

DAS RANDOM CONNECTION MODEL FÜR HÖHERDIMENSIONALE SIMPLIZIALKOMPLEXE

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dominik Pabst, M.Sc.
aus Hohenlohe

Tag der mündlichen Prüfung: 16.07.2024

Referent: Prof. Dr. Daniel Hug

Korreferent: Prof. Dr. Günter Last

Korreferent: Prof. Dr. Matthias Schulte

Für meine geliebten Großeltern.

DANKSAGUNG

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Daniel Hug für die Unterstützung während meiner Promotion bedanken. Dabei habe ich es sehr zu schätzen gewusst, wie viele Freiheiten und Gestaltungsmöglichkeiten mir bei meiner Forschung gelassen wurden. Gleichzeitig konnte ich mich immer darauf verlassen, hilfreiche Rat- und Vorschläge sowie neue Ideen und konstruktive Kritik zu bekommen.

Außerdem möchte ich mich bei meinem Zweitbetreuer Prof. Dr. Günter Last dafür bedanken, dass er immer für Fragen und Anregungen zur Verfügung stand und dadurch diese Arbeit mitgeprägt hat. Ich möchte mich auch bei Prof. Dr. Matthias Schulte dafür bedanken, dass er bereits auf der SGSIA 2022 mit mir inspirierende Diskussionen über meine Forschung geführt hat und dass er sich kurzfristig bereiterklärt hat, Drittgutachter meiner Arbeit zu werden.

Des Weiteren möchte ich mich bei Herrn Khanh Duy Trinh dafür bedanken, dass er mir im persönlichen Austausch eine mathematische Argumentation zur Verfügung gestellt hat, die Teil dieser Arbeit geworden ist. Auch bei allen Mitgliedern des Instituts für Stochastik während meiner Promotionszeit bedanke ich mich für eine unglaublich angenehme Arbeitsatmosphäre.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders bei meiner Familie bedanken für die bedingungslose Unterstützung während meines gesamten Lebens. Vor allem danke ich meiner Mutter, meinem Vater, meinem Bruder und meiner Schwester (ich kann mir keine besseren Geschwister vorstellen).

VERÖFFENTLICHUNGEN

keine

NOTATION

\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	natürliche Zahlen, natürliche Zahlen mit der Null
\mathbb{Z}, \mathbb{R}	ganze Zahlen, reelle Zahlen
\subseteq, \subset	Teilmenge, echte Teilmenge
$[n]$	$\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$
S_m	Menge aller Permutationen von $[m]$
$\mathbb{E}[\cdot], \mathbb{V}(\cdot), \text{Cov}(\cdot, \cdot)$	Erwartungswert, Varianz, Kovarianz
\mathbb{P}^X	Verteilung eines Zufallselement X
\mathbb{R}^d	d -dimensionaler euklidischer Raum
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^d
λ_d	d -dimensionales Lebesguemaß
$\mathbf{0}$	Ursprung im \mathbb{R}^d
$\ \cdot\ $	euklidische Norm in \mathbb{R}^d
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^d
$\mathcal{B}(A)$	Borelmengen einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge einer Menge A
$\text{Po}(a)$	Poissonverteilung mit Parameter $a > 0$
$\mathcal{U}(A)$	Gleichverteilung auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$
$B(x, r)$	abgeschlossene Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r > 0$
$\partial B(x, r)$	Rand der Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r > 0$
$X \stackrel{d}{=} Y$	Verteilungsgleichheit zweier Zufallselemente X, Y
$X_n \xrightarrow{d} X$	Konvergenz in Verteilung
$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
$X_n \xrightarrow{f.s.} X$	fast sichere Konvergenz
$\ X\ _{L^p}$	L^p -Norm einer Zufallsvariablen X

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	12
2.1. Punktprozesstheorie	12
2.2. Simplicialkomplexe und simpliciale Homologie	15
2.3. Normalapproximation von Poissonfunktionalen	21
3. Das Modell für höherdimensionale Simplicialkomplexe	24
3.1. Der Raum der stetigen Simplicialkomplexe	25
3.2. Definition des Modells	28
3.3. Formeln für Erwartungswerte und Varianzen	33
3.4. Varianzgleichungen	46
3.5. Das markierte stationäre Modell	53
4. Zentrale Grenzwertsätze für die Euler-Charakteristik	59
4.1. Ein Theorem zur Normalapproximation	64
4.2. Asymptotik für wachsende Intensität	70
4.3. Asymptotik für wachsendes Beobachtungsfenster	78
4.4. Simplexanzahlen im markierten stationären Modell	86
5. Zentrale Grenzwertsätze für die Betti-Zahlen	89
5.1. Normalapproximation von schwach stabilisierenden Funktionalen	93
5.2. Betti-Zahlen im markierten stationären Modell	107
5.3. Schwach stabilisierende Funktionale	110
5.4. Positivität der asymptotischen Varianz	114
6. Höherdimensionale Perkolation	117
6.1. Resultate aus der Perkolationstheorie	121
6.2. Kritische Intensitäten	130

6.3. Scharfer Phasenübergang	136
A. Simplexkatalog und Simulationen zur Normalapproximation	150
B. Kombinatorische Größen aus dem Beweis von Proposition 4.5	154
Literaturverzeichnis	157

KAPITEL 1

EINLEITUNG

Um Interaktionen oder Verbindungen zwischen Objekten zu beschreiben, werden in der Mathematik oftmals *Graphen* verwendet. Diese bestehen lediglich aus einer Eckenmenge, die die betrachteten Objekte repräsentieren, und einer Menge von Kanten, die jeweils für eine Interaktion zwischen zwei Objekten stehen. Mit dieser noch vergleichsweise einfachen Struktur eignen sich Graphen bereits, um einerseits viele Phänomene aus den unterschiedlichsten Gebieten zu modellieren und andererseits eine facettenreiche mathematische Theorie dazu zu entwickeln. Seien es Straßennetze, soziale Netzwerke, Verbindungen zwischen Atomen oder die Verbreitung von Krankheiten, es fällt nicht schwer sich beliebig viele Anwendungsgebiete einfallen zu lassen. Allerdings lassen sich innerhalb von Graphen immer nur Interaktionen zwischen zwei Elementen modellieren und es gibt Situationen, in denen Interaktionen zwischen mehreren Objekten auftreten, die nicht bereits durch die paarweisen Interaktionen beschrieben sind.

Zur Motivation einer Verallgemeinerung von Graphen, wollen wir zunächst einen einfachen konkreten Beispielgraphen betrachten. Dazu wählen wir als Eckenmenge die Menge aller Mathematiker und verbinden zwei von ihnen durch eine Kante, falls es eine gemeinsame Veröffentlichung dieser beiden Mathematiker gibt. Dann ist ein Mathematiker innerhalb dieses Graphen umso mehr Kanten beteiligt, desto mehr Koautoren er bisher in seiner Laufbahn hatte. Andererseits repräsentieren isolierte Ecken des Graphen Mathematiker, die noch gar keine Arbeit zusammen mit anderen Mathematikern veröffentlicht haben. Abbildung 1.1 zeigt einen Teilgraphen dieses Graphen gemäß [MathSciNet](#). Obwohl dieser Graph die Struktur von gemeinsamen Veröffentlichungen von Mathematikern beschreibt, gibt es noch einige Informationen über die Veröffentlichungen, die diesem Graphen nicht zu entnehmen sind. Finden wir beispielsweise drei Mathematiker (wie z.B. Paul Erdős, Alfréd Rényi und Vera Sós), die paarweise durch eine Kante verbunden sind, so wissen wir alleine mit den durch den Graphen gegebenen Informationen nicht, ob es auch eine

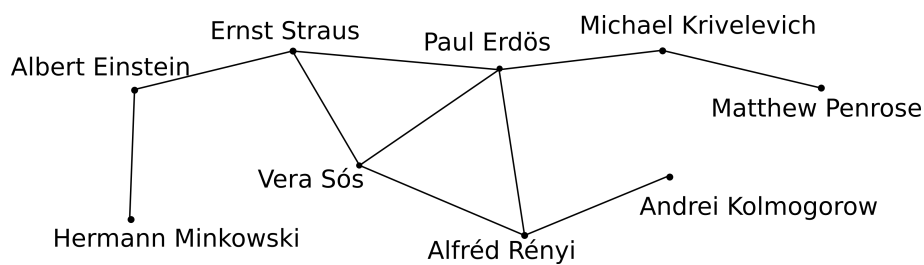


Abbildung 1.1.: Ein Teilgraph des „Graphen der Mathematiker“

gemeinsame Veröffentlichung aller drei Parteien gegeben hat. Eine gemeinsame Veröffentlichung von drei Mathematikern kann als eine Interaktion zwischen den drei Ecken angesehen werden, die noch nicht durch die paarweisen Interaktionen beschrieben ist, diese allerdings bedingt. (Tatsächlich gibt es eine gemeinsame Veröffentlichung von Erdős, Rényi und Sós.)

An dieser Stelle kommen *Simplizialkomplexe*, oftmals im Folgenden auch nur Komplexe genannt, ins Spiel, mit deren Hilfe auch Interaktionen zwischen mehr als zwei Objekten modelliert werden können. Formal handelt es sich bei einem (abstrakten) Simplizialkomplex um eine Teilmenge der Potenzmenge der Eckenmenge, die abgeschlossen unter der Teilmengenrelation ist. Letzteres bedeutet, dass für eine Menge in einem Simplizialkomplex, die in Anwendungen eine Interaktion zwischen den Elementen der Menge repräsentieren kann, immer auch all ihre Teilmengen in diesem Simplizialkomplex vorhanden sind. Je nach Anwendungsgebiet stellt sich also zunächst die Frage, ob diese Kausalität in der vorliegenden Situation gegeben ist. Ist dies der Fall, so bietet es sich an, über eine Modellierung mithilfe von Simplizialkomplexen nachzudenken. Der Graph der Mathematiker ließe sich beispielsweise zu einem Simplizialkomplex erweitern, indem eine endliche Menge von Mathematikern als Teil des Komplexes definiert wird, wenn es eine gemeinsame Veröffentlichung aller beteiligten Mathematiker gibt.

Ein Element eines Simplizialkomplexes wird Simplex, genauer n -Simplex, genannt, wenn es sich um eine $(n + 1)$ -elementige Menge handelt. In den Spezialfällen $n = 0, 1, 2, 3$ sprechen wir anstatt von n -Simplizes von Ecken, Kanten, Dreiecken bzw. Tetraedern. Bisher nur als abstrakte Objekte betrachtet, lassen sich Simplizialkomplexe jedoch auch als geometrische Objekte auffassen. Ein geometrisches n -Simplex ist die konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten des \mathbb{R}^d , weswegen n auch die Dimension des Simplex genannt wird. Als Dimension eines Simplizialkomplexes wird die maximale Dimension seiner Simplizes bezeichnet, die auch unendlich sein kann. Bei Graphen handelt es sich also um eindimensionale Simplizialkomplexe. Tatsächlich ist jeder endlichdimensionale, abzählbare und lokal endliche Simplizialkomplex geometrisch realisierbar. Lokal endlich bedeutet hier, dass jede Ecke nur an endlich vielen Kanten und somit an endlich vielen Simplizes beteiligt ist. Bei abstrakten Simplizialkomplexen handelt es sich also um einfache kombinatorische Beschreibungen von geometrischen Objekten. Beispielsweise ist jede höchstens zwei- oder dreidimensionale Mannigfaltigkeit triangulierbar, also homöomorph zu einem (geometrischen) Simplizialkomplex. Eine weitere schöne Eigenschaft von Simplizialkomplexen besteht darin, dass sie aufgrund ihrer Abgeschlossenheit bzgl. der Teilmengenbildung gegebenenfalls durch wesentlich weniger Simplizes beschrieben werden können, als sie tatsächlich enthalten.

Zu den wichtigsten Kennzahlen von Simplizialkomplexen gehören die Betti-Zahlen, die auf allgemeinen topologischen Räumen durch die Homologie definiert werden. Während die nullte Betti-Zahl die Anzahl an Zusammenhangskomponenten angibt, ordnen die Betti-Zahlen höherer Ordnung einem Komplex vereinfacht gesagt die Anzahl der Löcher einer bestimmten Dimension zu. Formal sind Betti-Zahlen als Ränge von abstrakten Quotientenvektorräumen definiert, wodurch sich das Rechnen mit ihnen teilweise schwierig gestaltet. Die eigens nach den Komplexen benannte simpliziale Homologie liefert (als Spezialfall der Homologie für allgemeine topologische Räume) dabei einen noch vergleichsweise einfachen Zugang. Im Laufe der Arbeit werden wir wichtige Eigenschaften der Betti-Zahlen vorstellen, mit deren Hilfe es uns möglich sein wird, zentrale Grenzwertsätze herzuleiten.

Als Verallgemeinerung von Graphen haben Simplizialkomplexe vor allem in den letzten zwei Jahrzehnten große Popularität unter anderem in der stochastischen Geometrie und der räumlichen Statistik erlangt. Beispielsweise werden in [9],[22] Verallgemeinerungen des Erdős-Renyi-Graphen eingeführt, wobei die zufälligen Komplexe in [9] nochmals deutlich allgemeiner sind und die zufälligen Komplexe aus [22] als Sonderfall enthalten. In [19],[21],[23],[24],[43],[46] sind Resultate für den Čech- und/oder den Vietoris-Rips-Komplex zu finden, wobei wir auf diese beiden Komplexe noch gesondert eingehen werden. Eine Verallgemeinerung dieser beiden Komplexe durch zusätzliche Randomisierung der Simplizes wird wiederum in [7] eingeführt. Für die Modellierung von realen Phänomenen mithilfe von Graphen oder Simplizialkomplexen sind das Entwickeln und Erforschen von Zufallsgraphen und -komplexen unerlässlich. Zufällige Graphenmodelle haben, beginnend mit dem *Erdős-Renyi-Graph*, heute bereits eine unglaubliche Vielfalt zu bieten (siehe z.B. [45] für eine Auswahl), wodurch sich auch ein enormes (teilweise unausgeschöpftes) Potenzial für Modelle von Simplizialkomplexen ergibt. Bei dem Erdős-Renyi-Graphen mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ wird als Eckenmenge eine deterministische n -elementige Menge gewählt und jede Kante, unabhängig von allen anderen, mit Wahrscheinlichkeit p hinzugefügt. Auf diese Weise ergibt sich eine gewisse Homogenität des Modells, da sich aus stochastischer Sicht alle Ecken gleich verhalten. Ein Modell mit hochgradiger Heterogenität zwischen den Ecken ist das *Preferential Attachment Model* (eine genaue Definition ist in Kapitel 8 von [45] zu finden), bei dem es sich sogar um einen zufälligen Multigraphen handelt, also einen Graphen, bei dem sowohl Kanten mehrfach als auch Schleifen (Verbindungen einer Ecke mit sich selbst) auftreten können. Beim Preferential Attachment Model wird mit einer Ecke und m Schleifen um diese Ecke begonnen und anschließend in jedem Schritt eine Ecke sowie m Kanten hinzugefügt. Dabei verbindet jede neu hinzugefügte Kante die im selben Schritt hinzugefügte Ecke mit einer zufälligen anderen Ecke, wobei Ecken, die bereits an vielen Kanten beteiligt sind, bevorzugt werden. Abbildung 1.2 zeigt eine Realisierung des Erdős-Renyi-Graphen mit Parametern $n = 50$ und $p = \frac{1}{10}$ sowie eine Realisierung des Preferential Attachment Model mit $m = 3$ und ebenfalls $n = 50$ Ecken, wobei für letzteres die Definition aus [45] mit $\delta = 0$ gewählt wurde. Dort ist deutlich zu erkennen, dass sich die Kanten im Erdős-Renyi-Graphen deutlich gleichmäßiger auf die Ecken verteilen, während im Preferential Attachment Model einige wenige Ecken an deutlich mehr Kanten beteiligt sind als die restlichen Ecken.

In diesen beiden Modellen handelt es sich bei den Ecken um beliebige Objekte ohne für den Zufall relevante Eigenschaften. Völlig neue Möglichkeiten für die Konstruktion von Graphen ergeben sich,

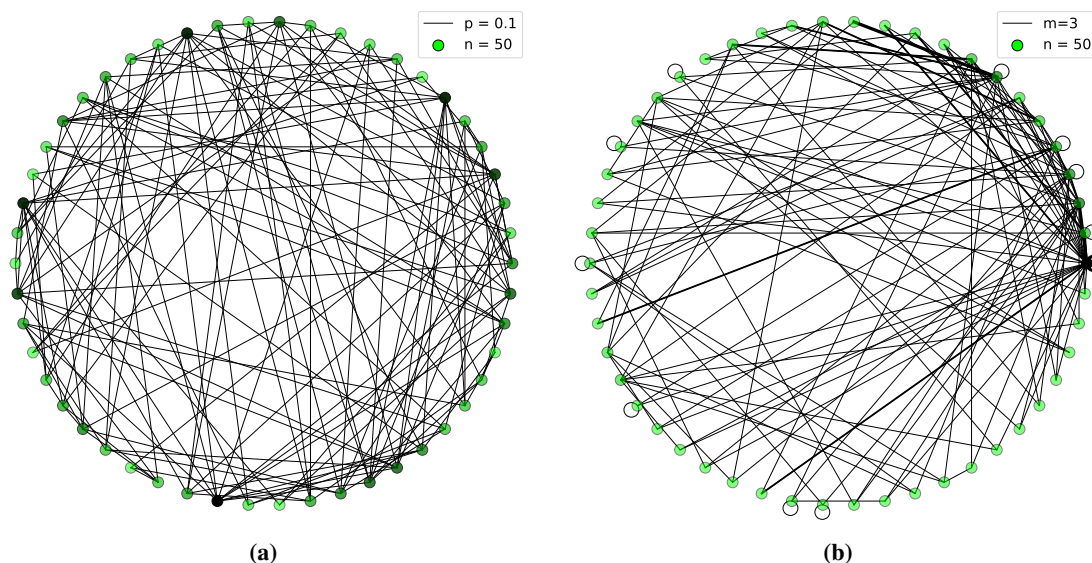


Abbildung 1.2.: Eine Realisierung des Erdős-Rényi-Graphen (a) und des Preferential Attachment Model (b), wobei Ecken mit Beteiligung an mehr Kanten dunkler und Kanten mit höherer Vielfachheit etwas dicker gezeichnet sind

wenn die Ecken dagegen beispielsweise Elemente eines metrischen Raums sind. Konstruieren wir aus einer gegebenen Eckenmenge einen Graphen, indem wir zwei Ecken genau dann miteinander durch eine Kante verbinden, wenn ihr Abstand einen festgesetzten Wert nicht überschreitet, so erhalten wir einen Graphen mit geometrischer Interpretation. Eine Randomisierung der Eckenmenge, indem diese als Menge aller Punkte eines Punktprozesses gewählt wird, liefert eines der grundlegenden Modelle für Zufallsgraphen, zu dem bereits eine umfangreiche Literatur (siehe vor allem [36]) existiert und das oftmals einfach *geometrischer Graph* oder zufälliger geometrischer Graph genannt wird. Im Gegensatz zu den Modellen aus Abbildung 1.2 liegt der Zufall hier in den Ecken, während sich die Kanten deterministisch aus den Ecken ergeben.

Der erste zufällige Simplizialkomplex, der in der Literatur nachhaltig große Aufmerksamkeit erhalten hat, ist der *Čech-Komplex*, bei dem es sich um eine Verallgemeinerung des geometrischen Graphen zu einem Simplizialkomplex handelt. In gewissem Sinne ist der Čech-Komplex der Vorreiter aller heutigen Modelle zu zufälligen Simplizialkomplexen. Der Čech-Komplex enthält eine Teilmenge $\{x_0, \dots, x_n\}$ der zugrundeliegenden Eckenmenge, die sich in einem metrischen Raum befindet, genau dann, wenn $\bigcap_{i=0}^n B(x_i, r) \neq \emptyset$ gilt, wobei $r > 0$ den Parameter des Čech-Komplexes und $B(x, r)$ die abgeschlossene Kugel um x mit Radius r bezeichnet. Schränken wir den Čech-Komplex wiederum auf Ecken und Kanten ein, so erhalten wir den zuvor konstruierten geometrischen Graphen. Die topologische Datenanalyse, die den Čech-Komplex und die simpliziale Homologie verwendet und Anwendungen in den verschiedensten Gebieten besitzt (siehe z.B. [2]), hat sich seit Beginn des Jahrtausends zu einem festen Bestandteil der statistischen Untersuchung von räumlichen Datenmengen entwickelt und dadurch neben dem Čech-Komplex auch den *Vietoris-Rips-Komplex*, der aufgrund seiner einfacheren Berechnung in Anwendungen oftmals anstelle des Čech-Komplexes verwendet wird, in der mathematischen Literatur etabliert. Im Vietoris-Rips-Komplex ist ein Sim-

plex genau dann enthalten, wenn der Durchmesser des Simplex einen festgesetzten Wert nicht überschreitet. Mittlerweile haben sich der Čech- und der Vietoris-Rips-Komplex jedoch von ihrer Verwendung innerhalb der topologischen Datenanalyse emanzipiert und werden mittlerweile für eine Vielzahl an Fragestellungen betrachtet. Beispielsweise wird in [19] ein scharfer Phasenübergang für Perkolation des Vietoris-Rips-Komplexes nachgewiesen, während in [43],[46] asymptotische Aussagen für topologische Größen der beiden Komplexe zu finden sind. In den letzten Jahren wurden immer mehr Zufallsgraphen zu Simplizialkomplexen verallgemeinert.

Für diese Arbeit fokussieren wir uns auf ein zufälliges Graphenmodell, namentlich das *Random Connection Model*, das trotz seiner Popularität und Aktualität in der Literatur noch nicht zu einem Simplizialkomplex erweitert wurde. Ursprünglich Anfang der 90er Jahre in [35] eingeführt, erscheinen bis heute ständig neue Arbeiten zum Random Connection Model (vgl. z.B. [4],[8],[10]). Das Random Connection Model verbindet die Randomisierung der Eckenmenge mit einer zufälligen Wahl der Kanten. Diese Arbeit stellt ein Modell vor, das erstmals das Random Connection Model auf natürliche Weise zu einem Simplizialkomplex verallgemeinert, und behandelt typische Fragestellungen zu Simplizialkomplexen, die im weiteren Verlauf noch konkretisiert werden. Zur Einführung des Modells liege ein Poissonprozess Φ auf einem beliebigen Borelraum \mathbb{X} mit σ -endlichem und diffusen Intensitätsmaß vor. Außerdem seien $\alpha \in \mathbb{N}$ sowie messbare und symmetrische Funktionen $\varphi_j : \mathbb{X}^{j+1} \rightarrow [0, 1]$, $j \in [\alpha]$, fixiert. Wir definieren einen zufälligen Simplizialkomplex Δ durch nachfolgendes mehrstufiges Zufallsexperiment.

- (0) Die Eckenmenge von Δ sei die Menge aller Punkte von Φ .
- (1) Entscheide für jedes Paar $x, y \in \Phi$ mit Wahrscheinlichkeit $\varphi_1(x, y)$, unabhängig vom restlichen Zufall des Modells, ob die Kante $\{x, y\}$ Teil des Komplexes Δ ist.
- (2) Entscheide für jedes Tripel $x, y, z \in \Phi$, für das die Kanten $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ bereits Teil von Δ sind, unabhängig vom restlichen Zufall des Modells, mit Wahrscheinlichkeit $\varphi_2(x, y, z)$, ob auch das Dreieck $\{x, y, z\}$ im Komplex Δ enthalten ist.
- ...
- (α) Entscheide für jede Wahl $x_{i_0}, \dots, x_{i_\alpha} \in \Phi$ von $\alpha + 1$ Punkten, für die alle (nichtleeren) Teilmengen an Punkten bereits Teil von Δ sind, unabhängig vom restlichen Zufall, mit Wahrscheinlichkeit $\varphi_\alpha(x_{i_0}, \dots, x_{i_\alpha})$, ob das α -Simplex $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_\alpha}\}$ Teil des Komplexes Δ ist.

Wir nennen die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha$ die Verbindungsfunktionen des Modells. Im Sonderfall $\alpha = 1$ erhalten wir wieder das bekannte Random Connection Model als zufälliger Graph. Typische Problemstellungen im Random Connection Model sind die Herleitung zentraler Grenzwertsätze (siehe z.B. [6],[28]) oder Fragestellungen aus der Perkolationstheorie ([4],[8],[10]). Die Perkolationstheorie untersucht, ursprünglich durch physikalische Fragestellungen motiviert, vereinfacht gesprochen die Struktur von Zusammenhangskomponenten und insbesondere das Auftreten von unendlich großen Zusammenhangskomponenten. Gerade in den letzten Jahren haben Simplizialkomplexe große Resonanz in die Literatur zur Perkolationstheorie erfahren (siehe z.B. [19],[46]). Wir werden

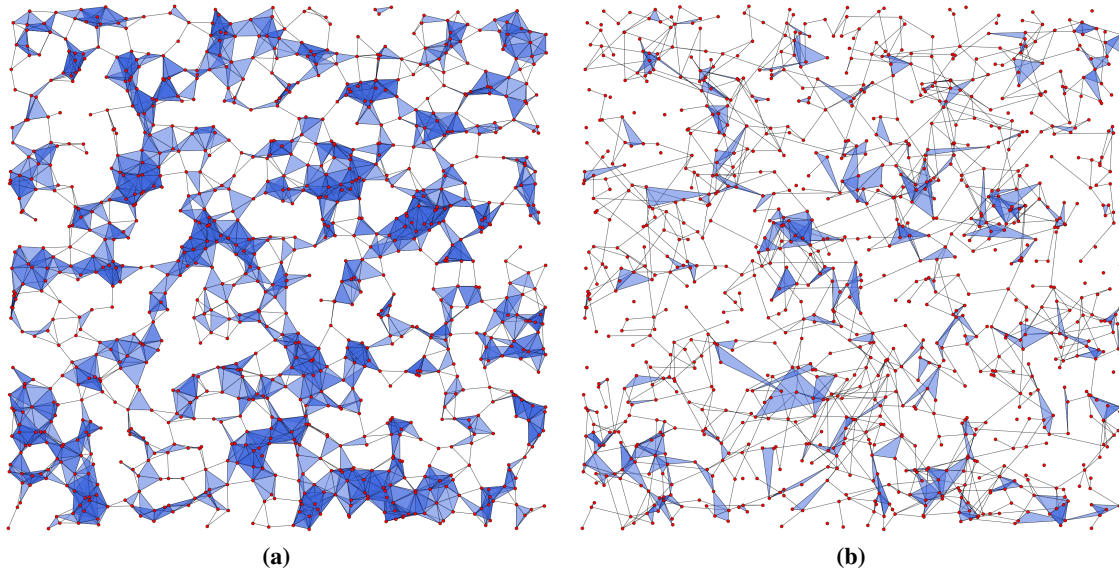


Abbildung 1.3.: (a) Eine Realisierung des Modells mit den Verbindungsfunktionen aus (1.1) und (b) eine Realisierung des Modells mit den Verbindungsfunktionen aus (1.2), jeweils basierend auf der selben Realisierung eines Poissonprozesses

in dieser Arbeit in der Lage sein, sowohl zentrale Grenzwertsätze für die Euler-Charakteristik und die Betti-Zahlen in dem hier neu eingeführten Modell zu beweisen, als auch einen sogenannten scharfen Phasenübergang für Perkolations nachzuweisen. Bevor wir auf die konkreten Resultate dieser Arbeit eingehen, wollen wir jedoch noch einen wichtigen Spezialfall des neu definierten Modells, der bereits in der Literatur zum Random Connection Model einen besonderen Stellenwert besitzt (vgl. [4],[10]), sowie einige konkrete Beispielmuster vorstellen.

Dazu fixieren wir einen beliebigen Borelraum \mathbb{A} , versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß Θ , und wählen als Grundraum $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$. Das Intensitätsmaß von Φ sei von der Form $\beta \lambda_d \otimes \Theta$ für ein $\beta > 0$ und die Verbindungsfunktionen seien translationsinvariant in der ersten Komponente. Dadurch erhalten wir eine translationsinvariante Situation, in der viele nützliche Eigenschaften des euklidischen Raums ausgenutzt werden können. Wir nennen diesen Spezialfall das *markierte stationäre Modell*. Im Fall eines einelementigen Markenraums \mathbb{A} kann der Raum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ auch direkt mit dem euklidischen Raum \mathbb{R}^d identifiziert werden, wobei wir dann vom unmarkierten stationären Modell sprechen. Tatsächlich wurde das Random Connection Model ursprünglich in diesem Rahmen ([35]) eingeführt.

Da sich vor allem zweidimensionale Simplicialkomplexe graphisch schön darstellen lassen, sei im Folgenden stets $\alpha = 2$ gewählt. Als erstes Beispielmuster wählen wir im unmarkierten stationären Modell die Verbindungsfunktionen

$$\varphi_1(x, y) = \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq r\}, \quad \varphi_2(x, y, z) \equiv p \quad (1.1)$$

für ein $r > 0$ und ein $p \in [0, 1]$. Hier wird also zunächst der geometrische Graph konstruiert und anschließend werden alle möglichen Dreiecke mit einer festen Wahrscheinlichkeit hinzugefügt. Als

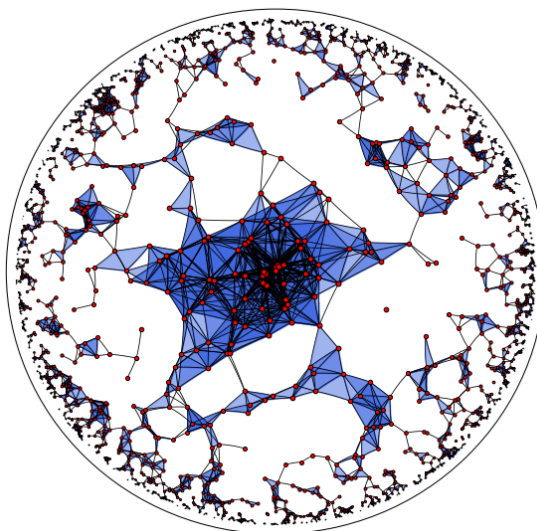


Abbildung 1.4.: Eine Realisierung des Modells im hyperbolischen Raum mit den Verbindungsfunktionen aus (1.3)

zweites Beispiel wählen wir die Verbindungsfunktionen

$$\varphi_1(x, y) = \exp(-\gamma\|x - y\|), \quad \varphi_2(x, y, z) = \exp(-\theta V(x, y, z)) \quad (1.2)$$

mit $\gamma, \theta > 0$, wobei $V(x, y, z)$ den (zweidimensionalen) Flächeninhalt des von x, y, z aufgespannten Dreiecks bezeichnet. Abbildung 1.3 zeigt Realisierungen dieser beiden Modelle innerhalb des Beobachtungsfensters $[0, 10]^2$ basierend auf derselben Realisierung eines Poissonprozesses mit den Parametern $r = p = \frac{1}{2}$ bzw. $\gamma = 4, \theta = \frac{1}{100}$. Dort ist deutlich zu erkennen, wie im Simplicialkomplex zu den Verbindungsfunktionen aus (1.1) sowohl Kanten als auch Dreiecke stets aus nahe beieinander liegenden Punkten bestehen. Im Komplex zu den Verbindungsfunktionen aus (1.2) sind dagegen auch Kanten und Dreiecke zwischen weiter entfernten Punkten zu erkennen, während es andererseits auch deutlich mehr isolierte Ecken gibt. Um die Vielfalt und die Allgemeinheit des Modells zu verdeutlichen, wollen wir auch noch nicht euklidische Beispielmolelle vorstellen. Dazu sei $\mathbb{X} = \mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| < 1\}$ der zweidimensionale hyperbolische Raum realisiert durch das Kreisscheibenmodell von Poincaré. Dabei handelt es sich um einen metrischen Raum mit der hyperbolischen Metrik

$$d_h(x, y) := \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)} \right).$$

In diesem Raum sind Geraden entweder euklidische Geraden, die durch den Ursprung verlaufen, oder Kreise, die senkrecht auf dem Einheitskreis stehen. Für eine ausführliche Beschreibung des hyperbolischen Raumes sowie eine Einführung in die hyperbolische Geometrie verweisen wir auf [37] und dort insbesondere auf Abschnitt 4.5. Als Intensitätsmaß des Poissonprozesses Φ wählen

wir das Maß definiert durch

$$\lambda(\cdot) := \beta \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \cosh(t) \mathbb{1}\{(t, \phi) \in \cdot\} dt d\phi$$

für ein $\beta > 0$, wobei (t, ϕ) für $t > 0$ den eindeutigen hyperbolischen Punkt mit hyperbolischem Abstand t zum Ursprung und Winkel ϕ (aus den euklidischen Polarkoordinaten des Punktes bzgl. einer beliebigen festen Achse) bezeichnet. Wir können auch hier (wie auf jedem metrischen Raum) die Verbindungsfunktionen analog zu (1.1) definieren durch

$$\varphi_1(x, y) = \mathbb{1}\{d_h(x, y) \leq r\}, \quad \varphi_2(x, y, z) \equiv p. \quad (1.3)$$

Im Vergleich zu dem Simplicialkomplex aus Abbildung 1.3 (a) haben sich also nicht die Verbindungsfunktionen, sondern der zugrundeliegende Raum verändert. In Abbildung 1.4 ist eine Realisierung des Komplexes mit den Verbindungsfunktionen aus (1.3) für $\beta = 30, r = \frac{2}{5}, p = \frac{1}{2}$ zu sehen, in der sich die unterschiedliche Geometrie des hyperbolischen Raumes erahnen lässt.

Schließlich wollen wir noch eine andere Möglichkeit vorstellen, um mithilfe von geeigneten Verbindungsfunktionen geometrische Eigenschaften des zugrunde liegenden Raums zu veranschaulichen. Dazu identifizieren wir jeden Punkt $z \in \mathbb{H}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit der eindeutigen Gerade $H(z)$ durch z in \mathbb{H}^2 , sodass z von allen Punkten in $H(z)$ den geringsten Abstand zum Ursprung hat. Dann lässt sich der Punktprozess Φ mit einem Geradenprozess auf \mathbb{H}^2 identifizieren, d.h. einem Punktprozess auf dem Raum der Geraden von \mathbb{H}^2 . Als Verbindungsfunktionen wählen wir hier

$$\varphi_1(x, y) = \mathbb{1}\{H(x) \cap H(y) \neq \emptyset\}, \quad \varphi_2(x, y, z) \equiv p. \quad (1.4)$$

Abbildung 1.5 zeigt eine Realisierung eines solchen Geradenprozesses und eine auf dieser Realisierung basierende Realisierung des Simplicialkomplexes mit den Verbindungsfunktionen aus (1.4) für $\beta = \frac{11}{5}$ und $p = \frac{1}{2}$. Hier lässt sich erahnen, dass die Kanten, an denen ein fest gewählter Punkt beteiligt ist, zumindest grob in die selbe Richtung wie die zu dem Punkt assoziierte Gerade verlaufen. Würden wir im euklidischen Raum \mathbb{R}^2 eine zu (1.4) analoge Definition der Kantenfunktion wählen, so wären \mathbb{P} -fast sicher je zwei Ecken von Δ durch eine Kante miteinander verbunden.

Im Folgenden diskutieren wir weitere wichtige *Spezialfälle des Modells*. Wir erhalten sowohl das α -Skelett des Čech-Komplexes als auch das α -Skelett des Vietoris-Rips-Komplexes durch geeignete Wahl der Verbindungsfunktionen als Sonderfall. Dabei bezeichnet das m -Skelett eines Simplicialkomplex dessen Einschränkung auf Simplexe der Dimension kleiner gleich m . Für den Čech-Komplex zum Parameter $r > 0$ wähle man dabei auf einem metrischen Raum \mathbb{X} die Verbindungsfunktionen

$$\varphi_j(x_0, \dots, x_j) = \mathbb{1}\left\{\bigcap_{i=0}^j B(x_i, r) \neq \emptyset\right\}, \quad j \in [\alpha].$$

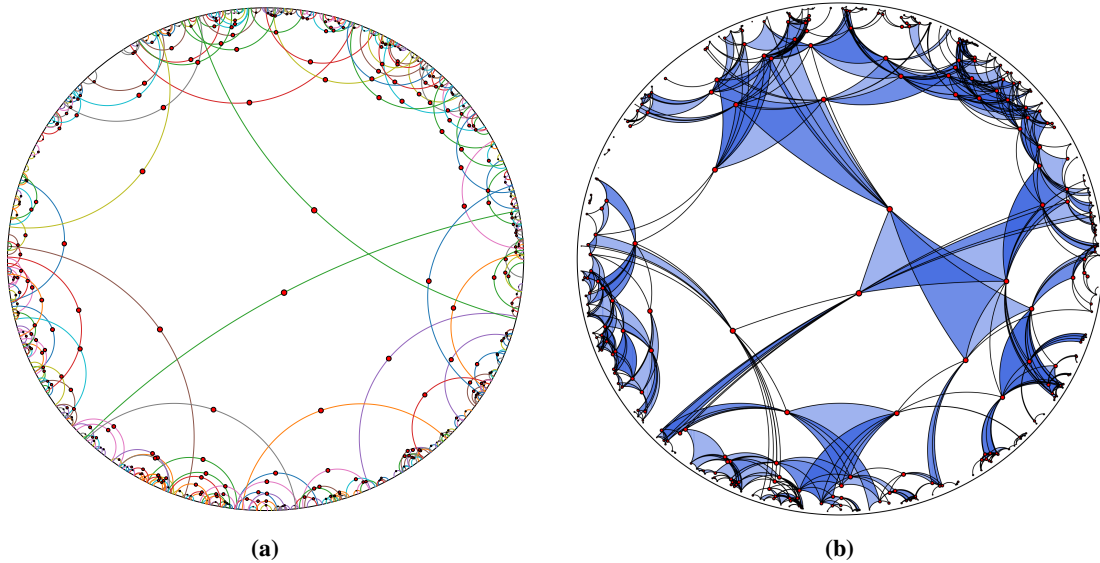


Abbildung 1.5.: Eine Realisierung eines hyperbolischen Geradenprozess (a) und eine auf dieser Realisierung basierende Realisierung des Modells (b) mit den Verbindungsfunktionen aus (1.4)

Das α -Skelett des Vietoris-Rips-Komplexes erhalten wir dagegen durch Wahl der Funktionen

$$\varphi_j(x_0, \dots, x_j) = \mathbb{1}\{\text{diam}\{x_0, \dots, x_j\} \leq r\}, \quad j \in [\alpha].$$

Sowohl auf die zentralen Grenzwertsätze für Betti-Zahlen aus Kapitel 5 als auch auf die Resultate aus Kapitel 6 zu lassen sich auf diese beiden Simplizialkomplexe übertragen.

Außerdem wollen wir erwähnen, dass es einen direkten Zusammenhang zwischen dem hier eingeführten zufälligen Simplizialkomplex und dem *Booleschen Modell*, einem der Vorzeigemodelle der stochastischen Geometrie, gibt. Dieser Zusammenhang sowie das Boolesche Modell selbst werden in Abschnitt 3.5 genau erläutert. Für eine ausführliche Einführung des Booleschen Modells verweisen wir auf Kapitel 4 in [39]. Beispielhaft wollen wir [12],[20],[47] für Arbeiten zum Booleschen Modell nennen. In [20] werden zentrale Grenzwertsätze für geometrische Funktionale im Booleschen Modell bewiesen. Dagegen beschäftigen sich [12],[47] mit Perkolation im Booleschen Modell. Im Verlauf der Arbeit zeigen wir neue Resultate für das Boolesche Modell. Insbesondere erhalten wir zentrale Grenzwertsätze für Betti-Zahlen im Booleschen Modell. Die zentralen Grenzwertsätze in [20] lassen sich beispielsweise nicht für Betti-Zahlen anwenden, da diese nicht additiv sind. Weitere Komplexe (bzw. deren α -Skelette) aus der Literatur, die wir als Spezialfall des hier eingeführten Modells erhalten, sind z.B. die verallgemeinerten Čech- und Vietoris-Rips-Komplexe aus [7]. Die α -Skelette der in [18] betrachteten Komplexe lassen sich ebenfalls durch geeignete Wahl der Verbindungsfunktionen konstruieren, wobei die Verbindungsfunktionen dann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Durch das Arbeiten mit allgemeinen Verbindungsfunktionen in dem in dieser Arbeit eingeführten Modell erhalten wir einerseits viele bekannte Modelle aus der Literatur als Spezialfall. Andererseits können wir beim Herleiten von Resultaten genau die dafür notwendigen Eigenschaften der Verbindungsfunktionen herausarbeiten.

Zum Abschluss der Einleitung stellen wir die Gliederung der Arbeit vor und weisen auf die wichtigsten Resultate der Arbeit hin. Kapitel 2 stellt die *stochastischen und topologischen Grundlagen* für die späteren Resultate zur Verfügung. Ein besonderer Fokus liegt dabei auf der Poissonprozesstheorie, die für diese Arbeit unverzichtbar ist.

Anschließend beginnt Kapitel 3 mit der *mathematischen Definition* des soeben vorgestellten Modells und der Herleitung erster Resultate. Dabei werden unter anderem Formeln für erste und zweite Momente von wichtigen Größen des Simplizialkomplexes hergeleitet und Varianzgleichungen für Poissonfunktionale auf das Modell übertragen. Im letzten Abschnitt des Kapitels wird das bereits erwähnte markierte stationäre Modell eingeführt und für spätere Betrachtungen wichtige Eigenschaften erläutert.

Die wohl am häufigsten untersuchten Größen von Simplizialkomplexen sind die Euler-Charakteristik (siehe z.B. [7],[43] für zentrale Grenzwertsätze) und die Betti-Zahlen (siehe z.B. [24],[6],[46] für zentrale Grenzwertsätze in verschiedenen Modellen). Kapitel 4 widmet sich der *Euler-Charakteristik* und liefert quantitative zentrale Grenzwertsätze für verschiedene asymptotische Szenarien unter sehr geringen Anforderungen an die Verbindungsfunktionen. Dabei übertragen wir einen Ansatz zur Normalapproximation von Poissonfunktionalen aus [29], der in [28] für das Random Connection Model verwendet wird, auf das Modell für zufällige Simplizialkomplexe. Mithilfe dieses Ansatzes können obere Schranken für den Abstand eines standardisierten Poissonfunktionals zu einer standardnormalverteilten Zufallsvariable bzgl. der Wasserstein- und der Kolmogorov-Metrik hergeleitet werden. Ein Großteil der Arbeit in diesem Kapitel besteht dann darin, diese oberen Schranken geeignet abzuschätzen. Dabei wollen wir darauf hinweisen, dass fast alle Resultate aus Kapitel 4 auf einem beliebigen Borelraum \mathbb{X} gezeigt werden können.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns schließlich mit den *Betti-Zahlen* im markierten stationären Modell, für die im Random Connection Model erstmals in [6] zentrale Grenzwertsätze nachgewiesen worden sind. Die dort verwendeten Methoden bilden auch die Grundlage für dieses Kapitel. Auf diese Weise kommt ein im Vergleich zu Kapitel 4 völlig anderer Ansatz zur Normalapproximation von Poissonfunktionalen zum Einsatz. Am Ende von Abschnitt 5.1 werden die wichtigsten Unterschiede sowie Vor- und Nachteile beider Ansätze erläutert. Im Mittelpunkt von Kapitel 5 steht Theorem 5.8, bei dem es sich um einen zentralen Grenzwertsatz für eine Klasse von Funktionalen handelt, die in einem gewissen Sinne asymptotisch stabilisierend sind und eine Momentenbedingung erfüllen. Wir werden nachweisen, dass sowohl die Betti-Zahlen als auch einige andere typische Funktionale aus der Literatur zu zufälligen Graphen und Simplizialkomplexen zu dieser Klasse gehören. Da wir einen im Vergleich zu [6] noch allgemeineren Rahmen verwenden, liefert dieses Kapitel auch neue Resultate für das Random Connection Model als zufälliger Graph.

Nachdem sich die Kapitel 4 und 5 mit der Herleitung von zentralen Grenzwertsätzen beschäftigt haben, betrachten wir in Kapitel 6 Fragestellungen aus der *Perkolationstheorie* für Simplizialkomplexe. Im ersten Abschnitt des Kapitels werden wir klassische Resultate aus der Perkolationstheorie für zufällige Graphen auf das Modell für zufällige Simplizialkomplexe übertragen. Im Anschluss leiten wir einen sog. scharfen Phasenübergang für Perkolation (Theorem 6.16) im markierten stationären Modell her. Gerade in den letzten Jahren tauchen viele Resultate von diesem Typ in verschiedenen Perkulationsmodellen auf (vgl. Theorem 1.2 in [12], Theorem 1 in [19], Theorem 8.2 in

[30], Theorem 3.1 in [47]). Dabei verwenden wir zur Herleitung des scharfen Phasenübergangs typische Methoden und Resultate aus der Perkolationstheorie, wie die OSSS-Ungleichung sowie die Margulis-Russo-Formel, die beispielsweise für den Vietoris-Rips-Komplex in [19] angewendet werden. Dabei werden wir notwendige Eigenschaften der Verbindungsfunktionen herausarbeiten, deren Relevanz im Laufe des Kapitels ersichtlich wird. Da sowohl der Čech- als auch der Vietoris-Rips-Komplex diese Eigenschaften erfüllen, erhalten wir einen scharfen Phasenübergang für diese beiden Komplexe wieder als Sonderfall. Dabei ist zu beachten, dass das verwendete Konzept für Perkolation von q -Simplizes von Simplizialkomplexen nur vom $(q + 1)$ -Skelett eines Komplexes abhängt. Auch für Perkolation im bekannten Random Connection Model als zufälliger Graph ist ein scharfer Phasenübergang in der Allgemeinheit, wie ihn Theorem 6.16 (für $q = 0$) bereitstellt, neu.

KAPITEL 2

GRUNDLAGEN

In diesem Kapitel werden die stochastischen und topologischen Grundlagen für diese Arbeit gelegt. Fundamental ist dabei vor allem die Punktprozessentheorie und insbesondere die Poissonprozessentheorie, wobei wir für eine ausführliche Einführung auf [31] verweisen.

Hier und im Folgenden liege stets ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vor, auf dem alle in dieser Arbeit auftretenden Zufallselemente definiert seien. Falls nichts anderes explizit genannt wird, seien unterschiedliche Zufallselemente, die im Laufe der Arbeit auftreten, stets stochastisch unabhängig.

2.1. PUNKTPROZESSTHEORIE

Um das Modell in einem möglichst allgemeinen Rahmen definieren zu können, sei $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ während der gesamten Arbeit stets ein Borelraum in nachfolgendem Sinne. Ein messbarer Raum $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ heißt Borelraum, falls es eine messbare Bijektion zwischen \mathbb{Y} und einer messbaren Teilmenge U des Einheitsintervalls $[0, 1]$ mit messbarer Inversen gibt (vgl. Definition 6.1 in [31]). Eine solche Abbildung nennen wir einen Borelisomorphismus zu \mathbb{Y} . Des Weiteren bezeichne $\mathbb{N}(\mathbb{X})$ die Menge aller Maße auf \mathbb{X} , die als abzählbare Summe von endlichen Zählmaßen auf \mathbb{X} dargestellt werden können. Dabei meinen wir mit einem Zählmaß ein Maß, welches nur Werte in \mathbb{N}_0 annimmt. Wie in der Literatur üblich versehen wir $\mathbb{N}(\mathbb{X})$ mit der kleinsten σ -Algebra $\mathcal{N}(\mathbb{X})$, sodass für alle $B \in \mathcal{X}$ die Auswertungsabbildung

$$\mathbb{N}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \eta(B)$$

messbar ist. Ein Punktprozess Φ auf oder in \mathbb{X} ist ein Zufallselement in $\mathbb{N}(\mathbb{X})$, also eine messbare Abbildung der Form $\Phi : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{N}(\mathbb{X}), \mathcal{N}(\mathbb{X}))$. Die Punktprozessentheorie liefert viele Resultate

in einem noch allgemeineren Rahmen, nämlich wenn $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ sogar ein beliebiger messbarer Raum ist. Der hier gewählte Rahmen deckt jedoch bereits ein sehr vielfältiges Spektrum an Grundräumen ab. Beispielsweise handelt es sich bei jedem Polnischen Raum um einen Borelraum (vgl. z.B. Theorem 1.8 in [25]). Wir nennen einen Punktprozess Φ einfach, falls

$$\Phi(\{x\}) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{X}$$

\mathbb{P} -fast sicher gilt. Das Intensitätsmaß eines Punktprozesses Φ ist erklärt durch das Maß $\mathbb{E}[\Phi(B)]$, $B \in \mathcal{X}$. Eine der grundlegendsten Aussagen über Punktprozesse liefert die Campbell-Formel. Dazu definieren wir zu einer messbaren Funktion $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit Positiv- bzw. Negativteil f^+, f^- wie in [31] das Integral

$$\int_{\mathbb{X}} f(x) \lambda(dx) := \int_{\mathbb{X}} f^+(x) \lambda(dx) - \int_{\mathbb{X}} f^-(x) \lambda(dx),$$

falls der Ausdruck auf der rechten Seite nicht von der Form $\infty - \infty$ ist. Andernfalls sei das Integral als 0 definiert.

Theorem 2.1 (Campbell-Formel, Proposition 2.7 in [31]). *Es sei Φ ein Punktprozess auf \mathbb{X} mit Intensitätsmaß λ und $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ eine messbare Funktion. Dann ist $\int_{\mathbb{X}} f(x) \Phi(dx)$ wohldefiniert und messbar. Ist f außerdem nichtnegativ oder integrierbar, so gilt*

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} f(x) \Phi(dx) \right] = \int_{\mathbb{X}} f(x) \lambda(dx).$$

Als Basis für die Definition des Modells dient ein Poissonprozess auf \mathbb{X} gemäß nachfolgender Definition.

Definition 2.2 (Poissonprozesse). *Es sei λ ein σ -endliches Maß auf \mathbb{X} . Ein Punktprozess Φ auf \mathbb{X} mit Intensitätsmaß λ heißt Poissonprozess, wenn er die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt.*

- (i) *Für jedes $B \in \mathcal{X}$ besitzt die Zufallsvariable $\Phi(B)$ eine Poissonverteilung mit Parameter $\lambda(B)$.*
- (ii) *Für endlich viele paarweise disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}$, $m \in \mathbb{N}$, sind die Zufallsvariablen $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_m)$ stochastisch unabhängig.*

Im Folgenden stellen wir fundamentale und für diese Arbeit unverzichtbare Resultate zu Poissonprozessen vor, von denen wir im Laufe der Arbeit immer wieder profitieren werden. Zunächst existiert zu jedem σ -endlichen Maß λ auf \mathbb{X} ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß λ , der durch sein Intensitätsmaß bereits in Verteilung festgelegt ist, wie Theorem 3.6 und Proposition 3.2 in [31] zeigen. Auch die Einfachheit eines Poissonprozesses kann durch eine einfache Eigenschaft seines Intensitätsmaß charakterisiert werden. Gemäß Proposition 6.9 in [31] ist ein Poissonprozess nämlich genau dann einfach, wenn sein Intensitätsmaß diffus ist. Dabei heißt ein Maß η auf \mathbb{X} diffus, wenn $\eta(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt. Andererseits heißt ein Punkt $x \in \mathbb{X}$ mit $\eta(\{x\}) > 0$ ein Atom von η . Für $W \in \mathcal{X}$ bezeichnen wir die Einschränkung eines Maßes η auf W mit $\eta_W := \eta \cap W$. Ist

Φ ein Poissonprozess, so ist auch Φ_W ein Poissonprozess (vgl. Theorem 5.2 in [31]). Auf einem Borelraum kann jeder Punktprozess Φ mit σ -endlichem Intensitätsmaß dargestellt werden durch

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\tau} \delta_{X_j} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad (2.1)$$

mit Zufallselementen X_1, X_2, \dots in \mathbb{X} und einer $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariablen τ (vgl. Korollar 6.5 in [31]). Hier bezeichnet δ_x das Dirac-Maß in einem Punkt $x \in \mathbb{X}$, welches nur die Werte 0 und 1 annimmt, wobei zweiteres genau dann der Fall ist, wenn die eingesetzte Menge den Punkt x enthält. Ein wichtiges Resultat im Zusammenhang mit Poissonprozessen bildet die sogenannte Mecke-Formel, deren Formulierung allerdings der Einführung der faktoriellen Momentenmaße eines Punktprozesses bedarf. Es sei Φ ein Punktprozess darstellbar durch (2.1). Dann definieren wir für $m \in \mathbb{N}$ durch

$$\Phi^{(m)} := \sum_{i_1, \dots, i_m \in [\tau]}^{\neq} \delta_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})}$$

einen Punktprozess auf \mathbb{X}^m . Hier wird die Summation nur über Tupel von Indizes mit paarweise verschiedenen Einträgen gebildet. Das Intensitätsmaß von $\Phi^{(m)}$ heißt m -tes faktorielles Momentenmaß von Φ . Die Mecke-Formel (Theorem 4.1 in [31]) liefert eine Charakterisierung von Poissonprozessen mithilfe der faktoriellen Momentenmaße, wobei in nachfolgendem Theorem direkt die multivariate Mecke-Formel formuliert wird.

Theorem 2.3 (Mecke-Formel, Theorem 4.4 in [31]). *Es sei Φ ein Punktprozess auf \mathbb{X} mit σ -endlichem Intensitätsmaß λ . Dann ist Φ genau dann ein Poissonprozess, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede messbare Abbildung $f : \mathbb{X}^m \times \mathbb{N}(\mathbb{X}) \rightarrow [0, \infty]$ die Gleichung*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}^m} f(x_1, \dots, x_m, \Phi) \Phi^{(m)} d(x_1, \dots, x_m) \right] \\ = \int_{\mathbb{X}^m} \mathbb{E} \left[f \left(x_1, \dots, x_m, \Phi + \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \right) \right] \lambda^m d(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

gilt.

Ein wichtiges Konzept im Zusammenhang mit Punktprozessen mit zahlreichen Anwendungen bilden sogenannte Markierungen von Punktprozessen, die sich auch für das in dieser Arbeit betrachtete Modell als extrem nützlich erweisen werden. Wir führen Markierungen hier nicht in ihrer vollen Allgemeinheit ein, sondern beschränken uns auf sogenannte unabhängige Markierungen. Dazu liege ein weiterer messbarer Raum $(\mathbb{M}, \mathcal{M})$, der sogenannte Markenraum, und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathbb{M} vor. Außerdem sei $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallselementen in \mathbb{M} mit Verteilung \mathbb{Q} und Φ wieder ein Punktprozess auf \mathbb{X} mit Intensitätsmaß λ und der Darstellung (2.1). Dabei sei die Folge $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ insbesondere auch unabhängig von Φ . Dann

heißt der Punktprozess

$$\Psi := \sum_{j=1}^{\tau} \delta_{(X_j, Y_j)}$$

eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung von Φ . Für eine solche \mathbb{Q} -Markierung Ψ von Φ und eine messbare Menge $\mathcal{W} \in \mathcal{X}$ bezeichnen wir mit $\Psi_{\mathcal{W}}$ stets die Einschränkung von Ψ auf $\mathcal{W} \times \mathbb{M}$. Proposition 5.5 in [31] zeigt, dass es sich bei Ψ um einen Punktprozess mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \mathbb{Q}$ handelt. Ist Φ ein Poissonprozess, so gilt dies gemäß des anschließend formulierten Markierungssatzes auch für Ψ .

Theorem 2.4 (Markierungssatz, Theorem 5.6 in [31]). *Es sei Ψ eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung eines Poissonprozesses Φ auf \mathbb{X} mit σ -endlichem Intensitätsmaß λ . Dann ist Ψ ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \mathbb{Q}$.*

Schließlich wollen wir noch kurz auf den Sonderfall $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ eingehen. Für einen Punktprozess Φ sei $\Phi + t$, $t \in \mathbb{R}^d$, definiert durch $(\Phi + t)(B) := \Phi(B + t)$ mit $B + t := \{b + t \mid b \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Ein Punktprozess Φ auf \mathbb{R}^d heißt stationär, wenn $\Phi + t \stackrel{d}{=} \Phi$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ gilt. Proposition 8.3 in [31] besagt, dass ein Poissonprozess Φ auf \mathbb{R}^d mit $\mathbb{E}[\Phi([0, 1]^d)] < \infty$ genau dann stationär ist, wenn sein Intensitätsmaß von der Form $\beta \lambda_d$ für ein $\beta \geq 0$ ist.

2.2. SIMPLIZIALKOMPLEXE UND SIMPLIZIALE HOMOLOGIE

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die wichtigsten Grundlagen aus der Punktprozessentheorie für die Einführung und Untersuchung des Modells gelegt worden sind, liefert dieser Abschnitt die notwendigen Begriffe und Resultate aus der Topologie. Für ausführliche Einführungen in die Topologie verweisen wir auf [13] und [16]. Da das später eingeführte Modell einen zufälligen Simplizialkomplex beschreiben wird, beginnen wir mit der Einführung dieses Begriffes. Simplizialkomplexe sind vergleichsweise einfache topologische Räume, welche bereits durch ihre kombinatorische Struktur festgelegt sind und mit denen es sich in Anwendungen dadurch sehr gut arbeiten lässt. Im Umgang mit Simplizialkomplexen empfiehlt es sich zwischen geometrischen und abstrakten Simplizialkomplexen zu differenzieren. Für den gesamten Abschnitt sei dabei $d \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Zunächst ist ein geometrisches n -Simplex σ für $n \in \mathbb{N}_0$ die konvexe Hülle von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Dabei bezeichnen wir die Punkte v_0, \dots, v_n als die Ecken von σ und nennen n die Dimension von σ . Die konvexe Hülle einer nichtleeren (echten) Teilmenge von $\{v_0, \dots, v_n\}$ heißt (echte) Seite von σ . Wir bezeichnen die Menge aller Seiten der Dimension $\dim(\sigma) - 1$ eines Simplex σ mit $\partial\sigma$. Mithilfe dieser einfachen geometrischen Objekte können bereits geometrische Simplizialkomplexe definiert werden.

Definition 2.5 (Simplizialkomplexe). (i) *Ein geometrischer Simplizialkomplex K ist eine Familie von geometrischen Simplizes in \mathbb{R}^d , sodass folgende beiden Eigenschaften erfüllt sind.*

- a) *Für jedes Simplex $\sigma \in K$ sind auch all dessen Seiten in K enthalten.*
- b) *Der Schnitt zweier Simplizes $\sigma, \rho \in K$ ist entweder leer oder eine Seite von beiden Simplizes.*

- (ii) Ein abstrakter Simplicialkomplex A über einer Eckenmenge V ist eine Familie von endlichen nichtleeren Teilmengen von V , die abgeschlossen bzgl. der Teilmengenbildung ist und alle einelementigen Teilmengen von V enthält.
- (iii) Die Elemente eines abstrakten Simplicialkomplexes K heißen (abstrakte) Simplizes. Für $\sigma \in K$ sei $\dim(\sigma) := |\sigma| - 1$, wobei $|\sigma|$ die Kardinalität von σ ist. Die Dimension eines Simplicialkomplexes ist definiert durch $\dim(K) := \sup\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in K\}$.

Die zusätzliche Forderung, dass ein abstrakter Simplicialkomplex alle einelementigen Teilmengen seiner Eckenmenge enthält, sorgt dafür, dass die Eckenmenge eines Simplicialkomplexes eindeutig ist. Die hier gewählte Definition lässt insbesondere auch unendlich dimensionale Simplicialkomplexe zu, also Simplicialkomplexe, die für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mindestens ein n -Simplex beinhalten. Auf der anderen Seite ist ein eindimensionaler Simplicialkomplex ein Graph, auch wenn in der Graphentheorie ein Graph meist durch zwei Objekte beschrieben wird, nämlich durch eine Eckenmenge V und eine Kantenmenge $E \subseteq \{e \subseteq V \mid 2 = |e|\}$. Im Laufe der Arbeit werden wir nur abstrakte Simplicialkomplexe mit abzählbaren Eckenmengen betrachten. Außerdem werden wir oft auf den Zusatz abstrakt verzichten und stattdessen lediglich von Simplicialkomplexen oder noch kürzer von Komplexen sprechen.

Die Elemente eines abstrakten Simplex nennen wir Ecken des Simplex, während wir Simplizes der Dimension 0,1,2 bzw. 3 als Ecken, Kanten, Dreiecke bzw. Tetraeder bezeichnen. Diese Bezeichnungen kommen direkt von ihren geometrischen Analoga. Auch wenn es sich bei abstrakten Simplizes um Mengen handelt, empfiehlt es sich für Simplizes eine eigene Notation zu verwenden. Für ein abstraktes n -Simplex σ , bestehend aus den Ecken v_0, \dots, v_n , schreiben wir $[v_0, \dots, v_n] := \sigma$. Dabei verzichten wir im Fall $n = 0$ auch noch auf die eckigen Klammern, d.h. wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen einem Element $v \in V$ und dem 0-Simplex, welches nur die Ecke v enthält. Damit umgehen wir auch eine mögliche Verwechslungsgefahr mit der Notation $[m] := \{1, \dots, m\}$ für $m \in \mathbb{N}$. Im Folgenden erklären wir wichtige Begriffe und Konzepte im Umgang mit (abstrakten) Simplicialkomplexen.

Analog zur Graphentheorie bezeichnen wir mit einem Kantenweg in einem Komplex K eine Folge v_1, \dots, v_m von Ecken mit $[v_i, v_{i+1}] \in K$ für alle $i \in [m-1]$. Auch den Fall einer unendlichen Folge v_1, v_2, \dots lassen wir hierbei zu. Wir nennen einen solchen Kantenweg selbstvermeidend, falls alle Ecken des Kantenwegs paarweise verschieden sind, d.h. $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ gilt. Als Verallgemeinerung des Kantengrads einer Ecke definieren wir für einen abstrakten Simplicialkomplex K über einer Menge V und $v \in V$ den n -ten Simplexgrad $\deg_n(v)$ von v in K durch

$$\deg_n(v, K) := |\{\sigma \in K \mid v \in \sigma, \dim(\sigma) = n\}|, \quad (2.2)$$

also als die Anzahl aller n -Simplizes von K , die v enthalten. Für $n = 1, 2, 3$ sprechen wir vom Kanten-, Dreiecks- bzw. Tetraedergrad von v . Wie für viele mathematische Objekte gibt es auch für Simplicialkomplexe einen Isomorphiebegriff, der Simplicialkomplexe mit gleicher kombinatorischer Struktur zusammenfasst. Zwei abstrakte Simplicialkomplexe K und L über Eckenmengen V_K und V_L heißen isomorph (Schreibweise: $K \cong L$), wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_K \rightarrow V_L$ gibt

mit der Eigenschaft

$$\sigma \in K \iff f(\sigma) \in L.$$

Wir nennen eine solche Abbildung f einen Isomorphismus zwischen K und L . Anschaulich gesprochen sind zwei abstrakte Simplizialkomplexe isomorph, wenn sie durch Umbenennung ihrer Ecken auseinander hervorgehen. Außerdem gilt, dass zwei geometrische Simplizialkomplexe K, L , deren abstrakte Versionen isomorph sind, selbst homöomorph sind, d.h. es gibt eine bijektive stetige Abbildung von $|K|$ nach $|L|$ mit stetiger Inversen (vgl. z.B. Seite 154 und die vorherige Diskussion in [32]), wobei $|K|$ die Vereinigung aller Simplizes von K bezeichnet. Aus einem geometrischen Simplizialkomplex K können wir in natürlicher Weise einen abstrakten Simplizialkomplex A konstruieren, indem wir jedes Simplex durch seine Eckenmenge ersetzen. In dieser Situation heißt K eine geometrische Realisierung von A . Ist A' ein zu A isomorpher abstrakter Simplizialkomplex, so nennen wir eine geometrische Realisierung von A auch eine geometrische Realisierung von A' . Die Frage nach der Umkehrung, also nach der Existenz einer geometrischen Realisierung eines abstrakten Simplizialkomplexes, ist tatsächlich schon vollständig beantwortet. Ein abstrakter Simplizialkomplex besitzt nämlich genau dann eine geometrische Realisierung, wenn er abzählbar (d.h. er enthält höchstens abzählbar viele Simplizes), lokal endlich (d.h. jede Ecke ist nur Teil von endlich vielen Kanten und somit von endlich vielen Simplizes) und endlich dimensional ist. Dies ist beispielsweise in [32] als Problem 5.16 zu finden. Das Geometric Realization Theorem in [13] (Seite 73) zeigt, dass jeder endliche k -dimensionale abstrakte Simplizialkomplex eine geometrische Realisierung in \mathbb{R}^{k+1} besitzt. Ein topologischer Raum wird triangulierbar genannt, wenn er homöomorph zu einem geometrischen Simplizialkomplex ist. Triangulierbare Räume besitzen also die topologische Struktur von Simplizialkomplexen. In diesem Sinne lassen sich Simplizialkomplexe also verwenden, um gegebenenfalls komplizierte topologische Räume vergleichsweise einfach darzustellen. Nach den Theoremen 5.36 und 5.37 in [32] sind beispielsweise alle Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 und 3 triangulierbar.

Wenn wir im Laufe der Arbeit von Simplizialkomplexen sprechen, meinen wir damit zunächst abstrakte Komplexe wohl wissend, dass alle betrachteten Simplizialkomplexe (zumindest \mathbb{P} -fast sicher) stets eine geometrische Realisierung besitzen. Sind wir nur an der Isomorphieklasse eines endlichen Simplizialkomplexes interessiert, so genügt es Komplexe mit Eckenmenge $[r]$ für ein $r \in \mathbb{N}_0$ zu betrachten. Da es zu festen r nur endlich viele Komplexe mit dieser Eckenmenge gibt, existieren insbesondere auch nur endlich viele Isomorphieklassen von Simplizialkomplexen mit einer fixen endlichen Eckenanzahl. Insgesamt existieren also nur abzählbar viele Isomorphieklassen von endlichen Simplizialkomplexen.

Definition 2.6. (i) Zu $r \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\Gamma_r := \{K \mid K \text{ ist Simplizialkomplex mit Eckenmenge } [r]\}, \quad \Gamma := \bigcup_{r \in \mathbb{N}_0} \Gamma_r.$$

Da es sich bei Γ um eine abzählbare Menge handelt, sei Γ dabei stets mit der diskreten Topologie, also der Potenzmenge als Topologie, versehen.

- (ii) Für $K \in \Gamma$ nennen wir die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von K den Grad $\deg(K)$ von K und die Anzahl der Ecken von K die Ordnung von K .
- (iii) Zu $K \in \Gamma$ sei $[K]$ die Isomorphieklasse von K .

Ein Komplex $K \in \Gamma_r$ besitzt also die Ordnung r und es gilt $[K] \subseteq \Gamma_r$. Viele Größen von Simplizialkomplexen, die wir im Laufe der Arbeit betrachten werden, hängen nur von deren Isomorphieklasse ab. Bevor wir einige davon einführen, stellen wir jedoch noch wichtige Konstruktionen von Simplizialkomplexen vor. Ist K ein Simplizialkomplex mit Eckenmenge V und $V' \subseteq V$ eine Teilmenge der Eckenmenge, so nennen wir den Komplex, bestehend aus allen Simplizes von K , deren Ecken in V' liegen, den von V' induzierten Teilkomplex von K und notieren diesen durch $K[V']$. Ganz allgemein heißt ein Simplizialkomplex L Teilkomplex von K , falls alle Simplizes von L auch in K liegen. In diesem Fall schreiben wir $L \subseteq K$. Für einen Graphen, also einen eindimensionalen Simplizialkomplex, definieren wir den Flaggenkomplex $\text{Fl}(G)$ von G durch

$$\text{Fl}(G) := \{\sigma \subseteq V \mid 1 \leq |\sigma| < \infty, \rho \in G \text{ für alle } \rho \subseteq \sigma \text{ mit } |\rho| = 2\}.$$

Der Flaggenkomplex eines Graphen G geht also aus G hervor, indem alle Simplizes hinzugefügt werden, deren eindimensionale Teilsimplizes in G liegen. Diese Konstruktion wird in der Literatur oftmals verwendet, um einen Graphen zu einem Simplizialkomplex zu verallgemeinern. Beispielsweise wird in [22] der Flaggenkomplex des Erdős-Renyi-Graphen betrachtet. Außerdem handelt es sich bei dem Vietoris-Rips-Komplex um den Flaggenkomplex des geometrischen Graphen. Umgekehrt entsteht das j -Skelett $S_j(K)$, $j \in \mathbb{N}_0$, eines Simplizialkomplexes K aus diesem durch Entfernen aller Simplizes, deren Dimension größer als j ist, es gilt also

$$S_j(K) := \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) \leq j\}.$$

Im nächsten Schritt führen wir einige wichtige Größen von Simplizialkomplexen ein. Zunächst seien

$$F_j(K) := \{\sigma \in K \mid \dim(\sigma) = j\}, \quad f_j(K) := |F_j(K)|$$

die Menge bzw. die Anzahl aller j -Simplizes eines Komplexes K . Zwei der in der Literatur zu Simplizialkomplexen am häufigsten betrachteten Größen sind die Euler-Charakteristik und die Betti-Zahlen. Erstere ist für einen endlichen Simplizialkomplex K erklärt als die alternierende Summe

$$\chi(K) := \sum_{i=0}^{\dim(K)} (-1)^i f_i(K). \quad (2.3)$$

Während die Euler-Charakteristik also recht simpel definiert werden kann, bedarf die Einführung der Betti-Zahlen einiger Vorbereitung. Die Idee hinter der Definition der Betti-Zahlen ist das Zählen der topologischen Merkmale einer bestimmten Dimension. Mit nulldimensionalen Merkmalen sind dabei Zusammenhangskomponenten gemeint, die wie folgt definiert sind. Auf der Eckenmenge eines Komplexes K kann eine Äquivalenzrelation dadurch definiert werden, dass zwei Ecken v, w als

äquivalent erklärt werden, wenn es einen Kantenweg von v nach w gibt. Für eine solche Äquivalenzklasse bezeichnen wir die Einschränkung von K auf Simplizes mit Ecken in dieser Äquivalenzklasse als eine Zusammenhangskomponente von K . Oftmals wird auch die Äquivalenzklasse selbst als Zusammenhangskomponente bezeichnet. Für $p \in \mathbb{N}$ dagegen ist ein p -dimensionales topologisches Merkmal anschaulich gesprochen ein p -dimensionales Loch. Ein Minimalbeispiel für einen topologischen Raum mit genau einem p -dimensionalen (und sonst keinem) Loch ist die p -dimensionale Einheitssphäre im \mathbb{R}^{p+1} . Wir formalisieren diese Beschreibung, um die Betti-Zahlen definieren zu können. Als Basis hierfür dienen die sogenannten Kettengruppen, die wir wegen der einfacheren Berechenbarkeit, wie in Anwendungen üblich, mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 einführen. Hier bezeichnet \mathbb{Z}_2 den zweielementigen Körper, bestehend lediglich aus dem Null- und dem Einselement. Wir fixieren einen endlichen Simplizialkomplex und definieren die p -te Kettengruppe $C_p(K)$ als den \mathbb{Z}_2 -Vektorraum, für den die Menge aller p -Simplizes von K eine Basis bilden. Elemente von $C_p(K)$ heißen p -Ketten und können als formale Summen von p -Simplizes von K mit Koeffizienten in \mathbb{Z}_2 angesehen werden, d.h. für $F_p(K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ gilt

$$C_p(K) := \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i \mid a_i \in \mathbb{Z}_2 \right\}. \quad (2.4)$$

Wegen der Wahl von \mathbb{Z}_2 als Koeffizientenring, kann $C_p(K)$ mit der Potenzmenge von $F_p(K)$ identifiziert werden. Für ein p -Simplex σ ist der Rand $\partial_p \sigma$ von σ definiert als die Kette zugehörig zur Menge aller Seiten von σ der Dimension $p - 1$, d.h. es gilt

$$\partial_p[v_0, \dots, v_p] := \sum_{j=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p].$$

Hier meint $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$ das Simplex mit Eckenmenge $\{v_0, \dots, v_p\} \setminus \{v_j\}$. Man beachte den formalen Unterschied zur zuvor eingeführten Notation von $\partial\sigma$. Durch lineare Fortsetzung lässt sich so für jedes $p \in \mathbb{N}_0$ ein Vektorraumhomomorphismus $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ definieren, wobei wir $C_{-1}(K) := \{0\}$ als den trivialen Vektorraum und $\partial_0 \equiv 0$ setzen. Mithilfe dieser Randhomomorphismen genannten Abbildungen ergibt sich insgesamt der Kettenkomplex

$$\dots \longrightarrow C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} \{0\},$$

der die Eigenschaft $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ erfüllt, wie sich direkt durch die Definition der Randhomomorphismen nachweisen lässt. Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$B_p(K) := \text{bild}(\partial_{p+1}) \subseteq \text{kern}(\partial_p) =: Z_p(K).$$

Die p -te Homologiegruppe von K ist definiert als der Quotientenvektorraum

$$H_p(K) := Z_p(K) \setminus B_p(K).$$

Die Bezeichnung Gruppe kommt daher, dass in der Topologie die Koeffizienten in der Definition

(2.4) der Kettengruppen meistens (und ursprünglich) aus \mathbb{Z} gewählt werden, wodurch sich im Allgemeinen keine Vektorräume ergeben. Für Anwendungen hat dies allerdings keine Vorteile, weswegen dort die Koeffizienten meist aus dem einfachsten aller Körper \mathbb{Z}_2 gewählt werden. Die p -te Betti-Zahl $\beta_p(K)$ von K ist jetzt gegeben durch

$$\beta_p(K) := \dim(H_p(K)) = \dim(Z_p(K)) - \dim(B_p(K)).$$

Die Homologiegruppen und damit die Betti-Zahlen lassen sich auch auf ganz allgemeinen topologischen Räumen mithilfe der sogenannten singulären Homologie definieren. Eine oft verwendete Einführung in die singuläre, aber auch die simpliziale, Homologie ist in Kapitel 2 von [16] zu finden. Dadurch sind die Betti-Zahlen auch beispielsweise für polykonvexe Mengen (endliche Vereinigungen von konvexen Körpern) definiert, die oftmals in der stochastischen Geometrie betrachtet werden. Allerdings sind die Betti-Zahlen nicht additiv, was den Umgang mit den Betti-Zahlen im Allgemeinen erschwert. Allerdings erfüllen die Betti-Zahlen eine nützliche Eigenschaft, die als schwache Additivität angesehen werden kann. Sind Z_1, \dots, Z_m die Zusammenhangskomponenten eines endlichen Simplizialkomplexes K , so gilt

$$\beta_p(K) = \sum_{i=1}^m \beta_p(Z_i). \quad (2.5)$$

Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Definition der Betti-Zahlen, da es sich bei den Homologiegruppen um die direkte Summe der Homologiegruppen der einzelnen Zusammenhangskomponenten handelt (vgl. Proposition 2.6 in [16]). Eine weitere für diese Arbeit extrem wichtige Eigenschaft der Betti-Zahlen liefert nachfolgendes Lemma.

Lemma 2.7 (z.B. Lemma 2.2 in [46]). *Für endliche Simplizialkomplexe K, L mit $L \subseteq K$ gilt*

$$|\beta_p(K) - \beta_p(L)| \leq (f_p(K) - f_p(L)) + (f_{p+1}(K) - f_{p+1}(L)).$$

Der Homomorphiesatz angewendet auf den Randhomomorphismus ∂_p eines beliebigen endlichen Simplizialkomplexes L liefert zunächst die Identität $\dim(C_p(L)) = \dim(Z_p(L)) + \dim(B_{p-1}(L))$. Durch das Hinzufügen eines p -Simplex zu L erhöht sich die linke Seite dieser Gleichung um Eins, weswegen entweder $\dim(Z_p(L))$ oder $\dim(B_{p-1}(L))$ um Eins größer werden muss. Aus der Definition der Betti-Zahlen folgt damit direkt, dass durch das Hinzufügen eines p -Simplex zu einem Simplizialkomplex entweder die p -te Betti um Eins erhöht oder die $(p-1)$ -te Betti-Zahl um Eins verringert wird, während alle anderen Betti-Zahlen unverändert bleiben. Mithilfe dieser Überlegung lässt sich direkt die Abschätzung aus Lemma 2.7 ableiten. Außerdem kann mithilfe dieser Eigenschaft auch direkt die Euler-Poincaré-Formel (siehe z.B. Seite 69 in [13])

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim(K)} (-1)^p \beta_p(K) \quad (2.6)$$

nachgewiesen werden, die einen Zusammenhang zwischen der Euler-Charakteristik und den Betti-

Zahlen herstellt.

Zum Abschluss des Abschnittes führen wir noch eine Notation im Umgang mit Simplizialkomplexen ein, die unseres Wissens so oder in einer ähnlichen Form noch nicht verwendet wird, sich allerdings als extrem hilfreich herausstellen wird. Für eine Menge $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ von abstrakten Simplizes (mit endlicher oder abzählbarer Indexmenge I) bezeichne

$$K = \langle \sigma_i \mid i \in I \rangle \quad (2.7)$$

den kleinsten Simplizialkomplex, der alle Simplizes σ_i enthält, d.h. für jeden weiteren Simplizialkomplex L mit $\sigma_i \in L$ für alle $i \in I$ gilt stets $K \subseteq L$. Dieser Komplex K ist eindeutig bestimmt und besteht aus allen Teilsimplizes der Simplizes σ_i , d.h. es gilt

$$K = \{ \rho \mid \emptyset \neq \rho \subseteq \sigma_i \text{ für ein } i \in I \}.$$

Wir nennen K , den von den Simplizes σ_i , $i \in I$, erzeugten Simplizialkomplex. Die Darstellung in (2.7) erlaubt es außerdem, analog zur üblichen Mengennotation, auf der rechten Seite Bedingungen an die Simplizes zu stellen, von denen der Komplex erzeugt wird. Wir verwenden hier auch die abkürzende Schreibweise $\partial\sigma$ für die Teilsimplizes von σ der Dimension $\dim(\sigma) - 1$. Diese Schreibweisen erleichtern die Notation im Umgang Simplizialkomplexen ungemein, da gegebenenfalls sehr viele Simplizes nicht aufgeschrieben werden müssen. Beispielsweise kann der Simplizialkomplex (bzw. ein Vertreter seiner Isomorphieklasse) aus Abbildung 3.1 auf diese Weise dargestellt werden durch

$$K = \langle [1, 2, 3], \partial[3, 4, 5], [5, 6, 7] \rangle.$$

2.3. NORMALAPPROXIMATION VON POISSONFUNKTIONALEN

Dieser Abschnitt dient zur Bereitstellung grundlegender Konzepte zur Normalapproximation von Poissonfunktionalen. Dafür betrachten wir einen Poissonprozess Φ auf \mathbb{X} mit σ -endlichem Intensitätsmaß λ . Ein Poissonfunktional ist eine Zufallsvariable der Form $f(\Phi)$ mit einer messbaren Abbildung $f : \mathbb{N}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{R}$. Im späteren Verlauf der Arbeit werden wir aus einem Poissonprozess einen Simplizialkomplex konstruieren und interessieren uns für solche Abbildungen f , die nur von diesem Simplizialkomplex abhängen. Bevor wir auf konkrete Methoden zur Normalapproximation von Poissonfunktionalen eingehen, bedarf es noch der Einführung von geeigneten Metriken, um den Abstand von (Verteilungen von) reellen Zufallsvariablen zu messen. In dieser Arbeit verwenden wir hierfür den Wasserstein-Abstand d_W und den Kolmogorov-Abstand d_K , bei denen es sich um zwei der am meist verwendeten Metriken in diesem Zusammenhang handelt. Der Wasserstein-Abstand $d_W(Z_1, Z_2)$ zweier reeller Zufallsvariablen Z_1, Z_2 ist definiert durch

$$d_W(Z_1, Z_2) := \sup_{h \in \text{Lip}(1)} \left| \mathbb{E} [h(Z_1) - h(Z_2)] \right|,$$

wobei $\text{Lip}(1)$ die Menge aller Lipschitz-stetigen Funktionen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Lipschitzkonstante kleiner gleich 1 bezeichnet. Des Weiteren ist der Kolmogorov-Abstand von Z_1 und Z_2 gegeben durch

$$d_K(Z_1, Z_2) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(Z_1 \leq t) - \mathbb{P}(Z_2 \leq t)|.$$

Hier und im gesamten Verlauf der Arbeit bezeichne N stets eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Nachfolgende Proposition liefert eine wichtige Abschätzung des Abstandes einer \mathbb{Z} -wertigen Zufallsvariablen und N bzgl. der soeben vorgestellten Metriken.

Proposition 2.8. *Es existieren Konstanten $C_W, C_K > 0$, sodass für jede \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariable Z mit $\mathbb{E}[Z^2] < \infty$ und $\mathbb{V}(Z) \geq 1$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} d_W\left(\frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}, N\right) &\geq \frac{C_W}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}, \\ d_K\left(\frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}, N\right) &\geq \frac{C_K}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}, \end{aligned}$$

gelten.

Die erste Aussage kann in [41] für eine poissonverteilte Zufallsvariable gefunden werden, kann aber analog für eine beliebige \mathbb{Z} -wertige Zufallsvariable gezeigt werden. Die zweite Aussage für den Kolmogorov-Abstand stammt aus [42] (siehe (2.27) dort). Proposition 2.8 kann verwendet werden, um die Optimalität von Konvergenzraten zu zeigen. Die beiden Metriken können auch gegeneinander abgeschätzt werden, falls eine der beiden Zufallsvariablen Z_1, Z_2 eine durch eine Konstante $C > 0$ beschränkte Lebesgue-Dichte besitzt, denn dann gilt nach Proposition 1.2 in [38]

$$d_K(Z_1, Z_2) \leq \sqrt{2C d_W(Z_1, Z_2)}.$$

Dies deckt insbesondere den Fall ab, dass eine der beiden Zufallsvariablen eine Standardnormalverteilung besitzt. Im Laufe dieser Arbeit verwenden wir folgende Symbole, um das asymptotische Verhalten von Funktionen $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in Beziehung zu setzen

$$\begin{aligned} g(x) = \mathcal{O}(h(x)) &: \Leftrightarrow \exists C > 0, x_0 \geq 0, \text{ sodass für alle } x > x_0 \text{ gilt } |g(x)| \leq C|h(x)|, \\ g(x) = \Omega(h(x)) &: \Leftrightarrow \exists C > 0, x_0 \geq 0, \text{ sodass für alle } x > x_0 \text{ gilt } |g(x)| \geq C|h(x)|. \end{aligned}$$

Im Laufe der Arbeit werden wir verschiedene Ansätze zur Normalapproximation von Poissonfunktionalen verwenden. Die Grundlage für einen solchen Ansatz bilden die Theoreme 1.1 und 1.2 aus [29], die eine obere Schranke für den Abstand eines standardisierten Poissonfunktionals und einer standardnormalverteilten Zufallsvariable bzgl. d_W und d_K liefern. Essentiell dafür ist das Konzept von Differenzenoperatoren (vgl. Abschnitt 18.1 in [31]), die anschaulich gesprochen die Änderungsraten eines Poissonfunktionals unter dem Hinzufügen von deterministischen Punkten zum Poissonprozess messen. Für ein Poissonfunktional der Form $F = f(\Phi)$ und $x \in \mathbb{X}$ ist der

Differenzenoperator erster Ordnung im Punkt x definiert als die Zufallsvariable

$$D_x F := f(\Phi + \delta_x) - f(\Phi).$$

Iterativ definieren wir die Differenzenoperatoren höherer Ordnung, indem wir für $k \geq 2$ und $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$

$$D_{x_1, \dots, x_k}^k F := D_{x_1} D_{x_2, \dots, x_k}^{k-1} F \quad (2.8)$$

setzen. Diese Differenzenoperatoren erfüllen die sehr nützliche Darstellung

$$D_{x_1, \dots, x_k}^k F = \sum_{J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} f\left(\Phi + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right)$$

(vgl. Gleichung (18.3) in [31]). Da die Theoreme 1.1 und 1.2 aus [29] fundamental für diese Arbeit sind, werden sie als zusammengefasstes Resultat kurz formuliert.

Theorem 2.9. *Es sei $F = f(\Phi)$ ein Poissonfunktional mit $\mathbb{E}[F^2] < \infty$, $\mathbb{E}[F] = 0$, $\mathbb{V}(F) = 1$ und*

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[(D_y F)^2] \lambda(dy) < \infty.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} d_W(F, N) &\leq \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3, \\ d_K(F, N) &\leq \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \tilde{\gamma}_3 + \tilde{\gamma}_4 + \tilde{\gamma}_5 + \tilde{\gamma}_6, \end{aligned}$$

wobei die Größen $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_6$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_1 &:= 2 \left[\int_{\mathbb{X}^3} \mathbb{E} \left[(D_{y_1} F)^2 (D_{y_2} F)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[(D_{y_1, y_3}^2 F)^2 (D_{y_2, y_3}^2 F)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(y_1, y_2, y_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\gamma}_2 &:= \left[\int_{\mathbb{X}^3} \mathbb{E} \left[(D_{y_1, y_3}^2 F)^2 (D_{y_2, y_3}^2 F)^2 \right] \lambda^3(d(y_1, y_2, y_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\gamma}_3 &:= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} [|D_y F|^3] \lambda(dy), \\ \tilde{\gamma}_4 &:= \frac{1}{2} \mathbb{E} [\tilde{F}^4]^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} [(D_y F)^4]^{\frac{3}{4}} \lambda(dy), \\ \tilde{\gamma}_5 &:= \left[\int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} [(D_y F)^4] \lambda(dy) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \tilde{\gamma}_6 &:= \left[\int_{\mathbb{X}^2} 6 \mathbb{E} [(D_{y_1} F)^4]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} [(D_{y_1, y_2}^2 F)^4]^{\frac{1}{2}} + 3 \mathbb{E} [(D_{y_1, y_2}^2 F)^4] \lambda^2(d(y_1, y_2)) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

DAS MODELL FÜR HÖHERDIMENSIONALE SIMPLIZIALKOMPLEXE

In diesem Kapitel führen wir das Modell in einem sehr allgemeinen Rahmen ein und weisen erste Resultate nach. Dabei profitieren wir von der sehr allgemeinen Gültigkeit der Poissonprozesstheorie, wie sie in [31] gefunden werden kann. Bevor wir jedoch zur Definition des Modells kommen, führen wir zunächst den Raum der stetigen Simplizialkomplexe ein, mit dessen Hilfe wir den zufälligen Simplizialkomplex des Modells beschreiben werden. Der Begriff der stetigen Simplizialkomplexe rührt daher, dass der Grundraum \mathbb{X} (aller möglichen Ecken des Komplexes) für Anwendungen stets überabzählbar ist. Dies wird zwar nirgends explizit gefordert, allerdings arbeiten wir stets mit einem diffusen Maß λ auf \mathbb{X} , was im Fall eines endlichen oder abzählbaren Grundraums nur das Nullmaß sein kann. Also ist dieser Fall völlig uninteressant. In Abschnitt 3.3 werden Formeln für erste und zweite Momente von verschiedenen Größen, wie der Euler-Charakteristik, bereitgestellt. Anschließend übertragen wir in Abschnitt 3.4 wichtige Varianzgleichungen für Poissonprozesse, die für Resultate in späteren Kapiteln fundamental sein werden, auf die vorliegende Situation. Schließlich betrachten wir in Abschnitt 3.5 das in der Einleitung bereits erwähnte markierte stationäre Modell, das bereits in der Literatur zum Random Connection Model als zufälliger Graph einen besonderen Stellenwert besitzt. Wir fixieren für die gesamte Arbeit ein $\alpha \in \mathbb{N}$, das die maximale Dimension des zufälligen Simplizialkomplexes sein wird. Außerdem sei während der gesamten Arbeit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ stets ein Borelraum im Sinne der Definition von Abschnitt 2.1 mit einem fest gewählten Borelisomorphismus $\phi : \mathbb{X} \rightarrow U$.

3.1. DER RAUM DER STETIGEN SIMPLIZIALKOMPLEXE

In diesem Abschnitt führen wir den Raum der Simplizialkomplexe ein, der für die gesamte Arbeit verwendet wird. Dazu betrachten wir zunächst die Menge

$$\mathbb{X}^{[n]} := \{\sigma \subseteq \mathbb{X} \mid n = |\sigma|\}$$

aller n -elementigen Teilmengen von \mathbb{X} bzw. aller $(n-1)$ -Simplizes mit Ecken in \mathbb{X} . Um $\mathbb{X}^{[n]}$ mit einer Topologie (und somit auch mit einer σ -Algebra) auszustatten, wollen wir eine Metrik auf $\mathbb{X}^{[n]}$ definieren. Dazu verwenden wir den Borelisomorphismus $\phi : \mathbb{X} \rightarrow U$, der durch

$$d_{\mathbb{X}}(x, y) := |\phi(x) - \phi(y)|, \quad x, y \in \mathbb{X},$$

eine Metrik auf \mathbb{X} sowie durch

$$x <_{\mathbb{X}} y \iff \phi(x) < \phi(y)$$

eine Ordnung auf \mathbb{X} induziert. Insbesondere gilt dann für alle $x, y \in \mathbb{X}$ genau eine der Aussagen $x = y, x <_{\mathbb{X}} y$ bzw. $y <_{\mathbb{X}} x$. Eine in der stochastischen Geometrie oft verwendete Metrik ist die sogenannte Hausdorffmetrik, die auf $\mathbb{X}^{[n]}$ die Form

$$d_H(X, Y) := \max \left\{ \max_{i \in [n]} \min_{j \in [n]} d_{\mathbb{X}}(x_i, y_j), \max_{j \in [n]} \min_{i \in [n]} d_{\mathbb{X}}(x_i, y_j) \right\}$$

für $X = \{x_1, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathbb{X}^{[n]}$ annimmt. Wir werden uns allerdings für eine andere Metrik entscheiden, die, wie wir sehen werden, für $n \geq 3$ im Allgemeinen nicht äquivalent zur Hausdorffmetrik ist und durch deren Wahl $\mathbb{X}^{[n]}$ selbst wieder ein Borelraum sein wird. Dazu definieren wir für $X = \{x_1, \dots, x_n\}, Y = \{y_1, \dots, y_n\} \in \mathbb{X}^{[n]}$

$$d_S(X, Y) := \min_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{X}}(x_{\pi(i)}, y_i).$$

Für $X = \{x_1 <_{\mathbb{X}} \dots <_{\mathbb{X}} x_n\}, Y = \{y_1 <_{\mathbb{X}} \dots <_{\mathbb{X}} y_n\}$ gilt die Darstellung

$$d_S(X, Y) = \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{X}}(x_i, y_i).$$

Nach Identifizierung von $\mathbb{X}^{[n]}$ mit $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{X}^n \mid x_1 <_{\mathbb{X}} \dots <_{\mathbb{X}} x_n\}$ und durch den Borelisomorphismus ϕ schließlich mit $U_n := \{(u_1, \dots, u_n) \in U^n \mid u_1 < \dots < u_n\}$ sehen wir, dass d_S als Metrik auf U_n der von der Summennorm induzierten Metrik entspricht. Damit ist d_S insbesondere äquivalent zur euklidischen Metrik und erzeugt deshalb die selbe Topologie. Da U_n , versehen mit der euklidischen Metrik, als messbare Teilmenge des Borelraums \mathbb{R}^n selbst wieder ein Borelraum ist, erhalten wir mit bei der Wahl von d_S (als Metrik auf $\mathbb{X}^{[n]}$) einen Borelraum $\mathbb{X}^{[n]}$. Wir zeigen, dass die beiden Metriken d_H, d_S im Allgemeinen nicht äquivalent sind.

Lemma 3.1. *Die Metriken d_H, d_S auf $\mathbb{X}^{[n]}$ sind für $n = 1$ identisch, für $n = 2$ äquivalent und für $n \geq 3$ im Allgemeinen nicht äquivalent.*

Beweis. Wir identifizieren $\mathbb{X}^{[n]}$ wie zuvor mit $U_n := \{(u_1, \dots, u_n) \in U^n \mid u_1 < \dots < u_n\}$ und sehen d_H, d_S als Metriken auf U_n an. Es seien $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in U_n \subseteq [0, 1]^n$. Zunächst gilt für jedes $j \in [n]$ die Abschätzung

$$\min_{i \in [n]} |u_j - v_i| \leq |u_i - v_i| \leq \max_{i \in [n]} |u_i - v_i| \leq d_S(u, v).$$

Also ist das erste Maximum aus der Definition von d_H nach oben gegen d_S beschränkt. Aus Symmetriegründen gilt dies auch für das zweite Maximum und somit folgt $d_H \leq d_S$. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial, während für $n = 2$ die Abschätzung $d_S \leq 2d_H$ gilt, was sich beispielsweise direkt durch eine Fallunterscheidung bzgl. der Lage der Punkte u_1, u_2, v_1, v_2 verifizieren lässt. Um zu zeigen, dass die beiden Metriken im Allgemeinen nicht äquivalent sind, fixieren wir $n \geq 3$ und nehmen o.B.d.A. $U = [0, 1]$ an, denn es reicht ein Gegenbeispiel zu finden. Zu $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ wählen wir $u_1, \dots, u_{n-1}, v_1 \in [0, \delta]$ und $u_n, v_2, \dots, v_n \in [1 - \delta, 1]$. Dann gilt $d_H(u, v) \leq \delta$, aber wegen $n \geq 3$

$$d_S(u, v) \geq |u_2 - v_2| \geq 1 - 2\delta.$$

Wir nehmen an es gäbe ein $C > 0$ mit $d_S \leq C \cdot d_H$. Wählen wir $N \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $N - 2 > C$ gilt, so liefert die vorangegangene Konstruktion für $\delta = \frac{1}{N}$ zwei Punkte $u, v \in [0, 1]^n$ mit

$$d_S(u, v) \geq \frac{N - 2}{N} \geq (N - 2) d_H(u, v) > C d_H(u, v),$$

was ein Widerspruch zur Annahme darstellt. \square

Es kann natürlich Borelräume \mathbb{X} geben, auf denen die beiden Metriken für alle $n \in \mathbb{N}$ äquivalent sind. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn \mathbb{X} endlich (und mit der Potenzmenge als σ -Algebra versehen) ist (auch wenn dieser Fall uninteressant ist), denn auf endlichen Mengen sind alle Metriken äquivalent und erzeugen die diskrete Topologie. Als Raum aller Simplizes über \mathbb{X} der Dimension höchstens α wählen wir die disjunkte Vereinigung

$$S := S(\mathbb{X}) := \mathbb{X}^{[1]} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{X}^{[\alpha]}$$

versehen mit der Summentopologie, die wie folgt definiert ist. Bezeichnet \mathcal{T}_i die Topologie auf $\mathbb{X}^{[i]}$, so ist die Summentopologie auf S gegeben durch

$$\{U_1 \cup \dots \cup U_n \mid U_i \in \mathcal{T}_i \text{ für alle } i \in [n]\}.$$

Auch bei S handelt es sich wieder um einen Borelraum, da es sich ganz allgemein bei der disjunkten Vereinigung $\mathbb{X}_1 \sqcup \mathbb{X}_2$ zweier Borelräume wieder um einen Borelraum handelt. Dazu seien $\phi_i : \mathbb{X}_i \rightarrow U_i, i \in [2]$, die zugehörigen Borelisomorphismen. Wir definieren einen Borelisomorphismus

$\phi : \mathbb{X}_1 \sqcup \mathbb{X}_2 \rightarrow \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$ mit

$$\tilde{U}_1 := \left\{ \frac{1}{2}u \mid u \in U_1 \right\}, \quad \tilde{U}_2 := \left\{ \frac{1}{2}(u+1) \mid u \in U_2 \right\}$$

durch

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\phi_1(x), & x \in \mathbb{X}_1, \\ \frac{1}{2}(\phi_2(x) + 1), & x \in \mathbb{X}_2. \end{cases}$$

Dabei können wir (durch Skalierung von ϕ_1) o.B.d.A. $1 \notin \text{bild}(\phi_1)$ und somit $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$ annehmen. Damit sind alle Vorbereitungen getroffen, um den Raum der Simplizialkomplexe einzuführen.

Definition 3.2 (Der Raum der stetigen Simplizialkomplexe). (i) *Der Raum $\mathbb{N}_K(S)$ der stetigen Simplizialkomplexe ist die Menge aller Zählmaße auf S der Form*

$$\kappa = \sum_{i=1}^{\kappa(S)} \delta_{\sigma_i}, \quad \sigma_i \in S, \sigma_i \neq \sigma_j \text{ für alle } i, j \in [\kappa(S)] \text{ mit } i \neq j, \quad (3.1)$$

versehen mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{N}_K(S) := \{E \cap \mathbb{N}_K(S) \mid E \in \mathcal{N}(S)\}$.

(ii) *Für einen Simplizialkomplex $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ und eine Menge $W \in \mathcal{X}$ sei κ_W die Einschränkung von κ auf $W^{[1]} \sqcup \dots \sqcup W^{[\alpha]}$.*

(iii) *Es sei $\mathbb{N}_K^f(S) := \{\kappa \in \mathbb{N}_K(S) \mid \kappa(S) < \infty\}$ die Menge aller endlichen Simplizialkomplexe.*

Da in der Darstellung (3.1) nur paarweise verschiedene Simplizes auftauchen, lässt sich jedes Element $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ mithilfe der Darstellung (3.1) durch eine (höchstens abzählbare) Menge von Simplizes, nämlich $C(\kappa) := \{\sigma_i \mid i \in [\kappa(S)]\}$, beschreiben. Wir interpretieren ein Element $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ als den kleinsten Simplizialkomplex, der in $C(\kappa)$ enthalten ist. Dieser besteht aus allen Simplizes $\sigma \in S$, deren Teilsimplizes (insbesondere auch σ selbst) Atome von κ sind. Konkret ist dieser Simplizialkomplex gegeben durch

$$\left\{ \sigma_i \mid i \in [\kappa(S)], \rho \in C(\kappa) \text{ für alle } \emptyset \neq \rho \subset \sigma_i \right\}.$$

Dadurch können verschiedene Elemente von $\mathbb{N}_K(S)$ den selben Simplizialkomplex repräsentieren. Beispielsweise repräsentieren alle $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ mit $\kappa(\mathbb{X}^{[1]}) = 0$ den leeren Komplex. Wir übertragen alle Begriffe und Notationen für Simplizialkomplexe auf Elemente von $\mathbb{N}_K(S)$ und differenzieren im Verlaufe der Arbeit nicht mehr zwischen einem Simplizialkomplex und einem Element von $\mathbb{N}_K(S)$. Ein zufälliger Simplizialkomplex in \mathbb{X} ist also eine messbare Abbildung $\Lambda : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{N}_K(S), \mathcal{N}_K(S))$ und somit insbesondere ein Punktprozess auf einem Borelraum.

3.2. DEFINITION DES MODELLS

Wir wollen einen zufälligen Simplizialkomplex in \mathbb{X} definieren, indem wir aus einem markierten Poissonprozess Ψ auf $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$ mithilfe einer messbaren Abbildung $(\mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}), \mathcal{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})) \rightarrow (\mathbb{N}_K(\mathcal{S}), \mathcal{N}_K(\mathcal{S}))$ einen zufälligen Simplizialkomplex $T(\Psi)$ konstruieren. Dabei ist \mathbb{M} ein Markenraum, den wir im weiteren Verlauf noch konkret angeben werden. Zuvor fixieren wir ein σ -endliches und diffuses Maß λ auf \mathbb{X} und einen Poissonprozess Φ mit Intensitätsmaß $\beta\lambda$ für ein festes $\beta > 0$, das wir die Intensität von Φ nennen werden. Die Verteilung des Poissonprozesses Φ legt zwar dessen Intensitätsmaß eindeutig fest, nicht aber die Intensität in dem hier verwendeten Sinne, da das Maß λ nicht in irgendeinem Sinne normiert ist. Die Punkte von Φ werden die Ecken des zufälligen Simplizialkomplexes bilden, weswegen wir Φ den Grundprozess des Modells nennen. Wegen der Diffusität handelt es sich bei Φ um einen einfachen Punktprozess. Für $W \in \mathcal{X}$ verwenden wir die abkürzende Notation $|W| := \lambda(W)$. Außerdem bezeichnen wir mit

$$\mathcal{B}_f(\mathbb{X}) := \{W \in \mathcal{X} \mid 0 < |W| < \infty\}$$

die Menge aller messbaren Mengen mit endlichem positiven Maß. Elemente von $\mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ werden wir im Verlaufe der Arbeit als Beobachtungsfenster bezeichnen. Außerdem sei auf \mathbb{X}^2 eine zweistellige Relation $<$ gegeben mit den nachfolgenden Eigenschaften.

- (i) Die Relation $<$ ist transitiv.
- (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{X}^2 \mid x < y\}$ ist eine messbare Teilmenge von \mathbb{X}^2 .
- (iii) Die Aussage $x < x$ ist falsch für alle $x \in \mathbb{X}$.
- (iv) Für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt $\lambda([x]) = 0$, wobei die Menge $[x] := \mathbb{X} \setminus \{y \in \mathbb{X} \mid x < y \text{ oder } y < x\}$ aus allen Elementen von \mathbb{X} besteht, die bzgl. $<$ unvergleichbar mit x sind.

Dabei sagen wir zwei Punkte $x, y \in \mathbb{X}$ sind bzgl. $<$ miteinander vergleichbar, falls entweder $x < y$ oder $y < x$ gilt. Die Existenz einer solchen Relation stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, wie in Bemerkung 3.1.1 in [34] erklärt wird. Tatsächlich kann dies auch durch die Wahl der Relation $<_{\mathbb{X}}$ aus Abschnitt 3.1 eingesehen werden. In diesem Fall ist Bedingung (iv) äquivalent zur Diffusität des Maßes λ . Allerdings lassen wir die Möglichkeit offen eine andere Relation auf \mathbb{X} zu wählen. Für Φ existiert gemäß Korollar 6.5 in [31] eine Darstellung

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\tau'} \delta_{X'_i} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad (3.2)$$

mit Zufallselementen X'_1, X'_2, \dots in \mathbb{X} und einer $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariablen τ' . Anforderung (iv) an die Relation $<$ stellt sicher, dass \mathbb{P} -fast sicher alle Punkte des Prozesses Φ bzgl. $<$ vergleichbar sind. Nach Proposition 3.5 in [31] ist Φ_W für $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ darstellbar als

$$\Phi_W \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{X_i} \quad (3.3)$$

mit unabhängig und identisch verteilten Zufallspunkten X_1, X_2, \dots in \mathbb{X} mit Verteilung $\frac{\lambda(\cap W)}{|W|}$ und einer von der Folge $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängigen Zufallsvariablen $\tau \sim \text{Po}(\beta|W|)$. Man beachte, dass hier auch $\tau = \Phi(W)$ gewählt werden könnte. Diese Darstellung von Poissonprozessen mit endlichem Intensitätsmaß ist fundamental für das Arbeiten und Rechnen mit Poissonprozessen. Damit sind alle notwendigen Vorbereitungen für die Definition des Modells getroffen. Dazu wählen wir für jedes $j \in [\alpha]$ eine messbare und symmetrische Funktion

$$\varphi_j : \mathbb{X}^{j+1} \rightarrow [0, 1]$$

und nennen die Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha$ Verbindungsfunktionen. Speziell nennen wir die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Kanten-, Dreiecks- bzw. Tetraederfunktion. Wir definieren den Simplicialkomplex Δ zunächst induktiv im Sinne des mehrstufigen Zufallsexperiments aus der Einleitung wie folgt. Zunächst sei die Eckenmenge von Δ gegeben durch $V := \{X'_i \mid i \leq \tau'\}$ mit den Zufallspunkten aus (3.2), d.h. es gilt

$$S_0(K) := \{\{X'_i\} \mid i \leq \tau'\}.$$

Für $j \in [\alpha]$ definieren wir das j -Skelett $S_j(\Delta)$ von Δ , indem wir für $\sigma \subseteq V$ mit $|\sigma| = j + 1$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\sigma \in \Delta \mid S_{j-1}(K)) := \mathbb{1}\{\partial\sigma \subseteq S_{j-1}(K)\} \varphi_{|\sigma|-1}(X'_\sigma)$$

festlegen mit der abkürzenden Notation $\varphi_{|\sigma|-1}(X'_\sigma) := \varphi_{|\sigma|-1}(X'_{i_1}, \dots, X'_{i_{|\sigma|}})$ für $\sigma := [X'_{i_1}, \dots, X'_{i_{|\sigma|}}]$. Es ist außerdem sinnvoll formal $\varphi_0 \equiv 1$ zu setzen. Dies bedeutet anschaulich lediglich, dass jeder Punkt des Punktprozesses Φ eine Ecke des Simplicialkomplexes Δ bildet. Grundsätzlich wäre es auch möglich eine beliebige messbare Funktion $\varphi_0 : \mathbb{X} \rightarrow [0, 1]$ zu wählen und für jeden Punkt $x \in \Phi$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\varphi_0(x)$ zu entscheiden, ob er in die Eckenmenge aufgenommen wird oder nicht. Die Wahl einer beliebigen solchen Funktion φ_0 wäre allerdings gar keine Verallgemeinerung des Modells, denn dies entspräche lediglich der Verwendung einer φ_0 -Verdünnung (siehe Definition 5.7 in [31]) von Φ als Grundprozess für das Modell. Da es sich gemäß Korollar 5.9 in [31] dabei allerdings wiederum um einen Poissonprozess handelt und zwar mit Intensitätsmaß

$$(\varphi_0 \lambda)(A) := \beta \int_A \varphi_0(x) \lambda(dx), \quad A \in \mathcal{X},$$

wird der Rahmen des Modells gar nicht verlassen. Die einzigen Forderungen an das Intensitätsmaß des Grundprozesses waren nämlich σ -Endlichkeit und Diffusität, die sich offensichtlich von λ auf $\varphi_0 \lambda$ übertragen. Als erste Beobachtung halten wir fest, dass gegeben Φ das Hinzufügen zweier j -Simplizes im Allgemeinen nicht unabhängig ist.

Lemma 3.3. *Es seien $\sigma, \sigma' \subset \{X'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit $|\sigma| = |\sigma'| = k + 1$ für ein $k \in [\alpha]$ zwei potentielle k -Simplizes von Δ . Außerdem seien $m(\sigma) := \max\{i \in \mathbb{N} \mid X'_i \in \sigma\}$ und $K := \langle \sigma, \sigma' \rangle$.*

$$(i) \mathbb{P}(\sigma \in \Delta \mid \Phi) = \mathbb{1}\{\tau' \geq m(\sigma)\} \prod_{\emptyset \neq \rho \subseteq \sigma} \varphi_{|\rho|-1}(X'_\rho).$$

$$(ii) \mathbb{P}(\sigma, \sigma' \in \Delta \mid \Phi) = \mathbb{1}\{\tau' \geq m(\sigma), m(\sigma')\} \prod_{\rho \in K} \varphi_{|\rho|-1}(X'_\rho).$$

Beweis. Es wird nur die zweite Aussage gezeigt, da die erste dem Spezialfall $\sigma = \sigma'$ entspricht. Dazu bezeichne $F_j(\sigma) := F_j(\langle \sigma \rangle) = \{\rho \subseteq \sigma \mid j+1 = |\rho|\}$ die Menge aller Teilsimplizes der Dimension j von σ . Da der Punktprozess Φ eindeutig durch $S_0(\Delta)$ bestimmt ist, gilt für $j \in [k]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_j(\sigma), F_j(\sigma') \in \Delta \mid \Phi) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{F_j(\sigma), F_j(\sigma') \in \Delta\} \mid S_{j-1}(\Delta) \right] \mid \Phi \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{F_{j-1}(\sigma), F_{j-1}(\sigma') \in \Delta\} \prod_{\rho \in F_j(K)} \varphi_j(X'_\rho) \mid \Phi \right] \\ &= \prod_{\rho \in F_j(K)} \varphi_j(X'_\rho) \mathbb{P}(F_{j-1}(\sigma), F_{j-1}(\sigma') \in \Delta \mid \Phi). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma, \sigma' \in \Delta \mid \Phi) &= \mathbb{P}(F_k(\sigma), F_k(\sigma') \in \Delta \mid \Phi) \\ &= \dots = \prod_{\rho \in K} \varphi_{|\rho|-1}(X'_\rho) \mathbb{P}(F_0(\sigma), F_0(\sigma') \in \Delta \mid \Phi) \\ &= \prod_{\rho \in K} \varphi_{|\rho|-1}(X'_\rho) \mathbb{1}\{\tau' \geq m(\sigma), m(\sigma')\}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 zeigt, dass gegeben Φ das Hinzufügen von Simplizes, die sich mindestens eine Kante teilen, im Allgemeinen nicht unabhängig ist, da im Produkt $\mathbb{P}(\sigma \in \Delta \mid \Phi) \mathbb{P}(\sigma' \in \Delta \mid \Phi)$ gemäß Teil (i) von Lemma 3.3 Faktoren doppelt auftauchen, die in der Wahrscheinlichkeit aus Teil (ii) lediglich einfach auftreten.

Ziel des restlichen Abschnittes ist es, diese Definition der Verteilung von Δ zu konkretisieren, d.h. eine konkrete Abbildung in den Raum der Simplizialkomplexe zu definieren. Dazu wollen wir den zusätzlichen Zufall für das Hinzufügen der Simplizes durch einen Markenraum \mathbb{M} modellieren und dann einen markierten Poissonprozess Ψ von Φ auf $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$ betrachten, der den Simplizialkomplex eindeutig festlegt. Als Markenraum wählen wir

$$\mathbb{M} := M^{(2)} \times \dots \times M^{(2\alpha)}$$

mit den Räumen

$$M^{(j)} := \{(a_z)_{z \in \mathbb{Z}^j} \mid a_z \in [0, 1] \text{ für alle } z \in \mathbb{Z}^j\}$$

aller j -fach in \mathbb{Z} induzierten Folgen mit Gliedern in $[0, 1]$. Wir können $M^{(j)}$ also mit $[0, 1]^{\mathbb{Z}^j}$ identifizieren. Ein Element aus \mathbb{M} kann also als Funktion $\mathbb{Z}^2 \cup \dots \cup \mathbb{Z}^{2\alpha} \rightarrow [0, 1]$ angesehen werden, wodurch sich \mathbb{M} selbst als abzählbares Produkt von Einheitsintervallen auffassen lässt. Wir versehen \mathbb{M} mit der Produkt- σ -Algebra bzgl. der einzelnen Komponente, die jeweils mit der Borelschen

σ -Algebra versehen seien. Die auf den ersten Blick evtl. umständlich erscheinende Konstruktion (mit $\mathbb{Z}^2 \cup \dots \cup \mathbb{Z}^{2\alpha}$ statt \mathbb{N} als Indexmenge) wird sich noch als hilfreich herausstellen. Für ein Element $u \in \mathbb{M}$ notieren wir das Folgenglied zu den Indizes $m_1, \dots, m_{2j} \in \mathbb{Z}$ der Komponente in $M^{(2j)}$ mit $u_{m_1, \dots, m_{2j}}$. Zunächst stellen wir fest, dass es sich bei $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$ wieder um einen Borelraum handelt.

Lemma 3.4. $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$ ist ein Borelraum.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es sich bei einem abzählbaren Produkt $B = \times_{j \in \mathbb{N}} B_j$ von Borelräumen B_j wieder um einen Borelraum handelt. Bezeichnet $\Lambda_j : B_j \rightarrow U_j$ mit $U_j \in \mathcal{B}([0, 1])$ den Borelisomorphismus der j -ten Komponente B_j , so wird durch $\Lambda : B \rightarrow \times_{j \in \mathbb{N}} U_j$, $\Lambda((b_j)_{j \in \mathbb{N}}) := ((\Lambda_j(b_j))_{j \in \mathbb{N}})$ eine Borel-messbare Bijektion zwischen B und $\times_{j \in \mathbb{N}} U_j$ definiert. Da es sich bei $U := \times_{j \in \mathbb{N}} U_j$ um eine messbare Teilmenge des Borelraums $\times_{j \in \mathbb{N}} [0, 1]$ (siehe den Beweis von Theorem 1.8 in [25]) handelt, ist U wiederum selbst ein Borelraum. Daraus folgt die Behauptung, da die Verknüpfung von Λ mit dem Borelisomorphismus von U einen Borelisomorphismus für B liefert. \square

Auf dem Markenraum betrachten wir die Markenverteilung

$$\mathbb{Q} := \bigotimes_{j \in [\alpha]} \bigotimes_{m_1, \dots, m_{2j} \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}([0, 1]).$$

Des Weiteren sei Ψ eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung von Φ , also ein markierter Punktprozess auf $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$. Mit der Darstellung (3.2) von Φ , lässt sich Ψ wiederum darstellen durch

$$\Psi = \sum_{i=1}^{\tau} \delta_{(X_i', U^{(i)})} \quad (3.4)$$

mit unabhängigen Zufallselementen $U^{(i)}$ in \mathbb{M} mit Verteilung \mathbb{Q} , die insbesondere auch unabhängig von Φ sind. Nach dem Markierungssatz 2.4 handelt es sich bei Ψ ebenfalls um einen Poissonprozess und zwar mit Intensitätsmaß $\beta \lambda \otimes \mathbb{Q}$, welches wiederum selbst diffus und σ -endlich ist. Um eine Abbildung $T : \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{N}_K(S)$ zu definieren, fixieren wir eine Zerlegung $\mathcal{Q} = (Q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von \mathbb{X} in messbare Mengen endlichen Maßes bzgl. λ , d.h. für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $Q_i \in \mathcal{X}$ und $\lambda(Q_i) < \infty$. Eine solche Zerlegung existiert wegen der σ -Endlichkeit von λ und induziert in natürlicher Weise auch eine Zerlegung $(Q_i \times \mathbb{M})_{i \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$. Zu $x \in \mathbb{X}$ sei $Q(x)$ die eindeutige Menge aus der Zerlegung \mathcal{Q} , die den Punkt $x \in \mathbb{X}$ enthält. Außerdem erweitern wir die Relation $<$ zu einer Relation auf $\mathbb{X} \times \mathbb{M}$, indem wir $(x, u) < (y, v)$ setzen, falls $x < y$ gilt. Diese Relation erfüllt immer noch alle zu Beginn des Abschnitts geforderten Eigenschaften (bzgl. des Maßes $\lambda \otimes \mathbb{Q}$). Wir nennen ein Zählmaß $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})$ geordnet, falls η von der Form

$$\eta = \sum_{i=1}^{\eta(\mathbb{X} \times \mathbb{M})} \delta_{(x_i, u^{(i)})} \quad (3.5)$$

ist mit paarweise verschiedenen und paarweise bzgl. $<$ vergleichbaren Punkten $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{X}$.

Zunächst definieren wir die Abbildung T auf der Menge

$$B := \{ \eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \mid \eta \text{ ist geordnet, } \eta(Q_i) < \infty \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0 \}. \quad (3.6)$$

Aufgrund der geforderten Eigenschaften von λ und $<$ gilt $\mathbb{P}(\Psi \in B) = 1$. Wir fixieren ein $\eta \in B$ und verwenden die Darstellung (3.5). Wir ordnen jedem Punkt x_i zwei Indizes m_i, l_i zu, die als Koordinaten des Punktes in η angesehen werden können und im Folgenden auch so bezeichnet werden. Dabei lassen wir den Zusatz in η oftmals weg, wenn klar ist welches Zählmaß gemeint ist, und sprechen einfach von den Koordinaten des Punktes x_i . Zunächst sei $m_i \in \mathbb{N}_0$ der eindeutige Index mit $x_i \in Q_{m_i}$. Da $\eta \in B$ gilt, besitzt η nur endlich viele Atome in $Q_{m_i} \times \mathbb{M}$, welche wir außerdem bzgl. $<$ sortieren können. Zu dieser Sortierung $(y_1, v_1) < \dots < (y_l, v_l)$ sei $l_i \in \mathbb{N}$ die eindeutige Zahl mit $y_{l_i} = x_i$. Bei $(x_i, u^{(i)})$ handelt es sich also um das l_i -kleinste Atom (bzgl. $<$) von η in der Zerlegungsmenge $Q_{m_i} \times \mathbb{M}$. Damit hängen die Koordinaten der Punkte $x_i, i \in [\eta(\mathbb{X} \times \mathbb{M})]$, nicht von der Abzählung der Atome in (3.5) ab. Mithilfe dieser Koordinaten konstruieren wir den Komplex $T(\eta)$, indem wir zunächst die Einschränkung von $T(\eta)$ auf $\mathbb{X}^{[1]}$ durch $\sum_{i=1}^{\eta(\mathbb{X} \times \mathbb{M})} \delta_{x_i}$ definieren. Hier wurde auf den Übergang von \mathbb{X} nach $\mathbb{X}^{[1]}$ durch $x \mapsto \{x\}$ verzichtet. Wir fixieren ein (mögliches) Simplex $\sigma \subseteq \{x_i \mid i \leq \eta(\mathbb{X} \times \mathbb{M})\}$ mit $2 \leq |\sigma| \leq \alpha + 1$. Dieses lässt sich eindeutig schreiben als $\sigma = [x_{i_0}, \dots, x_{i_j}]$ mit $x_{i_0} < \dots < x_{i_j}$ und $j = |\sigma| - 1$. Wir ordnen dem Simplex σ das Element

$$u_\sigma(\eta) := u_{m_0, l_0, \dots, m_{j-1}, l_{j-1}}^{(i_j)}$$

aus der Marke des Punktes x_{i_j} zu und definieren als Entscheidungsregel, ob das Simplex σ in $T(\eta)$ beinhaltet ist, die Bedingung

$$u_\rho(\eta) \leq \varphi_{|\rho|-1}(x_\rho) \quad \text{für alle } \rho \subseteq \sigma \text{ mit } |\rho| \geq 2. \quad (3.7)$$

Hier bezeichnet $\varphi_{|\rho|-1}(x_\rho)$ den Funktionswert von $\varphi_{|\rho|-1}$ unter den Elementen von ρ . Dadurch ist der Komplex $T(\eta)$ eindeutig definiert. Schließlich setzen wir $T(\eta) := 0$ (hier ist 0 das Nullmaß) für alle $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \setminus B$ und definieren $\Delta := T(\Psi)$. Formal setzen wir außerdem $u_\sigma(\eta) := 0$, falls $\eta \notin B$ gilt, damit dieser Ausdruck auch stets wohldefiniert ist. Die hier verwendete Zuordnung der Marken stammt in ihrer Grundidee aus [28] und liefert einige schöne Eigenschaften. Zunächst stellen wir fest, dass die Zuordnung der Marken von der Zerlegung Q und der Relation $<$ abhängen und somit eine andere Wahl dieser Objekte auch einen anderen Simplicialkomplex liefern kann. Außerdem hängt die Entscheidungsregel und somit der konstruierte Komplex noch entscheidend von den Verbindungsfunktionen ab. Wollen wir diese Abhängigkeiten in die Notation aufnehmen, so schreiben wir stets $T_{Q, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha} := T$ bzw. $\Delta^{Q, <, \varphi_1, \dots, \varphi_\alpha} := \Delta$. Da die Wahl der Zerlegung und der Relation nur die Wahl der Marken beeinflusst und diese alle unabhängig gleichverteilt sind, beeinflussen diese beiden Objekte die Verteilung von Δ nicht, d.h. für zwei Zerlegungen Q, \mathcal{R} von \mathbb{X} und zwei zweistellige Relationen $<, \tilde{<}$ auf \mathbb{X} mit den zuvor genannten Eigenschaften gilt stets

$$\Delta^{Q, <, \varphi_1, \dots, \varphi_\alpha} \stackrel{d}{=} \Delta^{\mathcal{R}, \tilde{<}, \varphi_1, \dots, \varphi_\alpha}.$$

Haben wir andererseits noch weitere Verbindungsfunktionen $\phi_1, \dots, \phi_\alpha$ mit $\phi_j \leq \varphi_j$ für alle $j \in [\alpha]$ vorliegen, so erhalten wir eine Kopplung der zugehörigen Simplizialkomplexe im Sinne von

$$\Delta^{Q, \prec, \phi_1, \dots, \phi_\alpha} \subseteq \Delta^{Q, \prec, \varphi_1, \dots, \varphi_\alpha} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Dies liegt daran, dass die Zuordnung der Marken bei beiden Konstruktionen gleich bleibt und somit aus $u_\rho(\eta) \leq \phi_{|\rho|-1}(x_\rho)$ stets auch $u_\rho(\eta) \leq \varphi_{|\rho|-1}(x_\rho)$ für alle möglichen Simplizes ρ folgt. Wir fassen noch ein paar weitere Eigenschaften dieser Konstruktion zusammen und fixieren dazu ein $\eta \in B$ mit der Darstellung (3.5).

Zunächst ist klar, dass die Koordinaten eines Punktes x_i , $i \in [\eta(\mathbb{X} \times \mathbb{M})]$, in η nur von der Einschränkung von η auf $Q(x) \times \mathbb{M}$ abhängen. Deswegen hängt die Zuordnung von $u_\sigma(\eta)$ zu einem Simplex $\sigma = [x_{i_0}, \dots, x_{i_j}]$ auch nur von der Einschränkung von η auf $(Q(x_{i_0}) \cup \dots \cup Q(x_{i_j})) \times \mathbb{M}$ ab. Gilt $\Psi \in B$, so ist der Komplex Δ_W mit $W \in \mathcal{X}$ eindeutig bestimmt durch die Einschränkung Ψ_{Q_W} , wobei Q_W die Vereinigung aller Zerlegungsmengen aus Q bezeichnet, die W schneiden. Wir erinnern daran, dass wir mit Ψ_A für $A \in \mathcal{X}$ stets die Einschränkung von Ψ auf $A \times \mathbb{M}$ meinen. Nach den vorangegangenen Überlegungen gilt für alle $I \subseteq \mathbb{N}_0$

$$\Delta_{\cup_{i \in I} Q_i} = T\left(\Psi_{\cup_{i \in I} Q_i}\right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \quad (3.8)$$

Diese Eigenschaft wird an einigen Stellen dieser Arbeit verwendet. Außerdem liefert die Definition von T folgende weitere wichtige Konsequenzen. Ist $x \in \mathbb{X}$ ein Punkt mit

$$\lambda(A_x) = 0 \quad (3.9)$$

für

$$A_x := \mathbb{X} \setminus \{y \in \mathbb{X} \mid y \prec x\},$$

so gilt

$$T(\Psi) \subseteq T(\Psi + \delta_{(x,U)}) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,} \quad (3.10)$$

wobei $U \sim \mathbb{Q}$ unabhängig von Ψ sei. Dies liegt daran, dass das Hinzufügen des Punktes x wegen (3.9) \mathbb{P} -fast sicher die Koordinaten der Punkte von Ψ nicht verändert. Außerdem gilt (3.10) auf dem Ereignis $\Phi(Q(x)) = 0$ auch, wenn (3.9) nicht gilt, da auch hier der hinzugefügte Punkt die Koordinaten der Punkte in Ψ nicht beeinflusst.

3.3. FORMELN FÜR ERWARTUNGSWERTE UND VARIANZEN

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionale der Form $f(\Delta)$ mit einer messbaren Funktion $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$, also Poissonfunktionale, die nur vom konstruierten Simplizialkomplex $\Delta = T(\Psi)$ abhängen. In diesem Abschnitt interessieren wir uns dabei nur für Funktionale der Form $f(\Delta_W)$

für ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$. Außerdem verwenden wir die abkürzende Notation $|W| := \lambda(W)$. Da es sich bei Δ_W \mathbb{P} -fast sicher um einen endlichen Komplex handelt, ist auch nur die Einschränkung von f auf endliche Komplexe relevant. Beispielsweise ist es bereits für die Euler-Charakteristik nicht klar, wie diese für unendliche Simplicialkomplexe zu definieren ist. Eine analoge Definition zu (2.3) würde nämlich dazu führen, dass gegebenenfalls Unendlichkeiten subtrahiert werden. In späteren Kapiteln werden wir schließlich das asymptotische Szenario $|W| \rightarrow \infty$ betrachten. Für diesen Abschnitt dagegen sei ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ fixiert. Wir beginnen damit, endlichen abstrakten Simplicialkomplexen eine sogenannte Simplexfunktion zuzuordnen und erinnern daran, dass Γ_r , $r \in \mathbb{N}_0$, die Menge aller Simplicialkomplexe mit Eckenmenge $[r]$ bezeichnet.

Definition 3.5 (Simplexfunktionen und Integralformen). *Es sei $r \in \mathbb{N}$ und $K \in \Gamma_r$ ein abstrakter Simplicialkomplex der Dimension höchstens α .*

(i) *Die Simplexfunktion von K ist definiert durch*

$$f_K : \mathbb{X}^r \rightarrow [0, 1], \quad f_K(x_1, \dots, x_r) := \prod_{\sigma \in K} \varphi_{|\sigma|-1}(x_\sigma),$$

wobei für ein Simplex $\sigma \in K$ der Ausdruck $\varphi_{|\sigma|-1}(x_\sigma)$ den Funktionswert von $\varphi_{|\sigma|-1}$ unter den Argumenten der Menge $\{x_i \mid i \in \sigma\}$ meint.

(ii) *Die Integralform I_K von K über dem Beobachtungsfenster W ist gegeben durch*

$$I_K := \int_{W^r} f_K(x_1, \dots, x_r) \lambda^r(\mathrm{d}(x_1, \dots, x_r)).$$

Dabei heißt K der zu I_K assoziierte Simplicialkomplex.

(iii) *Der Grad bzw. die Ordnung einer Integralform sei der Grad (Anzahl Zusammenhangskomponenten) bzw. die Ordnung (Eckenanzahl) des assoziierten Simplicialkomplexes.*

Für einen Simplicialkomplex der Dimension größer als α sei dessen Simplexfunktion als die Nullfunktion definiert. Während des gesamten Abschnitts betrachten wir nur Integralformen über dem fixierten Beobachtungsfenster W , weswegen wir diesen Zusatz weglassen und lediglich von Integralformen sprechen. Sind $x_1, \dots, x_r \in \Phi$ paarweise verschiedene Ecken von Δ und bezeichnet $K(x_1, \dots, x_r)$ den Komplex der aus K nach Identifizierung von i mit x_i hervorgeht, so ist $f_K(x_1, \dots, x_r)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Φ , dass Δ den Komplex $K(x_1, \dots, x_r)$ als Teilkomplex enthält. Die Simplexfunktion eines Simplicialkomplexes ist im Allgemeinen nicht symmetrisch und die Simplexfunktionen von isomorphen Simplicialkomplexen im Allgemeinen auch nicht identisch. Allerdings gehen Simplexfunktionen von isomorphen Simplicialkomplexen durch Vertauschen der Argumente auseinander hervor. Konkret gilt für isomorphe Simplicialkomplexe K, L auf der Eckenmenge $[r]$ mit Isomorphismus $g : [r] \rightarrow [r]$ zwischen K und L

$$f_L(x_1, \dots, x_r) = \prod_{j=0}^{\alpha} \prod_{\substack{1 \leq i_0 < \dots < i_j \leq r, \\ [i_0, \dots, i_j] \in L}} \varphi_j(x_{i_0}, \dots, x_{i_j})$$

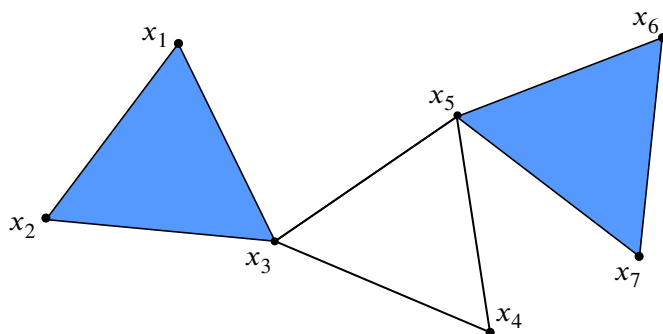


Abbildung 3.1.: Ein zweidimensionaler Simplicialkomplex des Grades 1 und der Ordnung 7

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{j=0}^{\alpha} \prod_{\substack{1 \leq i_0 < \dots < i_j \leq r, \\ [g(i_0), \dots, g(i_j)] \in L}} \varphi_j(x_{g(i_0)}, \dots, x_{g(i_j)}) \\
 &= \prod_{j=0}^{\alpha} \prod_{\substack{1 \leq i_0 < \dots < i_j \leq r, \\ [i_0, \dots, i_j] \in K}} \varphi_j(x_{g(i_0)}, \dots, x_{g(i_j)}) \\
 &= f_K(x_{g(1)}, \dots, x_{g(r)}).
 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also $I_K = I_L$. Aus der Definition von Integralformen geht außerdem direkt hervor, dass die Integralform eines Simplicialkomplexes das Produkt der Integralformen seiner Zusammenhangskomponenten ist. Umgekehrt ist ein Produkt von Integralformen $I = \prod_j I_{K_j}$ selbst wieder eine Integralform vom Grad $\sum_j \deg(K_j)$.

Beispiel 3.6. *Abbildung 3.1 zeigt einen zweidimensionalen Simplicialkomplex des Grades 1 und der Ordnung 7, dessen Integralform über $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ gegeben ist durch*

$$\int_{W^7} \kappa_2(x_1, x_2, x_3) \kappa_2(x_5, x_6, x_7) \varphi_1(x_3, x_5) \varphi_1(x_3, x_4) \varphi_1(x_4, x_5) \lambda^7(d(x_1, \dots, x_7)),$$

wobei κ_2 die Simplexfunktion eines von einem Dreieck erzeugten Simplicialkomplexes bezeichnet.

Im Folgenden wollen wir die Bedeutung von Integralformen veranschaulichen. Dazu sei $K \in \Gamma_r$ und $\mu_K := |[K]| \in \mathbb{N}$, d.h. μ_K ist die Anzahl der zu K isomorphen Simplicialkomplexe mit Eckenmenge $[r]$. Für $K = \langle [1, 2], [2, 3] \rangle$ gilt beispielsweise $\mu_K = 3$, da es drei Möglichkeiten für die Wahl der Ecke mit Kantengrad 2 gibt. Nachfolgende Proposition liefert zwei Interpretationen von Integralformen. Hier und im Folgenden verwenden wir stets Darstellung (3.3) von Φ_W .

Proposition 3.7. *Es sei $K \in \Gamma_r$, $r \in \mathbb{N}$. Außerdem seien $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, $k \in \mathbb{N}$ und $i := \max\{i_1, \dots, i_r\}$. Dann gelten mit der Darstellung (3.3) von Φ_W nachfolgende Eigenschaften.*

- (i) $\mathbb{E} [\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\{K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W\}] = \mathbb{1}\{k \geq i\} \mathbb{P}(\tau = k) \frac{1}{|W|^r} I_K$
- (ii) $\mathbb{P}(K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W \mid \tau \geq i) = \frac{1}{|W|^r} I_K,$

$$(iii) \mathbb{E} \left[\sum_{L \subseteq \Delta_W} \mathbb{1}\{L \cong K\} \right] = \frac{\beta^r}{r!} \mu_K I_K.$$

Beweis. (i) Wir bedingen auf Φ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\{K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W\} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W\} \mid \Phi \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} f_K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \mathbb{1}\{\tau \geq i\} \right] \\ &= \mathbb{1}\{k \geq i\} \mathbb{P}(\tau = k) \frac{1}{|W|^r} I_K. \end{aligned}$$

(ii) Mit der ersten Aussage folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W \mid \tau \geq i) &= \frac{\mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau \geq i\} \mathbb{1}\{K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W\} \right]}{\mathbb{P}(\tau \geq i)} \\ &= \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\{K(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \subseteq \Delta_W\} \right]}{\mathbb{P}(\tau \geq i)} = \frac{1}{|W|^r} I_K. \end{aligned}$$

(iii) Zunächst stellen wir fest, dass jeder zu K isomorphe Teilkomplexe von Δ_W in

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, \dots, x_r) \in \Phi_W^{(r)}} \mathbb{1}\{K(x_1, \dots, x_r) \subseteq \Delta_W\} \right] \quad (3.11)$$

genau

$$m := \left| \{ \pi \in S_r \mid K = K(\pi(1), \dots, \pi(r)) \} \right|$$

mal gezählt wird. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf S_r durch

$$\pi \sim \rho \quad : \iff \quad K(\pi(1), \dots, \pi(r)) = K(\rho(1), \dots, \rho(r))$$

Etwas ausführlicher geschrieben gilt $\pi \sim \rho$ genau dann, wenn für alle $j \in [\dim(K)]$ die Menge aller j -Simplexes von $K(\pi(1), \dots, \pi(r))$ und $K(\rho(1), \dots, \rho(r))$ übereinstimmen, d.h. wenn

$$\{ \pi(\sigma) \mid \sigma \in F_j(K) \} = \{ \rho(\sigma) \mid \sigma \in F_j(K) \}$$

gilt. Aus dieser Darstellung folgt direkt für alle $\pi, \rho, \tau \in S_r$

$$\pi \sim \rho \quad \iff \quad \tau\pi \sim \tau\rho.$$

Wir notieren die Äquivalenzklasse einer Permutation $\pi \in S_r$ durch $[\pi]$ und erhalten

$$\begin{aligned} |[\pi]| &= |\{ \rho \in S_r \mid \rho \sim \pi \}| \\ &= |\{ \rho \in \pi S_r \mid \rho \sim \pi \}| \\ &= |\{ \rho \in S_r \mid \pi\rho \sim \pi \}| \end{aligned}$$

$$= |\{\rho \in \mathcal{S}_r \mid \rho \sim \text{id}\}| = |[\text{id}]| = m.$$

Es existieren genau μ_K Äquivalenzklassen, denn jeder zu K isomorphe Simplizialkomplex auf der Eckenmenge $[r]$ ist von der Form $K(\pi(1), \dots, \pi(r))$ für ein $\pi \in \mathcal{S}_r$. Umgekehrt ist jeder solche Komplex offensichtlich isomorph zu K . Damit folgt

$$|\mathcal{S}_r| = m \mu_K$$

und somit wird in dem Term (3.11) jeder Teilkomplex genau $\frac{r!}{\mu_K}$ mal gezählt. Mit der Mecke-Formel angewandt auf den Poissonprozess Ψ_W für die Funktion $f : (\mathbb{X} \times \mathbb{M})^r \times \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})$,

$$f((x_1, u^{(1)}), \dots, (x_r, u^{(r)}), \eta) := \mathbb{1}\{K(x_1, \dots, x_r) \subseteq T(\eta)_W\}$$

erhalten wir mit unabhängigen Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(r)} \sim \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{L \subseteq \Delta_W} \mathbb{1}\{L \cong K\} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{((x_1, u_1), \dots, (x_r, u_r)) \in \Psi_W^{(r)}} \frac{\mu_K}{r!} \mathbb{1}\{K(x_1, \dots, x_r) \subseteq \Delta_W\} \right] \\ &= \frac{\beta^r}{r!} \mu_K \int_{W^r} \int_{\mathbb{Q}^r} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\left\{ K(x_1, \dots, x_r) \subseteq T\left(\Psi + \sum_{i=1}^r \delta_{(x_i, u^{(i)})}\right)_W \right\} \right] \\ &\quad \times \mathbb{Q}^r(d(u_1, \dots, u_r)) \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r)) \\ &= \frac{\beta^r}{r!} \mu_K \int_{W^r} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\left\{ K(x_1, \dots, x_r) \subseteq T\left(\Psi + \sum_{i=1}^r \delta_{(x_i, U^{(i)})}\right)_W \right\} \right] \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r)) \\ &= \frac{\beta^r}{r!} \mu_K \int_{W^r} f_K(x_1, \dots, x_r) \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r)). \end{aligned}$$

□

Als nächstes betrachten wir eine Klasse von Integralformen, die einen besonderen Stellenwert für diesen Abschnitt und spätere Resultate besitzt.

Definition 3.8. *Es seien $m, l \in [\alpha+1]$ und $\max\{m, l\} \leq r \leq m+l$. Definiere $z_{m,l}^r$ als die Integralform über W eines Simplizialkomplexes erzeugt von zwei Simplexes der Dimension $(m-1)$ und $(l-1)$, die sich genau $m+l-r$ Ecken teilen. Konkret definieren wir $\kappa_{m,l}^r$ als die Simplexfunktion des Komplexes*

$$K_{m,l}^r := \left\langle [1, \dots, m], [1, \dots, m+l-r, m+1, \dots, r] \right\rangle, \quad (3.12)$$

womit dann insbesondere

$$z_{m,l}^r = \int_{W^r} \kappa_{m,l}^r(x_1, \dots, x_r) \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r))$$

gilt. Schließlich sei $\kappa_m := \kappa_{m+1, m+1}^{m+1}$ die Simplexfunktion eines Komplexes, der von einem m -dimensionalen Simplex erzeugt wird.

Die Zahl r gibt hier die Ordnung des Komplexes $K_{m,l}^r$ bzw. der Integralform $z_{m,l}^r$ an. Für $r < m + l$ besitzt $K_{m,l}^r$ bzw. $z_{m,l}^r$ den Grad 1, da die beiden Simplizes in (3.12) dann nicht disjunkt sind. Während die Integralform $z_{m,l}^r$ zunächst nur von der Isomorphieklasse von $K_{m,l}^r$ abhängt, spielt die konkrete Wahl von $K_{m,l}^r$ für das Rechnen mit der Simplexfunktion $\kappa_{m,l}^r$ eine Rolle. Die Funktionen κ_m können wir auch explizit durch

$$\kappa_m(x_1, \dots, x_{m+1}) := \prod_{\emptyset \neq I \subseteq [m+1]} \varphi_{|I|-1}(x_I) \quad (3.13)$$

definieren, wobei der letzte Ausdruck den Funktionswert von $\varphi_{|I|-1}$ unter den Punkten x_i mit $i \in I$ bezeichnet. Für die Werte $m = 1, 2$ erhalten wir beispielsweise

$$\kappa_1 = \varphi_1, \quad \kappa_2(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) \cdot \varphi_1(x, y) \cdot \varphi_1(x, z) \cdot \varphi_1(y, z).$$

Wenn in späteren Kapiteln aus dem Zusammenhang nicht klar sein sollte, über welchem Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ die Integralformen $z_{m,l}^r$ gebildet werden, wird dies explizit in die Notation eingearbeitet. Für das Rechnen mit den Größen $z_{m,l}^r$ ist es sinnvoll, sich folgende einfache Zusammenhänge klar zu machen.

Bemerkung 3.9. Für $m, l \in [\alpha + 1]$, $s := \max\{m, l\} \leq r \leq m + l$ gelten die nachfolgenden Zusammenhänge.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad z_{m,l}^r = z_{l,m}^r & \text{(ii)} \quad z_{1,1}^1 = |W|, \quad z_{1,1}^2 = |W|^2 \\ \text{(iii)} \quad z_{m,l}^s = z_{s,s}^s & \text{(iv)} \quad z_{m,l}^{m+l} = z_{m,m}^m z_{l,l}^l \end{array}$$

Zur Erklärung sei Folgendes erwähnt. Während die erste Aussage wegen der Isomorphie $K_{m,l}^r \cong K_{l,m}^r$ gilt, folgt die zweite direkt aus der Definition von $\varphi_0 \equiv 1$. Die dritte Aussage folgt daraus, dass in der Darstellung (3.12) das eine Simplex in dem anderen enthalten ist. Für die letzte Aussage wird lediglich verwendet, dass die beiden Simplizes aus (3.12) in diesem Fall disjunkt sind.

Als erste Größe betrachten wir eine verallgemeinerte Version der Euler-Charakteristik. Dafür definieren wir zu $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ die Funktion

$$\chi_a(\kappa) := \sum_{i=0}^{\alpha} a_i f_i(\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}_K^f(S)$$

und betrachten die Zufallsvariable $\chi_a(\Delta_W)$. Formal kann χ_a auf der Menge der unendlichen Komplexe als 0 gesetzt werden. Wir erhalten die bekannte Euler-Charakteristik mit der Wahl von $a_i = (-1)^i$. O.B.d.A. gelte stets $a_\alpha \neq 0$. Andernfalls wähle man einfach den Parameter $\alpha \in \mathbb{N}_0$ dementsprechend kleiner. Bevor wir uns mit Erwartungswerten und Varianzen dieser verallgemeinerten Euler-Charakteristik beschäftigen, sei noch folgendes Resultat bereit gestellt, welches direkt aus Gleichung (1.10) in [31] folgt. Für eine poissonverteilte Zufallsvariable $\tau \sim \text{Po}(b)$ mit Parameter

$b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E} \left[\binom{\tau}{n} \right] = \frac{b^n}{n!}. \quad (3.14)$$

Damit sind alle Vorbereitungen für das Berechnen der ersten beiden Momente der Euler-Charakteristik getroffen.

Proposition 3.10. Für $m, l \in [\alpha + 1]$ mit $s := \max\{m, l\}$ gelten

- (i) $\mathbb{E} [f_{m-1}(\Delta_W)] = \frac{\beta^m}{m!} z_{m,m}^m$,
- (ii) $\text{Cov} (f_{m-1}(\Delta_W), f_{l-1}(\Delta_W)) = \sum_{r=s}^{m+l-1} \frac{\beta^r}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r$.

Beweis. (i) Die Aussage folgt direkt aus Proposition 3.7 (iii) für $K = \langle [1, \dots, m] \rangle$ und $\mu_K = 1$.

(ii) Wir verwenden wieder die Darstellung (3.3) von Φ_W und bezeichnen mit σ_I das Simplex mit der Eckenmenge $\{X_i \mid i \in I\}$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f_{m-1}(\Delta_W) f_{l-1}(\Delta_W)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I \subseteq [\tau], J \subseteq [\tau], \\ |I|=m, |J|=l}} \mathbb{1}\{\sigma_I, \sigma_J \in \Delta_W\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{I \subseteq [k], J \subseteq [k], \\ |I|=m, |J|=l}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\{\langle \sigma_I, \sigma_J \rangle \subseteq \Delta_W\} \right]. \end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass die Isomorphieklasse von $\langle \sigma_I, \sigma_J \rangle$ nur von $|I \cap J|$ (bzw. nur von $|I \cup J|$) abhängt, führen eine Fallunterscheidung nach $s \leq |I \cup J| \leq m + l$ durch und wenden Proposition 3.7 (i) an. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [f_{m-1}(\Delta_W) f_{l-1}(\Delta_W)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{\substack{I \subseteq [k], J \subseteq [k], \\ |I|=m, |J|=l}} \sum_{r=s}^{m+l} \mathbb{1}\{|I \cup J| = r\} \frac{1}{|W|^r} z_{m,l}^r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{r=s}^{m+l} \binom{k}{r} \binom{r}{m} \binom{m}{m+l-r} \frac{1}{|W|^r} z_{m,l}^r \\ &= \sum_{r=s}^{m+l} \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{r} \binom{r}{m} \binom{m}{m+l-r} \frac{1}{|W|^r} z_{m,l}^r \right] \\ &= \sum_{r=s}^{m+l} \beta^r \frac{1}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r. \end{aligned}$$

Hier wurden für die zweite Gleichung die möglichen Wahlen von $I, J \subseteq [k]$ mit $|I| = m$, $|J| = l$ und $r = |I \cup J|$ gezählt, womit die dort auftretenden Binomialkoeffizienten zu erklären sind. Die letzte Gleichung folgt aus (3.14). Realisiert man jetzt, dass es sich bei dem Summanden für $r = m + l$ genau um den Ausdruck

$$\mathbb{E} [f_{m-1}(\Delta_W)] \mathbb{E} [f_{l-1}(\Delta_W)] = \frac{\beta^m}{m!} z_{m,m}^m \frac{\beta^l}{l!} z_{l,l}^l = \frac{\beta^{m+l}}{m!l!} z_{m,l}^{m+l}$$

handelt, wobei bei der letzten Gleichung Bemerkung 3.9 (iv) verwendet wurde, so ergibt sich die Behauptung für die Kovarianzen. \square

Die Formeln aus Proposition 3.10 gelten insbesondere auch für den Fall $m = 1$ bzw. $m = l = 1$, also für die Eckenanzahl des Simplicialkomplexes. Mithilfe von Proposition 3.10 folgt einerseits

$$\mathbb{E} [\chi_a(\Delta_W)] = \sum_{m=1}^{\alpha+1} a_{m-1} \frac{\beta^m}{m!} z_{m,m}^m.$$

Andererseits lässt sich auch die Varianz der Euler-Charakteristik bestimmen.

Theorem 3.11 (Euler-Varianz-Formel). *Es gilt*

$$\mathbb{V} (\chi_a(\Delta_W)) = \sum_{m,l=1}^{\alpha+1} \sum_{r=\max\{m,l\}}^{m+l-1} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^r}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r.$$

Beweis. Mit Proposition 3.10 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{V} (\chi_a(\Delta_W)) &= \sum_{m,l=1}^{\alpha+1} a_{m-1} a_{l-1} \text{Cov} (f_{m-1}(\Delta_W), f_{l-1}(\Delta_W)) \\ &= \sum_{m,l=1}^{\alpha+1} a_{m-1} a_{l-1} \sum_{r=\max\{m,l\}}^{m+l-1} \frac{\beta^r}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r. \end{aligned}$$

\square

Bei der Varianz der Euler-Charakteristik handelt es sich also um ein Polynom in der Intensität β des Grades höchstens $2\alpha + 1$. Für die klassische Euler-Charakteristik, also den Fall $a_i = (-1)^i$, erhalten wir gemäß Theorem 3.11 die Polynomdarstellung

$$\mathbb{V} (\chi(\Delta_W)) = \sum_{r=1}^{2\alpha+1} b_r \beta^r$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} b_1 &= |W|, & b_2 &= -\frac{3}{2} z_{2,2}^2, & b_3 &= z_{2,2}^3 + \frac{1}{6} z_{3,3}^3 \\ b_{2\alpha} &= \frac{1}{2(\alpha-1)!(\alpha-1)!} z_{\alpha+1,\alpha+1}^{2\alpha} - \frac{2}{\alpha!(\alpha-1)!} z_{\alpha,\alpha+1}^{2\alpha}, & b_{2\alpha+1} &= \frac{1}{\alpha!\alpha!} z_{\alpha+1,\alpha+1}^{2\alpha+1}. \end{aligned}$$

Hier sieht man, dass die Euler-Varianz-Formel auch im Fall $\alpha = 0$ gilt, denn dann gilt $\mathbb{V} (\chi(\Delta_W)) = \mathbb{V} (\Phi(W)) = \beta |W|$, was mit der Euler-Varianz-Formel für $\alpha = 0$ übereinstimmt. Für $\alpha = 2$ ergibt sich beispielsweise

$$\mathbb{V} (\chi(\Delta_W)) = \frac{1}{4} z_{3,3}^5 \beta^5 + \left(\frac{1}{2} z_{3,3}^4 - z_{2,3}^4 \right) \beta^4 + \left(z_{2,2}^3 + \frac{1}{6} z_{3,3}^3 \right) \beta^3 - \frac{3}{2} z_{2,2}^2 \beta^2 + |W| \beta.$$

In Anhang A sind geometrische Realisierungen der zu den hier auftauchenden Integralformen assoziierten Simplizialkomplexe zu finden. Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, wann die Varianz der Euler-Charakteristik als Polynom in β maximalen Grad besitzt, d.h. wann $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{2\alpha+1} > 0$ gilt. Intuitiv könnte man vermuten, dass dies genau dann der Fall ist, wenn mit positiver Wahrscheinlichkeit α -Simplizes in Δ_W auftauchen, da es sich bei $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{2\alpha+1}$ um die Integralform eines Komplexes handelt, der von zwei α -Simplizes erzeugt wird. Nachfolgendes Lemma bestätigt diese Aussage.

Lemma 3.12. *Es gelte $z_{m,m}^m > 0$ für ein $2 \leq m \leq \alpha$. Dann folgt $z_{m,m}^r > 0$ für alle $m+1 \leq r \leq 2m-1$.*

Beweis. Wir fixieren $m+1 \leq r \leq 2m-1$. Zunächst folgt aus

$$z_{m,m}^m = \int_{W^m} \kappa_{m-1}(x_1, \dots, x_m) \lambda^m(d(x_1, \dots, x_m)) > 0,$$

dass es eine messbare Menge $A \subseteq W^m$ mit $\lambda^m(A) > 0$ gibt, auf der die Abbildung κ_{m-1} positiv ist. Die Simplexfunktion $\kappa_{m,m}^r$ erfüllt die Darstellung

$$\kappa_{m,m}^r(x_1, \dots, x_r) = \frac{\kappa_{m-1}(x_1, \dots, x_m) \kappa_{m-1}(x_1, \dots, x_{2m-r}, x_{m+1}, \dots, x_r)}{\kappa_{2m-r-1}(x_1, \dots, x_{2m-r})}$$

falls $\kappa_{2m-r-1}(x_1, \dots, x_{2m-r}) > 0$ gilt, da der Nenner dem Produkt derjenigen Faktoren entspricht, die im Zähler doppelt auftauchen. Insbesondere ist der Nenner also positiv, wenn es der Zähler ist. Also ist $\kappa_{m,m}^r$ positiv auf der Menge

$$\tilde{A} := \{(x_1, \dots, x_r) \in W^r \mid (x_1, \dots, x_m) \in A, (x_1, \dots, x_{2m-r}, x_{m+1}, \dots, x_r) \in A\}.$$

Die Behauptung folgt, da es sich bei \tilde{A} um eine messbare Menge mit $\lambda^r(\tilde{A}) > 0$ handelt und $z_{m,m}^r$ das Integral von $\kappa_{m,m}^r$ über W^r ist. \square

Schließlich betrachten wir noch die höheren Momente der Euler-Charakteristik $\chi_a(\Delta_W)$. Zunächst stellen wir fest, dass diese alle existieren, denn für $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\chi_a(\Delta_W)|^p] &\leq \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} |a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p}| \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i_1+1} \cdot \dots \cdot \binom{\tau}{i_p+1} \right] \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} |a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p}| \mathbb{E} [\tau^{i_1+\dots+i_p+p}] < \infty. \end{aligned}$$

Konkret erhalten wir mit Proposition 3.7

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\chi_a(\Delta_W)^p] &= \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \mathbb{E} [f_{i_1}(\Delta_W) \cdot \dots \cdot f_{i_p}(\Delta_W)] \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I_1, \dots, I_p \subseteq [\tau], \\ |I_j|=i_j+1 \forall j \in [p]}} \mathbb{1}\{\sigma_{I_1}, \dots, \sigma_{I_p} \in \Delta_W\} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{\substack{I_1, \dots, I_p \subseteq [k], \\ |I_j|=i_j+1 \forall j \in [p]}} \frac{1}{|W|^{|\cup I_j|}} I_{\langle \sigma_{I_1}, \dots, \sigma_{I_p} \rangle}.$$

Es gibt nur endlich viele Isomorphieklassen von Simplicialkomplexen, die von p (nicht notwendigerweise paarweise verschiedenen) Simplizes der Dimension höchstens α erzeugt werden, also von Komplexen der Form

$$K = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_p \rangle \quad (3.15)$$

mit (nicht notwendigerweise paarweise verschiedene) Simplizes $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ der Dimension höchstens α . Schließlich besitzt ein Komplex der Form (3.15) höchstens die Ordnung $p(\alpha + 1)$ und es existieren nur endlich viele Isomorphieklassen von Komplexen mit Ordnung höchstens $p(\alpha + 1)$. Es seien L_1, \dots, L_n Vertreter dieser endlich vielen Isomorphieklassen und r_i die Ordnung von L_i . Da eine Integralform nur von der Isomorphieklasse des zu ihr assoziierten Simplicialkomplex abhängt, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\chi_a(\Delta_W)^p] &= \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|W|^{r_i}} I_{L_i} \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I_1, \dots, I_p \subseteq [\tau], \\ |I_j|=i_j+1 \forall j \in [p]}} \mathbb{1}\{\langle I_1, \dots, I_p \rangle \cong L_i\} \right] \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p} \sum_{i=1}^n \frac{1}{|W|^{r_i}} I_{L_i} \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{r_i} \right] \gamma_{i_1, \dots, i_p}^i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta^{r_i}}{r_i!} I_{L_i} \sum_{i_1, \dots, i_p=0}^{\alpha} (a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_p}) \gamma_{i_1, \dots, i_p}^i, \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei $\gamma_{i_1, \dots, i_p}^i$ die Anzahl aller möglichen Wahlen von $I_1, \dots, I_p \subseteq [r_i]$ mit $|I_j| = i_j + 1$ und $\langle I_1, \dots, I_p \rangle \cong L_i$ bezeichnet. Also handelt es sich bei dem p -ten Moment der Euler-Charakteristik um eine Linearkombination der Integralformen I_{L_1}, \dots, I_{L_n} bzw. um ein Polynom in β des Grades höchstens $p(\alpha + 1)$. Wir betrachten die Darstellung

$$\mathbb{E} [\chi_a(\Delta_W)^p] = \sum_{l=1}^{p(\alpha+1)} b_l \beta^l,$$

und den Extremfall $l = p(\alpha + 1)$. In der Darstellung (3.16) gilt $r_i = p(\alpha + 1)$ genau dann, wenn L_i von p disjunkten α -Simplizes erzeugt wird, wodurch die Isomorphieklasse von L_i bereits eindeutig bestimmt ist, d.h. es gibt genau ein $i \in [n]$ mit dieser Eigenschaft. In diesem Fall gilt insbesondere $I_{L_i} = (z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1})^p$. Außerdem ist $\gamma_{i_1, \dots, i_p}^i$ in diesem Fall nur für $i_1 = \dots = i_p = \alpha$ positiv und es gilt $\gamma_{\alpha, \dots, \alpha}^i = \binom{p(\alpha+1)}{(\alpha+1), \dots, (\alpha+1)}$. Damit erhalten wir

$$b_{p(\alpha+1)} = \left(\frac{a_{\alpha}}{(\alpha+1)!} z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} \right)^p = \left(\frac{a_{\alpha} \mathbb{E} [f_{\alpha}(\Delta_W)]}{\beta^{\alpha+1}} \right)^p$$

und somit insbesondere

$$\frac{\mathbb{E} [\chi_a(\Delta_W)^p]}{\beta^{p(\alpha+1)}} \rightarrow \left(\frac{a_\alpha}{(\alpha+1)!} z^{\alpha+1}_{\alpha+1, \alpha+1} \right)^p \quad \text{für } \beta \rightarrow \infty.$$

Im nächsten Schritt betrachten wir den Simplexgrad eines deterministischen Punktes $y \in \mathbb{X}$, der dem Modell hinzugefügt wird und im Folgenden fixiert sei. Dazu setzen wir

$$\Delta^y := T(\Psi + \delta_{(y,U)})$$

mit einer von Ψ unabhängigen Marke $U \sim \mathbb{Q}$ und weisen daraufhin, dass die Konstruktion so angepasst werden kann, dass Δ^y nicht von U abhängt. Dazu modifiziere man die Relation $<$ dahingehend, dass die Menge $\mathbb{X} \setminus \{x \in \mathbb{X} \mid y < x\}$ eine λ -Nullmenge ist. Für den restlichen Abschnitt gelte stets die Integrabilitätsbedingung

$$v_0 := \sup_{x \in \mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_1(x, y) \lambda(dy) < \infty. \quad (3.17)$$

Wir werden sehen, dass das Integral in (3.17) bis auf den Vorfaktor β der erwartete Kantengrad des Punktes x ist, wenn dieser dem Modell deterministisch hinzugefügt wird. Die Integrabilitätsbedingung (3.17) liefert also global beschränkte erwartete Kantengrade von deterministisch hinzugefügten Punkten. Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die Zufallsvariable $\deg_n(y, \Delta^y)$. Im Fall $n = 1$ zeigt Proposition 4.0.1 in [34], dass $\deg_1(y, \Delta^y)$ eine Poissonverteilung mit Parameter $\beta \int_{\mathbb{X}} \varphi_1(x, y) \lambda(dx)$ besitzt. Die Proposition beschränkt sich zwar auf den Fall $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$, ist aber auch auf allgemeinen Borelräumen gültig, da der dort verwendete Markierungssatz (Theorem 2.4) in einem allgemeinen Rahmen gilt. Für eine Ecke v eines Simplizialkomplexes lässt sich jedes n -Simplex von K , das v enthält, mit einer n -elementigen Menge von Nachbarn von v identifizieren. Hier ist mit einem Nachbar von v eine Ecke w von K gemeint, sodass $[v, w] \in K$ gilt. Deshalb gilt stets die Abschätzung

$$\deg_n(v, K) \leq \binom{\deg_1(v, K)}{n}. \quad (3.18)$$

Also liefert (3.17) tatsächlich \mathbb{P} -fast sicher auch $\deg_n(y, \Delta^y) < \infty$. Die Mecke-Formel liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\deg_n(y, \Delta^y)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{n!} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi}^{\neq} \mathbb{1}\{[y, x_1, \dots, x_n] \in \Delta^y\} \right] \\ &= \frac{\beta^n}{n!} \int_{\mathbb{X}^n} \kappa_n(y, x_1, \dots, x_n) \lambda^n(d(x_1, \dots, x_n)) \leq v_0^n < \infty, \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei \sum^{\neq} die Summe über paarweise verschiedene Punkte bezeichnet und die Abschätzung des Integrals gegen v_0^n analog zu (4.9) gezeigt werden kann. In (4.9) wird auch noch nach y ausintegriert, weswegen dort schlussendlich noch das Integral über y steht und den zusätzlichen Faktor $|W|$ verursacht. Die Zufallsvariable $\deg_n(y, \Delta^y)$ besitzt für $n \geq 2$ keine Poissonverteilung (außer im

trivialen Fall, wenn sie \mathbb{P} -fast sicher Null ist), was Gegenstand des nachfolgenden Korollars ist.

Korollar 3.13. *Für die Zufallsvariable $Z_n := \deg_n(y, \Delta^y)$ gilt*

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}[Z_n] + \sum_{r=n+1}^{2n-1} \frac{\beta^r}{(2n-r)!(r-n)!(r-n)!} \int_{\mathbb{X}^r} \kappa_{n+1, n+1}^{r+1}(y, x_1, \dots, x_r) \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r)).$$

Insbesondere gilt für $n \geq 2$

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}[Z_n] \iff \mathbb{E}[Z_n] = 0.$$

Beweis. Zunächst ist klar, dass alle Momente von Z_n existieren, denn wegen (3.18) gilt $Z_n^p \leq Z_1^{np}$ und Z_1 besitzt eine Poissonverteilung. Zur Berechnung des zweiten Moments von Z_n verwenden wir zu $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$ und $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq [m]$, die abkürzende Notationen $[y, x_I] := [y, x_{i_1}, \dots, x_{i_l}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n^2] &= \frac{1}{n!n!} \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_n \in \Phi}^{\neq} \sum_{z_1, \dots, z_n \in \Phi}^{\neq} \mathbb{1}\{[y, x], [y, z] \in \Delta^y\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!(n-k)!} \mathbb{E} \left[\sum_{x_1, \dots, x_{2n-k} \in \Phi}^{\neq} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \mathbb{1}\{[y, x_{[n]}], [y, x_{([2n-k] \setminus [n]) \cup I}] \in \Delta^y\} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\beta^{2n-k}}{k!(n-k)!(n-k)!} \int_{\mathbb{X}^{2n-k}} \kappa_{n+1, n+1}^{2n-k+1}(y, x_1, \dots, x_{2n-k}) \lambda^{2n-k}(d(x_1, \dots, x_{2n-k})) \\ &= \sum_{r=n}^{2n} \frac{\beta^r}{(2n-r)!(r-n)!(r-n)!} \int_{\mathbb{X}^r} \kappa_{n+1, n+1}^{r+1}(y, x_1, \dots, x_r) \lambda^r(d(x_1, \dots, x_r)). \quad (3.20) \end{aligned}$$

Hier wurde im zweiten Schritt eine Fallunterscheidung nach der Kardinalität des Schnittes von $\{x_1, \dots, x_n\} \cap \{z_1, \dots, z_n\}$ unternommen und danach die Mecke-Formel (für den Poissonprozess Ψ) angewendet. Aus (3.19) folgt, dass der Summand für $r = n$ in (3.20) der Erwartungswert von Z_n ist. Nach Definition von $\kappa_{n+1, n+1}^{2n+1}$ gilt die Identität

$$\kappa_{n+1, n+1}^{2n+1}(y, x_1, \dots, x_{2n}) = \kappa_n(y, x_1, \dots, x_n) \kappa_n(y, x_{n+1}, \dots, x_{2n})$$

für paarweise verschiedene Punkte $y, x_1, \dots, x_{2n} \in \mathbb{X}$. Deshalb stimmt der Summand für $r = 2n$ in (3.20) nach (3.19) mit $\mathbb{E}[Z_n]^2$ überein und der erste Teil der Behauptung folgt.

Nun sei $n \geq 2$. Ist der Erwartungswert $\mathbb{E}[Z_n]$ positiv, so folgt wie im Beweis von Lemma 3.12, dass auch alle Summanden aus (3.20) positiv sind. Wegen $n \geq 2$ folgt also $\mathbb{V}(Z_n) > \mathbb{E}[Z_n]$. Die Umkehrung gilt trivialerweise, da aus $\mathbb{E}[Z_n] = 0$ direkt \mathbb{P} -fast sicher $Z_n = 0$ folgt. \square

Dennoch lässt sich Proposition 4.0.1 aus [34] in gewissem Sinne auch auf allgemeine Simplexgrade übertragen. Anstatt den n -Simplexgrad eines hinzugefügten Punktes zu betrachten, fügen wir dem Modell stattdessen n deterministische Punkte $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{X}$ hinzu und zählen alle n -Simplizes, die die hinzugefügten Punkte allesamt enthalten. Hierfür fixieren wir paarweise verschiedene Punkte

$y_1, \dots, y_n \in \mathbb{X}$ mit $\kappa_{n-1}(y_1, \dots, y_n) > 0$, die bzgl. $<$ vergleichbar sind, und definieren

$$\Delta^{y_1, \dots, y_n} := T\left(\Psi + \sum_{i=1}^n \delta_{(y_i, U^{(i)})}\right)$$

mit (insbesondere von Ψ) unabhängigen Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(n)} \sim \mathbb{Q}$. Hier können wir die Relation $<$ so modifizieren, dass die Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(n)} \sim \mathbb{Q}$ nur für Simplexes, bestehend aus hinzugefügten Punkten, verwendet werden. Außerdem sei

$$Y := \sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{[x, y_1, \dots, y_n] \in \Delta^{y_1, \dots, y_n}\} = |\{\sigma \in F_n(\Delta^{y_1, \dots, y_n}) \mid y_1, \dots, y_n \in \sigma\}|.$$

Korollar 3.14. Die Zufallsvariable Y besitzt unter der Bedingung $[y_1, \dots, y_n] \in \Delta^{y_1, \dots, y_n}$ eine Poissonverteilung mit Parameter $a := \beta \int_{\mathbb{X}} \prod_{I \subseteq [n]} \varphi_{|I|}(x, y_I) \lambda(dx) < \infty$. Konkret gelten also

$$\mathbb{P}(Y = k) = \kappa_{n-1}(y_1, \dots, y_n) e^{-a} \frac{a^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \kappa_{n-1}(y_1, \dots, y_n) (1 - e^{-a}).$$

Beweis. Der Beweis funktioniert in seiner Grundidee wie der Beweis von Proposition 4.0.1 in [34]. Dazu betrachten wir eine K -Markierung $\tilde{\Psi}$ von Φ (im Sinne von Definition 5.3 in [31]) mit dem Wahrscheinlichkeitskern

$$K : \mathbb{X} \times \mathcal{P}(\{0, 1\}) \rightarrow [0, 1], \quad K(x, \{1\}) := \prod_{I \subseteq [n]} \varphi_{|I|}(x, y_I).$$

Unter der Bedingung $[y_1, \dots, y_n] \in \Delta^{y_1, \dots, y_n}$ sind gegeben Φ die Ereignisse $[x, y_1, \dots, y_n] \in \Delta^{y_1, \dots, y_n}$, $x \in \Phi$, unabhängig und besitzen die Wahrscheinlichkeiten $K(x, \{1\})$, $x \in \Phi$. Deshalb folgt unter der Bedingung $[y_1, \dots, y_n] \in \Delta^{y_1, \dots, y_n}$

$$Y \stackrel{d}{=} \tilde{\Psi}(\mathbb{X} \times \{1\}).$$

Bei $\tilde{\Psi}$ handelt es sich gemäß Theorem 5.6 in [31] um einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß

$$\Theta(A) := \beta \int_{\mathbb{X}} \int_{\{0,1\}} \mathbb{1}\{(x, m) \in A\} K(x, dm) \lambda(dx), \quad A \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{P}(\{0, 1\}).$$

Wegen

$$\Theta(\mathbb{X} \times \{1\}) = \beta \int_{\mathbb{X}} \prod_{I \subseteq [n]} \varphi_{|I|}(x, y_I) \lambda(dx) \leq \beta \int_{\mathbb{X}} \varphi_1(x, y_1) \lambda(dx) \leq \nu_0 < \infty$$

folgt die Behauptung. \square

3.4. VARIANZUNGLEICHUNGEN

In diesem Abschnitt betrachten wir bekannte Darstellungen und Ungleichungen für Varianzen von Poissonfunktionalen, die die Differenzenoperatoren, wie sie in Abschnitt 2.3 definiert worden sind, verwenden. Allerdings ist es in dem hier vorliegenden Modell schwer, mit diesen Operatoren zu rechnen, wie wir noch im Detail erklären werden. Deswegen werden wir analog zu dem Vorgehen in [34] (siehe dort vor allem Abschnitt 3.4) bzw. [28] (Kapitel 5) „gutartige“ Differenzenoperatoren definieren, die eine gewünschte Eigenschaft erfüllen. Wir werden die benötigten Varianzungleichungen dann bzgl. dieser neu definierten Differenzenoperatoren zeigen. Dazu werden wir eine Fock-Raum-Ungleichung herleiten, die in Kapitel 4 essentiell für die Herleitung von zentralen Grenzwertsätzen für die Euler-Charakteristik sein wird, da sie eine geeignete untere Schranke für die Varianz der Euler-Charakteristik liefert. Außerdem zeigen wir eine Poincaré-Ungleichung, die es erlaubt, die Varianz eines Poissonfunktionals nach oben abzuschätzen, sowie eine exakte Darstellung der Varianz eines Poissonfunktionals. Diese beiden Resultate werden wir in Kapitel 5 verwenden, um die Varianz von schwach stabilisierenden Funktionalen zu kontrollieren.

Zunächst wiederholen wir die Definition der Differenzenoperatoren aus Abschnitt 2.3 für Poissonfunktionale der Form $F = f(T(\Psi))$. Dazu seien $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion und $(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann lässt sich der Differenzenoperator k -ter Ordnung zu F in den Punkten $(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)$ darstellen durch

$$D_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k F = \sum_{J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} f \left(T \left(\Psi + \sum_{j \in J} \delta_{(x_j, u_j)} \right) \right).$$

Nach Konstruktion von T gilt im Allgemeinen für $J \subseteq I$ nicht $T(\eta + \sum_{j \in J} \delta_{(x_j, u_j)}) \subseteq T(\eta + \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, u_i)})$, was das Rechnen mit den Differenzenoperatoren deutlich erschwert. Deswegen verwenden wir eine alternative Konstruktion, die diese Eigenschaft erfüllt. Dazu definieren wir zu einer Funktion $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ eine messbare Funktion $h_f^k : \mathbb{N}_K(S) \times (\mathbb{X} \times \mathbb{M})^k \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h_f^k(\kappa, (x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)) := \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{k-|I|} f(\kappa_{\mathbb{X}_I}) \quad (3.21)$$

mit $\mathbb{X}_I := \mathbb{X} \setminus \{x_j \mid j \in [k] \setminus I\}$. Der Komplex im Summanden zur Indexmenge $I \subseteq [k]$ geht also aus κ durch Entfernen all derjenigen Simplexes hervor, die einen Punkt außerhalb von \mathbb{X}_I enthalten. Zu $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subseteq [k]$ mit $|I| = l$ setzen wir

$$\Delta^{(x_i, u_i)_{i \in I}} := \Delta^{(x_{i_1}, u_{i_1}), \dots, (x_{i_l}, u_{i_l})} := T \left(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, u_i)} \right)_{\mathbb{X}_I}.$$

Für $I = \emptyset$ erhalten wir \mathbb{P} -fast sicher den bereits definierten Komplex $\Delta = T(\Psi)$, weswegen wir in der Notation nicht zwischen diesen beiden Komplexen unterscheiden. Per Konstruktion erhalten wir die gewünschte Eigenschaft

$$\Delta^{(x_j, u_j)_{j \in J}} \subseteq \Delta^{(x_i, u_i)_{i \in I}} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } J \subseteq I \subseteq [k]. \quad (3.22)$$

Schließlich definieren wir zu einem Poissonfunktional $F = f(T(\Psi))$ die „gutartigen“ Differenzenoperatoren

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k F &:= \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{k-|I|} f(\Delta^{(x_i, u_i)_{i \in I}}) \\ &= h_f^k \left(\Delta^{(x_i, u_i)_{i \in [k]}}, (x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

und $\Lambda_{(x, u)} F := \Lambda_{(x, u)}^1 F$. Bei diesem Differenzenoperator handelt es sich also um eine Funktion in dem Komplex $\Delta^{(x_i, u_i)_{i \in [k]}}$ (und den Punkten $(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)$). Die Differenzenoperatoren erster und zweiter Ordnung sind dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x, u)} F &= f(\Delta^{(x, u)}) - f(\Delta), \\ \Lambda_{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}^2 F &= f(\Delta^{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}) - f(\Delta^{(x_1, u_1)}) - f(\Delta^{(x_2, u_2)}) + f(\Delta). \end{aligned}$$

Wir wollen den Zusammenhang der Differenzenoperatoren D^k, Λ^k genauer untersuchen und fixieren dazu Punkte $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$, sodass die eindeutigen Indizes $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in \mathcal{Q}_{m_i}$ paarweise verschieden sind und die Punkte x_1, \dots, x_k paarweise miteinander vergleichbar sind. Um bei Bedarf die Abhängigkeit der Konstruktion (von T) von der Zerlegung \mathcal{Q} zu verdeutlichen, verwenden wir im Folgenden die Notationen $D_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^{k, \mathcal{Q}} := D_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k$ und $\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^{k, \mathcal{Q}} := \Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k$. Für beide Operatoren seien dabei stets die selbe Relation $<$ und die selben Verbindungsfunktionen gewählt. Wir betrachten zunächst den Komplex $T_{\mathcal{Q}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_a}(\Psi + \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, U^{(i)})})$ für $\emptyset \neq I \subseteq [k]$ mit (auch von Ψ) unabhängigen Marken $U^{(i)} \sim \mathbb{Q}, i \in [k]$. Auf dem Ereignis

$$A := \left\{ \Phi \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{Q}_{m_i} \right) = 0 \right\} \quad (3.24)$$

gilt

$$T_{\mathcal{Q}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_a} \left(\Psi + \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, U^{(i)})} \right) = T_{\mathcal{Q}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_a} \left(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U^{(i)})} \right)_{\mathbb{X}_I} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

mit \mathbb{X}_I wie oben (vgl. dazu für $k = 1$ (3.10) und die zugehörige Diskussion). Hier wird verwendet, dass die Indizes m_1, \dots, m_k paarweise verschieden sind. Auf dem Ereignis A gilt also insbesondere

$$D_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^{k, \mathcal{Q}} F = h_f^k \left(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U^{(i)})}, (x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)}) \right) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher,}$$

wobei auf der rechten Seite die Abhängigkeit von der Zerlegung unterschlagen wurde. Da die verwendete Zerlegung aber nicht die Verteilung von $T_{\mathcal{Q}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_a}(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U^{(i)})})$ beeinflusst, erhalten wir

$$\mathbb{1}_A D_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^{k, \mathcal{Q}} F \stackrel{d}{=} \mathbb{1}_A \Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^{k, \mathcal{R}} F \quad (3.25)$$

für jede weitere messbare Zerlegung \mathcal{R} von \mathbb{X} .

Wir fixieren ein Element

$$\mu = \left(\mu_{i_0, \dots, i_{s-1}}^{(i_s)} \right)_{s \in [\min\{\alpha, k-1\}], i_0, \dots, i_{s-1} \in [k]} \in [0, 1]^\rho \quad (3.26)$$

mit $\rho := \sum_{s=1}^{\min\{\alpha, k-1\}} k^{s+1}$. Dann ordnet μ für jedes $s \in [\min\{\alpha, k-1\}]$ jedem Tupel $(i_0, \dots, i_s) \in [k]^s$ eine Wahrscheinlichkeit zu. Wir erinnern daran, dass ein Element $u \in \mathbb{M}$ für jede Wahl von $j \in [\alpha]$ jedem Tupel $(l_1, \dots, l_{2j}) \in \mathbb{Z}^{2j}$ ein Element von $[0, 1]$ zuordnet. Für dieses Element schreiben wir im Folgenden $u(l_1, \dots, l_{2j})$. Außerdem schreiben wir abkürzend $m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k$, wobei $\mathbb{N}_{0, \neq}^k$ die Menge aller k -Tupel mit paarweise verschiedenen Einträgen aus \mathbb{N}_0 bezeichnet. Zu $u \in \mathbb{M}$ definieren wir ein Element $u_{\mu_i, m} \in \mathbb{M}$, $i \in [k]$, durch

$$u_{\mu_i, m}(m_{i_0}, 1, \dots, m_{i_{s-1}}, 1) := \mu_{i_0, \dots, i_{s-1}}^{(i)}$$

für jede Wahl von $s \in [\min\{\alpha, k-1\}]$ und $i_0, \dots, i_{s-1} \in [k]$. Für jede andere Wahl von Indizes $(l_1, \dots, l_{2j}) \in \mathbb{Z}^{2j}$ sei $u_{\mu_i, m}(l_1, \dots, l_{2j}) = u(l_1, \dots, l_{2j})$. Man beachte, dass auf A die Indizes $m_i, 1$ die Koordinaten von x_i in $\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U^{(i)})}$ sind.

Nachfolgend seien $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})$ mit $\eta + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, u_i)} \in B$ (für das B aus der Konstruktion von T) und $\sigma \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ mit $|\sigma| \geq 2$. Außerdem sei \mathcal{R} eine weitere messbare Zerlegung von \mathbb{X} , die wir nachfolgend für die Konstruktion von T verwenden. Es sei daran erinnert (Seite 33), dass $u_\sigma(\eta + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, u_i)})$ das Element in $[0, 1]$ (aus einer der Marken der Punkte x_1, \dots, x_k) bezeichnet, das dem Simplex σ bei der Konstruktion von $T(\eta + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, u_i)})$ zugeordnet ist. Zu einem Element $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \in \mathbb{M}^k$ sei $(u_{\mu, \eta}^{(1), \mathcal{R}}, \dots, u_{\mu, \eta}^{(k), \mathcal{R}}) \in \mathbb{M}^k$ das Markentupel, das aus $(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$ hervorgeht, indem für jedes $\sigma = [x_{i_0}, \dots, x_{i_s}] \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ mit $|\sigma| \geq 2$, $x_{i_0} < \dots < x_{i_s}$ und $s \in [\min\{\alpha, k-1\}]$ das Element $u_\sigma(\eta + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, u_i)})$ durch $\mu_{i_0, \dots, i_{s-1}}^{(i_s)}$ ersetzt wird und alle restlichen Elemente unverändert bleiben.

Die vorangegangenen Definitionen sind so gewählt, dass auf dem Ereignis A aus (3.24) bei den Konstruktionen der Komplexe $T_{Q, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha}(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U_{\mu_i, m}^{(i)})})$ und $T_{\mathcal{R}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha}(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U_{\mu, \Psi}^{(i), \mathcal{R}})})$ für alle Simplices $\sigma \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ mit $|\sigma| \geq 2$ die selben Elemente aus μ verwendet. Man beachte, dass sich das Ereignis A auf die Zerlegung Q bezieht. Insgesamt folgt

$$\mathbb{1}_A D_{(x_1, U_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, U_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q} F \stackrel{d}{=} \mathbb{1}_A \Lambda_{(x_1, U_{\mu, \Psi}^{(1), \mathcal{R}}), \dots, (x_k, U_{\mu, \Psi}^{(k), \mathcal{R}})}^{k, \mathcal{R}} F. \quad (3.27)$$

Die Verteilungsgleichheit in (3.27) benötigt ganz essentiell die Voraussetzung, dass die Indizes m_1, \dots, m_k paarweise verschieden sind. Eine analoge Konstruktion ist in [34] (im Beweis der dortigen Fock-Raum-Ungleichung) zu finden, wobei sich die Notation dort wegen $\alpha = 1$ vereinfacht. Für den Rest des Abschnitts sei $Q_\varepsilon = (Q_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}_0}$ zu $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Zerlegung von \mathbb{X} mit

$$\lambda(Q_i^\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{i} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}_0. \quad (3.28)$$

Die Existenz einer solchen Zerlegung stellt Lemma 3.3.1 in [34] sicher. In [34] wir außerdem gezeigt,

dass diese Zerlegungen so gewählt werden können, dass für alle $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 < 1$ die Eigenschaft

$$Q^{\varepsilon_1}(x) \subseteq Q^{\varepsilon_2}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{X} \quad (3.29)$$

gilt, wobei $Q^\varepsilon(x)$ die eindeutige Menge der Zerlegung Q_ε mit $x \in Q^\varepsilon(x)$ sei. Insbesondere gilt also für λ^k -fast alle $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{X}^k$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{1} \{ Q^\varepsilon(x_1), \dots, Q^\varepsilon(x_k) \text{ sind paarweise verschieden} \} = 1. \quad (3.30)$$

Es sei weiterhin eine zusätzliche Zerlegung Q von \mathbb{X} fixiert, die stets verwendet wird, wenn die Notation keine andere Zerlegung beinhaltet. Ziel des restlichen Abschnitts ist die Herleitung der zu Beginn des Abschnittes erwähnten Resultate für Varianzen von Poissonfunktionalen für die Differenzenoperatoren aus (3.23). Wir beginnen mit einer Fock-Raum-Ungleichung analog zu Theorem 3.4.4. in [34], die auf der Fock-Raum-Darstellung von Poissonfunktionalen in [31] (Theorem 18.6) basiert. Der Beweis folgt in seiner Grundstruktur dem Beweis von Theorem 3.4.4. in [34]. Zuvor definieren wir jedoch noch den Zufallsvektor

$$U_{x_1, \dots, x_k} := \left(u_\sigma \left(\Psi + \sum_{i=1}^k \delta_{(x_i, U^{(i)})} \right) \right)_{\sigma \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}, |\sigma| \geq 2}.$$

Theorem 3.15 (Fock-Raum-Ungleichung). *Es sei $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung, sodass für das Poissonfunktional $F = f(\Delta)$ die Bedingung $\mathbb{E}[F^2] < \infty$ gelte. Dann gilt*

$$\mathbb{V}(f(\Delta)) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{\mathbb{X}^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k F \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k))$$

mit unabhängigen und identisch \mathbb{Q} -verteilten Zufallselementen $U^{(1)}, \dots, U^{(k)}$.

Beweis. Wir fixieren $\varepsilon \in (0, 1)$. Die Fock-Raum-Darstellung von Poissonfunktionalen (Theorem 18.6 in [31]) liefert

$$\mathbb{V}(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{\mathbb{X}^k} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u^{(1)}), \dots, (x_k, u^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(d(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})) \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)).$$

Wir fixieren eine Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$, $k \in \mathbb{N}$ und ein Element μ wie in (3.26). Mit den abkürzenden Notationen $Q_m^\varepsilon := \times_{i=1}^k Q_{m_i}^\varepsilon$ für $m = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k$ sowie $\cup := \mathcal{U}([0, 1])$, $\mathbb{Q}^k(du) := \mathbb{Q}^k(d(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}))$ und $\lambda^k(dx) := \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k))$ folgt mit der Ungleichung von Jensen

$$\begin{aligned} & \int_{W^k} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u^{(1)}), \dots, (x_k, u^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(du) \lambda^k(dx) \\ & \geq \sum_{m \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k} \int_{Q_m^\varepsilon \cap W^k} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u^{(1)}), \dots, (x_k, u^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(du) \lambda^k(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k} \int_{Q_m^\varepsilon \cap W^k} \int_{[0,1]^\rho} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(du) \cup^\rho(d\mu) \lambda^k(dx) \\
&\geq \sum_{m \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k} \int_{Q_m^\varepsilon \cap W^k} \int_{[0,1]^\rho} \left(\int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right] \mathbb{Q}^k(du) \right)^2 \cup^\rho(d\mu) \lambda^k(dx). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Im Folgenden sei A_ε das Ereignis aus (3.24) bezogen auf die Zerlegung Q_ε . Nehmen wir f zunächst als beschränkt an, so liefern die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\left| D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right| &\leq 2^k \|f\|_\infty, \\
\left| \Lambda_{(x_1, \tilde{u}_{\mu_1}^{(1)}), \dots, (x_k, \tilde{u}_{\mu_k}^{(k)})}^k F \right| &\leq 2^k \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

wegen (3.27) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right] - \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right] \mathbb{Q}^k(du) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{A_\varepsilon^c} \left| D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F - \Lambda_{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right| \right] \mathbb{Q}^k(du) \\
&\leq \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{A_\varepsilon^c} 2^{k+1} \|f\|_\infty \right] \mathbb{Q}^k(du) \\
&\leq 2^{k+1} \|f\|_\infty \mathbb{P}(A_\varepsilon^c). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung

$$(a+b)^2 \geq \frac{b^2}{\gamma} - \frac{a^2}{\gamma-1}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \gamma > 1,$$

mit

$$\begin{aligned}
a &= \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u_{\mu_1, m}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu_k, m}^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right] - \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right] \mathbb{Q}^k(du), \\
b &= \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right] \mathbb{Q}^k(du) = \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, U_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right]
\end{aligned}$$

auf die rechte Seite von (3.31) erhalten wir mit (3.32)

$$\begin{aligned}
&\int_{W^k} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u^{(1)}), \dots, (x_k, u^{(k)})}^{k, Q_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(du) \lambda^k(dx) \\
&\geq \sum_{m \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k} \int_{Q_m^\varepsilon \cap W^k} \int_{[0,1]^\rho} \frac{1}{\gamma} \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_{\mu, \Psi}^{(1), Q}), \dots, (x_k, U_{\mu, \Psi}^{(k), Q})}^k F \right]^2 \cup^\rho(d\mu) \lambda^k(dx) \\
&\quad - \sum_{m \in \mathbb{N}_{0, \neq}^k} \int_{Q_m^\varepsilon \cap W^k} \int_{[0,1]^\rho} \frac{4^{n+1} \|f\|_\infty^2}{\gamma-1} \mathbb{P}(A_\varepsilon^c)^2 \cup^\rho(d\mu) \lambda^k(dx). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Der zweite Summand in (3.33) lässt sich im Betrag wie in [34] gegen $\frac{4^{n+1} \|f\|_\infty^2}{\gamma-1} (1 - \exp(-\varepsilon k)) \lambda(W)^k$

nach oben abschätzen (siehe (3.4.9) dort). Dabei wird insbesondere die Eigenschaft (3.28) der Zerlegung \mathcal{Q}_ε verwendet. Für $\varepsilon \searrow 0$ und $\gamma \searrow 1$ folgt wegen (3.30) mit dem Lemma von Fatou aus (3.33)

$$\begin{aligned} & \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \int_{W^k} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[D_{(x_1, u^{(1)}), \dots, (x_k, u^{(k)})}^{k, \mathcal{Q}_\varepsilon} F \right]^2 \mathbb{Q}^k(du) \lambda^k(dx) \\ & \geq \int_{W^k} \int_{[0,1]^\rho} \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_{\mu, \Psi}^{(1), \mathcal{Q}}), \dots, (x_k, U_{\mu, \Psi}^{(k), \mathcal{Q}})}^k F \right]^2 \mathbb{U}^\rho(d\mu) \lambda^k(dx) \\ & = \int_{W^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k F \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] \lambda^k(dx). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt für $W \uparrow \mathbb{X}$. Für unbeschränkte Abbildungen f folgt die Aussage wie in [34] durch Approximation von $F = f(\Delta)$ durch $F_n := f_n(\Delta)$ mit $f_n := \mathbb{1}\{|f| \leq n\} f$. \square

Der Vektor U_{x_1, \dots, x_k} beeinflusst den Simplizialkomplex $\Delta^{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}$ und somit den Differenzenoperator $\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k F$ nur dahingehend, dass er festlegt, ob Simplizes, die nur aus hinzugefügten Punkten $\{x_1, \dots, x_k\}$ bestehen, Teil des Simplizialkomplexes sind. Deswegen gilt beispielsweise für die Operatoren erster und zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x, U)} F \mid U_x \right]^2 \right] = \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x, U)} F \right]^2 \\ & \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \mid U_{x_1, x_2} \right]^2 \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \mid \mathbb{1}\{[x_1, x_2] \in \Delta^{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}\} \right]^2 \right] \\ & = \varphi_1(x_1, x_2) \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \mid [x_1, x_2] \in \Delta^{(x_1, U_1), (x_2, U_2)} \right]^2 \\ & \quad + (1 - \varphi_1(x_1, x_2)) \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \mid [x_1, x_2] \notin \Delta^{(x_1, U_1), (x_2, U_2)} \right]^2. \end{aligned}$$

Bevor wir die Poincaré-Ungleichung für Poissonfunktionale (vgl. beispielsweise Theorem 18.7 in [31]) auf den Differenzenoperator Λ übertragen, leiten wir eine exakte Darstellung der Varianz eines Poissonfunktionals her. Dazu erweitern wir unseren Borelraum \mathbb{X} und betrachten den Borelraum $\mathbb{X} \times [0, 1]$ als Grundraum versehen mit dem σ -endlichem Maß $\lambda \otimes \lambda_1|_{[0,1]}$. Unser Grundprozess Φ ist hier also ein Poissonprozess auf $\mathbb{X} \times [0, 1]$ mit Intensitätsmaß $\lambda \otimes \lambda_1|_{[0,1]}$ und Ψ ist weiterhin eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung von Φ , also hier ein Poissonprozess auf $\mathbb{X} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$. Wir befinden uns also in einem Spezialfall der zuvor betrachteten Situation eines allgemeinen Borelraums \mathbb{X} . Auf $\mathbb{X} \times [0, 1]$ wählen wir die Relation

$$(x, t) < (y, s) \quad :\iff \quad t < s$$

sowie die Zerlegung $(\mathcal{Q}_i \times [0, 1])_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit der bisher verwendeten Zerlegung $(\mathcal{Q}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von \mathbb{X} . Die Verbindungsfunktionen seien weiterhin von der Form $\varphi_j : \mathbb{X}^{j+1} \rightarrow [0, 1]$, d.h. diese hängen nicht von der Komponente in $[0, 1]$ ab. Die zusätzliche Komponente wird lediglich zur Definition der Relation $<$ verwendet. Im Folgenden sei Ψ_t die Einschränkung von Ψ auf $\mathbb{X} \times [0, t] \times \mathbb{M}$. Der Beweis des nachfolgenden Theorems funktioniert ganz analog zum Beweis von Theorem 5.1 in [28] bzw.

Theorem 3.4.2 in [34]. Da er allerdings relativ kurz ist und eine Überlegung beinhaltet, die später bei Verwendung dieser Konstruktion noch wichtig sein wird, führen wir ihn komplett aus. In [28],[34] wird dabei extra für dieses Theorem ein Operator eingeführt, der analog zu $\Lambda_{(x,t,u)}$ konstruiert ist.

Theorem 3.16. *Es sei $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit $\mathbb{E} [f(\Delta)^2] < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{V}(f(\Delta)) = \beta \int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x,t,u)} f(\Delta) \mid \Psi_t \right]^2 \right] \mathbb{Q}(du) \lambda(dx) dt.$$

Beweis. Zunächst liefert Theorem B.1 in [28]

$$\mathbb{V}(f(\Delta)) = \beta \int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[D_{(x,t,u)} f(\Delta) \mid \Psi_t \right]^2 \right] \mathbb{Q}(du) \lambda(dx) dt.$$

Im Folgenden sei ein Punkt $(x, t, u) \in \mathbb{X} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$ fixiert. Zu $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times [0, t] \times \mathbb{M})$ betrachten wir die beiden Komplexe $T(\eta + \Psi_{[t,1]})$ und $T(\eta + \Psi_{[t,1]} + \delta_{(x,t,u)})_{\mathbb{X} \times [0,1] \setminus \{(x,t)\}}$, wobei $\Psi_{[t,1]}$ die Einschränkung von Ψ auf $\mathbb{X} \times [t, 1] \times \mathbb{M}$ bezeichnet. In beiden Komplexen ist die Einschränkung des Komplexes auf Punkte in η deterministisch, also \mathbb{P} -fast sicher nicht von Ψ abhängig, da für alle Punkte y aus η und alle Punkte z aus $\Psi_{[t,1]}$ stets $y < z$ und $y < (x, t, u)$ gilt. Die Marken, die für Simplexe mit Beteiligung von mindestens einem Punkt aus Ψ verwendet werden, sind \mathbb{P} -fast sicher Teil des Prozesses $\Psi_{[t,1]}$. Insbesondere sind die beiden Komplexe für jede Wahl von η also verteilungsgleich. Es folgt also

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[D_{(x,t,u)} f(\Delta) \mid \Psi_t \right] &= \mathbb{E} \left[f(T(\Psi + \delta_{(x,t,u)})) \mid \Psi_t \right] - \mathbb{E} \left[f(T(\Psi)) \mid \Psi_t \right] \\ &\stackrel{d}{=} \mathbb{E} \left[f(T(\Psi + \delta_{(x,t,u)})) \mid \Psi_t \right] - \mathbb{E} \left[f(T(\Psi + \delta_{(x,t,u)}))_{\mathbb{X} \times [0,1] \setminus \{(x,t)\}} \mid \Psi_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\Lambda_{(x,t,u)} f(\Delta) \mid \Psi_t \right]. \end{aligned} \tag{3.34}$$

□

Wählen wir in (3.34) $t = 1$, so erhalten wir $D_{(x,1,u)} f(\Delta) \stackrel{d}{=} \Lambda_{(x,1,u)} f(\Delta)$. Mithilfe von Theorem 3.16 kann nun direkt eine Poincaré-Ungleichung für den Operator $\Lambda_{(x,t,u)} f(\Delta)$ hergeleitet werden (vgl. Theorem 5.2 in [28]).

Theorem 3.17 (Poincaré-Ungleichung). *Es sei $U \sim \mathbb{Q}$ unabhängig von Ψ und $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung mit $\mathbb{E} [f(\Delta)^2] < \infty$. Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$*

$$\mathbb{V}(f(\Delta)) \leq \beta \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} \left[(\Lambda_{(x,t,U)} f(\Delta))^2 \right] \lambda(dx).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Theorem 3.16 durch Anwendung der Ungleichung von Jensen für bedingte Erwartungen, wenn man bedenkt, dass die Verteilung von $\Lambda_{(x,t,U)} f(\Delta)$ nicht von $t \in [0, 1]$ abhängt. □

3.5. DAS MARKIERTE STATIONÄRE MODELL

In diesem Abschnitt stellen wir einen wichtigen Spezialfall des Modells vor, der bereits in der Literatur zum Random Connection Model als zufälliger Graph einen besonderen Stellenwert genießt. Dazu sei $(\mathbb{A}, \mathcal{T})$ ein beliebiger Borelraum und Θ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{A}, \mathcal{T})$, den wir ebenfalls (wie \mathbb{M}) als Markenraum bezeichnen, wobei es jedoch zu keiner Verwechslungsgefahr kommen sollte. Wir wählen als Grundraum den Produktraum $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$, versehen mit dem Produktmaß $\beta \lambda_d \otimes \Theta$, wobei wir hier $\beta > 0$ die Intensität des Modells nennen und λ_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. Hier unterscheidet sich die Verwendung von β zunächst im Vergleich zum Modell auf einem allgemeinen Borelraum, in dem ein Maß der Form $\beta \lambda$ betrachtet wurde. Da allerdings $\beta \lambda_d \otimes \Theta = \beta(\lambda_d \otimes \Theta)$ gilt, wie direkt mit dem Maßeindeutigkeitsatz eingesehen werden kann, macht dies jedoch keinen Unterschied. Als zusätzliche Eigenschaft fordern wir, dass die Verbindungsfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha$ in nachfolgendem Sinne translationsinvariant sind. Für alle $j \in [\alpha]$ gelte

$$\varphi_j((x_0 + t, a_0), \dots, (x_j + t, a_j)) = \varphi_j((x_0, a_0), \dots, (x_j, a_j)) \quad (3.35)$$

für alle $x_0, \dots, x_j, t \in \mathbb{R}^d, a_0, \dots, a_j \in \mathbb{A}$.

Wir bezeichnen diesen Spezialfall als das markierte stationäre Modell. Für Arbeiten in diesem Rahmen im Random Connection Model als zufälliger Graph verweisen wir auf [4],[10] und Kapitel 4 in [8]. Für einen Punkt $(x, a) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ bezeichnen wir x als die räumliche Komponente und a als die Marke des Punktes. Im Laufe der Arbeit werden wir oftmals zusätzlich annehmen, dass die Integrabilitätsbedingung

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{A}} \varphi_1((\mathbf{0}, a), (y, b)) \Theta(da) \Theta(db) dy < \infty \quad (3.36)$$

gilt, die der Bedingung (4.2) aus [8] entspricht und schwächer ist als die Integrabilitätsbedingung (D.1) aus [4]. Das Integral in (3.36) entspricht bis auf den Vorfaktor β dem erwarteten Kantengrad einer typischen Ecke innerhalb des Komplexes. Konkret ist damit der Kantengrad des Punktes $(\mathbf{0}, V)$ mit typischer Marke $V \sim \Theta$ gemeint, wenn dieser dem Komplex hinzugefügt wird. Dies geht direkt aus (3.19) für $n = 1$ hervor, wenn bzgl. der hinzugefügten Marke ausintegriert wird. Für eine Menge $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$ notieren wir beim Arbeiten im markierten stationären Modell mit Ψ_W (bzw. κ_W) die Einschränkung von Ψ (bzw. eines Komplexes $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$) auf $W \times \mathbb{A} \times \mathbb{M}$ (bzw. $W \times \mathbb{A}$). Wir weisen darauf hin, dass die Wahl einer Eckenfunktion $\varphi_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \rightarrow [0, 1]$ auch im markierten stationären Modell keine Verallgemeinerung des Modells darstellt. Für eine solche Funktion würde Translationsinvarianz im Sinne von (3.35) bedeuten, dass sie unabhängig von der räumlichen Komponente ist und somit nur von der Marke des Punktes abhängt. Bei einer φ_0 -Verdünnung von Φ handelt es sich dann gemäß Korollar 5.9 in [31] um einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d \otimes (\varphi_0 \Theta) = \beta \gamma \lambda_d \otimes \frac{1}{\gamma} (\varphi_0 \Theta)$ mit $\gamma := (\varphi_0 \Theta)(\mathbb{A})$, wobei hier $\gamma \neq 0$ angenommen wurde. Also wird der Rahmen des Modells dadurch gar nicht verlassen. Der Fall $\gamma = 0$ ist uninteressant, da eine φ_0 -Verdünnung von Φ dann der Nullprozess wäre. Im Folgenden seien $V \sim \Theta$ und $U \sim \mathbb{Q}$ stets

(insbesondere von Ψ) unabhängige Zufallselemente und wir setzen $\Delta^0 := T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)})$. Unter der Integrabilitätsbedingung (3.36) ist das Integral

$$\pi(a) := \beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{A}} \varphi_1((\mathbf{0}, a), (y, b)) \Theta(db) dy. \quad (3.37)$$

endlich für Θ -fast alle $a \in \mathbb{A}$ und für jedes solche a besitzt $\text{deg}_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ unter der Bedingung $V = a$ eine Poissonverteilung mit Parameter $\pi(a)$. Also besitzt $\text{deg}_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ eine gemischte Poissonverteilung mit Zufallsparameter $\pi(V)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}(\text{deg}_1(\mathbf{0}, \Delta^0) = k) = \mathbb{E} \left[e^{-\pi(V)} \frac{\pi(V)^k}{k!} \right], \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (3.38)$$

Gemischte Poissonverteilungen tauchen beispielsweise auch bei verallgemeinerten Zufallsgraphen auf (siehe Abschnitt 6.3 in [45]), wobei die Verteilung des Zufallsparameters üblicherweise als Mischverteilung bezeichnet wird. Ein wichtiges Resultat für gemischte Poissonverteilungen bildet Proposition 1 in [27], nach der das s -te Moment einer gemischten Poissonverteilung existiert, wenn das s -te Moment ihrer Mischverteilung existiert.

Die einfachste Variante des markierten stationären Modells ergibt sich durch Wahl eines einelementigen Markenraums \mathbb{A} . Dann kann $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ direkt mit \mathbb{R}^d identifiziert werden, weswegen wir in diesem Fall vom unmarkierten stationären Modell sprechen. Tatsächlich wurde das Random Connection Model in [35] ursprünglich in diesem Rahmen eingeführt. Im unmarkierten stationären Modell ist der Zufallsparameter $\pi(V)$ konstant und die Integrabilitätsbedingung (3.36) vereinfacht sich zu

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_1(\mathbf{0}, y) dy < \infty, \quad (3.39)$$

was wegen der Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen äquivalent zu der Integrabilitätsbedingung (3.17) für $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ ist. In Abschnitt 1.2 von [4] oder Abschnitt 2.3 von [10] können weitere Beispielmole für den Fall $\alpha = 1$ gefunden werden. Ein Beispielmole, das wir besonders hervorheben möchten, ist gegeben durch die Wahl von $\mathbb{A} = \mathcal{K}^d$, wobei \mathcal{K}^d die Menge aller nicht-leeren, kompakten und konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d bezeichnet. Dabei sei $\mathbb{A} = \mathcal{K}^d$ mit der von der Hausdorffmetrik induzierten σ -Algebra versehen. Die Theoreme A.19 und A.26 in [31] zeigen, dass es sich bei \mathcal{K}^d um einen Borelraum handelt. Dazu wählen wir die Verbindungsfunktionen

$$\varphi_j((x_0, K_0), \dots, (x_j, K_j)) = \mathbb{1} \left\{ \bigcap_{i=0}^j (x_i + K_i) \neq \emptyset \right\}, \quad j \in [\alpha], \quad (3.40)$$

die offensichtlich die Eigenschaft (3.35) erfüllen. Da die Verbindungsfunktionen aus (3.40) nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, kann Ψ hier o.B.d.A. als Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ angesehen werden. Wir bezeichnen diesen Spezialfall als Boolesches Modell und das Wahrscheinlichkeitsmaß Θ dann als Formverteilung, was wir im Folgenden begründen. Üblicherweise meint der Begriff Boolesches

Modell in der stochastischen Geometrie eine zufällige abgeschlossene Menge der Form

$$Z := \bigcup_{(x,K) \in \Psi} (x + K),$$

wobei Ψ hier wie erwähnt ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d \times \Theta$ ist. Bezeichnet K^W zu $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$ den Simplizialkomplex auf der Eckenmenge $\{(x, K) \in \Psi \mid x \in W\}$ definiert durch

$$[(x_0, K_0), \dots, (x_j, K_j)] \in K^W \iff \bigcap_{i=0}^j (x_i + K_i) \neq \emptyset$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, so handelt es sich bei Δ_W um das α -Skelett von K^W . Eine Version des Nerve-Theorems (siehe Seite 76 in [13]) liefert \mathbb{P} -fast sicher die Homotopieäquivalenz (notiert durch \simeq)

$$K^W \simeq Z^W := \bigcup_{(x,K) \in \Psi_W} (x + K). \quad (3.41)$$

Für ein topologisch invariantes Funktional f (d.h. f ist auf allgemeinen topologischen Räumen definiert und invariant unter Homotopieäquivalenz), das für einen Simplizialkomplex nur von dessen α -Skelett abhängt, folgt also insbesondere \mathbb{P} -fast sicher

$$f(\Delta_W) = f(S_\alpha(K^W)) = f(K^W) = f(Z^W). \quad (3.42)$$

Zentrale Grenzwertsätze in dem hier vorliegenden Modell für solche Funktionale lassen sich also direkt in Resultate für das Boolesche Modell übersetzen. Die für uns relevantesten Funktionale mit dieser Eigenschaft sind die Betti-Zahlen. Da die p -te Betti-Zahl eines Simplizialkomplexes nur von dessen $(p+1)$ -Skelett abhängen, erfüllen die Betti-Zahlen die gewünschte Eigenschaft. Wir weisen noch auf den Unterschied zu Funktionalen der Form $f(Z_W)$ mit $Z_W := Z \cap W$ hin, die oftmals in der Literatur zum Booleschen Modell von Interesse sind. Wenn wir im weiteren Verlauf vom Booleschen Modell sprechen, meinen wir damit (wenn nicht explizit anders gesagt) diesen Spezialfall des markierten stationären Modells. Dieser enthält wiederum als Spezialfall den in der Literatur so oft betrachteten Čech-Komplex (bzw. genau genommen dessen α -Skelett), der der Wahl von $\Theta = \delta_{B(\mathbf{0}, r)}$ für ein $r > 0$ entspricht. Damit handelt es sich bei dem Čech-Komplex sowohl um einen Spezialfall des Booleschen Modells als auch des unmarkierten stationären Modell, da der Markenraum dann o.B.d.A. als einelementig angesehen werden kann. Andererseits erhalten wir das α -Skelett des Vietoris-Rips-Komplex im unmarkierten stationären Modell durch Wahl der Verbindungsfunktionen

$$\varphi_1(x, y) := \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq 2r\}, \quad \varphi_j \equiv 1, \quad j \in \{2, \dots, \alpha\},$$

für ein $r > 0$. Schließlich wollen wir noch eine hinreichende Bedingung für die Existenz aller Momente von $\text{deg}_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ im Booleschen Modell geben. Existiert ein $r > 0$ mit

$$\Theta(\{K \in \mathcal{K}^d \mid K \subseteq B(\mathbf{0}, r)\}) = 1, \quad (3.43)$$

was als Beschränktheit von Θ interpretiert werden kann, so folgt \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} \pi(V) &= \beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}^d} \mathbb{1}\{V \cap (y + K) \neq \emptyset\} \Theta(dK) dy \\ &\leq \beta \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}^d} \mathbb{1}\{B(\mathbf{0}, r) \cap B(y, r) \neq \emptyset\} \Theta(dK) dy \\ &= \beta \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{\|y\| \leq 2r\} dy \\ &= \beta(2r)^d \rho_d, \end{aligned}$$

wobei ρ_d hier das d -dimensionale Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Also ist die Zufallsvariable $\pi(V)$ \mathbb{P} -fast sicher beschränkt und all ihre Momente existieren.

Im Laufe der Arbeit werden wir immer wieder eine Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Beobachtungsfenstern, also eine Folge in $\mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$, mit $|W_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ betrachten, wobei hier mit $|A| = \lambda_d(A)$ für $A \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$ stets das d -dimensionale Volumen von A gemeint sei. Dabei werden wir uns oftmals auf Folgen in \mathcal{K}^d beschränken, für die zusätzlich noch $r(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, wobei

$$r(K) := \sup\{r > 0 \mid \exists x \in K \text{ mit } B(x, r) \subseteq K\}$$

den Inkugelradius einer Menge $K \in \mathcal{K}^d$ bezeichnet. Außerdem sei für $x \in \mathbb{R}^d$

$$d(x, K) := \min\{|x - y| \mid y \in K\}$$

und ∂K der topologischen Rand von K . Wir nennen eine Funktion $f : (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, translationsinvariant, falls

$$f(x_1 + t, \dots, x_m + t) = f(x_1, \dots, x_m)$$

für alle $t, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Lemma 3.18. *Es sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{K}^d mit $r(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und außerdem $f : (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow [0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$, eine messbare und translationsinvariante Funktion mit*

$$\nu_f := \int_{(\mathbb{R}^d)^{m-1}} f(\mathbf{0}, x_2, \dots, x_m) d(x_2, \dots, x_m) < \infty,$$

wobei dieser Ausdruck für $m = 1$ als $f(\mathbf{0})$ zu lesen ist. Dann gilt

$$\frac{1}{|W_n^m|} \int_{W_n^m} f(x_1, \dots, x_m) d(x_1, \dots, x_m) \rightarrow \nu_f \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Für $m = 1$ bedeutet die Translationsinvarianz von f , dass f konstant ist und die Behauptung folgt direkt. Also sei im Folgenden $m \geq 2$. Wegen der Translationsinvarianz von f gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$v_f = \frac{1}{|W_n|} \int_{W_n} \int_{(\mathbb{R}^d)^{m-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) d(x_2, \dots, x_m) dx_1,$$

da der Wert des inneren Integrals insbesondere nicht von x_1 abhängt. Damit folgt für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\left| v_f - \frac{1}{|W_n|} \int_{W_n^m} f(x_1, \dots, x_m) d(x_1, \dots, x_m) \right| = \frac{1}{|W_n|} \int_{W_n} \int_{(W_n^{m-1})^c} f(x_1, x_2, \dots, x_m) d(x_2, \dots, x_m) dx_1 \quad (3.44)$$

$$\leq \frac{1}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x_1, \partial W_n) \geq \varepsilon\} dx_1 \int_{(B(\mathbf{0}, \varepsilon)^{m-1})^c} f(\mathbf{0}, x_2, \dots, x_m) d(x_2, \dots, x_m) + \frac{v_f}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x_1, \partial W_n) \leq \varepsilon\} dx_1. \quad (3.45)$$

Wir schätzen das erste Integral im ersten Summanden gegen $|W_n|$ ab, wodurch der erste Summand nicht mehr von n abhängt. Wie im Beweis von Lemma 4.3.2 in [34] argumentiert, folgt aus (3.19) und Lemma 3.7 in [20] sowie der Formel von Steiner (vgl. z.B. (14.5) in [39])

$$\frac{|\{x \in W_n \mid d(x, \partial W_n) \leq \varepsilon\}|}{|W_n|} \leq \sum_{j=0}^{d-1} \frac{\varepsilon^{d-j} (2^d - 1)}{r(W_n)^{d-j}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (3.46)$$

weswegen der zweite Summand in (3.45) für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt außerdem, dass das zweite Integral im ersten Summanden von (3.45) für $\varepsilon \rightarrow \infty$ verschwindet, woraus die Behauptung folgt. \square

Im Beweis von Lemma 4.3.2 in [34] wurde im unmarkierten stationären Modell für $f = \varphi_1$ auf analoge Weise gezeigt, dass der Ausdruck in (3.44) gegen Null konvergiert. Bei Lemma 3.18 handelt es sich um eine Verallgemeinerung dieses Beweises, der in kürzerer Form auch in [28] (Lemma 9.2) gefunden werden kann. Die entscheidende Anwendung von Lemma 3.18 liefert nachfolgendes Korollar. Dazu gelte die Integrierbarkeitsbedingung

$$\text{ess sup}_{a \in \mathbb{A}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{A}} \varphi_1((\mathbf{0}, a), (y, b)) \Theta(dy) dy < \infty, \quad (3.47)$$

die schwächer als (3.17), aber stärker als (3.36) ist. Aus stochastischer Sicht bedeutet (3.47), dass der Zufallsparameter $\pi(V)$ \mathbb{P} -fast sicher beschränkt ist. Im unmarkierten stationären Fall entspricht diese Bedingung wieder (3.39).

Korollar 3.19. *Es sei $K \in \Gamma_r$ ein Simplicialkomplex des Grades 1 und es gelte (3.47). Dann folgt für jede Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K}^d mit $r(W_n) \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|W_n|} \int_{W_n^r} \int_{\mathbb{A}^r} f_K((x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^r(d(a_1, \dots, a_r)) d(x_1, \dots, x_r) \\ & \rightarrow \int_{(\mathbb{R}^d)^{r-1}} \int_{\mathbb{A}^r} f_K((\mathbf{0}, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^r(d(a_1, \dots, a_r)) d(x_2, \dots, x_r) < \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beweis. Wir definieren eine translationsinvariante Funktion $h : (\mathbb{R}^d)^r \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$h(x_1, \dots, x_r) := \int_{\mathbb{A}^r} f_K((x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^r(d(a_1, \dots, a_r)).$$

Wir zeigen, dass die Abschätzung

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{r-1}} h(\mathbf{0}, x_2, \dots, x_r) d(x_2, \dots, x_r) \leq \rho^{r-1} < \infty \quad (3.48)$$

gilt, wobei ρ den endlichen Wert des Integrals aus (3.47) bezeichnet. Dazu wählen wir einen minimalen Spannbaum T des 1-Skeletts von K und benennen die Ecken von K mit x_1, \dots, x_r , sodass x_i für $i \geq 2$ einen eindeutigen Nachbarn in T in der Menge $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ besitzt, was nach Korollar 1.5.2 in [11] immer möglich ist. Dann lässt sich das Integral in (3.48) nach oben abschätzen gegen

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^{r-1}} \int_{\mathbb{A}^r} \prod_{i=2}^r \varphi_1((x_{j_i}, a_{j_i}), (x_i, a_i)) \Theta^r(d(a_1, \dots, a_r)) d(x_2, \dots, x_r), \quad (3.49)$$

wobei wir o.B.d.A. $x_1 = \mathbf{0}$ setzen (wegen der Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen ist es irrelevant, welche Komponente der Funktion h im Integral aus (3.48) nicht ausintegriert wird). Integrieren wir nacheinander absteigend in $i \in \{2, \dots, r\}$ nach (x_i, a_i) aus, so verwenden wir im i -ten Schritt die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{A}} \varphi_1((x_{j_i}, a_{j_i}), (x_i, a_i)) \Theta(da_i) dx_i \leq \rho, \quad (3.50)$$

die nach (3.47) für Θ -fast alle a_{j_i} gilt. Wegen der Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen gilt diese Abschätzung für jeden Punkt $x_{j_i} \in \mathbb{R}^d$. Nach $(r-1)$ -facher Anwendung der Abschätzung aus (3.50) auf das Integral in (3.49) erhalten wir die obere Schranke $\rho^{r-1} \int_{\mathbb{A}} \Theta(da_1) = \rho^{r-1}$, womit (3.48) bewiesen ist. Die Aussage folgt jetzt direkt aus Lemma 3.18. \square

ZENTRALE GRENZWERTSÄTZE FÜR DIE EULER-CHARAKTERISTIK

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Euler-Charakteristik, bei der es sich um eine der historisch gesehen am frühesten betrachteten topologischen Kennzahlen handelt. Für endliche Simplicialkomplexe ist die Euler-Charakteristik, wie in Abschnitt 2.2 eingeführt, definiert als die Differenz der Anzahl von Simplexes gerader Dimension und derer ungerader Dimension. Allerdings ist die Euler-Charakteristik schon in viel allgemeineren Rahmen betrachtet und untersucht worden. In [16] wird die Euler-Charakteristik beispielsweise für sogenannte CW-Komplexe, einer Verallgemeinerung von Simplicialkomplexen, eingeführt und betrachtet.

In der stochastischen Geometrie werden oft additive, stetige Funktionale $f : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet, die sich zu Funktionalen auf den Konvexring aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{K}^d erweitern lassen. Der Charakterisierungssatz von Hadwiger (siehe z.B. Theorem 14.4.6 in [39]) besagt, dass es sich bei jedem solchen Funktional f , das zusätzlich auch noch invariant unter euklidischen Bewegungen ist, um eine Linearkombination der sogenannten inneren Volumina V_0, \dots, V_d handelt. Die Euler-Charakteristik, die für Polytope analog als alternierende Summe von Seitenanzahlen definiert werden kann, bildet dabei das nulldimensionale innere Volumen V_0 . In [20] werden beispielsweise zentrale Grenzwertsätze und weitere Resultate für eine Klasse von Funktionalen im Booleschen Modell gezeigt, die die inneren Volumina beinhalten.

Als topologische Kennzahl findet die Euler-Charakteristik auch beim Untersuchen von Simplicialkomplexen immer wieder Aufmerksamkeit. In [43] werden beispielsweise funktionale Grenzwertsätze für die Euler-Charakteristik des Vietoris-Rips-Komplexes (als Funktion im Parameter des Komplexes) hergeleitet. Zentrale Grenzwertsätze für die Euler-Charakteristik in verallgemeinerten Čech- und Vietoris-Rips-Komplexen können in [7] gefunden werden. Die Euler-Charakteristik

lässt sich gemäß der Euler-Poincaré-Formel (2.6) auch als alternierende Summe der Betti-Zahlen schreiben. Deswegen liefert ein Resultat über die Euler-Charakteristik auch immer eine Aussage über die Betti-Zahlen, die als Funktionale auf dem zuvor erwähnten Konvexring allerdings nicht additiv sind, weswegen viele Resultate aus der stochastischen Geometrie für sie nicht gelten.

In Abschnitt 4.1 übertragen wir Theorem 2.9, welches obere Schranken für den Wasserstein- und den Kolmogorov-Abstand eines standardisierten Poissonfunktionalen zu einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen bereitstellt, auf den Differenzenoperator aus Abschnitt 3.4. In den beiden folgenden Abschnitten wenden wir dieses Resultat für die Euler-Charakteristik von Δ_W an, wobei $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ ein Beobachtungsfenster sein wird und wir weiterhin die Notation $|W| = \lambda(W)$ verwenden. Dabei betrachten wir die beiden Grenzszenarien $\beta \rightarrow \infty$ und $|W| \rightarrow \infty$ und leiten zentrale Grenzwertsätze für diese beiden Szenarien her. Im letzten Abschnitt des Kapitels zeigen wir schließlich einen multivariaten zentralen Grenzwertsatz für Simplexanzahlen im markierten stationären Modell.

Wir wollen in diesem Kapitel die Euler-Charakteristik noch dahingehend verallgemeinern, dass wir eine beliebige Linearkombination von Simplexanzahlen zulassen. Zu $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ definieren wir die verallgemeinerte Euler-Charakteristik $\chi_a : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$, indem wir für endliche Komplexe $\kappa \in \mathbb{N}_K^f(S)$

$$\chi_a(\kappa) := \sum_{i=0}^{\alpha} a_i f_i(\kappa)$$

definieren und für alle anderen Komplexe $\chi_a(\kappa) := 0$ setzen. Dabei nehmen wir stets ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_\alpha \neq 0$ an, da ansonsten einfach der Parameter α des Modells entsprechend angepasst werden kann. In Abschnitt 3.3 wurden bereits Formeln für die ersten beiden Momente der Euler-Charakteristik bereit gestellt. Für das gesamte Kapitel sei ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ und ein Koeffizientenvektor $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ fixiert. Zwar gilt im allgemeinen nicht $\Delta_W = T(\Psi_W)$, sondern nur Gleichheit in Verteilung, dies kann aber \mathbb{P} -fast sicher wegen (3.8) o.B.d.A. angenommen werden, da die verwendete Zerlegung Q so gewählt werden kann, dass es sich bei dem Beobachtungsfenster W um eine der Mengen von Q handelt. Im Folgenden gelte also stets $\Delta_W = T(\Psi_W)$ \mathbb{P} -fast sicher.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den Differenzenoperatoren aus Abschnitt 3.4 für die Euler-Charakteristik. Zu paarweise verschiedenen Punkten x_1, \dots, x_l sei $f_i^{x_1, \dots, x_l}(\kappa)$ die Anzahl aller i -Simplizes eines Komplexes κ , die alle Punkte x_1, \dots, x_l enthalten. Mithilfe dieser Größen lassen sich die Differenzenoperatoren der Euler-Charakteristik sehr anschaulich beschreiben. Zunächst gilt für die Differenzenoperatoren erster und zweiter Ordnung wegen der Eigenschaft (3.22) \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x,u)} \chi_a(\Delta_W) &= \chi_a(\Delta_W^{(x,u)}) - \chi_a(\Delta_W) \\ &= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \left(f_i(\Delta_W^{(x,u)}) - f_i(\Delta_W) \right) = \sum_{i=0}^{\alpha} a_i f_i^x(\Delta_W^{(x,u)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}^2 \chi_a(\Delta_W) &= \chi_a(\Delta_W^{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}) - \chi_a(\Delta_W^{(x_1, u_1)}) - \chi_a(\Delta_W^{(x_2, u_2)}) + \chi_a(\Delta_W) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \left(f_i(\Delta_W^{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}) - f_i(\Delta_W^{(x_1, u_1)}) - f_i(\Delta_W^{(x_2, u_2)}) + f_i(\Delta_W) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\alpha} a_i f_i^{x_1, x_2}(\Delta_W^{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}).
\end{aligned}$$

Diese Darstellung der Differenzenoperatoren der Euler-Charakteristik lässt sich analog für die Operatoren höherer Ordnung fortsetzen, was Gegenstand des nachfolgenden Lemmas ist.

Lemma 4.1 (Differenzenoperatoren der Euler-Charakteristik). *Für $k \in \mathbb{N}$ und $(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$ gilt \mathbb{P} -fast sicher*

$$\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k \chi_a(\Delta_W) = \sum_{i=k-1}^{\alpha} a_i f_i^{x_1, \dots, x_k}(\Delta_W^{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}).$$

Beweis. Alle Umformungen innerhalb dieses Beweises sind \mathbb{P} -fast sicher zu verstehen. Zunächst gilt per Definition der Differenzenoperatoren und der Euler-Charakteristik

$$\begin{aligned}
\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k \chi_a(\Delta_W) &= \sum_{J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} \chi_a(\Delta_W^{(x_j, u_j)_{j \in J}}) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \sum_{J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} f_i(\Delta_W^{(x_j, u_j)_{j \in J}}). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt fixieren wir ein Simplex $\sigma \in \Delta_W^{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}$ und überlegen uns, wie oft dieses Simplex von obiger Summe gezählt wird. Dazu bezeichne $I \subseteq [k]$ die eindeutige Menge mit $x_i \in \sigma$ für alle $i \in I$ und $x_i \notin \sigma$ für alle $i \notin I$. Wegen Eigenschaft (3.22) wird σ im Summanden zu $J \subseteq [k]$ in (4.1) genau dann gezählt, wenn $I \subseteq J$ gilt. Dies bedeutet, dass σ in der zweiten Summe von (4.1) insgesamt genau

$$\begin{aligned}
\sum_{J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} \mathbb{1}\{I \subseteq J\} &= \sum_{I \subseteq J \subseteq [k]} (-1)^{k-|J|} = \sum_{J \subseteq [k-|I|]} (-1)^{k-|I|-|J|} \\
&= \sum_{j=0}^{k-|I|} \binom{k-|I|}{j} (-1)^{k-|I|-j} = \begin{cases} 1, & I = [k], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

mal gezählt wird. Also zählt der Operator $\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k \chi_a(\Delta_W)$ lediglich diejenigen Simplexe von $\Delta_W^{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}$ (mit dem entsprechenden Vorzeichen), die alle hinzugefügten Punkte x_1, \dots, x_k beinhalten. Die Behauptung folgt, da ein solches Simplex mindestens die Dimension $k-1$ besitzen muss. \square

Diese Darstellung vereinfacht den Umgang mit den Differenzenoperatoren der Euler-Charakteristik ungemein. Lemma 4.1 liefert insbesondere für die Differenzenoperatoren sehr hoher Ordnung eine

sehr einfache Darstellung, denn es folgt \mathbb{P} -fast sicher

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_{\alpha+1}, u_{\alpha+1})}^{\alpha+1} \chi_a(\Delta_W) &= a_\alpha \mathbb{1}\{[x_1, \dots, x_{\alpha+1}] \in \Delta_W^{(x_1, u_1), \dots, (x_{\alpha+1}, u_{\alpha+1})}\}, \\ \Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k \chi_a(\Delta_W) &= 0 \quad \text{für alle } k \geq \alpha + 2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Eine weitere sehr schöne Eigenschaft der Euler-Charakteristik liefert nachfolgende Proposition, die zeigt, dass für die Euler-Charakteristik in der Fock-Raum-Ungleichung aus Theorem 3.15 sogar Gleichheit gilt.

Proposition 4.2 (Fock-Raum-Darstellung der Euler-Charakteristik). *Es gilt*

$$\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} \int_{W^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k \chi_a(\Delta_W) \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k))$$

mit (insbesondere von Ψ) unabhängigen Markenfolgen $U^{(1)}, \dots, U^{(k)} \sim \mathbb{Q}$.

Beweis. Wir fixieren $k \in [\alpha + 1]$ und stellen fest, dass wegen (4.2) alle Summanden auf der rechten Seite für $k \geq \alpha + 2$ verschwinden. Für den Beweis verwenden wir die abkürzenden Notationen $\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W) := \Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k \chi_a(\Delta_W)$ und $\Delta_W^{x_1, \dots, x_k} = \Delta_W^{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}$. Der Zufallsvektor U_{x_1, \dots, x_k} beinhaltet genau diejenigen Marken, die bei Konstruktion des Simplicialkomplexes $\Delta_W^{x_1, \dots, x_k}$ bzw. des Operators $\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W)$ für Simplex $\sigma \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, $|\sigma| \geq 2$, verantwortlich sind. Nach Lemma 4.1 verschwindet der Operator $\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W)$, wenn nicht $[x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k}$ gilt. Deswegen folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W) \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right] \\ &= \mathbb{1}\{[x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k}\} \mathbb{E} \left[\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W) \mid [x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k} \right]. \end{aligned}$$

Wir fixieren eine Realisierung μ von U_{x_1, \dots, x_k} , sodass $[x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k}$ gilt. Dann erhalten wir mit Lemma 4.1 und der Notation aus dem Beweis von Theorem 3.15

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\Lambda_{x_1, \dots, x_k}^k \chi_a(\Delta_W) \mid [x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k} \right] \\ &= \sum_{m=k}^{\alpha+1} a_{m-1} \mathbb{E} \left[f_{m-1}^{x_1, \dots, x_k}(\Delta_W^{x_1, \dots, x_k}) \mid [x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k} \right] \\ &= \sum_{m=k}^{\alpha+1} a_{m-1} \int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[f_{m-1}^{x_1, \dots, x_k} \left(\Delta_W^{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k)})} \right) \right] \mathbb{Q}^k(d(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})). \end{aligned}$$

Für $m = k$ ist der Erwartungswert 1. Um den Erwartungswert für $m \geq k + 1$ zu bestimmen, schreiben wir $[x, z]$ für das Simplex, bestehend aus den Punkten x_1, \dots, x_k und den Einträgen von z für $z \in \Phi^{(m-k)}$. Die Mecke-Formel angewandt für den Poissonprozess Ψ_W liefert

$$\mathbb{E} \left[f_{m-1}^{x_1, \dots, x_k} \left(\Delta_W^{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k)})} \right) \right] = \frac{1}{(m-k)!} \mathbb{E} \left[\sum_{z \in \Phi_W^{(m-k)}} \mathbb{1}\{[x, z] \in \Delta_W^{(x_1, u_{\mu, \Psi}^{(1)}), \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi}^{(k)})}\} \right]$$

$$= \frac{\beta^{m-k}}{(m-k)!} \int_{W^{m-k}} \int_{\mathbb{M}^{m-k}} \mathbb{E} \left[[x_1, \dots, x_m] \in T \left(\Psi_W + \sum_{j=1}^k \delta_{(x_j, u_{\mu, \Psi_W}^{(j)})} + \sum_{j=k+1}^m \delta_{(x_j, u^{(j)})} \right) \right] \\ \times \lambda^{m-k} (d(x_{k+1}, \dots, x_m)) \mathbb{Q}^{m-k} (d(u^{(k+1)}, \dots, u^{(m)})),$$

wobei wir in den Indizes der Marken Ψ_W^x für $\Psi_W + \sum_{j=k+1}^m \delta_{(x_j, u^{(j)})}$ geschrieben haben. Ausintegrieren nach der Markenverteilung liefert

$$\int_{\mathbb{M}^k} \mathbb{E} \left[f_{m-1}^{x_1, \dots, x_k} \left(\Delta_W^{(x_1, u_{\mu, \Psi_W}^{(1)})}, \dots, (x_k, u_{\mu, \Psi_W}^{(k)}) \right) \right] \mathbb{Q}^k (d(u^{(1)}, \dots, u^{(k)})) \\ = \frac{\beta^{m-k}}{(m-k)!} \int_{W^{m-k}} \mathbb{E} \left[[x_1, \dots, x_m] \in T \left(\Psi_W + \sum_{j=1}^k \delta_{(x_j, U_{\mu, \Psi_W}^{(j)})} + \sum_{j=k+1}^m \delta_{(x_j, U^{(j)})} \right) \right] \\ \times \lambda^{m-k} (d(x_{k+1}, \dots, x_m)) \\ = \frac{\beta^{m-k}}{(m-k)!} \int_{W^{m-k}} \prod_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [m], \\ I \not\subseteq [k]}} \varphi_{|I|-1}(x_I) \lambda^{m-k} (d(x_{k+1}, \dots, x_m))$$

mit (auch vom restlichen Zufall) unabhängigen Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(m)}$. Wir interpretieren Integrale über W^0 als 1 und erhalten insgesamt für den Erwartungswert im k -ten Summanden der Fock-Raum-Darstellung

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k \chi_a(\Delta_W) \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] = \mathbb{P}([x_1, \dots, x_k] \in \Delta_W^{x_1, \dots, x_k}) \\ \times \left(\sum_{m=k}^{\alpha+1} a_{m-1} \frac{\beta^{m-k}}{(m-k)!} \int_{W^{m-k}} \prod_{\substack{\emptyset \neq I \subseteq [m], \\ I \not\subseteq [k]}} \varphi_{|I|-1}(x_I) \lambda^{m-k} (d(x_{k+1}, \dots, x_m)) \right)^2 \\ = \sum_{m=k}^{\alpha+1} \sum_{l=k}^{\alpha+1} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^{m+l-2k}}{(m-k)!(l-k)!} \int_{W^{m+l-2k}} \kappa_{m,l}^{m+l-k}(x_1, \dots, x_{m+l-k}) \\ \times \lambda^{m+l-k} (d(x_{k+1}, \dots, x_{m+l-k})).$$

Hier wurden im zweiten Schritt die Integrale über W^{m-k} und W^{l-k} als ein Integral über W^{m+l-2k} geschrieben sowie die Definition von $\kappa_{m,l}^{m+l-k}$ ausgenutzt. Ausintegrieren nach x_1, \dots, x_k liefert also für das Integral im k -ten Summanden der Fock-Raum-Darstellung

$$\int_{W^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k \chi_a(\Delta_W) \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] \lambda^k (d(x_1, \dots, x_k)) \\ = \sum_{m=k}^{\alpha+1} \sum_{l=k}^{\alpha+1} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^{m+l-2k}}{(m-k)!(l-k)!} z_{m,l}^{m+l-k}. \quad (4.3)$$

Dadurch ergibt sich für die Fock-Raum-Darstellung

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\alpha+1} \frac{\beta^k}{k!} \int_{W^k} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\Lambda_{(x_1, U^{(1)}), \dots, (x_k, U^{(k)})}^k \chi_a(\Delta_W) \mid U_{x_1, \dots, x_k} \right]^2 \right] \lambda^k(d(x_1, \dots, x_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{\alpha+1} \sum_{m=k}^{\alpha+1} \sum_{l=k}^{\alpha+1} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^{m+l-k}}{(m-k)!(l-k)!k!} z_{m,l}^{m+l-k} \\
&= \sum_{m=1}^{\alpha+1} \sum_{l=1}^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{\min\{m,l\}} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^{m+l-k}}{(m-k)!(l-k)!k!} z_{m,l}^{m+l-k} \\
&= \sum_{m=1}^{\alpha+1} \sum_{l=1}^{\alpha+1} \sum_{r=\max\{m,l\}}^{m+l-1} a_{m-1} a_{l-1} \frac{\beta^r}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r,
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichung die Substitution $r = m + l - k$ vorgenommen wurde. Nach der Euler-Varianz-Formel (Theorem 3.11) ist der letzte Term genau $\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W))$. \square

Aus dem Beweis von Proposition 4.2 geht hervor, dass der k -te Summand aus der Fock-Raum-Darstellung der Euler-Charakteristik genau für die Summanden aus der Euler-Varianz-Formel verantwortlich ist, für die $r = m + l - k$ gilt. Wir wollen die Fock-Raum-Darstellung der Euler-Charakteristik aus Proposition 4.2 nutzen, um eine geeignete untere Schranke für $\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W))$ zu finden, wofür auch schon die Ungleichung aus Theorem 3.15 für die Euler-Charakteristik ausreichen würde. Die rechte Seite von (4.3) kann im Allgemeinen auch negative Summanden beinhalten, was für eine untere Schranke von großem Nachteil ist. Wegen (4.2) ist es naheliegend als untere Schranke den Summanden für $k = \alpha + 1$ aus der Fock-Raum-Darstellung zu wählen, denn so erhalten wir

$$\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W)) \geq \frac{\beta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} a_\alpha^2 z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1}. \quad (4.4)$$

Diese untere Schranke ist gemäß Proposition 3.10 interessanterweise bis auf den Faktor a_α^2 genau die erwartete Anzahl von α -Simplex in Δ_W . Für die klassische Euler-Charakteristik ergibt sich sogar Gleichheit, da dann $a_\alpha = (-1)^\alpha$ gilt.

4.1. EIN THEOREM ZUR NORMALAPPROXIMATION

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst wieder ein allgemeines Poissonfunktional $F = f(\Delta)$ mit einer messbaren Abbildung $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$. Im Fall $\mathbb{E}[F^2] < \infty$ bezeichnen wir mit

$$\tilde{F} := \frac{F - \mathbb{E}[F]}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}}.$$

das zugehörige standardisierte Funktional, also das Funktional zur Abbildung $\tilde{f} := \frac{f - \mathbb{E}[f]}{\sqrt{\mathbb{V}(f)}}$. Da die Differenzenoperatoren linear sind und auf konstanten Abbildungen verschwinden, wie direkt aus

der Definition (3.23) hervorgeht, erfüllen sie die nützliche Eigenschaft

$$\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k \tilde{F} = \frac{\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k)}^k F}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}}, \quad k \in \mathbb{N}, (x_1, u_1), \dots, (x_k, u_k) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}.$$

Um Theorem 2.9 auf die Operatoren Λ^k zu übertragen, führen wir eine weitere Konstruktion ein, was wir im Folgenden motivieren. Für zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ und zwei Marken $u_1, u_2 \in \mathbb{M}$ sind die Differenzenoperatoren $\Lambda_{(x_1, u_1)}, \Lambda_{(x_2, u_2)}$ zum Poissonfunktional F gemäß (3.23) gegeben durch

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x_1, u_1)} F &= f(T(\Psi + \delta_{(x_1, u_1)})) - f(T(\Psi + \delta_{(x_1, u_1)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_1\}}), \\ \Lambda_{(x_2, u_2)} F &= f(T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)})) - f(T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}). \end{aligned}$$

Da das Hinzufügen eines Punktes auch Simplexes, an denen dieser Punkt nicht beteiligt ist, beeinflussen kann, gilt im Allgemeinen $T(\Psi + \delta_{(x_1, u_1)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_1\}} \neq T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}$. Dies erschwert das Arbeiten mit dem Zufallsvektor $(\Lambda_{(x_1, u_1)} F, \Lambda_{(x_2, u_2)} F)$. Deswegen modifizieren wir die Konstruktion dahingehend, dass wir zunächst einen Komplex konstruieren, der die beiden hinzugefügten Punkte enthält, und nur Einschränkungen dieses Komplexes verwenden. Konkret definieren wir

$$\begin{aligned} \Lambda_{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}^1 F &:= f(T(\Psi + \delta_{(x_1, u_1)} + \delta_{(x_2, u_2)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}) - f(T(\Psi + \delta_{(x_1, u_1)} + \delta_{(x_2, u_2)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_1, x_2\}}), \\ \Lambda_{(x_2, u_2), (x_1, u_1)}^1 F &:= f(T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)} + \delta_{(x_1, u_1)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_1\}}) - f(T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)} + \delta_{(x_1, u_1)})_{\mathbb{X} \setminus \{x_2, x_1\}}). \end{aligned}$$

Bei dem Zufallsvektor $(\Lambda_{(x_1, u_1), (x_2, u_2)}^1 F, \Lambda_{(x_2, u_2), (x_1, u_1)}^1 F)$ handelt es sich jetzt um eine Funktion im Simplexialkomplex $T(\Psi + \delta_{(x_2, u_2)} + \delta_{(x_1, u_1)})$. In gewissem Sinne wurde die beiden Differenzenoperatoren durch diese Konstruktion aneinander gekoppelt. Wir verallgemeinern diese Konstruktion auf beliebige Anzahlen von hinzugefügten Punkten. Dazu seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq l$ sowie $(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l) \in \mathbb{X} \times \mathbb{M}$. Wir definieren

$$\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^k F := \sum_{I \subseteq [k]} (-1)^{k-|I|} f\left(T\left(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, u_i)}\right)_{\mathbb{X}_I}\right) \quad (4.5)$$

mit $\mathbb{X}_I := \mathbb{X} \setminus \{x_j \mid j \in [l] \setminus I\}$. Hier gehen alle auftauchenden Simplexialkomplexe durch Einschränkung aus $T(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, u_i)})$ hervor, wobei die Punkte x_{k+1}, \dots, x_l bei allen Komplexen aus (4.5) wieder entfernt werden. Insbesondere ist der Differenzenoperator aus (4.5) verteilungsgleich zum Differenzenoperator aus (2.8). Man beachte, dass sich die Differenzenoperatoren aus (3.23) im Sonderfall $k = l$ ergeben. Die Zahl k gibt die Ordnung des Operators an und die Differenz $l - k$ die Anzahl der zusätzlich hinzugefügten Punkte, die wieder entfernt werden. Für $k = 0$ ergibt sich mit $[0] := \emptyset$

$$\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^0 F := f\left(T\left(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, u_i)}\right)_{\mathbb{X}_{\emptyset}}\right)$$

und für $l = k = 0$ erhalten wir das Funktional F zurück. Für eine Teilmenge $I \subseteq [l]$ mit $I = \{i_1, \dots, i_m\}$, $|I| = m$ und $J := [l] \setminus I = \{j_1, \dots, j_{l-m}\}$ verwenden wir die abkürzende Notation

$$\Lambda_{(x_i, u_i)_{i \in I}, (x_j, u_j)_{j \in J}}^m F := \Lambda_{(x_{i_1}, u_{i_1}), \dots, (x_{i_m}, u_{i_m}), (x_{j_1}, u_{j_1}), \dots, (x_{j_{l-m}}, u_{j_{l-m}})}^m F.$$

Außerdem schreiben wir analog zur zuvor verwendeten Notation für $I = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq [k]$ mit $|I| = s$

$$\Delta_{(x_i, u_i)_{i \in I}} := \Delta_{(x_{i_1}, u_{i_1}), \dots, (x_{i_s}, u_{i_s})} := T\left(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, u_i)}\right)_{\mathbb{X}_I}.$$

Dabei sind die zusätzlichen Punkte x_{k+1}, \dots, x_l in der Notation auf der linken Seite unterschlagen worden. Dies sollte jedoch zu keinen Problemen führen, da stets klar sein sollte, welcher Operator gerade genau betrachtet wird. Außerdem haben die zusätzlichen Punkte keinen Einfluss auf die Verteilung des Komplexes, wenn als Marken unabhängige Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(l)} \sim \mathbb{Q}$ gewählt werden, solange x_1, \dots, x_l paarweise vergleichbar bzgl. $<$ sind. Mit dieser Notation gilt auch für den Operator $\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^k \chi_a(\Delta_W)$ die Darstellung aus Lemma 4.1. Nach Konstruktion handelt es sich bei dem Zufallsvektor

$$\left(\Lambda_{(x_i, u_i)_{i \in I}, (x_j, u_j)_{j \in [l] \setminus I}}^{|I|} F\right)_{I \subseteq [l]}$$

um eine Funktion $g_f^{k,l} : \mathbb{N}_K(\mathcal{S}) \times \mathbb{X}^l \rightarrow (\mathbb{R})^{2^l}$ im Komplex $T\left(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, u_i)}\right)$. Für $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{X}$, sodass die Indizes $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}_0$ mit $x_i \in \mathcal{Q}_i$, $i \in [l]$, paarweise verschieden sind, folgt deshalb als analoge Aussage zu (3.25) die Verteilungsgleichheit

$$\mathbb{1}_A \left(D_{(x_i, U^{(i)})_{i \in I}}^{|I|, \mathcal{Q}} F \right)_{\emptyset \neq I \subseteq [l]} \stackrel{d}{=} \mathbb{1}_A \left(\Lambda_{(x_i, U^{(i)})_{i \in I}, (x_j, U^{(j)})_{j \in [l] \setminus I}}^{|I|, \mathcal{R}} F \right)_{\emptyset \neq I \subseteq [l]} \quad (4.6)$$

mit unabhängigen Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(l)} \sim \mathbb{Q}$ und dem Ereignis

$$A := \left\{ \Phi \left(\cup_{i=1}^l \mathcal{Q}_{m_i} \right) = 0 \right\}, \quad (4.7)$$

wobei wir wieder die Abhängigkeit von den gewählten Zerlegungen \mathcal{Q}, \mathcal{R} in die Notation aufgenommen haben. Dazu beachte man, dass auf A der Vektor der Differenzenoperatoren D^k aus (4.6) von der Form $g_f^{k,l} \left(T_{\mathcal{Q}, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_l} \left(\Psi + \sum_{i=1}^l \delta_{(x_i, U^{(i)})} \right), x_1, \dots, x_l \right)$ ist. Die erweiterte Definition (4.5) liefert also eine Kopplung der Operatoren $\Lambda_{(x_i, U^{(i)})_{i \in I}, (x_j, U^{(j)})_{j \in [l] \setminus I}}^{|I|} F$, $I \subseteq [l]$. Damit sind alle Vorbereitungen für die Herleitung eines Theorems für die Differenzenoperatoren Λ^k basierend auf Theorem 2.9 getroffen. Der Beweis folgt in seiner Grundstruktur dem Beweis von Theorem 3.5.2 in [34] bzw. Theorem 6.1 in [28]. Dabei betrachten wir nur Funktionale der Form $f(\Delta_W)$ für ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$, da es Funktionale dieser Form sein werden, für die wir das Theorem anwenden wollen.

Theorem 4.3. *Es sei $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ und $F = f(\Delta_W)$ ein Poissonfunktional mit einer messbaren Abbildung $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\mathbb{E}[F] = 0$, $\mathbb{V}(F) = 1$ und $\mathbb{E}[F^4] < \infty$ gelten. Außerdem gelte $\gamma_5, \gamma_6 < \infty$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} d_W(F, N) &\leq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \\ d_K(F, N) &\leq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6, \end{aligned}$$

wobei die Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= 2 \left[\beta^3 \int_{W^3} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^1 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_1, U_1)}^1 F \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_2 &:= \left[\beta^3 \int_{W^3} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right] \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_3 &:= \beta \int_W \mathbb{E} [|\Lambda_{(x, U)} F|^3] \lambda(dx), \\ \gamma_4 &:= \frac{\beta}{2} \mathbb{E}[F^4]^{\frac{1}{4}} \int_W \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x, U)} F \right)^4 \right]^{\frac{3}{4}} \lambda(dx), \\ \gamma_5 &:= \left[\beta \int_W \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x, U)} F \right)^4 \right] \lambda(dx) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_6 &:= \left[\beta^2 \int_{W^2} 6 \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1)} F \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3 \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right] \lambda^2(d(x_1, x_2)) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

mit unabhängigen Marken $U, U_1, U_2, U_3 \sim \mathbb{Q}$. Es gilt außerdem $\gamma_1, \dots, \gamma_4 < \infty$.

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Theorem 3.15 und fixieren zu $\varepsilon \in (0, 1)$ eine Zerlegung Q_ε mit den Eigenschaften (3.28) und (3.29). Zunächst nehmen wir f als beschränkt an. Wir wenden Theorem 2.9 für den Poissonprozess Ψ_W und das Poissonfunktional $F_\varepsilon := f(T_{Q_\varepsilon, <}^{\varphi_1, \dots, \varphi_\alpha}(\Delta_W))$ mit $F_\varepsilon \stackrel{d}{=} F$ an. Mithilfe der Hölderungleichung für das Integral in $\tilde{\gamma}_1$ und das erste Integral in $\tilde{\gamma}_6$ und der Ungleichung von Jensen für konkave Funktionen (oder alternativ nochmal der Hölderungleichung) für die restlichen Integrale, ziehen wir die Integration bzgl. der Markenverteilung in die auftauchenden Erwartungswerte und erhalten

$$\begin{aligned} d_W(F, N) &\leq \gamma_1^*(\varepsilon) + \gamma_2^*(\varepsilon) + \gamma_3^*(\varepsilon), \\ d_K(F, N) &\leq \gamma_1^*(\varepsilon) + \gamma_2^*(\varepsilon) + \gamma_3^*(\varepsilon) + \gamma_4^*(\varepsilon) + \gamma_5^*(\varepsilon) + \gamma_6^*(\varepsilon), \end{aligned}$$

mit den Größen

$$\begin{aligned} \gamma_1^*(\varepsilon) &:= 2 \left[\beta^3 \int_{W^3} \mathbb{E} \left[(D_{(x_1, U_1)} F_\varepsilon)^2 (D_{(x_2, U_2)} F_\varepsilon)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E} \left[\left(D_{(x_1, U_1), (x_3, U_3)}^2 F_\varepsilon \right)^2 \left(D_{(x_2, U_2), (x_3, U_3)}^2 F_\varepsilon \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3 (d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_2^*(\varepsilon) &:= \left[\beta^3 \int_{W^3} \mathbb{E} \left[\left(D_{(x_1, U_1), (x_3, U_3)}^2 F_\varepsilon \right)^2 \left(D_{(x_2, U_2), (x_3, U_3)}^2 F_\varepsilon \right)^2 \right] \lambda^3 (d(x_1, x_2, x_3)) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_3^*(\varepsilon) &:= \beta \int_W \mathbb{E} [|D_{(x, U)} F_\varepsilon|^3] \lambda (dx), \\ \gamma_4^*(\varepsilon) &:= \frac{\beta}{2} \mathbb{E} [F_\varepsilon^4]^{\frac{1}{4}} \int_W \mathbb{E} [(D_{(x, U)} F_\varepsilon)^4]^{\frac{3}{4}} \lambda (dx), \\ \gamma_5^*(\varepsilon) &:= \left[\beta \int_W \mathbb{E} [(D_{(x, U)} F_\varepsilon)^4] \lambda (dx) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \gamma_6^*(\varepsilon) &:= \left[\beta^2 \int_{W^2} 6 \mathbb{E} [(D_{(x_1, U_1)} F_\varepsilon)^4]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} [(D_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F_\varepsilon)^4]^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 3 \mathbb{E} [(D_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F_\varepsilon)^4] \lambda^2 (d(x_1, x_2)) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass Theorem 2.9 anwendbar ist, da die Integrabilitätsbedingung

$$\int_W \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} [\Lambda_{(x, u)} F_\varepsilon]^2 \mathbb{Q} (du) \lambda (dx) < \infty$$

wegen der Beschränktheit von f und $|W| < \infty$ erfüllt ist. Wir zeigen für $i \in [6]$ die Konvergenz

$$\gamma_i^*(\varepsilon) \rightarrow \gamma_i \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Wegen Eigenschaft (4.6) und der Beschränktheit von f konvergiert der Integrand in $\gamma_i^*(\varepsilon)$ fast überall punktweise gegen den Integranden von γ_i für $i \in [6]$. Um dies einzusehen, sei A_ε das Ereignis aus (4.7) für die Zerlegung \mathcal{Q}_ε und den Fall $l = 1$, $x_1 = x$ sowie dem Index $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $x \in \mathcal{Q}_{m_1}^\varepsilon$. Dann gilt beispielsweise für den Integrand in $\gamma_3^*(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|D_{(x, U)} F_\varepsilon|^3] &= \mathbb{E} [|\Lambda_{(x, U)} F|^3] + \mathbb{E} [\mathbb{1}_{A_\varepsilon^c} (|D_{(x, U)} F_\varepsilon|^3 - |\Lambda_{(x, U)} F|^3)] \\ &\leq \mathbb{E} [|\Lambda_{(x, U)} F|^3] + 4^3 \|f\|_\infty^3 \mathbb{P}(A_\varepsilon^c) \end{aligned}$$

mit $\mathbb{P}(A_\varepsilon^c) \rightarrow 0$ für $\varepsilon \searrow 0$. Für die anderen Integranden, in denen mehrere hinzugefügte Punkte auftauchen, wird hier wieder die Eigenschaft (3.30) verwendet und die Abschätzung gilt dann für fast alle Punkte. Da die Integranden wegen der Beschränktheit von f selbst beschränkt sind und $|W| < \infty$ gilt, liefert der Satz von der dominierten Konvergenz die Behauptung für beschränkte f . Im Folgenden sei f und damit F nicht mehr als beschränkt angenommen. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

ein beschränktes Funktional $F_n := f_n(\Delta_W)$ durch

$$f_n(\Delta_W) := \mathbb{1}\{|f(\Delta_W)| \leq n\} f(\Delta_W) + \mathbb{1}\{f(\Delta_W) > n\} n - \mathbb{1}\{f(\Delta_W) < -n\} n.$$

Es folgen $F_n \rightarrow F$ für $n \rightarrow \infty$ sowohl \mathbb{P} -fast sicher als auch in $L^4(\mathbb{P})$. Zweiteres folgt aus der \mathbb{P} -fast sicheren Konvergenz zusammen mit $|F_n| \leq |F|$ und $\mathbb{E}[F^4] < \infty$. Wir definieren $\gamma_i^{(n)}$ wie γ_i , wobei das Funktional F durch $F_n - \mathbb{E}[F_n]$ ersetzt wird. Der Summand $\mathbb{E}[F_n]$ hat dabei keine Auswirkungen auf die Differenzenoperatoren Λ^k , da diese linear sind und auf Konstanten verschwinden. Um die Konvergenz von $\gamma_i^{(n)}$ gegen γ_i für $n \rightarrow \infty$ und $i \in [k]$ zu zeigen, benutzen wir die Abschätzungen

$$|\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^1 F_n| \leq |\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^1 F| + 2|\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^0 F|, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} |\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^2 F_n| &\leq |\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^2 F| + 2|\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^1 F| \\ &\quad + 2|\Lambda_{(x_2, u_2), (x_1, u_1), (x_3, u_3), \dots, (x_l, u_l)}^1 F| + 4|\Lambda_{(x_1, u_1), \dots, (x_l, u_l)}^0 F|, \end{aligned} \quad (4.9)$$

die auch schon für die Differenzenoperatoren in [34] (vgl. die Abschätzungen (3.5.3) und (3.5.4)) verwendet wurden und sich auf identische Art und Weise zeigen lassen. Wegen $\gamma_5, \gamma_6 < \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \int_W \mathbb{E} \left[(\Lambda_{(x, U)} F)^4 \right] \lambda(dx) &< \infty, \\ \int_{W^2} \mathbb{E} \left[(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F)^4 \right] \lambda^2(d(x_1, x_2)) &< \infty, \\ \int_{W^2} \mathbb{E} \left[(\Lambda_{(x, U)} F)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^2(d(x_1, x_2)) &< \infty, \end{aligned} \quad (4.10)$$

wodurch auch die Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ alle endlich sind, was wir beispielhaft für γ_2 demonstrieren. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert für den Integranden in γ_2

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right] \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right] \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^4 \right]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3)}^2 F \right)^4 \right] \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3)}^2 F \right)^4 \right]} \end{aligned} \quad (4.11)$$

für λ^3 -fast alle $(x_1, x_2, x_3) \in W^3$. Die letzte Gleichung gilt, da ganz allgemein für paarweise verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{X}$ und unabhängige Marken $U_1, \dots, U_l \sim \mathbb{Q}$ per Konstruktion der Differenzenoperatoren die Verteilungsgleichheit

$$\Lambda_{(x_1, U_1), \dots, (x_l, U_l)}^k F \stackrel{d}{=} \Lambda_{(x_1, U_1), \dots, (x_k, U_k)}^k F \quad (4.12)$$

gilt. Die beiden Erwartungswerte in (4.11) sind wegen $\lambda(W) < \infty$ und (4.10) bzgl. λ^3 integrierbar, woraus die Endlichkeit von γ_2 folgt. Die Abschätzungen (4.8), (4.9) liefern also integrierbare obere

Schranken für die Integranden aus den Größen $\gamma_1^{(n)}, \dots, \gamma_6^{(n)}$. Außerdem erlauben die Abschätzungen (4.8),(4.9) eine Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz, um einzusehen, dass die Integranden fast überall gegen die entsprechenden Integranden in den Größen $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ konvergieren. Eine erneute Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz liefert zusammen mit $\mathbb{E} [(F_n - \mathbb{E}[F_n])^4] \rightarrow \mathbb{E} [F^4]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_i^{(n)} = \gamma_i, \quad i \in [6]. \quad (4.13)$$

Die Konvergenz $\mathbb{E} [(F_n - \mathbb{E}[F_n])^4] \rightarrow \mathbb{E} [F^4]$ impliziert außerdem $\mathbb{V}(F_n) \rightarrow \mathbb{V}(F) = 1$. Wir definieren

$$\tilde{F}_n := \frac{F_n - \mathbb{E}[F_n]}{\sqrt{\mathbb{V}(F_n)}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{V}(F_n) > 0$. Für diese Funktionale gilt die Aussage des Theorems nach dem ersten Teil des Beweises für beschränkte Funktionale. Die gewünschte Aussage folgt jetzt aus Lemma 6.2 in [28] sowie (4.13) und $\mathbb{V}(F_n) \rightarrow \mathbb{V}(F) = 1$. \square

4.2. ASYMPTOTIK FÜR WACHSENDE INTENSITÄT

In diesem Abschnitt weisen wir einen ersten zentralen Grenzwertsatz für die Euler-Charakteristik nach. Dafür fixieren wir für den gesamten Abschnitt ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ sowie ein $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit $a_\alpha \neq 0$ und betrachten das Grenzszenario $\beta \rightarrow \infty$ für die Euler-Charakteristik $\chi_a(\Delta_W)$. Die Grundlage für den zentralen Grenzwertsatz bildet Theorem 4.3. Im ersten Schritt werden die dort auftauchenden Erwartungswerte abgeschätzt. Für den Rest des Abschnitts verwenden wir für $I = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq [k]$ mit $|I| = s$ die Notation

$$\Delta^{(x_i)_{i \in I}} := \Delta^{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}} := \Delta^{(x_{i_1}, U^{(i_1)}), \dots, (x_{i_s}, U^{(i_s)})}$$

mit auch von Ψ unabhängigen Marken $U^{(1)}, \dots, U^{(k)} \sim \mathbb{Q}$.

Lemma 4.4. *Für $F = \chi_a(\Delta_W)$ und paarweise verschiedene $x_1, x_2, x_3 \in W$, gelten*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right] &= \mathcal{O}(\beta^{4\alpha-4}) = \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right], \\ \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^1 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_1, U_1)}^1 F \right)^2 \right] &= \mathcal{O}(\beta^{4\alpha}) = \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x, U)} F \right)^4 \right], \\ \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(x, U)} F \right|^3 \right] &= \mathcal{O}(\beta^{3\alpha}). \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die konkrete Rechnung einmal ausführlich für die letzte Gleichung. Dieses Vorgehen lässt sich leicht auf die anderen Ausdrücke übertragen. Dazu verwenden wir wieder die Darstellung (3.3) von Φ_W . Es bezeichne $\sigma_{x, I}$ zu $I \subseteq [\tau]$ und $x \in W$ das Simplex, bestehend aus x

und den Punkten X_i , $i \in I$. Dann gilt mit der Darstellung der Differenzenoperatoren aus Lemma 4.1

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|\Lambda_{(x,U)} F|^3] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} a_i a_j a_m f_i^x(\Delta_W^x) f_j^x(\Delta_W^x) f_m^x(\Delta_W^x) \right| \right] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} \left[f_i^x(\Delta_W^x) f_j^x(\Delta_W^x) f_m^x(\Delta_W^x) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{I \subseteq [\tau], J \subseteq [\tau], M \subseteq [\tau], \\ |I|=i, |J|=j, |M|=m}} \mathbb{1} \{ \sigma_{x,I}, \sigma_{x,J}, \sigma_{x,M} \in \Delta_W^x \} \right] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \right] \\
&\leq \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m}].
\end{aligned}$$

Die gewünschte Aussage ergibt sich daraus, dass es sich bei dem k -ten Moment der Poissonverteilung um ein Polynom im Parameter der Verteilung der Ordnung k handelt, konkret dem k -ten vollständigen Bell-Polynom. Analog folgen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right] &\leq \sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} |a_i a_j a_m a_l| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m+l-4}], \\
\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^4 F \right)^2 \right] &\leq \sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} |a_i a_j a_m a_l| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m+l-4}], \\
\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^1 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_1, U_1)}^1 F \right)^2 \right] &\leq \sum_{i,j,m,l=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m a_l| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m+l}], \\
\mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,U)} F \right)^4 \right] &\leq \sum_{i,j,m,l=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m a_l| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m+l}].
\end{aligned}$$

und mit der selben Argumentation die entsprechenden Behauptungen. Man beachte, dass bei den ersten beiden Abschätzungen auf der linken Seite Differenzenoperatoren der Ordnung 2 auftauchen. Nach Lemma 4.1 werden hier Simplizes gezählt, die die beiden hinzugefügten Punkte enthalten. Da ein i -Simplex $i + 1$ Punkte enthält, bleiben $i - 1$ Punkte, die aus dem zugrundeliegenden Poissonprozess kommen. So erklärt sich der Exponent auf der rechten Seite dieser Abschätzungen. \square

Die Abschätzungen aus Lemma 4.4 sind im Allgemeinen optimal, denn mit der Wahl von $\varphi_j \equiv 1$ für alle $j \in [\alpha]$ folgt beispielsweise

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|\Lambda_{(x,U)} F|^3] &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} a_i a_j a_m f_i^x(\Delta_W^x) f_j^x(\Delta_W^x) f_m^x(\Delta_W^x) \right| \right] \\
&\geq \left| \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} a_i a_j a_m \mathbb{E} \left[f_i^x(\Delta_W^x) f_j^x(\Delta_W^x) f_m^x(\Delta_W^x) \right] \right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=0}^{\alpha} a_i a_j a_m \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \right] \right|.$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \right]$ lässt sich auch nach unten gegen ein Polynom in β der Ordnung $i + j + m$ (mit positivem Vorfaktor vor β^{i+j+m}) abschätzen, wodurch der Ausdruck innerhalb der Betragsstriche auch von der Ordnung $\beta^{3\alpha}$ wächst. Zum Nachweis dieser Behauptung gelte o.B.d.A. $i \leq j \leq m$. Außerdem bezeichnen wir den Parameter der Poissonverteilung von τ im Folgenden zur einfacheren Notation einfach mit β oder anders gesagt wir nehmen o.B.d.A. $|W| = 1$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \binom{k}{i} \binom{k}{j} \binom{k}{m} \\ &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} e^{-\beta} \frac{k! k! k!}{i!(k-i)! j!(k-j)! m!(k-m)!} \\ &= \frac{1}{i! j! m!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^{k+m}}{k!} e^{-\beta} \frac{(k+m)! (k+m)!}{(k+m-i)! (k+m-j)!} \\ &= \frac{\beta^m}{i! j! m!} \mathbb{E} [(\tau + m) \cdot \dots \cdot (\tau + m - i + 1) (\tau + m) \cdot \dots \cdot (\tau + m - j + 1)] \\ &\geq \frac{\beta^m}{i! j! m!} \mathbb{E} [\tau^{i+j}]. \end{aligned}$$

Da die vollständigen Bell-Polynome immer eine 1 als Vorfaktor vor ihrer größten Potenz stehen haben, folgt die Behauptung. Dieses Vorgehen lässt sich analog auch auf Erwartungswerte der Form $\mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \binom{\tau}{l} \right]$ anwenden, wodurch sich auch die Optimalität aller anderen Abschätzungen aus Lemma 4.4 (zumindest in der Allgemeinheit des Theorems) zeigen lässt. Bevor ein erster zentraler Grenzwertsatz formuliert werden kann, widmen wir uns noch dem vierten zentrierten Moment der Euler-Charakteristik, der in γ_4 von Theorem 4.3 auftaucht.

Proposition 4.5 (Kurtosis). *Es sei $F = \chi_a(\Delta_W)$. Dann existieren $s \in \mathbb{N}$, $c_j \in \mathbb{R}$ sowie paarweise nicht isomorphe Simplicialkomplexe $K_j \in \Gamma_{r_j}$ der Ordnung r_j , $j \in [s]$, mit*

$$\deg(K_j) \in \{1, 2\}, \quad r_j \leq 4\alpha + 2,$$

sodass

$$\mathbb{E} [(F - \mathbb{E}[F])^4] = \sum_{j=1}^s c_j \beta^{r_j} I_{K_j}$$

gilt.

Beweis. Zunächst liefert Ausmultiplizieren

$$\mathbb{E} [(F - \mathbb{E}[F])^4] = \mathbb{E} [F^4] - 4\mathbb{E} [F^3] \mathbb{E} [F] + 6\mathbb{E} [F^2] \mathbb{E} [F]^2 - 3\mathbb{E} [F]^4. \quad (4.14)$$

Für $m \in \mathbb{N}$ gilt mit Proposition 3.10

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F]^m &= \left(\sum_{i=1}^{\alpha+1} a_{i-1} \mathbb{E}[f_{i-1}(\Delta_W)] \right)^m \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^m a_{i_j-1} \mathbb{E}[f_{i_j-1}(\Delta_W)] \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^m a_{i_j-1} \frac{\beta^{i_j}}{(i_j)!} z_{i_j, i_j}^{i_j} =: b_m.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Da sich bei Produkten von Integralformen die Grade addieren und alle Integralformen der Form $z_{m,l}^r$ mit $r < m + l$ den Grad 1 besitzen, sind alle Integralform in (4.15) von Grad m . Andererseits gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F^n] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{\alpha+1} a_{i-1} f_{i-1}(\Delta_W) \right)^n \right] \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\alpha+1} \left(\prod_{j=1}^n a_{i_j-1} \right) \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_{i_j-1}(\Delta_W) \right].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Wir fixieren die Indizes $i_1, \dots, i_n \in [\alpha + 1]$ und verwenden wieder die Darstellung (3.3) von Φ_W . Dann gilt

$$\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_{i_j-1}(\Delta_W) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{I_1 \subseteq [k], \\ |I_1|=i_1}} \dots \sum_{\substack{I_n \subseteq [k], \\ |I_n|=i_n}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\{\sigma_{I_1}, \dots, \sigma_{I_n} \in \Delta_W\} \right]. \tag{4.17}$$

Hier bezeichnet σ_I das Simplex bestehend aus den Punkten $\{X_i \mid i \in I\}$ aus der Darstellung (3.3) von Φ_W . Bei dem Erwartungswert auf der rechten Seite handelt es sich gemäß Proposition 3.7 um das Produkt von $\mathbb{P}(\tau = k) |W|^{-r}$ und der Integralform des Simplizialkomplexes

$$K_{(I_1, \dots, I_n)} := \langle I_1, \dots, I_n \rangle, \tag{4.18}$$

wobei r mit $r_l := \max\{i_j \mid j \in [n]\} \leq r \leq \sum_{j=1}^n i_j =: r_h$ die Ordnung dieses Komplexes ist. Zu einem solchen r definieren wir

$$\mathcal{I}_r := \left\{ (I_1, \dots, I_n) \mid I_j \subseteq [r], |I_j| = i_j \text{ für } j \in [n], I_1 \cup \dots \cup I_n = [r] \right\}. \tag{4.19}$$

Im Folgenden wählen wir die Mengen I_1, \dots, I_n aus (4.17) aus, indem wir zunächst die Menge $I_1 \cup \dots \cup I_n$ auswählen und dann die Mengen selbst. Da die Integralform eines Simplizialkomplexes nur von dessen Isomorphieklasse abhängt, kann die Menge $I_1 \cup \dots \cup I_n$ stets mit $[|I_1 \cup \dots \cup I_n|]$ identifiziert werden und die einzelnen Mengen aus dieser Menge gewählt werden. Dann liefert

(4.17) unter Anwendung von Proposition 3.7 (i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n f_{i_j-1}(\Delta_W) \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{r=r_l}^{r_h} \binom{k}{r} \sum_{(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_r} \frac{1}{|W|^r} I_{K(I_1, \dots, I_n)} \\ &= \sum_{r=r_l}^{r_h} \sum_{(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_r} \frac{\beta^r}{r!} I_{K(I_1, \dots, I_n)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Hier wurde für die letzte Gleichung wieder (3.14) verwendet. Der Faktor $\binom{k}{r}$ zählt die möglichen Wahlen der Eckenmenge $I_1 \cup \dots \cup I_n$ des Komplexes aus (4.18). Da in (4.20) nur endliche Summen auftauchen, ist $\mathbb{E}[F^n]$ eine Linearkombination von Integralformen bzw. ein Polynom in β des Grades höchstens $n(\alpha + 1)$, wobei der Vorfaktor von β^r eine Linearkombination von Integralformen der Ordnung r ist. Insgesamt erhalten wir also

$$\mathbb{E}[F^n] \mathbb{E}[F]^m = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\alpha+1} \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^{\alpha+1} \sum_{r=r_l}^{r_h} \sum_{(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_r} \left(\prod_{s=1}^n a_{i_s-1} \right) \prod_{t=1}^m a_{j_t-1} \frac{\beta^{r+j_t}}{r!(j_t)!} I_{K(I_1, \dots, I_n)} z_{j_t, j_t}^{j_t},$$

wobei wir nochmals darauf hinweisen, dass die Objekte r_l, r_h, \mathcal{I}_r von den Indizes i_1, \dots, i_n abhängen. Bei der Integralform $I_{K(I_1, \dots, I_n)} z_{j_t, j_t}^{j_t}$ handelt es sich um die Integralform des Komplexes $K(I_1, \dots, I_{n+m})$, wobei die Mengen I_{n+1}, \dots, I_{n+m} beliebige paarweise disjunkte Mengen sind, die jeweils auch disjunkt zu $I_1 \cup \dots \cup I_n$ sind. Also sind alle in $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4]$ auftauchenden Integralformen von der Form I_K mit K wie in (4.18) für $n = 4$. Insbesondere tauchen also nur Integralformen des Grades höchstens 4 auf.

Als nächstes zeigen wir, dass in $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4]$ alle Integralformen des Grades 4 verschwinden. Wir zählen alle Integralformen des Grades $n+m$ in $\mathbb{E}[F^n] \mathbb{E}[F]^m$, indem wir alle Integralformen in $\mathbb{E}[F^n]$ des Grades n zählen. Für $(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_r$ mit $r_l \leq r \leq r_h$ (bei fest gewählten $i_1, \dots, i_n \in [\alpha + 1]$) gilt

$$\deg \left(K_{(I_1, \dots, I_n)} \right) = n \iff I_1, \dots, I_n \text{ sind paarweise disjunkt.}$$

In diesem Fall ist die Isomorphieklasse von $K_{(I_1, \dots, I_n)}$ bereits eindeutig bestimmt und besitzt die Ordnung $r_h := \sum_{j=1}^n i_j$. Die Integralform von $K_{(I_1, \dots, I_n)}$ ist dann gegeben durch $\prod_{j=1}^n z_{i_j, i_j}^{i_j}$. Da in \mathcal{I}_{r_h} wegen der Nebenbedingungen nur Tupel von paarweise disjunkten Mengen vorkommen, folgt mit (4.16) und (4.20), dass der Anteil an Integralformen des Grades n in $\mathbb{E}[F^n]$ gegeben ist durch

$$\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\alpha+1} \sum_{(I_1, \dots, I_n) \in \mathcal{I}_{r_h}} \frac{\beta^{r_h}}{(r_h)!} \prod_{j=1}^n a_{i_j-1} z_{i_j, i_j}^{i_j} = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^{\alpha+1} \prod_{j=1}^n a_{i_j-1} \frac{\beta^{i_j}}{(i_j)!} z_{i_j, i_j}^{i_j} = b_n.$$

Die Gleichung erhält man durch Zählen der mögliche Wahlen von (I_1, \dots, I_n) , denn es gilt

$$|\mathcal{I}_{r_h}| = \binom{r_h}{i_1} \binom{r_h - i_1}{i_2} \cdot \dots \cdot \binom{r_h - \sum_{j=1}^{n-1} i_j}{i_n} = \frac{(r_h)!}{\prod_{j=1}^n (i_j)!}.$$

Mit (4.14) lässt sich jetzt der Anteil von Integralformen des Grades 4 in $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4]$ bestimmen. Dieser beträgt

$$b_4 - 4b_3b_1 + 6b_2b_2 - 3b_4.$$

Wird jetzt noch der Zusammenhang $b_n b_m = b_{n+m}$ realisiert, der direkt aus der Definition (4.15) der Größen b_m folgt, so wird klar, dass dieser Ausdruck verschwindet.

Im letzten Teil des Beweises zeigen wir, dass auch alle Integralformen des Grades 3 in $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4]$ verschwinden. Wie bereits gezeigt sind alle in $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4]$ auftretenden Integralformen von Simplicialkomplexen der Gestalt (4.18) mit $n = 4$. Ein solcher Komplex besitzt genau dann den Grad 3, wenn es genau ein paar von Mengen in I_1, I_2, I_3, I_4 mit nichtleerem Schnitt gibt. Die Integralform eines solchen Komplexes ist von der Form $z_{i,i}^i z_{j,j}^j z_{m,l}^r$ mit $i, j, m, l \in [\alpha + 1]$ und $m, l \leq r \leq m + l - 1$. Dies bedeutet, dass der assoziierte Simplicialkomplex aus drei Zusammenhangskomponenten besteht, von denen eine von einem Simplex der Dimension $i - 1$ und eine von einem Simplex der Dimension $j - 1$ erzeugt wird. Die dritte Zusammenhangskomponente wird von zwei Simplexes der Dimension $m - 1$ und $l - 1$ erzeugt, die sich $m + l - r$ Ecken teilen. Wir fixieren solch ein Quintett von Indizes und zählen das Auftreten von $z_{i,i}^i z_{j,j}^j z_{m,l}^r$. Dazu definieren wir durch

$$K := \left\langle [1, \dots, m], [r - l + 1, \dots, r], [r + 1, \dots, r + i], [r + i + 1, \dots, r + i + j] \right\rangle$$

einen Simplicialkomplex mit $I_K = z_{i,i}^i z_{j,j}^j z_{m,l}^r$ und zählen das Vorkommen der Integralform I_K in $\mathbb{E}[f_{i-1}(\Delta_W) f_{j-1}(\Delta_W) f_{m-1}(\Delta_W) f_{l-1}(\Delta_W)]$. Es sei I_{i+j+r} definiert wie in (4.19) mit $i_1 = i, i_2 = j, i_3 = m, i_4 = l$. Wegen (4.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{(I,J,M,L) \in I_{i+j+r}} \mathbb{1}\{K \cong K_{(I,J,M,L)}\} \frac{\beta^{i+j+r}}{(i+j+r)!} I_K \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [i+j+r], \\ |I|=i}} \sum_{\substack{J \subseteq [i+j+r], \\ |J|=j}} \sum_{\substack{M \subseteq [i+j+r], \\ |M|=m}} \sum_{\substack{L \subseteq [i+j+r], \\ |L|=l}} \mathbb{1}\{K \cong K_{(I,J,M,L)}\} \frac{\beta^{i+j+r}}{(i+j+r)!} I_K \\ &= \sum_{\substack{I \subseteq [i+j+r], \\ |I|=i}} \sum_{\substack{J \subseteq [i+j+r] \setminus I, \\ |J|=j}} \sum_{\substack{M \subseteq [i+j+r] \setminus (I \cup J), \\ |M|=m}} \sum_{\substack{L \subseteq [i+j+r] \setminus (I \cup J), \\ |L|=l, |M \cap L|=m+l-r}} \gamma_{i,j,m,l} \frac{\beta^{i+j+r}}{(i+j+r)!} I_K \quad (4.21) \\ &= \binom{i+j+r}{i} \binom{j+r}{j} \binom{r}{m} \binom{m}{m+l-r} \gamma_{i,j,m,l} \frac{\beta^{i+j+r}}{(i+j+r)!} I_K \\ &= \gamma_{i,j,m,l} \frac{\beta^{i+j+r}}{i! j! (r-m)! (r-l)! (m+l-r)!} I_K. \end{aligned}$$

Hier zählt $\gamma_{i,j,m,l}$ die Möglichkeiten die Rollen der Menge I, J, M, L in der Summe von (4.21) zu vertauschen. Wir erklären wie das genau zu verstehen ist. In (4.21) sind die beiden Mengen mit nichtleerem Schnitt immer die Mengen M, L . Damit die Bedingung $K \cong K_{(I,J,M,L)}$ erfüllt ist, müssen die beiden Mengen mit nichtleerem Schnitt immer die Kardinalitäten m und l besitzen. Gilt beispielsweise $i = m$, so können die beiden Mengen mit nichtleerem Schnitt in der Zeile über (4.21) jedoch auch die Mengen I, L sein. Für $i = m$ und $j \neq i \neq l$ gilt also beispielsweise $\gamma_{i,j,m,l} = 2$.

Falls alle Indizes i, j, m, l jedoch paarweise verschieden sind, gilt $\gamma_{i,j,m,l} = 1$. Details dazu sind in Anhang B zu finden, wo auch alle konkreten Werte von $\gamma_{i,j,m,l}$ ermittelt werden. Des Weiteren sei $\mu_{i,j,m,l}$ die Anzahl möglicher Wahlen von $(i_1, i_2, i_3, i_4) \in [\alpha + 1]^4$, sodass die Multimengen $\{\{i_1, i_2, i_3, i_4\}\}, \{\{i, j, m, l\}\}$ übereinstimmen. In Anhang B werden Multimengen sowie deren Notation eingeführt und die Größen $\gamma_{i,j,m,l}, \mu_{i,j,m,l}$ ausführlich betrachtet. Der Faktor $\mu_{i,j,m,l}$ zählt also wie oft der Erwartungswert $\mathbb{E} [f_{i-1}(\Delta_W) f_{j-1}(\Delta_W) f_{m-1}(\Delta_W) f_{l-1}(\Delta_W)]$ in $\mathbb{E} [F^4]$ auftaucht. Dadurch wird das Vorkommen von I_K in $\mathbb{E} [F^4]$ gezählt durch

$$\mu_{i,j,m,l} \gamma_{i,j,m,l} \frac{\beta^{i+j+r} a_{i-1} a_{j-1} a_{m-1} a_{l-1}}{i! j! (r-m)! (r-l)! (m+l-r)!} I_K =: \mu_{i,j,m,l} \gamma_{i,j,m,l} \rho.$$

Analog lässt sich zeigen, dass das Auftreten I_K in $\mathbb{E} [F^3] \mathbb{E} [F]$ zählen lässt durch

$$\frac{1}{2} \delta_{i,j}^* \rho (\mu_{i,m,l} \gamma_{i,m,l} + \mu_{j,m,l} \gamma_{j,m,l})$$

mit der Schreibweise

$$\delta_{i,j}^* := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 2, & i \neq j. \end{cases}$$

Hier zählt $\mu_{i,m,l}$ die Anzahl an Tripel $(i_1, i_2, i_3) \in [\alpha + 1]^3$ mit $\{\{i, m, l\}\} = \{\{i_1, i_2, i_3\}\}$ und analog $\gamma_{i,m,l}$ wieder die Möglichkeiten die Rollen der einzelnen Mengen zu vertauschen. Auch hier sei für Details auf Anhang B verwiesen. Das Auftauchen von $\delta_{i,j}^*$ ist damit zu begründen, dass im Fall $i \neq j$ der Faktor $z_{i,i}^i$ aus $\mathbb{E} [F]$ und der Faktor $z_{j,j}^j$ aus $\mathbb{E} [F^3]$ kommen kann oder umgekehrt, wohingegen es im Fall $i = j$ aus jedem der beiden Erwartungswerte der Faktor $z_{i,i}^i = z_{j,j}^j$ kommen muss.

Schließlich ergibt sich für das Auftreten von $z_{i,i}^i z_{j,j}^j z_{m,l}^r$ in $\mathbb{E} [F^2] \mathbb{E} [F]^2$ der Ausdruck $\delta_{i,j}^* \delta_{m,l}^* \rho$. Da alle Integralformen, die in $\mathbb{E} [F]^4$ auftauchen den Grad 4 besitzen, kann dieser Summand hier ignoriert werden. Da für alle Wahlen von $1 \leq i, j, m, l \leq \alpha + 1$ die Gleichung

$$\mu_{i,j,m,l} \gamma_{i,j,m,l} + 6 \delta_{i,j}^* \delta_{m,l}^* - 2 \delta_{i,j}^* (\mu_{i,m,l} \gamma_{i,m,l} + \mu_{j,m,l} \gamma_{j,m,l}) = 0$$

gilt, folgt, dass alle Integralformen des Grades 3 in $\mathbb{E} [(E - \mathbb{E} [F])^4]$ verschwinden. Dies kann in Anhang B noch genauer nachvollzogen werden, in dem auch die konkreten Werte der auftauchenden Größen zu finden sind.

Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass keine der in $\mathbb{E} [(E - \mathbb{E} [F])^4]$ vorkommenden Integralformen eine Ordnung größer als $4\alpha + 2$ besitzt. Dazu sei daran erinnert, dass jede auftretende Integralform von der Gestalt I_K mit einem Komplex K wie in (4.18) für $n = 4$ und $|I_j| \leq [\alpha + 1], j \in [4]$, ist. Die maximale Ordnung einer solchen Integralform I_K ist also zunächst $4\alpha + 4$. Allerdings impliziert $\deg(I_K) \leq 2$, dass I_K höchstens von Rang $4\alpha + 2$ sein kann, da es dann mindestens zwei verschiedene Paare von Mengen aus I_1, I_2, I_3, I_4 geben muss, die einen nicht leeren Schnitt miteinander besitzen. \square

Entscheidend an der Aussage von Proposition 4.5 ist, dass unter der Bedingung $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} > 0$

$$\Omega(\beta^{4\alpha+2}) = \mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4] = \mathcal{O}(\beta^{4\alpha+2}),$$

gilt, wobei die erste Gleichung aus der Abschätzung $\mathbb{E}[(F - \mathbb{E}[F])^4] \geq \mathbb{V}(F)^2$ und der Euler-Varianz-Formel (Theorem 3.11) mit $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{2\alpha+1} > 0$ folgt. Letzteres folgt aus $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} > 0$ mit Lemma 3.12. Damit sind alle bisher in diesem Abschnitt getroffenen Abschätzungen im Allgemeinen optimal und alle Vorbereitungen für die Formulierung des ersten zentralen Grenzwertsatzes getroffen.

Theorem 4.6 (1. Zentraler Grenzwertsatz für die Euler-Charakteristik). *Unter der Bedingung $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} > 0$ gilt für $a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit $a_\alpha \neq 0$*

$$\frac{\chi_a(\Delta_W) - \mathbb{E}[\chi_a(\Delta_W)]}{\sqrt{\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W))}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } \beta \rightarrow \infty.$$

Konkret gilt für die Größen aus Theorem 4.3

$$\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 = \mathcal{O}(\beta^{-\frac{1}{2}}), \quad \gamma_2 = \mathcal{O}(\beta^{-\frac{3}{2}}), \quad \gamma_6 = \mathcal{O}(\beta^{-1}).$$

Beweis. Die angegebenen Konvergenzraten ergeben sich bei Anwendung von Theorem 4.3 aus Lemma 4.4, Proposition 4.5 und der Tatsache, dass die Varianz $\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W))$ wegen $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} > 0$ gemäß Lemma 3.12 ein Polynom des Grades $2\alpha + 1$ in β ist. Lemma 4.4 und Proposition 4.5 liefern außerdem, dass die für Theorem 4.3 notwendigen Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. \square

Neben den fundamentalen Eigenschaften von Messbarkeit und Symmetrie wurde für den zentralen Grenzwertsatz an die Verbindungsfunktionen nur die Bedingung $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1} > 0$ gestellt. Diese besagt lediglich, dass Δ_W mit positiver Wahrscheinlichkeit α -Simplizes enthält. Andernfalls kann also einfach $\varphi_\alpha \equiv 0$ gewählt und die Situation für $\alpha - 1$ betrachtet werden. So gesehen ist diese Forderung sogar obsolet und Theorem 4.6 gilt für beliebige Verbindungsfunktionen. Da es sich bei dem Grundraum \mathbb{X} um einen beliebigen Borelraum handelt, gilt Theorem 4.6 also in einem sehr allgemeinen Rahmen. Die Wahl von $\varphi_j \equiv 1$ für alle $j \in [\alpha]$ liefert noch eine interessante Folgerung.

Korollar 4.7. *Für eine poissonverteilte Zufallsvariable $\tau \sim \text{Po}(b)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $Z_n := \sum_{i=0}^n a_i \binom{\tau}{i+1}$. Dann folgt aus Theorem 4.6 für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{Z_n - \mathbb{E}[Z_n]}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_n)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } b \rightarrow \infty.$$

Beweis. Die Zufallsvariable Z_n ist verteilungsgleich zur Euler-Charakteristik $\chi_a(\Delta_W)$ mit $b = \beta|W|$ unter der Wahl von $\alpha = n$ und $\varphi_j \equiv 1$ für alle $j \in [\alpha]$, weswegen die Aussage direkt aus Theorem 4.6 folgt. \square

Schließlich wollen wir noch drauf hinweisen, dass Abbildung A.3 ein Histogramm von simulierten

Werten der standardisierten Euler-Charakteristik für verschiedene Werte der Intensität β für das Modell mit den Verbindungsfunktionen aus (1.2) zeigt.

4.3. ASYMPTOTIK FÜR WACHSENDES BEOBACHTUNGSFENSTER

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt das asymptotische Szenario $\beta \rightarrow \infty$ betrachtet worden ist, bei dem die Intensität bei fest gehaltenem Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ gegen ∞ läuft, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit der Frage des Grenzverhaltens der Euler-Charakteristik, wenn das Maß des Beobachtungsfensters gegen ∞ geht. Dazu fixieren wir wieder $\mathbf{0} \neq a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit $a_\alpha \neq 0$ und zunächst eine Folge (W_n) in $\mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ mit $|W_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Konkret beschäftigen wir uns also mit der asymptotischen Verteilung von $\chi_a(\Delta_{W_n})$ für $n \rightarrow \infty$. Diese Situation impliziert natürlich, dass es sich bei $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \lambda)$ um einem unendlichen Maßraum handelt. Für eine besondere Klasse von Verbindungsfunktionen, die man als hochgradig nicht integrierbare Funktionen bezeichnen kann, lässt sich mit den Resultaten aus Abschnitt 4.2 direkt ein zentraler Grenzwertsatz formulieren.

Korollar 4.8. *Es existiere ein $p > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\varphi_j \geq p \quad \text{für alle } j \in [\alpha].$$

Dann folgt

$$\frac{\chi_a(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E}[\chi_a(\Delta_{W_n})]}{\sqrt{\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_{W_n}))}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit den gleichen Konvergenzraten der Größen aus Theorem 4.3 wie in Theorem 4.6 (bei Ersetzen der Intensität β durch $|W_n|$).

Beweis. Wir fixieren ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$. Zunächst gilt Lemma 4.4, wenn β dort durch $|W|$ ersetzt wird, wie direkt durch Betrachten des Beweises von Lemma 4.4 klar wird. Die dort betrachteten Erwartungswerte werden nämlich nach oben gegen Momente der Poissonverteilung mit Parameter $\beta|W|$ abgeschätzt. Die Bedingung $\varphi_j \geq p$ impliziert für die Simplexfunktion f_K (siehe Definition 3.5) eines Komplexes $f_K \geq p^s > 0$, wobei s die Anzahl mindestens eindimensionaler Simplexes in K bezeichnet. Ist K von der Ordnung r , so folgt $I_K \geq p^s |W|^r$ für die Integralform I_K von K . Insbesondere erfüllen die Integralformen $z_{m,l}^r$, $m, l \in [\alpha + 1]$, $\max\{m, l\} \leq r \leq m + l - 1$, die in der Euler-Varianzformel auftauchen, die Abschätzung $z_{m,l}^r \geq c|W|^r$ für ein $c > 0$. Nach der Euler-Varianz-Formel (Theorem 3.11) folgt also $\mathbb{V}(\Delta_W) = \Omega(|W|^{4\alpha+2})$. Außerdem folgt aus Proposition 4.5 direkt $\mathbb{E}[(\chi_a(\Delta_W) - \mathbb{E}[\chi_a(\Delta_W)])^4] = \mathcal{O}(|W|^{4\alpha+2})$ mit der trivialen Abschätzung $I_K \leq |W|^r$ für $K \in \Gamma_r$. Mit diesen Abschätzungen kann die gewünschte Aussage aus Theorem 4.3 abgeleitet werden. \square

Für den restlichen Abschnitt gelte die Integrabilitätsbedingung

$$\nu := \sup_{x \in \mathbb{X}} \int_{\mathbb{X}} \varphi_1(x, y)^{\frac{1}{2}} \lambda(dy) < \infty, \quad (4.22)$$

die die Bedingung (3.17) impliziert. Der zusätzliche Exponent ist aus technischen Gründen vorhanden, die im Laufe des Abschnitts klar werden. Dadurch ist die Situation von Korollar 4.8 bereits ausgeschlossen, da $\lambda(\mathbb{X}) = \infty$ gilt. Im Folgenden fixieren wir wieder ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$. Wir beginnen damit, Integralformen über W nach oben abzuschätzen.

Lemma 4.9. *Es sei $K \in \Gamma_m$ ein Simplicialkomplex des Grades n und der Ordnung m . Dann gilt für die Integralform I_K von K über W*

$$I_K \leq |W|^n \nu^{m-n}.$$

Beweis. Zunächst gelte $n = 1$. Wir wählen einen minimalen Spannbaum T des 1-Skeletts von K und benennen die Ecken von K mit x_1, \dots, x_m , sodass x_i für $i \geq 2$ einen eindeutigen Nachbarn in T in der Menge $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$ besitzt. Eine solche Nummerierung der Ecken existiert immer gemäß Korollar 1.5.2 in [11]. Für $i \geq 2$ bezeichne $j_i \in [i-1]$ den Index des eindeutigen Nachbarn von x_i in $\{x_1, \dots, x_{i-1}\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} I_K &\leq \int_{W^m} \prod_{i=2}^m \varphi_1(x_{j_i}, x_i) \lambda^m(d(x_1, \dots, x_m)) \\ &= \int_{W^{m-1}} \prod_{i=2}^{m-1} \varphi_1(x_{j_i}, x_i) \int_W \varphi_1(x_{j_m}, x_m) \lambda(dx_m) \lambda^{m-1}(d(x_1, \dots, x_{m-1})) \\ &\leq \nu \int_{W^{m-1}} \prod_{i=2}^{m-1} \varphi_1(x_{j_i}, x_i) \lambda^{m-1}(d(x_1, \dots, x_{m-1})) \\ &\leq \dots \leq \nu^{m-2} \int_{W^2} \varphi_1(x_1, x_2) \lambda^2(d(x_1, x_2)) \leq \nu^{m-1} |W|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Für $n \in \mathbb{N}$ beliebig seien K_1, \dots, K_n die n Zusammenhangskomponenten von K und m_j die Ordnung von K_j , $j \in [n]$. Dann gilt offensichtlich $\sum_{j=1}^n m_j = m$. Da die Integralform eines Simplicialkomplexes das Produkt der Integralformen seiner Zusammenhangskomponenten ist, liefert der erste Teil des Beweises

$$I_K = I_{K_1} \cdot \dots \cdot I_{K_n} \leq \prod_{j=1}^n |W|^{\nu^{m_j-1}} = |W|^n \nu^{m-n}.$$

□

Lemma 4.9 bzw. die dort verwendete Argumentation, die sich auf ähnliche Integrale übertragen lässt, besitzt viele Anwendungen innerhalb dieses Modells und ist essentiell für die Resultate dieses Abschnittes. Da in der Euler-Varianz-Formel nur Integralformen des Grades 1 ($z_{m,l}^r$ ist nach Definition 3.8 für $r < m + l$ von Grad 1) auftauchen, folgt aus Lemma 4.9 die Existenz einer

Konstante $C > 0$ mit

$$\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_W)) \leq C|W| \quad \text{für alle } W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X}).$$

Eine solche Konstante kann bei Bedarf mithilfe der Euler-Varianz-Formel (Theorem 3.11) und Lemma 4.9 konkret bestimmt werden. Mit der Abschätzung von Lemma 4.9 für die Integralformen aus der Euler-Varianz-Formel ergibt sich eine Konstante, bei der es sich um ein Vielfaches von ν handelt. Außerdem ist Lemma 4.9 unabdingbar für nachfolgendes Lemma, bei dem es sich um das Analogon von Lemma 4.4 für das hier betrachtete Grenzszenario handelt.

Lemma 4.10. *Es sei $F = \chi_a(\Delta_W)$. Dann existieren Konstanten $C_i > 0$, $i \in [6]$, die insbesondere nicht von W abhängen, mit*

$$\int_{W^3} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^1 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_1, U_1)}^1 F \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \lambda^3(dx) \leq C_1 |W|, \quad (4.24)$$

$$\int_{W^3} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_3, U_3), (x_2, U_2)}^2 F \right)^2 \left(\Lambda_{(x_2, U_2), (x_3, U_3), (x_1, U_1)}^2 F \right)^2 \right] \lambda^3(dx) \leq C_2 |W|, \quad (4.25)$$

$$\int_W \mathbb{E} [|\Lambda_{(x, U)} F|^3] \lambda(dx) \leq C_3 |W|, \quad (4.26)$$

$$\int_W \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x, U)} F \right)^4 \right]^{\frac{3}{4}} \lambda(dx) \leq C_4 |W|, \quad (4.27)$$

$$\int_W \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x, U)} F \right)^4 \right] \lambda(dx) \leq C_5 |W|, \quad (4.28)$$

$$\int_{W^2} 6 \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1)} F \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right]^{\frac{1}{2}} \\ + 3 \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}^2 F \right)^4 \right] \lambda^2(dx) \leq C_6 |W|, \quad (4.29)$$

wobei die Integration jeweils bzgl. der Punkte x_i zu verstehen ist.

Bei dem i -ten Integral in Lemma 4.10 handelt es sich um das Integral in γ_i aus Theorem 4.3 für das Funktional F (auch wenn das Theorem nicht für F selbst anwendbar ist). Wir werden Theorem 4.3 für das standardisierte Funktional $\tilde{F} := \frac{F - \mathbb{E}[F]}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}}$ anwenden, wodurch sich die Integrale um eine Potenz der Varianz von F unterscheiden.

Beweis. Zunächst sind alle Integrale endlich, wie sich aus dem Extremfall $\varphi_j \equiv 1$ für alle $j \in [\alpha]$ ergibt. Beispielsweise gilt für den Erwartungswert aus (4.26) mit der Darstellung (3.3) von Φ_W

$$\mathbb{E} [|\Lambda_{(x, U)} F|^3] = \sum_{i, j, m=0}^{\alpha} a_i a_j a_m \mathbb{E} \left[f_i^x(\Delta_W^x) f_j^x(\Delta_W^x) f_m^x(\Delta_W^x) \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i,j,m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} \left[\binom{\tau}{i} \binom{\tau}{j} \binom{\tau}{m} \right] \\
&\leq \sum_{i,j,m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} [\tau^{i+j+m}] < \infty.
\end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst die Abschätzung (4.25). Ziel des Beweises ist es zu zeigen, dass es sich bei dem Integral um eine Linearkombination von Integralformen des Grades 1 handelt. Die Aussage folgt dann aus Lemma 4.9. Dazu verwenden wir wieder die Darstellung (3.3) des Poissonprozesses Φ_W . Außerdem bezeichne $\sigma_I^{y_1, \dots, y_k}$ zu einer endliche Menge $I \subset \mathbb{N}$ das Simplex bestehend aus den Punkten $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{X}$ und den Punkten $\{X_i \mid i \in I\}$. Für die linke Seite von (4.25) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} a_i a_j a_m a_l \int_{W^3} \mathbb{E} \left[f_i^{x_1, x_3}(\Delta_W^x) f_j^{x_1, x_3}(\Delta_W^x) f_m^{x_2, x_3}(\Delta_W^x) f_l^{x_2, x_3}(\Delta_W^x) \right] \lambda^3(dx) \\
&= \sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} a_i a_j a_m a_l \int_{W^3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{I \subseteq [k], \\ |I|=i-1}} \sum_{\substack{J \subseteq [k], \\ |J|=j-1}} \sum_{\substack{M \subseteq [k], \\ |M|=m-1}} \sum_{\substack{L \subseteq [k], \\ |L|=l-1}} \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[\mathbb{1}\{\tau = k\} \mathbb{1}\left\{ \langle \sigma_I^{x_1, x_3}, \sigma_J^{x_1, x_3}, \sigma_M^{x_2, x_3}, \sigma_L^{x_2, x_3} \rangle \subseteq \Delta_W^{x_1, x_2, x_3} \right\} \right] \lambda^3(dx).
\end{aligned}$$

Hier beachte man, dass die Komplexe $\Delta_W^{x_1, x_3}, \Delta_W^{x_2, x_3}$ per Konstruktion der Differenzenoperatoren aus (4.5) beide Teilkomplexe von $\Delta_W^{x_1, x_2, x_3}$ sind. Wie im Beweis von Proposition 3.7 (i) lässt sich mit $r = |I \cup J \cup M \cup L|$ zeigen, dass der hier auftauchende Erwartungswert gleich dem Ausdruck

$$\mathbb{P}(\tau = k) \mathbb{1}\{k \geq \max(|I \cup J \cup M \cup L|)\} \frac{1}{|W|^r} \int_{W^r} f_K(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{r+3}) \lambda^r(dx_4, \dots, x_{r+3})$$

ist, wobei f_K die Simplexfunktion des Simplicialkomplexes

$$K := K(I, J, M, L) := \langle I \cup \{x_1, x_3\}, J \cup \{x_1, x_3\}, M \cup \{x_2, x_3\}, L \cup \{x_2, x_3\} \rangle \quad (4.30)$$

(auf der Eckenmenge $\{x_1, x_2, x_3\} \cup I \cup J \cup M \cup L$) ist und die ersten drei Komponenten von f_K zu den Ecken x_1, x_2, x_3 assoziiert seien. Wir vereinfachen die linke Seite von (4.25) zu dem Ausdruck

$$\sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} a_i a_j a_m a_l \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{\substack{I \subseteq [k], \\ |I|=i-1}} \sum_{\substack{J \subseteq [k], \\ |J|=j-1}} \sum_{\substack{M \subseteq [k], \\ |M|=m-1}} \sum_{\substack{L \subseteq [k], \\ |L|=l-1}} \frac{1}{|W|^{|I \cup J \cup M \cup L|}} I_{K(I, J, M, L)}.$$

Im nächsten Schritt wählen wir die Mengen I, J, M, L aus, indem wir zunächst die Menge $I \cup J \cup M \cup L \subseteq [k]$ auswählen und anschließend die Mengen selbst. Da die Integralform von $K(I, J, M, L)$ nur von dessen Isomorphieklasse abhängt, können wir die Menge $I \cup J \cup M \cup L$ nach deren Auswahl auch mit $[|I \cup J \cup M \cup L|]$ identifizieren und die einzelnen Mengen dann aus dieser Menge auswählen. Die Kardinalität von $I \cup J \cup M \cup L$ kann dabei wegen der Nebenbedingungen die Werte $s(i, j, m, l) := \max\{i-1, j-1, m-1, l-1\}, \dots, i+j+m+l-4 =: t(i, j, m, l)$ annehmen. Wir

erhalten für die linke Seite von (4.25)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} a_i a_j a_m a_l \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau = k) \sum_{r=s(i,j,m,l)}^{t(i,j,m,l)} \binom{k}{r} \\
 & \quad \times \sum_{\substack{I \subseteq [r], \\ |I|=i-1}} \sum_{\substack{J \subseteq [r], \\ |J|=j-1}} \sum_{\substack{M \subseteq [r], \\ |M|=m-1}} \sum_{\substack{L \subseteq [r], \\ |L|=l-1}} \mathbb{1}\{I \cup J \cup M \cup L = [r]\} \frac{1}{|W|^r} I_{K(I,J,M,L)} \\
 & = \sum_{i,j,m,l=1}^{\alpha} a_i a_j a_m a_l \sum_{r=s(i,j,m,l)}^{t(i,j,m,l)} \sum_{\substack{I \subseteq [r], \\ |I|=i-1}} \sum_{\substack{J \subseteq [r], \\ |J|=j-1}} \sum_{\substack{M \subseteq [r], \\ |M|=m-1}} \sum_{\substack{L \subseteq [r], \\ |L|=l-1}} \mathbb{1}\{I \cup J \cup M \cup L = [r]\} \frac{\beta^r}{r!} I_{K(I,J,M,L)}.
 \end{aligned}$$

Hier wurde im ersten Schritt wieder (3.14) angewendet. Da alle auftretenden Summen endlich sind und der Simplizialkomplex aus (4.30) immer den Grad 1 besitzt (K wird erzeugt von Simplizes, die alle den Punkt x_3 enthalten), folgt die Behauptung aus Lemma 4.9.

Prinzipiell kann dieses Vorgehen auf alle Integrale aus (4.24)-(4.29) angewendet werden. Die einzig relevanten Unterschiede bei den anderen Integralen sind, dass in manchen Integralen ein Produkt von zwei Erwartungswerten auftaucht und manche Erwartungswerte noch einen Exponenten ungleich 1 besitzen. Wir zeigen wie der Beweis für (4.24) funktioniert, da dort diese beiden Situationen auftreten und es sich bei dem Integral aus (4.24) um das komplizierteste Integral handelt. Dabei halten wir die Schritte, die ganz analog wie im ersten Teil des Beweises funktionieren, möglichst kurz. Wir schätzen die linke Seite von (4.24) zunächst nach oben ab gegen

$$\begin{aligned}
 & \int_{W^3} \left(\sum_{i_1, j_1, m_1, l_1=0}^{\alpha} |a_{i_1} a_{j_1} a_{m_1} a_{l_1}| \left| \mathbb{E} \left[f_{i_1}^{x_1}(\Delta_W^{x_1}) f_{j_1}^{x_1}(\Delta_W^{x_1}) f_{m_1}^{x_2}(\Delta_W^{x_2}) f_{l_1}^{x_2}(\Delta_W^{x_2}) \right] \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\sum_{i_2, j_2, m_2, l_2=1}^{\alpha} |a_{i_2} a_{j_2} a_{m_2} a_{l_2}| \left| \mathbb{E} \left[f_{i_2}^{x_1, x_3}(\Delta_W^{x_1, x_3}) f_{j_2}^{x_1, x_3}(\Delta_W^{x_1, x_3}) f_{m_2}^{x_2, x_3}(\Delta_W^{x_2, x_3}) f_{l_2}^{x_2, x_3}(\Delta_W^{x_2, x_3}) \right] \right| \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \lambda^3(dx) \\
 & \leq \sum_{\substack{i_1, j_1, m_1, l_1=0, \\ i_2, j_2, m_2, l_2=1}}^{\alpha} \left(\prod_{s=1}^2 \sqrt{|a_{i_s} a_{j_s} a_{m_s} a_{l_s}|} \right) \int_{W^3} \left(\mathbb{E} \left[f_{i_1}^{x_1}(\Delta_W^{x_1}) f_{j_1}^{x_1}(\Delta_W^{x_1}) f_{m_1}^{x_2}(\Delta_W^{x_2}) f_{l_1}^{x_2}(\Delta_W^{x_2}) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \left(\mathbb{E} \left[f_{i_2}^{x_1, x_3}(\Delta_W^{x_1, x_3}) f_{j_2}^{x_1, x_3}(\Delta_W^{x_1, x_3}) f_{m_2}^{x_2, x_3}(\Delta_W^{x_2, x_3}) f_{l_2}^{x_2, x_3}(\Delta_W^{x_2, x_3}) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \lambda^3(dx), \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

wobei wir die Ungleichung

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p, \quad x, y \geq 0, \quad p \in (0, 1], \quad (4.32)$$

verwendet haben. Bezeichnet $f_{I_1, J_1, M_1, L_1}^{I_2, J_2, M_2, L_2}$ die Simplexfunktion des Simplizialkomplexes

$$\begin{aligned}
 & \langle (I_1 \times \{0\}) \cup \{x_1\}, (J_1 \times \{0\}) \cup \{x_1\}, (M_1 \times \{0\}) \cup \{x_2\}, (L_1 \times \{0\}) \cup \{x_2\}, \\
 & (I_2 \times \{1\}) \cup \{x_1, x_3\}, (J_2 \times \{1\}) \cup \{x_1, x_3\}, (M_2 \times \{1\}) \cup \{x_2, x_3\}, (L_2 \times \{1\}) \cup \{x_2, x_3\} \rangle, \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

wobei die ersten drei Komponenten zu den Ecken x_1, x_2, x_3 assoziiert sind, so erhalten wir auf analoge Art und Weise wie im ersten Teil des Beweises als obere Schranke für das Integral in (4.31) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \sum_{r_1=s(i_1, j_1, m_1, l_1)+1}^{t(i_1, j_1, m_1, l_1)+4} \sum_{r_2=s(i_2, j_2, m_2, l_2)}^{t(i_2, j_2, m_2, l_2)} \sum_{\substack{I_1 \subseteq [r_1], J_1 \subseteq [r_1], M_1 \subseteq [r_1], L_1 \subseteq [r_1], \\ |I_1|=i_1, |J_1|=j_1, |M_1|=m_1, |L_1|=l_1}} \sum_{\substack{I_2 \subseteq [r_2], J_2 \subseteq [r_2], M_2 \subseteq [r_2], L_2 \subseteq [r_2], \\ |I_2|=i_2-1, |J_2|=j_2-1, |M_2|=m_2-1, |L_2|=l_2-1}} \\
& \times \mathbb{1} \{I_1 \cup J_1 \cup M_1 \cup L_1 = [r_1], I_2 \cup J_2 \cup M_2 \cup L_2 = [r_2]\} \sqrt{\frac{\beta^{r_1+r_2}}{r_1! r_2!}} \\
& \times \int_{W^3} \left(\int_{W^{r_1+r_2}} f_{I_1, J_1, M_1, L_1}^{I_2, J_2, M_2, L_2}(x_1, \dots, x_{r_1+r_2+3}) \lambda^{r_1+r_2}(d(x_4, \dots, x_{r_1+r_2+3})) \right)^{\frac{1}{2}} \lambda^3(dx)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

mit den Größen s, t wie im ersten Teil des Beweises. Hier wurde ein weiteres Mal die Ungleichung (4.32) angewendet, da nur endliche Summen auftauchen. Die zweiten Komponenten bei den Mengen in (4.33) sind damit zu erklären, dass die Mengen I_1, J_1, M_1, L_1 künstlich paarweise disjunkt zu den Mengen aus I_2, J_2, M_2, L_2 gemacht werden (da sie aus unterschiedlichen Erwartungswerten kommen).

Wir schließen den Beweis damit ab, dass wir das Integral in (4.34) nach oben gegen $C|W|$ für eine Konstante $C > 0$ abschätzen. Dazu vereinfachen wir die Notation durch $r := r_1 + r_2$ und schreiben $f_K := f_{I_1, J_1, M_1, L_1}^{I_2, J_2, M_2, L_2}$ für die Simplexfunktion im Integranden. Die entscheidende Beobachtung ist die Folgende. Der Komplex in (4.33) wird von Simplexes erzeugt, die alle mindestens einen der Punkte $\{x_1, x_2, x_3\}$ enthalten, wodurch jeder der Ecken in diesem Komplex mit mindestens einem dieser drei Punkte durch eine Kante verbunden ist. Außerdem sind die Kanten $[x_1, x_3]$ und $[x_2, x_3]$ Teil des Komplexes, weswegen dieser den Grad 1 besitzt. Deswegen existieren $i_j \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{4, \dots, r+3\}$ mit

$$f_K(x_1, \dots, x_{r+3}) \leq \varphi_1(x_1, x_3) \varphi_1(x_2, x_3) \prod_{j=4}^{r+3} \varphi_1(x_j, x_{i_j}).$$

Damit lässt sich das Integral in (4.34) mit der Integrierbarkeitsbedingung (4.22) wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
& \int_{W^3} \left(\int_{W^r} f_K(x_1, \dots, x_{r+3}) \lambda^r(d(x_4, \dots, x_{r+3})) \right)^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \\
& \leq \int_{W^3} \sqrt{\varphi_1(x_1, x_3) \varphi_1(x_2, x_3)} \left(\prod_{j=4}^{r+3} \int_W \varphi_1(x_j, x_{i_j}) \lambda(dx_j) \right)^{\frac{1}{2}} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \\
& \leq \int_{W^3} \sqrt{\varphi_1(x_1, x_3)} \sqrt{\varphi_1(x_2, x_3)} \sqrt{v^r} \lambda^3(d(x_1, x_2, x_3)) \\
& \leq \sqrt{v^r} \int_{W^2} \sqrt{\varphi_1(x_2, x_3)} \int_W \sqrt{\varphi_1(x_1, x_3)} \lambda(dx_1) \lambda^2(d(x_2, x_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \nu \sqrt{\nu^r} \int_W \int_W \sqrt{\varphi_1(x_2, x_3)} \lambda(dx_2) \lambda(dx_3) \\ &\leq \nu^2 \sqrt{\nu^r} |W|. \end{aligned}$$

Der Beweis liefert also eine Konstante C_1 , mit der (4.24) gilt und bei der es sich um ein Vielfaches von $\nu^2 \sqrt{\nu^r}$ handelt. Mithilfe dieser Vorgehensweise lassen sich die Abschätzungen (4.24)-(4.29) alle zeigen. Dazu beachte man, dass für den Beweis notwendig ist, dass die Exponenten (außerhalb) der Erwartungswerte in den Integralen aus (4.24)-(4.29) in $[\frac{1}{2}, 1]$ liegen. Für einen solchen Exponenten p muss $p \leq 1$ gelten, damit die Ungleichung (4.32) angewendet werden kann. Andererseits muss $p \geq \frac{1}{2}$ gelten, damit in der letzten Ungleichungskette die einzelnen Integrale immer gegen ν abgeschätzt werden können. Tatsächlich ist der Exponent $\frac{1}{2}$ in der Definition von ν damit zu erklären, dass der kleinste Exponent in den Integralen aus (4.24)-(4.29) außerhalb der Erwartungswerte eben diesen Wert hat. Schließlich wollen wir noch darauf hinweisen, dass der Fall $r_1 + r_2 = 0$ in (4.34) möglich ist. In diesem Fall steht in (4.34) statt dem inneren Integral der Faktor $\varphi_1(x_1, x_3)\varphi_1(x_2, x_3)$, womit sich die weitere Argumentation auch durchführen lässt. \square

Die Konstanten C_1, \dots, C_6 aus Lemma 4.10 sind also nach dem Beweis alle von der Form $C\nu^q$ für ein rationales q , wobei C ein Polynom in der Intensität β mit rationalen Exponenten ist. Bei den Integralen aus (4.25),(4.26),(4.28) handelt es sich nach dem ersten Teil des Beweises um Linearkombinationen von Integralformen des Grades 1, deren exakte Darstellung für kleine Werte von α auch bestimmt werden kann. Beispielsweise ergibt sich im Fall $\alpha = 2$ für das Integral aus (4.25) die Darstellung

$$\beta^4 \omega_6 + 6\beta^3 \omega_5 - 2\beta^3 \omega_4 + 2\beta^2 \omega_3 - 4\beta^2 \omega_2 + 2\beta^2 \omega_1 + \beta^2 z_{3,3}^5 + \beta z_{3,3}^4 - 2\beta z_{2,3}^4 + z_{2,2}^3,$$

wobei es sich bei den dort auftauchenden Größen um Integralformen handelt, deren assoziierte Simplicialkomplexe in Anhang A zu finden sind. Da alle in dieser Darstellung auftretenden Integralformen den Grad 1 besitzen, liefert Lemma 4.9, dass die Konstante $C_2 := \nu(\beta^4 + 8\beta^3 + 9\beta^2 + 3\beta + 1)$ die Eigenschaft (4.25) erfüllt.

Theorem 4.11 (2. Zentraler Grenzwertsatz für die Euler-Charakteristik). *Es sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen $W_n \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ mit $|W_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, für die eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\mathbb{E} \left[f_\alpha(\Delta_{W_n}) \right] \geq C |W_n| \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.35)$$

existiert. Außerdem gelte die Integrierbarkeitsbedingung (4.22). Dann gilt für $a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit $a_\alpha \neq 0$

$$\frac{\chi_a(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[\chi_a(\Delta_{W_n}) \right]}{\sqrt{\mathbb{V} \left(\chi_a(\Delta_{W_n}) \right)}} \xrightarrow{d} N \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Konkret gilt für die Größen aus Theorem 4.3

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6 = \mathcal{O}\left(|W_n|^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Beweis. Wir wenden Theorem 4.3 für das standardisierte Funktional \tilde{F}_n mit $F_n := \chi_a(\Delta_{W_n})$ an. Die Integrabilitätsbedingungen sind nach Lemma 4.10 erfüllt. Nach Proposition 4.5 und Lemma 4.9 gibt es eine Konstante $C_7 > 0$ mit

$$\mathbb{E}[(F_n - \mathbb{E}[F_n])^4] \leq C_7 |W_n|^2.$$

Schließlich liefert Bedingung (4.35) $\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_{W_n})) = \Omega(|W_n|)$, denn aus (4.4) folgt

$$\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_{W_n})) \geq a_\alpha^2 \mathbb{E}[f_\alpha(\Delta_{W_n})] \geq a_\alpha^2 C |W_n| =: C_8 |W_n| \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es sei daran erinnert, dass wir während des gesamten Kapitels o.B.d.A. ein $a = (a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit $a_\alpha \neq 0$ betrachten. Bezeichnen $\vartheta_1^{(n)}, \dots, \vartheta_6^{(n)}$ die Integrale aus (4.24)-(4.29) (in dieser Reihenfolge) für das Beobachtungsfenster W_n und $\gamma_1^{(n)}, \dots, \gamma_6^{(n)}$ die Größen aus Theorem 4.3 für das Funktional \tilde{F}_n , so liefert Lemma 4.10 für fast alle $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_1^{(n)} = \frac{2\sqrt{\beta^3 \vartheta_1^{(n)}}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))} \leq \frac{2\sqrt{\beta^3 C_1 |W_n|}}{C_8 |W_n|} = \frac{2\sqrt{\beta^3 C_1}}{C_8} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_2^{(n)} = \frac{\sqrt{\beta^3 \vartheta_2^{(n)}}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))} \leq \frac{\sqrt{\beta^3 C_2 |W_n|}}{C_8 |W_n|} = \frac{\sqrt{\beta^3 C_2}}{C_8} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_3^{(n)} = \frac{\beta \vartheta_3^{(n)}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\beta C_3 |W_n|}{(C_8 |W_n|)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta C_3}{C_8 \sqrt{C_8}} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_4^{(n)} = \frac{\beta}{2} \mathbb{E}[(F_n - \mathbb{E}[F_n])^4]^{\frac{1}{4}} \frac{\vartheta_4^{(n)}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))^2} \leq \frac{\beta C_7^{\frac{1}{4}} C_4 |W_n|^{\frac{3}{2}}}{2 C_8^2 |W_n|^2} = \frac{\beta C_7^{\frac{1}{4}} C_4}{2 C_8^2} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_5^{(n)} = \frac{\sqrt{\beta \vartheta_5^{(n)}}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))} \leq \frac{\sqrt{\beta C_5 |W_n|}}{C_8 |W_n|} = \frac{\sqrt{\beta C_5}}{C_8} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\gamma_6^{(n)} = \frac{\sqrt{\beta^2 \vartheta_6^{(n)}}}{\mathbb{V}(\chi(\Delta_{W_n}))} \leq \frac{\sqrt{\beta^2 C_6 |W_n|}}{C_8 |W_n|} = \frac{\sqrt{C_6}}{C_8} |W_n|^{-\frac{1}{2}},$$

mit den Konstanten C_1, \dots, C_6 aus Lemma 4.10. □

In der Situation von Theorem 4.11 gelten

$$\begin{aligned}\Omega(|W_n|) &= \mathbb{V}(\chi_a(\Delta_{W_n})) = \mathcal{O}(|W_n|), \\ \mathbb{E}[\chi_a(\Delta_{W_n})] &= \mathcal{O}(|W_n|).\end{aligned}\tag{4.36}$$

Da in der Euler-Varianz-Formel (Theorem 3.11) nur Integralformen des Grades 1 vorkommen, folgt die zweite Gleichung für die Varianz aus Lemma 4.9. Für den Erwartungswert folgt die Aussage aus Proposition 3.10 (i) und Lemma 4.9. Bedingung (4.35) in Theorem 4.11 fordert also die maximale Wachstumsrate der Varianz $\mathbb{V}(\chi_a(\Delta_{W_n}))$. Proposition 2.8 zeigt zusammen mit (4.36), dass die Konvergenzraten, die Theorem 4.11 bzgl. Wasserstein- und Kolmogorov-Abstand liefert, optimal sind. In Abbildung A.2 sind Histogramme von simulierten Werten der standardisierten Euler-Charakteristik für verschiedene Größen des Beobachtungsfenster für das Modell mit den Verbindungsfunktionen aus (1.1) zu finden.

4.4. SIMPLEXANZAHLEN IM MARKIERTEN STATIONÄREN MODELL

In diesem Abschnitt wenden wir die Erkenntnisse aus den vorangegangenen Abschnitten auf das markierte stationäre Modell an, wie es in Abschnitt 3.5 eingeführt wurde. Dafür gelte im Folgenden stets die Integritätsbedingung (3.47). Für $m, l \in [\alpha + 1]$ und $\max\{m, l\} \leq r \leq m + l - 1$ setzen wir

$$z_{m,l}^r(\mathbf{0}) := \int_{(\mathbb{R}^d)^{r-1}} \int_{\mathbb{A}^r} \kappa_{m,l}^r((\mathbf{0}, a_1), (x_2, a_2), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^r(d(a_1, \dots, a_r)) d(x_2, \dots, x_r).$$

Wir fixieren eine Folge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K}^d mit $r(W_n) \rightarrow \infty$ und notieren mit $z_{m,l}^{r,(n)}$ die Integralform $z_{m,l}^r$ über $W_n \times \mathbb{A}$. Dann liefert Korollar 3.19

$$\frac{z_{m,l}^{r,(n)}}{|W_n|} \rightarrow z_{m,l}^r(\mathbf{0}) < \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty\tag{4.37}$$

für alle $m, l \in [\alpha + 1]$, $\max\{m, l\} \leq r \leq m + l - 1$, da es sich bei den Funktionen $\kappa_{m,l}^r$ um Simplexfunktionen von Komplexen des Grades 1 handelt. Aus Proposition 3.10, Theorem 3.11 und (4.37) folgen für einen Koeffizientenvektor $\mathbf{0} \neq b = (b_0, \dots, b_\alpha) \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}[\chi_b(\Delta_{W_n})]}{|W_n|} &\rightarrow \sum_{j=0}^{\alpha} b_j \frac{\beta^j}{j!} z_{j+1,j+1}^{j+1}(\mathbf{0}), \\ \frac{\text{Cov}(f_{m-1}(\Delta_{W_n}), f_{l-1}(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} &\rightarrow \sum_{r=\max\{m,l\}}^{m+l-1} \frac{\beta^r}{(r-m)!(r-l)!(m+l-r)!} z_{m,l}^r(\mathbf{0}) =: \sigma_{m,l} \\ \frac{\mathbb{V}(\chi_b(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} &\rightarrow \sum_{m,l=1}^{\alpha+1} b_{m-1} b_{l-1} \sigma_{m,l},\end{aligned}\tag{4.38}$$

für $n \rightarrow \infty$ und $m, l \in [\alpha + 1]$. Zusammen mit den Resultaten der vorangegangenen Abschnitte sind wir jetzt in der Lage einen multivariaten zentralen Grenzwertsatz für die Simplexanzahlen im markierten stationären Modell herzuleiten.

Theorem 4.12 (Multivariater zentraler Grenzwertsatz für Simplexanzahlen). *Es sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{K}^d mit $r(W_n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und es gelte die Integrabilitätsbedingung (4.22). Außerdem sei $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1}(\mathbf{0}) > 0$. Des Weiteren bezeichne N_Σ einen $(\alpha + 1)$ -dimensionalen zentrierten normalverteilten Zufallsvektor mit der Kovarianzmatrix $\Sigma := (\sigma_{m,l})_{m,l \in [\alpha+1]}$, deren Einträge $\sigma_{m,l}$, $m, l \in [\alpha + 1]$, oben definiert worden sind. Dann ist Σ eine symmetrische, positiv definite Matrix und es gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{|W_n|}} \left(f_0(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[f_0(\Delta_{W_n}) \right], \dots, f_\alpha(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[f_\alpha(\Delta_{W_n}) \right] \right) \xrightarrow{d} N_\Sigma \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Zunächst beachte man, dass (4.22) die Bedingung (3.47) impliziert. Für $b \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ ist $b^T \Sigma b$ nach (4.38) der Grenzwert einer nichtnegativen Folge, woraus die positive Semi-Definitheit von Σ folgt. Der Satz von Cramér-Wold (vgl. beispielsweise Korollar 6.5 in [25]) liefert die gewünschte Konvergenzaussage, falls für alle Koeffizientenvektoren $b \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ die Konvergenz

$$\frac{\chi_b(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[\chi_b(\Delta_{W_n}) \right]}{\sqrt{|W_n|}} \xrightarrow{d} \langle N_\Sigma, b \rangle \quad (4.39)$$

vorliegt, da es sich bei $\chi_b(\Delta_{W_n})$ genau um die Linearkombination der Simplexanzahlen zum Koeffizientenvektor b handelt. Während diese Aussage für $b = \mathbf{0}$ trivial ist, liefert Theorem 4.11 für $\mathbf{0} \neq b = (b_0, \dots, b_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ die asymptotische Normalität der standardisierten Euler-Charakteristik $\chi_b(\Delta_{W_n})$ für $n \rightarrow \infty$, falls eine Konstante $C > 0$ mit

$$\mathbb{E} \left[f_s(\Delta_{W_n}) \right] \geq C |W_n| \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.40)$$

für $s := \max\{i \in \{0, \dots, \alpha\} \mid b_i \neq 0\}$ existiert. Bevor wir (4.40) nachweisen, führen wir die weitere Argumentation aus. Nach (4.38) gilt

$$\frac{\mathbb{V} \left(\chi_b(\Delta_{W_n}) \right)}{|W_n|} \rightarrow \sum_{m,l=1}^{\alpha+1} b_{m-1} b_{l-1} \sigma_{m,l} = \mathbb{V} \left(\langle N_\Sigma, b \rangle \right) \quad (4.41)$$

und mit dem Lemma von Sluzki folgt schließlich die Verteilungskonvergenz (4.39). Nach Proposition 3.10 und (4.4) gilt $\mathbb{V} \left(\chi_b(\Delta_{W_n}) \right) \geq \mathbb{E} \left[f_s(\Delta_{W_n}) \right]$. Deshalb impliziert (4.40), dass der Grenzwert in (4.41) positiv ist, woraus die positive Definitheit von Σ folgt.

Wir schließen den Beweis ab, indem wir zeigen, dass (4.40) für alle $s \in \{0, \dots, \alpha\}$ gilt. Proposition 3.10 (i) liefert $\mathbb{E} \left[f_\alpha(\Delta_{W_n}) \right] = \frac{\beta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1, (n)}$. Zusammen mit (4.37) folgt

$$\frac{\mathbb{E} \left[f_\alpha(\Delta_{W_n}) \right]}{|W_n|} \rightarrow \frac{\beta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!} z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1}(\mathbf{0}) > 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

woraus (4.40) für $s = \alpha$ folgt. Betrachten wir zu unabhängigen Marken $V \sim \Theta$ und $U \sim \mathbb{Q}$, die insbesondere auch unabhängig von Ψ seien, den Simplicialkomplex $\Delta^0 := T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)})$, so ist $\frac{\beta^s}{s!} z_{s+1, s+1}^{s+1}(\mathbf{0})$ nach der Mecke-Formel die erwartete Anzahl an s -Simplizes von Δ^0 , die den hinzugefügten Punkt $(\mathbf{0}, V)$ enthalten. Also impliziert $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1}(\mathbf{0}) > 0$ auch $z_{s+1, s+1}^{s+1}(\mathbf{0}) > 0$ für alle $s \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$. Daraus folgt (4.40) für beliebiges $s \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$ analog zur Argumentation für $s = \alpha$. \square

Schließlich wollen wir noch eine Beispielfolge konstruieren, für die die Konstanten aus (4.40) unter einer schwachen Bedingung konkret angegeben werden können. Dazu bezeichne $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der d -dimensionalen halboffenen Würfel

$$W_n := \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \right)^d \subset \mathbb{R}^d$$

mit Kantenlänge n und es gelte $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1, (1)} > 0$. Hier verwenden wir immer noch die abkürzende Notation, die zu Beginn des Abschnittes eingeführt wurde, d.h. wir betrachten tatsächlich die Folge $(W_n \times \mathbb{A})_{n \in \mathbb{N}}$. Die Forderung $z_{\alpha+1, \alpha+1}^{\alpha+1, (1)} > 0$ stellt lediglich sicher, dass Δ_{W_1} mit positiver Wahrscheinlichkeit α -Simplizes besitzt, was wiederum $z_{s+1, s+1}^{s+1, (1)} > 0$ für alle $s \leq \alpha$ impliziert. Da sich W_n als disjunkte Vereinigung von $n^d = |W_n|$ Translaten V_1, \dots, V_{n^d} des Einheitswürfels W_1 darstellen lässt, folgt mit der Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen und Proposition 3.10 (i) für $s \leq \alpha$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[f_s(\Delta_{W_n}) \right] &= \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} z_{s+1, s+1}^{s+1, (n)} \\ &= \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} \int_{W_n^{s+1}} \kappa_s(x_1, \dots, x_{s+1}) \, d(x_1, \dots, x_{s+1}) \\ &\geq \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} \sum_{i=1}^{n^d} \int_{V_i^{s+1}} \kappa_s(x_1, \dots, x_{s+1}) \, d(x_1, \dots, x_{s+1}) \\ &= \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} \sum_{i=1}^{n^d} z_{s+1, s+1}^{s+1, (1)} \\ &= |W_n| \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} z_{s+1, s+1}^{s+1, (1)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wodurch (4.40) mit der Konstanten $C = \frac{\beta^{s+1}}{(s+1)!} z_{s+1, s+1}^{s+1, (1)} > 0$ erfüllt ist.

ZENTRALE GRENZWERTSÄTZE FÜR DIE BETTI-ZAHLEN

Während die Euler-Charakteristik schon seit vielen Jahrzehnten in der mathematischen Literatur und Anwendungen auftaucht, hat die Popularität der Betti-Zahlen vor allem in den letzten 10 bis 15 Jahren zugenommen. Einen großen Anteil daran hat die topologische Datenanalyse mit Anwendungen in den verschiedensten Gebieten, bei der mithilfe sogenannter persistenter Betti-Zahlen die topologische Struktur von räumlichen Daten untersucht wird. In [2] wird die topologische Datenanalyse beispielsweise für Anpassungstests für Punktprozesse verwendet. Aber auch losgelöst von der topologischen Datenanalyse sind die Betti-Zahlen ein fester Bestandteil der modernen Literatur zu Simplicialkomplexen (und darüber hinaus) und tauchen nahezu überall auf, wo es Simplicialkomplexe tun (siehe z.B. [22],[23]). Zentrale Grenzwertsätze für Betti-Zahlen sind beispielsweise in [24],[6],[46] zu finden, wobei in [6] (unseres Wissens nach) erstmals zentrale Grenzwertsätze für Betti-Zahlen im Random Connection Model als zufälliger Graph nachgewiesen wurden (vgl. Abschnitt 3.2 dort). Die dort verwendeten Methoden bilden die Grundlage für die Resultate und die Vorgehensweise in diesem Kapitel.

Da Homologiegruppen auf ganz allgemeinen topologischen Räumen definiert werden können, gilt dies auch für die Betti-Zahlen, wobei diese dann auch den Wert ∞ annehmen können. Als Funktionale auf dem Konvexring (endliche Vereinigungen von konvexen kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d) sind die Betti-Zahlen jedoch beispielsweise nicht additiv, weswegen viele Resultate aus der stochastischen Geometrie nicht auf die Betti-Zahlen anwendbar sind. Aufgrund ihrer vergleichsweise komplizierten Definition als Dimension eines abstrakten Quotientenvektorraums stellt das Arbeiten und Rechnen mit den Betti-Zahlen oft eine Herausforderung dar.

Für den Čech-Komplex und den Vietoris-Rips-Komplex sind in der Literatur schon einige Resultate zu finden (siehe z.B. [24],[46]). In erstgenannter Quelle werden die beiden Komplexe aus einem Binomialprozess konstruiert und dann das asymptotische Verhalten bei wachsender Punktzahl

untersucht. Dabei wird der Parameter der beiden Komplexe in Abhängigkeit von der Anzahl der Punkte gewählt, was in diesem Szenario üblich ist. Dahingegen werden in [46] u.a. die Betti-Zahlen des Čech-Komplexes, konstruiert aus der Einschränkung eines stationären Poissonprozesses auf ein Beobachtungsfenster, betrachtet und ein zentraler Grenzwertsatz für wachsendes Beobachtungsfenster nachgewiesen.

In vielen Anwendungen spielen die persistenten Betti-Zahlen eine wichtige Rolle (eine Definition kann beispielsweise in Kapitel 11 von [13] gefunden werden), bei denen vereinfacht gesagt das Entstehen und Verschwinden von topologischen Merkmalen im Čech-Komplex betrachtet wird, während der Parameter des Komplexes wächst. Dieses Konzept persistenter Betti-Zahlen kann auch auf beliebige Filtrationen (eine aufsteigende Folge von Simplicialkomplexen $(K_r)_{r \geq 0}$) übertragen werden. Ein zentraler Grenzwertsatz für die persistenten Betti-Zahlen einer ganz allgemeinen Filtration basierend auf einem stationären Poissonprozess ist in [18] (Theorem 1.12) zu finden. Ein einzelner Komplex einer solchen Filtration im Sinne der Definition in [18] (Seite 2743) kann in dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell durch geeignete Wahl der Verbindungsfunktionen konstruiert werden, wobei die Verbindungsfunktionen dann nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Wichtige Eigenschaften der Betti-Zahlen für dieses Kapitel sind vor allem die Eigenschaften (2.5) und die Abschätzung aus Lemma (2.7).

In diesem Kapitel betrachten wir wieder Funktionale der Form $f(\Delta_W)$ mit $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$, wobei $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung ist. Bevor wir damit beginnen, den Ansatz aus [6] auf das Modell zu übertragen, wollen wir noch begründen warum sich der für die Euler-Charakteristik verwendete Ansatz aus Kapitel 4 nicht so einfach für die Betti-Zahlen verwenden lässt. Für die Abschätzung der Größen aus Theorem 4.3 werden geeignete Abschätzungen für die Beträge der Differenzenoperatoren erster und zweiter Ordnung benötigt. Um die gleiche Vorgehensweise wie in Kapitel 4 für die Betti-Zahlen verfolgen zu können, würden wir Abschätzungen der Form

$$\begin{aligned} |\Lambda_{(x,U)} \beta_p(\Delta_W)| &\leq \sum_{i=0}^{\alpha} d_i f_i^x(\Delta_W^{(x,U)}), \\ |\Lambda_{(x_1,U_1),(x_2,U_2)}^2 \beta_p(\Delta_W)| &\leq \sum_{i=1}^{\alpha} b_i f_i^{x_1,x_2}(\Delta_W^{(x_1,U_1),(x_2,U_2)}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $b_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i \in [\alpha]$, für alle $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ benötigen. Lemma (2.7) für $K = \Delta_W^{(x,U)}$ und $L = \Delta_W$ liefert zwar die Abschätzung

$$\Lambda_{(x,U)} \beta_p(\Delta_W) \leq f_p^x(\Delta_W^{(x,U)}) + f_{p+1}^x(\Delta_W^{(x,U)}),$$

allerdings kann nachgewiesen werden, dass im Allgemeinen keine Abschätzung wie in (5.1) für den Differenzenoperator zweiter Ordnung existiert. Dazu sei $h_f^2 : \mathbb{N}_K(S) \times \mathbb{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung aus (3.21) mit $k = 2$ und einer messbaren Funktion $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ und außerdem ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ fixiert. Für die Abbildung h_f^2 gilt

$$\Lambda_{(x_1,u_1),(x_2,u_2)}^2 f(\Delta_W) = h_f^2(\Delta_W^{(x_1,U_1),(x_2,U_2)}, x_1, x_2),$$

$$h_f^2(\kappa, x_1, x_2) = f(\kappa) - f(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_1\}}) - f(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}) + f(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_1, x_2\}}).$$

Für $f = \beta_p$ schreiben wir kurz h_p^2 .

Lemma 5.1. *Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$ zwei unterschiedliche Punkte und $p \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert kein Koeffizientenvektor $b = (b_0, \dots, b_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ mit*

$$|h_p^2(\kappa, x_1, \dots, x_k)| \leq \sum_{i=1}^{\alpha} b_i f_i^{x_1, x_2}(\kappa) \quad \text{für alle } \kappa \in \mathbb{N}_K^f(S).$$

Beweis. Zu $p \in \mathbb{N}$ fixieren wir $p+1$ paarweise verschiedene Punkte $y_1, \dots, y_{p+1} \in \mathbb{X} \setminus \{x_1, x_2\}$. Für eine Menge $V = \{v_0, \dots, v_m\}$ sei $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m]$ das Simplex mit Eckenmenge $V \setminus \{v_j\}$ und weiter $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_m]$ das Simplex mit Eckenmenge $V \setminus \{v_j, v_i\}$. Wir definieren den Komplex

$$\kappa^{(p)} := \left\langle [x_1, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}], [x_2, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] \mid j \in [p+1] \right\rangle, \quad (5.2)$$

der von $2(p+1)$ Simplizes der Dimension p erzeugt wird. Da alle diese p -Simplizes einen der Punkte x_1, x_2 enthalten, besitzt der Komplex $\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_1, x_2\}}^{(p)}$ keine p -Simplizes und es folgt $\beta_p(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_1, x_2\}}^{(p)}) = 0$. Die Menge aller p -Simplizes von $\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}^{(p)}$ ist gegeben durch

$$\left\{ [x_1, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] \mid j \in [p+1] \right\}.$$

Wir fixieren ein Element der p -ten Kettengruppe dieses Komplexes, indem wir einen Koeffizientenvektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \{0, 1\}^{p+1}$ festhalten. Der Rand der zugehörigen p -Kette ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_p \left(\sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j [x_1, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] \right) \\ = \sum_{j=1}^{p+1} \lambda_j \left([y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^{p+1} [x_1, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{p+1}] \right). \end{aligned}$$

Jedes Simplex der Form $[y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}]$ taucht in dieser Summe nur einmal auf und zwar mit dem Vorfaktor λ_j . Damit der gesamte Ausdruck 0 ist (damit ist hier das neutrale Element der Kettengruppe $C_{p-1}(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}^{(p)})$ gemeint), muss also $\lambda_j = 0$ für alle $j \in [p+1]$ gelten. Also besteht $Z_p(K) = \ker(\partial_p)$ nur aus dem neutralen Element und es folgt $\beta_p(\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_2\}}^{(p)}) = 0$. Aus Symmetriegründen gilt dies auch für den Komplex $\kappa_{\mathbb{X} \setminus \{x_1\}}^{(p)}$. Schließlich betrachten wir die p -te Kettengruppe $C_p(\kappa)$ von κ und dort die Kette zum Koeffizientenvektor $(1, \dots, 1)$. Für diese p -Kette gilt

$$\partial_p \left(\sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{p+1} [x_k, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] \right)$$

$$= \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{p+1} [y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_{p+1}] + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j}}^{p+1} [x_k, y_1, \dots, \hat{y}_j, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_{p+1}] = 0,$$

da jedes Simplex auf der linken Seite der letzten Gleichung zweimal als Summand auftaucht. Also gilt $\dim(Z_p(\kappa)) \geq 1$. Wegen der Abwesenheit von $(p+1)$ -Simplizes in κ , folgt $\dim(B_p(\kappa)) = 0$ und somit $\beta_p(\kappa) \geq 1$. Insgesamt erhalten wir einerseits $h_p^2(\kappa^{(p)}) \geq 1$, andererseits gilt aber $\sum_{i=1}^{\alpha} f_i^{x_1, x_2}(\kappa^{(p)}) = 0$, woraus die Behauptung für $p \in \mathbb{N}$ folgt. Für $p = 0$ wählen wir den Komplex aus (5.2) mit $p = 1$. Dann lässt sich leicht überprüfen, dass $h_0^2(\kappa^{(1)}) = 1$, aber $\sum_{i=1}^{\alpha} f_i^{x_1, x_2}(\kappa^{(1)}) = 0$ gilt. \square

Man beachte, dass im Fall $\varphi_j \in (0, 1)$ für alle $j \in [\alpha + 1]$ der Komplex $\Delta_W^{(x_1, U_1), (x_2, U_2)}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit isomorph zum Komplex $\kappa^{(p)}$ ist. Also existiert in diesem Fall keine Schranke der Form (5.1), die \mathbb{P} -fast sicher gilt.

Ein oftmals in der stochastischen Geometrie verwendetes Hilfsmittel zur Normalapproximation sind sogenannte Scorefunktionen. Wir werden dieses Konzept nicht im Detail einführen, aber im Folgenden kurz in einer vereinfachten auf die hier vorliegende Situation zugeschnittenen Variante erklären. Eine Scorefunktion ist eine Abbildung $\xi : (\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \times \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})$ und das zugehörige Poissonfunktional zum Prozess Ψ_W , $W \in \mathcal{X}$, ist dann von der Form

$$H(\Psi_W) := \sum_{(x, u) \in \Psi_W} \xi((x, u), \Psi_W).$$

Eine Überblick über Normalapproximation von Funktionalen dieser Form liefert beispielsweise [40], wobei sich dort auf Punktprozesse in \mathbb{R}^d fokussiert wird. Resultate zu Scorefunktionen in einem wesentlich allgemeineren Rahmen können z.B. in Kapitel 4 von [42] gefunden werden. Um die p -te Betti-Zahl in diese Form zu bringen, wäre es naheliegend, jedem p -dimensionalen topologische Merkmal von Δ_W einen Punkt von Ψ_W zuzuordnen und $\xi((x, u), \Psi_W)$ als die Anzahl der (x, u) zugeordneten Merkmale zu definieren. Diese Zuordnung in dem hier vorliegenden allgemeinen Rahmen auf eine Weise zu definieren, sodass damit gut gerechnet werden kann (um beispielsweise Eigenschaften wie (4.3)-(4.5) in [42] nachweisen zu können), gestaltet sich allerdings wegen der bereits komplexen Definition der Betti-Zahlen als sehr schwierig. Bereits die Erzeuger der Homologiegruppen, bei denen es sich um Äquivalenzklassen von abstrakten Summen von Simplizes handelt, sind nicht eindeutig. Ein Spezialfall, in dem dieser Ansatz für die Betti-Zahlen funktioniert, kann in [2] gefunden werden. Dort ist unter anderem ein zentraler Grenzwertsatz für persistente Betti-Zahlen der Dimension 0 und 1 des Čech-Komplexes eines Poissonprozesses in \mathbb{R}^2 zu finden. In dieser Situation kann für die topologischen Merkmale des Čech-Komplexes eine vergleichsweise einfache geometrische Interpretation gefunden werden. Trotzdem wurden in [2] nur sogenannte beschränkte topologische Merkmale gezählt, was eine weitere große Einschränkung darstellt. Außerdem kann beim Betrachten des Čech-Komplexes auf den zusätzlichen Markenraum \mathbb{M} verzichtet werden, da die Verbindungsfunktionen nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen. Bei der Situation in [2] handelt es sich also um einen sehr restriktiven Spezialfall der hier vorliegenden Situation.

Für dieses Kapitel orientieren wir uns deshalb an dem Ansatz aus [6]. Man beachte, dass dort die

Betti-Zahlen des Flaggenkomplexes des Random Connection Model als zufälliger Graph betrachtet werden. In der hier vorliegenden Situation liefert [2] also einen zentralen Grenzwertsatz für die p -te Betti-Zahl im Spezialfall

$$\varphi_j \equiv 1 \quad \text{für alle } j \in \{2, \dots, p+1\}.$$

Ein wesentlicher Vorteil des Ansatzes aus [6] (im Vergleich zu dem für die Euler-Charakteristik verwendeten Ansatz) ist, dass er nur den Differenzenoperator erster Ordnung verwendet und somit das Problem des Findens einer passenden Schranke für den Differenzenoperator zweiter Ordnung umgangen werden kann. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels weisen wir einen zentralen Grenzwertsatz für eine bestimmte Klasse von Funktionalen nach. Danach zeigen wir im zweiten Abschnitt, dass die Betti-Zahlen (unter einer Integrierbarkeitsbedingung) in dieser Klasse liegen, bevor wir im dritten Abschnitt weitere Beispielfunktionale aus dieser Klasse betrachten. Im letzten Abschnitt beschäftigen wir uns schließlich mit der Frage, wann die asymptotische Varianz in Theorem 5.8 positiv ist.

5.1. NORMALAPPROXIMATION VON SCHWACH STABILISIERENDEN FUNKTIONALEN

Für das gesamte restliche Kapitel befinden wir uns wieder im markierten stationären Modell aus Abschnitt 3.5 mit der Integrierbarkeitsbedingung (3.36). Das Vorgehen basiert auf der Herleitung von Theorem 2.4 in [6], dessen Beweismethode wiederum auf der von Theorem 3.1 in [44] beruht. Der Beweismethode von Theorem 3.1 in [44] liegt ein allgemeines Resultat zur Normalapproximation von Zufallsvariablen zugrunde, welches dort als Lemma 2.2 zu finden ist und hier zur Vollständigkeit nochmals formuliert wird. Dazu bezeichne N_{σ^2} für $\sigma^2 \in [0, \infty)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 .

Theorem 5.2 (Lemma 2.2 in [44]). *Es seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(X_{n,L})_{n,L \in \mathbb{N}}$ eine Folge bzw. Doppelfolge von zentrierten Zufallsvariablen, die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllen.*

(i) *Für alle $L \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathbb{V}(X_{n,L}) \rightarrow \sigma_L^2 \in [0, \infty) \quad \text{und} \quad X_{n,L} \xrightarrow{d} N_{\sigma_L^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(ii) *Es gilt $\lim_{L \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(Y_n - X_{n,L}) = 0$.*

Dann existiert der Grenzwert $\sigma^2 := \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_L^2$ und es gilt

$$\mathbb{V}(Y_n) \rightarrow \sigma^2 \quad \text{und} \quad Y_n \xrightarrow{d} N_{\sigma^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

In diesem Kapitel wenden wir die Konstruktion aus Theorem 3.16, die direkt davor eingeführt wird, auf das markierte stationäre Modell an. Der Grundraum ist gegeben durch den Borelraum

$\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [0, 1]$ mit der Relation

$$(x_1, y_1, t) < (x_2, y_2, s) \quad :\Leftrightarrow \quad t < s. \quad (5.3)$$

Des Weiteren sei z_0, z_1, \dots eine Abzählung des Gitters \mathbb{Z}^d mit $z_0 = \mathbf{0}$ und $Q_i := [0, 1]^d + z_i$ für $i \in \mathbb{N}_0$, wodurch wir den euklidischen Raum in halboffene Würfel der Kantenlänge 1 zerlegen und dadurch auch eine Zerlegung $(Q_i \times \mathbb{A} \times [0, 1])_{i \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [0, 1]$ erhalten. Die Komponente in $[0, 1]$ ist dabei nur für die Definition der Relation $<$ von Bedeutung, weswegen wir weiterhin translationsinvariante Verbindungsfunktionen $\varphi_j : (\mathbb{R}^d \times \mathbb{A})^{j+1} \rightarrow [0, 1]$ im Sinne von (3.35) betrachten. In dieser Situation handelt es sich bei Ψ um einen Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$ mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d \otimes \Theta \otimes \lambda_1|_{[0,1]} \otimes \mathbb{Q}$. Wir setzen wie zuvor $\Delta = T(\Psi)$, wobei T hier eine Abbildung nach $\mathbb{N}_K(S) := \mathbb{N}_K(S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}))$ sei, d.h. die zusätzliche Komponente in $[0, 1]$ wird zwar für die Konstruktion des Komplexes verwendet, aber nicht Teil der Ecken in Δ sein. Für ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$ schreiben wir stets Δ_W für die Einschränkung von Δ auf $W \times \mathbb{A}$. Außerdem identifizieren wir die Ecken von Δ mit ihrer räumlichen Komponente. Wir sind interessiert an der asymptotischen Verteilung von $f(\Delta_{W_n})$ für $n \rightarrow \infty$, wobei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Beobachtungsfenstern ist und f eine Abbildung aus einer bestimmten Klasse, die wir noch definieren werden. In diesem Kapitel lassen wir dabei als Beobachtungsfenster lediglich Würfel zu, also Mengen der Form

$$W = \bigtimes_{i=1}^d [x_i, x_i + l) \subset \mathbb{R}^d, \quad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad l > 0.$$

Die Menge aller solcher Würfel notieren wir mit \mathcal{W} und eine Folge in \mathcal{W} nennen wir Würfelreihe. Wir nennen einen Würfel, der sich als Vereinigung der Würfel aus der Zerlegung $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ darstellen lässt, einen Gitterwürfel und schreiben \mathcal{G} für die Menge aller Gitterwürfel. Für einen Gitterwürfel $G \in \mathcal{G}$ gilt wegen (3.8) also insbesondere $\Delta_G = T(\Psi_G)$ \mathbb{P} -fast sicher, wobei Ψ_G für eine allgemeine Menge $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ hier und im Folgenden die Einschränkung von Ψ auf $G \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$ bezeichnet. Während des gesamten Kapitels verwenden wir zu einer messbaren Abbildung $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ den Differenzenoperator

$$\Lambda_{(x,a,t,u)} f(\Delta_W) = f(\Delta_W^{(x,a,t,u)}) - f(\Delta_{W \setminus \{x\}}^{(x,a,t,u)})$$

mit $\Delta^{(x,a,t,u)} = T(\Psi + \delta_{(x,a,t,u)})$, der in Abschnitt 3.4 (siehe Definition (3.23)) in beliebiger Ordnung eingeführt wurde. Bei dem Operator $\Lambda_{(x,a,t,u)} f(\Delta_W)$ handelt es sich also um eine messbare Funktion im Komplex $\Delta^{(x,a,t,u)}$. Man beachte, dass für $t = 1$ die Bedingung (3.9) für den Punkt $(x, a, 1)$ erfüllt ist, denn mit der Definition der dort auftretenden Menge $A_{(x,a,1)}$ folgt

$$\beta \lambda_d \otimes \Theta \otimes \lambda_1|_{[0,1]}(A_{(x,a,1)}) = \beta \lambda_d \otimes \Theta \otimes \lambda_1|_{[0,1]}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \{1\}) = 0.$$

Deshalb gilt (3.10) für den Punkt $(x, a, 1)$. Wir beginnen damit, die Klasse der schwach stabilisierenden Funktionale zu definieren. Man beachte, dass die Konstruktion des Operators $\Lambda_{(0,a,t,u)}$ der

Konstruktion von $\tilde{\Delta}_{\mathbf{0},t,m}$ in [6] (vgl. Seite 12) entspricht, die dortige Argumentation und Definition von schwach stabilisierenden Funktionalen aber mithilfe eines anderen Operators (dort mit $\Delta_{\mathbf{0},t,m}$ notiert) durchgeführt wird. Eine analoge Definition dieses anderen Operators ist gegeben durch

$$f(T(\Psi_W + \delta_{(x,a,t,u)})) - f(T(\Psi_W + \delta_{(x,a,t,u)})_{\mathbb{R}^d \setminus \{x\}}).$$

Der Unterschied besteht darin, dass der Abbildung T zur Konstruktion des Simplicialkomplexes hier der Prozess Ψ_W übergeben wird, während bei dem Operator $\Lambda_{(x,a,t,u)}f(\Delta_W)$ erst nach der Konstruktion des Simplicialkomplexes auf W eingeschränkt wird. Während des Kapitels werden wir oftmals Folgen von Würfeln $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten, die den ganzen Raum \mathbb{R}^d approximieren in dem Sinne, dass für jede beschränkte Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $B \subseteq W_n$ für alle $n \geq N$. Wir schreiben abkürzend $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$, falls $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diese Eigenschaft erfüllt.

Definition 5.3 (Schwach stabilisierende Funktionale). *Es seien $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $V \sim \Theta$ und $U \sim \mathbb{Q}$ unabhängig (insbesondere auch von Ψ).*

(i) Für $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ mit der Darstellung (3.1) und $t \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\kappa + t := \sum_{i=1}^{\kappa(S)} \delta_{\sigma_i + t}$$

mit $\sigma + t := \{(x_1 + t, a_1), \dots, (x_j + t, a_j)\}$ für $\sigma = \{(x_1, a_1), \dots, (x_j, a_j)\} \in (\mathbb{R}^d \times \mathbb{A})^{[j]}$.

(ii) Wir nennen f translationsinvariant, falls gilt

$$f(\kappa) = f(\kappa + t) \quad \text{für alle } \kappa \in \mathbb{N}_K(S), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

(iii) Das Funktional f heißt schwach stabilisierend, falls f translationsinvariant ist und es eine Zufallsvariable Z gibt, sodass für alle Würfelolgen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt

$$\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Wir nennen die Zufallsvariable Z die zu f assoziierte Zufallsvariable.

(iv) Das Funktional f erfüllt eine Momentenbedingung, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ \mathbf{0} \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_W) \right|^{2+\varepsilon} \right] < \infty. \quad (5.5)$$

Die zu einem schwach stabilisierenden Funktional f assoziierte Zufallsvariable Z ist \mathbb{P} -fast überall eindeutig bestimmt und könnte auch durch jede Zufallsvariable Z' mit $\mathbb{P}(Z = Z') = 1$ ersetzt werden. Erfüllt f zusätzlich die Momentenbedingung (5.5), so gilt die Konvergenz aus (5.4) sogar in L^2 . Dies folgt aus Theorem 5.12 in [25], wobei die Momentenbedingung die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge liefert. Nachfolgendes Korollar zeigt, dass für ein Funktional $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$,

das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt, die Zufallsvariablen $f(\Delta_W)$, $W \in \mathcal{W}$, quadratisch integrierbar sind. Eine analoge Aussage wird im Beweis von Theorem 3.1 in [44] verwendet, aber nicht explizit bewiesen. Deshalb führen wir den Beweis zur Vollständigkeit hier komplett aus. Dabei handelt es sich um eine angepasste Variante der Argumentation des Autors von [44], der uns diese im persönlichen Austausch zur Verfügung gestellt hat.

Korollar 5.4. *Für ein Funktional $f : \mathbb{N}_K(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$, welches die Momentenbedingung (5.5) erfüllt, gilt $\mathbb{E} [f(\Delta_W)^2] < \infty$ für alle $W \in \mathcal{W}$.*

Beweis. Wir fixieren einen Würfel $W \in \mathcal{W}$ und definieren zu $n \in \mathbb{N}$ ein Funktional $f_n : \mathbb{N}_K(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(\kappa) := \mathbb{1}\{|f(\kappa)| \leq n\} f(\kappa) + \mathbb{1}\{f(\kappa) > n\} n - \mathbb{1}\{f(\kappa) < -n\} n.$$

Eine Fallunterscheidung nach den Werten von $f(\Delta_W^{(0,V,1,U)})$ und $f(\Delta_{W \setminus \{0\}}^{(0,V,1,U)})$ liefert

$$\left| \Lambda_{(0,V,1,U)} f_n(\Delta_W) \right| \leq \left| \Lambda_{(0,V,1,U)} f(\Delta_W) \right| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wegen der Momentenbedingung (5.5) gibt es ein $c > 0$ mit

$$\sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ 0 \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(0,V,1,U)} f(\Delta_W) \right|^2 \right] \leq c. \quad (5.6)$$

Die Poincaré-Ungleichung (Theorem 3.17) angewendet für die Funktionale f_n , $n \in \mathbb{N}$, liefert dann zusammen mit (5.6) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(f_n(\Delta_W)) &\leq \beta \int_W \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(x,V,1,U)} f(\Delta_W) \right|^2 \right] dx \\ &= \beta \int_W \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(0,V,1,U)} f(\Delta_{W-x}) \right|^2 \right] dx \\ &\leq \beta |W| c =: C, \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei hier die Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen im Sinne von (3.35) eingegangen ist. Wir fixieren ein $a > 0$ mit $\mathbb{P}(|f(\Delta_W)| \geq a) \leq \frac{1}{2}$. Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)| \mathbb{1}\{|f(\Delta_W)| > a\}]^2 \leq \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] \mathbb{P}(|f(\Delta_W)| > a) \quad (5.8)$$

Setzen wir $\zeta_n := \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)| \mathbb{1}\{|f(\Delta_W)| > a\}]$, so folgt

$$\begin{aligned} 2\zeta_n^2 &\leq \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] \\ &\leq C + \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] \\ &\leq C + \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] \\ &= C + (\mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)| \mathbb{1}\{|f(\Delta_W)| \leq a\}] + \zeta_n)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C + (a + \zeta_n)^2 \\
 &= C + a^2 + 2a\zeta_n + \zeta_n^2
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die erste Ungleichung wurde $\mathbb{P}(|f(\Delta_W)| \geq a) \leq \frac{1}{2}$ verwendet und die zweite Ungleichung ergibt sich aus (5.7). Da die Abschätzung (5.9) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, muss ζ_n als Funktion in $n \in \mathbb{N}$ beschränkt sein. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mathbb{E} [|f(\Delta_W)| \mathbb{1}\{|f(\Delta_W)| > a\}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n < \infty$$

und insbesondere $\mathbb{E} [|f(\Delta_W)|] < \infty$. Wegen $\mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] \leq C + \mathbb{E} [|f(\Delta_W)|]^2$ ist auch $\mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2]$ als Funktion in $n \in \mathbb{N}$ beschränkt und der Satz von der monotonen Konvergenz liefert wiederum

$$\mathbb{E} [|f(\Delta_W)|^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|f_n(\Delta_W)|^2] < \infty.$$

□

Während des restlichen Abschnitts schreiben wir kurz $\Delta^{(x,t)}$ für $\Delta^{(x,V,t,U)}$ und $\Lambda_{(x,t)}$ für $\Lambda_{(x,V,t,U)}$ mit $x \in \mathbb{R}^d$ und V, U wie in Definition 5.3. Tatsächlich lässt sich Eigenschaft (iii) aus Definition 5.3 analog zu Lemma 2.13 in [6] noch vereinfachen. Dazu bezeichnen wir eine Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als aufsteigend, falls $W_n \subseteq W_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Proposition 5.5 (Charakterisierung von schwacher Stabilisation). *Für ein translationsinvariantes Funktional $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i) f ist schwach stabilisierend.
- (ii) Der Operator $\Lambda_{(0,1)} f(\Delta_{W_n})$ konvergiert für alle aufsteigenden Würfelreihen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable.

Beweis. Es lässt sich komplett analog zum Beweis von Lemma 2.13 in [6] argumentieren. □

Wollen wir für ein translationsinvariantes Funktional $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ nachweisen, dass f schwach stabilisierend ist, so vereinfacht Proposition 5.5 diesen Nachweis in zwei Punkten. Einerseits müssen nur aufsteigende Würfelreihen betrachtet werden. Andererseits genügt es zu zeigen, dass für jede solche Folge der Grenzwert aus (5.4) existiert (ohne nachzuweisen, dass dieser Grenzwert für alle Würfelreihen übereinstimmt). Die Resultate in diesem Abschnitt werden sich auf schwach stabilisierende Funktionale beziehen, die die Momentenbedingung (5.5) erfüllen. Bevor wir in den Abschnitten 5.2 und 5.3 auf konkrete Beispielfunktionale aus dieser Klasse eingehen, stellen wir zunächst fest, dass konstante Funktionale in dieser Klasse liegen und diese abgeschlossen unter Linearkombinationen ist. Sind nämlich $g_1, \dots, g_m : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ schwach stabilisierende Funktionale mit assoziierten Zufallsvariablen $Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}$, so folgt für ein Funktional $g = \sum_{i=1}^m b_i g_i$ mit

$b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

$$\Lambda_{(\mathbf{0},1)}g(\Delta_{W_n}) = \sum_{i=1}^m b_i \Lambda_{(\mathbf{0},1)}g_i(\Delta_{W_n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^m b_i Z^{(i)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Würfelolgen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Außerdem folgt aus der Minkowski-Ungleichung (z.B. Theorem 1.31 (ii) in [25])

$$\sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ \mathbf{0} \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)}g(\Delta_W) \right|^{2+\varepsilon'} \right] < \infty$$

mit $\varepsilon' := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\} > 0$, wobei $\varepsilon_i > 0$ so gewählt sei, dass das Funktional g_i die Momentenbedingung für $\varepsilon = \varepsilon_i$ erfüllt. Bei nachfolgender Proposition handelt es sich um das Analogon zu Lemma 2.7 in [6], wobei wir zum Nachweis eine andere Argumentation verwenden.

Proposition 5.6. *Es sei $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ein schwach stabilisierendes Funktional. Dann existiert zu $t \in [0, 1]$ eine Zufallsvariable Z_t , sodass für alle Würfelolgen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z_t \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Es sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Würfelfolge mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $t \in [0, 1]$. Nach Voraussetzung konvergiert die Folge $(\Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_{W_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable Z . Deswegen ist sie nach Lemma 5.6 in [25] Cauchy in Wahrscheinlichkeit mit der dortigen Definition dieses Ausdrucks, dass eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen Cauchy in Wahrscheinlichkeit genannt wird, falls

$$\mathbb{E} [\min\{|X_m - X_n|, 1\}] \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty$$

gilt. Für jede Wahl von $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_{W_n}), \Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_{W_m}) \right) \stackrel{d}{=} \left(\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_n}), \Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_m}) \right),$$

denn bei dem Vektor auf der rechten Seite handelt es sich um eine Funktion im Komplex $\Delta^{(\mathbf{0},t)}$ und es gilt $\Delta^{(\mathbf{0},t)} \stackrel{d}{=} \Delta^{(\mathbf{0},s)}$ für alle $s, t \in [0, 1]$ (also insbesondere auch für $s = 1$). Also ist auch die Folge $(\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy in Wahrscheinlichkeit und konvergiert wiederum nach Lemma 5.6 in [25] in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable $Z_t^{(W_n)_{n \in \mathbb{N}}}$. Mit der selben Argumentation wie in Lemma 2.13 in [6] folgt, dass die Grenzvariablen zu zwei unterschiedlichen Würfelolgen, die gegen den ganzen Raum konvergieren, \mathbb{P} -fast sicher übereinstimmen und deshalb Z_t als eine dieser Zufallsvariablen gewählt werden kann. \square

Als nächstes wenden wir analog zu Lemma 2.8 in [6] Theorem 3.16 an, um eine Aussage über die asymptotische Varianz $\mathbb{V}(f(\Delta_{W_n}))$ für $n \rightarrow \infty$ zu treffen. Dabei sei Ψ_t für $t \in [0, 1]$ wie in Theorem 3.16 die Einschränkung von Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [0, t) \times \mathbb{M}$. Dies sollte nicht zu Verwechslungen mit der Notation Ψ_W (Einschränkung von Ψ auf $W \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$) für einen Würfel $W \in \mathcal{W}$ führen, da

aus dem Zusammenhang klar sein sollte, was für ein Objekt hier indiziert wird. Für nachfolgendes Lemma zerlegen wir unseren Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, wobei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ der Wahrscheinlichkeitsraum ist, auf dem der Poissonprozess Ψ lebt, und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ den Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet, auf dem die Marken V, U leben. Wir notieren den Erwartungswert bzgl. $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ mit $\tilde{\mathbb{E}}$.

Lemma 5.7. *Es sei $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ schwach stabilisierend mit der Momentenbedingung (5.5). Dann folgt für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ die Konvergenz*

$$\frac{\mathbb{V}(f(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} \rightarrow \beta \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} [Z_t | \Psi_t]^2 \right] dt =: \sigma^2 < \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit den Zufallsvariablen $Z_t, t \in [0, 1]$, aus Proposition 5.6. Gilt zusätzlich $\mathbb{P}(Z \neq 0) > 0$ für die zu f assoziierte Zufallsvariable $Z = Z_1$, so folgt $\sigma^2 > 0$.

Beweis. Wir fixieren $t \in [0, 1]$ und eine Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Die Momentenbedingung (5.5), die auch für den Operator $\Lambda_{(\mathbf{0}, t)}$ gilt, liefert die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $(|\Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n})|^2)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus Theorem 5.12 in [25] folgt zusammen mit der stochastischen Konvergenz in Proposition 5.6

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n}) - Z_t \right|^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (5.10)$$

und außerdem $\mathbb{E} [Z_t^2] < \infty$. Die Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungen liefert zusammen mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n}) - Z_t \right|^2 \mid \Psi_t \right] \right] dt \leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n}) - Z_t \right|^2 \right] dt \rightarrow 0.$$

Daraus folgt

$$h(W_n) := \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n}) \right|^2 \mid \Psi_t \right] \right] dt \rightarrow \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} [Z_t | \Psi_t]^2 \right] dt = \frac{\sigma^2}{\beta} < \infty.$$

Da diese Konvergenz für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein Radius $r_\varepsilon > 0$ mit

$$|h(W) - \frac{\sigma^2}{\beta}| < \varepsilon \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W} \text{ mit } B(\mathbf{0}, r_\varepsilon) \subseteq W. \quad (5.11)$$

Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an sie wäre falsch. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $V_n \in \mathcal{W}$ existiert mit $B(\mathbf{0}, n) \subseteq V_n$ und $|h(V_n) - \frac{\sigma^2}{\beta}| \geq \varepsilon$. Dies liefert allerdings eine Würfelreihe $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ohne die Konvergenzeigenschaft $h(V_n) \rightarrow \frac{\sigma^2}{\beta}$, wodurch sich ein Widerspruch ergibt. Theorem 3.16 liefert für das Funktional $f(\Delta_{W_n})$

$$\mathbb{V}(f(\Delta_{W_n})) = \beta \int_{W_n} \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[\left| \Lambda_{(x, t)} f(\Delta_{W_n}) \right|^2 \mid \Psi_t \right] \right] dt \lambda(dx)$$

$$= \beta \int_{W_n} h(W_n - x) dx,$$

wobei die zweite Gleichung aus der Translationsinvarianz der Verbindungsfunktionen und des Funktionals f folgt. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $r_\varepsilon > 0$ mit (5.11) und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{V}(f(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} &= \frac{\beta}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x, \partial W_n) > r_\varepsilon\} h(W_n - x) dx \\ &\quad + \frac{\beta}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x, \partial W_n) \leq r_\varepsilon\} h(W_n - x) dx. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Ungleichung von Jensen und die Momentenbedingung (5.5) liefern für $x \in W_n$

$$\begin{aligned} h(W_n - x) &\leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_{W_n - x}) \right|^2 \right] dt \\ &= \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, 1)} f(\Delta_{W_n - x}) \right|^2 \right] \leq \sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ \mathbf{0} \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0}, 1)} f(\Delta_W) \right|^2 \right] < \infty, \end{aligned}$$

weswegen das zweite Integral in (5.12) mit der Argumentation zu (3.46) für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Andererseits folgt mit (5.11) für das erste Integral

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\beta}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x, \partial W_n) > r_\varepsilon\} h(W_n - x) dx - \sigma^2 \right| \\ &\leq \frac{\beta}{|W_n|} \int_{W_n} \mathbb{1}\{d(x, \partial W_n) > r_\varepsilon\} \left| h(W_n - x) - \frac{\sigma^2}{\beta} \right| dx + \frac{\sigma^2}{|W_n|} \left| \{x \in W_n \mid d(x, \partial W_n) \leq r_\varepsilon\} \right| \\ &\leq \beta \varepsilon + \frac{\sigma^2}{|W_n|} \left| \{x \in W_n \mid d(x, \partial W_n) \leq r_\varepsilon\} \right|. \end{aligned}$$

Da auch hier der zweite Summand asymptotisch verschwindet und $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gewünschte Konvergenz.

Schließlich zeigen wir $\sigma^2 > 0$, falls $\mathbb{P}(Z \neq 0) > 0$ gilt. Dafür weisen wir die Stetigkeit von $\mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} [Z_t \mid \Psi_t]^2 \right]$ in $t = 1$ nach, was wegen $\mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} [Z_1 \mid \Psi_1]^2 \right] = \mathbb{E} [Z^2] > 0$ die Positivität von σ^2 impliziert. Dazu sei daran erinnert, dass die Koordinaten des hinzugefügten Punkts $(\mathbf{0}, V, t)$ in $\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, t, U)}$ (bei der Konstruktion der Abbildung T in Abschnitt 3.2) nur von der Einschränkung von Ψ auf $\mathcal{Q}_0 \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M}$ abhängen (beachte $\mathbf{0} \in \mathcal{Q}_0$) und deshalb mit der Definition der verwendeten Relation (5.3) auf dem Ereignis $\{\Psi(\mathcal{Q}_0 \times \mathbb{A} \times [t, 1] \times \mathbb{M}) = 0\}$ die Gleichung

$$T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, t, U)})_W = T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, 1, U)})_W \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

gilt. Deshalb gilt auf dem Ereignis $\{\Psi(W \cup \mathcal{Q}_0 \times \mathbb{A} \times [t, 1] \times \mathbb{M}) = 0\}$ auch insbesondere

$$\Lambda_{(\mathbf{0}, t)} f(\Delta_W) = \Lambda_{(\mathbf{0}, 1)} f(\Delta_W) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Da die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\Psi(\mathcal{Q}_0 \times \mathbb{A} \times [t, 1] \times \mathbb{M}) = 0\}$ für $t \rightarrow 1$ gegen 1

konvergiert, erhalten wir die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit

$$\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_W) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_W) \quad \text{für } t \rightarrow 1. \quad (5.13)$$

Die Momentenbedingung liefert tatsächlich sogar L^2 -Konvergenz (vgl. Theorem 5.12 in [25] mit $\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_W) \stackrel{d}{=} \Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_W)$). Für eine Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ folgt aus der Dreiecksungleichung für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|Z_t - Z\|_{L^2} &\leq \|Z_t - \Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_n})\|_{L^2} \\ &\quad + \|\Lambda_{(\mathbf{0},t)}f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_{W_n})\|_{L^2} + \|\Lambda_{(\mathbf{0},1)}f(\Delta_{W_n}) - Z\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Der erste und der letzte Summand auf der rechten Seite verschwindet wegen (5.10) für $n \rightarrow \infty$. Mit (5.13) erhalten wir also die L^2 -Konvergenz von Z_t gegen Z für $t \rightarrow 1$. Die Ungleichung von Jensen für bedingte Erwartungen liefert

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} [Z_t - Z | \Psi_t]^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 1. \quad (5.14)$$

Im nächsten Schritt wollen wir für einen beliebigen Würfel $W \in \mathcal{W}$ die Konvergenz

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_W) \mid \Psi_t \right] \rightarrow \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_W) \quad \text{in } L^2 \text{ für } t \rightarrow 1. \quad (5.15)$$

nachweisen. Dazu sei ξ_t ein Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [t, 1] \times \mathbb{M}$ mit Intensitätsmaß $\beta \lambda_d \otimes \Theta \otimes \lambda_1|_{[t,1]} \otimes \mathbb{Q}$ und $\mathbb{E}_t[\cdot]$ der Erwartungswert bzgl. ξ_t . Außerdem bezeichne A_t das Ereignis, dass ξ_t keinen Punkt in $\mathcal{Q}_0 \times \mathbb{A} \times [t, 1] \times \mathbb{M}$ besitzt. Auf A_t gilt (mit einer analogen Argumentation wie zuvor)

$$T(\Psi_t + \xi_t + \delta_{(\mathbf{0},V,1,U)})_W = T(\Psi_t + \delta_{(\mathbf{0},V,1,U)})_W \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Schreiben wir

$$\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\eta)_W) := f\left(T(\eta + \delta_{(\mathbf{0},V,1,U)})_W\right) - f\left(T(\eta + \delta_{(\mathbf{0},V,1,U)})_{W \setminus \{\mathbf{0}\}}\right),$$

$\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M})$, so lässt sich die bedingte Erwartung aus (5.15) schreiben als

$$\mathbb{P}(A_t) \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t)_W) + \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t + \xi_t)_W) \mathbb{1}_{A_t^c} \right]$$

und deshalb gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_W) \mid \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t)_W) \\ &= (\mathbb{P}(A_t) - 1) \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t)_W) + \mathbb{E}_t \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t + \xi_t)_W) \mathbb{1}_{A_t^c} \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit der selben Argumentation, mit der die Konvergenz in (5.13) begründet wurde, erhalten wir

$$\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi_t)_W) \xrightarrow{\mathbb{P}} \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(T(\Psi)_W) \quad \text{für } t \rightarrow 1.$$

Wegen $\mathbb{P}(A_t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow 1$, konvergiert der erste Summand in (5.16) in Wahrscheinlichkeit gegen 0. Unter Anwendung der Hölder-Ungleichung (angewandt auf den Erwartungswert bzgl. ξ_t) lässt sich außerdem einsehen, dass auch der zweite Summand in (5.16) in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Also gilt in (5.15) zunächst Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und wegen der Momentenbedingung (5.5) sogar L^2 -Konvergenz. Als nächstes zeigen wir die Konvergenz

$$\tilde{\mathbb{E}}[Z | \Psi_t] \rightarrow Z \quad \text{in } L^2 \text{ für } t \rightarrow 1. \quad (5.17)$$

Dafür sei eine Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Wegen der Momentenbedingung (5.5) folgt mit der Minkowski-Ungleichung

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) \right\|_{L^2} < \infty. \quad (5.18)$$

Außerdem liefert die Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungen

$$\left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] - \tilde{\mathbb{E}}[Z | \Psi_t] \right\|_{L^2} \leq \left\| \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) - Z \right\|_{L^2} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathbb{E}}[Z | \Psi_t] - Z \right\|_{L^2} &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\mathbb{E}}[Z | \Psi_t] - \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] \right\|_{L^2} \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) - Z \right\|_{L^2} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Da der letzte Limes superior nach (5.18) endlich ist, finden wir zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) | \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_n}) \right\|_{L^2} \\ \leq \left\| \tilde{\mathbb{E}} \left[\Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_N}) | \Psi_t \right] - \Lambda_{(\mathbf{0},V,1,U)}f(\Delta_{W_N}) \right\|_{L^2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach (5.15) folgt für $t \rightarrow \infty$

$$\limsup_{t \rightarrow 1} \left\| \tilde{\mathbb{E}}[Z | \Psi_t] - Z \right\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt (5.17). Zusammen mit (5.14) folgt

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}}[Z_t | \Psi_t]^2 \right] \rightarrow \mathbb{E}[Z^2] \quad \text{für } t \rightarrow 1$$

und somit die gewünschte Aussage. \square

Damit sind alle Vorbereitungen für die Formulierung des zentralen Grenzwertsatzes getroffen. Der Beweis von Theorem 5.8 folgt dem Vorgehen der Beweise von Theorem 2.4 in [6] und Theorem 3.1 in [44], wird hier allerdings etwas detaillierter geführt.

Theorem 5.8 (Zentraler Grenzwertsatz für schwach stabilisierende Funktionale). *Es sei $f : \mathbb{N}_K(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ ein schwach stabilisierendes Funktional, das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt. Dann folgt für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$*

$$\frac{f(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[f(\Delta_{W_n}) \right]}{\sqrt{|W_n|}} \xrightarrow{d} N_{\sigma^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei σ^2 der Grenzwert aus Lemma 5.7 ist. Gilt $\mathbb{P}(Z \neq 0) > 0$ für die zu f assoziierte Zufallsvariable Z , so ist die asymptotische Varianz σ^2 positiv.

Beweis. Wegen der translationsinvarianten Situation genügt es die Behauptung für eine Folge bestehend aus Würfeln der Form $W_n := \left[-\frac{\sqrt[n]{n}}{2}, \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \right]^d = \sqrt[n]{n} \cdot W_1$ zu zeigen. Dabei muss $n > 0$ nicht unbedingt eine natürliche Zahl sein. Zunächst fixieren wir $L \in \mathbb{N}$ und zerlegen den Raum in Würfel der Kantenlänge L , d.h. wir betrachten die Zerlegung $([0, L]^d + L \cdot z_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ mit der bereits zuvor gewählten Abzählung z_0, z_1, \dots des Gitters \mathbb{Z}^d mit $z_0 = \mathbf{0}$. Es bezeichne $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der Würfel dieser Zerlegung, sodass aus $i < j$ und $G_j \subseteq W_n$ stets $G_i \subseteq W_n$ folgt. Die Würfel G_i sind also nach dem kleinsten $n > 0$ mit $G_i \subseteq W_n$ sortiert. Außerdem sei $l_n \in \mathbb{N}$ die eindeutige Zahl, sodass $G_i \subseteq W_n$ genau für $i \in [l_n]$ gilt. Da L eine natürliche Zahl ist, handelt es sich bei den Würfeln G_i um Gitterwürfel und es gilt insbesondere $\Delta_{G_i} = T(\Psi_{G_i})$ \mathbb{P} -fast sicher für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (vgl. (3.8)). Wir definieren eine Doppelfolge, die die Rolle der Doppelfolge in Theorem 5.2 übernehmen soll, durch

$$\begin{aligned} X_{n,L} &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{l_n} f(\Delta_{G_i}) - \mathbb{E} \left[f(\Delta_{G_i}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{l_n} f \left(T(\Psi_{G_i}) \right) - \mathbb{E} \left[f \left(T(\Psi_{G_i}) \right) \right] \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.} \end{aligned}$$

Aus der letzten Darstellung ergibt sich direkt, dass es sich bei $X_{n,L}$ um eine Summe von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz handelt, wobei letzteres eine direkte Konsequenz aus der Momentenbedingung (5.5) ist (vgl. Korollar 5.4). Es folgt

$$\mathbb{V}(X_{n,L}) = \frac{l_n}{n} \mathbb{V}(f(\Delta_{G_1})) \rightarrow \frac{1}{L^d} \mathbb{V}(f(\Delta_{G_1})) =: \sigma_L^2 \in [0, \infty) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Konvergenz $\frac{l_n}{n} \rightarrow \frac{1}{L^d}$ folgt aus der zweiten Konvergenz in (9.15) aus [39]. Man beachte, dass nach Lemma 5.7 $\sigma^2 = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma_L^2$ gilt. Somit erfüllt die Folge der Zufallsvariablen $(X_{n,L})$ für

$n \rightarrow \infty$ einen zentralen Grenzwertsatz (vgl. z.B. Theorem 27.1 in [1]), d.h. es gilt

$$X_{n,L} \xrightarrow{d} N_{\sigma_L^2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Damit erfüllt die Doppelfolge $(X_{n,L})_{n,L \in \mathbb{N}}$ die erste Bedingung aus Theorem 5.2. Zum Nachweis der zweiten Bedingung sei $Y_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(f(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[f(\Delta_{W_n}) \right] \right)$. Dann folgt aus der Poincaré-Ungleichung (Theorem 3.17)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y_n - X_{n,L}) &\leq \frac{\beta}{n} \int_{W_n} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \sum_{i=1}^{l_n} \mathbb{1}\{x \in G_i\} \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{\beta}{n} \int_{W_n \setminus (\cup_i G_i)} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) \right)^2 \right] dx \\ &\quad + \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^{l_n} \int_{G_i} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right)^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Für die Gleichung wurde verwendet, dass der Operator $\Lambda_{(x,t)}$ in Verteilung nicht von $t \in [0, 1]$ abhängt, linear ist und auf Konstanten verschwindet. Der Erwartungswert im ersten Summand von (5.19) ist wegen der Momentenbedingung (5.5) gleichmäßig beschränkt in n . Aus der ersten Gleichung in (9.15) aus [39] folgt, dass der erste Summand asymptotisch für $n \rightarrow \infty$ verschwindet. Die Konvergenz (5.10) aus dem Beweis von Lemma 5.7 liefert für $t = 1$

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_{W_n}) - Z \right|^2 \right] \rightarrow 0.$$

Diese Konvergenz gilt für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Deshalb existiert zu $\varepsilon > 0$ ein Radius $r_\varepsilon > 0$, sodass die Abschätzung

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_W) - \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_V) \right|^2 \right] < \varepsilon \quad \text{für alle } W, V \in \mathcal{W} \text{ mit } B(\mathbf{0}, r_\varepsilon) \subset W \cap V \quad (5.20)$$

gilt. Zum Nachweis dieser Behauptung lässt sich zunächst analog zu (5.11) für $\varepsilon > 0$ die Existenz eines Radius $t_\varepsilon > 0$ mit

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_W) - Z \right|^2 \right] < \varepsilon \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W} \text{ mit } B(\mathbf{0}, t_\varepsilon) \subset W$$

verargumentieren. Wir wählen $r_\varepsilon := t_{\varepsilon'}$ mit $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{4}$ und erhalten für $W, V \in \mathcal{W}$ mit $B(\mathbf{0}, r_\varepsilon) \subset W \cap V$ unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_W) - \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_V) \right|^2 \right]} &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_W) - Z \right|^2 \right]} + \sqrt{\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_V) - Z \right|^2 \right]} \\ &< 2\sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Damit gilt also (5.20). Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$ und definieren für einen Würfel $W \in \mathcal{W}$

$$\begin{aligned} \text{int}_\varepsilon(W) &:= \{x \in W \mid d(x, \partial W) \geq r_\varepsilon\}, \\ \partial_\varepsilon(W) &:= \{x \in W \mid d(x, \partial W) < r_\varepsilon\} = W \setminus \text{int}_\varepsilon(W). \end{aligned}$$

Für $L > 2r_\varepsilon$ gilt $|\partial_\varepsilon G_i| = L^d - (L - 2r_\varepsilon)^d$ und somit für genügend großes L

$$|\partial_\varepsilon G_i| \leq 2r_\varepsilon d L^{d-1}.$$

Wegen der Verteilungsgleichheit $(\Lambda_{(0,1)} f(\Delta_W), \Lambda_{(0,1)} f(\Delta_V)) \stackrel{d}{=} (\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W+x}), \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{V+x}))$ für alle Würfel $W, V \in \mathcal{W}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ folgt aus (5.20)

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right|^2 \right] < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \text{int}_\varepsilon(G_i), \quad i \in [l_n].$$

Die Momentenbedingung (5.5) liefert die Existenz einer Konstanten $\rho > 0$ mit

$$\mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_W) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_V) \right|^2 \right] \leq \rho \quad \text{für alle } W, V \in \mathcal{W}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Insgesamt folgt für den zweiten Summanden von (5.19) mit den letzten drei abgesetzten Abschätzungen für genügend großes L

$$\begin{aligned} & \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^{l_n} \int_{G_i} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right)^2 \right] dx \\ & \leq \frac{\beta}{n} \sum_{i=1}^{l_n} \left(\int_{\text{int}_\varepsilon(G_i)} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right)^2 \right] dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{\partial_\varepsilon(G_i)} \mathbb{E} \left[\left(\Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{W_n}) - \Lambda_{(x,1)} f(\Delta_{G_i}) \right)^2 \right] dx \right) \\ & \leq \beta \frac{l_n}{n} \left(\varepsilon (L - 2r_\varepsilon)^d + 2\rho r_\varepsilon d L^{d-1} \right) \\ & \leq \beta \varepsilon + 2\beta \rho r_\varepsilon d L^{-1}, \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung die trivialen Abschätzungen $l_n L^d \leq n$ und $(L - 2r_\varepsilon)^d \leq L^d$ verwendet wurden. Damit folgt

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left(f(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[f(\Delta_{W_n}) \right] \right) - X_{n,L} \right) \leq \beta \varepsilon.$$

Wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon > 0$ folgt Bedingung (ii) aus Theorem 5.2 und somit die gewünschte Verteilungskonvergenz. Lemma 5.7 liefert die zusätzliche Aussage über die Positivität der asymptotischen Varianz σ^2 . \square

Schließlich weisen wir analog zu Korollar 2.12 in [6] einen multivariaten zentralen Grenzwertsatz

für schwach stabilisierende Funktionale nach.

Theorem 5.9 (Multivariater zentraler Grenzwertsatz für schwach stabilisierende Funktionale). *Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_m : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ schwach stabilisierende Funktionale, welche der Momentenbedingung (5.5) genügen. Nach Proposition 5.6 existieren dann Zufallsvariablen $Z_t^{(i)}$, $i \in [m]$, $t \in [0, 1]$, mit*

$$\Lambda_{(0,t)} g_i(\Delta_{W_n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z_t^{(i)} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

für alle Würfelolgen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dann folgt für alle $i, j \in [m]$ und jede Würfelfolge $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Cov}(g_i(\Delta_{W_n}), g_j(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} = \beta \int_0^1 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[Z_t^{(i)} | \Psi_t] \mathbb{E}[Z_t^{(j)} | \Psi_t] \right] dt =: \sigma_{i,j}^2 \quad (5.21)$$

und die Kovarianzmatrix $\Sigma := (\sigma_{i,j})_{i,j \in [m]}$ ist positiv semi-definit. Bezeichnet N_Σ einen m -dimensionalen zentrierten normalverteilten Zufallsvektor mit Kovarianzmatrix Σ , so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{|W_n|}} \left(g_1(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E}[g_1(\Delta_{W_n})], \dots, g_m(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E}[g_m(\Delta_{W_n})] \right) \xrightarrow{d} N_\Sigma \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Im Folgenden sei $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stets eine Würfelfolge mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Wir erinnern daran, dass es sich bei Linearkombinationen von schwach stabilisierenden Funktionalen selbst wieder um schwach stabilisierende Funktionale handelt (siehe den Abschnitt nach Proposition 5.5). Wenden wir Lemma 5.7 für das Funktional $g_i + g_j$ mit $i, j \in [m]$ an, so erhalten wir

$$\frac{\mathbb{V}(g_i(\Delta_{W_n}) + g_j(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} \rightarrow \beta \int_0^1 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[Z_t^{(i)} + Z_t^{(j)} | \Psi_t]^2 \right] dt \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die entsprechende Konvergenz der Varianz des Funktionals $g_i - g_j$ liefert zusammen mit der allgemein gültigen Gleichung $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{4}(\mathbb{V}(X + Y) - \mathbb{V}(X - Y))$ für Zufallsvariablen X, Y mit $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$ die Aussage (5.21). Wie im Beweis von Theorem 4.12 weisen wir die Verteilungskonvergenz mithilfe des Satzes von Cramér-Wold (Korollar 6.5 in [25]) nach, indem wir die Konvergenz

$$\frac{\sum_{i=1}^m b_i g_i(\Delta_{W_n}) - \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^m b_i g_i(\Delta_{W_n}) \right]}{\sqrt{|W_n|}} \xrightarrow{d} \langle N_\Sigma, b \rangle \quad \text{für alle } b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$$

zeigen. Dazu fixieren wir einen Koeffizientenvektor $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ und betrachten das Funktional $g = \sum_{i=1}^m b_i g_i$. Zunächst liefert (5.21)

$$\frac{\mathbb{V}(g(\Delta_{W_n}))}{|W_n|} \rightarrow \sum_{i,j=1}^m b_i b_j \sigma_{i,j}^2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wegen der Beliebigkeit von $b \in \mathbb{R}^m$ folgt insbesondere, dass die Matrix Σ positiv semi-definit ist. Schließlich wenden wir Theorem 5.8 für das Funktional g an und erhalten die gewünschte Aussage. \square

Bevor wir die Resultate dieses Abschnitts auf konkrete Funktionale anwenden, wollen wir noch kurz die Methoden und Resultate mit denen, die wir in Kapitel 4 für die Euler-Charakteristik verwendet haben, vergleichen. Der zentrale Grenzwertsatz aus Kapitel 4 für die Euler-Charakteristik (Theorem 4.11) liefert im Vergleich zu Theorem 5.8 auch noch Abschätzungen für die Konvergenzraten und ist außerdem in einem viel allgemeineren Rahmen verfügbar. Dafür lassen sich die verwendeten Methoden, wie bereits zu Beginn des Kapitels beschrieben, nicht einfach auf komplizierte Funktionale wie die Betti-Zahlen übertragen. Theorem 5.8 beschränkt sich zwar auf das markierte stationäre Modell, in dem viel mehr Struktur vorliegt, lässt sich dagegen aber, wie wir in den kommenden Abschnitten sehen werden, vergleichsweise einfach auf viele Funktionale anwenden. Ein Vorteil ist dabei, dass hier nur der Differenzenoperator erster Ordnung verwendet wird. Wir werden außerdem sehen, dass Theorem 5.8 auch einen zentralen Grenzwertsatz für die Euler-Charakteristik liefert.

5.2. BETTI-ZAHLEN IM MARKIERTEN STATIONÄREN MODELL

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Resultate aus dem vorangegangenen Abschnitt (unter einer Integrierbarkeitsbedingung) für die Betti-Zahlen $\beta_p : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}_0$, anwendbar sind, d.h. das Ziel dieses Abschnitts besteht darin nachzuweisen, dass die Betti-Zahlen schwach stabilisierende Funktionale sind, die die Momentenbedingung (5.5) erfüllen. Formal setzen wir $\beta_p(\kappa) = 0$ für alle $\kappa \in \mathbb{N}_K(S) \setminus \mathbb{N}_K^f(S)$ und erinnern außerdem an die Integrierbarkeitsbedingung (3.36). Nachfolgendes Lemma bildet die Grundlage für den Nachweis, dass die Betti-Zahlen schwach stabilisierend sind, und ist eine Version von Lemma 3.8 in [6], die komplett identisch bewiesen werden kann. Zur Vollständigkeit führen wir den Beweis komplett aus.

Lemma 5.10. *Es sei $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von endlichen abstrakten Simplicialkomplexen. Des Weiteren seien v_1, \dots, v_m , $m \in \mathbb{N}$, Ecken mit endlichem Kantengrad in $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, d.h. es gilt $b := \max_{i \in [m]} \sup_{n \in \mathbb{N}} \deg_1(v_i, K_n) < \infty$. Schließlich sei L_n der Simplicialkomplex, der aus K_n durch Entfernen der Ecken v_1, \dots, v_m und allen Simplizes, die mindestens eine dieser Ecken enthalten, hervorgeht. Dann existiert für alle $p \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_p(K_n) - \beta_p(L_n).$$

Beweis. Wir fixieren ein $p \in \mathbb{N}_0$. Nach Definition der Betti-Zahlen und dem Homomorphiesatz gilt für einen endlichen Simplicialkomplex K die Identität $\dim(C_{p+1}(K)) = \dim(Z_{p+1}(K)) + \dim(B_p(K))$. Deswegen gilt

$$\begin{aligned} \beta_p(K_n) - \beta_p(L_n) &= \dim(Z_p(K_n)) - \dim(Z_p(L_n)) + \dim(Z_{p+1}(K_n)) - \dim(Z_{p+1}(L_n)) \\ &\quad + \dim(C_{p+1}(L_n)) - \dim(C_{p+1}(K_n)). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Da die Ecken v_1, \dots, v_m alle endlichen Kantengrad in $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ besitzen, existieren nur endlich viele Simplizes in $\cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, die mindestens eine der Ecken v_1, \dots, v_m beinhalten. Deswegen ist die Differenz $\dim(C_{p+1}(L_n)) - \dim(C_{p+1}(K_n))$ konstant für genügend großes n . Die Komplexe K_n, L_n, L_{n+1} sind alle Teilkomplexe von K_{n+1} . Als Unterräume von $C_p(K_{n+1})$ erfüllen die Kettengruppen der Komplexe K_n, L_n, L_{n+1} die Identität

$$C_p(L_n) = C_p(K_n) \cap C_p(L_{n+1}),$$

wodurch sich wiederum die Identität

$$Z_p(L_n) = Z_p(K_n) \cap Z_p(L_{n+1})$$

ergibt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim(Z_p(L_n)) &= \dim(Z_p(K_n)) + \dim(Z_p(L_{n+1})) - \dim(Z_p(K_n) + Z_p(L_{n+1})) \\ &\geq \dim(Z_p(K_n)) + \dim(Z_p(L_{n+1})) - \dim(Z_p(K_{n+1})). \end{aligned}$$

Also handelt es sich bei der Folge $(\dim(Z_p(K_n)) - \dim(Z_p(L_n)))_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $p \in \mathbb{N}_0$ um eine aufsteigende Folge. Insgesamt folgt aus (5.22), dass die Folge $(\beta_p(K_n) - \beta_p(L_n))_{n \in \mathbb{N}}$ für genügend großes n aufsteigend ist. Aus Lemma (2.7) folgt außerdem

$$\begin{aligned} \beta_p(K_n) - \beta_p(L_n) &\leq \sum_{i=1}^m \deg_p(v_i, K_n) + \deg_{p+1}(v_i, K_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \deg_1(v_i, K_n)^p + \deg_1(v_i, K_n)^{p+1} \\ &\leq 2mb^{p+1} < \infty, \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(\beta_p(K_n) - \beta_p(L_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und der Grenzwert existiert. \square

Im Folgenden sei $\Delta^0 := T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, 1, U)})$. Dann gilt

$$\Lambda_{(\mathbf{0}, 1)} f(\Delta_W) = f(\Delta_W^{\mathbf{0}}) - f(\Delta_{W \setminus \{\mathbf{0}\}}^{\mathbf{0}}).$$

Mithilfe von Lemma 5.10 lässt sich ziemlich direkt zeigen, dass es sich bei den Betti-Zahlen um schwach stabilisierende Funktionale handelt.

Proposition 5.11. *Es sei $p \in \mathbb{N}_0$, sodass das $3(p+1)$ -te Moment von $\pi(V)$ (definiert in (3.37)) existiert. Dann handelt es sich bei der p -ten Betti-Zahl $\beta_p : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{N}_0$ um ein schwach stabilisierendes Funktional, welches die Momentenbedingung (5.5) erfüllt.*

Beweis. Zunächst sind die Funktionale $\beta_p, p \in \mathbb{N}_0$, offensichtlich translationsinvariant. Wir fixieren ein $p \in \mathbb{N}_0$ und verwenden Proposition 5.5, um zu zeigen, dass β_p ein schwach stabilisierendes Funktional ist. Dazu sei $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Würfelreihe mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $\omega \in \Omega$ so gewählt, dass Ψ lokal endlich ist und $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}}) < \infty$ gilt. Mit der lokalen Endlichkeit von Ψ

meinen wir dabei, dass $\Psi(B \times \mathbb{A} \times [0, 1] \times \mathbb{M}) < \infty$ für alle beschränkten Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Man beachte, dass die Menge aller $\omega \in \Omega$ mit diesen beiden Eigenschaften wegen (3.36) die Wahrscheinlichkeit 1 besitzt. Setzen wir

$$K_n := \Delta_{W_n}^{\mathbf{0}}, \quad L_n := \Delta_{W_n \setminus \{\mathbf{0}\}}^{\mathbf{0}}, \quad m = 1, \quad v_1 = \mathbf{0},$$

so folgt aus Lemma 5.10 die Existenz des Grenzwertes

$$Z^W(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_{(\mathbf{0},1)} \beta_p(\Delta_{W_n})(\omega)$$

und somit aus Proposition 5.5 die schwache Stabilisation von β_p mit assoziierter (fast überall definierter) Zufallsvariable $Z := Z^W$. Für den Nachweis der Momentenbedingung (5.5) liefert eine Anwendung von Lemma (2.7)

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ \mathbf{0} \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)} f(\Delta_W) \right|^3 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\left| \deg_p(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}}) + \deg_{p+1}(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}}) \right|^3 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left| \binom{\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})}{p} + \binom{\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})}{p+1} \right|^3 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left| \deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})^p + \deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})^{p+1} \right|^3 \right]. \end{aligned}$$

Die Zufallsvariable $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})$ besitzt eine gemischte Poissonverteilung (siehe (3.38)) mit Zufallsparameter $\pi(V)$. Nach Proposition 1 in [27] existiert das $3(p+1)$ -te Moment von $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^{\mathbf{0}})$, da dies nach Voraussetzung für den Zufallsparameter $\pi(V)$ gilt. Somit folgt die Endlichkeit der oberen Schranke und insgesamt die Behauptung. \square

Damit lässt sich der zentrale Grenzwertsatz aus Theorem 5.8 sowie der multivariate zentrale Grenzwertsatz (Theorem 5.9) für die p -te Betti-Zahl im markierten stationären Modell anwenden, falls die Voraussetzung aus Proposition 5.11 erfüllt ist. Dies ist im unmarkierten stationären Modell immer der Fall, da der Zufallsparameter $\pi(V)$ dann konstant und wegen der Integrierbarkeitsbedingung (3.36) \mathbb{P} -fast sicher endlich ist. Theorem 5.8 liefert wegen (3.41) insbesondere auch einen zentralen Grenzwertsatz für Betti-Zahlen im Booleschen Modell (vgl. (3.42)), also im Spezialfall $\mathbb{A} = \mathcal{K}^d$ mit den Verbindungsfunktionen aus (3.40). Erfüllt die Formverteilung Θ beispielsweise die Eigenschaft (3.43) für ein $r > 0$, so ist der Zufallsparameter $\pi(V)$ \mathbb{P} -fast sicher beschränkt und die Voraussetzung von Proposition 5.11 somit für alle $p \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Ganz allgemein ist die Voraussetzung von Proposition 5.11 für alle $p \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, falls die Kantenfunktion beschränkt im euklidischen Abstand ist, d.h. wenn es ein $D > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} \varphi_1((x, a), (y, b)) = 0 &\quad \text{für } \Theta^2\text{-fast alle } (a, b) \in \mathbb{A}^2 \text{ und} \\ &\quad x, y \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x - y\| > D. \end{aligned}$$

Wir weisen jedoch daraufhin, dass die Voraussetzungen von Proposition 5.11 noch deutlich allge-

meiner sind und nicht erfordern, dass der Zufallsparameter beschränkt ist.

Korollar 5.12. *Es gelte die Bedingung (3.47). Dann existiert zu $p \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante $b_p \geq 0$, sodass für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt*

$$\frac{\beta_p(\Delta_{W_n})}{|W_n|} \xrightarrow{\mathbb{P}} b_p.$$

Beweis. Zunächst folgt die Konvergenz von $\mathbb{E}[\beta_p(\Delta_{W_n})]|W_n|^{-1}$ auf identische Weise wie im Beweis von Theorem 3.6 in [6] und wir setzen b_p als den Grenzwert dieser Folge. Dabei wird insbesondere die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f_j(\Delta_{W_n})]|W_n|^{-1}$ verwendet. Diese wird jedoch durch die Bedingung (3.47) sichergestellt, wie in Abschnitt 4.4 gezeigt wurde. Da nach Lemma 5.7 und Proposition 5.11 auch der Grenzwert von $\mathbb{V}(\beta_p(\Delta_{W_n})|W_n|^{-1})$ existiert, folgt die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit direkt aus der Tschebyscheff-Ungleichung. Die Bedingung aus Proposition 5.11 ist erfüllt, da (3.47) die \mathbb{P} -fast sichere Beschränktheit von $\pi(V)$ impliziert. \square

Es sei darauf hingewiesen, dass im Beweis von Theorem 3.6 in [6], der hier für Korollar 5.12 angewendet wurde, die Eigenschaft (2.5) der Betti-Zahlen verwendet wird.

5.3. SCHWACH STABILISIERENDE FUNKTIONALE

In diesem Abschnitt betrachten wir weitere Funktionale aus der Klasse, für die der zentrale Grenzwertsatz aus Abschnitt 5.1 (Theorem 5.8) anwendbar ist. Dazu definieren wir im Folgenden Funktionale der Form $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$, indem wir diese auf $\mathbb{N}_K^f(S)$ festlegen und ohne dies explizit zu erwähnen für unendliche Simplizialkomplexe verschwinden lassen. Wie in Abschnitt 5.2 sei dazu wieder $\Delta^0 := T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, 1, U)})$. Außerdem identifizieren wir weiterhin die Ecken von Δ bzw. Δ^0 , die formal Elemente aus $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ sind, mit ihrer räumlichen Komponente in \mathbb{R}^d . Wir erinnern daran, dass der Kantengrad $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ eine gemischte Poissonverteilung mit Zufallsparameter $\pi(V)$, definiert in (3.37), besitzt und somit (nach Proposition 1 in [27]) das s -te Moment, $s \in \mathbb{N}$, von $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ existiert, wenn das s -te Moment von $\pi(V)$ existiert. Während des gesamten Abschnitts sei $\hat{\Phi}$ die Projektion von Ψ auf \mathbb{R}^d .

Zunächst betrachten wir die verallgemeinerte Euler-Charakteristik, für die in Kapitel 4 bereits quantitative zentrale Grenzwertsätze hergeleitet worden sind. Diese ist zu einem Koeffizientenvektor $(a_0, \dots, a_\alpha) \in \mathbb{R}^{\alpha+1}$ gegeben durch

$$\chi_a(\kappa) := \sum_{i=0}^{\alpha} a_i f_i(\kappa), \quad \kappa \in \mathbb{N}_K^f(S).$$

Korollar 5.13. *Es gelte $\mathbb{E}[\pi(V)^{3\alpha}] < \infty$. Dann handelt es sich bei der verallgemeinerten Euler-Charakteristik χ_a um ein schwach stabilisierendes Funktional, das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt.*

Beweis. Wir fixieren eine aufsteigende Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Für $\Lambda_{(\mathbf{0}, 1)} \chi_a(\Delta_W)$ liefert

Lemma 4.1 die Darstellung

$$\begin{aligned}\Lambda_{(\mathbf{0},1)}\chi_a(\Delta_{W_n}) &= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \deg_i(\mathbf{0}, \Delta_{W_n}) \\ &\xrightarrow{f.s.} \sum_{i=0}^{\alpha} a_i \deg_i(\mathbf{0}, \Delta^0) =: Z \quad \text{für } n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Damit ist χ_a nach Proposition 5.5 schwach stabilisierend. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{W \in \mathcal{W}, \\ \mathbf{0} \in W}} \mathbb{E} \left[\left| \Lambda_{(\mathbf{0},1)}\chi_a(\Delta_W) \right|^3 \right] &\leq \sum_{i,j,m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} [\deg_i(\mathbf{0}, \Delta^0) \deg_j(\mathbf{0}, \Delta^0) \deg_m(\mathbf{0}, \Delta^0)] \\ &\leq \sum_{i,j,m=0}^{\alpha} |a_i a_j a_m| \mathbb{E} [\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)^{i+j+m}].\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $\mathbb{E} [\pi(V)^{3\alpha}] < \infty$ existieren alle im letzten Ausdruck auftauchenden Momente und die obere Schranke ist somit endlich. \square

Im Folgenden sei $K \in \Gamma_{r+1}$ stets ein Simplicialkomplex der Ordnung $r+1$, $r \in \mathbb{N}_0$, mit $\deg(K) = 1$. Zu einem Simplicialkomplex $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ sei $V(\kappa)$ dessen Eckenmenge. Dabei sei $V(\kappa)$ eine Teilmenge des \mathbb{R}^d , d.h. wir identifizieren weiterhin die Ecken eines Komplexes $\kappa \in \mathbb{N}_K(S) = \mathbb{N}_K(S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}))$ mit ihrer räumlichen Komponente. Formal gilt also $V(\kappa) = \{v \in \mathbb{X} \mid \kappa(\{v\}) = 1\}$. Wir definieren zwei Funktionale $g_K, h_K : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}h_K(\kappa) &:= \sum_{W \subseteq V(\kappa)} \mathbb{1}\{\kappa_W \cong K, \kappa_W \text{ ist Zusammenhangskomponente von } \kappa\}, \\ g_K(\kappa) &:= \sum_{W \subseteq V(\kappa)} \mathbb{1}\{\kappa_W \cong K\}, \quad \kappa \in \mathbb{N}_K^f(S).\end{aligned}$$

Das Funktional g_K zählt alle induzierten Teilkomplexe isomorph zu K , wohingegen h_K nur Zusammenhangskomponenten isomorph zu K zählt. Es ergeben sich also direkt die Zusammenhänge $0 \leq h_K \leq g_K$ und $h_K \leq \beta_0$. Diese beiden Funktionale erfreuen sich schon in der Literatur zum Random Connection Models als zufälliger Graph großer Beliebtheit. Während das Funktional g_K z.B. in Kapitel 3.1 von [6] betrachtet wird, können verschiedene Resultate zum Zählen von Zusammenhangskomponenten einer bestimmten Form oder Größe in [28], [34] gefunden werden, wobei dort andere Zählweisen verwendet werden. Da isomorphe Komplexe dieselbe Ordnung besitzen, würde es bei den Definitionen der Funktionale h_K, g_K ausreichen über $(r+1)$ -elementige Teilmengen zu summieren. Zu $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^d$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{A}$ sei

$$\Delta((x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) = T \left(\sum_{i=1}^r \delta_{(x_i, a_i, T_i, U_i)} \right)$$

mit unabhängig und identisch verteilten Marken $T_1, \dots, T_r \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $U_1, \dots, U_r \sim \mathbb{Q}$.

Proposition 5.14. *Es sei $K \in \Gamma_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}_0$, ein Simplicialkomplex mit $\deg(K) = 1$.*

- (i) Ist die Integrabilitätsbedingung (3.47) erfüllt, so handelt es sich bei g_K um ein schwach stabilisierendes Funktional, das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt.
- (ii) Gilt $\mathbb{E} [\pi(V)^3] < \infty$, so handelt es sich bei h_K um ein schwach stabilisierendes Funktional, das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt.

Beweis. Für den Beweis sei stets eine aufsteigende Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$ fixiert. Da sich die Komplexe $\Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}^0, \Delta^0$ nur um Simplexes, die den Ursprung enthalten, unterscheiden, sind alle induzierten Teilkomplexe von $\Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}^0$ auch induzierte Teilkomplexe von Δ^0 und der Operator $\Lambda_{(0,1)} g_K(\Delta_{W_n})$ ist deshalb nichtnegativ. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda_{(0,1)} g_K(\Delta_{W_n}) &= \frac{1}{r!} \sum_{(x_1, \dots, x_r) \in \hat{\Phi}_{W_n}^{(r)}} \mathbb{1} \{ \Delta_{W_n}^0[\{\mathbf{0}, x_1, \dots, x_r\}] \cong K \} \\ &\xrightarrow{f.s.} \frac{1}{r!} \sum_{(x_1, \dots, x_r) \in \hat{\Phi}^{(r)}} \mathbb{1} \{ \Delta^0[\{\mathbf{0}, x_1, \dots, x_r\}] \cong K \} =: Z_1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die so definierte Zufallsvariable Z_1 ist \mathbb{P} -fast sicher endlich, denn die multivariate Mecke-Formel (für den Poissonprozess Ψ) liefert (mit $x_{r+1} := \mathbf{0}, a_{r+1} = a_0$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Z_1] &= \frac{\beta^r}{r!} \int_{(\mathbb{R}^d)^r} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} \mathbb{P}(\Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \cong K) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_1, \dots, x_r) \\ &\leq \frac{\beta^r}{r!} \sum_{\pi \in S_{r+1}} \int_{(\mathbb{R}^d)^r} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} f_K((x_{\pi(1)}, a_{\pi(1)}), \dots, (x_{\pi(r+1)}, a_{\pi(r+1)})) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_1, \dots, x_r) \\ &\leq \beta^r (r+1) \int_{(\mathbb{R}^d)^r} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} f_K((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_1, \dots, x_r) < \infty. \end{aligned}$$

Die Endlichkeit des letzten Ausdrucks folgt mit (3.47) aus Korollar 3.19. Um das dritte Moment von $\Lambda_{(0,1)} g_K(\Delta_W)$ für einen Würfel $W \in \mathcal{W}$ zu berechnen, schreiben wir $\Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_I, a_I)) := \Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_{i_1}, a_{i_1}), \dots, (x_{i_s}, a_{i_s}))$ für $I = \{i_1, \dots, i_s\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Lambda_{(0,1)} g_K(\Delta_W)|^3] &= \sum_{s=r}^{3r} \sum_{\substack{I \subseteq [s], J \subseteq [s], M \subseteq [s], \\ |I|=r, |J|=r, |M|=r}} \sum_{\substack{I \subseteq [s], J \subseteq [s], M \subseteq [s], \\ |I|=r, |J|=r, |M|=r}} \mathbb{1} \{ I \cup J \cup M = [s] \} \\ &\quad \times \frac{\beta^s}{s!} \int_{W^s} \int_{\mathbb{A}^{s+1}} p_{I,J,M}((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_s, a_s)) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_1, \dots, x_r), \end{aligned}$$

wobei der Integrand $p_{I,J,M}((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_s, a_s))$ definiert ist als

$$\mathbb{P}(\Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_I, a_I)) \cong K, \Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_J, a_J)) \cong K, \Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_M, a_M)) \cong K).$$

Integrieren wir über $(\mathbb{R}^d)^s$ statt W^s , so erhalten wir eine obere Schranke, die nicht von W abhängt. Da die Wahrscheinlichkeit im Integranden nach oben gegen die Wahrscheinlichkeit abgeschätzt werden kann, dass $\Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_s, a_s))$ zusammenhängend ist, kann wie beim Erwartungswert $\mathbb{E} [Z_1]$ (summiere zunächst über alle Komplexe $L \in \Gamma_s$ vom Grad 1) die Endlichkeit des

Integrals eingesehen werden. Damit ist insgesamt die Aussage (i) gezeigt.

Um für den zweiten Teil der Proposition den Differenzenoperator des Funktionals h_K zu beschreiben, bezeichne $Z(v, L)$ für einen Simplizialkomplex L die Zusammenhangskomponente von L , die die Ecke $v \in L$ beinhaltet. Außerdem schreiben wir abkürzend $\Delta_{W_n}[\{x_1, \dots, x_{r+1}\}] \in A_K$, falls $\Delta_{W_n}[\{x_1, \dots, x_{r+1}\}]$ eine zu K isomorphe Zusammenhangskomponente von Δ_{W_n} ist und einer der Punkte x_1, \dots, x_{r+1} in Δ^0 mit dem Ursprung durch eine Kante verbunden ist (und analog für Δ statt Δ_{W_n}). Dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda_{(\mathbf{0},1)} h_K(\Delta_{W_n}) &= \mathbb{1}\{Z(\mathbf{0}, \Delta_{W_n}^0) \cong K\} - \frac{1}{(r+1)!} \sum_{(x_1, \dots, x_{r+1}) \in \hat{\Phi}_{W_n}^{(r+1)}} \mathbb{1}\{\Delta_{W_n}[\{x_1, \dots, x_{r+1}\}] \in A_K\} \\ &\xrightarrow{f.s.} \mathbb{1}\{Z(\mathbf{0}, \Delta^0) \cong K\} - \frac{1}{(r+1)!} \sum_{(x_1, \dots, x_{r+1}) \in \hat{\Phi}^{(r+1)}} \mathbb{1}\{\Delta_W[\{x_1, \dots, x_{r+1}\}] \in A_K\} \end{aligned}$$

für $n \rightarrow \infty$. Um die \mathbb{P} -fast sichere Endlichkeit dieser Grenzvariable nachzuvollziehen stellen wir fest, dass die Anzahl an Zusammenhangskomponenten von $\Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}}^0$, die in Δ^0 mit dem Ursprung verbunden sind, nach oben durch $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ beschränkt ist. Damit folgt zusammen mit der Voraussetzung auch

$$\mathbb{E} [|\Lambda_{(\mathbf{0},1)} h_K(\Delta_W)|^3] \leq \mathbb{E} [(1 + \deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0))^3] < \infty.$$

□

In Proposition 5.14 ist auch der Fall $r = 0$ zugelassen, also dass K lediglich aus einer Ecke besteht. Dann zählt h_K beispielsweise die isolierten Ecken eines Komplexes, also Ecken, die an keinen Kanten beteiligt sind. Wir fixieren weiterhin einen Simplizialkomplex $K \in \Gamma_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}_0$, mit $\deg(K) = 1$. Nach der multivariaten Mecke-Formel ist der Erwartungswert $\mathbb{E} [g_K(\Delta_W)]$ für ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$ gegeben durch

$$\frac{\beta^{r+1}}{(r+1)!} \int_{W^{r+1}} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} \mathbb{P}(\Delta((x_0, a_0), \dots, (x_r, a_r)) \cong K) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_0, \dots, x_r).$$

Unter der Bedingung (3.47) liefert Lemma 3.18 für jede Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [g_K(\Delta_{W_n})]}{|W_n|} &= \frac{\beta^{r+1}}{(r+1)!} \rho_K, \\ \rho_K &:= \int_{(\mathbb{R}^d)^r} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} \mathbb{P}(\Delta((\mathbf{0}, a_0), (x_1, a_1), \dots, (x_r, a_r)) \cong K) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_1, \dots, x_r), \end{aligned} \tag{5.23}$$

wobei die Endlichkeit von ρ_K bereits im Beweis von Proposition 5.14 verargumentiert wurde. Dabei wurde Lemma 3.18 wie im Beweis von Korollar 3.19 angewendet. Für das Funktional h_K folgt mit

der Mecke-Formel und Lemma 2.1.4 in [34] dahingegen

$$\mathbb{E} [h_K(\Delta_W)] = \frac{\beta^{r+1}}{(r+1)!} \int_{W^{r+1}} \int_{\mathbb{A}^{r+1}} q((x_0, a_0), \dots, (x_r, a_r)) \Theta^{r+1} d(a_0, \dots, a_r) d(x_0, \dots, x_r), \quad (5.24)$$

$W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{R}^d)$, wobei der Funktionswert $q((x_0, a_0), \dots, (x_r, a_r))$ definiert ist durch

$$\mathbb{P}(\Delta((x_0, a_0), \dots, (x_r, a_r)) \cong K) \exp\left(-\beta \int_W \int_{\mathbb{A}} 1 - \prod_{i=0}^r (1 - \varphi_1((x_i, a_i), (y, b))) \Theta(db) dy\right).$$

Eine Formel dieser Art ist auch in [34] zu finden (siehe Proposition 3.2.1). Schließlich definieren wir zu $m \in [\alpha]$ und $l \in \mathbb{N}_0$ noch das Funktional $d_m^l : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d_m^l(\kappa) := \sum_{v \in V(\kappa)} \mathbb{1}\{\deg_m(v, \kappa) = l\}, \quad \kappa \in \mathbb{N}_K^f(S),$$

und $d_m^l(\kappa) = 0$ sonst. Das Funktional d_m^l gibt die Anzahl der Ecken eines Komplexes an, die den m -Simplexgrad l besitzen. Auch dieses Funktional taucht bereits für zufällige Graphen (und somit $m = 1$) in der Literatur auf und wird beispielsweise in Abschnitt 8.4 von [45] für das Preferential Attachment Model untersucht. Abschnitt 4.4 in [34] beschäftigt sich mit einer Variante dieses Funktionals im Random Connection Model als zufälliger Graph.

Korollar 5.15. *Es seien $m \in [\alpha]$, $l \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\mathbb{E}[\pi(V)^3] < \infty$. Dann handelt es sich bei d_m^l um ein schwach stabilisierendes Funktional, das die Momentenbedingung (5.5) erfüllt.*

Beweis. Wir fixieren wieder eine aufsteigende Würfelreihe $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $W_n \rightarrow \mathbb{R}^d$. Der Operator $\Lambda_{(0,1)} d_m^l(\Delta_{W_n})$ lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}\{\deg_m(\mathbf{0}, \Delta_W^0) = l\} + \sum_{x \in \hat{\Phi}_W} \mathbb{1}\{\deg_m(x, \Delta_W^0) = l\} - \mathbb{1}\{\deg_m(x, \Delta_{W \setminus \{0\}}^0) = l\} \\ & \xrightarrow{f.s.} \mathbb{1}\{\deg_m(\mathbf{0}, \Delta^0) = l\} + \sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{\deg_m(x, \Delta^0) = l\} - \mathbb{1}\{\deg_m(x, \Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}^0) = l\}. \end{aligned}$$

Die Grenzvariable ist \mathbb{P} -fast sicher endlich, da sich die Summe im Betrag nach oben gegen $\deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$ abschätzen lässt. Mit dieser Überlegung gilt auch $|\Lambda_{(0,1)} d_m^l(\Delta_W)| \leq 1 + \deg_1(\mathbf{0}, \Delta^0)$, woraus zusammen mit der Voraussetzung die gewünschte Aussage folgt. \square

Schließlich weisen wir noch darauf hin, dass in diesem Abschnitt zwar nur isomorphieinvariante Beispielfunktionale betrachtet wurden, Theorem 5.8 aber noch allgemeinere Funktionale zulässt.

5.4. POSITIVITÄT DER ASYMPTOTISCHEN VARIANZ

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung eines Kriteriums für die Positivität der Varianz σ aus Theorem 5.8 für die Betti-Zahlen. Dazu sei die asymptotische Varianz von β_p aus Theorem 5.8

mit σ_p^2 bezeichnet. Der Fall $p > \alpha$ spielt für diese Überlegungen keine Rolle, da dann \mathbb{P} -fast sicher $\beta_p(\Delta_W) = 0$ für jedes Beobachtungsfenster W gilt. Hierfür verallgemeinern wir Lemma 3.10 aus [6] durch nachfolgendes Korollar.

Korollar 5.16. *Es sei $p \leq \alpha$ und es gelte eine der folgenden beiden Aussagen.*

- (i) *Es gilt $\varphi_j \in (0, 1)$ ($\lambda_d \times \mathbb{A}$) $^{j+1}$ -fast überall für alle $j \in [\min\{\alpha, p + 1\}]$.*
- (ii) *Es existiert ein Simplicialkomplex $K \in \Gamma_{r+1}$, $r \in \mathbb{N}_0$, des Grades 1 mit $\rho_K > 0$ für das ρ_K aus (5.23), $\beta_p(K) > 0$ und $|\beta_p(K) - \beta_p(L)| > 0$ für alle induzierten Teilkomplexe L der Ordnung r von K .*

Dann folgt $\sigma_p^2 > 0$ für die asymptotische Varianz σ_p^2 aus Theorem 5.8 für das Funktional β_p .

Beweis. Wir zeigen die Behauptung nur für den Fall, dass (ii) gilt. Die erste Aussage impliziert nämlich (ii) für $p \geq 1$, da dann für die zweite Aussage stets der Simplicialkomplex

$$K = \left\langle \partial[1, \dots, p + 2] \right\rangle. \quad (5.25)$$

gewählt werden kann. Bei diesem handelt es sich um ein Minimalbeispiel für einen Komplex mit positiver p -ter Betti-Zahl. Für $p = 0$ kann stets (auch wenn (i) nicht gilt) der eindeutige Komplex $K \in \Gamma_1$ gewählt werden, der lediglich aus einer Ecke besteht.

Nun sei K also wie in Bedingung (ii). Für den Nachweis der Positivität von σ_p^2 bezeichne $A \subseteq \Omega$ das Ereignis, dass die Zusammenhangskomponente des Ursprungs in Δ^0 isomorph zu K ist und $\Psi \in B$ gilt (siehe Definition (3.6)). Dieses Ereignis besitzt wegen $\rho_K > 0$ eine positive Wahrscheinlichkeit. Jetzt sei $\omega \in A$ und $W \in \mathcal{W}$ ein hinreichend großer Würfel, sodass alle Ecken der Zusammenhangskomponente des Ursprungs in Δ^0 in W enthalten sind. Da diese Zusammenhangskomponente isomorph zu K ist, ist sie insbesondere endlich und wir können stets einen solchen Würfel finden. Durch Einschränkung der Zusammenhangskomponente des Ursprungs auf alle Ecken abgesehen vom Ursprung erhalten wir einen Komplex, der isomorph zu einem induzierten Teilkomplex L von K der Ordnung r ist. Wegen der zuletzt geforderten Eigenschaft von K und der schwachen Additivität der Betti-Zahlen (2.5) folgt

$$|\Lambda_{(0,1)}\beta_p(\Delta_W)| = |\beta_p(K) - \beta_p(L)| \geq 1.$$

Deswegen ist die zu β_p assoziierte Zufallsvariable Z auf A positiv und es folgt insbesondere $\mathbb{P}(Z \neq 0) > 0$, was gemäß Theorem 5.8 die Positivität der asymptotischen Varianz σ_p^2 erzwingt. \square

In [6] werden die Betti-Zahlen des Flaggenkomplexes des (unmarkierten stationären) Random Connection Model als zufälliger Graph betrachtet. In der hier vorliegenden Situation entspricht dies für die p -te Betti-Zahl dem Spezialfall $\varphi_j \equiv 1$ für alle $j \in \{2, \dots, p + 1\}$. Dort wird $\rho_K > 0$ für die spezielle Wahl von $K = O_p$ als hinreichende Bedingung für die Positivität von σ_p^2 angegeben (Lemma 3.10), wobei wir für die genaue Definition von O_p auf [6] bzw. Definition 3.3 in [23] verweisen. Bei Korollar 5.16 handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Lemma 3.10 in [6]

(zumindest der Aussage über die Positivität der asymptotischen Varianz). Grundsätzlich ist der Komplex K aus (5.25) eine naheliegende Wahl, um Bedingung (ii) aus Korollar 5.16 anzuwenden, da er ein Minimalbeispiel (bzgl. der Ordnung) für einen Simplizialkomplex mit positiver p -ter Betti-Zahl bildet. Für $\varphi_{p+1} \equiv 1$ muss jedoch ein anderer Komplex gewählt werden, da dann stets $\rho_K = 0$ gilt. In diesem Fall kann wie in [6] auf den Komplex O_p zurückgegriffen werden, allerdings kann auch noch ein Komplex mit kleinerer Ordnung als O_p (O_p ist von Ordnung $2(p+1)$) gewählt werden, wie nachfolgendes Lemma zeigt. Man beachte, dass für $\varphi_{p+1} \equiv 1$ ein Komplex benötigt wird, der keinen Rand eines $(p+1)$ -Simplex enthält. Damit ist gemeint, dass es keinen $(p+1)$ -Simplex σ mit $\sigma \notin K$, aber $\rho \in K$ für alle $\rho \subset \sigma$, gibt. Für die Definition eines geeigneten Komplexes notieren wir mit $[i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_s]$ das Simplex mit Eckenmenge $\{i_1, \dots, i_s\} \setminus \{i_j\}$, $s \in \mathbb{N}$, $j \in [s]$, $i_1, \dots, i_s \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.17. *Es sei $p \in \mathbb{N}$. Der Komplex*

$$K_p := \left\langle [1, \dots, \hat{j}, \dots, p+1, p+2], [1, \dots, \hat{j}, \dots, p+1, p+3] \mid j \in [p+1] \right\rangle \in \Gamma_{p+3}$$

enthält keinen Rand eines $(p+1)$ -Simplex und es gilt $\deg(K_p) = 1$, $\beta_p(K_p) > 0$ sowie $|\beta_p(K_p) - \beta_p(L)| > 0$ für alle induzierten Teilkomplexe L von K_p der Ordnung $p+2$.

Beweis. Es lässt sich leicht überprüfen, dass K_p keinen Rand eines $(p+1)$ -Simplex enthält und $\deg(K_p) = 1$ gilt. Für $l \in [p+3]$ bezeichne K_p^l der von der Menge $[p+3] \setminus \{l\}$ induzierte Teilkomplex von K_p . Der Komplex K_p ist isomorph zu dem Simplizialkomplex aus (5.2). Bei der Betrachtung des Komplexes aus (5.2) wurden bereits die Aussagen

$$\beta_p(K_p) \geq 1, \quad \beta_p(K_p^{p+2}) = 0 = \beta_p(K_p^{p+3})$$

gezeigt, wobei darauf zu achten ist, dass die Ecken $p+2, p+3$ die Rollen der Ecken y_1, y_2 des Simplizialkomplexes in (5.2) übernehmen (d.h. es existiert ein Isomorphismus zwischen den beiden Komplexen, der $\{p+2, p+3\}$ auf $\{y_1, y_2\}$ abbildet). Die gewünschte Aussage ergibt sich also, wenn $\beta_p(K_p^l) = 0$ für alle $l \in [p+1]$ nachgewiesen werden kann. Für $l \in [p+1]$ zeigt die Darstellung

$$K_p^l := \left\langle [1, \dots, \hat{l}, \dots, p+1, p+2], [1, \dots, \hat{l}, \dots, p+1, p+3] \right\rangle,$$

die direkt aus der Definition von K_p hervorgeht, dass K_p^l genau aus denjenigen Simplizes auf der Eckenmenge $[p+3] \setminus \{l\}$ besteht, die höchstens einen der beiden Punkte $p+2, p+3$ enthalten. Also handelt es sich bei K_p^l um den Flaggenkomplex des Graphen auf der Eckenmenge $[p+3] \setminus \{l\}$, der alle möglichen Kanten außer $[p+2, p+3]$ enthält. Lemma 5.3 in [22] zeigt, dass ein Flaggenkomplex K mit $\beta_p(K) > 0$ mindestens die Ordnung $2(p+1)$ besitzen muss. Da K_p^l ein Flaggenkomplex der Ordnung $p+2 < 2(p+1)$ ist, folgt $\beta_p(K_p^l) = 0$. \square

Der Komplex K_p aus Lemma 5.17 besitzt die Ordnung $p+3$ und damit für $p \geq 2$ eine echt kleinere Ordnung als O_p (dessen Ordnung ist $2(p+1)$). Im Fall $p = 1$ sind die beiden Komplexe isomorph.

HÖHERDIMENSIONALE PERKOLATION

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Fragestellungen aus der Perkolationstheorie, die sich, motiviert durch physikalische Fragestellungen, zu einem wichtigen Teilgebiet der Stochastik entwickelt hat. Grob umschrieben beschäftigt sich die Perkolationstheorie mit der Struktur von Zusammenhangskomponenten in zufälligen Graphen oder Mengen, wobei oftmals vor allem das Auftreten von unbeschränkten Zusammenhangskomponenten untersucht wird. Angefangen mit diskreten Zufallsgraphen, wie zufälligen Teilgraphen von Gittern (z.B. das \mathbb{Z}^2 -Gitter), bietet die Literatur heute eine enorme Vielfalt an Perkolationsmodellen. Eine Einführung in die diskrete Perkolationstheorie kann in [3] oder [14] gefunden werden, während klassische stetige Perkolationsmodelle, wie das Random Connection Model, in [33] behandelt werden. Neben zufälligen Graphen und zufälligen Mengen, wie dem Booleschen Modell, haben in den letzten Jahren auch zufällige Simplizialkomplexe (siehe z.B. [19],[21]) Einzug in die Literatur zur Perkolation gefunden.

Während man bei einem zufälligen Graphen von Perkolation spricht, falls er eine unendlich große Zusammenhangskomponente enthält, muss dieser Begriff für Simplizialkomplexe neu gedacht werden. Die Existenz einer unendlich großen Zusammenhangskomponente in einem Simplizialkomplex ist nämlich äquivalent zur Existenz einer unendlich großen Zusammenhangskomponente in seinem 1-Skelett, bei dem es sich wiederum um einen Graphen handelt. Würde man Perkolation eines Simplizialkomplexes also auf identische Art und Weise definieren, würde man tatsächlich einfach Perkolation eines Graphen betrachten. Deshalb verwenden wir in dieser Arbeit ein allgemeineres Konzept für die Perkolation von Simplizialkomplexen, das man auch als Perkolation von q -Simplizes bezeichnen könnte und das im Fall $q = 0$ mit dem klassischen Perkolationsbegriff übereinstimmt. Dabei konzentrieren wir uns auf die beiden Konzepte aus [21] (siehe Abschnitt 1.1 dort für eine Einführung und Einordnung dieser Begriffe), bei denen aus einem Simplizialkomplex ein Graph konstruiert wird bzgl. dem dann wieder die klassischen Perkolationsfragen gestellt werden können.

Wir beginnen damit, diese Konzepte zu einzuführen.

Definition 6.1. *Es sei K ein Simplicialkomplex und $q \in \mathbb{N}_0$.*

- (i) *Der q -Graph $G_q(K)$ von K besitzt als Eckenmenge die Menge $F_q(K)$ aller q -Simplizes von K . Dabei sind zwei q -Simplizes $\sigma, \rho \in F_q(K)$ in $G_q(K)$ durch eine Kante verbunden, falls es ein $(q+1)$ -Simplex $\pi \in F_{q+1}(K)$ mit $\sigma, \rho \subset \pi$ gibt.*
- (ii) *Der Komplex K heißt q -zusammenhängend, falls der Graph $G_q(K)$ zusammenhängend ist.*
- (iii) *Für $q \in \mathbb{N}$ sei $\tilde{G}_q(K)$ der Graph auf der Eckenmenge $F_q(K)$, bei dem zwei q -Simplizes $\sigma, \rho \in F_q(K)$ miteinander durch eine Kante verbunden sind, falls sie sich ein $(q-1)$ -dimensionales Teilsimplex teilen, d.h. falls es ein $\tilde{\pi} \in F_{q-1}(K)$ gibt mit $\tilde{\pi} \subset \sigma$ und $\tilde{\pi} \subset \rho$.*

Sowohl in $G_q(K)$ als auch in $\tilde{G}_q(K)$ kann es nur eine Kante zwischen zwei verschiedenen q -Simplizes σ, ρ geben, wenn $|\sigma \cap \rho| = q$ gilt. In $\tilde{G}_q(K)$ ist diese Bedingung schon hinreichend, da $\sigma \cap \rho$ dann ein $q-1$ -Simplex von K ist, der sowohl in σ als auch in ρ enthalten ist. Dahingegen muss für ein $(q+1)$ -Simplex π von K mit $\sigma, \rho \subset \pi$ offensichtlich $\sigma \cup \rho \subseteq \pi$ gelten. Da die beiden Simplizes σ, ρ verschieden sind, folgt direkt $|\sigma \cup \rho| \geq q+1$. Also kann es einen solchen Simplex nur im Fall $|\sigma \cup \rho| = q+1$ geben und dann folgt direkt $\pi = \sigma \cup \rho$. Also ist jede Kante $[\sigma, \rho]$ in den beiden Graphen $G_q(K), \tilde{G}_q(K)$ eindeutig zu einem Simplex von K assoziiert, nämlich in $G_q(K)$ zu $\sigma \cup \rho$ und in $\tilde{G}_q(K)$ zu $\sigma \cap \rho$. Nachfolgende Eigenschaften folgen direkt aus der Definition des q -Graphen.

Bemerkung 6.2. *Für einen Simplicialkomplex K der Dimension α und $q \in \mathbb{N}_0$ gelten*

- (i) $G_0(K) \cong S_1(K)$, (ii) $\dim(G_\alpha(K)) = 0$,
- (iii) $G_q(K) = G_q(S_{q+1}(K))$.

Ein Simplicialkomplex ist also genau dann 0-zusammenhängend, wenn er zusammenhängend im klassischen Sinne ist. Der andere Extremfall $q = \dim(K)$ ist wegen der Abwesenheit von Kanten in $G_q(K)$ komplett uninteressant. In Lemma 6.3 werden wir sehen, dass Perkolation von $G_q(K)$ äquivalent zur Perkolation von $\tilde{G}_{q+1}(K)$ ist, weswegen es genügt sich auf einen der beiden Graphen zu fokussieren. In dieser Arbeit haben wir uns für den q -Graphen $G_q(K)$ entschieden, da wir so im Fall $q = 0$ wieder den klassischen Perkulationsbegriff erhalten. Abbildung 6.1 zeigt einen zweidimensionalen Simplicialkomplex und seinen 1-Graphen. Dort ist zu sehen, wie jedes $(q+1)$ -Simplex in K einen vollständigen induzierten Teilgraphen auf $q+2$ Ecken in $G_q(K)$ verursacht. Außerdem sieht man, dass der q -Graph eines zusammenhängenden Komplexes nicht zwangsläufig wieder zusammenhängend sein muss. Auch die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wobei sich dennoch ein Zusammenhang herstellen lässt. Nachfolgendes Lemma liefert ein paar grundlegende Eigenschaften des q -Graphen eines Simplicialkomplexes.

Lemma 6.3. *Es sei K ein Simplicialkomplex und $q < \dim(K)$.*

- (i) *Ist K lokal endlich, d.h. jede Ecke ist nur Teil von endlich vielen Kanten (und somit nur von endlich vielen Simplizes), so gilt*

$$\begin{aligned} & G_q(K) \text{ besitzt eine unendliche Zusammenhangskomponente} \\ \Leftrightarrow & \tilde{G}_{q+1}(K) \text{ besitzt eine unendliche Zusammenhangskomponente.} \end{aligned}$$

- (ii) *Es seien $[\sigma, \rho] \in G_q(K)$ eine Kante in $G_q(K)$ und $\sigma', \rho' \in F_r(K)$ für $r < q$ zwei Simplizes mit $\sigma' \subset \sigma, \rho' \subset \rho$ und $\sigma' \neq \rho'$. Dann sind die Simplizes σ', ρ' in $G_r(K)$ durch einen Kantenweg miteinander verbunden.*

- (iii) *Ist K q -zusammenhängend, so ist der Teilkomplex*

$$L := \langle \pi \in K \mid \dim(\pi) = q + 1 \rangle$$

r -zusammenhängend für alle $r \leq q$.

- (iv) *Existiert eine unendliche Zusammenhangskomponente in $G_q(K)$, so existiert auch eine unendliche Zusammenhangskomponente in $G_r(K)$ für alle $r < q$. Jedes Teilsimplex eines Simplex $\sigma \in G_q(K)$ mit unendlicher Zusammenhangskomponente besitzt selbst eine unendliche Zusammenhangskomponente.*

- (v) *Für ein $\sigma \in F_q(K)$ gilt mit $S(\sigma) := \{\pi \in F_{q+1}(K) \mid \sigma \subset \pi\}$*

$$\deg_1(\sigma, G_q(K)) = (q + 1) |S(\sigma)|.$$

Beweis. (i) Wegen der Voraussetzung sind auch die Graphen $G_q(K), \tilde{G}_{q+1}(K)$ lokal endlich. Das Lemma von König (siehe Lemma 8.1.2 in [11] für eine Version davon) liefert für die beiden Graphen, dass die Existenz einer unendlichen Zusammenhangskomponenten äquivalent zur Existenz eines unendlich langen selbstvermeidenden Kantenwegs ist.

„ \Rightarrow “ Ist $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ ein unendlicher selbstvermeidender Kantenweg in $G_q(K)$, so ist π_1, π_2, \dots mit $\pi_i := \sigma_i \cup \sigma_{i+1}$ ein unendlicher Kantenweg in $\tilde{G}_{q+1}(K)$, denn es gilt $\pi_i \cap \pi_{i+1} = \sigma_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

„ \Leftarrow “ Ist π_1, π_2, \dots ein unendlicher selbstvermeidender Kantenweg in $\tilde{G}_{q+1}(K)$, so ist $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ mit $\sigma_i := \pi_i \cap \pi_{i+1}$ ein unendlicher Kantenweg in $G_q(K)$. Schließlich gilt $\pi_i, \pi_{i+1} \subset \sigma_{i+1} \in F_{q+1}(K)$.

- (ii) Die beiden Simplizes σ', ρ' lassen sich darstellen durch

$$\sigma' = [v_0, \dots, v_r], \quad \rho' = [v_0, \dots, v_{m-1}, w_m, \dots, w_r]$$

mit $m = |\sigma' \cap \rho'| \in \{0, 1, \dots, r\}$ und paarweise verschiedenen Ecken $v_0, \dots, v_r, w_m, \dots, w_r$

von K . Dann bildet $\sigma', \tau_1, \dots, \tau_{r-m}, \rho'$ mit $\tau_i := [v_0, \dots, v_{r-i}, w_{r-i+1}, \dots, w_r]$ einen Kantenweg in $G_r(K)$, da alle diese Simplizes in $\sigma \cup \rho \in F_{q+1}(K)$ enthalten sind.

- (iii) Zunächst zeigen wir, dass $G_q(L)$ zusammenhängend ist, indem wir $F_q(K) = F_q(L)$ nachweisen. Da der Graph $G_q(L)$ nur von $F_q(L)$ und $F_{q+1}(L) = F_{q+1}(K)$ abhängt, folgt dann nämlich $G_q(L) = G_q(K)$. Die Inklusion $F_q(L) \subseteq F_q(K)$ ist dabei trivialerweise wegen $L \subseteq K$ erfüllt. Andererseits kann der Graph $G_q(K)$ nicht nur aus einer isolierten Ecke bestehen, da K mindestens einen $(q+1)$ -Simplex enthält, weswegen jede Ecke in $G_q(K)$ auch Teil von mindestens einer Kante in $G_q(K)$ ist. Also finden wir zu jedem $\sigma \in F_q(K)$ ein $\pi \in F_{q+1}(K)$ mit $\sigma \subset \pi$, woraus wiederum $\sigma \in F_q(L)$ folgt. Insgesamt erhalten wir also $F_q(K) = F_q(L)$. Nun seien $0 \leq r < q$ und $\sigma, \rho \in F_r(L)$ mit $\sigma \neq \rho$. Per Definition von L existieren $\pi_\sigma, \pi_\rho \in F_q(L)$ mit $\sigma \subset \pi_\sigma, \rho \subset \pi_\rho$. Da L nach dem ersten Teil des Beweises q -zusammenhängend ist, sind π_σ, π_ρ entweder identisch oder in $G_q(L)$ durch einen Kantenweg miteinander verbunden. Für $\pi_\sigma = \pi_\rho$ erhalten wir direkt einen Kantenweg in $G_r(L)$ zwischen σ, ρ bestehend nur aus Teilsimplizes von π_σ . Andernfalls folgt die Existenz eines Kantenwegs zwischen σ, ρ in $G_r(L)$ durch mehrmaliges Anwenden von Aussage (ii) (für jede Kante des Kantenwegs zwischen π_σ, π_ρ).
- (iv) Es seien $r < q$ und $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ eine Abzählung einer unendlichen Komponente in $G_q(K)$. Wir definieren den Teilkomplex

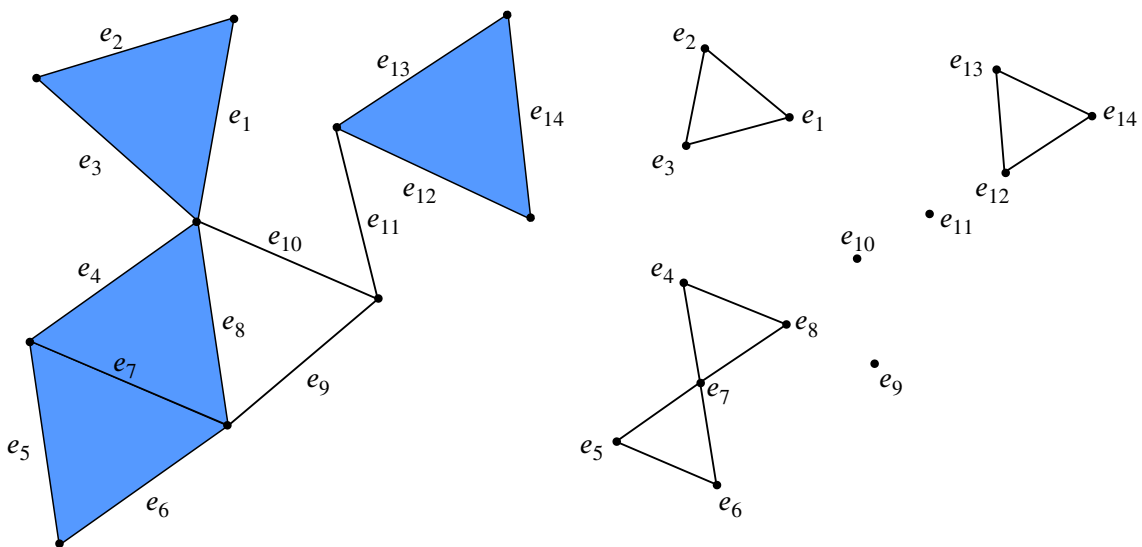
$$M := \left\langle \pi \in F_{q+1}(K) \mid \sigma_j \subset \pi \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \right\rangle,$$

von K , der die Eigenschaft $F_q(M) = \{\sigma_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ besitzt und q -zusammenhängend ist. Aus Teil (iii) folgt, dass M auch r -zusammenhängend ist. Dazu beachte man, dass der Komplex L aus (iii) definiert für M statt K mit M übereinstimmt, da beide von den $(q+1)$ -Simplizes von M erzeugt werden. Der Komplex M enthält unendlich viele q -Simplizes und deshalb auch unendlich viele r -Simplizes für jedes $r \leq q$. Da $G_r(M)$ zusammenhängend ist, ist die einzige Zusammenhangskomponente in $G_r(M)$ unendlich groß. Schließlich liefert $M \subseteq K$ direkt $G_r(M) \subseteq G_r(K)$ und somit eine unendlich große Zusammenhangskomponente in $G_r(K)$. Der zweite Teil der Behauptung folgt wiederum aus Teil (ii).

- (v) Jedes Simplex $\pi \in \mathcal{S}(\sigma)$ erzeugt in $G_q(K)$ eine Kante zwischen σ und jedem anderen q -dimensionalen Teilsimplex von π (davon gibt es $q+1$). Umgekehrt wird jede Kante in $G_q(K)$, die σ enthält, von einem Simplex $\pi \in \mathcal{S}(\sigma)$ erzeugt. Da für zwei Simplizes $\pi, \tau \in \mathcal{S}(\sigma)$, $\pi \neq \tau$, stets $\pi \cap \tau = \sigma$ gilt, erhalten wir tatsächlich $(q+1)|\mathcal{S}(\sigma)|$ verschiedene Nachbarn von σ in $G_q(K)$.

□

Nach Teil (v) von Lemma 6.3 sind alle Kantengrade in $G_q(K)$ also Vielfache von $q+1$. Für das restliche Kapitel betrachten wir, begründet durch Lemma 6.3 (i), nur noch den q -Graphen eines Simplicialkomplexes.

Abbildung 6.1.: Ein zweidimensionaler Simplicialkomplex K und sein 1-Graph $G_1(K)$

6.1. RESULTATE AUS DER PERKOLATIONSTHEORIE

In diesem Abschnitt übertragen wir klassische Resultate aus der Perkolationstheorie, namentlich die FKG-Ungleichung, die BK-Ungleichung sowie die Margulis-Russo-Formel, auf das hier vorliegende Modell. Dabei orientieren wir uns an der Vorgehensweise aus [17] (vgl. Abschnitt 2.3 dort) für das Random Connection Model als zufälliger Graph. Als Grundraum wählen wir zunächst wieder einen beliebigen Borelraum \mathbb{X} . Die klassische diskrete FKG-Ungleichung lässt sich in einer sehr allgemeinen Version wie folgt formulieren.

Es sei S eine höchstens abzählbare Menge und für jedes Element $\sigma \in S$ sei ein Parameter $p_\sigma \in [0, 1]$ gegeben. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}})$ mit

$$\tilde{\Omega} := \{0, 1\}^S = \{(\omega_\sigma)_{\sigma \in S} \mid \omega_\sigma \in \{0, 1\} \forall \sigma \in S\}, \quad \tilde{\mathbb{P}} := \bigotimes_{\sigma \in S} (1 - p_\sigma)\delta_0 + p_\sigma\delta_1$$

und der von den in endlich vielen Komponenten beobachtbaren Mengen erzeugten σ -Algebra \mathcal{F} . Dabei heißt eine Menge $B \subseteq \tilde{\Omega}$ in endlich vielen Komponenten beobachtbar, wenn es eine endliche Menge $I \subseteq S$ gibt, sodass $\omega \mapsto \mathbb{1}\{\omega \in B\}$ nur von $(\omega_\sigma)_{\sigma \in I}$ abhängt. Ist $X = (X_\sigma)_{\sigma \in S}$ also ein zufälliges Element in $\tilde{\Omega}$ mit Verteilung $\tilde{\mathbb{P}}$, so handelt es sich bei X um eine Familie unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen mit $X_\sigma \sim \text{Ber}(p_\sigma)$. Eine Funktion $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ wird wachsend (bzw. fallend) genannt, falls für alle $\omega, \omega' \in \tilde{\Omega}$ die Implikation

$$\omega \leq \omega' \implies f(\omega) \leq f(\omega') \quad (\text{bzw. } f(\omega) \geq f(\omega'))$$

gilt. Dabei ist die Ordnung $\omega \leq \omega'$ so zu verstehen, dass $\omega_\sigma \leq \omega'_\sigma$ für alle $\sigma \in S$ gilt. Wir bezeichnen den Erwartungswert bzgl. $\tilde{\mathbb{P}}$ mit $\tilde{\mathbb{E}}$.

Theorem 6.4 (Klassische FKG-Ungleichung). *In der soeben eingeführten Situation gilt für wachsende Funktionen $f, g : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\mathbb{E}}[f^2], \tilde{\mathbb{E}}[g^2] < \infty$*

$$\tilde{\mathbb{E}}[fg] \geq \tilde{\mathbb{E}}[f] \tilde{\mathbb{E}}[g].$$

Im Fall $p_\sigma = p$, $\sigma \in S$, für ein $p \in [0, 1]$ ist Theorem 6.4 in [14] (Theorem 2.4) zu finden. Diese Einschränkung spielt für den dort ausgeführten Beweis allerdings keine Rolle, weswegen sich der allgemeine Fall auf identische Weise zeigen lässt. Wir wenden das Resultat auf unendliche Simplicialkomplexe an. Dazu sei V eine beliebige höchstens abzählbare Menge, die wir als Eckenmenge eines unendlichen Simplicialkomplexes interpretieren. Dann ist auch die Menge

$$S := \{\sigma \subset V \mid 2 \leq |\sigma| \leq \alpha + 1\}$$

aller möglichen höchstens α -dimensionalen Simplexes des Komplexes höchstens abzählbar. Wir interpretieren $\omega \in \tilde{\Omega}$ als einen zufälligen Simplicialkomplex $\Lambda(\omega)$ mit Eckenmenge V durch

$$\sigma \in \Lambda(\omega) \quad :\iff \quad \omega(\rho) = 1 \quad \text{für alle } \rho \subseteq \sigma \text{ mit } |\rho| \geq 2$$

für alle $\sigma \in S$. Dadurch wird auch ein ganz allgemeines diskretes Modell eines zufälligen Simplicialkomplex definiert. Ist V endlich, also o.B.d.A. $V = [n]$, und wählen wir für jedes $k \in [\alpha]$ ein $q_k \in [0, 1]$, so erhalten wir mit der Wahl $p_\sigma = q_{|\sigma|-1}$ für $\sigma \in S$ den zufälligen Simplicialkomplex aus [9] (siehe Abschnitt 2.1) mit Parameterfolge $(1, q_1, \dots, q_\alpha)$. Dort wurde auch noch das Hinzufügen der Ecken randomisiert, weswegen noch der Parameter q_0 auftaucht, der hier den Wert 1 annimmt. Der Spezialfall $\alpha = 1$ liefert dann den Erdős-Rényi-Graphen mit den Parametern n und q_1 . In gewissem Sinne kann für unendliche Eckenmengen V das hier definierte Modell als Grenzmodell des Modells aus [9] interpretiert werden. Im nächsten Schritt übertragen wir das Konzept wachsender Funktionen auf die hier vorliegende Situation.

Definition 6.5 (wachsende Funktionen). (i) *Für zwei Elemente $\kappa, \eta \in \mathbb{N}_K(S)$ schreiben wir $\kappa \subseteq \eta$, falls der zu κ assoziierte Simplicialkomplex einen Teilkomplex des zu η assoziierten Simplicialkomplex bildet.*

(ii) *Eine messbare Funktion $f : \mathbb{N}_K(S) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt wachsend (bzw. fallend), falls für alle $\kappa, \eta \in \mathbb{N}_K(S)$ nachfolgende Implikation gilt*

$$\kappa \subseteq \eta \quad \implies \quad f(\kappa) \leq f(\eta) \quad (\text{bzw. } f(\kappa) \geq f(\eta)). \quad (6.1)$$

Aus $\kappa \subseteq \eta$ muss nicht zwangsläufig $\kappa \leq \eta$ (als Zählmaße) folgen, die umgekehrte Implikation gilt jedoch. Außerdem impliziert Definition 6.5 (ii), dass zwei Komplexe κ, η , die den selben Simplicialkomplex repräsentieren, die selben Bilder unter wachsenden (oder fallenden) Funktionen besitzen. Man beachte, dass das Bild der Abbildung $T : \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{N}_K(S)$ aus Abschnitt 3.2 eine Menge ist, auf der die beiden Relationen \subseteq, \leq übereinstimmen. Definition 6.5 (i) entspricht lediglich der Notation von Teilkomplexen angewendet auf Elemente von $\mathbb{N}_K(S)$. Entscheidend an

vorangegangener Definition ist, dass sich für wachsende Funktionen in diesem Sinne sowohl die klassische FKG-Ungleichung als auch die FKG-Ungleichung für Poissonprozesse (welche sogar auf beliebigen messbaren Räumen gilt) anwenden lässt.

Theorem 6.6 (FKG-Ungleichung). *Es seien $f, g : \mathbb{N}_{\mathcal{K}}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ wachsende Funktionen mit $\mathbb{E}[f(\Delta)^2], \mathbb{E}[g(\Delta)^2] < \infty$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[f(\Delta)g(\Delta)] \geq \mathbb{E}[f(\Delta)]\mathbb{E}[g(\Delta)].$$

Beweis. Gegeben den unmarkierten Poissonprozess Φ auf \mathbb{X} (mit der Darstellung (3.2)) wenden wir die klassische FKG-Ungleichung für $V = \{X'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $p_\sigma = \varphi_{|\sigma|-1}(X'_\sigma)$ an (hier bezeichnet $\varphi_{|\sigma|-1}(X'_\sigma)$ den Funktionswert von $\varphi_{|\sigma|-1}$ unter den Argumenten von σ) und erhalten

$$\mathbb{E}[f(\Delta)g(\Delta) \mid \Phi] \geq \mathbb{E}[f(\Delta) \mid \Phi] \mathbb{E}[g(\Delta) \mid \Phi]. \quad (6.2)$$

Da die Funktionen $\mathbb{E}[f(\Delta) \mid \Phi], \mathbb{E}[g(\Delta) \mid \Phi]$ wachsend (als Funktion in Φ) im Sinne der in [31] verwendeten Definition (direkt vor Theorem 20.4) sind, liefert die dort formulierte FKG-Ungleichung (Theorem 20.4) für Poissonprozesse

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\Delta) \mid \Phi] \mathbb{E}[g(\Delta) \mid \Phi]] \geq \mathbb{E}[f(\Delta)] \mathbb{E}[g(\Delta)]. \quad (6.3)$$

Die beiden Abschätzungen (6.2),(6.3) liefern kombiniert die Behauptung. \square

Alle Varianten der FKG-Ungleichung gelten auch für fallende Funktionen, denn für eine fallende Funktion f (egal in welchem der erwähnten Sinne) ist die Funktion $-f$ stets wachsend. Einfache Beispiele für wachsende Funktionen im Sinne von Definition 6.5 sind beispielsweise die Anzahlen von Simplexes einer bestimmten Dimension innerhalb eines endlichen Beobachtungsfensters. Die nichtnegative Korrelation zweier solcher Funktionen wurde bereits in Abschnitt 3.3, genauer in Proposition 3.10 (ii), nachgewiesen.

Im nächsten Schritt formulieren wir eine Margulis-Russo-Formel für das Modell, wofür wir die Margulis-Russo-Formel für Poissonprozesse aus [31] (Theorem 19.4) anwenden wollen. Eine Margulis-Russo-Formel im markierten stationären Modell für das Random Connection Model als zufälliger Graph kann beispielsweise in [10] (Abschnitt 3.2.2) gefunden werden, wohingegen in [8] (direkt vor Kapitel 4) eine Margulis-Russo-Formel in einem noch wesentlich allgemeineren Rahmen bereit gestellt wird, dessen Beweis als Vorlage für nachfolgendes Theorem dient. Im Folgenden nehmen wir die Intensität β in die Notation des Erwartungswertes auf, indem wir \mathbb{E}_β für den Erwartungswert bzgl. des Poissonprozesses Ψ mit Intensitätsmaß $\beta\lambda \otimes \mathbb{Q}$ schreiben. Außerdem sagen wir eine Funktion $f : \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ lebt auf einer Menge $W \in \mathcal{X}$, falls für alle $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M})$ die Gleichung

$$f(\eta) = f(\eta_W)$$

gilt, wobei wir nochmals an die abkürzende Notation $\eta_W := \eta \cap (W \times \mathbb{M})$ erinnern.

Theorem 6.7 (Margulis-Russo-Formel). *Es sei $f : \mathbb{N}(\mathbb{X} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die auf einer Menge $W \in \mathcal{X}$ mit $\lambda(W) < \infty$ lebt. Außerdem sei $\beta_0 > 0$, sodass $\mathbb{E}_{\beta_0} [|f(\Psi)|] < \infty$ gilt. Dann gilt für alle $\beta < \beta_0$*

$$\frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_{\beta} [f(\Psi)] = \int_W \mathbb{E}_{\beta} [f(\Psi + \delta_{(x,U)}) - f(\Psi)] \lambda(dx),$$

wobei $U \sim \mathbb{Q}$ eine von Ψ unabhängige Marke bezeichnet.

Beweis. Zu $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X})$ sei $\tilde{\eta}$ eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung von η , d.h. jeder Punkt von η wird unabhängig von allen anderen mit einer Marke mit Markenverteilung \mathbb{Q} versehen. Wir definieren die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{N}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\eta) := \mathbb{E} [f(\tilde{\eta})].$$

Dann gilt $\tilde{f}(\Phi) = \mathbb{E} [f(\Psi) | \Phi]$, wobei Φ wie zuvor der unmarkierte Poissonprozess in \mathbb{X} mit Intensitätsmaß $\beta\lambda$ ist. Als nächstes zeigen wir eine leicht abgeschwächte Version der Aussage von Übungsaufgabe 3.8 in [31], da diese dort nicht bewiesen wird, aber im nächsten Schritt benötigt wird. Dazu seien ξ_1, ξ_2 Poissonprozesse auf einem Borelraum \mathbb{Y} mit σ -endlichen Intensitätsmaßen λ_1, λ_2 , sodass $\lambda_1 = \lambda_2 + \nu$ für ein endliches Maß ν auf \mathbb{Y} gilt. Außerdem sei $g : \mathbb{N}(\mathbb{Y}) \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Abbildung mit $\mathbb{E} [g(\xi_1)] < \infty$. Dann folgt $\mathbb{E} [g(\xi_2)] < \infty$, wie wir mithilfe von Theorem 3.3 in [31] zeigen werden. Hierfür sei η ein von ξ_2 unabhängiger Poissonprozess auf \mathbb{Y} mit Intensitätsmaß ν . Theorem 3.3 in [31] liefert dann $\xi_2 + \eta \stackrel{d}{=} \xi_1$ und es folgt

$$\begin{aligned} \infty > \mathbb{E} [g(\xi_1)] &= \mathbb{E} [g(\xi_2 + \eta)] \geq \mathbb{E} [g(\xi_2) \mathbb{1}\{\eta(\mathbb{Y}) = 0\}] \\ &= \mathbb{E} [g(\xi_2)] \mathbb{P}(\eta(\mathbb{Y}) = 0) = \mathbb{E} [g(\xi_2)] e^{-\nu(\mathbb{Y})}. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Voraussetzungen des Theorems folgt mit dieser Aussage $\mathbb{E}_{\beta} [|f(\Psi)|] < \infty$ für alle $\beta \in [0, \beta_0)$, woraus wiederum

$$\mathbb{E}_{\beta} [|\tilde{f}(\Phi)|] \leq \mathbb{E}_{\beta} [|f(\Psi)|] < \infty \quad \text{für alle } \beta \in [0, \beta_0)$$

folgt. Wenden wir die Margulis-Russo-Formel aus [31] (Theorem 19.4) für die Funktion \tilde{f} (und den Poissonprozess Φ) an, so erhalten wir

$$\frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_{\beta} [f(\Psi)] = \frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_{\beta} [\tilde{f}(\Phi)] = \int_W \mathbb{E}_{\beta} [\tilde{f}(\Phi + \delta_x) - \tilde{f}(\Phi)] \lambda(dx).$$

Nach Theorem 19.3 in [31] gilt

$$\int_W \mathbb{E}_{\beta} [|\tilde{f}(\Phi + \delta_x) - \tilde{f}(\Phi)|] \lambda(dx) < \infty,$$

weswegen wir aufgrund von

$$\int_W \mathbb{E}_\beta [|\tilde{f}(\Phi)|] \lambda(dx) dx = \lambda(W) \mathbb{E}_\beta [|\tilde{f}(\Phi)|] \leq \lambda(W) \mathbb{E}_\beta [|\tilde{f}(\Psi)|] < \infty$$

insbesondere auch $\int_W \mathbb{E}_\beta [|\tilde{f}(\Phi + \delta_x)|] \lambda(dx) < \infty$ erhalten. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_\beta [f(\Psi)] &= \int_W \mathbb{E}_\beta [\tilde{f}(\Phi + \delta_x)] - \mathbb{E}_\beta [\tilde{f}(\Phi)] \lambda(dx) \\ &= \int_W \mathbb{E}_\beta [f(\Psi + \delta_{(x,U)})] - \mathbb{E}_\beta [f(\Psi)] \lambda(dx). \end{aligned}$$

□

Theorem 19.4 in [31] liefert tatsächlich sogar Darstellungen für höhere Ableitungen von Poissonfunktionalen. Für die Euler-Charakteristik von Δ_W , wobei $W \in \mathcal{X}$ eine Menge mit $\lambda(\mathbb{X}) < \infty$ ist, lässt sich die noch allgemeinere Darstellung für höhere Ableitungen direkt nachrechnen. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass W eine Menge der verwendeten Zerlegung \mathcal{Q} für die Konstruktion von Δ ist. Nach (3.8) gilt dann $\Delta_W = T(\Psi_W)$ \mathbb{P} -fast sicher.

Beispiel 6.8 (Margulis-Russo-Formel für die Euler-Charakteristik). *Es sei $W \in \mathcal{B}_f(\mathbb{X})$ und $\chi(\Delta_W)$ die Euler-Charakteristik von Δ_W . Dann liefert Proposition 3.10*

$$\mathbb{E}_\beta [\chi(\Delta_W)] = \sum_{i=1}^{\alpha+1} (-1)^{i-1} \frac{\beta^i}{i!} z_{i,i}^i, \quad (6.4)$$

wobei die hier auftauchenden Integralformen allesamt Integralformen über W sind. Andererseits lässt sich für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\int_{W^n} \mathbb{E}_\beta \left[D_{(x_1, U_1), \dots, (x_n, U_n)}^n \chi(\Delta_W) \right] d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=n}^{\alpha+1} (-1)^{i-1} \frac{\beta^{i-n}}{(i-n)!} z_{i,i}^i$$

nachrechnen, wobei die rechte Seite genau die n -te Ableitung von (6.4) ist. Theorem 6.7 ergibt sich wiederum im Spezialfall $n = 1$.

Im nächsten Schritt wollen wir eine BK-Ungleichung für die hier vorliegende Situation nachweisen (vgl. Theorem 2.1 in [17]), wofür zunächst einige Definitionen notwendig sind, die analog zu den Definitionen in [17] gewählt sind. Wir nennen ein Ereignis $E \in \mathcal{N}_K(S)$ wachsend, falls für alle $\kappa, \eta \in \mathbb{N}_K(S)$ mit $\kappa \subseteq \eta$ aus $\kappa \in E$ stets $\eta \in E$ folgt. Dies ist äquivalent dazu, dass die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_E$ wachsend im Sinne von Definition 6.5 ist. Zu $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ und einer Menge $W \in \mathcal{X}$ definieren wir das Ereignis

$$[\kappa]_W := \{ \eta \in \mathbb{N}_K(S) \mid \eta_W = \kappa_W \} \in \mathcal{N}_K(S). \quad (6.5)$$

Außerdem sagen wir ein Ereignis $E \in \mathcal{N}_K(S)$ lebt auf einer Menge $W \in \mathcal{X}$, falls für alle

$\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ die Gleichung

$$\mathbb{1}_E(\kappa) = \mathbb{1}_E(\kappa_W)$$

gilt. Im Folgenden sei \mathcal{R} stets ein abzählbares Mengensystem von Mengen aus \mathcal{X} und für zwei Ereignisse $E, F \in \mathcal{N}_K(S)$ sei das Ereignis $E \circ F$ definiert durch

$$E \circ F := \{ \kappa \in \mathbb{N}_K(S) \mid \exists K, L \in \mathcal{R} \text{ mit } K \cap L = \emptyset, [\kappa]_K \subseteq E, [\kappa]_L \subseteq F \}. \quad (6.6)$$

Die Abzählbarkeit von \mathcal{R} ist hier und im Folgenden lediglich dafür notwendig, die Messbarkeit des Ereignisses $E \circ F$ sicherzustellen. Der Beweis einer BK-Ungleichung für Simplicialkomplexe wird auf der BK-Ungleichung für Poissonprozesse aus [15] basieren. Die dortige BK-Ungleichung ist für Poissonprozesse auf $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ formuliert. Schon in [17] wird verwendet, dass sich der Beweis aus [15] für allgemeinere Markenräume verwenden lässt. Tatsächlich lässt sich der Beweis sogar auf Poissonprozesse auf beliebigen Borelräumen übertragen. Im Folgenden werden wir den Beweis zur besseren Nachvollziehbarkeit komplett durchführen. Dazu definieren wir analog zu [15] den Operator

$$\tilde{E} \square \tilde{F} := \{ \eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X}) \mid \exists K, L \in \mathcal{R} \text{ mit } K \cap L = \emptyset, [\eta]_K \subseteq \tilde{E}, [\eta]_L \subseteq \tilde{F} \}$$

für zwei Ereignisse $\tilde{E}, \tilde{F} \in \mathcal{N}(\mathbb{X})$, wobei $[\eta]_K$ hier analog zur Definition (6.5) das Ereignis $\{ \mu \in \mathbb{N}(\mathbb{X}) \mid \mu_W = \eta_W \}$ bezeichnet. Außerdem sagen wir hier, dass ein Ereignis \tilde{E} auf einer Menge $W \in \mathcal{X}$ lebt, falls $\mathbb{1}_{\tilde{E}}(\eta) = \mathbb{1}_{\tilde{E}}(\eta_W)$ für alle $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{X})$ gilt. Nachfolgendes Theorem bildet die angesprochene Verallgemeinerung der BK-Ungleichung aus [15] auf Poissonprozesse auf beliebigen Borelräumen. Zur Formulierung verwenden wir den Poissonprozess Φ auf \mathbb{X} mit Intensitätsmaß λ .

Theorem 6.9 (BK-Ungleichung für Poissonprozesse). *Es seien $\tilde{E}, \tilde{F} \in \mathcal{N}(\mathbb{X})$ zwei Ereignisse, die auf einer Menge $W \in \mathcal{X}$ mit $\lambda(W) < \infty$ leben. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E} \square \tilde{F}) \leq \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E}) \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{F}).$$

Beweis. Zunächst nehmen wir o.B.d.A. $W = \mathbb{X}$ und (somit $\lambda(\mathbb{X}) < \infty$) an. Dann handelt es sich bei Φ um einen Poissonprozess mit endlichem Intensitätsmaß. (Alternativ könnten wir uns für den Beweis auch auf den Poissonprozess Φ_W beschränken, da mit \tilde{E}, \tilde{F} auch das Ereignis $\tilde{E} \square \tilde{F}$ auf W lebt.) Wir betrachten eine unabhängige Kopie Φ_1 von Φ und setzen $\Phi_2 := \Phi + \Phi_1$. Nach Theorem 3.3 in [31] ist Φ_2 ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß 2λ . Für den Beweis sei \mathbb{N}_f die Menge aller endlichen und einfachen Zählmaße auf \mathbb{X} . Wegen der Diffusität von λ gilt $\mathbb{P}(\Phi_2 \in \mathbb{N}_f) = 1$ (vgl. Proposition 6.9 in [31]). Wir fassen Φ, Φ_1, Φ_2 als Zufallselemente in \mathbb{N}_f auf. Wir definieren einen stochastischen Kern Ξ von \mathbb{N}_f nach $\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f$ durch

$$\Xi(\eta, B) := \frac{1}{2^{\eta(\mathbb{X})}} |\{ (\eta_1, \eta_2) \in B \mid \eta_1 \leq \eta, \eta_2 = \eta - \eta_1 \}|.$$

Bei Ξ handelt es sich um eine reguläre Version der bedingten Verteilung von (Φ, Φ_1) gegeben Φ_2 ,

d.h. es gilt

$$\mathbb{P}((\Phi, \Phi_1) \in B \mid \Phi_2) = \int_{\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f} \mathbb{1}\{(\eta_1, \eta_2) \in B\} \Xi(\Phi_2, d(\eta_1, \eta_2)). \quad (6.7)$$

Um dies einzusehen, fassen wir Φ, Φ_1 als Verdünnungen von Φ_2 auf. Formal könnte dies geschehen, indem wir jeden Punkt von Φ_2 unabhängig mit einer Marke in $\{0, 1\}$ versehen, wobei jeder Punkt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ eine 0 angehängt bekommt, und wir Φ bzw. Φ_1 als die Punktprozesse auf \mathbb{X} festlegen, die aus den Punkten von Φ_2 mit Marke 0 bzw. 1 bestehen. Nach Theorem 5.8 in [31] sind Φ, Φ_1 dann nämlich unabhängige Poissonprozesse mit Intensitätsmaß λ . Unter der Bedingung $\Phi_2(\mathbb{X}) = n, n \in \mathbb{N}_0$ besitzt $\Phi(\mathbb{X})$ eine Binomialverteilung mit Parametern n und $\frac{1}{2}$ (vgl. Proposition 1.2 in [31]). Für $\eta \in \mathbb{N}_f$ gilt aus Symmetriegründen deshalb

$$\mathbb{P}(\Phi = \eta \mid \Phi_2) = \mathbb{1}\{\eta \leq \Phi_2\} \left(\frac{1}{2}\right)^{\Phi_2(\mathbb{X})}.$$

Also ist die Verteilung von Φ gegeben Φ_2 eine Gleichverteilung auf der Menge

$$\{\eta \in \mathbb{N}_f \mid \eta \leq \Phi_2\}.$$

Deswegen gilt (6.7). Im Folgenden sei $\eta = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathbb{N}_f$ fixiert. Zu $\mu \leq \eta$ sei $\pi(\mu) \in \{0, 1\}^n$ definiert durch

$$\pi(\mu) := (\mu(\{x_1\}), \dots, \mu(\{x_n\})).$$

Dadurch erhalten wir eine Identifizierung von $C := \{\mu \in \mathbb{N}_f \mid \mu \leq \eta\}$ mit $\{0, 1\}^n$ durch die Abbildung $\pi : C \rightarrow \{0, 1\}^n$. Für $A, B \subseteq \{0, 1\}^n$ definieren wir

$$A \circ B := \{z \in \{0, 1\}^n \mid \exists \text{ disjunkte Mengen } N, M \subseteq [n] \text{ mit } [z]_N \subseteq A, [z]_M \subseteq B\}$$

mit der zu den vorangegangenen Notationen konsistenten Definition

$$[z]_N := \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \{0, 1\}^n \mid w_i = z_i \text{ für alle } i \in N\}, \quad z \in \{0, 1\}^n, N \subseteq [n].$$

Wir behaupten, dass

$$|(\tilde{E} \square \tilde{F}) \cap C| \leq |\pi(\tilde{E} \cap C) \circ \pi(\tilde{F} \cap C)| \quad (6.8)$$

gilt. Zum Beweis dieser Behauptung zeigen wir, dass für $\mu \in (\tilde{E} \square \tilde{F}) \cap C$ stets $\pi(\mu) \in \pi(\tilde{E} \cap C) \circ \pi(\tilde{F} \cap C)$ gilt. Zunächst existieren zu $\mu \in (\tilde{E} \square \tilde{F}) \cap C$ zwei disjunkte Mengen $K, L \in \mathcal{R}$ mit $[\mu]_K \subseteq \tilde{E}, [\mu]_L \subseteq \tilde{F}$. Dann sind auch die Mengen

$$N := \{i \in [n] \mid x_i \in K\}, \quad M := \{i \in [n] \mid x_i \in L\},$$

disjunkt. Die Behauptung ist bewiesen, wenn $[\pi(\mu)]_N \subseteq \pi(\tilde{E} \cap C)$ und $[\pi(\mu)]_M \subseteq \pi(\tilde{F} \cap C)$ gezeigt

werden kann. Wir wählen ein $z \in [\pi(\mu)]_N$ und setzen $\mu_0 := \pi^{-1}(z)$. Dann gilt $\mu_0 \in [\mu]_K \subseteq \tilde{E}$ und wegen $\mu_0 \in C$ somit $z \in \pi(\tilde{E} \cap C)$. Da $z \in [\pi(\mu)]_N$ beliebig gewählt war, erhalten wir $[\pi(\mu)]_N \subseteq \pi(\tilde{E} \cap C)$. Analog folgt $[\pi(\mu)]_M \subseteq \pi(\tilde{F} \cap C)$ und insgesamt die Behauptung (6.8).

Für den restlichen Beweis benötigen wir den Satz von Reimer (Theorem 2.1 in [15]), wofür wir zunächst die notwendige Notation einführen. Zu $z = (z_1, \dots, z_n) \in \{0, 1\}^n$ sei $z^c := (1 - z_1, \dots, 1 - z_n) \in \{0, 1\}^n$ und zu einer Menge $B \subseteq \{0, 1\}^n$ setzen wir $B^c := \{z \in \{0, 1\}^n \mid z^c \in B\}$. Dann besagt der Satz von Reimer

$$|A \circ B| \leq |A \cap B^c|, \quad A, B \subseteq \{0, 1\}^n. \quad (6.9)$$

Unter Anwendung dieser Aussage erhalten wir

$$\begin{aligned} \Xi(\eta, \tilde{E} \times \tilde{F}) &= 2^{-n} \left| \{(\eta_1, \eta_2) \in \tilde{E} \times \tilde{F} \mid \eta_1 + \eta_2 = \eta\} \right| \\ &= 2^{-n} \left| \{\eta_1 \in \tilde{E} \mid \eta_1 \leq \eta, \eta - \eta_1 \in \tilde{F}\} \right| \\ &= \frac{|\pi(\tilde{E} \cap C) \cap \pi(\tilde{F} \cap C)^c|}{2^n} \\ &\geq \frac{|\pi(\tilde{E} \cap C) \circ \pi(\tilde{F} \cap C)|}{2^n} \\ &\geq \frac{|(\tilde{E} \square \tilde{F}) \cap C|}{2^n} \\ &= 2^{-n} \left| \{\eta_1 \in \mathbb{N}_f \mid \eta_1 \in \tilde{E} \square \tilde{F}, \eta_1 \leq \eta\} \right| \\ &= 2^{-n} \left| \{(\eta_1, \eta_2) \in \tilde{E} \square \tilde{F} \times \mathbb{N}_f \mid \eta_1 + \eta_2 = \eta\} \right| \\ &= \Xi(\eta, \tilde{E} \square \tilde{F} \times \mathbb{N}_f). \end{aligned}$$

Für die erste Ungleichung wurde der Satz von Reimer (6.9) und für die zweite Ungleichung (6.8) angewendet. Die dritte Gleichung erfolgt durch Identifizierung von C mit $\{0, 1\}^n$ über die Abbildung π . Schließlich liefert (6.7)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E}) \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{F}) &= \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E}, \Phi_1 \in \tilde{F}) \\ &= \int_{\mathbb{N}_f} \Xi(\eta, \tilde{E} \times \tilde{F}) \mathbb{P}^{\Phi_2}(d\eta) \\ &\geq \int_{\mathbb{N}_f} \Xi(\eta, \tilde{E} \square \tilde{F} \times \mathbb{N}_f) \mathbb{P}^{\Phi_2}(d\eta) \\ &= \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E} \square \tilde{F}, \Phi_1 \in \mathbb{N}_f) = \mathbb{P}(\Phi \in \tilde{E} \square \tilde{F}). \end{aligned}$$

□

Um eine BK-Ungleichung für Simplicialkomplexe nachzuweisen, wechseln wir wieder zum markierten stationären Modell aus Abschnitt 3.5 (also $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$), da hierfür Eigenschaften des euklidischen Raums \mathbb{R}^d notwendig sein werden. Wir wollen nochmals explizit darauf hinweisen, dass für die Gültigkeit von Theorem 6.9 außer der Abzählbarkeit keine Eigenschaften des Mengensystems \mathcal{R} gefordert werden müssen. Selbst im Extremfall, dass \mathcal{R} gar nicht zwei disjunkte

Mengen enthält, wird die Aussage zwar komplett trivial (dann gilt immer $\tilde{E} \square \tilde{F} = \emptyset$), aber nicht falsch. Außerdem ist zu beachten, dass Theorem 6.9 nicht nur für wachsende Ereignisse gilt. Wir bezeichnen mit \mathcal{Z} den Ring aller endlichen Vereinigungen von halboffenen Würfeln mit rationalen Koordinaten und wählen

$$\mathcal{R} := \{Z \times \mathbb{A} \mid Z \in \mathcal{Z}\}.$$

In [17] wird für \mathcal{R} ebenfalls dieses Mengensystem gewählt. Damit sind wir in der Lage eine BK-Ungleichung für Simplizialkomplexe zu zeigen. Der Beweis folgt in seiner Grundstruktur dem Beweis von Theorem 2.1 aus [17].

Theorem 6.10 (BK-Ungleichung für Simplizialkomplexe). *Es seien $E, F \in \mathcal{N}_K(S)$ zwei wachsende Ereignisse, die auf einer Menge $W \times \mathbb{A}$ leben, wobei $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine beschränkte Menge ist. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(\Delta \in E \circ F) \leq \mathbb{P}(\Delta \in E) \mathbb{P}(\Delta \in F).$$

Beweis. Für die Konstruktion des Simplizialkomplexes Δ verwenden wir eine Zerlegung $Q^\varepsilon = (Q_i^\varepsilon \times \mathbb{A})_{i \in \mathbb{N}_0}$, wobei $(Q_i^\varepsilon)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Zerlegung des \mathbb{R}^d in Würfel der Kantenlänge $\varepsilon > 0$ sei. Um die Abhängigkeit von ε zu verdeutlichen, schreiben wir $\Delta^\varepsilon = \Delta$ bzw. $T_\varepsilon = T$. Des Weiteren seien

$$I_W^\varepsilon := \{i \in \mathbb{N}_0 \mid W \cap Q_i^\varepsilon \neq \emptyset\}, \quad A_\varepsilon := \bigcup_{i \in I_W^\varepsilon} \{\Phi(Q_i^\varepsilon \times \mathbb{A}) \geq 2\}$$

und $q^\varepsilon(x)$ zu $x \in \mathbb{R}^d$ der eindeutige Würfel Q_i^ε aus der Zerlegung Q^ε mit $x \in Q_i^\varepsilon$. Wir definieren eine Abbildung $S_\varepsilon : \mathbb{N}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{N}(S)$ auf die selbe Art und Weise wie T_ε mit dem Unterschied, dass $S_\varepsilon(\eta)$ nur diejenigen Simplizes σ aus $T_\varepsilon(\eta)$ enthält, für all deren Punkte $x \in \sigma$ die Bedingung $\Phi(q^\varepsilon(x)) = 1$ erfüllt ist. Insbesondere gilt also stets $S_\varepsilon(\eta) \subseteq T_\varepsilon(\eta)$. Abkürzend schreiben wir $\Lambda^\varepsilon := S_\varepsilon(\Psi)$. Dann gelten

$$\mathbb{P}(\{\Delta_W^\varepsilon \in \cdot\} \cap A_\varepsilon^c) = \mathbb{P}(\{\Lambda_W^\varepsilon \in \cdot\} \cap A_\varepsilon^c), \quad (6.10)$$

$$\mathbb{P}(A_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^d), \quad (6.11)$$

$$\mathbb{P}(\Delta^\varepsilon \in E \circ F) \leq \mathbb{P}(\{\Lambda^\varepsilon \in E \circ F\} \cap A_\varepsilon^c) + \mathcal{O}(\varepsilon^d), \quad (6.12)$$

wobei die erste Aussage (6.10) per Konstruktion von Λ^ε gilt, die zweite Aussage (6.11) wegen (2.13) in [17] gilt und die dritte Aussage (6.12) aus den ersten beiden folgt. Im nächsten Schritt weisen wir die \mathbb{P} -fast sichere Inklusion

$$\{\Lambda^\varepsilon \in E \circ F\} \cap A_\varepsilon^c \subseteq \{\Psi \in S_\varepsilon^{-1}(E) \square S_\varepsilon^{-1}(F)\} \cap A_\varepsilon^c \quad (6.13)$$

nach. Dazu gelte die linke Seite, d.h. wir fixieren ein $\omega \in \Omega$ aus der Menge auf der linken Seite.

Dann finden wir zwei disjunkte Mengen $K, L \in \mathcal{R}$ mit $[\Lambda^\varepsilon]_K \subseteq E, [\Lambda^\varepsilon]_L \subseteq F$. Wir setzen

$$\tilde{K} := \bigcup_{\substack{i \in I_W^\varepsilon, \\ \Phi((Q_i^\varepsilon \times \mathbb{A}) \cap K) = 1}} Q_i^\varepsilon \times \mathbb{A}$$

und analog \tilde{L} und stellen fest, dass auf A_ε^c die Mengen \tilde{K}, \tilde{L} disjunkt sind. Außerdem gelten $\Lambda_{\tilde{K}}^\varepsilon = \Lambda_K^\varepsilon$ und $\Lambda_{\tilde{L}}^\varepsilon = \Lambda_L^\varepsilon$. Da es sich bei \tilde{K}, \tilde{L} um Vereinigungen von Mengen aus der verwendeten Zerlegung Q^ε handelt, gelten $S_\varepsilon(\eta_{\tilde{K}}) = S_\varepsilon(\eta)_K$ und $S_\varepsilon(\eta_{\tilde{L}}) = S_\varepsilon(\eta)_L$ für \mathbb{P}^Ψ -fast alle $\eta \in \mathbb{N}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{M})$. Wählen wir $\eta \in [\Psi]_{\tilde{K}}$, so erhalten wir $S_\varepsilon(\eta)_{\tilde{K}} = S_\varepsilon(\Psi)_{\tilde{K}} = \Lambda_{\tilde{K}}^\varepsilon = \Lambda_K^\varepsilon \in E$. Weil E wachsend ist, folgt damit auch $S_\varepsilon(\eta) \in E$ bzw. $\eta \in S_\varepsilon^{-1}(E)$. Da $\eta \in [\Psi]_{\tilde{K}}$ beliebig gewählt war, folgt $[\Psi]_{\tilde{K}} \subseteq S_\varepsilon^{-1}(E)$. Analog erhalten wir $[\Psi]_{\tilde{L}} \subseteq S_\varepsilon^{-1}(F)$, womit (6.13) bewiesen ist.

Zusammen mit der BK-Ungleichung (6.9) liefern die Aussagen (6.10)-(6.13)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta^\varepsilon \in E \circ F) - \mathcal{O}(\varepsilon^d) &\leq \mathbb{P}(\{\Lambda^\varepsilon \in E \circ F\} \cap A_\varepsilon^c) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\Psi \in S_\varepsilon^{-1}(E) \square S_\varepsilon^{-1}(F)\} \cap A_\varepsilon^c) \\ &\leq \mathbb{P}(\Psi \in S_\varepsilon^{-1}(E) \square S_\varepsilon^{-1}(F)) \\ &\leq \mathbb{P}(\Psi \in S_\varepsilon^{-1}(E)) \mathbb{P}(\Psi \in S_\varepsilon^{-1}(F)) \\ &= \mathbb{P}(\Lambda_\varepsilon \in E) \mathbb{P}(\Lambda_\varepsilon \in F) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\Lambda_\varepsilon \in E\} \cap A_\varepsilon^c) \mathbb{P}(\{\Lambda_\varepsilon \in F\} \cap A_\varepsilon^c) + \mathcal{O}(\varepsilon^d) \quad (6.11) \\ &\leq \mathbb{P}(\{\Delta_\varepsilon \in E\} \cap A_\varepsilon^c) \mathbb{P}(\{\Delta_\varepsilon \in F\} \cap A_\varepsilon^c) + \mathcal{O}(\varepsilon^d) \quad (6.10) \\ &\leq \mathbb{P}(\Delta_\varepsilon \in E) \mathbb{P}(\Delta_\varepsilon \in F) + \mathcal{O}(\varepsilon^d), \end{aligned}$$

wobei für die erste Ungleichung (6.12) und für die zweite (6.13) angewendet wurde. Bei der vierten Ungleichung wurde die BK-Ungleichung für Poissonprozesse (Theorem 6.9) benutzt. Dazu beachte man, dass die Mengen $S_\varepsilon^{-1}(E), S_\varepsilon^{-1}(F)$ auf Mengen endlichen Maßes (bzgl. $\beta\lambda_d \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{Q}$) leben, da die Mengen E, F auf einer Menge endlichen Maßes (bzgl. $\beta\lambda_d \otimes \mathbb{A}$) leben. Die drittletzte Ungleichung folgt aus (6.11) und die vorletzte aus (6.10), wobei bei der Anwendung von (6.10) verwendet wird, dass die Ereignisse E, F auf W leben. Da die Verteilung von Δ^ε nicht von ε abhängt, folgt die Behauptung für $\varepsilon \searrow 0$. \square

6.2. KRITISCHE INTENSITÄTEN

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit kritischen Intensitäten für die Perkolation von Δ . Während in der Literatur zu Perkulationsmodellen oftmals verschiedene Definitionen für kritische Intensitäten in Betracht gezogen und miteinander verglichen werden (siehe z.B. Proposition 2.1 in [10] oder Theorem 2 in [19]), beschränken wir uns hier auf eine klassische Definition. Dazu arbeiten wir für das gesamte restliche Kapitel im markierten stationären Modell aus Abschnitt 3.5, also mit einem Grundraum der Form $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$. Hierzu sei $d \geq 2$, um sicherzustellen, dass die später definierten kritischen Intensitäten endlich sind. Die Einschränkung auf $d \geq 2$ findet man beispielsweise auch in Lemma 2.2 in [4]. Auch dort ist diese Einschränkung notwendig, um (unter einer Bedingung) die

Endlichkeit der dort betrachteten kritischen Intensität zu gewährleisten. Im weiteren Verlauf des Kapitels verwenden wir folgende vereinfachte Notationen. Für ein Simplex σ mit Ecken in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $x \in \sigma$, falls es ein $a \in \mathbb{A}$ gibt mit $(x, a) \in \sigma$. Außerdem definieren wir den Durchmesser $\text{diam}(\sigma)$ von $\sigma = [(x_0, a_0), \dots, (x_s, a_s)]$ durch $\text{diam}(\sigma) := \text{diam}(\{x_0, \dots, x_s\})$, wobei $\text{diam}(B)$ den Durchmesser einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}^d$ bzgl. der euklidischen Metrik bezeichnet. Es sei weiterhin stets eine Abzählung z_0, z_1, \dots des \mathbb{Z}^d mit $z_0 = \mathbf{0}$ fixiert und zu $t > 0$ definieren wir eine Zerlegung $\mathcal{Q}^t = (Q_i^t)_{i \in \mathbb{N}_0}$ in Würfel der Kantenlänge t , wobei $Q_i^t := [-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t]^d + tz_i$ den halboffenen Würfel mit Kantenlänge t und Mittelpunkt tz_i bezeichnet. Schließlich seien $V \sim \Theta$, $U \sim \mathbb{Q}$ stets (insbesondere von Ψ) unabhängige Marken.

Definition 6.11. *Es sei $q \in [\alpha - 1]$. Wir notieren das Wahrscheinlichkeitsmaß durch $\mathbb{P}_\beta := \mathbb{P}$, um die Abhängigkeit von der Intensität $\beta > 0$ in die Notation aufzunehmen.*

(i) *Es bezeichne C_q^∞ das Ereignis, dass es ein q -Simplex σ in $\Delta^{\mathbf{0}} := T(\Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)})$ mit $\mathbf{0} \in \sigma$ und unendlicher Zusammenhangskomponente in $G_q(\Delta^{\mathbf{0}})$ gibt.*

(ii) *Definiere*

$$\beta_c^{(q)} := \sup \{ \beta \in [0, \infty) \mid \mathbb{P}_\beta(C_q^\infty) = 0 \}.$$

Im ersten Schritt wollen wir zeigen, dass es einen nichttrivialen Phasenübergang bzgl. der Perkolation von $G_q(\Delta)$ gibt, d.h. dass $\beta_c^{(q)} \in (0, \infty)$ gilt. Um die Positivität von $\beta_c^{(0)}$ nachzuweisen, verwenden wir Resultate aus [4] und [10]. Dafür nehmen wir an, die Kantenfunktion φ_1 sei beschränkt in dem Sinne, dass es ein $D > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} \varphi_1((x, a), (y, b)) = 0 & \quad \text{für } \Theta^2\text{-fast alle } (a, b) \in \mathbb{A}^2 \text{ und} \\ & \quad x, y \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \|x - y\| > D. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Außerdem sei nachfolgende Eigenschaft erfüllt, für die wir daran erinnern, dass κ_m die Simplexfunktion eines von einem m -Simplex erzeugten Simplicialkomplexes ist (vgl. (3.13)). Es existieren $\delta, \varepsilon > 0$ und eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{A}$ mit $\Theta(A) > 0$, sodass gilt

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha((x_0, a_0), \dots, (x_\alpha, a_\alpha)) \geq \varepsilon & \quad \text{für alle } a_0, \dots, a_\alpha \in A \text{ und } x_0, \dots, x_\alpha \in \mathbb{R}^d \\ & \quad \text{mit } \text{diam}(\{x_0, \dots, x_\alpha\}) \leq \delta. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Theorem 6.12. *Es gelten die Bedingungen (6.14) und (6.15). Dann folgt*

$$0 < \beta_c^{(0)} \leq \beta_c^{(1)} \leq \dots \leq \beta_c^{(\alpha-1)} < \infty.$$

Beweis. Die Positivität von $\beta_c^{(0)}$ wird in [4] und [10] (dort mit λ_c notiert) nachgewiesen. Genauer wird einerseits in Lemma 2.2 in [4] unter einer Bedingung ($\|D\|_{\text{op}} < \infty$) die Positivität einer anders definierten, dort mit λ_O notierten, kritischen Intensität nachgewiesen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn (6.14) gilt. Man beachte, dass in [4] zwar ein polnischer Raum als Markenraum

gewählt ist, dies aber für dieses Resultat nicht notwendig ist. Für die genaue Definition von λ_O verweisen wir auf [4] bzw. [10]. Proposition 2.1 in [10] zeigt, dass $\lambda_c \geq \lambda_O$ gilt, womit insgesamt $\beta_c^{(0)} = \lambda_c > 0$ folgt. In [10] wird zwar mit einer spiegelsymmetrischen Kantenfunktion gearbeitet, d.h. es gilt $\varphi_1((x, a), (y, b)) = \varphi_1((-x, a), (-y, b))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d, a, b \in \mathbb{A}$, jedoch können wir diese Annahme umgehen, ohne den Beweis von Proposition 2.1 in [10] im Detail zu überprüfen. Wegen (6.14) können wir die Kantenfunktion φ_1 nämlich nach oben durch die spiegelsymmetrische Funktion

$$\tilde{\varphi}_1((x, a), (y, b)) := \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq D\}$$

abschätzen und mit der vorangegangenen Argumentation die Positivität der kritischen Intensität bzgl. $\tilde{\varphi}_1$ folgern. Wegen $\varphi_1 \leq \tilde{\varphi}_1$ ist die kritische Intensität bzgl. φ_1 mindestens so groß wie die kritische Intensität bzgl. $\tilde{\varphi}_1$ und deshalb selbst positiv. Die Abschätzung $\beta_c^{(q-1)} \leq \beta_c^{(q)}$ folgt direkt aus Lemma 6.3 (iv).

Es bleibt $\beta_c^{(q)} < \infty$ für $q = \alpha - 1$ zu zeigen, wobei wir die Aussage für beliebiges $q < \alpha$ zeigen. Dazu geben wir einen Algorithmus an, der die Situation in Anlehnung an den Algorithmus aus dem Beweis von Theorem 1 in [35] auf Perkolation im Gitter \mathbb{Z}^d mit Kantenmenge $E_d := \{[z_i, z_j] \mid i, j \in \mathbb{N}_0, \|z_i - z_j\| = 1\}$ zurückführt. Wir werden zeigen, dass es ein $p = p(\beta) \in [0, 1]$ gibt, sodass sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_\beta(C_q^\infty)$ nach unten gegen die Wahrscheinlichkeit einer unendlich großen Zusammenhangskomponente des Ursprungs bei Perkolation im Gitter \mathbb{Z}^d mit Parameter p abschätzen lässt. Anschließend weisen wir die Konvergenz $p \rightarrow 1$ für $\beta \rightarrow \infty$ nach. Daraus folgt dann $\mathbb{P}_\beta(C_q^\infty) > 0$ für genügend großes β , da die kritische Wahrscheinlichkeit für Perkolation im Gitter \mathbb{Z}^d echt kleiner als 1 ist. Letztere Aussage folgt beispielsweise aus den Theoremen 6 und 10 in Kapitel 3 von [3].

Im Folgenden sei die Zerlegung Q^{δ_*} gewählt mit dem Parameter $\delta_* := \frac{\delta}{\sqrt{d+3}}$ für das δ aus der Eigenschaft (6.15) der Verbindungsfunktionen. Wir nennen zwei Würfel $Q_i^{\delta_*}, Q_j^{\delta_*}$ benachbart, wenn z_i, z_j in \mathbb{Z}^d benachbart sind, d.h. wenn $\|z_i - z_j\| = 1$ gilt. Für zwei benachbarte Würfel $Q_i^{\delta_*}, Q_j^{\delta_*}$ gilt dann $\text{diam}(Q_i^{\delta_*} \cup Q_j^{\delta_*}) = \sqrt{d + 3}\delta_* = \delta$, womit die Definition von δ^* zu erklären ist.

Im Folgenden ordnen wir jeder Kante in E_d zwei Poissonprozesse zu, die durch Einschränkung aus einer unabhängigen Markierung von Ψ hervorgehen. Dazu sei $\tilde{\Psi}$ eine unabhängige $\mathcal{U}([2d])$ -Markierung von Ψ . Wir bezeichnen mit $\tilde{\Psi}_i^l$ die Einschränkung von $\tilde{\Psi}$ auf $Q_i^{\delta_*} \times \mathbb{A} \times \mathbb{M} \times \{l\}$. Damit zerlegen wir den Prozess in $Q_i^{\delta_*} \times \mathbb{A} \times \mathbb{M} \times [2d]$ nochmals in $[2d]$ Teilprozesse und verwenden als Zerlegung für die Konstruktion des Simplicialkomplexes die verfeinerte Zerlegung $(Q_i^{\delta_*} \times \mathbb{A} \times \{l\})_{i \in \mathbb{N}_0, l \in [2d]}$ von $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [2d]$. Für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gibt es $2d$ benachbarte Würfel von $Q_i^{\delta_*}$ und wir ordnen jedem Paar $(Q_i^{\delta_*}, Q_j^{\delta_*})$ einen der Prozesse $\tilde{\Psi}_i^l, l \in [2d]$, zu. Diese Zuordnung kann auch explizit gemacht werden, was allerdings hier nicht notwendig ist. Damit ist jedem geordneten Paar von benachbarten Würfel $(Q_i^{\delta_*}, Q_j^{\delta_*})$ genau ein Prozess zugeordnet. Da jede Kante in E_d zu einem (ungeordneten) Paar von benachbarten Würfeln assoziiert ist, wurden jeder Kante $[z_i, z_j] \in E_d$ somit zwei Prozesse $\tilde{\Psi}_i^{l_1}, \tilde{\Psi}_j^{l_2}$ zugeordnet. Wir definieren den Komplex $\Delta^0 := T(\tilde{\Psi} + \delta_{(\mathbf{0}, V, U, 1)})$ als Komplex auf der Eckenmenge $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$, indem die zusätzlichen Marken in $[2d]$ einfach vergessen

werden, weswegen wir darauf verzichten eine eigene Notation für diesen Komplex einzuführen. Nachfolgend definieren wir einen Algorithmus, der Schritt für Schritt Teilprozesse Ψ_i^l aufdeckt. Wegen der Eigenschaft (3.8) ist zu jedem Zeitpunkt der Komplex, bestehend aus Punkten von bis zu diesem Zeitpunkt aufgedeckten Prozessen, \mathbb{P} -fast sicher eindeutig durch die aufgedeckten Prozesse bestimmt. Wenn wir davon sprechen einen Prozess Ψ_i^l aufzudecken meinen wir damit stets, dass wir seine Projektion auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times [2d]$ vollständig aufdecken und im Anschluss alle Komponenten von Marken in \mathbb{M} aufdecken, die für den Komplex, bestehend aus Punkten von bisher aufgedeckten Prozessen, notwendig sind. Es bleiben also stets unendlich viele Komponenten in \mathbb{M} aufgedeckt, die gegebenenfalls zu einem späteren Zeitpunkt noch für den Komplex verwendet werden. Um die Notation möglichst einfach zu halten, identifizieren wir die Ecken und Simplizes von Δ^0 während des Beweises mit ihrer räumlichen Komponente und bezeichnen zu $x \in \Delta^0$ die zugehörige Marke in \mathbb{A} mit $a(x)$.

- (1) Es sei G_0 der Graph mit Eckenmenge \mathbb{Z}^d , der zunächst noch keine Kanten besitzt, und $C_0(\mathbf{0})$ die Zusammenhangskomponente des Ursprungs in G_0 . Wir decken zunächst den Prozess $\delta_{(0,V,U,1)} + \sum_{l=1}^{2d} \tilde{\Psi}_0^l$ auf und bezeichnen mit Δ_0^0 den aus diesem Prozess resultierenden Simplicialkomplex. Existieren in diesem Komplex Punkte x_1, \dots, x_q mit $[\mathbf{0}, x_1, \dots, x_q] \in \Delta_0^0$ und $a(x_i) \in A$ für alle $i \in [q]$ und gilt außerdem $V \in A$, so setzen wir $\pi_0 := [\mathbf{0}, x_1, \dots, x_q]$. Andernfalls beenden wir bereits hier den Algorithmus.
- (2) Es liege der Graph G_m vor und es bezeichne $C_m(\mathbf{0})$ die Zusammenhangskomponente des Ursprungs in G_m sowie Δ_m^0 den Komplex, bestehend aus den Punkten der bisher aufgedeckten Prozesse. Außerdem sei für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $z_k \in C_m(\mathbf{0})$ ein q -Simplex $\pi_k \in \Delta_m^0$ gegeben, bestehend aus Punkten in $Q_k^{\delta_k}$ mit Marken in A . Wir wählen eine Kante $[z_i, z_j] \in E_d$ mit $z_i \in C_m(\mathbf{0})$, $z_j \notin C_m(\mathbf{0})$, die vom Algorithmus bisher noch nicht betrachtet wurde. Existiert keine solche Kante, beenden wir den Algorithmus.
- (3) Es sei $\pi_i = [y_0, \dots, y_q]$ und $l \in [2d]$ der eindeutige Index, sodass $\tilde{\Psi}_j^l$ der Kante $[z_i, z_j]$ zugeordnet ist. Wir decken den Prozess $\tilde{\Psi}_j^l$ auf und bezeichnen mit Δ_{m+1}^0 den Komplex, der aus den bisher aufgedeckten Prozesse hervorgeht. Finden wir in dem Prozess $\tilde{\Psi}_j^l$ paarweise verschiedene Punkte x_0, \dots, x_q mit $a(x_i) \in A$, $i \in \{0, \dots, q\}$, und der Eigenschaft

$$[x_0, \dots, x_j, y_j, \dots, y_q] \in \Delta_{m+1}^0 \quad \text{für alle } j \in \{0, 1, \dots, q\}, \quad (6.16)$$

so fügen wir dem Graphen G_m die Kante $[z_i, z_j]$ hinzu und bezeichnen den so erhaltenen Graphen mit G_{m+1} . Außerdem setzen wir $\pi_j := [x_0, \dots, x_q]$. Existieren keine solchen Punkte, so setzen wir $G_{m+1} = G_m$.

- (4) Gehe zurück zu Schritt (2).

Man beachte, dass Eigenschaft (6.16) in Schritt (3) impliziert, dass π_i und π_j in $G_q(\Delta^0)$ durch einen Kantenweg miteinander verbunden sind. Durch diesen Algorithmus wird ein zufälliger Teilgraph des Gitters \mathbb{Z}^d bestimmt. Endet der Algorithmus nach endlich vielen Schritten, so ist dieser Teilgraph

und insbesondere die Zusammenhangskomponente des Ursprungs innerhalb diesem Teilgraph endlich. Wir zeigen, dass dies bei hinreichend großer Intensität mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht geschieht. Wegen Eigenschaft (6.15) der Verbindungsfunktionen stoppt der Algorithmus mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht im ersten Schritt. Im Folgenden betrachten wir die Situation, dass in Schritt (2) des Algorithmus eine Kante $[z_i, z_j] \in E_d$ mit den geforderten Eigenschaften gefunden wird. Alle Objekte, die dann in Schritt (3) aufgedeckt werden (die Projektion des Prozesses $\tilde{\Psi}_j^l$ sowie für Δ_{m+1}^0 notwendigen Komponenten von Marken aus \mathbb{Q}), sind stochastisch unabhängig von allen Objekten, die in vorangegangenen Schritten aufgedeckt wurden. Um die Wahrscheinlichkeit, dass die Kante $[z_i, z_j]$ dem Graphen hinzugefügt wird, unabhängig vom bisherigen Verlauf des Algorithmus, nach unten abschätzen zu können, verwenden wir die Darstellung

$$\tilde{\Psi}_j^l \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\tau} \delta_{(X_k, V_k, U_k, l)}$$

mit unabhängigen Zufallselementen $X_i \sim \frac{\lambda_d(\cdot \cap Q_i^{\delta_*})}{\delta_*^d}$, $V_i \sim \Theta$, $U_i \sim \mathbb{Q}$, $\tau \sim \text{Po}\left(\frac{\beta \delta_*^d}{2d}\right)$ (vgl. Darstellung (2.1)). Dabei wird die Eigenschaft (6.15) entscheidend sein. Für $I \subset \mathbb{N}$ mit $|I| = q + 1$ schreiben wir σ_I für den Komplex bestehend aus den Punkten X_i mit $i \in I$. Wir sagen ein solcher Simplex σ_I erfüllt die Eigenschaft (6.16), falls $V_i \in A$ für alle $i \in I$ gilt und es eine Nummerierung X_{l_0}, \dots, X_{l_q} der Punkte von σ_I gibt, sodass die Eigenschaft (6.16) für $x_i = X_{l_i}$ erfüllt ist. Außerdem definieren wir $\sigma_k := [X_{(k-1)(q+1)+1}, \dots, X_{k(q+1)}]$, $k \in \mathbb{N}$, und

$$N(l) := \max \{k \in \{0, \dots, l\} \mid k(q+1) \leq l\}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

Gegeben den bisherigen Verlauf des Algorithmus (bis nach Schritt (2)), können wir die Wahrscheinlichkeit für das Hinzufügen der Kante $[z_i, z_j]$ unabhängig vom bisherigen Verlauf des Algorithmus nach unten abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\sigma_I \text{ erfüllt die Eigenschaft (6.16) für ein } I \subset [\tau] \text{ mit } |I| = q + 1) \\ & \geq \mathbb{P}(\sigma_k \text{ erfüllt die Eigenschaft (6.16) für ein } k \in [N(\tau)]) \\ & = 1 - \mathbb{P}(\sigma_k \text{ erfüllt die Eigenschaft (6.16) für kein } k \in [N(\tau)]) \\ & = 1 - \mathbb{E}[\mathbb{P}(\sigma_1, \dots, \sigma_{N(\tau)} \text{ erfüllen die Eigenschaft (6.16) nicht} \mid \tau)] \\ & = 1 - \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(\sigma_1 \text{ erfüllt die Eigenschaft (6.16) nicht} \mid \tau \geq q + 1)^{N(\tau)}\right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Wegen Eigenschaft (6.16) und $\text{diam}(Q_i^{\delta_*} \cup Q_j^{\delta_*}) = \delta$ gilt die Abschätzung

$$\mathbb{P}(\sigma_1 \text{ erfüllt die Eigenschaft (6.16)} \mid \tau \geq q + 1) \geq \Theta(A)^{q+1} \varepsilon^{q+1} > 0.$$

Der Exponent von ε ist damit zu erklären, dass für Gültigkeit von (6.16) $(q + 1)$ verschiedene $(q + 1)$ -Simplizes dem Komplex hinzugefügt werden müssen. Deshalb können wir den Ausdruck

aus (6.17) nach unten abschätzen gegen

$$1 - \mathbb{E} \left[\left(1 - \Theta(A)^{q+1} \varepsilon^{q+1} \right)^{N(\tau)} \right] =: p.$$

Wir zeigen, dass $p \rightarrow 1$ für $\beta \rightarrow \infty$ gilt. Dafür schreiben wir abkürzend $p_0 := 1 - \Theta(A)^{q+1} \varepsilon^{q+1}$ und $b := \frac{\beta \delta_*^d}{2d}$, also $\tau \sim \text{Po}(b)$. Wegen $p_0 < 1$ gilt für $b \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[p_0^{N(\tau)} \right] &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-b} \frac{b^k}{k!} p_0^{N(k)} \\ &= e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^q \frac{b^{k(q+1)+l}}{(k(q+1)+l)!} p_0^k \\ &\leq e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^q \frac{b^{k(q+1)+q}}{(k(q+1)+l)!} p_0^k \\ &= e^{-b} (q+1) b^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k(q+1)}}{(k(q+1))!} \left(p_0^{\frac{1}{q+1}} \right)^{k(q+1)} \\ &\leq e^{-b} (q+1) b^q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \left(p_0^{\frac{1}{q+1}} \right)^k \\ &= e^{-\beta} (q+1) b^q \exp \left(b p_0^{\frac{1}{q+1}} \right) \\ &= (q+1) b^q \exp \left(-b \left(1 - p_0^{\frac{1}{q+1}} \right) \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } b \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Wir erweitern den vom Algorithmus bestimmten zufälligen Teilgraph des Gitters \mathbb{Z}^d dahingehend, dass wir für jede nicht vom Algorithmus betrachtete Kante unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p entscheiden, ob wir diese dem zufälligen Teilgraph hinzufügen. Den so erhaltenen zufälligen Graphen nennen wir G .

Da in jedem Schritt des Algorithmus die Objekte, die in diesem Schritt aufgedeckt werden, unabhängig von den bereits in den vorangegangenen Schritten aufgedeckten Objekten sind und die Wahrscheinlichkeit für das Hinzufügen der jeweils betrachteten Kante stets (unabhängig vom bisherigen Verlauf des Algorithmus) mindestens p beträgt, können wir den so erhaltenen Zufallsgraphen an eine Kantenperkolations H auf \mathbb{Z}^d mit Parameter p koppeln, sodass $H \subseteq G$ gilt. Wegen $p \rightarrow 1$ für $\beta \rightarrow \infty$ finden wir also ein $\beta > 0$, sodass der Ursprung in H und damit auch in G mit positiver Wahrscheinlichkeit eine unendlich große Zusammenhangskomponente besitzt. In diesem Fall finden wir also im Laufe des Algorithmus unendlich viele Simplizes $\pi_i \in \Delta^0$, die in $G_q(\Delta^0)$ mit π_0 durch einen Kantenweg verbunden sind. Also tritt das Ereignis C_q^∞ in diesem Fall mit positiver Wahrscheinlichkeit ein, womit $\beta_c^q < \infty$ bewiesen ist. \square

Bereits in [35] (Theorem 1) wurde die Aussage von Theorem 6.12 für $q = 0$ im unmarkierten stationären Modell unter der minimalen Bedingung $\nu_0 \in (0, \infty)$ gezeigt, wobei ν_0 hier das Integral aus (3.39) bezeichnet. Die Eigenschaft (6.15) liefert dabei $\nu_0 > 0$, während die Gültigkeit von (6.14) die Endlichkeit von ν_0 impliziert. Eine offene Frage bleibt, ob zwischen den kritischen Intensitäten

aus Theorem 6.12 tatsächlich strikte Ungleichungen gelten. In [19] wird eine Vermutung (direkt nach Theorem 2) geäußert, deren Gültigkeit strikte Ungleichungen für die kritischen Intensitäten des Vietoris-Rips-Komplexes implizieren würde.

Proposition 6.13. *In der Situation von Theorem 6.12 gilt für $\beta > \beta_c^{(q)}$ mit $q < \alpha$*

$$\mathbb{P}_\beta \left(\text{Es gibt eine unendliche Zusammenhangskomponente in } G_q(\Delta) \right) = 1.$$

Beweis. Es bezeichne B_q^∞ das Ereignis, dass der Graph $G_q(\Delta)$ perkoliert, also eine unendlich große Zusammenhangskomponente besitzt. Wir fixieren ein $t > 0$ und setzen $\Psi_i := \Psi_{Q_i^t}$ sowie $\mathcal{A}_i := \sigma(\Psi_i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig. Für jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}_0$ enthält der Prozess $\sum_{i \in I} \Psi_i$ \mathbb{P} -fast sicher nur endlich viele Punkte. Da jeder dieser Punkte wegen (6.14) \mathbb{P} -fast sicher endliche Simplexgrade besitzt, enthält der Graph $G_q(\Delta)$ somit \mathbb{P} -fast sicher nur endlich viele Ecken, die die Menge $W := \cup_{i \in I} Q_i^t$ schneiden (die Ecken von $G_q(\Delta)$ sind q -Simplizes). Also besitzt der Graph $G_q(\Delta)$ \mathbb{P} -fast sicher genau dann eine unendliche Zusammenhangskomponente, wenn dies auf den Graph $G_q(\Delta_{W^c})$ zutrifft. Letzterer hängt nur von $\sum_{j \in \mathbb{N}_0 \setminus I} \Psi_j$ ab, weswegen das Ereignis B_q^∞ unabhängig von $(\Psi_i)_{i \in I}$ ist. Da dies für jede endliche Teilmenge $I \subset \mathbb{N}_0$ gilt, liefert das 0-1-Gesetz von Kolmogorov $\mathbb{P}_\beta(B_q^\infty) \in \{0, 1\}$. Wegen $\beta > \beta_c^{(q)}$ gilt $\mathbb{P}_\beta(B_q^\infty) > 0$ und die Behauptung folgt. \square

6.3. SCHARFER PHASENÜBERGANG

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung eines scharfen Phasenübergangs für die Perkulationsfunktion (die wir noch genau definieren werden), womit ein Resultat von der Form wie Theorem 1 in [19] oder Theorem 8.2 in [30] gemeint ist. Erstgenanntes Resultat bezieht sich auf Perkulation von $\tilde{G}_q(\Delta)$ des Vietoris-Rips-Komplexes und basiert auf der diskreten OSSS-Ungleichung, welche beispielsweise als Theorem 1.9 in [12] gefunden werden kann. In [30] wird mithilfe von Entscheidungsbäumen in stetiger Zeit eine stetige Version der OSSS-Ungleichung für Funktionale eines Poissonprozesses hergeleitet, mit deren Hilfe dann ein scharfer Phasenübergang für k -Perkulation im Booleschen Modell nachgewiesen wird (siehe Kapitel 8 dort). Tatsächlich wird der Begriff eines scharfen Phasenübergangs in der Literatur jedoch nicht einheitlich verwendet. Definieren wir eine weitere kritische Intensität β_T durch

$$\beta_T := \sup \{ \beta \in [0, \infty) \mid \mathbb{E} [|C_\beta(\mathbf{0})|] < \infty \},$$

wobei $|C_\beta(\mathbf{0})|$ die Größe (Eckenanzahl) der Zusammenhangskomponente des Ursprungs bezeichnet, so kann auch die Gleichheit $\beta_T = \beta_c^{(0)}$ als scharfer Phasenübergang bezeichnet werden. Theorem 6.2 in [33] zeigt diese Gleichheit im unmarkierten stationären Modell. Im Booleschen Modell beispielsweise gilt die Gleichheit im Allgemeinen nicht, wie in Kapitel 3 von [33] nachgewiesen wird. Proposition 2.2 in [10] zeigt wiederum, dass die Gleichheit gilt, wenn sich die Formverteilung auf Bälle konzentriert und die zugehörige Radienverteilung beschränkt ist.

Wir wollen in diesem Abschnitt den in [19] verwendeten Ansatz, der wiederum auf dem Ansatz aus

[12] beruht, auf das hier vorliegende Modell übertragen. Hierfür wird unter anderem die Margulis-Russo-Formel unerlässlich sein. Bei der Situation von Theorem 1 in [19] handelt es sich um den Spezialfall der hier vorliegenden Situation, bei dem die Verbindungsfunktionen des Vietoris-Rips-Komplexes gewählt werden. In diesem Fall befinden wir uns also insbesondere im unmarkierten stationären Modell. Da die Verbindungsfunktionen des Vietoris-Rips-Komplexes nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, ist dann auch der Markenraum \mathbb{M} nicht notwendig.

Um den Beweis auf die hier vorliegende Situation zu übertragen, müssen wir also mit der Schwierigkeit der zusätzlichen Markenräume \mathbb{A}, \mathbb{M} umgehen. Dabei werden wir herausarbeiten, welche Eigenschaften der Verbindungsfunktionen dafür wirklich benötigt werden. Wir beginnen damit, diese Eigenschaften vorzustellen und fixieren für den gesamten Abschnitt ein $q \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$. Für den restlichen Abschnitt betrachten wir stets Verbindungsfunktionen, die die beiden nachfolgenden Eigenschaften erfüllen. Dafür erinnern wir an die Definition (3.13) der Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_\alpha$.

(V1) Es existieren $\delta, \varepsilon > 0$ und eine messbare Menge $A \subseteq \mathbb{A}$ mit $\Theta(A) > 0$, sodass gilt

$$\kappa_{q+1}((x_0, a_0), \dots, (x_{q+1}, a_{q+1})) \geq \varepsilon \quad \text{für alle } a_0, \dots, a_{q+1} \in A \text{ und } x_0, \dots, x_{q+1} \in \mathbb{R}^d \\ \text{mit } \text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq \delta.$$

(V2) Es gibt ein $D > 0$ mit

$$\kappa_{q+1}((x_0, a_0), \dots, (x_{q+1}, a_{q+1})) = 0 \quad \text{für } \Theta^{q+2}\text{-fast alle } (a_0, \dots, a_{q+1}) \in \mathbb{A}^{q+2} \text{ und} \\ x_0, \dots, x_{q+1} \in \mathbb{R}^d \text{ mit } \text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) > D.$$

Bedingung (V2) kann als Beschränktheit der Verbindungsfunktionen interpretiert werden und stellt sicher, dass \mathbb{P} -fast sicher in $G_q(\Delta^0)$ nur Simplizes $\sigma, \rho \in F_q(\Delta^0)$ mit $\text{diam}(\sigma \cup \rho) \leq D$ durch eine Kante miteinander verbunden sind. Um eine Interpretation von (V1) zu geben, sei die Projektion von Φ auf \mathbb{R}^d und $q + 2$ Punkte x_0, \dots, x_{q+1} dieser Projektion mit $\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq \delta$ gegeben (und die Marken der Punkte in \mathbb{A} noch nicht ausgewürfelt). Dann liefert (V1) eine positive untere Schranke dafür, dass das Simplex, bestehend aus den Punkten x_0, \dots, x_{q+2} , Teil des Komplexes Δ ist. Diese untere Schranke ist gegeben durch $\Theta(A)^{q+2}\varepsilon$. Außerdem liefert (V1) ein irreduzibles Teilmodell (durch Einschränkung auf Ecken mit Marken in A) im Sinne von (5.1) in [8]. Insgesamt gelten die funktionalen Abschätzungen

$$\varepsilon \mathbb{1}\{\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq \delta, a_0, \dots, a_{q+1} \in A\} \leq \kappa_{q+1}((x_0, a_0), \dots, (x_{q+1}, a_{q+1})) \\ \leq \mathbb{1}\{\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq \delta\}.$$

Offensichtlich muss $D \geq \delta$ gelten. Eigenschaft (V1) überträgt sich per Definition der Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{q+1}$ auch auf die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_q$. Umgekehrt ist (V2) auch für alle κ_j mit $j > q + 1$ erfüllt. Außerdem wollen wir darauf hinweisen, dass (V1) die Positivität des Integrals aus (3.36) impliziert. Die Endlichkeit des Integrals ist im Allgemeinen zunächst nicht gegeben. Ersetzen wir die Kantenfunktion jedoch durch die Kantenfunktion aus (6.23), so bleibt die Wahrscheinlichkeit,

dass $G_q(\Delta)$ eine unendlich große Zusammenhangskomponente besitzt, unverändert, da wegen (V2) Simplizes mit Durchmesser größer als D \mathbb{P} -fast sicher nur isolierte Ecken in $G_q(\Delta)$ bilden. Sind wir also nur an Perkolation von $G_q(\Delta)$ interessiert, so können wir uns stets auf den Teilkomplex von Δ beschränken, bestehend aus allen Simplizes von Δ mit Durchmesser nicht größer als D . Für die Kantenfunktion aus (6.23) ist das Integral aus (3.36) wiederum endlich.

Im Folgenden verwenden wir zur Konstruktion des Simplicialkomplexes Δ^0 die Zerlegung $(Q_i \times \mathbb{A})_{i \in \mathbb{N}_0}$ von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ mit $Q_i := [-D, D]^d + 2Dz_i$, wobei z_0, z_1, \dots weiterhin eine Abzählung von \mathbb{Z}^d mit $z_0 = \mathbf{0}$ sei. Im nächsten Schritt definieren wir die in diesem Abschnitt betrachteten Perkulationsereignisse und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Dabei verwenden wir in diesem Abschnitt die Notation $\Delta := \Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}}^0$, womit zwar $\Delta \stackrel{d}{=} T(\Psi)$, aber im Allgemeinen keine Gleichheit gilt. Für zwei Simplizes $\sigma, \rho \in F_q(\Delta^0)$ schreiben wir abkürzend $\sigma \stackrel{q}{\leftrightarrow} \rho$, falls diese in $G_q(\Delta^0)$ durch einen Kantenweg verbunden sind. Zu $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$ und einem Simplicialkomplex K definieren wir die Größen

$$\begin{aligned} x \stackrel{K}{\leftrightarrow} B &:= \{ \exists \sigma, \rho \in F_q(K) \text{ mit } \sigma \stackrel{q}{\leftrightarrow} \rho, x \in \sigma, \text{diam}(\sigma) \leq D, \rho \cap B \neq \emptyset \}, \\ x \leftrightarrow B &:= x \stackrel{\Delta}{\leftrightarrow} B, \\ x \rightleftarrows B &:= (x \leftrightarrow B) \cap (x \leftrightarrow B^c), \\ B_r &:= \mathbf{0} \stackrel{\Delta^0}{\leftrightarrow} B(\mathbf{0}, r)^c, \\ \theta_r &:= \mathbb{P}(B_r), \\ \theta_\infty &:= \mathbb{P}(\exists \sigma \in F_q(\Delta^0) \text{ mit unendlicher Komponente in } G_q(\Delta^0) \text{ und } \mathbf{0} \in \sigma). \end{aligned}$$

Das Ereignis B_r lässt sich interpretieren als das Ereignis, dass in $G_q(\Delta^0)$ ein Kantenweg vom Ursprung nach $B(\mathbf{0}, r)^c$ existiert, wobei für $r \geq D$ der Fall, dass es ein Simplex $\sigma \in F_q(\Delta^0)$ mit $\mathbf{0} \in \sigma$ und $\sigma \cap B(\mathbf{0}, r)^c \neq \emptyset$ gibt, explizit ausgeschlossen wird. Dies hat den entscheidenden Effekt, dass das Ereignis B_r \mathbb{P} -fast sicher nur von $\Psi_W + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)}$ mit W wie in (6.18) abhängt. Die Notation $x \rightleftarrows B$ dient lediglich dem Zweck auf eine Fallunterscheidung nach $x \in B$ bzw. $x \notin B$ verzichten zu können, wobei darauf zu achten ist, dass sich diese Notation stets auf den Komplex $\Delta = \Delta_{\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}}^0$ und nicht auf Δ^0 bezieht. Man beachte, dass

$$\theta_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \theta_r$$

gilt. Wollen wir zusätzlich die Abhängigkeit von der Intensität $\beta > 0$ zum Ausdruck bringen, so schreiben wir $\theta_r(\beta)$ bzw. $\theta_\infty(\beta)$. Die Funktion $\theta : (0, \infty] \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, $(r, \beta) \mapsto \theta_r(\beta)$ bezeichnen wir als Perkulationsfunktion des Modells. Um den Ansatz aus [19] auf die hier vorliegende Situation zu übertragen, definieren wir zunächst einen Algorithmus, der das Eintreten des Ereignisses B_r bestimmt und für den wir dann die OSSS-Ungleichung (Theorem 1.9 in [12]) anwenden wollen. Dazu fixieren wir zwei Parameter $0 < s \leq r$ und definieren

$$I_r := \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid d(Q_i, B(\mathbf{0}, r)) \leq D \}, \quad W := \cup_{i \in I_r} Q_i \quad (6.18)$$

mit $d(B_1, B_2) := \inf \{\|x - y\| \mid x \in B_1, y \in B_2\}$ für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Wir zerlegen den Prozess $\Psi_W + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)}$ in die Teilprozesse

$$\begin{aligned}\Psi_0 &:= \Psi_{Q_0} + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)}, \\ \Psi_i &:= \Psi_{Q_i}, \quad i \in I_r \setminus \{\mathbf{0}\}.\end{aligned}$$

Im Folgenden sagen wir eine Zusammenhangskomponente von $G_q(\kappa)$ für $\kappa \in \mathbb{N}_K(S)$ schneidet die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$, wenn es Simplizes σ, ρ in dieser Zusammenhangskomponente mit $\sigma \cap B(\mathbf{0}, s) \neq \emptyset$ und $\rho \cap B(\mathbf{0}, s)^c \neq \emptyset$ gibt. Damit sind alle Vorbereitungen für die Definition des Algorithmus getroffen.

- (1) Setze $T_0 := \{i \in \mathbb{N}_0 \mid d(Q_i, \partial B(\mathbf{0}, s)) \leq D\}$ und $W_0 := \cup_{i \in T_0} Q_i$. Decke alle Poissonprozesse Ψ_i mit $i \in T_0$ auf und bezeichne mit C_0 die Menge aller q -Simplizes in Δ_{W_0} mit Durchmesser kleiner gleich D , deren Zusammenhangskomponente in $G_q(\Delta_{W_0})$ die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$ schneidet.
- (2) Es sei $T_m \subseteq I_r$ die Menge der Indizes aller bisher aufgedeckten Prozesse, $W_m := \cup_{i \in T_m} Q_i$ und C_m die Menge aller q -Simplizes in Δ_{W_m} mit Durchmesser kleiner gleich D , deren Zusammenhangskomponente in $G_q(\Delta_{W_m})$ die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$ schneidet.
 - Existiert ein Würfel Q_i mit $i \in I_r \setminus T_m$, sodass es einen Simplex σ in C_m mit $d(\sigma, Q_i) \leq D$ gibt, so setze $T_{m+1} := T_m \cup \{i\}$ sowie $W_{m+1} := \cup_{i \in T_{m+1}} Q_i$. Decke den Poissonprozess Ψ_i auf und bezeichne mit C_{m+1} die Menge aller q -Simplizes in $\Delta_{W_{m+1}}$ mit Durchmesser kleiner gleich D , deren Zusammenhangskomponente in $G_q(\Delta_{W_{m+1}})$ die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$ schneidet.
 - Falls kein solcher Würfel existiert, stoppe den Algorithmus.

Offensichtlich stoppt der Algorithmus wegen $|I_r| < \infty$ nach endlich vielen Schritten. Entscheidend ist, dass \mathbb{P} -fast sicher zum Stoppzeitpunkt des Algorithmus das Eintreten des Ereignisses B_r durch die bis dahin aufgedeckten Poissonprozesse festgelegt ist. Man beachte, dass die Mengen C_m aus dem Algorithmus sich stets auf den Komplex Δ_{W_m} und nicht auf $\Delta_{W_m}^0$ beziehen und der Algorithmus alle Zusammenhangskomponenten in Δ_W , die die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$ schneiden, aufdeckt. Da alle Simplizes $\sigma \in F_q(\Delta^0)$ mit $\mathbf{0} \in \sigma$ und $\text{diam}(\sigma) \leq D$ und all deren Nachbarn in $G_q(\Delta^0)$ wegen Eigenschaft (V2) \mathbb{P} -fast sicher in $Q_0 \times \mathbb{A}$ liegen, wird im Fall des Eintretens von B_r auf jeden Fall der Prozess Ψ_0 aufgedeckt. Abbildung 6.2 zeigt eine Realisierung des Algorithmus für den geometrischen Graphen, bei der das Ereignis B_r nicht eingetreten ist. Hier wird also der unmarkierte Fall mit $q = 0$ und $\kappa_1(x, y) = \varphi_1(x, y) = \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq r_0\}$ für ein $r_0 > 0$ betrachtet. Die OSSS-Ungleichung (Theorem 1.9 in [12]) liefert jetzt

$$\theta_r(1 - \theta_r) \leq \sum_{i \in I_r} \delta_i(s) \zeta_i \tag{6.19}$$

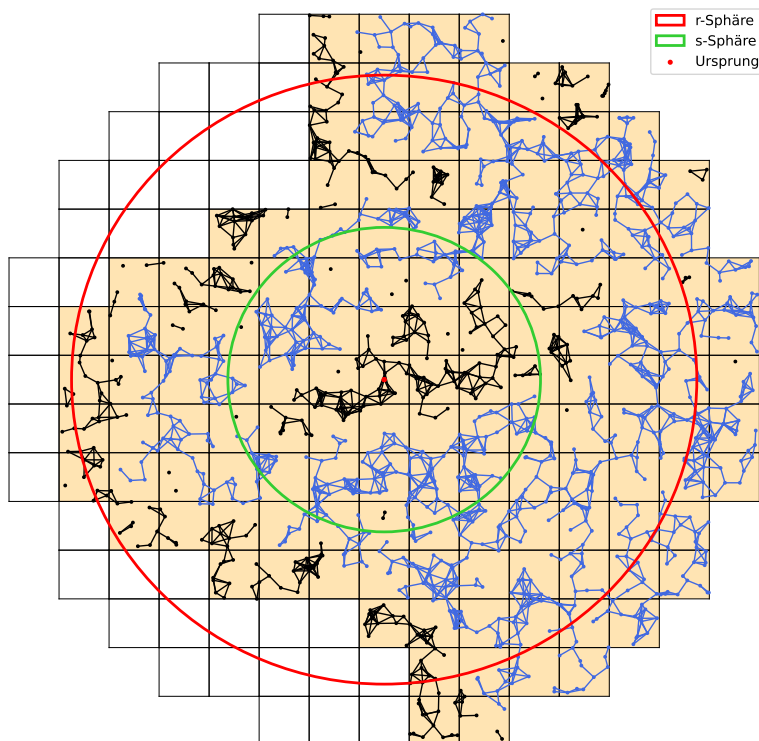


Abbildung 6.2.: Eine Realisierung des Algorithmus für $q = 0$, $\varphi_1(x, y) = \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq r_0\}$ mit $r_0 = \frac{3}{5}$, $r = 10$, $s = 5$, $D = \frac{4}{5}$ und $\beta = 4$, wobei die Zusammenhangskomponenten von Δ_W^0 , die die Sphäre $\partial B(\mathbf{0}, s)$ schneiden, blau dargestellt sind

mit

$$\begin{aligned} \delta_i(s) &:= \mathbb{P}(\Psi_i \text{ wird vom Algorithmus aufgedeckt}), \\ \zeta_i &:= \mathbb{P}\left(\mathbb{1}\{\Psi_W + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)} \in B_r\} \neq \mathbb{1}\{\tilde{\Psi}_i \in B_r\}\right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\Psi}_i$ ein Poissonprozess ist, der aus $\Psi_W + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)}$ hervorgeht, indem Ψ_i durch eine unabhängige Kopie ersetzt wird. Man beachte, dass lediglich $\delta_i(s)$ von s abhängt. Für den Nachweis eines scharfen Phasenübergangs benötigen wir obere Schranken für diese beiden Größen, die es uns erlauben, die Margulis-Russo-Formel anzuwenden. Dazu formulieren wir zwei Lemmata, die in Analogie zu den Lemmata 5 und 6 in [19] diese oberen Schranken bereitstellen. Beide Beweise folgen in ihrer Grundstruktur den Beweisen der Lemmata 5 und 6 aus [19], unterscheiden sich jedoch an einigen Stellen nicht unerheblich von den Beweisen der Lemmata 5 und 6 in [19]. An einer Stelle wird sogar eine komplett neue Konstruktion eingeführt.

Lemma 6.14. Für $i \in I_r$ gilt

$$\int_0^r \delta_i(s) ds \leq 2D(1 + \sqrt{d}) + 2\beta(4D)^d \int_0^r \theta_s ds.$$

Beweis. Fixiere $i \in I_r$, sowie $0 < s \leq r$ und schreibe $B_1 + B_2 := \{b_1 + b_2 \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$

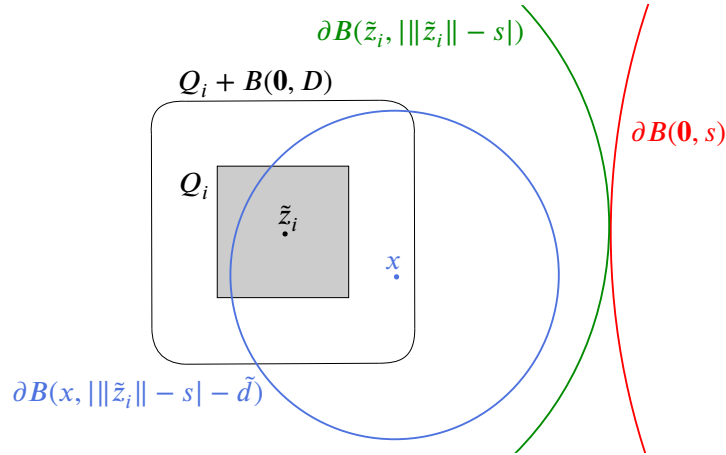


Abbildung 6.3.: Eine Veranschaulichung der Argumentation aus Lemma 6.14, wobei hier abkürzend $\tilde{d} := D(1 + \sqrt{d})$ gesetzt wurde

für die Minkowski-Summe zweier Mengen $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Außerdem schreiben wir $\tilde{z}_i := 2Dz_i$ für den Mittelpunkt von Q_i . Gilt $||\tilde{z}_i|| - s > D(1 + \sqrt{d})$, so wird Ψ_i nicht im ersten Schritt des Algorithmus aufgedeckt. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
\delta_i(s) &\leq \mathbb{P}(\exists(x, a) \in \Phi_{Q_i+B(0,D)} \text{ mit } x \ni B(0, s)) \\
&\leq \mathbb{P}(\exists(x, a) \in \Phi_{Q_i+B(0,D)} \text{ mit } x \ni B(\tilde{z}_i, ||\tilde{z}_i|| - s)) \\
&\leq \mathbb{P}(\exists(x, a) \in \Phi_{Q_i+B(0,D)} \text{ mit } x \ni B(x, ||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d}))) \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sum_{(x,a) \in \Phi_{Q_i+B(0,D)}} \mathbb{1}\{x \ni B(x, ||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d}))\} \right] \\
&= \beta \int_{Q_i+B(0,D)} \theta_{||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d})} dx \\
&\leq \beta(4D)^d \theta_{||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d})}
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Mecke-Gleichung (für den Poissonprozess Ψ) angewendet wurde. Die zweite und dritte Abschätzung erklären wir im Fall von $||\tilde{z}_i|| > s$ mithilfe von Abbildung 6.3. Da das innere der Kugel $B(0, s)$ im Komplement der Kugel $B(\tilde{z}_i, ||\tilde{z}_i|| - s)$ liegt, impliziert $x \ni B(0, s)$ also $x \ni B(\tilde{z}_i, ||\tilde{z}_i|| - s)$. Außerdem gilt für $x \in Q_i + B(0, D)$ stets $||x - \tilde{z}_i|| \leq D(1 + \sqrt{d})$. Deshalb folgt $B(x, ||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d})) \subseteq B(\tilde{z}_i, ||\tilde{z}_i|| - s)$ und somit aus $x \ni B(\tilde{z}_i, ||\tilde{z}_i|| - s)$ auch $x \ni B(x, ||\tilde{z}_i|| - s - D(1 + \sqrt{d}))$. Der Fall $||\tilde{z}_i|| < s$ funktioniert analog.

Verwenden wir für $||\tilde{z}_i|| - s \leq D(1 + \sqrt{d})$ die triviale Abschätzung $\delta_i(s) \leq 1$, so liefert Integration über $s \in (0, r)$ die gewünschte Aussage. \square

Im nächsten Schritt benötigen wir eine geeignete obere Schranke für ζ_i .

Lemma 6.15. Für $i \in I_r$ gilt

$$\zeta_i \leq 2\beta e^{\beta(2D)^d} \int_{Q_i} \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} [D_{(x,a,u)} f(\Psi)] \mathbb{Q}(du) \Theta(da) dx$$

mit $f : \mathbb{N}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\eta) := \mathbb{E} [\mathbb{1}\{\eta + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)} \in B_r\}].$$

Beweis. Zunächst definieren wir

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &:= \sum_{j \in I_r} \Psi_j = \Psi + \delta_{(\mathbf{0}, V, U)}, \\ \bar{\Psi}_i &:= \sum_{j \in I_r \setminus \{i\}} \Psi_j, \\ \tilde{\Psi}_i &:= \bar{\Psi}_i + \sum_{l=1}^{\vartheta} \delta_{(Y_l, V_l, U_l)} + \mathbb{1}\{i=0\} \delta_{(\mathbf{0}, \tilde{V}, \tilde{U})} \end{aligned}$$

mit $\vartheta \sim \text{Po}(\beta(2D)^d)$, in Q_i gleichverteilten Zufallspunkten Y_1, Y_2, \dots sowie Marken $\Theta \sim \tilde{V}, V_1, V_2, \dots$ und $\mathbb{Q} \sim \tilde{U}, U_1, U_2, \dots$, wobei all diese Objekte unabhängig (insbesondere auch von Ψ, V, U) seien. Um die Notation zu vereinfachen, verzichten wir für diese Prozesse auf den Übergang zum Raum der Simplicialkomplexe und identifizieren sie direkt mit den aus ihnen konstruierten Komplexen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \zeta_i &= \mathbb{P}(\hat{\Psi} \in B_r, \bar{\Psi}_i \notin B_r \text{ oder } \hat{\Psi} \notin B_r, \bar{\Psi}_i \in B_r) \\ &= 2 \mathbb{P}(\hat{\Psi} \notin B_r, \bar{\Psi}_i \in B_r) \\ &\leq 2 \mathbb{P}(\bar{\Psi}_i \notin B_r, \bar{\Psi}_i \in B_r). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Für die Ungleichung beachte man, dass \mathbb{P} -fast sicher stets $T(\bar{\Psi}_i) \subseteq T(\hat{\Psi})$ gilt und das Ereignis B_r wachsend im zugrundeliegenden Simplicialkomplex ist. Für den weiteren Verlauf des Beweises benötigen wir eine neue Konstruktion. Dazu erweitern wir unseren Grundraum $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ zu $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{N}_0$ und wählen ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{S} auf \mathbb{N}_0 . Auf diesem Raum wählen wir die Zerlegung $\mathcal{R} = (Q_i \times \mathbb{A} \times \mathbb{N}_0)_{i \in \mathbb{N}_0}$ und die Relation

$$(x, a, n) \tilde{z} (y, b, m) \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} n < m, & x, y \in Q_i, \\ (x, a) < (y, b), & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $<$ die zuvor gewählte Relation auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}$ bezeichnet. Außerdem sei $\bar{\xi}_i$ ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{A} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{M}$, der aus $\bar{\Psi}_i$ hervorgeht, indem jeder Punkt unabhängig von allen anderen ein Zufallselement in \mathbb{N}_0 mit Verteilung \mathbb{S} zugeordnet bekommt. Wie betrachten die Komplexe

$$\Delta_k := T_{\mathcal{R}, \tilde{z}}^{\varphi_1, \dots, \varphi_k} \left(\bar{\xi}_i + \mathbb{1}\{i=0\} \delta_{(\mathbf{0}, V, U, 0)} + \sum_{j=1}^k \delta_{(Y_j, V_j, U_j, j)} \right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (6.21)$$

wobei Δ_k ein Element von $\mathbb{N}_K(S(\mathbb{R}^d \times \mathbb{A}))$ sei, d.h. die zusätzlichen Marken in \mathbb{N}_0 werden nach Konstruktion des Komplexes wieder vergessen. Dann gilt $\Delta_\vartheta \stackrel{d}{=} T(\tilde{\Psi}_i)$ und zusammen mit (6.20)

folgt

$$\frac{1}{2}\zeta_i \leq \mathbb{P}(\Delta_0 \notin B_r, \Delta_\vartheta \in B_r). \quad (6.22)$$

Für $i \neq 0$ geht Δ_0 aus Δ_k nämlich wie $T(\bar{\Psi}_i)$ aus $T(\tilde{\Psi}_i)$ durch Einschränkung auf $W \setminus Q_i$ hervor. Im Fall $i = 0$ dahingegen gilt

$$\mathbb{P}(\bar{\Psi}_i \notin B_r, \tilde{\Psi}_i \in B_r) = \mathbb{P}(\tilde{\Psi}_i \in B_r) = \mathbb{P}(\Delta_\vartheta \in B_r) = \mathbb{P}(\Delta_0 \notin B_r, \Delta_\vartheta \in B_r),$$

da der Ursprung in Δ_0 für $q > 0$ nur Teil von Simplex mit Durchmesser größer als D ist und im Fall $q = 0$ wegen (V2) \mathbb{P} -fast sicher eine isolierte Ecke bildet. Per Konstruktion gilt $\Delta_k \subseteq \Delta_l$ für alle $k \leq l$. Mit der Definition

$$N := \inf \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \Delta_k \in B_r\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

($\inf \emptyset := \infty$) erhalten wir aus (6.22)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\zeta_i &\leq \mathbb{P}(0 < N \leq \vartheta) \\ &\leq \beta(2D)^d e^{\beta(2D)^d} \mathbb{P}(N = \vartheta + 1), \end{aligned}$$

wobei die zweite Ungleichung wie in [19] (Beweis von Lemma 6) folgt. Dabei werden keine Eigenschaften der Verteilung von N verwendet, sondern lediglich die Unabhängigkeit von N und ϑ . Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = \vartheta + 1) &= \mathbb{P}(\Delta_\vartheta \notin B_r, \Delta_{\vartheta+1} \in B_r) \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{1}\{\Delta_{\vartheta+1} \in B_r\} - \mathbb{1}\{\Delta_\vartheta \in B_r\}] \\ &= \mathbb{E} [\mathbb{1}\{\hat{\Psi} + \delta_{(Y_1, V_1, U_1)} \in B_r\} - \mathbb{1}\{\hat{\Psi} \in B_r\}] \\ &= \frac{1}{(2D)^d} \int_{Q_i} \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} [D_{(x,a,u)} f(\Psi)] \mathbb{Q}(du) \Theta(da) dx. \end{aligned}$$

□

Mithilfe der beiden Lemmata 6.14 und 6.15 können wir jetzt den scharfen Phasenübergang für die Perkolationsfunktion θ nachweisen.

Theorem 6.16 (Scharfer Phasenübergang). *Die Verbindungsfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$ erfüllen die beiden Eigenschaften (V1), (V2). Dann gelten $\beta_c^{(q)} \in (0, \infty)$ und die nachfolgenden beiden Aussagen.*

(i) Für alle $\beta < \beta_c^{(q)}$ existiert ein $c(\beta) > 0$ mit

$$\theta_r(\beta) \leq e^{-c(\beta)r} \quad \text{für alle } r > 0.$$

(ii) Für alle $\beta_0 > \beta_c^{(q)}$ existiert ein $c(\beta_0) > 0$ mit

$$\theta_\infty(\beta) \geq c(\beta_0)(\beta - \beta_c^{(q)}) \quad \text{für alle } \beta \in (\beta_c^{(q)}, \beta_0).$$

Beweis. Um $\beta_c^{(q)} \in (0, \infty)$ einzusehen, ersetzen wir die Kantenfunktion φ_1 durch die Modifikation

$$\tilde{\varphi}_1((x, a), (y, b)) := \varphi_1((x, a), (y, b)) \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq D\} \quad (6.23)$$

und betrachten die Verbindungsfunktionen $\tilde{\varphi}_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{q+1}$. Wegen (V2) bilden q -Simplizes mit Durchmesser größer als D in $G_q(\Delta^0)$ \mathbb{P} -fast sicher nur isolierte Ecken und haben somit keinen Einfluss auf das Ereignis C_q^∞ . Also bleibt die kritische Intensität $\beta_c^{(q)}$ durch diese Modifikation unverändert. Allerdings erfüllt die Kantenfunktion $\tilde{\varphi}_1$ die Bedingung (6.14) und Theorem 6.12 liefert somit $\beta_c^{(q)} \in (0, \infty)$.

Die beiden Aussagen (i),(ii) folgen aus den Lemmata 6.14 und 6.15 ganz analog wie Theorem 1 aus den beiden Lemmata 5 und 6 in [19], wobei wir grob die wichtigsten Schritte (insbesondere die, die Eigenschaften des Perkulationsmodells verwenden) skizzieren. Zunächst liefert Lemma 6.15 und die Margulis-Russo-Formel (für die Funktion f aus Lemma 6.15 und $k = 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_r} \zeta_i &\leq 2\beta e^{\beta(2D)^d} \int_W \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{M}} \mathbb{E} [D_{(x,a,u)} f(\Psi)] \mathbb{Q}(du) \Theta(da) dx \\ &= 2\beta e^{\beta(2D)^d} \frac{d}{d\beta} \mathbb{E}_\beta [f(\Psi)] \\ &= 2\beta e^{\beta(2D)^d} \frac{d}{d\beta} \theta_r(\beta). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Integrieren wir beide Seiten der OSSS-Ungleichung (6.19) über $s \in [0, r]$, so erhalten wir mit Lemma 6.14 und (6.24)

$$r\theta_r(\beta)(1 - \theta_r(\beta)) \leq 4\beta e^{\beta(2D)^d} \left(D(1 + \sqrt{d}) + \beta(4D)^d \int_0^r \theta_s(\beta) ds \right) \frac{d}{d\beta} \theta_r(\beta),$$

und somit die Differentialungleichung

$$\frac{d}{d\beta} \theta_r(\beta) \geq \frac{r\theta_r(\beta)(1 - \theta_r(\beta))}{4\beta e^{(2D)^d \beta} \left(D(1 + \sqrt{d}) + \beta(4D)^d \int_0^r \theta_s(\beta) ds \right)}. \quad (6.25)$$

Wir fixieren $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ und wählen ein $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$. Für $r \geq D$ impliziert das Eintreten von B_r \mathbb{P} -fast sicher die Existenz eines $(q+1)$ -Simplex $\sigma \in F_{q+1}(\Delta^0)$ mit $\mathbf{0} \in \sigma$, das in $G_q(\Delta^0)$ an mindestens einer Kante beteiligt ist. Somit muss der Ursprung für das Eintreten von B_r \mathbb{P} -fast sicher in einem $q+1$ -Simplex enthalten sein, was wegen (V2) wiederum \mathbb{P} -fast sicher $\Phi(B(\mathbf{0}, D)) \geq q+1$ impliziert. Deshalb folgt für $r \geq D$

$$1 - \theta_r(\beta) \geq \mathbb{P}_\beta(\Phi(B(\mathbf{0}, D)) \leq q) \geq \mathbb{P}_{\beta_2}(\Phi(B(\mathbf{0}, D)) \leq q) =: C_1 > 0.$$

Andererseits gilt für $r \leq \frac{\delta}{4}$, dass die Existenz eines $(q+1)$ -Simplex $\sigma \in \Delta^0$ mit $\mathbf{0} \in \sigma \subset B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2})$ und $\sigma \cap B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})^c \neq \emptyset$ das Eintreten von B_r impliziert. Deswegen liefert die Eigenschaft (V1) der Verbindungsfunktionen

$$\begin{aligned} \theta_r(\beta) &\geq \varepsilon \mathbb{P}_\beta(\Psi(B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4}) \times A) \geq q, \Psi((B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2}) \setminus B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})) \times A) \geq 1) \\ &\geq \varepsilon \mathbb{P}_{\beta_1}(\Psi(B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4}) \times A) \geq q, \Psi((B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2}) \setminus B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})) \times A) \geq 1) \\ &\geq \varepsilon \mathbb{P}_{\beta_1}(\Psi(B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4}) \times A) = q, \Psi((B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2}) \setminus B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})) \times A) = 1) \\ &\geq \varepsilon \Theta(A)^{q+1} \mathbb{P}_{\beta_1}(\Phi(B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})) = q, \Phi(B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{2}) \setminus B(\mathbf{0}, \frac{\delta}{4})) = 1) =: C_2 > 0. \end{aligned}$$

Daher folgt für alle $r \geq \frac{\delta}{4}$

$$\int_0^r \theta_s(\beta) ds \geq C_2 \frac{\delta}{4}.$$

Da die beiden unteren Schranken C_1, C_2 nicht von $r \geq D$ und $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ abhängen, liefert die Differentialungleichung (6.25), dass für alle $0 < \beta_1 < \beta_2 < \infty$ eine Konstante $c > 0$ existiert, sodass für alle $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ und $r \geq D$ die Ungleichung

$$\frac{d}{d\beta} \log(\theta_r(\beta)) \geq c \frac{r}{\int_0^r \theta_s(\beta) ds}$$

gilt. Diese Aussage ist das Analogon zu Lemma 4 in [19]. Wir definieren

$$\tilde{\beta} := \sup \left\{ \beta > 0 \mid \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\int_0^r \theta_s(\beta) ds \right)}{\log(r)} < 1 \right\} \in [0, \infty]$$

mit $\sup \emptyset := 0$. Aus $\beta > \beta_c^{(q)}$ folgt $\theta(\beta) > 0$ und deshalb

$$\frac{\log \left(\int_0^r \theta_s(\beta) ds \right)}{\log(r)} \geq \frac{\log(\theta(\beta)) + \log(r)}{\log(r)} \rightarrow 1 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

und somit insbesondere $\tilde{\beta} \leq \beta_c^{(q)} < \infty$. Im Folgenden notieren wir die Perkolationsfunktion mit $\theta^{(q)}$ und definieren $\theta^{(l)}$ für $l \in \{0, \dots, q-1\}$ auf die selbe Art und Weise (auch wenn κ_l nicht zwangsläufig die Eigenschaft (V2) erfüllt). Es lässt sich leicht überprüfen, dass dann $\theta^{(l)} \leq \theta^{(k)}$ für $k \leq l$ gilt. Um $\tilde{\beta} > 0$ ersetzen wir die Kantenfunktion φ_1 wieder durch die Modifikation $\tilde{\varphi}_1$ aus (6.23) und notieren die Perkolationsfunktionen bzgl. den Verbindungsfunktionen $\tilde{\varphi}_1, \varphi_2 \dots, \varphi_{q+1}$ mit $\tilde{\theta}^{(0)}, \dots, \tilde{\theta}^{(q)}$. Da für die Funktion $\theta^{(q)}$ nur Simplexes mit Durchmesser höchstens D eine Rolle spielen, gilt $\tilde{\theta}^{(q)} = \theta^{(q)}$ und somit insbesondere $\theta^{(q)} \leq \tilde{\theta}^{(0)}$. Man beachte, dass im Fall $q = 0$ wegen der Eigenschaft (V2) (für die Funktion $\kappa_{q+1} = \kappa_1 = \varphi_1$) die Funktionen $\varphi_1, \tilde{\varphi}_1$ $(\lambda_d \otimes \Theta)^2$ -fast überall übereinstimmen. Offensichtlich gilt die funktionale Abschätzung $\tilde{\varphi}_1 \leq \hat{\varphi}$ mit

$$\hat{\varphi}((x, a), (y, b)) := \mathbb{1} \{ \|x - y\| \leq D \}.$$

Wir betrachten den zufälligen Graphen mit der Kantenfunktion $\hat{\varphi}$, also den geometrischen Graphen

mit Parameter D , und notieren die zugehörige Perkulationsfunktion mit $\hat{\theta}^{(0)}$. Theorem 6.12 liefert $\hat{\beta}_c^{(0)} \in (0, \infty)$ für die zugehörige kritische Intensität $\hat{\beta}_c^{(0)}$. Es ist bekannt (vgl. [36] oder Theorem 1.1 in [47] für ein noch allgemeineres Resultat), dass die Perkulationsfunktion $\hat{\theta}^{(0)}$ für $\beta < \hat{\beta}_c^{(0)}$ exponentiell im Radius fällt. Wegen $\tilde{\varphi}_1 \leq \hat{\varphi}$ gilt dies auch für $\tilde{\theta}^{(0)}$ und wegen $\theta^{(q)} \leq \tilde{\theta}^{(0)}$ insbesondere auch für $\theta^{(q)}$. Dies wiederum impliziert $\tilde{\beta} \geq \hat{\beta}_c^{(0)} > 0$.

Der restliche Beweis, der den Nachweis von $\tilde{\beta} = \beta_c^{(q)}$ beinhaltet, erfolgt genau wie der Beweis von Theorem 1 in [19] und ist rein analytischer Natur. Dabei werden keine weiteren Eigenschaften des Perkulationsmodells als die bereits gezeigten Eigenschaften der Perkulationsfunktion verwendet, weswegen wir für den restlichen Beweis komplett auf [19] verweisen. Dazu beachte man noch, dass die Funktion $T_n(\beta)$ aus [19] hier definiert werden muss durch

$$T_n(\beta) := \frac{1}{\log(n)} \sum_{k=\lceil D \rceil}^n \frac{\theta_k(\beta)}{k}, \quad n \geq \lceil D \rceil, \beta > 0,$$

(in [19] wird ab $k = 1$ summiert) damit die dort verwendeten Abschätzungen angewendet werden können. Der Beweis funktioniert auch mit dieser Modifikation ganz analog, denn es gilt insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\beta) = \theta_\infty(\beta)$. \square

Für den Beweis von Theorem 6.16 ist die Beschränktheit der Verbindungsfunktionen im Sinne von (V2) essentiell. Ein Beispiel für ein Theorem wie Theorem 6.16 ohne eine Form von Beschränktheit ist in [12] zu finden. Dort wird die Bedingung (ii) aus Theorem 6.16 für Perkulation im Booleschen Modell mit Kugeln und unbeschränkter Radienverteilung nachgewiesen und darauf hingewiesen, dass Bedingung (i) in dieser Situation im Allgemeinen auch gar nicht gilt. Unseres Wissens ist der scharfer Phasenübergang aus Theorem 6.16 selbst für $q = 0$ (also für das Random Connection Model als zufälliger Graph) noch nicht in der Literatur zu finden.

Schließlich wollen wir noch ein paar Beispiele liefern, in denen die Voraussetzungen von Theorem 6.16 erfüllt sind. Dazu betrachten wir zunächst das Boolesche Modell. In [30] wird ein scharfer Phasenübergang für k -Perkulation im Booleschen Modell (siehe Kapitel 8) unter zwei Bedingungen an die Formverteilung Θ nachgewiesen, die sich ähnlich zu den beiden Bedingungen (V1),(V2) lesen (siehe (B1),(B2) in nachfolgendem Beispiel). Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Perkulationsfunktion dort anders definiert ist.

Beispiel 6.17. *Wir betrachten das Boolesche Modell, also $\mathbb{A} = \mathcal{K}^d$ mit den Verbindungsfunktionen aus (3.40). Die Formverteilung Θ erfülle die nachfolgenden beiden Eigenschaften.*

(B1) *Es gibt ein $r_0 > 0$ mit*

$$\Theta(\{K \in \mathcal{K}^d \mid B(\mathbf{0}, r_0) \subseteq K\}) > 0.$$

(B2) *Es gibt ein $R > 0$ mit*

$$\Theta(\{K \in \mathcal{K}^d \mid K \subseteq B(\mathbf{0}, R)\}) = 1.$$

Dann sind die Bedingungen (V1),(V2) erfüllt. Mit $A := \{K \in \mathcal{K}^d \mid B(\mathbf{0}, r_0) \subseteq K\}$ gilt nämlich einerseits für alle $K_0, \dots, K_{q+1} \in A$ und $x_0, \dots, x_{q+1} \in \mathbb{R}^d$ mit $\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq r_0$

$$\begin{aligned} \kappa_{q+1}((x_0, K_0), \dots, (x_{q+1}, K_{q+1})) &= \mathbb{1} \left\{ \bigcap_{i=0}^{q+1} (x_i + K_i) \neq \emptyset \right\} \\ &\geq \mathbb{1} \left\{ \bigcap_{i=0}^{q+1} B(x_i, r_0) \neq \emptyset \right\} = 1, \end{aligned}$$

weswegen (V1) mit $\varepsilon = 1$ und $\delta = r_0$ erfüllt ist. Andererseits gilt für alle $K_0, \dots, K_{q+1} \in \{K \in \mathcal{K}^d \mid K \subseteq B(\mathbf{0}, R)\}$ (und damit für Θ^{q+2} -fast alle (K_0, \dots, K_{q+1})) und $x_0, \dots, x_{q+1} \in \mathbb{R}^d$ mit $\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) > 2R$

$$\kappa_{q+1}((x_0, K_0), \dots, (x_{q+1}, K_{q+1})) \leq \mathbb{1} \left\{ \bigcap_{i=0}^{q+1} B(x_i, R) \neq \emptyset \right\} = 0,$$

womit (V2) mit der Wahl von $D = 2R$ gilt.

Wir weisen darauf hin, dass $(q+1)$ -Perkolation im Booleschen Modell (im Sinne von [30]) äquivalent zur Perkolation von $G_q(\Delta)$ in Beispiel 6.17 ist. Da die Verbindungsfunktionen aus (3.40) nur Werte in $\{0, 1\}$ annehmen, fassen wir Ψ hier als Poissonprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ auf. Mit $(q+1)$ -Perkolation im Booleschen Modell ist die Existenz einer unbeschränkten Zusammenhangskomponenten in der Menge

$$Z^{(q+1)} := \bigcup_{(x_0, K_0), \dots, (x_q, K_q) \in \Psi}^{\neq} (x_0 + K_0) \cap \dots \cap (x_q + K_q) \quad (6.26)$$

gemeint, wobei die Vereinigung hier nur über paarweise verschiedene Punkte von Ψ gebildet wird. Wir nennen eine Menge aus der Vereinigung in (6.26) ein Korn von $Z^{(q+1)}$.

Korollar 6.18. Für die Menge $Z^{(q+1)}$ aus (6.26) und den Simplicialkomplex $\Delta = T(\Psi)$ gilt \mathbb{P} -fast sicher

$$Z^{(q+1)} \text{ perkoliert} \iff G_q(\Delta) \text{ perkoliert.}$$

Beweis. Wie beispielsweise in [47] (Seite 867) erwähnt, bildet die Annahme, dass die Formverteilung Θ sich auf Mengen konzentriert, die den Ursprung enthalten, keine Einschränkung der Allgemeinheit. Um die Aussage der Bemerkung zu beweisen, fixieren wir eine Realisierung von Ψ , sodass die Projektion von Ψ auf \mathbb{R}^d lokal-endlich und einfach ist und alle Marken den Ursprung enthalten. Einerseits folgt aus der Perkolation von $G_q(\Delta)$ die Existenz eines unendlich langen Kantenswegs $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ in $G_q(\Delta)$. Definieren wir

$$Z_i := \bigcap_{(x, K) \in \sigma_i} (x + K).$$

Dann folgt für alle $i \in \mathbb{N}$ aus $[\sigma_i, \sigma_{i+1}] \in G_q(\Delta)$ zunächst $\sigma_i \cup \sigma_{i+1} \in \Delta$ und per Definition der Verbindungsfunktionen (3.40) $Z_i \cap Z_{i+1} \neq \emptyset$. Also handelt es sich bei der Menge $\cup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$ (es sind unendliche viele Punkte der lokal endlichen Projektion von Ψ auf \mathbb{R}^d enthalten) um eine unbeschränkte zusammenhängende Menge, womit $Z^{(q+1)}$ eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente enthält.

Existiert andererseits eine unbeschränkte Komponente in $Z^{(q+1)}$, so finden wir paarweise verschiedene Körner Z_1, Z_2, \dots von $Z^{(q+1)}$ (also Mengen aus der Vereinigung in (6.26)), sodass $Z_i \cap Z_{i+1} \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Setzen wir zu $i \in \mathbb{N}$ mit $Z_i = \cap_{j=0}^q (x_j + K_j)$

$$\sigma_i := [(x_0, K_0), \dots, (x_q, K_q)], \quad (6.27)$$

so sind für alle $i \in \mathbb{N}$ die beiden Simplizes σ_i, σ_{i+1} in $G_q(\Delta)$ durch einen Kantenweg verbunden, woraus die Perkolation von $G_q(\Delta)$ folgt. Zum Nachweis dieser Behauptung seien $i \in \mathbb{N}$, $k := \sigma_i \cap \sigma_{i+1} \in \{0, \dots, q\}$ und

$$\sigma_i = [(x_0, K_0), \dots, (x_q, K_q)], \quad \sigma_{i+1} = [(x_0, K_0), \dots, (x_{k-1}, K_{k-1}), (y_1, C_1), \dots, (y_{q+1-k}, C_{q+1-k})]$$

mit paarweise verschiedenen Punkten $(x_0, K_0), \dots, (x_q, K_q), (y_1, C_1), \dots, (y_{q+1-k}, C_{q+1-k})$ von Ψ . Dann folgt aus $Z_i \cap Z_{i+1} \neq \emptyset$

$$(x_0 + K_0) \cap \dots \cap (x_q + K_q) \cap (y_1 + C_1) \cap \dots \cap (y_{q+1-k} + C_{q+1-k}) \neq \emptyset. \quad (6.28)$$

Definieren wir

$$\rho_j := [(x_j, K_j), \dots, (x_q, K_q), (y_1, C_1), \dots, (y_j, C_j)], \quad j \in [q - k],$$

so handelt es sich bei $\sigma_i, \rho_1, \dots, \rho_{q-k}, \sigma_{i+1}$ wegen (6.28) um einen Kantenweg in $G_q(\Delta)$. \square

Schließlich wollen wir noch eine Beispielklasse von Verbindungsfunktionen angeben, die die Voraussetzungen von Theorem 6.16 erfüllen. Dafür betrachten wir das unmarkierte stationäre Modell, das aus dem markierten Fall hervorgeht, indem \mathbb{A} als einelementige Menge gewählt wird. Um die Notation zu vereinfachen, verzichten wir dabei im Folgenden komplett auf den Markenraum \mathbb{A} .

Beispiel 6.19. Es seien $\phi_1, \dots, \phi_{q+1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$ monoton fallende Funktionen, die nicht fast überall verschwinden, und $D > 0$. Definiere Verbindungsfunktionen $\varphi_j : (\mathbb{R}^d)^{j+1} \rightarrow [0, 1]$, $j \in [q + 1]$, durch

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_0, \dots, x_j) &:= \phi_j(\text{diam}(\{x_0, \dots, x_j\})), \quad j \in [q] \\ \varphi_{q+1}(x_0, \dots, x_{q+1}) &:= \phi_{q+1}(\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\})) \mathbb{1}\{\text{diam}(\{x_0, \dots, x_{q+1}\}) \leq D\}. \end{aligned}$$

Dann existiert zu jedem $j \in [q + 1]$ ein $b_j > 0$ mit $\phi_j(b_j) > 0$. Mit der Notation $b := \min_{j \in [q+1]} b_j > 0$

und $c := \min_{j \in [\alpha]} \phi_j(b_j) > 0$ folgt für alle $x_0, \dots, x_\alpha \in \mathbb{R}^d$ mit $\text{diam}(\{x_0, \dots, x_\alpha\}) \leq b$

$$\begin{aligned} \kappa_{q+1}(x_0, \dots, x_{q+1}) &= \prod_{\emptyset \neq I \subseteq \{0, \dots, q+1\}} \varphi_{|I|-1}(x_I) \\ &\geq \prod_{\substack{I \subseteq \{0, \dots, q+1\}, \\ |I| \geq 2}} c = c^{(q+2)^2 - (q+3)} > 0. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\varphi_{|I|-1}(x_I)$ den Funktionswert von $\varphi_{|I|-1}$ unter den Argumenten x_i , $i \in I$. Also besitzen die Verbindungsfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+1}$ die Eigenschaft (V1). Die Eigenschaft (V2) ist offensichtlich nach Definition von φ_{q+1} erfüllt.

Beispiel 6.20. Der Vietoris-Rips- und der Čech-Komplex erfüllen die Eigenschaften (V1),(V2). Ersterer entspricht der Wahl der Verbindungsfunktionen

$$\varphi_1(x, y) := \mathbb{1}\{\|x - y\| \leq 2r\}, \quad \varphi_j \equiv 1, \quad j \in \{2, \dots, q+1\},$$

für ein $r > 0$. Wegen der Definition der Kantenfunktion kann o.B.d.A. auch $\varphi_j(x_0, \dots, x_j) := \mathbb{1}\{\text{diam}(\{x_0, \dots, x_j\}) \leq D\}$ gewählt werden ohne das Modell zu verändern, wodurch direkt klar wird, dass es sich um einen Spezialfall von Beispiel 6.19 handelt. Der Čech-Komplex zum Parameter $r > 0$ entspricht dagegen der Wahl der Verbindungsfunktionen

$$\varphi_j(x_0, \dots, x_j) := \mathbb{1}\left\{\bigcap_{i=0}^j B(x_i, r) \neq \emptyset\right\}, \quad j \in [q+1],$$

womit es sich um einen Spezialfall von Beispiel 6.17 mit $\Theta = \delta_{B(\mathbf{0}, r)}$ handelt.

ANHANG A

SIMPLEXKATALOG UND SIMULATIONEN ZUR NORMALAPPROXIMATION

Auf den nachfolgenden Seiten befinden sich folgende Abbildungen. Zunächst zeigt Abbildung [A.1](#) geometrische Realisierungen der zu den im Laufe der Arbeit auftauchenden Integralformen assoziierten Simplizialkomplexe. Außerdem zeigen die Abbildungen [A.2](#) und [A.3](#) Histogramme der simulierten standardisierten Euler-Charakteristik mit der Dichte der Standard-Normalverteilung in den beiden Beispielmotellen aus Abbildung [1.3](#).

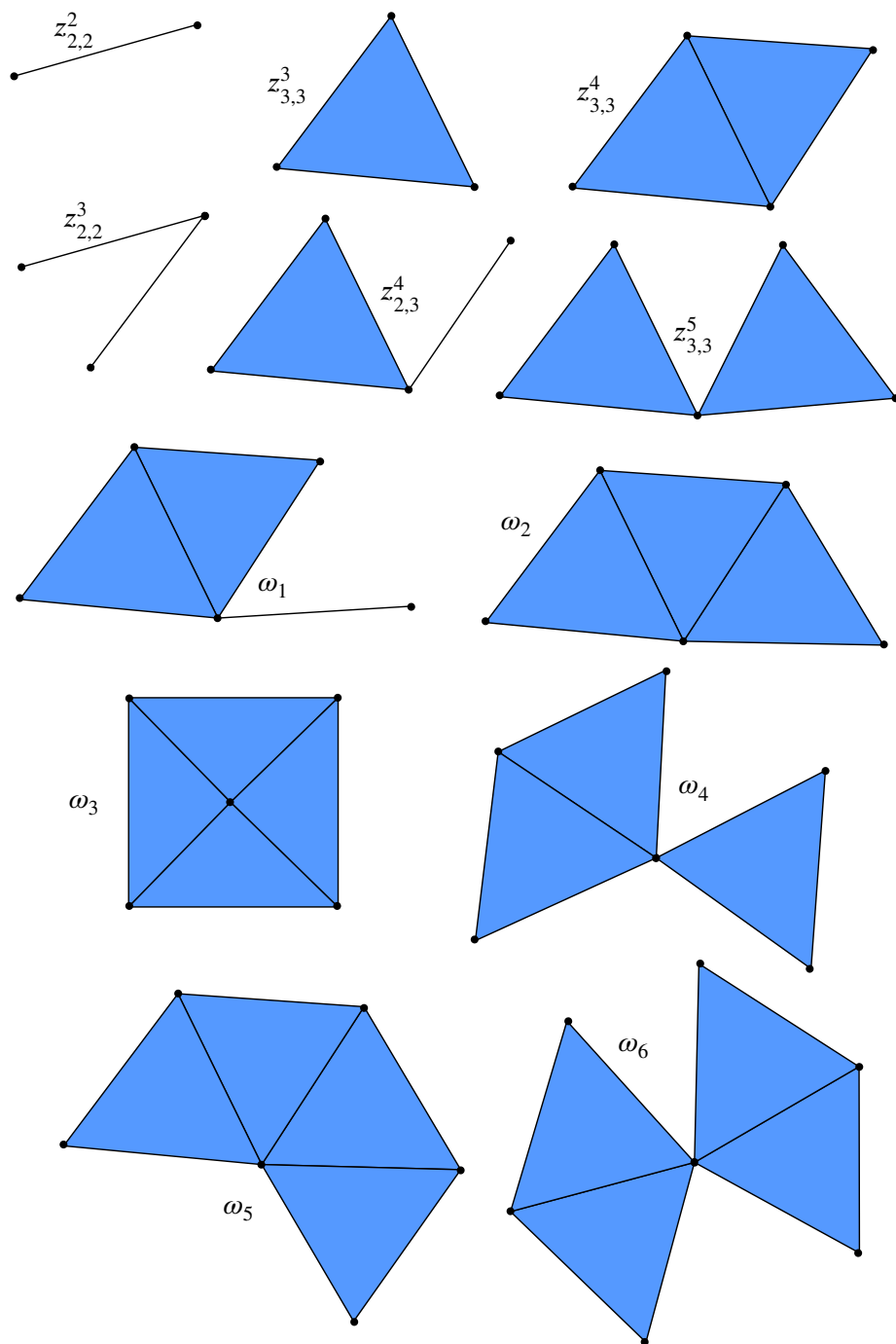


Abbildung A.1.: Assoziierte Simplicialkomplexe zu den im Laufe der Arbeit auftauchenden Integralformen

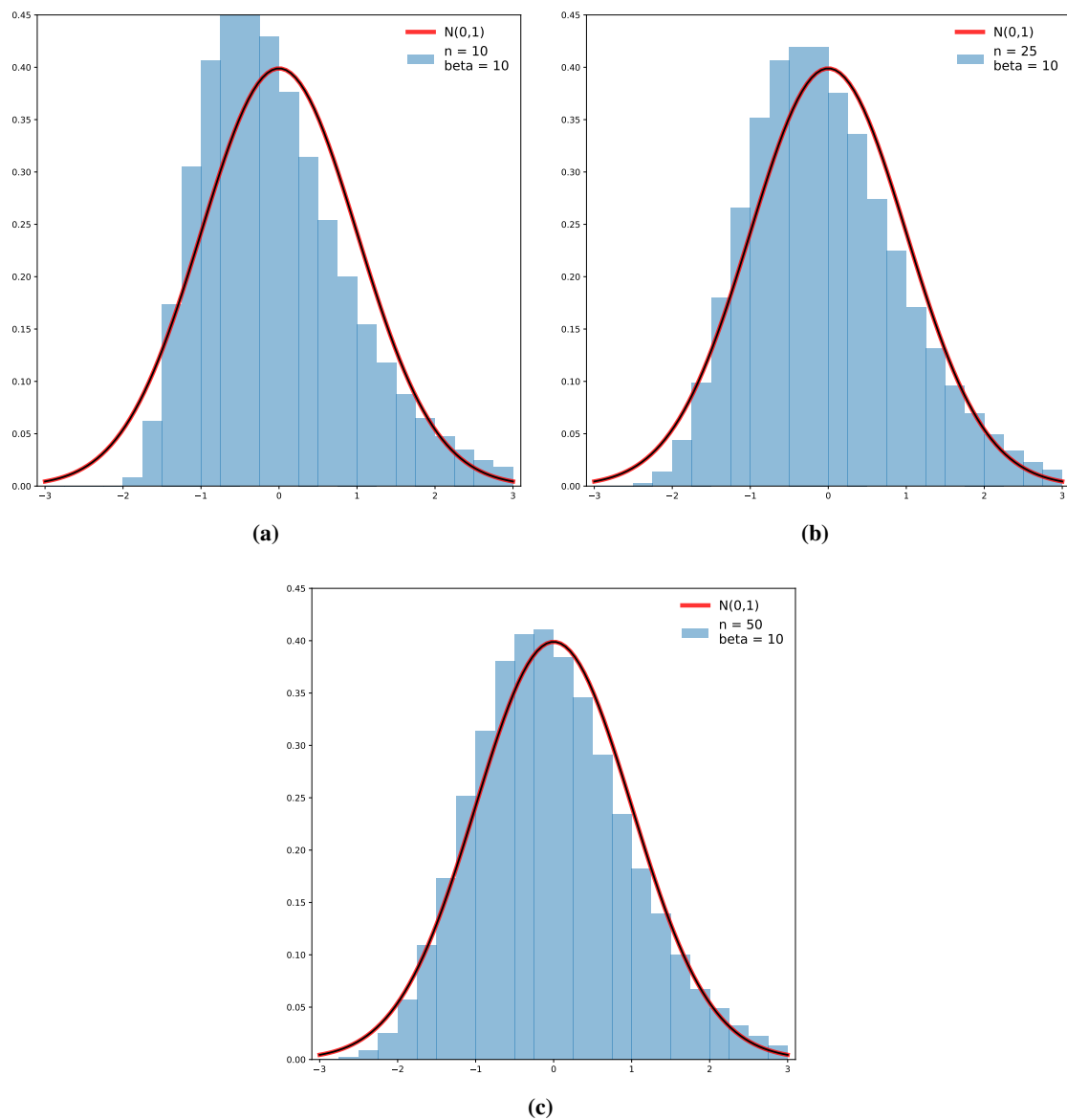


Abbildung A.2.: Histogramme der standardisierten Euler-Charakteristik von 5,000,000 (a) bzw. 1,000,000 (b) bzw. 100,000 (c) unabhängigen Realisierungen des Modells mit den Verbindungsfunktionen aus (1.1) (mit $r = p = \frac{1}{2}$) für verschiedene Größen des Beobachtungsfensters $W = \left[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right]$ mit der Dichte der Standard-Normalverteilung

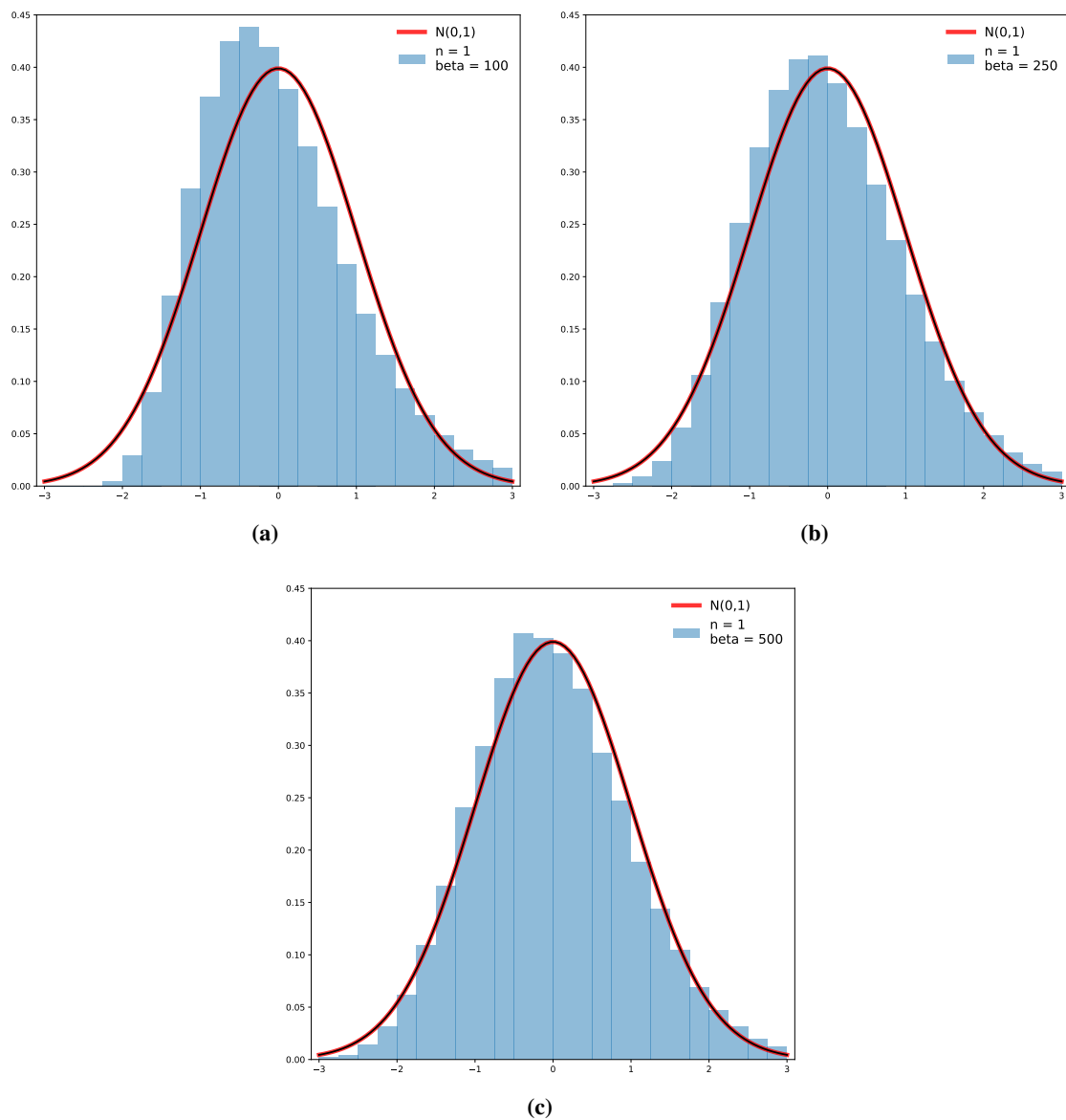


Abbildung A.3.: Histogramme der standardisierten Euler-Charakteristik von 5,000,000 (a) bzw. 1,000,000 (b) bzw. 100,000 (c) unabhängigen Realisierungen des Modells mit den Verbindungsfunktionen aus (1.2) (mit $\gamma = 4, \theta = \frac{1}{100}$) für verschiedene Werte der Intensität β mit der Dichte der Standard-Normalverteilung

ANHANG B

KOMBINATORISCHE GRÖSSEN AUS DEM BEWEIS VON PROPOSITION 4.5

Dieser Abschnitt dient zur Erläuterung und konkreten Angabe der kombinatorischen Größen $\gamma_{i,j,m,l}, \mu_{i,j,m,l}, \gamma_{i,m,l}, \mu_{i,m,l}$ für $i, j, m, l \in [\alpha + 1]$ aus dem Beweis von Proposition 4.5. Diese hängen nicht von den konkreten Werten der Indizes i, j, m, l ab, sondern nur davon welche dieser Indizes identisch sind. Dazu führen wir den Begriff einer Multimenge ein.

Bei einer Multimenge \mathcal{M} über einer Menge A handelt es sich anschaulich gesprochen um eine Menge mit Elementen in A , bei der Elemente mehrfach vorkommen dürfen, also eine Vielfachheit besitzen. Formal ist eine Multimenge \mathcal{M} gegeben durch eine Menge von Vielfachheiten $\mu_a \in \mathbb{N}_0$, $a \in A$, notiert durch

$$\mathcal{M} = \{\mu_a \cdot a \mid a \in A\} \quad \text{oder} \quad \mathcal{M} = \{\mu_{a_1} \cdot a_1, \dots, \mu_{a_n} \cdot a_n\} \quad (\text{B.1})$$

für $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir definieren $|\mathcal{M}| := |\{a \in A \mid \mu_a \neq 0\}|$ als die Anzahl von verschiedenen Elementen in \mathcal{M} . Außerdem meinen wir, wenn wir von Elementen von \mathcal{M} sprechen, stets die Elemente von $\{a \in A \mid \mu_a \neq 0\}$. Dabei sind zwei Multimengen $\mathcal{M}_1 = \{\mu_a^{(1)} \cdot a \mid a \in A\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\mu_a^{(2)} \cdot a \mid a \in A\}$ gleich, wenn all ihre Vielfachheiten überstimmen, also $\mu_a^{(1)} = \mu_a^{(2)}$ für alle $a \in A$ gilt. Für eine konkrete Multimenge $\mathcal{M} = \{3 \cdot a, 2 \cdot b\}$ schreiben wir auch $\mathcal{M} = \{a, a, a, b, b\}$. Damit lassen sich die kombinatorischen Größen aus Proposition 4.5 wie folgt beschreiben.

Wir fixieren die Indizes $i, j, m, l \in [\alpha + 1]$ und setzen $\mathcal{M} := \{\{i, j, m, l\}\}$. Per Definition zählt die Größe $\gamma_{i,j,m,l}$ die Möglichkeiten die Rollen der Mengen in (4.21) zu vertauschen unter Erhaltung der Bedingungen $|I| = i, |J| = j, |M| = m, |L| = l$, wobei nicht Vertauschen auch als eine Möglichkeit angesehen wird. Deshalb folgt direkt $\gamma_{i,j,m,l} = 1$ für $|\mathcal{M}| = 4$. Da diese Konstruktion aus (4.21) jeweils symmetrisch in den Mengen I, J und in den Mengen M, L ist, liefert Vertauschen

von I und J bzw. M und L kein noch nicht gezähltes Quadrupel von Mengen. Formal kann $\gamma_{i,j,m,l}$ folgendermaßen dargestellt werden. Es seien I, J, M, L vier verschiedene Mengen mit $|I| = i$, $|J| = j$, $|M| = m$, $|L| = l$. Dann zählt $\gamma_{i,j,m,l}$ die Möglichkeiten zwei dieser vier Mengen auszuwählen, sodass die ausgewählten Mengen die Kardinalitäten i und j besitzen. Das ausgewählte Paar repräsentiert dabei die Mengen, die die Rollen von I, J in (4.21) einnehmen, d.h. formal gilt

$$\gamma_{i,j,m,l} = \left| \left\{ \{A, B\} \subset \{I, J, M, L\} \mid A \neq B, |A| = i \text{ und } |B| = j \text{ oder umgekehrt} \right\} \right|.$$

Für $|\mathcal{M}| = 2$ sagen wir \mathcal{M} erfüllt die Eigenschaft (V) , wenn ein Element in \mathcal{M} die Vielfachheit 3 und das andere die Vielfachheit 1 besitzt. Dementsprechend erfüllt \mathcal{M} die Eigenschaft (V) nicht, wenn beide Elemente die Vielfachheit 2 besitzen. Damit gilt

$$\gamma_{i,j,m,l} = \begin{cases} 1, & |\mathcal{M}| = 4, \\ 6, & |\mathcal{M}| = 1, \\ 1, & |\mathcal{M}| = 3 \text{ mit } i = j \text{ oder } m = l, \\ 2, & |\mathcal{M}| = 3 \text{ sonst,} \\ 3, & |\mathcal{M}| = 2 \text{ und } \mathcal{M} \text{ erfüllt die Eigenschaft (V),} \\ 1, & |\mathcal{M}| = 2 \text{ mit } i = j \neq m = l, \\ 4, & |\mathcal{M}| = 2 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Analog lässt sich $\gamma_{i,m,l}$ schreiben als

$$\gamma_{i,m,l} = \left| \left\{ A \in \{I, M, L\} \mid |A| = i \right\} \right|,$$

wobei I, M, L wieder drei verschiedene Mengen mit $|I| = i$, $|M| = m$ und $|L| = l$ sind. Damit folgt mit $\mathcal{N} := \{i, m, l\}$

$$\gamma_{i,m,l} = \begin{cases} 1, & |\mathcal{N}| = 3, \\ 3, & |\mathcal{N}| = 1, \\ 1, & |\mathcal{N}| = 2 \text{ mit } m = l, \\ 2, & |\mathcal{N}| = 2 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es bleiben noch die Größen $\mu_{i,j,m,l}$, $\mu_{i,m,l}$. Dabei zählt $\mu_{i,j,m,l}$ vier Indizes $i_1, i_2, i_3, i_4 \in [\alpha + 1]$ mit $\{\{i_1, i_2, i_3, i_4\}\} = \{\{i, j, m, l\}\}$ zu wählen, d.h. es gilt

$$\mu_{i,j,m,l} := \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^{\alpha+1} \mathbb{1} \left\{ \{\{i_1, i_2, i_3, i_4\}\} = \{\{i, j, m, l\}\} \right\},$$

bzw. analog

$$\mu_{i,m,l} := \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^{\alpha+1} \mathbb{1}\{\{\{i_1, i_2, i_3\}\} = \{\{i, m, l\}\}\}.$$

Damit ergeben sich die Werte

$$\mu_{i,j,m,l} = \begin{cases} 1, & |\mathcal{M}| = 1, \\ 24, & |\mathcal{M}| = 4, \\ 12, & |\mathcal{M}| = 3, \\ 4, & |\mathcal{M}| = 2 \text{ und } \mathcal{M} \text{ erfüllt die Eigenschaft } (V), \\ 6, & |\mathcal{M}| = 2 \text{ und } \mathcal{M} \text{ erfüllt die Eigenschaft } (V) \text{ nicht,} \end{cases}$$

und

$$\mu_{i,m,l} = \begin{cases} 1, & |\mathcal{N}| = 1, \\ 3, & |\mathcal{N}| = 2, \\ 6, & |\mathcal{N}| = 3. \end{cases}$$

Mit diesen Werten der Größen $\gamma_{i,j,m,l}$, $\mu_{i,j,m,l}$, $\gamma_{i,m,l}$, $\mu_{i,m,l}$ kann nun für jede Wahl der Indizes $i, j, m, l \in [\alpha + 1]$ die Gleichung

$$\mu_{i,j,m,l} \gamma_{i,j,m,l} + 6 \delta_{i,j}^* \delta_{m,l}^* - 2 \delta_{i,j}^* (\mu_{i,m,l} \gamma_{i,m,l} + \mu_{j,m,l} \gamma_{j,m,l}) = 0$$

aus Proposition 4.5 nachgerechnet werden, wobei hier nochmals an die Definition

$$\delta_{i,j}^* := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 2, & i \neq j, \end{cases}$$

erinnert sei.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley series in probability and mathematical statistics. John Wiley and Sons, 3rd edition, 1995. [104](#)
- [2] C. A. N. Biscio, N. Chenavier, C. Hirsch, and A. M. Svane. Testing goodness of fit for point processes via topological data analysis. *Electronic Journal of Statistics*, 14(1):1024–1074, 2020. [4](#), [89](#), [92](#), [93](#)
- [3] B. Bollobás and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2009. [117](#), [132](#)
- [4] A. Caicedo and M. Dickson. Critical Exponents for Marked Random Connection Models. [arXiv:2305.07398](#), 2023. [5](#), [6](#), [53](#), [54](#), [130](#), [131](#), [132](#)
- [5] F. Callegaro, F. Cohen, C. De Concini, E. M. Feichtner, G. Gaiffi, and M. Salvetti. *Configuration Spaces: Geometry, Topology and Representation Theory*, volume 14. Springer, 2016.
- [6] V. H. Can and K. D. Trinh. Random connection models in the thermodynamic regime: central limit theorems for add-one cost stabilizing functionals. *Electronic Journal of Probability*, 27(36):1–40, 2022. [5](#), [10](#), [89](#), [90](#), [92](#), [93](#), [95](#), [97](#), [98](#), [103](#), [105](#), [107](#), [110](#), [111](#), [115](#), [116](#)
- [7] J. D. Candela. Central limit theorems for Soft random simplicial complexes. [arXiv:2311.1065](#), 2024. [3](#), [9](#), [10](#), [59](#)
- [8] M. Chebunin and G. Last. On the uniqueness of the infinite cluster and the cluster density in the Poisson driven random connection model. [arXiv:2403.17762](#), 2024. [5](#), [53](#), [123](#), [137](#)
- [9] A. Costa and M. Farber. Random Simplicial Complexes. In F. Callegaro, F. Cohen, C. De Concini, E. M. Feichtner, G. Gaiffi, and M. Salvetti, editors, *Configuration Spaces: Geometry, Topology and Representation Theory*, volume 14, pages 129–153. Springer, 2016. [3](#), [122](#)
- [10] M. Dickson and M. Heydenreich. The Triangle Condition for the Marked Random Connection Model. [arXiv:2210.07727](#), 2022. [5](#), [6](#), [53](#), [54](#), [123](#), [130](#), [131](#), [132](#), [136](#)
- [11] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, fifth edition, 2017. [58](#), [79](#), [119](#)

- [12] H. Duminil-Copin, A. Raoufi, and V. Tassion. Subcritical phase of d -dimensional Poisson-Boolean percolation and its vacant set. *Annales Henri Lebesgue*, 3:677–700, 2020. [9](#), [10](#), [136](#), [137](#), [138](#), [139](#), [146](#)
- [13] H. Edelsbrunner. *A Short Course in Computational Geometry and Topology*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer International Publishing AG, 1st edition, 2014. [15](#), [17](#), [20](#), [55](#), [90](#)
- [14] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 2nd edition, 1999. [117](#), [122](#)
- [15] J. C. Gupta and B. V. Rao. Van den Berg-Kesten Inequality for the Poisson Boolean Model for Continuum Percolation. *Sankhyā, Seris A*, 61(3):337–346, 1999. [126](#), [128](#)
- [16] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002. [15](#), [20](#), [59](#)
- [17] M. Heydenreich, R. van der Hofstad, G. Last, and K. Matzke. Lace Expansion and Mean-Field Behavior for the Random Connection Model. [arXiv:1908.11356](#), 2023. To appear in *Annales de l'Institut Henri Poincaré*. [121](#), [125](#), [126](#), [129](#)
- [18] Y. Hiraoka, T. Shirai, and K. D. Trinh. Limit theorems for persistence diagrams. *The Annals of Applied Probability*, 28(5):2740–2780, 2018. [9](#), [90](#)
- [19] C. Hirsch and D. Valesin. Face and cycle percolation. [arXiv:2212.06243](#), 2022. [3](#), [5](#), [10](#), [11](#), [117](#), [130](#), [136](#), [137](#), [138](#), [140](#), [143](#), [144](#), [145](#), [146](#)
- [20] D. Hug, G. Last, and M. Schulte. Second-order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. *The Annals of Applied Probability*, 26(1):73–135, 2016. [9](#), [57](#), [59](#)
- [21] S. K. Iyer and D. Yogeshwaran. Thresholds for vanishing of ‘Isolated’ faces in random Čech and Vietoris–Rips complexes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques*, 56(3):1869–1897, 2020. [3](#), [117](#)
- [22] M. Kahle. Topology of random clique complexes. *Discrete Mathematics*, 309(6):1658–1671, 2009. [3](#), [18](#), [89](#), [116](#)
- [23] M. Kahle. Random Geometric Complexes. *Discrete & Computational Geometry*, 45(3):553–573, 2011. [3](#), [89](#), [115](#)
- [24] M. Kahle and E. Meckes. Limit theorems for Betti numbers of random simplicial complexes. *Homology, Homotopy and Applications*, 15(1):343–374, 2013. [3](#), [10](#), [89](#)
- [25] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*, volume 99 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer, third edition edition, 2021. [13](#), [31](#), [87](#), [95](#), [98](#), [99](#), [101](#), [106](#)
- [26] W. S. Kendall and I. Molchanov. *New Perspectives in Stochastic Geometry*. Oxford University Press, 2009.

-
- [27] M. Kuba and A. Panholzer. On moment sequences and mixed Poisson distributions. *Probability Surveys*, 13:89–155, 2016. [54](#), [109](#), [110](#)
- [28] G. Last, F. Nestmann, and M. Schulte. The random connection model and functions of edge-marked Poisson processes: Second order properties and normal approximation. *The Annals of Applied Probability*, 31(1):128–168, 2021. [5](#), [10](#), [32](#), [46](#), [51](#), [52](#), [57](#), [66](#), [70](#), [111](#)
- [29] G. Last, G. Peccati, and M. Schulte. Normal approximation on Poisson spaces: Mehler’s formula, second order Poincaré inequalities and stabilization. *Probability Theory and Related Fields*, 165:667–723, 2016. [10](#), [22](#), [23](#)
- [30] G. Last, G. Peccati, and D. Yogeshwaran. Phase transitions and noise sensitivity on the poisson space via stopping sets and decision trees. *Random Structures & Algorithms*, 63(2):457–511, 2023. [11](#), [136](#), [146](#), [147](#)
- [31] G. Last and M. D. Penrose. *Lectures on the poisson process*. Cambridge University Press, 2018. [12](#), [13](#), [14](#), [15](#), [22](#), [23](#), [24](#), [28](#), [29](#), [38](#), [45](#), [49](#), [51](#), [53](#), [54](#), [123](#), [124](#), [125](#), [126](#), [127](#)
- [32] J. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2011. [17](#)
- [33] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 1996. [117](#), [136](#)
- [34] F. Nestmann. *Zentrale Grenzwertsätze im Random Connection Model*. PhD thesis, Karlsruhe Institute of Technology, 2019. [28](#), [43](#), [44](#), [45](#), [46](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [52](#), [57](#), [66](#), [69](#), [111](#), [114](#)
- [35] M. Penrose. On a continuum percolation model. *Advances in Applied Probability*, 23(3):536–556, 1991. [5](#), [6](#), [54](#), [132](#), [135](#)
- [36] M. Penrose. *Random Geometric Graphs*. Oxford studies in probability. Oxford University Press, 2003. [4](#), [146](#)
- [37] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 3rd edition, 2019. [7](#)
- [38] N. Ross. Fundamentals of Stein’s method. *Probability Surveys*, 8:210–293, 2011. [22](#)
- [39] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and integral geometry*. Probability and Its Applications. Springer, 2008. [9](#), [57](#), [59](#), [103](#), [104](#)
- [40] T. Schreiber. Limit Theorems in Stochastic Geometry. In W. S. Kendall and I. Molchanov, editors, *New Perspectives in Stochastic Geometry*, pages 111–144. Oxford University Press, 2009. [92](#)
- [41] M. Schulte. *Malliavin-Stein Method in Stochastic Geometry*. PhD thesis, University Osnabrück, 2013. [22](#)

- [42] M. Schulte and J. E. Yukich. Rates of multivariate normal approximation for statistics in geometric probability. *The Annals of Applied Probability*, 33(1):507–548, 2023. [22](#), [92](#)
- [43] A. M. Thomas and T. Owada. Functional limit theorems for the Euler characteristic process in the critical regime. *Advances in Applied Probability*, 53:57–80, 2021. [3](#), [5](#), [10](#), [59](#)
- [44] K. D. Trinh. On central limit theorems in stochastic geometry for add-one cost stabilizing functionals. *Electronic Communications in Probability*, 24(76):1–15, 2019. [93](#), [96](#), [103](#)
- [45] R. van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*, volume 1 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016. [3](#), [54](#), [114](#)
- [46] D. Yogeshwaran, E. Subag, and R. J. Adler. Random geometric complexes in the thermodynamic regime. *Probability Theory and Related Fields*, 167:107–142, 2017. [3](#), [5](#), [10](#), [20](#), [89](#), [90](#)
- [47] S. Ziesche. Sharpness of the phase transition and lower bounds for the critical intensity in continuum percolation on \mathbb{R}^d . *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques*, 54(2):866–878, 2018. [9](#), [11](#), [146](#), [147](#)