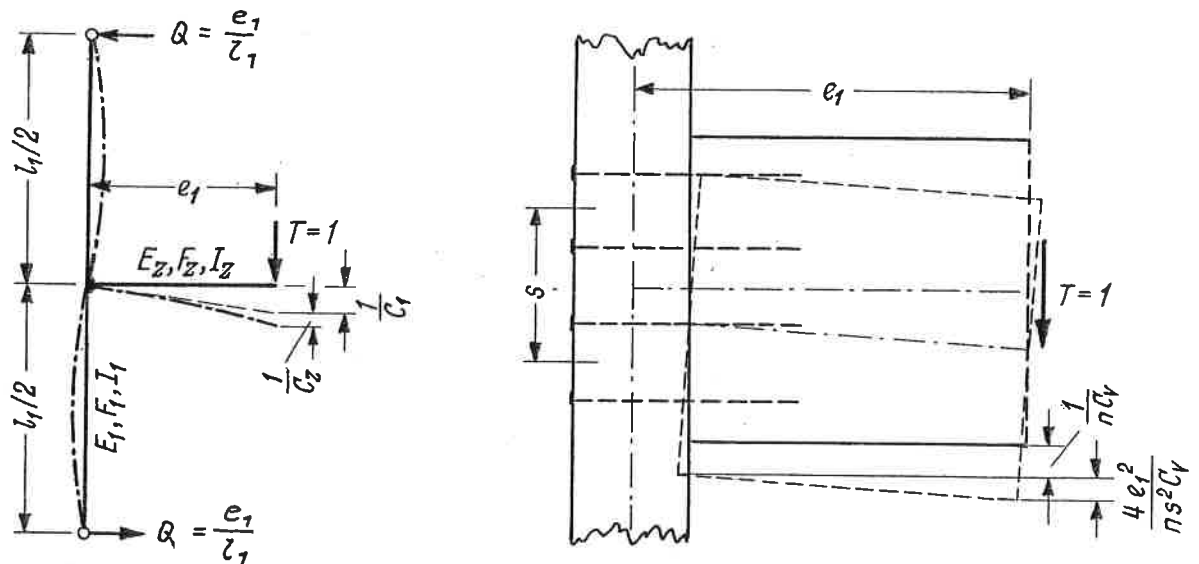


Bild 4.8

ter der Kraft  $T = 1$  die Verschiebungsgröße  $\frac{1}{C}$  als Summe der Einzelverschiebungen  $\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_Z} + \frac{1}{C_A}$ . Hierin bedeutet  $\frac{1}{C_1}$  die aus der Formänderung des Einzelstabes hervorgerufene Verschiebung, die sich berechnet zu

$$\frac{1}{C_1} = \frac{e_1^2 l_1}{12 E I_1} = \frac{e_1^2 \lambda_1}{12 E F_1 i_1} \quad (4.27)$$

$\frac{1}{C_Z}$  stellt die Formänderung des Zwischenholzes oder Futterbleches selbst dar. Man erhält, wenn  $I_Z$  das Trägheitsmoment der Querverbindungen bedeute

$$\frac{1}{C_Z} = \frac{e_1^3}{3 E_Z I_Z} = \frac{e_1^2 \lambda_Z}{6 E_Z F_Z i_Z} \quad (4.28)$$

Dieser Wert ergibt sich bei Berücksichtigung der Biegeverformung. Da in der Regel insbesondere im Holzbau die Zwischenhölzer sehr gedrunken sind, wäre hier insbesondere bei dem geringen Schubmodul des Holzes auch die Schubverformung zu berücksichtigen. Im allgemeinen werden aber die Zwischenhölzer sehr kräftig ausgebildet, so daß hier von einer zusätzlichen Berücksichtigung der Schubverformung abgesehen werden kann.

Die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel bringt nun noch weitere zusätzliche Verschiebungen  $\frac{1}{C_A}$  und zwar einen Teilbetrag aus der von den Anschlußmitteln aufzunehmenden Schubkraft  $T=1$  und einen weiteren aus dem aufzunehmenden Biegemoment  $M = 1 \cdot e_1$ . Bei  $n$  Verbindungsmitteln je Querverbindung, deren Teilgruppen den Schwerpunktsabstand  $s$  besitzen, erhält man

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{nC_V} + \frac{4e_1^2}{ns^2C_V} = \frac{1}{nC_V} \left( 1 + \frac{4e_1^2}{s^2} \right). \quad (4.29)$$

Hierbei wird vereinfachend angenommen, daß der Verschiebungsmodul für Scher- und Achsialbeanspruchung einer Verbindung gleichgesetzt werden kann. Außerdem soll die Wirkungslinie der Verbindungsmittel bezüglich der Verdrehung in der Achse des Einzelstabes liegen, was streng genommen nur beim Bindeblech oder Bindeholz zutrifft.

Damit wird die Gesamtverschiebung, wenn die Querverbindungen aus dem gleichen Material wie die Einzelstäbe bestehen ( $E_Z = E$ )

$$\frac{1}{C} = \frac{e_1^2}{12E} \left( \frac{l_1}{I_1} + \frac{4e_1}{I_Z} \right) + \frac{1}{nC_V} \left( 1 + \frac{4e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.30)$$

Im Stahlbau hat man die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel vernachlässigt. Läßt man auch die Formänderungen der Futterbleche selbst außer acht, die in der Regel bei den geringen Spreizungen dieser Bauart sehr gering sind, so erhält man

$$\frac{1}{C} = \frac{e_1^2 \lambda_1}{12EF_1 i_1} \quad (4.31)$$

Wenn man diesen Wert in die Grundformel für das wirksame Trägheitsmoment  $I_W$  einsetzt, so ergibt sich für  $t = l_1$

$$I_W = \sum I_1 + \frac{\sum F_1 e_1^2}{1 + \frac{\pi^2 \cdot e_1^2 \lambda_1^2}{12}} = \sum I_1 + p \sum F_1 e_1^2 \quad (4.32)$$

Daraus erhält man

$$p = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot e_1^2 \lambda_1^2}{12}} \quad (4.33)$$

Nun ist aber auch

$$I_W = I - (1 - \nu) \sum F_1 e_1^2$$

und mit  $\frac{1}{\sum F_1}$  multipliziert

$$i_W^2 = i^2 - e_1^2 + \nu e_1^2. \quad (4.34)$$

Schließlich erhält man, wenn man die Gleichung mit  $\frac{1}{l^2}$  multipliziert,

$$\frac{1}{\lambda_W^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{e_1^2}{l^2} + \nu \frac{e_1^2}{l^2}. \quad (4.35)$$

Da bei gespreizten zweiteiligen Stäben  $e_1 \approx i$  ist, wird

$$\frac{1}{\lambda_W^2} = \nu \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{\pi^2}{12} \lambda_1^2}. \quad (4.36)$$

Setzt man anstelle des vernachlässigten Einflusses der Formänderungen der Querverbindungen  $\frac{\pi^2}{12} = 1$ , so ergibt sich die vorerwähnte vereinfachte Engesser-Formel (Gl.4.2) Durch Versuche im Stahlbau wurde nachgewiesen, daß diese Formel bei den üblichen Ausführungen genügende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen liefert.

Bei Holzdruckstäben mit Zwischenhölzern kann man nicht mehr damit rechnen, daß die aus der Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel herrührenden Einflüsse vernachlässigt werden können. Eine Ausnahme bildet die Leimung. Hier erscheint es zulässig, zumindest die gleichen Vereinfachungen wie im Stahlbau zu treffen. Für die Abmessungen der Zwischenhölzer können hierbei folgende konstruktiv gegebenen Annahmen als Regelausführungen zugrunde gelegt werden (Bild 4.9). Die wirksame Länge  $l_Z$

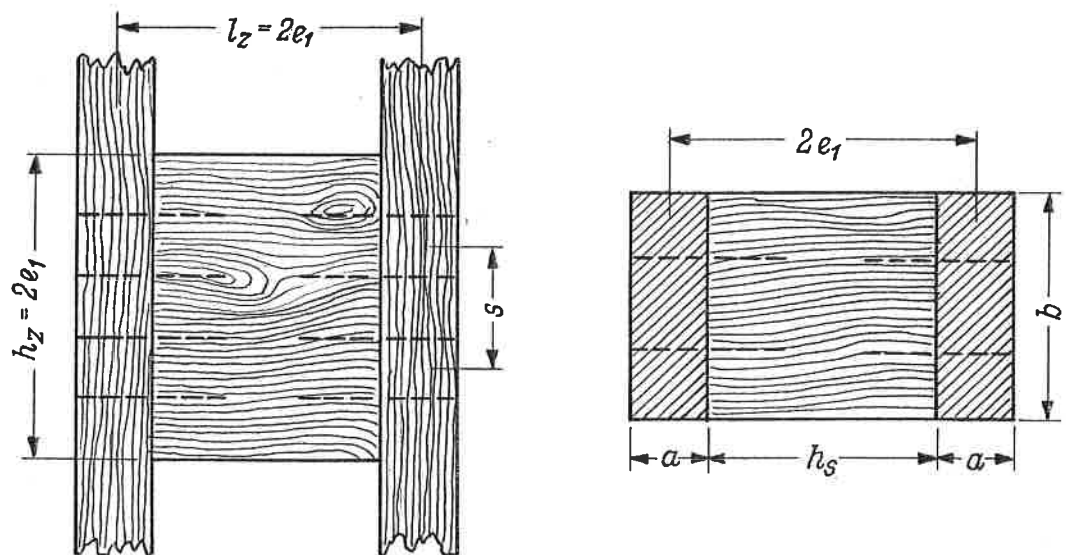


Bild 4.9

eines derartigen Zwischenholzes kann gleich dem Achsabstand der beiden Einzelstäbe gesetzt werden, während die Höhe  $h_Z$  in Richtung der Stabachse

ebenfalls mindestens dieses Maß erhält, sofern für die Aufnahme der Schubkräfte keine größere Höhe erforderlich ist. Das Trägheitsmoment würde somit bei dieser Ausführungsart stets  $I_z = \frac{2}{3} b e_1^3$  betragen. Die Verschiebungsgröße infolge der Verformung des Zwischenholzes wird dann nach Gl. (4.28)

$$\frac{1}{C_z} = \frac{1}{2Eb} , \quad (4.37)$$

wobei  $b$  die Breite des Zwischenholzes bedeutet. Diese Verschiebungsgröße ist somit bei den gewählten Abmessungsverhältnissen unabhängig von der Spreizung  $\kappa$  des Stabes. Um diesen Wert  $\frac{1}{C_z}$  mit dem Verschiebungswert des Einzelstabes vergleichen zu können, soll für eine angenommene Schlankheit  $\lambda_1$  des Einzelstabes der Wert  $\frac{1}{C_1}$  berechnet werden. Im allgemeinen wird die Schlankheit des Einzelstabes den Wert  $\lambda_1 = 50$  nicht überschreiten. Für  $\lambda_1 = 48$  erhält man mit  $\kappa = h_s/a$ ,  $e_1 = \frac{a}{2}(1+\kappa)$  nach Gl. (4.27)

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\sqrt{12}(1+\kappa)^2}{Eb} . \quad (4.38)$$

Man erkennt, daß der Einfluß des Einzelstabes mit dem Quadrat der Spreizung anwächst und rd.  $7(1+\kappa)^2$  mal so groß ist als der Einfluß der Zwischenhölzer. Es erscheint daher auch bei den geleimten Zwischenhölzern möglich, das wirksame Trägheitsmoment nur durch Berücksichtigung der Einzelstabverformung zu berechnen, wie es bei der vereinfachten Engesser-Formel geschieht. Die Auswertung einiger Versuche mit derartig ausgebildeten Stäben brachte eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch. Bei den Stuttgarter Versuchen mit besonders kräftigen Endquerverbindungen lagen die Versuchswerte durchweg höher.

Schließt man die Zwischenhölzer mittels Nägel oder Dübel an, so können die Verschiebungen in den Verbindungsmitteln nicht mehr vernachlässigt werden, ja sie wirken sich ausschlaggebend auf die Größe des wirksamen Trägheitsmomentes aus. Da mit Rücksicht auf die Unterbringung der Verbindungsmittel die Zwischenhölzer in der Regel kräftiger als bei den geleimten Stäben ausgebildet werden müssen, kann der Einfluß der Verformungen der Zwischenhölzer selbst wieder außer Betracht bleiben. Der Verschiebungsmodul  $\frac{1}{C}$  des Stabes umfaßt dann noch folgende Glieder

$$\frac{1}{C} = \frac{e_1^2 \lambda_1}{12 E F_1 i_1} + \frac{1}{n C_v} \left( 1 + \frac{4 e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.39)$$

Das zweite Glied in Gl. (4.39) kann erst nach Kenntnis von  $C_v$  berechnet werden.  $C_v$  muß aber auf versuchstechnischem Wege aus den Knickversuchen selbst bestimmt werden. Aus Gl. (4.39) erhält man, wenn  $\frac{1}{C}$  aus dem Knick-

versuch bekannt ist, für den Verschiebungsmodul  $C_V$  des Einzelverbindungs-  
mittels

$$\frac{1}{C_V} = \frac{n \left( \frac{1}{C} - \frac{e_1^2 \lambda_1}{12 E F_1 i_1} \right)}{1 + \frac{4 e_1^2}{s^2}} \quad (4.40)$$

Die Auswertung von 18 Versuchen mit zweiteiligen Stäben mit genagelten Zwischenhölzern ergab  $C_V$ -Werte für einen Nagel, die bei Außerachtlassung der beiden Extremwerte von 2380 kg/cm und 12 950 kg/cm zwischen 3600 und 7500 kg/cm schwankten und im Mittel 4500 kg/cm betrugen. In welchem Maße bei dieser Bauart der Stäbe, welche Spreizungen von  $\lambda = 1$  bis 5 bei Schlankheiten des Einzelstabes von 40 bis 50 aufwiesen, sich die Nachgiebigkeit der Anschlüsse bemerkbar machte, geht daraus hervor, daß die Verschiebungsgröße  $\frac{1}{C}$  im Mittel nur zu rd.  $\frac{1}{3}$  durch die Schlankheit der Einzelstäbe und zu rd.  $\frac{2}{3}$  durch die Nachgiebigkeit der Zwischenholzanschlüsse verursacht war. Die Auswertung der entsprechenden Versuche mit durch Einpreß- oder Fräsdübel angeschlossenen Zwischenhölzern brachte  $C_V$ -Werte, die bei den Einpreßdübeln mit Ausnahme von zwei Extremwerten sehr gleichmäßig zwischen 33 000 und 38 000 kg/cm lagen, während sich bei den Fräsdübeln Werte von 16 000 bis 42 000 kg/cm ergaben, was auf den mehr oder weniger satten Sitz der Dübel in dem ausgefrästem Dübelbett zurückgeführt werden muß. Bei sachgemäßer und sorgfältiger Verdübelung könnte hier einheitlich mit  $C_V = 30 000$  kg/cm gerechnet werden.

#### 4.23 Stäbe mit Bindeblechen oder Bindehölzern

Die Verschiebungsgröße einer Querverbindung ergibt sich grundsätzlich nach Gl.(4.30). Eine Erweiterung für Holzdruckstäbe erscheint aber insoweit erforderlich als hier u.U. die Schubverformung der Bindehölzer, die kurze, hohe auf Biegung beanspruchte Träger darstellen, bei dem geringen Schubmodul des Holzes eine Rolle spielen kann. Hinzu kommt noch, daß bei Verwendung von besonderen plattenförmigen Werkstoffen (Bleche oder Holzwerkstoffe) der Elastizitätsmodul von Stab und Querverbindung verschieden sein kann. Zur Berücksichtigung dieser Einflüsse muß hiernach die Verschiebungsgröße noch um den aus der Schubverformung herrührenden Anteil vergrößert werden. Bei dem nach Bild 4.10 belasteten Kragträger beträgt der Schubwinkel  $\gamma$  und die Verschiebung  $\delta\gamma$

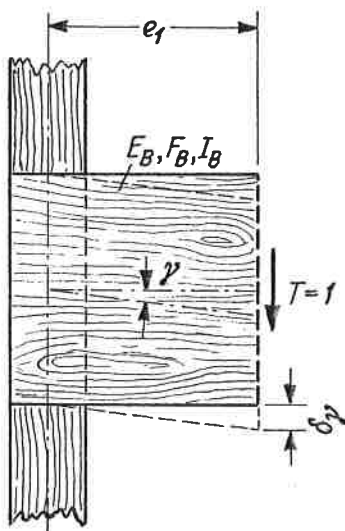


Bild 4.10

träger beträgt der Schubwinkel  $\gamma = \frac{1}{G_B F_B}$  und die Verschiebung  $\delta\gamma = \frac{e_1}{G_B F_B}$



Für  $G_B = \frac{E_B}{20}$  und  $F'_B = \frac{5}{6} F_B$  (Rechteckquerschnitt) wird die aus dem Einfluß der Schubverformung herrührende Verschiebung

$$\delta_p = \frac{24e_1}{E_B F_B} \quad (4.41)$$

Man erhält somit die gesamte Verschiebung bei Bindehölzern zu

$$\frac{1}{C} = \frac{e_1^2 l_1}{12 E I_1} + \frac{e_1^3}{3 E_B I_B} + \frac{24 e_1}{E_B F_B} + \frac{1}{n C_V} \left( 1 + \frac{4 e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.42)$$

Bei der Auswertung von Versuchen mit Stäben mit genagelten oder geleimten Bindehölzern ergab sich, daß die Biegeverformung der Querverbindungen auch bei größeren Sprei-

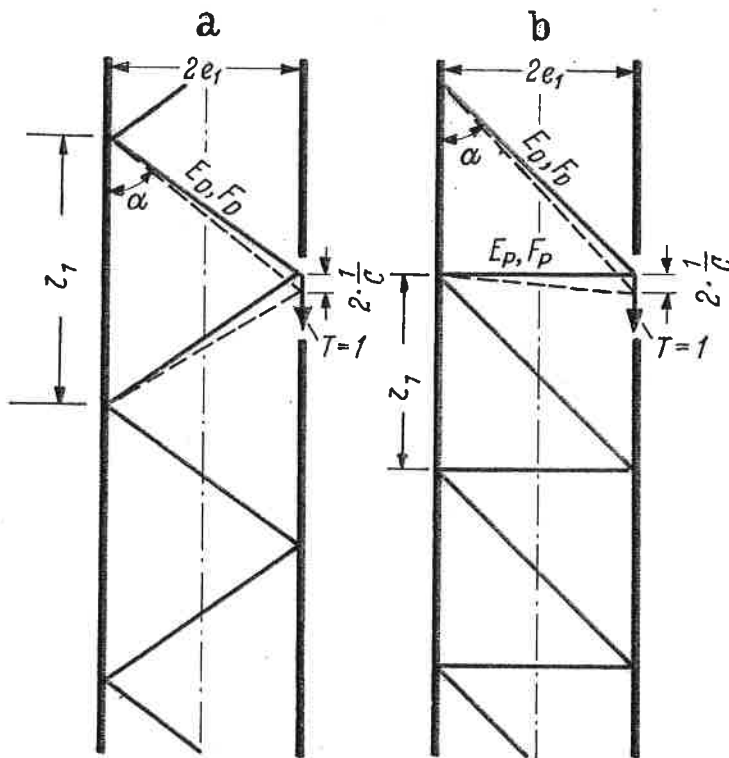


Bild 4.11

dungen auch bei größeren Spreizungen nur einen verschwindend kleinen Bruchteil der durch den Einzelstab verursachten Verformung beträgt, während die Schubverformung die Größenordnung der Einzelstabverformung erreichen kann. Die gleichen Verhältnisse waren bei den mit Sperrholz-Querverbindungen ausgeführten Stuttgarter Versuchen vorhanden. Bei den genagelten Stäben übertrafen aber die durch die Nachgiebigkeit der Anschlüsse hervorgerufenen Verformungsgrößen diejenigen aus den Bindehölzern um mehr als das 10fache. Bei den geleimten

Stäben war im Gegensatz zu den Stäben mit Zwischenhölzern eine stärkere Abnahme des wirksamen Trägheitsmomentes festzustellen als es sich aus der Verschiebungsgröße für  $C_V = \infty$  nach Gl.(4.42) errechnete. Dieser zusätzliche Einfluß war bei durchgeführten Versuchen etwa doppelt so groß als die Verformung der Bindehölzer. Wenn auch die Leimfuge selbst starr bleibt so treten doch in den benachbarten Holzfasern kleine Bewegungen bei Schubbeanspruchung auf, die sich bei dieser Bauart auf die Höhe des wirksamen Trägheitsmomentes auswirken. Dieser Einfluß kann durch einen Verschiebungsmodul der Leimfuge, bezogen auf 1 cm<sup>2</sup>, berücksichtigt werden. Die Auswertung der verfügbaren Versuche ergab Werte von etwa  $C_V = 200 \text{ kg/cm}^3$ . Bei den genagelten Versuchsstäben wurden Werte von  $C_V = 400$  bis 600 kg/cm bei Berücksichtigung aller Einflüsse erhalten, während bei Ver-

nachlässigung der Bindeholzverformungen  $C_V$  zwischen 395 und 567 kg/cm schwankte.

#### 4.24 Stäbe mit fachwerkartiger Vergitterung

Bei der fachwerkartigen Vergitterung, die insbesondere bei weit gespreizten Stäben zur Anwendung kommt, sind in der Regel die beiden in Bild 4.11 dargestellten Ausführungsarten gebräuchlich. Die Verschiebungsgröße für die in einem Knotenpunkt wirkende Schubkraft  $T = 1$  ergibt sich bei Verwendung nachgiebiger Anschlußmittel zu:

bei Streben (Bild 4.11a)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2 \cos^2 \alpha} \left( \frac{e_1}{\sin \alpha E F_D} + \frac{1}{n_D C_V} \right) \quad (4.43)$$

bei Streben und Pfosten (Bild 4.11b)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left[ \frac{e_1}{\sin \alpha E F_D} + \frac{e_1 \sin^2 \alpha}{E F_P} + \frac{1}{C_V} \left( \frac{1}{n_D} + \frac{\sin^2 \alpha}{n_P} \right) \right] \quad (4.44)$$

Hierin bedeutet  $n_D$  bzw.  $n_P$  die Anzahl der Verbindungsmittel in einem Streben- bzw. Pfostenanschluß. Sind die Vergitterungen in zwei oder mehreren parallelen Ebenen vorhanden, so müssen die Querschnittswerte  $F_D$ ,  $F_P$  und die Anzahl der Verbindungsmittel entsprechend vervielfacht werden.

Für einen Strebenwinkel  $\alpha = 45^\circ$  vereinfachen sich die Gln. (4.43) und (4.44) wie folgt:

bei Streben

$$\frac{1}{C} = 1,414 \frac{e_1}{E F_D} + \frac{1}{n_D C_V} \quad (4.45)$$

bei Streben und Pfosten

$$\frac{1}{C} = 2,828 \frac{e_1}{E F_D} + \frac{e_1}{E F_P} + \frac{1}{C_V} \left( \frac{2}{n_D} + \frac{1}{n_P} \right) \quad (4.46)$$

Diese Verschiebungsgrößen treffen streng genommen nur bei mittigem Anschluß der Vergitterung an die Einzelstäbe zu.

Die Auswertung von Knickversuchen mit genagelten und geleimten Gitterstäben nach Bild 4.12 führte zur Ermittlung der  $C$ -Werte, die bei den Nägeln 300 bis 800 kg/cm betrugen. Der Mittelwert war 500 kg/cm. Bei den geleimten Anschlüssen wurde zwar eine höhere Wirksamkeit erreicht, es ergab sich aber auch hier wie bei den Bindehölzern, daß noch eine gewisse Nachgiebigkeit im Bereich der Leimfuge vorhanden sein mußte, die einen rechnerischen Verschiebungsmodul von  $C_L = 200$  kg/cm für den cm<sup>2</sup> Leimanschlußfläche ergab. Eine Nachprüfung des Einflusses der Außermittigkeit der Strebenanschlüsse ergab, daß bei den vorliegenden Gegebenheiten der

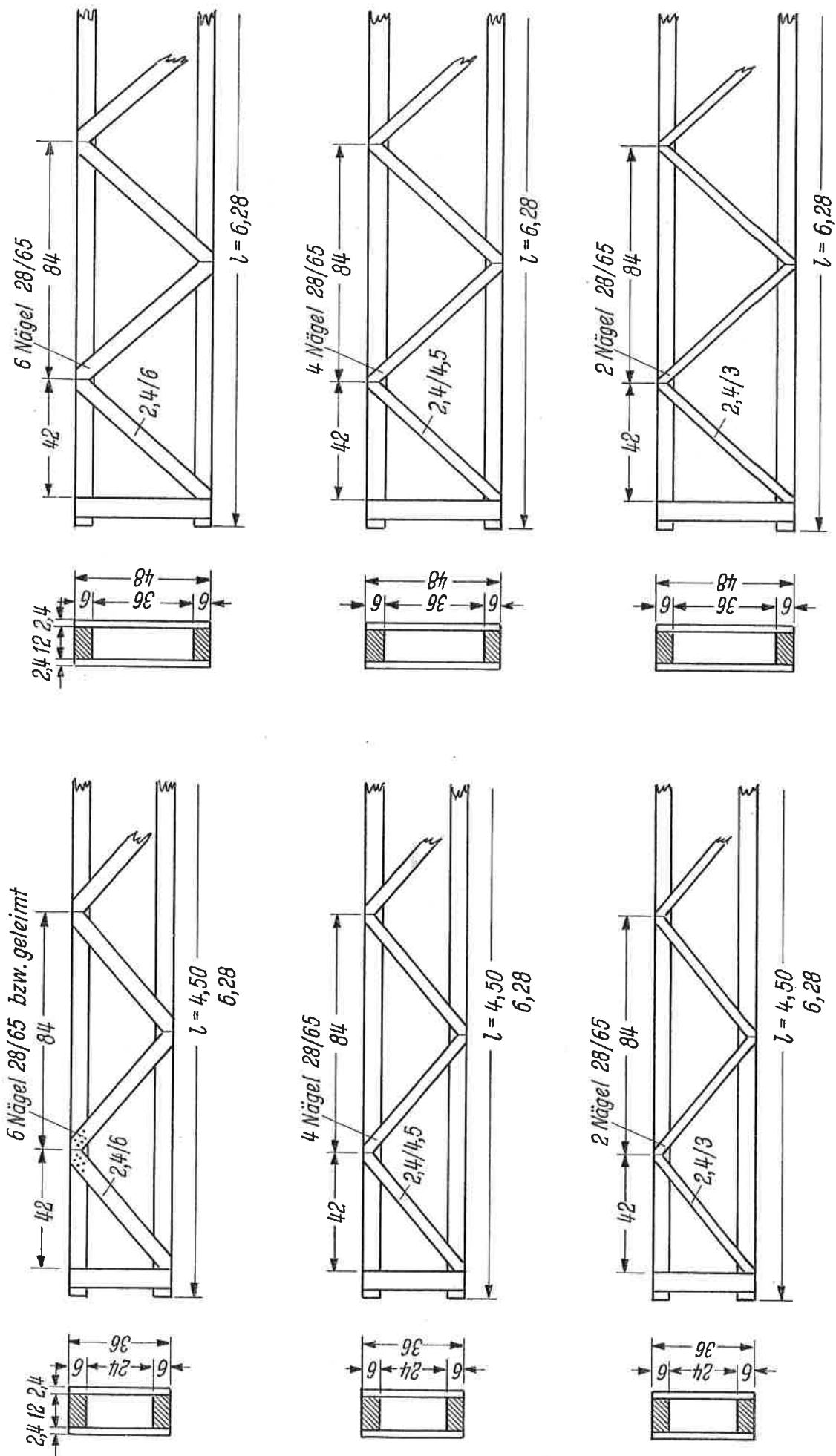


Bild 4.12

Versuchsstäbe dieser Einfluß vernachlässigbar gering war.

#### 4.3 Zusammenstellung der Berechnungsgleichungen für mehrteilige Holzdruckstäbe bei Anwendung der versuchstechnisch erhaltenen $C_V$ -Werte

Für zusammengesetzte Holzdruckstäbe der verschiedensten Ausführungsformen kann einheitlich die Berechnung des wirksamen Trägheitsmomentes  $I_W$  erfolgen nach

$$I_W = \sum I_i + p \sum F_i e_i^2 \quad (4.47)$$

wobei der Abminderungswert  $p$  nach Gl.(4.17)

$$p = \frac{1}{1+k} \quad (4.48)$$

und der Wert  $k$  nach Gl.(4.17a)

$$k = \frac{\pi^2 E F_i}{l^2} \cdot \frac{t}{C} \quad (4.49)$$

Für den Wert  $\frac{1}{C}$  können zur Bestimmung von  $k$  und  $p$  mit Rücksicht auf die Ausbildung der Querverbindungen bei den einzelnen Stabformen folgende Werte eingesetzt werden, wobei die Glieder mit vernachlässigbarem Einfluß mit Rücksicht auf die Vereinfachung der Berechnung fortgelassen wurden.

##### 1. Kontinuierlich verbundene Einzelstäbe

$$\frac{t}{C} = \frac{t}{C_V} \quad (4.50)$$

Hierin ist  $t$  (cm) der Abstand,  $C_V$  (kg/cm) der Verschiebungsmodul des Verbindungsmittels. Im Holzbau kann für zwei unmittelbar miteinander verbundene Einzelstäbe  $C_V = 2500$  kg/cm für Nagelung und 15 000 bis 30 000 kg/cm für Verdübelung gesetzt werden. Bei I-förmig vernagelten Holzstützen mit einschnittiger Nagelung wäre  $C_V$  zu  $\frac{1400}{\alpha}$  anzunehmen, wobei  $\alpha$  die Spreizung der Gurte darstellt. Für Spreizungen  $\alpha > 4$  kann  $C_V = 350$  kg/cm als konstant beibehalten werden.

##### 2. Stäbe mit Zwischenhölzern

$t$  bedeutet hier den Achsabstand der Zwischenhölzer, der mit der Knicklänge  $l_i$  des Einzelstabes identisch ist.

Für geleimte Zwischenhölzer ist

$$\frac{t}{C} = \frac{e_1^2 l_1^2}{12 EI_1} = \frac{e_1^2 \lambda_1^2}{12 E F_1} \quad (4.51)$$

Bei Spreizungen  $\kappa > 1$  kann hier die Berechnung auch nach

$$\lambda_w = \sqrt{\lambda^2 + \lambda_1^2}$$

erfolgen.

Für genagelte oder verdübelte Zwischenhölzer ist

$$\frac{t}{C} = \frac{e_1^2 \lambda_1^2}{12 E F_1} + \frac{l_1}{n C_V} \left( 1 + \frac{4 e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.52)$$

Bei Nagelung kann  $C_V = 4500 \text{ kg/cm}$ , bei Verdübelung  $C_V = 30\,000 \text{ kg/cm}$  gesetzt werden.

### 3. Stäbe mit Bindehölzern bzw. Bindeplatten

Mit Rücksicht auf die mögliche Verwendung von Holzwerkstoffen, Blechen oder sonstigen Werkstoffen anstelle der Bindehölzer soll der vollständige Wert der Verschiebungsgröße angegeben werden:

$$\frac{t}{C} = \frac{e_1^2 l_1^2}{12 EI_1} + \frac{e_1^3 l_1}{3 E_B J_B} + \frac{6 e_1 l_1}{5 G_B F_B} + \frac{l_1}{n C_V} \left( 1 + \frac{4 e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.53)$$

Hierin beziehen sich die mit dem Index  $B$  bezeichneten Werte auf die Werkstoffe und Abmessungen der Querverbindungsstücke, die normalerweise rechteckigen Querschnitt haben. Bei hölzernen Bindestücken kann der Einfluß der Biegeverformung vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\frac{t}{C} = \frac{e_1^2 l_1^2}{12 EI_1} + \frac{24 e_1 l_1}{E F_B} + \frac{l_1}{n C_V} \left( 1 + \frac{4 e_1^2}{s^2} \right) \quad (4.54)$$

Bei geleimten Bindehölzern bedeutet  $n$  die Leimfläche in  $\text{cm}^2$  und  $C_V = 200 \text{ kg/cm}^3$  den Verschiebungsmodul. Bei genagelten Bindehölzern kann  $C_V = 600 \text{ kg/cm}$  gesetzt werden.

### 4. Stäbe mit fachwerkartiger Vergitterung

Die Gln. (4.43) und (4.44) geben die Werte  $\frac{1}{C}$  für die allgemeine Ausführung mit Gitterstreben oder mit Ständerfachwerk. Im Holzbau wird normalerweise die Vergitterung unter  $45^\circ$  bevorzugt. Hierfür wird

$$\frac{t}{C} = 1,414 \frac{e_1 l_1}{E F_D} + \frac{z_1}{n C_V} \quad (4.55)$$

Hier kann wie bei Bindehölzern  $C_V = 200 \text{ kg/cm}^3$  für Leim und  $C_V = 600 \text{ kg/cm}$  für den Nagel eingeführt werden.

Nach Ermittlung des jeweiligen Wertes  $\frac{t}{C}$  für die in Frage kommende Ausführungsart wird  $k$  nach Gl.(4.49) berechnet, womit auch  $\gamma$  nach Gl.(4.48) festgelegt ist.

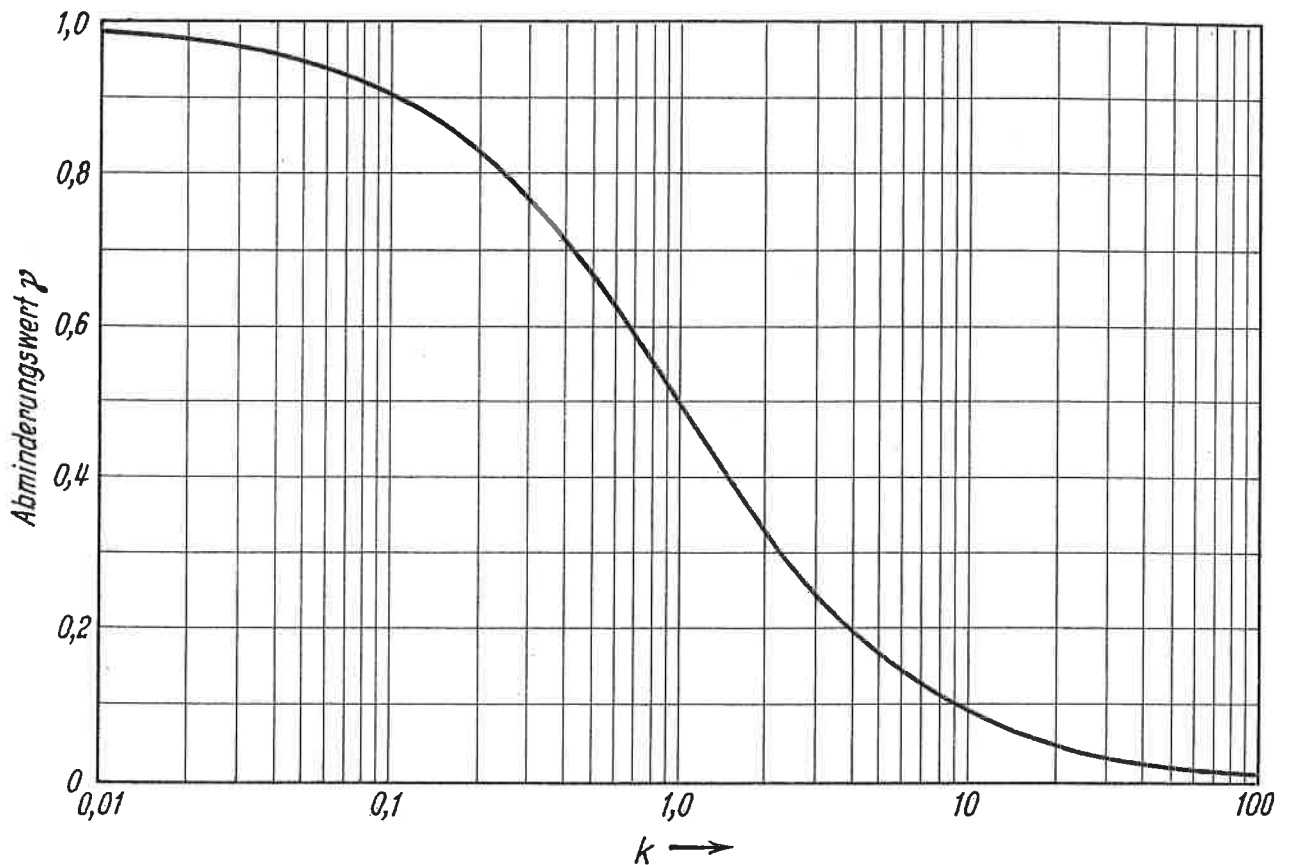


Bild 4.13

Für die praktisch in Frage kommenden  $k$ -Werte zwischen 0,01 bis 100 kann  $\gamma$  aus Bild 4.13 entnommen werden. Diese Abbildung gibt in gleicher Weise wie Bild 3.17 für die Biegeträger die Möglichkeit, für alle in Frage kommenden Stabausbildungen das wirksame Trägheitsmoment zu bestimmen. Hierbei können auch die für die Stäbe aus anderen Baustoffen gültigen  $\gamma$ -Werte entnommen werden, wobei allerdings noch die jeweils einzusetzenden  $C_V$ -Werte aus Versuchen zu bestimmen wären.

5 Zusammenfassung

In den Abschnitten 3 und 4 konnten für Träger und Stützen, deren Querschnitte aus nachgiebig verbundenen Einzelteilen bestehen, Berechnungsverfahren angegeben werden, womit praktisch sämtliche im Stahlbau und Verbundbau sowie insbesondere im Ingenieurholzbau üblichen Bauarten erfaßt werden können. Die Berechnungsverfahren wurden unter der Annahme eines konstanten Verschiebungsmoduls des jeweils zur Anwendung gelangenden Verbindungsmittels mit über die Trägerlänge gleichbleibendem Abstand aufgestellt, was in fast allen Fällen streng genommen eine Näherung bedeutet, die sich mit Rücksicht auf die rechnerische Behandlung der Aufgabe als notwendig erwies. Bei einer großen Anzahl von Versuchen mit zusammengesetzten hölzernen Biegeträgern und Stützen mannigfacher Bauart wurde die Gültigkeit der theoretischen Ableitungen bestätigt gefunden und die in den einzelnen Fällen wirksamen Größen für den Verschiebungsmodul des jeweils verwendeten Verbindungsmittels festgestellt.

Beim Vergleich von Bild 3.17 (S.46) und Bild 4.13 (S.70) zeigt sich

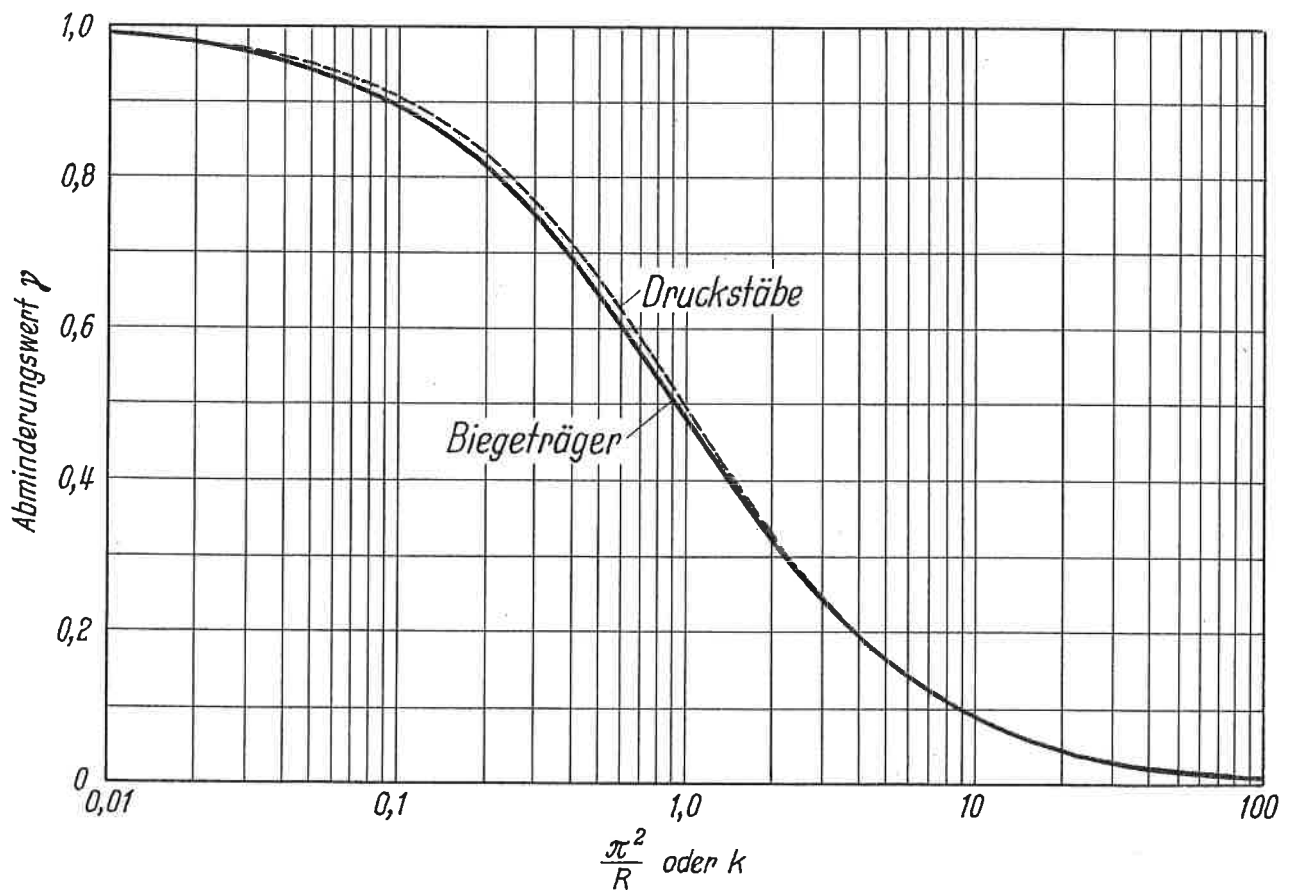


Bild 5.1

praktisch der gleiche Verlauf der Abminderungswerte  $p$  für das wirksame Trägheitsmoment vom Hilfswert  $\frac{\pi^2}{R}$  für Biegeträger bzw. von  $k$  für Knickstäbe.

Unter Beachtung von Gl.(3.108) bis (3.112) und (4.17a) wird

$$\frac{\pi^2}{R} = k = \frac{\pi^2 E F_1}{l^2} \cdot \frac{t}{C}$$

Trägt man nun die für den Biegeträger auf zwei Stützen unter einer Einzelast in Trägermitte maßgebenden  $\gamma$ -Werte in Abhängigkeit von  $\frac{\pi^2}{R}$  bzw.  $k$  auf und vergleicht sie mit den für Knicken maßgebenden  $\gamma$ -Werten, so ergibt sich nach Bild 5.1 eine so weitgehende Übereinstimmung, daß man unter Beachtung der getroffenen vereinfachenden Annahmen praktisch mit den gleichen  $\gamma$ -Werten für frei aufliegende Biegeträger bei beliebiger Belastungsanordnung und für zusammengesetzte Druckstäbe rechnen kann, wobei ungünstigerweise einheitlich mit den unteren Werten gerechnet werden soll.

Da für die Tragwerkselemente des Holzbaues die wirksamen  $C_y$ -Werte für die einzelnen Verbindungsmittel und Bauarten angegeben werden konnten, können hierfür nunmehr die wirksamen Trägheitsmomente bestimmt und der Durchbiegungs- und Spannungsnachweis geführt werden. Eine Ergänzung ist nur noch bezüglich der statisch unbestimmt gelagerten Biegeträger erforderlich, für welche nach Durchrechnung der praktisch bedeutsamen Lastfälle noch allgemein gültige  $\gamma$ -Werte für den Feld- und Stützenbereich angegeben werden müssen.

Die Untersuchungen haben gezeigt, daß die Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel nicht nur bei den zusammengesetzten Bauteilen des Holzbaues, sondern auch im Stahlbau und Stahlträger-Verbundbau von beträchtlichem Einfluß werden kann. Es wird Aufgabe der Versuchsforschung sein, die bei diesen Bauweisen notwendigen Unterlagen durch weitere systematische und umfangreiche Versuche zu erarbeiten, wobei auch eine Erweiterung der Untersuchungen auf den Bereich der plastischen Formänderungen ins Auge gefaßt werden muß.



Schrifttum

1. Amstutz E.: Die Knicklast gegliederter Stäbe. Schweizerische Bauzeitung 1941, S.97.
2. Bleich F.: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin 1924
3. Egner K.: Versuche mit zweiteiligen, geleimten Holzstützen. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 9(1953) und 20(1955).
4. Engesser F.: Über die Knickfestigkeit von Rahmenstäben. Zentralblatt der Bauverwaltung 1909, S.136.
5. Gaber E.: Zusammenwirken von Nietung und Schweißung bei Zug und Druck. Der Bauingenieur 1932, S.290.
6. Graf O.: Über Versuche mit Verbundträgern. Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 10(1951), S.74.
7. Graf O.: Vergleichende Untersuchungen mit Dübelverbindungen. Die Bautechnik 1944, S.23.
8. Granholm H.: Om sammanata balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner. Göteborg 1949.
9. Heilig R.: Theorie des elastischen Verbunds. Der Stahlbau 1953, S.104.
10. Hoeffgen H.: Gleit- und Fließgrenze von Nietverbindungen. Mitteilungsheft der Versuchsanstalt für Holz, Stein und Eisen, Heft 4 (1935). TH Karlsruhe.
11. Hoischen A.: Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter Vollwandträger mit elastischen Verbindungsmitteln. Dissertation TH Karlsruhe 1952.
12. Hoischen A.: Verbundträger mit elastischer und unterbrochener Verdübelung. Der Bauingenieur 1954, S.241.
13. Homberg H.: Brücke mit elastischem Verbund zwischen den Stahlhauptträgern und der Betonfahrbahntafel. Der Bauingenieur 1952, S.213.
14. Lombardi G.: Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz. Schweizerische Bauzeitung 1951, S.301.
15. Möhler K.: Biege- und Knickversuche mit zusammengesetzten Holzdruckstäben. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 9 (1953).
16. Möhler K.: Biege- und Knickversuche an Stützen mit zusammengesetzten, kontinuierlich vernagelten Holzquerschnitten. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 20(1955).
17. Sattler K.: Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Tragwerke mit elastischem Verbund. Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbauverbandes, Heft 8(1955).
18. Southwell R. V.: On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability. Proceedings of the Royal Society, Vol. 135a, London 1932.
19. Steinhardt O.: Die Entwicklung des Stahlbaues im Spiegel der amtlichen Bestimmungen. Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 10(1951).
20. Steinhardt O. und Möhler K.: Versuche mit zusammengesetzten genagelten I-Holzbiegeträgern. Deutscher Zimmermeister 1951, Heft 7.
21. Stüssi F.: Zusammengesetzte Vollwandträger. Abhandlungen der IVBH, 8. Band, S.249. Zürich 1947.

