

Knickaussteifung von Brettschichtträgern

mit veränderlichem Querschnitt

Untersuchungen

durchgeführt im Auftrage der Entwicklungsgemein-
schaft Holzbau in der Deutschen Gesellschaft für

Holzforschung e.V.

und des

Institut für Bautechnik, Berlin

von

Karl Möhler und Rudolf Müller

Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen

Universität Karlsruhe (TH)

1981

Inhaltsverzeichnis:

1. Zweck der Untersuchungen

2. Theoretische Lösung

2.1 Vorbemerkung

2.2 Aufstellen des elastischen Gesamtpotentials

2.3 Lösungsansatz

2.4 Biegemoment des Aussteifungsverbandes, Seitenlast
und Verbandsdurchbiegung

2.5 Sonderfall: parallelgurtiger Träger mit Gleichstreckenlast.
Lösung mit einem einparametrischen Lösungsansatz

3. Numerische Behandlung

3.1 Rechenprogramm

3.2 Berechnungsbeispiel

3.3 Ergebnis der Berechnung und Vergleich mit den Versuchswerten

3.4 Bemerkungen zur Berechnung

4. Versuche

4.1 Vorversuche

4.2 Bemerkungen zur Versuchsplanung

4.3 Hauptversuche

4.4 Abschließende Bemerkungen zu den Versuchen

5. Zusammenfassung und Schlußbemerkung

1. Zweck der Untersuchungen

Bei den heute im Holzbau verwendeten Brettschichtträgern ist vor allem wegen der schmalen und hohen Querschnitte und der damit verbundenen geringen seitlichen Biegesteifigkeit der Träger der Kippaussteifung besondere Bedeutung zuzumessen. Brüninghoff hat in seiner Dissertation [1] bereits Formeln zur Berechnung der Seitenlasten, die auf den Aussteifungsverband von parallelgurtigen Brettschichtträgern wirken, aufgestellt. Neben parallelgurtigen Brettschichtträgern werden in zunehmendem Maße auch Träger mit veränderlichem Querschnitt, wie z.B. Satteldachträger, eingebaut. Zweck dieses Forschungsvorhabens ist es nun mit theoretischen und versuchstechnischen Untersuchungen das Kippverhalten von ausgesteiften Satteldachträgern, d.h. die Verformungen des Trägers und des Verbandes sowie die auf den Verband wirkenden Kräfte zu erfassen.

2. Theoretische Lösung

2.1. Vorbemerkung

Die Ermittlung der Seitenlasten auf den Aussteifungsverband von gabelgelagerten Einfeld - Trägern mit linear - veränderlicher Höhe, die schon im unbelasteten Zustand eine Vorauslenkung $u_0(z)$ und eine Vorverdrehung $\varphi_0(z)$ aufweisen, führt zur Berechnung als Spannungsproblem nach Theorie II. Ordnung unter γ -facher Belastung. Als Berechnungsmethode bietet sich die auch in [2] ; [3] ; [6] ; [7] ; und [9] angewandte ENERGIEMETHODE an.

In der der folgenden Rechnung zugrundeliegende Theorie sind alle im Sinne der klassischen Kipptheorie üblichen Vernachlässigungen enthalten. Hierzu gehört auch die Nichtberücksichtigung der Verformung des Trägers in y -Richtung (d.h. der Hauptkrümmung), sowie die Annahme, daß die am Träger angreifenden Kräfte und Biegemomente auch bei dessen Verformung ihre Richtung beibehalten. (konservatives System) Bei der Torsionssteifigkeit wird nur das St. Venant'sche Torsionsträgheitsmoment angesetzt. [10]

Die abgeleiteten Berechnungsformeln gelten primär für die Trägerform nach Bild 1, können jedoch auch bei Berücksichtigung der entsprechenden Formparameter auf die Träger nach Bild 2 angewandt werden [6] ; [7] .

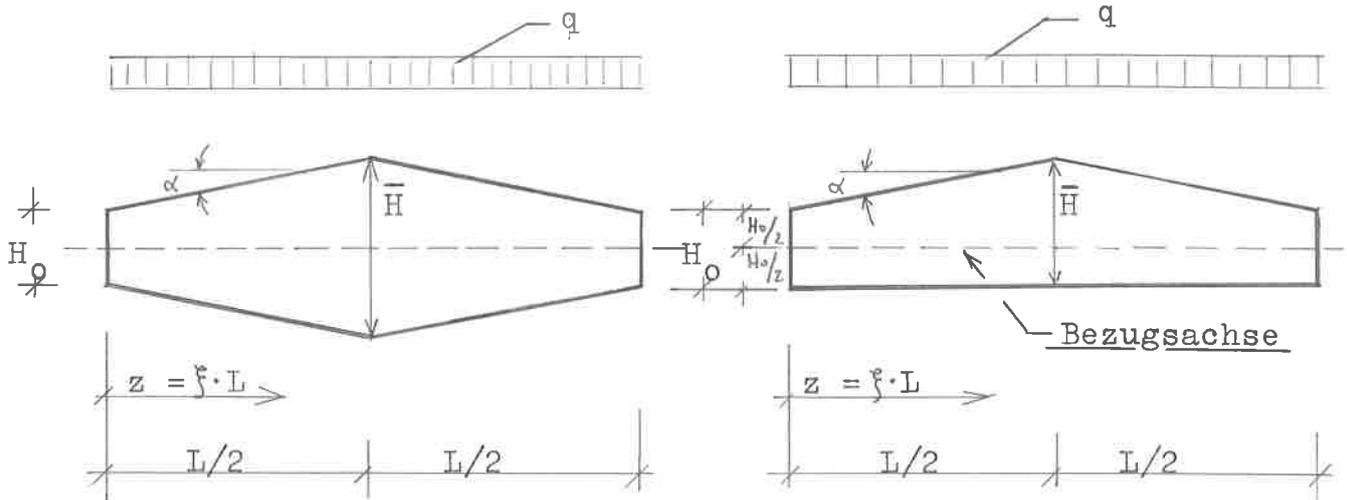


Bild 1

Bild 2

2.2 Aufstellen des elastischen Gesamtpotentials

In der Dissertation von R.Möll [3] wurde für den querbelasteten und gedrückten Durchlaufträger mit **I**-Querschnitt das äußere und innere Potential abgeleitet. Für den in dieser Arbeit behandelten Fall des Einfeld-Trägers mit Rechteck-Querschnitt, der Vorverformungen aufweist und seitlich durch einen Verband elastisch gestützt ist, wurden die von R.Möll hergeleiteten Potentialausdrücke entsprechend umgearbeitet.

Daraus ergab sich für:

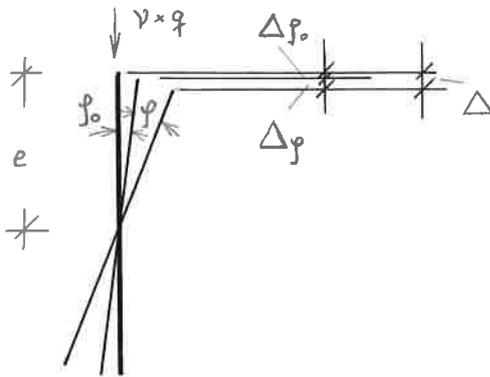
das innere Potential $\pi^{(i)}$

des Trägers:
$$\pi_1^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^L (C f'^2 + B u''^2) dz \quad (2.1)$$

des Verbandes:
$$\pi_2^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^L B_v f_v''^2 dz \quad (2.2)$$

das äußere Potential $\pi^{(a)}$

infolge der Verdrehung des Trägers:



$$\pi_1^{(a)} = - \int_0^L v Q \Delta_p dz \quad (2.3)$$

$$\Delta_p = \Delta - \Delta_{p_0} = \frac{e}{2} (p^2 + 2 p p_0) \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \pi_1^{(a)} = - \frac{1}{2} \int_0^L v Q e (p^2 + 2 p p_0) dz \quad (2.5)$$

infolge des Zusammenwirkens von Stabkrümmung und

Stabverdrehung:

$$\pi_2^{(a)} = \int_0^L v M_x (\mu'' p + \mu'' p_0 + \mu_0'' p) dz \quad (2.6)$$

In den Gleichungen (2.1) bis (2.6) bedeuten:

| | |
|----------------------------|--|
| $\gamma =$ | Sicherheitsfaktor |
| $M_x = M_x(z)$ | Biegemoment des Trägers um die x-Achse |
| $B = B(z) = EI_y(z)$ | Biegesteifigkeit des Trägers um die y-Achse |
| $C = C(z) = GI_T(z)$ | Torsionssteifigkeit des Trägers |
| $B_v = EI_W/m$ | anteilige Biegesteifigkeit des Verbandes |
| mit: | EI_W wirksame Biegesteifigkeit des Verbandes m Anzahl der an den Verband angeschlossenen Binder |
| $u_0 = u_0(z)$ | Vorauslenkung des Trägers |
| $\varphi_0 = \varphi_0(z)$ | Vorverdrehung des Trägers |
| $u = u(z)$ | Auslenkung des Trägers infolge Belastung |
| $\varphi = \varphi(z)$ | Verdrehung des Trägers infolge Belastung |
| $s = s(z)$ | Abstand zwischen Bezugsachse und Angriffspunkt des Aussteifungsverbandes |
| $e = e(z)$ | Abstand zwischen Bezugsachse und Angriffspunkt der Belastung |
| $f_v = f_v(z)$ | Durchbiegung des Aussteifungsverbandes |

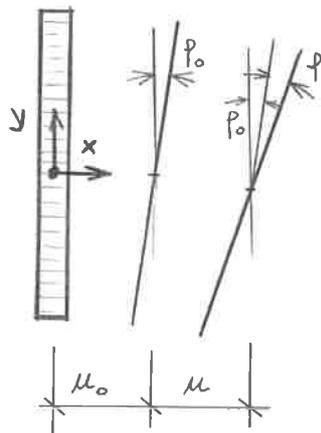


Bild 3 Verformungen des Trägers

$$\text{Mit: } z = L \int_j dz = L d\xi \quad (2.7)$$

und bei Berücksichtigung der Symmetrie des Trägers und der Belastung ergibt sich damit das Gesamtpotential

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)} \quad (2.8)$$

zu:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{2} \\ \Pi = L \int_{\xi=0} \left\{ G p'^2 + B \mu''^2 + B_v f_v''^2 - v q e (p^2 + 2 p p_0) \right. \\ \left. + 2 v M_x (\mu'' p + \mu'' p_0 + \mu_0'' p) \right\} d\xi \quad (2.9) \end{aligned}$$

Für die Verbandsdurchbiegung f_v läßt sich aus Bild 4

folgende geometrische Bedingung angeben:

$$f_v = \mu + s p \quad (2.10)$$

und 2x differenziert:

$$f_v'' = \mu'' + (s p)'' \quad (2.11)$$

Weiterhin läßt sich aus Bild 4 der Zusammenhang zwischen

der seitlichen Trägersauslenkung $u(\xi)$ und der Trägerverdrehung

$\varphi(\xi)$ herleiten. Dieser Zusammenhang lautet:

$$B \mu'' + B_v (\mu'' + (s p)'') + M_x (p + p_0) = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{bzw. } B \mu'' + B_v \mu'' = - B_v (s p)'' - M_x (p + p_0) \quad (2.13)$$

$$\mu'' = - \frac{(sP)'' + \frac{M_x}{B_v} (P+P_0)}{\gamma} \quad (2.14)$$

mit: $\gamma = \gamma(\xi) = 1 + \frac{B}{B_v}$ (2.15)

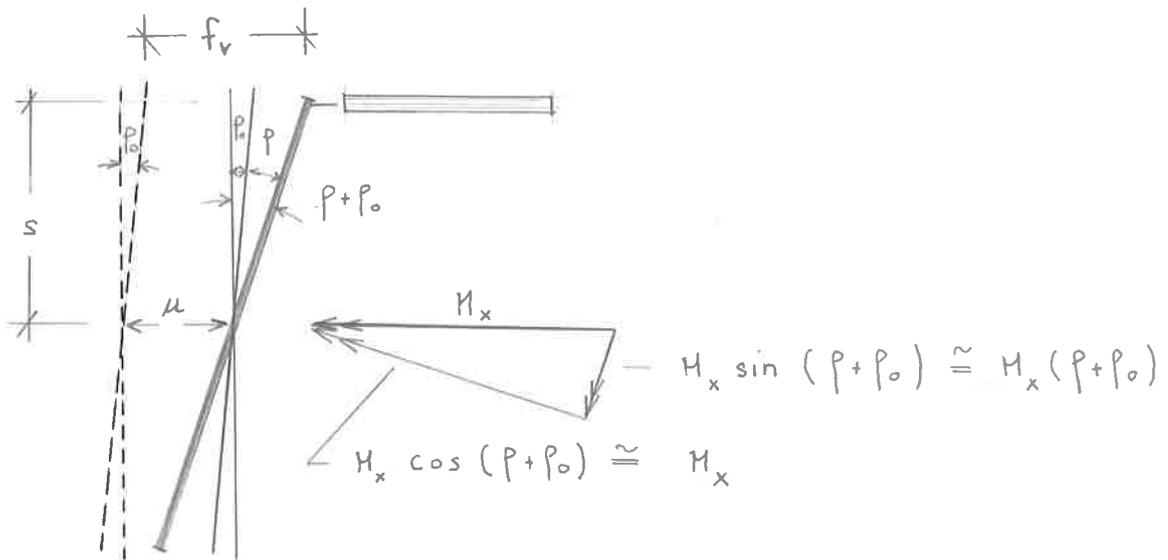


Bild 4

Gl.(2.11) bis Gl(2.15) in (2.9) eingesetzt, ergibt nach einigen Umformungen:

$$\pi = L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} \left\{ G\varphi'^2 - \nu q_e (P^2 + 2PP_0) - \frac{2\nu M_x (P+P_0)(sP)'}{\gamma} - \frac{\left(\frac{\nu M_x}{B_v}\right)^2 (P+P_0)^2}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} B_v (sP)''^2 + 2\nu M_x \mu_0'' P \right\} d\xi \quad (2.16)$$

2.3 Lösungsansatz

Nach dem Ritz'schen Verfahren (Näherungsverfahren) wird anstelle der gesuchten Funktion φ eine zur Konkurrenz zugelassene Näherungsfunktion

$$\varphi = \sum_{i=1}^N A_i \varphi_i \quad (2.17)$$

in den Potentialausdruck (Gl.(2.16)) eingesetzt, wobei diese Ansatzfunktion lediglich die geometrischen Randbedingungen erfüllen muß. Dabei stellen die Funktionen φ_i Ansatzfunktionen für den Verlauf der Verformung und die Faktoren A_i freie Parameter dar.

Aus dem "PRINZIP VOM STATIONÄREN WERT DES ELASTISCHEN POTENTIALS"

$$\partial \Pi = 0 \quad (2.18)$$

erhält man beim Ritz'schen Verfahren aus der partiellen Differentiation

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = 0 \quad (2.19)$$

ein System linearer, im vorliegenden Fall inhomogener Gleichungen für die Faktoren A_i und damit die gesuchte Verformung.

Als Ansatzfunktion wird die zur Feldmitte symmetrische Funktion

$$\varphi = \sum_{i=1}^N A_i \sin i\pi\xi \quad (2.20)$$

mit:
$$f' = \left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_{i=1}^N i A_i \cos i\pi\xi \quad (2.21)$$

$$f'' = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^N i^2 A_i \sin i\pi\xi \quad (2.22)$$

gewählt, wobei $i = 2i - 1$, d.h. eine ungerade Zahl ist.

Die geometrischen Randbedingungen:

$$f(0) = f(1) = 0$$

werden durch diese Ansatzfunktion erfüllt.

Da die Funktion f nach Gl.(2.20) keinen Knick im Bereich $0 \leq \xi \leq 1$ aufweist und auch keinen Knick aufweisen darf, die seitliche Verformung des Trägers u und die Durchbiegung des Verbandes f_v nach Gl.(2.10) auch keinen Knick aufweisen können, ist im Fall des Angriffs des Aussteifungsverbandes an der Trägeroberkante bei Trägern nach Bild 5 nicht der wirkliche Verlauf s nach Bild 5 anzusetzen, sondern es muß hier eine Ersatzfunktion ohne Knick eingesetzt werden.

Es wird deshalb s als sin - Funktion nach Bild 6 angesetzt, wobei \bar{s} mit:

$$\bar{s} = l \cdot \tan \alpha / 2,6 \quad (2.23)$$

angenommen werden kann.

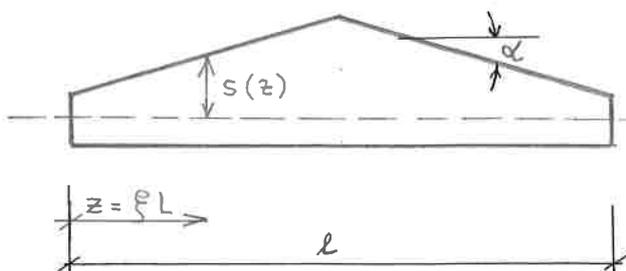


Bild 5

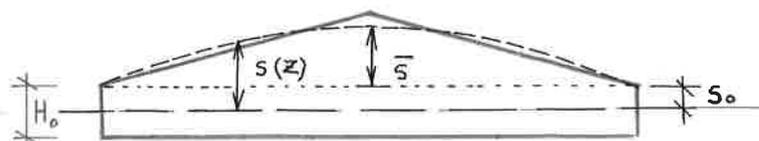


Bild 6

Die Vorverdrehung β_0 sowie die Vorauslenkung μ_0 des Trägers werden entsprechend in [1] mit:

$$\beta_0 = \bar{\beta}_0 \sin \pi \xi \quad (2.24)$$

und
$$\mu_0 = \bar{\mu}_0 \sin \pi \xi \quad (2.25)$$

mit
$$\mu_0'' = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \bar{\mu}_0 \sin \pi \xi \quad (2.26)$$

angesetzt.

Die Gleichungen (2.20) bis (2.22) und (2.24) bis (2.26) in (2.16) eingesetzt ergibt den Energieausdruck in Abhängigkeit von den freien Parameter H_i d.h.

$$\pi = f(H_i) \quad (2.27)$$

Die partielle Ableitung nach diesen Parametern H_i ergibt folgendes inhomogenes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} F_{11} H_1 + F_{13} H_3 + F_{15} H_5 + \dots + F_{1(2N-1)} H_{(2N-1)} + R_1 = 0 \\ F_{31} H_1 + F_{33} H_3 + F_{35} H_5 + \dots + F_{3(2N-1)} H_{(2N-1)} + R_3 = 0 \\ F_{51} H_1 + \dots + R_5 = 0 \\ \vdots \\ F_{(2N-1)1} H_1 + F_{(2N-1)3} H_3 + \dots + F_{(2N-1)(2N-1)} H_{(2N-1)} + R_{(2N-1)} = 0 \end{array}$$

mit:

$$\begin{aligned}
 F_{ij} = L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} & \left\{ 2 \zeta \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 ij \cos i\pi\xi \cos j\pi\xi - 2 \nu q e \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi \right. \\
 & + 4 \frac{\nu M_x}{\gamma} \left[-s'' \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi + \frac{1}{2} s \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (i^2 + j^2) \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi \right. \\
 & \quad \left. \left. - s' \left(\frac{\pi}{L} \right) i \cos i\pi\xi \sin j\pi\xi - s' \left(\frac{\pi}{L} \right) j \cos j\pi\xi \sin i\pi\xi \right] \\
 & + 2 B_v \frac{\nu-1}{\gamma} \left[s''^2 \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi + 4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 ij s'^2 \cos i\pi\xi \cos j\pi\xi \right. \\
 & \quad + s^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 i^2 j^2 \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi - s s'' \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (i^2 + j^2) \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi \\
 & \quad + 2 s' s'' \left(\frac{\pi}{L} \right) i \cos i\pi\xi \sin j\pi\xi + 2 s' s'' \left(\frac{\pi}{L} \right) j \cos j\pi\xi \sin i\pi\xi \\
 & \quad \left. \left. - 2 s s' \left(\frac{\pi}{L} \right)^3 ij^2 \cos i\pi\xi \sin j\pi\xi - 2 s s' \left(\frac{\pi}{L} \right)^3 j i^2 \cos j\pi\xi \sin i\pi\xi \right] \right. \\
 & \left. - 2 \frac{(\nu M_x)^2}{\gamma B_v} \sin i\pi\xi \sin j\pi\xi \right\} d\xi \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

wobei $F_{j,i} = F_{i,j}$ ist

und:

$$\begin{aligned}
 R_i = \bar{p}_0 L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} & \left\{ -2 \nu q e \sin i \pi \xi \sin \pi \xi \right. \\
 & - 2 \frac{\nu M_x}{\gamma} \left[s'' \sin i \pi \xi \sin \pi \xi + 2 s' \left(\frac{\pi}{L} \right) i \cos i \pi \xi \sin \pi \xi \right. \\
 & \left. \left. - s \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin i \pi \xi \sin \pi \xi \right] \right. \\
 & \left. - 2 \frac{(\nu M_x)^2}{\gamma B_v} \sin i \pi \xi \sin \pi \xi \right\} d\xi \\
 + \bar{\mu}_0 L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} & \left\{ -2 \nu M_x \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin i \pi \xi \sin \pi \xi \right\} d\xi
 \end{aligned}$$

(2.30)

Aus dem Gleichungssystem (2.28) lassen sich die Parameter

\bar{H}_i , und somit die Funktion φ d.h. die Verdrehung des Trägers über die Trägerlänge, berechnen.

2.4 Biegemoment des Aussteifungsverbandes M_v , Seitenlast q_s
und Verbandsdurchbiegung f_v

Nach der technischen Biegelehre gilt:

$$M_v = - B_v f_v'' \quad (2.31)$$

f_v'' nach Gl. (2.11) eingesetzt ergibt:

$$M_v = - B_v (u'' + (s f)''') \quad (2.32)$$

und mit u'' nach Gl. (2.14)

$$M_v = - B_v \frac{\gamma-1}{\gamma} (s f)'' + \frac{\nu M_x}{\gamma} (f + f_0) \quad (2.33)$$

Vernachlässigt man hierbei die Eigenbiegesteifigkeit des Trägers um die y-Achse gegenüber der Verbandssteifigkeit d.h. setzt man $\gamma = 1$

so ergibt sich:

$$M_v = \nu M_x (f + f_0) \quad (2.34)$$

Mit f nach Gl. (2.20) und f_0 nach Gl. (2.24) folgt:

$$M_v = \nu M_x \left\{ \sum_{l=1}^N H_l \sin \pi \xi + \bar{f}_0 \sin \pi \xi \right\} \quad (2.35)$$

Die Seitenlast des Trägers auf den Aussteifungsverband

erhält man aus:

$$q_s = -M_v'' = -\nu(M_x(p+p_0))'' \quad (2.36)$$

und mit: $M_x' = Q \quad (2.37)$

$$M_x'' = -q \quad (2.38)$$

$$p_0' = \bar{p}_0 \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos \pi \xi \quad (2.39)$$

$$p_0'' = -\bar{p}_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \pi \xi \quad (2.40)$$

p, p' und p'' nach Gl. (2.20) ÷ (2.22)

ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_s = & \nu M_x \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i=1}^N i^2 H_i \sin i \pi \xi + \bar{p}_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \pi \xi \right] \\ & - 2 \nu Q \left[\left(\frac{\pi}{L}\right) \sum_{i=1}^N i H_i \cos i \pi \xi + \bar{p}_0 \left(\frac{\pi}{L}\right) \cos \pi \xi \right] \\ & + \nu q \left[\sum_{i=1}^N H_i \sin i \pi \xi + \bar{p}_0 \sin \pi \xi \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte \bar{f}_v läßt sich am einfachsten mit der ARBEITSGLEICHUNG berechnen

$$\bar{f}_v = \int_{z=0}^L \frac{M_v \bar{M}_v}{B_v} dz \quad (2.42)$$

2.5 Sonderfall: parallelgurtiger Träger mit Gleichstreckenlast.

Lösung mit einem einparametrischen Lösungsansatz

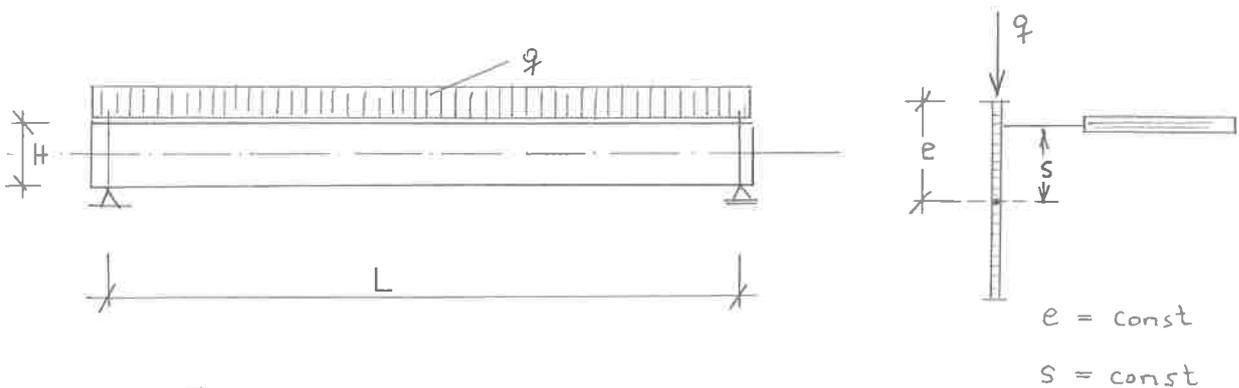


Bild 7

Mit einem einparametrischen Lösungsansatz:

$$\varphi = H_1 \sin \pi \xi \quad (2.43)$$

bzw. da hierbei H_1 die Verdrehung des Trägers in Feldmitte $\bar{\varphi}$ bedeutet,

$$\varphi = \bar{\varphi} \sin \pi \xi \quad (2.44)$$

reduziert sich das Gleichungssystem (2.28) auf:

$$\boxed{F_{11} \bar{\varphi} + R_1 = 0} \quad (2.45)$$

$$\text{Mit:} \quad M_x = \text{Max } M \cdot K_M \quad (2.46)$$

$$\text{Max } M = \frac{q L^2}{8} \quad (2.47)$$

$$K_M = 4 (\xi - \xi^2) \quad (2.48)$$

$$\text{und} \quad q = \frac{8 \text{ Max } M}{L^2} \quad (2.49)$$

ergibt sich F_{II} aus Gl.(2.29) zu:

$$\begin{aligned}
 F_{II} = & 2\pi^2 \frac{G}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} \cos^2 \pi \xi \, d\xi - 16 \nu \text{Max} \Pi \frac{e}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} \sin^2 \pi \xi \, d\xi \\
 & + 4\pi^2 \frac{\nu \text{Max} \Pi}{\gamma} \frac{s}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} K_H \sin^2 \pi \xi \, d\xi + 2\pi^4 \frac{B_v}{L} \left(\frac{s}{L}\right)^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} \sin^2 \pi \xi \, d\xi \\
 & - 2 \frac{(\nu \text{Max} \Pi)^2}{\gamma B_v} L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} K_H^2 \sin^2 \pi \xi \, d\xi \quad (2.50)
 \end{aligned}$$

und nach Berechnung der Integrale

$$F_{II} = \frac{\pi^2}{2} \frac{G}{L} + \nu \text{Max} \Pi \left(\frac{8,579}{\gamma} \cdot \frac{s}{L} - 4 \frac{e}{L} \right) + \frac{\pi^4}{2} \frac{B_v}{L} \left(\frac{s}{L}\right)^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} - 0,3898 \frac{(\nu \text{Max} \Pi)^2 L}{\gamma B_v} \quad (2.51)$$

R_1 ergibt sich aus Gl.(2.30) zu:

$$\begin{aligned}
 R_1 = & - \bar{P}_0 \left\{ 16 \nu \text{Max} \Pi \frac{e}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} \sin^2 \pi \xi \, d\xi - 2 \frac{\pi^2}{\gamma} \nu \text{Max} \Pi \frac{s}{L} \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} K_H \sin^2 \pi \xi \, d\xi \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\gamma B_v} (\nu \text{Max} \Pi)^2 L \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} K_H^2 \sin^2 \pi \xi \, d\xi \right\} \\
 & - \frac{\bar{M}_0}{L} 2\pi^2 \nu \text{Max} \Pi \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} K_H \sin^2 \pi \xi \, d\xi \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

und ausintegriert:

$$R_1 = -\bar{P}_0 \left\{ \left(4 \frac{e}{L} - \frac{4,2895}{\gamma} \frac{s}{L} \right) \nu \text{Max } M + 0,3898 \frac{(\nu \text{Max } M)^2}{\gamma^2 B_v} L \right\} - \frac{\bar{\mu}_0}{L} 4,2895 \nu \text{Max } M \quad (2.53)$$

Die Verdrehung des Trägers in Feldmitte $\bar{\varphi}$ ergibt sich

damit zu:

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{P}_0 \left\{ \nu \text{Max } M \left(4 \frac{e}{L} - \frac{4,2895}{\gamma} \frac{s}{L} \right) + 0,3898 \frac{(\nu \text{Max } M)^2}{\gamma^2 B_v} L \right\} + \frac{\bar{\mu}_0}{L} 4,2895 \nu \text{Max } M}{\frac{\pi^2 I}{2 L} + \nu \text{Max } M \left(\frac{8,579}{\gamma} \frac{s}{L} - 4 \frac{e}{L} \right) + \frac{\pi^4 B_v}{2 L} \left(\frac{s}{L} \right)^2 \frac{\gamma-1}{\gamma} - 0,3898 \frac{(\nu \text{Max } M)^2 L}{\gamma^2 B_v}} \quad (2.54)$$

Das Biegemoment des Aussteifungsverbandes M_v erhält man aus Gl.(2.33)

$$M_v = -B_v \frac{\gamma-1}{\gamma} s \varphi'' + \frac{\nu M_x}{\gamma} (\varphi + \varphi_0) \quad (2.55)$$

φ nach Gl.(2.44) und φ_0 nach Gl.(2.24) eingesetzt:

$$M_v = B_v \frac{\gamma-1}{\gamma} s \bar{P} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \pi \xi + \frac{\nu M_x}{\gamma} (\bar{P} + \bar{P}_0) \sin \pi \xi \quad (2.56)$$

Vernachlässigt man die Eigensteifigkeit des Trägers um die y -Achse gegenüber der Verbandssteifigkeit,

d.h. setzt man $\gamma = 1$

folgt:

$$M_v = \nu M_x (\bar{P} + \bar{P}_0) \sin \pi \xi \quad (2.57)$$

Gl.(2.55) 2 x differenziert liefert die Seitenlast

$$q_s = + B_v \frac{\gamma-1}{\gamma} s p'''' - \frac{\nu}{\gamma} (M_x (p + p_0))'' \quad (2.58)$$

mit p nach Gl.(2.44) und p_0 nach Gl.(2.24)

und:
$$M_x = \frac{q L^2}{2} (\xi - \xi^2) \quad (2.59)$$

$$M_x' = \frac{q L}{2} (1 - 2\xi) \quad (2.60)$$

$$M_x'' = -q \quad (2.61)$$

erhält man:

$$q_s = B_v \frac{\gamma-1}{\gamma} s \bar{p} \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \sin \pi \xi + \frac{\nu q}{\gamma} (\bar{p} + \bar{p}_0) \left[-\pi(1-2\xi) \cos \pi \xi + \left(1 + \frac{\pi^2}{2} (\xi - \xi^2)\right) \sin \pi \xi \right] \quad (2.62)$$

bzw. mit $\gamma = 1$

$$\boxed{q_s = \nu q (\bar{p} + \bar{p}_0) \phi} \quad (2.63)$$

$$\phi = \left(-\pi(1-2\xi) \cos \pi \xi + \left(1 + \frac{\pi^2}{2} (\xi - \xi^2)\right) \sin \pi \xi \right) \quad (2.64)$$

ϕ = Verteilungsfunktion der Seitenlast
nach Bild 8

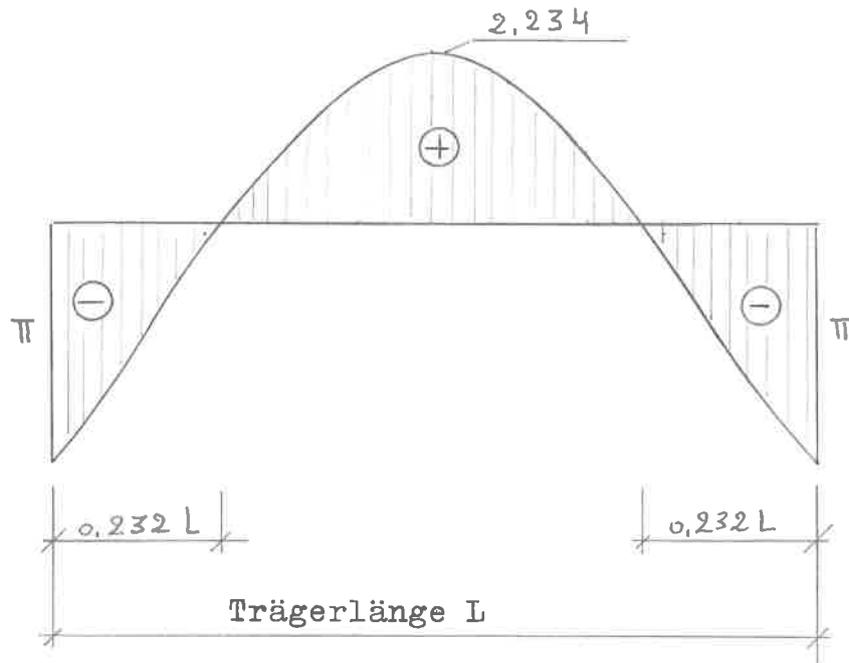


Bild B Verteilungsfunktion der Seitenlast \emptyset

Mit M_v nach Gl.(2.56) und:

\bar{M}_v :

$$\bar{M}_v = \frac{L}{2} \xi \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

errechnet sich die Durchbiegung des Aussteifungsverbandes

in Feldmitte mit Gl.(2.42) zu:

$$F_v = \frac{\gamma-1}{\gamma} E \bar{\varphi} + \frac{\nu \text{Max } M L^2}{11,15 \gamma B_v} (\bar{\varphi} + \bar{\varphi}_0) \quad (2.65)$$

und mit $\gamma = 1$ gesetzt:

$$F_v = \frac{\nu \text{Max } M L^2}{11,15 B_v} (\bar{\varphi} + \bar{\varphi}_0) \quad (2.66)$$

3. Numerische Behandlung

3.1 Rechenprogramm

Das unter Punkt 2. theoretische Lösung aufgezeigte Berechnungsverfahren ist vom Aufbau her relativ einfach, jedoch vom Umfang der durchzuführenden Rechenschritte vor allem bei mehrparametrischen Ansatzfunktionen nur unter Verwendung größerer Rechenanlagen durchführbar. Auf Grund dessen wurde ein Rechenprogramm in der Programmiersprache FORTRAN V für die Großrechenanlage UNIVAC 1108 der Universität Karlsruhe aufgestellt. Die Berechnung der Integrale in den Faktoren F_{ij} (Gl. 2.29) und R_i (Gl. 2.30) sowie die Lösung des charakteristischen Gleichungssystems (Gl. 2.18) erfolgte dabei mittels in der Programmbibliothek des Rechenzentrums vorhandenen Unterprogramme.

Die in den Gleichungen (Gl. 2.29) und (Gl. 2.30) einzusetzenden Funktionen, die den Verlauf der Biegesteifigkeit B , der Torsionssteifigkeit C , der Verbandangriffslinie s und der Lastangriffslinie e über die Trägerlänge beschreiben, werden noch anhand eines Berechnungsbeispiels aufgezeigt.

3.2. Berechnungsbeispiel

Die durchgeführten und unter Punkt 4. Versuche näher beschriebenen Versuche, deren statisches System und Belastung in Bild 9 skizziert ist, dienten zur Überprüfung der theoretischen Lösung als Berechnungsbeispiel. Dabei wurden, den Versuchen entsprechend, folgende Fälle durchgerechnet:

Fall A: Angriff des Verbandes an der Trägersoberkante mit $\alpha = 0^\circ$; $\alpha = 4^\circ$ und $\alpha = 8^\circ$ Dachneigung.

Fall B: Angriff des Verbandes in Traufpunkthöhe mit $\alpha = 4^\circ$ Dachneigung.

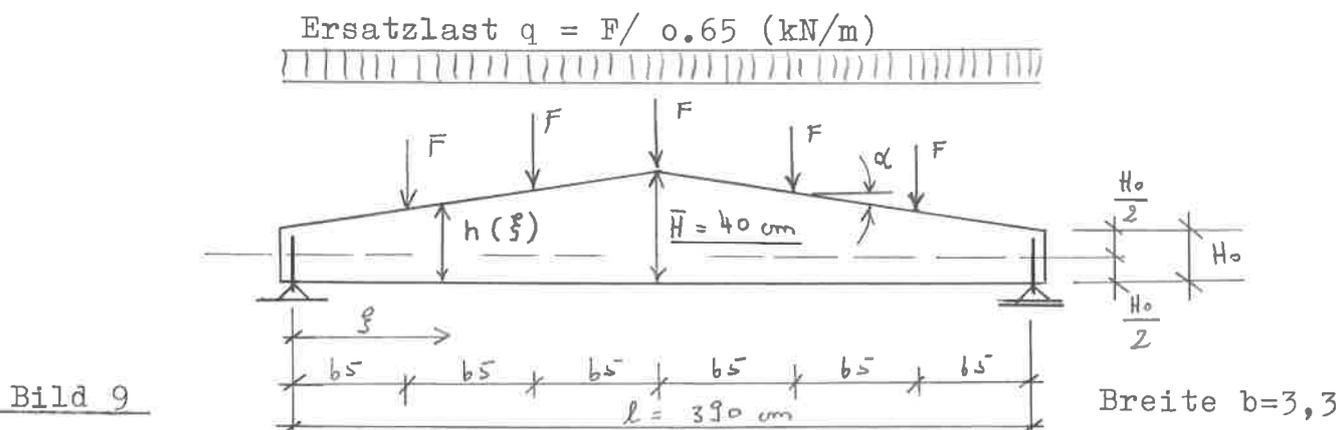
In beiden Fällen wurde mit 2 verschiedenen Verbänden bzw. Verbands- Biegesteifigkeiten gerechnet und zwar mit:

Verband 1: [Schiene [120 $B_V = 86.5 \text{ kNm}^2$

Verband 2: [Schiene [160 $B_V = 180. \text{ kNm}^2$

Die Vorauslenkung der Träger in Feldmitte \bar{u}_0 betrug 0.8 cm.

Die 5 gleichen Einzellasten F wurden in der Berechnung als gleichmäßig verteilte Last q angesetzt.



Im einzelnen wurden folgende Funktionen in die unter Punkt 2. theoretische Lösung abgeleiteten Formeln eingesetzt:

Biegemoment M_x :

$$M_x = \frac{q \cdot l^2}{2} (\xi - \xi^2) \quad (3.1)$$

Biegesteifigkeit des Trägers um die y- Achse B :

$$B = E \frac{h b^3}{12} \quad (3.2)$$

$$\text{mit: } h = \bar{H} - (0.5 - \xi) \cdot l \cdot \tan \alpha \quad (3.3)$$

Torsionssteifigkeit des Trägers: C

$$C = G_T \frac{h b^3}{3} \left(1 - 0.63 \frac{b}{h} \right) \quad (3.4)$$

mit h nach Gl. (3.3)

Abstand zwischen Bezugsachse und Verbandangriffslinie s:

$$\text{Fall A: } s = s_0 + \bar{s} \cdot \sin \pi \xi \quad (3.5)$$

$$s' = \bar{s} \left(\frac{\pi}{l} \right) \cos \pi \xi \quad (3.6)$$

$$s'' = -\bar{s} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \pi \xi \quad (3.7)$$

$$\text{mit } s_0 = H_0/2. \quad (3.8)$$

$$\bar{s} = l \cdot \tan \alpha / 2.6 \quad (3.9)$$

$$\text{Fall B: } s = \text{const.} = H_0/2. \quad (3.10)$$

Abstand zwischen Bezugsachse und Lastangriffslinie e:

$$e = \frac{\bar{H}}{2} - (0.25 - \xi) \cdot l \cdot \tan \alpha \quad (3.11)$$

Materialkonstanten

Für die bei den Versuchen verwendete Brettschichtträger der Güteklasse I mit einer mittleren Holzfeuchte von ca. 11% und einer mittleren Rohdichte von 430 kg/m^3 errechnet sich bei Zugrundelegung einer durchschnittlichen Versuchs- bzw. Belastungsdauer von ca. 10 min der Torsionsmodul nach Möhler/Hemmer [10] zu:

$$G_T = 365 \cdot m_{h/b} \quad (\text{N/mm}^2) \quad (3.12)$$

wobei $m_{h/b}$ ein Faktor zur Berücksichtigung des Höhe/Breite Verhältnisses darstellt und mit:

$$m_{h/b} = m_{h/b}(\xi) = \frac{11}{12} + \frac{1}{12} \frac{h(\xi)}{b} \quad (3.13)$$

angesetzt wird.

Für das in Trägermitte vorliegende Verhältnis $h/b \sim 12$ ergibt sich $m_{h/b}$ zu 1.9 und damit der Torsionsmodul in Feldmitte zu $695 \text{ (N/mm}^2\text{)}$.

Der Elastizitätsmodul E_{\parallel} wurde mit $11000 \text{ (N/mm}^2\text{)}$ angenommen.

Parameteranzahl:

Die Berechnung wurde in den Fällen mit $\alpha = 0^\circ$ Dachneigung mit einem 8-parametrischen, bei $\alpha = 4^\circ$ Dachneigung mit einem 12-parametrischen und bei $\alpha = 8^\circ$ Dachneigung mit einem 16-parametrischen Ritz- Ansatz durchgeführt.

3.3. Ergebnis der Berechnung und Vergleich mit den Versuchswerten.

In den Bildern 10 ÷ 13 sind die errechneten Verformungen, d.h. die Verdrehung des Trägers in Feldmitte sowie die Durchbiegung des Verbandes in Abhängigkeit von der Belastung des Trägers im Vergleich mit den Mittelwerten aus den Versuchen aufgetragen. Dabei zeigen in den Fällen mit Verband 1 die theoretischen Lösungen eine gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten. Bei den Versuchen mit dem steiferen Verband (Verband2) liegen jedoch die gemessenen Verformungen alle deutlich höher als die entsprechenden errechneten Verformungen. Die Ursache hierfür ist jedoch im Versuchsaufbau zu suchen und es wird unter Punkt 4.4. Abschließende Bemerkungen zu den Versuchen noch näher darauf eingegangen.

Die Bilder 14 ÷ 18 zeigen beispielhaft errechnete Seitenlasten über die Trägerlänge im Vergleich mit den entsprechenden Versuchswerten. Hierbei ist, wie bei den Verformungen, in den Fällen mit Verband 1 eine befriedigende Übereinstimmung der theoretischen Lösung mit den Versuchsergebnissen vorhanden. Beim steiferen Verband (Verband 2) liegen auch hier die Versuchswerte höher als die theoretischen Werte, und zwar verhalten sich die gemessenen Seitenlasten zu den errechneten Seitenlasten ungefähr wie die gemessenen Verformungen zu den errechneten Verformungen.

Zu dem Verlauf der Seitenlast über die Trägerlänge sei noch folgendes zu bemerken:

Das Integral der errechneten Seitenlast über die Trägerlänge ergibt sich in allen Fällen zu Null, d.h., daß die Seitenlast in einem gewissen Trägerrandbereich vollständig durch die Pfetten zurückverankert wird.

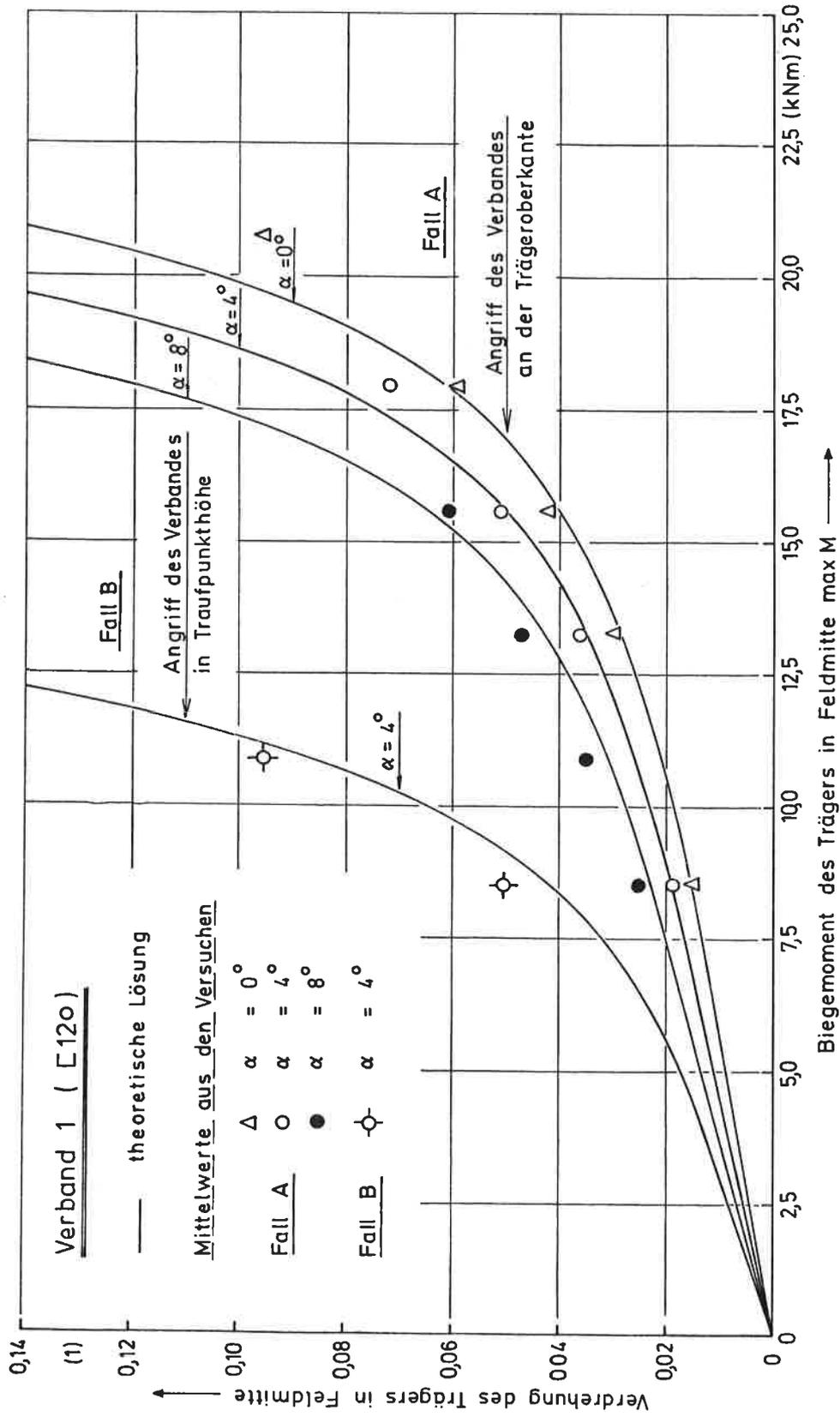


Bild 10: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

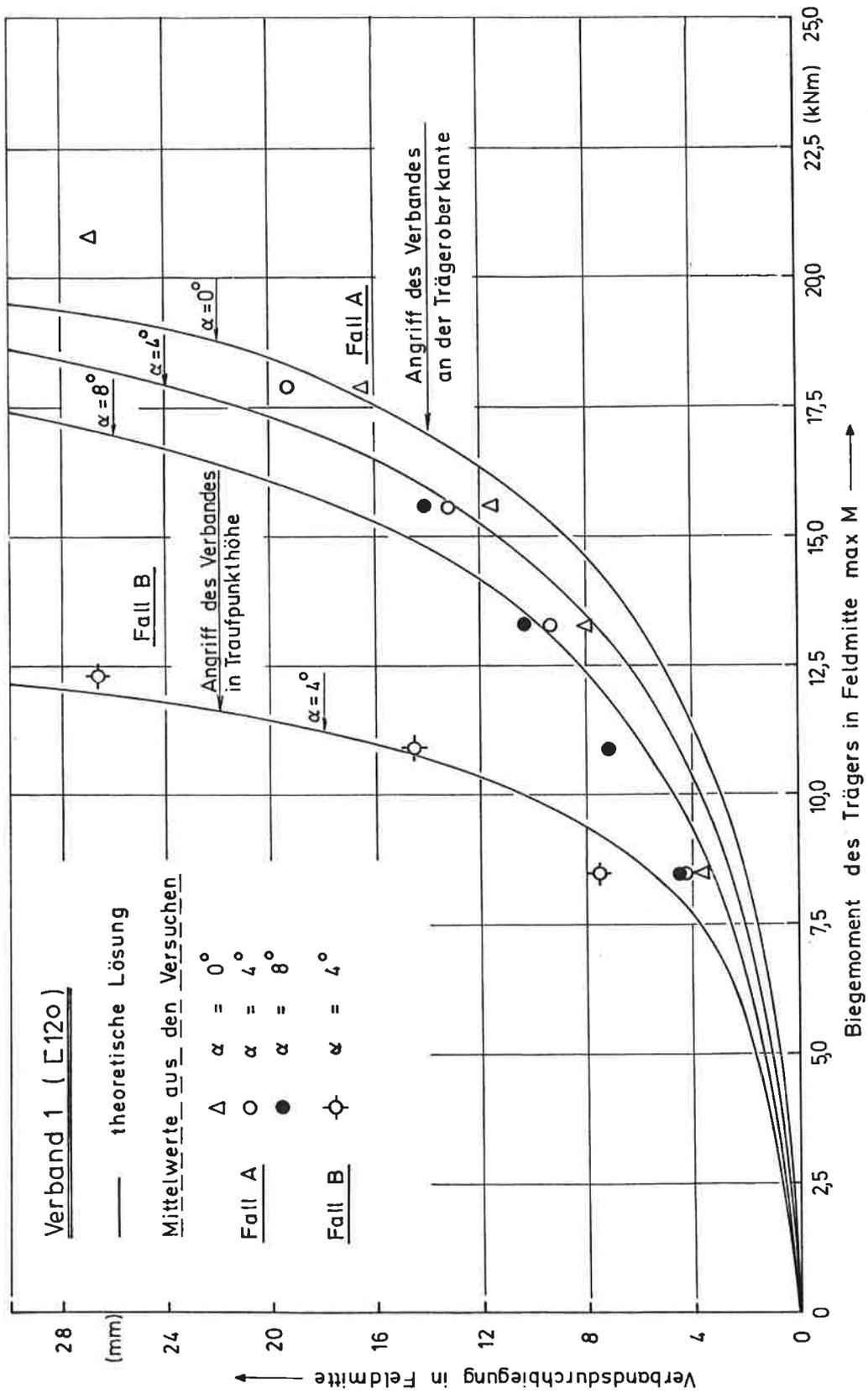


Bild 11: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

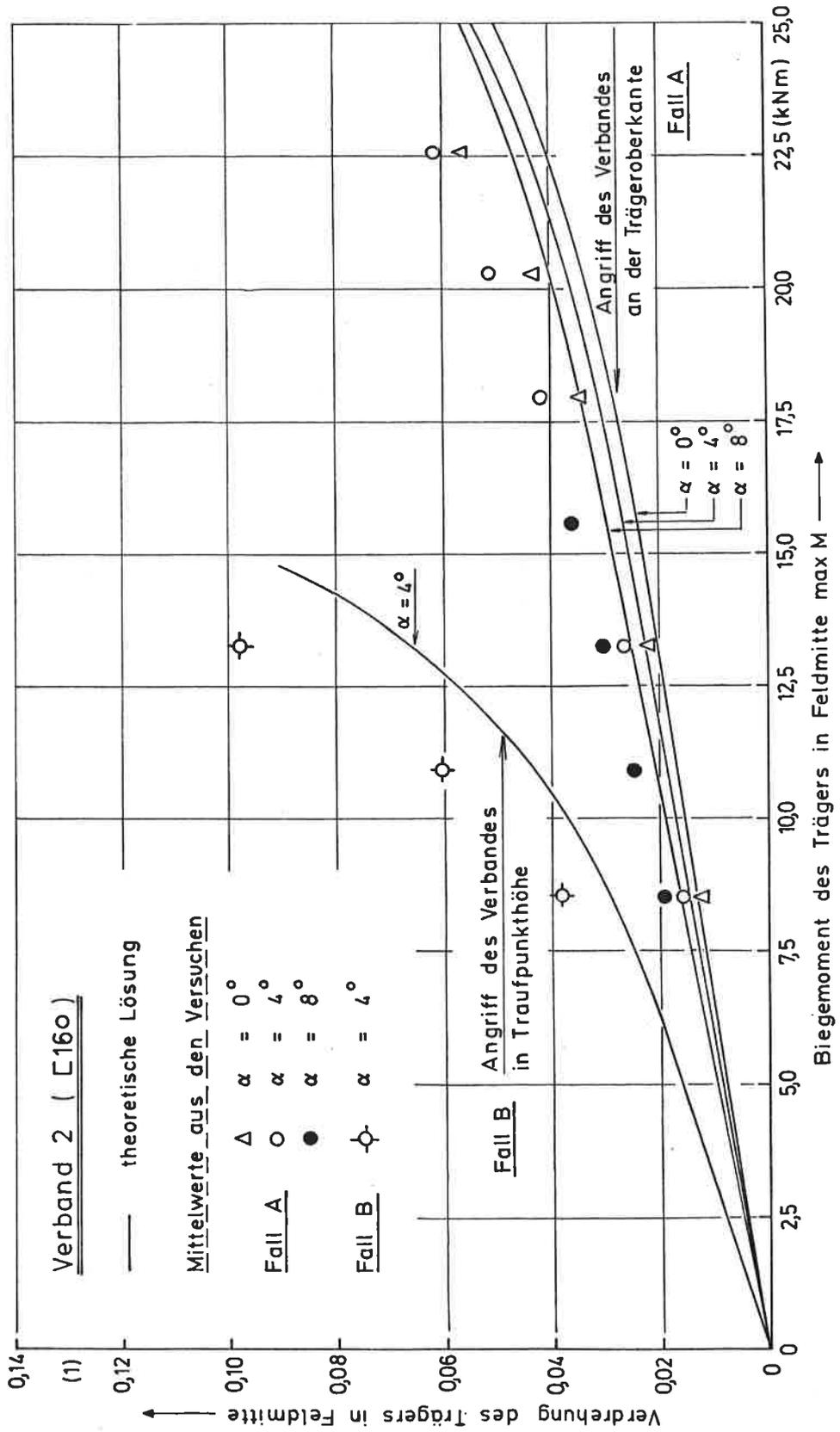


Bild 12: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

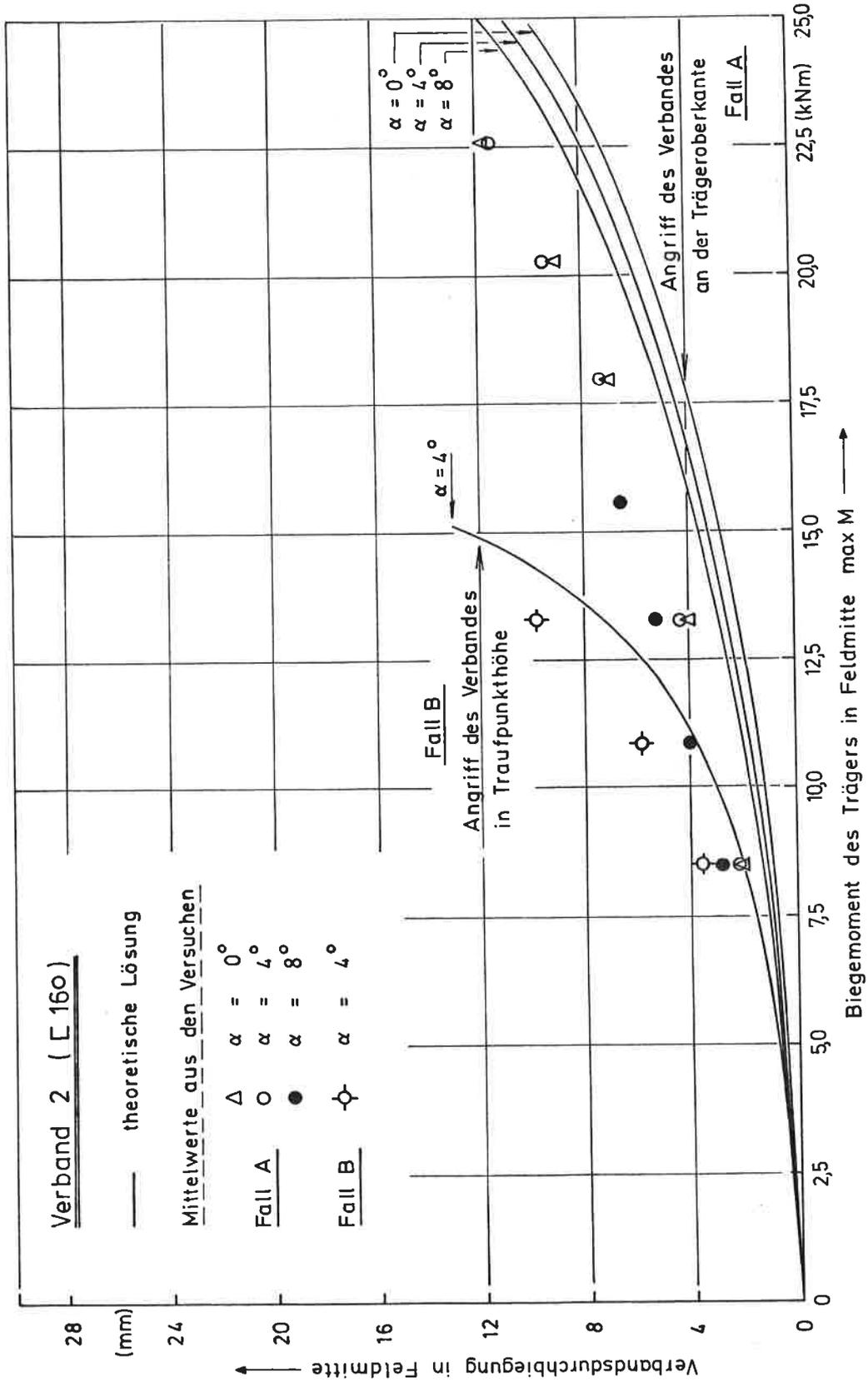


Bild 13: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

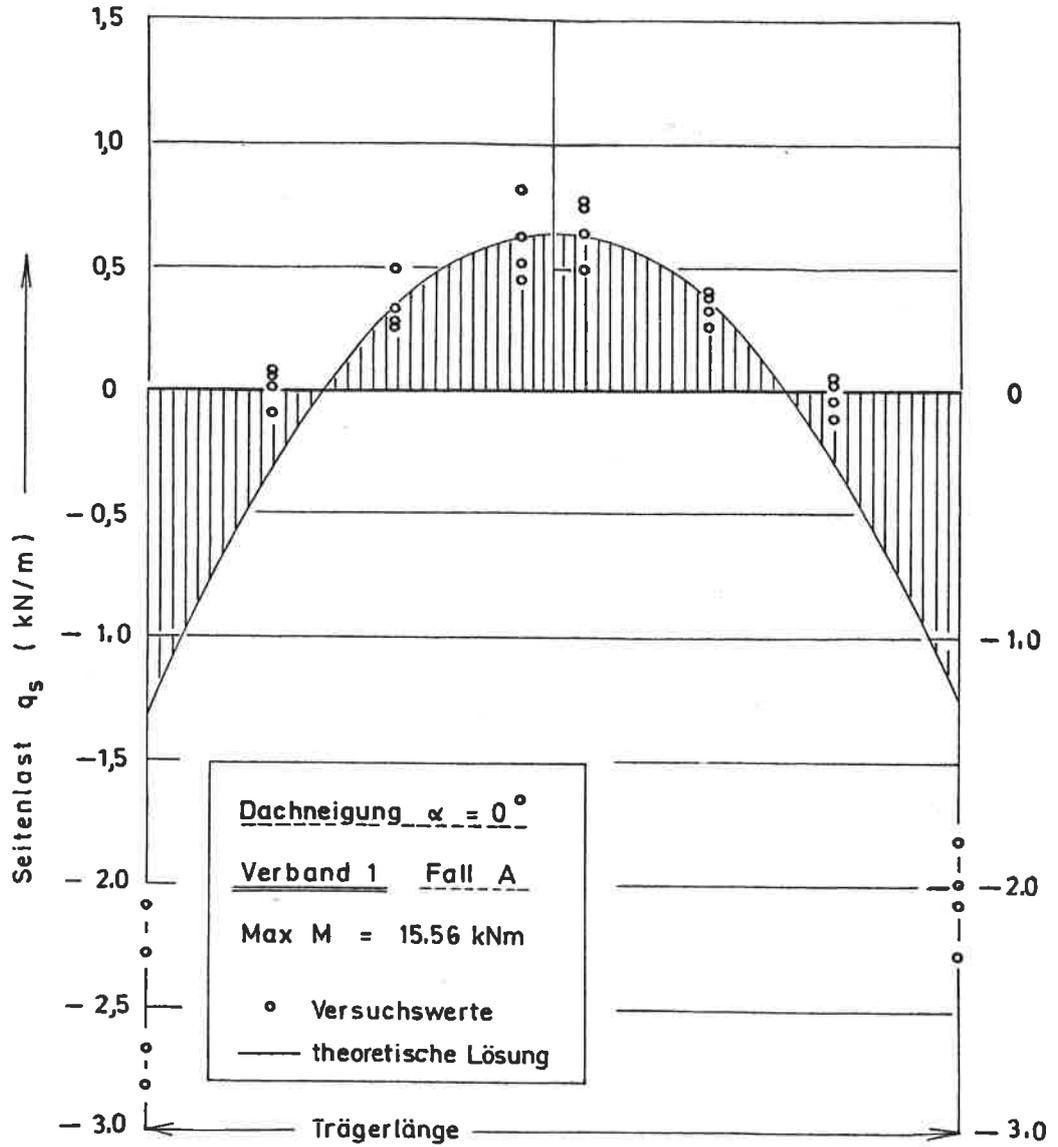


Bild 14 : Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

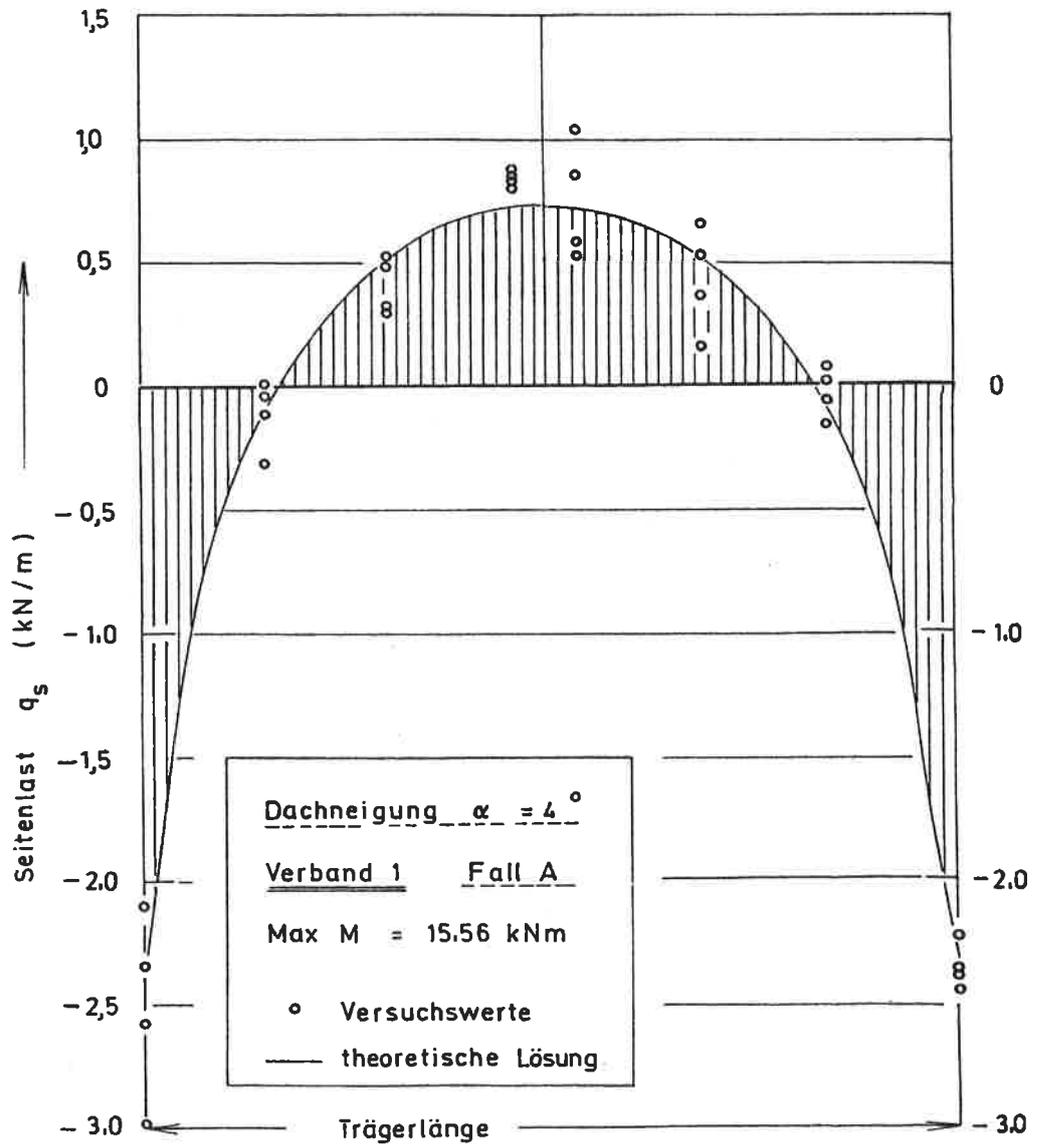


Bild 15: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

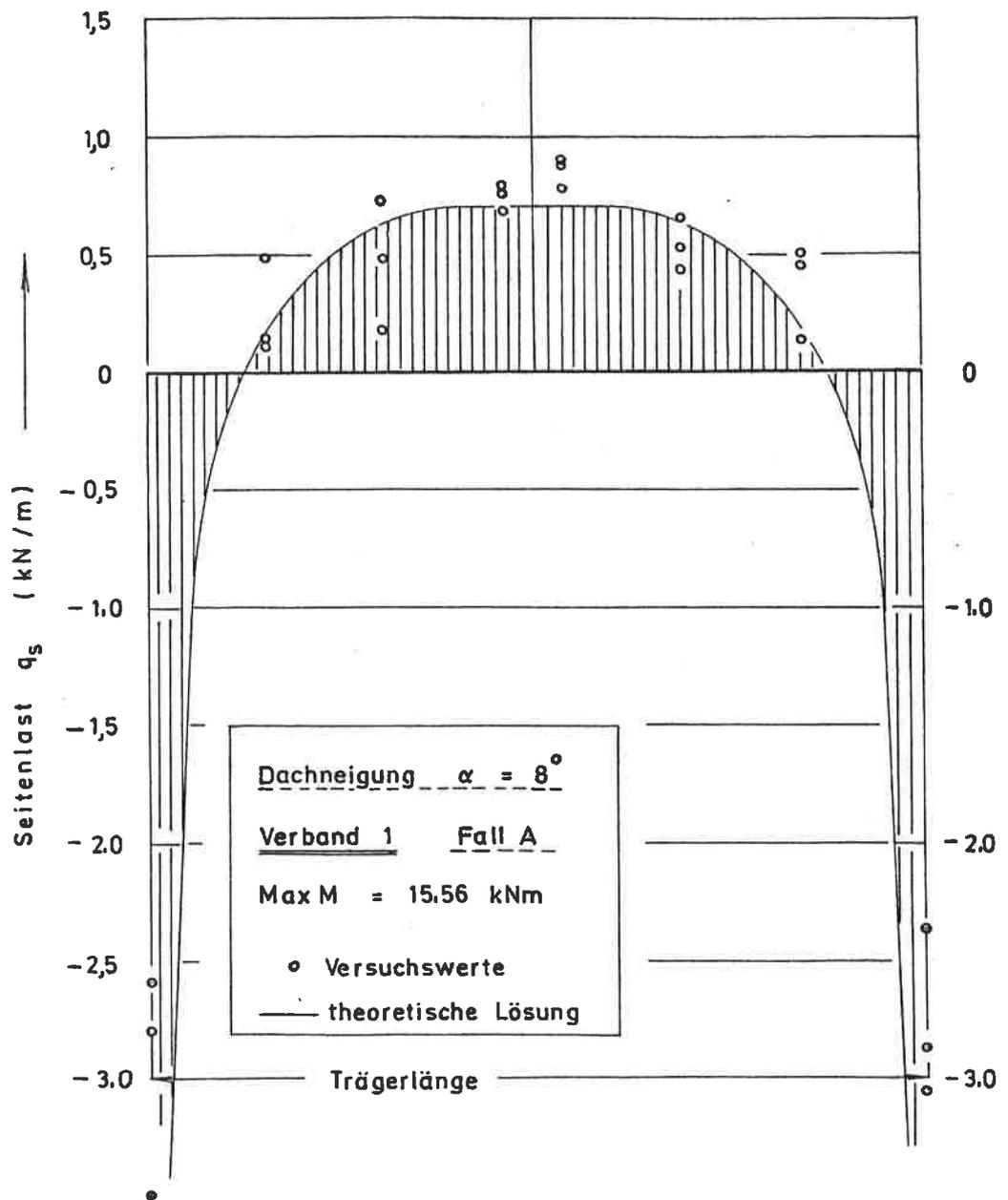


Bild 16: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

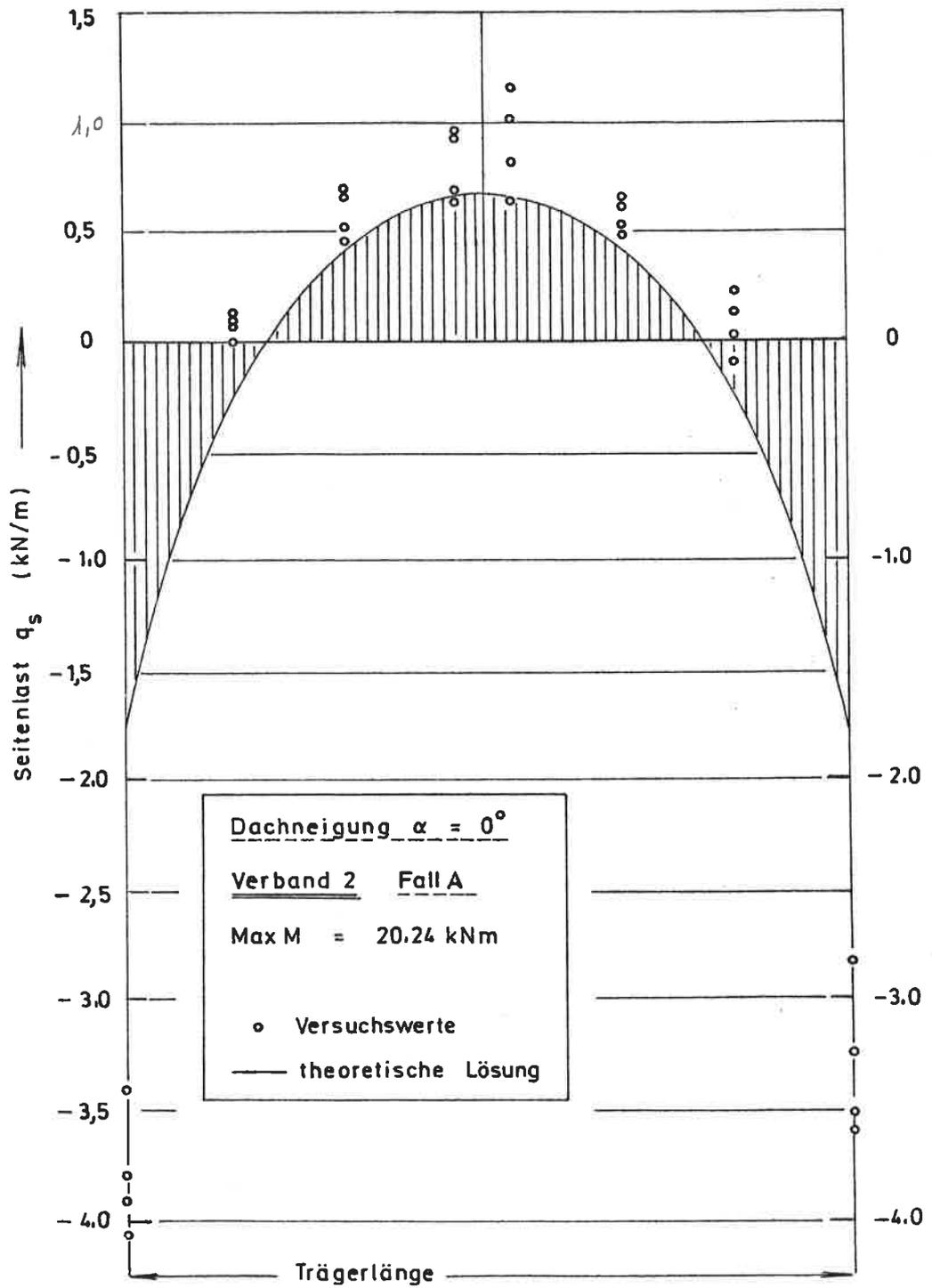


Bild 17: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

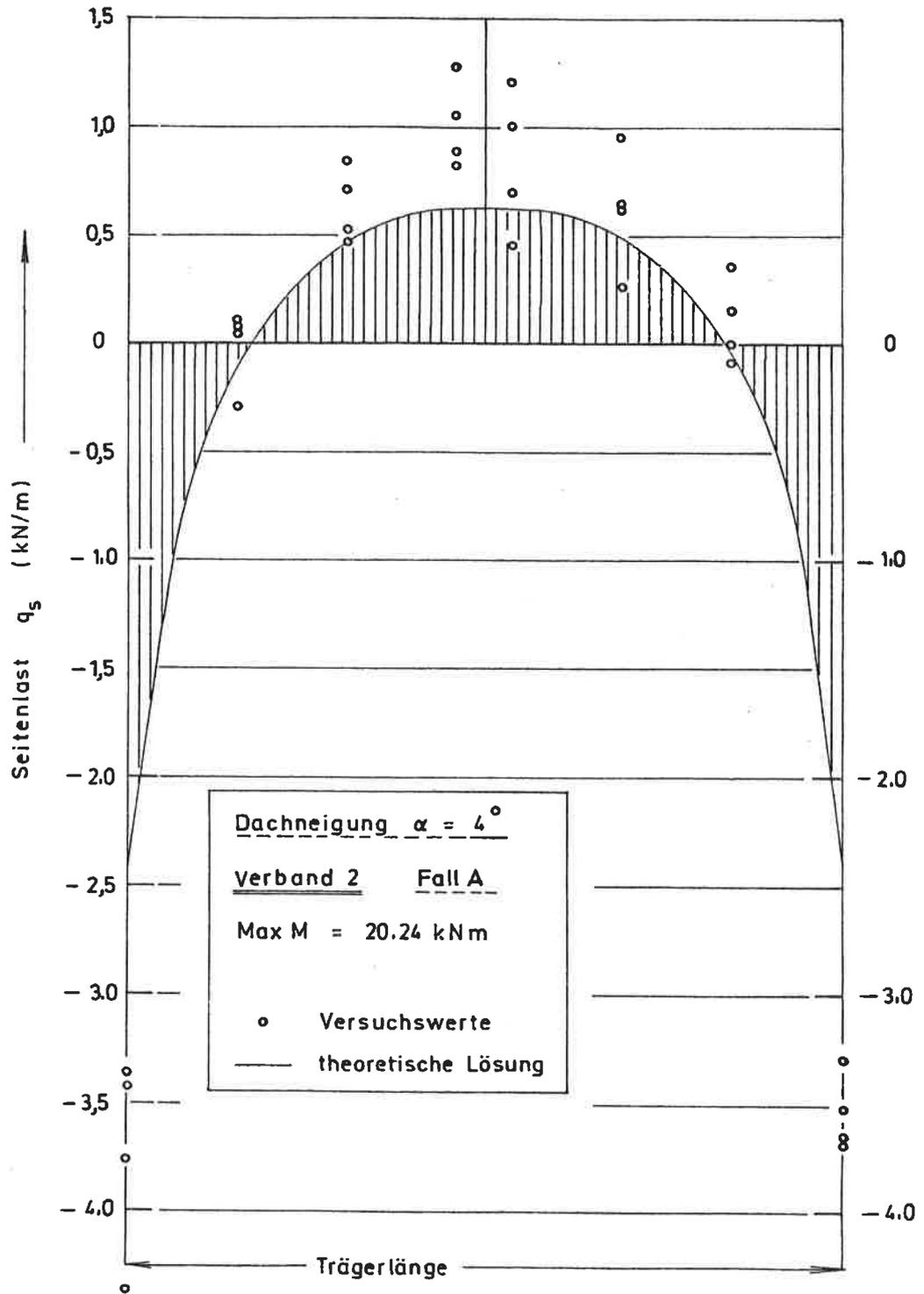
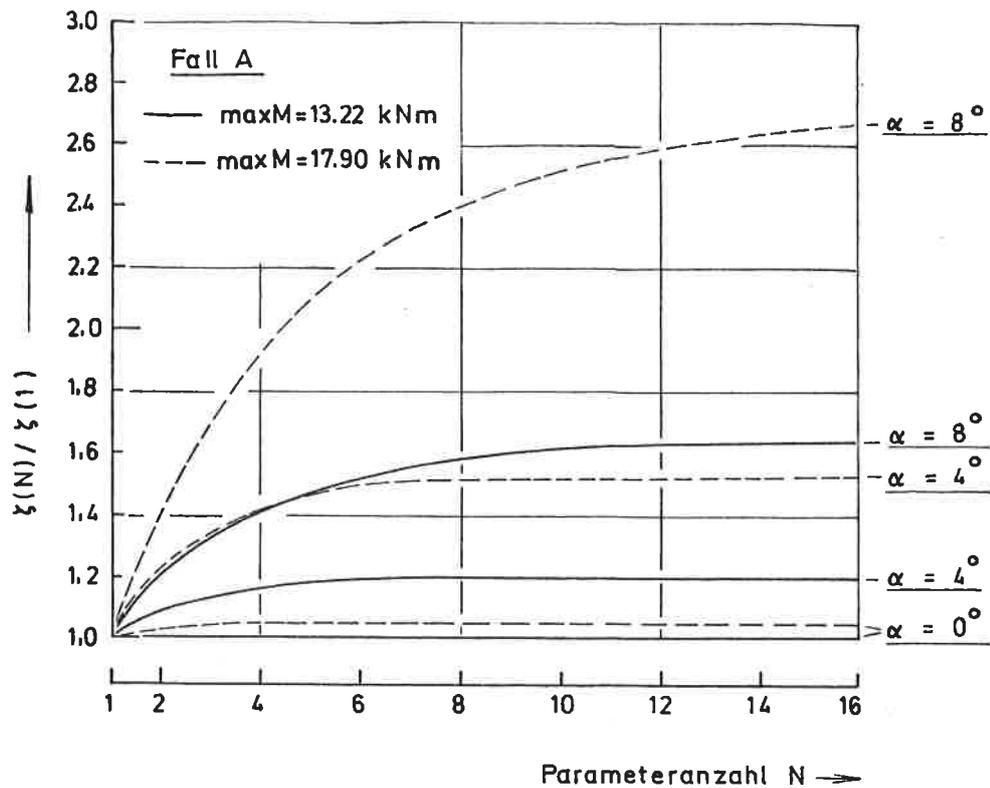


Bild 18: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

3.4. Bemerkungen zur Berechnung

Parameterzahl:

Die Berechnung wurde vorab mit $N = 1 \div 16$ parametrischen Ansatzfunktionen durchgeführt. Dabei zeigte sich, wie auch in Bild 19 dargestellt, daß zur Berechnung der Verformungen, sprich Trägerverdrehung und Verbandsdurchbiegung, in den Fällen, in denen die Angriffslinie des Verbandes einen über die Trägerlänge konstanten Abstand zur Bezugslinie aufweist (Fall A $\alpha = 0^\circ$ und Fall B $\alpha = 4^\circ$), ein einparametrischer Ansatz genügend genaue Ergebnisse liefert. Bei der Berechnung der Beispiele mit $\alpha = 4^\circ$ und $\alpha = 8^\circ$ Dachneigung und Angriff des Aussteifungsverbandes an der Trägeroberkante lieferten erst bei $\alpha = 4^\circ$ 8-parametrische und bei $\alpha = 8^\circ$ 16-parametrische Ansatzfunktionen zufriedenstellende Ergebnisse. Zudem erkennt man aus Bild 19, daß auch die Intensität der Belastung einen Einfluß auf die erforderliche Parameterzahl hat, d.h., je näher die Trägerbelastung an der kritischen Last des ausgesteiften Systems liegt, umso größer muß auch die Parameterzahl N für die Berechnung gewählt werden.



$\zeta(1)$: Verdrehung in Feldmitte mit einem 1-parametrischen Ansatz gerechnet
 $\zeta(N)$: Verdrehung in Feldmitte mit einem N-parametrischen Ansatz gerechnet

Bild 19

Bei der Berechnung der Seitenlasten, bzw. bei der Berechnung des Verlaufs der Seitenlasten über die Trägerlänge, liefert auch in den Fällen, in denen die Angriffslinie des Verbandes einen über die Trägerlänge konstanten Abstand zur Bezugslinie aufweist (Fall A $\alpha = 0^\circ$ und Fall B $\alpha = 4^\circ$), erst eine ca. 4 parametrische Ansatzfunktion zufriedenstellende Ergebnisse. In den Bildern 20 und 21 ist für $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 4^\circ$ Dachneigung und Angriff des Aussteifungsverbandes an der Trägeroberkante der Seitenlastverlauf über die Trägerlänge in Abhängigkeit von der Parameterzahl N aufgetragen.

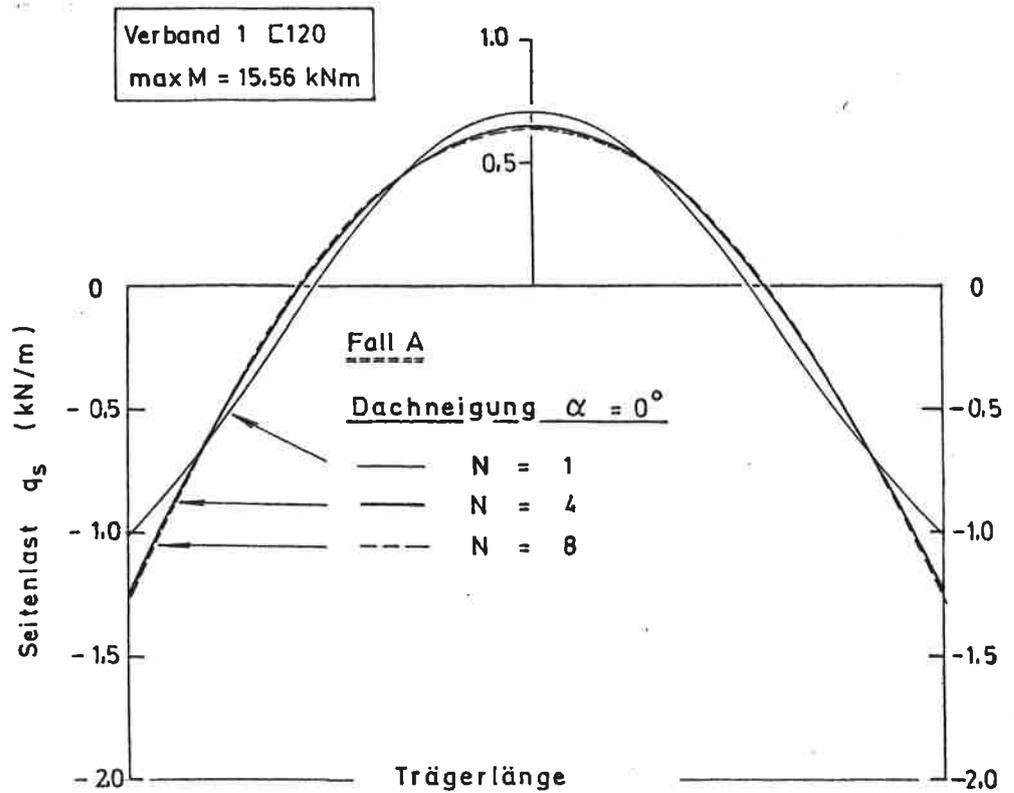


Bild 20: Theoretischer Verlauf der Seitenlast über die Trägerlänge bei 1, 4 und 8 parametrischen Ansatzfunktionen

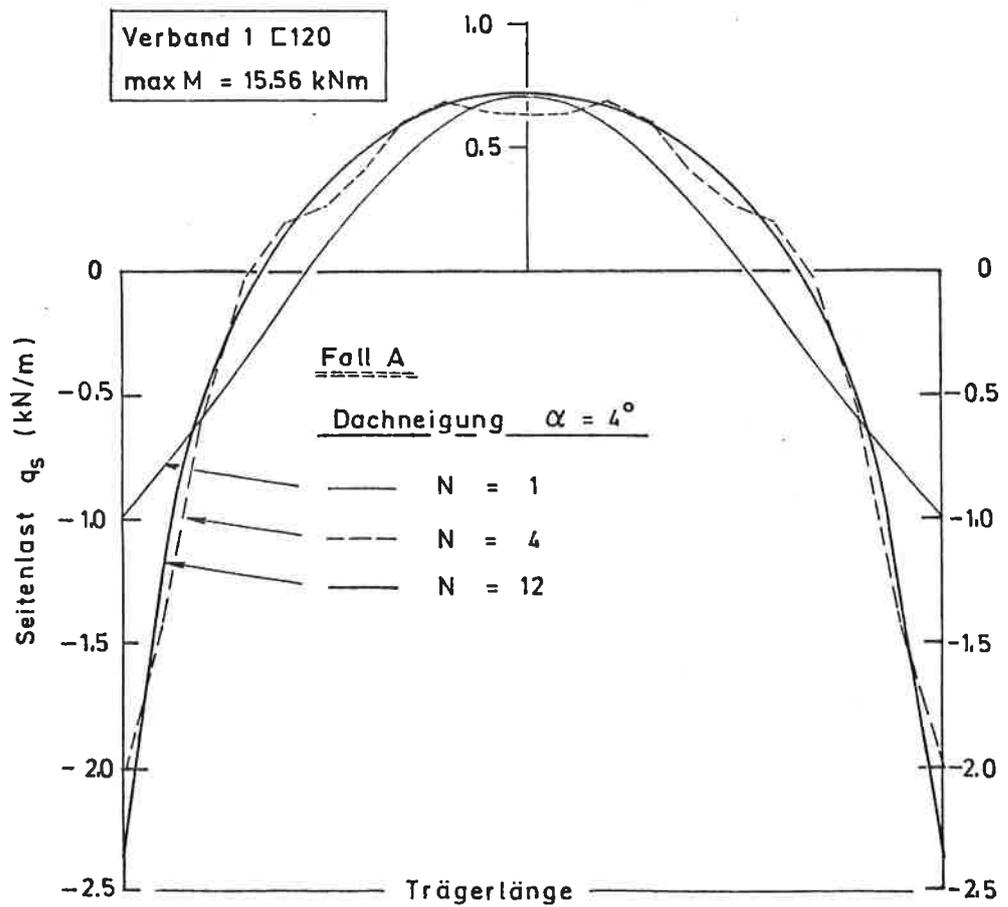


Bild 21: Theoretischer Verlauf der Seitenlast über die Trägerlänge bei 1, 4 und 12 parametrischen Ansatzfunktionen

Einfluß der eingesetzten Materialkonstanten auf das
Ergebnis der Berechnung

Da, wie schon unter Punkt 2.4. angedeutet, die Biegesteifigkeit des Trägers um die y-Achse gegenüber der Verbandssteifigkeit in der Regel vernachlässigbar ist, ist auch der bei der Berechnung der Biegesteifigkeit des Trägers um die y-Achse eingesetzte Elastizitätsmodul E_{\parallel} unkritisch, sodaß auf eine genauere Bestimmung dieses Wertes verzichtet werden konnte.

Um den Einfluß einer möglichen Fehleinschätzung des Torsionsmoduls der Versuchsträger auf das Berechnungsergebnis abzuschätzen, wurden Vergleichsrechnungen durchgeführt, bei denen der nach Möhler/Hemmer [10] errechnete Torsionsmodul in sinnvollen Grenzen (+ - 10%) variiert wurde. Hierbei zeigte sich, wie auch Brüninghoff in [1] aufzeigte, der deutliche Einfluß der Torsionssteifigkeit auf das Kippverhalten. Dabei ist, wie zu erwarten, der Einfluß der Variation des Torsionsmoduls beim steiferen Verband [160 kleiner (15%) als beim weicheren Verband [120 (20%). In Bild 22 sind einige Ergebnisse dieser Vergleichsrechnungen dargestellt. Zudem sind in diesem Bild für den Sonderfall des parallelgurtigen Trägers die nach Brüninghoff errechneten Verdrehungen im Vergleich eingetragen, wobei sich die gute Übereinstimmung mit den nach Abschnitt 2. errechneten Werten zeigt.

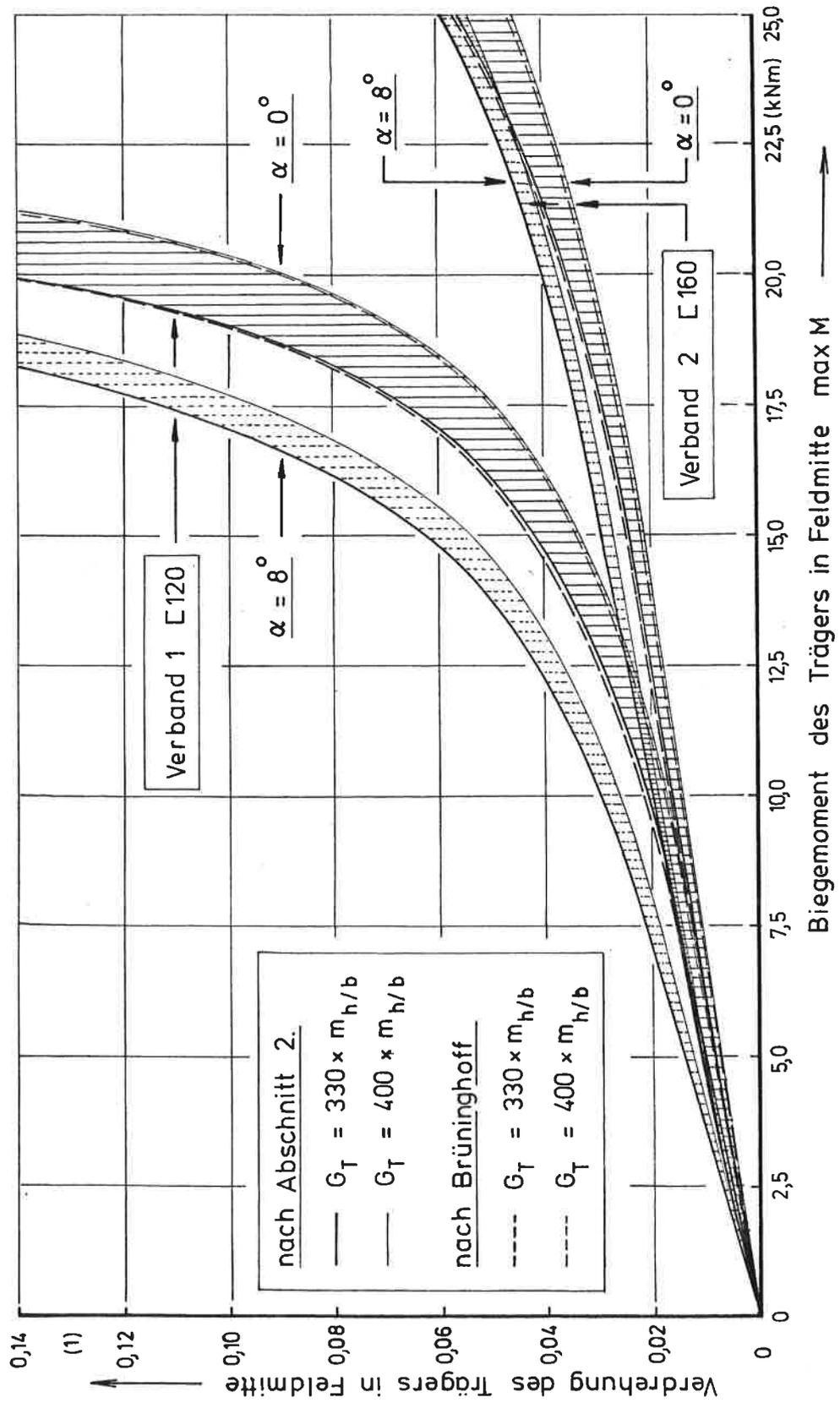


Bild 22: Einfluß des Torsionsmoduls auf die Verformung des ausgesteiften Trägers

Einfluß der für den Verlauf der Verbandangriffslinie
angesetzten Näherungsfunktion auf das Berechnungsergebnis

Wie schon unter Punkt 2.3. dargelegt, mußte bei Satteldachträgern mit Angriff des Verbandes an der Trägersoberkante für den Verlauf der Verbandangriffslinie $s(\xi)$ eine Ersatzfunktion ohne Knick in die Berechnung eingesetzt werden und es wurde die Funktion

$$s = s_0 + \bar{s} \sin \pi \xi \quad (3.14)$$

$$\text{mit: } s_0 = H_0/2 \quad (3.15)$$

$$\bar{s} = 1 \cdot \tan \alpha / 2.6 \quad (3.16)$$

als Ersatzfunktion angegeben.

Der nicht exakt bestimmbare Stich \bar{s} dieser Ersatzfunktion wurde aufgrund theoretischer Überlegungen mehr oder weniger gewählt, konnte jedoch durch den Vergleich von theoretischer Lösung und Versuchsergebnis untermauert werden.

Vergleichsrechnungen, bei denen \bar{s} in den in Bild 22a angegebenen Grenzen (Funktion ① u. ③) variiert wurde, zeigten vor allem bei größer werdenden Dachneigungswinkel und steiferen Verbänden den deutlichen Einfluß dieser Ersatzfunktion auf das Berechnungsergebnis, Dies kann man als Handikap dieser Berechnung ansehen und es wären hier noch weitere Untersuchungen erforderlich.

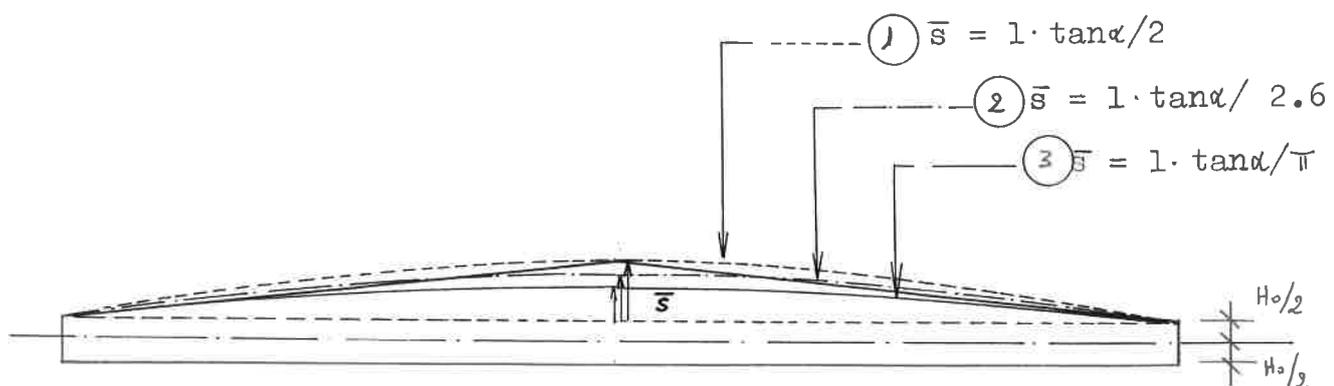


Bild 22a

4. Versuche

4.1. Vorversuche

Um die Durchführbarkeit der geplanten Versuche zu untersuchen und um festzustellen, inwieweit die vorhandenen charakteristischen Kenngrößen mit genügender Genauigkeit meßbar sind, wurden Vorversuche im Modellmaßstab mit Vollholzträgern, welche schon im spannungslosen Zustand eine Vorauslenkung \bar{u}_0 von 1/500 aufwiesen, durchgeführt. In Bild 23 ist der Versuchsaufbau dieser Versuche schematisch dargestellt. Gemessen wurde die Kraft in den "Pfetten" (Seitenlastverteilung), die Verdrehung des Trägers sowie die Durchbiegung des "Verbandes" ([Schiene) in Feldmitte. In den Bildern 24÷26 sind einige Ergebnisse dieser Versuche dargestellt. Die relativ große Streuung der Versuchsergebnisse ist vor allem darauf zurückzuführen, daß sich diese schlanken Vollholzträger trotz längerer Lagerung in der normalklimatisierten Prüfhalle noch nach dem Abhobeln unterschiedlich über die Trägerhöhe krümmten. Ansonsten zeigten die Vorversuche jedoch, daß der gewählte Versuchsaufbau sich zur versuchstechnischen Lösung der vorliegenden Aufgabe eignete.

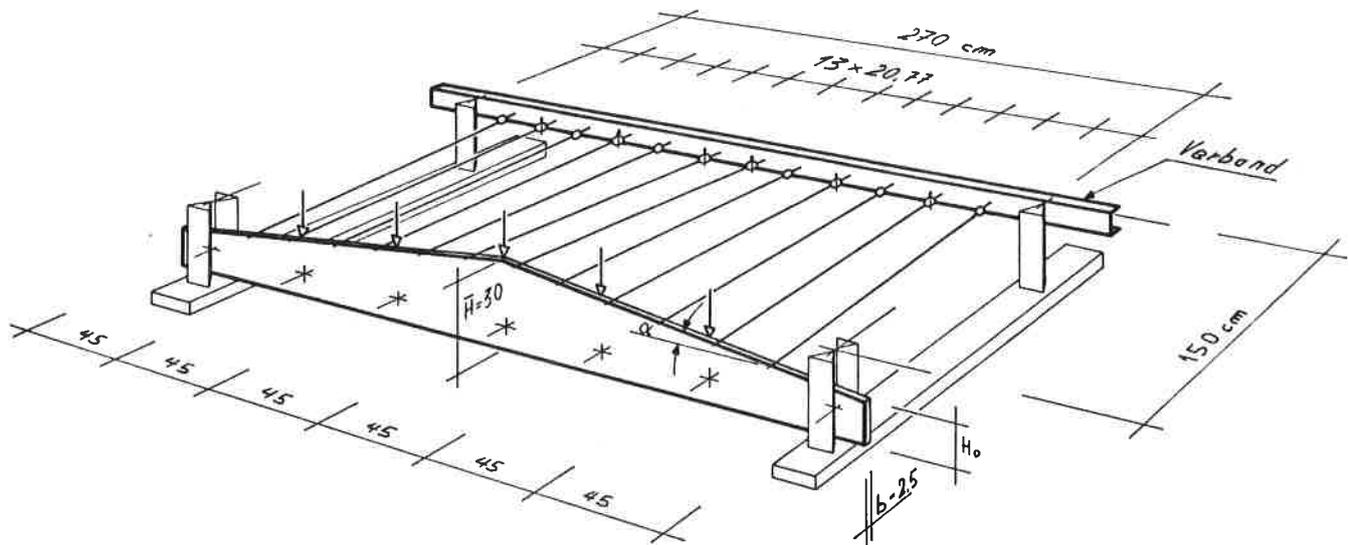


Bild 23: Vorversuche ; Versuchsaufbau und Belastung

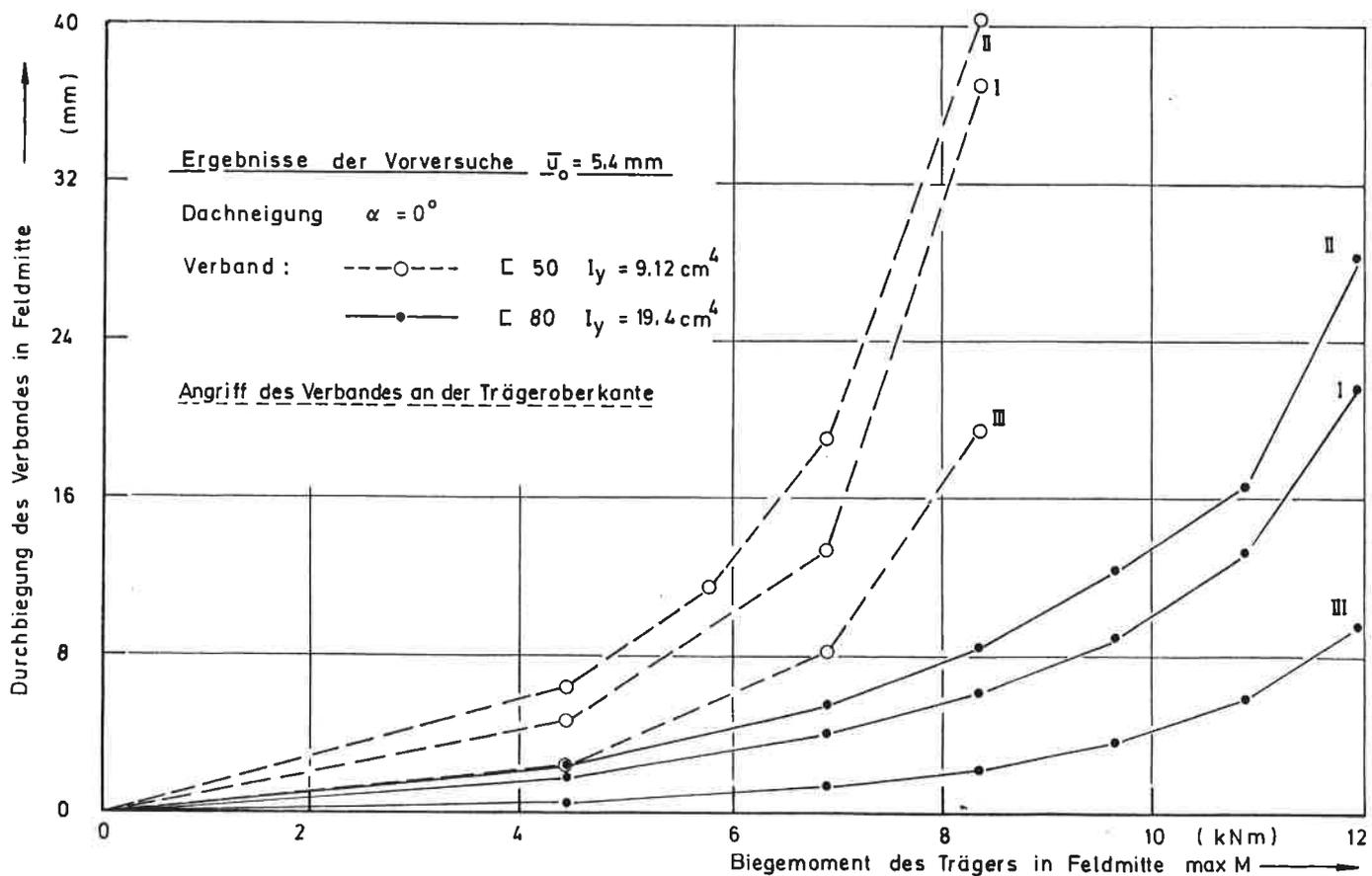


Bild 24 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

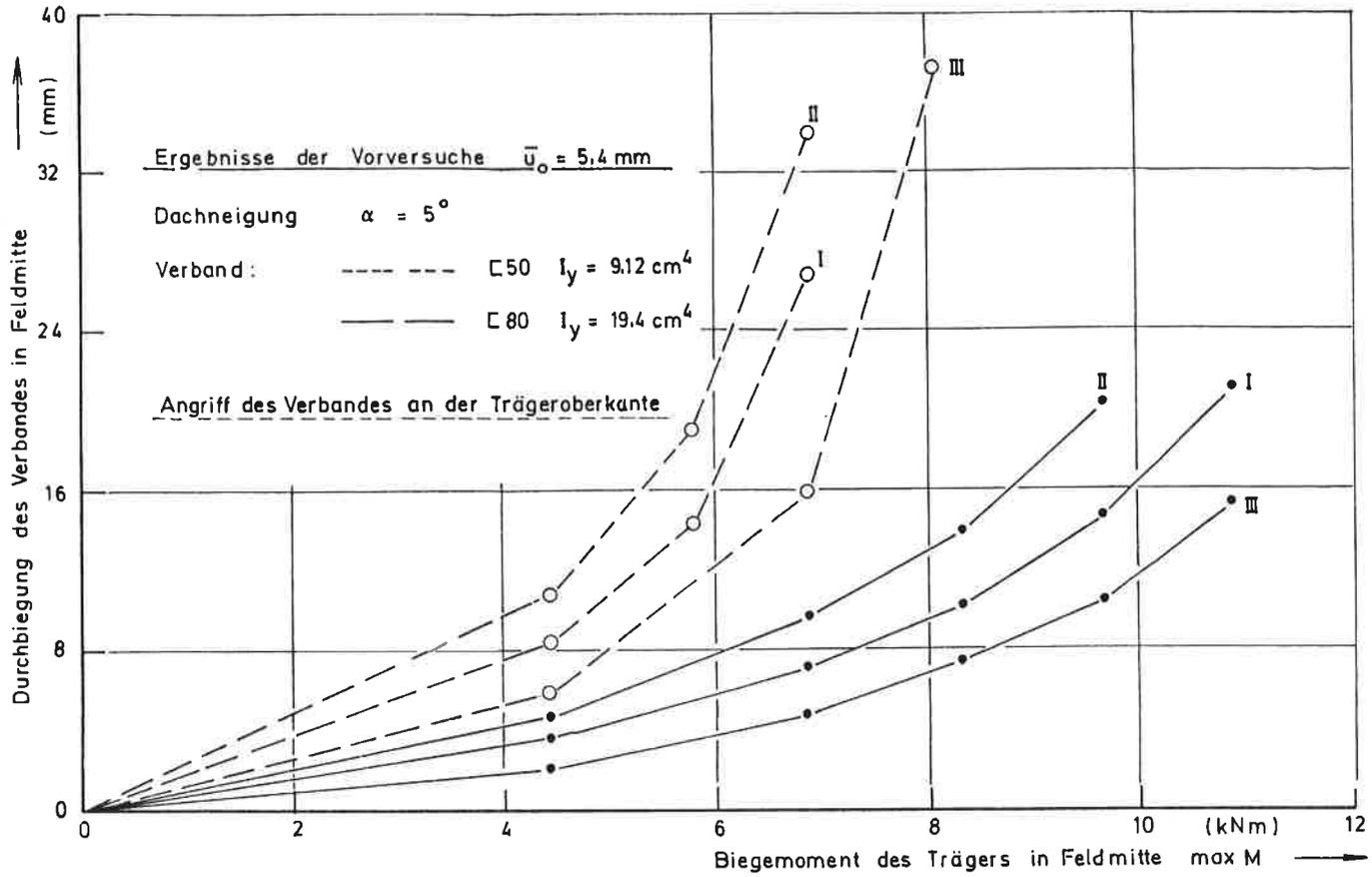


Bild 25: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

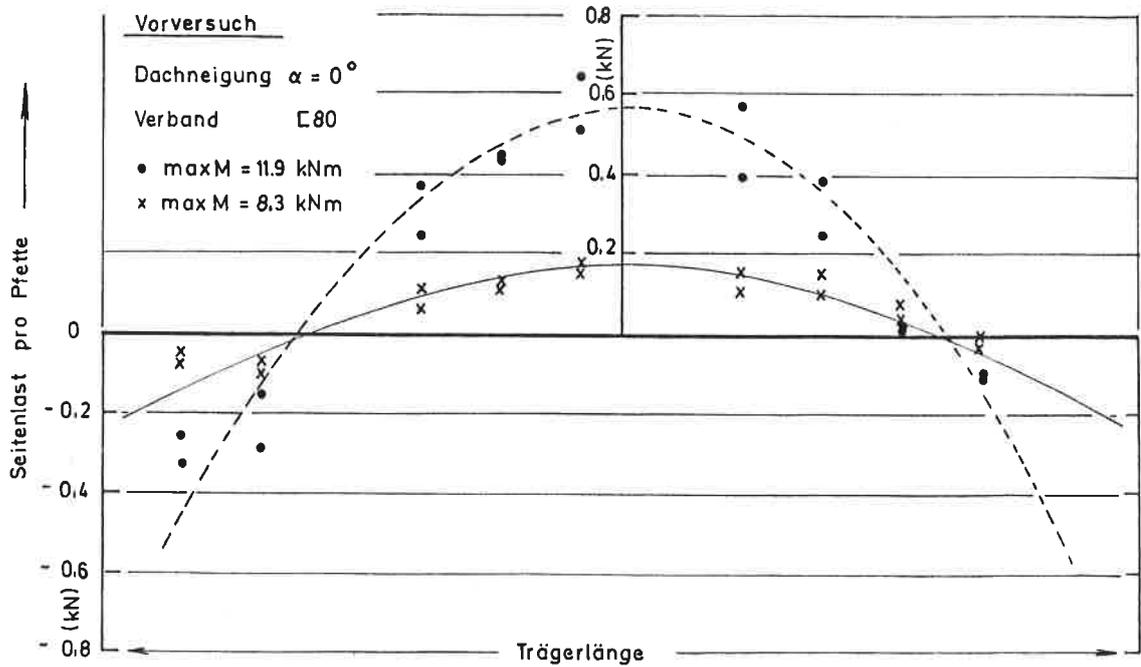


Bild 26: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

4.2. Bemerkungen zur Versuchsplanung

- Wie schon eine Vorberechnung ergab und auch die Vorversuche bestätigten, war zwischen den Versuchen mit parallelgurtigen Trägern und Satteldachträgern gleicher Abmessung und Firsthöhe kein allzu großer Unterschied im Bezug auf die Größe der auftretenden Trägerverdrehungen und Verbandsdurchbiegungen zu erwarten. (ca. 20% bei 5 Dachneigung)
Bei Vergleichsrechnungen, bei denen der angesetzte Torsionsmodul des Trägers um $\pm 10\%$ variiert wurde, zeigten auch schon diese damit errechneten Verformungen je nach Lasthöhe und Steifigkeit des Verbandes Unterschiede in ähnlicher Größenordnung. Dies gab den Anlaß, für die Versuche mit verschiedenen Dachneigungswinkeln jeweils den gleichen Versuchsträger zu benutzen, zumal wie auch die Vorversuche bestätigten, bei den vorgesehenen Lasten nach Entlastung der Träger die Verformungen fast vollkommen auf 0 zurückgehen.

- Da erste Vorversuche zeigten, daß im Bereich der kritischen Last zum Teil schon eine geringe Einspannung des Trägerendes in der Gabel einen deutlichen Einfluß auf die Trägerverdrehung und Verbandsdurchbiegung hatte, wurde eine Kugellagerung der Träger in der Gabel vorgesehen.

- Wegen der aufwendigen Herstellung der Träger wurde auf Versuche mit Trägern, die schon im spannungslosen Zustand eine Vorauslenkung und eine Vorverdrehung aufweisen, verzichtet. Es wurden somit nur Versuche mit vorausgelenkten Trägern geplant, wobei als Stich der Vorauslenkung $\bar{u}_0 \sim 1/500$ vorgesehen wurde. Die Vorauslenkung wurde dadurch hergestellt, daß der Träger aus einem Träger größerer Breite herausgehobelt wurde, so daß sich ein über die Trägerlänge seitlich gekrümmter Träger ergab. (siehe Bild 27)

- Bei der Dimensionierung der Aussteifungsverbände wurde von folgenden Kriterien ausgegangen:

Ein Verband sollte bei 1.75 facher zulässigen Trägerbelastung nur eine Durchbiegung von ca. $1/600$ aufweisen.

(Mindeststeifigkeit des Verbandes)

Der mit dem 2. Verband ausgesteifte Träger sollte bis in den Bereich der Instabilität belastet werden können und dabei noch eine ausreichende Sicherheit gegen den Bruch aufweisen.

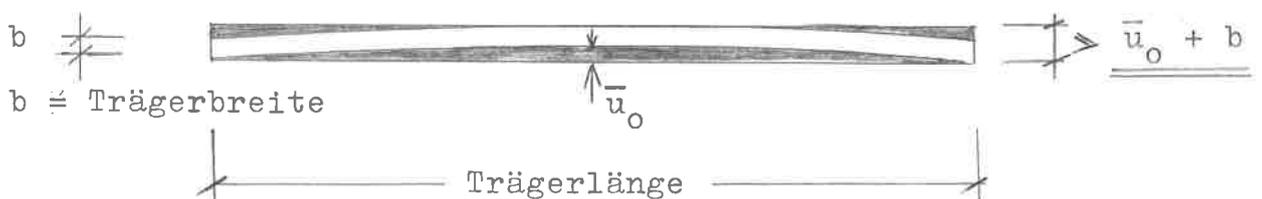


Bild 27

4.3. Hauptversuche

In Tabelle 1 sind alle durchgeführten Hauptversuche zusammengestellt und bezeichnet. Für die Versuche mit $\alpha=0$; $\alpha=4$; und $\alpha=8^\circ$ Dachneigung wurden jeweils die gleichen 4 Versuchsträger benutzt. Die Abmessungen der Versuchsträger sind in Bild 28 dargestellt.

An Proben, die nach den Versuchen aus verschiedenen Trägerbereichen herausgeschnitten wurden, wurden folgende Eigenschaftswerte ermittelt:

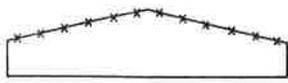
| | | |
|------------------|------------------------|------------------------|
| Holzfeuchtigkeit | u | 11,1 % |
| Rohdichte | S_N | 432 kg/m ³ |
| Druckfestigkeit | Probengröße | 3/3/6 cm |
| | $\beta_{D\parallel}$ | 45,4 N/mm ² |
| | $\beta_{D15\parallel}$ | 37,2 N/mm ² |

Die angegebenen Werte sind jeweils Mittelwerte aus 32 Versuchen.

Die Biegesteifigkeit der verwendeten "Verbände" ([-Schienen) wurde im 4 Punkt-Biegeversuch bei einer Stützweite von 3.9 m ermittelt. Es ergaben sich folgende Werte:

| Verband | Biegesteifigkeit B (kNm ²) | |
|---------|--|---------------------|
| | aus Versuch | aus Tabellen EI_y |
| 120 | 86,5 | 90,72 |
| 160 | 180,0 | 179,13 |

Tabelle 1: Zusammenstellung und Bezeichnung der Hauptversuche

| Versuchskörper | Dachneigung | Verband | Angriff des Verbandes | Bezeichnung des Versuchs |
|----------------|-------------|---------|--|--------------------------|
| I ÷ IV | 0° | C 120 |  an der Trägeroberkante | 0/120 |
| | 0° | C 160 | | 0/160 |
| | 4° | C 120 | | 4/120 |
| | 4° | C 160 | | 4/160 |
| | 8° | C 120 | | 8/120 |
| | 8° | C 160 | | 8/160 |
| I und II | 4° | C 120 |  in Traufpunkthöhe | 4/120/const. |
| | 4° | C 160 | | 4/160/const. |

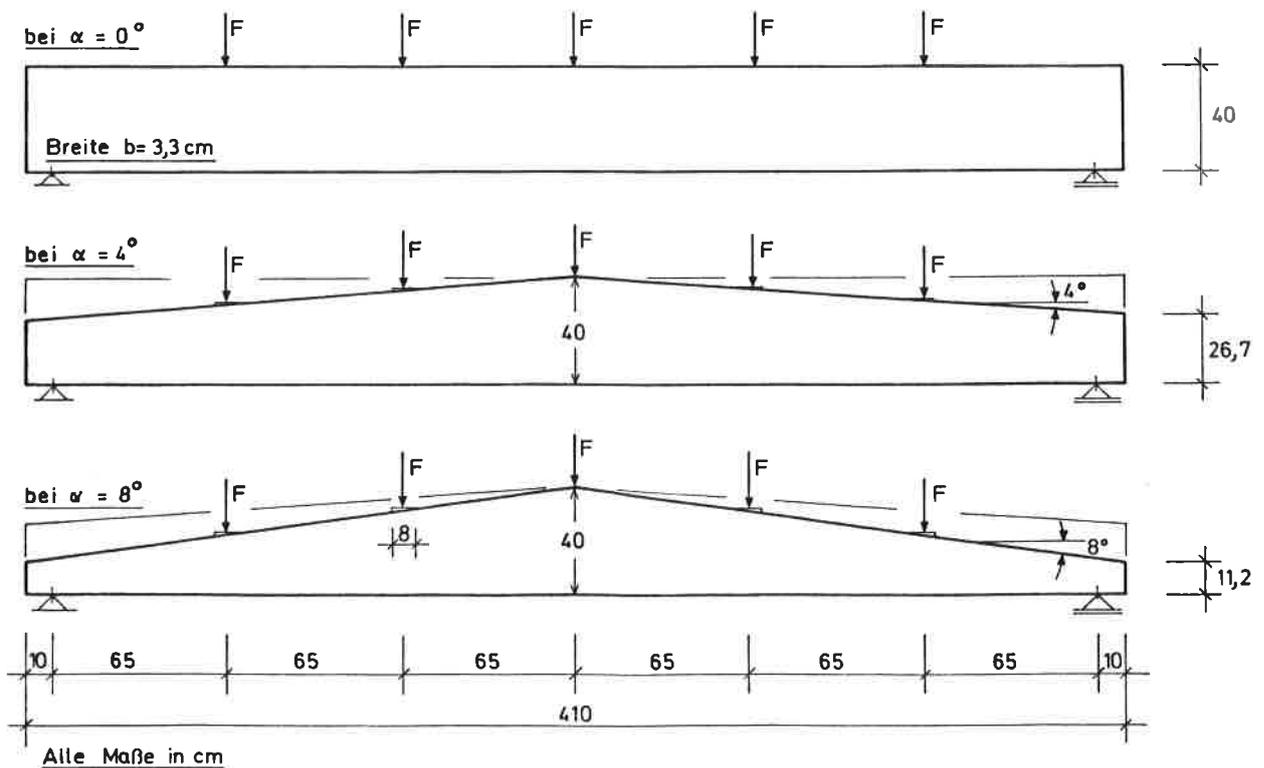


Bild 28: Abmessungen der Versuchskörper I ÷ IV ; Vorauslenkung: $\vec{u}_0 = 8 \text{ mm}$

Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung und Meßvorrichtung

Der Versuchsaufbau mit den Abmessungen ist in Bild 29 schematisch dargestellt. Die Gabellagerung war, wie schon unter 4.2 bemerkt, mittels Kugellager (Foto 1) ausgeführt. Die Träger wurden über "Pfetten" (Stahlstangen \varnothing 16 mm) alle 30 cm mit dem Verband verbunden. Dabei war der Verband bei den Versuchen mit den Satteldachträgern (4° und 8° Dachneigung) und Angriff des Verbandes an der Trägeroberkante ca. 6.5 cm unterhalb des Firstpunktes angeordnet, was, um die daraus bedingte Neigung der Pfetten gering zu halten, den relativ großen Abstand zwischen Verband und Träger erforderlich machte.

Die Belastung der Träger erfolgte in verschiedenen Laststufen über Hebelarme, wobei auf eine zentrische Lasteinleitung in den Träger auch bei dessen Verdrehung geachtet wurde. Die in den einzelnen Versuchen aufgebrachten Lasten mit den dazugehörigen rechnerischen Biege- und Schubspannungen sind in Bild 30 grafisch dargestellt.

Die Verformungen des Trägers und des Verbandes in Feldmitte wurde bei den einzelnen Laststufen mittels induktiver Wegaufnehmer gemessen. Die Kräfte in den Pfetten d.h. die Seitenlasten wurden durch speziell für diese Versuche entwickelten Kraftmeßbringe aufgenommen, die wie in Bild 31

dargestellt, zwischen Verband und Pfette angeordnet waren. Die maximale Stauchung bzw. Streckung dieser Meßbringe betrug bei den in diesen Versuchen aufgetretenen größten Kräften von ca. $0.8 \text{ kN/Ring} \sim 1.5 \text{ mm}$.

Um die erforderliche gleichmäßige Anschlußsteifigkeit aller Pfetten zu erhalten, waren auch die Pfetten, an denen kein Kraftmeßring angeordnet war, über Ringe gleicher Steifigkeit an den Verband angeschlossen.

In Bild 32 sind noch einige Konstruktionsdetails des Versuchsaufbaus dargestellt. Die Fotos 2÷5 zeigen anschaulich den gesamten Versuchsaufbau.

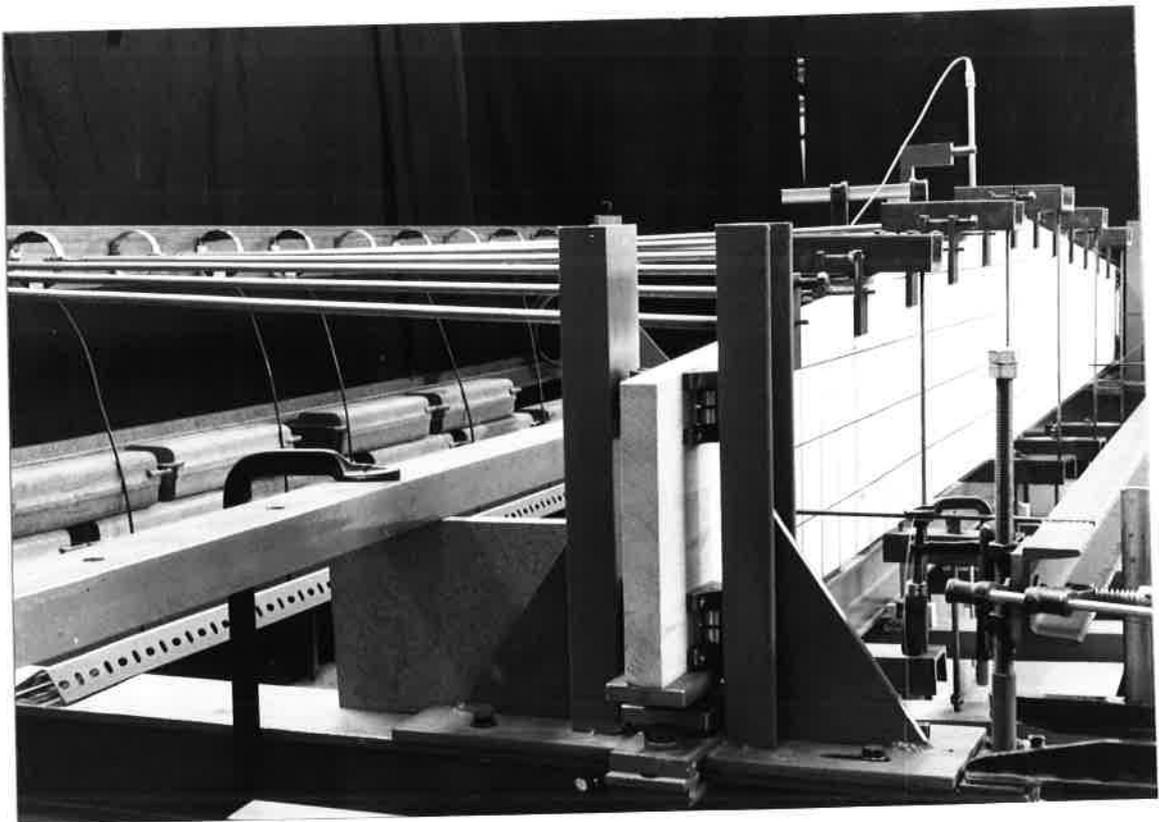
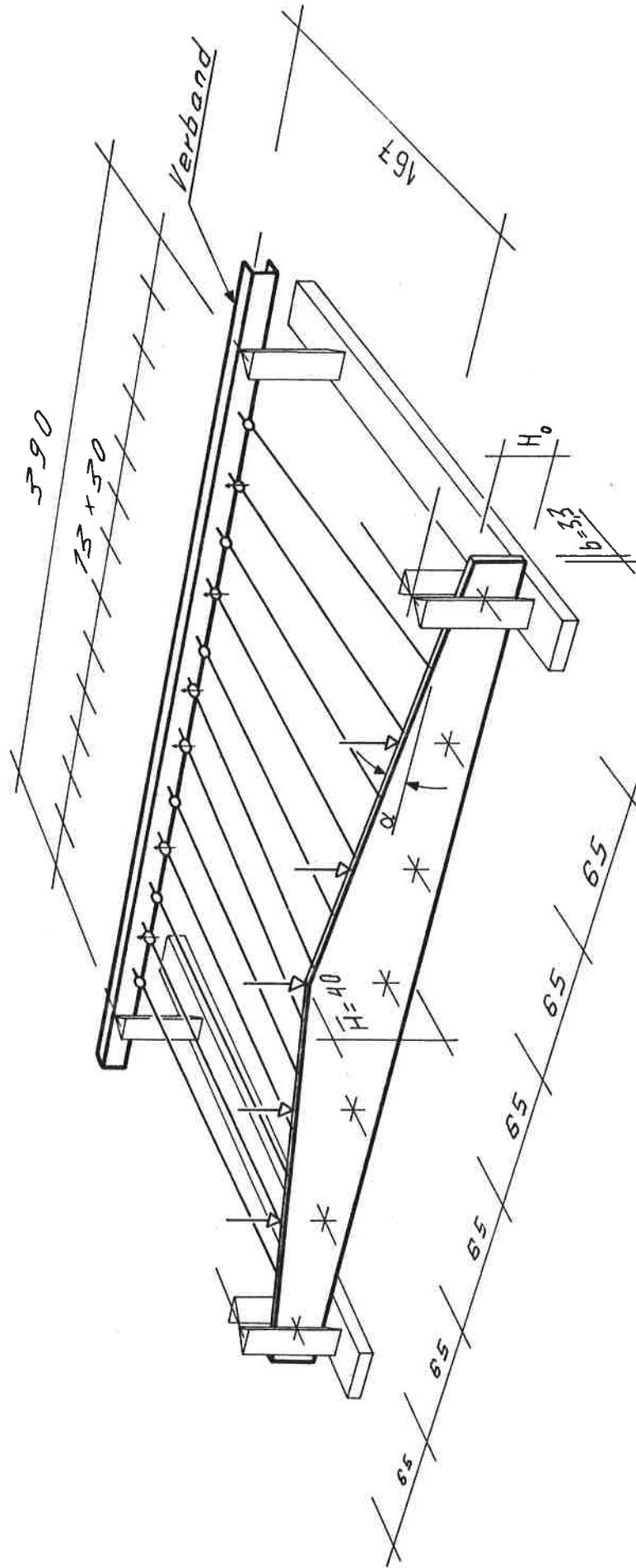


Foto 1 Gabellagerung mit Kugellagern



alle Maße in cm

Bild 29: Hauptversuche : Versuchsaufbau und Belastung

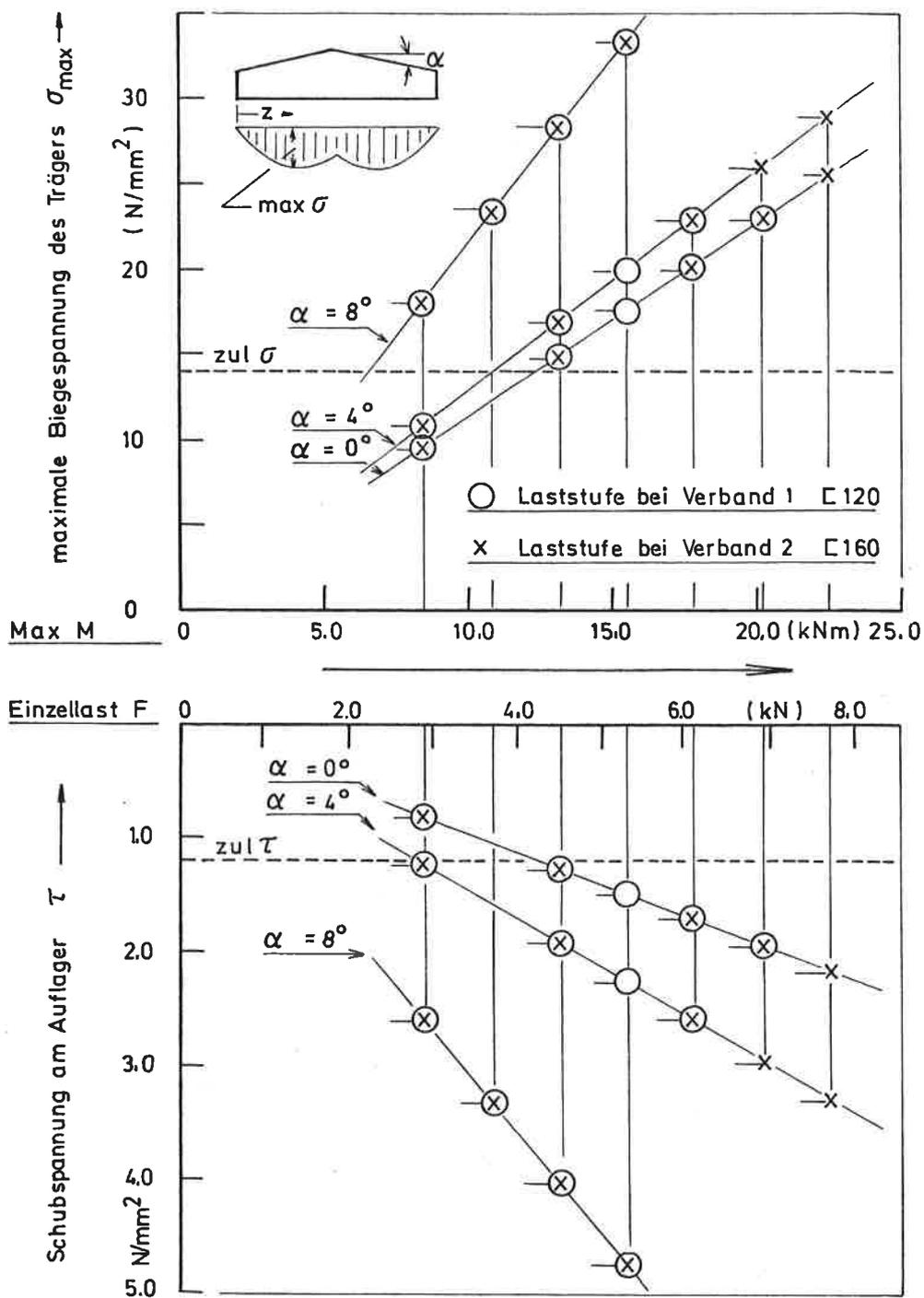


Bild 30 : Darstellung der bei den einzelnen Versuchen aufbrachten Belastungen mit den dazugehörigen rechnerischen Biege- und Schubspannungen

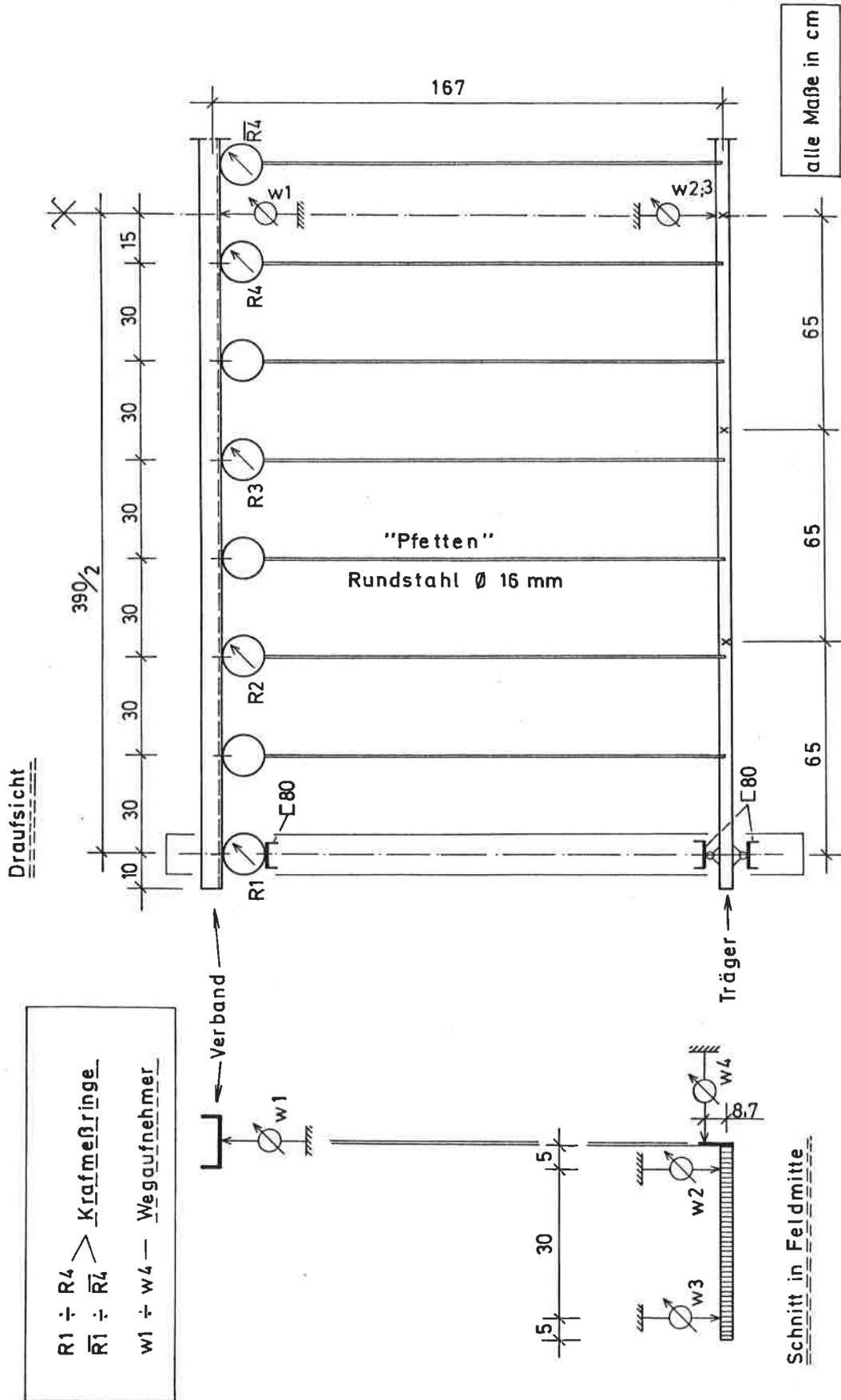
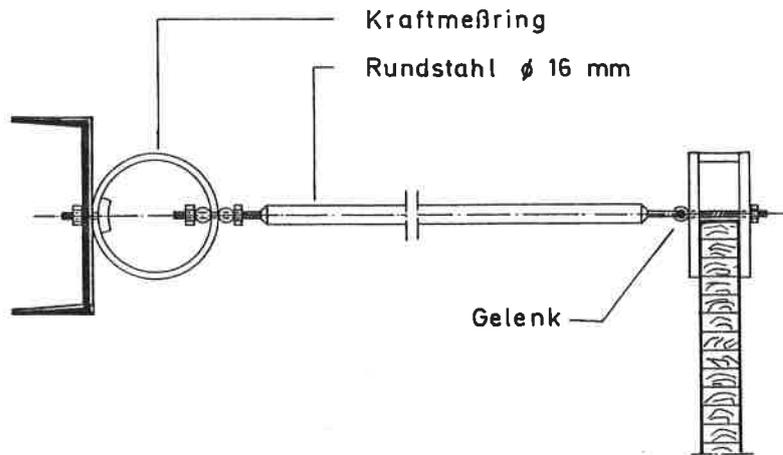


Bild 31 : Versuchsaufbau und Anordnung der Meßvorrichtung

Verbindung Verband – Träger



Lasteinleitung

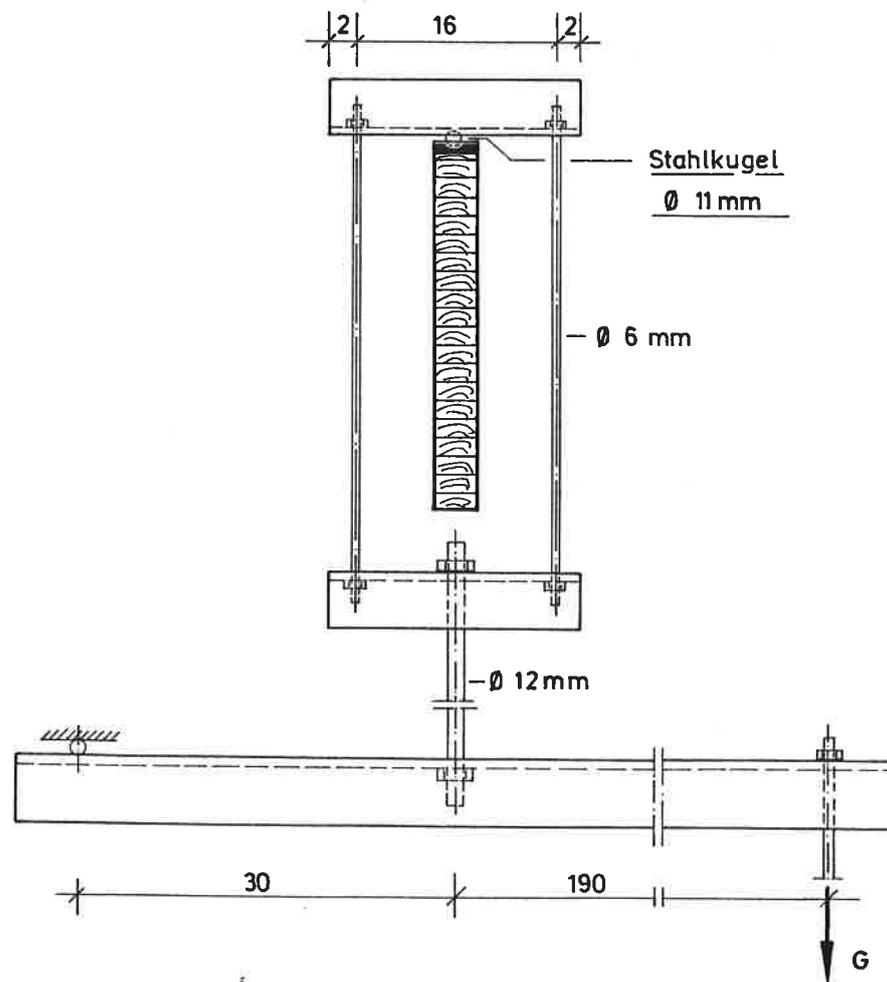


Bild 32: Details des Versuchsaufbaus

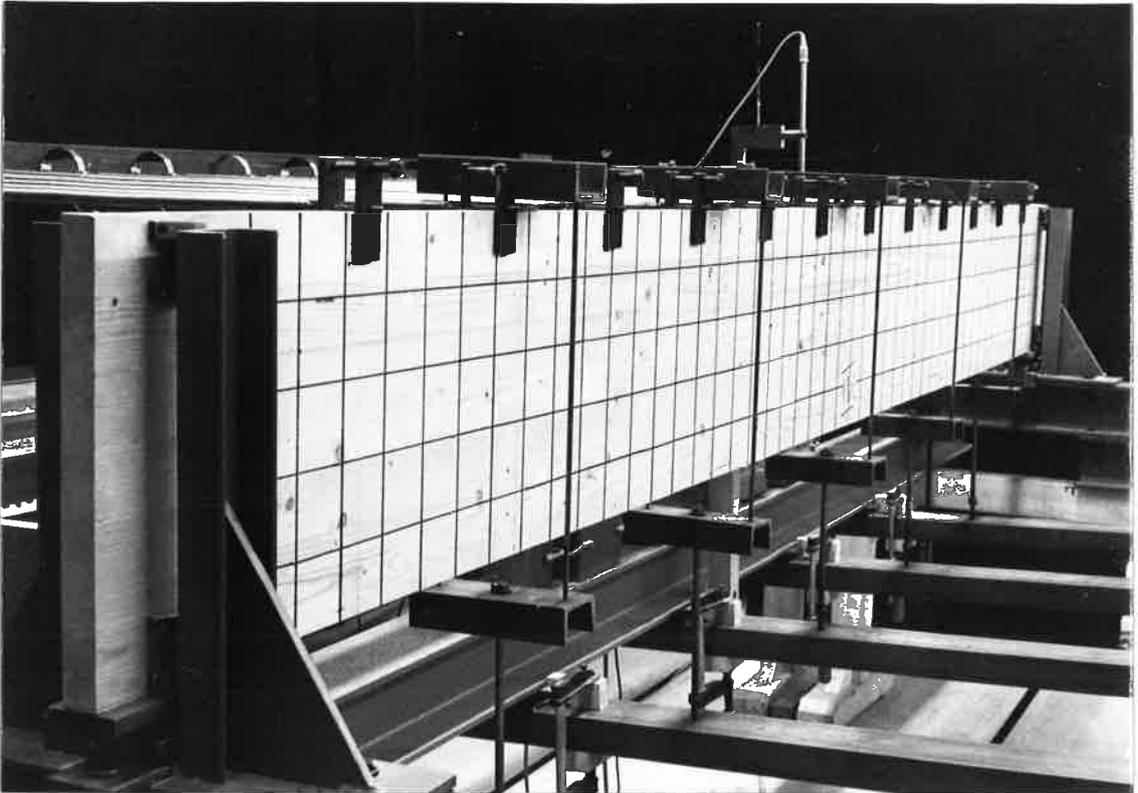


Foto 2 Versuchsaufbau: parallelgurtiger Träger

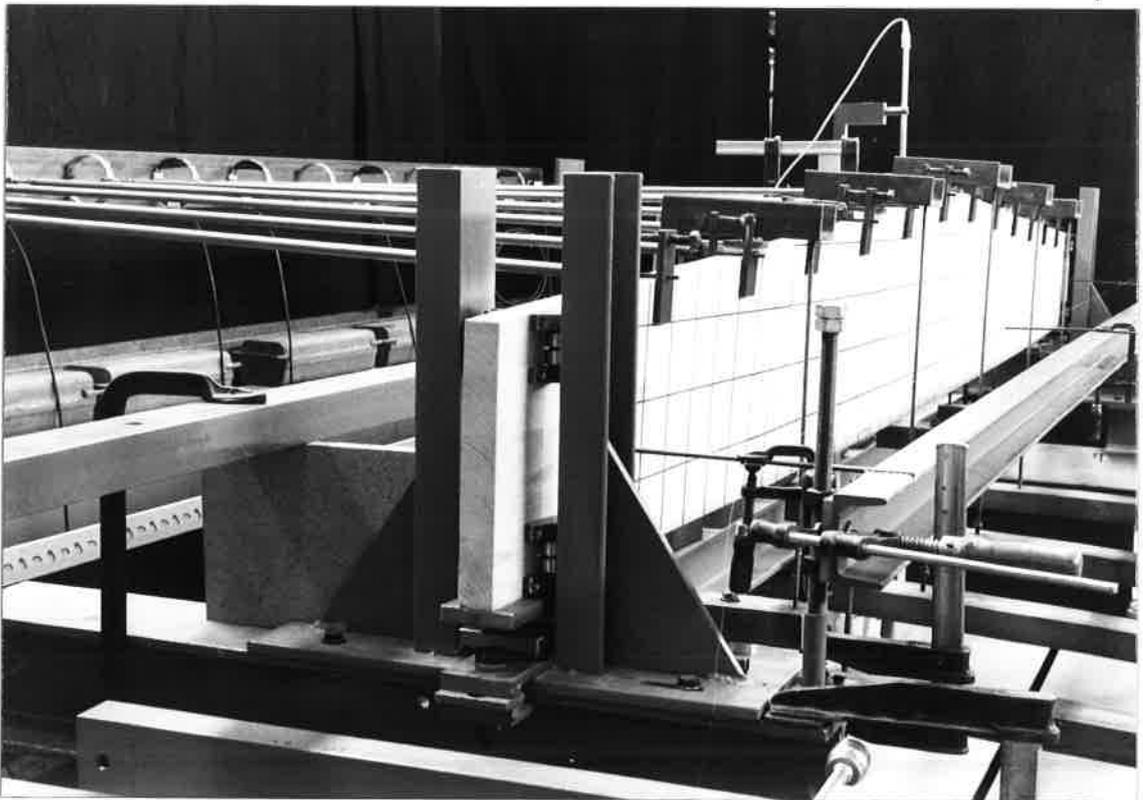


Foto 3 Versuchsaufbau: Satteldachträger $\alpha=4^\circ$
unter Belastung

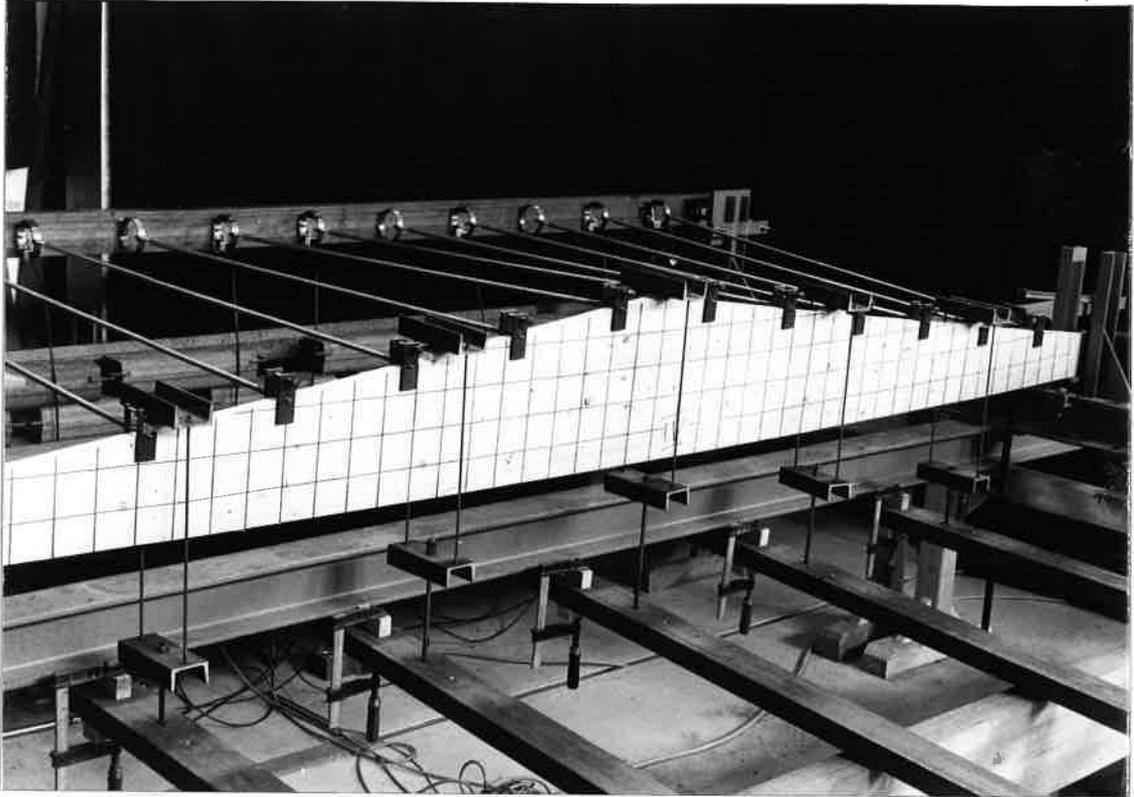


Foto 4 Versuchsaufbau: Satteldachträger $\alpha = 8^\circ$
unter Belastung

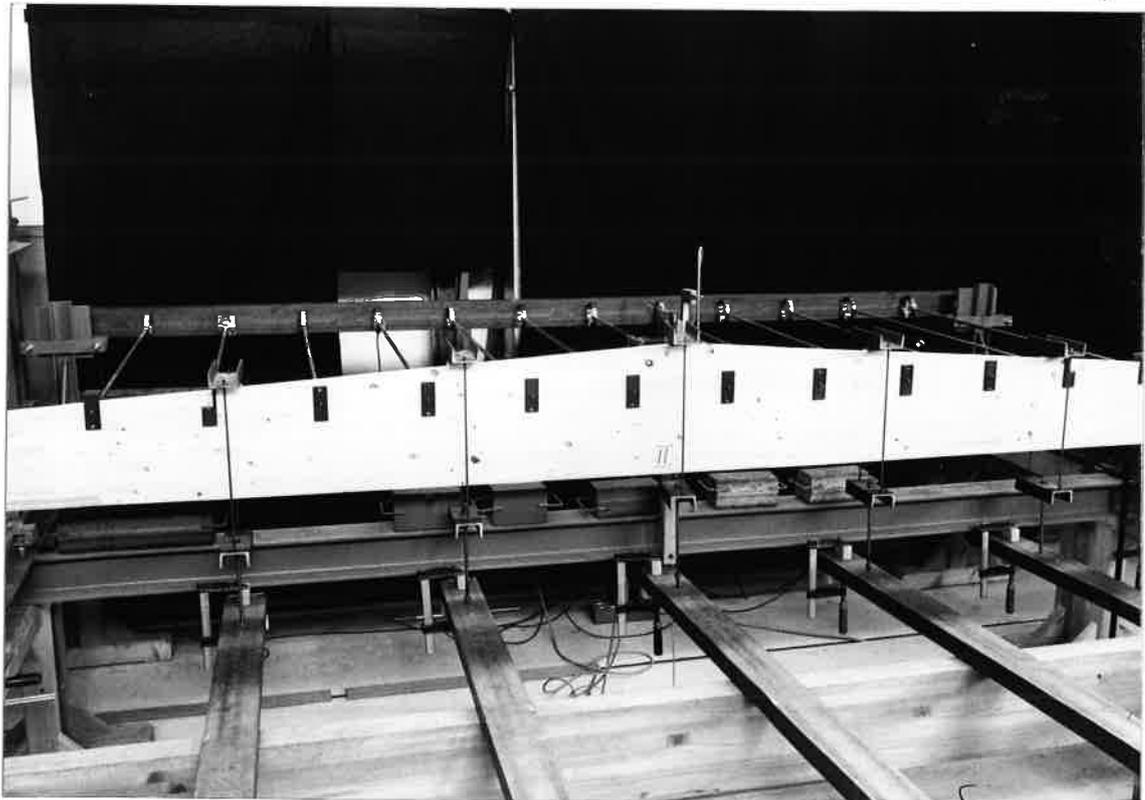


Foto 5 Versuchsaufbau: Satteldachträger $\alpha = 4^\circ$
Angriff des Aussteifungsverbandes in Traufpunkthöhe

Versuchsergebnisse

In den Bildern 34÷45 sind die bei den einzelnen Versuchen gemessenen Verformungen d.h. die Verdrehung der Träger in Feldmitte und die Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung aufgezeichnet.

Die gemessenen Seitenlasten sind beispielhaft bereits in den Bildern 14÷18 Seite 30÷34 im Vergleich mit der theoretischen dargestellt.

In Bild 46 ist die Absenkung der Trägerfirstpunkte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung aufgetragen.

Es handelt sich hierbei jeweils um die Mittelwerte aus den entsprechenden Versuchen. Bei der Auswertung dieser Werte wurde der aus der exzentrischen Messung, der horizontalen Verschiebung des Firstpunktes und der Trägerverdrehung entstandene Meßfehler Δ berücksichtigt.

(siehe hierzu Bild 33)

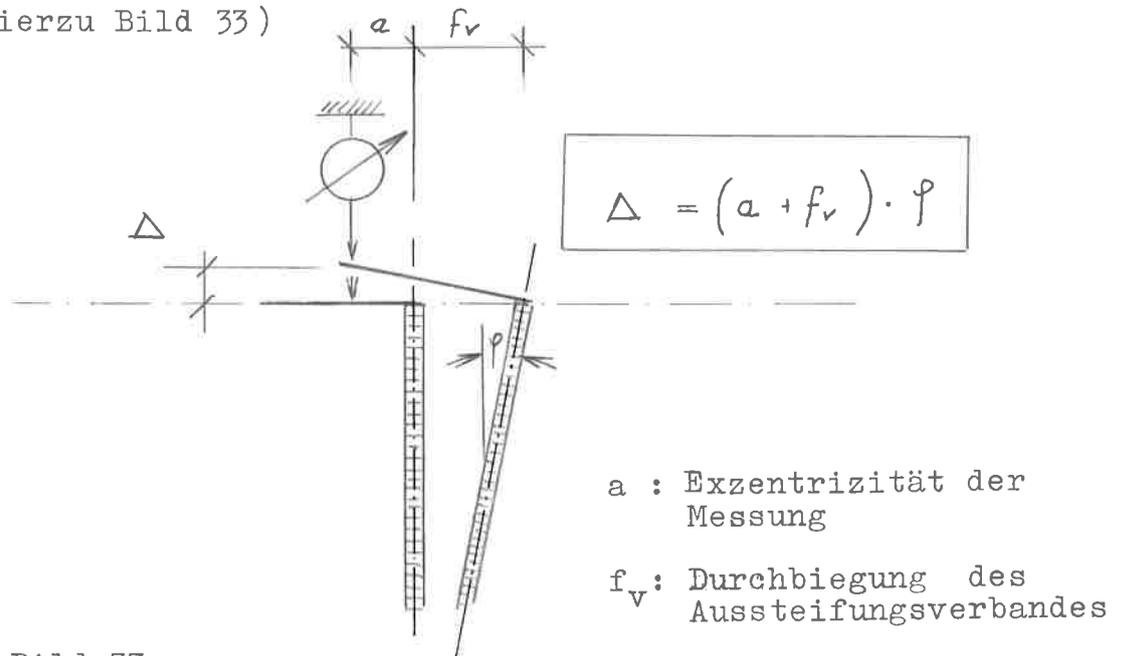


Bild 33

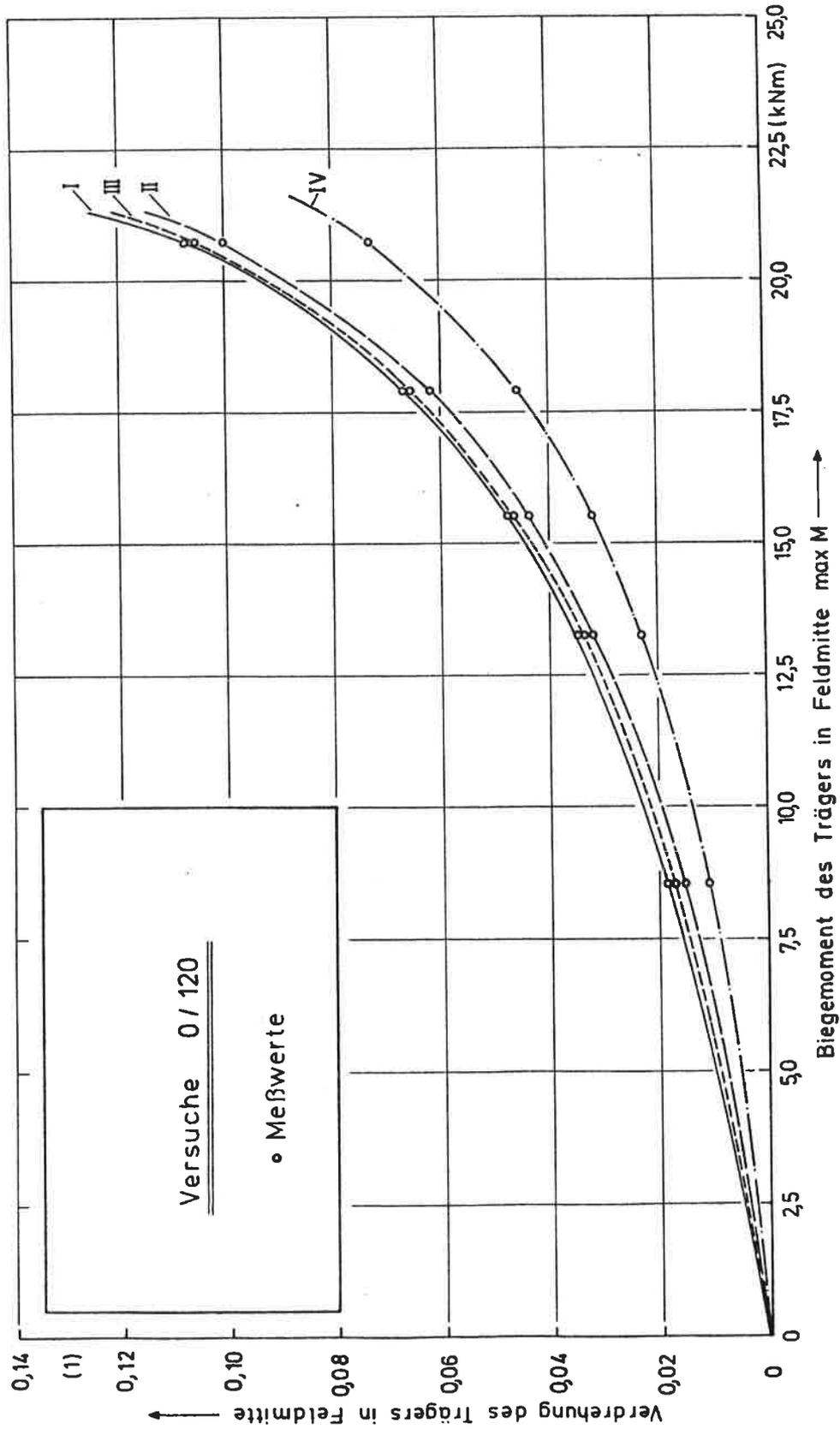


Bild 34 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

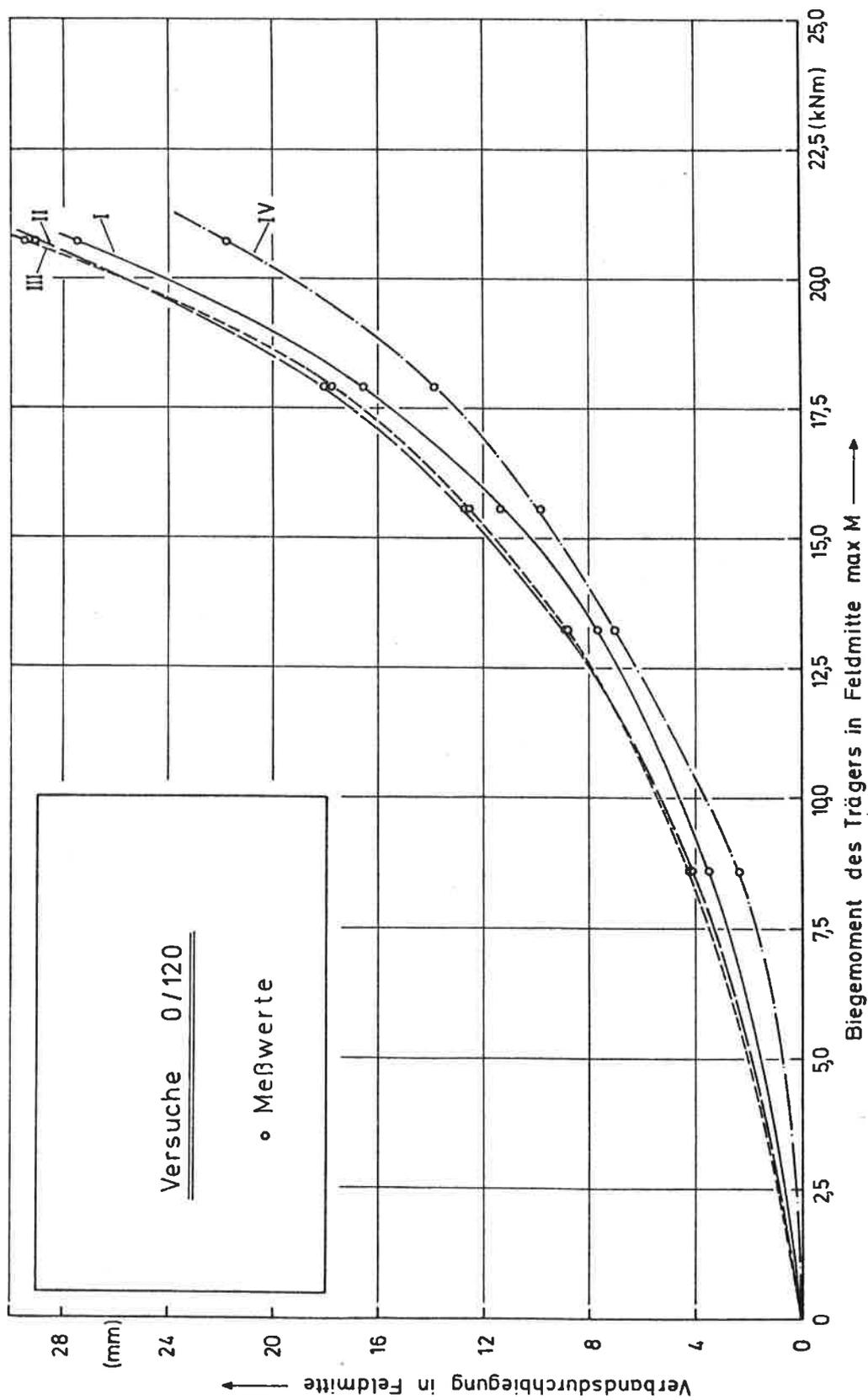


Bild 35 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

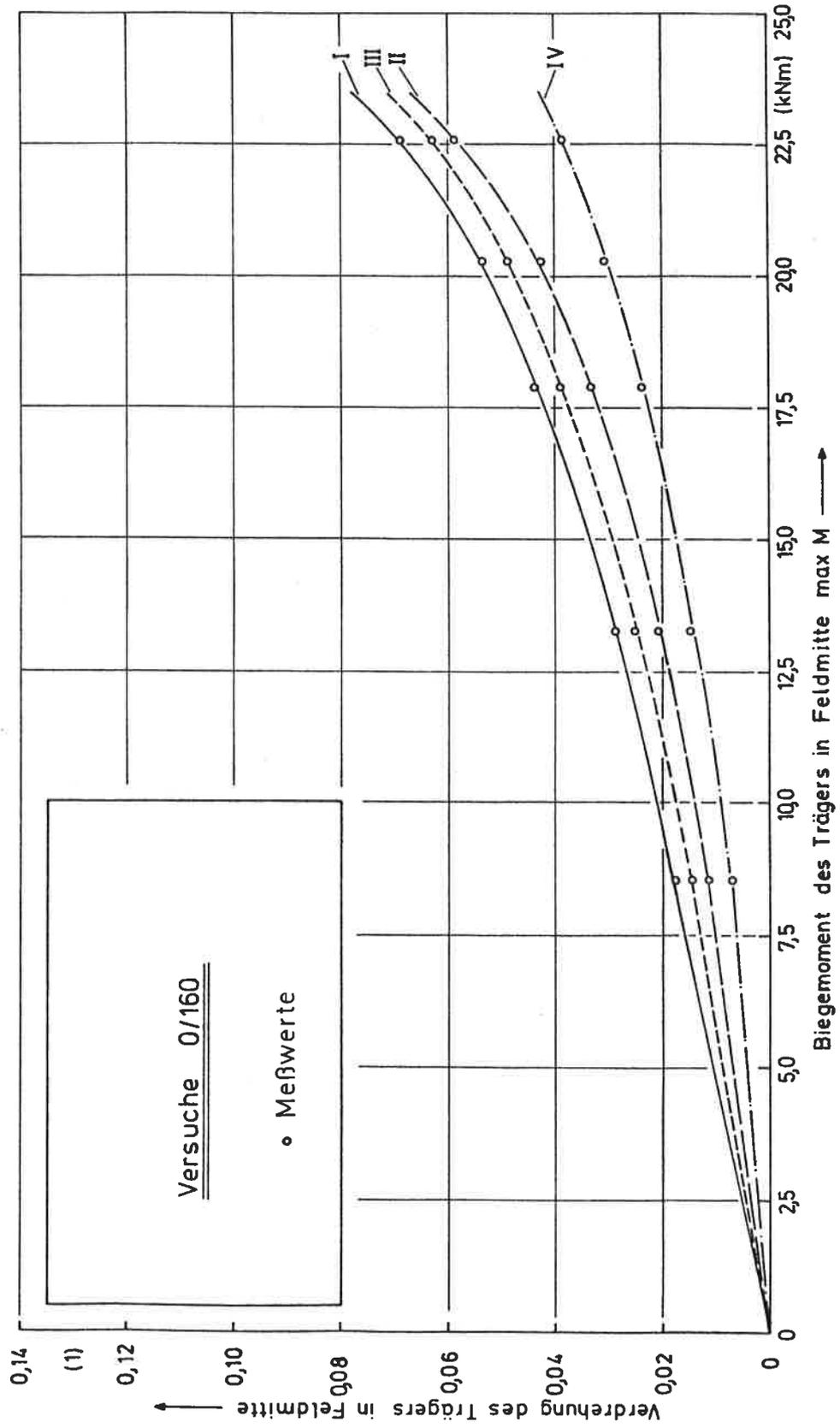


Bild 36: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

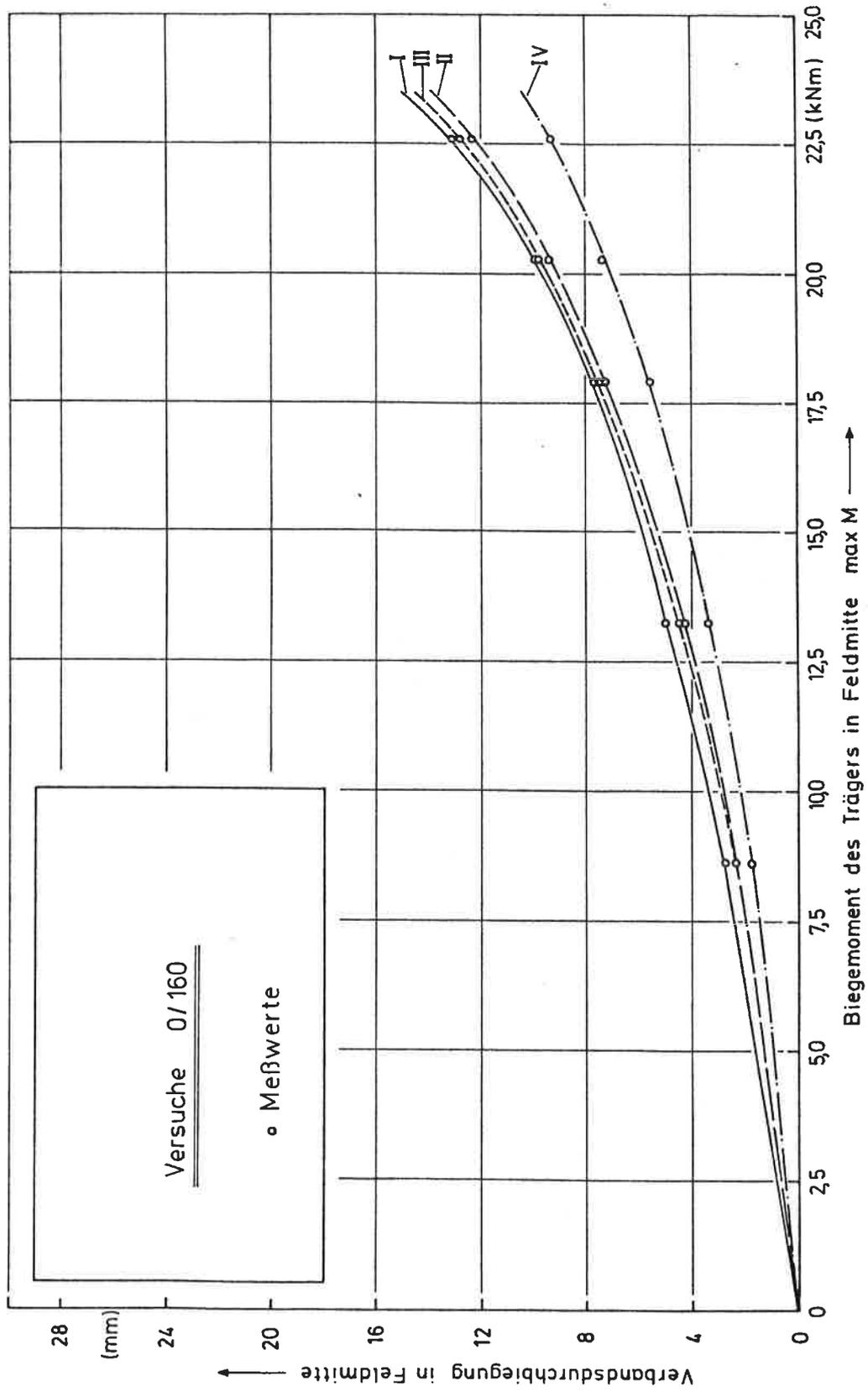


Bild 37: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

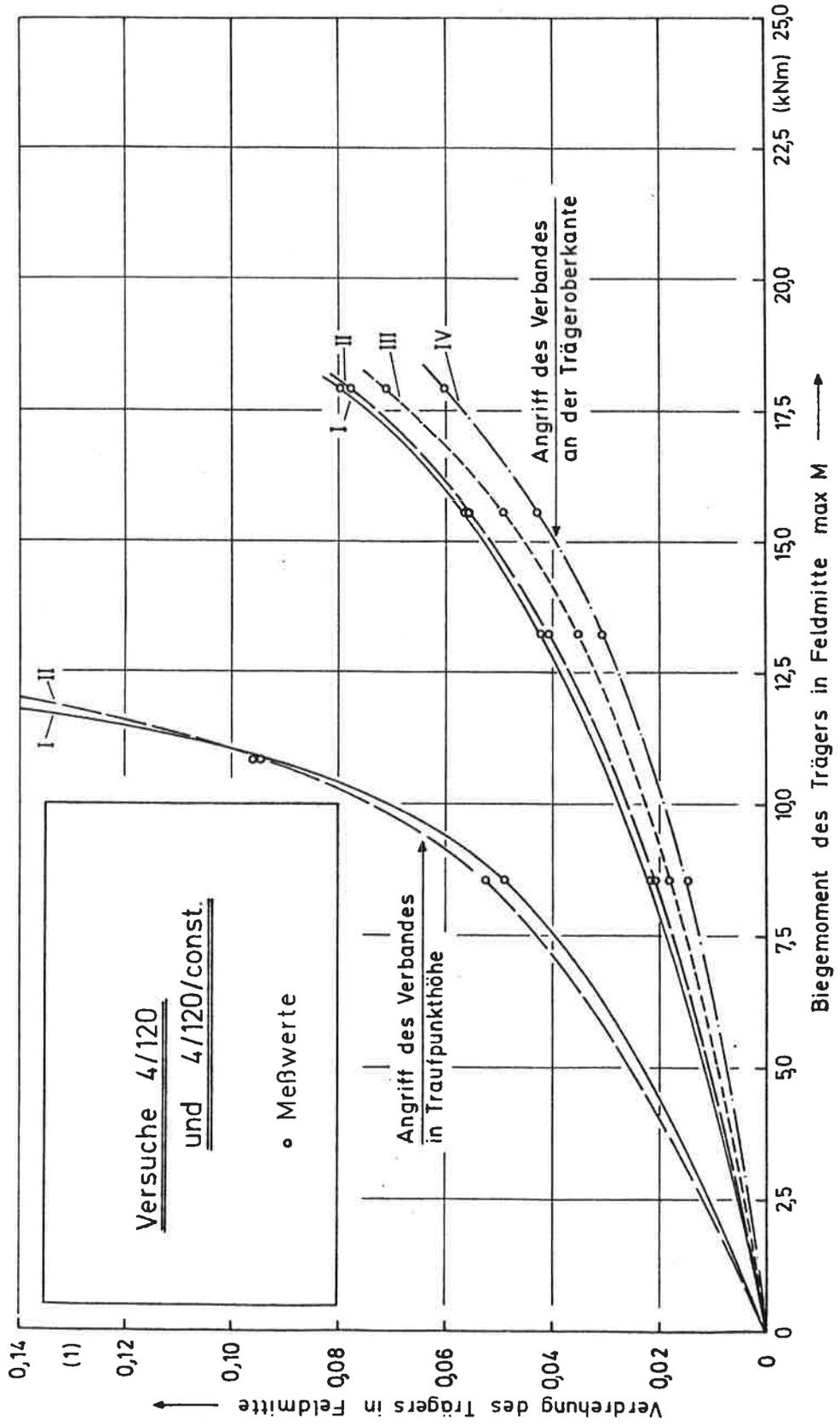


Bild 36 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

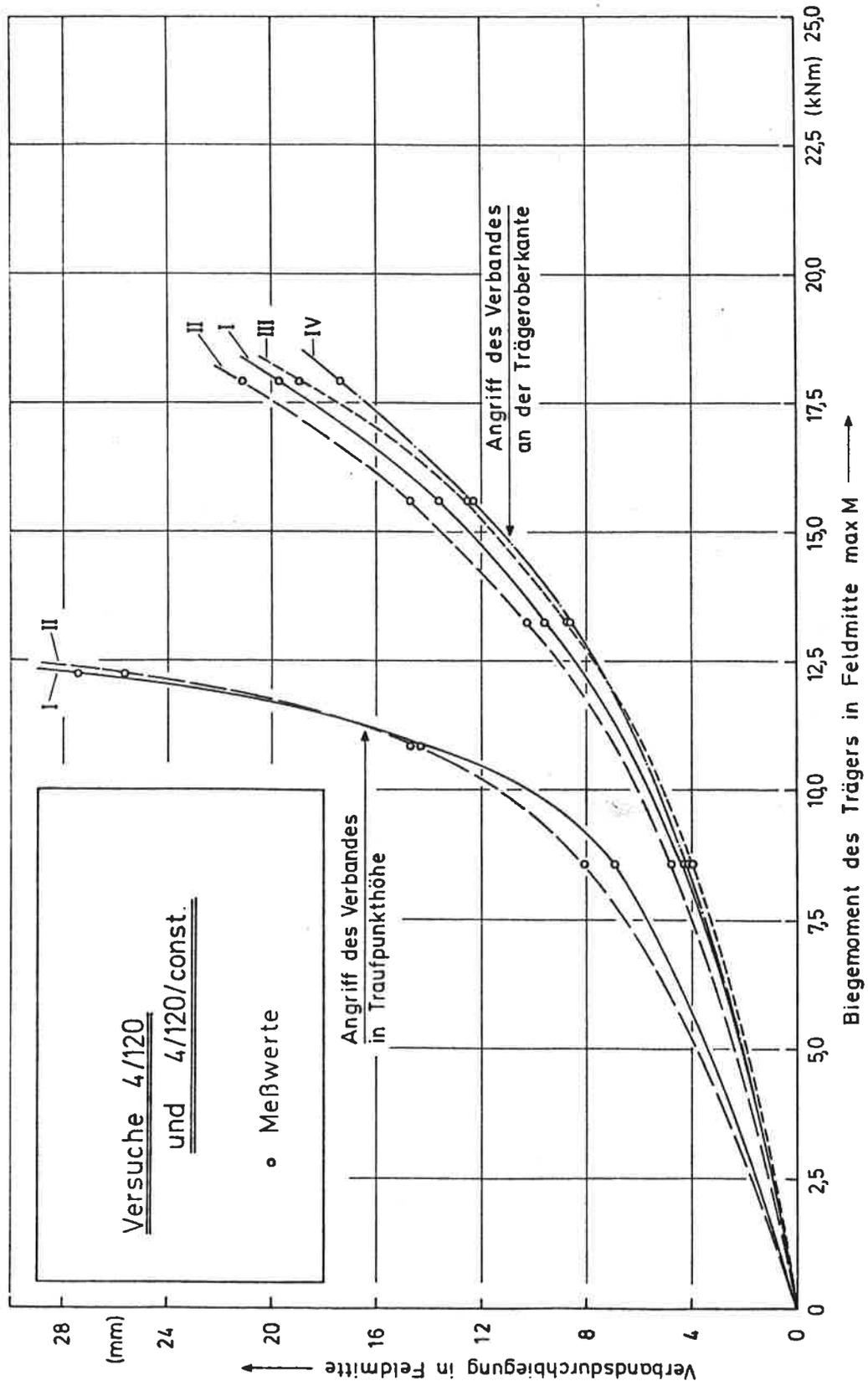


Bild 39: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

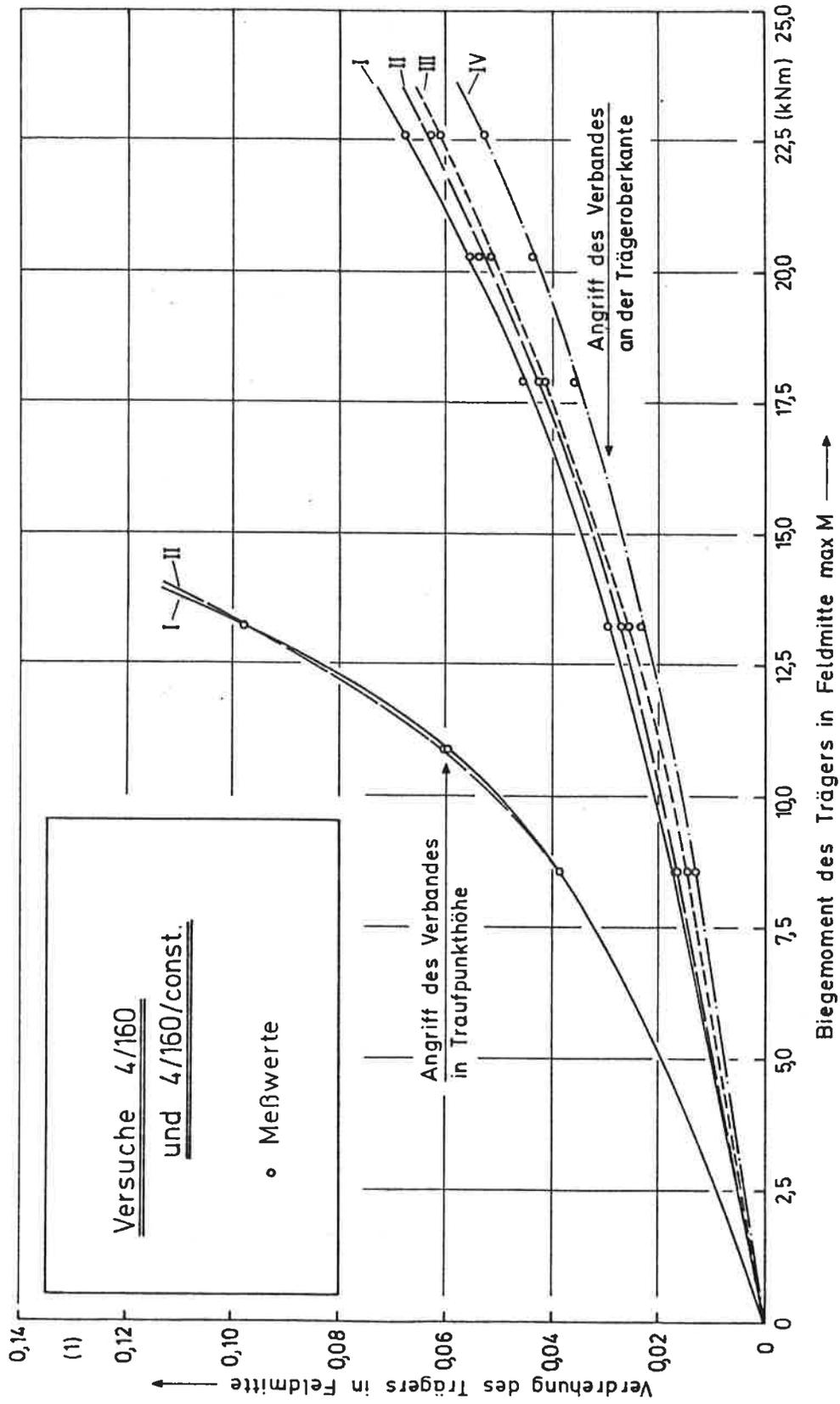


Bild 40 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

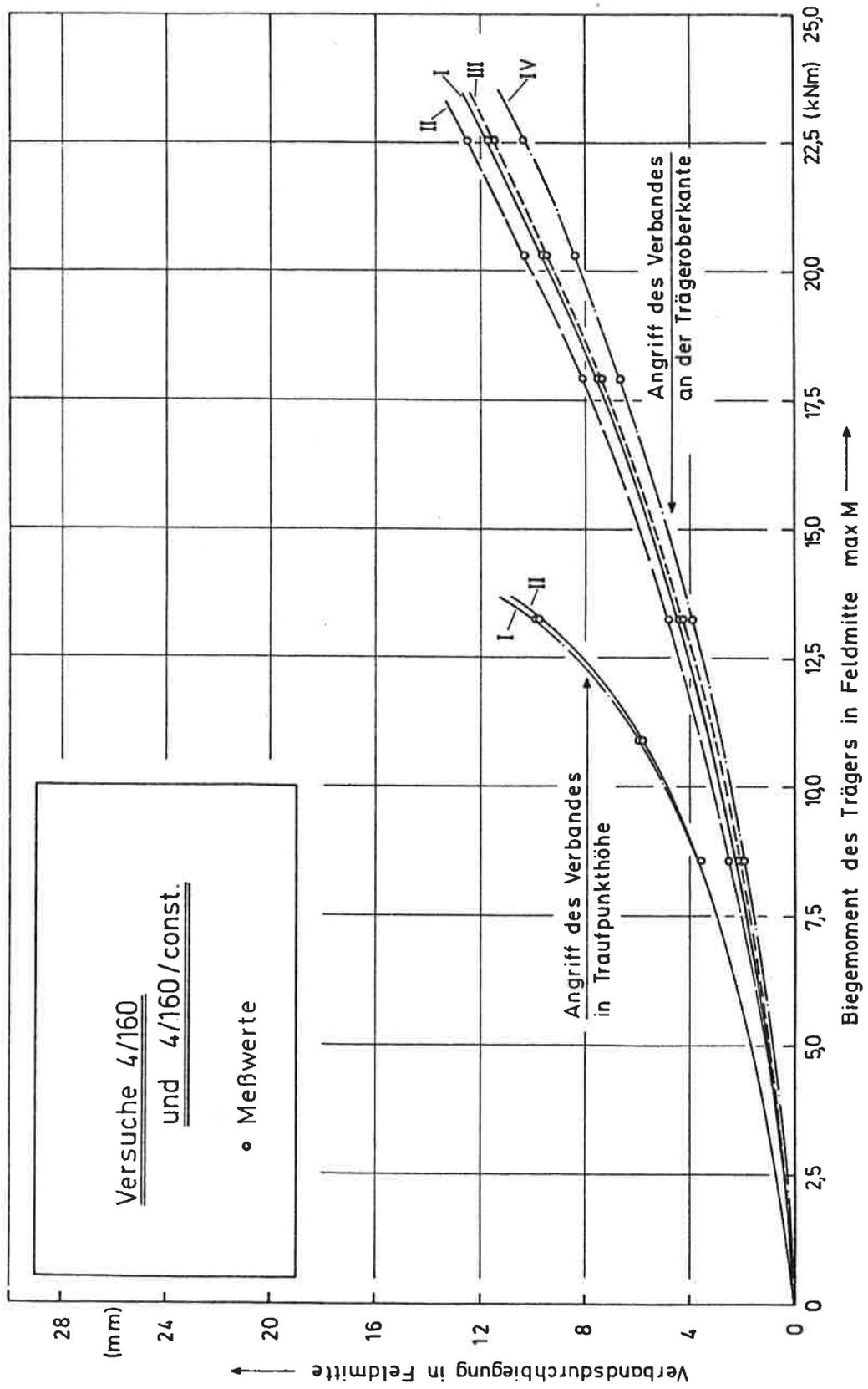


Bild 41 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

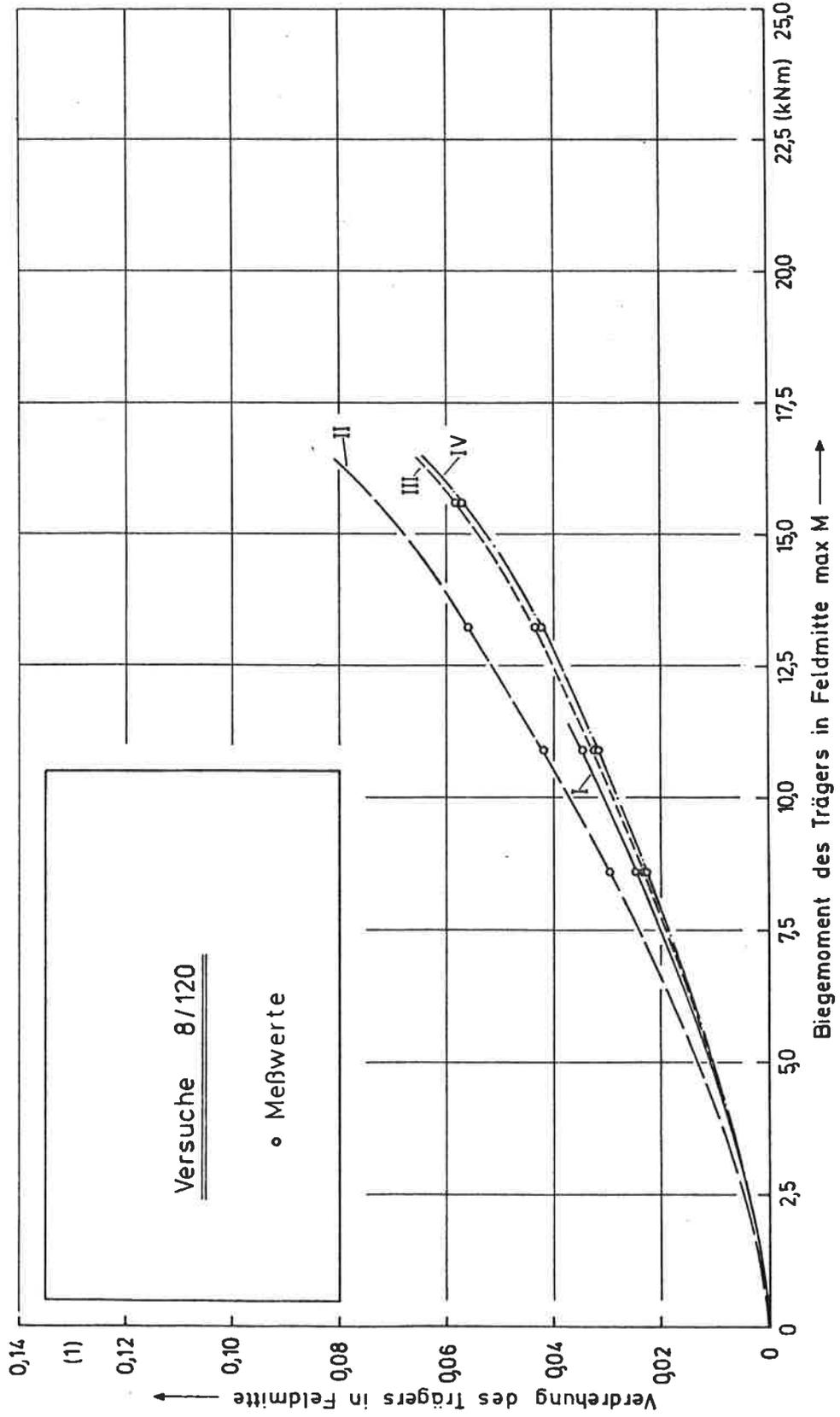


Bild 42: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

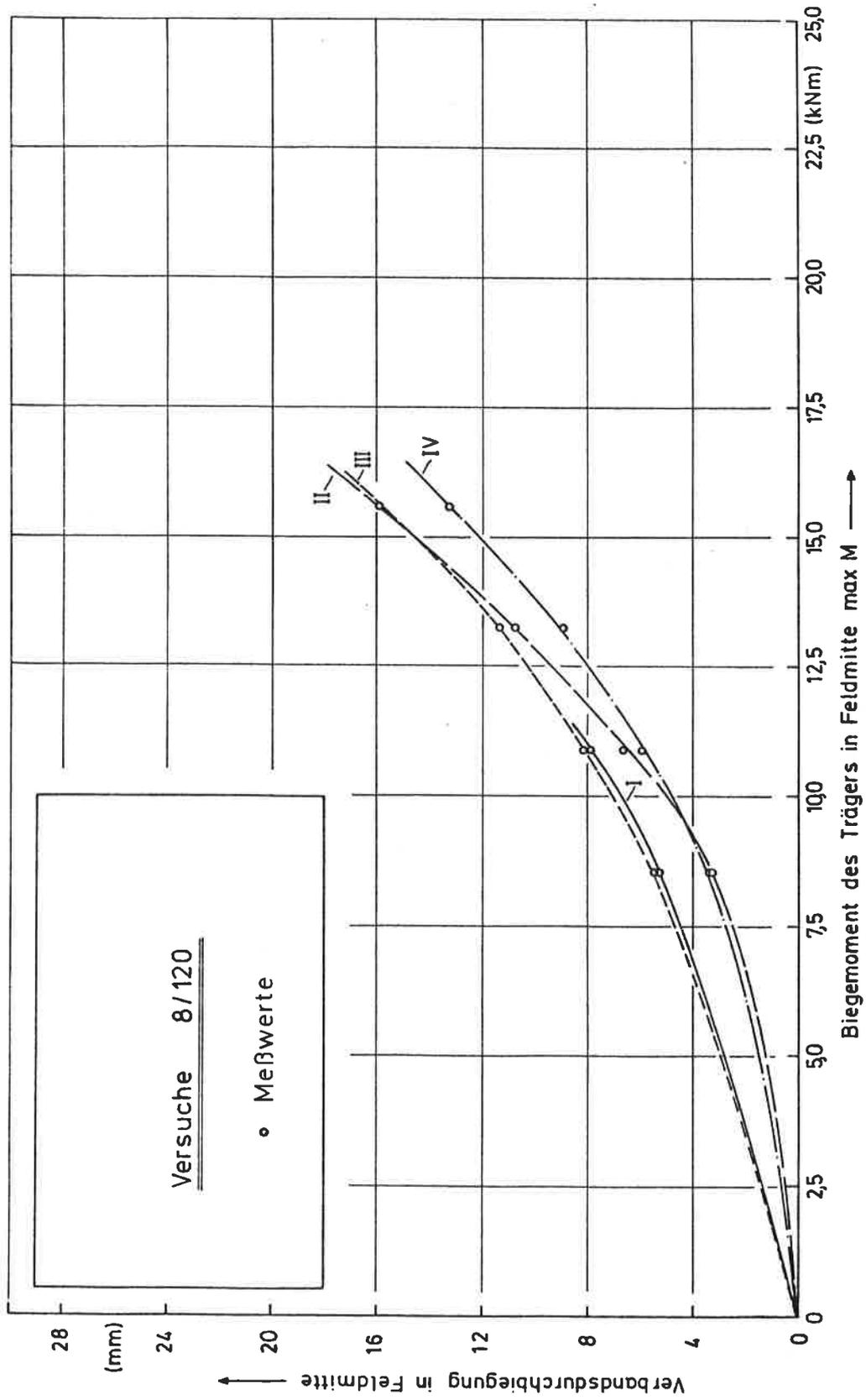


Bild 43: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

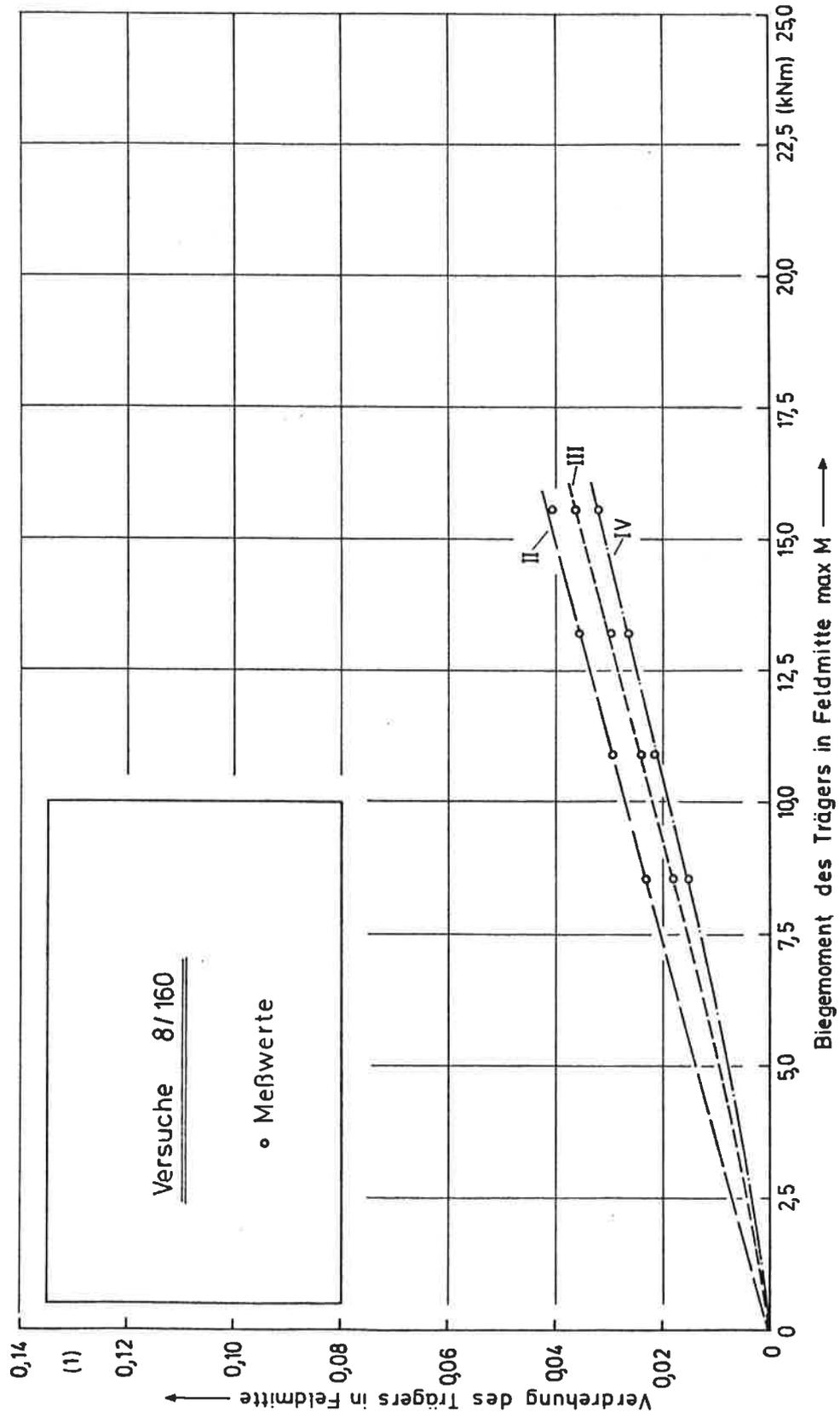


Bild 44 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

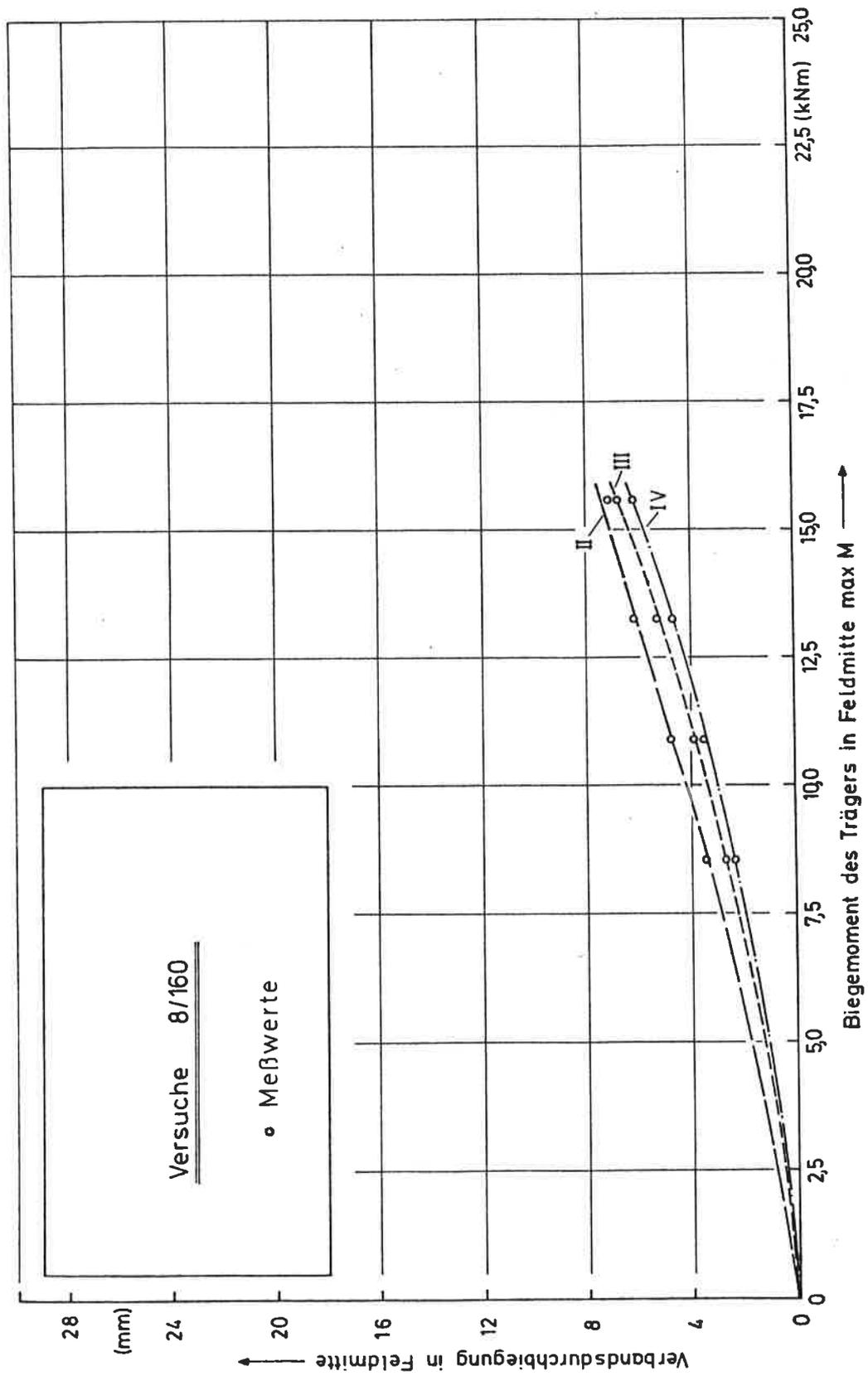


Bild 45: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

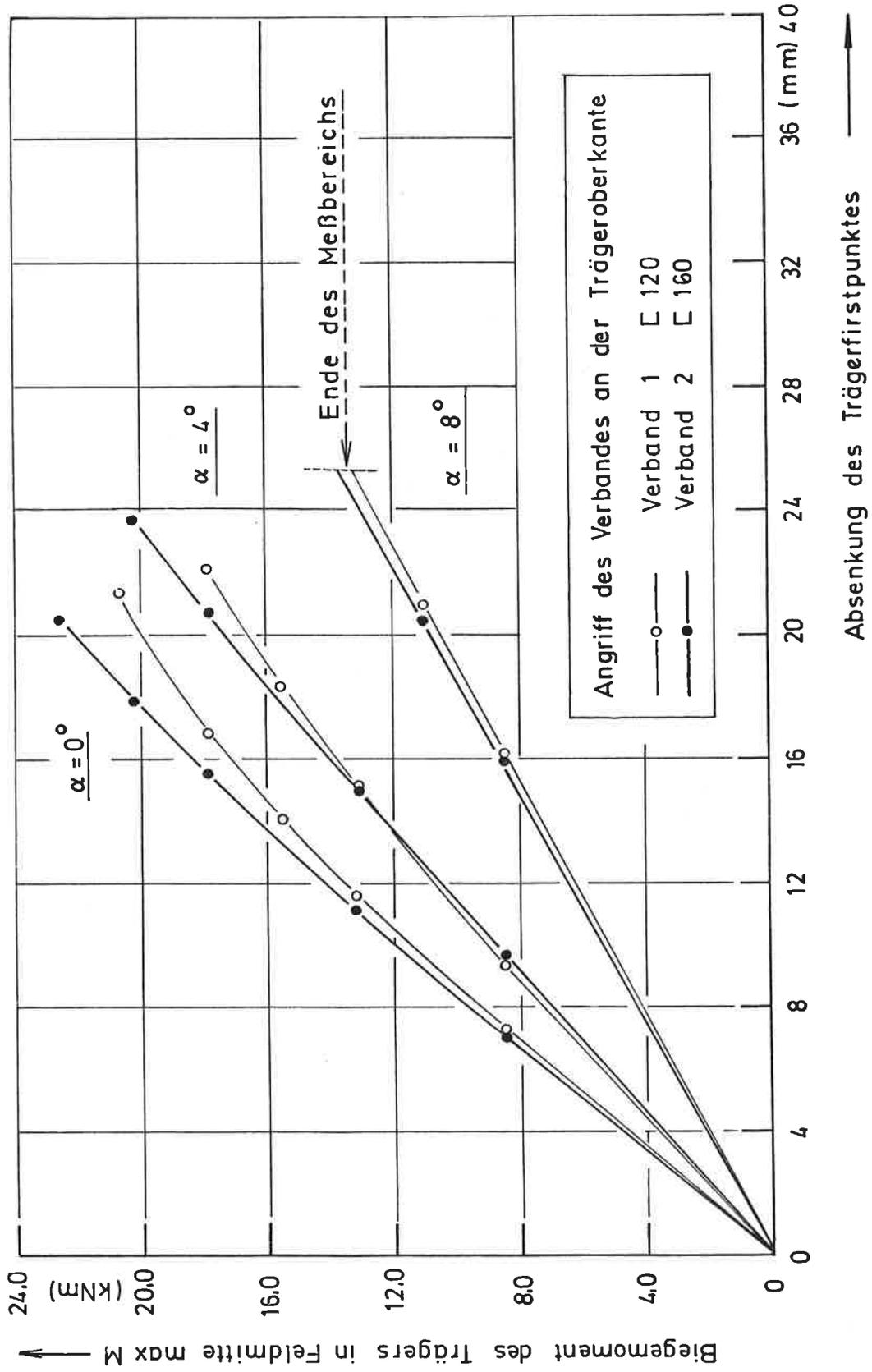
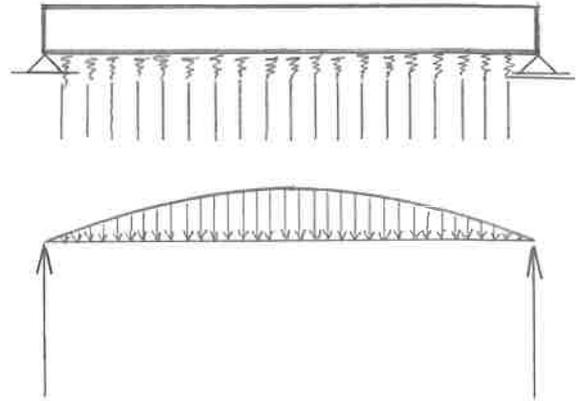
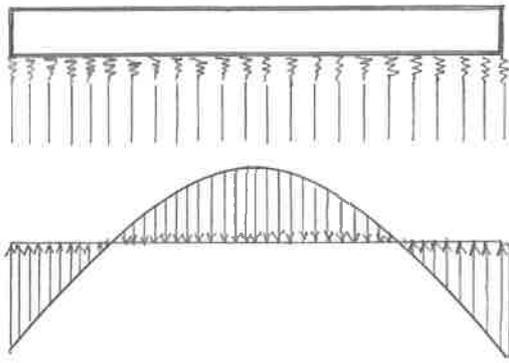


Bild 46: Absenkung des Trägerfirstpunktes in Abhängigkeit von der Trägerbelastung
(Mittelwerte aus den Versuchen)

4.4. Abschließende Bemerkungen zu den Versuchen

Die Verbindungsstangen zwischen Verband und Träger waren, wie schon unter Punkt 4.3. beschrieben, über Kraftmeßbringe bzw, über Ringe gleicher Steifigkeit nachgiebig an den Verband angeschlossen. Hieraus resultieren im Vergleich mit einer starren Verbindung Träger/Verband, wie sie auch bei der Herleitung der theoretischen Lösung vorausgesetzt wurde, größere Verformungen und Seitenlasten, vor allem bei im Verhältnis zur Anschlußsteifigkeit sehr steifen Verbänden. Dies zeigt sich auch beim Vergleich der Versuchsergebnisse mit der theoretischen Lösung, wo beim steiferen Verband (Verband 2) die Versuchswerte erkennbar über den rechnerischen Kurven lagen. Ähnlich wie Brüninghoff in [1] gezeigt, läßt sich dies näherungsweise in der Berechnung durch eine Abminderung der Verbandssteifigkeit d.h. durch eine Ersatzsteifigkeit des Verbandes berücksichtigen. Die von Brüninghoff angegebene Formel zur Berücksichtigung dieser Nachgiebigkeit wurde jedoch ausgehend von einer sin-förmigen Seitenlastverteilung und starren Auflagerung des Verbandes hergeleitet und ist im vorliegenden Fall nicht exakt anwendbar (siehe hierzu Bild 47). Es sind hierzu also noch weitergehende theoretische sowie versuchstechnische Untersuchungen erforderlich.



Seitenlastverteilung und
Nachgiebigkeiten bei den
Versuchen

von Brüninghoff in [1]
zugrundegelegtes System

Bild 47

Zu den Versuchen mit Satteldachträgern ($\alpha = 4^\circ$ und $\alpha = 8^\circ$)
und Angriff des Verbandes an der Trägeroberkante ist
noch folgendes anzumerken:

Wie Bild 48 zeigt, war der Verband bei diesen Versuchen
ca. 6.5 cm unterhalb des Firstpunktes angeordnet.

Der Abstand Träger/Verband betrug ca. 170 cm. Aus der
Durchbiegung des Trägers bzw. aus der Absenkung des
Firstpunktes wird der Träger zwangsläufig um das Maß v
nach außen geschoben, was eine zusätzliche seitliche

Verbiegung und Verdrehung hervorruft und somit das Versuchsergebnis wenn auch geringfügig beeinflusst.

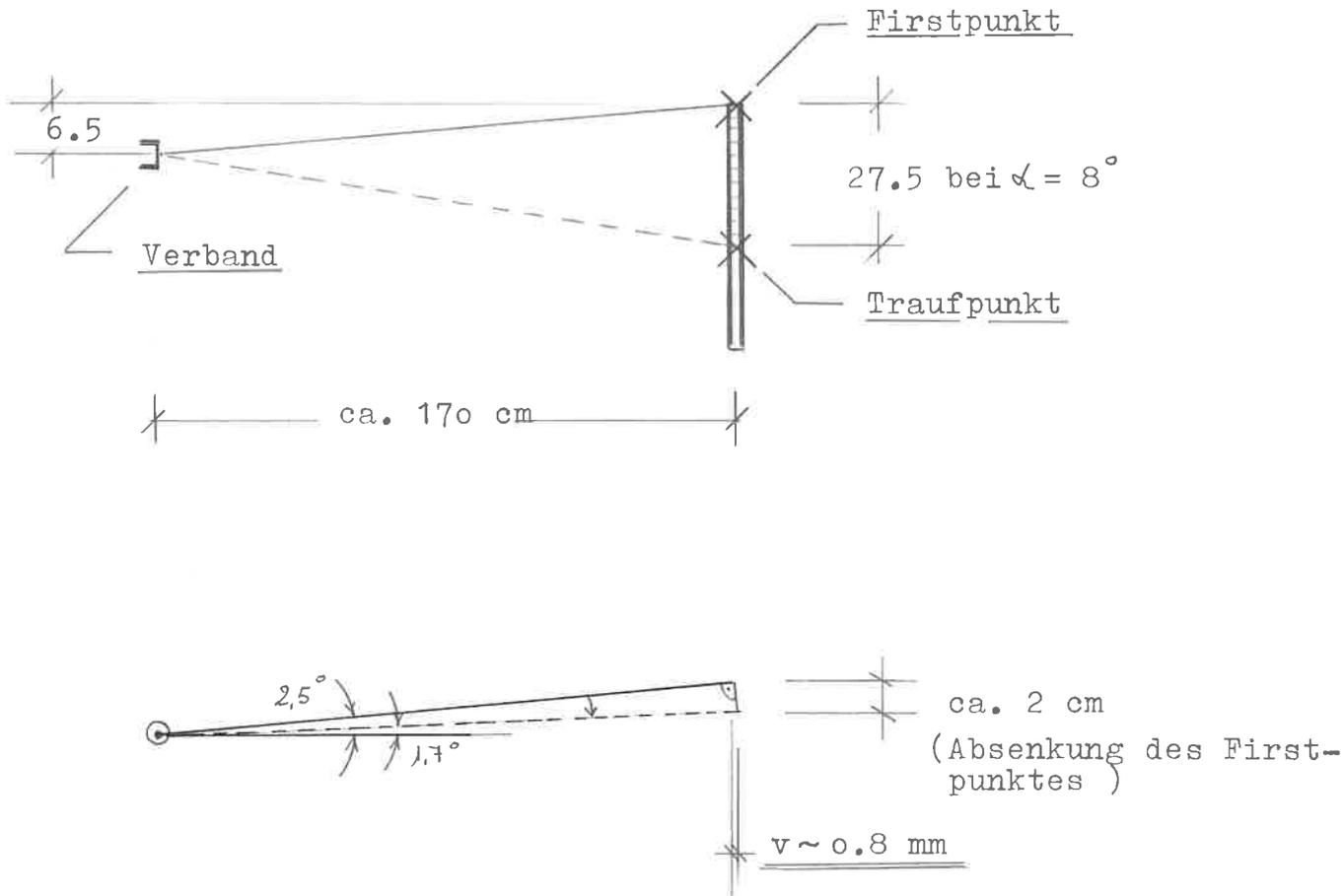


Bild 48

5. Zusammenfassung und Schlußbemerkung

Auf der Grundlage der ENERGIEMETHODE wurde ein Verfahren zur Berechnung der Verformungen und der Seitenlasten von gabelgelagerten Einfeld-Trägern mit veränderlicher Höhe, die eine Vorauslenkung aufweisen und seitlich durch einen Verband ausgesteift sind, hergeleitet. Anhand eines Berechnungsbeispiels, wobei die durchgeführten Versuche als Berechnungsbeispiel herangezogen wurden, wurde die Anwendung dieses Berechnungsverfahrens aufgezeigt. Dabei zeigte sich eine befriedigende Übereinstimmung der theoretischen Werte mit den entsprechenden Versuchsergebnissen.

Im Sonderfall des parallelgurtigen Trägers mit Gleichstreckenlast ergeben die nach dem oben genannten Berechnungsverfahren errechneten Verformungen, sprich Trägerverdrehung und Verbandsdurchbiegung, eine nahezu exakte Übereinstimmung mit den nach Brüninghoff [1] errechneten Verformungen. Der Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge ergibt sich jedoch grundsätzlich anders als der von Brüninghoff angegebene sin-förmige Seitenlastverlauf:

$$q_s^{\text{Brün.}} = B_V \cdot f_V \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \sin \pi \xi \quad (5.1)$$

$$\text{bzw. } \frac{\overset{\text{Brün.}}{q_s}}{B_v \cdot f_v \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^4} = \sin \pi \xi \quad (5.2)$$

mit B_v = Biegesteifigkeit des Aussteifungsverbandes
 f_v = Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in
Feldmitte

Dies ist in Bild 49 dargestellt, wobei in diesem Bild der nach dem oben genannten Berechnungsverfahren mit $N=1$ und $N=4$ parametrischen Ansatzfunktionen errechnete Seitenlastverlauf bzw. der bezogene Seitenlastverlauf

$$\frac{q_s}{B_v \cdot f_v \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^4} \quad (5.3)$$

im Vergleich mit den entsprechenden Versuchsergebnissen und dem von Brüninghoff in [1] angegebenen Seitenlastverlauf aufgetragen sind. Die aus diesen Seitenlasten resultierenden Querkräfte des Aussteifungsverbandes Q_v bzw. die bezogenen Querkräfte

$$\frac{Q_v}{B_v \cdot f_v \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^3} \quad (5.4)$$

sind in Bild 50 vergleichend dargestellt.

Hierbei zeigt sich, daß die nach dem in dieser Arbeit angegebenen Berechnungsverfahren errechnete maximale Querkraft des Verbandes $\max Q_v$, die ja für die Bemessung des Verbandes

im wesentlichen maßgebend ist, sich nur unwesentlich (10%) von der von Brüninghoff angegebenen maximalen Querkraft des Aussteifungsverbandes unterscheidet.

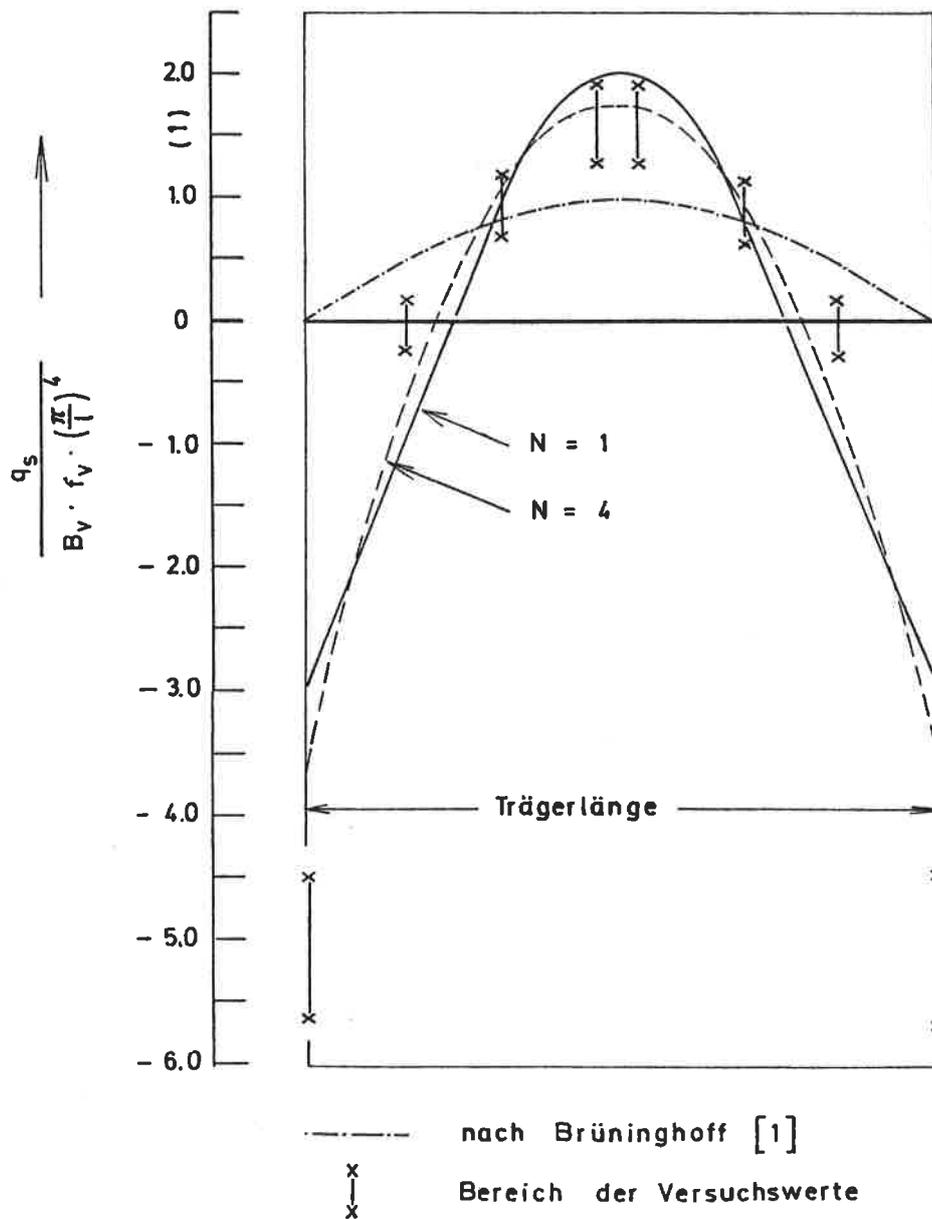


Bild 49: Verlauf der Seitenlast q_s über die Trägerlänge beim parallelgurtigen Träger mit Gleichstreckenlast

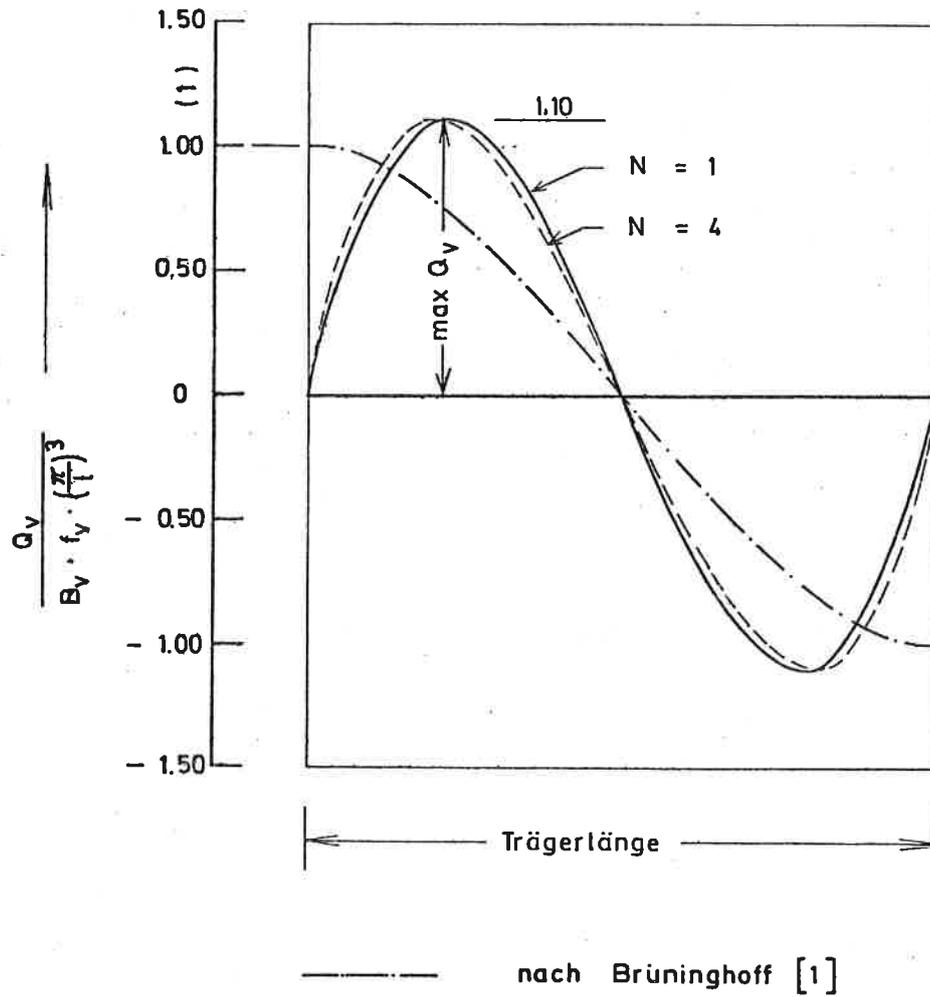


Bild 50: Querkraft Q_v im Aussteifungsverband von parallelgurtigen Trägern mit Gleichstreckenlast

Satteldachträger:

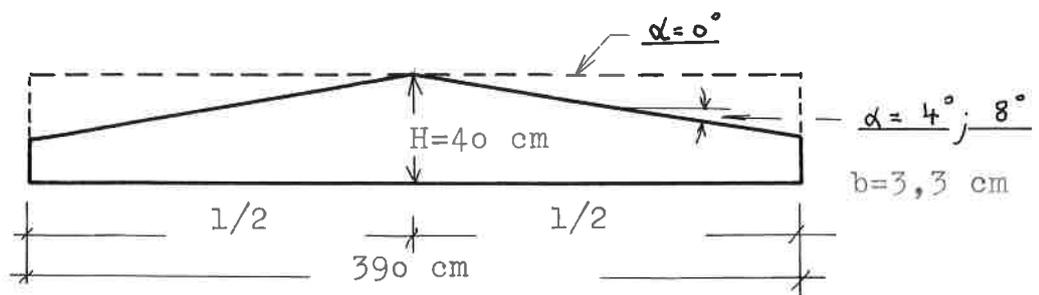
Aus dem Vergleich der rechnerischen Verformungen d.h. der Trägerverdrehung in Feldmitte $\bar{\varphi}$ und der Durchbiegung des Verbandes in Feldmitte f_v der bei den Versuchen verwendeten durch einen Verband ausgesteiften Satteldachträger mit den rechnerischen Verformungen beim entsprechenden parallelgurtigen Versuchsträgers (s. Bild 51) ergaben sich folgende mittlere Erhöhungsfaktoren \mathcal{H} :

| | Verband 1 $B_V=86,5 \text{ kNm}^2$ | Verband 2 ^{**} $B_V=180 \text{ kNm}^2$ |
|--------------------|---------------------------------------|--|
| $\alpha = 4^\circ$ | $\mathcal{H} \approx 1,25$ | $\mathcal{H} \approx 1,15$ |
| $\alpha = 8^\circ$ | $\mathcal{H} \approx 1,65$ | $\mathcal{H} \approx 1,30$ |

^{**} (Die Steifigkeit von Verband 2 entspricht ungefähr der Mindestverbandssteifigkeit)

$$\mathcal{H} = \frac{\text{Verformung } \bar{\varphi} \text{ bzw. } f_v \text{ des Satteldachträgers}}{\text{Verformung } \bar{\varphi} \text{ bzw. } f_v \text{ des entspr. parallelgurtigen Trägers}}$$

Bild 51



Angriff des Verbandes an der Trägersoberkante

Diese Erhöhungsfaktoren sind jedoch, wie sich vor allem beim steiferen Verband (Verband 2) zeigt, auch von der Intensität der Belastung abhängig, und zwar fällt für die Versuche mit Verband 2 bei $\alpha=4^\circ$ λ von 1,25 im Bereich der kleineren Lasten auf 1,05 im Bereich der größeren Lasten bzw. bei $\alpha=8^\circ$ von 1.45 bei den kleineren Lasten auf 1.15 bei den größeren Lasten ab. (Die Bezeichnungen "kleinere Lasten" und "größere Lasten" beziehen sich auf die bei den Versuchen aufgebrauchten Lasten)

Zu den aus der rechnerischen Lösung ermittelten Erhöhungsfaktoren muß jedoch noch abschließend bemerkt werden, daß diese Erhöhungsfaktoren auch von der für den Verlauf der Verbandangriffslinie angesetzten, nicht exakt bestimmbaren Näherungsfunktion beeinflußt werden, so daß hier vielleicht noch weiterführende Untersuchungen notwendig wären.

Die aus den gemessenen Verformungen resultierenden Erhöhungsfaktoren liegen in der gleichen Größenordnung wie die entsprechenden "theoretischen" Erhöhungsfaktoren, streuen jedoch teilweise stark. Die bei den "theoretischen" Erhöhungsfaktoren aufgezeigten Tendenzen, daß erstens

mit zunehmender Verbandssteifigkeit \propto kleiner wird und zweitens, daß beim steiferen Verband mit zunehmender Belastung \propto kleiner wird, sind auch aus den Versuchsergebnissen erkennbar.

Die Seitenlasten der Satteldachträger lassen sich nicht direkt mit den Seitenlasten der parallelgurtigen Träger vergleichen, da der Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge je nach Dachneigungswinkel α unterschiedlich ist. Man kann jedoch die aus der Seitenlast resultierende und für die Bemessung des Verbandes maßgebende maximale Querkraft des Aussteifungsverbandes ($\max Q_v$) mit der maximalen Querkraft des Verbandes des entsprechenden parallelgurtigen Trägers vergleichen. Man erhält dann ungefähr die gleichen Erhöhungsfaktoren wie sie zuvor für die Verformungen angegeben wurden.

Schrifttum

- [1] Brüninghoff, H: Spannungen und Stabilität bei quergestützten Brettschichtträgern
Dissertation Karlsruhe 1973
- [2] Hildenbrand, P: Die Kippstabilität auf Biegung beanspruchte einfach oder doppeltsymmetrischer, eingespannter oder gabelgelagerter Träger mit linear veränderlicher Querschnittshöhe
Dissertation 1970
- [3] Möll, R: Kippen von querbelasteten u. gedrückten Durchlaufträgern mit I-Querschnitt als Stabilitätsproblem und als Spannungsproblem II. Ordnung behandelt
Dissertation Darmstadt 1970
- [4] Mehlhorn, G: Ein Beitrag zum Kipp-Problem bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern
Dissertation Darmstadt 1970
- [5] Klöppel, K Unger, B: Kippen von Durchlaufträgern bei seitlich und gegen Verdrehen elastisch gelagertem Obergurt
Der Stahlbau 7/1969
- [6] Mucha, A: Kippen gabelgelagerter Träger von linear veränderlicher Höhe
Die Bautechnik 8/1973

- [7] Rafla, K: Näherungsverfahren zur Berechnung der Kipp-
lasten von Trägern mit in Längsrichtung
beliebig veränderlichem Querschnitt
Die Bautechnik 8/1975
- [8] Cassens, J: Biegung und Kippen
Die Bautechnik 6/1965
- [9] Lindner, J: Zum Biegedrillknicken ("Kippen") im
Holzbau
Beiträge zur Bautechnik 1980
- [10] Budianto u. Andere Karlsruher Forschungsarbeiten und Versuche
im Ingenieurholzbau von 1972-1977
Bauen mit Holz 5/1977

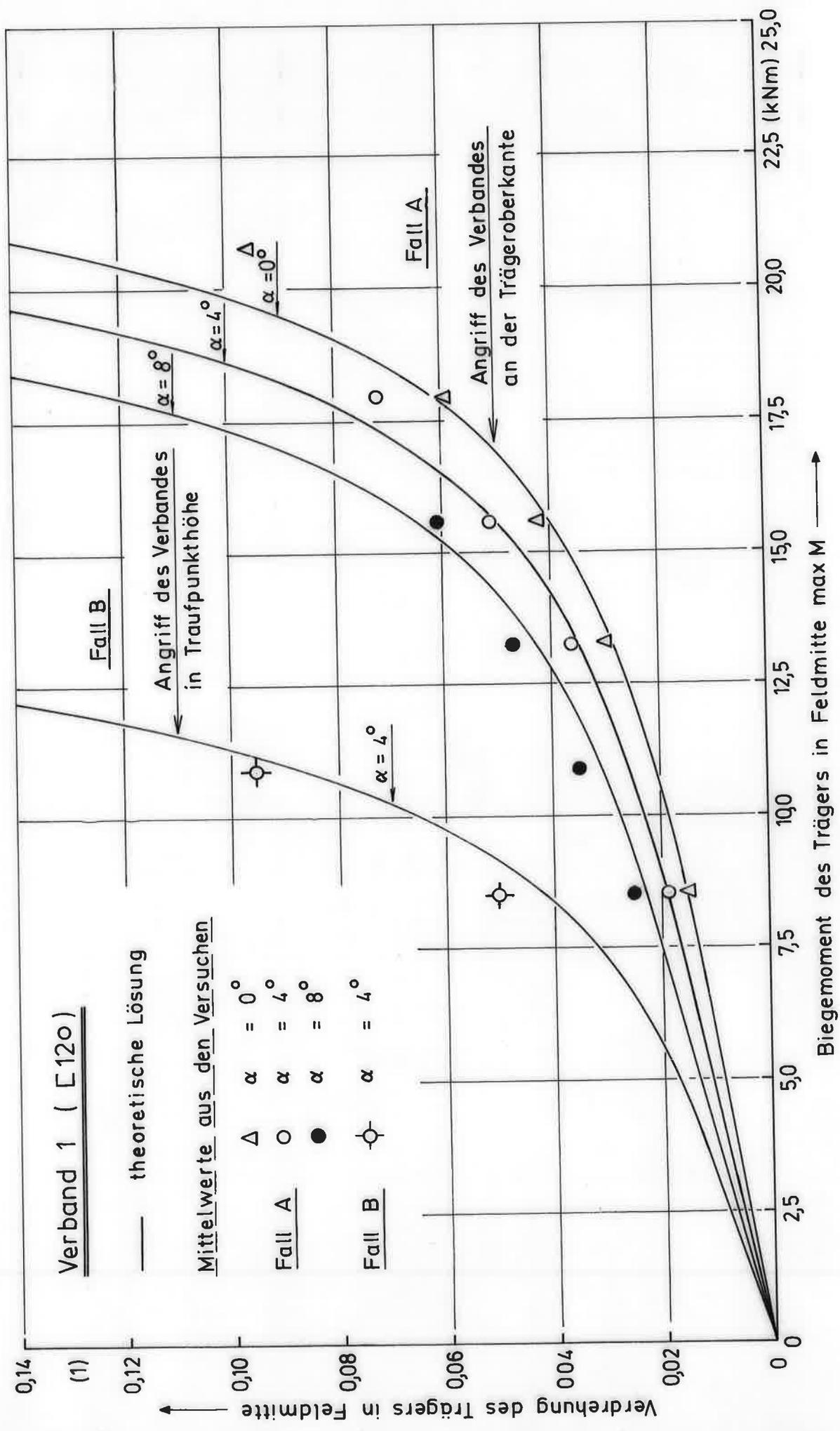


Bild 10: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

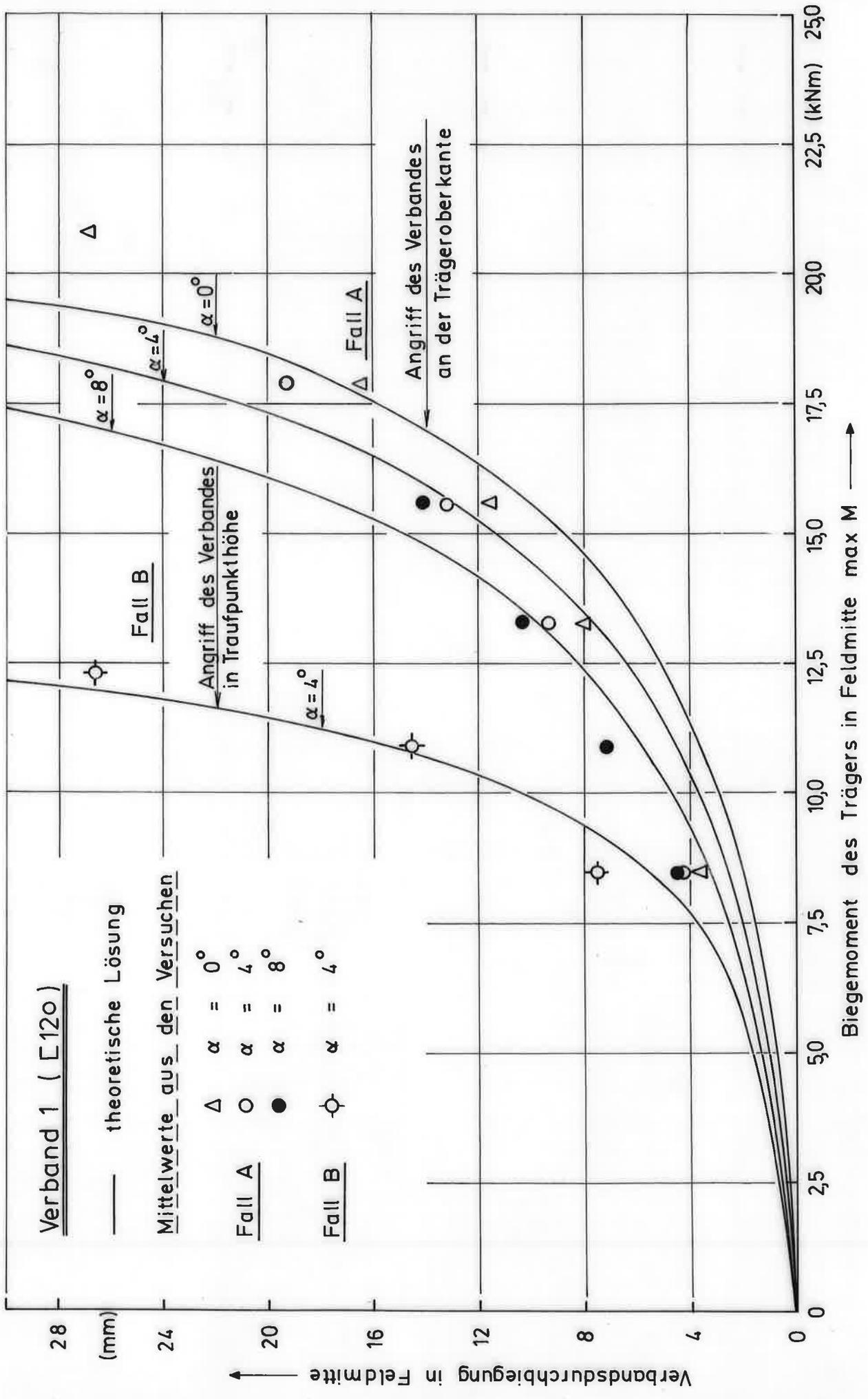


Bild 11: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

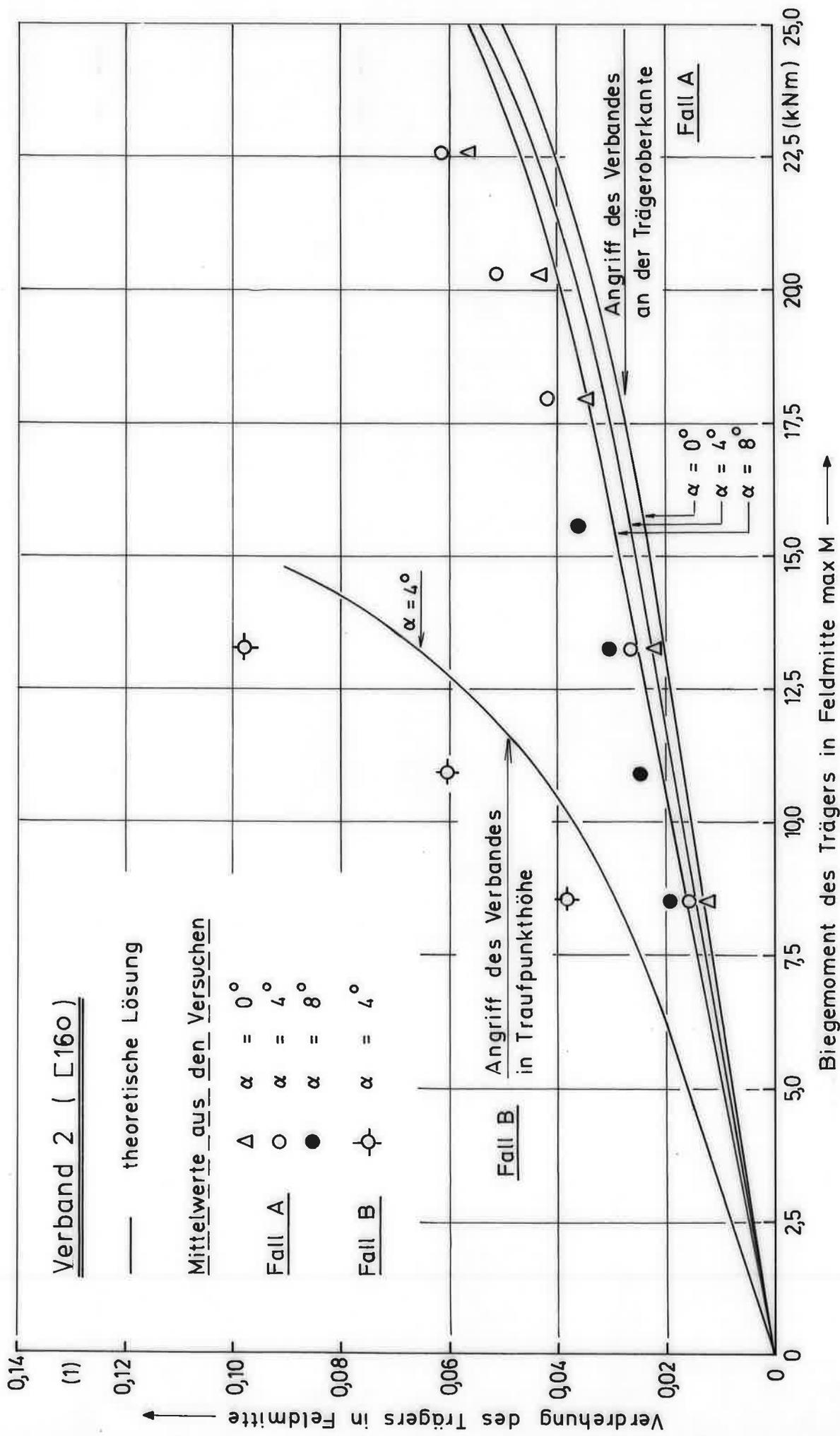


Bild 12: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

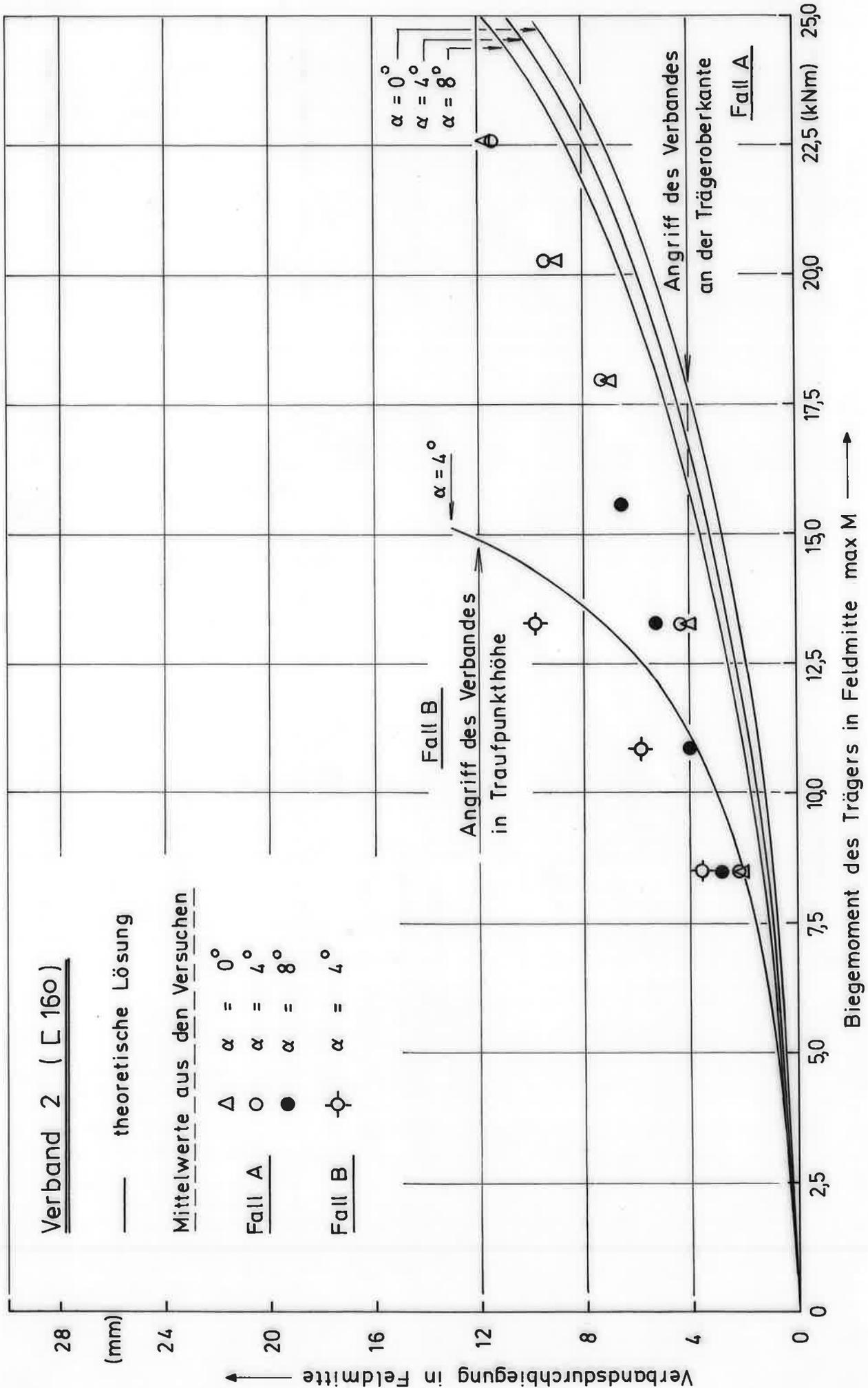


Bild 13: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

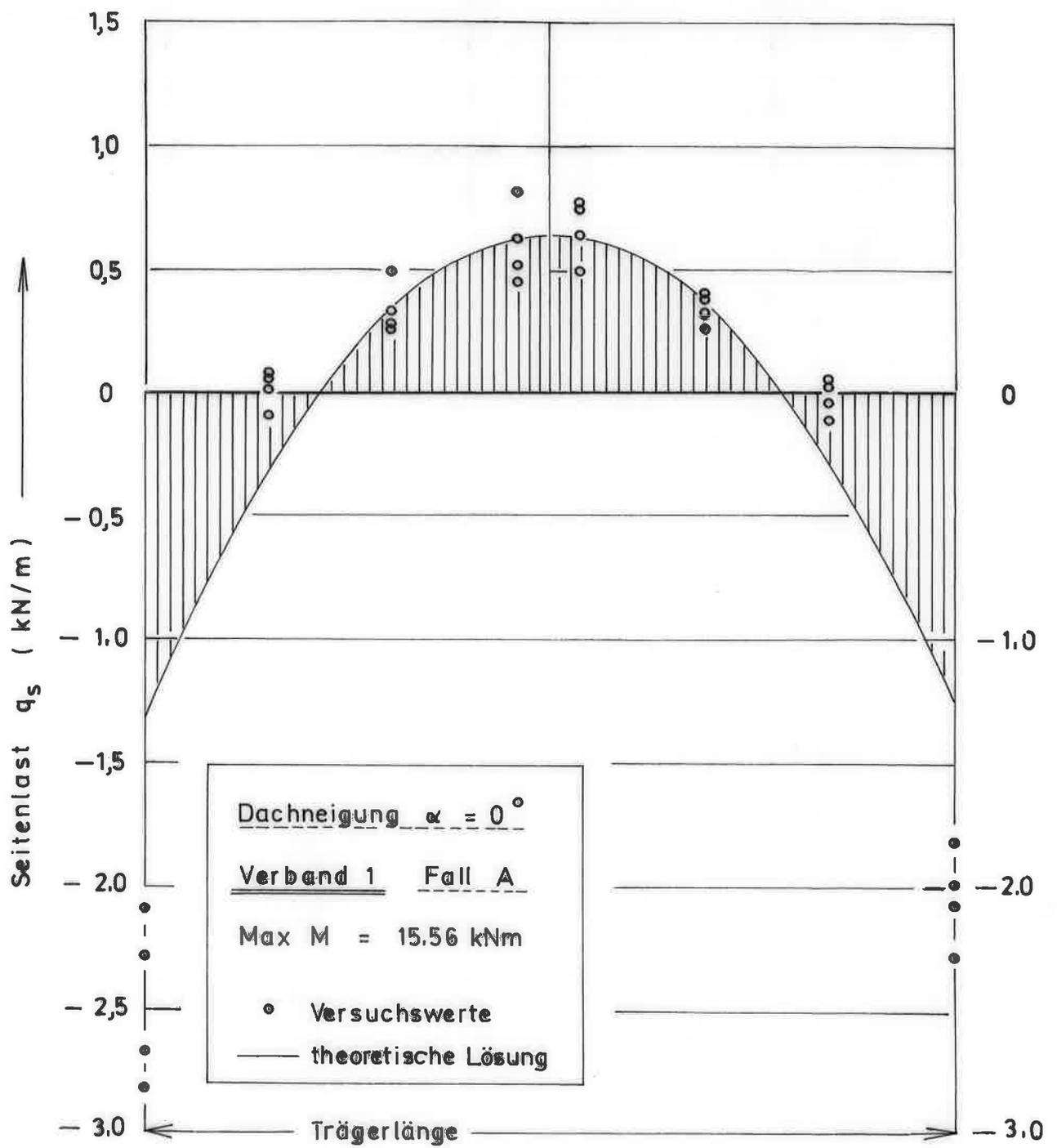


Bild 14 : Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

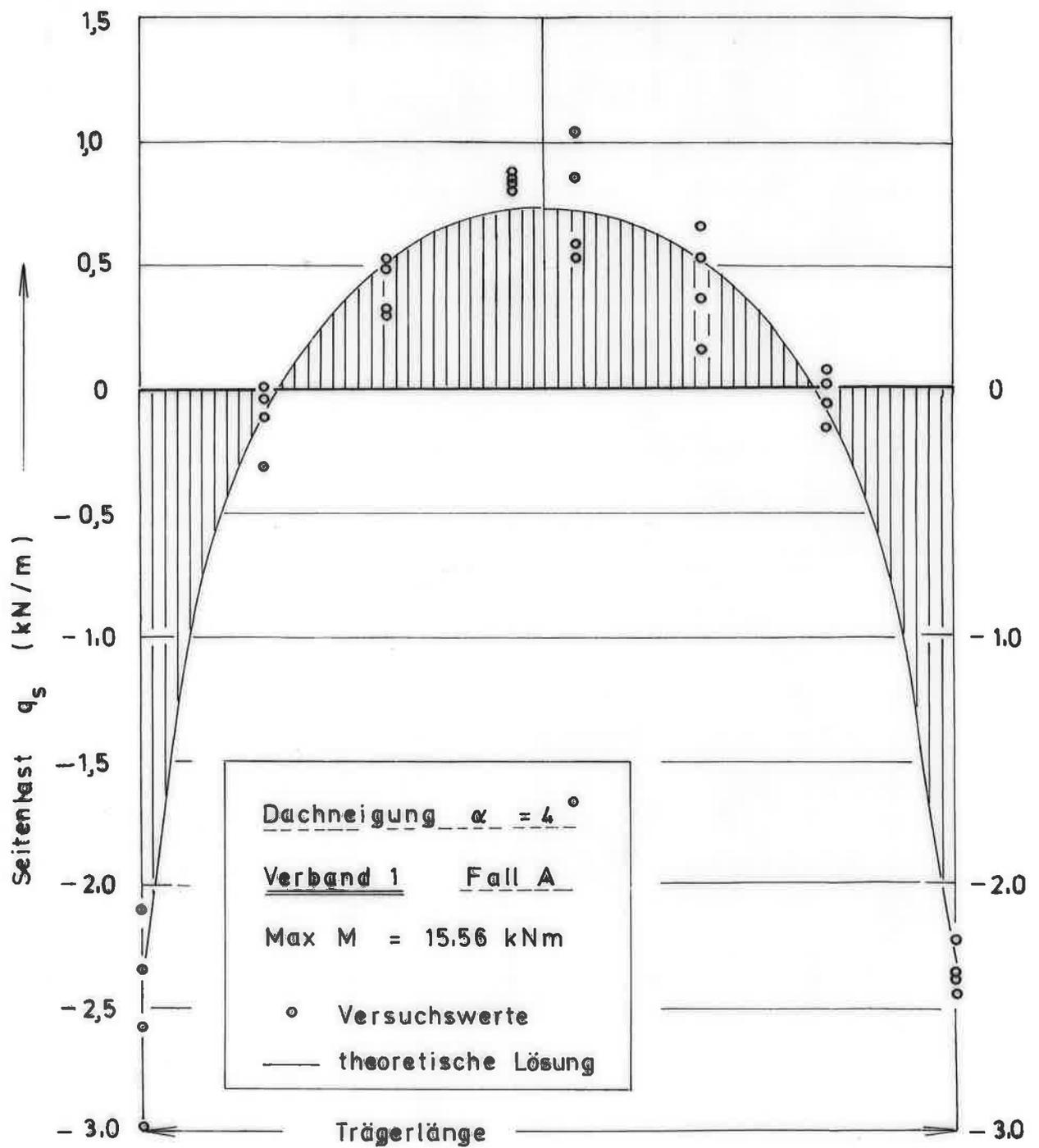


Bild 15: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

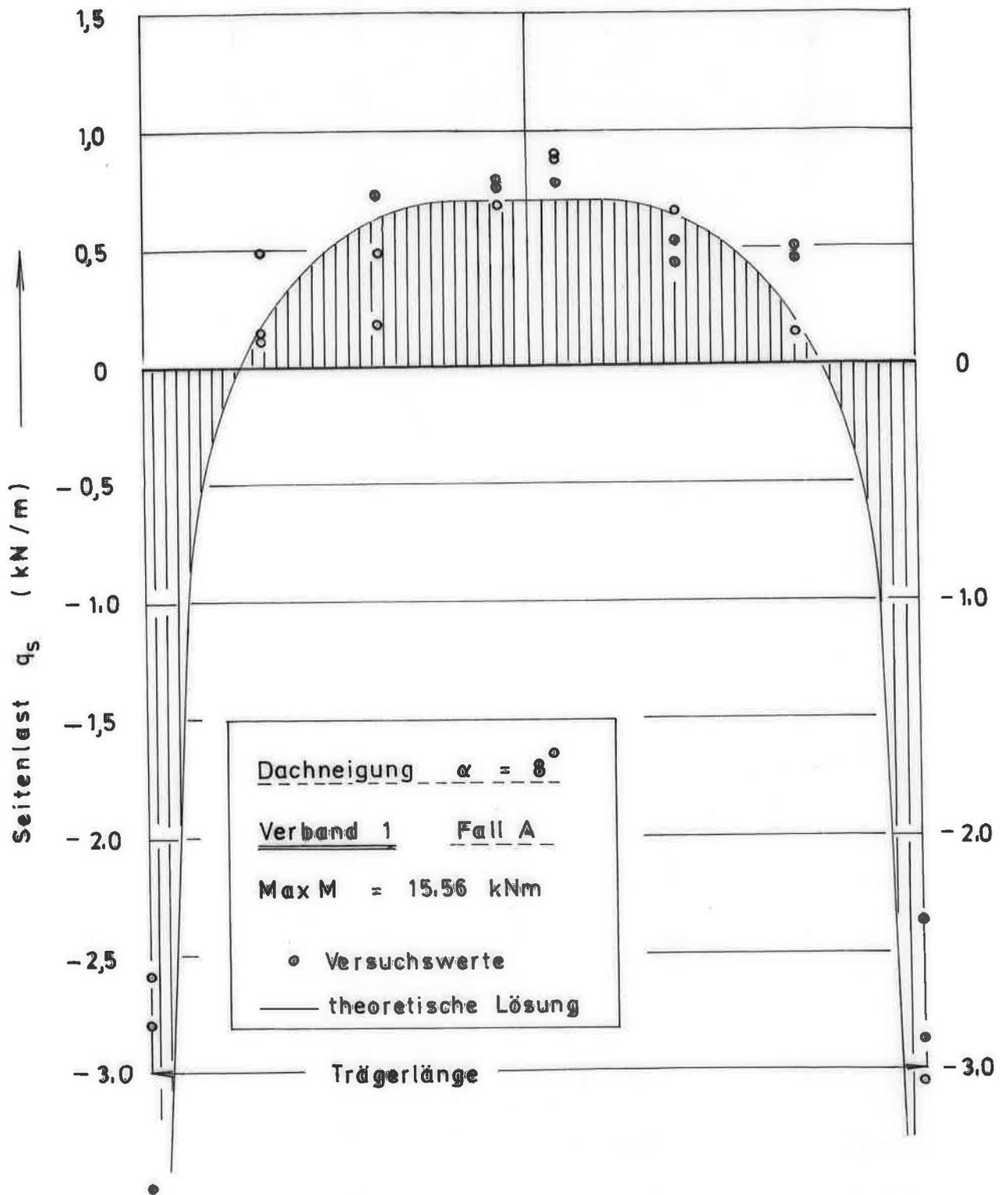


Bild 16 : Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

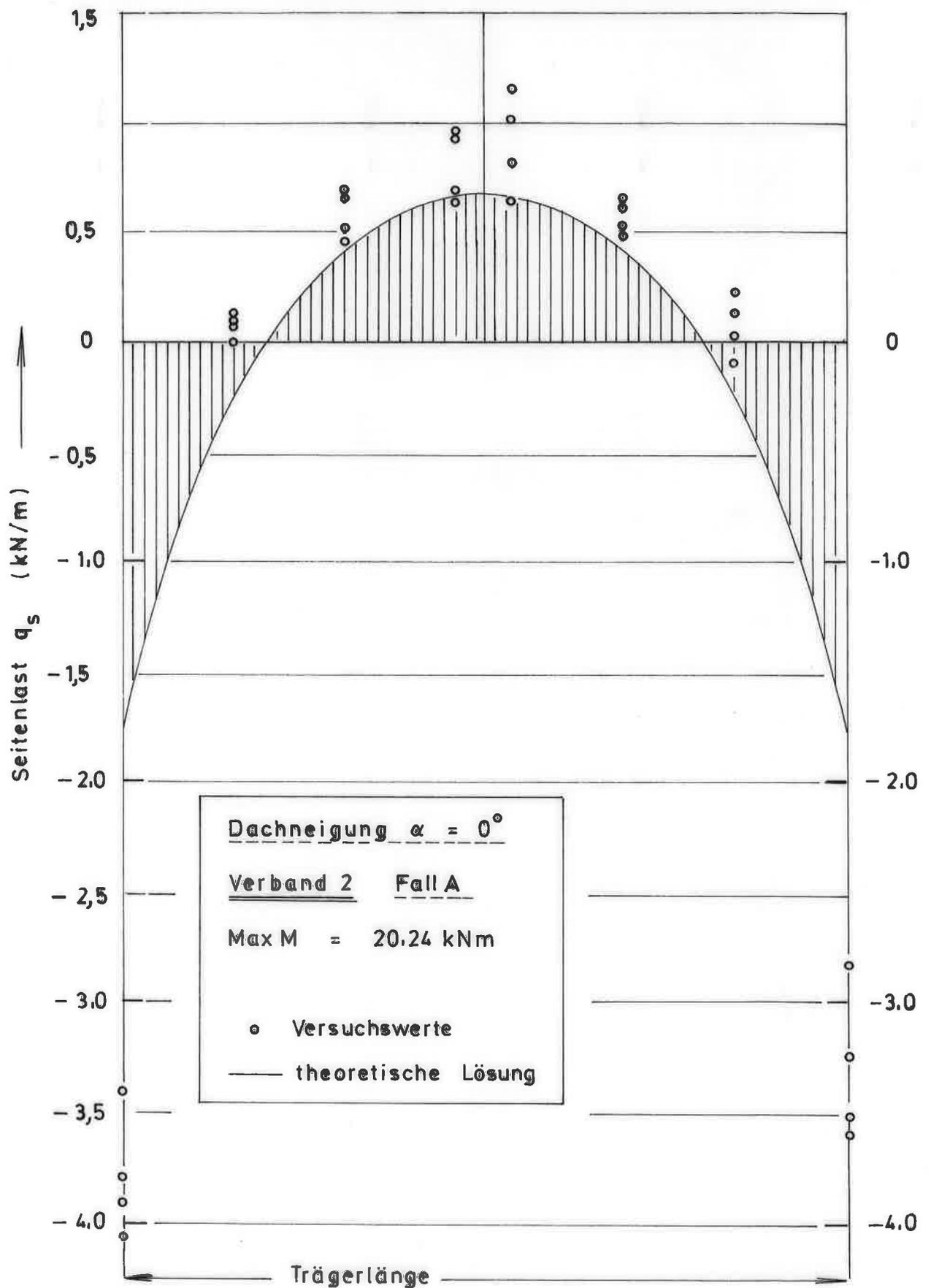


Bild 17: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

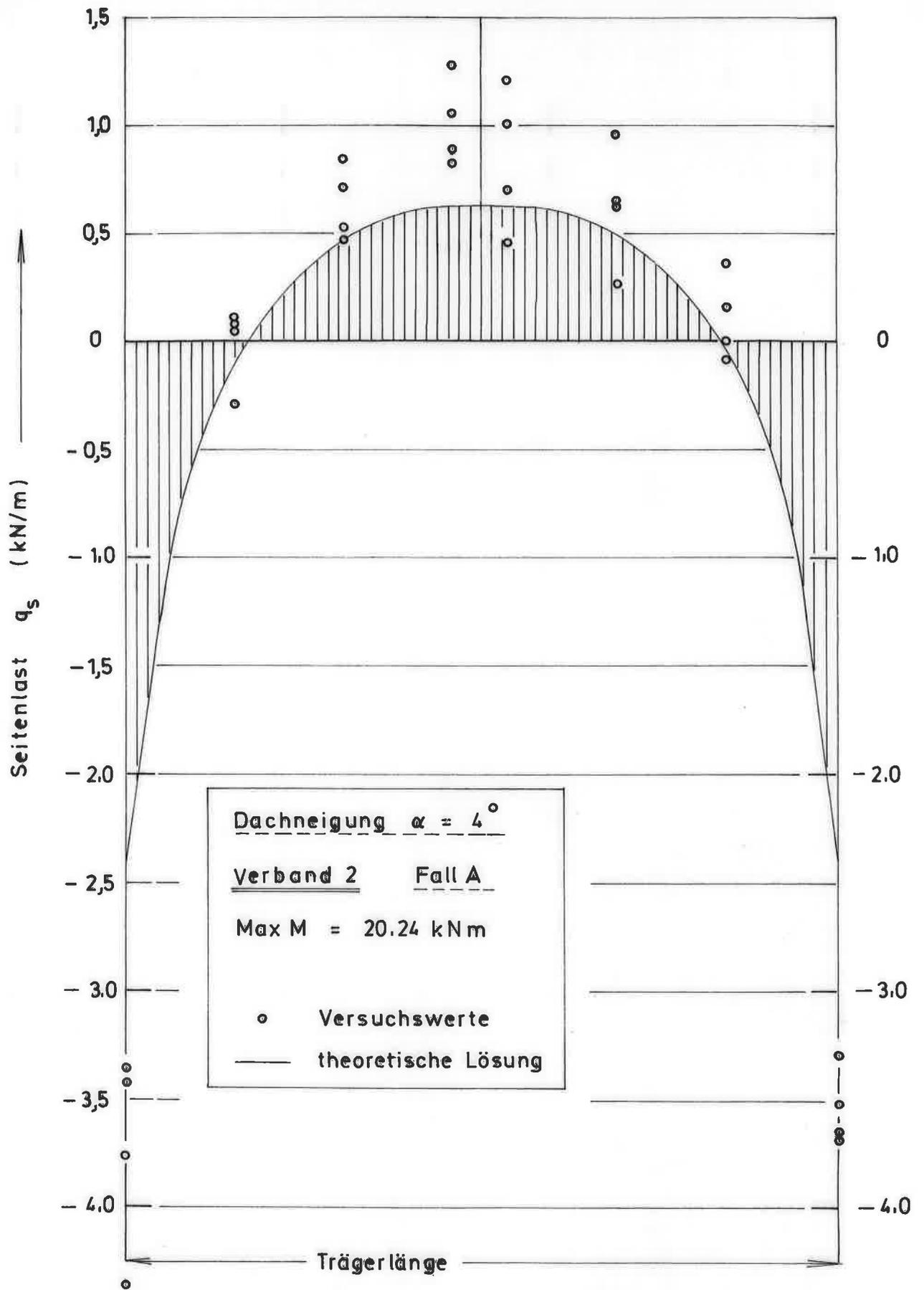
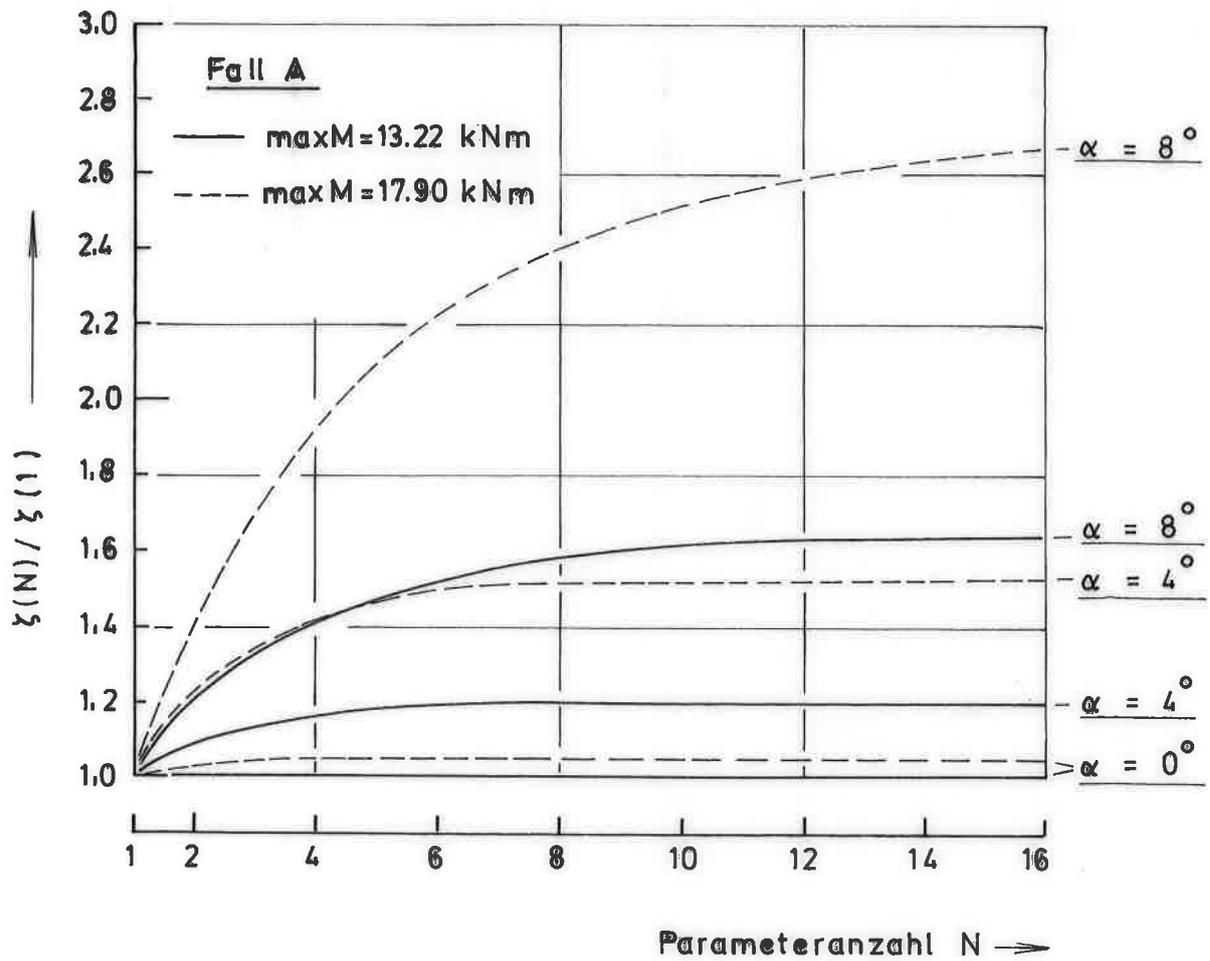


Bild 18 : Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge



$\zeta(1)$: Verdrehung in Feldmitte mit einem 1-parametrischen Ansatz gerechnet
 $\zeta(N)$: Verdrehung in Feldmitte mit einem N-parametrischen Ansatz gerechnet

Bild 19

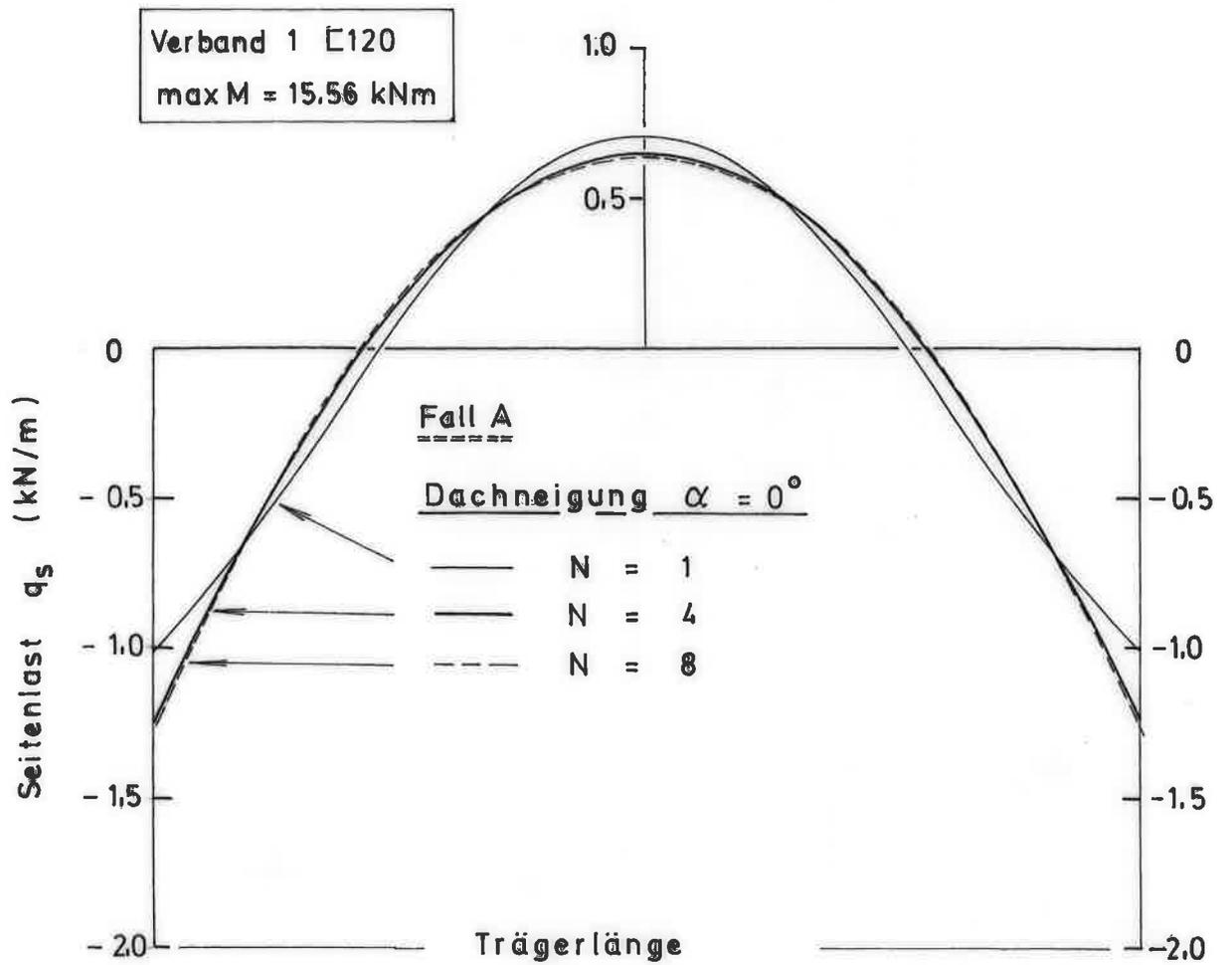


Bild 20: Theoretischer Verlauf der Seitenlast über die Trägerlänge bei 1; 4 und 8 parametrischen Ansatzfunktionen

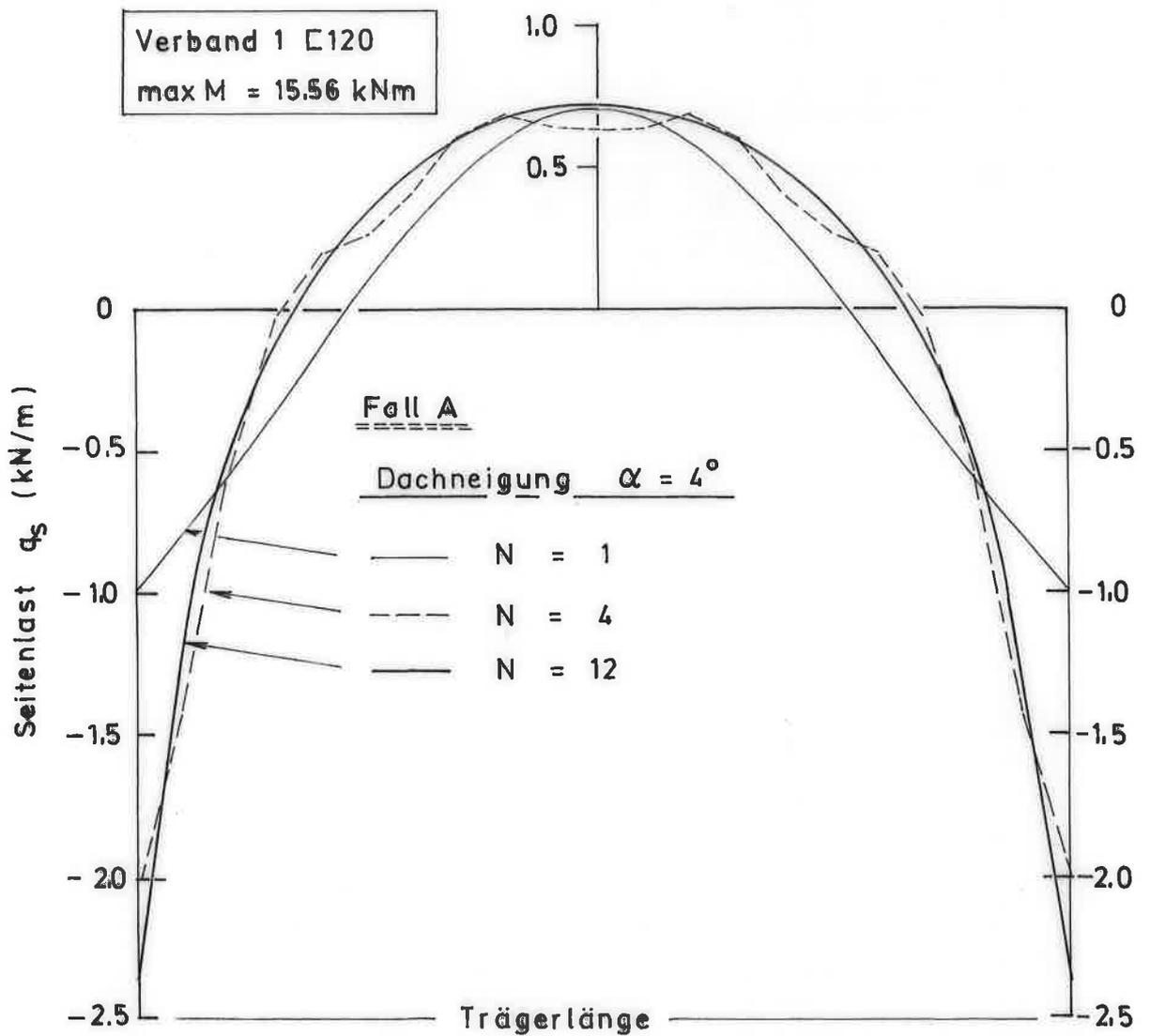


Bild 21: Theoretischer Verlauf der Seitenlast über die Trägerlänge bei 1 ; 4 und 12 parametrischen Ansatzfunktionen

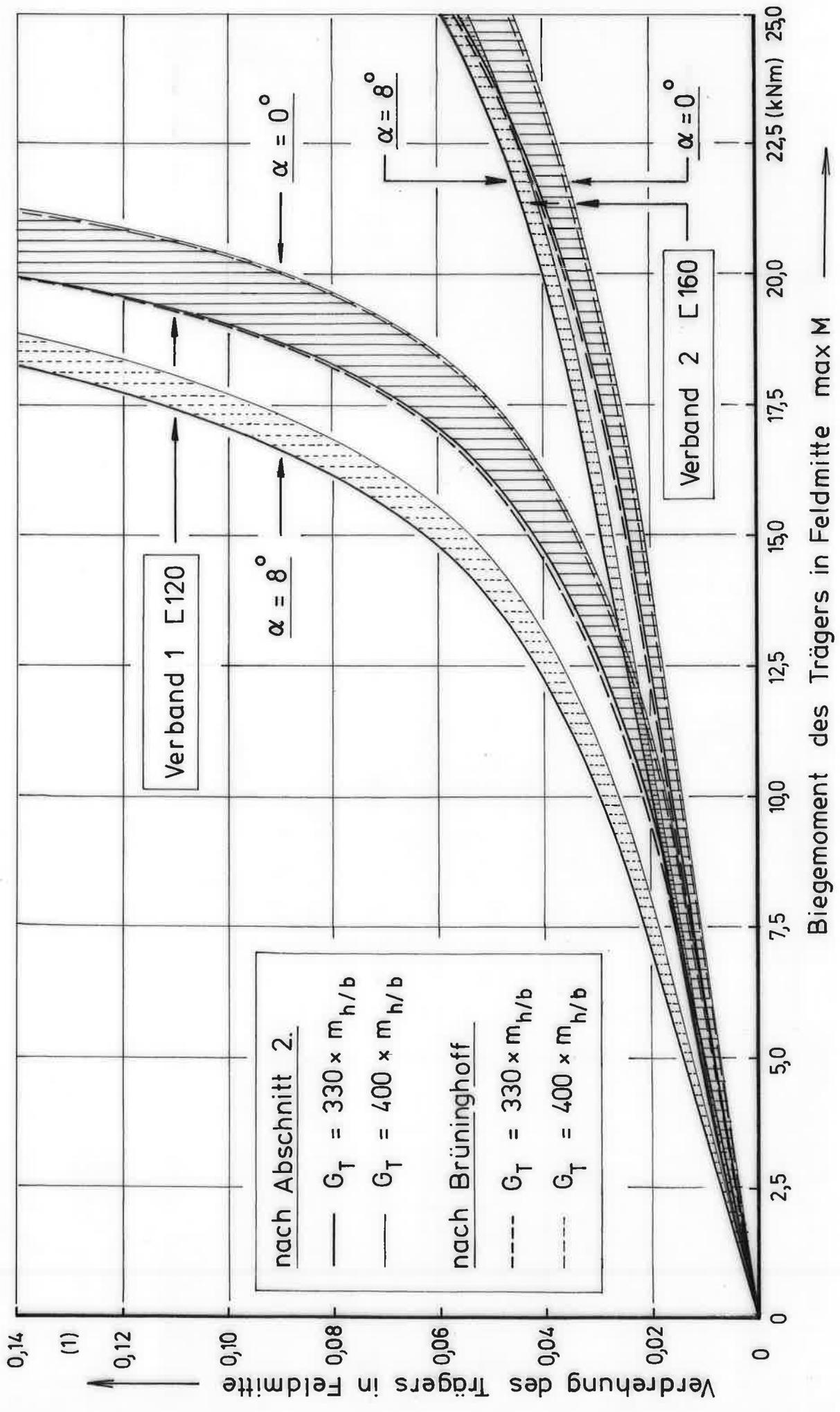


Bild 22: Einfluß des Torsionsmoduls auf die Verdrehung des ausgesteiften Trägers

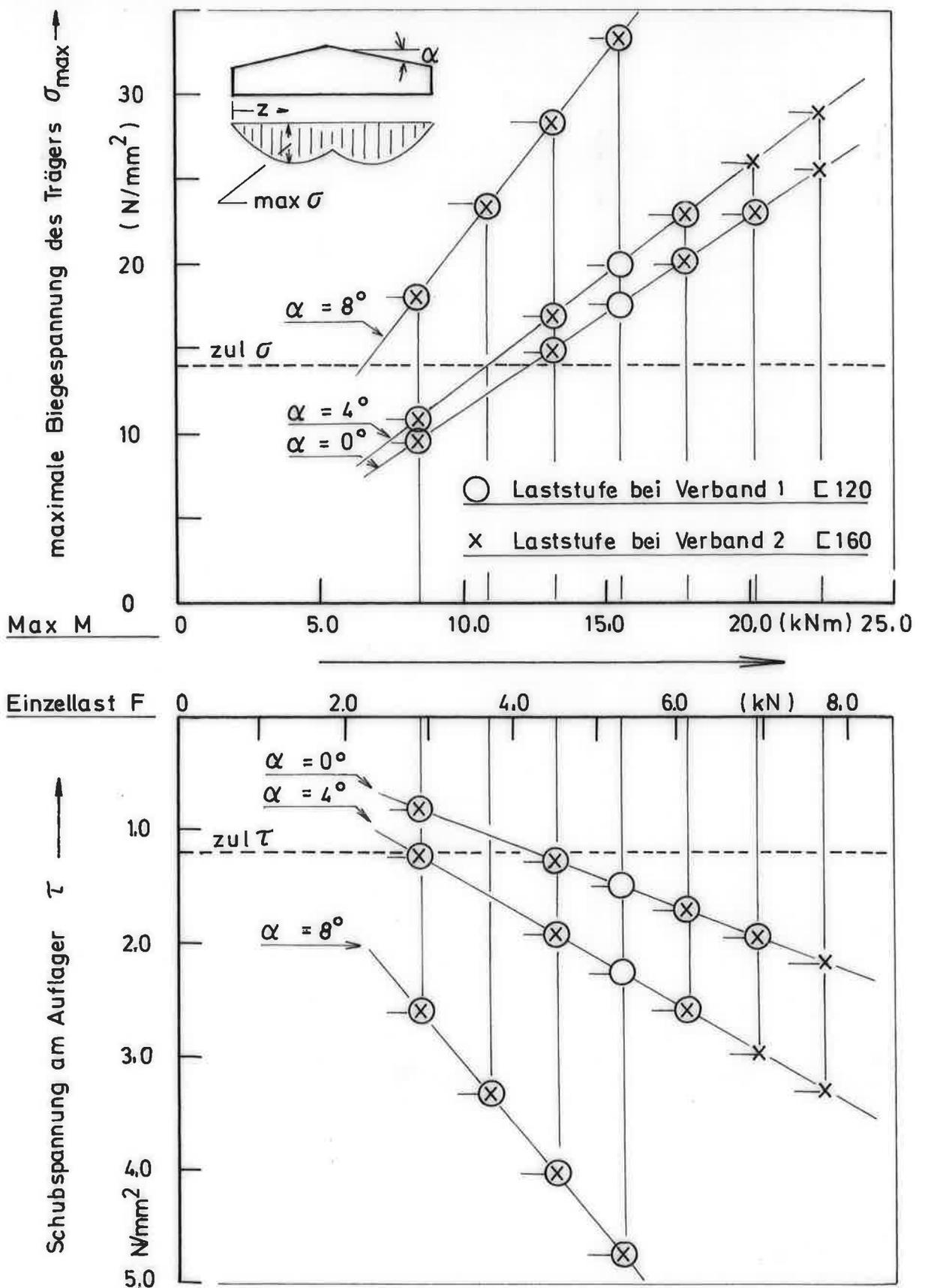
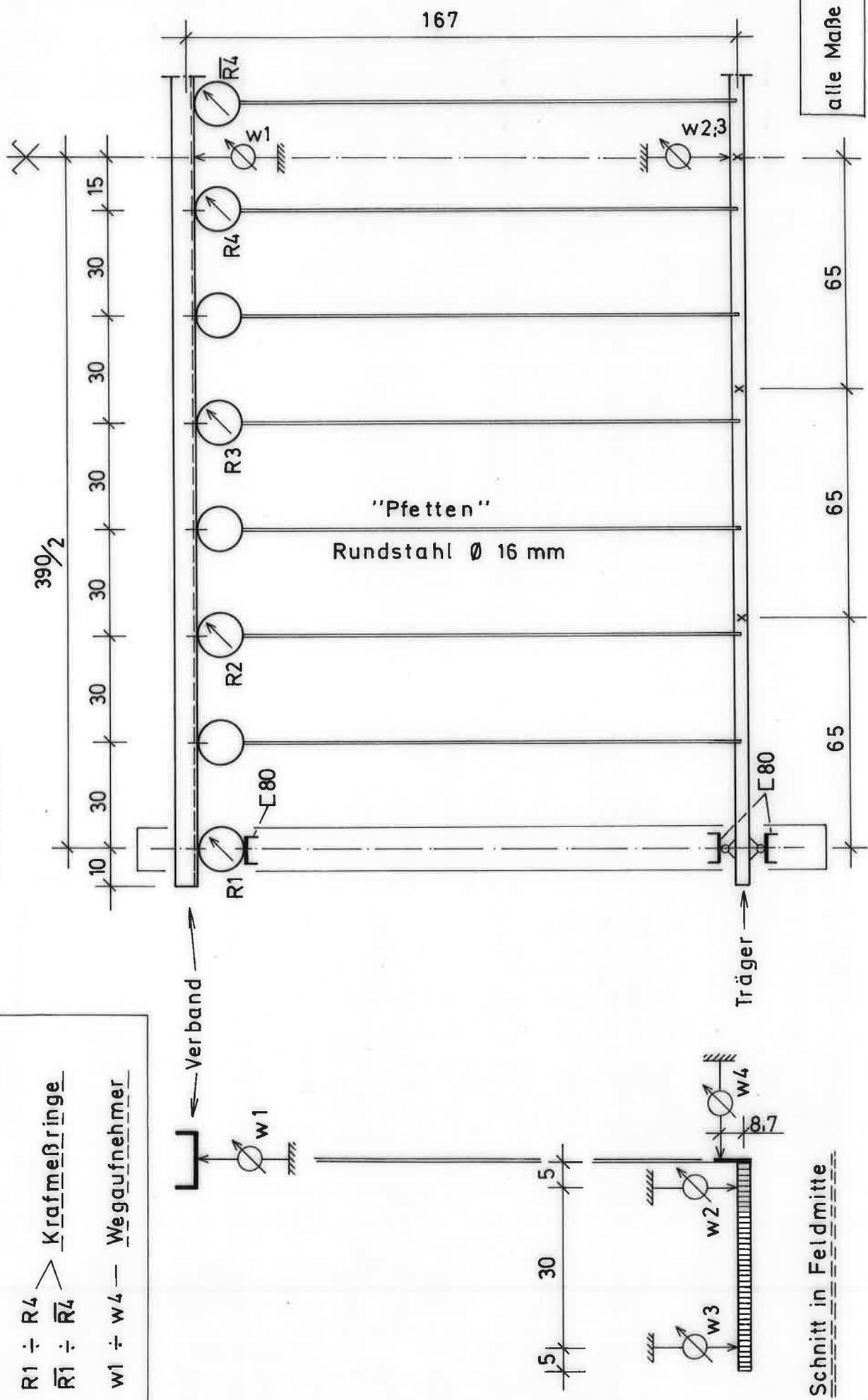


Bild 30 : Darstellung der bei den einzelnen Versuchen aufbrachten Belastungen mit den dazugehörigen rechnerischen Biege- und Schubspannungen

Draufsicht

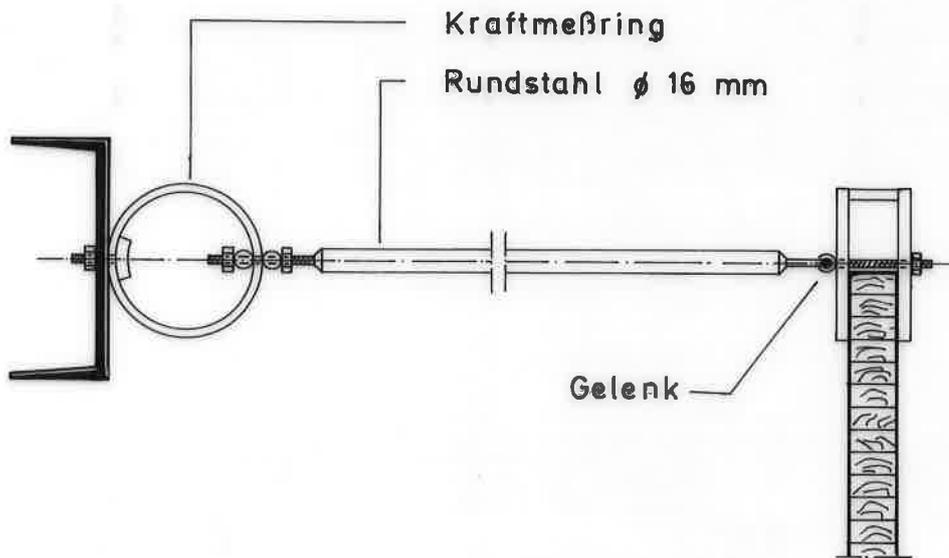
$R1 \div R4$ > Kraftmeßringe
 $\bar{R}1 \div \bar{R}4$
 $w1 \div w4$ — Wegaufnehmer



alle Maße in cm

Bild 31 : Versuchsaufbau und Anordnung der Meßvorrichtung

Verbindung Verband – Träger



Lasteinleitung

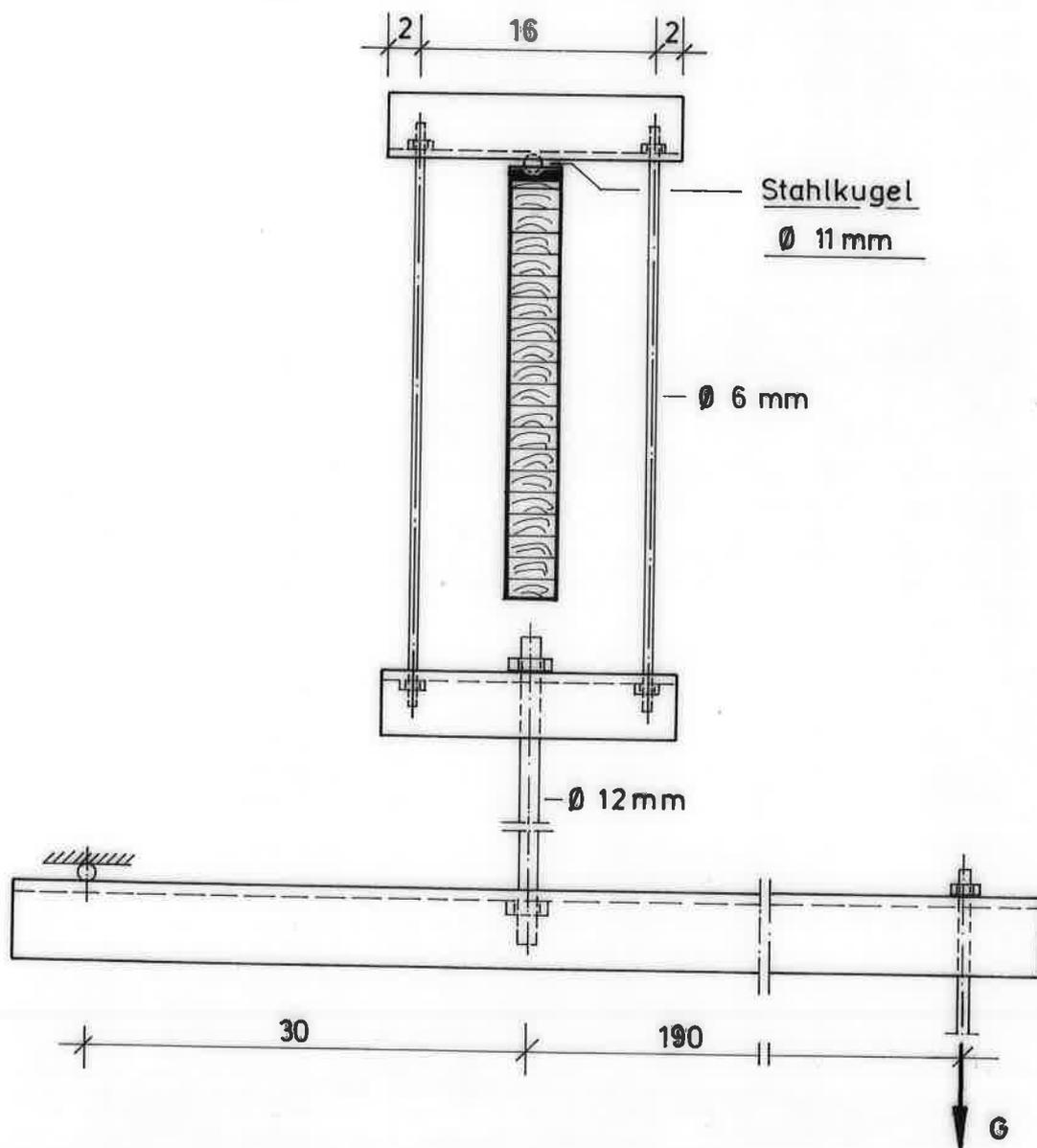


Bild 32: Details des Versuchsaufbaus

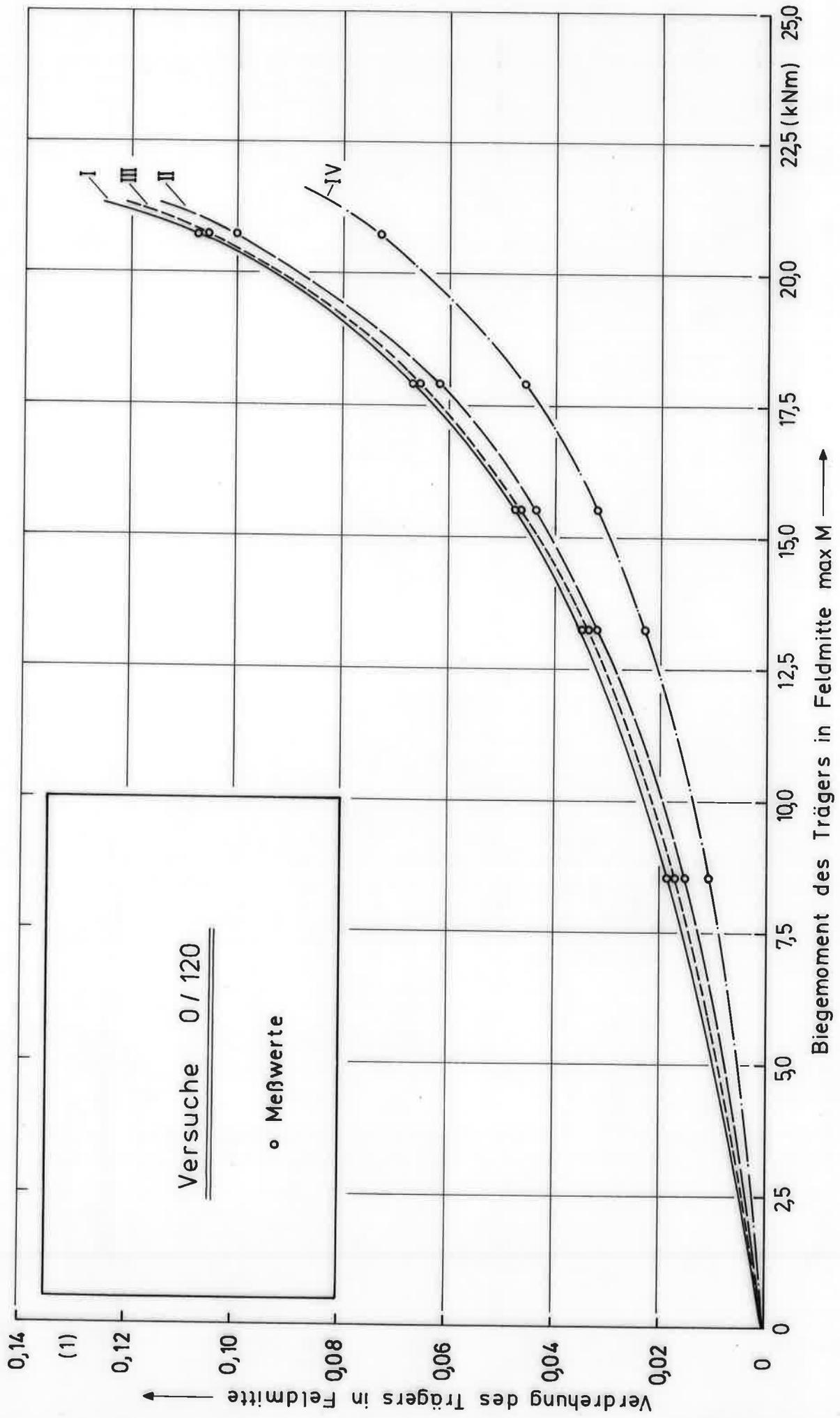


Bild 34 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

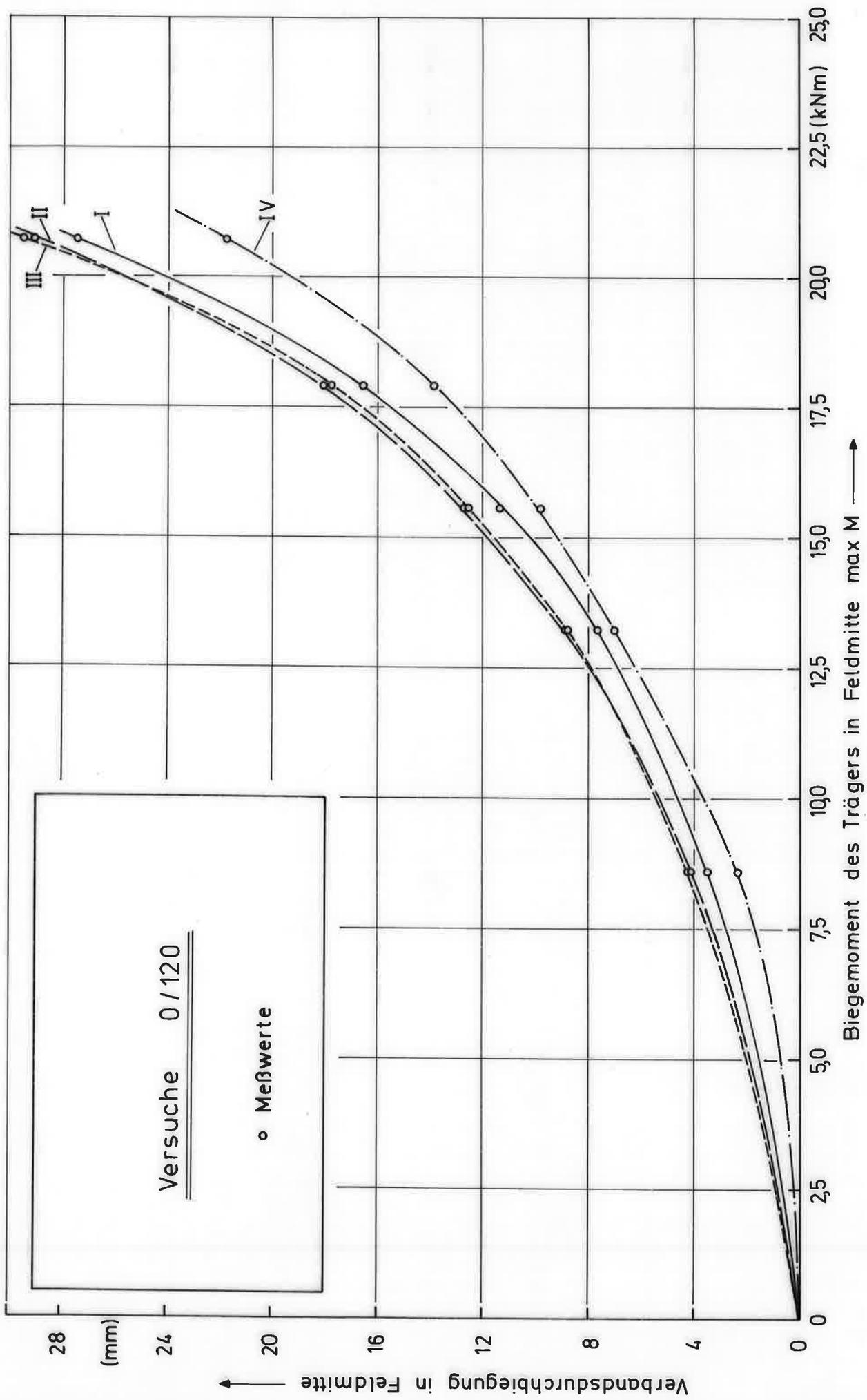


Bild 35 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

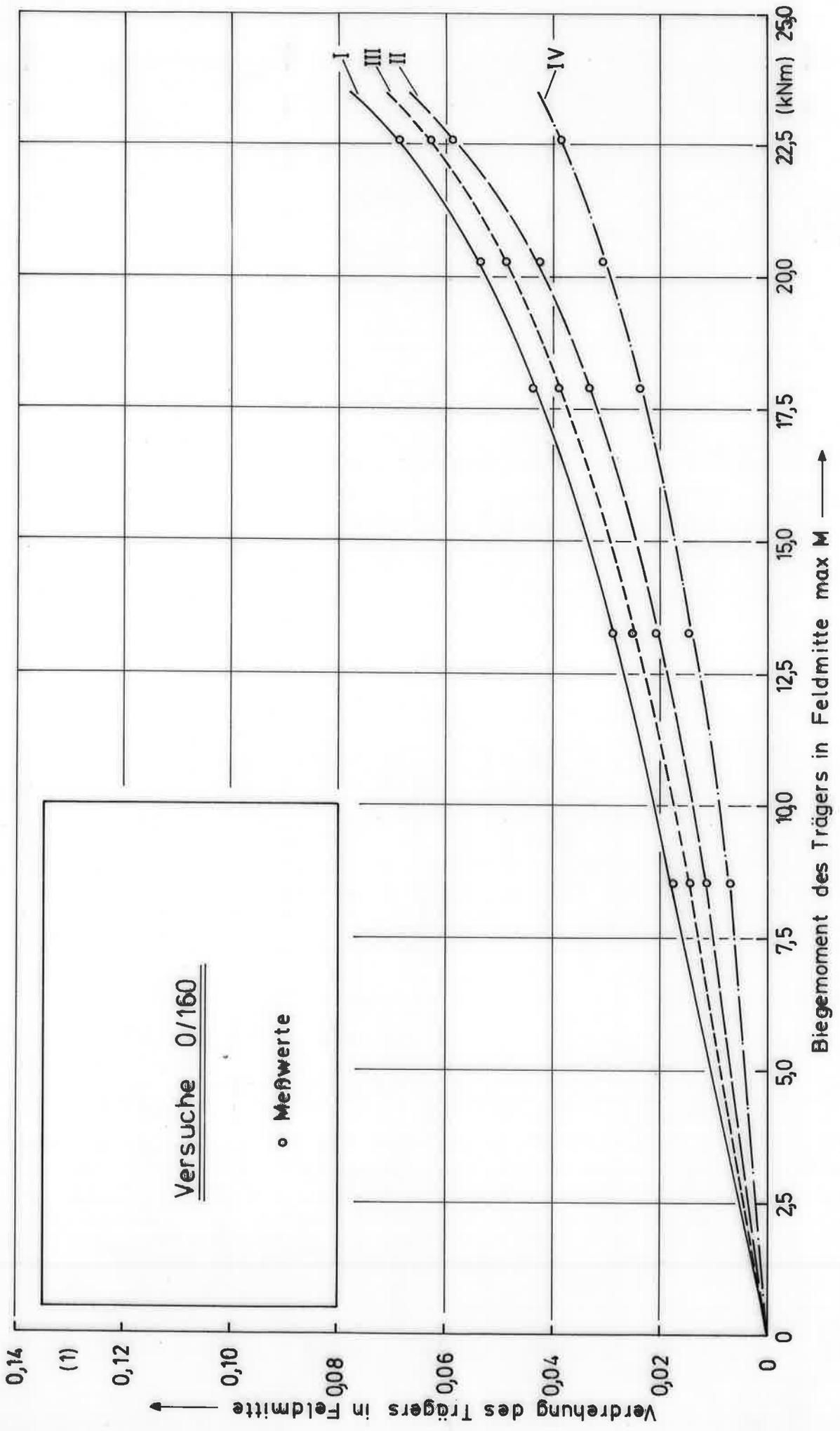


Bild 36: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

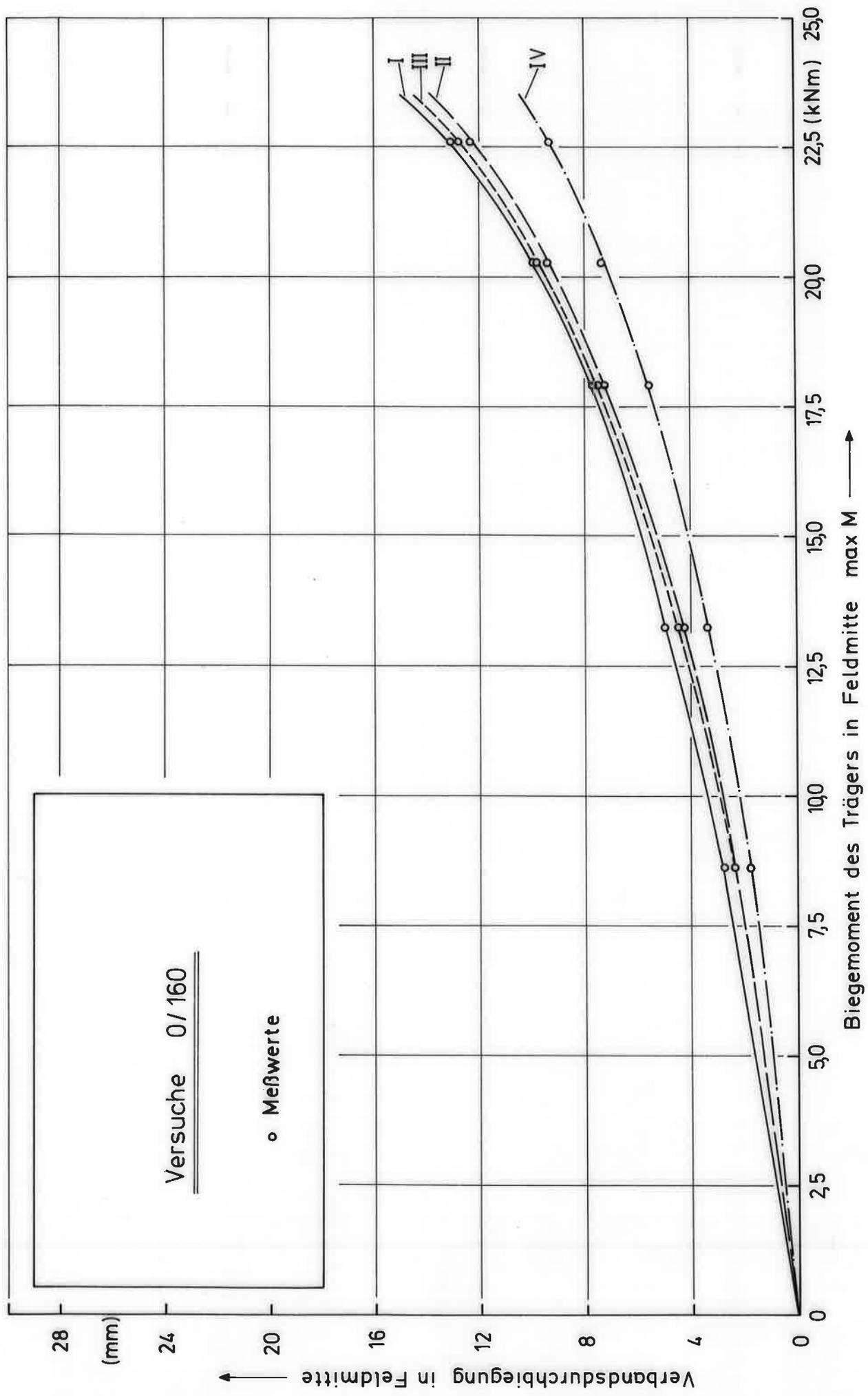


Bild 37: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

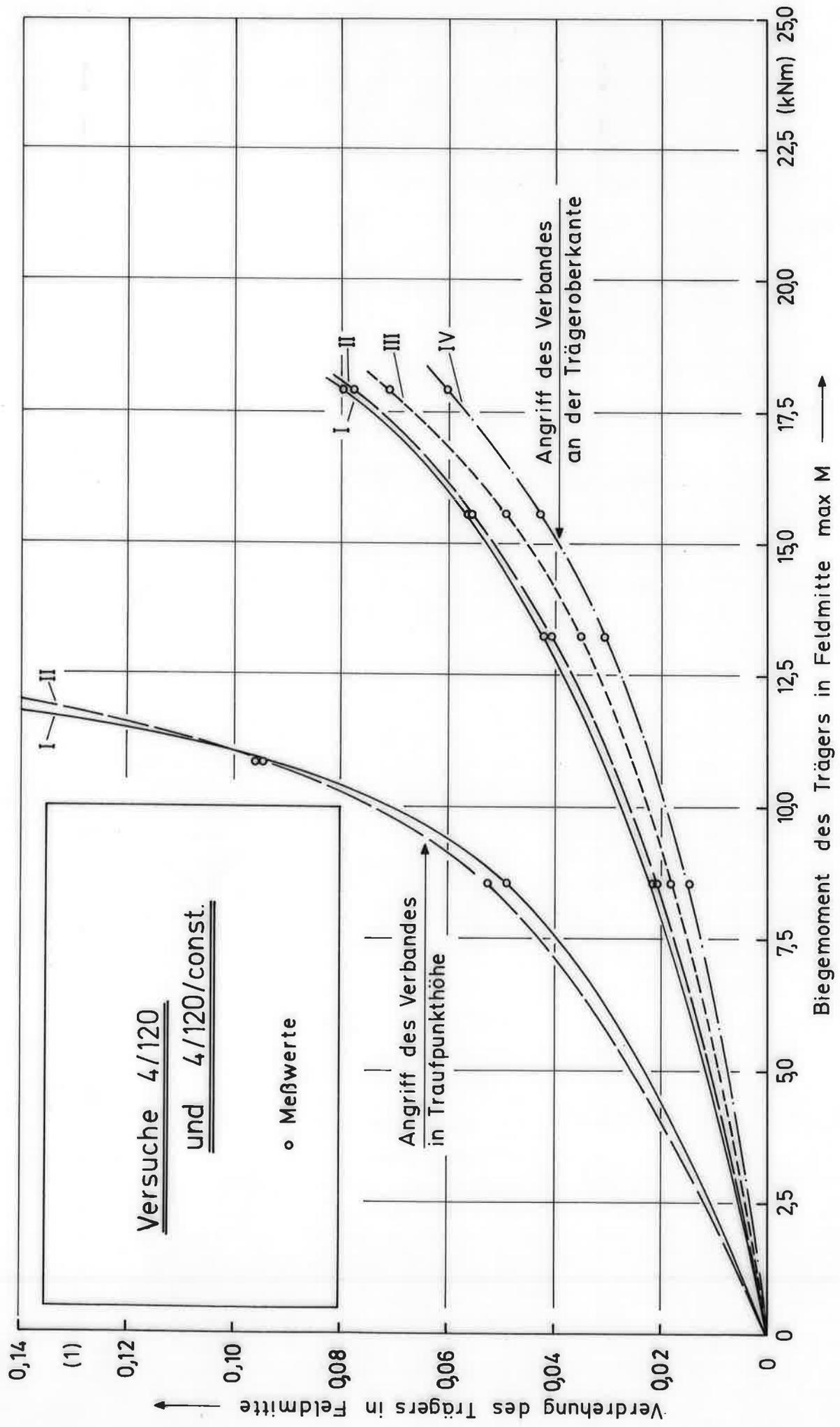


Bild 38 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

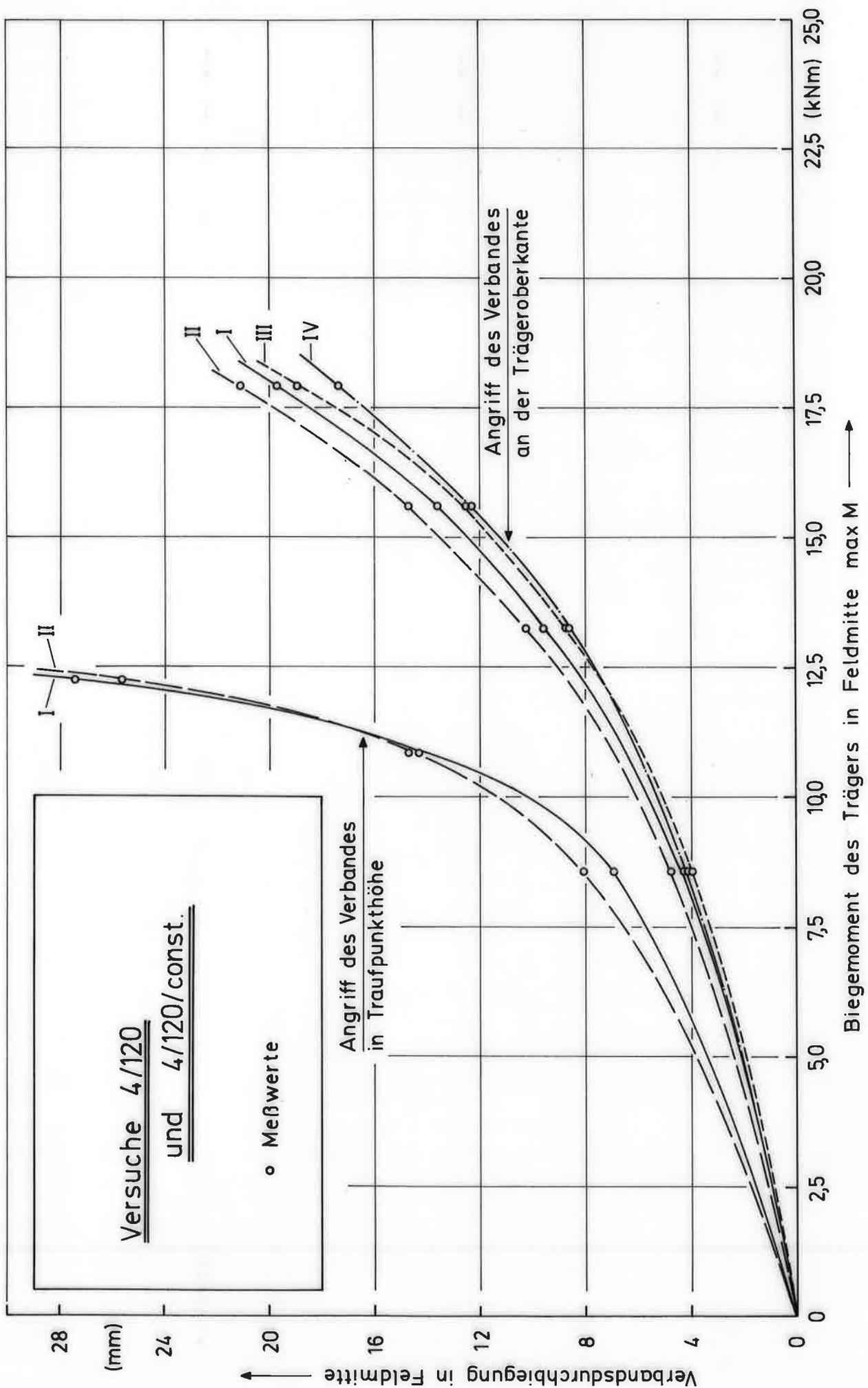


Bild 39: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

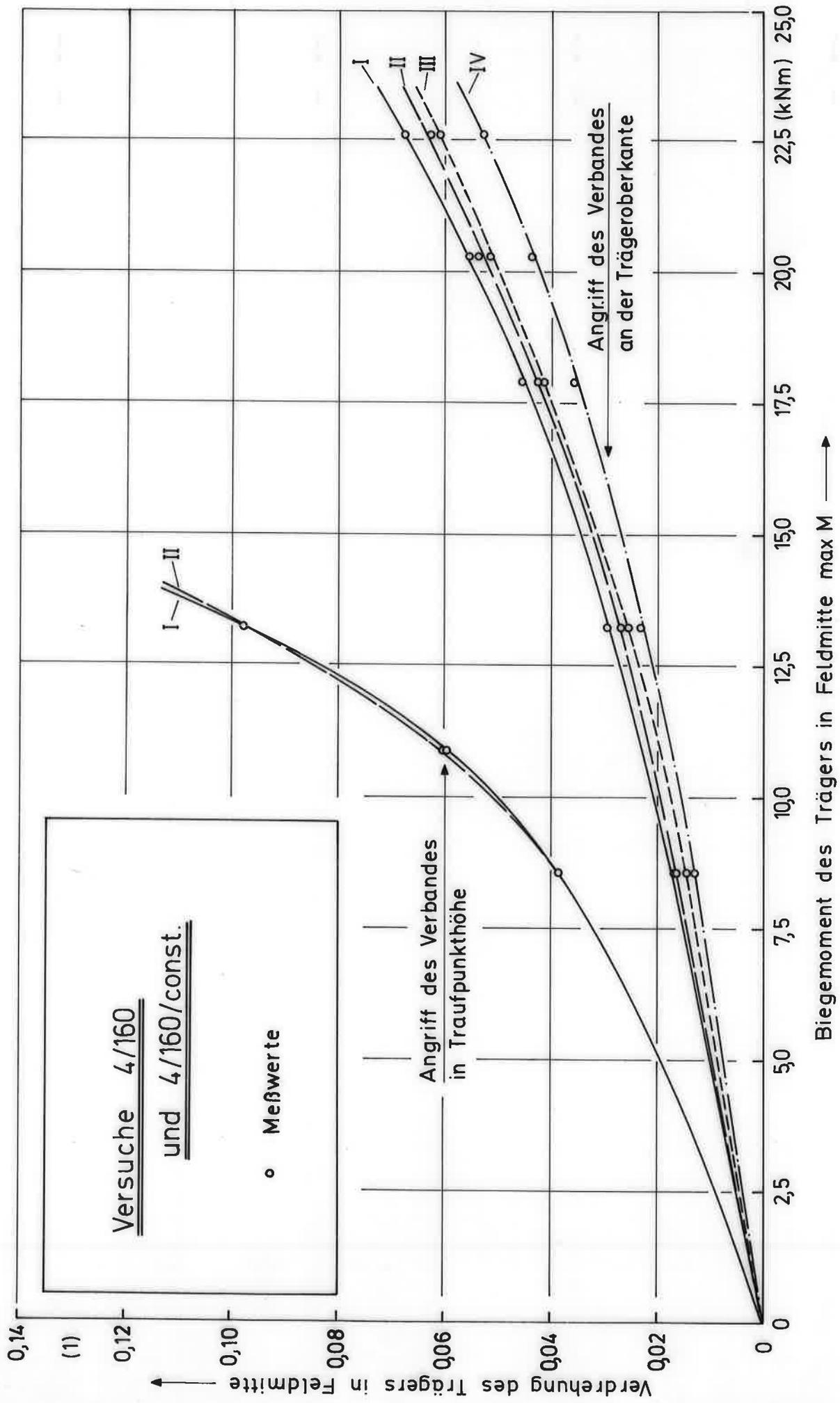


Bild 40 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

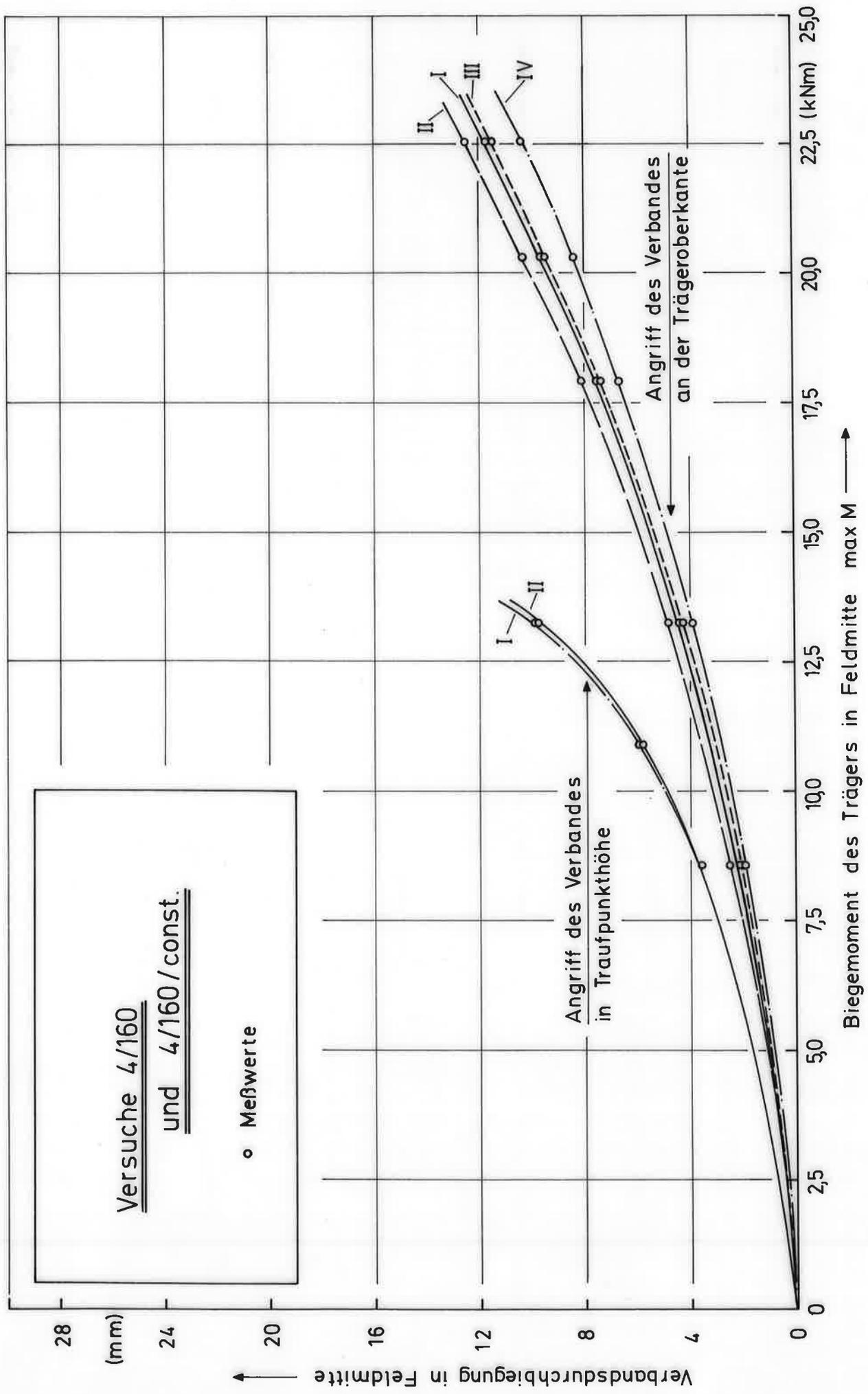


Bild 41 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

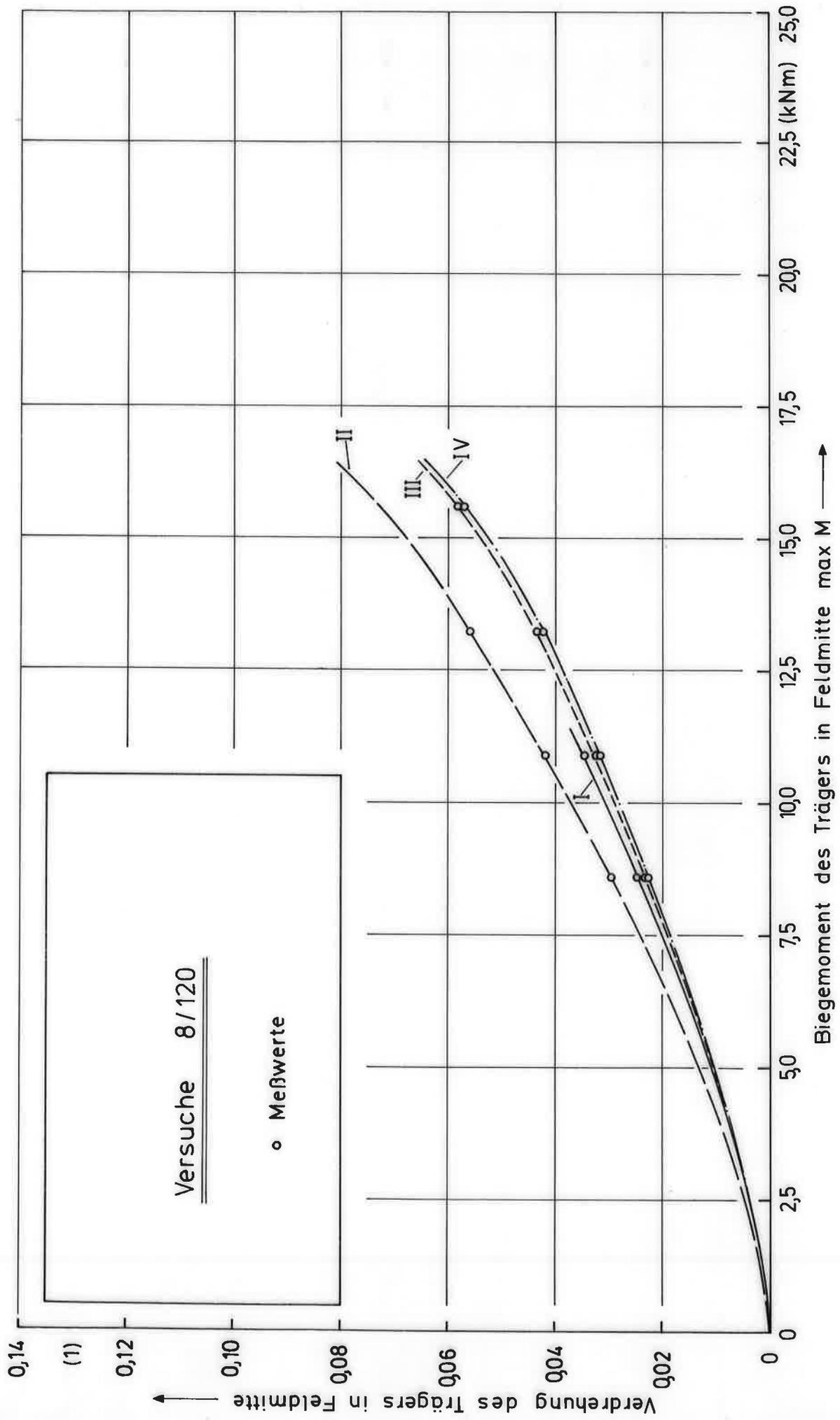


Bild 42: Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

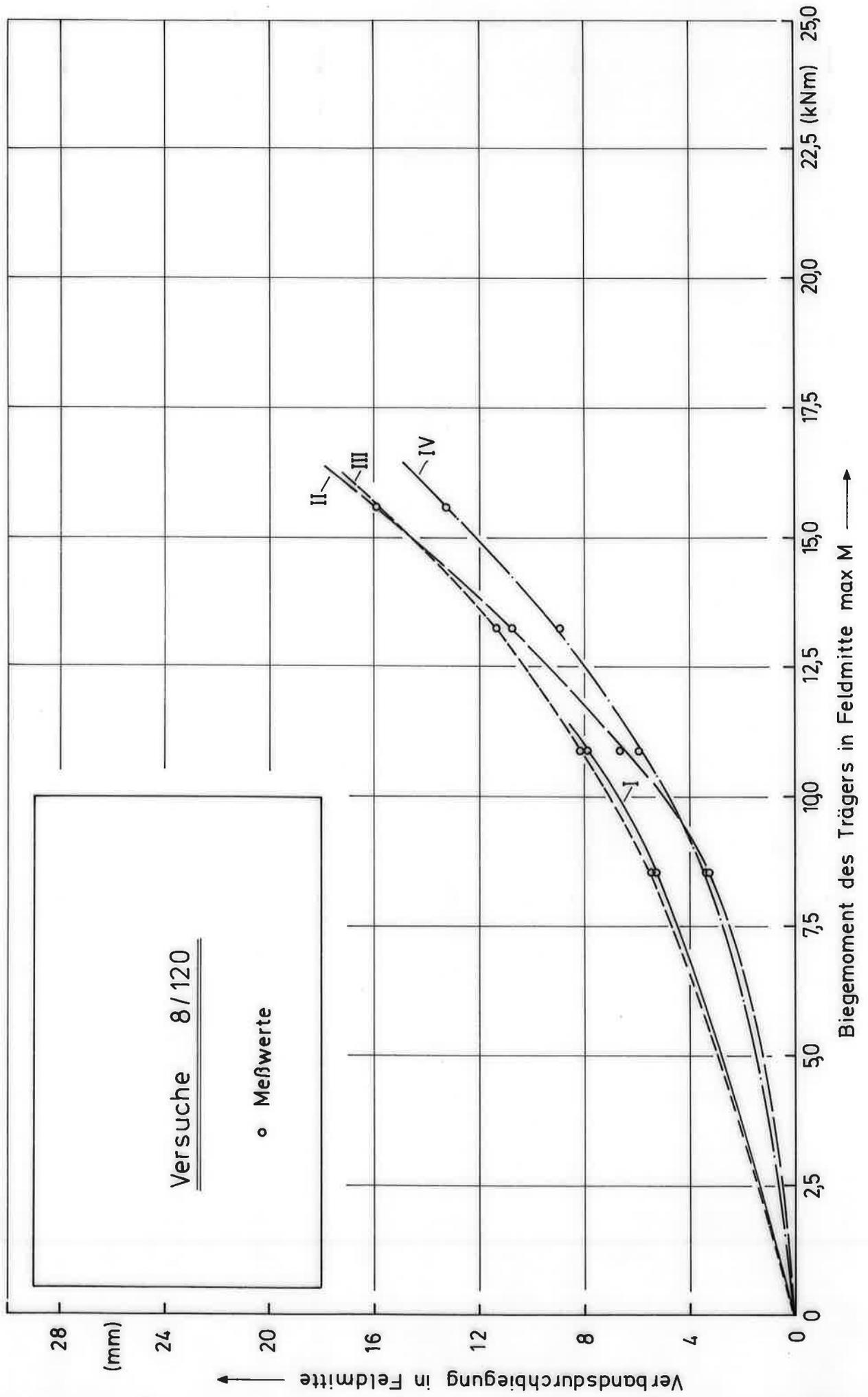


Bild 43: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

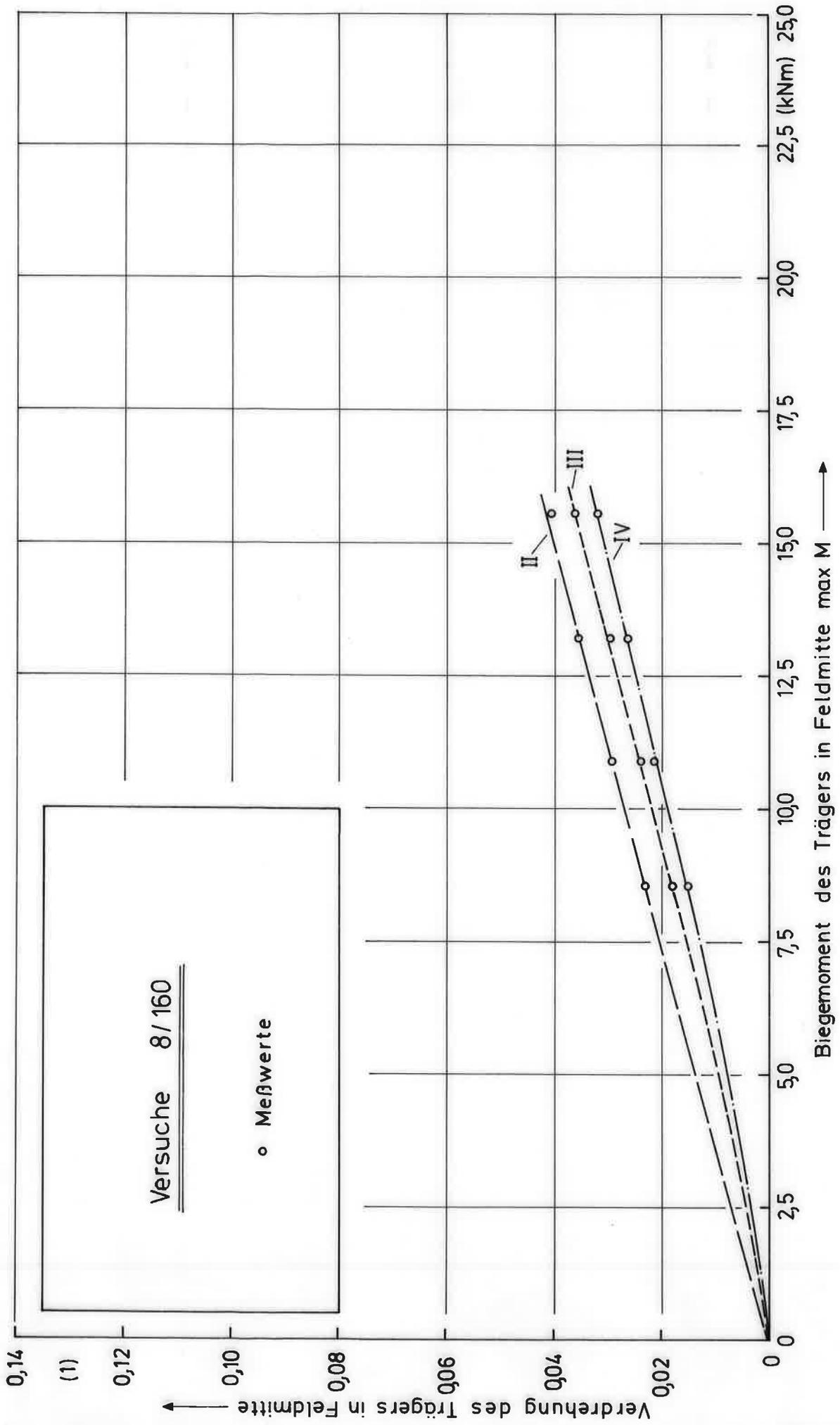


Bild 44 : Verdrehung des Trägers in Feldmitte in Abhängigkeit von der Belastung

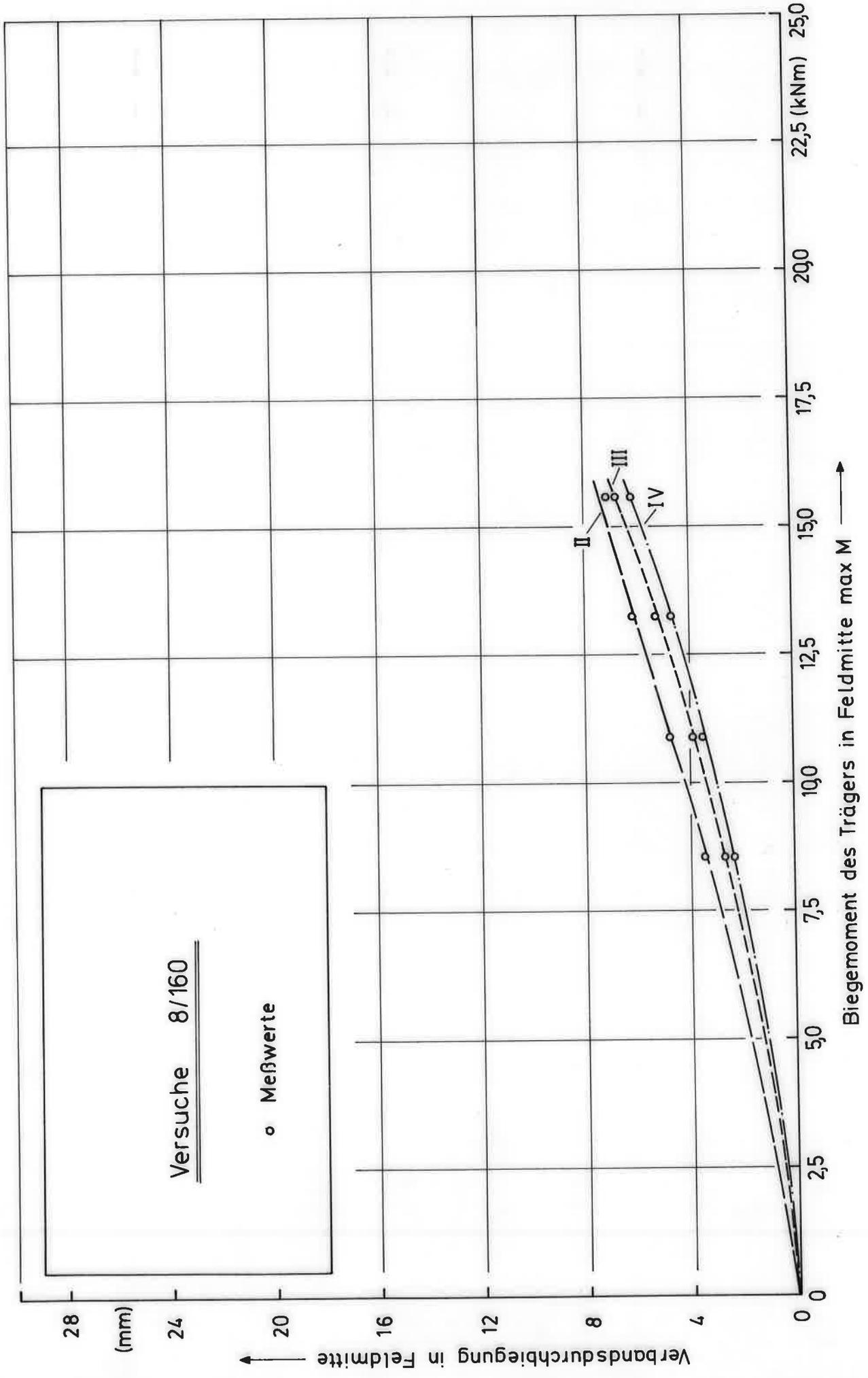


Bild 45: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

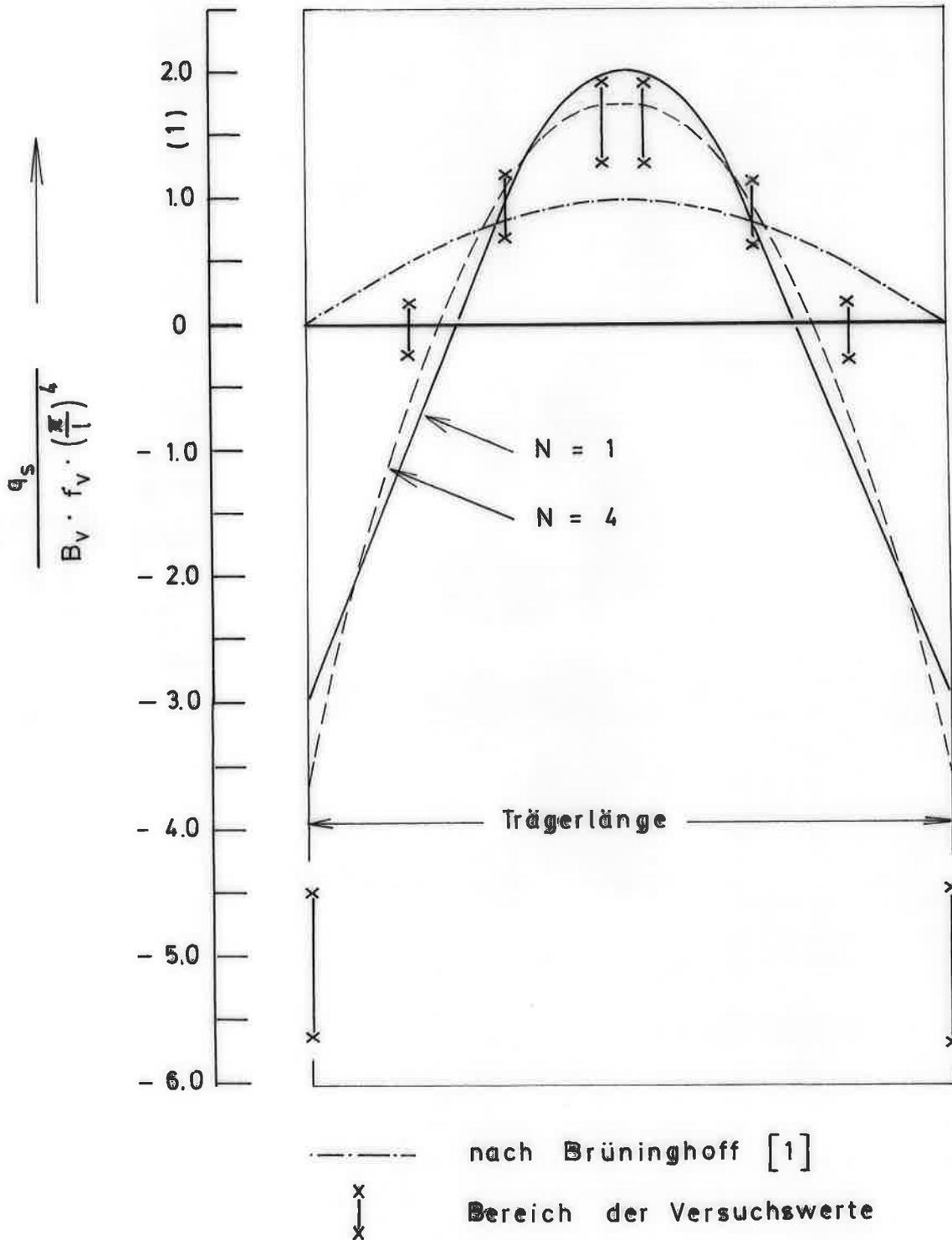


Bild 49: Verlauf der Seitenlast q_s über die Trägerlänge
 beim parallelgurtigen Träger mit Gleichstreckenlast

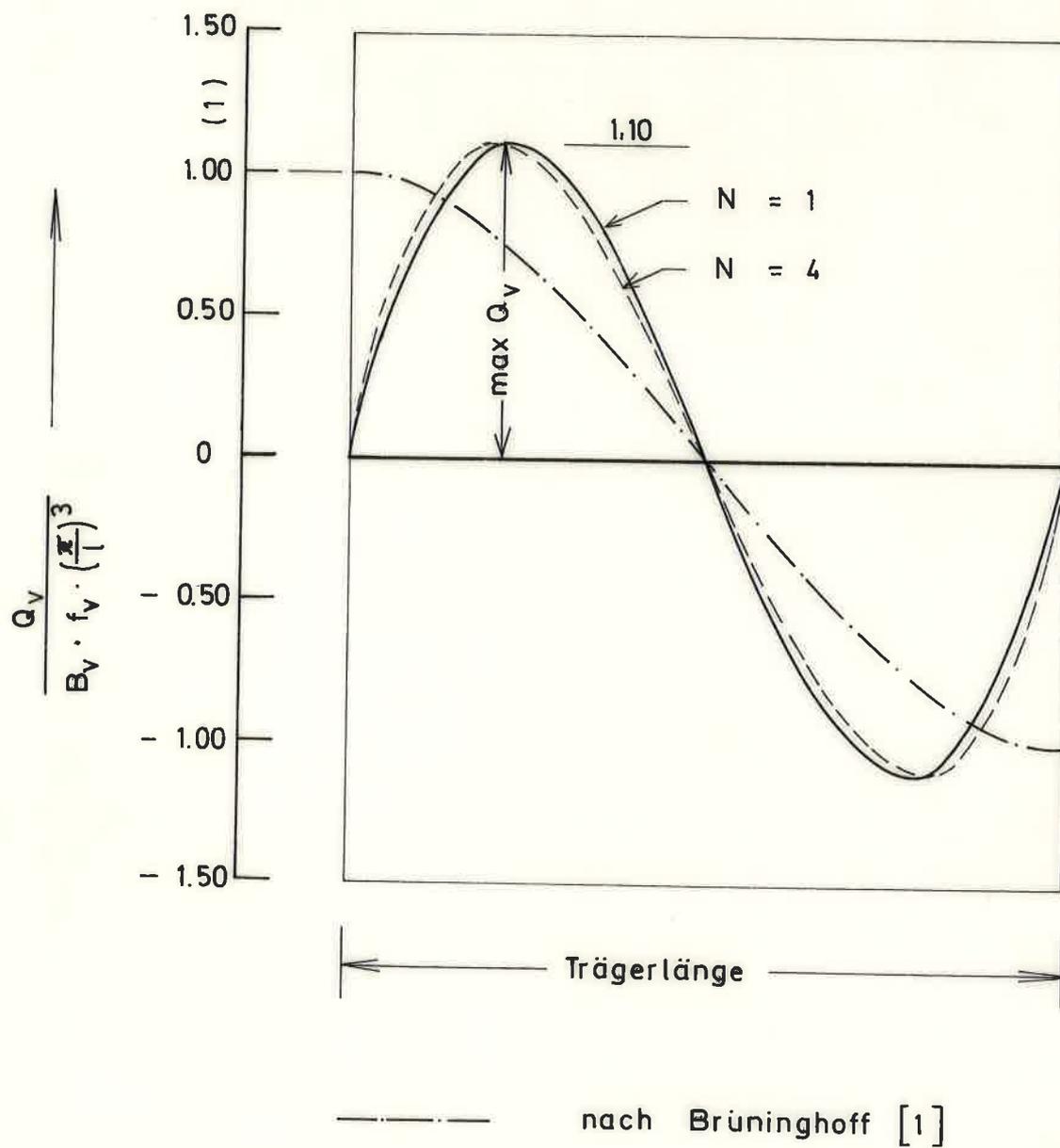


Bild 50: Querkraft Q_V im Aussteifungsverband von parallel-gurtigen Trägern mit Gleichstreckenlast

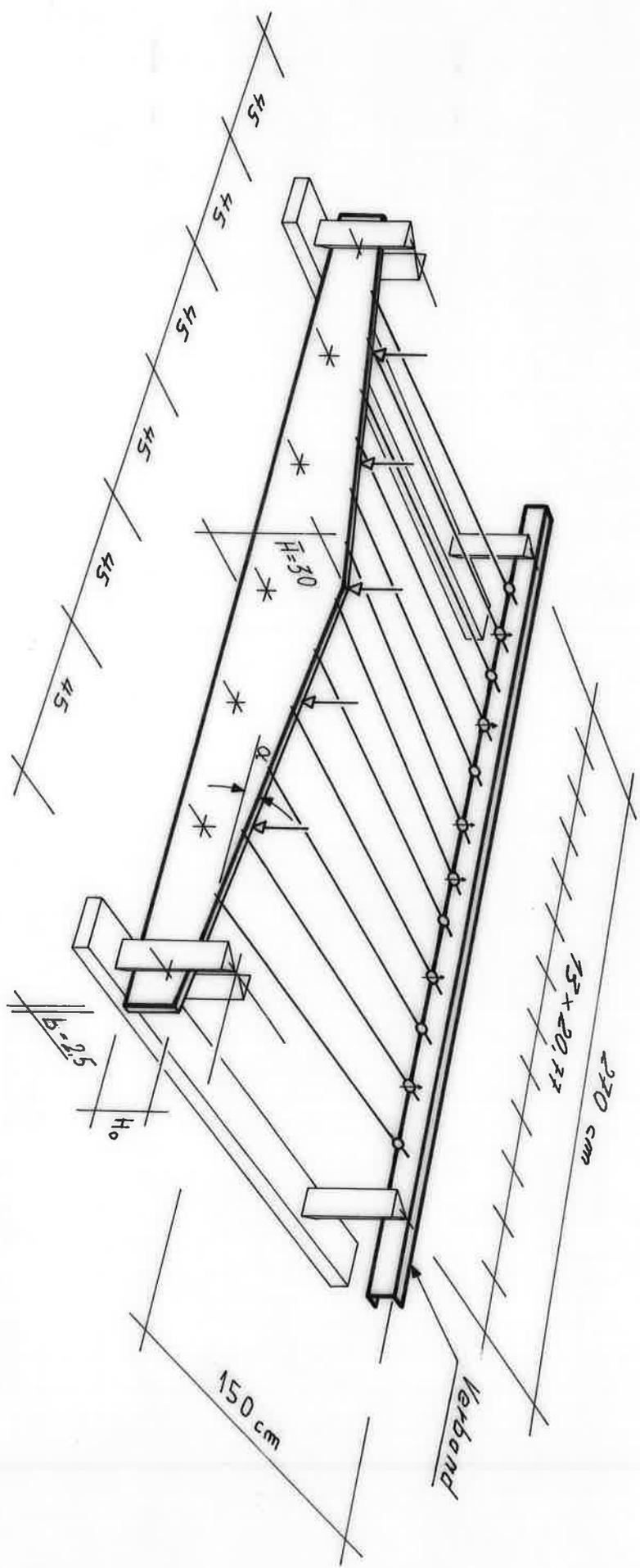


Bild 23: Vorversuche ; Versuchsaufbau und Belastung

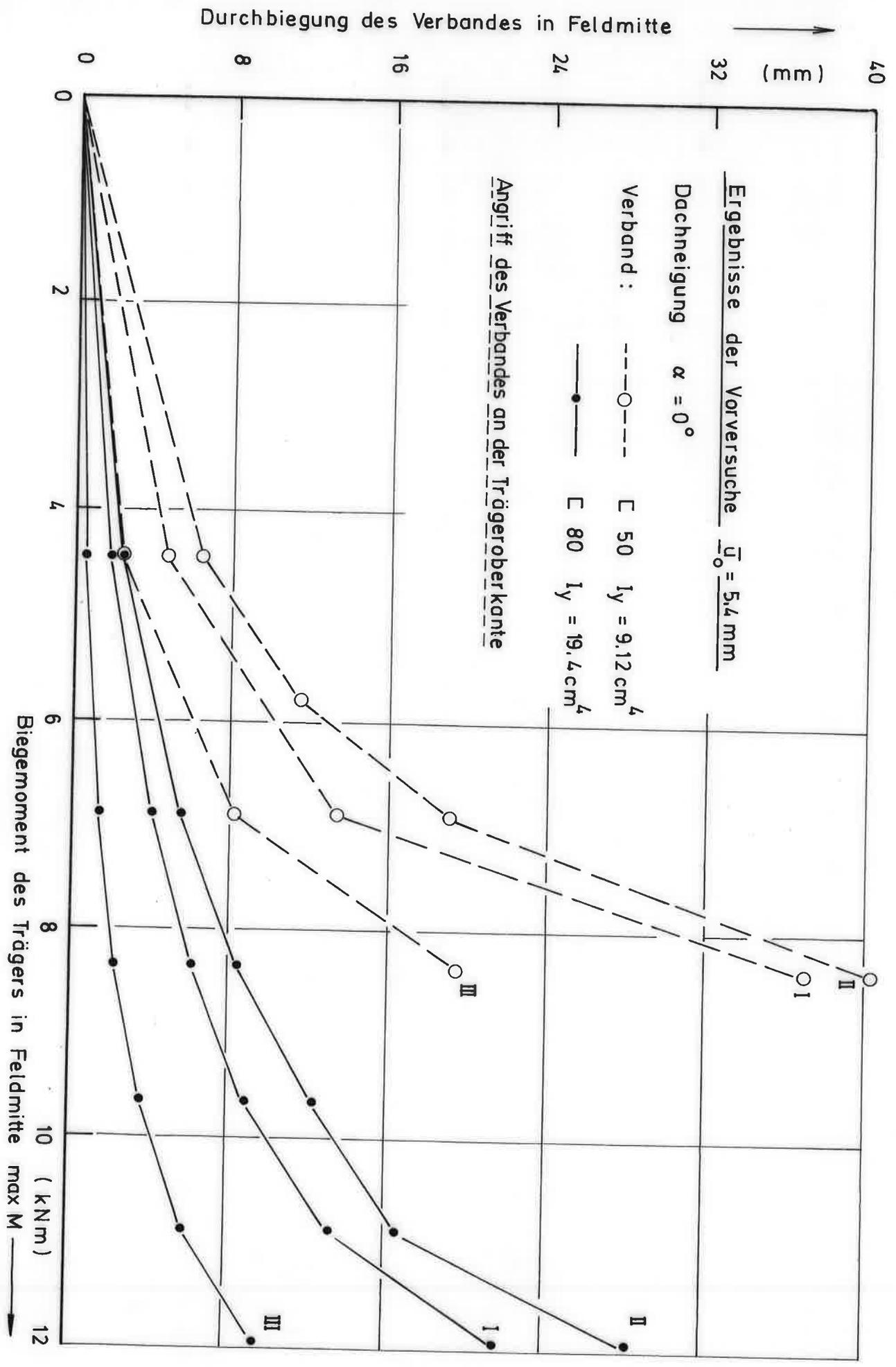


Bild 24 : Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

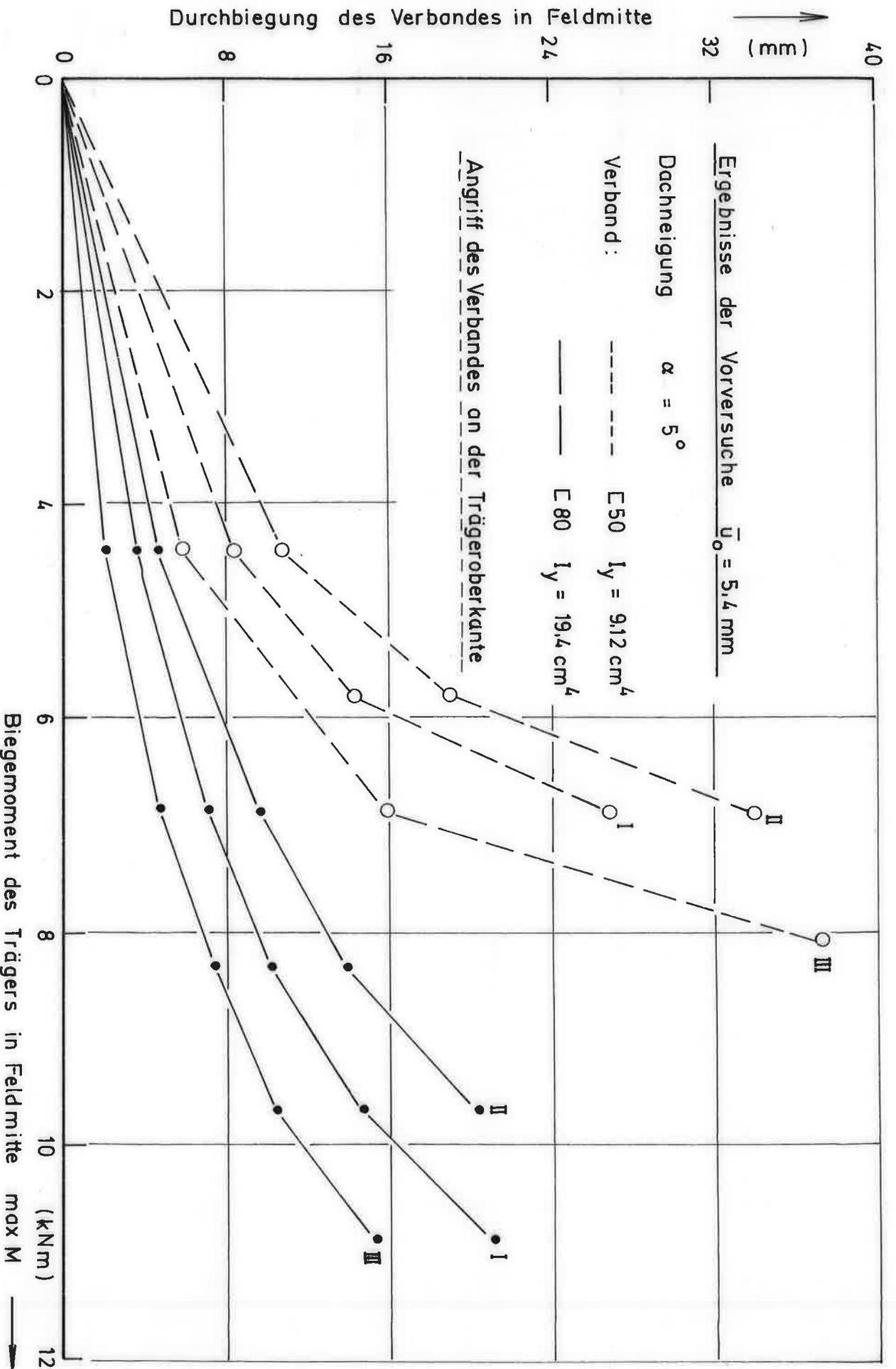


Bild 25: Durchbiegung des Aussteifungsverbandes in Feldmitte in Abhängigkeit von der Trägerbelastung

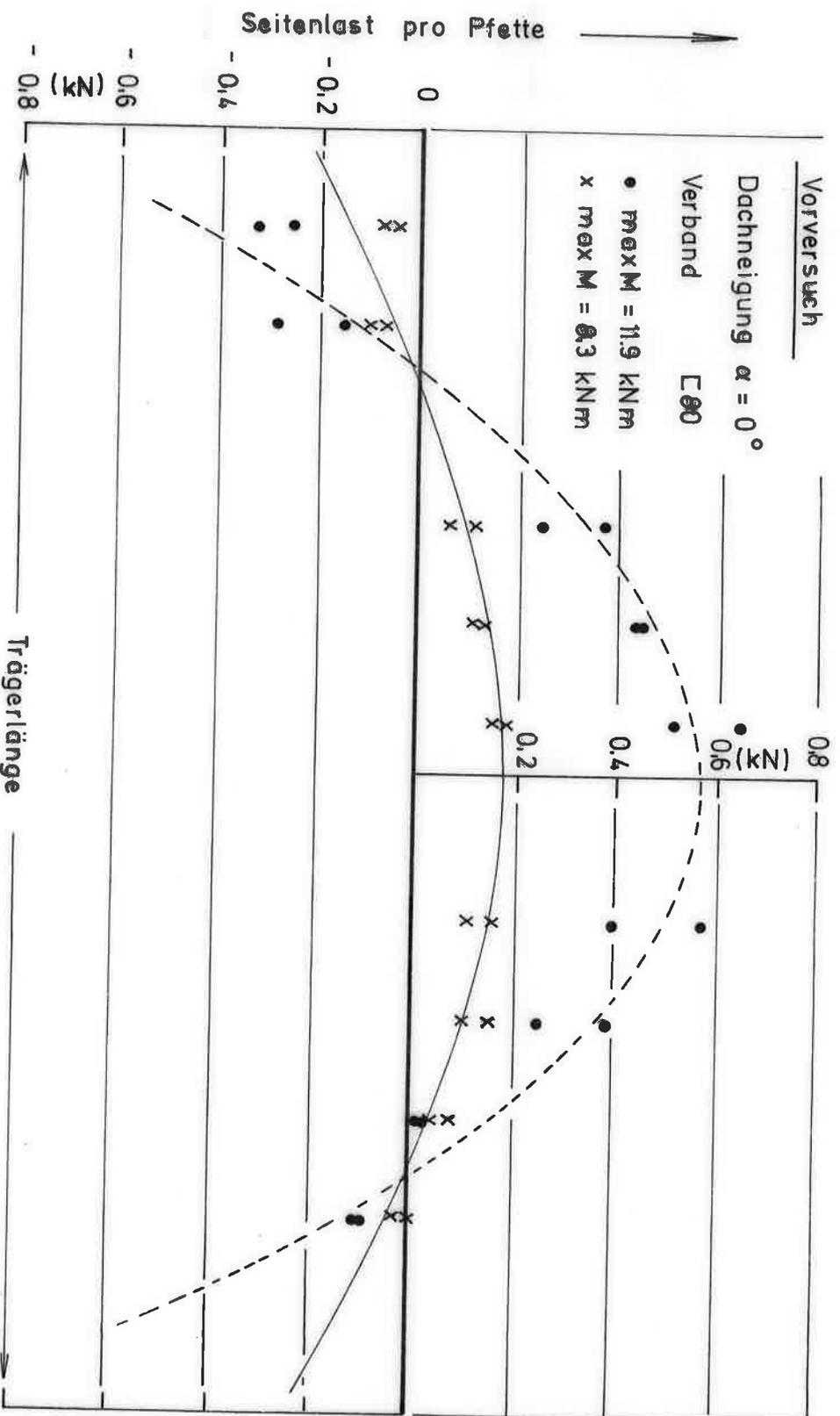


Bild 26: Verlauf der Seitenlasten über die Trägerlänge

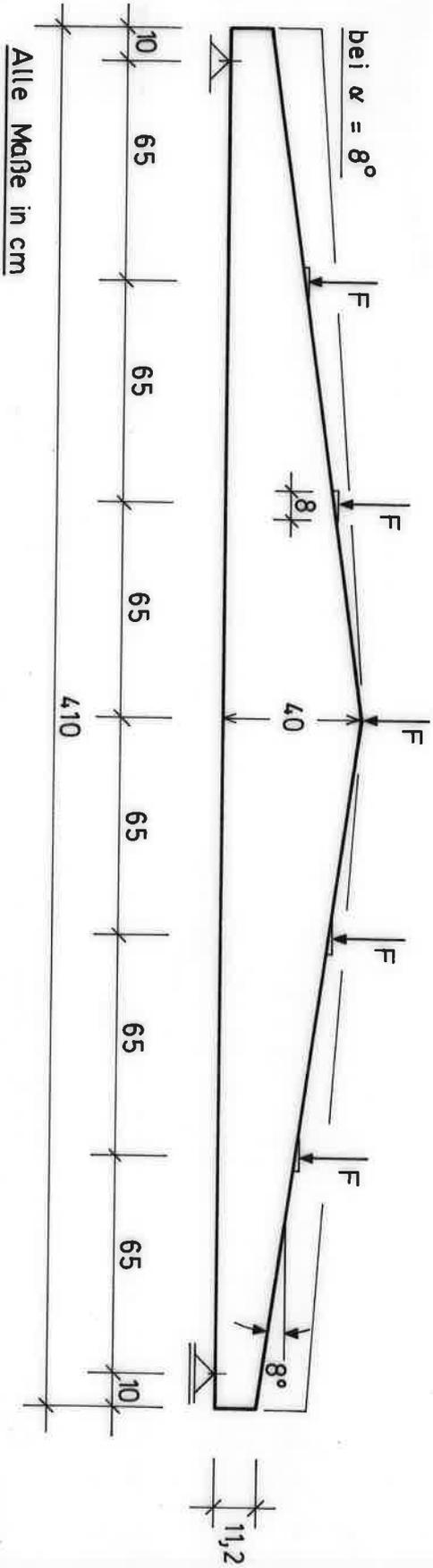
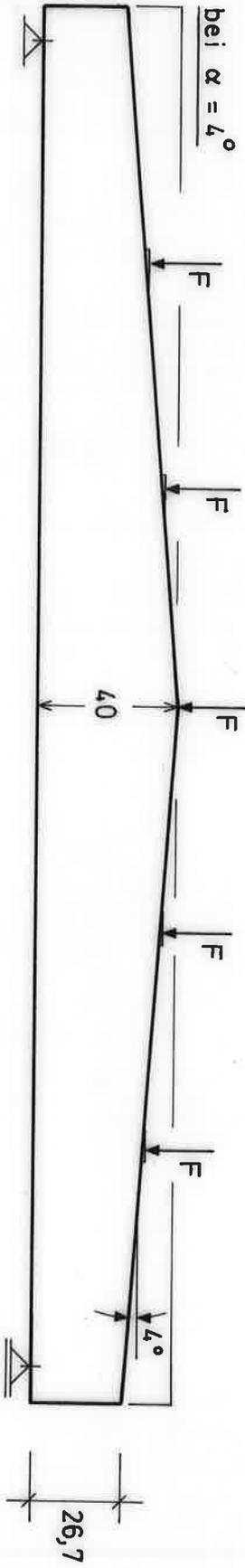
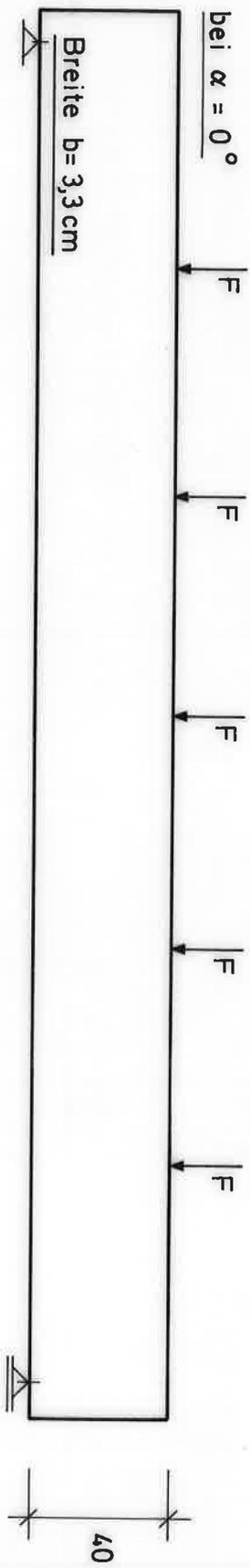
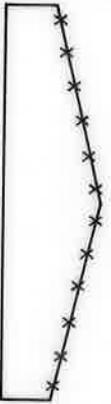
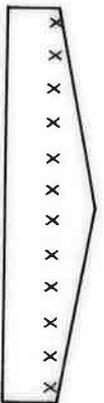
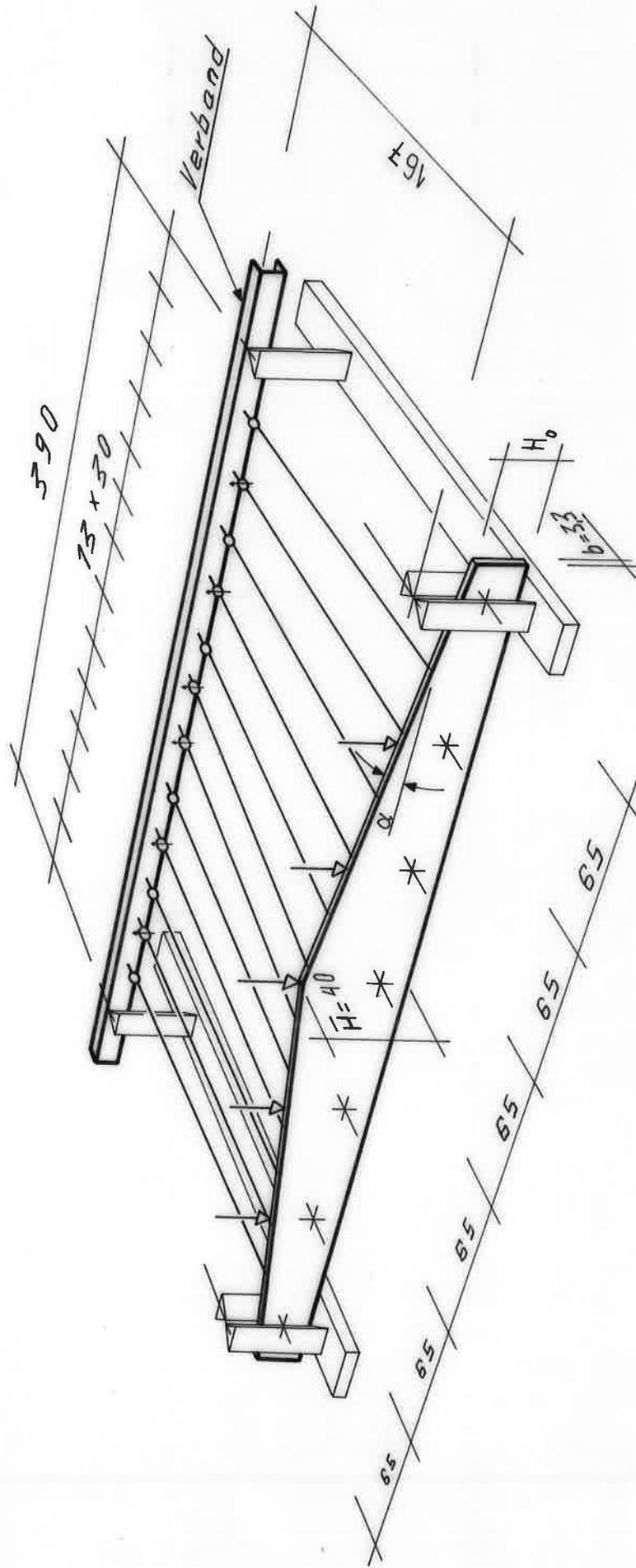


Bild 28: Abmessungen der Versuchskörper I ÷ IV ; Vorauslenkung: $\vec{u}_0 = 8 \text{ mm}$

Table 1: Zusammenstellung und Bezeichnung der Hauptversuche

| Versuchskörper | Dachneigung | Verband | Angriff des Verbandes | Bezeichnung des Versuchs |
|----------------|-------------|---------|---|--------------------------|
| I ÷ IV | 0° | C 120 |  an der Trägeroberkante | 0/120 |
| | | C 160 | | 0/160 |
| | 4° | C 120 | | 4/120 |
| | | C 160 | | 4/160 |
| | 8° | C 120 | | 8/120 |
| | | C 160 | | 8/160 |
| I und II | 4° | C 120 |  in Traufpunkthöhe | 4/120/const. |
| | | C 160 | | 4/160/const. |



alle Maße in cm

Bild 29: Hauptversuche ; Versuchsaufbau und Belastung

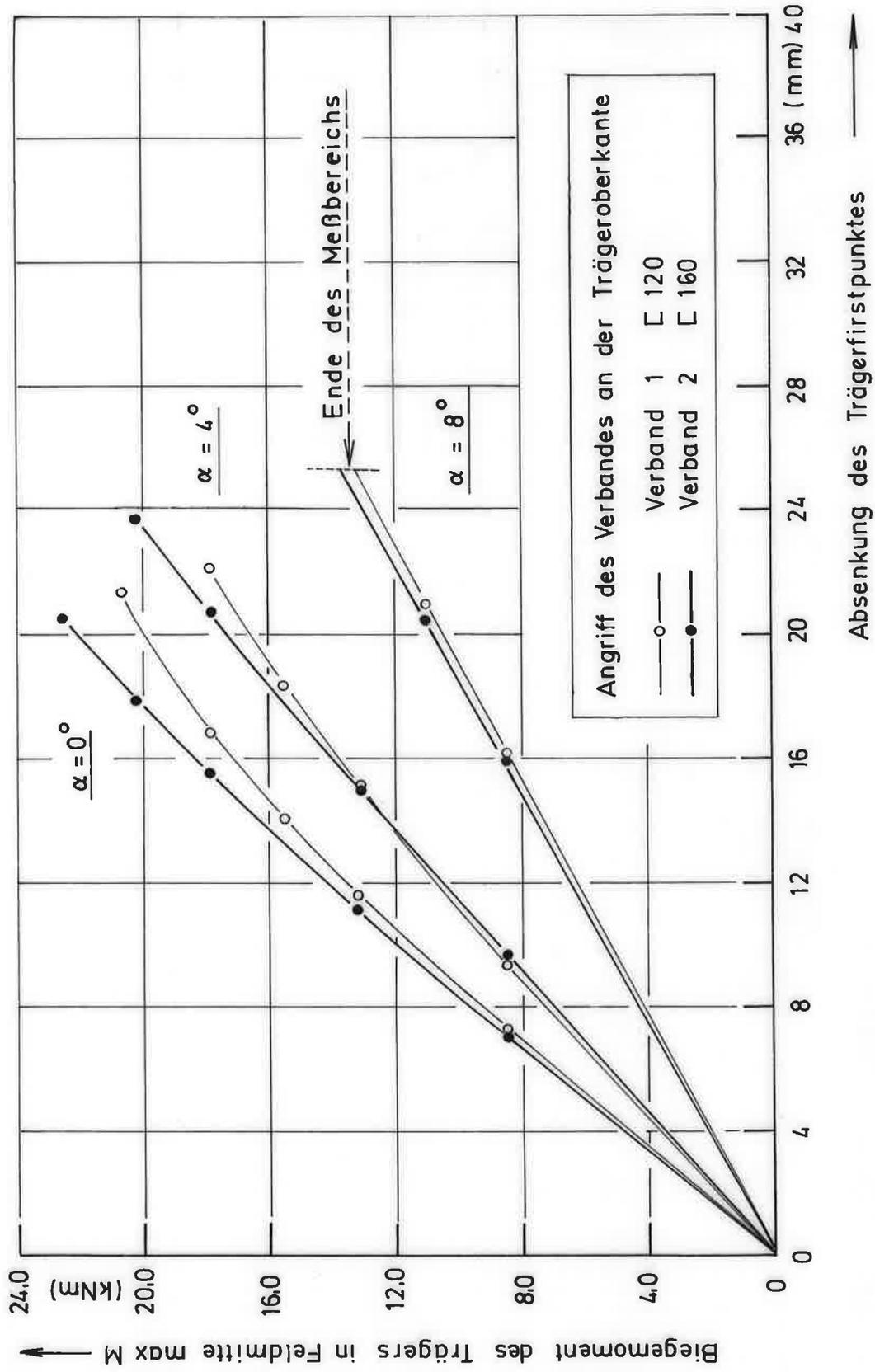


Bild 46: Absenkung des Trägerfirstpunktes in Abhängigkeit von der Trägerbelastung
 (Mittelwerte aus den Versuchen)