

**EINFLUSS DES QUERZUGBEANSPRUCHTEN VOLUMENS AUF DIE  
TRAGFÄHIGKEIT GEKRÜMMTER TRÄGER KONSTANTER HÖHE  
UND GEKRÜMMTER SATTELDACHTRÄGER AUS  
BRETTSCHICHTHOLZ**

von

Jürgen Ehlbeck und Jürgen Kürth

Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine  
Abteilung Ingenieurholzbau  
Universität Fridericiana Karlsruhe  
Univ.-Professor Dr.-Ing. Jürgen Ehlbeck

1990

**Lehrstuhl für Ingenieurholzbau  
und Baukonstruktionen**  
**Universität Karlsruhe**  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. J. Ehlbeck

D-7500 Karlsruhe 1  
Kaiserstraße 12 Postfach 6980  
Telefon (0721) 608/2211 u. 3646  
Teletex 721 166=UNI Kar.  
Telex 17 721 166  
Telefax (0721) 698116  
30.09.1990

### **Forschungsvorhaben Nr. 7130**

**FORSCHUNGSTHEMA:**

Einfluß des querzugbeanspruchten Volumens  
auf die Tragfähigkeit gekrümmter Träger kon-  
stanter Höhe und gekrümmter Satteldachträger  
aus Brettschichtholz

Schlußbericht, Abschluß des Vorhabens am 30. September 1990

Univ. - Prof. Dr. - Ing. J. Ehlbeck

## INHALTSVERZEICHNIS

<b>1.</b>	<b>ZIEL DES FORSCHUNGSVORHABENS</b>	<b>1</b>
<b>2.</b>	<b>BERECHNUNG DER MAXIMALEN SPANNUNGEN BZW. DER SPANNUNGSVERTEILUNG</b>	<b>4</b>
2.1	Erste Untersuchungen an gekrümmten Trägern konstanter Höhe und Satteldachträgern mit geradem Untergurt	4
2.2	Untersuchungen an gekrümmten Trägern mit Hilfe neuer Rechenmethoden	10
2.2.1	Untersuchungen von Foschi und Fox in Kanada	10
2.2.2	Untersuchungen von Buchmann	17
2.2.3	Die Versuche in der F.M.P.A. in Stuttgart	17
2.2.4	Die Untersuchungen von Möhler/Blumer in Karlsruhe	19
2.2.5	Untersuchungen von Noack / von Roth in Hamburg	21
2.2.6	Untersuchungen von Gopu und Goodman in den U.S.A	23
2.2.6.1	Bemessung gekrümmter Träger konstanter Höhe	24
2.2.6.2	Bemessung gekrümmter Satteldachträger	25
2.2.7	Die Untersuchungen von Möhler / Hemmer in Karlsruhe	28
2.2.8	Die Versuche von Krabbe / Neuhaus in Bochum	29
2.2.9	Weitere Untersuchungen	30
<b>3.</b>	<b>FESTLEGEN DER ZULÄSSIGEN SPANNUNGEN</b>	<b>31</b>

## II

<b>4.</b>	<b>ANLAGE UND DURCHFÜHRUNG DER VERSUCHE</b>	<b>34</b>
4.1	Abmessungen und Herstellung der Versuchskörper	34
4.2	Versuchsaufbau	35
4.3	Anordnung der Meßstellen	36
4.4	Durchführung der Bruchversuche	36
<b>5.</b>	<b>ERGEBNIS DER VERSUCHE</b>	<b>37</b>
5.1	Bruchlasten und rechnerische Bruchspannungen	37
5.2	Dehnungen und Durchbiegungen	39
<b>6.</b>	<b>AUSWERTUNG DER VERSUCHE</b>	<b>40</b>
6.1	Berechnung der Versuchsträger mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FE)	40
6.1.1	Modellaufbau und Materialkennwerte	40
6.1.2	Bruchspannungen und Dehnungen	41
6.1.3	Querzugbeanspruchtes Volumen	42
6.2	Bruchspannungen in Abhängigkeit von der Trägerform, der Trägergröße und der Art der Belastung	42
6.3	Bestimmung der Parameter der Weibull-Verteilung aus den Versuchswerten	43
6.3.1	Folgerungen aus der Anwendung der genauen Weibull-Theorie	45
6.4	Vergleich mit aus der Literatur bekannten Versuchen an gekrümmten Trägern sowie an Querzugproben	46
6.5	Vergleich mit den Festlegungen im Eurocode 5	48
6.5.1	Trägerformen	48
6.5.2	Bemessungsspannungen	48
6.5.3	Bemessungsfestigkeit	48

### III

6.6	Bemessungsvorschlag	50
6.6.1	Verteilungsfaktor $k_{dis}$	51
6.6.2	Charakteristische Querkzugfestigkeit	52
7.	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	<b>53</b>
8.	<b>LITERATURZUSAMMENSTELLUNG</b>	<b>55</b>
9.	<b>ANLAGEN</b>	

## VORWORT

Bei der Bemessung gekrümmter Träger konstanter Höhe und gekrümmter Satteldachträger sind die im Firstquerschnitt auftretenden maximalen Querkzugspannungen bisher gegen eine für alle Träger gleich große zulässige Querkzugspannung abzugrenzen. Im vorliegenden Forschungsvorhaben wird der Einfluß des querkzugbeanspruchten Volumens auf die Tragfähigkeit gekrümmter Träger untersucht und die Anwendbarkeit eines Bemessungsverfahrens geprüft, das die Trägerform, die Art der Lasteinleitung und die Größe und Verteilung der Querkzugspannungen über die Trägerhöhe und die Trägerlänge berücksichtigt. Damit wird eine einheitlichere Bemessung gekrümmter Träger im Sinne gleich großer Sicherheiten gegenüber der Traglast möglich.

Das Vorhaben entstand im Auftrag der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen e.V. . Die finanziellen Mittel dazu wurden vom Bundeswirtschaftsminister bereitgestellt. Die Planung der Versuche wurde von Herrn Dipl.-Ing. P. Belchior-Gaspard angefangen. Die weitere Planung und Durchführung der Versuche und die Auswertung wurden von Herrn Dipl.-Ing. J. Kürth geleitet. Für den Versuchsaufbau und die Messungen im Labor waren die Herren G. Rüd und J. Lafferthon verantwortlich. Bei der Auswertung haben unsere Studenten, die Herren cand.ing. M. Steuerwald, cand.ing. F. Lederer und Frau cand.ing. I. Wetzel tatkräftig mitgewirkt.

Allen Beteiligten ist für die Mitarbeit zu danken.

Jürgen Ehlbeck

## 1. ZIEL DES FORSCHUNGSVORHABENS

Die Weiterentwicklung des Holzbaues in den letzten Jahrzehnten von der Zimmermannsbauweise hin zum Ingenieurholzbau mit großen Spannweiten für Hallen und Brücken wurde erst durch neue Techniken der Holzverarbeitung, wie z.B. dem Brettschichtholz, möglich. Damit waren auch die Voraussetzungen für vom Holzwachstum unabhängige, beliebige Trägerformen gegeben. Zu diesen zählen auch die seit einigen Jahren verwendeten gekrümmten Träger und Satteldachträger aus Brettschichtholz. Sie werden hauptsächlich mit Rechteckquerschnitt aus einzelnen Brett lamellen hergestellt. Je nach Dach- bzw. Trägerform werden sie unterschieden nach:

- Satteldachträger mit geradem Untergurt,
- Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt,
- gekrümmte Träger mit konstanter Trägerhöhe
- Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt und sich zum Auflager konisch verjüngender Querschnittshöhe (vgl. Bild 1)

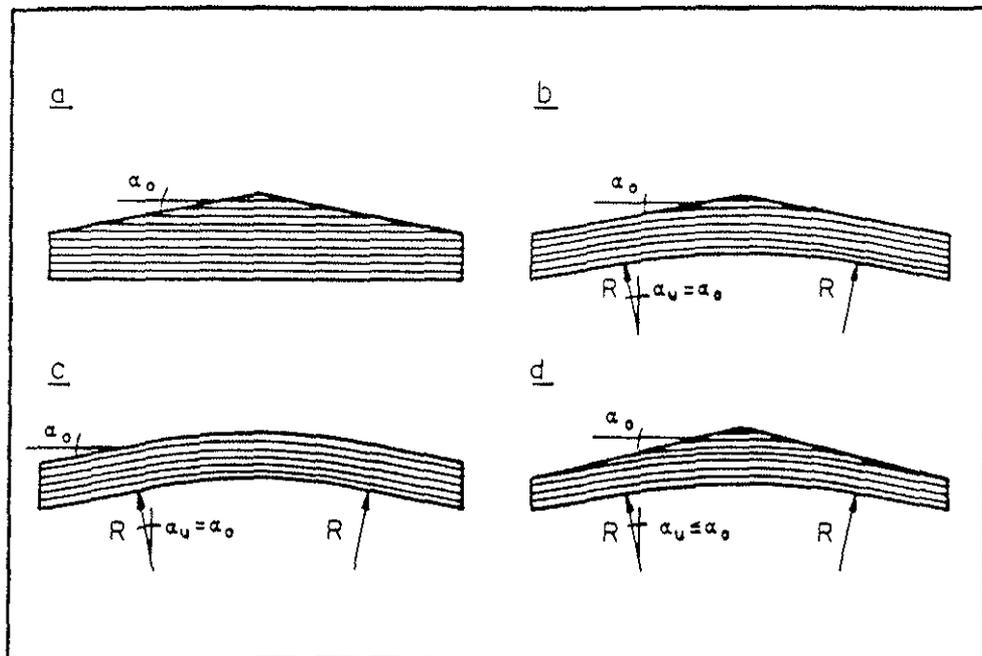


Bild 1: verschiedene Trägerformen

Gegenüber dem geraden parallelrandigen Träger weisen Satteldachträger folgende Vorteile auf :

- das Regenwasser kann infolge der Neigung der Dachfläche besser abfließen (keine Wassersackbildung),
- durch die Anordnung größerer Querschnitte in der hochbeanspruchten Zone können höhere Lasten übertragen werden,
- bei einer Ausführung mit gekrümmtem Untergurt kann der Gebäudeinnenraum an Höhe gewinnen,
- bei Trägern mit großen Spannweiten, mit zum Auflager sich konisch verjüngender Querschnittshöhe, die am häufigsten in der Praxis verwendet werden, können Material und Kosten eingespart werden.

In der zur Zeit gültigen deutschen Bemessungsnorm DIN 1052 (Ausgabe April 1988) Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung werden Bemessungsregeln für gekrümmte Träger infolge reiner Momentenbelastung angegeben. Dabei werden nur gekrümmte Träger konstanter Höhe, Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt und Satteldachträger mit geradem Untergurt unterschieden. Der häufig verwendete Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt und sich zum Auflager verjüngender Querschnittshöhe bleibt unberücksichtigt. Die Ursache dafür liegt darin begründet, daß man noch vor einiger Zeit davon ausging, diese Träger durch Begrenzung der maximal auftretenden Spannungen bemessen zu können.

Erst neuere Untersuchungen (BARRETT, FOSCHI, FOX 1975; COLLING 1986a, 1986b; EHLBECK, HEMMER 1985; FOX 1974a, 1974b) haben gezeigt, daß nicht nur die Höhe der Spannungen, sondern auch deren Verteilung über die Trägerhöhe und Trägerlänge, die Art der Lasteinleitung und die Trägerform einen bedeutenden Einfluß auf das Tragvermögen haben. In neueren internationalen Normvorschlägen wie z.B. dem EUROCODE 5 "Gemeinsame einheitliche Regeln für Holzbauwerke (1987)" werden bereits Berechnungsverfahren vorgeschlagen, die diese Einflüsse berücksichtigen.

In den folgenden Kapiteln werden zunächst die in den vergangenen Jahren veröffentlichten Verfahren zur Bestimmung der Spannungen in gekrümmten Trägern vorgestellt. Danach folgen eigene Untersuchungen an gekrümmten Trägern, bei denen der Einfluß von Trägergeometrie, Belastungsart und Spannungsverteilung auf die Traglast erforscht wird.

Ziel dieses Forschungsvorhabens war es, aufgrund der Versuche und zusätzlicher Berechnungen an einer Großrechenanlage unter Benutzung eines Finite Elemente Programmes ein Bemessungsverfahren für gekrümmte Träger zu finden, das eine wirklichkeitsnähere Berechnung zuläßt. Dadurch sollen Unterschiede in den Versagenswahrscheinlichkeiten zwischen den verschiedenen Trägerformen in Zukunft vermieden werden.

## 2. BERECHNUNG DER MAXIMALEN SPANNUNGEN BZW. DER SPANNUNGSVERTEILUNG

### 2.1 ERSTE UNTERSUCHUNGEN AN GEKRÜMMTEN TRÄGERN KONSTANTER HÖHE UND SATTELDACH-TRÄGERN MIT GERADEM UNTERGURT

Zur Berechnung der Querkzugspannung in einem gekrümmten parallelrandigen Bogen geben WILSON 1939 und WILSON, COTTINGHAM 1947 folgende Gleichung an (die Ableitung der Gleichung ist in Bild 2 dargestellt):

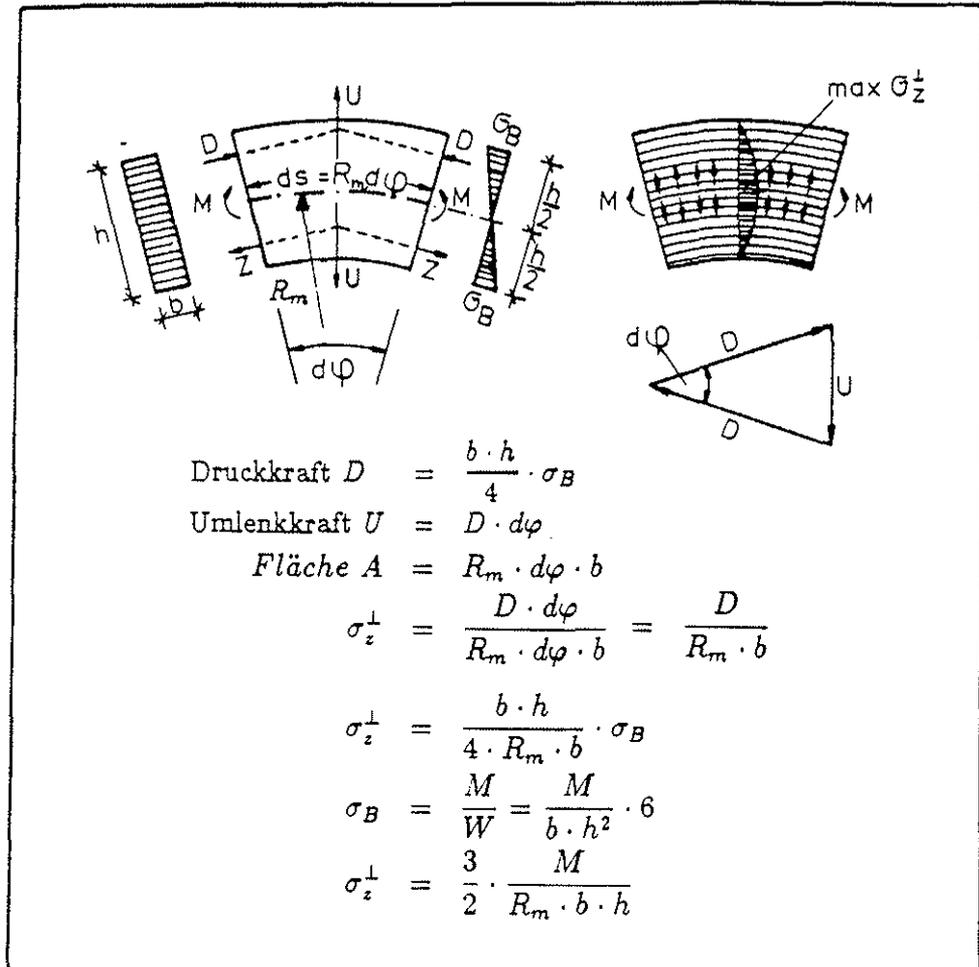
$$\sigma_z = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{R_m \cdot b \cdot h} \quad (1)$$

M	=	Biegemoment
R <sub>m</sub>	=	mittlerer Krümmungsradius
b	=	Trägerbreite
h	=	Trägerhöhe

Da auch ein Zusammenwirken von Spannungen den Bruch verursachen kann, wendete NORRIS 1963 seine Interaktionsgleichung auf gekrümmte Douglas-fir Träger an. Diese Gleichung stellt mathematisch eine Ellipse im Raum dar, wobei die drei Hauptachsen der Längs-, der Quer- und der Schubspannung entsprechen. Sie lautet:

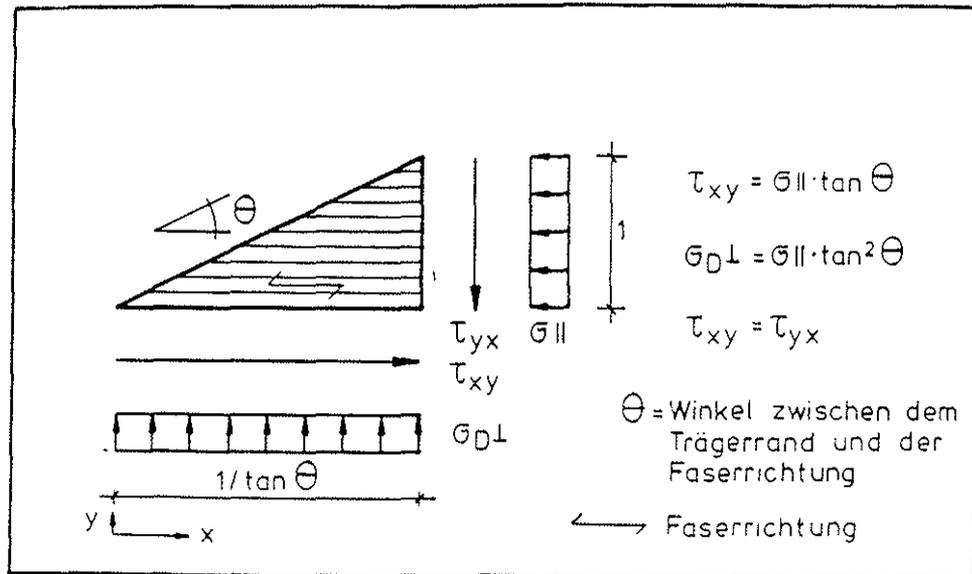
$$\left(\frac{\sigma_x}{f_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{f_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xy}}{f_{xy}}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  = vorh. Spannungen in  $x, y, xy$  - Richtung  
 $f_x, f_y, f_{xy}$  = Festigkeit in  $x, y, xy$  - Richtung



**Bild 2:** Querzugspannung nach Wilson

MAKI, KUENZI 1965 untersuchten Satteldachträger mit geradem Untergurt aus Aluminium (isotrop) und aus Sitka-spruce (anisotrop) und Pultdachträger aus Aluminium. Sie verglichen die Biegespannung nach der Biegetheorie von Bernoulli-Euler ( $\sigma = M/W$ ) mit der Biegespannung nach der Elastizitätstheorie von Timoshenko. Hierbei versuchten sie die Grenzen der Gleichung ( $\sigma_B(x) = M(x) / W(x)$ ) aufzuzeigen, wenn diese auf Träger mit einer über die Länge  $x$  veränderlichen Höhe angewandt wird. Sie fanden heraus, daß bis zu einer Neigung der Trägeroberkante von 1:4 (ca. 14 Grad) der Fehler kleiner als 1,5 % war. Aus einem Kräftegleichgewicht am schrägen Rand folgt die in Bild 3 aufgezeigte Beziehung für die dabei auftretenden Spannungen.



**Bild 3:** Kräftegleichgewicht am schrägen Rand

Die Spannungen können hiernach wie folgt berechnet werden zu:

$$\sigma_{\parallel} = \frac{6 \cdot M}{bh^2} \quad (3)$$

$$\sigma_{\perp} = \sigma_{\parallel} \cdot \tan^2 \theta \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_{\parallel} \cdot \tan \theta \quad (5)$$

$\theta$  = oberer Neigungswinkel  
 $h$  = Trägerhöhe an der Stelle  $x$

Das von Norris entwickelte Bruchkriterium wurde für diesen Spezialfall (Interaktion am schrägen Rand) wie folgt umgerechnet:

$$\sigma_x = k_0 \cdot f_x \quad \text{mit} \quad \frac{1}{k_0^2} = 1 + \left( \frac{f_x}{f_{xy}} \right)^2 \cdot \tan^2 \theta + \left( \frac{f_x}{f_y} \right)^2 \cdot \tan^4 \theta \quad (6)$$

Maki und Kuenzi überprüften die Theorie mit Versuchen, deren Ergebnisse jedoch nicht zufriedenstellend mit der Theorie übereinstimmten.

Zur Ermittlung der maximalen Biege- und Querspannung an einem gekrümmten Träger konstanter Höhe mit Rechteckquerschnitt unter reiner Momentenbelastung schlug SCHELLING 1967 die Gleichungen 7 und 8 vor. Er legte ein ideal-elastisches und isotropes Material zugrunde und erhielt aus Gleichgewichts- und Geometriebedingungen einen hyperbolischen Verlauf der Längsspannungsverteilung. Die Querspannungen ermittelte er aus den Umlenkkraften der Längsspannungen. Beide exakten Lösungen näherte er durch einfache Gleichungen für baupraktische Fälle an. Für Krümmungsverhältnisse  $\beta = R_m/h > 2$  ( $h =$  Querschnittshöhe) können die maximalen Biegerandspannungen und die maximalen Querspannungen folgendermaßen errechnet werden :

$$\text{vorh } \sigma_B = \frac{M}{W_n} \cdot \left( 1 + \frac{0,37}{\beta} \right) \quad (7)$$

$$\text{vorh } \sigma_{z_{\perp}} = \frac{M}{W} \cdot \frac{1}{4\beta} \quad (8)$$

$W$  = Widerstandsmoment

$W_n$  = Widerstandsmoment des Nettoquerschnitts

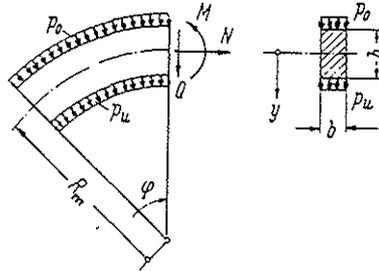
Um den Einfluß der Lamellendicke  $a$  bei gekrümmten Trägern, deren Biegehalbmesser  $R$  kleiner als  $200 a$  ist, zu berücksichtigen, schlug er eine Abminderung der zulässigen Biegespannung  $\sigma$  vor :

$$\text{zul } \sigma_{kr} = \text{zul } \sigma \cdot \left( 1 - 200 \cdot \left( \frac{a}{R_m} \right)^2 \right) \quad (9)$$

HEIMESHOFF 1967 erweiterte die Gleichungen zur Berechnung der Längs- und Querspannungsverteilungen auf die Lastfälle :

- Biegemoment  $M$
- Längskraft  $N$
- Gleichlast oben  $p_o$
- Gleichlast unten  $p_u$  und
- Querkraft.

Für die Extremwerte gibt er Näherungen mittels Potenzreihenentwicklung an. Sie lauten:



Schnittgrößen bzw. Belastung	Näherungsformeln für die Quer- u. Längsspannungen für den (die) Extremwert(e)	Stelle des (der) Extremwerte(s)
Biegemoment M	$\sigma_{\theta} = \pm \frac{6 \cdot M}{b h^2} \left( 1 \pm \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2R_m} \right) + \frac{2}{5} \left( \frac{h}{2R_m} \right)^2 \right)$	$\frac{y}{h} = \pm \frac{1}{2}$
	$\sigma_r = \frac{3}{2} \frac{M}{b h R_m} \left( 1 + \frac{107}{130} \left( \frac{h}{2R_m} \right)^2 \right)$	$\frac{y}{h} = \frac{5}{12} \left( \frac{h}{2R_m} \right)$
Längskraft N	$\sigma_{\theta} = \frac{N}{b h}$	
	$\sigma_r = \mp \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{N}{b h} \left( \frac{h}{2R_m} \right) \left( 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{h}{2R_m} \right) \right)$	$\frac{y}{h} = \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( 1 \mp \frac{7}{3\sqrt{3}} \left( \frac{h}{2R_m} \right) \right)$
<b>Gleichlast</b> $p_o$	$\sigma_r = -p_o \left( 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2R_m} \right)^2 \right)$	$\frac{y}{h} = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2R_m} \right) - \frac{8}{9} \left( \frac{h}{2R_m} \right)^2 \right)$
<b>Gleichlast</b> $p_u$	$\sigma_r = p_u$	$\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$
Querkraft Q	$\tau = \frac{3}{2} \frac{Q}{b h} \left( 1 + \frac{2}{5} \left( \frac{h}{2R_m} \right)^2 \right)$	$\frac{y}{h} = \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2R_m} \right)$

Tabelle 1: Näherungsformeln für Längs- und Querkräfte  
(Quelle Heimeshoff)

Zusammenfassend für die zitierten Forschungsarbeiten über gekrümmte Träger konstanter Höhe bis 1969 kann gesagt werden, daß sich bis auf Maki und Kuenzi alle Autoren mit theoretischen Lösungen beschäftigten, die das Ziel hatten, die maximalen Spannungen in Abhängigkeit von der Trägergeometrie berechnen zu können. Dabei wurde von ideal-elastischem und isotropen Material ausgegangen.

Schadensfälle in der Praxis ließen jedoch vermuten, daß die gewählten Gleichungen zur Berechnung von gekrümmten Trägern konstanter Höhe zwar die Spannungen abschätzen können, daß sie aber nicht das wirkliche Tragvermögen beschreiben können. So wurden die zulässigen Spannungen für den Querkzug sehr niedrig angesetzt, weil eine Querkzugfestigkeit, gegen die abzugrenzen wäre, nicht eindeutig bestimmt werden konnte.

Mit der Einführung des Computers konnten in den folgenden Jahren die Spannungsverteilungen und die maximal auftretenden Spannungen auch an anderen Trägerformen ermittelt werden. Diese Forschungsarbeiten sind im folgenden Kapitel dargestellt.

## 2.2            UNTERSUCHUNGEN AN GEKRÜMMTEN TRÄGERN MIT                   HILFE NEUER RECHENMETHODEN

Als neue Rechenmethoden werden hier zwei Verfahren verstanden, die in Abhängigkeit von der Geometrie, der Belastungsart und den Materialeigenschaften eine Lösung des Problems der Spannungsverteilung in gekrümmten Trägern ermöglichen.

Dabei handelt es sich zum einen um die Anwendung der Scheibendifferentialgleichung, die es erlaubt, Holz als orthotropen Werkstoff zu beschreiben. Gelöst wird sie mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion unter Berücksichtigung der Rand- und Gleichgewichtsbedingungen. Da eine analytische Lösung nur für gekrümmte Träger konstanter Höhe möglich ist, müssen die Lösungen für andere Trägerformen durch Reihenansätze angenähert werden.

Das zweite Verfahren ist die Finite Elemente Methode, bei der ein Träger in kleine Einzelemente unterteilt wird. Anhand von Gleichgewichts- und Verformungsbeziehungen zwischen den Elementen und den äußeren Lasten und Randbedingungen können die Spannungen in jedem Element ermittelt werden.

In den folgenden Kapiteln werden Untersuchungen zur Ermittlung der Spannungsverteilung auf der Grundlage der oben beschriebenen Rechenverfahren vorgestellt.

### 2.2.1            Untersuchungen von Foschi und Fox in Kanada

Im Western Forest Products Laboratory in Vancouver erarbeitete R.O.FOSCHI 1968 eine allgemeine theoretische Lösung für das ebene Spannungsproblem einer Scheibe mit einem zylindrisch anisotropen Materialverhalten. In seiner Veröffentlichung stellte er die Scheibendifferentialgleichung mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion in Polarkoordinaten für Querkraft-, Normalkraft- und Momentenbelastung auf und löste sie mit Hilfe eines Fourier-Reihen Ansatzes. Durch Einführung sogenannter Anisotropiefaktoren  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $\gamma$  sind seine Lösungen auf jedes Material, dessen mechanische Eigenschaften bekannt sind, übertragbar (siehe Gleichungen 10 bis 13).

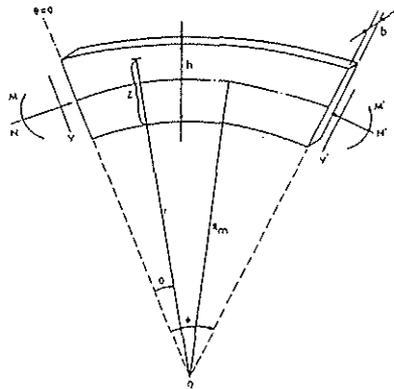
$$\alpha = E_L/E_R \quad (10)$$

$$\delta = E_L \left( \frac{2\nu_{RL}}{E_R} - \frac{1}{G_{RL}} \right) \quad (11)$$

$$\gamma = 2\alpha - \delta \quad (12)$$

$$\beta = 1 + \alpha - \delta \quad (13)$$

Eine erste Anwendung fand er in konzentrisch gekrümmten Trägern konstanter Höhe aus Douglasie, für die er seine Lösungen zur leichteren Anwendung derart umformte, daß sie die Spannungsänderungen gegenüber einem geraden Biegeträger gleichen Querschnittes durch tabellierte Koeffizienten  $K_r^0, K_r^1, K_\theta^0, K_\theta^1$  anzeigen. Diese sind abhängig von  $\alpha, \delta$  und den Verhältnissen  $h/R_m$  und  $z/h$ . Unter der Voraussetzung bekannter Schnittgrößen an der Stelle  $\theta$  sehen die Gleichungen folgendermaßen aus:



$$\text{mit} \quad W = \frac{bh^2}{6}$$

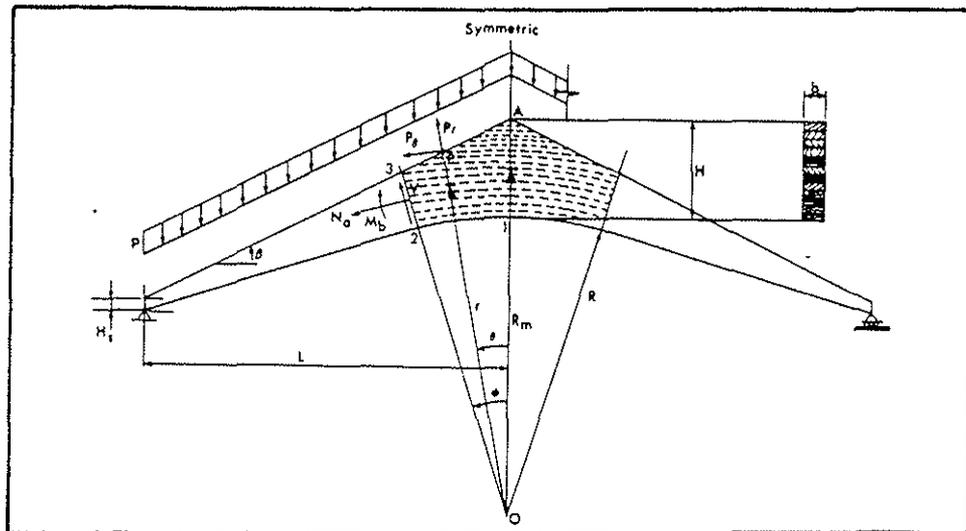
$$A = bh$$

$$\sigma_\theta = \frac{M_\theta}{W} \cdot K_\theta^0 + \frac{N_\theta}{A} \cdot \left( \frac{6 \cdot R_m}{h} \cdot K_\theta^0 - K_\theta^1 \right) \quad (14)$$

$$\sigma_r = \frac{M_\theta}{W} \cdot K_r^0 + \frac{N_\theta}{A} \cdot \left( \frac{6 \cdot R_m}{h} \cdot K_r^0 - K_r^1 \right) \quad (15)$$

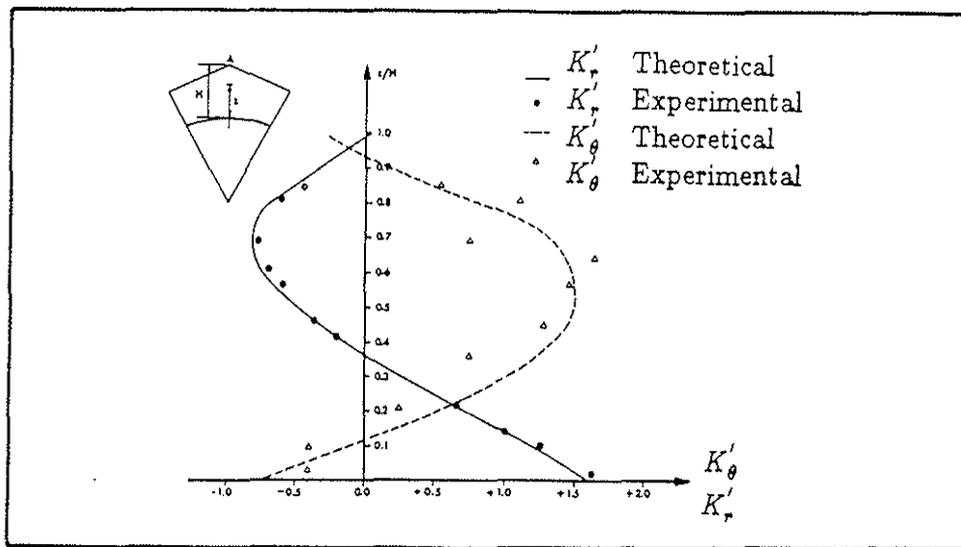
$$\tau_{r\theta} = -\frac{Q}{A} \cdot K_r^1 \quad (16)$$

Zwei Jahre später erweiterte FOSCHI 1970a diese Theorie auf Träger mit veränderlicher Querschnittshöhe (dazugehöriges Computerprogramm in FOSCHI 1970b und eine Anwendung auf gekrümmte Träger konstanter Höhe in FOSCHI, FOX 1970), insbesondere auf gekrümmte Satteldachträger mit sich konisch verjüngendem Querschnitt.



**Bild 4:** Satteldachbinder mit geradem Ober- und gekrümmtem Untergurt nach Foschi zur theoretischen Ermittlung der Spannungsverteilung

Abweichend von dem Fall eines parallelrandig gekrümmten Binders wird hier die Airy'sche Spannungsfunktion durch eine Fourier-Reihe mit unendlich vielen Gliedern approximiert. Eine zweite Besonderheit ist die Einführung punktueller Randbedingungen (point-matching method) anstelle von Randbedingungen als Funktion der Trägerränder. Bei der Auswertung untersuchte er an einem Beispielträger aus Douglasie die Konvergenz des gewählten Ansatzes. Dabei fand er heraus, daß schon nach einer endlichen Anzahl von Gliedern (ca. 10) eine sehr gute Genauigkeit erreicht wird und der Einfluß der Anzahl der Randbedingungen in einem Bereich zwischen 70 und 120 eingeführten Punkten gering ist. Zur Überprüfung der Theorie wurde der Beispielträger hergestellt und die tangentielle und radiale Dehnungsverteilung im First mit Dehnmeßstreifen gemessen; dabei stimmten die Dehnungen gut bis sehr gut mit den errechneten Werten überein (vgl. Bild 5).



**Bild 5:** Verteilung der Dehnungskoeffizienten  $K'_\theta$  und  $K'_r$  im Firstquerschnitt nach der Theorie von Foschi und Versuchen von Fox (Quelle Foschi)

Bei einem Vergleich mit den damals gültigen Normen in Kanada stellte er fest, daß die maximale radiale Spannung nach seiner Theorie doppelt so hoch sein kann, wie diejenige Spannung, die bei Anwendung der Normrechenverfahren erhalten wurde. In einer weiteren experimentellen Untersuchung prüfte FOSCHI 1971 vier Träger und verglich die gemessenen Spannungsverteilungen im Firstquerschnitt mit den theoretischen Ergebnissen. Er verweist auf das Problem der Bestimmung der Materialkonstanten, die nur näherungsweise als Mittelwerte für den inhomogenen Träger angegeben werden können. Dennoch konnte er nachweisen, daß im Mittel eine gute Übereinstimmung gefunden werden konnte.

Gleichzeitig zu der Arbeit von Foschi führte FOX 1970b experimentelle Untersuchungen durch. Anhand von Koeffizienten  $K$ , die ähnlich wie bei Foschi das Verhältnis der Spannungen bzw. Dehnungen im gekrümmten Träger zu den Spannungen bzw. Dehnungen eines geraden Trägers mit einer Querschnittshöhe, die der Firsthöhe des gekrümmten Trägers entspricht, angeben, überprüft er die theoretische Dehnungsverteilung im First und einem Querschnitt außerhalb des Firstes nach dem Modell Foschi's.

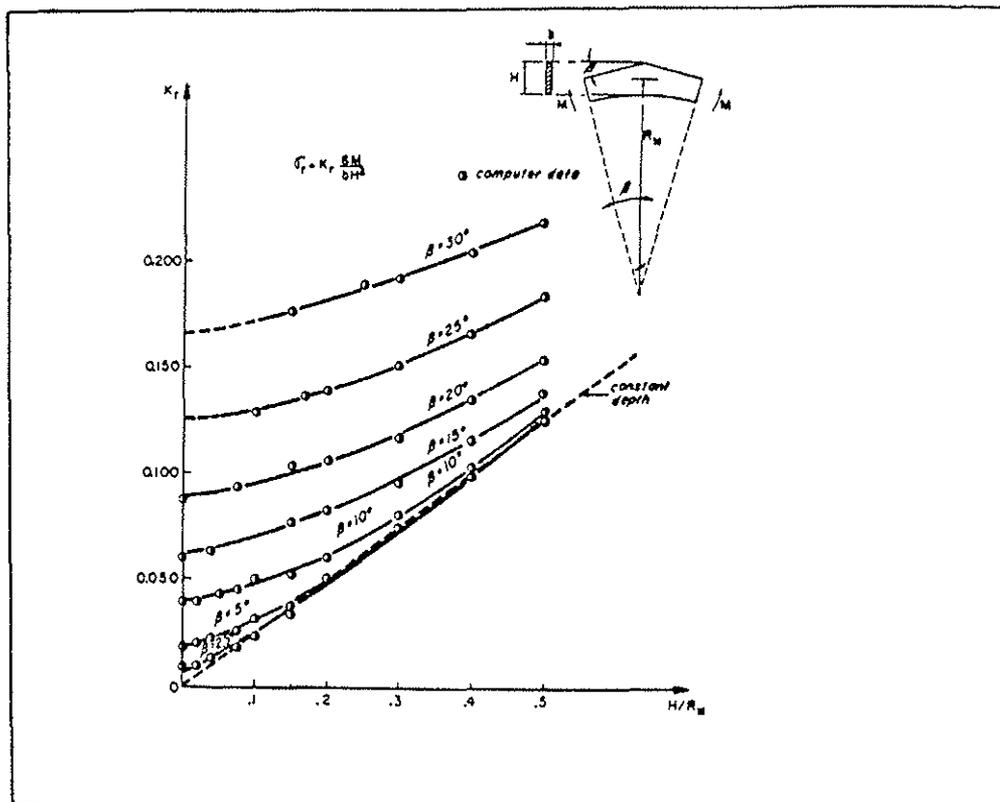
Die Versuche wurden nur mit einer Trägerform mit einem engen Krümmungsradius und einer großen Neigung des Obergurtes durchgeführt, weil diese am häufigsten zu Schäden in der Praxis geführt hatte. Als Holz wurde Douglas-fir verwendet, wobei die Lamellen so aussortiert wurden, daß im Firstbereich nur fehlerfreie Lamellen, d.h. frei von Ästen, vorhanden waren.

Die Dehnungen wurden mit Dehnmeßstreifen ermittelt und ergaben eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit den theoretisch erwarteten. Zur Berechnung der dadurch entstehenden Spannungen wurden die Materialeigenschaften an Lamellenabschnitten, die vor der Verleimung des Trägers entnommen wurden, bestimmt. Da aber das Rechenmodell Foschi's von einem homogenen anisotropen Material ausgeht, wurden die elastischen Konstanten auch noch am Gesamtträger durch Verschiebungs- und Dehnungsmessungen und anschließender Rechnung überprüft. Zur weiteren Auswertung der Versuche wurden die Materialeigenschaften des Gesamtträgers verwendet, da kein großer Einfluß auf die Größe der radialen Spannungen bei einer Änderung der Materialeigenschaften im üblichen Rahmen festgestellt werden konnte.

Die Ergebnisse seiner Versuche faßte Fox folgendermaßen zusammen :

- Querspannungen (radiale Spannungen) werden nach den bis dahin gültigen Normen um bis das zweifache unterschätzt,
- bei unsymmetrischer Belastung treten an den Stellen der maximalen Querspannungen zusätzlich Schubspannungen auf, die in Ermangelung eines geeigneten Bruchkriteriums bisher nicht bei der Bemessung berücksichtigt wurden,
- auch die Längsspannungen im First sind höher, als bisher angenommen, sie sind aber für den Bruch nicht verantwortlich,
- Foschi's Rechenmodell wurde bestätigt, da eine gute Übereinstimmung der Dehnungsverteilungen nach Theorie und Experiment besteht,
- die Materialeigenschaften von Holz sollten noch weiter untersucht werden mit dem Ziel, statistische Verteilungen jeder mechanischen Größe und deren Korrelation zu den anderen Größen zu finden.

Foschi und Fox führten noch weitere Berechnungen mit den Materialeigenschaften von Douglas-fir durch, in denen sie für die wichtigsten Trägerformen Tabellen und Computerprogramme für den Konstrukteur erstellten (FOX 1970c, FOX 1970d, FOX 1971a, FOX 1971b). In FOSCHI, FOX 1970 stellten sie fest, daß der gekrümmte Satteldachträger mit sich konisch verjüngendem Querschnitt unter reiner Momentenbelastung die höchsten Querspannungen erzeugt. Für diesen Fall erarbeiteten sie ein Diagramm (Bild 6), das in Abhängigkeit des Obergurtwinkels und des Verhältnisses  $H/R_m$  den Koeffizienten  $K_T$  angibt. Es ist für eine breite Palette von streuenden Materialeigenschaften gültig, da deren Einfluß auf  $K_T$  nur sehr gering ist.



**Bild 6:** Faktor der max. Querspannung in Abhängigkeit von  $H/R_m$  und der Neigung  $\beta$  nach Fox (erstellt für  $\alpha = 14,8$ ;  $\delta = -17,0$ )

Ein Bemessungsverfahren auf diesen Grundlagen stellte FOX 1970a vor, das für den Firstquerschnitt und den Tangentenquerschnitt die Berechnung der Längs- und Querspannungen ermöglicht:

Querschnitt im First:

$$\sigma_{\theta}^{First} = K_{\theta} \cdot \frac{6 \cdot M}{bH^2} \quad (17)$$

$$\sigma_r^{First} = K_r^{First} \cdot \frac{6 \cdot M}{b \cdot H^2} \quad (18)$$

$$\text{mit} \quad K_{\theta} = 1,0 + 2,7 \cdot \tan \beta \quad (19)$$

$$K_r = A + B \cdot \frac{H}{R_m} + C \cdot \left( \frac{H}{R_m} \right)^2 \quad (20)$$

$A, B, C$  : Konstanten abhängig von  $\beta$

Querschnitt am Krümmungsbeginn:

$$\sigma_{\theta}^t = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2} \quad (21)$$

$$\sigma_r^t = \frac{3}{b} \cdot \left( \frac{M}{2 \cdot R \cdot h + h^2} \right) \quad (22)$$

Alle bisherigen Untersuchungen von Foschi und Fox verfolgten das Ziel, die Höhe der Spannungen und deren Verteilung im gekrümmten Bereich zu bestimmen. Sie legten keine Grenzwerte fest, bei deren Überschreiten der Träger zu Bruch gehen mußte. Erst bei FOX 1974a und FOX 1974b wurde an Satteldachträgern mit sich konisch verjüngendem Querschnitt und an Holzproben aus diesen Trägern die Querkzugfestigkeit untersucht und dabei festgestellt, daß sie nicht von der Holzfeuchte und der Belastungsgeschwindigkeit abhängt, jedoch von der Größe der Prüfkörper.

### 2.2.2 Untersuchungen von Buchmann

In BUCHMANN 1969 wurden gekrümmte parallelrandige Träger unter konstanter Momentenbelastung untersucht. Während bis dahin in Europa Holz als ideal-elastisch und isotrop behandelt wurde, stellt er zum ersten Mal Berechnungsverfahren für den anisotropen Werkstoff Holz mit randparalleler polarer Orthotropie (wie sie bei Brettschichtholz vorliegt) vor. Als Lösung erhält er Gleichungen für die Längs- und Querspannungen in Abhängigkeit von den Werkstoffeigenschaften. Für verschiedene Krümmungsmaße  $\alpha = h / (2 \cdot R_m)$  und Anisotropiefaktoren  $s = \sqrt{E_L / E_R}$  wertete er seine Lösungen aus und stellte die Ergebnisse grafisch dar.

Für Holz mit  $s = 5$  bis  $6$  zeigt sich, daß die maximalen Querspannungen vom Krümmungsmaß praktisch unabhängig sind und immer mit der Gleichung (1) von Wilson berechnet werden können. Die maximalen Tangentialspannungen lassen sich in Abhängigkeit von  $\alpha$  wie folgt ermitteln:

$$\sigma = \lambda \cdot \frac{M}{W} \quad (23)$$

$\alpha$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
$\lambda$	1,015	1,030	1,050	1,070	1,093	1,120	1,145	1,175	1,205	1,235

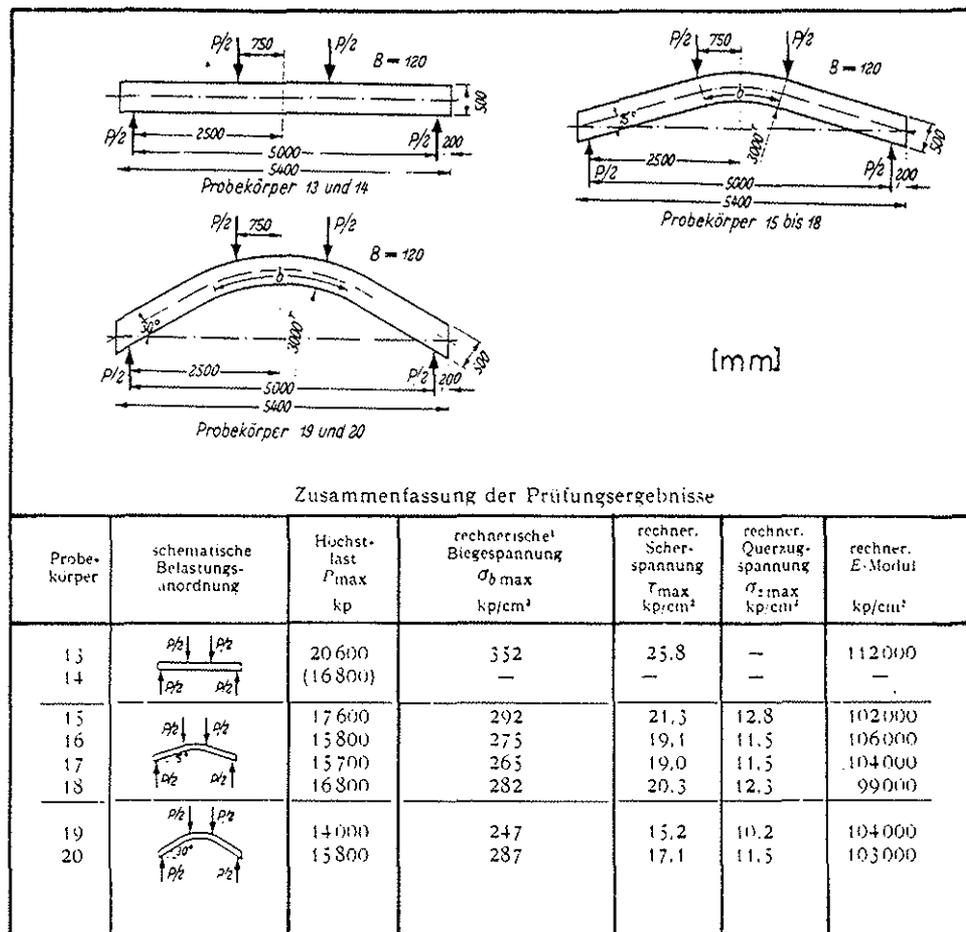
0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34
1,268	1,300	1,337	1,373	1,410	1,450	1,490

Tabelle 2: Faktor  $\lambda$  in Abhängigkeit vom Krümmungsmaß  $\alpha$   
(Quelle Buchmann)

### 2.2.3 Die Versuche in der F.M.P.A. in Stuttgart

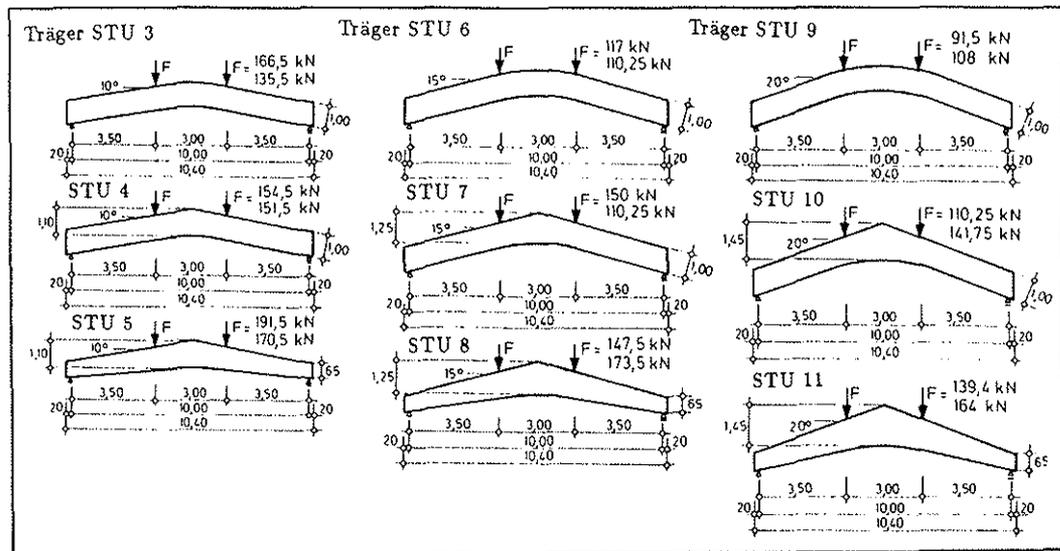
In Stuttgart führte KOLB 1968a, 1968b Versuche in Bauteilgröße mit geleimten Rahmenecken und Montagestößen durch. Er gibt die Verformungen, Dehnungen sowie Bruchlasten und Bruchursachen an.

In KOLB 1968c berichtet er über Festigkeitsuntersuchungen an gekrümmten Trägern konstanter Höhe. In Bild 7 sind die Form der Prüfkörper, die Bruchlasten und die errechneten Spannungen zusammengefaßt.



**Bild 7:** Prüfergebnisse an gekrümmten parallelrandigen Trägern (Quelle Kolb, 1968c)

In einer weiteren Untersuchung ermittelten KOLB und FRECH 1975 an großformatigen gekrümmten Trägern mit parallelen Rändern sowie an Satteldachträgern in drei Versuchsreihen mit unterschiedlicher Obergurtneigung die Bruchlasten. In Bild 8 sind die Trägerabmessungen dargestellt.



**Bild 8:** Versuchsträger von Kolb und Frech mit  $R = 600$  cm,  $b = 12$  cm, Lamellendicke = 3 cm (Quelle Ehibeck / Hemmer 1985)

Sie errechneten die dabei auftretenden Bruchspannungen mit den Gleichungen der damals gültigen deutschen Norm und verglichen die Ergebnisse mit denjenigen nach den Gleichungen von Foschi und Fox aus Kanada. Dabei wendeten sie für alle gekrümmten Träger unabhängig von der Trägerform die Gleichungen von Foschi zur Berechnung der Querkzug- und Längsspannung für den gekrümmten Satteldachträger an und stellten fest, daß damit eine genügend große Sicherheit zwischen Bruchspannungen und zulässigen Spannungen erreicht werden kann.

#### 2.2.4 Die Untersuchungen von Möhler/Blumer in Karlsruhe

Anfang der Siebzigerjahre führte BLUMER 1975 und BLUMER 1972/1979 theoretische Untersuchungen zur Spannungsverteilung an gekrümmten Trägern konstanter Höhe, an gekrümmten Satteldachträgern und an Satteldachträgern mit geradem Untergurt durch. Er beschreibt das Problem, ähnlich wie Foschi, mit Hilfe der Scheibentheorie und gibt Lösungen für die unterschiedlichen Trägerformen in Abhängigkeit von der Anisotropie ( $s = \sqrt{E_x/E_y}$ ,  $k = \sqrt{E_x/G_{xy}}$ ,  $\mu = 0,3$ ), der Trägergeometrie und der Belastung (reine Momentenbelastung, reine Querkraft und reine Normalkraft) an.

Für die Materialeigenschaften von Fichte ( $s = 6 / k = 4,7 / \mu = 0,3$ ) stellt er einfache Näherungsgleichungen für die maximalen Spannungen bei reiner Biegung auf. Diese bilden die Berechnungsgrundlagen für die Nachweise nach der DIN 1052 (Ausgabe 1988).

$$(24) \quad \boxed{\sigma_{zL} = \kappa_q \cdot \frac{M}{W}} \quad \boxed{\sigma_B = \kappa_l \cdot \frac{M}{W}} \quad (25)$$

$$\text{mit } \kappa_q = A_q + B_q \left( \frac{h_m}{r_m} \right) + C_q \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2 \quad (26)$$

$$A_q = 0,2 \tan \gamma$$

$$B_q = 0,25 - 1,5 \tan \gamma + 2,585 \tan^2 \gamma$$

$$C_q = 2,1 \tan \gamma - 4 \tan^2 \gamma$$

$$\text{und } \kappa_l = A_l + B_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right) + C_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2 + D_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^3 \quad (27)$$

$$A_l = 1 + 1,4 \tan \gamma + 5,4 \tan^2 \gamma$$

$$B_l = 0,35 - 8 \tan \gamma$$

$$C_l = 0,555 + 8,25 \tan \gamma + 7,825 \tan^2 \gamma$$

$$D_l = 6 \tan^2 \gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \frac{h_m}{r_m} = 0 \end{array} \right\} \text{gerader Träger}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \frac{h_m}{r_m} \neq 0 \end{array} \right\} \text{konzentrisch gekrümmter Träger (h=const.)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \neq 0 \\ \frac{h_m}{r_m} = 0 \end{array} \right\} \text{Sattelträger mit geradem Untergurt}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \neq 0 \\ \frac{h_m}{r_m} \neq 0 \end{array} \right\} \text{Sattelträger mit gekrümmtem Untergurt}$$

Quer- und Längsspannungen bei  
Biegeträgern

Zur Überprüfung seiner theoretischen Ergebnisse führten MÖHLER, BLUMER 1974a, 1974b für alle untersuchten Trägergeometrien Versuche durch. Es ergab sich eine gute bis sehr gute Übereinstimmung der Spannungen. Die Bruchursache war bis auf wenige Ausnahmen, bei denen zusätzlich noch ein Biegebruch auftrat, ein Querkzugversagen.

Möhler faßte in den folgenden Jahren die wichtigsten Ergebnisse aus der Arbeit von Blumer in weiteren Veröffentlichungen zusammen (MÖHLER 1976, MÖHLER 1979). Insgesamt gesehen, erforschte Blumer für das in Europa verwendete Brettschichtholz die Größe und Verteilung der Spannungen in gekrümmten Trägern und machte die Ergebnisse für die Praxis umsetzbar. Die Frage der Querkzugfestigkeit ließ er unbeantwortet.

### 2.2.5 Untersuchungen von Noack / von Roth in Hamburg

Für den gekrümmten parallelrandigen Träger beliebiger Querschnittsform erweiterten NOACK und VON ROTH 1972 die Lösungen von Buchmann um die Belastungen Normalkraft und Querkraft. Zur Lösung ziehen sie den Ansatz mittels Scheibendifferentialgleichung unter rhombischer Anisotropie unter Verwendung von Fourierreihen heran. Sie erhalten Gleichungen für die Längs-, Quer- und Schubspannungen in Abhängigkeit der äußeren Kräfte, der Querschnittsform und von Faktoren  $K_{rr}^{M,N,Q}$ ,  $K_{\phi\phi}^{M,N,Q}$ ,  $K_{\phi r}^{M,N,Q}$ ,  $K_{\phi r}^N$ , die sich wiederum aus den Materialeigenschaften und dem Innen- und Außenradius berechnen lassen. Zur leichteren Anwendung haben sie für Nadelholz mit den Materialeigenschaften nach DIN 1052 (1969) und der Querkontraktionszahl nach KEYLWERTH 1951 diese Gleichungen ausgewertet und für verschiedene Verhältnisse  $H/R_m$  in Diagrammen dargestellt. Sie gelten auch für stark gekrümmte Rahmenecken, bei denen  $\beta = R_m/h < 2$  ist. Die Gleichungen sehen folgendermaßen aus:

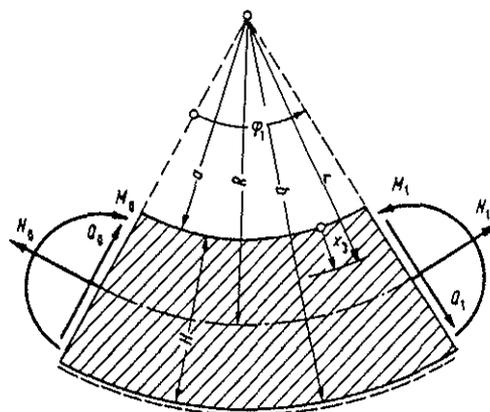


Bild 9: Bezeichnungen nach Noack/von Roth

$$\sigma_{rr} = \frac{M_0 + N_0 R}{W} K_{rr}^M + \frac{Q_0}{F} \sin \varphi K_{rr}^Q + \frac{N_0}{F} \cos \varphi K_{rr}^N \quad (28)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{M_0 + N_0 R}{W} K_{\varphi\varphi}^M + \frac{Q_0}{F} \sin \varphi K_{\varphi\varphi}^Q + \frac{N_0}{F} \cos \varphi K_{\varphi\varphi}^N \quad (29)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{N_0}{F} \sin \varphi K_{r\varphi}^N + \frac{Q_0}{F} \cos \varphi K_{r\varphi}^Q \quad (30)$$

mit

$$K_{rr}^M = \left[ -2 + 2r \sqrt{\bar{E}-1} \frac{b \sqrt{\bar{E}+1} - a \sqrt{\bar{E}+1}}{b^2 \sqrt{\bar{E}} - a^2 \sqrt{\bar{E}}} + \frac{2}{r \sqrt{\bar{E}+1}} \cdot \frac{b \sqrt{\bar{E}-1} - a \sqrt{\bar{E}-1}}{b^2 \sqrt{\bar{E}} - a^2 \sqrt{\bar{E}}} a \sqrt{\bar{E}+1} b \sqrt{\bar{E}+1} \right] K_0 \frac{H^2}{6}$$

$$K_{rr}^N = \left[ \frac{1}{r} - \frac{\sqrt{1+E-K}-1}{b \sqrt{1+E-K} + a \sqrt{1+E-K}} - \frac{a \sqrt{1+E-K} b \sqrt{1+E-K}}{\sqrt{1+E-K}+1 (b \sqrt{1+E-K} + a \sqrt{1+E-K})} \right] K_1 H$$

$$K_{rr}^Q = -K_{rr}^N$$

$$K_{\varphi\varphi}^M = \left[ -2 + 2 \sqrt{\bar{E}} r \sqrt{\bar{E}-1} \frac{b \sqrt{\bar{E}+1} - a \sqrt{\bar{E}+1}}{b^2 \sqrt{\bar{E}} - a^2 \sqrt{\bar{E}}} - \frac{2 \sqrt{\bar{E}}}{r \sqrt{\bar{E}+1}} \cdot \frac{b \sqrt{\bar{E}-1} - a \sqrt{\bar{E}-1}}{b^2 \sqrt{\bar{E}} - a^2 \sqrt{\bar{E}}} a \sqrt{\bar{E}+1} b \sqrt{\bar{E}+1} \right] K_0 \frac{H^2}{6}$$

$$K_{\varphi\varphi}^N = \left[ \frac{1}{r} - (1 + \sqrt{1+E-K}) \frac{\sqrt{1+E-K}-1}{b \sqrt{1+E-K} + a \sqrt{1+E-K}} - (1 - \sqrt{1+E-K}) \cdot \frac{a \sqrt{1+E-K} b \sqrt{1+E-K}}{\sqrt{1+E-K}+1 (b \sqrt{1+E-K} + a \sqrt{1+E-K})} \right] K_1 H$$

$$K_{\varphi\varphi}^Q = -K_{\varphi\varphi}^N$$

$$E = \frac{E_\varphi}{E_r}$$

$$K_{\varphi r}^Q = +K_{r\varphi}^N$$

$$K_{r\varphi}^N = +K_{\varphi r}^Q$$

$$K = E_\varphi \cdot \left( 2 \cdot \frac{\mu_{r\theta}}{E_r} - \frac{1}{G_{r\varphi}} \right)$$

$K_0, K_1$  = Faktoren in Abhängigkeit von  $a, b, E, K$

Bei einem später durchgeführten Vergleich zwischen der Berechnung mit isotropem und polarorthotropem Material stellten VON ROTH und EPPLE 1981 für Brettschichtholzträger mit schwacher Krümmung keine Unterschiede fest. Sie weisen aber darauf hin, daß dieses Ergebnis nicht auf alle Trägerformen angewendet werden dürfe.

### 2.2.6 Untersuchungen von Gopu und Goodman in den U.S.A

In einer ersten Untersuchung gingen GOODMAN, GOPU 1974 der Frage der Berechenbarkeit der Querkzugspannungsverteilung und deren Übereinstimmung mit Versuchen an gekrümmten Satteldachträgern nach. Sie benutzten zur theoretischen Untersuchung zum einen die analytische Lösung von Foschi nach der Elastizitätstheorie und zum anderen die Finite Elemente Methode nach THUT 1970. Anhand von Messungen der Dehnungsverteilung im First an zwei kleinen gekrümmten Satteldachträgern aus Southern Pine (Spannweite 1,83 m) unter Einzellast, aus denen sie mit Hilfe der Materialkonstanten die Spannungen berechnen konnten, ließ sich eine gute Übereinstimmung der Querkzugspannungen zwischen den Versuchen und den beiden Theorien herleiten. Durch Variation der Materialkonstanten konnten sie außerdem feststellen, daß der Einfluß auf die Querkzugspannung nur sehr gering ist. Für weitere Berechnungen schlugen sie wegen der einfacheren Handhabung und der schnelleren Änderung von Einflußfaktoren die Verwendung der Finite Elemente Methode vor.

An sechs gekrümmten Satteldachträgern unterschiedlicher Obergurtneigung mit einer praxisnahen Spannweite von 9,15 m und konstanter Momentenbelastung erforschten sie (GOODMAN, GOPU 1975) die Ursachen für die in der Praxis aufgetretenen Querkzugrisse an Douglas-fir-trägern. Alle Träger versagten in der Mitte des Firstes aufgrund von Querkzugrissen in einem Bereich, in dem die Längs- und Schubspannungen vernachlässigbar gering sind. Gopu/Goodman folgerten hieraus, daß die bis dahin gültigen Bemessungsverfahren in den USA falsch seien und daß eine sinnvolle Dimensionierung gekrümmter Satteldachträger nur von der wirklichen Bruchursache, dem Querkzugversagen, ausgehen könne.

Durch die vorherigen Untersuchungen, bei denen immer wieder eine gute Übereinstimmung zwischen den Versuchen und den Berechnungen mit der FE-Methode festgestellt wurde, stützt Gopu seine anschließenden Untersuchungen auf reine Rechnersimulationen. In seiner Dissertation (GOPU 1976) und den folgenden Veröffentlichungen untersuchte er durch Variation aller Einflußfaktoren gekrümmte Satteldachträger mit konisch zulaufender Querschnittshöhe und gekrümmte Träger konstanter Höhe. Maßgebende Parameter und deren Bandbreite waren :

- oberer Neigungswinkel  $\beta : 2,5^{\circ} < \beta < 30^{\circ}$ ,
- unterer Neigungswinkel  $\alpha : 10 - 100 \%$  vom oberen Neigungswinkel,
- Verhältnis Firsthöhe  $H$  zu Krümmungsradius  $R_m$  von 0,0 (gerader Träger) bis 0,5,
- Spannweite  $L$ ,
- Verhältnis Spannweite  $L$  zu Länge des gekrümmten Bereichs  $L_t$  von 1,0 bis 8,0 (bei Streckenlast von Bedeutung),
- Belastungsart (reine Momentenbelastung und Streckenlast).

Bei der Bemessung sind nach Gopu folgende Punkte nachzuweisen:

- a.) die Spannungskombination am geneigten Rand nach der Kombinationsformel von Norris,
- b.) die maximale Querszugspannung im First,
- c.) die maximale Längsspannung und
- d.) die Durchbiegung.

Für die Bearbeitung der Punkte b.) und c.) gibt er seine Ergebnisse ähnlich wie Foschi mit den Spannungsfaktoren  $K_r$  und  $K_{\theta}$  an, wobei diese das Verhältnis der auftretenden wirklichen Quer- bzw. Längsspannung zur Biegespannung eines geraden Trägers gleicher Querschnittsabmessungen darstellen.

$$\text{im Firstquerschnitt} \quad \sigma_{\theta} = K_{\theta} \cdot \frac{M}{W} \quad (31)$$

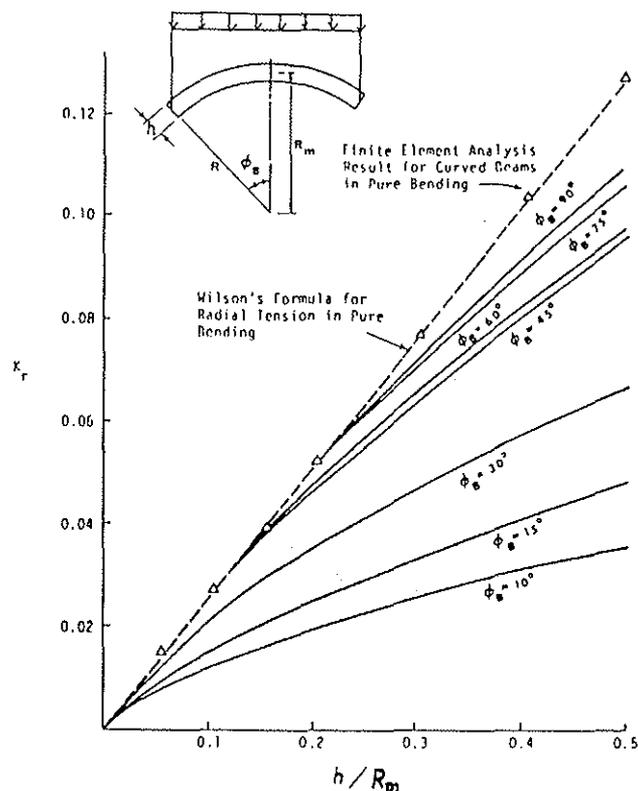
$$\sigma_r = K_r \cdot \frac{M}{W} \quad (32)$$

### 2.2.6.1 Bemessung gekrümmter Träger konstanter Höhe

Für die Bemessung gekrümmter Träger konstanter Höhe hat GOPU 1980 die Anwendung der Gleichung (1) nach Wilson für reine Momentenbelastung überprüft und eine gute Übereinstimmung mit seinen Berechnungen gefunden. Für den Fall der Streckenlast gibt er Werte für  $K_r$  in Abhängigkeit vom Verhältnis  $h/R_m$  und der Krümmung an, da für diesen Lastfall eine Rechnung nach Wilson zu ungünstig wäre. Bild 10 zeigt die  $K_r$ -Faktoren für baupraktische Fälle (für Douglas-fir).

$K_r$  bei reiner Momentenbelastung:

$$K_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{M}{bh \cdot R_m}}{\frac{6 \cdot M}{bh^2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{R_m} \quad (33)$$



**Bild 10:** Faktor  $K_r$  für gekrümmte Träger konstanter Höhe unter Streckenlast (Quelle Gopu)

### 2.2.6.2 Bemessung gekrümmter Satteldachträger

Als Bemessungsvorschlag für gekrümmte Satteldachträger stellten GOODMAN, GOPU 1977 aus Regressionsanalysen umfangreicher Computerberechnungen den Faktor  $K_r$  zusammen, der in Abhängigkeit vom Verhältnis Obergurtneigung zu Untergurtneigung sowie Firsthöhe zu mittlerem Biegehalbmesser die Berechnung der maximalen Querspannungen bei reiner Momentenbelastung für Douglas-fir ermöglicht (mit Bild 11).

$K_r$  für den Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt:

$$K_r = A + B \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) + C \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + E \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right)^3 + F \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (34)$$

mit  $A, B, \dots, F$ : Konstanten in Abhängigkeit der Obergurtneigung

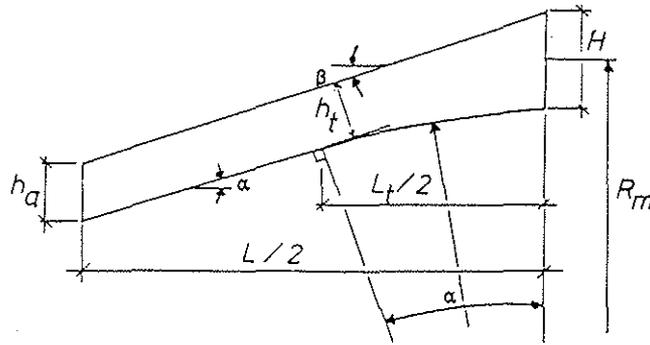


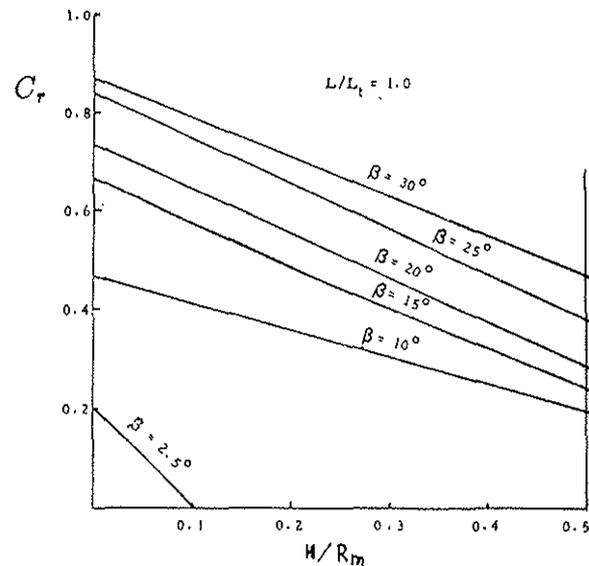
Bild 11: Bezeichnungen

Für den Lastfall Streckenlast geben sie Abminderungsfaktoren  $C_r$  an, mit denen die Querzugspannungen nach Gleichung (32) zu verringern sind.

$$\sigma_r = C_r \cdot K_r \cdot \frac{M}{W}$$

$$C_r = A + B \cdot \left(\frac{L}{L_t}\right) + C \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) + D \cdot \left(\frac{L}{L_t}\right)^2 + E \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right)^2 + F \cdot \left(\frac{L}{L_t}\right) \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) + G \cdot \left(\frac{L}{L_t}\right)^3 + H^* \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right)^3 \quad (35)$$

mit  $A, B, \dots, H^*$  : Konstanten in Abhängigkeit der Obergurtneigung



**Bild 12:** Beispiel für den Verlauf von  $C_r$  für  $L / L_t = 1$

Für beide Lastfälle läßt sich die maximale Längszugspannung, die immer größer als die Längsdruckspannung ist, mit dem Faktor  $K_\theta$  folgendermaßen angeben :

$$K_\theta = A + B \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right) + C \cdot \left(\frac{H}{R_m}\right)^2 \quad (36)$$

mit  $A, B, C$  : Konstanten in Abhängigkeit der Obergurtneigung

Da gerade bei den gekrümmten Satteldachträgern mit sich zum Auflager verjüngender Querschnittshöhe die Bemessung den Holzverbrauch und damit die Querschnittsabmessungen minimiert, ist bei diesen Trägern der Durchbiegungsnachweis von großer Bedeutung. Um auch weiterhin mit den Gleichungen für den Einfeldbalken rechnen zu können, schätzten Goodman und Gopu eine effektive Trägerhöhe ab und ersetzen die wirkliche Spannweite durch die Länge des geraden Untergurtes.

$$\Delta = \frac{5}{384} \cdot \frac{W}{EI_{eff}} \cdot \left(\frac{L}{\cos \alpha}\right)^3 \quad (37)$$

mit  $W = qL$

$$h_{eff} = \frac{1}{2L} ((H - h_a) \cdot L_t + (h_t + h_a) \cdot L) \quad (38)$$

$$I_{eff} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h_{eff}^3 \quad (39)$$

In GOPU 1986 werden die Gleichungen für die Durchbiegung noch einmal überprüft und den anderen Gleichungen aus der kanadischen und amerikanischen Norm gegenübergestellt. Sämtliche Gleichungen schätzen die Durchbiegungen zu groß oder zu klein ab, so daß Gopu nach zahlreichen Berechnungen der Durchbiegungen von Satteldachträgern mittels der Finiten Elemente Methode und anschließender Regressionsanalyse zu folgenden Gleichungen getrennt für Biegung und Querkraft kommt :

$$\Delta_M = \frac{5}{384} \cdot \frac{WL^3}{EI_{eff}} \quad (40)$$

$$\Delta_Q = \frac{3}{20} \cdot \frac{WL}{bh_{eff} \cdot G} \quad (41)$$

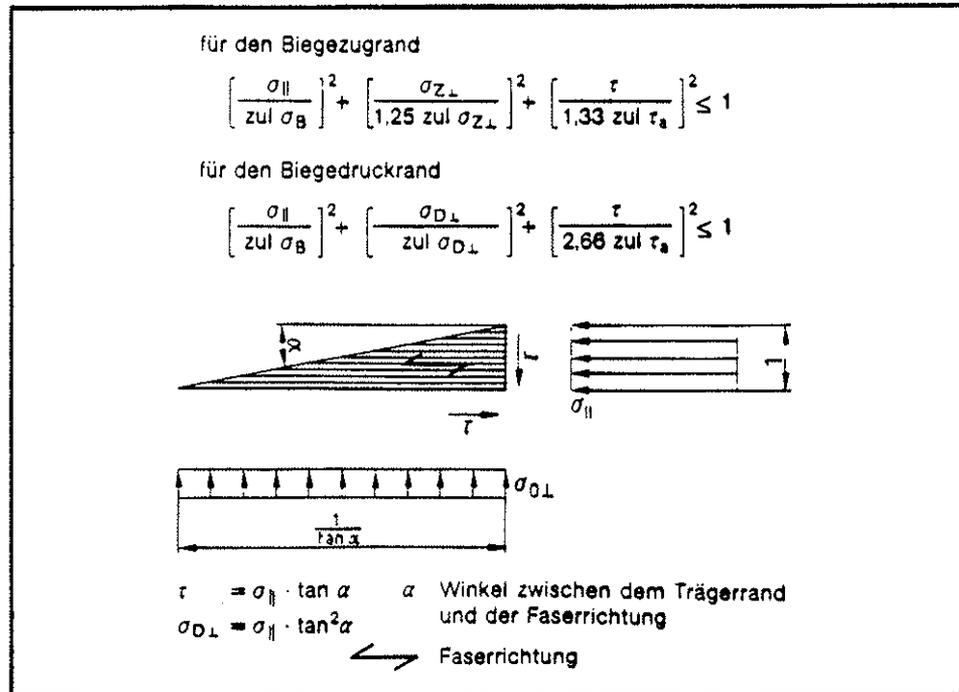
mit

$$h_{mittel} = \left( \frac{h_a + H}{2} \right)$$

$$h_{eff} = h_{mittel} + 1,47 \cdot h_{mittel} \cdot \tan \beta - 1,41 \cdot H \cdot \tan \alpha$$

### 2.2.7 Die Untersuchungen von Möhler / Hemmer in Karlsruhe

MÖHLER, HEMMER 1978 und MÖHLER, HEMMER 1980 überprüften die von Norris aufgestellte Theorie der Spannungsinteraktion am angeschnittenen Rand eines Satteldachträgers mit geradem Untergurt. Durch Versuche bestätigten sie, daß der Nachweis der Interaktion geführt werden muß und erweiterten die Gleichung von Norris für die Fälle Zug bzw. Druck am geneigten Rand. Bild 13 zeigt die Gleichungen für die Bemessung, wie sie in der DIN 1052 (Ausgabe 1988) zu finden sind.



**Bild 13:** Nachweis der Spannungskombination am schrägen Rand nach DIN 1052 (1988)

### 2.2.8 Die Versuche von Krabbe / Neuhaus in Bochum

An gekrümmten Trägern konstanter Höhe, die die gleichen Abmessungen wie die Träger einer Versuchsserie von Blumer besaßen (um Vergleiche anstellen zu können), untersuchten KRABBE und NEUHAUS 1979 konstruktive Maßnahmen zur Aufnahme von Querkzugkräften in gekrümmten Bereichen von Brettschichtholzträgern sowie Sanierungsmöglichkeiten für beschädigte Bauteile dieser Art.

Sie schlagen zwei Arten der Aufnahme von Querkzugkräften vor :

- 1.) Vorspannung ohne Verbund, bei der Stahlbolzen im gekrümmten Bereich so angeordnet werden, daß sie eine gleichmäßige Stauchung in Trägermitte im unbelasteten Zustand bewirken, und
- 2.) Verbund ohne Vorspannung durch eingeleimte Gewindestangen aus Stahl oder Kunststoff.

Bei einer reinen Momentenbelastung im gekrümmten Bereich lagen die Bruchlasten der quervorgespannten Träger im Mittel um ca. 25 %, die Bruchlasten der Träger mit eingeleimten Gewindestangen im Mittel um 40 % über der mittleren Bruchlast unverstärkter Träger. Nicht untersucht wurde der Einfluß der Formänderungen infolge Feuchtigkeitsänderungen und/oder Kriechen des Holzes.

### 2.2.9 Weitere Untersuchungen

In etlichen weiteren Veröffentlichungen zu gekrümmten Trägern werden die Spannungsverteilungen sowie Verstärkungsmaßnahmen untersucht, die aber keine neuen Erkenntnisse in der Art bringen, als daß sie eine einfachere oder genauere Bemessung zuließen. Die Ergebnisse von Foschi, Gopu und Blumer werden bestätigt und für Einzelfälle weitere Untersuchungen (z.B. für Rahmenecken, Pultdachträger, Sanierungsmöglichkeiten) vorgestellt, die aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden sollen.

(ANDERSON 1976; BLUMER, FLÜHMANN, GEHRI 1976; BLUMER, GEHRI, KELLER 1979; CANADIAN WOOD CONSTRUCTION 1982; DEWEY 1979; EHLBECK, HEMMER 1985; EHLBECK, HEMMER, LÄMMLIN 1984; FOSCHI, BARRETT 1980; GOODWIN 1979; GOPU 1972; GOPU 1981; GOPU 1984; GOPU, BUCKNER 1988; GUTKOWSKI, DEWEY 1980; GUTKOWSKI, DEWEY, GOODMAN 1982a, 1982b; HEMMER 1983; KECHTER, GUTKOWSKI 1984; KRABBE, GÜLDENPFENNIG 1983; NORRIS 1962; RIBERHOLT 1979; RIBERHOLT 1981; SZALAI 1983; SZALAI 1986; VINCENT, GOPU 1982; VINCENT, GOPU 1984a, 1984b; VON ROTH, LÖBER 1987; WASSMER 1987; ZAHN 1969)

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die Verteilung der Quer- und Längsspannungen für gekrümmte Träger bei bekannten Materialeigenschaften mit genügend großer Genauigkeit bestimmt werden kann, wobei nur wenige Untersuchungen den Einfluß der verschiedenen Belastungsarten berücksichtigen. Immer noch ungeklärt ist die Höhe der Querkzugfestigkeit, deren Bestimmung für die Bemessung querkzugbeanspruchter Bauteile von ebensogroßer Bedeutung ist, wie die Bestimmung der auftretenden Querkzugspannungen.

### 3. FESTLEGEN DER ZULÄSSIGEN SPANNUNGEN

In der Vergangenheit wurde bei Holz eine Belastung senkrecht zur Faserrichtung weitgehend vermieden, da sich aus Erfahrung gezeigt hatte, daß die Gefahr des Aufreißen sehr groß ist. Mit der Einführung gekrümmter Bauteile aus Brettschichtholz und der planmäßigen Belastung des Holzes auf Querkzug war es aber notwendig geworden, einen Bemessungswert der Querkzugspannung festzulegen. An wenigen konzentrisch gekrümmten Trägern führte KOLB 1968c Bruchversuche durch, deren Ergebnisse für gekrümmte Bauteile aus Brettschichtholz zu einer zulässigen Querkzugspannung von  $0,25 \text{ N/mm}^2$  in DIN 1052 'Holzbauwerke' (Ausgabe 1969) führten. Dieser Wert wurde aus dem Mittelwert der Bruchspannungen der Versuche nach Division durch einen Sicherheitsfaktor erhalten.

Bei der Neufassung der DIN 1052 (Ausgabe 1988) wurden Berechnungsverfahren für weitere gekrümmte Träger, wie z.B. den gekrümmten Satteldachträger, aufgenommen. Man blieb aber noch bei dem alten Sicherheitskonzept mit der Abgrenzung der errechneten Spannung gegen eine zulässige Spannung, die jedoch auf  $0,2 \text{ N/mm}^2$  verringert wurde. Bei der Bemessung auf Querkzug führt dies zu der Situation, daß die maximalen Spannungen im First eines konzentrisch gekrümmten Trägers konstanter Höhe gegenüber denen eines gekrümmten Satteldachträgers geringer sind. Bei Abgrenzung gegen eine zulässige Querkzugspannung, die für alle Träger gleich groß ist, darf nun der konzentrisch gekrümmte Träger höher belastet werden, als der gekrümmte Satteldachträger. Die Versuche von KOLB und FRECH 1975 zeigten jedoch, daß die Bruchlasten der gekrümmten Satteldachträger höher als bei den konzentrisch gekrümmten Trägern lagen. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Querkzugfestigkeit nicht allein von der Höhe der maximalen Spannung abhängig ist, sondern auch von der Spannungsverteilung und von dem von der Spannung beanspruchten Volumen.

Eine von WEIBULL 1939 entwickelte Theorie für ein homogenes isotropes Material mit sprödem Bruchverhalten berücksichtigt diese Einflüsse auf die Festigkeit. Die Anwendbarkeit dieser Theorie auf Holz bei Querkzugbeanspruchung konnte durch BARRETT, FOSCHI und FOX 1975 gezeigt werden, die damit Versuchsergebnisse für gekrümmte Träger aus Douglasie erklären konnten. In COLLING 1986a und 1986b wird sie näher erläutert und durch Diagramme und Beispiele die Anwendung erleichtert. Die wichtigsten Gleichungen nach Colling werden im folgenden kurz dargestellt.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit  $P$  eines Bauteils nach der 2-parametrischen Weibull-Verteilung lautet:

$$P = 1 - S = \exp \left[ - \int_V \left( \frac{\sigma(x, y, z)}{\sigma'} \right)^k dV \right] \quad (42)$$

$S$  = Versagenswahrscheinlichkeit  
 $\sigma(x, y, z)$  = Funktion der Spannungsverteilung  
 $\sigma', k$  = Parameter der Weibull-Verteilung

Man erhält sie unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Bruchmodells des schwächsten Gliedes (weakest link failure), welches bei spröden Materialien angewendet wird. Die Parameter der Weibull-Verteilung müssen aus Versuchen ermittelt werden. Durch Einführung sogenannter Völligkeitsbeiwerte  $\lambda_L$  und  $\lambda_H$ , welche den Einfluß der Spannungsverteilung auf die Festigkeit erfassen, läßt sich das Integral für Rechteckquerschnitte leicht lösen. Obige Gleichung lautet dann:

$$P = \exp \left[ -V \left( \lambda_L \cdot \lambda_H \cdot \frac{\sigma_{max}}{\sigma'} \right)^k \right] \quad (43)$$

$V$  = durch  $\sigma(x, y, z)$  beanspruchtes Volumen  
 $\sigma_{max}$  = maximale Spannung in  $V$   
 $\lambda_L, \lambda_H$  = Völligkeitsbeiwerte für den Verlauf und die Höhe der Spannungsverteilung in  $V$

Bei zwei Versuchen, die für eine ganz bestimmte Beanspruchung (z.B. Querkzug) mit verschieden großen Versuchskörpern durchgeführt werden, und für die gilt, daß die Parameter der Weibull-Verteilung gleich sind und die Überlebenswahrscheinlichkeit gleich groß ist, ergibt sich für das Verhältnis ihrer Festigkeiten  $f$  folgende Beziehung:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sigma_{max,2}}{\sigma_{max,1}} = \frac{\lambda_{L,1} \cdot \lambda_{H,1}}{\lambda_{L,2} \cdot \lambda_{H,2}} \cdot \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{1}{k}} \quad (44)$$

Aus dieser Gleichung ist die Abhängigkeit der Festigkeit von der Spannungsverteilung und vom beanspruchten Volumen ersichtlich.

Eingang fand diese Theorie in neuere Normen, wie z.B. dem EUROCODE 5, in dem durch die beiden Parameter

$$k_{vol} = \left( \frac{V_0}{V} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (45)$$

$$k_{dis} = \frac{1}{\lambda_L \cdot \lambda_H} \quad (46)$$

die Abhängigkeit der Bemessungsfestigkeit  $f_{t,90,d}$  definiert für das Volumen  $V_0 = 0,02 \text{ m}^3$ , für eine gleichförmige Spannungsverteilung  $\sigma$  über den Querschnitt ( $\lambda_L \cdot \lambda_H = 1$ ) und für eine 95-prozentige Überlebenswahrscheinlichkeit  $P$ , von jedem anderem beanspruchten Volumen und jeder anderen Spannungsverteilung berücksichtigt wird. Die Bemessungsspannungen  $\sigma_{t,90,d}$  nach Gleichung (47) ergeben sich damit unterschiedlich für verschiedene Bemessungsfälle, abhängig von der Spannungsverteilung und dem beanspruchten Volumen.

$$\sigma_{t,90,d} = k_{vol} \cdot k_{dis} \cdot f_{t,90,d} \quad (47)$$

Bei der Auswertung der in diesem Forschungsvorhaben durchgeführten Versuche wird in den folgenden Kapiteln die Gültigkeit der Gleichung (47) bei der Festlegung einer Bemessungsspannung für Querkraft nachgeprüft und gegebenenfalls werden Änderungen vorgeschlagen.

## 4. ANLAGE UND DURCHFÜHRUNG DER VERSUCHE

### 4.1 ABMESSUNGEN UND HERSTELLUNG DER VERSUCHSKÖRPER

Durch die Versuche sollte der Einfluß des querzugbeanspruchten Volumens auf die Tragfähigkeit gekrümmter Träger untersucht werden. Dabei kam es vor allem darauf an, durch verschiedene Prüfkörperabmessungen, Trägerformen und Belastungsanordnungen die Verteilung und die Größe der Querzugspannungen zu variieren.

Es wurden drei Trägerformen, der gekrümmte Träger konstanter Höhe (Versuchsbezeichnung G), der gekrümmte Satteldachträger (P) und der gekrümmte Satteldachträger mit sich zum Auflager verjüngender Querschnittshöhe (K), ausgewählt. Um sicherzustellen, daß ein Querzugbruch zum Versagen der Träger führte, wurde der Obergurtwinkel mit 20 Grad festgelegt. Die Prüfkörperlängen lagen zwischen 3,6 und 12,0 Metern, wobei die Träger einer Form aber geometrisch ähnlich waren, d.h. alle Abmessungen, bis auf die Breite, wurden im gleichen Verhältnis geändert (wegen der Abmessungen der Versuchshalle sind die großen Prüfkörper an beiden Enden um jeweils 50 cm gekürzt worden, was jedoch keinen Einfluß auf die Vergleichbarkeit der Träger untereinander hat). Vergleiche zwischen den Trägerformen sind möglich, weil die Grundform der gekrümmte Träger bildete, dessen Abmessungen mit denen des Satteldachträgers bis auf den Firstbereich identisch sind und dieser wiederum mit Ausnahme der Untergurtneigung gleiche Abmessungen aufweist, wie der Satteldachträger mit konischem Außenbereich.

Einheitlich wurden 12 cm breite Fichtenholzlamellen der Güteklasse II eines Leimbaubetriebes in den Dicken von 10 bis 25 mm verwendet, die mit Resorcinharz verleimt wurden. Aus der Lamellendicke und einem mittleren Krümmungsverhältnis  $h_m/R_m$  von 0,2 (Träger G) bzw. 0,26 (Träger P und K) ergaben sich nach DIN 1052 die Krümmungsradien.

Zusätzlich wurde bei den gekrümmten Satteldachträgern mit konischem Außenbereich an zwei weiteren Trägerformen der Untergurtwinkel zwischen 14 und 18 Grad variiert.

Als Belastung wurden Einzellasten in den Viertelpunkten der Träger gewählt, die ein konstantes Moment im Firstquerschnitt erzeugten, aber weit genug von diesem entfernt waren, um die Verteilung der Querkzugspannungen nicht mehr zu beeinflussen.

Versuche mit gleichförmiger Streckenlast wurden nur mit gekrümmten Trägern konstanter Höhe und gekrümmten konischen Satteldachträgern durchgeführt. Geprüft wurden aus versuchstechnischen Gründen nur Träger mit den beiden kleineren Spannweiten von 3,6 und 6,36 Metern, wobei die Streckenlast durch acht gleichmäßig über die Träger verteilte Einzellasten angenähert wurde.

Damit ergaben sich 18 verschiedene Träger mit jeweils zwei Prüfkörpern, insgesamt also 36 Prüfkörper.

Die Anlagen 1 bis 4 zeigen die Trägerformen und deren Abmessungen im Überblick.

#### 4.2            VERSUCHSAUFBAU

Alle Prüfkörper wurden im Biegeversuch mit Einzellasten als Einfeldträger mit einem verschieblichen und einem festen Lager geprüft. Die Aussteifung des Druckgurtes erfolgte kontinuierlich durch seitlich montierte Balken hoher Steifigkeit. Die Lasten wurden von hydraulischen Druckkolben mit maximal 500 kN Druckkraft über Stahlplatten und aufgeleiteten Keilen in den Obergurt eingeleitet, wobei zur Erzeugung des konstanten Momentes im First zwei Kolben in den Viertelpunkten der Träger angeordnet waren. Die Streckenlast wurde durch vier Kolben, deren Last durch Verteilungsträger in acht Punkten des Versuchskörpers eingeleitet wurden, angenähert (vgl. Anlagen 5,6,7 Bilder A8 bis A13).

Für die Quer- und die Längsdehnungsmessungen im gekrümmten Bereich wurden Dehnmeßstreifen (DMS) mit 60 mm Meßlänge verwendet. Zur Messung der Durchbiegung in Trägermitte, der Absenkung sowie der Verschiebung am Auflager und zur Kontrolle der DMS wurden induktive Wegaufnehmer der Typen W2, W20 und W50 gewählt. Die Meßsignalverstärkung und Meßdatenerfassung erfolgte mittels einer rechnergestützten Umschaltanlage (UPH 3200).

### 4.3 ANORDNUNG DER MESSSTELLEN

Die DMS zur Messung der Querdehnung senkrecht zur Faserrichtung waren zum einen über die Firsthöhe und über die Querschnittshöhen an den Krümmungsenden, und zum anderen entlang der am höchsten beanspruchten Lamellen gleichmäßig auf der Trägervorder- und Rückseite verteilt. Zur Kontrolle der DMS waren an einigen Meßpunkten zusätzlich induktive Wegaufnehmer angebracht. Die Längsdehnungen wurden im Firstquerschnitt und an drei Punkten des Untergurtes mit DMS gemessen. Insgesamt waren für jeden Prüfkörper 10 Meßstreifen für die Längsdehnungen und 32 Meßstreifen für die Querdehnungen vorgesehen.

Die Durchbiegung in Trägermitte und die Auflagerabsenkungen wurden durch jeweils zwei an der Vorder- und an der Rückseite angebrachte Wegaufnehmer, die Vergrößerung der Stützweite (horizontale Verschiebung des Auflagers) durch einen Wegaufnehmer gemessen. Die Anlagen 8 und 9 mit den Bildern A14 bis A18 zeigen exemplarisch die Anordnung der Dehnmeßstreifen und der Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich.

### 4.4 DURCHFÜHRUNG DER BRUCHVERSUCHE

Die Prüfkörper wurden verformungsgesteuert mit einer konstanten Belastungsgeschwindigkeit von 2 mm/Minute (3 mm/Minute bei den Trägern unter Streckenlast) belastet. Die Belastung wurde bei einer Last entsprechend  $M/W = 1,0$  (2,0)  $N/mm^2$  im First und bei der nach DIN 1052 zulässigen Last entsprechend  $\text{zul } \sigma_{z\perp} = \kappa_q \cdot M/W$  ( $2 \cdot \text{zul } \sigma_{z\perp}$ ) = 0,2  $N/mm^2$  (0,4  $N/mm^2$ ) jeweils für eine Minute angehalten. Nach einer Entlastung auf  $M/W = 1,0$  (2,0)  $N/mm^2$  und einer weiteren Pause von einer Minute wurde bis zur Hälfte der geschätzten Bruchlast belastet.

Anschließend wurden die Wegaufnehmer entfernt (zur Vermeidung ihrer Beschädigung bei dem zu erwartenden schlagartigen Bruch) und der Prüfkörper weiter bis zum Bruch belastet. Die elektrischen Meßwertaufnehmer wurden während der gesamten Prüfdauer alle 20 Sekunden abgelesen.

## 5. ERGEBNIS DER VERSUCHE

### 5.1 BRUCHLASTEN UND RECHNERISCHE BRUCH- SPANNUNGEN

Die Bruchlasten der Versuche, die dazugehörigen maximalen rechnerischen Querkzugspannungen nach DIN 1052 und nach Eurocode 5 und die Bruchursachen sind in der Tabelle A5 (Anlage 10) angegeben.

Bis auf einen Träger mit Biegebruch in der untersten Lamelle (G2B) versagten alle Prüfkörper durch einen spröden Querkzugbruch, der sich durch Knistern im Holz ankündigte. Er begann meistens in der Nähe der theoretisch berechneten Trägerhöhe im First mit der höchsten Querkzugspannung und verlief dann entlang der Lamellen bis in die Nähe der Lasteinleitung. In den Bildern A16 bis A18 (Anlage 9) ist der Rißverlauf deutlich zu sehen.

Durch späteres Öffnen der zerstörten Körper konnte die Bruchfuge näher ausgewertet werden. Es stellte sich heraus, daß die meisten Risse in oder in der Nähe der Leimfugen lagen. Da diese aber überall Holzfasern auf ihrer Oberfläche aufwiesen, ist anzunehmen, daß die Verleimung nicht bruchverursachend war. Die Bilder A19, A20 und A21 (Anlage 11) zeigen an drei Beispielen das übliche Aussehen einer Bruchfuge, die in Bild A19 genau in der Leimfuge liegt aber mit Holzfasern dicht belegt ist und in den Bildern A20 und A21 teilweise im Holz verläuft.

Sehr deutlich machte sich der Einfluß eines ungleichmäßigen Preßdruckes bei der Verleimung oder eines ungenügenden Leimauftrages bemerkbar, da in diesen Fugen teilweise die Lamellen nicht miteinander verbunden waren. Die Träger P1B und K6B mit teilweise ausgehungerten Leimfugen weisen deutlich geringere Bruchlasten auf als die entsprechenden Versuchskörper P1A und K6A (vgl. Tabelle A5, Anlage 10).

In Bild A22 (Anlage 12) ist der aufgetrennte Träger K6B zu sehen, in dem die Bruchfuge im First eine Keilzinkung aufweist, neben der die Leimfuge nicht richtig verpreßt wurde (der fadenartige Leimauftrag ist noch zu sehen).

Ebenso bruchlastmindernd wirkt sich ein Holzversagen durch Ringschäle aus, wenn diese im hoch beanspruchten Bereich auftritt. Vergleicht man dazu die Bruchlasten der Träger K3A und K3B miteinander (Tabelle A5, Anlage 10), so kann ein Abfall der Bruchlasten um ca. 21 % bei Träger K3A gegenüber Träger K3B festgestellt werden. In Bild A23 (Anlage 12) erkennt man als Bruchursache einen Bereich mit ausgeprägter Ringschäle, der für die geringere Tragfähigkeit verantwortlich zu machen ist.

Ist in den oben genannten Einzelfällen eine Erklärung der unterschiedlichen Bruchlasten durch die Bruchbilder noch möglich, so sind bei den meisten anderen Versuchskörperpaaren mit großen Differenzen zwischen den Bruchlasten (z.B. Träger G2A und G2B, K1A und K1B und K2A und K2B) die Ursachen hierfür nicht offensichtlich bzw. es war aufgrund des spröden Bruchverhaltens und der Inhomogenität des Holzes mit großen Streuungen der Bruchlasten zu rechnen.

Bei den Versuchen unter Streckenlast (Gq3, Gq4, Kq3, Kq4) wurden höhere Bruchlasten als bei den gleichen Trägern mit konstantem Moment im First erreicht. Bis auf einen Prüfkörper der Serie Gq3 lagen bei allen Trägern einer Geometrie die Bruchlasten sehr dicht beieinander.

Zusätzlich zu der Tabelle A5 sind die rechnerischen Bruchspannungen nach DIN 1052 in Bild A24 (Anlage 13) für sämtliche Träger in einem Diagramm einander gegenübergestellt.

Für die gekrümmten Satteldachträger mit konischem Außenbereich und den Trägern unter Streckenlast, für die in der Norm keine Regelungen getroffen sind, wurden mit den Gleichungen für die Satteldachträger mit parallelen Gurten im Außenbereich bzw. den Gleichungen für ein konstantes Moment im First die Bruchspannungen ermittelt, was zwar in der Anwendung nicht richtig ist, aber eine erste Abschätzung erlaubt (im Kapitel 6 werden die Spannungen mit Ergebnissen aus Finite Element Berechnungen verglichen). Ein einheitlicher Wert der Querkzugfestigkeit ist nicht feststellbar, vielmehr nehmen die rechnerischen Bruchspannungen mit zunehmender Größe der Träger ab.

## 5.2 DEHNUNGEN UND DURCHBIEGUNGEN

Innerhalb des gekrümmten Bereiches wurden bei allen Trägern Dehnungsmessungen mit DMS und induktiven Wegaufnehmern vorgenommen sowie die Durchbiegungen im First und die Auflagerverschiebungen mit Wegaufnehmern gemessen, deren Ergebnisse exemplarisch für die Träger G1A, P1A, K1A, Gq3A und Kq4A in den Anlagen 14 bis 23 dargestellt sind. Sowohl für die Dehnungen als auch für die Durchbiegungen ist ein nahezu linearer Anstieg bis zum Bruch (die Wegaufnehmern waren nur bis zur Hälfte der geschätzten Bruchlast angeschlossen, für sie ist aber bis dorthin auch ein linearer Anstieg vorhanden) zu erkennen. Kurz vor Erreichen der Bruchlast wurde die Darstellung der Kurven abgebrochen, da der Bruch schlagartig erfolgte und einzelne Meßstellen zerstörte.

In Tabelle A6 (Anlage 24) sind die Durchbiegungen im First und die horizontalen Auflagerverschiebungen für die zulässige Kraft  $F_{zul}$  infolge einer Bemessung auf Querkraft dargestellt.

## 6. AUSWERTUNG DER VERSUCHE

### 6.1 BERECHNUNG DER VERSUCHSTRÄGER MIT HILFE DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE (FE)

#### 6.1.1 Modellaufbau und Materialkennwerte

Mit Hilfe des vektorisierten Finiten Elemente Programmes Adina wurden die Versuchsträger unter Ausnutzung der Symmetrie berechnet. Bild A25 (Anlage 25) zeigt exemplarisch für den gekrümmten konischen Satteldachträger die Einteilung in finite Elemente, die sich im wesentlichen am Verlauf der Lamellen orientierte. Die Elementdicken wurden so gewählt, daß sie den Lamellendicken entsprachen.

Die Materialkennwerte wurden der DIN 1052, Ausgabe April 1988 für Brettschichtholz aus Fichte entnommen, um damit die gleichen Anisotropiefaktoren nach Blumer zu erhalten, wie sie auch den Berechnungsgleichungen für die Querspannungen der Norm zugrunde liegen.

Es ergaben sich somit folgende Materialkennwerte:

$$E_{\varphi} = 11000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_r = 300 \text{ N/mm}^2$$

$$G_{r\varphi} = 500 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_{r\varphi} = 0,04$$

Eine Verifikation dieser Materialkennwerte mit den tatsächlich vorhandenen im Versuch war im Rahmen dieses Forschungsvorhabens nicht möglich und auch nicht beabsichtigt.

Für einen sinnvollen Vergleich von Versuchen und Simulationsrechnungen mit Hilfe der Finiten Elemente ist eine grundlegende Erforschung der Materialkennwerte wie des Elastizitätsmoduls senkrecht zur Faserrichtung und der Querszugfestigkeit in Abhängigkeit der sie beeinflussenden Faktoren wie Rohdichte, Holzfeuchte, Ästigkeit etc. und deren Korrelationen untereinander an wirklich in den Leimbaubetrieben verwendetem Holz nötig.

Erst wenn diese Werte in der Form statistischer Verteilungskurven bekannt sind, kann ein Träger wirklichkeitsnah simuliert, berechnet und seine Traglast abgeschätzt werden.

Durchgeführt wurden die Berechnungen an der Großrechenanlage der Universität Karlsruhe, einer IBM 3090, die weiteren Auswertungen erfolgten im wesentlichen an IBM - kompatiblen Personal Computern.

### 6.1.2 Bruchspannungen und Dehnungen

In Tabelle A5 (Anlage 10) sind neben den rechnerischen Bruchspannungen nach DIN 1052 auch die Bruchspannungen nach der FE - Berechnung enthalten. Für die Belastung konstantes Moment im gekrümmten Bereich stimmen beide Werte mit Abweichungen bis zu 5 % gut überein. Erst bei der Belastung unter Streckenlast ergeben sich deutliche Unterschiede, die dadurch zu erklären sind, daß für diese Lastanordnung die Gleichungen der Norm keine Gültigkeit mehr haben.

Der Vergleich der berechneten Querdehnungen für das hier angenommene orthotrope und homogene Material mit den gemessenen Querdehnungen in den Bildern A26 und A27 (Anlage 26) für einen gekrümmten Träger konstanter Höhe und für einen gekrümmten Satteldachträger läßt die Schwierigkeiten der richtigen Annahme der Materialkennwerte erkennen. An einzelnen Meßstellen stimmen sie sehr gut mit der Theorie überein, ist aber eine Fehlstelle im Holz vorhanden, wie etwa ein Ast oder eine schlechte Verleimung, oder variiert die Eigenschaft des Holzes selbst stark, so werden die Meßergebnisse an dieser Stelle verfälscht.

Bei den weiteren Auswertungen werden die Spannungen und Dehnungen der Finiten Elemente Rechnungen dieses Abschnittes zugrunde gelegt.

### 6.1.3 Querzugbeanspruchtes Volumen

Aus der Querzugspannungsverteilung der FE - Berechnung wurde das tatsächlich durch Querzugspannungen beanspruchte Volumen  $V_{\text{tot}}$  für jeden Träger ermittelt, indem die Volumen  $V_i$  aller Elemente mit einer Querzugspannung aufsummiert wurden. In Tabelle A7 (Anlage 31) sind die Ergebnisse aufgelistet.

Für die Trägerformen G und P ergeben sich für gleiche Trägerlängen nahezu gleich große Werte, dagegen ist das Volumen bei den entsprechenden K - Trägern geringer. Deutlich wird hier auch der Einfluß der Streckenlast, die das querzugbeanspruchte Volumen weiter verringert (Vergleich der Träger G3 mit Gq3 bzw. K3 mit Kq3).

## 6.2 BRUCHSPANNUNGEN IN ABHÄNGIGKEIT VON DER TRÄGERFORM, DER TRÄGERGRÖSSE UND DER ART DER BELASTUNG

In den Bildern A28 bis A31 (Anlagen 27 bis 30) sind die Bruchspannungen der untersuchten Prüfkörper nach den drei Trägerformen, ihren unterschiedlichen durch Querzug beanspruchten Volumen und der Belastungsanordnung dargestellt.

Betrachtet man nur die gekrümmten Träger konstanter Höhe unter konstanter Momentenbeanspruchung im gekrümmten Bereich (Bild A28), so steigt bei kleiner werdender Spannweite der Träger die Bruchspannung an. Dies deutet darauf hin, daß die Querzugfestigkeit mit kleiner werdender Größe des durch Querzugspannungen beanspruchten Volumens größer wird. Ähnliches gilt auch für die gekrümmten Satteldachträger (Bild A29), wobei aber hier die maximale Bruchspannung der kleinsten Träger höher liegt, als bei den gekrümmten Trägern konstanter Höhe. Bei den gekrümmten konischen Satteldachträgern (Bild A30) wiederum liegen die Bruchspannungen sehr dicht beieinander, wobei die Spannungen der größeren Träger im Schnitt höher liegen als bei den anderen Formen. Im Vergleich der drei Trägerformen untereinander ist ein Anwachsen der Bruchspannungen von G, über P, hin zu K zu beobachten.

Für den Lastfall der Streckenlast auf den Obergurt (Bild A31) ergeben sich sowohl für die gekrümmten Träger konstanter Höhe als auch für die gekrümmten Satteldachträger größere Bruchlasten als für den Lastfall konstantes Moment im First, die bei den Versuchskörpern G3q sogar fast 50 % höher liegen als bei G3. Da diese Bruchlasten aber geringere maximale rechnerische Querspannungen zur Folge haben, ist deren Größe mit Ausnahme von G3q etwa genauso hoch wie diejenigen unter Einzellast. Auch hier ist die Tendenz zu erkennen, daß die Bruchspannungen der kleineren Träger (Gq4, Kq4) höher liegen, als die der größeren. Bei einem Vergleich der Bruchspannungen der einzelnen Trägerformen kann kein Unterschied mehr festgestellt werden. Bemerkenswert ist, daß die Bruchlasten bei den Satteldachträgern gleicher Größe sehr eng beieinander liegen.

Zur Erklärung der Abhängigkeiten der rechnerischen Bruchspannungen vom quersugbeanspruchten Volumen und der Spannungsverteilung wird im folgenden die 2-parametrische Weibull-Verteilung verwendet.

### 6.3 Bestimmung der Parameter der Weibull-Verteilung aus den Versuchswerten

Zur weiteren Auswertung nach der Weibull-Theorie ist es notwendig, die beiden Parameter  $\sigma'$  und  $k$  zu bestimmen (siehe Gleichung (42)). Nach BARRETT, FOSCHI und FOX 1975 gilt folgender Zusammenhang zwischen der Einheitsquersugfestigkeit  $\sigma^*$  für das Einheitsvolumen und der Quersugfestigkeit eines beliebigen anderen Volumens  $V$  unter gleichförmiger Spannungsverteilung  $\sigma$ , wenn für beide die Versagenswahrscheinlichkeit gleich groß sein soll:

$$\log_{10} \sigma = \log_{10} \sigma^* - 1/k \cdot \log_{10} V \quad (48)$$

Die Parameter lassen sich nun aus den Versuchswerten bestimmen, indem alle Bruchspannungen mit ungleichförmiger Spannungsverteilung in eine gleichförmige Verteilung umgerechnet werden. Dies ist unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Weibull-Theorie möglich, wenn die Volligkeitsbeiwerte  $\lambda_L$  und  $\lambda_H$  bekannt sind. Diese lassen sich nach COLLING 1986b folgendermaßen berechnen:

$$\lambda_L \cdot \lambda_H = \left[ \frac{\sum \left[ \left( \frac{\sigma_{iL}}{\sigma_{maxL}} \right)^k \cdot V_i \right]}{V_{tot}} \right]^{\frac{1}{k}} \quad (49)$$

mit	$V_i$	=	Volumen eines finiten Elementes mit Querkzugspannung
	$\sigma_i^\perp$	=	Querkzugspannung für das finite Element mit dem Volumen $V_i$
	$V_{tot}$	=	gesamtes durch Querkzug beanspruchtes Volumen
	$\max \sigma_i$	=	maximale Querkzugspannung in $V_{tot}$

Durch geeignete Wahl eines Wertes für  $k$  können nun die Völligkeitsbeiwerte bestimmt werden. Damit lassen sich ideale Bruchspannungen für eine gleichförmige Spannungsverteilung aus den tatsächlichen rechnerischen Bruchspannungen durch Multiplikation mit den entsprechenden Völligkeitsbeiwerten berechnen:

$$\sigma_{id} = \sigma_{Z_\perp}^{Bruch} \cdot \lambda_L \cdot \lambda_H \quad (50)$$

Für die logarithmierten Werte dieser Spannungen und der von ihnen beanspruchten Volumen  $V_{tot}$  wird anschließend eine lineare Regression durchgeführt. Die beiden Parameter der Regressionsgleichung entsprechen dann den beiden Parametern  $\sigma^*$  und  $k$  der Gleichung (48). Jetzt kann ein neues  $k$  gewählt werden und das Verfahren von vorn beginnen, solange, bis die Werte für  $k$  übereinstimmen.

Es ergibt sich für die hier durchgeführten Versuche folgende Beziehung:

$$\log_{10} \sigma_{id} = -0,390 - 0,191 \cdot \log_{10} V_{tot} \quad (51)$$

$$\text{mit } k = 1 / 0,191 = 5,24$$

für  $\sigma_{id}$  [N/mm<sup>2</sup>] und  $V_{tot}$  [m<sup>3</sup>]

In Bild A32 (Anlage 32) sind die Spannungen und Volumen im logarithmischen Maßstab und die dazugehörige Regressionsgerade eingezeichnet. Ein Vergleich mit den Auswertungen von COLLING 1986b zeigt, daß bei einem Variationskoeffizienten von 24,4 % für die ideellen Spannungen dort der  $k$ -Faktor zu 4,72 wird. Dieser Unterschied ist durch die geringe Anzahl der Versuche und den daraus resultierenden Variationskoeffizienten zu erklären.

Den zweiten Parameter  $\sigma'$  der Weibull-Verteilung erhält man, indem die Spannung  $\sigma^*$  für das Einheitsvolumen  $V_{\text{tot}} = 1 \text{ m}^3$  aus Gleichung (51) berechnet wird. Sie ergibt sich zu  $\sigma^* = 0,41 \text{ N/mm}^2$ . Mit  $\sigma^* = \sigma_{\text{max}}$ ,  $V = V_{\text{tot}}$ ,  $\lambda_L \cdot \lambda_H = 1$  und einer Versagenswahrscheinlichkeit von  $S = 0,5$ , ermittelt sich  $\sigma'$  aus Gleichung (43) zu:

$$\sigma' = \frac{0,407}{(-\ln 0,5)^{0,191}} = 0,44 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (52)$$

Für beliebige Volumen  $V_{\text{tot}}$  unter gleichförmiger Spannungsverteilung  $\sigma$  ( $\lambda_L \cdot \lambda_H = 1$ ) und beliebiger Versagenswahrscheinlichkeit  $S$  ergibt sich dann aus Gleichung (44):

$$S = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{0,44} \right)^{5,24} \cdot V_{\text{tot}} \right] \quad (53)$$

Daraus kann wiederum bei einer Überlebenswahrscheinlichkeit  $P = 1 - S$  auf eine Festigkeit geschlossen werden nach:

$$\sigma(P) = \left( \frac{-\ln(P)}{V_{\text{tot}}} \right)^{0,191} \cdot 0,44 \quad (54)$$

### 6.3.1 Folgerungen aus der Anwendung der genauen Weibull-Theorie

Für alle Versuchsträger wurden ideale Festigkeiten  $f_{t,90}^*$  für ein gleichmäßig beanspruchtes Volumen von  $0,02 \text{ m}^3$  mit den Volligkeitsbeiwerten  $\lambda_L$ ,  $\lambda_H$  und den genauen Volumen  $V_{\text{tot}}$  mit den sich daraus ergebenden Verteilungsfaktoren  $k_{\text{dis}}$  und den Volumenfaktoren  $k_{\text{Vol}}$  nach Gleichung (47) mit  $k = 5,24$  berechnet (vgl. Tabelle A7 (Anlage 31)).

In Bild A33 (Anlage 33) sind die ideellen Festigkeiten in Abhängigkeit von den Volumen dargestellt. Die meisten Werte gruppieren sich um eine Festigkeit von  $0,9 \text{ N/mm}^2$ , die in etwa auch der Festigkeit bei einer Versagenswahrscheinlichkeit von 50 % entspricht ( $\sigma(0,5) = 0,87 \text{ N/mm}^2$ ).

#### 6.4 VERGLEICH MIT AUS DER LITERATUR BEKANNTEN VERSUCHEN AN GEKRÜMMTEN TRÄGERN SOWIE AN QUERZUGPROBEN

Die Ergebnisse der hier durchgeführten Versuche werden in diesem Kapitel mit den Versuchswerten anderer Forschungseinrichtungen verglichen. Einen Überblick aller bisher durchgeführten Versuche mit gekrümmten Trägern zeigt Tabelle A8 (Anlage 34). In ihr sind die Anzahl der Versuche getrennt nach der Trägerform, der Spannweite, der Obergurtneigung und dem Krümmungsverhältnis eingetragen.

Zur weiteren Auswertung werden nur diejenigen Versuche berücksichtigt, bei denen Fichtenholz verwendet wurde, das den Güteklassen II oder I entspricht und bei denen der Aufbau der Träger praxisnah ist, d.h. die Spannweiten und die Breiten realistische Werte besitzen. Somit fallen alle Versuche aus der amerikanischen Literatur mit Douglas-fir als Holzart und die Versuche von KOLB 1968 weg. Es verbleiben 18 Versuche von KOLB, FRECH 1975 (im folgenden mit ST gekennzeichnet), 22 Versuche von MÖHLER, BLUMER 1974 (BL) und 3 Versuch von KRABBE, NEUHAUS 1979 (KR).

In Tabelle A9 (Anlage 35) sind die Abmessungen aller Träger dargestellt, wobei sich die Versuchsbezeichnungen aus der Trägerform (G,P,K), der Literaturstelle (ST,BL,KR), der Trägergeometrie (1,2,3,..) und der Versuchsnummer (A,B,C,...) zusammensetzen.

Mit diesen Werten wurden die Träger mit Hilfe der Finiten Elemente Methode berechnet. In Tabelle A10 (Anlage 36) sind die Bruchlasten und die Bruchursachen dargestellt, sowie die sich aus der FE Berechnung ergebenden Querkzugspannungen den Spannungen nach DIN 1052 und des EC 5 gegenübergestellt. Über die Anwendbarkeit der Gleichungen der Normen für alle Trägerformen gilt das in Kapitel 5.1 gesagte entsprechend.

Es zeigt sich, daß die Gleichungen der DIN 1052 die Querkzugspannungen nach der Finiten Elemente Methode in der Regel gut abschätzen, bei gekrümmten Satteldachträgern mit konischem Außenbereich und geringer Obergurtneigung (z. Bsp. Träger KBL2) aber deutlich höhere Spannungen ergeben als bei einer Berechnung mit der FEM.

Die Gleichungen des EC 5 wiederum sind mit denen nach DIN 1052 für die gekrümmten Träger konstanter Höhe identisch und ergeben die gleichen Werte, dagegen hängt der Rechenwert der Querspannungen bei gekrümmten Satteldachträgern vom Krümmungsverhältnis und der Obergurtneigung ab, so daß einmal der EC 5 näher zur FEM-Lösung liegt und in anderen Fällen die DIN 1052.

Bei der weiteren Auswertung wurden die genauen Verteilungsfaktoren  $k_{dis}$  und die genauen Volumenfaktoren  $k_{Vol}$  nach Weibull für  $k = 5,24$  berechnet und mit denen nach EC 5 verglichen, die Ergebnisse sind in Tabelle A11 (Anlage 37) dargestellt.

Zum Vergleich aller dieser Versuchsergebnisse mit den Ergebnissen der hier durchgeführten Versuche wurde davon ausgegangen, daß der Parameter  $k$  der Weibull-Verteilung weiter gültig ist. Für jeden Versuch wurde nun seine ideelle Bruchspannung für eine gleichförmige Spannungsverteilung nach Gleichung (50) berechnet.

Zusätzlich dazu wurden die von MISTLER 1982 durchgeführten Versuche zur Bestimmung der Querszugfestigkeit an prismatischen Probekörpern mit unterschiedlichen durch Querszug beanspruchten Volumen zum Vergleich herangezogen. Tabelle A12 (Anlage 38) gibt die Volumen, die Verteilungs- und Volumenfaktoren sowie die mittleren Bruchspannungen an. Obwohl es strittig ist, wie gut bei solch kleinen Prüfkörpern ein ebener Dehnungszustand erreicht werden kann, werden die Bruchspannungen als gleichförmig verteilt angenommen und mit den ideellen Bruchspannungen der gekrümmten Träger verglichen.

In Bild A34 (Anlage 39) sind die Bruchspannungen in Abhängigkeit von den Volumen  $V_{tot}$  dargestellt. Außerdem ist die Regressionskurve nach Gleichung (51) eingetragen. Sie gibt den Verlauf der Volumenabhängigkeit der Querszugbruchspannungen gut wieder.

## 6.5 VERGLEICH MIT DEN FESTLEGUNGEN IM EUROCODE 5

### 6.5.1 Trägerformen

In EC 5 sind für alle drei hier untersuchten Trägerformen Bemessungsgleichungen vorgesehen. Dabei wird aber nur zwischen gekrümmten Trägern konstanter Höhe und Satteldachträgern mit Rechteckquerschnitt unterschieden, d.h. der konische Satteldachträger wird wie der Satteldachträger mit parallelen Gurten im Außenbereich behandelt.

Aufgrund der geringen Differenz in der Höhe der Querkzugspannungen bei den verschiedenen Satteldachträgerformen ist diese Vereinfachung bei der Berechnung der im Firstquerschnitt herrschenden Bemessungsspannung gerechtfertigt.

### 6.5.2 Bemessungsspannungen

Bei allen hier untersuchten Trägern ist die Höhe der im Firstquerschnitt vorhandenen Querkzugspannung mit den Gleichungen des EC 5 gut abzuschätzen (vgl. Tabelle A5 (Anlage 10) und Tabelle A10 (Anlage36)). Nur bei geringer Krümmung wurde bei den gekrümmten Satteldachträgern einmal die Spannung um mehr als 10 % zu niedrig ermittelt (vgl. PBL1).

### 6.5.3 Bemessungsfestigkeit

Aus Gleichung (43) kann mit den Parametern der Weibull-Verteilung zu jeder Überlebenswahrscheinlichkeit, jedem beliebigem Volumen und jeder Querkzugspannungsverteilung die zu erwartende Festigkeit  $f = \sigma_{\max}$  ermittelt werden.

In Normenvorschlägen wie dem EUROCODE 5 wird eine charakteristische Festigkeit als 5%-Fraktile einer Grundgesamtheit für ein bestimmtes Volumen und eine gleichförmige Spannungsverteilung angegeben, von der aus Festigkeiten für andere Verhältnisse errechnet werden können.

Die Beziehung hierfür folgt aus Gleichung (44), wenn für  $V_1 = 0,02 \text{ m}^3$ ,  $\lambda_{L,1} \cdot \lambda_{H,1} = 1,0$  und für  $f_1 = \sigma_{\max,1} = 0,53 \text{ N/mm}^2$  als charakteristische Festigkeit für das gleichförmig beanspruchte Volumen der Größe  $V_1$  nach Gleichung (54) bei einer Überlebenswahrscheinlichkeit  $P = 0,95$  eingesetzt wird. Es gilt:

$$f(V_2, \lambda_{L,2}, \lambda_{H,2}) = \sigma_{\max,2} = \left( \frac{0,02}{V_2} \right)^{0,191} \cdot \frac{1}{\lambda_{L,2} \cdot \lambda_{H,2}} \cdot 0,53 \quad (55)$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung 5.1.3 a des EC 5 (hier Gleichung (56)) , wodurch ein Vergleich der Einzelbestandteile der Gleichungen miteinander möglich ist.

$$\sigma_{t,90,d} = k_{vol} \cdot k_{dis} \cdot f_{t,90,d} \quad (56)$$

$$\text{mit } f_{t,90,d} = \frac{k_{mod}}{\gamma_M} \cdot f_{t,90,k} \quad (57)$$

Die Tabellen A7 (Anlage 31) und A11 (Anlage37) zeigen die Gegenüberstellung der Berechnungen nach EC 5 bzw. nach der Weibulltheorie im Überblick.

Das Volumen wird nach der Vereinfachung des EC 5 in allen Fällen geringer als das wirkliche durch Querkraft beanspruchte Volumen  $V_{tot}$  abgeschätzt. Mit dem Parameter  $k = 5,0$  (gegenüber  $k = 5,24$ ) der Weibull Verteilung ergibt sich für den Volumenfaktor  $k_{Vol}$  nach EC 5 immer ein etwas größerer Wert als nach der hier durchgeführten Berechnung. Der Fehler, der dadurch gemacht wird, liegt aber zwischen 2% und 5%, so daß das vereinfachte Verfahren genügend genaue Ergebnisse liefert.

Anders sieht es bei den Kehrwerten der Völligkeitsbeiwerte, den Verteilungsfaktoren  $k_{dis}$ , aus. EC 5 unterscheidet bei den Angaben für  $k_{dis}$  nach gekrümmten Trägern konstanter Höhe und nach Satteldachträgern mit jeweils unterschiedlicher Belastung, gibt dann aber Werte an, die im Widerspruch zu der exakten Gleichung 5.1.3 c stehen. Die Faktoren sind für ein konstantes Moment im First immer kleiner als die nach der genauen Theorie. Nur bei den Trägern konstanter Höhe unter Streckenlast erreichen sie die Größe der tatsächlichen Werte, schätzen aber den Satteldachträger viel zu günstig ein. Dadurch werden die Bemessungsspannungen für ein konstantes Moment im First zu klein und bei der Streckenlast zu groß.

Die charakteristische Querkzugfestigkeit  $f_{t,90,k}$  ist nach EC5 für Brettschichtholz der Sortierklasse LC 4/4, das Brettschichtholz aus Fichte der Güteklasse II entspricht, mit  $0,4 \text{ N/mm}^2$  festgelegt. Dieser Wert dürfte zu niedrig angesetzt sein, da sich nach den hier durchgeführten Versuchen ein Wert von  $0,53 \text{ N/mm}^2$  ergeben hat.

Insgesamt gesehen ist eine Bemessung nach den derzeitigen Regeln des EC 5 ungünstiger als z.B. nach DIN 1052. Die Hauptursache liegt an den zu niedrigen charakteristischen Querkzugfestigkeiten und den falschen Verteilungsfaktoren.

## 6.6 BEMESSUNGSVORSCHLAG

Vor allem das letzte Kapitel hat gezeigt, inwieweit die Gleichungen und Annahmen des EC 5 zu einem einheitlichen Sicherheitsniveau bei der Bemessung gekrümmter Träger führen. Wo sich zu große Abweichungen ergeben haben, werden im folgenden modifizierte Bemessungsvorschläge gemacht.

Die Regelungen der DIN 1052 werden nicht weiter untersucht, da sie mit der Einführung der europäischen Normen ihre Gültigkeit verlieren werden. Zudem ist diese Norm noch nach dem alten deterministischen Sicherheitskonzept aufgebaut, das in allen neueren Normen durch ein probabilistisches Sicherheitskonzept abgelöst werden soll.

### 6.6.1 Verteilungsfaktor $k_{dis}$

Zur Berechnung der Verteilungsfaktoren werden die Diagramme nach COLLING 1986b vorgeschlagen, die in den Anlagen 40 und 41 dargestellt sind. Dabei sollen Näherungen für die Spannungsverteilungen in Trägerlängsrichtung und im Trägerquerschnitt je nach Trägerform und Belastung eine gute Übereinstimmung mit den genauen Verteilungsfaktoren ergeben.

Deshalb werden folgende Annahmen vorgeschlagen:

- a.) bei einer Lasteinleitung außerhalb des gekrümmten Bereiches gilt:
  - für den gekrümmten Träger konstanter Höhe:  
Spannungsverteilung im Querschnitt parabelförmig und in Trägerlängsrichtung trapezförmig, wie in Bild A38 (Anlage 42) angegeben,
  - für die gekrümmten Satteldachträger:  
Spannungsverteilung in beiden Richtungen parabelförmig, wie in den Bildern A39, A40 (Anlagen 43, 44) angegeben.
- b.) bei kontinuierlicher Lasteinleitung:
  - für den gekrümmten Träger konstanter Höhe:  
Spannungsverteilung im Querschnitt parabelförmig und in Trägerlängsrichtung trapezförmig, wie in Bild A41 (Anlage 45) angegeben,
  - für die gekrümmten Satteldachträger:  
Spannungsverteilung in beiden Richtungen parabelförmig, wie in Bild A42 (Anlage 46) angegeben.
- c.) bei konzentrierter Lasteinleitung im gekrümmten Bereich sind im Einzelfall besondere Überlegungen anzustellen.

### 6.6.2 Charakteristische Querkzugfestigkeit

Für die Festlegung der charakteristisch Querkzugfestigkeit  $f_{t,90,k}$  für die Sortierklasse LC 4/4 wird folgender Wert vorgeschlagen:

$$f_{t,90,k} = 0,5 \text{ N/mm}^2$$

Diese Festigkeit sollte aber noch durch Untersuchungen zur Bestimmung der Querkzugfestigkeit an kleinen Prüfkörpern mit einem anerkannten oder sogar genormten Prüfverfahren bestätigt werden.

## 7. ZUSAMMENFASSUNG

Zur Bestimmung des Einflusses des querzugbeanspruchten Volumens auf die Querzugfestigkeit bei gekrümmten Trägern wurden Versuche in Bauteilgröße an gekrümmten Trägern konstanter Höhe, an Satteldachträgern mit parallelen Gurten im Außenbereich sowie an gekrümmten konischen Satteldachträgern durchgeführt.

Anhand der Bruchlasten werden rechnerische Bruchspannungen nach Verfahren der DIN 1052 und des EC 5 ermittelt, die mit Spannungen aus einer Berechnung mittels der Methode der Finiten Elemente verglichen werden.

Da sich hierbei für die Querzugfestigkeit erwartungsgemäß kein für alle Träger einheitlicher Wert ergibt, wird deren Abhängigkeit von der Trägerform, der Größe des querzugbeanspruchten Volumens und der Belastung näher untersucht.

Es stellte sich heraus, daß mit wachsendem durch Querzug beanspruchtem Volumen die Querzugfestigkeit abnimmt. Das Ausmaß der Änderung ist bei gekrümmten Trägern konstanter Höhe und bei Satteldachträgern in etwa gleich, bei konischen Satteldachträgern aber geringer.

Ein deutlicher Einfluß der Belastungsart auf die Traglast konnte sowohl bei den gekrümmten Trägern konstanter Höhe als auch bei den gekrümmten Satteldachträgern festgestellt werden. Die maximalen rechnerischen Bruchspannungen unter Streckenlast liegen dagegen etwa genauso hoch wie unter konstanter Momentenbelastung.

Zur Erklärung der Unterschiede wird die 2-parametrische Weibull-Verteilung herangezogen, wie sie auch in neueren Normenvorschlägen, wie zum Beispiel dem EUROCODE 5, verwendet wird. Dazu war es nötig, die Versuchsträger mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente zu berechnen. Unter der Annahme von Elastizitätsmoduln nach DIN 1052 konnten die Verteilungsfaktoren und die Volumenfaktoren sowie die Parameter der Weibull-Verteilung bestimmt werden.

Im Vergleich mit den Festlegungen in EC 5 wurden im besonderen bei den Verteilungsfaktoren und der Annahme einer charakteristischen Querkzugfestigkeit Unterschiede festgestellt. Für beide werden neue Werte vorgeschlagen, damit eine einheitlichere Bemessung möglich wird, die aber noch durch Versuche zur Bestimmung der Querkzugfestigkeit an kleinen prismatischen Probekörpern bestätigt werden sollten.

Abschließend sei aber noch auf das Problem der Simulation gekrümmter Träger mit Rechenprogrammen hingewiesen. Hierzu fehlen noch wichtige Daten über die statistische Verteilung, z.B. des Elastizitätsmoduls rechtwinklig zur Faserrichtung, und die Abhängigkeit dieser Größen von anderen Holzeigenschaften. Es wäre wünschenswert, mit weiteren Untersuchungen diese Lücken zu schließen.

## 8. LITERATURZUSAMMENSTELLUNG

- ANDERSON, J. A. 1976: The structural behaviour of curved glued laminated timber beams. The British Library, Departm. of Civil Eng. and Building, Lanchester Polytechnic
- BARRETT, J. D.; FOSCHI, R. O.; FOX, S. P. 1975: Perpendicular-to-grain strength of Douglas-fir. Canadian Journal of Civil Engineering 2(1): 50-57
- BLUMER, H. 1975: Spannungsberechnungen an Brettschichtträgern mit gekrümmter Längsachse und veränderlicher Trägerhöhe. Holzbau (6): 158-161; (7): 191-194; (8): 235-237
- BLUMER, H. 1972/1979: Spannungsberechnungen an anisotropen Kreisbogenscheiben und Sattelträgern konstanter Dicke. Veröffentlichung des Lehrstuhls für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen, Universität Karlsruhe (TH)
- BLUMER, H.; FLÜHMANN, O.; GEHRI, E. 1976: Bemessung und Ausführung von Brettschicht-Konstruktionen. Referate gehalten anlässlich des Fortbildungskurses VIII der SAH am 1. und 5. November in Weinfeldern
- BLUMER, H.; GEHRI, E.; KELLER, U. 1979: Zur Bemessung von gekrümmten Satteldachträgern aus Brettschichtholz. SAH-Bulletin 7/1
- BUCHMANN, W. 1969: Berechnung polarorthotroper Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter reiner Biegebeanspruchung. Die Bautechnik 46(1): 27-32
- CANADIAN WOOD CONSTRUCTION 1982: Design lumber and glued laminated timber. Canadian Wood Council, Ottawa, Canada
- COLLING, F. 1986a: Einfluss des Volumens und der Spannungsverteilung auf die Festigkeit eines Rechteckträgers. Holz als Roh- und Werkstoff 44: 121-125, 179-183

- COLLING, F. 1986b: Influence of volume and stress distribution on the shear-strength and tensile-strength perpendicular to grain. CIB - W18 Paper 19-12-3, Florenz, Italien
- DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG 1988: DIN 1052 Teil 1 "Holzbauwerke; Berechnung und Ausführung", Ausgabe 04.88, Berlin
- DEWEY, G. R. 1979: Analysis and testing of single- and double-tapered glulam beams. Thesis presented to Colorado State University, Fort Collins, Colorado
- EHLBECK, J.; HEMMER, K. 1985: Über die Tragfähigkeit gekrümmter Brettschichtholzträger. Holz als Roh- und Werkstoff 43: 375-379
- EHLBECK, J.; HEMMER, K.; LÄMMLIN, G. 1984: Einfluß der Verjüngung eines geradrandigen Trägerbereiches bei gekrümmten Satteldachbindern auf die Querkzugspannungen. Holz als Roh- und Werkstoff 42: 275
- EUROCODE 5: siehe KOMMISSION DER EUROPÄISCHEN GEMEINSCHAFTEN 1987
- FOSCHI, R. O. 1968: Plane stress problem in a body with cylindrical anisotropy , with special reference to curved Douglas-fir beams. Dep. Fish. For. Can., Forest. Serv., Department Publication No. 1244, Ottawa, Ontario, Canada
- FOSCHI, R. O. 1970a: Point-matching analysis of curved timber beams. Journal of the Structural Division, ASCE 96(ST1): 35-48
- FOSCHI, R. O. 1970b: CGLB - A computer program for the stress analysis of curved glued-laminated timber beams. Can. For. Serv., West. For. Prod. Lab., Information Report VP-X-61, Vancouver, British Columbia
- FOSCHI, R. O. 1971: Stresses in curved glued-laminated timber beams - experimental study. Forest Products Journal 21(7): 42-48
- FOSCHI, R. O.; BARRETT, J. D. 1980: Glued-laminated beam strength - a model. Journal of the Structural Division, ASCE 106(ST8): 1735-1754

- FOSCHI, R. O.; FOX, S. P. 1970: Radial stresses in curved timber beams. *Journal of the Structural Division, ASCE* 96(ST10): 1997-2008
- FOX, S. P. 1970a: Minimum-depth design of double-tapered pitched glued-laminated beams. *Can. Dep. Fish. For., For. Prod. Lab., Inf. Rep. VP-X-73, Vancouver, British Columbia*
- FOX, S. P. 1970b: Experimental verification of a stress analysis method for the double-tapered pitched glued-laminated beam. *Can. Dep. Fish. For., Canadian Forestry Service, Dep. Pub. 1277*
- FOX, S. P. 1970c: Stress analysis of double-tapered pitched glued laminated beams. *The Engineering Journal* 13(A-2)
- FOX, S. P. 1970d: Radial stresses in curved glulam members. *Canadian Consulting Engineer*
- FOX, S. P. 1971a: Tables of sizes for double-tapered pitched glued-laminated beams. *Can. Dep. Fish. For., Forest Products Laboratory, Inf. Rep. VP-X-76, Vancouver, British Columbia*
- FOX, S. P. 1971b: Revised tables of sizes for double-tapered pitched glued-laminated beams. *Can. Dep. Fish. For., Forest Products Laboratory, Inf. Rep. VP-X-86, Vancouver, British Columbia*
- FOX, S. P. 1974a: Strength and deformation of pitched-tapered Douglas-fir glued-laminated beams. *Wood and Fiber*, 6(3): 242-252
- FOX, S. P. 1974b: Strength and stiffness of laminated Douglas-fir blocks in perpendicular-to-glueline tension. *Wood and Fiber*, 6(2): 156-163
- GOODMAN, J. R.; GOPU, V. K. A. 1974: Analysis of double-tapered pitched and curved laminated beam sections. *Wood Science*, 7(1): 52-60
- GOODMAN, J. R.; GOPU, V. K. A. 1975: Full-scale tests on tapered and curved glulam beams. *Journal of the Structural Division, ASCE* 101(ST12): 2609-2626
- GOODMAN, J. R.; GOPU, V. K. A. 1977: Design of double-tapered and curved glulam beams. *Journal of the Structural Division, ASCE* 103(ST10): 1921-1936

- GOODWIN, R. J. 1979: Behavior of double-tapered pitched and curved beams made of hem fir. Dept. of Civil Engineering, Brigham Young University
- GOPU, V. K. A. 1972: Analysis of double-tapered curved glued-laminated beams. Master's Thesis, Colorado State University, Fort Collins, Colorado
- GOPU, V. K. A. 1976: Behavior and design of double-tapered pitched and curved glulam beams. Ph. D. dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Colorado
- GOPU, V. K. A. 1980: Radial stresses in curved glulam beams. Journal of the Structural Division, ASCE 106(ST11): 2143-2150
- GOPU, V. K. A. 1981: Repaired pitch-cambered glulam-beams. Journal of the Structural Division, ASCE 107(ST7): 1251-1262
- GOPU, V. K. A. 1984: State of the art - analysis and design of nonprismatic glue laminated beams. Proceedings of Pacific Timber Engineering Conference, Auckland, New Zealand, Paper 186C: 95-102, Institution of Professional Engineers, Wellington, New Zealand
- GOPU, V. K. A. 1986: Pitch-cambered glued laminated beam deflections. Forest Products Journal 36(11/12): 33-38
- GOPU, V. K. A.; BUCKNER, C. D. 1988: Optimum design of double-tapered and curved glued laminated beams. Proceedings of the 1988 intern. conference of timber engineering, Volume 2, U.S.A.
- GUTKOWSKI, R. M., DEWEY, G. R. 1980: Research on double-tapered glulam beams. Final Report, 11th World Congress of the IABSE, Vienna, Austria: 169-175
- GUTKOWSKI, R. M.; DEWEY, G. R.; GOODMAN, J. R. 1982: Full-scale tests on double-tapered glulam beams. Journal of the Structural Division, ASCE 108(ST10): 2131-2147
- GUTKOWSKI, R. M.; DEWEY, G. R.; GOODMAN, J. R. 1982: Full-scale tests on single-tapered glulam beams. Journal of the Structural Division, ASCE 108(ST10): 2149-2161

- HEIMESHOFF, B. 1967: Praktische Spannungsberechnung für den gekrümmten Träger mit Rechteckquerschnitt. Die Bautechnik 4: 135-140
- HEMMER, K. 1983: Bemerkungen zur Spannungsberechnung bei Satteldachbindern und gekrümmten Trägern aus Brettschichtholz. Unveröffentlichter Vortrag anlässlich der Vorlesungsreihe 'Ausgewählte Kapitel des Holzbaues', Universität Karlsruhe (TH)
- KECHTER, G. E., GUTKOWSKI, R. M. 1984: Double-tapered glulam beams - finite element analysis. Journal of Structural Division, ASCE 110(ST5): 978-991.
- KEYLWERTH, R. 1951: Die anisotrope Elastizität des Holzes und der Lagenhölzer, VDI-Forschungsheft 430, Düsseldorf: VDI-Verlag.
- KOLB, H. 1968a: Versuche an verleimten Rahmenecken und Montagestößen, 3.Teil. Bauen mit Holz 70(6): 266-271
- KOLB, H. 1968b: Versuche an verleimten Rahmenecken und Montagestößen, 4.Teil. Bauen mit Holz 70(10): 462-470
- KOLB, H. 1968c: Festigkeitsuntersuchungen an gestoßenen und gekrümmten Bauteilen aus Brettschichtholz. Holz als Roh- und Werkstoff 26(7): 244-253
- KOLB, H.; FRECH, P. 1975: Biegeversuche zur Ermittlung der Querkzugfestigkeit von gekrümmten Trägern aus Brettschichtholz. Prüfbericht Nr. H 30 667, FMPA Stuttgart
- KOMMISSION DER EUROPÄISCHEN GEMEINSCHAFTEN 1987: Eurocode 5, Gemeinsame einheitliche Regeln für Holzbauwerke (1. Entwurfsfassung)
- KRABBE, E.; NEUHAUS, H. 1979: Entwicklung von konstruktiven Maßnahmen zur Verhinderung von Schadensfällen durch Querkzugspannungen bei verleimten Brettschichträgern. Institut für Konstruktiven Ingenieurbau. Ruhr-Universität Bochum
- KRABBE, E.; GÜLDENPFENNIG, J. 1983: Zum Verhalten von gekrümmten Brettschichträgern bei Feuchtigkeitsänderungen. Der Bauingenieur 58: 459-462

- MAKI A. C.; KUENZI, E. W. 1965: Deflection and stresses of tapered wood beams. For. Prod. Lab., Research Paper FPL 34, Madison, Wisconsin
- MISTLER, H.-L. 1982: Über die Querkzugfestigkeit von Fichten-Brettschichtholz in Abhängigkeit von der Bauteilgröße und der Verteilung der Beanspruchung. Ingenieurholzbau in Forschung und Praxis . Hrsg. J. Ehlbeck und G. Steck, Bruder-Verlag, Karlsruhe
- MÖHLER, K. 1976: Zur Berechnung von Brettschichtholzkonstruktionen. Holzbau-Statik-Aktuell, Folge 1: 2-6, Hrsg. Arbeitsgemeinschaft Holz e. V., Düsseldorf
- MÖHLER, K. 1979: Spannungsberechnung von gekrümmten Brettschichtträgern mit konstanter und veränderlicher Querschnittshöhe. Holzbau-Statik-Aktuell, Folge 3: 5-8, Hrsg. Arbeitsgemeinschaft Holz e. V., Düsseldorf
- MÖHLER, K.; BLUMER, H. 1974a: Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern. Teil 1: Träger mit konstanter Querschnittshöhe. Berichte aus d. Bauforschung 92 (V. Teil)
- MÖHLER, K.; BLUMER, H. 1974b: Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern. Teil 2: Träger mit geneigtem Obergurt. Berichte aus d. Bauforschung 92 (V. Teil)
- MÖHLER, K.; HEMMER, K. 1978: Combined stresses in tapered timber beams. IUFRO Wood Engineering Group Meeting, Vancouver, Canada
- MÖHLER, K.; HEMMER, K. 1980: Spannungskombination bei Brettschichtträgern mit geneigten Rändern. Bauen mit Holz 82(6): 355-357
- NOACK, D.; VON ROTH, W. 1972: Berechnung gekrümmter Brettschichtträger unter Belastung durch Momente, Normal- und Querkkräfte. Holz als Roh- und Werkstoff 30: 220-233
- NORRIS, C. B. 1962: Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses. Forest Products Laboratory, Report Nr. 1816, Madison, Wisconsin

- NORRIS, C. B. 1963: Stresses within curved laminated beams of Douglas-fir. USDA Forest Service, FPL 020, For. Prod. Lab. , Madison, Wisconsin
- RIBERHOLT, H. 1979: Tapered timber beams. CIB 11-10-2, Wien, Österreich
- RIBERHOLT, H. 1981: Double tapered curved glulam beams. CIB 14-12-3, Warschau, Polen
- SHELLING, W. 1967: Berechnung gekrümmter Brettschichtträger mit Biegebeanspruchung. Bauen mit Holz 69(4): 158-160
- SZALAI, J. 1983: Ermittlung der während der Herstellung auftretenden Eigenspannungen und Verformungen bei gekrümmten Brettschichtträgern. Die Bautechnik 60(2): 37-41
- SZALAI, J. 1986: Theoretische und experimentelle Untersuchung der herstellungsbedingten Eigenspannungen von gekrümmten Brettschichtträgern. Holz als Roh- und Werkstoff 44: 69-75
- THUT, W. K. 1970: Stresses in pitched-cambered glulam beams. Master's Thesis, University of British Columbia, Vancouver, B.C.
- VINCENT, T. A.; GOPU, V. K. A. 1982: Design of radially reinforced pitch-cambered glulam beams. Structural Research Report, Department of Civil Engineering, Louisiana State University
- VINCENT, T. A.; GOPU, V. K. A. 1984: Design of radially reinforced tapered and curved glulam beams. Proceedings of Pacific Timber Engineering Conference, Auckland, New Zealand, Paper 186B: 87-94, Institution of Professional Engineers, Wellington, New Zealand
- VINCENT, T. A.; GOPU, V. K. A. 1984: Rational design of radial reinforcement in pitch-cambered glulam beams. Forest Products Journal 35(1): 61-67
- VON ROTH, W.; EPPLE, A. 1981: Vergleichende isotrope und orthotrope Berechnung von Brettschichtträgern. Holz als Roh- und Werkstoff 39: 25-31

- VON ROTH, W.; LÖBER, R. 1987: Rechn. Ermittlung der Querkzugbewehrung symmetrischer, satteldachförmiger Brettschichtträger mit gekrümmter Unterseite nach Vincent/Gopu unter Beachtung der DIN 1052. Holz als Roh- und Werkstoff 45: 251-254
- WASSMER, M. 1987: Untersuchung der Spannungsverteilung bei eingeleimten Gewindestangen in Satteldachträgern. Unveröffentlichte Vertieferarbeit, Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen, Universität Karlsruhe (TH)
- WEIBULL, W. 1939: A statistical theory of the strength of materials. Proc. Roy. Swed. Inst. Eng., Res. 151
- WILSON, T. R. C. 1939: The glued-laminated wooden arch. U.S. Dept. Agric., Techn. Bull. 691, Washington D. C.
- WILSON T. R. C.; COTTINGHAM, W. S. 1947: Tests of glued laminated wood beams and columns and development of principles of design. Forest Products Laboratory, Report R1687, Madison, Wisconsin
- ZAHN, J. J. 1969: Residual stresses in curved laminated wood beams. Journal of the Structural Division, ASCE 95(ST12): 2873-2890



## Abkürzungen und Bezeichnungen

### Prüfkörpername:

- G** : Gekrümmter Träger konstanter Höhe
- P** : Gekrümmter Satteldachträger
- K** : Gekrümmter konischer Satteldachträger
- 1-4** : Freie Auflagerlänge
- 5,6** : Träger der gleichen Länge wie Nr. 2 mit anderen Untergurtneigungen
- q** : Träger unter Streckenlast

### Symbole in den Diagrammen:

- \* : G1 - G4
- ⊕ : P1 - P4
- : K1 - K4
- △ : K5
- ◇ : K6
- +
- × : Kq3, Kq4

Bild A1: Bezeichnungen für die Prüfkörper G1 ÷ G4

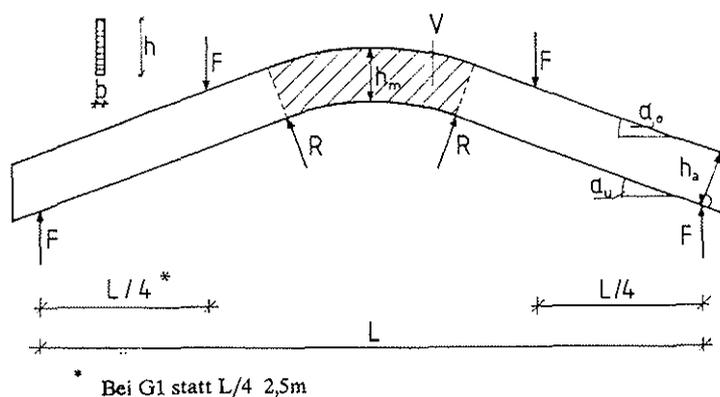


Bild A2: Bezeichnungen für die Prüfkörper Gq3, Gq4

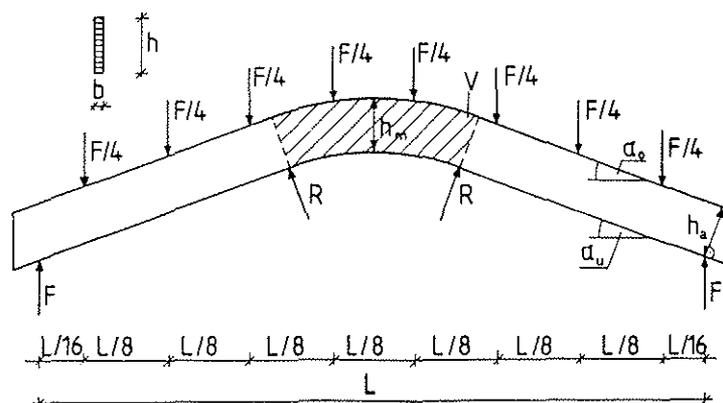
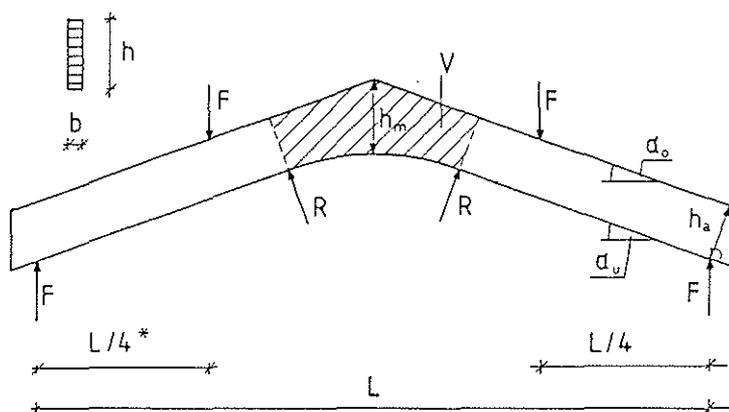


Tabelle A1: Abmessungen der Prüfkörper G1 ÷ G4, Gq3, Gq4

Vers.- Bez.	Länge L [ m ]	Breite b [ cm ]	Höhe Auf- lager $h_a$ [ cm ]	Höhe First $h_m$ [ cm ]	$\alpha_o$ [ ° ]	$\alpha_u$ [ ° ]	Krüm- mungs- radius R [ cm ]	$\frac{h_m}{R_m}$ [ ]	Lamel- len- dicke a [ mm ]	Volumen des gekrümmten Bereichs V [ m <sup>3</sup> ]
G1	11,00	12	100,0	100,0	20	20	450,0	0,2	25	0,419
G2	9,24	12	77,0	77,0	20	20	346,5	0,2	20	0,248
G3	6,36	12	53,0	53,0	20	20	238,5	0,2	15	0,118
G4	3,60	12	30,0	30,0	20	20	135,0	0,2	10	0,038
Gq3	6,36	12	53,0	53,0	20	20	238,5	0,2	15	0,118
Gq4	3,60	12	30,0	30,0	20	20	135,0	0,2	10	0,038

Bild A3: Bezeichnungen für die Prüfkörper P1 ÷ P4



\* Bei P1 statt L/4 2,5m

Tabelle A2: Abmessungen der Prüfkörper P1 ÷ P4

Vers.- Bez.	Länge L [ m ]	Breite b [ cm ]	Höhe Auf- lager h <sub>a</sub> [ cm ]	Höhe First h <sub>m</sub> [ cm ]	α <sub>o</sub> [ ° ]	α <sub>u</sub> [ ° ]	Krüm- mungs- radius R [ cm ]	$\frac{h_m}{R_m}$ [ ]	Lamel- len- dicke a [ mm ]	Volumen des gekrümmten Bereichs V [ m <sup>3</sup> ]
P1	11,00	12	100,0	135,3	20	20	450,0	0,261	25	0,473
P2	9,24	12	77,0	104,2	20	20	346,5	0,261	20	0,280
P3	6,36	12	53,0	71,7	20	20	238,5	0,261	15	0,133
P4	3,60	12	30,0	40,6	20	20	135,0	0,261	10	0,043

Bild A4: Bezeichnungen für die Prüfkörper K1 ÷ K4

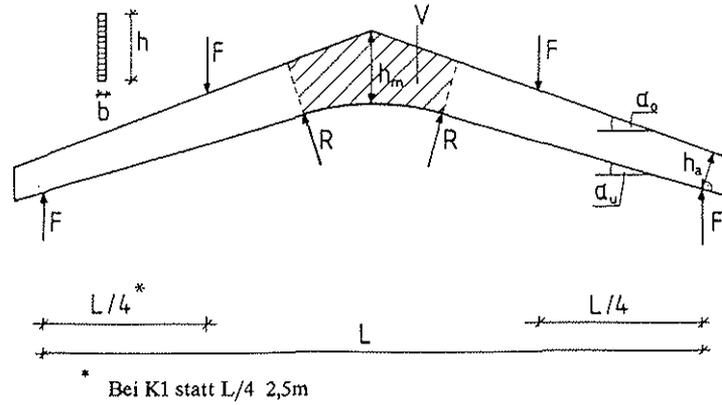


Bild A5: Bezeichnungen für die Prüfkörper Kq3, Kq4

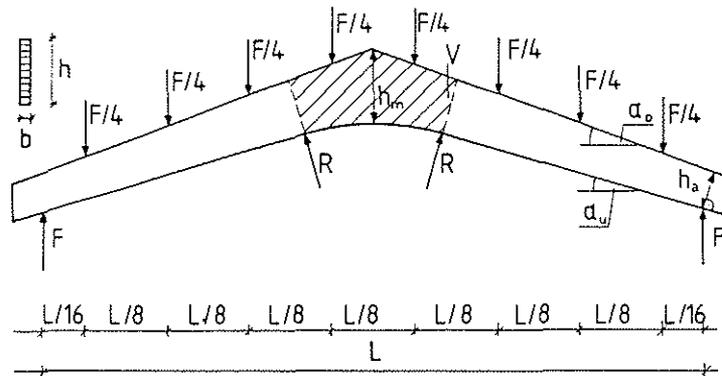


Tabelle A3: Abmessungen der Prüfkörper K1 ÷ K4, Kq3, Kq4

Vers.- Bez.	Länge L [ m ]	Breite b [ cm ]	Höhe Auf- lager h <sub>a</sub> [ cm ]	Höhe First h <sub>m</sub> [ cm ]	α <sub>o</sub> [ ° ]	α <sub>u</sub> [ ° ]	Krüm- mungs- radius R [ cm ]	$\frac{h_m}{R_m}$ [ ]	Lamel- len- dicke a [ mm ]	Volumen des gekrümmten Bereichs V [ m <sup>3</sup> ]
K1	11,00	12	70,4	135,3	20	16	450,0	0,261	25	0,389
K2	9,24	12	51,4	104,2	20	16	346,5	0,261	20	0,231
K3	6,36	12	35,4	71,7	20	16	238,5	0,261	15	0,109
K4	3,60	12	20,0	40,6	20	16	135,0	0,261	10	0,035
Kq3	6,36	12	35,4	71,7	20	16	238,5	0,261	15	0,109
Kq4	3,60	12	20,0	40,6	20	16	135,0	0,261	10	0,035

Bild A6: Bezeichnungen für den Prüfkörper K5

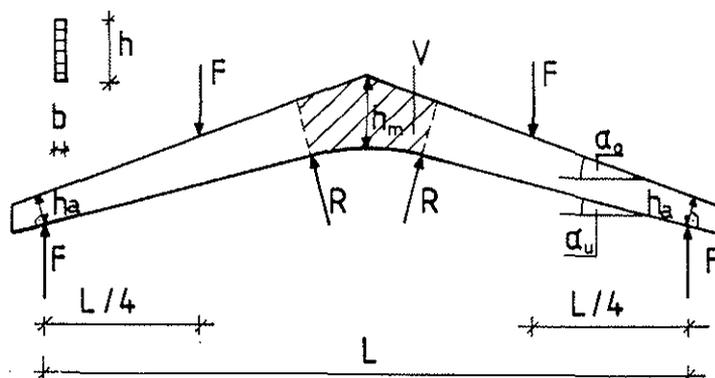


Bild A7: Bezeichnungen für den Prüfkörper K6

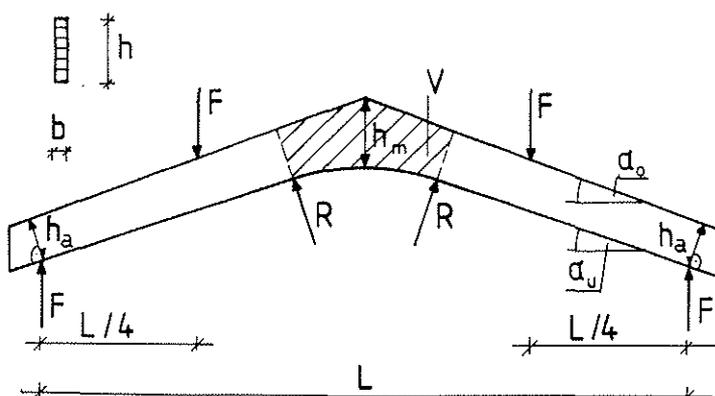


Tabelle A4: Abmessungen der Prüfkörper K5, K6

Vers.- Bez.	Länge L [ m ]	Breite b [ cm ]	Höhe Auf- lager h <sub>a</sub> [ cm ]	Höhe First h <sub>m</sub> [ cm ]	α <sub>o</sub> [ ° ]	α <sub>u</sub> [ ° ]	Krüm- mungs- radius R [ cm ]	$\frac{h_m}{R_m}$ [ ]	Lamel- len- dicke a [ mm ]	Volumen des gekrümmten Bereichs V [ m <sup>3</sup> ]
K5	9,24	12	38,4	104,2	20	14	346,5	0,261	20	0,206
K6	9,24	12	64,3	104,2	20	18	346,5	0,261	20	0,256

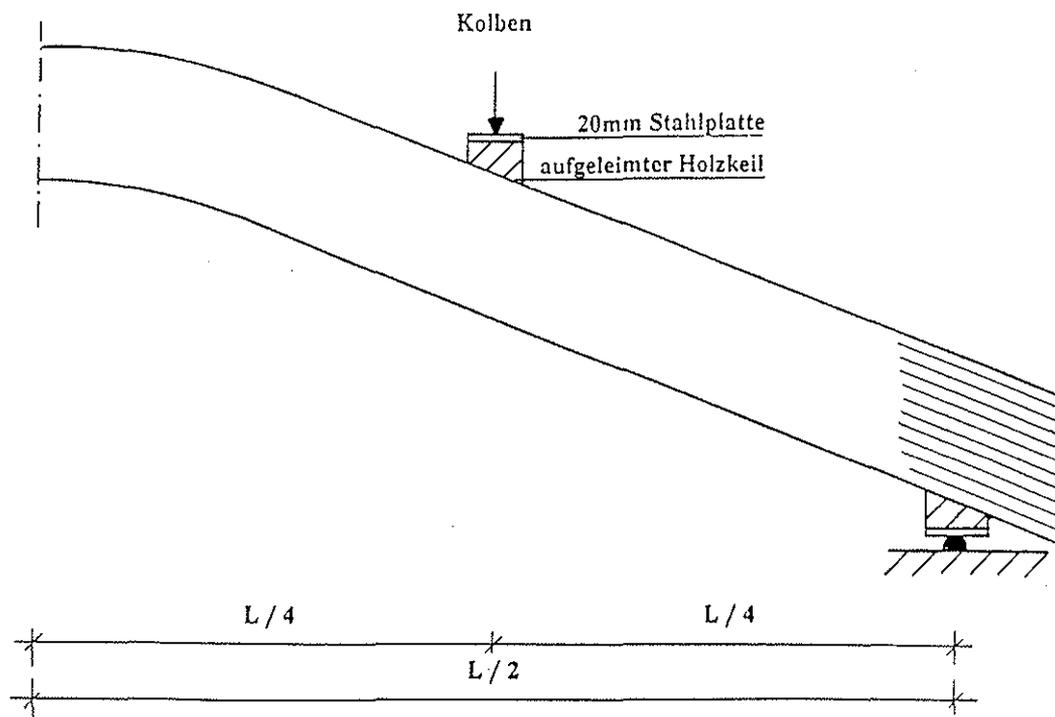


Bild A8: Versuchsaufbau für die Prüfkörper G1 - G4

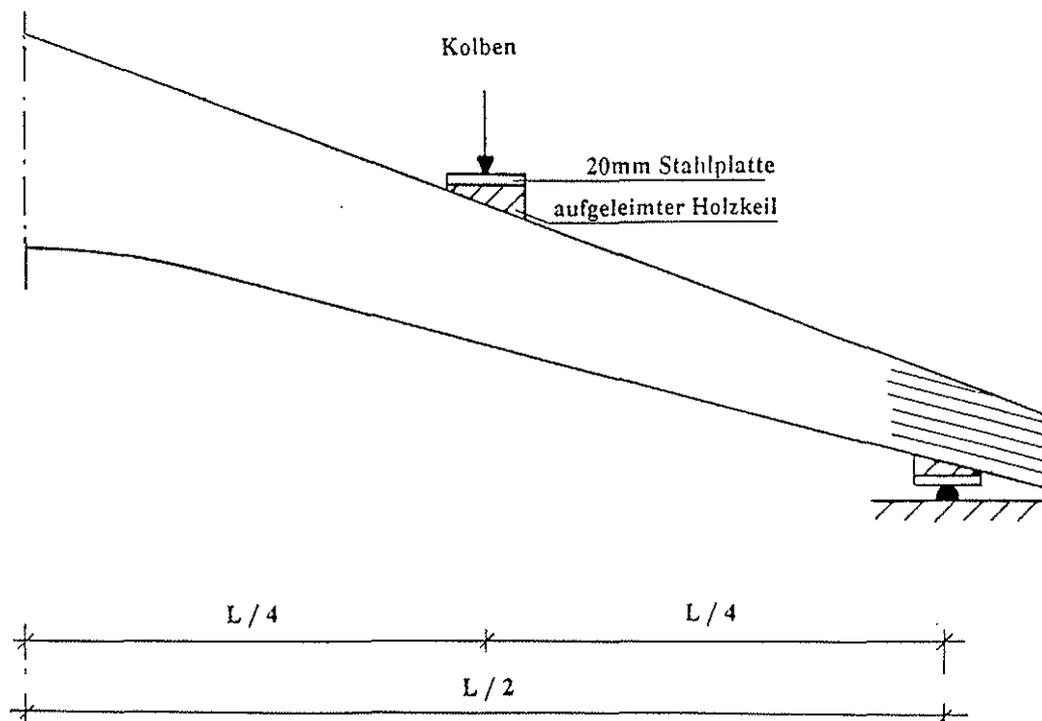
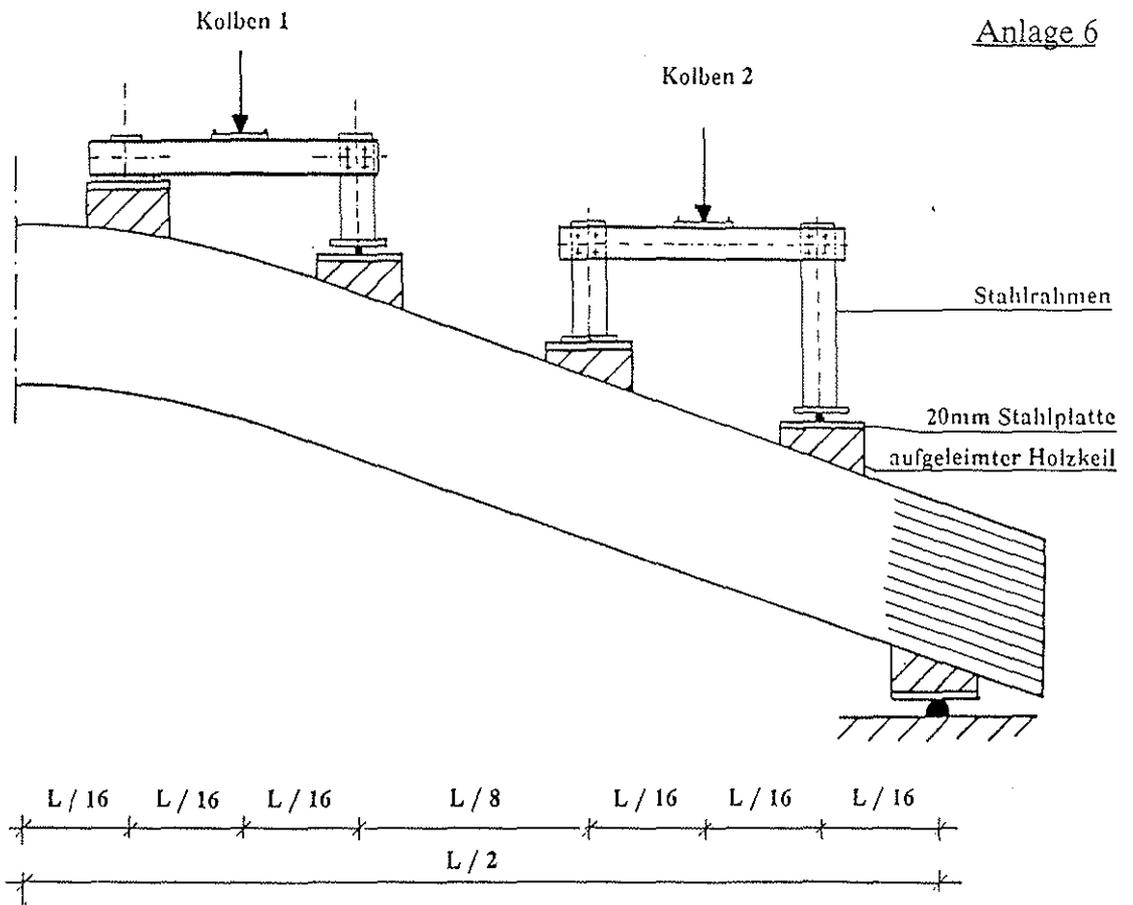
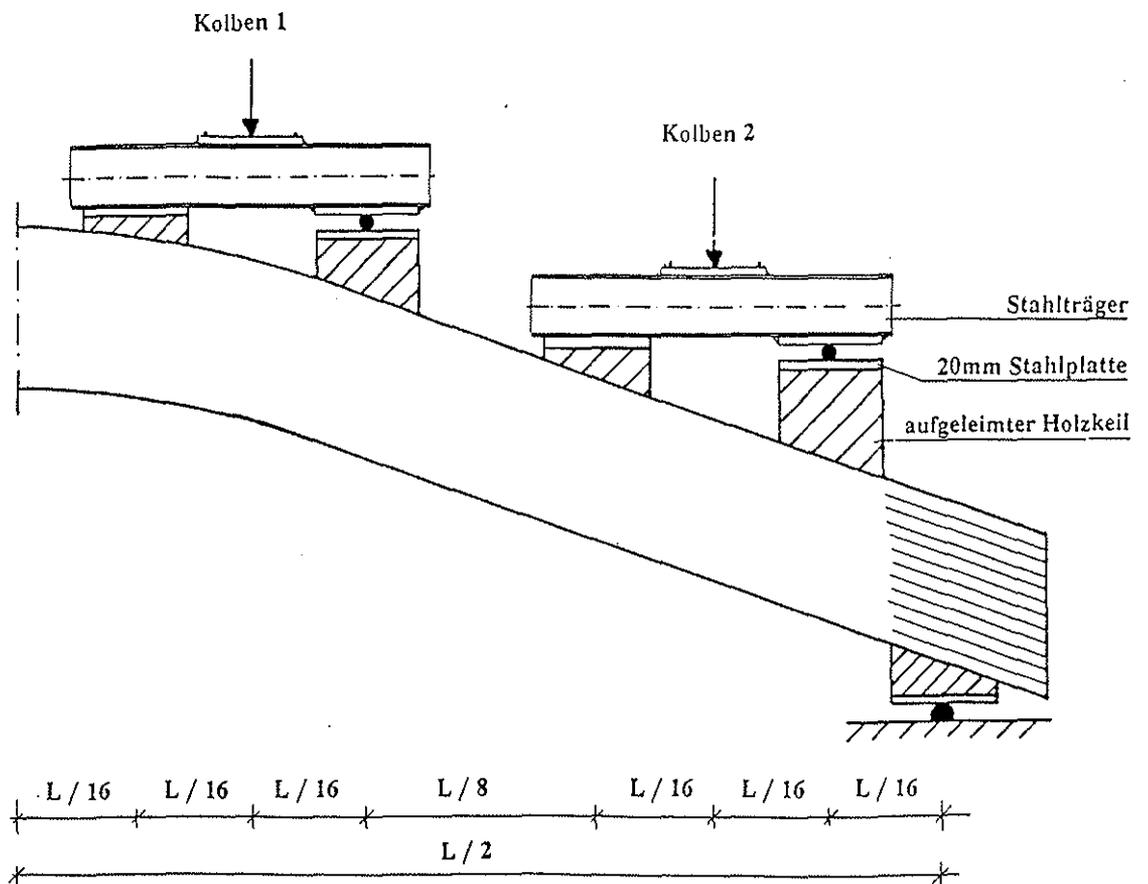


Bild A9: Versuchsaufbau für die Prüfkörper P1 -P4, K1 - K6



**Bild A10:** Versuchsaufbau für die Prüfkörper Gq3, Kq3



**Bild A11:** Versuchsaufbau für die Prüfkörper Gq4, Kq4

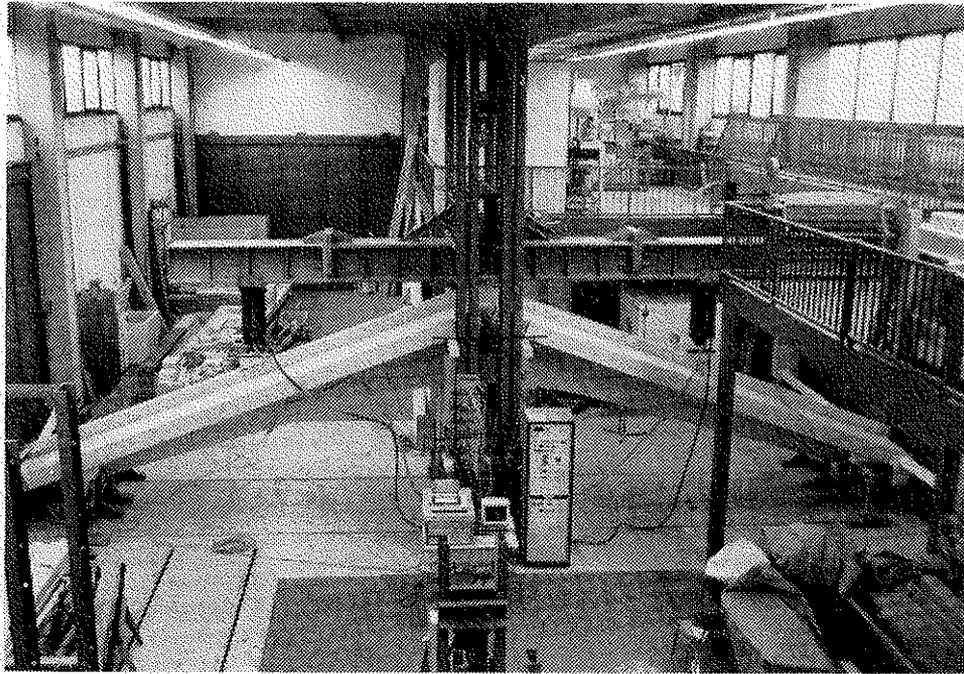


Bild A12: Prüfkörper K1B in der Prüfmaschine

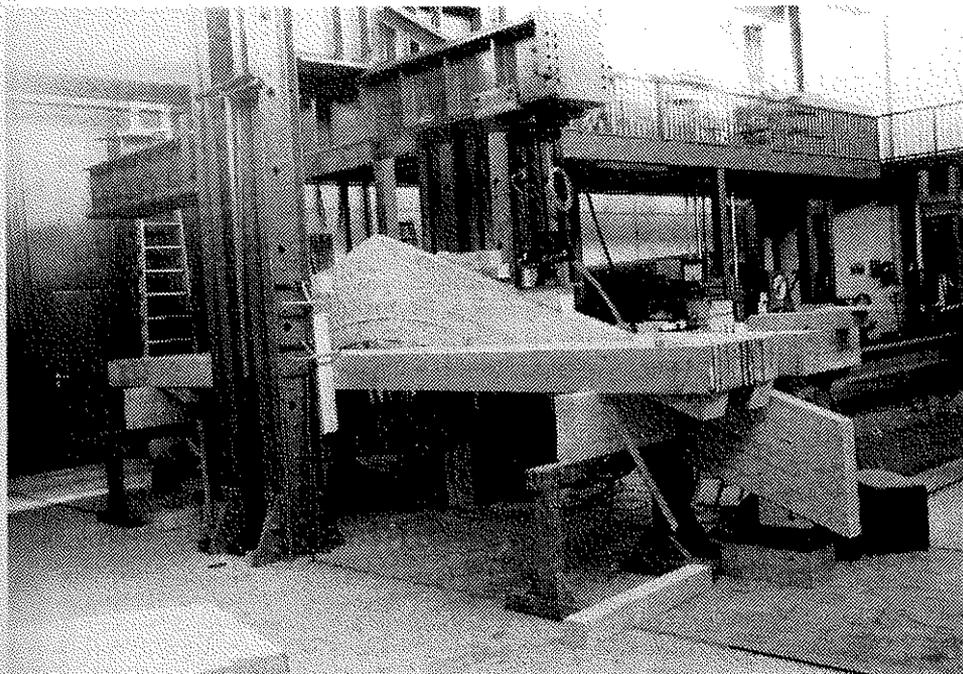


Bild A13: Prüfkörper P3B in der Prüfmaschine nach dem Bruch (zur besseren Darstellung sind die Aussteifungen im First entfernt)

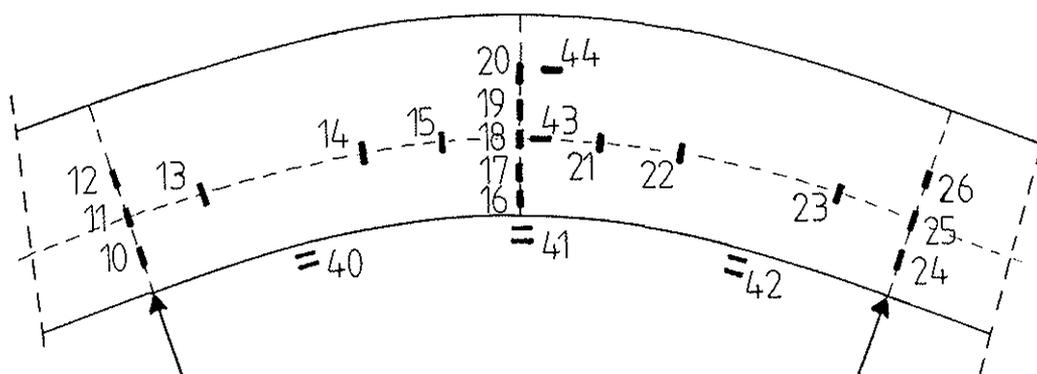


Bild A14: Anordnung der Dehnmeßstreifen im gekrümmten Bereich

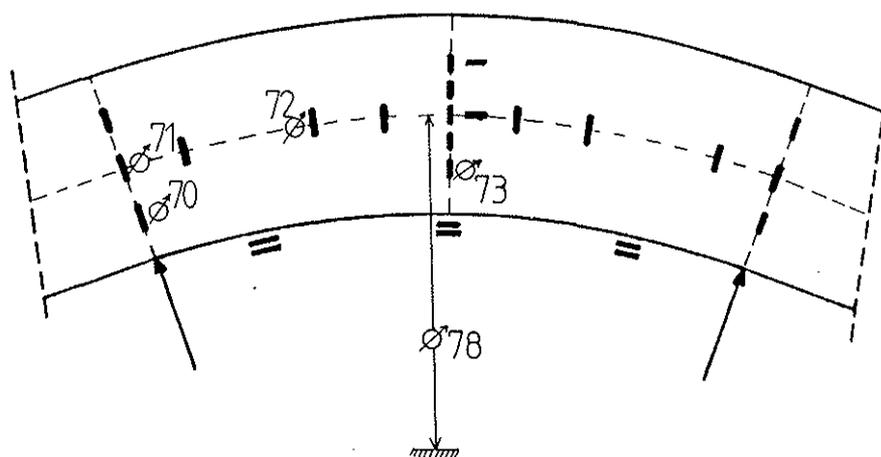
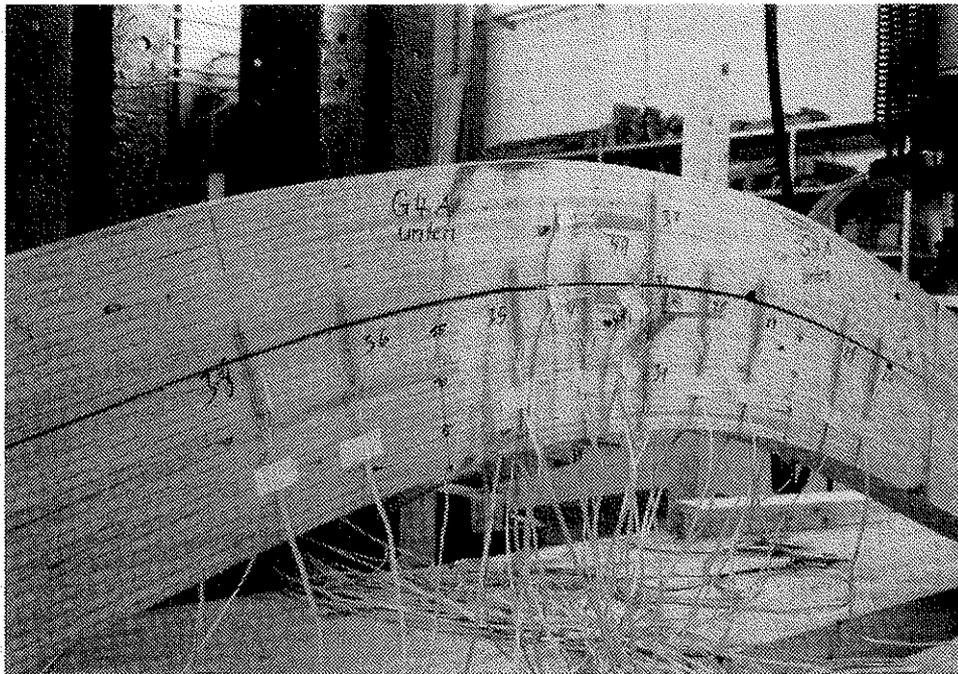
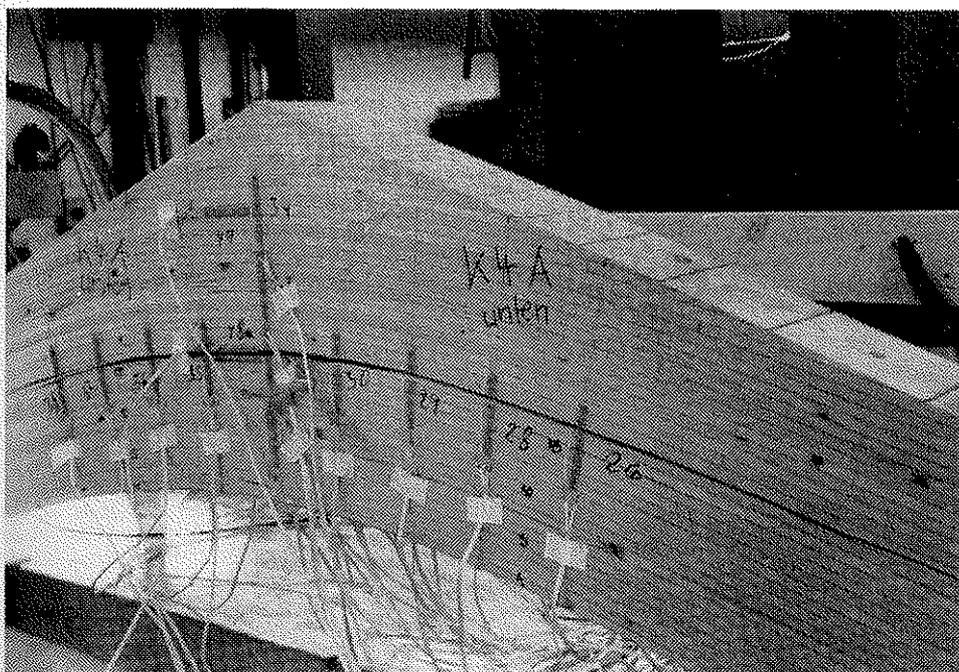
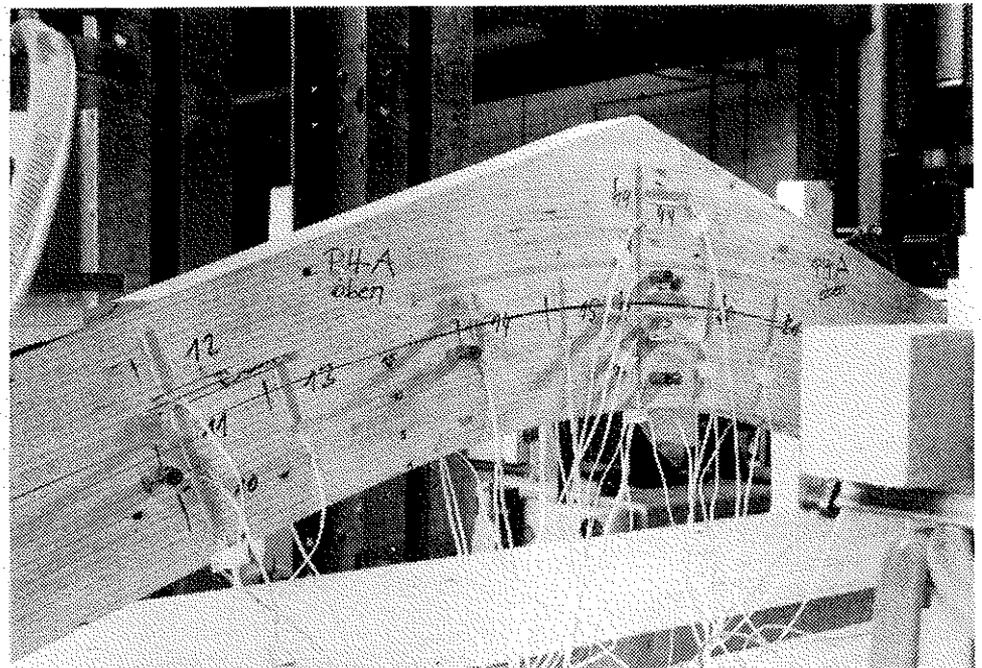


Bild A15: Anordnung der Wegaufnehmer zur Kontrolle der DMS und zur Durchbiegungsmessung



**Bild A16:**  
Anordnung und  
Verdrahtung der  
DMS am Prüfkörper  
G4A (mit Bruch-  
fuge)

**Bild A17:**  
Anordnung und  
Verdrahtung der  
DMS am Prüfkörper  
P4A (mit Bruch-  
fuge)



**Bild A18:**  
Anordnung und  
Verdrahtung der  
DMS am Prüfkörper  
K4A (mit Bruch-  
fuge)

Belastung und Trägerform	Bezeichnung des Versuchs- körpers	Bruchlast am Auflager F kN	Bruch- moment im First $M_F$ kNm	Bruch- art <sup>1</sup>	Rechnerische Bruchspannungen			
					nach FE $\sigma_{z,1}$ N/mm <sup>2</sup>	nach DIN 1052 $\sigma_{z,1}$ N/mm <sup>2</sup>	nach EC 5 $\sigma_{t,90}$ N/mm <sup>2</sup>	
Konstantes Moment im gekrümmten Bereich	Gekrümmte Träger konstanter Höhe	G1A	94,6	236,5	QZ	0,615	0,591	0,591
		G1B	99,0	247,5	QZ	0,644	0,619	0,619
		G2A	51,4	118,7	QZ	0,511	0,501	0,501
		G2B	84,9	196,1	BB	0,844	0,827	0,827
		G3A	54,2	86,2	QZ	0,783	0,767	0,767
		G3B	52,8	84,0	QZ	0,763	0,747	0,747
		G4A	42,6	38,3	QZ	1,086	1,064	1,064
		G4B	37,0	33,3	QZ	0,944	0,924	0,924
	Gekrümmte Satteldach- träger	P1A	112,6	281,5	QZ	0,792	0,781	0,785
		P1B	67,0	167,5	QZ	0,471	0,464	0,467
		P2A	49,4	114,1	QZ	0,541	0,533	0,536
		P2B	57,3	132,4	QZ	0,628	0,618	0,622
		P3A	69,0	109,7	QZ	1,099	1,083	1,089
		P3B	62,9	100,0	QZ	1,002	0,987	0,993
		P4A	44,3	39,9	QZ	1,246	1,228	1,236
		P4B	43,9	39,5	QZ	1,235	1,217	1,224
	Gekrümmte Satteldachträger mit konischem Außenbereich	K1A	107,7	269,3	QZ	0,779	0,747	0,738
		K1B	124,6	311,5	QZ	0,902	0,864	0,854
		K2A	53,6	123,8	QZ	0,604	0,578	0,572
		K2B	39,4	91,0	QZ	0,444	0,425	0,420
		K3A	47,9	76,2	QZ	0,785	0,752	0,744
		K3B	60,7	96,5	QZ	0,995	0,953	0,942
		K4A	29,9	26,9	QZ	0,874	0,829	0,840
		K4B	37,3	33,6	QZ	1,090	1,035	1,047
		K5A	66,3	153,2	QZ	0,762	0,716	0,710
		K5B	74,2	171,4	QZ	0,852	0,801	0,796
		K6A	92,1	212,8	QZ	1,029	0,994	0,991
		K6B	71,6	165,4	QZ	0,800	0,773	0,770
Streckenlast	Gekrümmte Träger konstanter Höhe	Gq3A	63,2	100,5	QZ	0,841	0,894	0,894
		Gq3B	87,8	139,6	QZ	1,168	1,242	1,242
		Gq4A	43,0	38,7	QZ	1,011	1,075	1,075
		Gq4B	39,4	35,5	QZ	0,926	0,986	0,986
	Gekrümmte Satteldachträger mit konischem Außenbereich	Kq3A	60,8	96,7	QZ	0,803	0,957	0,941
		Kq3B	58,6	93,2	QZ	0,774	0,922	0,907
		Kq4A	41,6	37,4	QZ	0,970	1,155	1,138
		Kq4B	44,6	40,1	QZ	1,041	1,238	1,221

<sup>1</sup> QZ: Querkzugbruch  
BB: Biegebruch

**Tabelle A5:** Bruchlasten, Bruchursachen und rechnerische Querkzugbruchspannung aller geprüfter Träger

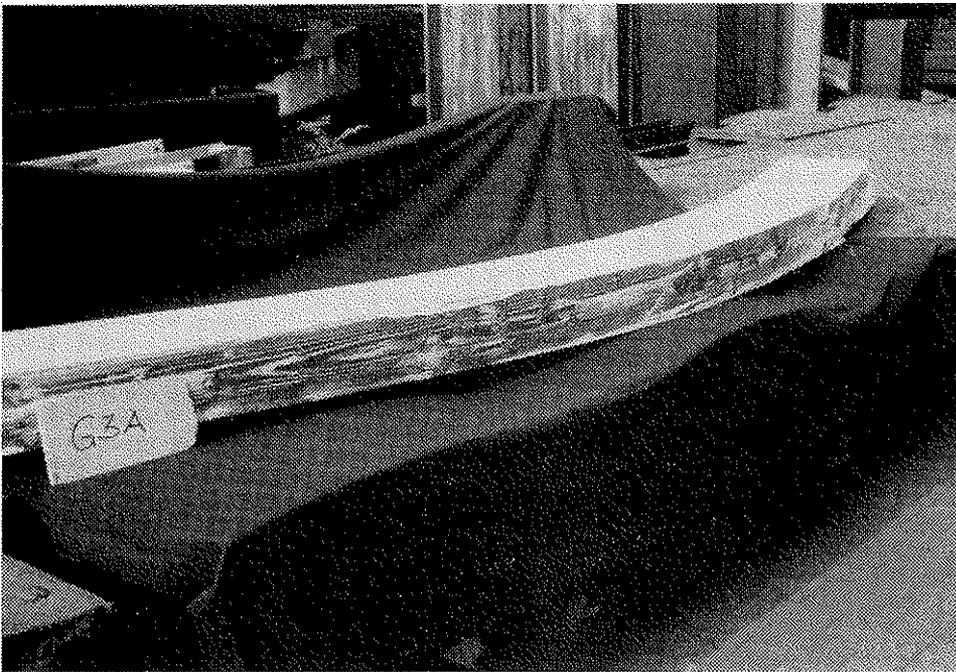


Bild A19:  
Bruchbild des  
aufgetrennten  
Prüfkörpers G3A  
(Leimfuge mit  
Holz)

Bild A20:  
Bruchbild des  
aufgetrennten  
Prüfkörpers P4A  
(teilweise in  
Leimfuge, teil-  
weise im Holz)

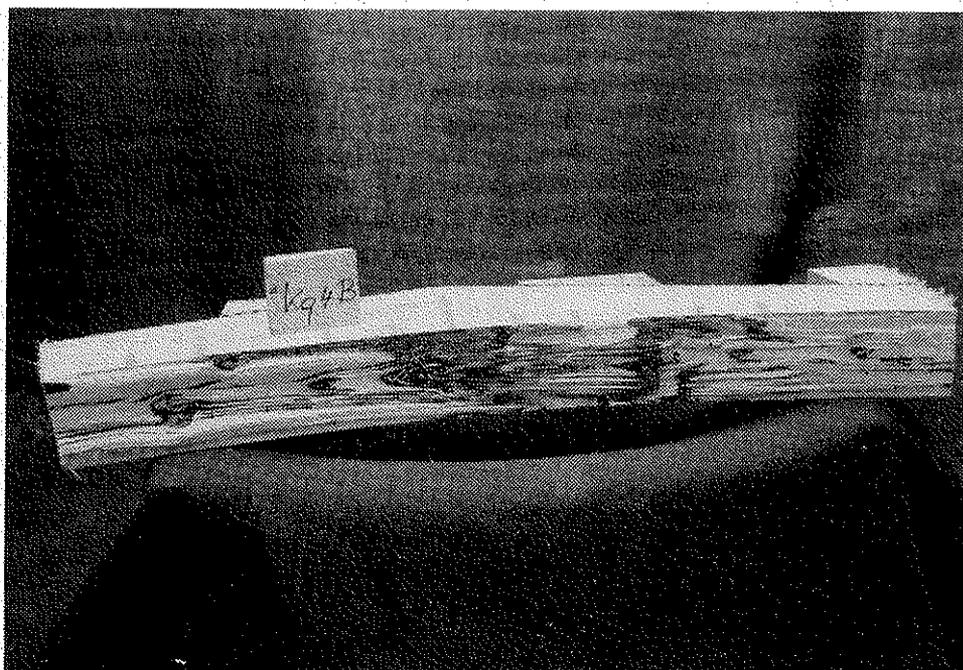
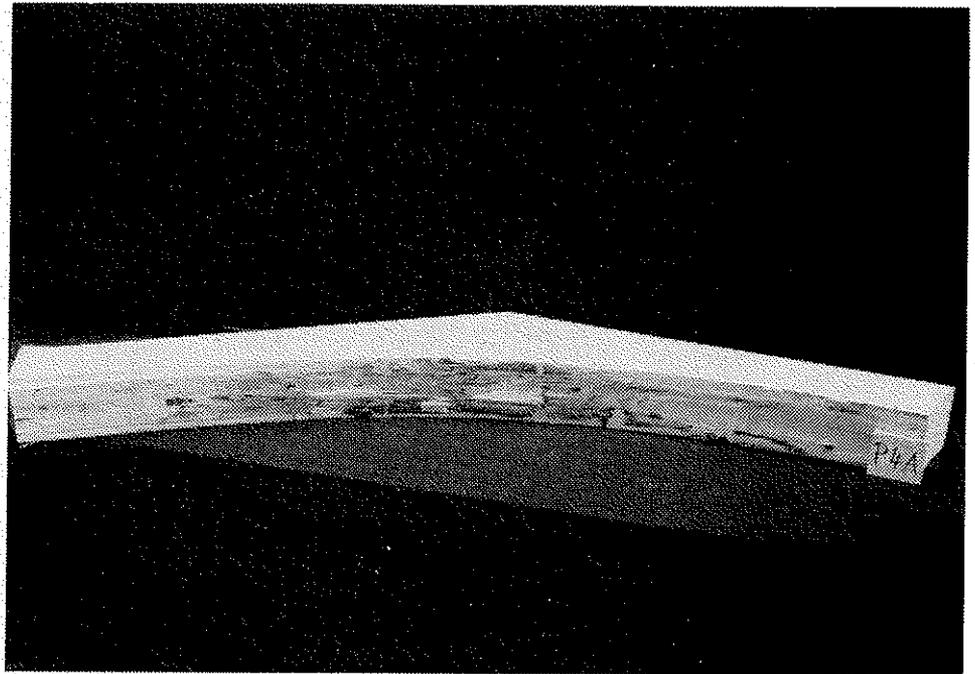


Bild A21:  
Bruchbild des  
aufgetrennten  
Prüfkörpers Kq4B  
(teilweise in  
Leimfuge, teil-  
weise im Holz)

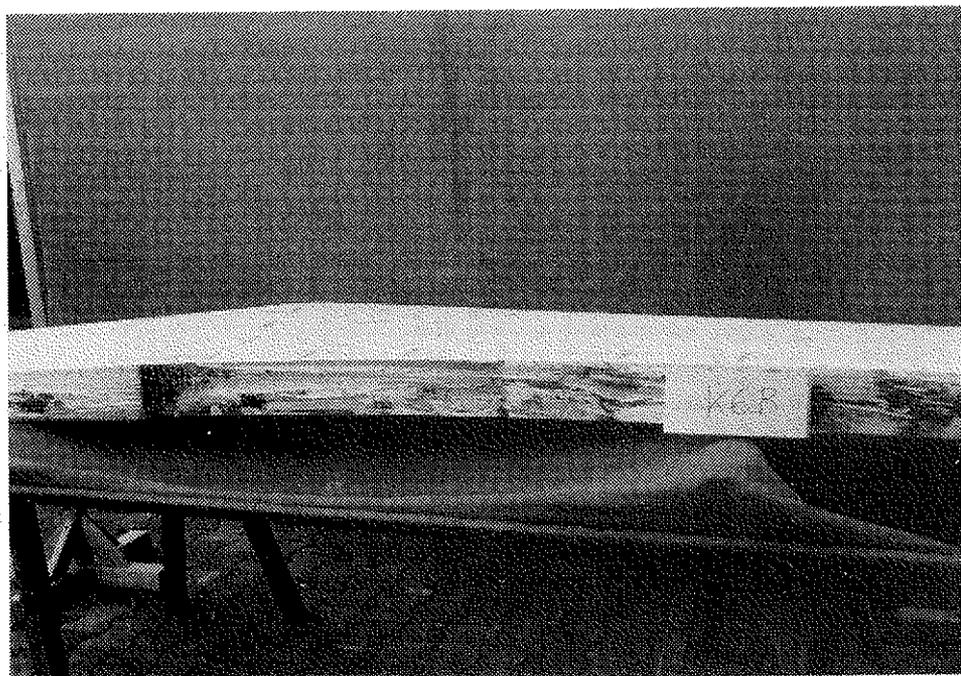


Bild A22: Bruchbild des aufgetrennten Prüfkörpers K6B (Keilzinkung und schlechte Verleimung im First)



Bild A23: Bruchbild des aufgetrennten Prüfkörpers K3A (Ringschäle)

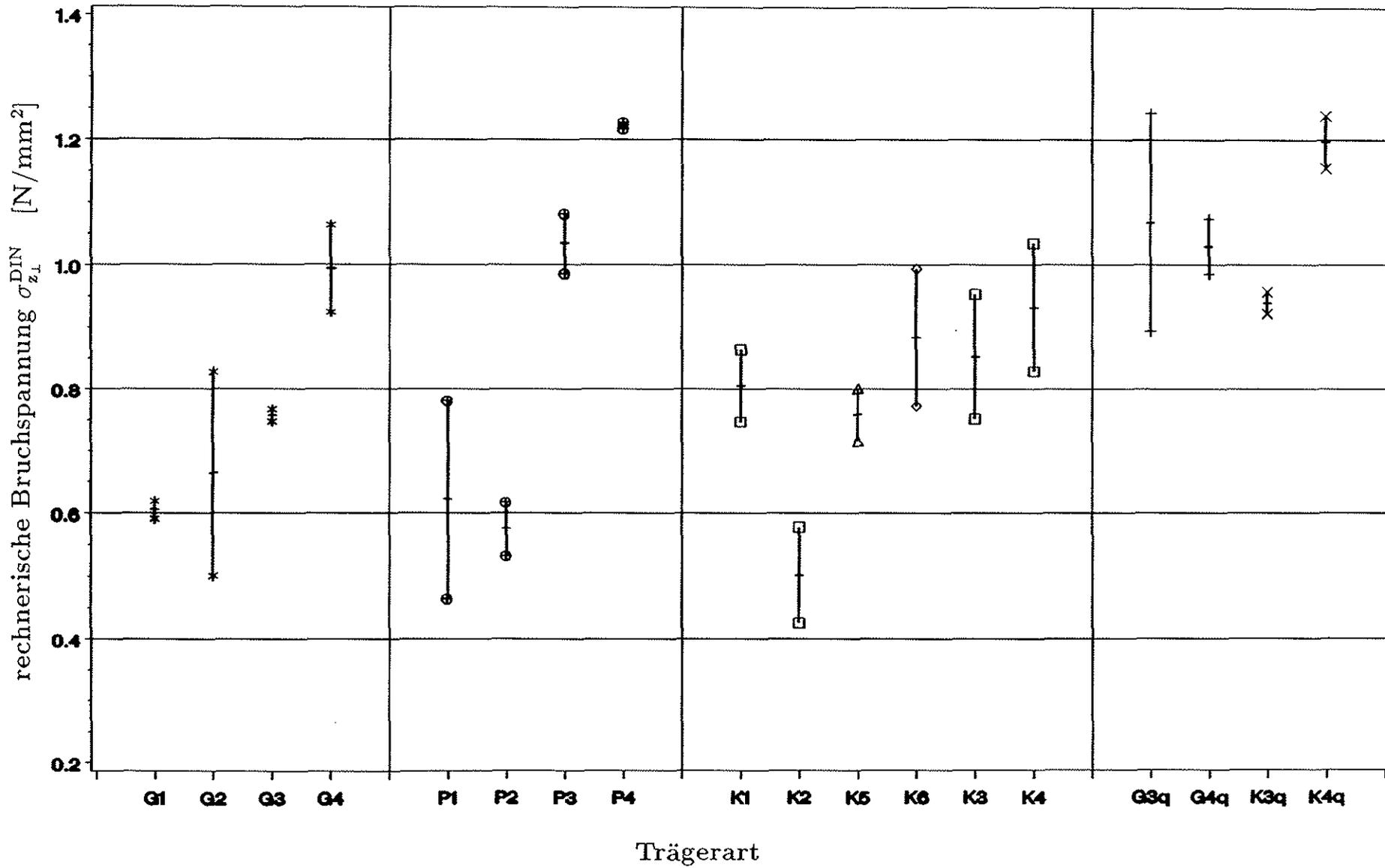
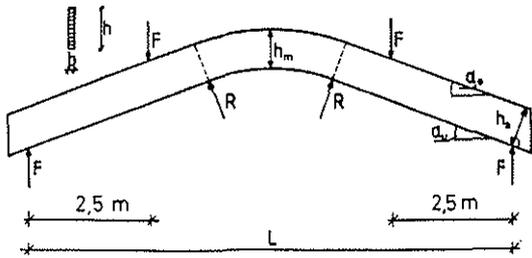


Bild A24: Rechnerische Bruchspannung nach DIN 1052 aller Versuchsträger im Vergleich

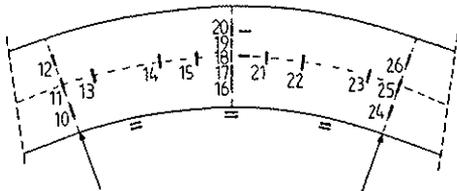
Versuchsträger G1A

Trägergeometrie und Belastung

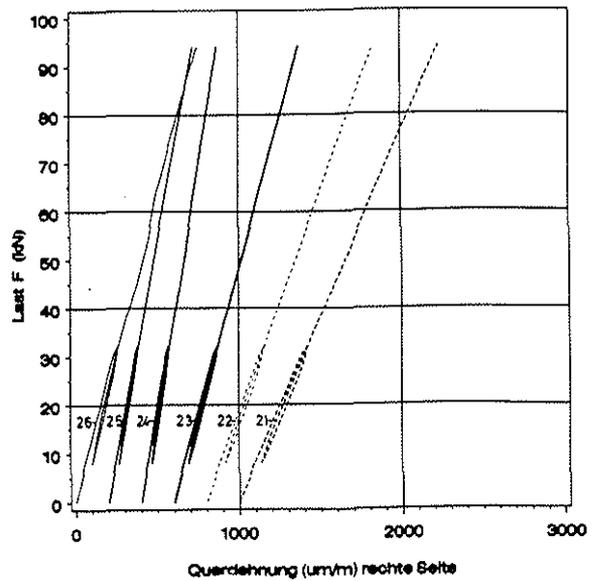
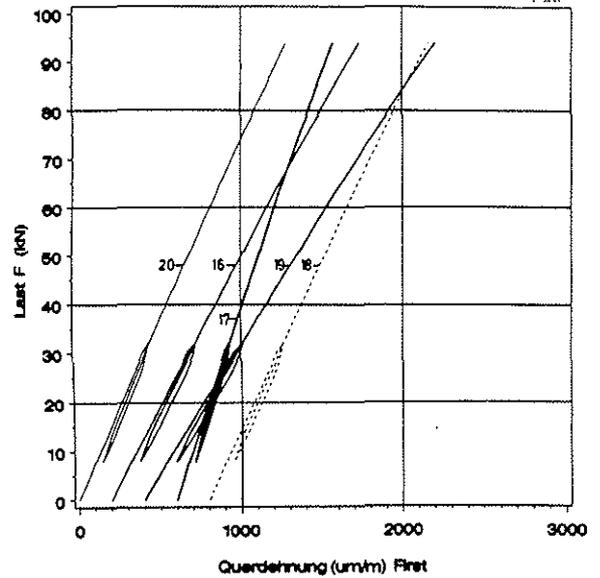
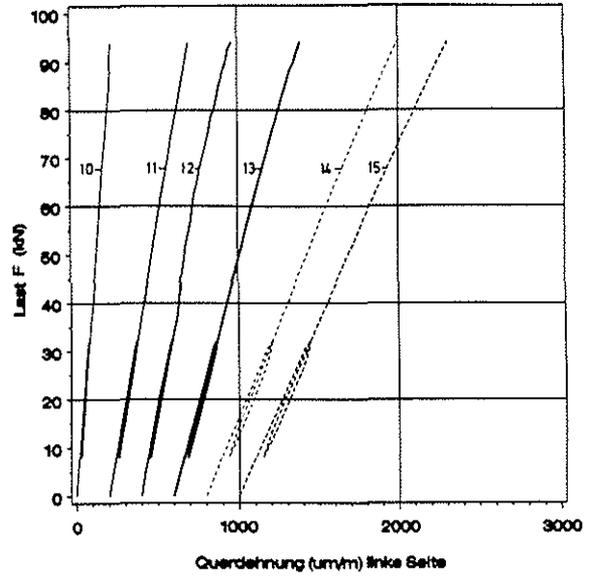


L	11,0 m
b	12 cm
$h_m$	100 cm
$\alpha_o$	20°
$\alpha_u$	20°
R	450 cm
$F_{zul}$	32,0 kN

Anordnung der DMS im gekrümmten Bereich



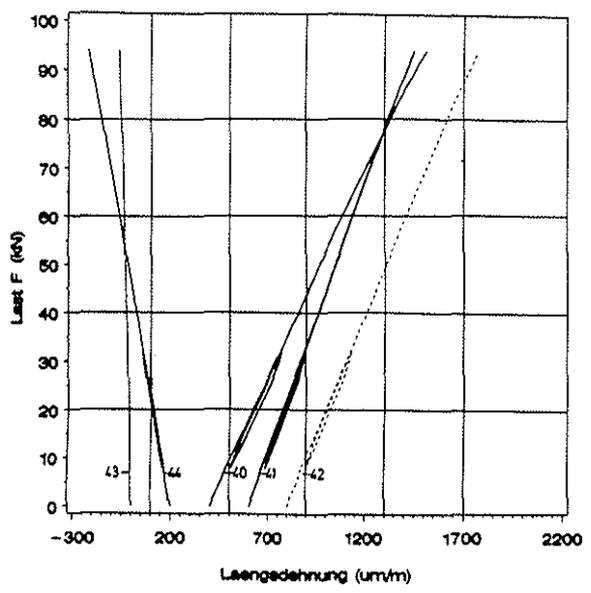
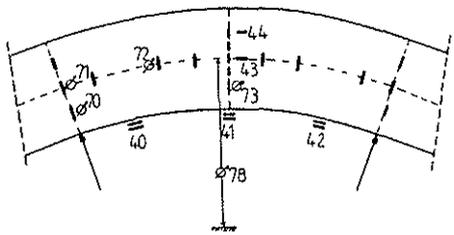
$F_{Bruch} = 94,6 \text{ kN}$



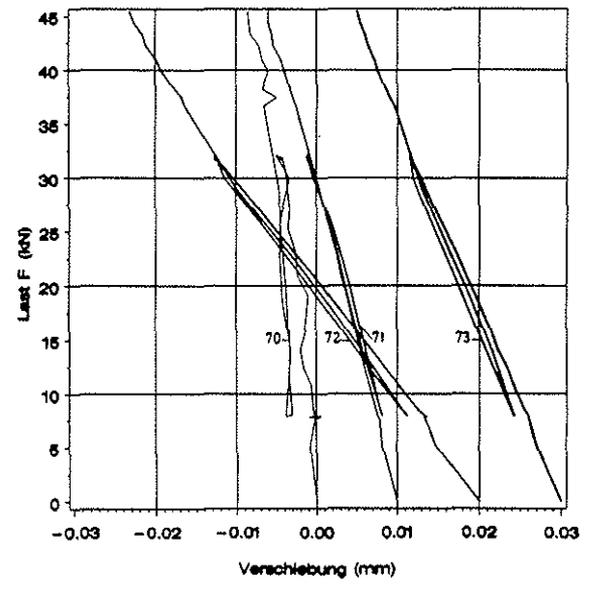
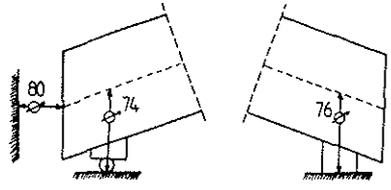
Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

Versuchsträger G1A

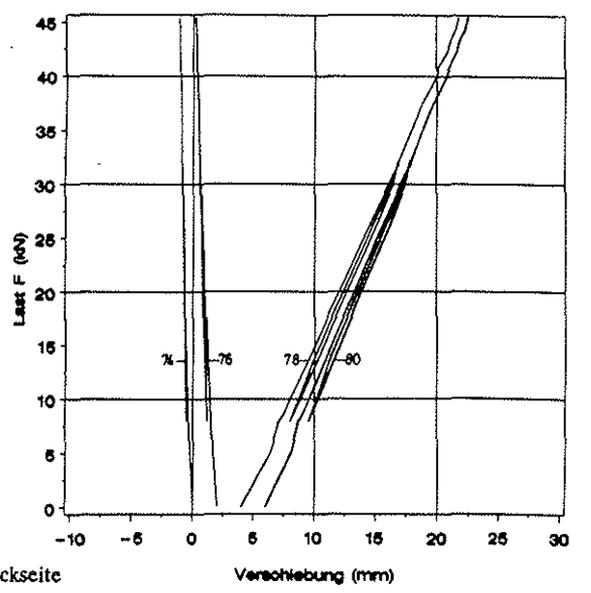
Anordnung der DMS und Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich



Anordnung der Wegaufnehmer an den Auflagern



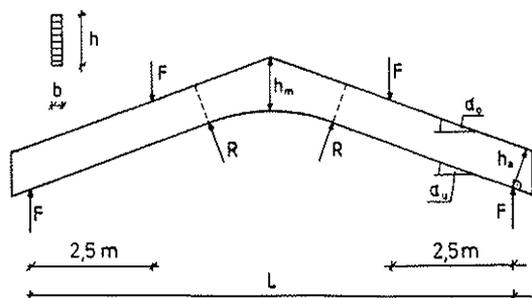
$F_{\text{Bruch}} = 94,6 \text{ kN}$



Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

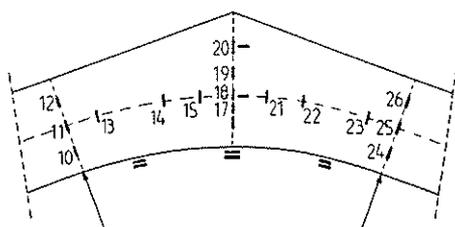
Versuchsträger P1A

Trägergeometrie und Belastung

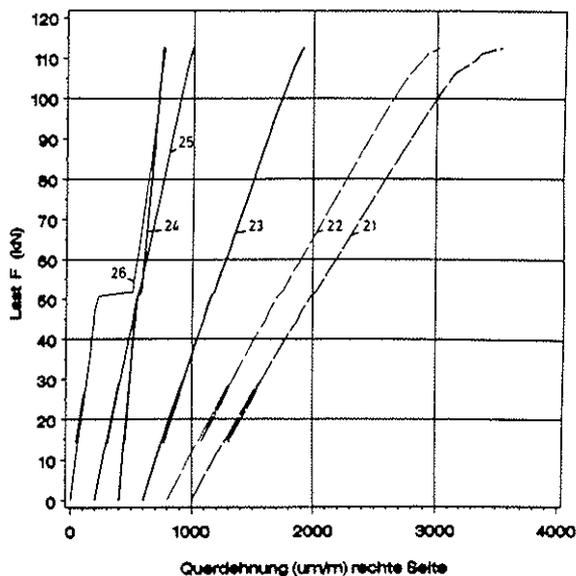
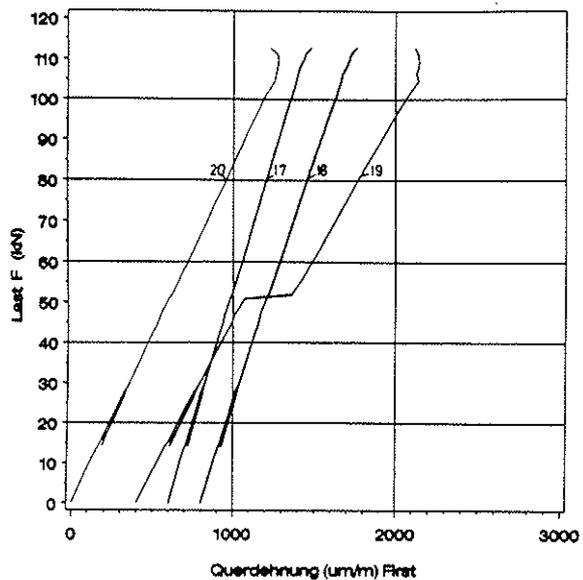
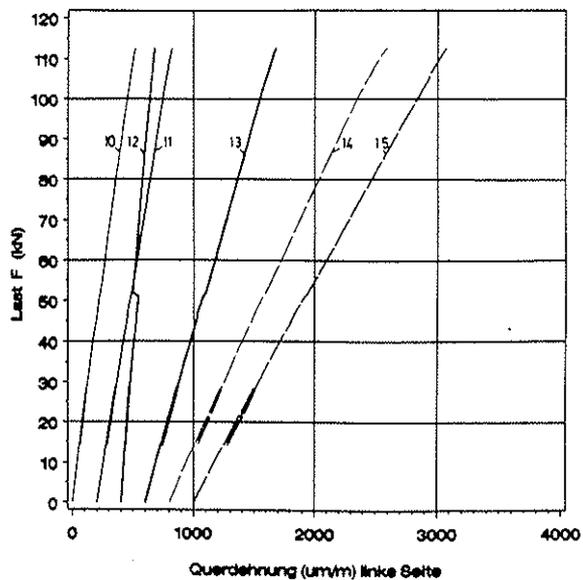


L	11,00 m
b	12 cm
$h_m$	135,3 cm
$\alpha_o$	20°
$\alpha_u$	20°
R	450,0 cm
$F_{zul}$	28,8 kN

Anordnung der DMS im gekrümmten Bereich



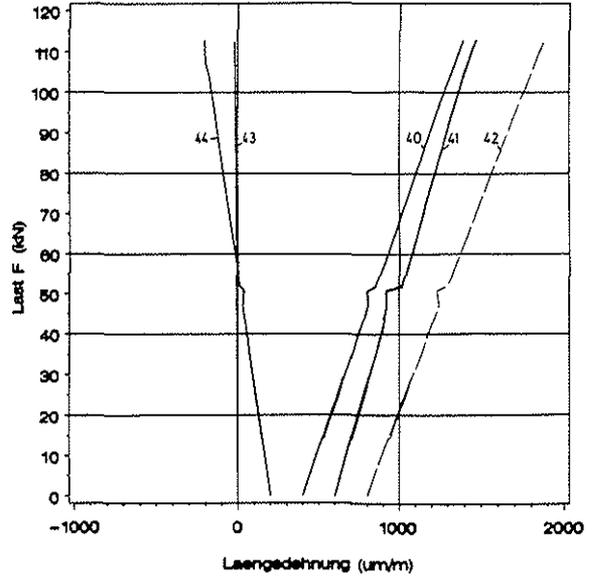
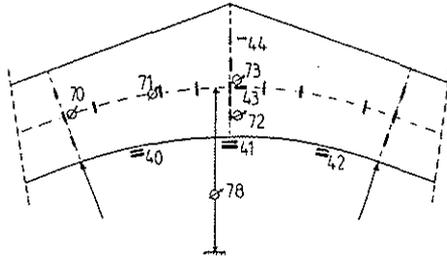
$F_{Bruch} = 112,6 \text{ kN}$



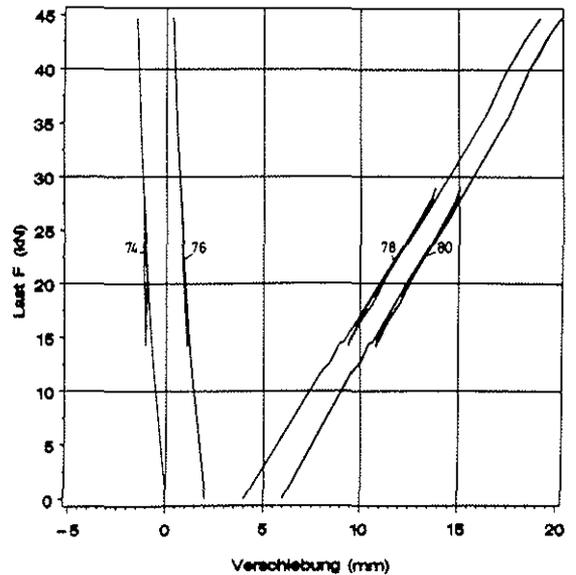
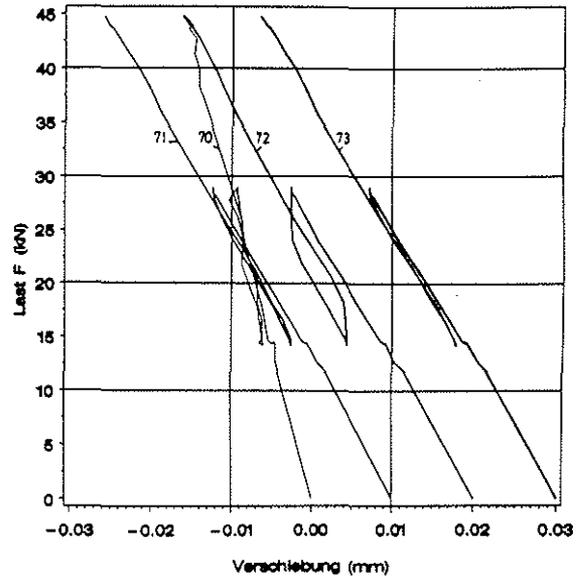
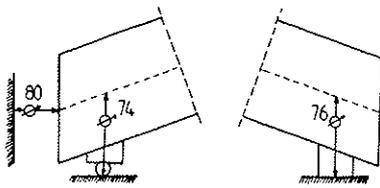
Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

Versuchsträger P1A

Anordnung der DMS und Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich



Anordnung der Wegaufnehmer an den Auflagern

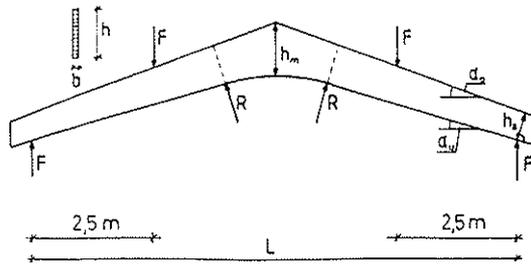


$F_{\text{Bruch}} = 112,6 \text{ kN}$

Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

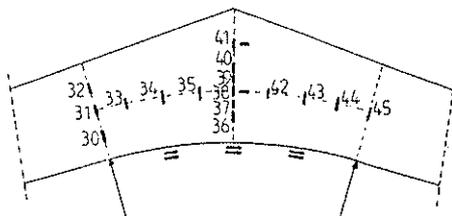
Versuchsträger K1A

Trägergeometrie und Belastung

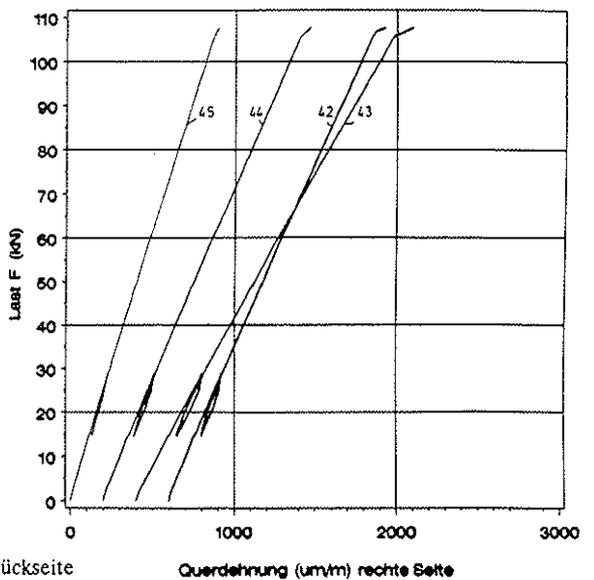
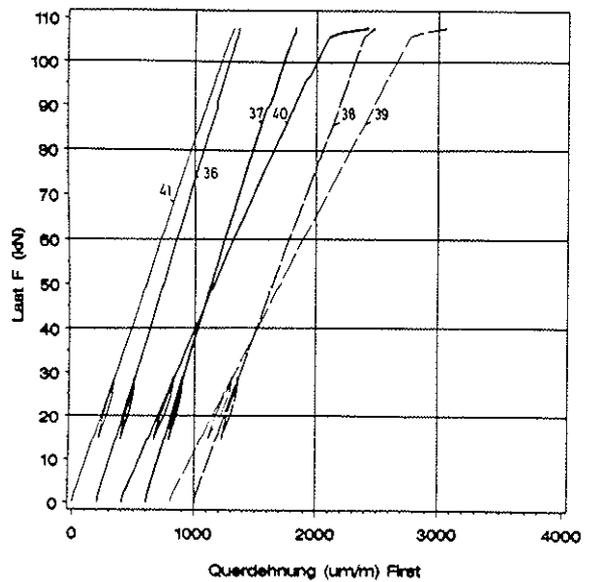
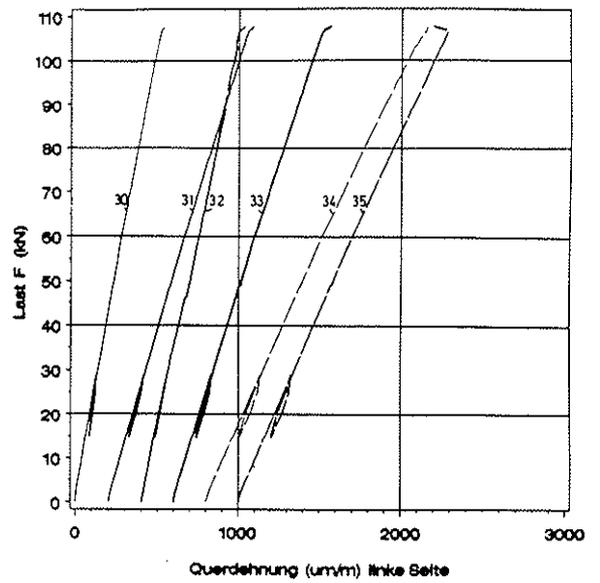


L	11,00 m
b	12 cm
$h_m$	135,3 cm
$\alpha_o$	20°
$\alpha_u$	16°
R	450,0 cm
$F_{zul}$	28,8 kN

Anordnung der DMS im gekrümmten Bereich



**$F_{Bruch} = 107,7 \text{ kN}$**

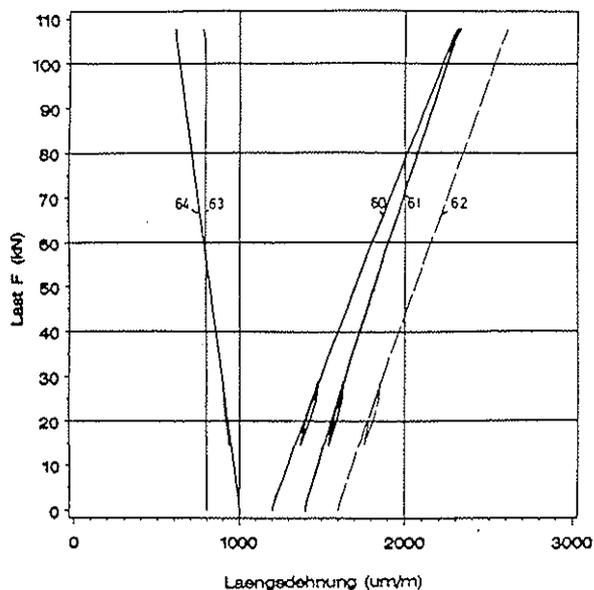
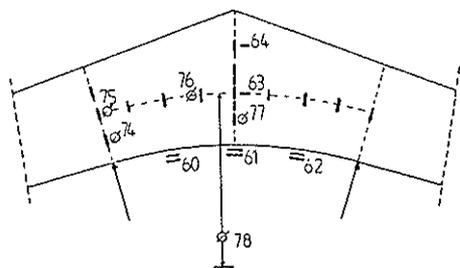


Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

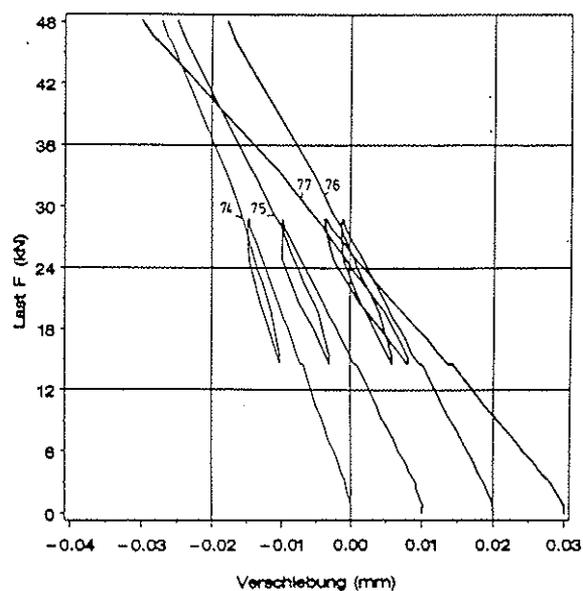
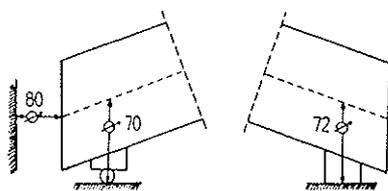
Querdehnung (um/m) rechte Seite

### Versuchsträger K1A

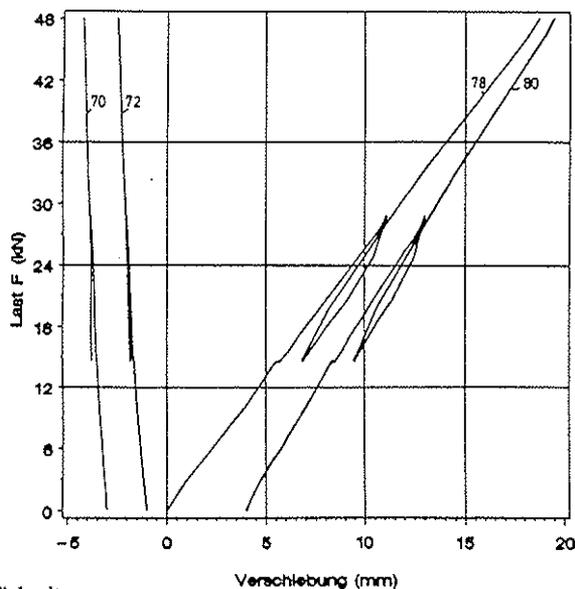
Anordnung der DMS und Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich



Anordnung der Wegaufnehmer an den Auflagern



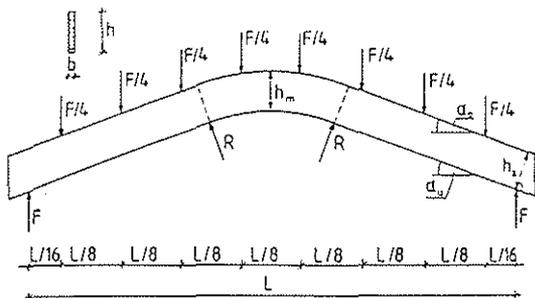
$F_{\text{Bruch}} = 107,7 \text{ kN}$



Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

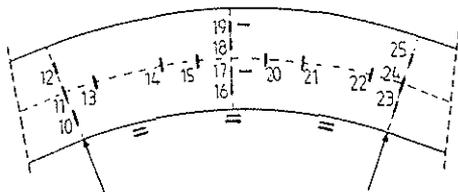
Versuchsträger Gq3A

Trägergeometrie und Belastung

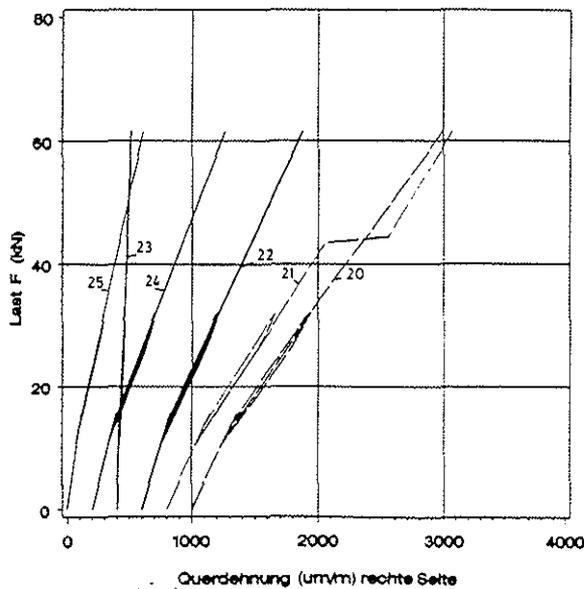
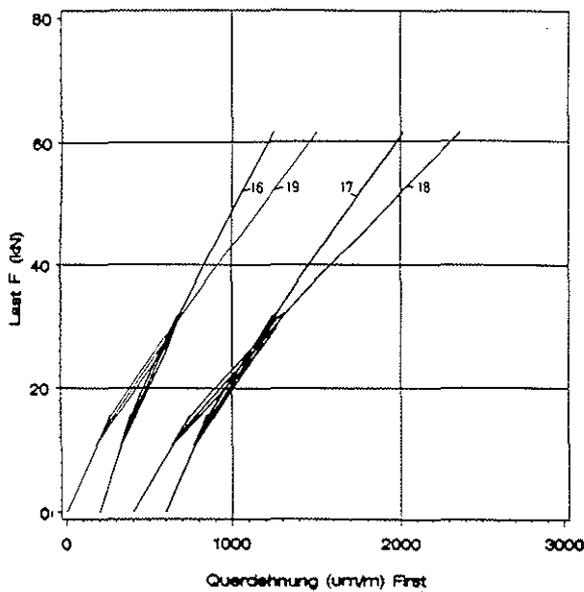
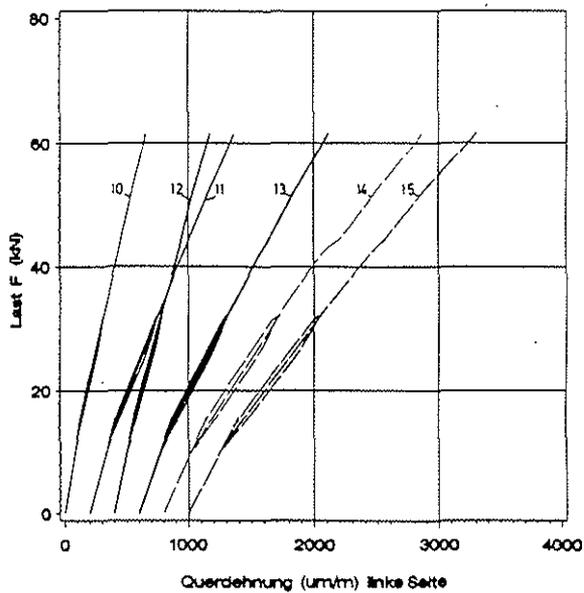


L	6,36 m
b	12 cm
$h_m$	53 cm
$\alpha_o$	20°
$\alpha_u$	20°
R	238,5 cm
$F_{zul}$	14,1 kN

Anordnung der DMS im gekrümmten Bereich



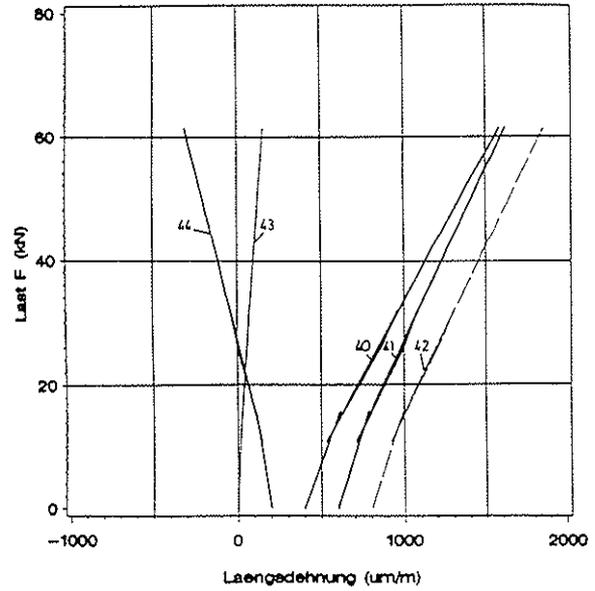
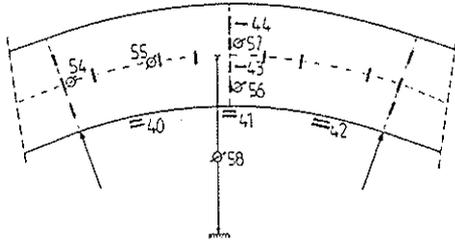
$F_{Bruch} = 63,2 \text{ kN}$



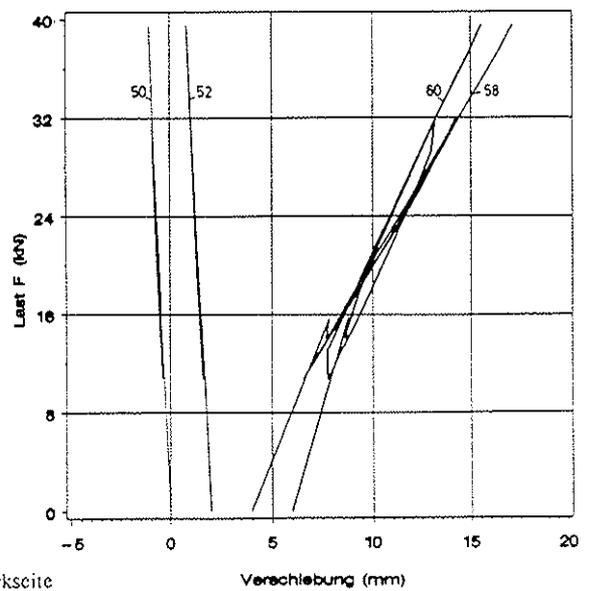
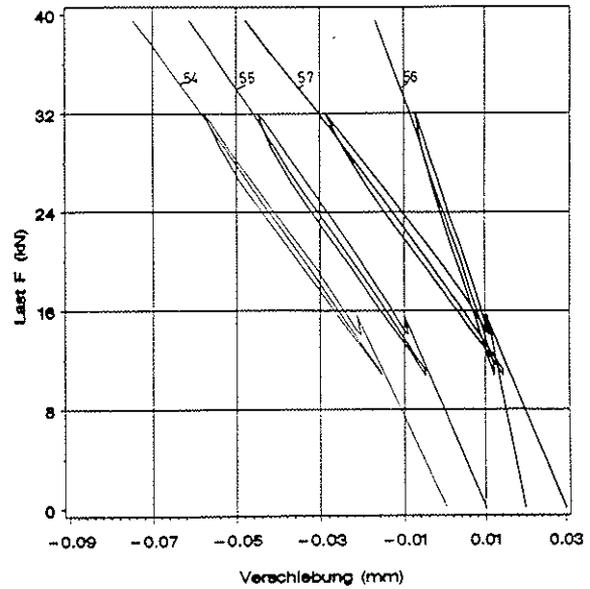
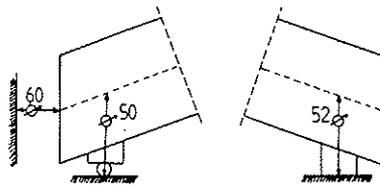
Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

Versuchsträger Gq3A

Anordnung der DMS und Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich



Anordnung der Wegaufnehmer an den Auflagern

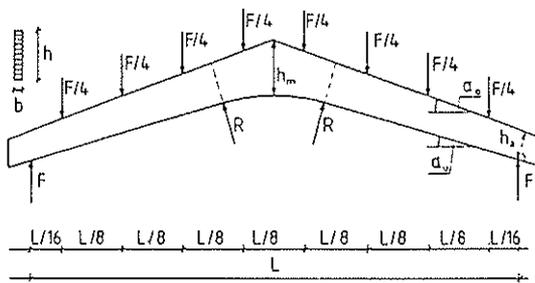


$$F_{\text{Bruch}} = 63,2 \text{ kN}$$

Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

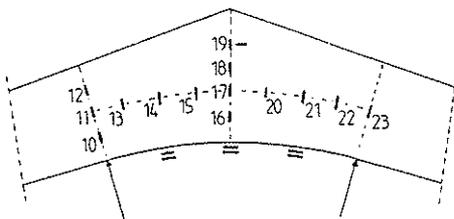
Versuchsträger Kq4A

Trägergeometrie und Belastung

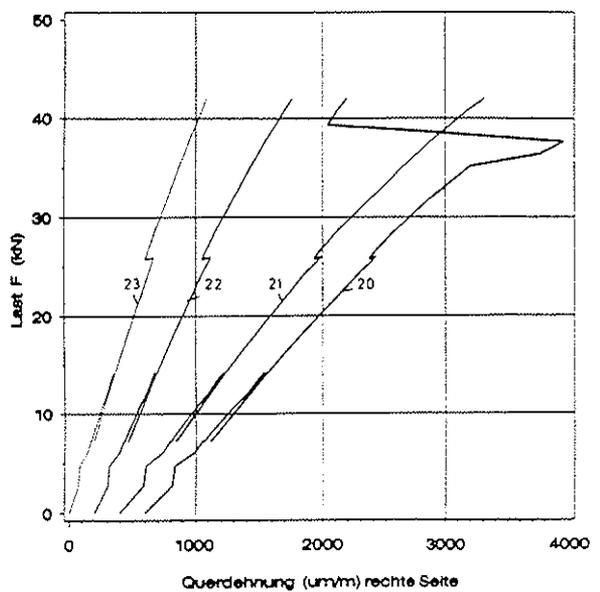
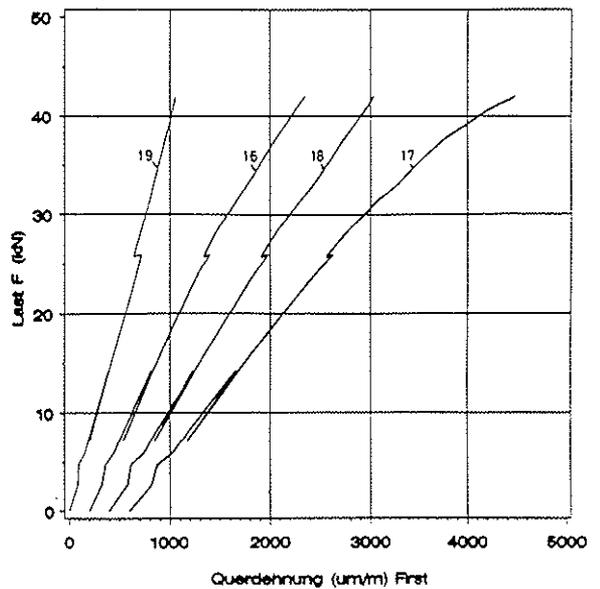
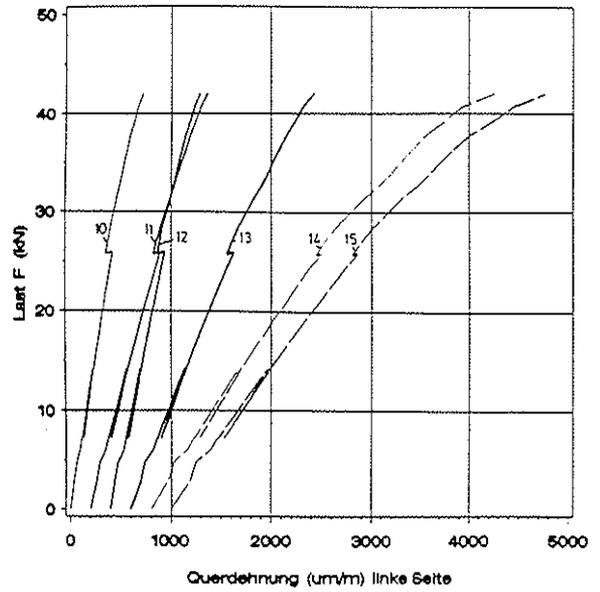


L	3,60 m
b	12 cm
$h_m$	40,6 cm
$\alpha_o$	20°
$\alpha_u$	16°
R	135,0 cm
$F_{zul}$	7,2 kN

Anordnung der DMS im gekrümmten Bereich



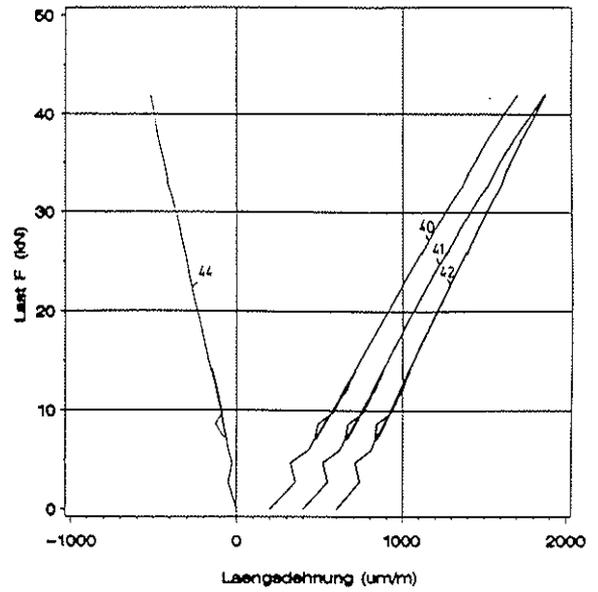
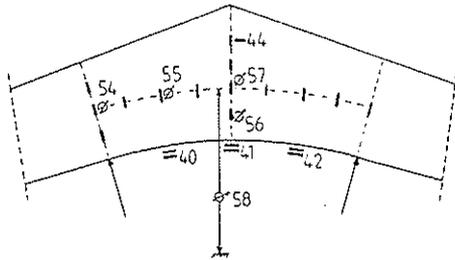
$F_{Bruch} = 41,6 \text{ kN}$



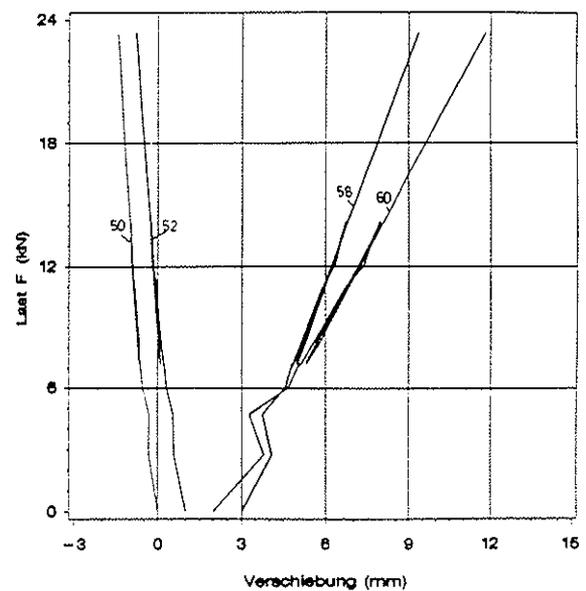
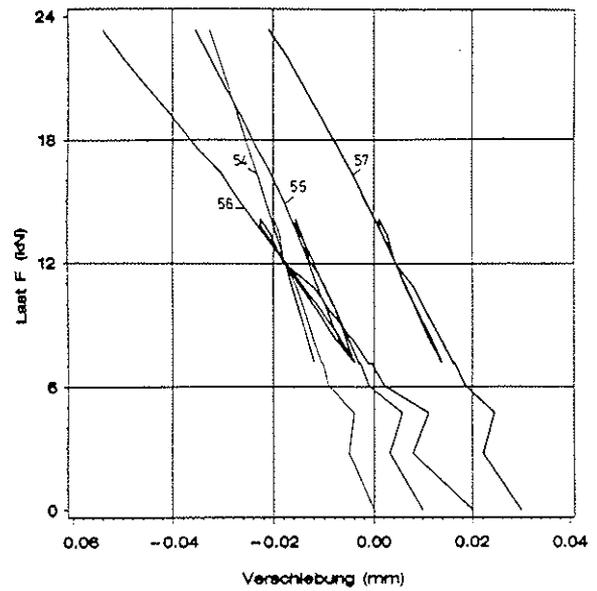
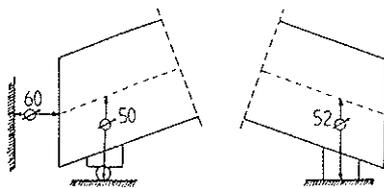
Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

Versuchsträger Kq4A

Anordnung der DMS und Wegaufnehmer im gekrümmten Bereich



Anordnung der Wegaufnehmer an den Auflagern



$F_{\text{Bruch}} = 41,6 \text{ kN}$

Alle Dehnungen sind Mittelwerte der Messungen aus Vorder- und Rückseite

Träger	Zulässige Kraft $F_{zul}$ [kN]	Firstdurchbiegung $f_{First}$ [mm]	Horizontale Auflagerverschiebung $v_{horizontal}$ [mm]
G1A	32,0	11,76	11,90
G1B	32,0	11,62	11,50
G2A	20,5	9,65	9,85
G2B	20,5	9,88	9,90
G3A	14,1	6,12	6,26
G3B	14,1	6,21	6,46
G4A	8,0	3,31	2,85
G4B	8,0	3,72	3,46
P1A	29,0	8,91	9,40
P1B	29,0	9,03	9,19
P2A	18,6	8,60	8,59
P2B	18,6	8,56	8,23
P3A	12,8	5,86	6,14
P3B	12,8	5,80	6,22
P4A	7,2	2,87	2,57
P4B	7,2	2,83	2,87
K1A	29,0	10,42	9,30
K1B	29,0	11,84	9,58
K2A	18,6	9,74	8,74
K2B	18,6	10,15	8,83
K3A	12,8	—	—
K3B	12,8	—	—
K4A	7,2	3,13	2,24
K4B	7,2	3,00	2,27
K5A	18,6	11,42	8,70
K5B	18,6	10,58	8,38
K6A	18,6	7,18	8,66
K6B	18,6	9,60	9,18
Gq3A	14,1	3,24	2,66
Gq3B	14,1	5,01	4,48
Gq4A	8,0	2,45	2,00
Gq4B	8,0	2,76	2,07
Kq3A	12,8	3,53	2,90
Kq3B	12,8	5,95	5,57
Kq4A	7,2	2,54	2,00
Kq4B	7,2	2,43	1,89

**Tabelle A6:** Firstdurchbiegungen und horizontale Auflagerverschiebungen für die zulässige Belastung nach DIN 1052

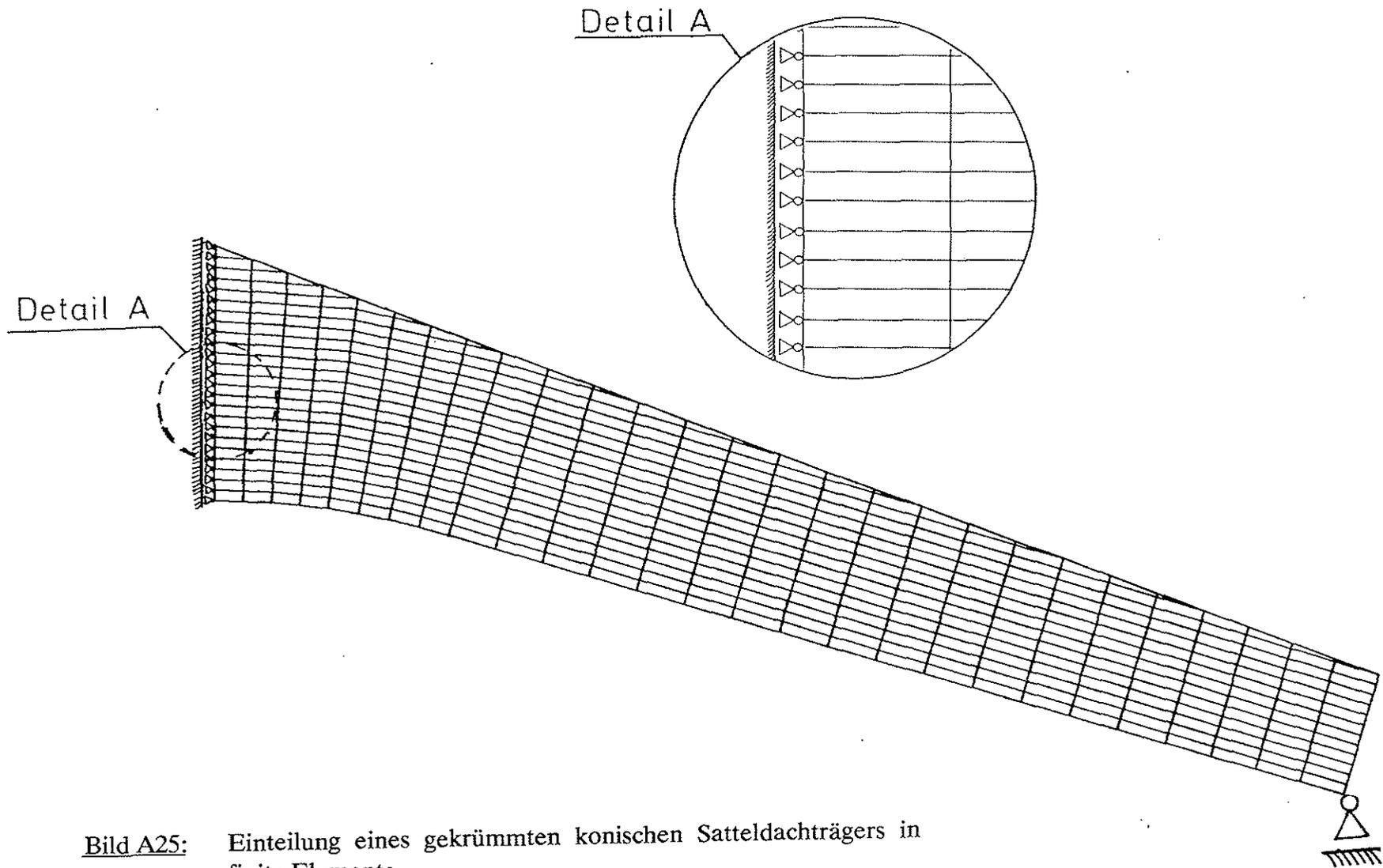


Bild A25: Einteilung eines gekrümmten konischen Satteldachträgers in finite Elemente

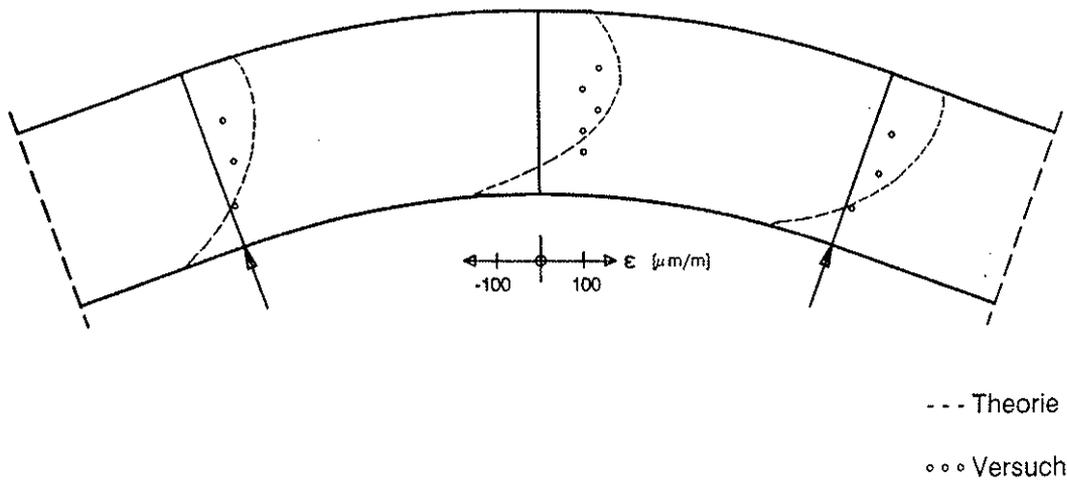


Bild A26: Vergleich der Querdehnungen nach Versuch und Rechnung an Träger G2A für eine Last  $F=5,13$  kN

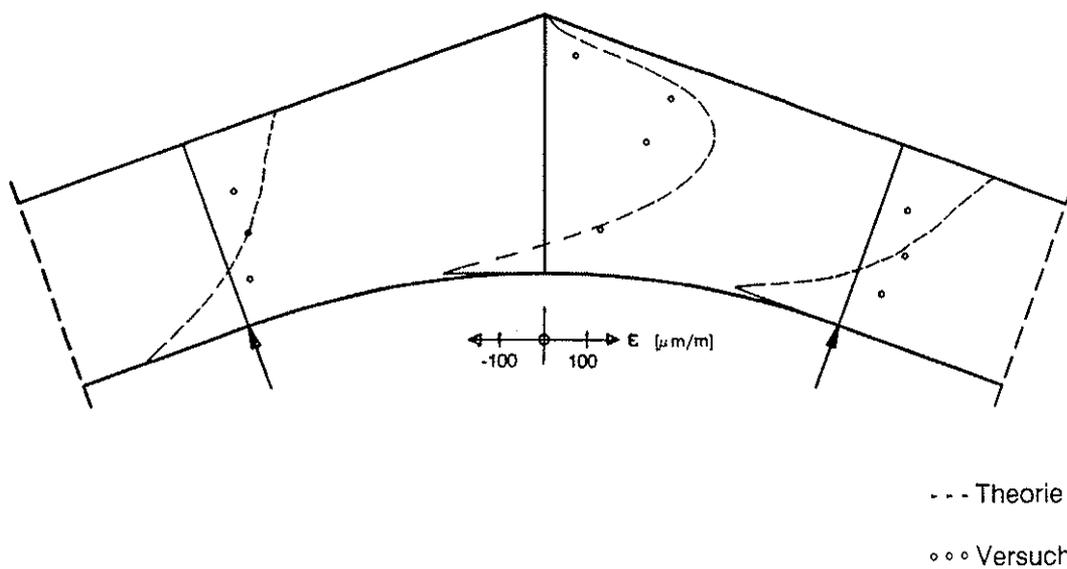


Bild A27: Vergleich der Querdehnungen nach Versuch und Rechnung an Träger P2B für eine Last  $F=9,40$  kN

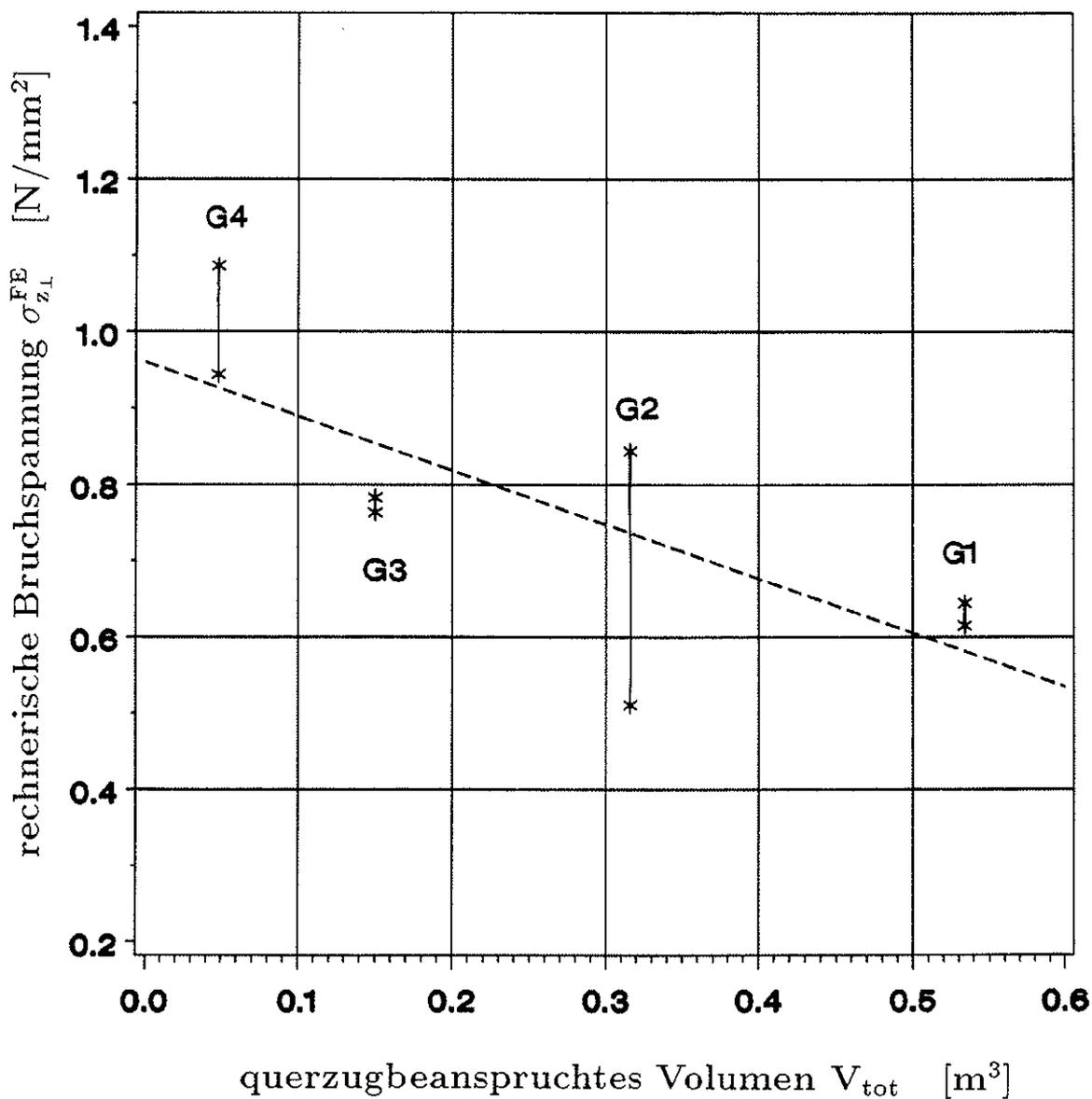


Bild A28: Rechnerische Bruchspannungen in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen für die gekrümmten Träger konstanter Höhe

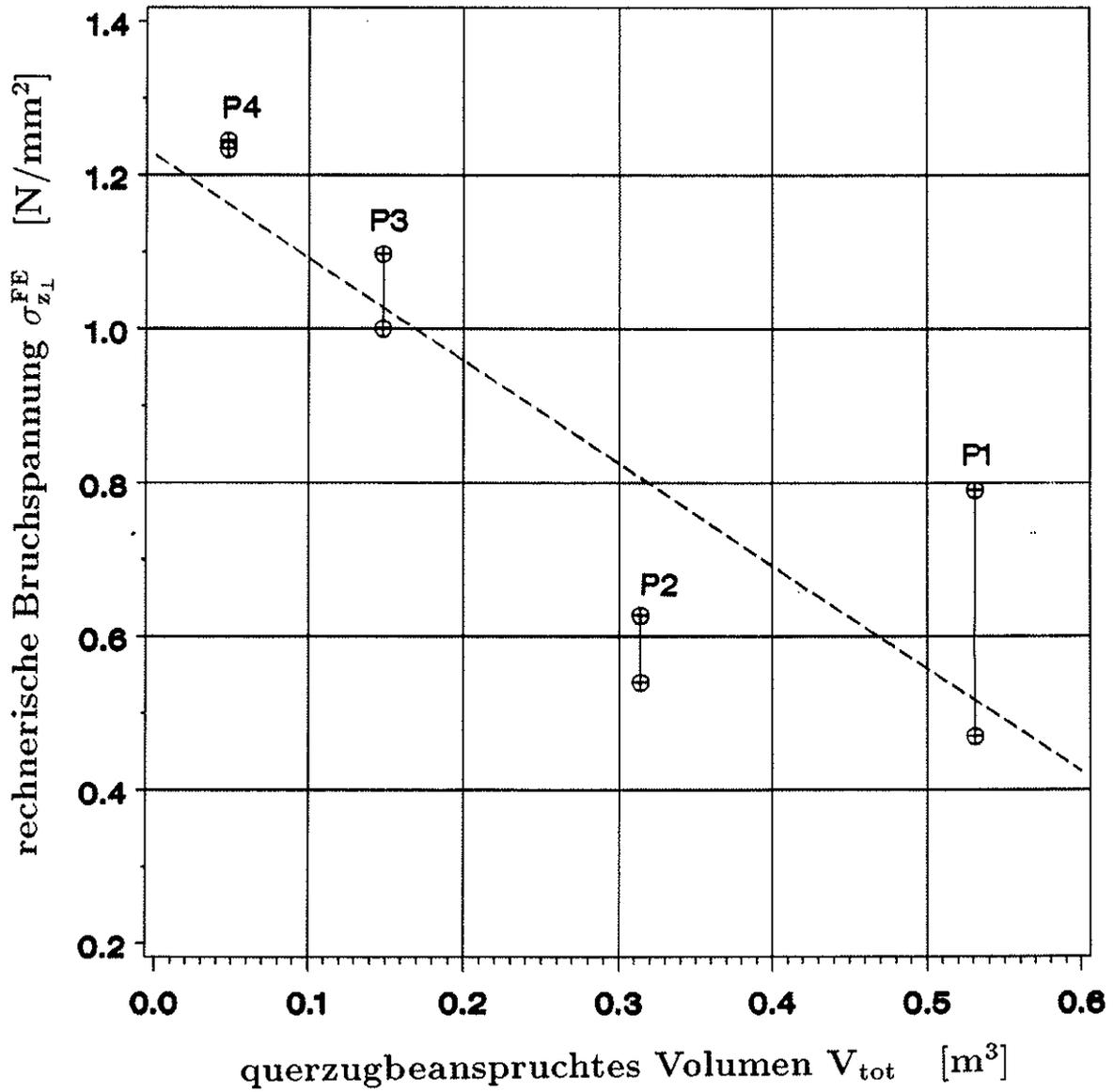


Bild A29: Rechnerische Bruchspannungen in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen für die gekrümmten Satteldachträger

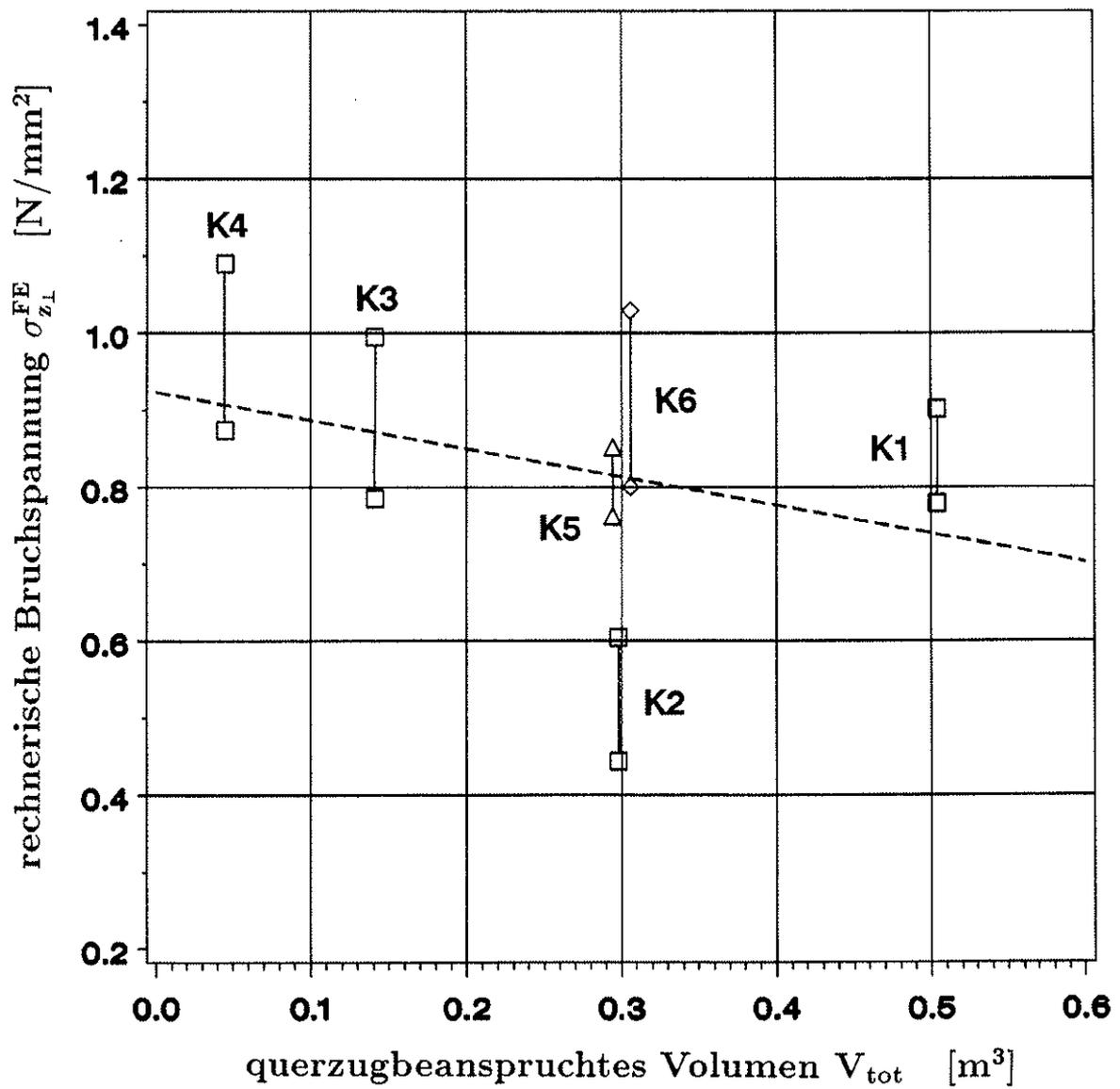


Bild A30: Rechnerische Bruchspannungen in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen für die gekrümmten konischen Satteldachträger

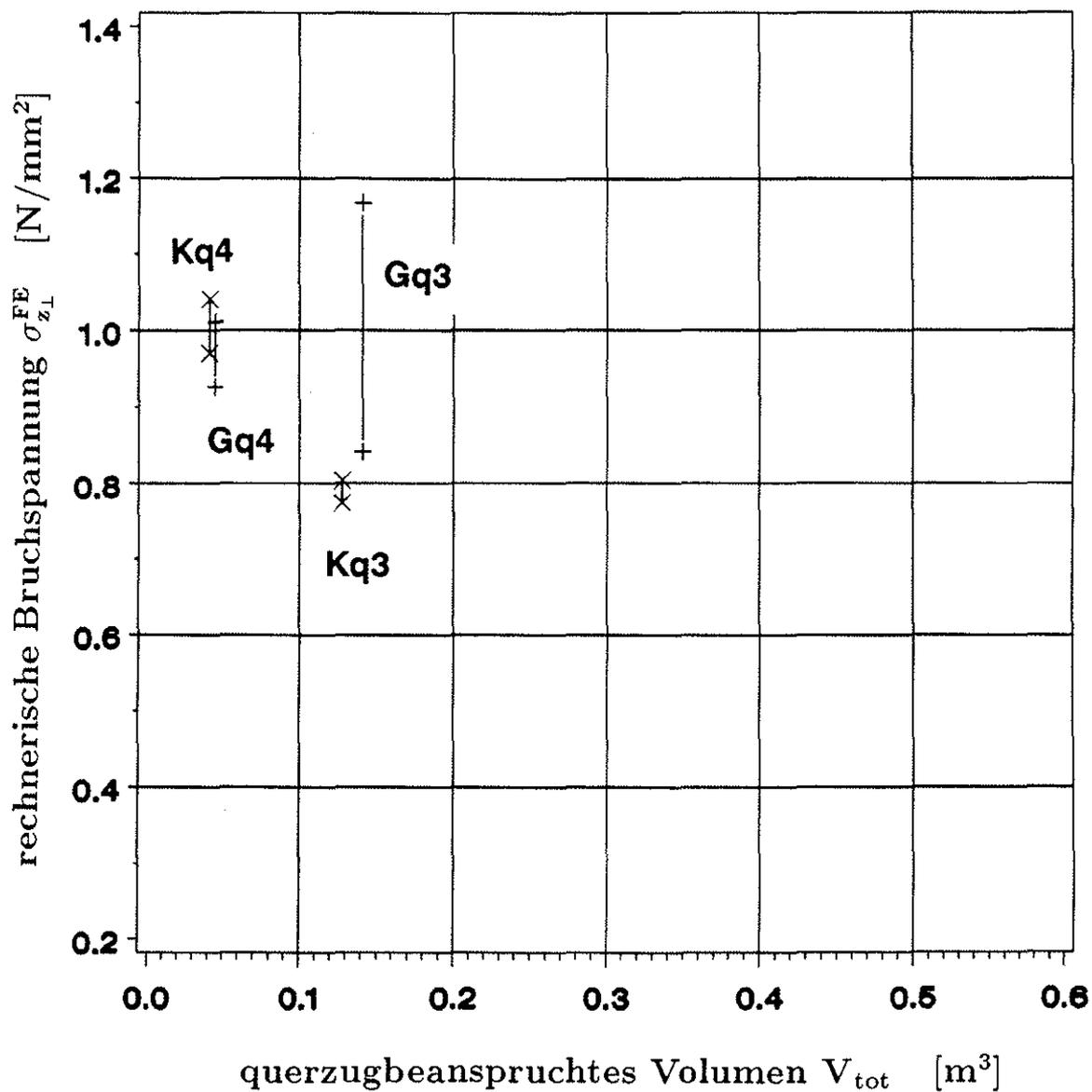


Bild A31: Rechnerische Bruchspannungen in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen für die gekrümmten Träger konstanter Höhe und die gekrümmten konischen Satteldachträger unter Streckenlast

Träger	$V_{tot}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{EC5}$ [m <sup>3</sup> ]	$k_{vol}^{Wei} = \left(\frac{V_0}{V_{tot}}\right)^{\frac{1}{k}}$ [-]	$k_{vol}^{EC5} = \left(\frac{V_0}{V_{EC5}}\right)^{0,2}$ [-]	$\lambda_L \cdot \lambda_H$ [-]	$k_{dis}^{Wei} = \frac{1}{\lambda_L \cdot \lambda_H}$ [-]	$k_{dis}^{EC5}$ [-]	$k_{vol}^{Wei} \cdot k_{dis}^{Wei}$ [-]	$k_{vol}^{EC5} \cdot k_{dis}^{EC5}$ [-]
G1	0,534	0,419	0,534	0,544	0,733	1,364	1,2	0,728	0,653
G2	0,316	0,248	0,590	0,604	0,733	1,364	1,2	0,805	0,725
G3	0,150	0,118	0,681	0,702	0,733	1,364	1,2	0,929	0,842
G4	0,048	0,038	0,846	0,881	0,733	1,364	1,2	1,154	1,057
P1	0,532	0,473	0,534	0,531	0,697	1,434	1,2	0,766	0,637
P2	0,315	0,280	0,590	0,590	0,697	1,434	1,2	0,847	0,708
P3	0,149	0,133	0,681	0,685	0,697	1,434	1,2	0,977	0,822
P4	0,048	0,043	0,846	0,860	0,697	1,434	1,2	1,213	1,032
K1	0,504	0,389	0,540	0,552	0,686	1,457	1,2	0,787	0,626
K2	0,298	0,231	0,597	0,613	0,686	1,457	1,2	0,870	0,736
K3	0,141	0,109	0,689	0,712	0,686	1,457	1,2	1,004	0,854
K4	0,045	0,035	0,857	0,894	0,686	1,457	1,2	1,249	1,073
K5	0,294	0,206	0,599	0,628	0,676	1,478	1,2	0,885	0,754
K6	0,306	0,256	0,594	0,601	0,689	1,451	1,2	0,862	0,721
Gq3	0,141	0,118	0,689	0,702	0,709	1,411	1,4	0,972	0,983
Gq4	0,045	0,038	0,857	0,881	0,709	1,411	1,4	1,209	1,233
Kq3	0,128	0,109	0,701	0,712	0,682	1,466	1,7	1,028	1,210
Kq4	0,041	0,035	0,872	0,894	0,682	1,466	1,7	1,278	1,520

**Tabelle A7:** Vergleich der Verteilungsfaktoren und der Volumenfaktoren von EC5 mit der Weibull-Theorie

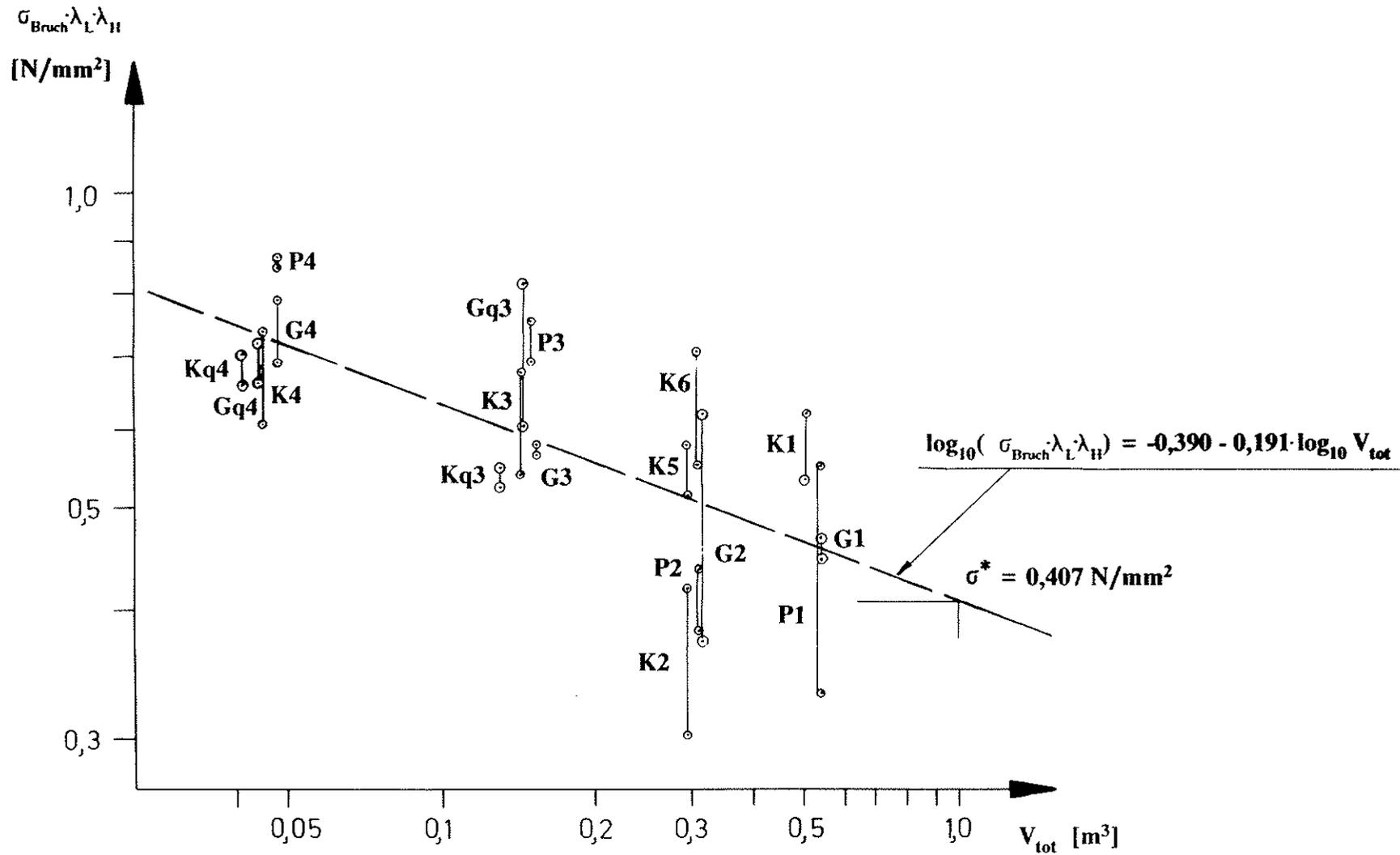


Bild A32: gleichförmig verteilte ideale Bruchspannungen aller Träger in  
 Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen

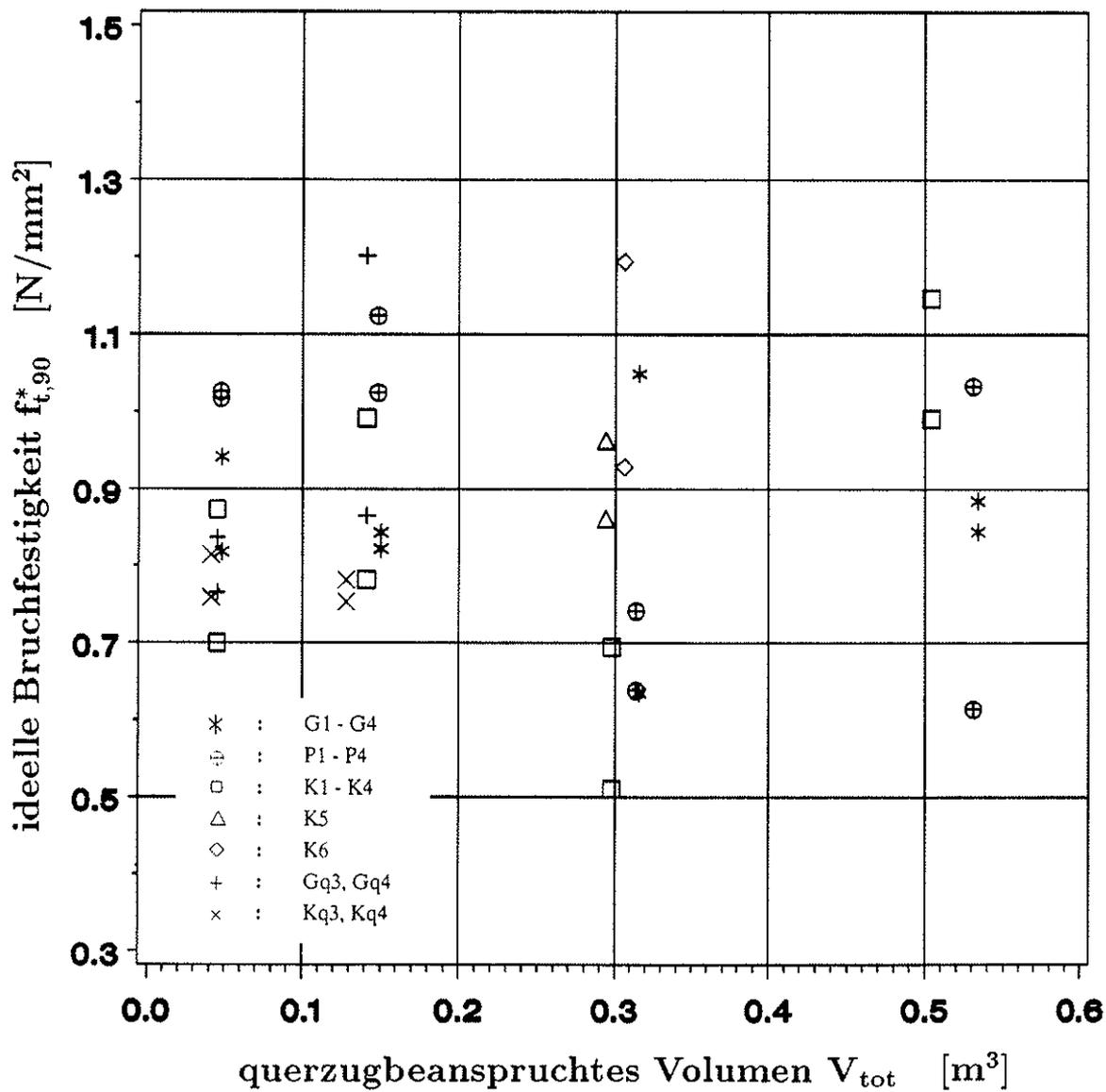


Bild A33: ideelle Festigkeit der Prüfkörper in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen

		Trägerform G		Trägerform P			Trägerform K		
Spannweite [ m ]	Neigung $\alpha_0$ [ ° ]	$H_m/R_m$		$H_m/R_m$			$H_m/R_m$		
		$\leq 0,1$	$> 0,1$ $\leq 0,2$	$\leq 0,1$	$> 0,1$ $\leq 0,2$	$> 0,2$ $\leq 0,5$	$\leq 0,1$	$> 0,1$ $\leq 0,2$	$> 0,2$ $\leq 0,5$
< 4,0	0-5								
	5-10								
	10-15								
	15-20		4			2 2	1	1	1 4
4,0-7,0	0-5	4							
	5-10	4	4	2			2		
	10-15		4				10	2	
	15-20		4 3 4			2		2	4
7,0-10,5	0-5								
	5-10		2		2			2	
	10-15		2	3	2			2	
	15-20		2 2	3		2 2			2 6
>10,5	0-5								
	5-10								
	10-15								
	15-20		2			2			2
Literaturstelle bzw. im Verlauf des Forschungs- vorhabens geprüfte Träger		Möhler, Blunner 1974	Ehlbeck, Kürth 1990 Krabbe, Neuhaus 1979 Kolb, Frech 1975 Möhler, Blunner 1974 Kolb 1968	Goodman, Gopu 1975 Möhler, Blunner 1974	Kolb, Frech 1975	Goodman, Gopu 1974 Ehlbeck, Kürth 1990 Kolb, Frech 1975	Foschi 1971 Fox 1974a Möhler, Blunner 1974	Kolb, Frech 1975 Möhler, Blunner 1974 Fox 1974a Foschi 1971	Ehlbeck, Kürth 1990 Kolb, Frech 1975 Foschi 1971

Tabelle A8: Auflistung und Anzahl der aus der Literatur bekannten sowie der in diesem Forschungsvorhaben durchgeführten Versuche mit gekrümmten Trägern

Lit.- stelle	Träger- form	Vers. bez.	Länge L [ m ]	Breite b [ cm ]	Höhe Auf- lager h <sub>a</sub> [ cm ]	Höhe First h <sub>m</sub> [ cm ]	α <sub>o</sub> [ ° ]	α <sub>u</sub> [ ° ]	Krüm- mungs- radius R [ cm ]	$\frac{h_m}{R_m}$ [ ]	Lamel- len- dicke a [ mm ]	Volumen des gekrümmten Bereichs V [ m <sup>3</sup> ]
Krabbe, Neuhaus 1979	Gekrümmte Träger konstanter Höhe	GKR1A	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GKR1B	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GKR1C	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
Möhler, Blumer 1974 Teil 1		GBL1A	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GBL1B	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GBL1C	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GBL1D	4,0	8	30	30	19,5	19,5	135	0,2	10	0,025
		GBL2A	4,0	8	30	30	9,6	9,6	135	0,2	10	0,012
		GBL2B	4,0	8	30	30	9,6	9,6	135	0,2	10	0,012
		GBL2C	4,0	8	30	30	9,6	9,6	135	0,2	10	0,012
		GBL2D	4,0	8	30	30	9,6	9,6	135	0,2	10	0,012
		GBL3A	4,0	8	30	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,024
		GBL3B	4,0	8	30	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,024
	GBL3C	4,0	8	30	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,024	
	GBL3D	4,0	8	30	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,024	
	GBL4A	4,0	8	30	30	4,8	4,8	285	0,1	10	0,012	
	GBL4A	4,0	8	30	30	4,8	4,8	285	0,1	10	0,012	
	GBL4A	4,0	8	30	30	4,8	4,8	285	0,1	10	0,012	
	GBL4A	4,0	8	30	30	4,8	4,8	285	0,1	10	0,012	
Möhler, Blumer 1974 Teil 2	Gekrümmte konische Satteldachträger	KBL1A	4,0	8	20	30	10,9	9,6	135	0,2	10	0,011
		KBL1B	4,0	8	20	30	10,9	9,6	135	0,2	10	0,011
		KBL2A	4,0	8	24	30	6,5	4,8	285	0,1	10	0,012
		KBL2B	4,0	8	24	30	6,5	4,8	285	0,1	10	0,012
	Gekrümmte Satteldachträger	PBL1A	4,0	8	24	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,021
		PBL1B	4,0	8	24	30	9,6	9,6	285	0,1	10	0,021
Kolb, Frech 1975	Gekrümmte Satteldachträger	PST1A	10,0	12	100	111	10	10	600	0,169	30	0,283
		PST1B	10,0	12	100	111	10	10	600	0,169	30	0,283
		PST2A	10,0	12	100	125	15	15	600	0,189	30	0,445
		PST2B	10,0	12	100	125	15	15	600	0,189	30	0,445
		PST3A	10,0	12	100	145	20	20	600	0,216	30	0,632
		PST3B	10,0	12	100	145	20	20	600	0,216	30	0,632
	Gekrümmte Träger konstanter Höhe	GST1A	10,0	12	100	100	10	10	600	0,154	30	0,272
		GST1B	10,0	12	100	100	10	10	600	0,154	30	0,272
		GST2A	10,0	12	100	100	15	15	600	0,154	30	0,408
		GST2B	10,0	12	100	100	15	15	600	0,154	30	0,408
Gekrümmte konische Satteldachträger	GST3A	10,0	12	100	100	20	20	600	0,154	30	0,544	
	GST3A	10,0	12	100	100	20	20	600	0,154	30	0,544	
	KST1A	10,0	12	64,3	111	10	5	600	0,169	30	0,146	
	KST1B	10,0	12	64,3	111	10	5	600	0,169	30	0,146	
	KST2A	10,0	12	63	125	15	9,5	600	0,189	30	0,294	
	KST2B	10,0	12	63	125	15	9,5	600	0,189	30	0,294	
	KST3A	10,0	12	61,5	145	20	13,5	600	0,216	30	0,453	
	KST3A	10,0	12	61,5	145	20	13,5	600	0,216	30	0,453	

Tabelle A9: Abmessungen der Versuchsträger aus der Literatur

Belastung und Trägerform	Bezeichnung des Versuchskörpers	Bruchlast am Auflager F kN	Bruchart <sup>1</sup>	Rechnerische Bruchspannungen			
				nach FE	nach DIN 1052	nach EC 5	
				$\sigma_{z,1}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{z,1}$ N/mm <sup>2</sup>	$\sigma_{t,90}$ N/mm <sup>2</sup>	
Konstantes Moment im gekrümmten Bereich	Gekrümmte Träger konstanter Höhe	GKR1A	37,0	QZ	1,573	1,542	1,542
		GKR1B	43,5	QZ	1,849	1,813	1,813
		GKR1C	37,5	QZ	1,594	1,563	1,563
	GBL1A	24,0	QZ	1,020	1,000	1,000	
		GBL1B	27,0	QZ	1,148	1,125	1,125
		GBL1C	16,8	QZ	0,714	0,700	0,700
		GBL1D	24,0	QZ	1,020	1,000	1,000
	GBL2A	26,4	QZ	1,125	1,100	1,100	
		GBL2B	24,8	QZ	1,057	1,033	1,033
		GBL2C	44,4	QZ	1,892	1,850	1,850
		GBL2D	38,6	QZ	1,645	1,608	1,608
	GBL3A	58,2	QZ	1,261	1,213	1,213	
		GBL3B	48,6	QZ+BB	1,053	1,013	1,013
		GBL3C	59,7	QZ	1,294	1,244	1,244
		GBL3D	>60,0	KB	1,300	1,250	1,250
	GBL4A	60,0	QZ+BB	1,131	1,250	1,250	
		GBL4B	50,4	BB	0,950	1,050	1,050
		GBL4C	57,5	QZ+BB	1,084	1,198	1,198
		GBL4D	55,1	QZ+BB	1,039	1,148	1,148
	Gekrümmte Satteldachträger	PBL1A	48,5	QZ	1,778	1,750	1,575
		PBL1B	48,9	QZ	1,793	1,764	1,588
	Gekrümmte Satteldachträger mit konischem Außenbereich	KBL1A	23,7	QZ	1,185	1,177	1,132
		KBL1B	28,5	QZ	1,425	1,416	1,361
	KBL2A	55,3	QZ	1,394	1,654	1,354	
KBL2B		49,5	QZ	1,248	1,481	1,212	
Gekrümmte Satteldachträger	GST1A	166,5	QZ	1,096	1,121	1,121	
	GST1B	135,5	QZ	0,892	0,912	0,912	
	GST2A	117,0	QZ	0,789	0,788	0,788	
	GST2B	110,3	QZ	0,744	0,742	0,742	
	GST3A	91,5	QZ	0,611	0,616	0,616	
	GST3B	108,0	QZ	0,721	0,727	0,727	
Gekrümmte Träger konstanter Höhe	PST1A	154,5	QZ	1,098	1,174	1,096	
	PST1B	151,5	QZ	1,077	1,151	1,075	
	PST2A	150,0	QZ	1,132	1,174	1,176	
	PST2B	110,3	QZ	0,832	0,863	0,863	
	PST3A	110,3	QZ	0,836	0,864	0,867	
	PST3B	141,8	QZ	1,075	1,110	1,115	
Gekrümmte Satteldachträger mit konischem Außenbereich	KST1A	191,5	QZ	1,320	1,455	1,309	
	KST1B	170,5	QZ	1,175	1,296	1,165	
	KST2A	147,5	QZ	1,170	1,155	1,107	
	KST2B	173,5	QZ	1,376	1,358	1,302	
	KST3A	139,4	QZ	1,094	1,092	1,038	
	KST3B	164,0	QZ	1,287	1,285	1,221	

<sup>1</sup> QZ: Querkzugbruch  
BB: Biegebruch  
KB: Kein Bruch

**Tabelle A10:** Bruchlasten, Bruchursachen und rechnerische Querkzugbruchspannung der Versuchsträger aus der Literatur

Träger	$V_{tot}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{EC\ 5}$ [m <sup>3</sup> ]	$k_{vol}^{Wei} =$ $\left(\frac{V_0}{V_{tot}}\right)^{\frac{1}{k}}$ [-]	$k_{vol}^{EC\ 5} =$ $\left(\frac{V_0}{V_{EC\ 5}}\right)^{0,2}$ [-]	$\lambda_L \cdot \lambda_H$ [-]	$k_{dis}^{Wei} =$ $\frac{1}{\lambda_L \cdot \lambda_H}$ [-]	$k_{dis}^{EC\ 5}$ [-]	$k_{vol}^{Wei} \cdot k_{dis}^{Wei}$ [-]	$k_{vol}^{EC\ 5} \cdot k_{dis}^{EC\ 5}$ [-]
GKR1	0,033	0,025	0,907	0,960	0,719	1,390	1,2	1,261	1,152
GBL1	0,033	0,025	0,907	0,960	0,719	1,390	1,2	1,261	1,152
GBL2	0,034	0,012	0,903	1,102	0,711	1,406	1,2	1,270	1,322
GBL3	0,031	0,024	0,919	0,963	0,715	1,398	1,2	1,285	1,156
GBL4	0,030	0,012	0,927	1,102	0,634	1,577	1,2	1,462	1,322
PBL1	0,024	0,021	0,968	0,990	0,639	1,565	1,2	1,515	1,188
KBL1	0,020	0,011	1,000	1,127	0,655	1,526	1,2	1,526	1,352
KBL2	0,025	0,012	0,959	1,108	0,645	1,550	1,2	1,486	1,330
GST1	0,312	0,272	0,592	0,593	0,694	1,440	1,2	0,852	0,712
GST2	0,832	0,408	0,491	0,547	0,601	1,663	1,2	0,817	0,656
GST3	0,951	0,544	0,497	0,517	0,598	1,671	1,2	0,800	0,620
PST1	0,294	0,283	0,599	0,589	0,700	1,428	1,2	0,855	0,707
PST2	0,472	0,445	0,547	0,538	0,670	1,492	1,2	0,816	0,646
PST3	0,916	0,632	0,482	0,501	0,597	1,674	1,2	0,807	0,601
KST1	0,239	0,146	0,623	0,672	0,691	1,447	1,2	0,901	0,806
KST2	0,312	0,294	0,592	0,584	0,698	1,433	1,2	0,848	0,701
KST3	0,427	0,453	0,557	0,536	0,682	1,467	1,2	0,817	0,643

Tabelle A11: Vergleich der Verteilungsfaktoren und der Volumenfaktoren von EC5 mit der Weibull-Theorie für die Versuchsträger aus der Literatur

Vers.- Reihe	$V_{tot}$ [ $m^3 \cdot 10^{-3}$ ]	$k_{dis}^{Wei}$ [-]	$k_{vol}^{Wei} =$ $\left(\frac{V_0}{V_{tot}}\right)^{\frac{1}{k}}$ [-]	$k_{vol}^{Wei} \cdot k_{dis}^{Wei}$ [-]	$\bar{\beta}_{z\perp}$ [ $N/mm^2$ ]
1	0,049	1.0	3,150	3,150	3,017
2	0,049	1.0	3,150	3,150	3,115
3	0,070	1.0	2,950	2,950	2,104
4	0,249	1.0	2,309	2,309	1,459
5	0,174	1.0	2,476	2,476	1,819
6	0,196	1.0	2,417	2,417	1,700
7	0,234	1.0	2,337	2,337	1,399
8	0,273	1.0	2,269	2,269	1,346
9	0,459	1.0	2,055	2,055	1,552
10	0,794	1.0	1,851	1,851	1,643
11	0,894	1.0	1,810	1,810	1,363
12	1,733	1.0	1,595	1,595	1,147
13	3,309	1.0	1,409	1,409	1,076
14	3,435	1.0	1,399	1,399	1,085
15	3,692	1.0	1,381	1,381	1,176
16	4,297	1.0	1,341	1,341	0,995
17	5,991	1.0	1,259	1,259	0,845
18	2,500	1.0	1,487	1,487	0,920
19	22,800	1.0	0,975	0,975	0,636

Tabelle A12: Volumen, Verteilungs- und Volumenfaktoren sowie mittlere Bruchfestigkeiten der Probekörper nach MISTLER 1982

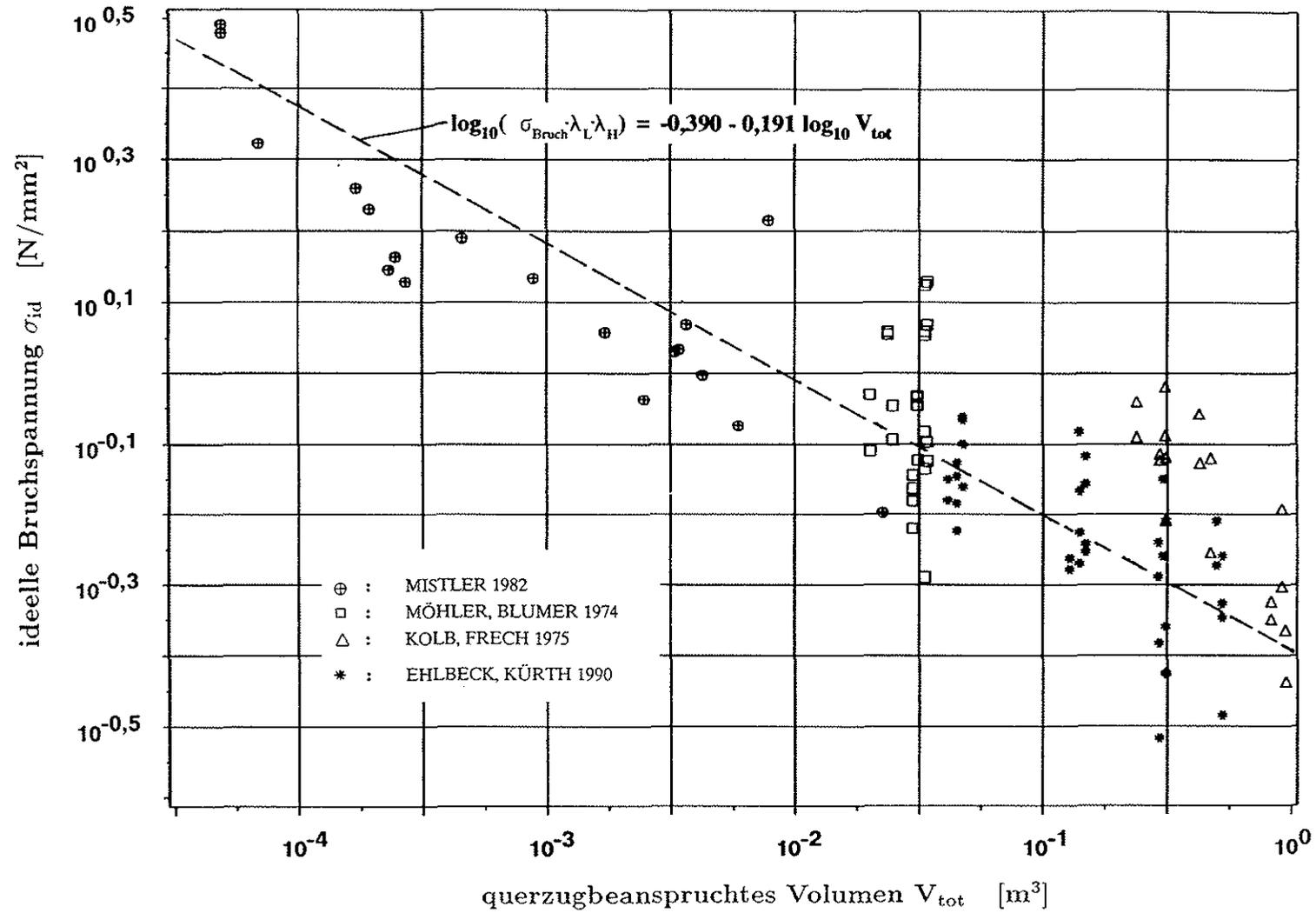


Bild A34: ideelle Bruchspannungen aller bekannten Prüfkörper in Abhängigkeit vom beanspruchten Volumen

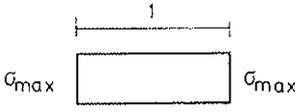
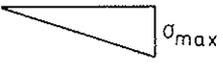
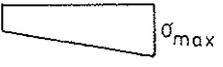
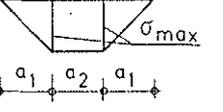
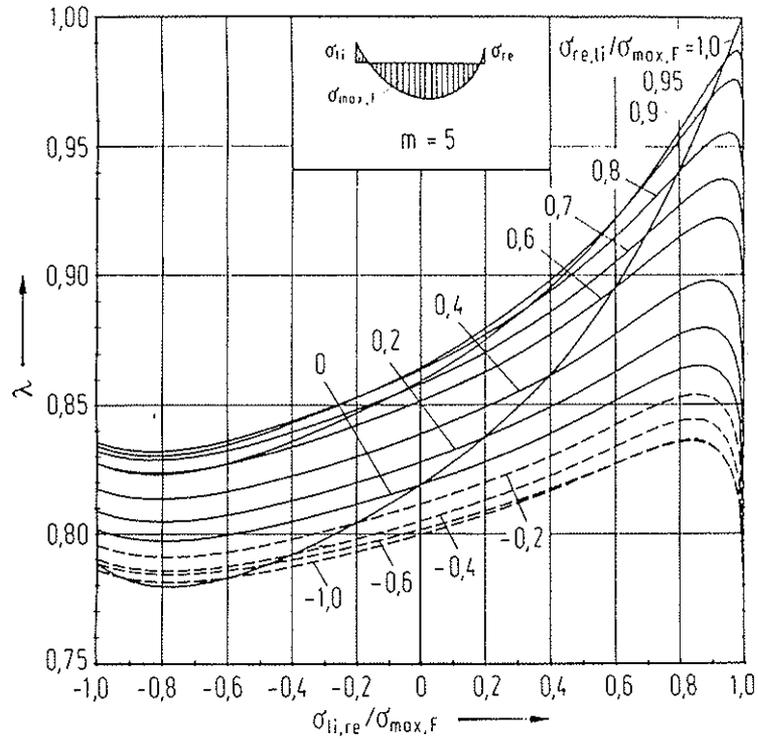
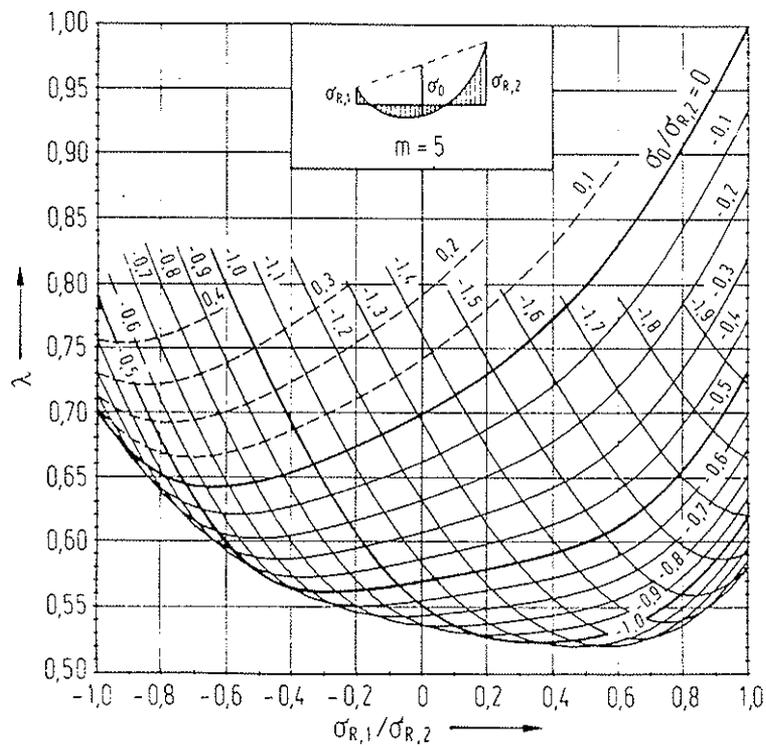
	Spannungsverteilung	$\lambda = \left[ \int_{\eta=0}^1 f^m(\eta) d\eta \right]^{1/m}$
①		1,0
②		$\left( \frac{1}{m+1} \right)^{1/m}$
③		$\left( \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1 - k^{m+1}}{1 - k} \right)^{1/m}$
④		$\left( \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1 +  k ^{m+1}}{1 +  k } \right)^{1/m}$
⑤		$\left[ \frac{1}{m+1} (1 + a_2 \cdot m) \right]^{1/m}$
⑥		$\left[ \frac{1}{m+1} (1 + 0,345 \cdot m - 0,027 \cdot m^2 + 0,0013 \cdot m^3) \right]^{1/m}$

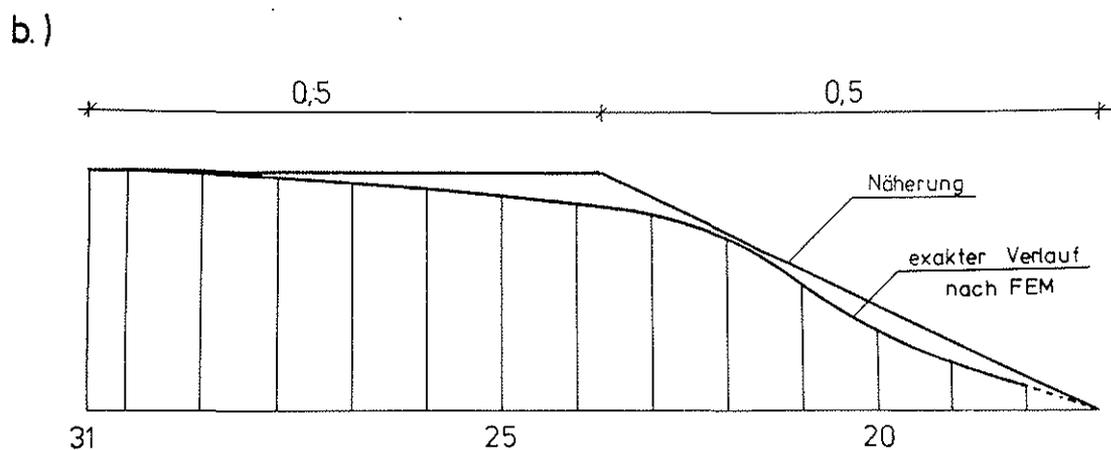
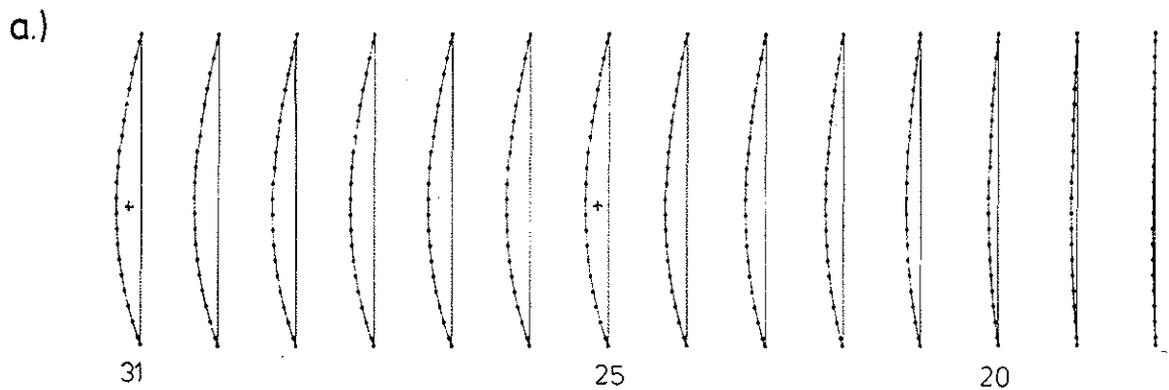
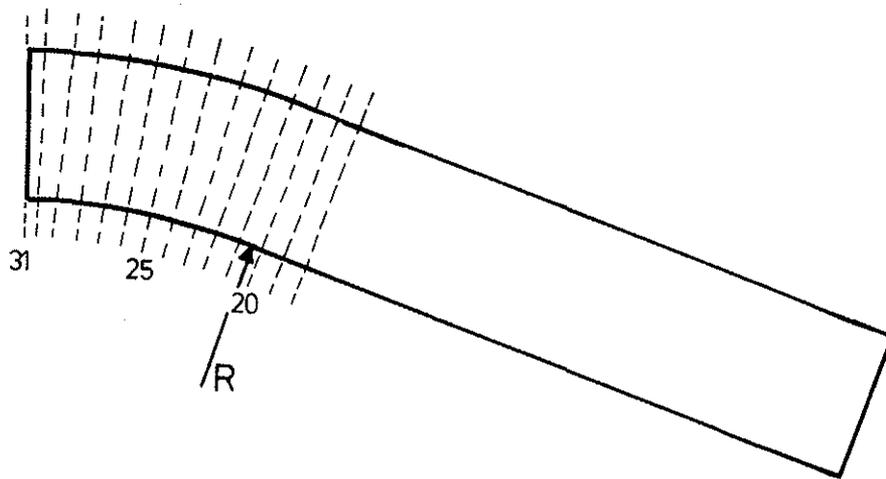
Bild A35: Völligkeitsbeiwert  $\lambda$  in Abhängigkeit vom Exponenten  $m$  (entspricht hier  $k$ ) der 2-parametrischen Weibull-Verteilung für verschiedene Spannungsverteilungen



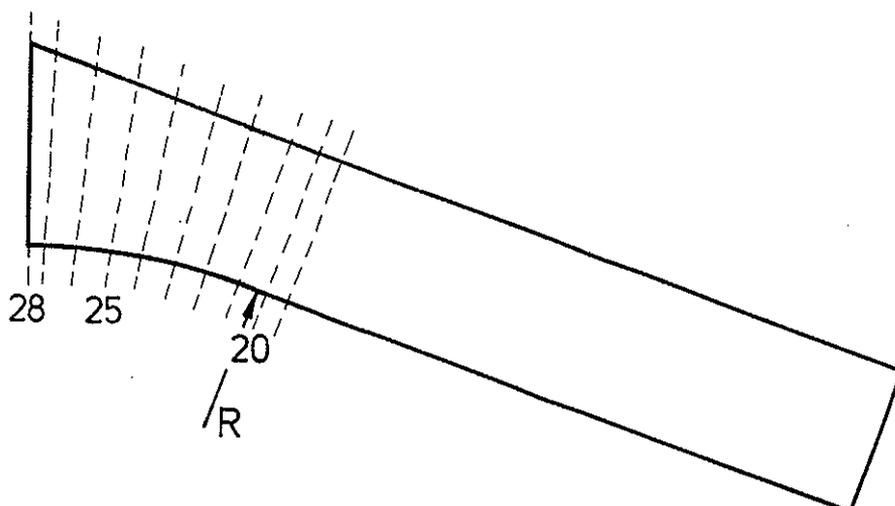
**Bild A36:** Völligkeitsbeiwert  $\lambda$ ; maximale Spannung im Feld ( $k = m = 5$ )



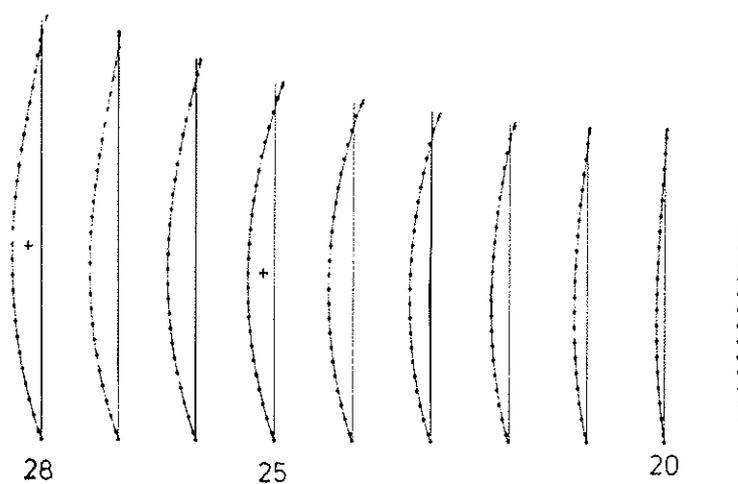
**Bild A37:** Völligkeitsbeiwert  $\lambda$ ; maximale Spannung im Rand ( $k = m = 5$ )



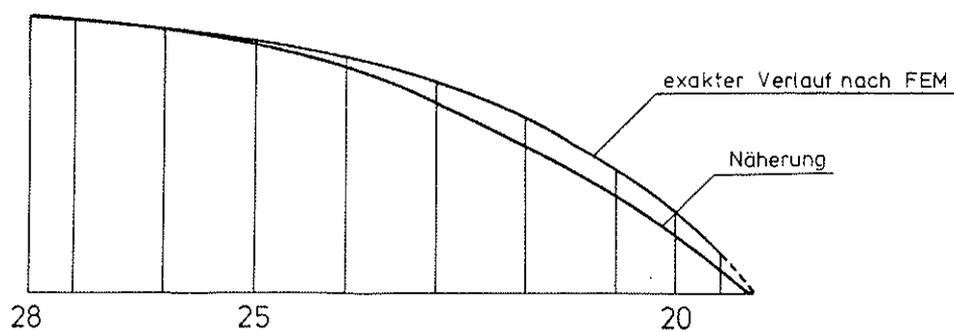
**Bild A38:** Verlauf der Querkzugspannungen der Träger G1-G4:  
 a.) in verschiedenen Querschnitten entlang der Trägerachse  
 b.) in Trägerlängsrichtung (Maximalwerte der Spannungen)



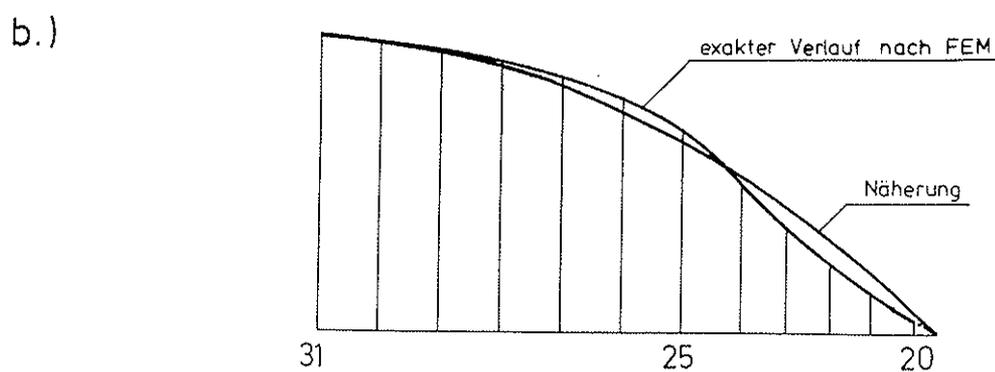
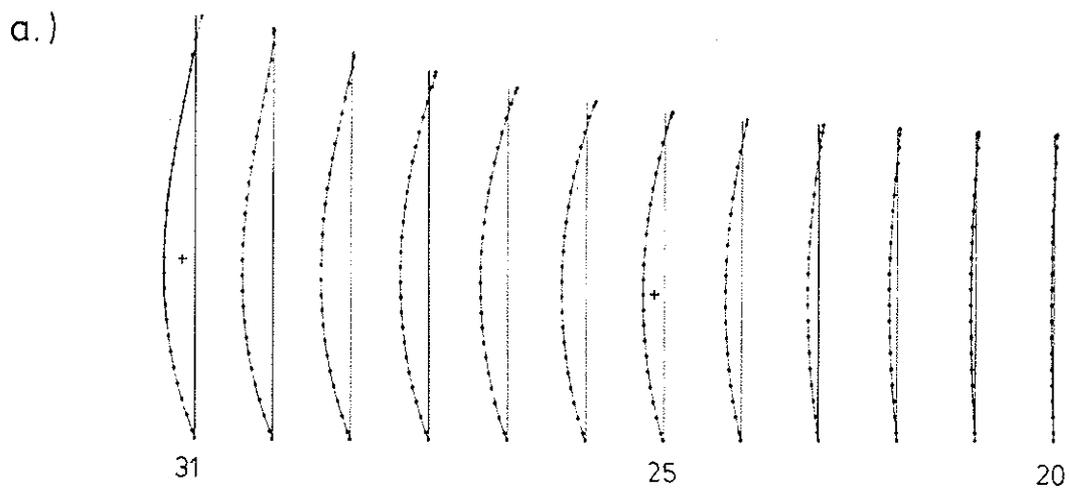
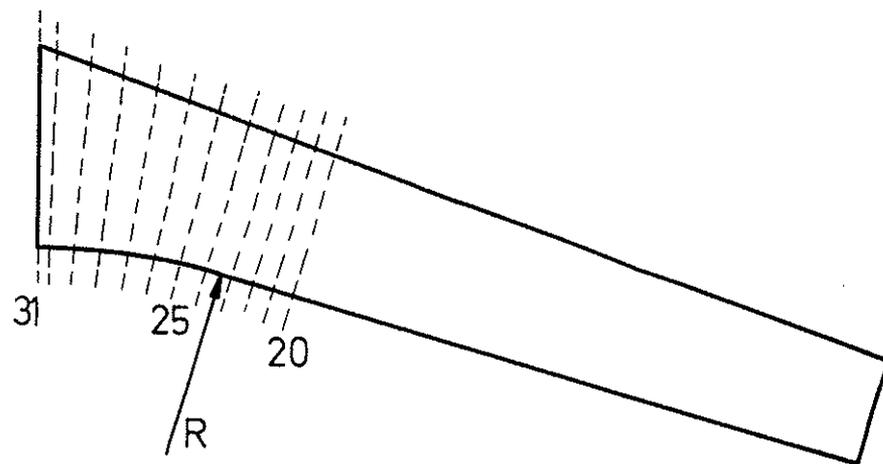
a.)



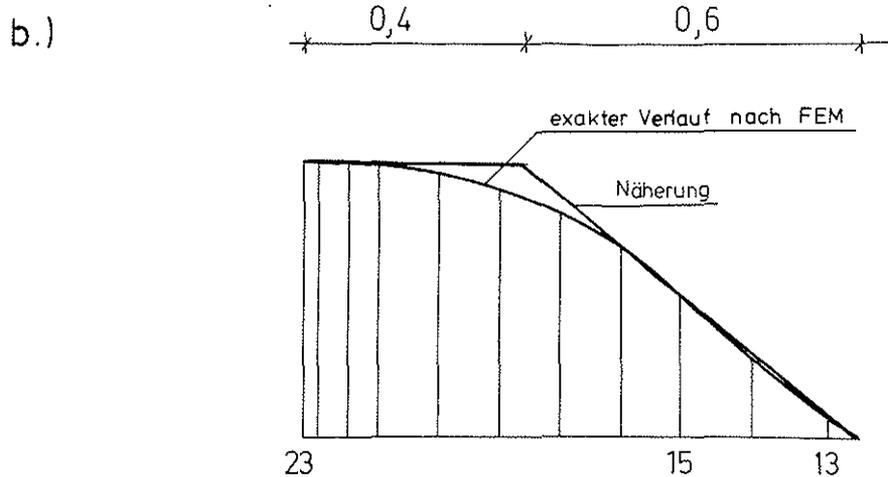
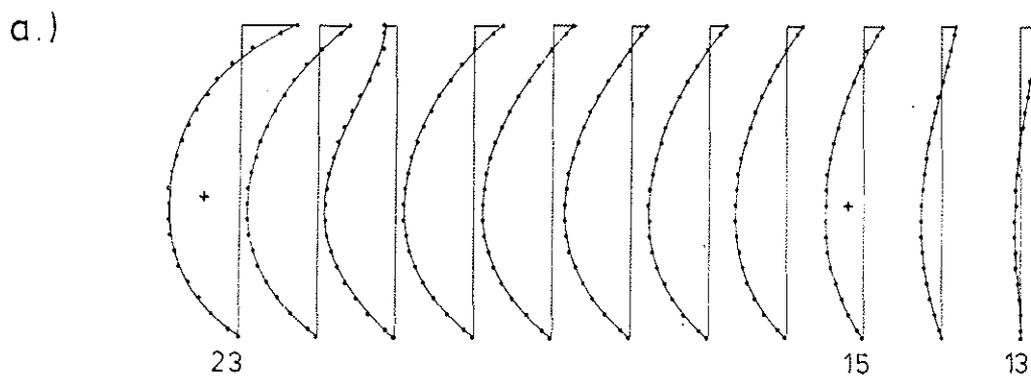
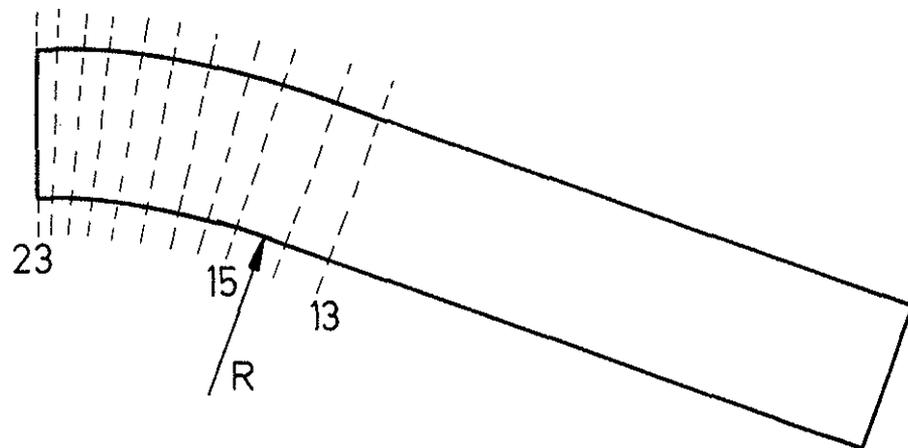
b.)



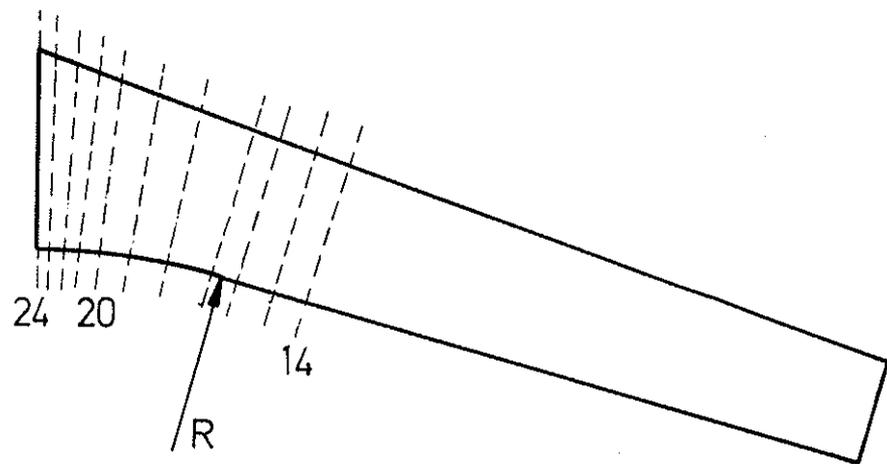
**Bild A39:** Verlauf der Querkzugspannungen der Träger P1-P4:  
 a.) in verschiedenen Querschnitten entlang der Trägerachse  
 b.) in Trägerlängsrichtung (Maximalwerte der Spannungen)



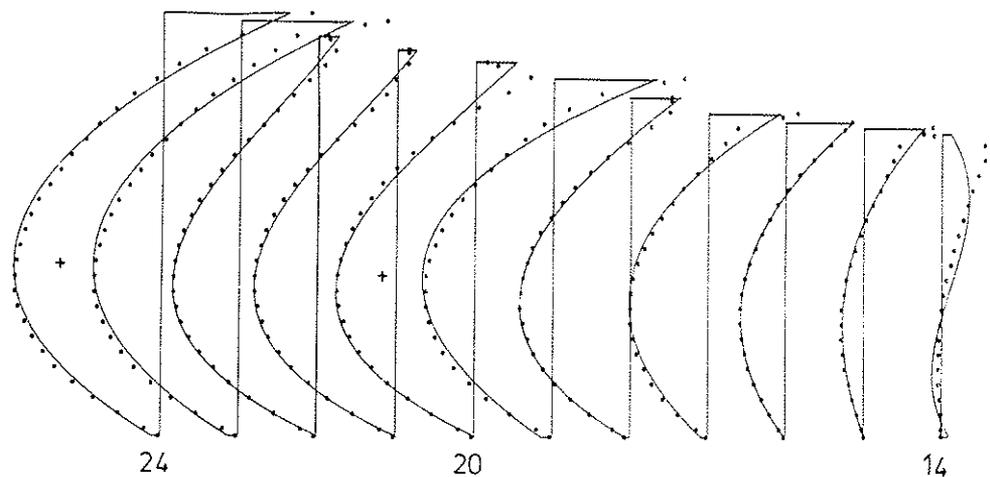
**Bild A40:** Verlauf der Querkzugspannungen der Träger K1-K4:  
 a.) in verschiedenen Querschnitten entlang der Trägerachse  
 b.) in Trägerlängsrichtung (Maximalwerte der Spannungen)



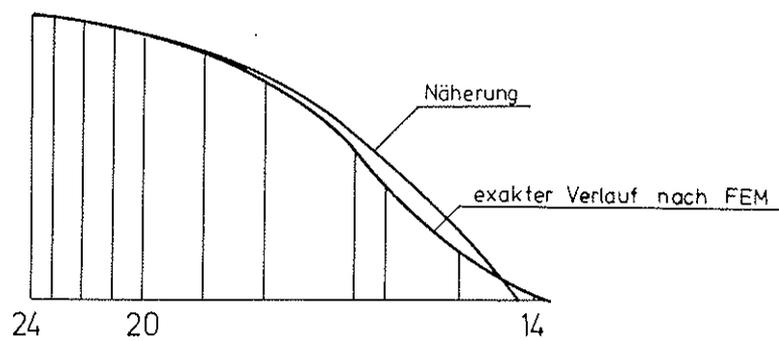
**Bild A41:** Verlauf der Quersugspannungen der Träger Gq3,Gq4:  
a.) in verschiedenen Querschnitten entlang der Trägerachse  
b.) in Trägerlängsrichtung (Maximalwerte der Spannungen)



a.)



b.)



**Bild A42:** Verlauf der Quersugspannungen der Träger Kq3, Kq4:  
 a.) in verschiedenen Querschnitten entlang der Trägerachse  
 b.) in Trägerlängsrichtung (Maximalwerte der Spannungen)