

Effizienz der Lax-Wendroff-Korrektur bei der akustischen Finiten-Differenzen Modellierung seismischer Wellen

Bachelorarbeit
von

Florian Wittkamp

An der Fakultät für Physik
Geophysikalisches Institut (GPI)

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bohlen
Betreuer Mitarbeiter: Dr. André Kurzmann

Bearbeitungszeit: 1. Mai 2014 – 30. Juli 2014

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, 30. Juli 2014

.....
(Florian Wittkamp)

Inhaltsverzeichnis

0. Abstract	1
1. Einleitung	3
2. Akustische Wellengleichung erster Ordnung	5
3. Finite-Differenzen Approximation	7
4. Konstruktion FD-Schema	11
4.1. FD-Schema 1D	11
4.1.1. Druckparameter p bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$	11
4.1.2. Geschwindigkeitsparameter v bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$	14
4.1.3. Explizites FD-Schema $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$	16
4.1.4. Explizites FD-Schema beliebiger Ordnung	16
4.2. FD-Schema 2D	18
4.2.1. Druckparameter p bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$	18
4.2.2. Geschwindigkeitsparameter v_x und v_y bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$	21
4.2.3. Explizites FD-Schema beliebiger räumlicher Ordnung	22
5. Dispersionsanalyse	23
5.1. 1D	23
5.2. 2D	30
6. Stabilitätsanalyse	39
6.1. 1D	39
6.2. 2D	41
7. Numerische Vergleiche	43
7.1. 1D	43
7.2. 2D	47
8. Zusammenfassung	55
Literaturverzeichnis	57
Anhang	59
A. Taylor-Koeffizienten	59
A.1. Ungerade Ableitungen	59
A.2. Gerade Ableitungen	61

B.	Dispersionsrelationen	62
B.1.	2D $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^6)$	62
B.2.	2D $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^8)$	62
B.3.	2D $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^6)$	62
B.4.	2D $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^8)$	63
C.	MATLAB-Implementierung	64

0. Abstract

Based on the first-order acoustic wave equation in stress-velocity formulation the Lax-Wendroff scheme is used to develop a temporal high-order finite-difference scheme on the staggered grid. Direct discretization of temporal high-order derivations are numerical unstable, however the discretization of spatial ones is stable. With the use of the Lax-Wendroff scheme temporal derivations are rewritten to spatial ones, using the acoustic wave equation. For reasons of simplification in this work only a homogeneous case is addressed. In 1D I present an explicit FD-scheme with arbitrary order in space and time. For the 2D case a temporal fourth-order and spatial high-order FD-scheme is shown. The dispersion relation of the phase velocity is calculated, derived from the boundedness of the dispersion relation the stability condition is analyzed as well. Using analytical solutions as a reference the accuracy of the FD-schemes are investigated by numerical simulations. Comparison of accuracy and computational time are used to determine the efficiency of the presented FD-schemes among each other.

1. Einleitung

Die Erforschung des Erdkörpers durch die Auswertung von künstlich erzeugten elastischen Wellen bildet den Forschungsschwerpunkt der Seismik. Um ein besseres Verständnis der Wellenausbreitung zu erhalten werden numerische Simulationen durchgeführt. Solche Simulationen können einen wichtigen Dienst bei der Auswertung von Wellenfeldern leisten, sowie genutzt werden um Prozessing-Algorithmen zu testen (Dablain, 1986).

Eine Methode, mit der sich die Ausbreitung von Wellenfeldern simulieren lässt, ist das weit verbreitete Zeitschrittverfahren der Finiten-Differenzen. Bei diesem Verfahren werden alle benötigten Parameter und Gleichungen auf einem Gitter abgebildet. Zwangsläufig entstehen durch diese Approximation Ungenauigkeiten in der Berechnung des Wellenfeldes. Diese Ungenauigkeiten lassen sich durch eine feinere Einteilung des Gitters verringern. Allerdings ist es auch mit heutigen Hochleistungsclustern nicht möglich eine beliebig kleine Diskretisierung des Gitters zu wählen. Deshalb müssen andere Anpassungen gefunden werden um eine erhöhte Genauigkeit zu erhalten.

Virieux (1986) entwickelte ein geschachteltes Gitter ('staggered-grid'), bei dem die Druck- und Partikelgeschwindigkeits-Wellenfelder räumlich wie zeitlich auf verschiedenen Gitterpunkten diskretisiert wird. Die Wellengleichung kann so stets zwischen zwei Stützstellen ausgewertet werden. Dieses Verfahren bietet einige Vorteile, wie beispielsweise numerische Stabilität für sämtliche Poisson-Verhältnisse (Levander, 1988). Die Wellengleichungen wurden von Virieux (1986) bis zur zweiten Ordnung zeitlich und räumlich entwickelt. Levander (1988) führte zur weiteren Verbesserung eine Entwicklung bis zur vierten Ordnung räumlich durch. Wie Dablain (1986) auf einem nicht geschachtelten Gitter zeigte, lassen sich durch eine Erhöhung der zeitlichen Ordnung weitere Verbesserungen der Genauigkeit bzw. eine Reduzierung der Rechenzeit bewirken.

Das Ziel dieser Arbeit ist eine Entwicklung höherer zeitlicher Ordnungen der akustischen Wellengleichung auf dem geschachtelten Gitter. Grundlage soll dabei das Lax-Wendroff-Verfahren, welches in Dablain (1986) gezeigt wurde, bilden. Abschließend soll das Dispersionsverhalten und die numerische Stabilität untersucht werden,

sowie eine Aussage über das Rechenzeit-Genauigkeits-Verhältnis getroffen werden.

Diese Arbeit gliedert sich in 8 Kapitel. Nach der Einleitung wird in Kapitel 2 die akustische Wellengleichung erster Ordnung vorgestellt. Das Zeitschrittverfahren der Finiten-Differenzen und die dafür benötigten Approximationen werden in Kapitel 3 behandelt. In Kapitel 4 wird in 1D und in 2D ein explizites Finite-Differenzen-Schema höherer zeitlicher Ordnung unter Verwendung des Lax-Wendroff-Verfahrens berechnet. Die so gefundenen Schemata werden in Kapitel 5 auf Dispersion und in Kapitel 6 auf Stabilität hin untersucht. In Kapitel 7 werden durch numerische Simulationen Vergleiche zwischen den Finiten-Differenzen-Schemata durchgeführt um eine Aussage über die Genauigkeit und die benötigte Rechenzeit zu treffen. Abschließend werden in Kapitel 8 die Resultate zusammengefasst.

2. Akustische Wellengleichung erster Ordnung

Um die akustische Wellengleichung mit der Methode der Finiten-Differenzen auf dem geschachtelten Gitter zu lösen, wird die Wellengleichung erster Ordnung benötigt. Die Druck-Geschwindigkeits-Formulierung ('stress-velocity') der akustischen Wellengleichung in 2D ergibt sich nach Virieux (1986) wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_x = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x} p, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_y = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} p, \quad (2.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -M \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y \right). \quad (2.1c)$$

Dabei bezeichnet v_x und v_y die jeweiligen Komponenten der Geschwindigkeit, p den Druck, ϱ die Dichte und $M = (\lambda + 2\mu)$ die Lamé-Parameter. Für den akustischen Fall lässt sich M zu $M = \lambda$ vereinfachen, da eine Scherung nicht berücksichtigt wird. Die Wellengleichung für den 1D-Fall lässt sich durch Vereinfachung des 2D-Falles gewinnen und ergibt sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial t} v = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x} p, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p = -M \frac{\partial}{\partial x} v. \quad (2.2b)$$

Für die Geschwindigkeit der akustischen Welle gilt der Zusammenhang (Levander, 1988):

$$v = \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}}. \quad (2.3)$$

3. Finite-Differenzen Approximation

Das Zeitschrittverfahren der Finiten-Differenzen (FD) dient zur numerischen Lösung der Wellengleichung. Bedingt durch die numerische Rechnung, müssen dabei alle benötigten Parameter und Gleichungen auf einem Gitter von diskreten Punkten abgebildet werden.

Eine solche Diskretisierung soll nun am Beispiel einer Funktion $f(y, x, t)$ verdeutlicht werden. Das Gitter wird so gewählt, dass sich die Gitterpunkte räumlich im Abstand von Δx bzw. Δy befinden. Zeitlich soll der Abstand Δt betragen. Führt man nun die Indizes j, i für den Raum und n für die Zeit ein, ergeben sich die Raumparameter zu $x = j \cdot \Delta x$, $y = i \cdot \Delta y$ bzw. die Zeit zu $t = n \cdot \Delta t$. Die Funktion f lässt sich nun wie folgt darstellen:

$$f(y, x, t) = f(i \cdot \Delta y, j \cdot \Delta x, n \cdot \Delta t) = f_{i,j}^n.$$

In dieser Arbeit wird ein geschachteltes Gitter ("staggered-grid") verwendet (Vierieux, 1986; Levander, 1988). Auf einem solchen Gitter wird der Druck p räumlich auf ganzen Gitterpunkten und zeitlich zwischen zwei Zeitschritten definiert, wohingegen die Geschwindigkeit v auf halben räumlichen Gitterpunkten und zeitlich auf ganzen Zeitschritten approximiert wird. Des weiteren wird die Partikelgeschwindigkeit in 2D in zwei Komponenten v_x und v_y zerlegt. Nach Levander (1988) bietet das geschachtelte Gitter einige Vorteile, wie beispielsweise Stabilität für sämtliche Poisson-Verhältnisse. Darüber hinaus weist das geschachtelte Gitter gegenüber dem nicht geschachtelten Gitter eine erhöhte Genauigkeit bzw. größere Stabilität auf (Liu und Sen, 2009).

Die Dichte ϱ und die Lamé-Parameter λ bzw. μ werden auf ganzen Gitterpunkten abgebildet. Benötigte Materialparameter auf Zwischengitterpunkten werden durch Mittelung errechnet. Nach Bohlen und Saenger (2006) ist eine Mittelung wesentlich für die Stabilität bei starken Diskontinuitäten.

In Abbildung 3.1 ist das FD-Gitter für den 1D-Fall skizziert. Dabei wird in die vertikale Richtung die Zeit und in die horizontale Richtung die räumliche Komponente aufgetragen. Für den 2D-Fall ist das zugrundeliegende Gitter für einen Zeitschritt in Abbildung 3.2 dargestellt.

Um die bei den Wellengleichungen auftretenden Ableitungen zu approximieren, werden diese durch Differenzengleichungen ersetzt. Bei dem geschachtelten Gitter werden Ableitungen mittels zentraler Differenzengleichung genähert, dies bedeutet die Ableitung wird zwischen zwei Stützstellen ausgewertet. Eine solche Approximation in 1D lässt sich räumlich beziehungsweise zeitlich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x) \approx \frac{u(x + \frac{1}{2}\Delta x) - u(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) \approx \frac{u(t + \frac{1}{2}\Delta t) - u(t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.2)$$

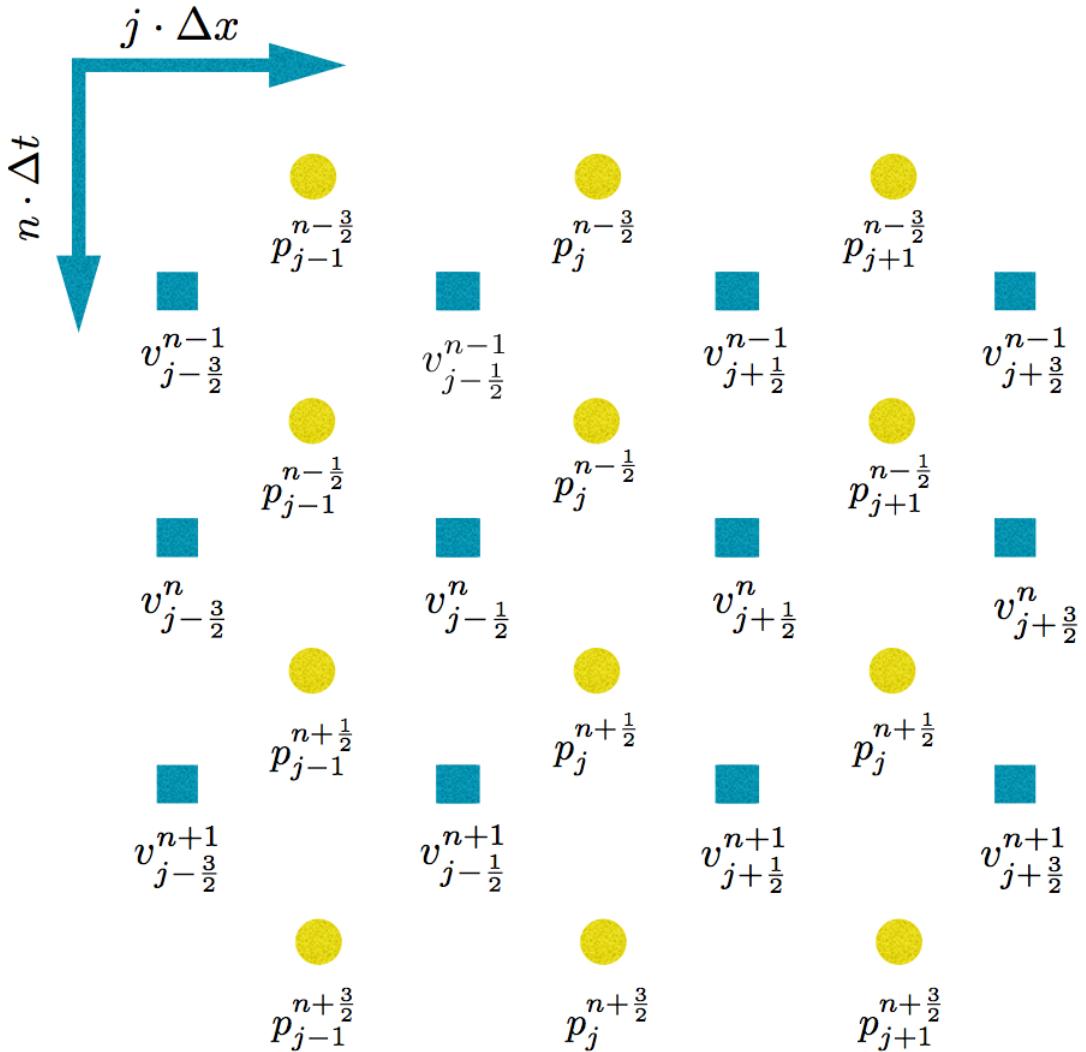


Abbildung 3.1.: FD-Gitter für den 1D Fall. Es wird das räumliche Gitter über die Zeit gezeigt. Die Materialparameter sind Deckungsgleich zu dem Druckfeld auf ganzen räumlichen Gitterpunkten definiert.

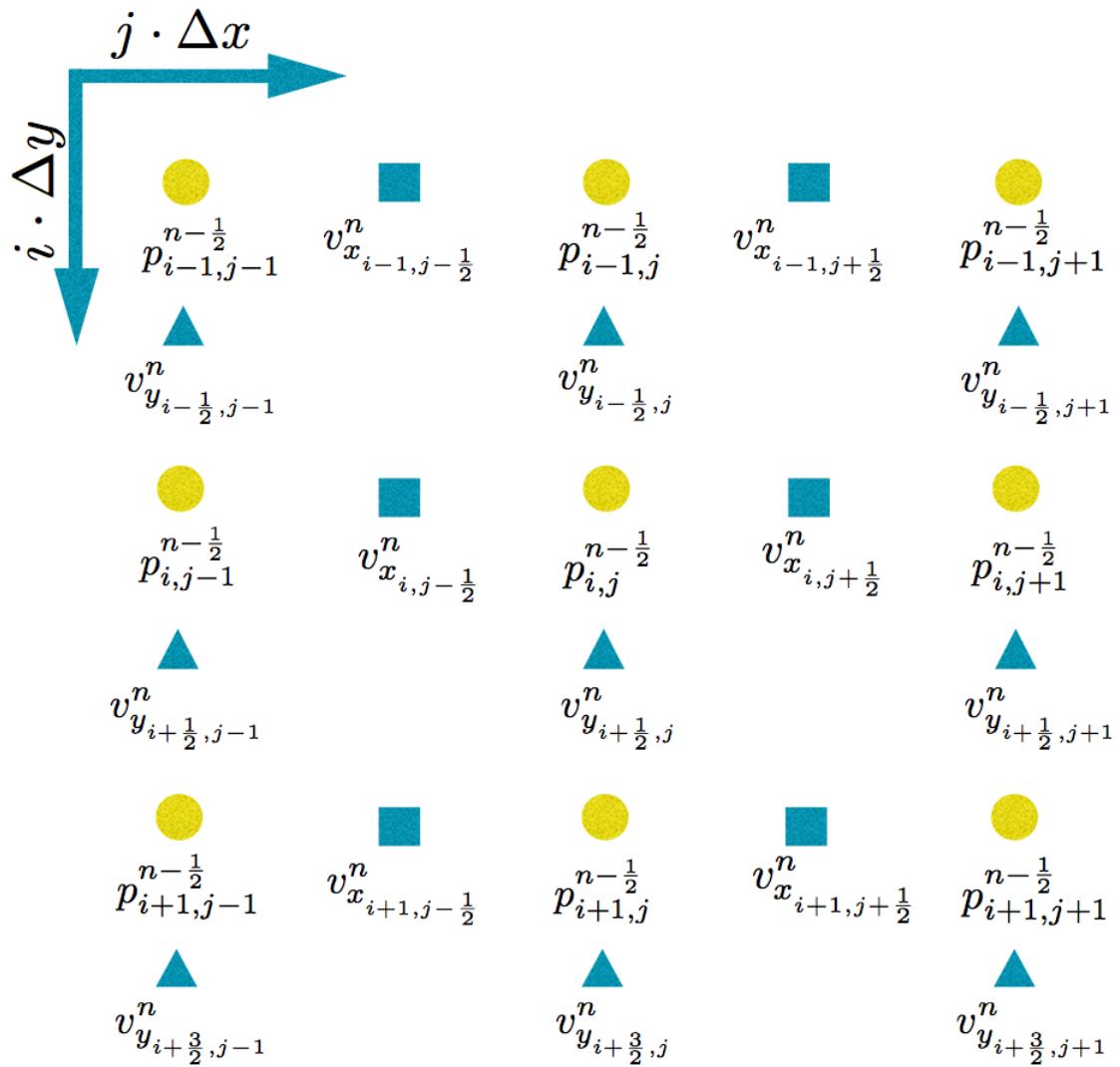


Abbildung 3.2.: FD-Gitter für den 2D-Fall. Hier wird das Gitter gezeigt, wie es nach einem Zeitschritt vorliegt. Die Materialparameter sind Deckungsgleich zu dem Druckfeld auf ganzen räumlichen Gitterpunkten definiert.

4. Konstruktion FD-Schema

Im Folgenden wird in 1D und nachfolgend in 2D ein explizites Finite-Differenzen-Schema (FD-Schema) berechnet, dabei werden höhere Ordnungen der zeitlichen Ableitungen angestrebt. Durch Verwendung solcher genaueren zeitlichen Ableitungen ergeben sich Rechenzeitgewinne bzw. Genauigkeitsgewinne (Dablain, 1986).

Nach Chen (2011) ist eine direkte Diskretisierung der zeitlichen Ableitung höherer Ordnung instabil. Daher müssen andere Methoden verwendet werden. In dieser Arbeit soll das Lax-Wendroff-Verfahren Verwendung finden. Dabei werden, wie in Dablain (1986) beschrieben, Zeitableitungen unter Verwendung der Wellengleichung durch räumliche Ableitungen ausgedrückt.

Zur Vereinfachung wird bei den folgenden Berechnungen stets von einem homogenen Modell ausgegangen. Dies bedeutet, dass räumliche Ableitungen nach Materialparametern verschwinden. Diese Vereinfachung verursacht bei heterogenen Modellen jeweils bei den Schichtgrenzen Ungenauigkeiten. Dablain (1986) legt nahe, dass das Wellenfeld nicht empfindlich für diese Näherung ist, allerdings sind hier weitere Untersuchungen nötig.

Zur besseren Lesbarkeit werden die Ordnungen der jeweiligen Entwicklungen verkürzt dargestellt. So bedeutet beispielsweise $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4) = \mathcal{O}(2, 4)$, das bis zur zweiten Ordnung zeitlich und bis zur vierten Ordnung räumlich entwickelt wurde.

4.1. FD-Schema 1D

Nun soll ein explizites Finite-Differenzen-Schema für den 1D-Fall gefunden werden. Dazu wird die Wellengleichung 2.2 verwendet. Zuerst wird eine Genauigkeit von $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ angestrebt, indem der Druckparameter gefolgt von dem Geschwindigkeitsparameter untersucht wird. Im Anschluss wird das explizite FD-Schema dargestellt. Abschließend lässt sich durch Verallgemeinerung des Verfahrens ein explizites FD-Schema beliebiger zeitlicher und räumlicher Ordnung in 1D finden.

4.1.1. Druckparameter p bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Wie in Kapitel 3 dargestellt, wird der Druckparameter räumlich auf ganzen und zeitlich auf halben Gitterpunkten diskretisiert. Daher muss ein Term gefunden werden

mit dem aus dem Druckfeld zum Zeitpunkt $(n - \frac{1}{2})$ auf $p_j^{n+\frac{1}{2}}$ geschlossen werden kann. Um dies zu erreichen wird nun von der linken Seite der Wellengleichung 2.2b die zentrale Differenz gebildet:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_j^{n+\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Diese Gleichung ist von zweiter Ordnung, höhere Ordnungen lassen sich durch Entwicklung der beiden Druckparameter auf der rechten Seite und anschließender Auswertung erreichen (nach Dablain (1986)). Als Entwicklung dient die Taylorreihenentwicklung (Merziger, 2010):

$$f(x) \Big|_a = \sum_{n=0}^N \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(a) \frac{1}{n!} (x - a)^n. \quad (4.2)$$

Die Entwicklung führt auf:

$$p_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^n + \frac{\Delta t}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{\partial}{\partial t} p_j^n + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_j^n + \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_j^n + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} p_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.3)$$

$$p_j^{n-\frac{1}{2}} = p_j^n - \frac{\Delta t}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{\partial}{\partial t} p_j^n + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_j^n - \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_j^n + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} p_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (4.4)$$

Nun wird die Differenz der beiden Entwicklungen gebildet, es bleiben nur zeitliche Ableitungen ungerader Ordnung übrig. Anschließend werden durch sukzessives Einsetzen der akustischen Wellengleichungen (Gl. 2.2b und 2.2a) die Zeitableitungen von p_j^n in räumliche Ableitungen von v_j^n umgeschrieben. Dieses Vorgehen ist analog zu dem in Dablain (1986) vorgestellten Verfahren und bildet den Kern des Lax-Wendroff-Verfahrens.

$$\Rightarrow p_j^{n+\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{\partial}{\partial t} p_j^n + 2 \cdot \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.5)$$

$$= \Delta t \cdot \frac{\partial}{\partial t} p_j^n + \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.6)$$

$$= -M_j \cdot \Delta t \frac{\partial}{\partial x} v_j^n - \frac{M_j \cdot \Delta t^3}{24} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.7)$$

$$= -M_j \cdot \Delta t \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{M_j \cdot \Delta t^3}{24 \cdot \varrho_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} p_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.8)$$

$$= -M_j \cdot \Delta t \frac{\partial}{\partial x} v_j^n - \frac{M_j^2 \cdot \Delta t^3}{24 \cdot \varrho_j} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (4.9)$$

Hierbei wurden die Lamé-Parameter M und die Dichte ϱ als räumlich konstant behandelt. Wie sich weiter zeigt, sind keine zeitlichen Ableitungen mehr nötig, es müssen stattdessen räumliche Ableitungen von v am Punkt (j, n) gefunden werden. Es wird nun die zentrale Differenz von $\frac{\partial}{\partial x} v_j^n$ ausgewertet und folgende Parameter bis

zur vierten Ordnung entwickelt:

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_j^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^n + \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.10)$$

$$v_{j-\frac{1}{2}}^n = v_j^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^n - \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.11)$$

Bildet man die Differenz daraus, bleiben nur ungerade Ableitungen übrig:

$$\implies v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n = 2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + 2 \cdot \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.12)$$

Da sich aus dieser Gleichung, aufgrund der Unterbestimmtheit, die erste und dritte Ableitung von v_j^n nicht bestimmen lassen, werden noch folgende Entwicklungen gerechnet:

$$v_{j+\frac{3}{2}}^n = v_j^n + \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{3^2 \cdot \Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^n + \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \frac{3^4 \cdot \Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.13)$$

$$v_{j-\frac{3}{2}}^n = v_j^n - \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{3^2 \cdot \Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_j^n - \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \frac{3^4 \cdot \Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.14)$$

Wiederum wird die Differenz gebildet:

$$\implies v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n = 2 \cdot \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + 2 \cdot \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.15)$$

Nun liegt ein bestimmtes Gleichungssystem vor. Stellt man jetzt Gleichung 4.15 nach $2 \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n$ um erhält man:

$$2 \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n = \frac{1}{3^3} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n - 2 \cdot \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n \right) \quad (4.16)$$

$$= \frac{1}{27} v_{j+\frac{3}{2}}^n - \frac{1}{27} v_{j-\frac{3}{2}}^n - \frac{1}{9} \cdot 2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n. \quad (4.17)$$

Substituiert man dies in Gleichung 4.12, ergibt sich die erste räumliche Ableitung von v :

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{8}{9} \cdot \Delta t \frac{\partial}{\partial x} v_j^n + \frac{1}{27} v_{j+\frac{3}{2}}^n - \frac{1}{27} v_{j-\frac{3}{2}}^n, \quad (4.18)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial x} v_j^n = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} v_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{9}{8 \cdot \Delta x} v_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \frac{1}{27} v_{j+\frac{3}{2}}^n + \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \frac{1}{27} v_{j-\frac{3}{2}}^n, \quad (4.19)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial x} v_j^n = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \left(v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n \right). \quad (4.20)$$

Stellt man Gleichung 4.15 nach $2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n$ um erhält man:

$$2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_j^n = \frac{1}{3} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n - 2 \cdot \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n \right) \quad (4.21)$$

$$= \frac{1}{3} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n \right) - 3^2 \cdot 2 \cdot \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n. \quad (4.22)$$

Dies lässt sich in Gleichung 4.12 substituieren, so dass sich die dritte räumliche Ableitung von v ergibt:

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{3} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n \right) - \frac{\Delta x^3}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n, \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n = \frac{1}{\Delta x^3} \left(v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n \right) - \frac{3}{\Delta x^3} \left(v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (4.24)$$

Somit sind alle Terme, die in Gleichung 4.9 benötigt wurden um ein explizites Schema für den Druck zu finden, berechnet.

4.1.2. Geschwindigkeitsparameter v bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Um den Geschwindigkeitsparameter zu untersuchen wird die linke Seite der Wellengleichung 2.2a ausgewertet. Dazu lässt sich die zeitliche Ableitung von v als zentrale Differenz darstellen. Da nach dem gleichen Verfahren wie bei dem Druckparameter vorgegangen wird und sich keine neuen Einsichten durch genaue Betrachtung der Berechnung ergeben, werden einige Rechenschritte verkürzt dargestellt. Die zentrale Differenz ergibt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.25)$$

Analog zum Druckparameter wird eine Entwicklung durchgeführt:

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.26)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} = v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (4.27)$$

Nun wird die Differenz daraus gebildet und zeitliche Ableitungen werden mit dem Lax-Wendroff-Verfahren unter Verwendung der Wellengleichung in räumliche Ableitungen nach dem Druck umgeschrieben:

$$\Rightarrow v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.28)$$

$$= \Delta t \frac{\partial}{\partial t} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^3}{24} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.29)$$

$$= -\frac{\Delta t}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^3}{24} \frac{M_{j+\frac{1}{2}}}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (4.30)$$

Hierbei wurden die Materialeigenschaften (Dichte und Lamé-Parameter) wieder als räumlich konstant angenommen. Nun müssen die erste und die dritte räumliche Ableitung des Druckes am Punkt $(n - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$ bestimmt werden. Dazu werden folgende Entwicklungen verwendet:

$$p_j^{n-\frac{1}{2}} = p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.31)$$

$$p_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} = p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.32)$$

Es wird die Differenz daraus gebildet:

$$p_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2 \cdot 1!} + 2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.33)$$

Des weiteren werden folgende Entwicklungen benötigt:

$$p_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} = p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^4 \frac{\Delta x^4}{4!} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \quad (4.34)$$

$$p_{j+2}^{n-\frac{1}{2}} = p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{\Delta x^3}{3!} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^4 \frac{\Delta x^4}{4!} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.35)$$

Und wieder wird die Differenz daraus gebildet:

$$p_{j+2}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right) \frac{\Delta x}{1!} + 2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{\Delta x^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.36)$$

Stellt man Gleichung 4.36 nach der dritten räumlichen Ableitung um und setzt es in Gleichung 4.33 ein ergibt sich die erste räumliche Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \left(p_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24 \Delta x} \left(p_{j+2}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.37)$$

Analog ergibt sich die dritte räumliche Ableitung zu:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^3} \left(p_{j+2}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{\Delta x^3} \left(p_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (4.38)$$

Da auch für Gleichung 4.30 alle benötigten räumlichen Ableitungen bestimmt sind, lässt sich ein explizites Finite-Differenzen-Schema für die akustische Wellengleichung angeben.

4.1.3. Explizites FD-Schema $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Wie in den vorhergehenden beiden Unterpunkten dargestellt wurde folgendes explizite Finite-Differenzen-Schema vierter räumlicher und zeitlicher Ordnung gefunden:

$$p_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^{n-\frac{1}{2}} - M_j \cdot \Delta t \frac{\partial}{\partial x} v_j^n - \frac{M_j^2 \cdot \Delta t^3}{24 \cdot \varrho_j} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.39)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\Delta t}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^3}{24} \frac{M_{j+\frac{1}{2}}}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \quad (4.40)$$

wobei die räumliche Ableitungen mit $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ gegeben sind zu:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_j^n = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} (v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n) - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} (v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n), \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} v_j^n = \frac{1}{\Delta x^3} (v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{3}{2}}^n) - \frac{3}{\Delta x^3} (v_{j+\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n), \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} (p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{24 \Delta x} (p_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}), \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^3} (p_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{3}{\Delta x^3} (p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}}). \quad (4.44)$$

4.1.4. Explizites FD-Schema beliebiger Ordnung

Um ein Finite-Differenzen-Schema für die akustischen Wellengleichungen beliebiger Ordnung zu finden, ist es nötig die Entwicklung des Druckes in Gleichung 4.9 und die Entwicklung der Geschwindigkeit 4.30 in eine Summenschreibweise zu überführen. Es lässt sich einsehen, dass die Entwicklungen gegeben sind als:

$$p_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^{n-\frac{1}{2}} - 2 \sum_{s=0}^S \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M_j^{s+1}}{2^{2s+1} \cdot \varrho_j^s \cdot (2s+1)!} \frac{\partial^{2s+1}}{\partial x^{2s+1}} v_j^n, \quad (4.45)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} - 2 \sum_{s=0}^S \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M_{j+\frac{1}{2}}^s}{2^{2s+1} \cdot \varrho_{j+\frac{1}{2}}^{s+1} \cdot (2s+1)!} \frac{\partial^{2s+1}}{\partial x^{2s+1}} p_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Für die Berechnung der räumlichen Ableitungen sei auf die Taylor-Koeffizienten im Anhang A verwiesen.

Es lässt sich nun ein explizites FD-Schema angegeben, welches beliebig in der zeitlichen sowie der räumlichen Ordnung ist. Die nötigen Koeffizienten w und β sind in den Tabellen 4.1, A.1, A.2 und A.3 zu finden. Die zeitliche Ordnung ergibt sich aus $O_{\text{Zeit}} = 2 \cdot S + 2$ und die räumliche Ordnung aus $O_{\text{Raum}} = 2 \cdot Z + 2$, wobei S und Z die Endwerte der Summationsvariablen s und z sind. Es muss dabei stets $O_{\text{Raum}} \geq O_{\text{Zeit}}$ erfüllt sein. Es folgt:

$$p_j^{n+\frac{1}{2}} = p_j^{n-\frac{1}{2}} - \sum_{s=0}^S w_{s+1} \cdot \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M_j^{s+1}}{\varrho_j^s \cdot \Delta x^{2s+1}} \sum_{z=0}^Z \beta_{z+1}^{2s+1} (v_{j+z+\frac{1}{2}}^n - v_{j-z-\frac{1}{2}}^n), \quad (4.47)$$

$$v_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} - \sum_{s=0}^S w_{s+1} \cdot \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M_{j+\frac{1}{2}}^s}{\varrho_{j+\frac{1}{2}}^{s+1} \cdot \Delta x^{2s+1}} \sum_{z=0}^Z \beta_{z+1}^{2s+1} (p_{j+z+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_{j-z}^{n-\frac{1}{2}}). \quad (4.48)$$

Durch die Näherung von räumlich konstanten Materialparametern lässt sich obiges explizites FD-Schema für zeitliche Ordnungen größer zwei nur für homogene Modelle verwenden. Bei der Berechnung der zweiten zeitlichen Ordnung treten keine Ableitungen nach Materialparametern auf, daher ist dieses FD-Schema ohne Beschränkung auch für heterogene Modelle gültig.

Tabelle 4.1.: Koeffizienten w für die zeitliche Entwicklung.

w_1	w_2	w_3	w_4
1	1/24	1/1920	1/322560

4.2. FD-Schema 2D

Nachdem ein explizites Finite-Differenzen-Schema vierter Ordnung räumlich und zeitlich für den 1D-Fall gefunden werden konnte, wird dies auch für den 2D-Fall untersucht. Begonnen wird die Berechnung mit dem Druckparameter.

4.2.1. Druckparameter p bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$

Es wird die linke Seite von Gleichung 2.1c als zentrale Differenz dargestellt:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}. \quad (4.49)$$

Analog zum 1D-Fall werden die beiden Druckkomponenten bis zur vierten zeitlichen Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = p_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2^1 \cdot 1!} \frac{\partial}{\partial t} p_{i,j}^n + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{i,j}^n + \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_{i,j}^n \\ + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} p_{i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} = p_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2^1 \cdot 1!} \frac{\partial}{\partial t} p_{i,j}^n + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p_{i,j}^n - \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_{i,j}^n \\ + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} p_{i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Bildet man aus diesen beiden Entwicklungen die Differenz, bleiben auch hier nur ungerade zeitliche Ableitungen übrig. Unter Verwendung der akustischen Wellengleichungen in 2D 2.1a, 2.1b sowie 2.1c wird das Lax-Wendroff-Verfahren angewandt. Damit werden wie in Dablain (1986) beschrieben zeitliche Ableitungen nach dem Druck in räumliche Ableitungen der Geschwindigkeit umgeschrieben:

$$p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{2^1 \cdot 1!} \frac{\partial}{\partial t} p_{i,j}^n + 2 \cdot \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} p_{i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} = -2 \cdot \frac{M_{i,j} \cdot \Delta t}{2^1 \cdot 1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) \\ - 2 \cdot \frac{M_{i,j} \cdot \Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} = -2 \cdot \frac{M_{i,j} \cdot \Delta t}{2^1 \cdot 1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) \\ - 2 \cdot \frac{M_{i,j} \cdot \Delta t^3}{\varrho_{i,j} \cdot 2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^1}{\partial t^1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_{i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} = -2 \cdot \frac{M_{i,j} \cdot \Delta t}{2^1 \cdot 1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) \\ - 2 \cdot \frac{M_{i,j}^2 \cdot \Delta t^3}{\varrho_{i,j} \cdot 2^3 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Die Dichte und die Lamé-Parameter wurden in der obigen Rechnung als räumlich konstant betrachtet. Wie sich zeigt werden neben den räumlichen Ableitungen der

Geschwindigkeit nach x und nach y auch gemischte Ableitungen benötigt.

Die räumlichen Ableitungen nach einem Parameter werden nun exemplarisch für $\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n$ und $\frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n$ gerechnet. Entwickelt wird jeweils bis zur vierten Ordnung. Es wird folgende zentrale Differenz ausgewertet:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n = \frac{v_{x,i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x}, \quad (4.56)$$

wobei die Parameter wie folgt entwickelt werden:

$$\begin{aligned} v_{x,i,j+\frac{1}{2}}^n &= v_{x,i,j}^n + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{x,i,j}^n + \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n \\ &\quad + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} v_{x,i,j-\frac{1}{2}}^n &= v_{x,i,j}^n - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{x,i,j}^n - \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n \\ &\quad + \frac{\Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Differenz daraus:

$$v_{x,i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{1}{2}}^n = 2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + 2 \cdot \frac{\Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.59)$$

Des weiteren werden folgende Entwicklungen benötigt:

$$\begin{aligned} v_{x,i,j+\frac{3}{2}}^n &= v_{x,i,j}^n + \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{3^2 \cdot \Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{x,i,j}^n + \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n \\ &\quad + \frac{3^4 \cdot \Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4), \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} v_{x,i,j-\frac{3}{2}}^n &= v_{x,i,j}^n - \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{3^2 \cdot \Delta x^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_{x,i,j}^n - \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n \\ &\quad + \frac{3^4 \cdot \Delta x^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Differenz daraus:

$$v_{x,i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{3}{2}}^n = 2 \cdot \frac{3 \cdot \Delta x}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + 2 \cdot \frac{3^3 \cdot \Delta x^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (4.62)$$

Durch Lösen des Gleichungssystems bestehend aus Gleichung 4.59 und 4.62 ergeben sich die gewünschten Ableitungen. Durch Anwenden des gleichen Verfahrens für die Ableitungen nach y ergeben sich auch diese. Die so gefundenen räumlichen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \left(v_{x,i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} \left(v_{x,i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{3}{2}}^n \right), \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n = \frac{9}{8 \cdot \Delta y} \left(v_{y,i+\frac{1}{2},j}^n - v_{y,i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta y} \left(v_{y,i+\frac{3}{2},j}^n - v_{y,i-\frac{3}{2},j}^n \right), \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} v_{x,i,j}^n = \frac{1}{\Delta x^3} \left(v_{x,i,j+\frac{3}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{3}{2}}^n \right) - \frac{3}{\Delta x^3} \left(v_{x,i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{x,i,j-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} v_{y,i,j}^n = \frac{1}{\Delta y^3} \left(v_{y,i+\frac{3}{2},j}^n - v_{y,i-\frac{3}{2},j}^n \right) - \frac{3}{\Delta y^3} \left(v_{y,i+\frac{1}{2},j}^n - v_{y,i-\frac{1}{2},j}^n \right). \quad (4.66)$$

Nun wird exemplarisch folgende gemischte Ableitung gerechnet, welche sich wie folgt als zentrale Differenz darstellen lässt:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n = \frac{\frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+1},j}^n - 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-1},j}^n}{\Delta t^2}. \quad (4.67)$$

Um hier eine höhere Ordnung zu erreichen wird eine Entwicklung der äußeren beiden Parameter auf der rechten Seite um (i, j) durchgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+1},j}^n &= \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad + \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta y^4), \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-1},j}^n &= \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n - \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad - \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n - \mathcal{O}(\Delta y^4). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Die Summe aus diesen beiden Entwicklungen ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+1},j}^n + \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-1},j}^n &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + 2 \cdot \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta y^5). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Um ein bestimmtes Gleichungssystem zu erhalten werden noch folgende Entwicklungen benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+2},j}^n &= \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{2 \cdot \Delta y}{1!} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{2^2 \cdot \Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad + \frac{2^3 \cdot \Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{2^4 \cdot \Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta y^4), \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-2},j}^n &= \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n - \frac{2 \cdot \Delta y}{1!} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{2^2 \cdot \Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad - \frac{2^3 \cdot \Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \frac{2^4 \cdot \Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n - \mathcal{O}(\Delta y^4). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Wovon sich die Summe ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+2},j}^n + \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-2},j}^n &= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + 2 \cdot \frac{2^2 \cdot \Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \\ &\quad + 2 \cdot \frac{2^4 \cdot \Delta y^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n + \mathcal{O}(\Delta y^5). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Löst man nun das Gleichungssystem bestehend aus Gleichung 4.70 und 4.73, ergibt sich die gewünschte Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n &= \frac{1}{\Delta y^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+1},j}^n + \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-1},j}^n \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i+2},j}^n + \frac{\partial}{\partial x} v_{x_{i-2},j}^n \right) - \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial x} v_{x_i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Analoges Vorgehen führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j}}^n &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j+1}}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j-1}}^n \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j+2}}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j-2}}^n \right) - \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial y} v_{y_{i,j}}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

4.2.2. Geschwindigkeitsparameter v_x und v_y bis $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$

Da sich keine neuen Einsichten bei der Berechnung der Geschwindigkeit ergeben, wird hier auf eine ausführliche Darstellung verzichtet.

Auswertung der Wellengleichung 2.1a für v_x :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_x = \frac{v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^n - v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.76)$$

Entwicklung der Parameter auf der rechten Seite ergibt:

$$\begin{aligned} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^n &= v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-1} &= v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Differenz der Entwicklungen und Anwendung des Lax-Wendroff-Verfahren (nach Daublain (1986)):

$$v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^n - v_{x_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{x_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} &= -2 \cdot \frac{\Delta t}{\varrho_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot 2} \frac{\partial}{\partial x} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{M_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t^3}{\varrho_{i,j+\frac{1}{2}}^2 \cdot 2^3 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Auswertung der Wellengleichung 2.1b für v_y :

$$\frac{\partial}{\partial t} v_y = \frac{v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^n - v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-1}}{\Delta t}. \quad (4.81)$$

Nun werden auch hier die Parameter auf der rechten Seite entwickelt:

$$\begin{aligned} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^n &= v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-1} &= v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{2^2 \cdot 2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{2^4 \cdot 4!} \frac{\partial^4}{\partial t^4} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Bilden der Differenz und Andwendung des Lax-Wendroff-Verfahren führt auf:

$$v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^n - v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-1} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + 2 \cdot \frac{\Delta t^3}{2^3 \cdot 3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v_{y_{i+\frac{1}{2},j}}^{n-\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (4.84)$$

$$= -2 \cdot \frac{\Delta t}{\varrho_{i+\frac{1}{2},j} \cdot 2} \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{M_{i+\frac{1}{2},j} \Delta t^3}{\varrho_{i+\frac{1}{2},j}^2 \cdot 2^3 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}}. \quad (4.85)$$

Die räumlichen Ableitungen ergeben sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial x} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{9}{8 \cdot \Delta x} \left(p_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} \left(p_{i,j+2}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^3} \left(p_{i,j+2}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{\Delta x^3} \left(p_{i,j+1}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{9}{8 \cdot \Delta y} \left(p_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta y} \left(p_{i+2,j}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta y^3} \left(p_{i+2,j}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{3}{\Delta y^3} \left(p_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial x} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta y^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} p_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} p_{i+2,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial x} p_{i-2,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial x} p_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j+2}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j-2}^{n-\frac{1}{2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial y} p_{i+\frac{1}{2},j}^{n-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.2.3. Explizites FD-Schema beliebiger räumlicher Ordnung

Das obige vorgestellte FD-Schema ist von vierter Ordnung räumlich und zeitlich. Um höhere räumliche Ableitungen zu erreichen, können analog zum 1D-Fall die Taylor-Koeffizienten verwendet werden.

In Anhang A ist dargestellt wie sich so räumliche Ableitungen beliebiger Ordnung ergeben. Darüber hinaus sind die Koeffizienten bis zur achten Ordnung explizit angegeben. Sofern im Folgenden Berechnungen mit höheren räumlichen Ordnungen verwendet wurden, wurde auf die Implementierung der Taylor-Koeffizienten zurückgegriffen.

5. Dispersionsanalyse

Verursacht durch Näherungen und durch die räumliche Diskretisierung der Wellengleichung entstehen zwangsläufig Ungenauigkeiten bei der Berechnung des Wellenfeldes. Durch eine Dispersionsanalyse soll der dabei entstehende Fehler quantifiziert werden. Dazu wird der Ansatz einer ebenen Welle in das explizite FD-Schema eingesetzt, anschließend wird die numerische Ausbreitungsgeschwindigkeit mit der gewünschten physikalischen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Modells verglichen.

5.1. 1D

Um die Dispersion für den 1D-Fall zu bestimmen wird zuerst eine Analyse für vierte Ordnung zeitlich und räumlich durchgeführt. Im Anschluss wird die Dispersion für beliebige zeitliche und räumliche Ordnung gerechnet.

Zur Dispersionsanalyse wird der folgende Ansatz einer ebenen Welle verwendet:

$$p = p_0 \cdot e^{i(kx+\omega t)} \text{ bzw. } v = v_0 \cdot e^{i(kx+\omega t)}, \quad (5.1)$$

welche sich diskret wie folgt darstellen lässt:

$$p_j^n = p_0 \cdot e^{i(kj\Delta x + \omega n\Delta t)} \text{ bzw. } v_j^n = v_0 \cdot e^{i(kj\Delta x + \omega n\Delta t)}. \quad (5.2)$$

Dabei ist p_0 und v_0 die jeweilige Amplitude, k die Wellenzahl und ω die Kreisfrequenz. Nun wird Gleichung 5.1 in die Wellengleichung für den Materialparameter (Gl. 2.2b) eingesetzt um das Amplitudenverhältnis zu bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_0 \cdot e^{i(kx+\omega t)} = -M \frac{\partial}{\partial x} v_0 \cdot e^{i(kx+\omega t)} \quad (5.3)$$

$$i \cdot p_0 \cdot \omega = -i \cdot v_0 \cdot M \cdot k \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \frac{p_0}{v_0} = -\frac{M \cdot k}{\omega}. \quad (5.5)$$

Zwischen der Kreisfrequenz und der Wellenzahl gilt dabei der Zusammenhang $\omega = k \cdot c$, daraus ergibt sich dann weiter:

$$\frac{p_0}{v_0} = -\frac{M}{c}. \quad (5.6)$$

Anschließend wird Gleichung 5.2 in das explizite FD-Schema für den Druck (Gl. 4.39) substituiert, wobei die Abkürzung $z = e^{i(kj\Delta x + \omega n\Delta t)}$ verwendet wird:

$$\begin{aligned} z \cdot p_0 \left(e^{i\omega\Delta t \frac{1}{2}} - e^{-i\omega\Delta t \frac{1}{2}} \right) &= -M \cdot \Delta t \cdot z \cdot v_0 \left[\frac{9}{8 \cdot \Delta x} \left(e^{ik\Delta x \frac{1}{2}} - e^{-ik\Delta x \frac{1}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} \left(e^{ik\Delta x \frac{3}{2}} - e^{-ik\Delta x \frac{3}{2}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{M^2 \cdot \Delta t^2 \cdot z \cdot v_0}{24 \cdot \varrho} \left[\frac{1}{\Delta x^3} \left(e^{ik\Delta x \frac{3}{2}} - e^{-ik\Delta x \frac{3}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{\Delta x^3} \left(e^{ik\Delta x \frac{1}{2}} - e^{-ik\Delta x \frac{1}{2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Im Folgenden wird von der Identität $2 \cdot i \cdot \sin(u) = e^{iu} - e^{-iu}$ (Merziger, 2010) Gebrauch gemacht. Des weiteren wird ausgenutzt, dass im akustischen Fall $M = \lambda$ gilt sowie, dass sich die Geschwindigkeit der akustischen Welle zu $c = \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho}}$ ergibt. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} p_0 \cdot \sin \frac{\omega\Delta t}{2} &= -M \cdot \Delta t \cdot v_0 \left[\frac{9}{8 \cdot \Delta x} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) - \frac{1}{24 \cdot \Delta x} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{M^2 \cdot \Delta t^2 \cdot v_0}{24 \cdot \varrho} \left[\frac{1}{\Delta x^3} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) - \frac{3}{\Delta x^3} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Unter Verwendung von Gleichung 5.6 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\omega\Delta t}{2} \right) &= +r \left[\frac{9}{8} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) - \frac{1}{24} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{r^3}{24} \left[\sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) - 3 \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \omega\Delta t &= 2 \cdot \arcsin \left[r \left[\frac{9}{8} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) - \frac{1}{24} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^3}{24} \left[\sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) - 3 \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hierbei wurde die Courant-Zahl r eingeführt. Die Courant-Zahl beschreibt das Verhältnis von zeitlicher zu räumlicher Diskretisierung und ist wie folgt definiert:

$$r = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x}. \quad (5.11)$$

Die Geschwindigkeit der Welle im numerischen Modell ergibt sich aus $c_{\text{fd}} = \frac{\omega}{k}$. Durch Bildung des Verhältnisses der numerischen Geschwindigkeit und der physikalischen Geschwindigkeit folgt der relative Fehler der Phasengeschwindigkeit:

$$\frac{c_{\text{fd}}}{c} = \frac{\frac{\omega}{k}}{c} = \frac{\frac{\omega}{k}}{\frac{r \cdot \Delta x}{\Delta t}} = \frac{\omega \Delta t}{k \cdot \Delta x \cdot r}. \quad (5.12)$$

Setzt man nun Gleichung 5.10 ein, ergibt sich die Dispersionsrelation für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$:

$$\frac{c_{\text{fd}}}{c} = \frac{2}{k \cdot \Delta x \cdot r} \cdot \arcsin \left[r \left[\frac{9}{8} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) - \frac{1}{24} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) \right] + \frac{r^3}{24} \left[\sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) - 3 \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) \right] \right]. \quad (5.13)$$

Daraus lässt sich die Dispersionsrelation für $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$ gewinnen:

$$\frac{c_{\text{fd}}}{c} = \frac{2}{k \cdot \Delta x \cdot r} \cdot \arcsin \left[r \left[\frac{9}{8} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x}{2} \right) - \frac{1}{24} \sin \left(\frac{k \cdot \Delta x \cdot 3}{2} \right) \right] \right]. \quad (5.14)$$

Um die Dispersionsrelation in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte pro Wellenlänge $G = \frac{\Lambda}{\Delta x}$ zu erhalten, lässt sich folgende Beziehung verwenden:

$$k \cdot \Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\Lambda} = 2\pi \frac{1}{G}, \quad (5.15)$$

wobei Λ die Wellenlänge beschreibt.

Nun soll die Dispersionsrelation für beliebige zeitliche und räumliche Ordnung gerechnet werden, hierzu wird Gleichung 4.47 herangezogen:

$$p_j^{n+\frac{1}{2}} - p_j^{n-\frac{1}{2}} = - \sum_{s=0}^S w_{s+1} \cdot \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M^{s+1}}{\varrho^s \Delta x^{2s+1}} \sum_{z=0}^Z \beta_{z+1}^{2s+1} \left(v_{j+z+\frac{1}{2}}^n - v_{j-z-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (5.16)$$

Durch Einsetzen der ebenen Welle in diskreter Formulierung (Gl. 5.2) ergibt sich:

$$p_0 \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) = - \sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot M^{s+1} \cdot v_0}{\varrho^s \cdot \Delta x^{2s+1}} \sin \left(k \Delta x \cdot (z + \frac{1}{2}) \right). \quad (5.17)$$

Die Verwendung des Amplitudenverhältnisses aus Gleichung 5.5 führt zu:

$$\sin \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot \frac{\Delta t^{2s+1} \cdot c^{2s+1}}{\Delta x^{2s+1}} \sin \left(k \Delta x \cdot (z + \frac{1}{2}) \right) \quad (5.18)$$

$$= \sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot r^{2s+1} \cdot \sin \left(k \Delta x \cdot (z + \frac{1}{2}) \right). \quad (5.19)$$

Durch Umformung und Benutzung der Relation für den relativen Fehler der Phasengeschwindigkeit (Gl. 5.12) ergibt sich die Dispersionsrelation für die räumliche Ordnung $O_{\text{Raum}} = 2 \cdot Z + 2$ und für die zeitliche Ordnung $O_{\text{Zeit}} = 2 \cdot S + 2$:

$$\omega \Delta t = 2 \cdot \arcsin \left[\sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot r^{2s+1} \cdot \sin \left(k \Delta x \cdot (z + \frac{1}{2}) \right) \right], \quad (5.20)$$

$$\frac{c_{\text{fd}}}{c} = \frac{2}{k \cdot \Delta x \cdot r} \cdot \arcsin \left[\sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot r^{2s+1} \cdot \sin \left(k \Delta x \cdot (z + \frac{1}{2}) \right) \right]. \quad (5.21)$$

Die von Liu und Sen (2009) gefundene Dispersionsrelation der akustischen Wellengleichung auf dem geschachtelten Gitter (nach konventioneller Methode) für $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ und beliebige räumliche Ordnung geht aus Gleichung 5.21 für $S = 0$ hervor und bildet damit einen Spezialfall der hier vorgestellten Relation.

Um einen Überblick über das Dispersionsverhalten der verschiedenen Ordnungen zu erhalten wurden einige Relationen grafisch dargestellt. Dazu wurde der relative Fehler der Phasengeschwindigkeit c_{fd}/c über $k\Delta x$ bis zum Nyquist-Kriterium $k\Delta x = \pi$ aufgetragen. Nach Gleichung 5.15 entspricht ein kleines $k\Delta x$ einer feinen und $k\Delta x$ nahe π einer groben räumlichen Abtastung. Ein Verhältnis der Geschwindigkeiten von $c_{\text{fd}}/c = 1$ bedeutet, die numerische Geschwindigkeit ist gleich der physikalischen Geschwindigkeit, somit liegt keine Dispersion vor. Ist das Verhältnis größer Eins, ist die numerische Geschwindigkeit größer als die physikalische, das Wellenfeld bewegt sich also schneller als gewünscht. Für den Fall $c_{\text{fd}}/c < 1$ breitet sich das Wellenfeld langsamer aus, als aus der physikalischen Geschwindigkeit resultierend.

In Abbildung 5.1 wird der relative Fehler der Phasengeschwindigkeit c_{fd}/c für $\mathcal{O}(2, 4)$, $\mathcal{O}(2, 6)$, $\mathcal{O}(2, 8)$, $\mathcal{O}(4, 4)$, $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ gezeigt. Die Relation c_{fd}/c wird jeweils für die Courant-Zahlen $r = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ dargestellt. Numerisch instabile Relationen werden gestrichelt und das dispersionsfreie Verhältnis $c_{\text{fd}} = c$ gepunktet dargestellt.

Alle gezeigten Dispersionskurven streben für ein kleines $k\Delta x$ gegen $c_{\text{fd}}/c = 1$. Unabhängig von der gewählten Ordnung ist das Modell somit bei ausreichend feiner räumlicher Abtastung dispersionsfrei. Für größere $k\Delta x$ zeigt sich ein deutlich unterschiedliches Verhalten zwischen Kurven zweiter zeitlicher Ordnung und höheren zeitlichen Ordnungen. Während die höheren zeitlichen Ordnungen ein von $c_{\text{fd}}/c = 1$ ausgehendes monoton fallendes Verhalten zeigen, steigen die Kurven zweiter zeitlicher Ordnung zuerst über $c_{\text{fd}}/c = 1$, bevor sie unter $c_{\text{fd}}/c = 1$ abfallen. Die Dispersionskurven von $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ haben somit ein Maximum des c_{fd}/c -Verhältnisses. Die Wellenfelder, welche mit $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ berechnet wurden, eilen im Bereich des Maximums also voraus, während sich Berechnungen mit $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ bzw. $\mathcal{O}(\Delta t^6)$ mit geringeren Geschwindigkeiten als die physikalische Geschwindigkeit ausbreiten.

Vergleicht man nun die zweiten zeitlichen Ordnungen untereinander, zeigt sich, dass je höher die räumliche Ordnung ist, desto länger verlaufen die Dispersionsrelationen für kleine Courant-Zahlen nahe $c_{\text{fd}}/c = 1$. Wohingegen mit steigender räumlicher Ordnung die Maxima höhere c_{fd}/c -Verhältnisse erreichen. Somit ergeben sich Vorteile durch eine höhere räumliche Ordnung hauptsächlich bei kleinen Courant-Zahlen. Für $\mathcal{O}(4, 4)$ verlaufen die Kurven stets auf oder unter $c_{\text{fd}}/c = 1$. Je höher hier die Courant-Zahl, je näher verlaufen die jeweiligen Kurven an $c_{\text{fd}}/c = 1$. Für eine Courant-Zahl von $r = 1$ ist die Dispersionskurve deckungsgleich mit $c_{\text{fd}}/c = 1$, es liegt also keine Dispersion vor. $\mathcal{O}(4, 6)$ zeigt ein qualitativ gleiches Verhalten der Dispersion, wobei die Kurve der Courant-Zahl von $r = 1$ nicht mehr auf $c_{\text{fd}}/c = 1$ verläuft, sondern darunter.

Die Dispersionskurven sechster zeitlicher und räumlicher Ordnung verlaufen kongruent zu $\mathcal{O}(4, 4)$, für eine Courant-Zahl von $r = 1$ ergibt sich auch hier ein Verhältnis von $c_{\text{fd}}/c = 1$.

Weitergehende Betrachtung von Dispersionsrelationen mit gleicher räumlicher und zeitlicher Ordnung legen nahe, dass bei einer Courant-Zahl von $r = 1$ jeweils keine Dispersion vorherrscht (vgl. Dablain (1986)).

Abbildung 5.2 stellt jeweils für feste Courant-Zahlen $r = 0.3, 0.5, 0.8, 1$ die Dispersionskurven der obigen Ordnungen gemeinsam dar. Bei einer Courant-Zahl von $r = 0.3$ liegen die Dispersionskurven verschiedener zeitlicher Ordnung aber gleicher räumlicher Ordnung jeweils nahe beieinander. Dies bedeutet, bei einer feinen zeitlichen Abtastung ergeben sich signifikante Verbesserungen der Dispersion nur durch Erhöhung der räumlichen Ordnung. So sind $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ nahezu deckungsgleich. Weiter lässt sich erkennen, dass $\mathcal{O}(2, 6)$ bzw. $\mathcal{O}(2, 8)$ eine größere Bandbreite der Dispersion aufweisen als $\mathcal{O}(2, 4)$. Für eine Courant-Zahl von $r = 0.8$ weisen die Kurven für zweite zeitliche Ordnungen ein ausgeprägtes Maximum auf. $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ verlaufen auch hier eng beisammen, wobei $\mathcal{O}(6, 6)$ eine geringe Verbesserung gegenüber $\mathcal{O}(4, 6)$ aufweist. Bei einer Courant-Zahl von $r = 1$ sind Kurven mit $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ instabil. Die Ordnungen $\mathcal{O}(4, 4)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ verlaufen hier dispersionsfrei. Insgesamt zeigt Abbildung 5.2, dass eine höhere zeitliche und räumliche Ordnung nicht stets mit einer geringeren Dispersion einhergeht. Auch muss abgewogen werden, ob eine geringere Verbesserung der Dispersion, die umfangreicheren Berechnungen rechtfertigen.

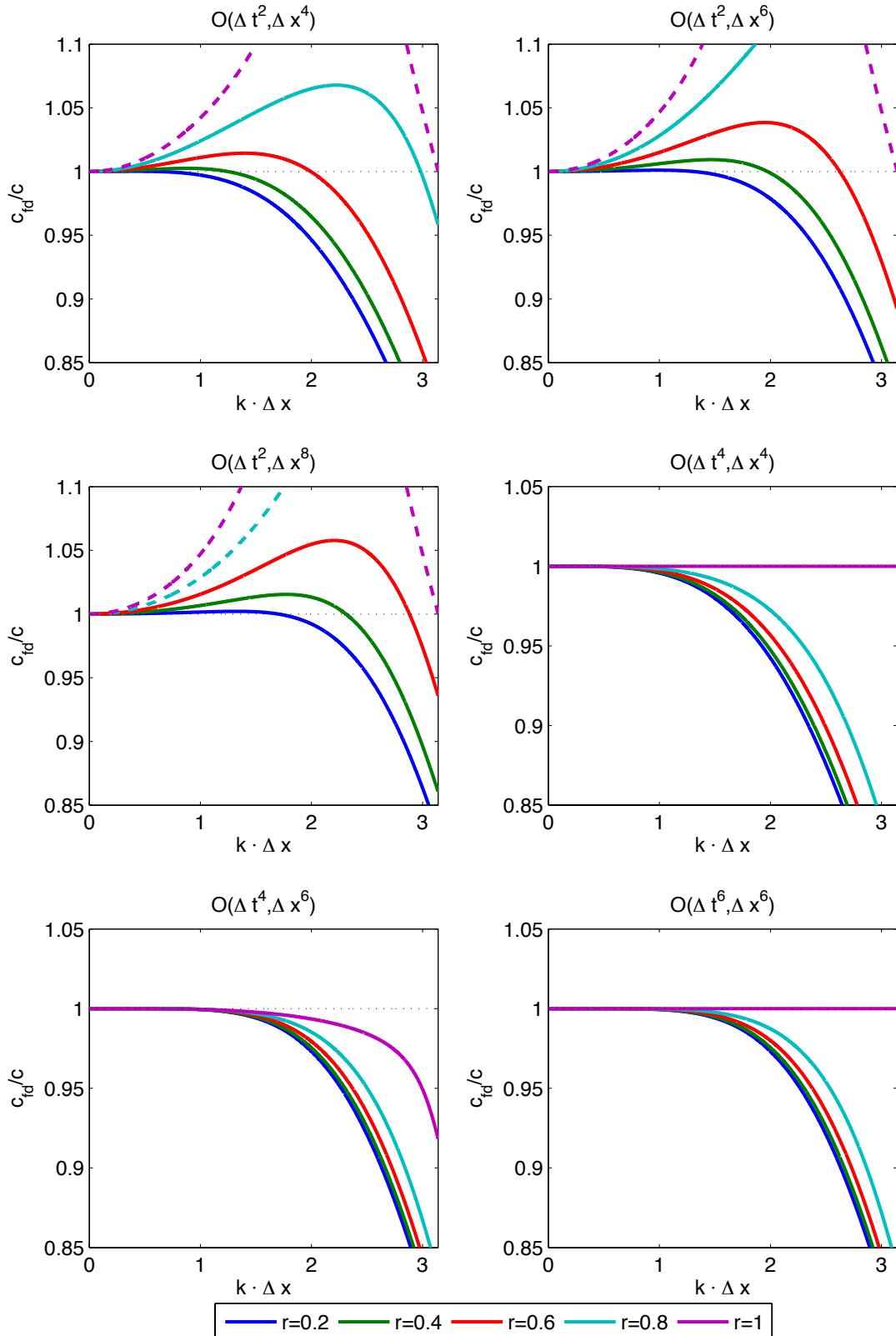


Abbildung 5.1.: 1D-Dispersionsrelation für verschiedene räumliche und zeitliche Ordnungen, dabei wurde die Dispersion jeweils für verschiedene Courant-Zahlen r dargestellt. Gestrichelte Linien zeigen Relationen, welche numerisch instabil sind.

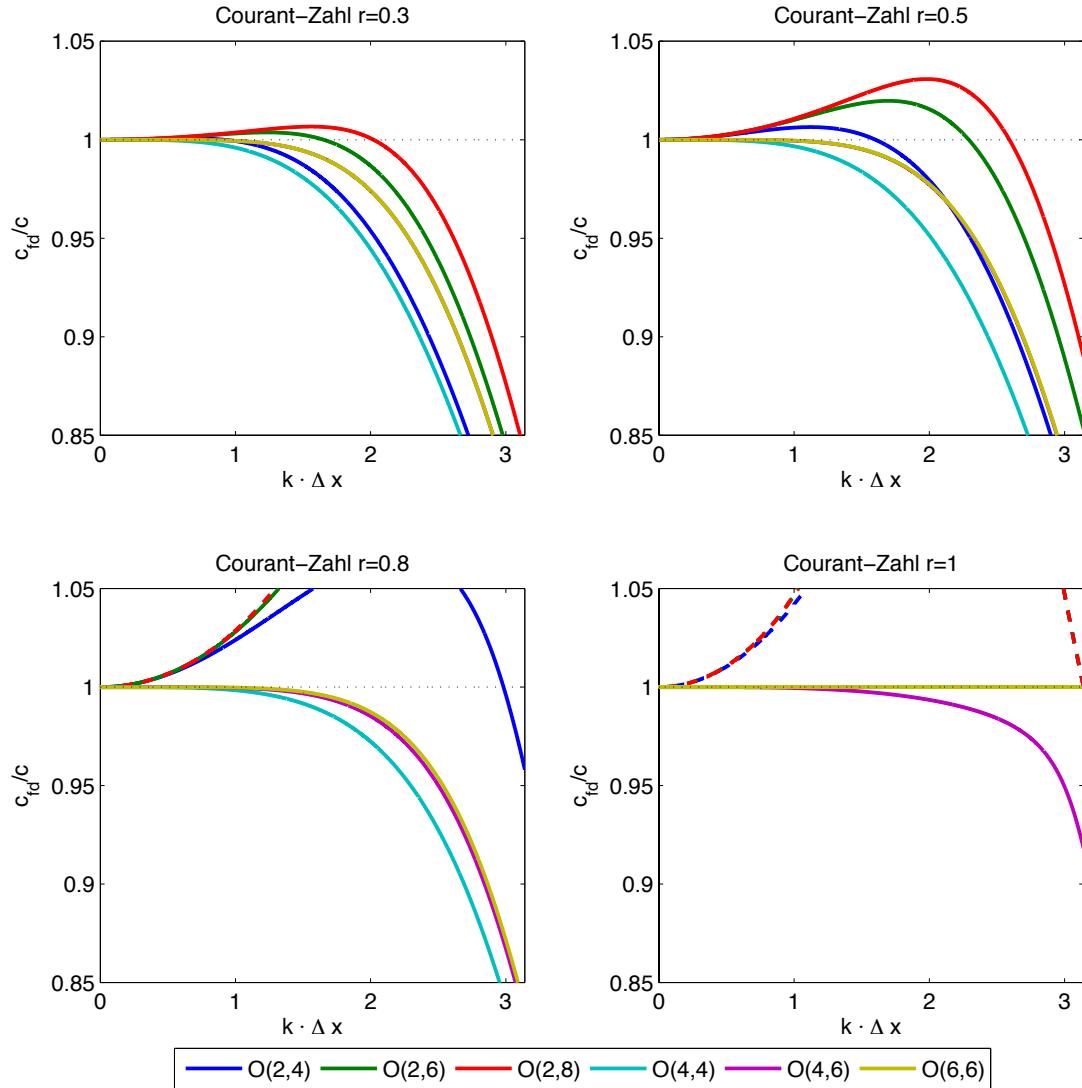


Abbildung 5.2.: Hier werden die 1D-Dispersionsrelationen für verschiedene Courant-Zahlen gezeigt, dabei werden jeweils verschiedene Ordnungen dargestellt. Gestrichelte Linien zeigen Relationen, welche numerisch instabil sind. Für $r = 0.3$ und $r = 0.5$ verlaufen $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ deckungsgleich. Bei $r = 1$ verlaufen $\mathcal{O}(4, 4)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ sowie $\mathcal{O}(2, 6)$ und $\mathcal{O}(2, 8)$ identisch. Aufgrund des identischen Verlaufs sind durch Überdeckungen nicht sämtliche Kurven sichtbar.

5.2. 2D

Im Folgenden wird eine Dispersionsanalyse für das explizite $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$ -Schema gezeigt.

Es wird ein Ansatz einer ebenen Welle in 2D gewählt:

$$v_x = v_{x0} \cdot \exp\{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + \omega t)\}, \quad (5.22)$$

$$v_y = v_{y0} \cdot \exp\{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + \omega t)\}, \quad (5.23)$$

$$p = p_0 \cdot \exp\{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y + \omega t)\}. \quad (5.24)$$

Hierbei wurde die Wellenzahl k in die Komponenten k_x und k_y zerlegt:

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{mit} \quad k_x = k \cdot \cos(\Theta) \quad \text{und} \quad k_y = k \cdot \sin(\Theta). \quad (5.25)$$

Dabei beschreibt Θ den Winkel der Ausbreitungsrichtung gegen die x -Achse.

Der Ansatz der ebenen Welle wird nun in einer diskreten Formulierung benötigt:

$$v_{xj}^n = v_{x0} \cdot \exp\{i(k_x \cdot j \cdot \Delta x + k_y \cdot i \cdot \Delta y + \omega \cdot n \cdot \Delta t)\}, \quad (5.26)$$

$$v_{yj}^n = v_{y0} \cdot \exp\{i(k_x \cdot j \cdot \Delta x + k_y \cdot i \cdot \Delta y + \omega \cdot n \cdot \Delta t)\}, \quad (5.27)$$

$$p_j^n = p_0 \cdot \exp\{i(k_x \cdot j \cdot \Delta x + k_y \cdot i \cdot \Delta y + \omega \cdot n \cdot \Delta t)\}. \quad (5.28)$$

Zu Beginn werden nun die Amplitudenverhältnisse bestimmt, dazu setzt man Gleichung 5.22 (bzw. 5.23) und 5.24 in Gleichung 2.1a ein und erhält:

$$\frac{v_{x0}}{p_0} = -\frac{c}{M} \cos(\Theta), \quad (5.29)$$

$$\frac{v_{y0}}{p_0} = -\frac{c}{M} \sin(\Theta). \quad (5.30)$$

Um die Dispersionsrelation zu erlangen gilt es nun die diskrete Formulierung der ebenen Welle in folgende Gleichung zu substituieren:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} &= -2 \cdot \frac{M \Delta t}{2^1 \cdot 1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) \\ &\quad - 2 \cdot \frac{M^2 \Delta t^3}{\varrho \cdot 2^3 \cdot 3!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} v_{x,i,j}^n + \frac{\partial}{\partial y} v_{y,i,j}^n \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Die Rechnung wird hier analog zum 1D-Fall durchgeführt, daher wird hier direkt das Resultat dargestellt. Die Dispersionsrelation für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$ beträgt:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = & \\
 & + \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \cos(\Theta) \left[\frac{9r}{8} - \frac{3r^3}{24} \right] + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \sin(\Theta) \left[\frac{9r}{8} - \frac{3r^3}{24} \right] \\
 & + \sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) \left[\frac{r^3}{24} - \frac{r}{24} \right] + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \left[\frac{r^3}{24} - \frac{r}{24} \right] \\
 & + \frac{r^3}{24 \cdot 8} \sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \cos(\Theta) \left[\frac{4 \cdot 2}{3} \cos(k_y\Delta y) - \frac{2}{12} \cos(2k_y\Delta y) - \frac{5}{2} \right] \\
 & + \frac{r^3}{24 \cdot 8} \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \sin(\Theta) \left[\frac{4 \cdot 2}{3} \cos(k_x\Delta x) - \frac{2}{12} \cos(2k_x\Delta x) - \frac{5}{2} \right] \\
 & - \frac{r^3}{24 \cdot 24} \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \left[\frac{4 \cdot 2}{3} \cos(k_x\Delta x) - \frac{2}{12} \cos(2k_x\Delta x) - \frac{5}{2} \right] \\
 & - \frac{r^3}{24 \cdot 24} \sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) \left[\frac{4 \cdot 2}{3} \cos(k_y\Delta y) - \frac{2}{12} \cos(2k_y\Delta y) - \frac{5}{2} \right]. \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation für $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^4)$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = & \frac{9r}{8} \left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \sin(\Theta) \right] \\
 & - \frac{r}{24} \left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \right]. \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Für die Ordnungen $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^6)$, $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^8)$, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^6)$ und $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^8)$ befinden sich die Dispersionsrelationen in Anhang B.

Der relative Fehler der Phasengeschwindigkeit beträgt:

$$\frac{c_{\text{fd}}}{c} = \frac{\frac{\omega}{k}}{\frac{c}{\frac{r \cdot \Delta h}{\Delta t}}} = \frac{\omega\Delta t}{k \cdot \Delta h \cdot r}. \quad (5.34)$$

Aus geometrischen Überlegungen folgt der Zusammenhang (vgl. Abb. 5.3):

$$k_x \cdot \Delta x = k \cdot \Delta h \cdot \cos(\Theta) \quad \text{bzw.} \quad k_y \cdot \Delta y = k \cdot \Delta h \cdot \sin(\Theta), \quad (5.35)$$

woraus für $\cos(\Theta) \neq 0$ bzw. $\sin(\Theta) \neq 0$ folgt:

$$k \cdot \Delta h = \frac{k_x \cdot \Delta x}{\cos(\Theta)} = \frac{k_y \cdot \Delta y}{\sin(\Theta)}. \quad (5.36)$$

Um nun die Dispersionsrelation darzustellen, muss geklärt werden wie sich das Nyquist-Kriterium in Abhängigkeit des Raumwinkels verhält. Da das FD-Schema das Wellenfeld nur entlang der Achsen transportiert, muss nur in diese Richtungen das Nyquist-Abtastkriterium $k_x\Delta x \leq \pi$ bzw. $k_y\Delta y \leq \pi$ erfüllt werden. Der Zusammenhang mit $k\Delta h$ geht aus Gleichung 5.36 hervor und ist in Abbildung 5.3 veranschaulicht. Würde die Welle durch das FD-Schema in alle Raumrichtungen transportiert werden, ergäbe sich das Nyquist-Kriterium für $k\Delta h$ zu dem gezeigten Kreis mit Radius π . Wertet man nun Gleichung 5.36 aus, ergibt sich das resultierende

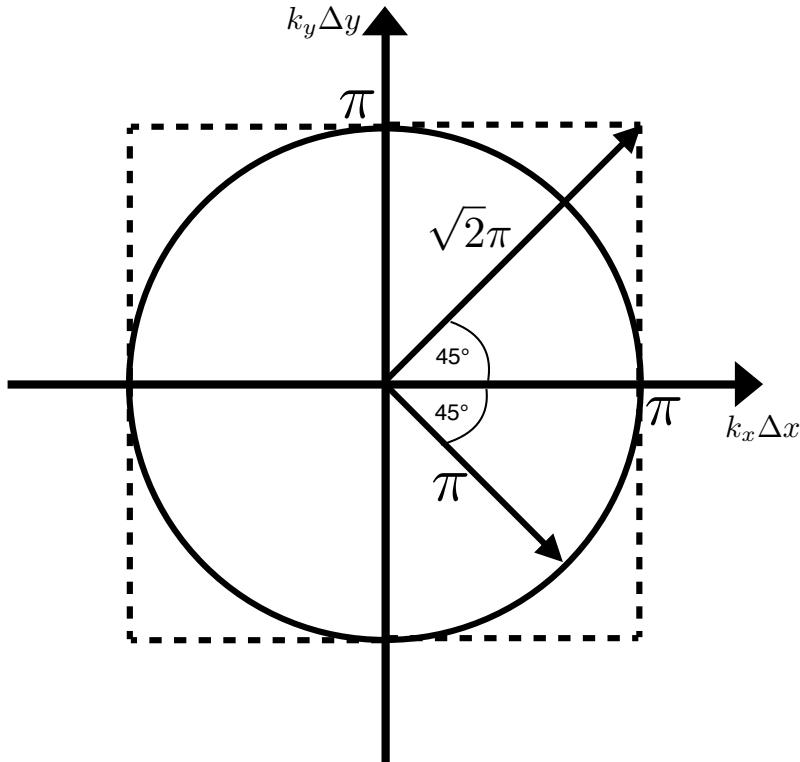


Abbildung 5.3.: Veranschaulichung des resultierenden $k\Delta h$ und des jeweiligen Nyquist-Kriteriums.

Nyquist-Kriterium für $k\Delta h$ zu dem gestrichelt dargestellten Quadrat. Beispielsweise beträgt das resultierende Nyquist-Kriterium in 45° -Richtung $k\Delta h = \sqrt{2}\pi$.

Nun ist es möglich die Dispersion der Phasengeschwindigkeit zu bestimmen. In Abbildung 5.4 sind die Dispersionsrelationen für verschiedene Ordnungen bei einer Propagation entlang der x -Achse ($\Theta = 0^\circ$) jeweils bei verschiedenen Courant-Zahlen r gezeigt. Zur Vereinfachung wird ein äquidistantes Gitter mit $\Delta x = \Delta y$ vorausgesetzt. Da sich die Dispersionsrelationen für einen Winkel von $\Theta = 0^\circ$ auf den 1D-Fall vereinfachen, wird auf die dortige Diskussion verwiesen. Es wird aber darauf hingewiesen, dass in Abbildung 5.4 die jeweils für den 2D-Fall numerisch instabilen Kurven gestrichelt dargestellt werden. Des weiteren wird anstatt $\mathcal{O}(6, 6)$ die Dispersionsrelation für $\mathcal{O}(4, 8)$ gezeigt. Für $\mathcal{O}(4, 8)$ verlaufen die Dispersionskurven kongruent zu $\mathcal{O}(4, 6)$, zeigen aber bei größeren $k_x\Delta x$ ein stärkeres Bestreben nahe $c_{\text{fd}}/c = 1$ zu verlaufen.

In Abbildung 5.5 sind die Dispersionsrelationen für eine Ausbreitungsrichtung entlang von $\Theta = 45^\circ$ dargestellt. Für einen Winkel von $\Theta = 45^\circ$ gilt $k_x\Delta x = k_y\Delta y$. Die Dispersionsrelation wird hier über $k_x\Delta x = k_y\Delta y$ dargestellt, alternativ wäre auch eine Darstellung über $k\Delta h$ bis $\sqrt{2}\pi$ möglich. Instabile Courant-Zahlen werden durch gestrichelte Linien dargestellt, da diese teilweise komplex sind und nur der Realteil dargestellt wird, kann keine Aussage aus dem Verlauf getroffen werden.

Vergleicht man die Dispersionsrelationen zwischen $\Theta = 0^\circ$ und $\Theta = 45^\circ$ so lassen sich für kleine Courant-Zahlen nur geringe Änderungen erkennen. Für große Courant-Zahlen ergeben sich jedoch teilweise signifikante Veränderungen. Bei den

Dispersionsrelationen für $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ lässt sich eine allgemeine Tendenz zu höheren c_{fd}/c -Verhältnissen bei 45° feststellen. So befinden sich die Maxima in 45° -Richtung bei größeren $k\Delta h$ und weisen höhere c_{fd}/c -Verhältnisse und damit eine höhere Dispersion auf. Dies führt auch zu einer Verschiebung der Schnittpunkte mit $c_{\text{fd}}/c = 1$, für welche jeweils keine Dispersion auftritt. Vergleicht man $\mathcal{O}(4, 4)$ und $\mathcal{O}(4, 6)$ so zeigt sich, dass die Dispersion in 45° -Richtung kleiner ist als bei 0° , wobei $\mathcal{O}(4, 6)$ im Allgemeinen eine geringere Dispersion aufweist als $\mathcal{O}(4, 4)$. Die Dispersionskurven für große Courant-Zahlen bei dem $\mathcal{O}(4, 8)$ -Schema zeigen eine signifikant größere Dispersion bei 45° als bei 0° . Dieses Verhalten steht im Gegensatz zum dem $\mathcal{O}(4, 4)$ -Schema, dort ergeben sich bei 45° für große Courant-Zahlen eine geringere Dispersion als bei 0° (vgl. Abb. 5.6).

Um den Effekt der Winkelabhängigkeit von c_{fd}/c zu untersuchen, wurde in Abbildung 5.6 die Dispersionsrelation von $\mathcal{O}(2, 4)$ und $\mathcal{O}(4, 4)$ über den Winkel Θ dargestellt. Dies wurde jeweils für konstantes $k\Delta h = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi$ bei den Courant-Zahlen $r = 0.6, 0.3$ durchgeführt. Drückt man $k\Delta h$ mit Gleichung 5.15 in Gitterpunkten pro Wellenlänge aus folgt in gleicher Reihenfolge $G = 6, 3, 2$. Ein konstantes $k\Delta h$ entspricht in Abbildung 5.3 einem Kreis mit konstantem Radius. Wie schon festgestellt ist das Verhältnis c_{fd}/c jeweils bei den Winkelhalbierenden ($45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$) am größten. Es wird also erwartet, dass sich ein Wellenfeld entlang der Winkelhalbierenden schneller ausbreitet, als entlang der Achsen. Weiter zeigt sich, dass je größer $k\Delta h$, also je größer die räumliche Abtastung, umso größer ist der Wertebereich der Dispersion über den Winkel. $\mathcal{O}(2, 4)$ weist numerische Geschwindigkeiten größer und kleiner der physikalischen Geschwindigkeit auf, wohingegen $\mathcal{O}(4, 4)$ nur kleinere aufweist. Die Dispersion von $\mathcal{O}(4, 4)$ ist daher homogener als $\mathcal{O}(2, 4)$. Des Weiteren ist die Winkelabhängigkeit der Dispersion bei $\mathcal{O}(4, 4)$ kleiner als bei $\mathcal{O}(2, 4)$.

In Abbildung 5.7 wird die Ausbreitung eines Wellenfeldes mit $k \cdot \Delta h = \pi$ ($G = 2$) bei einer Courant-Zahl von $r = 0.6$ gezeigt. Für die Simulation wurde ein homogenes Modell mit einer Geschwindigkeit von $v_p = 3000 \text{ m/s}$ und einer Dichte von 2200 kg/m^3 gewählt. Als Quellsignal diente ein "Ricker-Wavelet" mit einer Peakfrequenz von $f_0 = 5 \text{ Hz}$, entsprechend der Definition in Kapitel 7. Es werden Snapshots nach 3.5 s und nach 7 s gezeigt, zum einen mit einem $\mathcal{O}(2, 4)$ und zum anderen mit einem $\mathcal{O}(4, 4)$ FD-Schema berechnet. Betrachtet man das Wellenfeld für $\mathcal{O}(2, 4)$, zeigen sich kreisrunde langwellige Wellen. Des Weiteren lassen sich bei den Winkelhalbierenden vorauseilende und bei den Achsen verzögerte kurzwellige Wellen erkennen. Dies bewirkt eine "quadratische" Form des Wellenfeldes. Die Dispersion des kurzweligen Anteiles folgt den Erwartungen aus der in Abbildung 5.6 gezeigten roten c_{fd}/c -Kurve für $r = 0.6$. Weiter zeigt sich in Abbildung 5.6, dass bei gleicher Abtastung Δx und größerer Wellenlänge Λ und damit geringerer Wellenzahl k die Winkelabhängigkeit der Dispersion zurück geht. Dies spiegelt sich in der gleichmäßigen runden Ausbreitung der langwelligen Wellen wieder. Die "quadratische" Form geht hier also aus der Winkel- sowie der Frequenzabhängigkeit der Dispersion her vor. Bei $\mathcal{O}(4, 4)$ lassen sich keine vorauseilende kurzwellige Wellen erkennen. Dies entspricht der Erwartung aus der Dispersionsrelation, da hier das c_{fd}/c -Verhältnis für hohe Wellenzahlen über den gesamten Winkel geringer als Eins ist. Für geringere Wellenzahlen ist die Winkelabhängigkeit geringer und das c_{fd}/c -Verhältnis höher. Aufgrund dieses höheren c_{fd}/c -Verhältnisses bilden hier die Wellen mit einer geringen Wellenzahl die gleichmäßige äußerste Form des Wellenfeldes.

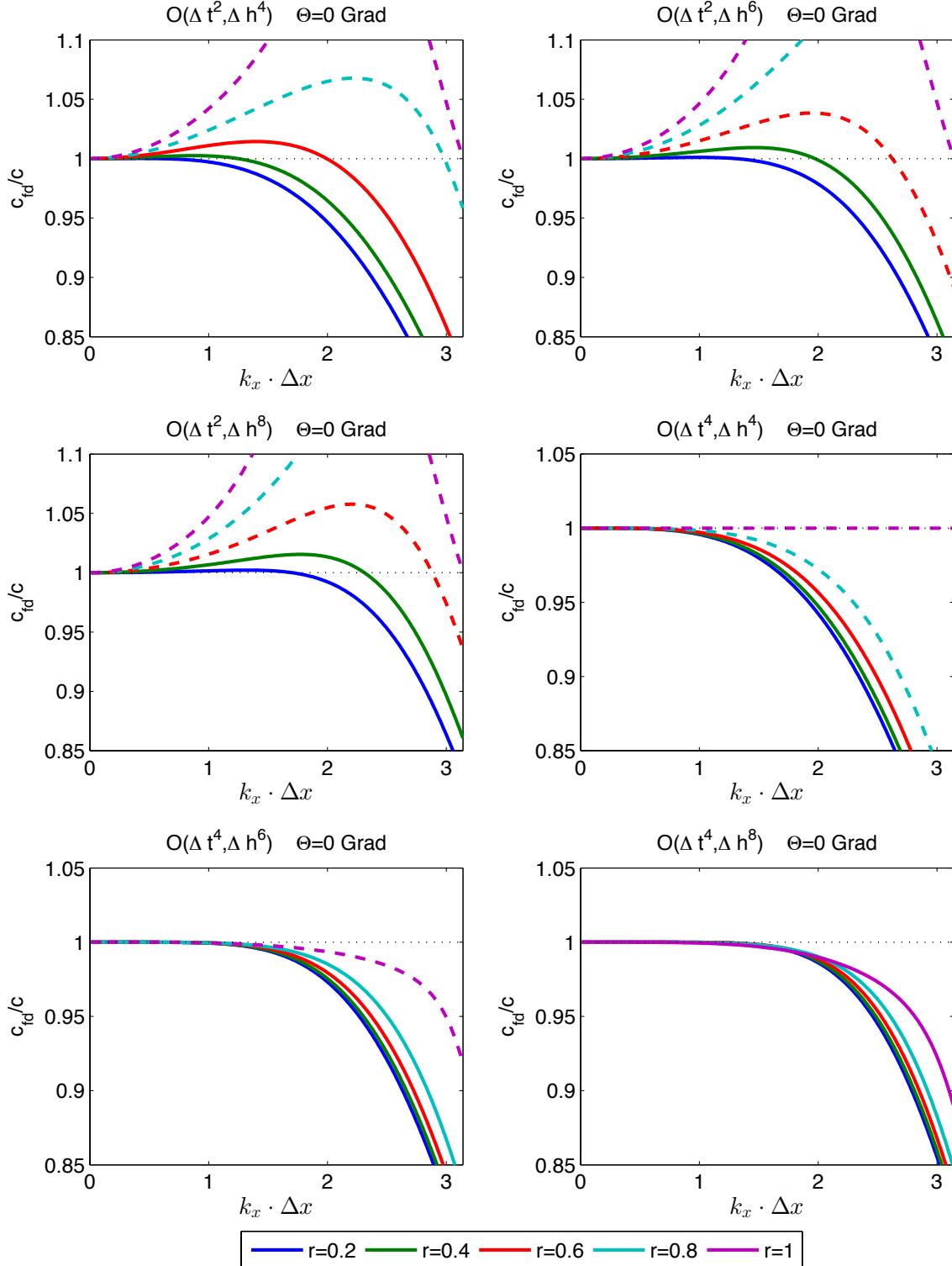


Abbildung 5.4.: 2D-Dispersionsrelation für verschiedene Ordnungen entlang der x -Achse ($\Theta = 0^\circ$), dabei wurde die Dispersion jeweils für verschiedene Courant-Zahlen r dargestellt. Gestrichelte Linien zeigen Relationen, welche die Stabilitätsbedingung verletzten und numerisch instabil sind.

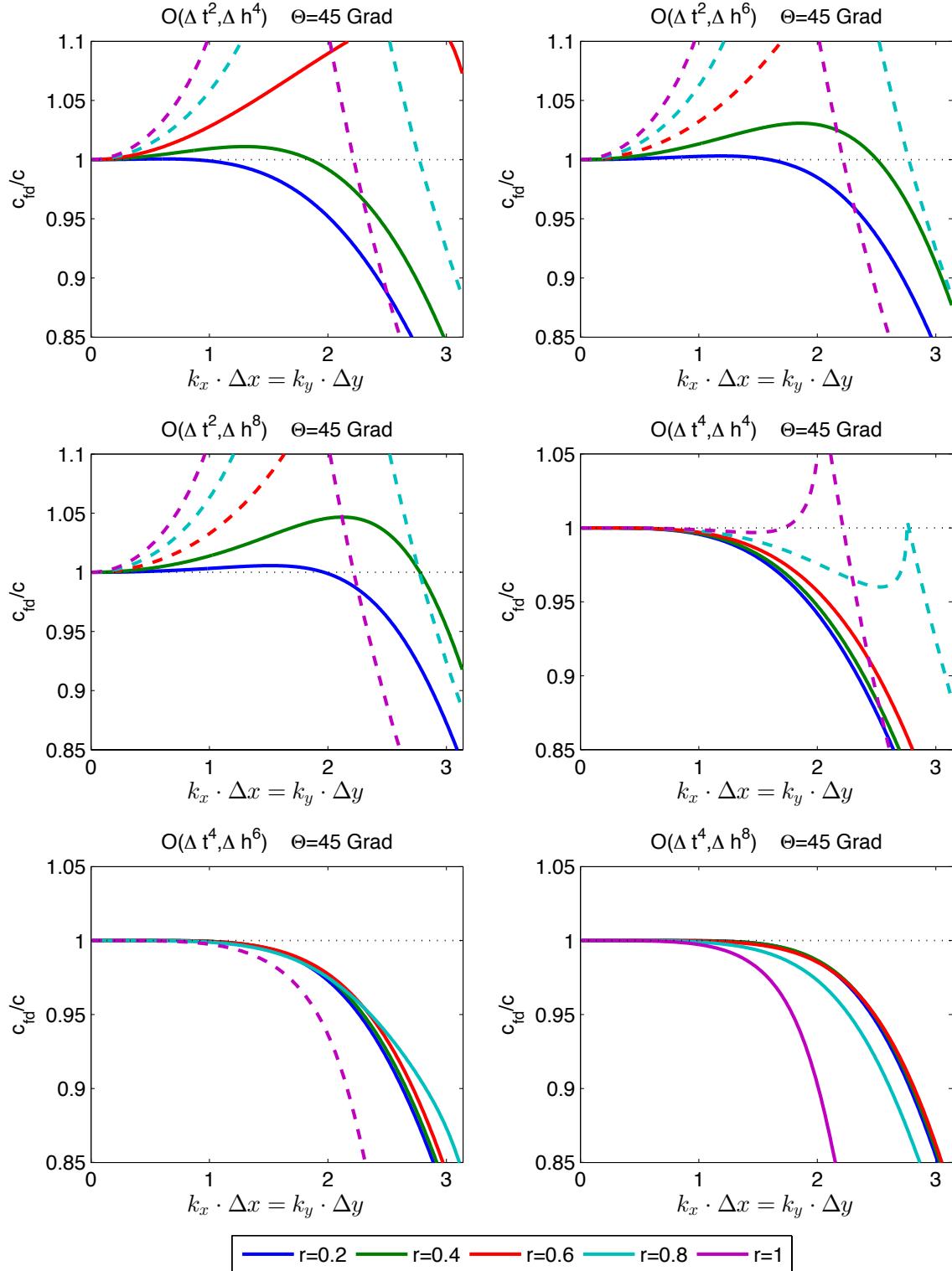


Abbildung 5.5.: 2D-Dispersionsrelation für verschiedene Ordnungen entlang der 1. Winkelhalbierenden ($\Theta = 45^\circ$), dabei wurde die Dispersion jeweils für verschiedene Courant-Zahlen r dargestellt. Gestrichelte Linien zeigen Relationen, welche die Stabilitätsbedingung verletzten und numerisch instabil sind.

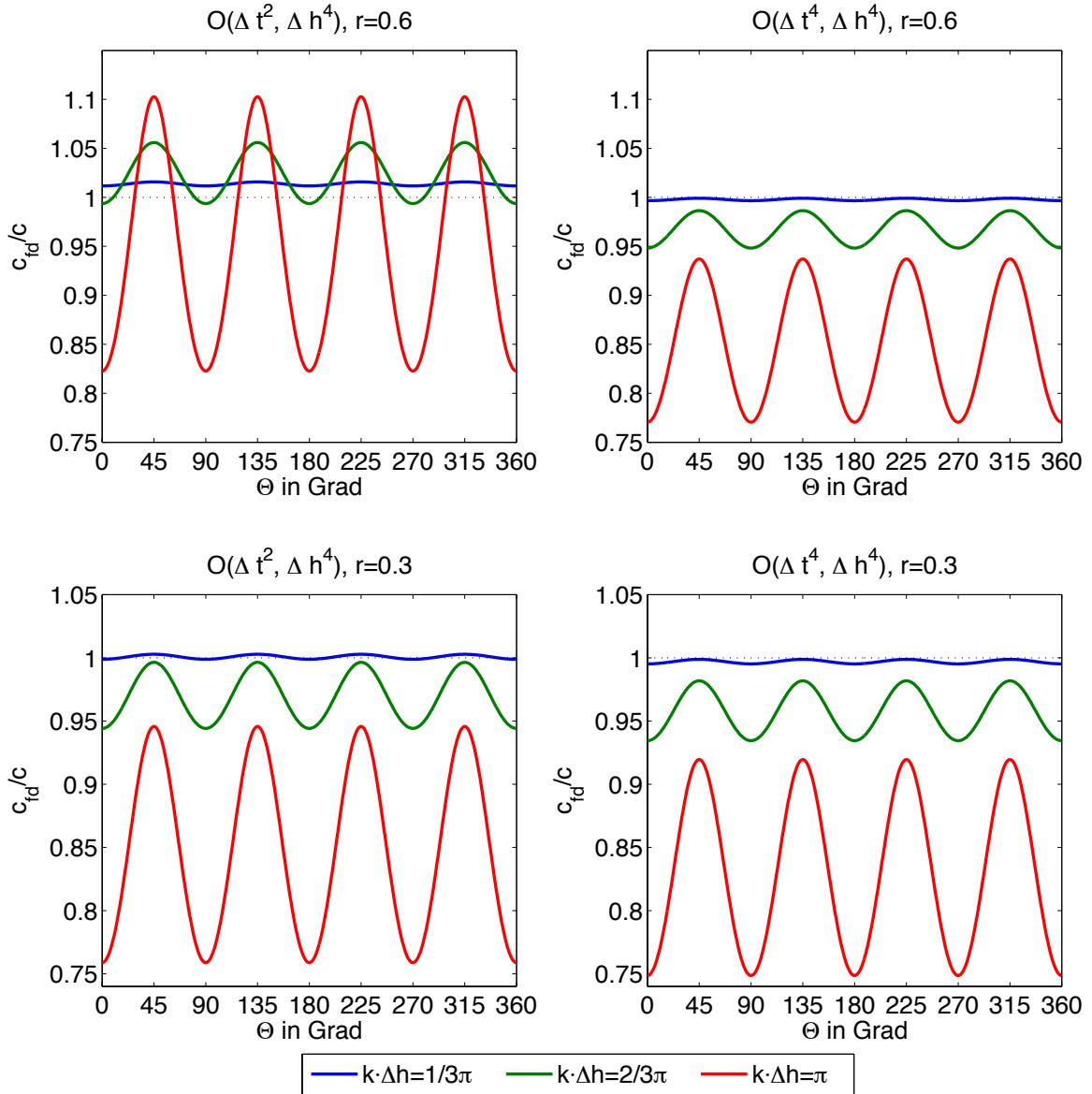


Abbildung 5.6.: Dispersionsrelation für den 2D-Fall. Es wird die Dispersion für $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^2)$ sowie $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$ für $k \cdot \Delta h = \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi$ über den Raumwinkel der Ausbreitungsrichtung gezeigt. Dabei entspricht $k\Delta h$ ausgedrückt in Gitterpunkten pro Wellenlänge in gleicher Reihenfolge $G = 6, 3, 2$.

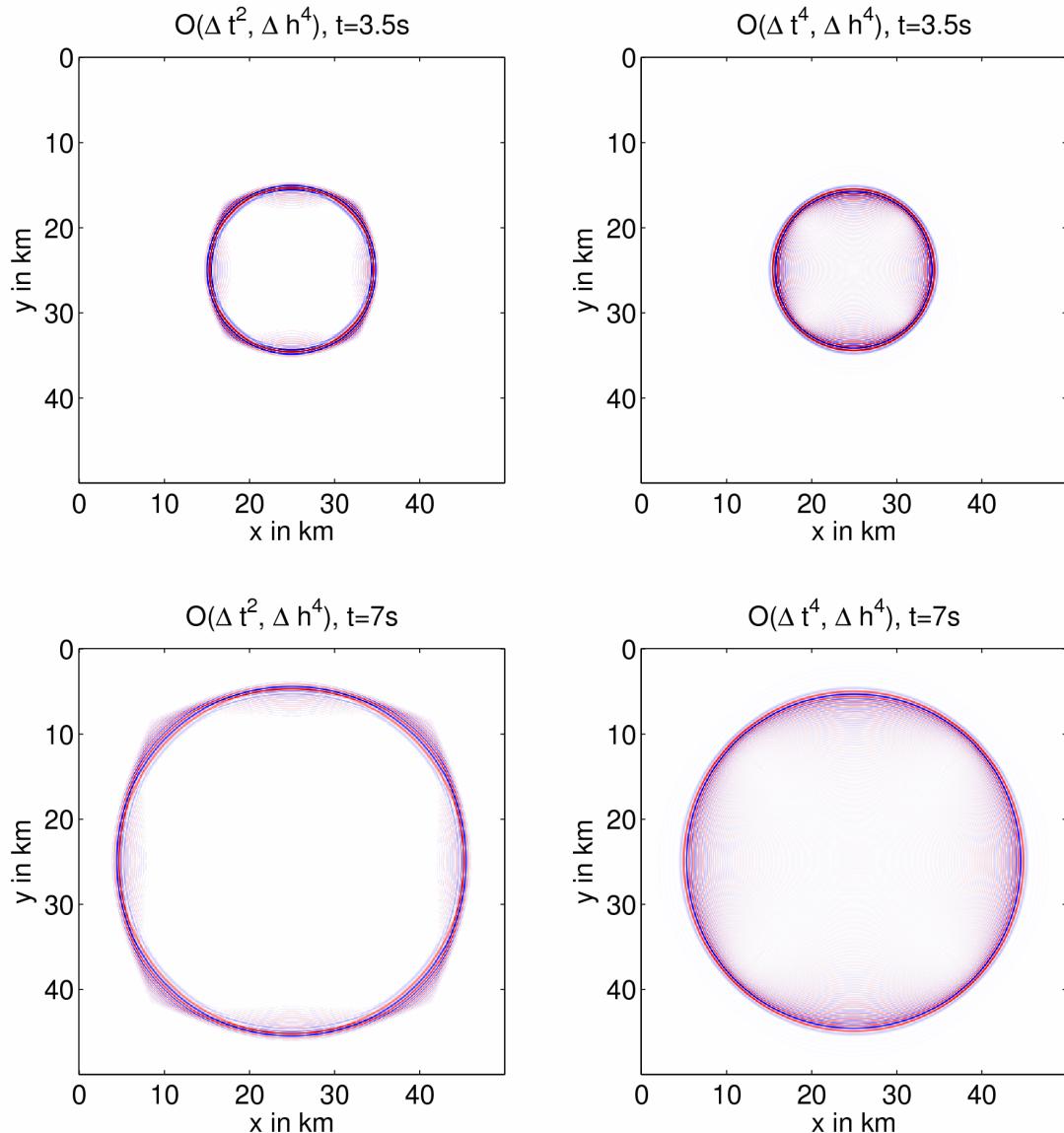


Abbildung 5.7.: Wellenfelder nach 3.5 s bzw. 7 s bei einer Courant-Zahl von $r = 0.6$. Die räumliche Abtastung wurde zu $k\Delta h = \pi$ gewählt. Das gewählte Modell wurde zum einen mit einem $\mathcal{O}(2, 4)$ und zum anderen mit einem $\mathcal{O}(4, 4)$ FD-Schema berechnet.

6. Stabilitätsanalyse

Während eine grobe räumliche Diskretisierung zu Dispersion führt, ergibt sich für eine grobe zeitliche Diskretisierung numerische Instabilität. Deshalb ist es wichtig neben der Dispersionsrelation auch die Stabilitätslimits der jeweiligen FD-Schemata zu kennen. Im Folgenden wird nun aus der Dispersionsrelation eine Stabilitätsbedingung abgeleitet, aus welcher sich wiederum ein Stabilitätslimit ergibt.

6.1. 1D

Um für den 1D-Fall eine Stabilitätsanalyse durchzuführen wird Gleichung 5.19 herangezogen:

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot r^{2s+1} \cdot \sin\left(k\Delta x \cdot \left(z + \frac{1}{2}\right)\right). \quad (6.1)$$

Eine Bedingung an die obige Gleichung ist die Beschränktheit der Sinus-Funktion:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \leq 1. \quad (6.2)$$

Da dies für die linke Seite von Gleichung 6.1 stets erfüllt ist, muss dies auch für den größten Wert welchen die rechte Seite annehmen kann stets erfüllt sein. Um eine möglichst grobe und stabile zeitliche Diskretisierung zu finden, wird eine Abschätzung nach oben hin durchgeführt. Es lässt sich leicht einsehen, dass Gleichung 6.1 das Maximum für die Nyquist-Bedingung von $k\Delta x = \pi$ einnimmt. Setzt man dies ein und nutzt die Periodizität des Sinus ergibt sich:

$$-1 \leq \sum_{s=0}^S \sum_{z=0}^Z w_{s+1} \cdot \beta_{z+1}^{2s+1} \cdot r^{2s+1} \cdot (-1)^z \leq 1. \quad (6.3)$$

Explizites Ausführen für zweite zeitliche Ordnung und vierte räumlich Ordnung führt auf:

$$-1 \leq r \cdot \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{24}\right) \leq 1 \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow r \leq \frac{6}{7} \approx 0.857. \quad (6.5)$$

Dies bedeutet, dass das FD-Schema $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$ bis zu einer Courant-Zahl von $r \leq 0,857$ numerisch stabil ist.

Für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ ergibt sich folgende Bedingung:

$$-1 \leq r \cdot \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{24}\right) - \frac{4}{24}r^3 \leq 1. \quad (6.6)$$

Diese Ungleichung ist auf dem Intervall $-1 \leq r \leq 1$ erfüllt, wobei physikalisch nur $0 \leq r \leq 1$ sinnhaft ist.

Durch gleiches Vorgehen wurden für höhere zeitliche und räumliche Ordnung Stabilitätslimits berechnet, welche in Tabelle 6.1 dargestellt sind. Stimmen räumliche und zeitliche Ordnung überein, so ergibt sich stets ein Stabilitätslimit von $r = 1$. Für die zweite zeitliche Ordnung nimmt das Stabilitätslimit mit steigender räumlicher Ordnung ab. Wohingegen das Stabilitätslimit für vierte zeitliche Ordnung mit höheren räumlichen Ordnung zunimmt. Betrachtet man nun sechste und achte zeitliche Ordnung zeigt sich ein alternierendes Verhalten, wobei zeitliche Ordnungen, welche ganzzahlig durch Vier teilbar sind, jeweils für höhere räumliche Ordnungen ein größer werdendes Stabilitätslimit aufweisen. So kann das Stabilitätslimit eine Courant-Zahl von $r = 1$ übersteigen. Betrachtet man dazu die Definition der Courant-Zahl aus Gleichung 5.11 umgestellt nach Δt :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \cdot r, \quad (6.7)$$

bedeutet dies, dass die Welle Gitterpunkte überspringt, wenn die Courant-Zahl größer als Eins ist. Dies widerspricht allerdings der Courant-Friedrichs-Levy Stabilitätsbedingung (CFL-Bedingung), welche besagt $r \leq 1$ (Courant et al., 1928).

Zur Verifikation der in Tabelle 6.1 gefundenen Stabilitätslimits wurden jeweils numerische Simulationen durchgeführt. Hierbei wurde das gleiche homogene Modell und gleiche Quellsignal wie in Kapitel 7 verwendet. Die räumliche Abtastung betrug 8 Gitterpunkten pro Wellenlänge bei einer Modellgröße von 200 Gitterpunkten. Das Wellenfeld wurde jeweils 120 s beobachtet. Zeigte sich hier keine Instabilität wurde davon ausgegangen, dass Stabilität vorliegt.

Die Simulationen zeigten Übereinstimmung mit den theoretisch ermittelten Werten. Die FD-Schemata, welche ein Stabilitätslimit größer $r = 1$ aufweisen, ließen keine Instabilitäten nach 120 s erkennen. Da allerdings die CFL-Bedingung verletzt wurde, ist numerische Stabilität nicht sichergestellt.

Tabelle 6.1.: Maximale Courant-Zahl r laut Stabilitätsbedingung für die 1D FD-Schemata.

	Δt^2	Δt^4	Δt^6	Δt^8
Δx^2	1			
Δx^4	0,857	1		
Δx^6	0,805	1,017	1	
Δx^8	0,777	1,044	0,999	1
Δx^{10}	0,759	1,102	0,998	1,00007

6.2. 2D

Für den 2D-Fall lässt sich analog wie im 1D-Fall eine Stabilitätsbedingung durch Abschätzung der Dispersionsrelation gewinnen. Dies soll nun beispielhaft für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$ durchgeführt werden, dazu wird Gleichung 5.32 herangezogen. Für die Sinus-Funktion ergibt sich jeweils die Beschränktheit:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \leq 1. \quad (6.8)$$

Die obige Beschränktheit muss somit auch für den größtmöglichen Wert der rechten Seite von Gleichung 5.32 erfüllt sein. Der größtmögliche Wert wird für die Nyquist-Bedingungen in beide Raumrichtungen von $k_x \Delta x = \pi$ und $k_y \Delta y = \pi$ sowie eines Winkels von $\Theta = 45^\circ$ erreicht. Setzt man dies ein und beachtet die Beschränktheit ergibt sich:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 7}{6} r - \frac{\sqrt{2} \cdot 23}{54} r^3 \leq 1 \quad (6.9)$$

$$\implies r \leq 0.778. \quad (6.10)$$

Das FD-Schema $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^4)$ besitzt also ein Stabilitätslimit in 2D von $r \leq 0.778$, für den 1D-Fall ergab sich hier $r \leq 1$. Das Stabilitätslimit ist augenscheinlich in 2D geringer als in 1D.

Für $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^4)$ lässt sich folgende Bedingung gewinnen:

$$r \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 9}{8} + \frac{\sqrt{2}}{24} \right) \leq 1 \quad (6.11)$$

$$\implies r \leq 0.606. \quad (6.12)$$

Dieses Stabilitätslimit entspricht dem 1D-Fall dividiert durch $\sqrt{2}$. Auch hier ist also das Limit in 2D geringer als für den 1D-Fall.

Durch analoges Vorgehen wurden für $\mathcal{O}(\Delta h^6)$ sowie $\mathcal{O}(\Delta h^8)$ Stabilitätslimits berechnet, welche in Tabelle 6.2 dargestellt sind. Die theoretisch gefundenen Stabilitätslimits wurden durch numerische Simulation verifiziert. Für die Simulationen wurde das homogene Modell und das Quellsignal von Kapitel 7 herangezogen. Räumlich wurde eine Abtastung von 5 Gitterpunkten pro Wellenlänge bei einer Gittergröße von 150x150 Gitterpunkten gewählt. Die Simulationen wurden jeweils für 60 s beobachtet.

Das Stabilitätslimit für $\mathcal{O}(2, 2)$ und $\mathcal{O}(2, 4)$ konnten mit Virieux (1986) bzw. Levan-der (1988) verifiziert werden.

Die Stabilitätslimits zweiter zeitlicher Ordnung entsprechen jeweils den Limits aus 1D dividiert durch $\sqrt{2}$. Für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^6)$ folgt aus der Stabilitätsbedingung Stabilität bis $r \leq 0.813$ und ab $r \geq 0.901$. Durch numerische Simulationen konnten diese Grenzen bestätigt werden. Allerdings ergab sich ab $r > 0.96$ wiederum Instabilität, die Stabilitätsbedingung lässt hierüber keine Aussage zu. Die Ursache dieses instabilen Bereiches ist nicht bekannt und muss weiter untersucht werden.

Für $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^8)$ ergab sich durch obiges Verfahren keine Stabilitätsbedingung. Durch numerische Simulationen zeigte sich Stabilität bis zu einer Courant-Zahl von $r = 1$.

Tabelle 6.2.: Maximale Courant-Zahl r laut Stabilitätsbedingung für die 2D FD-Schemata. Für geklammerte Limits konnten keine zweifelsfreien Stabilitätslimits gefunden werden.

	Δt^2	Δt^4
Δh^2	0.707	
Δh^4	0.606	0.778
Δh^6	0.569	([0, 0.813], [0.901, 0.96])
Δh^8	0.549	(1)

7. Numerische Vergleiche

Wesentliche Faktoren bei der Wellenfeldsimulation mit der Methode der Finiten-Differenzen sind zum einen die benötigte Rechenzeit und zum anderen die erreichte Genauigkeit. Um diese beiden Größen abzuschätzen wurden für verschiedene zeitliche und räumliche Ordnungen Simulationen durchgeführt, welche mit einer Referenzlösung verglichen wurden.

Für alle Simulationen wurde ein homogenes Modell mit einer Geschwindigkeit von $v_p = 3000 \text{ m/s}$ und einer Dichte von $\varrho = 2200 \text{ kg/m}^3$ gewählt.

Als Quellsignal $Q(t)$ wurde das "Ricker-Wavelet" (nach Ricker (1953)) mit einer Peakfrequenz von $f_0 = 5 \text{ Hz}$ und einer Maximalamplitude von $Q_0 = 1$ verwendet. Das Quellsignal wurde dabei folgendermaßen definiert:

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1 - 2 \cdot \tau^2) \cdot e^{-\tau^2} \quad (7.1)$$
$$\text{mit } \tau = \pi \cdot f_0 \cdot (t - \frac{1.5}{f_0}).$$

Zur Simulation in 1D und 2D wurden die vorgestellten expliziten FD-Schemata in MATLAB 2012b implementiert. Durch eine Schleife über die Zeitschritte wurde jeweils zuerst das Geschwindigkeits- gefolgt von dem Druckfeld aktualisiert. Zur Veranschaulichung einer FD-Implementierung ist diese im Anhang C für den 1D-Fall beispielhaft dargestellt.

7.1. 1D

In 1D wurden die expliziten FD-Gleichungen (4.47 und 4.48) beliebiger zeitlicher und räumlicher Ordnung implementiert. Diese Implementierung befindet sich in Anhang C. Als Modellgrundlage wurde das bereits erwähnte homogene Modell in einer Ausdehnung entlang der x -Achse von 6000 m gewählt. Die Einspeisung des Quellsignals in das Druckfeld erfolgte jeweils in der Modellmitte. Zeitlich erfolgte die Einspeisung vor dem Druckupdate, das Quellsignal wurde dabei zum Zeitpunkt $(n - \frac{1}{2})$ ausgewertet. Als Empfänger diente die Aufzeichnung des Druckfeldes in einer Entfernung von der Quelle von 600 m. Zur Bestimmung der Genauigkeit des verwendeten FD-Schema wurde das aufgezeichnete Signal mit dem Quellsignal verglichen. Die Wahl

des Quellsignals als Referenz ist gerechtfertigt, da sich die analytische Lösung der Wellengleichungen in 1D zu einer ebenen Welle ergibt. Als Maß für die Abweichung wurde die L2-Norm der Differenz \vec{d} der beiden Signale gewählt, dabei wurde folgende Definition der L2-Norm verwendet:

$$\|\vec{d}\|_2 = \sqrt{\sum_n^N d_n^2}. \quad (7.2)$$

Die Anzahl der zugrundeliegenden Gitterpunkte ergibt sich aus dem Quotienten der Modellgröße und der verwendeten räumlichen Abtastung Δx . Da nur mit ganzzahligen Gitterpunkten gearbeitet werden kann, wurde die räumliche Abtastung Δx zu 60 m gewählt.

Für einen Vergleich der verschiedenen Kombinationen der Ordnungen wurde mit diesen jeweils das gleiche vorgegebene Modell simuliert, anschließend wurde die Abweichung zum Quellsignal und die Rechenzeit ausgewertet. In Abbildung 7.1 ist ein solches Resultat dargestellt. Die Kurven werden hierbei bei numerisch instabilen Simulationen abgebrochen. Es zeigt sich Übereinstimmung mit den theoretisch ermittelten Stabilitätsbedingungen in Tabelle 6.1. Die Simulationen wurden für $k \cdot \Delta x = 2\pi/5$ durchgeführt, dies entspricht 5 Gitterpunkten pro Wellenlänge (Gl. 5.15). Zeitlich wurde jeweils auf dem Intervall $\omega\Delta t = [0.0031, 0.6912]$ mit einer Schrittweite von 0.0031 eine Simulation gerechnet. Die Anzahl wie oft das Quellsignal durch das FD-Verfahren zeitlich abgetastet wird ergibt sich aus dem Inversen von $\omega\Delta t$ durch die Beziehung $\omega\Delta t = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T}$, wobei T die Periodendauer beschreibt. Ist $\omega\Delta t$ klein, ist folglich die Anzahl an zeitlichen Abtastungen groß. Für die Rechenzeit wurde die reine Zeit, welche für die Zeitschritte benötigt wurde herangezogen. Zur Minimierung des statistischen Fehlers wurde über 100 Berechnungen gemittelt. Der Vergleich der L2-Norm (Abb. 7.1) zeigt, dass Simulationen gleicher räumlicher Ordnung für kleine $\omega\Delta t$ gegen die gleiche L2-Norm konvergieren. Des weiteren lässt sich hier erkennen, dass sich mit höheren räumlichen Ordnungen eine geringe L2-Norm ergibt.

Für größere $\omega\Delta t$ spalten die verschiedenen zeitlichen Ordnungen bezüglich der L2-Norm auf. Für zweite zeitliche Ordnung fällt die Norm jeweils zu einem Minimum hin, anschließend ergibt sich eine stetige Erhöhung der Norm bis zum Stabilitätslimit. Die Kurven vierter zeitlicher Ordnung und sechster zeitlicher Ordnung haben ihr Maximum für das kleinste berechnete $\omega\Delta t$ und fallen anschließend monoton bis zum Stabilitätslimit.

In der rechten Abbildung in 7.1 ist die Rechenzeit in Sekunden halblogarithmisch aufgetragen. Der Verlauf aller Kurven ist hierbei proportional zum Reziproken von $\omega \cdot \Delta t$, was darauf zurückzuführen ist, dass für eine doppelt so große Zeitabtastung halb so viele Rechenschritte benötigt werden. Es lässt sich erkennen, dass mit steigender Ordnung auch die Rechenzeit steigt, da jeweils die Berechnungen umfangreicher werden.

Nun stellt sich die Frage mit welcher Kombination zeitlicher und räumlicher Ordnung eine optimale Ausbeute von Genauigkeit und Rechenzeit erzielt werden kann. Hierfür ist eine genaue Analyse notwendig.

Bei kleinen $\omega\Delta t$ ergeben sich bezüglich der L2-Norm keine Unterschiede zwischen den verschiedenen zeitlichen Ordnungen. Unterschiede ergeben sich nur durch die räumliche Ordnung. Da sich aber jeweils die Rechenzeit unterscheidet, empfiehlt es

sich hier zweite Ordnung zeitlich und je nach angestrebter Genauigkeit eine räumliche Ordnung auszuwählen. Bei $\omega \Delta t = 0.1194$ haben $\mathcal{O}(2, 6)$, $\mathcal{O}(2, 8)$, $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ annähernd die gleiche Norm. Die Kennwerte für diesen Punkt sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Wie in Tabelle 7.1 ersichtlich, lohnt es sich hier angesichts der Rechenzeit $\mathcal{O}(2, 6)$ zu verwenden. Aufgrund der nun stets höheren Norm und Rechenzeit von $\mathcal{O}(2, 8)$ gegenüber $\mathcal{O}(2, 6)$ ist es nicht mehr empfehlenswert diese zu benutzen. Ab $\omega \Delta t = 0.1759$ weist nun $\mathcal{O}(2, 4)$ eine geringere Norm und weniger Rechenzeit auf als $\mathcal{O}(2, 6)$. In Tabelle 7.2 sind die Kennwerte aller gezeigten Ordnungen dargestellt, die die gleiche L2-Norm haben wie $\mathcal{O}(2, 4)$ im Minimum. Man erkennt, dass $\mathcal{O}(4, 4)$ für diese Norm die geringste Rechenzeit aufweist. Für den weiteren Verlauf von $\mathcal{O}(4, 4)$ ist die Norm und die Rechenzeit monoton fallend.

Insgesamt würde es sich für diese Simulation mit $k \Delta x = 2\pi/5$ anbieten $\mathcal{O}(4, 4)$ nahe am Stabilitätslimit zu verwenden. Dort wird eine L2-Norm von 0.0156 bei einer Rechenzeit von 0.0044 s erreicht.

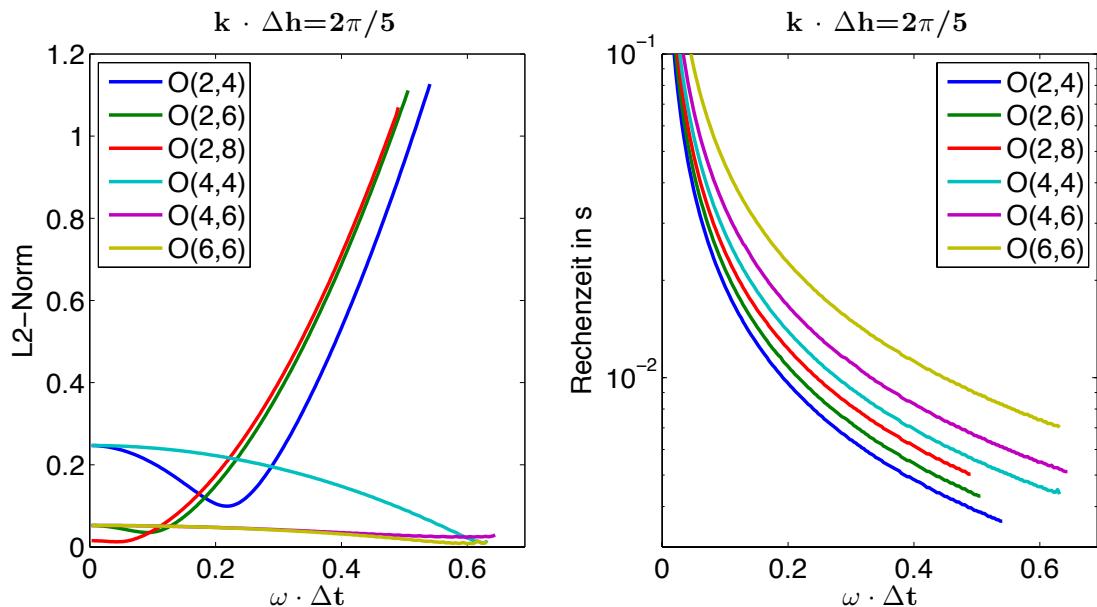


Abbildung 7.1.: Vergleich der verschiedenen Ordnungen in 1D bezüglich der Rechenzeit und der Abweichung zum Quellsignal. Es werden nur numerisch stabile Simulationen gezeigt.

Tabelle 7.1.: Vergleich der verschiedenen Ordnungen bei gleichem $\omega \cdot \Delta t = 0.119$.

	$\mathcal{O}(2, 4)$	$\mathcal{O}(2, 6)$	$\mathcal{O}(2, 8)$	$\mathcal{O}(4, 4)$	$\mathcal{O}(4, 6)$	$\mathcal{O}(6, 6)$
L2-Norm	0.187	0.044	0.058	0.238	0.051	0.051
$\omega \cdot \Delta t$	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119	0.119
Rechenzeit in ms	16.1	18.1	20.5	23.3	27.9	38.0

Tabelle 7.2.: Vergleich der verschiedenen Ordnungen bei gleicher Norm. Als Norm wurde hier die kleinste Norm gewählt welche $\mathcal{O}(2, 4)$ erreicht. $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ haben stets eine kleinere Norm.

	$\mathcal{O}(2, 4)$	$\mathcal{O}(2, 6)$	$\mathcal{O}(2, 8)$	$\mathcal{O}(4, 4)$	$\mathcal{O}(4, 6)$	$\mathcal{O}(6, 6)$
L2-Norm	0.0993	0.0993	0.0993	0.0993	-	-
$\omega \cdot \Delta t$	0.217	0.169	0.153	0.486	-	-
Rechenzeit in ms	8.8	12.8	15.9	5.7	-	-

Um auch einen Überblick über hohe zeitliche und räumliche Ordnungen zu erhalten wurden in Abbildung 7.2 Simulationen für die geraden zeitlichen Ordnungen von 2 bis 12 und räumlich die geraden Ordnungen von 4 bis 12 gerechnet. Die Berechnung wurde für ein festes $\omega \Delta t = 0.2168$ und $k \Delta x = 2\pi/5$ durchgeführt. Diese Konfiguration entspricht den Parametern des Minimums von $\mathcal{O}(2, 4)$ in Abbildung 7.1. Die L2-Norm wird hier logarithmisch dargestellt. Die Rechenzeit wurde auf ihr Maximum normiert.

Betrachtet man die L2-Norm zeigt sich, dass von zweiter zeitlicher Ordnung zu vierter zeitlicher Ordnung eine erhebliche Verbesserung der Norm auftritt. Die Erhöhung der zeitlichen Ordnung lohnt sich also erheblich. Vergleicht man nun die zeitlichen Ordnungen von 4. bis 12. Ordnung, ergeben sich signifikante Verbesserungen jeweils nur durch Erhöhung der räumlichen Ordnung. Eine Erhöhung der zeitlichen Ordnung ergibt leichte Genauigkeitsverbesserungen, geht aber mit einer starken Erhöhung der Rechenzeit einher.

Nun lassen sich die hier numerisch berechneten Genauigkeiten der einzelnen Ordnungen mit der in Kapitel 5.1 gezeigten Dispersionsrelation vergleichen. Betrachtet man die Dispersionskurven für $\mathcal{O}(2, 4)$ bei einem festen $k \Delta x = 2\pi/5$ so zeigt sich, dass für eine geringe Courant-Zahl die numerische Geschwindigkeit geringer als die physikalische ist, es tritt also Dispersion auf. Entlang von größeren Courant-Zahlen vergrößert sich das c_{fd}/c -Verhältnis, schneidet so $c_{\text{fd}}/c = 1$ und wächst anschließend weiter. Somit fällt die Dispersion auf ein Minimum und wächst anschließend bis zum Stabilitätslimit. Dieser Effekt spiegelt sich in der L2-Norm in Abbildung 7.2 wieder. $\mathcal{O}(2, 6)$ bzw. $\mathcal{O}(2, 8)$ weisen für feiner zeitliche Abtastungen eine geringere Dispersion als $\mathcal{O}(2, 4)$ auf, daher sind für diese FD-Schemata die Minima der L2-Norm zu kleineren $\omega \Delta t$ verschoben. Betrachtet man die Dispersion von $\mathcal{O}(4, 4)$ so ergibt sich eine umso geringere Dispersion, je höher die Courant-Zahl, und damit je höher $\omega \Delta t$ ist. Auch dieser Einfluss spiegelt sich in der L2-Norm wieder, diese wird mit zunehmend größerer Abtastung stetig geringer. Der gleiche Effekt trifft auf $\mathcal{O}(6, 6)$ zu, wobei dieses eine geringere Dispersion als $\mathcal{O}(4, 4)$ aufweist und folglich ergibt sich eine geringere L2-Norm. Für $\mathcal{O}(4, 6)$ nimmt die Dispersion ebenfalls mit steigender zeitlicher Abtastung ab, im Unterschied zu $\mathcal{O}(4, 4)$ bzw. $\mathcal{O}(6, 6)$, ergibt sich für eine Courant-Zahl von $r = 1$ kein dispersionsfreies Verhältnis. Daher fällt die L2-Norm für $\mathcal{O}(4, 6)$ nicht auf das gleiche Niveau.

Zusammenfassend zeigt sich Übereinstimmung der gefundenen Genauigkeiten der einzelnen FD-Schemata mit der jeweiligen Dispersionsrelation.

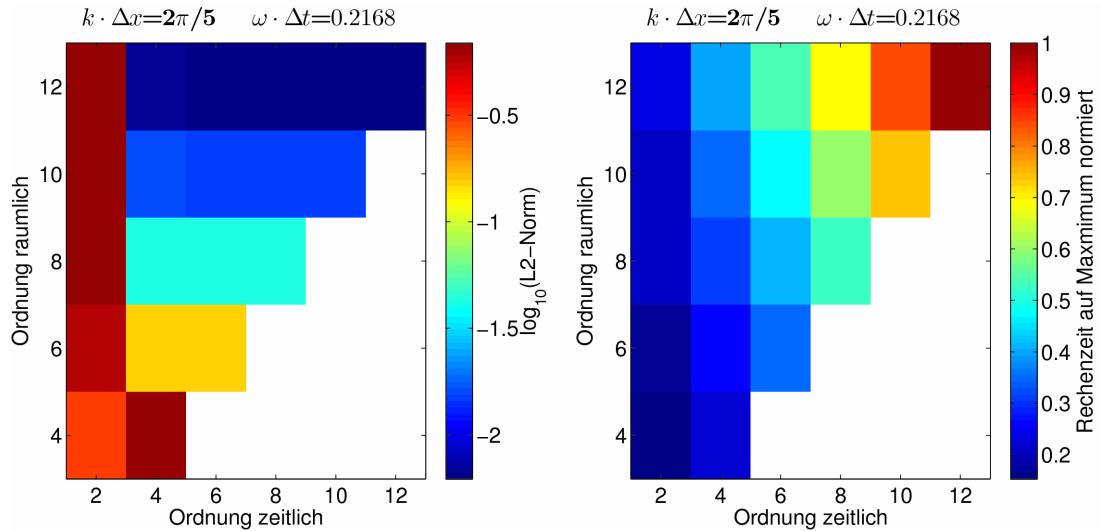


Abbildung 7.2.: Vergleich der L2-Norm und Rechenzeit für verschiedene zeitliche und räumliche Ordnungen in 1D. Für die weiße Fläche liegt Instabilität vor.

7.2. 2D

Um Genauigkeits- und Rechenzeitvergleiche in 2D durchzuführen wurden die expliziten FD-Schemata jeweils separat implementiert. Das vorgestellte homogene Modell wurde in einer Ausdehnung von 6000 m in x -Richtung und 6000 m in y -Richtung verwendet. Da die Dispersion winkelabhängig ist, wurden zwei Empfänger verwendet. Empfänger 1 wurde in einer Entfernung von 600 m zur Quelle entlang der x -Achse positioniert, Empfänger 2 600 m entlang der x -Achse und 600 m entlang der y -Achse. Zur Bestimmung der Genauigkeit der vorgestellten FD-Schemata wurde das jeweils aufgezeichnete Signal mit der analytischen Referenzlösung *AnalyticAnelastic* (MATLAB-Implementation von Josep de la Puenta (LMU München) nach Carcione et al. (1988) und Carcione (2001)) verglichen. Diese Referenzlösung speist das Quellsignal in die v_y -Geschwindigkeitskomponente ein, dies wurde auch in den FD-Schemata entsprechend berücksichtigt. Als Empfänger diente folglich die Aufzeichnung der v_y -Geschwindigkeitskomponente. Die Quelle wurde in der Modellmitte positioniert. Zeitlich wurde das Quellsignal vor der Geschwindigkeitsaktualisierung eingespeist, dabei wurde das Quellsignal zum Zeitpunkt $(n - \frac{1}{2})$ ausgewertet. Als Maß für die Abweichung wurde auch hier die L2-Norm verwendet. Um numerische Vergleichbarkeit zwischen analytischer Lösung und aufgezeichnetem Signal herzustellen, wurde die Anzahl der zeitlichen Abtastungen des aufgezeichneten Signals mit einer Spline-Interpolation an die analytische Lösung angepasst. Die Vergleichbarkeit der Amplituden wurde durch eine Normierung auf das jeweilige Maximum sichergestellt. Die Anzahl an Gitterpunkten ergibt sich aus dem Quotienten der Entfernung und der jeweiligen Abtastung Δx bzw. Δy , wobei eine äquidistante Abtastung in beide Raumrichtungen verwendet wurde. Die Simulation wurde für $k\Delta h = [2\pi/7.5; 2\pi/6; 2\pi/5]$ durchgeführt, dies entspricht 7.5, 6 und 5 Gitterpunkten pro Wellenlänge (Gl. 5.15). Die zeitliche Abtastung erfolgte auf dem Intervall $\omega\Delta t = [0.0314; 0.6283]$, es wurde dabei im Abstand von 0.0031 eine Simulation durchgeführt. Die Simulationen sind jeweils für $\mathcal{O}(2, 4)$, $\mathcal{O}(2, 6)$, $\mathcal{O}(2, 8)$, $\mathcal{O}(4, 4)$, $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(4, 8)$ durchgeführt worden.

Für Empfänger 1, welcher sich auf der x -Achse befindet, sind die entsprechenden L2-Normen und die Rechenzeiten in Abbildung 7.3 dargestellt. Da sich die Dispersionsrelationen für eine Wellenausbreitung entlang der x -Achse ($\Theta = 0^\circ$) auf den 1D-Fall vereinfachen, wird erwartet, dass sich die Genauigkeiten qualitativ wie im 1D-Fall verhalten. Vergleicht man die L2-Norm in Abbildung 7.3 mit Abbildung 7.1 für $k\Delta h = 2\pi/5$ so zeigt sich ein kongruentes Bild. Unterschiede ergeben sich zum einen durch verschiedene Stabilitätslimits zwischen 1D und 2D und zum anderen durch die Verwendung von verschiedenen Referenzsignalen. Eine Auswertung der Stabilitätslimits ließ Übereinstimmung mit den in Tabelle 6.2 theoretisch bestimmten Werten erkennen. Durch die qualitative Übereinstimmung der L2-Norm mit dem 1D-Fall wird auf eine erneute Diskussion verzichtet, stattdessen soll auf die Unterschiede, welche sich durch Variation der Anzahl an Gitterpunkten pro Wellenlänge ergeben, eingegangen werden.

Es lässt sich erkennen, dass die L2-Normen der verschiedenen räumlichen Ordnungen umso näher beisammen sind, je feiner die räumliche Diskretisierung ist. Dies bedeutet, bei einer feinen räumlichen Diskretisierung ist der Einfluss der gewählten räumlichen Ordnung gering. Dies deckt sich mit dem Effekt, dass bei einer feinen zeitlichen Diskretisierung der Einfluss der zeitlichen Ordnung verschwindet. Die Abnahme des Einflusses der räumlichen Ordnung lässt sich deutlich bei $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ erkennen. So weist $\mathcal{O}(4, 4)$ am Stabilitätslimit bei $k\Delta h = 2\pi/7.5$ die geringste L2-Norm aller gezeigten Ordnungen auf. Des weiteren verschiebt sich das Minimum der $\mathcal{O}(2, 4)$ Kurve mit geringerem $k\Delta h$ zu kleinerem $\omega\Delta t$. Für $\mathcal{O}(2, 6)$ und $\mathcal{O}(2, 8)$ ergeben sich die Minima bei dem kleinsten $\omega\Delta t$, für welches eine Simulation durchgeführt wurde. Durch den Vergleich mit dem 1D-Fall wird vermutet, dass sich das absolute Minimum der $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ jeweils außerhalb des $\omega\Delta t$ Intervalls, für welches Simulationen durchgeführt wurden, befindet.

Jeweils zur Rechten der L2-Norm in Abbildung 7.3 sind die Rechenzeitkurven halb-logarithmisch aufgetragen. Der Verlauf der Kurven ist auch im 2D-Fall proportional zum Reziproken von $\omega\Delta t$, da eine doppelt so große Zeitabtastung nur halb so viele Zeitschritte benötigt. Im Vergleich zum 1D-Fall ergibt sich eine erhebliche Steigerung der Rechenzeit, da die Berechnungen komplexer werden. Die Rechenzeit erhöht sich mit steigender Ordnung, wobei eine Erhöhung der zeitlichen Ordnung eine größere Erhöhung der Rechenzeit zur Folge hat, als eine Erhöhung der räumlichen Ordnung. Für $\mathcal{O}(4, 6)$ weist die Rechenzeit eine Unterbrechung auf, welche darauf zurückzuführen ist, dass diese nur für numerisch stabile Simulationen gezeigt wird. Da hier jede Simulation nur einmal durchgeführt wurde, ergeben sich teilweise statistische Ungenauigkeiten, wie beispielsweise bei den $\mathcal{O}(4, 4)$ Rechenzeitkurven.

In Abbildung 7.4 sind die L2-Normen und die zugehörigen Rechenzeiten für Empfänger 2 zu sehen. Dieser befindet sich relativ zur Quelle im Abstand von 600 m entlang der x -Achse, wie auch im Abstand von 600 m entlang der y -Achse. Dies resultiert in einer Ausbreitungsrichtung der Welle von 45° . Da sich hier die Quell-Empfänger-Entfernung zu 849 m ergibt, kann kein quantitativer Vergleich mit der L2-Norm des Empfängers 1 durchgeführt werden. Die Auswertung der Stabilitätsgrenzen ergaben Übereinstimmung mit den gefundenen Werten in Abbildung 7.3. Auch für diese Ausbreitungsrichtung zeigt sich, dass die Kurven mit $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ für große $\omega\Delta t$ eine steigende L2-Norm aufweisen. $\mathcal{O}(4, 4)$ weist eine monoton fallende Norm auf, während $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(4, 8)$ über $\omega\Delta t$ weitestgehend konstant verlaufen

und für große Courant-Zahlen eine leichte Steigung der Norm zeigen. Besonders für $k\Delta h = 2\pi/7.5$ ist ein deutlicher Unterschied zwischen den L2-Normen von $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ bezüglich $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ zu erkennen. Die Normkurven verschiedener räumlicher Ordnungen liegen umso näher beisammen, je feiner die räumliche Abtastung ist. Auffallend ist, dass die Aufspaltung der räumlichen Ordnungen hier geringer ist als bei der Ausbreitung entlang der x -Achse. Die Normkurven von $\mathcal{O}(2, 6)$ und $\mathcal{O}(2, 8)$ verlaufen für alle drei gezeigten $k\Delta h$ fast deckungsgleich, ebenso verlaufen $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(6, 6)$ nahezu identisch.

Die Rechenzeitkurven gleichen hier den Kurven aus Abbildung 7.3, da das gleiche Modell verwendet wurde. Geringe Differenzen sind auf die Tatsache der zeitversetzten Simulationen zurückzuführen.

Nun stellt sich auch hier die Frage, welche Kombination von zeitlicher und räumlicher Ordnung eine optimale Ausbeute von Genauigkeit und Rechenzeit erzielt. Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, ist eine genaue Analyse nötig.

Wie schon im 1D-Fall geht die Wahl einer höheren räumlichen Ordnung bei $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ nicht stets mit einer Erhöhung der Genauigkeit einher. So ergeben $\mathcal{O}(2, 6)$ bzw. $\mathcal{O}(2, 8)$ nur bei einer feinen zeitlichen Abtastung Genauigkeitsgewinne gegenüber $\mathcal{O}(2, 4)$, sie gehen hier aber mit einer Erhöhung der Rechenzeit einher. Verwendet man ein $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ FD-Schema, so weist also $\mathcal{O}(2, 4)$ das lohnendste Rechenzeit-Genauigkeitsverhältnis auf.

Bei den FD-Schemata $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ mit den Diskretisierungen $k\Delta h = 2\pi/5$ sowie $k\Delta h = 2\pi/6$ erzielen die höheren räumlichen Ordnungen stets eine höhere Genauigkeit als $\mathcal{O}(4, 4)$. Hier muss entschieden werden, ob die Erhöhung der Rechenzeit durch den Genauigkeitszuwachs gerechtfertigt ist. Bei einer Diskretisierung von $k\Delta h = 2\pi/7.5$ weist $\mathcal{O}(4, 4)$ beim Stabilitätslimit die geringste L2-Norm aller gezeigten Ordnungen auf. Da die Berechnungen für $\mathcal{O}(4, 4)$ weniger umfangreich sind, ist auch die Rechenzeit geringer als für ein FD-Schema höherer räumlicher Ordnung mit $\mathcal{O}(\Delta t^4)$.

Da möglichst geringe Rechenzeiten gewünscht sind, ist das Bestreben, stets eine Diskretisierung nahe am Stabilitätslimit des gewählten FD-Schemas zu verwenden.

Wie sich gezeigt hat, besitzt unter den $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ FD-Schemata $\mathcal{O}(2, 4)$ und unter den $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ FD-Schemata $\mathcal{O}(4, 4)$ jeweils ein günstiges Rechenzeit-Genauigkeitsverhältnis, daher soll nun ein Vergleich zwischen diesen Ordnungen durchgeführt werden.

Bei einer festen räumlichen Diskretisierung weist $\mathcal{O}(2, 4)$ am Stabilitätslimit stets eine geringere Rechenzeit als $\mathcal{O}(4, 4)$ auf, aber auch eine signifikant höhere L2-Norm. Durch das Verwenden von $\mathcal{O}(4, 4)$, anstelle von $\mathcal{O}(2, 4)$, erhält man so ein genaueres Ergebnis, welches mit einer Erhöhung der Rechenzeit einhergeht. In Abbildung 7.5 ist für die Empfängerkonfiguration 2, welche einer Ausbreitung in 45° -Richtung entspricht, die Wellenform vergleichend dargestellt. Die Kennwerte dieser Simulation sind in Tabelle 7.3 ersichtlich. Die zeitliche Abtastung wurde für beide Ordnungen nahe am Stabilitätslimit gewählt. Die Wellenform von $\mathcal{O}(2, 4)$ eilt der Referenzlösung deutlich voraus, wohingegen $\mathcal{O}(4, 4)$ keinen zeitlichen Versatz aufweist. Darauf hinaus weist $\mathcal{O}(4, 4)$ auch bei den Extrema Übereinstimmung mit der Referenzlösung auf, $\mathcal{O}(2, 4)$ zeigt hier Unterschiede. Vergleicht man nun die L2-Norm, so ergibt sich durch die Verwendung von $\mathcal{O}(4, 4)$ eine ca. 20-mal geringere L2-Norm als mit $\mathcal{O}(2, 4)$, die Rechenzeit steigt hierfür um Faktor Drei. Um die gleiche Genauigkeit wie $\mathcal{O}(4, 4)$ mit $\mathcal{O}(2, 6)$ zu erhalten, würde die Rechenzeit um Faktor 15 und mit $\mathcal{O}(2, 8)$ um Faktor 18 steigen.

Betrachtet man nun die L2-Normen bei verschiedenen räumlichen Diskretisierungen,

so ist es möglich, für $\mathcal{O}(4, 4)$ eine gröbere räumliche Diskretisierung zu wählen als für $\mathcal{O}(2, 4)$ und gleichzeitig eine geringere L2-Norm bei einer niedrigeren Rechenzeit zu erhalten. In diesem Fall liefert $\mathcal{O}(4, 4)$ das genauere Resultat in kürzerer Zeit. Beispielhaft ergibt sich bei der Empfängerkonfiguration 2 durch den Wechsel von $\mathcal{O}(2, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/7.5$ zu $\mathcal{O}(4, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/5$ eine Verbesserung der L2-Norm um Faktor 9 bei einer Verringerung der Rechenzeit um 25% (zeitliche Diskretisierung jeweils nahe des Stabilitätslimits). Vergleicht man die Wellenformen in Abbildung 7.6, so ist die erhöhte Übereinstimmung von $\mathcal{O}(4, 4)$ mit der Referenzlösung im Vergleich zu $\mathcal{O}(2, 4)$ ersichtlich. Während $\mathcal{O}(4, 4)$ nahezu deckungsgleich zur Referenzlösung verläuft, zeigt $\mathcal{O}(2, 4)$ eine zeitliche Verschiebung sowie Unterschiede in den Extrempunkten. Die Diskretisierung, sowie die Rechenzeit und die L2-Norm, der gezeigten Wellenform sind in Tabelle 7.4 aufgeführt.

Die hier gefundenen Genauigkeitswerte der FD-Schemata lassen sich nun mit den Dispersionsrelationen (Abb. 5.4, Abb. 5.5) vergleichen. Die Übereinstimmung der allgemeinen Form der L2-Normen mit den Dispersionsrelationen wurde im 1D-Fall diskutiert und gilt in 2D analog. Die Genauigkeitsanalyse ergibt, dass eine feinere räumliche Diskretisierung eine erhöhte Genauigkeit zur Folge hat. Dies spiegelt sich in den Dispersionsrelationen wieder, für geringere $k\Delta h$ streben dort die c_{fd}/c -Verhältnisse gegen das dispersionsfreie Verhältnis von Eins. Dieses Verhalten der Dispersionsrelationen für kleine $k\Delta h$ bewirkt auch die Abnahme des Einflusses der räumlichen Ordnung mit kleinerem $k\Delta h$. Für eine Ausbreitungsrichtung von 45° zeigt sich für $\mathcal{O}(4, 6)$ und $\mathcal{O}(4, 8)$ ein Anstieg der L2-Norm nahe des Stabilitätslimits. Hier weisen die zugehörigen Dispersionsrelationen jeweils für große Courant-Zahlen r , und damit für grobe zeitliche Abtastungen, eine erhöhte Dispersion auf.

Die Übereinstimmung der L2-Normen mit den Dispersionsrelationen lässt sich somit feststellen.

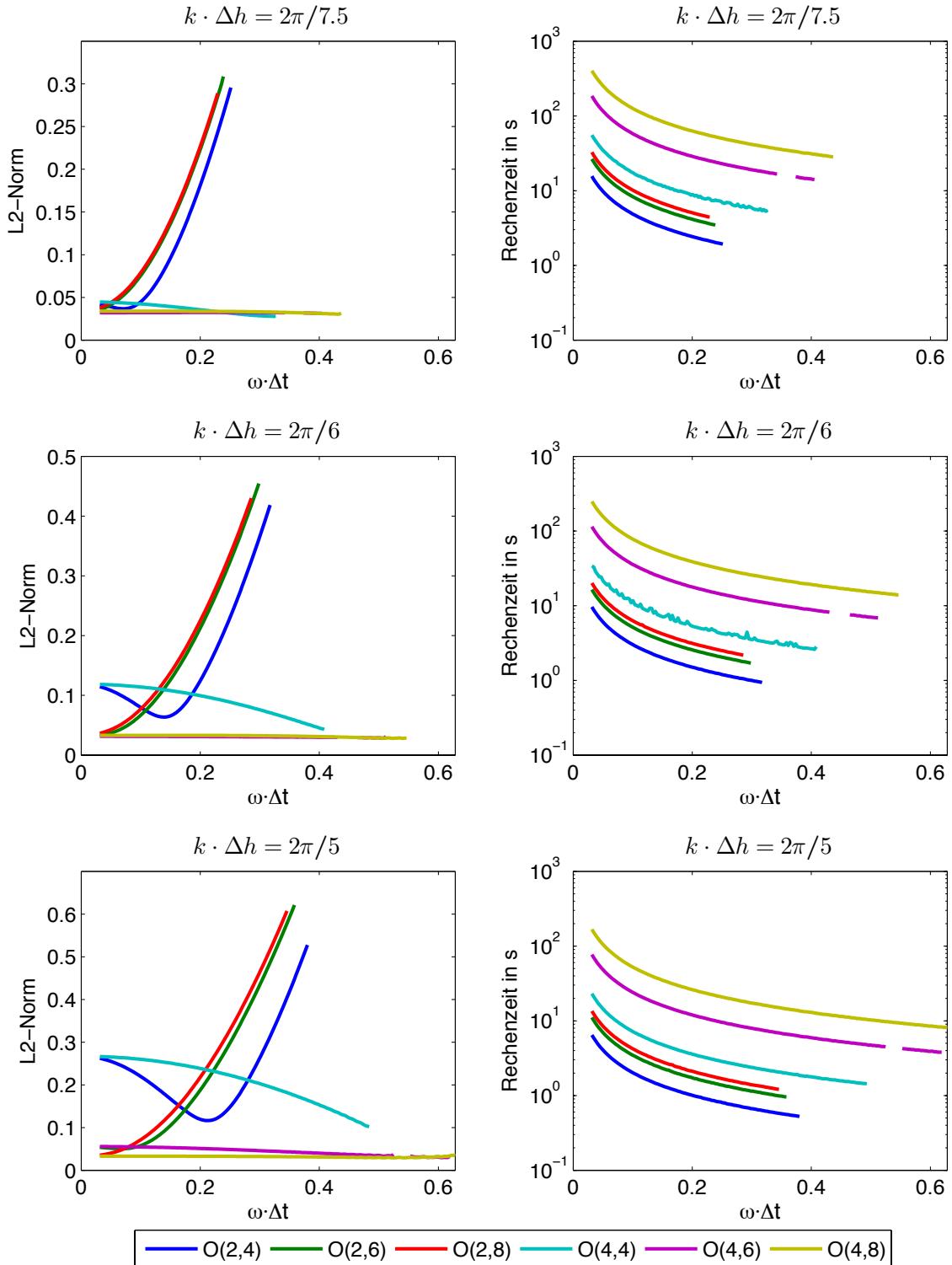


Abbildung 7.3.: Vergleich der verschiedenen Ordnungen für Empfänger 1 in 2D bezüglich der Rechenzeit und der Abweichung zur Referenzlösung. Es werden nur numerisch stabile Simulationen gezeigt. Empfänger 1 befindet sich im Abstand von 600 m auf der x -Achse von der Quelle.

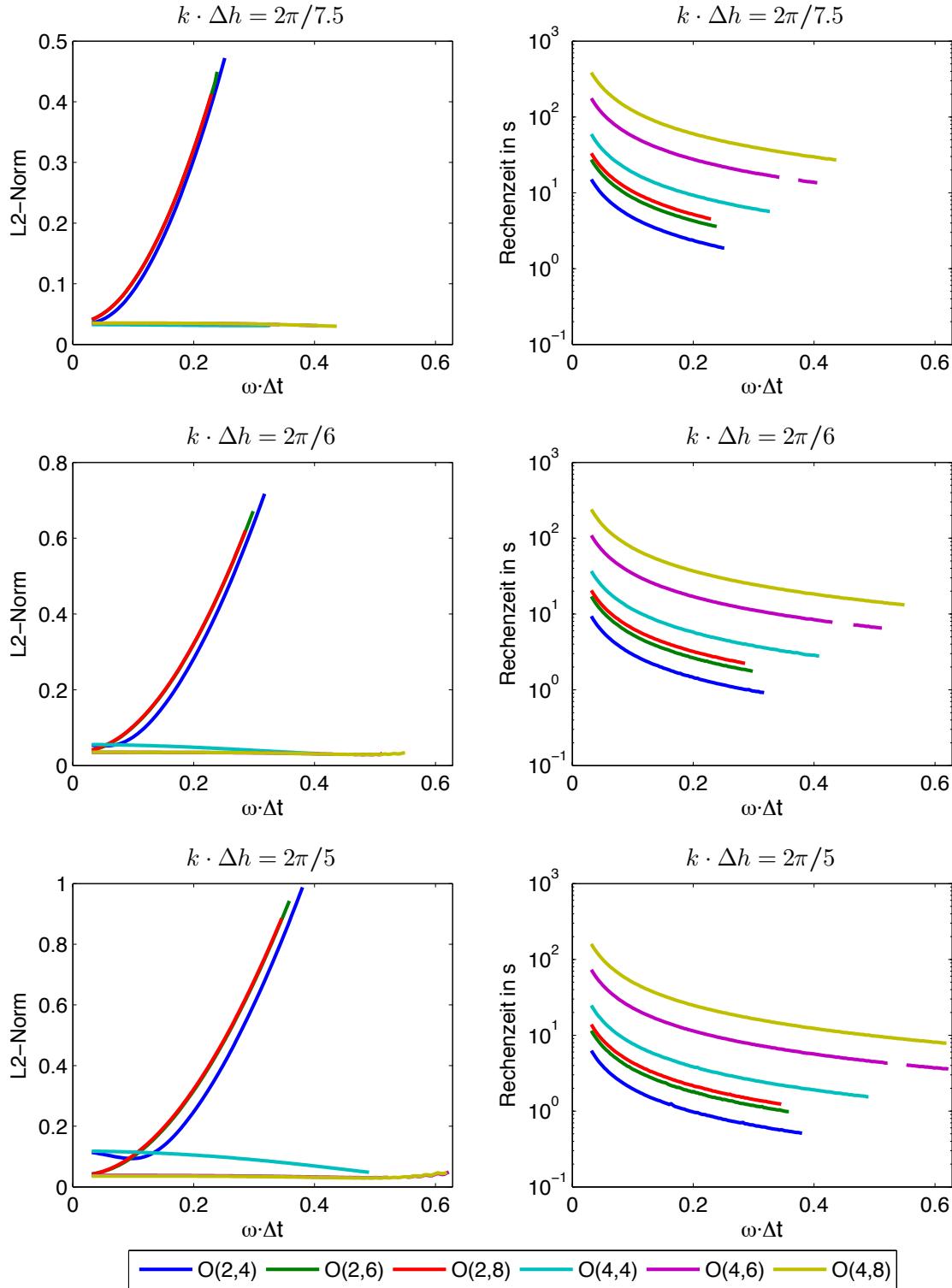


Abbildung 7.4.: Vergleich der verschiedenen Ordnungen für Empfänger 2 in 2D bezüglich der Rechenzeit und der Abweichung zur Referenzlösung. Es werden nur numerisch stabile Simulationen gezeigt. Der Empfänger 2 befindet sich im Abstand von sowohl 600 m entlang der x - wie auch der y -Achse von der Quelle.

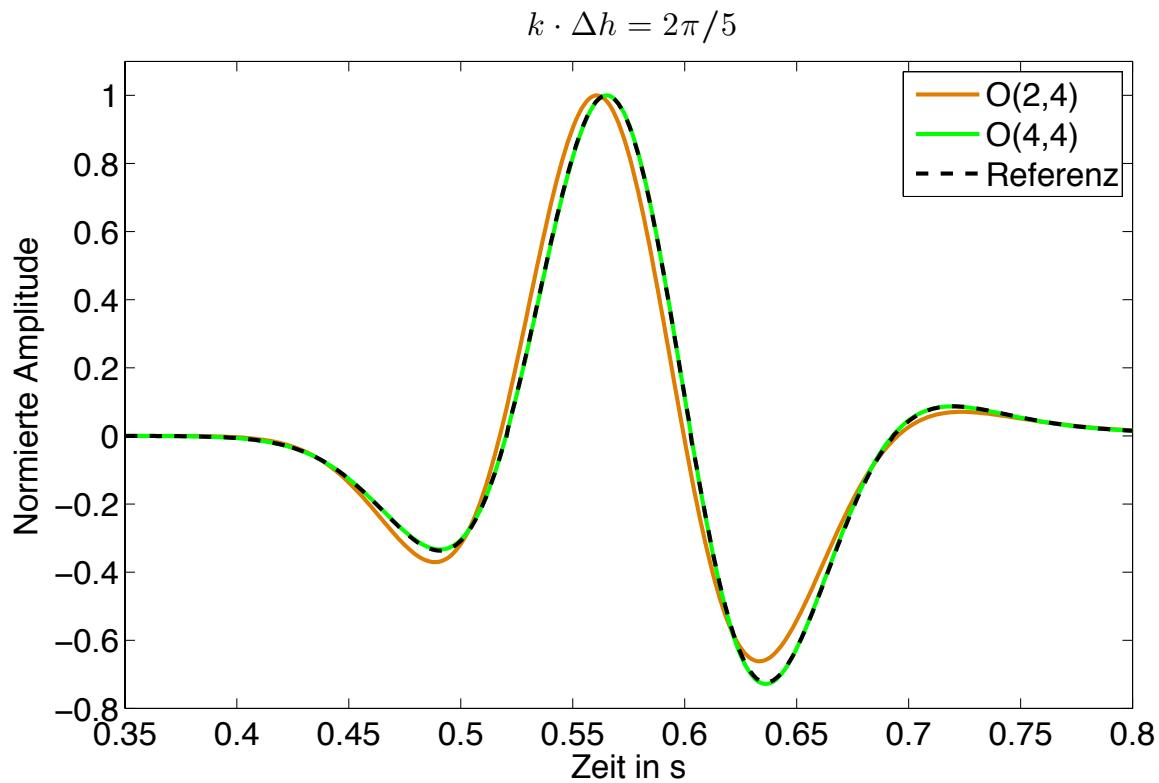


Abbildung 7.5.: Vergleich der Wellenform für Empfänger 2 bei $k\Delta h = 2\pi/5$. Die zeitliche Abtastung lässt sich Tabelle 7.3 entnehmen.

Tabelle 7.3.: Vergleich von $\mathcal{O}(2, 4)$ und $\mathcal{O}(4, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/5$. Die zeitliche Diskretisierung wurde nahe dem Stabilitätslimit gewählt.

Ordnung	$\omega\Delta t$	L2-Norm	Rechenzeit
$\mathcal{O}(2, 4)$	0.38	0.987	0.52 s
$\mathcal{O}(4, 4)$	0.49	0.048	1.44 s

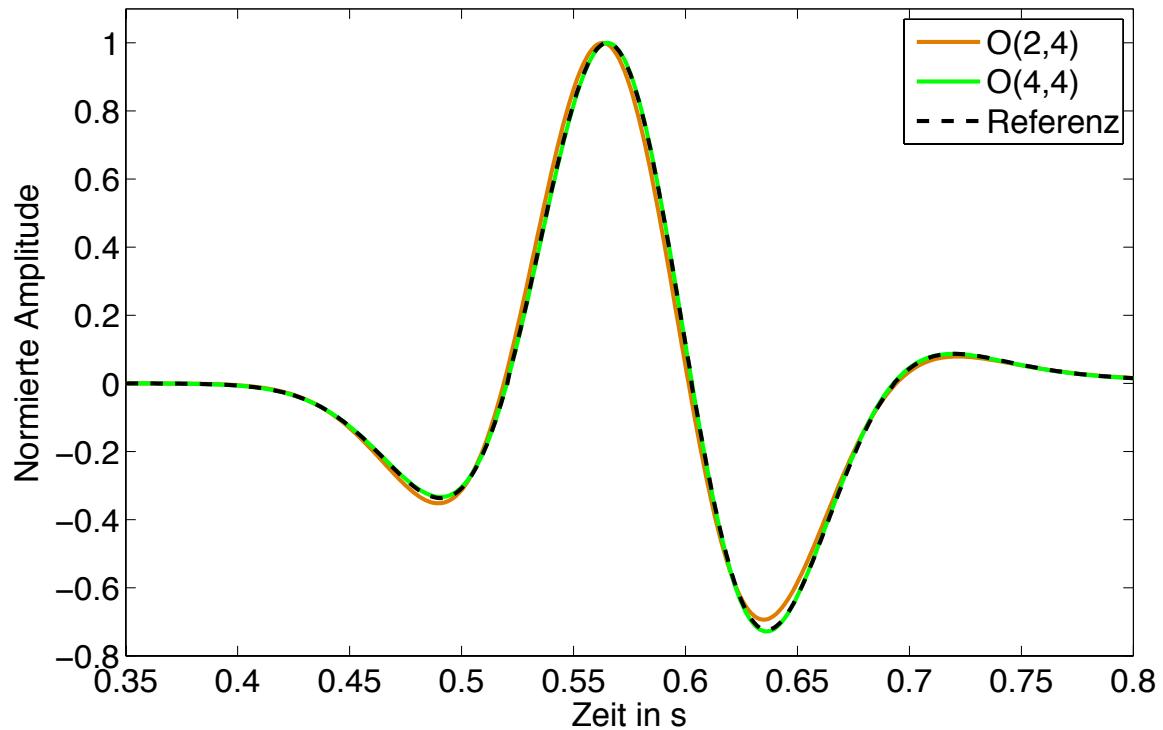


Abbildung 7.6.: Vergleich der Wellenform für Empfänger 2. Es wurde $\mathcal{O}(2, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/7.5$ und $\mathcal{O}(4, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/5$ abgetastet. Die zeitliche Abtastung lässt sich Tabelle 7.4 entnehmen.

Tabelle 7.4.: Vergleich von $\mathcal{O}(2, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/7.5$ und $\mathcal{O}(4, 4)$ bei $k\Delta h = 2\pi/5$. Die zeitliche Diskretisierung wurde nahe dem Stabilitätslimit gewählt.

Ordnung	$\omega\Delta t$	L2-Norm	Rechenzeit
$\mathcal{O}(2, 4)$	0.25	0.471	1.91 s
$\mathcal{O}(4, 4)$	0.49	0.048	1.44 s

8. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde in 1D und 2D ein Finite-Differenzen-Schema der akustischen Wellengleichung höherer zeitlicher Ordnung auf dem geschachtelten Gitter vorgestellt. In 1D konnte ein explizites FD-Schema beliebiger räumlicher und zeitlicher Ordnung gefunden werden. Für den 2D-Fall wurde ein FD-Schema vierter zeitlicher und höherer räumlicher Ordnung entwickelt. Die präsentierten FD-Schemata wurden jeweils auf Dispersion und numerische Stabilität untersucht. Abschließend wurden numerische Experimente durchgeführt, aus welchen Aussagen über Genauigkeit und Rechenbedarf gezogen wurden.

Ausgangspunkt der Untersuchung bildete die akustische Wellengleichung erster Ordnung in der Druck-Geschwindigkeits-Formulierung. Da eine direkte Diskretisierung zeitlicher Ableitungen höherer Ordnung numerisch instabil ist, wurde das Lax-Wendroff-Verfahren verwendet. Durch dieses Verfahren können auftretende Zeitableitungen, unter Verwendung der Wellengleichung, in räumliche Ableitungen umgeschrieben werden. Dabei wurde die Propagation des Wellenfeldes in einem homogenen Medium untersucht, daher musste die räumliche Variation von Materialparametern nicht untersucht werden. Bedingt durch diese Näherung eignen sich die vorgestellten FD-Schemata nur beschränkt für heterogene Modelle.

Durch den Ansatz einer ebenen Welle konnten aus den expliziten FD-Schemata Dispersionsrelationen abgeleitet werden. Die Dispersionsrelation beschreibt hierbei das Verhältnis zwischen numerischer Ausbreitungsgeschwindigkeit und der gewünschten physikalischen Geschwindigkeit. Für FD-Schemata zweiter zeitlicher Ordnung treten größere und kleinere numerische Geschwindigkeiten als die physikalische Geschwindigkeit auf. Wohingegen FD-Schemata vierter zeitlicher Ordnung nur geringere numerische Geschwindigkeiten aufweisen. Des Weiteren ist die Winkelabhängigkeit der Dispersion in 2D bei vierter zeitlicher Ordnung geringer, als dies bei zweiter zeitlicher Ordnung der Fall ist.

Aus der Beschränktheit der Dispersionsrelation konnte durch eine Abschätzung ein Stabilitätslimit für die FD-Schemata abgeleitet werden. Stimmte in 1D die räumliche und die zeitliche Ordnung überein, ergab sich das Stabilitätslimit zu einer Courant-Zahl von Eins. Bei zweiter zeitlicher Ordnung verringerte sich das Stabilitätslimit

mit steigender räumlicher Ordnung, wohingegen sich das Limit bei vierter zeitlicher Ordnung jeweils vergrößerte. Für den 2D-Fall ergaben sich kleinere Stabilitätslimits als in 1D. Allerdings folgten, wie auch im 1D-Fall, für vierte zeitliche Ordnung größere Limits als für zweite zeitliche Ordnung. Dies bedeutet, durch die Wahl von vierter zeitlicher Ordnung ist es möglich eine gröbere zeitliche Diskretisierung zu wählen. Da nicht für alle FD-Schemata vierter zeitlicher Ordnung Stabilitätslimits gefunden werden konnten, sind hier weitere Untersuchungen nötig.

Zur Abschätzung der Genauigkeit und der benötigten Rechenzeit der vorgestellten Ordnungen wurden jeweils numerische Simulationen durchgeführt. Eine Genauigkeitsaussage wurde dabei durch den Vergleich aufgezeichneter Seismogramme mit einer Referenzlösung abgeleitet. Der Vergleich von Simulationen mit zeitlich höheren Ordnungen in 1D zeigte, dass sich durch die Wahl von FD-Schemata vierter zeitlicher Ordnung anstatt zweiter zeitlicher Ordnung signifikante Genauigkeitserhöhungen ergeben. Eine weitere Erhöhung der zeitlichen Ordnung ergab vergleichsweise geringe Verbesserungen. Bei Simulationen mit zweiter zeitlicher Ordnung ging eine Erhöhung der räumlichen Ordnung nicht stets mit einem Genauigkeitsgewinn einher, dies ist nur bei einer feinen zeitlichen Abtastung der Fall. Da stets geringe Rechenzeiten gewünscht sind, wird die zeitliche Diskretisierung nahe des Stabilitätslimits gewählt. Vergleicht man hier die einzelnen Ordnungen jeweils am Stabilitätslimit, so weist $\mathcal{O}(2, 4)$ die höchste Genauigkeit bei der geringsten Rechenzeit auf. Bei FD-Schemata vierter zeitlicher Ordnung ist es möglich, durch die Wahl von einer höheren räumlichen Ordnung Genauigkeitsgewinne zu erzielen, allerdings erhöht sich auch die Rechenzeit. Betrachtet man das Rechenzeit-Genauigkeits-Verhältnis, so erwies sich hier $\mathcal{O}(4, 4)$ als optimal. Der direkte Vergleich von $\mathcal{O}(2, 4)$ und $\mathcal{O}(4, 4)$ jeweils am Stabilitätslimit lässt zwei Aussagen zu. Bei fester räumlicher Diskretisierung lassen sich durch den Einsatz von $\mathcal{O}(4, 4)$ anstelle von $\mathcal{O}(2, 4)$ Genauigkeitsgewinne erzielen, die Rechenzeit steigt hierbei geringfügig. Betrachtet man diese beiden Ordnungen bei verschiedenen räumlichen Diskretisierungen, so zeigt sich, dass es durch die Wahl einer größeren räumlichen Diskretisierung bei $\mathcal{O}(4, 4)$ als bei $\mathcal{O}(2, 4)$ möglich ist, eine erhöhte Genauigkeit in einer kürzeren Zeit zu erzielen. Mit $\mathcal{O}(4, 4)$ ist es also möglich, Simulationen genauer und mit geringerer Rechenzeit durchzuführen.

Das hier vorgestellte FD-Schema vierter zeitlicher und vierter räumlicher Ordnung weist einige Vorteile gegenüber den bisher verwendeten FD-Schemata zweiter zeitlicher Ordnung auf. Durch weitere Untersuchungen gilt es nun, das gezeigte FD-Schema auch auf heterogene Modelle zu übertragen und zu testen. Sollten sich die hier gefundenen Vorteile bestätigen, ist es zukünftig möglich genauere Wellenfeldsimulationen mit dem Verfahren der Finiten-Differenzen durchzuführen.

Literaturverzeichnis

- Bohlen, T. und Saenger, E. H. (2006). Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of rayleigh waves. *Geophysics*, 71(4):T109–T115.
- Carcione, J. M. (2001). *Wave fields in real media; wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media*. Amsterdam; New York: Pergamon.
- Carcione, J. M., Kosloff, D., und Kosloff, R. (1988). Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 95(3):597–611.
- Chen, J.-B. (2011). A stability formula for Lax-Wendroff methods with fourth-order in time and general-order in space for the scalar wave equation. *Geophysics*, 76(2):T37–T42.
- Courant, R., Friedrichs, K., und Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzen-gleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100(1):32–74.
- Dablain, M. (1986). The application of high order differencing to the scalar wave equation. *Geophysics*, 51(1):54–66.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference p-sv seismograms. *Geophysics*, 53(11):1425–1436.
- Liu, Y. und Sen, M. K. (2009). A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation. *Journal of computational Physics*, 228(23):8779–8806.
- Merziger, G., editor (2010). *Formeln + Hilfen Höhere Mathematik*. Binomi, Barsinghausen, 6. aufl. edition.
- Ricker, N. (1953). The form and laws of propagation of seismic wavelets. *Geophysics*, 18(1):10–40.
- Virieux, J. (1986). P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51(4):889–901.

Anhang

A. Taylor-Koeffizienten

Im Folgenden wird dargestellt wie die Taylor-Koeffizienten für räumlichen Ableitungen in beliebiger Ordnung berechnet werden können. Bis zur achten Ordnung befinden sie die Koeffizienten in Tabelle A.1 bis A.4. Es wird unterschieden in gerade und ungerade Ableitungen, da dafür ein leicht abgewandeltes Verfahren angewandt wird. Da im Folgenden jeweils nur in eine Raumrichtung abgeleitet wird, ist jeweils nur diese Raumrichtung in den Indizes notiert.

A.1. Ungerade Ableitungen

Sei f_j^n eine Funktion die zu einem beliebigen Zeitschritt n auf halben Gitterpunkten definiert ist, also jeweils bei $(j + \frac{1}{2})$. Nun werden die Differenzen von $f_{j+m+\frac{1}{2}}^n$ und $f_{j-m-\frac{1}{2}}^n$ entwickelt und als Summe dargestellt:

$$f_{j+m+\frac{1}{2}}^n - f_{j-m-\frac{1}{2}}^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^N \left(m + \frac{1}{2} \right)^{2k+1} \frac{\Delta x^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} f_j^n. \quad (\text{A.1})$$

Schreibt man nun Gleichung A.1 für $m = 0, 1, 2 \dots M$ und $M = N$ auf und stellt dies als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n \\ f_{j+\frac{3}{2}}^n - f_{j-\frac{3}{2}}^n \\ f_{j+\frac{5}{2}}^n - f_{j-\frac{5}{2}}^n \\ \dots \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2^1 \cdot 1!} & \frac{1}{2^3 \cdot 3!} & \frac{1}{2^5 \cdot 5!} & \dots \\ \frac{3^1}{2^1 \cdot 1!} & \frac{3^3}{2^3 \cdot 3!} & \frac{3^5}{2^5 \cdot 5!} & \dots \\ \frac{5^1}{2^1 \cdot 1!} & \frac{5^3}{2^3 \cdot 3!} & \frac{5^5}{2^5 \cdot 5!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x \cdot \frac{\partial^1}{\partial x^1} f_j^n \\ \Delta x^3 \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3} f_j^n \\ \Delta x^5 \cdot \frac{\partial^5}{\partial x^5} f_j^n \\ \dots \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \quad (\text{A.2})$$

dar, ergeben sich die Ableitungsterme nach folgendem System:

$$\vec{b} = A \cdot \vec{x}, \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.4})$$

Nun ergibt sich die l -te Ableitung wie folgt, wobei l ungerade ist, das heißt $l = 1, 3, 5 \dots$ Die Ordnung der Ableitung ergibt sich aus $(2 \cdot S + 2)$. Für die Stabilität

muss dabei zwingend $l < (2 \cdot S + 2)$ erfüllt sein. Die Koeffizienten sind bis zur 8. Ordnung und bis zur 5. Ableitung in Tabelle A.1, A.2 und A.3 gegeben.

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} f_j^n = \frac{1}{\Delta x^l} \left[\sum_{s=0}^S \beta_{s+1}^l \left(f_{j+s+\frac{1}{2}}^n - f_{j-s-\frac{1}{2}}^n \right) \right] \quad (\text{A.5})$$

Mit Gleichung A.5 lassen sich die räumlichen Ableitungen von der Geschwindigkeit gewinnen. Analog ergibt sich eine Gleichung um die räumlichen Ableitungen des Druckes zu bestimmen:

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} f_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x^l} \left[\sum_{s=0}^S \beta_{s+1}^l \left(f_{j+s+1}^{n-\frac{1}{2}} - f_{j-s}^{n-\frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (\text{A.6})$$

Tabelle A.1.: Koeffizienten β^1 für die erste Ableitung.

Ordnung	β_1^1	β_2^1	β_3^1	β_4^1
2.Ordnung	1			
4.Ordnung	9/8	-1/24		
6.Ordnung	75/64	-25/384	3/640	
8.Ordnung	1225/1024	-245/3072	49/5120	-5/7168

Tabelle A.2.: Koeffizienten β^3 für die dritte Ableitung.

Ordnung	β_1^3	β_2^3	β_3^3	β_4^3
4.Ordnung	-3	1		
6.Ordnung	-17/4	13/8	-1/8	
8.Ordnung	-1891/384	1299/640	-499/1920	37/1920

Tabelle A.3.: Koeffizienten β^5 für die fünfte Ableitung.

Ordnung	β_1^5	β_2^5	β_3^5	β_4^5
6.Ordnung	10	-5	1	
8.Ordnung	415/24	-75/8	59/24	-5/24

A.2. Gerade Ableitungen

Sei f_j^n eine Funktion die zu einem beliebigen Zeitschritt n auf ganzen Gitterpunkten definiert ist, also jeweils bei (j) . Nun wird die Summe von f_{j+m}^n und f_{j-m}^n entwickelt und als Summe dargestellt:

$$f_{j+m}^n + f_{j-m}^n = 2 \cdot f_j^n + 2 \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\Delta x^{2k} \cdot m^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} f_j^n. \quad (\text{A.7})$$

Führt man dies nun für $m = 0, 1, 2, \dots, M$ und $M = N$ in ein Matrixsystem über:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_{j+1}^n + f_{j-1}^n \\ f_{j+2}^n + f_{j-2}^n \\ f_{j+3}^n + f_{j-3}^n \\ \dots \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = 2 \underbrace{\begin{pmatrix} f_j^n \\ f_j^n \\ f_j^n \\ \dots \end{pmatrix}}_{\vec{c}} + 2 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{(2 \cdot 2)!} & \frac{1}{(2 \cdot 3)!} & \dots \\ \frac{2^2}{2} & \frac{2^{2 \cdot 2}}{(2 \cdot 2)!} & \frac{2^{2 \cdot 3}}{(2 \cdot 3)!} & \dots \\ \frac{3^2}{1} & \frac{3^{2 \cdot 2}}{(2 \cdot 2)!} & \frac{3^{2 \cdot 3}}{(2 \cdot 3)!} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta x^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_j^n \\ \Delta x^4 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} f_j^n \\ \Delta x^6 \cdot \frac{\partial^6}{\partial x^6} f_j^n \\ \dots \end{pmatrix}}_{\vec{x}}, \quad (\text{A.8})$$

ergeben sich die Ableitungen nach folgendem System:

$$\vec{b} = \vec{c} + A\vec{x}, \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{x} = A^{-1}(\vec{b} - \vec{c}). \quad (\text{A.10})$$

Die l -te Ableitung ergibt sich mit der folgenden Gleichung. Wobei l nur gerade Werte annehmen darf, dh. $l = 2, 4, 6, \dots$. Die Ordnung der Ableitung ergibt sich aus $2 \cdot S$.

$$\frac{\partial^l}{\partial x^l} f_j^n = \frac{1}{\Delta x^l} \left[\gamma_0^l \cdot f_j^n + \sum_{s=1}^S \gamma_s^l (f_{j+s}^n - f_{j-s}^n) \right] \quad (\text{A.11})$$

Tabelle A.4.: Koeffizienten γ^2 für die zweite Ableitung.

Ordnung	γ_0^2	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	γ_4^2	γ_5^2
2. Ordnung	-2	1				
4. Ordnung	-5/2	4/3	-1/12			
6. Ordnung	-49/18	3/2	-3/20	1/90		
8. Ordnung	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560	
10. Ordnung	-1086/371	5/3	-5/21	5/126	-5/1008	1/3150

B. Dispersionsrelationen

B.1. 2D $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^6)$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = & +\frac{75r}{64}\left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\sin(\Theta)\right] \\ & -\frac{25r}{384}\left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \\ & +\frac{3r}{640}\left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

B.2. 2D $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta h^8)$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = & +\frac{1225r}{1024}\left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\sin(\Theta)\right] \\ & -\frac{245r}{3072}\left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \\ & +\frac{49r}{5120}\left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \\ & -\frac{5r}{7168}\left[\sin\left(\frac{7}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{7}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

B.3. 2D $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^6)$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = & \\ & +\left(\frac{75r}{64} - \frac{17r^3}{24 \cdot 4}\right)\left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\sin(\Theta)\right] \\ & +\left(\frac{13r^3}{24 \cdot 8} - \frac{25r}{384}\right)\left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \\ & +\left(\frac{3r}{640} - \frac{r^3}{24 \cdot 8}\right)\left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta)\right] \\ & +\frac{r^3 \cdot 75}{24 \cdot 64}\left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\sin(\Theta) \cdot c_x\right] \\ & -\frac{r^3 \cdot 25}{24 \cdot 384}\left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta) \cdot c_x\right] \\ & +\frac{r^3 \cdot 3}{24 \cdot 640}\left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right)\cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right)\sin(\Theta) \cdot c_x\right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Wobei folgende Koeffizienten benutzt wurden:

$$c_y = \left[\frac{3 \cdot 2}{2} \cos(k_y\Delta y) - \frac{3 \cdot 2}{20} \cos(2k_y\Delta y) + \frac{2}{90} \cos(3k_y\Delta y) - \frac{49}{18} \right], \quad (\text{B.4})$$

$$c_x = \left[\frac{3 \cdot 2}{2} \cos(k_x\Delta x) - \frac{3 \cdot 2}{20} \cos(2k_x\Delta x) + \frac{2}{90} \cos(3k_x\Delta x) - \frac{49}{18} \right]. \quad (\text{B.5})$$

B.4. 2D $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta h^8)$

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \\
& + \left(\frac{1225r}{1024} - \frac{1891r^3}{24 \cdot 384}\right) \left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \sin(\Theta) \right] \\
& + \left(\frac{1299r^3}{24 \cdot 640} - \frac{245r}{3072}\right) \left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \right] \\
& + \left(\frac{49r}{5120} - \frac{499r^3}{24 \cdot 1920}\right) \left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \right] \\
& + \left(\frac{37r^3}{24 \cdot 1920} - \frac{5r}{7168}\right) \left[\sin\left(\frac{7}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) + \sin\left(\frac{7}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \right] \\
& + \frac{r^3 \cdot 1225}{24 \cdot 1024} \left[\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right) \cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right) \sin(\Theta) \cdot c_x \right] \\
& - \frac{r^3 \cdot 245}{24 \cdot 3072} \left[\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \cdot c_x \right] \\
& + \frac{r^3 \cdot 49}{24 \cdot 5120} \left[\sin\left(\frac{5}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{5}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \cdot c_x \right] \\
& - \frac{r^3 \cdot 5}{24 \cdot 7168} \left[\sin\left(\frac{7}{2}k_x\Delta x\right) \cos(\Theta) \cdot c_y + \sin\left(\frac{7}{2}k_y\Delta y\right) \sin(\Theta) \cdot c_x \right]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Wobei folgende Koeffizienten benutzt wurden:

$$\begin{aligned}
c_y = & \left[\frac{8 \cdot 2}{5} \cos(k_y\Delta y) - \frac{1 \cdot 5}{20} \cos(2k_y\Delta y) + \frac{8 \cdot 2}{315} \cos(3k_y\Delta y) \right. \\
& \left. - \frac{2}{560} \cos(4k_y\Delta y) - \frac{205}{72} \right], \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_x = & \left[\frac{8 \cdot 2}{5} \cos(k_x\Delta x) - \frac{1 \cdot 5}{20} \cos(2k_x\Delta x) + \frac{8 \cdot 2}{315} \cos(3k_x\Delta x) \right. \\
& \left. - \frac{2}{560} \cos(4k_x\Delta x) - \frac{205}{72} \right]. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

C. MATLAB-Implementierung

Hier wird die Implementierung des FD-Schemas in 1D beliebiger zeitlicher und räumlicher Ordnung gezeigt. Dazu wurde das Zeitschrittverfahren mit den Gleichungen 4.47 und 4.48 in MATLAB implementiert. Als Betriebssystem diente openSUSE 11.2, welches auf einem Intel i7 CPU 920 (8 Kerne, jw. 2.67 GHz) mit 12GB RAM ausgeführt wurde.

```

1 %% 1D-Finite Differenzen Modellierung akustisch
2 % FD-Modellierung beliebiger zeitlicher und räumlicher Ordnung
3 % Nur fuer homogene Modelle
4
5 close all, clear all;
6
7 % Setze Parameter
8 S=1; % Zeitliche Ordnung 2*S+2
9 Z=1; % Räumliche Ordnung 2*Z+2
10 T=30; % Dauer der Modellierung
11 modell_x=20000; % Modellgröße in Meter
12 abstand_quelle=2000; % Abstand Quelle - Empfänger
13 f0= 5; % Hauptfrequenz Ricker
14 q0= 1; % Maximalamplitude Ricker-Wavelet
15 c=3000; % vp-Geschwindigkeit in m/s
16 fmax=2*f0; % Maximale Frequenz im Modell
17 c1=5; % Anzahl an Gitterpunkten pro maximale Wellenlänge
18 dx=c/(fmax*c1);
19 c2=0.7; % Courant-Zahl
20 dt=dx/(c)*c2;
21
22 nx=round(modell_x/dx); % Anzahl an Gitterpunkten des Modells
23 xscr = round(nx/2); % Gitterpunkt der Quelle
24 xrec1=xscr+round(abstand_quelle/dx); % Gitterpunkt Empfänger
25
26 % Initialisiere Felder
27 vx=zeros(1,nx);
28 p=zeros(1,nx);
29
30 % Setze Geschwindigkeit & Dichte (Homogen):
31 modell_v=[3000*ones(1,nx)];
32 rho=[2200*ones(1,nx)];
33 rho_const=rho(1); % Vereinfachung da Dichte konstant
34
35 % Lame-Parameter (Lambda)
36 l=rho.*modell_v.*modell_v;
37 l_const=l(1); % Vereinfachung da Lame-Parameter konstant
38
39 % Ausgabe Modellparameter:
40 disp(['Modellgröße: x:',num2str(dx*nx),' in m']);
41 disp(['Abtastung zeitlich: ',num2str(dt),' s']);
42 disp(['Abtastung räumlich x: ',num2str(dx),' m']);
43 disp(['Abstand Q-E:',num2str(dx*(-xscr+xrec1)),' in m']);
44 disp(['Anzahl an Punkten pro Wellenlänge: ',...
45     num2str(c/fmax/dx)]);
46 disp(['Zeitlicher Fehler fällt mit ', num2str(2*S+2),...
47     '. Ordnung']);
48 disp(['Räumlicher Fehler fällt mit ', num2str(2*Z+2),...
49     '. Ordnung']);

```

```

50
51 % Bilde Ort- & Zeitvektor
52 x=0:dx:(dx*nx-dx);
53 t=0:dt:(T-dt);
54 nt=numel(t);
55
56 % Quellsignal
57 tau=pi*f0*(t-1.5/f0);
58 q=q0*(1-2*tau.^2).*exp(-tau.^2);
59
60 % Initialisiere Seismogramme
61 Seismogramm=zeros(1,nt);
62
63 % Berechne Taylor-Koeffizienten:
64 ordnung_halbe=Z+1;
65 k_ungerade=zeros(ordnung_halbe,ordnung_halbe);
66 for m=1:ordnung_halbe;
67     for n=1:ordnung_halbe;
68         k_ungerade(m,n)=(m-1+0.5)^(2*(n-1)+1)...
69             *1/(factorial(2*(n-1)+1));
70     end
71 end
72 k_ungerade=1/2*inv(k_ungerade);
73
74 % Berechne weitere Koeffizienten im voraus:
75 for s=0:S;
76     koeff_s_v(s+1)=dt^(2*s+1)*l_const^s*1/(rho_const^(s+1)...
77         *dx^(2*s+1)*2^(2*s)*factorial(2*s+1));
78 end
79 for s=0:S;
80     koeff_s_p(s+1)=dt^(2*s+1)*l_const^(s+1)*1/(rho_const^(s)...
81         *dx^(2*s+1)*2^(2*s)*factorial(2*s+1));
82 end
83
84 disp('Starte Schleife ueber Zeitschritte...');
85 tic; % Starte Zeitmessung
86 for n=2:nt-1; % Schleife ueber Zeitschritte
87
88     % Update Geschwindigkeit
89     for kx=7:nx-7;
90         % Update Geschwindigkeit
91         update_vx=0;
92         for s=0:S;
93             for z=0:Z;
94                 update_vx=update_vx+koeff_s_v(s+1)...
95                     *k_ungerade(s+1,z+1)*(p(kx+1+z)-p(kx-z));
96             end
97         end
98
99         % Jetzt Update der Geschwindigkeit:
100         vx(kx)=vx(kx)-update_vx;
101
102     end
103
104     % Einspeisen der Quelle
105     p(xscr)=p(xscr)+(q(n-1)+q(n))/2;
106
107     % Update Druck
108     for kx=7:nx-7;

```

```

109     update_p=0;
110     for s=0:S;
111         for z=0:Z;
112             update_p=update_p+koeff_s_p(s+1) ...
113                 *k_ungerade(s+1,z+1)*(vx(kx+z)-vx(kx-1-z));
114         end
115     end
116
117     % Jetzt Update des Druckes
118     p(kx)=p(kx)-update_p;
119
120 end
121
122
123 % Daten fuer Seismogramm speichern:
124 Seismogramm(1,n)=p(xrec1);
125
126 % Plot Snapshot
127 if(~mod(n,20))
128     figure(3)
129     plot(p(:,x)
130     hold on
131     rec=plot(0,xrec1*dx,0,xscr*dx);
132     ylabel('Tiefe in m')
133     xlabel('Amplitude')
134     title(['Wellenfeld bei ', num2str(n*dt), ' s'])
135     set(rec, 'MarkerSize', 20, 'Marker', '.');
136     axis([-2 2 0 dx*nx])
137     hold off
138     drawnow;
139     pause(0.3)
140 end
141 end
142 time=toc; % Beende Zeitmessung
143 N_t=numel(2:nt-1);
144 disp(['Fertig mit ', num2str(N_t), ' Zeitschritten, in ',...
145     num2str(time), ' s']);
146 disp(['Zeit pro Zeitschritt: ', num2str(time/N_t), ' in s ...
147     (Mittelwert)']);
148
149 % Stelle Seismogramm dar
150 figure(4)
151 set(4, 'Position', [570 110 560 420])
152 plot(t,Seismogramm(1,:));
153 xlabel('Zeit in s');
154 ylabel('Amplitude');
155 title(['Empfaenger bei ', num2str(dx*xrec1), ' km']);

```