

Die Berechnung nachgiebig verbundener,
zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau

von
Dipl.-Ing. Wolfgang Schelling
aus Ludwigshafen/Rhein

Karlsruhe
- 1968 -

Die Berechnung nachgiebig verbundener, zusammengesetzter Biegeträger im Ingenieurholzbau

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität (TH) Karlsruhe

genehmigte
D i s s e r t a t i o n

von
Dipl.-Ing. Wolfgang Schelling
aus Ludwigshafen/Rhein

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Januar 1968
Referent: Prof. Dr.-Ing. K. Möhler
Korreferent: Prof. Dr.-Ing., Dr. sc. techn. h. c. O. Steinhardt

Lehrstuhl für
Ingenieurholzbau u. Baukonstruktionen
Karlsruhe Universität im Saarland
- 1968 - Prof. Dr.-Ing. K. Möhler

D 68 / 2

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität (TH) Karlsruhe. Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr.- Ing. K. M ö h l e r, sage ich für die Uebernahme des Referates und die während der Durchführung der Arbeit gegebenen wertvollen Hinweise und Anregungen meinen herzlichsten Dank.

Herrn Prof. Dr. -Ing., Dr.sc.techn.h.c. O. S t e i n h a r d t danke ich für das Korreferat und das rege Interesse, das er meiner Arbeit entgegen brachte.

Karlsruhe, im Januar 1968

Wolfgang Schelling

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	4
2. Herleitung der Grundgleichungen zur Berechnung von nachgiebig verbundenen Biegeträgern mit beliebig vielen Einzelquerschnitten	8
2.1. Voraussetzungen	8
2.2. Die Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten	10
2.3. Die Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	17
2.3.1. Vorbetrachtungen	17
2.3.2. Erforderliche Abhängigkeit der Fugensteifigkeiten untereinander	18
2.3.3. Ermittlung der Grundgleichungen	21
3. Lösung der Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten mit Hilfe von Fourierreentwicklungen	25
3.1. Diskussion des Lösungsweges	25
3.2. Fundamentallösung für eine komplexe Querkraft der Form $Q(x) = Q_0(\cos vx + i.\sin vx)$	27
3.2.1. Der fünfteilige Querschnitt	27
3.2.2. Der vierteilige Querschnitt	41
3.2.3. Der dreiteilige Querschnitt	44
3.2.4. Der Querschnitt aus beliebig vielen Einzelquerschnitten	46
3.3. Der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast	47
3.4. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	54
3.5. Der Einfeldträger unter Einzellast	57
3.6. Der Durchlaufträger über 2 Felder	61
4. Lösung der Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	65
4.1. Vorbemerkungen	65
4.2. Lösung mit Hilfe von Fourierreentwicklungen	66
4.2.1. Fundamentallösung für eine komplexe Querkraft der Form $Q(x) = Q_0(\cos vx + i.\sin vx)$	66
4.2.2. Der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast	70
4.2.3. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	73
4.2.4. Der Einfeldträger unter Einzellast	74

	Seite
4.3. Lösung mit Hilfe exakter Methoden	75
4.3.1. Der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast	75
4.3.2. Der Einfeldträger unter einseitiger Gleichlast	81
4.3.3. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	83
4.3.4. Der Einfeldträger unter Einzellast	84
5. Auswertung der Lösungen	85
5.1. Allgemeines	85
5.2. Näherungslösung für freiaufliegende Einfeldträger entsprechend DIN E 1052	86
5.2.1. Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	86
5.2.2. Querschnitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten	87
5.3. Vergleich der Näherung mit der exakten Lösung für Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	88
5.3.1. Beim Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	88
5.3.2. Beim Einfeldträger unter Einzellast	91
5.3.2.1. Punktförmige Einzellast	91
5.3.2.2. Verteilte Einzellast	96
5.3.2.3. Wandernde Einzellast	99
5.3.3. Abschätzung der Verhältnisse bei Querschnitten mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten	101
5.4. Der Durchlaufträger über zwei gleiche Felder unter Vollast	103
6. Die praktische Berechnung	112
6.1. Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	112
6.2. Querschnitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten	117
6.3. Berücksichtigung von Querschnittsschwächungen	120
6.4. Zahlenbeispiele	123
6.4.1. Beispiel 1 - Unsymmetrischer dreiteiliger Querschnitt mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten	123
6.4.1.1. Als Einfeldträger unter Gleichstreckenlast	124
6.4.1.2. Als Einfeldträger unter Einzellast in Trägermitte	127
6.4.1.3. Als Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,2.l$	130

	Seite
6.4.1.4. Als Durchlaufträger über zwei gleiche Felder unter Gleichstreckenlast	133
6.4.1.5. Einfluß der Querschnittsschwächungen	135
6.4.2. Beispiel 2 - Vierteiliger verdübelter Balken unter Einzellast in Balkenmitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten	136
6.4.2.1. Exakte Berechnung nach Abschnitt 3.5	137
6.4.2.2. Exakte Berechnung nach Abschnitt 6.2 mit Hilfe der im Anhang angegebenen Tafeln	139
6.4.2.3. "Näherungsrechnung" nach Abschnitt 5.2.2	141
6.4.2.4. Vergleich der "Näherung" mit den exakten Werten	142
6.4.2.5. Spannungen im geschwächten Querschnittsteil	143
7. Zusammenfassung	145
8. Schrifttum	149
9. Anhang (22 Tafeln)	151
10. Lebenslauf	

1. Einleitung

Im Ingenieurholzbau werden zur Ueberbrückung größerer Spannweiten neben Stab- und Fachwerken in großem Umfang vollwandige Biegeträger mit aus Einzelhölzern zusammengesetzten Querschnitten verwendet, da die handelsüblichen Kanthölzer wegen ihrer naturbedingt geringen Abmessungen nur verhältnismäßig kleine Biegemomente aufnehmen können.

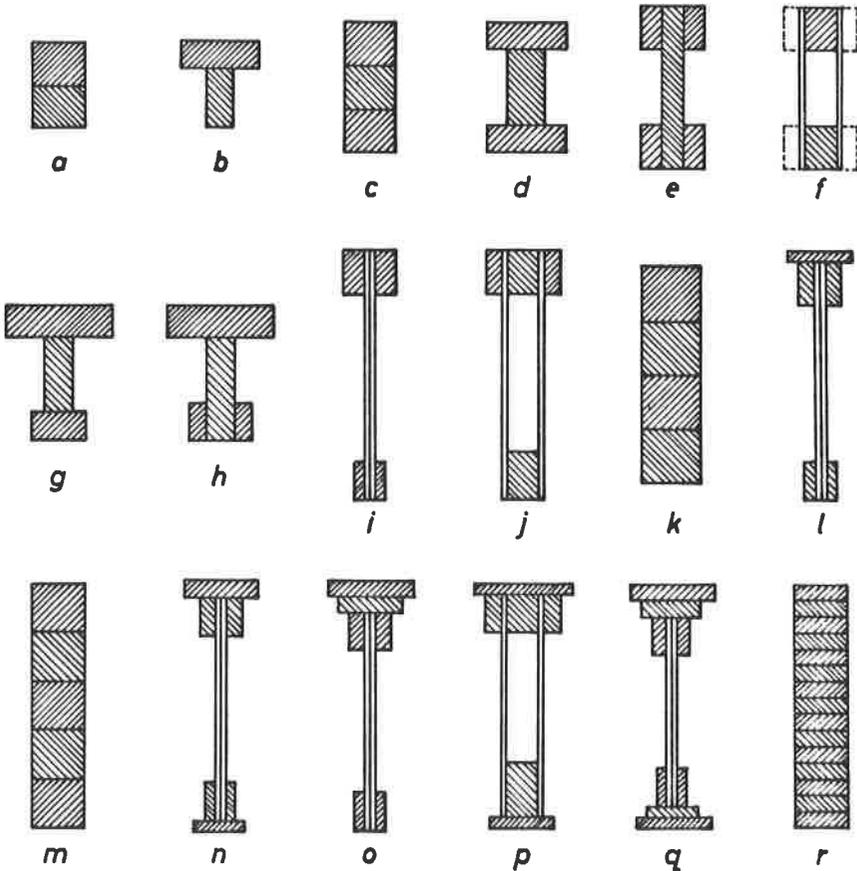


Bild 1.1: Querschnittsformen zusammengesetzter hölzerner Biegeträger

Durch geschickte Kombination der Einzelquerschnitte können für fast jeden Verwendungszweck, angefangen von leichten Deckenträgern bis zu schweren Hallenbindern und Brückenträgern, statisch günstige Querschnitte erzeugt werden, wobei

insbesondere durch Anwendung moderner Holzwerkstoffe (Furnier-, Span- oder Hartfaserplatten) als Beplankung oder Stegmaterial die Konstruktion flacher Flächentragwerke bzw. hoher Stegträger mit I- oder Kastenprofil möglich wird. In Bild 1.1 sind einige der am häufigsten in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen systemhaft dargestellt. Mit Rücksicht auf die seitliche Stabilität werden die gedrückten Obergurte meist stärker als die Untergurte ausgebildet; dies führt zu unsymmetrischen, aber wirtschaftlichen Trägerformen. Die Verbindung der einzelnen Trägerteile untereinander erfolgt entweder mit mechanischen Verbindungsmitteln (hauptsächlich Nägel, Holzschrauben und Dübel) oder durch Leimung.

Die Berechnung kontinuierlich verleimter Biegeträger kann mit der in der Baupraxis üblichen Genauigkeit nach der klassischen Biegetheorie, also unter Zugrundelegung des Hooke'schen Gesetzes über die Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung und der Bernoulli'schen Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnittes vorgenommen werden, da die Verleimung einen im praktischen Sinne starren Verbund zwischen den Einzelquerschnitten herstellt. Bei Anwendung mechanischer Verbindungsmittel findet infolge der Nachgiebigkeit der Verbindung in den Fugen zwischen den Einzelquerschnitten ein Schlupf statt, der zu Sprüngen in den Dehnungs- bzw. Spannungsdiagrammen führt und eine Abminderung der Tragfähigkeit des Trägers gegenüber starrem Verbund hervorruft. Die Bernoulli'sche Hypothese kann hier nur noch auf die Einzelquerschnitte angewendet werden, während sie für den Gesamtquerschnitt keine Gültigkeit mehr besitzt.

Das Tragverhalten solcher nachgiebig verbundener hölzerner Biegeträger mit zweiteiligen und symmetrischen dreiteiligen Querschnittsformen nach Bild 1.1.a-f (Gurt- bzw. Stegteile, die im Belastungszustand gleiche Dehnungen aufweisen, zählen dabei rechnerisch jeweils als ein Einzelquerschnitt) wurde von St ü s s i [1,2], Granholm [3], Steinhardt [4,4b], Hoischen [5] und Möhler [4,6,7,8] sowohl theoretisch als auch praktisch untersucht. Parallel dazu verlaufende Arbeiten von Steinhardt [4a,b,c], Homborg [9], Heilig [10], Hoischen [11] und Sattler [12] über den Einfluß der Nachgiebigkeit der Verbindung bei zweiteiligen Stahlbeton - Stahl Verbundträgern führten zu ähnlichen Ergebnissen. Möhler hat in [7] all diese Untersuchungen für einfa-

che Belastungsfälle zusammengefaßt und ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, welches bereits in die Neufassung der Holzbaubestimmungen (DIN E 1052, Ausgabe März 1965 [13]) aufgenommen wurde.

Während also für zweiteilige und symmetrische dreiteilige nachgiebig zusammengesetzte Biegeträger genügend Berechnungsgrundlagen vorliegen, fehlen diese für Träger mit dreiteiligen unsymmetrischen und mehr als dreiteiligen Querschnittsformen (s. Bild 1.1.g-r) fast völlig. In [5] hat H o i s c h e n zur Berechnung der Schnittgrößen eines dreiteiligen unsymmetrischen Querschnittes nach Bild 1.1.g ein zweiteiliges gekoppeltes Differentialgleichungssystem aufgestellt und auch in allgemeiner Form den mathematisch exakten Lösungsweg beschrieben; Lösungen für die in der Praxis üblichen Belastungsfälle gibt er jedoch nur wieder für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Trägerquerschnitte an, da die Auflösung dieses Systems für den dreiteiligen unsymmetrischen Querschnitt unter Beachtung der jeweiligen Randbedingungen zu umfangreichen und praktisch nicht mehr überschaubaren Ausdrücken führt. L o m b a r d i gibt in [14] für kontinuierlich verbundene und zu beiden Hauptachsen symmetrische, aus maximal fünf Einzelteilen bestehende Druckstäbe eine im elastischen Bereich gültige Berechnungsmethode an, die jedoch auf Biegeträger nicht ohne weiteres anwendbar ist. In Rußland hat unabhängig von den vorgenannten Arbeiten P l e š k o v [15] ein Verfahren zur Berechnung von Stabquerschnitten, die aus beliebig vielen Einzelteilen zusammengesetzt und mit nachgiebigen Verbindungsmitteln versehen sind, entwickelt und vorwiegend auf Druckstäbe angewendet. Mit Hilfe der nachstehend gewonnenen Erkenntnisse läßt sich leicht nachweisen, daß der von Pleškov in seinem Gedankenmodell vorausgesetzte Spannungsverlauf nur dann möglich ist, wenn die Steifigkeit und der Abstand der Verbindungsmittel (im folgenden kurz als "Fugensteifigkeit" bezeichnet) von Fuge zu Fuge in einem ganz bestimmten, von der Form des Gesamtquerschnittes abhängigen Verhältnis zueinander stehen. Pleškov stellt diese Forderung nicht, sondern rechnet bei unterschiedlichen Fugensteifigkeiten einfach mit dem arithmetischen Mittel der einzelnen Werte. Bei seiner Berechnungsmethode stimmt also in der Regel der tatsächliche Spannungsverlauf mit dem angenommenen nicht mehr überein. Dieser Widerspruch, der bei zweiteiligen und symmetrischen dreiteiligen Querschnitten verschwindet, mag sich

auf die Bestimmung der kritischen Knicklasten von Druckstäben, bei der es hauptsächlich auf die Kenntnis des wirksamen Trägheitsmomentes ankommt, nur wenig auswirken, während er bei Biegeträgern zu vollkommen falschen Vorstellungen über den tatsächlichen Spannungsverlauf führen kann; es ist z.B. durchaus möglich, in ein und demselben Trägerquerschnitt bei Einhaltung des gleichen wirksamen Trägheitsmomentes allein durch entsprechende Abwandlung der Fugensteifigkeiten völlig unterschiedliche Spannungsbilder zu erzeugen, deren Maximalwerte um mehrere 100 % voneinander abweichen können.

Nachdem die kritische Durchsicht der einschlägigen Literatur gezeigt hat, daß zur Berechnung der Weg- und Schnittgrößen von Biegeträgern mit dreiteiligen unsymmetrischen und mehr als dreiteiligen nachgiebig verbundenen Querschnittsformen (Beispiele s. Bild 1.1.g-r) keine ausreichenden und vor allem auch zutreffenden Unterlagen vorhanden sind, werden in der nachfolgenden Abhandlung zunächst in allgemeiner Form die Grundgleichungen für nachgiebig aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzte Biegeträger abgeleitet. Es wird unterschieden zwischen Trägern, bei denen die Fugensteifigkeiten der einzelnen Verbindungsfugen voneinander unabhängig sind, und solchen, bei denen die Fugensteifigkeiten in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Für beide Fälle werden Lösungen angegeben, deren Aufbau es ermöglicht, die Weg- und Schnittgrößen jeweils aus denjenigen eines starr verbundenen Trägers mit gleichem Gesamtquerschnitt durch Multiplikation mit einem Nachgiebigkeitsfaktor zu ermitteln. Im Anhang finden sich zahlreiche Tafeln, aus denen für die wichtigsten Belastungsfälle und alle in der Praxis vorkommenden Trägersteifigkeiten diese Nachgiebigkeitsfaktoren entweder unmittelbar abgelesen oder mit deren Hilfe über einfache Beziehungen gewonnen werden können. Die numerische Berechnung dieser Tafeln und der übrigen den Text ergänzenden Tabellen und Diagramme wurde mit Hilfe der elektronischen Rechenanlagen Z 22 und ER 56 der TH Karlsruhe vorgenommen. Neben den exakten Ergebnissen wird ein den in DIN E 1052 [13] aufgenommenen Berechnungsvorschriften entsprechendes Näherungsverfahren entwickelt und kritisch mit den tatsächlichen Lösungen verglichen. Abschließend wird die praktische Durchführung der Berechnung mehrteiliger Biegeträger mit Hilfe der angegebenen Formeln und Tafeln erläutert und anhand von Beispielen verdeutlicht.

2. Herleitung der Grundgleichungen zur Berechnung von nachgiebig verbundenen Biegeträgern mit beliebig vielen Einzelquerschnitten

2.1. Voraussetzungen

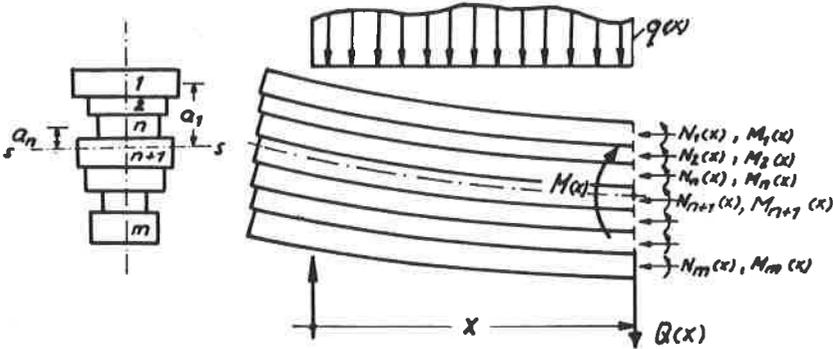


Bild 2.1.

Der Berechnung wird ein aus m Einzelquerschnitten zusammengesetzter Trägerquerschnitt nach Bild 2.1 zugrundegelegt, wobei die Einzelquerschnitte untereinander in den Berührungsfugen durch über die gesamte Trägerlänge in regelmäßigen, nicht zu großen Abständen angeordnete, gleichsteife und elastisch verformbare Verbindungsmittel miteinander verbunden sind. In diesem Falle verhalten sich die an einer beliebigen Stelle x des Trägers in den Berührungsfugen zwischen den Einzelquerschnitten n und n+1 zu übertragenden Schubkräfte $t_{n,n+1}(x)$ (kp/cm) proportional zu den auftretenden Verschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ (cm) und es ergibt sich die wichtige Beziehung:

$$t_{n,n+1}(x) = C_{n,n+1} \cdot \delta_{n,n+1}(x) \quad (2.1)$$

Darin bezeichnet die Konstante $C_{n,n+1}$ (kp/cm²) den "Verschiebungsmodul" oder die "Fugensteifigkeit" der betrachteten Fuge.

Bei punktförmigen Verbindungsmitteln, und nur solche kommen im Ingenieurholzbau mit Ausnahme der Leimung in Frage, erhält man diese "Fugensteifigkeit" aus dem Verschiebungsmodul C_v (kp/cm) der verwendeten Verbindungsmittel dividiert durch ihren Abstand e' untereinander:

$$C_{n,n+1} = \frac{C_{v,n,n+1}}{e'_{n,n+1}} \quad (2.2)$$

Die Verschiebungsmoduln der verschiedenen im Ingenieurholzbau vorkommenden mechanischen Verbindungsmittel sind durch ausführliche Untersuchungen von S t ü s s i [1], G r a n h o l m [3] und M ö h l e r [6-8] weitgehend bekannt und wurden unter Einrechnung der üblichen Sicherheiten in den Neuentwurf der DIN 1052 "Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung" [13] aufgenommen. Die dort aufgeführten Werte werden bei Bedarf vorliegender Untersuchung zugrunde gelegt. Die Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$ können für die in Abschnitt 2.2 geführten Ableitungen von Fuge zu Fuge beliebig differieren, während in den Ableitungen in Abschnitt 2.3 eine gewisse Abhängigkeit untereinander vorausgesetzt wird, welche die Berechnung später wesentlich vereinfacht.

Die Einzelquerschnitte müssen über die gesamte Trägerlänge konstante Querschnittsflächen F_n besitzen. Dabei ist die Rechteckform, wie sie in den Bildern 2.1 und 2.2 gezeigt wird, keine Voraussetzung. Die Elastizitätsmoduln der Einzelquerschnitte E_n können untereinander verschieden sein, so daß die folgende Untersuchung ganz allgemein auch Gültigkeit für beliebige Verbundquerschnitte aus unterschiedlichen Materialien besitzt. Wie in der Berechnung der Verbundbauweisen üblich, werden die Querschnittsflächen F_n und die Einzelträgheitsmomente I_n der Einzelquerschnitte sowie das ideelle Trägheitsmoment J des Gesamtquerschnittes auf einen beliebigen Vergleichs-Elastizitätsmodul E bezogen. Dabei werden zur Vereinfachung der Schreibweise folgende Abkürzungen benutzt:

E = beliebiger Vergleichs-Elastizitätsmodul

$$F_n = F_n \cdot \frac{E_n}{E} \quad (2.3) \quad J_n = I_n \cdot \frac{E_n}{E} \quad (2.4)$$

$$J = \sum_1^m J_n + \sum_1^m (F_n a_n^2) \quad (2.5)$$

Unter Verwendung dieser Abkürzungen kann die Berechnung eines aus verschiedenen Materialien zusammengesetzten Trägers auf die eines Trägers mit in allen Einzelquerschnitten gleichem Elastizitätsmodul E zurückgeführt werden.

Nachstehende Ableitungen gelten nur für Träger, deren Achse vor der Belastung geradlinig verläuft. Dabei wird die Schubverformung der Einzelquerschnitte nicht berücksichtigt. Für die Einzelquerschnitte gilt also die klassische Biegetheorie.

2.2. Die Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten

Bei einem aus m Einzelquerschnitten zusammengesetzten Träger nach Bild 2.1 teilt sich ein durch äußere Belastung erzeugtes Moment $M(x)$ auf in auf die Einzelquerschnitte wirkende Einzelmomente $M_n(x)$ und in in den Schwerpunkten der Einzelquerschnitte angreifende Normalkräfte $N_n(x)$. Die Normalkräfte $N_n(x)$ schwanken dabei zwischen den bei starrem Verbund auftretenden Normalkräften und 0, die Einzelmomente $M_n(x)$ zwischen den Einzelmomenten bei starrem Verbund und denjenigen bei unverbundenen Querschnitten. Das Momentengleichgewicht um den geometrischen Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts an der Stelle x (s. Bild 2.1) ergibt:

$$M(x) = \sum_1^m M_n(x) + \sum_1^m [N_n(x) \cdot a_n] \quad (2.6)$$

Darin ist a_n der Abstand des Einzelquerschnittes n von der geometrischen Schwerachse des Gesamtquerschnittes. Die Einzelmomente $M_n(x)$ und die Normalkräfte $N_n(x)$ sind unbekannte Schnittgrößen. Ihre Bestimmung erfolgt hier über die ebenfalls unbekanntenen gegenseitigen Verschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ zweier benachbarter Einzelquerschnitte und die jeweiligen Durchbiegungen $y(x)$. Die Änderung der Verschiebung $\delta_{n,n+1}(x)$ zwischen zwei benachbarten Querschnitten n und $n+1$ über die Länge dx ergibt sich aus Bild 2.2 durch folgende geometrische Beziehung:

$$\begin{aligned}
 & [dx + \epsilon_n^{(s)}(x) dx] \cdot \frac{R_n(x) + e_n^{(u)}}{R_n(x)} + d_{n,n+1}(x+dx) = \\
 & = d_{n,n+1}(x) + [dx + \epsilon_{n+1}^{(s)}(x) dx] \cdot \frac{R_{n+1}(x) - e_{n+1}^{(o)}}{R_{n+1}(x)}
 \end{aligned}$$

Darin bedeuten $e_n^{(u)}$ und $e_{n+1}^{(o)}$ die unteren beziehungsweise oberen Randabstände der Einzelquerschnitte von ihren Schwerachsen und $R_n(x)$ und $R_{n+1}(x)$ die Krümmungsradien der Schwerachsen der Einzelquerschnitte n und $n+1$ an der Stelle x .

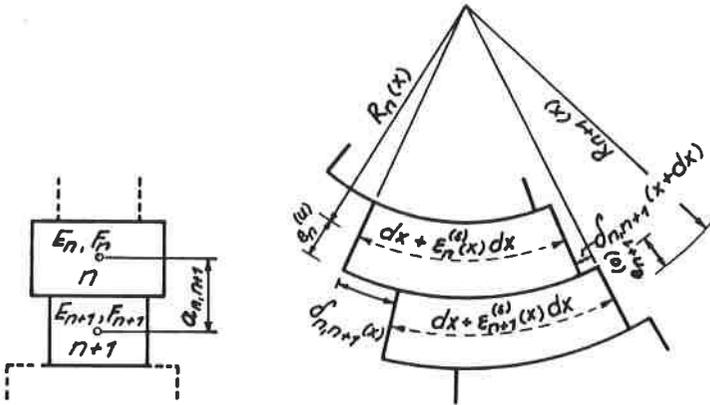


Bild 2.2.

Durch Umrechnung erhält man daraus dann die Änderung der Verschiebung zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{dd_{n,n+1}(x)}{dx} &= \frac{d_{n,n+1}(x+dx) - d_{n,n+1}(x)}{dx} = \\
 &= -\frac{e_n^{(u)}}{R_n(x)} - \frac{e_{n+1}^{(o)}}{R_{n+1}(x)} - \epsilon_n^{(s)}(x) + \epsilon_{n+1}^{(s)}(x) - \\
 &\quad - \epsilon_n^{(s)}(x) \frac{e_n^{(u)}}{R_n(x)} - \epsilon_{n+1}^{(s)}(x) \frac{e_{n+1}^{(o)}}{R_{n+1}(x)} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Die Dehnung $\epsilon_n^{(s)}(x)$ und $\epsilon_{n+1}^{(s)}(x)$ der in den Schwerlinien der Querschnitte n und $n+1$ liegenden Fasern ergeben sich, da in

Bild 2.1 die Normalkräfte N_n und N_{n+1} als Druckkräfte positiv angesetzt wurden, zu:

$$\begin{aligned} e_n^{(1)}(x) &= -\frac{N_n(x)}{E_n F_n} = -\frac{N_n(x)}{E \cdot F_n} \\ e_{n+1}^{(3)}(x) &= -\frac{N_{n+1}(x)}{E_{n+1} F_{n+1}} = -\frac{N_{n+1}(x)}{E \cdot F_{n+1}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Für die Einzelquerschnitte gilt nach der klassischen Biegelehre zwischen Krümmungsradius $R_n(x)$ und Durchbiegung $y_n(x)$ die bekannte Beziehung:

$$\frac{M_n(x)}{E_n I_n} = \frac{M_n(x)}{E J_n} = \frac{1}{R_n(x)} \approx -\frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} \quad (2.9)$$

Die beiden letzten Glieder der Gl. (2.7) sind Größen zweiter Ordnung und können für die weitere Betrachtung des vorliegenden Problems vernachlässigt werden. Unter Verwendung der Gln. (2.8) und (2.9) erhält man dann aus der solchermaßen verkürzten Gleichung (2.7):

$$\frac{d^2 d_{n,n+1}(x)}{dx^2} = e_n^{(4)} \frac{d^2 y_n(x)}{dx^2} + e_{n+1}^{(6)} \frac{d^2 y_{n+1}(x)}{dx^2} + \frac{N_n(x)}{E F_n} - \frac{N_{n+1}(x)}{E F_{n+1}} \quad (2.10)$$

Für die beim geraden Balken vorliegenden Verhältnisse kann mit guter Annäherung gesetzt werden:

$$y_n(x) = y_{n+1}(x) = y(x) \quad (2.11)$$

Dabei sei $y(x)$ die Durchbiegung der geometrischen Schwerachse des Gesamtquerschnittes.

Beachtet man ferner, daß nach Bild 2.2

$$e_n^{(4)} + e_{n+1}^{(6)} = a_{n,n+1} \quad (2.12)$$

ist, dann vereinfacht sich Gl. (2.10) wesentlich auf:

$$\frac{d^2 d_{n,n+1}(x)}{dx^2} = a_{n,n+1} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{N_n(x)}{E F_n} - \frac{N_{n+1}(x)}{E F_{n+1}} \quad (2.13)$$

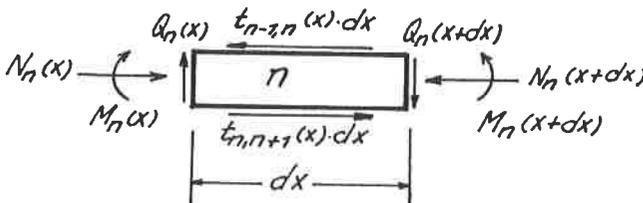


Bild 2.3.

Betrachtet man die Kräfteverhältnisse an einem aus dem Träger herausgetrennten Einzelquerschnitt der Länge dx (Bild 2.3), dann ergibt sich zwischen der Zunahme der dort vorhandenen Normalkraft $N_n(x)$ und den Schubkräften $t_{n-1,n}(x)$ und $t_{n,n+1}(x)$ in den anschließenden Verbindungsfugen die Beziehung:

$$N_n(x) + t_{n,n+1} dx = N_n(x+dx) + t_{n-1,n} dx \quad (2.14)$$

Oder:

$$\frac{dN_n(x)}{dx} = \frac{N_n(x+dx) - N_n(x)}{dx} = t_{n,n+1}(x) - t_{n-1,n}(x) \quad (2.15)$$

Beachtet man weiter, daß nach Gl. (2.1) für

$$t_{n-1,n}(x) = C_{n-1,n} \cdot \delta_{n-1,n}(x)$$

$$t_{n,n+1}(x) = C_{n,n+1} \cdot \delta_{n,n+1}(x)$$

geschrieben werden kann, dann erhält man aus Gl. (2.15) schließlich den Zusammenhang zwischen der Normalkraft $N_n(x)$ und den Verschiebungen $\delta_{n-1,n}(x)$ und $\delta_{n,n+1}(x)$ in den angrenzenden Fugen zu:

$$\frac{dN_n(x)}{dx} = C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}'(x) - C_{n-1,n} \delta_{n-1,n}'(x) \quad (2.16)$$

Setzt man Gl. (2.16) in die zusätzlich vorher noch einmal nach x differenzierte Gl. (2.13) ein, dann erhält man zwischen der Verschiebung $\delta_{n,n+1}(x)$ zweier benachbarter Einzelquerschnitte n und $n+1$ und der Durchbiegung $y(x)$ der Gesamtschwerachse des Trägers die wichtige Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta_{n,n+1}(x)}{dx^2} &= a_{n,n+1} \frac{d^3 y(x)}{dx^3} - \frac{C_{n-1,n}}{E \cdot F_n} \delta_{n-1,n}'(x) + \\ &+ \left(\frac{1}{E F_n} + \frac{1}{E F_{n,n+1}} \right) C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}'(x) - \frac{C_{n+1,n+2}}{E F_{n+1}} \delta_{n+1,n+2}'(x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Oder mathematisch vereinfacht geschrieben:

$$\begin{aligned} \delta_{n,n+1}''(x) &= a_{n,n+1} y'''(x) - \frac{C_{n-1,n}}{E F_n} \delta_{n-1,n}'(x) + \\ &+ \left(\frac{1}{E F_n} + \frac{1}{E F_{n,n+1}} \right) C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}'(x) - \frac{C_{n+1,n+2}}{E F_{n+1}} \delta_{n+1,n+2}'(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathcal{L}_{n-1,n} = \frac{C_{n-1,n}}{E F_n} \quad (2.19)$$

$$\lambda_{n,n+1} = \left(\frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} \right) \cdot \frac{C_{n,n+1}}{E} \quad (2.20)$$

$$\mu_{n+1,n+2} = \frac{C_{n+1,n+2}}{E F_{n+1}} \quad (2.21)$$

vereinfacht sich Gl. (2.18) weiter auf:

$$\delta_{n,n+1}'' = a_{n,n+1} y''' - \lambda_{n-1,n} \delta_{n-1,n} + \lambda_{n,n+1} \delta_{n,n+1} - \mu_{n+1,n+2} \cdot \delta_{n+1,n+2} \quad (2.22)$$

Gleichung (2.22) muß für jede Fuge des Gesamtquerschnittes aufgestellt werden. Damit erhält man bei einem Querschnitt aus m Einzelteilen m-1 gekoppelte Differentialgleichungen für die m vorkommenden und voneinander unabhängigen unbekanntenen Weggrößen δ und y. Zur eindeutigen Bestimmung dieser Unbekannten ist somit eine weitere Bedingung erforderlich. Dazu eignet sich am besten Gl. (2.6). Danach ist

$$M(x) = \sum_1^m M_n(x) + \sum_1^m [N_n(x) \cdot a_n]$$

Durch einmalige Ableitung nach x erhält man daraus:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = \sum_1^m \frac{dM_n(x)}{dx} + \sum_1^m \left[\frac{dN_n(x)}{dx} a_n \right] \quad (2.23)$$

Die erste Summe dieses Ausdrucks ergibt sich bei Verwendung der Gl. (2.9) und (2.15) zu:

$$\sum_1^m \frac{dM_n(x)}{dx} = - \sum_1^m (y_n'' E J_n) \approx - y''' E \sum_1^m J_n \quad (2.24)$$

Die zweite Summe läßt sich mittels Gl. (2.16) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \sum_1^m \frac{dN_n(x)}{dx} a_n &= - \sigma && + C_{12} \delta_{12} a_1 \\ &- C_{12} \delta_{12} a_2 && + C_{23} \delta_{23} a_2 \\ &- C_{23} \delta_{23} a_3 && + C_{34} \delta_{34} a_3 \\ &\vdots && \vdots \\ &- C_{n-1,n} \delta_{n-1,n} a_n && + C_{n,n+1} \delta_{n,n+1} a_n \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots \\
 & - C_{m-2,m-1} \delta_{m-2,m-1} a_{m-1} + C_{m-1,m} \delta_{m-1,m} a_{m-1} \\
 & - C_{m-1,m} \delta_{m-1,m} a_m + 0
 \end{aligned}$$

Oder zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
 \sum_1^m \frac{dN_n(x)}{dx} a_n &= C_{12} \delta_{12} (a_1 - a_2) + \\
 &+ C_{23} \delta_{23} (a_2 - a_3) + \\
 &\dots \\
 &+ C_{n,n+1} \delta_{n,n+1} (a_n - a_{n+1}) + \\
 &\dots \\
 &+ C_{m-1,m} \delta_{m-1,m} (a_{m-1} - a_m)
 \end{aligned}$$

Da jedoch, wie aus Bild 2.1 hervorgeht,

$$a_n - a_{n+1} = a_{n,n+1}$$

ist, läßt sich geschlossen schreiben:

$$\sum_1^m \frac{dN_n(x)}{dx} a_n = \sum_1^{m-1} (C_{n,n+1} \delta_{n,n+1} a_{n,n+1}) \quad (2.25)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.25) und (2.24) in Gl. (2.23) erhält man endlich die letzte zur Bestimmung der Weggrößen δ und y erforderliche Differentialgleichung:

$$Q(x) = -y''(x) E \sum_1^m J_n + \sum_1^{m-1} [C_{n,n+1} a_{n,n+1} \delta_{n,n+1}(x)] \quad (2.26)$$

Für einen aus insgesamt m Einzelquerschnitten zusammengesetzten Träger, dessen Fugenverschiebungsmoduln $C_{n,n+1}$ voneinander unabhängig sind, ergibt sich damit endgültig folgendes System von gekoppelten Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{12}'' &= a_{12} y'' & + \lambda_{12} \delta_{12} & - \mu_{23} \delta_{23} \\
 \delta_{23}'' &= a_{23} y'' - \alpha_{12} \delta_{12} & + \lambda_{23} \delta_{23} & - \mu_{34} \delta_{34} \\
 \delta_{34}'' &= a_{34} y'' - \alpha_{23} \delta_{23} & + \lambda_{34} \delta_{34} & - \mu_{45} \delta_{45} \\
 &\vdots & & \vdots \\
 &\vdots & & \vdots
 \end{aligned} \right\} \text{s. (2.22)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_{n,n+1}'' &= a_{n,n+1} y''' - \alpha_{n-1,n} \delta_{n-1,n} + \lambda_{n,n+1} \delta_{n,n+1} - \mu_{n+1,n+2} \delta_{n+1,n+2} \\
 \delta_{m-1,m}'' &= a_{m-1,m} y''' - \alpha_{m-2,m-1} \delta_{m-2,m-1} + \lambda_{m-1,m} \delta_{m-1,m}
 \end{aligned} \right\}$$

$$Q(x) = -y''' E \sum_1^m J_n + \sum_1^{m-1} (C_{n,n+1} a_{n,n+1} \delta_{n,n+1}) \quad \text{s. (2.26)}$$

Mit diesem Differentialgleichungssystem können nun die Weggrößen $\delta_{n,n+1}(x)$ und $y(x)$ grundsätzlich errechnet werden.

Zur Beurteilung der Tragfähigkeit eines zusammengesetzten Trägers werden nun noch zusätzlich die Kraftgrößen $t_{n,n+1}(x)$, $N_n(x)$ und $M_n(x)$ benötigt; diese können aus den Verschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ und der Durchbiegung der Schwerachse des Gesamtquerschnitts $y(x)$ ermittelt werden.

Den in der Verbindungsfuge zweier benachbarter Querschnitte n und $n+1$ zu übertragenden Schubfluß $t_{n,n+1}(x)$ erhält man bei bekanntem $\delta_{n,n+1}(x)$ unmittelbar aus Gl. (2.1).

Die im Schwerpunkt eines Einzelquerschnittes n angreifende Normalkraft ergibt sich dann unter Verwendung von Gl. (2.15) zu:

$$N_n(x) = \int_0^x [t_{n,n+1}(x) - t_{n-1,n}(x)] dx \quad (2.27)$$

Dabei ist zu beachten, daß in Bild 2.1 N als Druckkraft positiv angesetzt wurde.

Aus den Gln. (2.9) und (2.11) folgt weiter für die Einzelmente:

$$M_n(x) = -y'(x) E J_n \quad (2.28)$$

Die Spannungen am oberen bzw. unteren Rande der Einzelquerschnitte errechnen sich dann aus den Gln. (2.27) und (2.28) durch Ueberlagerung der Normal- und Biegespannungen zu:

$$\sigma_n^{(qu)} = -\frac{E_n}{E} \left[\frac{N_n(x)}{J_n} \pm \frac{M_n(x)}{J_n} \right] \quad (2.29)$$

Damit sind alle Grundgleichungen bekannt, die zur Berechnung eines aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzten

Trägers mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten notwendig sind.

2.3. Die Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

2.3.1. Vorbetrachtungen

Betrachtet man das im vorhergehenden Abschnitt gewonnene gekoppelte Differentialgleichungssystem, dann sieht man schnell ein, daß die Auflösung dieses Systems für Trägerquerschnitte, die aus mehr als zwei Einzelquerschnitten bestehen, zu sehr verwickelten und wegen der Vielzahl freier Parameter nicht mehr systematisch auswertbaren Ausdrücken führt. Es mußte deswegen ein Weg gefunden werden, die Berechnung solcher Träger durch Inkaufnahme gewisser Einschränkungen bei der Querschnittsauswahl zu vereinfachen und damit systematische Untersuchungen (s. Kapitel 5) über das Tragverhalten unter verschiedenen Belastungen in Abhängigkeit von nur wenigen überschaubaren Parametern zu ermöglichen.

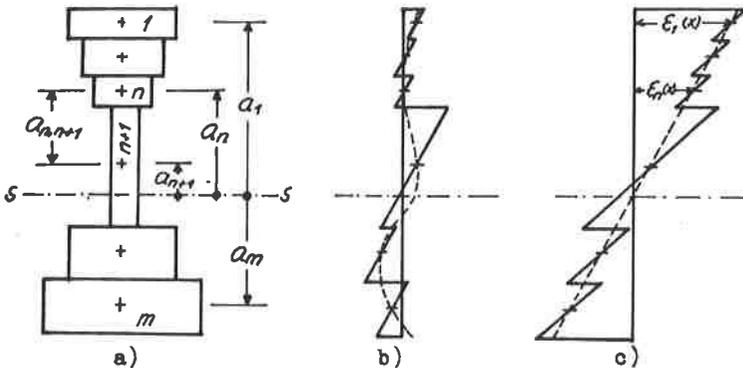


Bild 2.4.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$ zwischen zwei benachbarten Einzelquerschnitten vollkommen unabhängig voneinander sein sollten. In diesem Fall erhält man für einen Querschnitt nach Bild 2.4.a etwa den in Bild 2.4.b dargestellten Dehnungsverlauf. Verbindet man die Dehnungen der in den Schwerachsen der Einzelquerschnitte liegenden Fasern miteinander, so ergibt sich in der Regel als Verbindungslinie eine stark von einer Geraden abweichende Kurve (s. Bild 2.4.b). Dies

bedeutet aber, daß im Gegensatz zur klassischen Biegetheorie der Gesamtquerschnitt eines solchermaßen ausgebildeten Trägers nach der Belastung nicht mehr eben bleibt. Da die Größe der Dehnungssprünge in Höhe der Verbindungsfugen stark von den entsprechenden Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$ abhängig ist, muß sich die Form der Verbindungskurve durch geeignete Wahl der C-Werte der einzelnen Fugen beeinflussen lassen. Eine statisch günstige Lösung wird dann erreicht, wenn aus der Verbindungskurve eine Gerade wird (Bild 2.4.c), welche im geometrischen Schwerpunkt des Gesamtquerschnittes durch 0 geht. In diesem Falle wird, wie man durch Vergleich der Bilder 2.4.b und 2.4.c leicht einsieht, das aus der Dehnungsverteilung resultierende innere Moment, das mit dem durch die Belastung hervorgerufenen äußeren Moment im Gleichgewicht stehen muß, besonders groß. Gleichzeitig wird dabei eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung erreicht.

2.3.2. Erforderliche Abhängigkeit der Fugensteifigkeiten untereinander

Bei den meisten zusammengesetzten Trägerquerschnitten, die im Holzbau zur Anwendung kommen, kann durch entsprechende Wahl der Verbindungsmittel und vor allem durch Variation deren Abstände untereinander nahezu jeder gewünschte Fugenverschiebungsmodul $C_{n,n+1}$ erzeugt werden. Es ist deswegen sinnvoll, die Fugensteifigkeiten so aufeinander abzustimmen, daß die in 2.3.1 beschriebene statisch günstige Lösung möglichst gut erreicht wird.

Im folgenden soll nun untersucht werden, wie sich die Fugensteifigkeiten zueinander verhalten müssen, wenn ein geradliniger Verlauf der Schwerpunktsdehnungen eingehalten werden soll.

Unter obigen Voraussetzungen verhalten sich die Dehnungen der in den Schwerachsen der Einzelquerschnitte 1 und n liegenden Fasern zueinander wie ihre Abstände von der Gesamtschwerachse (s. Bild 2.4.c). In Formeln ausgedrückt:

$$\frac{\epsilon_n^{(s)}(x)}{\epsilon_1^{(s)}(x)} = \frac{a_n}{a_1} \quad (2.30)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird nachfolgend die Dehnung $\epsilon_n^{(s)}(x)$ der im Schwerpunkt eines beliebigen Einzelquerschnittes

liegenden Faser nur noch kurz mit $\epsilon_n(x)$ bezeichnet. Dann kann für Gl. (2.30) auch geschrieben werden:

$$\epsilon_n(x) = \epsilon_1(x) \frac{a_n}{a_1} \quad (2.30a)$$

Nach Gl. (2.13) ergibt sich die Zunahme der Verschiebung zwischen den Querschnitten n und $n+1$ zu

$$\delta'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} y''(x) + \frac{N_n(x)}{E F_n} - \frac{N_{n+1}(x)}{E F_{n+1}}$$

und mit Gl. (2.8) zu:

$$\delta'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} y''(x) - \epsilon_n(x) + \epsilon_{n+1}(x)$$

Wendet man Gl. (2.30) auf vorstehende Gleichung an, dann folgt daraus:

$$\delta'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} y''(x) - \epsilon_1(x) \frac{a_n}{a_1} - \epsilon_1(x) \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

Oder besser:

$$\delta'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} y''(x) - \epsilon_1(x) \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1}$$

Wie aus Bild 2.4 hervorgeht, ist $a_n - a_{n+1} = a_{n,n+1}$.

Damit ergibt sich:

$$\delta'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} \left[y''(x) - \frac{\epsilon_1(x)}{a_1} \right] \quad (2.31)$$

Nach Gl. (2.16) beträgt die Zunahme der Normalkraft eines Einzelquerschnittes n :

$$N'_n(x) = C_{n,n+1} \delta'_{n,n+1}(x) - C_{n-1,n} \delta'_{n-1,n}(x)$$

Mit

$$\epsilon'_n(x) = - \frac{N'_n(x)}{E F_n} \quad (N \text{ als Druckkraft positiv!})$$

erhält man daraus durch wiederholte Anwendung:

$$\begin{aligned} C_{n,n+1} \delta'_{n,n+1}(x) &= - \epsilon'_n(x) E F_n + C_{n-1,n} \delta'_{n-1,n}(x) = \\ &= - \epsilon'_n(x) E F_n - \epsilon'_{n-1}(x) E F_{n-1} + C_{n-2,n-1} \delta'_{n-2,n-1}(x) = \\ &= - \epsilon'_n(x) E F_n - \epsilon'_{n-1}(x) E F_{n-1} - \epsilon'_{n-2}(x) E F_{n-2} - \dots \\ &\quad \dots - \epsilon'_2(x) E F_2 - \epsilon'_1(x) E F_1 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Beziehung (2.30a) ergibt sich daraus weiter:

$$\begin{aligned}
 C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}(x) &= -E_1'(x) E \left[F_1 + F_2 \frac{a_2}{a_1} + F_3 \frac{a_3}{a_1} + \dots + F_n \frac{a_n}{a_1} \right] = \\
 &= -\frac{E_1'(x) E}{a_1} \left[F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + \dots + F_n a_n \right] = \\
 &= -\frac{E_1'(x) E}{a_1} \sum_{n=1}^n F_n a_n \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\delta_{n,n+1} = \sum_{n=1}^n F_n a_n \quad (2.33)$$

stellt aber gerade das auf die Schwerachse des Gesamtquerschnittes bezogene statische Moment der oberhalb der Fuge n,n+1 liegenden Querschnittsteile dar. Gl. (2.17) kann damit vereinfacht geschrieben werden:

$$C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}(x) = -\frac{E_1'(x) E}{a_1} \delta_{n,n+1} \quad (2.34)$$

Bildet man mit Hilfe von Gl. (2.19) das Verhältnis der Schubkräfte in den Fugen n,n+1 und 1,2, dann erhält man, wie von vornherein zu vermuten war, die aus der klassischen Biegelehre her bekannte Beziehung:

$$\frac{t_{n,n+1}(x)}{t_{12}(x)} = \frac{C_{n,n+1} \delta_{n,n+1}(x)}{C_{12} \delta_{12}(x)} = \frac{\delta_{n,n+1}}{\delta_{12}} \quad (2.35)$$

Die Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$ und $C_{1,2}$ verhalten sich dann zueinander wie:

$$\frac{C_{n,n+1}}{C_{12}} = \frac{\delta_{n,n+1}}{\delta_{12}} \cdot \frac{\delta_{12}'(x)}{\delta_{n,n+1}'(x)}$$

Dieses Verhältnis ändert sich nicht, wie leicht nachprüfbar ist, wenn anstelle der Verschiebungen ihre Zunahmen eingesetzt werden. Daraus folgt dann:

$$\frac{C_{n,n+1}}{C_{12}} = \frac{\delta_{n,n+1}}{\delta_{12}} \cdot \frac{\delta_{12}'(x)}{\delta_{n,n+1}'(x)} \quad (2.36)$$

Nach Gl. (2.31) ergab sich die Zunahme der Verschiebung in der Fuge n,n+1 allgemein zu:

$$C'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} \left[y'(x) - \frac{\epsilon_1(x)}{a_1} \right]$$

In Gl. (2.36) eingesetzt erhält man damit endlich das vorzuschreibende Verhältnis der Fugensteifigkeiten zu:

$$\boxed{\frac{C_{n,n+1}}{C_{12}} = \frac{\delta_{n,n+1}}{S_{12}} \cdot \frac{a_{12}}{a_{n,n+1}}} \quad (2.37)$$

Entsprechend Gl. (2.37) folgt allgemein für das Verhältnis der Fugensteifigkeiten zweier beliebiger Fugen:

$$\frac{C_{n,n+1}}{C_{k,k+1}} = \frac{\delta_{n,n+1}}{S_{k,k+1}} \cdot \frac{a_{k,k+1}}{a_{n,n+1}} \quad (2.38)$$

Will man also einen nachgiebig verbundenen Trägerquerschnitt möglichst wirtschaftlich ausnutzen, dann kann lediglich der Fugenverschiebungsmodul einer einzigen Fuge frei gewählt werden, während die Fugensteifigkeiten der restlichen Fugen über die Beziehungen (2.37) bzw. (2.38) mit der frei gewählten zu verknüpfen sind.

2.3.3. Ermittlung der Grundgleichungen

In den unter 2.2 geführten Ableitungen wurden die Verschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ und die Durchbiegung $y(x)$ als Unbekannte benutzt, da sich dabei die geringste Anzahl von untereinander gekoppelten Differentialgleichungen ergaben. Außerdem wurden so die Differentialgleichungen verhältnismäßig kurz, was bei der Lösung sehr von Vorteil ist.

Im Gegensatz dazu sind in der nun folgenden Ableitung die Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$, die Verschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ und nach Voraussetzung auch die Dehnungen der im Schwerpunkt der Einzelquerschnitte liegenden Fasern voneinander abhängig; die Abhängigkeitsverhältnisse gehen aus den Gln. (2.38, 2.36 und 2.30) hervor. Es ist deshalb ausreichend, wenn neben der Durchbiegung $y(x)$ entweder die Verschiebung $\delta(x)$ einer einzigen Fuge oder aber die Dehnung $\epsilon_n(x)$ eines einzigen Einzelquerschnittes mittels Differentialgleichungen bestimmt wird. Die restlichen Unbe-

kannten können dann über die Abhängigkeitsbeziehungen der Gln. (2.30), (2.36) u. (2.38) gewonnen werden. Es erweist sich als günstig, als zweite Unbekannte die Dehnung der Schwerachse des Einzelquerschnittes 1 zu benutzen, da sich dabei Differentialgleichungen niedrigerer Ordnung als bei Verwendung einer Verschiebung ergeben.

Nach Gl. (2.6) gilt für das äußere Moment:

$$M(x) = \sum_1^m M_n(x) + \sum_1^m [N_n(x) a_n] \quad \text{s. (2.6)}$$

Bei Verwendung der Beziehungen

$$N_n(x) = -\varepsilon_n(x) E F_n \quad \text{s. (2.8)}$$

und

$$M_n(x) = -y''(x) E J_n \quad \text{s. (2.9)}$$

erhält man daraus:

$$M(x) = -y''(x) E \sum_1^m J_n - E \sum_1^m [\varepsilon_n(x) F_n a_n] \quad (2.39)$$

Mit Gl. (2.30) folgt endlich:

$$M(x) = -y''(x) E \sum_1^m J_n - \frac{E_1(x) E}{a_1} \sum_1^m (F_n a_n^2)$$

(2.40)

Gl. (2.40) ist bereits eine der beiden zur Bestimmung von $y(x)$ und $\varepsilon_1(x)$ notwendigen Differentialgleichungen.

Nach Gl. (2.34) erhält man für die Verschiebung in der Verbindungsstufe zwischen 2 benachbarten Einzelquerschnitten n und $n+1$ in Abhängigkeit von $\varepsilon_1(x)$ den Ausdruck:

$$d_{n,n+1}(x) = - \frac{E_1'(x) E}{a_1} \cdot \frac{S_{n,n+1}}{C_{n,n+1}}$$

Daraus ergibt sich die Zunahme dieser Verschiebung zu:

$$d'_{n,n+1}(x) = - \frac{E_1''(x) E}{a_1} \cdot \frac{S_{n,n+1}}{C_{n,n+1}}$$

Oder, wenn man $C_{n,n+1}$ mit Hilfe von Gl. (2.37) ersetzt:

$$d'_{n,n+1}(x) = - \frac{E_1''(x) E}{a_1} \cdot \frac{S_{12}}{C_{12}} \cdot \frac{a_{n,n+1}}{a_{12}} \quad (2.41)$$

Andererseits war jedoch nach Gl. (2.31):

$$d'_{n,n+1}(x) = a_{n,n+1} \left[y''(x) - \frac{E_1(x)}{a_1} \right]$$

Durch Gleichsetzen von Gl. (2.41) und (2.31) erhält man schließlich die zweite zur Bestimmung vorgenannter Unbekannten erforderliche Differentialgleichung:

$$-\frac{E_1''(x) E}{a_1} \cdot \frac{S_{12} a_{n,n+1}}{C_{12} a_{12}} = a_{n,n+1} \left[y''(x) - \frac{E_1(x)}{a_1} \right]$$

$$\boxed{y''(x) a_1 + E_1''(x) \frac{E S_{12}}{C_{12} a_{12}} - E_1(x) = 0} \quad (2.42)$$

Führt man die Abkürzungen

$$\beta^2 = \frac{\sum_1^m J_n}{J} \quad (2.43)$$

$$d^2 = \frac{\sum_1^m (F_n a_n^2)}{J} \quad (2.44)$$

und

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{E S_{12}}{C_{12} a_{12}} = \frac{E F_1 a_1}{C_{12} a_{12}} \quad (2.45)$$

ein, dann ergibt sich aus den Gln. (2.40) und (2.42) das gekoppelte Differentialgleichungssystem:

$$\boxed{a_1 y''(x) + \frac{1}{\omega^2} E_1''(x) - E_1(x) = 0} \quad (2.46)$$

$$\boxed{a_1 \beta^2 y''(x) + d^2 E_1(x) = -\frac{a_1}{EJ} M(x)} \quad (2.47)$$

Durch Elimination von $y''(x)$ gelingt es, das System zu entkoppeln, und man erhält zunächst zur Bestimmung von $\varepsilon_1(x)$ die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$E_1''(x) - (d^2 + \beta^2) \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1}{EJ} \cdot M(x) \quad (2.48)$$

Beachtet man, daß nach den Gln. (2.43, 2.44 und 2.5)

$$d^2 + \beta^2 = \frac{\sum_1^m J_n + \sum_1^m (F_n a_n^2)}{J} = 1 \quad (2.49)$$

wird, dann vereinfacht sich Gl. (2.48) zu:

$$\boxed{E_1''(x) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1}{EJ} \cdot M(x)} \quad (2.50)$$

Aus Gleichung (2.50) kann nun für jeden Belastungsfall unter Beachtung der jeweiligen Randbedingungen eine geschlossene Lösung für die Dehnung $\epsilon_1(x)$ ermittelt werden.

Durch Elimination von $\epsilon_1(x)$ aus den Gln. (2.46) und (2.47) erhält man für die Krümmung die Differentialgleichung

$$y''(x) = - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\epsilon_1''(x)}{a_1} - \frac{M(x)}{EJ} .$$

Daraus kann durch zweimalige Integration die Durchbiegung zu

$$y(x) = - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 \cdot \frac{\epsilon_1(x)}{a_1} - \iint \frac{M(x)}{EJ} dx \quad (2.51)$$

berechnet werden. Hierbei sind weitere, vom Belastungsfall abhängige Randbedingungen zu erfüllen.

Aehnlich wie in Abschnitt 2.2 erhält man nun die übrigen zur Beurteilung der Tragfähigkeit notwendigen Kraftgrößen und Spannungen aus $\epsilon_1(x)$ und $y(x)$ durch verhältnismäßig einfache Rechenschritte.

Die Dehnung $\epsilon_n(x)$ der in der Schwerachse eines beliebigen Einzelquerschnittes liegenden Faser ergibt sich aus $\epsilon_1(x)$ nach Gl. (2.30a). Daraus folgt für die Normalkraft des n-ten Einzelquerschnittes (N_n als Druckkraft positiv!):

$$N_n(x) = - \epsilon_n(x) E F_n = - \epsilon_1(x) E \frac{F_n a_n}{a_1} \quad (2.52)$$

Den in der Fuge n,n+1 zu übertragenden Schubfluß erhält man am einfachsten aus Gl. (2.34) zu:

$$t_{n,n+1}(x) = C_{n,n+1} S_{n,n+1}(x) = - \frac{\epsilon_1'(x) E}{a_1} S_{n,n+1} .$$

Die Einzelmomente $M_n(x)$ sowie die oberen und unteren Randspannungen der Einzelquerschnitte können auf die gleiche Weise wie in 2.2 nach den Gln. (2.28) und (2.29) bestimmt werden.

Damit sind auch hier alle Grundgleichungen bekannt, die zur Berechnung eines aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzten Trägers, dessen Fugensteifigkeiten den Gln. (2.37) und (2.38) genügen, notwendig sind.

3. Lösung der Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten mit Hilfe von Fourierreihenentwicklungen

3.1. Diskussion des Lösungsweges

Die Lösung des in Abschnitt 2.2 gefundenen gekoppelten Differentialgleichungssystems Gln. (2.22) und (2.26) ist grundsätzlich sowohl mit exakten Methoden als auch mit Näherungsmethoden möglich. Proberechnungen haben jedoch gezeigt, daß die exakte Lösung nur bei zweiteiligen und zur Gesamtschwerachse $s-s$ symmetrischen dreiteiligen Querschnitten zu brauchbaren Ergebnissen führt. Schon bei dreiteiligen unsymmetrischen und mehr als dreiteiligen Querschnitten führt die exakte Lösungsmethode zu praktisch nicht mehr auswertbaren Ausdrücken. Die exakte Berechnung zweiteiliger und symmetrischer dreiteiliger Querschnitte ist aus der Literatur hinreichend bekannt; da bei solchen Querschnitten außerdem die Dehnungen der in den Schwerpunkten der Einzelquerschnitte liegenden Fasern sich zwangsläufig proportional zu den entsprechenden Abständen a_n von der Gesamtschwerachse verhalten, kann ihre Berechnung auch mittels der später in Abschnitt 4 gefundenen Lösung vorgenommen werden. Vorliegender Abschnitt befaßt sich hauptsächlich mit dreiteiligen unsymmetrischen und mehr als dreiteiligen Querschnitten, deren Fugensteifigkeiten $C_{n,n+1}$ voneinander unabhängig, also nicht nach Gl. (2.38) miteinander verknüpft sind. Wegen der oben schon beschriebenen Schwierigkeiten wird auf eine exakte Berechnung solcher Querschnitte von vornherein verzichtet.

Es stellt sich nun die Aufgabe, eine Näherungslösung zu finden, die den tatsächlichen Verhältnissen möglichst nahe kommt und die außerdem so beschaffen ist, daß ohne Kenntnis der mathematisch exakten Lösung Aussagen über ihre Genauigkeit gemacht werden können. Eine solche Näherungslösung, die besonders für freiaufliegende Einfeldträger brauchbare Ergebnisse liefert, wurde durch folgende Ueberlegung gefunden:

Für eine im mathematischen Sinne komplexe Querkraft der Form

$$Q(x) = Q_0 (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.1)$$

ergeben sich, wie nachfolgende Rechnung beweist, aus dem gekoppelten Differentialgleichungssystem Gln. (2.22) und (2.26) für

die unbekanntenen Weggrößen $y(x)$ und $\delta_{n,n+1}(x)$ die ebenfalls komplexen Lösungsansätze:

$$y(x) = A_1 (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.2)$$

$$\delta_{n,n+1}(x) = A_2 (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.3)$$

Darin sind A_1 und A_2 beliebige Konstanten, die ebenfalls komplex sein können. Die Ableitungen dieser Funktionen nach x lassen sich, wie am Beispiel von $y(x)$ gezeigt wird, folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= A_1 (-v \sin vx + i v \cos vx) = i v y(x) \\ y''(x) &= A_1 (-v^2 \cos vx - i v^2 \sin vx) = (i v)^2 y(x) \\ y'''(x) &= A_1 (v^3 \sin vx - i v^3 \cos vx) = (i v)^3 y(x) \end{aligned}$$

Oder allgemein mit Einführung des Operators

$$s = i v \quad (3.4)$$

$$y^{(k)}(x) = (i v)^k y(x) = s^k y(x). \quad (3.5)$$

Analog dazu folgt für die k -te Ableitung von $\delta_{n,n+1}$ nach x :

$$\delta_{n,n+1}^{(k)}(x) = (i v)^k \delta_{n,n+1} = s^k \delta_{n,n+1}(x) \quad (3.6)$$

Speziell für die in den Gln. (2.22) und (2.26) vorkommenden zweiten und dritten Ableitungen kann damit geschrieben werden:

$$\delta_{n,n+1}''(x) = s^2 \delta_{n,n+1}(x) \quad (3.7)$$

$$y'''(x) = s^3 y(x) \quad (3.8)$$

Damit läßt sich das gekoppelte Differentialgleichungssystem Gln. (2.22) und (2.26) in ein lineares Gleichungssystem überführen, dessen Lösung außer erheblichem Rechenaufwand keine nennenswerten mathematischen Schwierigkeiten mehr aufweist.

Vorgenannter Lösungsweg gelingt, wie vorausgesetzt wurde, nur für die spezielle komplexe Querkraft nach Gl. (3.1). Aus der Mathematik weiß man jedoch, daß die Lösungen inhomogener Differentialgleichungen mit zusammengesetzten komplexen Störfunktionen gleichzeitig die Lösung der entsprechenden Differentialgleichungen, welche als Störfunktion nur den Real- oder Imaginärteil der komplexen Störfunktion aufweisen, enthalten. Oder in Formeln ausgedrückt:

Hat eine inhomogene Differentialgleichung mit der komplexen Störfunktion

$$s^k(x) = a(x) + i b(x)$$

die Lösung $L(x) = e(x) + i f(x)$, dann ergibt sich für die gleiche Differentialgleichung mit der reellen Störfunktion

$$S(x) = a(x) \text{ oder } S(x) = b(x)$$

die Lösung $L(x) = e(x)$ bzw. $L(x) = f(x)$.

Wendet man diese Regel auf das vorliegende Problem an, dann können aus der für die komplexe Querkraft $Q(x) = Q_0(\cos vx + i \sin vx)$ gefundenen Lösungen unmittelbar die Lösungen für reelle Querkräfte der Form

$$Q(x) = Q_0 \cos vx \quad \text{und} \quad Q(x) = Q_0 \sin vx$$

ermittelt werden.

Nun lassen sich die in der Praxis vorkommenden Belastungsfälle fast alle unter Beachtung der entsprechenden Randbedingungen in Fourier-Reihen entwickeln. Damit kann auch der der Belastung entsprechende Querkraftverlauf durch Summen von Sinus- bzw. Cosinusfunktionen dargestellt werden. Die Lösung des Gleichungssystems für die Einzelglieder dieser Summen läßt sich nach dem oben beschriebenen Verfahren ermitteln. Die endgültige Lösung für die gesamte Querkraft ergibt sich dann als Summe der Einzellösungen.

3.2. Fundamentallösung für eine komplexe Querkraft der Form $Q(x) = Q_0(\cos vx + i \sin vx)$

Da sich die angestrebten Näherungslösungen alle aus der Lösung für eine komplexe Querkraft der Form

$$Q(x) = Q_0(\cos vx + i \sin vx) \quad \text{s. (3.1)}$$

entwickeln lassen, wird hier zunächst für die wichtigsten im Holzbau üblichen Querschnitte diese Fundamentallösung ermittelt. Als erstes wird ein aus fünf Einzelteilen bestehender Trägerquerschnitt untersucht, aus dem dann durch Nullsetzen von Einzelquerschnitten die Lösungen für vier-, drei- und zweiteilige Querschnitte hervorgehen. Anschließend wird allgemein auch der Lösungsweg zur Berechnung von Querschnitten mit mehr als fünf Einzelteilen angegeben.

3.2.1. Der fünfteilige Querschnitt

Für einen aus fünf Einzelquerschnitten bestehenden Trägerquerschnitt nach Bild 3.1 lautet das gekoppelte Differentialglei-

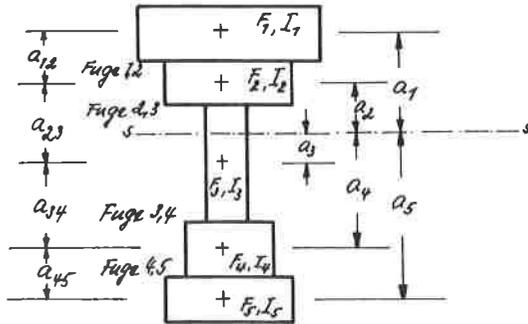


Bild 3.1.

chungssystem für die unbekanntenen Weggrößen $\delta_{n,n+1}(x)$ und $y(x)$ nach den Gln. (2.22) und (2.26):

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12}'' &= a_{12} y'''' + \lambda_{12} \delta_{12} - \mu_{23} \delta_{23} \\ \delta_{23}'' &= a_{23} y'''' - \alpha_{12} \delta_{12} + \lambda_{23} \delta_{23} - \mu_{34} \delta_{34} \\ \delta_{34}'' &= a_{34} y'''' - \alpha_{23} \delta_{23} + \lambda_{34} \delta_{34} - \mu_{45} \delta_{45} \\ \delta_{45}'' &= a_{45} y'''' - \alpha_{34} \delta_{34} + \lambda_{45} \delta_{45} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$Q(x) = -E \sum_{i=1}^4 \gamma_i y'''' + C_{12} a_{12} \delta_{12}'' + C_{23} a_{23} \delta_{23}'' + C_{34} a_{34} \delta_{34}'' + C_{45} a_{45} \delta_{45}'' \quad (3.10)$$

Darin haben die Abkürzungen nach Gln. (2.19, 2.20 und 2.21) folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{C_{12}}{E F_2} & \alpha_{23} &= \frac{C_{23}}{E F_3} & \alpha_{34} &= \frac{C_{34}}{E F_4} \\ \mu_{23} &= \frac{C_{23}}{E F_2} & \mu_{34} &= \frac{C_{34}}{E F_3} & \mu_{45} &= \frac{C_{45}}{E F_4} \end{aligned} \quad (3.11a-k)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \left(\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \frac{C_{12}}{E} & \lambda_{23} &= \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} \right) \frac{C_{23}}{E} \\ \lambda_{34} &= \left(\frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} \right) \frac{C_{34}}{E} & \lambda_{45} &= \left(\frac{1}{F_4} + \frac{1}{F_5} \right) \frac{C_{45}}{E} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Querkraft $Q(x)$ der Gl. (3.1) entspricht, erhält man aus obigem Differentialgleichungssystem

durch Einführung der Ausdrücke aus den Gln. (3.7) und (3.8) nachfolgendes, als Koeffizientenmatrix geschriebenes lineare Gleichungssystem:

y	δ_{12}	δ_{23}	δ_{34}	δ_{45}	=	
$s^3 a_{12}$	$\lambda_{12} - s^2$	$-\mu_{23}$	0	0	0	}
$s^3 a_{23}$	$-\alpha_{12}$	$\lambda_{23} - s^2$	$-\mu_{34}$	0	0	
$s^3 a_{34}$	0	$-\alpha_{23}$	$\lambda_{34} - s^2$	$-\mu_{45}$	0	
$s^3 a_{45}$	0	0	$-\alpha_{34}$	$\lambda_{45} - s^2$	0	
$-s^3 E \sum_7^5 J_n$	$C_{12} a_{12}$	$C_{23} a_{23}$	$C_{34} a_{34}$	$C_{45} a_{45}$	$Q(x)$	(3.13)

Die Auflösung dieses Gleichungssystems wird mit Hilfe der Determinantenrechnung vorgenommen. Bezeichnet man die Systemdeterminante des Gleichungssystems mit D , die Zählerdeterminante für y mit D_y und die Zählerdeterminante für $\delta_{n,n+1}$ mit $D_{n,n+1}$, dann erhält man mit Hilfe der Cramerschen Regel [16] die unbekanntenen Weggrößen $y(x)$ und $\delta_{n,n+1}(x)$ unmittelbar zu:

$$y(x) = \frac{D_y}{D} \quad (3.14) \quad \delta_{n,n+1}(x) = \frac{D_{n,n+1}}{D} \quad (3.15)$$

Setzt man die Zählerdeterminante D_y und $D_{n,n+1}$ zunächst als bekannt voraus, dann ergibt sich die Systemdeterminante

$$D = s^3 \begin{vmatrix} a_{12} & \lambda_{12} - s^2 & -\mu_{23} & 0 & 0 \\ a_{23} & -\alpha_{12} & \lambda_{23} - s^2 & -\mu_{34} & 0 \\ a_{34} & 0 & -\alpha_{23} & \lambda_{34} - s^2 & -\mu_{45} \\ a_{45} & 0 & 0 & -\alpha_{34} & \lambda_{45} - s^2 \\ -E \sum_7^5 J_n + C_{12} a_{12} + C_{23} a_{23} + C_{34} a_{34} + C_{45} a_{45} \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

durch Einsetzen der Gln. (3.14) und (3.15) in Gl. (3.13) zu:

$$D = \frac{1}{Q(x)} \left(-s^3 E \sum_7^5 J_n D_y + C_{12} a_{12} D_{12} + C_{23} a_{23} D_{23} + C_{34} a_{34} D_{34} + C_{45} a_{45} D_{45} \right) \quad (3.17)$$

Oder kürzer:

$$D = \frac{1}{Q(x)} \left[-s^3 D_y E \sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (C_{n,n+1} a_{n,n+1} D_{n,n+1}) \right] \quad (3.18)$$

Verwendet man nun Gl. (3.18) in den Gln. (3.14) und (3.15), dann erhält man allgemein für die unbekanntenen Weggrößen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{D_y}{D} = \frac{D_y \cdot Q(x)}{-s^3 D_y E \sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (C_{n,n+1} a_{n,n+1} D_{n,n+1})} \\ &= \frac{Q(x)}{-s^3 E \left[\sum_1^5 J_n - \frac{1}{s^3 E D_y} \sum_1^4 (C_{n,n+1} a_{n,n+1} D_{n,n+1}) \right]} \end{aligned} \quad (3.19)$$

und

$$d_{n,n+1}(x) = \frac{D_{n,n+1}}{D} = \frac{D_{n,n+1} Q(x)}{-s^3 D_y E \sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (C_{n,n+1} a_{n,n+1} D_{n,n+1})} \quad (3.20)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, den Nenner des Ausdruckes (3.20) demjenigen von Gl. (3.19) anzugleichen. Dann folgt aus (3.20):

$$d_{n,n+1}(x) = \frac{\frac{D_{n,n+1}}{D_y} \cdot Q(x)}{-s^3 E \left[\sum_1^5 J_n - \frac{1}{s^3 E D_y} \sum_1^4 (C_{n,n+1} a_{n,n+1} D_{n,n+1}) \right]} \quad (3.21)$$

Durch Einführung der Abkürzung

$$\boxed{v_{n,n+1}^y = - \frac{C_{n,n+1} D_{n,n+1}}{s^3 E D_y}} \quad (3.22)$$

vereinfachen sich die Gln. (3.19) und (3.21) auf:

$$y(x) = \frac{Q(x)}{-s^3 E \left[\sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (v_{n,n+1}^y a_{n,n+1}) \right]} \quad (3.23)$$

und

$$d_{n,n+1}(x) = \frac{v_{n,n+1}^y Q(x)}{C_{n,n+1} \left[\sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (v_{n,n+1}^y a_{n,n+1}) \right]} \quad (3.24)$$

Mit der Abkürzung

$$J_W = \sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (v_{n,n+1}^2 a_{n,n+1}) \quad (3.25)$$

und unter Verwendung von Gl. (3.4) ergibt sich aus den Ausdrücken (3.23) und (3.24):

$$y(x) = \frac{-i Q(x)}{v^3 E J_W} \quad (3.26)$$

$$S_{n,n+1}(x) = \frac{v_{n,n+1}^2 Q(x)}{C_{n,n+1} J_W} \quad (3.27)$$

Beachtet man weiter, daß nach Voraussetzung der Gl. (3.1)

$$Q(x) = Q_0 (\cos vx + i \sin vx)$$

sein sollte, dann erhält man für diesen speziellen Lastfall endgültig die gesuchten Weggrößen:

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 E J_W} (\sin vx - i \cos vx) \quad (3.28)$$

$$S_{n,n+1}(x) = \frac{v_{n,n+1}^2 Q_0}{C_{n,n+1} J_W} (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.29)$$

Der komplexen Querkraft nach Gl. (3.1) entspricht ein Moment der Form:

$$M(x) = \int Q(x) dx = \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (3.30)$$

Für einen Träger mit starrem Verbund ($C_{12}=C_{23}=C_{34}=C_{45}=\infty$) erhält man daraus mit den bekannten Mitteln der Balkentheorie die Durchbiegung:

$$\begin{aligned} y(x) &= \iint y''(x) dx = - \iint \frac{M(x)}{EJ} dx = \\ &= \frac{Q_0}{v^3 EJ} (\sin vx - i \cos vx) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Weiter ergibt sich der zwischen zwei Einzelquerschnitten n und $n+1$ zu übertragende Schubfluß bei starrem Verbund zu:

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{S_{n,n+1} Q(x)}{J} = \frac{S_{n,n+1} Q_0}{J} (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.32)$$

Darin ist J durch Gl. (2.5) definiert; $S_{n,n+1}$ bezeichnet, wie in der Festigkeitslehre allgemein üblich, das auf die Gesamtschwerachse des Trägers bezogene statische Moment der oberhalb der Fuge n,n+1 liegenden Querschnittsteile:

$$S_{n,n+1} = \sum_1^n (F_n a_n) \quad (3.33)$$

Aus Gl. (3.29) folgt mit Gl. (2.1) für den Schubfluß in der Fuge n,n+1 eines nachgiebig verbundenen Trägers:

$$t_{n,n+1}(x) = G_{n,n+1} S_{n,n+1}(x) = \frac{v_{n,n+1} Q_0}{J_w} (\cos vx + i \sin vx) \quad (3.34)$$

Vergleicht man nun die Gln. (3.28) und (3.34) mit den Gln. (3.31) und (3.32), dann erkennt man, daß offensichtlich bei nachgiebig verbundenen Trägerquerschnitten, die durch Querkräfte und Momente nach den Gln. (3.1) und (3.30) beansprucht werden, das Trägheitsmoment J des starren Trägers durch ein "w i r k - s a m e s T r ä g h e i t s m o m e n t" J_w und das statische Moment $S_{n,n+1}$ durch ein "w i r k s a m e s s t a t i s c h e s M o m e n t" $v_{n,n+1}$ ersetzt wird.

Führt man bei bekannten Zählerdeterminanten D_y und $D_{n,n+1}$ den Grenzübergang

$$C_{12} = C_{23} = C_{34} = C_{45} \rightarrow \infty,$$

dann erhält man

$$\lim_{C_{n,n+1} \rightarrow \infty} v_{n,n+1} = S_{n,n+1} = \sum_1^n (F_n a_n) \quad (3.35)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{C_{n,n+1} \rightarrow \infty} J_w &= \sum_1^5 J_n + \sum_1^4 (a_{n,n+1} S_{n,n+1}) = \\ &= \sum_1^5 J_n + \sum_1^5 (F_n a_n^2) = J. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Obige Gleichungen zeigen, daß beim Grenzübergang zum starren Verbund sowohl das wirksame Trägheitsmoment J_w als auch das wirk-

same statische Momente $\mathcal{J}_{n,n+1}$ lückenlos in die entsprechenden Werte des starr verbundenen Trägers übergehen. Der gleiche lückenlose Übergang ist auch für alle $C_{n,n+1} \rightarrow 0$ (kein Verbund) festzustellen.

Für eine Querkraft nach Gl. (3.1) können demnach die Durchbiegung $y(x)$ und die Fugenschubkräfte $t_{n,n+1}(x)$ eines nachgiebig verbundenen Trägers grundsätzlich nach der Theorie des starren Biegeträgers berechnet werden, wenn man lediglich das Trägheitsmoment J des starren Trägers durch das wirksame Trägheitsmoment J_w und die zur Bestimmung der Fugenschubkräfte erforderlichen statischen Momente $S_{n,n+1}$ durch die wirksamen statischen Momente $\mathcal{J}_{n,n+1}$ ersetzt.

Die Berechnung der in den Einzelquerschnitten vorhandenen Spannungen ist dagegen über die Normalkräfte $N_n(x)$ und die Einzelmomente $M_n(x)$ vorzunehmen, da hier im Gegensatz zum starren Träger die einander zugekehrten Randfasern zweier benachbarter Einzelquerschnitte infolge ihrer unterschiedlichen Dehnungen auch unterschiedliche Spannungen aufweisen.

Nach Gl. (2.27) erhält man aus Gl. (3.34):

$$N_n(x) = \int [t_{n,n+1}(x) - t_{n-1,n}(x)] dx = \frac{\mathcal{J}_{n,n+1} - \mathcal{J}_{n-1,n}}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (3.37)$$

Aus Gl. (3.28) folgt für die Einzelmomente:

$$M_n(x) = -y'(x) E J_n = \frac{J_n}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (3.38)$$

Unter Beachtung der in Bild 2.1 getroffenen Definition von $N_n(x)$ (als Druckkraft positiv) erhält man dann nach Gl. (2.29) die oberen und unteren Randspannungen der Einzelquerschnitte zu:

$$\sigma_n^{(a,u)}(x) = \left(\frac{\mathcal{J}_{n-1,n} - \mathcal{J}_{n,n+1}}{J_n} \mp \epsilon_n^{(a,u)} \right) \frac{Q_0 E_n}{v J_w E} (\sin vx - i \cos vx) \quad (3.39)$$

Zur eindeutigen Bestimmung der Weg- und Schnittgrößen mit Hilfe obiger Gleichungen fehlt nun noch die Kenntnis der wirksamen statischen Momente $\mathcal{J}_{n,n+1}$. Die zur Berechnung dieser Werte nach Gl. (3.22) notwendigen Zählerdeterminanten D_y und $D_{n,n+1}$ werden nachfolgend in allgemeiner Form für den fünfteiligen Querschnitt bestimmt.

Die Zählerdeterminante D_y :

$$D_y = \begin{vmatrix} \sigma & \lambda_{12} - \sigma^2 & -\mu_{23} & \sigma & \sigma \\ \sigma & -\alpha_{12} & \lambda_{23} - \sigma^2 & -\mu_{34} & \\ \sigma & \sigma & -\alpha_{23} & \lambda_{34} - \sigma^2 & -\mu_{45} \\ \sigma & \sigma & \sigma & -\alpha_{34} & \lambda_{45} - \sigma^2 \\ Q(x) & C_{12} a_{12} & C_{23} a_{23} & C_{34} a_{34} & C_{45} a_{45} \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

$$D_y = Q(x) \left\{ (\lambda_{12} - \sigma^2) [(\lambda_{23} - \sigma^2)(\lambda_{34} - \sigma^2)(\lambda_{45} - \sigma^2) - (\lambda_{23} - \sigma^2)\alpha_{34}\mu_{45} - \alpha_{23}\mu_{34}(\lambda_{45} - \sigma^2)] + \alpha_{12} [-\mu_{23}(\lambda_{34} - \sigma^2)(\lambda_{45} - \sigma^2) + \mu_{23}\alpha_{34}\mu_{45}] \right\}$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die Ausdrücke λ_{12} , λ_{23} , λ_{34} und λ_{45} auszuklammern. Durch teilweises Einsetzen der Werte für $\alpha_{n,n+1}$, $\mu_{n,n+1}$ und $\lambda_{n,n+1}$ nach Gl. (3.11) ergibt sich dann bei Verwendung der Abkürzung

$$K_{n,n+1} = 1 - \frac{\sigma^2}{\lambda_{n,n+1}} = 1 + \frac{\sigma^2}{\lambda_{n,n+1}} = 1 + \frac{\sigma^2 E}{C_{n,n+1}} \cdot \frac{F_n F_{n+1}}{F_n + F_{n+1}} \quad (3.41)$$

endlich:

$$D_y = Q(x) \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{34} \lambda_{45} \left\{ K_{12} [K_{23} K_{34} K_{45} - K_{23} \frac{F_3 F_5}{(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)} - K_{45} \frac{F_2 F_4}{(F_2 + F_3)(F_3 + F_4)}] - K_{34} K_{45} \frac{F_1 F_3}{(F_1 + F_2)(F_2 + F_3)} + \frac{F_1 F_3^2 F_5}{(F_1 + F_2)(F_2 + F_3)(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)} \right\}$$

Mit den weiteren Abkürzungen

$$P_{n,n+2} = \frac{F_n F_{n+2}}{(F_n + F_{n+1})(F_{n+1} + F_{n+2})} \quad (3.42)$$

und

$$\phi = (K_{12} K_{23} - \mathcal{P}_{13})(K_{34} K_{45} - \mathcal{P}_{35}) - K_{12} K_{45} \mathcal{P}_{24} \quad (3.43)$$

erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} D_{12} &= Q(x) \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{34} \lambda_{45} \{ (K_{12} K_{23} - \mathcal{P}_{13})(K_{34} K_{45} - \mathcal{P}_{35}) - K_{12} K_{45} \mathcal{P}_{24} \} \\ &= Q(x) \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{34} \lambda_{45} \cdot \phi \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Zählerdeterminante D_{12} :

$$D_{12} = \mathcal{J}^3 \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & -\mu_{23} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & \lambda_{23} - \mathcal{J}^2 & -\mu_{34} & 0 \\ a_{34} & 0 & -\mathcal{X}_{23} & \lambda_{34} - \mathcal{J}^2 & -\mu_{45} \\ a_{45} & 0 & 0 & -\mathcal{X}_{34} & \lambda_{45} - \mathcal{J}^2 \\ -\mathcal{E} \sum_{i=1}^5 \mathcal{J}_i & Q(x) & c_{23} a_{23} & c_{34} a_{34} & c_{45} a_{45} \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= -\mathcal{J}^3 Q(x) \{ a_{12} [(\lambda_{23} - \mathcal{J}^2)(\lambda_{34} - \mathcal{J}^2)(\lambda_{45} - \mathcal{J}^2) - (\lambda_{23} - \mathcal{J}^2)\mu_{45}\mathcal{X}_{34} - \\ &\quad - \mu_{34}\mathcal{X}_{23}(\lambda_{45} - \mathcal{J}^2)] - \\ &\quad - a_{23} [-\mu_{23}(\lambda_{34} - \mathcal{J}^2)(\lambda_{45} - \mathcal{J}^2) + \mu_{23}\mu_{45}\mathcal{X}_{34}] + \\ &\quad + a_{34} [\mu_{23}\mu_{34}(\lambda_{45} - \mathcal{J}^2)] - \\ &\quad - a_{45} [-\mu_{23}\mu_{34}\mu_{45}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= -\mathcal{J}^3 Q(x) \lambda_{23} \lambda_{34} \lambda_{45} \left\{ a_{12} \left[K_{23} K_{34} K_{45} - K_{23} \frac{\mathcal{F}_3 \mathcal{F}_5}{(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - K_{45} \frac{\mathcal{F}_2 \mathcal{F}_4}{(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + a_{23} \left[K_{34} K_{45} \frac{\mathcal{F}_3}{(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)} - \frac{\mathcal{F}_3^2 \mathcal{F}_5}{(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4)(\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + a_{45} \frac{\mathcal{F}_3 \mathcal{F}_4 \mathcal{F}_5}{(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)(\mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4)(\mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5)} \right\} \end{aligned}$$

$$D_{12} = -j^3 \alpha(x) \lambda_{23} \lambda_{34} \lambda_{45} \left[(K_{34} K_{45} - \beta_{35}) (a_{12} K_{23} + a_{23} \frac{F_3}{F_2 + F_3}) - K_{45} \beta_{24} (a_{12} - a_{34} \frac{F_3}{F_2}) + a_{45} \beta_{35} \frac{F_4}{F_3 + F_4} \right] \quad (3.46)$$

Die Zählerdeterminante D_{23} :

$$D_{23} = j^3 \begin{vmatrix} a_{12} & \lambda_{12} - s^2 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & -\alpha_{12} & 0 & -\mu_{34} & 0 \\ a_{34} & 0 & 0 & \lambda_{34} - s^2 & -\mu_{45} \\ a_{45} & 0 & 0 & -\alpha_{34} & \lambda_{45} - s^2 \\ -\epsilon \sum_{j=1}^5 J_n & C_{12} a_{12} & \alpha(x) & C_{34} a_{34} & C_{45} a_{45} \end{vmatrix} \quad (3.47)$$

$$D_{23} = -j^3 \alpha(x) \left\{ a_{12} [\alpha_{12} (\lambda_{34} - s^2) (\lambda_{45} - s^2) - \alpha_{12} \mu_{45} \alpha_{34}] - a_{13} [-(\lambda_{12} - s^2) (\lambda_{34} - s^2) (\lambda_{45} - s^2) + (\lambda_{12} - s^2) \mu_{45} \alpha_{34}] + a_{34} [(\lambda_{12} - s^2) \mu_{34} (\lambda_{45} - s^2)] - a_{45} [-(\lambda_{12} - s^2) \mu_{34} \mu_{45}] \right\}$$

$$D_{23} = -j^3 \alpha(x) \lambda_{12} \lambda_{34} \lambda_{45} \left\{ a_{12} \left[K_{34} K_{45} \frac{F_4}{F_1 + F_2} - \frac{F_1 F_3 F_5}{(F_1 + F_2)(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)} \right] + a_{13} \left[K_{12} K_{34} K_{45} - K_{12} \frac{F_3 F_5}{(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)} \right] + a_{34} K_{12} K_{45} \frac{F_4}{F_3 + F_4} + a_{45} K_{12} \frac{F_4 F_5}{(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)} \right\}$$

$$D_{23} = -j^3 \alpha(x) \lambda_{12} \lambda_{34} \lambda_{45} \left\{ (K_{34} K_{45} - \beta_{35}) \left(a_{12} \frac{F_4}{F_1 + F_2} + a_{13} K_{12} \right) + K_{12} \left(a_{34} \frac{F_4}{F_3 + F_4} K_{45} + a_{45} \frac{F_4}{F_3} \beta_{35} \right) \right\}$$

(3.48)

Die noch fehlenden Zählerdeterminanten D_{34} und D_{45} ergeben sich unmittelbar durch zyklisches Vertauschen der Indices aus den Gln. (3.47) und (3.46) zu:

$$D_{34} = -j^3 Q(x) \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{45} \left\{ (k_{12} k_{23} - j_{13}) \left(a_{45} \frac{F_5}{F_4 + F_5} + a_{34} k_{45} \right) + k_{45} \left(a_{23} \frac{F_2}{F_2 + F_3} k_{12} + a_{12} \frac{F_2}{F_3} j_{13} \right) \right\} \quad (3.49)$$

$$D_{45} = -j^3 Q(x) \lambda_{12} \lambda_{23} \lambda_{34} \left[(k_{12} k_{23} - j_{13}) \left(a_{45} k_{34} + a_{34} \frac{F_3}{F_3 + F_4} \right) - k_{12} j_{24} \left(a_{45} - a_{23} \frac{F_3}{F_4} \right) + a_{12} j_{15} \frac{F_2}{F_3 + F_4} \right] \quad (3.50)$$

Nach Gl. (3.22) erhält man für das wirksame statische Moment

$$v_{12}^j : \quad v_{12}^j = - \frac{C_{12} D_{12}}{j^3 E D_y} \\ = \frac{C_{12}}{E \lambda_{12} \phi} \left[(k_{34} k_{45} - j_{35}) \left(a_{12} k_{23} + a_{23} \frac{F_2}{F_2 + F_3} \right) - k_{45} j_{24} \left(a_{12} - a_{34} \frac{F_3}{F_2} \right) + a_{45} j_{35} \frac{F_4}{F_2 + F_3} \right]$$

Durch Einsetzen des Wertes für λ_{12} nach Gln. (2.20) und (3.11) und unter Verwendung der allgemein geschriebenen Abkürzung

$$j_{n,n+1} = \frac{C_{n,n+1}}{E \lambda_{n,n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} \right)} = \frac{F_n F_{n+1}}{F_n + F_{n+1}} \quad (3.51)$$

folgt daraus:

$$v_{12}^j = \frac{j_{12}}{\phi} \left[(k_{34} k_{45} - j_{35}) \left(a_{12} k_{23} + a_{23} \frac{j_{23}}{F_2} \right) - k_{45} j_{24} \left(a_{12} - a_{34} \frac{F_3}{F_2} \right) + a_{45} j_{35} \frac{F_4}{F_2 + F_3} \right] \quad (3.52)$$

Auf die gleiche Weise ergeben sich die restlichen statischen Momente zu:

$$v_{23}^j = \frac{j_{23}}{\phi} \left[(k_{34} k_{45} - j_{35}) \left(a_{12} \frac{j_{12}}{F_2} + a_{23} k_{12} \right) + k_{12} \left(a_{34} \frac{j_{34}}{F_3} k_{45} + a_{45} \frac{F_4}{F_3} j_{35} \right) \right] \quad (3.53)$$

$$\frac{y}{y_{34}} = \frac{y_{34}}{\phi} \left[(k_{12}k_{23} - y_{13})(a_{45} \frac{y_{45}}{F_4} + a_{34} k_{45}) + K_{45} (a_{23} \frac{y_{23}}{F_3} k_{12} + a_{12} \frac{F_2}{F_3} y_{13}) \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{y}{y_{45}} = \frac{y_{45}}{\phi} \left[(k_{12}k_{23} - y_{13})(a_{45} k_{34} + a_{34} \frac{y_{34}}{F_4}) - k_{12} y_{24} (a_{45} - a_{23} \frac{F_3}{F_4}) - a_{12} y_{13} \frac{F_2}{F_3 + F_4} \right] \quad (3.55)$$

Zusammenstellung:

Nachfolgend wird nun nochmals der gesamte Rechnungsgang für einen fünfteiligen Trägerquerschnitt nach Bild 3.1 mit dem Querkrafts- und Momentenverlauf nach Gln. (3.1) und (3.30) übersichtlich zusammengestellt.

Festwerte:

- F_n = Querschnittsfläche des Einzelquerschnittes n
- I_n = Einzelträgheitsmoment des Einzelquerschnittes n
- E_n = Elastizitätsmodul des Einzelquerschnittes n
- E = Beliebiger Vergleichselastizitätsmodul
- $C_{v,n,n+1}$ = Verschiebungsmodul der in der Fuge n,n+1 angeordneten Verbindungsmittel
- $e'_{n,n+1}$ = Gegenseitiger Abstand der in der Fuge n,n+1 angeordneten Verbindungsmittel

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{C_{v,12}}{e'_{12}} & C_{23} &= \frac{C_{v,23}}{e'_{23}} & C_{34} &= \frac{C_{v,34}}{e'_{34}} & C_{45} &= \frac{C_{v,45}}{e'_{45}} \\ \bar{F}_1 &= F_1 \frac{E_1}{E} & \bar{F}_2 &= F_2 \frac{E_2}{E} & \bar{F}_3 &= F_3 \frac{E_3}{E} & \bar{F}_4 &= F_4 \frac{E_4}{E} & \bar{F}_5 &= F_5 \frac{E_5}{E} \\ \bar{I}_1 &= I_1 \frac{E_1}{E} & \bar{I}_2 &= I_2 \frac{E_2}{E} & \bar{I}_3 &= I_3 \frac{E_3}{E} & \bar{I}_4 &= I_4 \frac{E_4}{E} & \bar{I}_5 &= I_5 \frac{E_5}{E} \end{aligned}$$

$$p_{12} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \quad p_{23} = \frac{F_2 F_3}{F_2 + F_3} \quad p_{34} = \frac{F_3 F_4}{F_3 + F_4} \quad p_{45} = \frac{F_4 F_5}{F_4 + F_5}$$

$$p_{13} = \frac{F_1 F_3}{(F_1 + F_2)(F_2 + F_3)} \quad p_{24} = \frac{F_2 F_4}{(F_2 + F_3)(F_3 + F_4)} \quad p_{35} = \frac{F_3 F_5}{(F_3 + F_4)(F_4 + F_5)}$$

$$K_{12} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{12}} p_{12} \quad K_{23} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{23}} p_{23}$$

$$K_{34} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{34}} p_{34} \quad K_{45} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{45}} p_{45}$$

$$\phi = (K_{12} K_{23} - p_{13})(K_{34} K_{45} - p_{35}) - K_{12} K_{45} p_{14}$$

$$v_{12}^0 = \frac{p_{12}}{\phi} \left[(K_{34} K_{45} - p_{35})(a_{12} K_{23} + a_{23} \frac{p_{23}}{F_2}) - K_{45} p_{24} (a_{12} - a_{14} \frac{F_2}{F_2}) + a_{45} p_{25} \frac{F_2}{F_2 + F_5} \right]$$

$$v_{23}^0 = \frac{p_{23}}{\phi} \left[(K_{34} K_{45} - p_{35})(a_{22} \frac{p_{22}}{F_2} + a_{23} K_{12}) + K_{12} (a_{24} \frac{p_{24}}{F_3} K_{45} + a_{25} \frac{F_2}{F_3} p_{25}) \right]$$

$$v_{34}^0 = \frac{p_{34}}{\phi} \left[(K_{12} K_{23} - p_{13})(a_{34} \frac{p_{34}}{F_4} + a_{35} K_{45}) + K_{45} (a_{23} \frac{p_{23}}{F_3} K_{12} + a_{12} \frac{F_2}{F_3} p_{13}) \right]$$

$$v_{45}^0 = \frac{p_{45}}{\phi} \left[(K_{12} K_{13} - p_{13})(a_{45} K_{34} + a_{34} \frac{p_{34}}{F_4}) - K_{12} p_{24} (a_{45} - a_{13} \frac{F_2}{F_4}) + a_{12} p_{25} \frac{F_2}{F_3 + F_5} \right]$$

Das wirksame Trägheitsmoment:

$$J_W = \sum_{n=1}^5 J_n + \sum_{n=1}^4 (v_{n,n+1}^0 a_{n,n+1})$$

Durchbiegung:

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 E J_W} (\sin vx - i \cos vx)$$

Spannungen am oberen und unteren Rand der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_1^{(a,u)}(x) = \left(-\frac{v_{12}^0}{F_1} + \epsilon_1^{(a,u)} \right) \frac{Q_0}{v J_W} \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\sigma_2^{(a,u)}(x) = \left(-\frac{v_{12}^0 - v_{23}^0}{F_2} + \epsilon_2^{(a,u)} \right) \frac{Q_0}{v J_W} \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\bar{\sigma}_3^{(0,u)}(x) = \left(\frac{\sqrt{I_3} - \sqrt{I_4}}{J_3} \mp e_3^{(0,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{\nu J_W} \cdot \frac{E_3}{E} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$\bar{\sigma}_4^{(0,u)}(x) = \left(\frac{\sqrt{I_4} - \sqrt{I_5}}{J_4} \mp e_4^{(0,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{\nu J_W} \cdot \frac{E_4}{E} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$\bar{\sigma}_5^{(0,u)}(x) = \left(\frac{\sqrt{I_5}}{J_5} \mp e_5^{(0,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{\nu J_W} \cdot \frac{E_5}{E} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

Schubkräfte in den Fugen:

$$t_{12}(x) = \frac{\sqrt{I_2}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

$$t_{23}(x) = \frac{\sqrt{I_3}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

$$t_{34}(x) = \frac{\sqrt{I_4}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

$$t_{45}(x) = \frac{\sqrt{I_5}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

Verschiebungen in den Fugen:

$$s_{12}(x) = \frac{t_{12}(x)}{G_2} \quad s_{23}(x) = \frac{t_{23}(x)}{G_{23}} \quad s_{34}(x) = \frac{t_{34}(x)}{G_{34}}$$

$$s_{45}(x) = \frac{t_{45}(x)}{G_{45}}$$

Die Kenntnis der Normalkräfte und Einzelmomente ist zwar zur Berechnung des Trägers nicht unbedingt notwendig; sie werden jedoch der Vollständigkeit halber ebenfalls angegeben.

Normalkräfte:

$$N_1(x) = \frac{\sqrt{I_2}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{\nu} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$N_2(x) = \frac{\sqrt{I_3} - \sqrt{I_2}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{\nu} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$N_3(x) = \frac{\sqrt{I_4} - \sqrt{I_3}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{\nu} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$N_4(x) = \frac{\sqrt{I_5} - \sqrt{I_4}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{\nu} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

$$N_5(x) = \frac{-I_{45}}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Einzelmomente:

$$M_1(x) = \frac{I_1}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_2(x) = \frac{I_2}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_3(x) = \frac{I_3}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_4(x) = \frac{I_4}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_5(x) = \frac{I_5}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

3.2.2. Der vierteilige Querschnitt

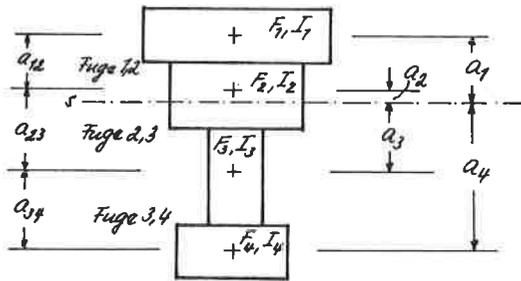


Bild 3.2.

Die Werte für einen vierteiligen Querschnitt nach Bild 3.2 ergeben sich aus denen des fünfteiligen Querschnittes, wenn $F_5 = 0$ gesetzt wird.

Festwerte:

$$C_{12} = \frac{C_{1,12}}{e'_{12}} \quad C_{23} = \frac{C_{1,23}}{e'_{23}} \quad C_{34} = \frac{C_{1,34}}{e'_{34}} \quad C_{45} = \frac{C_{1,45}}{e'_{45}}$$

$$F_1 = F_1 \frac{E_1}{E} \quad F_2 = F_2 \frac{E_2}{E} \quad F_3 = F_3 \frac{E_3}{E} \quad F_4 = F_4 \frac{E_4}{E}$$

$$J_1 = I_1 \frac{E_1}{E} \quad J_2 = I_2 \frac{E_2}{E} \quad J_3 = I_3 \frac{E_3}{E} \quad J_4 = I_4 \frac{E_4}{E}$$

$$y_{12} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} \quad y_{23} = \frac{F_2 F_3}{F_2 + F_3} \quad y_{34} = \frac{F_3 F_4}{F_3 + F_4}$$

$$y_{13} = \frac{F_1 F_3}{(F_1 + F_2)(F_2 + F_3)} \quad y_{24} = \frac{F_2 F_4}{(F_2 + F_3)(F_3 + F_4)}$$

$$k_{12} = 1 + \nu^2 \frac{E}{G_L} y_{12} \quad k_{23} = 1 + \nu^2 \frac{E}{G_S} y_{23}$$

$$k_{34} = 1 + \nu^2 \frac{E}{G_{S4}} y_{34}$$

$$\phi = (k_{12} k_{23} - y_{13}) k_{34} - k_{12} y_{24}$$

$$v_{12}^0 = \frac{y_{12}}{\phi} \left[(k_{23} k_{34} - y_{24}) a_{12} + \frac{y_{12}}{F_2} (a_{23} k_{34} + \frac{y_{34}}{F_3} a_{34}) \right]$$

$$v_{23}^0 = \frac{y_{23}}{\phi} \left[k_{12} k_{34} a_{23} + \frac{y_{12}}{F_2} k_{34} a_{12} + \frac{y_{34}}{F_3} k_{12} a_{34} \right]$$

$$v_{34}^0 = \frac{y_{34}}{\phi} \left[(k_{12} k_{23} - y_{13}) a_{34} + \frac{y_{23}}{F_3} (a_{23} k_{12} + \frac{y_{12}}{F_2} a_{12}) \right]$$

Das wirksame Trägheitsmoment:

$$J_W = \sum_{u=1}^4 J_u + \sum_{u=1}^3 (v_{u,u+1}^0 a_{u,u+1})$$

Durchbiegung:

$$y(x) = \frac{Q_0}{\sigma^3 E J_W} (\sin \nu x - i \cos \nu x)$$

Schubkräfte in den Fugen:

$$t_{12}(x) = \frac{J_{12}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

$$t_{23}(x) = \frac{J_{23}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

$$t_{34}(x) = \frac{J_{34}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos \nu x + i \sin \nu x)$$

Verschiebungen in den Fugen:

$$\delta_{12}^i(x) = \frac{t_{12}(x)}{C_{12}} \quad \delta_{23}^i(x) = \frac{t_{23}(x)}{C_{23}} \quad \delta_{34}^i(x) = \frac{t_{34}(x)}{C_{34}}$$

Normalkräfte:

$$N_1(x) = \frac{\int_{12}}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} \cdot (\sin vx - i \cos vx)$$

$$N_2(x) = \frac{\int_{23} - \int_{12}}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$N_3(x) = \frac{\int_{34} - \int_{23}}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$N_4(x) = \frac{-\int_{34}}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Einzelmomente:

$$M_1(x) = \frac{J_1}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_2(x) = \frac{J_1}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_3(x) = \frac{J_3}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_4(x) = \frac{J_4}{J_{12}} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Spannungen am oberen und unteren Rand der Einzelquerschnitte:

$$\bar{\sigma}_1^{(0,1)}(x) = \left(-\frac{\int_{12}}{J_1} + e_1^{(0,1)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_{12}} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\bar{\sigma}_2^{(0,1)}(x) = \left(\frac{\int_{23} - \int_{12}}{J_2} + e_2^{(0,1)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_{12}} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\bar{\sigma}_3^{(0,1)}(x) = \left(\frac{\int_{34} - \int_{23}}{J_3} + e_3^{(0,1)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_{12}} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\bar{\sigma}_4^{(0,1)}(x) = \left(\frac{\int_{34}}{J_4} + e_4^{(0,1)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_{12}} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

3.2.3. Der dreiteilige Querschnitt

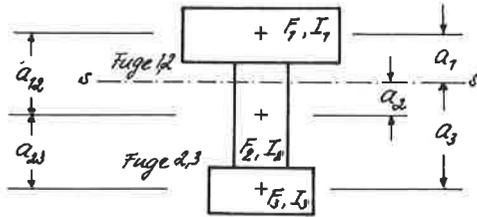


Bild 3.3.

Für $F_4 = 0$ erhält man aus Abschnitt 3.2.2:

Festwerte:

$$C_{12} = \frac{C_{1,12}}{e_{12}} \quad C_{23} = \frac{C_{2,23}}{e_{23}}$$

$$F_1 = F_1 \frac{E_1}{E}$$

$$F_2 = F_2 \frac{E_2}{E}$$

$$F_3 = F_3 \frac{E_3}{E}$$

$$J_1 = I_1 \frac{E_1}{E}$$

$$J_2 = I_2 \frac{E_2}{E}$$

$$J_3 = I_3 \frac{E_3}{E}$$

$$y_{12} = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}$$

$$y_{23} = \frac{F_2 F_3}{F_2 + F_3}$$

$$y_{13} = \frac{F_1 F_3}{(F_1 + F_2)(F_2 + F_3)}$$

$$K_{12} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{12}} \beta_{12}$$

$$K_{23} = 1 + v^2 \frac{E}{C_{23}} \beta_{23}$$

$$\phi = K_{12} K_{23} - \beta_{13}$$

$$v_{12} = \frac{\beta_{12}}{\phi} \left(a_{12} K_{23} + \frac{y_{23}}{F_2} a_{23} \right)$$

$$v_{23} = \frac{\beta_{23}}{\phi} \left(a_{23} K_{12} + \frac{y_{12}}{F_1} a_{12} \right)$$

Das wirksame Trägheitsmoment:

$$J_W = \sum_{n=1}^3 J_n + \sum_{n=1}^2 (v_{n,n+1}^2 a_{n,n+1})$$

Durchbiegung:

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 E J_W} (\sin vx - i \cos vx)$$

Schubkräfte in den Fugen:

$$t_{12}(x) = \frac{J_{12}}{J_W} Q_0 (\cos vx + i \sin vx)$$

$$t_{23}(x) = \frac{J_{23}}{J_W} Q_0 (\cos vx + i \sin vx)$$

Verschiebungen in den Fugen:

$$s_{12}(x) = \frac{t_{12}(x)}{C_{12}}$$

$$s_{23}(x) = \frac{t_{23}(x)}{C_{23}}$$

Normalkräfte:

$$N_1(x) = \frac{J_{12}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$N_2(x) = \frac{J_{23} - J_{12}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$N_3(x) = \frac{-J_{23}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Einzelmomente:

$$M_1(x) = \frac{J_1}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_2(x) = \frac{J_2}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$M_3(x) = \frac{J_3}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Spannungen am oberen und unteren Rand der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_1^{(q,u)}(x) = \left(-\frac{J_{12}}{J_1} + e_1^{(q,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_W} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\sigma_2^{(o,u)}(x) = \left(\frac{J_{12} - J_{23}}{J_2} + e_2^{(o,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_W} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

$$\sigma_3^{(o,u)}(x) = \left(\frac{J_{23}}{J_3} + e_3^{(q,u)} \right) \cdot \frac{Q_0}{v J_W} \cdot \frac{E_1}{E} (\sin vx - i \cos vx)$$

3.2.4. Der Querschnitt aus beliebig vielen Einzelquerschnitten

Die zunächst am Beispiel eines fünfteiligen Trägerquerschnittes abgeleiteten Lösungen haben auch allgemein für Träger mit beliebig vielen Einzelquerschnitten Gültigkeit. Allerdings müssen für Träger mit mehr als fünf Einzelquerschnitten die Determinanten D_y und $D_{n,n+1}$ und damit auch die wirksamen statischen Momente

$$\nu_{n,n+1} = - \frac{C_{n,n+1} \cdot D_{n,n+1}}{J^3 E D_y} \quad \text{s. (3.22)}$$

unmittelbar aus dem der Querschnittsform entsprechenden Differentialgleichungssystem bzw. dem daraus resultierenden linearen Gleichungssystem gewonnen werden. Es empfiehlt sich, diese Rechnung zahlenmäßig vorzunehmen.

Mit den Festwerten

$$C_{n,n+1} = \frac{C_{v,n,n+1}}{e_{n,n+1}} \quad \text{s. (2.2)}, \quad \mathcal{F}_n = F_n \frac{E_n}{E} \quad \text{s. (2.3)} \quad \text{u.} \quad J_n = I_n \frac{E_n}{E} \quad \text{s. (2.4)}$$

ergibt sich dann weiter:

Das wirksame Trägheitsmoment:

$$J_W = \sum_1^m J_n + \sum_1^{m-1} (\nu_{n,n+1}^2 a_{n,n+1}) \quad \text{(3.56)}$$

Die Durchbiegung:

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 E J_W} (\sin vx - i \cos vx) \quad \text{s. (3.28)}$$

Die Spannungen am oberen und unteren Rand der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_n^{(o,u)}(x) = \frac{Q_0 \cdot E_n}{v J_W E} (\sin vx - i \cos vx) \left(\frac{\nu_{n-1,n} - \nu_{n,n+1}}{\mathcal{F}_n} \mp e_n^{(o,u)} \right) \quad \text{s. (3.39)}$$

Die Schubkräfte in der Fuge $n, n+1$:

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{J_{n,n+1}}{J_W} Q_0 (\sin \vartheta x + i \cos \vartheta x) \quad \text{s. (3.33)}$$

Die Verschiebungen in der Fuge $n, n+1$:

$$s_{n,n+1}(x) = \frac{t_{n,n+1}(x)}{G_{n,n+1}} \quad \text{s. (3.29)}$$

Die in den Schwerpunkten der Einzelquerschnitte angreifenden Normalkräfte:

$$N_n(x) = \frac{J_{n,n+1} - J_{n-1,n}}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin \vartheta x - i \cos \vartheta x) \quad \text{s. (3.37)}$$

Die Einzelmomente:

$$M_n(x) = \frac{J_n}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin \vartheta x - i \cos \vartheta x) \quad \text{s. (3.38)}$$

Auf obige Formelzusammenstellung für Querkräfte nach Gl. (3.1) wird bei der nun folgenden Berechnung der wichtigsten Belastungsfälle zurückgegriffen.

3.3. Der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast

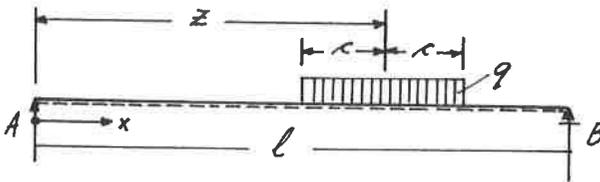


Bild 3.5.

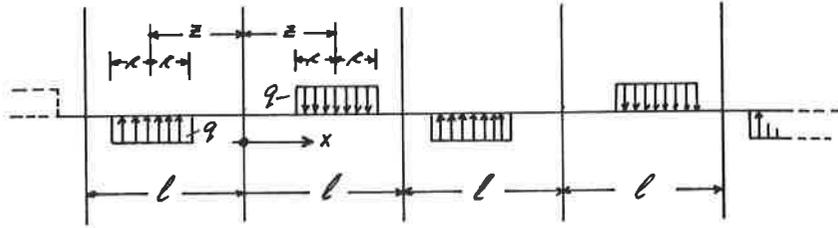


Bild 3.6.

Die Belastung eines freiaufliegenden Trägers unter streckenweiser Gleichlast (Bild 3.5) läßt sich unter Einhaltung aller Randbedingungen in eine Fourier-Reihe mit der Periode $2l$ (s. Bild 3.6) der Form

$$q(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r} \sin \frac{r\pi}{l} c \sin \frac{r\pi}{l} z \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.57)$$

entwickeln [17].

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die neue Abkürzung

$$f(r) = \sin \frac{r\pi}{l} c \sin \frac{r\pi}{l} z \quad (3.58)$$

eingeführt.

Daraus folgt für die Querkraft und das äußere Moment:

$$Q(x) = -\int q(x) dx = \frac{4ql}{\pi^2} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} f(r) \cos \frac{r\pi}{l} x \quad (3.59)$$

$$M(x) = \int Q(x) dx = \frac{4ql^2}{\pi^3} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.60)$$

Nach dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen Lösungsweg können nunmehr die Lösungen für die unbekanntes Weg- und Schnittgrößen aus den in Abschnitt 3.2 gefundenen Fundamentallösungen unmittelbar gewonnen werden.

Setzt man für

$$\nu = \frac{\pi \tau}{l} \quad (3.61)$$

und für

$$Q_0 = \frac{4qL}{\pi^2 \tau^2} \cdot f(\tau) \quad (3.62)$$

und beachtet man weiter, daß sowohl das wirksame statische Moment $\mathcal{J}_{n,n+1}$ als auch das wirksame Trägheitsmoment J_w Funktionen von ν und damit auch von τ sind, dann erhält man schließlich für die unbekanntenen Weggrößen $y(x)$ und $\delta_{n,n+1}(x)$ aus den Gln. (3.28) und (3.29) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{Q_0}{\nu^3 \cdot E \cdot J_w(\tau)} \sin \nu x = \\ &= \frac{4qL^4}{\pi^3 \cdot E} \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{1}{\tau^5 J_w(\tau)} f(\tau) \sin \frac{\pi \tau}{l} x \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n+1}(x) &= \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}(\tau)}{C_{n,n+1} J_w(\tau)} \cdot Q_0 \cdot \cos \nu x = \\ &= \frac{4qL}{\pi^3 C_{n,n+1}} \sum_{\tau=1,2,3} \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}(\tau)}{\tau^2 J_w(\tau)} f(\tau) \cos \frac{\pi \tau}{l} x \end{aligned} \quad (3.64)$$

Ebenso folgt für die Schnittgrößen aus den Gln. (3.33), (3.37) und (3.38):

$$\begin{aligned} t_{n,n+1}(x) &= \delta_{n,n+1}(x) C_{n,n+1} = \\ &= \frac{4qL}{\pi^2} \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}(\tau)}{\tau^2 J_w(\tau)} f(\tau) \cos \frac{\pi \tau}{l} x \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}(\tau) - \mathcal{J}_{n-1,n}(\tau)}{\tau^2 J_w(\tau)} \cdot \frac{Q_0}{\tau} \sin \nu x \\ &= \frac{4qL^2}{\pi^3} \sum_{\tau=1,2,3,\dots} \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}(\tau) - \mathcal{J}_{n-1,n}(\tau)}{\tau^3 J_w(\tau)} f(\tau) \sin \nu x \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned}
 M_n(x) &= \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{J_n}{J_w(r)} \cdot \frac{Q_0}{v} \sin vx = \\
 &= \frac{4qL^2 J_n}{\pi^3} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3 J_w(r)} f(r) \sin \frac{r\pi}{L} x
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Die oberen und unteren Randspannungen der Einzelquerschnitte ergeben sich schließlich zu:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{(a,n)}(x) &= \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{E_n}{E} \left(\frac{J_{n-1,n}(r) - J_{n,n+1}(r)}{J_n} + e_n^{(a,n)} \right) \frac{Q_0}{v J_w(r)} \sin vx = \\
 &= \frac{4qL^2 E_n}{\pi^3 E} \sum_{r=1,2,3,\dots} \left(\frac{J_{n-1,n}(r) - J_{n,n+1}(r)}{J_n} + e_n^{(a,n)} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \frac{1}{r^3 J_w(r)} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\pi}{L} x
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Bei starrem Verbund (alle $C_{n,n+1} = \infty$) gehen nach Gl. (3.35) und (3.36) die von der Summenvariablen r abhängigen statischen Momente $J_{n,n+1}$ und das wirksame Trägheitsmoment J_w über in die von r unabhängigen statischen Momente $S_{n,n+1}$ und das Trägheitsmoment J des starren Trägers.

Somit erhält man bei starrem Verbund für die in Fourier-Reihen entwickelten Weg- und Schnittgrößen nach Gln. (3.63) bis (3.68):

$$y(x)_{\text{starr}} = \frac{4qL^4}{\pi^5 EJ} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^5} f(r) \sin \frac{r\pi}{L} x \tag{3.69}$$

$$\delta_{n,n+1}(x)_{\text{starr}} = 0 \tag{3.70}$$

$$t_{n,n+1}(x)_{\text{starr}} = \frac{4qL S_{n,n+1}}{\pi^3 J} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \cos \frac{r\pi}{L} x \tag{3.71}$$

$$N_n(x)_{\text{starr}} = \frac{4qL^2 J_n a_n}{\pi^3 J} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{r\pi}{L} x \tag{3.72}$$

$$M_n(x) = \frac{4q l^2 J_n}{\pi^3 J} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{\pi r}{l} x \quad (3.73)$$

$$G_n^{(a_n)}(x)_{\text{starr}} = \frac{4q l^2}{\pi^3 J} \left(-Q_n + Q_n^{(a_n)} \right) \frac{E_n}{E} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{\pi r}{l} x \quad (3.74)$$

Selbstverständlich könnten die Werte vorstehender Gleichungen auch in exakter Form angeschrieben werden. Es wäre dann jedoch notwendig, für die drei Trägerabschnitte

$$0 \leq x = (z-c) \quad (z-c) \leq x \leq (z+c)$$

und

$$(z+c) \leq x \leq l$$

für jede Weg- und Schnittgröße drei gesonderte Bestimmungsgleichungen anzuschreiben, um die Knicke in der Querkraftslinie zu berücksichtigen. Für die spätere Auswertung mittels Elektronenrechnern sowie für die Einhaltung einer gewissen Uebersichtlichkeit eignet sich die oben gefundene geschlossene Schreibweise wesentlich besser als die exakten Werte.

Mit den Abkürzungen

$$Q_n(x) = \frac{J \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{J_{n+1/2}(r) - J_{n-1/2}(r)}{r^3 J_n(r)} f(r) \sin \frac{\pi r}{l} x}{J_n Q_n \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{\pi r}{l} x} \quad (3.75)$$

$$W(x) = J \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3 J_n(r)} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{\pi r}{l} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} f(r) \sin \frac{\pi r}{l} x} \quad (3.76)$$

$$R(x) = \frac{J \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2 J_n(r)} f(r) \sin \frac{r\sqrt{x}}{L}}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{x}}{L}} \quad (3.77)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{J}{S_{n+1}} \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{J_{n+1}(r)}{r^2 J_n(r)} f(r) \cos \frac{r\sqrt{x}}{L}}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} f(r) \cos \frac{r\sqrt{x}}{L}} \quad (3.78)$$

gewinnt man für die Weg- und Schnittgrößen endlich die stark vereinfachten Bestimmungsgleichungen:

$$y(x) = y(x)_{\text{starr}} \cdot R(x) \quad (3.79)$$

$$t_{n+1}(x) = t_{n+1}(x)_{\text{starr}} \cdot \frac{Q(x)}{J_{n+1}} = \frac{Q(x) \cdot S_{n+1}}{J} \cdot \frac{Q(x)}{J_{n+1}} \quad (3.80)$$

$$S_{n+1}(x) = \frac{t_{n+1}(x)}{C_{n+1}} = \frac{Q(x) S_{n+1}}{C_{n+1} J} \cdot \frac{Q(x)}{J_{n+1}} \quad (3.81)$$

$$N_n(x) = N_n(x)_{\text{starr}} \cdot Q_f(x) = \frac{M(x)}{J} \cdot \frac{J_n a_n}{J} \cdot Q_f(x) \quad (3.82)$$

$$M_n(x) = M_n(x)_{\text{starr}} \cdot Q_L(x) = \frac{M(x)}{J} \cdot J_n \cdot Q_L(x) \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(a,w)} &= \left(-\frac{N_n(x)}{F_n} \mp \frac{M_n(x)}{J_n} e_n^{(a,w)} \right) \frac{E_n}{E} = \\ &= \frac{M(x)}{J} \left(-N_n(x) a_n \mp e_n^{(a,w)} Q_L(x) \right) \frac{E_n}{E} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Die Einzelmomente M_n können auch unmittelbar aus Gl. (2.6)

$$M(x) = \sum_{n=1}^m M_n(x) + \sum_{n=1}^m [N_n(x) a_n]$$

ermittelt werden, wenn alle Normalkräfte N_n bereits bekannt sind. Durch Einsetzen der Gln. (3.82) und (3.83) in Gl. (2.6) erhält man:

$$M(x) = \frac{M(x)}{J} \varphi(x) \sum_{n=1}^m J_n + \frac{M(x)}{J} \cdot \sum_{n=1}^m [F_n a_n^2 \vartheta_n(x)]$$

Daraus ergibt sich der Faktor $\varphi(x)$ wesentlich einfacher zu:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{J - \sum_{n=1}^m F_n a_n^2 \vartheta_n(x)}{\sum_{n=1}^m J_n}} \quad (3.76a)$$

Für die Einzelmomente folgt dann wieder nach Gl. (3.82):

$$M_n(x) = M_n(x)_{\text{starr}} \cdot \varphi(x) = \frac{M(x)}{J} J_n \varphi(x)$$

3.4. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

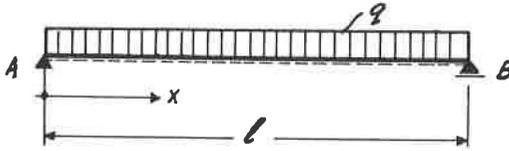


Bild 3.7.

Der Belastungsfall Einfeldträger unter Gleichstreckenlast nach Bild 3.7 ist ein Sonderfall des Belastungsfalls 3.3 .

Für $c = z = l/2$

geht der Ausdruck $f(r)$ nach Gl. (3.58) über in:

$$f(r) = \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \\ = 1 \quad \text{für } r = 1, 3, 5, \dots \quad (3.85)$$

$$= 0 \quad \text{für } r = 2, 4, 6, \dots \quad (3.86)$$

Damit erhält man die vereinfachte Belastungsfunktion:

$$q(x) = \frac{4q}{\pi} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r} \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.87)$$

Daraus folgt weiter für den Querkrafts- und Momentenverlauf:

$$Q(x) = \frac{4q l}{\pi^2} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot \cos \frac{r\pi}{l} x \quad (3.88)$$

$$M(x) = \frac{4q l^2}{\pi^3} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^3} \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.89)$$

Für die Weg- und Schnittgrößen ergibt sich dann:

$$\tilde{M}_n(x) = \frac{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_{n+r} \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.96)$$

Auch hier läßt sich wie in Abschnitt 3.2 die vereinfachte Schreibweise der Gln. (3.79) bis (3.84) vorteilhaft anwenden. Bei der Ermittlung der Faktoren d_r, g_r, k und q können dabei im Gegensatz zu Abschnitt 3.3 die Nenner in exakter Form angegeben werden, da hier die Querkraftslinien über die gesamte Trägerlänge stetig ist. Für die "Nachgiebigkeitsfaktoren" folgt dann:

(3.95)

$$g_n(x) = \frac{4qL^2 E_n}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.95)$$

(3.94)

$$M_n(x) = \frac{4qL^2 E_n}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.94)$$

(3.93)

$$N_n(x) = \frac{4qL E_n}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.93)$$

(3.92)

$$T_{n+1}(x) = \frac{4qL}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.92)$$

(3.91)

$$d_{n+1}(x) = \frac{4qL}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.91)$$

(3.90)

$$q(x) = \frac{4qL E_n}{\sum_{r=0}^{n-1} \frac{g_r \cdot \cos \frac{r\pi}{2}}{1 - \frac{r\pi}{2}}} \quad (3.90)$$

$$d(x) = J \cdot \frac{\sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^3 J_H(r)} \sin \frac{r\pi}{l} x}{\frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \quad (3.97)$$

$$N(x) = J \cdot \frac{\sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^5 J_H(r)} \sin \frac{r\pi}{l} x}{\frac{\pi^5}{96} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 + \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right)} \quad (3.98)$$

$$q_{n,n+1}(x) = \frac{J \cdot \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{v_{n,n+1}(r)}{r^2 J_H(r)} \cos \frac{r\pi}{l} x}{\sigma_{n,n+1} \cdot \frac{\pi^2}{8} \left(1 - \frac{2x}{l}\right)} \quad (3.99)$$

Wichtig für die Beurteilung des Tragverhaltens eines Trägers sind vor allem die Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen. Bei vorliegendem Lastfall erhält man die maximale Durchbiegung, die maximalen Normalkräfte und die maximalen Einzelmomente an der Stelle $x = l/2$, die größten Schubkräfte und Verschiebungen an der Stelle $x = 0$. Dafür vereinfachen sich die Gleichungen (3.96) bis (3.99) auf:

$$u_n \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{32 J}{\pi^3 J_H a_n} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{v_{n,n+1}(r) - v_{n-1,n}(r)}{r^3 J_H(r)} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (3.100)$$

$$d \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{32 J}{\pi^3} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^3 J_H(r)} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (3.101)$$

$$N \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1536 \cdot J}{5 \pi^5} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^5 J_H(r)} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (3.102)$$

$$q_{n,n+1}(0) = \frac{8 J}{\pi^2 \sigma_{n,n+1}} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{v_{n,n+1}(r)}{r^2 J_H(r)} \quad (3.103)$$

Beim Grenzübergang zum starren Verbund (alle $C_{n,n+1} \rightarrow \infty$) folgt daraus unter Verwendung der Gln. (3.35) und (3.36) wie nicht anders zu erwarten war:

$$\alpha_n \left(\frac{l}{2}\right)_{\text{starr}} = \frac{32}{7^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots\right) = \frac{32}{7^3} \cdot \frac{7^3}{32} = 1 \quad (3.104)$$

$$\beta \left(\frac{l}{2}\right)_{\text{starr}} = \frac{32}{7^3} \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots\right) = \frac{32}{7^3} \cdot \frac{7^3}{32} = 1 \quad (3.105)$$

$$\kappa \left(\frac{l}{2}\right)_{\text{starr}} = \frac{1536}{575} \left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \dots\right) = \frac{1536}{575} \cdot \frac{575}{1536} = 1 \quad (3.106)$$

$$\gamma_{\text{max}}^{(0)} \text{starr} = \frac{8}{7^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{8}{7^2} \cdot \frac{7^2}{8} = 1 \quad (3.107)$$

Bemerkenswert ist dabei, daß alle Summenwerte nahezu mit den Werten ihrer ersten Glieder übereinstimmen. Da auch bei nachgiebigem Verbund ein ähnlich günstiges Konvergenzverhalten der Summen zu erwarten ist, wird in einem der folgenden Kapitel versucht, aus dieser Eigenschaft ein Näherungsverfahren zu entwickeln.

3.5. Der Einfeldträger unter Einzellast

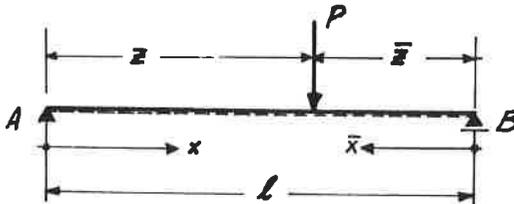


Bild 3.8.

Ähnlich wie beim Träger unter Gleichstreckenlast läßt sich auch vorliegender Lastfall (s. Bild 3.8) aus Lastfall 3.3 entwickeln.

Faßt man P als Resultierende der Teilbelastung $2cq$ nach Bild 3.5 auf, dann kann in Gl. (3.57) q ersetzt werden durch:

$$q = \frac{P}{2c}$$

Somit geht die Belastungsfunktion Gl. (3.57) zunächst über in:

$$q(x) = \frac{2P}{\pi \cdot c} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r} \sin \frac{r\pi c}{l} \sin \frac{r\pi z}{l} \sin \frac{r\pi}{l} x$$

Der Grenzübergang für $c \rightarrow 0$ liefert mit

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{c} \sin \frac{r\pi c}{l} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{r\pi}{l} \cos \frac{r\pi c}{l} = \frac{r\pi}{l}$$

schließlich:

$$q(x) = \frac{2P}{l} \sum_{r=1,2,3,\dots} \sin \frac{r\pi z}{l} \cdot \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.108)$$

Daraus folgt für die Momenten- und Querkraftverteilung:

$$Q(x) = -\int q(x) dx = -\frac{2P}{\pi} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r} \sin \frac{r\pi z}{l} \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.109)$$

$$M(x) = \int Q(x) dx = \frac{2Pl}{\pi^2} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \sin \frac{r\pi z}{l} \cos \frac{r\pi}{l} x \quad (3.110)$$

Dann ergeben sich die Weg- und Schnittgrößen ähnlich wie in Abschnitt 3.4 zu:

$$y(x) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 E} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^4 J_H(r)} \sin \frac{r\pi z}{l} \sin \frac{r\pi}{l} x \quad (3.111)$$

$$\int_{\text{Quint 1}}(x) = \frac{2Pl}{G_{\text{Quint 1}}} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{J_{\text{Quint 1}}(r)}{r \cdot J_H(r)} \sin \frac{r\pi z}{l} \cos \frac{r\pi}{l} x \quad (3.112)$$

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{2P}{J} \sum_{1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{J_{n,n+1}(\tau)}{\tau J_n(\tau)} \sin \frac{\tau \bar{z}}{l} \cos \frac{\tau \bar{x}}{l} \quad (3.113)$$

$$N_n(x) = \frac{2Pl}{J^2} \sum_{1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{J_{n,n+1}(\tau) \cdot J_{n,n}(\tau)}{\tau^2 J_n(\tau)} \sin \frac{\tau \bar{z}}{l} \sin \frac{\tau \bar{x}}{l} \quad (3.114)$$

$$M_n(x) = \frac{2PlJ_n}{J^2} \sum_{1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\tau^2 J_n(\tau)} \sin \frac{\tau \bar{z}}{l} \sin \frac{\tau \bar{x}}{l} \quad (3.115)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(0,u)}(x) &= \frac{2PlE_n}{J^2 E} \sum_{1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\tau^2 J_n(\tau)} \left(\frac{J_{n-1,n}(\tau) \cdot J_{n,n+1}(\tau)}{J_n} - e_n^{(0,u)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \sin \frac{\tau \bar{z}}{l} \sin \frac{\tau \bar{x}}{l} \end{aligned} \quad (3.116)$$

Bei starrem Verbund gelten im Bereich

$$0 \leq x \leq z$$

die exakten Beziehungen:

$$y(x)_{\text{starr}} = \frac{Pl^3}{6EJ} \cdot \frac{\bar{z}}{l} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{\bar{z}^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (3.117)$$

$$t_{n,n+1}(x)_{\text{starr}} = \frac{P\bar{z}J_{n,n+1}}{lJ} = \frac{Q(x) \cdot J_{n,n+1}}{J} \quad (3.118)$$

$$N_n(x)_{\text{starr}} = \frac{P\bar{z}J_n a_n}{lJ} x = \frac{M(x) J_n a_n}{J} \quad (3.119)$$

$$M_n(x)_{\text{starr}} = \frac{P\bar{z} \cdot J_n}{lJ} x = \frac{M(x) \cdot J_n}{J} \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(0,u)}(x)_{\text{starr}} &= \frac{P\bar{z}x E_n}{lJ E} \left(-a_n + e_n^{(0,u)} \right) = \\ &= \frac{M(x) E_n}{J E} \left(-a_n + e_n^{(0,u)} \right) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Damit erhält man für die vereinfachte Schreibweise nach Gln. (3.79) bis (3.84) im Bereich $0 \leq x \leq z$ die Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$w_n(x) = \frac{8J}{F^2 a_n T^2} \cdot \frac{l}{z} \cdot \frac{l}{x} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{J_{2n+1}(r) - J_{2n-1}(r)}{r^2 J_n(r)} \sin \frac{r\sqrt{z}}{l} \sin \frac{r\sqrt{x}}{l} \quad (3.122)$$

$$y_n(x) = \frac{8J}{T^2} \cdot \frac{l^2}{z \cdot x} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{r^2 J_n(r)} \sin \frac{r\sqrt{z}}{l} \sin \frac{r\sqrt{x}}{l} \quad (3.123)$$

$$k(x) = \frac{16J}{T^4} \cdot \frac{l^2}{z \cdot x} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{r^4 J_n(r)} \sin \frac{r\sqrt{z}}{l} \sin \frac{r\sqrt{x}}{l} \quad (3.124)$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{8J}{F J_{2n+1}} \cdot \frac{l}{z} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{J_{2n+1}(r)}{r J_n(r)} \sin \frac{r\sqrt{z}}{l} \cos \frac{r\sqrt{x}}{l} \quad (3.125)$$

Speziell für Einzellast in Trägermitte ($z = l/2$) folgt daraus für die Nachgiebigkeitsfaktoren der Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen:

$$w_n\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{8J}{F^2 J_n a_n} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{J_{2n+1}(r) - J_{2n-1}(r)}{r^2 J_n(r)} \quad (3.126)$$

$$y_n\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{8J}{T^2} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{r^2 J_n(r)} \quad (3.127)$$

$$k\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{96J}{T^4} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{r^4 J_n(r)} \quad (3.128)$$

$$J_{2n+1}(0) = \frac{4J}{F J_{2n+1}} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{J_{2n+1}(r)}{r J_n(r)} \sin \frac{r\sqrt{l}}{2} \quad (3.129)$$

Die Probe für starren Verbund ergibt ähnlich wie bei Gleichstreckenlast:

$$\alpha_N\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)_{\text{starr}} = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \quad (3.130)$$

$$\beta_N\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)_{\text{starr}} = \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right) = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \quad (3.131)$$

$$\alpha_C\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)_{\text{starr}} = \frac{96}{\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots\right) = \frac{96}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} = 1 \quad (3.132)$$

$$\beta_C(\sigma)_{\text{starr}} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \quad (3.133)$$

Insgesamt gesehen konvergieren obige Reihen schlechter als diejenigen bei Gleichstreckenlast. Bei der Aufstellung eines Näherungsverfahrens ist diese langsame Konvergenz unter Umständen zu berücksichtigen.

3.6. Der Durchlaufträger über zwei Felder

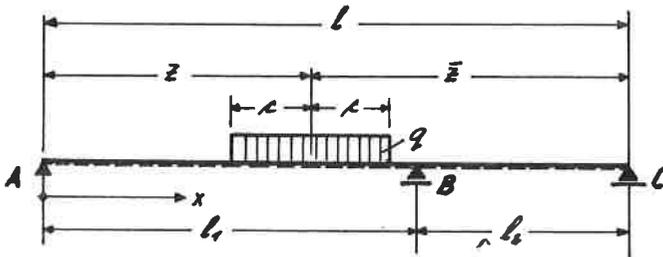


Bild 3.9.

Als allgemeinsten Fall eines Durchlaufträgers wird ein Durchlaufträger über zwei Feldern mit streckenweiser Gleichlast nach Bild 3.9 untersucht. Die Berechnung wird zweckmäßig mit Hilfe der in den Abschnitten 3.3, 3.4 und 3.5 gewonnenen Ergebnisse nach dem Kraftgrößenverfahren vorgenommen, wobei als statisch unbestimmte Kraftgröße die innenliegende Auflagerkraft B gewählt

Wird.

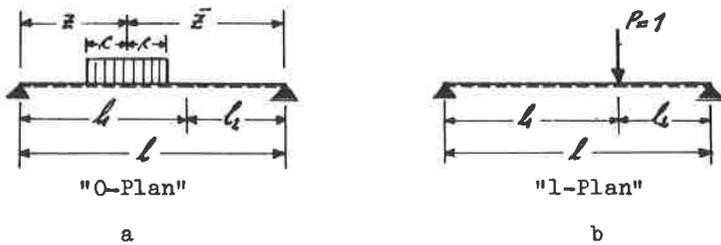


Bild 3.10.

Im "0-Plan" (s. Bild 3.10a) ergibt sich die Durchbiegung unter der äußeren Belastung q an der Stelle $x = l_1$ nach Gl. (3.79) zu:

$$y^0(l) = y^0(l)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}^0(l)$$

Für die Durchbiegung im "1-Plan" folgt für die Belastung $P = 1$ an der Stelle $x = l_1$ (s. Bild 3.10b) nach Gl. (3.79):

$$y^1(l) = y^1(l)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}^1(l)$$

Nach der Kraftgrößenmethode erhält man schließlich aus der Bedingung

$$y(l) = 0 = y^0(l) - B \cdot y^1(l) \quad (3.134)$$

für die unbekannte mittlere Auflagerkraft:

$$B = \frac{y^0(l)}{y^1(l)} = \frac{y^0(l)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}^0(l)}{y^1(l)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}^1(l)}$$

Wie leicht einzusehen ist, ist aber

$$\frac{y^0(l)_{\text{starr}}}{y^1(l)_{\text{starr}}} = B_{\text{starr}}$$

Damit ergibt sich endlich die einfache Beziehung:

$$B = B_{\text{starr}} \cdot \frac{\mathcal{K}^0(l)}{\mathcal{K}^1(l)} \quad (3.135)$$

Darin ist B_{starr} die Auflagerkraft eines starr verbundenen Trägers mit gleichem Querschnitt.

Der Durchbiegungsfaktor $K^*(l)$ ergibt sich aus Gl. (3.124) zu:

$$K^*(l) = \frac{12J}{\pi^4} \cdot \frac{l^2}{4L_2} \sum_{i=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{r^4 J_n(r)} \frac{\sin^2 r \pi l}{l} \quad (3.136)$$

Der Durchbiegungsfaktor $K^*(l)$ kann je nach der Art der äußeren Belastung aus den Gln. (3.77), (3.98) oder (3.124) bestimmt werden. Dabei ist die Variable x durch l_1 zu ersetzen. Da sich dadurch keine wesentlichen Vereinfachungen ergeben, wird auf eine Wiedergabe dieser Gleichungen an dieser Stelle verzichtet.

Nachdem nun auf diese Weise die unbekannte Auflagerkraft ermittelt worden ist, können die unbekanntes Weg- und Schnittgrößen des Durchlaufträgers durch Ueberlagerung der entsprechenden Größen aus dem "0 - Plan" und dem "1 - Plan" bestimmt werden.

Die Weg- und Schnittgrößen unter der äußeren Belastung im statisch bestimmten Grundsystem (s. Bild 3.10.a), sie werden mit

$$y^0(x), \delta_{n,n+1}^0(x), \xi_{n,n+1}^0(x), N_n^0(x), M_n^0(x)$$

bezeichnet, lassen sich je nach der äußeren Belastung aus den in den Abschnitten 3.3, 3.4 oder 3.5 angegebenen Grundgleichungen ermitteln.

Die Weg- und Schnittgrößen unter der Last "1" an der Stelle $x = l_1$ (s. Bild 3.10.b) ergeben sich aus den Grundgleichungen nach Abschnitt 3.4, wobei lediglich die Einzellast P durch die ideelle Belastung "1" zu ersetzen ist; sie werden mit

$$y^1(x), \delta_{n,n+1}^1(x), \xi_{n,n+1}^1(x), N_n^1(x), M_n^1(x)$$

bezeichnet.

Für die Weg- und Schnittgrößen des Durchlaufträgers folgt dann endlich:

$$y(x) = y^0(x) - B y^1(x) \quad (3.137)$$
$$d_{n,n+1}(x) = d_{n,n+1}^0(x) - B d_{n,n+1}^1(x) \quad (3.138)$$
$$t_{n,n+1}(x) = t_{n,n+1}^0(x) - B t_{n,n+1}^1(x) \quad (3.139)$$
$$N_n(x) = N_n^0(x) - B N_n^1(x) \quad (3.140)$$
$$M_n(x) = M_n^0(x) - B M_n^1(x) \quad (3.141)$$

Die Spannungen am oberen und unteren Rand der Einzelquerschnitte ergeben sich dann nach Gl. (2.26) zu:

$$\sigma_n^{(o,u)}(x) = \left(-\frac{N_n(x)}{F_n} \mp \frac{M_n(x)}{J_n} e_n^{(o,u)} \right) \frac{E_n}{E} \quad (2.29)$$

Nach der oben angegebenen Methode können auch Durchlaufträger mit mehr als 2 Feldern berechnet werden. Dabei sind jeweils die Auflagerkräfte der Innenstützen als statisch überzählige Größen anzusehen.

4. Lösung der Grundgleichungen für Biegeträger mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

4.1. Vorbemerkungen

Die Schlüsselgleichungen zur Berechnung von Biegeträgern mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten wurden bereits in Abschnitt 2.3 abgeleitet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß sich die Dehnungen der in den Schwerpunkten der Einzelquerschnitte liegenden Fasern proportional zu den Abständen dieser Fasern von der Gesamtschwerachse verhalten:

$$\epsilon_n(x) = \epsilon_1(x) \frac{a_n}{a_1} \quad \text{s. (2.30)}$$

Diese Voraussetzung liegt nur dann vor, wenn die Fugensteifigkeiten der Beziehung

$$C_{n,n+1} = C_{12} \frac{S_{n,n+1}}{S_{12}} \cdot \frac{a_{12}}{a_{n,n+1}} \quad \text{s. (2.37)}$$

genügen. Bei Einhaltung obiger Bedingungen ergab sich zur Bestimmung von $\epsilon_1(x)$ die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\epsilon_1''(x) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \epsilon_1(x) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1}{EJ} M(x) \quad \text{s. (2.50)}$$

mit den Abkürzungen:

$$\alpha^2 = \frac{\sum J_n a_n^2}{J} \quad \text{s. (2.44)} \quad \beta^2 = \frac{\sum J_n}{J} \quad \text{s. (2.43)} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{E J_1 a_1}{C_{12} a_{12}} \quad \text{s. (2.45)}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung und die Bestimmung der restlichen Weg- und Schnittgrößen wird für Einfeldträger zunächst mit ähnlichen Mitteln wie in Kapitel 3 durchgeführt. Anschließend werden für die wichtigsten Belastungsfälle geschlossene Lösungen in exakter Form angegeben. Auf die Berechnung von Durchlaufträgern wird in diesem Kapitel verzichtet, da diese mit dem schon in Abschnitt 3.5 angegebenen Verfahren durchgeführt werden kann, wobei lediglich die vereinfachten Nachgiebigkeitsfaktoren dieses Kapitels zu verwenden sind.

4.2. Lösung mit Hilfe von Fourierreentwicklungen

4.2.1. Fundamentallösung für eine komplexe Querkraft der Form $Q(x) = Q_0(\cos vx + i \sin vx)$

Entsprechend Abschnitt 3.1 erhält man aus der Differentialgleichung (2.50) für eine komplexe Querkraft der Form

$$Q(x) = Q_0 (\cos vx + i \sin vx) \quad \text{s. (3.1)}$$

und dem dazugehörigen Moment

$$M(x) = \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad \text{s. (3.30)}$$

für die Dehnung $\epsilon_1(x)$ die komplexe Lösung:

$$E_1(x) = A_1 (\cos vx + i \sin vx) \quad (4.1)$$

Darin ist A_1 eine Konstante, die selbst wieder komplex sein kann.

Damit folgt für die k -te Ableitung nach x mit $s = i \cdot v$:

$$E_1^{(k)}(x) = (i v)^k \cdot E_1(x) = s^k \cdot E_1(x) \quad (4.2)$$

In Gl. (2.50) eingesetzt ergibt sich zur Bestimmung von $\epsilon_1(x)$ die lineare Gleichung:

$$s^2 \cdot E_1(x) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1}{EJ} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx)$$

Daraus folgt unmittelbar mit $s^2 = (i \cdot v)^2 = -v^2$:

$$E_1(x) = - \frac{a_1}{EJ \left[1 + \left(\frac{v\beta}{\omega} \right)^2 \right]} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.3)$$

Nach Gl. (2.51) ergibt sich mit den Gln. (3.30) und (4.3) die Durchbiegung zu:

$$y(x) = -\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 \cdot \xi(x) - \iint \frac{M(x)}{EJ} dx$$

$$= \frac{Q_0}{v^3 EJ} \left[\frac{\left(\frac{v\alpha}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{v\beta}{\omega}\right)^2} + 1 \right] (\sin vx - i \cos vx).$$

Oder mit $\alpha^2 = 1 - \beta^2$ s. (2.49)

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 EJ} \left[\frac{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \beta^2} \right] (\sin vx - i \cos vx). \quad (4.4)$$

Bezeichnet man den Ausdruck

$$J_W = J \frac{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \beta^2}{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \quad (4.5)$$

wieder als "wirksames Trägheitsmoment", dann kann für Gl. (4.4) vereinfacht geschrieben werden:

$$y(x) = \frac{Q_0}{v^3 EJ_W} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.6)$$

Gl. (4.5) läßt sich durch Erweiterung des Zählers wie folgt umformen:

$$J_W = J \frac{\beta^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \beta^2 + 1 - \beta^2}{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} = J \left[\beta^2 + \frac{\alpha^2}{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \right] \quad (4.7)$$

Führt man in Gl. (4.7) für α^2 und β^2 die ursprünglichen Bedeutungen nach den Gln. (2.43) und (2.44) wieder ein, dann erhält man:

$$J_W = \sum_1^m J_n + \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \sum_1^m F_n a_n^2 \quad (4.8)$$

Mit den Abkürzungen

$$k = \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \quad (4.9) \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{1+k} \quad (4.10)$$

vereinfacht sich Gl. (4.8) weiter auf:

$$J_W = \sum_1^m J_n + \gamma \sum_1^m J_n a_n^2 \quad (4.11)$$

Das "wirksame Trägheitsmoment" unterscheidet sich hier im Gegensatz zu demjenigen bei voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten, s. Gl. (3.25), von dem eines starren Trägers lediglich durch den Abminderungsfaktor γ , der die durch die in den Fugen stattfindenden Verschiebungen verminderte Wirksamkeit der Einzelquerschnitte F_n berücksichtigt.

Aus Gl. (4.5) erhält man durch Umformung:

$$1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = \frac{J_W}{J} \left[1 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 \right] = \frac{J_W}{J} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

In Gl. (4.3) eingesetzt ergibt sich:

$$\epsilon_1(x) = - \frac{\gamma \cdot a}{E J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.12)$$

Damit kann auch die Dehnung $\epsilon_1(x)$ mit Hilfe des Abminderungsfaktors γ und des wirksamen Trägheitsmomentes J_W angegeben werden.

Nach Gl. (2.30) folgt für die Schwerpunktsdehnungen der weiteren Querschnitte:

$$\epsilon_n(x) = - \frac{\gamma \cdot a_n}{E J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.13)$$

Daraus ergeben sich die Normalkräfte (als Druckkräfte positiv):

$$N_n(x) = \frac{\gamma \cdot F_n \cdot a_n}{J_W} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.14)$$

Die Schubkräfte erhält man nach Gl. (2.34) unter Verwendung von Gl. (4.12) zu:

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{\gamma \cdot Q_{n,n+1}}{J_W} \cdot Q_0 (\cos vx - i \sin vx) \quad (4.15)$$

Daraus folgt nach Gl. (2.1) für die Verschiebung:

$$\delta_{n,n+1}(x) = \frac{\gamma \cdot S_{n,n+1}}{C_{n,n+1} J_w} \cdot Q_0(\cos vx + i \sin vx) \quad (4.16)$$

Die Einzelmomente M_n ergeben sich nach Gl. (2.28) mit Gl. (4.6) zu:

$$M_n(x) = -\gamma''(x) E J_n = \frac{J_n}{J_w} \cdot \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \quad (4.17)$$

Für die Spannungen folgt schließlich nach Gl. (2.29):

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(0,u)} &= \left[-\frac{N_n(x)}{F_n} + \frac{M_n(x)}{J_n} \cdot e_n^{(0,u)} \right] \frac{E_n}{E} = \\ &= \frac{1}{J_w} \left[-\gamma a_n + e_n^{(0,u)} \right] \frac{E_n}{E} \frac{Q_0}{v} (\sin vx - i \cos vx) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ein Vergleich der in Abschnitt 3.2 gefundenen Ausdrücke für die Weg- und Schnittgrößen von Trägern mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten mit obigen Gleichungen zeigt, daß sie sich lediglich durch die andere Form der wirksamen statischen Momente unterscheiden. Man erkennt dabei folgende Uebergangsbedingungen:

$$\gamma_{n,n+1}^* \rightarrow \gamma \cdot S_{n,n+1} \quad (4.19)$$

$$\gamma_{n,n+1}^* - \gamma_{n-1,n}^* \rightarrow \gamma (S_{n,n+1} - S_{n-1,n}) \quad (4.20)$$

Mit Gl. (4.19) geht nach einiger Umformung das wirksame Trägheitsmoment nach Gl. (3.56)

$$J_w = \sum_1^m J_n + \sum_1^{m-1} (\gamma_{n,n+1}^* \cdot a_{n,n+1})$$

ebenfalls über in J_w nach Gl. (4.11).

Die hier für die Weg- und Schnittgrößen ermittelten Gleichungen hätten damit auch unmittelbar aus den entsprechenden Gleichungen des Abschnittes 3.2 gewonnen werden können. Da die Ueberführung der komplizierten, querschnittsabhängigen Ausdrücke $\gamma_{n,n+1}^*$ in $\gamma \cdot S_{n,n+1}$ unter Verwendung der Bedingung (2.37) jedoch sehr aufwendig und unübersichtlich ist, wurde hier zur Bestimmung obiger

Gleichungen die analytische Methode vorgezogen. Die dabei gefundenen Uebergangsbeziehungen Gln. (4.19) und (4.20) tragen wesentlich zur Vereinfachung der Berechnung der nun folgenden Lastfälle bei.

4.2.2. Der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast (s. Bild 3.5)

Aehnlich wie in Abschnitt 3.2 können auch bei Trägern mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten die Weg- und Schnittgrößen grundsätzlich aus denjenigen eines starr verbundenen Trägers mit gleichem Querschnitt und gleicher Stützweite durch Multiplikation mit Nachgiebigkeitsfaktoren ermittelt werden:

$$y(x) = y(x)_{starr} \cdot \mathcal{K}(x) \quad (4.21)$$

$$t_{n,n+1}(x) = t_{n,n+1}(x)_{starr} \cdot \mathcal{G}(x) \quad (4.22)$$

$$S_{n,n+1}(x) = t_{n,n+1}(x) / C_{n,n+1} \quad (4.23)$$

$$N_n(x) = N_n(x)_{starr} \cdot \mathcal{A}(x) \quad (4.24)$$

$$M_n(x) = M_n(x)_{starr} \cdot \mathcal{B}(x) \quad (4.25)$$

$$\sigma_n^{(a\omega)}(x) = -\frac{M(x)}{J} [\mathcal{A}(x) \cdot a_n \pm \mathcal{B}(x) \cdot e_n] \frac{E_n}{E} \quad (4.26)$$

Die Nachgiebigkeitsfaktoren \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{K} und \mathcal{G} können dabei unter Verwendung der Uebergangsbeziehungen Gln. (4.19) und (4.20) je nach der äußeren Belastung unmittelbar aus den entsprechenden Werten der Abschnitte 3.3 bis 3.5 bestimmt werden.

Bei der Berechnung von γ ist dabei für

$$v = \frac{\pi \sqrt{l}}{2} \quad \text{s. (3.61)}$$

zu setzen. Damit wird nach Gl. (4.9)

$$k(r) = \left(\frac{r\sqrt{\pi}}{\omega l} \right)^2 \quad (4.27)$$

und nach Gl. (4.10):

$$f(r) = \frac{1}{1+k(r)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r\sqrt{\pi}}{\omega l} \right)^2} \quad (4.28)$$

Der Abminderungsfaktor γ und das wirksame Trägheitsmoment J_w sind damit wieder Funktionen von r und müssen für jedes Summenglied neu berechnet werden.

Für den vorliegenden Lastfall erhält man aus den Gln. (3.75) bis (3.78) mit Hilfe der Uebergangsbeziehungen (4.19) und (4.20) folgende Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$a(x) = J \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{f(r)}{r^2 \cdot J_w(r)} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x} \quad (4.29)$$

$$b(x) = J \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2 \cdot J_w(r)} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x} \quad (4.30)$$

$$c(x) = J \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2 \cdot J_w(r)} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x} \quad (4.31)$$

$$g(x) = J \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{f(r)}{r^2 \cdot J_w(r)} \cdot f(r) \cdot \cos \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \cos \frac{r\sqrt{\pi}}{l} x} \quad (4.32)$$

Es ist zu erkennen, daß hier im Gegensatz zu Kapitel 3 die Faktoren a und g für alle Einzelquerschnitte n den gleichen Wert besitzen. Damit folgt für $b(x)$ nach Gl. (3.76a)

vereinfacht:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{J - \alpha(x) \sum_1^m F_n a_n^2}{\sum_1^m J_n} \quad (4.28a)$$

Oder unter Verwendung der Gln. (2.43) und (2.44):

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1 - \alpha^2 \sigma(x)}{\beta^2} \quad (4.33)$$

Für die praktische Berechnung ist es zweckmäßig, das von der Summenvariablen r abhängige wirksame Trägheitsmoment $J_w(r)$ nach Gl. (4.5) zu verwenden:

$$J_w(r) = J \frac{1 + \left(\frac{r\bar{I}}{\omega L}\right)^2 \beta^2}{1 + \left(\frac{r\bar{I}}{\omega L}\right)^2} = J \frac{1 + k(r)\beta^2}{1 + k(r)} \quad (4.34)$$

Mit Gl. (4.28) folgt dann für die Ausdrücke der Gln. (4.29) bis (4.32):

$$\alpha(x) = \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\bar{I}}{L} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\bar{I}}{L} x} \quad (4.35)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1 - \alpha^2 \sigma(x)}{\beta^2} \quad (4.33)$$

$$\mu(x) = \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1 + k(r)}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\bar{I}}{L} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \sin \frac{r\bar{I}}{L} x} \quad (4.36)$$

$$g(x) = \frac{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \cdot f(r) \cdot \cos \frac{r\bar{I}}{L} x}{\sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^2} \cdot f(r) \cdot \cos \frac{r\bar{I}}{L} x} \quad (4.37)$$

4.2.3. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

(s. Bild 3.7)

Die Berechnung erfolgt nach den Gln. (4.21) bis (4.26). Die dazu erforderlichen Nachgiebigkeitsfaktoren ergeben sich mit den Uebergangsbeziehungen (4.19) und (4.20) aus den Gln. (3.96) bis (3.98) zu:

$$O(x) = \frac{\sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^3 [1+k(r)\beta^2]} \cdot \sin \frac{r\pi}{l} x}{\frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \quad (4.38)$$

$$W(x) = \frac{1 - \alpha^2 O(x)}{\beta^2} \quad (4.39)$$

$$N(x) = \frac{\sum_{r=2,4,6,\dots} \frac{1+k(r)}{r^3 [1+k(r)\beta^2]} \cdot \sin \frac{r\pi}{l} x}{\frac{\pi^5}{96} \cdot \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left[1 + \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]} \quad (4.40)$$

$$Q(x) = \frac{\sum_{r=2,4,6,\dots} \frac{1}{r^2 [1+k(r)\beta^2]} \cdot \cos \frac{r\pi}{l} x}{\frac{\pi^2}{8} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)} \quad (4.41)$$

Speziell zur Berechnung der Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen folgt daraus:

$$\alpha\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^3 [1+k(r)\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (4.42)$$

$$W\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1 - \alpha^2 \alpha\left(\frac{l}{2}\right)}{\beta^2} \quad (4.43)$$

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1536}{5 \cdot \pi^5} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1 + k(r)}{r^5 [1 + k(r)\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (4.44)$$

$$g(0) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \quad (4.45)$$

4.2.4. Der Einfeldträger unter Einzellast

(s. Bild 3.8)

Hier ergeben sich die zur Berechnung mit den Gln. (4.21) bis (4.26) notwendigen Nachgiebigkeitsfaktoren aus den Gln. (3.122) bis (3.125) im Bereich $0 \leq x \leq z$ zu:

$$d(x) = \frac{d}{\pi^2} \cdot \frac{l}{z} \cdot \frac{l}{x} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} z \sin \frac{r\pi}{2} x \quad (4.50)$$

$$\delta v(x) = \frac{1 - d^2 \cdot d(x)}{\beta^2}$$

$$u(x) = \frac{12}{\pi^4} \cdot \frac{l}{z} \cdot \frac{l}{x} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1 + k(r)}{r^4 [1 + k(r)\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} z \sin \frac{r\pi}{2} x \quad (4.51)$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{l}{z} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r [1 + k(r)\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} z \cos \frac{r\pi}{2} x \quad (4.52)$$

Speziell für Einzellast in Trägermitte ($z = l/2$) erhält man daraus für die Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen:

$$u\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r^2 [1 + k(r)\beta^2]} \quad (4.53)$$

$$\xi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1 - \alpha^2 \cdot 0\left(\frac{l}{2}\right)}{\beta^2} \quad (4.54)$$

$$\mu\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{96}{\pi^4} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1 + kcr}{r^4 [1 + kcr\beta^2]} \quad (4.55)$$

$$g(\sigma) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{1}{r [1 + kcr\beta^2]} \sin \frac{r\pi}{2} \quad (4.56)$$

4.3. Lösung mit Hilfe exakter Methoden

4.3.1. Der freiaufliegende Träger unter streckenweiser Gleichlast

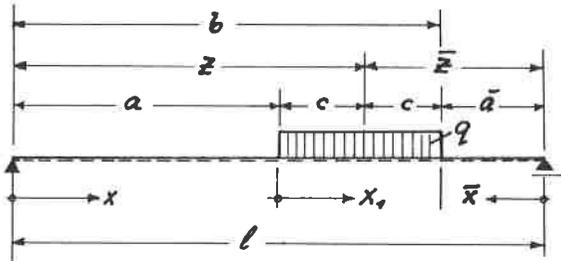


Bild 4.1.

Bei einem freiaufliegenden Träger unter streckenweiser Gleichlast nach Bild 4.1 ergeben sich folgende äußeren Schnittgrößen:

$$0 \leq x \leq z - c :$$

$$Q(x) = dq \frac{\bar{z}}{l} \quad M(x) = dq \frac{\bar{z}}{l} x$$

$$0 \leq x_1 \leq 2c :$$

$$Q(x_1) = dq \frac{\bar{z}}{l} - qx_1 \quad M(x_1) = dq \frac{\bar{z}}{l} (a + x_1) - \frac{q x_1^2}{2}$$

$$M(x) = dq \frac{\bar{z}}{l} x - \frac{q(x-a)^2}{2}$$

$$0 \leq x \leq z - c :$$

$$Q(\bar{x}) = dcq \frac{z}{\ell} \quad M(\bar{x}) = dcq \frac{z}{\ell} \bar{x} \quad M(x) = dcq \frac{z}{\ell} (x - \ell)$$

Damit erhält man aus Gl. (2.50) zur Bestimmung der Dehnung ϵ_1 für die oben genannten drei Bereiche drei zunächst voneinander unabhängige Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$0 \leq x \leq z - c :$$

$$E_1''(x) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1 q}{EJ} dc \frac{z}{\ell} x \quad (4.57a)$$

$$0 \leq x_1 \leq 2c :$$

$$E_1''(x_1) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x_1) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1 q}{EJ} \left[dc \frac{z}{\ell} (a + x_1) - \frac{x_1^2}{2} \right] \quad (4.57b)$$

$$0 \leq \bar{x} \leq z - c :$$

$$E_1''(\bar{x}) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(\bar{x}) = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 \frac{a_1 q}{EJ} dc \frac{z}{\ell} \bar{x} \quad (4.57c)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen bestehen jeweils aus der allgemeinen Lösung ϵ_{1h} der zugehörigen homogenen Differentialgleichungen und einer beliebigen partikulären Lösung ϵ_{1p} der inhomogenen Differentialgleichungen (4.57a-c).

Die homogenen Differentialgleichungen

$$E_1''(x) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x) = 0 \quad (4.58a)$$

$$E_1''(x_1) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(x_1) = 0 \quad (4.58b)$$

$$E_1''(\bar{x}) - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 E_1(\bar{x}) = 0 \quad (4.58c)$$

besitzen die gemeinsame charakteristische Gleichung

$$\tau^2 - \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 = 0$$

mit den beiden reellen Wurzeln

$$\tau_1 = + \frac{\omega}{\beta} \quad \text{und} \quad \tau_2 = - \frac{\omega}{\beta} \quad .$$

Damit gewinnt man nach [16] für die Gln. (4.58a-c) die allge-

meinen Lösungsansätze:

$$\varepsilon_{1n}(x) = \frac{a_1 q}{EJ} (A_1 \sin \frac{\omega}{\beta} x + A_2 \cos \frac{\omega}{\beta} x) \quad (4.59a)$$

$$\varepsilon_{1n}(x_1) = \frac{a_1 q}{EJ} (A_3 \sin \frac{\omega}{\beta} x_1 + A_4 \cos \frac{\omega}{\beta} x_1) \quad (4.59b)$$

$$\varepsilon_{1n}(\bar{x}) = \frac{a_1 q}{EJ} (A_5 \sin \frac{\omega}{\beta} \bar{x} + A_6 \cos \frac{\omega}{\beta} \bar{x}) \quad (4.59c)$$

Der Faktor $\frac{a_1 q}{EJ}$ wurde dabei aus rechen-technischen Gründen ausgeklammert.

Als partikuläre Lösungen genügen die Ansätze:

$$\varepsilon_p(x) = \frac{a_2 q}{EJ} (A_7 x + A_8); \quad \varepsilon_p''(x) = 0 \quad (4.60a)$$

$$\varepsilon_p(x_1) = \frac{a_2 q}{EJ} (A_9 x_1^2 + A_{10} x_1 + A_{11}); \quad \varepsilon_p''(x_1) = \frac{a_2 q}{EJ} 2A_9 \quad (4.60b)$$

$$\varepsilon_p(\bar{x}) = \frac{a_2 q}{EJ} (A_{12} \bar{x} + A_{13}); \quad \varepsilon_p''(\bar{x}) = 0 \quad (4.60c)$$

Durch Einsetzen der Gln. (4.60a-c) in die inhomogenen Differentialgleichungen (4.57a-c) und Koeffizientenvergleich ergeben sich die Konstanten A_7 bis A_{13} zu:

$$A_7 = -2c \frac{\bar{z}}{l} \quad A_8 = 0 \quad A_9 = \frac{1}{2}$$

$$A_{10} = -2c \frac{\bar{z}}{l} \quad A_{11} = \left(\frac{B}{\omega}\right)^2 - 2c \frac{\bar{z}}{l} a$$

$$A_{12} = -2c \frac{\bar{z}}{l} \quad A_{13} = 0$$

Damit erhält man für die Dehnung ε_1 endlich die allgemeinen Lösungen:

$$\varepsilon(x) = \frac{a_1 q}{EJ} \left[A_1 \sin \frac{\omega}{\beta} x + A_2 \cos \frac{\omega}{\beta} x - 2c \frac{\bar{z}}{l} x \right] \quad (4.61a)$$

$$\varepsilon(x_1) = \frac{a_1 q}{EJ} \left[A_3 \sin \frac{\omega}{\beta} x_1 + A_4 \cos \frac{\omega}{\beta} x_1 + \frac{x_1^2}{2} - 2c \frac{\bar{z}}{l} (a+x_1) + \left(\frac{B}{\omega}\right)^2 \right] \quad (4.61b)$$

$$\varepsilon(\bar{x}) = \frac{a_1 q}{EJ} \left[A_5 \sin \frac{\omega}{\beta} \bar{x} + A_6 \cos \frac{\omega}{\beta} \bar{x} - 2c \frac{\bar{z}}{l} \bar{x} \right] \quad (4.61c)$$

Aus den Randbedingungen (frei drehbar gelagerte Ränder)

$$E_1(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad E_1(\bar{x}=0) = 0$$

folgt: $A_2 = A_6 = 0$

Mit Hilfe der Uebergangsbedingungen

$$E_1(x=a) = E_1(x_1=0) ; \quad E_1'(x=a) = E_1'(x_1=0)$$

$$E_2(x_1=2c) = E_2(\bar{x}=\bar{a}) ; \quad E_2'(x_1=2c) = -E_2'(\bar{x}=\bar{a})$$

ergeben sich die restlichen Integrationskonstanten nach Zwischenrechnung zu:

$$A_1 = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \quad (4.62a)$$

$$A_3 = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta} d \operatorname{Im} \frac{\omega a}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \quad (4.62b)$$

$$A_4 = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \left[\frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega a}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} - 1 \right] \quad (4.62c)$$

$$A_5 = \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta} d}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \quad (4.62d)$$

Durch Einsetzen dieser Konstanten in die Gln. (4.61a-c) erhält man bei gleichzeitiger Beachtung der Bedingung (2.30) für die Schwerpunktsdehnungen eines Einzelquerschnittes n in Abhängigkeit von x die Ausdrücke:

$$0 \leq x \leq a :$$

$$E_u(x) = -\frac{\alpha_n q}{EJ} \left[d c \frac{\bar{x}}{l} x - \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \operatorname{Im} \frac{\omega x}{\beta} \right] \quad (4.63a)$$

$$a \leq x \leq b :$$

$$E_u(x) = -\frac{\alpha_n q}{EJ} \left[d c \frac{\bar{x}}{l} x - \frac{1}{2} (x-a)^2 - \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \operatorname{Im} \frac{\omega x}{\beta} - d \operatorname{Im} \frac{\omega (x-a)}{\beta} \right) \right] \quad (4.63b)$$

$$b \leq x \leq l :$$

$$E_u(x) = -\frac{\alpha_n q}{EJ} \left[d c \frac{\bar{x}}{l} (l-x) - \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2 \frac{2 \operatorname{Im} \frac{\omega \bar{c}}{\beta} \operatorname{Im} \frac{\omega c}{\beta}}{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{\beta}} \operatorname{Im} \frac{\omega (l-x)}{\beta} \right] \quad (4.63c)$$

Die Normalkräfte für die drei Bereiche ergeben sich unmittelbar aus den Gln. (4.63a-c) zu:

$$N_n(x) = -\epsilon_n(x) E F_n \quad \text{s. (2.52)}$$

Nach Gl. (2.34) gilt:

$$t_{n,n+1}(x) = -\frac{\epsilon_n'(x)}{a_n} \cdot S_{n,n+1} = -\frac{\epsilon_n'(x)}{a_n} \cdot S_{n,n+1}$$

Mit den Gln. (4.63a-c) folgt damit für die Schubkräfte:

$0 \leq x \leq a :$ $t_{n,n+1}(x) = \frac{q \cdot S_{n,n+1}}{EJ} \left[a c \frac{\beta}{l} - \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega}{\beta} \frac{a}{2} \sin \frac{\omega}{\beta} c}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cos \frac{\omega}{\beta} x \right] \quad (4.64a)$
$a \leq x \leq b :$ $t_{n,n+1}(x) = \frac{q \cdot S_{n,n+1}}{EJ} \left[a c \frac{\beta}{l} - (x-a) - \frac{\beta}{\omega} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{\beta} \frac{a}{2} \sin \frac{\omega}{\beta} c}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cos \frac{\omega}{\beta} x - \sin \frac{\omega}{\beta} (x-a) \right) \right] \quad (4.64b)$
$b \leq x \leq l :$ $t_{n,n+1}(x) = -\frac{q \cdot S_{n,n+1}}{EJ} \left[a c \frac{\beta}{l} - \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega}{\beta} \frac{a}{2} \sin \frac{\omega}{\beta} c}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cos \frac{\omega}{\beta} (l-x) \right] \quad (4.64c)$

In den Gln. (4.63a-c) und (4.64a-c) beschreiben die nicht mit dem Faktor β/ω behafteten Anteile die Dehnungen bzw. Schubkräfte beistarrem Verbund.

Für die verkürzte Schreibweise nach Gln. (4.24) und (4.22) erhält man damit für die drei vorkommenden Bereiche folgende Nachgiebigkeitsfaktoren:

$0 \leq x \leq a :$ $\alpha(x) = 1 - \frac{l}{c} \cdot \frac{l}{\beta} \cdot \frac{l}{x} \cdot (\beta/\omega l) \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \frac{a}{2} \sin \frac{\omega}{\beta} c}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \sin \frac{\omega}{\beta} x \quad (4.65a)$
$g(x) = 1 - \frac{l}{c} \cdot \frac{l}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \frac{a}{2} \sin \frac{\omega}{\beta} c}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cos \frac{\omega}{\beta} x \quad (4.66a)$

$a \leq x \leq b$:

$$Q(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\omega l}\right)^2}{2 \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-a}{l}\right)^2} \cdot \left[1 + \frac{2 \sin \frac{\omega z}{\beta} \sin \frac{\omega c}{\beta}}{\sin \frac{\omega l}{\beta}} \sin \frac{\omega x}{\beta} - \cos \frac{\omega}{\beta}(x-a) \right] \quad (4.65b)$$

$$g(x) = 1 - \frac{\frac{\beta}{\omega l}}{2 \cdot \frac{c}{l} \cdot \frac{b}{l} - \frac{x}{l} - \frac{a}{l}} \cdot \left[\frac{2 \sin \frac{\omega z}{\beta} \sin \frac{\omega c}{\beta}}{\sin \frac{\omega l}{\beta}} \cos \frac{\omega}{\beta} x - \sin \frac{\omega}{\beta}(x-a) \right] \quad (4.66b)$$

$b \leq x = l$:

$$Q(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\omega l}\right)^2}{\frac{c}{l} \cdot \frac{b}{l} (1 - \delta)} \cdot \frac{\sin \frac{\omega z}{\beta} \sin \frac{\omega c}{\beta}}{\sin \frac{\omega l}{\beta}} \sin \frac{\omega}{\beta}(l-x) \quad (4.65c)$$

$$g(x) = 1 - \frac{\frac{\beta}{\omega l}}{\frac{c}{l} \cdot \frac{b}{l}} \cdot \frac{\sin \frac{\omega z}{\beta} \sin \frac{\omega c}{\beta}}{\sin \frac{\omega l}{\beta}} \cos \frac{\omega}{\beta}(l-x) \quad (4.66c)$$

Die Einzelmomente $M_n(x)$ können aus Gl. (4.25) mit Hilfe der Nachgiebigkeitsfaktoren

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1 - \alpha^2 Q(x)}{\beta^2} \quad \text{s. (4.33)}$$

berechnet werden, wobei der in dem jeweiligen Bereich gültige Faktor $Q(x)$ einzusetzen ist.

Die Durchbiegung ergibt sich nach Gl. (2.51) allgemein zu:

$$y(x) = - \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 \frac{E_1(x)}{a_1} - \iint \frac{M(x)}{EJ} dx$$

Nun ist aber

$$- \iint \frac{M(x)}{EJ} dx = y(x)_{\text{starr}}$$

und

$$- \frac{E_1(x)}{a_1} = - \frac{E_1(x)_{\text{starr}}}{a_1} Q(x) = \frac{M(x)}{EJ} Q(x).$$

Damit kann die Gleichung der elastischen Linie sehr elegant in der Form

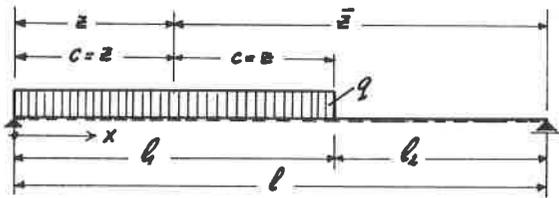
$$y(x) = y(x)_{\text{starr}} + \frac{M(x) \cdot l^2}{EJ} \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2 \cdot \mathcal{K}(x) \quad (4.67)$$

angeschrieben werden. Der bei Benutzung von Gl. (4.21) erforderliche Nachgiebigkeitsfaktor $\mathcal{K}(x)$ ergibt sich daraus zu:

$$\mathcal{K}(x) = 1 + \frac{M(x) \cdot l^2}{EJ y(x)_{\text{starr}}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2 \cdot \mathcal{K}(x) \quad (4.68)$$

Aus den in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen können nun die Weg- und Schnittgrößen für alle folgenden Lastfälle durch Grenzübergang schnell ermittelt werden.

4.3.2. Der Einfeldträger unter einseitiger Gleichlast



$$M(x) = 2\bar{z}\bar{c}q\frac{x}{l} - q\frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$M(x) = 2\bar{z}\bar{c}q\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad l_1 \leq x = l_2$$

Bild 4.2.

Dieser Lastfall wird vor allem bei der Berechnung von einseitig belasteten Durchlaufträgern über zwei Felder nach dem in Abschnitt 3.6 angegebenen Verfahren benötigt; aus diesem Grunde werden die Bezeichnungen b und \bar{a} durch l_1 und l_2 ersetzt (vgl. Bild 4.1 und 4.2).

Für die zur Berechnung der Normal- und Schubkräfte nach den Gln. (4.24) und (4.22) erforderlichen Nachgiebigkeitsfaktoren folgt aus den Gln. (4.65) und (4.66):

$$0 \leq x \leq l_1:$$

$$\alpha(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\omega l}\right)^2}{\frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} - \frac{x}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l}\right)^2} \left[1 + \right. \tag{4.69a}$$

$$\left. + \frac{2 \sin \frac{\omega}{\beta} z \sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z}}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \sin \frac{\omega}{\beta} x - \cos \frac{\omega}{\beta} x \right]$$

$$g(x) = 1 - \frac{\frac{\beta}{\omega l}}{\frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} - \frac{x}{l}} \left[\frac{2 \sin \frac{\omega}{\beta} z \sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z}}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cos \frac{\omega}{\beta} x - \sin \frac{\omega}{\beta} x \right] \tag{4.70a}$$

$$l_1 \leq x \leq l:$$

$$\alpha(x) = 1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\omega l}\right)^2}{\frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} (1 - \frac{x}{l})} \cdot \frac{2 \left(\sin \frac{\omega}{\beta} z\right)^2}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cdot \sin \frac{\omega}{\beta} (l-x) \tag{4.69b}$$

$$g(x) = 1 - \frac{\frac{\beta}{\omega l}}{\frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l}} \cdot \frac{2 \left(\sin \frac{\omega}{\beta} z\right)^2}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cdot \cos \frac{\omega}{\beta} (l-x) \tag{4.70b}$$

Die Nachgiebigkeitsfaktoren zur Bestimmung der Einzelmomente M_n und der Durchbiegung $y(x)$ können wieder nach den Gln. (4.33) bzw. (4.68) berechnet werden. Dabei wird nach [18]:

$$0 \leq x \leq l_1: y(x)_{\text{starr}} = \frac{q \cdot l^4}{24 E J} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4 \frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} \left(\frac{x}{l}\right)^3 - 4 \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 \left(\frac{\bar{z}}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \right] \tag{4.71a}$$

$$l_1 \leq x \leq l: y(x)_{\text{starr}} = \frac{q \cdot l^4}{24 E J} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \left[4 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 \right] \tag{4.71b}$$

Damit folgt aus Gl. (4.68) nach Zwischenrechnung:

$$0 \leq x \leq l_1:$$

$$\kappa(x) = 1 + 24 \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2 \cdot \frac{\frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} - \frac{1}{2} \frac{x}{l}}{\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 4 \frac{l}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4 \left(\frac{l}{l}\right)^2 \left(\frac{\bar{z}}{l}\right)^2} \cdot \alpha(x) \tag{4.72a}$$

$$l_1 \leq x \leq l:$$

$$\kappa(x) = 1 + 12 \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2 \cdot \frac{\alpha(x)}{4 \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{l_1}{l}\right)^2} \tag{4.72b}$$

4.3.3. Der Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

(s. Bild 3.7)

Aus den Gln. (4.69a), (4.70a) und (4.72a) des vorhergehenden Abschnittes erhält man mit

$$b_1 = l \quad \text{und} \quad z = \bar{z} = \frac{l}{2}$$

folgende Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$O(x) = 1 - \frac{2 \left(\frac{\beta}{\omega l}\right)^2}{\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \left[1 - \frac{\operatorname{def} \frac{\omega l}{2\beta} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)}{\operatorname{def} \frac{\omega l}{2\beta}} \right] \quad (4.73)$$

$$S(x) = \frac{1 - \alpha^2 \cdot O(x)}{\beta^2} \quad \text{s. (4.33)}$$

$$G(x) = 1 - \frac{\frac{2\beta}{\omega l}}{1 - 2\frac{x}{l}} \cdot \frac{\operatorname{Im} \frac{\omega l}{2\beta} \left(1 - 2\frac{x}{l}\right)}{\operatorname{def} \frac{\omega l}{2\beta}} \quad (4.74)$$

$$N(x) = 1 + \frac{12 \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2}{1 + \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \cdot O(x) \quad (4.75)$$

Speziell für die Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen erhält man daraus:

$$O\left(\frac{l}{2}\right) = 1 - 2 \left(\frac{2\beta}{\omega l}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\operatorname{def} \frac{\omega l}{2\beta}}\right) \quad (4.76)$$

$$S\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1 - \alpha^2 O\left(\frac{l}{2}\right)}{\beta^2}$$

$$G\left(\frac{l}{2}\right) = 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \frac{79}{2\beta} \frac{\omega l}{2\beta} \quad (4.77)$$

$$N\left(\frac{l}{2}\right) = 1 + \frac{48}{5} \cdot \left(\frac{\alpha}{\omega l}\right)^2 \cdot O\left(\frac{l}{2}\right) \quad (4.78)$$

4.3.4. Der Einfeldträger unter Einzellast

(s. Bild 3.8)

Beim Grenzübergang $c \rightarrow 0$ erhält man mit

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} c}{c} = \frac{\omega}{\beta}$$

aus den Gln. (4.65a) und (4.66a) die Nachgiebigkeitsfaktoren für die Normal- und Schubkräfte zu:

$0 \leq x \leq z$:

$$\alpha(x) = 1 - \frac{l}{z} \cdot \frac{l}{x} \cdot \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} z}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \sin \frac{\omega}{\beta} x \quad (4.79)$$

$$\alpha_f(x) = 1 - \frac{l}{z} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} z}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \sin \frac{\omega}{\beta} x \quad (4.80)$$

Die Einzelmomente $M_n(x)$ werden wieder mit Hilfe des Faktors $\alpha(x)$ nach Gl. (4.33) berechnet.

Mit $M(x) = P \cdot \frac{z}{l} \cdot x$

und $y(x)_{\text{starr}} = \frac{P \cdot l^3}{6 E J} \cdot \frac{z}{l} \cdot \frac{x}{l} \left[1 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \left. \right\} 0 \leq x \leq z$

wird aus Gl. (4.68):

$0 \leq x \leq z$:

$$\kappa(x) = 1 + \frac{6 \left(\frac{\alpha}{\omega l} \right)^2}{1 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{x}{l} \right)^2} \cdot \alpha(x) \quad (4.81)$$

Speziell für Einzellast in Trägermitte ($z = l/2$) folgt aus den Gln. (4.79) bis (4.81) für die Maximalwerte der Weg- und Schnittgrößen:

$$\alpha\left(\frac{l}{2}\right) = 1 - \frac{2\beta}{\omega l} \cdot \frac{79}{2\beta} \frac{\omega l}{2\beta} \quad (4.82)$$

$$\alpha_f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1 - \alpha^2 \alpha\left(\frac{l}{2}\right)}{\beta^2}$$

$$\alpha_f(0) = 1 - \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega l}{2\beta}} \quad (4.83)$$

$$\kappa\left(\frac{l}{2}\right) = 1 + 12 \left(\frac{\alpha}{\omega l} \right)^2 \cdot \alpha\left(\frac{l}{2}\right) \quad (4.84)$$

5. Auswertung der Lösungen

5.1. Allgemeines

In den Kapiteln 3 und 4 wurden Lösungen angegeben, mit deren Hilfe die Weg- und Schnittgrößen nachgiebig zusammengesetzter Biegeträger mit voneinander unabhängigen und voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten für fast alle praktisch vorkommenden Belastungen beliebig genau berechnet werden können. Die praktische Durchführung dieser Berechnung erfordert jedoch oft sehr großen Rechenaufwand. Im folgenden wird zunächst zur Vereinfachung eine Näherungslösung entwickelt, die der von M ö h l e r [7] gefundenen und bereits in den Entwurf zur Neufassung der DIN 1052 [13] aufgenommenen Lösung für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte entspricht. Anschließend werden die wichtigsten Latfälle in exakter Form ausgewertet. Die Ergebnisse werden in Tafeln, die wesentlich zur Erleichterung der genauen Berechnung beitragen, dargestellt und mit der Näherung verglichen. Diese Auswertung kann wegen der Vielzahl freier Parameter bei Querschnitten mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten nur für Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten vorgenommen werden, da bei letzteren die Nachgiebigkeitsfaktoren in alleiniger Abhängigkeit von den Querschnittswerten k und β^2 darstellbar sind. Es zeigt sich jedoch, daß zwischen den beiden Querschnittsarten ein Zusammenhang besteht, der es erlaubt, auch bei Trägern nach Kapitel 3 die Abweichungen der exakten Lösungen von den entsprechenden Näherungen abzuschätzen.

Um einen Ueberblick über die praktisch vorkommenden Querschnittswerte

$$\alpha^2 = \frac{\sum_1^m F_n a_n^2}{J} \quad \text{und} \quad \beta^2 = \frac{\sum_1^m J_n}{J}$$

zu erhalten, sind in Tafel 1 (s. Anhang) diese Quotienten für einige Querschnittsformen angegeben.

5.2. Näherungslösung für freiaufliegende Einfeldträger
entsprechend DIN E 1052 [13]

5.2.1. Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

Als allgemeinsten Lastfall wurde in Kapitel 4 der freiaufliegende Einfeldträger unter streckenweiser Gleichlast behandelt; durch Grenzübergänge ergaben sich daraus die Lastfälle Gleichstrecken- und Einzellast. Die in Abschnitt 4.2.2 mit Hilfe von Fourrierentwicklungen angegebenen Nachgiebigkeitsfaktoren vereinfachen sich stark, wenn man sich in Zähler und Nenner jeweils auf die ersten Summenglieder beschränkt.

Mit
$$k = k(1) = \left(\frac{\pi}{\omega l}\right)^2 \quad \text{s. (4.27)}$$

folgt aus den Gln. (4.35) bis (4.37):

$$\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = \frac{1}{1 + k\beta^2} \quad (5.1)$$

$$\bar{\delta} = \bar{\kappa} = \frac{1 + k}{1 + k\beta^2} \quad (5.2)$$

Darin ist mit Gl. (2.45)

$$k = \left(\frac{\pi}{\omega l}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{E F_1 a_1}{G_2 a_2} \quad (5.3)$$

ein Faktor, der alle Querschnittskennwerte sowie die freie Stützweite des Trägers berücksichtigt.

Bei zweiteiligen Querschnitten wird $a_1 = \frac{F_2 \cdot a_{12}}{F_1 + F_2}$; bei dreiteiligen symmetrischen Querschnitten gilt $a_1 = a_{12}$. Setzt man weiter nach Gl. (2.2) $C_{12} = C_v/e'$, dann erhält man die bereits aus [13] bekannten k-Werte:

$$k = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{E F_1 F_2 e'}{C_v (F_1 + F_2)} \quad \text{für 2-teilige Querschnitte}$$

$$k = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{E F_1 e'}{C_v} \quad \text{für 3-teilige symmetr. Querschnitte}$$

Gl. (5.3) ist also eine Verallgemeinerung der von M ö h l e r [7] für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte angegebenen k -Werte. Sie besitzt jedoch nach Voraussetzung nur Gültigkeit für Träger, deren Fugensteifigkeiten Gl. (2.37) genügen. Die k -Werte schwanken im allgemeinen zwischen 0,01 und 100; die Mehrzahl der praktisch vorkommenden Fälle liegt jedoch zwischen 0,1 und 10.

Aus den Gln. (4.29) bis (4.32) können die genäherten Nachgiebigkeitsfaktoren mit

$$\gamma = \gamma^{(1)} = \frac{1}{1+k} \quad \text{s. (4.10)}$$

und

$$J_w = \sum_1^m J_u + \gamma \sum_1^m J_u a_u^2 \quad \text{s. (4.11)}$$

auch in der Form

$$\bar{\alpha} = \bar{\sigma} = \gamma \cdot \frac{J}{J_w} \quad (5.4)$$

$$\bar{\nu} = \bar{\kappa} = \frac{J}{J_w} \quad (5.5)$$

angeschrieben werden. Die sich daraus ergebenden Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(a,u)} &= -\frac{M(x)}{J} \left(\bar{\alpha} a_n \pm \bar{\nu} e_n^{(a,u)} \right) \frac{E_n}{E} = \\ &= -\frac{M(x)}{J_w} \left(\gamma a_n \pm e_n^{(a,u)} \right) \frac{E_n}{E} \end{aligned} \quad (5.6)$$

und die Durchbiegung

$$y(x) = \text{Konst.}(x) \cdot \frac{M(x)}{EJ} \cdot \bar{\kappa} = \text{Konst.}(x) \frac{M(x)}{EJ_w} \quad (5.7)$$

nehmen damit die in DIN E 1052 [13] vorgeschriebenen Gestalt an. Die in den Verbindungsfugen wirkenden Schubkräfte

$$t_{m+n}(x) = \frac{Q(x) S_{m+n}}{J} \cdot \bar{\sigma} = \frac{Q(x) \gamma \cdot S_{m+n}}{J_w} \quad (5.8)$$

stimmen formal mit den von M ö h l e r in [8] vorgeschlagenen Werten für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte überein.

5.2.2. Querschnitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten

Aehnlich wie in Abschnitt 2.5.1 können auch hier die Nachgiebigkeitsfaktoren des freiaufliegenden Einfeldträgers durch die

jeweils ersten Summenglieder der Gln. (3.75) bis (3.78) näherungsweise beschrieben werden:

$$\bar{a}_n = \frac{J}{J_w} \cdot \frac{v_{n,n+1} - v_{n-1,n}}{F_n a_n} \quad (5.9)$$

$$\bar{f} = \bar{k} = \frac{J}{J_w} \quad (5.10)$$

$$\bar{g}_{n,n+1} = \frac{J}{J_w} \cdot \frac{v_{n,n+1}}{S_{n,n+1}} \quad (5.11)$$

Die Größen v und J_w können dabei Abschnitt 3.2 entnommen werden. Bei der Berechnung der dazu erforderlichen K-Werte ist für

$$v^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

einzusetzen. Für die Spannungen und die Schubkräfte folgt damit entsprechend den Gln. (3.84) und (3.80):

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(a,u)} &= -\frac{M(x)}{J} \left(\bar{a}_n a_n \pm e_n^{(a,u)} \cdot \bar{v} \right) \frac{E_n}{E} = \\ &= -\frac{M(x)}{J_w} \left(\frac{v_{n,n+1} - v_{n-1,n}}{F_n} \pm e_n^{(a,u)} \right) \frac{E_n}{E} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{Q(x) S_{n,n+1}}{J} \bar{g}_{n,n+1} = \frac{Q(x) \cdot v_{n,n+1}}{J_w} \quad (5.13)$$

Die Durchbiegung errechnet sich nach Gl. (5.7), wobei auf die andere Definition von J_w zu achten ist.

5.3. Vergleich der Näherung mit der exakten Lösung für Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

5.3.1. Beim Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

(s. Bild 3.7)

Zur Beurteilung der maximalen Normal- und Schubkräfte wurden die Gln. (4.76) und (4.77) ausgewertet und in Tafel 2 (s. Anhang) in Abhängigkeit von $k \cdot B^2$ dargestellt. Die dort gestrichelt eingezeichnete Kurve zeigt die Näherungen entsprechend Gl. (5.1). Es ist zu erkennen, daß die maximalen Normalkräfte nur geringfügig, die maximalen Schubkräfte stärker von der Näherungslösung abweichen. Da die tatsächlichen Schubkräfte jedoch kleiner sind als die genäherten, liegt die Näherung hier

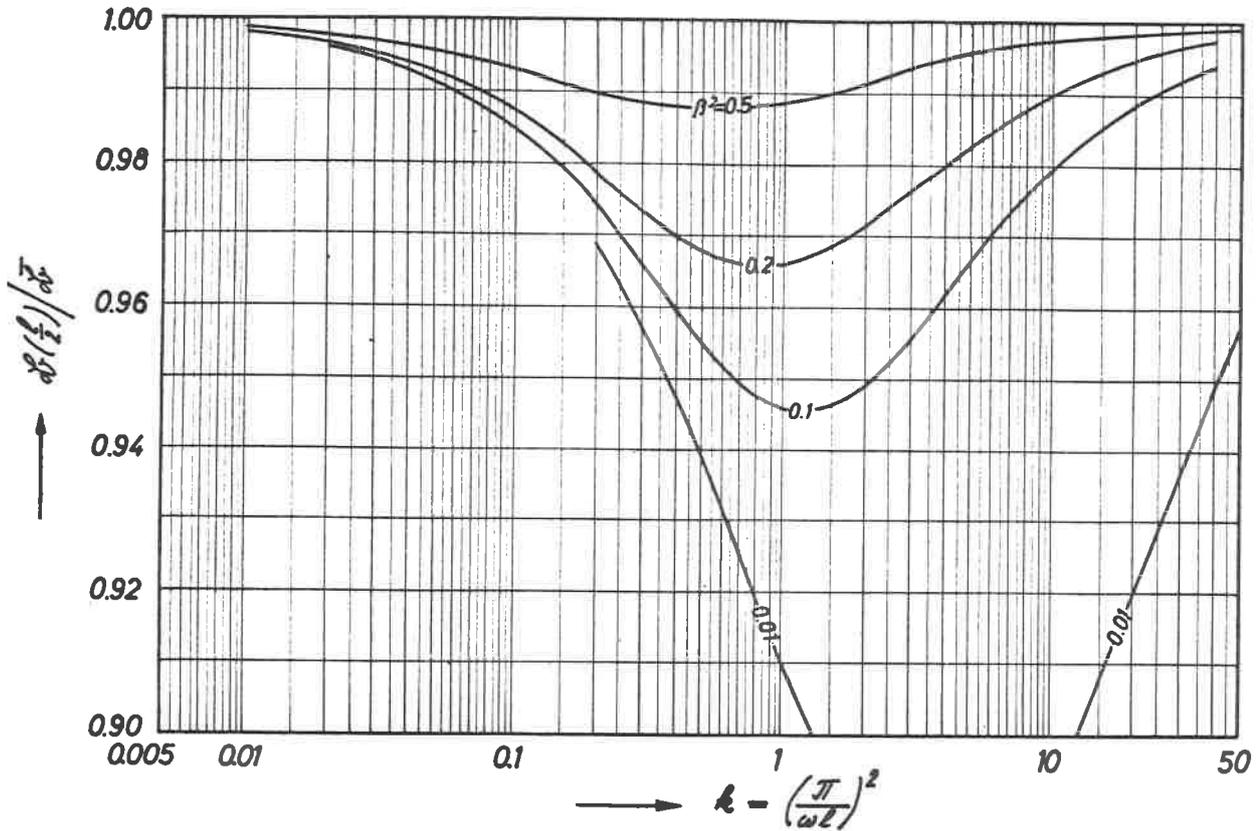
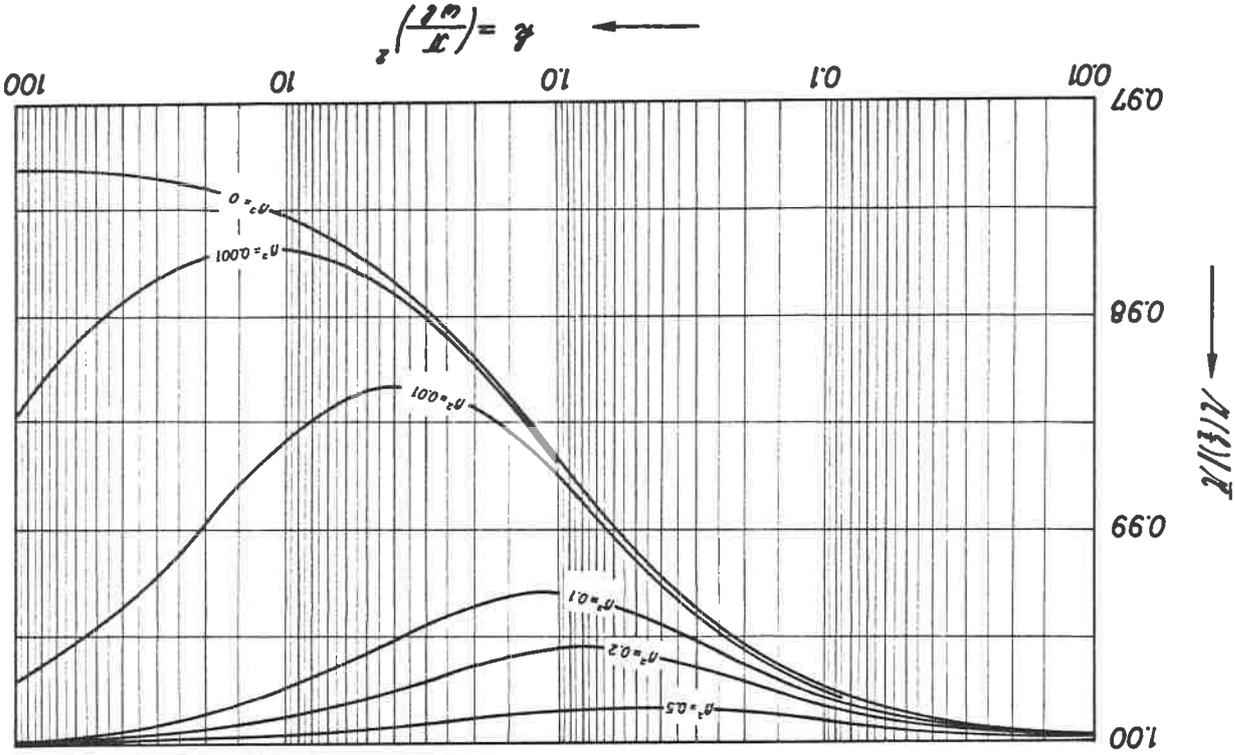


Bild 5.1: Einfeldträger unter Gleichstreckenlast - Verhältnis der Momentenfaktoren $M(l/2)/M_0$

Bild 5.2: Einfeldträger unter Gleichstreckenlast - Verhältnis der Durchbiegungs-
 Faktoren $\eta(\xi/l)/\eta$



auf der sicheren Seite.

In Tafel 3 (s. Anhang) sind für verschiedenen Schnittstellen x die Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\mathcal{N}(x)$ von der Näherung $\bar{\mathcal{N}}$ in Abhängigkeit von $k.\beta^2$ aufgetragen. Man sieht, daß die Abweichungen der der maximalen Normalkräfte in Trägermitte von der Näherung stets kleiner sind als 3 %. Außerhalb der Trägermitte treten zwar größere Abweichungen auf; diese sind jedoch für die Beurteilung des Tragverhaltens des Trägers nur bei gleichzeitiger Einwirkung von in der Nähe der Auflager angreifenden Einzellasten maßgebend.

Bild 5.1 zeigt für einige Werte β^2 die Verhältnisse der Nachgiebigkeitsfaktoren $\bar{\mathcal{N}}(1/2)$ nach Gl. (4.33) zu $\bar{\mathcal{N}}$ entsprechend Gl. (5.5). Daraus geht hervor, daß die tatsächlichen Einzelmomente $M_n(x)$ in Trägermitte bei den üblichen Querschnittsformen (s. Tafel 1) nur geringfügig kleiner sind, als die entsprechenden Näherungswerte; die Näherungslösung liegt damit immer auf der sicheren Seite.

Ein Vergleich der genauen Mittendurchbiegung mit der Näherungslösung liefert Bild 5.2; darin sind die Durchbiegungsfaktoren $\mathcal{N}(1/2)$ entsprechend Gl. (4.78) den Näherungswerten nach Gl. (5.5) gegenübergestellt. Man erkennt, daß selbst für $\beta^2 = 0$ die Abweichungen weniger als 3 % betragen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 angegebenen Näherungsverfahren die Weg- und Schnittgrößen eines freiaufliegenden nachgiebig zusammengesetzten Biegeträgers unter Gleichstreckenlast mit für praktische Zwecke ausreichender Genauigkeit beschreiben. Siehe hierzu auch Zahlenbeispiel Abschnitt 6.4.1.1.

5.3.2. Beim Einfeldträger unter Einzellast

5.3.2.1. Punktförmige Einzellast (s. Bild 3.8)

Um einen Ueberblick über den Kräfteverlauf im Träger zu erhalten, wurden zunächst mit Hilfe der Gln. (4.79) und (4.80) für verschiedene Steifigkeitswerte $k.\beta^2$ der jeweilige Normal- und Schubkraftverlauf für 5 Laststellungen ermittelt und in den Tafeln 4 - 8 (s. Anhang) aufgetragen. Es fällt sofort auf, daß hier im Gegensatz zum starr verbundenen Träger die Maximalwerte

der Normalkräfte sowie die Nullpunkte der Schubkraftlinien nicht mehr mit den Lastangriffsstellen zusammenfallen; bei steifen Trägern ($k\beta^2$ klein) liegen diese Punkte in der Nähe der Laststellen, bei weicheren Trägern ($k\beta^2$ groß) verlagern sie sich dagegen mehr zur Trägermitte hin. Dies hat zur Folge, daß je nach Laststellung und Trägersteifigkeit $k\beta^2$ unmittelbar an der Laststelle ein erheblich größerer Teil des maximalen äußeren Momentes von den Einzelquerschnitten aufgenommen werden muß, als dies beim starr verbundenen Träger der Fall ist. In den oben genannten Tafeln wurde ferner für die Trägersteifigkeit $k\beta^2 = 1$ vergleichsweise gestrichelt der Verlauf der Normal- und Schubkräfte entsprechend der in Abschnitt 5.2.1 angegebenen Näherungswerte eingezeichnet. Es ist klar zu erkennen, daß die für gleichmäßig verteilte Belastung brauchbaren Näherungen bei Einzellast den Verlauf der Weg- und Schnittgrößen nur noch ungenügend beschreiben.

Tafel 9 (s. Anhang) zeigt in Abhängigkeit von $k\beta^2$ die zur Berechnung der Normalkräfte an der Laststelle erforderlichen Nachgiebigkeitsfaktoren $\alpha(z)$, die Tafeln 10 - 14 die Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\alpha(x)$ nach Gl. (4.79) von der Näherung $\bar{\alpha}$ nach Gl. (5.1) in den Zehntelpunkten der Stützweite für 5 verschiedene Laststellungen. In Tafel 15 sind ebenfalls in Abhängigkeit von $k\beta^2$ für 9 Laststellungen die zur Bestimmung der maximalen Schubkräfte am Auflager notwendigen Nachgiebigkeitsfaktoren $g(0)$ auftragen. Man sieht, daß je nach Laststellung die tatsächlichen Normalkräfte etwa nur 0,3 bis ,8 mal so groß sind als die entsprechenden Näherungswerte. Dies führt dazu, daß unmittelbar an der Laststelle die von den Einzelquerschnitten aufzunehmenden Momente M_n zum Teil sehr viel größer werden, als es die Näherungsrechnung ergibt. In Bild 5.3 sind für einige Werte β^2 die Abweichungen der Momentenfaktoren $\mathcal{K}(1/2)$ von der Näherung $\bar{\mathcal{K}}$ für Einzellast in Trägermitte dargestellt. Sie betragen hier je nach Querschnittsform 50% und mehr! In Tabelle 5.1 wurden für 5 Laststellungen und einige ausgezeichnete k - und β^2 -Werte die Verhältnisse der Einzelmomente $M_n(z)$ zu den Näherungswerten $M_n(z)$ bzw. der dazugehörigen Nachgiebigkeitsfaktoren $\mathcal{K}(z)$ zu $\bar{\mathcal{K}}$ errechnet und in der jeweils oberen Zeile eingetragen. Man erkennt, daß für Laststellungen in Auflagernähe die Einzel-

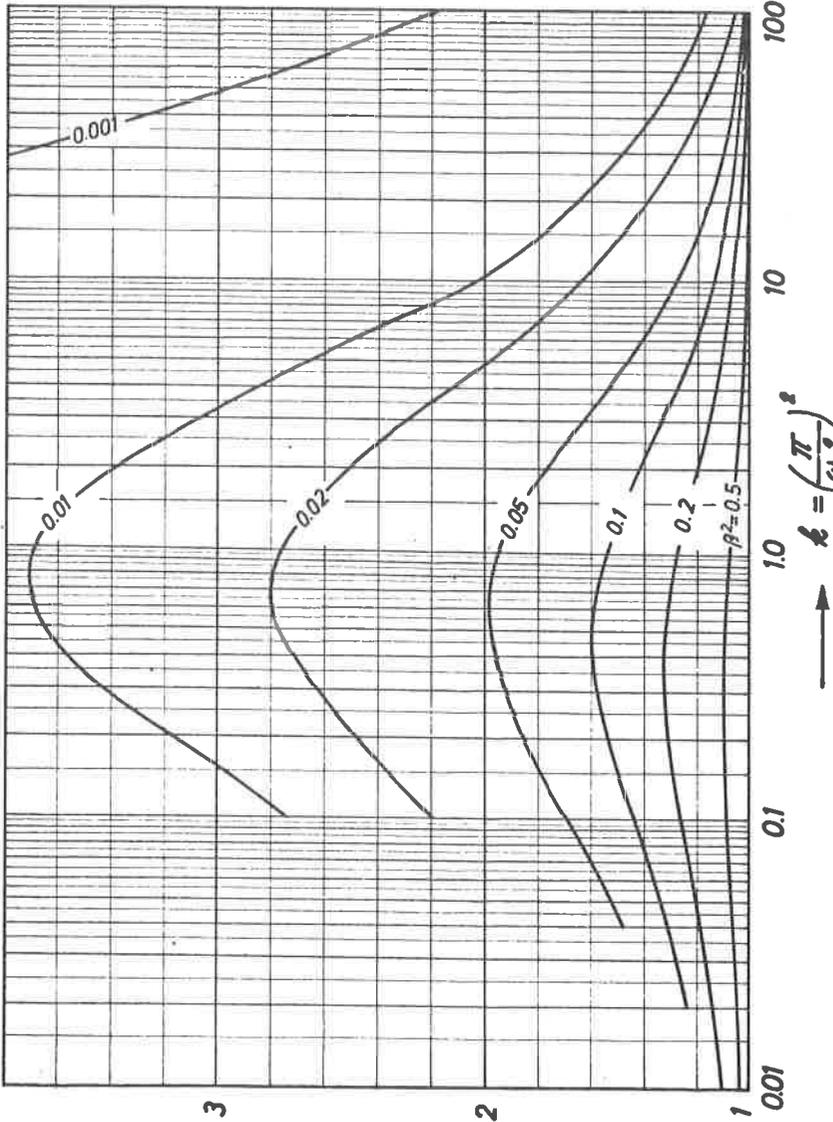
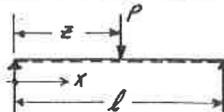
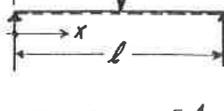
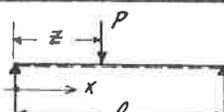
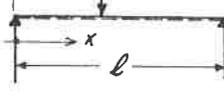
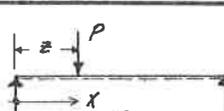
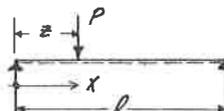
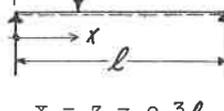
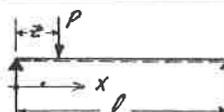
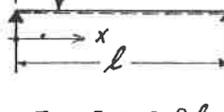
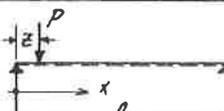
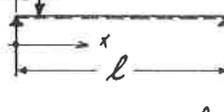
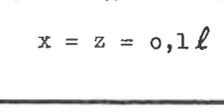


Bild 5.3: Einfeldträger mit Einzellast in Trägermitte - Verhältnis der Momentenfaktoren $\frac{w_{max}}{w_{st}} = f(k, \beta^2)$ - $k = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2$

$\frac{w_{max}}{w_{st}}$ ←

Tafel 5.1: Abweichungen der Nachgiebigkeitsfaktoren $\delta(x)$ von der Näherung $\bar{\delta}$ an der Laststelle beim Ein-
feldträger unter Einzellast

$\beta^2 \cdot k$	0,1	0,5	1	5	10	Laststellung
0,2	1,261 1,083	1,324 1,162	1,282 1,145	1,112 1,032	1,063 0,996	
0,1	1,444 1,138	1,597 1,309	1,546 1,308	1,239 1,122	1,137 1,050	
0,05	1,695 1,182	1,990 1,478	1,945 1,519	1,464 1,274	1,276 1,148	
0,02	2,182 1,216	2,774 1,699	2,760 1,843	1,992 1,599	1,628 1,384	
0,01	2,724 1,227	3,656 1,835	3,688 2,085	2,641 1,938	2,093 1,666	
0,2	1,275 1,089	1,348 1,180	1,309 1,166	1,129 1,045	1,073 1,004	
0,1	1,466 1,147	1,634 1,335	1,588 1,339	1,270 1,148	1,158 1,067	
0,05	1,728 1,193	2,045 1,511	2,004 1,560	1,512 1,314	1,311 1,178	
0,02	2,235 1,229	2,861 1,742	2,853 1,899	2,067 1,658	1,688 1,434	
0,01	2,799 1,240	3,780 1,883	3,820 2,151	2,744 2,011	2,175 1,730	
0,2	1,325 1,112	1,435 1,242	1,401 1,238	1,182 1,086	1,105 1,026	
0,1	1,545 1,179	1,767 1,425	1,733 1,449	1,370 1,230	1,223 1,119	
0,05	1,844 1,233	2,239 1,629	2,215 1,708	1,674 1,448	1,426 1,274	
0,02	2,424 1,275	3,174 1,894	3,188 2,097	2,331 1,863	1,894 1,603	
0,01	3,069 1,288	4,225 2,057	4,294 2,387	3,110 2,273	2,467 1,958	
0,2	1,449 1,170	1,639 1,385	1,603 1,388	1,278 1,151	1,161 1,056	
0,1	1,740 1,261	2,096 1,647	2,078 1,704	1,564 1,379	1,341 1,203	
0,05	2,135 1,332	2,725 1,923	2,736 2,069	2,018 1,719	1,650 1,448	
0,02	2,897 1,388	3,955 2,276	4,025 2,592	2,956 2,341	2,344 1,960	
0,01	3,744 1,405	5,336 2,490	5,478 2,973	4,015 2,915	3,156 2,486	
0,2	1,844 1,345	2,149 1,690	2,032 1,642	1,432 1,204	1,245 1,057	
0,1	2,377 1,524	3,041 2,230	2,939 2,260	1,906 1,571	1,530 1,282	
0,05	3,034 1,657	4,245 2,809	4,232 3,028	2,712 2,170	2,043 1,679	
0,02	4,441 1,759	6,497 3,506	6,686 4,123	4,518 3,400	3,299 2,600	
0,01	5,948 1,791	8,963 3,903	9,330 4,869	6,613 4,625	4,877 3,659	

obere Zeile: Punktförmige Einzellast

untere " : Verteilte Einzellast ($2c = 0,11$)

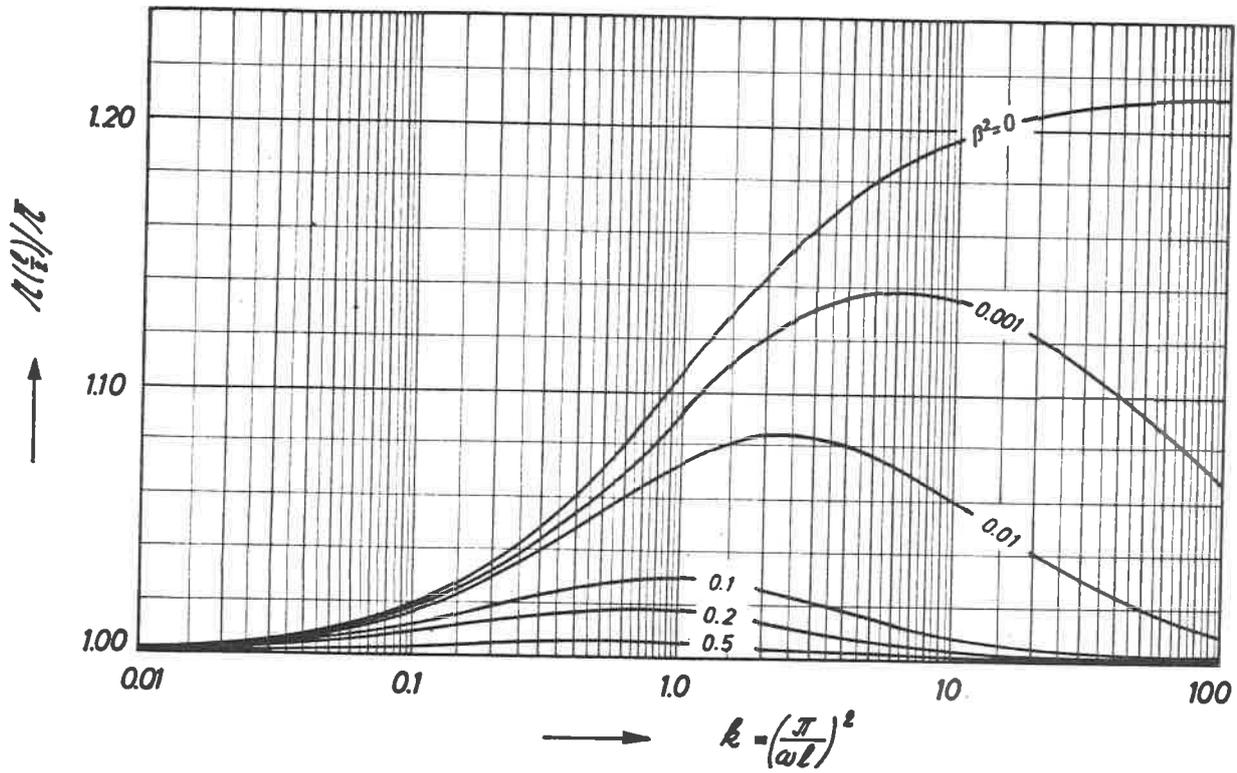


Bild 5.4: Einfeldträger mit Einzellast in Trägermitte - Verhältnis der Durchbiegungsfaktoren $w(l/2)/w$

momente M_n die Näherungswerte um mehrere 100 % überschreiten.

Die Durchbiegung stimmt noch am ehesten mit der Näherung überein. Bild 5.4 zeigt eine Gegenüberstellung der Durchbiegungsfaktoren \mathcal{N} (1/2) nach Gl. (4.84) und \mathcal{E} nach Gl. (5.2) für einen Einfeldträger mit Einzellast in Trägermitte. Auch hier sind Ueberschreitungen der Näherungslösung bis zu etwa 20 % möglich. Bei ausmittigen Laststellungen wird sich diese Ueberschreitung noch vergrößern.

Die bisher in diesem Abschnitt geführten Untersuchungen veranschaulichen, daß die in den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 angegebenen Näherungslösungen und damit auch das in DIN E 1052 für zweiteilige und dreiteilige symmetrische Querschnitte vorgeschriebene Berechnungsverfahren auf Einfeldträger unter punktförmiger Einzellast im allgemeinen nicht angewendet werden können.

5.3.2.2. Verteilte Einzellast

Es stellt sich nun die Frage, ob die großen Abweichungen der Einzelmomente von der Näherung auch dann auftreten, wenn die Einzellast nicht punktförmig, sondern, wie es in der Praxis fast immer der Fall ist, auf eine gewisse Strecke verteilt am Träger angreift.

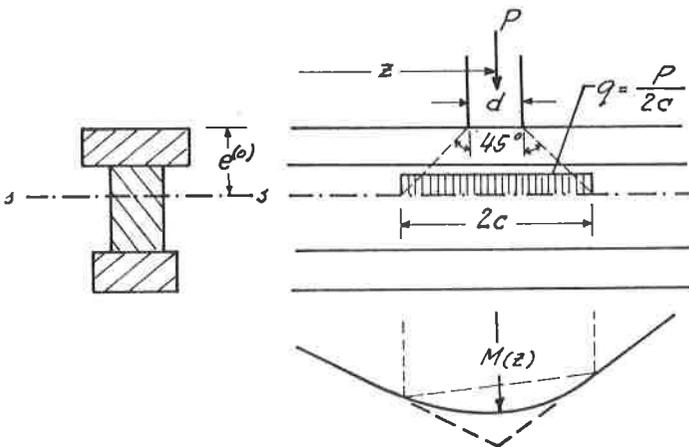


Bild 5.5.

Die rechnerische Verteilungsbreite ergibt sich bei einer Lastangriffsbreite d (s. Bild 5.5) unter Annahme eines Querverteilungswinkels von 45° zu:

$$2c = d + d e^\circ$$

Mit $q = \frac{P}{2 \cdot c}$ wird (s.a. Bild 4.1)

$$M(z) = 2cql \left(\frac{z}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} - \frac{1}{8} \cdot \frac{2c}{l} \right) = Pl \left(\frac{z}{l} \cdot \frac{\bar{z}}{l} - \frac{1}{8} \cdot \frac{2c}{l} \right). \quad (5.14)$$

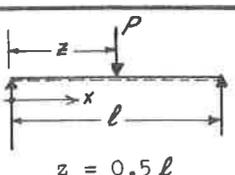
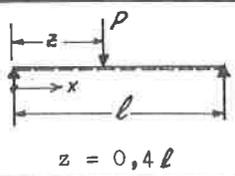
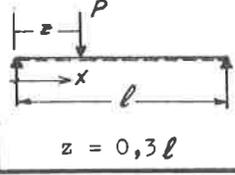
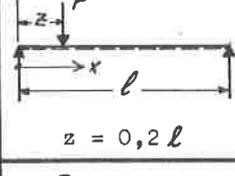
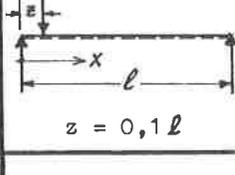
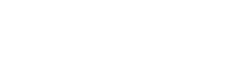
Damit können die Weg- und Schnittgrößen für verteilte Einzelast mit Hilfe der in Abschnitt 4.3.1 angegebenen Gleichungen ermittelt werden.

Die Verteilungsbreite $2c$ beträgt in der Praxis je nach dem Verhältnis von Trägerhöhe zu Stützweite und der Lastaufstandsbreite etwa $1/20$ bis $1/10$ der Trägerstützweite. Für den größten dieser beiden Werte wurden aus den Gln. (2.52) und (4.63b) für unterschiedliche Last- und Schnittstellen die Normalkräfte $N_n(x, z)$ in Abhängigkeit von $k \cdot \beta^2$ errechnet und in Tabelle 5.2 in der jeweils oberen Zeile zusammengestellt. Zum Vergleich sind darunter die einer punktförmigen Einzellast entsprechenden Normalkräfte eingetragen. Man erkennt, daß sich der Normalkraftverlauf bei verteilter Einzellast selbst bei der verhältnismäßig großen Verteilungsbreite von $2c = 1/10$ nur unwesentlich von demjenigen bei punktförmigem Lastangriff unterscheidet. Dies läßt den Schluß zu, daß ähnliche Verhältnisse auch bei den Schubkraft- und Biegelinien vorliegen.

Die Ausrundung der Momentenlinie (s. Bild 5.5) an der Laststelle wird sich jedoch abmindernd auf die von den Einzelquerschnitten aufzunehmenden Momente $M_n(z)$ auswirken. Die in Tabelle 5.1 in der jeweils unteren Zeile angegebenen Verhältnisse $M_n(z) / \bar{M}_n(z)$ zeigen, daß die unter Annahme einer Lastverteilung von $1/10$ errechnete Ueberschreitung der genäherten Einzelmomente $\bar{M}_n(z)$ z.T. wesentlich tiefer liegt als bei punktförmigem Lastangriff. Es ist jedoch festzustellen, daß in der Mehrzahl der Fälle die Ueberschreitung immer noch so groß ist, daß auf eine genauere Berechnung, als sie die Näherungslösung angibt, nicht verzichtet werden kann. Für die praktische Berechnung wurde Gl. (4.65b) für Verteilungsbreiten von $2c = 0,05 \cdot l$ und $0,1 \cdot l$ ausgewertet und in

Tabelle 5.2: Verlauf der Normalkräfte beim Einfeldträger unter Einzellast

obere Zeile: Verteilte Einzellast ($2c = 0,11$)
 untere Zeile: Punktförmige Einzellast

$\frac{l \cdot P}{E} \setminus x$	0,1 l	0,2 l	0,3 l	0,4 l	0,5 l	Laststellung
0,01	0,500	1,000	1,500	1,990	2,295	 <p>$z = 0,5 l$</p>
	0,500	1,000	1,500	1,992	2,341	
0,1	0,491	0,974	1,428	1,806	1,978	
	0,492	0,975	1,430	1,814	1,997	
1	0,298	0,573	0,807	0,972	1,035	
	0,298	0,575	0,809	0,976	1,040	
10	0,055	0,106	0,147	0,176	0,186	 <p>$z = 0,4 l$</p>
	0,055	0,106	0,148	0,177	0,187	
0,01	0,600	1,200	1,790	2,195	1,990	
	0,600	1,200	1,792	2,240	1,992	
0,1	0,577	1,129	1,606	1,879	1,806	
	0,578	1,132	1,612	1,897	1,812	
1	0,316	0,603	0,831	0,963	0,972	 <p>$z = 0,3 l$</p>
	0,317	0,605	0,835	0,968	0,976	
10	0,056	0,108	0,148	0,172	0,176	
	0,057	0,108	0,148	0,173	0,176	
0,01	0,700	1,390	1,895	1,790	1,500	
	0,700	1,392	1,940	1,792	1,500	
0,1	0,638	1,210	1,580	1,606	1,428	 <p>$z = 0,2 l$</p>
	0,641	1,217	1,599	1,615	1,430	
1	0,306	0,574	0,795	0,831	0,807	
	0,308	0,577	0,764	0,835	0,809	
10	0,053	0,099	0,132	0,148	0,147	
	0,053	0,099	0,133	0,149	0,148	
0,01	0,790	1,395	1,390	1,200	1,000	 <p>$z = 0,1 l$</p>
	0,793	1,441	1,392	1,200	1,000	
0,1	0,632	1,088	1,210	1,129	0,974	
	0,638	1,107	1,217	1,131	0,975	
1	0,258	0,462	0,574	0,603	0,573	
	0,260	0,467	0,577	0,605	0,575	
10	0,042	0,077	0,099	0,108	0,106	 <p>$z = 0,1 l$</p>
	0,043	0,078	0,099	0,108	0,106	
0,01	0,695	0,790	0,700	0,600	0,500	
	0,741	0,793	0,700	0,600	0,500	
0,1	0,450	0,632	0,638	0,577	0,491	
	0,465	0,639	0,640	0,578	0,492	
1	0,156	0,258	0,306	0,316	0,297	 <p>$z = 0,1 l$</p>
	0,159	0,260	0,308	0,316	0,298	
10	0,024	0,042	0,053	0,056	0,055	
	0,025	0,043	0,053	0,056	0,055	

$$\times 0,1 \cdot P \cdot l \cdot \frac{F_n a_n}{J} = N_n(x)$$

den Tafeln 16 u. 17 (s. Anhang) graphisch dargestellt. Mit Hilfe dieser Tafeln und Gl. (4.33) können die Einzelmomente $M_n(z)$ an der Laststelle bei verteilter Einzellast genau genug ermittelt werden.

5.3.2.3. Wandernde Einzellast

Bei konstanten wandernden Einzellasten (Verkehrslasten) stellt sich zwangsläufig die Frage, ob hier ähnlich wie beim starr verbundenen Träger die maximale Biegeandspannung ebenfalls in Trägermitte (Laststelle = Schnittstelle) auftritt, oder ob sie sich infolge des bei Laststellungen in Auflagernähe stark nachlassenden Verbundes zum Auflager hin verschiebt.

Nach Gl. (4.26) wird

$$\sigma_n^{(o,u)}(x) = - \frac{M(x)}{J} \cdot (a_n \alpha(x) \pm e_n^{(o,u)} \chi(x)) \cdot \frac{E_n}{E}.$$

Mit $M(x) = Pl \cdot \frac{\bar{z}}{l} \cdot \frac{x}{l},$

$$\alpha(x) = 1 - \frac{l}{\bar{z}} \cdot \frac{l}{x} \cdot \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z} \sin \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l}$$

und $\chi(x) = \frac{1 - \alpha^2 \cdot \alpha(x)}{\beta^2}$

$0 \leq x \leq \bar{z}$

s. (4.79)

ergibt sich daraus:

$$\sigma_n^{(o,u)}(x, \bar{z}) = - \frac{Pl}{J} \cdot \frac{E_n}{E} \cdot \left[\pm \frac{e_n^{(o,u)}}{\beta^2} + \left(\frac{\bar{z}}{l} \cdot \frac{x}{l} - \frac{\beta}{\omega l} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z} \sin \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \right) \cdot \left(a_n \mp \frac{\alpha^2}{\beta^2} e_n^{(o,u)} \right) \right] \quad (5.15)$$

Die relativen Extremwerte dieser von den Variablen x und \bar{z} abhängigen Funktion erhält man durch die Lösung des Gleichungssystems (notwendige Bedingung):

$$\frac{\partial \sigma_n^{(o,u)}(x, \bar{z})}{\partial x} = 0 = \left(\frac{\bar{z}}{l} - \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z} \cos \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \right) \cdot \left(a_n \mp \frac{\alpha^2}{\beta^2} e_n^{(o,u)} \right) \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \sigma = \left(\frac{x}{l} - \frac{d \cos \frac{\omega}{\beta} \bar{z}}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \right) \cdot \left(a_n \mp \frac{\alpha^2}{\beta^2} e_n^{(0,u)} \right) \quad (5.17)$$

Die Gln. (5.16) und (5.17) werden, wie sich nach einiger Umformung zeigt, durch die Werte

$$x = l/2 \quad \text{und} \quad \bar{z} = l/2$$

befriedigt.

Die Auswertung der Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial \bar{z} \partial x} \\ \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x \partial \bar{z}} & \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial \bar{z}^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial \bar{z}^2} - \left(\frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x \partial \bar{z}} \right)^2$$

an der Stelle $x = \bar{z} = l/2$ ergibt mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial \bar{z}^2} &= \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x^2} = \\ &= \frac{PE_n}{l^2 E} \frac{\omega l}{\beta} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{\beta} \bar{z} \sin \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \cdot \left(a_n \mp \frac{\alpha^2}{\beta^2} e_n^{(0,u)} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_n^{(0,u)}(x, \bar{z})}{\partial x \partial \bar{z}} &= \\ &= - \frac{PE_n}{l^2 E} \left(1 - \frac{\omega l}{\beta} \frac{d \cos \frac{\omega}{\beta} \bar{z}}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \frac{d \cos \frac{\omega}{\beta} x}{\sin \frac{\omega}{\beta} l} \right) \cdot \left(a_n \mp \frac{\alpha^2}{\beta^2} e_n^{(0,u)} \right) \end{aligned} \quad (5.19)$$

nach einiger Zwischenrechnung

$$D = \left(\frac{PE_n}{EJE} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega l}{\beta} \cdot \frac{1}{\chi \sin \frac{\omega l}{\beta}} \right) \frac{\omega l}{\beta} \cdot \frac{\omega l}{\beta} \left(a_n + \frac{\alpha^2}{\beta^2} g_n^{(n,n)} \right). \quad (5.20)$$

Für positive Argumente $\frac{\omega \cdot l}{\beta}$ ist D stets größer als 0; damit ist auch die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes in Trägermitte erfüllt. An dieser Stelle wird Gl. (5.18) für Biegedruckspannungen positiv und für Biegezugspannungen negativ; dies bedeutet, daß die Biegespannungen bei Laststellung in Trägermitte absolut betrachtet stets ihren Maximalwert annehmen [16].

Damit ist bewiesen, daß auch nachgiebig verbundene Biegeträger unter wandernder Einzellast bezüglich der maximalen Biegerandspannungen für Laststellung in Trägermitte zu bemessen sind.

Aus den Tafeln 4 - 8 (s. Anhang) ist zu erkennen, daß die Schubbeanspruchungen der Verbindungsmittel an der Stelle $x = 0$ (Auflager) umso stärker von denjenigen eines starr verbundenen Trägers abweichen, je näher die Last P zum Auflager hin rückt. Läßt man die Einzellast von der Trägermitte gegen das Auflager zu wandern, dann sieht man, daß die in den Fugen zu übertragenden Schubkräfte an der Stelle $x = 0$ zunächst langsam anwachsen, bei Annäherung der Last P ans Auflager jedoch wieder kleiner werden. Die in Tafel 18 für verschiedene Steifigkeitswerte $k \cdot \beta^2$ aufgetragenen Einflußlinien für die Fugenschubkräfte an der Stelle $x = 0$ verdeutlichen diesen Vorgang. Im Gegensatz zum starren Träger, bei dem die maximale rechnerische Schubspannung stets bei Lastangriff unmittelbar neben dem Auflager auftritt, müssen die Verbindungsmittel nachgiebig verbundener Träger je nach Steifigkeit nur noch für einen Bruchteil der maximalen äußeren Querkraft bemessen werden.

5.3.3. Abschätzung der Verhältnisse bei Querschnitten mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten

Obwohl die in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 angegebenen Aussagen nach Voraussetzung nur für Trägerquerschnitte mit voneinander

abhängigen Fugensteifigkeiten gelten, läßt sich vermuten, daß auch bei Trägern mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten zwischen den genäherten und den exakten Lösungen ähnliche Verhältnisse vorliegen. Während hier im Gegensatz zu Querschnitten mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten die Normalkraftfaktoren $\alpha_n(x)$ sowohl größer 1 als auch negativ werden können, bleiben die Nachgiebigkeitsfaktoren $\eta_{n,n+1}(x)$ der Fugenschubkräfte naturgemäß kleiner 1. Wie zahlreiche durchgerechnete Beispiele beweisen (s. hierzu Beispiel 2, Abschnitt 6.4.2), kann angenommen werden, daß bei Trägern mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten die Verschiebungen und damit auch die Schubkräfte in den einzelnen Fugen je nach Steifigkeit annähernd gleich wie bei Trägern mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten verlaufen. Unter dieser Voraussetzung besteht zwischen den Schubkraftfaktoren $\eta_{n,n+1}(x)$ (unabh. Fugensteifigkeiten) und $\eta(x)$ (abh. Fugensteifigkeiten) sowie ihren Näherungen $\bar{\eta}_{n,n+1}$ und $\bar{\eta}$ die Beziehung:

$$\boxed{\frac{\eta_{n,n+1}(x)}{\bar{\eta}_{n,n+1}} = \frac{\eta(x)}{\bar{\eta}} \quad \text{bzw.} \quad \eta_{n,n+1}(x) = \bar{\eta}_{n,n+1} \frac{\eta(x)}{\bar{\eta}}} \quad (5.21)$$

Daraus folgt, daß die Summe aller oberhalb der Fuge $n, n+1$ verlaufenden Normalkräfte eines Trägers mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten genau so groß sein muß wie diejenige eines Trägers mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten mit gleichem Schubkraftverlauf in der betrachteten Fuge:

$$\sum_1^n N_n(x) = \frac{M(x)}{J} \sum_1^n F_n \alpha_n(x) \quad (\text{unabh. Fugenst.}) \quad (5.22a)$$

$$\sum_1^n N_n(x) = \frac{M(x)}{J} \cdot S_{n,n+1} \cdot \alpha_{n,n+1}(x) \quad (\text{abh. Fugenst.}) \quad (5.22b)$$

Darin ist $\alpha_{n,n+1}(x)$ der Normalkraftfaktor eines stellvertretenden Trägers mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten, dessen Schubkraftfaktor $\eta(x)$ gerade demjenigen der betrachteten Fuge des ursprünglichen Trägers ($\eta_{n,n+1}$) entspricht. Aus den Gln. (5.22a) und (5.22b) folgt dann für die Normalkraftfaktoren

der Einzelquerschnitte nach Zwischenrechnung:

$$\alpha_n(x) = \frac{S_{n,n+1} \alpha_{n,n+1}(x) - S_{n-1,n} \alpha_{n-1,n}(x)}{F_n a_n} \quad (5.23)$$

Die Momentenfaktoren ergeben sich dann wieder nach Gl. (3.76a) zu:

$$\mathcal{M}(x) = \frac{J - \sum_1^m F_n a_n^2 \alpha_n(x)}{\sum_1^m J_n}$$

Damit können auch die Schnittgrößen von Trägern mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten mit Hilfe der im Anhang aufgenommenen Tafeln und der in Abschnitt 5.2.2 entwickelten Näherung unter Umgehung der umständlichen in Kapitel 3 angegebenen Summenformeln genau genug abgeschätzt werden.

5.4. Der Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast

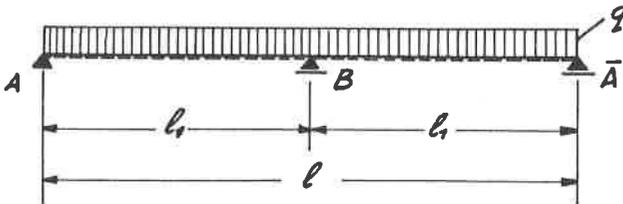


Bild 5.6.

Die Berechnung von nachgiebig verbundenen Durchlaufträgern kann grundsätzlich nach dem in Abschnitt 3.5 angegebenen Verfahren vorgenommen werden. Um einen Ueberblick über das Tragverhalten solcher Träger zu erhalten, wird im Rahmen dieser Arbeit der einfache Fall eines Durchlaufträgers über zwei gleiche Felder unter Vollast nach Bild 5.6 mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten behandelt.

Bekanntermaßen wird beim starr verbundenen Durchlaufträger über zwei gleiche Felder

$$B_{\text{starr}} = 1,25 \cdot q \cdot l \quad \text{und} \quad M_{B\text{starr}} = \frac{-2ql^2}{8}$$

Bei nachgiebig verbundenen Querschnitten erhält man aus Gl. (3.135) die mittlere Auflagerkraft zu

$$B = B_{\text{starr}} \cdot \frac{\kappa^{\circ}(l)}{\kappa^{\prime}(l)} = 1,25 \cdot q \cdot l \cdot \frac{\kappa^{\circ}(l)}{\kappa^{\prime}(l)} \quad (5.24)$$

und damit das Stützmoment

$$M_B = -\frac{2ql^2}{8} \cdot 4 \cdot \left[1,25 \cdot \frac{\kappa^{\circ}(l)}{\kappa^{\prime}(l)} - 1 \right]. \quad (5.25)$$

Das Verhältnis der Nachgiebigkeitsfaktoren $\kappa^{\circ}(l_1)$ und $\kappa^{\prime}(l_1)$ zueinander wurde mit Hilfe der Gln. (4.78) und (4.84) für einige Steifigkeitswerte k und β^2 errechnet und in Tafel 19 (s. Anhang) aufgetragen; die gleiche Tafel zeigt auch das über Gl. (5.25) damit verknüpfte Verhältnis von M_B zu $M_{B\text{starr}}$. Während $\kappa^{\circ}(l_1)/\kappa^{\prime}(l_1)$ für $\beta^2 = 0$ minimal den Wert 0,8 annehmen kann, wird das Stützmoment naturgemäß sehr viel stärker abgebaut. Bei der Berechnung solcher Durchlaufträger muß demnach von einer neuen Momentenlinie ausgegangen werden, die von derjenigen eines starren Trägers unter Umständen erheblich abweicht (s. Bild 5.7).

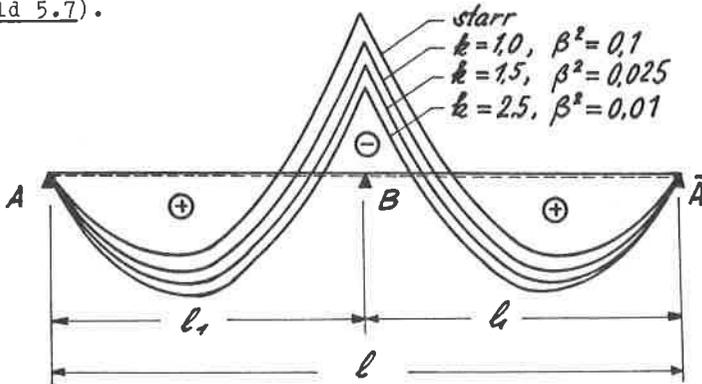


Bild 5.7.

Die Gleichung dieser Momentenlinie ergibt sich zu:

$$M(x) = \frac{q \cdot l \cdot x}{2} - \frac{q \cdot x^2}{2} - \frac{Bx}{2} = \frac{q \cdot l^2}{8} \left[16 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 10 \frac{x}{l} \cdot \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \right] \quad (5.26)$$

Nach Gl. (3.140) wird

$$\begin{aligned} N_n(x) &= N_n^0(x) - B \cdot N_n^1(x) \\ &= N_n^0(x)_{\text{starr}} \cdot \alpha^0(x) - B \cdot N_n^1(x)_{\text{starr}} \cdot \alpha^1(x) \\ &= \frac{q \cdot l^2}{8} \left[4 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \alpha^0(x) - \frac{5}{8} \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \frac{x}{l} \cdot \alpha^1(x) \right] \frac{F_{na0}}{J} \\ &= \frac{q \cdot l^2}{8} \left[16 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \alpha^0(x) - 10 \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \frac{x}{l} \cdot \alpha^1(x) \right] \frac{F_{na0}}{J} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Will man die Normalkräfte N_n wie bisher in der Form

$$N_n(x) = M(x) \cdot \frac{F_{na0}}{J} \cdot \alpha(x) \quad (5.28)$$

anschreiben, dann wird mit den Gln. (5.26) und (5.27)

$$\alpha(x) = \frac{16 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \alpha^0(x) - 10 \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \frac{x}{l} \cdot \alpha^1(x)}{16 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - 10 \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \frac{x}{l}} \quad (5.29)$$

Für den für die Biegerandspannungen maßgebenden Stützenquerschnitt folgt daraus:

$$\alpha(l) = \frac{\alpha^0(l) - 1,25 \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)} \cdot \alpha^1(l)}{1 - 1,25 \frac{\kappa^0(l)}{\kappa^1(l)}} \quad (5.30)$$

Gl. (5.30) wurde ausgewertet und in Abhängigkeit von k und β^2 in Tafel 20 (s. Anhang) aufgetragen. Man erkennt, daß speziell im Stützenquerschnitt die in den Einzelquerschnitten wirkenden Normalkräfte stark abgemindert werden. Dies hat zur Folge, daß ein Großteil des Stützmomentes von den Einzelquerschnitten allein aufgenommen werden muß; daraus ergeben sich unverhältnismäßig große Einzelmomente M_n und damit verbunden extreme Biegerandspannungen. Die Einzelmomente erhält man analog Gl. (4.25) zu

$$M_n(x) = M(x) \cdot \frac{z_n}{J} \cdot \bar{N}(x) \quad (5.31)$$

mit
$$\bar{N}(x) = \frac{1 - \alpha^2 \cdot \theta(x)}{\beta^2} \quad \text{s. (4.33)}$$

und $\alpha(x)$ nach Gl. (5.29). Tafel 21 (s. Anhang) zeigt die Momentenfaktoren $\bar{N}(1_1)$ für den Stützenquerschnitt; es ist ersichtlich, daß die Einzelmomente um einige 100 % größer werden als bei starrem Verbund.

Neben den maximalen Biegespannungen interessieren vor allem die Durchbiegungen im Feld. Nach Gl. (3.137) wird

$$\begin{aligned} y(x) &= y^0(x) - B \cdot y^1(x) = \\ &= y^0(x)_{\text{starr}} \cdot \bar{N}^0(x) - B y^1(x)_{\text{starr}} \cdot \bar{N}^1(x) \\ &= \frac{q \cdot l^4}{24EJ} \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \bar{N}^0(x) - 1,25 q l \frac{N^0(l)}{N^1(l)} \cdot \frac{l^3}{48EJ} \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \cdot \bar{N}^1(x) \\ &= \frac{q \cdot l^4}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \bar{N}^0(x) - \frac{10}{32} \frac{N^0(l)}{N^1(l)} \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \cdot \bar{N}^1(x) \right\} \end{aligned}$$

oder mit

$$\boxed{\eta(x) = \frac{2}{3} \left\{ \left[\frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \bar{N}^0(x) - \frac{10}{32} \frac{N^0(l)}{N^1(l)} \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \cdot \bar{N}^1(x) \right\}} \quad (5.32)$$

einfacher geschrieben:

$$\boxed{y(x) = \eta(x) \cdot \frac{q \cdot l^4}{EJ}} \quad (5.33)$$

Die maximale Durchbiegung tritt je nach Trägersteifigkeit $k \cdot B^2$ zwischen 0,42 l_1 und 0,5 l_1 auf. Sie kann vereinfacht mit genügender Genauigkeit durch die Durchbiegung in Feldmitte ($x=l_1/2$) ersetzt werden. Gl. (5.32) wurde für diese Stelle in Abhängigkeit von den freien Parametern k und B^2 ausgewertet und in Tafel 22 (s. Anhang) aufgetragen.

Der Verlauf der Fugenschubkräfte ergibt sich nach Gl. (3.139) zu:

$$\begin{aligned}
 t_{n,n+1}(x) &= t_{n,n+1}^{\circ}(x) - B \cdot t_{n,n+1}^1(x) = \\
 &= t_{n,n+1}^{\circ}(x)_{\text{starr}} \cdot g^{\circ}(x) - B \cdot t_{n,n+1}^1(x)_{\text{starr}} \cdot g^1(x) = \\
 &= \left[(q_0 - qx) \cdot g^{\circ}(x) - \frac{1}{2} \cdot 1,25 q_0 \frac{l'(l)}{l^2} \cdot g^1(x) \right] \cdot \frac{S_{n,n+1}}{J} \\
 &= \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot g^{\circ}(x) - 0,625 \frac{l'(l)}{l^2} \cdot g^1(x) \right] \cdot q_0 \cdot \frac{S_{n,n+1}}{J} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

Gl. (5.34) wurde für 2 Trägersteifigkeiten ausgewertet und in Bild 5.8a dargestellt. Da die Stelle der maximalen Fugenschubkräfte je nach Trägersteifigkeit sowohl am freien Auflager A als auch bei 0,7 bis 0,9 l_1 liegen kann, lassen sich Tafeln zur Ermittlung der maßgebenden Werte im Rahmen dieser Arbeit nicht aufstellen. Es wird vorgeschlagen, die Verbindungsmittel wie für einen Einfeldträger mit gleichem Querschnitt und der Stützweite l_1 zu bemessen; wie Bild 5.8b zeigt, werden dabei die Maximalwerte der tatsächlich auftretenden Schubkräfte in allen praktisch vorkommenden Fällen abgedeckt.

Abschließend sollen die hier gefundenen Ergebnisse den in DIN E 1052 [13] für 2- und 3-teilige symmetrische Querschnitte angegebenen Bemessungsvorschriften gegenübergestellt werden, nach welchen bei der Berechnung der k-Werte für 1 die 0,8-fache Feldweite einzusetzen ist. Mit

$$k^* = \left(\frac{\pi}{0,8l} \right)^2 \cdot \frac{E F_1 a_0}{C_{12} a_{12}} = 6,25 \cdot \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \cdot \frac{E F_1 a_0}{C_{12} a_{12}} = 6,25 \cdot k \quad (5.35)$$

ergeben sich näherungsweise entspr. den Gln. (5.1) und (5.2) folgende Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$\bar{\alpha}^* = \bar{\gamma}^* = \frac{1}{1 + k^* \beta^2} \quad (5.36)$$

$$\bar{\beta}^* = \bar{\eta}^* = \frac{1 + k^*}{1 + k^* \beta^2} \quad (5.37)$$

Mit diesen folgt für die Normalkräfte und Einzelmomente im Stützenquerschnitt

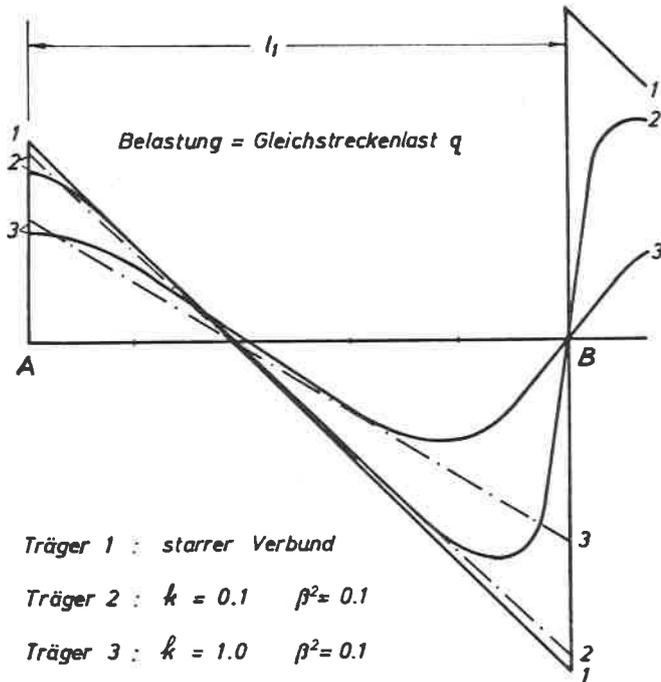


Bild 5.8a

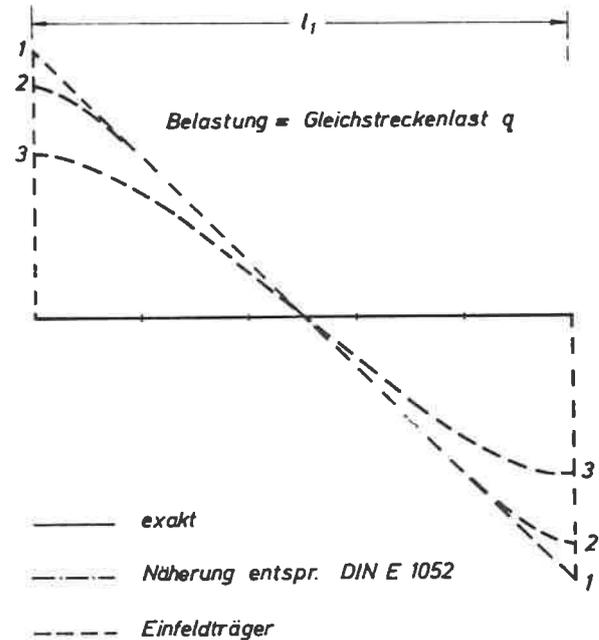


Bild 5.8b

Bild 5.8: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Verlauf der Fugenschubkräfte sowie Vergleich mit der Näherung entspr. DIN E 1052 u. Einfeldträger

$$\bar{N}_n^*(l) = - \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{F_n a_n}{J} \cdot \bar{U}^* \quad (5.38)$$

$$\bar{M}_n^*(l) = - \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{F_n}{J} \cdot \bar{V}^* \quad (5.39)$$

sowie für die Durchbiegung in Feldmitte

$$y(l/2) = \frac{q \cdot l^4}{192 \cdot E \cdot J} \cdot \bar{U}^* = \bar{\eta}^* \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J} \quad (5.40)$$

Tabelle 5.3: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Normalkräfte im Stützenquerschnitt exakt $N_n(l_1)$ und "genähert" $\bar{N}_n^*(l_1)$

β^2	$k = 0,1$ $k^* = 0,625$		$k = 0,4$ $k^* = 2,5$		$k = 1,0$ $k^* = 6,25$	
	$N_n(l)$	$\bar{N}_n^*(l)$	$N_n(l)$	$\bar{N}_n^*(l)$	$N_n(l)$	$\bar{N}_n^*(l)$
0,01	0,807	0,994	0,555	0,975	0,336	0,942
0,05	0,713	0,968	0,433	0,888	0,226	0,762
0,10	0,648	0,942	0,357	0,800	0,167	0,616
0,20	0,565	0,888	0,271	0,667	0,111	0,445
0,50	0,428	0,762	0,161	0,445	0,056	0,243
$x = \frac{q \cdot l^2}{8} \cdot \frac{F_n a_n}{J}$						

In den Tabellen 5.3 und 5.4 wurden die Gln. (5.38) und (5.39) für einige Steifigkeitswerte k und β^2 ausgewertet und den exakten Werten entsprechend den Gln. (5.28) und (5.31) gegenübergestellt. Man erkennt, daß zumindest im Stützenbereich die tatsächlichen Schnittgrößen durch die 'Näherung' entsprechend DIN E 1052 keinesfalls beschrieben werden können. In Tabelle 5.5 wurden die η -Werte entsprechend den Gln. (5.32) und (5.40) für die Feldmitte errechnet. Es zeigt sich, daß auch hier die nach der 'Näherung' ermittelten Durchbiegungen die tatsächlichen Verformungen nur ungenügend wiedergeben.

Tabelle 5.4: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Einzelmomente im Stützenquerschnitt exakt $M_n(l_1)$ und "genähert" $\bar{M}_n^*(l_1)$

β^2	$k = 0,1$ $k^* = 0,625$		$k = 0,4$ $k^* = 2,5$		$k = 1,0$ $k^* = 6,25$	
	$M_n(l)$	$\bar{M}_n^*(l)$	$M_n(l)$	$\bar{M}_n^*(l)$	$M_n(l)$	$\bar{M}_n^*(l)$
0,01	10,35	1,62	18,31	3,41	26,35	6,82
0,05	4,82	1,57	7,76	3,11	10,48	5,52
0,10	3,46	1,53	5,23	2,80	6,65	4,46
0,20	2,47	1,44	3,39	2,33	4,02	3,22
0,50	1,52	1,23	1,76	1,55	1,87	1,76
$x = \frac{2 \cdot l^2}{l} \cdot \frac{I_n}{J}$						

Tabelle 5.5: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Durchbiegung in Feldmitte exakt $y(l_1/2)$ und "genähert" $\bar{y}^*(l_1/2)$

β^2	$k = 0,1$ $k^* = 0,625$		$k = 0,4$ $k^* = 2,5$		$k = 1,0$ $k^* = 6,25$	
	$\eta(l/2)$	$\bar{\eta}^*(l/2)$	$\eta(l/2)$	$\bar{\eta}^*(l/2)$	$\eta(l/2)$	$\bar{\eta}^*(l/2)$
0,01	0,0107	0,0084	0,0253	0,0178	0,0504	0,0355
0,05	0,0101	0,0082	0,0313	0,0162	0,0364	0,0288
0,10	0,0095	0,0080	0,0181	0,0146	0,0275	0,0232
0,20	0,0087	0,0075	0,0141	0,0122	0,0186	0,0168
0,50	0,0069	0,0064	0,0086	0,0081	0,0095	0,0092
$y(l/2) = \eta(l/2) \cdot \frac{2 \cdot l^4}{E \cdot J}$						

Die "näherungsweise" Berechnung der Fugenschubkräfte aus

$$t_{n,n+1}(x) = \frac{Q(x) \cdot S_{n,n+1}}{J} \cdot \bar{y}^* \quad (5.41)$$

beschreibt, wie aus Bild 5.8a zu erkennen ist, recht gut die Schubkräfte am freien Auflager; bei der Mittelstütze werden jedoch nach dieser Methode die Verbindungsmittel rechnerisch

viel stärker beansprucht, als dies in Wirklichkeit der Fall ist.

Vergleicht man für praktisch vorkommende Querschnittsformen und Stützweiten die Tragfähigkeit von Durchlaufträgern über zwei gleiche Felder mit der Feldweite l_1 mit derjenigen eines Einfeldträgers mit gleichem Querschnitt und der Stützweite l_1 , dann stellt sich heraus, daß bei Einhaltung der zulässigen Biegerandspannung im Stützenquerschnitt der Durchlaufträger erheblich weniger Last aufnehmen kann als der entsprechende Einfeldträger (s. hierzu Beispiel 1, Abschnitt 6.4.1.4). Wie sich gezeigt hat, werden bei Berechnung von Durchlaufträgern nach der in DIN E 1052 angegebenen Näherung besonders die Randzonen hoher Stegstelle stark überbeansprucht. Es ist zu erwarten, daß begünstigt durch das rheologische Verhalten des Baustoffes Holz das Stützmoment sehr bald abgebaut wird und sich somit das Tragverhalten eines nachgiebig verbundenen Durchlaufträgers demjenigen eines entsprechenden Einfeldträgers nähert. Es wird deswegen vorgeschlagen, nachgiebig verbundene hölzerne Durchlaufträger grundsätzlich wie Einfeldträger zu bemessen. Der Träger gewinnt dabei erheblich an Tragfähigkeit, während sein Verformungsverhalten zumindest rechnerisch ungünstiger wird. Es erscheint jedoch gerechtfertigt, bei solchen Durchlaufträgern strengere Anforderungen an den Durchbiegungsnachweis anzulegen, als dies bei starr verbundenen Querschnitten der Fall ist, da zahlreiche in der Praxis ausgeführte nachgiebig verbundene hölzerne Durchlaufträger nach längerer Belastung erheblich größere Durchbiegungen aufweisen, als dies nach der Berechnung zu erwarten war.

6. Die praktische Berechnung

6.1. Querschnitte mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

Nachgiebig verbundene Biegeträger, deren Fugensteifigkeiten der Bedingung

$$C_{n,n+1} = C_{12} \frac{S_{n,n+1}}{S_{12}} \cdot \frac{a_{12}}{a_{n,n+1}} \quad \text{s. (2.37)}$$

genügen, können mit Hilfe der in 4.2.2 angegebenen Gleichungen wie folgt berechnet werden.

Biegerandspannung der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_n^{(a_u)}(x) = - \frac{M(x)}{J} \left[a_n \cdot \alpha(x) \pm e_n^{(a_u)} \cdot \beta(x) \right] \cdot \frac{E_n}{E} \quad \text{s. (4.26)}$$

Schwerpunktspannung in den Einzelquerschnitten:

$$\sigma_n^{(s)}(x) = - \frac{M(x)}{J} \cdot a_n \cdot \alpha(x) \cdot \frac{E_n}{E} \quad (6.1)$$

Durchbiegung:

$$y(x) = y(x)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}(x) \quad \text{s. (4.21)}$$

Schubkräfte in den Fugen:

$$t_{n,n+1}(x) = t_{n,n+1}(x)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{G}(x) = \frac{\alpha(x) \cdot S_{n,n+1}}{J} \cdot \mathcal{G}(x) \quad \text{s. (4.22)}$$

Die bisher geführte Untersuchung hat gezeigt, daß die Belastung der Verbindungsmittel am Auflager kleiner ist als bei starrem Verbund. Da jedoch die äußere Querkraft stets dieselbe bleibt, muß zwangsläufig bei nachgiebig verbundenen Trägern ein größerer Anteil der Querkraft von den Einzelquerschnitten aufgenommen werden, als es bei starrem Verbund üblich ist; dies kann zu Erhöhungen der Schubspannungen in den Einzelquerschnitten führen [8]. Die maximalen Schubkräfte in Einzelquerschnitten treten an den Stellen auf, wo das Spannungsdiagramm eine Nullstelle aufweist. Betrachtet man ein aus einem rechteckigen Einzelquerschnitt herausgeschnittenes Stück der Länge dx (s. Bild 6.1),

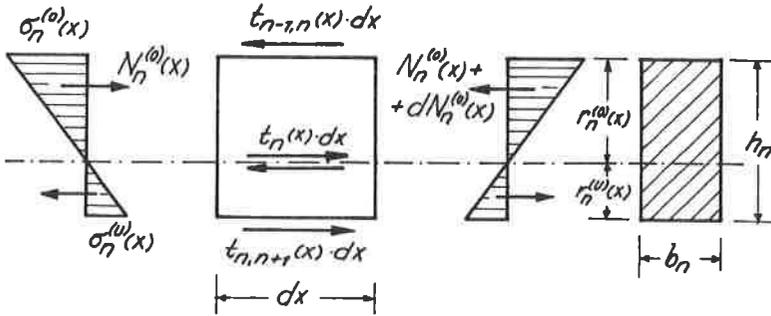


Bild 6.1

dann herrscht in Höhe der Spannungsnulllinie das Kräftegleichgewicht:

$$t_n(x) \cdot dx = t_{n-1,n}(x) \cdot dx + dN_n^{(0)}(x) \quad (6.2)$$

Mit den Randspannungen

$$\sigma_n^{(0)}(x) = \frac{M(x)}{J} \left[a_n \cdot \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \cdot \xi(x) \right] \frac{E_n}{E} \quad \text{und} \quad \sigma_n^{(u)}(x) = \frac{M(x)}{J} \left[a_n \cdot \varrho(x) - \frac{h_n}{2} \cdot \xi(x) \right] \frac{E_n}{E}$$

erhält man aus dem in Bild 6.1 aufgezeichneten Spannungsdiagramm

$$N_n^{(0)}(x) = \sigma_n^{(0)}(x) \cdot \tau_n^{(0)}(x) \cdot \frac{b_n}{2}.$$

Darin ist

$$\tau_n^{(0)}(x) = \frac{h_n \cdot |\sigma_n^{(0)}(x)|}{|\sigma_n^{(0)}(x)| + |\sigma_n^{(u)}(x)|} = \frac{a_n \cdot \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \cdot \xi(x)}{\xi(x)}$$

Damit wird (als Druckkraft positiv)

$$N_n^{(0)}(x) = \frac{M(x) E_n b_n}{2 E J \varrho(x)} \left[a_n \cdot \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \cdot \xi(x) \right]^2$$

und

$$\begin{aligned} \frac{dN_n^{(0)}(x)}{dx} &= \frac{E_n b_n}{2 E J \varrho(x)} \left\{ \xi(x) \left[M(x) \cdot d \cdot \left(a_n \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \xi(x) \right) \cdot \right. \right. \\ &\cdot \left. \left(a_n \frac{d\varrho(x)}{dx} + \frac{h_n}{2} \cdot \frac{d\xi(x)}{dx} \right) + \frac{dM(x)}{dx} \left(a_n \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \xi(x) \right)^2 \right] - \\ &\left. - \frac{d\varrho(x)}{dx} \cdot M(x) \left(a_n \varrho(x) + \frac{h_n}{2} \xi(x) \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Bei freiaufliegenden Einfeldträgern ergibt sich die maximale Schubspannung stets am Auflager; dort ist jedoch $M = 0$. Somit vereinfacht sich an dieser Stelle Gl. (6.3) auf:

$$\frac{dN_n^{(0)}}{dx} = \frac{Q(x) \cdot b_n}{2J \cdot \bar{r}(x)} \left[a_n \cdot \alpha(x) + \frac{h_n}{2} \bar{r}(x) \right]^2 \cdot \frac{E_n}{E} \quad (6.4)$$

In Gl. (6.2) eingesetzt ergibt sich:

$$\tau_n(x) = \frac{t_{n-1,n}(x)}{b_n} + \frac{Q(x) E_n}{2 E J \bar{r}(x)} \left[a_n \cdot \alpha(x) + \frac{h_n}{2} \bar{r}(x) \right]^2 \quad (6.5)$$

Nun nimmt aber, wie ein Vergleich der entsprechenden Gleichungen des Abschnittes 4.3 zeigt, der Normalkraftfaktor $\alpha(0)$ immer den gleichen Wert wie der Schubkraftfaktor $\eta(0)$ an:

$$\alpha(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = \eta(0) \quad (6.6)$$

Damit folgt endgültig für die Schubspannung im Einzelquerschnitt:

$$\boxed{\max \tau_n(0) = \frac{t_{n-1,n}(0)}{b_n} + \frac{Q(0) \cdot E_n}{2 E J \bar{r}(0)} \left[a_n \cdot \eta(0) + \frac{h_n}{2} \bar{r}(0) \right]^2} \quad (6.7)$$

Neben die Nachweise der Biegespannung, der Durchbiegung und der Verbindungsmittel treten nun zusätzlich Schubspannungsnachweise für alle neutralen Fasern des Gesamtquerschnittes.

Die praktische Durchführung obiger Nachweise steht und fällt mit der Ermittlung der Nachgiebigkeitsfaktoren α , \bar{r} , η und κ ; sie können teilweise unmittelbar aus den im Anhang enthaltenen Tafeln entnommen oder aber mit deren Hilfe berechnet werden. Im folgenden wird stichwortartig die Ermittlung der Nachgiebigkeitsfaktoren für die einzelnen Lastfälle erläutert.

Für alle Lastfälle sind zunächst die Steifigkeitswerte

$$\beta^2 = \frac{\sum F_n}{J} \quad , \quad \alpha^2 = 1 - \beta^2 = \frac{\sum F_n a_n^2}{J} \quad \text{und} \quad k = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{E \cdot F_n \cdot a_1}{G_{12} \cdot a_{12}} \quad \text{s. (5.3)}$$

zu berechnen.

Beim Einfeldträger unter Gleichstreckenlast (s. Bild 3.7)

wird mit guter Näherung

$$\alpha(\ell/2) = \varphi(0) \approx \bar{\alpha} = \frac{1}{1+k\beta^2} \quad \text{s. (5.1)}$$

und $\delta(\ell/2) = \mathcal{N}(\ell/2) \approx \bar{\delta} = \frac{1+k}{1+k\beta^2}$ s. (5.2)

Genauer erhält man jedoch $\alpha(\ell/2)$ und $\varphi(0)$ aus Tafel 2 (s. Anhang). Die dazugehörigen Momenten- und Durchbiegungsfaktoren können daraus mit Hilfe der Gln. (4.33) und (4.78) ermittelt werden zu:

$$\delta(\ell/2) = \frac{1-d^2 \cdot \alpha(\ell/2)}{\beta^2} \quad \text{s. (4.33)}$$

$$\mathcal{N}(\ell/2) = 1 + \frac{48}{5\pi^2} \cdot k \cdot d^2 \cdot \alpha(\ell/2) \quad (6.8)$$

Bei Einfeldträgern unter Einzellast muß der Spannungsnachweis unter Umständen an mehreren Stellen geführt werden, da die maximalen Einzelmomente stets an der Laststelle, die größten Normalkräfte jedoch mehr zur Trägermitte hin auftreten (s. Tafeln 4 - 8 des Anhangs). Bei vorwiegend durch Einzelmomente beanspruchten Einzelquerschnitten (z.B. Stegteilen) ergibt sich die maximale Biegerandspannung entweder unmittelbar an der Laststelle oder dicht daneben, bei bevorzugt durch Normalkräfte beanspruchten Einzelquerschnitten (z.B. Gurtteile) in der Nähe der maximalen Normalkraft. Lediglich bei Einzellast in Trägermitte fallen beide Stellen zusammen.

Der Nachgiebigkeitsfaktor $\alpha(x=z)$ für die Laststelle kann unmittelbar Tafel 9 (s. Anhang) entnommen werden; für weitere Schnittstellen läßt er sich mit Hilfe der Tafeln 10-14 (s. Anhang) ermitteln zu:

$$\alpha(x) = \bar{\alpha} \cdot \frac{\alpha(x)}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{1+k\beta^2} \cdot \frac{\alpha(x)}{\bar{\alpha}} \quad (6.9)$$

Wenn die Einzellast nicht punktförmig, sondern auf die Länge $2c$ (in Höhe der Schwerachse gemessen) verteilt angreift, ist für den Nachweis an der Laststelle zunächst das tatsächliche Moment

$$M(z) = P \cdot L \left(\frac{z}{L} \cdot \frac{z}{L} - \frac{c}{4L} \right) \quad \text{s. (5.14)}$$

zu bestimmen; die für diesen Fall entwickelten Normalkraft-

faktoren sind in den Tafeln 16 u. 17 (s. Anhang) aufgetragen.
Für die Momentenfaktoren folgt dann wieder:

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1 - \alpha^2 \cdot \mathcal{M}(x)}{\beta^2} \quad \text{s. (4.33)}$$

Die Schubkraftfaktoren für die maximalen Schubkräfte am Auflager $\mathcal{Q}(0)$ erhält man unmittelbar aus Tafel 15 (s. Anhang). Der Durchbiegungsfaktor $\mathcal{N}(x)$ für die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle x muß rechnerisch unter Verwendung von Gl. (4.81) aus

$$\mathcal{N}(x) = 1 + \frac{\frac{6}{\pi^2} \cdot \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \mathcal{M}(x)}{1 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2 - \left(\frac{x}{Z}\right)^2} \quad (0 \leq x \leq Z) \quad (6.10)$$

bestimmt werden. Für Einzellast in Trägermitte wird aus Gl. (6.10)

$$\mathcal{N}(l/2) = 1 + \frac{\pi^2}{\pi^2} \cdot \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \mathcal{M}(l/2). \quad (6.11)$$

Bei konstanten wandernden Einzellasten kann die Dimensionierung des Trägerquerschnitts für Laststellung in Trägermitte vorgenommen werden. Die maximale Beanspruchung der Verbindungsmittel ergibt sich mit ausreichender Genauigkeit aus den in Tafel 18 (s. Anhang) angegebenen Einflußlinien. Der Nachweis der Schubspannungen in den neutralen Fasern muß für Laststellungen unmittelbar am Auflager erfolgen, da in diesem Falle die größte Querkraft auftritt. Hierfür vereinfacht sich Gl. (6.7) mit $\mathcal{Q}(x=0, z=0) = 0$ und $\mathcal{S}(x=0, z=0) = 1/\beta^2$ auf

$$\max T_n(0) = \frac{Q(0) \cdot E_n \cdot h_n^2}{8 E J \cdot \beta^2} = \frac{Q(0) \cdot E_n \cdot h_n^2}{8 E \frac{E_n}{7} J_n} ; \quad (6.12)$$

das heißt aber, daß hier die gesamte Querkraft von den Einzelquerschnitten aufgenommen werden muß.

Will man Durchlaufträger über 2 gleiche Felder nicht, wie in Abschnitt 5.4 vorgeschlagen wurde, als Einfeldträger mit der freien Stützweite l berechnen, dann kann eine genauere Berechnung mit Hilfe der Tafeln 19 - 22 (s. Anhang) durchgeführt werden. Zunächst ist mit Hilfe von Tafel 19 die tatsächliche Momentenlinie zu ermitteln. Den Normalkraftfaktor $\mathcal{N}(l)$ entnimmt

man Tafel 20. Die dazugehörigen Momentenfaktoren δ (4) können entweder mit Hilfe von Gl. (4.33) berechnet oder aus Tafel 21 abgelesen werden. Die Durchbiegung in Feldmitte ergibt sich aus Tafel 22. Die Nachweise der Verbindungsmittel und der Schubspannungen in den Einzelquerschnitten sind wie für einen Einfeldträger mit der Stützweite l_1 zu führen, da hierfür keine genaueren Tafeln aufgestellt wurden; man bewegt sich dabei auf der sicheren Seite.

6.2. Querschnitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten

Die wichtigsten Weg- und Schnittgrößen nachgiebig verbundener Biegeträger, deren Fugensteifigkeiten der Bedingung (2.37) nicht genügen, können nach Kapitel 3 aus nachfolgenden Gleichungen berechnet werden.

Biegerandspannung der Einzelquerschnitte:

$$\sigma_n^{(0,0)} = - \frac{M(x)}{J} \left[a_n \alpha_n(x) \pm \epsilon_n^{(0,0)} \cdot \delta \epsilon(x) \right] \frac{E_n}{E} \quad \text{s. (3.84)}$$

Schwerpunktspannung in den Einzelquerschnitten:

$$\sigma_n^{(s)} = - \frac{M(x)}{J} \cdot a_n \cdot \alpha_n(x) \cdot \frac{E_n}{E} \quad (6.12a)$$

Durchbiegung:

$$y(x) = y(x)_{\text{starr}} \cdot \mathcal{K}(x) \quad \text{s. (3.79)}$$

Schubkräfte in den Fugen:

$$k_{n,n+1}(x) = \frac{Q(x) \cdot S_{n,n+1}}{J} \cdot \eta_{n,n+1}(x) \quad \text{s. (3.80)}$$

Die Berechnung der Schubspannungen in Einzelquerschnitten mit Spannungsnulllinien kann nach Gl. (6.5) vorgenommen werden, wobei $\alpha(0)$ lediglich durch den Normalkraftfaktor $\alpha_n(0)$ zu ersetzen ist. Mit

$$\alpha_{n,n+1}(0) = \eta_{n,n+1}(0) \quad \text{und} \quad \alpha_{n-1,n}(0) = \eta_{n-1,n}(0) \quad \text{s. (6.6)}$$

wird nach Gl. (5.23)

$$\alpha_n(0) = \frac{S_{n,n+1} \eta_{n,n+1}(0) - S_{n-1,n} \eta_{n-1,n}(0)}{F_n a_n} \quad (6.13)$$

Zur Ermittlung der Nachgiebigkeitsfaktoren sind zunächst die wirksamen statischen Momente $\mathcal{J}_{n,n+1}$ für alle Fugen sowie das wirksame Trägheitsmoment J_w entsprechend Abschnitt 3.2 zu berechnen. Dabei ist in den K-Werten $v^2 = (\frac{\pi}{2})^2$ zu setzen.

Beim Einfeldträger unter Gleichstreckenlast. (s. Bild 3.7) gilt näherungsweise:

$$\alpha_n(\frac{l}{2}) \approx \bar{\alpha}_n = \frac{J}{J_w} \cdot \frac{\mathcal{J}_{n,n+1} - \mathcal{J}_{n-1,n}}{F_n a_n} \quad \text{s. (5.9)}$$

$$\mathcal{J}_n(\frac{l}{2}) \approx \bar{\mathcal{J}}_n = \frac{J}{J_w} \quad \text{s. (5.10)}$$

$$\mathcal{J}_{n,n+1}(0) \approx \bar{\mathcal{J}}_{n,n+1} = \frac{J}{J_w} \cdot \frac{\mathcal{J}_{n,n+1}}{S_{n,n+1}} \quad \text{s. (5.11)}$$

Eine genauere Berechnung kann unter Verwendung der Tafeln 2 und 3 (s. Anhang), wie nachfolgend für Einfeldträger unter Einzellast beschrieben, vorgenommen werden.

In Abschnitt 5.3.3 wurde gezeigt, wie die Weg- und Schnittgrößen von Einfeldträgern unter Einzellast mit Hilfe der "Näherungswerte" und den im Anhang angegebenen Tafeln abgeschätzt werden können. Bei der Bestimmung der Nachgiebigkeitsfaktoren geht man dabei wie folgt vor:

Zunächst ermittelt man sich für alle Verbindungsfugen aus Gl. (5.11) die "genäherten" Schubkraftfaktoren $\mathcal{J}_{n,n+1}$. In Tafel 15 (s. Anhang) sucht man diese Werte auf der gestrichelten Kurve auf und liest die dazugehörigen genaueren Faktoren

$\mathcal{J}_{n,n+1}(0)$ sowie die Steifigkeitswerte $(k\beta^2)_{n,n+1}$ jeder Fuge ab. Anschließend entnimmt man je nach Laststellung und Schnittstelle einer der Tafeln 10-14 (s. Anhang) für jede Fuge das zu dem Steifigkeitswert $(k\beta^2)_{n,n+1}$ gehörige Verhältnis $\alpha_{n,n+1}(x)$ zu $\bar{\alpha}_{n,n+1}$. Da nach Definition (s. Abschnitt 5.3.3)

$$\bar{\alpha}_{n,n+1} = \bar{\mathcal{J}}_{n,n+1}$$

ist, ergeben sich schließlich die die Summe der oberhalb der Fuge $n,n+1$ wirkenden Normalkräfte beschreibenden Normalkraftfaktoren zu:

$$\alpha_{n,n+1}(x) = \bar{\mathcal{J}}_{n,n+1} \cdot \frac{\alpha_{n,n+1}(x)}{\bar{\alpha}_{n,n+1}} \quad (6.14)$$

Damit können die Normalkraftfaktoren $\alpha_n(x)$ der Einzelquer-

schnitte mit Hilfe von Gl. (5.23) und der Momentenfaktor $\delta(x)$ aus Gl. (3.76a) berechnet werden. Der Durchbiegungsfaktor $\mathcal{U}(x)$ läßt sich aus Gl. (6.10) bzw. (6.11) ermitteln, wobei für

$$\alpha(x) = [1 - \beta^2 \delta(x)] / \alpha^2$$

und für k der zu diesem $\alpha(x)$ gehörende fiktive Steifigkeitswert, der aus einer der Tafeln 9 - 14 des Anhangs abgelesen werden kann, einzusetzen ist.

Einfeldträger unter wandernder Einzellast können sinngemäß, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, berechnet werden.

Bei Durchlaufträgern über 2 gleiche Felder unter Vollast (s. Bild 5.6) mit der Feldweite l sind zunächst wie für einen Einfeldträger mit der Stützweite l die genäherten Schubkraftfaktoren $g_{n,n+1}$ aus Gl. (5.11) zu ermitteln. Aus Tafel 2 (s. Anhang) werden die dazugehörigen exakten Werte $g_{n,n+1}(0)$ sowie auf der Abszisse die Steifigkeiten $[k(l) \cdot \beta^2]_{n,n+1}$ des Einfeldträgers abgelesen. Die für die Benutzung der Tafeln 19-22 des Anhangs notwendigen, auf die Gesamtlänge des Durchlaufträgers bezogenen Steifigkeitswerte $k(l)_{n,n+1}$ ergeben sich daraus zu:

$$k_{n,n+1}(l) = \frac{[k(l) \cdot \beta^2]_{n,n+1}}{\beta^2} \cdot \left(\frac{l}{2l}\right)^2 = \frac{k_{n,n+1}(l)}{4} \quad (6.15)$$

Damit können sowohl die tatsächliche Momentenlinie (aus Tafel 19) bestimmt als auch die die Summe der oberhalb der Fuge $n, n+1$ wirkenden Normalkräfte im Stützenquerschnitt beschreibenden Normalkraftfaktoren $\mathcal{U}_{n,n+1}(l)$ aus Tafel 20 abgelesen werden. Mit Hilfe von Gl. (5.23) werden dann die Normalkraftfaktoren für die Einzelquerschnitte $\mathcal{U}_n(l)$ ermittelt. Der Momentenfaktor $\delta(l)$ ergibt sich wieder aus Gl. (3.76a). Sucht man diesen Wert in Tafel 21 auf, dann läßt sich dort ein vergleichender k -Wert ablesen, mit dessen Hilfe aus Tafel 22 die Durchbiegung in Feldmitte berechnet werden kann. Ähnlich wie bei Trägern mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten sollte jedoch auch hier mit Rücksicht auf das günstigere Tragverhalten die Berechnung als Einfeldträger vorgezogen werden.

6.3. Berücksichtigung von Querschnittsschwächungen

Die bisher geführten Untersuchungen gingen davon aus, daß die Einzelquerschnitte nachgiebig verbundener Träger auf die gesamte Trägerlänge konstante Querschnittsflächen F_n und Trägheitsmomente J_n besitzen. In der Praxis erzeugen jedoch die zur Uebertragung der Fugenschubkräfte notwendigen mechanischen Verbindungsmittel (im Holzbau Nägel, Bolzen und Dübel) oft erhebliche, örtlich begrenzte Querschnittsschwächungen, die dieser Annahme zunächst widersprechen.

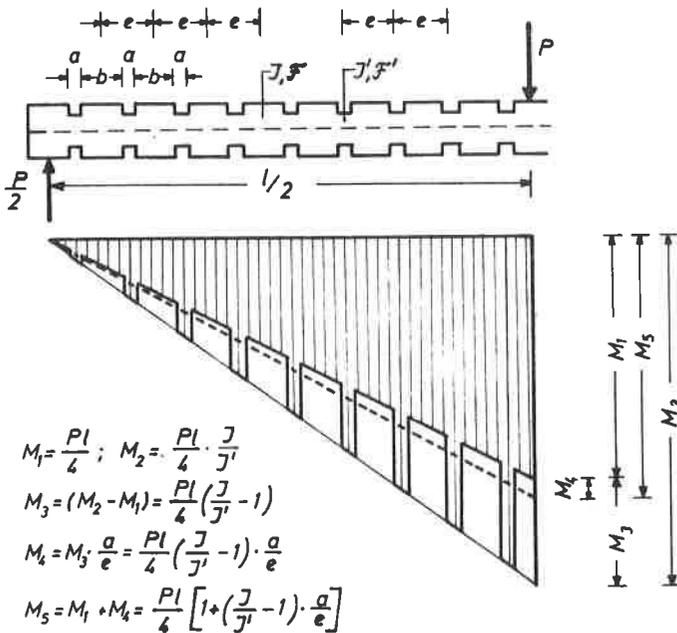


Bild 6.2.

Die Mittendurchbiegung eines solchen mit kontinuierlich über die Trägerlänge l verteilten Querschnittsschwächungen versehenen Einzelquerschnittes ergibt sich nach dem allgemein bekannten Mohr'schen Verfahren für Einzellast in Trägermitte aus Bild 6.2 in guter Annäherung zu:

$$\begin{aligned}
 E \cdot J \cdot y''(\xi) &\approx M_5 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} - M_5 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{6} = M_5 \cdot \left(\frac{l^2}{8} - \frac{l^2}{24} \right) = \\
 &= M_5 \cdot \frac{l^2}{12} = \frac{P \cdot l^3}{48} \cdot \left[1 + \left(\frac{J}{J'} - 1 \right) \cdot \frac{a}{e} \right] \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Setzt man $J/J' = 2$ und $a/e = 0,1$, dann wird die Durchbiegung gerade um etwa 10% größer als bei Vernachlässigung der Schwächungen. Da in der Baupraxis solch ungünstige Verhältnisse nur in Ausnahmefällen auftreten, kann im allgemeinen bei den in dieser Arbeit behandelten nachgiebig verbundenen Trägern der Einfluß der von den Verbindungsmitteln verursachten Querschnittsschwächungen auf die Durchbiegung der Einzelquerschnitte und damit auch auf die Durchbiegung des Gesamtquerschnittes vernachlässigt werden.

Die Längenänderung der Strecke e (s. Bild 6.2) unter einer mittigen Normalkraft N ergibt sich zu:

$$\Delta e = \frac{N \cdot e}{E \cdot F} \left[1 + \left(\frac{F}{F'} - 1 \right) \cdot \frac{a}{e} \right] \quad (6.17)$$

Auch hier ist der Einfluß der Querschnittsschwächungen für die praktisch vorliegenden Verhältnisse so gering, daß er auch bei der Berechnung der Fugenverschiebungen zwischen 2 Einzelquerschnitten vernachlässigt werden kann.

Da nun aber bei nachgiebig verbundenen Trägern sowohl die Fugenschubkräfte $t_{n,n+1}(x)$ als auch die Aufteilung des äußeren Momentes $M(x)$ in Normalkräfte $N_n(x)$ und Einzelmomente $M_n(x)$ lediglich von den Fugenverschiebungen $\delta_{n,n+1}(x)$ und der Durchbiegung $y(x)$ abhängen, müssen sich auch die auf die Einzelquerschnitte entfallenden Schnittgrößen wie für ungeschwächte Querschnitte ermitteln lassen, ohne daß man dabei wesentliche Fehler begeht. Daß diese hier nur rechnerisch belegte Annahme tatsächlich den wirklichen Verhältnissen entspricht, zeigt ein bereits im Jahre 1943 an der E.T.H. Zürich unter der Leitung von S t ü s s i durchgeführter Versuch an einem zweiteiligen verdübelten Balken [1], bei welchem die in den ungeschwächten Feldern des Balkens gemessenen Dehnungen mit denjenigen aus der Rechnung, bei welcher die Querschnittswerte F_n und J_n der ungeschwächten Einzelquerschnitte zugrunde gelegt wurden, sehr gut übereinstimmten.

Für die praktische Berechnung gilt also wie bisher mit genügender Genauigkeit:

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,n+1}(x) &= \frac{Q(x) \cdot S_{n,n+1}}{J} \cdot \sigma_{n,n+1}(x) \\ N_n(x) &= \frac{M(x)}{J} \cdot F_n \cdot a_n \cdot \sigma_n(x) \\ M_n(x) &= \frac{M(x)}{J} \cdot J_n \cdot \sigma(x) \end{aligned}$$

Die für die Bemessung maßgebenden Biegespannungen in den geschwächten Querschnittsteilen ergeben sich dann zu:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(qu)} &= \frac{N_n(x)}{J_n^{\text{netto}}} \pm \frac{M_n(x)}{J_n^{\text{netto}}} \cdot e_n^{(qu)} \\ &= - \frac{M(x)}{J} \left[\frac{F_n}{J_n^{\text{netto}}} \cdot a_n \cdot \sigma_n(x) \pm \frac{J_n}{J_n^{\text{netto}}} \cdot e_n^{(qu)} \cdot \sigma(x) \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Darin bedeuten F_n^{netto} den Nettoquerschnitt und J_n^{netto} das Nettoträgheitsmoment des betrachteten Einzelquerschnittes n ; letzteres kann in der Regel auf die Schwerachse des ungeschwächten Einzelquerschnittes bezogen werden, da eine genauere Berechnung unter Berücksichtigung der veränderten inneren Hebelarme meist etwas günstigere Spannungswerte liefert.

Nach den einschlägigen Berechnungsvorschriften des Holz- und Stahlbaus sind meist nur solche Querschnittsschwächungen zu berücksichtigen, die in der Zugzone der biegebeanspruchten Bauteile liegen. Da zumindest bei komplizierteren Querschnittsformen der genaue Spannungsverlauf nicht vorhergesagt werden kann, empfiehlt es sich, zunächst denjenigen im ungeschwächten Querschnitt zu ermitteln und dann im gefährdeten Querschnittsteil die nach Gl. (6.18) errechneten Spannungen den zulässigen Werten gegenüberzustellen.

6.4. Zahlenbeispiele

6.4.1. Beispiel 1 - Unsymmetrischer dreiteiliger Querschnitt mit voneinander abhängigen Fugensteifigkeiten

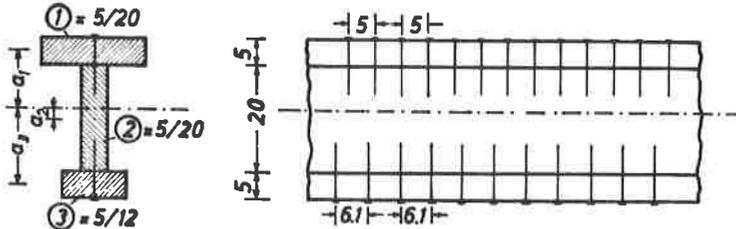


Bild 6.3.

Material:

Nadelholz Gkl.II, $E_1 = E_2 = E_3 = E = 10^5 \text{ kp/cm}^2$.

Nägel 42/110, $C_v = 600 \text{ kp/cm}$ (nach DIN E 1052, Tabelle 7).

Querschnittswerte:

$$F_1 = F_1 = F_2 = F_2 = 100 \text{ cm}^2, \quad F_3 = F_3 = 60 \text{ cm}^2,$$

$$F_{\text{ges}} = 2 \cdot 100 + 60 = 260 \text{ cm}^2.$$

$$J_1 = I_1 = 208 \text{ cm}^4, \quad J_2 = I_2 = 3333 \text{ cm}^4, \quad J_3 = I_3 = 125 \text{ cm}^4.$$

$$a_1 = (100 \cdot 12,5 + 60 \cdot 25,0) / 260 = 10,58 \text{ cm}$$

$$a_2 = (-100 \cdot 12,5 + 60 \cdot 12,5) / 260 = -1,92 \text{ cm}$$

$$a_3 = (-100 \cdot 25,0 + 100 \cdot 12,5) / 260 = -14,42 \text{ cm}$$

$$\sum_1^3 J_n = 208 + 3333 + 125 = 3670 \text{ cm}^4$$

$$\sum_1^3 F_n a_n^2 = 100(10,58^2 + 1,92^2) + 60 \cdot 14,42^2 = 23500 \text{ cm}^4$$

$$J = 27170 \text{ cm}^4$$

$$S_{12} = 100 \cdot 10,58 = 1058 \text{ cm}^3, \quad S_{23} = 60 \cdot 14,42 = 866 \text{ cm}^3.$$

$$\alpha^2 = 23500 / 27170 = 0,865, \quad \beta^2 = 3670 / 27170 = 0,135.$$

Fugensteifigkeiten:

Der Obergurt wird angeschlossen mit Nägeln 42/110 im Abstand $e'_{12} = 5 \text{ cm}$: $C_{12} = 600 / 5 = 120 \text{ kp/cm}^2$.

Nach Gl. (2.37) ergibt sich:

$$\text{erf } C_{23} = 120 \frac{866 \cdot 12,5}{1058 \cdot 12,5} = 98 \text{ kp/cm}^2.$$

Daraus folgt: erf $e'_{23} = 600/98 = 6,1 \text{ cm}$.

Der Untergurt ist also mit Nägeln 42/110 im Abstand $e'_{23} = 6,1 \text{ cm}$ anzuschließen!

6.4.1.1. Als Einfeldträger unter Gleichstreckenlast

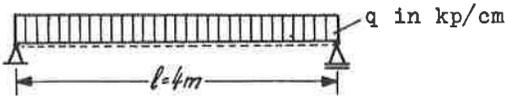


Bild 6.4.

Schnittgrößen:

$$\max M = q \cdot 400^2/8 = 20000 \cdot q \text{ kpcm}$$

$$\max Q = q \cdot 400/2 = 200 \cdot q \text{ kp}$$

$$\max M/J = 20000 \cdot q/27170 = 0,737 \cdot q \text{ kp/cm}^3$$

$$\max Q/J = 200 \cdot q/27170 = 0,00737 \cdot q \text{ kp/cm}^4$$

Trägersteifigkeiten:

$$k = \frac{\pi^2}{400^2} \cdot \frac{10^5 \cdot 100 \cdot 10,58}{120 \cdot 12,5} = 4,35 \quad \text{s. (5.3)}$$

$$k \cdot \beta^2 = 4,35 \cdot 0,135 = 0,588$$

$$k \cdot \alpha^2 = 4,35 \cdot 0,865 = 3,76$$

Näherungsrechnung

Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$\bar{\alpha} = \bar{q} = \frac{1}{1 + 0,588} = 0,63 \quad \text{s. (5.1)}$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta} = \frac{1 + 4,35}{1 + 0,588} = 3,37 \quad \text{s. (5.2)}$$

Schwerpunktspannungen nach Gl. (6.1):

$$\max \sigma_1^{(s)} = -0,737 \cdot q \cdot 10,58 \cdot 0,63 = -4,91 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = +0,737 \cdot q \cdot 1,92 \cdot 0,63 = +0,89 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(s)} = +0,737 \cdot q \cdot 14,42 \cdot 0,63 = +6,70 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,737 \cdot q (10,58 \cdot 0,63 + 2,5 \cdot 3,37) = -11,05 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = -0,737 \cdot q (10,58 \cdot 0,63 - 2,5 \cdot 3,37) = +1,23 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = -0,737 \cdot q (-1,92 \cdot 0,63 + 10,0 \cdot 3,37) = -23,95 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = -0,737 \cdot q (-1,92 \cdot 0,63 - 10,0 \cdot 3,37) = +25,70 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(o)} = -0,737 \cdot q (-14,42 \cdot 0,63 + 2,5 \cdot 3,37) = +0,49 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(u)} = -0,737 \cdot q (-14,42 \cdot 0,63 - 2,5 \cdot 3,37) = +12,90 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Durchbiegung nach Gl. (4.21):

$$\max y = \frac{5 \cdot q \cdot 400^4}{384 \cdot 10^5 \cdot 21170} \cdot 3,37 = 0,532 \cdot q \text{ cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$\max t_{12} = 0,00737 \cdot q \cdot 1058 \cdot 0,63 = 4,91 \cdot q \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,00737 \cdot q \cdot 866 \cdot 0,63 = 4,03 \cdot q \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= 4,91 \cdot q / 5 + \frac{0,00737 \cdot q}{2 \cdot 3,37} (-1,92 \cdot 0,63 + 10,0 \cdot 3,37)^2 = \\ &= 2,15 \cdot q \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Exakte Berechnung

Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$\alpha(\ell/2) = 0,65, \alpha(0) = 0,53 \quad (\text{aus Tafel 2 d. Anhangs})$$

$$\beta(\ell/2) = \frac{1 - 0,865 \cdot 0,65}{0,135} = 3,24 \quad \text{s. (4.33)}$$

$$\beta(0) = \frac{1 - 0,865 \cdot 0,53}{0,135} = 4,02 \quad \begin{array}{l} \text{s. (4.33)} \\ \text{u. (6.6)} \end{array}$$

$$\mathcal{N}(\ell/2) = 1 + \frac{48}{5 \cdot \pi} \cdot 3,76 \cdot 0,65 = 3,37 \quad \text{s. (6.8)}$$

Schwerpunktspannungen nach Gl. (6.1):

$$\max \sigma_1^{(s)} = -0,737 \cdot q \cdot 10,58 \cdot 0,65 = -5,07 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = +0,737 \cdot q \cdot 1,92 \cdot 0,65 = +0,92 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(s)} = +0,737 \cdot q \cdot 14,42 \cdot 0,65 = +6,92 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,737 \cdot q (10,58 \cdot 0,65 + 2,5 \cdot 3,24) = -11,02 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = -0,737 \cdot q (10,58 \cdot 0,65 - 2,5 \cdot 3,24) = +0,90 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = -0,737 \cdot q (-1,92 \cdot 0,65 + 10,0 \cdot 3,24) = -22,95 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = -0,737 \cdot q (-1,92 \cdot 0,65 - 10,0 \cdot 3,24) = +24,80 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(o)} = -0,737 \cdot q (-14,42 \cdot 0,65 + 2,5 \cdot 3,24) = +0,94 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(u)} = -0,737 \cdot q (-14,42 \cdot 0,65 - 2,5 \cdot 3,24) = +12,85 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Durchbiegung nach Gl. (4.21):

$$\max y = \frac{5 \cdot q \cdot 400^4}{384 \cdot 10^5 \cdot 21170} \cdot 3,37 = 0,532 \cdot q \text{ cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$\max t_{12} = 0,00737 \cdot q \cdot 1058 \cdot 0,53 = 4,13 \cdot q \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,00737 \cdot q \cdot 866 \cdot 0,53 = 3,38 \cdot q \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= 4,13 \cdot q / 5 + \frac{0,00737 \cdot q}{2 \cdot 4,02} (-1,92 \cdot 0,53 + 10,4 \cdot 0,02)^2 = \\ &= 2,24 \cdot q \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Bei Annahme starren Verbundes ergäbe sich vergleichsweise:

$$\max \tau_{2\text{starr}} = 0,00737 \cdot q \cdot (1058 + \frac{8,08^2 \cdot 5}{2}) / 5 = 1,80 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Vergleich der Näherung mit den exakten Werten

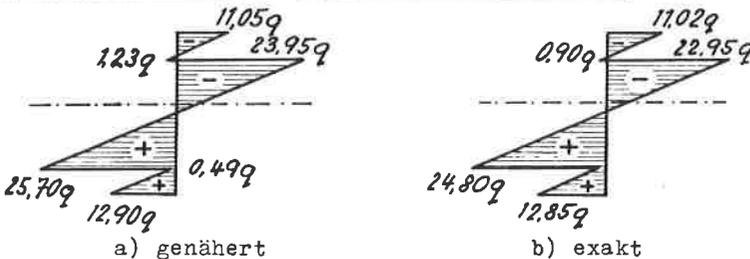


Bild 6.5: Spannungsdiagramme

In Bild 6.5 sind die Spannungsdiagramme für die Trägermitte

nach der Näherungsrechnung und der exakten Rechnung dargestellt. Die für die Bemessung maßgebenden Zugspannungen am unteren Stegrand unterscheiden sich lediglich um 3,6%, wobei die Näherung auf der sicheren Seite liegt. Die Durchbiegungen stimmen auf Rechenschiebergengenauigkeit miteinander überein. Die tatsächlichen Fugenschubkräfte am Auflager sind um 16% kleiner als die genäherten Werte. Dagegen überschreitet die wirkliche Schubspannung im Steg diejenige aus der Näherungsrechnung um 4,2% und diejenige bei Annahme starren Verbundes sogar um 24,5%.

6.4.1.2. Als Einfeldträger unter Einzellast in Trägermitte

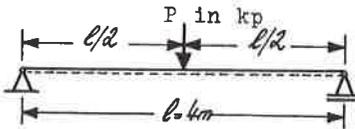


Bild 6.6.

Schnittgrößen:

$$\max M = P \cdot 400/4 = 100 \cdot P \quad \text{kp} \cdot \text{cm}$$

$$\max Q = P/2 = 0,5 \cdot P \quad \text{kp}$$

$$\max M/J = 100 \cdot P/27170 = 0,00368 \cdot P \quad \text{kp/cm}^3$$

$$\max Q/J = 0,5 \cdot P/27170 = 0,0000184 \cdot P \quad \text{kp/cm}^4$$

Trägersteifigkeiten wie bei 6.4.1.1.

"Näherungsrechnung"

Nachgiebigkeitsfaktoren wie in 6.4.1.1:

$$\bar{\alpha} = \bar{\eta} = 0,63, \quad \bar{\chi} = \bar{\kappa} = 3,37$$

Spannungen:

Das Spannungsdigramm (s. Bild 6.7a) ergibt sich unmittelbar aus Bild 6.5a durch Multiplikation der Ordinaten mit

$$\frac{100 \cdot P}{20000 \cdot q} = 0,005 \cdot \frac{P}{q} \cdot$$

Durchbiegung nach Gl. (6.11):

$$\max y = \frac{P \cdot 400^3}{48 \cdot 10^5 \cdot 27170} \cdot 3,37 = 0,001655 \cdot P \quad \text{cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$\max t_{12} = 0,0000184 \cdot P \cdot 1058 \cdot 0,63 = 0,0123 \cdot P \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,0000184 \cdot P \cdot 866 \cdot 0,63 = 0,0100 \cdot P \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= \frac{0,0123 \cdot P + 0,0000184 \cdot P}{2 \cdot 3,37} (-1,92 \cdot 0,63 + 10,3,37)^2 = \\ &= 0,00537 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Exakte Berechnung - Einzellast punktförmig angreifend

Nachgiebighkeitsfaktoren:

$$a(\ell/2) = 0,53 \quad (\text{aus Tafel 9 d. Anhangs})$$

$$g(0) = 0,76 \quad (\text{aus Tafel 15 d. Anhangs})$$

$$k(\ell/2) = \frac{1 - 0,865 \cdot 0,53}{0,135} = 4,02 \quad \text{s. (4.33)}$$

$$k(0) = \frac{1 - 0,865 \cdot 0,76}{0,135} = 2,54 \quad \begin{array}{l} \text{s. (4.33)} \\ \text{u. (6.6)} \end{array}$$

$$n(\ell/2) = 1 + \frac{12}{\pi} \cdot 3,76 \cdot 0,53 = 3,42$$

Schwerpunktspannungen nach Gl. (6.1):

$$\max \sigma_1^{(s)} = - 0,00368 \cdot P \cdot 10,58 \cdot 0,53 = - 0,0206 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = + 0,00368 \cdot P \cdot 1,92 \cdot 0,53 = + 0,0037 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(s)} = + 0,00368 \cdot P \cdot 14,42 \cdot 0,53 = + 0,0282 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(o)} = - 0,00368 \cdot P (10,58 \cdot 0,53 + 2,5 \cdot 4,02) = - 0,0576 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = - 0,00368 \cdot P (10,58 \cdot 0,53 - 2,5 \cdot 4,02) = + 0,0163 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = - 0,00368 \cdot P (- 1,92 \cdot 0,53 + 10,0 \cdot 4,02) = - 0,144 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = - 0,00368 \cdot P (- 1,92 \cdot 0,53 - 10,0 \cdot 4,02) = + 0,151 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(o)} = - 0,00368 \cdot P (- 14,42 \cdot 0,53 + 2,5 \cdot 4,02) = - 0,0088 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(u)} = - 0,00368 \cdot P (- 14,42 \cdot 0,53 - 2,5 \cdot 4,02) = + 0,0650 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Durchbiegung nach Gl. (4.21):

$$\max y = (P \cdot 400^3) / (48 \cdot 10^5 \cdot 27170) = 0,001692 \cdot P \text{ cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$\max t_{12} = 0,0000184 \cdot P \cdot 1058 \cdot 0,76 = 0,0148 \cdot P \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,0000184 \cdot P \cdot 866 \cdot 0,76 = 0,0121 \cdot P \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= 0,0148 \cdot P/5 + \frac{0,0000184 \cdot P}{2 \cdot 2,54} (-1,92 \cdot 0,76 + 10 \cdot 2,54)^2 = \\ &= 0,00503 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Bei Annahme starren Verbundes ergäbe sich vergleichsweise:

$$\max \tau_{2\text{starr}} = 0,0000184 \cdot P (1058 + \frac{8,08^2 \cdot 5}{2}) / 5 = 0,0045 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Exakte Berechnung - Einzellast auf $2c = 0,1 \ell$ verteilt

$$\max M = P \cdot 400(0,5 \cdot 0,5 - 0,05/4) = 95 \cdot P \text{ kpcm}$$

$$\max M/J = 95 \cdot P / 27170 = 0,0035 \cdot P \text{ kp/cm}^3$$

Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$U(\ell/2) = 0,55 \quad (\text{aus Tafel 17 des Anhangs})$$

$$L(\ell/2) = \frac{1 - 0,865 \cdot 0,55}{0,135} = 3,89 \quad \text{s. (4.33)}$$

Schwerpunktspannungen nach Gl. (6.1):

$$\max \sigma_1^{(s)} = -0,0035 \cdot P \cdot 10,58 \cdot 0,55 = -0,0204 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = +0,0035 \cdot P \cdot 1,92 \cdot 0,55 = +0,0037 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(s)} = +0,0035 \cdot P \cdot 14,42 \cdot 0,55 = +0,0278 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,0035 \cdot P (10,58 \cdot 0,55 + 2,5 \cdot 3,89) = -0,0544 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = -0,0035 \cdot P (10,58 \cdot 0,55 - 2,5 \cdot 3,89) = +0,0137 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = -0,0035 \cdot P (-1,92 \cdot 0,55 + 10 \cdot 0,3,89) = -0,133 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = -0,0035 \cdot P (-1,92 \cdot 0,55 - 10 \cdot 0,3,89) = +0,140 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(o)} = -0,0035 \cdot P (-14,42 \cdot 0,55 + 2,5 \cdot 3,89) = -0,0063 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(u)} = -0,0035 \cdot P (-14,42 \cdot 0,55 - 2,5 \cdot 3,89) = +0,0618 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Vergleich der drei Berechnungsarten

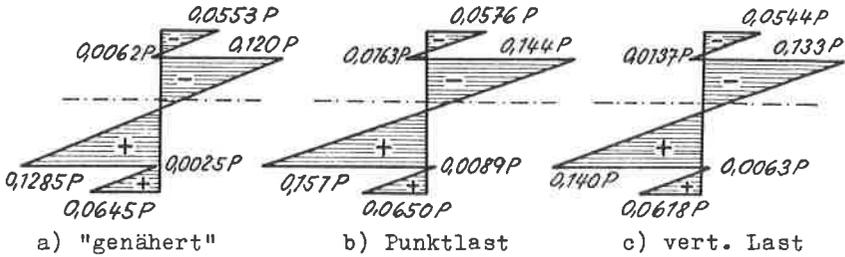


Bild 6.7: Spannungsdiagramme

Bild 6.7 zeigt den Spannungsverlauf in Trägermitte nach der "Näherungsrechnung", bei punktförmigem Lastangriff und bei einer Lastverteilung von $2c = 0,1l$. Die Stegrandspannungen sind bei Punktlast oben um 20% und unten um 18%, bei verteilter Last oben um 11% und unten um 8,5% größer als bei der "Näherung". Die Schwerpunktspannungen werden von der Lastverteilung nur wenig beeinflusst; die "Näherung" liefert hier um 19% größere Werte als die exakte Berechnung. In Wirklichkeit sind die Fugenschubkräfte um 21%, die Durchbiegung um 2,2% größer als nach der "Näherung". Die Schubspannung im Steg ist um 6,3% kleiner, als es die "Näherungsrechnung" ergibt, jedoch um 13% größer als bei Annahme starren Verbundes.

6.4.1.3. Als Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,2l$

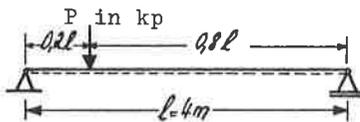


Bild 6.8.

Schnittgrößen:

$$\max M = P \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 400 = 64 \cdot P \text{ kpcm}$$

$$\max Q = 0,8 \cdot P \text{ kp}$$

$$\max M/J = 64 \cdot P / 27170 = 0,00236 \cdot P \text{ kp/cm}^3$$

$$\max Q/J = 0,8 \cdot P / 27170 = 0,0000295 \cdot P \text{ kp/cm}^4$$

Trägersteifigkeiten wie bei 6.4.1.1.

"Näherungsrechnung"

Nachgiebigkeitsfaktoren wie in 6.4.1.1:

$$\bar{\alpha} = \bar{g} = 0,63, \quad \bar{x} = \bar{L} = 3,37$$

Das Spannungsdiagramm an der Laststelle (s. Bild 6.9.a) ergibt sich unmittelbar aus Bild 6.5.a durch Multiplikation der Ordinaten mit

$$\frac{65 \cdot P}{20000 \cdot q} = 0,00325 \cdot P/q.$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$\max t_{12} = 0,0000295 \cdot P \cdot 1058 \cdot 0,63 = 0,0196 \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,0000295 \cdot P \cdot 866 \cdot 0,63 = 0,0161 \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= \frac{0,0196 \cdot P}{5} + \frac{0,0000295 \cdot P}{2 \cdot 3,37} (-1,92 \cdot 0,63 + 10 \cdot 3,37)^2 = \\ &= 0,00856 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Exakte Berechnung - Einzellast punktförmig angreifend

Für die Trägersteifigkeit $k \cdot B^2 = 0,588$ tritt die maximale Normalkraft N_n an der Stelle $x \approx 0,4\ell$ auf (s. Anhang, Tafel 5).

$$M(0,4\ell) = P \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 48 \cdot P \text{ kpcm}$$

$$\alpha(0,4) = 1,02 \cdot \bar{\alpha} = 1,02 \cdot 0,63 = 0,64 \quad (\text{aus Tafel 11, Anhang})$$

Maximale Schwerpunktspannungen nach Gl. (6.1) bei $x = 0,4\ell$:

$$\max \sigma_1^{(s)} = -48 \cdot P \cdot 10,58 \cdot 0,64 / 27170 = -0,0120 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = 48 \cdot P \cdot 1,92 \cdot 0,64 / 27170 = 0,0022 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(s)} = 48 \cdot P \cdot 14,42 \cdot 0,64 / 27170 = 0,0163 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen an der Stelle $x = z = 0,2\ell$ (Laststelle):

$$\alpha(0,2\ell) = 0,38 \quad (\text{aus Tafel 9, Anhang})$$

$$\beta(0,2\ell) = (1 - 0,865 \cdot 0,38) / 0,135 = 4,98 \quad \text{s. (4.33)}$$

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,00236 \cdot P (10,58 \cdot 0,38 + 2,5 \cdot 4,98) = -0,0389 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \max \sigma_1^{(u)} &= -0,00236 \cdot P(10,58 \cdot 0,38 - 2,5 \cdot 4,98) = +0,0199 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_2^{(o)} &= -0,00236 \cdot P(-1,92 \cdot 0,38 + 10,0 \cdot 4,98) = -0,116 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_2^{(u)} &= -0,00236 \cdot P(-1,92 \cdot 0,38 - 10,0 \cdot 4,98) = +0,119 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_3^{(o)} &= -0,00236 \cdot P(-14,42 \cdot 0,38 + 2,5 \cdot 4,98) = -0,0165 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_3^{(u)} &= -0,00236 \cdot P(-14,42 \cdot 0,38 - 2,5 \cdot 4,98) = +0,0423 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (4.22):

$$Q(0) = 0,44 \quad (\text{s. Tafel 15, Anhang})$$

$$\max t_{12} = 0,0000295 \cdot P \cdot 1058 \cdot 0,44 = 0,0137 \cdot P \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,0000295 \cdot P \cdot 866 \cdot 0,44 = 0,0112 \cdot P \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Steg nach Gl. (6.7):

$$\beta(0) = (1 - 0,865 \cdot 0,44) / 0,135 = 4,59 \quad \begin{array}{l} \text{s. (4.33)} \\ \text{u. (6.6)} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \max \tau_2 &= \frac{0,0137 \cdot P}{5} + \frac{0,0000295 \cdot P}{2 \cdot 4,59} (-1,92 \cdot 0,44 + 10 \cdot 4,59)^2 = \\ &= 0,00927 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Zum Vergleich bei Annahme starren Verbundes:

$$\max \tau_2^{\text{starr}} = 0,0000295 \cdot P(1058 + 8,08^2 \cdot 5/2) / 5 = 0,00722 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Exakte Berechnung - Einzellast auf $2c = 0,1l$ verteilt.

$$\max M = P \cdot 400(0,2 \cdot 0,8 - 0,1/8) = 59 \cdot P \text{ kpcm}$$

$$\max M/J = 59 \cdot P / 27170 = 0,00217 \cdot P \text{ kp/cm}^3$$

Es ändern sich gegenüber vorher nur die Biegerandspannungen an der Laststelle.

$$Q(0,2) = 0,41 \quad (\text{aus Tafel 17, Anhang})$$

$$\beta(0,2) = (1 - 0,865 \cdot 0,41) / 0,135 = 4,78 \quad \text{s. (4.33)}$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,00217 \cdot P(10,58 \cdot 0,41 + 2,5 \cdot 4,78) = -0,0349 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = -0,00217 \cdot P(10,58 \cdot 0,41 - 2,5 \cdot 4,78) = +0,0161 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\begin{aligned} \max \sigma_2^{(o)} &= -0,00217 \cdot P(-1,92 \cdot 0,41 + 10,0 \cdot 4,78) = -0,102 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_2^{(u)} &= -0,00217 \cdot P(-1,92 \cdot 0,41 - 10,0 \cdot 4,78) = +0,106 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_3^{(o)} &= -0,00217 \cdot P(-14,42 \cdot 0,41 + 2,5 \cdot 4,78) = -0,0126 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \\ \max \sigma_3^{(u)} &= -0,00217 \cdot P(-14,42 \cdot 0,41 - 2,5 \cdot 4,78) = +0,0383 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

Vergleich der drei Berechnungsarten

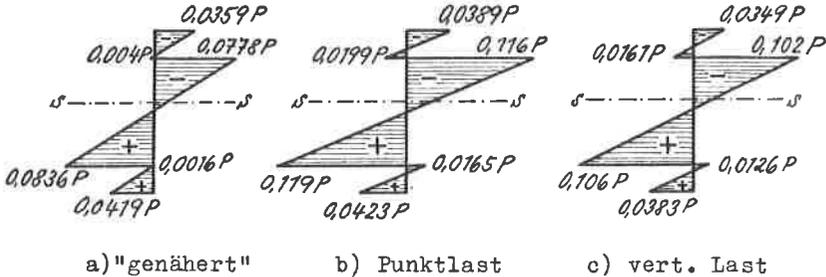


Bild 6.9: Spannungsdiagramme

Bild 6.9 zeigt den Spannungsverlauf an der Laststelle nach den drei durchgeführten Berechnungsarten. Die Stegrandspannungen sind bei Punktlast oben um 49% und unten um 42%, bei verteilter Lasteintragung oben um 31% und unten um 26% größer als bei der "Näherung". Die maximalen Fugenschubkräfte sind hier in Wirklichkeit um 30% kleiner als die "genäherten" Werte. Die Stegschubspannungen sind um 8,3% größer als nach der "Näherung" und um 28,4% größer als bei Annahme starren Verbundes.

6.4.1.4. Als Durchlaufträger über zwei gleiche Felder unter Gleichstrckenlast

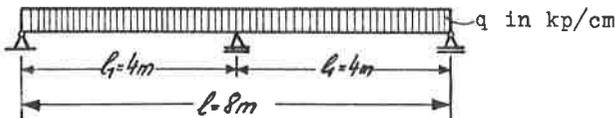


Bild 6.10

Trägersteifigkeiten:

$$k = \frac{\pi^2}{800^2} \cdot \frac{10^5 \cdot 100 \cdot 10,58}{120 \cdot 12,5} = 1,087$$

s. (5.3)

$$\alpha^2 = 0,865 \quad \beta^2 = 0,135$$

Schnittgrößen:

$$M_B / M_B^{\text{starr}} = 0,85 \quad (\text{aus Tafel 19, Anhang})$$

$$M_B = -q \cdot 400^2 / 8 \cdot 0,85 = -17000 \cdot q \text{ kpcm}$$

$$M_B / J = -17000 \cdot q / 27170 = -0,626 \cdot q \text{ kp/cm}^3$$

Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$\alpha(\ell_1) = 0,17 \quad (\text{aus Tafel 20, Anhang})$$

$$\beta(\ell_1) = (1 - 0,865 \cdot 0,17) / 0,135 = 6,32 \quad \text{s. (4.33)}$$

$$\eta(\ell_1/2) = 0,024 \quad (\text{aus Tafel 22, Anhang})$$

Biegerandspannungen nach Gl. (4.26):

$$\max \sigma_1^{(0)} = +0,626 \cdot q (10,58 \cdot 0,17 + 2,5 \cdot 6,32) = +11,02 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = +0,626 \cdot q (10,58 \cdot 0,17 - 2,5 \cdot 6,32) = -8,77 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(0)} = +0,626 \cdot q (-1,92 \cdot 0,17 + 10,0 \cdot 6,32) = +39,40 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = +0,626 \cdot q (-1,92 \cdot 0,17 - 10,0 \cdot 6,32) = -39,80 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(0)} = +0,626 \cdot q (-14,42 \cdot 0,17 + 2,5 \cdot 6,32) = +8,25 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_3^{(u)} = +0,626 \cdot q (-14,42 \cdot 0,17 - 2,5 \cdot 6,32) = -11,42 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

Durchbiegung in Feldmitte nach Gl.(5.33):

$$y(\ell_1/2) = 0,024 \cdot \frac{q \cdot 400^4}{10^5 \cdot 27170} = 0,227 \cdot q \text{ cm}$$

Nachweis der Verbindungsmittel und der Schubspannung im Steg wie bei Beispiel 6.4.1.1. Ein Vergleich der maßgebenden Biegerandspannungen zeigt, daß der Einfeldträger mit der Stützweite $\ell = 4,00 \text{ m}$ $(39,8 - 24,8) / 24,8 = 60,5\%$ mehr Last aufnehmen kann als der Durchlaufträger mit der Feldweite $\ell_1 = 4,00 \text{ m}$.

Nach der "Näherung" entsprechend DIN E 1052[13] ergäbe sich:

$$k^* = 6,25 \cdot 1,087 = 6,8 \quad \text{s. (5.35)}$$

$$\bar{\alpha}^* = \frac{1}{1 + 6,8 \cdot 0,135} = 0,522 \quad \text{s. (5.36)}$$

$$\bar{\mathcal{J}}^* = \frac{1 + 6,8}{1 + 6,8 \cdot 0,135} = 4,07 \quad \text{a. (5.37)}$$

$$M_B/J = \frac{q \cdot 400^2}{8 \cdot 27170} = 0,736 \cdot q \text{ kp/cm}^3$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = +0,736(-1,92 \cdot 0,522 + 10,0 \cdot 4,07) = +29,2 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = +0,736(-1,92 \cdot 0,522 - 10,0 \cdot 4,07) = -30,7 \cdot q \text{ kp/cm}^2$$

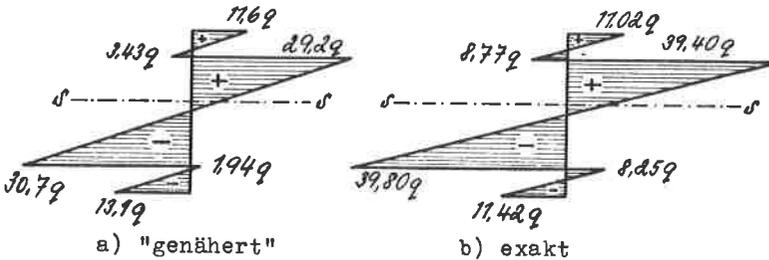


Bild 6.11: Spannungsverlauf im Stützenquerschnitt

Bild 6.11 zeigt den Spannungsverlauf im Stützenquerschnitt nach der "genäherten" und der exakten Rechnung. Die Stegrandspannungen differieren oben um 35% und unten um 30%.

6.4.1.5. Einfluß der Querschnittsschwächungen

Die in den Bildern 6.5, 6.7, 6.9 und 6.11 dargestellten Spannungsdiagramme beschreiben den Spannungsverlauf im ungeschwächten Trägerquerschnitt. Nach DIN E 1052 Abschnitt 5.2 [13] sind Nagellöcher mit einem Durchmesser größer 3,8 mm in der Zugzone abzuziehen. Maßgebend für die Bemessung ist in diesem Beispiel die Spannung am Zugrand des Steges. Der verwendete Nagel 42/110 dringt um $11-5=6$ cm in den Steg ein. Damit wird

$$f_2^{\text{netto}} = 100 - 6 \cdot 0,42 = 97,5 \text{ cm}^2$$

$$J_2^{\text{netto}} = 3333 - 6 \cdot 0,42 \left(\frac{20-6}{2}\right)^2 = 3210 \text{ cm}^4$$

$$f_2/f_2^{\text{netto}} = 100/97,5 = 1,025, \quad J_2/J_2^{\text{netto}} = \frac{3333}{3210} = 1,04$$

$$\text{und } \sigma_2^{(u)} = -\frac{M}{J}[-1,92 \cdot 0,1(x) \cdot 1,025 - 10,0 \cdot 0,08(x) \cdot 1,04].$$

Die Spannungserhöhung kann hier im ungünstigsten Falle 4% betragen.

6.4.2. Beispiel 2 - Vierteiliger verdübelter Balken unter Einzellast in Balkenmitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten

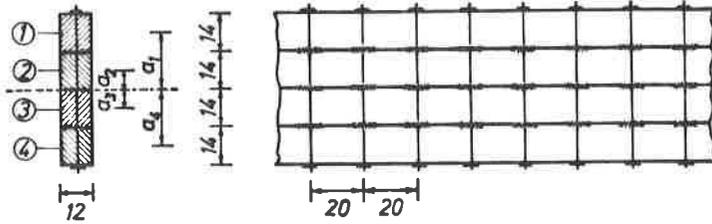


Bild 6.12.

Material:

Nadelholz Gkl. II, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E = 10^5 \text{ kp/cm}^2$,
 Geka-Dübel $\varnothing 95$ mit Bolzen M 22 alle 20 cm, $C_V = 22500 \text{ kp/cm}$
 (nach DIN E 1052, Tabelle 7).

Querschnittswerte:

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 12 \cdot 14 = 168 \text{ cm}^2, \quad F_{\text{ges}} = 4 \cdot 168 = 672 \text{ cm}^2$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 12 \cdot 14^3 / 12 = 2744 \text{ cm}^4$$

$$a_1 = -a_4 = 21 \text{ cm}, \quad a_2 = -a_3 = 7 \text{ cm}$$

$$\sum_1^m J_n = 4 \cdot 2744 = 11000 \text{ cm}^4$$

$$\sum_1^m F_n a_n^2 = 168(2 \cdot 21^2 + 2 \cdot 7^2) = 164500 \text{ cm}^4$$

$$J = 175500 \text{ cm}^4$$

$$S_{12} = 168 \cdot 21 = 3530 \text{ cm}^3, \quad S_{23} = 2 \cdot 168 \cdot 14 = 4700 \text{ cm}^3$$

$$\alpha^2 = 164500 / 175500 = 0,9375, \quad \beta^2 = 11000 / 175500 = 0,0625$$

Schnittgrößen:

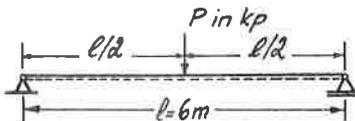


Bild 6.13

$$\max M = P \cdot 600/4 = 150 \cdot P \text{ kpcm}, \quad \max Q = 0,5 \cdot P \text{ kp}$$

$$\max M/J = 150 \cdot P/175500 = 0,000855 \cdot P \text{ kp/cm}^3$$

$$\max Q/J = 0,5 \cdot P/175500 = 0,0000285 \cdot P \text{ kp/cm}^4$$

Festwerte (s. Abschnitt 3.2.2):

$$C_{12} = C_{23} = C_{34} = 22500/20 = 1125 \text{ kp/cm}^2$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{34} = 168 \cdot 168 / (2 \cdot 168) = 84 \text{ cm}^2$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{24} = 168 \cdot 168 / (2 \cdot 168 \cdot 2 \cdot 168) = 0,25$$

6.4.2.1. Exakte Berechnung nach Abschnitt 3.5

Ermittlung der wirksamen statischen Momente $\mathcal{J}_{n,n+1}(r)$ und der wirksamen Trägheitsmomente $J_w(r)$ nach Abschnitt 3.2.2:

$$v^2 = \left(\frac{r \cdot \pi}{600}\right)^2 = r^2 \cdot 0,274/10^4$$

$$K_{12}(r) = K_{23}(r) = K_{34}(r) = K(r) = 1 + r^2 \cdot 0,274 \frac{10^5 \cdot 84}{10^4 \cdot 1125} =$$

$$= 1 + r^2 \cdot 0,2045$$

$$\phi(r) = [K(r)^2 - 0,25]K(r) - K(r) \cdot 0,25 = K(r)[K(r)^2 - 0,5]$$

$$\mathcal{J}_{12}(r) = \mathcal{J}_{34}(r) = \frac{84}{\phi} \left[[K(r)^2 - 0,25]14 + \frac{84}{168} [14 \cdot K(r) + \frac{84}{168}14] \right] =$$

$$= \frac{1176}{\phi} [K(r) + 0,5]K(r)$$

$$= 1176 \frac{K(r) + 0,5}{K(r)^2 - 0,5}$$

$$\mathcal{J}_{23}(r) = \frac{84}{\phi} [K(r)^2 \cdot 14 + 2 \frac{84}{168} \cdot K(r) \cdot 14] =$$

$$= \frac{1176}{\phi} [K(r) + 1] K(r) = 1176 \frac{K(r) + 1}{K(r)^2 - 0,5}$$

$$J_w(r) = 11000 + 2 \cdot \mathcal{J}_{12}(r) \cdot 14 + \mathcal{J}_{23} \cdot 14$$

Die Berechnung dieser Werte wird in Tabelle 6.1 vorgenommen.

Nachgiebigkeitsfaktoren:

$$\alpha_1(1/2) = \frac{8}{\pi^2 \cdot 168 \cdot 21} (3420 + \frac{2685}{9} + \frac{1840}{25} + \frac{1247}{49} + \frac{868}{81} + \frac{624}{121} +$$

$$+ \frac{486}{169} + \dots) = 0,88$$

s. Gl.(3.126)

Tabelle 6.1: Wirksame statische Momente und Trägheitsmomente sowie weitere zur Bestimmung der Nachgiebigkeitsfaktoren erforderlichen Rechengrößen in Abhängigkeit von r

r	K(r)	K(r) ²	$\psi_{12}(r)$ cm ³	$\psi_{23}(r)$ cm ³	$J_w(r)$ cm ⁴	$\psi_{12} \frac{J}{J_w}$	$\psi_{23} \frac{J}{J_w}$	$(\psi_{23} - \psi_{12}) \frac{J}{J_w}$
1	1,205	1,45	2110	2730	108300	3420	4420	1000
3	2,84	8,07	518	596	33840	2685	3090	405
5	6,12	37,5	210	226	20050	1840	1980	140
7	11,02	121,5	112	117	15780	1247	1302	55
9	17,58	308,5	69	71	13930	868	894	26
11	25,75	662	46	46,8	12940	624	636	12
13	34,6	1195	34,5	35,1	12460	486	495	9

$$a_2(1/2) = \frac{8}{\pi^2 \cdot 168,7} (1000 + \frac{405}{9} + \frac{140}{25} + \frac{55}{49} + \dots) = 0,73 \quad \text{s. Gl. (3.126)}$$

$$b_2(1/2) = \frac{175500 - 168(2 \cdot 21^2 \cdot 0,88 + 2 \cdot 7^2 \cdot 0,73)}{1100} = 3,03 \quad \text{s. Gl. (3.76a)}$$

$$c_2(1/2) = \frac{96 \cdot 175500}{\pi^4} \left(\frac{1}{108300} + \frac{1}{81 \cdot 33840} + \frac{1}{625 \cdot 20050} + \frac{1}{2400 \cdot 15780} + \frac{1}{6550 \cdot 13930} + \dots \right) = 1,68 \quad \text{s. Gl. (3.128)}$$

$$g_2(0) = g_{12}(0) = \frac{4}{\pi \cdot 3530} \left(3420 - \frac{2685}{3} + \frac{1840}{5} - \frac{1247}{7} + \frac{868}{9} - \frac{624}{11} + \frac{486}{13} - + \dots \right) = 1,00 \quad \text{s. Gln. (6.6) u. (3.129)}$$

$$a_2(0) = \frac{4}{\pi \cdot 168,7} \left(1000 - \frac{405}{3} + \frac{140}{5} - \frac{55}{7} + \frac{26}{9} - \frac{12}{11} + \frac{9}{13} - + \dots \right) = 0,962 \quad \text{s. Gl. (3.122)}$$

$$g_{23}(0) = \frac{4}{\pi \cdot 4700} \left(4420 - \frac{3090}{3} + \frac{1980}{5} - \frac{1302}{7} + \frac{894}{9} - \frac{636}{11} + \frac{495}{13} \dots \right) = 0,995 \quad \text{s. Gl. (3.129)}$$

$$b_2(0) = \frac{175500 - 168(2 \cdot 21^2 \cdot 1,00 + 2 \cdot 7^2 \cdot 0,962)}{11000} = 1,04 \quad \text{s. Gl. (3.76a)}$$

Schwerpunktspannung im ungeschwächten Querschnitt nach Gl. (6.12a):

$$\max \sigma_1^{(s)} = -0,000855 \cdot P \cdot 21 \cdot 0,88 = -0,0158 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(s)} = -0,000855 \cdot P \cdot 7 \cdot 0,88 = -0,0044 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Biegerandspannungen im ungeschwächten Querschnitt nach Gl. (3.84):

$$\max \sigma_1^{(o)} = -0,000855 \cdot P (21 \cdot 0,88 + 7 \cdot 3,03) = -0,0340 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_1^{(u)} = -0,000855 \cdot P (21 \cdot 0,88 - 7 \cdot 3,03) = +0,0023 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(o)} = -0,000855 \cdot P (7 \cdot 0,73 + 7 \cdot 3,03) = -0,0225 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

$$\max \sigma_2^{(u)} = -0,000855 \cdot P (7 \cdot 0,73 - 7 \cdot 3,03) = +0,0137 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Durchbiegung nach Gl. (3.79):

$$\max y = \frac{P \cdot 600^3}{48 \cdot 10^5 \cdot 175500} \cdot 1,68 = 0,000431 \cdot P \text{ cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (3.80):

$$\max t_{12} = 0,00000285 \cdot P \cdot 3530 \cdot 1,0 = 0,0101 \cdot P \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,00000285 \cdot P \cdot 4700 \cdot 0,995 = 0,0133 \cdot P \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Einzelquerschnitt 2 nach Gl. (6.5):

$$\begin{aligned} \max \tau_2(0) &= \frac{0,0101 \cdot P}{12} + \frac{0,00000285 \cdot P}{2 \cdot 1,04} (7 \cdot 0,962 + 7 \cdot 1,04)^2 = \\ &= 0,00111 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Zum Vergleich: } \max \tau(0)_{\text{starr}} = 1,5 \cdot 0,5 \cdot P / 672 = 0,00111 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

6.4.2.2. Exakte Berechnung nach Abschnitt 6.2 mit Hilfe der im Anhang angegebenen Tafeln

Zunächst sind die wirksamen statischen Momente und das wirksame Trägheitsmoment nach Abschnitt 3.2.2 zu berechnen; sie können hier unmittelbar Tafel 6.1 für $r = 1$ entnommen werden.

$$\bar{J}_{12} = \bar{J}_{23} = 2110 \text{ cm}^3 \quad J_w = 108300 \text{ cm}^4$$

$$\bar{g}_{12} = \frac{175500 \cdot 2110}{108300 \cdot 3530} = 0,967 \quad \text{s. Gl. (5.11)}$$

$$\bar{g}_{23} = \frac{175500 \cdot 2730}{108300 \cdot 4700} = 0,940$$

Damit aus Tafel 15 d. Anhangs:

$$g_{12}(0) = 1,0 = \alpha_{12}(0) \quad \text{und} \quad k \cdot \beta^2 = 0,04$$

$$g_{23}(0) = 0,995 = \alpha_{23}(0) \quad \text{und} \quad k \cdot \beta^2 = 0,06$$

Für diese Steifigkeitswerte liest man für punktförmig angreifende Einzellast aus Tafel 9 des Anhangs ab:

$$\alpha_{12}(1/2) = 0,88 \quad \text{und} \quad \alpha_{23}(1/2) = 0,84$$

Nach Gl. (5.23) folgt dann:

$$\alpha_1(1/2) = \alpha_{12}(1/2) = 0,88$$

$$\alpha_2(1/2) = \frac{4700 \cdot 0,84 - 3530 \cdot 0,88}{168,7} = 0,72$$

$\alpha_2(1/2)$ ist sehr stark abhängig von der Ablesegenauigkeit der Werte $\alpha_{12}(1/2)$ und $\alpha_{23}(1/2)$. Setzt man z.B. für $\alpha_{23}(1/2)$ anstatt 0,84 den Wert 0,845 ein, dann wird $\alpha_2(1/2) = 0,74$.

Der Momentenfaktor ergibt sich wieder nach Gl. (3.76a) zu:

$$\mathcal{K}(1/2) = \frac{175500 - 168(2,21^2 \cdot 0,88 + 2,7^2 \cdot 0,72)}{11000} = 3,03$$

Hierzu gehört entsprechend Gl. (4.33) ein durchschnittlicher Normalkraftfaktor:

$$\alpha(1/2) = \frac{1 - \beta^2 \cdot \mathcal{K}(1/2)}{\alpha^2} = \frac{1 - 0,0625 \cdot 3,03}{0,9375} = 0,865$$

Nach Tafel 9 des Anhangs gehört hierzu der fiktive Steifigkeitswert:

$$k \approx 0,045 / \beta^2 = 0,045 / 0,0625 = 0,72$$

aus Gl. (6.11) folgt damit:

$$\mathcal{N}(1/2) = 1 + \frac{12}{\pi} \cdot 0,72 \cdot 0,9375 \cdot 0,865 = 1,71$$

Für die Bestimmung der Schubspannung im Querschnitt 2 benötigt man:

$$\alpha_1(0) = \alpha_{12}(0) = g_{12}(0) = 1,0$$

$$\alpha_2(0) = \frac{4700 \cdot 0,995 - 3530 \cdot 1,0}{168,7} = 0,97 \quad \text{s. Gl. (6.13)}$$

$$\mathcal{L}(0) = \frac{175500 - 168(2.21^2 \cdot 1,0 + 2.7^2 \cdot 0,97)}{11000} = 1,04 \quad \text{s. (3.76a)}$$

Die so mit Hilfe der Tafeln des Anhangs sehr viel einfacher und schneller gefundenen Nachgiebigkeitsfaktoren stimmen mit den in Abschnitt 6.4.2.1 mühsam aus Summenformeln errechneten Werten sehr gut überein; die teilweise auftretenden gerinfügigen Differenzen sind Ableseungenauigkeiten zuzuschreiben. Die Weg- und Schnittgrößen sowie die Spannungen nehmen damit die gleichen Werte wie in Abschnitt 6.4.2.1 an.

Bei Annahme einer Lastverteilung von $2c = 0,1\ell$ erhält man aus Tafel 17 des Anhangs zu den oben gewonnenen Steifigkeitswerten $k \cdot \beta^2$

$$\alpha_{12}(1/2) = \alpha_1(1/2) = 0,905 \qquad \alpha_{23}(1/2) = 0,88$$

und damit nach Gl. (5.23):

$$\alpha_2(1/2) = \frac{4700 \cdot 0,88 - 3530 \cdot 0,905}{168,7} = 0,80$$

Dazu nach Gl. (3.76a):

$$\mathcal{L}(1/2) = \frac{175500 - 168(2.21^2 \cdot 0,905 + 2.7^2 \cdot 0,80)}{11000} = 2,61$$

Das Moment an der Laststelle wird nach Gl. (5.14):

$$M(1/2) = P \cdot 600 \cdot (0,25 - 0,1/8) = 142,5 \cdot P \text{ kpcm}$$

Damit ergibt sich an der Laststelle die in Bild 6.14.b dargestellte und aus Gl. (3.84) errechnete Spannungsverteilung.

6.4.2.3. "Näherungsrechnung" nach Abschnitt 5.2.2

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{175500 \cdot 2110}{108300 \cdot 168,21} = 0,97 \qquad \text{s. Gl. (5.9)}$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{175500 \cdot 2730 - 2110}{108300 \cdot 168,7} = 0,85$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}} = \frac{175500}{108300} = 1,62 \qquad \text{s. Gl. (5.10)}$$

$$g_{12} = 0,967 \qquad g_{23} = 0,940 \qquad \text{s. Abschn. 6.4.2.2}$$

Der mit diesen Werten aus Gl. (3.84) errechnete Spannungsverlauf zeigt Bild 6.14.c.

Durchbiegung nach Gl. (3.79):

$$\max y = \frac{P \cdot 600^3}{48 \cdot 10^5 \cdot 175500} \cdot 1,62 = 0,000415 \cdot P \text{ cm}$$

Schubkräfte in den Fugen nach Gl. (3.80):

$$\max t_{12} = 0,00000285 \cdot P \cdot 3530 \cdot 0,967 = 0,00975 \cdot P \text{ kp/cm}$$

$$\max t_{23} = 0,00000285 \cdot P \cdot 4700 \cdot 0,940 = 0,0125 \cdot P \text{ kp/cm}$$

Schubspannung im Einzelquerschnitt 2 nach Gl. (6.5):

$$\begin{aligned} \max \tau_2(0) &= \frac{0,00975}{12} + \frac{0,00000285 \cdot P}{2 \cdot 1,62} (7 \cdot 0,85 + 7 \cdot 1,62)^2 = \\ &= 0,001075 \cdot P \text{ kp/cm}^2 \end{aligned}$$

6.4.2.4. Vergleich der "Näherung" mit den exakten Werten

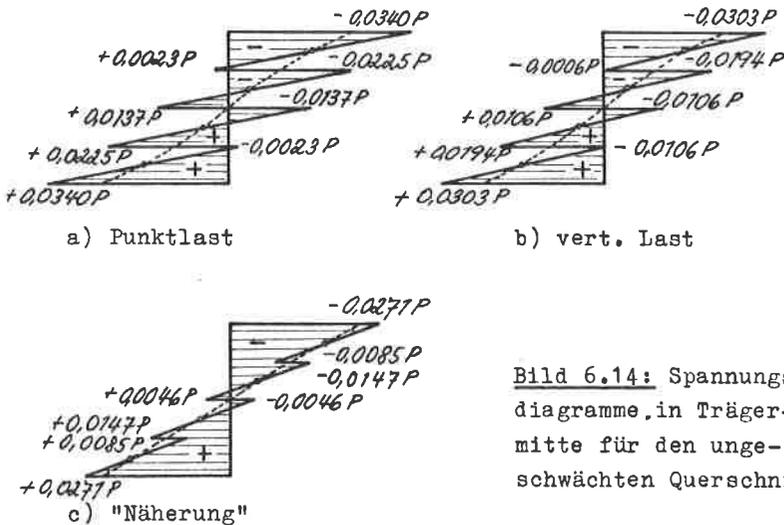


Bild 6.14: Spannungsdiagramme in Trägermitte für den ungeschwächten Querschnitt

Bild 6.14 zeigt die Spannungsdiagramme in Trägermitte für den ungeschwächten Querschnitt nach der exakten und nach der "Näherungsrechnung". Die maßgebenden Biegerandspannungen sind in Wirklichkeit bei Punktlast um 26% und bei auf $2c = 0,11$ vert. Last um 12% größer als die "genäherten" Werte. Diese Abweichungen verstärken sich noch bei Berücksichtigung der Querschnittschwächungen. Die relativ gute Übereinstimmung der Fugenschub-

kräfte und der Schubspannungen hängt mit der großen Trägersteifigkeit zusammen, bei welcher diese Werte sowieso beinahe diejenigen eines starr verbundenen Querschnitts mit gleichen Abmessungen erreichen. Auffällig ist in Bild 6.14 vor allem der große Unterschied der Spannungssprünge zwischen der "Näherung" und der exakten Berechnung.

Die Verbindungslinie der Schwerpunktspannungen der Einzelquerschnitte erinnert an den Spannungsverlauf, welcher sich beim starren Träger mit Rechteckquerschnitt unter Berücksichtigung des Schubeinflusses ergibt. Hier deutet sich an, daß mit Hilfe der in dieser Arbeit gefundenen Beziehungen auch die Biegespannung mit Schubanteil von Vollwandträgern, und zwar mit Verzicht auf die Annahme eines eben bleibenden Gesamtquerschnittes, bestimmt werden kann, wenn man den Gesamtquerschnitt in entsprechend viele Einzellamellen aufteilt und den Fugenverschiebungsmodul nach Bild 6.15 durch den Wert

$$C_{n,n+1} = \frac{b}{h_n} \cdot G \quad (6.19)$$

ersetzt.

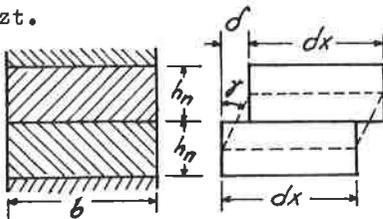


Bild 6.15.

$$C_{n,n+1} = f_{n,n+1} \cdot h_n = \frac{t_{n,n+1}}{C_{n,n+1}}$$

$$f_{n,n+1} = \frac{t_{n,n+1}}{G} = \frac{t_{n,n+1}}{b \cdot G}$$

(h_n = Dicke d. Einzellamelle, G = Schubmodul, γ = Gleitwinkel)

6.4.2.5. Spannungen im geschwächten Querschnittsteil

Maßgebend für die Bemessung sind nach Bild 6.14 die Spannungen im Einzelquerschnitt 4, der voll durch den Bolzen und den Dübel im Zugbereich geschwächt wird.

$$F_4 / F_4^{\text{netto}} = 168 / (168 - 14 \cdot 2,3 - 7 \cdot 2,1 \cdot 35) = 1,33$$

$$J_4 / J_4^{\text{netto}} = 2744 / (2744 - 2744 \cdot 2,3 / 12 - 7 \cdot 2,1 \cdot 35 \cdot 5,33^2) = 1,42$$

Mit diesen Werten erhält man für die maßgebende Spannung an der Balkenunterkante:

Punktlast

$$\sigma_4^{(u)} = 0,000855 \cdot P(21 \cdot 0,88 \cdot 1,33 + 7 \cdot 3,03 \cdot 1,42) = + 0,0468 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Auf $2c = 0,11$ verteilte Einzellast:

$$\sigma_4^{(u)} = \frac{142,5 \cdot P}{175500} (21 \cdot 0,905 \cdot 1,33 + 7 \cdot 2,61 \cdot 1,42) = + 0,0416 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

"Genähert"

$$\sigma_4^{(u)} = 0,000855 \cdot P(21 \cdot 0,97 \cdot 1,33 + 7 \cdot 1,62 \cdot 1,42) = + 0,0369 \cdot P \text{ kp/cm}^2$$

Die maßgebenden Biegespannungen am unteren Trägerrand sind somit um etwa 38% im geschwächten Querschnitt größer als im ungeschwächten.

7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird auf theoretischem Wege ein Verfahren abgeleitet, mit dessen Hilfe sich das bisher nur in unzureichender Form untersuchte Problem der Berechnung nachgiebig verbundener, aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzter Biegeträger grundsätzlich lösen läßt, wenn die Elastizitätsmoduln der Werkstoffe der Einzelquerschnitte und die Verschiebungsmoduln der verwendeten Verbindungsmittel bekannt sind. Es wird weiter gezeigt, daß durch eine geschickte, in der Praxis bei vielen Querschnittsformen auch konstruktiv durchführbare Anordnung der Verbindungsmittel der Berechnungsgang wesentlich vereinfacht und gleichzeitig eine statisch günstige Ausnutzung des Trägers erreicht werden kann.

Die systematische Auswertung der für die wichtigsten Lastfälle am freiaufliegenden Einfeldträger und Durchlaufträger über zwei gleiche Felder gewonnenen exakten Lösungen verdeutlicht, daß im Gegensatz zum starren Verbund bei nachgiebig verbundenen Trägern das Tragverhalten weitgehend von der Form der äußeren Belastung abhängt und der Verlauf der Fugenschubkräfte, der Schubspannungen in den Einzelquerschnitten, der Normalkräfte, der Einzelmomente und damit auch der Biegespannungen im allgemeinen nicht mehr zu den Querkraft- bzw. Momentenlinien proportional ist ; eine Ausnahme bildet hier lediglich der Träger unter sinusförmiger Belastung. Das in DIN E 1052 [13] für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte angegebene γ -Verfahren und damit auch die in Abschnitt 5.2 dieser Arbeit analog dazu entwickelten Näherungsverfahren zur Berechnung von Trägern aus beliebig vielen Einzelquerschnitten setzen jedoch diese Proportionalität voraus; streng genommen führen diese Lösungsmethoden also nur für Biegeträger mit sinusförmigem Momentenverlauf zu wirklichkeitsgetreuen Ergebnissen. Der Vergleich der genäherten und der mittels der exakten Lösungen gewonnenen Weg- und Schnittgrößen von beliebig steifen Einfeldträgern unter Gleichstreckenlast zeigt jedoch, daß hier die Abweichungen der Näherungen von den exakten Werten innerhalb der baupraktisch üblichen Grenzen bleiben. Daraus läßt sich schließen, daß die oben genannten Näherungslösungen auch für alle Belastungen, die ihrer Form nach zwischen Gleichstrecken und reiner Sinuslast liegen und deren Momentenlinien damit

nahezu sinusförmig sind, zu genügend genauen Ergebnissen führen. Die ausführlichen Untersuchungen über Einfeldträger unter ruhender oder wandernder Einzellast lassen dagegen erkennen, daß hier sowohl bei punktförmigem Lastangriff als auch bei Annahme einer gewissen Lastverteilung zum Teil unzulässig große Differenzen zwischen den "genäherten" und den tatsächlichen Weg- und Schnittgrößen auftreten, die zumeist auf der unsicheren Seite liegen.

Das von der klassischen Biegetheorie z.T. beträchtlich abweichende Tragverhalten nachgiebig verbundener mehrteiliger Biegeträger zeigt sich besonders deutlich bei der Untersuchung von Durchlaufträgern über zwei gleiche Felder unter Gleichstreckenlast. Hier fällt auf, daß das Stützmoment je nach Trägersteifigkeit unter Umständen erheblich kleiner wird als bei starrem Verbund, und daß andererseits im Bereich der Mittelstütze die Verbundwirkung nahezu verschwindet, so daß das Stützmoment fast völlig von den Einzelquerschnitten allein aufgenommen werden muß. Die Tragfähigkeit solcher nach den Beanspruchungen im Stützenquerschnitt bemessener Durchlaufträger ist in den praktisch vorkommenden Fällen wesentlich geringer als diejenige eines Einfeldträgers mit gleichem Querschnitt und gleicher Feldweite. Es ist deshalb wirtschaftlicher, grundsätzlich auf die Durchlaufwirkung solcher Träger zu verzichten und sie wie Einfeldträger zu bemessen; die Ueberbeanspruchung der Stützenquerschnitte führt dabei u.U. zu Fließgelenken, so daß die Tragwirkung derjenigen eines Einfeldträgers noch näher kommt.

Die vorstehend beschriebenen Eigenschaften nachgiebig verbundener Biegeträger kommen eindrucksvoll auch in den zahlenmäßig durchgerechneten Beispielen zum Ausdruck. Diese Beispiele zeigen ferner, daß bei Anwendung der im Anhang angegebenen Tafeln der Rechenaufwand für nachgiebig verbundene Querschnitte nicht sehr viel größer ist als bei starrem Verbund.

Obwohl sich die vorliegende Abhandlung lediglich mit Biegeträgern befaßt, läßt sich leicht nachweisen, daß mit Hilfe der in den Gln. (3.25) bzw. (4.11) angegebenen wirksamen Trägheitsmomente J_w auch nachgiebig verbundene, aus beliebig vielen Einzelquerschnitten zusammengesetzte Druckstäbe mit kontinuierlich angeordneten Verbindungsmitteln auf einfache Art berechnet werden können. So ergibt sich zum Beispiel für den zweiten Eulerfall, wie wir wissen,

die Ausbiegung allgemein zu $y(x) = y_0 \sin vx$. Wählt man für die willkürliche Konstante $y_0 = Q_0 / (v \cdot L_{K1})$ und setzt $y(x)$ in den Realteil von Gl. (3.28) ein, dann erhält man mit $v = n\pi/l$ und $n = 1$ unmittelbar die kritische Knicklast im elastischen Bereich zu $L_{K1} = v^2 EJ_w = (\pi/l)^2 EJ_w$.

Im Hinblick auf die endgültige Fassung der neuen Holzbauvorschriften erscheinen folgende Ergebnisse besonders wichtig:

1. Das in DIN E 1052 [13] angegebene γ -Verfahren zur Berechnung zweiteiliger und symmetrischer dreiteiliger Biegeträger und Druckstäbe mit nachgiebigem Verbund kann grundsätzlich so erweitert werden, daß auch Querschnitte aus beliebig vielen Einzelteilen damit berechnet werden können, wenn man die zur Berechnung des Abminderungsfaktors γ notwendigen, zur Zeit für zweiteilige und symmetrische dreiteilige Querschnitte noch in unterschiedlicher Form angegebenen k -Werte einheitlich durch Gl. (5.3) ersetzt und für dreiteilige unsymmetrische und mehr als dreiteilige Querschnitte zusätzlich die Forderung stellt, daß durch entsprechende Anordnung der Verbindungsmittel die Fugensteifigkeiten Gl. (2.37) erfüllen.
2. Das γ -Verfahren liefert auch in der erweiterten Form bei Biegeträgern nur dann zutreffende Ergebnisse, wenn die von der äußeren Belastung erzeugte Momentenlinie nahezu sinusförmig ist; seine Anwendung sollte daher auf bestimmte Lastfälle wie z.B. Gleichstreckenlast, mehrere in nicht zu großen Abständen gleichmäßig über die Trägerlänge verteilte Einzelasten und zur Trägermitte symmetrische parabel- oder dreiecksförmige Belastung beschränkt werden.
3. Die Berechnung von nachgiebig verbundenen Biegeträgern unter schweren ruhenden oder rollenden Einzellasten mit Hilfe des γ -Verfahrens ergibt dagegen größere Abweichungen von den tatsächlichen Weg- und Schnittgrößen; hier müßte ein genauerer Nachweis nach der in dieser Abhandlung entwickelten Methode gefordert werden.
4. Bei nachgiebig verbundenen, über mehrere Felder durchlaufenden Biegeträgern sollte die Durchlaufwirkung nicht berücksichtigt werden; die Ermittlung der Weg- und Schnittgrößen könnte wie bei Einfeldträgern erfolgen.

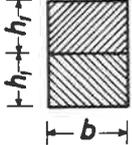
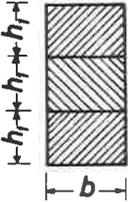
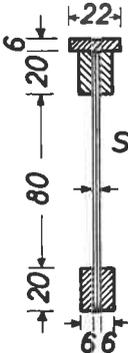
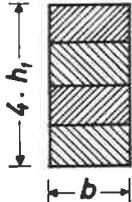
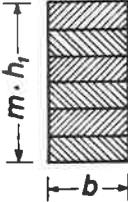
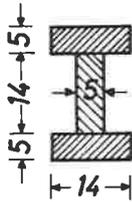
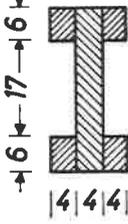
5. Auf kontinuierlich mittels mechanischer Verbindungsmittel zusammengesetzte Biegeträger und Druckstäbe, bei denen aus konstruktiven Gründen das Verhältnis der Fugensteifigkeiten nach Gl. (3.28) nicht eingehalten werden kann, läßt sich das γ -Verfahren in der Regel nicht anwenden; die Weg- und Schnittgrößen sind hier nach der in dieser Arbeit angegebenen Berechnungsmethode für Querschnitte mit voneinander unabhängigen Fugensteifigkeiten zu ermitteln. Zur Erleichterung der in diesem Falle umfangreichen Rechenarbeit wird es zweckmäßig sein, für die wichtigsten im Holzbau vorkommenden Querschnittsformen Bemessungstabellen auszuarbeiten.
6. Beim Nachweis der Biegespannungen sind zumindest im Zugbereich die von den Verbindungsmitteln verursachten Querschnittsschwächungen zu berücksichtigen. Ferner ist in der jeweils am ungünstigsten beanspruchten neutralen Faser die Schubspannung unter Berücksichtigung des nachgiebigen Verbundes zu untersuchen, da diese meist größer ist als die maximale Schubspannung bei starrem Verbund.

8. Schrifttum

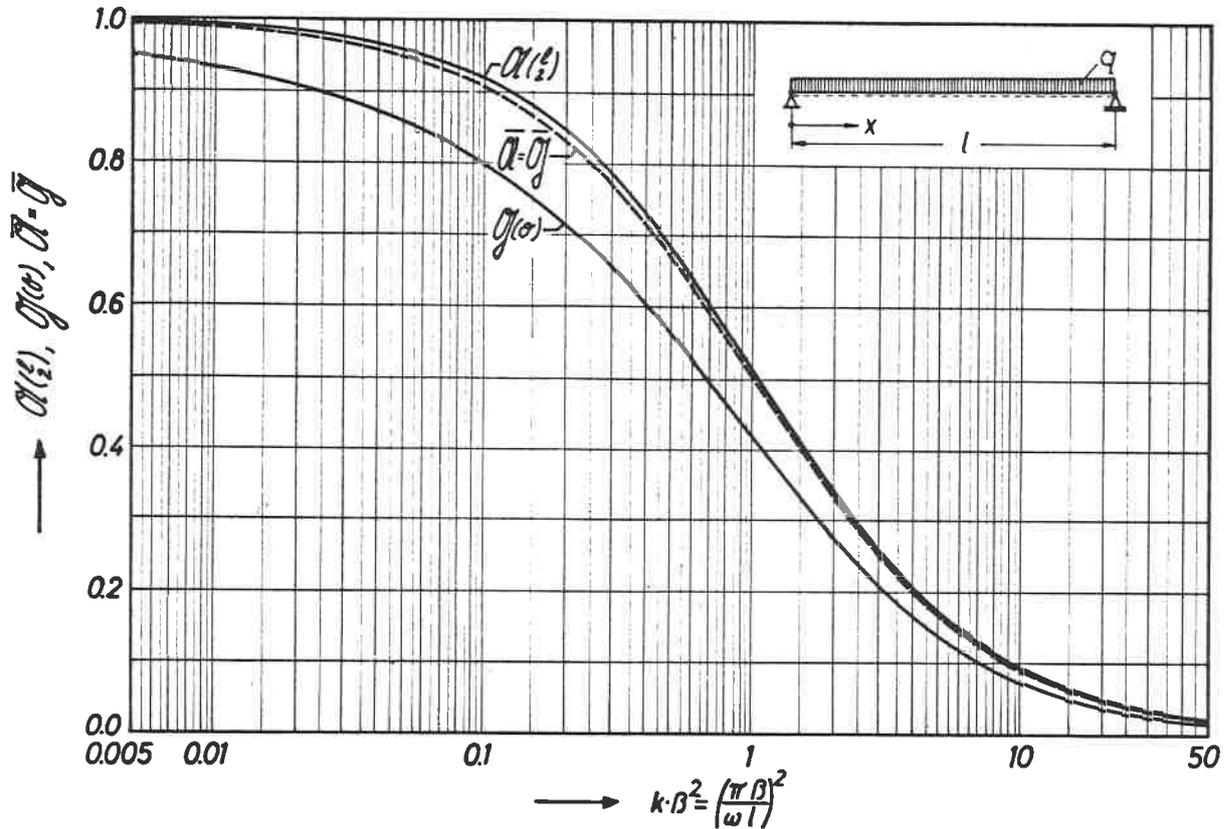
- [1] S t ü s s i , F.: Ueber den verdübelten Balken. Schweizerische Bauzeitung, 1943, S. 271.
- [2] S t ü s s i , F.: Zusammengesetzte Vollwandträger. Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau, 8. Band (1947), S. 249.
- [3] G r a n h o l m , H.: Om sammansatta balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner. GumPERTS förlag, Göteborg, 1949.
- [4] S t e i n h a r d t , O. und M ö h l e r , K.: Versuche mit zusammengesetzten genagelten I-Holzbiegeträgern. Deutscher Zimmermeister, 1951, S. VII/4.
- [4a] S t e i n h a r d t , O.: Die Entwicklung des Stahlbaues im Spiegel der amtlichen Bestimmungen. Abhandlungen aus dem Stahlbau, Heft 10 (1951), S. 55.
- [4b] S t e i n h a r d t , O.: Konstruieren in Stahl unter besonderer Berücksichtigung der HV-Schrauben. Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbau-Verbandes, Heft 12 (1958).
- [4c] H a w r a n e k , A. u. S t e i n h a r d t , O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958, S. 405.
- [5] H o i s c h e n , A.: Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter Vollwandträger mit elastischen Verbindungsmitteln. Dissertation TH Karlsruhe, 1952.
- [6] M ö h l e r , K.: Biege- und Knickversuche an Stützen mit zusammengesetzten, kontinuierlich vernagelten Holzquerschnitten. Fortschritte und Forschungen im Bauwesen, Reihe D, Heft 20, 1955.
- [7] M ö h l e r , K.: Ueber das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetztem Querschnitt und nachgiebigen Verbindungsmitteln. Habilitation TH Karlsruhe, 1956.
- [8] M ö h l e r , K.: Die Bemessung der Verbindungsmittel bei zusammengesetzten Biege- und Druckgliedern im Holzbau. Bauen mit Holz, 1966, S. 4/162.

- [9] H o m b e r g , H.: Brücke mit elastischem Verbund zwischen den Stahlhauptträgern und der Betonfahrbahntafel. Der Bauingenieur, 1952, S. 213.
- [10] H e i l i g , R.: Theorie des elastischen Verbunds. Der Stahlbau, 1953, S. 104.
- [11] H o i s c h e n , A.: Verbundträger mit elastischer und unterbrochener Verdübelung. Der Bauingenieur, 1954, S. 241.
- [12] S a t t l e r , K.: Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Tragwerke mit elastischem Verbund. Veröffentlichungen des Deutschen Stahlbauverbandes, Heft 8, 1955.
- [13] DIN E 1052, Blatt 1: Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung. Entwurf März 1965.
- [14] L o m b a r d i , G.: Der zusammengesetzte Druckstab aus Holz. Schweizerische Bauzeitung, 1951, S. 301.
- [15] P l e š k o v , P.F.: Teorija rasčeta derevnych sostavnych steržnej. Moskau 1952.
- [16] S z a b ó , I.: Hütte - Mathematische Formeln und Tafeln. Verlag W. Ernst u. Sohn, Berlin 1959.
- [17] W o r c h , G.: Elastische Scheiben. Beton - Kalender 1955, 2. Teil, S. 104.
- [18] V.D.E.: Stahl im Hochbau. Verlag Stahleisen, Düsseldorf, 12. Aufl. 1952 (2. ergänzter Nachdruck 1959), S. 494.

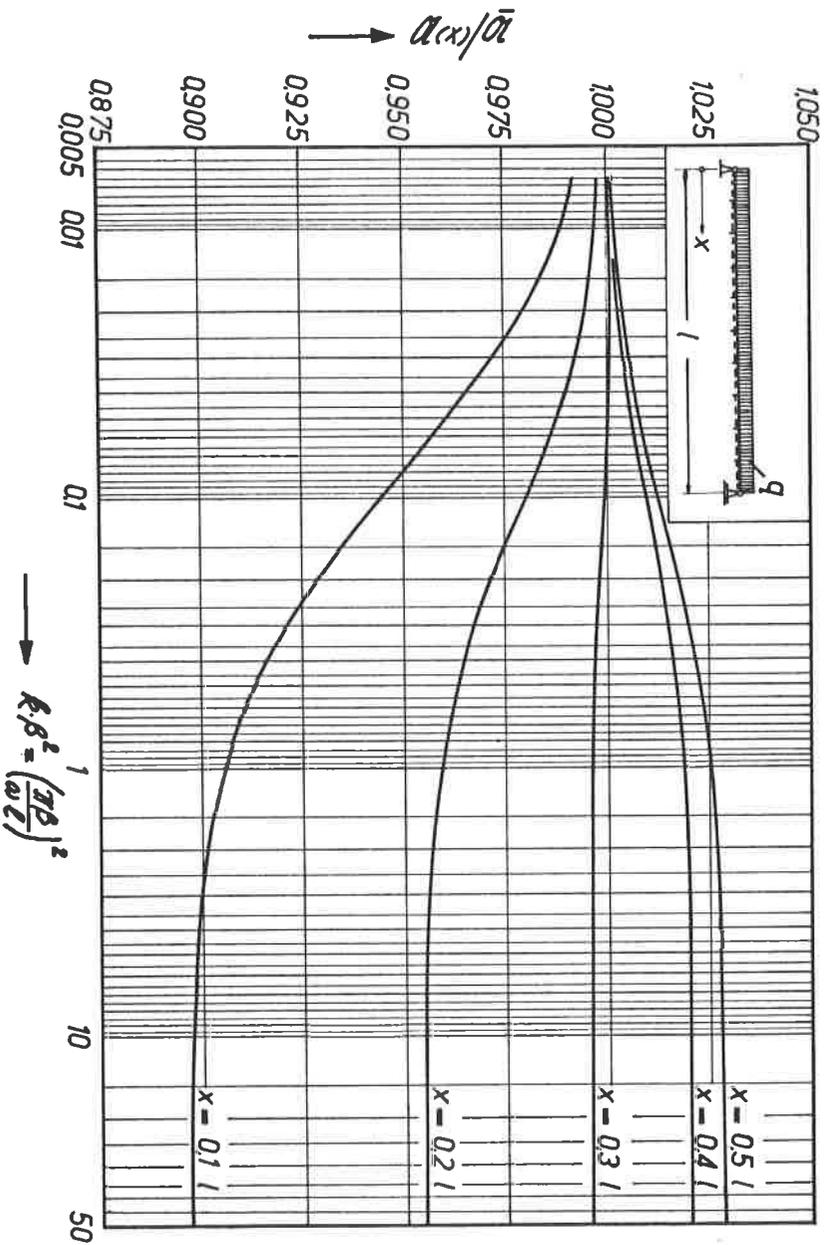
9. A N H A N G

 $\alpha^2 = 0.75$ $\beta^2 = 0.25$	 $\alpha^2 = 0.889$ $\beta^2 = 0.111$	 <p>Sperrholzsteg d=2 cm</p> $\alpha^2 = 0.843$ $\beta^2 = 0.157$
 $\alpha^2 = 0.9375$ $\beta^2 = 0.0625$	 $\alpha^2 = \frac{m^2 - 1}{m^2}$ $\beta^2 = \frac{1}{m^2}$	
 $\alpha^2 = 0.898$ $\beta^2 = 0.102$	 $\alpha^2 = 0.601$ $\beta^2 = 0.399$	

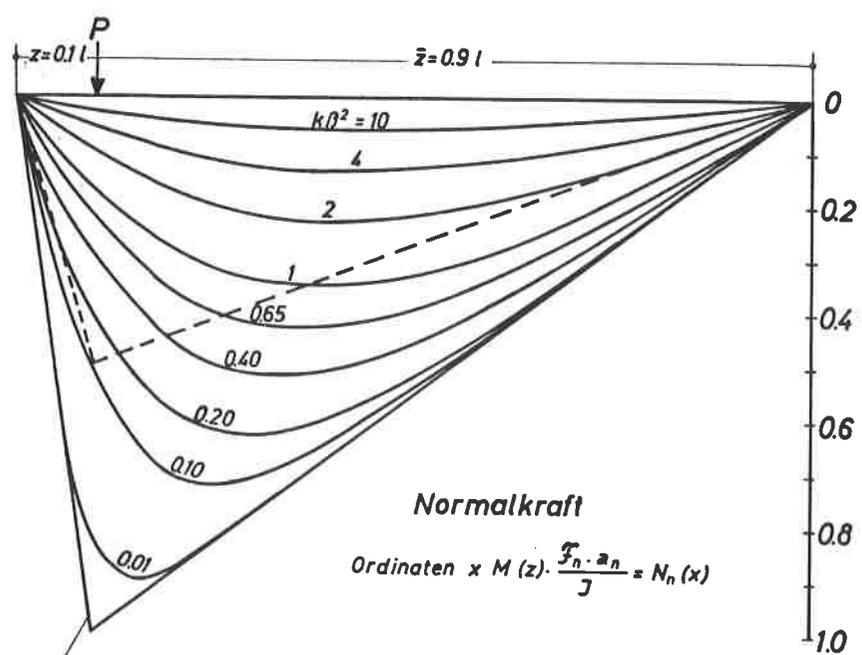
Tafel 1: Verhältnisse $\alpha^2 = \sum_1^m n a_n / J$ und $\beta^2 = \sum_1^m J_n / J$ für einige Querschnittsformen



Tafel 2: Einfeldträger unter Gleichstreckenlast - Nachgiebigkeitsfaktoren für die Maximalwerte der Normal- und Fugenschubkräfte

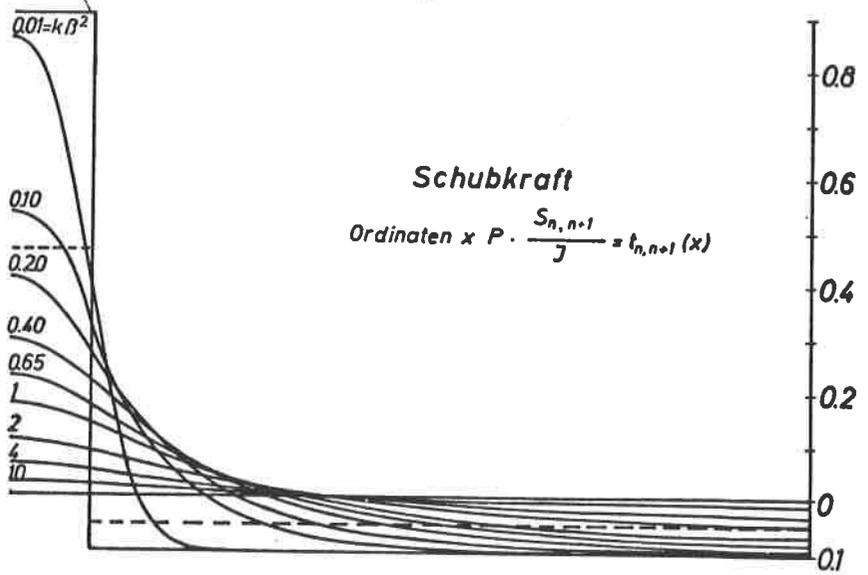


Tafel 3: Einfeldträger unter Gleichstreckenlast - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $Q(x)$ von der Näherung Q

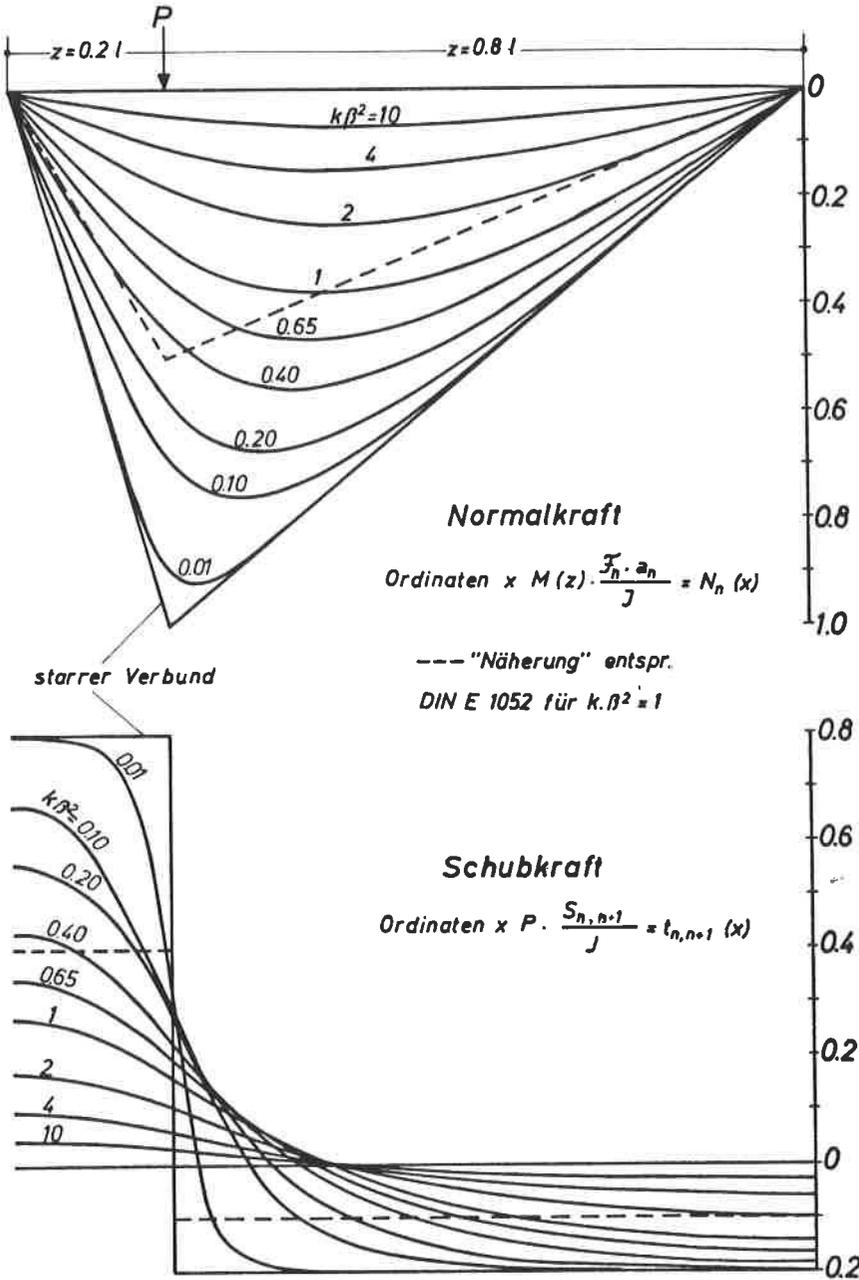


starrer Verbund

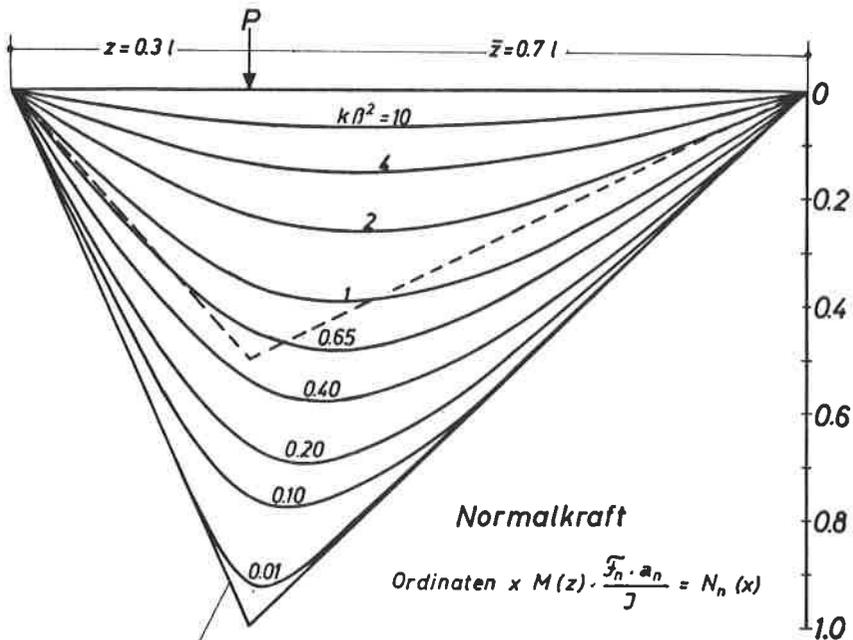
---- "Näherung" entspr.
DIN E 1052 für $k \cdot \beta^2 = 1$



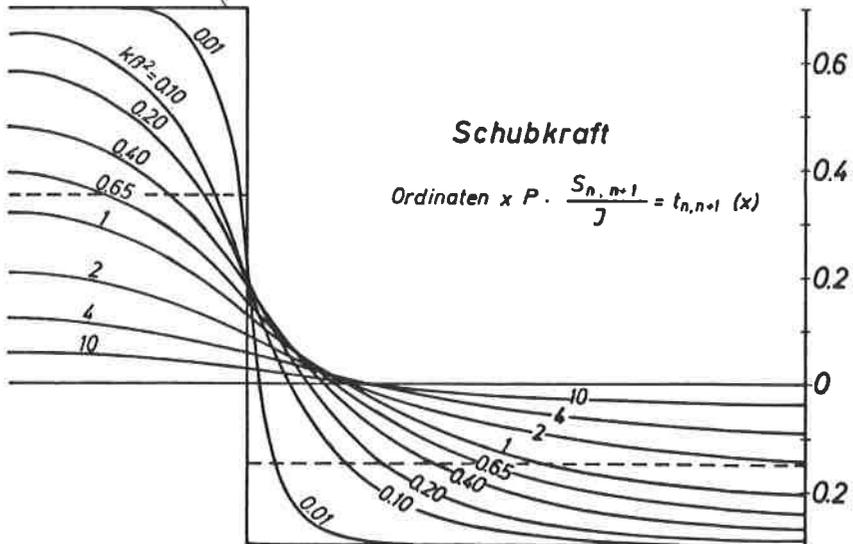
Tafel 4: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,1l$ -
Verlauf der Normal- und Fugenschubkräfte



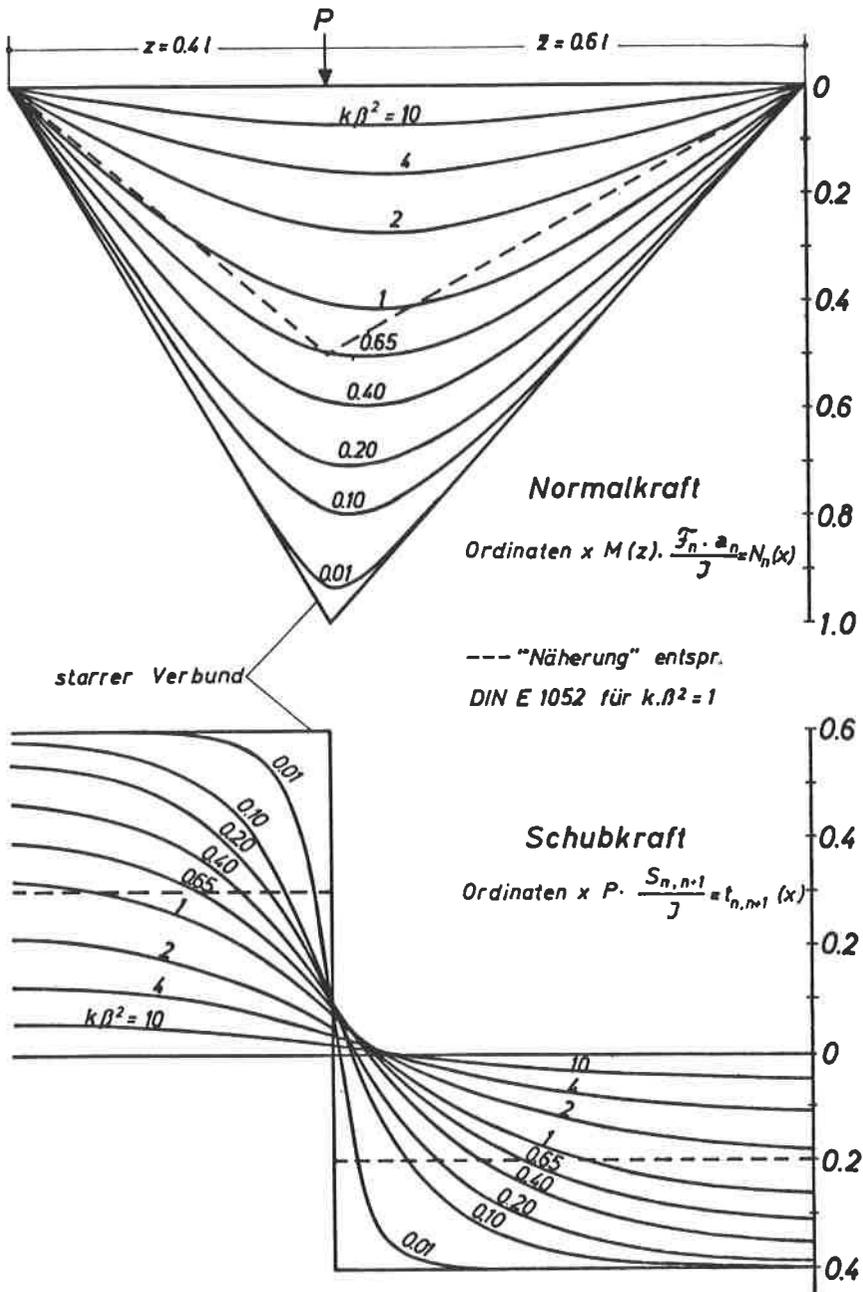
Tafel 5: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,2l$ -
Verlauf der Normal- und Fugenschubkräfte



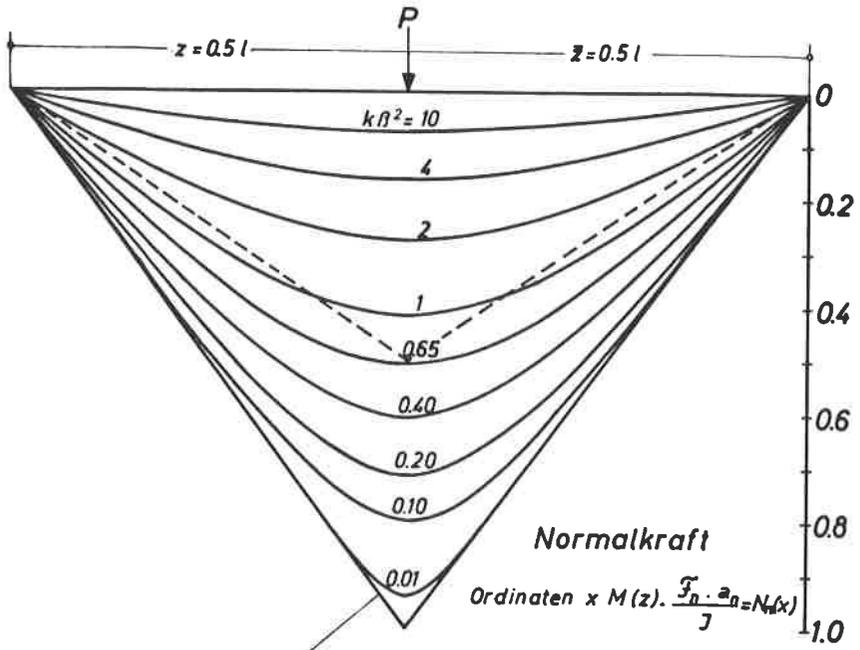
starrer Verbund



Tafel 6: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,3l$ -
Verlauf der Normal- und Fugenschubkräfte

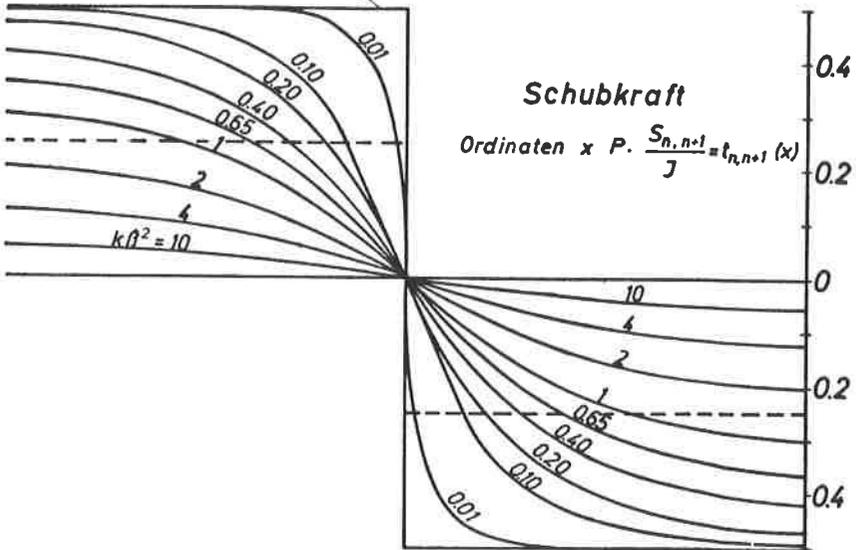


Tafel 7: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,4l$ -
 Verlauf der Normal- und Fugenschubkräfte

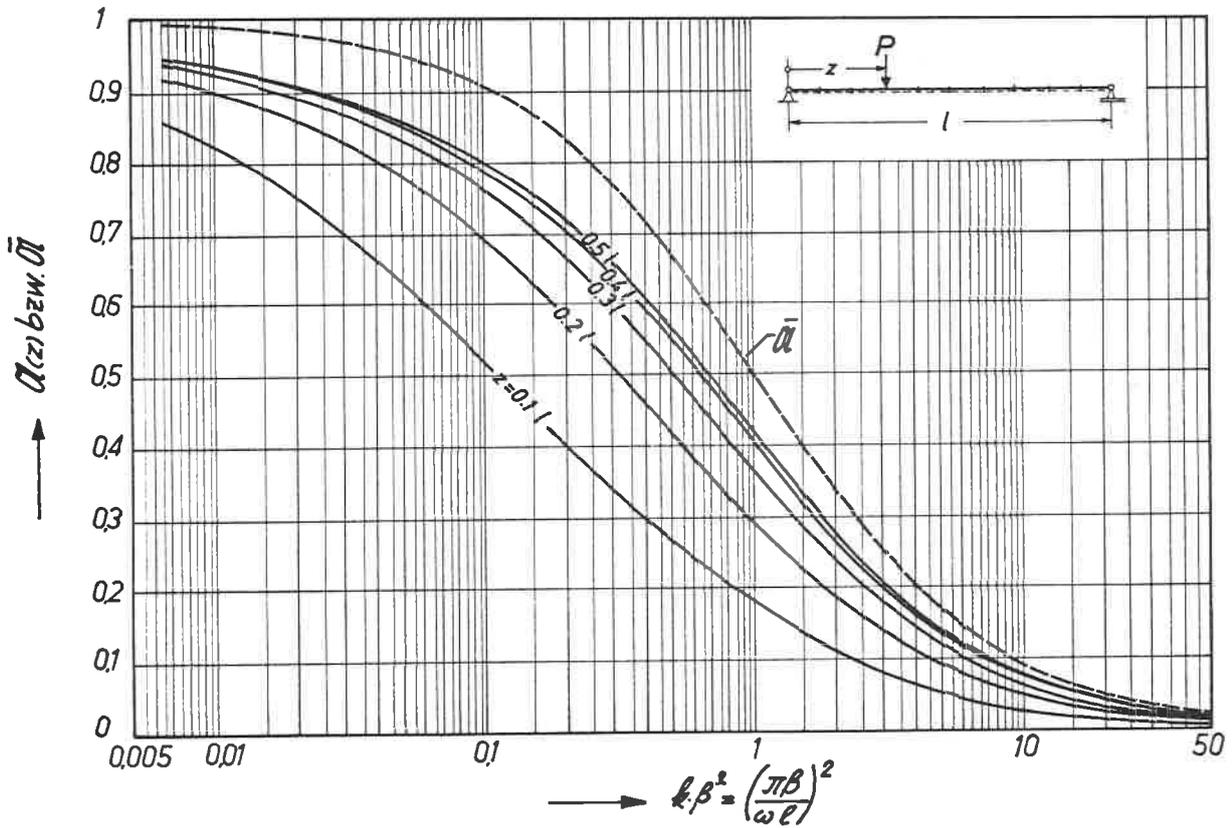


starrer Verbund

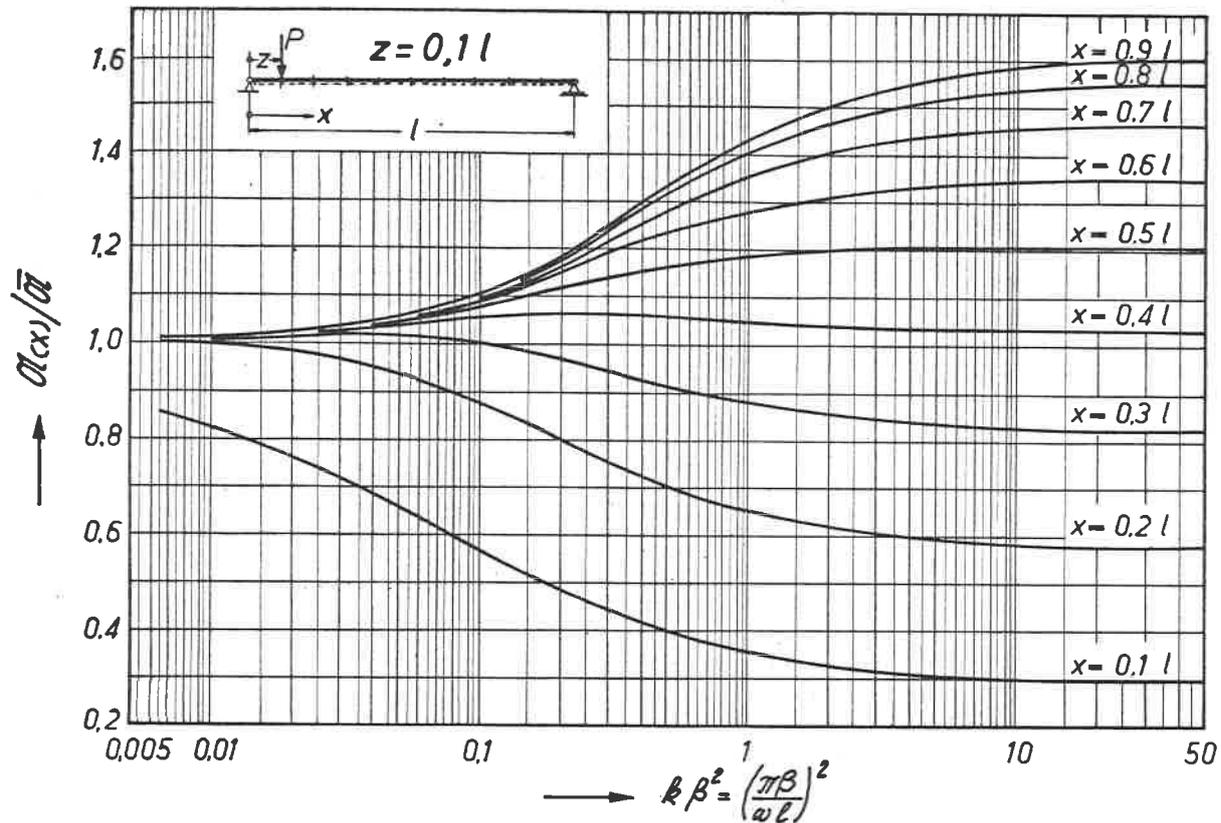
--- "Näherung" entspr.
DIN E 1052 für $k\beta^2 = 1$



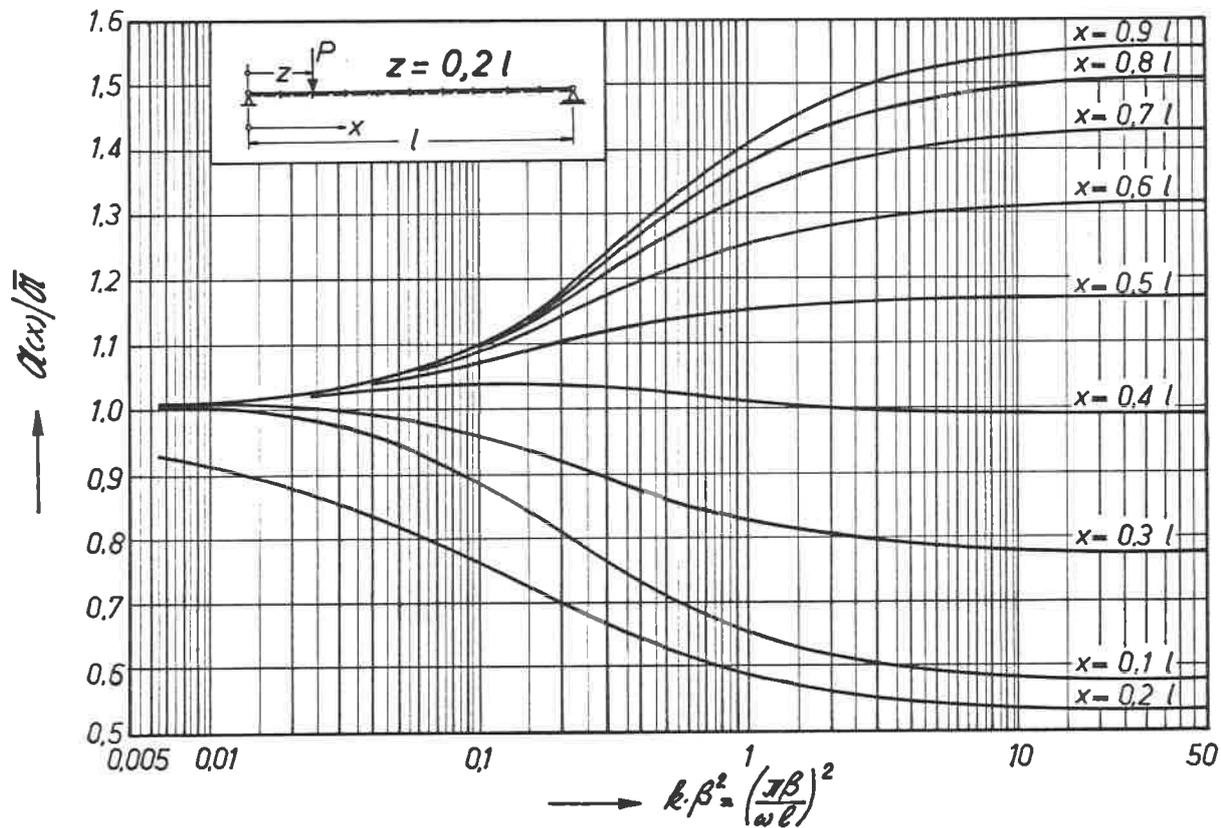
Tafel 8: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,5\ell$ -
Verlauf der Normal- und Fugenschubkräfte



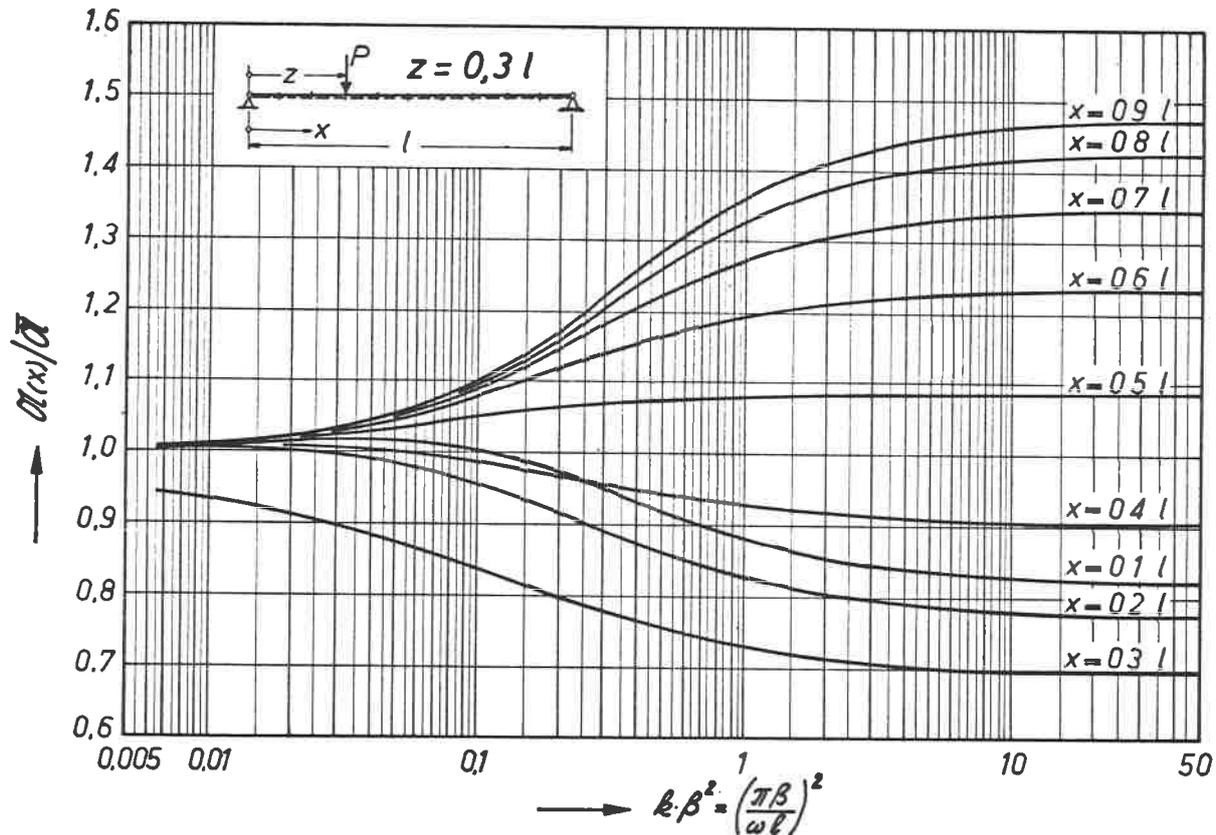
Tafel 9: Einfeldträger unter Einzellast - Normalkraftfaktoren $\alpha(z)$



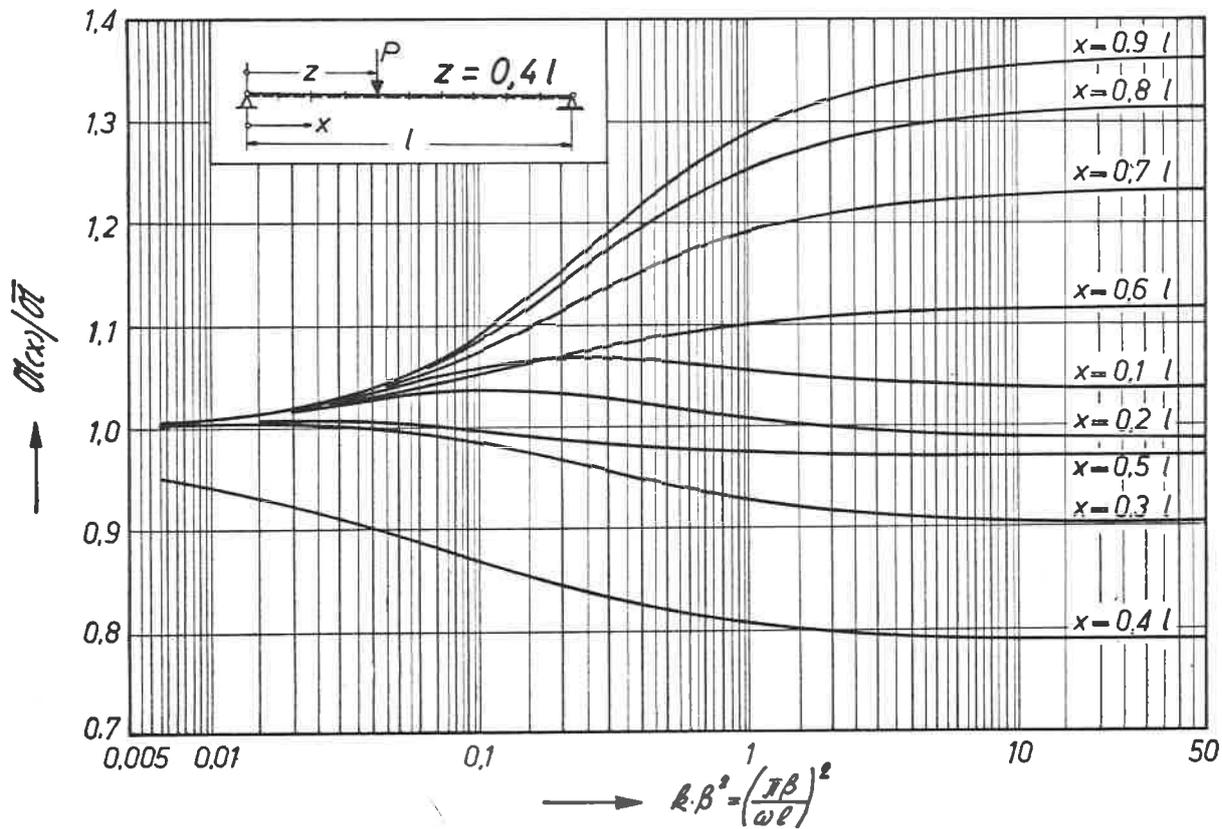
Tafel 10: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,1l$ - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\sigma(x)$ von der Näherung $\bar{\sigma}$



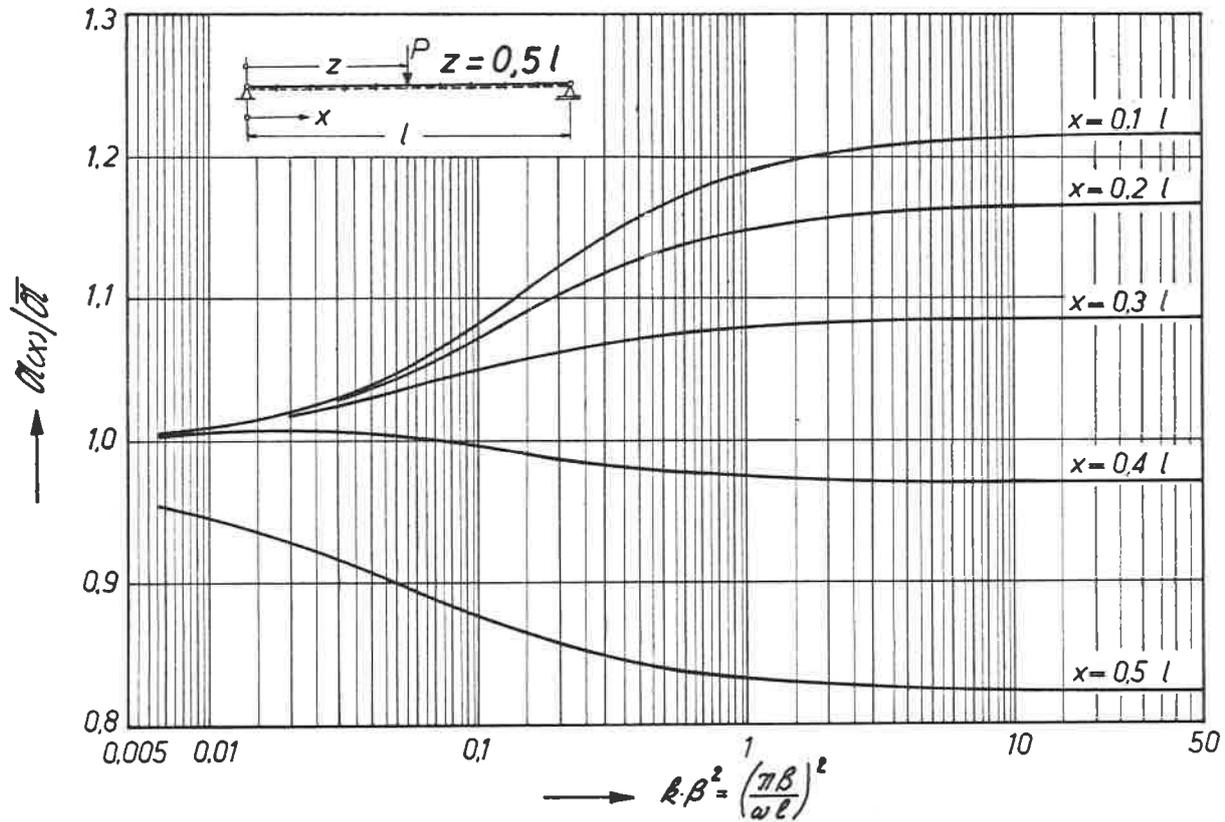
Tafel 11: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,2l$ - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\alpha(x)$ von der Näherung $\bar{\alpha}$



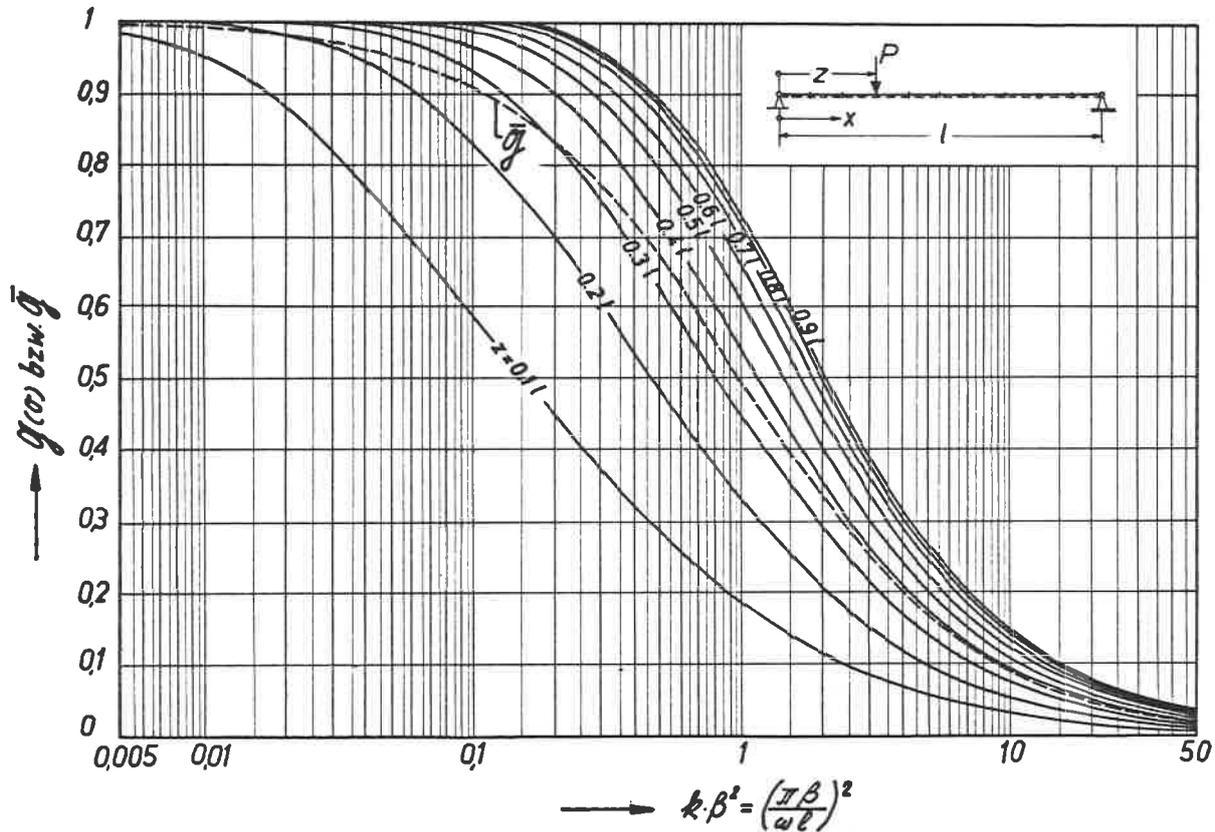
Tafel 12: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,3l$ - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\alpha(x)$ von der Näherung $\bar{\alpha}$



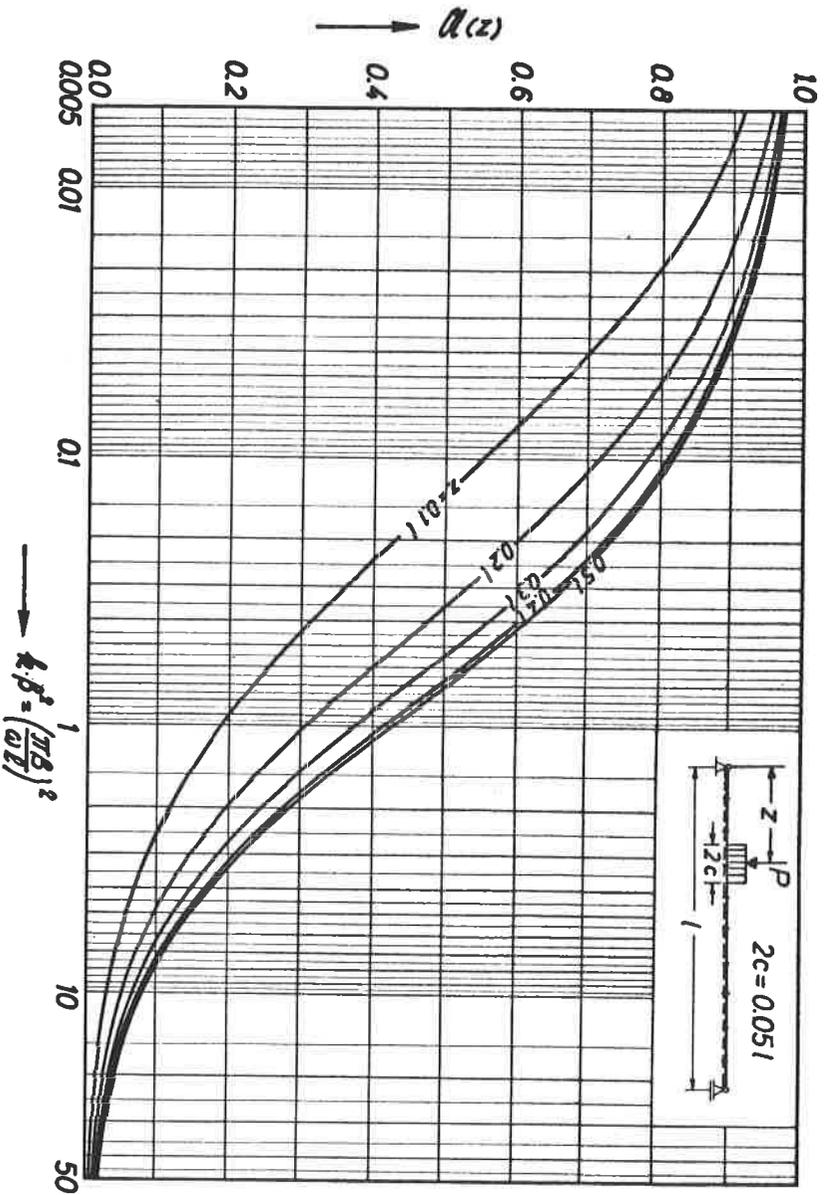
Tafel 13: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,4l$ - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\alpha(x)$ von der Näherung $\bar{\alpha}$



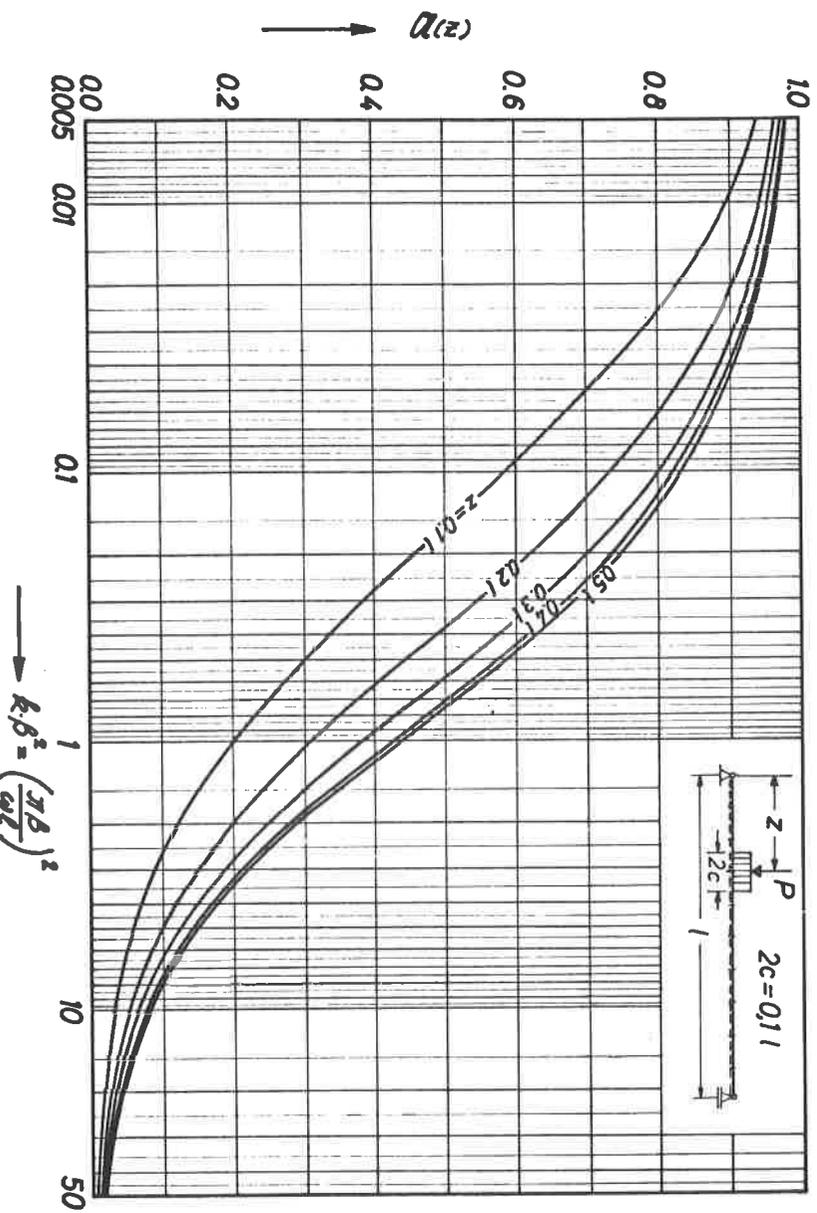
Tafel 14: Einfeldträger unter Einzellast in $z = 0,5l$ - Abweichungen der Normalkraftfaktoren $\alpha(x)$ von der Näherung $\bar{\alpha}$



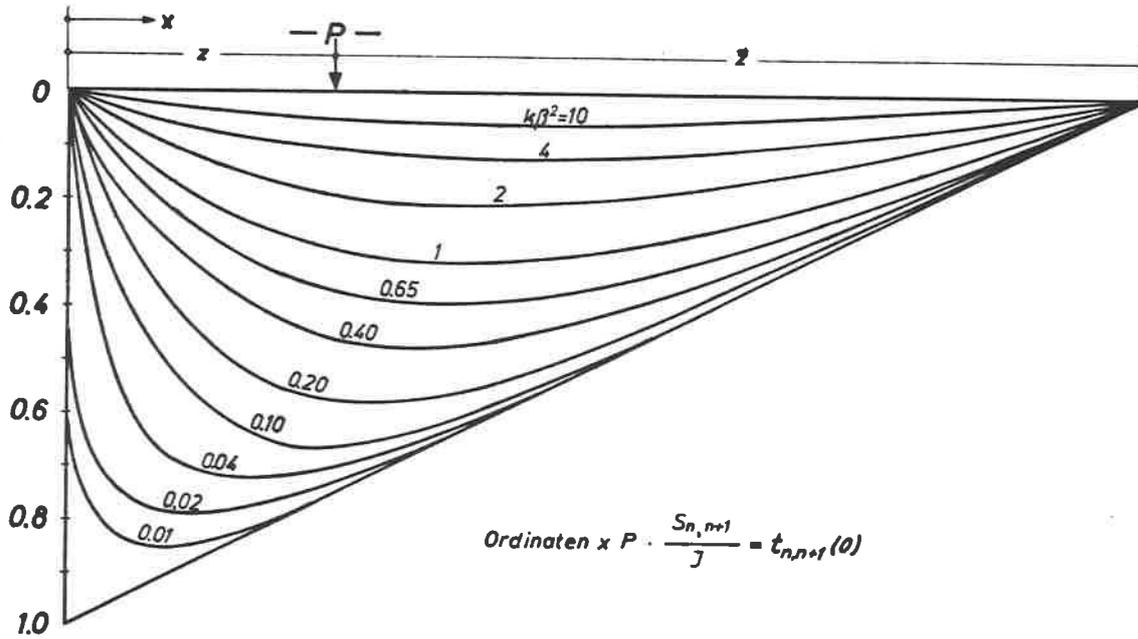
Tafel 15: Einfeldträger unter Einzellast - Schubkraftfaktoren $g(0)$ zur Bestimmung der maximalen Fugenschubkräfte am Auflager



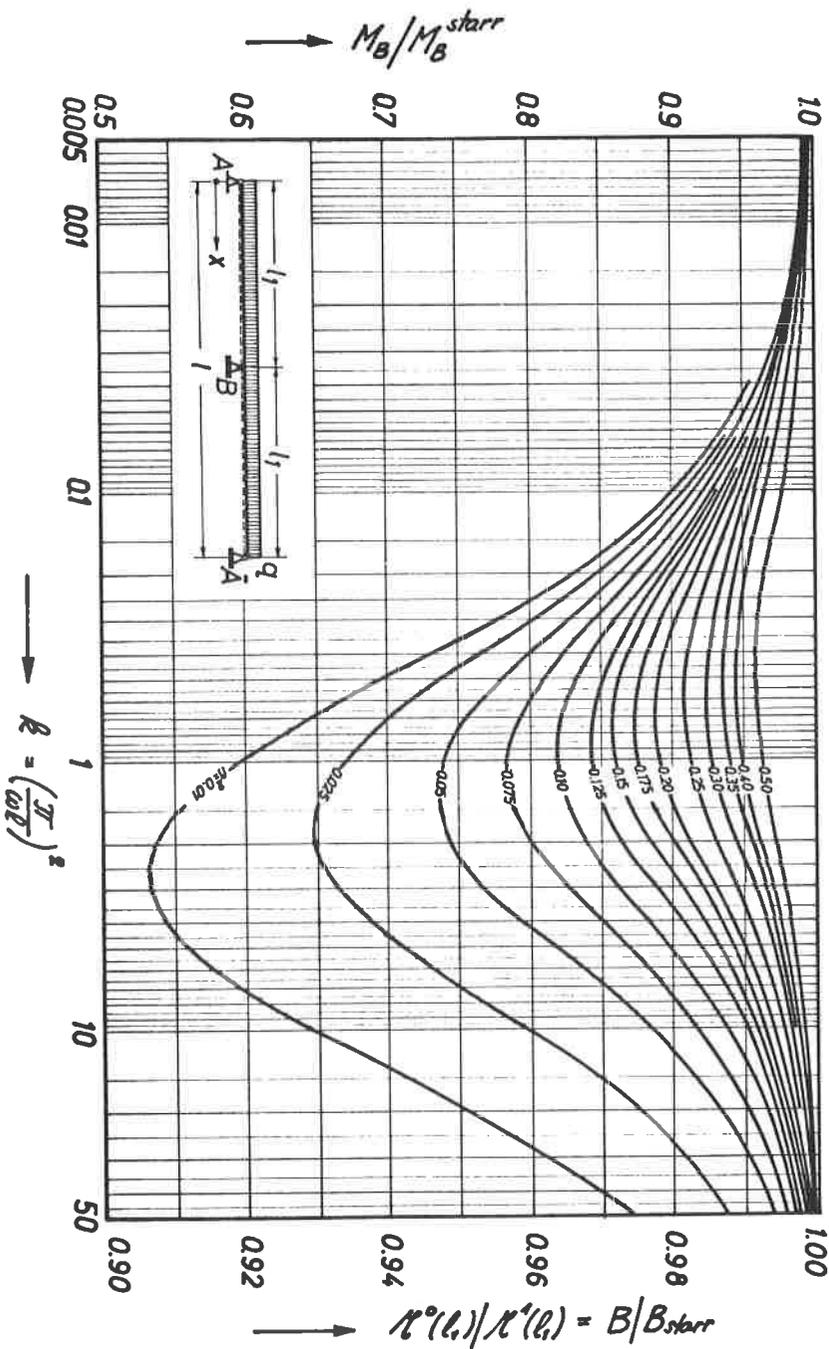
Tafel 16: Einfeldträger unter verteilter Einzellast - Normalkraftfaktoren $\alpha(z)$ bei einer Lastverteilungsbreite von $2c = 0,05l$



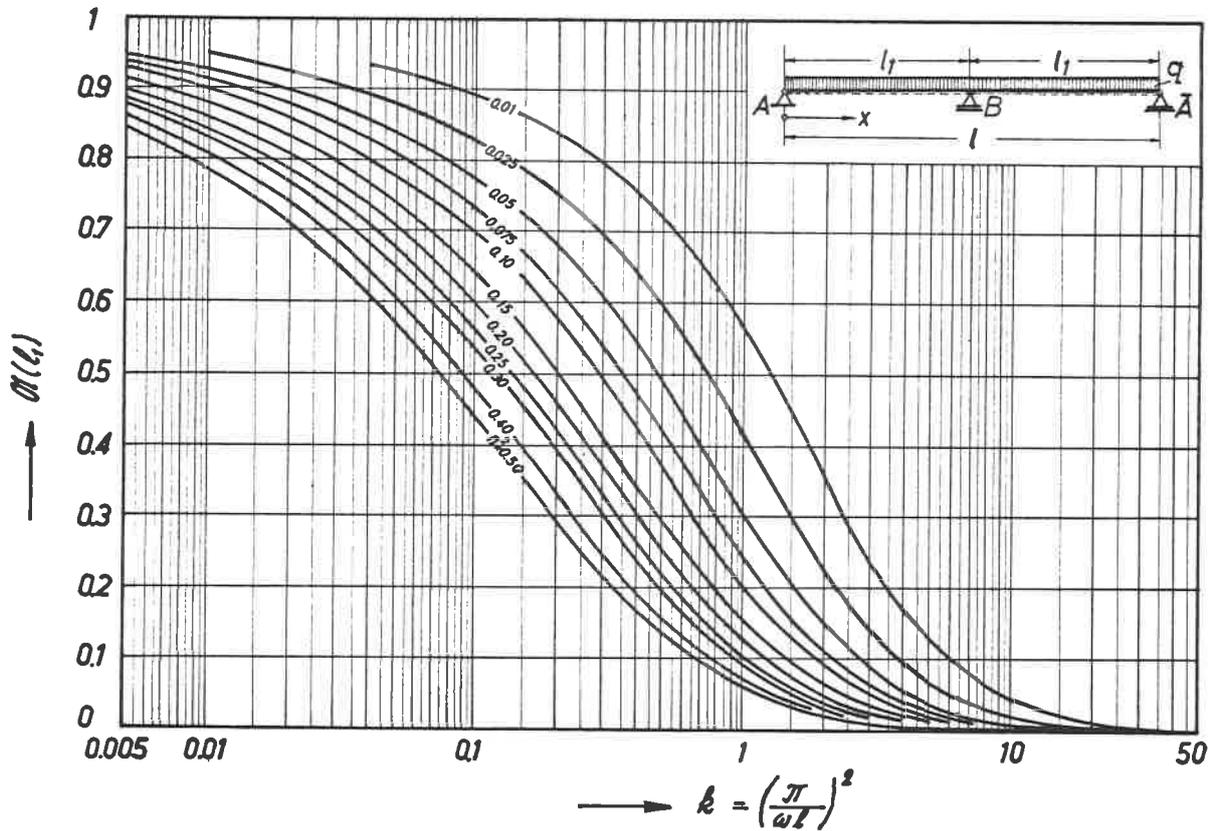
Tafel 17: Einfeldträger unter verteilter Einzellast - Normalkraftfaktoren $q(z)$ bei einer Lastverteilungsbreite von $2c = 0,1l$



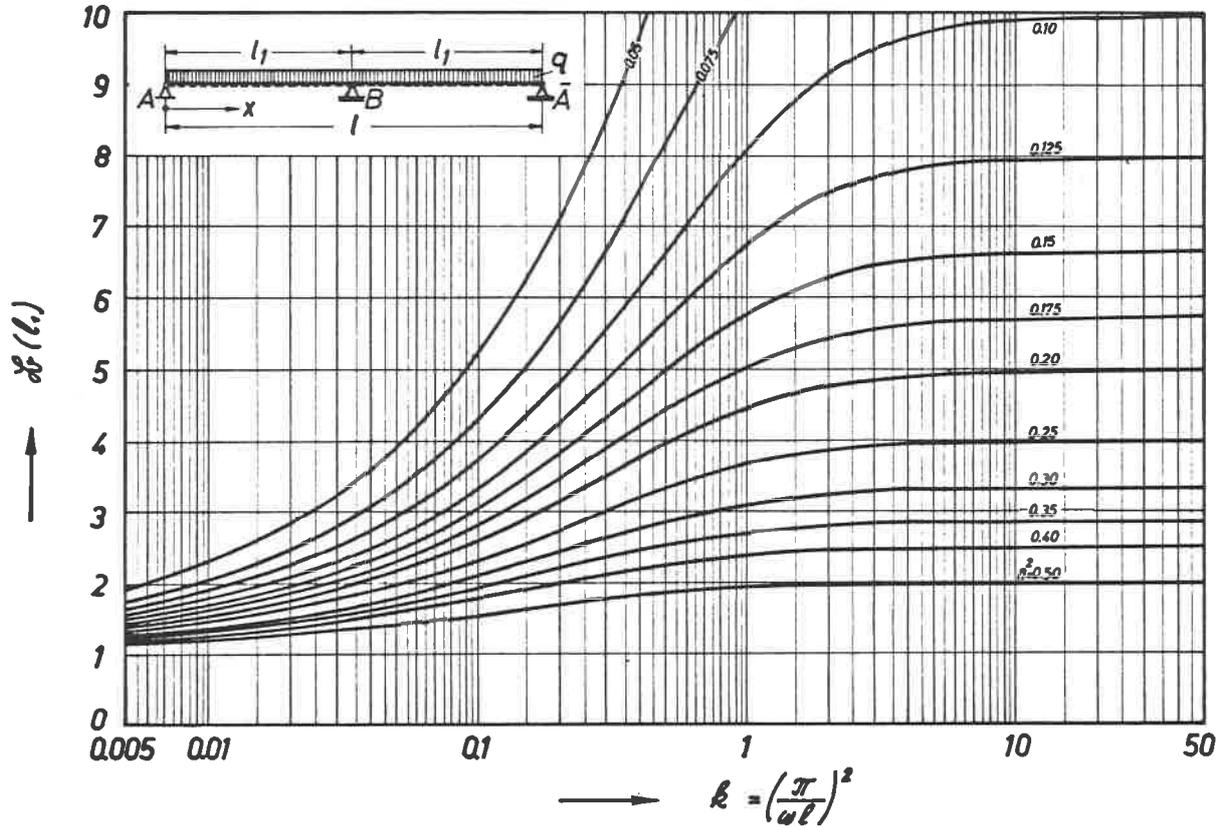
Tafel 18: Einfeldträger unter wandernder Einzellast - Einflußlinien zur Bestimmung der Fugenschubkräfte an der Stelle $x = 0$



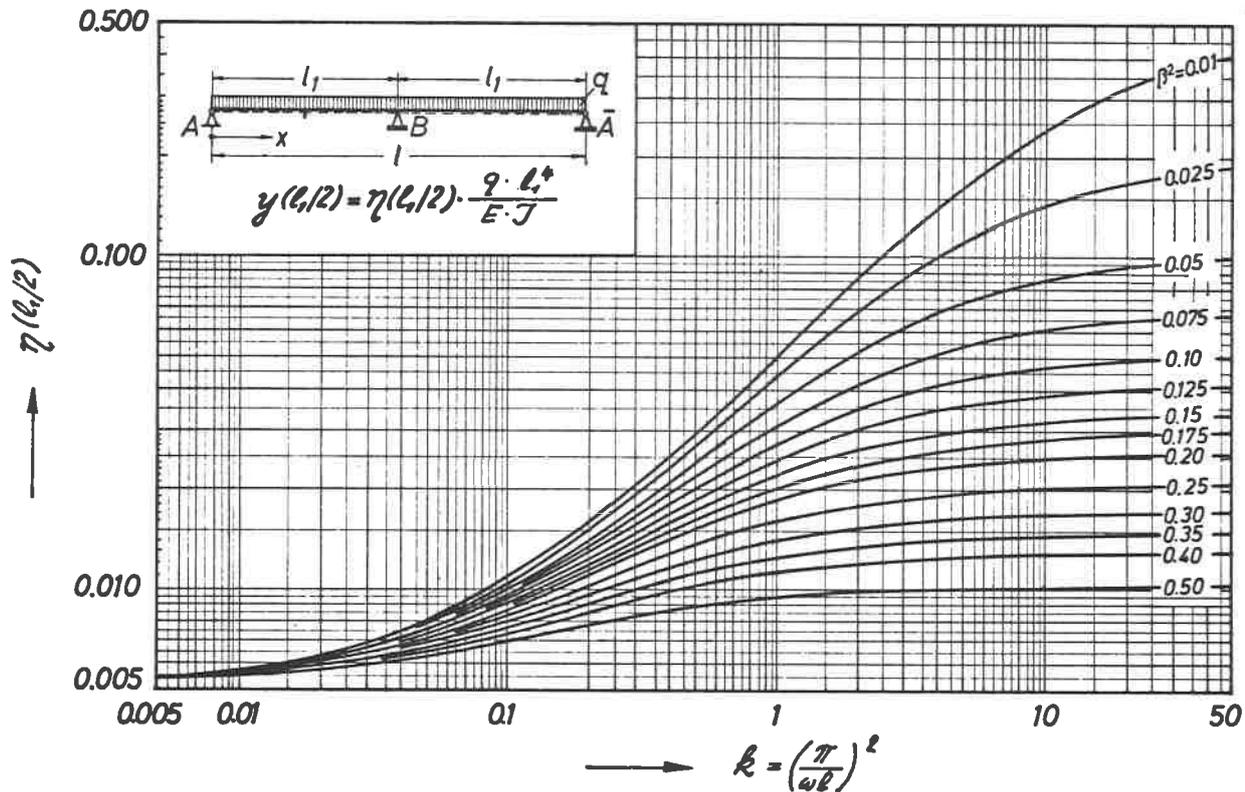
Tafel 19: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Volllast - Abminderung des Stützmomentes und der mittleren Auflagerkraft bei nachgiebigem Verbund



Tafel 20: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Normalkraftfaktoren $\alpha(l_1)$ für den Stützenquerschnitt



Tafel 21: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Momentenfaktoren $K(l_1)$ für den Stützenquerschnitt



Tafel 22: Durchlaufträger über 2 gleiche Felder unter Vollast - Durchbiegungsfaktoren $\eta(l_1/2)$ zur Berechnung der Durchbiegung in Feldmitte

10. Lebenslauf

Geboren am : 10. 3.1938 in Ludwigshafen/Rhein

Schulbildung: 1944 - 1948 Volksschule in Albisheim/Pfrrimm
1948 - 1952 Oberrealschule Worms/Rhein
1952 - 1957 Staatl. naturwiss. Gymnasium
a. d. Jägerstraße, Ludwigshafen/Rh.
20. 2.1957 Reifeprüfung

Praktikanten-
tätigkeit: 11.3.-28.9. Fa. A. Bosch, Mannheim, Hoch-,
1957 Tief- und Stahlbetonbau
5.3.-29.4. Badische Anilin und Soda Fabrik AG,
u. 11.8.-15.10. Ludwigshafen/Rhein, Bauabteilung
1958

Studium: WS 1957/58 Technische Hochschule Karlsruhe,
- WS 1962/63 Abteilung f. Bauingenieurwesen.
Vertieferfach: Ingenieurholzbau
3.11.1959 Diplomvorprüfung
9. 1.1963 Diplomhauptprüfung

Berufliche 16. 1.1963 Verwalter einer wissenschaftlichen
Tätigkeit: - 29. 3.1964 Assistentenstelle am Lehrstuhl für
Ingenieurholzbau und Baukonstruk-
tionen der TH Karlsruhe

seit
1. 4.1964 Wissenschaftlicher Assistent am
gleichen Lehrstuhl

