

**Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen  
der Universität (TH) Karlsruhe**

Prof. Dr.-Ing. K. Möhler

Das vorliegende wissenschaftliche Werk beschreibt die Spannungsberechnung von Kreisbogen scheiben aus anisotropem Holz unter Berücksichtigung der Biegungsgleichungen der Kreisbogen Scheiben nach dem Verfahren der finiten Elemente. Die Berechnung wird auf Kreisbogen Scheiben mit konstanter Dicke und auf Kreisbogen Scheiben mit variabler Dicke angewendet. Die Berechnung wird auf Kreisbogen Scheiben mit konstanter Dicke und auf Kreisbogen Scheiben mit variabler Dicke angewendet.

**SPANNUNGSBERECHNUNGEN  
AN ANISOTROPEN KREISBOGENSCHEIBEN  
UND SATTELTRAEGERN  
KONSTANTER DICKE**

Die Arbeit ist als Dissertation im Fach Bauingenieurwesen eingereicht worden. Sie ist als wissenschaftliches Werk verfasst. Das Werk ist in deutscher Sprache verfasst und besteht aus einer Einleitung und aus einer Arbeitsergebnissen. Die Arbeit ist in deutscher Sprache verfasst und besteht aus einer Einleitung und aus einer Arbeitsergebnissen.

**von**

**Hermann Blumer**

**Lehrstuhl für  
Ingenieurholzbau u. Baukonstruktionen  
Universität (TH) Karlsruhe  
Prof. Dr.-Ing. K. Möhler**

## VORWORT

Brettschichtträger mit Rechteckquerschnitt haben in den letzten Jahren im Holzbau eine zunehmende Anwendung gefunden. Dabei hat man schon frühzeitig neben den geraden parallelgurtigen Biegeträgern und den oft weitgespannten Bogenträgern mit verhältnismäßig großen Krümmungshalbmessern Träger- und Rahmenformen ausgeführt, bei denen in einem gewissen Bereich stärkere Krümmungen konstanter oder veränderlicher Querschnittshöhe vorkamen. Schließlich waren auch ausspringende Rahmenecken oder Satteldachträger mit gekrümmtem Untergurt und geneigtem Obergurt keine Seltenheit. Bei diesen Trägerformen traten oft Rißschäden auf, die auf die Wirkung von Querzugspannungen zurückzuführen waren. Die theoretischen und versuchstechnischen Untersuchungen derartiger Träger haben schließlich gezeigt, daß auch bei Satteldachträgern mit geradem Untergurt und bei Voutenträgern Querspannungen auftreten, die beim anisotropen Baustoff Holz nicht ohne weiteres vernachlässigt werden können.

Im Zuge der in Karlsruhe durchgeföhrten Versuche über die in Heft 92 der "Berichte aus der Bauforschung" berichtet wurde, hat Blumer die theoretische Spannungsberechnung für praktisch alle vorkommenden Trägerformen unter Berücksichtigung der Anisotropie des Holzes durchgeführt. Dabei hat er über die teilweise in der Literatur auf anderem Wege ermittelten Spannungen aus Moment hinaus, auch die Größe und Verteilung der Längs-, Quer- und Schubspannungen aus Normalkraft und Querkraft erfaßt. Mit diesen Angaben lassen sich die jeweils ungünstigsten Lastfälle bezüglich der entstehenden Maximalspannungen berechnen. Manch ein in den letzten Jahren aufgetretener Schadensfall erfährt damit seine Aufklärung. Die Zulässigkeit der von Blumer benutzten Näherungsansätze ist durch die Versuchsergebnisse und soweit möglich durch Vergleich mit den Ergebnissen anderer Forscher belegt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß Blumer die für europäisches Nadelholz maßgebenden Werkstoffkenngrößen  $E$ ,  $G$  und  $\mu$  verwendet und seine in den Diagrammen enthaltenen Lösungen daher für Brettschichtholz nach DIN 1052 unmittelbar angewendet werden können.

Die Ergebnisse der umfangreichen und für Holzleimkonstruktionen sehr wertvollen

Arbeit stellen einen wichtigen Beitrag zur Erhöhung der Sicherheit derartiger Konstruktionen dar. Sie erfassen die Eigenschaften des anisotropen Baustoffes Holz und lassen erkennen, daß man nicht einfach die vom Stahlbau und Stahlbetonbau gewohnten Tragwerksformen auf den Holzbau übertragen kann. Da die zusammengesetzten Festigkeiten des Holzes bei gleichzeitiger Wirkung von Längs-, Quer- und Schubspannungen noch unerforscht sind, ist Vorsicht überall dort geboten, wo zusammengesetzte Beanspruchungen vorliegen, so daß in der Regel eine Ausnutzung der zulässigen Einzelspannungen an diesen Stellen nicht möglich ist. Hier müssen durch weitere Forschungsarbeiten, wie sie bereits in Karlsruhe und München angelaufen sind, die erforderlichen Unterlagen erarbeitet werden.

Die Darstellung der Ergebnisse in Form von Diagrammen, aus denen der Einfluß der maßgebenden Parameter (Krümmungsverhältnis und Neigung des Obergurts) unmittelbar entnommen werden kann, stellen nicht nur eine wesentliche Erleichterung für die Spannungsberechnung dar, sie ermöglichen es auch dem Konstrukteur, gefährliche Spannungszustände durch geschickte Wahl der Konstruktionsform zu vermeiden. Hierdurch wird der Wert der Arbeit erheblich gesteigert.

Möhler

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Literaturverzeichnis	5
Bezeichnungen und Abkürzungen	6
1. Einleitung	9
2. Grundlagen	12
2.1. Allgemeine Betrachtungen und Voraussetzungen	12
2.2. Die Scheibengleichung im kartesischen Koordinatensystem	15
2.2.1. Gleichgewichtsbedingungen	15
2.2.2. Geometrische Beziehungen	16
2.2.3. Hooke'sches Gesetz	16
2.2.4. Lösung mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion	17
2.2.5. Lösungsansatz für die Spannungsfunktion	18
2.3. Die Scheibengleichung im Polarkoordinatensystem	20
2.3.1. Gleichgewichtsbedingungen	20
2.3.2. Geometrische Beziehungen	20
2.3.3. Hooke'sches Gesetz	21
2.3.4. Lösung mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion	22
2.3.5. Lösungsansatz für die Spannungsfunktion	23
3. Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit Momenten- Normalkraft- und Querkraftbelastung	26
3.1. Grundlastfälle	26
3.2. Spannungszustand für den Grundlastfall: Reine Biegung	27
3.3. Spannungszustand für den Grundlastfall: Querkraft	30
3.4. Spannungszustand für den Grundlastfall: Normalkraft	34
3.5. Näherungsformeln für die polarorthotrope Kreisbogen- scheibe mit reiner Biegung	36
3.6. Rechnerische Auswertung der Spannungen	39
4. Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand (gekrümpter Sattelträger)	40
4.1. Grundlastfälle	40
4.2. Reine Biegung	42
4.2.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	42
4.2.2. Spannungszustand für reine Biegung	45
4.3. Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft	59

4.3.1.	Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	59
4.3.2.	Spannungszustand für Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft	59
4.4.	Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft	66
4.4.1.	Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	66
4.4.2.	Spannungszustand für Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft	67
4.5.	Rechnerische Auswertung der Spannungen	72
5.	Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand (gerader Sattelträger)	74
5.1.	Grundlastfälle	74
5.2.	Reine Biegung	75
5.2.1.	Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	75
5.2.2.	Spannungszustand für reine Biegung	77
5.3.	Reine Normalkraft in den Endquerschnitten	91
5.3.1.	Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	91
5.3.2.	Spannungszustand für reine Normalkraftbelastung	91
5.4.	Biegung mit antimetrischer Querkraft	99
5.4.1.	Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen	99
5.4.2.	Spannungszustand für Biegung mit antimetrischer Querkraft	100
5.5.	Rechnerische Auswertung der Spannungen	107
6.	Darstellungen errechneter Spannungsverteilungen	108
6.1.	Spannungsberechnungen an der polarorthotropen Kreisbogenscheibe	108
6.1.1.	Reine Momentenbelastung (Tafeln 1 - 4)	108
6.1.2.	Reine Normalkraftbelastung im Schnitt A - A (Tafeln 5 - 8)	113
6.1.3.	Reine Querkraftbelastung im Schnitt A - A (Taf. 9,10)	118
6.2.	Spannungsberechnungen an der axialsymmetrischen orthotropen Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand	121
6.2.1.	Reine Momentenbelastung (Tafeln 11. - 15)	121
6.2.2.	Zentrische Normalkraftbelastung im Firstquerschnitt (Tafeln 16 - 19)	127
6.2.3.	Reine Querkraftbelastung im Firstquerschnitt (Tafeln 20,21)	132

6.3.	Spannungsberechnungen an der axialsymmetrischen polarorthotropen Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand	135
6.3.1.	Reine Momentenbelastung (Tafeln 22 - 25)	135
6.3.2.	Zentrische Normalkraftbelastung im Firstquerschnitt (Tafeln 27 - 29)	141
6.3.3.	Reine Querkraftbelastung im Firstquerschnitt (Tafeln 30, 31)	145
7.	Diskussion der ermittelten Spannungswerte und Vergleich mit den Versuchsergebnissen	148
7.1.	Genauigkeitsbetrachtungen	148
7.2.	Vergleich der theoretischen Spannungswerte mit Messungen an einigen Versuchskörpern	149
7.2.1.	Anlage und Durchführung der Versuche	149
7.2.2.	Messresultate und Vergleich mit der theoretischen Spannungsverteilung	150
8.	Zahlenbeispiele	156
8.1.	Biegespannung am Pultdachträger mit Rechteckquerschnitt	156
8.2.	Biegespannungen und max. Querspannung am geraden Sattelträger mit Rechteckquerschnitt	157
8.3.	Spannungsnachweis am gekrümmten Sattelträger mit Rechteckquerschnitt	159
8.4.	Spannungsnachweis an der gekrümmten Rahmenecke mit Rechteckquerschnitt	161
9.	Algol - 60 Rechenprogramme	163
10.	Zusammenfassung und abschliessende Betrachtungen	165
10.1.	Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe	165
10.2.	Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmten inneren und geneigtem äusseren Rand	166
10.3.	Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand	167
11.	Näherungslösungen für die praktische Anwendung	169

Literaturverzeichnis

- [1] Winkler: Civ. Ing. 1858, Bd. 4.  
Grashof: Theorie von der Elastizität und Festigkeit  
1878.
- [2] Stüssi, F.: Baustatik I. 3. Auflage, 1962.
- [3] Schelling, W.: Berechnung gekrümmter Brettschichtträger  
mit Biegebeanspruchung.  
Bauen mit Holz, 4/1967.
- [4] Heimeshoff, B.: Praktische Spannungsberechnung für den ge-  
krümmten Träger mit Rechteckquerschnitt.  
Die Bautechnik, 4/1967.
- [5] Girkmann, K.: Flächentragwerke. 6. Auflage, 1963.
- [6] Buchmann, W.: Beitrag zur Berechnung polarorthotroper  
Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter  
reiner Biegebeanspruchung. Dissertation  
Wien, 1967.
- [7] Swelem, M.: Beitrag zur Spannungsermittlung in der sym-  
metrischen Rahmenecke mit gegliedertem Quer-  
schnitt. Dissertation Hannover, 1967.
- [8] Kollmann, F.: Technologie des Holzes und der Holzwerkstof-  
fe. Band 1, 2. Auflage.
- [9] Hempel, G.: Vorsicht bei Querzugsspannungen. Bauen mit  
Holz, 2/1970.
- [10] Kolb, K.: Festigkeitsuntersuchungen an gestossenen  
und gekrümmten Teilen aus Brettschichtholz.  
Bauen mit Holz, 7/1969.
- [11] Möhler, K. und Blumer, H.: Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern  
Teil 1: Träger mit konstanter Querschnittshöhe.  
Berichte aus der Bauforschung, Heft 92, 1974
- [12] Möhler, K. und Blumer, H.: Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern.  
Teil 2: Träger mit geneigtem Obergurt (ohne  
Firsttausrundung).  
Berichte aus der Bauforschung, Heft 92, 1974

### Bezeichnungen und Abkürzungen

#### Koordinaten

$x, y, \xi, \bar{\eta}, \bar{x}, \bar{y}$  karthesische Koordinaten

$r, \varphi, \phi$  Polarkoordinaten bezogen auf den Krümmungsmittelpunkt

#### Spannungen

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  Spannungen parallel zu den Koordinaten  $x, y$

$\sigma_{xn}, \sigma_{yn}, \tau_{xyn}$ } Spannungen am geneigten oberen Rand im karthesischen Koordinatensystem  
 $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$  }

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}$  Spannungen im Polarkoordinatensystem

#### Kraftgrößen

$M, N, Q$  Biegemoment, Normalkraft und Querkraft

#### Dehnungen und Verschiebungen

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  Dehnungen und Schubverzerrungen im karthesischen Koordinatensystem

$\epsilon_r, \epsilon_\varphi, \gamma_{r\varphi}$  Dehnungen und Schubverzerrungen im Polarkoordinatensystem

$u$  Verschiebung eines Punktes parallel zur  $x$ -Achse bzw. tangential

$v$  Verschiebung eines Punktes parallel zur  $y$ -Achse bzw. radial

#### Geometrische Größen

a) Für die polarorthotrope Kreisbogenscheibe

$t$  Scheibendicke

$r_m$  mittlerer Radius

$a$  Radius des inneren Randes

$\beta = \frac{r_m}{h} = \frac{1}{2\alpha}$  Krümmungsbeiwert nach DIN 1052

b	Radius des äusseren Randes
$\eta = y/h$	dimensionslose Grösse
$\alpha = h/2r_m = \frac{1}{2\delta}$	dimensionslose Grösse für das Krümmungsverhältnis
$\delta$	halber Zentriwinkel

b) Für die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand

t	Scheibendicke
$r_m$	mittlerer Radius
a	Radius des inneren Randes
b	Abstand des äusseren geraden Randes vom Krümmungsmittelpunkt
$\varrho = b/r$	dimensionslose Grösse
$\varrho_1 = b/a$	dimensionslose Grösse
$\delta$	halber Zentriwinkel
$\vartheta$	Winkel des äusseren Randes gegenüber der Tangente im Endquerschnitt
$\gamma$	Neigungswinkel des oberen Randes

c) Für die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand

t	Scheibendicke
h	Scheibenhöhe am Endquerschnitt
l	halbe Scheibenlänge
$\gamma$	Neigungswinkel des oberen Randes gegenüber der x - Achse

#### Materialkonstanten

$E_x, E_y, E_r, E_\varphi$  Elastizitätsmoduln in Richtung der Koordinatenachsen

$\mu_x, \mu_y, \mu_r, \mu_\varphi$  Querdehnungszahlen in Richtung der Koordinatenachsen

$$s = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}} \quad \text{Schubmoduln}$$
$$k = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xy}}} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{E_\varphi}{G_{r\varphi}}} \quad \text{Anisotropiewert}$$

$$n = \sqrt{1+s^2+k^2-2\mu\varphi} \quad \text{Anisotropiewert bei der polarorthotropen Kreisbogenscheibe}$$

Sonstige Bezeichnungen und Abkürzungen

$F(x,y), F(r,\varphi)$  Airysche Spannungsfunktion

$\alpha_i = \frac{\pi}{(\gamma+\beta)} \cdot \frac{i}{\omega}$  Parameter und Abkürzungen in der Spannungsfunktion

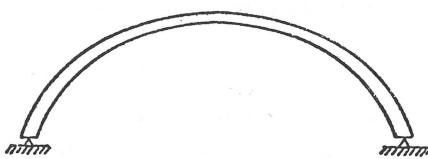
$\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l_0}$

$i = 1, 2, 3, \dots, j$  Reihenfaktoren

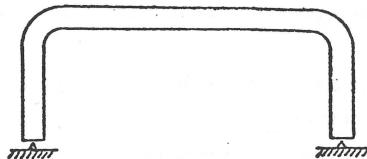
$o = 1, 2, 3, 4, \dots$

### 1. Einleitung

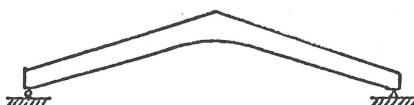
Mit der Verleimung einzelner gerader oder vorgekrümpter Brettlamellen zu einem Gesamtquerschnitt können im Holzbau tragende Bauteile hergestellt werden, die nicht mehr an die Formen und Abmessungen des gewachsenen Holzes gebunden sind. In der Regel werden Biegeträger mit Rechteck-, in Ausnahmefällen mit I-Querschnitten, mit gerader oder gekrümmter Längsachse in Schablonen verleimt. Diese Bauweise ist auch für beliebig geformte Stützen, Schalen oder Sandwichelemente anwendbar. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, den Baustoff Holz auch in Zukunft für die verschiedensten Ansprüche im modernen Bauwesen wirtschaftlich und ästhetisch einzusetzen. Bild 1.1. zeigt einige der möglichen ebenen Bauformen aus verleimtem Brettschichtholz.



a) Zweigelenkbogen



b) Rahmen mit gekrümmten  
Rahmenecken



c) gekrümmter Sattelträger



d) gerader Sattelträger

Bild 1.1.

Die praktische Spannungsermittlung der in Bild 1.1. dargestellten Trägerformen erfolgte bisher nach der Theorie des geraden und gekrümmten Stabes, mit der Annahme, dass die Querschnitte eben und senkrecht zur Mittellinie bleiben [1], [2], [3], [4].

Genauere Berechnungen mit Hilfe der Scheibentheorie sind zum Beispiel im Buch von Girkmann "Flächentragwerke" [5] an der konzentrisch gekrümmten Kreisbogenscheibe für Momenten-, Querkraft- und Normalkraftbelastung aufgeführt. Vorausgesetzt wird dort ein isotroper Werkstoff. In Erweiterung dazu gelang es Buchmann in seiner Dissertation [6], die Spannungen an der polarorthotropen Kreisbogenscheibe unter reiner Momentenbelastung zu ermitteln. Dadurch werden die Verhältnisse im Baustoff Holz mit natürlicher anisotroper Struktur schon wesentlich besser erfasst. Es ergeben sich bei stark gekrümmten Holzstäben grössere Biegerandspannungen und geringere Querspannungen im Vergleich zum gekrümmten Stab aus isotropem Material.

Spannungsberechnungen nach der Scheibentheorie an gekrümmten Sattelträgern wurden im Stahlbau für Rahmenecken entwickelt. In Erweiterung zu Girkmann [5], der den ausspringenden Teil näherungsweise als spannungsfrei annimmt, berücksichtigt Swelem [7] in seiner Dissertation diesen Teil mit zusätzlichen Gliedern in der Spannungsfunktion und erhält eine gute Näherung für den Spannungszustand im Steg sowie in den Flanschen der Rahmenecke. Ungeklärt ist der Einfluss der Anisotropie auf die einzelnen Spannungskomponenten.

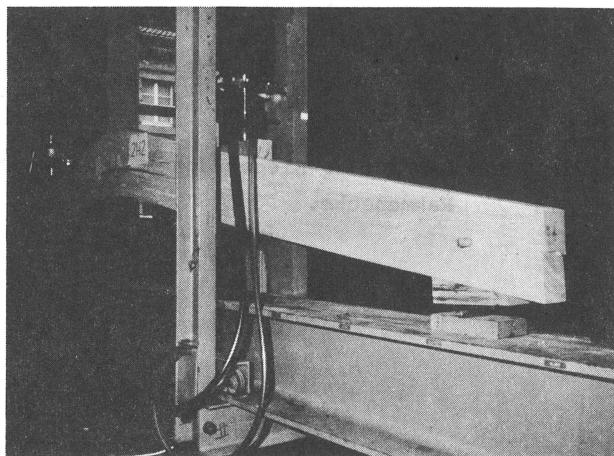
Für die Spannungsermittlung am geraden Sattelträger konnte ich keine genaueren Berechnungen in der Literatur finden sowohl für den isotropen wie auch für den anisotropen Baustoff.

Verschiedene Schadenfälle bei gekrümmten Sattelträgern im Holzbau haben die Notwendigkeit einer genauen Spannungsberechnung gezeigt. Den guten Festigkeitseigenschaften des Holzes in Faserrichtung stehen die wesentlich schlechteren Festigkeiten senkrecht zur Faser gegenüber Kollmann [8], Hempel [9], Kolb [10]. Geringe Spannungen senkrecht zur Stabachse bzw. zur Faser, verursacht durch die Krüm-

mung oder den sattelförmigen Keil eines Biegeträgers, können zu einem Aufreissen des Holzes führen. Bild 1.2. zeigt einen Modellträger in der Form des gekrümmten Sattelträgers nach erfolgtem Bruchversuch. Die Belastung im gekrümmten Teil bestand aus einem Biegemoment. Die Biegebeanspruchung kurz vor dem Bruch betrug  $244 \text{ kp/cm}^2$ , die Spannung quer zur Faser im Bereich des Risses lag bei  $12 \text{ kp/cm}^2$ .

In dieser Arbeit sollen Balken mit Scheibencharakter, wie sie im Holzbau häufig angewendet werden, theoretisch untersucht werden. Bild 1.1. Es werden Näherungslösungen gefunden mit Berücksichtigung der Anisotropie. Aus den mit dem Computer ausgewerteten Resultaten werden anschliessend Diagramme und Näherungsformeln für die praktische Spannungsberechnung abgeleitet.

Denselben Zweck verfolgte eine Versuchsreihe mit gekrümmten Brettschichtträgern am Institut für Stahl, Holz und Steine der Universität Karlsruhe. Der Verfasser möchte dem Institutsvorsteher, Herrn Prof. Dr.-Ing. Möhler, für die ermöglichte Bearbeitung dieser Versuche danken. Die Ergebnisse dieser Versuche werden am Ende der Arbeit den theoretischen Ermittlungen gegenübergestellt.

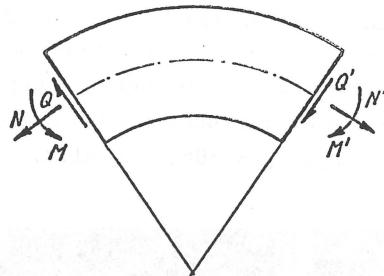


## 2. Grundlagen

### 2.1. Allgemeine Betrachtungen und Voraussetzungen

In den vorliegenden theoretischen Untersuchungen sollen die Spannungsermittlungen der folgenden Belastungsarten und Scheibenformen mit rechteckigem Querschnitt nach der Elastitätstheorie durchgeführt werden. Der Grad der Anisotropie, der durch  $s = \sqrt{E_x/E_y}$ , bzw.  $s = \sqrt{E_\varphi/E_r}$  und  $k = \sqrt{E_x/G_{xy}}$ , bzw.  $k = \sqrt{E_\varphi/G_{r\varphi}}$  definiert wird, findet durch die Spannungs- Dehnungsbeziehungen Eingang in die Rechnung. Er wird in allen Fällen berücksichtigt.

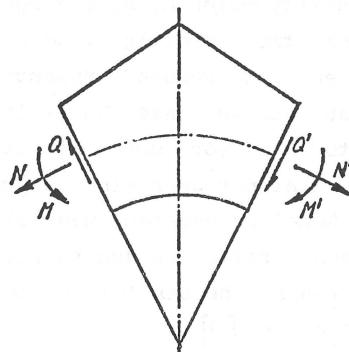
- a) Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung.



Anwendungsbeispiele: Gekrümmter Biegeträger, Bogenträger, Rahmenecke.

Bild 2.1.

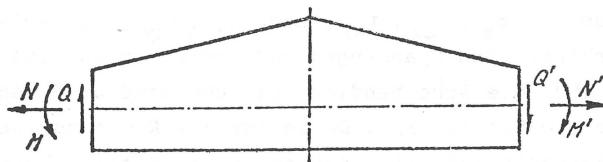
- b) Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmten inneren und geneigtem äusseren Rand mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung.



Anwendungsbeispiele: Gekrümmter Sattelträger, Rahmenecke.

Bild 2.2.

- c) Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung.



Anwendungsbeispiel: Gerader Sattelträger.

Bild 2.3.

Die betrachteten Scheiben sind Teile aus Balken mit wesentlich grösseren Längsabmessungen. Sie sollen durch Endquerschnitte begrenzt sein, wo sie durch die auftretenden Schnittkräfte belastet werden. An den Schnitten werden für die Verformungen keine Randbedingungen aufgestellt, sondern lediglich die Resultierenden der Spannungen als Schnittgrössen  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  vorgegeben. Die Lösungsergebnisse sind nur dann streng richtig, wenn der aus der Rechnung an den Endquerschnitten sich ergebende Spannungsverlauf zufällig mit dem Spannungsverlauf der angrenzenden Teile übereinstimmt. Sonst liegen hier Randstörungen vor, deren Einfluss sich aber nach dem Prinzip von St.- Venant nur über einen begrenzten Teil erstreckt. Unter orthotropen Scheiben versteht man solche, bei denen die elastischen Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. In den polarorthotropen Scheiben folgen die elastischen Hauptachsen den Polarkoordinaten [11].

Es sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- a) Die Scheiben bestehen aus einem gleichmässig anisotropen Werkstoff.
- b) Sie sind dünn und nach ihrer Dicke ungehindert verformbar.
- c) Die Formänderungen bleiben klein.
- d) Die Formänderungen gehorchen dem Hooke'schen Gesetz.
- e) Die Scheiben sind gewichtslos, frei von Vorspannungen und nur durch die äusseren Schnittkräfte, welche in der Scheibenmittel- ebene wirken, beansprucht.
- f) Der betrachtete Bereich sei frei von Randstörungen.

Daraus folgt:

- aus b) Es herrscht ein ebener Spannungszustand. Die Spannungskomponenten  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ , bzw.  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$  verschwinden. Die verbleibenden Spannungen und Verformungen stellen Mittelwerte über die Scheibendicke dar und sind umso genauer je dünner die Scheibe ist. Da in der  $z$  - Richtung (senkrecht zur Scheibenebene) keine Spannungen auftreten, kommt auch eine etwaige Anisotropie nicht zur Auswirkung.
- aus c) Die geometrischen Beziehungen können unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung angeschrieben werden.
- aus d) Die Formänderungen sind rein elastisch, wegen der Linearität

dürfen Spannungen und Verschiebungen aus verschiedenen Belastungszuständen überlagert werden.

## 2.2. Die Scheibengleichung im kartesischen Koordinatensystem

### 2.2.1. Gleichgewichtsbedingungen

Unter den in Abschnitt 2.1. erwähnten Voraussetzungen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbeziehungen für die Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  des ebenen Spannungszustandes die folgenden Beziehungen. Girkmann [5].

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.112)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2.113)$$

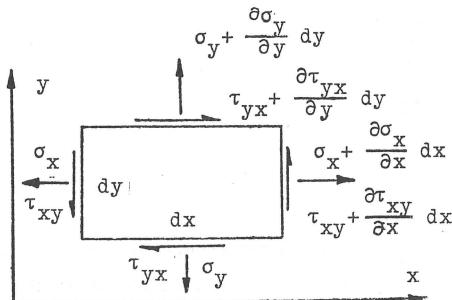


Bild 2.4.

Die Spannungskomponenten haben folgende Bedeutung:

$\sigma_x$  : Spannung in Richtung der x - Achse.

$\sigma_y$  : Spannung in Richtung der y - Achse.

$\tau_{xy}$  : Schubspannung auf Ebene x in Richtung y.

$\tau_{yx}$  : Schubspannung auf Ebene y in Richtung x.

### 2.2.2. Geometrische Beziehungen

Der Zusammenhang der Verschiebungskomponenten  $u$ ,  $v$  mit den Dehnungen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und dem Schubwinkel  $\gamma_{xy}$  wird durch die geometrischen Beziehungen hergestellt. Girkmann [5].

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad (2.2)$$

### 2.2.3. Hooke'sches Gesetz

Das Hooke'sche Gesetz gibt Beziehungen zwischen den Spannungskomponenten  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  und den Dehnungskomponenten  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  wieder. Die übliche Schreibweise für den orthotropen Werkstoff lautet:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_y}{E_y} \sigma_y \quad (2.3/1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E_y} \sigma_y - \frac{\mu_x}{E_x} \sigma_x \quad (2.3/2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}} \cdot \tau_{xy} \quad (2.3/3)$$

Es bedeuten:  $E_x$  : Elastitätsmodul in Richtung der  $x$  - Achse.  
 $E_y$  : Elastitätsmodul in Richtung der  $y$  - Achse.  
 $G_{xy}$  : Schubmodul.  
 $\mu_x$  : Querdehnungszahl in Richtung der  $x$  - Achse.  
 $\mu_y$  : Querdehnungszahl in Richtung der  $y$  - Achse.

Bei einem kristallsymmetrischen Modell gilt aus energetischen Gründen die Verknüpfung  $\frac{\mu_y}{E_y} = \frac{\mu_x}{E_x}$ . Dieses Modell kann mit verschiedenen Dehnungseigenschaften in den drei zueinander senkrecht stehenden Achsen als Ersatzsystem für Holz verwendet werden.

Mit den Abkürzungen

$$s = \sqrt{E_x / E_y} \quad k = \sqrt{E_x / G_{xy}} \quad (2.4)$$

lässt sich das Hooke'sche Gesetz wie folgt schreiben:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \mu_x \sigma_y) \quad (2.5/1)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E_x} (s^2 \sigma_y - \mu_x \sigma_x) \quad (2.5/2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{E_x} k^2 \tau_{xy} \quad (2.5/3)$$

#### 2.2.4. Lösung mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion

Aus den geometrischen Beziehungen (2.2) leitet man die Verträglichkeit ab und erhält:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

Die Dehnungen werden mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes durch die Spannungen ersetzt.

$$k^2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu_x \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + s^2 \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu_x \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \quad (2.7)$$

Werden die Spannungskomponenten als Ableitung der Airy'schen Spannungsfunktion  $F(x,y)$  definiert,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (2.8)$$

so lassen sich alle unbekannten Größen bis auf  $F$  eliminieren. Man erhält die homogene Differentialgleichung für die orthotrope Scheibe.

$$s^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (k^2 - 2\mu_x) \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (2.9)$$

Ein Spezialfall stellt die isotrope Scheibe dar. Mit  $s^2 = 1$ ,  $k^2 = 2(1+\mu_x)$  ergibt sich die aus der Literatur bekannte Scheiben-Gleichung [5].

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$


---

(2.10)

Die Airy'sche Spannungsfunktion  $F$  ist für die Scheibengleichung eine strenge Lösung. Da die Differentialgleichung für  $F$  aber unendlich viele Lösungen aufweist, besteht die Schwierigkeit, diejenige Funktion  $F$  zu finden, die auch den Randbedingungen genügt.

#### 2.2.5. Lösungsansatz für die Spannungsfunktion

Eine allgemeine Lösung für die Spannungsfunktion kann wie folgt z.B. nach [12] angegeben werden:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cdot \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cdot \cos(\omega_i x) \quad (2.11)$$

Durch Einsetzen eines Summengliedes  $A_{i1} \cdot \cosh(\lambda \omega_i y) \cdot \cos(\omega_i x)$  aus (2.11) in die Scheibengleichung (2.9) erhält man für  $\lambda$  eine Bestimmungsgleichung 4. Ordnung.

$$s^2 - (k^2 - 2\mu_x) \cdot \lambda^2 + \lambda^4 = 0$$

Die beiden möglichen Lösungen für  $\lambda_{1,2}$  lauten:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} - s^2}} \quad (2.12/1)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)}{2} - \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} - s^2}} \quad (2.12/2)$$

Die Wurzausdrücke besitzen reelle Lösungen, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$s \geq 0; \quad \left( \frac{E_x}{E_y} \geq 0 \right)$$

$$s \leq \mu_x - \frac{k^2}{2} \left( \sqrt{\frac{E_x}{E_y}} = \mu_x - \frac{E_x}{2G} \right)$$

Der Ansatz der Spannungsfunktion nach (2.11) kann mit Berücksichtigung der oberen zwei Ungleichungen für alle bekannten Baustoffe verwendet werden.

Sonderfall:

Für den isotropen Baustoff ergibt sich für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Doppellösung  $\lambda_{1,2} = 1$ . Die Spannungsfunktion kann wie folgt angeschrieben werden.

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cdot \cosh(\omega_{iy}) + A_{i2} y \cdot \cosh(\omega_{iy}) + A_{i3} \cdot \sinh(\omega_{iy}) + A_{i4} \cdot y \cdot \sinh(\omega_{iy}) \right] \cos(\omega_{ix}) \quad (2.13)$$

Dieser Lösungsansatz ist bei Girkmann [5] zu finden.

### 2.3. Die Scheibengleichung im Polarkoordinatensystem

#### 2.3.1. Gleichgewichtsbedingungen

Durch die in Abschnitt 2.1. angenommenen Voraussetzungen erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für den ebenen Spannungszustand im Polarkoordinatensystem:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (2.14/1)$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + 2\tau_{r\varphi} = 0 \quad (2.14/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} \quad (2.14/3)$$

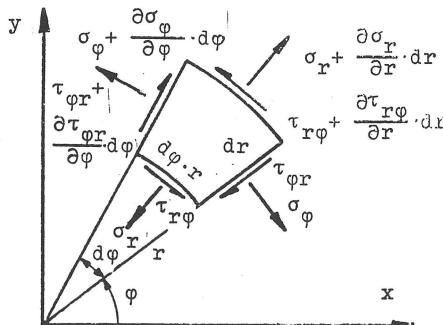


Bild 2.5.

Die Spannungskomponenten haben folgende Bedeutung:

σ<sub>r</sub>: Radialspannung in Richtung des Radius.

σ<sub>φ</sub>: Tangentialspannung in Richtung der Tangente.

τ<sub>rφ</sub>: Schubspannung auf Ebene r in Richtung φ.

τ<sub>φr</sub>: Schubspannung auf Ebene φ in Richtung r.

#### 2.3.2. Geometrische Beziehungen

Analog zu Abschnitt 2.2.2., aber für das Polarkoordinatensystem,

erhalten wir die geometrischen Beziehungen:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} , \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} , \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad (2.15)$$

### 2.3.3. Hooke'sches Gesetz

Die Verknüpfung der Dehnungs- mit den Spannungskomponenten lautet:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_r} \cdot \sigma_r - \frac{\mu_\varphi}{E_\varphi} \cdot \sigma_\varphi \quad (2.16/1)$$

$$\varepsilon_\varphi = - \frac{1}{E_\varphi} \cdot \sigma_\varphi - \frac{\mu_r}{E_r} \cdot \sigma_r \quad (2.16/2)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{G_{r\varphi}} \cdot \tau_{r\varphi} \quad (2.16/3)$$

mit der energetischen Beziehung  $\mu_\varphi/E_\varphi = \mu_r/E_r$  (2.17) und den beiden Parametern:

$$s = \sqrt{E_\varphi/E_r} , \quad k = \sqrt{E_\varphi/G_{r\varphi}} \quad (2.17)$$

ergibt sich das Hooke'sche Gesetz:

$$\varepsilon_r = - \frac{1}{E_\varphi} ( s^2 \sigma_r - \mu_\varphi \cdot \sigma_\varphi ) \quad (2.18/1)$$

$$\varepsilon_\varphi = - \frac{1}{E_\varphi} ( \sigma_\varphi - \mu_\varphi \cdot \sigma_r ) \quad (2.18/2)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{E_\varphi} k^2 \cdot \tau_{r\varphi} \quad (2.18/3)$$

### 2.3.4. Lösung mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion

Die Verträglichkeit kann mit der Koppelung der drei Gleichungen aus (2.15) gewonnen werden. (2. Ableitung der Schubverzerrung).

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (\gamma_{r\varphi} \cdot r) = \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \varphi^2} - \frac{r \cdot \partial \epsilon_r}{\partial r} + 2r \cdot \frac{\partial \epsilon_\varphi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 \epsilon_\varphi}{\partial r^2} \quad (2.19)$$

Werden die Dehnungen durch die Spannungskomponenten ersetzt, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$k^2 \frac{\partial(\tau_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi} = \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \right) (s^2 \sigma_r - \mu_\varphi \cdot \sigma_\varphi) \\ + \left( 2r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) (\sigma_\varphi - \mu_\varphi \cdot \sigma_r)$$

Die Spannungskomponenten werden als Ableitung der Airy'schen Spannungsfunktion  $F(r, \varphi)$  definiert:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (2.20/1)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (2.20/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \quad (2.20/3)$$

Die allgemeine Scheibengleichung im Polarkoordinatensystem ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen zu:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{s^2}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{s^2}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{k^2 - 2\mu_\varphi}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^2 \partial r^2} \\ - \frac{k^2 - 2\mu_\varphi}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{k^2 + 2s^2 - 2\mu_\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.21)$$

Spezialfall 1: Isotrope Scheibe mit  $s^2 = 1$  und  $k^2 = 2(1+\mu_\varphi)$

Wir erhalten die aus der Literatur bekannte Scheibengleichung Girkmann [5].

$$\Delta \Delta F = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.22)$$

Spezialfall 2: Die Spannungen und Verschiebungen sind vom Winkel  $\varphi$  unabhängig.

Damit ergibt sich die Scheibengleichung für den rotationssymmetrischen Spannungszustand der polarorthotropen Kreisbogenscheibe, wie sie auch von Buchmann gefunden wurde [6].

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{s^2 \partial^2 F}{r^2 \partial r^2} + \frac{s^2}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (2.23)$$

### 2.3.5. Lösungsansatz für die Spannungsfunktion

Ein allgemeiner Ansatz kann in der folgenden Form gemacht werden:

$$F(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{i=j} (A_{i1} \cdot r^{m_{i1}} + A_{i2} \cdot r^{m_{i2}} + A_{i3} \cdot r^{m_{i3}} + A_{i4} \cdot r^{m_{i4}}) \cos(\alpha_{i\varphi}) \quad (2.24)$$

abgekürzt geschrieben:

$$F(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} r^{m_{ik}} \right) \cos \alpha_{i\varphi} \quad (2.25)$$

Setzt man ein Spannungsglied aus (2.25) in die Gleichung (2.21) ein, so erhält man analog Abschnitt 2.2.5. für  $\lambda$  eine Bestimmungsgleichung 4. Ordnung zur Ermittlung der Parameter

$$m_i^4 - 4m_i^3 + (5s^2 - \alpha_i^2 k^2 + 2\alpha_i^2 \mu_\varphi) m_i^2 + (2s^2 + 2\alpha_i^2 k^2 - 4\alpha_i^2 \mu_\varphi - 2)m_i \\ + (\alpha_i^4 s^2 - 2s^2 \alpha_i^2 - \alpha_i^2 k^2 + 2\alpha_i^2 \mu_\varphi) = 0 \quad (2.26)$$

Für die Nullstellungen müssen wir eine Substitution durchführen.  $m_i$  wird durch den Ausdruck  $x + 1$  ersetzt, damit erhalten wir ein Polynom 4. Ordnung für  $x$ , bei dem die Glieder mit ungeraden Exponenten wegfallen.

$$x^4 - 2q_1^2 x^2 + s^2(\alpha_{-1}^2)^2 = 0 \quad (2.27)$$

mit der Abkürzung:

$$q_1^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + s^2 + \alpha_i^2 (k^2 - 2\mu_\varphi) \right]$$

Damit wird es nun möglich die Nullstellen von (2.26) über die Größe  $x$  zu ermitteln.

$$x_1 = \sqrt{q_i^2 + \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}} = m_{i1} - 1$$

$$x_2 = \sqrt{q_i^2 - \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}} = m_{i2} - 1$$

$$x_3 = -\sqrt{q_i^2 + \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}} = m_{i3} - 1$$

$$x_4 = -\sqrt{q_i^2 - \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}} = m_{i4} - 1$$

Reelle Lösungen erhält man, wenn die beiden folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

a)  $q_i^2 \geq s(\alpha_i^2 - 1)$

b)  $q_i^2 \geq \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)}$

b) ist mit  $s^2(\alpha_i^2 - 1)^2 \geq 0$  immer erfüllt.

a) muss zur Veranschaulichung noch etwas umgerechnet werden. Wird  $q_i$  eingesetzt erhält man:

$$k^2 \geq \frac{1}{\alpha_i^2} (2s\alpha_i^2 - 1 - 2s - s^2 + 2\alpha_i^2\mu_\varphi) \geq 2(s + \mu_\varphi) - \frac{(1+s)^2}{\alpha_i^2}$$

mit  $k^2 = E_\varphi/G_{r\varphi}$  und  $s^2 = E_\varphi/E_r$  kann eine Ungleichung für den Schubmodul gefunden werden.

$$G \leq \frac{E_\varphi}{2 \left( \sqrt{\frac{E_\varphi}{E_r}} + \mu_\varphi \right) - \frac{(1 + \sqrt{E_\varphi/E_r})^2}{\alpha_i^2}}$$

Spezialfall 1:  $\alpha_i = 0$

Es handelt sich hier um den Spannungszustand, der vom Winkel unabhängig ist. Dieser Lösungsansatz ist bei Buchmann angegeben [6] und erfüllt die Gleichung (2.23)

$$m_{01} = 0$$

$$m_{02} = 2$$

$$m_{03} = 1+s$$

$$m_{04} = 1-s$$

Die exakte Spannungsfunktion ergibt sich zu:

$$\underline{F_0 = A_{01} + A_{02} r^2 + A_{03} r^{1+s} + A_{04} r^{1-s}} \quad (2.28)$$

Ist der Werkstoff isotrop, also  $s^2 = 1$  und  $k^2 = 2(1+\mu_\varphi)$ , dann erhält man den Lösungsansatz für die isotrope Kreisbogenscheibe mit Momentenbelastung. Girkmann [5], Mostafa Swelem [7]. (Exakte Lösung der Gleichung (2.14))

$$\underline{F_0 = A_{01} + A_{02} r^2 + A_{03} r^2 \ln r + A_{04} \ln r} \quad (2.29)$$

Spezialfall 2:  $\underline{\alpha_i=1}$

Damit gewinnt man einen Lösungsansatz, der für die orthotrope Kreisbogenscheibe mit Normalkraft- und Querkraftbelastung verwendet werden kann (2.30). Macht man auch hier den Übergang zum isotropen Material, so ergeben sich die Formeln, die in der Literatur unter [5] oder [7] zu finden sind.

$$m_{11} = 1, \quad m_{12} = 1,$$

$$m_{13} = 1 + \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2 \mu_\varphi} = 1 + n$$

$$m_{14} = 1 - \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2 \mu_\varphi} = 1 + n$$

$$\underline{F_1 = (A_{11} r + A_{12} r \cdot \ln r + A_{13} r^{1+n} + A_{14} r^{1-n}) \cos \varphi} \quad (2.30)$$

isotrop:  $n = 2$

$$\underline{F_1 = (A_{11} r + A_{12} r \cdot \ln r + A_{13} r^3 + A_{14} r^{-1}) \cos \varphi} \quad (2.31)$$

Lösung der Scheibengleichung (2.22)

### 3. Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung

#### 3.1. Grundlastfälle

Es ist zweckmässig, wenn man den allgemeinen Belastungsfall  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  in die folgenden Grundlastfälle aufspaltet. (Bild 3.1)

Grundlastfall a) Reine Biegung  $M$ .

Grundlastfall b) Querkraft  $Q$ . Ein Endquerschnitt wird mit  $Q$  belastet,  $M = N = 0$  (Kragarm mit Querkraft - Einzellast).

Grundlastfall c) Normalkraft  $N$ . An einem Endquerschnitt greift nur die Normalkraft  $N$  an.  $M = Q = 0$  (Kragarm mit Normalkraft - Einzellast).

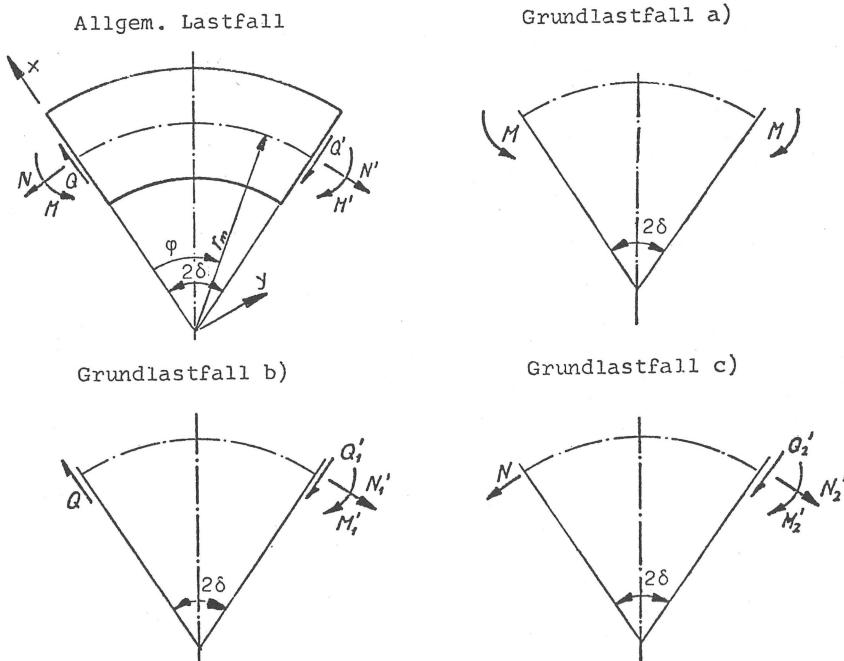


Bild 3.1.

Für die angreifenden Schnittkräfte müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein:

Allgemeiner Lastfall:

$$\sum X = 0 \quad Q = Q' \cdot \cos 2\delta + N' \sin 2\delta$$

$$\sum Y = 0 \quad N = N' \cdot \cos 2\delta - Q' \sin 2\delta \quad (3.1)$$

$$\sum M = 0 \quad M = M' - (N - N') \cdot r_m$$

Grundlastfälle:

$$Q_1' = Q \cdot \cos 2\delta \quad Q_2' = -N \cdot \sin 2\delta$$

$$N_1' = Q \cdot \sin 2\delta \quad N_2' = N \cdot \cos 2\delta \quad (3.2)$$

$$M_1' = -Q \cdot r_m \sin 2\delta \quad M_2' = N \cdot r_m (1 - \cos 2\delta)$$

Addition der Grundlastfälle: Für den Endquerschnitt  $\varphi=2\delta$

$$Q' = Q_1' + Q_2'$$

$$N' = N_1' + N_2'$$

$$M' = M_1' + M_2' + M$$

(3.3)

3.2. Spannungszustand für den Grundlastfall: Reine Biegung

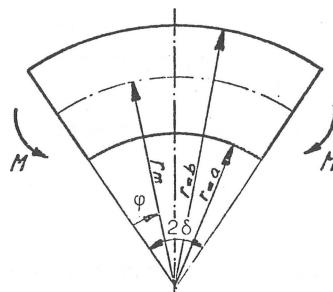


Bild 3.2.

Dieser Belastungsfall ist drehsymmetrisch, das heisst: Die Verschiebungen und Spannungen sind vom Winkel  $\varphi$  unabhängig. An den Rändern  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 2\delta$  greifen die äusseren Momente  $M$  in der Mittel-

ebene der Scheibe an. Die Lösung dieses Problems finden wir bei Buchmann [6]. Er hat zusätzlich zur Ermittlung der Spannungsverteilung exakte Formeln für die Verschiebungen hergeleitet. Wir beschränken uns hier auf die Ableitung der Formeln für die Spannungskomponenten über den Weg der Airy'schen Spannungsfunktion. Die exakte Lösung der Scheibengleichung liegt in Abschnitt 2. mit der Gleichung (2.28) vor.

$$F_o = A_{o1} + A_{o2} r^2 + A_{o3} r^{1+s} + A_{o4} r^{1-s}$$

Der Spezialfall der isotropen Scheibe hat die Spannungsfunktion (2.29)

$$F_o = A_{o1} + A_{o2} r^2 + A_{o3} r^2 \ln r + A_{o4} \ln r$$

Die Beziehungen (2.20) erlauben es, auf direktem Weg die Spannungskomponenten aus (2.28) und (2.29) zu ermitteln.

$s > 1$  | (orthotrop)

$$\sigma_r = 2 A_{o2} + (1+s) A_{o3} \cdot r^{s-1} + (1-s) A_{o4} \cdot r^{-s-1} \quad (3.4/1)$$

$$\sigma_\varphi = 2 A_{o2} + (1+s) \cdot s A_{o3} \cdot r^{s-1} - (1-s) A_{o4} \cdot r^{-s-1} \quad (3.4/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (3.4/3)$$

$s = 1$  (isotrop)

$$\sigma_r = 2 A_{o2} + A_{o3} (1 + 2 \ln r) + A_{o4} \frac{1}{r^2} \quad (3.5/1)$$

$$\sigma_\varphi = 2 A_{o2} + A_{o3} (3 + 2 \ln r) - A_{o4} \frac{1}{r^2} \quad (3.5/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad (3.5/3)$$

Für die Bestimmung der Konstanten stehen uns die 2 Randbedingungen am inneren und äusseren Rand, wo die Radialspannungen verschwinden müssen, und eine Gleichgewichtsbedingung an einem der Endquerschnitte zur Verfügung.

$$\sigma_{ra} = 0, \quad \sigma_{rb} = 0 \quad \text{es bedeutet: } t = \text{Scheibendicke}$$

$$t \int_a^b \sigma_\varphi \cdot r \cdot dr = M$$

Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man die Spannungskomponenten: orthotrop:

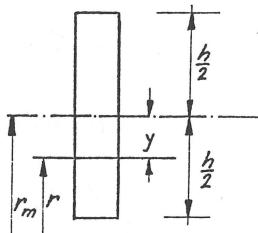
$$\sigma_r = - \frac{2M(1-s^2)}{Ns} \left\{ \left( b^{s+1} - a^{s+1} \right) r^{s-1} - \left[ a^{2s} \left( \frac{b}{r} \right)^{s+1} - \left( \frac{a}{r} \right)^{s+1} b^{2s} \right] - \left( b^{2s} - a^{2s} \right) \right\} \quad (3.6/1)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{2M(1-s^2)}{Ns} \left\{ s \cdot \left( b^{s+1} - a^{s+1} \right) r^{s-1} + s \left[ a^{2s} \left( \frac{b}{r} \right)^{s+1} - \left( \frac{a}{r} \right)^{s+1} b^{2s} \right] - \left( b^{2s} - a^{2s} \right) \right\} \quad (3.6/2)$$

mit der Abkürzung:

$$N_s = l \cdot \left[ (1-s)^2 (a^{2s+2} + b^{2s+2}) - (1+s)^2 (a^2 b^{2s} + a^{2s} b^2) + 8s(a \cdot b)^{s+1} \right]$$

Für die numerische Rechnung sind die Formeln (3.6) nicht geeignet, weil sie Differenzen annähernd gleich grosser Zahlen enthalten. Deswegen werden die Lösungen wie bei Buchmann [6] umgeschrieben und die Abkürzungen  $\eta$  und  $\alpha$  eingeführt. (Bild 3.3)



$$\eta = \frac{y}{h} \implies a = r_m (1 - \alpha) \quad (3.7/1)$$

$$\alpha = \frac{h}{2r_m} = \frac{1}{2\beta} \quad b = r_m (1 + \alpha) \quad (3.7/2)$$

$$\beta = \frac{r_m}{h} \quad r = r_m (1 - 2\alpha \eta) \quad (3.7/3)$$

Bild 3.3.

Schliesslich lauten die Gleichungen für die Spannungen wie folgt:

orthotrop:  $s > 1$

$$\sigma_r = - \frac{M}{r_m F} \frac{4\alpha(1-s)^2}{N_1} \left\{ \left[ (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right] (1-2\alpha\eta)^{s-1} - \left[ (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right] \frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \left[ (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right] \right\} \quad (3.8/1)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{M \cdot 4\alpha^2(1-s)^2}{W} \left\{ s \left[ (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right] (1-2\alpha\eta)^{s-1} + s \left[ (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right] \frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \left[ (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right] \right\} \quad (3.8/2)$$

$$N_1 = (1-s)^2 \left[ (1-\alpha)^{2s+2} + (1+\alpha)^{2s+2} \right] - (1+s)^2 \left[ (1-\alpha)^2 (1+\alpha)^{2s} + (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^2 \right] + 8s (1-\alpha^2)^{s+4} \quad (3.9)$$

isotrop:  $s = 1$

$$\sigma_r = - \frac{M}{r_m F} \frac{2\alpha}{N_2} \left[ -(1-\alpha)^2 \cdot \ln \left( \frac{1-2\alpha\eta}{1-\alpha} \right) + (1+\alpha)^2 \cdot \ln \left( \frac{1-2\alpha\eta}{1+\alpha} \right) + \frac{(1-\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^2} \ln \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \quad (3.10/1)$$

$$\sigma_\varphi = - \frac{M}{W} \frac{2\alpha}{N_2} \left[ 4\alpha - (1-\alpha)^2 \cdot \ln \left( \frac{1-2\alpha\eta}{1-\alpha} \right) + (1+\alpha)^2 \cdot \ln \left( \frac{1-2\alpha\eta}{1+\alpha} \right) - \frac{(1-\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^2} \ln \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \quad (3.10/2)$$

$$N_2 = -4\alpha^2 + (1-\alpha^2)^2 \left[ \ln \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right]^2 \quad (3.11)$$

Spezialfall: s = 0

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $\mu_\varphi = 0$  und  $E_r = \infty$  werden. Das heisst, dass keine radialen Dehnungen auftreten. Damit sind dieselben Voraussetzungen erfüllt, die der Theorie des gekrümmten Balkens zugrunde liegen.

$s = 0$

$$\sigma_r = -\frac{M}{r_m F} \frac{\alpha}{N_3} \left[ \frac{2}{1-2\alpha\eta} \cdot \ln \left( \frac{1-2\alpha\eta}{1-\alpha} \right) - \frac{1-2\eta}{1-2\alpha\eta} \cdot \ln \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \quad (3.12/1)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{M}{W} \frac{\alpha}{3N_3} \left[ \frac{2\alpha}{1-2\alpha\eta} - \ln \left( \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \right] \quad (3.12/2)$$

$$N_3 = \left( -2\alpha + \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) \quad (3.13)$$

### 3.3. Spannungszustand für den Grundlastfall: Querkraft

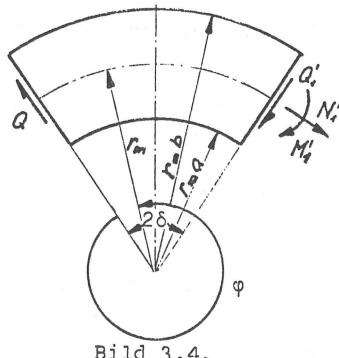


Bild 3.4.

Am Rande  $\varphi=0$  des in Bild 3.4. dargestellten Trägers, greift in der Scheibenebene die äussere Kraft Q an. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 3.2. behandelten Fall der Drehsymmetrie sind in dem nun folgenden Fall die Spannungen und Verschiebungen vom Winkel  $\varphi$  abhängig. Als Lösungsansatz der Scheibengleichung (2.21) verwenden wir die Spannungsfunktion des Spezialfalles 2, Gleichung (2.30), mit  $\alpha_1=1$ . Allerdings muss der Cosinus mit dem Sinus vertauscht werden. Diese abgeänderte Spannungsfunktion bleibt trotzdem eine Lösung der Scheibengleichung.

$$F_1 = (A_{11} r + A_{12} r \cdot \ln r + A_{13} r^{1+n} + A_{14} r^{1-n}) \sin \varphi$$

$$\text{mit } n = \sqrt{1+s^2 + k^2 - 2 \mu_\varphi}$$

Bei isotropem Baustoff wird  $n = 2$ , ( $s^2 = 1$ ,  $k^2 = 2(1+\mu_\varphi)$ ) und damit:

$$F_1 = (A_{11} r + A_{12} r \cdot \ln r + A_{13} r^3 + A_{14} \frac{1}{r}) \sin \varphi$$

Aus den Lösungsansätzen können durch Ableitungen die Spannungskomponenten errechnet werden. Es ergibt sich für  $n = 2$  isotrop,  $n \neq 2$  orthotrop:

$$\sigma_r = (A_{12} \frac{1}{r} + A_{13} n \cdot r^{n-1} - A_{14} n \cdot r^{-n-1}) \sin \varphi \quad (3.14/1)$$

$$\sigma_\varphi = (A_{12} \frac{1}{r} + A_{13} n(1+n) r^{n-1} + A_{14} n(n-1) r^{-n-1}) \cos \varphi \quad (3.14/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = - (A_{12} \frac{1}{r} + A_{13} n \cdot r^{n-1} - A_{14} n \cdot r^{-n-1}) \sin \varphi \quad (3.14/3)$$

Für die Bestimmung der Konstanten  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{14}$  stehen uns auch hier vorerst die Randbedingungen am inneren und äusseren Rand zur Verfügung, wo  $\sigma_r$  und  $\tau_{r\varphi}$  verschwinden. An den beiden Formeln (3.14) mit  $\sigma_r$  und  $\tau_{r\varphi}$  kann man erkennen, dass sich diese in der Variablen  $r$  nicht unterscheiden, es gilt  $\partial \sigma_r / \partial \varphi = -\tau_{r\varphi}$ . Wenn wir also  $\sigma_r$  an den beiden Rändern gleich 0 setzen, dann verschwinden dort auch die Schubspannungskomponenten. Erfüllen wir also einmal diese zwei Randbedingungen, so ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{A_{12}}{b} + A_{13} n \cdot b^{n-1} - A_{14} n \cdot b^{-n-1} = 0$$

$$\frac{A_{12}}{a} + A_{13} n \cdot a^{n-1} - A_{14} n \cdot a^{-n-1} = 0$$

Wir lösen das Gleichungssystem nach den beiden Konstanten  $A_{14}/A_{13}$  und  $A_{12}/A_{13}$  auf

$$\frac{A_{12}}{A_{13}} \cdot \frac{1}{b} + n \cdot b^{n-1} - \frac{A_{14}}{A_{13}} n \cdot b^{-n-1} = 0$$

Lehrstuhl für  
Ingenieurholzbau u. Baukonstruktionen  
Techn. Hochschule Karlsruhe

$$\frac{A_{12}}{A_{13}} \cdot \frac{1}{a} + n \cdot a^{n-1} - \frac{A_{14}}{A_{13}} n \cdot a^{-n-1} = 0$$

(3.15/1)

$$\frac{A_{14}}{A_{13}} = \frac{a^n - b^n}{a^{-n} - b^{-n}} = -a^n \cdot b^n$$

$$\frac{A_{12}}{A_{13}} = n \cdot \frac{a^{-n} b^{-n} (b^{2n} - a^{2n})}{b^{-n} - a^{-n}} = -n (a^n + b^n) \quad (3.15/2)$$

und setzen diese in die Spannungsgleichung (3.14) ein:

$$\sigma_r = A_{13} \left[ n \cdot r^{n-1} + n \cdot a^n b^n r^{-n-1} - n \frac{(a^n + b^n)}{r} \right] \sin \varphi \quad (3.16/1)$$

$$\sigma_\varphi = A_{13} \left[ n (1+n) r^{n-1} + n \cdot (1-n) a^n b^n r^{-n-1} - n \frac{(a^n + b^n)}{r} \right] \sin \varphi \quad (3.16/2)$$

$$r\varphi = - A_{13} \left[ n \cdot r^{n-1} + n \cdot a^n b^n r^{-n-1} - n \frac{(a^n + b^n)}{r} \right] \cos \varphi \quad (3.16/3)$$

Die verbleibende Konstante  $A_{13}$  lässt sich durch Gleichsetzung der äusseren Belastung mit den resultierenden Schubspannungskomponenten am Endquerschnitt  $\varphi = 0$  ermitteln.

$$\begin{aligned} Q &= t \int_{r=a}^{r=b} \tau_{r\varphi} dr = - A_{13} \cdot t \cdot n \left[ \int_a^b r^{n-1} dr + a^n b^n \int_a^b r^{-n-1} dr - (a^n + b^n) \int_a^b \frac{1}{r} dr \right] \\ &= - A_{13} \cdot t \cdot n \left[ \frac{b^n - a^n}{n} - \frac{b^{-n} - a^{-n}}{n} \cdot a^n b^n - (a^n + b^n) \cdot \ln \frac{b}{a} \right] \\ &= - A_{13} \cdot t \cdot \left[ 2 (b^n - a^n) - n (a^n + b^n) \cdot \ln \frac{b}{a} \right] \end{aligned}$$

damit wird:

$$A_{13} = \frac{Q}{t} \frac{1}{2 (a^n - b^n) + n (a^n + b^n) \ln b/a} \quad (3.17)$$

Führen wir noch die Abkürzung  $U_s$  analog  $N_s$  in Abschnitt 3.2. ein,

$$U_s = (a^n - b^n) + n \cdot \frac{(a^n + b^n)}{2} \ln \frac{b}{a} \quad (3.18)$$

so ergeben sich die Spannungskomponenten mit Berücksichtigung von (3.17) und (3.18)

$$\sigma_r = \frac{n \cdot Q}{2 t U_s} \left[ r^{n-1} + a^n b^n r^{-n-1} - \frac{a^n + b^n}{r} \right] \cdot \sin \varphi \quad (3.19/1)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{n \cdot Q}{2 t U_s} \left[ (1+n) r^{n-1} + (1-n) a^n b^n r^{-n-1} - \frac{a^n + b^n}{r} \right] \cdot \sin \varphi \quad (3.19/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{n \cdot Q}{2 t U_s} \left[ r^{n-1} + a^n b^n r^{-n-1} - \frac{a^n + b^n}{r} \right] \cdot \cos \varphi \quad (3.19/3)$$

Bildet man den Übergang zum isotropen Material mit  $n = 2$ , so erhält man die aus der Literatur bekannten Formeln (Girkmann [5])

$$\sigma_r = \frac{Q}{t \cdot U_s} \left[ r + \frac{a^2 - b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right] \sin \varphi \quad (3.19/4)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{Q}{t \cdot U_s} \left[ 3r - \frac{a^2 - b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right] \sin \varphi \quad (3.19/5)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{Q}{t \cdot U_s} \left[ r + \frac{a^2 - b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r} \right] \cos \varphi \quad (3.19/6)$$

mit

$$U_s = a^2 - b^2 + (a^2 + b^2) \ln \frac{b}{a}$$

Analog Abschnitt 3.2. sollen die Substitutionen nach den Gleichungen (3.7/1) bis (3.7/3) gemacht werden.

Somit lauten die Gleichungen für:

$$\sigma_r = \frac{Q \cdot \alpha n}{F \cdot U_1} \left[ (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.20/1)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{Q \cdot \alpha n}{F \cdot U_1} \left[ (1+n)(1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-n)(1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.20/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{Q \cdot \alpha n}{F \cdot U_1} \left[ (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \quad (3.20/3)$$

mit

$$U_1 = (1-\alpha)^n - (1+\alpha)^n + \frac{n}{2} \left[ (1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n \right] \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

und isotrop: ( $n = 2$ )

$$\sigma_r = \frac{Q \cdot 2 \cdot \alpha}{F \cdot U_2} \left[ (1-2\alpha\eta) + \frac{(1-\alpha)^2 (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.21/1)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{Q \cdot 2 \cdot \alpha}{F \cdot U_2} \left[ 3(1-2\alpha\eta) - \frac{(1-\alpha)^2 (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.21/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{Q}{F} \frac{2\alpha}{U_2} \left[ (1-2\alpha\eta) + \frac{(1-\alpha)^2 (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \quad (3.21/3)$$

mit

$$U_2 = (1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 + \left[ (1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 \right] \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

### 3.4. Spannungszustand für den Grundlastfall: Normalkraft

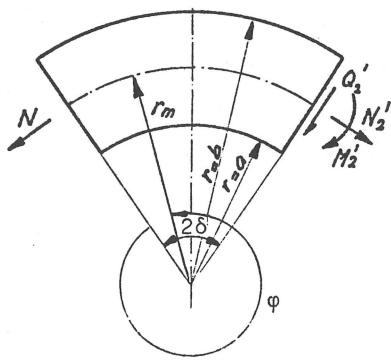


Bild 3.6.

Wir zerlegen diesen Fall in zwei Teilbelastungen:

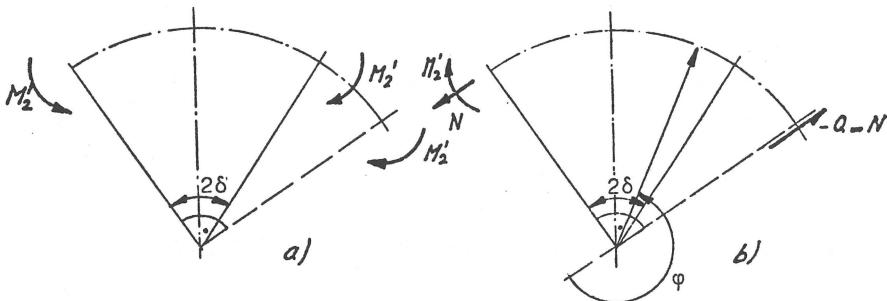


Bild 3.7.

Die erste Teilbelastung, reine Biegung ( $M_2'$ ), ist gemäss Abschnitt 3.2. zu behandeln. Für den Spannungszustand zur zweiten Teilbelastung muss lediglich in den Formeln für den Lastfall Querkraft nach Abschnitt 3.3. der Winkel  $\varphi$  durch  $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$  ersetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$\sin \varphi' = \sin (\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\cos \varphi \quad (3.22/1)$$

$$\cos \varphi' = \cos (\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sin \varphi \quad (3.22/2)$$

$$M = M_2 = N \cdot r_m \quad (3.22/3)$$

$$Q = -N \quad (3.22/4)$$

Mit den beiden Gleichungen (3.8/1) und (3.20/1), sowie mit den Beziehungen (3.22/2) bis (3.22/4) können wir die Radialspannung für diesen Lastfall anschreiben:

$$\sigma_r = -\frac{N}{F \cdot \alpha} \left\{ \frac{8(1-s)^2}{N_1} \left[ \left( (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right) (1-2\alpha\eta)^{s-1} - \left( (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right) \frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \left( (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right) \right] + \frac{n}{u_1} \left[ (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (3.23/1)$$

ebenso mit den Gleichungen: (3.8/2), (3.20/2), (3.22/2) bis (3.22/4)

$$\sigma_\varphi = -\frac{N}{F \cdot \alpha} \left\{ \frac{4(1-s)^2}{N_1} \left[ s \left( (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right) (1-2\alpha\eta)^{s-1} + \left( (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right) \frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \left( (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right) \right] + \frac{n}{u_1} \left[ (1+n) (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-n) (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (3.23/2)$$

Schliesslich ergibt sich die Schubspannung mit den Gleichungen:

(3.20/3), (3.22/1), (3.22/4)

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{N}{F \cdot \alpha} \frac{n}{U_1} \left[ (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.23/3)$$

es bedeuten:

$$N_1 = (1-s)^2 \left[ (1-\alpha)^{2s+2} + (1+\alpha)^{2s+2} \right] - (1+s)^2 \left[ (1-\alpha)^2 (1+\alpha)^{2s} + (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^2 \right] + 8s (1-\alpha^2)^{s+1}$$

$$U_1 = (1-\alpha)^n - (1+\alpha)^n + \frac{n}{2} \left[ (1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n \right] \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Für den isotropen Werkstoff mit  $s = 1$  und  $n = 2$  erhalten wir die 3

Spannungskomponenten für den Lastfall Normalkraft wie folgt:

$$\sigma_r = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \left\{ \frac{2}{N_2} \left[ -(1-\alpha)^2 \cdot \ln\left(\frac{1-2\alpha\eta}{1-\alpha}\right) + (1+\alpha)^2 \cdot \ln\left(\frac{1-2\alpha\eta}{1+\alpha}\right) + \frac{(1-\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \cdot \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{U_2} \left[ (1-2\alpha\eta) + \frac{(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (3.24/1)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \left\{ \frac{1}{N_2} \left[ 4\alpha - (1-\alpha)^2 \ln\left(\frac{1-2\alpha\eta}{1-\alpha}\right) + (1+\alpha)^2 \ln\left(\frac{1-2\alpha\eta}{1+\alpha}\right) - \frac{(1-\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{2}{U_2} \left[ 3(1-2\alpha\eta) - \frac{(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (3.24/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \frac{2}{U_2} \left[ (1-2\alpha\eta) + \frac{(1-\alpha)^2(1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)^3} - \frac{(1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (3.24/3)$$

mit

$$N_2 = -4\alpha^2 + (1-\alpha)^2 \left[ \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) \right]^2$$

$$U_2 = (1-\alpha)^2 - (1+\alpha)^2 \left[ (1-\alpha)^2 + (1+\alpha)^2 \right] \ln\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$$

### 3.5. Näherungsformeln für die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit reiner Biegung

Die in den Abschnitten 3.2. bis 3.4. abgeleiteten Spannungsformeln sind sehr umfangreich und deswegen für die Bemessung von Bauteilen ungeeignet. In diesem Abschnitt soll versucht werden, für den meistgebrauchten Lastfall Biegung Näherungsformeln mit Reihenentwicklungen für die wichtigsten Spannungskomponenten zu erhalten. Es interessieren die Randspannungen und die extremalen Radialspannungen sowie der Ort des Extremums.

#### 3.5.1. Näherungsformeln für die Randspannungen am inneren und äusseren Rand

In Abschnitt 3.2. haben wir für die Tangentialspannung den Ausdruck nach Gleichung (3.8/2) erhalten. Die Randspannungen ergeben sich, wenn wir für  $\eta = -\frac{1}{2}$  am äusseren und  $\eta = +\frac{1}{2}$  am inneren Rand setzen.

$$\sigma_{\varphi_{a,i}} = \pm \frac{M}{W} \frac{4\alpha^2(1-s^2)}{3N_1} \left\{ s(1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1}(1\pm\alpha)^{s-1} + s \left[ (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\alpha)^{s+1}(1+\alpha)^{2s} \right] (1\pm\alpha)^{-s-1} - \left[ (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right] \right\} \quad (3.25)$$

mit

$$N_1 = (1-s)^2 \left[ (1-\alpha)^{2s+2} + (1+\alpha)^{2s+2} \right] - (1+s)^2 \left[ (1-\alpha)^2 (1+\alpha)^{2s} + (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^2 \right] \\ + 8s (1-\alpha^2)^{s+1}$$

Aus geometrischen Gründen muss das Verhältnis  $\alpha = \frac{h}{2r_m}$  immer  $\leq \frac{1}{2}$  sein.

Im Holzbau ist  $\alpha$  in den meisten Fällen  $< 0,1$ . Wir führen eine Reihenentwicklung durch. Als erstes soll der Wert  $N_1$  in die Form

$$N_1 = K_0 + K_1 \alpha + K_2 \alpha^2 + K_3 \alpha^3 + K_4 \alpha^4 \dots$$

gebracht werden. Nach den erfolgten Zwischenrechnungen erhält man:

$$N_1 = \frac{16}{3} s (1-s^2)^2 \alpha^4 + \frac{16}{45} s (1-s^2)^2 (s-3) (4s-3) \alpha^6 \dots$$

Die Glieder mit Potenzen  $> 6$  sollen vernachlässigt werden. Die verschiedenen Anteile der Spannungsgleichung (3.25) erhalten die Formen:

$$s \left[ (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right] (1+\alpha)^{s-1} = 2s(s+1)\alpha \left[ 1 + (s-1)\alpha + \frac{(s-1)}{3}(2s-3)\alpha^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{3}(s-1)(s^2-3s+3)\alpha^3 + \frac{(s-1)(s-2)}{30} \right. \\ \left. (4s^2-12s+15)\alpha^4 \dots \right]$$

$$s \left[ (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right] (1+\alpha)^{-s-1} \\ = -2s(s-1)\cdot\alpha \left[ 1 + (s+1)\alpha + \frac{2s^2-s+3}{3}\alpha^2 \right. \\ \left. + \frac{s+1}{3}(s^2-3s+3)\alpha^3 + (14s^4-16s^3+19s^2 \right. \\ \left. - 21s + 30)\alpha^4 \dots \right]$$

$$\left[ (1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right] \\ = -4s\alpha \left[ 1 + \frac{1}{3}(s-1)(2s-1)\alpha^2 + \frac{s-1}{60}(8s^3-32s^2 \right. \\ \left. + 38s - 12)\alpha^4 \dots \right]$$

Glieder mit Potenzen  $> 4$  werden vernachlässigt.

Die 3 Anteile zusammengefasst, durch  $N_1$  dividiert und mit dem Faktor  $\frac{-M}{W} \frac{4\alpha^2(1-s^2)}{3}$  multipliziert, ergeben die Randspannungen bei reiner Momentenbelastung für die polarorthotrope Kreisbogenscheibe.

$$\underline{\sigma_{\varphi_a}} = \frac{M}{W} \left[ 1 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{15}(s^2+6)\alpha^2 - \frac{2}{45}(9-s^2)\alpha^3 \dots \right] \quad (3.27/1)$$

$$\underline{\sigma_{\varphi_i}} = - \frac{M}{W} \left[ 1 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{15}(s^2+6)\alpha^2 + \frac{2}{45}(9-s^2)\alpha^3 \dots \right] \quad (3.27/2)$$

Bei der isotropen Scheibe wird  $s = 1$ , damit erhalten wir:

$$\sigma_{\varphi a} = \frac{M}{W} \left[ 1 - \frac{2}{3} \alpha + \frac{7}{15} \alpha^2 - \frac{16}{45} \alpha^3 \dots \dots \right] \quad (3.28/1)$$

$$\sigma_{\varphi i} = - \frac{M}{W} \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha + \frac{7}{15} \alpha^2 + \frac{16}{45} \alpha^3 \dots \dots \right] \quad (3.28/2)$$

Mit  $s = 0$  lassen sich dieselben Formeln ermitteln, die Heimeshoff [4] angibt. (Klassische Biegetheorie mit ebenen Querschnitten)

$$\sigma_{\varphi a} = \frac{M}{W} \left[ 1 - \frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{5} \alpha^2 - \frac{2}{5} \alpha^3 \dots \dots \right] \quad (3.29/1)$$

$$\sigma_{\varphi i} = - \frac{M}{W} \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{5} \alpha^2 + \frac{2}{5} \alpha^3 \dots \dots \right] \quad (3.29/2)$$

### 3.5.2. Näherungsformel für die extremale Radialspannung

Um den Ort der extremalen Radialspannung zu bestimmen, setzen wir die erste Ableitung nach  $\eta$  der Gleichung (3.8/1) gleich null.

$$\frac{d\sigma_r}{d\eta} = 0 = \left[ (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right] (1-2\alpha)^{s-2} (s-1) - \left[ (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right] (1-2\alpha\eta)^{-s-2} (-s-1)$$

Nach  $(1-2\alpha\eta)$  aufgelöst:

$$1 - 2\alpha\eta = \sqrt{\frac{(s+1)(1-\alpha)^{s+1}(1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s}(1+\alpha)^{s+1}}{(s-1)(1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1}}}$$

Wir führen wieder eine Reihenentwicklung durch. Die Stelle des Extremwertes ergibt sich zu:

$$\eta_0 = \frac{y}{h} = -\frac{5}{12} \alpha + \frac{37 + 7s - 15s^2}{720} \alpha^3 \dots \dots \quad (3.30)$$

$\eta_0$  in den Ausdruck  $(1-2\alpha\eta)$  eingesetzt ergibt:

$$1 - \frac{5}{6} \alpha^2 - \frac{37 + 7s - 15s^2}{360} \alpha^4 \dots \dots$$

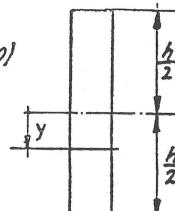


Bild 3.7.

Das Extremum der Radialspannung lässt sich mit Hilfe der Gleichung (3.8/1) errechnen, wir erhalten:

$$\sigma_r \min = -\frac{M}{W} \cdot \frac{\alpha}{2} \left[ 1 - \frac{3s^2 - 107}{180} \cdot \alpha^2 \dots \dots \right] \quad (3.31)$$

mit

$$\alpha = \frac{h}{2r_m} \quad s = \frac{\sqrt{E\varphi}}{\sqrt{E_r}}$$

Die Spezialfälle lauten:

$s = 1$  (isotrope Scheibe)

$$\sigma_r \min = -\frac{M}{W} \cdot \frac{\alpha}{2} \left[ 1 + \frac{26}{45} \alpha^2 \dots \dots \right] \quad (3.32)$$

$s = 0$  (klassische Biegetheorie)

$$\sigma_r \min = -\frac{M}{W} \cdot \frac{\alpha}{2} \left[ 1 + \frac{107}{180} \alpha^2 \dots \dots \dots \right] \quad (3.33)$$

Die Formel (3.33) ist bereits von Heimeshoff [4] abgeleitet worden.

### 3.6. Rechnerische Auswertung der Spannungen

Die Gleichungen (3.8/1,2) für den Grundlastfall reine Biegung, (3.20/1-3) für den Grundlastfall Querkraft und (3.23/1-3) für den Grundlastfall Normalkraft habe ich mit Hilfe der X8 des Institutes für Mathematik an der Universität Karlsruhe ausgewertet. Die Tangential-, Radial- und Schubspannungen wurden jeweils in den Zehntelpunkten für  $\eta = -0,5, -0,4 \dots 0,4, 0,5$  errechnet. Die Extremwerte konnten näherungsweise mit Hilfe einer über 5 Stützstellen interpolierten Parabel nach der Stirlingschen Formel bestimmt werden. Obwohl in Kapitel 3. normalerweise das Extremum exakt berechnet werden kann, wurde vor allem im Hinblick auf die Extremwertbestimmung an den Spannungen der Scheiben in Abschnitt 4. und 5. diese Methode entwickelt. Der Rechengang lässt sich auf einem Tischcomputer bewältigen und ergibt eine ausreichende Genauigkeit.

Die Auswertungen sind in den Tafeln 1 - 10 zusammengestellt.

4. Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand

4.1. Grundlastfälle

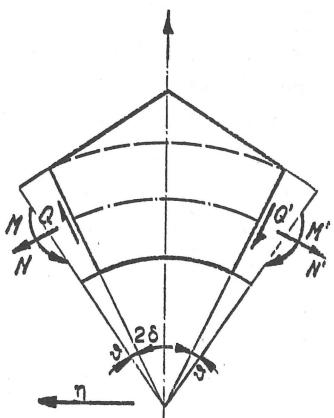
Die in Bild 4.1. dargestellte Scheibe ist in bezug auf ihre Diagonale symmetrisch. An den Endquerschnitten greifen die äusseren Schnittkräfte in der Ebene der Scheibe an. Um die Symmetrieeigenschaften bezüglich der Eckdiagonalen auszunützen, wird der allgemeine Belastungsfall in die drei symmetrischen bzw. antimetrischen Grundlastfälle aufgespalten:

Grundlastfall a): Reine Biegung

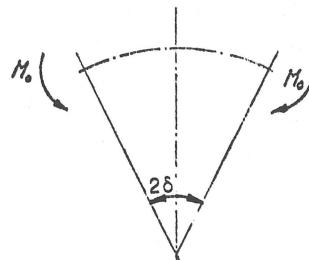
Grundlastfall b): Normal-, Querkraft und Biegung symmetrisch zur Eckdiagonalen. Die Resultierende liegt im Krümmungsmittelpunkt  $r = 0$  normal zum Eckdiagonalquerschnitt.

Grundlastfall c): Normal-, Querkraft und Biegung antimetrisch zur Eckdiagonalen. Die Resultierende liegt im Eckdiagonalquerschnitt.

Allgem. Lastfall



Grundlastfall a)



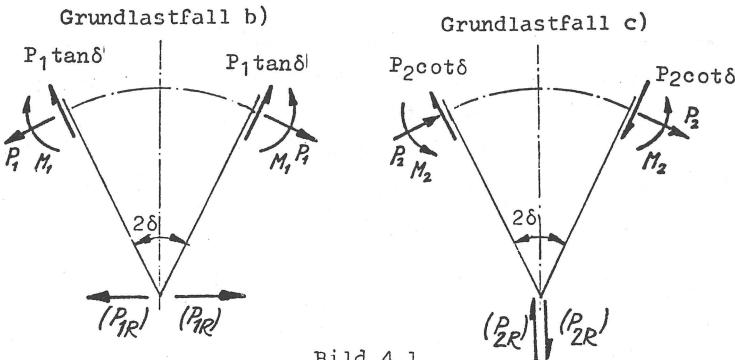


Bild 4.1.

Nach Bild 4.1. müssen folgende Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein:

$$\sum P_\xi = 0 \quad (Q - Q') \cos \delta = (N + N') \sin \delta$$

$$\sum P_\eta = 0 \quad (Q + Q') \sin \delta = -(N - N') \cos \delta$$

$$\sum M = 0 \quad M - M' = -(N - N') r_m$$

$$P_{1R} = \frac{P_1}{\cos \delta}, \quad M_1 = P_{1R} \cdot r_m \cdot \cos \delta = P_1 \cdot r_m$$

$$P_{2R} = \frac{P_2}{\sin \delta}, \quad M_2 = P_{2R} \cdot r_m \cdot \sin \delta = P_2 \cdot r_m$$

Zwischen den Schnittgrößen des allgemeinen Lastfalles und denen der Grundlastfälle ergeben sich folgende Beziehungen:

$$P_1 - P_2 = N$$

$$P_1 \cdot \tan \delta + P_2 \cdot \cot \delta = Q$$

$$M_0 - M_1 + M_2 = M_0 - r_m \cdot (P_1 - P_2) = M_0 - N \cdot r_m = M$$

daraus erhält man:

$$P_1(1 + \tan^2 \delta) = N + Q \cdot \tan \delta$$

$$P_1 = \frac{N + Q \cdot \tan \delta}{1 + \tan^2 \delta} = N \cdot \cos^2 \delta + Q \cdot \sin \delta \cdot \cos \delta$$

$$= \frac{1}{2} \left[ N \cdot (\cos 2\delta + 1) + Q \cdot \sin 2\delta \right]$$

$$P_2 = P_1 - N = \frac{1}{2} \left[ N \cdot (\cos 2\delta - 1) + Q \cdot \sin 2\delta \right]$$

$$M_0 = M + N \cdot r_m$$

Die Zusammenfassung der Grundlastfälle a) und b) für  $M_0 = M_1$  ergibt den Lastfall symmetrische Quer- und Normalkraftbelastung ohne äusseres Biegemoment. Die Zusammenfassung von b) und c) für  $P_1 = P_2$  ergibt den Lastfall Querkraftbelastung analog Bild 3.1.b). Aus a), b) und c) für  $P_2 = -P_1 \tan^2 \delta$  und  $M_0 = P_1 \cdot r_m (1 + \tan^2 \delta)$  erhält man den Lastfall Normalkraft analog Bild 3.1.c).

#### 4.2. Reine Biegung

Für den Lastfall reine Biegung wird der Koordinatenursprung  $\varphi = 0$  in die Eckdiagonale gelegt.

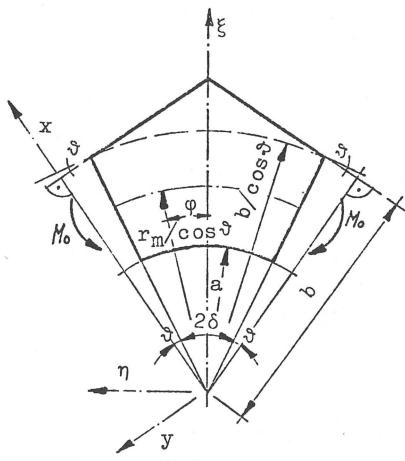


Bild 4.2.

##### 4.2.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

###### 4.2.1.1. Die Randbedingungen am gekrümmten Rand $r = a$

Am inneren Rand müssen analog Abschnitt 3 die Radial- und Tangentialspannungen verschwinden.

$$\sigma_{r=r=a} = 0 \quad (4.111)$$

$$\tau_{r\varphi r=a} = 0 \quad (4.112)$$

#### 4.2.1.2. Die Randbedingungen am geneigten äusseren Rand $x = b$

Es ist fast unmöglich, für die Scheibengleichung (2.21) in Abschnitt 2 eine Lösung zu finden, die alle Randbedingungen und somit auch die Randbedingungen am geneigten äusseren Rand erfüllt. Es wird aber verlangt, dass die angreifenden Normal- und Schubspannungen am äusseren Rand minimal werden. Die Bedingung dazu wird nach der Methode der kleinsten Quadrate formuliert. Sie lautet:

$$K = \int_{y=b \cdot \tan \vartheta}^{y=b \cdot \tan(\vartheta+\delta)} (\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2) dy \rightarrow \text{minimal} \quad (4.2)$$

$\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$  sind die Spannungskomponenten im  $x - y$  Koordinatensystem,  $t$  bedeutet die Scheibendicke.

#### 4.2.1.3. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Endquerschnitte

An den Endquerschnitten  $\varphi = \pm \delta$  müssen die Spannungen mit den äusseren angreifenden Kräften im Gleichgewicht stehen. Die drei Beziehungen für Moment, Normal- und Querkraft lauten:

$$M = t \int_{r=a}^{r=b/\cos\vartheta} \sigma_{\varphi\varphi=\delta} \cdot r \cdot dr \quad (4.3/1)$$

$$N = t \int_{r=a}^{r=b/\cos\vartheta} \sigma_\varphi \cdot dr = 0 \quad (4.3/2)$$

$$Q = t \int_{r=a}^{r=b/\cos\vartheta} \tau_{r\varphi} \cdot dr = 0 \quad (4.3/3)$$

#### 4.2.1.4. Die Gleichgewichtsbedingungen des ausspringenden Bereiches

Da die Randbedingungen am äusseren Rand nach Abschnitt 4.2.1.2 nur näherungsweise erfüllt sind, werden im allgemeinen die Normal- und Schubspannungen resultierende Kräfte sowie auch ein resultierendes Moment erzeugen, die als ungewollte äussere Belastung am äusseren Rand  $x = b$  wirken und dadurch den Spannungszustand verfälschen. Um diese Möglichkeit auszuschliessen, werden am halben ausspringenden Bereich drei zusätzliche Gleichungsbedingungen formuliert. Dadurch

kann auch die Konvergenz des Lösungsganges wesentlich verbessert werden.

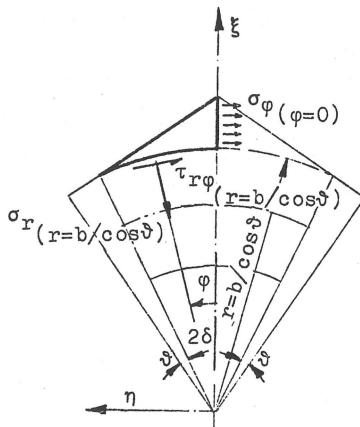


Bild 4.3.

Man setzt die drei Gleichgewichtsbedingungen sinnvollerweise wie folgt an:

$$\sum P_\xi = 0 \quad - \frac{t \cdot b}{\cos \delta} \int_0^\delta \sigma_r_{r=b/\cos \delta} \cdot \cos \varphi \, d\varphi + \frac{t \cdot b}{\cos \delta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \delta} \cdot \sin \varphi \, d\varphi = 0 \quad (4.4/1)$$

$$\sum P_\eta = 0 \quad - \frac{t \cdot b}{\cos \delta} \int_0^\delta \sigma_r_{r=b/\cos \delta} \cdot \sin \varphi \, d\varphi - \frac{t \cdot b}{\cos \delta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \delta} \cdot \cos \varphi \, d\varphi \\ - t \int_{b/\cos(\delta+\delta)}^{b/\cos(\delta)} \sigma_\varphi \, dr = 0 \quad (4.4/2)$$

$$\sum M = 0 \quad - \frac{t \cdot b^2}{\cos^2 \delta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \delta} \, d\varphi - t \int_{b/\cos \delta}^{b/\cos(\delta+\delta)} \sigma_{\varphi\varphi=0} \, r \cdot dr = 0 \quad (4.4/3)$$

M bezogen auf den Ursprung  $r = 0$

#### 4.2.2. Spannungszustand für reine Biegung

Die in Bild 4.2. dargestellte Scheibe besitzt geneigte Außenränder in der Entfernung  $x = b$  vom Koordinatenursprung mit einer Neigung  $\delta$  gegenüber der Tangente im Endquerschnitt. Der Innenrand ist kreisförmig gekrümmmt mit dem Radius  $r = a$ . An den Endquerschnitten  $\varphi = \delta$  und  $\varphi = -\delta$  greifen die äusseren Momente  $M$  an.

Zur Auflösung der Scheibengleichung (2.21) ist es vorteilhaft, wenn man den Ansatz für die Spannungsfunktion für den allgemeinen Fall

$$F = A'_{o1} + A'_{o2} r^{1+s} + A'_{o3} r^{1-s} + A'_{o4} r^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} \cdot r^{m_{ik}} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.5/1)$$

und für die isotrope Scheibe mit

$$F = A'_{o1} + A'_{o2} \ln r + A'_{o3} r^2 \ln r + A'_{o4} r^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} \cdot r^{m_{ik}} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.5/2)$$

bildet. Er setzt sich zusammen aus dem Ansatz, der in Abschnitt 3.2. (Gleichung (2.28) bzw. (2.29)) als Lösung für den Grundlastfall reine Biegung verwendet worden ist. Die ersten vier Glieder stellen eine Art inhomogener Lösung dar, während der zweite Teil als homogene Lösung angesehen werden kann mit der Aufgabe, sich den Randbedingungen am äusseren geneigten Rand anzupassen. Die Exponenten wurden in Abschnitt 2.3.5. bestimmt. Sie sind abhängig von der Grösse und den Anisotropieverhältnissen in der Scheibe.  $\alpha_i$  stellt ein Mass für die Perioden dar, mit dem die Cosinusfunktion in den Lösungsgang eingeht.

Da die Schubspannungen in den Querschnitten  $\varphi = \delta + \vartheta$  und  $\varphi = -\delta - \vartheta$  möglichst verschwinden sollen, kann die Bedingung  $\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{\delta + \vartheta}$  wobei  $i = 1, 2, 3 \dots j$  durchläuft, formuliert werden. Bei extremen Anisotropieverhältnissen und geringem Zentriwinkel  $2\delta$ , erreichen die Exponenten  $m_{ik}$  Grössenordnungen, die eine zuverlässige Berechnung auf einem Rechenautomaten nicht mehr ermöglichen. Es musste deshalb für bestimmte Verhältnisse  $\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{(\delta + \vartheta)_w}$  gesetzt werden.  $w$  ist eine positive Zahl. Mit diesem Faktor ist es theoretisch möglich, die Spannungsverteilung an den Endquerschnitten  $\varphi = \delta + \vartheta$  und  $\varphi = -\delta - \vartheta$  zu variieren und eine Annäherung an die dort auftretenden Verhältnisse im Übergang zum geraden Teil zu erreichen.

Die Spannungskomponenten lauten nach den Gleichungen (2.20) für die anisotrope Scheibe:

$$\sigma_r = A_{02}'(1+s)r^{s-1} + A_{03}'(1-s)r^{-s-1} + 2A_{04}' + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}'(m_{ik}-\alpha_i^2)r^{m_{ik}-2} \right] \cos \alpha_i \varphi \quad (4.6/1)$$

$$\sigma_\varphi = A_{02}'s(1+s)r^{s-1} + A_{03}'s(s-1)r^{-s-1} + 2A_{04}' + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}'(m_{ik}-1)m_{ik}r^{m_{ik}-2} \right] \cos \alpha_i \varphi \quad (4.6/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}'(m_{ik}-1)r^{m_{ik}-2} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.6/3)$$

und für die isotrope Scheibe:

$$\sigma_r = A_{02}' \frac{1}{r^2} + A_{03}'(1+2\ln r) + 2A_{04}' + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots \right] \quad (4.7/1)$$

$$\sigma_\varphi = -A_{02}' \frac{1}{r^2} + A_{03}'(3+2\ln r) + 2A_{04}' + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots \right] \quad (4.7/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}'(m_{ik}-1)r^{m_{ik}-2} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.7/3)$$

Mit den Abkürzungen:

$$A_{02}' = A_{02}' b^{(s-1)} \quad \text{bzw.} \quad A_{02} = \frac{A_{02}'}{b^2}$$

$$A_{03}' = A_{03}' b^{-(s+1)} \quad \text{bzw.} \quad A_{03} = A_{03}'$$

$$A_{04}' = A_{04}'$$

$$A_{ik}' = A_{ik}' b^{m_{ik}-2}$$

Mit  $\varphi = \frac{b}{r}$  kann man die Gleichungen (4.6) bzw. (4.7) in folgender Form darstellen:

$$\sigma_r = A_{02}(1+s)q^{1-s} + A_{03}(1-s)q^{1+s} + 2A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}(m_{ik}-\alpha_i^2)q^{2-m_{ik}} \right] \cos \alpha_i \varphi \quad (4.8/1)$$

$$\sigma_\varphi = A_{02}s(1+s)q^{1-s} + A_{03}s(s-1)q^{1+s} + 2A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik}(m_{ik}-1)q^{2-m_{ik}} \right] \cos \alpha_i \varphi \quad (4.8/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1)q^{2-m_{ik}} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.8/3)$$

und

$$\sigma_r = A_{02} Q^2 + A_{03} (1+2 \ln r) + 2 A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots \right] \quad (4.9/1)$$

$$\sigma_\varphi = -A_{02} Q^2 + A_{03} (3+2 \ln r) + 2 A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots \right] \quad (4.9/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - 1) Q^{2-m_{ik}} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.9/3)$$

Am äusseren Rand  $x = b$  sind die Spannungskomponenten  $\sigma_{xn}$ ,  $\sigma_{yn}$  und  $\tau_{xyn}$  im  $x - y$  - Koordinatensystem zu bestimmen. Sie sind gegenüber  $\sigma_r$ ,  $\sigma_y$  und  $\tau_{ry}$  des Polarkoordinatensystems um den Winkel  $\phi$  gedreht.

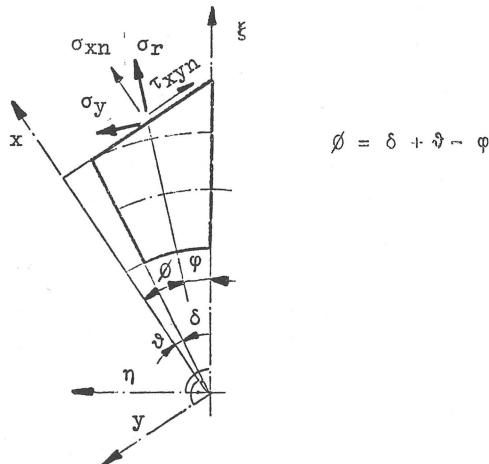


Bild 4.4.

Die Transformationsgleichungen lauten:

$$\sigma_{xn} = \sigma_r \cos^2 \phi + \sigma_\varphi \sin^2 \phi + \tau_{r\varphi} \sin 2\phi \quad (4.10/1)$$

$$\sigma_{yn} = \sigma_r \sin^2 \phi + \sigma_\varphi \cos^2 \phi - \tau_{r\varphi} \sin 2\phi \quad (4.10/2)$$

$$\tau_{xyn} = -\frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \sin 2\phi + \tau_{r\varphi} \cos 2\phi \quad (4.10/3)$$

Der Winkel  $\phi$  wird jeweils von den Richtungen der Spannungskomponenten  $\sigma_{xn}$  und  $\sigma_r$  eingeschlossen. Setzen wir nun  $\phi = \delta + \vartheta - \varphi$ , dann können wir die Spannungskomponenten  $\sigma_{xn}$  u.  $\tau_{xyn}$  in Funktionen des Winkels  $\varphi$  ausdrücken. Mit den Zwischenrechnungen:

$$\cos \phi = \cos(\vartheta + \delta - \varphi) = \cos(\vartheta + \delta) \cos \varphi + \sin(\vartheta + \delta) \sin \varphi$$

$$\sin \phi = \sin(\vartheta + \delta - \varphi) = \sin(\vartheta + \delta) \cos \varphi - \cos(\vartheta + \delta) \sin \varphi$$

$$\cos^2 \phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\vartheta + \delta) \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2(\vartheta + \delta) \sin 2\varphi$$

$$\sin^2 \phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\vartheta + \delta) \cos 2\varphi - \frac{1}{2} \sin 2(\vartheta + \delta) \sin 2\varphi$$

und mit Einführen folgender Abkürzungen

$$p = \cos 2(\vartheta + \delta) \quad q = \sin 2(\vartheta + \delta)$$

ergeben sich die Spannungskomponenten zu:

$$\sigma_{xn} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) + \tau_{r\varphi} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \quad (4.11/1)$$

$$\sigma_{yn} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) - \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) - \tau_{r\varphi} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \quad (4.11/2)$$

$$\tau_{xyn} = - \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) + \tau_{r\varphi} (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \quad (4.11/3)$$

Setzen wir unter Beachtung der Abhängigkeit  $q = \frac{b}{r} = \cos(\vartheta + \delta - \varphi)$  für den äusseren Rand  $x = \frac{b}{\cos \vartheta}$  die Spannungskomponenten aus den Gleichungen (4.8/1-3) bzw. (4.9/1-3 in die Transformationsformeln (4.11/1-3) ein, dann erhalten wir die endgültigen Spannungskomponenten  $\sigma_{xn}$  u.  $\tau_{xyn}$  am äusseren Rand. Die Komponente  $\sigma_{yn}$  wird für die Erfüllung der Randbedingungen nicht benötigt und kann deshalb weggelassen werden.

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= A_{02} \cdot \cos^{1-s}(\vartheta + \delta - \varphi) \left( \frac{s+1}{2} \right) \left[ 1+s+(p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi)(1-s) \right] \\ &\quad + A_{03} \cdot \cos^{1+s}(\vartheta + \delta - \varphi) \left( \frac{1-s}{2} \right) \left[ 1-s+(p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi)(1+s) \right] \\ &\quad + 2A_{04} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=k=4} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}}(\vartheta + \delta - \varphi) \left\{ \frac{\cos \alpha_i \varphi}{2} \left[ (m_{ik} - \alpha_i)^2 (1+p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ik}(m_{ik}-1)(1-p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right\} \end{aligned}$$

(4.12/1)

$$\begin{aligned}\tau_{xyN} = & A_{02} \cos^{1-s}(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \frac{1-s^2}{2} (p \cdot \sin 2\varphi - q \cdot \cos 2\varphi) \right] \\ & A_{03} \cos^{1+s}(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \frac{1-s^2}{2} (p \cdot \sin 2\varphi - q \cdot \cos 2\varphi) \right] \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cdot \cos^{2-mik}(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \frac{\cos \alpha_i \varphi}{2} (2m_{ik} - \alpha_i^2 - m_{ik}^2) (p \sin 2\varphi - q \cos 2\varphi) \right. \\ & \quad \left. + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right]\end{aligned}$$

Für den isotropen Werkstoff erhält man:

(4.12/2)

$$\begin{aligned}\sigma_{xN} = & A_{02} \cos^2(\vartheta+\delta-\varphi) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \\ & + A_{03} \left[ 2(1+\ln \frac{b}{\cos(\vartheta+\delta-\varphi)}) - (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) + 2 A_{04} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots \right]\end{aligned}$$

(4.13/1)

$$\begin{aligned}\tau_{xyN} = & A_{02} \cos^2(\vartheta+\delta-\varphi) (p \sin 2\varphi - q \cos 2\varphi) + A_{03} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \dots\end{aligned}$$

(4.13/2)

#### 4.2.2.1. Die Randbedingungen am inneren Rand

Analog Abschnitt 3. müssen auch hier die Radial- und Schubspannungen am inneren Rand verschwinden. Wir wollen diese Randbedingung streng erfüllen, indem wir fordern, dass die ersten drei Glieder der Radialspannung wie in Abschnitt 3. und zusätzlich die Summe der vier Reihenglieder mit gleichem  $i$  von der Radial- und Schubspannung verschwinden. Mit Berücksichtigung, dass  $r = a$  und damit  $q = \frac{b}{a} = q_1$ , können wir mit den Gleichungen (4.8/1) und (4.8/3) folgende Bedingungen formulieren:

a)  $\sigma_{r=r=a} = 0$

$$A_{02} (1+s)^{1-s} + A_{03} (1-s) q_1^{1+s} + 2 A_{04} = 0$$

isotrop

(4.14/1)

$$A_{02} q_1^2 + A_{03} (1+2 \ln a) + 2 A_{04} = 0$$

(4.14/2)

und für  $i = 1$  bis  $i = j$

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - \alpha_i^2) q_1^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.15)$$

b)  $\tau_{r\varphi r=a} = 0$

für  $i = 1$  bis  $i = j$

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (M_{ik} - 1) q^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.16)$$

#### 4.2.2.2. Gleichgewichtsbedingungen am Schnitt $\varphi=\delta$ bzw. $\varphi=-\delta$

Am Schnitt  $\varphi=\delta$  bzw.  $\varphi=-\delta$  müssen die Spannungen mit den angreifenden Lasten im Gleichgewicht sein. Gleichungen (4.3/1 - 4.3/3)

Für das Moment ergibt sich:

$$M = t \int_{r=a}^{r=b/\cos\vartheta} \sigma_\varphi r dr = -t \int_{\varphi=Q_1}^{Q=\cos\vartheta} \sigma_\varphi \frac{1}{\varphi} d\varphi$$

Nach durchgeföhrter Integration der Gleichung (4.8/1) bzw. (4.9/1) erhalten wir:

$$\frac{M}{t b^2} = A_{02} s (\cos^{-(s+1)} \vartheta - q_1^{-(s+1)}) - A_{03} s (\cos^{s-1} \vartheta - q_1^{s-1}) + A_{04} \left( \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{q_1^2} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - 1) (\cos^{-m_{ik}} \vartheta - q_1^{-m_{ik}}) \right] \cos \alpha_i \delta \quad (4.17/1)$$

isotrop:

$$\frac{M}{t b^2} = A_{02} \cdot \ln \frac{\cos \vartheta}{q_1} + A_{03} \left[ \frac{1}{\cos^2 \vartheta} (1 + \ln \frac{b}{\cos \vartheta}) - \frac{1}{q_1^2} (1 + \ln a) \right] + A_{04} \left( \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \frac{1}{q_1^2} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \quad (4.17/2)$$

Die Normalkraft muss verschwinden:

$$N = t \int_{r=a}^{r=b/\cos\vartheta} \sigma_\varphi dr = -t \cdot b \int_{\varphi=Q_1}^{Q=\cos\vartheta} \sigma_\varphi \frac{1}{\varphi^2} d\varphi = 0$$

$$A_{02} (1+s) (\cos^{-s} \vartheta - q_1^{-s}) + A_{03} (1-s) (\cos^s \vartheta - q_1^s) + A_{04} \left( \frac{2}{\cos \vartheta} - \frac{2}{q_1} \right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (\cos^{-m_{ik}+1} \vartheta - q_1^{-m_{ik}+1}) \cos \alpha_i \delta \right] = 0 \quad (4.18/1)$$

isotrop:

$$A_{02}(\cos \vartheta - Q_1) + A_{03} \left[ \frac{1}{\cos \vartheta} (2 \ln \frac{b}{\cos \vartheta} + 1) - \frac{1}{Q_1} (2 \ln a + 1) \right] + A_{04} \left( \frac{2}{\cos \vartheta} - \frac{2}{Q_1} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} \dots = 0 \right] \quad (4.18/2)$$

Zuletzt schreiben wir das Gleichgewicht für die Querkraft  $Q = 0$  an.

$$\begin{aligned} r &= b/\cos \vartheta & q &= \cos \vartheta \\ Q &= t \int_{r=a}^q \tau_{r\varphi} \cdot dr = -t b \int_{q=Q_1}^1 \tau_{r\varphi} \frac{1}{q^2} dq = 0 & (4.19) \end{aligned}$$

Wir integrieren die Gleichung (4.8/3). Es ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (\cos^{1-m_{ik}\delta} - Q_1^{1-m_{ik}\delta}) \alpha_i \sin \alpha_i \delta \right] = 0 \quad (4.20)$$

mit Gültigkeit für den anisotropen und isotropen Werkstoff. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen mit der Normal- und Querkraft werden als Kontrollbedingungen benutzt.

#### 4.2.2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen des ausspringenden Bereiches

$$a) \sum p_\xi = 0$$

$$-\int_0^\delta \sigma_{r=b/\cos \vartheta} \cos \varphi d\varphi + \int_0^\delta \tau_{r\varphi=r=b/\cos \vartheta} \sin \varphi d\varphi = 0$$

Mit den Integralen:

$$\int_0^\delta \cos \varphi d\varphi = \sin \delta$$

$$\int_0^\delta \cos \varphi \cdot \cos \alpha_i \varphi d\varphi = \frac{\sin(\alpha_i - 1)\delta}{2(\alpha_i - 1)} + \frac{\sin(\alpha_i + 1)\delta}{2(\alpha_i + 1)}$$

$$\int_0^\delta \sin \varphi \cdot \sin \alpha_i \varphi d\varphi = \frac{\sin(\alpha_i - 1)\delta}{2(\alpha_i - 1)} - \frac{\sin(\alpha_i + 1)\delta}{2(\alpha_i + 1)}$$

erhalten wir für  $r = b/\cos \vartheta$  die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & \left[ A_{02}(1+s) \cos^{1-s\vartheta} + A_{03}(1-s) \cos^{1+s\vartheta} + 2 A_{04} \right] \sin \delta \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \cos^{2-m_{ik}\delta} \left[ (1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i+1)} + (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i-1)} \right] = 0 \quad (4.21/1) \end{aligned}$$

für den isotropen Werkstoff:

$$\left[ A_{02} \cos^2 \vartheta + A_{03} \left( 1 + 2 \ln \frac{b}{\cos \vartheta} \right) + 2 A_{04} \right] \sin \delta + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots = 0 \quad (4.21/2)$$

b)  $\sum P_\eta = 0$

Gleichung (4.4/2) etwas vereinfacht geschrieben ergibt:

$$\int_0^\delta \sigma_r \sin \varphi d\varphi + \int_0^\delta \tau_{r\varphi} \cos \varphi d\varphi - \cos \vartheta \int_0^\delta \frac{\sigma_\varphi}{q^2} dq = 0$$

Nach der Auswertung der Integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \sin \varphi d\varphi &= 1 - \cos \delta \\ \int_0^\delta \sin \varphi \cos \alpha_i \varphi d\varphi &= \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i-1})} - \frac{\cos(\alpha_{i+1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i+1})} \\ \int_0^\delta \cos \varphi \sin \alpha_i \varphi d\varphi &= - \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i-1})} - \frac{\cos(\alpha_{i+1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i+1})} \\ - \int_0^{\cos(\vartheta+\delta)} \frac{\sigma_\varphi}{q^2} dq &= A_{02}(1+s) \left[ \cos^{-s}(\vartheta+\delta) - \cos^{-s} \vartheta \right] + A_{03}(1-s) \left[ \cos^s(\vartheta+\delta) - \cos^s \vartheta \right] \\ \cos \vartheta &\quad + A_{04} 2 \left[ \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)} - \frac{1}{\cos \vartheta} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=6} A_{ik} m_{ik} \left[ \cos^{1-m_{ik}} (\vartheta+\delta) - \cos^{1-m_{ik}} \vartheta \right] \end{aligned}$$

für den isotropen Werkstoff:

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta+\delta) \\ - \int_0^{\cos \vartheta} \frac{\sigma_\varphi}{q^2} dq &= A_{02} \left[ \cos(\vartheta+\delta) - \cos \vartheta \right] + A_{03} \left[ \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)} (2 \ln \frac{b}{\cos(\vartheta+\delta)} + 1) - \frac{1}{\cos \vartheta} (2 \ln \frac{b}{\cos \vartheta} + 1) \right] \\ \cos \vartheta &\quad + A_{04} 2 \left[ \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)} - \frac{1}{\cos \vartheta} \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \end{aligned}$$

erhalten wir schliesslich das Gleichgewicht in  $\eta$  - Richtung:

$$A_{02}(1+s) \left[ \cos^{-s}(\vartheta+\delta) \cos \vartheta - \cos^{1-s} \vartheta \cos \delta \right] + A_{03}(1-s) \left[ \cos^s(\vartheta+\delta) \cos \vartheta - \cos^{1+s} \vartheta \cos \delta \right]$$

$$+ A_{04} 2 \left[ \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta+\delta)} - \cos \delta \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \left\{ \cos^{2-m_{ik}} \vartheta \left[ -(1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \frac{\cos(\alpha_i+1)\delta-1}{2(\alpha_i+1)} \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \frac{\cos(\alpha_i-1)\delta-1}{2(\alpha_i-1)} \right] + m_{ik} (\cos^{-m_{ik}+1}(\vartheta+\delta) - \cos^{-m_{ik}+1}\vartheta) \cos \vartheta \right\} = 0 \quad (4.22/1)$$

und isotrop:

$$A_{02} \cos \vartheta \left[ \cos(\vartheta+\delta) - \cos \vartheta \cdot \cos \delta \right] + A_{03} \left[ \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta+\delta)} (1+2 \ln \frac{b}{\cos(\vartheta+\delta)}) - \cos \delta (1+2 \ln \frac{b}{\cos \vartheta}) \right] \\ + A_{04} 2 \left[ \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta+\delta)} - 2 \cos \delta \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots \quad (4.22/2)$$

c)  $\Sigma M = 0$

Aus Gleichung (4.4/3) erhalten wir:

$$\int_0^\delta \tau_{r\varphi} r=t/\cos \vartheta - \cos^2 \vartheta \int \frac{\sigma_\varphi}{\vartheta^3} d\vartheta = 0$$

$\cos \vartheta$

Wir werten die folgenden Integrale aus:

$$\int_0^\delta \sin \alpha \varphi d\varphi = \frac{1-\cos \alpha_1 \delta}{\alpha_1} \\ - \int_{\cos \vartheta}^\delta \frac{\sigma_\varphi}{\vartheta^3} d\vartheta = A_{02} s \left[ \cos^{-1-s}(\vartheta+\delta) - \cos^{-1-s}\vartheta \right] - A_{03} s \left[ \cos^{s-1}(\vartheta+\delta) - \cos^{s-1}\vartheta \right] \\ + A_{04} \left[ \frac{1}{\cos^2(\vartheta+\delta)} - \frac{1}{\cos^2\vartheta} \right] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) \left[ \cos^{-m_{ik}}(\vartheta+\delta) - \cos^{-m_{ik}}\vartheta \right]$$

für den isotropen Werkstoff:

$$- \int_{\cos \vartheta}^\delta \frac{\sigma_\varphi}{\vartheta^3} d\vartheta = A_{02} \ln \frac{\cos(\vartheta+\delta)}{\cos \vartheta} + A_{03} \left[ \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)^2} (1+\ln \frac{b}{\cos(\vartheta+\delta)}) - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} (1+\ln \frac{b}{\cos \vartheta}) \right] \\ + A_{04} \left[ \frac{1}{\cos^2(\vartheta+\delta)} - \frac{1}{\cos^2\vartheta} \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots \dots$$

und erhalten schliesslich das Momentengleichgewicht um den Krümmungsmittelpunkt am halben ausspringenden Bereich:

$$\begin{aligned}
 & A_{02} s \left[ \cos^{-1-s} (\vartheta + \delta) - \cos^{-1-s} \delta \right] - A_{03} s \left[ \cos^{s-1} (\vartheta + \delta) - \cos^{s-1} \vartheta \right] \\
 & + A_{04} \left[ \frac{1}{\cos^2(\vartheta + \delta)} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right] \\
 & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) \left[ \cos^{-m_{ik}} (\vartheta + \delta) - \cos^{-m_{ik}} \vartheta \cdot \cos \alpha_i \delta \right] = 0 \quad (4.23/1)
 \end{aligned}$$

und für den isotropen Werkstoff:

$$\begin{aligned}
 & A_{02} \ln \frac{\cos(\vartheta + \delta)}{\cos \vartheta} + A_{03} \left[ \frac{1}{\cos^2(\vartheta + \delta)} (1 + \ln \frac{b}{\cos(\vartheta + \delta)}) - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} (1 + \ln \frac{b}{\cos \vartheta}) \right] \\
 & + A_{04} \left[ \frac{1}{\cos^2(\vartheta + \delta)} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} \dots = 0 \quad (4.23/2)
 \end{aligned}$$

#### 4.2.2.4. Die Erfüllung der Randbedingungen am äusseren geraden Rand

Wir verlangen, dass nach Abschnitt 4.2.1.2. alle angreifenden Normal- und Schubspannungen am äusseren geneigten Rand zu einem Minimum werden. Dazu benötigen wir Gleichung (4.2).

$$\begin{aligned}
 y &= b \cdot \tan(\vartheta + \delta) \\
 K &= \int (\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2) dy \\
 y &= b \cdot \tan \vartheta
 \end{aligned}$$

Die Spannungskomponenten  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$  am geraden äusseren Rand für das  $x - y$  - Koordinatensystem stehen uns in den Gleichungen (4.12/1,2) und (4.13/1,2) zur Verfügung. Als einzige Variable wird dort der Winkel  $\varphi$  miteingeführt. Wir schreiben das obenstehende Integral in eine Funktion von  $\varphi$  um.

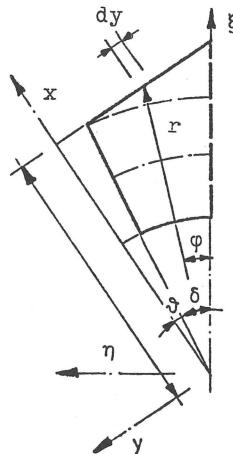


Bild 4.5.

Wenn wir berücksichtigen, dass am äusseren Rand  $r = b/\cos(\vartheta + \delta - \varphi)$  ist und  $\Delta y = \frac{r \cdot \Delta \varphi}{\cos(\vartheta + \delta - \varphi)} = \frac{b \cdot \Delta \varphi}{\cos^2(\vartheta + \delta - \varphi)}$  wird, (siehe Bild 4.5.) dann ergibt sich nach der Umformung der Integrationsgrenzen das Integral K zu:

$$K(\varphi) = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} \left( \sigma_x^2 \Big|_{x=b} + \tau_{xy}^2 \Big|_{x=b} \right) \left( \frac{b}{\cos^2(\vartheta + \delta - \varphi)} \right) d\varphi \quad (4.24)$$

Um die umfangreichen Formeln mit  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$  (Gleichungen (4.12/12) und (4.13/1,2) etwas zu vereinfachen, führen wir folgende abgekürzte Schreibweise ein:

$$\sigma_x = A_{02} \cdot E_{02}(\varphi) + A_{03} \cdot E_{03}(\varphi) + A_{04} \cdot E_{04}(\varphi) + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} E_{ik}(\varphi) \quad (4.25)$$

$$\tau_{xy} = A_{02} \cdot F_{02}(\varphi) + A_{03} \cdot F_{03}(\varphi) + A_{04} \cdot F_{04}(\varphi) + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} F_{ik}(\varphi) \quad (4.26)$$

wobei

$$E_{02}(\varphi) = \cos^{1-s}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \frac{s+1}{2} \left[ 1 + s + (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) (1-s) \right] \right]$$

.....

$$E_{ik}(\varphi) = \cos^{2-m_{ik}}(\vartheta + \delta - \varphi) \left\{ \frac{\cos \alpha_i \varphi}{2} \left[ (m_{ik} - \alpha_i^2) (1 + p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right. \right. \quad (4.27/1) \\
\left. \left. + m_{ik} (m_{ik} - 1) (1 - p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right] \right. \\
\left. + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik} - 1) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right\}$$

und

$$F_{02}(\varphi) = \cos^{1-s}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \frac{1-s^2}{2} (p \sin 2\varphi - q \cos 2\varphi) \right] \quad (4.27/2)$$

$$F_{ik}(\varphi) = \cos^{2-m_{ik}}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \frac{\cos \alpha_i \varphi}{2} (2m_{ik} - \alpha_i^2 - m_{ik}^2) (p \sin 2\varphi - q \cos 2\varphi) \right. \\
\left. + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik} - 1) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right]$$

Die notwendige Bedingung für das Eintreten des Minimums ist das Verschwinden der Ableitungen der Funktionen  $K(\varphi)$  nach den Festwerten  $A_{ik}$ .

$$\frac{\partial K(\varphi)}{\partial A_{02}}, \quad \frac{\partial K(\varphi)}{\partial A_{03}}, \quad \frac{\partial K(\varphi)}{\partial A_{04}}, \quad \frac{\partial K(\varphi)}{\partial A_{ik}}$$

für alle  $i = 1$  bis  $j$  und  $k = 1$  bis  $4$ .

Als hinreichende Bedingung muss gezeigt werden, dass es sich bei der Extremalstelle um das Minimum handelt.

Beweis:

Da das Integral nach Gleichung (4.24) immer  $\geq 0$  ist, werden auch die zweiten Ableitungen nach den Festwerten  $\geq 0$ . Das bedeutet, dass wir immer eine konkave Krümmung der Fläche nach oben haben, d.h. der Extremwert kann nur ein Minimum sein.

Wir erhalten für die einzelnen Ableitungen der Funktion  $K$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial A_{02}} &= 2\Delta\varphi^2 b^3 t^2 \left\{ A_{02} \int_0^\delta (E_{02}^2 + F_{02}^2) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} + A_{03} \int_0^\delta (E_{03} E_{02} + F_{03} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \right. \\ &\quad + A_{04} \int_0^\delta (E_{04} E_{02} + F_{04} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \int_0^\delta (E_{ik} E_{02} + F_{ik} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \right\} \end{aligned} \quad (4.28/1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial A_{03}} &= 2\Delta\varphi^2 b^3 t^2 \left\{ A_{02} \int_0^\delta (E_{02} E_{03} + F_{02} F_{03}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} + A_{03} \int_0^\delta (E_{03}^2 + F_{03}^2) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \right. \\ &\quad + A_{04} \int_0^\delta (E_{04} E_{03} + F_{04} F_{03}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \int_0^\delta (E_{ik} E_{03} + F_{ik} F_{03}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \right\} \end{aligned} \quad (4.28/2)$$

Setzen wir die oben stehenden Ableitungen gleich null, dann erhalten

wir:

$$\begin{aligned} &A_{02} \int_0^\delta (E_{02}^2 + F_{02}^2) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} + A_{03} \int_0^\delta (E_{03} E_{02} + F_{03} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} \\ &+ A_{04} \int_0^\delta (E_{04} E_{02} + F_{04} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \int_0^\delta (E_{ik} E_{02} + F_{ik} F_{02}) \frac{d\varphi}{\cos^6(\vartheta + \delta - \varphi)} = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Integration der Gleichung (4.29) ist analytisch kaum mehr durch-

führbar. Für die Auswertung der Resultate mit der X8 wurden die Integrale numerisch berechnet, indem der Winkel  $\beta$  in 20 Abschnitte unterteilt, und die Funktion für diese Abschnitte als konstant angenommen wurde. Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$A_{02} \sum_{m=0}^{m=20} \left[ (E_{02}(\varphi_m)^2 + F_{02}(\varphi_m)^2) \right] \frac{\delta}{20 \cdot \cos^6(\vartheta + \delta - \varphi_m)} \\ + A_{03} \sum_{m=0}^{m=20} \left[ (E_{03}(\varphi_m) E_{02}(\varphi_m) + F_{03}(\varphi_m) F_{02}(\varphi_m)) \right] \frac{\beta}{20 \cdot \cos^6(\vartheta + \delta - \varphi_m)} \\ + A_{04} \sum_{m=0}^{m=20} \left[ (\dots \dots \dots) = 0 \right] \quad (4.30)$$

#### 4.2.2.5. Die Auflösung des Gleichungssystems

Die Randbedingungen für den inneren Rand (Gl. (4.14 bis 4.16)), die Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten (Gl. (4.17 bis 4.20)) und die Gleichgewichtsbedingungen für den ausspringenden Bereich (Gl. (4.21 bis 4.23)) werden als Funktionen  $\varphi_1 \dots \varphi_2$  angeschrieben. Nach der Lagrange'schen Multiplikationstheorie können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = 0$$

$$\varphi_n = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial A_{O2}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial A_{O2}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial A_{O2}} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial A_{O2}} = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial A_{j4}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial A_{j4}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial A_{j4}} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial A_{j4}} = 0$$

Mit den Gleichungen (4.30) suchen wir das Minimum für die angreifenden Normal- und Schubspannungen am geneigten oberen Rand. Die anderen Randbedingungen gehen als Nebenbedingungen in das Gleichungssystem ein. Je grösser  $j$  gewählt wird, desto grösser wird die Anzahl der Gleichungen und umso genauer können die angenäherten Randbedingungen erfüllt werden. Die Anzahl der Nebenbedingungen richtet sich nach  $j$ . Es stehen uns vorerst eine Gleichgewichtsbedingung und zwei Kontrollbedingungen an den Endquerschnitten zur Verfügung. (4.17 bis 4.20) Zudem besitzen wir drei Gleichgewichtsbedingungen für den ausspringenden Bereich (4.21 bis 4.23) und schliesslich die Randbedingungen am inneren Rand mit Gleichung (4.14) und je zwei Gleichungen nach (4.15 und 4.16) für jedes  $j$ . Die Gesamtzahl der Gleichungen ergibt sich somit zu  $8 + 6 \cdot j$ .

#### 4.2.2.6. Die Bestimmung der Spannungswerte

Nach der Auflösung des Gleichungssystems und der Ermittlung der Festwerte  $A_{ik}$  erhalten wir die endgültigen Spannungskomponenten:

- a) Tangentialspannung nach Gleichung (4.8/2) bzw. (4.9/2)
- b) Radialspannung nach Gleichung (4.8/1) bzw. (4.9/1)
- c) Schubspannung nach Gleichung (4.8/3) bzw. 4.9/3)

Wir können auch die Spannungen im  $x - y$ - Koordinatensystem für den äusseren Rand bestimmen:

- a)  $\sigma_x$  senkrecht zum Rand nach Gleichung (4.11/1) bzw. (4.11/2)
- b)  $\tau_{xy}$  parallel zum Rand nach Gleichung (4.13/1) bzw. (4.13/2)

Diese beiden Spannungen geben ein Mass für die Genauigkeit der Lösung, die mit der gewählten Anzahl Reihenglieder erreicht werden kann.

#### 4.3. Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft

(Resultierende im Krümmungsmittelpunkt normal zur Eckdiagonalen)

Analog zum Lastfall reine Biegung in Abschnitt 4.2 wird die Symmetrieachse in den Eckquerschnitt verlegt.

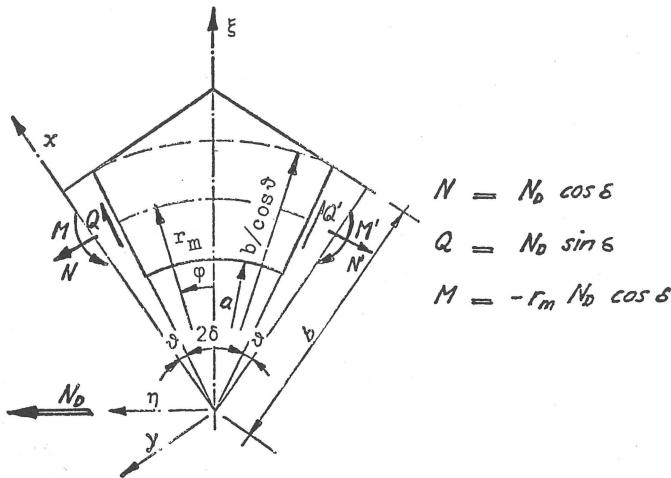


Bild 4.6.

##### 4.3.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen können im allgemeinen unverändert aus Abschnitt 4.2.1. übernommen werden. Es gelten weiterhin die Randbedingungen am inneren Rand (Gl. (4.1/1) und (4.1/2)). Auch die Erfüllung der Randbedingung am geraden oberen Rand erfolgt wie in Abschnitt 4.2. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Endquerschnitte sind mit den Gleichungen (4.3/1) bis (4.3/3) formuliert. Schliesslich werden noch die Gleichungen (4.4/1) bis (4.4/3) für das Gleichgewicht am ausspringenden Bereich übernommen.

##### 4.3.2. Spannungszustand für Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft

Für die Spannungsfunktion kann folgender Ansatz gemacht werden:

$$F = (A'_{01}r + A'_{02}r \cdot \ln r + A'_{03}r^{1+n} + A'_{04}r^{1-n}) \cos \varphi \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} r^{m_{ik}} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.31/1)$$

Beim isotropen Werkstoff ergibt sich der Ansatz mit  $n = 2$

$$F = (A'_{01}r + A'_{02}r \cdot \ln r + A'_{03}r^3 + A'_{04} \frac{1}{r}) \cos \varphi \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} r^{m_{ik}} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.31/2)$$

wobei

$$\alpha_i = \frac{\pi}{3+\delta} i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, j \quad n = \sqrt{1+s^2+k^2-2\mu\varphi}$$

Wie die beiden Ansätze (4.31/1) und (4.31/2) zeigen, können wir auf die Trennung der Schreibweise für den anisotropen und den isotropen Werkstoff verzichten. Wieder setzt sich die Spannungsfunktion aus einem ersten Teil, der die Lösung der rotationssymmetrischen orthotropen Kreisbogenscheibe mit symmetrischer Normal- und Querkraft darstellt (2.30) bzw. (2.31) und einem zweiten Teil (2.25), der für die Erfüllung der Randbedingungen am geraden äusseren Rand benötigt wird, zusammen. Für  $\alpha_i$  setzen wir wie bisher  $\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{3+\delta}$ .

Die zugehörigen Spannungskomponenten nach den Gleichungen (2.20) lauten:

$$\sigma_r = (A'_{02}r^{-1} + A'_{03}n \cdot r^{n-1} - A'_{04}n \cdot r^{-n-1}) \cos \varphi \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} (m_{ik} - \alpha_i^2) r^{m_{ik}-2} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.32/1)$$

$$\sigma_\varphi = (A'_{02}r^{-1} + A'_{03}n(n+1)r^{n-1} + A'_{04}n(n-1)r^{-n-1}) \cos \varphi \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} m(m_{ik}-1) r^{m_{ik}-2} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.32/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = (A'_{02}r^{-1} + A'_{03}n \cdot r^{n-1} - A'_{04}n \cdot r^{-n-1}) \cos \varphi \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} (m_{ik}-1) r^{m_{ik}-2} \right) \sin \alpha_i \varphi \quad (4.32/3)$$

Es werden analog Abschnitt 4.2.2 folgende Abkürzungen für die Konstanten eingeführt:

$$A_{o2} = \frac{A'_o}{b}, \quad A_{o3} = A'_o \cdot b^{n-1}, \quad A_{o4} = A'_o \cdot b^{-n-1}, \quad A_{ik} = A'_i \cdot b^{mik-2}$$

und mit  $q = b/r$  erhalten die Gleichungen (4.31/1) bis (4.32/3) folgende Form:

$$\sigma_r = (A_{o2}q + A_{o3}n q^{1-n} - A_{o4}n q^{1+n}) \cos \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - \alpha_i^2) q^{2-mik} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.33/1)$$

$$\sigma_\varphi = (A_{o2}q + A_{o3}n(n+1) q^{1-n} + A_{o4}n(n-1) q^{1+n}) \cos \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (m_{ik}-1) q^{2-mik} \right) \cos \alpha_i \varphi \quad (4.33/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = (A_{o2}q + A_{o3}n q^{1-n} - A_{o4}n q^{1+n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left( \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - 1) q^{2-mik} \right) \sin \alpha_i \varphi \quad (4.33/3)$$

Setzen wir die Spannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  aus den Gleichungen (4.33/1-3) in die Transformationsformeln (4.11/1-3) ein, so erhalten wir unter Benützung der Beziehung  $r = b/\cos(\gamma + \beta - \varphi)$  resp.

$Q = \cos(\gamma + \beta - \varphi)$  für den äusseren geraden Rand die Randspannungen  $\sigma_{xn}$  und  $\tau_{xn}$  als Funktion des Winkels  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= A_{o2} \cos(\gamma + \delta - \varphi) \left[ \cos \varphi + \frac{p}{2} (\cos 3\varphi - \cos \varphi) + \frac{q}{2} (\sin 3\varphi - \sin \varphi) \right] \\ &\quad + A_{o3} \cos^{1-n}(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \cos \varphi \left( n + \frac{n^2}{2} (1 - p \cdot \cos 2\varphi - q \cdot \sin 2\varphi) \right) + \sin \varphi \cdot n (q \cdot \cos 2\varphi - p \cdot \sin 2\varphi) \right] \\ &\quad + A \cos^{1+n}(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \cos \varphi \left( -n + \frac{n^2}{2} (1 - p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right) - \sin \varphi \cdot n (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-mik}(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \cos \alpha_i \varphi (mik - \alpha_i^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\varphi + \frac{q}{2} \sin 2\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + m_{ik} (m_{ik}-1) \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\varphi - \frac{q}{2} \sin 2\varphi \right) + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \quad (4.34/1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xn} &= A_{o2} \cos(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \frac{p}{2} (\sin 3\varphi - \sin \varphi) - \frac{q}{2} (\cos 3\varphi - \cos \varphi) \right] \\ &\quad + A_{o3} \cos^{1-n}(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \cos \varphi \frac{n^2}{2} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) + \sin \varphi \cdot n (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \\ &\quad + A_{o4} \cos^{1+n}(\gamma + \beta - \varphi) \left[ \cos \varphi \frac{n^2}{2} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) - \sin \varphi \cdot n (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] + \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \cos \alpha_i \varphi (2m_{ik} - \alpha_i^2 - m_{ik}^2) \left( \frac{p}{2} \sin 2\varphi - \frac{q}{2} \cos 2\varphi \right) + \alpha_i \sin \alpha_i \varphi (m_{ik} - 1) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \quad (4.34/2)$$

#### 4.3.2.1. Die Randbedingungen am inneren gekrümmten Rand $r = a$

Für den ersten Teil der Spannungskomponenten  $\sigma_r$  (4.33/1) verlangen wir mit Berücksichtigung, dass  $r = a$  bzw.  $q = \frac{b}{a} = q_1$ ;  $A_{02} q_1 + A_{03} n q_1^{1-n} - A_{04} q_1^{n+1} = 0$

(4.35)

Die weiteren Bedingungen ergeben sich, wenn wir den zweiten Teil der Spannungskomponenten  $\sigma_r$  und  $\tau_{r\varphi}$  in folgende Gleichungen mit gleichem  $i$  aufspalten: (4.33/1) und (4.33/3)

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - \alpha_i^2) \cdot q_1^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.36)$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - 1) \cdot q_1^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.37)$$

#### 4.3.2.2. Gleichgewichtsbedingungen am Schnitt $\varphi = \delta$ bzw. $\varphi = -\delta$

Setzen wir Gleichung (4.33/3) in die Gleichung (4.3/3) ein, so erhalten wir mit der Annahme, dass  $\varphi = \beta$ :

$$\frac{Q}{t \cdot b} = - \int_{q=q_1}^{q=\cos\vartheta} \tau_{r\varphi} \frac{1}{q^2} dq = \left[ A_{02} \ln \frac{q_1}{\cos\vartheta} + A_{03} (\cos^{-n}\vartheta - q_1^{-n}) + A_{04} (\cos^n\vartheta - q_1^n) \right] \sin \delta + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (\cos^{1-m_{ik}}\vartheta - q_1^{1-m_{ik}}) \right] \alpha_i \sin \alpha_i \delta \quad (4.38)$$

Die beiden anderen Gleichgewichtsbedingungen für das Moment (4.3/1) und die Normalkraft (4.3/2) benutzen wir als Kontrollbedingungen.

Sie lauten:

$$\frac{M}{t \cdot b^2} = \left[ A_{02} \left( \frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{1}{q_1} \right) + A_{03} n (\cos^{-n-1}\vartheta - q_1^{-n-1}) - A_{04} n (\cos^{n-1}\vartheta - q_1^{n-1}) \right] \cos \delta + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - 1) (\cos^{-m_{ik}}\vartheta - q_1^{-m_{ik}}) \right] \cos \alpha_i \delta = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{N}{t \cdot b} = \left[ A_{02} \ln \left( \frac{q_1}{\cos\vartheta} \right) + A_{03} (1+n) (\cos^{-n}\vartheta - q_1^{-n}) + A_{04} (1-n) (\cos^n\vartheta - q_1^n) \right] \cos \delta + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (\cos^{(1-m_{ik})}\vartheta - q_1^{1-m_{ik}}) \right] \cos \alpha_i \delta \quad (4.40)$$

### 4.3.2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen des ausspringenden Bereiches

a)  $\sum P\xi = 0$

Mit den Gleichungen (4.4/1), (4.32/1), (4.32/3) und für  $r = b/\cos\delta$  erhalten wir mit Hilfe der Integrale:

$$\int_0^\delta \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\delta$$

$$\int_0^\delta \cos\varphi \cos\alpha_i\varphi d\varphi = \frac{\sin(\alpha_i-1)\delta}{2(\alpha_i-1)} + \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i+1)}$$

$$\int_0^\delta \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\delta$$

$$\int_0^\delta \sin\varphi \sin\alpha_i\varphi d\varphi = \frac{\sin(\alpha_i-1)\delta}{2(\alpha_i-1)} - \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i+1)}$$

das Gleichgewicht für die  $\xi$ -Richtung.

$$\left[ A_{o2} \cos\delta + A_{o3} n \cos^{1-n}\delta - A_{o4} n \cos^{1+n}\delta \right] \frac{1}{2} \sin 2\delta$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}\delta} \left[ (1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i+1)} + (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \frac{\sin(\alpha_i-1)\delta}{2(\alpha_i-1)} \right] = 0$$

(4.41)

b)  $\sum P\eta = 0$

Wir benützen Gleichung (4.4/2) und schreiben sie etwas um:

$$\int_0^\delta \sigma_r \cdot \sin\varphi d\varphi + \int_0^\delta \tau_{r\varphi} \cdot \cos\varphi d\varphi - \cos\gamma \int_0^\delta \frac{\sigma_\varphi}{\cos\delta} d\varphi = 0$$

Mit Hilfe der Integrale:

$$\int_0^\delta \sin\varphi \cdot \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{4} (1 - \cos 2\delta)$$

$$\int_0^\delta \sin\varphi \cos\alpha_i\varphi d\varphi = \frac{\cos(\alpha_i-1)\delta-1}{2(\alpha_i-1)} - \frac{\cos(\alpha_i+1)\delta-1}{2(\alpha_i+1)}$$

$$\int_0^\delta \cos\varphi \sin\alpha_i\varphi d\varphi = - \frac{\cos(\alpha_i-1)\delta-1}{2(\alpha_i-1)} - \frac{\cos(\alpha_i+1)\delta-1}{2(\alpha_i+1)}$$

und mit Gleichung (4.33/2) für  $\varphi = 0$

$$\int_{\cos \vartheta}^{\cos(\vartheta+\delta)} \frac{d\varphi}{q^2} = - \left[ A_{02} \ln \left( \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta+\delta)} \right) + A_{03} (1+n) (\cos^{-n}(\vartheta+\delta) - \cos^{-n} \vartheta) \right. \\ \left. + A_{04} (1-n) \cos^n(\vartheta+\delta) - \cos^n \vartheta \right] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (\cos^{1-m_{ik}}(\vartheta+\delta) - \cos^{1-m_{ik}} \vartheta) \quad ]$$

erhalten wir schliesslich das Gleichgewicht für den ausspringenden Bereich in  $\eta$ -Richtung:

$$A_{02} \cos \vartheta \left[ \frac{1}{2} (1-\cos 2\delta) + \ln \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta+\delta)} \right] \\ + A_{03} \left[ \cos^{1-n} \vartheta \cdot n \frac{1-\cos 2\delta}{2} + (1+n) (\cos^{-n}(\vartheta+\delta) - \cos^{-n} \vartheta) \cos \vartheta \right] \\ + A_{04} \left[ \cos^{1+n} \vartheta \cdot n \frac{\cos 2\delta - 1}{2} + (1-n) (\cos^n(\vartheta+\delta) - \cos^n \vartheta) \cos \vartheta \right] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \left\{ \cos^{2-m_{ik}} \vartheta \left[ (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \frac{\cos(\alpha_i-1)\delta-1}{2(\alpha_i-1)} - (1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \frac{\cos(\alpha_i-1)\delta-1}{2(\alpha_i-1)} \right] \right. \\ \left. + m_{ik} \cos \vartheta \left[ \cos^{1-m_{ik}}(\vartheta+\delta) - \cos^{1-m_{ik}} \vartheta \right] \right\} = 0 \quad (4.42)$$

aus Gleichung (4.4/3) erhält man:

$$\int_0^\delta \tau_{r\varphi} \frac{d\varphi}{r=\cos \vartheta} - \cos^2 \vartheta \int_{\cos \vartheta}^{\cos(\vartheta+\delta)} \frac{d\varphi}{q^3} = 0$$

Mit der Auswertung der Integrale:

$$\int_0^\delta \sin \varphi d\varphi = 1 - \cos \delta \\ \int_0^\delta \sin \alpha_i \varphi d\varphi = \frac{1 - \cos \alpha_i \delta}{\alpha_i}$$

und aus Gleichung (4.33/2) für  $\varphi = 0$

$$\int_{\cos \vartheta}^{\cos(\vartheta+\delta)} \frac{d\varphi}{q^3} = - \left[ A_{02} \left( \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)} - \frac{1}{\cos \vartheta} \right) + A_{03} \cdot n (\cos^{-(1+n)}(\vartheta+\delta) - \cos^{-(1+n)} \vartheta) \right. \\ \left. - A_{04} \cdot n (\cos^{n-1}(\vartheta+\delta) - \cos^{n-1} \vartheta) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) (\cos^{-m_{ik}}(\vartheta+\delta) - \cos^{-m_{ik}} \vartheta) \right]$$

erhält man für das Momentengleichgewicht des ausspringenden Bereiches um den Krümmungsmittelpunkt:

$$A_{02} \left[ \frac{1}{\cos(\vartheta+\delta)} - \frac{\cos\delta}{\cos\vartheta} \right] + A_{03} n \left[ \cos^{-1(1+n)} (\vartheta+\delta) - \cos^{-(1+n)\vartheta} \cos\delta \right] \\ - A_{04} n \left[ \cos^{1-n} (\vartheta+\delta) - \cos^{1-n}\vartheta \cos\delta \right] + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) \left[ \cos^{-m_{ik}} (\vartheta+\delta) - \cos^{-m_{ik}\vartheta} \cos\delta \right] \quad (4.43)$$

#### 4.3.2.4. Die Erfüllung der Randbedingungen am geraden äusseren Rand

Diese Randbedingung wird analog Abschnitt 4.2.2.4, mit der Methode der kleinsten Quadrate und den Gleichungen (4.34/1) und (4.34/2) näherungsweise erfüllt.

Die ersten Glieder der Abkürzungen  $E(\varphi)$  und  $F(\varphi)$  erhalten folgende Form:

$$E_{02} = \cos(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \cos\varphi + \frac{p}{2} (\cos 3\varphi - \cos\varphi) + \frac{q}{2} (\sin 3\varphi - \sin \varphi) \right]$$

$$E_{03} = \dots \dots \dots$$

$$F_{02} = \cos(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \frac{p}{2} (\sin 3\varphi - \sin \varphi) - \frac{q}{2} (\cos 3\varphi - \cos \varphi) \right]$$

$$F_{03} = \dots \dots \dots$$

Die höheren Glieder erfahren keine Änderung.

#### 4.3.2.5. Die Auflösung des Gleichungssystems

Die Aufstellung der Gleichungen geht wie in Abschnitt 4.3.2.5. vor sich. Wir erhalten eine Gesamtzahl Gleichungen von  $8 + 6 \cdot j$ .

#### 4.3.2.6. Die Bestimmung der Spannungswerte

Nach der Auflösung des Gleichungssystems erhalten wir auch hier die Festwerte  $A_{ik}$  und können damit die Spannungskomponenten ermitteln.

#### 4.4. Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft

(Resultierende gleich Querkraft im Eckdiagonalquerschnitt)

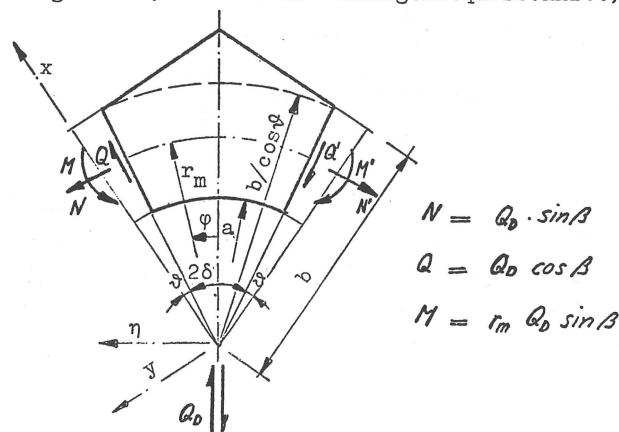


Bild 4.7.

##### 4.4.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Aus Abschnitt 4.2.1 können die beiden Randbedingungen für den inneren und den geraden äusseren Rand unverändert übernommen werden. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Endquerschnitte sind mit den Gleichungen (4.3/1-3) angegeben. Die Gleichgewichtsbedingungen für den ausspringenden Bereich müssen für den antimetrischen Belastungsfall etwas abgeändert werden.

###### 4.4.1.1. Gleichgewichtsbedingungen für den ausspringenden Bereich

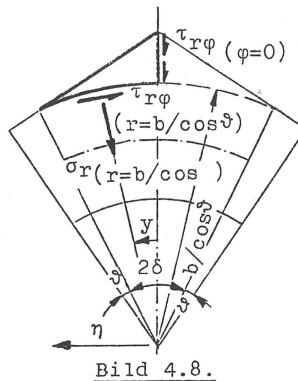


Bild 4.8.

Beim antimetrischen Spannungszustand lauten die Gleichgewichtsbedingungen für den halben ausspringenden Bereich:

$$\sum P \xi = 0$$

$$-t \frac{b}{\cos \vartheta} \int_0^\delta \sigma_r_{r=b/\cos \vartheta} \cos \varphi d\varphi + t \frac{b}{\cos \vartheta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \vartheta} \sin \varphi d\varphi - t \int_0^{b/\cos \vartheta} \tau_{r\varphi} \Big|_{\varphi=0} dr = 0 \quad (4.44/4)$$

$$\sum P \eta = 0$$

$$-t \frac{b}{\cos \vartheta} \int_0^\delta \sigma_r_{r=b/\cos \vartheta} \sin \varphi d\varphi - t \frac{b}{\cos \vartheta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \vartheta} \cos \varphi d\varphi = 0 \quad (4.44/2)$$

$$\sum M = 0$$

$$-t \frac{b}{\cos^2 \vartheta} \int_0^\delta \tau_{r\varphi}_{r=b/\cos \vartheta} d\varphi = 0 \quad (4.44/3)$$

#### 4.4.2. Spannungszustand für Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft

Für Bild 4.7. erlauben es die Symmetrieeigenschaften der Scheibe und der Grundlastfälle, den Ansatz der Spannungsfunktion F aus Abschnitt 4.3.2 zu übernehmen. An Stelle der Cosinus - Funktionen sind die Sinus - Funktionen zu setzen.

$$F = (A'_{01} r + A'_{02} r \ln r + A'_{03} r^{1+n} + A'_{04} r^{1-n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} r^{mik} \right) \sin \alpha_i \varphi \quad (4.45/1)$$

Für den isotropen Fall erhalten wir mit  $n = 2$ :

$$F = (A'_{01} r + A'_{02} r \ln r + A'_{03} r^3 + A'_{04} \frac{1}{r}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left( \sum_{k=1}^{k=4} A'_{ik} r^{mik} \right) \sin \alpha_i \varphi \quad (4.45/2)$$

wobei

$$\alpha_i = (2i+1) \frac{\pi}{48}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, j$$

$$n = \sqrt{1+s^2+k^2-2\mu\varphi}$$

Getrennte Schreibweisen für den anisotropen und isotropen Werkstoff sind auch in diesem Abschnitt nicht nötig. Die zugehörigen Spannungskomponenten werden von Abschnitt 4.3.2 übernommen, wobei wiederum die cos - Funktion durch die sin - Funktion und umgekehrt zu ersetzen sind. Die Konstanten und Abkürzungen behalten ihre Bedeutung.

$$\sigma_r = (A_{02} q + A_{03} n \cdot q^{1-n} - A_{04} n \cdot q^{1+n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - \alpha_i^2) q^{2-m_{ik}} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.46/1)$$

$$\sigma_\varphi = (A_{02} q + A_{03} n(n+1) \cdot q^{1-n} + A_{04} n(n-1) q^{1+n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (m_{ik}-1) q^{2-m_{ik}} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.46/2)$$

$$\tau_{r\varphi} = -(A_{02} q + A_{03} n \cdot q^{1-n} - A_{04} n \cdot q^{1+n}) \cos \varphi - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) q^{2-m_{ik}} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (4.46/3)$$

Die Transformationsformeln (4.11/1-3) ergeben mit  $r = b/\cos(\delta+\delta-\varphi)$  mit den Gleichungen (4.46/1-3) für  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  und  $\tau_{r\varphi}$  die Spannungskomponenten  $\sigma_{xn}$  und  $\tau_{xyn}$  in Abhängigkeit vom Winkel  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= A_{02} \cos(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi + \frac{p}{2} (\sin 3\varphi + \sin \varphi) - \frac{q}{2} (\cos 3\varphi + \cos \varphi) \right] \\ &+ A_{03} \cos^{1-n}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi \left( n + \frac{n^2}{2} (1-p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right) - \cos \varphi \cdot n (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \\ &+ A_{04} \cos^{1+n}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi \left( -n + \frac{n^2}{2} (1-p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right) + \cos \varphi \cdot n (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \alpha_i \varphi ((m_{ik} - \alpha_i^2) \left( \frac{1}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\varphi + \frac{q}{2} \sin 2\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. + m_{ik} (m_{ik}-1) \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\varphi - \frac{q}{2} \cos 2\varphi \right) - \alpha_i \cos \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \quad (4.47/1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xn} &= A_{02} \cos(\delta+\delta-\varphi) \left[ -\frac{q}{2} (\sin 3\varphi + \sin \varphi) - \frac{p}{2} (\cos 3\varphi + \cos \varphi) \right] \\ &+ A_{03} \cos^{1-n}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi \cdot \frac{n^2}{2} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) - \cos \varphi \cdot n (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \\ &+ A_{04} \cos^{1+n}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi \frac{n^2}{2} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) + \cos \varphi \cdot n (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}}(\delta+\delta-\varphi) \left[ \sin \alpha_i \varphi (2m_{ik} - \alpha_i^2 - m_{ik}^2) \left( \frac{p}{2} \sin 2\varphi - \frac{q}{2} \cos 2\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \cos \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \quad (4.47/2) \end{aligned}$$

#### 4.4.2.1. Die Randbedingungen am inneren gekrümmten Rand $r = a$

Diese Randbedingungen können unverändert aus Abschnitt 4.3.2.1 übernommen werden. (4.35), (4.36), (4.37).

$$A_{02} q_1 + A_{03} \cdot n q_1^{1-n} - A_{04} q_1^{n+1} = 0 \quad (4.48)$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik} - \alpha_i^2) q_1^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.49)$$

$$\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) q_1^{2-m_{ik}} = 0 \quad (4.50)$$

#### 4.4.2.2 Die Gleichgewichtsbedingungen am Schnitt $\varphi = \delta$ bzw. $\varphi = -\delta$

Setzen wir Gleichung (4.46/3) in die Gleichung (4.3/3) ein, so erhalten wir analog (4.38):

$$\frac{Q}{t \cdot b} = - \int_{q=q_1}^{\varphi=\cos\delta} \tau_{r\varphi} \frac{1}{q^2} dq = - \left[ A_{02} \ln \frac{q_1}{\cos\delta} + A_{03} (\cos^{-n}\delta - q_1^{-n}) + A_{04} (\cos^n\delta - q_1^{-n}) \right] \cos\delta - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (\cos^{1-m_{ik}}\delta - q_1^{1-m_{ik}}) \right] \alpha_i \cos \alpha_i \delta \quad (4.51)$$

Die zwei anderen Gleichgewichtsbedingungen für das Moment (4.31/1) und die Normalkraft (4.3/2) werden als Kontrollbedingungen verwendet.

$$\frac{M}{t \cdot b^2} = \left[ A_{02} \left( \frac{1}{\cos\delta} - \frac{1}{q_1} \right) + A_{03} n (\cos^{-n-1}\delta - q_1^{-n-1}) - A_{04} n (\cos^{n-1}\delta - q_1^{-n-1}) \right] \sin\delta + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) (\cos^{-m_{ik}}\delta - q^{-m_{ik}}) \right] \sin \alpha_i \delta = 0 \quad (4.52)$$

$$\frac{N}{t \cdot b} = \left[ A_{02} \ln \frac{q_1}{\cos\delta} + A_{03} (1+n) (\cos^{-n}\delta - q_1^{-n}) + A_{04} (1-n) (\cos^n\delta - q_1^{-n}) \right] \sin\delta + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} m_{ik} (\cos^{1-m_{ik}}\delta - q_1^{1-m_{ik}}) \right] \sin \alpha_i \delta = 0 \quad (4.53)$$

#### 4.4.2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen des ausspringenden Bereiches

a)  $\Sigma P \xi = 0$

Setzen wir die Spannungskomponenten (4.46/1) und (4.46/3) in die Gleichung (4.44/1) ein, so erhalten wir mit Hilfe der Integrale:

$$\int_0^\delta \sin\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{4} (\cos 2\delta - 1)$$

$$\int_0^\delta \sin \alpha_i \varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi = -\frac{\cos(\alpha_{i-1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i-1})} - \frac{\cos(\alpha_{i+1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i+1})}$$

$$\int_0^\delta \cos \alpha_i \varphi \cdot \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i-1})} - \frac{\cos(\alpha_{i+1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i+1})}$$

$$t \int_{r=b/\cos\delta}^{r=b/\cos(\delta+\delta)} \tau_{r\varphi} \, dr = -t \cdot b \left\{ \left[ A_{02} \ln\left(\frac{\cos\delta}{\cos(\delta+\delta)}\right) + A_{03} (\cos^{-n}(\delta+\delta) - \cos^{-n}\delta) \right. \right. \\ \left. \left. + A_{04} (\cos^n(\delta+\delta) - \cos^n\delta) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ \alpha_i \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (\cos^{1-m_{ik}}(\delta+\delta) - \cos^{1-m_{ik}}\delta) \right] \right\}$$

das Gleichgewicht für die  $\xi$ -Richtung:

$$A_{02} \cos\delta \left( \frac{\cos 2\delta - 1}{2} + \ln \frac{\cos\delta}{\cos(\delta+\delta)} \right) + A_{03} \cos\delta \left[ \cos^{-n}\delta \left( n \frac{\cos 2\delta - 1}{2} - 1 \right) + \cos^n(\delta+\delta) \right] \\ - A_{04} \cos\delta \left[ \cos^n\delta \left( n \frac{\cos 2\delta - 1}{2} + 1 \right) - \cos^n(\delta+\delta) \right] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \left\{ \cos^{2-m_{ik}}\delta \left[ (1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \frac{\cos(\alpha_{i+1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i+1})} + (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \delta - 1}{2(\alpha_{i-1})} \right] + \alpha_i \cos\delta (\cos^{1-m_{ik}}(\delta+\delta) - \cos^{1-m_{ik}}\delta) \right\} = 0$$

b)  $\Sigma P_\eta = 0$

Mit der Gleichgewichtsbedingung (4.44/2), den beiden Gleichungen für die Spannungskomponenten  $\sigma_r$  (4.46/1) und  $\tau_{r\varphi}$  (4.46/3) und mit Hilfe der Integrale:

$$\int_0^\delta \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\delta$$

$$\int_0^\delta \sin \alpha_i \varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{\sin(\alpha_{i-1}) \delta}{2(\alpha_{i-1})} - \frac{\sin(\alpha_{i+1}) \delta}{2(\alpha_{i+1})}$$

$$\int_0^\delta \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\delta$$

$$\int_0^\delta \cos \alpha_i \varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{\sin(\alpha_{i-1}) \delta}{2(\alpha_{i-1})} + \frac{\sin(\alpha_{i+1}) \delta}{2(\alpha_{i+1})}$$

(4.54)

können wir das Gleichgewicht in  $\eta$ -Richtung anschreiben:

$$\begin{aligned}
 & - (A_{02} \cos \vartheta + A_{03} n \cdot \cos^{1-n} \vartheta - A_{04} n \cdot \cos^{1+n} \vartheta) \frac{\sin 2\delta}{2} \\
 & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} \cos^{2-m_{ik}\delta} \left[ (1-\alpha_i)(m_{ik}+\alpha_i) \frac{\sin(\alpha_i-1)\delta}{2(\alpha_i-1)} - (1+\alpha_i)(m_{ik}-\alpha_i) \right. \\
 & \quad \left. \cdot \frac{\sin(\alpha_i+1)\delta}{2(\alpha_i+1)} \right] = 0 \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht haben wir in Gleichung (4.44/3) festgehalten. Wenn die folgenden Integrale ausgewertet werden, erhält man:

$$\int_0^\delta \cos \varphi = \sin \delta$$

$$\int_0^\delta \cos \alpha_i \varphi = \frac{\sin \alpha_i \delta}{\alpha_i}$$

das Momentengleichgewicht im ausspringenden Bereich mit:

$$\begin{aligned}
 & - (A_{02} \cos \vartheta + A_{03} n \cdot \cos^{1-n} \vartheta - A_{04} n \cdot \cos^{1+n} \vartheta) \sin \delta \\
 & + \sum_{i=1}^{i=j} \sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (m_{ik}-1) \cos^{2-m_{ik}\delta} \cdot \sin \alpha_i \delta = 0 \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

#### 4.4.2.4. Die Erfüllung der Randbedingung am geraden äusseren Rand

Die Randbedingungen am oberen Rand werden analog Abschnitt 4.2.2.4.

mit Hilfe der beiden Gleichungen für  $\sigma_{xn}$  (4.47/1) und  $\tau_{xyn}$  (4.47/2)

mit  $r = b/\cos(\vartheta+\delta-\varphi)$  näherungsweise erfüllt.

Die Abkürzungen  $E(\varphi)$  und  $F(\varphi)$  lauten:

$$\begin{aligned}
 E_{02} &= \cos(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi + \frac{p}{2} (\sin 3\varphi - \sin \varphi) \frac{q}{2} - (\cos 3\varphi - \cos \varphi) \right] \\
 E_{03} &= \cos^{1-n}(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \sin \varphi \left( n + \frac{n^2}{2} (1-p \cos 2\varphi - q \sin 2\varphi) \right) - \cos \varphi \cdot n (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \\
 E_{ik} &= \cos^{2-m_{ik}}(\vartheta+\delta-\varphi) \left[ \sin \alpha_i \varphi \left( (m_{ik}-\alpha_i)^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\varphi + \frac{q}{2} \sin 2\varphi \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + m_{ik}(m_{ik}-1) \left( \frac{1}{2} - \frac{p}{2} \cos 2\varphi - \frac{q}{2} \sin 2\varphi \right) \right) - \alpha_i \cos \alpha_i \varphi (m_{ik}-1) (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) \right] \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{02} &= \cos(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ -\frac{q}{2} (\sin 3\varphi + \sin \varphi) - \frac{p}{2} (\cos 3\varphi + \cos \varphi) \right] \\ F_{03} &= \cos^{1-n}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \sin \varphi \cdot \frac{n^2}{2} (q \cos 2\varphi - p \sin 2\varphi) - \cos \varphi \cdot n (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \\ \dots \dots \dots \\ F_{ik} &= \cos^{2-mik}(\vartheta + \delta - \varphi) \left[ \sin \alpha_i \varphi (2mik - \alpha_i^2 - mik^2) \left( \frac{p}{2} \sin 2\varphi - \frac{q}{2} \cos 2\varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \cos \alpha_i \varphi (mik - 1) (p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi) \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

#### 4.4.2.5. Die Auflösung des Gleichungssystems

Wiederum können wir die verschiedenen Gleichungen analog Abschnitt 4.4.2.5. zu einem Gleichgewichtssystem und insgesamt  $8 + 6 \cdot j$  Gleichungen zusammenstellen und nach den Festwerten auflösen.

#### 4.4.2.6. Die Bestimmung der Spannungswerte

Wenn die Festwerte  $A_{ik}$  bekannt sind, können mit den Beziehungen (4.46/1-3) die Spannungen in jedem Punkt der Scheibe ermittelt werden.

### 4.5. Rechnerische Auswertung der Spannungen

Die Auswertung der Spannungen erfolgte für die drei Grundlastfälle aus den Abschnitten 4.2., 4.3., 4.4.. Dabei wurde die rechte Scheibenhälfte in den Sechstelpunkten des halben Zentriwinkels  $\delta$  geschnitten und die Spannungen in den Zehntelpunkten jedes Schnittes errechnet. Die Extremwerte konnten, sofern sie nicht auf dem Scheibenrand lagen, mit einem Tischkomputer, nach der in Abschnitt 3.6. beschriebenen Methode, bestimmt werden. Die Berechnung wurde mit verschiedenen Anisotropieverhältnissen, halben Zentriwinkeln  $\delta = \gamma$  (Neigungswinkel des oberen Randes) und Krümmungsverhältnissen durchgeführt. Um ein Mass für die Genauigkeit zu erhalten, wurden bei jedem Belastungsfall in einigen Fällen die Grösse  $j$  und damit die Zahl der Reihenglieder in der Spannungsfunktion variiert. Die Zusammenstellung der für die Praxis wichtigsten Resultate sind in den Tafeln 22 - 23 aufgeführt. Der Belastungsfall der Normalkraft im Krümmungsmittelpunkt (Abschnitt 4.3) wurde zur besseren Veranschaulichung umgerechnet auf zentrische Normalkraftbelastung im First-Querschnitt. Leider mussten dabei zwei ungefähr gleich grosse

Spannungen (Grundlastfall 4.2. multipliziert mit dem mittleren Radius und Grundlastfall 4.3) voneinander subtrahiert werden. Dadurch litt die Genauigkeit der resultierenden Spannungen.

5. Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand (gerader Sattelträger)

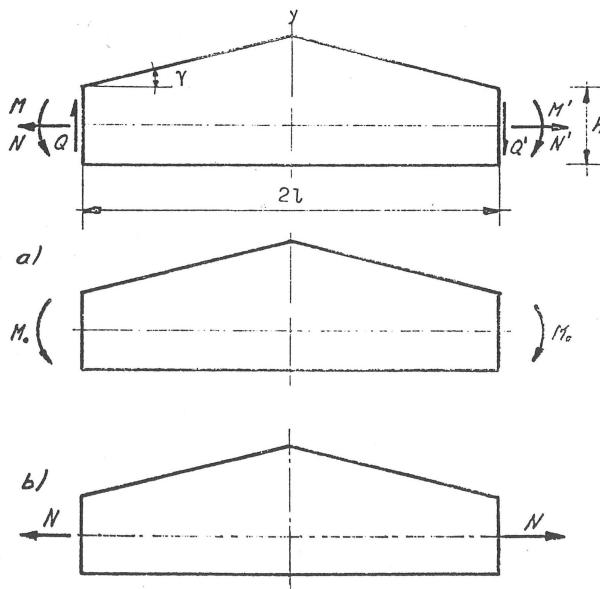
5.1. Die Grundlastfälle

Die in Bild 5.1. gezeigte Scheibe hat einen geraden unteren und einen geneigten oberen Rand. Sie ist bezüglich der  $y$  - Achse symmetrisch. An den Endquerschnitten greifen die äusseren Schnittkräfte in der Scheibenebene an. Um die Behandlung dieser Scheibenform übersichtlich zu gestalten, wird der allgemeine Belastungsfall in zwei symmetrische und einen Grundlastfall aufgespaltet.

Grundlastfall a): Reine Biegung

Grundlastfall b): Reine Normalkraft

Grundlastfall c): Biegung mit antimetrischer Querkraft. In der  $y$  - Achse greift eine reine Querkraft an.



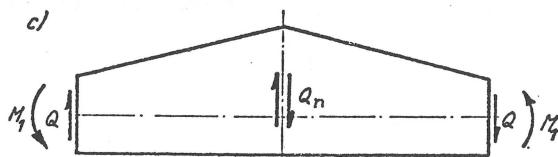


Bild 5.1.

Für den Belastungsfall c) muss die Gleichgewichtsbedingung  $M_1 = Q \cdot l$  gelten. Zwischen den Schnittgrößen des allgemeinen Lastfalles und denen der Grundlastfälle ergeben sich folgende Beziehungen:

$$M = M_0 + M_1 = M_0 + Q \cdot l$$

$$M' = M_0 - M_1 = M_0 - Q \cdot l$$

Die halbe Scheibenlänge wurde mit  $l$ , die Querschnittshöhe an den beiden Endquerschnitten mit  $h$  bezeichnet. Der obere Rand ist um den Winkel  $\gamma$  gegenüber der  $x$ -Achse geneigt.

### 5.2. Reine Biegung

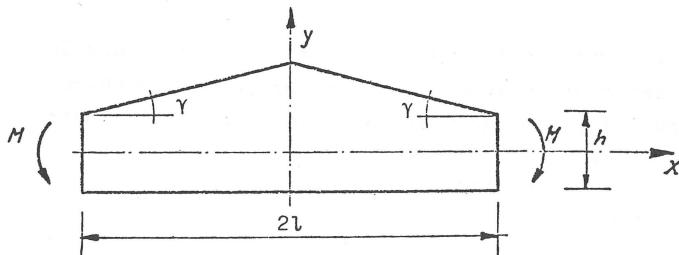


Bild 5.2.

Der Koordinatenursprung wird in den Schnittpunkt der Symmetrieachse durch die obere Ecke und der Verbindung der Mittelpunkte an den Endquerschnitten gelegt.

#### 5.2.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

##### 5.2.1.1. Die Randbedingungen am unteren geraden Rand

Wie bereits in den vorherigen Abschnitten müssen die Normalspannun-

gen  $\sigma_y$  und die Schubspannungen  $\tau_{xy}$  am unteren Rand verschwinden.

$$\sigma_{y,y=-\frac{h}{2}} = 0 \quad (5.1/1)$$

$$\tau_{xy,y=-\frac{h}{2}} = 0 \quad (5.1/2)$$

#### 5.2.1.2. Die Randspannungen am geneigten oberen Rand

Analog Abschnitt 4 sollen die Randbedingungen am oberen Rand näherungsweise mit einer Bedingung für das Minimum aller angreifenden Spannungen senkrecht zum Rand und der Schubspannungen erfüllt werden. Das folgende Integral soll also möglichst klein werden:

$$J(x) = \int_0^l (\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2) \frac{dx}{\cos \gamma} \quad (5.2)$$

$\bar{\sigma}_x$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  sind die Spannungskomponenten in Funktion von  $x$  am oberen Rand für das um den Winkel  $\gamma$  gedrehte Koordinatensystem  $\bar{x}-\bar{y}$ ,  $t$  bedeutet die Scheibendicke.

#### 5.2.1.3. Die Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten

An den Endquerschnitten  $x = l$  und  $x = -l$  stehen die Spannungen mit den äusseren angreifenden Schnittkräften im Gleichgewicht. Das Momenten-, Normalkraft- und Querkraftsgleichgewicht lautet:

$$M = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot y \cdot dy \quad (5.2/1)$$

$$N = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot dy = 0 \quad (5.2/2)$$

$$Q = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot dy = 0 \quad (5.2/3)$$

#### 5.2.1.5. Die Gleichgewichtsbedingungen am oberen Keil

Zusätzlich zu den übrigen Rand- und Gleichgewichtsbedingungen sollen drei weitere Gleichgewichtsbedingungen am oberen Keil formuliert werden. Dadurch wird verhindert, dass durch die näherungsweise Erfüllung der Randbedingung am oberen Rand Zusatzkräfte den

Spannungszustand verfälschen. Mit dieser Massnahme kann die Genauigkeit der Resultate wesentlich erhöht werden.

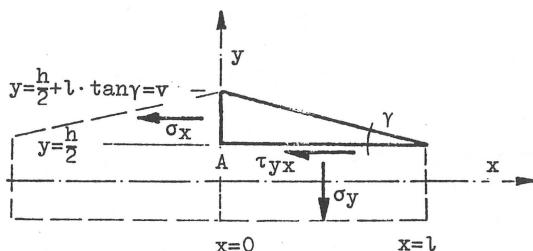


Bild 5.3.

Man kann die Gleichgewichtsbedingungen wie folgt anschreiben:

a)  $\sum P_x = 0$

$$-\int_{\frac{h}{2}}^v \sigma_x \, dy - \int_0^l \tau_{xy} \, dx = 0 \quad (5.41)$$

b)  $\sum P_y = 0$

$$\int_0^l \sigma_y \, dx = 0 \quad (5.412)$$

c)  $\sum M = 0$

Das Momentengleichgewicht wird um den Punkt A gebildet.

$$\int_{\frac{h}{2}}^v \sigma_x \left( y - \frac{h}{2} \right) \, dy - \int_0^l \sigma_y x \, dx = 0 \quad (5.413)$$

### 5.2.2. Spannungszustand für reine Biegung

Der Lösungsansatz für die Spannungsfunktion der Scheibengleichung (2.11) kann wie folgt gemacht werden (Abschnitt 2.2.5):

$$F = A_0 \frac{y^3}{6} + \left\{ \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos \omega_i x \right\} \quad (5.5/1)$$

mit  $\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l \cdot o}$ ,  $o \geq 1$  für alle  $i = 1, 2, 3, 4 \dots j$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k^2 - 2\mu_x}{2}} + \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} + s^2} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2 - 2\mu_x}{2}} - \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} + s^2}$$

Die Spannungsfunktion (5.5/1) setzt sich zusammen aus einem Anteil  $A_0 \cdot y^3/b$ , der den Spannungszustand im geraden rechteckigen Balken unter reiner Momentenbeanspruchung ergibt, und einer Reihe von Summengliedern, die zur Erfüllung der Randbedingungen am oberen Rand herangezogen werden.

Bei Vorliegen des isotropen Werkstoffes muss der zweite Teil mit den Gliedern nach Gleichung (2.13) gebildet werden.

$$F_i = A_0 \frac{y^3}{6} + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i y) + A_{i2} \cdot y \cosh(\omega_i y) + A_{i3} \sinh(\omega_i y) + A_{i4} \cdot y \sinh(\omega_i y) \right] \cos \omega_i x \quad (5.5/2)$$

Die Spannungskomponenten errechnen sich nach Gleichung (2.8)

$$\sigma_x = A_0 y + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cdot \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos \omega_i x \quad (5.6/1)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos \omega_i x \quad (5.6/2)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin \omega_i x \quad (5.6/3)$$

isotrop:

$$\sigma_x = A_0 \cdot y + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i y) + A_{i2} \left( y \cdot \cosh(\omega_i y) + \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i y) \right) + A_{i3} \sinh(\omega_i y) + A_{i4} \left( y \cdot \sinh(\omega_i y) + \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i y) \right) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.7/1)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i y) + A_{i2} \cdot y \cosh(\omega_i y) + A_{i3} \sinh(\omega_i y) + A_{i4} \cdot y \sinh(\omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.7/1)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cdot \sinh(\omega_i y) + A_{i2} \left( \frac{\cosh(\omega_i y)}{\omega_i} + y \sinh(\omega_i y) \right) + A_{i3} \cosh(\omega_i y) + A_{i4} \left( \frac{\sinh(\omega_i y)}{\omega_i} + y \cosh(\omega_i y) \right) \right] \sin(\omega_i x) \quad (5.7/2)$$

Am oberen Rand  $y = v-x/l(v-h/2) = y_0$  müssen die Spannungskomponenten  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  für das um  $\gamma$  gedrehte Koordinatensystem bestimmt werden.

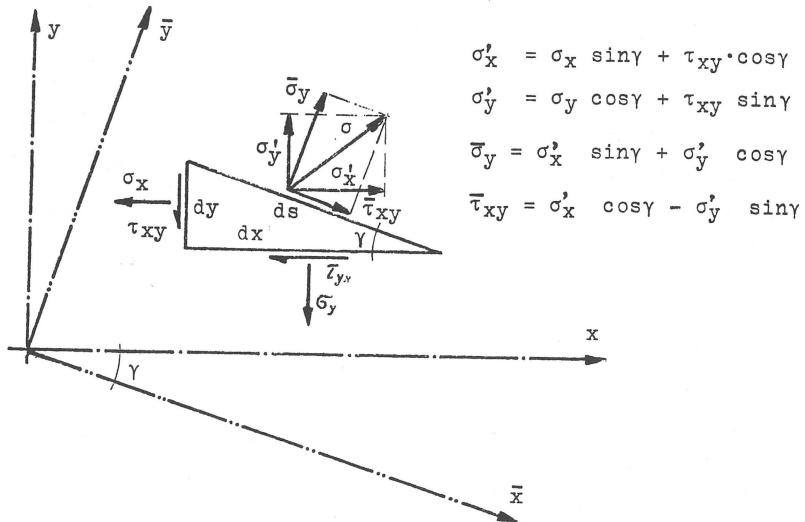


Bild 5.4.

Wir erhalten schliesslich die Spannungskomponenten im gedrehten Koordinatensystem in Funktion der Spannungen des ursprünglichen Systems und des Winkels  $\gamma$ :

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma - \tau_{xy} \sin 2\gamma \quad (5.8/1)$$

$$\bar{\sigma}_y = \sigma_x \sin^2 \gamma + \sigma_y \cos^2 \gamma + \tau_{xy} \sin 2\gamma \quad (5.8/2)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\gamma + \tau_{xy} \cos 2\gamma \quad (5.8/3)$$

Setzen wir nun die Gleichungen (5.6/1-3) in die oben erhaltenen Transformationsgleichungen (5.8/1-3) ein, dann ergibt sich

$$\text{mit: } y = v - \frac{x}{l} \quad (v - \frac{h}{2}) = y_0$$

$$\bar{\sigma}_x = A_0 y_0 \cos^2 \gamma$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cos(\omega_i x) - \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cos(\omega_i x) - \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$+ A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cos(\omega_i x) - \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$\left. + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cos(\omega_i x) - \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right\}$$

(5.9/1)

$$\bar{\sigma}_y = A_0 y_0 \sin^2 \gamma$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$+ A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \cos(\omega_i x) + \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$\left. + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \cos(\omega_i x) + \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right\}$$

(5.9/2)

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{A_0}{2} y_0 \sin 2\gamma$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) \left( \frac{\lambda_2^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$+ A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$\left. + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i y_0) \left( \frac{\lambda_2^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \cosh(\lambda_2 \omega_i y_0) \lambda_2 \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right\}$$

Beim isotropen Werkstoff ergibt sich:

(5.9/3)

$$\bar{\sigma}_x = A_0 y_0 \cos^2 \gamma + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) - \sinh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ y_0 \cosh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i y_0) \cos^2 \gamma \cos(\omega_i x) \right.$$

$$- \left. \left( y_0 \sinh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \right) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$+ A_{i3} \left[ \sinh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) - \cosh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right]$$

$$+ A_{i4} \left[ \left( y_0 \sinh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \cos^2 \gamma \cos(\omega_i x) \right. \right.$$

$$- \left. \left. \left( y_0 \cosh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \right) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \right] \right\}$$

(5.10/1)

$$\bar{\sigma}_y = A_0 y_0 \sin^2 \gamma$$

$$- \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} [\cosh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) - \sinh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x)] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ (y_0 \cosh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i y_0) \sin^2 \gamma) \cdot \cos(\omega_i x) \right.$$

$$- \left( y_0 \sinh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \right) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \left. \right]$$

$$+ A_{i3} [\sinh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) - \cosh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x)]$$

$$+ A_{i4} \left[ y_0 \sinh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \sin^2 \gamma \cdot \cos(\omega_i x) \right.$$

$$- \left( y_0 \cosh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \sinh(\omega_i y_0) \right) \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \left. \right\}$$
(5. 10/2)

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{A_0}{2} y_0 \sin 2\gamma$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} [\cosh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) + \sinh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x)] \right.$$

$$+ A_{i2} \left[ (y_0 \cosh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \sinh(\omega_i y_0)) \sin 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) \right.$$

$$+ \left( y_0 \sinh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0) \right) \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x) \left. \right]$$

$$+ A_{i3} [\sinh(\omega_i y_0) \sin 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) + \cosh(\omega_i y_0) \cos 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x)]$$

$$+ A_{i4} \left[ (y_0 \sinh(\omega_i y_0) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i y_0)) \sin 2\gamma \cdot \cos(\omega_i x) \right. \left. \right]$$
(5. 10/3)

#### 5.2.2.1. Die Randbedingungen am unteren Rand

Nach Abschnitt 5.2.1.1 müssen  $\sigma_y$  und  $\tau_{xy}$  am unteren Rand verschwinden. (G1. 5.1/1,2) Mit Berücksichtigung der Gleichungen (5.6/1-3) resp. (5.7/1-3) und  $y = h/2$  können wir die Randbedingungen wie folgt genau erfüllen:

a)  $\sigma_y \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$

$$A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0$$
(5.11/1)

und isotrop

$$A_{i1} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i2} \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) = 0$$
(5.11/2)

für alle  $i = 1, 2, 3, 4, \dots j$

$$b) \tau_{xy} \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

$$-A_{11}\lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{12}\lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{13}\lambda_1 \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{14}\lambda_2 \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0 \quad (5.12/1)$$

isotrop:

$$-A_{11}\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{12}\left[\frac{1}{\omega_i} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2})\right] \\ + A_{13}\operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{14}\left[\frac{1}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2})\right] = 0 \quad (5.12/2)$$

für alle  $i = 1, 2, 3, 4, \dots j$

### 5.2.2.2. Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten $x = 1$

Mit Hilfe der Gleichung (5.2/1) und den Gleichungen (5.6/1) bzw. (5.7/1) erhält man nach durchgeföhrter Integration das Momentengleichgewicht am Endquerschnitt  $x = 1$ :

$$M = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x y dy \Big|_{x=1}$$

$$\frac{M}{t} = A_o \frac{h^3}{12} + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{13} \left[ \lambda_1 h \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{14} \left[ \lambda_2 h \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \cos(\omega_i l) \quad (5.13/1)$$

isotrop:

$$\frac{M}{t} = A_o \frac{h^3}{12} + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{12} \left[ \frac{h^2}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{13} \left[ h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \cos(\omega_i l) \quad (5.13/2)$$

Die beiden anderen Gleichgewichtsbedingungen (5.2/2) und (5.2/3) für die Normal- und Querkraft werden falls  $\sigma = 1$  als Kontrollbedingungen und falls  $\sigma \neq 1$  als zusätzliche Gleichgewichtsbedingungen benutzt. Es ergibt sich das Gleichgewicht für die Normalkraft:

$$N = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{11} 2\lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{12} 2\lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \cos(\omega_i l) = 0 \quad (5.14/1)$$

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} 2 \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \left[ h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \cos(\omega_i l) = 0 \quad (5.14/2)$$

und die Querkraft:

$$Q = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i3} 2 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} 2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.15/1)$$

und isotrop:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i2} h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} 2 \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.15/2)$$

### 5.2.2.3. Gleichgewichtsbedingungen des oberen Keiles

a)  $\Sigma P_x = 0$

Mit Hilfe der Gleichungen (5.4/1), (5.6/1,3) bzw. (5.7/1,3) erhalten wir nach der Auswertung der Integrale:

$$\int_{y=\frac{h}{2}}^{y=v} \sigma_x \Big|_{x=0} dy = A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \frac{\lambda_1}{\omega_i} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i v) - \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \frac{\lambda_2}{\omega_i} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i v) - \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \frac{\lambda_1}{\omega_i} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i4} \frac{\lambda_2}{\omega_i} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\}$$

isotrop:

$$\int_{y=\frac{h}{2}}^{y=v} \sigma_x \Big|_{x=0} dy = A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \frac{1}{\omega_i} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i v) - \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \frac{1}{\omega_i} \left[ v \operatorname{Sinh}(\omega_i v) - \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \frac{1}{\omega_i} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i v) - \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i4} \frac{1}{\omega_i} \left[ v \operatorname{Cosh}(\omega_i v) - \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right] \right\}$$

$$\int_{x=0}^{x=l} \tau_{xy} dx = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right. \\ \left. + A_{i3} \lambda_1 \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \lambda_2 \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \frac{\cos(\omega_i l) - 1}{\omega_i}$$

isotrop:

$$\int_{x=0}^{x=l} \tau_{xy} dx = - \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \left[ \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i h/2)}{\omega_i} + \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \left[ \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i h/2)}{\omega_i} + \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \frac{\cos(\omega_i l) - 1}{\omega_i}$$

das Gleichgewicht in x - Richtung:

$$A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \lambda_1 \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \lambda_2 \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \lambda_1 \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) - \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right\} \quad (5.16/1)$$

isotrop:

$$A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \left[ v \operatorname{Sinh}(\omega_i v) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \left( \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i v) - \left( \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i4} \left[ v \operatorname{Cosh}(\omega_i v) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \left( \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right) \cos(\omega_i l) \right] \right\} = 0 \quad (5.16/2)$$

b)  $\Sigma P_y = 0$

Mit den Gleichungen (5.4/2), (5.6/2) bzw. (5.7/2) ergibt sich in Richtung der y - Achse mit Berücksichtigung, dass  $y = h/2$ :

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right. \\ \left. + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \cdot h/2) + A_{i4} \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \cdot h/2) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.17/1)$$

isotrop:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\omega_i \cdot h/2) + A_{i2} \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \cdot h/2) \right. \\ \left. + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\omega_i \cdot h/2) + A_{i4} \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \cdot h/2) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.17/2)$$

c)  $\Sigma M = 0$

Wir benutzen die Gleichungen (5.4/3) und (5.6/1,2) bzw. (5.7/1,2) und erhalten mit den Integralen:

$$\int_{y=\frac{h}{2}}^{y=v} \sigma_x (y - \frac{h}{2}) dy = A_0 \left( \frac{v^3}{3} - \frac{h}{4} v^2 + \frac{h^3}{48} \right) \\
 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \lambda_1 (v - \frac{h}{2}) \sinh(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i2} \left[ \lambda_2 (v - \frac{h}{2}) \sinh(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\lambda_2 \omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i3} \left[ \lambda_1 (v - \frac{h}{2}) \cosh(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i4} \left[ \lambda_2 (v - \frac{h}{2}) \cosh(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\lambda_2 \omega_i v) \right) \right] \right\}$$

isotrop:

$$\int_{y=\frac{h}{2}}^{y=v} \sigma_x (y - \frac{h}{2}) dy = A_0 \left( \frac{v^3}{3} - \frac{h}{4} v^2 + \frac{h^3}{48} \right) \\
 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ (v - \frac{h}{2}) \sinh(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i2} \left[ (v^2 - \frac{vh}{2}) \sinh(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i3} \left[ (v - \frac{h}{2}) \cosh(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + A_{i4} \left[ (v^2 - \frac{vh}{2}) \cosh(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\omega_i v) \right) \right] \right\}$$

$$\int_{x=0}^{x=l} \sigma_y \cdot x dx = - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right. \\
 \left. + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right)$$

isotrop:

$$\int_{x=0}^{x=l} \sigma_y \cdot x dx = - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right. \\
 \left. + A_{i4} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right)$$

für das Momentengleichgewicht:

$$A_0 \left( \frac{v^3}{3} - \frac{h}{4} v^2 + \frac{h^3}{48} \right) \\
 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \lambda_1 (v - \frac{h}{2}) \sinh(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right] \right. \\
 \left. + \left( \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right\} \\
 + A_{i2} \left[ \lambda_2 (v - \frac{h}{2}) \sinh(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\lambda_2 \omega_i v) \right. \\
 \left. + \left( \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{13} \left[ \lambda_1 \left( v - \frac{h}{2} \right) \cosh(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \lambda_2 \left( v - \frac{h}{2} \right) \cosh(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\lambda_2 \omega_i v) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \cdot \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] \} = 0 \quad (5.17/1)
 \end{aligned}$$

isotrop:

$$A_0 \left( \frac{v^3}{3} - \frac{h}{4} v^2 + \frac{h^3}{48} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{11} \left[ \left( v - \frac{h}{2} \right) \sinh(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\omega_i v) \right) \right] + \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right\} \\
 & + A_{12} \left[ \left( v^2 - \frac{vh}{2} \right) \sinh(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - \cosh(\omega_i v) + \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] \\
 & + A_{13} \left[ \left( v - \frac{h}{2} \right) \cosh(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\omega_i v) + \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \left( v^2 - \frac{vh}{2} \right) \cosh(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) - \sinh(\omega_i v) + \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right] \} = 0 \quad (5.17/2)
 \end{aligned}$$

#### 5.2.2.4. Die Erfüllung der Randbedingungen am oberen geneigten Rand

Am oberen Rand der Scheibe für  $y = v - \frac{x}{l} \left( v - \frac{h}{2} \right)$  werden wir die Randbedingungen gemäss Abschnitt 5.2.1.2. erfüllen. In den Gleichungen (5.9/1,3) bzw. (5.10/1,3) stehen uns die Spannungskomponenten  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$  in Funktion von  $x$  zur Verfügung. Analog Abschnitt 4.2.2.4. führen wir eine abgekürzte Schreibweise ein:

$$\bar{\sigma}_y = A_0 E_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}} \left[ A_{11} E_{i1} + A_{12} E_{i2} + A_{13} E_{i3} + A_{14} E_{i4} \right] \quad (5.18/1)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = A_0 F_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}} \left[ A_{11} F_{i1} + A_{12} F_{i2} + A_{13} F_{i3} + A_{14} F_{i4} \right] \quad (5.18/2)$$

Es bedeuten nach Gleichung (5.9/2) mit Berücksichtigung dass:

$$y = v - \frac{x}{l} \left( v - \frac{h}{2} \right) = y_0$$

$$E_0 = y_0 \sin^2 \gamma$$

$$E_{i1} = \cosh(\lambda_1 \omega_i y_0) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_1 \omega_i y_0) \lambda_1 \sin 2\gamma \cdot \sin(\omega_i x)$$

$$E_{i2} \dots$$

und nach Gleichung (5.9/3):

$$F_o = \frac{y_o}{2} \sin 2\gamma$$

$$F_{i1} = \cosh(\lambda_1 \omega_i y_o) \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \sinh(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \cos 2\gamma \sin(\omega_i x)$$

$$F_{i2} = \dots$$

Für den isotropen Werkstoff erhalten wir nach Gleichung (5.10/2):

$$E_o = y_o \sin^2 \gamma$$

$$E_{i1} = -\cosh(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) - \sinh(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x)$$

$$E_{i2} = \dots$$

und nach Gleichung (5.10/3):

$$F_o = \frac{y_o}{2} \sin 2\gamma$$

$$F_{i1} = \cosh(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) + \sinh(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x)$$

$$F_{i2} = \dots$$

Die Ableitungen der Integrale  $J(x)$  (5.2) nach den Festwerten ergeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial A_o} &= \frac{2 dx^2 t^2}{\cos^3 \gamma} \left\{ A_o \int_0^l (E_o^2 + F_o^2) dx \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \int_0^l (E_{i1} E_o + F_{i1} F_o) dx + A_{i2} \int_0^l (E_{i2} E_o + F_{i2} F_o) dx \right. \\ &\quad \left. \left. + A_{i3} \int_0^l (E_{i3} E_o + F_{i3} F_o) dx + A_{i4} \int_0^l (E_{i4} E_o + F_{i4} F_o) dx \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.19/1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial A_{i1}} &= \frac{2 dx^2 t^2}{\cos^3 \gamma} \left\{ A_o \int_0^l (E_o E_{i1} + F_o F_{i1}) dx \right. \\ &\quad + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \int_0^l (E_{i1}^2 + F_{i1}^2) dx + A_{i2} \int_0^l (E_{i2} E_{i1} + F_{i2} F_{i1}) dx \right. \\ &\quad \left. \left. + A_{i3} \int_0^l (E_{i3} E_{i1} + F_{i3} F_{i1}) dx + A_{i4} \int_0^l (E_{i4} E_{i1} + F_{i4} F_{i1}) dx \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.19/2)$$

für alle  $i = 1, 2, \dots, j$

Für die Bestimmung des Minimums müssen die beiden Gleichungen gleich null gesetzt werden. Somit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$A_0 \int_0^l (E_0^2 + F_0^2) dx + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \int_0^l (E_{i1} E_0 + F_{i1} F_0) dx + A_{i2} \int_0^l (E_{i2} E_0 + F_{i2} F_0) dx \right. \\ \left. + A_{i3} \int_0^l (E_{i3} E_0 + F_{i3} F_0) dx + A_{i4} \int_0^l (E_{i4} E_0 + F_{i4} F_0) dx \right] = 0 \quad (5.20/1)$$

$$A_0 \int_0^l (E_{i1} F_0 + F_{i1} E_0) dx + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \int_0^l (E_{i1}^2 + F_{i1}^2) dx + A_{i2} \int_0^l (E_{i2} E_{i1} + F_{i2} F_{i1}) dx \right. \\ \left. + A_{i3} \dots \dots \dots \right] = 0 \quad (5.20/2)$$

Die Auswertung der Integrale in den Gleichungen (5.20/1,2) ist auch hier analytisch kaum möglich. Es wird eine numerische Summierung durchgeführt mit 21 Stützstellen und konstanten Funktionswerten über den Stützstellen.

$$A_0 \sum_{m=0}^{m=20} [ E_0(x_m)^2 + F_0(x_m)^2 ] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i1}(x_m) \cdot E_0(x_m) + F_{i1}(x_m) \cdot F_0(x_m) ) \right] \right. \\ + A_{i2} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i2}(x_m) \cdot E_0(x_m) + F_{i2}(x_m) \cdot F_0(x_m) ) \right] \\ + A_{i3} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i3}(x_m) \cdot E_0(x_m) + F_{i3}(x_m) \cdot F_0(x_m) ) \right] \\ \left. + A_{i4} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i4}(x_m) \cdot E_0(x_m) + F_{i4}(x_m) \cdot F_0(x_m) ) \right] \right\} = 0 \quad (5.21/1)$$

$$A_0 \sum_{m=0}^{m=20} [ E_0(x_m) \cdot E_{i1}(x_m) + F_0(x_m) \cdot F_{i1}(x_m) ] \\ + \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{i1} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i1}(x_m)^2 + F_{i1}(x_m)^2 ) \right] \right. \\ + A_{i2} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i2}(x_m) \cdot E_{i1}(x_m) + F_{i2}(x_m) \cdot F_{i1}(x_m) ) \right] \\ + A_{i3} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i3}(x_m) \cdot E_{i1}(x_m) + F_{i3}(x_m) \cdot F_{i1}(x_m) ) \right] \\ \left. + A_{i4} \left[ \sum_{m=1}^{m=20} ( E_{i4}(x_m) \cdot E_{i1}(x_m) + F_{i4}(x_m) \cdot F_{i1}(x_m) ) \right] \right\} = 0 \quad (5.21/2)$$

für alle  $i = 1 \dots j$  mit einer Gesamtzahl von  $j + 1$  Gleichungen.

$$x_m = \frac{m \cdot l}{20}$$

### 5.2.2.5. Zusätzliche Randbedingungen am Firstpunkt

Bei kleinem Winkel  $\gamma$  werden die Randbedingungen am oberen Rand mit der oben formulierten Methode der kleinsten Quadrate in der Nähe des Firstpunktes relativ ungenau erfüllt und verursachen dadurch eine Verfälschung der Spannungen im Firstquerschnitt. Die Genauigkeit kann verbessert werden, wenn mit zwei zusätzlichen Gleichungen im Firstpunkt die Spannungskomponente  $\bar{\sigma}_y$  senkrecht zum Rand und die Komponente  $\bar{\sigma}_x$  parallel zum Rand gleich null gesetzt werden. Nach Gleichung (5.9/2) bzw. (5.10/2) gelten mit Berücksichtigung, dass  $y_0 = v$  und  $x = 0$  sind, die beiden Bedingungen:

$$+ \sum_{i=j}^{i=j} \left\{ A_{11} [\cosh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma)] + A_{12} [\cosh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma)] \right. \\ \left. + A_{13} [\sinh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma)] + A_{14} [\sinh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma)] \right\} = 0 \quad (5.22/1)$$

und isotrop:

$$+ \sum_{i=j}^{i=j} \left\{ A_{11} [\cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma] + A_{12} [v \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i v) \sin^2 \gamma] \right. \\ \left. + A_{13} [\sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma] + A_{14} [v \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i v) \sin^2 \gamma] \right\} = 0$$

Nach Gleichung (5.9/1) und (5.10/1) ergibt sich mit  $y'_0 = v$  und  $x = c$  (5.22/2)

$$\bar{\sigma}_x F = A_0 v \cos^2 \gamma$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{11} [\cosh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)] + A_{12} [\cosh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)] \right. \\ \left. + A_{13} [\sinh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)] + A_{14} [\sinh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma)] \right\} = 0$$

isotrop:

$$\bar{\sigma}_x F = A_0 v \cos^2 \gamma \quad (5.23/1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=j} \left\{ A_{11} [\cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma] + A_{12} [v \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i v) \cos^2 \gamma] \right. \\ \left. + A_{13} [\sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma] + A_{14} [v \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i v) \cos^2 \gamma] \right\} = 0$$

(5.23/2)

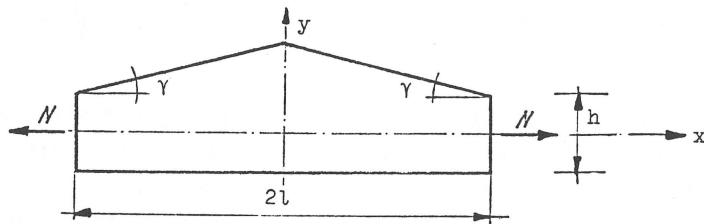
#### 5.2.2.6. Die Auflösung des Gleichungssystems

Analog Abschnitt 4.2.2.5. werden nach der Lagrange'schen Multiplikatorenregel die Randbedingungen am unteren Rand (5.11) und (5.12), die Gleichgewichtsbedingung am Schnitt  $x = \pm 1$  (5.19), (5.20) und (5.21) für  $\alpha > 1$  die drei Gleichgewichtsbedingungen des oberen Keiles (5.16), (5.17) und (5.18) und für kleine Winkel  $\gamma$  die beiden Bedingungen am Firstpunkt (5.23/2) als Nebenbedingungen formuliert in einem Gleichungssystem, das die Bedingungen für das Minimum der äusseren Spannungen am oberen Rand (5.21/1, 2 ...) enthält. Für die unbekannten Konstanten  $A_0, A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1l}, \dots, A_{j4}$  (insgesamt  $1 + 4 \cdot j$ ) benötigen wir  $1 + 4 \cdot j$  Extremalbedingungen, denen  $n$  Nebenbedingungen gegenüberstehen.  $n$  muss je nach Scheibenform und Berechnungsart verändert werden. Die Gesamtzahl der Gleichungen beläuft sich somit auf  $1 + 4 \cdot j + n$ .

#### 5.2.2.7. Die Bestimmung der Spannungswerte

Nach der Auflösung des Gleichungssystems und der Ermittlung der Festwerte  $A$  können die endgültigen Spannungswerte anhand der Gleichungen (5.6/1-3) bzw. (5.7/1-3) erhalten werden. Die Spannungen am oberen Rand  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$  und  $\bar{\tau}_{xy}$  werden mit den Gleichungen (5.9/1-3) bzw. (5.10/1-3) errechnet. Ein Mass für die Genauigkeit der durchgeföhrten Berechnungen geben die Spannungskomponenten  $\bar{\sigma}_x$  und  $\bar{\tau}_{xy}$ , die bei Erhöhung der Anzahl Reihenglieder gegen null konvergieren.

### 5.3. Reine Normalkraft an den Endquerschnitten



#### 5.3.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Die Randbedingungen am unteren geraden Rand und die Randbedingungen am geneigten oberen Rand können aus Abschnitt 5.2. übernommen werden. Für die Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten gilt.

$$N = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dy \quad (5.24/1)$$

$$M = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x y dy = 0 \quad (5.24/2)$$

$$Q = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = 0 \quad (5.24/3)$$

Unverändert bleiben die Gleichgewichtsbedingungen am oberen Keil.

#### 5.3.2. Spannungszustand für reine Normalkraftbelastung

Den Lösungsansatz für die Spannungsfunktion wählen wir wie folgt:  
(Abschnitt 2.2.5)

$$F = \frac{A_0}{2} y^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i0} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.25/1)$$

mit  $\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l \cdot o}$  für alle  $i = 1, 2, \dots, j$ , und  $o \geq 1$

sowie

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k^2 - 2\mu_x}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} + s^2}} \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k^2 - 2\mu_x}{2} - \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} + s^2}}$$

Der Anteil  $\frac{1}{2} \cdot A_0 \cdot y^2$  ergibt die Spannungsverteilung mit Normalkraftbelastung am parallelgurtigen Balken. Die zusätzlichen Reihenglieder unterscheiden sich nicht von den Zusatzgliedern in Abschnitt 5.2.2. Sie werden auch hier zur Erfüllung der Randbedingungen am oberen Rand benötigt.

Die isotrope Schreibweise lautet nach Gleichung (5.5/2):

$$F = \frac{A_0}{2} y^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} 2 \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i y) + A_{i2} y \cosh(\omega_i y) + A_{i3} \sinh(\omega_i y) + A_{i4} y \sinh(\omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.25/2)$$

Nach Gleichung (2.8) erhalten wir die Spannungskomponenten wie in Abschnitt 5.2.2. (5.6/1-3)

$$\sigma_x = A_0 + \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.26/1)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.26/2)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.26/3)$$

bzw. (5.7/1-3) für den isotropen Baustoff:

$$\sigma_x = A_0 + \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.27/1)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.27/2)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.27/3)$$

Die Spannungskomponenten im  $\bar{x}$ - $\bar{y}$ -Koordinatensystem am oberen Rand mit  $y = v - x \cdot (v - h/2)/l = y_0$  können mit den Gleichungen (5.8) und (5.9) ermittelt werden. Sie lauten mit Berücksichtigung, dass unter dem Summationszeichen sich nichts verändert:

$$\bar{\sigma}_x = A_0 \cos^2 \gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.28/1)$$

$$\bar{\sigma}_y = A_0 \sin^2 \gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.28/2)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{A_0}{2} \sin 2\gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.28/3)$$

Bei der isotropen Schreibweise benützen wir die Gleichungen (5.10/1-3). Das erste Summenglied ändert sich gegenüber den Gleichungen (5.28/1-3) nicht.

$$\sigma_x = A_0 \cos^2 \gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.29/1)$$

$$\bar{\sigma}_y = A_0 \sin^2 \gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.29/2)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{A_0}{2} \sin 2\gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{i=j} \dots \dots \dots \quad (5.29/3)$$

### 5.3.2.1. Die Randbedingungen am unteren Rand

Analog Abschnitt 5.2.2.1 erhalten die Randbedingungen am unteren Rand folgende Form: (5.11/1,2) und (5.12/1,2)

$$a) \sigma_y \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

$$A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0$$

isotrop: (5.30/1)

$$A_{i1} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i2} \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) = 0$$

für alle  $i = 1, 2, 3 \dots j$  (5.30/2)

$$b) \tau_{xy} \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

$$A_{i1} \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i2} \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0$$

isotrop: (5.31/1)

$$-A_{i1} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \left[ \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i4} \left[ \frac{1}{\omega_i} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] = 0$$

für alle  $i = 1, 2, 3 \dots j$  (5.31/2)

### 5.3.2.2. Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten $x=\pm l$

Setzen wir Gleichung (5.26/1) bzw. (5.27/1) in Gleichung (5.24/1) ein, so erhalten wir:

$$\frac{N}{t} = A_0 h + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} 2\lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} 2\lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \cos(\omega_i l) \quad (5.32/1)$$

und isotrop:

$$\frac{N}{t} = A_0 h + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} 2\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \left( h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \right] \cos(\omega_i l) \quad (5.32/2)$$

An den Endquerschnitten verschwinden das Moment und die Querkraft.

Die beiden Gleichgewichtsbedingungen (5.24/2,3) werden, falls  $\sigma = 1$ , als Kontrollbedingungen und falls  $\sigma \neq 1$ , als zusätzliche Gleichgewichtsbedingungen benutzt. Sie lauten für das Momentengleichgewicht:

$$\frac{M}{t} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i3} \left[ \lambda_1 h \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i4} \left[ \lambda_2 h \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \cos(\omega_i l) = 0 \quad (5.33/1)$$

isotrop:

$$\frac{M}{t} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i2} \left[ \frac{h^2}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \left[ h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \cos(\omega_i l) = 0 \quad (5.33/2)$$

und das Querkraftgleichgewicht:

$$\frac{Q}{t} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i3} 2\operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} 2\operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right\} \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.34/1)$$

und isotrop:

$$\frac{Q}{t} = \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i2} h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} 2\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right\} \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.34/2)$$

### 5.3.2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen des oberen Keiles

a)  $\Sigma P_x = 0$

Das erste Glied der Spannungskomponente  $\sigma_x$  (5.26.1) bzw. (5.27.1) nach Gleichung (5.4/1) integriert, ergibt:

$$\int_{\frac{h}{2}}^0 A_0 dy = A_0 (v - \frac{h}{2})$$

Die weiteren Summenglieder können unverändert aus (5.16/1) bzw.

(5.16/2) übernommen werden.

Das Gleichgewicht in x - Richtung lautet somit:

$$A_0 \left(v - \frac{h}{2}\right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \lambda_1 \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \lambda_2 \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \lambda_1 \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) - \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i4} \lambda_2 \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) - \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right\} = 0 \quad (5.35/1)$$

und isotrop:

$$A_0 \left(v - \frac{h}{2}\right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i v) - \left( \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i2} \left[ v \operatorname{Sinh}(\omega_i v) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \left( \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i3} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i v) - \left( \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right) \cos(\omega_i l) \right] \right. \\ \left. + A_{i4} \left[ v \operatorname{Cosh}(\omega_i v) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i v)}{\omega_i} - \left( \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} \right) \cos(\omega_i l) \right] \right\} = 0 \quad (5.35/2)$$

b)  $\Sigma P_y = 0$

Die Gleichungen (5.17/1) bzw. (5.17/2) können unverändert übernommen werden:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right. \\ \left. + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right\} \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.36/1)$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right. \\ \left. + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right\} \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.36/2)$$

c)  $\Sigma M = 0$

Nach Auflösung des ersten Integrals (5.4/3) für das erste Glied der Spannungskomponente  $\sigma_x$  (5.26/1) bzw. (5.27/1)

$$\int_{\frac{h}{2}}^v \sigma_x \left(y - \frac{h}{2}\right) dy = A_0 \left(\frac{v^2}{2} - \frac{vh}{2} + \frac{h^2}{8}\right) + \sum_{i=1}^{i=j} \dots \dots \dots$$

können wir das Momentengleichgewicht mit Hilfe der Gleichung  
(5.17/1) bzw. (5.17/2) anschreiben:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{vh}{2} + \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \lambda_1 \left( v - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right] \right. \\
 & + \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i2} \left[ \lambda_2 \left( v - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) \right) \right] \\
 & + \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i3} \left[ \lambda_1 \left( v - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) \right) \right] \\
 & + \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i4} \left[ \lambda_2 \left( v - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) \right) \right] \\
 & + \left. \left( \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \right\} = 0 \quad |5.37/1
 \end{aligned}$$

isotrop:

$$\begin{aligned}
 & A_0 \left( \frac{v^2}{2} - \frac{vh}{2} + \frac{h^2}{8} \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \left( v - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Sinh}(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\omega_i v) \right) \right] \right. \\
 & + \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i2} \left[ \left( v^2 - \frac{vh}{2} \right) \operatorname{Sinh}(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Cosh}(\omega_i v) \right) \right] \\
 & + \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i3} \left[ \left( v^2 - \frac{h}{2} \right) \operatorname{Cosh}(\omega_i v) + \frac{1}{\omega_i} \left( \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Sinh}(\omega_i v) \right) \right] \\
 & + \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \\
 & + A_{i4} \left[ \left( v^2 - \frac{vh}{2} \right) \operatorname{Cosh}(\omega_i v) + \frac{h}{2\omega_i} \left( \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \operatorname{Sinh}(\omega_i v) \right) \right] \\
 & + \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \left( l \sin(\omega_i l) + \frac{\cos(\omega_i l)}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_i} \right) \left. \right\} = 0 \quad |5.37/2
 \end{aligned}$$

#### 5.3.2.4. Die Erfüllung der Randbedingung am oberen Rand

Die Randbedingungen am oberen Rand werden analog Abschnitt 5.2.2.4. erfüllt. Es verändern sich nur die beiden Abkürzungen  $E_o$  und  $F_o$  in den Ausdrücken für die Spannungskomponenten  $\sigma_x$  und  $\tau_{xy}$ .

$$E_o = \sin^2 \gamma$$

$$F_o = \frac{1}{2} \sin 2\gamma$$

### 5.3.2.5. Zusätzliche Randbedingungen am Firstpunkt

Diese Bedingungen können aus Abschnitt 5.2.2.5. übernommen werden.

Mit der Umschreibung der ersten Glieder aus (5.22) und (5.23) erhalten wir für die Spannung  $\sigma_{\bar{y}F}$  senkrecht zum Rand:

$$\sigma_{\bar{y}F} = A_0 \sin^2 \gamma + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \right] \\ + A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \right] \\ + A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \right] \\ + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \right] = 0 \quad (5.38/1)$$

und isotrop:

$$\sigma_{\bar{y}F} = A_0 \sin^2 \gamma - \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma \right] \\ + A_{i2} \left[ v \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i v) \sin^2 \gamma \right] \\ + A_{i3} \left[ \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma \right] \\ + A_{i4} \left[ v \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i v) \sin^2 \gamma \right] = 0 \quad (5.38/2)$$

und die Spannungen parallel zum Rand:

$$\sigma_{\bar{x}F} = A_0 \cos^2 \gamma + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] \\ + A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] \\ + A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i v) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] \\ + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i v) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right] = 0 \quad (5.39/1)$$

isotrop:

$$\sigma_{\bar{x}F} = A_0 \cos \gamma + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma \right] \\ + A_{i2} \left[ v \cosh(\omega_i v) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \sinh(\omega_i v) \cos^2 \gamma \right] \\ + A_{i3} \left[ \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma \right] \\ + A_{i4} \left[ v \sinh(\omega_i v) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \cosh(\omega_i v) \cos^2 \gamma \right] = 0 \quad (5.39/2)$$

5.3.2.6. Die Auflösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem wird gemäss Abschnitt 5.2.2.6. aufgelöst.

5.3.2.7 Die Bestimmung der Spannungswerte

Die Spannungen erhalten wir nach Abschnitt 5.2.2.7.

5.4. Biegung mit antimetrischer Querkraft.

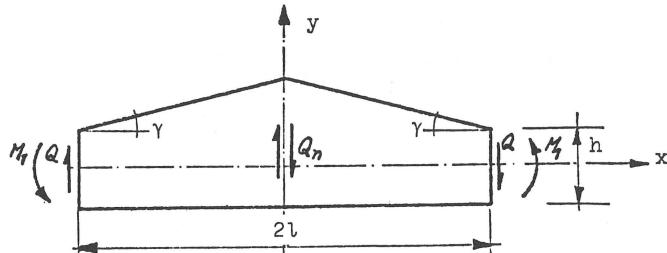


Bild 5.6.

5.4.1. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Aus Abschnitt 5.2. können die Randbedingungen am unteren und oberen Scheibenrand übernommen werden. Die Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten lauten:

$$Q = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy \quad (5.40/1)$$

$$M = M_1 = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x y dy \quad (5.40/2)$$

$$N = t \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dy = 0 \quad (5.40/3)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen am oberen Keil ergeben sich für diesen Belastungszustand nach Bild 5.7. zu:

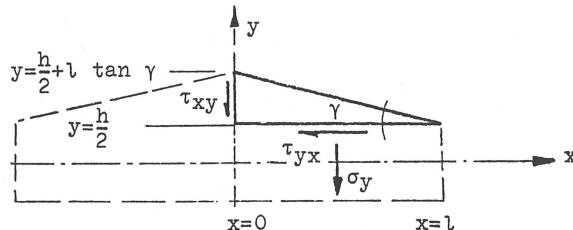


Bild 5.7.

$$\sum p_x = 0 \quad \sum M = 0$$

$$\int_0^l \tau_{xy} dx = 0 \quad (5.41/1) \quad \int_0^l \sigma_y x dx = 0 \quad (5.41/3)$$

$$\sum p_y = 0$$

$$\frac{h}{2} \int_0^v \tau_{xy} dy + \int_0^l \sigma_y dx = 0 \quad (5.41/2)$$

#### 5.4.2. Spannungszustand für Biegung mit antimetrischer Querkraft

Der Lösungsansatz für die Spannungsfunktion wird wie folgt gemacht:

$$F = \frac{A_0}{6} (x y^3 - \frac{3}{4} h^2 xy) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x)$$

mit  $\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l \cdot 0}$  für alle  $i = 1, 2, 3 \dots j$  (5.42/1)

$\lambda_1$  und  $\lambda_2$  siehe Gleichungen (2.12/1-2)

Das erste Glied gibt die Lösung für den parallelgurtigen geraden Balken mit antimetrischer Biege- und Querkraftbelastung. Die weiteren Summenglieder konnten aus Abschnitt 5.2.2 übernommen werden, nachdem die Cosinusfunktion durch die Sinusfunktion ersetzt wurde.

Beim isotropen Werkstoff ergibt sich die Spannungsfunktion zu:

$$F = \frac{A_0}{6} (x y^3 - \frac{3}{4} h^2 xy) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i y) + A_{i2} y \cosh(\omega_i y) + A_{i3} \sinh(\omega_i y) + A_{i4} y \sinh(\omega_i y) \right] \sin(\omega_i x)$$

Die Spannungskomponenten erhält man nach Gleichung (2.8): (5.42/2)

$$\sigma_x = A_0 (yx) + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x)$$

(5.43/1)

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x)$$

(5.43/2)

$$\tau_{xy} = -\frac{A_0}{2}(y^2 - \frac{1}{4}h^2) - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1}\lambda_i \operatorname{Sinh}(\lambda_i \omega_i y) + A_{i2}\lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3}\lambda_1 \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4}\lambda_2 \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.43/3)$$

Die Spannungskomponenten für den isotropen Werkstoff lauten:

$$\sigma_x = A_0(y-x) + \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\omega_i y) + A_{i2} \left( y \operatorname{Cosh}(\omega_i y) + \frac{2 \operatorname{Sinh}(\omega_i y)}{\omega_i} \right) + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\omega_i y) + A_{i4} \left( y \operatorname{Sinh}(\omega_i y) + \frac{2 \operatorname{Cosh}(\omega_i y)}{\omega_i} \right) \right] \sin(\omega_i x) \quad (5.44/1)$$

$$\sigma_y = -\sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \operatorname{Cosh}(\omega_i y) + A_{i2} y \operatorname{Cosh}(\omega_i y) + A_{i3} \operatorname{Sinh}(\omega_i y) + A_{i4} y \operatorname{Sinh}(\omega_i y) \right] \sin(\omega_i x) \quad (5.44/2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{A_0}{2}(y^2 - \frac{1}{4}h^2) - \sum_{i=1}^{i=j} \left[ A_{i1} \operatorname{Sinh}(\omega_i y) + A_{i2} \left( \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i y)}{\omega_i} + y \operatorname{Sinh}(\omega_i y) \right) + A_{i3} \operatorname{Cosh}(\omega_i y) + A_{i4} \left( \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i y)}{\omega_i} + y \operatorname{Cosh}(\omega_i y) \right) \right] \cos(\omega_i x) \quad (5.44/3)$$

Im x, y Koordinatensystem ergeben sich die Spannungskomponenten am oberen Scheibenrand mit  $y = v-x/l$  ( $v-h/2$ ) =  $y_o$  nach (5.8/1-3) und (5.43/1-3) bzw. (5.44/1-3)

$$\bar{\sigma}_x = A_0 \left[ y_o x \cos^2 \gamma + \left( \frac{y_o^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \sin 2\gamma \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin(\omega_i x) + \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i2} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin(\omega_i x) + \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i3} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) (\lambda_1^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin(\omega_i x) + \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i4} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) (\lambda_2^2 \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \sin(\omega_i x) + \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \quad (5.45/1)$$

$$\bar{\sigma}_y = A_0 \left[ y_o x \sin^2 \gamma - \left( \frac{y_o^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \sin 2\gamma \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \sin(\omega_i x) - \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i2} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \sin(\omega_i x) - \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i3} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \sin(\omega_i x) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i4} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) (\lambda_2^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \sin(\omega_i x) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \quad (5.45/2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{A_0}{2} \left[ y_o x \sin 2\gamma - \left( y_o^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cos 2\gamma \right] + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + A_{12} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \left( \frac{\lambda_2^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{13} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \left( \frac{\lambda_1^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \left( \frac{\lambda_2^2 + 1}{2} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y_o) \lambda_2 \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right]
 \end{aligned} \quad (5.45/3)$$

isotropic:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_x = A_0 & \left[ y_o \cdot x \cos^2 \gamma + \left( \frac{y_o^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \sin 2\gamma \right] \\
 & + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x) + \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{12} \left[ \left( y_o \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos^2 \gamma \right) \sin(\omega_i x) \right. \\
 & \quad \left. + \left( y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) + \frac{1}{\omega_i} \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \right) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{13} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x) + \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \left( y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma + \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos^2 \gamma \right) \sin(\omega_i x) \right. \\
 & \quad \left. + \left( y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) + \frac{1}{\omega_i} \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \right) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right]
 \end{aligned} \quad (5.46/1)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_y = \frac{A_0}{2} & \left[ y_o \cdot x \sin^2 \gamma - \left( \frac{y_o^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \sin 2\gamma \right] \\
 & - \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x) + \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{12} \left[ \left( y_o \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \sin^2 \gamma \right) \sin(\omega_i x) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} + y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{13} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x) + \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \left( y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \sin^2 \gamma \right) \sin(\omega_i x) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} + y_o \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \right) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x) \right]
 \end{aligned} \quad (5.46/2)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau}_{xy} = \frac{A_0}{2} & \left[ y \cdot x \sin 2\gamma - \left( y_o^2 - \frac{h^2}{4} \right) \cos 2\gamma \right] \\
 & + \sum_{i=1}^{i=j} A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{12} \left[ \left( y_o \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) + \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \left( \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} + y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \right) \right. \\
 & \quad \left. \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{13} \left[ \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right] \\
 & + A_{14} \left[ \left( y_o \operatorname{Sinh}(\omega_i y_o) + \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} \right) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \left( \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i y_o)}{\omega_i} + y_o \operatorname{Cosh}(\omega_i y_o) \right) \right. \\
 & \quad \left. \cos 2\gamma \cos(\omega_i x) \right]
 \end{aligned} \quad (5.46/3)$$

#### 5.4.2.1. Die Randbedingungen am unteren Rand

Nach Abschnitt 5.2.2.1. können die Randbedingungen am unteren Scheibenrand wie folgt formuliert werden: (5.11/1,2) und (5.12/1,2)

$$a) \sigma_y|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

$$A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0$$

für alle  $i = 1, 2, 3 \dots j$

(5.47/1)

isotrop:

$$A_{i1} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i2} \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) - A_{i3} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) = 0 \quad (5.47/2)$$

$$b) \tau_{xy}|_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

$$A_{i1} \lambda_1 \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - A_{i2} \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) = 0$$

isotrop:

(5.48/1)

$$\begin{aligned} & A_{i1} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \left[ \frac{1}{\omega_i} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \\ & - A_{i4} \left[ \frac{1}{\omega_i} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] = 0 \end{aligned}$$

(5.48/2)

#### 5.4.2.2. Die Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten $x = \pm l$

Wir setzen Gleichung (5.43/3) bzw. (5.44/3) in Gleichung (5.40/1) ein und erhalten für das Gleichgewicht der Querkraft mit den Schubspannungen:

$$\frac{Q}{t} = A_0 \frac{h^3}{12} - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i3} 2 \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} 2 \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \cos(\omega_i l) \quad (5.49/1)$$

isotrop:

$$\frac{Q}{t} = A_0 \frac{h^3}{12} - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i2} h \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} 2 \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \cos(\omega_i l) \quad (5.49/2)$$

Für das Momentengleichgewicht erhält man mit (5.43/1) bzw. (5.44/1) und (5.40/2):

$$\begin{aligned} \frac{M_1}{t} = & A_0 \frac{h^3}{12} l + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i3} \left[ \lambda_1 h \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right. \\ & \left. + A_{i4} \left[ \lambda_2 h \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \sin(\omega_i l) \end{aligned} \quad (5.50/1)$$

isotrop:

$$\frac{M_t}{t} = A_0 \frac{h^3}{12} l + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i2} \left[ \frac{h^2}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \left[ h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) - \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \sin(\omega_i l)$$

(5.50/2)

und schliesslich ergibt sich für das Normalkraftgleichgewicht mit

(5.43/1) bzw. (5.44/1) und (5.40/3):

$$\frac{N}{t} = + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} 2 \lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} 2 \lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.51/1)$$

isotrop:

$$\frac{N}{t} = + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} 2 \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \left[ h \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + \frac{2}{\omega_i} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \sin(\omega_i l) = 0$$

(5.51/2)

#### 5.4.2.3. Die Gleichgewichtsbedingungen des oberen Keiles

a)  $\Sigma P_x = 0$

Nach (5.41/1) erhalten wir nach durchgeföhrter Integration das Gleichgewicht in x - Richtung:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \lambda_1 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \lambda_2 \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \lambda_1 \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \lambda_2 \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \sin(\omega_i l) = 0 \quad (5.52/1)$$

und isotrop:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \left[ \frac{\operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} + \frac{h}{2} \operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \left[ \frac{\operatorname{Sinh}(\omega_i \frac{h}{2})}{\omega_i} + \frac{h}{2} \operatorname{Cosh}(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\} \sin(\omega_i l) = 0$$

(5.52/2)

b)  $\Sigma P_y = 0$

Mit (5.41/2) und (5.43/2), (5.43/3) bzw. (5.44/2) und (5.44/3) und den Integralen:

$$\int_{\frac{h}{2}}^v \tau_{xy} dy = \frac{A_0}{2} \left( -\frac{v^3}{3} + \frac{1}{4} h^2 v - \frac{1}{12} h^3 \right) - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i v) - \operatorname{Cosh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i2} \left[ \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i v) - \operatorname{Cosh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i v) - \operatorname{Sinh}(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i4} \left[ \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i v) - \operatorname{Sinh}(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\}$$

bzw. für den isotropen Werkstoff:

$$\int_0^v \tau_{xy} dy = \frac{A_0}{2} \left( -\frac{v^3}{3} + \frac{1}{4} h^2 v - \frac{1}{12} h^3 \right) - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\omega_i v) - \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i2} \left[ v \cosh(\omega_i v) - \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i3} \left[ \sinh(\omega_i v) - \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] + A_{i4} \left[ v \sinh(\omega_i v) - \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \right\}$$

und

$$\int_0^l \sin(\omega_i x) dx = - \cos(\omega_i l) + 1$$

erhält man

$$\frac{A_0}{2} \left( -\frac{v^3}{3} + \frac{1}{4} h^2 v - \frac{1}{12} h^3 \right) - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\lambda_1 \omega_i v) - \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i2} \left[ \cosh(\lambda_2 \omega_i v) - \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i3} \left[ \sinh(\lambda_1 \omega_i v) - \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i4} \left[ \sinh(\lambda_2 \omega_i v) - \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] \right\} = 0$$

(5.53/1)

und isotrop:

$$\frac{A_0}{2} \left( -\frac{v^3}{3} + \frac{1}{4} h^2 v - \frac{1}{12} h^3 \right) - \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left\{ A_{i1} \left[ \cosh(\omega_i v) - \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i2} \left[ v \cosh(\omega_i v) - \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i3} \left[ \sinh(\omega_i v) - \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] + A_{i4} \left[ v \sinh(\omega_i v) - \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \cos(\omega_i l) \right] \right\} = 0$$

(5.53/2)

c)  $\Sigma M = 0$

Mit (5.41/3) und (5.43/2) bzw. (5.44/2) ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i \frac{h}{2}) \right] \left( \frac{\sin \omega_i l}{\omega_i} - l \cos(\omega_i l) \right) = 0$$

(5.54/1)

und isotrop:

$$\sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i} \left[ A_{i1} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i2} \frac{h}{2} \cosh(\omega_i \frac{h}{2}) \right. \\ \left. + A_{i3} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) + A_{i4} \frac{h}{2} \sinh(\omega_i \frac{h}{2}) \right] \left( \frac{\sin(\omega_i l)}{\omega_i} - l \cos(\omega_i l) \right) = 0$$

5.4.2.4. Die Erfüllung der Randbedingungen am oberen Rand (5.54/1)

Diese Randbedingungen werden nach Abschnitt 5.2.2.4. erfüllt. Die Ausdrücke  $E_i$  und  $F_i$  können anhand der Gleichungen (5.45/2) und (5.45/3) bzw. (5.46/2) und (5.46/3) angeschrieben werden:

$$E_o = y_o x \sin^2 \gamma - (\frac{y_o^2}{2} - \frac{h^2}{8}) \sin 2\gamma$$

$$F_{i1} = \cosh(\lambda_1 \omega_i y_o) (\lambda_1^2 \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \sin(\omega_i x) - \sinh(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \sin 2\gamma \cos(\omega_i x)$$

$$F_{i2} = \dots \dots \dots$$

$$F_o = y_o x \sin 2\gamma - (\frac{y_o^2}{4} - \frac{h^2}{4}) \cos 2\gamma$$

$$F_{i1} = \cosh(\lambda_1 \omega_i y_o) (\frac{\lambda_1^2 + 1}{2}) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \sinh(\lambda_1 \omega_i y_o) \lambda_1 \cos 2\gamma \cos(\omega_i x)$$

$$F_{i2} = \dots \dots \dots$$

Ebenso können die Ausdrücke für den isotropen Werkstoff angeschrieben werden.  $E_o$  und  $F_o$  sind identisch mit den oberen Ausdrücken.

$$E_{i1} = - \cosh(\omega_i y_o) \cos 2\gamma \sin(\omega_i x) + \sinh(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x)$$

und:

$$F_{i1} = \cosh(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \sin(\omega_i x) - \sinh(\omega_i y_o) \sin 2\gamma \cos(\omega_i x)$$

#### 5.4.2.5. Zusätzliche Randbedingungen am Firstpunkt

Bei diesem Grundlastfall mit einer reinen Querkraft im Firstquerschnitt erübrigert sich die Formulierung der zwei zusätzlichen Randbedingungen, welche verlangen, dass die Spannungskomponenten  $\sigma_{yF}$  senkrecht und  $\sigma_{xF}$  parallel zum Rand im Firstpunkt verschwinden.

#### 5.4.2.6. Die Auflösung des Gleichungssystems

Es wird ein Gleichungssystem nach Abschnitt 5.2.2.6. aufgestellt und nach den Festwerten  $A_{01}, A_{11} \dots$  aufgelöst.

#### 5.4.2.7. Die Bestimmung der Spannungswerte

Man errechnet die einzelnen Spannungen gemäss Abschnitt 5.2.2.7.

### 5.5. Rechnerische Auswertung der Spannungen

Ausgewertet wurden die drei Grundlastfälle aus den Abschnitten 5.2., 5.3. und 5.4.. Die rechte Scheibenhälfte wurde in x - Richtung 6 mal geschnitten und die Spannungen in den Zehntelpunkten jedes Schnittes errechnet. Die Extremwerte wurden analog Abschnitt 3.6. bestimmt. Die Berechnung erfolgte mit verschiedenen Anisotropieverhältnissen und Winkeln  $\gamma$  ( $\gamma$  = Neigungswinkel des oberen Randes). Um die Genauigkeit abschätzen zu können, wurde analog Abschnitt 4.5. die Grösse  $j$  variiert. Die Zusammenstellung der für die Praxis wichtigsten Resultate sind auf den Tafeln 11 - 21 zu finden. Der Belastungsfall Normalkraft musste, um im Firstquerschnitt anschaulich zu sein, umgerechnet werden auf zentrische Normalkraft in diesem Querschnitt.

## 6. Darstellungen errechneter Spannungsverteilungen

### 6.1. Spannungsberechnungen an der polarorthotropen Kreisbogen-scheibe

#### 6.1.1. Reine Momentenbelastung

(Tafeln 1 - 4)

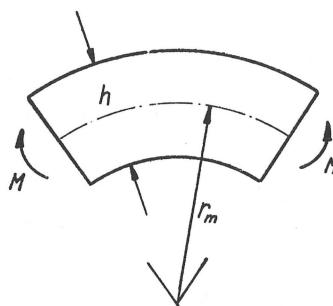
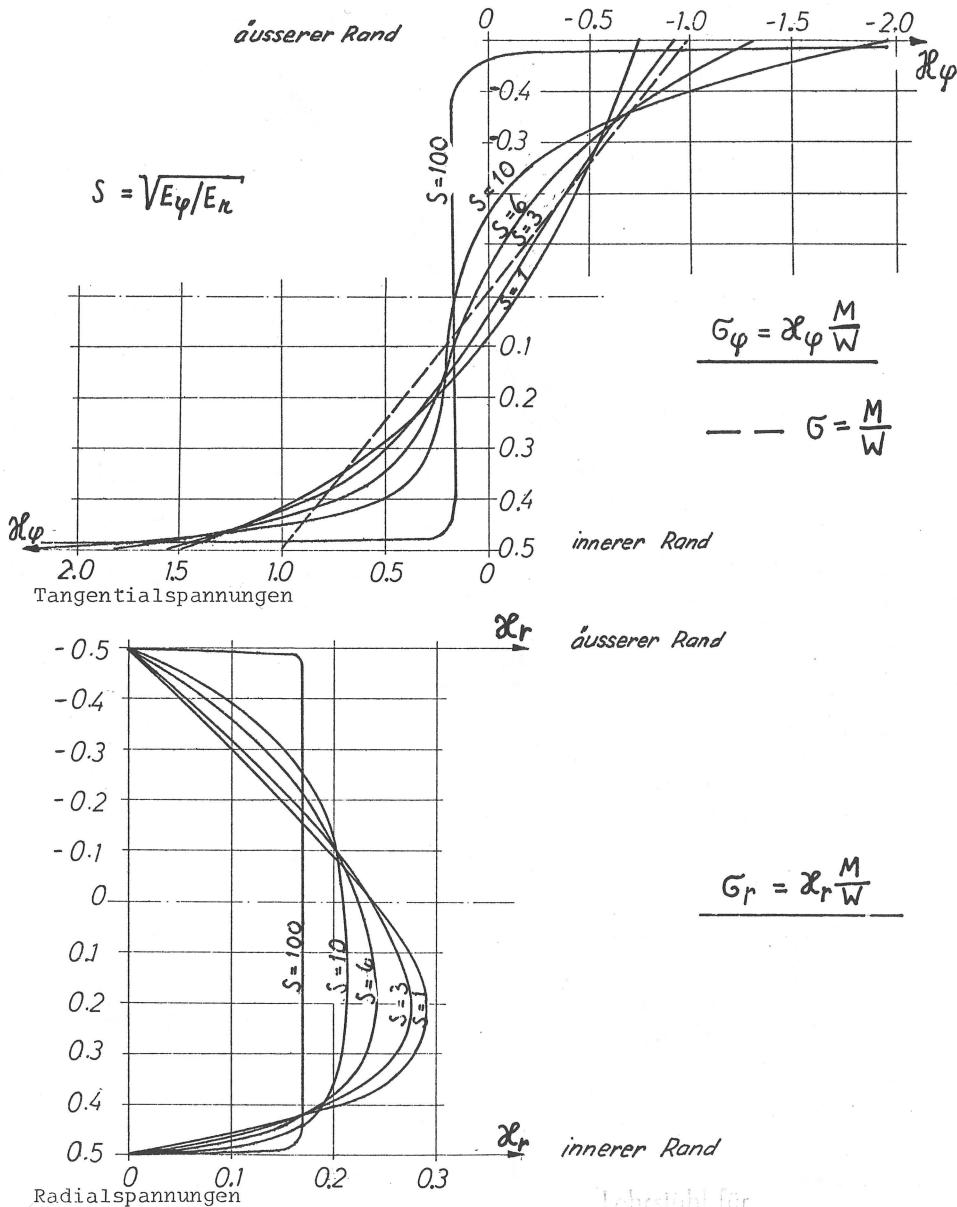


Bild 6.1.

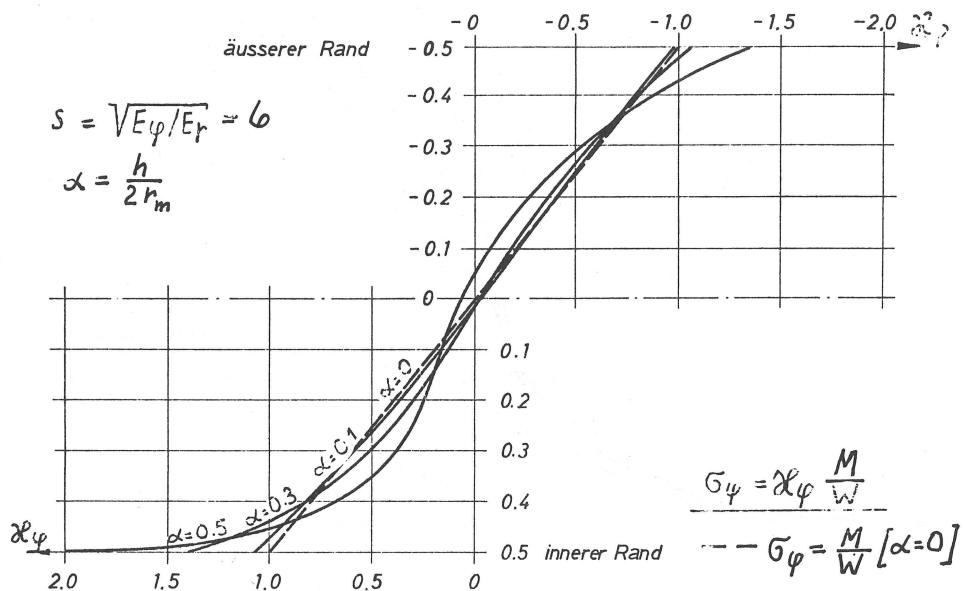
Tafel 1

EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTEM VERHAELTNIS  $h/2r_m = 0.5$

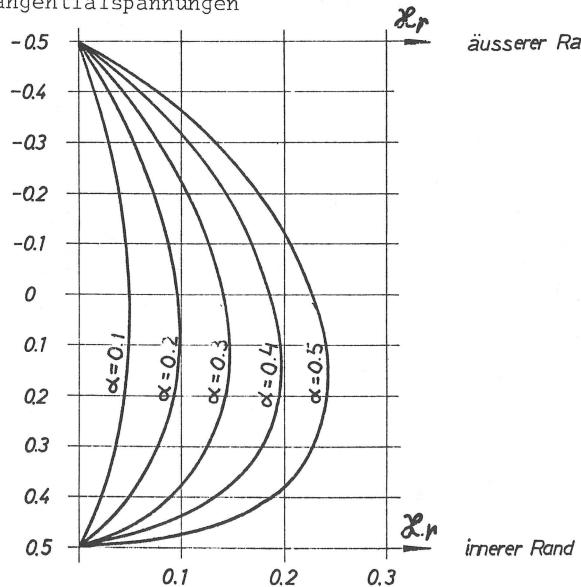


Tafel 2

EINFLUSS DES KRUEMMUNGSVERHAELTNISSES  $h/2r_m$  BEI FESTER ANISOTROPIE



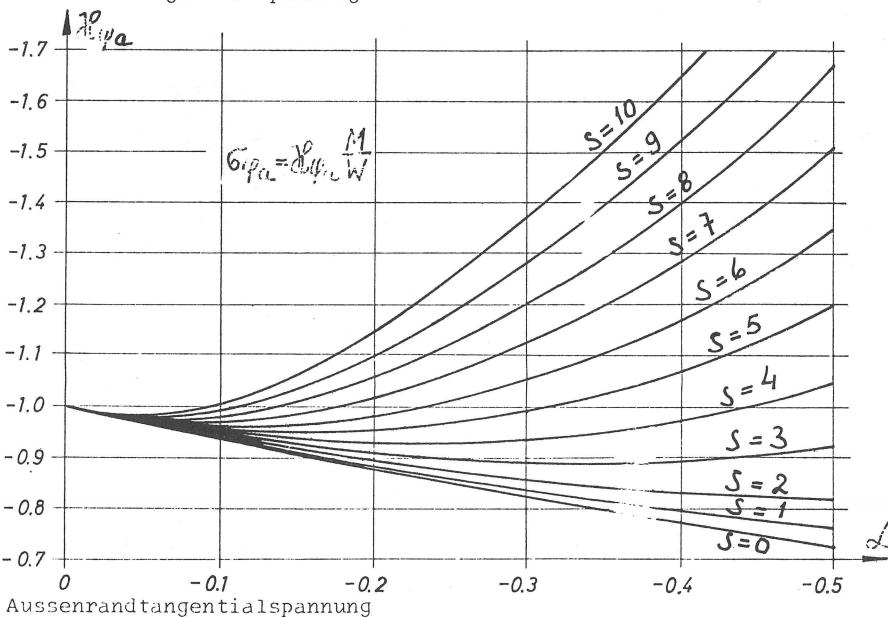
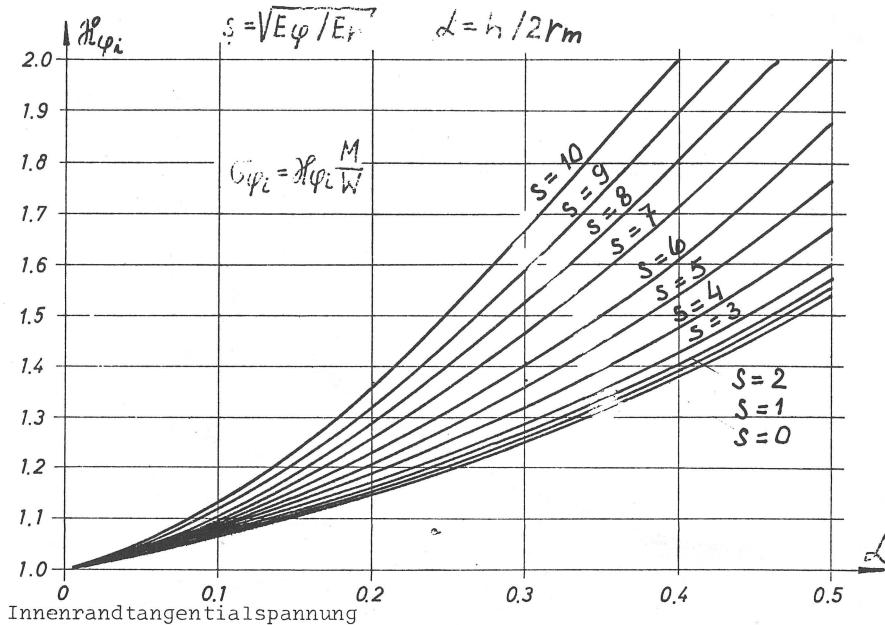
Tangentialspannungen



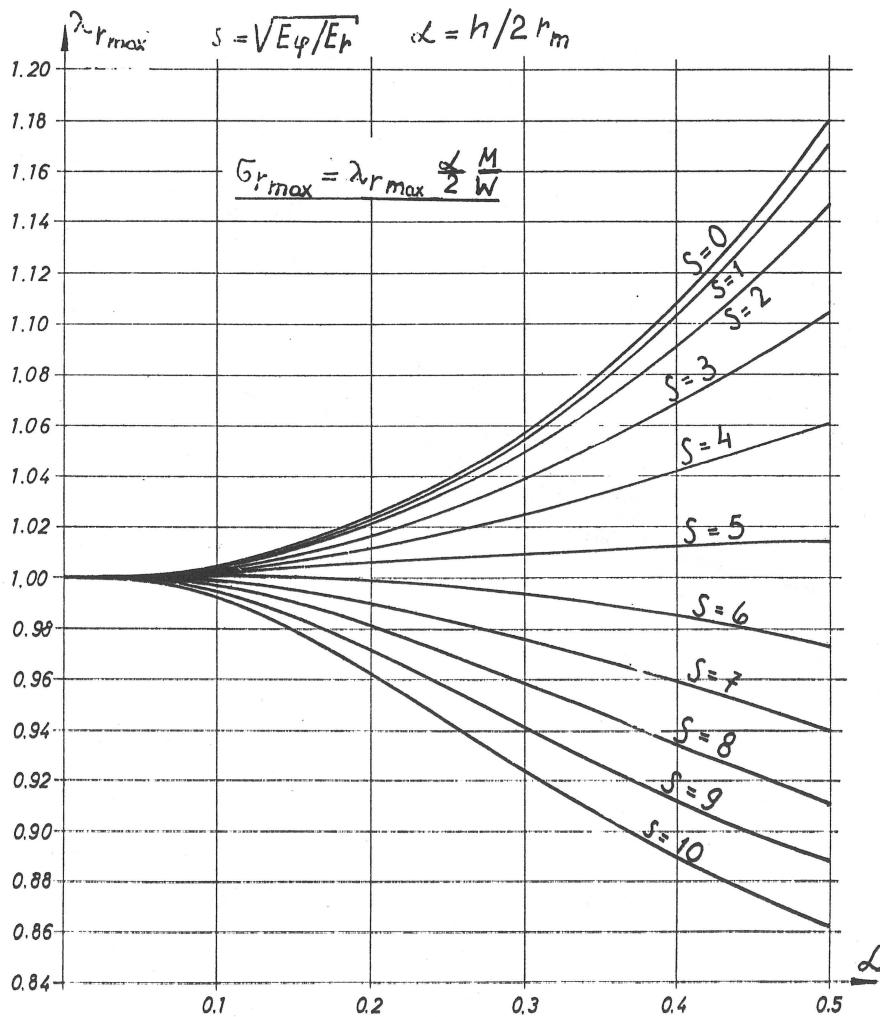
$$\partial_r = \partial_r \frac{M}{W}$$

Tafel 3

ABHAENGIGKEIT DER INNEN- UND AUSENRANDTANGENTIALSPANNUNG VON DER ANISOTROPIEZahl S UND VOM KRUEMMUNGSVERHAELTNIS  $\lambda = h/2r_m$



ABHÄNGIGKEIT DER MAXIMALEN RADIALSPANNUNG VON DER ANISOTROPIE  
UND DEM KRÜMMUNGSVERHÄLTNIS  $\alpha = h/2r_m$



Maximale Radialspannungen

6.1.2. Reine Normalkraftbelastung im Schnitt A - A

(Tafeln 5 - 8)

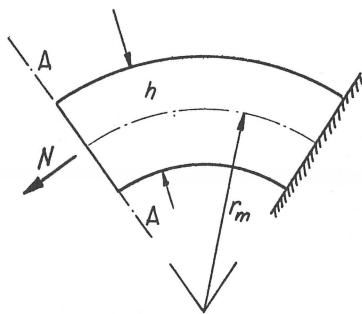
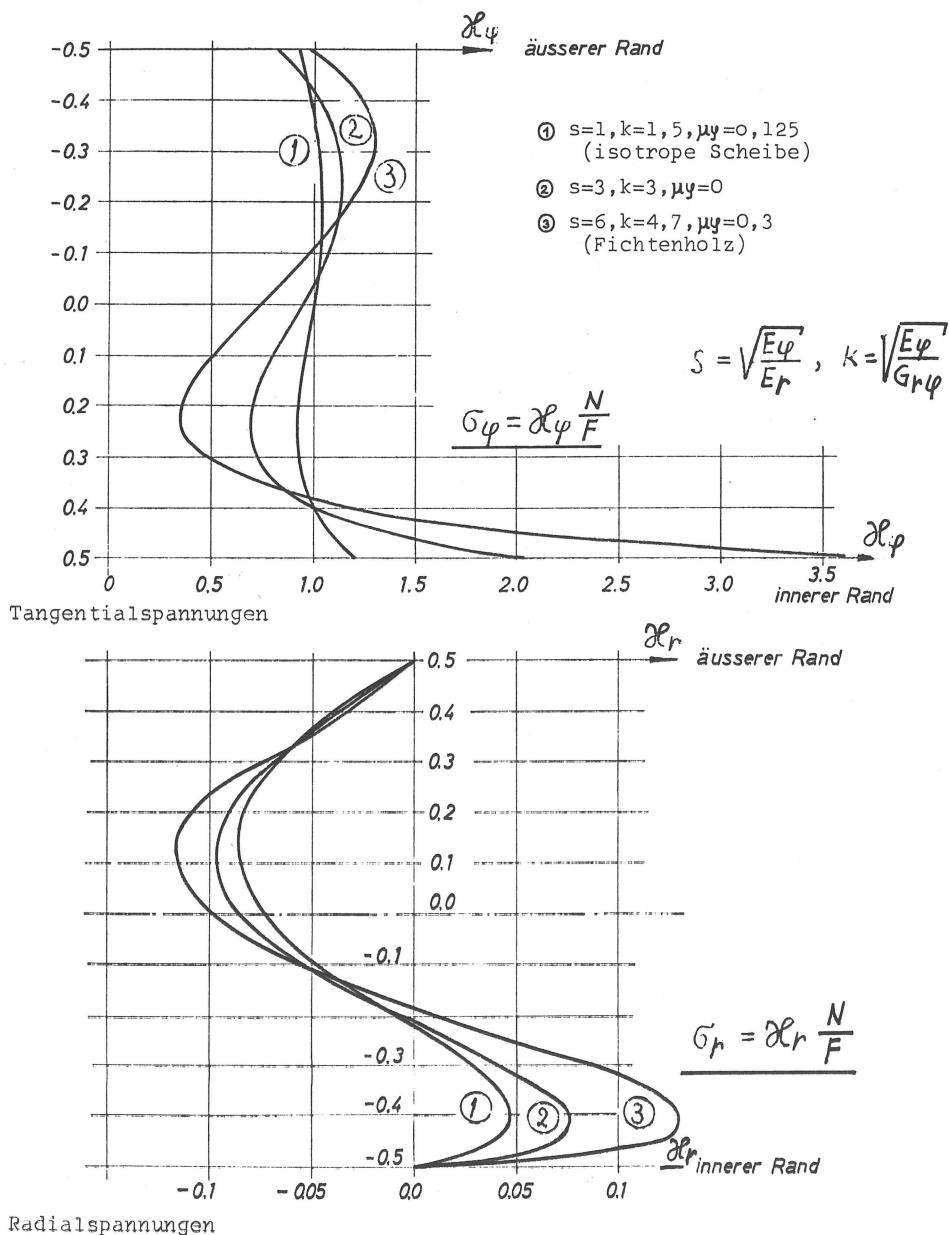
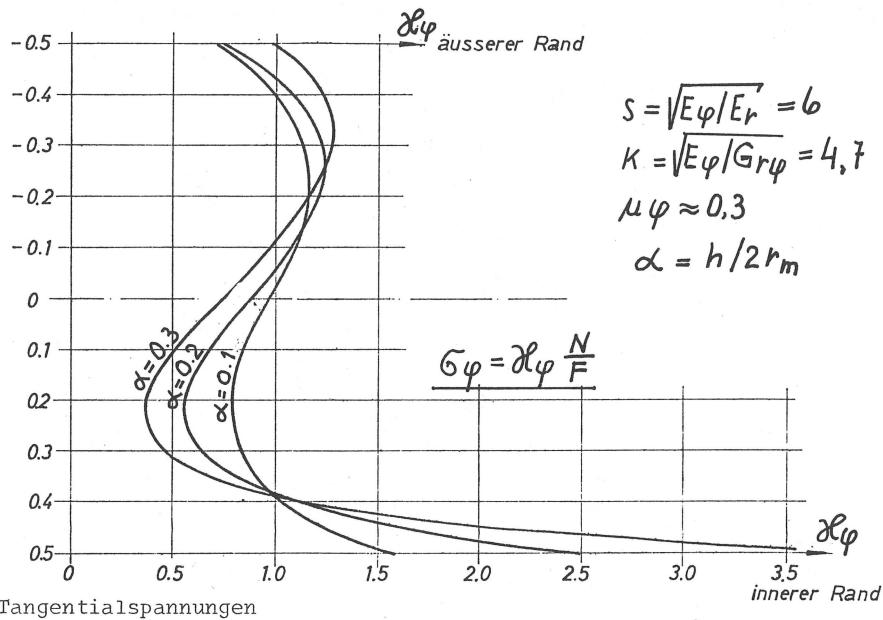


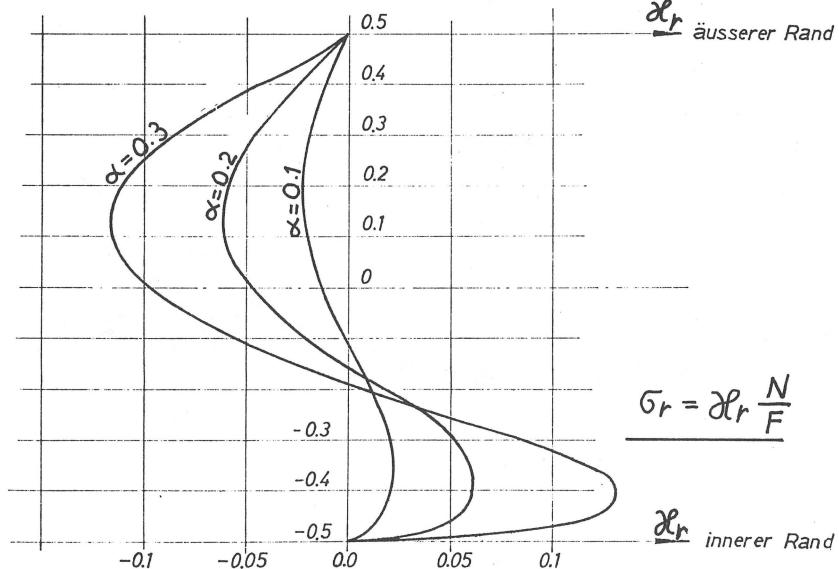
Bild 6.2.

EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTEM KRÜMMUNGSVERHÄLTNIS  $h/2r_m = 0,3$



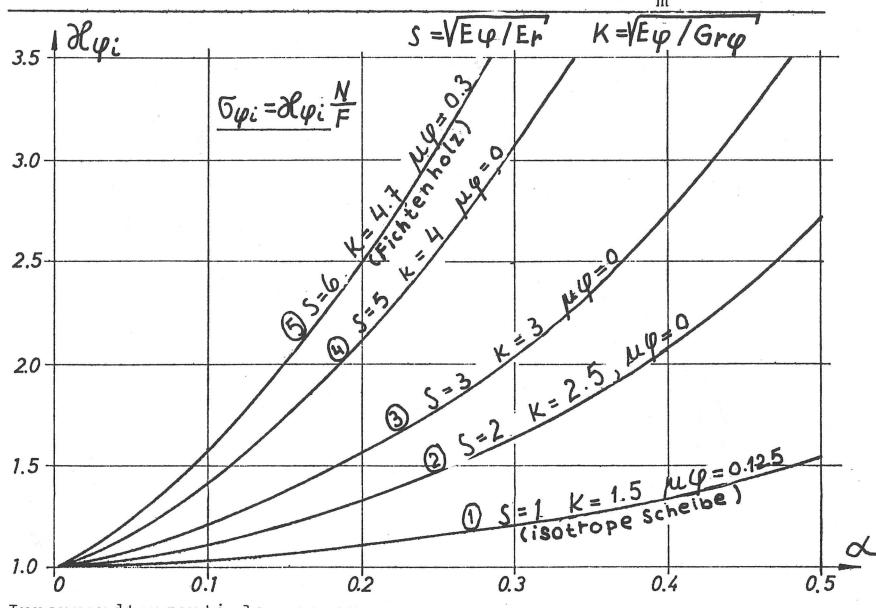
EINFLUSS DES KRUEMMUNGSVERHAELTNISSES  $h/2r_m$  BEI FESTER ANISOTROPIE

Tangentialspannungen

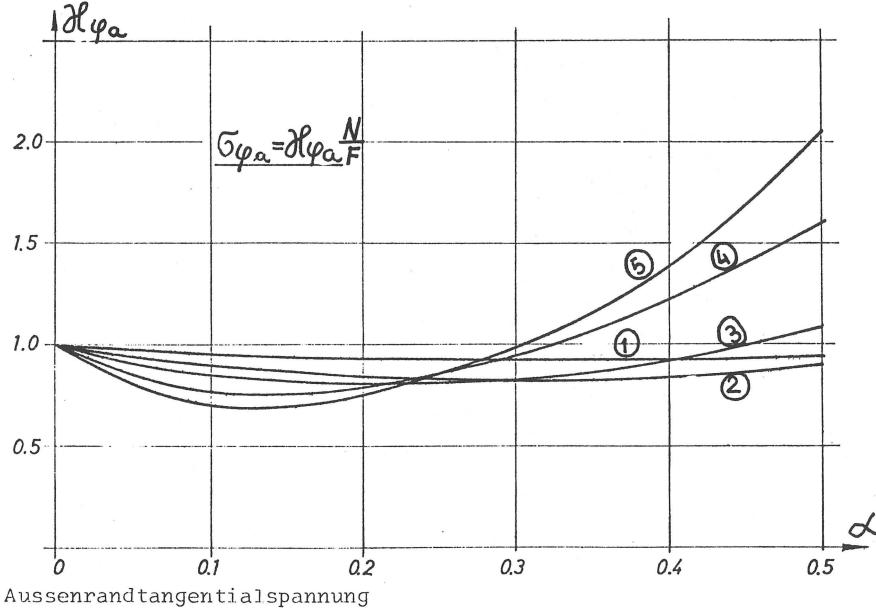


Radialspannungen

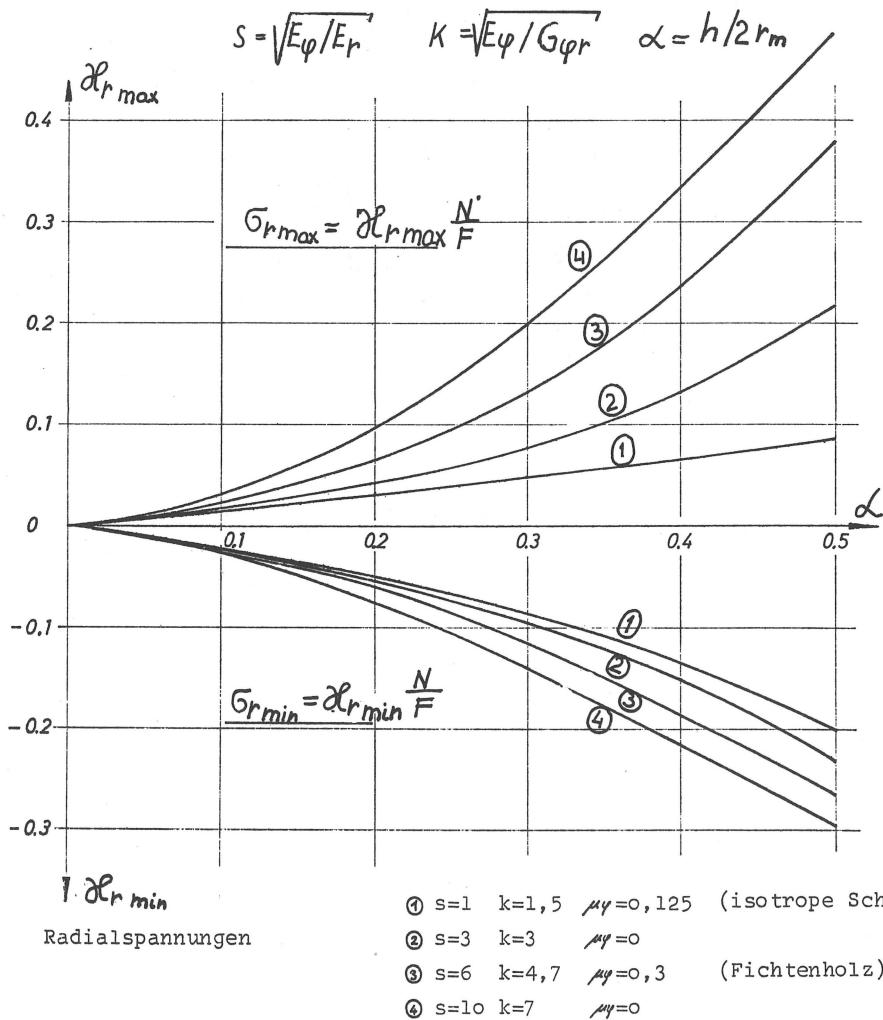
ABHÄNGIGKEIT DER INNEN- UND AUSENRANDTANGENTIALSPANNUNGEN VON  
DER ANISOTROPIE UND DEM KRÜMMUNGSVERHÄLTNIS  $h/2r_m$



Innenrandtangentialspannung



Aussenrandtangentialspannung

ABHAENGIGKEIT DER MINIMALEN UND MAXIMALEN RADIALSPANNUNGEN VON DER ANISOTROPIE UND DEM KRUEMMUNGSVERHAELTNIS  $h/2r_m$ 

6.1.3. Reine Querkraftbelastung im Schnitt A - A

(Tafeln 9, 10)

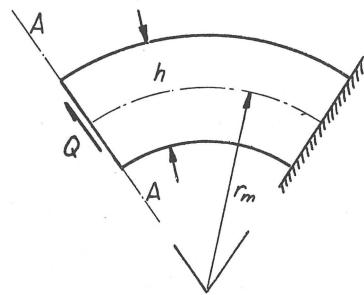
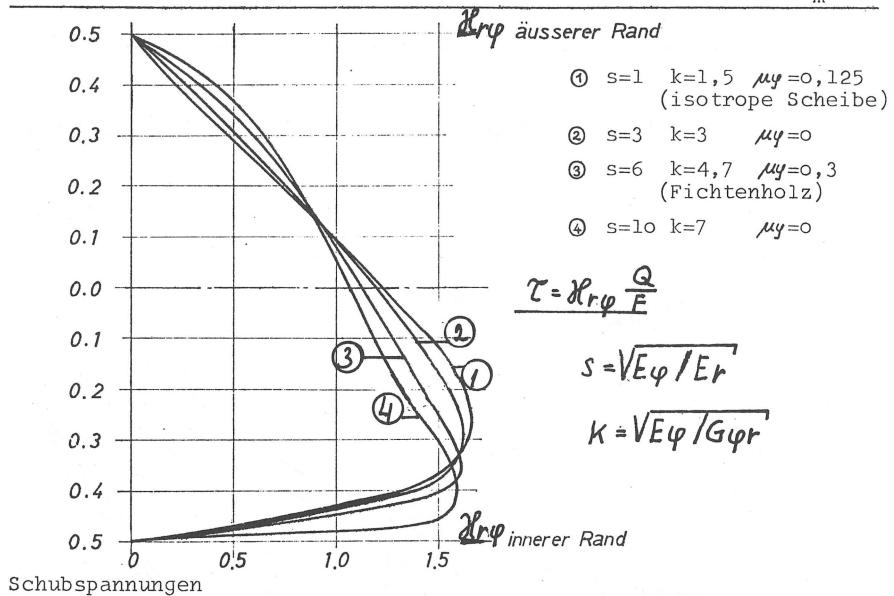
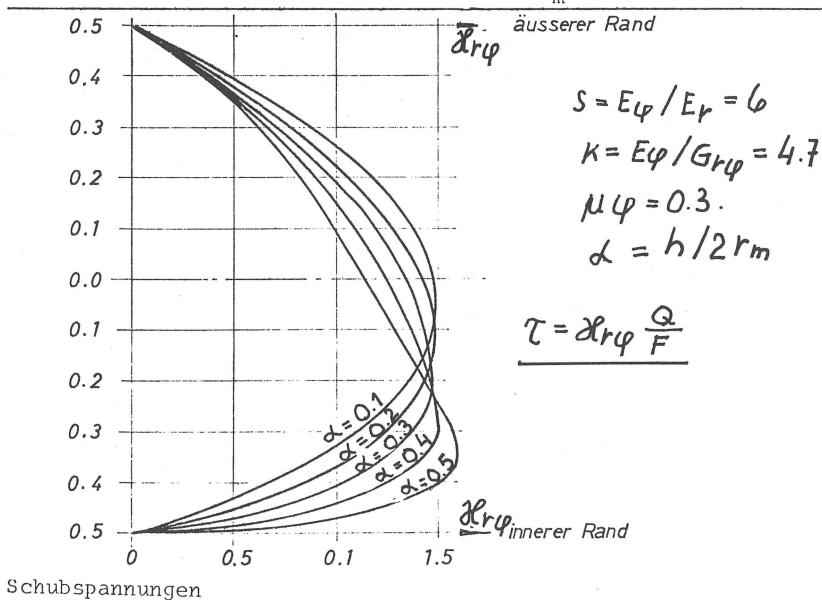
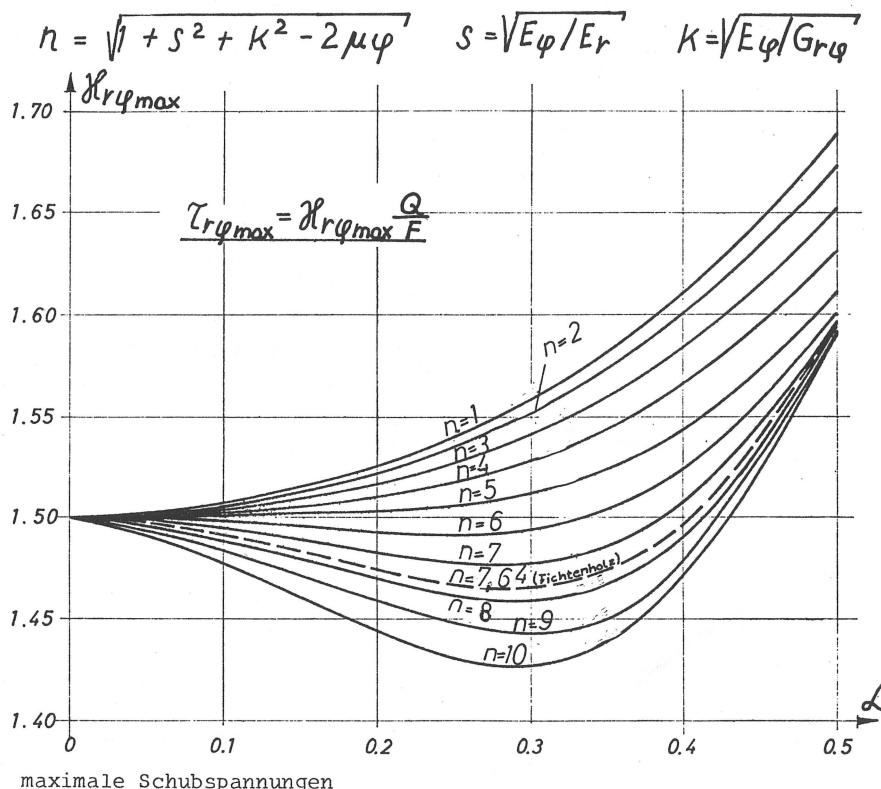


Bild 6.3.

EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTEM KRUEMMUNGSVERHAELTNIS  $h/2r_m = 0,5$ EINFLUSS DES KRUEMMUNGSVERHAELTNISSES  $h/2r_m$  bei FESTER ANISOTROPIE

ABHÄNGIGKEIT DER MAXIMALEN SCHUBSPANNUNG VON DER ANISOTROPIEZahl  $n$   
UND DEM KRÜMMUNGSVERHÄLTNIS  $h/2r_m$



$n = 1 \quad E_r = G_{r\varphi} = \infty \quad \mu_\varphi = 0$  Theorie des gekrümmten Stabes

$n = 2 \quad$  isotrope Scheibe

$n = 7,64$  Fichtenholz

6.2. Spannungsberechnungen an der axialsymmetrischen orthotropen Scheibe mit geradem unterem und geneigtem oberen Rand

6.2.1. Reine Momentenbelastung

(Tafeln 11 - 15)

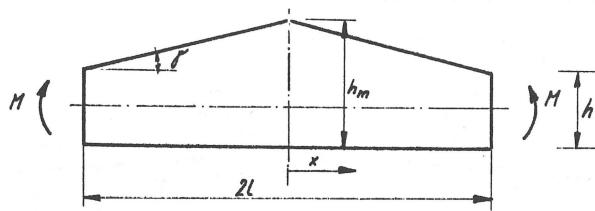
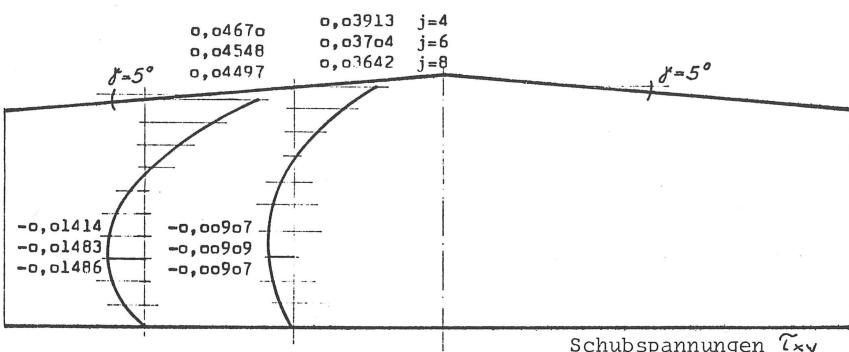
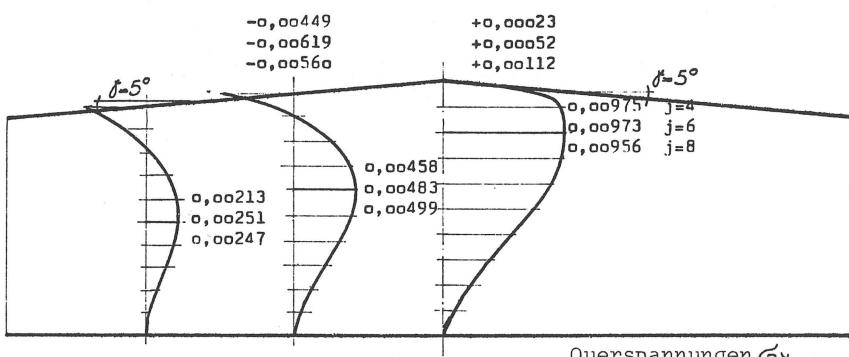
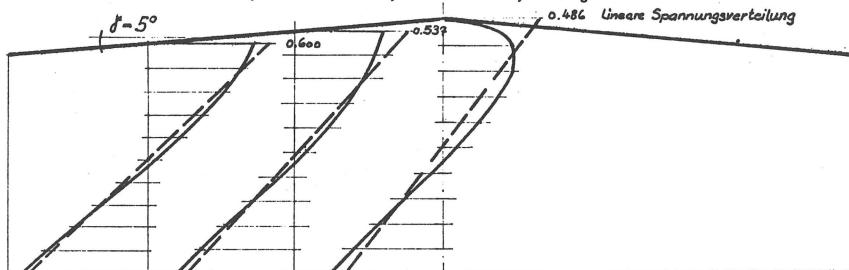


Bild 6.4.

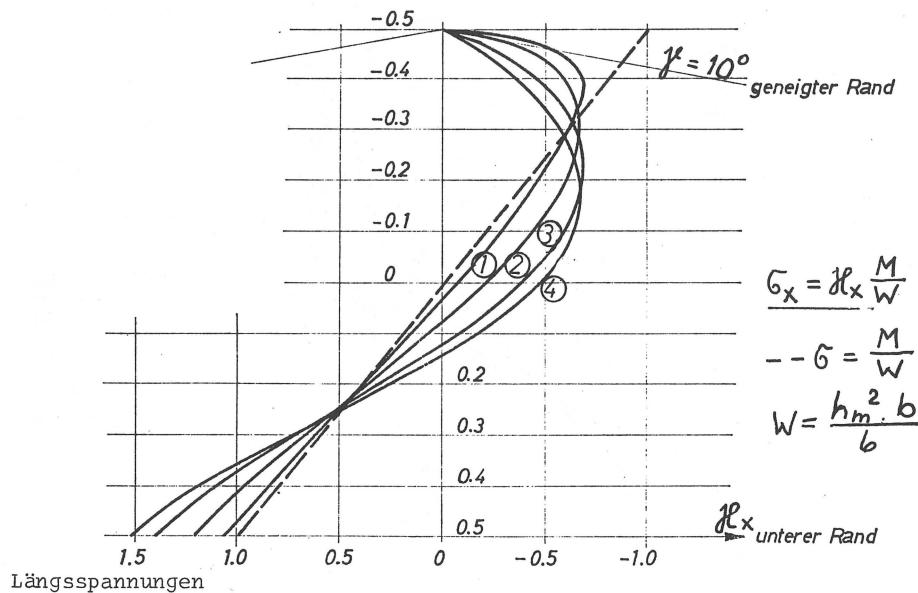
## KONVERGENZ DER SPANNUNGSBERECHNUNGEN MIT WACHSENDEN j

-o, 5484	-o, 4138	-o, 1633 j=4
-o, 5142	-o, 4371	-o, 1264 j=6
-o, 5263	-o, 4311	-o, 1016 j=8



$$S = \sqrt{E_x / E_y} = 6 \quad K = \sqrt{E_x / G_{xy}} = 4,7 \quad \mu_x = 0.30 \text{ (Fichtenholz)}$$

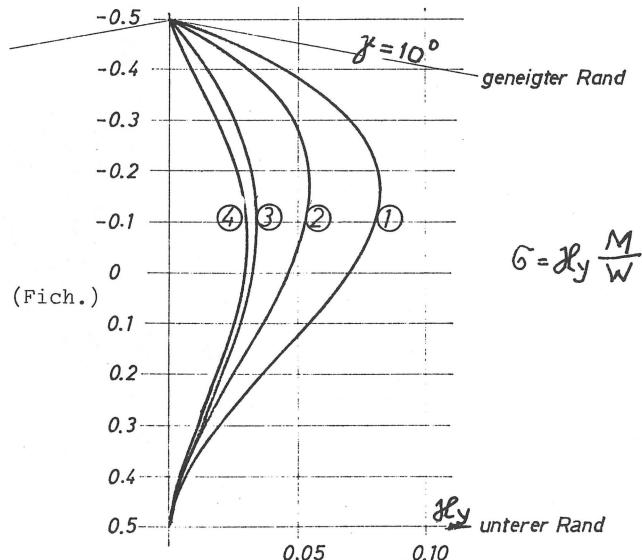
EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTER NEIGUNG DES OBEREN RANDES  
AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT



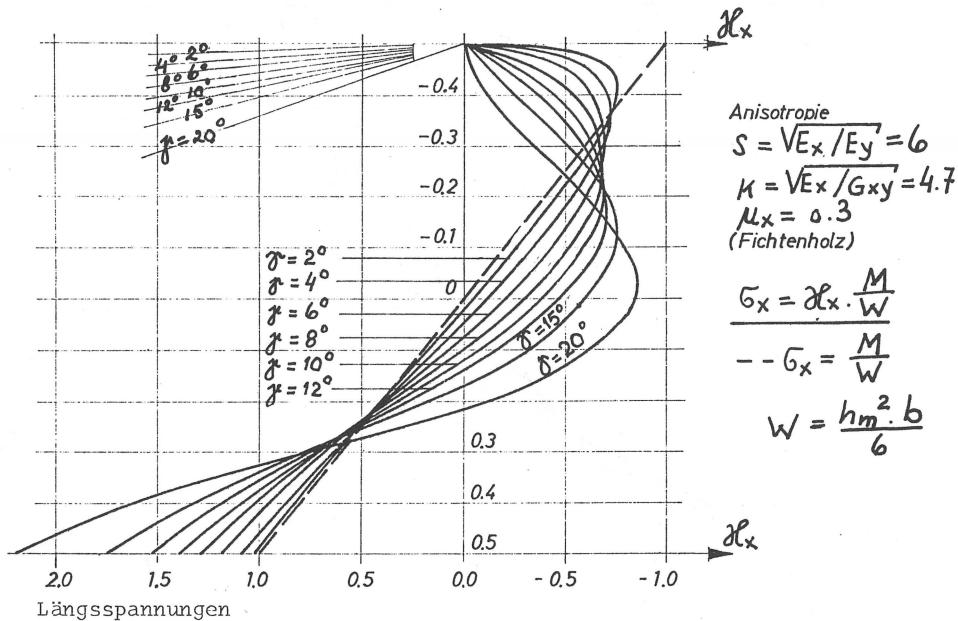
Längsspannungen

- ① isotrop
- ②  $s=3, k=3, \mu_x=0, 2$
- ③  $s=6, k=4, 7, \mu_x=0, 3$  (Fich.)
- ④  $s=1, 5, k=6, \mu_x=0, 2$

Querspannungen

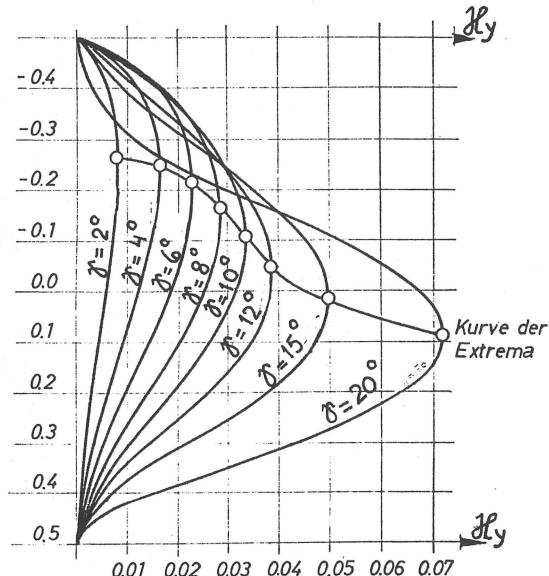


## EINFLUSS DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES BEI FESTER ANISOTROPIE AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT

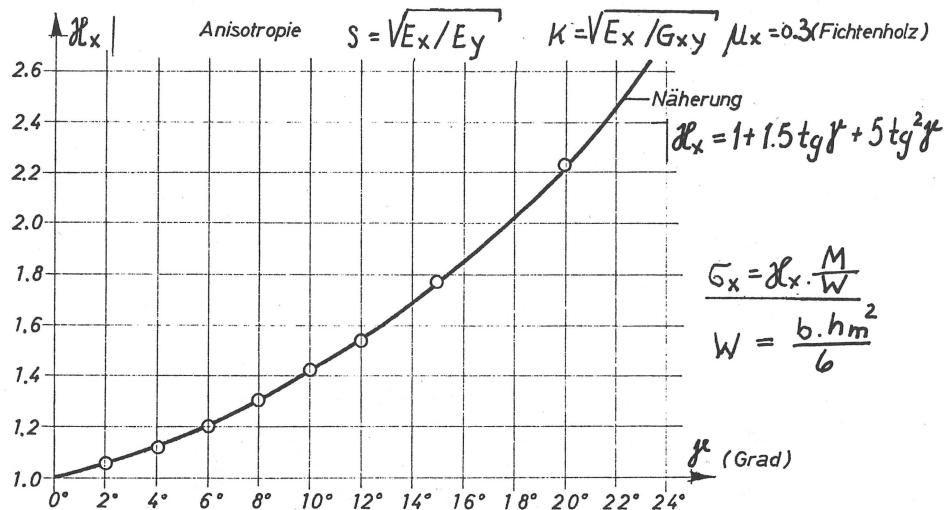


Anisotropie  
 $s=6$     $k=4,7$     $\mu_x = 0,3$   
 (Fichtenholz)

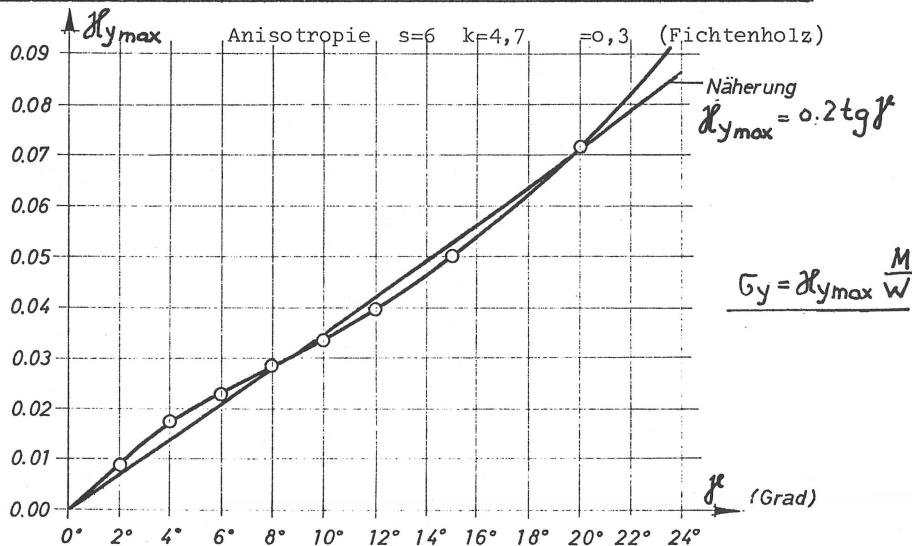
$$G_y = \partial_y \frac{M}{W}$$



LAENGSSPANNUNG AM UNTEREN RAND IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES

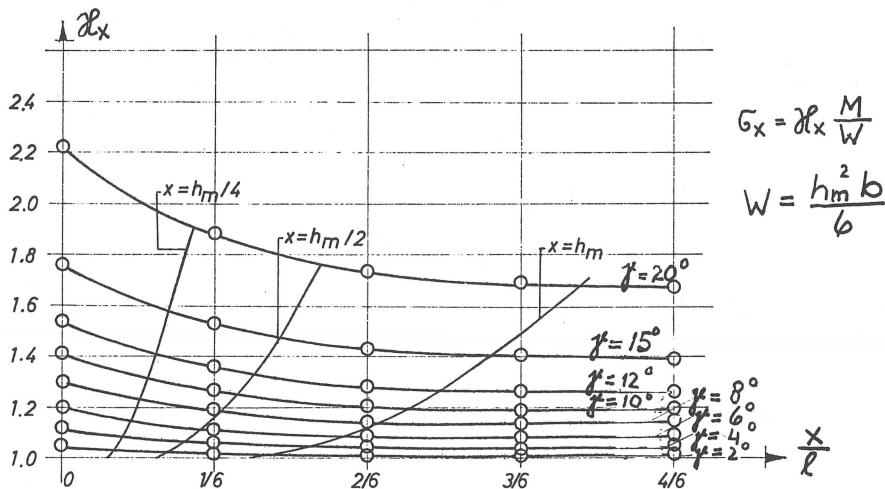


EXTREMALE QUERSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES



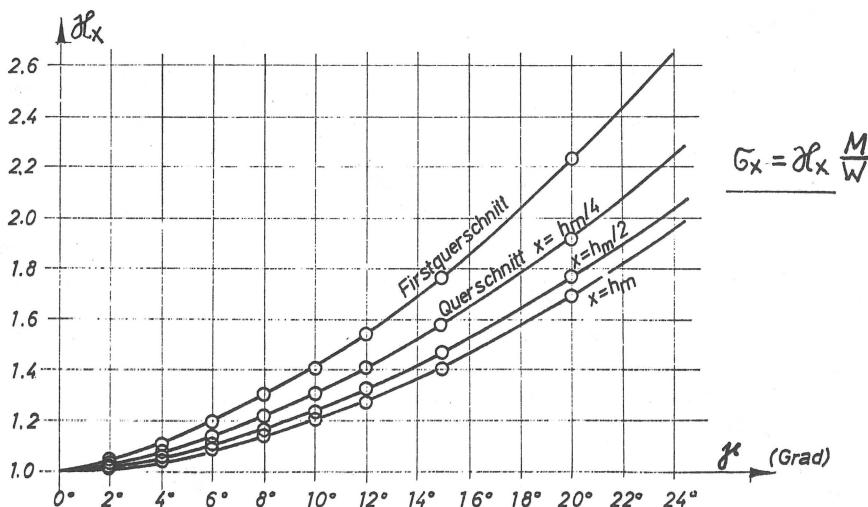
Tafel 15

EINFLUSS DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES AUF DIE RANDSPANNUNG AM UNTEREN RAND IN VERSCHIEDENEN QUERSCHNITTEN



Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $\mu_x=0,3$  (Fichtenholz)

$h_m$  = Querschnittshöhe im Firstquerschnitt



6.2.2. Zentrische Normalkraftbelastung im Firstquerschnitt

(Tafeln 16 - 19)

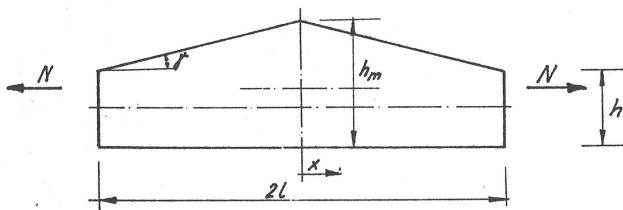
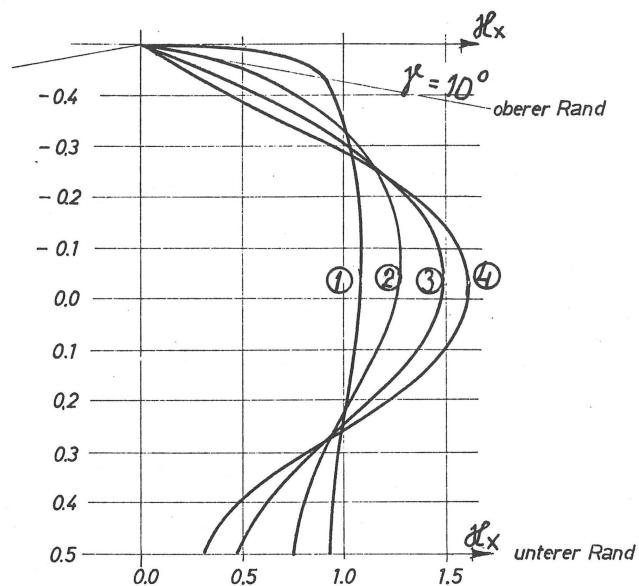


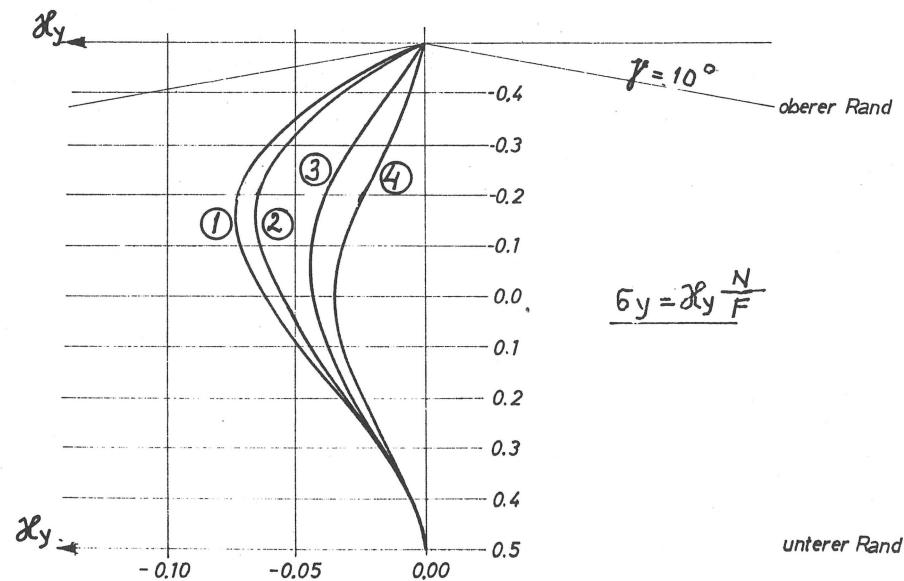
Bild 6.5.

EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTER NEIGUNG DES OBEREN RANDES  
AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT

- ① isotrop
- ②  $s=3, k=3, \mu_x = 0, 2$
- ③  $s=6, k=4, 7, \mu_x = 0, 3$
- ④  $s=1, 5, k=6, \mu_x = 0, 2$

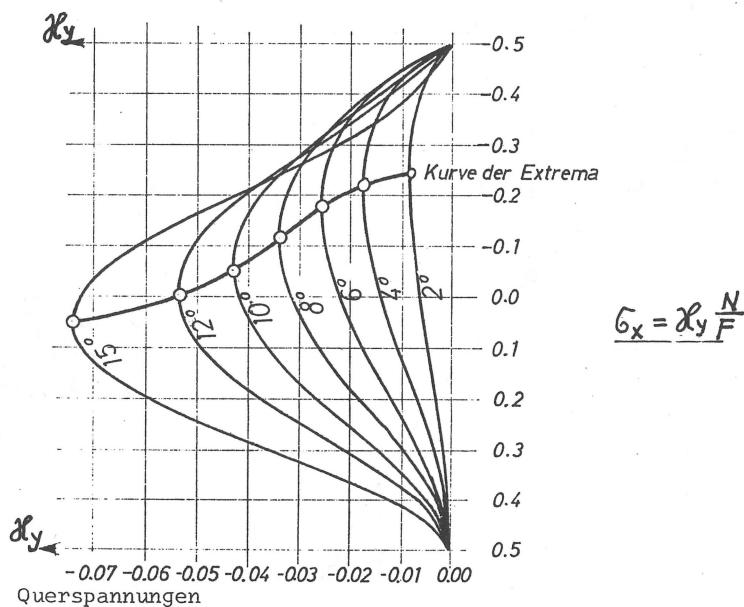
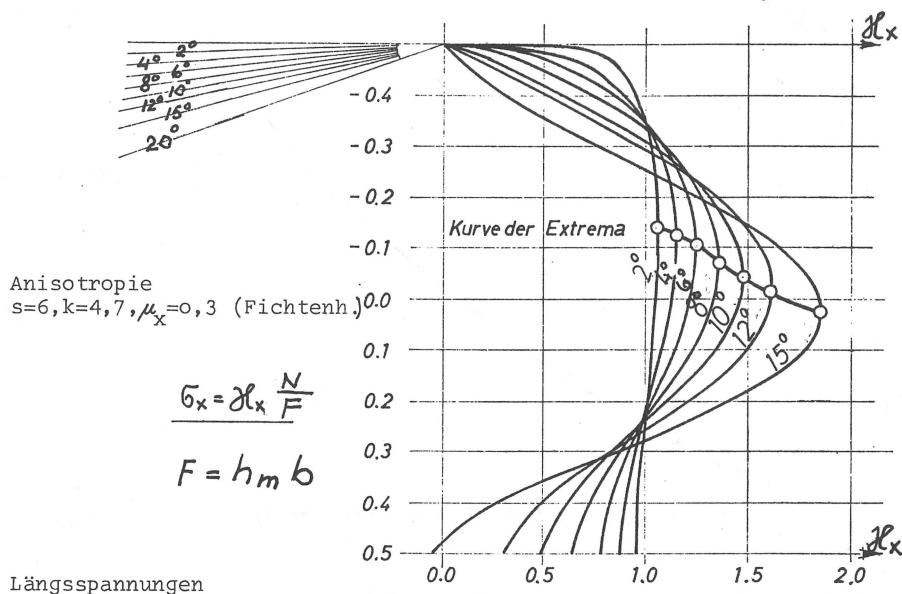


Längsspannungen

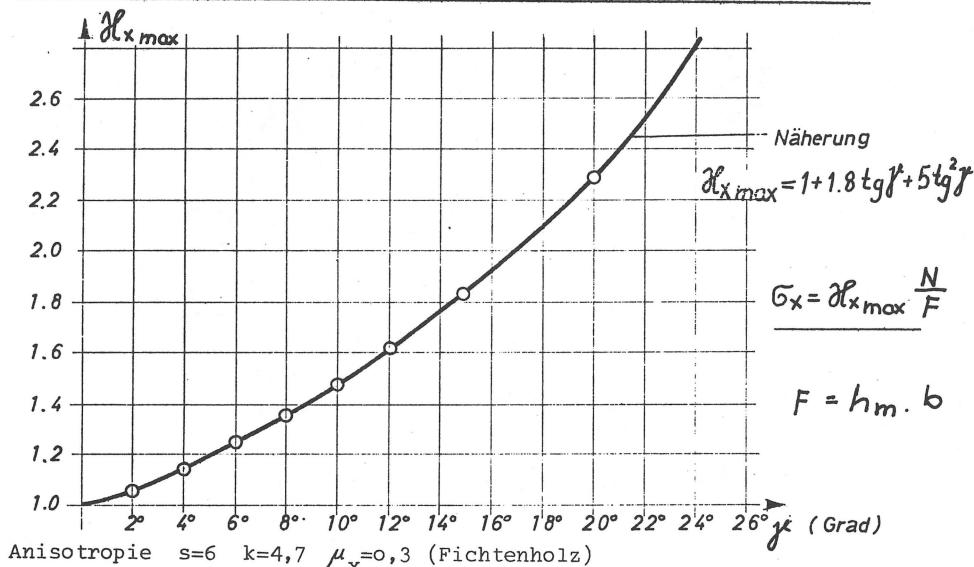


Querspannungen

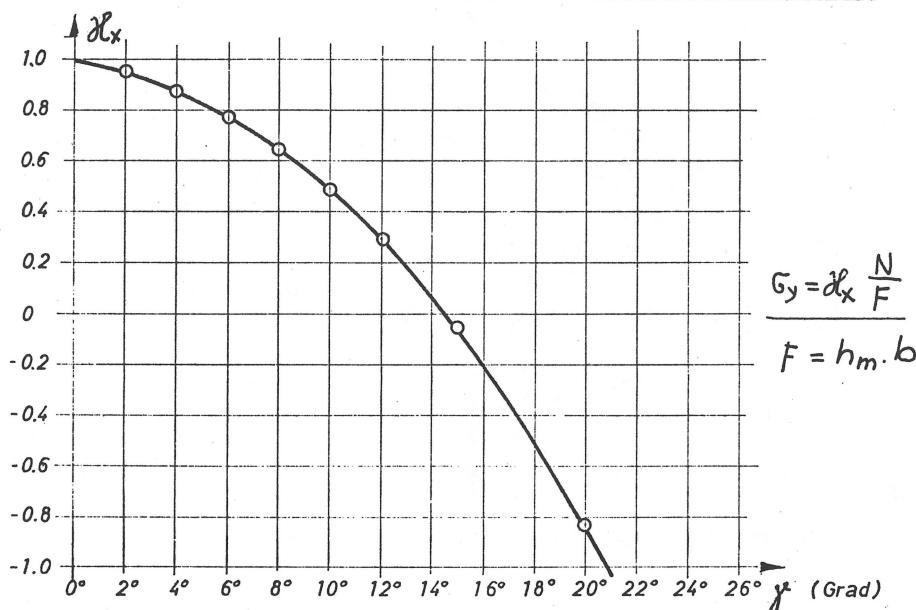
EINFLUSS DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES BEI FESTER ANISOTROPIE  
AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT



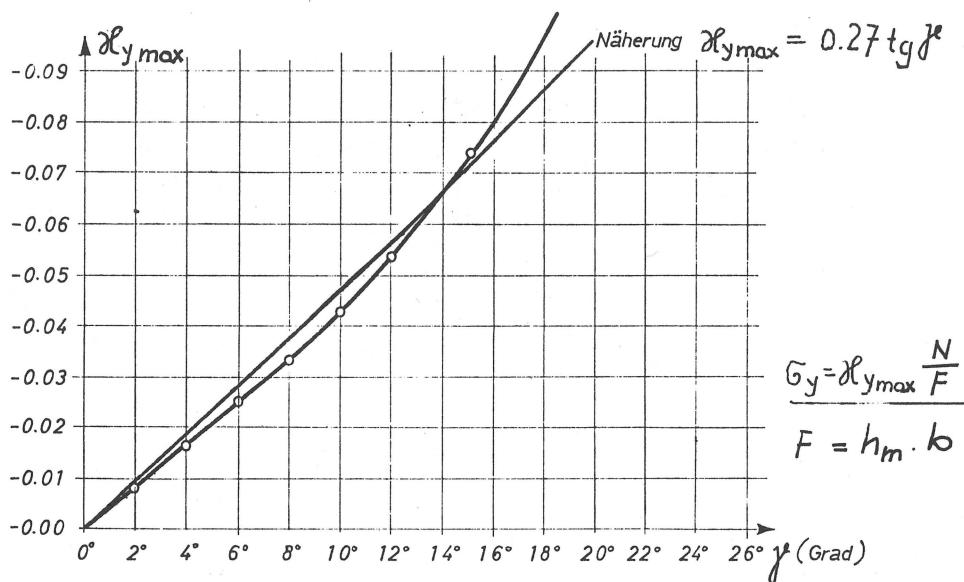
## EXTREMALE LAENGSSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES



## LAENGSSPANNUNG AM UNTEREN RAND IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES



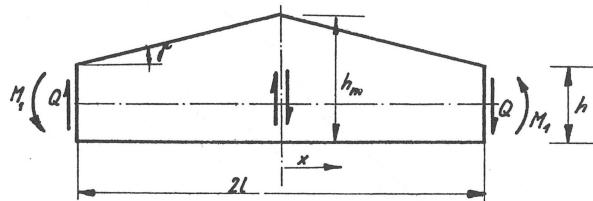
EXTREMALE QUERSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER  
NEIGUNG DES OBEREN RANDES



Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $\mu_x=0,3$  (Fichtenholz)

6.2.3. Reine Querkraftbelastung im Firstquerschnitt

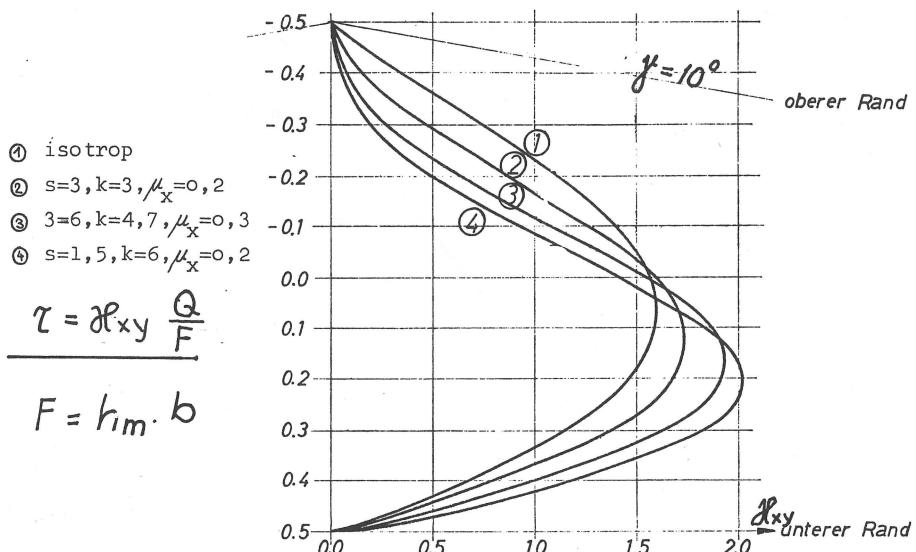
(Tafeln 20, 21)



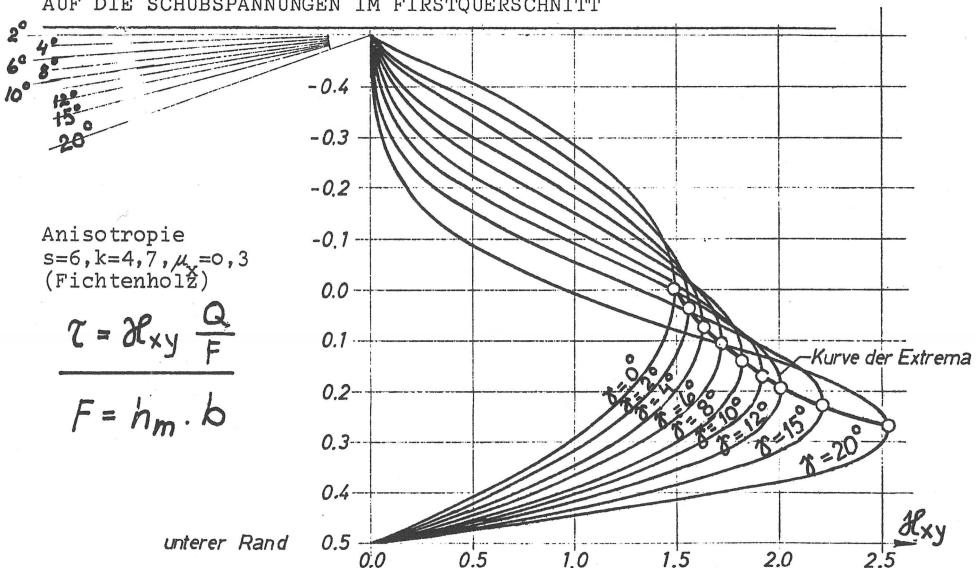
$$M_1 = -Q \cdot l$$

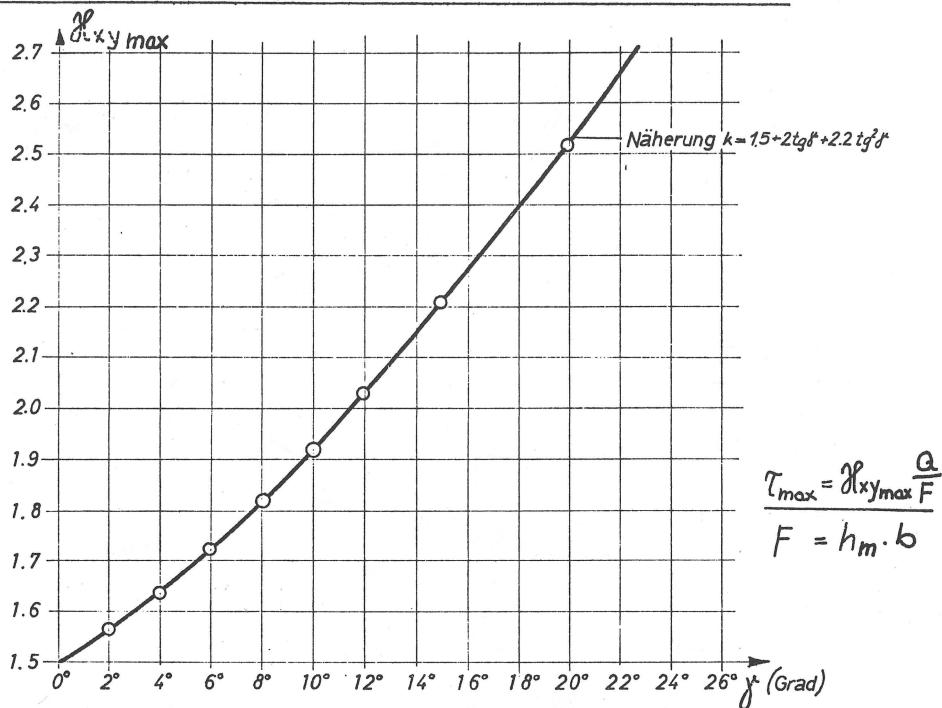
Bild 6.6.

EINFLUSS DER ANISOTROPIE BEI FESTER NEIGUNG DES OBEREN RANDES  
AUF DIE SCHUBSPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT



EINFLUSS DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES BEI FESTER ANISOTROPIE  
AUF DIE SCHUBSPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT



EXTREMALE SCHUEBSPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT  
DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES

Anisotropie  $s=6$      $k=4,7$      $\mu_x=0,3$     (Fichtenholz)

6.3. Spannungsberechnungen an der axialsymmetrischen polarorthotropen Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand

6.3.1. Reine Momentenbelastung

(Tafeln 22 - 26)

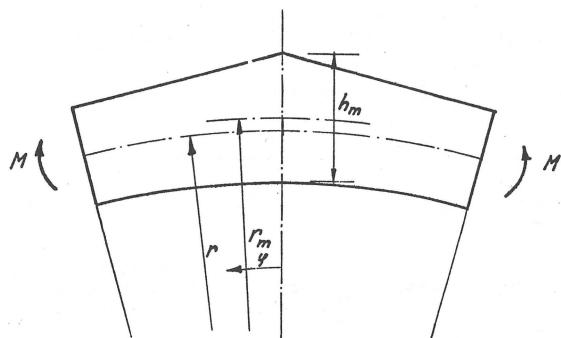
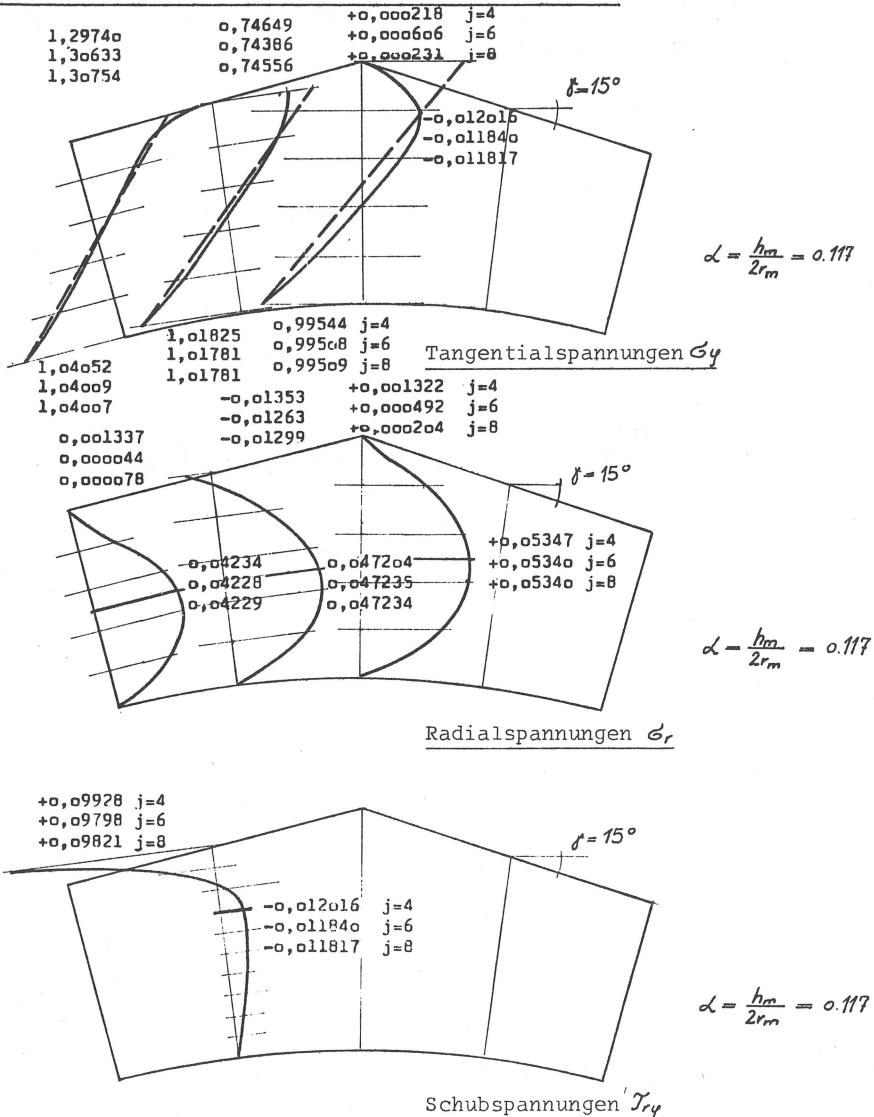


Bild 6.7.

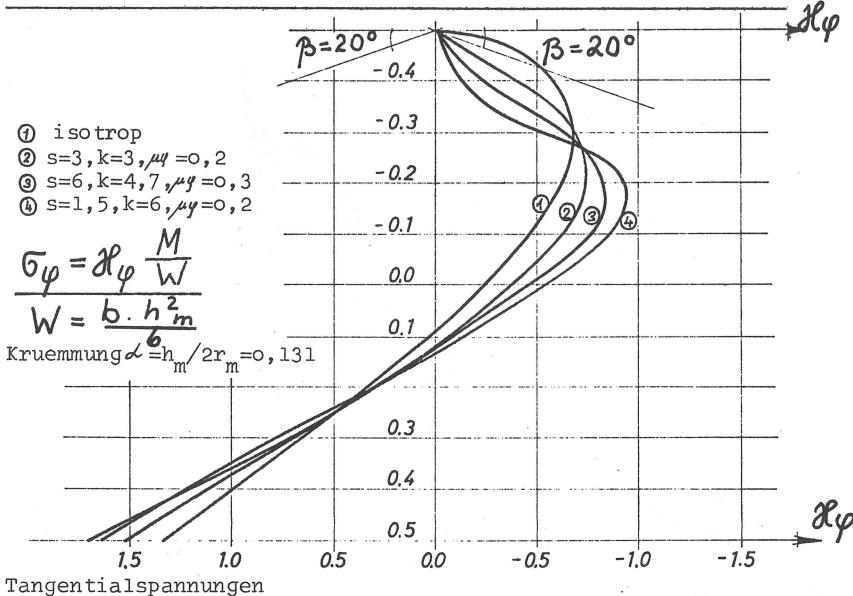
Tafel 22

KONVERGENZ DER SPANNUNGSBERECHNUNGEN MIT WACHSENDENM j



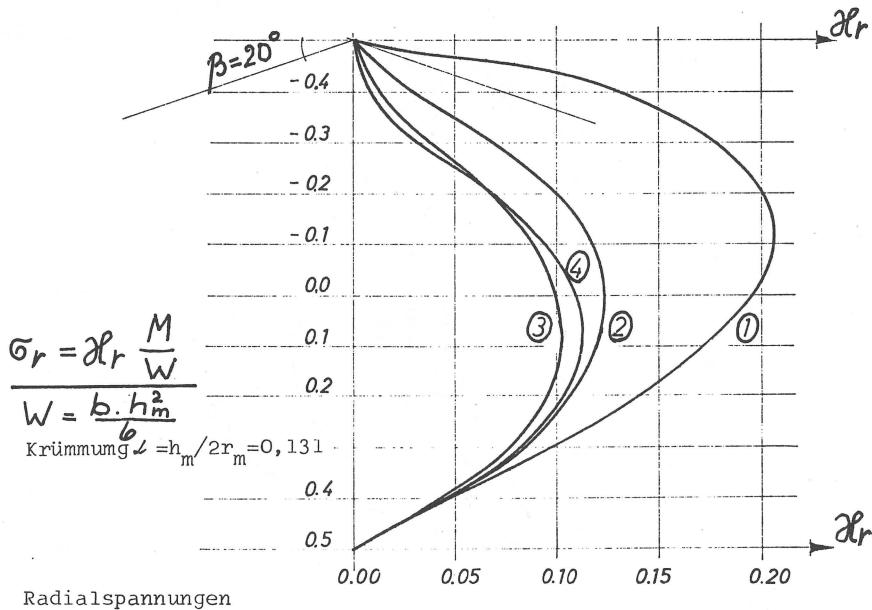
$$\text{Anisotropie } s = \sqrt{E_y/E_r} = 6 \quad k = \sqrt{E_y/G_{ry}} = 4.7 \quad \mu_y = 0.30 \text{ (Fichtenholz)}$$

EINFLUSS DER ANISOTROPIE AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT  
BEI FESTER NEIGUNG DES OBEREN RANDES UND FESTER KRÜMMUNG DES  
UNTEREN RANDES



$$\text{Kruemmung } \omega = h_m / 2r_m = 0, 131$$

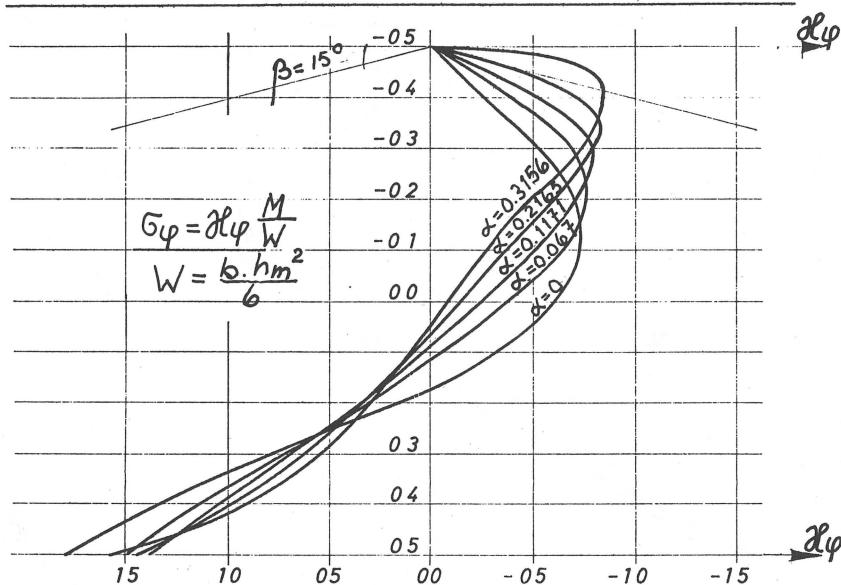
Tangentialspannungen



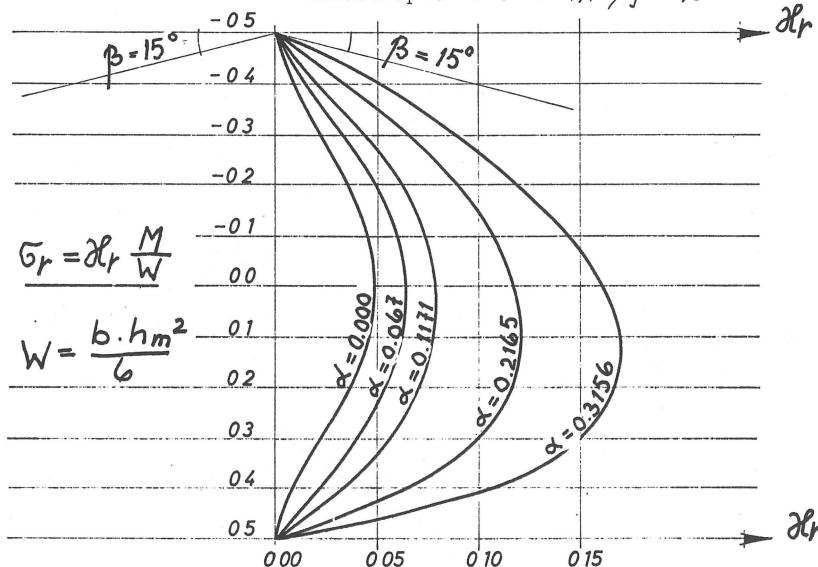
$$\text{Krümmung } \omega = h_m / 2r_m = 0, 131$$

Radialspannungen

EINFLUSS DER KRUHMUNG AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT  
BEI FESTER ANISOTROPIE UND NEIGUNG DES OBEREN RANDES



Tangentialspannungen Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $\mu_y=0,3$

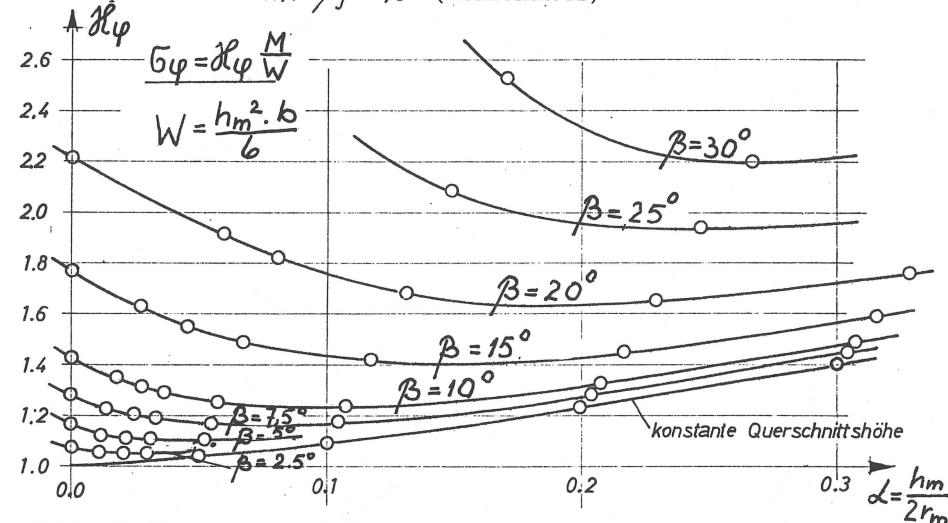


Radialspannungen

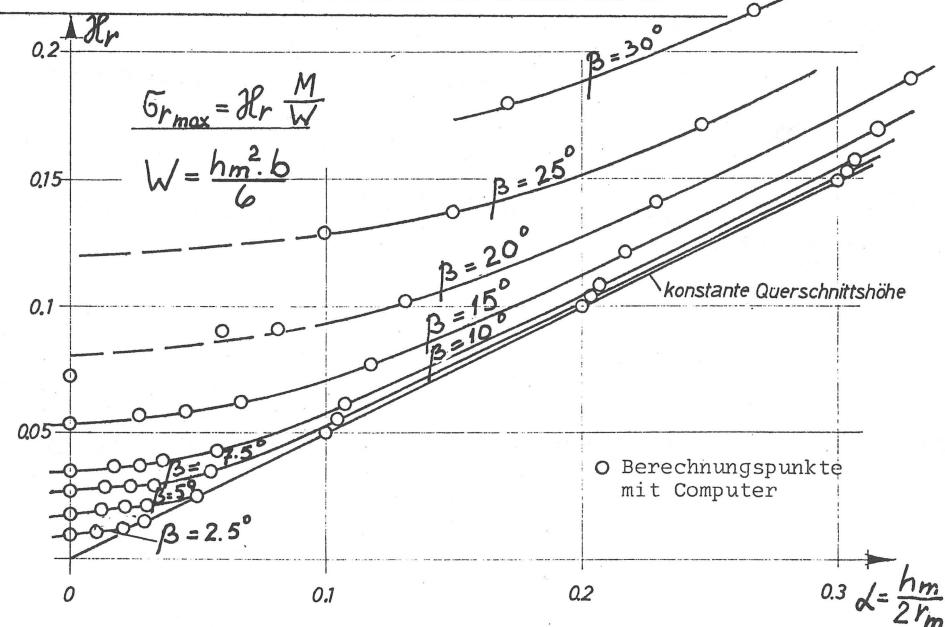
Tafel 25

RANDSPANNUNG AM UNTEREN RAND IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHÄNGIGKEIT DER KRÜMMUNG UND DES NEIGUNGSWINKELS DES OBEREN RANDES

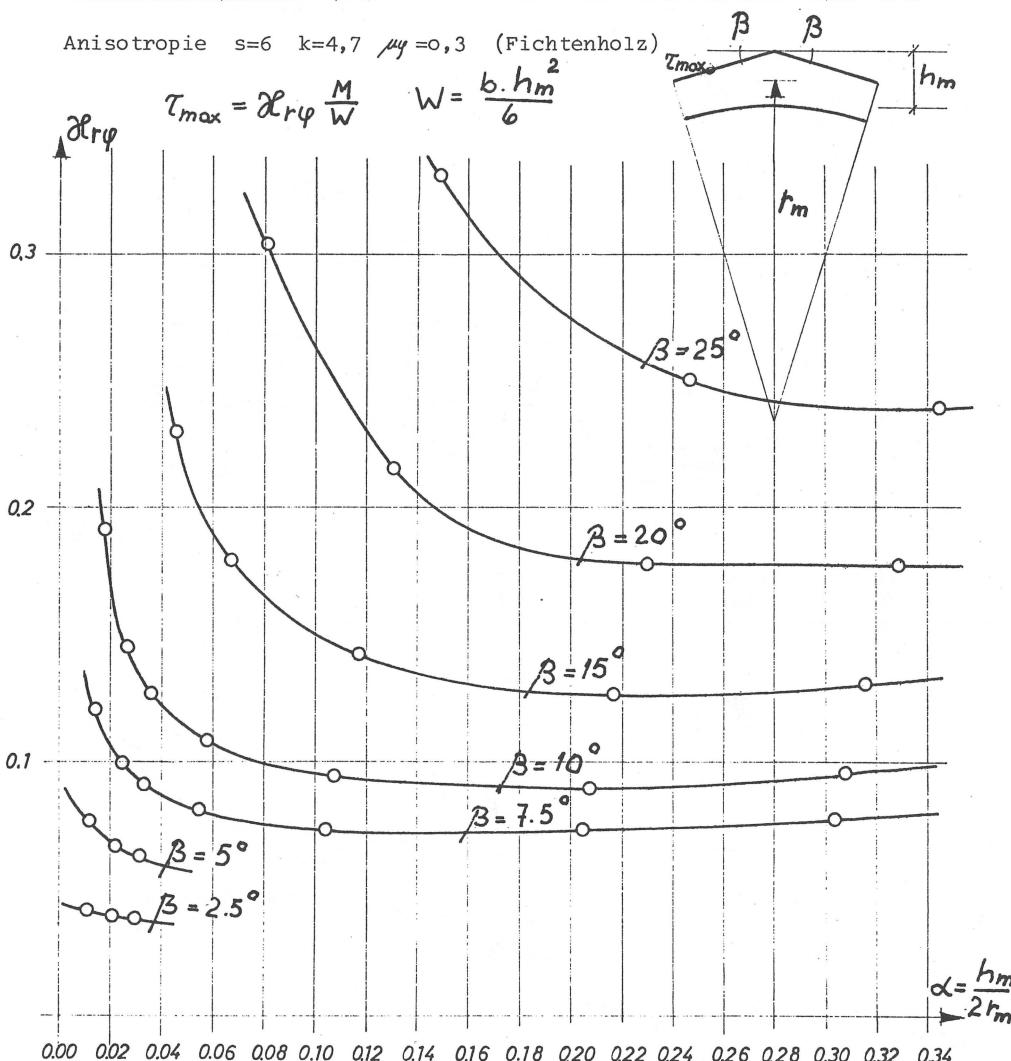
Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $\mu_y=0,3$  (Fichtenholz)



EXTREMALE RADIALSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHÄNGIGKEIT DER KRÜMMUNG UND DES NEIGUNGSWINKELS DES OBEREN RANDES



EXTREMALE SCHUBSPANNUNGEN AM OBEREN GENEIGTEN RAND IN ABHAENGIGKEIT  
DER KRUEMMUNG UND DES NEIGUNGSWINKELS DES OBEREN RANDES



6.3.2. Zentrische Normalkraftbelastung im Firstquerschnitt

(Tafeln 27 - 29)

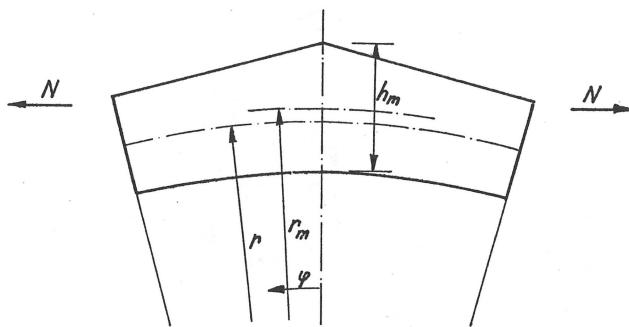
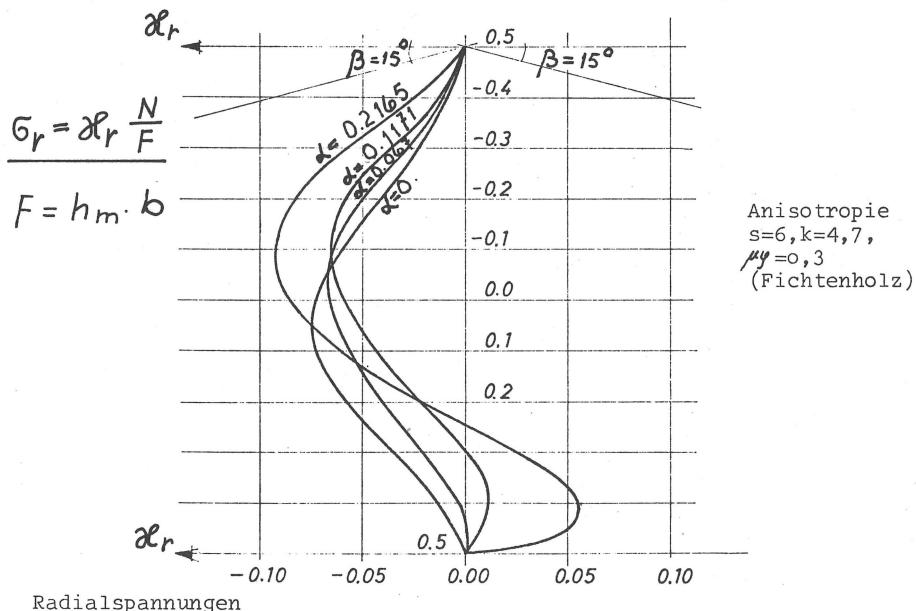
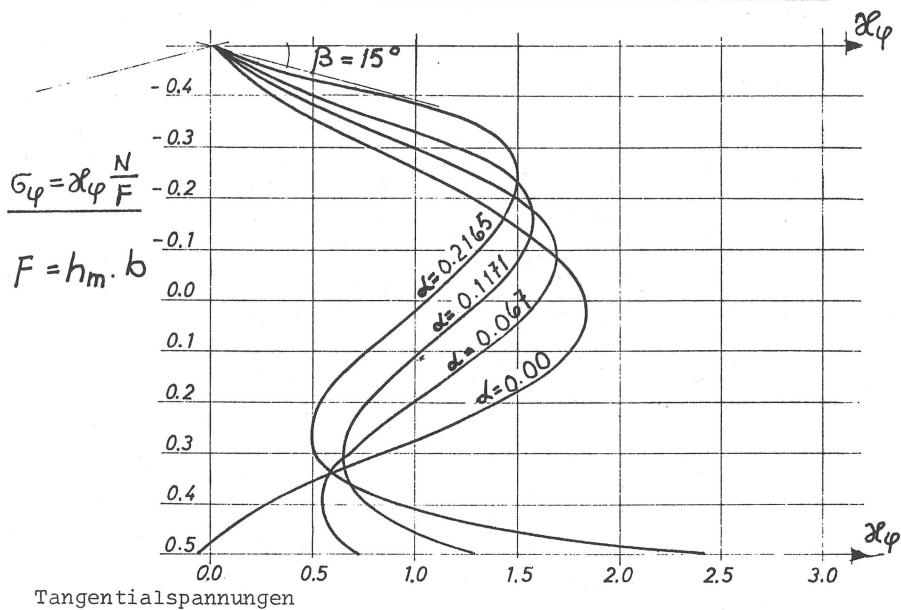


Bild 6.8.

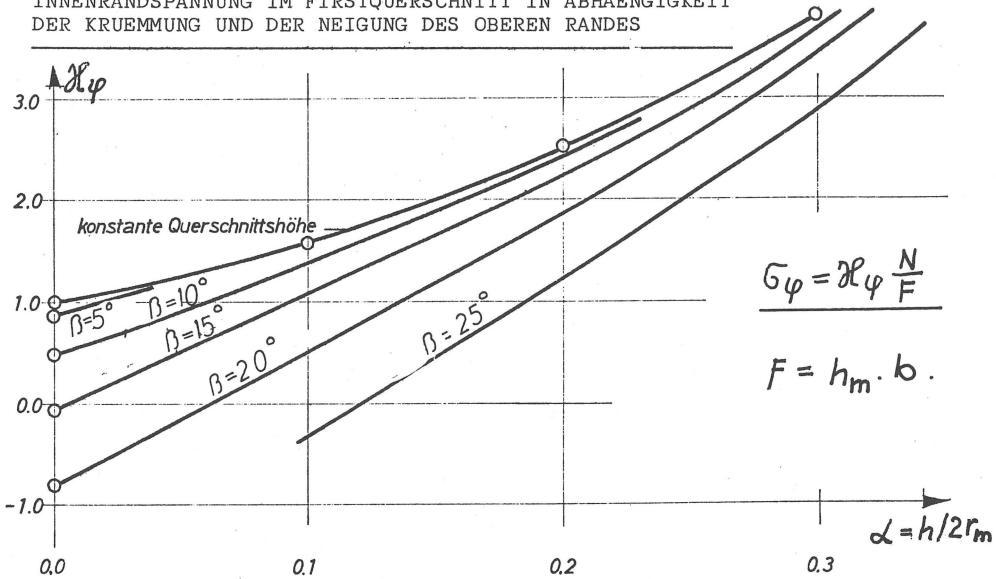
Bei zentrischer Normalkraftbelastung ist die Flanschlast gleich der  
Flanschlast bei einer rechteckigen Querschnittsform.

EINFLUSS DER KRUENNUNG AUF DIE SPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT  
BEI FESTER ANISOTROPIE UND NEIGUNG DES OBEREN RANDES



Tafel 28

INNENRANDSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHÄNGIGKEIT  
DER KRUHMUNG UND DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES



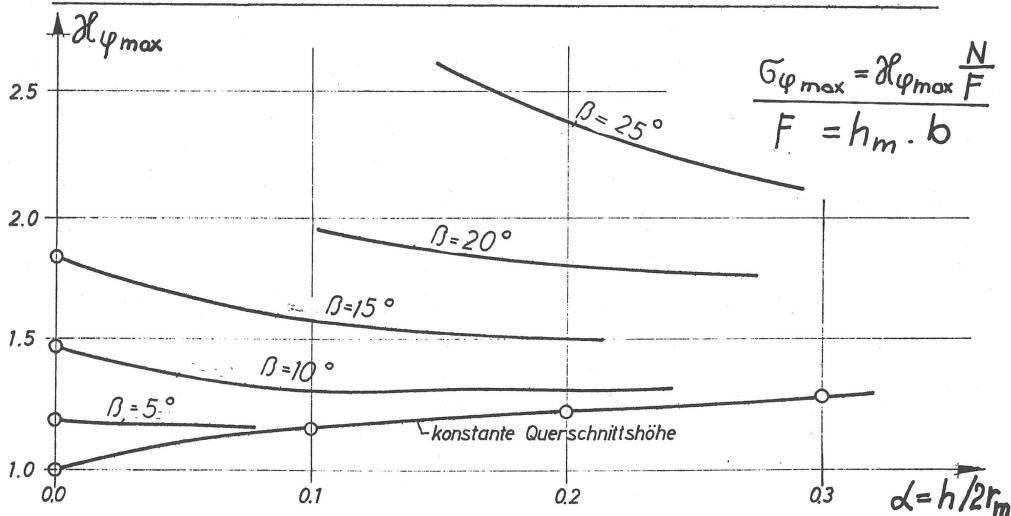
$$\bar{\sigma}_\varphi = \sigma_\varphi \frac{N}{F}$$

$$F = h_m \cdot b$$

$$d = h/2r_m$$

Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $=0,3$  (Fichtenholz)

EXTREMALE LÄNGSSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITTINNEREN IN ABHÄNGIGKEIT  
DER KRUHMUNG UND DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES



$$\bar{\sigma}_{\varphi_{\max}} = \sigma_{\varphi_{\max}} \frac{N}{F}$$

$$F = h_m \cdot b$$

$$d = h/2r_m$$

nicht veröffentlicht

6.3.3. Reine Querkraftbelastung im Firstquerschnitt

(Tafeln 30, 31)

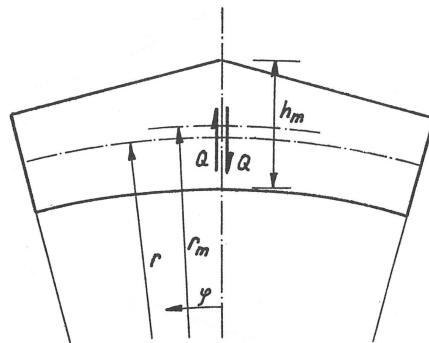
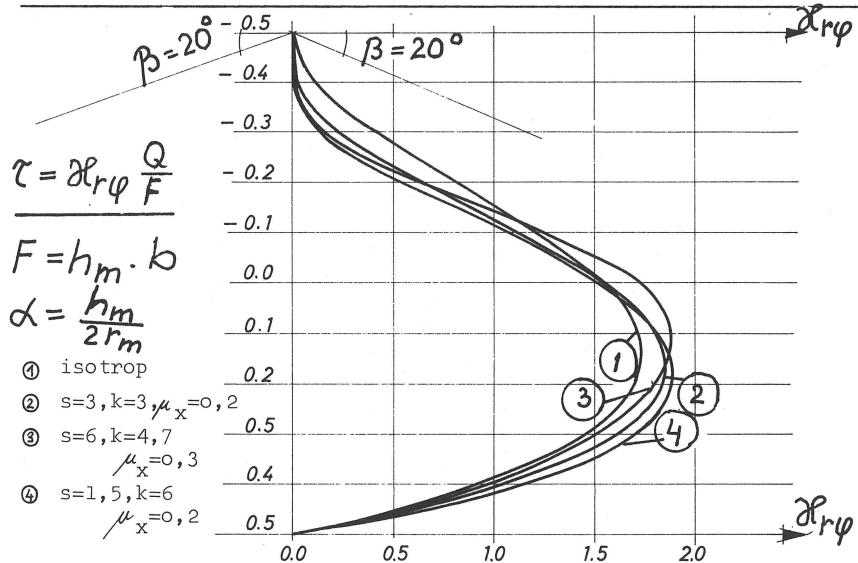
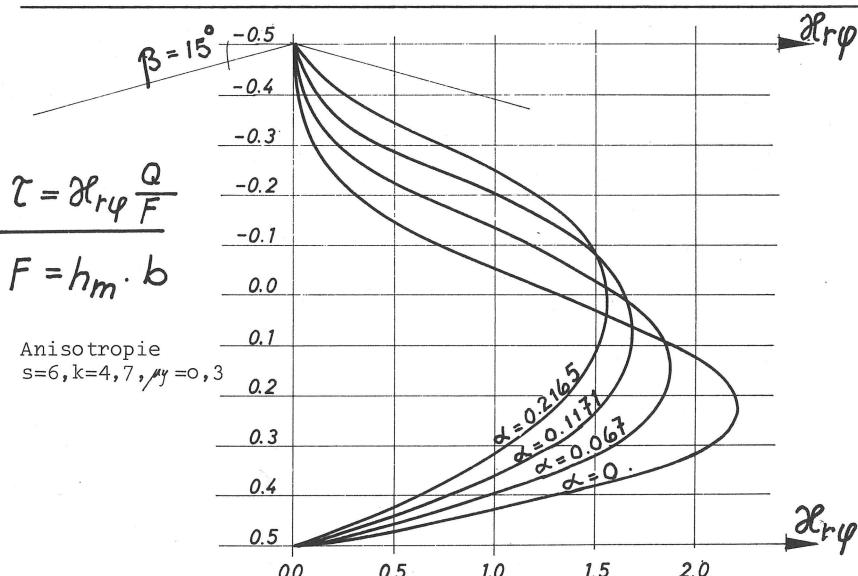


Bild 6.9.

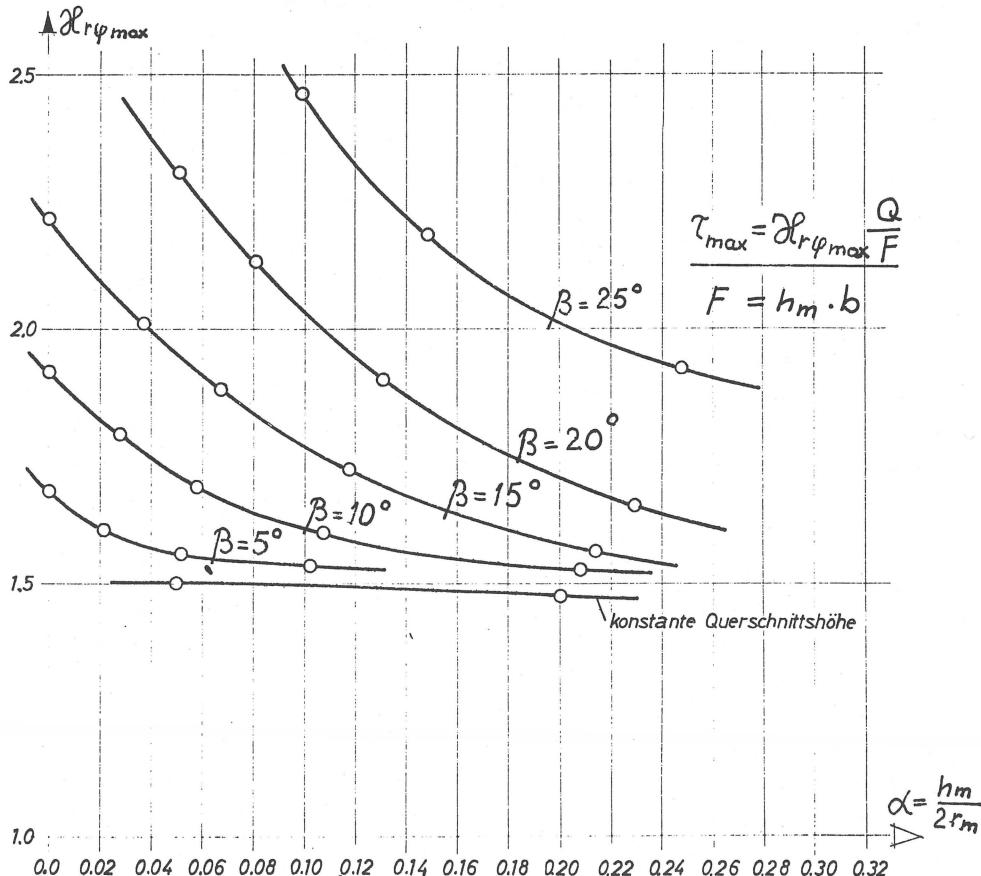
EINFLUSS DER ANISOTROPIE AUF DIE SCHUBSPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT  
BEI FESTER KRUHMUNG UND NEIGUNG DES OBEREN RANDES



EINFLUSS DER KRUHMUNG AUF DIE SCHUBSPANNUNGEN IM FIRSTQUERSCHNITT  
BEI FESTER ANISOTROPIE UND NEIGUNG DES OBEREN RANDES



## EXTREMALE SCHUBSPANNUNG IM FIRSTQUERSCHNITT IN ABHAENGIGKEIT DER KRUEMMUNG UND DER NEIGUNG DES OBEREN RANDES

Anisotropie  $s=6$   $k=4,7$   $\mu_y=0,3$  (Fichtenholz)

7. Diskussion der ermittelten Spannungswerte und Vergleich mit den Versuchsergebnissen

7.1. Genauigkeitsbetrachtungen

Die Näherungsberechnungen für den Spannungszustand der beiden Scheiben in Abschnitt 4. (gekrümpter Sattelträger) und Abschnitt 5. (gerader Sattelträger) haben gute, z. T. unterschiedliche Genauigkeiten ergeben. Die Abschätzung der Konvergenz ist möglich mit Berechnungsreihen, bei denen der Parameter  $j$  und damit die Zahl der Reihenglieder variiert wird. Je grösser  $j$  ist, desto umfangreicher wird die Berechnung und umso mehr Rechenzeit wird vom Computer benötigt.

Aufschluss über die Zuverlässigkeit der erreichten Resultate vermag auch die verbleibende resultierende Normal- und Schubspannungsverteilung am oberen geneigten Rand zu geben. Je kleiner diese Werte sind desto genauer ist die Spannungsverteilung in der Scheibe. Die in dieser Arbeit gewählte Berechnungsmethode, bei der mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum für die Spannungen am oberen Rand gesucht wird, ist leistungsfähiger als diejenige, die von Swelem [7] verwendet wurde. In seiner Berechnungsart erfüllte er die Randbedingungen am geneigten oberen Rand an einzelnen Randpunkten.

Am Beispiel einer isotropen Scheibe, mit der Form des gekrümmten Sattelträgers, deren Zentriwinkel  $2\delta = 30^\circ$  betrug, sind Spannungsdifferenzen beim kleinsten möglichen  $j = 4$  gegenüber  $j = 8$  von weniger als 5% aufgetreten.

Die Differenz von  $j = 7$  gegenüber  $j = 8$  betrug nur noch 0,1%.

Auch die Spannungsverteilung im Bereich des Firstpunktes konnte befriedigend ermittelt werden.

Nicht ungünstiger waren die Resultate mit den Anisotropiewerten von  $s = 6$ ,  $k = 4,7$  und  $\mu_y = 0,3$ , was ungefähr dem einheimischen Fichtenholz entspricht.

Beim gekrümmten Sattelträger konnte mit dem halben Zentriwinkel von  $2,5 \leq \gamma \leq 25^\circ$  mit  $j = 5$  gerechnet werden.

Beim geraden Sattelträger mit Neigungswinkeln von  $2,5^\circ \leq \gamma \leq 15^\circ$  wurde  $j = 7$  und  $\alpha = 3$  für die Auswertung gewählt. Dadurch sind im allgemeinen Ungenauigkeiten von weniger als 2% aufgetreten.

Grössere und geringere Zentriwinkel verursachten Ungenauigkeiten im Bereich des Firstpunktes.

Als nicht sehr zuverlässig hat sich am gekrümmten Sattelträger nach Abschnitt 4. die Umrechnung des Lastfalles Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft auf zentrische Normalkraft im Firstpunkt erwiesen. Die Resultate, aufgeführt in den Tafeln 27 - 29, müssen vorsichtig angewendet werden.

### 7.2. Vergleich der theoretischen Spannungswerte mit Messungen an einigen Versuchskörpern

1970 und zu Beginn des Jahres 1971 wurden an der Universität Karlsruhe an der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine (Prof. Dr.-Ing. K. Möhler) Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern durchgeführt. Da bisher die rechnerische Ermittlung der massgebenden Spannungen nach den vereinfachten Gleichungen für den Träger aus isotropem Baustoff erfolgte, sollten durch die Versuche Verteilung und Grösse der maximalen Quer- und Längsspannungen im gekrümmten Bereich ermittelt werden.

Der Forschungsauftrag war in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil wurden gekrümmte Brettschichtträger mit konstanter Querschnittshöhe nach Abschnitt 3 unter reiner Biegebelastung untersucht. Im zweiten Teil prüfte man gekrümmte Brettschichtträger mit geneigtem Obergurt (gekrümmter Sattelträger) nach Abschnitt 4 mit derselben Belastungsanordnung.

#### 7.2.1. Anlage und Durchführung der Versuche

Es soll hier auf die beiden Versuchsberichte [11], [12] hingewiesen werden, die in den Berichten aus der Bauforschung erschienen sind.

##### 7.2.1.1. Die Versuchskörper

Die Versuchskörper waren aus 8 cm breiten und 1 cm dicken Fichtenholzlamellen zu einem Querschnitt von 8 x 30 cm verleimt. Die Länge betrug 4,4 m. Im ersten Teil der Versuche wurden Dehnungsmessungen und Bruchversuche an Trägerformen, wie sie in Tafel 32 abgebildet sind, durchgeführt. Im zweiten Teil wurden Trägerformen nach Tafel 33 geprüft.

#### 7.2.1.2. Aufbau der Versuchsanlage

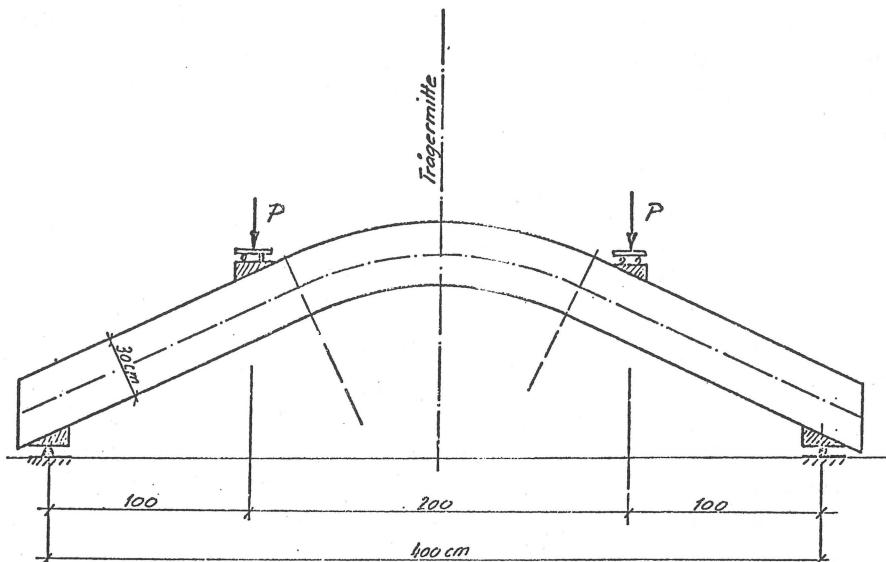


Bild 7.1.

#### 7.2.1.3. Dehnungsmessungen

Die Dehnungen wurden vorwiegend mit Dehnungsmessstreifen von 20 und 60 mm Messlänge in den Spannungshauptrichtungen, soweit diese bekannt waren, gemessen. Zur Anwendung kamen auch induktive Wegaufnehmer mit 60 – 120 mm Messlänge.

#### 7.2.2. Messresultate und Vergleich mit der theoretischen Spannungsverteilung

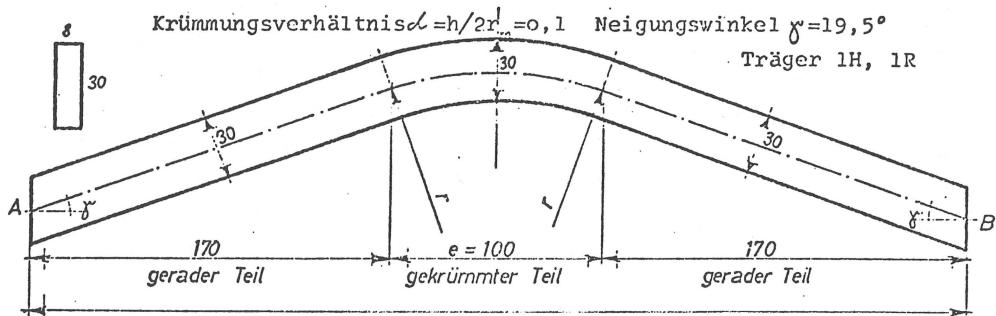
In Tafel 34 sind die Messpunkte für die Tangential- und Radialspannungen im Firstquerschnitt des Trägers 1H2 in Bauart 1 als auch die dazugehörigen theoretischen Ergebnisse aufgetragen. Dieser Träger wurde nach Durchführung der Messungen in einen Träger nach Bauart 2 umgearbeitet. Somit konnten die Messungen an Bauart 1 und an Bauart 2 mit demselben Holz

und mit denselben Messstreifen durchgeführt werden. Dadurch wurde ein unmittelbarer Vergleich unter gleicher Belastung zwischen dem gekrümmten Träger mit konstanter Querschnittshöhe und dem gekrümmten Sattelträger möglich. Die Übereinstimmung der Messung mit der Theorie darf als gut bezeichnet werden. Holz ist auch bei sorgfältiger Auslese ein sehr inhomogener Werkstoff, die Dehnungseigenschaften können schon im kleinsten Bereich ausserordentlich stark variieren. Dadurch sind die Messresultate starken Streuungen unterworfen, und eine Auswertung wird erschwert. Trotzdem konnten auch mit den anderen Trägerformen sehr gute Übereinstimmungen gefunden werden.

Tafel 32

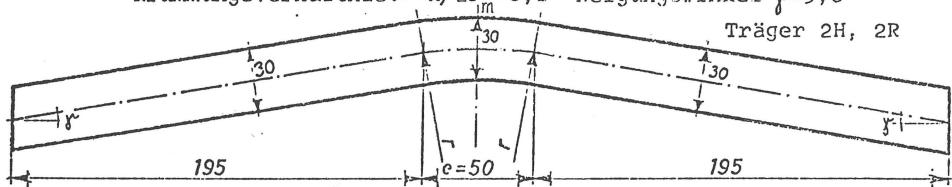
AUSBILDUNG DER VERSUCHSTRÄGER BAUART 1

Trägerquerschnitt  $b/h = 8\text{cm}/30\text{cm}$



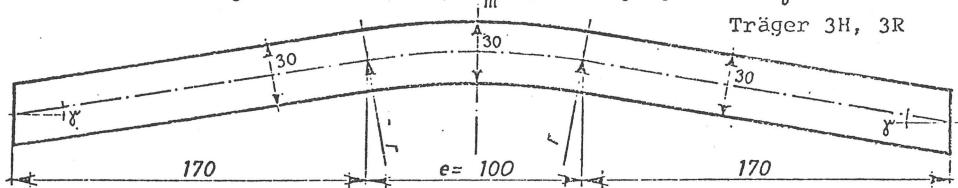
Krümmungsverhältnis  $\alpha = h/2r_m = 0,1$  Neigungswinkel  $\gamma = 9,6^\circ$

Träger 2H, 2R



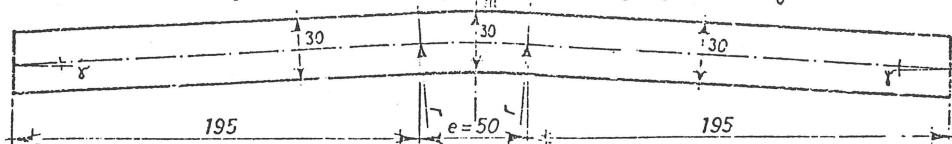
Krümmungsverhältnis  $\alpha = h/2r_m = 0,05$  Neigungswinkel  $\gamma = 9,6^\circ$

Träger 3H, 3R



Träger 4H, 4R

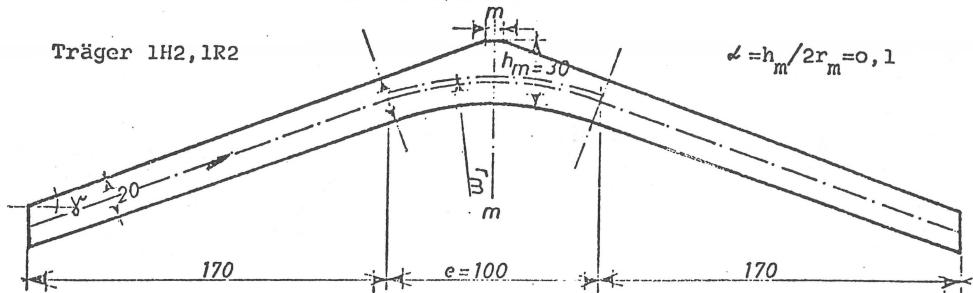
Krümmungsverhältnis  $\alpha = h/2r_m = 0,05$  Neigungswinkel  $\gamma = 4,8^\circ$



## ABGEARBEITETE VERSUCHSTRAEGER BAUART 2

Träger 1H2, 1R2

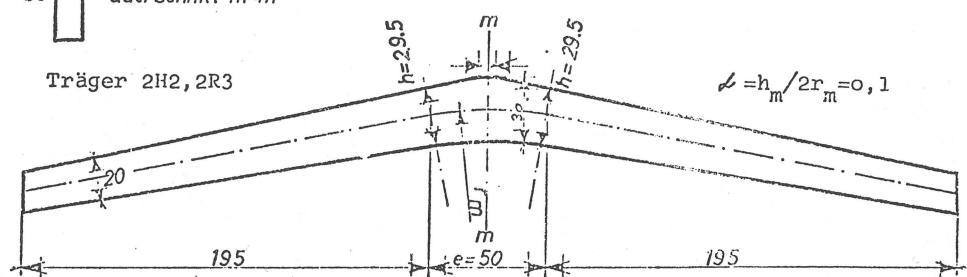
$$\alpha = h_m / 2r_m = 0,1$$



 Querschnitt  $m-m$

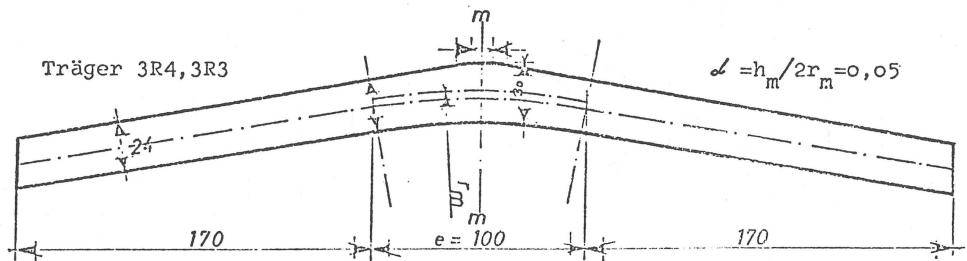
Träger 2H2, 2R3

$$\alpha = h_m / 2r_m = 0,1$$



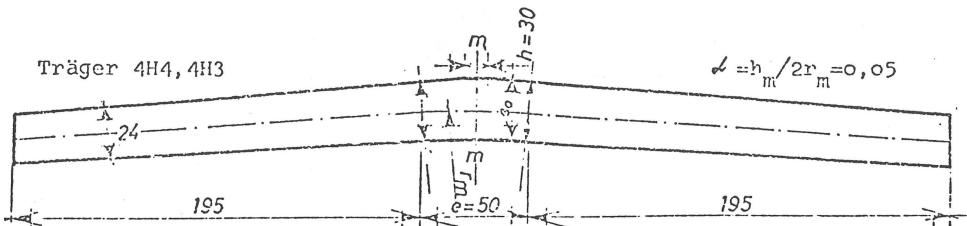
Träger 3R4, 3R3

$$\alpha = h_m / 2r_m = 0,05$$



Träger 4H4, 4H3

$$\alpha = h_m / 2r_m = 0,05$$

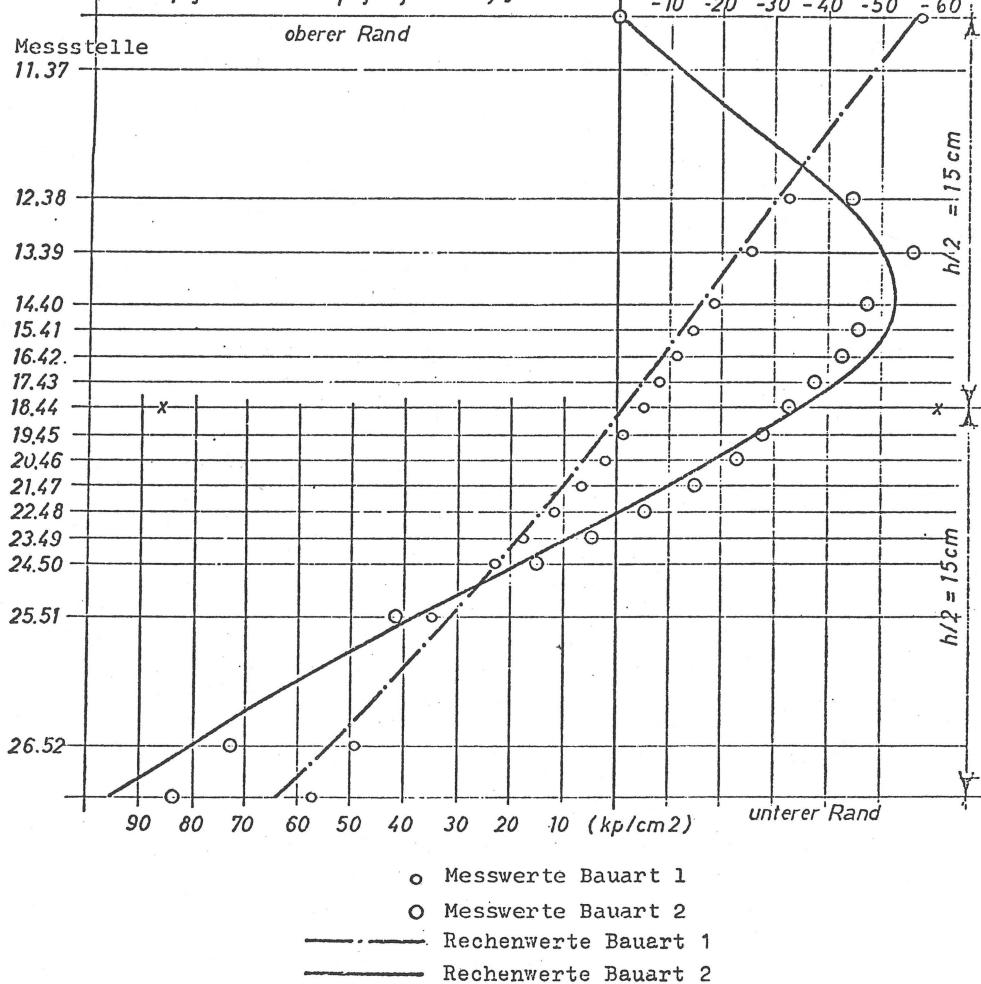


Tafel 34 a

RECHNERISCHE UND GEMESSENE LAENGSSPANNUNGEN AM TRAEGER 1H2

Längsspannungen

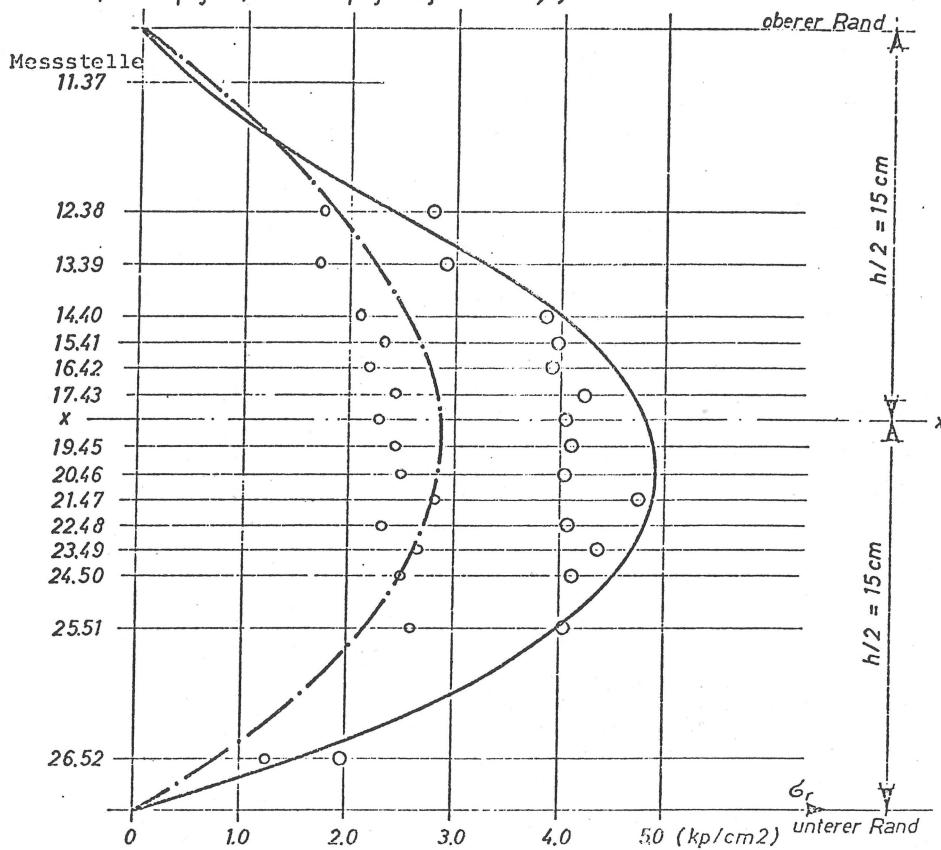
Anisotropie  $s = \sqrt{E_y/E_r} = 6$      $k = \sqrt{E_y/G_y} = 4.7$      $\mu_y = 0.3$



## RECHNERTISCHE UND GEMESSENE QUERSPANNUNGEN AM TRÄGER 1H2

## Querspannungen

$$\text{Anisotropie } s = \sqrt{E_y/E_r} = 6 \quad k = \sqrt{E_y/G_{ry}} = 4.7 \quad \mu_y = 0.3$$



- Messwerte Bauart 1
- Messwerte Bauart 2
- Rechenwerte Bauart 1
- Rechenwerte Bauart 2

## 8. Zahlenbeispiele

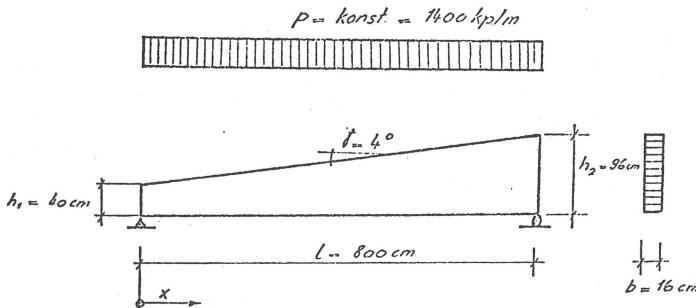
In diesem Abschnitt werden Spannungsnachweise an einigen Beispielen von verleimten Brettschichtträgern angeführt. Die Werkstoffeigenschaften des am häufigsten verwendeten europäischen Fichtenholzes werden wie folgt festgelegt:

$E_x = E_y = 110'000 \text{ kp/cm}^2$	Elastizitätsmodul in Faserrichtung
$E_y = E_r = 3'000 \text{ kp/cm}^2$	Elastizitätsmodul senkrecht zur Faser
$G_{xy} = G_{ry} = 5'000 \text{ kp/cm}^2$	Schubmodul
$\mu_x = \mu_y = 0,3$	Querdehnungszahl längs zur Faser

daraus ergeben sich die Anisotropiewerte:

$$s = \sqrt{E_x/E_y} = \sqrt{E_y/E_x} \sim 6$$
$$k = \sqrt{E_x/G_{xy}} = \sqrt{E_y/G_{ry}} \sim 4,7$$

### 8.1. Biegespannung am Pultdachträger mit Rechteckquerschnitt



Die Biegespannung am unteren Rand errechnet sich nach der Formel:

$$\sigma_x := \alpha_x \frac{M}{W} = \frac{Pb(lx-x^2) \cdot 6 \cdot \alpha_x}{b \cdot h_x^2} \quad h_x = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{x}{l}$$

$\alpha_x$  = Faktor aus Tafel 15 (gerader Sattelträger mit reiner Biegung)

Für  $\gamma = 4^\circ$  erhält man:  $\alpha_x = 1,05$

Die Koordinate der grössten Biegerandspannung resultiert aus der Bedingung:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = 0$$

damit erhalten wir für x:

$$x = l \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_2} = 800 \cdot \frac{40}{136} = 235.3 \text{ cm}$$

Das Biegemoment und das Widerstandsmoment an der Stelle x ergeben sich zu:

$$M = \frac{p}{2} (lx - x^2) = 930090 \text{ cmkp} \quad W = \frac{b \cdot h_x^2}{6} = 8504 \text{ cm}^3$$

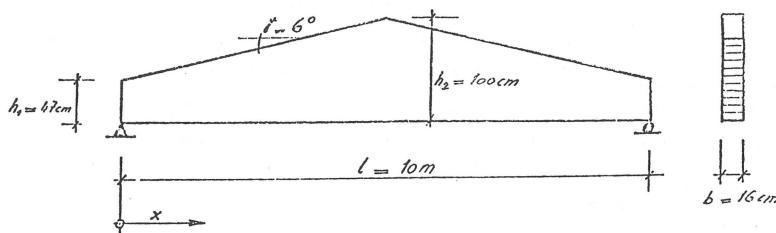
Damit erhält man die maximale Biegespannung am unteren Rand:

$$\sigma_{x \max} = x_x \cdot \frac{M}{W} = 1.05 \cdot \frac{930090}{8504} = 1.05 \cdot 109.4 = 115 \text{ kp/cm}^2$$

Bisher wurde bei der Bemessung von Pultdachträgern der Faktor  $\alpha_x$  nicht berücksichtigt. Aus Tafel 15 geht hervor, dass vor allem bei grösseren Neigungen des Obergurtes der Fehler gross wird. Er beträgt, wenn z.B.  $\beta = 10^\circ, 20\%$ . Die Biegespannung am oberen Rand wird nicht massgebend.

#### 8.2. Biegespannungen und max. Querspannung am geraden Sattelträger mit Rechteckquerschnitt

$$p = \text{konst} = 1700 \text{ kp/cm}$$



##### a) Biegespannungen am unteren Rand

$$\sigma_x = \alpha_x(x) \cdot \frac{M(x)}{W(x)}$$

Sowohl das Biegemoment wie das Widerstandsmoment und der Faktor sind Funktionen der x - Koordinate

Tabelle 8.1.

Punkt	$x$ [cm]	$h$ [cm]	$W$ [cm <sup>3</sup> ]	$M$ [cm kp]	$M/W$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	$\alpha_x$	$\alpha_x \cdot M/W$
0	0	47	5891	0	0	1,09	0
1	50	52,3	1294	403750	55,4	1,09	60,3
2	100	57,6	8847	765000	86,4	1,09	94,1
3	150	62,9	10556	1083750	102,7	1,09	111,9
4	200	68,2	12403	1360000	109,6	1,09	119,6
5	250	73,5	14406	1593750	110,6	1,09	120,6
6	300	78,8	16558	1785000	107,8	1,09	117,4
7	350	84,1	18861	1933750	102,6	1,09	111,8
8	400	89,4	21313	2040000	95,8	1,09	104,4
9	450	94,7	23915	2103750	88,0	1,11	97,6
10	475	97,4	25272	2119687	83,9	1,14	95,6
	500	100	26666	2125000	79,8	1,20	95,8

b) Maximale Querzugsspannung

$$\sigma_y \max = \alpha_y \cdot \frac{M(1/2)}{W(1/2)} = 0,023 \cdot 79,8 = 1,84 \text{ kp/cm}^2$$

$$\alpha_y(1/2) = 0,023 \quad \text{siehe Tafel 14}$$

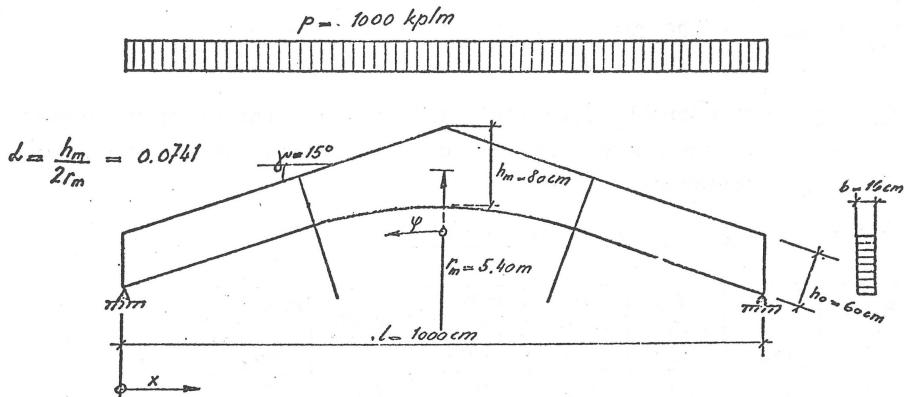
In Tabelle 8.1. sind die Biegespannungen am unteren Rand aufgeführt. Das Maximum tritt bei dieser Trägerform und Belastungsart verhältnismässig nahe am Auflager auf. In diesem Bereich ist der Faktor  $\alpha_x$  (Tafel 15) noch konstant. Er verändert sich von Punkt 8 weg gegen die Trägermitte. ( $x_{10} - x_8 \sim h_2$ ). Es wird in den meisten Fällen möglich sein, den Ort der maximalen Randspannung mit der einfachen Formel

$$x = \frac{L \cdot h_1}{2 \cdot h_2}$$

zu bestimmen. Diese Formel gilt aber nur wenn  $\alpha_x = \text{konst.}$  ist. Verhältnismässig gross wird die maximale Querzugsspannung im Firstquerschnitt. Die in der deutschen Norm DIN 1052 zugelassene Querzugsspannung beträgt zul  $\sigma_{Z1} = 2,5 \text{ kp/cm}^2$ . Die Faktoren  $\alpha_x, \alpha_y$

wurden den Tabellen mit reiner Biegung ohne Auflast entnommen.  
Die Ungenauigkeit, verursacht durch die gleichmässig verteilte Belastung am oberen Rand, wirkt sich abmindernd auf die Längs- und Querzugsspannungen aus.

### 8.3. Spannungsnachweis am gekrümmten Sattelträger mit Rechteckquerschnitt



#### a) Biegerandspannungen am unteren Rand

Tabelle 8.2.

Punkt	$x$ [cm]	$h$ [cm]	$W$ [cm $^3$ ]	$M$ [cm kp]	$M/W$ [kp/cm $^2$ ]	$\alpha_x/x$	$\alpha_x \cdot W/W$ [kp/cm $^4$ ]
0	0	60	9600	0	0	1,0	0
1	100	60	9600	450000	46,9	1,0	46,9
2	200	60	9600	800000	83,3	1,0	83,3
3	300	60	9600	1050000	109,2	1,0	109,4
4	400	61,7	10152	1200000	118,2	1,05*	124,1
5	500	80	17057	1150000	73,2	1,27**	107,7

\*  $\alpha_x$  siehe Tafel 15 für  $\gamma = 4^\circ$  ( $\gamma$  = Differenzwinkel zwischen der Neigung des oberen und des unteren Trägerrandes an der Stelle x)

\*\*  $\alpha_x$  bzw.  $\alpha_y$  siehe Tafel 25 für  $\alpha = 0,074$  und  $\gamma = 15^\circ$

b) Maximale Querzugsspannung

$$\sigma_{r \max} = x_r \frac{M(y=0)}{W(y=0)} = 0,063 \cdot 73,24 = 4,6 \text{ kp/cm}^2$$

$x_r$  siehe Tafel 25 für  $\lambda = 0,074$

c) Maximale Schubspannung am oberen Rand

$$\tau_{ry \max} = x_{ry} \frac{M(y=0)}{W(y=0)} = 0,172 \cdot 73,24 = 12,6 \text{ kp/cm}^2$$

$x_{ry}$  siehe Tafel 26 für  $\lambda = 0,074$

Variante: Der obere Keil (Sattel) ist frei verschieblich verbunden mit dem gekrümmten Teil des Trägers und übernimmt keinen Kraftanteil.

a) Biegerandspannungen am unteren Rand

Punkt	$x$ [cm]	$h$ [cm]	$W$ [cm <sup>3</sup> ]	$M/W$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	$x_y(\beta=0)$	$\varepsilon_y \cdot M/W$ [kp/cm <sup>2</sup> ]
4	400	60	9600	125	1,04	130
5	500	60	9600	130	1,04	135

$x_y$  siehe Tafel 25 für  $\beta = 0$  und  $\lambda = \frac{60}{2 \cdot 530} = 0,0566$

b) Maximale Querzugsspannung

$$\sigma_{r \ max} = x_r \frac{M(y=0)}{W(y=0)} = 0,0283 \cdot 130 = 3,68 \text{ kp/cm}^2$$

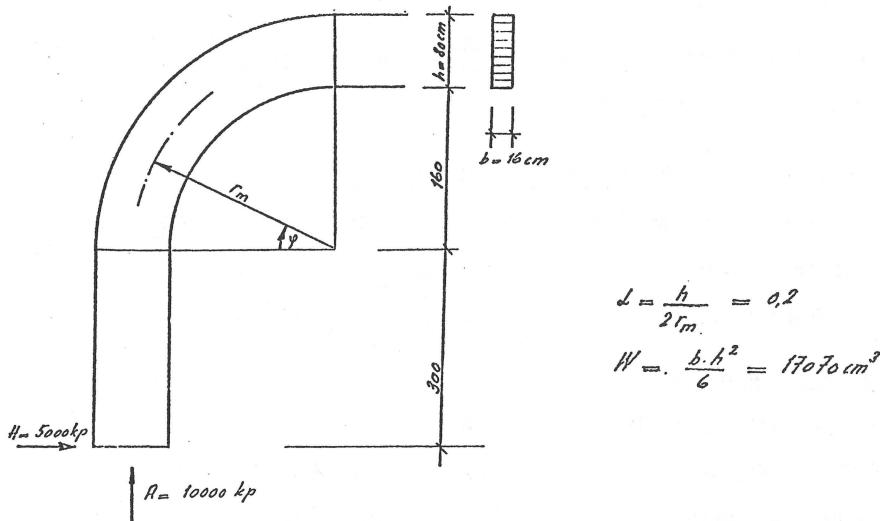
$x_r$  siehe Tafel 25 für  $\beta = 0$  und  $\lambda = 0,0566$

c) Schubspannung am oberen Rand

Am oberen "freien" Rand tritt keine Schubspannung auf.

Dieses Beispiel zeigt, dass der starr verbundene Sattel eines gekrümmten Sattelträgers auf die Biegespannungen am unteren Rand zwar einen günstigen Einfluss ausübt, man darf aber trotzdem nicht das gesamte Trägheitsmoment des Firstquerschnittes ohne Reduktionsfaktor einsetzen. Die maximale Querzugsspannung wird hingegen ungünstig beeinflusst. Ihr Wert ist in diesem Beispiel um 28% höher, als wenn der Sattel frei verschieblich aufgesetzt würde. Recht ungenau würde man man die Querzugsspannungen am gekrümmten Sattelträger nach den Formeln des konzentrisch gekrümmten Trägers berechnen. In diesem Beispiel ergibt sich ein Fehler von 70%. Als Ergänzung wurde die maximale Schubspannung am oberen Rand angegeben. Dieser Wert ist richtig, wenn die Momentenverteilung über den gekrümmten Bereich konstant ist. Dies trifft bei gleichmässiger Belastung im Mittelteil einigermassen zu.

#### 8.4. Spannungsnachweis an der gekrümmten Rahmenecke mit Rechteckquerschnitt



##### a) Schnittkräfte

$\varphi = 0^\circ$	$M = -15000 \text{ m kp}$	$N = -10000 \text{ kp}$	$Q = -5000 \text{ kp}$
$\varphi = 45^\circ$	$M = -18270 \text{ m kp}$	$N = -10510 \text{ kp}$	$Q = 3536 \text{ kp}$
$\varphi = 90^\circ$	$M = -5000 \text{ m kp}$	$N = -5000 \text{ kp}$	$Q = 10000 \text{ kp}$

b) Spannungsnachweis im Schnitt  $\varphi = 0$

Biegespannung am Innenrand:

$$\sigma_{y_i} = \alpha_{y_i}(M) \frac{M}{W} + \alpha_{y_i}(N) \frac{N}{F} = -\frac{1.23 \cdot 15000.00}{170.70} - \frac{2.50 \cdot 10000}{80 \cdot 16} = -127.6 \text{ kp/cm}^2$$

$\alpha_{y_i}(M) = 1,23$  siehe Tafel 3

$\alpha_{y_i}(N) = 2,50$  siehe Tafel 7

Die Biegespannung am Aussenrand wird kleiner.

Querdruckspannung:

$$\sigma_r \min = \alpha_r(M) \frac{M}{W} + \alpha_r(N) \frac{N}{F}$$

Das Maximum lässt sich aus der Summe der beiden Kurven für  $\omega = 0,2$  in Tafel 2 und Tafel 6 multipliziert mit M/W bzw. N/F bestimmen.

Wir erhalten in unserem Beispiel für  $\sigma_r \min = -9.3 \text{ kp/cm}^2$ . Die Normalkraft übt nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Quer- spannungen aus.

Schubspannung:

$$\tau_{ry} \min = +\alpha_{ry} \max \cdot \frac{Q}{F} = -\frac{1.475 \cdot 5000}{80 \cdot 16} = -5.76 \text{ kp/cm}^2$$

$\alpha_{ry} = 1,49$  siehe Tafel 10

c) Spannungsnachweis im Schnitt  $\varphi = 45^\circ$

Biegespannung am Innenrand:  $\sigma_{y_i} = -116,8 - 20,7 = -137,5 \text{ kp/cm}^2$

Querdruckspannung:  $\sigma_r \min = -10,0 \text{ kp/cm}^2$

Schubspannung:  $\tau_{ry} \max = 4,1 \text{ kp/cm}^2$

d) Spannungsnachweis im Schnitt  $\varphi = 90^\circ$

Biegespannung am Innenrand:  $\sigma_{y_i} = -36,0 - 7,8 = -45,8 \text{ kp/cm}^2$

Querdruckspannung:  $\sigma_r \min = -3,2 \text{ kp/cm}^2$

Schubspannung:  $\tau_{ry} \max = 11,5 \text{ kp/cm}^2$

Die ermittelten Spannungen in den Schnitten  $\varphi = 0$  und  $\varphi = 90^\circ$  entsprechen nicht genau den wirklich auftretenden Spannungen. Wir be-

finden uns im Uebergangsbereich von gerade zu gekrümmt. Rechnet man mit den Werten des gekrümmten Balkens, dann liegt man auf der sicheren Seite. Einen recht grossen Einfluss auf die Innenrandbiegespannungen hat die Normalkraft, klein ist er hingegen bezogen auf die Querspannungen.

### 9. Algol - 60 Rechenprogramme

Wie bereits in früheren Abschnitten erwähnt, habe ich für die Auswertung der theoretischen Ergebnisse in dieser Arbeit Algol - Programme aufgestellt und im Rechenzentrum der Universität Karlsruhe durchgerechnet. Zur Auflösung der Gleichungssysteme verwendete ich ein Unterprogramm nach der Gauss'schen Methode mit nachträglicher Iteration. Die Anzahl der Iterationsschritte konnte bei der Dateneingabe festgelegt werden.

Es wurden folgende Programme für die einzelnen Scheibenformen aufgestellt:

#### 1. Spannungsberechnung an der polarorthotropen Kreisbogenscheibe

Lastfälle: Reine Biegung, Querkraft und Normalkraft.

Eingabe: a) Belastungen: Moment, Normalkraft, Querkraft.

b) Geometrische Größen: Dicke, Querschnittshöhe, Radius, Zentriwinkel

c) Werkstoffeigenschaften: Anisotropiezahlen  $s$ ,  $k$ , Querdehnungszahl  $\mu_y$ .

d) Darstellung: Anzahl Schnitte.

Ausgabe: Tangential-, Radial- und Schubspannungen in den einzelnen Schnitten für die drei Belastungsfälle getrennt und für die Kombination der drei Lastfälle.

#### 2. Spannungsberechnungen an der axialsymmetrischen Scheibe mit gekrümmtem innerem und geneigtem äusserem Rand

##### 2.1. Lastfall: Reine Biegung.

Eingabe: a) Belastung: Moment.

b) Geometrische Größen: Dicke, Querschnittshöhe am Endquerschnitt, Radius, Zentriwinkel  $\alpha$ , Neigungswinkel  $\beta$ . (Winkel des äusseren Randes gegenüber der Tangente im Endquerschnitt).

c) Werkstoffeigenschaften: Anisotropiezahlen  $s, k$   
Querdehnungszahl  $\mu_y$

d) Berechnungsparameter:  $j, w$ , Anzahl der Iterations schritte.

e) Darstellung: Anzahl der Schnitte.

Ausgabe: Tangential-, Radial- und Schubspannungen in den einzelnen Schnitten.

2.2. Lastfall: Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft.

Eingabe: Anstelle des Momentes: Normalkraft im Krümmungsmittelpunkt, Rest wie 2.1.

Ausgabe: Wie 2.1.

2.3. Lastfall: Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft.

Eingabe: Anstelle des Momentes: Querkraft im Firstquerschnitt Rest wie 2.1.

Ausgabe: Wie 2.1.

3. Spannungsberechnung an der axialsymmetrischen orthotropen Scheibe mit geradem unterem und geneigtem oberen Rand

3.1. Lastfall: Reine Biegung

Eingabe: a) Belastung: Moment.

b) Geometrische Größen: Dicke, Querschnittshöhe am Endquerschnitt, halbe Länge, Neigungswinkel des oberen Randes.

c) Werkstoffeigenschaften: Anisotropiezahlen  $s, k$ , Querdehnungszahl  $\mu_x$ .

d) Berechnungsgrößen:  $j, o$ , Anzahl Iterationsschritte.

e) Darstellung: Anzahl Schnitte.

Ausgabe: Längs-, Quer-, und Schubspannungen in den einzelnen Schnitten.

3.2. Lastfall: Reine Normalkraft im Endquerschnitt.

Eingabe: Anstelle des Momentes: Normalkraft, Rest wie 3.1.

Ausgabe: Wie 3.1.

3.3. Lastfall: Querkraft im Firstquerschnitt.

Eingabe: Anstelle des Momentes: Querkraft, Rest wie 3.1.

Ausgabe: Wie 3.1.

10. Zusammenfassung und abschliessende Betrachtungen

10.1. Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe

Die Spannungsberechnungen an der polarorthotropen Scheibe wurden für die drei Grundlastfälle Biegung, Normalkraft und Querkraft durchgeführt. Mit den getroffenen vereinfachenden Annahmen war es möglich, für die im Polarkoordinatensystem aufgestellte Scheibengleichung Spannungsfunktionen zu finden, welche die Randbedingungen exakt erfüllten. Es konnten folgende Feststellungen gemacht werden:

- a) Bei reiner Biegung macht sich nur das Verhältnis der E - Modulen in tangentialer und radialer Richtung bei der Spannungsverteilung bemerkbar. Besteht die Belastung aus Normal- und Querkraft, so haben zusätzlich der Schubmodul und die Querdehnungszahl einen Einfluss.
- b) Aus den Tafeln 1, 2 für Biegung und 5, 6 für Normalkraft geht hervor, dass die grösste Tangentialspannung am Innenrand auftritt und ihr Betrag bei zunehmender Krümmung und Anisotropie sich vergrössert. Enorme Spannungsspitzen erhält man bei Normalkraftbelastung.
- c) Die Radialspannungen vergrössern sich bei zunehmender Krümmung in beiden Lastfällen d.h. Moment und Normalkraft (Tafeln 2, 6). Bei konstanter Krümmung wirken sich die besonderen Anisotropieverhältnisse des Holzes gegenüber dem isotropen Werkstoff günstig auf die Radialspannungen aus, wenn die Belastung aus Bie-

gung besteht (siehe Tafel 1), ungünstiger werden sie hingegen beim Lastfall Normalkraft (siehe Tafel 5).

- d) Bei Normalkraftbelastung weist die Radialspannungsverteilung über die Querschnittshöhe sowohl ein Minimum wie auch ein Maximum auf (Tafeln 5, 6). Am Baustoff Holz sind die Beträge der beiden Extremwerte im praktischen Bereich von  $0 \leq \sigma \leq 0,2$  in derselben Größenordnung.
- e) Beim Belastungsfall Querkraft (Tafel 9) wandert die Stelle des Maximums der Schubspannung bei zunehmender Anisotropie und Krümmung gegen den Scheibeninnenrand. Bei Holz erhält man bei leichter Krümmung eine Abminderung der maximalen Schubspannung gegenüber dem geraden Balken.

Für den Lastfall reine Biegung wurden in Abschnitt 3.5. Näherungsformeln durch Reihenentwicklungen für die Biegerand- und die maximale Radialspannung gefunden. Als Variablen werden die Anisotropiezahl  $s$  und das Krümmungsverhältnis in den Formeln aufgeführt.

#### 10. 2. Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmten inneren und geneigtem äusseren Rand

Der Lösungsansatz für die Scheibengleichung im Polarkoordinatensystem setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil entspricht demjenigen, welcher für die polarorthotrope Kreisbogenscheibe verwendet wurde. Der zweite Teil des Lösungsansatzes ist ein Polynom in Reihenform mit der Funktion, sich den Randbedingungen am geneigten äusseren Rand anzupassen. Die Randbedingungen konnten am inneren Rand und an den Endquerschnitten nach den getroffenen Annahmen streng erfüllt werden. Am geneigten äusseren Rand wurde mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum für die angreifenden Normal- und Schubspannungen gesucht. Als zusätzliche Forderung wurden drei Gleichgewichtsbedingungen für den ausspringenden Bereich formuliert. Allein die Befriedigung dieser drei Gleichgewichtsbedingungen liefert bei geringem Rechenaufwand schon brauchbare Spannungsfunktionen. Es wurde versucht für den Baustoff Holz alle in der Praxis vorkommenden Trägerformen nach diesem Scheibentyp in der Auswertung zu erfassen. Gewisse Scheibenformen werden mit unterschiedlichen Anisotropieverhältnissen durchgerechnet. Die Auswertung hat zu folgenden Resultaten geführt:

- a) Der Spannungsverlauf lässt sich je nach Rechenaufwand praktisch beliebig genau berechnen. Ausgenommen sind Scheiben, deren Zentriwinkel gegen null streben oder diejenigen, die wesentlich über  $45^\circ$  liegen.
- b) Die ausspringende Ecke (Sattel) übt auf die Spannungsverteilung einen grossen Einfluss aus.
- c) Es treten beträchtliche Radialspannungen auf, die ein Mehrfaches der Radialspannungen der Kreisbogenscheibe ausmachen können.
- d) Beim Lastfall Biegung vergrössert sich die Innenrandtangentialspannung bei zunehmender Anisotropie, die maximale Radialspannung hingegen wird kleiner. Zunehmende Krümmung bewirkt beim Holz, also bei konstant angenommener Anisotropie und konstantem Zentriwinkel, zuerst ein Abnehmen der Innenrandspannung und nachher eine Vergrösserung. Die maximale Radialspannung nimmt stetig zu. (Dazu siehe Tafeln 23, 24)
- e) Der Lastfall zentrische Normalkraft im Firstquerschnitt geht aus der Tafel 27 für Fichtenholz bei verschiedener Krümmung und konstantem Zentriwinkel hervor. Bei starker Krümmung zeigt sich typisch die Spannungsverteilung der Kreisbogenscheibe. Geht die Krümmung zurück, dann läuft die Spannungsverteilung gegen die Verteilung am geraden Sattelträger. (Tafel 27)
- f) Keine auffallenden Besonderheiten ergeben sich bei reiner Querkraftbelastung im Firstquerschnitt. (Tafel 30)

Die Tafeln 25, 26, 28, 29 und 31 beinhalten Kurven für die praktische Spannungsbemessung. Es ist möglich, die massgebenden Parameter zur Spannungsbemessung von der Kreisbogenscheibe über den gekrümmten Sattelträger aus je einem Diagramm abzulesen.

zulesen. Auf Tafel 26 wird zudem der Parameter für die maximale Schubspannung am oberen Rand für reine Biegung angegeben.

#### 10.3. Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberen Rand

Der Lösungsansatz für die Scheibengleichung im kartesischen Koordinatensystem wurde ebenfalls in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil

ist die Lösung für den geraden Balken. Der zweite Teil wurde verwendet, um die Randbedingungen am oberen Rand näherungsweise mit der Methode der kleinsten Quadrate zu erfüllen. Genau erfüllt werden konnten die Randbedingungen am unteren Rand und an den Endquerschnitten. Am aufgesetzten Keil wurden ebenfalls drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert. Die Auswertung erfassste die in der Praxis gebräuchlichen Trägerformen für Brettschichtträger, wobei der Neigungswinkel des oberen Randes von 2,5 bis 20 Grad variiert wurde. Einzelne Trägerformen wurden mit verschiedenen Anisotropieverhältnissen durchgerechnet.

Es konnten folgende Beobachtungen gemacht werden:

- a) Die gewählte Berechnungsmethode erlaubt die Spannungsverteilungen in jedem Schnitt praktisch beliebig genau zu ermitteln.
- b) Die Spannungsverteilungen des geraden Sattelträgers weichen erheblich von den Spannungsverteilungen des geraden Balkens mit konstanter Querschnittshöhe ab.
- c) Es treten Querspannungen auf, die für die Bemessung verleimter Brettschichtträger massgebend werden.
- d) Tafeln 12, 13 zeigen die Längs- und Querspannungsverteilung im Firstquerschnitt bei reiner Biegung. Die Anisotropie des Holzes hat wiederum einen günstigen Einfluss auf die Quer- nicht aber auf die Längsspannungen. Zunehmende Neigung des oberen Randes bewirkt bei Holz eine Zunahme der grössten Längs- und Querspannung.
- e) In Tafel 15 sind für Momentenbelastung die unteren Randspannungen in verschiedenen Schnitten aufgetragen. Die Darstellung zeigt, dass im Abstand  $h_m$  von der Trägermitte der Parameter  $z_x$  konstant bleibt. Diese Tatsache erlaubt die Biegerandspannungen am unteren Rand auch an Pultdachträgern nachzuweisen.
- f) Bei zentrischer Normalkraft im Firstquerschnitt treten ebenfalls Querspannungen auf. (Tafel 16, 17). Aus denselben Tabellen können auch die Längsspannungsverteilungen bei wechselnder Anisotropie und Neigung des oberen Randes abgelesen werden.
- g) Das Maximum der Schubspannungsverteilung wächst bei zunehmender Neigung des oberen Randes. Dies geht aus Tafel 20 hervor. Die gleiche Tendenz zeigt sich bei zunehmender Anisotropie.

Zur Bemessung dienen die Tafeln 14, 15, 18, 19, 21.

## 11. Näherungslösungen für die praktische Anwendung

In Tabelle 1 sind für den gekrümmten Träger mit konstanter Querschnittshöhe die Koeffizienten für die Spannungsverteilungen über die Querschnittshöhe und die Maximalwerte der Spannungen für die 3 Lastfälle M, N und Q zusammengestellt. Dabei wurde von abweichen- den Näherungsfunktionen ausgegangen, da es vor allem darauf ankam, die Maximalwerte möglichst genau bestimmen zu können.

Tabelle 2 gibt die notwendigen Spannungskomponenten für die allge- meine Form des Sattelträgers im Firstquerschnitt wieder. Berücksichtigt wurden alle 3 Lastfälle.

Der Spannungsnachweis in einem Querschnitt mit einem Abstand größer  $h/2$  vom Firstquerschnitt kann für den Lastfall Biegung nach Tabelle 3 erfolgen. Für die anderen Belastungsfälle mußte aus Genauigkeits- gründen auf die Angabe von Näherungen verzichtet werden.

Für den speziellen Fall der reinen Biegung sind die Maximalwerte der Quer- und Längsspannung in Abhängigkeit von der Trägerform in Tabelle 4 zusammengestellt.

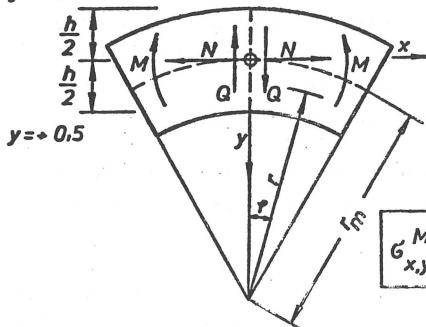
A

*Verlauf und Maximalwerte der Spannungen am orthotropen gekrümmten Träger mit konst. Höhe*

Tab.

1

$$\text{Anisotropie: } s = \sqrt{\frac{E_r}{E_t}} = 6; k = \sqrt{\frac{E_r}{G_r}} = 4.7; \mu_r = 0.3$$

 $y = -0.5$ 

$$\text{Krümmung: } \frac{1}{\beta}; \beta = \frac{r_m}{h} \text{ nach DIN 1052}$$

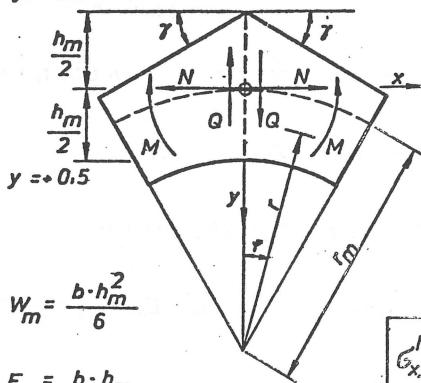
Vorzeichen: Zug (+) Druck (-)

Gültigkeit  $\beta \geq 2.0$ 

$$\sigma_{x,y}^M = \alpha \cdot \frac{M}{W}; \sigma_{x,y}^N = \alpha \cdot \frac{N}{F}; \tau_{xy}^Q = \alpha \cdot \frac{Q}{F}$$

$$\alpha = A + B \left( \frac{h}{r_m} \right)^2 + C \left( \frac{h}{r_m} \right)^4 + D \left( \frac{h}{r_m} \right)^6 + E \left( \frac{h}{r_m} \right)^8$$

Spannung	A	B	C	D	E
$\sigma_x^M(y)$	$2y$	$-0.167 + 2y^2$	$0.785y + 0.083y^2 + 1.375y^3$	0	0
$\sigma_x^N(y)$	1	$-6.48y + 43y^3$	$-0.83 - 2.463y^2 + 79y^4$	$0.863y$	0.208
$\sigma_y^M(y)$	0	$0.25 - 101y^2$	$0.368y + 0.108y^2 - 1.48y^3$	-0.046	0.023
$\sigma_y^N(y)$	0	$0.5 + 0.06y^2 - 2y^3 - 0.205y^4$	$-0.303 + 4.48y^2 - 13.35y^4$	$0.83y - 3.24y^3$	0.076
$\tau_{xy}^Q(y)$	$1.5 - 6y^2$	$3.13y + 0.5y^2 - 12.5y^3$	$-0.693 - 0.565y - 0.438y^2 - 2.23y^3$	0.346	0
$\sigma_x^M(-0.5)$	-1	0.333	-0.700	-0.150	0
$\sigma_x^N(-0.5)$	1	-2.135	4.258	-1.251	0
$\sigma_x^M(0.5)$	1	0.333	0.700	-0.150	0
$\sigma_x^N(0.5)$	1	2.135	4.128	-0.224	0
$\sigma_y^{max}$	0	0.250	0	-0.005	0
$\sigma_y^{min}$	0	-0.095 0.095	0	-0.523 0.880 -1.231	0.386
$\tau_{xy}^{max}$	1.5	0	-0.326	0.431	0
Beispiel: $\frac{1}{\beta} = 0.2 (\beta = 5)$					
$\sigma_x^M(-0.5) = M/W \cdot [-1 + 0.333 \cdot 0.2 - 0.7 \cdot 0.2^2 - 0.15 \cdot 0.2^3] = (M/W) \cdot 0.963$					

**B**
**Spannungswerte am orthotropen gekrümmten Sattelträger,  
Höhe variabel. Größtwerte für den Firstquerschnitt**
Tab.  
2 $y = -0.5$ 

$$\text{Anisotropie: } s = \sqrt{\frac{E_r}{E_t}} = 6; k = \sqrt{\frac{E_r}{G_{rt}}} = 4.7; \mu_r = 0.3$$

$$\text{Krümmung: } \frac{1}{\beta}; \beta = \frac{r_m}{h_m} \text{ nach DIN 1052}$$

Vorzeichen: Zug (+) Druck (-)

Gültigkeit:  $\beta \geq 2.5$ ;  $\gamma \leq 25^\circ$

Bezeichnungen:  $\sigma_x = \sigma_r$ ;  $\sigma_y = \sigma_r$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{rt}$

$$\sigma_{x,y}^M = \mathfrak{A} \cdot \frac{M}{W_m}; \sigma_{x,y}^N = \mathfrak{A} \cdot \frac{N}{F_m}; \tau_{xy}^Q = \mathfrak{A} \cdot \frac{Q}{F_m}$$

$$\mathfrak{A} = A + B \cdot \operatorname{tg} \gamma + C \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma + D \cdot \frac{h_m}{r_m} + E \cdot \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2 + F \cdot \frac{h_m}{r_m} \cdot \operatorname{tg} \gamma + G \cdot \frac{h_m}{r_m} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma + H \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \gamma + K \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma$$

Grenzfälle:  $\beta = \infty, \gamma > 0$ : gerader Sattelträger

$\beta > 0, \gamma = 0$ : gekrümmter Träger mit konstanter Höhe

$\beta = 0, \gamma = 0$ : gerader Träger mit konstanter Höhe

Spannung	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
$y = +0.5$										
$\sigma_x^M$	1	1.4	5.4	0.35	0.555	-8.0	0	8.25	-7.825	6.0
$\sigma_x^N$	$\tau$	-1.0	-11.0	2.20	3.85	5.0	3.75	-11.5	30.0	0
$y = -0.5$										
$\sigma_x^M$	-1	0	0	0.333	-0.70					
$\sigma_x^N$	1	0	0	-2.135	4.258					
$0.5 > y > -0.5$										
$\sigma_y^M_{max}$	0	0.2	0	0.25	0	-1.5	2.585	2.1	-4.0	0
$\sigma_x^N_{max}$	1	2.0	4.35	0.875	-0.675	-2.65	-14.0	-13.25	51.0	0
$\sigma_y^N_{min}$	0	-0.2	-0.34	-0.075	-0.2	0.29	-1.16	-0.083	2.49	0
$\tau_{xy}^Q_{max}$	1.5	2.0	2.28	-0.057	0	-12.5	13.83	14.25	-23.0	0

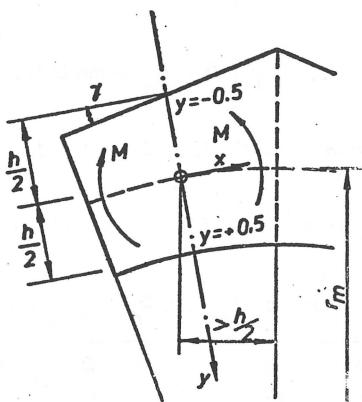
Beispiel:  $\frac{1}{\beta} = 0.2; \gamma = 10^\circ; \operatorname{tg} 10^\circ = 0.1763$

$$\sigma_y^M_{max} = \frac{M}{W_m} [0.2 \cdot 0.1763 + 0.25 \cdot 0.2 \cdot 1.5 \cdot 0.2 \cdot 0.1763 + 2.585 \cdot 0.2 \cdot 0.1763^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2^2 \cdot 0.1763 - 4 \cdot 0.2^2 \cdot 0.1763^2] - 0.058 \frac{M}{W_m}$$

C

**Spannungswerte am orthotropen gekrümmten Sattelträger,  
Höhe variabel, Spannungen am beliebigen Querschnitt**

Tab.  
3



$$\text{Anisotropie: } s = \sqrt{\frac{E_f}{E_r}} = 6; k = \sqrt{\frac{E_f}{G_{rp}}} = 4.7; \mu_f = 0.3$$

$$\text{Krümmung: } \frac{1}{\beta}; \beta = \frac{r_m}{h} \text{ nach DIN 1052}$$

Vorzeichen: Zug (+) Druck (-)

Gültigkeit:  $\beta \geq 2.5; \gamma \leq 15^\circ$

Bezeichnungen:  $E_x = E_f; G_y = G_r; T_{xy} = T_{rf}$

Grenzfälle:

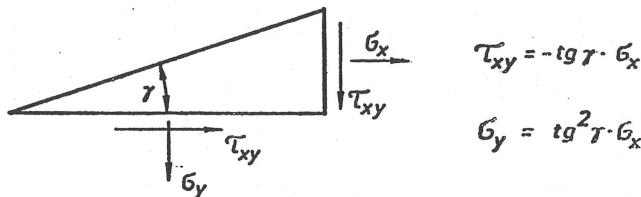
$\beta = \infty \quad \gamma > 0$ : gerader Sattelträger

$\beta > 0 \quad \gamma = 0$ : gekrümmter Träger mit konst. Höhe

$\beta = 0 \quad \gamma = 0$ : gerader Träger mit konst. Höhe

$$G_x^M = \partial z \cdot \frac{M}{W} \quad W = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Spannungen am oberen geneigten Rand



$$J = A + B \cdot \operatorname{tg} \gamma + C \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma + D \cdot \frac{h}{r_m} + E \cdot \left( \frac{h}{r_m} \right)^2 + F \cdot \frac{h}{r_m} \cdot \operatorname{tg} \gamma + G \cdot \frac{h}{r_m} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma + H \left( \frac{h}{r_m} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} \gamma + I \left( \frac{h}{r_m} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma$$

Spannung	A	B	C	D	E	F	G	H	J
$y = +0.5$ $G_x^M$	1	0.370	4.170	0.350	0.555	-6.050	2.850	11.000	14.500
$y = -0.5$ $G_x^M$	-1	1.830	0	0.333	-0.713	-1.805	0	0	0

Beispiel:  $\frac{1}{\beta} = 0.2 \quad \gamma = 5^\circ \quad \operatorname{tg} \gamma = 0.0875$

$$G_y(-0.5) = \frac{M}{W} \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot \left[ -1.830 \cdot 0.0875 + 0.333 \cdot 0.2 - 0.713 \cdot 0.2^2 - 1.805 \cdot 0.2 \cdot 0.0875 \right] = -0.833 \frac{M}{W} \operatorname{tg}^2 \gamma$$

Tabelle 4

$$\sigma_{ZL} = \chi_q \cdot \frac{M}{W}$$

$$\sigma_B = \chi_l \cdot \frac{M}{W}$$

$$\text{mit } \chi_q = A_q + B_q \left( \frac{h_m}{r_m} \right) + C_q \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2$$

$$A_q = 0,2 \tan \gamma$$

$$B_q = 0,25 - 1,5 \tan \gamma + 2,585 \tan^2 \gamma$$

$$C_q = 2,1 \tan \gamma - 4 \tan^2 \gamma$$

$$\text{und } \chi_l = A_l + B_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right) + C_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^2 + D_l \left( \frac{h_m}{r_m} \right)^3$$

$$A_l = 1 + 1,4 \tan \gamma + 5,4 \tan^2 \gamma$$

$$B_l = 0,35 - 8 \tan \gamma$$

$$C_l = 0,555 + 8,25 \tan \gamma + 7,825 \tan^2 \gamma$$

$$D_l = 6 \tan^2 \gamma$$

$\gamma = 0$  gerader Träger  
 $\frac{h_m}{r_m} = 0$

$\gamma = 0$  konzentrisch gekrümmter Träger ( $h = \text{const.}$ )  
 $\frac{h_m}{r_m} \neq 0$

$\gamma \neq 0$  Sattelträger mit geradem Untergurt  
 $\frac{h_m}{r_m} = 0$

$\gamma \neq 0$  Sattelträger mit gekrümmtem Untergurt  
 $\frac{h_m}{r_m} \neq 0$

## Quer- und Längsspannungen bei Biegeträgern