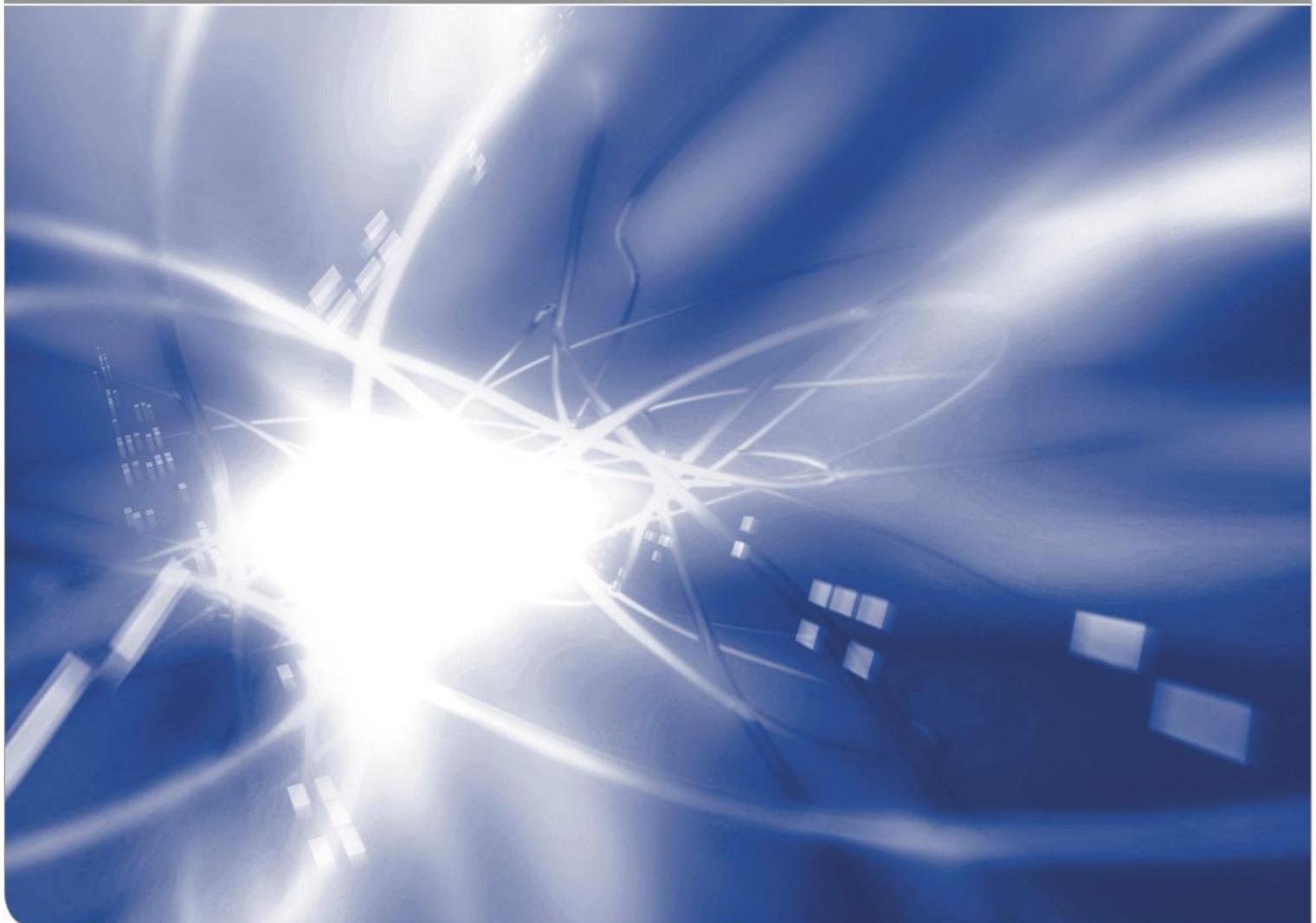


Analyse der Veränderungen des Wasserhaushalts der Erde mittels GRACE-Satellitendaten

Analysis of changes in the Earth's water balance using GRACE satellite data

Ivana Hansmann, Kurt Seitz und Hansjörg Kutterer

KIT SCIENTIFIC WORKING PAPERS 261



Geodetic Institute, Karlsruhe Institute of Technology,
Englerstraße 7, D-76128 Karlsruhe, Germany

Geodetic Institute (GIK)
Englerstraße 7
76128 Karlsruhe
www.gik.kit.edu

Impressum

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
www.kit.edu



This document is licensed under the Creative Commons Attribution – Share Alike 4.0 International License (CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>

2025

ISSN: 2194-1629

Contents

Abstract	7
1 Einleitung	8
2 Darstellung der mathematischen Grundlagen	10
2.1 Schwerepotential der Erde	10
2.1.1 Herleitung des Gravitationspotentials	11
2.2 Darstellung des Gravitationspotentials	13
2.2.1 Darstellung der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials	13
2.2.2 Synthese des Gravitationspotentials	14
2.2.3 Gradvarianzen und Fehlergradvarianzen	14
2.3 Geoidundulation	16
2.4 Schwerestörung	17
2.4.1 Darstellung der Schwerestörung	17
2.4.2 Darstellung der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung	18
2.5 Schwereanomalie	18
2.5.1 Darstellung der Schwereanomalie	19
2.5.2 Darstellung der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie	20
2.6 Massendiskretisierung mittels Tesseroiden	21
2.6.1 Tesseroidansatz für das Gravitationspotential	21
2.6.2 Tesseroidansatz für die Schwerestörung	23
2.6.3 Tesseroidansatz für die Schwereanomalie	24
2.7 TWS aus dem inversen Tesseroidansatz	24
3 Auswahl und Vorbereitung der Daten	26
3.1 Herkunft und Verarbeitung der GRACE-Daten	26
3.2 Datenauswahl und Untersuchungszeitraum	26
3.3 Anwendung des DDK-Filters	27
4 Berechnungsablauf	28
5 Ergebnisse	30
5.1 Ergebnisse des Gravitationspotentials	30
5.2 Ergebnisse der Geoidundulation	34
5.3 Ergebnisse der Schwerestörung	36
5.4 Ergebnisse der Schwereanomalie	40
5.5 Untersuchung der Breitenabhängigkeit der Varianzfortpflanzung	42
5.6 Terrestrial Water Storage (TWS)	44
5.6.1 TWS aus dem Gravitationspotential	44
5.6.2 TWS aus der Schwerestörung	48
5.6.3 TWS aus der Schwereanomalie	52
5.7 Vergleich TWS-Werte und Residuen aus der Ausgleichung	55
5.8 Diskussion der Ergebnisse	59
6 Zusammenfassung und Ausblick	60
Literaturverzeichnis	64
Anhang	65

A Mathematische Herleitungen	65
A.1 Details zum Separationsansatz	65
A.2 Alle Koeffizienten (K, L, J) erster und zweiter Ordnung	67
B Tabellen zu statistischen Werten der Monate im Jahr 2023	69
B.1 Gravitationspotential und Varianzfortpflanzung	69
B.2 Geoidundulation und Varianzfortpflanzung	70
B.3 Schwerestörung und Varianzfortpflanzung	71
B.4 Schwereanomalie und Varianzfortpflanzung	72
B.5 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Potential	73
B.6 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Schwerestörung	74
B.7 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Schwereanomalie	76
C Graphiken der Monate im Jahr 2023	78
C.1 Genauigkeiten der Koeffizienten aller Monate 2023	78
C.2 Verhältnisse der Genauigkeiten aller Monate 2023	80
C.3 Gravitationspotential und Varianzfortpflanzung	82
C.4 Geoidundulation und Varianzfortpflanzung	86
C.5 Schwerestörung und Varianzfortpflanzung	90
C.6 Schwereanomalie und Varianzfortpflanzung	94
C.7 Graphiken Gravitationspotential aus Synthese und Inversion	98
C.8 Graphiken TWS aus Gravitationspotential	103
C.9 Graphiken der Schwerestörung aus dem inversen Tesseroidansatz	105
C.10 Graphiken TWS aus Schwerestörung	110
C.11 Graphiken der Schwereanomalie aus dem inversen Tesseroidansatz	112
C.12 Graphiken TWS aus Schwereanomalie	117
Abbildungsverzeichnis	119
Tabellenverzeichnis	126
Akronyme	128

Analyse der Veränderungen des Wasserhaushalts der Erde mittels GRACE-Satellitendaten

Ivana Hansmann, Kurt Seitz and Hansjörg Kutterer

Kontakt:

Kurt Seitz

E-Mail: kurt.seitz@kit.edu

Geodätisches Institut, Karlsruhe Institute für Technologie, Englerstraße 7, D-76128 Karlsruhe, Germany

Abstract

The Earth system is subject to various time-varying changes. Those that are associated with significant mass shifts can be investigated by satellite-based monitoring of the Earth's gravitational field. Satellite-based geodetic sensors open up the possibility of recording both temporal and spatial variations in mass. Monthly solutions for the Earth's time-varying gravitational potential are generated from these data, the long- to medium-wave components of which are determined very precisely. Gravity field models based on the Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE, GRACE-FO) mission are provided as monthly solutions by various evaluation centers in the form of spherical function models. In this scientific paper, the solutions of the GFZ (Helmholtz Center Potsdam - German Research Center for Geosciences) are to be used. They can be obtained in Release 6 and the DDK5 filter from the website of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM) <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>.

In the current implementation of the evaluation routines at the GIK, potential values are synthesized as observation quantities in order to obtain the TWS from them using an inverse tesseroid approach. In this contribution the implementation of further functionals are synthesized as (pseudo-) observations from the monthly solutions. The radial derivative of the potential (negative gravity perturbation) and the spherically approximated gravity anomaly were implemented. The monthly solutions from 2023 were used on a global grid in order to calculate the total water storage change per month. The results for different functionals were discussed.

Keywords GRACE · Total Water Storage (TWS) · Tesseroid · Gravitationspotential · Schwerestörung · Schwereanomalie



1 Einleitung

Die Veränderung des Wasserhaushalts der Erde ist eine der zentralen Herausforderungen in der heutigen Geowissenschaft, da sie tiefgreifende Auswirkungen auf ökologische Systeme, Klima und die Verfügbarkeit von Wasserressourcen hat. Durch den Klimawandel und die zunehmende Nutzung natürlicher Wasserreserven ändern sich die Massenverteilungen in den Wasserspeichern der Erde, wie in Ozeanen, Gletschern, Grundwasser und oberirdischen Wassersystemen (Haustein and Rayer, 2024). Die Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE)-Mission und die nachfolgende Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE-FO)-Mission ermöglichen es, Massenverlagerungen auf der Erde durch Beobachtung von Änderungen im Schwerkraftfeld zu analysieren (Dahle et al., 2019a). Seit ihrem Beginn im Jahr 2002 ermöglichen die GRACE-Missionen eine nahezu vollständige globale Abdeckung von Schwerkraftdaten, wodurch signifikante Verbesserungen im Verständnis der langwelligen Anteile des Schwerkraftfeldes der Erde erzielt werden (Kiamehr, 2008). Diese Messungen bieten wertvolle Einblicke in die Verteilung von Wassermassen und deren Veränderungen über Zeit und Raum. Die Grundlage der Missionen ist ein Satellitenpaar, das durch präzise Messung von Abstandsveränderungen zwischen den beiden Satelliten funktionale Zusammenhänge liefert. Diese Daten werden genutzt, um das Erdgeschwurfeld mithilfe von Kugelfunktionskoeffizienten zu modellieren (NASA, 2025). Die Modellierung beschreibt sowohl die räumliche Struktur als auch die zeitliche Variation des Schwerkraftfeldes. Die Webseite des International Centre for Global Earth Models (ICGEM) stellt diese Kugelfunktionskoeffizienten bereit und bietet somit eine wertvolle Grundlage für weiterführende Analysen. Diese Arbeit verwendet die Schwerkraftlösungen des Helmholtz-Zentrum Potsdam – Deutsches GeoForschungsZentrum (GFZ). Das GFZ ist eines der führenden Analysezentren für GRACE-Daten. Daneben bieten auch das Center for Space Research an der University of Texas sowie das Jet Propulsion Laboratory (JPL) der National Aeronautics and Space Administration (NASA) vergleichbare Datenprodukte an. Im Fokus dieser Arbeit stehen jedoch die GFZ-Daten, die durch zusätzliche Filter wie den Dekorrelationsfilter (DDK-Filter) optimiert werden können. Die DDK-Filter bieten verschiedene Stufen der Glättung und Dekorrelation und sind für alle Modelle verfügbar (Ince et al., 2019). Eine detaillierte Erklärung zu den DDK-Filtern sowie ihrer Anwendung findet sich in Unterabschnitt 3.3.

Der inverse Tesseroidansatz ist eine Methode zur Analyse von Schwerkraftänderungen, die auf den von den GRACE-Satelliten gemessenen Daten basiert. Dabei werden Massenanomalien durch kleine Volumeneinheiten der Erde, sogenannte Tesseroida, modelliert (Boergens et al., 2022). Diese Methode ermöglicht präzise Aussagen über den terrestrischen Wasserspeicher (Terrestrial Water Storage, TWS) und dessen Einfluss auf den globalen Wasserhaushalt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird genauer auf diese Methode eingegangen, um ihre Funktionsweise und Anwendung im Detail zu erläutern.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Weiterentwicklung der Auswerteroutinen zur Analyse von Massenverlagerungen. Neben dem Gravitationspotential werden zusätzlich auch die Schwerestörung und die Schwerkraftanomalie untersucht, wobei monatliche Ergebnisse dieser Größen berechnet und grafisch dargestellt werden. Zudem wird der inverse Tesseroidansatz auf das Gravitationspotential und erstmalig auf die genannten Funktionale als Pseudobeobachtungen angewendet, um die Modellierung von Massenverteilungen zu präzisieren und differenziertere Analysen der Wasserhaushaltsveränderungen zu ermöglichen. Die von den GRACE-Satelliten gemessenen Daten werden dazu verarbeitet, um Kugelfunktionskoeffizienten zu berechnen, die als Parameter der Kugelfunktionsdarstellung zur Beschreibung des Gravitationspotentials dienen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Abschnitt 2 behandelt die mathematischen Grundlagen, einschließlich der Herleitung der mathematischen Darstellung des Gravitationspotentials. Zudem wird die Methodik des inversen Tesseroidansatzes vorgestellt. Anschließend wird in Abschnitt 3 die Auswahl und Vorbereitung der GRACE-Daten beschrieben, einschließlich des Untersuchungszeitraums und der Anwendung des DDK-Filters. In Abschnitt 4 werden die Berechnungsschritte zur Modellierung von Massenverlagerungen auf der Erde erläutert. Abschnitt 5 widmet sich den graphischen und statistischen Ergebnissen des Gravitationspotentials, seiner Funktionale und des TWS mit anschließender Diskussion. Im letzten Abschnitt 6 werden die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche zukünftige Forschungsarbeiten gegeben.

2 Darstellung der mathematischen Grundlagen

In diesem Kapitel werden die mathematische Darstellungen des Schwerepotentials der Erde und seiner Funktionale dargestellt.

2.1 Schwerepotential der Erde

Das Schwerepotential W der Erde setzt sich aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalspotential Z nach Ilk (2021) zusammen als

$$W = V + Z, \quad (1)$$

wobei V durch das Newton-Integral beschrieben wird und Z durch die Winkelgeschwindigkeit ω und den Abstand von der Rotationsachse berechnet werden kann. Das Zentrifugalspotential lautet

$$Z = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2), \quad (2)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde, x und y die kartesischen Koordinaten im Bezugssystem der rotierenden Erde darstellen. Dabei entspricht $x^2 + y^2$ dem quadratischen Abstand zur Drehachse.

Die Anwendung des Laplace-Operators auf das Schwerepotential ergibt

$$\Delta W = \Delta V + \Delta Z, \quad (3)$$

wobei ΔV im Außenraum der Erde die Laplace-Gleichung

$$\Delta V = 0 \quad \text{für} \quad P \notin \Omega, \quad (4)$$

mit P als Aufpunkt und im Inneren der Erde die Poisson-Gleichung

$$\Delta V = -4\pi G\rho(Q) \quad \text{für} \quad P \in \Omega, \quad (5)$$

mit Ω als Volumenelement und Q der Quellpunkt erfüllt (Ilk, 2021).

Das Gravitationspotential der Erde ist eine grundlegende Größe für geodätische und geophysikalische Anwendungen, da es Informationen über die globale Massenverteilung liefert. Die Genauigkeit und hohe Auflösung moderner Gravitationsmodelle ermöglichen es, detaillierte Analysen zur Struktur und Dynamik der Erde durchzuführen und dienen als Grundlage für zahlreiche wissenschaftliche und praktische Anwendungen (Pavlis et al., 2012). Die Berechnung des Gravitationspotentials basiert auf dem Newton-Integral, welches das Potential V im Außenraum der Erde als Integral über die gesamte Masse der Erde beschreibt. Das Newton-Integral lautet

$$V(P) = G \cdot \iiint_{\text{Erde}} \frac{dm}{l_{PQ}} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{l_{PQ}} d\Omega, \quad (6)$$

wobei G die Gravitationskonstante ist ($G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$), l_{PQ} den Abstand zwischen den Punkten P und Q beschreibt und $\rho(Q)$ die Dichtefunktion am Punkt Q angibt. Dieses Integral beschreibt das Gravitationspotential V als kontinuierliche Verteilung der Massen. Da die Dichteverteilung im Erdinneren jedoch nur unzureichend bekannt ist, kann das Gravitationspotential nicht aus dem Newton-Integral berechnet werden, sondern wird durch eine Kugelfunktionsdarstellung angenähert, die eine hohe Genauigkeit und Auflösung ermöglicht. Diese Darstellung bildet die Grundlage für detaillierte Analysen zur Struktur und Dynamik der Erde. Siehe hierzu Kapitel 3 und 7 in Ilk (2021).

2.1.1 Herleitung des Gravitationspotentials

Die Herleitung der Darstellung des Potentials im Außenraum der Erde erfolgt mittels zweier Ansätze. Ein Ansatz basiert auf der Lösung der Laplace'schen Gleichung mithilfe des Separationsansatzes. Der zweite Ansatz besteht in der Entwicklung der reziproken Entfernung von $\frac{1}{l_{PQ}}$ in eine Reihe. Die spezifische Lösung wird anschließend durch die Festlegung von Randwerten bestimmt (Heiskanen and Moritz, 1967). Zunächst wird die Herleitung mittels Separationsansatz beschrieben. Im massefreien Raum erfüllt das Gravitationspotential die Laplace-Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{r^2 \cdot \cos^2 \varphi} V_{\lambda\lambda} + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + V_{rr} - \frac{\sin \varphi}{r^2 \cdot \cos \varphi} V_\varphi + \frac{2}{r} V_r = 0. \quad (7)$$

Dabei werden die Kugelkoordinaten (r, φ, λ) verwendet, wobei r den Abstand zum Koordinatenursprung, φ die geozentrische Breite und λ die Länge beschreiben. Durch den Separationsansatz $V(r, \varphi, \lambda) = \Lambda(\lambda) \cdot \Phi(\varphi) \cdot R(r)$ werden die Variablen r , φ und λ getrennt. So kann die Laplace-Gleichung in Teilterme zerlegt werden, die jeweils nur von einer der Variablen abhängen

$$\Delta V = \frac{1}{r^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \Lambda'' \cdot \Phi \cdot R + \frac{1}{r^2 \cdot \cos \varphi} \cdot R \cdot \Lambda \cdot (\Phi' \cdot \cos \varphi)' + \frac{1}{r^2} \cdot \Phi \cdot \Lambda \cdot (R' \cdot r^2)' = 0. \quad (8)$$

Durch Einsetzen des Separationsansatzes wird die Laplace-Gleichung in drei unabhängige Differentialgleichungen für die Funktionen $\Lambda(\lambda)$, $\Phi(\varphi)$ und $R(r)$ aufgeteilt. Die Gleichung für $\Lambda(\lambda)$ beschreibt die Abhängigkeit von der Länge λ und führt auf Lösungen in Form von Sinus- und Kosinusfunktionen. Für die Breitenabhängigkeit liefert die Gleichung für $\Phi(\varphi)$ die zugeordneten Legendre-Funktionen erster Art $P_{nm}(\sin \varphi)$. Sie ermöglichen die mathematische Beschreibung in Bezug auf φ . Die letzte Differentialgleichung, welche die Radialdistanz r berücksichtigt, führt auf Lösungen, die ausschließlich von r abhängen und die Abhängigkeit der Funktion $R(r)$ charakterisieren. Die detaillierten Zwischenschritte und Lösungen der einzelnen Differentialgleichungen werden im Anhang A.1.1 ausführlich dargestellt. Durch Kombination der einzelnen Lösungen ergibt sich die vollständige Darstellung des Gravitationspotentials als Kugelfunktionsentwicklung in Gleichung (17).

Die zweite Möglichkeit zur Herleitung des Gravitationspotentials erfolgt durch die Entwicklung der reziproken Entfernung $\frac{1}{l_{PQ}}$. Diese basiert auf der Ausgangsgleichung (6) und auf der Anwendung des sphärischen Kosinussatzes

$$\cos \psi = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (9)$$

wobei ψ der Winkel zwischen den Vektoren des Aufpunkts und des Quellpunkts ist. Mit ϑ ist die Poldistanz bezeichnet. Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs wird das sphärische Poldreieck auf der Einheitskugel herangezogen, wie in Abbildung 1 dargestellt. In dieser Darstellung ist P der Aufpunkt und P' der Quellpunkt.

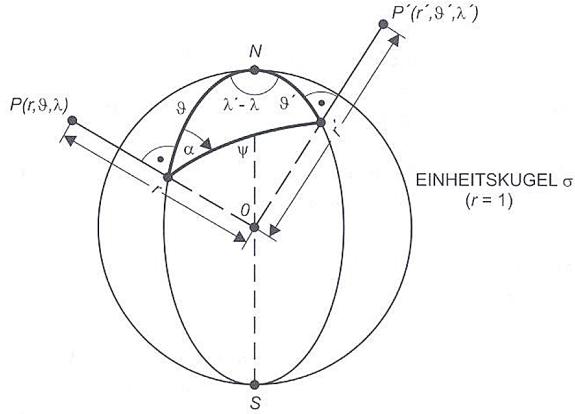


Abb. 1: Sphärisches Poldreieck auf der Einheitskugel nach Torge and Müller (2012)

Die reziproke Entfernung wird beschrieben durch

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

mit dem Abstand des Aufpunkts vom Zentrum der Kugel r , dem Abstand des Quellpunkts vom Zentrum der Kugel r' , und ℓ die Distanz zwischen dem Aufpunkt und dem Quellpunkt. Durch die Substitution $z = \frac{r'}{r}$ und $t = \cos \psi$ ergibt sich

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} (1 + z^2 - 2t \cdot z)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} (1 - (2t \cdot z - z^2))^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Die Substitution $z = \frac{r'}{r}$ normiert den Abstand des Quellpunkts relativ zum Aufpunkt, während $t = \cos \psi$ die Abhängigkeit von der Winkelbeziehung zwischen den beiden Punkten beschreibt. Für die Reihenentwicklung wird die Potenzreihe

$$(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots \quad (12)$$

angewendet. Für $|2t \cdot z - z^2| < 1$ ergibt sich schließlich die Darstellung

$$\frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot z^n, \quad (13)$$

wobei $P_n(t)$ die Legendre-Polynome

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \times n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t = \cos \psi, \quad (14)$$

und dt die Ableitung nach der Variablen t darstellt. Mithilfe des Kosinussatzes aus Gleichung (9) lässt sich die Zerlegung der Legendre-Polynome $P_n(\cos \psi)$ vornehmen durch

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ P_{nm}(\cos \vartheta) \cos m\lambda P_{nm}(\cos \vartheta') \cos m\lambda' \right. \\ &\quad \left. + P_{nm}(\cos \vartheta) \sin m\lambda P_{nm}(\cos \vartheta') \sin m\lambda' \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Die zugeordneten Legendre-Funktionen erster Art werden definiert als

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t), \quad t = \cos \vartheta \text{ bzw. } \cos \vartheta'. \quad (16)$$

2.2 Darstellung des Gravitationspotentials

Das Resultat der in Abschnitt 2.1.1 skizzierten Herleitung ist die Darstellung des Gravitationspotentials der Erde in räumlichen Kugelfunktionen (Gleichung (17)). Die GRACE-Daten liefern das Gravitationspotential V als Funktion der Kugelkoordinaten (r, φ, λ) . Dieses kann gemäß Pavlis et al. (2012) durch die Kugelfunktionsentwicklung

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right) \quad (17)$$

dargestellt werden. In dieser Darstellung bezeichnet $V(r, \varphi, \lambda)$ das Gravitationspotential an einem Punkt in Kugelkoordinaten, wobei $GM = \mu$ die geozentrische Gravitationskonstante darstellt. Der Abstand des Berechnungspunkts vom Erdmittelpunkt wird durch r beschrieben, während a den Radius der Referenzkugel angibt. Die geozentrische Breite und Länge sind durch φ beziehungsweise λ definiert. Der Grad des Kugelfunktionsmodells ist n , während m die Ordnung der Kugelfunktionsentwicklung angibt. Die Kugelfunktionskoeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} repräsentieren die Massenintegrale. Darüber hinaus stehen $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ für die zugeordneten Legendre-Funktionen erster Art, welche die Variation des Potentials in Abhängigkeit von der geozentrischen Breite φ beschreiben und zur Darstellung der Struktur des Gravitationsfeldes beitragen. Sie werden nach Heiskanen and Moritz (1967) durch

$$\bar{P}_{nm}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (18)$$

beschrieben, wobei die Legendre-Polynome $P_n(x)$ die Ableitungen der Legendre-Funktionen sind und $x = \sin \varphi$ gilt. Die Funktionen $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ nehmen für verschiedene Werte von n und m unterschiedliche Formen an. Die sphärischen Funktionen ermöglichen es die Variationen der Struktur des Gravitationsfeldes der Erde zu modellieren und präzise darzustellen (Seif et al., 2018).

2.2.1 Darstellung der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials

Im Folgenden wird die Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials basierend auf dem Varianzfortpflanzungsgesetz beschrieben. Die Berechnung berücksichtigt die Genauigkeiten der harmonischen Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} für eine gegebene geozentrische Breite und Länge. Diese Genauigkeiten $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$, die vom ICGEM bereitgestellt werden, werden genutzt, um die Varianz des Gravitationspotentials zu berechnen. Zur Abschätzung der Genauigkeiten wird das funktionale Modell des Gravitationspotentials nach den Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} abgeleitet. Die Varianz des Gravitationspotentials an einem Punkt ergibt sich als Summe der gewichteten Beiträge der harmonischen Koeffizienten für jeden Grad n und jede Ordnung m . Dabei werden die trigonometrischen Terme $\cos(m\lambda)$ und $\sin(m\lambda)$ für jede geozentrische Länge λ berechnet. Die quadrierten Genauigkeiten $\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}^2$ werden summiert, um die Gesamtsumme der Genauigkeiten des Gravitationspotentials zu erhalten. Die harmonische Entwicklung wird über alle geozentrischen Breiten und Längen summiert. Die Varianz des Gravitationspotentials ergibt sich aus der Summe aller gewichteten quadratischen Beiträge und wird nach Tapley et al. (2004) durch

$$\sigma_V^2(r, \varphi, \lambda) = \left(\frac{\mu}{r} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} \sum_{m=0}^n \left(\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 \cos^2(m\lambda) + \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2 \sin^2(m\lambda) \right) \cdot \bar{P}_{nm}^2(\sin \varphi) \quad (19)$$

definiert.

Die Standardabweichung des Gravitationspotentials $\sigma_V(r, \varphi, \lambda)$ wird dann durch die Wurzel der Varianz berechnet

$$\sigma_V(r, \varphi, \lambda) = \sqrt{\sigma_V^2(r, \varphi, \lambda)}. \quad (20)$$

2.2.2 Synthese des Gravitationspotentials

Die Synthese des Gravitationspotentials erfolgt durch die Umrechnung der bereitgestellten monatlichen Kugelfunktionskoeffizienten aus den GRACE- und GRACE-FO-Daten des GFZ in ein $1^\circ \times 1^\circ$ Gitter, das die Verteilung des Potentials an geografischen Punkten darstellt. Wie in Abschnitt 1 beschrieben, basiert die Berechnung auf einer harmonischen Synthese, bei der die Stokes-Koeffizienten das Potential definieren. Für die praktische Umsetzung werden die geozentrischen Breiten- und Längengrade in Vektoren abgespeichert und für jeden Gitterpunkt die normierten Legendre-Funktionen \bar{P}_{nm} berechnet. Die harmonischen Anteile werden dann mithilfe von $\cos(m\lambda)$ und $\sin(m\lambda)$ über alle Längengrade hinweg kombiniert, um das Gravitationspotential V zu bestimmen (Tapley et al., 2004).

Das Gravitationspotential V wird als eine Summe harmonischer Anteile berechnet (siehe Gleichung (17)) und damit auf einem globalen äquidistanten Gitter dargestellt. Während die mathematischen Grundlagen in Abschnitt 2 eine Summe von $n = 0$ bis $n = \infty$ vorsehen, wird die Umsetzung aufgrund der begrenzten Auflösung der GRACE-Satellitendaten auf einen Bereich von $n = 2$ bis n_{\max} beschränkt. GRACE liefert harmonische Grade und Ordnungen nur bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad von $n_{\max} = 96$. Das entspricht einer räumlichen Auflösung am Äquator von ca. 2° oder 200 km. Der Term $n = 0$ beschreibt die Gesamtmasse der Erde, weshalb er für ein globales Gravitationsmodell ohne räumliche Variationen nicht relevant ist. Auch der Dipolanteil mit dem Term $n = 1$ wird üblicherweise ausgeschlossen, da er die Lage des Massenmittelpunkts der Erde beschreibt. Nur die harmonischen Terme ab $n = 2$ tragen zur Darstellung relevanter Informationen über die räumliche Massenverteilung innerhalb und auf der Erdoberfläche bei (Petrovskaya, 2012; Fantino et al., 2009).

Das Gravitationspotential $V_t(r, \varphi, \lambda)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t an einem Punkt (r, φ, λ) kann mithilfe einer harmonischen Reihenentwicklung dargestellt werden. Es basiert auf den Differenzen der Kugelfunktionskoeffizienten $\Delta \bar{C}_{nm}^t$ und $\Delta \bar{S}_{nm}^t$, welche die Variationen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Monaten beschreiben, und ergibt sich aus der folgenden Gleichung

$$V_t(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{96} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^t \cos(m\lambda) + \Delta \bar{S}_{nm}^t \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (21)$$

wobei die Differenzen $\Delta \bar{C}_{nm}^t$ und $\Delta \bar{S}_{nm}^t$ definiert sind als

$$\Delta \bar{C}_{nm}^t = \bar{C}_{nm}^t - \bar{C}_{nm}^{t-1}, \quad \Delta \bar{S}_{nm}^t = \bar{S}_{nm}^t - \bar{S}_{nm}^{t-1}. \quad (22)$$

Hierbei ist t der aktuelle Monat und $t - 1$ der vorhergehende Monat.

Die Untersuchung der Differenzen der Kugelfunktionskoeffizienten ermöglicht es, die Änderungen des Gravitationspotentials zu analysieren, die durch Massenverlagerungen verursacht werden.

2.2.3 Gradvarianzen und Fehlergradvarianzen

Gradvarianzen geben an, wie viel des Signals in einem bestimmten Grad der Kugelfunktionsdarstellung enthalten ist. Werden die Gradvarianzen akkumuliert, so kann damit der akkumulierte Signalbeitrag bis zu einem bestimmten Grad ermittelt werden. Entsprechend kann bei

2 DARSTELLUNG DER MATHEMATISCHEN GRUNDLAGEN

den Fehlergradvarianzen vorgegangen werden, um die Varianz des Modells bis zu einem bestimmten Grad zu analysieren. Fehlergradvarianzen beschreiben den Verlauf der Genauigkeit des Modells in Abhängigkeit vom jeweiligen Grad. Gradvarianzen des Potentials σ_n^2 aus Pavlis et al. (2012) sind in Gleichung (23) dargestellt. Sie quantifizieren den Energiegehalt in den Graden n eines Kugelfunktionsmodells. Diese Größen ermöglichen die Analyse des Energiebeitrags einzelner harmonischer Grade zum Gesamtsignal des Schwerfeldes und lassen sich nach Torge and Müller (2012) aus

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{GM}{a} \right)^2 \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2). \quad (23)$$

berechnen. Über Gleichung (23) werden absolute Gradvarianzen berechnet, die den Energiegehalt eines einzelnen Grades quantifizieren. Die relativen Gradvarianzen ρ_n geben den normierten Beitrag eines einzelnen Grades n zum Gesamtsignal an und berechnen sich als Verhältnis der Gradvarianzen eines Grades n zur Summe aller Gradvarianzen bis zu $n = 96$ gemäß

$$\rho_n = \frac{\sigma_n^2}{\sum_{n=2}^{96} \sigma_n^2}. \quad (24)$$

Fehlergradvarianzen $d\sigma_n^2$ ergeben sich aus den Genauigkeiten $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$ der harmonischen Koeffizienten. Diese Varianzen werden durch

$$d\sigma_n^2 = \left(\frac{GM}{a} \right)^2 \sum_{m=0}^n (\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2) \quad (25)$$

beschrieben und quantifizieren die Genauigkeiten in den harmonischen Lösungen (Vergos et al., 2004). Die Differenzen der Gradvarianzen ergeben sich entsprechend aus den Differenzen der harmonischen Koeffizienten zweier aufeinanderfolgender Monate $\Delta \bar{C}_{nm}^t$ und $\Delta \bar{S}_{nm}^t$. Die Berechnung der Gradvarianzen basiert auf der Orthogonalität der Kugelflächenfunktionen, wie nach Heiskanen and Moritz (1967) durch das Integral

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} V \cdot V d\Omega &= \iint_{d\Omega} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}^{\bar{C}}(\varphi, \lambda) + \bar{S}_{nm} \bar{Y}_{nm}^{\bar{S}}(\varphi, \lambda)] \right) \\ &\quad \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\ell} [\bar{C}_{\ell k} \bar{Y}_{\ell k}^{\bar{C}}(\varphi, \lambda) + \bar{S}_{\ell k} \bar{Y}_{\ell k}^{\bar{S}}(\varphi, \lambda)] \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{cases} 1, & \text{falls } n = \ell \text{ und } m = k, \\ 0, & \text{falls } n \neq \ell \text{ oder } m \neq k \end{cases} \quad (27)$$

dargestellt. Hierbei sind die Laplacesche Kugelflächenfunktionen definiert als

$$\bar{Y}_{nm}^{\bar{C}}(\varphi, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \cos(m\lambda), \quad \bar{Y}_{nm}^{\bar{S}}(\varphi, \lambda) = \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \sin(m\lambda) \quad (28)$$

und entsprechend

$$\bar{Y}_{\ell k}^{\bar{C}}(\varphi, \lambda) = \bar{P}_{\ell k}(\sin \varphi) \cos(k\lambda), \quad \bar{Y}_{\ell k}^{\bar{S}}(\varphi, \lambda) = \bar{P}_{\ell k}(\sin \varphi) \sin(k\lambda). \quad (29)$$

Die Orthogonalitätsbedingungen der Kugelflächenfunktionen hat zur Folge, dass nur Terme mit identischen Indizes $n = \ell, m = k$ zum Integral (26) beitragen, während andere Kombinationen wegfallen. Dies erleichtert die Fehleranalyse und die Isolation einzelner Fehlerkomponenten erheblich.

Abbildung 3 zeigt die Grad- und Fehlergradvarianzen für die Differenzen der Monatslösungen von Dezember 2022 und Januar 2023. Hier ist zu beobachten, dass die Fehlergradvarianzen ab etwa Grad 45 deutlich höher sind als die Gradvarianzen. Dieser Anstieg ist darauf zurückzuführen, dass die Differenzen der harmonischen Koeffizienten ungenauer sind als die tatsächliche Signalamplitude. In solchen Fällen wird das Signal von Rauschen dominiert, was bedeutet, dass die Daten ab diesem Grad keine verlässlichen physikalischen Informationen mehr liefern. In Abbildung 2 hingegen werden die Grad- und Fehlergradvarianzen einer einzelnen Monatslösung, am Beispiel von Januar 2023, dargestellt. Auffällig ist hier, dass der Schnittpunkt zwischen Gradvarianzen und Fehlergradvarianzen auf der Graphik nicht dargestellt wird und sie sich somit nicht bei einem Grad von unter 96 schneiden (Vergos et al., 2004). Dies zeigt die Qualität der harmonischen Koeffizienten und die abnehmende Genauigkeit bei höheren Graden. Die Abbildungen zeigen zudem, dass langwellige Signale einen höheren Energiegehalt aufweisen, während Fehlergradvarianzen in den höheren Graden zunehmen.

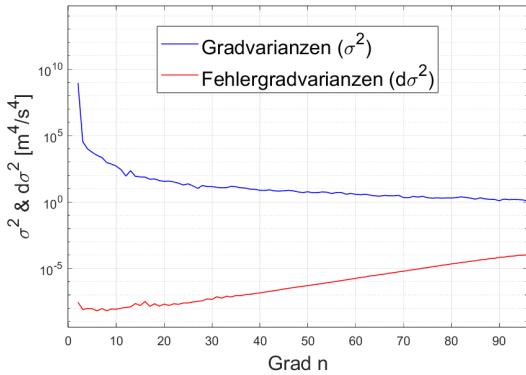


Abb. 2: Grad- und Fehlergradvarianzen einer einzelnen Monatslösung am Beispiel Januar 2023

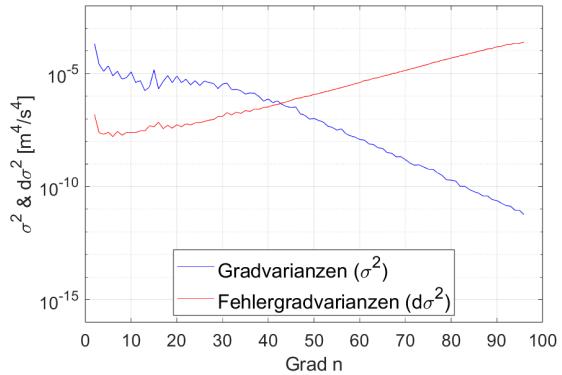


Abb. 3: Grad- und Fehlergradvarianzen für Differenzen der Monatslösungen Dezember 2022 und Januar 2023

2.3 Geoidundulation

Die Geoidundulation beschreibt die Abweichung der tatsächlichen mittleren Meeresoberfläche von einem idealisierten Referenzellipsoid. Das Geoid selbst stellt eine Äquipotentialfläche des Schwerefeldes der Erde dar, die dem mittleren Meeresspiegel am besten angenähert ist. Dennoch existieren Unterschiede zur mittleren Meeresoberfläche aufgrund der dynamischen Ozeantopographie. Als Äquipotentialfläche des Gravitationspotentials V ist das Geoid durch den konstanten Wert des Potentials auf der gesamten Fläche charakterisiert. Da das Gravitationspotential direkt von der Massenverteilung der Erde abhängt, ist die Form des Geoids eng mit der Verteilung von Masse im Erdinneren und an der Oberfläche verbunden. Regionen mit hoher Massenkonzentration, wie Gebirge oder dichte Gesteinsformationen, erzeugen eine stärkere gravitative Anziehung, was sich in höheren Potentialwerten und damit in einer Erhebung auf dem Geoid widerspiegelt. Geringere Massenkonzentrationen, beispielsweise in Sedimentbecken oder Ozeanen, führen dagegen zu niedrigeren Potentialwerten und einer entsprechenden Absenkung. Neben der Interpolationsmethode spielen auch die Eigenschaften der zugrundeliegenden Daten eine entscheidende Rolle für die Modellierung. So sind lokale Geoidmodelle besonders präzise, wenn topografische Effekte und Variationen in der Massendichte berücksichtigt werden. Die Geoidundulation kann daher nicht nur für geodätische Anwendungen, wie die Bestimmung von orthometrischen Höhen, genutzt werden, sondern auch für geophysikalische Studien, die sich mit der Struktur der Erdkruste und den topografischen Eigenschaften der Meeresoberfläche

beschäftigen (Alcaras et al., 2023; Vaníček, 2020).

Zur Berechnung der Geoidundulation N wird das Störpotential T benötigt, das den Zusammenhang zwischen dem tatsächlichen Gravitationspotential V und dem idealisierten Normalpotential U beschreibt. Das Störpotential $T = V - U$ stellt somit die Abweichungen des Gravitationspotentials vom Normalpotential dar und berücksichtigt lokale Variationen durch Massenverlagerungen (Ilk, 2021). Es lässt sich in Kugelkoordinaten als Reihenentwicklung

$$T(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^T \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^T \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (30)$$

schreiben. Die Verbindung zwischen dem Störpotential am Geoid ($T(r_0, \varphi, \lambda)$) und der Geoidundulation ist durch das Theorem von Bruns gegeben

$$N = \frac{T}{\gamma_E}, \quad (31)$$

wobei $\gamma_E(\varphi)$ den Normalschwerewert auf dem Referenzellipsoid darstellt (Heiskanen and Moritz, 1967) und r_0 den Radius des entsprechenden Punktes am Geoid. Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Berechnung der Geoidundulation N ist die Berücksichtigung der Varianzfortpflanzung. Diese lässt sich durch die Standardabweichung des Störpotentials σ_T bestimmen

$$\sigma_N = \frac{\sigma_T}{\gamma_m}. \quad (32)$$

Die Berechnung der Varianz des Störpotentials σ_T^2 erfolgt analog zur Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials, wie in Gleichung (19) beschrieben. Die Standardabweichung des Störpotentials $\sigma_T(r, \varphi, \lambda)$ ergibt sich schließlich analog zu Gleichung (20). Durch die lineare Beziehung zwischen N und T ergibt sich die Unsicherheit der Geoidundulation σ_N direkt aus σ_T , wodurch eine einfache und effiziente Berechnung gewährleistet ist.

2.4 Schwerestörung

Die Schwerestörung, definiert als negative radiale Ableitung des Gravitationspotentials, stellt die Veränderungen des Potentials entlang der radialen Achse dar. Sie beschreibt, wie stark das Gravitationspotential vom Erdmittelpunkt nach außen variiert, und ermöglicht die Erfassung vertikaler Gradienten innerhalb des Schwerefeldes. Dieser Aspekt des Gravitationspotentials ist besonders wichtig für die Analyse von Massenverlagerungen, da er wertvolle Informationen über die vertikalen Komponenten von Masseänderungen liefert. Die Schwerestörung spielt insbesondere bei der Untersuchung geophysikalischer Prozesse eine bedeutende Rolle, da sie durch ihre hohe Empfindlichkeit feinere Variationen im Schwerefeld deutlich sichtbar macht. Die Berechnung erfolgt dabei ausgehend von unkorrelierten harmonischen Koeffizienten, um die Auswirkung jeder einzelnen Frequenzkomponente auf das Potential zu analysieren.

2.4.1 Darstellung der Schwerestörung

Nach Sjöberg and Bagherbandi (2017) wird die Schwerestörung am Punkt P definiert als die Differenz zwischen der gemessenen Schwere g_P und dem Normalschwerewert γ_P , der am selben Punkt exakt berechnet wird

$$\delta g = g_P - \gamma_P. \quad (33)$$

Diese Definition berücksichtigt, dass das Normalpotential exakt im Punkt P bestimmt wird, was es ermöglicht, die lokalen Abweichungen des Schwerefeldes präzise zu beschreiben.

Die Schwerestörung kann in sphärischer Approximation mit dem Störpotential funktional verknüpft werden. δg ist definiert als die negative radiale Ableitung des Gravitationspotentials

$$\delta g = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (34)$$

Das negative Vorzeichen betont die physikalische Bedeutung der Schwerebeschleunigung, die stets in Richtung des Erdmittelpunkts zeigt (Ilk, 2021). Die Berechnung der Schwerestörung erfolgt an einem Punkt mithilfe der harmonischen Entwicklung des Gravitationspotentials in dem Gleichung (30) nach r partiell abgeleitet und das Vorzeichen aus Gleichung (34) beachtet wird

$$\delta g = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\frac{n+1}{r}\right) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (35)$$

Der Skalierungsfaktor $\frac{n-1}{r}$ bewirkt, dass höherfrequente Anteile im Schwerefeld besonders verstärkt werden (Sjöberg and Bagherbandi, 2017).

2.4.2 Darstellung der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung

Analog zur Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials wird auch bei der Berechnung der Schwerestörung das Fehlerfortpflanzungsgesetz verwendet. Die Genauigkeiten der harmonischen Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} fließen entsprechend in die Berechnung der Varianz ein. Ein wichtiger Unterschied zur Varianzberechnung des Gravitationspotentials ist nach Heiskanen and Moritz (1967) der gradabhängige Verstärkungsfaktor $\frac{n+1}{r}$, der spezifisch für die Schwerestörung gilt. Dieser Verstärkungsfaktor führt zu einer stärkeren Gewichtung der Genauigkeiten in den höheren Graden n . Diese Gewichtung bewirkt, dass höhere Frequenzanteile eine größere Rolle in der Varianz der Schwerestörung spielen, was die Genauigkeit der Schwerestörung zusätzlich beeinflusst.

Die grundlegende Gleichung für die Varianzfortpflanzung ist

$$\sigma_{\delta g}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\left(\frac{\partial \delta g}{\partial \bar{C}_{nm}} \right)^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + \left(\frac{\partial \delta g}{\partial \bar{S}_{nm}} \right)^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2 \right), \quad (36)$$

wobei $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$ die Standardabweichungen der harmonischen Koeffizienten sind. Durch Ableitung der Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} ergibt sich

$$\sigma_{\delta g}^2 = \left(\frac{\mu}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \left(\frac{n+1}{r}\right)^2 \sum_{m=0}^n \left(\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 \cos^2(m\lambda) + \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2 \sin^2(m\lambda) \right) \cdot \bar{P}_{nm}^2(\sin \varphi). \quad (37)$$

Diese Formel berücksichtigt die Genauigkeiten in den harmonischen Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} und deren Beitrag zur Varianz der Schwerestörung δg . Die quadrierten trigonometrischen Terme $\cos^2(m\lambda)$ und $\sin^2(m\lambda)$ sowie das Quadrat der Legendre-Funktionen $\bar{P}_{nm}^2(\sin \varphi)$ erfassen den Einfluss der Genauigkeiten in Längen- und Breitengrad sowie der harmonischen Koeffizienten vollständig. Die endgültige Standardabweichung der Schwerestörung ergibt sich durch Ziehen der Quadratwurzel aus der berechneten Varianz

$$\sigma_{\delta g}(r, \varphi, \lambda) = \sqrt{\sigma_{\delta g}^2(r, \varphi, \lambda)}. \quad (38)$$

2.5 Schwereanomalie

Die Schwereanomalie liefert wertvolle Informationen über die Verteilung von Massenanomalien auf der Erdoberfläche. Sie beschreibt die Abweichung des gemessenen Schwerefelds vom

Normalschwerefeld und weist auf Bereiche erhöhter oder verringriger Schwerebeschleunigung hin, die durch Massenkonzentrationen oder -defizite verursacht werden. Zur Berechnung der Schwereanomalie werden, ähnlich wie bei der Schwerestörung und dem Gravitationspotential, globale Geopotentialmodelle verwendet. Diese Modelle stellen das Gravitationsfeld und dessen Gradienten auf Basis harmonischer Funktionen dar (Kiamehr, 2008).

2.5.1 Darstellung der Schwereanomalie

In der Theorie nach Stokes (1849) wird die Schwereanomalie auf Basis eines idealisierten Erdmodells berechnet, wobei Annahmen über die Dichteverteilung sowie die Freiluftgradienten getroffen werden. Diese Annahmen führen zu einer hypothesenbehafteten Lösung, die topographische Einflüsse berücksichtigt und das Schwerefeld auf eine glatte Fläche projiziert.

Nach Molodenskii et al. (1962) wird diese Theorie erweitert, indem auf die Annahme bestimmter Hypothesen über die Dichte verzichtet wird. Stattdessen wird die Schwereanomalie als Differenz zwischen der gemessenen Schwere g_P an der Erdoberfläche und dem berechneten Schwerewert γ_Q an einem zugehörigen Telluroidpunkt Q definiert

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (39)$$

Das Telluroid ist eine theoretische geometrische Fläche, die eng mit der realen Erdoberfläche zusammenhängt und von der tatsächlichen Erdoberfläche durch eine senkrechte Verschiebung getrennt ist. Diese Verschiebung wird nach Grafarend (1978) durch die Topographie und Massenverteilung der Erde bestimmt.

In der Theorie nach Stokes ist die Schwereanomalie als Differenz zwischen der Schwere g_0 am Geoid und der Normalschwere γ_0 am Referenzellipsoid beschrieben definiert

$$\Delta g = g_0 - \gamma_0. \quad (40)$$

Die Schwereanomalie ist eine zentrale Größe in der geophysikalischen Forschung, um Massenanomalien zu identifizieren und globale sowie regionale Massenverlagerungen besser zu verstehen (Fecher, 2008; Sjöberg and Bagherbandi, 2017).

Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der skalaren Schwereanomalie Δg und dem Störpotential T dargestellt. Das in Gleichung (30) eingeführte Störpotential T in räumlicher Kugelfunktionsdarstellung wird in die Fundamentalgleichung der Physikalischen Geodäsie (Ilk, 2021) eingesetzt. Diese lautet in sphärischer Approximation (vgl. Heiskanen and Moritz (1967))

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \quad (41)$$

beschrieben wird.

Zur Lösung von Gleichung (41) wird nach Heiskanen and Moritz (1967) die radiale Ableitung des Störpotentials benötigt, die durch

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{r} \right) \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^T \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^T \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (42)$$

gegeben ist. Die Kugelflächenfunktionsentwicklung der Schwereanomalie ist gegeben als

$$\Delta g = \frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^{\Delta g} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^{\Delta g} \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi), \quad (43)$$

wobei $\bar{C}_{nm}^{\Delta g}$ und $\bar{S}_{nm}^{\Delta g}$ die Koeffizienten für die Schwereanomalie darstellen. Schließlich ergibt sich aus der Kombination der obigen Zusammenhänge die Beziehung

$$\Delta g = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{r} \right) \cdot \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^T \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^T \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (44)$$

Da die Schwereanomalie Δg keine Funktion des Abstands r vom Erdmittelpunkt ist, sondern vielmehr auf einem festen Bezugsniveau berechnet wird, wird der Referenzradius a anstelle von r als Bezugsgröße verwendet. Dies bedeutet, dass Δg unabhängig von der Höhe über dem Erdmassenzentrum definiert ist und deshalb direkt auf der Höhe des Äquatorradius des Referenzellipsooids betrachtet wird. Aus diesem Grund wird in den Gleichungen $r = a$ gesetzt

$$\Delta g = \frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{a} \right) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^T \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^T \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (45)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit Gleichung (43) ergibt sich der Zusammenhang nach Heiskanen and Moritz (1967) zu

$$\bar{C}_{nm}^{\Delta g} = \left(\frac{n-1}{a} \right) \bar{C}_{nm}^T, \quad \bar{S}_{nm}^{\Delta g} = \frac{n-1}{a} \bar{S}_{nm}^T, \quad n \neq 1. \quad (46)$$

Dabei ist $n \neq 1$, weil Terme vom Grad $n=1$ bei der Schwereanomalie nicht bestimmt werden können.

2.5.2 Darstellung der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie

Die Berechnung der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie basiert auf einem funktionalen Modell, welches die Genauigkeiten der Eingangsparameter berücksichtigt. Für die Ableitung der Schwereanomalie Δg aus den harmonischen Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} werden die Genauigkeiten der jeweiligen Koeffizienten propagiert. Die Varianzfortpflanzung berechnet sich unter der Annahme von unkorrelierten Parametern

$$\sigma_{\Delta g}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \bar{C}_{nm}} \right)^2 \sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 + \left(\frac{\partial \Delta g}{\partial \bar{S}_{nm}} \right)^2 \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2 \right). \quad (47)$$

Zur Berechnung der partiellen Ableitungen der Schwereanomalie Δg nach den Koeffizienten \bar{C}_{nm} und \bar{S}_{nm} wird das Potentialmodell verwendet, das durch Kugelflächenfunktionen entwickelt und gemäß

$$\Delta g = \frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^{\Delta g} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^{\Delta g} \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (48)$$

berechnet wird. Durch Einsetzen des Koeffizientenzusammenhangs aus Gleichung (46) ergibt sich

$$\Delta g = \frac{\mu}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{a} \right) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^T \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm}^T \sin(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (49)$$

Die Ableitungen dieser Gleichung nach den Koeffizienten \bar{C}_{nm}^T und \bar{S}_{nm}^T werden in die Varianzfortpflanzungsformel (47) eingesetzt und führt zu

$$\sigma_{\Delta g}^2 = \left(\frac{\mu}{a} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n-1}{a} \right)^2 \sum_{m=0}^n (\sigma_{\bar{C}_{nm}}^2 \cos^2(m\lambda) + \sigma_{\bar{S}_{nm}}^2 \sin^2(m\lambda)) \cdot \bar{P}_{nm}^2(\sin \varphi). \quad (50)$$

Die Standardabweichung wird analog zu den oben beschriebenen Funktionalen durch

$$\sigma_{\Delta g}(r, \varphi, \lambda) = \sqrt{\sigma_{\Delta g}^2(r, \varphi, \lambda)} \quad (51)$$

berechnet.

2.6 Massendiskretisierung mittels Tesseroiden

Um aus den Potentialänderungen die Veränderungen im TWS zu bestimmen, müssen die äquivalenten Wassersäulen diskretisiert werden. Hierfür werden in der vorliegenden Arbeit Tesseroiden verwendet.

Der Tesseroidansatz ist eine wichtige Methode zur Berechnung von Massenanomalien im Gravitationsfeld, insbesondere für topografische und isostatische Massenreduktionen. Ein Tesseroid ist ein Volumenelement, das durch geografische Gitterlinien und Oberflächen konstanter Höhe auf einer sphärischen oder ellipsoidalen Referenzfläche begrenzt ist. Durch die Aufteilung der Erdoberfläche in Tesseroiden können Gravitationspotential und Anziehungskraft effizient berechnet werden, wobei der Ansatz die Erdkrümmung von Natur aus berücksichtigt. Die spezifische Geometrie des Tesseroids berücksichtigt die sphärische Erdkrümmung und macht ihn zu einer geeigneten Einheit für die Modellierung von Massenanomalien. Jede Gitterzelle wird als Tesseroid modelliert, dessen Grenzen durch geozentrische Breiten- und Längengrenzen sowie radiale Grenzen, und zwar dem inneren Radius r_1 und dem äußeren Radius r_2 definiert sind. Dies ermöglicht eine präzisere Berechnung des Gravitationspotentials durch numerische Integration über diese Koordinaten Heck and Seitz (2007). In Abbildung 4 ist die Geometrie eines Tesseroids dargestellt.

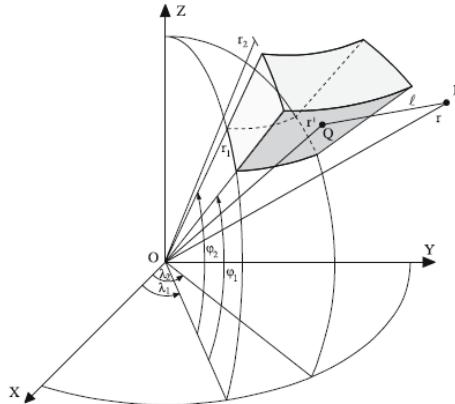


Abb. 4: Geometrie des Tesseroids nach Heck and Seitz (2007)

2.6.1 Tesseroidansatz für das Gravitationspotential

Das Gravitationspotential eines Tesseroids wird mittels Volumenintegration und einer Taylor-Reihenentwicklung des Integralkerns berechnet. Hierbei kommen K -Koeffizienten zum Einsatz, die die räumliche Massenverteilung in sphärischen Koordinaten beschreiben.

Das Gravitationspotential V_T eines allgemeinen Tesseroids kann mit der Dichtefunktion $\rho(\Omega')$ nach Kuhn and Seitz (2005) als Newton-Integral über das Tesseroidvolumen Ω_T ausgedrückt werden als

$$V_T(r, \varphi, \lambda) = G \iiint_{\Omega_T} \frac{\rho(\Omega')}{\ell(P, Q)} d\Omega, \quad (52)$$

wobei $\ell(P, Q)$ auch hier der Abstand zwischen dem Berechnungspunkt $P(r, \varphi, \lambda)$ und einem Punkt $Q \in \Omega_T$ innerhalb des Tesseroids ist. Das sphärische Volumenelement $d\Omega$ wird durch den Ausdruck $r'^2 \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' dr'$ beschrieben. Die Funktion $\rho(r, \varphi', \lambda')$ gibt die Dichte innerhalb des Tesseroids an. Da dieses Volumenintegral analytisch nicht lösbar ist, wird in Heck and Seitz (2007) eine Taylor-Reihenentwicklung des Integralkerns verwendet, um das Integral approximativ zu lösen. Diese Methode vereinfacht die Berechnung des Gravitationspotentials und erleichtert eine effiziente Auswertung. Maximale Effizienz wird erreicht, wenn der Entwicklungspunkt der Taylor-Reihe am geometrischen Zentrum des Tesseroids durch

$$r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad (53)$$

festgelegt wird. Der Integralkern $K = \frac{r'^2 \cos \varphi'}{\ell}$ wird durch eine Taylor-Reihenentwicklung mit den Koeffizienten K_{ijk} dargestellt:

$$K(r', \varphi', \lambda') = \frac{r'^2 \cos \varphi'}{\ell} = \sum_{i,j,k} K_{ijk} (r' - r_0)^i (\varphi' - \varphi_0)^j (\lambda' - \lambda_0)^k \quad (54)$$

dargestellt. Diese Koeffizienten

$$K_{ijk} := \frac{1}{i! \cdot j! \cdot k!} \left. \frac{\partial^{i+j+k} K(r', \varphi', \lambda')}{\partial r'^i \partial \varphi'^j \partial \lambda'^k} \right|_{r'=r_0, \varphi'=\varphi_0, \lambda'=\lambda_0}. \quad (55)$$

beschreiben die partiellen Ableitungen des Integralkerns $K(r', \varphi', \lambda')$ bezüglich der Radialdistanz r sowie der geozentrischen Winkel φ und λ . Dabei geben i , j , und k die Ordnungen der Ableitungen in den jeweiligen Dimensionen an, sodass die Koeffizienten die Integration über diese drei Größen präzise erfassen. Das Gravitationspotential eines Tesseroids mit konstanter Dichte ρ

$$V_T(r, \varphi, \lambda) = G \cdot \rho \left[K_{000} \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda + K_{010} \int_{-\frac{\Delta \varphi}{2}}^{\frac{\Delta \varphi}{2}} d\varphi' \cdot \Delta r \Delta \lambda \right. \\ \left. + K_{001} \int_{-\frac{\Delta \lambda}{2}}^{\frac{\Delta \lambda}{2}} d\lambda' \cdot \Delta r \Delta \varphi + K_{110} \int_{-\frac{\Delta r}{2}}^{\frac{\Delta r}{2}} r' dr' \int_{-\frac{\Delta \varphi}{2}}^{\frac{\Delta \varphi}{2}} d\varphi' \int_{-\frac{\Delta \lambda}{2}}^{\frac{\Delta \lambda}{2}} d\lambda' \right] \quad (56)$$

wird durch die Kombination der konstanten und symmetrisch integrierten Anteile der K -Terme beschrieben. Die Größen $\Delta r = r_2 - r_1 = h_2 - h_1$, $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ beschreiben die jeweiligen Ausdehnungen des Tesseroids in radialer Richtung, in der geodätischen Breite und in der geodätischen Länge.

Die Terme K_{010} und K_{001} , die von der geozentrischen Breite φ oder Länge λ abhängen, verschwinden aufgrund der symmetrischen Integrationsgrenzen, da sich die positiven und negativen Anteile in den Intervallen aufheben, sodass

$$\int_{-\frac{\Delta \varphi}{2}}^{\frac{\Delta \varphi}{2}} \sin(\varphi') d\varphi' = 0, \quad \int_{-\frac{\Delta \lambda}{2}}^{\frac{\Delta \lambda}{2}} \cos(\lambda') d\lambda' = 0 \quad (57)$$

ergibt. Auch der Term K_{110} , welcher Beiträge der Radialdistanz r' , Breite φ' und Länge λ' kombiniert, fällt durch die symmetrische Integration weg, da sich die positiven und negativen Anteile

$$\int_{-\frac{\Delta r}{2}}^{\frac{\Delta r}{2}} r' dr' \int_{-\frac{\Delta \varphi}{2}}^{\frac{\Delta \varphi}{2}} d\varphi' \int_{-\frac{\Delta \lambda}{2}}^{\frac{\Delta \lambda}{2}} d\lambda' = 0 \quad (58)$$

aufheben. Somit trägt nur der konstante Term K_{000} zum Gravitationspotential bei, wodurch sich die Approximation nullter Ordnung

$$V_T(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda K_{000} [1 + O(\Delta^2)] \quad (59)$$

ergibt. Dabei ist K_{000} der Koeffizient nullter Ordnung und die höheren Terme stellen Korrekturen zur Punktmassenapproximation (60) dar. Das Landau-Symbol $O(\Delta^n)$ gibt an, dass Terme n -ter und höherer Ordnung vernachlässigt werden. Der Term

$$V_T(r, \varphi, \lambda) = \frac{Gm}{\ell_o} [1 + O(\Delta^2)]. \quad (60)$$

entspricht einem Punktmassenmodell für ein Tesseroid der Masse m . Schließlich ergibt sich das Gravitationspotential zu

$$V_T(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda \left[K_{000} + \frac{1}{24}(K_{200}\Delta r^2 + K_{020}\Delta\varphi^2 + K_{002}\Delta\lambda^2) + O(\Delta^4) \right]. \quad (61)$$

Aufgrund der Symmetrie des Integrals über das Tesseroidvolumen bleiben in der Taylor-Entwicklung nur Terme gerader Ordnung erhalten. Somit ist K_{000} der Koeffizient nullter Ordnung, während K_{200} , K_{020} und K_{002} die Anteile zweiter Ordnung des Potentials beschreiben (Heck and Seitz, 2007). Diese Koeffizienten sind im Anhang A.2 dargestellt.

2.6.2 Tesseroidansatz für die Schwerestörung

Im Tesseroid-Ansatz wird für die Berechnung der Schwerestörung die negative radiale Ableitung des Gravitationspotentials $V_T(r, \varphi, \lambda)$ am Berechnungspunkt $P(r, \varphi, \lambda)$ berechnet. Diese radiale Komponente der Gravitationsbeschleunigung ergibt sich dabei aus

$$\delta g = -\frac{\partial V_T(r, \varphi, \lambda)}{\partial r} = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r'^2(r - r' \cos \psi) \cos \varphi'}{\ell^3} dr' d\varphi' d\lambda'. \quad (62)$$

Da, wie erwähnt eine analytische Lösung des Volumenintegrals in Gleichung (62) aufgrund der elliptischen Integrale nicht möglich ist, wird der Integralkern einer Taylor-Entwicklung um den geometrischen Mittelpunkt des Tesseroids $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ unterzogen. Die Gleichung

$$L(r', \varphi', \lambda') = \frac{r^2(r - r' \cos \psi) \cos \varphi'}{\ell^3} = \sum_{i,j,k} L_{ijk}(r' - r_o)^i (\varphi' - \varphi_o)^j (\lambda' - \lambda_o)^k \quad (63)$$

unterscheidet sich geringfügig von Gleichung (54). Die Gravitationswirkung am Punkt $P(r, \varphi, \lambda)$ ergibt sich analog zu Gleichung (61). Durch Anwenden des Ansatzes (55) für die Koeffizienten L_{ijk} ergibt sich

$$\delta g(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda \left[L_{000} + \frac{1}{24}(L_{200}\Delta r^2 + L_{020}\Delta\varphi^2 + L_{002}\Delta\lambda^2) + O(\Delta^4) \right], \quad (64)$$

wobei die verwendeten L -Koeffizienten zweiten Grades im Anhang A.2 dargestellt sind (Heck and Seitz, 2007). Die Approximation Nullter Ordnung der Schwerestörung lautet

$$\delta g(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda L_{000} [1 + O(\Delta^2)]. \quad (65)$$

Dieser Term ist auch gleichzusetzen mit dem Punktmassenmodell

$$\delta g(r, \varphi, \lambda) = \frac{Gm}{\ell_0^3} (r - r_o \cos \psi_o) [1 + O(\Delta^2)]. \quad (66)$$

2.6.3 Tesseroidansatz für die Schwereanomalie

Im Tesseroid-Ansatz für die Berechnung der Schwereanomalie wird die radiale Ableitung des Störpotentials T verwendet, kombiniert mit einem Korrekturterm, um die Schwereanomalie Δg zu berechnen. Da die Berechnung der radialen Ableitung des Gravitationspotentials V_T im Tesseroid-Ansatz bereits aus Gleichung (62) bekannt ist, kann die Schwereanomalie durch die Anwendung der Formel zur Schwereanomalie aus Gleichung (41) im Tesseroid-Ansatz ausgedrückt werden durch

$$\Delta g = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r'^2(r - r' \cos \psi) \cos \varphi'}{\ell^3} dr' d\varphi' d\lambda' - \frac{2}{r} T. \quad (67)$$

Auch hier wird eine Taylor-Entwicklung des Integralkerns um das geometrische Zentrum des Tesseroids $P_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$ durchgeführt. Dies führt zur vereinfachten Darstellung der Schwereanomalie

$$\Delta g(r, \varphi, \lambda) = G\rho \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda \left[J_{000} + \frac{1}{24} (J_{200} \Delta r^2 + J_{020} \Delta \varphi^2 + J_{002} \Delta \lambda^2) + O(\Delta^4) \right]. \quad (68)$$

Diese Formel ergibt sich analog zu den Formeln (61) und (64), wobei die Koeffizienten J_{ijk} eine Linearkombination der Koeffizienten K_{ijk} und L_{ijk} sind. Die in der vorliegenden Arbeit erstmals eingeführte Beziehung

$$J_{ijk} = L_{ijk} - \frac{2}{r} K_{ijk} \quad (69)$$

beschreibt diese Zusammenhänge. Alle J -Koeffizienten sind im Anhang A.2 dargestellt. Und für die Schwereanomalie ergibt sich für die Nullter-Ordnung-Approximation und somit das Punktmassenmodell

$$\Delta g(r, \varphi, \lambda) = \frac{Gm}{\ell_0^3} (r - r_o \cos \psi_o) - \frac{2}{r} \frac{Gm}{\ell_0} = G\rho \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda J_{000} [1 + O(\Delta^2)], \quad (70)$$

wobei nach Gleichung (69) für die Koeffizienten $J_{000} = L_{000} - \frac{2}{r} K_{000}$ gilt.

Diese Gleichungen mit den Koeffizienten nullter Ordnung K_{000} , L_{000} und J_{000} in den Gleichungen (61), (65), (70) entsprechen also dem Potential einer Punktmasse m in einem Punkt P. Die Terme höherer Ordnung berücksichtigen die Abweichungen vom Punktmassenmodell (Heck and Seitz, 2007).

2.7 TWS aus dem inversen Tesseroidansatz

Der iterative Inversionsprozess zur Berechnung des TWS, bzw. der monatlichen Änderung, erfolgt für jeden Monat separat. Dabei wird eine Beziehung zwischen den Pseudobeobachtungen (synthetisierte Potentialwirkung, Schwerestörung, Schwereanomalie) und den unbekannten (felderzeugenden) TWS-Werten hergestellt. Für jede Beobachtung wird die Gravitation jedes Tesseroids berechnet und in die Modellgleichung eingesetzt. Für die Lösung des inversen Problems wird die Tikhonov-Regularisierung verwendet, um Instabilitäten oder Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Die Methode, wie von Kress (2014) beschrieben, basiert auf der Minimierung eines Funktionals, das sich zusammensetzt aus der Residuennorm $\|Ax - b\|^2$, die die Anpassung an die Daten quantifiziert, und der Lösungsnorm $\|x\|^2$, die eine Glättung erzwingt. Das Funktional wird ausgedrückt durch

$$\Phi_\alpha(x) = \|Ax - b\|^2 + \alpha\|x\|^2, \quad (71)$$

wobei A eine beschränkte lineare Abbildung, b die beobachteten Daten und x die gesuchte Lösung ist. Der Term $\|Ax - b\|^2$ beschreibt die Anpassung an die Daten, während der Regularisierungsterm $\|x\|^2$ eine Glättung erzwingt. Der Regularisierungsparameter $\alpha > 0$ steuert dabei das Verhältnis zwischen Datenanpassung und Glättung. Die minimierende Lösung x_α ergibt sich eindeutig als Lösung der Normalgleichung

$$\alpha x_\alpha + A^* Ax_\alpha = A^* b, \quad (72)$$

wobei A^* der adjungierte Operator zu A ist. Nach dem Satz von Lax-Milgram hängt die Lösung x_α stetig von b ab.

Der optimale Wert für α kann mithilfe der sogenannten L-Kurve bestimmt werden, einer graphischen Darstellung, die den Zusammenhang zwischen der Residuennorm und der Lösungsnorm beschreibt. Die L-Kurve zeichnet sich durch einen charakteristischen Knick aus, der die optimale Balance zwischen Datenanpassung und Regularisierung markiert. An diesem Punkt erreicht die Lösung eine ausreichende Glättung, um Fehler und Rauschen zu reduzieren, ohne die Genauigkeit der Lösung zu beeinträchtigen. Die Bestimmung des Knickpunkts erfolgt häufig durch numerische Analyse der Krümmung der L-Kurve, da er den Punkt maximaler Krümmung darstellt. In Abbildung 5 wird dies exemplarisch für eine spezifische Datenkonstellation dargestellt, wobei eine Residuennorm von $3,37565 \cdot 10^{-5}$ und eine Lösungsnorm von $13,9115$ zu beobachten sind.

Die Iteration wird so lange fortgesetzt, bis ein festgelegtes Abbruchkriterium erfüllt ist. In diesem Fall ist das Abbruchkriterium auf eine maximale Iterationszahl von drei festgelegt, da die L-Kurve nach drei Iterationen keine signifikante Veränderung mehr zeigt und der optimale Regularisierungsparameter α stabil identifiziert werden kann. Während des Prozesses werden das Gravitationspotential und seine Funktionale iterativ angepasst, indem die Differenzen zwischen den beobachteten und rekonstruierten Potentialwerten, die sogenannten Residuen, minimiert werden. Diese Residuen dienen als Maß für verbleibende Abweichungen und tragen zur Optimierung des Modells bei (Hansen, 1999; Chang et al., 2024).

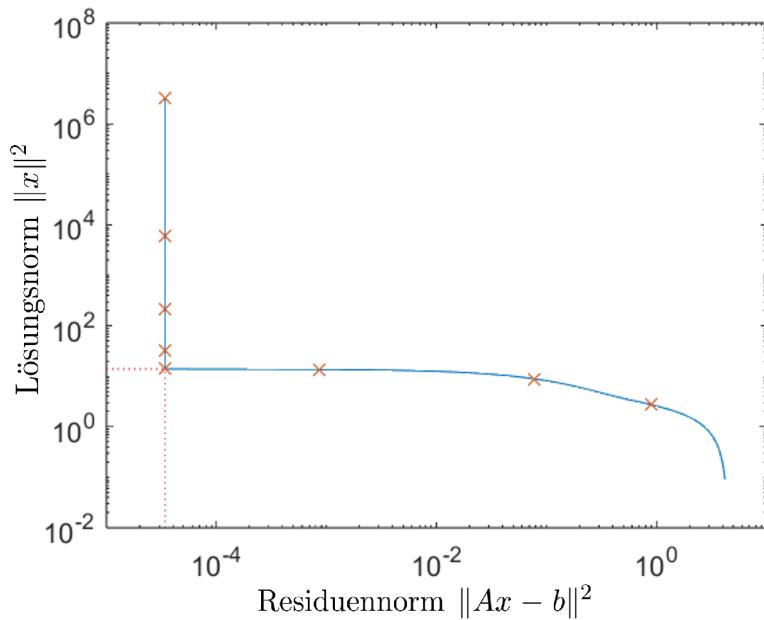


Abb. 5: L-Kurve für die Potentialänderung im Januar 2023

3 Auswahl und Vorbereitung der Daten

Die GRACE-Daten bilden die Grundlage für die Analyse von Massenverlagerungen im Gravitationsfeld der Erde. Für aussagekräftige und verlässliche Ergebnisse müssen die Rohdaten sorgfältig gefiltert und für die Weiterverarbeitung aufbereitet werden. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Datenvorbereitung ist die Anwendung des sogenannten DDK-Filters, der zur Rauschunterdrückung dient und die regionale Signalqualität verbessert.

3.1 Herkunft und Verarbeitung der GRACE-Daten

Die Missionen GRACE und GRACE-FO sind Satellitenprojekte zur präzisen Erfassung des Schwerefelds der Erde. GRACE ist ein Gemeinschaftsprojekt der NASA und des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR). Die Nachfolgemission GRACE-FO startete im Mai 2018, verfolgt die gleichen Ziele wie GRACE und nutzt dabei neue Technologien, wie das Laser Ranging Interferometer (LRI). Diese Technologie erlaubt extrem präzise Entfernungsmessungen zwischen den beiden Satelliten im Tandemflug. Die GRACE-FO-Mission ist eine Kooperation zwischen der NASA und dem GFZ, welche kontinuierlich detaillierte Modelle des Erdschwerefeldes erstellen (GFZ, 2023; European Space Agency (ESA), 2023).

Die GRACE-Daten werden über die Website des International Centre for Global Earth Models (ICGEM) (Ince et al., 2019), einem Service des GFZ, bereitgestellt. Neben den GFZ-Daten stellt ICGEM auch die Daten anderer internationaler Auswertezentren zur Verfügung. Diese Daten umfassen monatliche Lösungen für das zeitvariable Gravitationspotential in Form von Kugelfunktionskoeffizienten. In dieser Arbeit kommen GRACE-FO-Daten des Release (RL) 06.1 des GFZ zum Einsatz, der gegenüber der ursprünglichen RL06-Version aktualisiert ist und verbesserte Beschleunigungsdaten enthält. RL06.1 bietet zwei monatliche Schwerefeldlösungen, die vollständig kompatibel mit der GRACE RL06-Zeitreihe sind. Die Modelle haben eine maximale Grad- und Ordnungszahl von 96, was einer räumlichen Auflösung von etwa 200 km auf der Erdoberfläche entspricht. Es ermöglicht präzise Modelle zeitlicher Änderungen des Schwerefelds und unterstützt die geowissenschaftliche Forschung zum Wasserhaushalt (Dahle et al., 2019b). Diese Daten sind entscheidend für die Berechnung des TWS. Vor der Anwendung des DDK-Filters werden sie einer umfassenden Vorprozessierung unterzogen, um systematische Fehler zu reduzieren und die Datenqualität zu verbessern.

Zu den Standardkorrekturen gehört die Ersetzung des C_{20} -Koeffizienten, der die Abplattung der Erde beschreibt, durch Schätzungen aus SLR. Der C_{20} -Koeffizient in den GRACE- und GRACE-FO-Daten kann Schwankungen und Fehler aufweisen, weshalb der SLR-basierte C_{20} -Wert als genauer gilt und daher empfohlen wird. Darüber hinaus ist GRACE-FO, ebenso wie GRACE, nicht empfindlich gegenüber Grad-1-Harmonischen Geozentrumskoeffizienten, die die Verschiebung des Massenmittelpunkts der Erde widerspiegeln. Diese Korrekturen sind entscheidend, um Genauigkeitsverluste zu vermeiden und die Konsistenz und Präzision der berechneten Massenverlagerungen zu gewährleisten (Dahle et al., 2019b).

Die in der ICGEM-Datei enthaltenen Werte bieten eine Grundlage für die Anwendung dieser Korrekturen und unterstützen die Ermittlung der optimalen Kugelfunktionskoeffizienten, die für die weitere Analyse verwendet werden. Diese vorbereiteten und gefilterten Daten bilden die Basis für die anschließende Anwendung des DDK-Filters.

3.2 Datenauswahl und Untersuchungszeitraum

Für die Analyse wird eine einjährige Zeitspanne aus dem Jahr 2023 gewählt. Diese Auswahl ermöglicht es, die Massenverlagerungen im Wasserhaushalt der Erde im Verlauf der vier Jahres-

zeiten zu beobachten und somit saisonale Schwankungen detailliert zu erfassen. Da saisonale Veränderungen bedeutende Einflüsse auf den Wasserhaushalt und die Verteilung der Massenomalien haben, liefert diese Zeitspanne ein repräsentatives Bild der jährlichen Variabilität. Für die Darstellung der saisonalen Dynamik werden die Monate Januar, April, Juli und Oktober gewählt. Diese repräsentieren die vier Jahreszeiten Winter, Frühling, Sommer und Herbst auf der Nordhalbkugel. Da die saisonalen Verhältnisse auf der Südhalbkugel entgegengesetzt verlaufen, spiegelt die Analyse eine globale Perspektive wider, indem regionale Unterschiede in der hydrologischen Dynamik berücksichtigt werden. Dies ermöglicht es, sowohl globale als auch regionale Phänomene wie die Schneeschmelze im Frühling auf der Nordhalbkugel oder hydrologische Schwankungen während des Sommers auf der Südhalbkugel zu identifizieren und zu bewerten.

3.3 Anwendung des DDK-Filters

Der DDK-Filter ist ein speziell entwickelter Filter, der auf die Kugelfunktionskoeffizienten der GRACE-Daten angewendet wird, um systematisches Rauschen und unerwünschte Korrelationen, insbesondere bei hohen Harmonischen, zu reduzieren. Aufgrund der Eigenschaften der GRACE-Sensoren und der Missionsgeometrie treten in den GRACE-Level-2-Produkten meridionale Fehlerstreifen auf. Diese Fehlerstreifen machen eine Filterung erforderlich, um verlässliche Informationen über die Massenumverteilung im Erdsystem zu erhalten (Wahr et al., 1998; Göttl et al., 2019). Nach Kusche et al. (2009) ermöglicht der Einsatz von DDK-Filtern eine gezielte Dekorrelation und Glättung der GRACE-Kugelfunktionskoeffizienten, wodurch korrelierte Fehler reduziert und hydrologische Signale besser dargestellt werden können, ohne wesentliche Signalanteile zu verlieren, was die Interpretation der Massenverlagerungen vereinfacht. Die DDK-Filter reduzieren systematisches Rauschen und unerwünschte Korrelationen in GRACE-Daten. Wie bereits in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, umfasst die DDK-Filterreihe verschiedene Stufen der Glättung und Dekorrelation, von DDK1 mit intensiver Rauschunterdrückung bis zu DDK8, das weniger Rauschen filtert und mehr geophysikalische Signale erhält. Die Auswahl des Filters hängt dabei von der Art der Analyse und den gewünschten Detailstufen ab (Ince et al., 2019).

In dieser Arbeit wird der DDK5-Filter verwendet, der häufig in der Analyse des globalen Wasserhaushalts eingesetzt wird, da er eine ausgewogene Balance zwischen Rauschunterdrückung und Signalerhalt bietet. Der Filter hat eine Auflösung von etwa 400 km und einen Frequenzbereich von $n = 40$. Er wirkt gezielt auf die Kugelfunktionskoeffizienten, um störende Kurzwellen-Signale zu unterdrücken, die durch systematische und zufällige Fehler entstehen. Dadurch wird das Schwerefeld geglättet und die Darstellung hydrologischer Muster fokussiert. Er ermöglicht eine robuste und klarere Interpretation regionaler Massenverlagerungen und eignet sich besonders, um große hydrologische Muster wie saisonale Schwankungen im Wasserhaushalt zu analysieren, ohne dabei feine Details vollständig zu verlieren. Mit seiner mittleren räumlichen Auflösung reduziert der DDK5-Filter das Rauschen effektiv und bewahrt gleichzeitig die wesentlichen Variabilitäten im Schwerefeld. Dies erlaubt eine präzisere Analyse der regionalen und globalen Wasserhaushaltsveränderungen (Kusche, 2007; Gschwind et al., 2024).

4 Berechnungsablauf

In diesem Kapitel werden die Berechnungsschritte zur Modellierung von Massenverlagerungen auf der Erde basierend auf den GRACE-FO-Satellitendaten erläutert. Im Fokus steht die Berechnung des Gravitationspotentials, der Schwerestörung und der Schwereanomalie, welche die Grundlage für die spätere Analyse der Verteilung und Veränderung des TWS bilden. Die mathematischen Grundlagen werden bereits in Abschnitt 2 erläutert. Die Berechnungen selbst erfolgen mithilfe des Rechenprogramms *MATLAB 23.2.0.2365128 (R2023b)*.

Synthese der Beobachtungsdaten

Die Synthese des Gravitationspotentials erfolgt durch die Umrechnung der bereitgestellten monatlichen Kugelfunktionskoeffizienten aus den GRACE- und GRACE-FO-Daten des GFZ in ein $1^\circ \times 1^\circ$ Gitter, das die Verteilung des Potentials an geografischen Punkten darstellt. Wie in Abschnitt 1 beschrieben, basiert die Berechnung auf einer harmonischen Synthese, bei der die Stokes-Koeffizienten das Potential definieren. Für die praktische Umsetzung werden die geozentrischen Breiten- und Längengrade in Vektoren abgespeichert und für jeden Gitterpunkt die normierten Legendre-Funktionen P_{nm} berechnet. Die harmonischen Anteile werden dann mithilfe von $\cos(m\lambda)$ und $\sin(m\lambda)$ über alle Längengrade hinweg kombiniert, um das Gravitationspotential V zu bestimmen (Tapley et al., 2004). Ebenso wird bei der Synthese der Schwerestörungen und Schwereanomalien verfahren.

Das Gravitationspotential V wird als eine Summe harmonischer Anteile berechnet (siehe Gleichung (17)) und damit auf einem globalen äquidistanten Gitter dargestellt. Die Synthese wird aufgrund der begrenzten Auflösung der GRACE-Satellitendaten mit $2 \leq n \leq n_{\max}$ durchgeführt. GRACE liefert harmonische Grade und Ordnungen nur bis zu einem maximalen Entwicklungsgeschoss von $n_{\max} = 96$. Das entspricht einer räumlichen Auflösung am Äquator von ca. 2° oder 200 km.

Die Untersuchung der Differenzen der Kugelfunktionskoeffizienten ermöglicht es, die Änderungen des Gravitationspotentials zu analysieren, die durch Massenverlagerungen verursacht werden.

Gradvarianzen

Zur Beurteilung der Signalstärke in einem bestimmten Grad werden die Gradvarianzen berechnet. Die Signalbeiträge werden dann bis zu einem bestimmten Grad akkumuliert. Entsprechend wird bei den Fehlergradvarianzen vorgegangen, um die Varianz des Modells bis zu einem bestimmten Grad zu analysieren. Fehlergradvarianzen beschreiben den Verlauf der Genauigkeit des Modells in Abhängigkeit vom jeweiligen Grad. Mit Gleichung (23) werden absolute Gradvarianzen berechnet. Sie quantifizieren den Energiegehalt eines einzelnen Grades der Kugelfunktionsdarstellung.

Fehlergradvarianzen

Fehlergradvarianzen $d\sigma_n^2$ ergeben sich aus den Genauigkeiten $\sigma_{\bar{C}_{nm}}$ und $\sigma_{\bar{S}_{nm}}$ der harmonischen Koeffizienten und sind in Gleichung (25) definiert. Sie quantifizieren die Genauigkeiten in den harmonischen Lösungen.

Die Gradvarianzen von Differenzen ergeben sich entsprechend aus den Differenzen der harmonischen Koeffizienten zwei aufeinanderfolgender Monate $\Delta \bar{C}_{nm}^t$ und $\Delta \bar{S}_{nm}^t$ (Gleichung (22)).

Geoidundulation

Die Änderung in den Geoidundulationen wird aus den Änderungen des Potentils gemäß Gleichung (31) berechnet und graphisch dargestellt.

Schwerestörung

Die Schwerestörung, wird in sphärischer Approximation aus den Potentialkoeffizienten gemäß den Gleichungen (34) und (35) auf einem globalen Gitter erzeugt. Ebenso ihre Genauigkeiten nach Gleichung (37).

Schwereanomalie

Schwereanomalien bilden Randwerte sowohl für die Lösung der Ranwertaufgabe nach Stokes als auch Molodensky. In der Theorie nach Stokes (1849) wird die Schwereanomalie auf Basis eines idealisierten Erdmodells berechnet, wobei Annahmen über die Dichteverteilung sowie die Freiluftgradienten getroffen werden. Diese Annahmen führen zu einer hypothesenbehafteten Lösung, die topographische Einflüsse berücksichtigt und das Schwerefeld auf eine glatte Fläche projiziert.

Nach Molodenskii et al. (1962) wird diese Theorie erweitert, indem auf die Annahme bestimmter Hypothesen über die Dichte verzichtet wird. Stattdessen wird die Schwereanomalie als Differenz zwischen der gemessenen Schwere g_P an der Erdoberfläche und dem berechneten Schwerewert γ_Q an einem zugehörigen Telluroidpunkt Q definiert.

Die Schwereanomalien werden aus den Potentialkoeffizienten gemäß Gleichung (49) synthetisiert. Ebenso ihre Genauigkeiten nach der mathematischen Darstellung in Gleichung (50).

TWS aus dem inversen Tesseroidansatz

Die zentrale Größe, die in der vorliegenden Arbeit untersucht wird, ist der Total Water Storage. Zunächst werden aus den Differenzkoeffizienten zweiter monatlicher Kugelfunktionsmodelle erforderliche Funktionale des Störpotentials auf einem $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitter in einer Höhe von 500 km als Pseudobeobachtungen synthetisiert. Dieses hochaufgelöste Gitter ermöglicht eine präzise Berechnung von Größen wie dem Gravitationspotential, der skalaren Schwerestörung und der Schwereanomalie. Anschließend wird ein $2^\circ \times 2^\circ$ -Gitter verwendet, um die TWS Höhen durch einen inversen Tesseroidansatz zu berechnen. Dabei werden die Differenzen zwischen den gemessenen und berechneten Funktionalen minimiert.

Der iterative Inversionsprozess zur Berechnung des TWS erfolgt für jeden Monat separat. Um die Inversion der Normalgleichungsmatrix dieser Fortsetzung nach unten zu stabilisieren, wird das L -curve Kriterium herangezogen. Für jede Monatslösung wird der Verlauf der L -Kurve graphisch dargestellt und begutachtet.

Tesseroidansatz

Zur Diskretisierung der unbekannten TWS-Werte werden Tesseroiden nach Abbildung 4 verwendet.

Dies wird für drei Funktionale des Schwerefeldes durchgeführt:

- Monatliche Änderung im Gravitationspotential
- Monatliche Änderung in der Schwerestörung
- Monatliche Änderung in der Schwereanomalie

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die graphischen und numerischen Ergebnisse der Analyse des Wasserhaushalts vorgestellt. Die zugehörigen Statistiken und Graphiken dienen der Veranschaulichung der beobachteten Massenverlagerungen und deren zeitlicher sowie saisonaler Dynamik. Darüber hinaus werden die Ergebnisse in Unterabschnitt 5.8 eingehend diskutiert und analysiert.

Wie in Unterabschnitt 3.2 beschrieben, dienen die Monate Januar, April, Juli und Oktober des Jahres 2023 als repräsentative Beispiele für die Jahreszeiten. Diese werden exemplarisch analysiert, um saisonale Effekte auf das Gravitationspotential und dessen Funktionale zu verdeutlichen. Eine detaillierte Übersicht der Statistiken für alle Monate findet sich im Anhang B und die Graphiken der restlichen Monate im Anhang C.

5.1 Ergebnisse des Gravitationspotentials

Die Abbildungen 6-9 zeigen die Verteilung des Gravitationspotentials der vier Monate, während die Graphiken 10-13 die Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials darstellen. Zur anschaulichen Darstellung des Gravitationspotentials wird eine Farbskala verwendet. Hell- bis Dunkelblau repräsentiert negative Werte, die auf eine Abnahme des Gravitationspotentials durch Masseverluste oder -defizite hinweisen. Grüne Bereiche stehen für geringfügige Veränderungen nahe null. Gelb und Orange zeigen leichte positive Veränderungen, während Rot- bis Rosatöne stärkere positive Werte markieren. Diese positiven Werte deuten auf eine Zunahme der Masse hin.

In Abbildung 6 für den Monat Januar sind deutliche rote bis hellrosa Bereiche im Amazonasgebiet sowie südlich von Zentralafrika, insbesondere in der Region um Angola und den Lake Malawi, erkennbar. Diese roten Bereiche im Amazonasgebiet sind auf die Regenzeit zurückzuführen, die eine starke Wasserspeicherung verursacht und zu einem positiven Gravitationspotential führt (Becker et al., 2011; Wahr et al., 1998). In der Region um den Lake Malawi sowie südlich von Zentralafrika und im Norden Australiens zeigen sich orangene bis rote Bereiche, die auf die Auswirkungen der Regenzeit während des australischen Sommers zurückzuführen sind. Diese Regenzeit liefert nahezu den gesamten Niederschlag der Einzugsgebiete und führt zu positiven Potentialwerten. Die arabische Halbinsel weist ebenfalls orangene Bereiche auf, die auf ähnliche hydrologische Dynamiken hindeuten (Lyons et al., 2011). Diese Beobachtungen stimmen mit den Arbeiten von Boergens et al. (2024) überein, die seit über 20 Jahren Veränderungen des terrestrischen Wasserspeichers weltweit überwachen. Die Daten zeigen, dass Regionen wie Zentralafrika signifikante Schwankungen in der Wasserspeicherung aufweisen, bedingt durch natürliche Prozesse wie Niederschläge aber auch menschlichen Aktivitäten. In Grönland und der Antarktis treten negative Werte auf, die im Januar am stärksten ausgeprägt sind. In der Antarktis ist im Januar Sommer. Dies führt dazu, dass diese Werte auf intensive Eisverluste durch Schmelzprozesse, Gletscherkalben und Oberflächenabfluss zurückzuführen (Gałdyn et al., 2024) sind. Grönland zeigt im Januar leicht negative Werte, die darauf hinweisen, dass der Schneefall in diesem Monat vergleichsweise gering ist und somit nur einen moderaten Massenzuwachs verursacht, während gleichzeitig eine weiterhin geringe, aber konstante Abflussrate besteht (Shi et al., 2024). Der Großteil der übrigen Regionen zeigt grüne bis blaugrüne Farben, die nahezu unveränderte Potentialwerte andeuten.

Für den April in Abbildung 7 zeigt sich ein auffälliger Kontrast. Die Farbverläufe scheinen sich im Vergleich zum Januar nahezu umzukehren. Im arabisch-afrikanischen Bereich sowie im Osten Südamerikas dominieren blaue Bereiche mit negativen Potentialwerten, während der Südwesten Australiens die stärksten positiven Werte aufweist. Zusätzlich treten im Nordosten Kanadas über das Meer bis nach Nordeuropa dunkelorangene Werte auf. In Grönland und der

Antarktis sind anders als in den anderen Jahreszeiten positive Werte zu erkennen. In Grönland ist dies auf eine vorübergehende Akkumulation von Schneefall während des Übergangs von Winter zu Frühling zurückzuführen, da die Temperaturen noch nicht ausreichen, um Schmelzprozesse auszulösen. In der Antarktis hingegen, wo der April den Übergang vom Sommer zum Winter markiert, resultieren die positiven Werte aus einer Reduzierung der Schmelzaktivität und einer Stabilisierung der Eismassen (Galldyn et al., 2024; Shi et al., 2024).

Der Juli (Abb. 8) und der Oktober (Abb. 9) zeigen eine ähnliche Farbverteilung, wobei die positiven Extremwerte leicht variieren. In Afrika treten sie im Oktober und in Indien während des Monats Juli auf. Besonders in diesem Zeitraum zeigen sich die stärksten Farbkontraste auf den Landmassen. Im Amazonasgebiet dominieren blaue Bereiche mit negativen Potentialwerten, die im Juli und Oktober auf die Trockenzeit zurückzuführen sind. Während dieser Zeit nimmt die Wasserspeicherung aufgrund reduzierter Niederschläge ab, was zu negativen Werten führt (Becker et al., 2011). In Indien hingegen treten im Juli positive Potentialwerte in roter bis hellrosa Farbe hervor. Diese erhöhten Werte resultieren aus der aktiven Monsunperiode, die durch intensive Regenfälle und verstärkte Feuchtetransporte aus der Arabischen See und der Bucht von Bengal geprägt ist (Naidu et al., 2011). Die negativen Werte in Grönland im Juli und Oktober resultieren aus intensiven Schmelzprozessen und erhöhtem Abfluss, die die Massenzunahme durch Schneakkumulation übersteigen, insbesondere in den südöstlichen und südwestlichen Regionen (Shi et al., 2024).

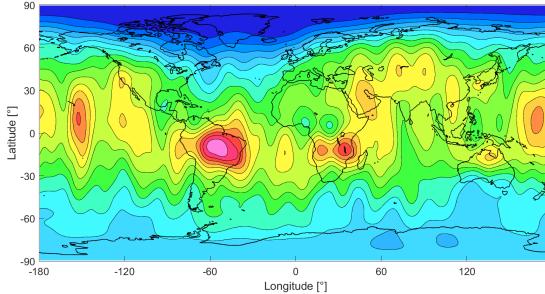


Abb. 6: Gravitationspotential Änderung im Januar 2023

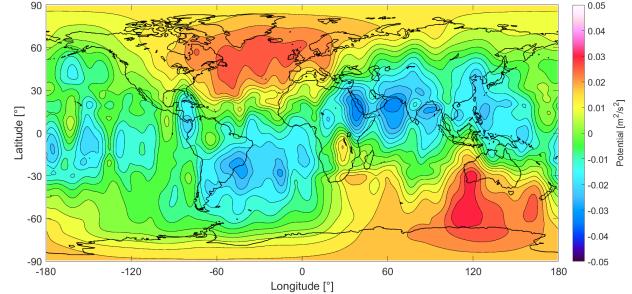


Abb. 7: Gravitationspotential Änderung im April 2023

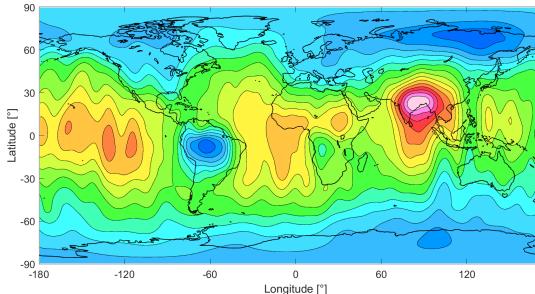


Abb. 8: Gravitationspotential Änderung im Juli 2023

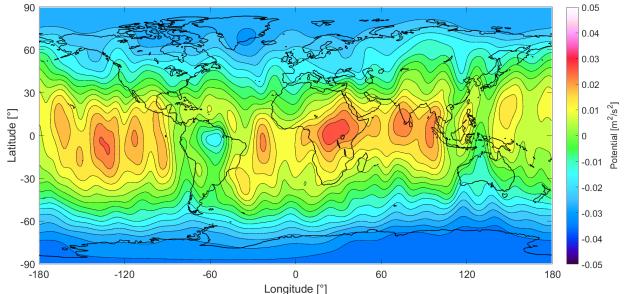


Abb. 9: Gravitationspotential Änderung im Oktober 2023

Die Karten zur Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials in den Abbildungen 10-13 verwenden die gleiche Farbskala. In den Monaten Januar (Abb. 10), Juli (Abb. 12) und Oktober

(Abb. 13) zeigen die Karten nur hellblaue, grüne und gelbe Bereiche. Die höchsten Werte finden sich bei allen drei Abbildungen um den Äquatorstreifen, was die größere Dynamik und Komplexität in den hydrologischen und klimatischen Prozessen dieser Regionen widerspiegelt. Die höchsten Werte sind jedoch im April in Abbildung 11 erkennbar. Dort reichen die Farben von Gelborange über Rot und Rosa bis hin zu Weiß, was auf höhere Varianzwerte, schlechtere Messungen und dynamischere Bedingungen hindeutet. Zudem ist in den meisten Monaten eine deutlich breitenabhängige Struktur der Varianzfortpflanzung erkennbar. Im April zeigt sich jedoch ein unregelmäßiges Muster, das diese Struktur nicht aufweist. Die breitenabhängige Struktur ist in diesem Monat nicht vorhanden. Die geringere Homogenität der Genauigkeiten der Koeffizienten im April trägt wesentlich zu der ungleichmäßigen Verteilung der Varianzwerte bei. Laut der Webseite COST-G: Combination Service for Time-variable Gravity Fields (2024) liegt dies daran, dass die Lösung für April 2023 als nicht zuverlässig eingestuft wird. Solche Anomalien können auf Störungen im Wiederholorbit der Satelliten zurückgeführt werden. Normalerweise sorgt ein Wiederholorbit von etwa einem Monat für eine homogene Abdeckung der Erdoberfläche. Aufgrund von Bahnstörungen kann sich jedoch die Wiederholperiode verschieben, sodass der Satellit beispielsweise nach einer Woche wieder die Region überfliegt. Dies führt zu einer geringeren räumlichen Auflösung, und es entstehen Datenlücken, die die Qualität der Schwerefeldmessungen beeinträchtigen. Diese Auffälligkeit und die breitenabhängige Struktur der anderen Monate wird in Unterabschnitt 5.5 genauer untersucht.

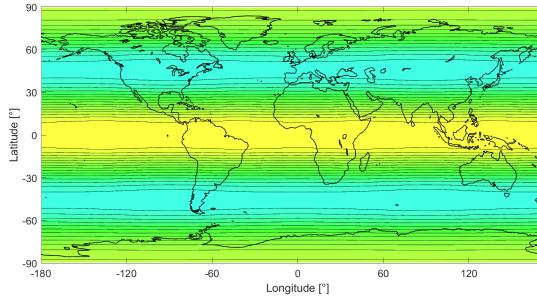


Abb. 10: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Januar 2023

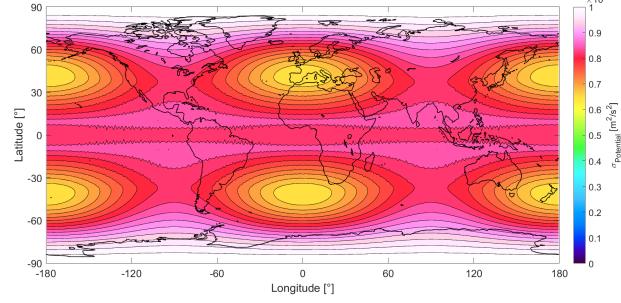


Abb. 11: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im April 2023

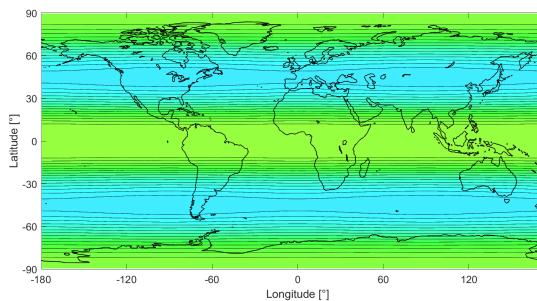


Abb. 12: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juli 2023

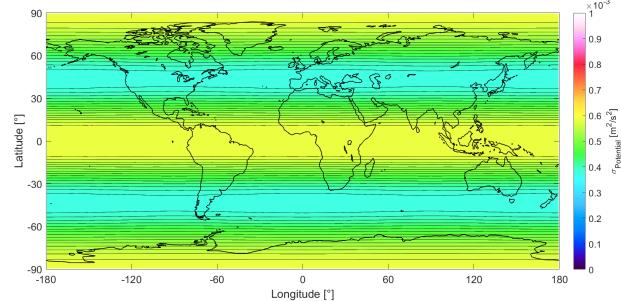


Abb. 13: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Oktober 2023

Die Informationen der Statistiken und der Darstellungen können zusammengebracht werden um die Auffälligkeiten in den Darstellungen zu untersuchen. In den Tabellen werden Minimum, Maximum, Mittelwert, Root Means Square (RMS) und die Standardabweichung angegeben.

Der Mittelwert zeigt die durchschnittliche Größe der gemessenen Werte. Das Minimum und Maximum geben die Extremwerte an und veranschaulichen die Spannweite der Schwankungen im Gravitationspotential. Die Standardabweichung liefert eine Maßzahl für die Streuung, wobei sie die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Werte vom Mittelwert beschreibt und so die Variabilität innerhalb der Daten ergänzt. Der RMS-Wert, auch als quadratischer Mittelwert bekannt, wird als die Quadratwurzel des Mittelwerts der quadrierten Werte berechnet und beschreibt die durchschnittliche Stärke der Schwankungen des Gravitationspotentials. Er quantifiziert, wie stark die Werte im Mittel von Null abweichen.

Tabelle 1 zeigt die statistischen Kennwerte des Gravitationspotentials. Die Unterschiede in den Spannweiten zwischen den Monaten spiegeln sich auch in den graphischen Darstellungen wider. In allen Monaten zeigen die Karten eine moderate Verteilung mit ausgewogenen positiven und negativen Werten. Dies wird auch durch den Mittelwert verdeutlicht, der in allen Fällen sehr nahe bei Null liegt. Im April und Oktober dominieren niedrigere Werte des Gravitationspotentials, was sich an dem negativen Mittelwert zeigt. Im Januar weist das Gravitationspotential die geringste Standardabweichung und den geringsten RMS-Wert der ausgewählten Monate auf, die beide bei $0,0085 \text{ m}^2/\text{s}^2$ liegen. In den anderen Monaten sind diese Werte aber ähnlich und um $< 0,001 \text{ m}^2/\text{s}^2$ größer als die des Januars. Die im Juli beobachtete größte Spannweite des Gravitationspotentials, mit einem Minimum von $-0,0361 \text{ m}^2/\text{s}^2$ und einem Maximum von $0,0454 \text{ m}^2/\text{s}^2$, kann auf intensive hydrologische Prozesse während dieses Monats zurückgeführt werden. In vielen Regionen der Nordhalbkugel treten im Juli vermehrt Niederschläge auf, die zu erheblichen Massenverlagerungen führen. Diese hydrologischen Veränderungen beeinflussen das Gravitationspotential und resultieren in den beobachteten Schwankungen. Im Oktober ist die Verteilung wieder ausgeglichener, mit der geringsten Spannweite und einem Minimum von $-0,0154 \text{ m}^2/\text{s}^2$ und einem Maximum von $0,0301 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Die geringe Spannweite des Gravitationspotentials im Oktober deutet auf stabilere hydrologische und geophysikalische Bedingungen hin. In diesem Monat sind die globalen Massenverlagerungen weniger ausgeprägt, da in vielen Regionen die Regenzeiten enden, die Schneesaison noch nicht begonnen hat und atmosphärische Störungen wie Monsune oder Wirbelstürme weniger stark ausgeprägt sind (Freiberg, 2017).

Tab. 1: Statistik des Gravitationspotentials für ausgewählte Monate im Jahr 2023.
Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
April	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
Juli	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
Oktober	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092

In Tabelle 2 werden die Statistiken der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials aufgeführt. Diese Informationen sind von Interesse, da sie Einblicke in die Genauigkeit bei der Modellierung des Gravitationspotentials bieten. Die Statistiken zeigen, dass die Werte über die Monate hinweg relativ stabil bleiben, wobei die Mittelwerte in den Monaten Januar, Juli und Oktober bei $0,0003 \text{ m}^2/\text{s}^2$ und etwas höher bei $0,0005 \text{ m}^2/\text{s}^2$ im April liegen. Die Maximalwerte liegen im Bereich von $0,0005 \text{ m}^2/\text{s}^2$ im Juli bis zum höchsten Wert $0,0008 \text{ m}^2/\text{s}^2$ im April. Der höhere Mittelwert der Varianzfortpflanzung im April im Vergleich zu den anderen Monaten spiegelt sich in der auffällig rötlichen Darstellung der Karte in Abbildung 11 wider.

Tab. 2: Statistik der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,0000	0,0006	0,0003	0,0004	0,0002
April	0,0000	0,0009	0,0005	0,0006	0,0002
Juli	0,0000	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002
Oktober	0,0000	0,0006	0,0003	0,0004	0,0002

5.2 Ergebnisse der Geoidundulation

Die Graphiken 14-17 zeigen die Geoidundulation, und die Graphiken 18-21 stellen die Varianzfortpflanzung der Geoidundulation dar. Die Ähnlichkeiten zwischen den Darstellungen des Gravitationspotentials und der Geoidundulation ergeben sich aus ihrer engen mathematischen Verbindung. Wie in Gleichung (31) beschrieben, ist die Geoidundulation direkt proportional zum Störpotential und wird durch die Normalschwere skaliert, die als nahezu konstant angenommen werden kann. Daher spiegeln sich die räumlichen Muster des Potentials weitgehend in der Geoidundulation wider. Unterschiede in den Intensitäten können auftreten, da die Geoidundulation nach Hofmann-Wellenhof and Moritz (2021) langwellige Signale stärker betont, was sie besonders nützlich für die Analyse globaler, großskaliger Prozesse macht. Das Störpotential hingegen ermöglicht eine differenziertere Betrachtung lokaler Variationen (Tapley et al., 2004).

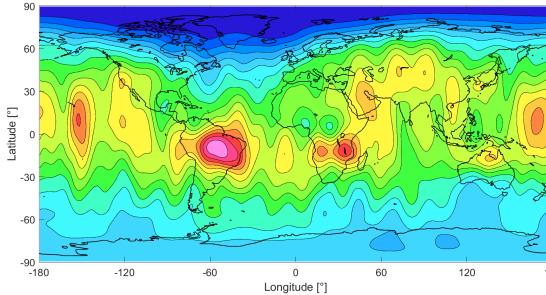


Abb. 14: Änderung der Geoidundulation im Januar 2023

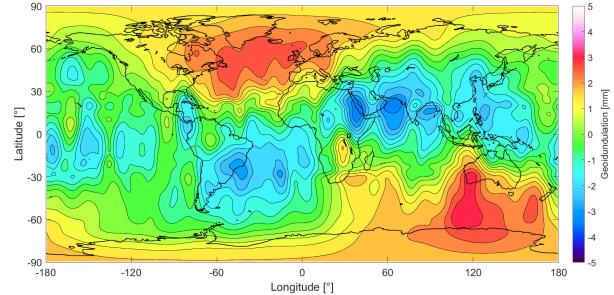


Abb. 15: Änderung der Geoidundulation im April 2023

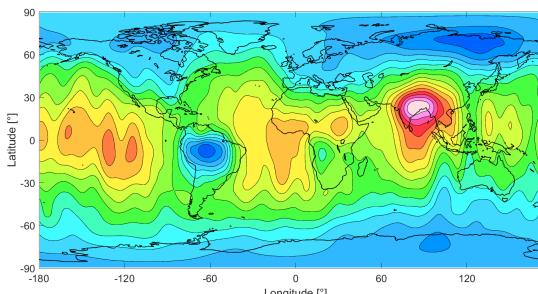


Abb. 16: Änderung der Geoidundulation im Juli 2023

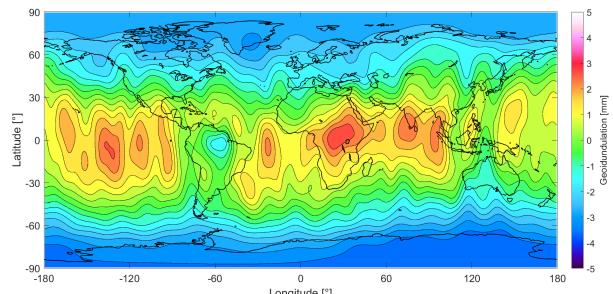


Abb. 17: Änderung der Geoidundulation im Oktober 2023

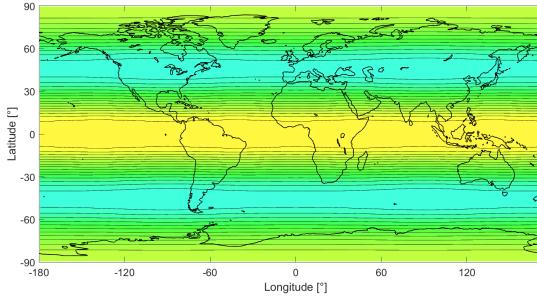


Abb. 18: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Januar 2023

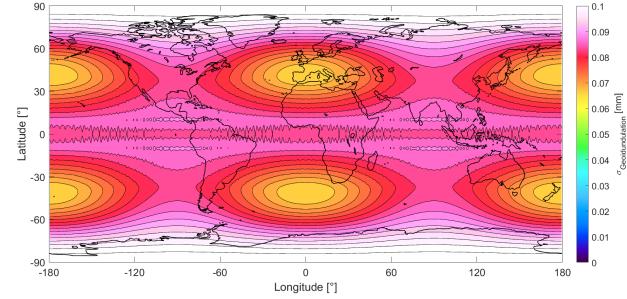


Abb. 19: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im April 2023

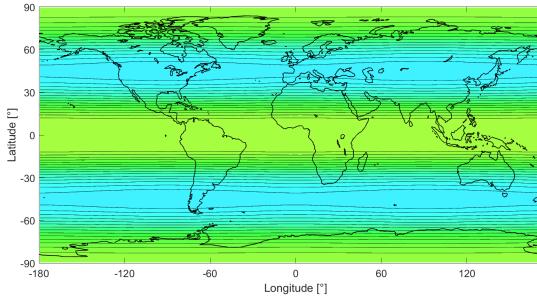


Abb. 20: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juli 2023

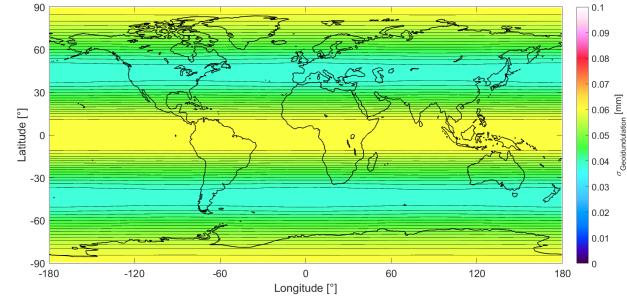


Abb. 21: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Oktober 2023

Die statistischen Kenngrößen für die Änderungen der Geoidundulation in Tabelle 3 zeigen für den Juli die größten Variationen mit einem Minimum von $-3,7$ mm und einem Maximum von $4,6$ mm, was auf stärkere saisonale Veränderungen in diesem Monat hinweist. Im Vergleich dazu weist der Oktober mit Werten von $-1,6$ mm bis $3,1$ mm die geringste Variabilität auf, was eine stabilere Phase signalisiert. Auch die Größenordnung der statistischen Kennwerte der Geoidundulation ist konsistent mit den entsprechenden Werten des Gravitationspotentials für die jeweiligen Monate. Der Mittelwert bleibt für beide Monate nahezu null, was auf eine ausgeglichene Verteilung von positiven und negativen Abweichungen hinweist. Die Standardabweichung und der RMS-Wert sind im Oktober mit $0,9$ mm etwas geringer als im Juli mit $1,0$ mm, was die stärkeren Schwankungen im Juli bestätigt.

Tab. 3: Statistik der Geoidundulation für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-1,7	4,3	0,0	0,9	0,9
April	-3,3	2,9	0,0	0,9	0,9
Juli	-3,7	4,6	0,0	1,1	1,0
Oktober	-1,6	3,1	0,0	1,0	1,0

Die Varianzfortpflanzung der Geoidundulation in Tabelle 4 zeigt signifikante Unterschiede in der Variabilität zwischen den Monaten, insbesondere zwischen April und Juli. Im April treten die höchsten Variabilitäten auf, wobei die Werte ein Minimum von $0,0009$ mm und ein Maximum von $0,0875$ mm erreichen. Der Mittelwert von $0,0528$ mm und der RMS-Wert von $0,0584$ mm

und Standardabweichung der Varianzfortpflanzung mit 0,0250 mm auf eine größere Variabilität und Ungenauigkeit der berechneten Werte hin, was dynamischere und ungleichmäßige Bedingungen in diesem Monat widerspiegelt. Diese hohen Werte lassen auf eine geringere Genauigkeit der zugrunde liegenden Kugelfunktionskoeffizienten schließen, bedingt durch stärkere regionale oder saisonale Massenverlagerungen. Im Juli ist die Variabilität am geringsten, mit Werten von 0,0005 mm bis 0,0543 mm. Der RMS-Wert von 0,0319 mm und die niedrigste Standardabweichung von 0,0157 mm deuten auf stabilere und gleichmäßige Bedingungen hin. Diese Werte reflektieren eine höhere Genauigkeit der Ergebnisse in diesem Monat, was auf weniger dynamische Prozesse und eine gleichmäßige Verteilung der Varianz hindeutet.

Tab. 4: Statistik der Varianzfortpflanzung der Geoidundulation der ausgewählten Monate im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,0005	0,0628	0,0314	0,0363	0,0181
April	0,0009	0,0875	0,0528	0,0584	0,0250
Juli	0,0005	0,0543	0,0277	0,0319	0,0157
Oktober	0,0005	0,0612	0,0315	0,0360	0,0175

5.3 Ergebnisse der Schwerestörung

Die Abbildungen 22-25 zeigen die Verteilung der Schwerestörungen für die vier Monate. Die Struktur dieser Karten verdeutlicht auch hier, dass Regionen mit starken Massenänderungen, wie beispielsweise Gebiete mit saisonalen Wasserverlagerungen, besonders hohe Ableitungswerte aufweisen. Auffälligkeiten treten hierbei an denselben Stellen auf, wie sie bereits im Gravitationspotential zu sehen waren, da die radiale Ableitung und somit die Schwerestörung eng mit diesem verknüpft ist.

Die Farbgebung der Karten der Schwerestörung für positive und negative Werte, orientiert sich an der des Gravitationspotentials. Im Januar (Abb. 22) zeigen sich positive Werte in Regionen wie Südamerika, insbesondere im Amazonasgebiet, Nordaustralien und südlich von Zentralafrika beim Kongo. Im Juli (Abb. 24) sind die Verhältnisse nahezu umgekehrt, mit positiven Werten in Nordost-Indien und negativen Werten im nördlichen Amazonasgebiet. Im Oktober (Abb. 25) zeigen sich ähnliche Muster wie im Juli, jedoch mit einer deutlich ausgeprägteren Streifenstruktur, die mehrere schwach positive, rote Bereiche entlang der Längsrichtung aufweist, anstelle einzelner Regionen mit dominierenden Werten. Im April (Abb. 23) treten keine klaren Muster in den sonst auffälligen Regionen auf. Stattdessen zeigen sich positive und viele negative Werte verteilt über Landmassen und den Ozeanen. Auch hier ist im Vergleich zu den anderen Monaten die Verteilung der Farbverläufe im April heterogener und weniger eindeutig auf spezifische Gebiete der Welt begrenzt, was mit den schlechten Ergebnissen des Monats April nach COST-G: Combination Service for Time-variable Gravity Fields (2024) begründet werden kann.

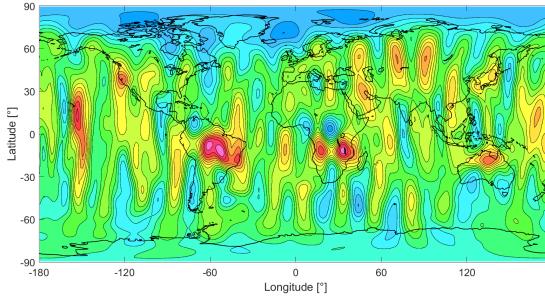


Abb. 22: Änderung der Schwerestörung im Januar 2023

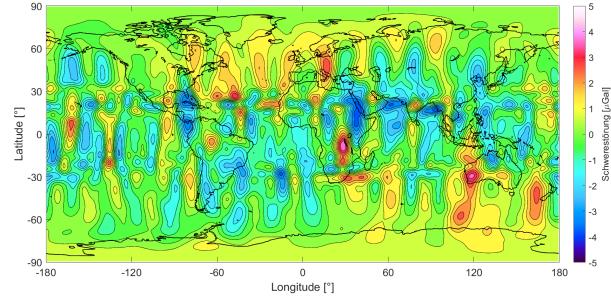


Abb. 23: Änderung der Schwerestörung im April 2023

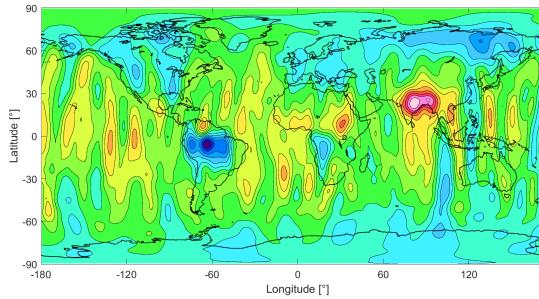


Abb. 24: Änderung der Schwerestörung im Juli 2023

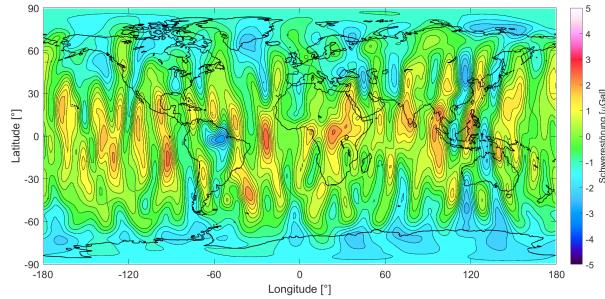


Abb. 25: Änderung der Schwerestörung im Oktober 2023

Die Varianzfortpflanzungen, dargestellt in den Abbildungen 26-29, veranschaulichen die Genauigkeit der Daten der Schwerestörung. Auffällig ist das überwiegend breitenabhängige Muster der Isolinien in allen Monaten, wobei der April (Abb. 27) durch einen breiten roten Streifen entlang des Äquators hervorsticht. Innerhalb dieses Bereichs zeigen die Isolinien ein wellenartiges Muster, das auf eine besonders hohe und zugleich unregelmäßige Ungenauigkeit in den Schwerestörungsdaten hinweist. Im Januar (Abb. 26), Oktober (Abb. 29) und Juli (Abb. 28) zeigt sich jeweils der ungenaueste Bereich als türkis bis grün gefärbter Streifen entlang des Äquators, wobei dieser Streifen im Juli, ähnlich wie beim Gravitationspotential, schmäler ausfällt. In dieser Zeit treten in vielen tropischen Regionen weniger ausgeprägte Wasserverlagerungen auf, da die Regenzeit in Gebieten wie dem Amazonas bereits beendet ist und die Trockenzeit beginnt. Dies führt zu stabileren Massenverteilungen und einer reduzierten Variabilität in den Ableitungen. Diese saisonalen Schwankungen in der Wasserspeicherung haben einen wesentlichen Einfluss auf die Variabilität der Gravitationsanomalien (Bettadpur et al., 2015; Wahr et al., 1998).

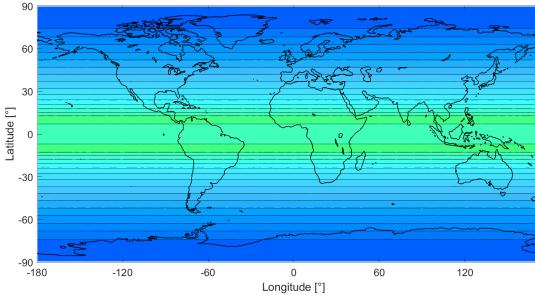


Abb. 26: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Januar 2023

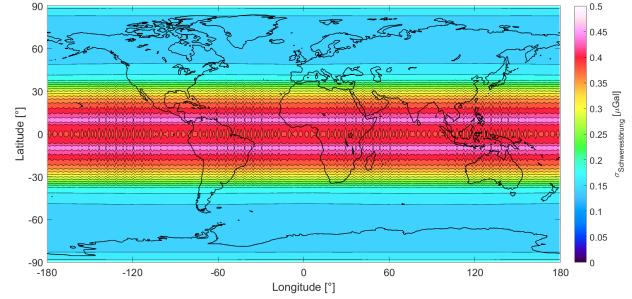


Abb. 27: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im April 2023

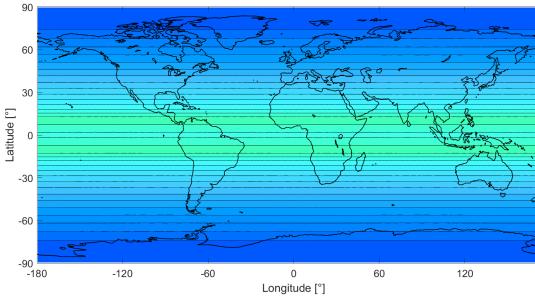


Abb. 28: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juli 2023

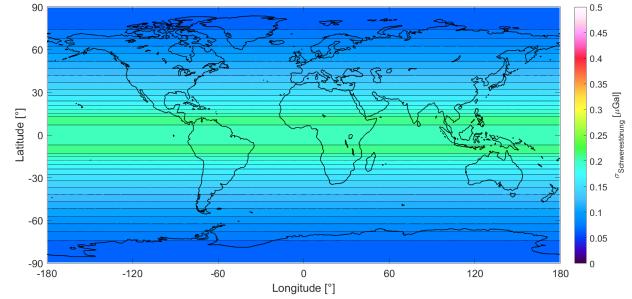


Abb. 29: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Oktober 2023

Die Berechnung der Schwerestörung des Gravitationspotentials liefert neben den dargestellten graphischen Ergebnisse auch numerische Ergebnisse. Tabelle 5 präsentiert die statistischen Werte für die Monate Januar, April, Juli und Oktober. Die Schwerestörung zeigt im April 2023 eine besonders große Variabilität mit der höchsten Standardabweichung von 0,790, einem Minimum von $-3,740 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $4,050 \mu\text{Gal}$. Der Juli weist die höchste Spannweite auf, mit einem Minimum von $-4,800 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $4,650 \mu\text{Gal}$. Im Januar sind die Bedingungen stabiler, mit einer Spannweite von $-2,730 \mu\text{Gal}$ bis $4,000 \mu\text{Gal}$. Der Oktober zeigt die geringste Variabilität, wobei die Werte von $-2,950 \mu\text{Gal}$ bis $2,780 \mu\text{Gal}$ reichen. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass die Schwerestörung im April und Juli größere Variabilitäten aufweist, während Januar und Oktober durch stabilere Bedingungen geprägt sind.

Tab. 5: Statistik der Schwerestörung für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
April	-3,736	4,050	0,000	0,786	0,786
Juli	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
Oktober	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646

Tabelle 6 präsentiert die Varianzfortpflanzung der Schwerestörung. Da die Schwerestörung als abgeleitete Größe berechnet wird, verstärken sich kleine Messfehler in den Kugelfunktionskoeffizienten durch die Ableitungsoperation, was zu einer erhöhten Varianzfortpflanzung führt. Besonders in Regionen oder Zeiträumen mit dynamischen Massenverlagerungen wie saisonalen

Massenänderungen tritt dies deutlich hervor. Die Werte der Varianzfortpflanzung erreichen im April deutlich höhere Werte mit einem Mittelwert von $18,300 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $45,350 \mu\text{Gal}$ und einer Standardabweichung von $14,990 \mu\text{Gal}$ was auf größere Schwankungen in den zugrunde liegenden Daten hinweist. Im Monat April treten zudem höhere Werte des RMS und der Standardabweichung auf, was auf eine erhöhte Dynamik in den Massenverlagerungen hinweist. Im Gegensatz dazu zeigen die Monate Januar, Juli und Oktober niedrigere und vergleichbare Werte der Varianzfortpflanzung. Die Mittelwerte reichen von $9,410 \mu\text{Gal}$ im Juli bis $9,880 \mu\text{Gal}$ im Januar und Oktober. Diese geringeren Mittelwerte werden durch niedrigere RMS-Werte von $11,610 \mu\text{Gal}$ im Juli bis $12,190 \mu\text{Gal}$ im Januar ergänzt, was auf eine insgesamt geringere Variabilität hindeutet. Auch die Standardabweichungen liegen mit Werten von $6,800 \mu\text{Gal}$ im Juli bis $7,140 \mu\text{Gal}$ im Januar auf einem vergleichbaren Niveau. Diese Kennwerte verdeutlichen stabilere Bedingungen und gleichmäßige Massenverlagerungen in diesen Monaten, was zu einer höheren Genauigkeit der Daten beiträgt. Die geringere Varianzfortpflanzung in diesen Monaten zeigt sich ebenfalls in den minimalen Werten, die mit nur $0,050 \mu\text{Gal}$ im Januar und Juli sowie $0,060 \mu\text{Gal}$ im Oktober besonders niedrig ausfallen. Die Ergebnisse unterstreichen, dass die zugrunde liegenden Kugelfunktionskoeffizienten in diesen Monaten weniger von dynamischen Prozessen beeinflusst werden.

Tab. 6: Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,000	0,218	0,099	0,122	0,071
April	0,000	0,454	0,183	0,236	0,150
Juli	0,000	0,208	0,094	0,116	0,068
Oktober	0,000	0,217	0,098	0,121	0,071

Die Analyse der Schwerestörung zeigt Auffälligkeiten in gleichen Regionen und verdeutlicht eine erhöhte Empfindlichkeit gegenüber Messfehlern und Filtereffekten. Als abgeleitete Größe verstärkt die Schwerestörung kleine Fehler in den Kugelfunktionskoeffizienten, was durch die Varianzfortpflanzung sichtbar wird. Diese fällt in Regionen mit stark wechselnden topografischen oder geologischen Bedingungen besonders hoch aus. Ein zentraler Grund für die stärkeren Variationen liegt in der mathematischen Eigenschaft der Kugelfunktionen. Die radiale Ableitung verstärkt Fehler in den höheren Frequenzen durch den Faktor $n + 1$, was zu einer stärkeren Gewichtung höherer Grade n führt. Bei der Schwerestörung des Gravitationspotentials wird dieser Effekt zusätzlich durch den Faktor $n + 1$ verstärkt, wodurch die Ungenauigkeiten in den höheren Graden weiter zunehmen. Dies macht die Schwerestörung empfindlicher gegenüber kleineren Abweichungen und Ungenauigkeiten in den GRACE-Daten. Diese mathematische Eigenschaft bewirkt nach Rummel et al. (2011) zudem, dass die Ableitungen des Potentials, wie beispielsweise die Schwerestörung, lokale Effekte stärker betonen, da die Integralkerne höherer Ordnung zunehmend sensitiv gegenüber nahen Massenverteilungen werden. Das Signal-Rausch-Verhältnis in den GRACE-Daten nimmt mit steigendem Grad n ab, da die Signalenergie für großräumige Phänomene in niedrigeren Graden konzentriert ist. Studien zeigen, dass höhere Grade, die kleinere, lokale Variationen beschreiben, stärker durch Rauschen beeinflusst werden (Tapley et al., 2004). Dies macht die Schwerestörung, die stark von höheren Graden abhängt, empfindlicher gegenüber Fehlern. Zusätzlich begrenzt die große Beobachtungshöhe von GRACE von etwa 500 km die Auflösung der Daten (Heiskanen and Moritz, 1967).

5.4 Ergebnisse der Schwereanomalie

Im folgenden Abschnitt wird die Veränderung der Schwereanomalie und ihrer Varianzfortpflanzung dargestellt und analysiert. Die Abbildungen 30-33 zeigen die Verteilungen der Schwereanomalien. Wie bei der Schwerestörung und dem Gravitationspotential weisen Regionen mit hohen positiven oder negativen Anomaliewerten auf Massezunahmen oder -verluste hin. In den Darstellungen der Schwereanomalie sind in allen Monaten deutliche streifenartige Muster erkennbar. Grüne Farbtöne, die Werte nahe Null repräsentieren, dominieren in den meisten Regionen. Auffällige rote Bereiche, die positive Anomalien anzeigen, treten hingegen nur vereinzelt auf. Für Januar (Abb. 30) sind sie besonders im Amazonasgebiet, östlich und um den Kongo sowie leicht rötlich im Norden Australiens sichtbar. Für April (Abb. 31) zeigen positive Werte sich vor allem in Westaustralien und südlich von Zentralafrika, östlich des Kongos. Für Juli (Abb. 32) erscheinen markante rote Werte in Indien, während dunkelblaue Farbtöne, die auf die stärksten negativen Anomalien hinweisen, ausschließlich rund um das Amazonasgebiet auftreten. Für Oktober (Abb. 33) sind grüne Farbtöne weit verbreitet, während rote oder dunkelblaue Bereiche kaum erkennbar sind.

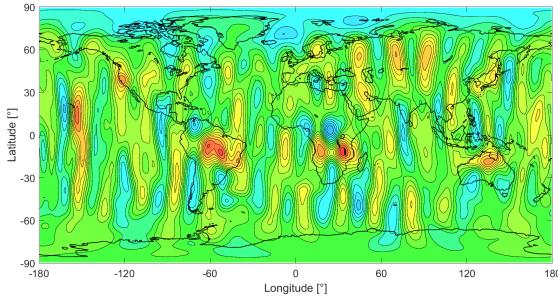


Abb. 30: Schwereanomalie
im Januar 2023

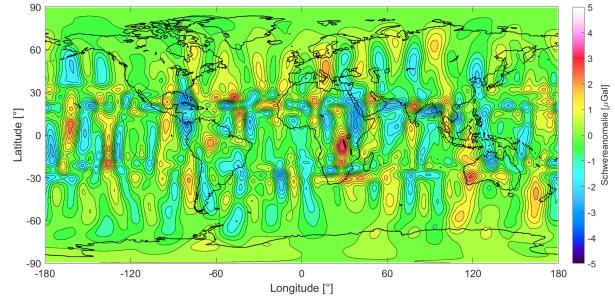


Abb. 31: Schwereanomalie
im April 2023

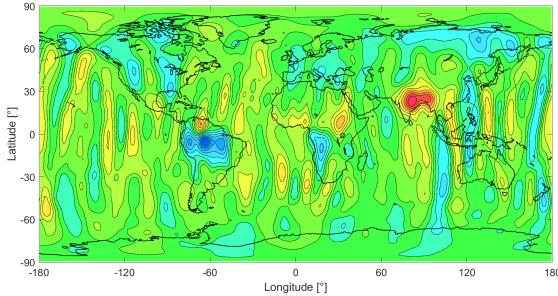


Abb. 32: Schwereanomalie
im Juli 2023

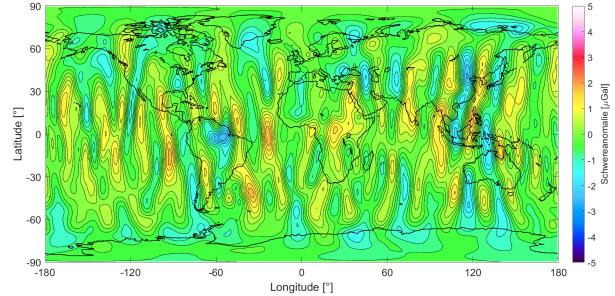


Abb. 33: Schwereanomalie
im Oktober 2023

Die Graphiken der zugehörigen Varianzfortpflanzungen (Abb. 34-37) bieten eine Einschätzung der Genauigkeiten der berechneten Massenanomalien. Sie zeigen ein ähnliches Muster wie die Varianzfortpflanzung der Schwerestörung. Auffällig ist dabei ebenfalls der April (Abb. 35), der durch einen breiten roten Streifen entlang des Äquators sowie ein wellenartiges Isolinienmuster in diesem Bereich geprägt ist. Dies deutet auf die gleichen Ursachen hin, die bereits in Abschnitt 5.3 beschrieben wurden. In den übrigen Monaten, dargestellt in Januar (Abb. 34), Juli (Abb. 36) und Oktober (Abb. 37), zeigt sich der ungenaueste Bereich ebenfalls entlang des Äquators,

wobei dieser als türkis gefarbter Streifen erscheint.

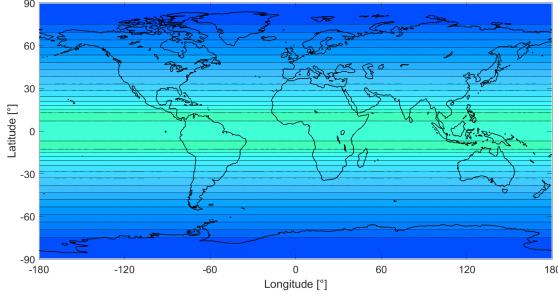


Abb. 34: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Januar 2023

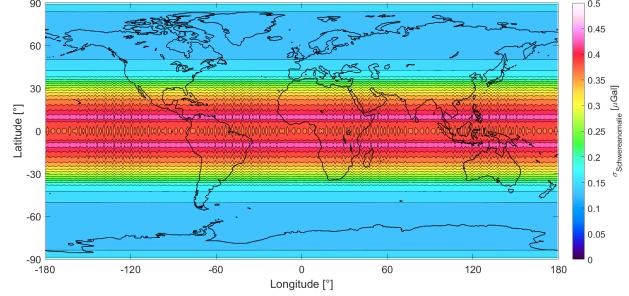


Abb. 35: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im April 2023

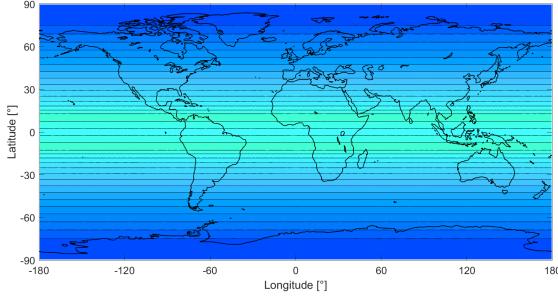


Abb. 36: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juli 2023

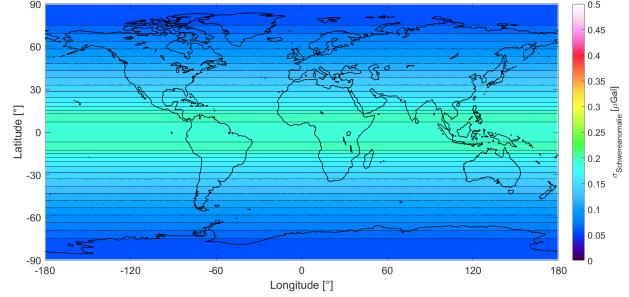


Abb. 37: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Oktober 2023

Tabelle 7 zeigt, dass die Werte der Schwereanomalie im Juli die größte Spannweite aufweisen, mit einem Minimum von $-3,760 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $3,340 \mu\text{Gal}$, was auf eine starke Variabilität hindeutet, die sich auch in den relativ hohen Standardabweichungs- und RMS-Werten mit jeweils $4,920 \mu\text{Gal}$ widerspiegelt. Der April zeigt ebenfalls Schwankungen, wobei die Spannweite etwas geringer ist, mit einem Minimum von $-2,810 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $3,560 \mu\text{Gal}$. Jedoch sind hier die Werte der Standardabweichung und RMS-Wert am höchsten, mit jeweils $6,030 \mu\text{Gal}$. Im Gegensatz dazu zeigen die Monate Januar und Oktober stabilere Bedingungen. Der Oktober weist die geringste Spannweite auf, mit einem Minimum von $-2,530 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $2,119 \mu\text{Gal}$, und hat die niedrigsten Standardabweichungs- und RMS-Werte mit jeweils $4,640 \mu\text{Gal}$, gefolgt von Januar.

Tab. 7: Statistik der Schwereanomalie für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-2,569	2,974	0,000	0,519	0,519
April	-2,810	3,560	0,000	0,603	0,603
Juli	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
Oktober	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464

Tabelle 8 dokumentiert die statistischen Werte der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie. Der April zeigt die höchsten Werte in Bezug auf die Varianzfortpflanzung, mit einem Maximum

von $4,380 \mu\text{Gal}$, was die Auffälligkeiten in den Darstellungen untermauert. Im Gegensatz dazu weist der Juli die niedrigsten Werte in allen Kategorien auf, was auf die stabileren Massenverteilungen während der Trockenzeit hinweist. Die Werte im Januar und Oktober sind vergleichbar und liegen zwischen den zwei Maxima. Im Gegensatz dazu weist der Juli die niedrigsten Werte in allen Kategorien auf, einschließlich der Standardabweichung von $0,650 \mu\text{Gal}$ und des RMS-Werts von $1,110 \mu\text{Gal}$. Dies zeigt sich auch in den Darstellungen und reflektiert die stabileren Massenverteilungen und die geringere Variabilität während der Trockenzeit in vielen tropischen Regionen. Der April hingegen zeigt mit einer Standardabweichung von $1,460 \mu\text{Gal}$ und einem RMS-Wert von $2,280 \mu\text{Gal}$ die höchsten Werte. Dies deutet auf eine erhöhte Variabilität und größere Unsicherheiten in den Schwereanomalien hin. Die Werte im Januar und Oktober liegen zwischen denen von April und Juli und zeigen moderate Variabilitäten.

Tab. 8: Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,000	0,208	0,094	0,116	0,068
April	0,002	0,438	0,175	0,228	0,146
Juli	0,000	0,198	0,090	0,111	0,065
Oktober	0,000	0,206	0,093	0,115	0,067

5.5 Untersuchung der Breitenabhängigkeit der Varianzfortpflanzung

Im folgenden wird analysiert, warum die Isolinien auf den Graphiken der Varianzfortpflanzungen nahezu unabhängig von der Länge λ erscheinen. Die Varianz des Gravitationspotentials σ_V^2 ist in (19) gegeben. Es wird die Annahme $\sigma_{C_{nm}}^2 \approx \sigma_{S_{nm}}^2$ getroffen. Damit kann dieser gemeinsame Faktor ausgeklammert werden. Dadurch vereinfacht sich der Ausdruck aus der Gleichung (19) zu

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{GM}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}^2(\cos \varphi) \sigma_{C_{nm}}^2 (\cos^2(m\lambda) + \sin^2(m\lambda)). \quad (73)$$

Zudem kann der Zusammenhang $\cos^2(m\lambda) + \sin^2(m\lambda) = 1$ verwendet werden. Die Gleichung (73) reduziert sich weiter zu

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{GM}{r}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}^2(\cos \varphi) \sigma_{C_{nm}}^2. \quad (74)$$

In dieser Form ist die Varianz des Gravitationspotentials σ_V^2 nahezu ausschließlich von der geozentrischen Breite φ abhängig, da die Legendre-Funktionen $\bar{P}_{nm}(\cos \varphi)$ die Abhängigkeit von der Breite repräsentieren. Diese mathematische Reduktion erklärt, weshalb die Visualisierungen der Varianzfortpflanzung in den meisten Monaten linienhafte Muster parallel zu den Breitenkreisen aufweisen. Das Gleiche gilt für die Varianzfortpflanzung der Schwerestörung und der Schwereanomalie.

Diese Annahme wird durch die linke Hälfte des dreieckigen Diagramms 38 bestätigt, in dem die Verhältnisse der Genauigkeiten $\sigma_{S_{nm}}/\sigma_{C_{nm}}$ in Prozent dargestellt werden. Da diese Verhältnisse nah an 100% liegen, bestätigen die Visualisierungen, dass $\sigma_{C_{nm}}^2$ und $\sigma_{S_{nm}}^2$ für die meisten Koeffizienten nahezu gleich groß sind. Dadurch bleibt in der Varianzgleichung lediglich $\bar{P}_{nm}(\cos \varphi)$ als dominanter Faktor, was die Breitendominanz in den Graphiken der Varianzfortpflanzungen erklärt. Die rechte Seite des Dreiecks stellt das Verhältnis der Genauigkeiten der \bar{C}_{nm} -Koeffizienten zu sich selbst dar, $\sigma_{C_{nm}}/\sigma_{C_{nm}}$, weshalb diese vollständig türkis und mit 100%

belegt ist. Die Abbildung, die exemplarisch für Januar 2023 dargestellt ist, verdeutlicht ein typisches Verhalten, das sich in ähnlicher Form in allen Monaten wiederholt. Eine vollständige Übersicht aller Monate ist im Anhang C.1.3 zu finden.

Das zweite dreieckige Diagramm (Abb. 39), gibt die absoluten Genauigkeiten der Koeffizienten \bar{S}_{nm} auf der linken Seite und \bar{C}_{nm} rechts an. Diese Darstellung zeigt, dass die Genauigkeiten der \bar{C}_{nm} -Koeffizienten im Bereich von 10^{-14} bis 10^{-11} liegen. An der Spitze des Dreiecks, also bei kleineren Graden n und Ordnungen m , sind die Genauigkeiten am höchsten. Mit zunehmendem Grad und höherer Ordnung nehmen die Werte zu, was sich durch die Farbverläufe in Richtung der Grundlinie des Dreiecks deutlich zeigt. Auch dieses Diagramm ist exemplarisch für Januar 2023 dargestellt, wobei sich ähnliche Muster für alle anderen Monate zeigen, die ebenfalls im Anhang unter C.2.3 zu finden sind.

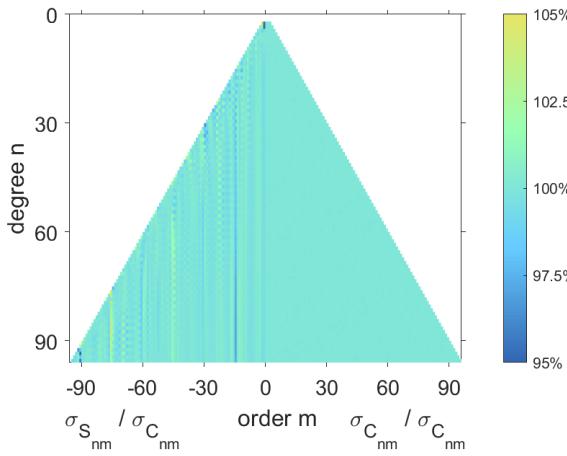


Abb. 38: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023

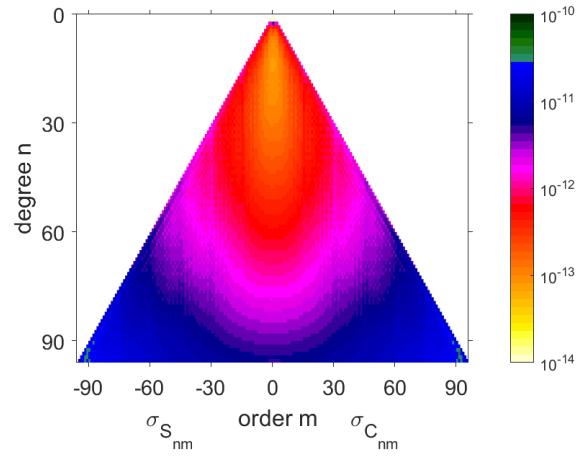


Abb. 39: Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023

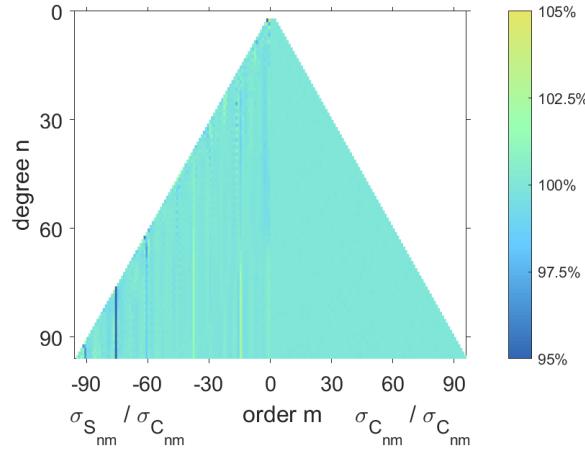


Abb. 40: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im April 2023

Im Gegensatz dazu weichen die Muster der Varianzfortpflanzung für April in Abbildung 40 stärker ab. Während die Verhältnisse der Genauigkeiten der Koeffizienten auf der linken Seite des Dreiecks in den meisten Monaten gleichmäßig und breitdominant sind, zeigt das Koordinatendreieck für April heterogenere Verteilungen, erkennbar durch ein starker streifenartiges Muster. Die Streifen in Gelb und Blau zeigen positive und negative Abweichungen von den 100 %. Diese Abweichungen führen dazu, dass die sonst klare Breitenabhängigkeit der Varianz-

fortpflanzung um den Äquator herum im Monat April weder für das Gravitationspotential, noch in seinen Funktionalen erkennbar ist.

Die Ursache dieser Unterschiede ist wie in Unterabschnitt 5.1 und (COST-G: Combination Service for Time-variable Gravity Fields, 2024) beschrieben in Bahnstörungen, die die Wiederholperiode des Orbits beeinflussen. Diese spiegeln sich sowohl in der Verteilung der Koeffizientengenauigkeiten als auch in der Varianzfortpflanzung wider und erklären, warum der April keine klaren breitenabhängigen Muster zeigt.

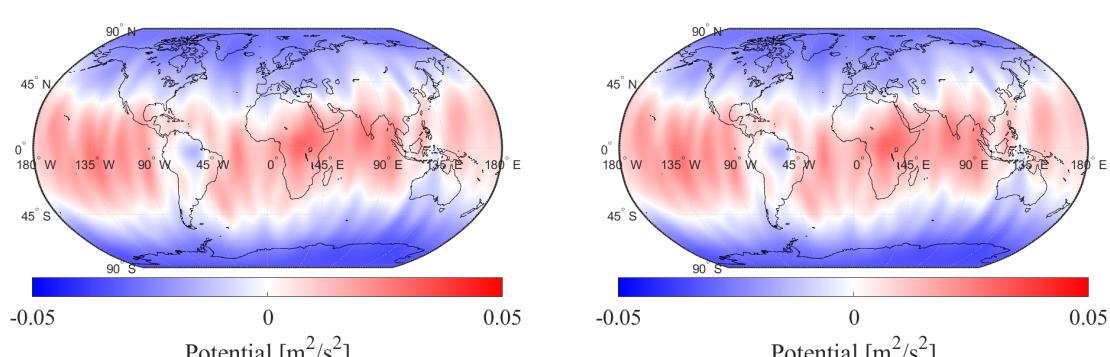
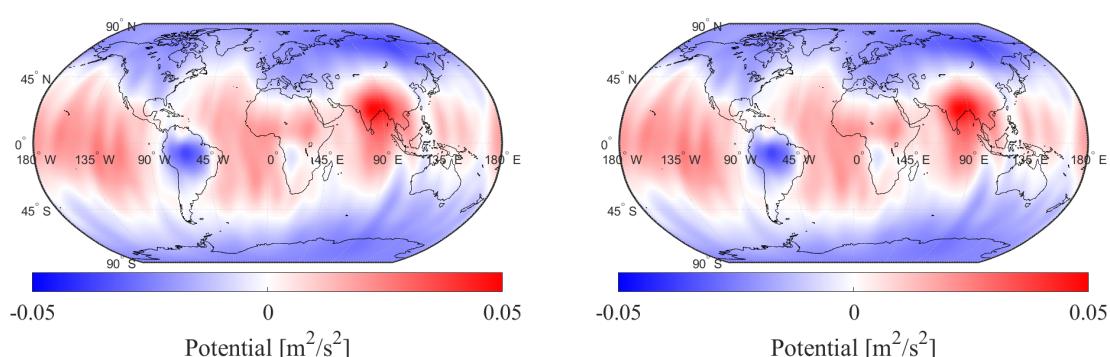
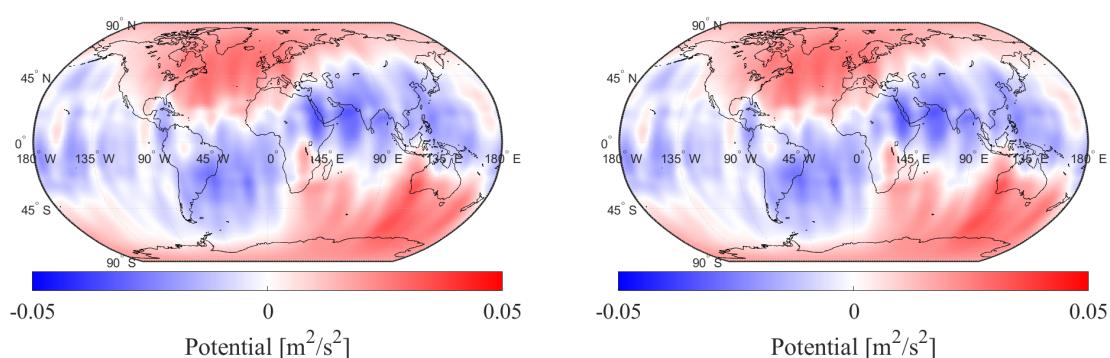
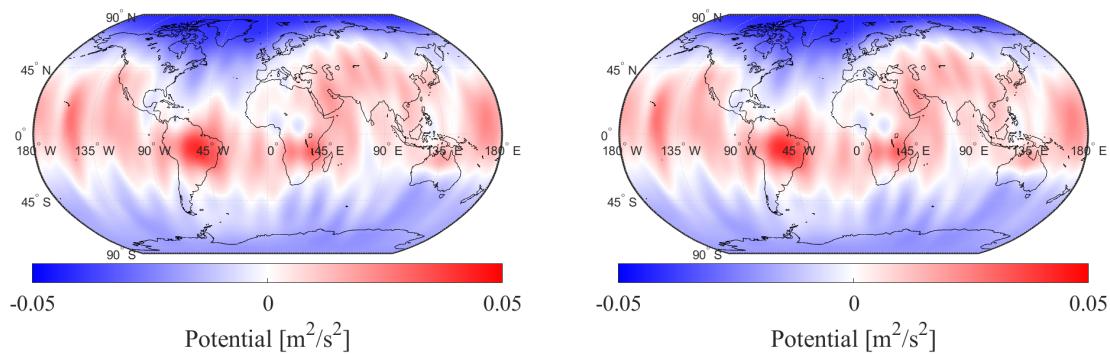
5.6 Terrestrial Water Storage (TWS)

In diesem Abschnitt werden die graphischen Darstellungen und Statistiken des aus der Synthese berechneten Gravitationspotentials sowie seiner Funktionale präsentiert. Diese Werte bilden die Grundlage für den daraus resultierenden TWS und die durch Inversion ermittelten Ergebnisse. Anschließend erfolgt ein Vergleich zwischen den synthetisierten Werten und den Ergebnissen der Inversion und eine Darstellung der Residuen. Die Analysen und Visualisierungen beziehen sich auf die exemplarischen Monate Januar, April, Juli und Oktober, um saisonale Veränderungen zu veranschaulichen. Sämtliche Darstellungen der monatlichen TWS-Werte sind im Anhang C.7.3 zu finden.

5.6.1 TWS aus dem Gravitationspotential

Die Berechnung des TWS basiert auf den beobachteten Werten des Gravitationspotentials. Im ersten Schritt wird der inverse Tesseroidansatz angewendet, um aus den synthetisierten Gravitationspotentialwerten die Massenänderungen zu berechnen. Diese TWS-Werte dienen als Grundlage für die anschließende Inversion, bei der die Wechselwirkungen zwischen den Massenänderungen und ihrem Einfluss auf das Gravitationsfeld modelliert werden. Der Prozess beinhaltet eine Ausgleichung, bei der die invers berechneten TWS-Werte iterativ angepasst werden, um die besten Übereinstimmungen mit den ursprünglichen Potentialwerten zu erreichen. Im letzten Schritt werden die ursprünglichen Gravitationspotentialwerte mit den aus der Ausgleichung resultierenden Werten verglichen. Die hierbei entstehenden Differenzen, die als Residuen bezeichnet werden, dienen als Indikator für die Konsistenz und Genauigkeit des Modells. Die generierten Graphiken veranschaulichen die einzelnen Schritte der Berechnung und Analyse. Dabei stellt die Farbskala positive Werte in Rot und negative Werte in Blau dar.

Die Abbildungen 41-48 ermöglichen einen direkten Vergleich zwischen dem Gravitationspotential aus der Synthese auf der linken Seite und dem rekonstruierten Potential auf der rechten Seite, für die Monate Januar, April, Juli und Oktober 2023. Im Januar treten starke positive Werte insbesondere in Südamerika, im Amazonasgebiet, sowie im Kongo-Becken Afrikas auf, während die Polarregionen negative Werte zeigen. Der April (Abb. 43) hebt sich durch negative Werte entlang des Äquators ab, jedoch mit positiven Potentialen in Nordamerika und Europa und den südlichen Teilen von Afrika und Australien. Der Juli (Abb. 45) zeigt starke positive Werte in Südostasien und Indien, während in Südamerika negative Werte dominieren. Im Oktober (Abb. 47) sind die Potentialwerte insgesamt weniger intensiv ausgeprägt. Nahezu der gesamte Bereich zwischen 45° Nord und 45° Süd ist positiv mit Ausnahme von Südamerika und Australien. Außerhalb dieses Bereichs finden sich sonst ausschließlich negative Bereiche. Die Ergebnisse der Synthese und der Inversion sehen mit bloßem Auge identisch aus. Die nahezu perfekte Übereinstimmung bestätigt die Effizienz der angewandten Methode, die selbst kleinste Diskrepanzen zwischen den synthetisierten und rekonstruierten Werten erfolgreich ausgleicht.



Die Statistiken in Tabelle 9 des Gravitationspotentials aus Synthese und Inversion zeigen identische Werte. Sie sind in den erstellten Tabellen der Statistiken bis $10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ gleich groß, was erklärt, warum die Graphiken 41-48 in dieser Auflösung identisch erscheinen. Wissenschaftlich gesehen bedeutet dies, dass die aus der verwendeten Methode rekonstruierten Werte des Gravitationspotentials nahezu vollständig mit den Originalwerten übereinstimmen. Dies bestätigt nicht nur die hohe Präzision und Verlässlichkeit der angewandten Inversionsmethode, sondern auch die Konsistenz des zugrunde liegenden Modellierungsansatzes. Eine so geringe Abweichung unterstreicht, dass die Methode sowohl die physikalischen Prozesse als auch die räumlichen und zeitlichen Variationen des Gravitationspotentials akkurat abbildet.

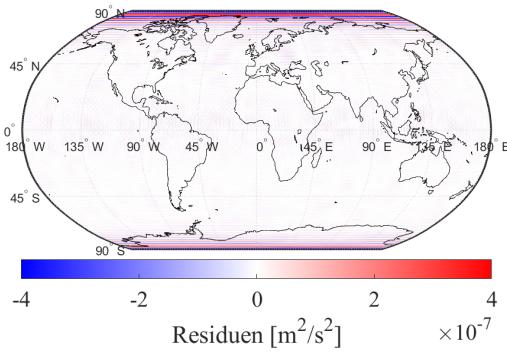


Abb. 49: Residuen der Gravitationspotentiale im Januar 2023

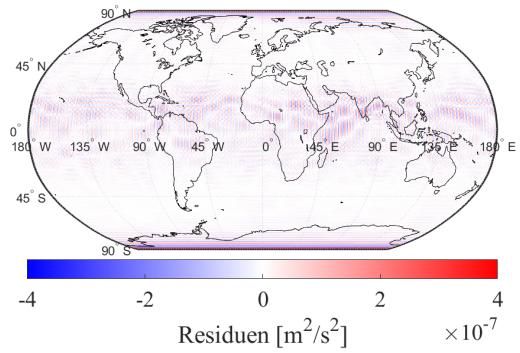


Abb. 50: Residuen der Gravitationspotentiale im April 2023

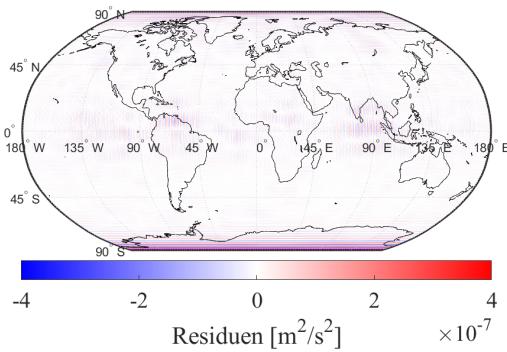


Abb. 51: Residuen der Gravitationspotentiale im Juli 2023

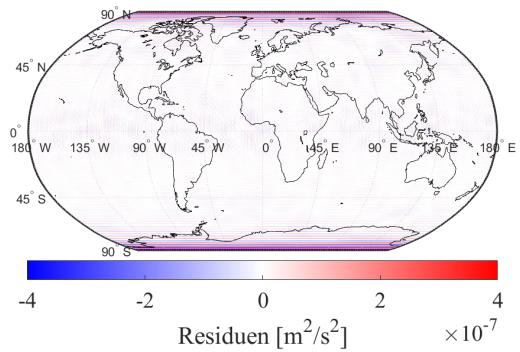


Abb. 52: Residuen der Gravitationspotentiale im Oktober 2023

Der Juli weist mit einer Spannweite von $-0,036 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ bis $0,045 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ die größte Variabilität auf, während der Oktober die stabilsten Werte liefert. Es ist jedoch zu beachten, dass die statistischen Werte in den Ausgabedateien nicht als Genauigkeiten zu verstehen sind. Sie werden aus gewichteten Werten berechnet durch Anwendung einer Skalierung mit $\cos(\varphi)$, und beschreiben die Variation der entsprechenden Größe im Monat über die gesamte Erde.

Tab. 9: Statistiken des Gravitationspotentials aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
Januar (aus TWS)	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
April (Synthese)	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
April (aus TWS)	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
Juli (Synthese)	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
Juli (aus TWS)	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
Oktober (Synthese)	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092
Oktober (aus TWS)	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092

In den Abbildungen in 53-56 wird die räumliche Verteilung des TWS auf der Erdoberfläche dargestellt. Diese Ergebnisse basieren auf den beobachteten Potentialwerten und zeigen die dynamischen Veränderungen des TWS für den betrachteten Zeitraum. Die roten Bereiche markieren positive Werte, während die blauen Bereiche negative Werte also eine Reduktion von Wassermassen darstellen. In allen vier Monaten ist ein Muster mit Längsstreifen erkennbar, dessen Ursache in Unterabschnitt 5.8 behandelt wird. Im April (Abb. 54) zeigen sich zusätzlich leichte Streifen in Ost-West-Richtung. Diese Auffälligkeiten lassen sich durch die qualitativ schlechteren Lösungen für diesen Monat erklären. Im Juli (Abb. 55) ist in einem Teil des Amazonasgebiets ein etwas stärker ausgeprägter negativer Bereich, zu erkennen, während in Indien mit stärker positiven Werten auffällt. Januar (Abb. 53) und Oktober (Abb. 56) weisen keine herausstechenden Intensitäten innerhalb der Landmassen auf, was sich durch die gleichmäßige Dunkelheit der Farben in den jeweiligen Graphiken widerspiegelt. Die Statistischen Werte des TWS werden in Unterabschnitt 5.7 analysiert.

Die in den Abbildungen 49-52 dargestellten Residuen zeigen die Differenzen zwischen den aus der Synthese erhaltenen Schwereanomalien und der aus der Ausgleichung erhaltenen Werte. Residuen nahe null werden in den Graphiken als helle oder weiße Bereiche visualisiert, während negative Residuen in Blautönen und positive Residuen in Rottönen erscheinen. Auffällig sind insbesondere blaue und rote Streifen in allen Monaten in den Polarregionen. Die Polarregionen stellen nach Uieda et al. (2016) eine besondere Herausforderung dar, da die Genauigkeit der Berechnungen abnimmt. Dies liegt daran, dass Tesseroiden in diesen Regionen in eine annähernd dreieckige Form annehmen, was die numerische Integration erschwert. Diese Geometrieveränderung führt zu größeren Abweichungen und verstärkten Residuen, wodurch die Unsicherheit in den Ergebnissen deutlich erhöht wird. Im Äquatorbereich sind nur sehr kleine Residuen erkennbar, die am deutlichsten im April (Abb. 54) zu sehen sind. Insgesamt liegen die Residuen sehr nahe bei null, was auf eine geringe Abweichung hinweist. Dies deutet auf eine hohe Qualität der Modellanpassung und ein erfolgreich durchgeführtes Inversionsverfahren hin.

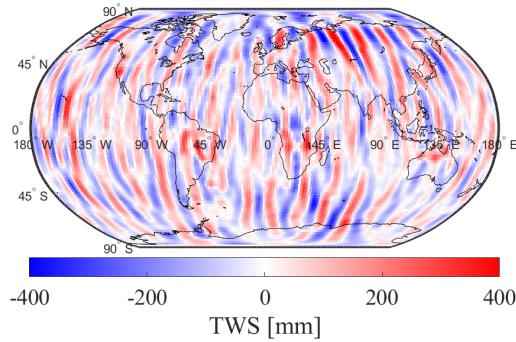


Abb. 53: TWS aus Gravitationspotential im Januar 2023

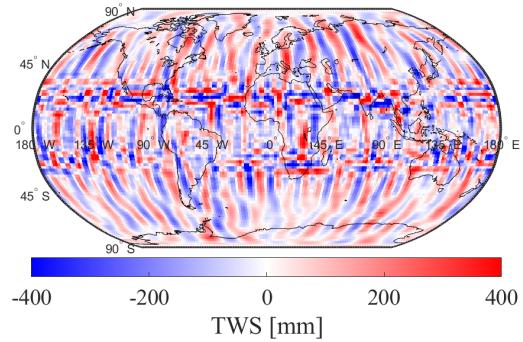


Abb. 54: TWS aus Gravitationspotential im April 2023

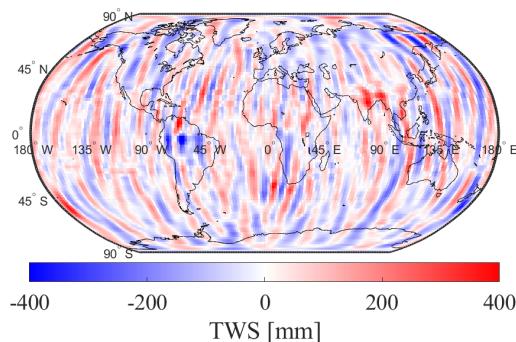


Abb. 55: TWS aus Gravitationspotential im Juli 2023

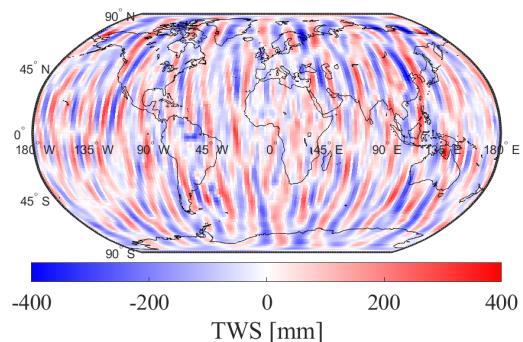


Abb. 56: TWS aus Gravitationspotential im Oktober 2023

Die Residuen lassen sich im Unterkapitel 5.7 als Zahlenwerte detaillierter nachvollziehen.

5.6.2 TWS aus der Schwerestörung

Für die Schwerestörung wird ein ähnlicher Ansatz wie beim Gravitationspotential verwendet. Die Beobachtungen werden in Jakobi-Matrizen umgerechnet, die die Regularisierung der Daten ermöglichen. Die Ergebnisse werden auch hier iterativ verfeinert, um eine möglichst genaue Schätzung des TWS zu erhalten.

In den Abbildungen 57-64 ist die Schwerestörung auf der linken Seite dargestellt, die auf Basis der Synthese berechnet wird. Diese dient als Grundlage für den Vergleich mit der Schwerestörung, aus den TWS-Werten der Inversion, welche rechts daneben dargestellt werden. Auch hier sind die Werte auf den Landmassen im Bereich des Äquators in den Monaten Januar (Abb. 57), Juli (Abb. 61) und Oktober (Abb. 59) größtenteils positiv aber es zeigt sich ein deutlich streifenartigeres Muster als beim Potential. Im April (Abb. 59) hingegen treten in diesem Bereich überwiegend negative Werte auf. Im Januar ist im Amazonasgebiet einen deutlich größerer positiver Bereich erkennbar, während im Juli dieselbe Stelle auffällig negativ ist. Gleichzeitig zeigt sich hier um Indien ein großflächiger positiver Bereich. Der Oktober zeigt insgesamt die am schwächsten ausgeprägten Werte. Die Abbildungen 58-64 die daneben abgebildet werden zeigen die Schwerestörung aus der Inversion. Die Ergebnisse sind in dieser Auflösung wieder nahezu identisch.

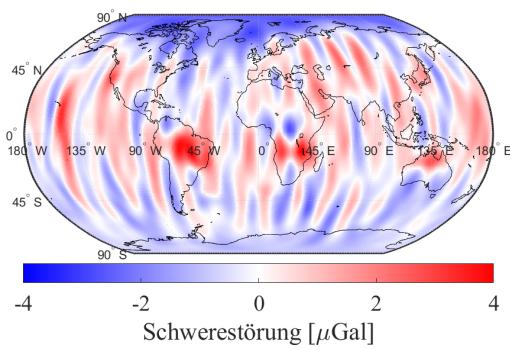


Abb. 57: Schwerestörung aus Synthese im Januar 2023

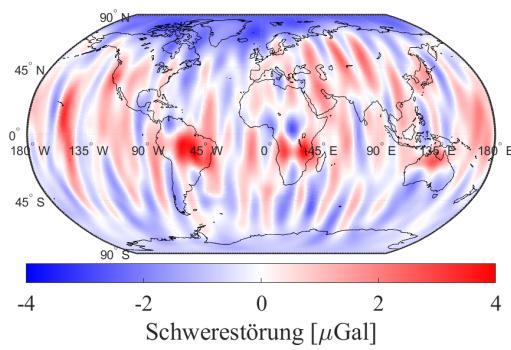


Abb. 58: Schwerestörung aus Inversion im Januar 2023

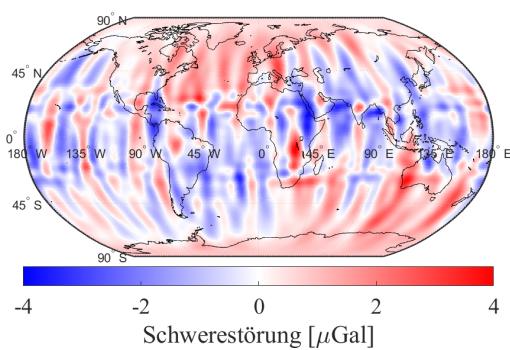


Abb. 59: Schwerestörung aus Synthese im April 2023

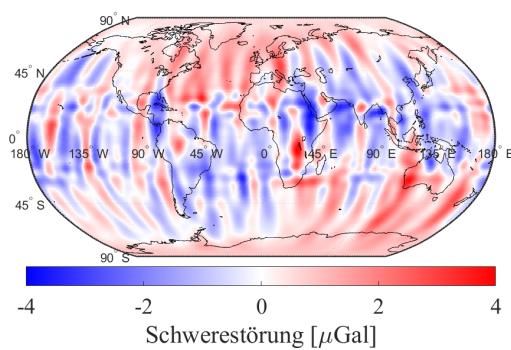


Abb. 60: Schwerestörung aus Inversion im April 2023

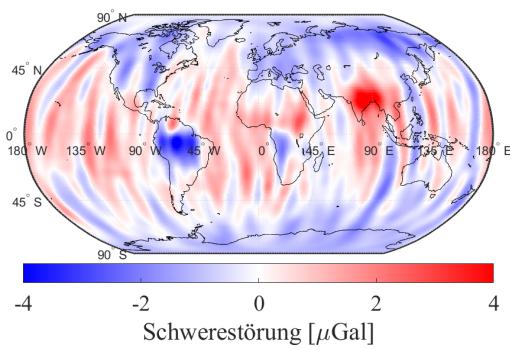


Abb. 61: Schwerestörung aus Synthese im Juli 2023

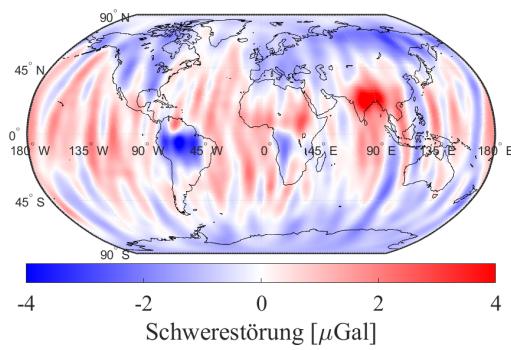


Abb. 62: Schwerestörung aus Inversion im Juli 2023

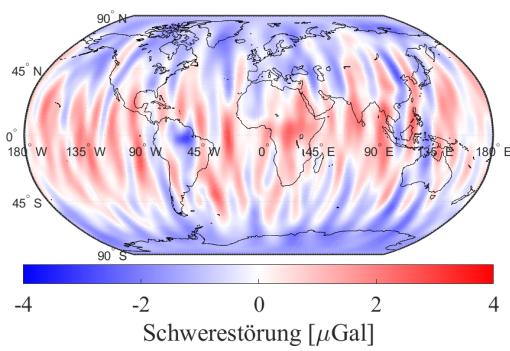


Abb. 63: Schwerestörung aus Synthese im Oktober 2023

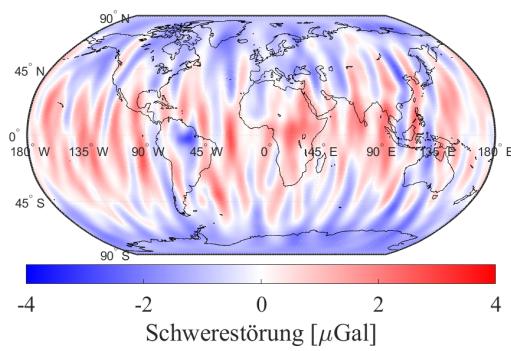


Abb. 64: Schwerestörung aus Inversion im Oktober 2023

Die in Tabelle 10 dargestellten Werte zeigen eine vollständige Übereinstimmung zwischen Synthese und Inversion. Im Juli treten die größten Extremwerte auf, mit einem Minimum von $-4,795 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $4,645 \mu\text{Gal}$. Die Mittelwerte sind in allen Monaten positiv, mit Ausnahme des Aprils, was mit der graphischen Darstellung übereinstimmt. Dort zeigt der größte Teil der Erde einen blauen negativen Bereich. Der April sticht außerdem durch die größte Standardabweichung und den höchsten RMS-Wert hervor, die jeweils $0,786 \mu\text{Gal}$ betragen. Diese Werte unterstreichen die erhöhte Variabilität der Schwerestörung in diesem Monat. Die Standardabweichung und der RMS-Wert bleiben in den übrigen Monaten hingegen stabil, was die Konsistenz und Genauigkeit der Ergebnisse über den gesamten Zeitraum verdeutlicht.

Tab. 10: Statistiken der Schwerestörung aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
Januar (Inversion)	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
April (Synthese)	-3,736	4,050	-0,001	0,786	0,786
April (Inversion)	-3,736	4,050	-0,001	0,786	0,786
Juli (Synthese)	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
Juli (Inversion)	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
Oktober (Synthese)	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646
Oktober (Inversion)	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646

Die Abbildungen 69-72 zeigen den aus der Schwerestörung berechneten TWS und liefern eine detaillierte Analyse lokaler Variationen im Schwerefeld. Dies liegt daran, dass die Schwerestörung besonders empfindlich auf Massenänderungen in spezifischen Regionen reagiert, wodurch kleinräumige hydrologische Prozesse präziser erfasst werden können. Auf den Graphiken fällt ein stark streifenartiges Muster auf, das Interpretationen erschwert. Besonders der April (Abb. 54) sticht durch Streifen hervor, die im Bereich von 45° Nord und 45° Süd teilweise quer verlaufen, während die anderen Abbildungen vor allem längsgerichtete Streifen aufweisen. Im Juli (Abb. 55) sind positive Werte im Amazonasgebiet Südamerikas sowie negative Werte in Indien etwas stärker ausgeprägt. In den restlichen Monaten ist keine stark auffällige bestimmte Region zu erkennen.

Die Statistiken zum TWS aus der Schwerestörung werden im Unterabschnitt 5.7 behandelt.

In den Abbildungen 65-68 sind die Residuen der Schwerestörung dargestellt. Sie zeigen die Differenz zwischen den aus der Synthese stammenden Beobachtungen und den durch die Inversion berechneten Werten. Die Skalierung ist einheitlich mit der Schwereanomalie, um die Vergleichbarkeit sicherzustellen, da die betrachteten Werte bereits sehr klein sind. In dieser Größenordnung zeigen sich vor allem positive und negative Residuen entlang des Äquators, die im April (Abb. 66) am deutlichsten ausgeprägt sind und teils gestrichelt erscheinen. In den Monaten Januar (Abb. 65), Juli (Abb. 67) und Oktober (Abb. 68) treten ebenfalls Residuen am Äquator auf, diese sind jedoch schwächer. Dies verdeutlicht die hohe Präzision des verwendeten Inversionsverfahrens und zeigt, dass die Rekonstruktion der Schwerestörung insgesamt sehr gut gelingt. Die Differenzen zwischen Synthese und Inversion bleiben minimal. An den Polen sind die Residuen hingegen in allen Monaten stark und deutlich ausgeprägt. Die mögliche Ursache dafür wird im Abschnitt 5.7 erläutert.

Um eine sinnvolle Interpretation dieser Graphiken zu gewährleisten sind die numerischen Werte im Unterabschnitt 5.7 dargestellt.

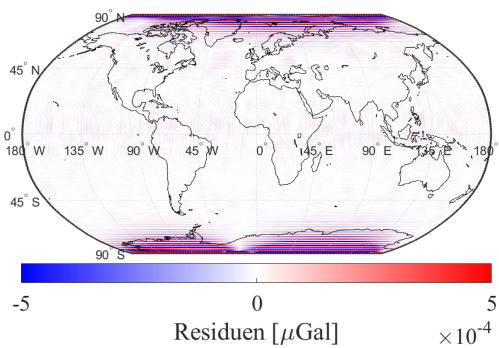


Abb. 65: Residuen der Schwerestörungen im Januar 2023

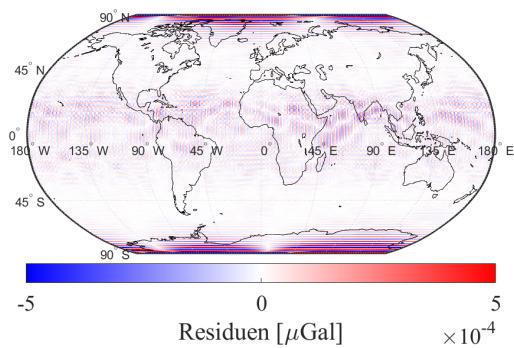


Abb. 66: Residuen der Schwerestörungen im April 2023

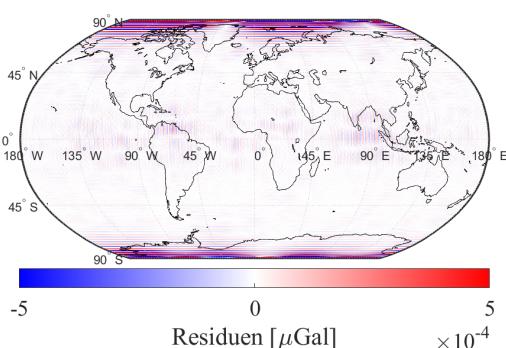


Abb. 67: Residuen der Schwerestörungen im Juli 2023

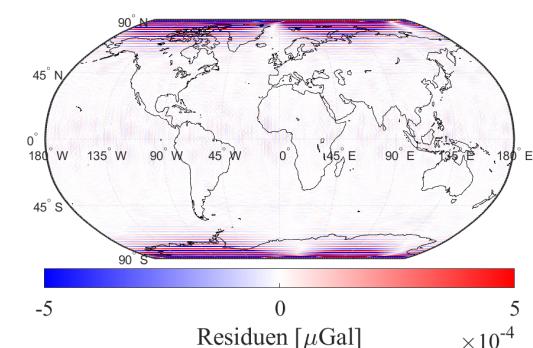


Abb. 68: Residuen der Schwerestörungen im Oktober 2023

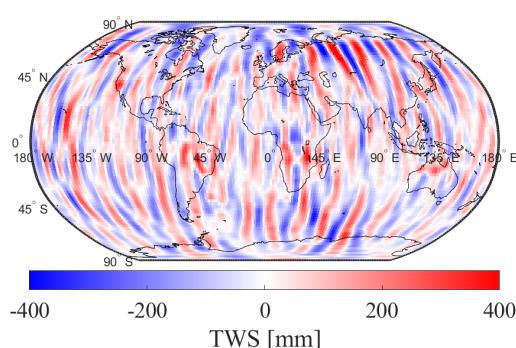


Abb. 69: TWS aus Schwerestörung im Januar 2023

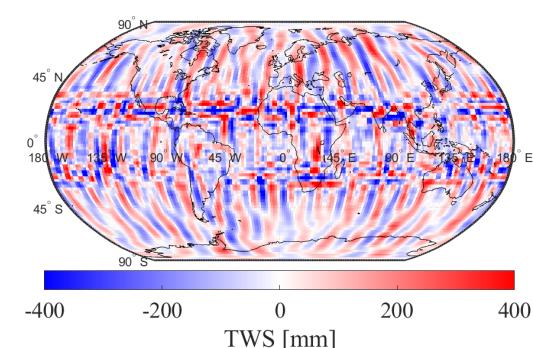


Abb. 70: TWS aus Schwerestörung im April 2023

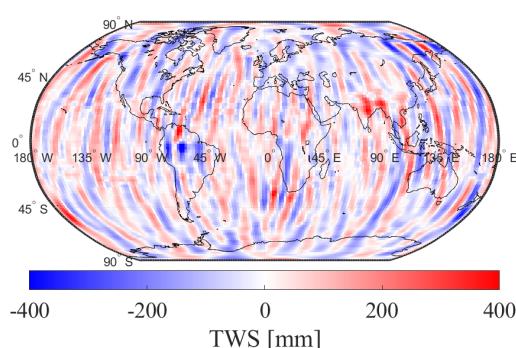


Abb. 71: TWS aus Schwerestörung im Juli 2023

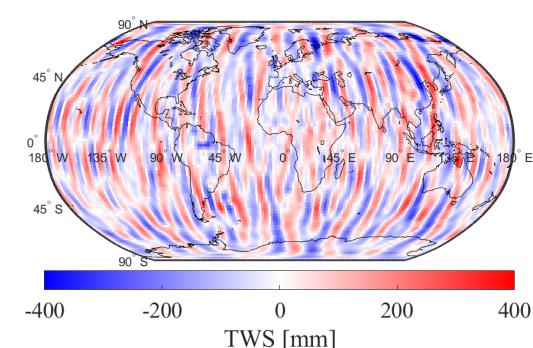


Abb. 72: TWS aus Schwerestörung im Oktober 2023

5.6.3 TWS aus der Schwereanomalie

Die Beobachtungen der Schwereanomalie dienen als Ausgangsdaten, um eine Inversion in TWS-Werte zu ermöglichen. Die Regularisierung spielt auch in diesem Fall eine zentrale Rolle, um die Stabilität der Lösung zu gewährleisten. Im Anschluss folgt die Rekonstruktion von Schwereanomaliewerten, die mit denen aus der Synthese verglichen werden.

Die Abbildungen 73-80 zeigen links die Schwereanomalien, die auf Basis der Synthese berechnet werden und rechts daneben sind die Schwereanomalien dargestellt, die auf Grundlage der aus der Inversion berechneten TWS-Werte rekonstruiert werden. Die Graphiken zeigen ein streifenartiges Muster, wobei die Streifen etwas schmäler erscheinen als bei der Schwerestörung. Die linke Graphik ist optisch nicht von der rechten zu unterscheiden und wird im Folgenden analysiert. Im Januar (Abb. 73) zeigt sich eine helle Farbgebung mit leicht dunklerer Rotfärbung, die positive Werte auf allen Landmassen entlang des Äquators in Südamerika, Afrika und Australien darstellt. Im April (Abb. 75) sind die Intensitäten schwächer als in den entsprechenden Graphiken der Schwerestörung und zeigen etwa gleichermaßen positive und negative Werte auf den Landmassen mit kurzen Querstreifen zusätzlich zu den Längsstreifen. Im Juli ist ein negativer Bereich in Südamerika um den Amazonas erkennbar, während Venezuela und Südasien um Indien positive Werte aufweisen. Der Oktober zeigt kaum Auffälligkeiten in der Farbintensität und weist abwechselnd positive und negative Werte auf.

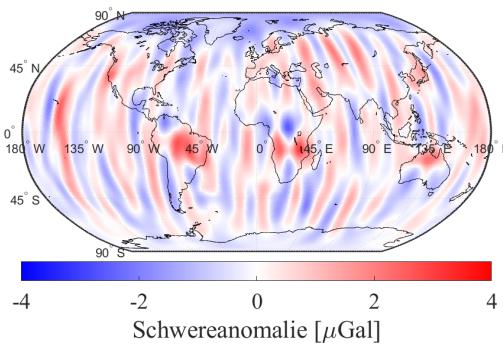


Abb. 73: Schwereanomalie aus Synthese im Januar 2023

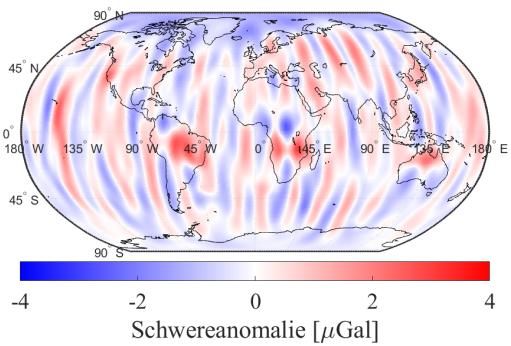


Abb. 74: Schwereanomalie aus Inversion im Januar 2023

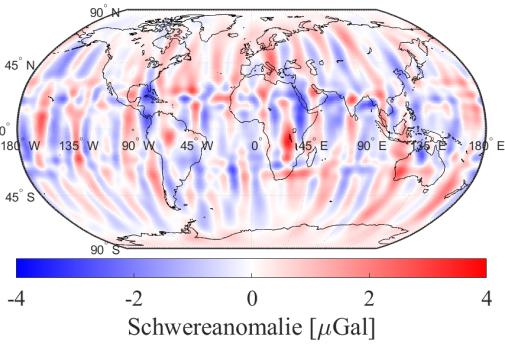


Abb. 75: Schwereanomalie aus Synthese im April 2023

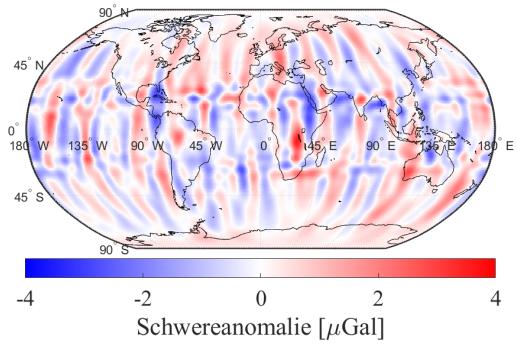


Abb. 76: Schwereanomalie aus Inversion im April 2023

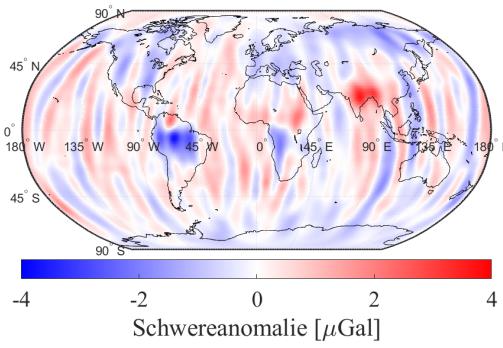


Abb. 77: Schwereanomalie aus Synthese im Juli 2023

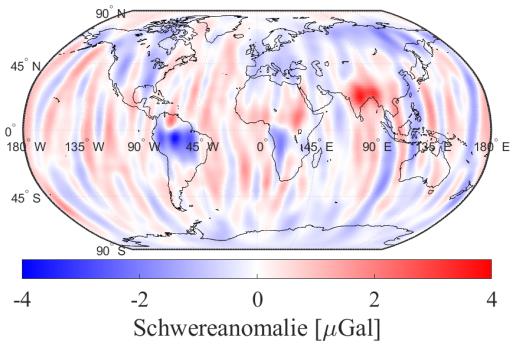


Abb. 78: Schwereanomalie aus Inversion im Juli 2023

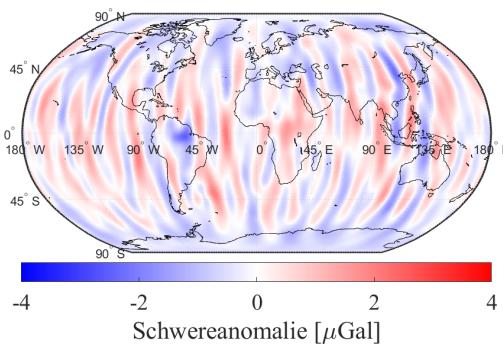


Abb. 79: Schwereanomalie aus Synthese im Oktober 2023

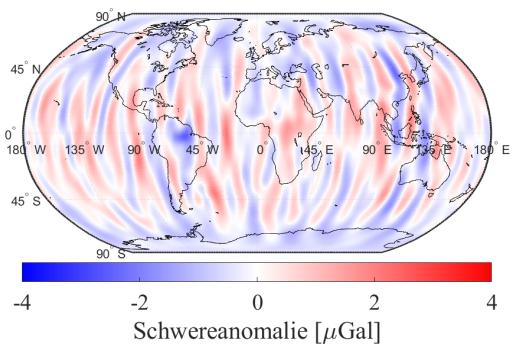


Abb. 80: Schwereanomalie aus Inversion im Oktober 2023

In Tabelle 11 wird die vollständige Übereinstimmung der zwei Ansätze in Zahlenwerten deutlich. Man erkennt, dass der Mittelwert in allen Monaten bis zur dritten Nachkommastelle null beträgt, was auf eine ausgeglichene Verteilung der positiven und negativen Werte hinweist. Zudem bleiben die Standardabweichung und das RMS über beide Ansätze hinweg identisch, was die Konsistenz und Stabilität der Berechnungen unterstreicht. Die größten Extremwerte treten im Juli auf, mit einem Minimum von $-3,760 \mu\text{Gal}$ und einem Maximum von $3,339 \mu\text{Gal}$. Insgesamt verhalten sich die Werte in einer ähnlichen Größenordnung mit Standardabweichungen von $0,464 \mu\text{Gal}$ im Oktober bis $0,603 \mu\text{Gal}$ im April.

Tab. 11: Statistiken der Schwereanomalie aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-2,569	2,975	0,000	0,519	0,519
Januar (Inversion)	-2,569	2,975	0,000	0,519	0,519
April (Synthese)	-2,807	3,560	0,000	0,603	0,603
April (Inversion)	-2,807	3,560	0,000	0,603	0,603
Juli (Synthese)	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
Juli (Inversion)	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
Oktober (Synthese)	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464
Oktober (Inversion)	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464

Die Abbildungen 81-84 stellen die aus der Schwereanomalie abgeleiteten TWS-Werte dar. Diese Ergebnisse zeigen eine höhere Empfindlichkeit gegenüber großräumigen hydrologischen Prozessen im Vergleich zur Schwerestörung. Im Januar und Juli zeigt sich eine deutliche Farbdominanz von Blau auf der westlichen Erdkugel und Rot auf der östlichen. Im Oktober ist es genau umgekehrt, mit fast ausschließlich positiven roten Bereichen auf der westlichen Erdkugel und negativen Bereichen auf der östlichen. April hat die heterogenste Farbverteilung innerhalb der Graphik.

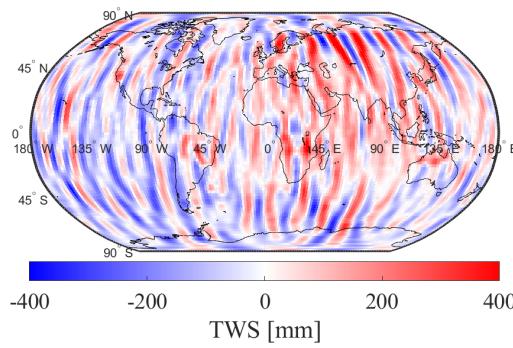


Abb. 81: TWS aus Schwereanomalien im Januar 2023

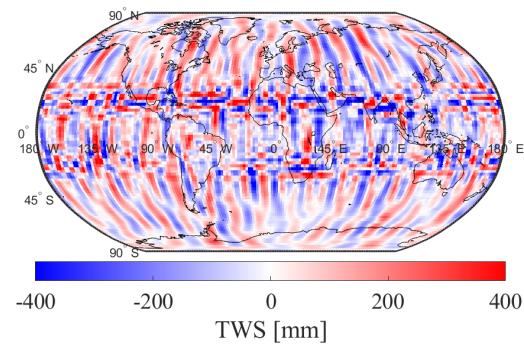


Abb. 82: TWS aus Schwereanomalien im April 2023

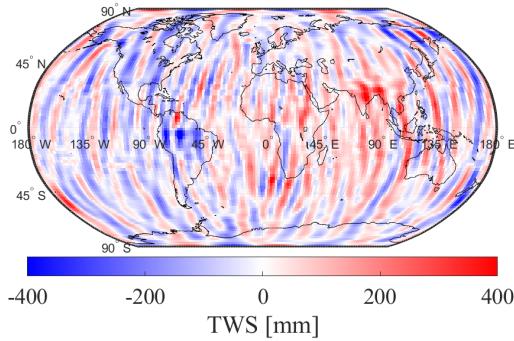


Abb. 83: TWS aus Schwereanomalien im Juli 2023

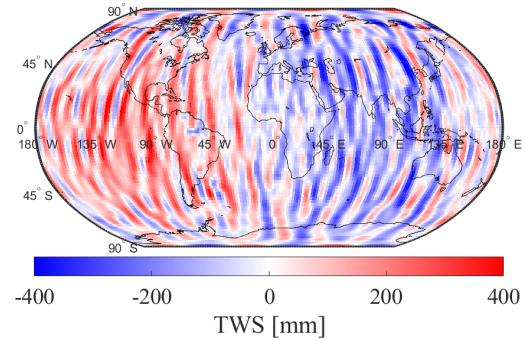


Abb. 84: TWS aus Schwereanomalien im Oktober 2023

Der Vergleich der TWS-Werte des Gravitationspotentials, der Schwerestörung und der Schwereanomalie findet sich in Unterabschnitt 5.7.

Die Residuen der Beobachtungen, dargestellt in den Abbildungen 85-88, zeigen die Differenzen zwischen den Schwereanomalien aus der Synthese und der Inversion. In jedem Monat sind die Residuen bei der Schwereanomalie stärker ausgeprägt als bei der Schwerestörung und dem Potential. Im April (Abb. 86) weisen die Residuen die größte Ähnlichkeit der Funktionale auf, wobei eine leichte positive Tendenz im Westen und überwiegend negative Werte im Osten erkennbar sind. Im Gegensatz dazu weisen die anderen Monate deutlich größere Abweichungen auf. Im Januar (Abb. 85) ist eine klare Trennung mit positiven Werten im Westen und negativen im Osten sichtbar, während sich dieses Muster im Oktober (Abb. 88) umkehrt. Der Juli (Abb. 87) zeigt im mittleren Bereich der Karte einen auffälligen, leicht runden blauen Bereich mit negativen Werten, der von positiven Werten umgeben ist.

Ein bemerkenswerter Aspekt der Residuen der Schwereanomalien ergibt sich aus den langwelligen Anteilen. Bei der Synthese der Schwereanomalien Δg ist aufgrund des Faktors ($n - 1$) der Term erster Ordnung nicht definiert, der Informationen über die Position des Massenmittelpunkts enthält. Die langwelligen Muster in den Residuen deuten auf einen Effekt des $C_{1,1}$ -Koeffizienten hin, der auf die Variabilität des Massenmittelpunkts der geschätzten TWS-Massen zurückzuführen ist. Dies legt nahe, dass die monatlich variierenden TWS-Massen mit einem ebenfalls veränderlichen Massenmittelpunkt einhergehen.

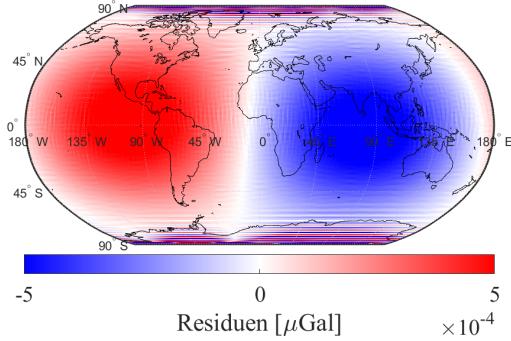


Abb. 85: Residuen der Schwereanomalie im Januar 2023

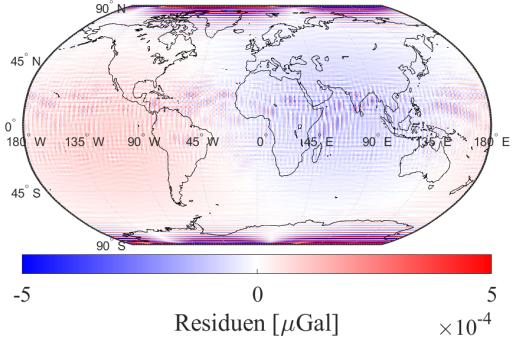


Abb. 86: Residuen der Schwereanomalie im April 2023

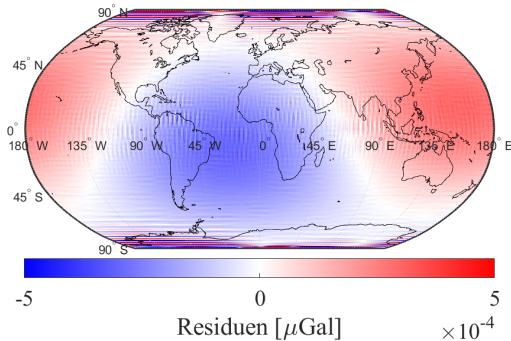


Abb. 87: Residuen der Schwereanomalie im Juli 2023

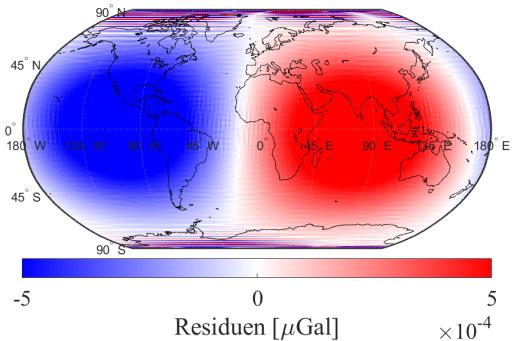


Abb. 88: Residuen der Schwereanomalie im Oktober 2023

Die dazugehörigen statistischen Werte der Residuen werden in Unterabschnitt 5.7 untersucht.

5.7 Vergleich TWS-Werte und Residuen aus der Ausgleichung

Die Statistiken in Tabelle 12 verdeutlichen die Unterschiede in der Verteilung der Wassermassen und zeigen deutliche Variationen zwischen den Werten, aus dem Gravitationspotential, der Schwerkraftstörung und der Schwereanomalie.

Besonders im April zeigen sich die größten Schwankungen über alle drei Datensätze hinweg, was auf eine hohe hydrologische Variabilität in diesem Monat schließen lässt. Die Werte aus dem Gravitationspotential weisen ein Minimum von $-833,823$ mm und ein Maximum von $889,330$ mm auf, während die Schwerkraftstörung mit $-842,324$ mm und $900,848$ mm eine ähnlich große Spannweite zeigt. Die Schwereanomalie hingegen verzeichnet mit $-841,645$ mm und $918,218$ mm ähnliche, aber einen leicht abweichenden positiven Extremwert, die einen positiven Mittelwert

zur Folge haben. Der hohe RMS-Wert und die Standardabweichung im April, die bei allen drei Ansätzen über 116 mm liegen, unterstreichen die starke Variabilität und die Herausforderungen in der Datenqualität dieses Monats.

Im Gegensatz dazu weist der Januar über alle Ansätze hinweg die geringste Spannweite auf. Die Werte aus dem Gravitationspotential reichen von $-312,877$ mm bis $368,475$ mm, während die Schwerestörung mit $-313,595$ mm und $369,406$ mm sehr ähnliche Werte aufweist. Die Schwereanomalie umfasst eine etwas größere Spannweite mit einem Minimum von $-353,364$ mm und einem Maximum von $424,724$ mm. Der RMS-Wert und die Standardabweichung von etwa 74 mm für das Gravitationspotential und die Schwerestörung im Januar unterscheiden sich von den höheren Werten der Schwereanomalie, die bei ca. 82,081 mm liegen.

Im Juli zeigt sich eine insgesamt stabilere Verteilung der Wassermassen. Die Werte aus dem Gravitationspotential weisen ein Minimum von $-479,498$ mm und ein Maximum von $465,589$ mm auf, mit RMS-Werten und Standardabweichungen von etwa 68,126 mm. Diese Stabilität spiegelt sich auch in Abbildung 71 wider, wo größtenteils weniger intensive farbliche Ausprägungen im Vergleich zu anderen Monaten zu erkennen sind. Die Schwerestörung zeigt ähnliche Werte, während die Schwereanomalie mit $-522,922$ mm bis $430,208$ mm und einer Standardabweichung von 73,507 mm eine etwas größere Variabilität aufweist.

Das Gravitationspotential im Oktober erreicht Werte von $-319,360$ mm bis $399,362$ mm. Es sind sehr ähnliche Werte der Schwerestörung mit $-323,355$ mm bis $400,207$ mm zu erkennen. Die Schwereanomalie weist hier mit $-395,006$ mm bis $442,156$ mm wieder eine etwas größere Spannweite auf. Der RMS-Wert und die Standardabweichungen im Oktober sind die zweithöchsten, haben aber noch deutlichen Abstand zu denen von April.

Insgesamt zeigt der Vergleich der drei Datensätze, dass die Werte aus der Schwereanomalie die größten Spannweiten und Standardabweichungen aufweisen. Die Schwerestörung zeigt sehr ähnliche Werte wie das Gravitationspotential, hat aber leicht höhere Standardabweichungen und RMS-Werte.

Tab. 12: Statistische Kenngrößen der TWS-Werte für verschiedene Ausgangs-Funktionale im Vergleich. Einheit: mm.

Monat	Quelle	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	Gravitationspotential	-312,877	368,475	0,005	74,223	74,225
	Schwerestörung	-313,595	369,406	0,012	74,874	74,876
	Schwereanomalie	-353,364	424,724	-0,006	82,081	82,084
April	Gravitationspotential	-833,823	889,330	-0,004	116,004	116,007
	Schwerestörung	-842,324	900,848	-0,008	117,041	117,044
	Schwereanomalie	-841,645	918,218	0,003	118,363	118,366
Juli	Gravitationspotential	-479,498	465,589	0,005	68,126	68,128
	Schwerestörung	-481,038	466,554	0,010	68,657	68,659
	Schwereanomalie	-522,922	430,208	-0,004	73,505	73,507
Oktober	Gravitationspotential	-319,360	399,362	0,007	77,421	77,423
	Schwerestörung	-323,355	400,207	0,013	78,095	78,097
	Schwereanomalie	-395,006	442,156	-0,006	99,068	99,071

Tabelle 13 zeigt die Residuen des Gravitationspotentials, der Schwerestörung und der Schwereanomalie ausgewählter Monate im Jahr 2023. Die Ergebnisse verdeutlichen die Unterschiede in der Variabilität und Spannweite der Daten zwischen den Monaten.

Es ist zu beachten, dass die Einheiten des Gravitationspotentials ($\cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$) sich von denen der Schwerestörung und Schwereanomalie ($\cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$) unterscheiden. Im Januar sind die betragsmäßig höchsten Werte für das Gravitationspotential und die Schwereanomalie zu beobachten. Das Gravitationspotential zeigt hier mit einer Spannweite von $-7,914 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$ bis $12,036 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$ die größten Schwankungen der Daten auf, während die Schwereanomalie Werte von $-5,718 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $7,937 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ umfasst. Der Januar zeigt zudem die höchsten RMS- und Standardabweichungswerte in diesen zwei Datensätzen mit dem auffälligsten Wert des Gravitationspotentials von $1,326 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$.

Im Gegensatz dazu fallen die Werte für den April durch die betragsmäßig geringsten Minima und Maxima der Residuen und deren Standardabweichungen auf. Das Gravitationspotential zeigt hier seine geringste Spannweite $-4,219 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$ bis $2,658 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$, ebenso wie die Schwerestörung mit $-4,213 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $3,378 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ und die Schwereanomalie $-3,575 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $2,885 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$. Die niedrigen RMS- und Standardabweichungswerte für alle drei Datentypen deuten auf eine geringe Variabilität in diesem Monat hin.

Im Juli liegen die Werte für alle drei Datentypen zwischen den Extremen. Das Gravitationspotential hat Werte von $-3,664 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$ bis $5,614 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}^2$, die Schwerestörung $-5,996 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $5,929 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ und die Schwereanomalie $-4,471 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $4,632 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ zeigen moderate Schwankungen. Dies könnte auf eine ausgeglichene Verteilung positiver und negativer hydrologischer Prozesse hindeuten.

Der Oktober weist als Gegenstück vom Januar im Vergleich zu den anderen Monaten die größte Spannweite der Schwerestörung auf. Bei der Schwerestörung sind es $-9,186 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ bis $11,346 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$. Ihre RMS- und Standardabweichungswerte sind ebenfalls am höchsten mit $0,889 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$.

In Tabelle 13 sind ausnahmsweise die absoluten Mittelwerte dargestellt, da die einfachen Mittelwerte durch die nahezu symmetrische Verteilung positiver und negativer Werte um Null in der Tabelle ausschließlich als null erscheinen würden. Die absoluten Mittelwerte zeigen eine bessere Übereinstimmung mit den Graphiken und verdeutlichen, dass die Werte der Schwereanomalie in allen Monaten größer sind als die der Schwerestörung und somit intensivere Farben zeigt. Besonders deutlich wird es bei der größten Differenz im Januar, wo der absolute Mittelwert der Schwereanomalie $0,300 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ beträgt, während der der Schwerestörung nur $0,162 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ erreicht. Im Juli liegt der absolute Mittelwert der Schwereanomalie bei $0,174 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ und der der Schwerestörung bei $0,101 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$. Der Oktober zeigt mit einem absoluten Mittelwert der Schwereanomalie von $0,331 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ den höchsten Wert aller Monate, während der absolute Mittelwert der Schwerestörung mit $0,177 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ deutlich darunter liegt, jedoch auch der höchste Wert dieses Funktional darstellt. Im April sind die Unterschiede am geringsten, mit einem absoluten Mittelwert der Schwereanomalie von $0,104 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ und der Schwerestörung von $0,093 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$, was einer Differenz von lediglich $0,011 \cdot 10^{-3} \mu\text{Gal}$ entspricht.

Tab. 13: Residuen ausgewählter Monate im Jahr 2023 nach der Ausgleichung.
 Gravitationspotential in $10^{-7}\text{m}^2/\text{s}^2$, Schwerestörung und Schwereanomalie in $10^{-3}\mu\text{Gal}$.

Monat	Datentyp	Minimum	Maximum	absoluter L_1 -Norm		
				Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	Gravitationspotential	-7,914	12,036	0,040	1,326	1,326
	Schwerestörung	-7,220	8,954	0,162	0,671	0,671
	Schwereanomalie	-5,718	7,937	0,300	0,577	0,577
April	Gravitationspotential	-4,219	2,658	0,024	0,530	0,530
	Schwerestörung	-4,213	3,378	0,093	0,337	0,337
	Schwereanomalie	-3,575	2,885	0,104	0,323	0,323
Juli	Gravitationspotential	-3,664	5,614	0,022	0,622	0,622
	Schwerestörung	-5,996	5,929	0,101	0,428	0,428
	Schwereanomalie	-4,471	4,632	0,174	0,386	0,386
Oktober	Gravitationspotential	-4,727	7,120	0,031	0,889	0,889
	Schwerestörung	-9,186	11,346	0,177	0,774	0,774
	Schwereanomalie	-5,100	7,804	0,331	0,563	0,563

Insgesamt zeigt Tabelle 13, dass die Größe der Residuen sowohl vom betrachteten Monat als auch vom jeweiligen Datentyp abhängt. Während das Gravitationspotential oft die größten Schwankungen aufweist, zeigen Schwerestörung und Schwereanomalie meist geringere absolute Werte. Die Werte im Januar und Oktober sind höher, während der April die geringste Variabilität aufweist, trotz der in dieser Arbeit festgestellten, meist höheren Ungenauigkeiten für diesen Monat. Eine mögliche Erklärung für die dennoch geringen Residuen könnte sein, dass die größeren Ungenauigkeiten in den Eingangsdaten durch den inversen Tesseroidansatz teilweise kompensiert werden, was zu einer besseren Übereinstimmung zwischen den modellierten und rekonstruierten Werten führt.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass die Kombination aus Beobachtungen, Regularisierung und iterativer Verfeinerung eine präzise Schätzung der TWS-Werte ermöglicht.

5.8 Diskussion der Ergebnisse

Die Analyse des Gravitationspotentials, seiner Funktionale und des TWS zeigt klare saisonale Variationen, die durch hydrologische und klimatische Prozesse geprägt sind. Unterschiede zwischen den Monaten spiegeln sich sowohl in den statistischen Werten als auch in den Karten wider. Besonders auffällig sind die Ergebnisse für den Monat April 2023, der in allen Tabellen der Abschnitte 5.1-5.4 die höchsten Standardabweichungen aufweist. Diese Dynamik könnte mit dem Übergang vom Winter zum Frühling auf der Nordhalbkugel verbunden sein, der durch Schneeschmelze und intensivere Niederschläge gekennzeichnet ist. Tropische Regionen zeigen im April verstärkte Regenfälle, was die Variabilität des Gravitationsfeldes erhöht und die Modellierung erschwert (Freiberg, 2017). Im Juli treten ebenfalls hohe Spannweiten auf, die auf intensive hydrologische Prozesse wie den Monsunregen in Indien und Südostasien zurückzuführen sind. Januar und Oktober zeigen hingegen stabilere Muster mit geringeren Schwankungen. Der Vergleich der Ergebnisse aus Synthese und Inversion in Kapitel 5.6 verdeutlicht die Effektivität der angewandten Methoden. Die minimalen Residuen bestätigen die hohe Qualität der Modellpassung. Der inverse Tesseroidansatz hat sich als besonders effektiv erwiesen, da Massenverschiebungen welche durch hydrologische Prozesse verursacht sind, sehr gut analysiert werden können. Durch die Erweiterung des Ansatzes auf Funktionale wie die Schwerestörung und die Schwereanomalie konnte eine genauere Differenzierung der Masseneffekte erreicht werden.

Wie aus der Interpretation der Graphiken und den entsprechenden Abschnitten hervorgeht, zeigen sich besonders auffällige Veränderungen in Regionen wie dem Amazonas, Zentralafrika besonders im Kongo-Becken, Nordaustralien, Indien, Grönland und der Antarktis. Diese Gebiete sind geprägt von extremen saisonalen Mustern wie intensiven Regenzeiten oder ausgeprägten Trockenperioden, die zu signifikanten Schwankungen im Gravitationspotential führen. In trockeneren Regionen, etwa in Russland, Saudi-Arabien und Nordamerika, sind die Veränderungen ebenfalls erkennbar, jedoch weniger stark ausgeprägt. Hier stehen sie häufig in Zusammenhang mit Prozessen wie Grundwasserentnahme oder Schneeschmelze in Russland (Chen et al., 2022; Alshehri and Mohamed, 2023). In äquatorialen und tropischen Regionen zeigen die Werte der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials und seiner Funktionale durchweg höhere Ausprägungen. Dies lässt sich auf Übergangsprozesse zurückführen, die in diesen Gebieten typischerweise intensiver auftreten. Stark saisonale Niederschläge, Verdunstung sowie schwankende Bodenfeuchtigkeit führen zu deutlichen Massenverlagerungen, was die Messgenauigkeit beeinträchtigt. Erschwerend kommen atmosphärische Einflüsse wie hohe Wolkendichte oder wetterbedingte Störungen hinzu. Im Gegensatz dazu zeichnen sich europäische Regionen durch höhere Genauigkeiten aus, was auf eine dichtere Datenabdeckung und fortschrittliche Filtermethoden zurückzuführen ist (Güntner et al., 2012).

Die Schwankungen im Gravitationspotential und seinen Funktionalen werden von vielfältigen Prozessen beeinflusst. So spielen Bodenfeuchtigkeit, Schneeschmelze und Grundwasserveränderungen eine zentrale Rolle, da sie durch Massenverschiebungen temporäre Variationen hervorrufen. Diese Effekte werden auch von Wahr et al. (2004) detailliert beschrieben, wo der Einfluss zeitvariabler Prozesse auf Gravitationsfelder untersucht wird. Darüber hinaus tragen geodynamische Vorgänge wie Plattentektonik und Erdbeben wesentlich zu den Veränderungen bei. Solche Ereignisse führen durch die Verlagerung von Massen in der Erdkruste zu messbaren Effekten im Gravitationspotential, wie von Han et al. (2010) dargelegt. Ein weiterer wichtiger Faktor ist der Eisverlust in den Polarregionen, insbesondere in Grönland und der Antarktis, der von Velicogna and Wahr (2006) behandelt und durch den fortschreitenden Klimawandel verstärkt wird. Auch die Zirkulation und Strömungen in den Ozeanen spielen eine Rolle. Veränderungen in der Massenverteilung des Wassers, bedingt durch saisonale Zirkulationen und Strömungsmuster, verursachen signifikante Variationen im Gravitationspotential (Ponte, 1999).

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Veränderung des globalen Wasserhaushalts für das Jahr 2023 untersucht, basierend auf Daten der GRACE-FO-Mission. Die Verarbeitung mit dem DDK-5-Filter des GFZ ermöglichte eine präzise Analyse grobräumiger Wasserspeicheränderungen. Diese Daten sind von zentraler Bedeutung, um Massenverlagerungen besser zu verstehen und deren Rolle in klimatischen und hydrologischen Prozessen zu quantifizieren (Bettadpur et al., 2015). Der Schwerpunkt der Analyse liegt auf dem Gravitationspotential und seinen Funktionalen, insbesondere der Schwerestörung und der Schwereanomalie, sowie auf der Anwendung des inversen Tesseroidansatzes. Durch diese Methoden werden räumliche und zeitliche Variationen im globalen Schwerefeld detailliert abgebildet. Der Tesseroidansatz erweist sich dabei als besonders geeignet, da er eine realistische Modellierung der Massenverlagerungen innerhalb eines Volumens erlaubt und somit über klassische Punktmassenansätze hinausgeht. Die Ergebnisse zeigen, dass saisonale und regionale Prozesse wie Schneeschmelze, Regenzeiten und Trockenperioden prägende Einflussfaktoren sind. Besonders hydrologisch aktive Gebiete wie das Amazonasbecken oder das Kongobecken werden als Regionen identifiziert, in denen Massenverlagerungen zu signifikanten Veränderungen im Schwerefeld führen. Diese Erkenntnisse liefern wichtige Grundlagen für das Verständnis von Wasserflüssen und deren Wechselwirkungen innerhalb des globalen Klimasystems. Die Tikhonov-Regularisierung trägt maßgeblich zur Stabilität der inversen Berechnungen bei und unterstreicht die Bedeutung moderner numerischer Verfahren in der geodätischen Forschung.

Für weiterführende Untersuchungen können Daten über mehrere Jahre hinweg analysiert werden, um langfristige Trends und saisonale Schwankungen des Wasserhaushalts genauer zu erfassen. Ein Vergleich zwischen den GRACE- und GRACE-FO-Daten könnte aufzeigen, inwieweit sich die beiden Missionen hinsichtlich ihrer Sensitivität und Datenqualität unterscheiden. Darüber hinaus könnten die Ergebnisse mit hydrologischen Modellen wie Global Land Data Assimilation System (GLDAS) verglichen werden. Ein solcher Vergleich könnte helfen, die aus den Schwerefelddaten abgeleiteten Ergebnisse zu überprüfen und die beobachteten Massenverlagerungen besser zu verstehen, insbesondere in Bezug auf Prozesse wie Bodenfeuchte, Schneeanansammlungen und Grundwasserveränderungen. Ein weiterer vielversprechender Ansatz wäre der direkte Vergleich von ungefilterten und gefilterten Kugelfunktionskoeffizienten, wie im Wahr-Paper beschrieben, das die Auswirkungen von Filtertechniken auf die Genauigkeit und räumliche Auflösung der aus GRACE-Daten abgeleiteten Massenverlagerungen analysiert. Dadurch könnte der Einfluss der Filterung auf die Analyse des Gravitationspotentials und seiner Funktionale genauer untersucht und besser quantifiziert werden. Solche Ansätze würden nicht nur die Dateninterpretation verbessern, sondern auch zu einer präziseren Modellierung der Massenverlagerungen beitragen (Wahr et al., 1998).

Anmerkung

Bei dieser wissenschaftlichen Arbeit handelt es sich um eine überarbeitete Fassung der Bachelorarbeit, die Ivana Hansmann zwischen dem 21. Oktober 2024 und dem 7. Januar 2025 am GIK angefertigt hat.

References

- Alcaras, E., Amoroso, P. P., Falchi, U., and Parente, C. (2023). On the Accuracy of Geoid Heights Derived from Discrete GNSS/Levelling Data Using Kriging Interpolation. In Freymueller, J. T. and Sánchez, L., editors, *Geodesy for a Sustainable Earth*, pages 139–145, Cham. Springer International Publishing.
- Alsbehri, F. and Mohamed, A. (2023). Analysis of Groundwater Storage Fluctuations Using GRACE and Remote Sensing Data in Wadi As-Sirhan, Northern Saudi Arabia. *Water*, 15(2).
- Becker, M., Meyssignac, B., Xavier, L., Cazenave, A., Alkama, R., and Decharme, B. (2011). Past terrestrial water storage (1980–2008) in the Amazon Basin reconstructed from GRACE and in situ river gauging data. *Hydrology and Earth System Sciences*, 15:533–546.
- Bettadpur, S. et al. (2015). Seasonal variations in tropical water storage and their effects on the Earth's gravity field. *GFZ German Research Centre for Geosciences*.
- Boergens, E., Güntner, A., Sips, M., Schwatke, C., and Dobslaw, H. (2024). Interannual variations of terrestrial water storage in the East African Rift region. *Hydrology and Earth System Sciences*, 28:4733–4754.
- Boergens, E., Kvas, A., Eicker, A., Dobslaw, H., Schawohl, L., Dahle, C., Murböck, M., and Flechtner, F. (2022). Uncertainties of GRACE-Based Terrestrial Water Storage Anomalies for Arbitrary Averaging Regions. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 127(2):e2021JB022081. e2021JB022081 2021JB022081.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., and Mühlig, H. (2008). *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch.
- Chang, W., D'Ascenzo, N., and Xie, Q. (2024). A relaxed iterated tikhonov regularization for linear ill-posed inverse problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 530(2):127754.
- Chen, J., Cazenave, A., Dahle, C., Llovel, W., Panet, I., Pfeffer, J., and Moreira, L. (2022). Applications and Challenges of GRACE and GRACE Follow-On Satellite Gravimetry. *Surveys in Geophysics*, 43(1):305–345.
- COST-G: Combination Service for Time-variable Gravity Fields (2024). COST-G: Combination Service for Time-variable Gravity Fields. Accessed: 2024-11-24.
- Dahle, C., Flechtner, F., Murböck, M., Michalak, G., Neumayer, K. H., Abrykosov, O., Reinhold, A., and König, R. (2019a). GRACE-FO Geopotential GSM Coefficients GFZ RL06.
- Dahle, C., Murböck, M., Flechtner, F., Dobslaw, H., Michalak, G., Neumayer, K. H., Abrykosov, O., Reinhold, A., König, R., Sulzbach, R., and Förste, C. (2019b). The GFZ GRACE RL06 Monthly Gravity Field Time Series: Processing Details and Quality Assessment. *Remote Sensing*, 11(18):2116.
- European Space Agency (ESA) (2023). Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE). Accessed: 2024-11-10.
- Fantino et al., E. Casotto, S. (2009). Methods of harmonic synthesis for global geopotential models and their first-, second- and third-order gradients. *Journal of Geodesy*, 83(7):595–619.
- Fecher, T. (2008). *Methodische Grundlagen von kombinierten Schwerefeldmodellen*, volume No. 26. IAPG/FESG, München, Deutschland.

- Freiberg, T. U. (2017). Grundlagen der Hydrologie und Hydrogeologie. https://blogs.hrz.tu-freiberg.de/fsr3/wp-content/uploads/sites/34/2014/10/1_Skript-Hydrologie-Hydrogeologie_WS17.pdf.
- Galdyn, F., Sośnica, K., Zajdel, R., Meyer, U., and Jäggi, A. (2024). Long-term ice mass changes in Greenland and Antarctica derived from satellite laser ranging. *Remote Sensing of Environment*, 302:113994.
- GFZ (2023). Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On Mission (GRACE-FO). Accessed: 2024-11-10, Helmholtz Centre Potsdam - GFZ German Research Centre for Geosciences.
- Graffarend, E. W. (1978). The definition of the telluroid. *Bulletin Géodésique*, 52(1):25–37.
- Gschwind, C., Seitz, K., Dalheimer, L., Duckstein, A., and Kutterer, H. (2024). A comparative study on the parametrization of a time-variable geopotential model from GRACE monthly solutions. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 59(2):119–158.
- Göttl, F., Murböck, M., Schmidt, M., and Seitz, F. (2019). Reducing filter effects in GRACE-derived polar motion excitations. *Earth, Planets and Space*, 71(1):117.
- Güntner, A., Creutzfeldt, B., Dill, R., and Barthelmes, F. (2012). Die Variabilität des kontinentalen Wasserkreislaufs in GRACE-Schwerefelddaten. *System Erde*, 2(1):26–31.
- Han, S.-C., Davis, J. L., Simons, M., and Watkins, E. M. (2010). Global gravity changes from postseismic deformation after the 2004 Sumatra-Andaman earthquake. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115(B11):B11411.
- Hansen, P. C. (1999). The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. *Computational Inverse Problems in Electrocadiology*, pages 119–142.
- Haustein, K. and Rayer, Q. (2024). *Veränderungen im Wasserkreislauf in einer sich erwärmenden Welt: Der wissenschaftliche Hintergrund*, pages 17–57. Springer International Publishing, Cham.
- Heck, B. and Seitz, K. (2007). A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81(2):121–136.
- Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman & Co.
- Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2021). *Physical Geodesy*. Springer, Cham.
- Ilk, K. H. (2021). *Potentialtheorie*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Ince, E. S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., and Schuh, H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services and future plans.
- Kiamehr, R. Eshagh, M. (2008). Egmlab, a scientific software for determining the gravity and gradient components from global geopotential models. *Earth Science Informatics*, 1(2):93–103.
- Kress, R. (2014). *Tikhonov Regularization*, pages 323–349. Springer New York, New York, NY.
- Kuhn, M. and Seitz, K. (2005). Comparison of Newton's Integral in the Space and Frequency Domains. In Sansò, F., editor, *A Window on the Future of Geodesy*, pages 386–391, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.

- Kusche, J. (2007). Approximate decorrelation and non-isotropic smoothing of time-variable GRACE-type gravity field models. *Journal of Geodesy*, 81:733–749.
- Kusche, J., Schmidt, R., Petrovic, S., and Rietbroek, R. (2009). Decorrelated GRACE time-variable gravity solutions by GFZ, and their validation using a hydrological model. *Journal of Geodesy*, 83(10):903–913.
- Lyons, R. P., Kroll, C. N., and Scholz, C. A. (2011). An energy-balance hydrologic model for the Lake Malawi Rift Basin, East Africa. *Global and Planetary Change*, 75(1):83–97.
- Molodenskii, M. S., Eremeev, V. F., and Yuikina, M. I. (1962). Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth. *Translated from Russian (1960) by Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem*, pages 147–147.
- Naidu, C. V., Krishna, K. M., Rao, S. R., Kumar, O. S. R. U. B., Durgalakshmi, K., and Ramakrishna, S. S. V. S. (2011). Variations of Indian summer monsoon rainfall induce the weakening of easterly jet stream in the warming environment? *Global and Planetary Change*, 75:21–30.
- NASA (2025). GRACE Mission. <https://earth.gsfc.nasa.gov/geo/missions/grace>, Accessed: 2025-02-20.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., and Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008. *Journal of Geophysical Research*, 117:B04406.
- Petrovskaya, M. S. Vershkov, A. N. (2012). Basic equations for constructing geopotential models from the gravitational potential derivatives of the first and second orders in the terrestrial reference frame. *Journal of Geodesy*, 86(7):521–530.
- Ponte, R. M. (1999). A preliminary model study of the large-scale seasonal cycle in bottom pressure over the global ocean. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 104(C1):1289–1300.
- Rummel, R., Yi, W., and Stummer, C. (2011). GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11):777–790.
- Seif, M. R., Sharifi, M. A., and Eshagh, M. (2018). Polynomial approximation for fast generation of associated legendre functions. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 53(2):275–293.
- Shi, Z., Wang, Z., Zhang, B., Geng, H., An, J., Wu, S., Liu, M., Wu, Y., and Wu, H. (2024). Bridging the spatiotemporal ice sheet mass change data gap between GRACE and GRACE-FO in Greenland using machine learning method. *Journal of Hydrology*, 629:130622.
- Sjöberg, L. E. and Bagherbandi, M. (2017). *Classical Physical Geodesy*, pages 83–119. Springer International Publishing, Cham.
- Stokes, G. G. (1849). On the variation of gravity on the surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:672–695.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., and Reigber, C. (2004). The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(L09607):1–4.
- Torge, W. and Müller, J. (2012). *Geodesy*. de Gruyter, Berlin, Germany, 4th edition.
- Uieda, L., Barbosa, V. C. F., and Braatenberg, C. (2016). Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. *Geophysics*, 81(5):41–48.

REFERENCES

- Vaníček, P. (2020). Geoid undulation, interpretation. In Gupta, H. K., editor, *Encyclopedia of Solid Earth Geophysics*, pages 1–5, Cham. Springer International Publishing.
- Velicogna, I. and Wahr, J. (2006). Measurements of Time-Varying Gravity Show Mass Loss in Antarctica. *Science*, 311(5768):1754–1756.
- Vergos, G. S., Grigoriadis, V. N., and Tziavos, I. N. (2004). On the validation of CHAMP- and GRACE-type Earth gravity models and the use of European regional gravity and GPS/leveling data. *Journal of Geodesy*, 78(3):155–171.
- Wahr, J., Molenaar, M., and Bryan, F. (1998). Time variability of the Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 103(B12):30205–30229.
- Wahr, J., Swenson, S., Zlotnicki, V., and Velicogna, I. (2004). Time-variable gravity from GRACE: First results. *Geophysical Research Letters*, 31(L11501):1–4.

A Mathematische Herleitungen

A.1 Details zum Separationsansatz

Die Formeln in diesem Kapitel stammen aus Bronstein et al. (2008) und Torge and Müller (2012).

Separation für $\Lambda(\lambda)$

Zunächst wird die Laplace-Gleichung mit $\frac{r^2 \cdot \cos^2 \phi}{\Phi \cdot R}$ multipliziert und es ergibt sich

$$\Delta V = \Lambda'' + \frac{\cos \phi}{\Phi} \cdot \Lambda \cdot (\Phi' \cdot \cos \phi)' + \frac{\cos^2 \phi}{R} \cdot \Lambda \cdot (R' \cdot r^2)' = 0 \quad (75)$$

bzw.

$$-\frac{\Lambda''}{\Lambda} = \frac{\cos \phi}{\Phi} \cdot (\Phi' \cdot \cos \phi)' + \frac{\cos^2 \phi}{R} \cdot (R' \cdot r^2)' = C_1. \quad (76)$$

Die von λ abhängigen Terme führen auf die Differentialgleichung

$$\frac{\Lambda''}{\Lambda} = -C_1. \quad (77)$$

bzw.

$$\Lambda'' + C_1 \cdot \Lambda = 0. \quad (78)$$

Separation für $R(r)$

Anschließend wird mit $\frac{1}{\cos^2 \phi}$ multipliziert und es folgt

$$C_1 \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi} = \left(\frac{\cos \phi}{\Phi} \cdot (\Phi' \cdot \cos \phi)' + \frac{\cos^2 \phi}{R} \cdot (R' \cdot r^2)' \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \phi} \quad (79)$$

bzw.

$$\frac{1}{R} \cdot (R' \cdot r^2)' = \frac{C_1}{\cos^2 \phi} - \frac{1}{\Phi \cdot \cos \phi} \cdot (\Phi' \cdot \cos \phi)' = C_2. \quad (80)$$

Die von r abhängigen Terme führen auf die Differentialgleichung

$$\frac{1}{R} (r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R') = C_2. \quad (81)$$

bzw.

$$r^2 \cdot R'' + 2r \cdot R' - C_2 \cdot R = 0. \quad (82)$$

Separation für $\Phi(\phi)$

Die von ϕ abhängigen Terme führen auf die Differentialgleichung

$$\frac{C_1}{\cos^2 \phi} - \frac{(\Phi' \cdot \cos \phi)'}{\Phi \cdot \cos \phi} = C_2 \quad (83)$$

bzw.

$$\left(\frac{C_1}{\cos^2 \phi} - C_2 \right) \cdot \Phi - \frac{1}{\cos \phi} \cdot (\Phi'' \cdot \cos \phi - \Phi' \cdot \sin \phi) = 0. \quad (84)$$

Die resultierende Differentialgleichung lautet somit

$$\Phi'' - \Phi' \cdot \tan \phi - \left(\frac{C_1}{\cos^2 \phi} - C_2 \right) \cdot \Phi = 0. \quad (85)$$

Lösungen der drei Differentialgleichungen

Die Lösungen der drei Differentialgleichungen lauten:

- Durch den Ansatz der Eulerschen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich für $R(r)$:

$$R(r) = E_\ell \cdot r^\ell + F_\ell \cdot r^{-(\ell+1)}, \quad E_\ell, F_\ell \in \mathbb{R} \quad (86)$$

- Für $\Lambda(\lambda)$:

$$\Lambda(\lambda) = A_m \cdot \cos(m \cdot \lambda) + B_m \cdot \sin(m \cdot \lambda), \quad A_m, B_m \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (87)$$

- Für $\Phi(z)$, mit $z = \sin(\phi)$, sind die Lösungen der Differentialgleichungen die Legendre'schen Funktionen erster Art und zweiter Art, wobei für diese aber $Q_{\ell m}(z = \pm 1) = \pm \infty$ gilt:

$$\Phi(z) = P_{\ell m} = \frac{1}{2^\ell \cdot \ell!} \cdot (1 - z^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{\ell+m}}{dz^{\ell+m}} (z^2 - 1)^\ell \quad (88)$$

Zusätzliche Bedingungen

Die Konstanten der Separation unterliegen folgenden Bedingungen

- $\sqrt{C_1} = n \geq 0, \quad C_1 = m^2, \quad m \in \mathbb{N}_0$
- $C_2 = \ell \cdot (\ell + 1), \quad \ell \in \mathbb{N}_0$

Die Lösungen der drei Funktionen müssen folgende Nebenbedingungen erfüllen:

- Periodizität in λ :

$$\Lambda(\lambda) = \Lambda(\lambda + 2\pi)$$

- Endliches Gravitationspotential:

$$|\Lambda(\lambda)| < \infty, \quad |\Phi(\phi)| < \infty, \quad |R(r)| < \infty$$

- Abklingverhalten im Unendlichen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$$

A.2 Alle Koeffizienten (K, L, J) erster und zweiter Ordnung

Im Folgenden sind die Koeffizienten des Tesseroidansatzes nach Heck and Seitz (2007) aufgeführt.

K-Koeffizienten

Sie beschreiben die Wirkung auf das Potential V_T . Vergleiche hierzu Formel (61).

$$K_{000} := \frac{r_0^2 \cos \varphi_0}{\ell_0}, \quad \ell_0 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi_0} \quad (89)$$

$$K_{200} = \frac{r^2 \cos \varphi_0}{\ell_0^5} \{ 2\ell_0^2 - 3r_0^2 \sin^2 \varphi_0 \} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} K_{020} = & \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \left\{ -\cos \varphi_0 (r^2 + r_0^2) [r + r_0^2 - r_0 r \sin \varphi \sin \varphi_0] \right. \\ & + r^2 r_0^2 \cos \varphi_0 [\sin^2 \varphi (3 - \sin^2 \varphi_0) - \cos^2 \varphi \times (2 - \sin^2 \varphi_0) \cos^2 \delta \lambda] \\ & \left. + rr_0 \cos \varphi (3 - \sin^2 \varphi_0) \times [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin \varphi \sin \varphi_0] \cos \delta \lambda \right\} \end{aligned} \quad (91)$$

$$K_{002} = \frac{rr_0^3 \cos \varphi \cos^2 \varphi_0}{\ell_0^5} \times \{ \ell_0^2 \cos \delta \lambda - 3rr_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin^2 \delta \lambda \} \quad (92)$$

L-Koeffizienten

Sie beschreiben die Wirkung auf die Schwerestörung δg . Vergleiche hierzu Formel (64).

$$L_{000} = \frac{r_0^2 (r - r_0 \cos \varphi_0) \cos \varphi_0}{\ell_0^3} = -\frac{\partial K_{000}}{\partial r} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} L_{200} = & -\frac{\partial K_{200}}{\partial r} \\ = & \frac{r \cos \varphi_0}{\ell_0^3} \left\{ 2 - \frac{3r_0}{\ell_0^2} [5r_0 - (2r + 3r_0 \cos \varphi_0) \cos \varphi_0] \right. \\ & \left. + \frac{15r_0^3}{\ell_0^4} \sin^2 \varphi_0 (r_0 - r \cos \varphi_0) \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned}
L_{020} = -\frac{\partial K_{020}}{\partial r} &= \left(\frac{r_0}{\ell_0}\right)^3 \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi_0) \cos \delta \lambda \\
&\quad + \frac{r_0^2}{\ell_0^5} \left\{ -r(r^2 + r_0^2) \cos \varphi_0 + r_0 \sin \varphi \left[-rr_0 (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \delta \lambda) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 (2r^2 + 4r_0^2 - 3rr_0 \sin \varphi \sin \varphi_0) \right] \right. \\
&\quad \left. + r_0^2 \cos \varphi_0 \cos \delta \lambda (1 - 2 \sin^2 \varphi_0) \right. \\
&\quad \times [r_0 + r \cos \varphi_0 \cos \delta \lambda] \\
&\quad \left. + rr_0^2 \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos \delta \lambda \right. \\
&\quad \left. [3 \sin \varphi \cos \varphi_0 - 4 \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \delta \lambda] \right\} \\
&\quad + \frac{5rr_0^3}{\ell_0^4} \left\{ -r(r^2 + r_0^2) \sin \varphi_0 \right. \\
&\quad \left. + r_0^2 \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos \delta \lambda \times (r_0 + r \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos \delta \lambda) \right. \\
&\quad \left. + r_0 \sin \varphi \left[2r^2 - r_0^2 - rr_0 \cos \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (r^2 + 2r_0^2 - rr_0 \sin \varphi \sin \varphi_0) \right] \right\} \\
&\quad \times (\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos \delta \lambda) \\
L_{002} = -\frac{\partial K_{002}}{\partial r} &= \left(\frac{r_0}{\ell_0}\right)^3 \cos \varphi \cos^2 \varphi_0 \\
&\quad \times \left\{ \cos \delta \lambda - \frac{3r}{\ell_0^2} \left[2r_0 \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin^2 \delta \lambda + (r - r_0 \cos \varphi_0) \cos \delta \lambda \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{15r^2 r_0}{\ell_0^4} \cos \varphi \cos \varphi_0 (r - r_0 \cos \varphi_0) \sin^2 \delta \lambda \right\} \tag{95}
\end{aligned}$$

J-Koeffizienten

Sie wurden in dieser Arbeit neu eingeführt und beschreiben die Wirkung auf die Schwereanomalie Δg . Vergleiche hierzu Formel (68).

$$J_{020} = L_{020} - \frac{2}{r} K_{020} \tag{96}$$

$$J_{020} = L_{020} - \frac{2}{r} K_{020} \tag{97}$$

$$J_{002} = L_{002} - \frac{2}{r} K_{002} \tag{98}$$

B Tabellen zu statistischen Werten der Monate im Jahr 2023

B.1 Gravitationspotential und Varianzfortpflanzung

Tab. 14: Statistik der Änderung im Gravitationspotential
im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
Februar	-0,0152	0,0549	0,0000	0,0105	0,0105
März	-0,0411	0,0251	-0,0001	0,0155	0,0155
April	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
Mai	-0,0437	0,0258	0,0000	0,0106	0,0106
Juni	-0,0189	0,0353	0,0000	0,0085	0,0085
Juli	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
August	-0,0338	0,0199	0,0000	0,0065	0,0065
September	-0,0477	0,0156	0,0000	0,0083	0,0083
Oktober	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092
November	-0,0298	0,0223	0,0000	0,0065	0,0065
Dezember	-0,0269	0,0207	0,0000	0,0069	0,0069

Tab. 15: Statistik der Varianzfortpflanzung der Änderung im Gravitationspotential
im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,0000	0,0006	0,0003	0,0004	0,0002
Februar	0,0000	0,0007	0,0004	0,0004	0,0002
März	0,0000	0,0007	0,0004	0,0004	0,0002
April	0,0000	0,0009	0,0005	0,0006	0,0002
Mai	0,0000	0,0008	0,0005	0,0006	0,0002
Juni	0,0000	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002
Juli	0,0000	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002
August	0,0000	0,0006	0,0003	0,0003	0,0002
September	0,0000	0,0006	0,0003	0,0004	0,0002
Oktober	0,0000	0,0006	0,0003	0,0004	0,0002
November	0,0000	0,0006	0,0003	0,0003	0,0002
Dezember	0,0000	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002

B.2 Geoidundulation und Varianzfortpflanzung

Tab. 16: Statistik der Geoidundulation im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-1,7	4,3	0,0	0,9	0,9
Februar	-1,5	5,6	0,0	1,1	1,1
März	-4,2	2,6	0,0	1,6	1,6
April	-3,3	2,9	0,0	0,9	0,9
Mai	-4,5	2,6	0,0	1,1	1,1
Juni	-1,9	3,6	0,0	0,9	0,9
Juli	-3,7	4,6	0,0	1,1	1,0
August	-3,5	2,0	0,0	0,7	0,7
September	-4,9	1,6	0,0	0,8	0,8
Oktober	-1,6	3,1	0,0	1,0	1,0
November	-3,0	2,3	0,0	0,7	0,7
Dezember	-2,7	2,1	0,0	0,7	0,7

Tab. 17: Statistik der Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,0005	0,0628	0,0314	0,0363	0,0181
Februar	0,0007	0,0765	0,0392	0,0445	0,0210
März	0,0007	0,0760	0,0391	0,0442	0,0206
April	0,0009	0,0875	0,0528	0,0584	0,0250
Mai	0,0009	0,0845	0,0526	0,0580	0,0245
Juni	0,0004	0,0542	0,0307	0,0349	0,0165
Juli	0,0005	0,0543	0,0277	0,0319	0,0157
August	0,0006	0,0617	0,0316	0,0357	0,0166
September	0,0005	0,0542	0,0307	0,0349	0,0165
Oktober	0,0005	0,0612	0,0315	0,0360	0,0175
November	0,0005	0,0542	0,0307	0,0349	0,0165
Dezember	0,0004	0,0542	0,0307	0,0349	0,0165

B.3 Schwerestörung und Varianzfortpflanzung

Tab. 18: Statistik der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
Februar	-2,118	5,502	0,001	0,749	0,749
März	-3,507	2,913	-0,001	0,869	0,869
April	-3,736	4,050	0,000	0,786	0,786
Mai	-4,690	3,938	-0,001	0,821	0,821
Juni	-2,253	3,812	0,001	0,665	0,665
Juli	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
August	-4,581	2,413	0,000	0,576	0,576
September	-6,276	2,080	0,000	0,642	0,642
Oktober	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646
November	-3,036	3,252	0,000	0,610	0,610
Dezember	-2,858	2,948	0,000	0,588	0,588

Tab. 19: Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,000	0,218	0,099	0,122	0,071
Februar	0,001	0,242	0,110	0,135	0,080
März	0,001	0,244	0,110	0,136	0,080
April	0,000	0,454	0,183	0,236	0,150
Mai	0,002	0,456	0,184	0,238	0,151
Juni	0,001	0,232	0,104	0,139	0,076
Juli	0,000	0,208	0,094	0,116	0,068
August	0,000	0,200	0,090	0,112	0,065
September	0,000	0,205	0,093	0,115	0,067
Oktober	0,000	0,217	0,098	0,121	0,071
November	0,001	0,220	0,100	0,123	0,072
Dezember	0,000	0,198	0,090	0,111	0,064

B.4 Schwereanomalie und Varianzfortpflanzung

Tab. 20: Statistik der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-2,569	2,974	0,000	0,519	0,519
Februar	-2,021	3,912	0,000	0,536	0,536
März	-2,425	2,777	0,000	0,530	0,530
April	-2,810	3,560	0,000	0,603	0,603
Mai	-3,480	3,240	0,000	0,608	0,608
Juni	-2,053	2,786	0,000	0,487	0,487
Juli	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
August	-3,613	1,938	0,000	0,440	0,440
September	-4,889	1,889	0,000	0,471	0,471
Oktober	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464
November	-2,203	2,619	0,000	0,475	0,475
Dezember	-2,104	2,436	0,000	0,444	0,444

Tab. 21: Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	0,000	0,208	0,094	0,116	0,068
Februar	0,000	0,230	0,103	0,128	0,076
März	0,000	0,232	0,104	0,129	0,076
April	0,002	0,438	0,175	0,228	0,146
Mai	0,002	0,441	0,176	0,229	0,147
Juni	0,000	0,222	0,099	0,123	0,073
Juli	0,000	0,198	0,090	0,111	0,065
August	0,000	0,190	0,086	0,106	0,062
September	0,000	0,194	0,088	0,109	0,064
Oktober	0,000	0,206	0,093	0,115	0,067
November	0,000	0,209	0,094	0,116	0,068
Dezember	0,000	0,188	0,085	0,105	0,061

B.5 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Potential

Tab. 22: Statistiken des Gravitationspotentials aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2 .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
Januar (aus TWS)	-0,0162	0,0421	0,0000	0,0085	0,0085
Februar (Synthese)	-0,0152	0,0549	0,0000	0,0105	0,0105
Februar (aus TWS)	-0,0152	0,0549	0,0000	0,0105	0,0105
März (Synthese)	-0,0411	0,0251	-0,0001	0,0155	0,0155
März (aus TWS)	-0,0411	0,0251	-0,0001	0,0155	0,0155
April (Synthese)	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
April (aus TWS)	-0,0319	0,0288	0,0000	0,0093	0,0093
Mai (Synthese)	-0,0437	0,0258	0,0000	0,0106	0,0106
Mai (aus TWS)	-0,0437	0,0258	0,0000	0,0106	0,0106
Juni (Synthese)	-0,0189	0,0353	0,0000	0,0085	0,0085
Juni (aus TWS)	-0,0189	0,0353	0,0000	0,0085	0,0085
Juli (Synthese)	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
Juli (aus TWS)	-0,0361	0,0454	0,0000	0,0093	0,0093
August (Synthese)	-0,0338	0,0199	0,0000	0,0065	0,0065
August (aus TWS)	-0,0338	0,0199	0,0000	0,0065	0,0065
September (Synthese)	-0,0477	0,0156	0,0000	0,0083	0,0083
September (aus TWS)	-0,0477	0,0156	0,0000	0,0083	0,0083
Oktober (Synthese)	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092
Oktober (aus TWS)	-0,0154	0,0301	0,0000	0,0092	0,0092
November (Synthese)	-0,0298	0,0223	0,0000	0,0065	0,0065
November (aus TWS)	-0,0298	0,0223	0,0000	0,0065	0,0065
Dezember (Synthese)	-0,0269	0,0207	0,0000	0,0069	0,0069
Dezember (aus TWS)	-0,0269	0,0207	0,0000	0,0069	0,0069

Tab. 23: Statistik des TWS aus dem Gravitationspotential im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-312,877	368,475	0,005	74,223	74,225
Februar	-340,108	437,005	0,008	81,879	81,881
März	-385,956	392,819	-0,012	85,692	85,694
April	-833,823	889,330	-0,004	116,004	116,007
Mai	-907,250	773,168	-0,005	116,698	116,702
Juni	-362,508	387,792	0,006	74,995	74,998
Juli	-479,498	465,589	0,005	68,126	68,128
August	-447,544	289,448	0,003	68,702	68,704
September	-696,260	356,385	-0,004	72,443	72,445
Oktober	-319,360	399,362	0,007	77,421	77,423
November	-328,950	393,561	-0,003	76,521	76,524
Dezember	-277,487	308,686	-0,003	65,279	65,281

B TABELLEN ZU STATISTISCHEN WERTEN DER MONATE IM JAHR 2023

Tab. 24: Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen des Gravitationspotentials im Jahr 2023. Einheit: $10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}^2$.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-7,914	12,036	0,040	1,326	1,326
Februar	-6,872	10,272	0,000	1,394	1,394
März	-13,740	8,794	0,000	1,952	1,952
April	-4,219	2,658	0,024	0,530	0,530
Mai	-7,816	5,230	0,000	0,911	0,911
Juni	-6,462	10,162	0,000	1,169	1,169
Juli	-3,664	5,614	0,022	0,622	0,622
August	-2,407	3,724	0,000	0,363	0,363
September	-4,469	2,894	0,000	0,527	0,527
Oktober	-4,727	7,120	0,031	0,889	0,889
November	-3,159	2,025	0,000	0,353	0,353
Dezember	-5,644	4,758	0,000	0,768	0,768

B.6 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Schwerestörung

Tab. 25: Statistiken der Schwerestörung aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
Januar (aus TWS)	-2,728	3,997	0,001	0,693	0,693
Februar (Synthese)	-2,118	5,502	0,001	0,749	0,749
Februar (aus TWS)	-2,118	5,502	0,001	0,749	0,749
März (Synthese)	-3,507	2,913	-0,001	0,869	0,869
März (aus TWS)	-3,507	2,913	-0,001	0,869	0,869
April (Synthese)	-3,736	4,050	0,000	0,786	0,786
April (aus TWS)	-3,736	4,050	0,000	0,786	0,786
Mai (Synthese)	-4,690	3,938	-0,001	0,821	0,821
Mai (aus TWS)	-4,690	3,938	-0,001	0,821	0,821
Juni (Synthese)	-2,253	3,812	0,001	0,665	0,665
Juni (aus TWS)	-2,253	3,812	0,001	0,665	0,665
Juli (Synthese)	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
Juli (aus TWS)	-4,795	4,645	0,001	0,699	0,699
August (Synthese)	-4,581	2,413	0,000	0,576	0,576
August (aus TWS)	-4,581	2,413	0,000	0,576	0,576
September (Synthese)	-6,276	2,080	-0,001	0,642	0,642
September (aus TWS)	-6,276	2,080	-0,001	0,642	0,642
Oktober (Synthese)	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646
Oktober (aus TWS)	-2,951	2,782	0,001	0,646	0,646
November (Synthese)	-3,036	3,251	0,000	0,610	0,610
November (aus TWS)	-3,036	3,251	0,000	0,610	0,610
Dezember (Synthese)	-2,858	2,948	0,000	0,588	0,588
Dezember (aus TWS)	-2,858	2,948	0,000	0,588	0,588

B TABELLEN ZU STATISTISCHEN WERTEN DER MONATE IM JAHR 2023

Tab. 26: Statistik des TWS aus der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-313,595	369,406	0,012	74,874	74,876
Februar	-340,182	438,176	0,016	82,614	82,617
März	-386,808	393,873	-0,024	86,319	86,322
April	-842,324	900,848	-0,008	117,041	117,044
Mai	-918,789	781,305	-0,011	117,749	117,752
Juni	-364,854	391,302	0,010	75,609	75,611
Juli	-481,038	466,554	0,010	68,657	68,659
August	-449,034	290,306	0,005	69,237	69,239
September	-698,087	356,585	-0,008	72,982	72,984
Oktober	-323,355	400,207	0,013	78,095	78,097
November	-329,159	394,017	-0,005	77,179	77,181
Dezember	-279,165	309,574	-0,005	65,774	65,776

Tab. 27: Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen der Schwerestörung im Jahr 2023.

Einheit: $10^{-3} \mu\text{Gal}$.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-7,220	8,954	0,162	0,671	0,671
Februar	-4,147	5,381	0,000	0,418	0,418
März	-5,413	4,676	0,000	0,537	0,537
April	-4,213	3,378	0,093	0,337	0,337
Mai	-3,812	2,967	0,000	0,317	0,317
Juni	-5,339	5,663	0,000	0,430	0,430
Juli	-5,996	5,929	0,101	0,428	0,428
August	-4,531	5,314	0,000	0,357	0,357
September	-4,129	4,008	0,000	0,315	0,315
Oktober	-9,186	11,346	0,177	0,774	0,774
November	-3,708	2,853	0,000	0,255	0,255
Dezember	-10,105	7,516	0,000	0,791	0,791

B.7 Statistik der Größen aus dem inversen Tesseroidansatz: Schwereanomalie

Tab. 28: Statistiken der Schwereanomalie aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: μGal .

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar (Synthese)	-2,569	2,974	0,000	0,519	0,519
Januar (aus TWS)	-2,569	2,974	0,000	0,519	0,519
Februar (Synthese)	-2,021	3,911	0,000	0,536	0,536
Februar (aus TWS)	-2,021	3,911	0,000	0,536	0,536
März (Synthese)	-2,425	2,777	0,000	0,530	0,530
März (aus TWS)	-2,425	2,777	0,000	0,530	0,530
April (Synthese)	-2,810	3,560	0,000	0,603	0,603
April (aus TWS)	-2,810	3,560	0,000	0,603	0,603
Mai (Synthese)	-3,480	3,240	0,000	0,607	0,607
Mai (aus TWS)	-3,480	3,240	0,000	0,607	0,607
Juni (Synthese)	-2,053	2,786	0,000	0,487	0,487
Juni (aus TWS)	-2,053	2,786	0,000	0,487	0,487
Juli (Synthese)	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
Juli (aus TWS)	-3,760	3,339	0,000	0,492	0,492
August (Synthese)	-3,613	1,938	0,000	0,440	0,440
August (aus TWS)	-3,613	1,938	0,000	0,440	0,440
September (Synthese)	-4,889	1,889	0,000	0,471	0,471
September (aus TWS)	-4,889	1,889	0,000	0,471	0,471
Oktober (Synthese)	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464
Oktober (aus TWS)	-2,528	2,119	0,000	0,464	0,464
November (Synthese)	-2,203	2,619	0,000	0,475	0,475
November (aus TWS)	-2,203	2,619	0,000	0,475	0,475
Dezember (Synthese)	-2,104	2,436	0,000	0,444	0,444
Dezember (aus TWS)	-2,104	2,436	0,000	0,444	0,444

Tab. 29: Statistik des TWS aus der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: mm.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-353,364	424,724	-0,006	82,081	82,084
Februar	-330,303	464,660	-0,007	83,602	83,605
März	-388,109	393,491	0,011	86,524	86,527
April	-841,645	918,218	0,003	118,363	118,366
Mai	-912,901	784,175	0,005	118,997	119,001
Juni	-396,664	359,726	-0,004	79,128	79,130
Juli	-522,922	430,208	-0,004	73,505	73,507
August	-416,993	301,873	-0,002	71,437	71,439
September	-742,168	366,236	0,003	76,139	76,141
Oktober	-395,006	442,156	-0,006	99,068	99,071
November	-385,748	397,532	0,002	82,127	82,130
Dezember	-381,626	410,894	0,002	89,975	89,978

B TABELLEN ZU STATISTISCHEN WERTEN DER MONATE IM JAHR 2023

Tab. 30: Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen der Schwereanomalie im Jahr 2023.
Einheit: $10^{-3} \mu\text{Gal}$.

Monat	Minimum	Maximum	Mittelwert	RMS	Standardabweichung
Januar	-5,718	7,937	0,300	0,577	0,577
Februar	-4,119	4,960	0,000	0,420	0,420
März	-5,395	4,925	0,000	0,542	0,542
April	-3,575	2,885	0,104	0,323	0,323
Mai	-3,646	3,114	0,000	0,327	0,327
Juni	-3,003	3,693	0,000	0,283	0,283
Juli	-4,471	4,632	0,174	0,386	0,386
August	-4,469	3,715	0,000	0,311	0,311
September	-2,860	2,477	0,000	0,258	0,258
Oktober	-5,100	7,804	0,331	0,563	0,563
November	-2,738	1,767	0,000	0,195	0,195
Dezember	-5,116	5,300	0,000	0,547	0,547

C Graphiken der Monate im Jahr 2023

C.1 Genauigkeiten der Koeffizienten aller Monate 2023

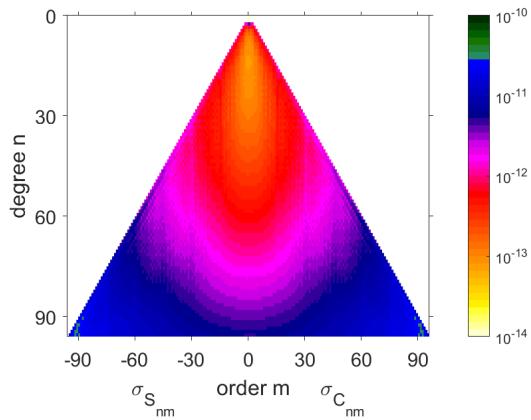


Abb. 89: Genauigkeit der Koeffizienten im Januar 2023

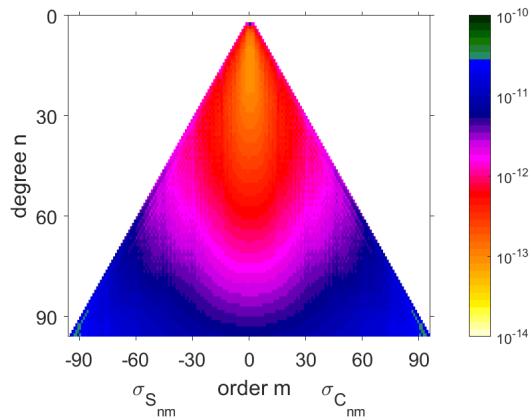


Abb. 90: Genauigkeit der Koeffizienten im Februar 2023

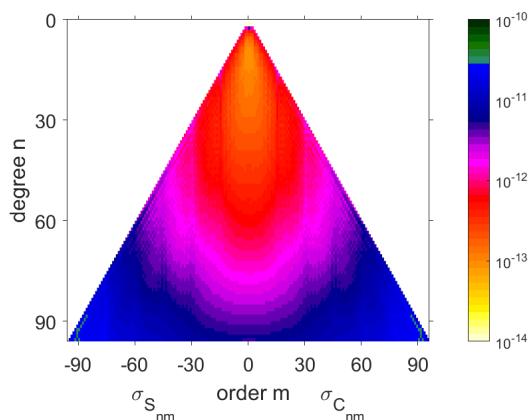


Abb. 91: Genauigkeit der Koeffizienten im März 2023

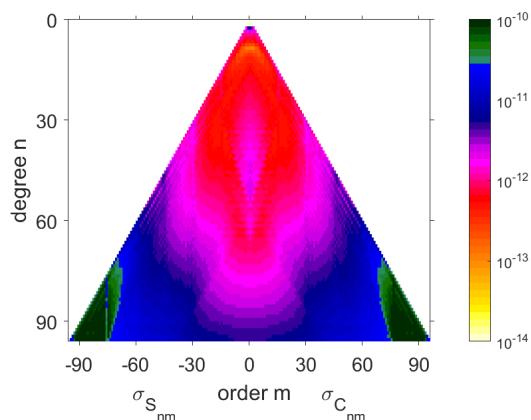


Abb. 92: Genauigkeit der Koeffizienten im April 2023

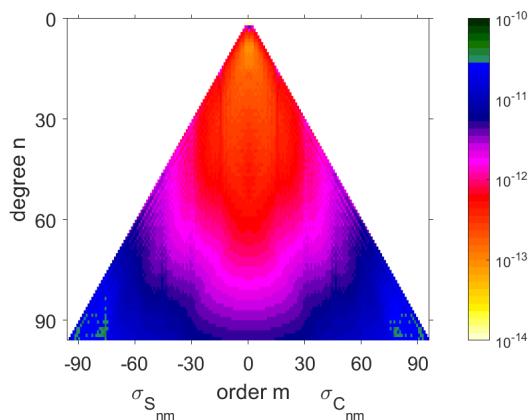


Abb. 93: Genauigkeit der Koeffizienten im Mai 2023

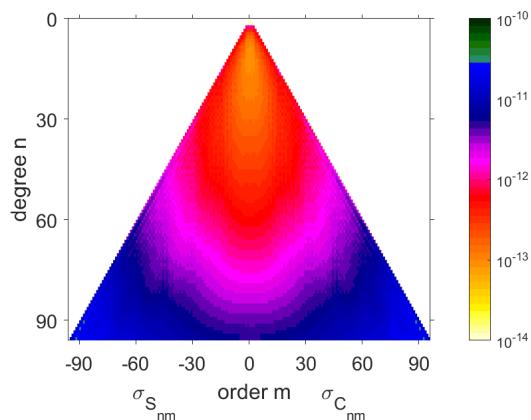


Abb. 94: Genauigkeit der Koeffizienten im Juni 2023

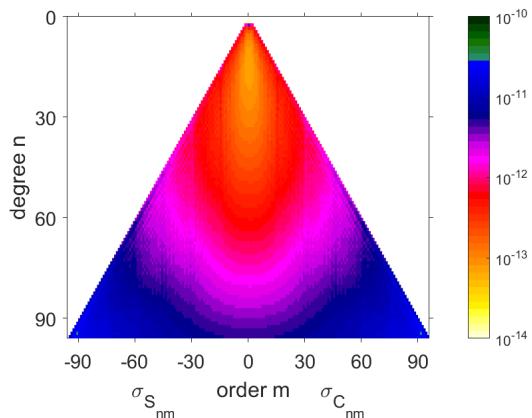


Abb. 95: Genauigkeit der Koeffizienten im Juli 2023

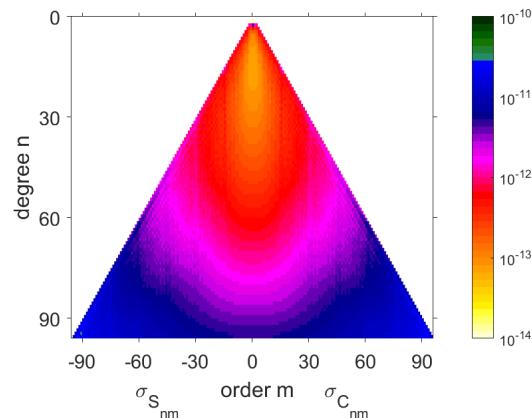


Abb. 96: Genauigkeit der Koeffizienten im August 2023

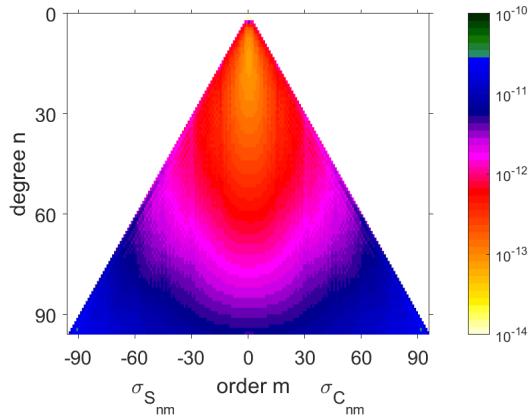


Abb. 97: Genauigkeit der Koeffizienten im September 2023

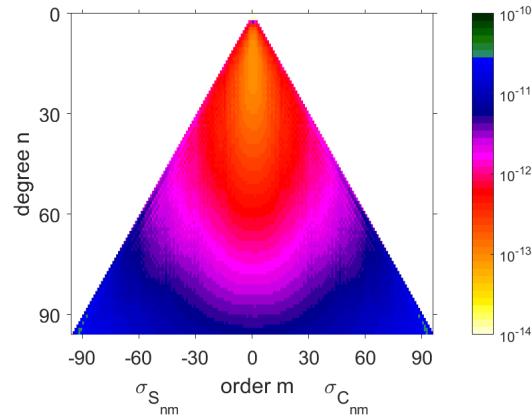


Abb. 98: Genauigkeit der Koeffizienten im Oktober 2023

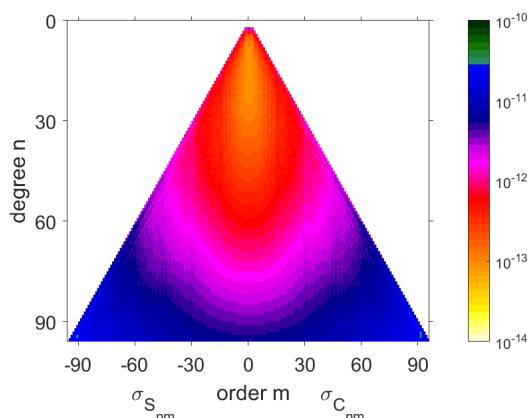


Abb. 99: Genauigkeit der Koeffizienten im November 2023

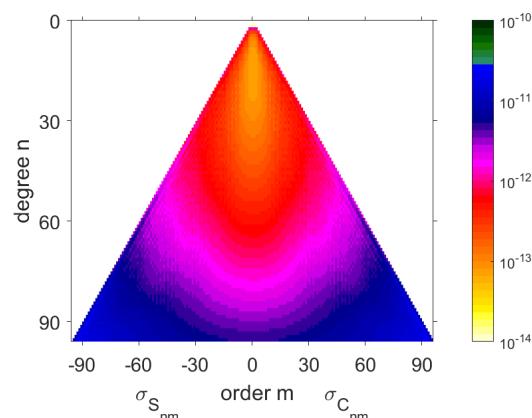


Abb. 100: Genauigkeit der Koeffizienten im Dezember 2023

C.2 Verhältnisse der Genauigkeiten aller Monate 2023

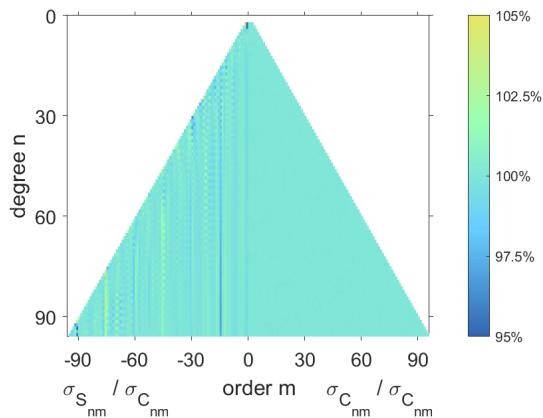


Abb. 101: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023

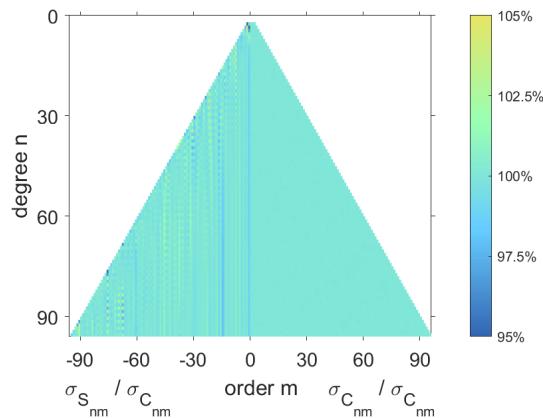


Abb. 102: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Februar 2023

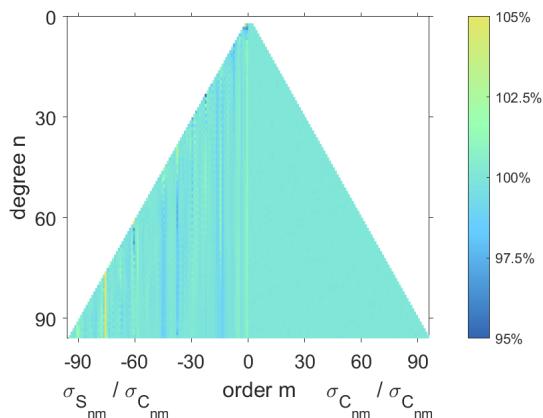


Abb. 103: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im März 2023

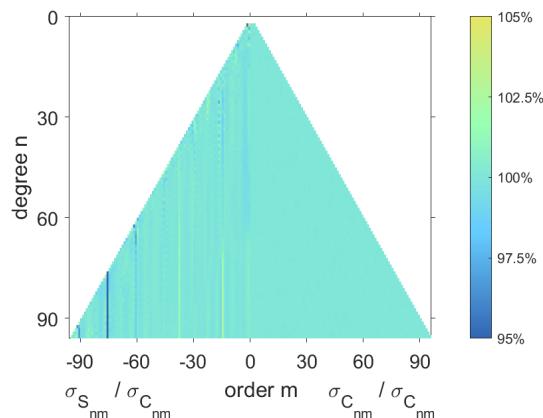


Abb. 104: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im April 2023

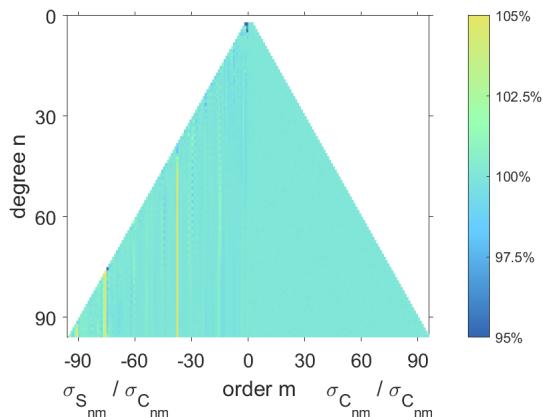


Abb. 105: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Mai 2023

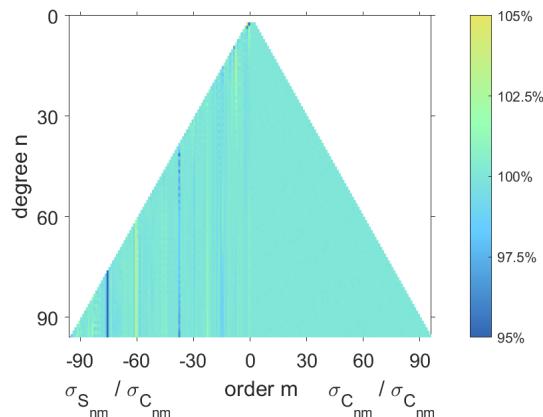


Abb. 106: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

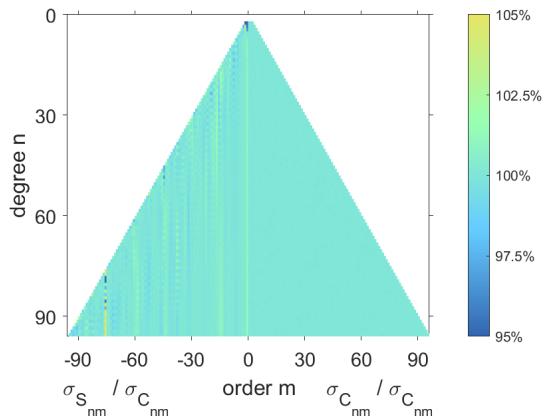


Abb. 107: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Juli 2023

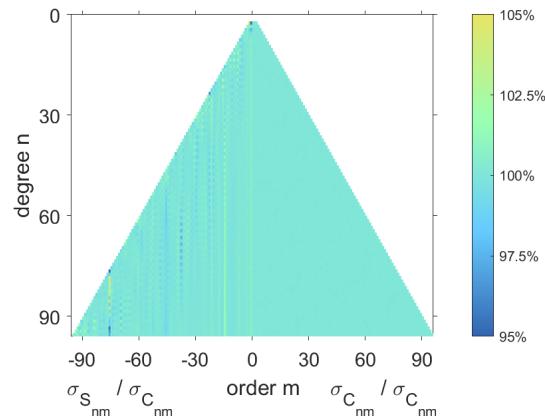


Abb. 108: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im August 2023

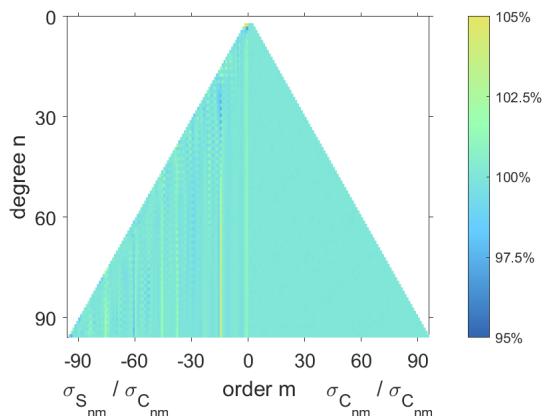


Abb. 109: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im September 2023

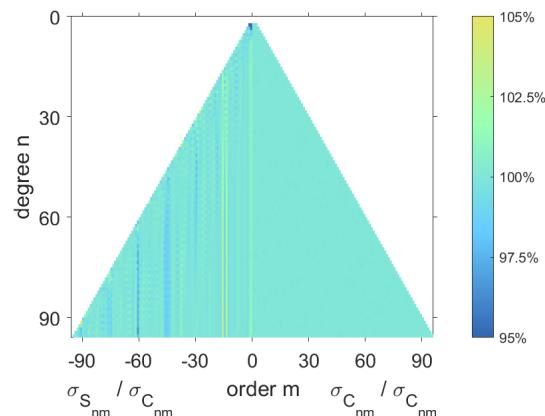


Abb. 110: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Oktober 2023

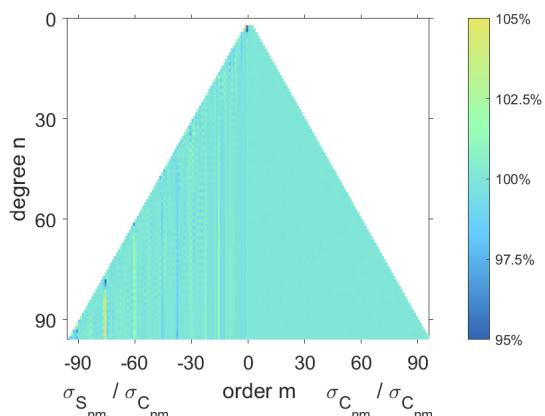


Abb. 111: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im November 2023

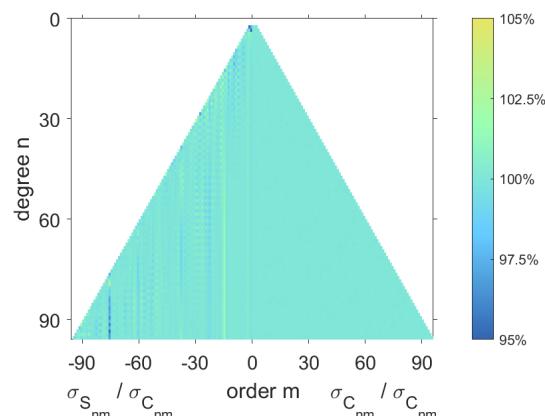


Abb. 112: Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Dezember 2023

C.3 Gravitationspotential und Varianzfortpflanzung

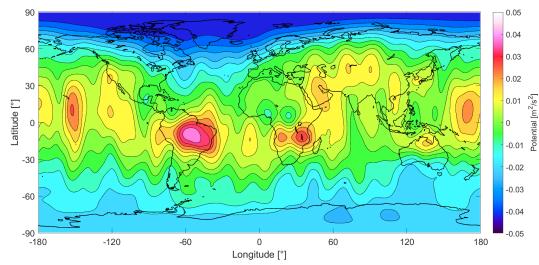


Abb. 113: Gravitationspotential im Januar 2023

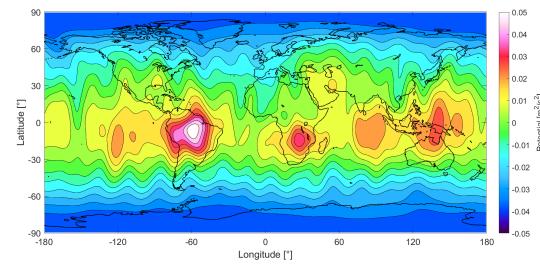


Abb. 114: Gravitationspotential im Februar 2023

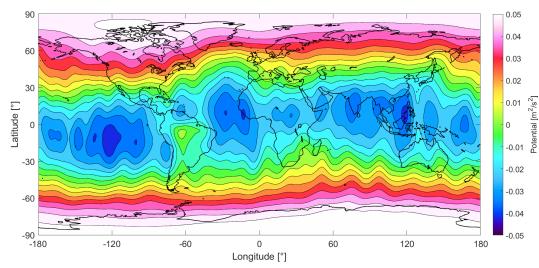


Abb. 115: Gravitationspotential im März 2023

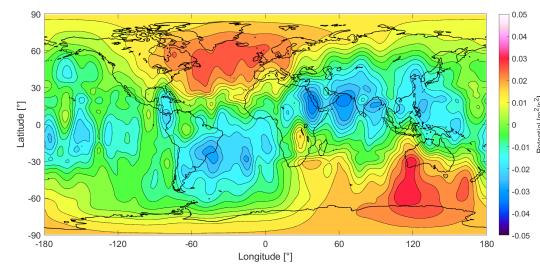


Abb. 116: Gravitationspotential im April 2023

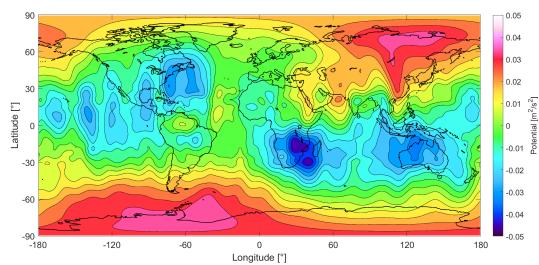


Abb. 117: Gravitationspotential im Mai 2023

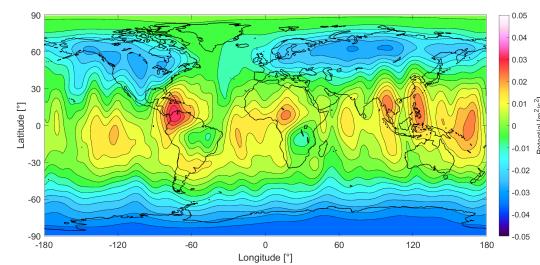


Abb. 118: Gravitationspotential im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

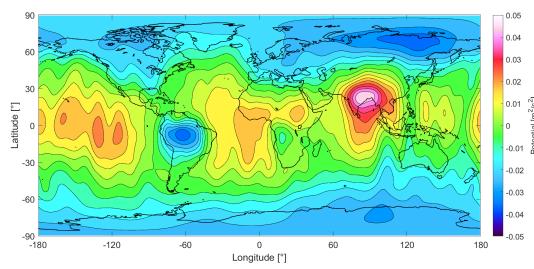


Abb. 119: Gravitationspotential
im Juli 2023

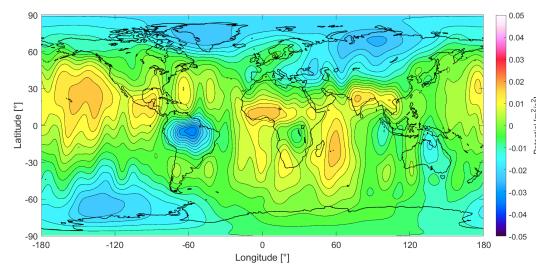


Abb. 120: Gravitationspotential
im August 2023

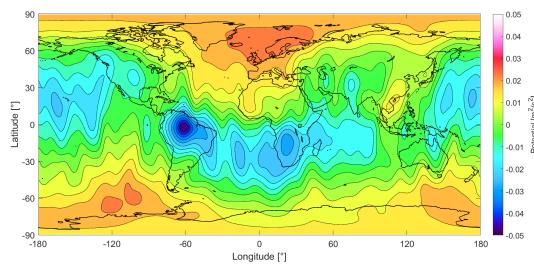


Abb. 121: Gravitationspotential
im September 2023

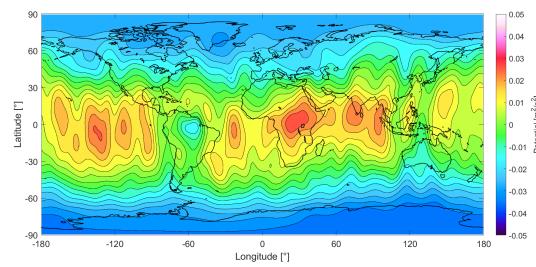


Abb. 122: Gravitationspotential
im Oktober 2023

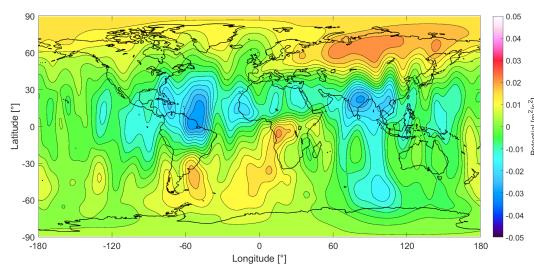


Abb. 123: Gravitationspotential
im November 2023

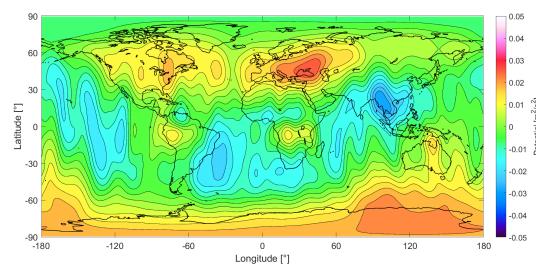


Abb. 124: Gravitationspotential
im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

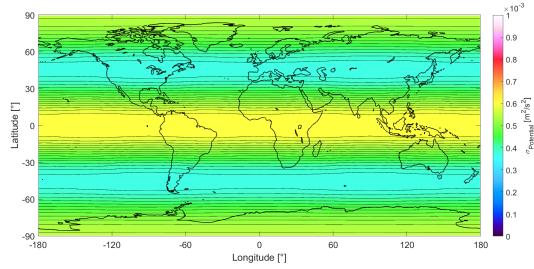


Abb. 125: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Januar 2023

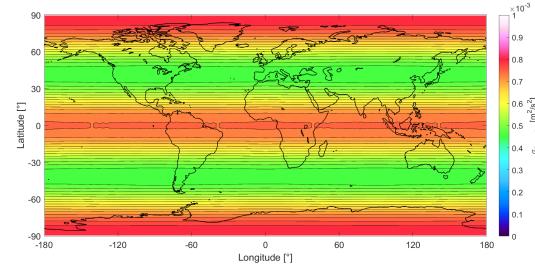


Abb. 126: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Februar 2023

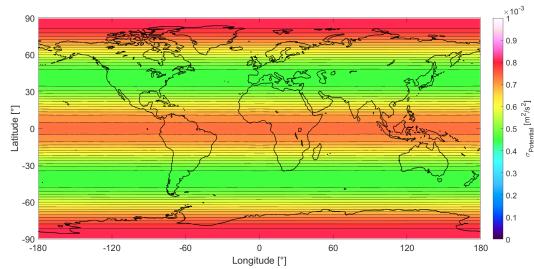


Abb. 127: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im März 2023

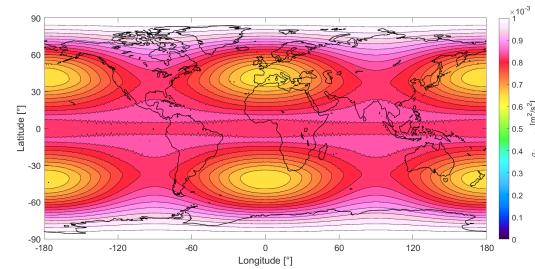


Abb. 128: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im April 2023

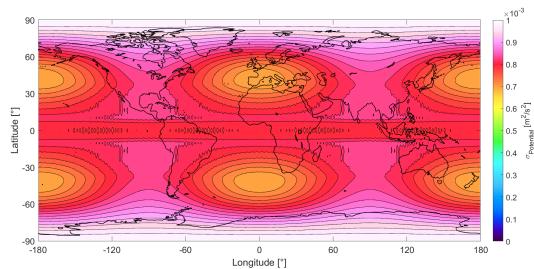


Abb. 129: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Mai 2023

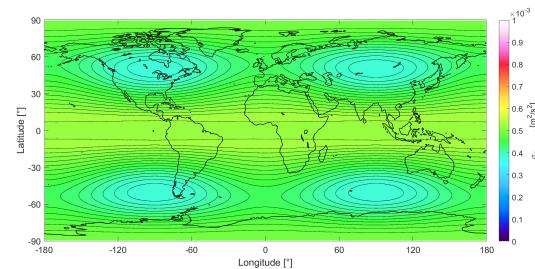


Abb. 130: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

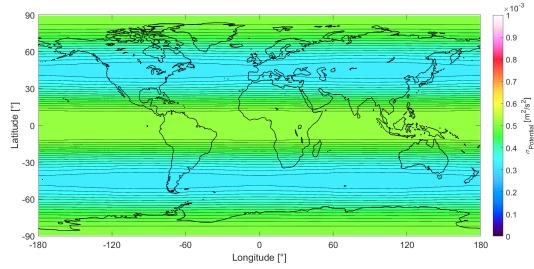


Abb. 131: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juli 2023

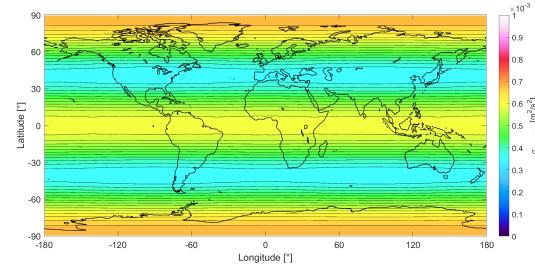


Abb. 132: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im August 2023

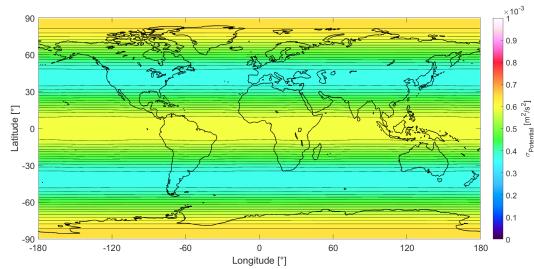


Abb. 133: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im September 2023

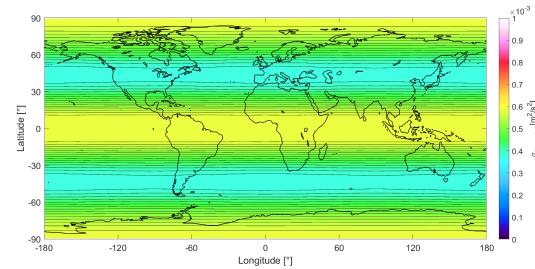


Abb. 134: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Oktober 2023

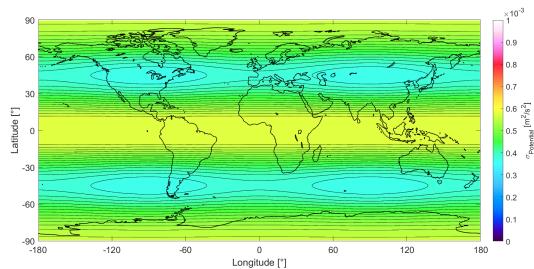


Abb. 135: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im November 2023

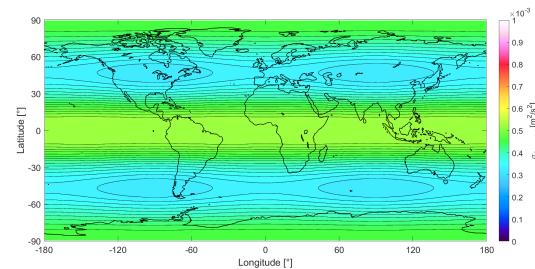


Abb. 136: Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Dezember 2023

C.4 Geoidundulation und Varianzfortpflanzung

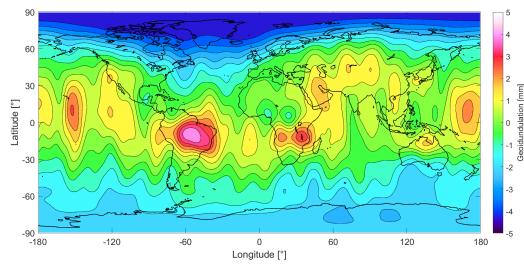


Abb. 137: Geoidundulation im Januar 2023

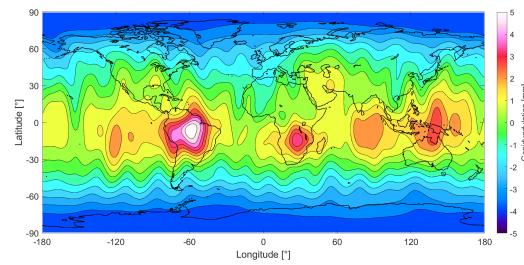


Abb. 138: Geoidundulation im Februar 2023

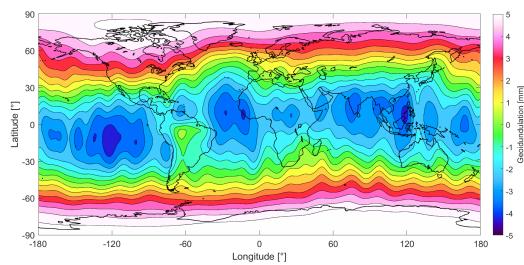


Abb. 139: Geoidundulation im März 2023

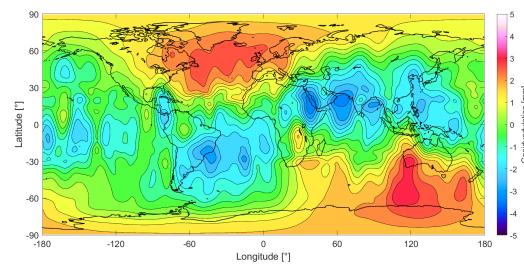


Abb. 140: Geoidundulation im April 2023

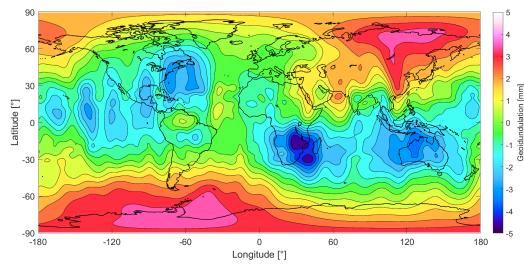


Abb. 141: Geoidundulation im Mai 2023

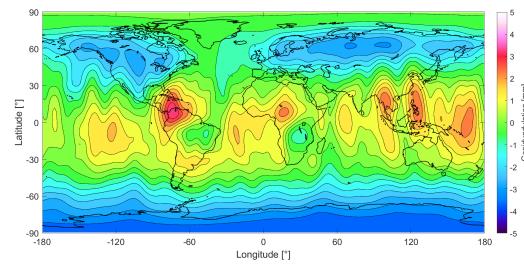


Abb. 142: Geoidundulation im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

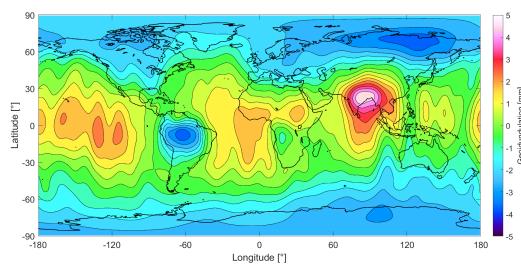


Abb. 143: Geoidundulation
im Juli 2023

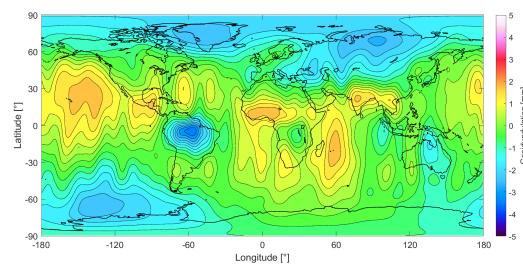


Abb. 144: Geoidundulation
im August 2023

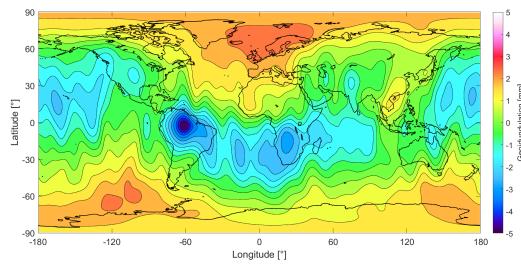


Abb. 145: Geoidundulation
im September 2023

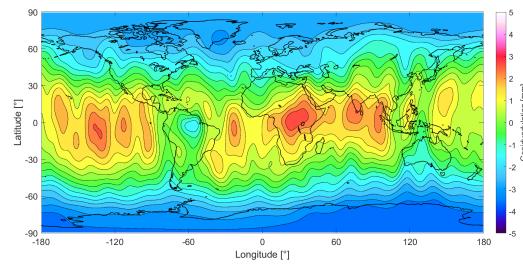


Abb. 146: Geoidundulation
im Oktober 2023

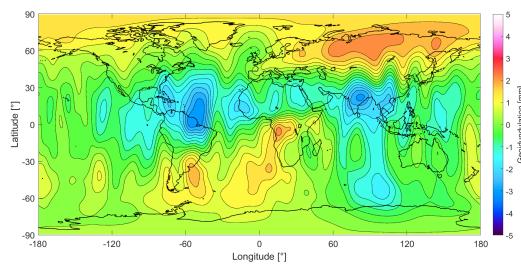


Abb. 147: Geoidundulation
im November 2023

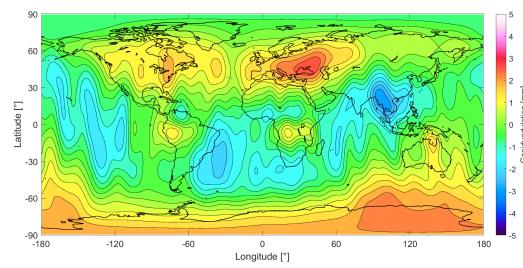


Abb. 148: Geoidundulation
im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

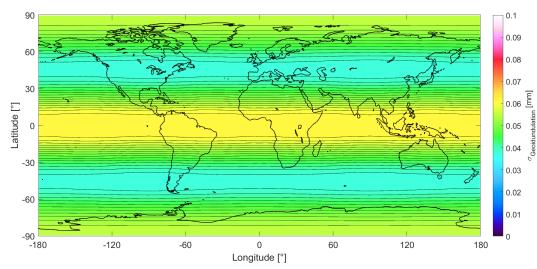


Abb. 149: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Januar 2023.

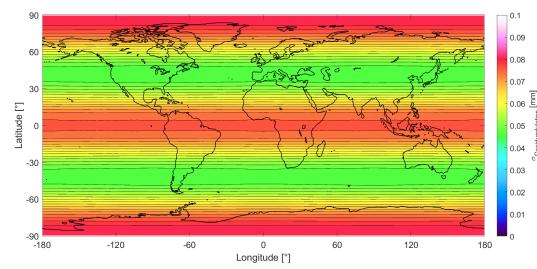


Abb. 150: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Februar 2023.

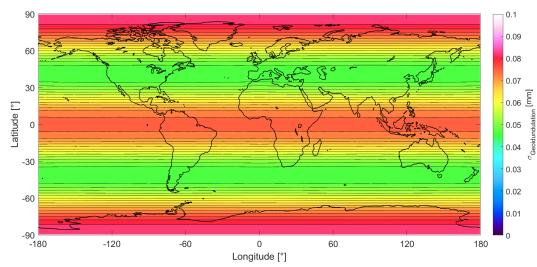


Abb. 151: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im März 2023.

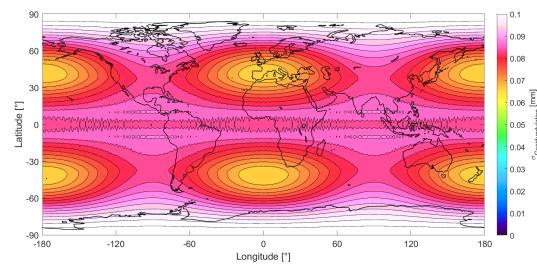


Abb. 152: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im April 2023.

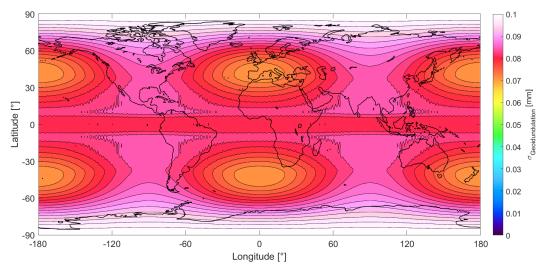


Abb. 153: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Mai 2023.

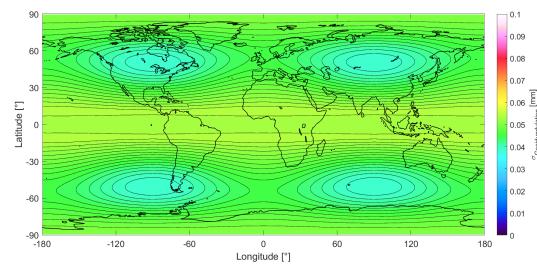


Abb. 154: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juni 2023.

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

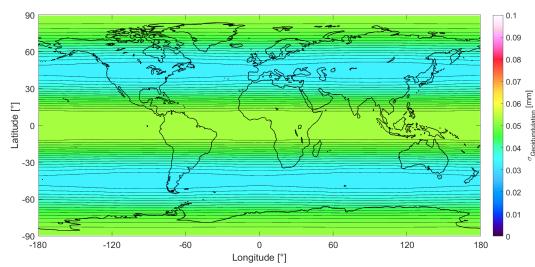


Abb. 155: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juli 2023.

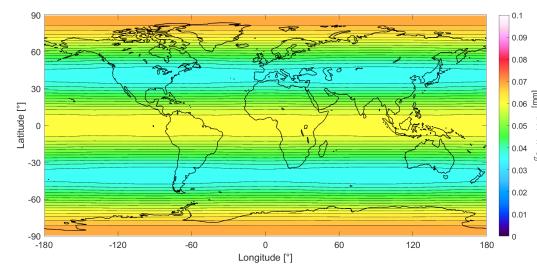


Abb. 156: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im August 2023.

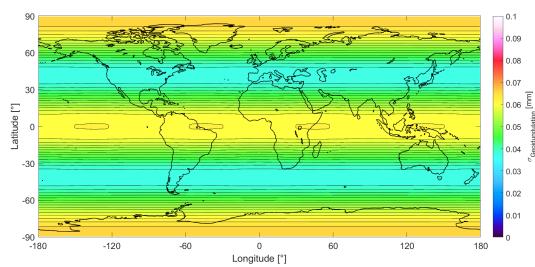


Abb. 157: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im September 2023.

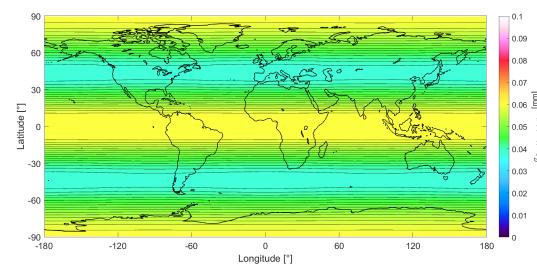


Abb. 158: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Oktober 2023.

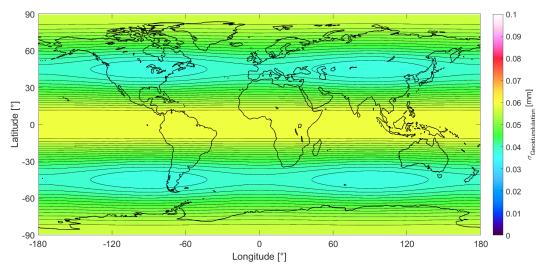


Abb. 159: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im November 2023.

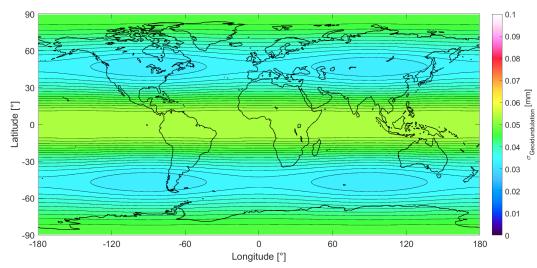


Abb. 160: Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Dezember 2023.

C.5 Schwerestörung und Varianzfortpflanzung

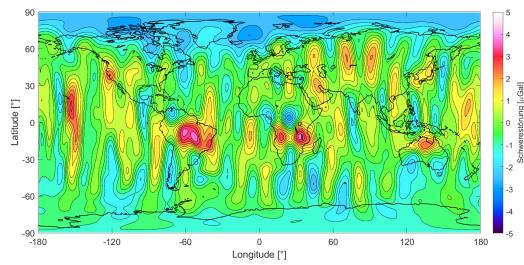


Abb. 161: Schwerestörung
im Januar 2023

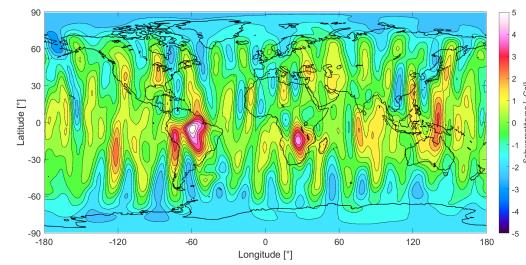


Abb. 162: Schwerestörung
im Februar 2023

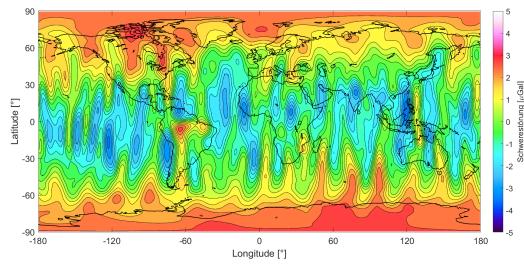


Abb. 163: Schwerestörung
im März 2023

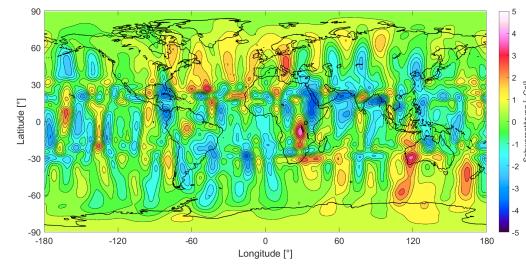


Abb. 164: Schwerestörung
im April 2023

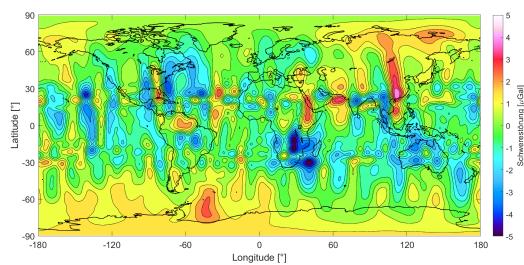


Abb. 165: Schwerestörung
im Mai 2023

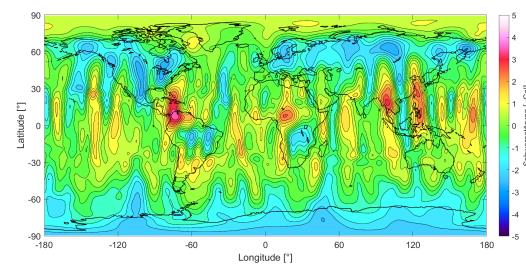


Abb. 166: Schwerestörung
im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

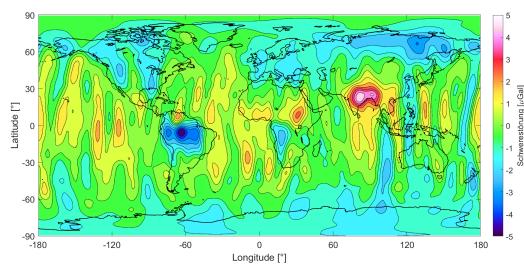


Abb. 167: Schwerestörung
im Juli 2023

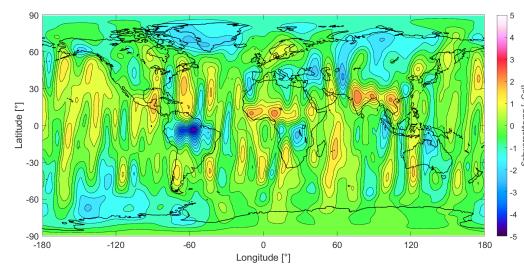


Abb. 168: Schwerestörung
im August 2023

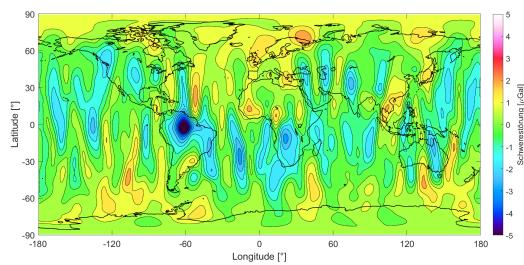


Abb. 169: Schwerestörung
im September 2023

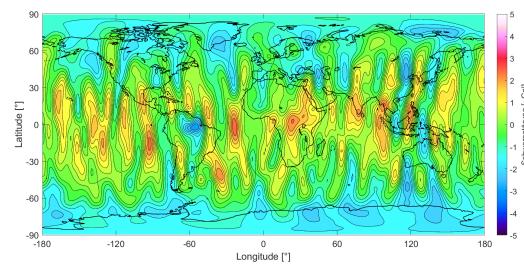


Abb. 170: Schwerestörung
im Oktober 2023

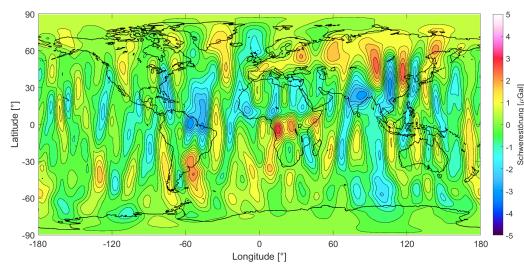


Abb. 171: Schwerestörung
im November 2023

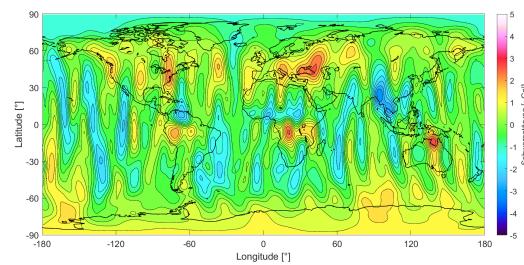


Abb. 172: Schwerestörung
im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

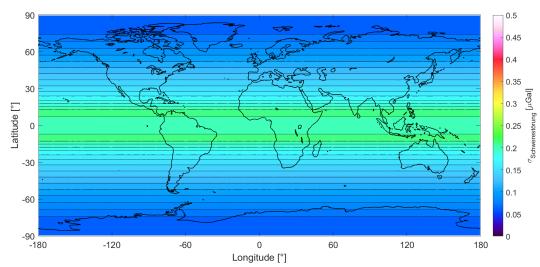


Abb. 173: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Januar 2023

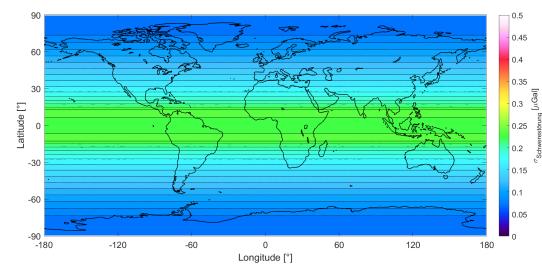


Abb. 174: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Februar 2023

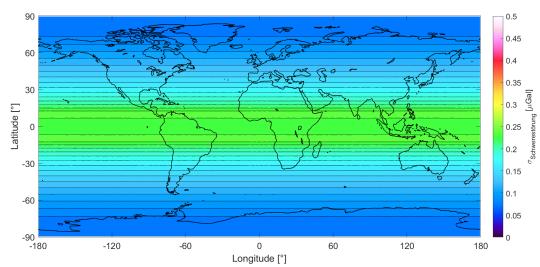


Abb. 175: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im März 2023

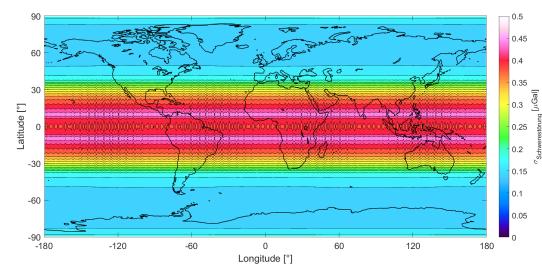


Abb. 176: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im April 2023

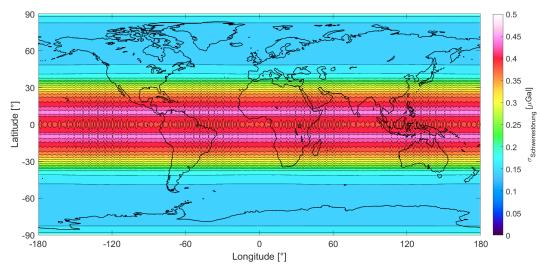


Abb. 177: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Mai 2023

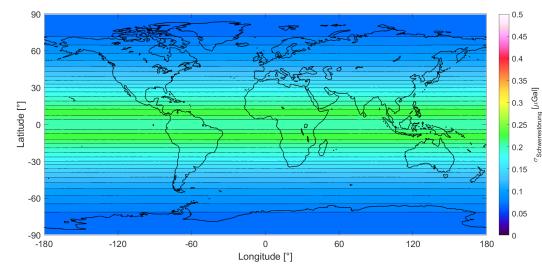


Abb. 178: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

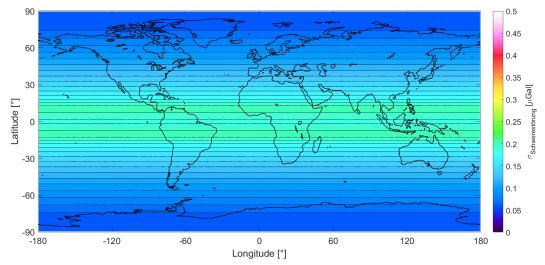


Abb. 179: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juli 2023

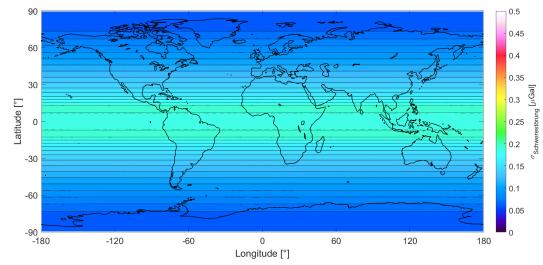


Abb. 180: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im August 2023

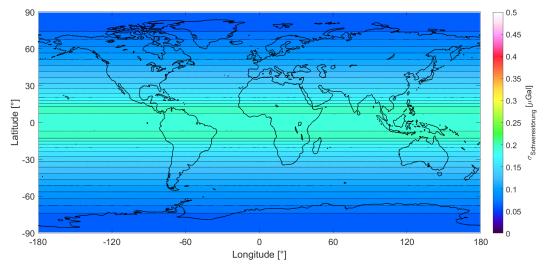


Abb. 181: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im September 2023

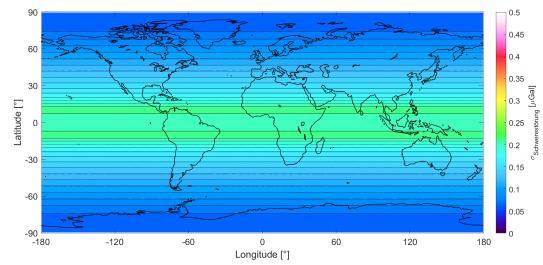


Abb. 182: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Oktober 2023

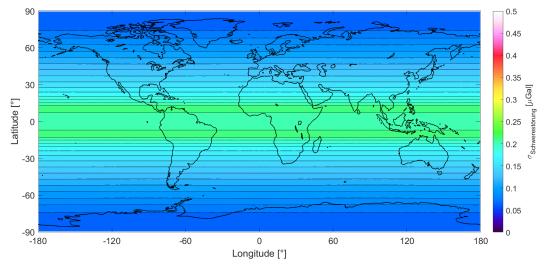


Abb. 183: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im November 2023

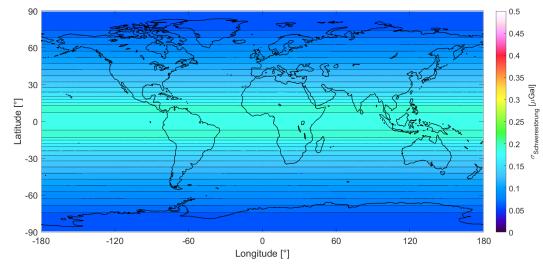


Abb. 184: Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Dezember 2023

C.6 Schwereanomalie und Varianzfortpflanzung

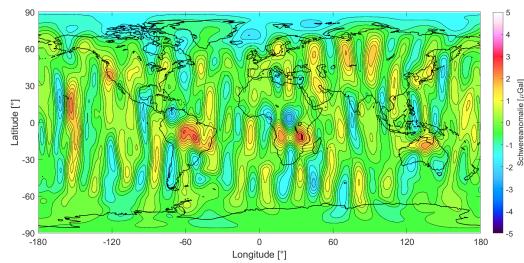


Abb. 185: Schwereanomalie im Januar 2023

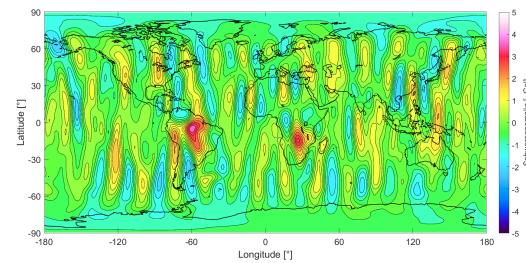


Abb. 186: Schwereanomalie im Februar 2023

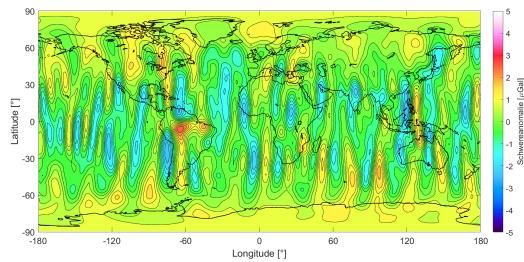


Abb. 187: Schwereanomalie im März 2023

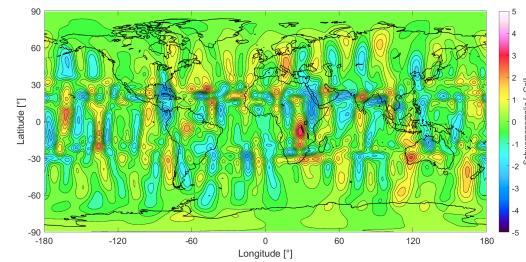


Abb. 188: Schwereanomalie im April 2023

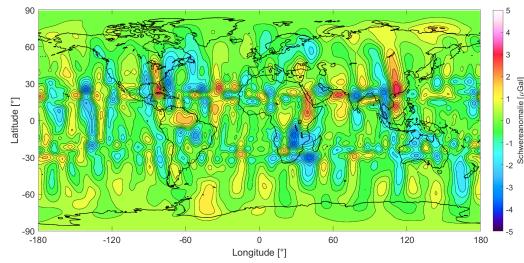


Abb. 189: Schwereanomalie im Mai 2023

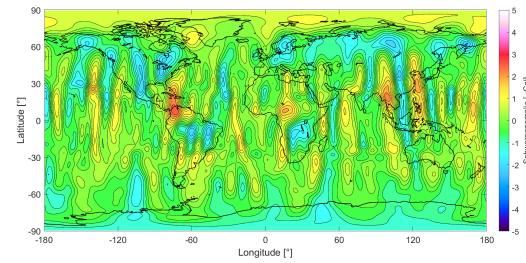


Abb. 190: Schwereanomalie im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

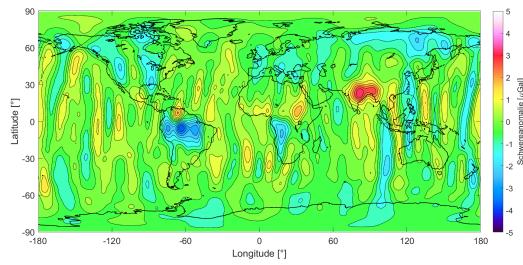


Abb. 191: Schwereanomalie
im Juli 2023

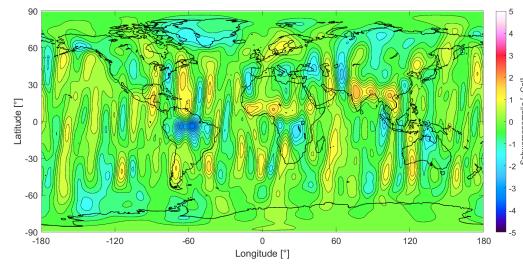


Abb. 192: Schwereanomalie
im August 2023

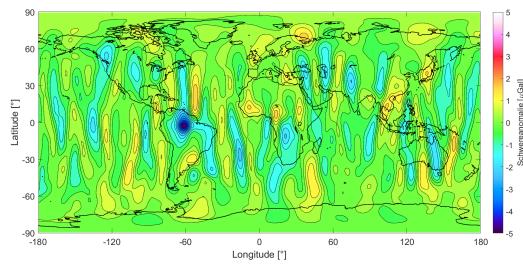


Abb. 193: Schwereanomalie
im September 2023

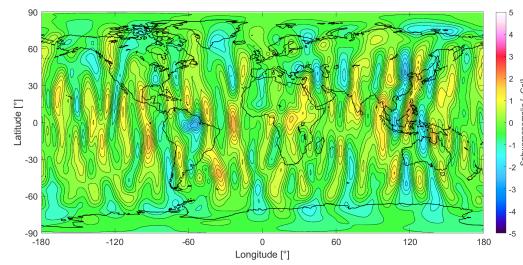


Abb. 194: Schwereanomalie
im Oktober 2023

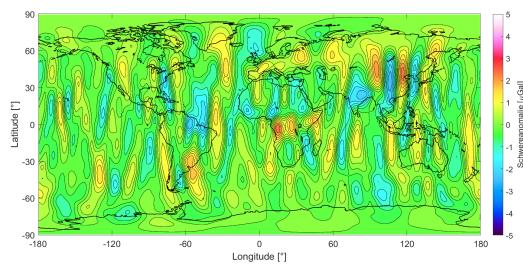


Abb. 195: Schwereanomalie
im November 2023

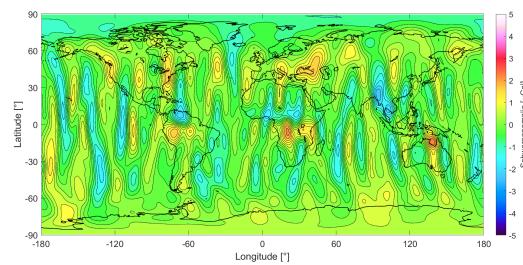


Abb. 196: Schwereanomalie
im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

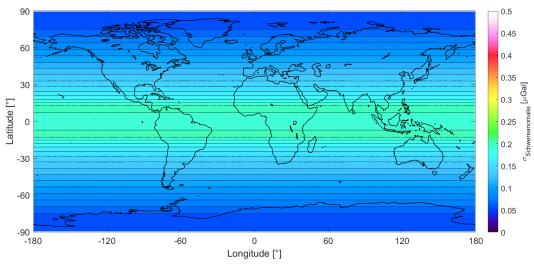


Abb. 197: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Januar 2023

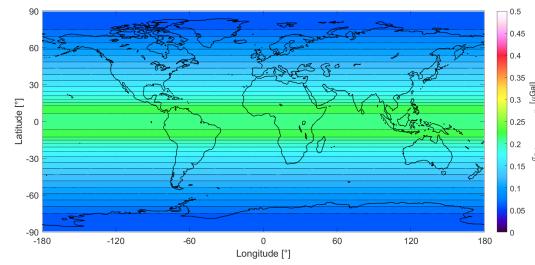


Abb. 198: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Februar 2023

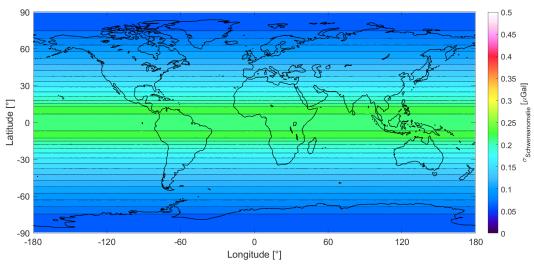


Abb. 199: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im März 2023

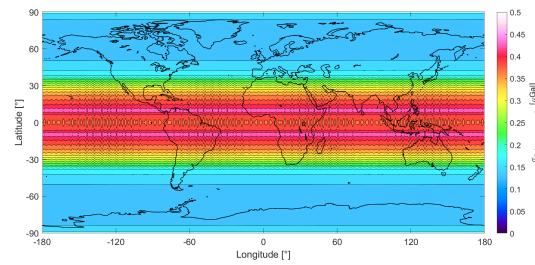


Abb. 200: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im April 2023

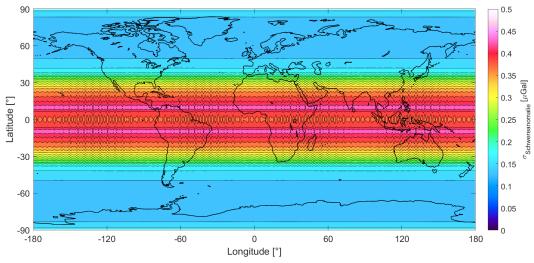


Abb. 201: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Mai 2023

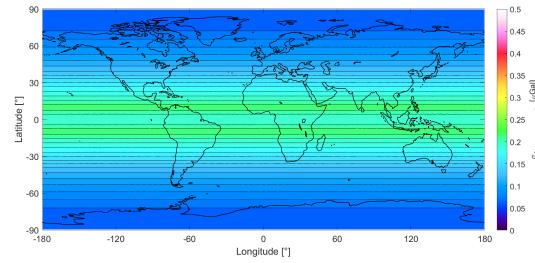


Abb. 202: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

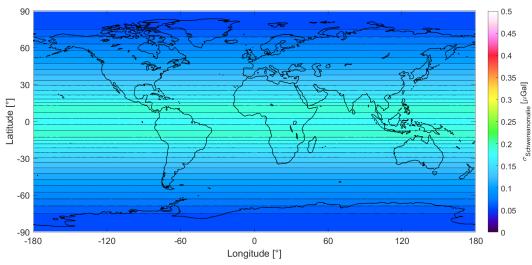


Abb. 203: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juli 2023

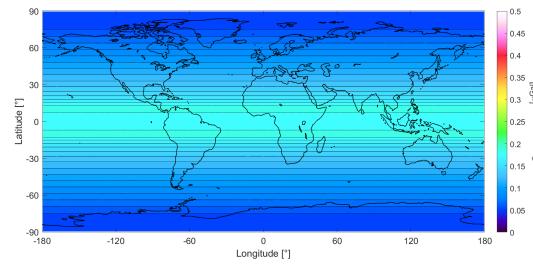


Abb. 204: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im August 2023

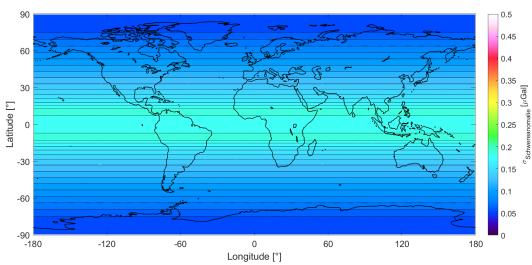


Abb. 205: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im September 2023

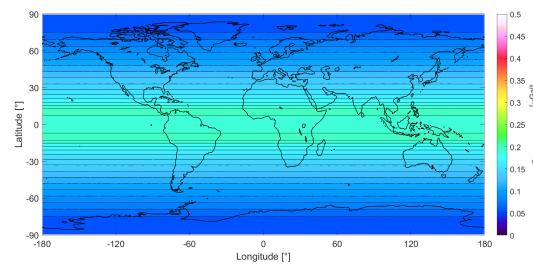


Abb. 206: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Oktober 2023

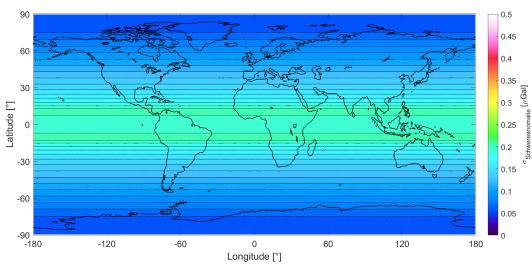


Abb. 207: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im November 2023

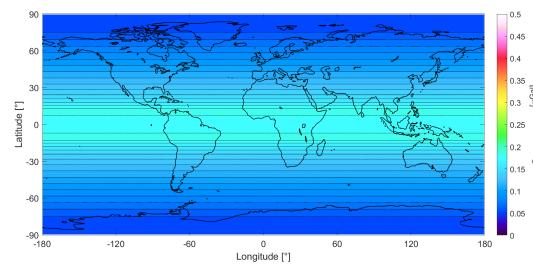


Abb. 208: Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Dezember 2023

C.7 Graphiken Gravitationspotential aus Synthese und Inversion

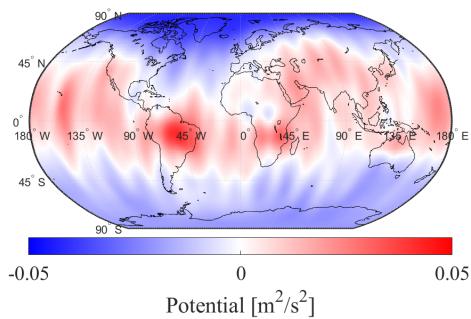


Abb. 209: Gravitationspotential aus Synthese im Januar 2023

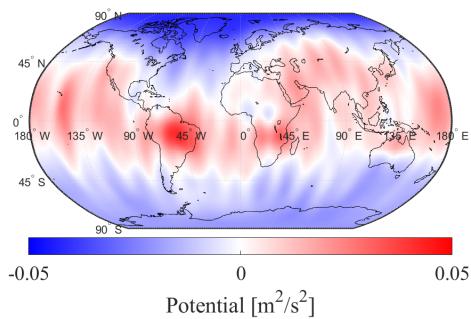


Abb. 210: Gravitationspotential aus Inversion im Januar 2023

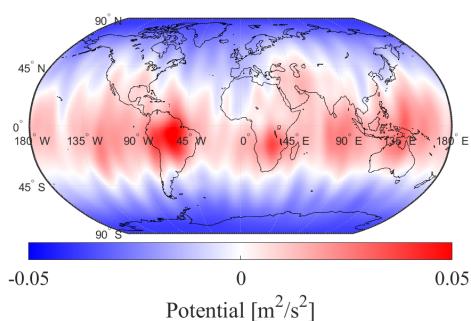


Abb. 211: Gravitationspotential aus Synthese im Februar 2023

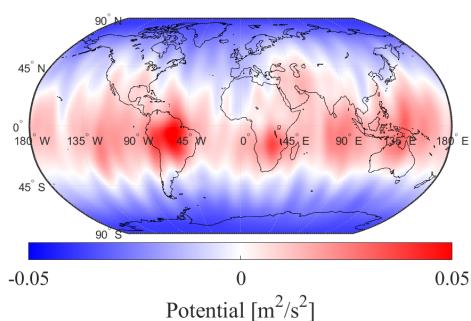


Abb. 212: Gravitationspotential aus Inversion im Februar 2023

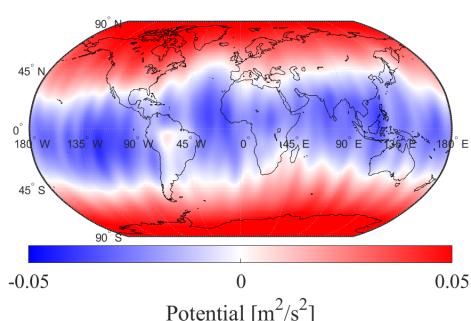


Abb. 213: Gravitationspotential aus Synthese im März 2023

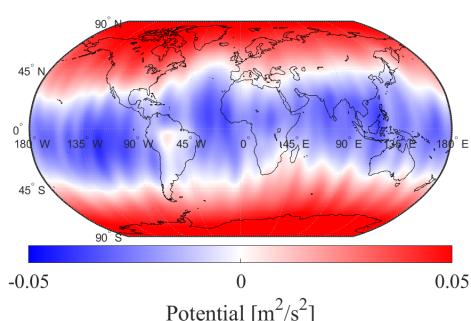


Abb. 214: Gravitationspotential aus Inversion im März 2023

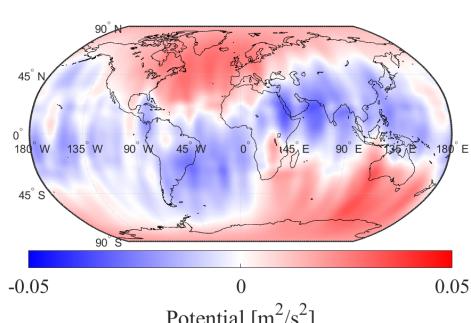


Abb. 215: Gravitationspotential aus Synthese im April 2023

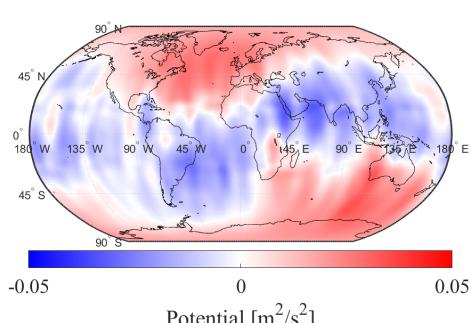


Abb. 216: Gravitationspotential aus Inversion im April 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

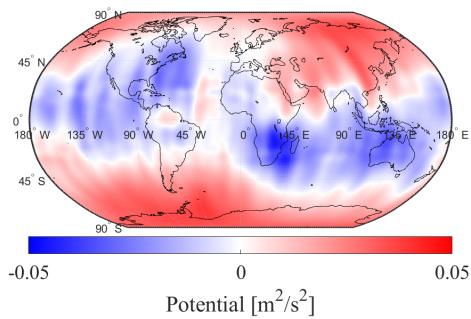


Abb. 217: Gravitationspotential aus Synthese im Mai 2023

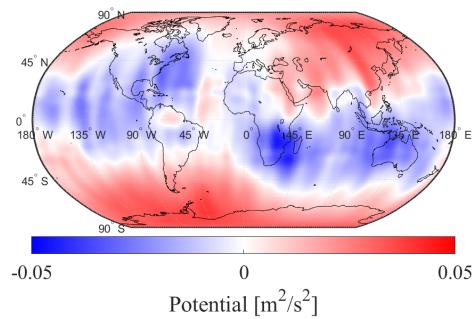


Abb. 218: Gravitationspotential aus Inversion im Mai 2023

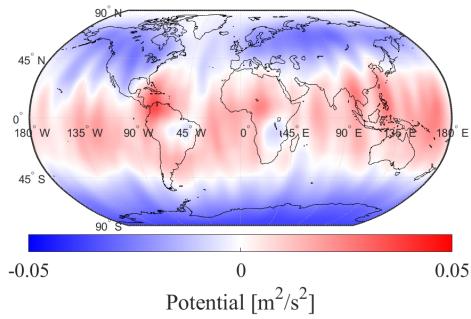


Abb. 219: Gravitationspotential aus Synthese im Juni 2023

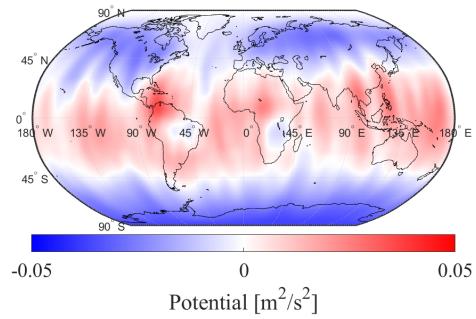


Abb. 220: Gravitationspotential aus Inversion im Juni 2023

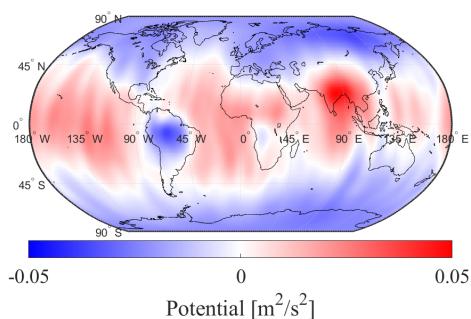


Abb. 221: Gravitationspotential aus Synthese im Juli 2023

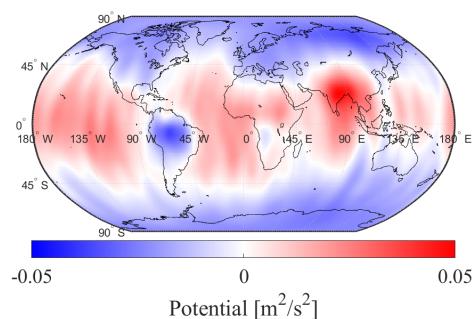


Abb. 222: Gravitationspotential aus Inversion im Juli 2023

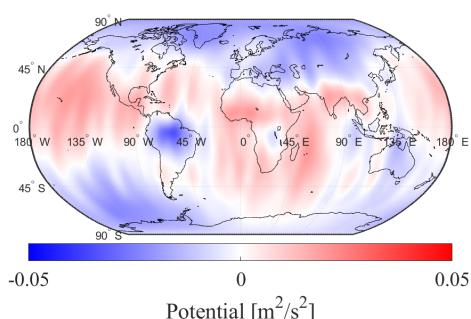


Abb. 223: Gravitationspotential aus Synthese im August 2023

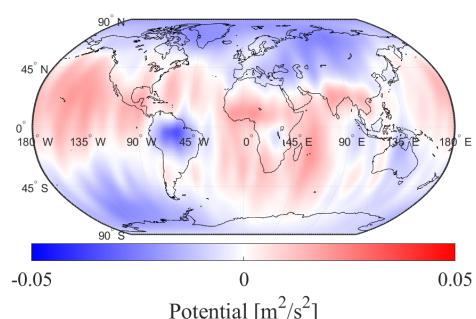


Abb. 224: Gravitationspotential aus Inversion im August 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

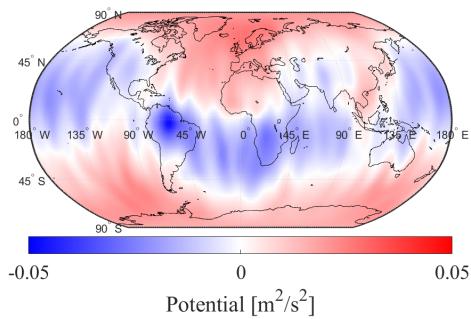


Abb. 225: Gravitationspotential aus Synthese im September 2023

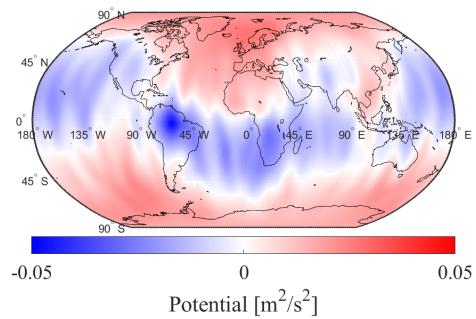


Abb. 226: Gravitationspotential aus Inversion im September 2023

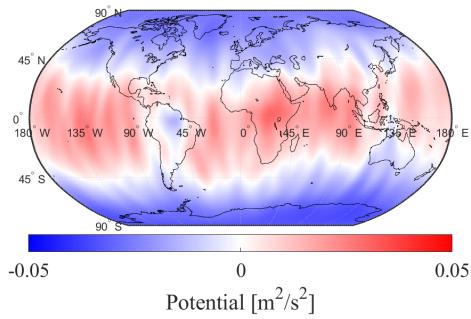


Abb. 227: Gravitationspotential aus Synthese im Oktober 2023

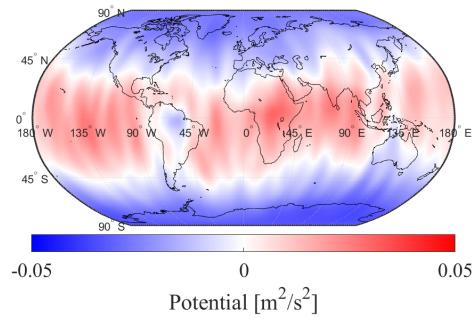


Abb. 228: Gravitationspotential aus Inversion im Oktober 2023

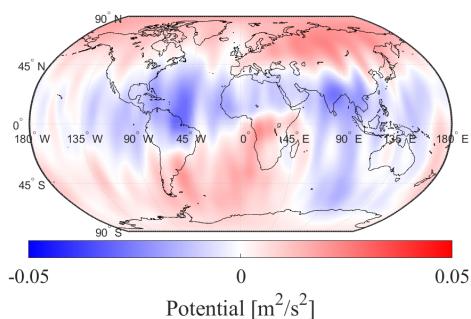


Abb. 229: Gravitationspotential aus Synthese im November 2023

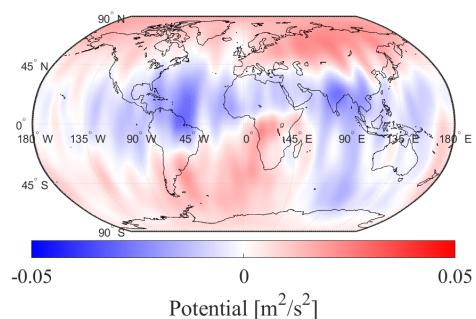


Abb. 230: Gravitationspotential aus Inversion im November 2023

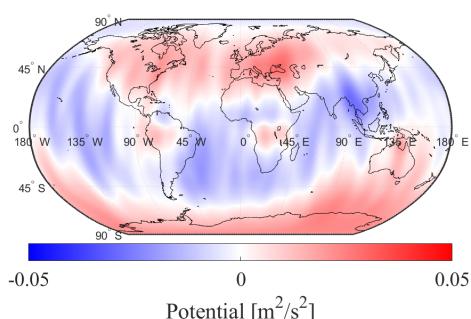


Abb. 231: Gravitationspotential aus Synthese im Dezember 2023

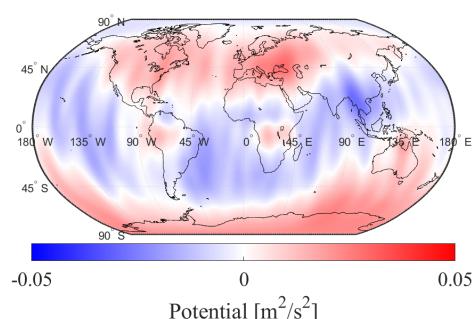


Abb. 232: Gravitationspotential aus Inversion im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

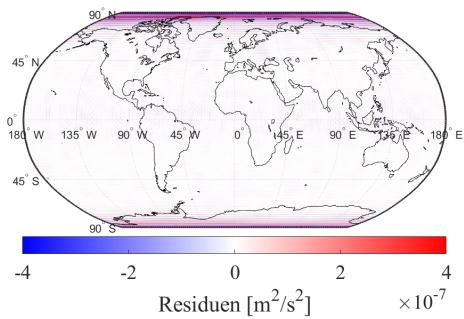


Abb. 233: Residuen des Gravitationspotentials im Januar 2023

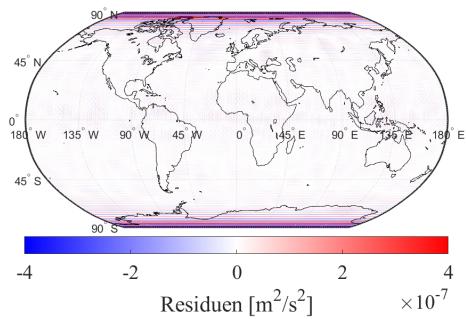


Abb. 234: Residuen des Gravitationspotentials im Februar 2023

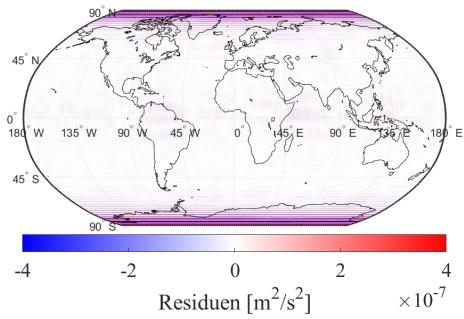


Abb. 235: Residuen des Gravitationspotentials im März 2023

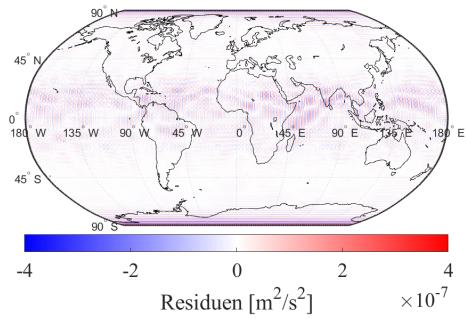


Abb. 236: Residuen des Gravitationspotentials im April 2023

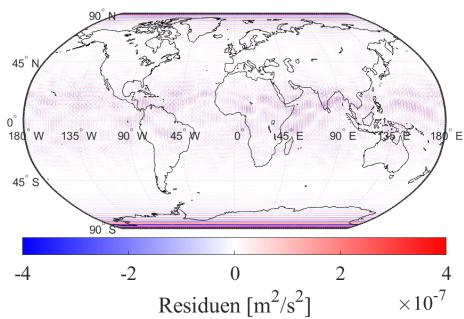


Abb. 237: Residuen des Gravitationspotentials im Mai 2023

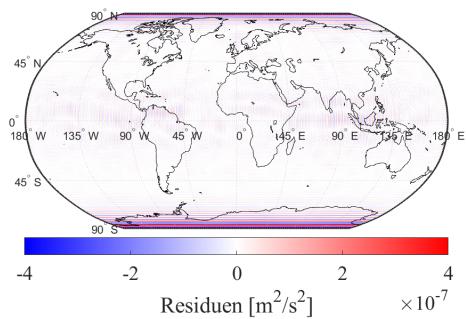


Abb. 238: Residuen des Gravitationspotentials im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

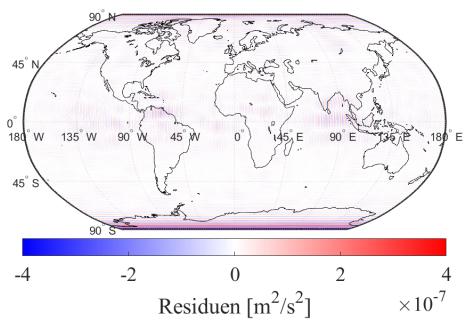


Abb. 239: Residuen des Gravitationspotentials im Juli 2023

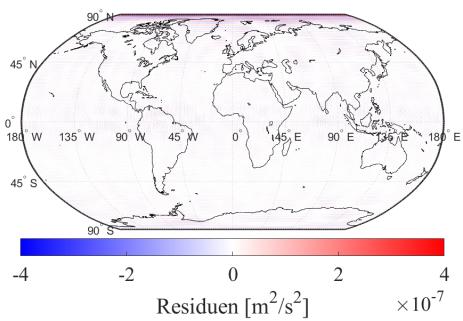


Abb. 240: Residuen des Gravitationspotentials im August 2023

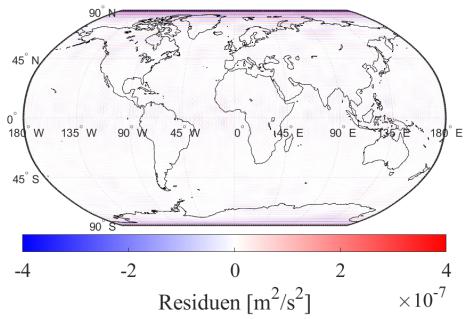


Abb. 241: Residuen des Gravitationspotentials im September 2023

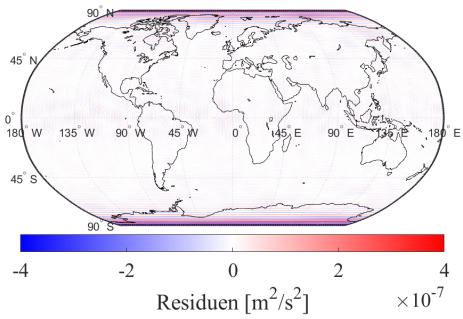


Abb. 242: Residuen des Gravitationspotentials im Oktober 2023

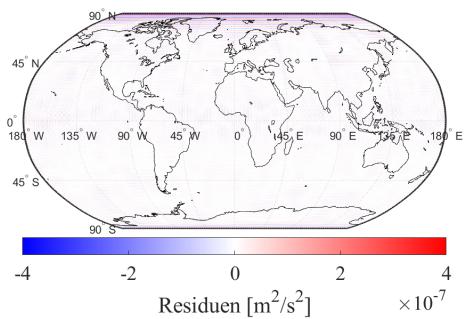


Abb. 243: Residuen des Gravitationspotentials im November 2023

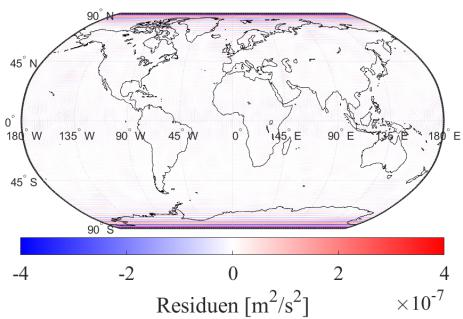


Abb. 244: Residuen des Gravitationspotentials im Dezember 2023

C.8 Graphiken TWS aus Gravitationspotential

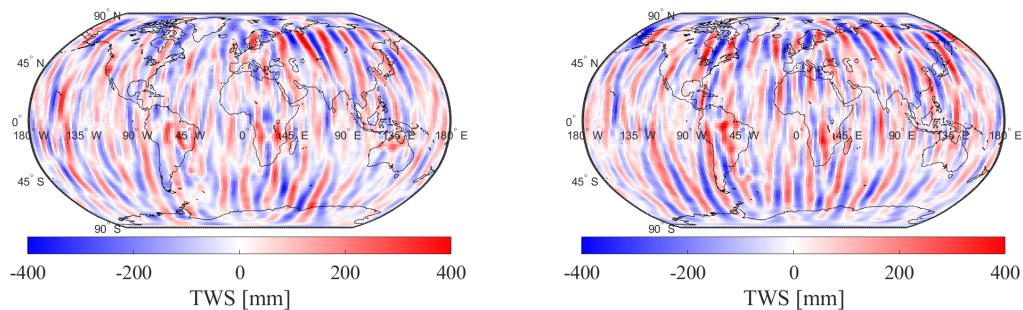


Abb. 245: TWS aus Gravitationspotential im Januar 2023 Abb. 246: TWS aus Gravitationspotential im Februar 2023

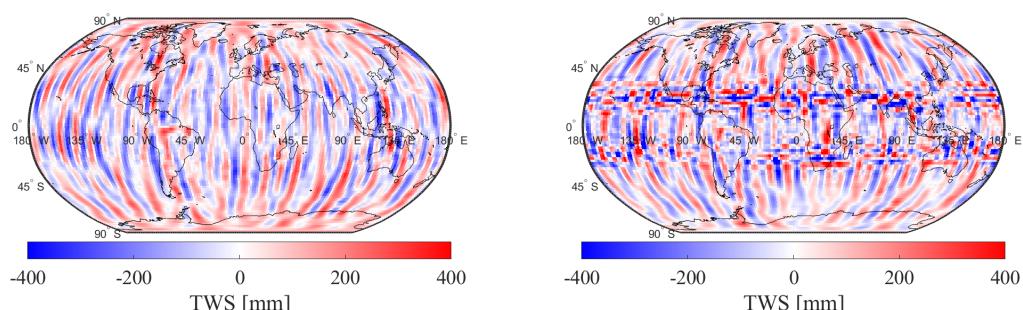


Abb. 247: TWS aus Gravitationspotential im März 2023 Abb. 248: TWS aus Gravitationspotential im April 2023

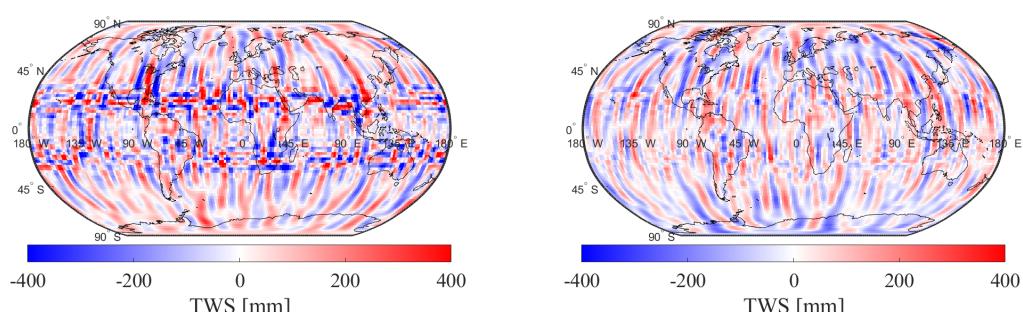


Abb. 249: TWS aus Gravitationspotential im Mai 2023 Abb. 250: TWS aus Gravitationspotential im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

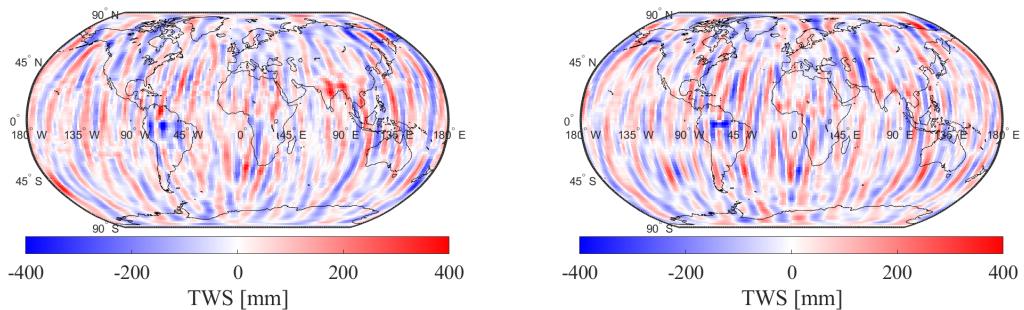


Abb. 251: TWS aus Gravitationspotential im Juli 2023

Abb. 252: TWS aus Gravitationspotential im August 2023

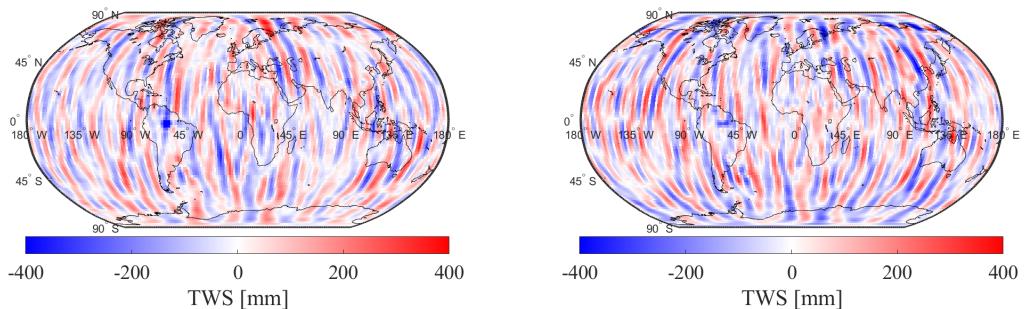


Abb. 253: TWS aus Gravitationspotential im September 2023

Abb. 254: TWS aus Gravitationspotential im Oktober 2023

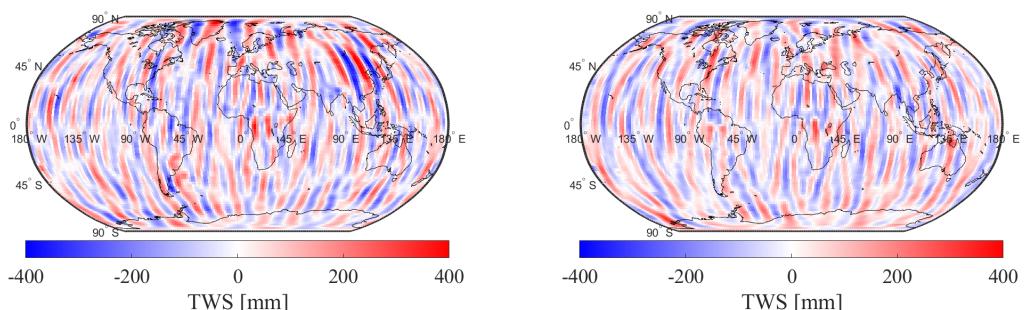


Abb. 255: TWS aus Gravitationspotential im November 2023

Abb. 256: TWS aus Gravitationspotential im Dezember 2023

C.9 Graphiken der Schwerestörung aus dem inversen Tesseroidiansatz

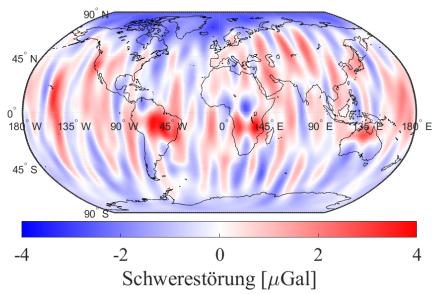


Abb. 257: Schwerestörung aus Synthese im Januar 2023

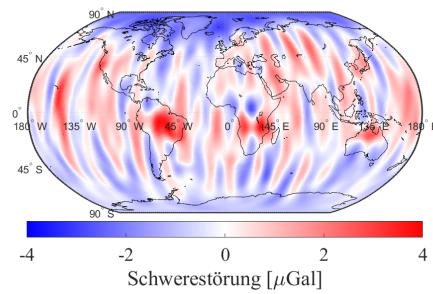


Abb. 258: Schwerestörung aus Inversion im Januar 2023

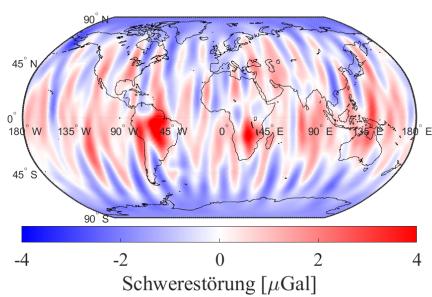


Abb. 259: Schwerestörung aus Synthese im Februar 2023

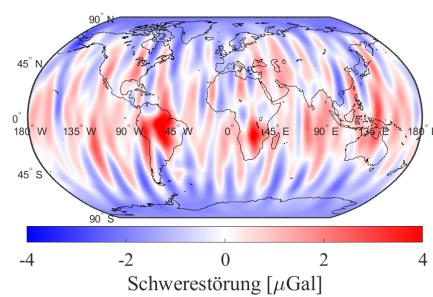


Abb. 260: Schwerestörung aus Inversion im Februar 2023

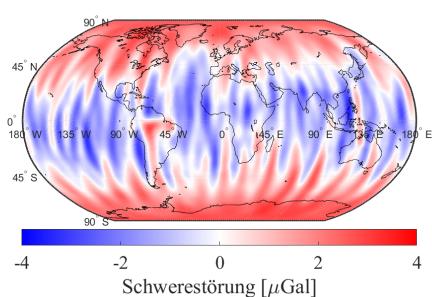


Abb. 261: Schwerestörung aus Synthese im März 2023

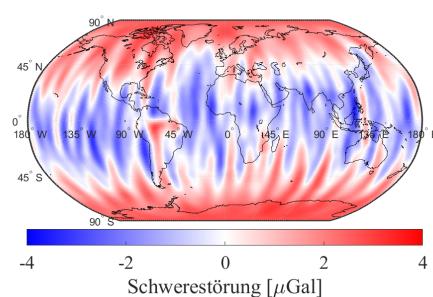


Abb. 262: Schwerestörung aus Inversion im März 2023

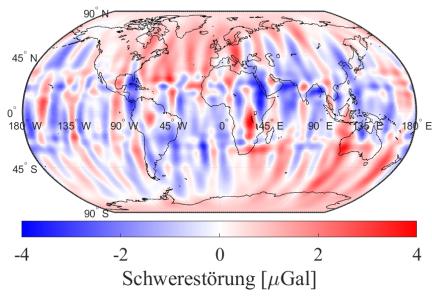


Abb. 263: Schwerestörung aus Synthese im April 2023

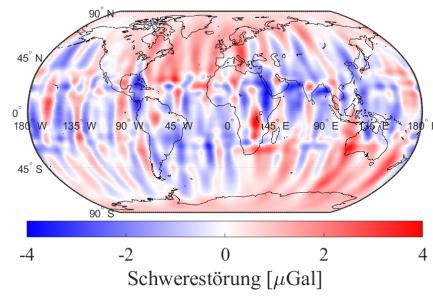


Abb. 264: Schwerestörung aus Inversion im April 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

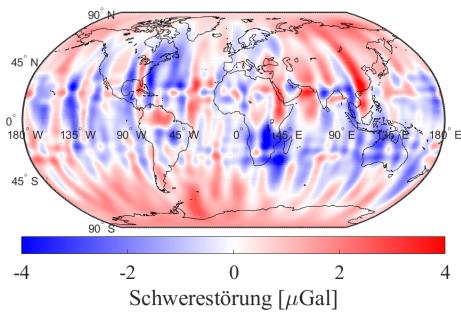


Abb. 265: Schwerestörung aus Synthese im Mai 2023

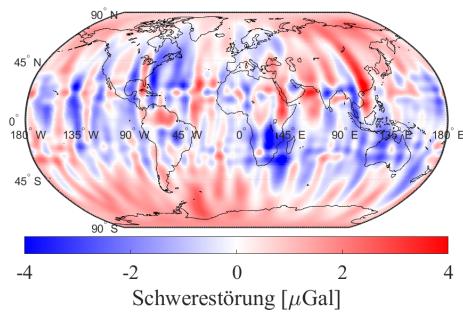


Abb. 266: Schwerestörung aus Inversion im Mai 2023

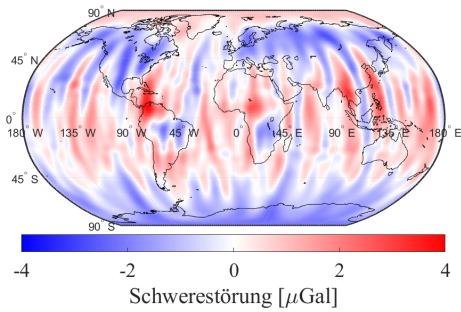


Abb. 267: Schwerestörung aus Synthese im Juni 2023

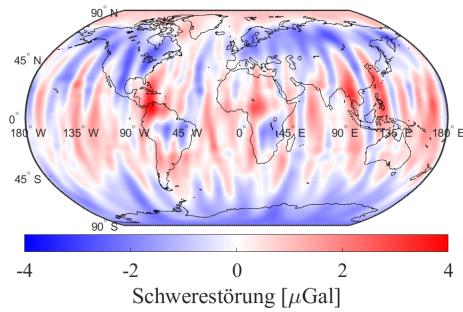


Abb. 268: Schwerestörung aus Inversion im Juni 2023

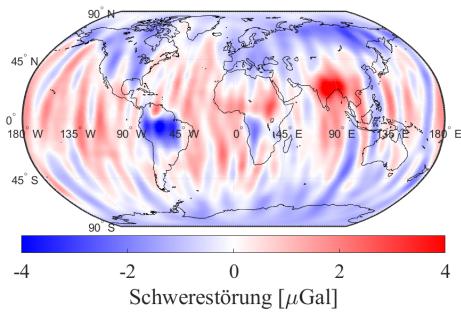


Abb. 269: Schwerestörung aus Synthese im Juli 2023

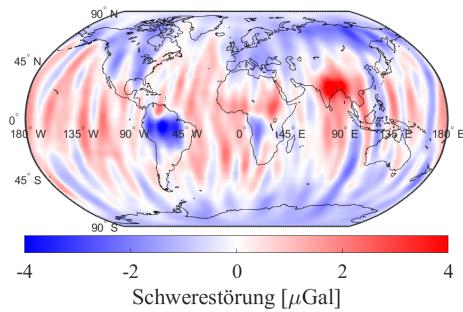


Abb. 270: Schwerestörung aus Inversion im Juli 2023

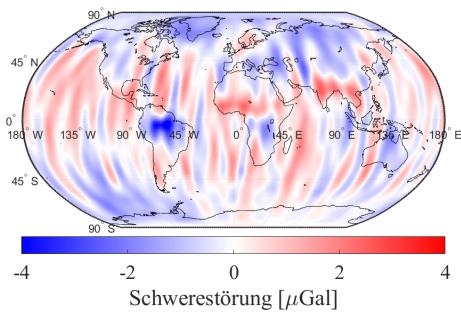


Abb. 271: Schwerestörung aus Synthese im August 2023

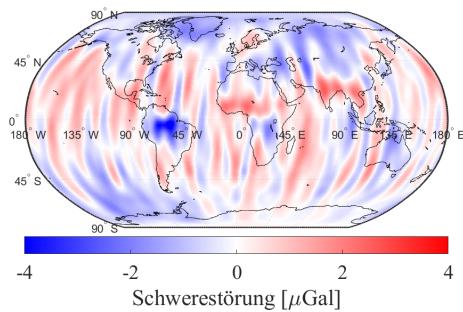


Abb. 272: Schwerestörung aus Inversion im August 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

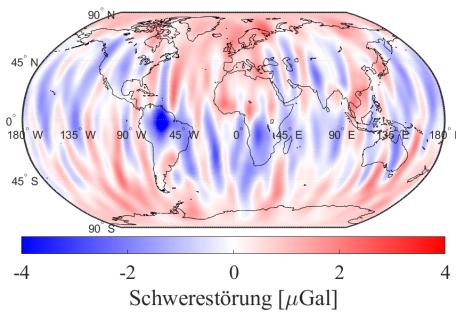


Abb. 273: Schwerestörung aus Synthese im September 2023

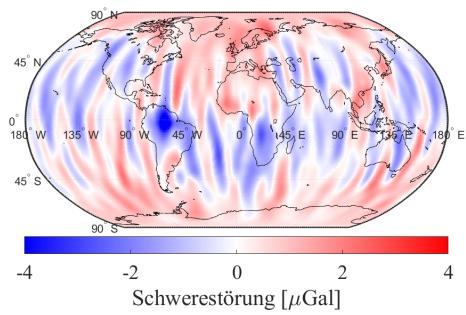


Abb. 274: Schwerestörung aus Inversion im September 2023

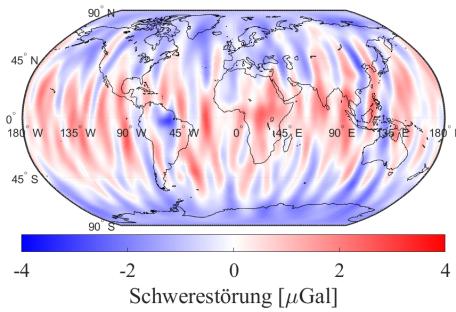


Abb. 275: Schwerestörung aus Synthese im Oktober 2023

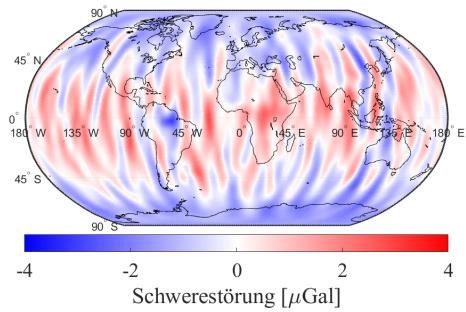


Abb. 276: Schwerestörung aus Inversion im Oktober 2023

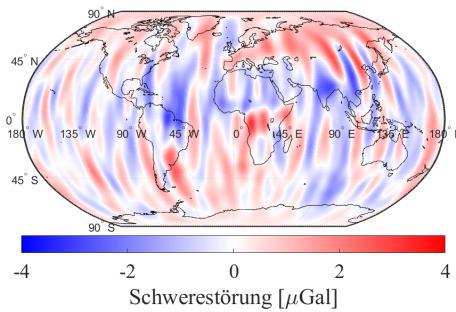


Abb. 277: Schwerestörung aus Synthese im November 2023

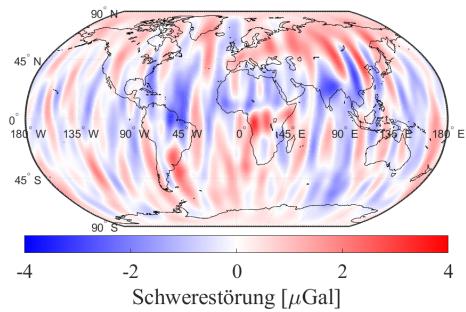


Abb. 278: Schwerestörung aus Inversion im November 2023

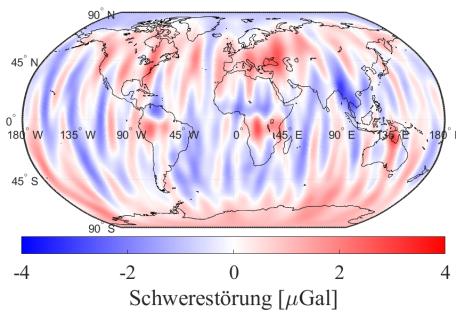


Abb. 279: Schwerestörung aus Synthese im Dezember 2023

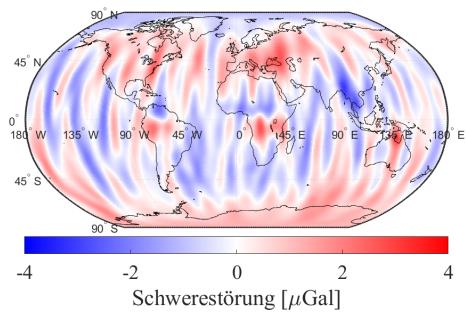


Abb. 280: Schwerestörung aus Inversion im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

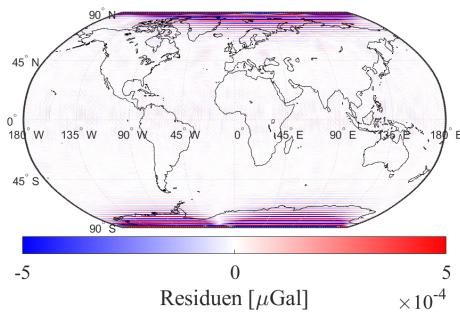


Abb. 281: Residuen der Schwerestörungen im Januar 2023

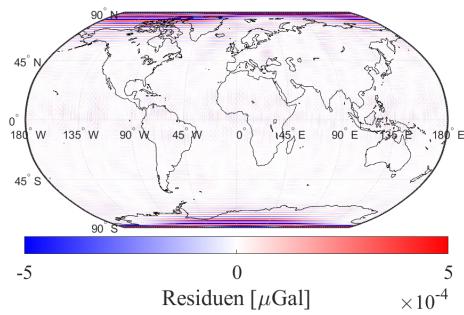


Abb. 282: Residuen der Schwerestörungen im Februar 2023

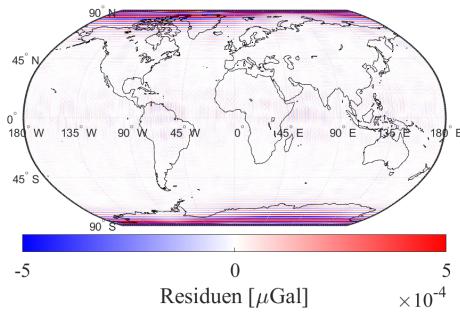


Abb. 283: Residuen der Schwerestörungen im März 2023

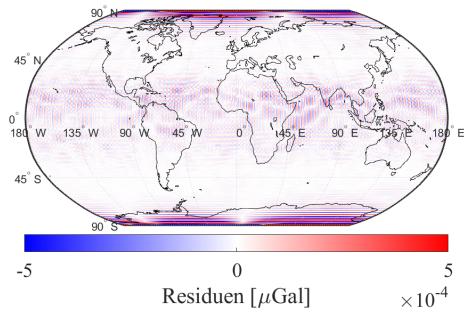


Abb. 284: Residuen der Schwerestörungen im April 2023

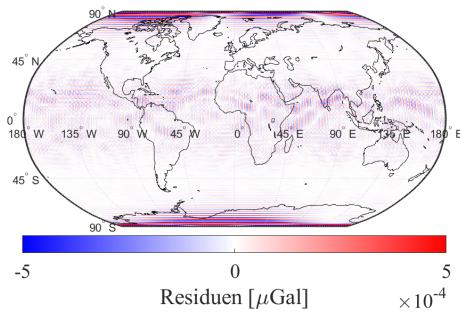


Abb. 285: Residuen der Schwerestörungen im Mai 2023

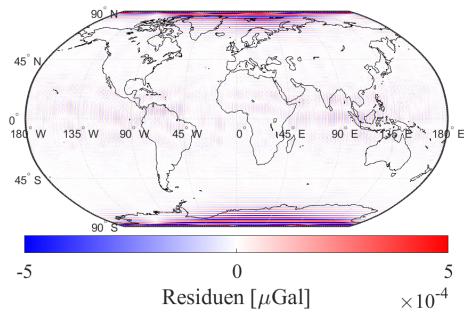


Abb. 286: Residuen der Schwerestörungen im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

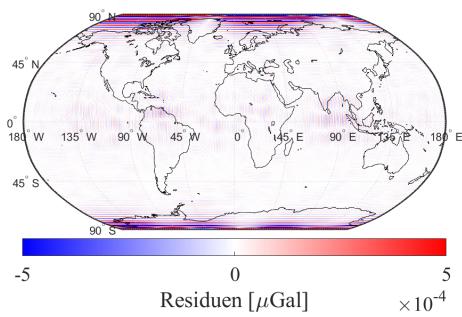


Abb. 287: Residuen der Schwerestörungen im Juli 2023

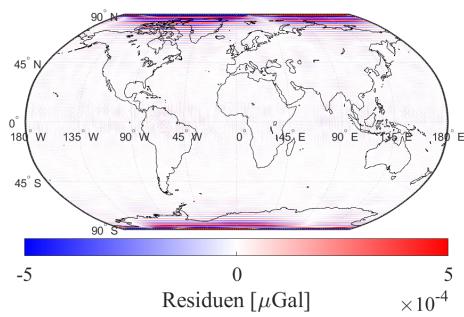


Abb. 288: Residuen der Schwerestörungen im August 2023

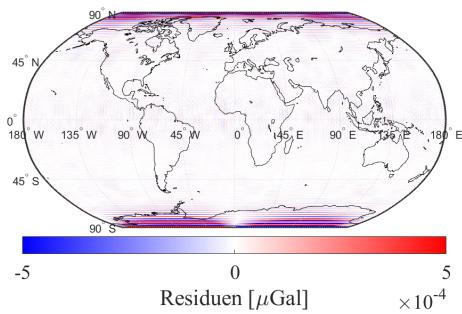


Abb. 289: Residuen der Schwerestörungen im September 2023

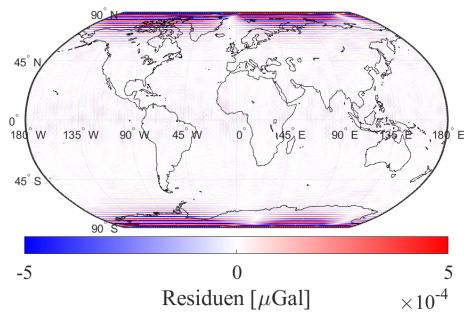


Abb. 290: Residuen der Schwerestörungen im Oktober 2023

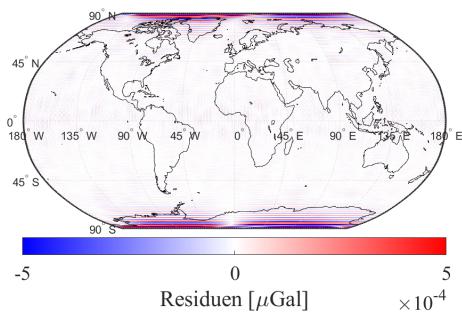


Abb. 291: Residuen der Schwerestörungen im November 2023

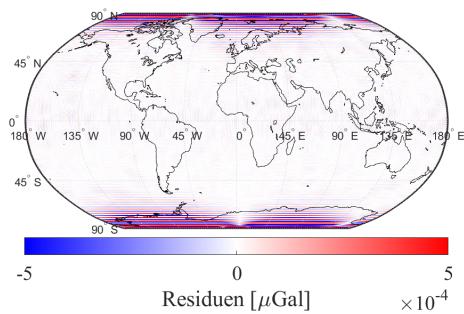


Abb. 292: Residuen der Schwerestörungen im Dezember 2023

C.10 Graphiken TWS aus Schwerestörung

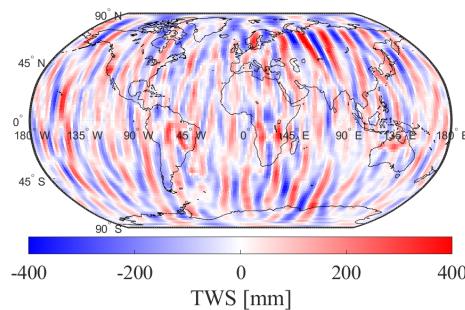


Abb. 293: TWS aus Schwerestörung im Januar 2023

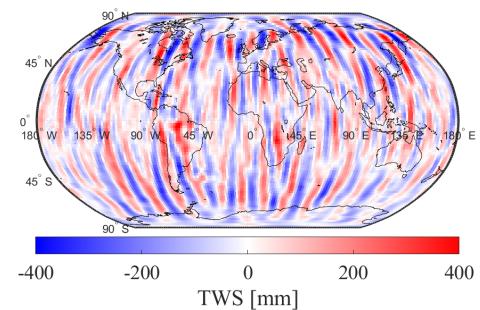


Abb. 294: TWS aus Schwerestörung im Februar 2023

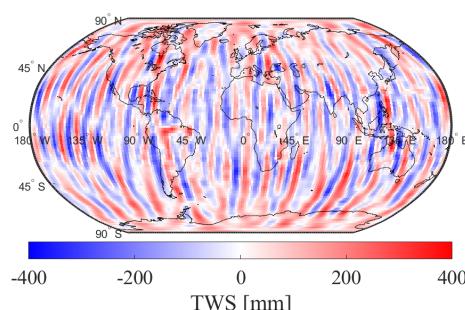


Abb. 295: TWS aus Schwerestörung im März 2023

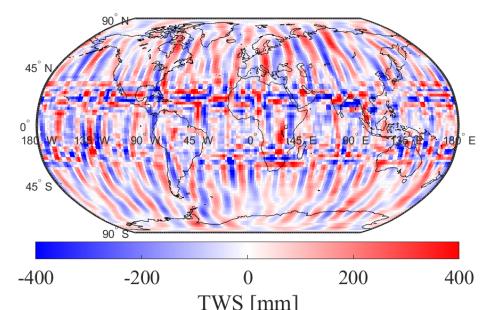


Abb. 296: TWS aus Schwerestörung im April 2023

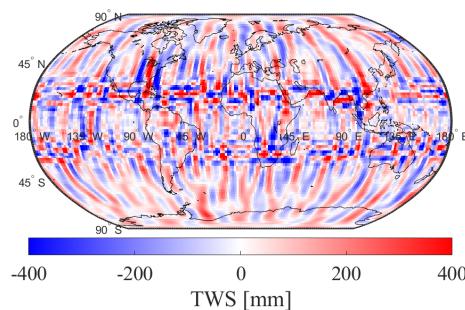


Abb. 297: TWS aus Schwerestörung im Mai 2023

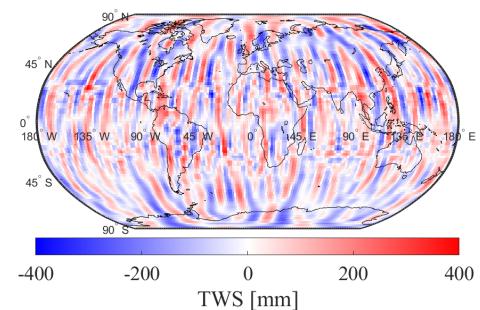


Abb. 298: TWS aus Schwerestörung im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

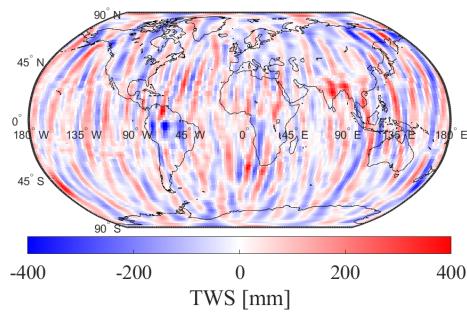


Abb. 299: TWS aus Schwerestörung im Juli 2023

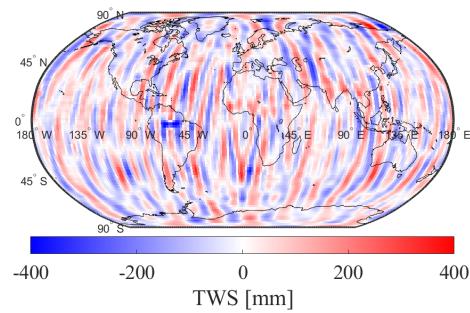


Abb. 300: TWS aus Schwerestörung im August 2023

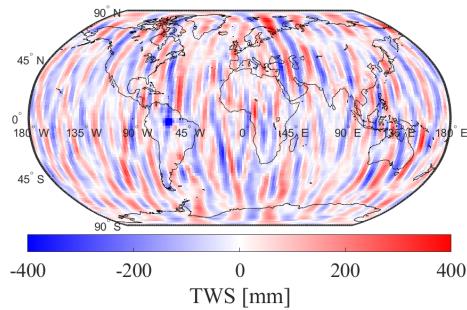


Abb. 301: TWS aus Schwerestörung im September 2023

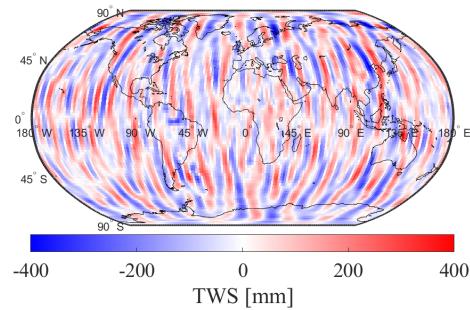


Abb. 302: TWS aus Schwerestörung im Oktober 2023

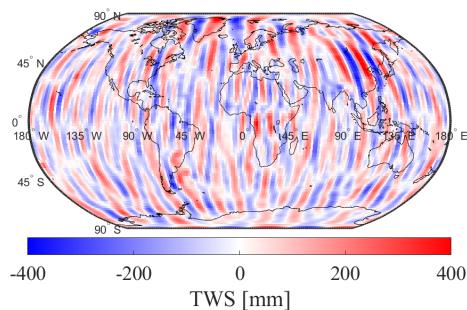


Abb. 303: TWS aus Schwerestörung im November 2023

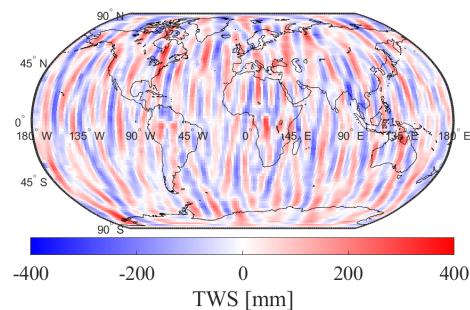


Abb. 304: TWS aus Schwerestörung im Dezember 2023

C.11 Graphiken der Schwereanomalie aus dem inversen Tesseroidansatz

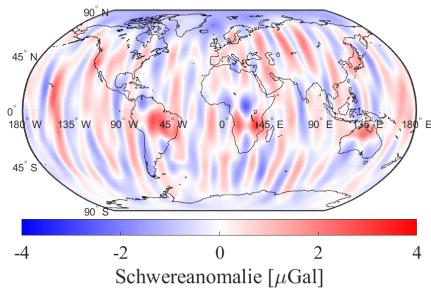


Abb. 305: Schwereanomalie aus Synthese im Januar 2023

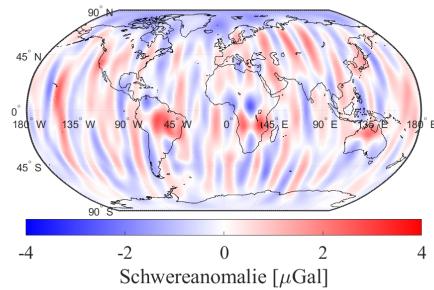


Abb. 306: Schwereanomalie aus Inversion im Januar 2023

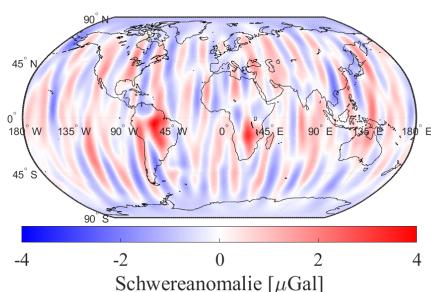


Abb. 307: Schwereanomalie aus Synthese im Februar 2023

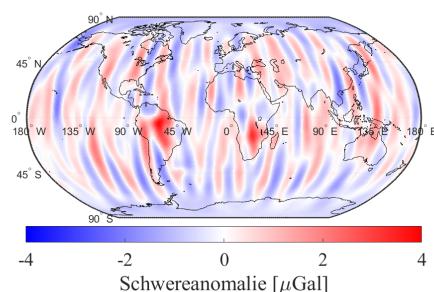


Abb. 308: Schwereanomalie aus Inversion im Februar 2023

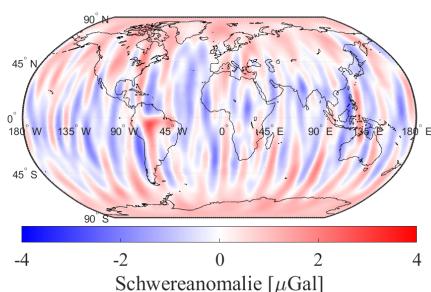


Abb. 309: Schwereanomalie aus Synthese im März 2023

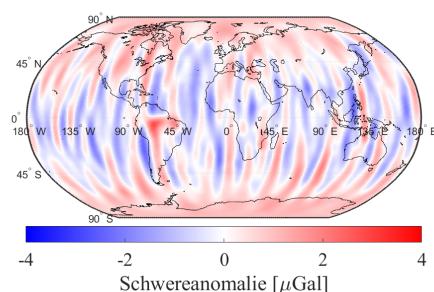


Abb. 310: Schwereanomalie aus Inversion im März 2023

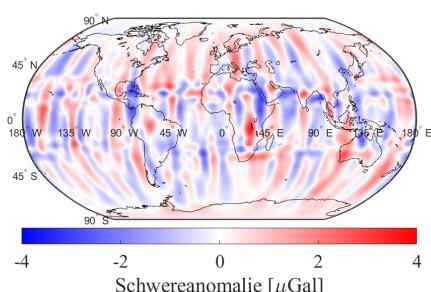


Abb. 311: Schwereanomalie aus Synthese im April 2023

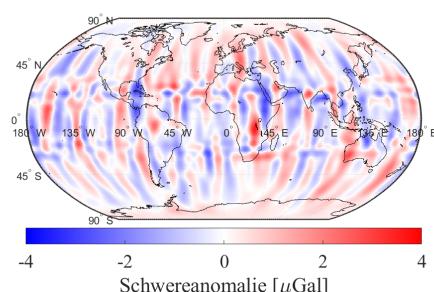


Abb. 312: Schwereanomalie aus Inversion im April 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

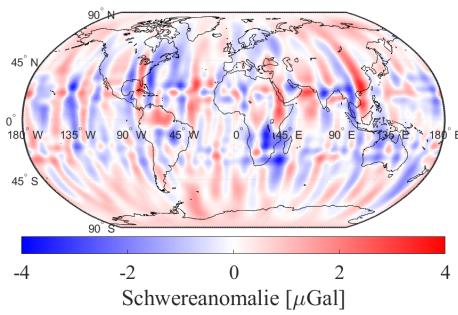


Abb. 313: Schwereanomalie aus Synthese im Mai 2023

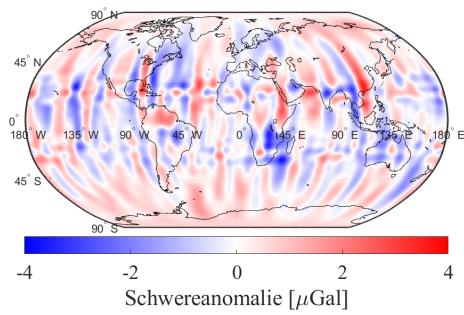


Abb. 314: Schwereanomalie aus Inversion im Mai 2023

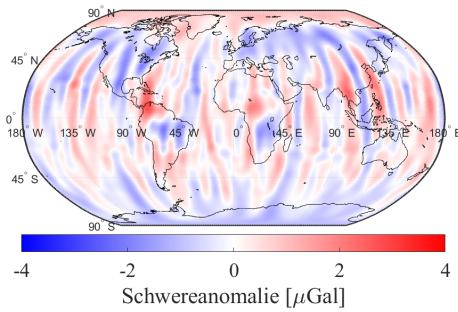


Abb. 315: Schwereanomalie aus Synthese im Juni 2023

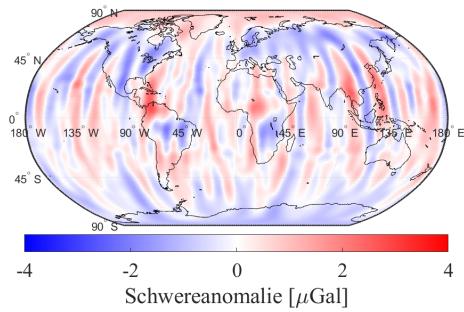


Abb. 316: Schwereanomalie aus Inversion im Juni 2023

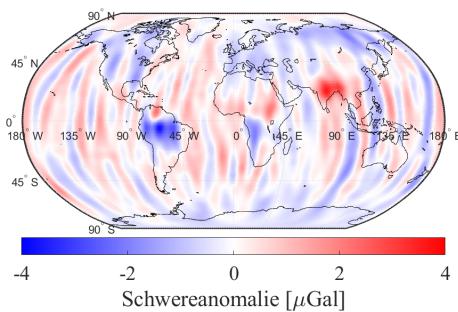


Abb. 317: Schwereanomalie aus Synthese im Juli 2023

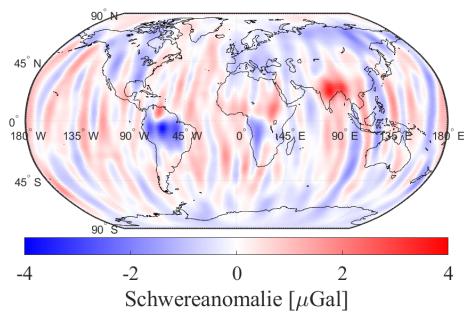


Abb. 318: Schwereanomalie aus Inversion im Juli 2023

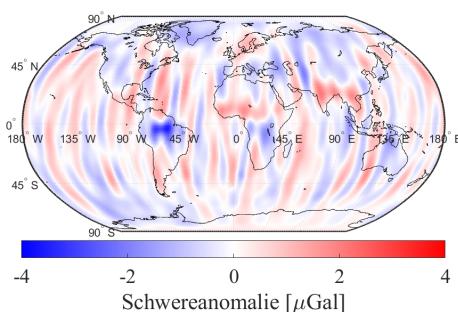


Abb. 319: Schwereanomalie aus Synthese im August 2023

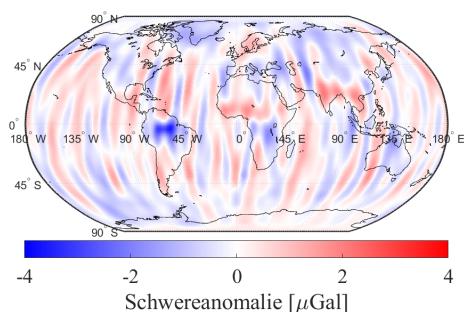


Abb. 320: Schwereanomalie aus Inversion im August 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

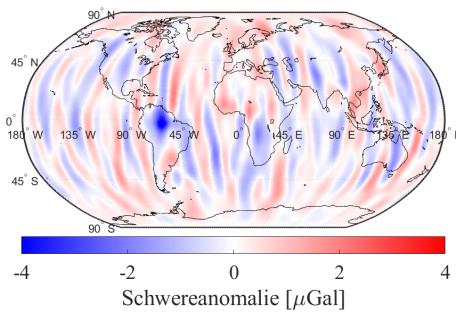


Abb. 321: Schwereanomalie aus Synthese im September 2023

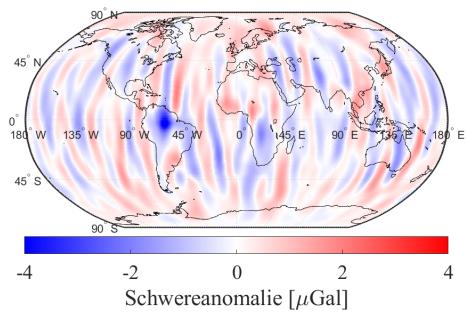


Abb. 322: Schwereanomalie aus Inversion im September 2023

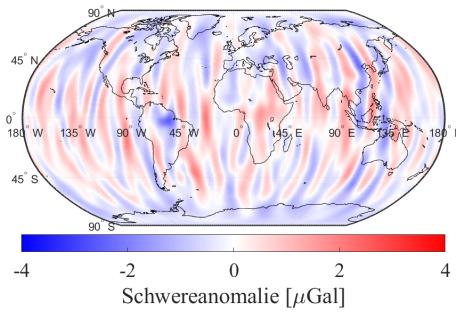


Abb. 323: Schwereanomalie aus Synthese im Oktober 2023

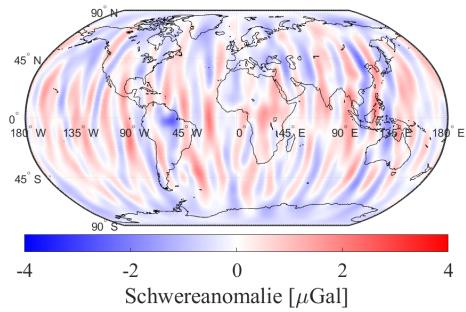


Abb. 324: Schwereanomalie aus Inversion im Oktober 2023

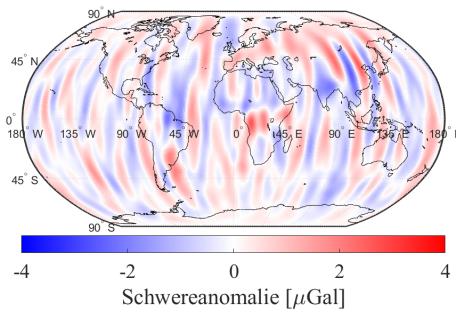


Abb. 325: Schwereanomalie aus Synthese im November 2023

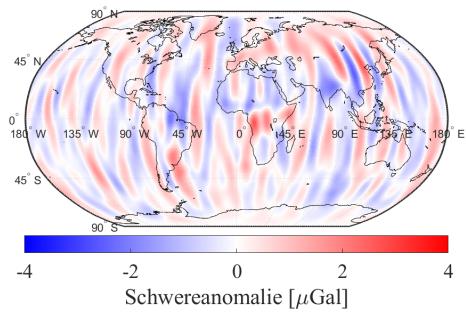


Abb. 326: Schwereanomalie aus Inversion im November 2023

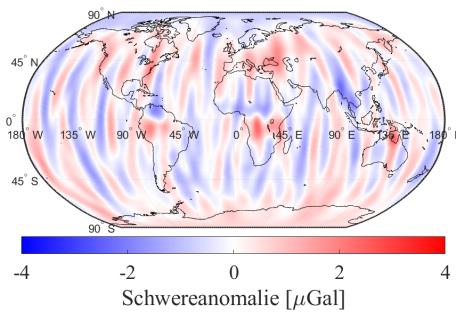


Abb. 327: Schwereanomalie aus Synthese im Dezember 2023

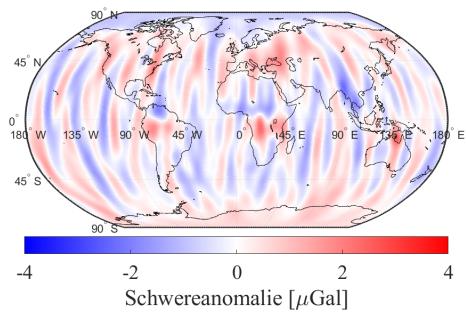


Abb. 328: Schwereanomalie aus Inversion im Dezember 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

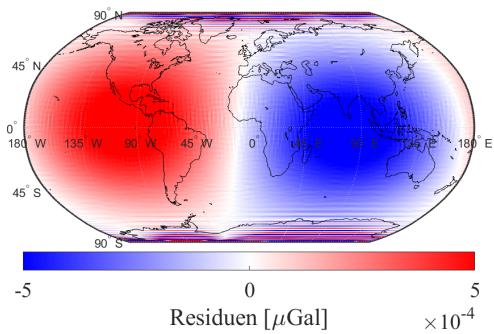


Abb. 329: Residuen der Schwereanomalie im Januar 2023

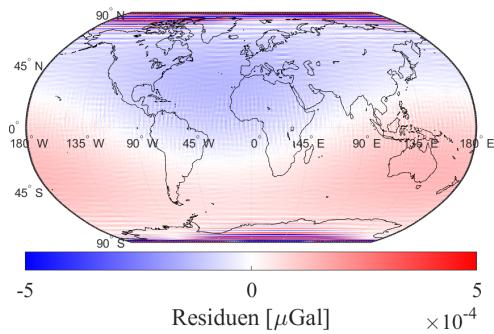


Abb. 330: Residuen der Schwereanomalie im Februar 2023

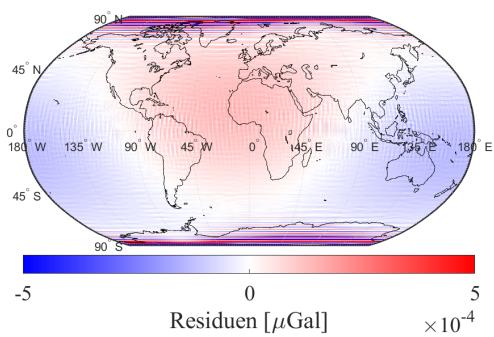


Abb. 331: Residuen der Schwereanomalie im März 2023

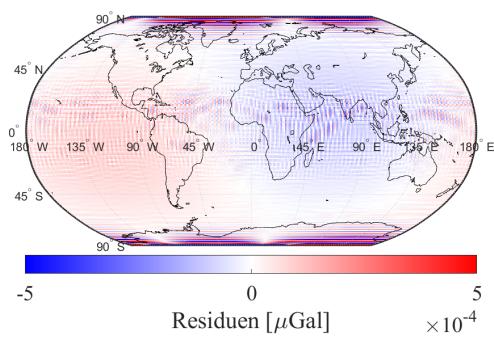


Abb. 332: Residuen der Schwereanomalie im April 2023

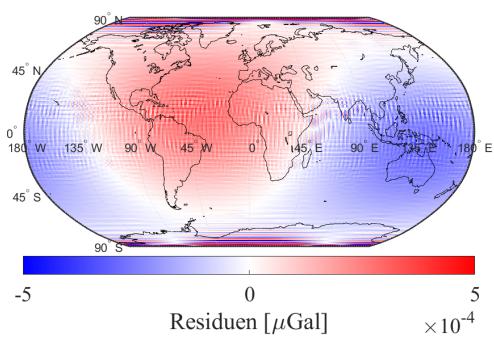


Abb. 333: Residuen der Schwereanomalie im Mai 2023

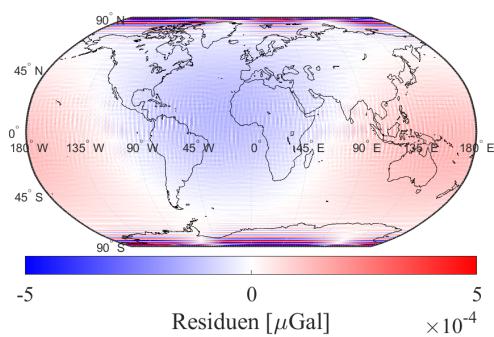


Abb. 334: Residuen der Schwereanomalie im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

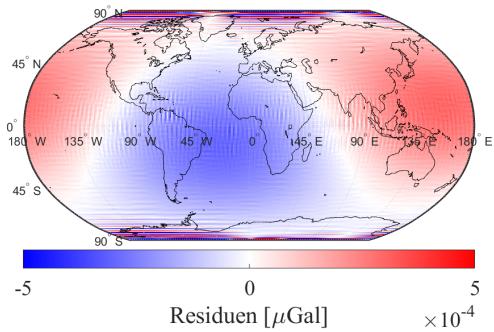


Abb. 335: Residuen der Schwereanomalie im Juli 2023

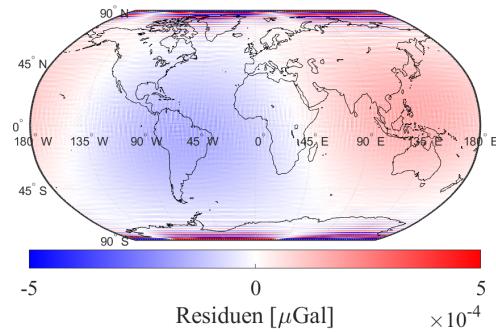


Abb. 336: Residuen der Schwereanomalie im August 2023

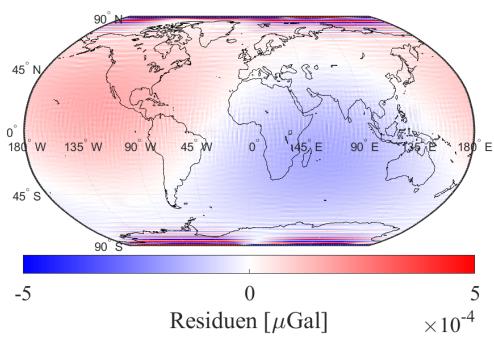


Abb. 337: Residuen der Schwereanomalie im September 2023

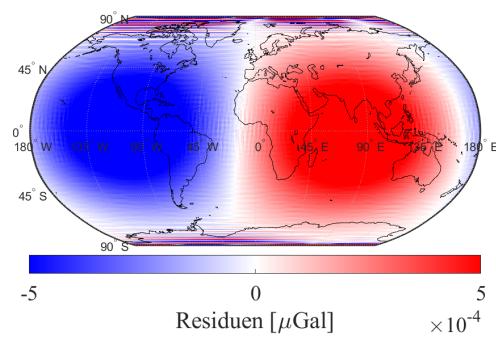


Abb. 338: Residuen der Schwereanomalie im Oktober 2023

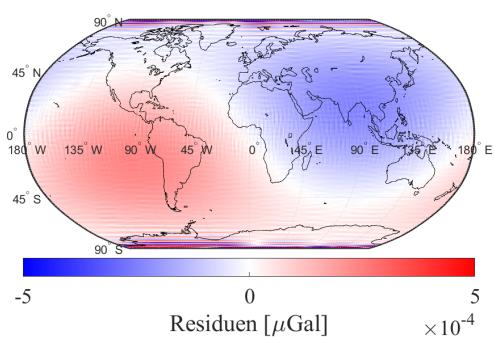


Abb. 339: Residuen der Schwereanomalie im November 2023

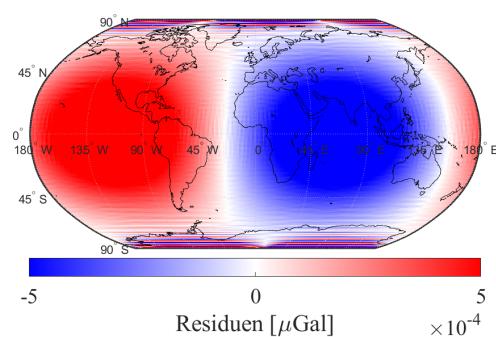


Abb. 340: Residuen der Schwereanomalie im Dezember 2023

C.12 Graphiken TWS aus Schwereanomalie

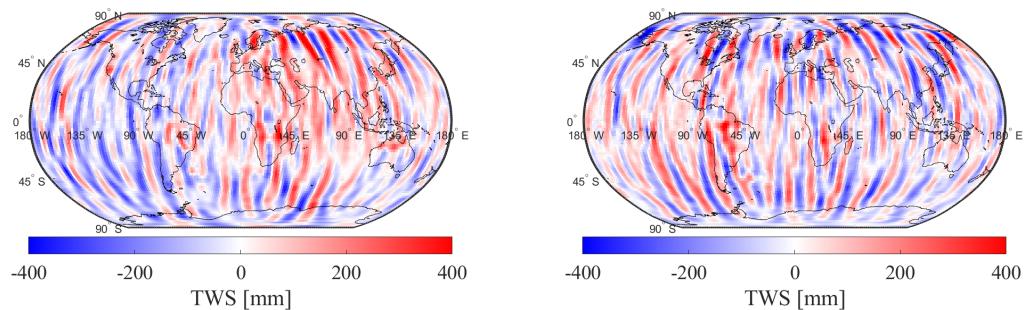


Abb. 341: TWS aus Schwereanomalie im Januar 2023

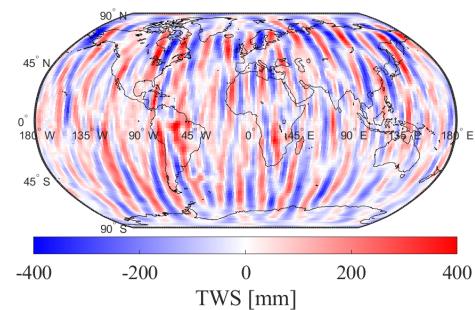


Abb. 342: TWS aus Schwereanomalie im Februar 2023

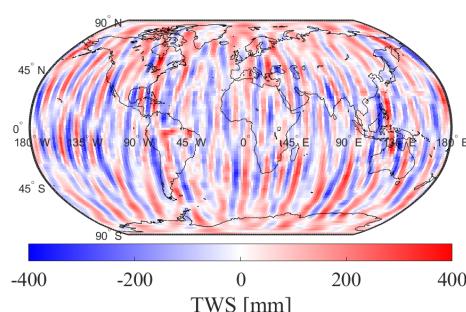


Abb. 343: TWS aus Schwereanomalie im März 2023

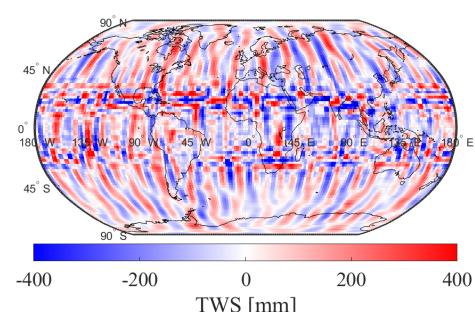


Abb. 344: TWS aus Schwereanomalie im April 2023

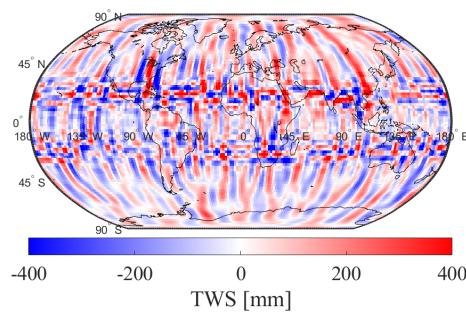


Abb. 345: TWS aus Schwereanomalie im Mai 2023

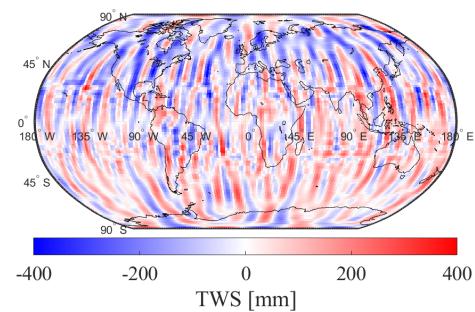


Abb. 346: TWS aus Schwereanomalie im Juni 2023

C GRAPHIKEN DER MONATE IM JAHR 2023

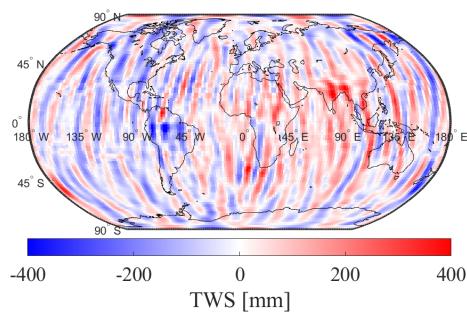


Abb. 347: TWS aus Schwereanomalie im Juli 2023

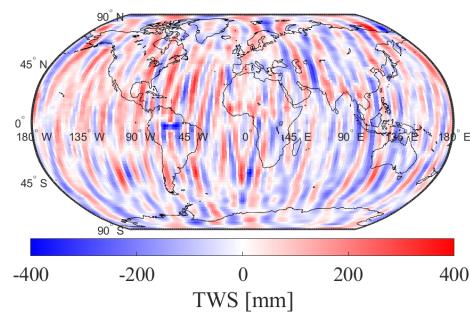


Abb. 348: TWS aus Schwereanomalie im August 2023

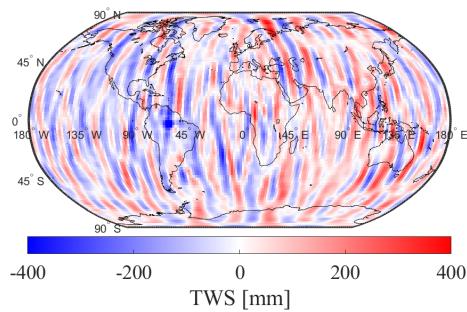


Abb. 349: TWS aus Schwereanomalie im September 2023

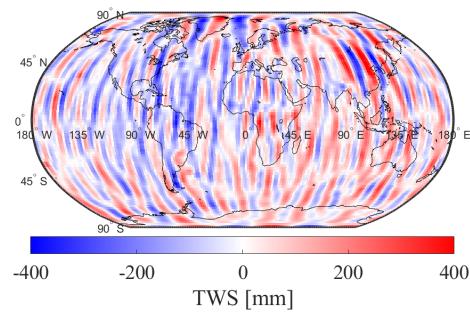


Abb. 350: TWS aus Schwereanomalie im Oktober 2023

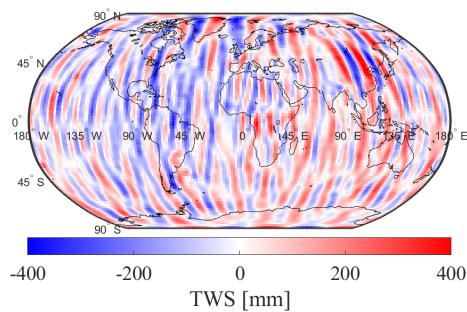


Abb. 351: TWS aus Schwereanomalie im November 2023

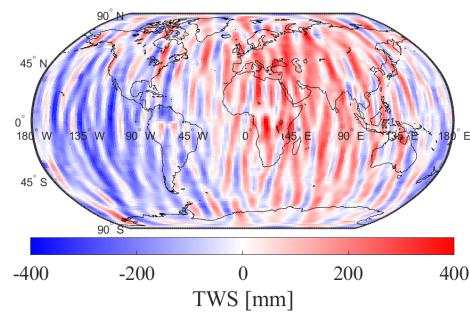


Abb. 352: TWS aus Schwereanomalie im Dezember 2023

List of Figures

1	Sphärisches Poldreieck auf der Einheitskugel nach Torge and Müller (2012)	12
2	Grad- und Fehlergradvarianzen einer einzelnen Monatslösung am Beispiel Januar 2023	16
3	Grad- und Fehlergradvarianzen für Differenzen der Monatslösungen Dezember 2022 und Januar 2023	16
4	Geometrie des Tesseroids nach Heck and Seitz (2007)	21
5	L-Kurve für die Potentialänderung im Januar 2023	25
6	Gravitationspotential Änderung im Januar 2023	31
7	Gravitationspotential Änderung im April 2023	31
8	Gravitationspotential Änderung im Juli 2023	31
9	Gravitationspotential Änderung im Oktober 2023	31
10	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Januar 2023	32
11	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im April 2023	32
12	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juli 2023	32
13	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Oktober 2023	32
14	Änderung der Geoidundulation im Januar 2023	34
15	Änderung der Geoidundulation im April 2023	34
16	Änderung der Geoidundulation im Juli 2023	34
17	Änderung der Geoidundulation im Oktober 2023	34
18	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Januar 2023	35
19	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im April 2023	35
20	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juli 2023	35
21	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Oktober 2023	35
22	Änderung der Schwerestörung im Januar 2023	37
23	Änderung der Schwerestörung im April 2023	37
24	Änderung der Schwerestörung im Juli 2023	37
25	Änderung der Schwerestörung im Oktober 2023	37
26	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Januar 2023	38
27	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im April 2023	38
28	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juli 2023	38
29	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Oktober 2023	38
30	Schwereanomalie im Januar 2023	40
31	Schwereanomalie im April 2023	40
32	Schwereanomalie im Juli 2023	40
33	Schwereanomalie im Oktober 2023	40
34	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Januar 2023	41
35	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im April 2023	41
36	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juli 2023	41
37	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Oktober 2023	41
38	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023	43
39	Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023	43
40	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im April 2023	43
41	Gravitationspotential aus Synthese im Januar 2023	45
42	Gravitationspotential aus Inversion im Januar 2023	45
43	Gravitationspotential aus Synthese im April 2023	45
44	Gravitationspotential aus Inversion im April 2023	45
45	Gravitationspotential aus Synthese im Juli 2023	45
46	Gravitationspotential aus Inversion im Juli 2023	45
47	Gravitationspotential aus Synthese im Oktober 2023	45
48	Gravitationspotential aus Inversion im Oktober 2023	45

LIST OF FIGURES

49	Residuen der Gravitationspotentiale im Januar 2023	46
50	Residuen der Gravitationspotentiale im April 2023	46
51	Residuen der Gravitationspotentiale im Juli 2023	46
52	Residuen der Gravitationspotentiale im Oktober 2023	46
53	TWS aus Gravitationspotential im Januar 2023	48
54	TWS aus Gravitationspotential im April 2023	48
55	TWS aus Gravitationspotential im Juli 2023	48
56	TWS aus Gravitationspotential im Oktober 2023	48
57	Schwerestörung aus Synthese im Januar 2023	49
58	Schwerestörung aus Inversion im Januar 2023	49
59	Schwerestörung aus Synthese im April 2023	49
60	Schwerestörung aus Inversion im April 2023	49
61	Schwerestörung aus Synthese im Juli 2023	49
62	Schwerestörung aus Inversion im Juli 2023	49
63	Schwerestörung aus Synthese im Oktober 2023	49
64	Schwerestörung aus Inversion im Oktober 2023	49
65	Residuen der Schwerestörungen im Januar 2023	51
66	Residuen der Schwerestörungen im April 2023	51
67	Residuen der Schwerestörungen im Juli 2023	51
68	Residuen der Schwerestörungen im Oktober 2023	51
69	TWS aus Schwerestörung im Januar 2023	51
70	TWS aus Schwerestörung im April 2023	51
71	TWS aus Schwerestörung im Juli 2023	51
72	TWS aus Schwerestörung im Oktober 2023	51
73	Schwereanomalie aus Synthese im Januar 2023	52
74	Schwereanomalie aus Inversion im Januar 2023	52
75	Schwereanomalie aus Synthese im April 2023	52
76	Schwereanomalie aus Inversion im April 2023	52
77	Schwereanomalie aus Synthese im Juli 2023	53
78	Schwereanomalie aus Inversion im Juli 2023	53
79	Schwereanomalie aus Synthese im Oktober 2023	53
80	Schwereanomalie aus Inversion im Oktober 2023	53
81	TWS aus Schwereanomalien im Januar 2023	54
82	TWS aus Schwereanomalien im April 2023	54
83	TWS aus Schwereanomalien im Juli 2023	54
84	TWS aus Schwereanomalien im Oktober 2023	54
85	Residuen der Schwereanomalie im Januar 2023	55
86	Residuen der Schwereanomalie im April 2023	55
87	Residuen der Schwereanomalie im Juli 2023	55
88	Residuen der Schwereanomalie im Oktober 2023	55
89	Genauigkeit der Koeffizienten im Januar 2023	78
90	Genauigkeit der Koeffizienten im Februar 2023	78
91	Genauigkeit der Koeffizienten im März 2023	78
92	Genauigkeit der Koeffizienten im April 2023	78
93	Genauigkeit der Koeffizienten im Mai 2023	78
94	Genauigkeit der Koeffizienten im Juni 2023	78
95	Genauigkeit der Koeffizienten im Juli 2023	79
96	Genauigkeit der Koeffizienten im August 2023	79
97	Genauigkeit der Koeffizienten im September 2023	79
98	Genauigkeit der Koeffizienten im Oktober 2023	79
99	Genauigkeit der Koeffizienten im November 2023	79

LIST OF FIGURES

100	Genauigkeit der Koeffizienten im Dezember 2023	79
101	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Januar 2023	80
102	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Februar 2023	80
103	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im März 2023	80
104	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im April 2023	80
105	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Mai 2023	80
106	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Juni 2023	80
107	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Juli 2023	81
108	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im August 2023	81
109	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im September 2023	81
110	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Oktober 2023	81
111	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im November 2023	81
112	Verhältnis der Genauigkeiten der Koeffizienten im Dezember 2023	81
113	Gravitationspotential im Januar 2023	82
114	Gravitationspotential im Februar 2023	82
115	Gravitationspotential im März 2023	82
116	Gravitationspotential im April 2023	82
117	Gravitationspotential im Mai 2023	82
118	Gravitationspotential im Juni 2023	82
119	Gravitationspotential im Juli 2023	83
120	Gravitationspotential im August 2023	83
121	Gravitationspotential im September 2023	83
122	Gravitationspotential im Oktober 2023	83
123	Gravitationspotential im November 2023	83
124	Gravitationspotential im Dezember 2023	83
125	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Januar 2023	84
126	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Februar 2023	84
127	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im März 2023	84
128	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im April 2023	84
129	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Mai 2023	84
130	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juni 2023	84
131	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Juli 2023	85
132	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im August 2023	85
133	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im September 2023	85
134	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Oktober 2023	85
135	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im November 2023	85
136	Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials im Dezember 2023	85
137	Geoidundulation im Januar 2023	86
138	Geoidundulation im Februar 2023	86
139	Geoidundulation im März 2023	86
140	Geoidundulation im April 2023	86
141	Geoidundulation im Mai 2023	86
142	Geoidundulation im Juni 2023	86
143	Geoidundulation im Juli 2023	87
144	Geoidundulation im August 2023	87
145	Geoidundulation im September 2023	87
146	Geoidundulation im Oktober 2023	87
147	Geoidundulation im November 2023	87
148	Geoidundulation im Dezember 2023	87
149	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Januar 2023.	88
150	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Februar 2023.	88

LIST OF FIGURES

151	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im März 2023	88
152	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im April 2023.	88
153	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Mai 2023.	88
154	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juni 2023.	88
155	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Juli 2023.	89
156	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im August 2023.	89
157	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im September 2023.	89
158	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Oktober 2023.	89
159	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im November 2023.	89
160	Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Dezember 2023.	89
161	Schwerestörung im Januar 2023	90
162	Schwerestörung im Februar 2023	90
163	Schwerestörung im März 2023	90
164	Schwerestörung im April 2023	90
165	Schwerestörung im Mai 2023	90
166	Schwerestörung im Juni 2023	90
167	Schwerestörung im Juli 2023	91
168	Schwerestörung im August 2023	91
169	Schwerestörung im September 2023	91
170	Schwerestörung im Oktober 2023	91
171	Schwerestörung im November 2023	91
172	Schwerestörung im Dezember 2023	91
173	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Januar 2023	92
174	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Februar 2023	92
175	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im März 2023	92
176	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im April 2023	92
177	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Mai 2023	92
178	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juni 2023	92
179	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Juli 2023	93
180	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im August 2023	93
181	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im September 2023	93
182	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Oktober 2023	93
183	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im November 2023	93
184	Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Dezember 2023	93
185	Schwereanomalie im Januar 2023	94
186	Schwereanomalie im Februar 2023	94
187	Schwereanomalie im März 2023	94
188	Schwereanomalie im April 2023	94
189	Schwereanomalie im Mai 2023	94
190	Schwereanomalie im Juni 2023	94
191	Schwereanomalie im Juli 2023	95
192	Schwereanomalie im August 2023	95
193	Schwereanomalie im September 2023	95
194	Schwereanomalie im Oktober 2023	95
195	Schwereanomalie im November 2023	95
196	Schwereanomalie im Dezember 2023	95
197	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Januar 2023	96
198	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Februar 2023	96
199	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im März 2023	96
200	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im April 2023	96
201	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Mai 2023	96

LIST OF FIGURES

202	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juni 2023	96
203	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Juli 2023	97
204	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im August 2023	97
205	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im September 2023	97
206	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Oktober 2023	97
207	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im November 2023	97
208	Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Dezember 2023	97
209	Gravitationspotential aus Synthese im Januar 2023	98
210	Gravitationspotential aus Inversion im Januar 2023	98
211	Gravitationspotential aus Synthese im Februar 2023	98
212	Gravitationspotential aus Inversion im Februar 2023	98
213	Gravitationspotential aus Synthese im März 2023	98
214	Gravitationspotential aus Inversion im März 2023	98
215	Gravitationspotential aus Synthese im April 2023	98
216	Gravitationspotential aus Inversion im April 2023	98
217	Gravitationspotential aus Synthese im Mai 2023	99
218	Gravitationspotential aus Inversion im Mai 2023	99
219	Gravitationspotential aus Synthese im Juni 2023	99
220	Gravitationspotential aus Inversion im Juni 2023	99
221	Gravitationspotential aus Synthese im Juli 2023	99
222	Gravitationspotential aus Inversion im Juli 2023	99
223	Gravitationspotential aus Synthese im August 2023	99
224	Gravitationspotential aus Inversion im August 2023	99
225	Gravitationspotential aus Synthese im September 2023	100
226	Gravitationspotential aus Inversion im September 2023	100
227	Gravitationspotential aus Synthese im Oktober 2023	100
228	Gravitationspotential aus Inversion im Oktober 2023	100
229	Gravitationspotential aus Synthese im November 2023	100
230	Gravitationspotential aus Inversion im November 2023	100
231	Gravitationspotential aus Synthese im Dezember 2023	100
232	Gravitationspotential aus Inversion im Dezember 2023	100
233	Residuen des Gravitationspotentials im Januar 2023	101
234	Residuen des Gravitationspotentials im Februar 2023	101
235	Residuen des Gravitationspotentials im März 2023	101
236	Residuen des Gravitationspotentials im April 2023	101
237	Residuen des Gravitationspotentials im Mai 2023	101
238	Residuen des Gravitationspotentials im Juni 2023	101
239	Residuen des Gravitationspotentials im Juli 2023	102
240	Residuen des Gravitationspotentials im August 2023	102
241	Residuen des Gravitationspotentials im September 2023	102
242	Residuen des Gravitationspotentials im Oktober 2023	102
243	Residuen des Gravitationspotentials im November 2023	102
244	Residuen des Gravitationspotentials im Dezember 2023	102
245	TWS aus Gravitationspotential im Januar 2023	103
246	TWS aus Gravitationspotential im Februar 2023	103
247	TWS aus Gravitationspotential im März 2023	103
248	TWS aus Gravitationspotential im April 2023	103
249	TWS aus Gravitationspotential im Mai 2023	103
250	TWS aus Gravitationspotential im Juni 2023	103
251	TWS aus Gravitationspotential im Juli 2023	104
252	TWS aus Gravitationspotential im August 2023	104

LIST OF FIGURES

253	TWS aus Gravitationspotential im September 2023	104
254	TWS aus Gravitationspotential im Oktober 2023	104
255	TWS aus Gravitationspotential im November 2023	104
256	TWS aus Gravitationspotential im Dezember 2023	104
257	Schwerestörung aus Synthese im Januar 2023	105
258	Schwerestörung aus Inversion im Januar 2023	105
259	Schwerestörung aus Synthese im Februar 2023	105
260	Schwerestörung aus Inversion im Februar 2023	105
261	Schwerestörung aus Synthese im März 2023	105
262	Schwerestörung aus Inversion im März 2023	105
263	Schwerestörung aus Synthese im April 2023	105
264	Schwerestörung aus Inversion im April 2023	105
265	Schwerestörung aus Synthese im Mai 2023	106
266	Schwerestörung aus Inversion im Mai 2023	106
267	Schwerestörung aus Synthese im Juni 2023	106
268	Schwerestörung aus Inversion im Juni 2023	106
269	Schwerestörung aus Synthese im Juli 2023	106
270	Schwerestörung aus Inversion im Juli 2023	106
271	Schwerestörung aus Synthese im August 2023	106
272	Schwerestörung aus Inversion im August 2023	106
273	Schwerestörung aus Synthese im September 2023	107
274	Schwerestörung aus Inversion im September 2023	107
275	Schwerestörung aus Synthese im Oktober 2023	107
276	Schwerestörung aus Inversion im Oktober 2023	107
277	Schwerestörung aus Synthese im November 2023	107
278	Schwerestörung aus Inversion im November 2023	107
279	Schwerestörung aus Synthese im Dezember 2023	107
280	Schwerestörung aus Inversion im Dezember 2023	107
281	Residuen der Schwerestörungen im Januar 2023	108
282	Residuen der Schwerestörungen im Februar 2023	108
283	Residuen der Schwerestörungen im März 2023	108
284	Residuen der Schwerestörungen im April 2023	108
285	Residuen der Schwerestörungen im Mai 2023	108
286	Residuen der Schwerestörungen im Juni 2023	108
287	Residuen der Schwerestörungen im Juli 2023	109
288	Residuen der Schwerestörungen im August 2023	109
289	Residuen der Schwerestörungen im September 2023	109
290	Residuen der Schwerestörungen im Oktober 2023	109
291	Residuen der Schwerestörungen im November 2023	109
292	Residuen der Schwerestörungen im Dezember 2023	109
293	TWS aus Schwerestörung im Januar 2023	110
294	TWS aus Schwerestörung im Februar 2023	110
295	TWS aus Schwerestörung im März 2023	110
296	TWS aus Schwerestörung im April 2023	110
297	TWS aus Schwerestörung im Mai 2023	110
298	TWS aus Schwerestörung im Juni 2023	110
299	TWS aus Schwerestörung im Juli 2023	111
300	TWS aus Schwerestörung im August 2023	111
301	TWS aus Schwerestörung im September 2023	111
302	TWS aus Schwerestörung im Oktober 2023	111
303	TWS aus Schwerestörung im November 2023	111

304	TWS aus Schwerestörung im Dezember 2023	111
305	Schwereanomalie aus Synthese im Januar 2023	112
306	Schwereanomalie aus Inversion im Januar 2023	112
307	Schwereanomalie aus Synthese im Februar 2023	112
308	Schwereanomalie aus Inversion im Februar 2023	112
309	Schwereanomalie aus Synthese im März 2023	112
310	Schwereanomalie aus Inversion im März 2023	112
311	Schwereanomalie aus Synthese im April 2023	112
312	Schwereanomalie aus Inversion im April 2023	112
313	Schwereanomalie aus Synthese im Mai 2023	113
314	Schwereanomalie aus Inversion im Mai 2023	113
315	Schwereanomalie aus Synthese im Juni 2023	113
316	Schwereanomalie aus Inversion im Juni 2023	113
317	Schwereanomalie aus Synthese im Juli 2023	113
318	Schwereanomalie aus Inversion im Juli 2023	113
319	Schwereanomalie aus Synthese im August 2023	113
320	Schwereanomalie aus Inversion im August 2023	113
321	Schwereanomalie aus Synthese im September 2023	114
322	Schwereanomalie aus Inversion im September 2023	114
323	Schwereanomalie aus Synthese im Oktober 2023	114
324	Schwereanomalie aus Inversion im Oktober 2023	114
325	Schwereanomalie aus Synthese im November 2023	114
326	Schwereanomalie aus Inversion im November 2023	114
327	Schwereanomalie aus Synthese im Dezember 2023	114
328	Schwereanomalie aus Inversion im Dezember 2023	114
329	Residuen der Schwereanomalie im Januar 2023	115
330	Residuen der Schwereanomalie im Februar 2023	115
331	Residuen der Schwereanomalie im März 2023	115
332	Residuen der Schwereanomalie im April 2023	115
333	Residuen der Schwereanomalie im Mai 2023	115
334	Residuen der Schwereanomalie im Juni 2023	115
335	Residuen der Schwereanomalie im Juli 2023	116
336	Residuen der Schwereanomalie im August 2023	116
337	Residuen der Schwereanomalie im September 2023	116
338	Residuen der Schwereanomalie im Oktober 2023	116
339	Residuen der Schwereanomalie im November 2023	116
340	Residuen der Schwereanomalie im Dezember 2023	116
341	TWS aus Schwereanomalie im Januar 2023	117
342	TWS aus Schwereanomalie im Februar 2023	117
343	TWS aus Schwereanomalie im März 2023	117
344	TWS aus Schwereanomalie im April 2023	117
345	TWS aus Schwereanomalie im Mai 2023	117
346	TWS aus Schwereanomalie im Juni 2023	117
347	TWS aus Schwereanomalie im Juli 2023	118
348	TWS aus Schwereanomalie im August 2023	118
349	TWS aus Schwereanomalie im September 2023	118
350	TWS aus Schwereanomalie im Oktober 2023	118
351	TWS aus Schwereanomalie im November 2023	118
352	TWS aus Schwereanomalie im Dezember 2023	118

List of Tables

1	Statistik des Gravitationspotentials für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	33
2	Statistik der Varianzfortpflanzung des Gravitationspotentials für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	34
3	Statistik der Geoidundulation für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: mm.	35
4	Statistik der Varianzfortpflanzung der Geoidundulation der ausgewählten Monate im Jahr 2023. Einheit: mm.	36
5	Statistik der Schwerestörung für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	38
6	Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	39
7	Statistik der Schwereanomalie für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	41
8	Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	42
9	Statistiken des Gravitationspotentials aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	47
10	Statistiken der Schwerestörung aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	50
11	Statistiken der Schwereanomalie aus Synthese und Inversion für ausgewählte Monate im Jahr 2023. Einheit: μGal	53
12	Statistische Kenngrößen der TWS-Werte für verschiedene Ausgangs-Funktionale im Vergleich. Einheit: mm.	56
13	Residuen ausgewählter Monate im Jahr 2023 nach der Ausgleichung. Gravitationspotential in $10^{-7}\text{m}^2/\text{s}^2$, Schwerestörung und Schwereanomalie in $10^{-3}\mu\text{Gal}$	58
14	Statistik der Änderung im Gravitationspotential im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	69
15	Statistik der Varianzfortpflanzung der Änderung im Gravitationspotential im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	69
16	Statistik der Geoidundulation im Jahr 2023. Einheit: mm.	70
17	Statistik der Varianzfortpflanzung der Geoidundulation im Jahr 2023. Einheit: mm.	70
18	Statistik der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: μGal	71
19	Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: μGal	71
20	Statistik der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: μGal	72
21	Statistik der Varianzfortpflanzung der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: μGal	72
22	Statistiken des Gravitationspotentials aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: m^2/s^2	73
23	Statistik des TWS aus dem Gravitationspotential im Jahr 2023. Einheit: mm.	73
24	Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen des Gravitationspotentials im Jahr 2023. Einheit: $10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}^2$	74
25	Statistiken der Schwerestörung aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: μGal	74
26	Statistik des TWS aus der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: mm.	75
27	Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen der Schwerestörung im Jahr 2023. Einheit: $10^{-3}\mu\text{Gal}$	75
28	Statistiken der Schwereanomalie aus Synthese und Inversion im Jahr 2023. Einheit: μGal	76
29	Statistik des TWS aus der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: mm.	76

LIST OF TABLES

30	Residuen der ausgeglichenen Beobachtungen der Schwereanomalie im Jahr 2023. Einheit: $10^{-3} \mu\text{Gal}$.	77
----	---	----

Acronyms

DDK Dekorrelationsfilter. 8

DLR Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt. 26

GFZ Helmholtz-Zentrum Potsdam – Deutsches GeoForschungsZentrum. 8

GLDAS Global Land Data Assimilation System. 60

GRACE Gravity Recovery and Climate Experiment. 8

GRACE-FO Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On. 8

ICGEM International Centre for Global Earth Models. 8

JPL Jet Propulsion Laboratory. 8

LRI Laser Ranging Interferometer. 26

NASA National Aeronautics and Space Administration. 8

RL Release. 26

RMS Root Means Square. 32

TWS Terrestrial Water Storage. 8

KIT Scientific Working Papers

ISSN 2194-1629

www.kit.edu