

# **Einfluss von räumlich korrelierten, zufallsverteilten Imperfektionen auf das Beulverhalten dünnwandiger Tragwerke**

**Marc Fina, Werner Wagner**

*Institut für Baustatik, Karlsruher Institut für Technologie*

**Zusammenfassung:** Bei dünnen Tragstrukturen wird das Stabilitätsversagen oft maßgebend. Dabei haben materielle und geometrische Imperfektionen einen sehr großen Einfluss auf die kritische Stabilitätslast. Für eine Stabilitätsuntersuchung mit der Finite-Elemente-Methode müssen diese Imperfektionen im Modell möglichst realitätsnah abgebildet werden. Die Ausprägung einer Imperfektion ist meist unbekannt und kann sich infolge der Herstellung bei jedem Bauteil ändern. Ersatzimperfektionen führen meist zu einer unwirtschaftlichen Bemessung der Struktur. Eine Idee ist die Darstellung der streuenden Imperfektionen mithilfe räumlich korrelierter Zufallsfelder. Dabei wird die Form eines Zufallsfeldes durch eine Korrelationsfunktion gesteuert. Ziel ist es mit einer Monte-Carlo-Simulation eine zutreffende Aussage über die kritische Last machen zu können.

## **1 Stabilitätsverhalten imperfekter Tragwerke**

Die Errungenschaften der Materialforschung haben dazu geführt, dass durch die höheren Festigkeiten der Materialien immer schlankere Bauweisen möglich sind. Allerdings wird bei dünnen Tragstrukturen unter Druckbeanspruchung das Stabilitätsversagen bei einer Bemessung oft maßgebend. Imperfektionen spielen dabei eine sehr große Rolle. Neben den geometrischen Imperfektionen wie zum Beispiel Abweichungen zur Nenngeometrie gibt es auch materielle Imperfektionen, die unter anderem Materialfehler und -streuungen beschreiben. Zur Form und Größe solcher Imperfektionen können keine klaren Angaben gemacht werden. Nach Eurocode 3 müssen im Stahlbau geometrische und materielle Imperfektionen durch Aufbringen einer kritischen Eigenform mit einer festgelegten Amplitude im Finite-Elemente Modell berücksichtigt werden. Bei Faserverbundstrukturen wird ein semi-empirischer Ansatz verfolgt [1]. Hier wird die Stabilitätslast der perfekten Struktur durch einen sogenannten „Knock-Down-Factor“ herabgesetzt, welcher in aufwändigen Experimenten ermittelt wird. Beide Ansätze können sehr unwirtschaftlich sein. Die nachfolgende Abbildung (Abb. 1) zeigt den Einfluss solcher Imperfektionen auf das Tragverhalten einer Platte und einer Zylinderschale unter Axialdruck. Bei einer Plattenstruktur kann nach Erreichen des Stabilitätspunk-

tes durch die zweiachsige Tragwirkung die Last weiter gesteigert werden. Man spricht hier von einem gutartigen Verhalten. Infolge von Imperfektionen entfällt der Verzweigungspunkt. Die Last-Verschiebungskurve der imperfekten Struktur beschreibt dann ein Spannungsproblem und liegt unter dem stabilen Pfad. Bei einem imperfekten Kreiszylinder ist ein drastischer Stabilitätsabfall gegenüber der perfekten Struktur zu beobachten. Man spricht in diesem Falle auch von einem bösartigen Verhalten. Durch die Mehrdeutigkeit in der Last-Verschiebungskurve ist eine Pfadverfolgung meist problematisch. In der Realität ist der Beulvorgang zeitabhängig und läuft sehr schnell ab. Deshalb sollte hier auch die Dynamik berücksichtigt werden. Auf die Anwendung eines Zeitintegrationsverfahrens wird in dieser Arbeit

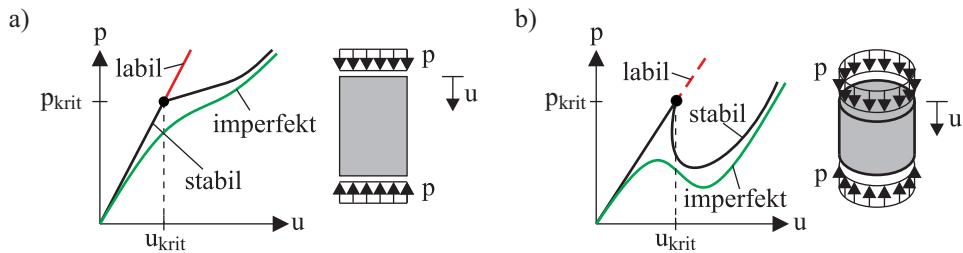


Abbildung 1: Stabilitätsverhalten einer Platte a) und eines Zylinders b) mit Imperfektionen.

jedoch verzichtet, um bei der Monte-Carlo-Simulation Rechenzeit zu sparen. Die Stabilitätslast einer „perfekten“ Struktur kann mit der linearen Beulanalyse bestimmt werden.

$$[\mathbf{K}_{\text{lin}} + \Lambda \mathbf{K}_{\text{nili}}] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Dabei werden alle Anteile der tangentialen Steifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{K}_{\text{nili}} = \mathbf{K}_T - \mathbf{K}_{\text{lin}} = \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_\sigma \quad (2)$$

berücksichtigt. Im Falle eines linearen Vorbeulverhaltens ist der Eigenwert  $\Lambda$  ein Laststeigungsfaktor und die kritische Last kann mit der linearen Beziehung

$$\mathbf{P}_{\text{krit}} = \Lambda \mathbf{P} \quad (3)$$

ermittelt werden. Für die Auswertung der Beullasten werden zunächst die ideellen Lasten bestimmt. Danach werden Imperfektionen aufgebracht. Bei einer Plattenstruktur kann die Last an der Stelle der kritischen Verschiebung ausgewertet werden. Für das Beispiel eines Kreiszylinders wird die statische Rechnung am Stabilitätspunkt abgebrochen.

## 2 Darstellung von räumlich korrelierten Imperfektionen durch Zufallsfelder

### 2.1 Grundlagen der Zufallsfelder

Ein Zufallsfeld  $H(\mathbf{x}, \theta)$  beschreibt ein Skalarfeld, indem jedem Ort  $\mathbf{x} \in \Omega$  eine Zufallsvariable zugeordnet wird, siehe auch [2] und [3]. Das heißt für ein gegebenes  $\mathbf{x}_0$  ist  $H(\mathbf{x}_0, \theta)$  eine Zufallsvariable und ein Zufallsfeld stellt mit

$$\{H(\mathbf{x}, \theta) : \mathbf{x} \in \Omega, \theta \in \Theta\} \quad (4)$$

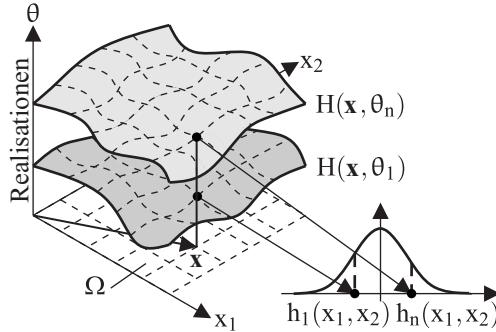


Abbildung 2: Realisierungen eines 2D Gauß-Zufallsfeldes.

eine Sammlung von Zufallsvariablen dar.  $\theta$  beschreibt die möglichen Ergebnisse aus der Ergebnismenge  $\Theta$  eines Zufallsexperiments. So kann eine Realisation eines Zufallsfeldes für ein festes Ergebnis  $\theta_0$  mit

$$h_0(\mathbf{x}) := H(\mathbf{x}, \theta_0) \quad (5)$$

angegeben werden. Bei einem Gauß-Zufallsfeld ist die Verteilungsfunktion an jedem Ort eine Gauß-Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ .

$$H_0(\theta) := H(\mathbf{x}_0, \theta) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (6)$$

Ein Gauß-normalverteiltes Zufallsfeld kann durch die Mittelwertfunktion

$$\mu(\mathbf{x}) = E[H(\mathbf{x})] \quad (7)$$

und der Kovarianz zwischen zwei Zufallsvariablen des Feldes mit den Ortsvektoren  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{x}_j$  zu

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = E[(H(\mathbf{x}_i) - \mu(\mathbf{x}_i))(H(\mathbf{x}_j) - \mu(\mathbf{x}_j))] \quad (8)$$

vollständig beschrieben werden. Mit der Kovarianzfunktion wird die Korrelation bzw. der Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen angegeben und damit auch die Form eines Zufallsfeldes bzw. einer Imperfektion gesteuert.

## 2.2 Diskretisierung eines Zufallsfeldes mit der Karhunen-Loëve-Transformation

Um Unsicherheiten in einem Finite-Elemente-Modell abbilden zu können, werden die Zufallsfelder an einer endlichen Anzahl von Stützstellen  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N]^T$ , den FE-Knoten oder den Gaußpunkten, dargestellt. Neben der Ortsdiskretisierung ist auch eine stochastische Diskretisierung der Zufallsvariable erforderlich.

$$H(\mathbf{x}) \xrightarrow{\text{Diskretisierung}} \hat{H}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Hierfür gibt es eine Vielzahl an Möglichkeiten, siehe auch [3]. Eine häufig verwendete Methode ist die Karhunen-Loëve-Transformation (KLT), die in diesem Zusammenhang in [4]

eingeführt wurde. Dabei handelt es sich um eine Reihenentwicklung, bei der sich das diskrete Zufallsfeld als Summe  $M$  unabhängiger Basisvektoren  $\varphi_i(\mathbf{x})$  und den Zufallsvariablen  $b_i(\theta)$  zusammensetzt.

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^M b_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (10)$$

Bei der KLT erhält man die Basisvektoren aus dem Eigenwertproblem der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C} \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \cdots & C(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \quad (11)$$

mit den Eigenvektoren  $\varphi_i$  und den Eigenwerten  $\lambda_i$ . Da die Kovarianzfunktion symmetrisch und positiv ist, ist auch die Kovarianzmatrix symmetrisch und positiv definit. Zur Darstellung von Imperfektionen wird hier eine Kovarianzmatrix vorgegeben. So kann die Form der Imperfektion simuliert werden. Es wird hier ein exponentieller Verlauf gewählt.

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left[ -\frac{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{l_c} \right] = \exp \left[ -\frac{\sqrt{(x_{1i} - x_{1j})^2 + (x_{2i} - x_{2j})^2}}{l_c} \right] \quad (12)$$

Dabei ist  $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  der Abstand zwischen den FE-Knoten oder den Gaußpunkten und  $l_c$  die sogenannte Korrelationslänge. Mit der Korrelationslänge kann der Verlauf der Exponentialfunktion gesteuert werden. Für  $l_c \rightarrow \infty$  oder für  $d(i, j) \rightarrow 0$  konvergiert die Exponentialfunktion gegen den Wert 1. Damit besteht ein maximaler Zusammenhang (Korrelation) zwischen den beiden Punkten  $i$  und  $j$ . Dagegen beeinflussen sich zwei Punkte mit sehr großem Abstand kaum. Die folgende Abbildung (Abb. 3) zeigt den Effekt an einer quadratischen Struktur mit  $8 \times 8$  Knotenpunkten. Die Zufallsvariablen  $b_i(\theta)$  sind unkorreliert, mittelwertfrei aber nicht

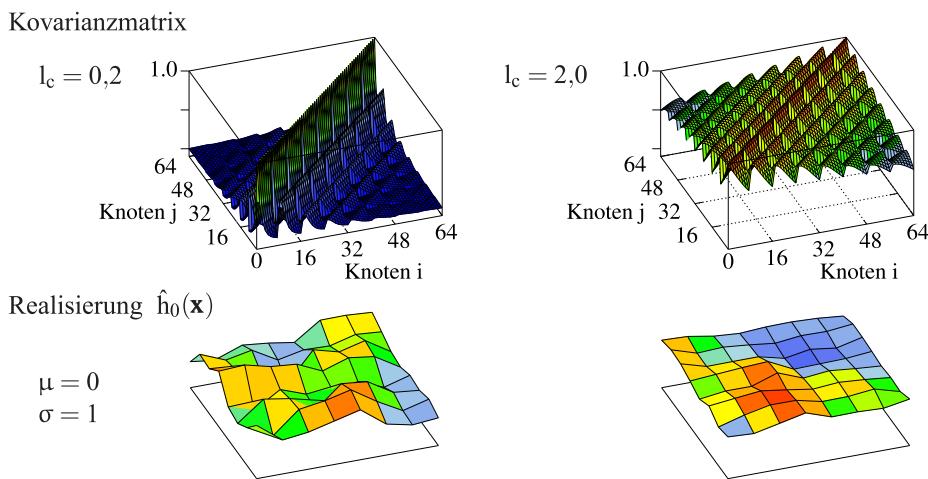


Abbildung 3: Vorgegebene Kovarianzmatrix mit zugehöriger Realisierung des 2D-Zufallsfeldes für ein kleiner (links) und großer (rechts) Korrelationslänge.

standardnormalverteilt. Zusätzlich sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  auch die Varianz  $\sigma_b^2$  der Zufallsvariablen und mit dem Zusammenhang

$$\xi_i(\theta) = \frac{b_i(\theta) - \mu_b}{\sigma_b} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (13)$$

können die Zufallsvariablen transformiert werden. So erhält man die bekannte Form des diskreten Zufallsfeldes zu

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad . \quad (14)$$

Durch Vorgabe eines Mittelwerts  $\mu(\mathbf{x})$  und einer Standardabweichung  $\sigma$  kann ein beliebiges Gauß-normalverteiltes Feld beschrieben werden.

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sigma \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} \xi_i(\theta) \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (15)$$

Da die Stützstellen endlich sind, entspricht der Mittelwert nicht dem vorgegebenen und die Realisation eines Zufallsfeldes sollte im Falle von geometrischen Imperfektionen mit

$$\hat{h}_0(\mathbf{x}) = \hat{h}_0(\mathbf{x}) - \bar{\mu}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \bar{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{h}_0(\mathbf{x}_k) \quad (16)$$

bereinigt werden.

### 3 Numerische Beispiele

Zur Durchführung einer Monte-Carlo-Simulation mit dem Finite-Elemente-Programm FEAP [6] wurde eine Schnittstelle zu MATLAB [7] entwickelt. Dabei kann zunächst das FE-Modell in FEAP eingegeben werden, welches dann durch das entwickelte MATLAB-Programm importiert wird. Das einzelne Zufallsfeld wird in MATLAB mit der Karhunen-Loëve-Transformation erzeugt. Bei geometrischen Imperfektionen wird das Feld als Knotenverschiebungen an FEAP weitergegeben. Die materiellen Imperfektionen werden als Steifigkeiten auf Elementebene in FEAP eingelesen und entsprechend den Gaußpunkten zugeordnet. Die Durchführung von mehreren Rechnungen im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation ist durch eine Schleife über FEAP im Batchbetrieb möglich. Das Post-Processing der Stochastik wie z.B. die Verteilung der Beullasten wird dann wieder mit MATLAB durchgeführt. Für die numerischen Stabilitätsuntersuchungen dünner Tragstrukturen eignet sich das nichtlineare 4-Knoten Schalenelement nach [5] mit der ANS-Methode gegen Schub-Locking. Mit diesem Element können auch geschichtete Materialien berechnet werden. Die Materialparameter für ein transversal isotropes Stoffgesetz für die Platte und den Zylinder aus Faserverbundmaterial sind in (Tab. 1) aufgelistet. Die Platte in (Abb. 4), bestehend aus vier Schichten, ist mit  $20 \times 20$  Elementen diskretisiert. Es wurden 1000 Realisationen pro Korrelationslänge durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass man eine größere Streuung erhält, wenn alle Materialparameter variiert werden (Abb. 5). Je nach Belastung eines Tragwerks sollte daher darauf geachtet werden für welche Parameter die Zufallsfelder erzeugt werden müssen. Für die materiellen Imperfektionen beträgt der Abfall der Beullast ca. 10%. Dabei kann auch eine

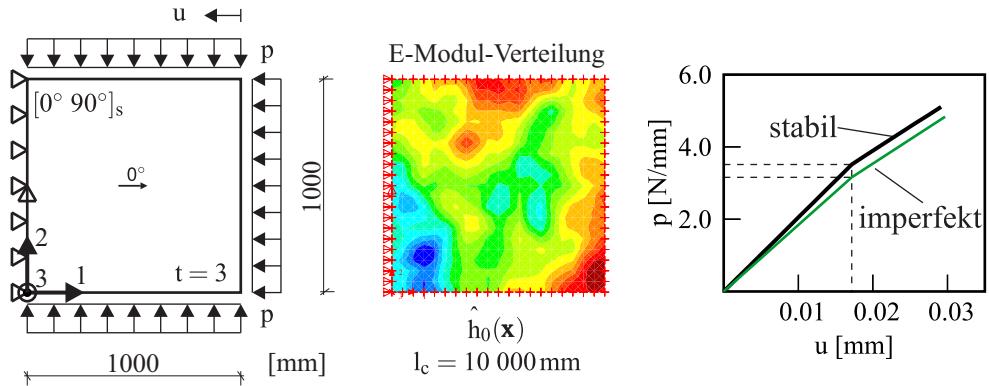


Abbildung 4: Platte aus Faserverbundmaterial, stochastischer E-Modul-Verteilung und Last-Verschiebungskurve.

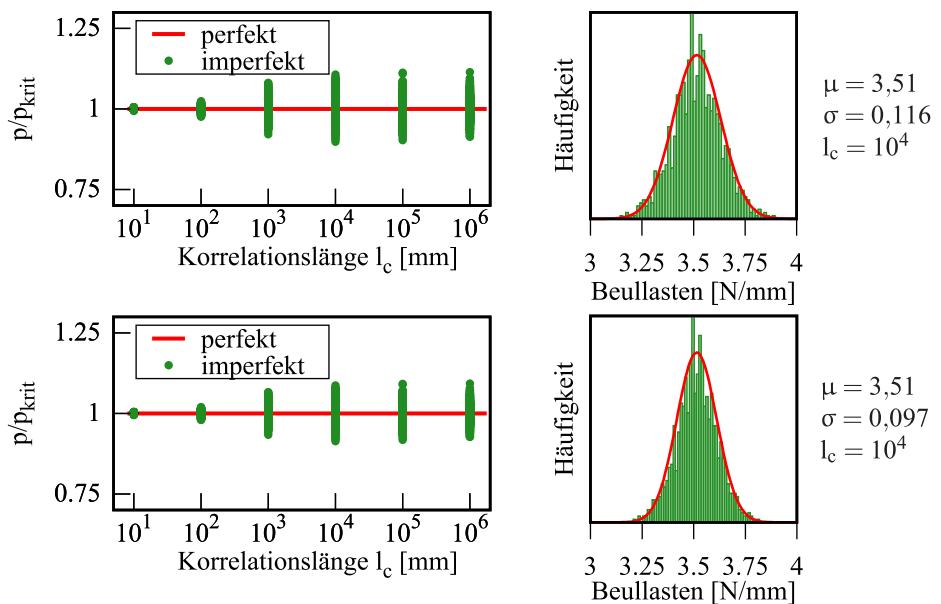


Abbildung 5: Normierte Beullasten der Platte unter Variation aller Materialparameter (oben) und nur der Variation von  $E_{11}$  (unten).

höhere Last bei der kritischen Verschiebung  $u_{\text{krit}}$  erreicht werden. Dies ist beispielsweise im Falle einer „zufällig“ höheren Steifigkeit denkbar. Außerdem besteht eine vollständige Korrelation zwischen den einzelnen Schichten und den Materialparametern, d.h. die Zufallsfelder besitzen die gleiche Ausprägung. Auch wenn die Materialstreuungen einen kleineren Einfluss auf die Beullast haben als die geometrischen Imperfektionen, sollten sie dennoch berücksichtigt werden. Der untersuchte Zylinder (siehe Abb. 6) ist mit  $72 \times 24$  Elementen diskretisiert.

Tabelle 1: Materialparameter für die Platte und den Zylinder aus [8].

	$E_1$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$E_2$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$v_{12}$ [-]	$G_{12}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$G_{23}$ [N/mm <sup>2</sup> ]
$\mu$	125774	10030	0,271	5555	5555
$\sigma$	3785,8	483,5	0,039	762,7	762,7

Auf Grundlage der Messergebnisse in [9] sind die geometrischen Imperfektionen auf eine Amplitude von 1,5 mm skaliert. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation (siehe Abb. 7) liegen zwischen der perfekten Beullast und der empirischen Bemessungslast nach [1]. Der Abfall der kritischen Lasten kann infolge geometrischer Imperfektionen über 40% betragen.

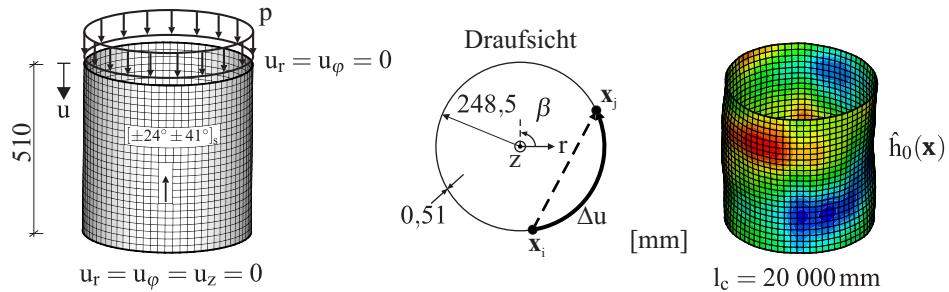


Abbildung 6: System des Zylinders Z7 nach [9] und eine stochastisch verteilte geometrische Imperfektion.

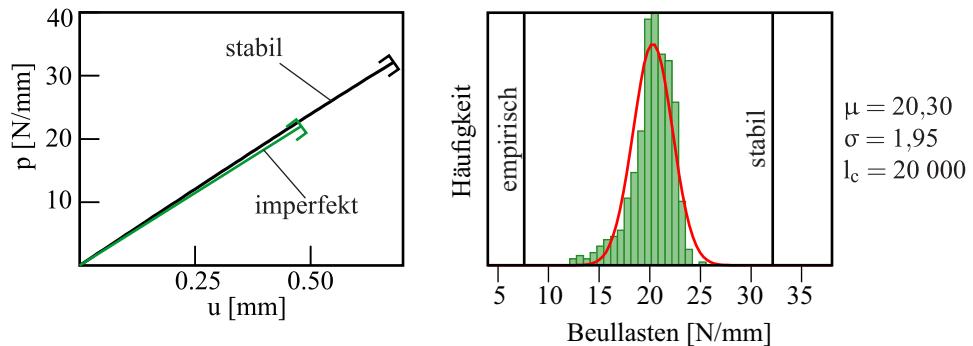


Abbildung 7: Last-Verschiebungskurve und Histogramm der Beullasten (500 Realisationen) für den Zylinder.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation zeigt eine gute Übereinstimmung zu den Versuchsergebnissen. Allerdings bleibt die Wahl der stochastischen Größen ein Problem. Es muss ein Mittelwert und eine Standardabweichung für das Zufallsfeld angegeben werden. Bereits kleine Änderungen der stochastischen Größen können zu unterschiedlichen Verteilungen der Beullasten führen. Die Wahl einer geeigneten Korrelationslänge zur Bestimmung der Form einer Imperfektion bleibt ebenso offen. Eine mögliche Abhilfe bietet die Fuzzy-Tragwerksanalyse. Hier kann die Korrelationslänge als Fuzzy-Eingangsgröße gewählt werden. Als nächster Schritt sollen die Unschärfe miteinbezogen werden.

## LITERATUR

- [1] Seide, P.; Weingarten, V.I.  
Buckling of thin-walled circular cylinders  
NASA/SP-8007. Space Vehicle Design Criteria (Structures), Washington D.C., 1965
- [2] Vanmarcke, E.  
Random Fields. Analysis and Synthesis  
World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2010
- [3] Sudret, B.; Kiureghian, A.  
Stochastic Finite Element Methods and Reliability - A State-of-the-Art Report  
Department of Civil Environmental Engineering Univ. of California, Berkeley, 2000
- [4] Zhung, J.; Ellingwood, B.  
Orthogonal Series Expansion of Random Fields in Reliability Analysis  
J. Engs. Mech., Nr. 120 (1994), S. 2660-2677
- [5] Wagner, W.; Gruttmann F.  
A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element  
International Journal for Numerical Methods in Engineering, Nr. 64 (2005), S. 635-666
- [6] Taylor, R.  
FEAP, <http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/>
- [7] The Mathworks, Inc.  
MATLAB, Version R2016b, <http://www.mathworks.com>
- [8] Degenhardt, R.; Kling, A.; Klein, H.; Hillger, W.; Goetting, H. C.; Zimmermann, R.; Rohwer, K.; Gleiter, A.  
Experiments on buckling and postbuckling of thin-walled CFRP structures using advanced measurement systems  
International Journal of Structural Stability and Dynamics Nr. 7-02 (2007), S. 337-358
- [9] Kriegesmann, B.; Rolfes, R.; Hühne, C.; Teßmer, J.; Arbocz, J.  
Probabilistic design of axial compressed composite cylinders with geometric and loading imperfections.  
International Journal of Structural Stability and Dynamics, Nr. 10, (2010), S. 623-644