

Modellbasierte Fehlerdiagnose verteilter, nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
von der KIT-Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von
Sönke Meynen, M. Sc.
geb. in Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:	20. Februar 2025
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann
1. Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Michael Heizmann
2. Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Dirk Feßler

Vorwort

Diese Dissertation ist im Rahmen einer Kooperation zwischen dem Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme des Karlsruher Instituts für Technologie und der Fakultät für Elektro- und Informationstechnik der Hochschule Karlsruhe entstanden. Herrn Professor Dr.-Ing. Sören Hohmann danke ich sehr für die Ermöglichung und Unterstützung dieser Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Dirk Feßler für die Förderung dieser Arbeit sowie die vertrauensvolle Zusammenarbeit und wertvollen Anregungen. Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.-Ing. Michael Heizmann für die freundliche Übernahme des Korreferats bedanken.

Mein Dank gebührt auch all den Personen, die mir im Rahmen der Erstellung dieser Arbeit eine große Stütze waren. Ohne diese Unterstützung hätte diese Arbeit nicht erstellt werden können. Herrn Dr.-Ing. Stefan Schwab möchte ich für die Durchsicht und wertvollen Anmerkungen zu dieser Arbeit herzlich danken. Ebenso danke ich allen Studentinnen und Studenten, die mich mit ihren Abschlussarbeiten unterstützt haben.

Zum Schluss möchte ich mich bei meiner Familie für die fortlaufende Hilfe und Hingabe danken. Der größte Dank gilt meiner Frau Franziska sowie meinen Söhnen Finn und Mattis für die großartige Unterstützung und den damit verbundenen Verzicht.

Karlsruhe, September 2024

*Das Problem zu erkennen, ist wichtiger, als die
Lösung zu erkennen, denn die genaue Darstel-
lung des Problems führt zur Lösung.*

Albert Einstein (1879-1955)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	I
Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	XI
Abkürzungen und Symbole	XIII
1 Einleitung	1
1.1 Wissenschaftliches Umfeld und Motivation	1
1.2 Forschungsziel	3
1.3 Gliederung der Arbeit	3
2 Terminologie und Methoden zur Fehlerdiagnose	7
2.1 Grundbegriffe der Fehlerdiagnose	7
2.1.1 Terminologie der Fehlerdiagnose	7
2.1.2 Aufgaben und Ziele der Fehlerdiagnose	10
2.1.3 Anforderungen an die Fehlerdiagnose	12
2.2 Klassifikation existierender Fehlerdiagnoseverfahren	15
2.2.1 Signalbasierte Verfahren	15
2.2.2 Modellbasierte Verfahren	17
2.3 Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme	19
2.3.1 Diagnoseverfahren für unsichere, nichtlineare Systeme	20
2.3.2 Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte Systeme	25
2.3.3 Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte, unsichere Systeme	27
2.4 Zusammenfassung und Forschungslücke	27
3 Grundlagen	29
3.1 Unsichere Systeme in der Zustandsraumdarstellung	29
3.2 Mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibungen	32
3.2.1 Intervallarithmetik	32
3.2.2 Taylor-Modelle	39
3.3 Verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen	45
3.3.1 Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung	48
3.4 Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für unsichere, nichtlineare Systeme ...	54
3.4.1 Schema der Zustandsmengenbeobachtung	54
3.4.2 Konsistenzprüfung zur Fehlerdiagnose	64

3.5	Moving Horizon Estimation für nichtlineare Systeme	66
3.5.1	Anfangsgewichtbestimmung	67
3.5.2	Mehrzielverfahren	70
4	Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose	73
4.1	Grundidee und Voraussetzungen an verteilte, unsichere Systeme	73
4.2	Verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme in der Zustandsraumdarstellung	77
4.3	Design der verteilten Architektur zur Fehlerdiagnose	83
4.3.1	Ferndiagnose in der verteilten Architektur	86
4.3.2	Behandlung von Paketverlusten und Verzögerungen in der Kommunikation	90
4.4	Analyse der Rechenzeit- und Speicherersparnis	93
4.5	Zusammenfassung	97
5	Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme	99
5.1	Verteilte konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme	99
5.1.1	Prädiktion	100
5.1.2	Korrektur und Fusion	101
5.2	Diagnosealgorithmus	103
5.2.1	Fehlerdetektion	106
5.2.2	Fehlerisolation	109
5.2.3	Eigenschaften des Fehlerdiagnoseverfahrens	110
5.3	Zusammenfassung	111
6	Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme basierend auf Moving Horizon Estimation	113
6.1	Verteilte Moving Horizon Estimation für verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme	113
6.1.1	Fusion	116
6.1.2	Anfangsgewichtbestimmung	118
6.1.3	Mehrzielverfahren	121
6.2	Diagnosealgorithmus	122
6.2.1	Fehlerdetektion	123
6.2.2	Fehlerisolation	125
6.2.3	Eigenschaften des Fehlerdiagnoseverfahrens	126
6.3	Zusammenfassung	127
7	Anwendung der Fehlerdiagnose an realen Systemen	129
7.1	Umsetzung der Algorithmen	129
7.2	Drei-Tank-System	130
7.2.1	Modellbildung	131
7.2.2	Verteilung des unsicheren Modells	133
7.2.3	Diagnoseergebnisse des Drei-Tank-Systems	136
7.2.4	Vergleich der Fehlerdiagnosemethoden und deren Rechenzeit	153

7.2.5	Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten auf das Diagnoseergebnis	156
7.3	Gekoppelte Pendel	158
7.3.1	Modellbildung	159
7.3.2	Verteilung des unsicheren Modells	161
7.3.3	Diagnoseergebnisse des gekoppelten Pendels	166
7.3.4	Vergleich der Fehlerdiagnosemethoden und deren Rechenzeit	180
7.3.5	Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten auf das Diagnoseergebnis	183
7.4	Zusammenfassung	185
8	Zusammenfassung	187
A	Stand der Technik zur Beobachtbarkeit unsicherer, nichtlinearer Systeme	XIX
B	Herleitungen	XXI
B.1	Multiplikation und Division von Taylor-Modellen	XXI
B.2	Horner-Schema	XXII
B.3	QR-Faktorisierung	XXIII
B.4	Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren (PIGS-Verfahren)	XXV
B.5	Einschließung der Matrixinversen	XXV
B.6	Matrix-Inversions-Lemma	XXVIII
B.7	Verallgemeinerte Gauß-Newton-Methode	XXVIII
C	Ergänzende Resultate	XXIX
C.1	Drei-Tank-System	XXIX
C.2	Gekoppelte Pendel	XXXIII
	Literaturverzeichnis	XXXVII

Abbildungsverzeichnis

1.1	Gliederung der Arbeit	5
2.1	Hierarchischer Aufbau der Fehlerdiagnose	11
2.2	Überblick über Fehlerdiagnoseverfahren	16
2.3	Prinzip der signalbasierten Fehlerdiagnose	16
2.4	Prinzip der modellbasierten Fehlerdiagnose	17
2.5	Schritttablauf der Zustandsmengenbeobachtung	22
2.6	Schematische Darstellung eines verteilten Systems	25
3.1	Beispiele für die grafische Darstellung von einer intervallwertigen Größe	35
3.2	Auswirkungen des Abhängigkeitseffekts	38
3.3	Auswirkungen des Einhüllungseffekts	39
3.4	Genauigkeit der Einschließung von Taylor-Modellen	42
3.5	Verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen	47
3.6	Verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen sowie punktweise Näherungslösungen	54
3.7	Veranschaulichung des Zustandsmengenbeobachters auf der Grundlage des Prädiktionsschritts und des Korrekturschritts	56
3.8	Korrektur des äußeren Taylor-Modells im Zustandsmengenbeobachter	59
3.9	Prinzipieller Aufbau der Fehlerdiagnose in dieser Arbeit	65
4.1	Schematische Darstellung eines dezentralen sowie verteilten Systems	75
4.2	Schematische Darstellung des Zwei-Tank-Systems	81
4.3	Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose für insgesamt N Subsysteme	84
4.4	Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose inklusive der Ferndiagnose für insgesamt N Subsysteme	87
4.5	Potenzielle Fehlerkandidaten im Zwei-Tank-Systems	89
4.6	Zeitstrahl der Kommunikation zwischen lokalen Fehlerdetektoren (LFD)	92
4.7	Anzahl der arithmetischen Operationen in Abhängigkeit von der Taylor-Modell-Ordnung und der Variablenanzahl	95
5.1	Schematischer Ablauf der verteilten Zustandsmengenschätzung	102
5.2	Prinzipieller Ablauf der verteilten, konsistenzbasierten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf Paritätsgleichungen	105
5.3	Veranschaulichung des Vertrauensfaktors	108
6.1	Schema der Moving Horizon Estimation für unsichere Systeme	115

6.2	Prinzipieller Ablauf der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts	124
7.1	Versuchsaufbau Drei-Tank-System (DTS)	131
7.2	Schematische Darstellung des angewendeten Drei-Tank-Systems	132
7.3	Schematische Darstellung des verteilten Drei-Tank-Systems	133
7.4	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	138
7.5	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	139
7.6	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	139
7.7	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : additiver Fehler (DTS)	140
7.8	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : additiver Fehler (DTS)	141
7.10	Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems (additiver Fehler) ..	141
7.9	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : additiver Fehler (DTS)	142
7.11	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	143
7.12	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	143
7.13	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	144
7.14	Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose des DTS (multiplikativer Fehler)	144
7.15	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	146
7.16	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	146
7.17	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ : fehlerfreier Fall (DTS)	147
7.18	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ : additiver Fehler (DTS)	148
7.19	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ : additiver Fehler (DTS)	148
7.20	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ : additiver Fehler (DTS)	149
7.21	MHE-basierende Fehlerdiagnose des DTS (additiver Fehler)	150
7.22	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	151
7.23	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	151
7.24	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ : multiplikativer Fehler (DTS)	152
7.25	MHE-basierende Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems (multiplikativer Fehler)	152
7.26	Rechenzeit bei der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose (DTS)	154
7.27	Rechenzeit bei der MHE-basierten Fehlerdiagnose (DTS)	155
7.28	Analyse der Detektionszeit bei variierender Unsicherheit am DTS	156
7.29	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	157
7.30	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	158
7.31	Versuchsaufbau gekoppelte Pendel (GP)	159
7.32	Schematische Darstellung der gekoppelten Pendel	159
7.33	Schematische Darstellung der verteilten gekoppelten Pendel	162
7.34	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	169
7.35	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	169
7.36	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	170
7.37	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : additiver Fehler (GP)	171
7.38	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : additiver Fehler (GP)	171
7.39	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : additiver Fehler (GP)	172
7.40	Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose der GP (additiver Fehler)	172
7.41	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ : multiplikativer Fehler (GP)	173
7.42	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ : multiplikativer Fehler (GP)	174
7.43	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ : multiplikativer Fehler (GP)	174

7.44	Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose der GP (multiplikativer Fehler)	175
7.45	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	176
7.46	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	176
7.47	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ : fehlerfreier Fall (GP)	177
7.48	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ : additiver Fehler (GP)	178
7.49	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ : additiver Fehler (GP)	178
7.50	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ : additiver Fehler (GP)	179
7.51	MHE-basierende Fehlerdiagnose der GP (additiver Fehler)	179
7.52	Rechenzeit bei der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose (GP)	181
7.53	Rechenzeit bei der MHE-basierenden Fehlerdiagnose (GP)	182
7.54	Analyse der Detektionszeit bei variierender Unsicherheit bei den GP	183
7.55	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	184
7.56	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	185
C.1	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung	XXIX
C.2	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	XXX
C.3	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	XXX
C.4	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXI
C.5	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXII
C.6	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXII
C.7	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXIII
C.8	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXIV
C.9	Resultate des konsistenzbasierten LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXIV
C.10	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXV
C.11	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXVI
C.12	Resultate des MHE-basierenden LFD ⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung	XXXVI

Tabellenverzeichnis

2.1	Übersicht der Fehlerarten	13
7.1	Unsichere Parameter des Drei-Tank-Systems	132
7.2	Zeitspanne zur erfolgreichen Fehlerdetektion beim Drei-Tank-System	153
7.3	Unsichere Parameter der gekoppelten Pendel	162
7.4	Zeitspanne zur erfolgreichen Fehlerdetektion bei den gekoppelten Pendeln	180

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
DTS	Drei-Tank-System
FPR	Falsch-Positiv-Rate (engl. false positive rate)
GFI	Globaler Fehlerisolator (engl. global fault isolater)
GP	Gekoppelte Pendel
LFD	Lokaler Fehlerdetektor (engl. local fault detector)
LFDI	Lokaler Fehlerdiagnoser (engl. local fault diagnoser)
LPV-System	Lineares, parametervariantes System
MHE	Zustandsschätzung mit gleitendem Horizont (engl. moving horizon estimation)
PIGS- Verfahren	Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren
Sub	Subsystem
TPR	Wahr-Positiv-Rate (engl. true positive rate)
VGN	Verallgemeinertes Gauß-Newton-Verfahren

Symbole

Lateinische Buchstaben

Symbol	Beschreibung
a	Hilfsvariable
A_R	Querschnittsfläche Rohr
A_T	Querschnittsfläche Tank
\mathbf{A}	Dynamikmatrix
b	Hilfsvariable
\mathbf{B}	Eingangsmatrix
c	Reibungskonstante
\mathbf{C}	Ausgangsmatrix
d_F	Federlänge in Ruhelage
\mathbf{D}	Durchgriffsmatrix
$\mathbf{f}(\cdot)$	Systemfunktion
F	Fehler, Hilfsvariable
g	Erdbeschleunigung
h	Schrittweite, Füllstand Tank
$\mathbf{h}(\cdot)$	Ausgangsfunktion
i	Hilfsvariable
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
k	Hilfsgröße
K	Anzahl Rechenoperationen
l_F	Abstand Drehpunkt – Federaufnahme
l_m	Abstand Drehpunkt – Schwerpunkt Pendel
L	Anfang Schätzhorizont
m	Dimension des externen Zustandsraums
m_p	Kugelmasse Pendel
\mathbf{M}	Transformationsmatrix Ausgangsmengenvektor, Anfangswertgewichtung
n	Dimension des Zustandsraums
N	Anzahl Subsysteme
\mathbf{o}	Modellparametervektor
p	Dimension des Eingangsraums
\mathbf{P}	Permutationsmatrix
q	Dimension des Ausgangsraums
r	Dimension des Parameterraums
R	Restglied eines Taylor-Modells
\mathbf{R}	Transformationsmatrix externer Zustandsmengenvektor
\mathbf{R}_φ	Rotationsmatrix
\mathbf{S}	Transformationsmatrix Eingangsmengenvektor

t	Kontinuierliche Zeitvariable
t_d	Zeitpunkt Fehlerdetektion
t_f	Zeitpunkt Fehlerauftritt
\mathbf{T}	Transformationsmatrix Zustandsmengenvektor
u	Eingangsgröße
\mathbf{u}	Eingangsvektor
v	Variablen eines Taylor-Modells
w	Variablen eines Taylor-Modells
\mathbf{W}	Gewichtungsmatrix Gütefunktion
x	Zustand
\mathbf{x}	Zustandsvektor
$\tilde{\mathbf{x}}$	Transformierter Zustandsvektor
y	Ausgangsgröße
\mathbf{y}	Ausgangsvektor
$\tilde{\mathbf{y}}$	Fiktiver Ausgangsvektor
Z	Speicherlänge

Griechische Buchstaben

Symbol	Beschreibung
α	Vergessensfaktor
β	Vergessensfaktor
$\boldsymbol{\beta}$	Verschiebungsvektor
γ	Hilfsvariable
$\Gamma(\cdot)$	Gewichtungsfunktion Anfangswert
δ	Maximale Messabweichung
Δu	Messschranke Eingangsgröße
Δy	Messschranke Ausgangsgröße
ϵ	Fehlerabweichung
ϑ	Anzahl Variablen im Taylor-Modell
Θ	Unbekannter Parameter Restglied Taylor-Reihe
Λ	Horizontlänge
$\mathbf{\Pi}$	Skalierungsmatrix
ς	Anzahl Zustandsdifferentialgleichungen
τ	Kontinuierliche Zeitvariable
φ	Rotationswinkel
$\Phi(\cdot)$	Optimierungsproblem
$\Psi(\cdot)$	Fixpunktproblem

Kalligraphische Buchstaben und sonstige Symbole

Symbol	Beschreibung
$\mathbf{1}$	Einsmatrix
\mathcal{B}	Menge der Systembeschreibungen
\mathcal{D}	Definitionsbereich
\mathcal{F}	Fehlermenge
\mathbb{IR}	Menge der reellen Intervalle
ℓ	Ordnung des Taylor-Modells
\mathcal{N}	Nichtlinearer Polynomrest
\mathcal{P}	Taylorpolynom
\mathcal{P}	Vektorielltes Taylorpolynom
\mathcal{O}	Unsicherheitsbehaftete Modellparameter
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathcal{T}	Integrationsvariable
\mathcal{T}	Taylor-Modell
\mathcal{T}	Vektorielltes Taylor-Modell
\mathcal{T}_a	Äußeres, vektorielltes Taylor-Modell
\mathcal{T}_i	Inneres, vektorielltes Taylor-Modell
\mathcal{U}	Eingangsmengenvektor
\mathcal{X}	Zustandsmengenvektor
\mathcal{Y}	Ausgangsmengenvektor
\mathcal{Z}	Externer Zustandsmengenvektor
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Indizes, Exponenten und Operatornamen

Symbol	Beschreibung
\square_{mess}	Gemessener Wert
\square_{wahr}	Wahrer Wert
\square_{max}	Maximaler Wert
\square_{min}	Minimaler Wert
\square_k	Wert zum Zeitschritt k
\square_c	Intervallmittelpunkt
\square_Δ	Intervallradius
\square_i	i -tes Element eines Vektors
\square_{ij}	i -te Zeile und j -te Spalte einer Matrix
\square_0	Initialer Wert zum Zeitpunkt $t = 0$
\square_p	Prädizierter Wert
\square_m	Gemessener Wert
\square_\cap	Schnittmenge
$\square^{(i)}$	i -tes Subsystem
$\square^{(g)}$	Globales bzw. monolithisches System
\square°	Lösung Fixpunktproblem
\square^T	Transponierte Matrix
\square^\dagger	Moore-Penrose-Pseudoinverse
\square^*	Lösungswert eines mathematischen Problems
\square^\blacktriangle	Außerhalb des Definitionsbereichs
$\square^\blacktriangledown$	Innerhalb des Definitionsbereichs
$\dot{\square}$	Erste Ableitung nach der Zeit
$\check{\square}$	Hilfsindex
$\overline{\square}$	Infimum
$\underline{\square}$	Supremum
$\hat{\square}$	Erwartungswert
$[\square]$	Intervall
$ \square $	Betragsfunktion
$\ \square\ $	Euklidische Norm
$\text{bd}\{\square\}$	Wertebereichseinschließung
$\text{diag}(\square)$	Diagonalmatrix
$\text{lb}(\square)$	Untere Schranke
$\text{ub}(\square)$	Obere Schranke
$\inf(\square)$	Infimum
$\sup(\square)$	Supremum
$\text{mag}(\square)$	Intervallgröße
$\text{max}(\square)$	Maximum

$\min(\square)$	Minimum
$\det(\square)$	Determinante

1 Einleitung

1.1 Wissenschaftliches Umfeld und Motivation

Zahlreiche technische Innovationen im Bereich der mechatronischen Systeme haben in den letzten Jahren einen signifikanten Mehrwert hinsichtlich der Aspekte Sicherheit, Komfort, Effizienz sowie Umweltfreundlichkeit erbracht. Mechatronische Systeme zeichnen sich durch die Interoperabilität der Domänen Mechanik, Elektronik und Informatik aus [Ise07]. Auf der anderen Seite ist durch die Integration der grundsätzlich eigenständigen Domänen auch die Komplexität und zumeist die Fehleranfälligkeit derartiger Systeme signifikant gestiegen [TG18]. Die Gefährdungsvermeidung für Mensch, Maschine und Umwelt sowie eine hohe Systemverfügbarkeit sind daher zentrale und stetig wachsende Anforderungen an ein modernes System. Dies ist insbesondere bei sicherheitskritischen Aufgaben, wie beispielsweise in vollautomatisierten Fahrzeugen, in Flugassistenzsystemen oder in chemischen Prozessanlagen, von hoher Relevanz oder sogar gesetzlich vorgeschrieben [IEC10, ISO18]. Um die beschriebenen Anforderungen erfüllen zu können, muss das System kontinuierlich mit Blick auf potenziell auftretende Fehler überwacht werden. Dies führt dazu, dass die Entwicklung und Erforschung leistungsfähiger Fehlerdiagnoseverfahren in den letzten Jahren im industriellen und akademischen Umfeld immer stärker in den Fokus gerückt sind [Sch19, SGHE20, ZLG22, CDW⁺22].

Die bisher eingesetzten Fehlerdiagnoseverfahren beschränken sich zumeist auf einfache Schwellwertüberwachungen oder Plausibilitätsprüfungen einzelner Messsignale des technischen Systems und werden als signalbasierte Fehlerdiagnoseverfahren bezeichnet. Diese Verfahren sind zwar einfach in der Anwendung, jedoch stark begrenzt in ihrer Leistungsfähigkeit [HKP03]. Innerhalb von komplexen Systemen kann eine große Anzahl von Sensoren und Messgrößen vorhanden sein, welche eine hohe Dimensionalität der Signaldaten erzeugen. Die Analyse und Interpretation dieser großen Datenmenge mittels signalbasierter Methoden kann eine Herausforderung darstellen. Zudem stellt die beschriebene Interoperabilität der Domänen eine weitere Herausforderung dar. Signalbasierte Verfahren können Schwierigkeiten haben, die komplexen Interaktionen und Abhängigkeiten zwischen den Domänen in den Signalen zu erfassen und geeignet zu berücksichtigen. Eine leistungsfähigere Alternative ist durch modellbasierte Fehlerdiagnoseverfahren gegeben, welche das gemessene Systemverhalten mit einem analytischen Modell des betrachteten Systems vergleichen. Mithilfe der Kenntnisse aus dem Modell über die dynamischen Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgängen des Systems können auch Fehler in komplexen Systemen detektiert werden, deren Vorhandensein sich nicht unmittelbar aus den Messsignalen extrahieren lässt [Wol10].

Modellbasierte Fehlerdiagnoseverfahren stehen allerdings vor der Herausforderung, dass sowohl die Messsignale als auch die Modellbildung in der praktischen Anwendung grundsätz-

lich diversen Unsicherheiten unterworfen sind. Zum Beispiel weist jedes Messsignal eine gewisse Messabweichung auf oder Systemparameter sind im Rahmen der Modellbildung nicht exakt bekannt. Zudem wirken sich unbekannte nicht messbare Störungen nur auf das reale System und nicht auf das Modell aus. Diese Unsicherheiten führen zu einer ungewollten Differenz zwischen dem tatsächlichen und dem modellierten Systemverhalten, welche fälschlicherweise als Fehlerauswirkung interpretiert werden könnte und somit einen Fehlalarm (Fehler 1. Art) auslöst. Fehlalarme können in unnötigen Inspektionen, Wartungsarbeiten oder Reparaturen resultieren, die finanzielle Ressourcen sowie Arbeitskräfte binden und zu Produktionsausfällen führen. Ferner bewirken häufige Fehlalarme einen Vertrauensverlust in die Fehlerdiagnose, was bedeutet, dass die Diagnoseresultate möglicherweise nicht angemessen behandelt werden. Daher ist es von großem Vorteil, wenn Unsicherheiten bereits in der Entwurfsphase des modellbasierten Fehlerdiagnoseverfahrens berücksichtigt und somit Fehlalarme vermieden werden. In dieser Arbeit erfolgt die Betrachtung der Unsicherheiten deterministisch und wird mittels intervallwertigen Messgrößen sowie Systemparametern beschrieben, wie sie auch in Datenblättern in Form von Messtoleranzen zu finden sind. Diese Vorgehensweise unterscheidet sich wesentlich von der klassischen Unsicherheitsbeschreibung, welche stochastische Eigenschaften zugrunde legt. Die grundlegenden Nachteile einer stochastischen Unsicherheitsbeschreibung sind, dass a-priori Kenntnisse der stochastischen Eigenschaften erforderlich sind und gewisse Arten von Unsicherheiten, wie beispielsweise die Parameterunsicherheit, nicht in ausreichender Form beschrieben werden können [Ada18, Wol10, Kre18]. Das deterministische Vorgehen bietet zudem die Möglichkeit, Schätzverfahren zu entwickeln, welche die Rekonstruktion einer Menge von Zuständen ermöglichen.

Neben den oben beschriebenen Unsicherheiten stoßen bestehende modellbasierte Fehlerdiagnoseverfahren, durch den stetig steigenden Rechen- und Speicherbedarf zur Berechnung der immer komplexeren Modelle, an ihre Grenzen [Mut98, BKLS16]. Um dies zu handhaben, kann das betrachtete System in mehrere Subsysteme – auch Teilsysteme genannt – aufgeteilt werden. Das Ziel hierbei ist, dass die jeweiligen Subsystemmodelle eine geringere Komplexität aufweisen als eine monolithische Betrachtung des Gesamtsystems. Diese Vorgehensweise ist zusätzlich motiviert durch die zunehmende Vernetzung technischer Komponenten und die dezentrale Entscheidungsfindung im Rahmen des Zukunftsprojekts Industrie 4.0 [LFK⁺15]. Für die Fehlerdiagnose komplexer Systeme bieten sich daher verteilte Fehlerdiagnoseverfahren an. Hierbei wird an jedem Subsystem eine dezentrale bzw. lokale Fehlerdiagnose durchgeführt. Über ein Kommunikationsnetzwerk interagieren die einzelnen, lokalen Fehlerdiagnoseverfahren miteinander. Bei geeigneter Anwendung benötigen diese Fehlerdiagnoseverfahren lokal einen geringeren Rechen- und Speicherbedarf aufgrund der Subsystemmodelle mit geringerer Komplexität [Hil12]. Darüber hinaus können sie noch weitere vorteilhafte Eigenschaften wie Modularität, Robustheit sowie Skalierbarkeit aufweisen [Mut98, Kup19].

Eine verteilte Fehlerdiagnose (engl. distributed fault diagnosis) mit der deterministischen Berücksichtigung von Unsicherheiten zur Vermeidung von Fehlern 1. Art ist somit erstrebenswert und das Hauptforschungsziel dieser Arbeit.

1.2 Forschungsziel

Das Hauptforschungsziel dieser Arbeit ist die **Entwicklung von Verfahren zur modellbasierten Fehlerdiagnose verteilter, nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtern**, welche auch bei der Existenz von Unsicherheiten ein zuverlässiges Diagnoseergebnis liefern. Soweit dem Autor bekannt existieren nach dem heutigen Stand der Forschung keine Methoden, welche das Prinzip der verteilten Fehlerdiagnose mit einer deterministischen Beschreibung der Unsicherheiten kombiniert.

In dieser Arbeit werden daher die drei folgenden Forschungsziele abgeleitet:

1. Die Entwicklung einer geeigneten Architektur zur modellbasierten Fehlerdiagnose verteilter, nichtlinearer Systeme. Hierbei liegt der Fokus auf die Reduzierung des Rechenaufwands, ohne dabei die Qualität des Diagnoseergebnisses zu mindern.
2. Die Entwicklung zweier Verfahren zur modellbasierten Fehlerdiagnose verteilter, nichtlinearer Systeme auf Basis von Zustandsmengenbeobachtern.
3. Die Anwendung der neuartigen Fehlerdiagnoseverfahren an verschiedenen Versuchsaufbauten anhand realer Messdaten. Die Leistungsfähigkeit der Fehlerdiagnoseverfahren wird untereinander verglichen und analysiert. Ferner werden die Verfahren mit dem jeweiligen Stand der Technik für monolithische Systeme verglichen.

1.3 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden zunächst die relevanten Grundbegriffe der Fehlerdiagnose eingeführt sowie eine Klassifikation der existierenden Fehlerdiagnoseverfahren vorgenommen. Darauf aufbauend werden die verwandten Arbeiten und die bereits bestehende Literatur zum Themengebiet der modellbasierten Fehlerdiagnose von verteilten, nichtlinearen Systemen diskutiert. Die Forschungslücke wird in Form von konkreten Forschungsfragen formuliert, welche in dieser Arbeit beantwortet werden sollen.

Kapitel 3 führt die notwendigen mathematischen Grundlagen dieser Arbeit ein. Hierzu wird zunächst die verwendete Darstellungsform für nichtlineare Systeme mit deterministischen Unsicherheiten eingeführt. Zur mathematischen Beschreibung dieser Unsicherheiten werden die Möglichkeiten zur Repräsentation von Mengen reeller Zahlen sowie die zugehörigen Rechenoperationen vorgestellt. Für die Lösungseinschließung derartiger Systeme wird ein Verfahren basierend auf Taylor-Modellen erläutert. Abschließend werden in diesem Kapitel die konsistenzbasierte Fehlerdiagnose sowie der Zustandsschätzer mit gleitendem Horizont (engl. moving horizon estimation, MHE) beschrieben, welche die Grundlage für die im Rahmen dieser Arbeiten entwickelten Fehlerdiagnoseansätze bilden.

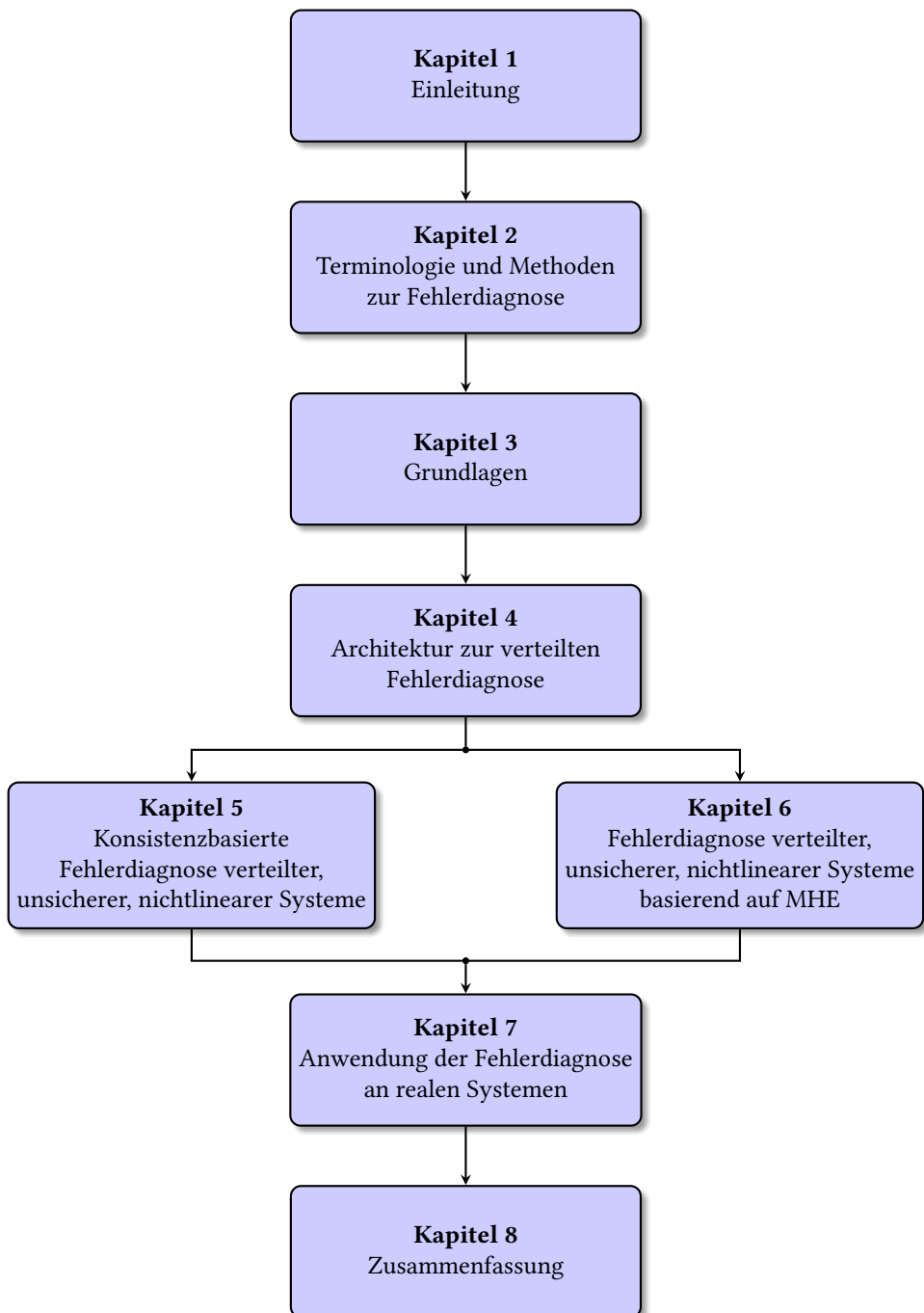
Die wesentlichen theoretischen Beiträge werden in den Kapiteln 4 bis 6 vorgestellt. In Kapitel 4 werden zunächst die Grundlagen und Voraussetzung der verteilten Systembeschreibung eingeführt und für Systeme mit deterministischen Unsicherheiten – welche im Folgenden

auch als verteilte, unsichere Systeme bezeichnet werden – erweitert. Basierend auf dieser Beschreibung werden geeignete Architekturen zur verteilten Fehlerdiagnose erläutert und diskutiert sowie die potenzielle Rechenzeiterparnis aufgezeigt. Aufbauend auf der vorgestellten Architektur und Systembeschreibung werden in Kapitel 5 bzw. 6 zwei unterschiedliche Ansätze zur Fehlerdiagnose präsentiert. Der erste Ansatz in Kapitel 5 basiert auf dem Prinzip der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose. Der zweite Ansatz lässt sich den Zustandsschätzern mit gleitendem Horizont zuordnen und wird in Kapitel 6 vorgestellt.

In Kapitel 7 erfolgt die Bewertung der neuen Fehlerdiagnoseverfahren anhand realer Anwendungen. Hierzu werden die entwickelten Fehlerdiagnoseverfahren untereinander in Bezug auf Robustheit, Sensitivität sowie Rechenaufwand verglichen. Ferner erfolgt eine Gegenüberstellung mit dem jeweiligen Stand der Technik für monolithische Systeme. Die Auswirkung von variierenden Unsicherheiten auf das Diagnoseergebnis wird ebenfalls untersucht.

Abschließend werden in Kapitel 8 alle zentralen Erkenntnisse sowie Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst.

Die Gliederung dieser Arbeit ist in Abbildung 1.1 zusammengefasst. Um die zwei unterschiedlichen Ansätze zur Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer Systeme zu verdeutlichen, werden diese als zwei parallele Pfade dargestellt. Grundlage beider Ansätze bildet die in Kapitel 4 vorgestellte Architektur und Systembeschreibung.

**Abbildung 1.1:** Gliederung der Arbeit

2 Terminologie und Methoden zur Fehlerdiagnose

In diesem Kapitel werden verwandte Arbeiten zur Fehlerdiagnose in technischen Systemen diskutiert und die konkrete Forschungslücke aufgezeigt. Hierzu erfolgt zunächst eine Einführung in die relevanten Grundbegriffe sowie eine Klassifikation der bestehenden Fehlerdiagnoseverfahren. Dies ist erforderlich, da bisher trotz einiger Versuche keine einheitliche Terminologie im Bereich der Fehlerdiagnose existiert [Ise06]. Anschließend wird der Stand der Technik zur Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung, Fehlerdiagnose verteilter Systeme sowie deren Kombination herausgearbeitet. Dieses Kapitel endet mit einer Zusammenfassung der untersuchten Literatur, der Angabe der konkretisierten Forschungslücke und den entsprechenden Forschungsfragen.

2.1 Grundbegriffe der Fehlerdiagnose

In diesem Abschnitt werden die für diese Arbeit relevanten Grundbegriffe eingeführt und näher erläutert. Diese orientieren sich an der in [Ise06] eingeführten SAFEPROCESS¹-Terminologie sowie an den DIN-Normen. Ferner werden die wesentlichen Aufgaben, Ziele und Klassifikationen der Fehlerdiagnose vorgestellt.

2.1.1 Terminologie der Fehlerdiagnose

Zunächst erfolgt die allgemeine Definition eines Fehlers. Ein Fehler ist nach der Qualitätsmanagementnorm DIN EN ISO 9000 wie folgt definiert [DIN15]:

Definition 2.1 (Fehler nach DIN EN ISO 9000)

Ein Fehler (engl. fault) ist die Nichterfüllung einer festgelegten, vorausgesetzten Forderung.

In Bezug auf technische Systeme kann die Festlegung eines Fehlers in Abhängigkeit vom jeweiligen Anwendungsfall sehr individuell sein. Eine allgemeingültige und in dieser Arbeit verwendete Definition eines Fehlers in technischen Systemen ist in der SAFEPROCESS-Terminologie gegeben. Des Weiteren wird zwischen Fehler, Versagen und Störung in technischen Systemen unterschieden [IB97].

¹ IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes

Definition 2.2 (Fehler in technischen Systemen)

Ein Fehler ist eine unzulässige Abweichung einer oder mehrerer Merkmale eines technischen Systems vom Nominalzustand.

Beispiele für Fehler in technischen Systemen sind der Ausfall der Versorgungsenergie, ein Bauteilversagen am Stellglied oder eine Undichtigkeit in der Rohrleitung. Fehler können sowohl im physikalischen Systembereich (z.B. als Sensor-, Aktor- oder Gerätefehler) als auch als Softwarefehler, beispielsweise in der Automatisierungsfunktion, auftreten. Ein Fehler hat zumeist einen negativen Einfluss auf das Systemverhalten, was dazu führt, dass die vorausgesetzte Forderung nicht mehr im vollen Umfang erfüllt werden kann. In Abhängigkeit von der Beschaffenheit des technischen Systems oder der Betriebsstrategie kann eine gewisse Anzahl von Fehlern tolerierbar sein und somit der Betrieb fortgesetzt werden.

Definition 2.3 (Versagen)

Ein Versagen (engl. failure) ist eine permanente Unterbrechung der Systemfunktion, was darin resultiert, dass das technische System seine vorausgesetzte Aufgabe unter den gegebenen Betriebsbedingungen nicht mehr ausführen kann.

Der Begriff Versagen kennzeichnet somit das Szenario des kompletten Ausfalls der Systemfunktion.

Definition 2.4 (Störung)

Eine Störung (engl. disturbance) ist eine unbekannte und nicht beeinflussbare äußere Eingangsgröße des technischen Systems.

Bei einer Störung handelt es sich um einen unerwünschten Einfluss auf das technische System oder die Messeinrichtung. Die Störung ist wie der Fehler prinzipiell unbekannt. Beispiele hierfür sind das Messrauschen oder Einflüsse durch die Umgebungstemperatur. Aufgrund einer Störung kann das gemessene Systemverhalten vom erwarteten Systemverhalten abweichen, obwohl kein Fehler nach Definition 2.2 vorliegt. Die zuverlässige Detektion von Fehlern in technischen Systemen² unter dem Vorhandensein von Störungen ist eine der zentralen Herausforderung der Fehlerdiagnose.

Ein Fehler wird üblicherweise anhand seines Zeitverhaltens oder seiner Modellierungsart charakterisiert [Ise05, Wol10]. Beim Zeitverhalten wird hierbei zwischen abrupten, schleichenden und sporadisch auftretenden Fehlern differenziert. In dieser Arbeit werden hierzu die nachfolgenden Definitionen aus [Ise05, Wol10] verwendet.

² In dieser Arbeit werden ausschließlich technische Systeme betrachtet, aus diesem Grund wird im Folgenden der Zusatz „technische“ weggelassen.

Definition 2.5 (Abrupter Fehler)

Ein abrupter Fehler (engl. abrupt fault) tritt zu einem bestimmten Zeitpunkt sprunghaft auf und verbleibt statisch existent.

Beispiele für abrupte Fehler sind mechanische Blockierungen, schlagartige Rohrverstopfungen durch Fremdkörper oder der Ausfall einer Systemkomponente.

Definition 2.6 (Schleichender Fehler)

Bei einem schleichenden Fehler (engl. incipient fault) ist dessen Ursache oder Auswirkung zunächst klein, steigt jedoch kontinuierlich mit der Zeit an.

Schleichende Fehler können beispielsweise durch Verschleißerscheinungen oder durch einen Sensordrift entstehen.

Definition 2.7 (Sporadischer Fehler)

Ein sporadischer Fehler (engl. intermittent fault) tritt unregelmäßig auf.

Ein typischer sporadischer Fehler ist der Wackelkontakt. Dieser kann aufgrund von lockeren Steckverbindungen oder Verarbeitungsfehlern (z. B. kalte Lötstelle) auftreten.

Die Modellierungsart, auch Fehlermodellierung genannt, wird anhand der mathematischen Beschreibung der Fehler unterschieden. Hierbei wird zwischen additiven Fehlern und multiplikativen Fehlern differenziert.

Definition 2.8 (Additiver Fehler)

Ein additiver Fehler (engl. additive fault) wird durch Superposition eines Signals mit der Fehlereinwirkung beschrieben.

Eine Nullpunktverschiebung des Sensors ist ein weit verbreitetes Beispiel für additive Fehler. Eine solche Nullpunktverschiebung führt zu einem konstanten Versatz (engl. offset) des gemessenen Signals.

Definition 2.9 (Multiplikativer Fehler)

Ein multiplikativer Fehler (engl. multiplicative fault) ist ein Parameterfehler und wird durch die Multiplikation eines Systemparameters mit der Fehlereinwirkung beschrieben.

Beispiele für multiplikative Fehler sind unerwünschte Veränderungen der Durchflusskoeffizienten in Folge eines verstopften Rohrleitungssystems oder eines Kalibrierungsfehlers der Sensorsteigung.

Der zeitliche Verlauf der additiven oder multiplikativen Fehlereinwirkung kann sich in abrupter, schleichender oder sporadischer Weise (siehe Definition 2.5 bis 2.7) zeigen. Ein zunehmender

der thermischer Widerstand beim Wärmetauscher durch Verunreinigungen (engl. fouling) ist beispielsweise ein schleichender, multiplikativer Fehler.

2.1.2 Aufgaben und Ziele der Fehlerdiagnose

In den folgenden Unterabschnitten werden zunächst die wesentlichen Aufgaben der Fehlerdiagnose erläutert und anschließend die erreichbaren Ziele vorgestellt.

Aufgaben der Fehlerdiagnose

Die Fehlerdiagnose wird anhand ihrer Genauigkeit bzw. Diagnosetiefe in drei Teilaufgaben unterteilt, welche als Fehlerdetektion, Fehlerisolation und Fehleridentifikation bezeichnet werden [GCD15a, Lun16].

Definition 2.10 (Fehlerdetektion)

Die Aufgabe der Fehlerdetektion (engl. fault detection) ist es, zu erkennen, ob zum aktuellen Zeitpunkt ein Fehler im System aufgetreten ist oder nicht.

Die Fehlerdetektion ist zumeist der erste und wichtigste Schritt der Fehlerdiagnose. Eine erfolgreiche Fehlerdetektion liefert Informationen über das Auftreten sowie den Zeitpunkt oder das Zeitintervall des Fehlers.

Definition 2.11 (Fehlerisolation)

Die Fehlerisolation (engl. fault isolation) ermittelt, welcher Fehler aufgetreten ist, und lokalisiert die fehlerhafte Komponente im System.

Die Fehlerisolation folgt hierarchisch auf die Fehlerdetektion und beschäftigt sich mit der Frage, welcher Fehler und wo der Fehler im System aufgetreten ist.

Definition 2.12 (Fehleridentifikation)

Mittels der Fehleridentifikation (engl. fault identification) wird das Zeitverhalten sowie die Stärke bzw. Fehleramplitude des Fehlers bestimmt.

Die tiefste Ebene der Fehlerdiagnose ist die Fehleridentifikation. Für die Bestimmung des Zeitverhaltens (siehe Definition 2.5 bis 2.7) und der Fehleramplitude ist ein sehr detailliertes Wissen über den jeweiligen Fehler sowie hinsichtlich des betrachteten Systems notwendig.

Alle drei Teilaufgaben zusammen werden durch den Oberbegriff Fehlerdiagnose erfasst. Der hierarchische Aufbau der einzelnen Teilaufgaben aus der Fehlerdiagnose wird anhand der Abbildung 2.1 verdeutlicht. Die jeweilige Tiefe der Fehlerdiagnose hängt vom individuellen Anwendungsfall ab. Darf ein System nach einem Fehlerauftritt, beispielsweise bei sicherheitsrelevanten Anlagenteilen, nicht weiter betrieben werden, ist einzig eine Fehlerdetektion

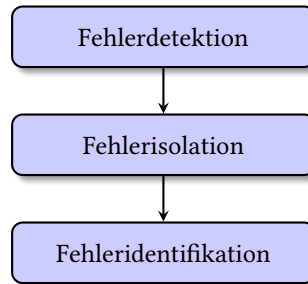


Abbildung 2.1: Hierarchischer Aufbau der Fehlerdiagnose

nötig. Ist es zumindest möglich, den Systembetrieb für eine gewisse Zeit fortzuführen oder gar zwingend notwendig (z. B. im Flugzeug), kann eine Fehlerisolation durchgeführt werden. Mit den zusätzlichen Informationen aus der Fehlerisolation kann ein Fehler genauer charakterisiert sowie lokalisiert werden. Die Fehleridentifikation liefert die detailliertesten Informationen über den aufgetretenen Fehler. Jedoch werden diese zusätzlichen Informationen in der Praxis selten benötigt, weshalb in der Literatur [Wol10, PC97, IMDK19] zumeist nur die Teilaufgaben Fehlerdetektion und -isolation (FDI) betrachtet werden. Auch in dieser Arbeit werden ausschließlich diese beiden Teilaufgaben der Fehlerdiagnose näher behandelt. Mit den Informationen aus der Fehlerdiagnose kann anschließend eine Fail-Safe-Strategie durchgeführt werden. Die Fail-Safe-Strategie hat die Aufgabe, das System in einen sicheren Zustand zu überführen oder im sicheren Zustand zu verharren. Ein populäres Beispiel hierfür ist die aktive fehlertolerante Regelung, welche – unter gewissen Voraussetzungen an Regelstrecke und Fehler – durch eine Rekonfiguration der Regeleinrichtung zur Systemlaufzeit auch nach Fehlerauftritt seine Funktion erfüllt [Ise06].

Ziele der Fehlerdiagnose

Der Einsatz von Fehlerdiagnoseverfahren hat einen direkten Einfluss auf wichtige Systemeigenschaften, wie Betriebssicherheit und Zuverlässigkeit [Ise06]. Ein geeignetes Fehlerdiagnoseverfahren bietet hierbei die folgenden Vorteile:

- Die *Betriebssicherheit* (engl. safety) und somit der Schutz von Mensch, Maschine sowie Umwelt vor physischen Schäden kann durch eine kontinuierliche und effektive Fehlerdiagnose gesteigert werden.
- Die Fähigkeit eines Systems, über einen gewissen Zeitrahmen unter normalen Betriebsbedingungen seine geforderten Aufgaben auszuführen, wird als *Zuverlässigkeit* (engl. reliability) bezeichnet. Eine niedrige Anzahl von Systemversagen innerhalb dieses Zeitrahmens entspricht einer hohen Zuverlässigkeit. Durch eine frühzeitige Fehlerdetektion kann ein Systemversagen vermieden und folglich auch die Zuverlässigkeit erhöht werden.
- Die *Instandhaltbarkeit* (engl. maintainability) oder auch Wartbarkeit beschreibt den Aufwand, um die gesamte Systemfunktionalität aufrechtzuerhalten sowie nach einem

Systemversagen wiederherzustellen. Diese Systemeigenschaft kann durch eine Fehlerdiagnose unterstützt werden. Beispielsweise kann die Reparaturzeit verkürzt werden, da aufgrund der Fehlerisolation der Fehler genau charakterisiert ist. Die Reparaturzeit umfasst hierbei sowohl die eigentliche Reparatur und Wiederinbetriebsetzung als auch die Zeit zur Fehlersuche.

- Grundvoraussetzung für einen effizienten Systembetrieb ist eine hohe *Verfügbarkeit* (engl. availability), d. h. innerhalb eines bekannten Zeitrahmens werden die Systemanforderungen effektiv und zufriedenstellend erfüllt. Die Verfügbarkeit unterscheidet sich von der Zuverlässigkeit darin, dass die Verfügbarkeit von den Systemausfällen sowie von der Instandhaltbarkeit abhängt. Eine hohe Zuverlässigkeit und kurze Reparaturzeiten führen zu einer hohen Verfügbarkeit. Da sowohl Zuverlässigkeit als auch die Instandhaltbarkeit durch ein Fehlerdiagnoseverfahren positiv beeinflusst werden können, kann folglich auch die Verfügbarkeit gesteigert werden.
- Fehlerauswirkungen können zu einer verminderten *Qualität* des Endproduktes führen. Folglich tragen auch Fehlerdiagnoseverfahren zur *Qualitätssicherung* (engl. quality assurance) des Gesamtsystems bei.

Auch die Einhaltung gesetzlicher Vorgaben kann ein Grund für den Einsatz eines Fehlerdiagnoseverfahrens sein. Ein Beispiel hierfür ist die On-Board-Diagnose des Abgasnachbehandlungssystems mittels Drei-Wege-Katalysator in Fahrzeugen. Hierbei wird kontinuierlich die Erfüllung der gesetzlichen Emissionsgrenzwerte überwacht [Feß11].

2.1.3 Anforderungen an die Fehlerdiagnose

Wird im Rahmen der Fehlerdetektion ein Fehler vom eingesetzten Fehlerdiagnoseverfahren detektiert, muss dieser einer übergeordneten Systemeinheit (z. B. dem Bedienpersonal) übermittelt werden. Diese übergeordnete Systemeinheit hat anschließend die Aufgabe, eine angemessene Handlung umzusetzen. Eine angemessene Handlung hat immer das Ziel, die Fehlerauswirkungen zu vermeiden bzw. zu minimieren. Diese Art von Mitteilung an eine übergeordnete Systemeinheit wird auch als Alarm bezeichnet. Hierbei wird in der Literatur [ISSC09, Wol10] zwischen den folgenden Fällen unterschieden:

Definition 2.13 (Korrektter Alarm)

Ist im betrachteten System ein Fehler aufgetreten und vom Fehlerdiagnoseverfahren erfolgreich detektiert worden, so wird dies als korrektter Alarm (engl. correct detection) bezeichnet.

In diesem Fall liefert der Fehlerdetektionsschritt des Fehlerdiagnoseverfahrens ein richtiges Resultat und der Alarm wird korrekterweise ausgelöst.

Definition 2.14 (Fehlalarm)
Ein Fehlalarm (engl. false alarm) liegt vor, wenn fälschlicherweise ein Fehler detektiert wird, obwohl das betrachtete System fehlerfrei arbeitet.

Bei einem Fehlalarm liefert der Fehlerdetektionsschritt ein falsches Resultat und der Alarm wird fälschlicherweise ausgelöst, obwohl kein Fehler vorliegt. Kommt es zu einer Vielzahl von solchen Fehlalarmen, kann es passieren, dass die Alarme vom Bedienpersonal ignoriert werden. Diese Situation führt häufig zu einem allgemeinen Misstrauen des Bedienpersonals gegenüber den Alarmen, was auch als „cry wolf“-Effekt bezeichnet wird [RMR19].

Definition 2.15 (Verdeckter Alarm)
Wird vom Fehlerdiagnoseverfahren kein Fehler detektiert, obwohl das betrachtete System fehlerbehaftet ist, liegt ein verdeckter Alarm (engl. hidden alarm) vor.

In diesem Fall liefert der Fehlerdetektionsschritt ein falsches Resultat und der Alarm wird fälschlicherweise nicht ausgelöst, trotz dem Vorhandensein eines Fehlers. Ein nicht erkannter Fehler kann zu Versagen im System führen und sollte daher, wie der zuvor beschriebene Fehlalarm, vermieden werden.

Der Begriff Fehlalarm wird auch als Fehler 1. Art bzw. falsch-positiv, der Begriff verdeckter Alarm wird als Fehler 2. Art bzw. falsch-negativ bezeichnet. Eine Übersicht hierzu ist in Tabelle 2.1 gegeben.

Diagnoseresultat	Fehlerbehaftetes System	Fehlerfreies System
Fehler	Korrekt Alarm	Fehlalarm Fehler 1. Art (falsch-positiv)
Kein Fehler	Verdeckter Alarm Fehler 2. Art (falsch-negativ)	Kein Alarm (Korrekt)

Tabelle 2.1: Übersicht der Fehlerarten

Analog zur Fehlerdetektion werden bei der Fehlerisolation die drei folgenden Fälle unterschieden:

Definition 2.16 (Korrekte Isolation)
Stimmt der isolierte Fehler aus dem Fehlerdiagnoseverfahren mit dem tatsächlichen Fehler im betrachteten System überein, wird dies als korrekte Isolation (engl. correct isolation) bezeichnet.

In diesem Fall liefert der Fehlerisolationsschritt im Rahmen des Fehlerdiagnoseverfahrens ein korrektes Resultat.

Definition 2.17 (Falsche Isolation)

Eine falsche Isolation (engl. incorrect isolation) liegt vor, wenn der isolierte Fehler nicht mit dem tatsächlichen Fehler im betrachteten System übereinstimmt.

Bei einem falsch isolierten Fehler ist das Resultat aus dem Fehlerisolationsschritt inkorrekt. Durch die falsche Fehlercharakterisierung wird möglicherweise eine falsche Systemkomponente ausgetauscht bzw. repariert, ohne den eigentlichen Fehler zu beheben. Da der eigentliche Fehler weiterhin aktiv ist, wird nach der Wiederinbetriebnahme der Fehler erneut detektiert. Folglich verlängert sich die Zeitdauer bis zum Beheben des eigentlichen Fehlers deutlich. Dies führt wiederum zu einer verringerten Systemverfügbarkeit. Auch in Bezug auf die aktive fehlertolerante Regelung würde eine falsche Isolation zu einer fehlerhaften Rekonfiguration der Regeleinrichtung führen und somit potentiell die Stabilität des Regelkreises gefährden.

Definition 2.18 (Verdeckte Isolation)

Wird ein tatsächlich existierender Fehler detektiert, aber anschließend vom Fehlerdiagnoseverfahren nicht isoliert, wird dies als verdeckte Isolation (engl. hidden isolation) bezeichnet.

In diesem Fall ist das Resultat des Fehlerisolationsschritts nicht vollständig bzw. eindeutig und führt somit, wie die falsche Isolation, zu einer verlängerten Reparaturzeit und somit zu einer verringerten Systemverfügbarkeit.

Deshalb sind korrekte Resultate eine zentrale Anforderung an ein Fehlerdiagnoseverfahren. Hinzu kommt, dass diese Resultate für eine zügige Gegenmaßnahme möglichst zeitnah bestimmt werden müssen. Folglich muss hierzu das Fehlerdiagnoseverfahren robust arbeiten und gleichzeitig eine hohe Sensitivität aufweisen [Fra94].

Definition 2.19 (Robustheit)

Unter dem Begriff Robustheit (engl. robustness) wird die Forderung an ein Fehlerdiagnoseverfahren verstanden, dass nur tatsächlich aktive Fehler detektiert und korrekt isoliert werden.

Bei einem robusten Fehlerdiagnoseverfahren sollen Fehlalarme sowie falsche Isolationen ausgeschlossen werden. Ferner sollen Störungen nach Definition 2.4 nicht als Fehler interpretiert werden. Ist diese Forderung vollständig erfüllt, ist das Resultat der Falsch-Positiv-Rate (engl. false positive rate, FPR), oft auch als Fall-Out- oder Typ-I-Fehlerrate bezeichnet,

$$\text{FPR} = \frac{\text{Anzahl Fehlalarme}}{\text{Anzahl Fehlalarme} + \text{Anzahl „Kein Alarm“}} \quad (2.1)$$

gleich Null (siehe Tabelle 2.1).

Definition 2.20 (Sensitivität)

Unter dem Begriff Sensitivität (engl. sensitivity) wird die Forderung an ein Fehlerdiagnoseverfahren verstanden, dass die aktiven Fehler möglichst schnell und zuverlässig detektiert sowie eindeutig isoliert werden.

Diese Forderung soll verdeckte Alarmer sowie verdeckte Isolationen ausschließen und ist vollständig erfüllt, wenn die Wahr-Positiv-Rate (engl. true positive rate, TPR)

$$\text{TPR} = \frac{\text{Anzahl korrekter Alarmer}}{\text{Anzahl korrekter Alarmer} + \text{Anzahl verdeckter Alarmer}} \quad (2.2)$$

gleich Eins ist.

In der Praxis muss daher beim Entwurf von Fehlerdiagnoseverfahren immer ein Kompromiss zwischen diesen beiden konträren Forderungen gefunden werden [VRYK03]. Beispielsweise führt eine zu hohe Sensitivität zu einer erhöhten Empfindlichkeit des Fehlerdiagnoseverfahrens gegenüber Störungen. Dies wird möglicherweise ungewollte Fehlalarme auslösen, was wiederum dazu führen könnte, dass die echten Alarmer vom Bedienpersonal ignoriert werden.

2.2 Klassifikation existierender Fehlerdiagnoseverfahren

Eine in der Literatur [Ise10, Wol10] übliche allgemeine Einteilung für Fehlerdiagnoseverfahren unterscheidet zwischen signalbasierten und modellbasierten Verfahren. Gelegentlich bilden die sogenannten wissensbasierten Fehlerdiagnoseverfahren noch eine eigene Klasse [Fra94, Feß11]. Da diese sich allerdings nur in der Art der Modellbeschreibung unterscheiden, können sie auch als eine Untergruppe der modellbasierten Fehlerdiagnoseverfahren betrachtet werden [Din08]. In Abbildung 2.2 ist eine Übersicht über Fehlerdiagnoseverfahren mit beispielhaften Methoden gegeben.

2.2.1 Signalbasierte Verfahren

Die klassischen signalbasierten Verfahren sind aufgrund ihrer einfachen Anwendung in der Praxis weit verbreitet. Bei diesem Verfahren wertet ein Diagnosealgorithmus das vektorielle Messsignal \mathbf{y} vom Ausgang des betrachteten Systems aus und extrahiert Merkmale, die Rückschlüsse auf potenziell vorhandene Fehler zulassen. In Abbildung 2.3 ist das allgemeine Prinzip eines signalbasierten Verfahrens dargestellt. Typische Extraktionsmerkmale dieser Verfahren sind Grenzwerte, Trends, Mittelwerte, Varianzen sowie Korrelationen. Beispielsweise wird in einem Kraftfahrzeug die Temperatur des Kühlmittels mit einem Temperatursensor gemessen. Steigt ungewollt die Temperatur, z. B. aufgrund einer fehlerhaften Wasserpumpe, wird bei einem Überschreiten des vorher definierten Grenzwerts ein Alarm ausgelöst.

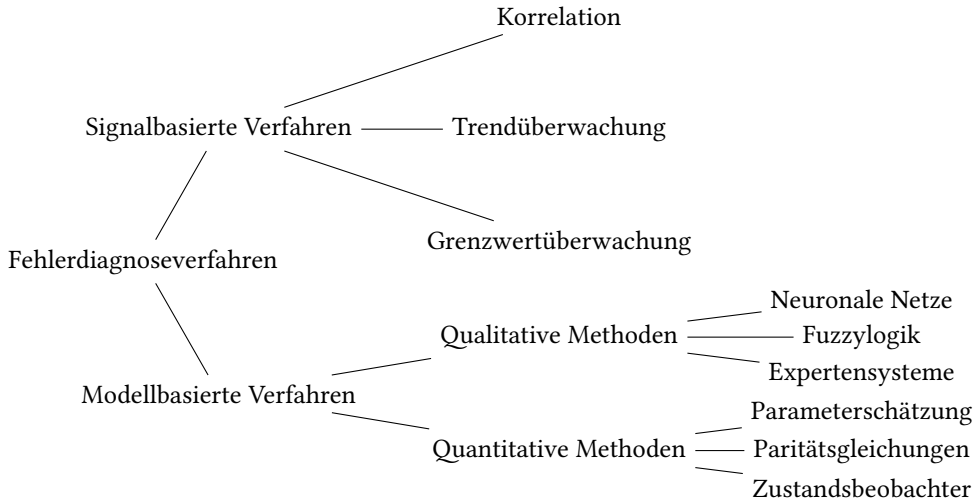


Abbildung 2.2: Überblick über Fehlerdiagnoseverfahren

Diese einfache Methode bringt mehrere Nachteile mit sich, welche den Einsatz von signalbasierten Verfahren einschränken. Für eine möglichst exakte Fehlerdiagnose muss die Messung des Signals möglichst in räumlicher Nähe am Angriffspunkt der Fehlerquelle erfolgen. Ferner sind diese Verfahren im Wesentlichen auf Systeme beschränkt, welche sich im stationären Arbeitspunkt befinden. Daher lassen sich Fehler – welche lediglich die Dynamik des Systems beeinflussen – schwer detektieren. Zudem muss ein Wissen über das Aussehen der Grenzwerte vorliegen, was bei bekannten Systemen durchaus vorhanden sein kann, aber für neue Systeme erst spät im Entwicklungsprozess generiert wird.

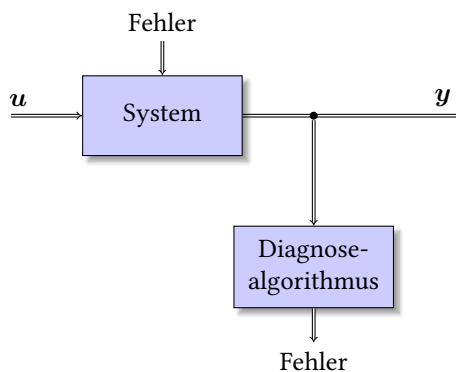


Abbildung 2.3: Prinzip der signalbasierten Fehlerdiagnose

2.2.2 Modellbasierte Verfahren

Modellbasierte Verfahren stellen eine leistungsfähigere Alternative zu den signalbasierten Methoden dar. Bei diesem Verfahren wird parallel zum betrachteten System ein Diagnosealgorithmus eingesetzt. Dieser Diagnosealgorithmus basiert auf einem Modell des Systems und hat daher auch Kenntnisse über die dynamischen Zusammenhänge zwischen den Eingangsgrößen u und den Ausgangsgrößen y . Somit besitzt der Diagnosealgorithmus ein explizites Wissen über das korrekte System. In Abbildung 2.4 ist das grundlegende Prinzip der modellbasierten Fehlerdiagnose veranschaulicht. In Anlehnung an die Hardware-Redundanz, auch

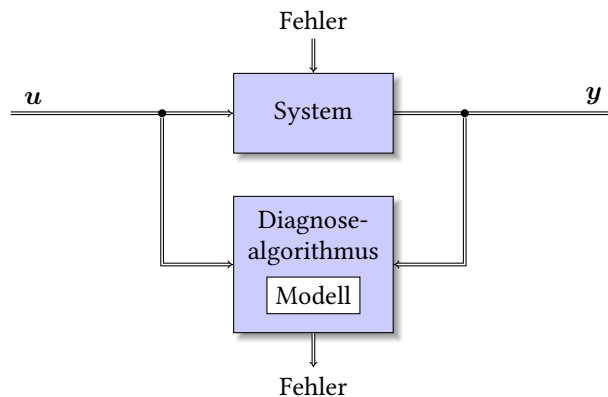


Abbildung 2.4: Prinzip der modellbasierten Fehlerdiagnose

Geräteredundanz genannt, wird die modellbasierte Fehlerdiagnose oftmals als analytische Redundanz bezeichnet. Im Unterschied zur Hardware-Redundanz werden allerdings keine – oftmals teuren – zusätzlichen Hardwarekomponenten am System verbaut, sondern ein quantitatives oder qualitatives Systemmodell verwendet.

Die wissensbasierten Fehlerdiagnoseverfahren basieren hierbei auf einem qualitativen Systemmodell und werden als Untergruppe der modellbasierten Verfahren betrachtet [Wol10]. Wissensbasierte Methoden werden häufig dann eingesetzt, wenn der Aufwand der quantitativen Modellbildung nicht vertretbar ist. Beispiele zur qualitativen Beschreibung sind unter anderem Expertensysteme, Fuzzylogik oder künstliche neuronale Netze [Zah91]. Ein detaillierter Überblick zu den wissensbasierten Verfahren ist z. B. in [Fra96, GCD15b] zu finden.

Modellbasierte Verfahren, denen ein quantitatives Modell des Systems zugrunde liegt, werden in die entsprechenden Kategorien beobachterbasierte Verfahren (engl. observer-based methods), Verfahren auf Basis von Paritätsgleichungen (engl. parity space methods) oder Parameterschätzverfahren (engl. parameter estimation methods) eingeteilt [IB97]. Eine alternative Klassifikation von modellbasierten Verfahren unterscheidet zwischen aktiven und passiven Ansätzen zum Erreichen von Robustheit [PQT00, Fek14]. Im Folgenden werden die einzelnen Kategorien vorgestellt.

Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern

Zur Kategorie der beobachterbasierten Verfahren zählen die Zustandsbeobachter, welche aus den gemessenen Ein- und Ausgangsgrößen des Systems die inneren Systemgrößen rekonstruieren. Zur Fehlerdiagnose wird typischerweise die Differenz zwischen den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems und den geschätzten Ausgangsgrößen des Zustandsbeobachters verwendet. Die bekanntesten Vertreter zur Zustandsbeobachtung sind der Luenberger-Beobachter und das Kalman-Filter [Föl16]. Basierend auf diesen beiden Vertretern existieren noch diverse Ableitungen (z. B. erweiterter Luenberger-Beobachter, unscented Kalman filter). Auch Verfahren basierend auf Optimierungsansätze, wie beispielsweise die Zustandsschätzung mit gleitendem Horizont (engl. moving horizon estimation), können zur Zustandsbeobachtung eingesetzt werden [DKBS06]. Eine Übersicht über Zustandsbeobachter wird beispielsweise in [RG06, Ada18] gegeben. Beobachtergestützte Fehlerdiagnoseverfahren sind flexibel einsetzbar, leistungstark und in der Literatur intensiv untersucht worden [AF97, Ise06, Lun16]. Sie sind besonders gut für additive Fehler nach Definition 2.8 geeignet [Ise03]. Ein Nachteil ergibt sich allerdings aus der bei Zustandsbeobachtern enthaltenen Rückführung des Beobachterfehlers. Das geschätzte Systemverhalten passt sich mit der Zeit dem fehlerbehafteten Systemverhalten an und erschwert somit die Fehlerdiagnose.

Fehlerdiagnose mittels Paritätsgleichungen

Bei der Fehlerdiagnose mittels Paritätsgleichungen wird, wie beim Verfahren basierend auf Zustandsbeobachtern, die Differenz zwischen den gemessenen Ausgangsgrößen des Systems und den geschätzten Ausgangsgrößen des Modells ausgewertet. Allerdings erfolgt keine Rückführung des Beobachterfehlers in das Modell, was somit zu einem direkten Vergleich des betrachteten Systems mit dem quantitativen Modell führt. Die wesentlichen Nachteile dieses Verfahren sind, dass ein exaktes Modell vom zu betrachteten System vorliegen muss und nur kleine Störungen auf das System einwirken dürfen [Wol10]. Die Fehlerdiagnose auf der Basis von Paritätsgleichungen hat ähnliche Eigenschaften wie die Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern und ist daher ebenfalls besonders gut für additive Fehler geeignet [Ise03]. Ein grundlegender Überblick über Paritätsgleichungen zur Fehlerdiagnose ist z. B. in [PC91] zu finden.

Fehlerdiagnose mittels Parameterschätzung

Bei der Verwendung von Parameterschätzverfahren zur Fehlerdiagnose werden die Parameter des betrachteten Systems von einer Identifikationsmethode fortlaufend geschätzt. Die Differenz zwischen den geschätzten Parametern aus den Messdaten und den bekannten Nominalwerten des Systems wird anschließend zur Fehlerdiagnose ausgewertet. Dieses Verfahren überwacht direkt die Parameter des Systems und ist daher gut für multiplikative Fehler nach Definition 2.9 geeignet [Ise05]. Eine detaillierte Übersicht von Identifikationsmethoden zur Parameterschätzung ist z. B. in [Lju99] gegeben. Auch kann unter gewissen Voraussetzungen ein Zustandsbeobachter zur Zustands- sowie Parameterschätzung eingesetzt werden [Doc03]. Aus der kombinierten Parameter- und Zustandsschätzung resultiert der Vorteil, dass

sowohl multiplikative als auch additive Fehler präzise erkannt werden können. Weiterführende Informationen zur Fehlerdiagnose mittels Parameterschätzung sind beispielsweise in [Ise85, ZWY15] zu finden.

Aktive und passive Fehlerdiagnose

Eine alternative Klassifizierung unterscheidet zwischen aktiver und passiver Fehlerdiagnose. Hierbei wird anhand der Behandlung von unerwünschten Unsicherheiten in den Messgrößen sowie des verwendeten Systemmodells – beispielsweise aus vereinfachenden Annahmen – zur Erzielung von Robustheit unterschieden. Unsicherheiten führen zu Abweichungen zwischen dem tatsächlichen Systemverhalten und dem modellbasierten Systemverhalten und können eine zufällige oder systematische Ursache haben [XTW⁺18, PQT00].

Bei der aktiven Fehlerdiagnose wird das Diagnoseergebnis von Beginn an unempfindlich gegenüber den Unsicherheiten konstruiert. Eine bekannte Methode hierfür ist der Beobachter mit unbekannten Eingängen (engl. unknown input observer). Hierbei werden die Unsicherheiten als unbekannte Eingänge interpretiert, mit dem Ziel, durch eine Entkopplung deren Auswirkungen auf das Diagnoseergebnis zu unterdrücken [MWS⁺18, CP99]. Solch eine Entkopplung ist jedoch nur unter gewissen Voraussetzungen möglich und dadurch nur auf eine begrenzte Anzahl von praktischen System anwendbar [XTW⁺18].

Werden die Unsicherheiten bei der Bestimmung des Diagnoseergebnisses erst am Schluss berücksichtigt, so wird dies als passive Fehlerdiagnose bezeichnet. Die meisten Methoden nutzen hierfür statische oder adaptive Schwellwerte, wobei das Diagnoseergebnis deren Grenzen nicht überschreiten darf.

In dieser Arbeit wird jeweils ein Fehlerdiagnoseverfahren basierend auf einem Zustandsbeobachter sowie auf Paritätsgleichungen vorgestellt. Bei beiden Verfahren wird eine kombinierte Parameterschätzung eingesetzt, um die Vorteile beider Methoden zu verknüpfen. Die angewendeten Fehlerdiagnoseverfahren werden dem passiven Ansatz zugeordnet, da alle Unsicherheiten explizit im Systemmodell beschrieben sind und ihre Auswirkungen erst bei der Bestimmung des Diagnoseergebnisses berücksichtigt werden.

2.3 Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme

Betrachtet wird in den folgenden Abschnitten zunächst der aktuelle Stand der Technik zu Diagnoseverfahren für unsichere, nichtlineare Systeme. Dazu werden geeignete Beobachtervarianten für derartige Systeme und deren Anwendung zur Fehlerdiagnose behandelt. Abschließend wird der Stand der Technik von Diagnoseverfahren für verteilte Systeme sowie deren Kombination mit Diagnoseverfahren für unsichere, nichtlineare Systeme herausgearbeitet.

2.3.1 Diagnoseverfahren für unsichere, nichtlineare Systeme

In diesem Abschnitt werden alle Verfahren betrachtet und bewertet, die eine modellbasierte Fehlerdiagnose von unsicheren, nichtlinearen Systemen ermöglichen. Hierfür müssen geeignete Beobachtermethoden eingesetzt werden, die auf Basis der unsicherheitsbehafteten Messungen und des unsicheren Systemmodells die inneren Systemzustände rekonstruieren. Die inneren Systemzustände bilden anschließend die Grundlage des Fehlerdiagnosealgorithmus.

Die in der Literatur am häufigsten eingesetzten Methoden zur Zustandsschätzung von unsicheren Systemen basieren auf einer stochastischen Beschreibung der Unsicherheiten. Aufgrund der anschaulichen Beschreibungsmöglichkeit werden hierfür zumeist vereinfachend normalverteilte Zufallsprozesse angenommen, welche durch ihren Erwartungswert sowie ihr zweites Moment (die Kovarianz) vollständig festgelegt sind [Wol10]. Der bekannteste Vertreter dieser Gruppe ist das Kalman-Filter nach [Kal60] für lineare, zeitdiskrete Systeme sowie seine abgeleiteten Erweiterungen (z. B. das Unscented Kalman-Filter für nichtlineare, zeitdiskrete Systeme [WVDM00]). Jedoch ist bei diesen Methoden die a-priori Kenntnis der stochastischen Eigenschaften erforderlich, was in der Praxis zumeist nicht gegeben ist [Ada18]. Ferner können gewisse Arten von Unsicherheiten, wie beispielsweise die Parameterunsicherheit, nicht in ausreichender Form oder im Rahmen der praktischen Anwendung nicht intuitiv angegeben werden [Wol10].

Eine Alternative zu den stochastischen Methoden sind deterministische Methoden. Im Gegensatz zu den stochastischen Methoden wird bei diesen Methoden nur die Beschränktheit der Unsicherheiten angenommen. Diese Vorgehensweise ist durch die häufige Angabe von Fehlerschranken bzw. maximalen Fehlerabweichungen in den Sensordatenblättern motiviert [Kre18]. Des Weiteren ermöglichen diese Methoden die Bestimmung einer Menge von Zuständen, welche den tatsächlichen Zustand enthalten. Dies ist insbesondere für die Erzielung eines robusten Diagnoseergebnisses von großem Vorteil und führt dazu, dass diese Methoden häufig für die Fehlerdiagnose angewendet werden [Wol10, Zai17]. Existierende Methoden zur deterministischen Zustandsschätzung für unsichere, nichtlineare Systeme lassen sich nach [GDRZ14] grundsätzlich in die folgenden zwei Kategorien einteilen: Intervallbeobachter und Zustandsmengenbeobachter. Die Unterscheidung resultiert aus der Vorgehensweise zur Bestimmung der Zustandsmengen. Intervallbeobachter beruhen auf der klassischen Beobachterstruktur und schließen den tatsächlichen Zustand mit Hyperrechtecken ein. Zustandsmengenbeobachter hingegen basieren auf einem Prädiktion-Korrektur-Schema mit unterschiedlichen Geometrien zur Zustandseinschließung. Für beide Methoden wird im Folgenden der Stand der Technik beschrieben.

Intervallbeobachter

Basiert die Berechnung der Zustandseinschließung für unsichere Systeme auf der klassischen Beobachterstruktur, wie beispielsweise dem weit verbreitete Luenberger-Beobachter (siehe z. B. [Lue64, Föl16]), werden diese Ansätze unter dem Oberbegriff Intervallbeobachter

(engl. interval observer) zusammengefasst. Intervallbeobachter basieren auf Differentialgleichungen, welche es ermöglichen, obere und untere Grenzen für die Lösungen eines Differentialsystems zu jedem Zeitpunkt anzugeben [MB11]. Ein detaillierter Überblick über die Funktionsweise von Intervallbeobachtern für verschiedene Systemklassen ist beispielsweise in [RE18] oder in [KXZL21] zu finden.

Intervallbeobachter wurden erstmals zur Zustandsschätzung eines Schmutzwasseraufbereitungsprozesses eingesetzt und in [HSG98a] sowie [HSG98b] veröffentlicht. Nachfolgende Veröffentlichungen zum Themengebiet der Intervallbeobachter finden ebenfalls häufig Verwendung in biologischen Prozessen (siehe beispielsweise [GRHS00, DEI16, MBG07]). Aber auch in technischen Systemen sind Intervallbeobachter in den letzten Jahren angewendet worden. Beispiele hierfür sind die garantierte Zustandsschätzung von Asynchronmaschinen [Kre18, SKH21] oder Fahrzeugdynamiken [IIAM18]. Das am weitesten verbreitete Einsatzgebiet von Intervallbeobachtern ist allerdings die modellbasierte Fehlerdiagnose (siehe z. B. [PSE⁺06, BRPN14, ERZ14, ZY17, GZ17, PPOM20]). Allerdings sind diese Veröffentlichungen sowie eine Mehrzahl der Publikationen für Intervallbeobachter für lineare Systeme und/oder zeitdiskrete Systeme formuliert und werden daher hier nicht weiter betrachtet. Für nichtlineare Systeme existieren bisher nur wenige veröffentlichte Ansätze. In [RVZ10] wird ein Fehlerdiagnoseverfahren basierend auf Intervallbeobachtern für nichtlineare, zeitkontinuierliche Systeme vorgestellt. Jedoch wird hierbei das nichtlineare System durch ein lineares, parametervariantes System (engl. linear parameter-varying system, LPV-System) approximiert, was Auswirkungen auf die Robustheit des Verfahrens hat [BKT14]. In [REZ12] wurde ebenfalls ein Intervallbeobachter für nichtlineare Systeme veröffentlicht. Diese Methode basiert auf einer Ein-/Ausgangslinearisierung des nichtlinearen Systems und ist ausschließlich für Eingrößensysteme anwendbar. Fehlalarme (Fehler 1. Art) werden bei diesen Methoden ausgeschlossen.

Ein wesentlicher Nachteil aller Intervallbeobachter ist die restriktive Forderung, dass es sich bei dem zu betrachtenden System um ein positives System³ handeln muss. Für einige Systemklassen, wie beispielsweise für eine breite Klasse von LPV-Systemen [Kre18], existieren Transformationsvorschriften, welche ein allgemeines System in ein positives System überführen. Eine allgemeingültige Transformationsvorschrift existiert zum aktuellen Zeitpunkt nicht.

Ein weiterer Nachteil von Intervallbeobachtern ist, dass die Lösungseinschließung nichtlinearer Systeme zumeist deutlich überapproximiert wird. Der Grund hierfür ist in der Tatsache zu suchen, dass bei nichtlinearen Differenzialgleichungen im Allgemeinen die Lösungsmenge eine nicht-konvexe Form aufweist [Wol10]. Durch die Einschließung dieser nicht-konvexen Lösungsmenge mittels konvexen Hyperrechtecken wird folglich die Lösungsmenge überapproximiert. Dies führt zu einer geringeren Sensitivität des Fehlerdiagnoseverfahrens und somit zu einer verzögerten Alarmmitteilung oder sogar zu einem verdeckten Alarm (Fehler 2. Art). Die Thematik der Überapproximation, auch als Überschätzung bezeichnet, bei Intervallen wird in Abschnitt 3.2.1 nochmals aufgegriffen und detailliert beschrieben.

³ Ein System wird als positiv bezeichnet, wenn seine Zustands- und Ausgangsgrößen für beliebige nichtnegative Eingangsgrößen und Anfangsbedingungen stets nichtnegativ sind [AS03, FR11].

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass aufgrund der beschriebenen Aspekte Intervallbeobachter zur Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme nur sehr eingeschränkt geeignet sind und daher im Rahmen dieser Arbeit keine Anwendung finden.

Zustandsmengenbeobachter

Alle Ansätze zur Zustandsmengenbeobachtung basieren auf einem Prädiktion-Korrektur-Schema zur Rekonstruktion der Zustandsmengen. Das allgemeingültige Grundprinzip aller Zustandsmengenbeobachter umfasst dabei die drei folgenden Schritte:

1. Initialisierung:

Festlegung einer initialen Zustandsmenge, welche den Anfangszustand des betrachteten Systems einschließt.

2. Prädiktion:

Prädiktion der Zustandsmenge zum nächsten Zeitpunkt, auf Grundlage der unsicheren Eingangs- und Zustandsgrößen zum aktuellen Zeitpunkt sowie des unsicheren Systemmodells.

3. Korrektur:

Die prädiizierte Zustandsmenge wird mithilfe der unsicheren Messung der Ausgangsgrößen verkleinert. Das Resultat ist die Basis für den nächsten Prädiktionsschritt.

Der Initialisierungsschritt wird einmalig zu Beginn des Prädiktion-Korrektur-Schemas durchgeführt. Die nachfolgenden Schritte Prädiktion und Korrektur werden fortlaufend nach jedem Zeitschritt wiederholt. Anhand von Abbildung 2.5 wird der beschriebene Schrittablauf der Zustandsmengenbeobachtung veranschaulicht. Zustandsmengenbeobachter bilden den

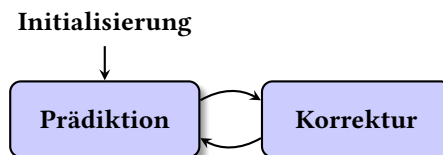


Abbildung 2.5: Schrittablauf der Zustandsmengenbeobachtung

theoretischen Kern dieser Arbeit. Im folgenden Abschnitt wird daher der aktuelle Stand der Technik zu Zustandsmengenbeobachtern detailliert beschrieben.

Die Mehrzahl der Veröffentlichungen zum Themengebiet der Zustandsmengenbeobachtung basiert auf einer zeitdiskreten Systembeschreibung, während die zeitkontinuierliche Systembeschreibung deutlich seltener verwendet wird. Das Problem der zeitdiskreten Ansätze liegt darin, dass der Diskretisierungsfehler bei einer Überführung einer zeitkontinuierlichen Systembeschreibung in die zeitdiskrete Systembeschreibung berücksichtigt werden muss. Bei einem nichtlinearen Modell ist eine Diskretisierung ohne Diskretisierungsfehler im Allgemeinen nicht möglich und erfolgt zumeist näherungsweise [BU16]. Wird der Diskretisierungsfehler nicht in geeigneter Weise berücksichtigt, wie z. B. in [DLSZ99], können die daraus

resultierenden Abweichungen zwischen dem tatsächlichen Systemverhalten und dem modellierten Systemverhalten fälschlicherweise als Fehlerauswirkungen interpretiert werden. In dieser Arbeit wird durch die direkte Verwendung einer zeitkontinuierlichen Systembeschreibung das Problem einer geeigneten Berücksichtigung des Diskretisierungsfehlers umgangen.

Neben der Art der Systembeschreibung ist die Verwendung der geometrischen Formen zur Einschließung der Unsicherheiten ein weiteres signifikantes Unterscheidungsmerkmal von Zustandsmengenbeobachtern. Die häufigsten Beschreibungsformen sind hierbei Intervalle, Polytope sowie Ellipsoide. Die jeweiligen geometrischen Beschreibungsformen werden im Folgenden an den konkreten Veröffentlichungen zur Zustandsmengenbeobachtung erläutert.

Zustandsmengenbeobachter auf Basis von Ellipsoiden werden beispielsweise in [DLSZ99, Aßf09, WWZ18] vorgestellt. Ein Ellipsoid kann nach [Neu93] als ein affines Bild einer mehrdimensionalen Einheitskugel⁴ betrachtet werden und ist daher die höherdimensionale Entsprechung einer Ellipse. Das wesentliche Problem der Mengenbeschreibung mittels Ellipsoiden liegt darin, dass die im Korrekturschritt (siehe Abbildung 2.5) benötigte Schnittmengebildung zweier Ellipsoide nicht wieder in einem Ellipsoid resultiert. Daher muss nach jedem Korrekturschritt eine geeignete äußere Einschließung der Lösungsmenge, beispielsweise durch das Lösen eines Optimierungsproblems, bestimmt werden. Ferner handelt es sich bei Ellipsoiden um eine konvexe Mengenbeschreibung, was – wie im vorherigen Abschnitt beschrieben – bei nichtlinearen Systemen zu einer ungewollten Überapproximation der Lösungsmenge führt. Zusätzlich beruhen alle Ansätze auf einer zeitdiskreten Systembeschreibung. Zusammengefasst führen die beschriebenen Probleme dazu, dass der Ansatz mit Ellipsoiden als Mengenbeschreibungsform nicht geeignet ist.

Eine alternative Beschreibungsform zu Ellipsoiden sind Polytope. Polytope sind verallgemeinerte Polygone in beliebiger Dimension. Für eine Zustandsmengenbeobachtung wird meist eine vereinfachte Form von konvexen Polytopen verwendet, die sogenannten Zonotope [Com03, ABC05, LSA⁺13, WWPC19, RRSR20]. Bei einem Zonotop handelt es sich um ein Polytop, welches zu seinem Mittelpunkt punktsymmetrisch ist. Ein Zonotop kann auch als eine Minkowski-Summe⁵ von Liniensegmenten betrachtet werden [Fuk04]. Ein zentrales Problem dieser Beschreibungsform ist, dass sich nach jedem Prädiktionsschritt die Anzahl der Liniensegmente jeweils um die Systemordnung erhöht und somit die Komplexität der geometrischen Beschreibung steigt. Dieses Problem kann mittels Ordnungsreduktionsverfahren (siehe beispielsweise [Com03]) gehandhabt werden. Trotzdem bilden diese Verfahren eine äußere, konvexe Überapproximation, was wiederum zu Lasten der Sensitivität der Fehlerdiagnose geht. Des Weiteren basieren alle Veröffentlichungen auf einer zeitdiskreten Systembeschreibung. Aufgrund der zeitdiskreten Systembeschreibung sowie der potenziellen Überapproximation ist auch dieser Ansatz nicht geeignet.

Die einfachste Form der geometrischen Mengenbeschreibung ist durch abgeschlossene Intervalle gegeben. Hierbei werden die Unsicherheiten – wie beim Intervallbeobachter – durch

⁴ Eine Einheitskugel ist eine Kugel mit einem Radius eins um den Nullpunkt eines normierten Raums [Wer06].

⁵ Die Minkowski-Summe zweier Mengen A und B ist durch die Addition jedes Elements der Menge A jeweils mit jedem Element der Menge B gegeben [Epp95].

Hyperrechtecke eingeschlossen. Im Gegensatz zu Intervallbeobachtern weisen die Zustandsmengenbeobachter keine klassische Beobachterstruktur auf, sondern basieren auf dem beschriebenen Prädiktion-Korrektur-Schema. Deutlich wird dies beispielsweise in [WKK08] und [JKDW01]. Dort wird im Korrekturschritt auf eine Rückkopplung des Beobachterfehlers gänzlich verzichtet. Die Korrektur erfolgt anhand einer Schnittmengenbildung der intervallwertigen Mess- und Prädiktionsmengen. Intervalle sind eine einfache und intuitive Beschreibungsform, führen aber im Allgemeinen zu einer größeren Überapproximation als Ellipsoide oder Zonotope. In den 1990er Jahren ist mit den Taylor-Modellen eine Erweiterung der klassischen Intervallbeschreibung veröffentlicht worden [MB96, Ber97, Mak98]. Hierbei wird eine Menge durch eine Kombination aus symbolischen und numerischen, intervallbasierten Methoden beschrieben (siehe Abschnitt 3.2.2). Diese Vorgehensweise ermöglicht eine nicht-konvexe Lösungseinschließung bei nichtlinearen Systemen, was der Sensitivität des Fehlerdiagnoseverfahrens zugutekommt. In [Wol10] werden Taylor-Modelle zur kombinierten Zustandsmengenbeobachtung und Parameterschätzung auf Grundlage einer zeitkontinuierlichen Systembeschreibung eingesetzt. Der Korrekturschritt erfolgt ebenfalls über eine Schnittmengenbildung, welche auch die Basis für das Prinzip der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose bildet. Die Konsistenzprüfung erfolgt anhand der Schnittmenge von Mess- und Prädiktionsmengen. Ist das Ergebnis dieser Schnittmenge keine leere Menge, sind Mess- und Prädiktionsmenge konsistent. Folglich treten bei dieser Methode weder Fehlalarme noch falsche Isolationen (Fehler 1. Art) auf. Das Prinzip der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose wurde von [Pla07] für zeitdiskrete, lineare Systeme entwickelt und in [Wol10] auf zeitkontinuierliche, nichtlineare Systeme erweitert. Aufgrund der Schnittmengenbildung im Korrekturschritt wird der konsistenzbasierte Ansatz der Fehlerdiagnose mittels Paritätsgleichungen (siehe Abschnitt 2.2.2) zugeordnet. Dieser Ansatz stellt eine vielversprechende Möglichkeit und Grundlage zur Fehlerdiagnose verteilter, nichtlinearer Systeme dar und wird daher im Rahmen dieser Arbeit weiterverfolgt.

Alternativ zur weit verbreiteten Schnittmengenbildung bei den intervallbasierten Zustandsmengenbeobachtern kann für die Umsetzung des Korrekturschritts ein Optimierungsproblem zur Verkleinerung der prädizierten Zustandsmenge formuliert werden. In den meisten Fällen kommt hierbei der Zustandsmengenbeobachter mit gleitendem Horizont (engl. bounded error moving horizon state estimator) zum Einsatz [VGFA03, DW20]. Die Optimierung erfolgt hierbei über einen gleitenden, in der Vergangenheit liegenden Zeithorizont. Für ein endliches Optimierungsproblem werden die vergangenen Ergebnisse bis zum Beginn des Zeithorizonts in den sogenannten Ankunfts-kosten (engl. arrival cost) zusammengefasst [Feß11]. Ein intervallwertiges, quadratisches Optimierungsproblem wird in [VGFA03] formuliert, welches das Ziel hat, die Differenz zwischen Prädiktions- und Messmenge zu minimieren. Zur Lösung des Optimierungsproblems wird ein Branch-and-Bound Verfahren verwendet. Werden jedoch weitere Dimensionen dem Optimierungsproblem hinzugefügt, führt dies zu einem rapiden Anstieg der erforderlichen Funktionsauswertungen (Fluch der Dimensionalität). Ferner werden die Ankunfts-kosten in diesem Ansatz nicht berücksichtigt. In [DW20] wird das Optimierungsproblem nur auf Basis der oberen und unteren Intervallgrenzen formuliert. Dies hat den Vorteil, dass das Optimierungsproblem nicht mithilfe der Intervallarithmetik gelöst werden muss, sondern mit klassischen Optimierungsmethoden (siehe Abschnitt 3.5.2). Jedoch wird bei diesem Ansatz nicht das vollständige Potenzial ausgeschöpft, da unter anderem die Anfangskosten nicht berücksichtigt und bei der Prädiktion nur reine Intervallverfahren an-

gewendet werden. Allerdings stellt die Methode der Zustandsmengenbeobachtung mit gleitendem Horizont eine vielversprechende Möglichkeit und Basis zur verteilten, nichtlinearen Fehlerdiagnose dar und wird daher als eine Alternative zur konsistenzbasierten Fehlerdiagnose in dieser Arbeit untersucht. Die Zustandsmengenbeobachtung mit gleitendem Horizont ist aufgrund der fortlaufenden Minimierung der Distanz zwischen Prädiktions- und Messmenge der Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern (siehe Abschnitt 2.2.2) zugeordnet.

Ein weiterer, interessanter Ansatz zur Zustandsmengenbeobachtung wird in [Sch19] vorgestellt. Während die bisherigen Ansätze zur Zustandsmengenbeobachtung durch ihre äußere Einschließung der Unsicherheiten ausschließlich Fehler 1. Art (siehe Tabelle 2.1) vermeiden, werden mit diesem Ansatz durch eine innere Einschließung der Unsicherheiten Fehler 2. Art vermieden. Aufgrund der Fokussierung auf Fehler 2. Art sowie der Betrachtung von zeitdiskreten, linearen bzw. hybriden Systemen kann dieser Ansatz in dieser Arbeit nicht angewendet werden.

2.3.2 Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte Systeme

Der Bedarf an Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte Systeme folgt direkt aus der steigenden Komplexität moderner Systeme [BKLS16]. Verteilte Systeme sind beispielsweise in modernen Kraftfahrzeugen zu finden, bei denen eine Vielzahl von Steuergeräten miteinander interagieren müssen. Auch auf dem Weg in das neue Industriezeitalter (Industrie 4.0) werden einzelne, autarke Plattformen (z. B. Sensoren oder Prozessleitsysteme) für die Erfüllung einer Zielaufgabe miteinander interagieren müssen. Aufgrund der Verteilung kann eine Nebenläufigkeit umgesetzt werden, sodass mehrere Prozesse bzw. Aufgaben parallel ausgeführt werden können. Verteilte Systeme bestehen aus einer Zusammenschaltung von zwei oder mehreren Subsystemen, welche zusammen das monolithische System – auch als globales System bezeichnet – bilden [SBK⁺11]. In Abbildung 2.6 ist eine solche Systemstruktur schematisch dargestellt, wobei beispielhaft alle Subsysteme miteinander interagieren. Diese Interaktion wird anhand von Pfeilen dargestellt. Die Fehlerdiagnose verteilter Systeme erfolgt dezentral mithilfe von

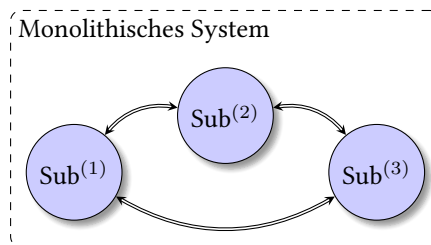


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung eines verteilten Systems bestehend aus drei Subsystemen $\text{Sub}^{(i)}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$

zwei oder mehreren lokalen Fehlerdiagnoseeinrichtungen. Diese führen jeweils eine Fehlerdiagnose anhand des Subsystemmodells sowie den lokal verfügbaren Informationen durch. Da die einzelnen Subsystemmodelle im Allgemeinen eine geringere Komplexität aufweisen

als das monolithische Systemmodell, ist der zentrale Vorteil der verteilten Fehlerdiagnose eine Reduktion der Komplexität und somit des Speicher- und Rechenbedarfs. Weitere Vorteile und Eigenschaften werden in Kapitel 4 vorgestellt.

Die ersten Methoden und Grundlagen zur verteilten bzw. dezentralen Zustandsschätzung wurden in den 1970er Jahren publiziert [STL74, HSST78]. Auch in den letzten Jahren war diese Thematik weiterhin Gegenstand aktueller Forschungsaktivitäten. Die Mehrzahl der Veröffentlichungen basiert hierbei auf verteilten Kalman-Filter-Methoden [RDW91, MDW94, OS07, KM07, TW19]. Außerdem existieren Methoden für andere Beobachtervarianten wie beispielsweise dem Luenberger-Beobachter [Sha86, KSC16, HTWS19] oder dem H_∞ -Beobachter [DWDS12, DWSD15]. Bis auf [DWDS12] sowie [DWSD15] basieren diese Veröffentlichungen auf einer linearen Systembeschreibung. Aber auch für die Klasse der nichtlinearen Systeme existieren diverse Ansätze, welche meist auf eine nichtlineare Kalman-Filter-Variante, wie dem Extended Kalman-Filter [SMB08, BC16] oder dem Unscented Kalman-Filter [HA10, CS10], basieren.

Neben der Unterscheidung anhand ihrer eingesetzten Beobachtermethode ist bei verteilten Zustandsschätzalgorithmen die Struktur bzw. die Architektur ein wesentliches Klassifizierungsmerkmal. Während beispielsweise [RDW91, CS95] auf eine vollvernetzte Struktur setzen, d. h. alle lokalen Zustandsschätzer kommunizieren miteinander, setzen [MDW94, KM07, HA10] auf eine beliebig verknüpfbare Architektur. Die Vorteile der beliebig verknüpfbaren Architektur sind die höhere Flexibilität sowie der geringere Kommunikationsaufwand, da nicht alle lokalen Zustandsschätzer miteinander kommunizieren müssen.

In Bezug auf die Fehlerdiagnose ist beim Aufbau der verteilten Architektur zudem die Aufteilung der Fehlerdiagnoseaufgaben von besonderer Bedeutung. Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, besteht die Fehlerdiagnose aus den Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation. In den meisten Veröffentlichungen werden beide Teilaufgaben auf einer lokalen Fehlerdiagnoseeinrichtung durchgeführt (siehe z. B. [DKTM14, TSSJ14, CDM17]). Dies schränkt jedoch das Potenzial der verteilten Fehlerdiagnose ein, da bereits in [FLSK06] unter dem Begriff „Ferndiagnose“ ausgeführt wurde, dass die Fehlerisolation deutlich mehr Rechenleistung erfordert als die Fehlerdetektion. Aus diesem Grund wird auch in [FLSK06] oder [SSKL09] die Separation in eine On-Board Komponente (zur Fehlerdetektion) und eine externe Off-Board Komponente (zur Fehlerisolation) vorgeschlagen, welche als Ferndiagnose bezeichnet wird. In [BFP11] wird eine alternative, mehrschichtige Architektur vorgeschlagen, welche ebenfalls das Ziel hat die Aufgabe der Fehlerisolation zu verteilen. Bei dieser Architektur wird nach der Fehlerdetektion eine Fehlerisolation auf allen lokalen Fehlerdiagnoseeinrichtungen durchgeführt. Dies erfordert jedoch eine vollvernetzte Struktur mit hohem Kommunikationsaufwand und niedriger Flexibilität, was dazu führt, dass dieser Ansatz für diese Arbeit nicht in Frage kommt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass keine Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose existiert, welche alle genannten Vorteile vereint und somit das volle Potenzial ausschöpft. Die Entwicklung und Untersuchung einer Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose ist daher ein Schwerpunkt dieser Arbeit.

2.3.3 Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte, unsichere Systeme

Bisher existiert in der Literatur nur eine sehr geringe Anzahl an Veröffentlichungen zum Themengebiet der Fehlerdiagnose für verteilte Systeme mit der deterministischen Berücksichtigung von Unsicherheiten zum Ausschluss von Fehlern 1. Art. Allerdings können zusätzliche Unsicherheiten aus der verteilten Architektur resultieren, welche ebenfalls im Fehlerdiagnoseverfahren berücksichtigt werden müssen. Beispiele für solche Unsicherheiten sind Paketverluste im Kommunikationsnetzwerk oder die Modellunsicherheiten in den Subsystemen aufgrund der Dekomposition.

In [RFTK18] wird eine Methode basierend auf einer mehrschichtigen Architektur präsentiert. Neben der Problematik der vollvernetzten Struktur werden die Unsicherheiten in Form von Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt. Dies führt dazu, dass dieser Ansatz nicht für die Erfüllung der formulierten Forschungsziele aus Abschnitt 1.2 in Frage kommt. In den Veröffentlichungen [ZZ12] sowie [ZZ13] werden die Modellunsicherheiten zwar als beschränkte Unsicherheiten berücksichtigt, jedoch nur im Rahmen der Bildung eines adaptiven Schwellwerts für die Fehlerdetektion. Das Prinzip der Zustandsmengenbeobachtung wird nicht angewendet. Ferner sind Fehlerdetektion und -isolation nicht voneinander separiert. Somit sind auch diese Ansätze für diese Arbeit nicht geeignet.

Es existieren bisher keine Veröffentlichungen, welche die Themengebiete Zustandsmengenbeobachtung und verteilte Systembeschreibung zur verteilten Fehlerdiagnose unsicherer Systeme zusammenführen und damit Fehler 1. Art ausschließen.

2.4 Zusammenfassung und Forschungslücke

In den vorherigen Abschnitten wurden zunächst die Grundbegriffe der Fehlerdiagnose eingeführt und eine Klassifikation der existierenden Fehlerdiagnoseverfahren durchgeführt. Darauf aufbauend wurde ein Überblick über verwandte Arbeiten in der Literatur gegeben, in dem Bestreben, die in der Einleitung formulierten Forschungsziele zu präzisieren sowie die Forschungslücke aufzuzeigen.

Eine Recherche zum Stand der Technik von Fehlerdiagnoseverfahren für unsichere Systeme hat ergeben, dass Intervallbeobachter aufgrund ihrer konvexen Einschließungsform bei der Lösungseinschließung von nichtlinearen Systemen zu einer potenziellen Überapproximation führen und somit eine geringeren Sensitivität bei der Fehlerdiagnose aufweisen. Ferner lassen sich Intervallbeobachter ausschließlich für positive Systeme umsetzen. Bei den Zustandsmengenbeobachtern hingegen können auch nicht-konvexe Beschreibungsformen eingesetzt werden, wie beispielsweise Taylor-Modelle. Hierbei haben sich die Methoden der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose sowie die Zustandsschätzung mit gleitendem Horizont als die erfolgversprechendsten Ansätze erwiesen. Der Ansatz mit gleitendem Horizont muss jedoch noch für den Einsatz bei der Fehlerdiagnose weiterentwickelt und analysiert werden.

Die Untersuchung der Methoden von Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte Systeme ergab, dass zunächst eine geeignete Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose realisiert werden

muss. Im Wesentlichen existieren hierfür zwei Architekturen: Vollständig verknüpfbare Architekturen und beliebig verknüpfbare Architekturen. Vollständig verknüpfbare Architekturen sind gegenüber beliebig verknüpfbaren Architekturen weniger flexibel und weisen einen größeren Kommunikationsaufwand auf. Daraus leitet sich die Frage ab, wie eine beliebig verknüpfbare Architektur im Kontext der Fehlerdiagnose aussieht. Des Weiteren wurde ausgeführt, dass eine Separation der Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation (Fern-diagnose) zu einer weiteren Reduktion der erforderlichen Rechenleistung führen kann.

Die Recherche hat auch ergeben, dass keine Fehlerdiagnoseansätze existieren, welche das Prinzip der Zustandsmengenbeobachtung mit der verteilten Fehlerdiagnose zusammenführen. Unsicherheiten, auch resultierend aus dem Kommunikationsnetzwerk und der Dekomposition, werden in den meisten Publikation nicht in geeigneter Weise berücksichtigt. Falls diese berücksichtigt werden, dann in Form von stochastischen Unsicherheiten. Dies hat jedoch den signifikanten Nachteil, dass der Anwender die stochastischen Eigenschaften des Systems kennen muss [Ada18].

Die in der Einleitung formulierten Forschungsziele lassen sich daher zu den folgenden Forschungsfragen konkretisieren:

- Wie lässt sich eine geeignete Architektur zur Fehlerdiagnose verteilter Systeme realisieren?
 - Wie sieht eine beliebig verknüpfbare Architektur im Kontext der Fehlerdiagnose aus? Welche Informationen müssen zwischen den lokalen Fehlerdiagnoseeinheiten ausgetauscht werden?
 - Kann eine Separation der Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation (Fern-diagnose) zu einer Reduzierung des lokalen Rechenaufwands führen?
- Kann das Konzept der Zustandsmengenbeobachtung auf die Klasse der verteilten Systeme angewendet werden?
 - Wie kann ein verteiltes, nichtlineares System mit deterministischen Unsicherheiten mithilfe eines Zustandsraummodells dargestellt werden?
 - Wie können Unsicherheiten in der Kommunikation, wie bspw. Paketverluste, geeignet berücksichtigt werden?
 - Ist das Prinzip der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose bei verteilten, unsicheren Systemen anwendbar?
 - Kann ein Zustandsbeobachter mit gleitendem Horizont effektiv und effizient zur Fehlerdiagnose eingesetzt werden? Ist diese Methode auf verteilte Systeme übertragbar?
- Können die neuen Fehlerdiagnoseverfahren auf reale Systeme angewendet werden?
 - Welche Eigenschaften weisen die neuen Fehlerdiagnoseverfahren auf? Welche Vorteile ergeben sich im Vergleich zu einer zentralen Fehlerdiagnose?
 - Wie wirken sich die verschiedenen Unsicherheiten auf das Diagnoseresultat aus?

3 Grundlagen

Dieses Kapitel behandelt die theoretischen Grundlagen für die nachfolgenden Kapitel. Hierzu werden die für diese Arbeit relevanten Darstellungsformen und Methoden mit ihren jeweiligen Eigenschaften sowie Voraussetzungen erläutert. Ferner wird in diesem Kapitel die verwendete Notation eingeführt.

Die Basis eines modellbasierten Fehlerdiagnoseverfahrens bildet das Modell des betrachteten Systems. In Abschnitt 3.1 wird daher die verwendete Darstellungsform des Modells eingeführt. Die mathematischen Beschreibungsformen der im Modell enthaltenen Unsicherheiten werden in Abschnitt 3.2 erläutert. Zur verifizierten Lösungseinschließung dieser unsicherheitsbehafteten Modelle wird ein Verfahren basierend auf Taylor-Modellen verwendet, welches in Abschnitt 3.3 vorgestellt wird. In den Abschnitten 3.4 sowie 3.5 werden die konsistenzbasierte Fehlerdiagnose und der Zustandsschätzer mit gleitendem Horizont detailliert erläutert. Diese beiden Methoden bilden die Grundlage für die zwei neuartigen Fehlerdiagnoseverfahren, welche im Rahmen dieser Arbeit präsentiert werden.

3.1 Unsichere Systeme in der Zustandsraumdarstellung

Der Einsatz von modellbasierten Fehlerdiagnoseverfahren impliziert die Verwendung eines Modells vom betrachteten System. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Darstellungsform eines zeitkontinuierlichen, nichtlinearen Zustandsraummodells als quantitative Modellbeschreibung angewendet.

Definition 3.1 (Zeitkontinuierliches, nichtlineares, zeitinvariantes System in der Zustandsraumdarstellung [Föl16])

Die Zustandsraumdarstellung eines zeitkontinuierlichen, nichtlinearen Systems ist gegeben durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) , \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) , \quad (3.1b)$$

wobei von einem zeitinvarianten System ausgegangen wird. Hierbei wird $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ als Zustandsvektor, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ als Eingangsvektor und $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ als Ausgangsvektor bezeichnet. Die Vektordifferentialgleichung (3.1a), mit der Systemfunktion $\mathbf{f}(\cdot)$, sei als Zustandsdifferentialgleichung oder Systemgleichung bezeichnet, die Vektorgleichung (3.1b), mit der Ausgangsfunktion $\mathbf{h}(\cdot)$, als Ausgangsgleichung, beide Beziehungen zusammen (3.1) als Zustandsgleichungen. Der Anfangszustand ist anhand von $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Anmerkung 3.1. In dieser Arbeit werden ausschließlich zeitkontinuierliche, nichtlineare, zeitinvariante Systeme behandelt. Aus diesem Grund wird auf eine Nennung der Begriffe „zeitkontinuierlich“, „nichtlinear“ und „zeitinvariant“ sowie der expliziten Angabe des Arguments Zeit (t) im Folgenden verzichtet, außer ein konkreter Zeitpunkt ist gemeint.

Ferner gilt in dieser Arbeit die folgende Annahme:

Annahme 3.1 (Lineare Ausgangsgleichung)

Es wird ein System nach Definition 3.1 mit dem Spezialfall einer linearen Ausgangsgleichung

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.2)$$

angenommen. Hierbei werden $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ als Ausgangsmatrix und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ als Durchgriffsmatrix bezeichnet.

Mittels einer angepassten Formulierung der Zustandsgleichungen und unter dem Einsatz von geeigneten Zustandsvariablen kann diese Annahme für eine große Anzahl an technischen Systemen in der Praxis umgesetzt werden [Wol10]. Wird die fiktive Ausgangsgröße

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.3)$$

statt der tatsächlichen Ausgangsgröße \mathbf{y} für die Fehlerdiagnose verwendet, kann ohne Einschränkung bei der Systembeschreibung auf die Durchgriffsmatrix verzichtet werden, d. h. $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Aufgrund der Übersichtlichkeit wird allerdings im Folgenden von der tatsächlichen Ausgangsgröße \mathbf{y} ausgegangen.

Wird der Zustandsvektor \mathbf{x} so gewählt oder geeignet transformiert, dass ein Teil von ihm die Ausgangsgrößen \mathbf{y} enthält, so wird die resultierende Darstellungsform auch als Zustandsraumdarstellung in Sensorkoordinaten bezeichnet [Lun20]. Diese Darstellungsform wird bei Beobachtern reduzierter Ordnung (siehe z. B. [Föl16, Lun20]) eingesetzt und soll hier ebenfalls angewendet werden, da sie für die Zustandsmengenbeobachtung (siehe Abschnitt 3.4.1) vorteilhaft ist. Dazu wird zunächst die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3.4)$$

betrachtet. Die Ausgangsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ besitzt den Rang $\text{rang}(\mathbf{C}) = q$ ($\leq n$), andernfalls wäre mindestens eine Ausgangsgröße redundant. Daher existieren in \mathbf{C} folglich q linear unabhängige Spalten. Unter der Verwendung einer geeigneten Permutationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird die Ausgangsmatrix so umgeordnet, dass eben diese unabhängigen q Spalten vorne angeordnet sind. Die Ausgangsgleichung erhält dadurch die Gestalt

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2) \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (3.5)$$

mit $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{q \times q}$ und $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$. Für den transformierten Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-q} \end{pmatrix} \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (3.6)$$

mit $\tilde{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^q$, $\tilde{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^{n-q}$ sowie der Einheitsmatrix $\mathbf{I}_{n-q} \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$. Wie gefordert, enthält der resultierende Zustandsvektor $\tilde{\mathbf{x}}$ den Ausgangsvektor $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}$. Folglich lässt sich die allgemeine Ausgangsgleichung (3.4) in die spezielle Gestalt

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I}_q \ \mathbf{0}) \tilde{\mathbf{x}} \quad (3.7)$$

überführen. Zusammenfassend ergibt sich Definition 3.2 für ein Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten, wobei aufgrund der Übersichtlichkeit wieder \mathbf{x} anstatt $\tilde{\mathbf{x}}$ geschrieben wird.

Definition 3.2 (Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten)

Ein Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten liegt vor, wenn die Zustandsgleichungen die Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) , \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I}_q \ \mathbf{0})\mathbf{x} \quad (3.8b)$$

aufweisen. Der Anfangszustand ist durch $\mathbf{x}(t_0)$ gegeben.

Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, werden in dieser Arbeit zur Erzielung der Robustheit (siehe Definition 2.19) die Messunsicherheiten in den Ein- und Ausgangsgrößen sowie die Unsicherheiten aus der Modellierung explizit im Modell berücksichtigt. Für die deterministische Beschreibung dieser Unsicherheiten werden in dieser Arbeit mengenbasierte Methoden angewendet. Folglich werden die Eingangsgrößen \mathbf{u} , die Ausgangsgrößen \mathbf{y} und die Zustandsgrößen \mathbf{x} mithilfe von abgeschlossenen Mengen reeller Zahlen beschrieben. Dies gilt ebenso für die Modellparameter $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^r$, welche implizit in der Systemfunktion $\mathbf{f}(\cdot)$ enthalten sind. Der unbekannte, tatsächliche Wert der jeweiligen unsicheren Größen ist in der abgeschlossenen Menge enthalten (engl. unknown-but-bounded). Ein unsicheres Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten ist in Definition 3.3 angegeben und bildet die Grundlage aller weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit.

Definition 3.3 (Unsichere Zustandsraumdarstellung in Sensorkoordinaten [Wol10])

Ein unsicheres Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten liegt vor, wenn die Zustandsgleichungen die Gestalt

$$\dot{\mathcal{X}} = \mathbf{f}(\mathcal{X}, \mathcal{U}) , \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{Y} = (\mathbf{I}_q \ \mathbf{0})\mathcal{X} \quad (3.9b)$$

aufweisen, wobei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ den Zustandsmengenvektor, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ den Eingangsmengenvektor und $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^q$ den Ausgangsmengenvektor bezeichnen. Die unsicheren Modellparameter $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^r$ sind implizit in der Systemfunktion $\mathbf{f}(\cdot)$ enthalten. Der Anfangszustand ist anhand von $\mathcal{X}(t_0) \subset \mathbb{R}^n$ gegeben.

Des Weiteren wird angenommen, dass der Eingangsmengenvektor $\mathcal{U}(t)$ zwischen den zwei

betrachteten, beliebigen Zeitpunkten t_k und t_{k+1} konstant bleibt und die Eingangsgröße $u(t)$ vollständig enthält. Dies führt zu Annahme 3.2:

Annahme 3.2 (Stückweise konstante Eingangsmenge)

Es wird angenommen, dass stets

$$u(t) \in \mathcal{U}(t_k) \quad \text{für} \quad t_k \leq t < t_{k+1} \quad (3.10)$$

gilt.

Bei einer geeigneten Wahl der Mengenschranken von $\mathcal{U}(t_k)$ kann die tatsächliche Eingangsgröße $u(t)$ innerhalb dieser abgeschlossenen Menge beliebig variieren [Wol10]. Mit wachsendem Zeitabstand $t_{k+1} - t_k$ kann die Erfüllung dieser Annahme 3.2 allerdings dazu führen, dass die Menge $\mathcal{U}(t_k)$ auch weiter anwächst. Auf diese Annahme wird in Abschnitt 3.4 nochmals detailliert eingegangen. Die Wahl geeigneter Mengenschranken für die Ein- und Ausgangsgrößen sowie der Modellparameter basiert auf Messwerten sowie den Sensorfehlerangaben aus dem Datenblatt des verwendeten Sensors [Kre18, Sch19]. Zumeist werden hierbei feste untere und obere Schranken angegeben, um eine Menge von möglichen wahren Werten x_{wahr} zu beschreiben:

$$x_{\text{wahr}} \in [x_{\text{mess}} - \delta, x_{\text{mess}} + \delta], \quad (3.11)$$

wobei δ die maximale Messabweichung aus dem Datenblatt ist und x_{mess} der Messwert des Sensors. Sind keine Informationen zu den Mengenschranken verfügbar, existieren auch mengenbasierte Methoden zur Black-Box-Identifikation unsicherer Systeme [Zai17].

Im nachfolgenden Abschnitt 3.2 werden die verwendeten mathematischen Methoden zur mengenbasierten Beschreibung der Unsicherheiten vorgestellt.

3.2 Mengenbasierte Unsicherheitsbeschreibungen

Zur mengenbasierten Beschreibung der verschiedenen Unsicherheiten werden in dieser Arbeit neben der klassischen Intervallarithmetik auch Taylor-Modelle verwendet. Hierzu werden in den folgenden Abschnitten die relevanten Definitionen und Berechnungsvorschriften beider Beschreibungsmethoden eingeführt.

3.2.1 Intervallarithmetik

Die für diese Arbeit relevanten und im Folgenden angegebenen Definitionen zur Intervallarithmetik basieren auf den Ausführungen in [JKDW01]. Weiterführende Literatur zu diesem Themengebiet ist beispielsweise in [AH74, May17] gegeben.

Zunächst erfolgt die allgemeine Definition eines reellen Intervalls sowie anschließend die der Intervallschranken.

Definition 3.4 (Reelles Intervall)

Ein reelles Intervall $[a] = [\underline{a}, \bar{a}]$ ist eine abgeschlossene, zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} und ist definiert durch

$$[a] := \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq a \leq \bar{a}\} . \quad (3.12)$$

Die Menge aller reellen Intervalle wird mit \mathbb{IR} bezeichnet.

Auch wenn das Intervall, wie beispielsweise $[0, \infty[$, im mathematischen Sinne nicht abgeschlossen ist, wird die obige Notation aufgrund der einheitlichen Darstellung beibehalten, d. h. $[0, \infty]$.

Definition 3.5 (Intervallschranken)

Die untere Schranke (engl. lower bound) \underline{a} sowie obere Schranke (engl. upper bound) \bar{a} eines Intervalls $[a]$ sind wie folgt definiert:

$$\underline{a} = \text{lb}([a]) := \inf([a]) , \quad (3.13a)$$

$$\bar{a} = \text{ub}([a]) := \sup([a]) . \quad (3.13b)$$

Ein Spezialfall von Intervallen bilden die sogenannten Punktintervalle oder auch entartete Intervalle. Hierbei sind die obere und unter Schranke identisch, d. h. $\bar{a} = \underline{a} = a$, was einer reellen Zahl a entspricht. Ein weiterer Spezialfall ist die leere Menge \emptyset , welche keine Elemente enthält.

Mit dem Intervallmittelpunkt

$$a_c := \frac{1}{2} (\bar{a} + \underline{a}) \quad (3.14)$$

und dem Intervallradius

$$a_\Delta := \frac{1}{2} (\bar{a} - \underline{a}) \quad (3.15)$$

kann ein nichtleeres Intervall auch in der alternativen Mittelpunkt-Radius-Notation dargestellt werden, sodass gilt:

$$\langle a_c, a_\Delta \rangle := \{a \in \mathbb{R} \mid a_c - a_\Delta \leq a \leq a_c + a_\Delta\} . \quad (3.16)$$

Die Größe (engl. magnitude) eines Intervalls

$$\text{mag}([a]) = |[a]| := \max(|\underline{a}|, |\bar{a}|) \quad (3.17)$$

wird auch als Betrag bezeichnet, wobei stets gilt:

$$|a| \leq |[a]| \quad \forall a \in [a] . \quad (3.18)$$

Da es sich nach Definition 3.4 bei Intervallen um Mengen handelt, können auch die Mengenoperationen aus der Mengenlehre angewendet werden. Die Schnittmenge zweier Intervalle ist durch

$$[a] \cap [b] = \begin{cases} [\max(\underline{a}, \underline{b}), \min(\overline{a}, \overline{b})] & , \text{ falls } \overline{a} \geq \underline{b} \wedge \underline{a} \leq \overline{b} \\ \emptyset & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.19)$$

gegeben. Eine leere Menge \emptyset resultiert aus (3.19), wenn die beiden Intervalle $[a]$ und $[b]$ disjunkt sind. Die Vereinigung

$$[a] \cup [b] = [\min(\underline{a}, \underline{b}), \max(\overline{a}, \overline{b})] \quad (3.20)$$

wird in der Intervallarithmetik auch anschaulich als Hülle bezeichnet. Die Erweiterungen der klassischen arithmetischen Grundrechenarten auf die spezielle Intervallarithmetik werden durch Operationen auf den Intervallschranken

$$[a] + [b] := [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}] , \quad (3.21)$$

$$[a] - [b] := [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}] , \quad (3.22)$$

$$[a] \cdot [b] := [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}] , \quad (3.23)$$

$$\frac{[a]}{[b]} := [a] \cdot \frac{1}{[b]} \quad (3.24)$$

mit

$$\frac{1}{[b]} := \begin{cases} \left[\frac{1}{\overline{b}}, \frac{1}{\underline{b}} \right] & , \text{ falls } 0 \notin [b] \\ \left[\frac{1}{\overline{b}}, \infty \right] & , \text{ falls } [b] = [0, \overline{b} > 0] \\ \left[-\infty, \frac{1}{\underline{b}} \right] & , \text{ falls } [b] = [\underline{b} < 0, 0] \\ [-\infty, \infty] & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.25)$$

definiert. Die intervallarithmetischen Operationen Addition sowie Multiplikation sind kommutativ und assoziativ, jedoch nicht distributiv. Hier gilt die schwächere Subdistributivität.

Definition 3.6 (Subdistributivität)

Die Subdistributivität in der Intervallarithmetik besagt, dass die Intervallsumme $[b] + [c]$ multipliziert mit dem Intervall $[a]$ eine Teilmenge der einzelnen Summanden multipliziert mit dem Intervall $[a]$ ist:

$$[a] ([b] + [c]) \subseteq [a] [b] + [a] [c] . \quad (3.26)$$

Die Multiplikation eines Intervalls $[a]$ mit einer beliebigen reellen Zahl γ ist gegeben durch:

$$\gamma \cdot [a] := \begin{cases} [\gamma \underline{a}, \gamma \overline{a}] & , \text{ falls } \gamma \geq 0 \\ [\gamma \overline{a}, \gamma \underline{a}] & , \text{ falls } \gamma < 0 \end{cases} . \quad (3.27)$$

Die vorgestellten Rechenoperationen können ebenfalls auf Intervallvektoren und -matrizen erweitert werden.

Definition 3.7 (Intervallvektor)

Ein Intervallvektor $[a] = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{IR}^n$ ist durch

$$[a] := [a_1] \times [a_2] \times \dots \times [a_n], \text{ mit } [a_i] = [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.28)$$

als kartesisches Produkt von n Intervallen definiert.

Diese Notation eines Intervallvektors stellt einen n -dimensionalen Hyperquader dar und kann als Projektion der i -ten Intervallkomponente $[a_i]$ zur i -ten Achse des Vektorraums interpretiert werden [JKDW01]. Aufgrund dieser Eigenschaft werden Intervallvektoren auch als Boxen bezeichnet. Eine Illustration solcher Intervallvektoren für die Fälle \mathbb{IR}^2 und \mathbb{IR}^3 ist in Abbildung 3.1 gegeben.

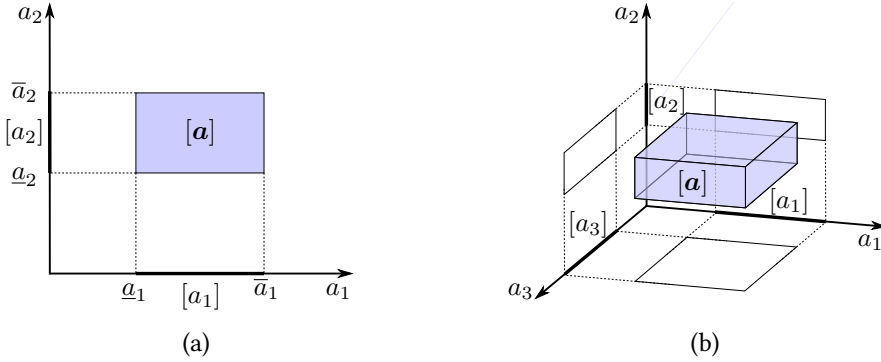


Abbildung 3.1: Beispiele für die grafische Darstellung von $[a] \in \mathbb{IR}^2$ (a) und $[a] \in \mathbb{IR}^3$ (b)

Definition 3.8 (Intervallmatrix)

Eine Intervallmatrix $[A] = [\underline{A}, \bar{A}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ ist durch

$$[A] := [a_{11}] \times [a_{12}] \times \dots \times [a_{mn}] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \dots & [a_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [a_{m1}] & \dots & [a_{mn}] \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

als kartesisches Produkt von $m \cdot n$ Intervallen definiert.

Eine Intervallmatrix $[A] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ ist eine Matrix mit $m \cdot n$ Intervallelementen. Die reelle

Mittelpunktmatrix \mathbf{A}_c sowie die reelle Radiusmatrix \mathbf{A}_Δ resultieren nach [Hla15] aus der elementweisen Anwendung von (3.14) bzw. (3.15) zu:

$$\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{m \times n} : (a_{c_{ij}}) := \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} + \underline{a}_{ij}) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{A}_\Delta \in \mathbb{R}^{m \times n} : (a_{\Delta_{ij}}) := \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.31)$$

Die Operationen Intervallschranke (3.13), Schnittmenge (3.19) und Vereinigung (3.20) für Intervallvektoren und -matrizen sind ebenfalls elementweise definiert. Die Grundrechenarten (3.21) bis (3.24) werden analog zum klassischen Fall auf Vektoren und Matrizen übertragen. Beispielhaft ist die Multiplikation zweier quadratischen Intervallmatrizen $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ wie folgt gegeben:

$$[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}] = \left(\sum_{k=1}^n [a_{ik}] \cdot [b_{kj}] \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.32)$$

Für die intervallarithmetischen Auswertung von allgemeinen reellen Funktionen muss zunächst die einschließende Funktion definiert werden:

Definition 3.9 (Einschließende Funktion)

Für die allgemeine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die Funktion $[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ eine einschließende Funktion, wenn $f([a]) \subset [f]([a]) \quad \forall [a] \in \mathbb{IR}^n$ gilt.

Diese allgemeine Definition einer einschließenden Funktion ist nicht eindeutig, da für eine Funktion f mehrere beliebige einschließende Funktionen $[f]$ definiert werden können. Einen Spezialfall bildet die natürliche einschließende Funktion.

Definition 3.10 (Natürliche einschließende Funktion)

Wird für jede Variable und Funktion in $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ihr intervallarithmetisches Gegenstück (bspw. a durch $[a]$) eingesetzt, resultiert daraus die natürliche einschließende Funktion.

Bei den intervallarithmetischen Gegenständen von Funktionen, deren Terme sich nicht aus den arithmetischen Grundrechenarten zusammensetzen, müssen noch weitere elementare Funktionen (Potenz- und Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, ...) für Intervalle definiert werden. Hierbei werden die vorhandenen Monotonieeigenschaften der jeweiligen elementaren Funktion ausgenutzt. Für monoton steigende bzw. fallende Funktionen im Intervall $[a]$ kann der Wertebereich einfach durch die Betrachtung der Intervallschranken ermittelt werden. Beispielsweise ergibt sich der Wertebereich für die natürliche Exponentialfunktion wie folgt:

$$e^{[a]} := [e^{\underline{a}}, e^{\bar{a}}]. \quad (3.33)$$

Für die Auswertung von nicht monotonen Funktionen, wie z. B. den trigonometrischen Funktionen, ist eine Fallunterscheidung erforderlich. Die nicht monotonen Funktionen werden als

eine Zusammensetzung von mehreren monoton fallenden und monoton steigenden Funktionen betrachtet, was auch als stückweise monotone Funktion bezeichnet wird. Bei diesen Funktionen müssen somit neben den Intervallschranken von $[a]$ auch jene Punkte im Intervall $[a]$ betrachtet werden, bei denen sich die Monotonieeigenschaft umkehrt. Beispielsweise müssen für die Sinusfunktion $\sin([a])$ zusätzlich zu den Intervallschranken \underline{a} und \bar{a} noch die Punkte $(1/2 + k) \cdot \pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ in $[a]$ ausgewertet werden. Ist innerhalb des Intervalls $[a]$ mindestens eine vollständige Periode enthalten, kann das Ergebnis der intervallwertigen Sinusfunktion sofort auf $[-1, 1]$ festgelegt werden.

Zwei Effekte, die bei den Berechnungen mit Intervallen auftreten und zu einer Überschätzung der Lösungsmenge führen können, werden im Folgenden vorgestellt: der Abhängigkeitseffekt (engl. dependency effect) und der Einhüllungseffekt (engl. wrapping effect).

Falls bei der intervallarithmetischen Berechnung von Funktionen die gleiche Intervallvariable mehrfach in einem Ausdruck auftritt, wird jedes Auftreten unabhängig voneinander behandelt. Dies führt zu einer ungewollten Überschätzung, auch Aufblähung genannt, des tatsächlichen Wertebereichs und wird als Abhängigkeitseffekt bezeichnet. Ein allgemeingültiger Ansatz, um diesen Effekt zu vermeiden, existiert nicht [Wol10]. Allerdings lässt sich dieser Effekt durch mathematische Umformulierungen abschwächen. Hierbei wird der Ausdruck vor der intervallarithmetischen Berechnung, bspw. durch das Zusammenfassen von Intervallvariablen, umgeformt, sodass jede Intervallvariable möglichst nur einmal auftritt. Die Auswirkungen des Abhängigkeitseffekts werden in Beispiel 3.1 veranschaulicht.

Beispiel 3.1:

Gegeben sei die Funktion

$$f_1(a) = (a^2 - 2)^2 + 6, \quad (3.34)$$

welche für das Intervall $[a] = 1/2[-1, 3]$ ausgewertet werden soll. Mittels den vorgestellten intervallarithmetischen Berechnungen führt dies zu dem tatsächlichen Wertebereich $[f_1([a])] = [6, 10]$. Durch äquivalente Umformungen kann (3.34), mit mehrfachem Auftreten der betrachteten Intervallvariable $[a]$, unter anderem wie folgt dargestellt werden:

$$f_2(a) = a^4 - 4a^2 + 10 \quad \Rightarrow \quad [f_2([a])] = \frac{1}{16}[16, 241], \quad (3.35)$$

$$f_3(a) = aaaa - 4aa + 10 \quad \Rightarrow \quad [f_3([a])] = \frac{1}{16}[-11, 289]. \quad (3.36)$$

Es ist zu erkennen, dass aufgrund des Abhängigkeitseffekts die Lösungsmengen (3.35) sowie (3.36) eine deutliche Überschätzung des tatsächlichen Wertebereichs $[6, 10]$ liefern. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.2 ebenfalls grafisch dargestellt. Aus der Abbildung ist auch zu erkennen, dass der tatsächliche Wertebereich immer in den berechneten Lösungsmengen enthalten ist.

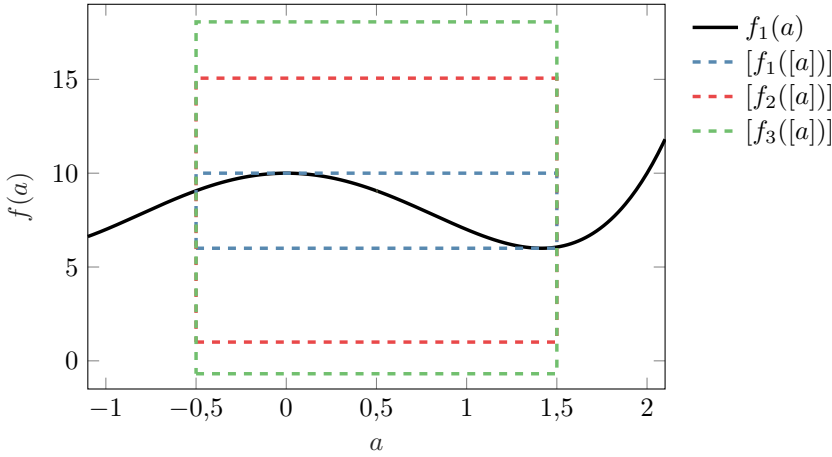


Abbildung 3.2: Auswirkungen des Abhängigkeitseffekts

Der Einhüllungseffekt bei intervallararithmetischen Berechnungen resultiert aus der Tatsache, dass die Lösungsmenge stets als ein Intervall bzw. ein Intervallvektor dargestellt wird. Somit sind in der Lösungsmenge möglicherweise „unechte Lösungen“ (engl. spurious solutions) enthalten, die nicht in der tatsächlichen Lösungsmenge enthalten sind. Dieser Effekt wird zusätzlich verstärkt, wenn es sich bei der Lösungsmenge um eine nicht-konvexe Lösungsmenge handelt. Nicht-konvexe Lösungsmengen können z. B. bei nichtlinearen Differentialgleichungen auftreten. Allerdings gilt stets, dass die tatsächliche Lösung immer in der möglicherweise überschätzten Lösungsmenge eingeschlossen ist [Wol10]. Dieser Effekt wird anhand des nachfolgenden Beispiels 3.2 verdeutlicht.

Beispiel 3.2:

Gegeben sei der Intervallvektor

$$[\mathbf{a}] = \begin{pmatrix} [2, 4] \\ [2, 4] \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

welcher mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

um $\varphi = 45^\circ$ rotiert werden soll. Aus der Abbildungsvorschrift $[\mathbf{y}] = \mathbf{R}_\varphi [\mathbf{a}]$ folgt:

$$[\mathbf{y}] = \sqrt{2} \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [2, 4] \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Wie aus Abbildung 3.3 ersichtlich wird, schließt $[\mathbf{y}]$ vollständig die tatsächliche Lösungsmenge $\mathcal{Y} = \{\mathbf{R}_\varphi \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in [\mathbf{a}]\}$ ein. Allerdings wird die tatsächliche Lösungsmenge deutlich überschätzt.

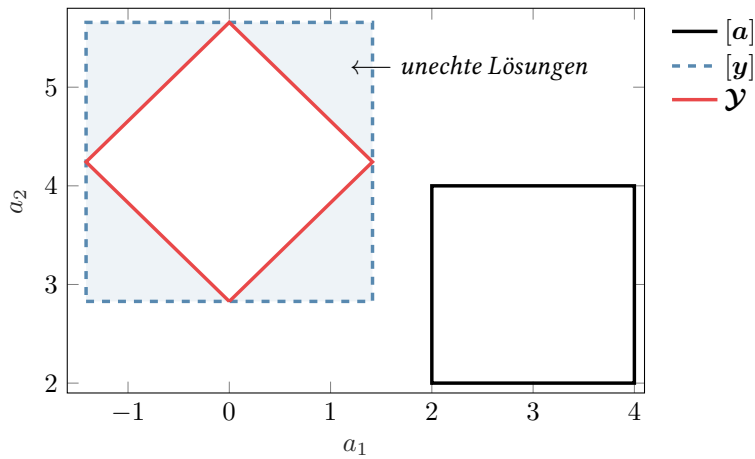


Abbildung 3.3: Auswirkungen des Einhüllungseffekts

Weitere Beispiele zum Abhängigkeits- und Einhüllungseffekt sind beispielsweise in [MB17, Sch19] zu finden.

3.2.2 Taylor-Modelle

Aufgrund der möglichen Überschätzung bei intervallararithmetischen Berechnungen infolge des Abhängigkeitseffekts oder des Einhüllungseffekts ist der praktische Einsatz der Intervallarithmetik stark begrenzt. Um diese Überschätzung deutlich zu verringern, können Taylor-Modelle eingesetzt werden. Taylor-Modelle bestehen aus einer Taylor-Reihenentwicklung, den sogenannten Taylorpolynomen, sowie einer intervallbasierten Restfehlereinschließung. Die für diese Arbeit relevanten Definitionen zu Taylor-Modellen basieren auf den Ausführungen in [MB03] sowie [Ebl07]. Weiterführende Literatur zu diesem Themengebiet ist beispielsweise in [Mak98, Neh05] zu finden.

Die Grundlage eines Taylor-Modells ist die multivariate Taylor-Reihenentwicklung nach dem Satz von Taylor, welcher in Anlehnung an [BMSM20] wie folgt formuliert ist:

Satz 3.1 (Satz von Taylor)

Eine innerhalb des Definitionsbereichs \mathcal{D} mindestens $(\ell + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{D}$ kann approximiert werden durch:

$$f(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k}_{\text{Taylorpolynom}} f(\mathbf{x}_0) + R, \quad (3.40)$$

wobei das Restglied

$$R = \frac{1}{(\ell + 1)!} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0,i}) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{\ell+1} f(\mathbf{x}_0 + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \Theta) \quad (3.41)$$

mit $\Theta \in [0, 1]$ in der Lagrange'schen Form dargestellt wird.

Aufgrund des unbekannten Parameters Θ ist eine exakte Angabe des Restglieds nicht möglich. Allerdings kann das Restglied beispielsweise mittels der Intervallarithmetik anhand von $[\Theta] = [0, 1]$ abgeschätzt werden. Die daraus resultierende Kombination aus Taylorpolynom und einem intervallbasierten Restglied $[R]$ wird als Taylor-Modell bezeichnet. Für eine übersichtlichere Darstellung werden in dieser Arbeit die Variablen eines Taylor-Modells durch $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ angegeben, mit der folgenden Annahme:

Annahme 3.3 (Definitionsbereich eines Taylor-Modells)

Es wird der Definitionsbereich

$$\mathcal{D}_{\mathbf{v}} = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^n \quad (3.42)$$

und der Entwicklungspunkt

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

für die Variablen eines Taylor-Modells angenommen.

Diese Annahme stellt keine Einschränkung dar, da jede beliebige Funktion $f(x)$ mit $x \in [x]$ anhand der Transformation

$$f(x_c + x_{\Delta} v) \text{ mit } v \in [-1, 1] \quad (3.44)$$

so dargestellt werden kann, dass Annahme 3.3 stets erfüllt ist. Ein Taylor-Modell wird somit wie folgt definiert:

Definition 3.11 (Taylor-Modell ℓ -ter Ordnung)

Sei $f : \mathcal{D}_v \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $\mathcal{D}_v = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^n$ mindestens $(\ell + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Sei $\mathcal{P}(v - v_0)$ ein Taylorpolynom ℓ -ter Ordnung um den Entwicklungspunkt $v_0 = \mathbf{0}$ und das Restglied $[R] \in \mathbb{R}$ ein Intervall, sodass

$$f(v) \in \mathcal{P}(v) + [R] \quad \forall v \in \mathcal{D}_v \quad (3.45)$$

gilt. Dann wird

$$\mathcal{T}(v) := \mathcal{P}(v) + [R] \quad (3.46)$$

als Taylor-Modell ℓ -ter Ordnung von f um $v_0 = \mathbf{0}$ auf \mathcal{D}_v bezeichnet.

Anmerkung 3.2. Die aus den numerischen Berechnungen mit Gleitkommazahlen auf binären Rechnern resultieren Diskretisierungs- und Rundungsfehler können ebenfalls dem intervallbasierten Restglied $[R]$ hinzugefügt und somit in das Endergebnis eingeschlossen werden [Neh05].

Anmerkung 3.3. Taylor-Modelle sind abhängig von der gewählten Ordnung ℓ . Die jeweils gewählte Ordnung ergibt sich in dieser Arbeit stets aus dem Kontext und wird daher nicht explizit in Form eines Index (z. B. $\mathcal{T}_\ell(v)$) angeben.

Ein Taylor-Modell nach Definition 3.11 ist somit eine einschließende Funktion entsprechend Definition 3.9. Anschaulich interpretiert bildet ein Taylor-Modell einen einhüllenden Schlauch um die Funktion $f(v)$ über den betrachteten Definitionsbereich \mathcal{D}_v . Die Genauigkeit der Einschließung von f wird über die Ordnung ℓ , welche das Taylorpolynom sowie das Restglied beeinflusst, gesteuert und soll anhand des nachfolgenden Beispiels 3.3 verdeutlicht werden.

Beispiel 3.3:

Gegeben sei die natürliche Exponentialfunktion

$$f(v) = e^v \quad (3.47)$$

über den Definitionsbereich $\mathcal{D}_v = [-1, 1]$. Ein Taylor-Modell der Ordnung $\ell = 1$ mit $[v] = [-1, 1]$, $[\Theta] = [0, 1]$ und $v_0 = 0$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(v) &= \underbrace{\left(f(0) + v \frac{d}{dv} f(0) \right)}_{\mathcal{P}(v)} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} [v]^2 \frac{d^2}{dv^2} f([v] [\Theta]) \right)}_{[R]} \\ &= (1 + v) + \left(\frac{1}{2} [v]^2 e^{[v][\Theta]} \right) \\ &= 1 + v + \left[0, \frac{e}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die Taylor-Modelle höherer Ordnung werden analog bestimmt:

$$\ell = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(v) = 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + \left[-\frac{e}{6}, \frac{e}{6}\right], \quad (3.49)$$

$$\ell = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(v) = 1 + v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6}v^3 + \left[0, \frac{e}{24}\right]. \quad (3.50)$$

Aus (3.48) bis (3.50) ist zu erkennen, dass ein Taylor-Modell von $f(v)$ mit steigender Ordnung ℓ einen geringeren Intervallradius des Restglieds aufweist. Dies führt zu einer engeren Einschließung der Funktion $f(v)$, was in Abbildung 3.4 dargestellt ist.

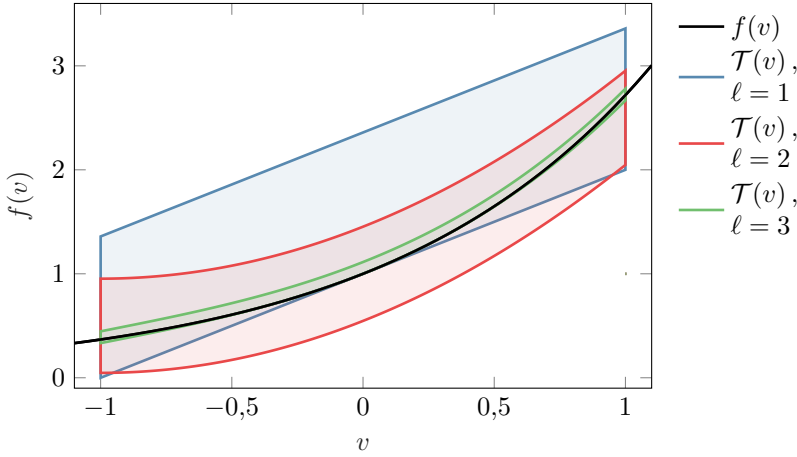


Abbildung 3.4: Genauigkeit der Einschließung von Taylor-Modellen $\mathcal{T}(v)$ an der Beispielfunktion $f(v) = e^v$

Ist die betrachtete Funktion eine vektorwertige Funktion, z. B.

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{v}) \\ f_2(\mathbf{v}) \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

dann wird $\mathcal{T}(\mathbf{v})$ als vektorielles Taylor-Modell bezeichnet.

Die Repräsentation einer konstanten Zahl $c \in \mathbb{R}$ als Taylor-Modell ist ein Spezialfall der Taylor-Modelle. Für eine konsistente Darstellung in dieser Arbeit wird daher die konstante Zahl als Punktintervall $[c] \in \mathbb{IR}$ mit $[c] = [c, c]$ beschrieben und somit als Taylor-Modell wie folgt dargestellt:

$$\mathcal{T} = \underbrace{c_c}_{=\mathcal{P}} + \underbrace{([c] - c_c)}_{=[R]} \quad (3.52)$$

mit dem Intervallmittelpunkt c_c (siehe (3.14)).

Wertebereichseinschließung von Taylor-Modellen

Bei mehreren Rechenoperationen in dieser Arbeit wird eine Wertebereichseinschließung (engl. bound) vom Taylorpolynom $\text{bd}\{\mathcal{P}([v])\}$ oder vom gesamten Taylor-Modell $\text{bd}\{\mathcal{T}([v])\}$ benötigt. Hierzu kann die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Intervallarithmetik verwendet werden. Die Wertebereichseinschließung des Taylorpolynoms mit $v \in \mathcal{D}_v$ anhand von intervallarithmetischen Berechnungen führt zu:

$$\text{bd}\{\mathcal{P}(v)\} \subseteq [\mathcal{P}([v])] . \quad (3.53)$$

Für das gesamte Taylor-Modell

$$\text{bd}\{\mathcal{T}(v)\} \subseteq [\mathcal{T}([v])] = [\mathcal{P}([v])] + [R] \quad (3.54)$$

werden der Polynomanteil und das Restglied addiert.

Anmerkung 3.4. In [MB05b] werden weitere Methoden zur Bestimmung der Wertebereichseinschließung vorgestellt. Diese basieren auf globalen Optimierungsmethoden, um das Minimum bzw. Maximum des Taylorpolynoms zu berechnen und liefern im Allgemeinen eine engere Wertebereichseinschließung als die intervallarithmetische Auswertung. Allerdings weisen diese Methoden einen deutlich erhöhten Rechenaufwand auf, sodass sie für diese Arbeit nicht in Frage kommen.

In den folgenden Unterabschnitten wird aufgrund der Übersichtlichkeit auf eine explizite Nennung der Variable v in den Taylor-Modellen $\mathcal{T}(v)$ und Taylorpolynomen $\mathcal{P}(v)$, wenn es nicht zum Verständnis beiträgt, verzichtet.

Arithmetische Grundrechenarten bei Taylor-Modellen

Wichtige arithmetische Grundrechenarten bei den Taylor-Modellen sind die Addition sowie die Subtraktion. Sei \mathcal{T}_f ein Taylor-Modell ℓ -ter Ordnung der Funktion f und \mathcal{T}_g ein Taylor-Modell ℓ -ter Ordnung der Funktion g , dann ist die Addition zweier Taylor-Modelle $\mathcal{T}_{f+g} = \mathcal{T}_f + \mathcal{T}_g$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{T}_{f+g} := (\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_g) + ([R_f] + [R_g]) . \quad (3.55)$$

Die Ordnung des resultierenden Taylor-Modells \mathcal{T}_{f+g} ist ebenfalls ℓ . Die Subtraktion $\mathcal{T}_{f-g} = \mathcal{T}_f - \mathcal{T}_g$ lässt sich auf eine Addition

$$\mathcal{T}_{f-g} = \mathcal{T}_f + \underbrace{(-\mathcal{P}_g - [R_g])}_{-\mathcal{T}_g} . \quad (3.56)$$

zurückführen.

Die arithmetische Grundrechenarten Multiplikation $\mathcal{T}_{f \cdot g} = \mathcal{T}_f \mathcal{T}_g$ und Division $\mathcal{T}_{1/f} = 1/\mathcal{T}_f$ sind in Anhang B.1 angegeben.

Anmerkung 3.5. Mit den bisher definierten Grundrechenarten bei Taylor-Modellen können auch polynomiale Ausdrücke bestimmt werden. Hierzu wird der polynomiale Ausdruck mittels des Horner-Schemas (siehe Anhang B.2) in einen modifizierten Ausdruck umgeformt, welcher sich ausschließlich aus den Grundrechenarten Addition und Multiplikation zusammensetzt.

Taylor-Modelle für elementare Funktionen

Die Vorgehensweise zur Bestimmung von Taylor-Modellen für elementare Funktionen (wie beispielsweise Exponentialfunktionen \mathcal{T}_{e^t}) ist identisch zur vorgestellten Vorgehensweise bei der Division eines Taylor-Modells. Es wird zunächst vom Taylor-Modell der konstante Polynomanteil c_f nach (B.8) abgespaltet. Anschließend wird das modifizierte Taylor-Modell in die Taylor-Reihenentwicklung der jeweiligen elementaren Funktion mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = c_f$ substituiert. Eine Übersicht aller Taylor-Modelle für elementare Funktionen ist in [MB03] oder in [Ebl07] zu finden und wird hier daher nicht separat aufgelistet.

Integrieren von Taylor-Modellen

Die Integration eines Taylor-Modells ist eine weitere relevante Rechenoperation, die in dieser Arbeit Anwendung findet. Die einfache Vorgehensweise zur Bestimmung eines unbestimmten Integrals von $\mathcal{T} = \mathcal{P} + [R]$ ist ein großer Vorteil der Taylor-Modelle.

Bei der Integration des Taylorpolynoms \mathcal{P} werden gemäß der Potenzregel (siehe beispielsweise [BMSM20]) alle Exponenten um den Wert eins erhöht. Dies führt jedoch zu einem Taylor-Modell mit $(\ell + 1)$ -ter Ordnung. Aus diesem Grund wird – identisch zur Multiplikation – der resultierende Polynomanteil in ein Polynomanteil \mathcal{P}_f der Ordnung ℓ und in ein Restpolynomanteil $\tilde{\mathcal{P}}$ mit höherer Ordnung als ℓ aufgeteilt:

$$\int \mathcal{P}(\mathbf{v}) + [R] \, dv_i = \mathcal{P}_f(\mathbf{v}) + \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) + \int [R] \, dv_i \quad (3.57)$$

mit $v_i \in \mathbf{v}$. Das intervallbasierte Restglied wird in (3.57) wie eine konstante reelle Zahl behandelt. Die Integration eines Taylor-Modells ist somit anhand von

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f &:= \mathcal{P}_f(\mathbf{v}) + \text{bd}\left\{\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{v})\right\} + \text{bd}\{v_i\} [R] \\ &= \mathcal{P}_f(\mathbf{v}) + \underbrace{\text{bd}\left\{\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{v})\right\} + [-1, 1] [R]}_{=:[R_f]} \end{aligned} \quad (3.58)$$

definiert, wobei aufgrund des Definitionsbereich $\mathcal{D}_{v_i} = [-1, 1]$ für $\text{bd}\{v_i\} = [-1, 1]$ gilt.

Komposition von Taylor-Modellen

Bei der Komposition (engl. composition) oder auch Verkettung ist die Variable eines Taylor-Modells selbst durch ein Taylor-Modell gegeben und wie folgt definiert:

Definition 3.12 (Komposition von Taylor-Modellen)

Ist für $v \in \mathcal{D}_v$ ein vektorielles Taylor-Modell

$$\mathcal{T}_g(v) = (\mathcal{T}_{g,1}(v) \dots \mathcal{T}_{g,n}(v))^T \quad (3.59)$$

mit dem Wertebereich $bd\{\mathcal{T}_g(v)\}$ gegeben und ferner für $w \in bd\{\mathcal{T}_g(v)\}$ ein Taylor-Modell $\mathcal{T}_f(w)$, dann ist

$$\mathcal{T}_f(\mathcal{T}_g(v)) = \mathcal{P}_f(\mathcal{T}_g(v)) + [R_f] \quad (3.60)$$

eine Komposition von Taylor-Modellen.

Das Taylor-Modell \mathcal{T}_f wird hier als äußeres Taylor-Modell bezeichnet und \mathcal{T}_g als inneres (vektorielles) Taylor-Modell. Aus Definition 3.12 ist zudem die Kompositions Voraussetzung

$$bd\{\mathcal{T}_g\} \subseteq \mathcal{D}_w = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^n \quad (3.61)$$

ersichtlich.

Anmerkung 3.6. Wird bei der Auswertung von $\mathcal{P}_f(\mathcal{T}_g(v))$ das Horner-Schema, welches im Anhang B.2 beschrieben ist, angewendet, sind lediglich die Grundrechenarten Addition und Multiplikation von Taylor-Modellen erforderlich.

Die Umkehroperation der Komposition wird als Dekomposition (engl. decomposition) oder Aufspaltung bezeichnet und wird durch

$$(\mathcal{T}_f \circ \mathcal{T}_g)(v) \quad (3.62)$$

gekennzeichnet.

3.3 Verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren basierend auf Taylor-Modellen zur verifizierten Lösungseinschließung, auch als garantierte Lösungseinschließung bezeichnet, von gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen eingeführt. Hierzu werden untere und obere Schranken bestimmt, mit dem Ziel, die tatsächliche Lösung innerhalb dieser Schranken einzuschließen. Die Methode wurde ursprünglich in [MB96, Mak98] präsentiert und in den Arbeiten [Ebl07] sowie [Wol10] erweitert. Eine weiterführende Literatur zu diesem Thema mit diversen, anschaulichen Beispielen ist anhand von [NJN07] gegeben. Die nachfolgenden Ausführungen basieren ebenfalls auf [Ebl07] und [Wol10].

Für die Berechnung einer verifizierten Lösungseinschließung wird von einem unsicheren Differentialgleichungssystem ohne Eingangsgrößen ausgegangen (vgl. Definition 3.3):

$$\dot{\mathcal{X}} = f(\mathcal{X}) \quad (3.63)$$

mit der Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}(t_0)$. Die Berücksichtigung von unsicheren Eingangsgrößen erfolgt in Abschnitt 3.4. Die zu bestimmende Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_{k+1})$ zum beliebigen Zeitpunkt $t_{k+1} = t_k + h_k$ wird aus der bekannten Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_k)$ berechnet. Infolge der Beschreibungsform von $\dot{\mathcal{X}}$ als Taylor-Modell gilt die nachfolgende Annahme:

Annahme 3.4 (Differenzierbarkeit)

Die Funktion $f(\mathcal{X})$ muss entsprechend dem Satz 3.1 mindestens $\ell + 1$ -mal stetig differenzierbar sein.

Anmerkung 3.7. Aufgrund der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung (3.63) ist keine konstante Schrittweite h_k erforderlich.

Anmerkung 3.8. Für die Berechnung von $\mathcal{X}(t_{k+1})$ wird einzig $\mathcal{X}(t_k)$ benötigt. Aus diesem Grund wird sich im Folgenden auf die Durchführung des k -ten Integrationsschritt beschränkt.

Zunächst wird das Anfangswertproblem (3.63) mithilfe des Integraloperators in ein äquivalentes Fixpunktproblem umformuliert:

$$\mathcal{X}(t) = \underbrace{\mathcal{X}(t_k) + \int_{t_k}^t f(\mathcal{X}(\mathcal{T})) \, d\mathcal{T}}_{=:\Psi(\mathcal{X}(t))}. \quad (3.64)$$

Das Fixpunktproblem ist somit durch

$$\Psi(\mathcal{X}(t)) = \mathcal{X}(t) \quad (3.65)$$

gegeben. Die Lösung von (3.65) wird durch den Fixpunkt $\mathcal{X}^\circ(t) = \Psi(\mathcal{X}^\circ(t))$ dargestellt und stellt folglich die gesuchte Lösung von (3.63) dar. Die Bestimmungsgrundlage der Lösung von (3.65) bildet nach [Ebl07] der Fixpunktsatz von Banach, welcher eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für ein Fixpunktproblem liefert [BMSM20].

Satz 3.2 (Fixpunktsatz von Banach)

Sei \mathcal{M} eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums und $\Psi(\cdot)$ eine kontrahierende Selbstabbildung von \mathcal{M} , das heißt es gilt

$$\|\Psi(x) - \Psi(\check{x})\| \leq K \|x - \check{x}\| \quad \forall x, \check{x} \in \mathcal{M} \quad (3.66)$$

mit einer Konstante $K \in (0, 1)$. Dann enthält $\Psi(\cdot)$ genau einen Fixpunkt x° in \mathcal{M} . Gegen diesen Fixpunkt x° konvergiert die Folge

$$x_{i+1} = \Psi(x_i) \quad (3.67)$$

mit $i \geq 0$ bei einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathcal{M}$.

Für die Anwendung dieses Satzes auf vektorielle Taylor-Modelle zur Mengenbeschreibung wird zunächst die Lösungseinschließung zum betrachteten Zeitintervall $t \in [t_k, t_{k+1}]$ wie folgt angegeben:

$$\mathcal{X}(t_k + h_k\tau) = \mathcal{T}(v, t_k + h_k\tau) = \mathcal{P}(v, t_k + h_k\tau) + [\mathbf{R}_k] \quad (3.68)$$

mit der Schrittweite h_k sowie der Zeitvariable $\tau \in [0, 1]$. Hierbei inbegriffen sind der Fall $\tau = 0$ mit der Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_k) = \mathcal{T}(v, t_k)$ sowie der Fall $\tau = 1$ mit der Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_{k+1}) = \mathcal{T}(v, t_{k+1})$. Anhand des Polynomanteils $\mathcal{P}(v, t_k + h_k\tau)$ wird mit den Variablen v , wobei $\mathcal{D}_v = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^n$ (siehe Annahme 3.3) gilt, zu jedem Zeitpunkt τ das Abbild der Zustandsmenge $\mathcal{X}(t_k) = \mathcal{T}(v, t_k)$ unter der durch (3.63) definierten Abbildungsvorschrift beschrieben. Das intervallbasierte Restglied $[\mathbf{R}_k]$ ist konstant über dem betrachteten Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$. In Abbildung 3.5 wird eine solche Lösungseinschließung einer Trajektorienschar $x(t_k + h_k\tau) \in \mathcal{X}(t_k + h_k\tau)$ dargestellt.

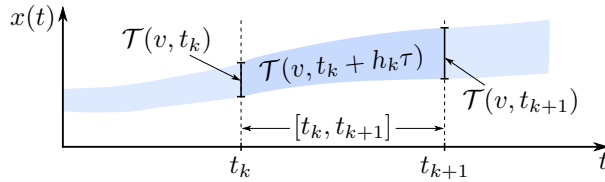


Abbildung 3.5: Verifizierte Lösungseinschließung mittels des Taylor-Modells $\mathcal{T}(v, t_k + h_k\tau)$ mit $\tau \in [0, 1]$ im k -ten Integrationsschritt (nach [Wol10])

Anmerkung 3.9. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}_\tau = [0, 1]$ der Zeitvariable τ unterscheidet sich von dem üblichen Definitionsbereich \mathcal{D}_v des Taylor-Modells. Da $\mathcal{D}_\tau \subseteq \mathcal{D}_v$ gilt, ist dies keine Einschränkung und muss nur bei der Wertebereichseinschließung durch $bd\{\tau\} = [0, 1]$ anstatt $bd\{v\} = [-1, 1]$ beachtet werden.

Für die Integration von (3.68) über das bestimmte Integrationsintervall $[t_k, t_k + h_k]$ wird der Integraloperator (3.64) mit der Substitution $\mathcal{T} = t_k + h_k\tau$ wie folgt angewendet:

$$\Psi(\mathcal{T}(v, t_k + h_k\tau)) = \mathcal{T}(v, t_k) + h_k \int_0^1 f(\mathcal{T}(v, t_k + h_k\tau)) \, d\tau. \quad (3.69)$$

Die Integration eines Taylor-Modells erfolgt gemäß den Vorschriften aus Abschnitt 3.2.2. Auch die Gleichung (3.69) stellt ein Fixpunktproblem dar, welches Taylor-Modelle zur Mengenbeschreibung nutzt. Für diesen speziellen Fall muss geprüft werden, ob die vier Voraussetzungen

1. nichtleere und abgeschlossene Teilmenge,
2. Banachraum,
3. Kontraktionsbedingung sowie
4. Selbstabbildung

aus dem Fixpunktsatz von Banach (Satz 3.2) erfüllt sind. Die Teilmenge \mathcal{M} wird über das vektorielle Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ definiert, welches eine nichtleere und abgeschlossene Teilmenge darstellt [Ebl07]. In [Ebl07] wird bewiesen, dass es sich hierbei um einen vollständigen, normierten Raum und somit einen Banachraum handelt. Ferner wird in [Ebl07] bewiesen, dass der Integraloperator (3.69) eine kontrahierende Selbstabbildung darstellt. Somit sind die ersten drei Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 3.2 uneingeschränkt erfüllt. Einzig die Voraussetzung der Selbstabbildung, d. h.

$$\Psi(\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)) \subseteq \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau), \quad (3.70)$$

muss für jedes Differentialgleichungssystem individuell erfüllt werden. Dies ist durch eine Adaption der variablen Schrittweite h_k ohne eine weitere theoretische Analyse möglich und wird in Abschnitt 3.3.1 näher erläutert [Wol10].

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass sich eine verifizierte Lösungseinschließung des Differentialgleichungssystems (3.63) mittels Taylor-Modellen auf Grundlage von Satz 3.2 berechnen lässt. Einzige Bedingung in diesem Zusammenhang ist, dass die Voraussetzung der Selbstabbildung (3.70) gewährleistet ist. Die einzelnen, konkreten Schritte zur Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_{k+1})$ werden im nachfolgenden Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

3.3.1 Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung

Die Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_{k+1}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ im k -ten Integrationsschritt erfolgt anhand der folgenden Teilaufgaben:

- **Konstruktion des Taylorpolynoms:** Auf Grundlage der Zustandsmenge $\mathcal{X}(t_k) = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k)$ wird das Taylorpolynom $\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ mit $\tau \in [0, 1]$ konstruiert.
- **Trajektorieneinschließung:** Der Intervallrest $[R_k]$ des Taylor-Modells $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ wird so bestimmt, dass die Voraussetzung der Selbstabbildung (3.70) erfüllt ist. Zusammen mit dem Taylor-Polynom schließt das resultierende Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ garantiert die Menge aller Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{x}(t_k) \in \mathcal{X}(t_k)$ für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ein.
- **Iterative Verbesserung der Einschließung:** Anhand des Fixpunktsatzes von Banach wird das zuvor bestimmte Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ iterativ verbessert.

- **Bestimmung der Einschließung zum Zeitpunkt t_{k+1} :** Die gesuchte verifizierte Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t_{k+1}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ ist durch die Auswertung des Taylor-Modells $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ an der Stelle $\tau = 1$ gegeben.
- **Präkonditionierung:** Der Abhängigkeitseffekt sowie der Einhüllungseffekt, welche in Abschnitt 3.2.1 erläutert wurden, wirken auch auf das intervallbasierte Restglied $[\mathbf{R}_k]$. Allerdings hat $[\mathbf{R}_k]$ auf das gesamte Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ nur einen relativ kleinen Einfluss, da das Taylor-Polynom $\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ hauptsächlich zur Mengenbeschreibung beiträgt [Wol10]. Dennoch kann es bei einer Integration über einen längeren Zeitraum zu einer ungewollten Überschätzung führen. Daher wird vor einem neuen Integrationsschritt eine Präkonditionierung der Lösungseinschließung durchgeführt.

Die einzelnen Teilaufgaben werden im Folgenden detailliert erläutert und entsprechen der Vorgehensweise aus [Wol10] und [Ebl07].

Konstruktion des Taylorpolynoms

In diesem Schritt wird ein multivariates Taylor-Polynom $\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ der Ordnung ℓ aus dem bekannten Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k) = \mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k) + [\mathbf{R}(t_k)]$, welches die Zustandsmenge $\mathcal{X}(t_k)$ beschreibt, konstruiert.

Das Taylor-Polynom ist analog zur Fixpunktiteration (3.67) mit dem Integraloperator (3.69) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{i+1}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) &= \Psi(\mathcal{P}_i(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)) \\ &= \mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k) + h_k \int_0^1 \mathbf{f}(\mathcal{P}_i(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)) \, d\tau \end{aligned} \quad (3.71)$$

gegeben. In [Mak98] und [Ebl07] wird gezeigt, dass zur Konstruktion des Taylor-Polynoms maximal $\ell+1$ Iterationen benötigt werden. Ein weiterer Iterationsschritt verändert das Taylor-Polynom nicht mehr, weshalb

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) := \mathcal{P}_{\ell+1}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) \quad (3.72)$$

gilt. Die Fixpunktiteration wird mittels des Taylor-Polynoms $\mathcal{P}_0(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) = \mathbf{v}$ initialisiert.

Trajektorieneinschließung

Nach der Bestimmung des Taylor-Polynoms erfolgt die Berechnung des Restglieds $[\mathbf{R}_k]$, wozu der Ansatz aus [Mak98] verwendet wird. Hierbei wird sichergestellt, dass die Voraussetzung der Selbstabbildung (3.70) stets erfüllt ist. Zunächst wird ein initiales Restglied $[\mathbf{R}_{k,0}]$ mittels einer einzigen Fixpunktiteration gemäß

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,0}] = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k) + h_k \int_0^1 \mathbf{f}(\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{0}, \mathbf{0}]) \, d\tau \quad (3.73)$$

bestimmt. Aufgrund der zuvor beschriebenen Eigenschaft, die besagt, dass sich das Taylor-Polynom nicht mehr ändert, hat die Fixpunktiteration nur einen Einfluss auf das gesuchte Restglied $[\mathbf{R}_{k,0}]$. Erfüllt anschließend das resultierende Taylor-Modell $\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,0}]$ die Voraussetzung der Selbstabbildung

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k) + h_k \int_0^1 \mathbf{f}(\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,i}]) \, d\tau \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,i}] \quad (3.74)$$

für $i = 0$, so sind alle Voraussetzungen aus Satz 3.2 erfüllt. Die Prüfung dieser Voraussetzung erfolgt lediglich auf Basis der Restglieder, da die Taylor-Polynome auf beiden Seiten in (3.74) identisch sind. Kann die Voraussetzung (3.74) nicht erfüllt werden, wird das Restglied durch

$$[\mathbf{R}_{k,i}] = 2^i [\mathbf{R}_{k,0}] \quad (3.75)$$

mit $i = 1, \dots, i_{\max}$ sukzessiv vergrößert, bis (3.74) für ein $i^* \leq i_{\max}$ erfüllt ist. Das resultierende Taylor-Modell

$$\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,i^*}] \quad (3.76)$$

ist somit eine verifizierte Lösungseinschließung für das Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$. Ist es trotz der Vergrößerung des Restglieds nicht möglich, die Voraussetzung (3.74) zu erfüllen, d. h. i_{\max} wird überschritten, dann ist eine Lösungseinschließung mit der gewählten Schrittweite h_k nicht möglich. Es kann im Anschluss versucht werden mit einer geringeren Schrittweite eine Lösungseinschließung zu bestimmen. Dies ist so lange ausführbar bis die minimale Schrittweite $h_{\min} \leq h_k$ unterschritten wird.

Anmerkung 3.10. Ein in [Ebl07] beschriebener, alternativer Ansatz zu (3.75) basiert auf einer komplexeren Konstruktion des Restglieds $[\mathbf{R}_{k,i}]$ mit dem Ziel einer geringeren Anzahl an benötigten Iterationen i_{\max} . Es ist zu beachten, dass in [Wol10] gezeigt wurde, dass dieser Ansatz keine nennenswerten Vorteile bietet. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Ansatz aus [Mak98] verwendet.

Iterative Verbesserung der Einschließung

Mittels weiterer Fixpunktiterationen für das gesamte Taylor-Modell

$$\mathcal{T}_{j+1}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) = \Psi(\mathcal{T}_j(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)) \quad (3.77)$$

mit $j = 0, \dots, j_{\max}$ wird die verifizierte Lösungseinschließung iterativ verbessert, wobei für $j = 0$ die Lösungseinschließung (3.76) aus dem vorherigen Schritt verwendet wird:

$$\mathcal{T}_0(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) := \mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,i^*}] \quad (3.78)$$

Diese Fixpunktiteration wird solange ausgeführt, bis j_{\max} überschritten wird oder keine signifikante Verringerung der Intervallbreite des Restglieds $\mathbf{R}_{k,j,\Delta}$ und somit Verbesserung der Lösungseinschließung erreicht werden kann. Analog zu (3.73) ändert sich das Taylorpolynom in (3.77) nicht mehr. Nach $j^* \leq j_{\max}$ Iterationsschritten ist die gesuchte verifizierte Lösungseinschließung anhand von

$$\mathcal{T}_{j^*}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) = \mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) + [\mathbf{R}_{k,j^*}] \quad (3.79)$$

gegeben.

Bestimmung der Einschließung zum Zeitpunkt t_{k+1}

Das Taylor-Modell $\mathcal{T}_{j^*}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau)$ beschreibt die verifizierte Lösungseinschließung für das Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$. Für eine Bestimmung der Einschließung zum Zeitpunkt t_{k+1} wird das Taylor-Modell an der Stelle $\tau = 1$ ausgewertet:

$$\mathcal{X}(t_{k+1}) = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \mathcal{T}_{j^*}(\mathbf{v}, t_k + h_k \tau) \Big|_{\tau=1}. \quad (3.80)$$

Präkonditionierung

Vor dem nächsten Integrationsschritt für das Zeitintervall $[t_{k+1}, t_{k+1} + h_k]$ erfolgt eine Präkonditionierung der berechneten Lösungseinschließung zur Eindämmung des Abhängigkeits- und Einhüllungseffekts auf das Restglied in (3.80). Wie bereits erläutert, sind die Auswirkungen der beiden Effekte auf das gesamte Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ relativ gering, dennoch kann es bei einem längeren Integrationszeitraum zu einer unnötigen Überschätzung der Lösungsmenge führen.

Anmerkung 3.11. Neben der Präkonditionierung existiert die Methode „Shrink-Wrapping“, welche u. a. in [MB05a] sowie [Ebl07] diskutiert wird. Im Rahmen dieser Methode wird versucht, das berechnete Taylor-Modell (3.80) in ein neues Taylor-Modell mit vernachlässigbarem Restglied zu überführen. Allerdings kann die Überführung – im Gegensatz zur Präkonditionierung – an diversen Stellen scheitern und auch im Erfolgsfall eine Überschätzung von (3.80) liefern.

In dieser Arbeit wird die Präkonditionierung basierend auf einer QR-Zerlegung (auch als QR-Faktorisierung bezeichnet) aus [MB05a] verwendet, welche in [Wol10] erweitert und verbessert wurde. Zur übersichtlicheren Darstellung wird als Ausgangspunkt für die berechnete Lösungseinschließung (3.80) der Zeitpunkt t_k verwendet:

$$\mathcal{X}(t_k) = \mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k). \quad (3.81)$$

Die Grundkonzeption der Präkonditionierung liegt darin begründet, dass das Taylor-Modell in ein affines äußeres Taylor-Modell $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k)$ mit vernachlässigbarem Restglied sowie ein inneres Taylor-Modell $\mathcal{T}_i(\mathbf{v}, t_k)$ aufgespaltet wird. Die Aufspaltung (siehe Abschnitt 3.2.2) ist anhand von

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k) \subseteq (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_i)(\mathbf{v}, t_k) \quad (3.82)$$

gegeben. Dies kann nach [Wol10] so interpretiert werden, dass das äußere Taylor-Modell ein transformiertes Koordinatensystem im Zustandsraum definiert. Zur Berechnung dieser Aufspaltung wird das Taylor-Polynom $\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k)$ des Taylor-Modells $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k)$ gemäß

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k) = \underbrace{\mathbf{b}(t_k) + \mathbf{B}(t_k) \mathbf{v} + \mathcal{N}(\mathbf{v}, t_k)}_{=\mathcal{P}(\mathbf{v}, t_k)} + [\mathbf{R}_k] \quad (3.83)$$

aufgeteilt, wobei $\mathbf{b}(t_k)$ dem konstanten Polynomanteil, $\mathbf{B}(t_k) \mathbf{v}$ dem linearen Polynomanteil und $\mathcal{N}(\mathbf{v}, t_k)$ dem nichtlinearen Polynomrest entsprechen. Anschließend werden im ersten

Schritt ein affines äußeres Taylor-Modell sowie das zugehörige innere Taylor-Modell wie folgt bestimmt:

$$\tilde{\mathcal{T}}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k) = \mathbf{b}(t_k) + \mathbf{A}(t_k) \tilde{\mathbf{v}}_k, \quad (3.84)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_i(\mathbf{v}, t_k) = \mathbf{A}^{-1}(t_k) (\mathbf{B}(t_k) \mathbf{v} + \mathcal{N}(\mathbf{v}, t_k) + [\mathbf{R}_k]). \quad (3.85)$$

Es ist aus (3.84) sowie (3.85) ersichtlich, dass die Komposition $\tilde{\mathcal{T}}_a(\tilde{\mathcal{T}}_i(\mathbf{v}, t_k), t_k)$ dem Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k)$ entspricht. Für die Bestimmung der Basismatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ werden in [MB05a] verschiedene Methoden, wie die QR-Faktorisierung (siehe Anhang B.3) oder die einfache Einheitsmatrix, erläutert und diskutiert. Diese Methoden werden auch in [Bün21] aufgegriffen und an verschiedenen Beispielen miteinander verglichen. Hier hat sich die QR-Faktorisierung als die geeignetste Methode zur Stabilisierung der Integration erwiesen, weshalb sie auch in dieser Arbeit Verwendung findet. Als Basismatrix wird somit die orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der QR-Faktorisierung $\mathbf{B}(t_k) = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ verwendet und ist folglich durch

$$\mathbf{A}(t_k) = \mathbf{Q} \quad (3.86)$$

gegeben.

Für den nächsten Integrationsschritt zur Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung ist es erforderlich, dass das äußere Taylor-Modell das Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k)$ vollständig einschließt. Aus diesem Grund wird eine zusätzliche Skalierungsmatrix $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmt. Hierzu wird zunächst die Wertebereichseinschließung (siehe Abschnitt 3.2.2)

$$[\beta] = \text{bd}\{\tilde{\mathcal{T}}_i(\mathbf{v}, t_k)\} \quad (3.87)$$

des inneren Taylor-Modells berechnet. Mithilfe des Intervallradius (3.15) der Wertebereichseinschließung $[\beta] \in \mathbb{IR}^n$ ist die Skalierungsmatrix durch

$$\mathbf{\Pi} = \text{diag}(\beta_\Delta) \quad (3.88)$$

gegeben. Um die Überapproximation weiter zu reduzieren, wird zusätzlich zur Skalierung die in [Wol10] vorgeschlagene Verschiebung um den Intervallmittelpunkt (3.14) mit $\beta_c \in \mathbb{R}^n$ vorgenommen. Die gesuchte Aufspaltung lässt sich somit anhand von

$$\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k) = \mathbf{b}(t_k) + \mathbf{A}(t_k) (\mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{v}}_k + \beta_c), \quad (3.89)$$

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{v}, t_k) = \mathbf{\Pi}^{-1} \mathbf{A}^{-1}(t_k) (\mathbf{B}(t_k) \mathbf{v} + \mathcal{N}(\mathbf{v}, t_k) + [\mathbf{R}_k]) - \mathbf{\Pi}^{-1} \beta_c. \quad (3.90)$$

berechnen. Die Skalierungsmatrix $\mathbf{\Pi}$ und der Verschiebungsvektor β_c sorgen einerseits aufgrund von $[\beta] \subseteq \mathbf{\Pi} \tilde{\mathbf{v}}_k + \beta_c$ für die vollständige Einschließung des Taylor-Modells $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_k)$ durch $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k)$. Andererseits wird durch die inverse Skalierung $\mathbf{\Pi}^{-1}$ des inneren Taylor-Modells auch die Erfüllung der Annahme 3.3, d. h.

$$\text{bd}\{\tilde{\mathbf{v}}_k\} = \text{bd}\{\mathcal{T}_i(\mathbf{v}, t_k)\} \subseteq [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{IR}^n, \quad (3.91)$$

gewährleistet. Mit diesen Schritten ist die Präkonditionierung abgeschlossen. Anschauliche Beispiele zur Präkonditionierung sind beispielsweise in [Wol10, Bün21] zu finden.

Der nächste Integrationsschritt zur Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung erfolgt ausschließlich auf dem äußeren Taylor-Modell (3.89). Das innere Taylor-Modell (3.90) wird zunächst vernachlässigt und erst am Ende des Integrationsschritts in die berechnete Lösungseinschließung substituiert. Das Taylor-Modell $\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ resultiert somit aus der Komposition

$$\mathcal{T}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \mathcal{T}_a(\mathcal{T}_i(\mathbf{v}, t_k), t_{k+1}) . \quad (3.92)$$

Diese Vorgehensweise der Aufspaltung in ein äußeres und inneres Taylor-Modell stellt eine Variablensubstitution dar, welche bei der folgenden Integration keine Auswirkung auf das Ergebnis hat. Der Beweis hierfür ist z. B. in [NJN07] gegeben.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll anhand des anschaulichen Beispiels 3.4 die verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen verdeutlicht werden. Dieses Beispiel wird häufig in der Literatur, wie in [Wol10] und [NJN07], zur Einführung in die verifizierte Lösungseinschließung verwendet.

Beispiel 3.4:

Gegeben sei das folgende nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 \end{aligned} \quad (3.93)$$

mit der Anfangszustandsmenge

$$\mathcal{X}_0 = \left(\begin{bmatrix} \frac{95}{100}, \frac{105}{100} \\ -\frac{105}{100}, -\frac{95}{100} \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{matrix} 1 + \frac{5}{100}v_1 \\ -1 + \frac{5}{100}v_2 \end{matrix} \right) , \quad (3.94)$$

wobei für den Definitionsbereich $\mathcal{D}_v = [-1, 1] \times [-1, 1]$ gilt. Für die verifizierte Lösungseinschließung mit der gewählten Taylor-Modell-Ordnung $\ell = 4$ gelten die Auswertezeitpunkte $t_k = k \cdot 0,4 \text{ s}$ mit $k = 0, 1, \dots, 9$. Das Resultat der verifizierten Lösungseinschließung ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Zum Vergleich werden für verschiedene Anfangszustände $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}_0$ mittels der Dormand-Prince-Methode (auch bekannt als ode45, siehe z. B. [EL97]) die punktweisen Näherungslösungen $\mathbf{x}(t)$ bestimmt.

Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass alle punktweisen Näherungslösungen $\mathbf{x}(t)$ durch die berechnete Lösungsmenge $\mathcal{X}(t)$ eingeschlossen sind, d. h. $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X}(t)$. Durch die nicht-konvexe Mengendarstellung repräsentiert die verifizierte Lösungseinschließung ein relativ genaues Abbild der exakten Lösungsmenge. Eine minimale Überschätzung der Lösungsmenge resultiert aus dem intervallwertigen Restglied. Diese könnte durch eine höhere Taylor-Modell-Ordnung ℓ oder geringere Schrittweite h_k noch weiter verkleinert werden. Gleichwohl führen beide Maßnahmen zu höheren Rechenzeiten, was in Abschnitt 4.4 ausführlich behandelt wird.

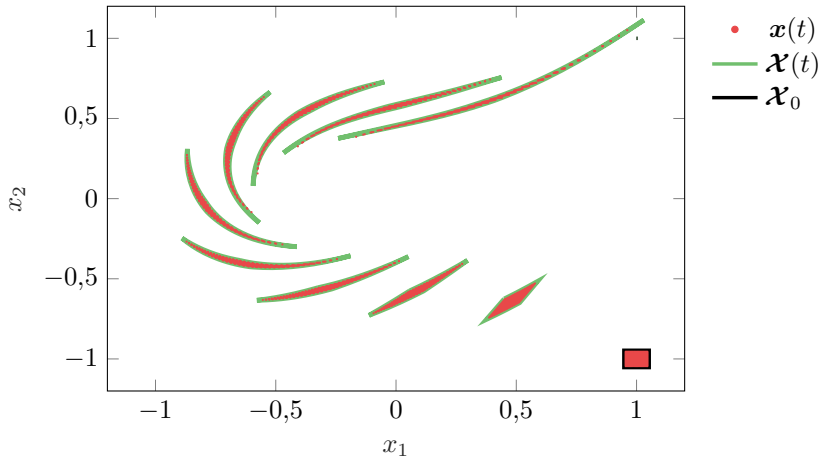


Abbildung 3.6: Verifizierte Lösungseinschließung $\mathcal{X}(t)$ mittels Taylor-Modellen sowie punktweise Näherungslösungen $x(t)$

3.4 Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für unsichere, nichtlineare Systeme

In diesem Abschnitt wird die konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für unsichere, nichtlineare Systeme beschrieben. Die Grundlage des Fehlerdiagnosealgorithmus bildet in diesem Zusammenhang die Zustandsmengenbeobachtung, welche auf dem in Abschnitt 3.3.1 vorgestellten Verfahren zur verifizierten Lösungseinschließung basiert. Das Ziel der Zustandsmengenbeobachtung ist es, eine Zustandsmenge mithilfe der Modell- und Messinformationen zu rekonstruieren, welche den unbekannten, tatsächlichen Systemzustand einschließt und dabei möglichst gering überschätzt. Die berechnete Zustandsmenge wird anschließend zur konsistenzbasierten Fehlerdiagnose verwendet. Die nachfolgenden Ausführungen basieren auf [Wol10], wo die Zustandsmengenbeobachtung basierend auf Taylor-Modellen für zeitkontinuierliche Systeme erstmals vorgestellt wurde.

In Abschnitt 3.4.1 wird das generelle Schema zur Zustandsmengenbeobachtung erläutert. Dies beinhaltet den allgemeinen Ablauf der Zustandsmengenbeobachtung mit Hilfe von Taylor-Modellen sowie die einzelnen Teilschritte Prädiktion und Korrektur. Anschließend wird in Abschnitt 3.4.2 beschrieben, wie dieser Zustandsmengenbeobachter zur konsistenzbasierten Fehlerdiagnose eingesetzt werden kann.

3.4.1 Schema der Zustandsmengenbeobachtung

Die Zustandsmengenbeobachtung basiert auf Taylor-Modellen und nutzt das klassische Prädiktion-Korrektur-Schema zur Rekonstruktion der gesuchten Zustandsmengen (vgl. Abschnitt 2.3.1). Die verifizierte Lösungseinschließung aus Abschnitt 3.3.1 wird dafür zur

Prädiktion der Zustandsmenge eingesetzt. Der nachfolgende Korrekturschritt schließt den Durchschnitt aus der prädizierten Zustandsmenge und der anhand von unsicheren Messinformationen gegebenen Messmenge vollständig ein. Den nachfolgenden Ausführungen liegt das unsichere Zustandsraummodell nach Definition 3.3 zugrunde.

Die Anfangszustandsmenge kann prinzipiell durch jede beliebige konvexe oder nicht-konvexe Mengengestalt beschrieben werden, allerdings wird in dieser Arbeit zur übersichtlicheren Darstellung die Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}(t_0) = [\mathbf{x}(t_0)] \in \mathbb{IR}^n$ als Intervallvektor angenommen. Dabei muss der intervallwertige Anfangszustand durch eine geeignete Wahl der Mengenschranken (siehe Abschnitt 3.1) sicherstellen, dass der unbekannte tatsächliche Anfangszustand des Systems garantiert im Intervall eingeschlossen ist. Die Anfangszustandsmenge ist somit in Form von Intervallen bzw. Taylor-Modellen mit der zugehörigen Variable \mathbf{v}_x durch

$$\mathcal{X}(t_0) = [\mathbf{x}(t_0)] = \mathbf{x}(t_0)_c + \text{diag}(\mathbf{x}(t_0)_\Delta) \mathbf{v}_x = \mathcal{T}(\mathbf{v}_x) \quad (3.95)$$

gegeben. Für die Variable \mathbf{v}_x sowie die nachfolgenden Variablen eines Taylor-Modells gilt für den Definitionsbereich Annahme 3.3. Analog hierzu werden die unsicheren Modellparameter $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^r$, welche implizit in der Systemfunktion $\mathbf{f}(\cdot)$ enthalten sind, wie folgt beschrieben:

$$\mathcal{O} = [\mathbf{o}] = \mathbf{o}_c + \text{diag}(\mathbf{o}_\Delta) \mathbf{v}_o = \mathcal{T}(\mathbf{v}_o) . \quad (3.96)$$

Für die Eingangsmenge $\mathcal{U}(t_k)$ gilt die Annahme der konstanten Eingangsmenge für das Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$ (siehe Annahme 3.2), welche in dieser Arbeit stets durch eine geeignete Wahl der konstanten Mengenschranken $\Delta \mathbf{u}$ gemäß

$$\mathcal{U}(t_k) = \mathbf{u}(t_k) + \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_u = \mathcal{T}(\mathbf{v}_u) \quad (3.97)$$

erfüllt ist. Aufgrund dieser Annahme ist es möglich, die Eingangsmenge $\mathcal{U}(t_k)$ bei der verifizierten Lösungseinschließung für einen Integrationsschritt als konstanten Term in der Systemfunktion $\mathbf{f}(\cdot)$ zu berücksichtigen. Zur besseren Übersicht werden in dieser Arbeit die Variablen $\mathbf{v}_x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}_o \in \mathbb{R}^r$, $\mathbf{v}_u \in \mathbb{R}^p$ des Taylor-Modells zu $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+r+p}$ zusammengefasst.

Im ersten Teilschritt der Zustandsmengenbeobachtung, dem Prädiktionsschritt, wird zum aktuellen Zeitpunkt t_k unter den zuvor genannten Voraussetzungen mittels der verifizierten Lösungseinschließung die prädizierte Zustandsmenge $\mathcal{X}_p(t_{k+1})$ zum Zeitpunkt t_{k+1} berechnet. Folglich enthält die prädizierte Zustandsmenge $\mathcal{X}_p(t_{k+1})$ garantiert alle Zustände, welche unter Berücksichtigung aller Unsicherheiten konsistent mit dem unsicheren Systemmodell sind.

Auf Basis von neuen Messinformationen aus der Ausgangsmenge $\mathcal{Y}(t_{k+1})$ wird im nachfolgenden Korrekturschritt die prädizierte Zustandsmenge $\mathcal{X}_p(t_{k+1})$ verkleinert. Hierfür wird zunächst aus der Ausgangsmenge $\mathcal{Y}(t_{k+1})$ eine Messmenge $\mathcal{X}_m(t_{k+1})$ bestimmt, welche mit den aktuellen Messungen konsistent ist. Die Ausgangsmenge ist hierbei als Intervall-Messvektor in der Gestalt

$$\mathcal{Y}(t_{k+1}) = [\mathbf{y}(t_{k+1}) - \Delta \mathbf{y}, \mathbf{y}(t_{k+1}) + \Delta \mathbf{y}] \quad (3.98)$$

mit der bekannten, positiven Mengenschranke $\Delta \mathbf{y}$ (vgl. (3.11)), gegeben. Aufgrund der Systembeschreibung nach Definition 3.3 resultiert diese Messmenge zu

$$\mathcal{X}_m(t_{k+1}) = \left(\mathcal{Y}(t_{k+1}) \right)_{[-\infty, \infty]} = [\mathbf{x}_m(t_{k+1})] , \quad (3.99)$$

welche aufgrund von (3.98) ebenfalls einen Intervallvektor $[\mathbf{x}_m(t_{k+1})]$ darstellt. Zur Verkleinerung der prädizierten Menge $\mathcal{X}_p(t_{k+1})$ wird der Durchschnitt mit der Messmenge $\mathcal{X}_m(t_{k+1})$ gebildet. Das Ergebnis enthält schließlich alle Zustände, die konsistent mit dem unsicheren Systemmodell und der Eingangsmenge $\mathcal{U}(t_k)$ sowie zugleich mit der Ausgangsmenge $\mathcal{Y}(t_{k+1})$ sind. Infolge der Systemdarstellung in Sensorkoordinaten (siehe Definition 3.3) und der damit verbunden Eigenschaft, die besagt, dass in den ersten q -Zeilen des Zustandsmengenvektors der Ausgangsmengenvektor enthalten ist, kann der Durchschnitt mittels einer Schnittmengenbildung berechnet werden:

$$\mathcal{X}_\cap(t_{k+1}) = \mathcal{X}_p(t_{k+1}) \cap \mathcal{X}_m(t_{k+1}) . \quad (3.100)$$

Da im Allgemeinen die Schnittmenge $\mathcal{X}_\cap(t_{k+1})$ nicht exakt oder nur mit hohem mathematischen Aufwand repräsentiert werden kann, wird eine darstellbare Zustandsmenge mit möglichst minimaler, äußerer Überapproximation bestimmt:

$$\mathcal{X}(t_{k+1}) \supseteq \mathcal{X}_\cap(t_{k+1}) = \mathcal{X}_p(t_{k+1}) \cap \mathcal{X}_m(t_{k+1}) . \quad (3.101)$$

Die Zustandsmenge $\mathcal{X}(t_{k+1})$ wird für die Fehlerdiagnose verwendet (siehe Abschnitt 3.4.2) und stellt gleichzeitig die Anfangszustandsmenge für den nächsten Zeitschritt dar. Abbildung 3.7 veranschaulicht das Prädiktion-Korrektur-Schema des Zustandsmengenbeobachters für ein System zweiter Ordnung.

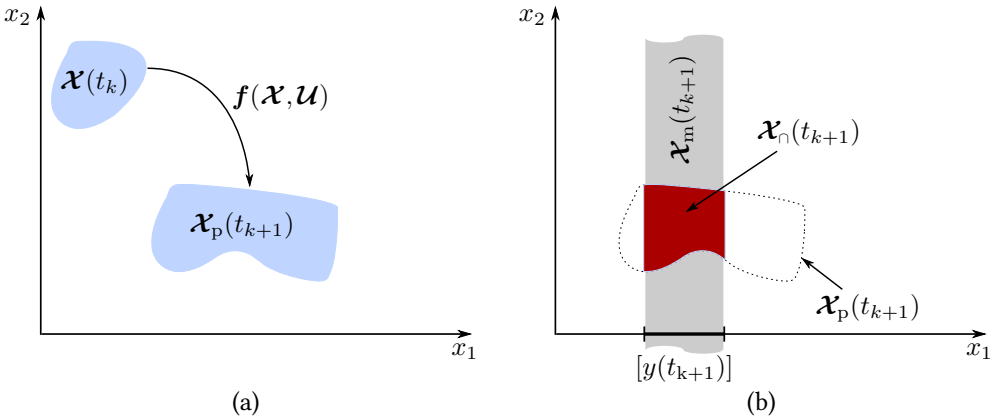


Abbildung 3.7: Veranschaulichung des Zustandsmengenbeobachters mit $n = 2$ und $q = 1$ auf der Grundlage des Prädiktionsschritts (a) und des Korrekturschritts (b)

Anmerkung 3.12. Der Korrekturschritt des vorgestellten Zustandsmengenbeobachters basiert auf der Schnittmengenbildung (3.100) und nicht – wie die klassischen Beobachter – auf einer

Rückführung des Beobachterfehlers. Das Verfahren wird daher der Methode der Paritätsgleichungen (siehe Abschnitt 2.2.2) zugeordnet.

Anmerkung 3.13. *Aufgrund der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung muss die Schrittweite $h_k = t_{k+1} - t_k$ nicht äquidistant sein (siehe Anmerkung 3.7). Deshalb kann sie auch während der Zustandsmengenbeobachtung so angepasst werden, dass die Mengenschranke $\Delta \mathbf{u}$ der Eingangsmenge $\mathcal{U}(t_k)$ nicht zu groß gewählt werden muss. Allerdings sollte die Schrittweite dennoch auch so gewählt werden, dass die neuen Messinformationen berücksichtigt werden.*

In den folgenden beiden Abschnitten werden jeweils der Prädiktionsschritt sowie der Korrekturschritt detailliert vorgestellt.

Prädiktion einer Lösungsmenge

Auf Basis des inneren \mathcal{T}_i und äußeren Taylor-Modells \mathcal{T}_a des präkonditionierten Taylor-Modells wird mithilfe der verifizierten Lösungseinschließung (siehe Abschnitt 3.3.1) die prädiizierte Zustandsmenge berechnet. Diese wird anschließend erneut in präkonditionierter Form dargestellt.

In [Wol10] wurde gezeigt, dass ein einziges Taylor-Modell $\mathcal{T}_1(\mathbf{v}, t_k)$ nicht ausreicht, um die im Korrekturschritt zu berechnende Schnittmenge geeignet zu repräsentieren. Daher wurde ein zweite Mengendarstellung $\mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_k)$ mit $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+r+p}$ in Form eines Taylor-Modells eingeführt. Um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten, handelt es sich bei $\mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_k)$ um einen reinen Intervallvektor. Zum Zeitpunkt t_k ist somit die konsistente Zustandsmenge

$$\mathcal{X}(t_k) = \mathcal{T}_1(\mathbf{v}, t_k) \cap \mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_k) \text{ mit} \quad (3.102a)$$

$$\mathcal{T}_1(\mathbf{v}, t_k) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_{i,1})(\mathbf{v}, t_k) , \quad (3.102b)$$

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_k) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_{i,2})(\mathbf{w}, t_k) \quad (3.102c)$$

als Ausgangspunkt gegeben. Zum initialen Zeitpunkt t_0 entspricht das äußere Taylor-Modell \mathcal{T}_a dem Taylor-Modell der Anfangszustandsmenge gemäß (3.95) und für die inneren Taylor-Modelle gilt $\mathcal{T}_{i,1}(\mathbf{v}, t_0) = \mathbf{v}$ sowie $\mathcal{T}_{i,2}(\mathbf{w}, t_0) = \mathbf{w}$.

Der Prädiktionsschritt basiert – wie in Abschnitt 3.3.1 erläutert – zunächst auf dem äußeren Taylor-Modell $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k)$. Die Berechnung der verifizierten Lösungseinschließung muss nur einmal vorgenommen werden, da beiden Mengendarstellungen (3.102b) und (3.102c) das identische äußere Taylor-Modell zugrunde liegt. Somit wird im k -ten Zeitschritt basierend auf dem ersten Taylor-Modell $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_k)$ eine erste Lösungseinschließung der prädiizierten Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{T}}_{a,p}(\tilde{\mathbf{v}}_k, t_{k+1})$ zum Zeitpunkt t_{k+1} berechnet. Anschließend wird mittels der Komposition mit dem jeweiligen inneren Taylor-Modell

$$\mathcal{T}_{p,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \tilde{\mathcal{T}}_{a,p}(\mathcal{T}_{i,1}(\mathbf{v}, t_k), t_{k+1}) \text{ sowie} \quad (3.103a)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{p,2}(\mathbf{w}, t_{k+1}) = \tilde{\mathcal{T}}_{a,p}(\mathcal{T}_{i,2}(\mathbf{w}, t_k), t_{k+1}) \quad (3.103b)$$

die Aufspaltung wieder aufgehoben. Die prädizierte Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{T}}_{p,2}$ soll hierbei einen reinen Intervallvektor darstellen. Sie wird daher mithilfe der Wertebereichseinschließung

$$[\beta] = \text{bd}\left\{\tilde{\mathcal{T}}_{p,2}(\mathbf{w}, t_{k+1})\right\} \quad (3.104)$$

zu

$$\mathcal{T}_{p,2}(\mathbf{w}, t_{k+1}) = \beta_c + \text{diag}(\beta_\Delta) \mathbf{w} \quad (3.105)$$

bestimmt. Nach einer erneuten Präkonditionierung des Taylor-Modells $\mathcal{T}_{p,1}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ in

$$\mathcal{T}_{p,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) \subseteq (\mathcal{T}_{a,p} \circ \mathcal{T}_{i,p,1})(\mathbf{v}, t_{k+1}) \quad (3.106)$$

ist der Prädiktionsschritt abgeschlossen. Die finale prädizierte Zustandsmenge in präkonditionierter Form ist durch

$$\mathcal{X}_p(t_{k+1}) = (\mathcal{T}_{a,p} \circ \mathcal{T}_{i,p,1})(\mathbf{v}, t_{k+1}) \cap \mathcal{T}_{p,2}(\mathbf{w}, t_{k+1}) \quad (3.107)$$

gegeben. Diese Zustandsmenge wird im nachfolgenden Korrekturschritt verkleinert.

Korrektur der Lösungsmenge

Der Korrekturschritt hat die Aufgabe, die prädizierte Zustandsmenge (3.107) mithilfe der aktuellen unsicheren Messinformationen (3.99) in Form der Messmenge $\mathcal{X}_m(t_{k+1}) = [\mathbf{x}_m(t_{k+1})]$ zu verkleinern. Aufgrund der vorherigen Präkonditionierung (3.106) liegt für die prädizierte Zustandsmenge ein inneres sowie ein äußeres Taylor-Modell vor. Zunächst erfolgt eine Korrektur des äußeren Taylor-Modells, im Anschluss daran die Korrektur des inneren Taylor-Modells.

Das prädizierte äußere Taylor-Modell weist die folgende affine Gestalt auf (siehe Abschnitt 3.3.1):

$$\mathcal{T}_{a,p}(\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}, t_{k+1}) = \mathbf{b}_p(t_{k+1}) + \mathbf{A}_p(t_{k+1}) \tilde{\mathbf{v}}_{k+1}. \quad (3.108)$$

Im ersten Schritt der Korrektur wird die Schnittmenge der Messmenge (3.99) mit dem intervallwertigen zweiten Taylor-Modell (3.105) gebildet:

$$[\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1})] = [\mathbf{x}_p(t_{k+1})] \cap [\mathbf{x}_m(t_{k+1})] \quad (3.109)$$

mit $[\mathbf{x}_p(t_{k+1})] = \mathcal{T}_{p,2}(\mathbf{w}, t_{k+1})$. Die Darstellung des Taylor-Modells (3.108), welche eine affine Abbildung beschreibt, wird im zweiten Schritt genutzt, um das lineare Intervallgleichungssystem

$$\mathbf{b}_p(t_{k+1}) + \mathbf{A}_p(t_{k+1}) \tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = [\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1})] \quad (3.110)$$

anzugeben. Dieses Intervallgleichungssystem kann durch das präkonditionierte Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren (PIGS-Verfahren, siehe Anhang B.4) gelöst werden. Bei diesem Verfahren wird basierend auf einem Anfangsintervallvektor $[\tilde{\mathbf{a}}]$ eine verbesserte Einschließung $[\mathbf{a}] \subseteq [\tilde{\mathbf{a}}]$ bestimmt, weshalb es auch in der Literatur als Kontraktionsverfahren bezeichnet wird [JKDW01]. Für das Intervallgleichungssystem (3.110) wird als Anfangsintervallvektor $[\mathbf{r}_p(t_{k+1})]$ der gesamte Definitionsbereich von $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ gewählt, d. h. $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = [\mathbf{r}_p]$ mit

$[\mathbf{r}_p(t_{k+1})] = \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{v}}} = [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{I}\mathbb{R}^n$. Das Resultat nach Anwendung des PIGS-Verfahrens ist eine auf das transformierte Koordinatensystem bezogene engere Einschließung $[\tilde{\mathbf{r}}(t_{k+1})] \subseteq [\mathbf{r}_p(t_{k+1})]$ der Schnittmenge. Die Schnittmenge $[\mathbf{x}_s(t_{k+1})]$ der Lösungen von (3.109) sowie (3.110) führt zu

$$[\mathbf{x}_s(t_{k+1})] = [\tilde{\mathbf{x}}(t_{k+1})] \cap \left(\mathbf{b}_p(t_{k+1}) + \mathbf{A}_p(t_{k+1}) [\tilde{\mathbf{r}}(t_{k+1})] \right). \quad (3.111)$$

Die ersten beiden Schritte der Korrektur des äußeren Taylor-Modells sind in Abbildung 3.8a dargestellt. Aus Abbildung 3.8a ist allerdings auch zu erkennen, dass die Einschließung der

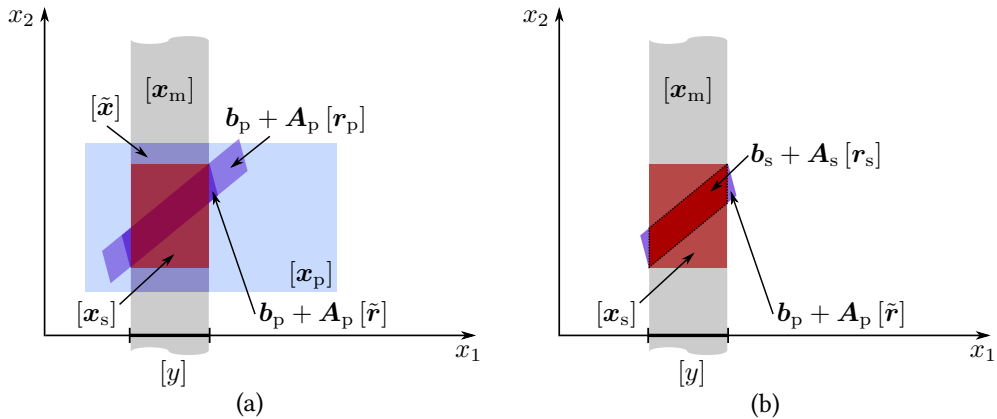


Abbildung 3.8: Korrektur des äußeren Taylor-Modells im Zustandsmengenbeobachter mit $n = 2$ und $q = 1$ zum Zeitpunkt t_{k+1} (nach [Wol10])

Schnittmenge (3.111) durch $[\mathbf{x}_s(t_{k+1})]$ eine potenzielle Überschätzung der Lösungsmenge mit sich bringt. Mittels einer Modifikation der Basismatrix kann diese Überabschätzung deutlich verringert werden (vgl. Abbildung 3.8b). Hierzu wird eine neue transformierte Mengendarstellung $\mathbf{b}_s(t_{k+1}) + \mathbf{A}_s(t_{k+1})[\mathbf{r}_s(t_{k+1})]$ bestimmt, welche die identische Gestalt wie (3.110) aufweist. Das Element $\mathbf{b}_s(t_{k+1}) = \mathbf{x}_{s,c}(t_{k+1})$ ist der Mittelpunkt von $[\mathbf{x}_s(t_{k+1})]$ aus (3.111) und folglich bekannt. Die Bestimmung der Basismatrix $\mathbf{A}_s(t_{k+1})$ und des Intervallvektors $[\mathbf{r}_s(t_{k+1})]$ wird im Folgenden erläutert:

Zur Beschreibung des gesuchten n -Parallelotops⁶ $\mathbf{b}_s(t_{k+1}) + \mathbf{A}_s(t_{k+1}) [\mathbf{r}_s(t_{k+1})]$ stehen insgesamt $2n$ Hyperebenen zur Verfügung: n Hyperebenen, welche den Intervallvektor $[\mathbf{x}_s(t_{k+1})]$ beschreiben, sowie n Hyperebenen aus dem Zwischenergebnis $\mathbf{b}_p(t_{k+1}) + \mathbf{A}_p(t_{k+1}) [\tilde{\mathbf{r}}(t_{k+1})]$. Dies ist ebenfalls aus Abbildung 3.8b ersichtlich. Die Auswahl der gesuchten n Hyperebenen aus den gegebenen $2n$ Hyperebenen erfolgt unter der Prämisse, dass das Resultat ein minimales Volumen aufweisen soll und somit die engste Einschließung darstellt. Für die Bestimmung des Volumens ist die absolute Lage des Parallelotops im Zustands-

⁶ Verallgemeinerung des Parallelepipeds in den n -dimensionalen Raum. Das zweidimensionale Analogon $n = 2$ des Parallelotops ist das Parallelogramm.

raum nicht relevant, daher werden im Folgenden die durch die Subtraktion mit $\mathbf{b}_p(t_{k+1})$ in den Ursprung verschobenen Mengendarstellung betrachtet:

$$\mathbf{I}_n ([\mathbf{x}_s(t_{k+1})] - \mathbf{b}_p(t_{k+1})) , \quad (3.112)$$

$$\mathbf{A}_p(t_{k+1}) [\tilde{\mathbf{r}}(t_{k+1})] . \quad (3.113)$$

Mittels der Multiplikation der Basisvektoren mit den jeweiligen Intervallradien bzw. Intervallbreiten können die Parallelotope anhand der Matrizen

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{I}_n \cdot \text{diag}(2\mathbf{x}_{s,\Delta}(t_{k+1})) \text{ und} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{A}_p(t_{k+1}) \cdot \text{diag}(2\tilde{\mathbf{r}}_\Delta(t_{k+1})) \quad (3.115)$$

beschrieben werden. Die einzelnen Spaltenvektoren der Matrizen (3.114) sowie (3.115) entsprechen hierbei den Kanten des Parallelotops. Folglich sind die $2n$ Zeilenvektoren der Matrix

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^{-1} \\ \mathbf{F}_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

die zugehörigen Normalenvektoren der begrenzten Hyperebenen im Zustandsraum. Für die geeignete Auswahl der n Zeilenvektoren aus (3.116) wird die QR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung (siehe Anhang B.3.1) verwendet:

$$\mathbf{N}^\top \mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{Q} (\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2) . \quad (3.117)$$

Hierbei entsprechen die ersten n Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{N}^\top \mathbf{P}$ der Matrix $\mathbf{Q}\mathbf{R}_1$. Aufgrund der Spaltenpivotisierung sind hierbei die Hauptdiagonalelemente der oberen Dreiecksmatrix \mathbf{R}_1 so groß wie möglich bestimmt und stellen eine monoton abnehmende Folge dar. Die Basismatrix der gesuchten Mengendarstellung wird folglich zu

$$\mathbf{A}_s(t_{k+1}) = ((\mathbf{Q}\mathbf{R}_1)^\top)^{-1} \quad (3.118)$$

bestimmt. In [Wol10] wird gezeigt⁷, dass aufgrund der vorgestellten Vorgehensweise das Volumen $|\det(\mathbf{A}_s(t_{k+1}))|$ der Basismatrix minimal ist und somit ein kleines Volumen der neuen Mengendarstellung $\mathbf{b}_s(t_{k+1}) + \mathbf{A}_s(t_{k+1}) [\mathbf{r}_s(t_{k+1})]$ mit

$$[\mathbf{r}_s(t_{k+1})] = ([\mathbf{A}_s^{-1}(t_{k+1})] (\mathbf{A}_p(t_{k+1}) [\tilde{\mathbf{r}}(t_{k+1})] + (\mathbf{b}_p(t_{k+1}) - \mathbf{b}_s(t_{k+1})))) \cap ([\mathbf{A}_s^{-1}(t_{k+1})] ([\mathbf{x}_s(t_{k+1})] - \mathbf{b}_s(t_{k+1})))) \quad (3.119)$$

ermöglicht (vgl. Abbildung 3.8b). Für die Berechnung der Einschließung der Matrixinversen $[\mathbf{A}_s^{-1}(t_{k+1})]$ sei auf den Anhang B.5 verwiesen. Die bestimmte Mengendarstellung $\mathbf{b}_s(t_{k+1}) + \mathbf{A}_s(t_{k+1}) [\mathbf{r}_s(t_{k+1})]$ wird mit

$$[\mathbf{r}_s(t_{k+1})] = \mathbf{r}_{s,c}(t_{k+1}) + \text{diag}(\mathbf{r}_{s,\Delta}) \tilde{\mathbf{v}}_{k+1} \quad (3.120)$$

⁷ Dies ist allerdings leicht einzusehen, da das Volumen genau dann minimal ist, wenn $|\det(\mathbf{A}_s^{-1}(t_{k+1}))| = |\det(\mathbf{A}_s(t_{k+1}))|^{-1} = |\det((\mathbf{Q}\mathbf{R}_1)^\top)| \rightarrow \max$ gilt. Wobei \mathbf{R}_1 aufgrund der Spaltenpivotisierung so groß wie möglich bestimmt wurde.

wieder als ein (äußeres) Taylor-Modell dargestellt:

$$\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}, t_{k+1}) = \underbrace{\mathbf{b}_s(t_{k+1}) + \mathbf{A}_s(t_{k+1}) \mathbf{r}_{s,c}(t_{k+1})}_{=\mathbf{b}_a(t_{k+1})} + \underbrace{\mathbf{A}_s(t_{k+1}) \text{diag}(\mathbf{r}_{s,\Delta})}_{=\mathbf{A}_a(t_{k+1})} \tilde{\mathbf{v}}_{k+1}. \quad (3.121)$$

Somit ist das äußere Taylor-Modell $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}, t_{k+1}) = \mathbf{b}_a(t_{k+1}) + \mathbf{A}_a(t_{k+1}) \tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$ vollständig formuliert. Zur kompletten Darstellung der (korrigierten) Zustandsmenge zum Zeitpunkt t_{k+1} in der Form gemäß (3.102) fehlen noch die Taylor-Modelle $\mathcal{T}_{i,1}$ sowie $\mathcal{T}_{i,2}$.

Die Bestimmung des zweiten inneren Taylor-Modells $\mathcal{T}_{i,2}$ ist relativ einfach, da es sich bei der zweiten Mengendarstellung \mathcal{T}_2 um einen reinen Intervallvektor handeln soll (siehe Abschnitt 3.4.1 unter „Prädiktion einer Lösungsmenge“). Hierbei ist zu beachten, dass das innere Taylor-Modell $\mathcal{T}_{i,2}(\mathbf{w}, t_{k+1})$ passend zum äußeren Taylor-Modell $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}, t_{k+1})$ formuliert wird, was anhand von

$$\mathcal{T}_{i,2}(\mathbf{w}, t_{k+1}) = \mathbf{A}_a^{-1}(t_{k+1}) (\text{diag}(\mathbf{x}_{s,\Delta}) \mathbf{w} - \mathbf{A}_s(t_{k+1}) \mathbf{r}_{s,c}(t_{k+1})) \quad (3.122)$$

erfüllt ist. Die Komposition $\mathcal{T}_a(\mathcal{T}_{i,2}(\mathbf{w}, t_{k+1}), t_{k+1})$ beschreibt somit lediglich den Schnittmengenvektor $[\mathbf{x}_s(t_{k+1})]$.

Im letzten Teil des Korrekturschritts des Zustandsmengenbeobachters wird die noch fehlende Korrektur des ersten inneren Taylor-Modells $\mathcal{T}_{i,1}$, mit dem Ziel einer möglichst engen Einschließung der Schnittmenge, durchgeführt. Hierzu werden die Variablen des prädiizierten inneren Taylor-Modells $\mathcal{T}_{i,p,1}$ aus (3.107) so modifiziert, dass sich der Durchschnitt aus prädiizierter Menge und der Messmenge möglichst gut formulieren lässt.

Zunächst wird das prädiizierte innere Taylor-Modell $\mathcal{T}_{i,p,1}$ in das durch \mathcal{T}_a (siehe (3.121)) gegebene Koordinatensystem überführt:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \mathbf{A}_a^{-1}(t_{k+1}) (\mathbf{b}_p(t_{k+1}) + \mathbf{A}_p(t_{k+1}) \mathcal{T}_{i,p,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) - \mathbf{b}_a(t_{k+1})). \quad (3.123)$$

Die Komposition $\mathcal{T}_a(\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}), t_{k+1})$ (siehe (3.121) sowie (3.123)) beschreibt hierbei die gleiche Zustandsmenge wie die Komposition $\mathcal{T}_{a,p}(\mathcal{T}_{i,p,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}), t_{k+1})$ (siehe (3.108) sowie (3.107)). Jedoch kann die Erfüllung der Voraussetzung $\text{bd}\{\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\mathbf{v}, t_{k+1})\} \subseteq [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{IR}^n$ aus der Annahme 3.3 nicht mehr gewährleistet werden. Aus diesem Grund wird in [Wol10] eine Methode vorgestellt, welche alle Elemente im vektoriellen Taylor-Modell $\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}$ durch skalare Taylor-Modelle ersetzt, deren Wertebereichseinschließungen nicht vollständig in $[-1, 1]$ enthalten sind. Zur übersichtlicheren Darstellung wird im Folgenden angenommen, dass eben die ersten j Elemente des vektoriellen Taylor-Modells $\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}$ diejenigen sind, welche die Bedingungen an den Wertebereich nicht erfüllen. Daher wird das Taylor-Modell sowie die zugehörigen Taylor-Modell-Variablen $\tilde{\mathbf{v}}$ wie folgt aufgeteilt:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{a}}(\mathbf{v}, t_{k+1}) \\ \tilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, t_{k+1}) \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

wobei

$$\text{bd}\left\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t_{k+1})\right\} \not\subseteq [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^j \text{ sowie} \quad (3.125a)$$

$$\text{bd}\left\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{V}}(\mathbf{v}, t_{k+1})\right\} \subseteq [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] \in \mathbb{R}^{n-j} \quad (3.125b)$$

gilt. Das Ziel ist es nun, dass das Taylor-Modell $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ durch ein neues skalares Taylor-Modell $\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}$ ersetzt wird, wobei der Wertebereich des neuen Taylor-Modells vollständig in $[-1, 1]$ liegen soll. Dazu wird zunächst die Gleichung

$$\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}, t_{k+1}) \quad (3.126)$$

mit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{V}} \end{pmatrix} \quad (3.127)$$

aufgestellt, wobei auch hier davon ausgegangen wird, dass gerade nach den ersten j Elementen $\mathbf{v}^{\mathbf{A}}$ aufgelöst werden soll, daher gilt $\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^j$ sowie $\mathbf{v}^{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n+r+p-j}$. Die resultierende Komposition für das innere Taylor-Modell ist somit anhand von

$$\mathcal{T}_{i,1}(\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}, t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}} \\ \mathcal{T}_{i,1}^{\mathbf{V}}(\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}, t_{k+1}) \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

gegeben. Allerdings erfordert das Ersetzen von $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}, t_{k+1})$ durch $\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}$ noch weitere konkrete Schritte. Auf das Argument der Zeit t_{k+1} wird zugunsten der Übersicht im Folgenden verzichtet. Im ersten Schritt wird eine nichtlineare Koordinatentransformation

$$\mathbf{v}^{\mathbf{A}} = \mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}) \quad (3.129)$$

bestimmt, sodass

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}), \mathbf{v}^{\mathbf{V}}) \approx \dot{\mathbf{v}} \quad (3.130)$$

mit $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) + [\widetilde{\mathcal{R}}_{i,1}^{\mathbf{A}}]$, gilt. Da es sich hier im ersten Schritt um eine Approximation handelt, wird zunächst die Variable $\dot{\mathbf{v}}$ anstatt $\tilde{\mathbf{v}}^{\mathbf{A}}$ verwendet. Für die Bestimmung von (3.129) wird der Polynomanteil $\widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^{\mathbf{A}}$ wie folgt aufgeteilt:

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^{\mathbf{A}}(\mathbf{v}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}) = c(\mathbf{v}^{\mathbf{V}}) + \underbrace{(B_1 \ B_1)}_{=BP} \begin{pmatrix} \mathbf{v}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{v}^{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \mathcal{N}(\mathbf{v}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}}), \quad (3.131)$$

wobei $c(\mathbf{v}^{\mathbf{V}})$ dem konstanten Anteil bezüglich $\mathbf{v}^{\mathbf{V}}$, P der Permutationsmatrix, $B_1 \mathbf{v}^{\mathbf{A}} + B_1 \mathbf{v}^{\mathbf{V}}$ dem linearen Anteil sowie $\mathcal{N}(\mathbf{v}^{\mathbf{A}}, \mathbf{v}^{\mathbf{V}})$ dem nichtlinearen Rest entspricht. Für die Aufteilung der Taylor-Modell-Variable $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+r+p}$ in den gesuchten Anteil $\mathbf{v}^{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^j$ sowie den übrigen Anteil $\mathbf{v}^{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n+r+p-j}$, welcher nicht modifiziert werden soll, wird die QR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung (siehe Anhang B.3.1) auf die Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times (n+r+p)}$ angewendet:

$$BP = QR = Q(R_1 \ R_2) = (B_1 \ B_2). \quad (3.132)$$

Aufgrund der Spaltenpivotisierung sind die Spaltenvektoren in \mathbf{B} monoton absteigend angeordnet. Anschaulich bedeutet dies, dass die Spaltenvektoren gemäß ihres (absteigenden) Einflusses auf den linearen Anteil des Taylor-Modells sortiert sind. Folglich wird nach jenen Variablen $\mathbf{v}^\mathbf{A}$ des Polynomanteils aufgelöst, welche bezogen auf dem linearen Anteil den stärksten Einfluss auf die Zustandsmenge haben. Die gesuchte nichtlineare Koordinatentransformation (3.129) ist somit durch

$$\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}) = \mathcal{P}_{\text{inv}}^{(\ell+1)}(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{c}(\mathbf{v}^\mathbf{V}) - \mathbf{B}_2 \mathbf{v}^\mathbf{V}, \mathbf{v}^\mathbf{V}) \quad (3.133)$$

gegeben. Hierbei wird das Polynom $\mathcal{P}^{(\ell+1)}$ mittels der Iterationsvorschrift

$$\mathcal{P}_{\text{inv}}^{(i)}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}) = \mathbf{B}_1^{-1} \left(\dot{\mathbf{v}} - \mathcal{N} \left(\mathcal{P}_{\text{inv}}^{(i-1)}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V} \right) \right) \quad (3.134)$$

mit dem Startpolynom $\mathcal{P}_{\text{inv}}^{(0)}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}) = \dot{\mathbf{v}}$, bestimmt. In [Hoe01] wird gezeigt, dass die Iterationsvorschrift (3.134) – wie der Integraloperator aus Abschnitt 3.3 – nach maximal $\ell + 1$ Schritten konvergiert. Anschließend wird das Taylor-Modell $\mathcal{T}_{i,1}$ mithilfe des zuvor bestimmten Polynoms \mathcal{P}_{inv} sowie (3.130) wie folgt transformiert:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V}) &= \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^\mathbf{A}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V}) + [\widetilde{\mathbf{R}}_{i,1}^\mathbf{A}] \\ \widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^\mathbf{V}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V}) + [\widetilde{\mathbf{R}}_{i,1}^\mathbf{V}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{v}} + [\mathbf{R}] \\ \widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^\mathbf{V}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V}) + [\widetilde{\mathbf{R}}_{i,1}^\mathbf{V}] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Der Intervallrest $[\mathbf{R}]$ schließt hierbei den Fehler aus der näherungsweisen Transformation ein und beinhaltet das intervallwertige Restglied $[\widetilde{\mathbf{R}}_{i,1}^\mathbf{A}]$. Hierbei gilt die Forderung

$$\dot{\mathbf{v}} + [\mathbf{R}] \stackrel{!}{=} \tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A} - [\mathbf{R}], \quad (3.136)$$

wodurch $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,1}(\tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A}$ resultiert. Ferner gilt mit (3.136) für die zweite Zeile in (3.135) bzw. (3.128) der folgende Zusammenhang:

$$\mathcal{T}_{i,1}^\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A}, \mathbf{v}^\mathbf{V}) = \widetilde{\mathcal{P}}_{i,1}^\mathbf{V}(\mathcal{P}_{\text{inv}}(\tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A} - [\mathbf{R}], \mathbf{v}^\mathbf{V}), \mathbf{v}^\mathbf{V}) + [\widetilde{\mathbf{R}}_{i,1}^\mathbf{V}]. \quad (3.137)$$

Werden abschließend die Taylor-Modell-Variablen $\tilde{\mathbf{v}}^\mathbf{A}$ sowie $\mathbf{v}^\mathbf{V}$ wieder in \mathbf{v} zusammengefasst, resultiert (vgl. (3.128)) das gesuchte innere Taylor-Modell zu

$$\mathcal{T}_{i,1}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{i,1}^\mathbf{A}(\mathbf{v}, t_{k+1}) \\ \mathcal{P}_{i,1}^\mathbf{V}(\mathbf{v}, t_{k+1}) + [\mathbf{R}_{i,1}^\mathbf{V}(t_{k+1})] \end{pmatrix}, \quad (3.138)$$

welches die Schnittmenge des prädizierten inneren Taylor-Modells und der Messmenge beschreibt.

Anmerkung 3.14. In [Wol10] wird beschrieben, dass durch die Kumulation von Rundungsfehlern und Restgliedern sich das Restglied $[\mathbf{R}_{i,1}^\mathbf{v}(t_{k+1})]$ in $\mathcal{T}_{i,1}^\mathbf{v}$ möglicherweise ungewollt stark aufbläht. Aus diesem Grund wird vorgeschlagen, das innere Taylor-Modell durch $\mathcal{T}_{i,1}^\mathbf{v}(\mathbf{v}, t_{k+1}) = \mathbf{v}$ zu ersetzen, allerdings erst, wenn der Intervallrest $[\mathbf{R}_{i,1}^\mathbf{v}(t_{k+1})]$ mehr als 5% der gesamten Ausdehnung von $\text{bd}\{\mathcal{T}_{i,1}^\mathbf{v}\}$ entspricht.

Zusammenfassend stehen zum Abschluss des Korrekturschritts mit dem ersten inneren Taylor-Modell $\mathcal{T}_{i,1}$ aus (3.138), dem zweiten inneren Taylor-Modell $\mathcal{T}_{i,2}$ aus (3.122) sowie dem äußeren Taylor-Modell \mathcal{T}_a aus (3.121) nun alle notwendigen Gleichungen zur Beschreibung der konsistenten Zustandsmenge

$$\mathcal{X}(t_{k+1}) = \mathcal{T}_1(\mathbf{v}, t_{k+1}) \cap \mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_{k+1}) \text{ mit} \quad (3.139a)$$

$$\mathcal{T}_1(\mathbf{v}, t_{k+1}) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_{i,1})(\mathbf{v}, t_{k+1}), \quad (3.139b)$$

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{w}, t_{k+1}) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_{i,2})(\mathbf{w}, t_{k+1}) \quad (3.139c)$$

zum Zeitpunkt t_{k+1} zur Verfügung (vgl. (3.102)). Die nachfolgenden Zeitschritte erfolgen nach dem gleichen, vorgestellten Prädiktion-Korrektur-Schema. Ein ausführliches Beispiel zum Korrekturschritt des Zustandsmengenbeobachters ist in [Wol10] zu finden.

3.4.2 Konsistenzprüfung zur Fehlerdiagnose

In diesem Abschnitt wird das Prinzip der Konsistenzprüfung zur modellbasierten Fehlerdiagnose erläutert. Die grundlegenden Aufgaben und Ziele der Fehlerdiagnose wurden hierfür bereits in Abschnitt 2.1.2 eingeführt. Für die nachfolgenden Ausführungen wird eine unsichere Modellbeschreibung gemäß der Definition 3.3 angenommen. Abbildung 3.9 zeigt den prinzipiellen Aufbau der in dieser Arbeit verwendeten Vorgehensweise zur Fehlerdiagnose. Falls es nicht anders angegeben ist, beziehen sich die folgenden Ausführungen und Definitionen auf [Lun16] und [BKLS16].

Basierend auf dem Aufbau aus Abbildung 3.9 lässt sich das grundlegende Diagnoseproblem wie folgt formulieren: Finde für das gegebene Ein- und Ausgangsmengenpaar $(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ den Fehler F . Im Diagnosealgorithmus wird das Ein- und Ausgangsmengenpaar $(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ durch unsichere Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen ermittelt (siehe (3.11)). Der fehlerfreie Systembetrieb wird mit F_0 bezeichnet und kann daher als spezieller Fehlerfall interpretiert werden [Wol10]. Für die mengenbasierte Systembeschreibung des speziellen Fehlerfalls F_0 wird die unsichere Zustandsraumdarstellung nach Definition 3.3 verwendet und durch \mathcal{B}_{F_0} gekennzeichnet. In diesem Zusammenhang wird \mathcal{B}_{F_0} auch als nominales Systemverhalten bezeichnet. Alle weiteren Fehler werden mit F_1, F_2, \dots beschrieben und dem jeweiligen – vom Fehler abhängigen – Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, \dots$ zugeordnet. Die Menge aller Fehler ist anhand von $\mathcal{F} := \{F_0, F_1, F_2, \dots\}$ gegeben, die Menge aller zugehörigen Systembeschreibungen durch $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}_{F_0}, \mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, \dots\}$. Darauf basierend werden die Begriffe Konsistenzprüfung sowie Fehlerkandidat definiert.

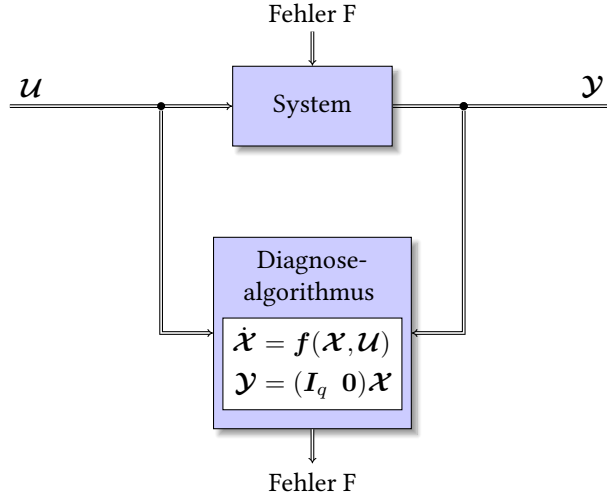


Abbildung 3.9: Prinzipieller Aufbau der Fehlerdiagnose in dieser Arbeit

Definition 3.13 (Konsistenzprüfung)

Bei der Konsistenzprüfung (engl. *consistency check*) wird für eine gegebene Systembeschreibung \mathcal{B}_{F_i} mit $F_i \in \mathcal{F}$ getestet, ob die Beziehung

$$(\mathcal{U}, \mathcal{Y}) \in \mathcal{B}_{F_i} \quad (3.140)$$

erfüllt ist.

Es wird also geprüft, ob die unsicheren Messinformationen $(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ konsistent mit dem Systemverhalten \mathcal{B}_{F_i} ist. Basierend auf dieser Definition erfolgt die Definition des Fehlerkandidaten.

Definition 3.14 (Fehlerkandidat)

Ein Fehler $F_i \in \mathcal{F}$ mit $i = 0, 1, \dots$ wird als Fehlerkandidat (engl. *fault candidate*) bezeichnet, wenn die unsicheren Messinformationen $(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ konsistent mit dem unsicheren Systemverhalten \mathcal{B}_{F_i} sind.

Für die Fehlerdetektion ist es ausreichend, die Beziehung

$$(\mathcal{U}, \mathcal{Y}) \notin \mathcal{B}_{F_0} \quad (3.141)$$

zu überprüfen, d. h. ein Fehler ist aufgetreten, wenn eine Inkonsistenz der unsicheren Messinformationen $(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ mit dem nominalen Systemverhalten \mathcal{B}_{F_0} vorliegt. Somit ist für eine erfolgreiche Fehlerdetektion lediglich das nominale Systemverhalten von Bedeutung. Da im Zuge praktischer Anwendungen zumeist nicht alle potenziellen Fehler berücksichtigt oder

bekannt sind, ist die Menge der Fehler \mathcal{F} nicht vollständig [Wol10]. Dies ist jedoch ausschließlich für die Fehlerisolation von Relevanz und führt dazu, dass gegebenenfalls ein Fehler nicht isoliert werden kann und somit „unbekannt“ bleibt.

Anmerkung 3.15. *Existieren mehrere potenzielle Fehlerkandidaten F_i , ist dies darauf zurückzuführen, dass die Modell- und Messunsicherheiten zu groß sind. Dies führt dazu, dass sich das Systemverhalten \mathcal{B}_{F_i} der jeweiligen Fehlerkandidaten überschneidet und somit nicht eindeutig isolierbar ist. Durch beispielsweise eine genauere Modellierung des Systemverhaltens oder den Einsatz von Messsensoren mit geringeren Messabweichungen können die jeweiligen Unsicherheiten verkleinert werden [Wol10].*

Bei dem Einsatz von Zustandsmengenbeobachtern erfolgt die Konsistenzprüfung anhand der Schnittmengenbildung der prädierten Menge $\mathcal{X}_p(t_{k+1})$ mit der Messmenge $\mathcal{X}_m(t_{k+1})$. Ist die prädierte Zustandsmenge auf Basis des zum Fehler F_i gehörenden Systemverhalten \mathcal{B}_{F_i} berechnet worden und stellt mit der aktuellen Messmenge eine nichtleere Schnittmenge dar, so ist das Systemverhalten \mathcal{B}_{F_i} konsistent in Bezug auf die aktuellen unsicheren Messinformationen. In diesem Fall ist F_i ein Fehlerkandidat. Auf die Konsistenzprüfung am jeweiligen Zustandsmengenbeobachter wird noch detailliert in Abschnitt 5.2 bzw. Abschnitt 6.2 eingegangen.

3.5 Moving Horizon Estimation für nichtlineare Systeme

Neben dem zuvor vorgestellten Zustandsmengenbeobachter aus Abschnitt 3.4 wird in dieser Arbeit ein weiterer Zustandsmengenbeobachter entwickelt, welcher auf dem Prinzip der Zustandsschätzung mit gleitendem Horizont (engl. moving horizon estimation, MHE) basiert. Hierzu werden in diesem Abschnitt die allgemeinen Grundlagen des klassischen – nicht intervallbasierten – MHE erläutert, welche sich an den Ausführungen in [DKBS06, Feß11, RA20] orientieren. Als Systembeschreibung dient die nichtlineare Zustandsraumdarstellung gemäß Definition 3.1 mit linearer Ausgangsgleichung (siehe Annahme 3.1).

Die MHE berechnet eine Schätzung des aktuellen Zustands \mathbf{x} , basierend auf der Lösung eines Ausgleichsproblems mittels Optimierungsmethoden. Dabei wird das Optimierungsproblem über einen in der Vergangenheit liegenden, sich mitbewegenden Zeithorizont bzw. Schätzhorizont gelöst. Der finite Schätzhorizont beginnt zum Zeitpunkt t_L und endet zum aktuellen Zeitpunkt t_k . Die Gesamtlänge des Schätzhorizonts ist folglich $T_E = t_k - t_L$. Innerhalb dieses Schätzhorizonts liegen insgesamt $\Lambda + 1$ Messwerte $\mathbf{y}(t_{k-\Lambda}), \dots, \mathbf{y}(t_{k-1}), \mathbf{y}(t_k)$, wobei $L = k - \Lambda$ gilt. Ferner wird angenommen, dass die Eingangsgrößen \mathbf{u} in $t \in [t_L, t_k]$ bekannt sind. Unter diesen Voraussetzungen sowie der quadratischen 2-Norm $\|\mathbf{x}\|_A^2 := \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite Matrix ist und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, lässt sich die Gütefunktion des zum Zeitpunkt t_k zu lösenden Ausgleichsproblems wie folgt formulieren:

$$\min_{\mathbf{x}(t)} \Phi(t_k) = \min_{\mathbf{x}(t)} \left\{ \Gamma(\mathbf{x}(t_L)) + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{y}(t_\rho) - \mathbf{C} \mathbf{x}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}}^2 \right\} \quad (3.142)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ unter den Nebenbedingungen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) , \quad (3.143a)$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_{\max} . \quad (3.143b)$$

Anhand der Nebenbedingung (3.143a) wird sichergestellt, dass der gesuchte Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$ die Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ erfüllt. Die Ungleichungsnebenbedingung (3.143b) ist elementweise zu verstehen und sorgt für eine untere sowie obere Grenze der jeweiligen Zustandsgröße. Die in (3.142) zu bestimmende Differenz zwischen Messgröße $\mathbf{y}(t_\rho)$ und berechneter Ausgangsgröße $\mathbf{C}\mathbf{x}(t_\rho)$ für $\rho = L, \dots, k$ wird mit der positiv definiten Matrix \mathbf{W} gewichtet, wobei diese häufig in Abhängigkeit der Varianz des Messrauschens gewählt wird und damit eine Diagonalmatrix darstellt (siehe z. B. [DKBS06, Feß11]). Die Anfangswertgewichtung (engl. arrival cost) ist durch den ersten Summanden $\Gamma(\mathbf{x}(t_L))$ in (3.142) angegeben. Das Anfangswertgewicht hat die Aufgabe, die vergangenen Informationen vor dem Schätzhorizont, d. h. vor t_L , zu berücksichtigen. Ideal wäre die Gewichtung

$$\Gamma(\mathbf{x}(t_L)) = \sum_{\rho=-\infty}^{L-1} \|\mathbf{y}(t_\rho) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t_\rho)\|_{\mathbf{W}}^2 , \quad (3.144)$$

welches zusammen mit (3.142) auch als „full information“ Schätzung bezeichnet wird [RA20]. Allerdings ist aufgrund des unendlich langen Zeithorizonts $[-\infty, t_{L-1}]$ dieses Anfangswertgewicht nicht für nichtlineare Systeme berechenbar. Daher wird für ein endliches Optimierungsproblem eine Approximation von (3.144) benötigt, welche im nachfolgenden Abschnitt 3.5.1 vorgestellt wird.

3.5.1 Anfangsgewichtbestimmung

Für die Approximation des Anfangswertgewichts (3.144) wird zumeist die quadratische Näherung

$$\Gamma(\mathbf{x}(t_L)) = \|\mathbf{x}(t_L) - \hat{\mathbf{x}}_L\|_{\mathbf{M}_L^{-1}}^2 \quad (3.145)$$

verwendet (siehe z. B. [DKBS06, Feß11, SMG17]). Bei der Bestimmung der Gewichtungsmatrix \mathbf{M}_L sowie des Erwartungswerts $\hat{\mathbf{x}}_L$ unterscheiden sich die Ansätze in der Literatur wesentlich. Während die Ansätze in [DKBS06, Feß11] auf dem Prinzip des erweiterten Kalman-Filters (engl. extended Kalman filter) beruhen, wird in dieser Arbeit eine adaptive Methode (siehe [SMG17, DMSG20]) zur Bestimmung der unbekannten Größen \mathbf{M}_L und $\hat{\mathbf{x}}_L$ verwendet. Die adaptive Methode hat den wesentlichen Vorteil, dass keine rechenintensiven Jacobi-Matrizen in jedem Zeitschritt berechnet werden müssen.

Bestimmung des Erwartungswerts $\hat{\mathbf{x}}_L$

Für den Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L$ kommt das Prinzip der „geglätteten Schätzung“ (engl. smooth estimate) zur Anwendung. Hierzu wird der aktuelle Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L$ zum Zeitpunkt t_k

mit der Lösung $\mathbf{x}^*(t)$ des Ausgleichsproblems (3.142) aus dem vorherigen Schätzhorizont $[t_{L-1}, t_{k-1}]$ gemäß

$$\hat{\mathbf{x}}_L = \mathbf{x}^*(t_L | t_{k-1}) \quad (3.146)$$

gleichgesetzt. Um eine implizite Doppelgewichtung im Intervallausschnitt $[t_L, t_{k-1}]$ des aktuellen Schätzhorizonts $[t_L, t_k]$ zu vermeiden, muss die Gewichtungsmatrix \mathbf{M}_L in (3.145) daher in jedem neuen Zeitschritt adaptiv angepasst werden.

Bestimmung der Gewichtungsmatrix \mathbf{M}_L

Die Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L = \mathbf{M}(t_L | t_k)$ erfolgt adaptiv und basiert auf der folgenden, weitverbreiteten rekursiven Schätzgleichung (siehe bspw. [LLMK11]):

$$\mathbf{M}_L^{-1} = \alpha(t_k) \mathbf{M}_{L-1}^{-1} + \beta(t_k) \hat{\mathbf{x}}_L \hat{\mathbf{x}}_L^T, \quad (3.147)$$

wobei $0 < \alpha(t_k) < 1$ und $0 < \beta(t_k) \leq 2 \forall k \geq 0$ gilt. Die initiale Gewichtsmatrix \mathbf{M}_0 muss hierbei positiv definit gewählt werden. Die Gleichung (3.147) kann hierbei als zeitvariantes Filter mit dem Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L \hat{\mathbf{x}}_L^T$ aus (3.146) als Eingang interpretiert werden mit den beiden Faktoren $\alpha(t_k)$ sowie $\beta(t_k)$ als Vergessensfaktoren [SMG17]. Wird beispielsweise $\alpha(t_k) \ll 1$ gewählt, so werden alte Informationen verworfen, die in \mathbf{M}_{L-1}^{-1} zusammengefasst sind. Im Gegensatz dazu werden alle vergangenen Informationen beibehalten, falls $\alpha(t_k) \approx 1$ angenommen wird. Wenn $\beta(t_k) \gg 0$ gilt, werden die Informationen aus der Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_L$ eingebunden. Sollen keine Informationen aus der Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_L$ in (3.147) verwendet werden, muss $\beta(t_k) \approx 0$ gelten. Anhand der Faktoren $\alpha(t_k)$ und $\beta(t_k)$ kann folglich der Einfluss von Informationen aus \mathbf{M}_{L-1}^{-1} bzw. $\hat{\mathbf{x}}_L$ in (3.147) gesteuert werden.

Für die anschließenden Herleitungen werden folgende Lemmata aus [SMG17] benötigt:

Lemma 3.1

Sei $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $i = 1, \dots, m$ positiv definit und seien γ_i mit $i = 1, \dots, m$ nichtnegative, reelle Zahlen, d. h. $\gamma_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{A}_i \quad (3.148)$$

positiv semidefinit.

Beweis:

Für den Beweis wird auf Lemma 3.1 in [SMG17, S. 57] verwiesen. □

Lemma 3.2

Sei M_0 positiv definit und $\alpha(t_i) > 0$, dann gilt $\forall k \geq 0$, dass die Matrix M_k positiv definit ist.

Beweis:

Für den Beweis wird auf Lemma 3.2 in [SMG17, S. 57] verwiesen. □

Aus Lemma 3.2 folgt auch, dass die Matrix M_L zum Zeitpunkt t_L in (3.147) positiv definit ist.

Lemma 3.3

Sei M positiv definit, dann existiert eine invertierbare Matrix Z , sodass $Z^\top M Z = I$ und $Z Z^\top = M^{-1}$ gilt.

Beweis:

Für den Beweis wird auf Lemma 7 in [Joh70, S. 261] verwiesen. □

Aufgrund der garantierten Existenz der Inversen aus Lemma 3.3 kann das Matrix-Inversions-Lemma (siehe Anhang B.6) auf (3.147) angewendet werden:

$$M_L = \frac{1}{\alpha(t_k)} \left(M_{L-1} - \frac{M_{L-1} \hat{x}_L \hat{x}_L^\top M_{L-1}}{\frac{\alpha(t_k)}{\beta(t_k)} + \hat{x}_L^\top M_{L-1} \hat{x}_L} \right). \quad (3.149)$$

Anmerkung 3.16. Anhand von (3.149) ist auch die Verwandtschaft des beschriebenen Algorithmus zur Bestimmung von M_L zum Recursive-Least-Square-Schätzer (RLS-Schätzer, siehe bspw. [SB17]) erkennbar, welche in [SMG17] detailliert erläutert wird.

Je nach gewünschtem Anwendungsfall existieren für die Vergessensfaktoren $\alpha(t_k)$ und $\beta(t_k)$ unterschiedliche Profile, welche bspw. in [LLMK11] zu finden sind. Das Grundziel aller Profile ist hierbei die Erfüllung der garantierten Konvergenz. Aufgrund der Zeitvarianz der zu

bestimmenden Schätzungen \mathbf{M}_L sollten die Vergessensfaktoren ebenfalls zeitvariant sein. In [OCM81] werden daher die folgenden Gleichungen zur Bestimmung von \mathbf{M}_L vorgestellt:

$$\boldsymbol{\epsilon}(t_L) = \mathbf{y}(t_L) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_L, \quad (3.150a)$$

$$Z(t_k) = \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_L^\top \mathbf{M}_{L-1} \hat{\mathbf{x}}_L\right) \frac{\sigma}{\boldsymbol{\epsilon}^\top(t_L) \boldsymbol{\epsilon}(t_L)}, \quad (3.150b)$$

$$\alpha(t_k) = 1 - Z^{-1}(t_k), \quad (3.150c)$$

$$\mathbf{Q}(t_k) = \left(\mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{M}_{L-1} \hat{\mathbf{x}}_L \hat{\mathbf{x}}_L^\top}{1 + \hat{\mathbf{x}}_L^\top \mathbf{M}_{L-1} \hat{\mathbf{x}}_L} \right) \mathbf{M}_{L-1}, \quad (3.150d)$$

$$\mathbf{M}_L = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(t_k)} \mathbf{Q}(t_k) & , \text{ falls } \frac{1}{\alpha(t_k)} \text{tr}(\mathbf{Q}(t_k)) \leq c \\ \mathbf{Q}(t_k) & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (3.150e)$$

wobei $\beta(t_k) = \alpha(t_k)$ gilt. Die globale Konvergenz von \mathbf{M}_L unter Verwendung von (3.149) sowie (3.150) wurde ebenfalls in [OCM81] nachgewiesen. Der Wert $Z(t_k)$ (siehe (3.150b)) kann als Speicherlänge des Filters interpretiert werden, welche u. a. abhängig ist von der Summe der Fehlerquadrate $\boldsymbol{\epsilon}^\top(t_L) \boldsymbol{\epsilon}(t_L)$. Eine geringe Summe der Fehlerquadrate führt zu einer großen Speicherlänge $Z(t_k)$. Aufgrund von (3.150c) ist der Vergessensfaktor direkt abhängig von $Z(t_k)$. Ein Vergessensfaktor von 0, 0,9 und 1 resultiert in einer Speicherlänge von 1, 10 bzw. ∞ . Mittels der Fallunterscheidung in (3.150e) wird sichergestellt, dass die Matrixspur $\text{tr}(\mathbf{Q}(t_k))$ und somit $\text{tr}(\mathbf{M}_L)$ – folglich auch $\|\mathbf{Q}(t_k)\|$ bzw. $\|\mathbf{M}_L\|$ – kleiner gleich der zu wählenden Konstante c sind. Dadurch wird ein Aufblähen der Gewichtungsmatrix \mathbf{M}_L und demzufolge eine Übergewichtung in der Gütefunktion (3.142) verhindert. Für die Wahl der zwei Konstanten σ und c in (3.150) werden in [SMG17] die nachfolgenden Vorschläge gemacht: σ so wählen, dass das Verhältnis σ/σ_w , mit dem Prozessrauschen σ_w , möglichst groß ist. Die Konstante c sollte ebenfalls möglichst groß gewählt werden, d. h. $c \gg \text{tr}(\mathbf{M}_0)$.

Anmerkung 3.17. Die Bestimmung des Anfangswertgewichts gemäß (3.145) ist erst erforderlich, wenn der aktuelle Zeitpunkt größer gleich als die Länge des Schätzhorizonts ist, d. h. $k \geq \Lambda$. Vorher gilt $\Gamma(\mathbf{x}(t_L)) = 0$ für $k < \Lambda$.

Im nächsten Abschnitt wird erläutert, wie das Ausgleichsproblem (3.142) mit den dazugehörigen Nebenbedingungen (3.143) sowie der Anfangswertgewichtung (3.145) gelöst werden kann.

3.5.2 Mehrzielverfahren

Das Mehrzielverfahren, welches auch als Mehrfachschießverfahren (engl. multiple shooting method) bezeichnet wird, beruht auf der Idee, den Schätzhorizont $[t_L, t_k]$ in mehrere, kleinere Teilintervalle zu zerlegen. Diese Teilintervalle werden zusätzlich über Stetigkeitsbedingungen mit den jeweiligen Nachbarintervallen gekoppelt. Es bietet sich hierbei die Unterteilung in Λ Teilintervalle an, sodass Λ Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$ mit $i = L, \dots, k-1$ resultieren, wodurch die folgende Anforderung gegeben ist:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{u}(t)) \quad t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (3.151)$$

mit dem jeweiligen Anfangswert

$$\mathbf{x}_i(t_i) = \mathbf{s}_i . \quad (3.152)$$

Dementsprechend muss das Optimierungsproblem (3.142) gemäß

$$\min_{\mathbf{s}_L, \dots, \mathbf{s}_k} \|\mathbf{s}_L - \hat{\mathbf{x}}_L\|_{M_L^{-1}}^2 + \sum_{\rho=L}^k \|\mathbf{y}(t_\rho) - \mathbf{C}\mathbf{s}_\rho\|_{\mathbf{W}}^2 \quad (3.153)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{s}_{i+1} - \mathbf{x}_i(t_{i+1}; \mathbf{s}_i) , \quad i = L, \dots, k-1 , \quad (3.154a)$$

$$\mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{s}_i \leq \mathbf{x}_{\max} , \quad i = L, \dots, k , \quad (3.154b)$$

umformuliert werden, wobei die Lösung von (3.151) zum Zeitpunkt t_{i+1} mit dem Anfangswert \mathbf{s}_i durch $\mathbf{x}_i(t_{i+1}; \mathbf{s}_i)$ bezeichnet ist. Dieses Optimierungsproblem kann wie in Anhang B.7 dargestellt mittels des verallgemeinerten Gauß-Newton-Verfahrens (VGN) aus [DKBS06] gelöst werden.

4 Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose

Dieses Kapitel greift die grundlegenden Prinzipien der Dezentralisierung und Verteilung auf und wendet sie auf eine unsichere, nichtlineare Systembeschreibungen gemäß Definition 3.3 an. Ferner wird auf Basis der neuartigen Systembeschreibung eine geeignete Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose vorgestellt und analysiert. In diesem Kapitel werden somit die erste sowie Teile der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 beantwortet.

In Abschnitt 4.1 wird zunächst die allgemeine Grundidee mit ihren Voraussetzungen zur verteilten und dezentralen Beschreibung unsicherer Systeme vorgestellt. Das Prinzip der verteilten und dezentralen Systembeschreibung kombiniert mit der unsicheren, nichtlinearen Systembeschreibung resultiert in einer neuartigen Zustandsraumdarstellung, welche in Abschnitt 4.2 erstmalig vorgestellt wird. Die Anwendung dieser Systembeschreibung zur verteilten Fehlerdiagnose, die Erweiterung um das Prinzip der Ferndiagnose sowie die Untersuchung von möglichen Paketverlusten und Verzögerungen in der Kommunikation wird in Abschnitt 4.3 präsentiert. Die Analyse der potenziellen Rechenzeit- und Speicherersparnis erfolgt in Abschnitt 4.4. Abschließend werden alle Ergebnisse und Erkenntnisse in Abschnitt 4.5 zusammengefasst.

4.1 Grundidee und Voraussetzungen an verteilte, unsichere Systeme

In diesem Abschnitt erfolgt die Vorstellung der Grundidee sowie die Einführung der Voraussetzungen an eine verteilte und dezentrale Zustandsmengenbeobachtung. Für das monolithische System, d. h. das gesamtheitliche, nicht verteilte System, gilt die unsichere Zustandsraumdarstellung nach Definition 3.3. Da für die Begriffe Dezentralisierung und Verteilung unterschiedliche Definitionen in der Literatur existieren (siehe bspw. [BFP11, GAF⁺14, Hil12]), sollen zunächst allgemeine Definitionen der Dezentralisierung und der Verteilung in Anlehnung an [Hil12, Kup19] eingeführt und auf eine unsichere Systembeschreibung übertragen werden.

Definition 4.1 (Dezentrale Zustandsmengenbeobachtung)

Unter der Dezentralisierung (engl. decentralization) wird das Gruppieren von diversen Messeinrichtungen bzw. Sensoren des monolithischen Systems in einzelne Knoten oder Subsysteme verstanden. Jeder Knoten führt hierbei die jeweiligen Berechnungen auf Basis der lokal vorhandenen unsicherheitsbehafteten Messungen durch. Es werden keine Veränderungen an den Systemgleichungen vorgenommen, was dazu führt, dass jeder einzelne Knoten den gesamten Zustandsmengenvektor des monolithischen Systems schätzt. Mittels einer Fusion werden die externen Messungen der anderen Subsysteme lokal miteinbezogen, wobei alle Knoten miteinander kommunizieren und somit eine vollvernetzte Struktur bilden.

Definition 4.2 (Verteilte Zustandsmengenbeobachtung)

Wird ergänzend zur Dezentralisierung nach Definition 4.1 im jeweiligen Knoten nur ein Unterraum des Zustandsmengenvektors abgebildet, so wird dies als Verteilung (engl. distribution) bezeichnet. Aufgrund dieser Zerlegung bzw. Dekomposition ist es nicht mehr vonnöten, dass alle Knoten miteinander kommunizieren. Es kommunizieren ausschließlich jene Knoten, deren Unterraum des Zustandsmengenvektors sich überschneiden bzw. die Information zu einer Verbesserung des Schätzergebnisses beitragen.

In Abbildung 4.1 ist eine schematische Darstellung der Begriffe Dezentralisierung sowie Verteilung gegeben. Die Dezentralisierung kann hierbei als Spezialfall der Verteilung betrachtet werden, in welcher der lokale Zustandsmengenvektor aller Subsysteme dem des Zustandsmengenvektors des monolithischen Systems entspricht [Kup19]. Aus diesem Grund werden ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dieser Arbeit ausschließlich verteilte Systeme betrachtet. Die verteilte Zustandsmengenbeobachtung gemäß Definition 4.2 wird anhand der folgenden Vorteile bzw. Eigenschaften der verteilten Systembeschreibung (siehe [Mut98, Kup19]) in Abschnitt 4.3 untersucht:

- **Modularität:** Sämtliche Berechnungen sowie Fusionsschritte erfolgen in den lokalen Knoten und benötigen kein Wissen über die gesamtheitliche Kommunikationsstruktur. Folglich können die Knoten unabhängig voneinander aufgebaut und parametrisiert werden.
- **Robustheit:** Trotz des Ausfalls eines oder mehrerer Knoten oder einer Kommunikationsstörung ist der individuelle Weiterbetrieb der übrigen Knoten hiervon nicht betroffen.
- **Skalierbarkeit:** Bei einer Erweiterung um ein oder mehrere Knoten müssen nur jene Knoten angepasst werden, bei denen eine Überschneidung des lokalen Zustandsmengenvektors vorliegt.
- **Flexibilität:** Da kein globaler Knoten bzw. globaler Koordinator in dieser verteilten Struktur eingesetzt wird, ist das System jederzeit flexibel hinsichtlich Änderungen an der Netzstruktur.

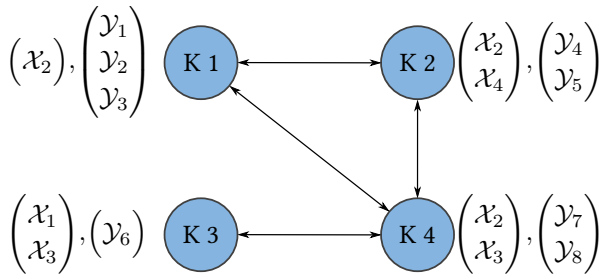
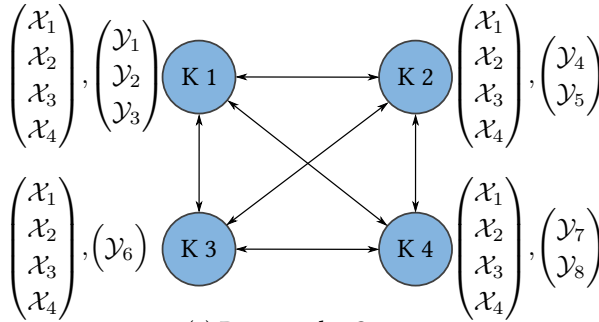


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung eines dezentralen (a) sowie verteilten Systems (b) für vier Knoten K (nach [MDW94])

- **Ordnungsreduktion und Parallelisierung:** Da in den lokalen Knoten in der Regel nur ein Unterraum des Zustandsmengenvektors des monolithischen Systems geschätzt wird, weist der lokale Knoten eine geringere Systemordnung auf als das monolithische System. Ferner zieht die Verteilung auch eine Parallelisierung des Algorithmus nach sich.

An dieser Stelle ist zu beachten, dass aus der Verteilung auch ein zusätzlicher Aufwand resultiert. Zum Beispiel ist für die Kommunikation zwischen den einzelnen Knoten bzw. Subsystemen ein Netzwerk erforderlich. Des Weiteren wird durch die Parallelisierung auch eine größere Anzahl von Recheneinheiten benötigt, wobei die einzelnen Recheneinheiten im Allgemeinen leistungsschwächer ausgelegt sein können als eine zentrale Recheneinheit.

Die Umsetzung der Dekompositionsaufgabe bzw. die Frage nach der Partitionierung in geeignete Subsysteme ist für nichtlineare Systeme kein triviales Problem⁸ [BFP11]. Allerdings liegt in der Praxis normalerweise eine natürliche Dekomposition in Subsysteme vor [BKLS16]. Hierbei werden die Hinweise auf eine geeignete Partitionierung aus der räumlichen Anordnung (z. B. Akkustacks) oder aus den technischen Domänen (z. B. mechatronische Systeme) abgeleitet. Ist dies nicht möglich, wird bspw. in [Hil12, S. 50, 51, 58, 59] eine heuristische

⁸ Für lineare Systeme existieren in der Literatur leistungsstarke Dekompositionsmethoden und Beschreibungen, welche bspw. in [DD03, LCD04] zu finden sind.

Vorgehensweise zur Dekomposition vorgestellt. Ferner müssen für die Verteilung noch die folgenden Annahmen erfüllt sein:

Annahme 4.1 (Vollständigkeit)

Es wird angenommen, dass das monolithische System vollständig durch die Menge aller Subsysteme $1, \dots, N$ beschrieben ist.

Diese Annahme besagt, dass jede Zustands- bzw. Ausgangsgröße des monolithischen Systems in mindestens einem Subsystem enthalten sein muss.

Annahme 4.2 (Unbekannte Parameter)

Es wird für das jeweilige i -te Subsystem mit $i = 1, \dots, N$ angenommen, dass keine Parameter oder Strukturinformationen aus den anderen Subsystem bekannt sind oder übertragen werden müssen.

Es soll in den Subsystemen ausschließlich die zugehörige lokale Dynamik betrachtet werden und einzig Zustandsinformationen zwischen den Subsystemen ausgetauscht werden. Diese Annahme zielt somit auf die bereits beschriebene Modularitätseigenschaft ab.

Annahme 4.3 (Beobachtbarkeit der Subsysteme)

Es gilt die Annahme, dass jedes i -te Subsystem mit $i = 1, \dots, N$ beobachtbar ist und somit die lokalen unsicheren Zustände mittels der lokalen unsicheren Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen bestimmt werden können.

Ein Zustandsmengenbeobachter kann genau dann entworfen werden, wenn das Subsystem über die vorhandenen unsicheren Ein- und Ausgangsgrößen beobachtbar ist. Für den Stand der Technik zur Beobachtbarkeit unsicherer, nichtlinearer Systeme sei auf den Anhang A verwiesen.

Zudem hat die Annahme einer stückweisen konstanten Eingangsmenge (siehe Annahme 3.2) sowie die Voraussetzung, dass die nichtlineare Systemgleichung des (Sub-)Modells mindestens $\ell + 1$ -mal differenzierbar sein muss (siehe Definition 3.11), weiterhin bestand.

Anmerkung 4.1. Eine Partitionierung in Subsysteme ist im Allgemeinen nicht eindeutig. Daher existieren oftmals auch mehrere Möglichkeiten, ein System zu verteilen. Wird außer der trivialen Aufteilung $N = 1$, d. h. das monolithische System entspricht dem Subsystem, keine andere Aufteilungsmöglichkeit gefunden, kann dies daran liegen, dass das monolithische System zu klein oder die einzelnen Zustände zu stark voneinander abhängen. Als Beispiel hierfür wird in [Kup19] die einzelne Batteriezelle mit nur einer einzigen Ausgangsgröße (Klemmenspannung der Batteriezelle) genannt.

4.2 Verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme in der Zustandsraumdarstellung

Basierend auf der zuvor vorgestellten Grundidee sowie den eingeführten Voraussetzungen folgt in diesem Abschnitt die Herleitung des verteilten, unsicheren, nichtlinearen Systems in der Zustandsraumdarstellung. Für das monolithische bzw. globale System gilt die unsichere Zustandsraumdarstellung nach Definition 3.3, welche für eine Verteilung gemäß Definition 4.2 zunächst anhand der Ausgangsgrößen aufgeteilt wird:

$$\mathbf{y}^{(g)} := \left(\mathbf{y}^{(1)\top} \quad \dots \quad \mathbf{y}^{(N)\top} \right)^\top, \quad (4.1)$$

wobei $\mathbf{y}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{q^{(i)}}$ für den lokalen Ausgangsmengenvektor des i -ten Subsystems steht. Für eine eindeutige Unterscheidung wird das globale System zusätzlich mit dem Index (g) und die Subsysteme durch die Indizes (i) mit $i = 1, \dots, N$ gekennzeichnet. Dieser Schritt entspricht der Dezentralisierung gemäß Definition 4.1. Im nächsten Schritt erfolgt die Dekomposition der Zustandsgrößen in ebenfalls N Untervektoren. Die Beschreibung hierfür erfolgt anhand von Transformations- oder Selektionsmatrizen, weswegen

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{x}^{(g)} \quad (4.2)$$

mit

$$\mathbf{y}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{q^{(i)}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(i)} \quad (4.3)$$

gilt. Hierbei werden $\mathbf{x}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}}$ mit $n^{(i)} \leq n^{(g)}$ als lokaler Zustandsmengenvektor und $\mathbf{T}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{n^{(i)} \times n^{(g)}}$ als Transformationsmatrix des i -ten Subsystems bezeichnet. Für $T_{a,b}$, welches die a -te Zeile und b -te Spalte der Matrix $\mathbf{T}^{(i)}$ angibt, gilt für die einzelnen Elemente $T_{a,b}^{(i)} \in \{0, 1\}$. Ferner gilt für die Zeilensumme

$$\sum_{b=1}^{n^{(g)}} T_{a,b}^{(i)} = 1 \quad \forall a, i. \quad (4.4)$$

Somit kann die Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{(i)}$ als eine Zusammensetzung aus transponierten Einheitsvektoren verstanden werden, welche eine Selektion an Zuständen aus dem globalen Zustandsmengenvektor beschreibt. Anders als die Partitionierung der Ausgangsgleichungen (4.1) muss die Partitionierung der Zustände (4.2) nicht unbedingt disjunkt erfolgen. Außerdem ist der Unterraum in (4.2) nicht als echte Teilmenge aufzufassen, da auch $\mathbf{x}^{(i)} \equiv \mathbf{x}^{(g)}$ möglich ist. Die Subsysteme sind hierbei so aufgeteilt, dass die lokale Ausgangsgleichung (4.3) ausschließlich vom lokalen Zustandsmengenvektor (4.2) abhängig ist.

Da in der Regel für die Berechnung der lokalen Systemfunktion $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot)$ nicht nur der lokale Zustandsmengenvektor $\mathbf{x}^{(i)}$ relevant ist, sondern auch gewisse Zustände von anderen Subsystemen (siehe Definition 4.2), müssen diese zusätzlich berücksichtigt werden. Diese sind ebenfalls eine Selektion aus dem globalen Zustandsmengenvektor und durch

$$\mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{x}^{(g)} \quad (4.5)$$

mit der Transformationsmatrix $\mathbf{R}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{m^{(i)} \times n^{(g)}}$ gegeben. Hierbei wird $\mathbf{Z}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{m^{(i)}}$ als externer Zustandsmengenvektor bezeichnet. Analog zur Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{(i)}$ gilt $R_{a,b}^{(i)} \in \{0, 1\}$ sowie $\sum_{b=1}^{n^{(g)}} R_{a,b}^{(i)} = 1 \quad \forall a, i$. Ferner müssen noch die lokalen Eingangsgrößen des Subsystems als nicht-disjunkte Untervektoren der globalen Eingangsgrößen beschrieben werden, sodass

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{U}^{(g)} \quad (4.6)$$

mit der Transformationsmatrix $\mathbf{S}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{p^{(i)} \times p^{(g)}}$ sowie $S_{a,b}^{(i)} \in \{0, 1\}$ und $\sum_{b=1}^{p^{(g)}} S_{a,b}^{(i)} = 1 \quad \forall a, i$ gilt. Des Weiteren können mithilfe einer weiteren Transformationsvorschrift

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{Y}^{(g)} \quad (4.7)$$

die einzelnen Elemente von (4.1) bzw. der lokale Ausgangsmengenvektor angegeben werden. Auch hier gilt $\mathbf{M}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{q^{(i)} \times q^{(g)}}$, $M_{a,b}^{(i)} \in \{0, 1\}$ und $\sum_{b=1}^{q^{(g)}} M_{a,b}^{(i)} = 1 \quad \forall a, i$. Insgesamt ergibt sich somit ein verteiltes, unsicheres Zustandsraummodell, welches in Definition 4.3 zusammengefasst ist.

Definition 4.3 (Verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung in Sensorkoordinaten)

Ein verteiltes, unsicheres Zustandsraummodell in Sensorkoordinaten liegt vor, wenn die lokalen Zustandsgleichungen des i -ten Subsystems mit $i = 1, \dots, N$ die Gestalt

$$\dot{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)}, \mathbf{U}^{(i)}) \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{Y}^{(i)} = (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \mathbf{X}^{(i)} \quad (4.8b)$$

aufweisen, wobei $\mathbf{X}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}}$ den lokalen Zustandsmengenvektor, $\mathbf{Z}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{m^{(i)}}$ den externen Zustandsmengenvektor, $\mathbf{U}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{p^{(i)}}$ den lokalen Eingangsvektor und $\mathbf{Y}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{q^{(i)}}$ den lokalen Ausgangsmengenvektor bezeichnen. Die unsicheren lokalen Modellparameter $\mathbf{O}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{r^{(i)}}$ sind implizit in der lokalen Systemfunktion $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot)$ enthalten. Der lokale Anfangszustand ist anhand von $\mathbf{X}^{(i)}(t_0) \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}}$ gegeben. Die Transformationsmatrizen zur Beschreibung der Dekomposition des monolithischen Systems in das jeweilige i -te Subsystem sind anhand von

$$\mathbf{X}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i)} \mathbf{X}^{(g)} \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{Z}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{X}^{(g)} \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{S}^{(i)} \mathbf{U}^{(g)} \quad (4.9c)$$

$$\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)} \mathbf{Y}^{(g)} \quad (4.9d)$$

mit $\mathbf{T}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{n^{(i)} \times n^{(g)}}$, $\mathbf{R}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{m^{(i)} \times n^{(g)}}$, $\mathbf{S}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{p^{(i)} \times p^{(g)}}$ sowie $\mathbf{M}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{q^{(i)} \times q^{(g)}}$ gegeben.

Anmerkung 4.2. Die Transformationsmatrizen (4.9) werden zugunsten der einfacheren Verständlichkeit als konstante Größen angenommen. Allerdings können auch ohne weitere Einschränkungen veränderliche Transformationsmatrizen, wie bspw. zeitvariante Transformationsmatrizen $\mathbf{T}^{(i)}(t)$, eingesetzt werden, um die Eigenschaft der Flexibilität (siehe Abschnitt 4.1) vollständig zu erfüllen.

Für eine spätere Beschreibung der verteilten Zustandsmengenbeobachter werden die Inversen der Transformationsmatrizen benötigt. Da es sich bei den Transformationsmatrizen in der Regel um nichtquadratische Matrizen handelt, wird die Moore-Penrose-Pseudoinverse eingesetzt. Die Pseudoinverse einer beliebigen Matrix \mathbf{A} ist mittels

$$\mathbf{A}^\dagger := \begin{cases} (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top & , \text{ wenn Spalten von } \mathbf{A} \text{ linear unabhängig} \\ \mathbf{A}^\top (\mathbf{A} \mathbf{A}^\top)^{-1} & , \text{ wenn Zeilen von } \mathbf{A} \text{ linear unabhängig} \end{cases} \quad (4.10)$$

gegeben (vgl. [BMSM20]) und kann für die Transformationsmatrizen (4.9) ohne Einschränkungen verwendet werden, da diese sich ausschließlich aus mehreren (transponierten) Einheitsvektoren zusammensetzen und somit per Definition stets vollen Zeilenrang aufweisen. So kann beispielsweise mit der inversen Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{(i)\dagger}$ die Transformation vom i -ten Subsystem zu einem anderen Subsystem j angegeben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(j)} &= \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{x}^{(g)} \\ &= \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{T}^{(i)\dagger} \mathbf{x}^{(i)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Anhand der Systemfunktion (4.8a) ist ersichtlich, dass die lokale Systemdynamik sowohl vom lokalen Zustandsmengenvektor $\mathbf{x}^{(i)}$ als auch vom externen Zustandsmengenvektor $\mathbf{z}^{(i)}$ abhängig ist. Werden allerdings die externen Zustände mit ihrer vollständigen Dynamik im lokalen Subsystem berücksichtigt, kann aufgrund der Verkopplung der Zustände der Fall eintreten, dass alle Zustände des monolithischen Systems im betrachteten Subsystem zu finden sind. Folglich wird keine lokale Ordnungsreduktion erreicht und ferner die Annahme 4.2 nicht erfüllt. Auch ein einfaches Vernachlässigen des externen Zustandsmengenvektors $\mathbf{z}^{(i)}$ ist in der Regel nicht möglich, da diese Zustände zur Berechnung der Systemfunktion benötigt werden. In der Literatur existieren deshalb diverse Ansätze, um diese Problematik zu umgehen. Unter anderem werden beispielsweise die externen Zustände als zusätzliche Eingänge oder unbekannte Störungen betrachtet [GAF⁺14, Kup19]. In [Hil12] werden die externen Zustände ohne ihre Dynamik berücksichtigt, was als Parameterschätzung der externen Zustände interpretiert werden kann. Allerdings sind diese Ansätze oft mit Einschränkungen an die externen Zustände verbunden, hinsichtlich der Frage, wie diese auf das betrachtete Subsystem einwirken. Beispielsweise setzt der Ansatz in [Hil12] voraus, dass der Einfluss auf die lokale Systemfunktion $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot)$ nur sehr klein sein darf. Auch muss mit Blick auf die Fehlerdiagnose darauf geachtet werden, dass die angestrebte Ordnungsreduktion und die damit verbundene verringerte Genauigkeit des Modells keine negativen Auswirkungen auf das Diagnoseresultat hat.

Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit ein neuer Ansatz angewendet: Die externen Dynamiken der anderen Subsysteme sollen mithilfe der Mengendarstellung eingeschlossen und

anschließend in die Zustandsraumdarstellung aufgenommen werden. Hierzu wird die Wertebereichseinschließung $\text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(i)}\}$ (siehe Abschnitt 3.2.2) ermittelt und in Form von Intervallen, d. h. anhand ihrer unteren und oberen Schranken für die maximal zulässigen Änderungsraten, angegeben. Dies führt zur nachstehenden Annahme:

Annahme 4.4 (Externe Dynamik)

Es gilt die Annahme, dass die Dynamik der externen Subsysteme garantiert im Wertebereich

$$\text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(i)}\} = [\underline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}, \overline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}], \quad (4.12)$$

eingeschlossen ist, wobei $\underline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}$ als untere bzw. $\overline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}$ als obere Schranke der maximal zulässigen Änderungsrate bezeichnet werden.

Diese Annahme stellt keine Restriktion an das System bzw. die Modellierung dar, da auch die Annahme $\text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(i)}\} = [-\infty, \infty]$ prinzipiell zulässig ist. Für eine geeignete Bestimmung dieser Wertebereichseinschließung werden die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Intervallarithmetik verwendet sowie die Kenntnisse über die Systemgrenzen (auch als Systembeschränkungen bezeichnet) ausgenutzt. Hierzu werden die Mengen $\mathbf{Z}^{(i)}$ und $\mathbf{X}^{(g)}$ der Transformationsvorschrift (4.9b) mittels intervallwertiger Mengen beschrieben:

$$[\mathbf{z}^{(i)}] = \mathbf{R}^{(i)} [\mathbf{x}^{(g)}], \quad (4.13)$$

wobei die Zeitableitung dieser Transformationsvorschrift mit der intervallwertigen globalen Systemfunktion $[\dot{\mathbf{x}}^{(g)}] = [\mathbf{f}^{(g)}([\mathbf{x}^{(g)}], [\mathbf{u}^{(g)}])]$ durch

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{z}}^{(i)}] &= \mathbf{R}^{(i)} [\dot{\mathbf{x}}^{(g)}] \\ &= \mathbf{R}^{(i)} [\mathbf{f}^{(g)}([\mathbf{x}^{(g)}], [\mathbf{u}^{(g)}])] \end{aligned} \quad (4.14)$$

gegeben ist. Die gesuchte intervallwertige Wertebereichseinschließung entspricht somit

$$\text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(i)}\} = [\dot{\mathbf{z}}^{(i)}]. \quad (4.15)$$

Über die Systemgrenzen müssen die jeweiligen unteren und oberen Schranken für $[\mathbf{x}^{(g)}]$ und $[\mathbf{u}^{(g)}]$ bekannt sein, welche sich zumeist aus dem physikalischen Aufbau ergeben. Sind die Systemgrenzen unbekannt, müssen Werte für die unteren und oberen Schranken ermittelt werden, sodass sie garantiert die realen Systemgrenzen enthalten. Dies kann bspw. im Rahmen einer Simulation durchgeführt werden. Die Systemgrenzen werden abschließend für $[\mathbf{x}^{(g)}]$ sowie $[\mathbf{u}^{(g)}]$ in (4.14) eingesetzt.

Anmerkung 4.3. Aufgrund der konstanten unteren und oberen Schranken $[\underline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}, \overline{\dot{\mathbf{z}}}^{(i)}]$ kann diese Vorgehensweise auch als unsichere Parameterschätzung der externen Dynamiken interpretiert werden. Im Gegensatz zu [Hil12] darf allerdings der Einfluss auf die lokale Systemfunktion $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot)$ innerhalb der vorgegeben Schranken beliebig sein und stellt somit keine Restriktion dar.

Die vorgestellte Vorgehensweise zur vollständigen Herleitung einer verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung nach Definition 4.3 soll anhand des nachfolgenden Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel 4.1:

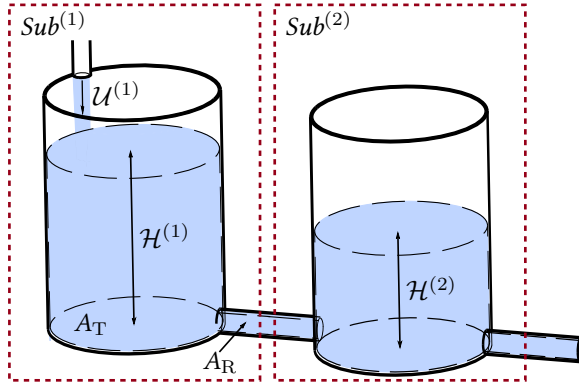


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des Zwei-Tank-Systems

Gegeben sei die globale unsichere Zustandsraumdarstellung für die Füllstände $\mathcal{H}_1^{(g)} \geq \mathcal{H}_2^{(g)}$

$$\dot{\mathcal{H}}_1^{(g)} = \frac{\mathcal{U}^{(g)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}}, \quad (4.16a)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_2^{(g)} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)}} \right) \quad (4.16b)$$

mit der Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{H}^{(g)} \quad (4.17)$$

sowie dem Volumenstrom als Eingangsgröße $\mathcal{U}^{(g)}$ eines gekoppelten Zwei-Tank-Systems zur Beschreibung des monolithischen Systemverhaltens. Der Aufbau des Zwei-Tank-Systems ist in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt. Die bekannten unsicheren Parameter \mathcal{O} , d. h. die Kreisfläche des Tanks $[A_T]$ und des Rohrs $[A_R]$ sowie die Erdbeschleunigung $[g]$, werden direkt in Form von Intervallen angegeben. Aus Abbildung 4.2 ist ebenfalls die Verteilung in insgesamt $N = 2$ Subsysteme erkennbar. Die Dekomposition basiert auf der räumlichen Anordnung der einzelnen Tanks und resultiert in die folgenden Transformationsmatrizen:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.18b)$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = 1, \quad (4.18c)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18d)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass in diesem Beispiel die Transformation $S^{(2)}$ nicht existiert und daher auch nicht fälschlicherweise als $S^{(2)} = \mathbf{0}$ angegeben werden darf. Die Transformationsmatrix $T^{(1)}$ bzw. $T^{(2)}$ beschreibt, dass das erste Subsystem von der lokalen Zustandsgröße $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_1^{(g)}$ bzw. das zweite Subsystem von der lokalen Zustandsgröße $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_2^{(g)}$ abhängt. Die jeweiligen lokalen Zustandsgrößen sind für das andere Subsystem die externen Zustandsgrößen, was durch $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ beschrieben wird. Die Eingangsgröße $\mathcal{U}^{(g)}$ wirkt ausschließlich auf das erste Subsystem, d. h. $\mathcal{U}^{(1)} = S^{(1)}\mathcal{U}^{(g)}$. Die Transformationsmatrizen $M^{(1)}$ und $M^{(2)}$ geben an, dass die jeweilige lokale Zustandsgröße auch gleichzeitig die Ausgangsgröße des zugehörigen Subsystems ist.

Für die Wertebereichseinschließung der externen Zustandsgrößen $bd\{\mathcal{Z}^{(1)}\}$ und $bd\{\mathcal{Z}^{(2)}\}$ erfolgt im Folgenden die Bestimmung der unteren und oberen Schranken der maximal zulässigen Änderungsraten. Hierzu werden Informationen über die Systemgrenzen benötigt, welche sich aus dem physikalischen Aufbau des Zwei-Tank-Systems ergeben. Die Eingangsgröße ist der Zufluss in Tank 1 und durch die maximale Leistung der Pumpe begrenzt, d. h. $\mathcal{U}^{(g)} = [u^{(g)}] = [0, u_{\max}]$. Die Beschränkungen der Zustandsgrößen $\mathcal{H}_1^{(g)}$ sowie $\mathcal{H}_2^{(g)}$ sind die jeweiligen maximalen Tank- bzw. Behälterhöhen $h_{\max}^{(1)} = h_{\max}^{(2)} = h_{\max}$ und lauten daher $\mathcal{H}_1^{(g)} = [h_1^{(g)}] = [0, h_{\max}]$ sowie $\mathcal{H}_2^{(g)} = [h_2^{(g)}] = [0, h_{\max}]$. Werden diese intervallwertigen Systemgrenzen in die globale Systemdynamik (4.16) eingesetzt, so ergibt sich mit (4.15) die gesuchte Wertebereichseinschließung zu

$$\begin{aligned}
 bd\{\dot{\mathcal{Z}}^{(1)}\} &= R^{(1)} \left[f^{(g)} \left([h^{(g)}], [u^{(g)}] \right) \right] \\
 &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} \sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} \\ \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} \left(\sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} - \sqrt{[0, h_{\max}]} \right) \end{pmatrix} \quad (4.19) \\
 &= \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} \left([0, \sqrt{h_{\max}}] - [0, \sqrt{h_{\max}}] \right) \\
 &= \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}]
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 bd\{\dot{\mathcal{Z}}^{(2)}\} &= R^{(2)} \left[f^{(g)} \left([h^{(g)}], [u^{(g)}] \right) \right] \\
 &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} \sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} \\ \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} \left(\sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} - \sqrt{[0, h_{\max}]} \right) \end{pmatrix} \quad (4.20) \\
 &= \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R]}{[A_T]} \sqrt{2[g]} [0, \sqrt{h_{\max}}],
 \end{aligned}$$

wobei bei den Radikanden nur Werte ≥ 0 von Relevanz sind. Alle Größen in den Gleichungen (4.19) und (4.20) sind somit bekannt und können im Vorfeld bestimmt werden. Insgesamt beschreiben somit die beiden verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellungen

$$\sum^{(1)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(1)} &= \mathbf{T}^{(1)} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \frac{\mathcal{U}^{(1)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{Z}^{(1)}} \\ \dot{\mathcal{Z}}^{(1)} &= bd\{\dot{\mathcal{Z}}^{(1)}\} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] \end{cases} \quad (4.21)$$

mit der lokalen Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_1^{(g)} \quad (4.22)$$

und für das zweite Subsystem

$$\sum^{(2)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(2)} &= \mathbf{T}^{(2)} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{Z}^{(2)} - \mathcal{H}^{(2)}} - \sqrt{\mathcal{H}^{(2)}} \right) \\ \dot{\mathcal{Z}}^{(2)} &= bd\{\dot{\mathcal{Z}}^{(2)}\} = \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [0, \sqrt{h_{\max}}] \end{cases} \quad (4.23)$$

mit der lokalen Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_2^{(g)} \quad (4.24)$$

vollständig die lokalen Systemdynamiken und schließen die externen Systemdynamiken garantiert ein. Die lokale Eingangsgröße in (4.21) ergibt sich aus $\mathcal{U}^{(1)} = S^{(1)} \mathcal{U}^{(g)}$.

4.3 Design der verteilten Architektur zur Fehlerdiagnose

In diesem Abschnitt wird die verteilte Architektur zur Fehlerdiagnose von verteilten, unsicheren Systemen nach Definition 4.3 vorgestellt und diskutiert. Aufgrund der verteilten Systembeschreibung aus dem vorherigen Abschnitt 4.2 ist es naheliegend, dass jedes Subsystem eine eigene lokale Fehlerdiagnoseeinrichtung (engl. local fault diagnoser, LFDI) zugeordnet bekommt. Somit hat jeder LFDI⁽ⁱ⁾ mit $i = 1, \dots, N$ nur die lokalen Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen aus dem Subsystem sowie die relevanten Zustandsinformationen aus anderen Subsystemen zu Verfügung. Auf diesen lokalen Fehlerdiagnoseeinrichtungen werden anschließend die entsprechenden Fehlerdiagnosealgorithmen umgesetzt. Im Folgenden wird auf die geforderten Eigenschaften,

- Modularität,
- Skalierbarkeit,
- Flexibilität,
- Ordnungsreduktion und Parallelisierung

aus Abschnitt 4.1 eingegangen. Die *Modularität* wird erreicht, indem jeder LFDI die lokalen Berechnungen selbstständig ausführt und dabei unabhängig von den jeweils anderen LFDIs agiert. Ein weiterer LFDI kann jederzeit hinzugefügt und somit die Architektur beliebig *skaliert* werden. Die anderen LFDIs müssen nur angepasst werden, wenn eine Überschneidung des lokalen Zustandsmengenvektors $\mathcal{X}^{(i)}$ vorliegt (siehe Abschnitt 4.1). Da kein globaler Koordinator eingesetzt wird, ist die Architektur *flexibel* in Bezug auf Änderungen an der Netzstruktur. Alle Entscheidungen werden unabhängig voneinander in den LFDIs getroffen. Der Fehlerdiagnosealgorithmus ist somit auf mehrere, *parallele* Fehlerdiagnoseeinrichtungen aufgeteilt, welche jeweils auf einer Systembeschreibung des zugehörigen Subsystems basieren. Hierbei gilt für die lokale Systemordnung $n^{(i)} \leq n^{(g)}$ aufgrund der Transformationsvorschrift (4.2). Die resultierende Architektur ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Die Kommuni-

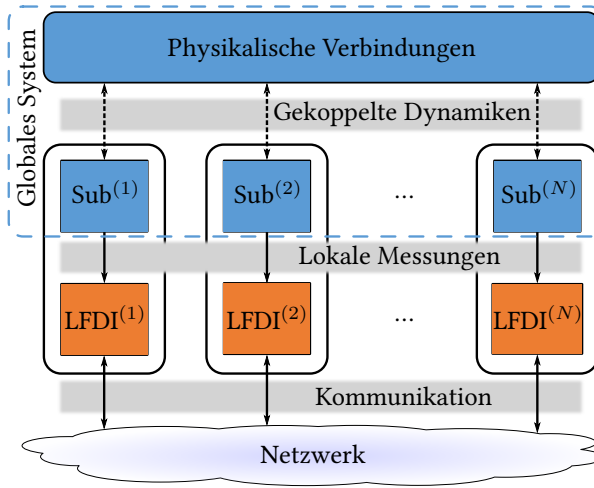


Abbildung 4.3: Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose für insgesamt N Subsysteme

kation zwischen den einzelnen LFDIs macht ein Netzwerk erforderlich. Sie erfolgt hierbei bidirektional, d. h. die LFDIs empfangen und senden Informationen. Aufgrund der Verteilung nach Definition 4.2 müssen nicht alle LFDIs miteinander kommunizieren. Es kommunizieren ausschließlich jene LFDIs miteinander, deren lokale Zustandsmengenvektoren $\mathcal{X}^{(i)}$ sich überschneiden (siehe Abbildung 4.1). In dieser Arbeit wird das Netzwerk ausschließlich auf einer hohen Abstraktionsebene betrachtet, wobei es in Form von zufälligen Verzögerungen und nicht vorhersagbaren Paketverlusten dargestellt werden kann (siehe Abschnitt 4.3.2). Probleme wie beispielsweise Jitter oder Paketfragmentierung werden daher nicht betrachtet, da sie typischerweise in den Kommunikationsprotokollen der unteren Ebenen auftreten [GAF⁺14]. In den Kapiteln 5.1 bzw. 6.1 wird diese Architektur auf die jeweiligen Fehlerdiagnoseverfahren umgesetzt und detailliert vorgestellt.

Neben der Verteilung der Systeme in Subsysteme muss auch der Fehlerdiagnosealgorithmus verteilt werden. Das Resultat wird anschließend als verteilte Fehlerdiagnose bezeichnet. Hierbei ist entscheidend, wie die Informationen aus den anderen Subsystemen im jeweils lokalen Subsystem verarbeitet und in geeigneter Weise berücksichtigt werden. Dies geschieht

im sogenannten Fusionsschritt. Die Vorstellung der Verteilung der einzelnen Fehlerdiagnosealgorithmen erfolgt in den separaten Kapiteln 5 und 6. Für die allgemeine Umsetzung der verteilten Fehlerdiagnose müssen allerdings zunächst die in Abschnitt 3.4.2 eingeführten Definitionen „Konsistenzprüfung“ und „Fehlerkandidaten“ auf das Prinzip der verteilten Fehlerdiagnose übertragen werden. Analog zur Vorgehensweise aus Abschnitt 3.4.2 wird der fehlerfreie Fall des i -ten Subsystems mit dem lokalen Fehlerkandidaten $F_0^{(i)}$ gekennzeichnet. Für die mengenbasierte Systembeschreibung von $F_0^{(i)}$ wird die verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung gemäß Definition 4.3 verwendet und durch $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ gekennzeichnet. In diesem Zusammenhang wird $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ auch als lokale nominale Systembeschreibung bezeichnet. Alle weiteren Fehler, welche das i -te Subsystem beeinflussen, werden mittels $F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \dots$ beschrieben und der jeweiligen – vom Fehler abhängigen – Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_1^{(i)}}^{(i)}, \mathcal{B}_{F_2^{(i)}}^{(i)}, \dots$ zugeordnet. Die Menge aller lokalen Fehler ist durch

$$\mathcal{F}^{(i)} := \{F_0^{(i)}, F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \dots\} \quad (4.25)$$

gegeben, die Menge aller zugehörigen unsicheren Systembeschreibungen anhand von

$$\mathcal{B}^{(i)} := \{\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}, \mathcal{B}_{F_1^{(i)}}^{(i)}, \mathcal{B}_{F_2^{(i)}}^{(i)}, \dots\} . \quad (4.26)$$

Die in den einzelnen LFDIs umgesetzten modellbasierten Fehlerdiagnosealgorithmen basieren auf den Systembeschreibungen $\mathcal{B}^{(i)}$ und nutzen diese zur

- Fehlerdetektion mit der lokalen nominalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ sowie zur
- Fehlerisolation mit $\mathcal{B}_{F_1^{(i)}}^{(i)}, \mathcal{B}_{F_2^{(i)}}^{(i)}, \dots$.

Die Mengen der Fehlerkandidaten $\mathcal{F}^{(i)}$ aller Subsysteme $i = 1, \dots, N$ sind nicht disjunkt zueinander, d. h. der gleiche Fehlerkandidat kann mehrere Subsysteme beeinflussen. Insgesamt lassen sich somit die Begriffe lokale Konsistenzprüfung sowie lokaler Fehlerkandidat wie folgt definieren:

Definition 4.4 (Lokale Konsistenzprüfung)

Bei der lokalen Konsistenzprüfung (engl. *local consistency check*) wird für eine gegebene lokale Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_j^{(i)}}^{(i)}$ mit $F_j^{(i)} \in \mathcal{F}^{(i)}$ getestet, ob die lokale Beziehung

$$(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)}) \in \mathcal{B}_{F_j^{(i)}}^{(i)} \quad (4.27)$$

erfüllt ist.

Es wird also geprüft, ob die lokalen unsicheren Messinformationen $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ konsistent mit der lokalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_j^{(i)}}^{(i)}$ sind. Basierend auf dieser Definition erfolgt die Definition des lokalen Fehlerkandidaten.

Definition 4.5 (Lokaler Fehlerkandidat)

Ein Fehler $F_j^{(i)} \in \mathcal{F}^{(i)}$ mit $j = 0, 1, \dots$ wird als lokaler Fehlerkandidat (engl. local fault candidate) bezeichnet, wenn die lokalen unsicheren Messinformationen $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ konsistent mit der unsicheren Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_j^{(i)}}^{(i)}$ sind.

Zur vollständigen Fehlerdiagnose des i -ten Subsystems prüft somit der LFDI⁽ⁱ⁾ mit $i = 1, \dots, N$ die Konsistenz der lokalen Messinformationen $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ mit allen Systembeschreibungen $\mathcal{B}^{(i)}$ der potenziellen lokalen Fehlerkandidaten $\mathcal{F}^{(i)}$. Für jede Systembeschreibung in $\mathcal{B}^{(i)}$ existiert eine eigene verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung. Diese Berechnungen erfordern daher einen hohen Rechen- und Speicheraufwand, weshalb im nachfolgenden Abschnitt das Prinzip der Ferndiagnose auf die verteilte Architektur angewendet wird.

4.3.1 Ferndiagnose in der verteilten Architektur

Im Kontext der Fehlerdiagnose wird unter der Ferndiagnose (engl. remote diagnosis) die Zerlegung der Diagnoseaufgaben (siehe Abschnitt 2.1.2) in systemnahe Aufgaben auf systemnahen Komponenten (Onboard-Komponenten) sowie in systemferne Aufgaben auf systemfernen Komponenten (Offboard-Komponenten) verstanden. Das Ziel hierbei ist die Verringerung des benötigten Rechen- und Speicherbedarfs auf den systemnahen Komponenten zur effizienten Durchführung der Fehlerdiagnose. Dies ist insbesondere dann von Vorteil, wenn auf den lokalen Recheneinheiten weniger Systemressourcen zur Verfügung stehen, weil sie bspw. zusätzlich noch für die Regelungsaufgabe des betrachteten Subsystems genutzt werden. Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass die systemfernen Aufgaben nicht zur Systemlaufzeit (in der Literatur auch als „offline Aufgaben“) erfolgen müssen. Die Zerlegung oder auch Separation wird in dieser Arbeit wie folgt durchgeführt:

- **Onboard: Fehlerdetektion.** Die Aufgabe der Fehlerdetektion wird auf der systemnahen Komponente durchgeführt. Zur Fehlerdetektion wird ausschließlich ein Modell des nominalen (fehlerfreien) Systemverhaltens benötigt.
- **Offboard: Fehlerisolation.** Die Aufgabe der Fehlerisolation wird auf der systemfernen Komponente durchgeführt. Zur Fehlerisolation werden Modelle des fehlerbehafteten Systems benötigt.

Das Prinzip der Ferndiagnose an monolithischen Systemen wurde ausführlich in den Arbeiten [FLSK06, SSKL09, SL10] betrachtet. Um die beschriebenen Vorteile der Ferndiagnose auch bei einer verteilten Systembeschreibung nutzen zu können, wird sie im Rahmen dieser Arbeit auf die in Abschnitt 4.3 vorgestellte verteilte Systemarchitektur übertragen. Im Gegensatz zur monolithischen Systembetrachtung wird im Rahmen einer verteilten Systemarchitektur nicht nur eine zentrale Onboard-Komponente benötigt, sondern eine gesonderte Onboard-Komponente für jedes einzelne Subsystem. Auf diesen Onboard-Komponenten wird jeweils eine lokale Fehlerdetektion durchgeführt, welche ausschließlich auf ein Modell in Form einer

verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ des nominalen Systemverhaltens basiert. Diese Onboard-Komponenten werden im Folgenden als lokale Fehlerdetektoren (engl. local fault detector, LFD) bezeichnet, welche im Gegensatz zum LFDI ausschließlich Fehler detektieren. Insgesamt werden N solcher LFD $^{(i)}$ mit $i = 1, \dots, N$ zur lokalen Fehlerdetektion benötigt. Die Fehlerdetektion muss online, d. h. zur Systemlaufzeit, erfolgen. Die Fehlerisolation wird auf einer separaten Offboard-Komponente durchgeführt, welche als globaler Fehlerisolator (engl. global fault isolater, GFI) bezeichnet wird. Die resultierende Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose inklusive des Prinzips der Ferndiagnose ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Zunächst wird die Menge aller globalen Fehlerkandidaten definiert

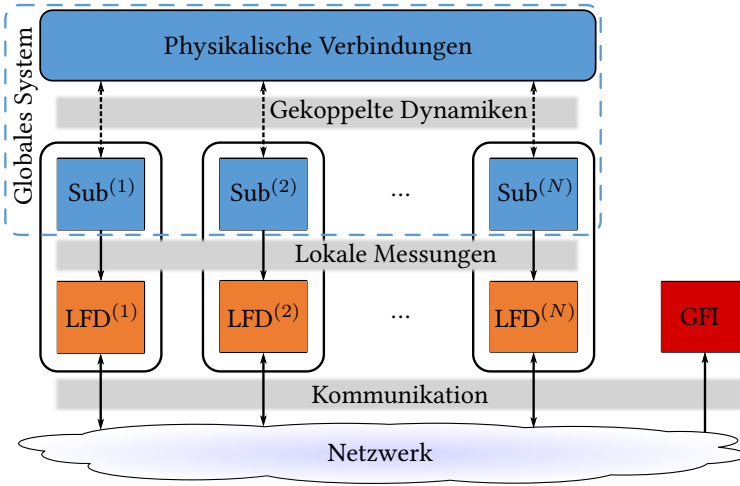


Abbildung 4.4: Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose inklusive der Ferndiagnose für insgesamt N Subsysteme

$$\mathcal{F}^{(g)} = \left\{ F_0^{(g)}, F_1^{(g)}, F_2^{(g)}, \dots \right\}, \quad (4.28)$$

welche auch den fehlerfreien Fall $F_0^{(g)}$ enthält. Diese werden zur besseren Unterscheidung zu den Größen des Subsystems mit dem zusätzlichen Index (g) gekennzeichnet. Der GFI nutzt ausschließlich die Fehlerkandidaten

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(g)} = \mathcal{F}^{(g)} \setminus F_0^{(g)} = \left\{ F_1^{(g)}, F_2^{(g)}, \dots \right\} \quad (4.29)$$

mit den zugehörigen Systembeschreibungen

$$\tilde{\mathcal{B}}^{(g)} = \mathcal{B}^{(g)} \setminus \mathcal{B}_{F_0^{(g)}}^{(g)} = \left\{ \mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}, \mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)}, \dots \right\} \quad (4.30)$$

der monolithischen Systembeschreibung (siehe Abschnitt 3.4.2). Der Fehlerkandidat $F_0^{(g)}$ wird für die Fehlerisolation nicht benötigt und folglich nicht betrachtet. Die Nutzung der globalen Systembeschreibung zur Fehlerisolation im GFI hat gleich mehrere Vorteile:

1. Ein Fehlerkandidat kann mehrere Subsysteme gleichzeitig beeinflussen. Somit existieren mehrere lokale Systembeschreibungen in $\bigcup_{i=1}^N \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ mit $\tilde{\mathcal{B}}^{(i)} = \mathcal{B}^{(i)} \setminus \mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$

aus (4.26), welche den identischen Fehler beschreiben. Für die Mächtigkeit der Mengen gilt daher

$$\left| \bigcup_{i=1}^N \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} \right| \geq \left| \tilde{\mathcal{B}}^{(g)} \right|. \quad (4.31)$$

Folglich würde eine Fehlerisolation, welche eine Konsistenzprüfung unter Einbeziehung aller Systembeschreibungen durchführt (siehe Definition 4.4) auf Basis aller lokalen Systembeschreibungen $\bigcup_{i=1}^N \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ in der Regel mehr Zeit in Anspruch nehmen als mit den globalen Systembeschreibungen.

2. Wirken Fehlerkandidaten unmittelbar auf die physikalischen Kopplungen bzw. Verbindungen ein (z. B. eine Rohrverstopfung zwischen Tank 1 und Tank 2 in Beispiel 4.1) und sind daher nicht eindeutig einem Subsystem zuzuordnen, so lassen sie sich nur schwer mittels lokaler Systembeschreibungen darstellen. Der Grund hierfür ist, dass die Vorgehensweise zur Dekomposition in Subsysteme (siehe Abschnitt 4.2) unabhängig von den Fehlerkandidaten erfolgt und die physikalischen Verbindungen durch den Einschluss der externen Systemdynamiken beschrieben sind.
3. Da der GFI in der verteilten Systemarchitektur als einzige Komponente global angeordnet ist, ist es naheliegend, auf eine Verteilung der Fehlerkandidaten und den damit verbundenen Aufwand zu verzichten.

Das prinzipielle Ablaufschema bei der verteilten Fehlerdiagnose inklusive der Ferndiagnose ist wie folgt: Wird in einem der LFD⁽ⁱ⁾ mit $i = 1, \dots, N$ eine Inkonsistenz mit dem Modell des nominalen bzw. fehlerfreien Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ festgestellt, d. h.

$$(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)}) \notin \mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}, \quad (4.32)$$

so wird ein Fehler im i -ten Subsystem angenommen⁹. Anschließend erfolgt die Fehlerisolation auf dem GFI. Dieser sequentielle Ablauf der Aufgaben Fehlerdetektion und -isolation hat den Vorteil, dass der GFI nicht kontinuierlich zur Systemlaufzeit eine Fehlerisolation durchführen muss. Auch entspricht diese Vorgehensweise dem Industrie 4.0 Organisationsgestaltungskonzept: Entscheidungen – in diesem Fall die Fehlerdetektion – sollen dezentral und möglichst eigenständig getroffen werden. Ausschließlich wenn Sonderfälle auftreten, bspw. im Fehlerfall, übertragen sie die Informationen an eine höhere Instanz (GFI) [GGB16]. Für die Fehlerisolation müssen alle LFDs dem GFI ab dem Zeitpunkt der Fehlerdetektion t_d ihre gemessenen lokalen Ein- und Ausgangsgrößen $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ sowie berechneten Zustandsgrößen $\mathcal{X}^{(i)}$ zur Verfügung stellen. Auf Basis dieser Informationen erfolgt anschließend die globale Fehlerisolation. Zu diesem Zweck wird eine Konsistenzprüfung aller fehlerbehafteten Systembeschreibungen $\tilde{\mathcal{B}}^{(g)}$ anhand von

$$\bigcup_{i=1}^N (\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)}) \in \mathcal{B}_{F_j^{(g)}}^{(g)} \quad \forall \mathcal{B}_{F_j^{(g)}}^{(g)} \in \tilde{\mathcal{B}}^{(g)} \quad (4.33)$$

⁹ Bei den Zustandsmengenbeobachtern auf Basis von Paritätsgleichungen (siehe Abschnitt 3.4 und 5) ist diese Aussage garantiert. Wenn alle an den Entwurf des Zustandsmengenbeobachters gestellten Annahmen erfüllt sind, kann daher die folgende Aussage getroffen werden: Bei einer Inkonsistenz $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)}) \notin \mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ mit dem nominalen Systemverhalten ist garantiert ein Fehler im technischen System bzw. Subsystem vorhanden.

durchgeführt. Liegt eine Konsistenz mit einem Fehlerkandidaten vor, so ist der Fehler erfolgreich isoliert. Für den Fall, dass mehrere Fehlerkandidaten eine Konsistenz aufweisen, sei auf die Anmerkung 3.15 verwiesen.

Anhand des nachfolgenden Beispiels soll die vorgestellte prinzipielle Vorgehensweise zur Bestimmung der Fehlerkandidaten sowie die zugehörigen Systembeschreibungen im Rahmen der verteilten Fehlerdiagnose verdeutlicht werden. Die detaillierte Umsetzung dieser Vorgehensweise zur verteilten Fehlerdiagnose wird im Zusammenhang mit den jeweiligen Zustandsmengenbeobachtern in den Abschnitten 5.2 und 6.2 erläutert.

Beispiel 4.2:

Gegeben sei das Zwei-Tank-System aus dem vorherigen Beispiel 4.1. Hierbei entspricht die verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung (4.21) mit der Ausgangsgleichung (4.22) der nominalen Systembeschreibung des ersten Subsystems $\mathcal{B}_{F_0}^{(1)}$ sowie (4.23) mit (4.24) dem des zweiten Subsystems $\mathcal{B}_{F_0}^{(2)}$. Mittels der lokalen Konsistenzprüfung (4.27) werden diese Systembeschreibungen in den jeweiligen LFDs zur Fehlerdetektion genutzt. Für die Fehlerisolierung werden die folgenden Fehlerkandidaten betrachtet:

- $F_1^{(g)}$: Offsetfehler bzw. Nullpunktverschiebung der Füllstandsmessung am ersten Tank um den Wert $[f_1]$.
- $F_2^{(g)}$: Rohrverstopfung zwischen Tank 1 und Tank 2, welche den Durchfluss um den Wert $[f_2]$ mit $\underline{f}_2 > 0$ und $\bar{f}_2 < 1$ mindert.

In Abbildung 4.5 sind diese Fehlerkandidaten und ihre Angriffspunkte zur Veranschaulichung dargestellt.

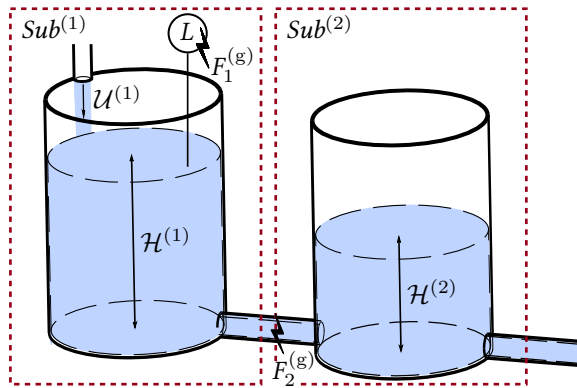


Abbildung 4.5: Potenzielle Fehlerkandidaten im Zwei-Tank-Systems

Für die Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ sowie $F_2^{(g)}$ muss jeweils eine eigene (globale) unsichere Zustandsraumdarstellung hergeleitet werden. Bei dem Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ handelt es sich

um einen additiven Fehler nach Definition 2.8. Das zugehörige fehlerhafte Systemverhalten wird durch die Zustandsraumdarstellung (vgl. (4.16))

$$\mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{U}^{(g)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} \\ \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)}} \right) \end{pmatrix} \\ \mathcal{Y}^{(g)} &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^{(g)} + [f_1] \\ \mathcal{H}_2^{(g)} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.34)$$

beschrieben. Der zweite Fehlerkandidat $F_2^{(g)}$ wirkt multiplikativ auf die Kreisfläche des Rohrs $[A_R]$ und ist daher ein multiplikativer Fehler gemäß Definition 2.9. Die zugehörige Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{U}^{(g)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] [f_2] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} \\ \frac{[A_R] [f_2] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)}} \end{pmatrix} \\ \mathcal{Y}^{(g)} &= \mathcal{H}^{(g)} \end{cases} \quad (4.35)$$

Die Menge aller zugehörigen globalen Systembeschreibungen (4.30) ist somit anhand von

$$\tilde{\mathcal{B}}^{(g)} = \left\{ \mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}, \mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} \right\} \quad (4.36)$$

beschrieben. Auf Basis dieser Systembeschreibungen erfolgt im GFI die Fehlerisolation.

4.3.2 Behandlung von Paketverlusten und Verzögerungen in der Kommunikation

Für die verteilte Fehlerdiagnose ist eine Kommunikation über ein Netzwerk zum Austausch von Informationen notwendig. Die LFDs tauschen untereinander die jeweiligen relevanten Zustandsinformationen $\mathcal{X}^{(i)}$ (siehe Definition 4.2) aus. Nach der Detektion eines Fehlers von einem oder mehreren LFDs werden die jeweils aktuellen Messungen aller LFDs $\bigcup_{i=1}^N (\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ an den GFI übertragen. Die LFDs kommunizieren somit bidirektional und der GFI unidirektional. Allerdings können im Rahmen der Kommunikation auch ungewollte Störungen auftreten, welche bei der verteilten Fehlerdiagnose geeignet berücksichtigt werden müssen, um die Eigenschaft der Robustheit aus Abschnitt 4.1 zu erfüllen. In dieser Arbeit wird das Netzwerk ausschließlich auf einer hohen Abstraktionsebene betrachtet, wobei es in Form von zufälligen Verzögerungen und nicht vorhersagbaren Paketverlusten dargestellt werden kann. Um einen Paketverlust oder eine Verzögerung zu erkennen, müssen neben den Zustands- und Messinformationen noch weitere Informationen übertragen werden. Für die

Kommunikation zwischen den LFDs wird daher folgendes Datenpaket bzw. Tupel angewendet:

$$\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(i)}(t_k) = \left\langle \begin{array}{c} \mathcal{X}^{(i)}(t_k) \\ t_k \\ k \\ i \end{array} \right\rangle, \quad (4.37)$$

wobei dieses Tupel vom i -ten Subsystem zum Zeitpunkt t_k versendet wurde. Das Tupel (4.37) enthält somit den benötigten aktuellen Zustandsmengenvektor $\mathcal{X}^{(i)}(t_k)$ für die jeweils anderen Subsysteme, den aktuellen Zeitpunkt t_k zur Ermittlung von Verzögerungen, die fortlaufende Paketnummer k zur Detektion von Paketverlusten sowie die Variable i zur Identifizierung des i -ten Subsystems. Wird zum Zeitpunkt t_d ein Fehler detektiert, so übertragen alle LFDs ein erweitertes Tupel an den GFI:

$$\mathbf{p}_{\text{GFI}}^{(i)}(t_k) = \left\langle \begin{array}{c} (\mathcal{U}^{(i)}(t_k), \mathcal{Y}^{(i)}(t_k)) \\ \mathcal{X}^{(i)}(t_{k-1}) \\ t_k \\ k \\ i \end{array} \right\rangle \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (4.38)$$

für $t_k \geq t_d$. Dieses Tupel enthält im Gegensatz zum Tupel $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(i)}$ zusätzlich auch noch die aktuellen Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen $(\mathcal{U}^{(i)}(t_k), \mathcal{Y}^{(i)}(t_k))$, welche zur globalen Fehlerisolierung (siehe (4.33)) benötigt werden. Der Zustandsmengenvektor $\mathcal{X}^{(i)}(t_{k-1})$ wird beim GFI zur Initialisierung der Zustandsmengenbeobachter genutzt, ein Vorgang, der in den Abschnitten 5.2 und 6.2 erläutert wird.

In den folgenden beiden Abschnitten wird je eine Vorgehensweise zur geeigneten Berücksichtigung von Verzögerungen sowie Paketverlusten für die verteilte Fehlerdiagnose basierend auf Modellbeschreibungen gemäß Definition 4.3 vorgestellt.

Verzögerungen in der Kommunikation

Die im Folgenden vorgestellte Vorgehensweise basiert auf der Voraussetzung, dass alle Zeiten bzw. Uhren in den LFDs und dem GFI miteinander synchronisiert (engl. clock synchronization) sind. Diese Voraussetzung ist wichtig für die Festlegung eines gemeinsamen Zeitrahmens (engl. common time-frame) und wird häufig in der Literatur verwendet [RSB90, RLK⁺09, GAF⁺14]. Erhält der LFD⁽ⁱ⁾ Informationen vom LFD^(j), kann der in Abbildung 4.6 dargestellte Zeitstrahl angegeben werden. Der LFD^(j) sendet das Tupel $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ zum Zeitpunkt t_k an den LFD⁽ⁱ⁾. Aufgrund von Verzögerungen in der Kommunikation wird das Tupel erst zum Zeitpunkt $t_k + \tau_c$ vom LFD⁽ⁱ⁾ empfangen. Zusätzlich können noch weitere Verzögerungen durch bspw. die Verarbeitungsdauer oder das Anfordern von Messungen im LFD⁽ⁱ⁾ hinzukommen, welche in τ_m zusammengefasst werden. In der Folge werden die Informationen $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ erst zum Zeitpunkt $\hat{t}_k > t_k$ im LFD⁽ⁱ⁾ verarbeitet. Die gesamte Verzögerung ist folglich durch

$$\Delta\tau := \tau_c + \tau_m = \hat{t}_k - t_k \quad (4.39)$$

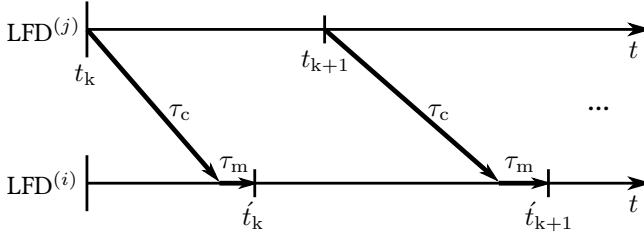


Abbildung 4.6: Zeitstrahl der Kommunikation zwischen zwei LFDs

gegeben. Zu beachten ist auch, dass aufgrund der zeitkontinuierlichen Systembeschreibung die Abstände $t_{k+1} - t_k$ bzw. $\acute{t}_{k+1} - \acute{t}_k$ nicht zwingend äquidistant sein müssen. Durch die aufgetretene Verzögerung $\Delta\tau$ ist der Zustandsmengenvektor $\mathcal{X}^{(j)}(t_k)$ aus dem Tupel $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ nicht mehr aktuell. Deshalb müssen die aus der Verzögerung $\Delta\tau$ resultierenden Unsicherheiten im jeweiligen Subsystem zusätzlich berücksichtigt werden. Grundsätzlich müssen für eine garantierte bzw. verifizierte Lösungseinschließung (siehe Abschnitt 3.3.1) alle Unsicherheiten im Modell explizit berücksichtigt werden.

Aufgrund der verteilten Systembeschreibung nach Definition 4.3 ist die maximal zulässige Änderungsrate $\text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(i)}\} = [\dot{\mathbf{z}}^{(i)}]$ der externen unsicheren Zustände bekannt (siehe (4.15)). Diese wird im Folgenden genutzt, um die Unsicherheiten resultierend aus der Verzögerung $\Delta\tau$ zu bestimmen. Hierfür wird zunächst der aus dem j -ten Subsystem empfangene Zustandsmengenvektor $\mathcal{X}^{(j)}(t_k)$ aus dem Tupel $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ unter zur Hilfenahme der Transformationsvorschriften (4.9) auf das i -te Subsystem übertragen:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(i)}(t_k) &= \mathbf{R}^{(i)} \mathcal{X}^{(g)}(t_k) \\ &= \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{T}^{(j)\dagger} \mathcal{X}^{(j)}(t_k) .\end{aligned}\tag{4.40}$$

Die maximale Änderungsrate $[\dot{\mathbf{z}}^{(i)}]$ aus (4.15) multipliziert mit der Verzögerung $\Delta\tau$ ergibt die untere und obere Schranke der resultierenden Unsicherheit aus der Verzögerung. Somit kann mittels

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{(i)}(\acute{t}_k = t_k + \Delta\tau) &= \mathcal{Z}^{(i)}(t_k) + \Delta\tau [\dot{\mathbf{z}}^{(i)}] \\ &= \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{T}^{(j)\dagger} \mathcal{X}^{(j)}(t_k) + \Delta\tau [\dot{\mathbf{z}}^{(i)}]\end{aligned}\tag{4.41}$$

der externe Zustandsmengenvektor zum Zeitpunkt $\acute{t}_k = t_k + \Delta\tau$ angegeben werden. Die Verzögerung $\Delta\tau$ wird hierbei nach (4.39) aus der Zeitvariable t_k des empfangenen Tupels $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ sowie der aktuellen Zeit \acute{t}_k des i -ten Subsystems gebildet.

Da die Fehlerisolation im GFI – im Gegensatz zur Fehlerdetektion bei den LFDs – weder synchron zu anderen Recheneinheiten noch in Bezug zur Laufzeit erfolgen muss und zudem für die Konsistenzprüfung ausschließlich die Ein- und Ausgangsgrößen relevant sind, muss daher die Verzögerung nicht explizit betrachtet werden. Lediglich die Schrittweite der Zustandsmengenbeobachter zur Fehlerisolation muss so angepasst werden, dass alle Ein- und Ausgangsgrößen berücksichtigt werden.

Anmerkung 4.4. Es ist zu beachten, dass eine große Verzögerung $\Delta\tau$ aufgrund von $\Delta\tau [\dot{z}^{(i)}]$ zu einem ungewollt großen Aufblähen des externen Zustandsmengenvektors (4.41) führt und somit einen negativen Einfluss auf die Sensitivität (siehe Definition 2.20) des Fehlerdiagnosealgorithmus hat. Deshalb sollten die Verzögerungen im Rahmen der Kommunikation idealerweise so gering wie möglich gehalten werden.

Anmerkung 4.5. Falls die Zeitpunkte \acute{t}_k und/oder t_k ebenfalls mit Unsicherheiten behaftet sind, kann die Verzögerung $\Delta\tau$ als intervallwertige Größe $[\Delta\tau]$ dargestellt werden.

Paketverluste in der Kommunikation

Wird der Ausfall eines Pakets bzw. Tupels $\mathbf{p}_{\text{LFD}}^{(j)}(t_k)$ oder $\mathbf{p}_{\text{GFI}}^{(j)}(t_k)$ von der anfordernden Einheit (LFD⁽ⁱ⁾ oder GFI) erkannt, so müssen geeignete Maßnahmen getroffen werden, um die Zustandsmengenbeobachtung und folglich die Fehlerdiagnose fortzusetzen zu können. Für die Transformation des Zustandsmengenvektors $\mathcal{X}^{(j)}(t_k)$ in den externen Zustandsmengenvektor $\mathcal{Z}^{(i)}(t_k)$ gilt die Vorschrift (4.40). Wird zum Zeitpunkt t_P vom LFD⁽ⁱ⁾ anhand der fortlaufenden Nummer im Tupel (4.37) ein Verlust des Paketes erkannt, so wird für den externen Zustandsmengenvektor eine unendliche Unsicherheit

$$\mathcal{Z}^{(i)}(t_P) = [-\infty, \infty] \quad (4.42)$$

angenommen. Offenkundig erfüllt dieser externe Zustandsmengenvektor die Voraussetzung, alle Unsicherheiten zu enthalten. Welche konkrete Auswirkung (4.42) auf den Korrektur- bzw. Fusionsschritt des jeweiligen Zustandsmengenbeobachters hat, wird in den zugehörigen Abschnitten 5.2 sowie 6.2 erläutert.

Beim GFI wird bei einem Paketverlust $\mathbf{p}_{\text{GFI}}^{(j)}(t_k)$ ebenfalls eine unendliche Unsicherheit für die Ein- und Ausgangsgrößen

$$(\mathcal{U}^{(i)}(t_P), \mathcal{Y}^{(i)}(t_P)) = ([-\infty, \infty], [-\infty, \infty]) \quad (4.43)$$

angenommen.

Anmerkung 4.6. Analog zu den Verzögerungen gilt, dass mehrere aufeinanderfolgende Paketverluste zu einem ungewollt starken Aufblähen des externen Zustandsmengenvektors führen und sich daher negativ auf die Sensitivität des Fehlerdiagnosealgorithmus auswirken, bis hin zu einem vollständigen Abbruch des Verfahrens.

4.4 Analyse der Rechenzeit- und Speicherersparnis

In diesem Abschnitt soll die potenzielle Rechenzeit- und Speicherersparnis im Rahmen der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern analysiert werden. Wie in Abschnitt 4.1 erläutert, resultiert die Rechenzeit- und Speicherersparnis aus der Modellreduktion im jeweiligen Subsystem. Aus diesem Grund wird im Folgenden die verwendete Modellbeschreibung genauer betrachtet.

In dieser Arbeit wird eine verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung nach Definition 4.3 verwendet, wobei Taylor-Modelle (siehe Abschnitt 3.2.2) zur mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibung eingesetzt werden. Aus diesem Grund wird zunächst der benötigte Rechen- und Speicheraufwand bei Taylor-Modellen zur Repräsentation der globalen, unsicheren Systembeschreibung gemäß Definition 3.3 ermittelt. Ein Taylor-Modell ℓ -ter Ordnung setzt sich aus einem multivariaten Polynomanteil sowie einem intervallwertigen Restglied zusammen (siehe Definition 3.11) und besteht daher aus einer Linearkombination von bis zu

$$\binom{\vartheta + \ell}{\ell} = \frac{(\vartheta + \ell)!}{\vartheta! \ell!} \quad (4.44)$$

möglichen Monomen [Kun97], mit ℓ der Taylor-Modell-Ordnung bzw. dem Totalgrad des Polynoms. Die Variable ϑ gibt die Anzahl der Variablen im Taylor-Modell an, wobei bei einer globalen Systembeschreibung¹⁰ $\vartheta^{(g)} = n^{(g)} + r^{(g)} + p^{(g)} + 1$ und bei einer verteilten Systembeschreibung $\vartheta^{(i)} = n^{(i)} + r^{(i)} + p^{(i)} + 1$ gilt. Die externen Zustände werden als intervallwertige Parameter (siehe (4.15)) ins verteilte Zustandsraummodell aufgenommen und sind daher kein Bestandteil der Variable $\vartheta^{(i)}$.

Der benötigte Speicheraufwand im Zuge des Einsatzes von Taylor-Modellen ist unmittelbar abhängig von der Anzahl der Monome (4.44). Je größer das Taylor-Modell in Bezug auf die Anzahl der Monome ist, desto höher ist auch der Speicherbedarf. Zur Analyse der Rechenzeit werden im Folgenden die Anzahl der arithmetischen Operationen (vgl. [HSST78, TFW19]) zur Auswertung eines Taylor-Modells bestimmt, wobei angenommen wird, dass kein Term im Taylor-Modell entfällt und somit (4.44) die exakte Anzahl der Monome angibt. Ein Taylor-Modell gemäß Definition 3.11 setzt sich ausschließlich aus den arithmetischen Operationen Additionen und Multiplikationen zusammen. Die Anzahl der Additionen ist direkt abhängig von der Anzahl der Monome (4.44) und ist anhand von

$$K_{\text{add}}(\ell, \vartheta) = \binom{\vartheta + \ell}{\ell} - 1 \quad (4.45)$$

gegeben. Bei einer naiven Auswertung des Taylor-Modells werden

$$K_{\text{mul}}(\ell, \vartheta) = 2 \left(\binom{\vartheta + \ell}{\ell} - 1 \right) - \vartheta \quad (4.46)$$

Multiplikationen benötigt, wobei jede Potenz nur einmalig berechnet wird [Kun97]. Insgesamt werden somit

$$K(\ell, \vartheta) = K_{\text{add}}(\ell, \vartheta) + K_{\text{mul}}(\ell, \vartheta) = 3 \left(\binom{\vartheta + \ell}{\ell} - 1 \right) - \vartheta \quad (4.47)$$

arithmetische Operationen durchgeführt, um ein Taylor-Modell auszuwerten. Aus (4.47) sowie der zugehörigen Abbildung 4.7 ist ersichtlich, dass die Variablen ℓ sowie ϑ einen starken Einfluss auf die Rechenzeit haben. Zudem handelt es sich bei der Systemgleichung des globalen Systems (3.9a) bzw. des verteilten Systems (4.8a) um eine Vektordifferentialgleichung,

¹⁰ Ein Taylor-Modell setzt sich in dieser Arbeit aus den Variablen $\mathbf{v}_{\mathbf{x}^{(g)}} \in \mathbb{R}^{n^{(g)}}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{o}^{(g)}} \in \mathbb{R}^{r^{(g)}}$, $\mathbf{v}_{\mathbf{u}^{(g)}} \in \mathbb{R}^{p^{(g)}}$ (siehe Abschnitt 3.4.1) sowie der Zeit t zusammen.

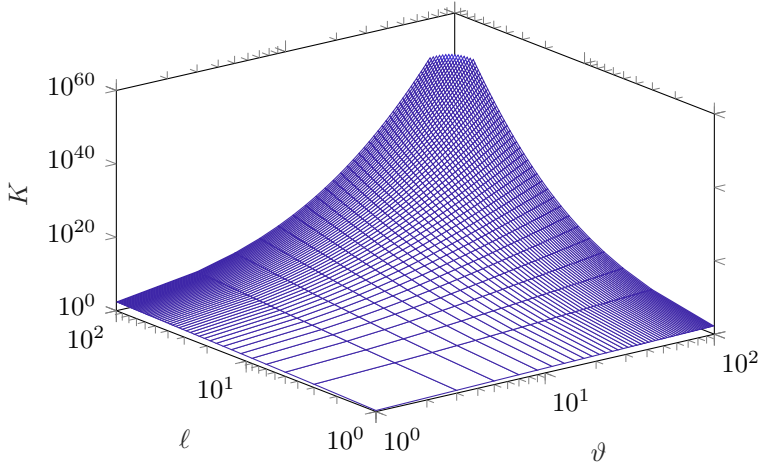


Abbildung 4.7: Anzahl der arithmetischen Operationen K in Abhängigkeit von der Taylor-Modell-Ordnung ℓ und der Variablenanzahl ϑ

was zu einem vektoriellen Taylor-Modell (3.51) führt. Bei der globalen Systembeschreibung liegen $\varsigma^{(\text{g})} = n^{(\text{g})}$ gekoppelte Zustandsdifferentialgleichungen vor. Zur Beschreibung des verteilten Systems werden die $n^{(i)}$ Zustandsdifferentialgleichungen durch zusätzliche $m^{(i)}$ externe Zustandsgleichungen ergänzt, d. h. $\varsigma^{(i)} = n^{(i)} + m^{(i)}$. Zusammenfassend werden zur Auswertung eines vektoriellen Taylor-Modells, welches die unsicheren Zustandsraumdarstellungen (3.9) bzw. (4.8) beschreibt, insgesamt

$$K_{\text{ges}}(\ell, \vartheta, \varsigma) = \varsigma K(\ell, \vartheta) = \varsigma \left(3 \left(\binom{\vartheta + \ell}{\ell} - 1 \right) - \vartheta \right) \quad (4.48)$$

arithmetische Operationen benötigt.

Um das Ziel der Rechenzeit- und Speichersparnis zu erreichen, ist es naheliegend, die Systemordnung sowie die Taylor-Modell-Ordnung zu verringern. Wenn der lokale Zustandsmengenvektor (4.2) eine echte Teilmenge des globalen Zustandsmengenvektors darstellt, besitzt das i -te Subsystem nur noch die lokale Systemordnung $n^{(i)} < n^{(\text{g})}$. Auch kann in vielen Fällen für das Subsystem eine niedrigere Taylor-Modell-Ordnung $\ell^{(i)} \leq \ell^{(\text{g})}$ gewählt werden, da das Subsystem in der Regel eine geringere Komplexität aufweist und daher eine weniger hohe Genauigkeit der Einschließung gewählt werden kann. Aus diesen Gründen verringert sich die Anzahl der benötigten Monome (4.44) zur Darstellung des Taylor-Modells und mit hin der benötigte Speicherbedarf. Des Weiteren gilt bei $n^{(i)} < n^{(\text{g})}$ für die benötigte Rechenzeit zur Auswertung der Taylor-Modelle $K_{\text{ges}}^{(i)}(\ell^{(i)}, \vartheta^{(i)}, \varsigma^{(i)}) < K_{\text{ges}}^{(\text{g})}(\ell^{(\text{g})}, \vartheta^{(\text{g})}, \varsigma^{(\text{g})})$. Daher kann folgende Aussage getroffen werden: Die Parallelisierung der Systemgleichungen und die implizite Ordnungsreduktion des Zustandsraums in den einzelnen Subsystemen führt zu einer Verringerung des benötigten Speicher- und Rechenaufwands.

Anmerkung 4.7. Der zusätzliche Speicher- und Rechenaufwand bei der Intervallarithmetik, welcher u. a. beim intervallwertigen Restglied des Taylor-Modells eingesetzt wird, ist in (4.48)

nicht berücksichtigt. Dieser Mehraufwand ist vergleichsweise gering und betrifft das globale System sowie die Subsysteme gleichermaßen und kann folglich im Rahmen dieser Analyse vernachlässigt werden.

Anmerkung 4.8. Bei der Umsetzung der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern muss beachtet werden, dass in jedem Subsystem ein zusätzlicher Fusionsschritt erfolgen muss. Allerdings ist dieser zusätzliche Aufwand bei der Betrachtung des gesamten Rechen- und Speicheraufwands vernachlässigbar [Hil12, TFW19, Kup19].

Im nachfolgenden Beispiel wird eine Abschätzung der potenziellen Speicher- und Rechenzeitersparnis für das Zwei-Tank-System angegeben. Ein weiterer Vergleich der Speicher- und Rechenzeitersparnis mit realen Messdaten wird in Kapitel 7 durchgeführt.

Beispiel 4.3:

In diesem Beispiel wird das Zwei-Tank-System aus Beispiel 4.1 aufgegriffen. Im globalen System werden zur Beschreibung der unsicheren Zustandsraumdarstellung (4.16) mittels Taylor-Modellen $\vartheta^{(g)} = n^{(g)} + r^{(g)} + p^{(g)} + 1 = 7$ Variablen eingesetzt. Für die jeweiligen Subsysteme werden $\vartheta^{(1)} = 6$ bzw. $\vartheta^{(2)} = 5$ Variablen benötigt. Für die Anzahl der Zustandsdifferentialgleichungen gilt jeweils $\varsigma^{(g)} = n^{(g)} = 2$, $\varsigma^{(1)} = n^{(1)} + m^{(1)} = 2$ sowie $\varsigma^{(2)} = 2$.

Im ersten Fall bleibt die Taylor-Modell-Ordnung $\ell = \ell^{(g)} = \ell^{(1)} = \ell^{(2)} = 3$ unverändert. Für den benötigten Speicheraufwand (siehe (4.44)) lässt sich eine potenzielle Reduzierung von ungefähr

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(1)} + \ell)!}{\vartheta^{(1)}! \ell!} \middle/ \frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 30\% \quad (4.49)$$

und

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(2)} + \ell)!}{\vartheta^{(2)}! \ell!} \middle/ \frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 53,3\% \quad (4.50)$$

im Verhältnis zur globalen Systembetrachtung abschätzen. Für den benötigten Rechenaufwand resultiert eine potenzielle Rechenzeitersparnis von ca.

$$1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(1)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 30,6\% \quad \text{und} \quad 1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(2)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 54,3\% . \quad (4.51)$$

Im zweiten Fall wird zusätzlich die Taylor-Modell-Ordnung in den Subsystem auf $\ell^{(1)} = \ell^{(2)} = 2$ reduziert, wobei $\ell^{(g)} = 3$ beibehalten wird. Im Rahmen dessen wird eine potenzielle Speicherersparnis von etwa 76,7% für das erste Subsystem und 82,5% für das zweite Subsystem erzielt. Mit Blick auf den Rechenaufwand kann eine Reduzierung in Höhe von ungefähr 78,6% bzw. 84,3% für das erste bzw. zweite Subsystem erreicht werden.

Anhand dieses einfachen Beispiels ist bereits das Potenzial einer verteilten Systembetrachtung zu erkennen. Bereits durch die lokale Ordnungsreduktion konnte der Rechen- und Speicherbedarf erheblich verringert werden. Dieser Effekt wurde zusätzlich verstärkt, als die Taylor-Modell-Ordnung in den lokalen Subsystemen reduziert wurde.

4.5 Zusammenfassung

Der Fokus dieses Kapitels lag auf einer Übertragung der grundlegenden Prinzipien der verteilten Zustandsschätzung auf eine unsichere Systembeschreibung. Die Verteilung des monolithischen, unsicheren Systems in mehrere unsichere Subsysteme erfolgt unter Berücksichtigung der Annahmen 4.1 - 4.3 nach Definition 4.3 und führt schlussendlich zu einer verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung. Die externen Einflüsse bzw. Dynamiken anderer Subsysteme auf das betrachtete Subsystem werden vollständig mithilfe der Intervallarithmetik eingeschlossen und sind daher als unsichere Parameterschätzung des externen Zustandsmengenvektors zu interpretieren. Im Resultat ermöglicht dies eine explizite Berücksichtigung der externen Dynamiken, ohne Restriktionen zu formulieren. Durch die Anwendung der Verteilung auf unsichere Systeme konnten die genannten Eigenschaften bzw. Vorteile wie Modularität, Robustheit, Skalierbarkeit, Flexibilität sowie die angestrebte Ordnungsreduktion auch auf diese Systemklasse übertragen werden.

Im nächsten Schritt wurde das Design einer geeigneten Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose basierend auf der neu eingeführten verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung diskutiert. Aus der Verteilung resultiert eine flexible Struktur, da ausschließlich jene Subsysteme miteinander kommunizieren, deren Unterraum des Zustandsmengenvektors sich überschneiden. Im Anschluss wurden die Fehlerkandidaten auf die zugehörigen Subsysteme aufgeteilt, sodass eine lokale Fehlerdiagnose auf lokalen Recheneinheiten möglich ist. Ferner hat sich gezeigt, dass es sinnvoll ist, die Aufgaben Fehlerdetektion und -isolation zu separieren. Vorteilhaft an diesem Vorgehen ist, dass auf der lokalen Recheneinheit ausschließlich eine Fehlerdetektion auf Grundlage des nominalen Modells durchgeführt werden muss. Die rechenaufwendige Fehlerisolation wurde auf eine globale Recheneinheit ausgelagert. Aus der Kommunikation zwischen den Recheneinheiten resultieren allerdings weitere potenzielle Unsicherheiten in Form von Verzögerungen und Paketverlusten. Diese wurden ebenfalls mithilfe der Intervallarithmetik eingeschlossen und können somit explizit berücksichtigt werden.

Abschließend wurde aufgezeigt, dass die sich aus der Verteilung ergebende Ordnungsreduktion zu einer erheblichen Reduktion des Speicher- und Rechenaufwands beiträgt. Dazu wurde die Anzahl der Monome und der arithmetischen Operationen ermittelt, welche ein vektorielles Taylor-Modell zur Repräsentation der unsicheren Zustandsraumdarstellung benötigt. Diese Informationen wurden genutzt, um die potenzielle Speicher- und Rechenzeiterparnis bei der verteilten Systembeschreibung gegenüber der monolithischen Systembeschreibung zu analysieren. Im Zuge dessen wurde festgestellt, dass, wenn der lokale Zustandsmengenvektor (4.2) eine echte Teilmenge des globalen Zustandsmengenvektors $n^{(i)} < n^{(g)}$ darstellt, eine Reduktion des Speicher- und Rechenaufwands erzielt wird. Dieser Effekt kann zusätzlich durch eine niedrige Wahl der Taylor-Modell-Ordnung $\ell^{(i)} \leq \ell^{(g)}$ in den Subsystemen verstärkt werden.

5 Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme

Die im vorherigen Kapitel 4 neu eingeführte allgemeine Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose unsicherer, nichtlinearer Systeme benötigt für den Fehlerdiagnosealgorithmus in den LFDs sowie dem GFI einen Zustandsmengenbeobachter zur Rekonstruktion des Zustandsmengenvektors. Grundlage hierfür bilden die verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung nach Definition 4.3 und die unsicheren Messungen der Ein- und Ausgangsgrößen. Im Rahmen dieser Arbeit werden erstmalig zwei unterschiedliche Methoden basierend auf Paritätsgleichungen bzw. Zustandsbeobachtern (siehe Abschnitt 2.2.2) präsentiert. In diesem Kapitel wird die erste Methode, d. h. ein Zustandsmengenbeobachter basierend auf Paritätsgleichungen für verteilte, unsichere Systeme, vorgestellt. Dieser Zustandsmengenbeobachter wurde bereits für eine monolithische Systembeschreibung in Abschnitt 3.4 eingeführt und wird in der Verwendung im Rahmen der Fehlerdiagnose als konsistenzbasierte Fehlerdiagnose bezeichnet. Dieser Ansatz wird aufgegriffen und um einen sogenannten „Fusionsschritt“ erweitert. Innerhalb dieses Fusionsschrittes werden relevante Informationen aus anderen Subsystemen gesammelt, um die lokal geschätzten Zustandsmengen zu verbessern. Das Resultat ist ein verteilter Zustandsmengenbeobachter, welcher eine konsistenzbasierte Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme ermöglicht. Dieses Kapitel trägt somit zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 bei. Da auch in diesem Abschnitt ausschließlich nichtlineare Systeme betrachtet werden, wird im Folgenden der Zusatz „nicht-linear“ nicht mehr explizit aufgeführt.

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 die verteilte konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für verteilte, unsichere Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtern vorgestellt. Anschließend werden in Abschnitt 5.2 die einzelnen Algorithmen zur Fehlerdetektion sowie zur Fehlerisolation beschrieben. In Abschnitt 5.3 werden abschließend alle Ergebnisse und Erkenntnisse zusammengefasst.

5.1 Verteilte konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme

In diesem Abschnitt wird die verteilte konsistenzbasierte Fehlerdiagnose für verteilte, unsichere Systeme gemäß Definition 4.3 vorgestellt. Die Grundlage hierfür bildet das in Abschnitt 3.4 eingeführte Prinzip der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern. Dieses Prinzip wird der Kategorie der Fehlerdiagnose basierend auf Paritätsgleichungen (siehe Abschnitt 2.2.2) zugeordnet, da keine Rückführung des Beobachterfehlers erfolgt. Zudem macht die angestrebte verteilte Systemarchitektur eine verteilte Fehlerdiagnose erforderlich und daher auch den Einsatz von verteilten Zustandsmengenbeobachtern.

Im Rahmen der verteilten Zustandsmengenbeobachtung wird, ergänzend zu den bekannten Schritten Prädiktion und Korrektur, der Fusionsschritt benötigt. Dieser Schritt ist notwendig, um relevante Informationen aus anderen Subsystemen für die lokale Schätzung berücksichtigen zu können. Alle drei Schritte werden in den folgenden zwei Abschnitten konkret erläutert, wobei die Schritte Korrektur und Fusion zusammengefasst werden.

5.1.1 Prädiktion

Aufgrund der verteilten Systemarchitektur existieren im i -ten Subsystem die lokalen Zustandsmenge $\mathcal{X}^{(i)}$ sowie die externe Zustandsmenge $\mathcal{Z}^{(i)}$ als zu rekonstruierende Größen. Diese werden mit ihren zugehörigen Transformationsvorschriften (4.9a) und (4.9b) zur einfacheren Betrachtung im Folgenden zusammengefasst:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{X}^{(i)} \\ \mathcal{Z}^{(i)} \end{pmatrix}}_{=: \tilde{\mathcal{X}}^{(i)}} = \underbrace{\begin{pmatrix} T^{(i)} \\ R^{(i)} \end{pmatrix}}_{=: \tilde{T}^{(i)}} \mathcal{X}^{(g)} \quad (5.1)$$

mit $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$ sowie $\tilde{T}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{\binom{n^{(i)}+m^{(i)}}{n^{(g)}} \times n^{(g)}}$. Der allgemeine externe Zustandsmengenvektor $\dot{\mathcal{Z}}^{(i)}$ wird hierbei ausschließlich als intervallwertiger Parameter (siehe (4.15)) in die lokale Zustandsraumdarstellung aufgenommen, d. h. $[\mathcal{Z}^{(i)}] \supseteq \mathcal{Z}^{(i)}$ mit $[\mathcal{Z}^{(i)}] \in \mathbb{R}^{m^{(i)}}$. Diese beschreibt das nominale Systemverhalten des i -ten Subsystems und weist die folgende Gestalt auf (vgl. Definition 4.3):

$$\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)} = \begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}^{(i)} & = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{X}}^{(i)} \\ \dot{\mathcal{Z}}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^{(i)}(\mathcal{X}^{(i)}, \mathcal{Z}^{(i)}, \mathcal{U}^{(i)}) \\ [\dot{\mathcal{Z}}^{(i)}] \end{pmatrix} \\ \mathcal{Y}^{(i)} & = (I_{q^{(i)}} \ 0) \tilde{\mathcal{X}}^{(i)} \end{cases} \quad (5.2)$$

Die Anfangszustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_0) = [\tilde{x}(t_0)]$ wird, wie in Abschnitt 3.4.1 erläutert, mithilfe der Intervallarithmetik angegeben. Die Prädiktion des Zustandsmengenvektors $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}$ erfolgt nach der in Abschnitt 3.4.1 unter dem Punkt „Prädiktion einer Lösungsmenge“ beschriebenen Vorgehensweise auf Basis der verifizierten Lösungseinschließung. Die finale prädizierte Zustandsmenge für das i -te Subsystem zum Zeitpunkt t_{k+1} ist anhand von

$$\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_p^{(i)}(t_{k+1}) \\ \mathcal{Z}_p^{(i)}(t_{k+1}) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

mit $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$ beschrieben.

5.1.2 Korrektur und Fusion

Der Korrekturschritt hat die wesentliche Aufgabe, die prädizierte Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ mithilfe von aktuell lokal verfügbaren Messinformationen (vgl. (3.99)), in Form der Messmenge

$$\mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}^{(i)}(t_{k+1}) \\ [-\infty, \infty] \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

wobei $\mathcal{X}_m^{(i)} \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$, zu verkleinern und somit zu verbessern. Diese Messmenge bewirkt jedoch nur eine Korrektur der ersten $q^{(i)}$ Elemente bzw. der lokal prädizierten Zustandsmenge $\mathcal{X}_p^{(i)}(t_{k+1})$ in (5.3), da die lokale Messmenge (5.4) nur die ersten $q^{(i)} \leq n^{(i)}$ Elemente der Zustandsmenge repräsentiert. Für die insgesamt $n^{(i)} - q^{(i)} + m^{(i)}$ übrigen Zustände in der Messmenge wird ein unendliches Intervall $[-\infty, \infty]$ angenommen. Die Berechnung des Durchschnitts der prädizierten Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ mit der lokalen Messmenge (5.4) erfolgt nach der in Abschnitt 3.4.1 unter dem Punkt „Korrektur der Lösungsmenge“ beschriebenen Vorgehensweise. Das Ergebnis nach dem Korrekturschritt ist durch

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \\ \mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit $\tilde{\mathcal{X}}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$ gegeben.

Aufgrund der nicht disjunkten Aufteilung der Zustandsmengen nach (4.2) (sowie der Annahme 4.1) enthalten andere Subsysteme ebenfalls Informationen über die lokal zu bestimmende Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}$ des i -ten Subsystems. Damit diese Informationen in geeigneter Weise im jeweiligen Subsystem berücksichtigt werden, ist ein zusätzlicher Fusionsschritt erforderlich. Hierzu werden dem i -ten Subsystem die Zustandsmengenvektoren $\tilde{\mathcal{X}}^{(j)}$ mit $j = 1, \dots, N, j \neq i$ der anderen Subsysteme übermittelt (siehe Abschnitt 4.3). Um den Kommunikationsaufwand hierbei möglichst gering zu halten, werden ausschließlich die Zustandsmengenvektoren $\mathcal{X}^{(j)}$ aus (5.1) in Form von Intervallen

$$[\mathbf{x}^{(j)}] = \text{bd}\{\mathcal{X}^{(j)}\} \quad (5.6)$$

übertragen. Unter Berücksichtigung der Transformationsvorschriften (4.9a) sowie (4.9b) und der Moore-Penrose-Pseudoinverse (4.10) können die Informationen vom j -ten Subsystem auf das i -te Subsystem übertragen werden:

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}^{(i)}] &= \mathbf{R}^{(i)} [\mathbf{x}^{(g)}] \\ &= \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{T}^{(j)\dagger} [\mathbf{x}^{(j)}]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Um alle externen Zustände zu erhalten bzw. $[\mathbf{z}^{(i)}]$ zu vervollständigen, wird die Vereinigung

$$[\mathbf{z}^{(i)}] = \mathbf{R}^{(i)} \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{T}^{(j)\dagger} [\mathbf{x}^{(j)}] \quad (5.8)$$

aller Zustandsmengen benötigt. Diese Vorgehensweise mit der Bestimmung der Vereinigungsmenge ist aufgrund der getroffenen Annahme 4.1 möglich. Die Vereinigungsmenge wird anschließend genutzt, um die Schätzung der externen Zustände $\mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}$ in (5.5) zu verbessern. Dazu wird die Schnittmenge von (5.5) mit (5.8) wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_{k+1}) &= \tilde{\mathcal{X}}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \cap \begin{pmatrix} [-\infty, \infty] \\ [z^{(i)}] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{X}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \\ \mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1}) \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} [-\infty, \infty] \\ \mathbf{R}^{(i)} \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{T}^{(j)\dagger} [x^{(j)}] \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (5.9)$$

wobei für die ersten $n^{(i)}$ Elemente ein unendliches Intervall $[-\infty, \infty]$ angenommen wird. Durch das unendliche Intervall wird die im vorherigen Korrekturschritt verbesserte Zustandsmenge $\mathcal{X}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1})$ nicht beeinflusst. Die Schnittmengenbildung beeinflusst ausschließlich die externe Zustandsmenge $\mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1})$. Handelt es sich bei $[z^{(i)}]$ um eine echte Teilmenge von $\mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1})$, d. h. $[z^{(i)}] \subset \mathcal{Z}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1})$, so erfolgt eine Verkleinerung des Volumens der Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_{\text{cor}}^{(i)}(t_{k+1})$ und folglich eine Verbesserung des Schätzergebnisses aufgrund der externen Informationen. Die Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_{k+1}) \subset \mathbb{R}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$ beschreibt somit die gesuchte Zustandsmenge und bildet den Abschluss des Fusionsschritts. Wenn die Annahme 4.4 erfüllt ist und alle Unsicherheiten im Zustandsraummodell (5.2) explizit beschrieben sowie die Anfangszustände in der Anfangszustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_0)$ enthalten sind, kann die folgende Aussage getroffen werden: Die Lösungsmenge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_{k+1})$ enthält garantiert den unbekannten Zustandsvektor $\tilde{x}^{(i)}(t_{k+1})$ des realen Subsystems.

Zusammenfassend laufen im Zuge der verteilten Zustandsmengenbeobachtung insgesamt drei Schritte ab, welche schematisch in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Auf Basis der Zustands-

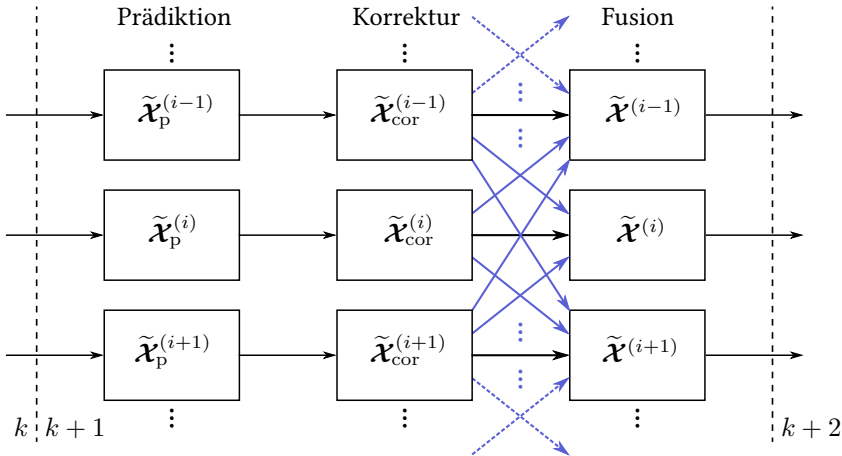


Abbildung 5.1: Schematischer Ablauf der verteilten Zustandsmengenschätzung (nach [Kup19])

menge $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_k)$ aus dem Fusionsschritt zum Zeitpunkt t_k wird im ersten Schritt die lokale

Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ für den Zeitpunkt t_{k+1} prädiziert. Anschließend werden die lokalen Messinformationen des i -ten Subsystems genutzt, um die prädizierte Menge $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ zu verkleinern. Informationen aus anderen Subsystemen werden in der nachfolgenden Fusion berücksichtigt. Die Interaktion bzw. Kommunikation zwischen den verschiedenen Subsystemen ist in Abbildung 5.1 durch blaue Pfeile gekennzeichnet.

Ist die Transformationsvorschrift $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{T}^{(j)\dagger}$ aus (5.8) zweier gegebener Subsysteme i und j gleich null, liegt keine Überschneidung der jeweiligen Zustandsräume dieser zwei Subsysteme vor. Folglich können diese dann a-priori bei der Durchführung des Korrekturschritts im Zuge der Berechnung der Vereinigungsmenge in (5.9) vernachlässigt werden, da kein Informationsaustausch zwischen Subsystem i und j erforderlich ist. Für das Schema in Abbildung 5.1 bedeutet dies, dass die entsprechenden blauen Pfeile entfernt werden können und somit die vollvernetzte Struktur aufgelöst wird.

Wird ein Paketverlust im Rahmen der Kommunikation erkannt, wird gemäß der vorgestellten Vorgehensweise aus Abschnitt 4.3.2 für den externen Zustandsmengenvektor $[\mathbf{z}^{(i)}]$ eine unendliche Unsicherheit nach (4.42) angenommen. Für die Fusion (5.9) bedeutet dies, dass die Schnittmengenbildung mit dem externen Zustandsmengenvektor $[\mathbf{z}^{(i)}]$ zu keiner Verbesserung des Ergebnisses $\tilde{\mathcal{X}}^{(i)}(t_{k+1})$ führt. Die Zustandsmengenbeobachtung bzw. die Fehlerdiagnose kann solange fortgesetzt werden, bis neue Informationen übertragen wurden.

5.2 Diagnosealgorithmus

Für die Fehlerdiagnose mit ihren Teilaufgaben Fehlerdetektion sowie Fehlerisolation wird die in Abschnitt 4.3.1 vorgestellte Architektur inklusive der Ferndiagnose verwendet. Die Grundidee des Diagnosealgorithmus wurde in [Wol10] vorgestellt und wird in diesem Abschnitt auf verteilte, unsichere Systeme erweitert, wobei noch zusätzlich das Prinzip der Ferndiagnose verwendet wird.

Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 erläutert, erfolgt in den LFDs für die Fehlerdetektion eine lokale Konsistenzprüfung nach Definition 4.4 der lokalen Messwerte $(\mathcal{U}^{(i)}, \mathcal{Y}^{(i)})$ mit der nominalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$. Hierbei ist $\mathcal{Y}^{(i)}$ durch die lokale Messmenge $\mathcal{X}_m^{(i)}$ mittels (5.4) repräsentiert. Zur Konsistenzprüfung wird das Ergebnis einer Schnittmengenbildung im i -ten Subsystem wie folgt ausgewertet:

$$\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1}) \cap \mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1}) = \emptyset \rightarrow \text{Inkonsistenz}, \quad (5.10)$$

wobei die prädizierte Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ auf Basis der nominalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ bestimmt wird. Bei einer leeren Schnittmenge (5.10) sind die Mengen $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ und $\mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1})$ disjunkt und besitzen keine gemeinsamen Elemente (vgl. (4.32)). Eine Inkonsistenz im Zuge der Zustandsmengenbeobachtung basierend auf Paritätsgleichungen garantiert daher eine Inkonsistenz zwischen dem modellierten und dem tatsächlichen Verhalten des betrachteten Subsystems, vorausgesetzt die Annahmen über die Mess- sowie Modellunsicherheiten und ggf. Kommunikationsunsicherheiten sind korrekt erfüllt. Daraus ergibt sich,

dass das modellierte nominale Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_0}^{(i)}$ garantiert nicht der Realität entspricht, was letztlich ein fehlerhaftes System bedeutet.

Die Vorgehensweise bei der Fehlerisolation im GFI ist prinzipiell identisch. Allerdings wird bei der Fehlerisolation nicht die Konsistenz mit dem nominalen Systemverhalten überprüft, sondern nach (4.33) mit den übrigen Fehlern und ihrem zugehörigen Systemverhalten (4.30). Hierzu wird ebenfalls die Schnittmenge

$$\mathcal{X}_p^{(g)}(t_{k+1}) \cap \mathcal{X}_m^{(g)}(t_{k+1}) = \emptyset \rightarrow \text{Inkonsistenz} \quad (5.11)$$

der globalen Größen nach der bereits beschriebenen Vorgehensweise im Korrekturschritt ausgewertet. Aufgrund der Annahme 4.1 kann die globale Messmenge durch

$$\mathcal{X}_m^{(g)}(t_{k+1}) = \left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{Y}^{(i)}(t_{k+1}) \right)_{[-\infty, \infty]} \quad (5.12)$$

angegeben werden. Die prinzipielle Vorgehensweise bei der verteilten, konsistenzbasierten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf Paritätsgleichungen wird anhand des Ablaufdiagramms in Abbildung 5.2 verdeutlicht. Die einzelnen Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation werden in den folgenden Abschnitten detaillierter erläutert.

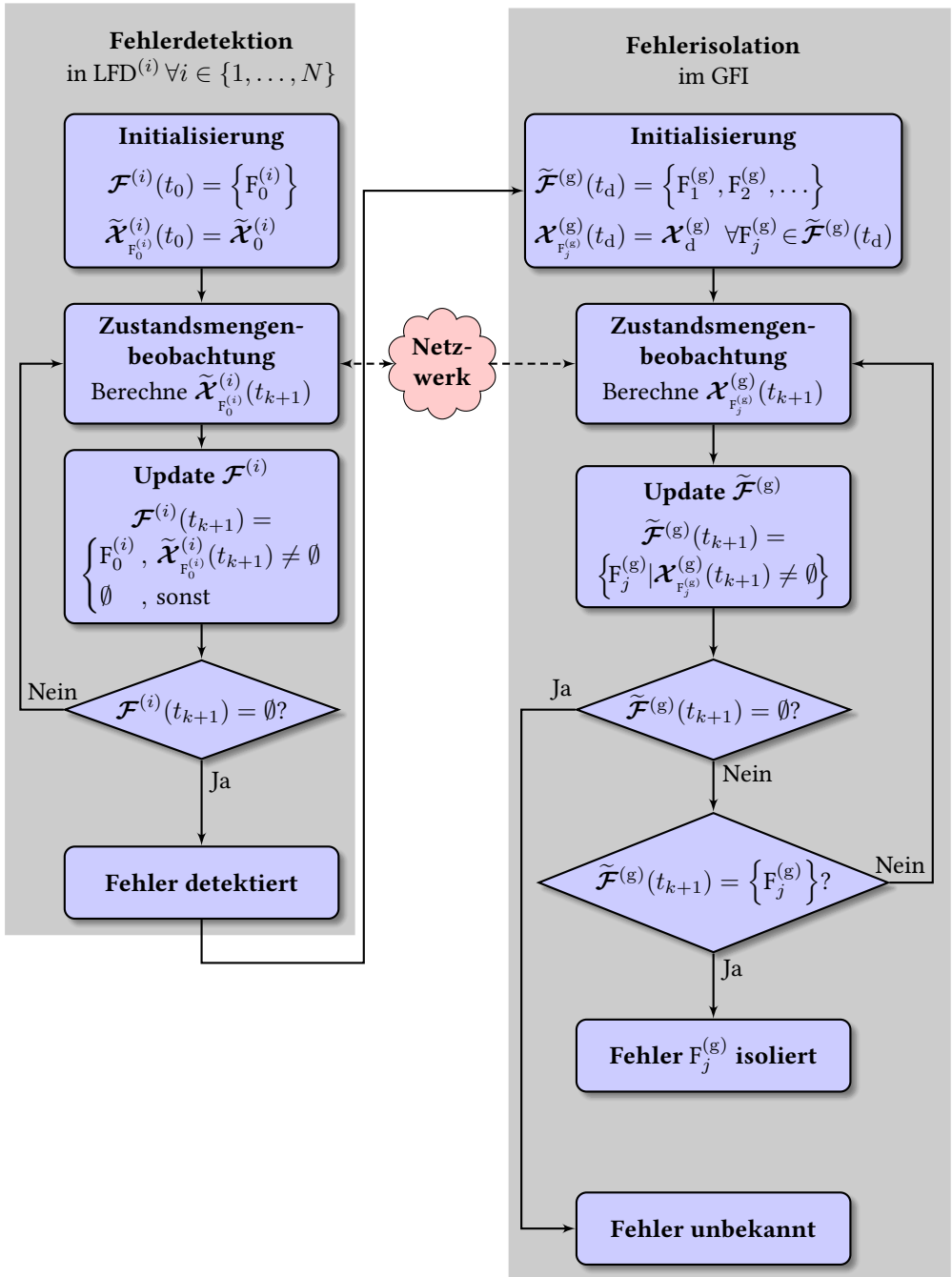


Abbildung 5.2: Prinzipieller Ablauf der verteilten, konsistenzbasierten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf Paritätsgleichungen

5.2.1 Fehlerdetektion

Für die Fehlerdetektion im LFD wird ausschließlich eine Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ des fehlerfreien Normalbetrieb $F_0^{(i)}$ benötigt. Die Fehlerlisten in den LFDs werden somit einzig mit

$$\mathcal{F}^{(i)}(t_0) = \{F_0^{(i)}\} \quad (5.13)$$

initialisiert. Eine Fehlerliste enthält alle zu betrachtenden Fehler und wurde bereits in Abschnitt 4.3.1 eingeführt. Der zum Fehler $F_0^{(i)}$ zugehörige Zustandsmengenbeobachter wird mit der Anfangszustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_0^{(i)}$ initialisiert. Der fehlerfreie Fall, der durch den speziellen Fehler $F_0^{(i)}$ beschrieben ist, wird so lange in Betracht gezogen, bis durch den Zustandsmengenbeobachter eine garantierte Inkonsistenz mit der Realität festgestellt wird. Im Rahmen der Berechnung der jeweiligen lokalen Zustandsmenge $\tilde{\mathcal{X}}_{F_0^{(i)}}^{(i)}(t_{k+1})$ ist eine Kommunikation über ein Netzwerk erforderlich, um relevante Informationen für den Fusionsschritt auszutauschen (siehe Abschnitt 5.1.2). Wenn eine Inkonsistenz zum Zeitpunkt t_d vorliegt und alle Unsicherheiten explizit in der Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ berücksichtigt sind, liegt garantiert ein Fehler im betrachteten System vor.

Da in der Praxis ein Fehler in einem technischen System nur selten auftritt, kann zwischen Start der Fehlerdiagnose zum Zeitpunkt t_0 und der abgeschlossenen Fehlerdetektion zum Zeitpunkt t_d eine beträchtliche Zeitspanne $t_d - t_0$ vergehen. Aus diesem Grund wird die nachfolgende Annahme¹¹ getroffen:

Annahme 5.1 (Zeitpunkt Fehlerauftritt)

Es wird angenommen, dass ein Fehler zu einem beliebigen, in der Regel unbekannten Zeitpunkt t_f zwischen dem Start der Fehlerdiagnose t_0 und dem Abschluss der Fehlerdetektion zum Zeitpunkt t_d auftritt. Es gilt daher $t_d \geq t_f > t_0$.

In Abschnitt 2.1 wurde bereits erläutert, dass Verfahren basierend auf Paritätsgleichungen besonders gut für die Erkennung additive Fehler nach Definition 2.8 geeignet sind, doch Schwächen bei der Erkennung von multiplikativen Fehlern gemäß Definition 2.8 aufweisen. Da im Rahmen dieser Arbeit nichtlineare Zustandsmengenbeobachter eingesetzt werden, kann diese Schwäche durch eine simultane Parameterschätzung im Laufe der Zustandsschätzung behoben werden. Hierzu wird die Zustandsraumbeschreibung (4.8) um die zu schätzenden intervallwertigen Parameter erweitert, welche als Zustände mit konstanter, intervallwertiger Dynamik interpretiert werden können. Diese Vorgehensweise ist analog zur Vorgehensweise bei der unsicheren Parameterschätzung von externen Dynamiken (siehe Anmerkung 4.3). Anschließend erfolgt die Fehlerdetektion anhand einer Konsistenzprüfung mit den nominalen, unsicheren Parameterwerten $\mathcal{O}^{(i)} \subset \mathbb{R}^{r^{(i)}}$, welche bspw. durch das Datenblatt der betrachteten Systemkomponente bekannt sind.

¹¹ In anderen Ansätzen, wie bspw. [Pla07], wird vorausgesetzt, dass ein Fehler über den gesamten betrachteten Zeithorizont $[t_0, t_d]$ vorliegt und somit auch schon vor dem Start der eigentlichen Fehlerdiagnose $t_f \leq t_0$ aufgetreten sein muss.

Anmerkung 5.1. Soll einzig eine Fehlerdetektion beim betrachteten i -ten Subsystem durchgeführt werden, kann der Algorithmus bereits nach dem Schritt „Fehler detektiert“ abgebrochen werden. Es wird für diesen Fall folglich nur die jeweilige Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ des nominalen bzw. fehlerfreien (Sub-)Systemverhaltens benötigt.

Fehlerdetektion bei schleichenden Fehlern

Die Alarmmeldung „Fehler detektiert“ erfolgt erst bei einer vollständigen Inkonsistenz der Messmenge mit dem prädizierten Systemverhalten (siehe Abbildung 5.2). Bei einem abrupten Fehler nach Definition 2.5 mit ausreichender Fehlerstärke kann die Zeitspanne zwischen Fehlerauftritt und -detektion $t_d - t_f$ sehr kurz ausfallen. Anders sieht es bei einem schleichenden Fehler gemäß Definition 2.6 mit zunehmender Fehlerstärke im betrachteten Zeitraum aus. In diesem Fall kann bis zu einer festgestellten Inkonsistenz eine erhebliche Zeitspanne $t_d - t_f$ vergangen sein. Aus diesem Grund wurde in der eigenen Veröffentlichung [MHF19] für eine globale bzw. monolithische Systembeschreibung eine alternative Prüfung vorgestellt. Diese lässt sich ohne Einschränkung auch auf eine verteilte Systembeschreibung anwenden, wobei $\xi^{(i)}(t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{n^{(i)}}$ als Vertrauensfaktor des i -ten Subsystems bezeichnet wird. Die Berechnung von $\xi^{(i)}(t_{k+1})$ erfolgt komponentenweise. Der Vertrauensfaktor setzt hierbei den Intervallradius der Schnittmenge aus $\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1})$ und $\mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1})$ zum Intervallradius der Mengenvereinigung ins Verhältnis:

$$\xi^{(i)}(t_{k+1}) = \frac{\left(\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1}) \cap \mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1}) \right)_{\Delta}}{\left(\tilde{\mathcal{X}}_p^{(i)}(t_{k+1}) \cup \mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1}) \right)_{\Delta}} =: \frac{\mathbf{x}_{\text{cap}}^{(i)}(t_{k+1})}{\mathbf{x}_{\text{cup}}^{(i)}(t_{k+1})} \quad (5.14)$$

und weist die folgenden Eigenschaften auf:

- $\xi^{(i)}(t_{k+1}) > 1$: Existiert nicht, da die Schnittmenge stets kleiner gleich als die Mengenvereinigung ist.
- $\xi^{(i)}(t_{k+1}) = 1$: Prädiziertes unsicheres Systemverhalten und gemessenes unsicheres Systemverhalten sind vollständig identisch.
- $0 \leq \xi^{(i)}(t_{k+1}) < 1$: Prädiziertes unsicheres Systemverhalten und gemessenes unsicheres Systemverhalten stimmen größtenteils überein. Je größer der Vertrauensfaktor, desto größer ist der überlappende Bereich.
- $\xi^{(i)}(t_{k+1}) = \emptyset$: Prädiziertes unsicheres Systemverhalten und gemessenes unsicheres Systemverhalten sind inkonsistent.

Der Vertrauensfaktor gibt folglich an, inwieweit das prädizierte unsichere Systemverhalten mit dem gemessenen unsicheren Systemverhalten übereinstimmt. In der Mathematik wird dieses Verhältnis auch als Jaccard-Koeffizient oder Jaccard-Index bezeichnet und stellt eine Kennzahl für die Ähnlichkeit von Mengen dar [Jac02].

Aufgrund des Einsatzes von Paritätsgleichungen zur Fehlerdiagnose erfolgt keine Rückführung des Schätzfehlers. Aus diesem Grund kann auch ein „Auseinanderdriften“ vom prädizierten und tatsächlichen Systemverhalten mithilfe des Vertrauensfaktors bestimmt werden.

Anhand der Abbildung 5.3 wird der Vertrauensfaktor und das „Auseinanderdriften“ veranschaulicht. Hierbei werden zur besseren Veranschaulichung die jeweiligen Intervallradien aus (5.14) mittels des Faktors 2 in Intervallbreiten überführt. Werden in Abbildung 5.3 die

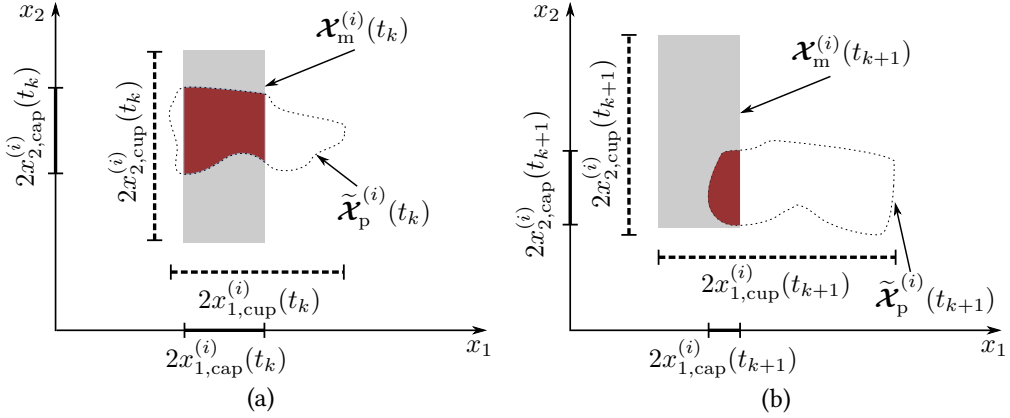


Abbildung 5.3: Veranschaulichung des Vertrauensfaktors mit $n^{(i)} = 2$ und $q^{(i)} = 2$ für den Zeitpunkt t_k (a) sowie t_{k+1} (b) unter dem Vorhandensein eines schleichenden Fehlers

überlappenden Bereiche von $x_{1,\text{cap}}^{(i)}$ und $x_{1,\text{cup}}^{(i)}$ bzw. $x_{2,\text{cap}}^{(i)}$ und $x_{2,\text{cup}}^{(i)}$ zum Zeitpunkt t_k (a) sowie zum Zeitpunkt t_{k+1} (b) verglichen, so ist zu erkennen, dass $\xi_1^{(i)}(t_{k+1}) < \xi_1^{(i)}(t_k)$ sowie $\xi_2^{(i)}(t_{k+1}) < \xi_2^{(i)}(t_k)$ gilt. Dieses „Auseinanderdriften“ der überlappenden Bereiche bzw. die Abnahme der Ähnlichkeit der betrachteten Mengen hat eine Verringerung des Vertrauensfaktors zur Folge. Der Drift innerhalb des Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$ wird wie folgt bestimmt:

$$\frac{\xi^{(i)}(t_{k+1}) - \xi^{(i)}(t_k)}{t_{k+1} - t_k} < \xi_{\max}, \quad (5.15)$$

wobei durch $\xi_{\max} \in \mathbb{R}^{n^{(i)}}$ ein Schwellwertvektor für den maximalen Drift gegeben ist. Diese Schwellwerte dienen zur Erkennung der schleichenden Fehler. Ein Überschreiten des Schwellwerts ist ein Indikator für das Vorhandensein eines (schleichenden) Fehlers. Die Berechnung von (5.15) erfolgt ebenfalls komponentenweise.

Anmerkung 5.2. Für den Fall $n^{(i)} > q^{(i)}$ kann der Vertrauensfaktor nur für die ersten $q^{(i)}$ Elemente in $\xi^{(i)}$ interpretierbare Werte annehmen, da für die übrigen Elemente ein unendliches Intervall in der Messmenge $\mathcal{X}_m^{(i)}(t_{k+1})$ angenommen wird (siehe (5.4)). Der Vertrauensfaktor wird daher nur für die ersten $q^{(i)}$ Elemente in $\xi^{(i)}$ berechnet.

Die Bestimmung von (5.15) innerhalb des Diagnosealgorithmus erfolgt parallel zum Block „Update $\mathcal{F}^{(i)}$ “ im Ablaufschema 5.2. Der Vertrauensfaktor liefert keine garantierte Aussage, ob tatsächlich ein Fehler im betrachteten System vorliegt. Allerdings kann dieser der frühzeitigen Warnung des Nutzers bzw. des Bedienpersonals dienen, welche dadurch das potenziell fehlerbehaftete System rechtzeitig überprüfen und somit Fehler vorbeugen können. Für ein ausführliches Beispiel dieser Methodik zur Detektion von schleichenden Fehlern sei auf [MHF19] verwiesen.

5.2.2 Fehlerisolation

Wurde zum Zeitpunkt t_d in einem oder mehreren LFDs ein Fehler detektiert, so erfolgt im systemfernen GFI die Fehlerisolation. Die einzelnen Zustandsmengenbeobachter werden zum Zweck der Fehlerisolation zum Zeitpunkt t_d mit der in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten globalen Fehlerliste

$$\tilde{\mathcal{F}}^{(g)} = \left\{ F_1^{(g)}, F_2^{(g)}, \dots \right\} \quad (5.16)$$

initialisiert. Für die Bestimmung des Anfangszustands $\mathcal{X}_{F_j^{(g)}}^{(g)}(t_d) = \mathcal{X}_d^{(g)} \quad \forall F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_d)$ wird die Vereinigung aller Zustandsmengen

$$\mathcal{X}_d^{(g)} = \bigcup_{i=1}^N \left[\lambda^{(i)} \right] \mathcal{X}^{(i)}(t_{d-1}) \quad (5.17)$$

in sämtlichen Zustandsmengenbeobachtern verwendet, wobei die Informationen über die lokalen Zustandsmengen $\mathcal{X}^{(i)}(t_{d-1})$ im jeweiligen Tupel $\mathbf{p}_{\text{GFI}}^{(i)}$ (siehe (4.38)) enthalten sind. Bei der Zustandsmenge $\mathcal{X}^{(i)}(t_{d-1})$ handelt es sich um die letzte nichtleere Zustandsmenge aus der Fehlerdetektion, welche durch $[\lambda^{(i)}] \in \mathbb{IR}^{n^{(i)}}$ elementweise hinreichend stark aufgebläht¹² wird. Der reale Anfangszustand soll durch diese Aufblähung garantiert in der Menge $\mathcal{X}_d^{(g)}$ enthalten sein und mögliche unbekannte Unsicherheiten aus der Kommunikation inkludieren. Um eine Verschiebung der vereinigten Anfangszustandsmenge zu vermeiden, gilt für den Intervallmittelpunkt $\lambda_c^{(i)} = 1$.

Das Schema der Fehlerisolation ist analog zur Fehlerdetektion: Für alle konsistenten Fehlermodelle in (5.16) wird mithilfe der zugehörigen Zustandsmengenbeobachter die Folgezustandsmenge $\mathcal{X}_{F_j^{(g)}}^{(g)}(t_{k+1})$ berechnet. Wird im Anschluss bei einem Fehler $F_j^{(g)}$ eine Inkonsistenz festgestellt, wird dieser aus der aktuellen Fehlerliste entfernt. Folglich enthält die aktualisierte Fehlerliste ausschließlich die noch potenziellen Fehlerkandidaten. Um dies zu gewährleisten gilt die nachfolgende Annahme:

Annahme 5.2 (Einfache Fehler)

Es wird angenommen, dass innerhalb des zur Fehlerisolation benötigten Zeitintervalls $[t_d, t_i]$ kein weiterer Fehler auftritt. Das Systemverhalten wird somit ausschließlich vom gleichen Fehler beeinflusst.

Sollte diese Annahme nicht erfüllt werden können, könnten sich alle Fehler in (5.16) als inkonsistent ergeben. In dieser Arbeit wird daher zwischen den drei folgenden Fällen bzgl. der Fehlerliste differenziert:

- $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_{k+1}) = \left\{ F_j^{(g)}, F_i^{(g)}, \dots \right\}$: Es existieren zum Zeitpunkt t_{k+1} noch mehrere potenzielle Fehlerkandidaten. Die Fehlerisolation ist somit nicht eindeutig, da sich

¹² Die Bestimmung von $[\lambda^{(i)}]$ erfolgt heuristisch und ist abhängig von den Unsicherheiten aus der Kommunikation. Konnten diese vollständig im Modell berücksichtigt werden, kann $[\lambda^{(i)}] = [1, 1]$ gewählt werden.

das Systemverhalten der potenziellen Fehlerkandidaten überschneidet (siehe Anmerkung 3.15). Dieser Fall entspricht der verdeckten Isolation nach Definition 2.18. Die Fehlerisolation wird fortgesetzt mit dem Ziel die Überschneidungen im weiteren Zeitverlauf zu eliminieren, um die Eindeutigkeit der Fehlerisolation zu erreichen.

- $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_{k+1}) = \{F_j^{(g)}\}$: Die Fehlerliste enthält ausschließlich einen konsistenten Fehlerkandidaten und ist daher eindeutig. Allerdings ist nicht garantiert, dass der Fehler $F_j^{(g)}$ im betrachteten System vorliegt, da nicht auszuschließen ist, dass er sich im späteren Verlauf $t_k > t_i$ noch als inkonsistent erweist. In [Wol10] wird daher vorgeschlagen, dass trotz der Eindeutigkeit die Fehlerisolation noch eine gewisse Zeitspanne fortgeführt wird.
- $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_{k+1}) = \emptyset$: Alle Fehler $F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_d)$ haben sich garantiert als inkonsistent ergeben. Es kann daher die folgende garantierte Aussage getroffen werden: Der im System garantiert vorhandene Fehler ist unbekannt. Der Grund hierfür liegt im Fehlen eines dem aufgetretenen Fehler entsprechenden Systemmodells begründet. Dieser Fall entspricht ebenfalls der verdeckten Isolation gemäß Definition 2.18.

Sollen neben den abrupten Fehlern auch schleichende Fehler im Rahmen der Fehlerisolierung isoliert werden, müssen sie als Parameter eines Fehlermodells mit geschätzt werden. Aus diesem Grund müssen sie ebenfalls als zusätzliche Zustände mit konstanter, intervallwertiger Dynamik in die globale unsichere Systembeschreibung $\tilde{\mathcal{B}}_{F_j^{(g)}}^{(g)}$ des jeweiligen Fehlers $F_j^{(g)}$ mit aufgenommen werden.

5.2.3 Eigenschaften des Fehlerdiagnoseverfahrens

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften des verteilten Fehlerdiagnoseverfahrens mittels Zustandsmengenbeobachtern basierend auf Paritätsgleichung vorgestellt. Die Eigenschaften resultieren aus dem Prinzip des verwendeten verteilten Zustandsmengenbeobachters basierend auf Paritätsgleichungen sowie der Methodik zur Fehlerdetektion und Fehlerisolation, welche in den vorherigen Abschnitten 5.1 und 5.2 vorgestellt wurden.

Aufgrund der expliziten Berücksichtigung von Unsicherheiten im Zuge der verteilten Systembeschreibung und der zugehörigen verteilten Zustandsmengenbeobachtung können – sofern alle Unsicherheiten korrekt berücksichtigt sind – garantiert Fehlalarme der Definition 2.14 folgend ausgeschlossen werden. Dieses Verfahren erfüllt somit vollständig die Eigenschaft der Robustheit gemäß Definition 2.19. Dennoch ist bei diesem Verfahren ein verdeckter Alarm (siehe Definition 2.15) möglich. Dies ist dann der Fall, wenn die Auswirkungen des aufgetretenen Fehlers durch die angenommenen Unsicherheiten verdeckt sind oder der Fehler generell nicht detektierbar¹³ ist.

¹³ Zur Beantwortung der Frage, ob ein Fehler überhaupt detektier- und isolierbar ist, existiert keine allgemeine, geschlossene Theorie. Allerdings sind bspw. in [Nyb00] hierfür hinreichende und notwendige Kriterien formuliert worden.

Im Rahmen der Fehlerisolation werden analog zur Fehlerdetektion ebenfalls jene als garantiert inkonsistent festgestellte Fehler ausgeschlossen. Aus diesem Grund existiert keine falsche Isolation nach Definition 2.17. Da die Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}$ zur Fehlerisolation in der Regel nicht vollständig ist, d. h. dass auch unbekannte Fehler vorhanden sind, liefert die Fehlerisolation keine garantierte Aussage. Ausschließlich für den Fall, dass alle potenziell im System möglichen Fehler modelliert und der Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}$ hinzugefügt wurden, ist garantiert, dass der letzte noch übrige Fehlerkandidat garantiert dem tatsächlichen realen Fehler entspricht.

Wie in Abschnitt 5.2.2 bereits erläutert wurde, sind bei dieser Methode neben der korrekten Isolation auch verdeckte Isolationen nach Definition 2.18 möglich. Der Grund hierfür liegt in der Überschneidung der unsicheren Systembeschreibungen $\mathcal{B}_{F_j^{(g)}}^{(g)}$ der Fehler $F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}$. Sie sind daher nicht eindeutig voneinander zu isolieren. Ferner kann – wie bei der Fehlerdetektion – der Fehler auch prinzipiell nicht isolierbar sein.

Die Eigenschaft der Sensitivität (siehe Definition 2.20) bei diesem Fehlerdiagnoseverfahren ist im Wesentlichen von den gegebenen Unsicherheiten abhängig. Für eine gute Fehlerdetektion sowie Fehlerisolation in Bezug auf die Sensitivität sollten diese Unsicherheiten im Zuge der Modellierung möglichst klein ausfallen. Ferner sollten Messkonzepte bzw. Sensoren mit möglichst geringen Messabweichungen eingesetzt werden, da die Messabweichungen einen direkten Einfluss auf die Intervallbreiten der unsicheren Messgrößen haben (siehe (3.11)). Allerdings muss gewährleistet bleiben, dass alle realen Unsicherheiten vollständig durch die modellierten Unsicherheiten beschrieben sind.

Es sei auch hier nochmals erwähnt, dass die Fehlerdiagnose basierend auf Paritätsgleichungen keine Rückführung des Schätzfehlers beinhaltet und folglich keine Anpassung des Beobachters an das prädiizierte Systemverhalten erfolgt. Dies wirkt sich positiv auf die Sensitivität der Fehlerdiagnose aus, da eine Rückkopplung aufgrund der beschriebenen Anpassungseigenschaft die Detektion von kleinen Fehlerauswirkungen erschwert oder sogar verhindert (siehe Abschnitt 2.2.2). Darüber hinaus wird ein Fehler nur solange als Fehler angezeigt, bis der Schätzfehler infolge der Rückkopplung abgeklungen ist.

Die Qualität der Fehlerdiagnose kann durch eine kombinierte Zustands- und zusätzliche Parameterschätzung, im Rahmen der nichtlinearen Zustandsmengenbeobachtung, noch weiter gesteigert werden. Der Fokus der Parameterschätzung liegt hier auf der Erkennung von multiplikativen Fehlern gemäß Definition 2.8.

5.3 Zusammenfassung

Aufbauend auf die in Kapitel 4 vorgestellte Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose wurde in diesem Kapitel erstmalig ein Verfahren zur verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern basierend auf Paritätsgleichungen vorgestellt. Das Ziel war daher, einen Beitrag zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 zu leisten.

Zu diesem Zweck wurden zunächst die Schritte „Prädiktion“ sowie „Korrektur“ der Zustandsmengenbeobachtung auf eine verteilte Systembeschreibung erweitert. Um die relevanten Informationen aus den anderen Subsystemen in den lokalen Berechnungen zu berücksichtigen, wurde der zusätzliche Fusionschritt eingeführt. Die in Kapitel 4 vorgestellten Transformationsvorschriften dienen hierbei zur Überführung der Zustandsmengenvektoren in das jeweilige Subsystem. Sind alle Unsicherheiten (Modell- und Messunsicherheiten sowie Kommunikationsunsicherheiten) in geeigneter Form berücksichtigt, liefert der verteilte Zustandsmengenbeobachter eine verifizierte Lösungseinschließung der lokalen Zustandsmenge.

Diese Lösungseinschließung bildet anschließend die Grundlage des Diagnosealgorithmus. In den Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation werden die potenziellen Fehlerkandidaten anhand einer festgestellten Inkonsistenz garantiert ausgeschlossen. Die Konsistenzprüfung erfolgt innerhalb der Zustandsmengenbeobachtung mittels einer Schnittmengenbildung aus prädictiertem und gemessenem Systemverhalten. Für eine Fehldetektion ist lediglich ein Modell über das nominale Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ – auch als fehlerfreies Systemverhalten bezeichnet – des i -ten Subsystems erforderlich. Ist eine frühzeitige Warnung vor schleichenden Fehlern gewünscht, so kann hierzu der eingeführte Vertrauensfaktor simultan berechnet werden. Dieser gibt an, inwieweit das prädictierte unsichere Systemverhalten mit dem gemessenen unsicheren Systemverhalten übereinstimmt. Anhand dieser Information können potenziell im System vorhandene schleichende Fehler erkannt werden. Für die letzte Teilaufgabe „Fehlerisolation“ werden mehrere Zustandsmengenbeobachter benötigt, die auf einer globalen Recheneinheit, dem GFI, die Fehler eindeutig zu isolieren versuchen. Für jeden Fehler $F_j^{(g)}$ werden eine eigene Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_j^{(g)}}^{(g)}$ und somit auch eigene Zustandsmengenbeobachter benötigt. Unbekannte Fehler können bei der Fehlerisolation immer dann auftreten, wenn die Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}$ nicht vollständig ist.

6 Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme basierend auf Moving Horizon Estimation

Das grundlegende Ziel dieses Kapitels ist die Vorstellung einer neuartigen Methode zur Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts, welches im Folgenden kurz als verteilte Moving Horizon Estimation bezeichnet wird. Es trägt somit zur Vervollständigung der Beantwortung der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 bei.

Der neuartige Zustandsmengenbeobachter baut ebenfalls auf die in Kapitel 4 neu eingeführte allgemeine Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose unsicherer Systeme auf. Diese benötigen für den Fehlerdiagnosealgorithmus in den LFDs sowie dem GFI mehrere Zustandsmengenbeobachter zur Rekonstruktion der jeweiligen Zustandsmengenvektoren. Dieses Kapitel stellt den zweiten Ansatz, eine Alternative zum zuvor vorgestellten Zustandsmengenbeobachter basierend auf Paritätsgleichungen, vor. Der wesentliche Unterschied liegt hier darin, dass die Zustandsmengenbeobachtung basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts eine Rückführung des Schätzfehlers aufweist und daher der Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern (siehe Abschnitt 2.2.2) zuzuordnen ist. Auch in diesem Abschnitt werden nichtlineare Systeme betrachtet, weshalb im Folgenden der Zusatz „nichtlinear“ nicht mehr explizit erwähnt wird.

Zunächst wird in Abschnitt 6.1 die verteilte Moving Horizon Estimation für verteilte, unsichere Systeme vorgestellt. Anschließend werden in Abschnitt 6.2 die einzelnen Algorithmen zur Fehlerdetektion sowie Fehlerisolation beschrieben und ihre Eigenschaften erläutert. Zum Abschluss werden in Abschnitt 6.3 alle Ergebnisse und Erkenntnisse zusammengefasst.

6.1 Verteilte Moving Horizon Estimation für verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme

Das Grundprinzip der klassischen Moving Horizon Estimation für nichtlineare Systeme wurde bereits in Abschnitt 3.5 erläutert. In den nachfolgenden Ausführungen wird diese optimierungsbasierte Methode zur Zustandsschätzung aufgegriffen und auf verteilte, unsichere Systeme nach Definition 4.3 erweitert. Das Hauptaugenmerk liegt hierbei auf einer performanten Umsetzung des Algorithmus, um eine Fehlerdetektion in den LFDs zur Systemlaufzeit zu ermöglichen.

Das zu lösende mengenbasierte Ausgleichsproblem – zunächst ohne die Anfangswertgewichtung und ohne Einbezug von externen Informationen – für das i -te Subsystem zum Zeitpunkt t_k lässt sich wie folgt formulieren:

$$\min_{\mathcal{X}^{(i)}(t)} \Phi^{(i)}(t_k) = \left\{ \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathcal{Y}^{(i)}(t_\rho) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \mathbf{0}) \mathcal{X}^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}}^2 \right\} \quad (6.1)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ unter den Nebenbedingungen:

$$\dot{\mathcal{X}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathcal{X}^{(i)}, \mathcal{U}^{(i)}) , \quad (6.2a)$$

$$\sup(\mathcal{X}^{(i)}) \leq \mathbf{x}_{\max}^{(i)} , \quad (6.2b)$$

$$\inf(\mathcal{X}^{(i)}) \geq \mathbf{x}_{\min}^{(i)} . \quad (6.2c)$$

Mittels der Nebenbedingung (6.2a) wird sichergestellt, dass der gesuchte Zustandsmengenvektor $\mathcal{X}^{(i)}(t)$ die unsichere Zustandsdifferentialgleichung $\dot{\mathcal{X}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}(\mathcal{X}^{(i)}, \mathcal{U}^{(i)})$ erfüllt. Die Ungleichungsnebenbedingungen (6.2b) und (6.2c) sind elementweise zu verstehen und sorgen für eine obere sowie untere Grenze der jeweiligen Zustandsmenge. Die in (6.1) zu bestimmende Differenz für die Zeitpunkte $\rho = L, \dots, k$ zwischen gemessener und berechneter Ausgangsmenge wird mit der Matrix $\mathbf{W}^{(i)}$ gewichtet. Ein derartig formuliertes Ausgleichsproblem lässt sich direkt nur mit rechenaufwändigen Methoden (siehe z. B. [VGFA03]) lösen. Daher wird im Folgenden das mengenbasierte Ausgleichsproblem (6.1) mithilfe der Mittelpunkt-Radius-Notation aus der Intervallarithmetik in ein nicht-mengenbasiertes Ausgleichsproblem überführt. Hierzu werden im ersten Schritt die allgemeinen Mengen im Ausgleichsproblem (6.1) als intervallwertige Größen angegeben:

$$\min_{[\mathbf{x}^{(i)}(t)]} \Phi^{(i)}(t_k) = \left\{ \sum_{\rho=L}^k \left\| [\mathbf{y}^{(i)}(t_\rho)] - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \mathbf{0}) [\mathbf{x}^{(i)}(t_\rho)] \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}}^2 \right\} \quad (6.3)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ unter den Nebenbedingungen:

$$[\dot{\mathbf{x}}^{(i)}] = [\mathbf{f}^{(i)}([\mathbf{x}^{(i)}], [\mathbf{u}^{(i)}])] , \quad (6.4a)$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{(i)} \leq \mathbf{x}_{\max}^{(i)} , \quad (6.4b)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(i)} \geq \mathbf{x}_{\min}^{(i)} . \quad (6.4c)$$

Im nächsten Schritt wird mittels der alternativen Mittelpunkt-Radius-Notation (3.16) das intervallwertige Ausgleichsproblem (6.3) anhand seines Intervallmittelpunkts (3.14) sowie Intervallradius (3.15) beschrieben. Die Idee hierbei ist, dass die Distanz der Intervallmittelpunkte von Messgröße $\mathbf{y}_c^{(i)}$ und berechneter Ausgangsgröße $(\mathbf{I}_{q^{(i)}} \mathbf{0}) \mathbf{x}_c^{(i)}$ minimiert wird. Darüber hinaus wird der Intervallradius der Messgröße $\mathbf{y}_\Delta^{(i)}$ zur Gewichtung der einzelnen Distanzen in der Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}^{(i)}$ verwendet. Je größer die Unsicherheit bzw. der Intervallradius $\mathbf{y}_\Delta^{(i)}$ ist, je geringer ist der jeweilige Beitrag zur Gütefunktion $\Phi^{(i)}(t_k)$. Bei

steigender Horizontlänge $\Lambda = k - L$ (siehe Abschnitt 3.5) nimmt ebenfalls der Intervallradius $\mathbf{x}_\Delta^{(i)}$ der prädizierten Zustandsmenge $[\mathbf{x}^{(i)}]$ zu. Der Grund hierfür ist die steigende Auswirkung der Unsicherheit auf das Ergebnis des prädizierten Systemverhaltens bei der Betrachtung eines langen Zeithorizonts. Folglich wird der Intervallradius $\mathbf{x}_\Delta^{(i)}$ zusätzlich in der Gütefunktion berücksichtigt. Abbildung 6.1 dient zur Veranschaulichung dieses Schemas. Insgesamt ist die Gütefunktion durch

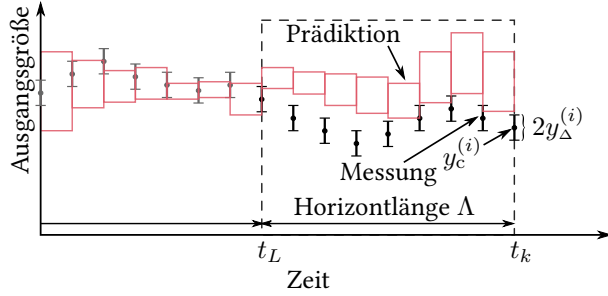


Abbildung 6.1: Schema der Moving Horizon Estimation für unsichere Systeme

$$\min_{[\mathbf{x}^{(i)}(t)]} \Phi^{(i)}(t_k) = \left\{ \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{y}_c^{(i)}(t_\rho) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \mathbf{x}_c^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)}^2 + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{x}_\Delta^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{I}_{n^{(i)}}}^2 \right\} \quad (6.5)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ unter den Nebenbedingungen:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}([\mathbf{x}^{(i)}], [\mathbf{u}^{(i)}]) \quad , \quad (6.6a)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(i)} \leq \mathbf{x}_{\max}^{(i)} \quad , \quad (6.6b)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(i)} \geq \mathbf{x}_{\min}^{(i)} \quad (6.6c)$$

sowie der Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho) = \left(\text{diag}(\mathbf{y}_\Delta^{(i)}(t_\rho)) \right)^{-1} \quad , \rho = L, \dots, k \quad (6.7)$$

gegeben, wobei $\mathbf{I}_{n^{(i)}} \in \mathbb{R}^{n^{(i)} \times n^{(i)}}$ der Einheitsmatrix entspricht. Die Nebenbedingung (6.6a) stellt sicher, dass der gesuchte Zustandsmengenvektor $[\mathbf{x}^{(i)}(t)]$ die unsichere Zustandsdifferentialgleichung $[\dot{\mathbf{x}}^{(i)}] = [\mathbf{f}^{(i)}([\mathbf{x}^{(i)}], [\mathbf{u}^{(i)}])]$ erfüllt. Um eine möglichst enge Lösungseinschließung zu bestimmen, wird für die Berechnung der unsicheren Zustandsdifferentialgleichung die verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen aus Abschnitt 3.3 verwendet. Die Wertebereichseinschließung $\text{bd}\{\cdot\}$ aus Abschnitt 3.2.2 dient hierbei zur intervallwertigen Auswertung des Taylor-Modells $\mathcal{X}^{(i)}(t)$:

$$[\mathbf{x}^{(i)}(t)] = \text{bd}\{\mathcal{X}^{(i)}(t)\} \quad . \quad (6.8)$$

Diese Thematik wird nochmals im späteren Abschnitt 6.1.3 aufgegriffen. Die bisherige Formulierung der Gütefunktion $\Phi^{(i)}(t_k)$ berücksichtigt ausschließlich Informationen aus dem Zeitintervall $[t_L, t_k]$. Aus diesem Grund wird die Anfangswertgewichtung $\Gamma^{(i)}(\mathbf{x}_c^{(i)}(t_L))$ (siehe

Abschnitt 3.5.1) der Gütefunktion hinzugefügt, welche die Informationen vor t_L beinhaltet. Ferner müssen noch für eine verteilte Zustandsschätzung die relevanten Zustandsinformationen aus den anderen Subsystemen in der Gütefunktion geeignet berücksichtigt werden. Diese Informationen werden durch den noch zu bestimmenden Term $\Pi^{(i)}\left(\mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho)\right)$ beschrieben. Die vollständige Gütefunktion für das i -te Subsystem ist somit gegeben durch:

$$\begin{aligned} \min_{[\mathbf{x}^{(i)}(t)]} \Phi^{(i)}(t_k) = & \left\{ \Gamma^{(i)}\left(\mathbf{x}_c^{(i)}(t_L)\right) + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{y}_c^{(i)}(t_\rho) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \mathbf{x}_c^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{x}_\Delta^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{I}_{n^{(i)}}}^2 + \Pi^{(i)}\left(\mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho)\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ mit der Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)$ nach (6.7) und unter den Nebenbedingungen:

$$\left[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} \right] = \left[\mathbf{f}^{(i)}\left(\left[\mathbf{x}^{(i)} \right], \left[\mathbf{u}^{(i)} \right]\right) \right], \quad (6.10a)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(i)} \leq \mathbf{x}_{\max}^{(i)}, \quad (6.10b)$$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(i)} \geq \mathbf{x}_{\min}^{(i)}. \quad (6.10c)$$

Die exakte Bestimmung des Fusionsterms $\Pi^{(i)}\left(\mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho)\right)$ sowie der Anfangswertgewichtung $\Gamma^{(i)}\left(\mathbf{x}_c^{(i)}(t_L)\right)$ wird in den folgenden Abschnitten beschrieben.

6.1.1 Fusion

Analog zur verteilten konsistenzbasierten Fehlerdiagnose aus Abschnitt 5.1 werden die Transformationsvorschriften (4.9a) und (4.9b) zur einfacheren Betrachtung im Folgenden zusammengefasst und mittels intervallwertiger Mengenbeschreibung angegeben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \left[\mathbf{x}^{(i)} \right] \\ \left[\mathbf{z}^{(i)} \right] \end{pmatrix}}_{=:\left[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} \right]} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{T}^{(i)} \\ \mathbf{R}^{(i)} \end{pmatrix}}_{=:\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}} \left[\mathbf{x}^{(g)} \right] \quad (6.11)$$

mit $\left[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} \right] \in \mathbb{IR}^{n^{(i)}+m^{(i)}}$ sowie $\tilde{\mathbf{T}}^{(i)} \in \mathbb{N}_0^{\left(n^{(i)}+m^{(i)} \right) \times n^{(g)}}$.

Es werden – wie im Prädiktionsschritt des verteilten Zustandsmengenbeobachters auf Basis von Paritätsgleichungen (siehe Abschnitt 5.1.1) – im lokalen Subsystem neben den lokalen Zustandsgrößen $\left[\mathbf{x}^{(i)} \right]$ auch die externen Größen $\left[\mathbf{z}^{(i)} \right]$, welche die lokale Systemdynamik beeinflussen, als unsichere Zustände mit konstanter, intervallwertiger Dynamik geschätzt. Ziel dieses Fusionsschritts ist es, die Schätzung der externen Größen durch Informationen über den Zustandsmengenvektor aus anderen Subsystemen zu verbessern. Aufgrund der Annahme 4.1 der Vollständigkeit sowie der nicht disjunkten Aufteilung der Zustandsmengen

gemäß (4.2) enthalten andere Subsysteme ebenfalls Informationen über die lokal zu bestimmende Zustandsmenge $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}]$. Dazu werden dem betrachteten i -ten Subsystem, wenn der i -te und j -te Zustandsraum sich überschneiden, die intervallwertigen Zustandsmengenvektoren $[\mathbf{x}^{(j)}]$ mit $j = 1, \dots, N, j \neq i$ der anderen Subsysteme übermittelt (siehe Abschnitt 4.3 sowie 5.1.2). Mithilfe der Transformationsvorschriften (4.9a) und (4.9b) sowie der Moore-Penrose-Pseudoinverse (4.10) werden die Informationen vom j -ten Subsystem auf das i -te Subsystem übertragen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}_{\text{ext}}^{(i)}] &= \mathbf{R}^{(i)} [\mathbf{x}^{(\text{g})}] \\ &= \mathbf{R}^{(i)} \mathbf{T}^{(j)\dagger} [\mathbf{x}^{(j)}] . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Vereinigungsmenge aller externen Zustände ist anhand von

$$[\mathbf{z}_{\text{ext}}^{(i)}] = \mathbf{R}^{(i)} \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{T}^{(j)\dagger} [\mathbf{x}^{(j)}] \quad (6.13)$$

gegeben. Der Index ext dient hierbei zur besseren Unterscheidung zwischen dem lokal präziierten externen Zustandsmengenvektor $[\mathbf{z}^{(i)}]$ und dem durch externe Informationen bestimmten Zustandsmengenvektor $[\mathbf{z}_{\text{ext}}^{(i)}]$. Um die externen Informationen mittels des Terms $\Pi^{(i)}(\mathbf{z}_{\text{c}}^{(i)}(t_\rho))$ in der Gütefunktion (6.9) zu beschreiben, wird das Intervall ebenfalls mittels der alternativen Mittelpunkt-Radius-Notation (3.16) angegeben. Anschließend wird eine quadratische 2-Norm formuliert, mit dem Ziel, die Distanz zwischen den Intervallen $[\mathbf{z}^{(i)}]$ und $[\mathbf{z}_{\text{ext}}^{(i)}]$ bzw. den zugehörigen Intervallmittelpunkten $\mathbf{z}_{\text{c}}^{(i)}$ und $\mathbf{z}_{\text{ext,c}}^{(i)}$ zu minimieren. Mit den Intervallmittelpunkten des berechneten externen Zustandsmengenvektors $\mathbf{z}_{\text{c}}^{(i)}$ und des empfangenen Zustandsmengenvektors $\mathbf{z}_{\text{ext,c}}^{(i)}$ (siehe (6.13)) ist diese für das Zeitintervall $[t_L, t_k]$ durch

$$\Pi^{(i)}(\mathbf{z}_{\text{c}}^{(i)}(t_\rho)) = \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{z}_{\text{c}}^{(i)}(t_\rho) - \mathbf{z}_{\text{ext,c}}^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho)}^2 \quad (6.14)$$

gegeben. Ferner wird der Intervallradius des empfangenen Zustandsmengenvektors $\mathbf{z}_{\text{ext},\Delta}^{(i)}$ durch

$$\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho) = \left(\text{diag}(\mathbf{z}_{\text{ext},\Delta}^{(i)}(t_\rho)) \right)^{-1}, \rho = L, \dots, k \quad (6.15)$$

zur Gewichtung der einzelnen Distanzen verwendet. Je größer die Unsicherheit und somit der Intervallradius $\mathbf{z}_{\text{ext},\Delta}^{(i)}$, desto geringer wird der jeweilige Beitrag zur Gütefunktion $\Phi^{(i)}(t_k)$

gewichtet. Zusammenfassend lässt sich die Gütefunktion (6.9) inklusive der Fusion der Informationen wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \min_{[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}(t)]} \Phi^{(i)}(t_k) = & \left\{ \Gamma^{(i)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)\right) + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{y}_c^{(i)}(t_\rho) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \mathbf{x}_c^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)}^2 \right. \\ & + \sum_{\rho=L}^k \left\| \tilde{\mathbf{x}}_\Delta^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{I}_{n^{(i)}+m^{(i)}}}^2 + \underbrace{\sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho) - \mathbf{z}_{\text{ext},c}^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho)}^2}_{=\Pi^{(i)}(\mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho))} \left. \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

für $t \in [t_L, t_k]$ mit der Gewichtungsmatrix $\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)$ nach (6.7) sowie $\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho)$ gemäß (6.15) unter den Nebenbedingungen:

$$\left[\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \right] = \left[\mathbf{f}^{(i)} \left(\left[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)} \right], \left[\mathbf{u}^{(i)} \right] \right) \right], \quad (6.17a)$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \leq \tilde{\mathbf{x}}_{\max}^{(i)}, \quad (6.17b)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \geq \tilde{\mathbf{x}}_{\min}^{(i)}. \quad (6.17c)$$

Zu beachten ist, dass die Variablen $\mathbf{x}_c^{(i)}$ und $\mathbf{z}_c^{(i)}$ die Intervallmittelpunkte aus $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}] = \left(\left[\mathbf{x}^{(i)} \right] \quad \left[\mathbf{z}^{(i)} \right] \right)^\top$ (siehe (6.11)) darstellen.

Im Fall eines Paketverlustes im Rahmen der Kommunikation wird, gemäß der vorgestellten Vorgehensweise aus Abschnitt 4.3.2, für den externen Zustandsmengenvektor (6.13) eine unendliche Unsicherheit nach (4.42) angenommen. Für den Intervallradius gilt daher $\mathbf{z}_{\text{ext},\Delta}^{(i)} = \infty$. Dies führt aufgrund der inversen Gewichtung von (6.15) in der Gütefunktion (6.16) dazu, dass die externen Informationen mit Null gewichtet werden und folglich keinen Beitrag in Bezug auf das betrachtete Optimierungsproblem liefern. Die Zustandsmengenbeobachtung bzw. die Fehlerdiagnose kann fortgesetzt werden, bis neue Informationen empfangen worden sind. Allerdings steigen dadurch die Unsicherheiten in den berechneten Zustandsgrößen $[\mathbf{z}^{(i)}]$, da keine neuen externen Informationen zur Verbesserung der lokalen Schätzungen beitragen.

Anmerkung 6.1. *Liegt keine Überschneidung des i -ten und j -ten Unterraums vor, so ist die Transformationsvorschrift $\mathbf{R}^{(i)}\mathbf{T}^{(j)\dagger}$ in (6.13) gleich null. Ist dies der Fall, können diese a-priori in der Berechnung (6.13) vernachlässigt werden (vgl. Abschnitt 5.1.2).*

6.1.2 Anfangsgewichtbestimmung

Das Anfangswertgewicht $\Gamma^{(i)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)\right)$ in der Gütefunktion (6.16) für das jeweilige i -te Subsystem soll alle Informationen vor dem Schätzhorizont und somit vor dem Zeitpunkt t_L berücksichtigen. Zur Bestimmung wird die in Abschnitt 3.5.1 vorgestellte adaptive Methode auf den Fall verteilter, unsicherer Systeme erweitert.

Die Grundlage hierfür bildet die quadratische Näherung

$$\Gamma^{(i)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)\right) = \left\| \tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L) - \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)} \right\|_{\mathbf{M}_L^{(i)}}^2 \quad (6.18)$$

mit dem Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$, der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)}$ sowie dem Intervallmittelpunkt $\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)$ des Zustandsmengenvektors (6.11) zum Zeitpunkt t_L . Die Bestimmung von (6.18) ist erst erforderlich, wenn der aktuelle Zeitpunkt größer gleich als die Länge des Schätzhorizonts ist, d. h. $k \geq \Lambda$. Zuvor gilt $\Gamma^{(i)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)\right) = 0$ für $k < \Lambda$.

Die Bestimmung des Erwartungswerts $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$ und der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)}$ erfolgt in den nachfolgenden Abschnitten.

Bestimmung des Erwartungswerts $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$

Für den Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$ wird die in Abschnitt 3.5.1 beschriebene Methode der „geglätteten Schätzung“ angewendet. Dazu wird der aktuelle Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$ zum Zeitpunkt t_k mit der Lösung des Ausgleichsproblems (6.16) aus dem vorherigen Schätzhorizont $[t_{L-1}, t_{k-1}]$ gleichgesetzt. Hierbei soll nicht direkt die intervallwertige Lösungsmenge $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i),*}(t)]$ des Ausgleichsproblems (6.16) verwendet werden, sondern deren Intervallmittelpunkt $\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i),*}$. Dies ist erforderlich, da $\Gamma^{(i)}\left(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L)\right)$ einen nicht-intervallwertigen Bestandteil des Ausgleichsproblems (6.16) darstellen soll. Der Intervallmittelpunkt $\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i),*}$ stellt somit die Basis des Erwartungswerts dar, wobei der Intervallradius $\tilde{\mathbf{x}}_\Delta^{(i),*}$ in der noch zu bestimmenden Gewichtungsmatrix zum Tragen kommt. Für den Erwartungswert gilt:

$$\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_c^{(i),*}(t_L | t_{k-1}) . \quad (6.19)$$

Um eine implizite Doppelgewichtung des Erwartungswerts im Intervallausschnitt $[t_L, t_{k-1}]$ des aktuellen Schätzhorizonts $[t_L, t_k]$ im betrachteten Ausgleichsproblem zu vermeiden, wird die Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)}$ in (6.18) zu jedem neuen Zeitschritt adaptiv angepasst.

Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)}$

Die Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)} = \mathbf{M}^{(i)}(t_L | t_k)$ erfolgt auf Grundlage von (3.150). In (3.150) wird durch σ bzw. σ_w das Prozessrauschen beschrieben, wobei σ einen proportionalen Einfluss auf die Speicherlänge $Z(t_k)$ hat (siehe (3.150b)). Im Fall von unsicheren Systemen sind die Unsicherheiten deterministisch anhand einer Mengenbeschreibung gegeben. Je größer die Unsicherheiten, umso größer das Volumen der Lösungsmenge. Aus diesem Grund kann das Prozessrauschen im i -ten Subsystem im Fall von unsicheren Systemen durch den Intervallradius

$$\sigma_w^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_\Delta^{(i),*}(t_L | t_{k-1}) \quad (6.20)$$

aus der Lösungsmenge $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i),*}(t)]$ des vorherigen Schätzhorizonts $[t_{L-1}, t_{k-1}]$ angegeben werden. Für alle anderen Größen in (3.150) wird der jeweilige Intervallmittelpunkt verwendet und resultiert in

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(t_L) = \mathbf{y}_c^{(i)}(t_L) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}, \quad (6.21a)$$

$$Z^{(i)}(t_k) = (1 + \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)\top} \mathbf{M}_{L-1}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}) \frac{\sigma^{(i)}}{\boldsymbol{\epsilon}^{(i)\top}(t_L) \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(t_L)}, \quad (6.21b)$$

$$\alpha^{(i)}(t_k) = 1 - Z^{(i)-1}(t_k), \quad (6.21c)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)}(t_k) = \left(\mathbf{I}_{n^{(i)}} - \frac{\mathbf{M}_{L-1}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)\top}}{1 + \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)\top} \mathbf{M}_{L-1}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}} \right) \mathbf{M}_{L-1}^{(i)}, \quad (6.21d)$$

$$\mathbf{M}_L^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^{(i)}(t_k)} \mathbf{Q}^{(i)}(t_k) & , \text{ falls } \frac{1}{\alpha^{(i)}(t_k)} \text{tr}(\mathbf{Q}^{(i)}(t_k)) \leq c^{(i)} \\ \mathbf{Q}^{(i)}(t_k) & , \text{ sonst} \end{cases}. \quad (6.21e)$$

Die Eigenschaften der einzelnen Gleichungen wurden bereits in Abschnitt 3.5.1 erläutert. Zu beachten ist, dass $\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(t_L)$ die Differenz zwischen den Mittelpunkten der gemessenen lokalen Ausgangsgröße $\mathbf{y}_c^{(i)}(t_L)$ und der prädizierten Ausgangsgröße $(\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$ angibt. Die Speicherlänge $Z^{(i)}(t_k)$ steigt hierbei bei geringer Fehlerquadratsumme $\boldsymbol{\epsilon}^{(i)\top}(t_L) \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}(t_L)$ an, wobei das Verhältnis $\sigma^{(i)}/\sigma_w^{(i)}$, mit dem Prozessrauschen $\sigma_w^{(i)}$ aus (6.20), möglichst groß gewählt werden sollte. Detaillierte Anhaltspunkte zur Wahl dieser Größen sind in [SMG17, DMSG20] zu finden.

Mit der Bestimmung des Anfangswertgewichts (6.18) ist die Beschreibung zur verteilten, unsicheren Moving Horizon Estimation vollständig und wird im Folgenden zusammengefasst:

Es sei ein verteiltes unsicheres System nach Definition 4.3 gegeben. Weiterhin seien die Annahmen 4.1 - 4.3 gültig. Dann ist die verteilte, unsichere Moving Horizon Estimation durch die Lösung des Ausgleichsproblems

$$\begin{aligned} \min_{[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}(t)]} \Phi^{(i)}(t_k) = & \underbrace{\left\{ \left\| \tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L) - \hat{\mathbf{x}}_L^{(i)} \right\|_{\mathbf{M}_L^{(i)}}^2 \right\}}_{=\Gamma^{(i)}(\tilde{\mathbf{x}}_c^{(i)}(t_L))} \\ & + \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{y}_c^{(i)}(t_\rho) - (\mathbf{I}_{q^{(i)}} \quad \mathbf{0}) \mathbf{x}_c^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho)}^2 \\ & + \sum_{\rho=L}^k \left\| \tilde{\mathbf{x}}_\Delta^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{I}_{n^{(i)}+m^{(i)}}}^2 \\ & + \underbrace{\left\{ \sum_{\rho=L}^k \left\| \mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho) - \mathbf{z}_{\text{ext},c}^{(i)}(t_\rho) \right\|_{\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho)}^2 \right\}}_{=\Pi^{(i)}(\mathbf{z}_c^{(i)}(t_\rho))} \end{aligned} \quad (6.22)$$

mit $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}] = ([\mathbf{x}^{(i)}] \ [\mathbf{z}^{(i)}])^\top$ für $t \in [t_L, t_k]$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(i)} \left([\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}], [\mathbf{u}^{(i)}] \right) \end{bmatrix}, \quad (6.23a)$$

$$\overline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \leq \tilde{\mathbf{x}}_{\max}^{(i)}, \quad (6.23b)$$

$$\underline{\tilde{\mathbf{x}}}^{(i)} \geq \tilde{\mathbf{x}}_{\min}^{(i)} \quad (6.23c)$$

gegeben. Die zugehörigen Gewichtungsmatrizen lauten:

$$\mathbf{W}^{(i)}(t_\rho) = \left(\text{diag} \left(\mathbf{y}_\Delta^{(i)}(t_\rho) \right) \right)^{-1}, \rho = L, \dots, k \quad (6.24)$$

sowie

$$\mathbf{H}^{(i)}(t_\rho) = \left(\text{diag} \left(\mathbf{z}_{\text{ext}, \Delta}^{(i)}(t_\rho) \right) \right)^{-1}, \rho = L, \dots, k. \quad (6.25)$$

Für den Erwartungswert $\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)}$ im Anfangswertgewicht gilt

$$\hat{\mathbf{x}}_L^{(i)} = \tilde{\mathbf{x}}_c^{(i),*}(t_L | t_{k-1}). \quad (6.26)$$

Die Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\mathbf{M}_L^{(i)}$ erfolgt anhand von (6.21). Im nächsten Abschnitt wird erläutert, wie das Ausgleichsproblem (6.22) mit den zugehörigen Nebenbedingungen (6.23) gelöst werden kann.

6.1.3 Mehrzielverfahren

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.5.2 wird der Schätzhorizont $[t_L, t_k]$ in Λ miteinander verkoppelte Teilintervalle unterteilt. Hieraus resultieren insgesamt Λ Teilintervalle $[t_j, t_{j+1}]$ mit $j = L, \dots, k-1$, wodurch die folgende Anforderung gegeben ist:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_j^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} \left(\tilde{\mathbf{x}}_j^{(i)}, \mathbf{u}_j^{(i)} \right) \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (6.27)$$

mit $\tilde{\mathbf{x}}^{(i)}$ gemäß (5.1) bzw. (6.11) sowie dem für das Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$ entsprechenden Anfangswert

$$\tilde{\mathbf{x}}_j^{(i)}(t_j) = \mathbf{s}_j^{(i)}. \quad (6.28)$$

Wie im vorherigen Abschnitt erläutert, wird für die Lösung des jeweiligen Anfangswertproblems die verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen aus Abschnitt 3.3 angewendet. Da im Ausgleichsproblem (6.22) eine intervallwertige Lösung von (6.27) formuliert ist, wird eine Wertebereichseinschließung

$$[\mathbf{s}_j^{(i)}] = \text{bd} \{ \mathcal{S}_j^{(i)} \} \quad (6.29)$$

durchgeführt.

Für eine übersichtlichere Darstellung werden im nächsten Schritt alle Variablen $\left[s_j^{(i)}\right]$ innerhalb $[t_L, t_k]$ in einem Intervallvektor $\left[p^{(i)}\right] = \left(\left[s_L^{(i)\top}\right], \dots, \left[s_k^{(i)\top}\right]\right)$ sowie die Online-Daten in dem Argument

$$D^{(i)} = \left(\hat{x}_L^{(i)}, M_L^{(i)}, W^{(i)}, H^{(i)}, \left[y^{(i)}(t_L)\right], \dots, \left[y^{(i)}(t_k)\right], \right. \\ \left. \left[x^{(j)}(t_L)\right], \dots, \left[x^{(j)}(t_k)\right]; [u(t)], t \in [t_L, t_k]\right) \quad (6.30)$$

zusammengefasst. Die an das Mehrzielverfahren angepasste Gütefunktion (6.22) ist somit wie folgt gegeben:

$$\min_{\left[p^{(i)}\right]} \Phi^{(i)}(t_k) = \left\{ \left\| F^{(i)}\left(p_c^{(i)}, p_\Delta^{(i)}; D^{(i)}\right) \right\|^2 \right\} \quad (6.31)$$

unter den Nebenbedingungen

$$[0, 0] = \left[G^{(i)}\left(\left[p^{(i)}\right]; D^{(i)}\right)\right], \quad (6.32a)$$

$$0 \leq U^{(i)}\left(\underline{p}, \bar{p}; D^{(i)}\right). \quad (6.32b)$$

Die Gütefunktion $\Phi^{(i)}$ sowie die Ungleichungsnebenbedingung (6.32a) beinhalten ausschließlich nicht-intervallwertige Größen, wobei die Größen $p_c^{(i)}$, $p_\Delta^{(i)}$, \underline{p} und \bar{p} aus dem Intervall $\left[p^{(i)}\right]$ bestimmt werden können. Deshalb können hierfür die bekannten Standardverfahren, wie das in Anhang B.7 beschriebene verallgemeinerte Gauß-Newton-Verfahren, zur Lösung des formulierten Ausgleichs- bzw. Optimierungsproblems verwendet werden. Eine detaillierte Übersicht über weitere Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen ist bspw. in [FGM18] gegeben. Zur Berechnung der Gleichheitsnebenbedingung (6.32b) wird die verifizierte Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen aus Abschnitt 3.3 angewendet. Die Lösung des Optimierungsproblems $\left[\tilde{x}^{(i),*}(t_k)\right]$ stellt schließlich eine Schätzung für den zu bestimmenden Zustandsmengenvektor $\left[\tilde{x}^{(i)}(t_k)\right]$ zum aktuellen Zeitpunkt t_k dar.

6.2 Diagnosealgorithmus

In diesem Abschnitt wird der Diagnosealgorithmus zur verteilten Fehlerdiagnose vorgestellt. Dieser Diagnosealgorithmus basiert auf einer verteilten Zustandsmengenbeobachtung, welche auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts beruht. Die Implementierung erfolgt in der in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten Architektur inklusive der Methode der Ferndiagnose. Da die Fehlerdiagnose ebenfalls auf einem Zustandsmengenbeobachter basiert, ist die Vorgehensweise in weiten Teilen identisch mit dem in Abschnitt 5.2 vorgestellten Diagnosealgorithmus.

In der ersten Teilaufgabe der Fehlerdiagnose, der Fehlerdetektion, wird ebenfalls in den LFDs eine lokale Konsistenzprüfung nach Definition 4.4 mit der nominalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0}^{(i)}$ durchgeführt:

$$\left[\tilde{x}^{(i),*}(t_k)\right] \cap \left[x_m^{(i)}(t_k)\right] = \emptyset \rightarrow \text{Inkonsistenz}, \quad (6.33)$$

wobei die geschätzte Zustandsmenge $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i),*}(t_k)]$ auf Basis der nominalen Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_0^{(i)}}^{(i)}$ bestimmt wird und die lokale Messmenge (vgl. (5.4)) anhand von

$$[\mathbf{x}_m^{(i)}(t_k)] = \begin{pmatrix} [\mathbf{y}^{(i)}(t_k)] \\ [-\infty, \infty] \end{pmatrix}, \quad (6.34)$$

gegeben ist. Da der verwendete Zustandsmengenbeobachter zur Bestimmung der geschätzten Zustandsmenge $[\tilde{\mathbf{x}}^{(i),*}(t_k)]$ eine Rückführung des Schätzfehlers aufweist – siehe Gütefunktion (6.22) – ist keine garantierte Aussage möglich. Die Inkonsistenz kann ausschließlich über eine gewisse Zeitspanne festgestellt werden. Diese Zeitspanne startet bei Fehlerauftritt t_f und endet zu dem Zeitpunkt, an dem der Schätzfehler im Zustandsmengenbeobachter abgeklungen ist. Für den Zeitpunkt des Fehlerauftritts gilt ebenfalls die Annahme 5.1.

Bei der Fehlerisolation ist eine andere Vorgehensweise zu der in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Vorgehensweise notwendig. Zunächst erfolgt die Fehlerisolation weiterhin im GFI auf der Basis der globalen Systembeschreibungen (4.30) der Fehler. Die globale Messmenge $[\mathbf{x}_m^{(g)}(t_k)]$ ist anhand von

$$[\mathbf{x}_m^{(g)}(t_k)] = \begin{pmatrix} \bigcup_{i=1}^N [\mathbf{y}^{(i)}(t_k)] \\ [-\infty, \infty] \end{pmatrix}, \quad (6.35)$$

gegeben (vgl. (5.12)). Eine Konsistenzprüfung zur Fehlerisolation ist bei dieser Methode nicht zielführend. Aufgrund der Rückführung des Schätzfehlers und der damit verbundenen Eigenschaften ist ein garantierter Ausschluss von potenziellen Fehlerkandidaten $F_j^{(g)}$ aus der Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ nicht möglich (siehe Abschnitt 5.2.2). Deshalb wird folgende Vorgehensweise gewählt: Die potenziellen Fehlerkandidaten in der Fehlerliste werden anhand ihrer Güte $\Phi_{F_j^{(g)}}^{(g)}(t_k)$ aus der Gütefunktion der Zustandsmengenbeobachtung (6.22) aufsteigend sortiert. Hierbei ist anschließend der wahrscheinlichste, potenzielle Fehlerkandidat $F_j^{(g)}$ mit dem niedrigsten Wert der Gütefunktion an erster Stelle der Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ positioniert. Im Vergleich zur konsistenzbasierten Fehlerdiagnose ist zu beachten, dass keine garantierte Aussage über den Fehlerkandidaten getroffen werden kann.

Die prinzipielle Vorgehensweise bei der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts wird anhand des Ablaufdiagramms in Abbildung 6.2 verdeutlicht. Die einzelnen Teilaufgaben Fehlerdetektion und Fehlerisolation werden in den folgenden Abschnitten detaillierter erläutert.

6.2.1 Fehlerdetektion

Die Fehlerdetektion in den LFDs ist größtenteils identisch zu der in Abschnitt 5.2.1 vorgestellten Vorgehensweise bei der verteilten, konsistenzbasierten Fehlerdiagnose, was auch aus Abbildung 6.2 (linker Bereich) hervorgeht. Aus diesem Grund werden nur die Unterschiede im Folgenden erläutert.

Der fehlerfreie Fall, welcher durch den Fehler $F_0^{(i)}$ beschrieben ist, wird so lange in Betracht gezogen, bis die Lösung der Schnittmengenbildung (6.33) eine leere Menge ergibt. Ab diesem

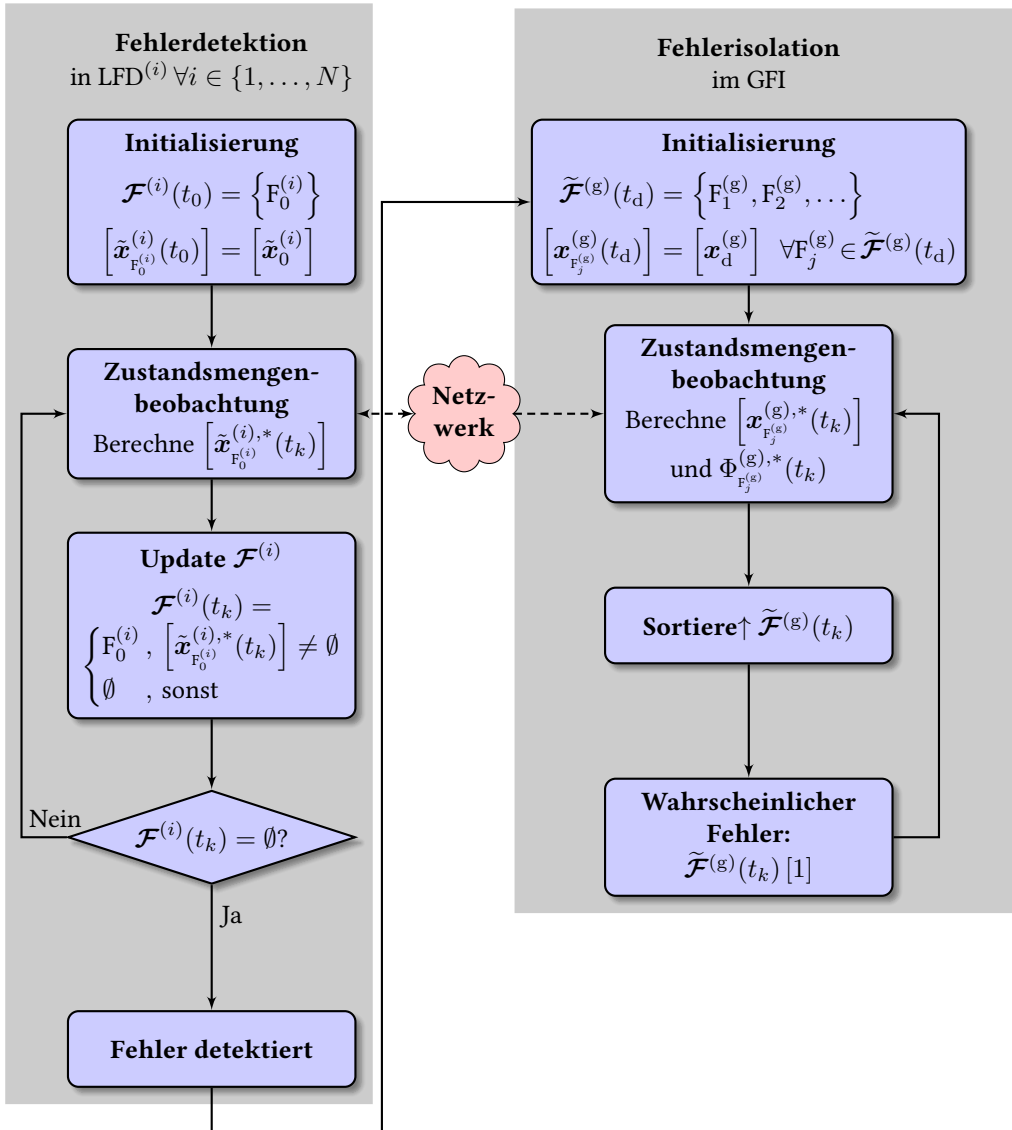


Abbildung 6.2: Prinzipieller Ablauf der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts

Zeitpunkt t_d der Fehlerdetektion wird ein potenzieller Fehler im realen System angenommen und eine anschließende Fehlerisolation im GFI durchgeführt. Solange der Schätzfehler des Zustandsmengenbeobachters nicht abgeklungen ist, ist der potenzielle Fehler ersichtlich. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern (siehe Abschnitt 2.2.2).

Eine weitere Eigenschaft, welche ebenfalls in Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde, ist die Schwächen bei der Detektion von multiplikativen Fehlern nach Definition 2.8. Allerdings kann, analog zur Vorgehensweise bei der verteilten, konsistenzbasierten Fehlerdiagnose aus Abschnitt 5.2.1, eine simultane Parameterschätzung eingesetzt werden.

6.2.2 Fehlerisolation

Ist in mindestens einem LFD zum Zeitpunkt t_d ein Fehler detektiert worden, so erfolgt anschließend im systemfernen GFI die Fehlerisolation. Für die Fehlerisolation werden die einzelnen Zustandsmengenbeobachter zum Zeitpunkt t_d mit der in Abschnitt 4.3.1 vorgestellten globalen Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_d)$ nach (5.16) initialisiert. Für die Bestimmung der jeweiligen Anfangszustände $\mathcal{X}_{F_j^{(g)}}^{(g)}(t_d) = \mathcal{X}_d^{(g)} \forall F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_d)$ wird die Vereinigung aller Zustandsmengen gemäß

$$\left[\mathbf{x}_d^{(g)} \right] = \bigcup_{i=1}^N \left[\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right] \left[\mathbf{x}^{(i),*}(t_{d-1}) \right] \quad (6.36)$$

verwendet. Die benötigten Informationen über die lokalen Zustandsmengen $\left[\mathbf{x}^{(i),*}(t_{d-1}) \right]$ sind im jeweiligen empfangenen Tupel $\mathbf{p}_{\text{GFI}}^{(i)}$ (siehe (4.38)) enthalten, wobei die Zustandsmenge $\left[\mathbf{x}^{(i),*}(t_{d-1}) \right]$ die letzte Lösung des Zustandsmengenbeobachters aus der Fehlerdetektion beschreibt und durch $\left[\boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right] \in \mathbb{IR}^{n^{(i)}}$ hinreichend stark aufgebläht wird (siehe Abschnitt 5.2.2). Um hierbei eine Verschiebung der vereinigten Anfangszustandsmenge zu vermeiden, gilt für den Intervallmittelpunkt $\lambda_c^{(i)} = 1$.

Das Schema der Fehlerisolation unterscheidet sich wesentlich von der Fehlerdetektion und auch zur in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Fehlerisolation bei der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose. Wie bereits im vorherigen Abschnitt erläutert, können keine Fehler $F_j^{(g)}$ aus der aktuellen Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ entfernt werden, da bei dieser Methode keine garantierte Aussage möglich ist. Darum wird ein anderer Ansatz gewählt: Die einzelnen Fehler $F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ werden bei jedem Durchlauf anhand ihrer Güte sortiert. Hierfür wird der Wert der Gütefunktion $\Phi_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k)$ zum zugehörigen Lösungswert $\left[\mathbf{x}_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k) \right]$ des Optimierungsproblems (6.22) ausgewertet. Je niedriger das Resultat $\Phi_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k)$ zum jeweiligen Fehler $F_j^{(g)}$ ausfällt, desto genauer kann durch die Zustandsmenge $\left[\mathbf{x}_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k) \right]$ das reale Systemverhalten repräsentiert werden. Aus diesem Grund werden die Fehler in Bezug auf ihre jeweilige Güte $\Phi_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k)$ in aufsteigender Reihenfolge in der aktuellen Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ angegeben. Der Fehler an erster Position dieser Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ weist ergo den niedrigsten Wert $\Phi_{F_j^{(g)}}^{(g),*}(t_k)$ auf und ist zum Zeitpunkt t_k der wahrscheinlichste Fehler unter den betrachteten

Fehlern $F_j^{(g)} \in \tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$. Hierbei ist zu beachten, dass die Fehlerisolation nicht nach dem ersten Schleifendurchlauf abgebrochen werden darf und über eine gewisse Zeitspanne hinweg fortgesetzt werden muss, da sich die Werte der jeweiligen Gütefunktionen im weiteren Zeitverlauf noch ändern können und somit eventuell andere Fehler wahrscheinlicher werden. Unbekannte Fehler (siehe Abschnitt 5.2.2) können im Rahmen dieser Methode nicht auftreten, da die Fehlerliste immer alle initialisierten Fehler enthält und keine Fehler bei dieser Methode verworfen werden. Die Fehlerliste ist daher niemals leer.

Anmerkung 6.2. Analog zur Vorgehensweise aus Abschnitt 5.2.2 können auch schleichende Fehler isoliert werden. Diese werden als Parameter eines Fehlermodells mit geschätzt und müssen daher als zusätzliche Zustände mit konstanter, intervallwertiger Dynamik in die globale unsichere Systembeschreibung $\tilde{B}_{F_j^{(g)}}^{(g)}$ des jeweiligen Fehlers $F_j^{(g)}$ mit aufgenommen werden.

6.2.3 Eigenschaften des Fehlerdiagnoseverfahrens

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften der verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts vorgestellt. Die Eigenschaften resultieren aus dem Prinzip des verwendeten verteilten Zustandsmengenbeobachters sowie der Methodik zur Fehlerdiagnose, welche in den vorherigen Abschnitten 6.1 und 6.2 vorgestellt wurden.

Im Rahmen der in diesem Kapitel vorgestellten Methode zur Fehlerdiagnose wird nicht nur die aktuelle Messung zum Zeitpunkt t_k berücksichtigt, sondern insgesamt Λ Messungen im zurückliegenden, gleitenden Zeitintervall $[t_L, t_k]$. Die Informationen innerhalb dieses Horizonts werden verwendet, um eine Lösungseinschließung der Lösungsmenge zum aktuellen Zeitpunkt t_k zu berechnen. Die reale Anwendung, Analyse und Gegenüberstellung der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren zur Fehlerdiagnose erfolgt im nächsten Kapitel.

Aufgrund der expliziten Berücksichtigung von Unsicherheiten in der verteilten Systembeschreibung und der zugehörigen verteilten Zustandsmengenbeobachtung ist dieses Verfahren robust gemäß Definition 2.19. Jedoch ist – im Gegensatz zum konsistenzbasierten Ansatz – keine garantierte Aussage möglich. Auch ein verdeckter Alarm nach Definition 2.15 kann nicht ausgeschlossen werden, da die Auswirkungen des aufgetretenen Fehlers durch die angenommenen Unsicherheiten bzw. durch die Rückführung des Schätzfehlers verdeckt sein können oder der Fehler prinzipiell nicht detektierbar ist.

Für der Eigenschaft der Sensitivität (siehe Definition 2.20) ist die Wahl der Unsicherheiten von zentraler Bedeutung. Für eine möglichst sensitive Fehlerdetektion sowie Fehlerisolation sollten diese Unsicherheiten bzw. das Volumen der Unsicherheiten bei der Modellierung möglichst klein ausfallen. Des Weiteren sollten Messkonzepte mit möglichst geringen Messungenauigkeiten bevorzugt eingesetzt werden. Eine enge Lösungseinschließung der Lösungsmenge ist ein weiterer positiver Faktor im Hinblick auf die Sensitivität.

Für die Fehlerisolation wird eine aktuelle Fehlerliste mit allen potenziellen Fehlerkandidaten auf Basis seiner jeweiligen Güte angegeben. Die Fehlerkandidaten in der Fehlerliste werden hierbei in Bezug auf ihre jeweilige Güte in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Folglich ist das

erste Element der Liste, d. h. der Fehler $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ [1], der wahrscheinlichste, allerdings nicht garantierte Fehler im betrachteten System.

Die beiden im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur Fehlerdiagnose können beliebig kombiniert werden. So kann beispielsweise für die Fehlerdetektion das Prinzip des gleitenden Horizonts eingesetzt werden und für die anschließende Fehlerisolation der konsistenzbasierte Ansatz.

Mithilfe einer kombinierten Zustands- und zusätzliche Parameterschätzung, im Rahmen der nichtlinearen Zustandsmengenbeobachtung, kann die Qualität der Fehlerdiagnose noch weiter gesteigert werden. Die Parameterschätzung wird hierbei für die Detektion von multiplikativen Fehlern gemäß Definition 2.8 verwendet.

6.3 Zusammenfassung

Auf der Grundlage der in Kapitel 4 beschriebenen Architektur zur verteilten Fehlerdiagnose wurde in diesem Kapitel ein neuartiges Verfahren zur verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtern basierend auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts, welches auch als Moving Horizon Estimation bezeichnet wird, vorgestellt. Damit wurde ein Beitrag zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4 geleistet.

Zu diesem Zweck wurde die verteilte Moving Horizon Estimation für verteilte, unsichere, nichtlineare Systeme nach Definition 4.3 eingeführt. Das formulierte mengenbasierte Ausgleichs- bzw. Optimierungsproblem wurde hierbei mithilfe der Intervallarithmetik in ein nicht-mengenbasiertes Ausgleichsproblem überführt. Somit kann das Optimierungsproblem mit bekannten und effizienten Standardverfahren gelöst werden. Das Optimierungsproblem hat zunächst das Ziel, die Differenz zwischen den Intervallmittelpunkten der gemessenen lokalen Ausgangsgröße und der prädizierten Ausgangsgröße im Schätzhorizont $[t_L, t_k]$ zu minimieren. Um die relevanten Informationen aus den anderen Subsystemen in den lokalen Berechnungen berücksichtigen zu können, wurde dem Optimierungsproblem ein zusätzlicher Term hinzugefügt. Die in Kapitel 4 eingeführten Transformationsvorschriften dienen zur Überführung der Zustandsmengenvektoren in das jeweilige Subsystem. Eine ebenfalls in der Gütefunktion enthaltene Anfangswertgewichtung beinhaltet alle vergangenen Informationen aus der Zeitspanne $t_0 \leq t < t_L$ vor dem gleitenden Schätzhorizont. Die Lösung des Ausgleichsproblems bildet die Lösungseinschließung des Zustandsmengenvektors zum Zeitpunkt t_k .

Diese Lösungseinschließung bildet anschließend die Grundlage des Diagnosealgorithmus zur verteilten Fehlerdiagnose. Für die Fehlerdetektion in den LFDs wird das Resultat der Schnittmengenbildung aus dem berechneten und gemessenen Systemverhalten des jeweils i -ten Subsystems berechnet und analysiert. Ist das Resultat dieser lokalen Schnittmengenbildung die leere Menge, so wird ein Fehler im System angenommen und eine anschließende Fehlerisolation im systemfernen GFI durchgeführt. Im Zuge der Fehlerisolation werden die Fehler in einer dynamischen Fehlerliste in Bezug auf ihre aktuelle Güte sortiert, wobei der Fehler mit der geringsten Abweichung zum betrachteten Systemverhalten an der ersten Position der Fehlerliste zu finden ist und somit die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist.

7 Anwendung der Fehlerdiagnose an realen Systemen

Ziel dieses Kapitels ist die Anwendung, Analyse sowie Gegenüberstellung der vorgestellten Verfahren zur verteilten Fehlerdiagnose anhand Messdaten realer Systeme. Zur Erzeugung von realen Messdaten wurden im Rahmen dieser Arbeit zwei Versuchsaufbauten, das Drei-Tank-System sowie die gekoppelten Pendel, entwickelt und umgesetzt. Dieses Kapitel dient daher der Beantwortung der dritten und letzten Forschungsfrage aus Abschnitt 2.4.

Im folgenden Abschnitt 7.1 werden zunächst die Umsetzung der einzelnen Fehlerdiagnosealgorithmen auf der verwendeten Hardware vorgestellt sowie die Anforderungen an die Recheneinheit dargelegt. Im darauffolgenden Abschnitt 7.2 werden die beiden neuen Diagnosealgorithmen an einem Drei-Tank-System angewendet. Dieses weit verbreitete Beispiel aus der Regelungstechnik kann als Prototyp für viele Anwendungen in der Prozessindustrie angesehen werden, wie chemische und petrochemische Anlagen. Anhand dieses Beispiels wird die Verteilung in Subsysteme, die Diagnoseergebnisse sowie die Auswirkungen der Unsicherheiten auf die jeweiligen Diagnoseresultate untersucht. Ferner werden die Verfahren einander gegenübergestellt und mit der jeweiligen globalen Fehlerdiagnose verglichen. Die gleichen Untersuchungen, wie in Abschnitt 7.2 vorgestellt, werden an einem weiteren Beispiel, dem gekoppelten Pendel, in Abschnitt 7.3 durchgeführt. Dieses akademische Beispiel bietet die Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit beider Diagnosealgorithmen an einem mechanisch gekoppelten System zu analysieren. Zum Abschluss erfolgt in Abschnitt 7.4 eine Zusammenfassung aller zentralen Ergebnisse und Erkenntnisse.

7.1 Umsetzung der Algorithmen

Die Grundlage aller Algorithmen bildet die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellte Intervallarithmetik. Bei der Implementierung von intervallarithmetischen Operationen auf der Zielhardware muss die beschränkte Rechengenauigkeit sowie die angenäherte Darstellung von reellen Zahlen mittels Gleitkommazahlen hinreichend berücksichtigt werden. Zur Verdeutlichung dieser Problematik dient das nachfolgende Beispiel:

Beispiel 7.1:

Seien $[a] = [-1.1111, 1.1111]$ und $[b] = [-0.01111, 0.01111]$ zwei reelle Intervalle¹⁴. Dann gilt gemäß (3.21) bei exakter Berechnung

$$[a] + [b] = [-1.12221, 1.12221]. \quad (7.1)$$

Auf der Zielhardware mit einer Mantissenlänge 4 zur Basis 10 würde jedoch das ungenaue Resultat

$$[a] + [b] = [-1.122, 1.122]. \quad (7.2)$$

bestimmt werden.

Diese Rundungsfehler müssen zwingend bei der Implementierung berücksichtigt werden, da das Resultat sonst nicht korrekt die untere und obere Schranke des gesuchten Intervalls (siehe Definition 3.5) darstellt. Diese Problematik kann durch die Anwendung des so genannten „gerichteten Rundens“ (engl. directed rounding) gelöst werden. Hierbei wird das Resultat nicht zur nächsten Maschinenzahl, sondern das Infimum zur nächst kleineren (in Richtung $-\infty$) und das Supremum zur nächst größeren Maschinenzahl (in Richtung $+\infty$) gerundet [Bee06]. Der exakte Wertbereich ist daher garantiert im Intervall eingeschlossen. Diese Vorgehensweise ist auch im Gleitkomma-Standard IEEE 754 (siehe [IEE85]) festgelegt. Ermöglicht wird dies auf der Zielhardware mithilfe einer dynamischen Umschaltung des Rundungsmodus des Prozessors. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Umsetzung der Intervallarithmetik in MATLAB mittels der zusätzlichen Intervallarithmetikbibliothek INTLAB (INTERVAL LABORATORY), welche von der Technischen Universität Hamburg entwickelt wurde [Rum99].

Für die aufwendige Berechnung der Taylor-Modelle wurde aus Geschwindigkeitsgründen in MATLAB auf die C++-Schnittstelle, mittels sogenannter MEX-Files, zurückgegriffen. Die Bibliothek wurde im Rahmen der Arbeit [Wol10] entwickelt und in dieser Arbeit für die verifizierte Lösungseinschließung eingesetzt.

Um das Ausgleichs- bzw. Optimierungsproblem der verteilten Moving Horizon Estimation aus Abschnitt 6 zu lösen, wurde der MATLAB-Algorithmus *lsqnonlin* aus der Optimization Toolbox in dieser Arbeit verwendet. Alle Algorithmen wurden auf einem Intel Core i9-9900 5.0 GHz Rechner mit 16 GB Arbeitsspeicher umgesetzt.

7.2 Drei-Tank-System

Die Lagerung und Bereitstellung von flüssigen Medien ist eine häufige Aufgabenstellung im Rahmen industrieller Prozesse über die verschiedensten Branchen hinweg. Es findet sich daher auch als vielfach verwendetes Beispiel in der Regelungstechnik. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ebenfalls ein Mehrtanksystem geplant und aufgebaut, um die Funktionsweise der entwickelten Fehlerdiagnosealgorithmen zu demonstrieren. Der entwickelte Versuchsaufbau ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Er besteht aus insgesamt drei Tanks, weshalb nachfolgend auch von einem Drei-Tank-System gesprochen wird, sowie aus verschiedenen Sensoren und Aktoren zum Messen bzw. Beeinflussen des Versuchsaufbaus. Eine Pumpe stellt den benötigten Wasserdruck bereit und über zwei pneumatische Stellventile kann der Zufluss in den ersten (linken) und in den dritten (rechten) Tank gesteuert werden. Mit diversen elektrischen Stellmotoren kann die Wasserführung des Rohrleitungssystems beeinflusst und dadurch unterschiedliche Fehlerszenarien umgesetzt werden. Neben den jeweiligen Füllständen, werden

¹⁴ Für eine eindeutige Darstellung wird im Folgenden bei Intervallen ein Punkt als Dezimaltrennzeichen verwendet.



Abbildung 7.1: Versuchsaufbau Drei-Tank-System (DTS)

noch der Durchfluss, die Temperatur und der Druck an verschiedenen Stellen des Versuchsaufbaus gemessen.

Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt die Modellbildung des monolithischen Versuchsaufbaus.

7.2.1 Modellbildung

Die Modellbildung des Drei-Tank-Systems erfolgt anhand der in Abbildung 7.2 skizzierten Darstellung. Es sind drei identische Tanks mit gleicher Querschnittsfläche A_T des Tanks sowie A_R des Rohrs gegeben. Im nächsten Schritt werden alle Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen als allgemeine mengenbasierte Größen angegeben sowie die Parameter als intervallwertige Größen erfasst. Der Abfluss jedes einzelnen Tanks wird durch die Formel von

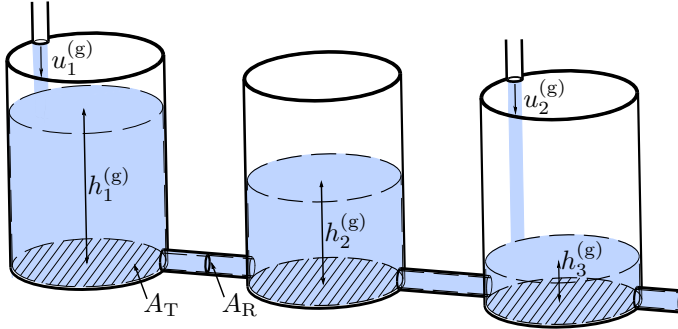


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung des angewendeten Drei-Tank-Systems

Torricelli (siehe [TM15]) bestimmt, was zu den folgenden nichtlinearen, unsicheren, zeitkontinuierlichen Zustandsgleichungen für $\mathcal{H}_1^{(g)} \geq \mathcal{H}_2^{(g)} \geq \mathcal{H}_3^{(g)}$ führt:

$$\dot{\mathcal{H}}_1^{(g)} = \frac{\mathcal{U}_1^{(g)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}}, \quad (7.3a)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_2^{(g)} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}} \right), \quad (7.3b)$$

$$\dot{\mathcal{H}}_3^{(g)} = \frac{\mathcal{U}_2^{(g)}}{[A_T]} + \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_3^{(g)}} \right) \quad (7.3c)$$

mit der Erdbeschleunigung $[g]$. Die jeweiligen Zuflüsse für Tank 1 bzw. 3 sind durch $\mathcal{U}_1^{(g)}$ bzw. $\mathcal{U}_2^{(g)}$ gegeben. Die unsichere, vektorielle Ausgangsgleichung ist durch

$$\mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{H}^{(g)} \quad (7.4)$$

gegeben und die Anfangszustände anhand von $\mathcal{H}_0^{(g)} = [\mathcal{h}^{(g)}(t_0)]$. Die Zustandsraumdarstellung weist somit die geforderte Gestalt nach Definition 3.3 auf. In Tabelle 7.1 sind alle unsicheren Parameter des Drei-Tank-Systems zusammengefasst. Aufgrund zusätzlicher Einbauten in den Rohrleitungen, beispielsweise einem Kugelhahn, können die Querschnittsflächen nicht mit einer schmalen Intervallbreite angegeben werden.

Symbol	Beschreibung und Wert	Einheit
$[A_R]$	Querschnittsfläche Rohr = $[0.51, 1.65]$	cm^2
$[A_T]$	Querschnittsfläche Tank = $[11, 13]$	dm^2
$[g]$	Erdbeschleunigung = $[97.8, 98.3]$	dm/s^2

Tabelle 7.1: Unsichere Parameter des Drei-Tank-Systems

Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt die Verteilung der unsicheren Zustandsgleichung (7.3) sowie der Ausgangsgleichung (7.4) in mehrere Subsysteme.

7.2.2 Verteilung des unsicheren Modells

Die Verteilung des Drei-Tank-System erfolgt unter Berücksichtigung der Annahmen 4.1 - 4.3 der Definition 4.3 folgend und resultiert in einer verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung. Das Drei-Tank-System wird in insgesamt $N = 3$ Subsysteme ($\text{Sub}^{(i)}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$) partitioniert, wobei jeder Tank ein eigenes Subsystem formt. Die Partitionierung erfolgt somit aufgrund der räumlichen Anordnung der Tanks. In Abbildung 7.3 ist diese Verteilung veranschaulicht.

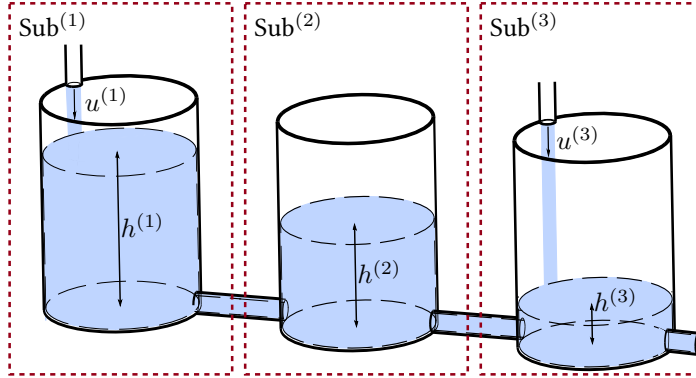


Abbildung 7.3: Schematische Darstellung des verteilten Drei-Tank-Systems

Die lokalen Zustände $\mathcal{H}^{(i)}$ sind die jeweiligen Füllstände. Die Transformationsmatrizen für die einzelnen Subsysteme $i \in \{1, 2, 3\}$ resultieren in

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.5a)$$

$$\mathbf{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.5b)$$

$$\mathbf{T}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.5c)$$

Die lokalen Ausgangsgleichungen korrespondieren mit den Ausgangsgleichungen des monolithischen Systems, was anhand der Transformationsmatrizen

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.6a)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.6b)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.6c)$$

beschrieben ist. Die Eingangsgröße $\mathcal{U}_1^{(g)}$ beeinflusst ausschließlich das erste Subsystem und bildet daher die lokale Eingangsgröße $\mathcal{U}_1^{(1)}$ des ersten Subsystems. Für die zweite Eingangsgröße $\mathcal{U}_2^{(g)}$ gilt dies analog zu betrachten. Folglich ist die Transformation mittels

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{S}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.7b)$$

beschrieben. Aus der monolithischen Systembeschreibung (7.3) ist leicht zu erkennen, dass die Differentialgleichung (7.3a) für $\dot{\mathcal{H}}_1^{(g)}$ vom Füllstand des zweiten Tanks (Sub⁽²⁾) abhängt. Gleiches gilt für $\dot{\mathcal{H}}_3^{(g)}$, welche ebenfalls vom Füllstand des zweiten Tanks abhängig ist. Die Differentialgleichung (7.3b) für $\dot{\mathcal{H}}_2^{(g)}$ hängt sowohl vom Füllstand des ersten Tanks (Sub⁽¹⁾) als auch vom dritten Tank (Sub⁽³⁾) ab. Folglich sind die Transformationsmatrizen für die externen Zustände wie folgt gegeben:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.8a)$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.8b)$$

$$\mathbf{R}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.8c)$$

Im nächsten Schritt erfolgt die Wertebereichseinschließung der externen Zustandsgrößen $\text{bd}\{\mathcal{Z}^{(i)}\}$ mit der damit verbundenen Bestimmung der unteren und oberen Schranken der maximal zulässigen Änderungsraten. Hierzu werden Informationen über die Systemgrenzen benötigt, welche sich aus dem physikalischen Aufbau des Drei-Tank-Systems ergeben. Die Eingangsgrößen sind der Zufluss in Tank 1 und Tank 3 und durch die maximale Leistung der Pumpe begrenzt, d. h. $\mathcal{U}_1^{(g)} = [u_1^{(g)}] = [0, u_{\max}]$ sowie $\mathcal{U}_2^{(g)} = [u_2^{(g)}] = [0, u_{\max}]$ mit $u_{\max} = 3,2 \text{ m}^3/\text{h}$. Die Beschränkungen der Zustandsgrößen $\mathcal{H}_1^{(g)}$, $\mathcal{H}_2^{(g)}$ und $\mathcal{H}_3^{(g)}$ sind die jeweiligen maximalen Tank- bzw. Behälterhöhen $h_{\max}^{(1)} = h_{\max}^{(2)} = h_{\max}^{(3)} = h_{\max} = 1 \text{ m}$ und lauten daher $\mathcal{H}_1^{(g)} = [h_1^{(g)}] = [0, h_{\max}]$, $\mathcal{H}_2^{(g)} = [h_2^{(g)}] = [0, h_{\max}]$ sowie $\mathcal{H}_3^{(g)} = [h_3^{(g)}] = [0, h_{\max}]$. Werden diese intervallwertigen Systemgrenzen in die monolithische Systembeschreibung (7.3a) substituiert, so ergibt sich aus der Vorschrift (4.15) und den Transformationsmatrizen (7.8) die gesuchte Wertebereichseinschließung unter Einbezug der Parameterwerte aus Tabelle 7.1 zu:

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathcal{Z}}^{(1)}\} &= \mathbf{R}^{(1)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(g)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(g)} \end{bmatrix} \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} \\ \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} - \sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} \right) \\ \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} + \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} - \sqrt{[0, h_{\max}] - [0, h_{\max}]} \right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] = [-0.6651, 0.6651] \text{ cm/s} \end{aligned} \quad (7.9)$$

und analog

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(2)}\} &= \mathbf{R}^{(2)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left(\left[\mathbf{h}^{(g)} \right], \left[\mathbf{u}^{(g)} \right] \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [0, \sqrt{h_{\max}}] \\ \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-0.6651, 0.8081] \text{ cm/s} \\ [-0.6651, 1.4732] \text{ cm/s} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.10)$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(3)}\} &= \mathbf{R}^{(3)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left(\left[\mathbf{h}^{(g)} \right], \left[\mathbf{u}^{(g)} \right] \right) \right] \\ &= \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] = [-0.6651, 0.6651] \text{ cm/s}, \end{aligned} \quad (7.11)$$

wobei aufgrund der physikalischen Gegebenheiten bei den Radikanden nur Werte ≥ 0 von Relevanz sind und daher $\sqrt{-h_{\max}}$ durch 0 als Infimum im Intervall ersetzt wird. Insgesamt beschreiben die $N = 3$ verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellungen vollständig die lokalen Systemdynamiken und schließen die externen Systemdynamiken garantiert ein. Diese sind: Für das erste Subsystem

$$\Sigma^{(1)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(1)} &= \mathbf{T}^{(1)} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \frac{\mathcal{U}^{(1)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}^{(1)} - \mathcal{Z}^{(1)}} \\ \dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(1)}\} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] \end{cases} \quad (7.12)$$

mit der lokalen Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_1^{(g)}. \quad (7.13)$$

Für das zweite Subsystem

$$\Sigma^{(2)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(2)} &= \mathbf{T}^{(2)} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{Z}_1^{(2)} - \mathcal{H}^{(2)}} - \sqrt{\mathcal{H}^{(2)} - \mathcal{Z}_2^{(2)}} \right) \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(2)}\} = \begin{pmatrix} \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [0, \sqrt{h_{\max}}] \\ \frac{[0, u_{\max}]}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.14)$$

mit der lokalen Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_2^{(g)} \quad (7.15)$$

sowie für das dritte Subsystem

$$\Sigma^{(3)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(3)} &= \mathbf{T}^{(3)} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \frac{\mathcal{U}^{(3)}}{[A_T]} + \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{Z}^{(3)} - \mathcal{H}^{(3)}} - \sqrt{\mathcal{H}^{(3)}} \right) \\ \dot{\mathbf{z}}^{(3)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(3)}\} = \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} [-\sqrt{h_{\max}}, \sqrt{h_{\max}}] \end{cases} \quad (7.16)$$

mit der lokalen Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_3^{(g)}. \quad (7.17)$$

Die lokale Eingangsgröße in (7.12) ergibt sich aus $\mathcal{U}^{(1)} = \mathbf{S}^{(1)} \mathcal{U}^{(g)}$ sowie für (7.16) aus $\mathcal{U}^{(3)} = \mathbf{S}^{(3)} \mathcal{U}^{(g)}$, wobei $\mathcal{U}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1^{(g)} & \mathcal{U}_2^{(g)} \end{pmatrix}^\top$ gilt.

Im Vergleich zum globalen System, welches die Systemordnung $n^{(g)} = 3$ aufweist, besitzen die lokalen Systeme eine reduzierte Systemordnung $n^{(i)} = 1$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

7.2.3 Diagnoseergebnisse des Drei-Tank-Systems

Für den Nachweis der Funktionsfähigkeit und die Gegenüberstellung der beiden neuen Fehlerdiagnoseverfahren werden am Beispiel des Drei-Tank-Systems verschiedene Szenarien untersucht. Zunächst wird die Funktionsfähigkeit der Algorithmen am fehlerfreien System überprüft. Anschließend erfolgt die Verifikation am fehlerbehafteten System. Hierzu erfolgen Messungen am System bei dem Auftritt sowohl eines additiven Fehlers als auch eines multiplikativen Fehlers (siehe Definition 2.8 bzw. 2.9). Es werden daher die folgenden zwei Fehlerkandidaten betrachtet:

- $F_1^{(g)}$: Offsetfehler bzw. Nullpunktverschiebung der Füllstandsmessung am dritten Tank um den Wert f_1 (additiver Fehler).
- $F_2^{(g)}$: Rohrverstopfung zwischen Tank 1 und Tank 2, welche den Durchfluss um den Wert f_2 mit $f_2 > 0$ mindert (multiplikativer Fehler).

Für den ersten Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ gilt für das zugehörige fehlerhafte Systemverhalten die Zustandsraumdarstellung

$$\mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{U}_1^{(g)}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} \\ \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}} \right) \\ \frac{\mathcal{U}_2^{(g)}}{[A_T]} + \frac{[A_R] \sqrt{2[g]}}{[A_T]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_3^{(g)}} \right) \end{pmatrix} \\ \mathcal{Y}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^{(g)} \\ \mathcal{H}_2^{(g)} \\ \mathcal{H}_3^{(g)} + f_1 \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (7.18)$$

Der zweite Fehlerkandidat $F_2^{(g)}$ wirkt multiplikativ auf die Kreisfläche des Rohrs $[A_R]$ zwischen Tank 1 und Tank 2. Die zugehörige Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)}$ ist somit gegeben durch

$$\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathcal{H}}^{(g)} &= \begin{pmatrix} \frac{u_1^{(g)}}{[A_T]} - \frac{f_2 [A_R] \sqrt{2 [g]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}}}{[A_T]} \\ \frac{f_2 [A_R] \sqrt{2 [g]} \sqrt{\mathcal{H}_1^{(g)} - \mathcal{H}_2^{(g)}}}{[A_T]} - \frac{[A_R] \sqrt{2 [g]} \sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}}}{[A_T]} \\ \frac{u_2^{(g)}}{[A_T]} + \frac{[A_R] \sqrt{2 [g]} \left(\sqrt{\mathcal{H}_2^{(g)} - \mathcal{H}_3^{(g)}} - \sqrt{\mathcal{H}_3^{(g)}} \right)}{[A_T]} \end{pmatrix} \\ \mathcal{Y}^{(g)} &= \mathcal{H}^{(g)} \end{cases} \quad (7.19)$$

Folglich wird die Menge aller zugehörigen globalen Systembeschreibungen anhand von

$$\tilde{\mathcal{B}}^{(g)} = \mathcal{B}^{(g)} \setminus \mathcal{B}_{F_0^{(g)}}^{(g)} = \left\{ \mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}, \mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} \right\} \quad (7.20)$$

beschrieben, welche zur Fehlerisolation benötigt werden.

Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, besitzen die beiden Fehlerdiagnoseverfahren identische Einstellparameter. Diese Einstellparameter gelten sowohl für die globale als auch für die verteilte Ausführung des jeweiligen Zustandsmengenbeobachters. Die Abtastzeit bzw. Schrittweite beträgt hierbei $T_a = h = 0,2 \text{ s}$ und die Taylor-Modell-Ordnung wurde zu $\ell = 2$ gewählt. Die unbekannte aber begrenzte Eingangsgröße u_{wahr} wird durch das Intervall

$$u_{\text{wahr}} \in [u_{\text{mess}} - \delta_u, u_{\text{mess}} + \delta_u] \quad (7.21)$$

eingeschlossen, wobei $\delta_u = 22,2 \text{ cm}^3/\text{s}$ die maximale Messabweichung gemäß dem Datenblatt des Durchflusssensors beschreibt und u_{mess} den Messwert des Sensors darstellt. Analog ist die Vorgehensweise für die Messung der jeweiligen Ausgangsgröße:

$$y_{\text{wahr}} \in [y_{\text{mess}} - \delta_y, y_{\text{mess}} + \delta_y] \quad (7.22)$$

mit der maximalen Messabweichung aus dem Datenblatt des Füllstandsensors $\delta_y = 0,05 \text{ cm}$ sowie dem Messwert des Sensors y_{mess} .

In den nächsten zwei Abschnitten werden verschiedene Szenarien (fehlerfrei und fehlerbehaftet) am realen Drei-Tank-System zur Demonstration der Funktionsweise vorgestellt. Zunächst mittels der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose und abschließend mit der MHE-basierten Fehlerdiagnose.

Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose

Das erste Szenario ist der fehlerfreie Fall. In den Abbildungen 7.4 - 7.6 sind hierzu die jeweiligen Ergebnisse der einzelnen LFD⁽ⁱ⁾ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ dargestellt. Die Abbildungen zeigen

die berechnete verifizierte Lösungseinschließung der lokalen Zustandsgrößen sowie der externen Zustandsgrößen über das Zeitintervall $t \in [0 \text{ s}, 600 \text{ s}]$. Die Anfangszustandsmenge ist anhand von

$$\begin{bmatrix} h_0^{(g)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [5.8, 5.9] \text{ dm} \\ [4.1, 4.3] \text{ dm} \\ [4.0, 4.1] \text{ dm} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

gegeben und kann mittels den Transformationsvorschriften (7.5) sowie (7.8) auf das jeweilige Subsystem bezogen werden. In sämtlichen Subsystemen liegt im betrachteten Zeitraum eine Konsistenz zwischen Modellverhalten und realem Systemverhalten vor, was den tatsächlichen Bedingungen entspricht. Bei den externen Zustandsgrößen wird zusätzlich die globale Messung abgebildet, welche durch die Indizes (g) gekennzeichnet sind. Diese dienen ausschließlich dem Vergleich und sind den lokalen Subsystemen unbekannt. Innerhalb der lokalen Subsysteme sind ausschließlich die lokalen Messungen verfügbar.

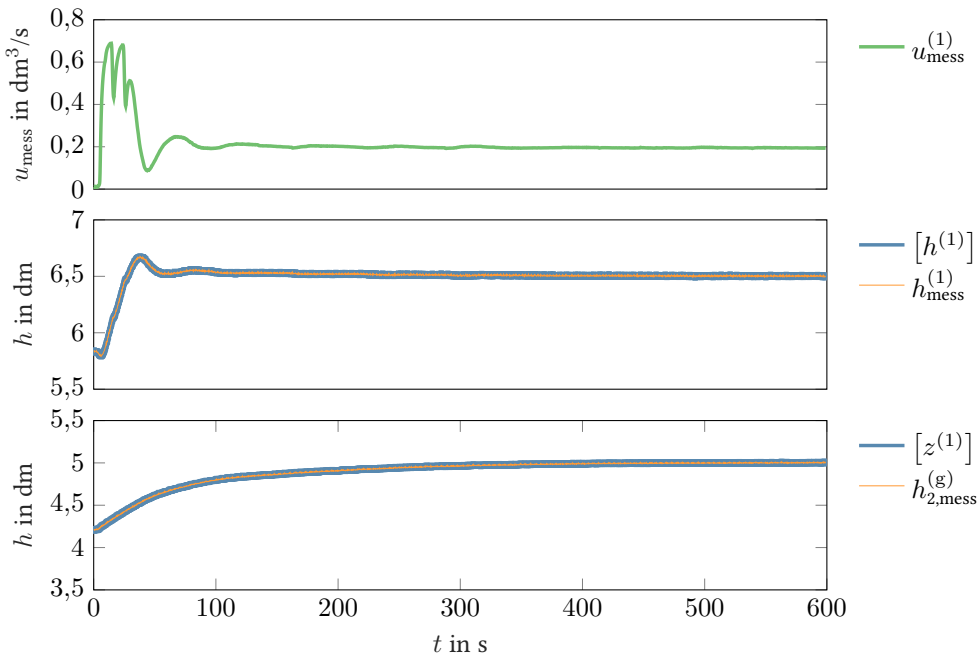


Abbildung 7.4: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

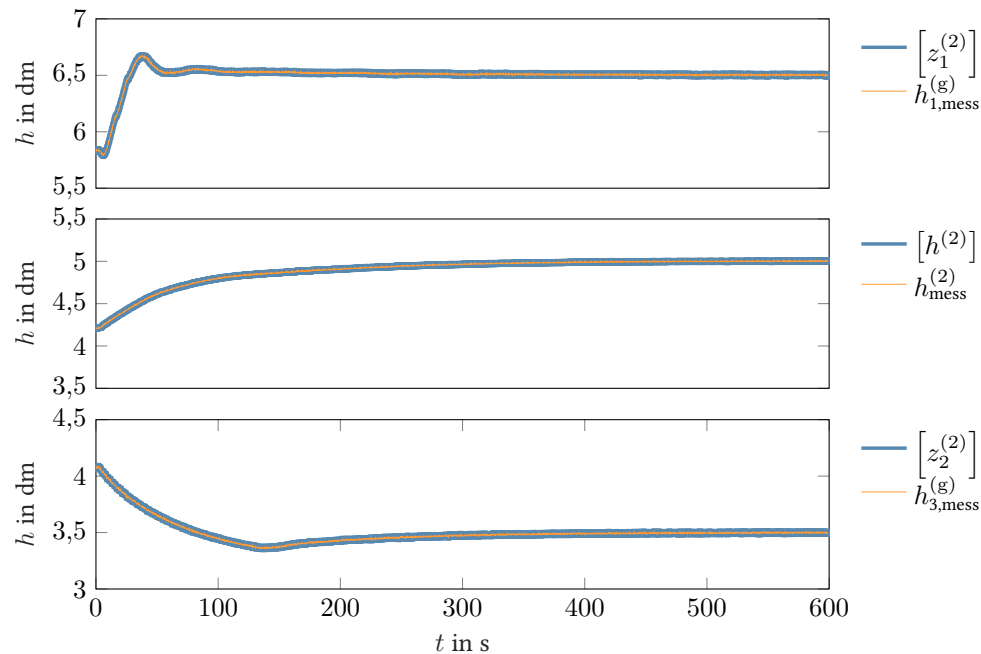


Abbildung 7.5: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

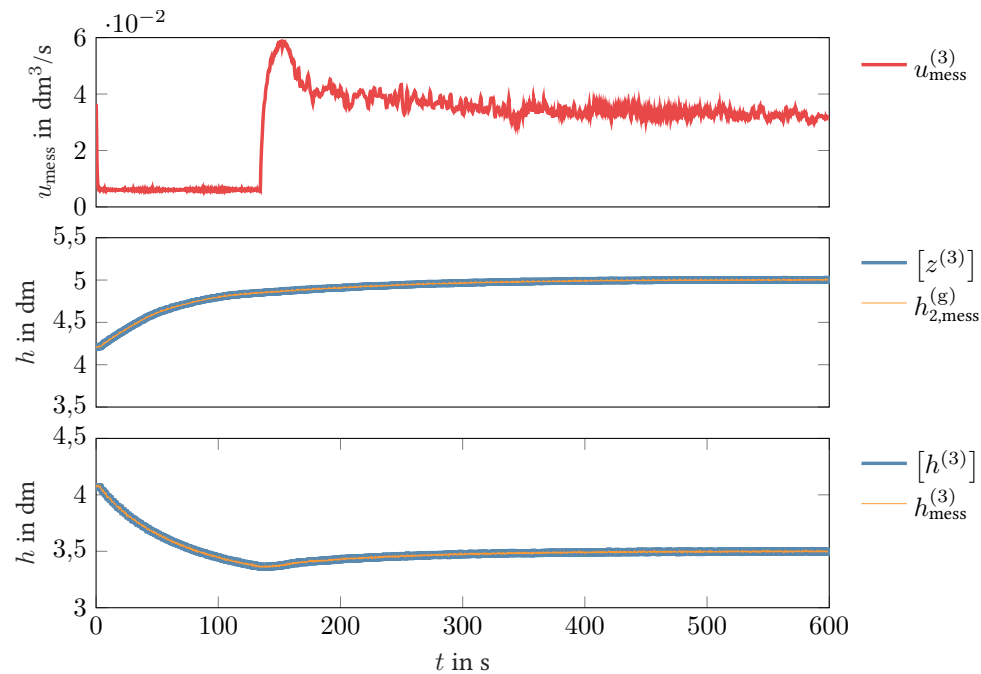


Abbildung 7.6: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

Das Vorhandensein eines additiven Fehlers $F_1^{(g)}$ stellt das nächste zu untersuchende Szenario dar. Die Fehleramplitude $f_1 = -4$ cm bewirkt einen konstanten Offset (auch Nullpunktverschiebung genannt) und tritt zum Zeitpunkt $t_f = 200$ s auf. Die Leistungsfähigkeit der Methode ist dargestellt in den Abbildungen 7.7 bis 7.9. Unmittelbar nach dem Fehlerauftritt (siehe Tabelle 7.2) liegt eine Inkonsistenz im $LFD^{(2)}$ sowie $LFD^{(3)}$ vor und damit ist keine konsistente Lösungseinschließung berechenbar. Folglich gilt die garantierte Aussage, dass ein Fehler im betrachteten System vorliegen muss. Dies entspricht ebenfalls den tatsächlichen Bedingungen.

Aufgrund der bei der Fehlerdetektion festgestellten Inkonsistenz wird eine anschließende Fehlerisolation im systemfernen GFI durchgeführt. Das Resultat ist in Abbildung 7.10 als Balkendiagramm der potenziellen Fehlerkandidaten zur Fehlerdetektion $F_0^{(i)}$ mit $i = \{1, 2, 3\}$ sowie zur Fehlerisolation $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)} = \{F_1^{(g)}, F_2^{(g)}\}$ dargestellt, wobei ein grüner Balken eine Konsistenz zwischen Modell und Prädiktion darstellt. Eine Inkonsistenz ist anhand eines roten Balkens ersichtlich. Nach der festgestellten Inkonsistenz in dem $LFD^{(2)15}$ sowie $LFD^{(3)}$ startet die Fehlerisolation. Hier zeigt ausschließlich das Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}$ mit dem zugehörigen Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ eine Konsistenz mit den realen Messdaten. Der additive Fehler wurde somit korrekt und eindeutig isoliert.

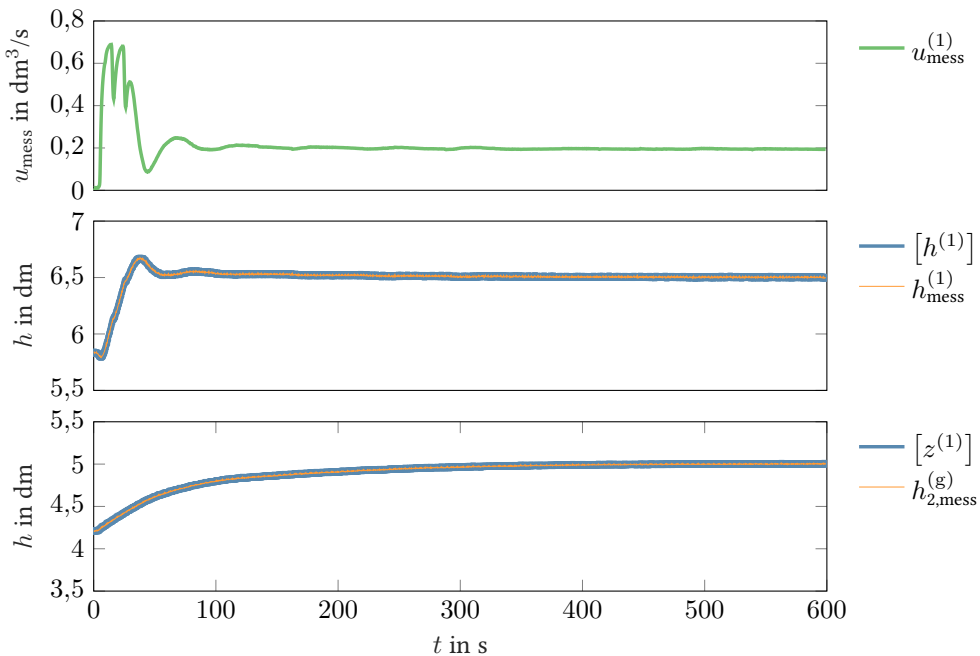


Abbildung 7.7: Resultate des konsistenzbasierten $LFD^{(1)}$: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Dreitank-System)

¹⁵ Im $LFD^{(2)}$ tritt ebenfalls eine Inkonsistenz auf, da über den externen Zustandsvektor eine indirekte Beeinflussung des fehlerhaften dritten Füllstandssensor auf das zweite Subsystem erfolgt.

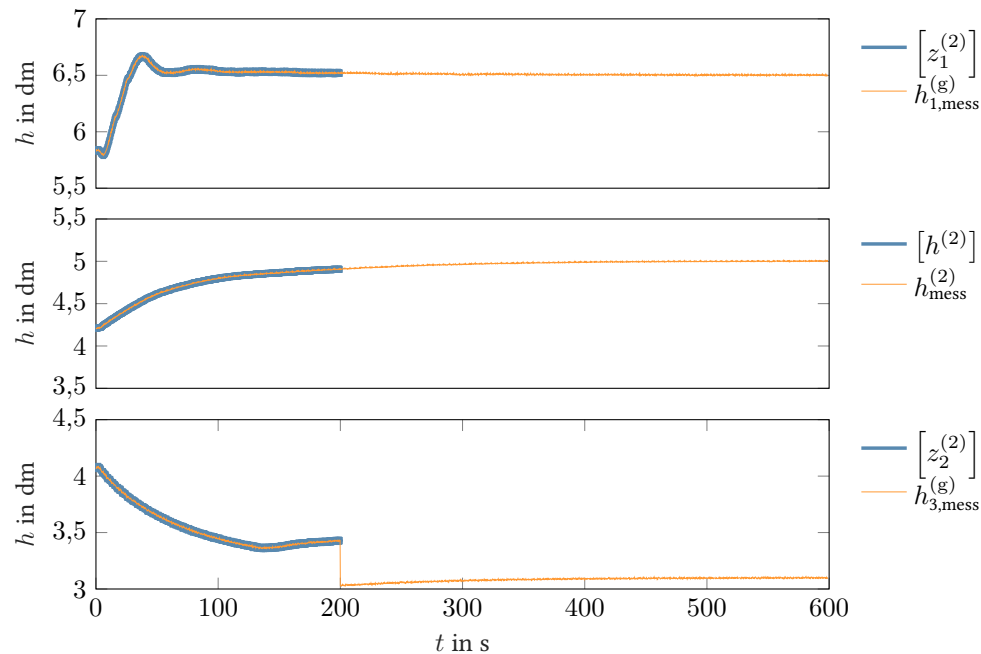


Abbildung 7.8: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

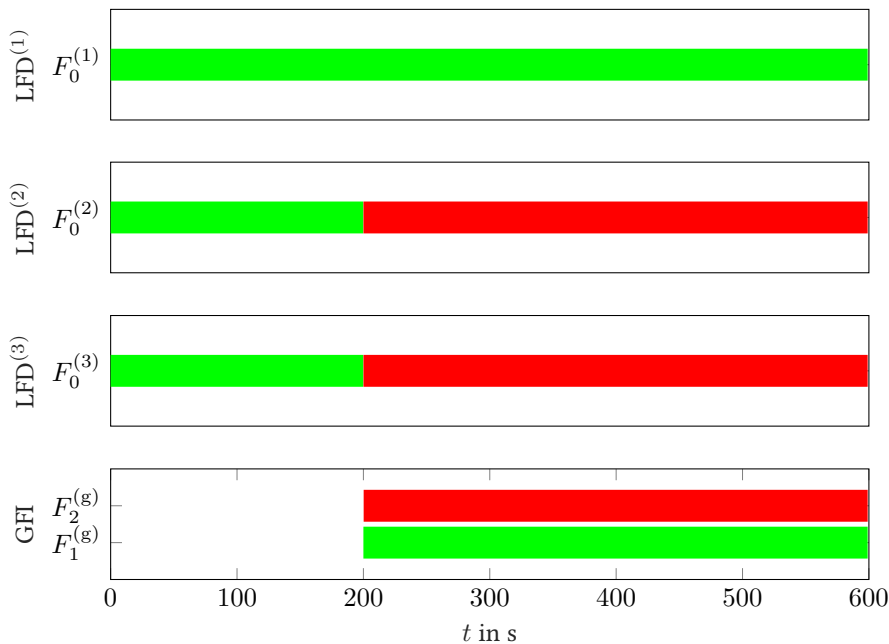


Abbildung 7.10: Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems unter Einfluss von $F_1^{(g)}$

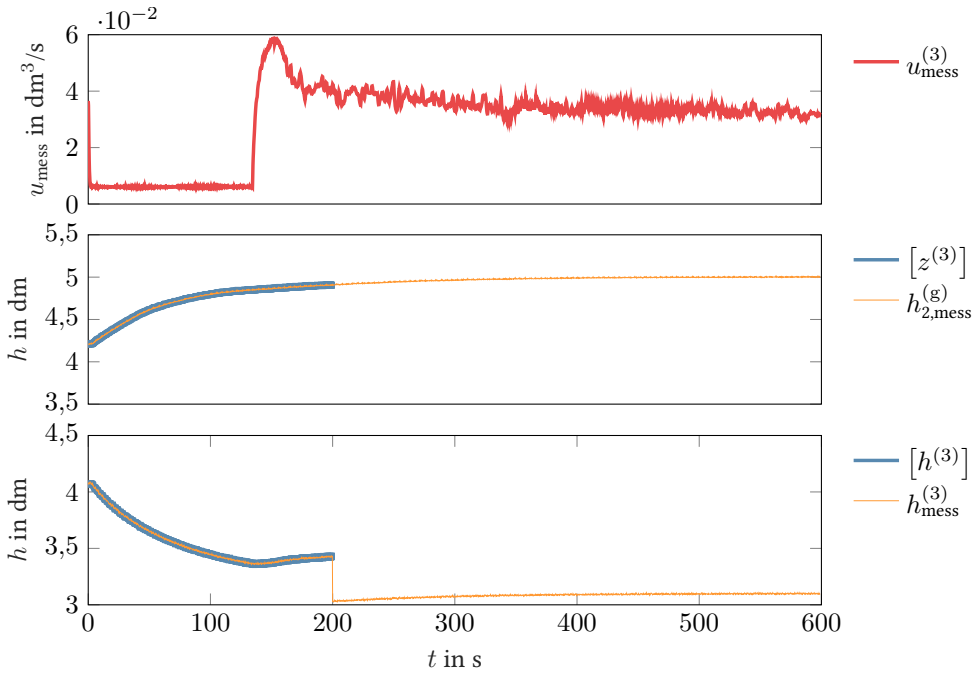


Abbildung 7.9: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

Das letzte zu analysierende Szenario ist der multiplikative Fehler $F_2^{(g)}$, welcher direkt die Systemparameter beeinflusst. Hierbei reduziert sich die Querschnittsfläche des Rohrs zwischen Tank 1 und Tank 2 auf 20% der nominalen Querschnittsfläche des Rohrs $[A_R]$, d. h. es gilt für den Fehler: $f_2 = 0,2$ ab dem Zeitpunkt $t_f = 437$ s. Die Leistungsfähigkeit der Methode in Bezug auf multiplikative Fehler ist dargestellt in den Abbildungen 7.11 bis 7.13. Es wird erfolgreich eine Inkonsistenz und somit ein Fehler im LFD⁽²⁾ nach $t_d - t_f = 14,4$ s festgestellt, was auch den realen Tatsachen entspricht. Beim LFD⁽¹⁾ sowie LFD⁽³⁾ sind die Auswirkungen des Fehlers durch die Unsicherheiten verdeckt. Trotz des Einsatzes eines Diagnoseverfahrens, welches nur bedingt multiplikative Fehler detektieren kann (siehe Abschnitt 5.2.3), ist keine zusätzliche Parameterschätzung von Nöten.

Nach der Feststellung der Inkonsistenz erfolgt die Fehlerisolierung im GFI. Anhand des Balkendiagramms in Abbildung 7.14 ist zu erkennen, dass eindeutig der gesuchte Fehlerkandidat $F_2^{(g)}$ isoliert wird.

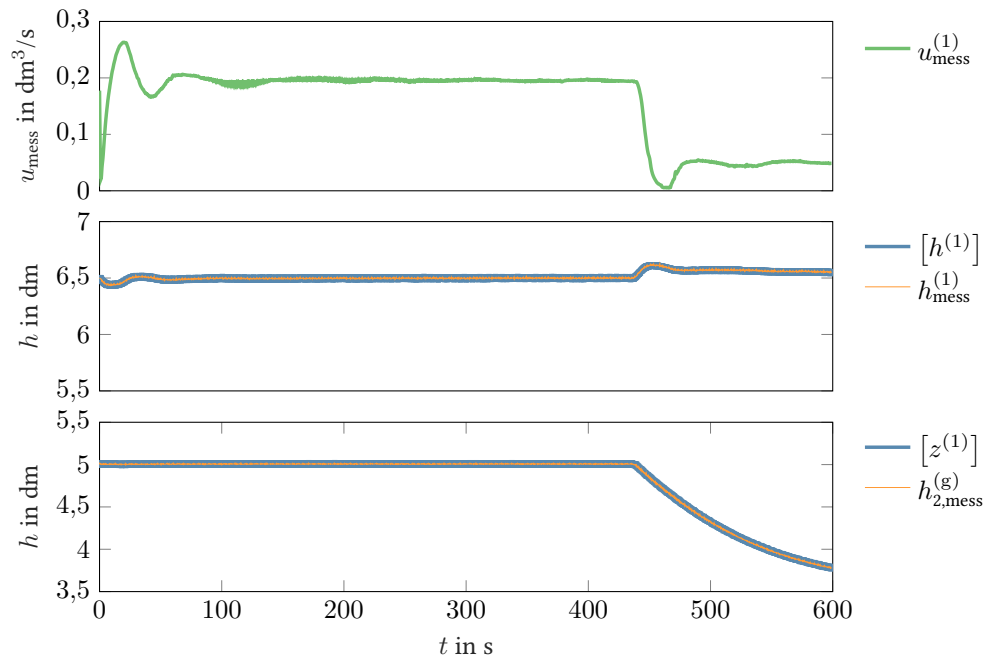


Abbildung 7.11: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

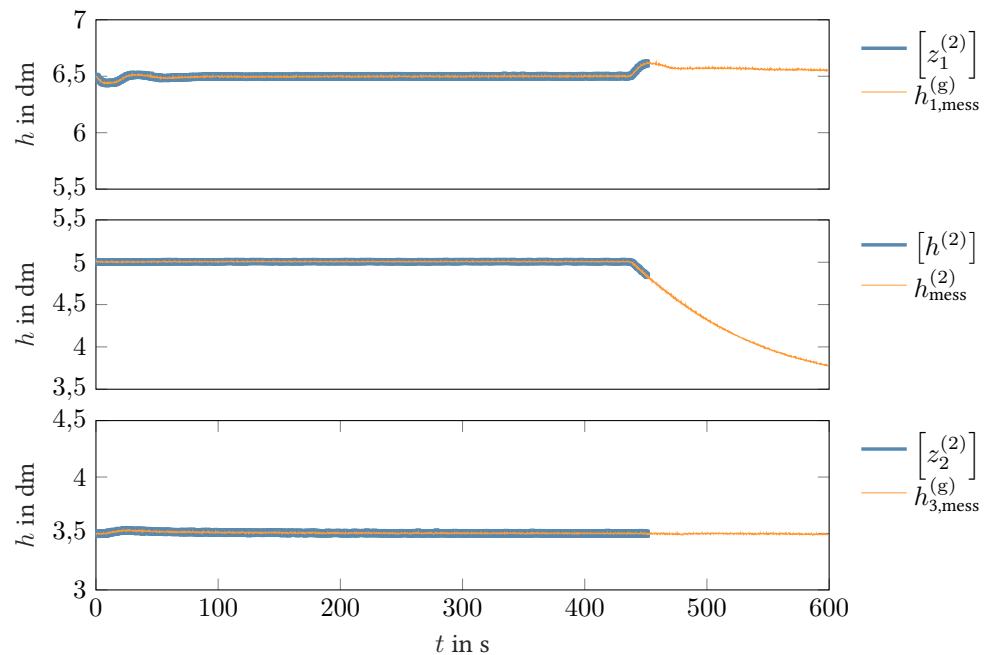


Abbildung 7.12: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

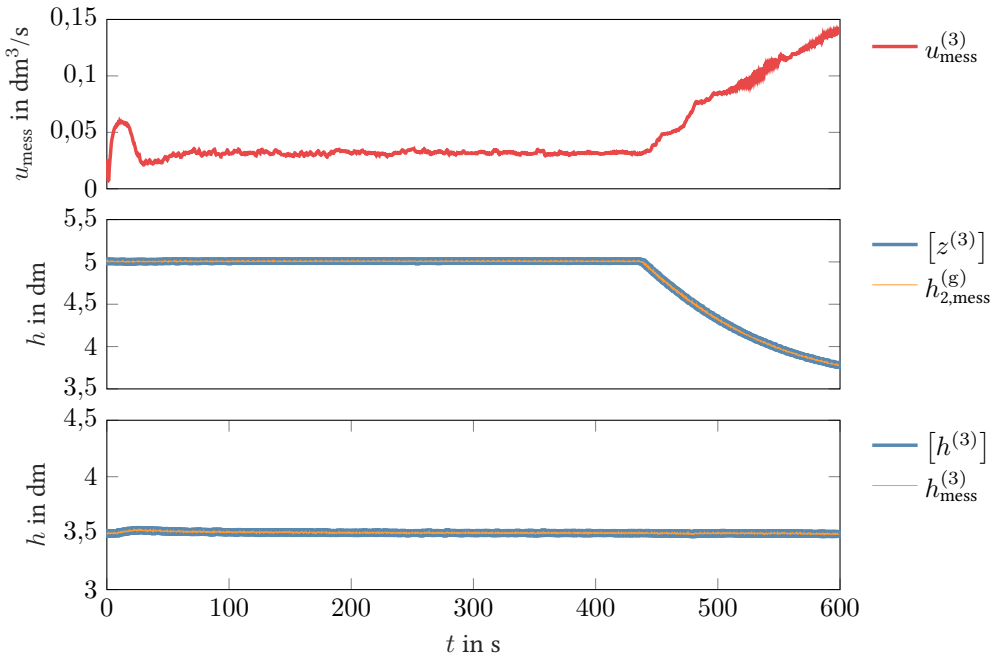


Abbildung 7.13: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

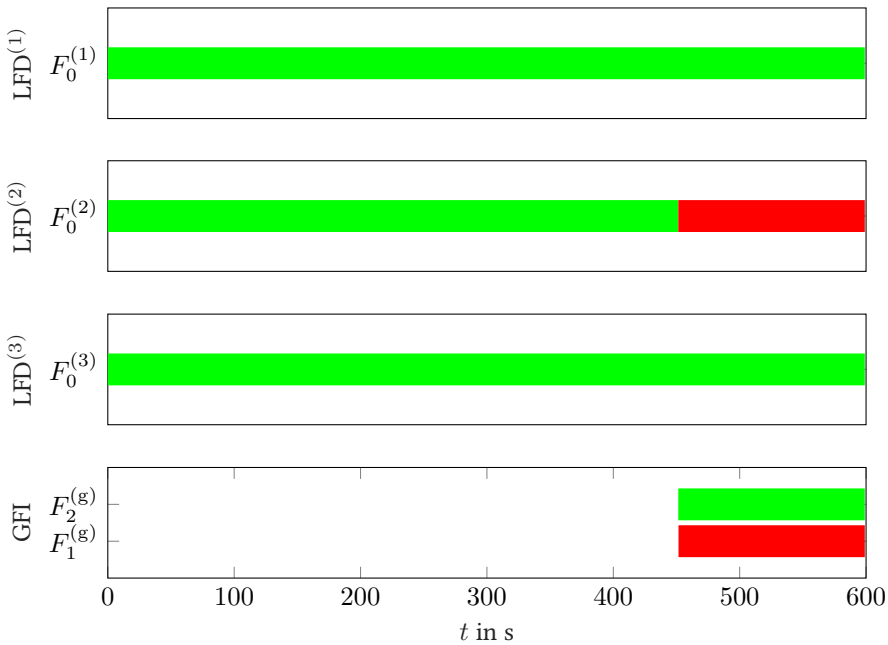


Abbildung 7.14: Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems unter Einfluss von $F_2^{(g)}$

MHE-basierende Fehlerdiagnose

In diesem Abschnitt wird der MHE-basierende Diagnoseansatz anhand realer Messdaten am Drei-Tank-System untersucht. Es werden für eine bessere Vergleichbarkeit die gleichen Messreihen wie zu Beginn dieses Abschnitts verwendet. Somit gilt für den fehlerfreien Fall sowie den additiven Fehler die Anfangszustandsmenge (7.23). Die Horizontlänge aller MHE-basierenden Zustandsmengenbeobachter wurde zu $\Lambda = 6$ gewählt. Ferner sind die nachfolgenden Nebenbedingungen an die Zustandsgrößen in den einzelnen Zustandsmengenbeobachtern umgesetzt:

- **LFD⁽¹⁾**: $\underline{h}^{(1)} \geq 0 \text{ m}$, $\bar{h}^{(1)} \leq 1 \text{ m}$ sowie $\bar{z}^{(1)} \leq \underline{h}^{(1)}$.
- **LFD⁽²⁾**: $\underline{h}^{(2)} \geq 0 \text{ m}$, $\bar{h}^{(2)} \leq 1 \text{ m}$, $\bar{h}^{(2)} \leq \underline{z}_1^{(2)}$ sowie $\bar{z}_2^{(2)} \leq \underline{h}^{(2)}$.
- **LFD⁽³⁾**: $\underline{h}^{(3)} \geq 0 \text{ m}$, $\bar{h}^{(3)} \leq 1 \text{ m}$ sowie $\bar{h}^{(3)} \leq \underline{z}^{(3)}$.

Die Nebenbedingungen sorgen somit für die Einhaltung der durch den Aufbau gegebenen physikalischen Rahmenbedingungen sowie die Erfüllung von (7.3).

Bei der MHE-basierenden Fehlerdiagnose muss, zur Erkennung des multiplikativen Fehlers, die Zustandsraumdarstellung erweitert werden, um eine Parameterschätzung durchführen zu können. Ohne diese Erweiterung konnte der multiplikative Fehler in diesem Anwendungsbeispiel nicht detektiert werden. Aus diesem Grund wurde ein weiterer Zustand in die Zustandsraumdarstellung (7.12) des ersten Subsystems eingeführt:

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_R \end{bmatrix} = [0, 0], \quad (7.24)$$

wobei hier nur die Querschnittsfläche des Rohrs zwischen Tank 1 und Tank 2 betrachtet wird. Ferner gilt $[A_R(t=0)] = [0.51, 1.65]$ (siehe Tabelle 7.1).

In den Abbildungen 7.15 - 7.16 sind die jeweiligen Ergebnisse der einzelnen LFD⁽ⁱ⁾ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ für den fehlerfreien Fall dargestellt. Die Abbildungen zeigen die berechnete verifizierte Lösungseinschließung der lokalen Zustandsgrößen sowie der externen Zustandsgrößen über die Zeit $t \in [0 \text{ s}, 600 \text{ s}]$. In sämtlichen Subsystemen liegt im betrachteten Zeitraum eine Konsistenz zwischen Modellverhalten und realem Systemverhalten vor, was den tatsächlichen Bedingungen entspricht.

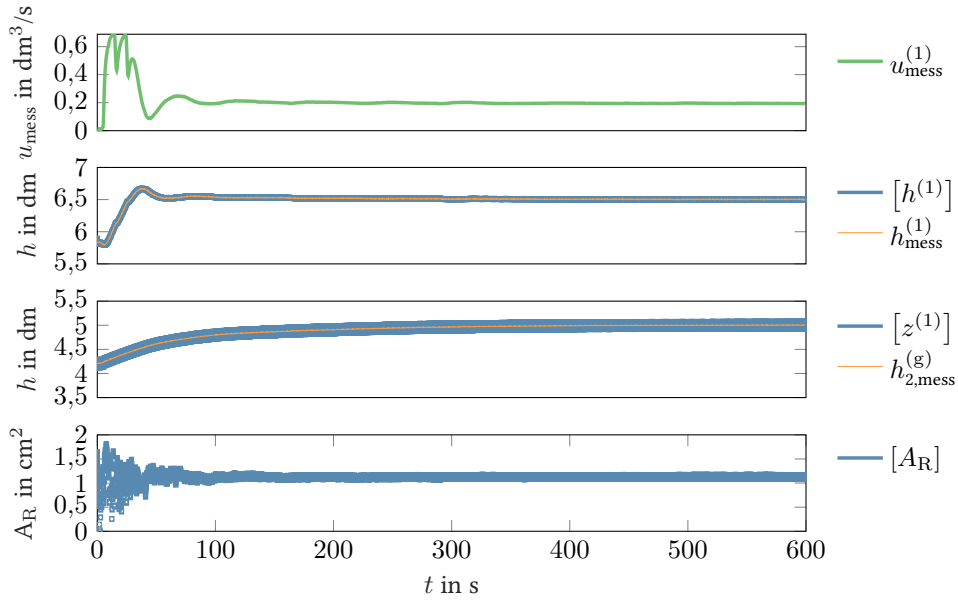


Abbildung 7.15: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

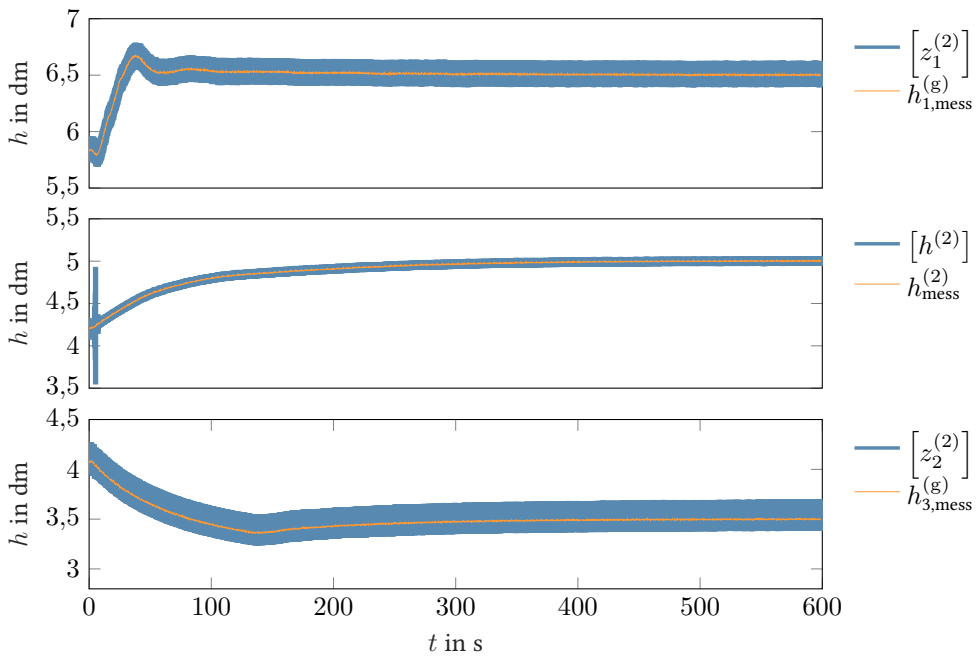


Abbildung 7.16: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

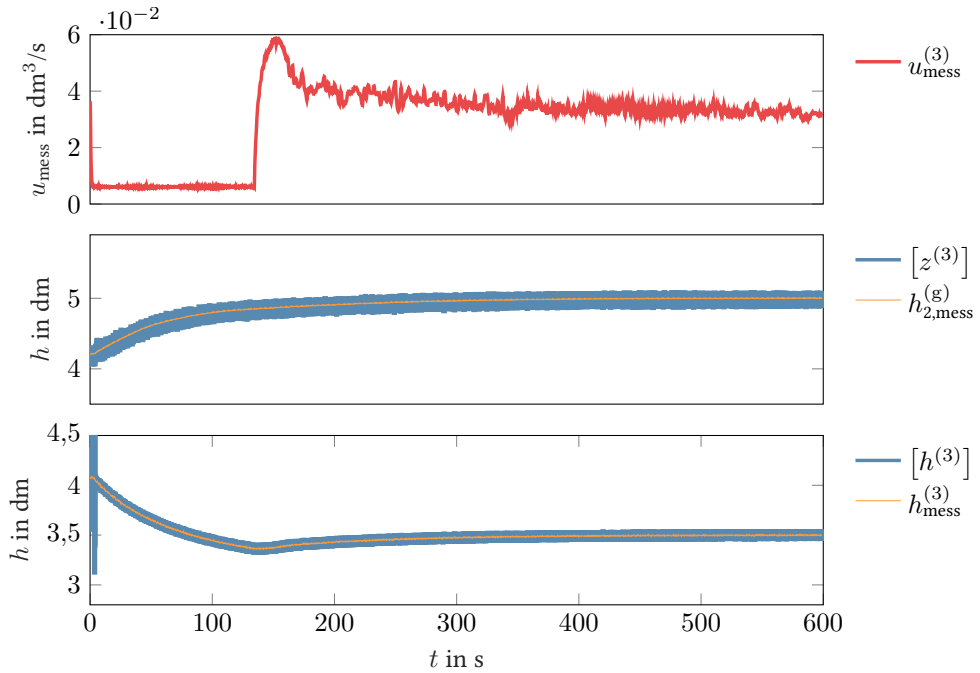


Abbildung 7.17: Resultate des MHE-basierenden $\text{LFD}^{(3)}$: fehlerfreier Fall (Drei-Tank-System)

Das zweite zu untersuchende Szenario stellt ebenfalls den additive Fehler $F_1^{(g)}$ zum Zeitpunkt $t_f = 200$ s mit der identischen Fehleramplitude $f_1 = -4$ cm dar. In den Abbildungen 7.18 bis 7.20 sind die Resultate der einzelnen LFDs dargestellt. Aufgrund der Rückführung des Schätzfehlers bei diesem Zustandsmengenbeobachter wird trotz eines Fehlerfalls die Lösungsmenge weiter berechnet. Es liegt daher nach Fehlerauftritt keine dauerhafte Inkonsistenz vor. Dieses zu erwartende Verhalten ist ebenfalls in diesen Abbildungen erkennbar und entspricht den tatsächlichen Bedingungen.

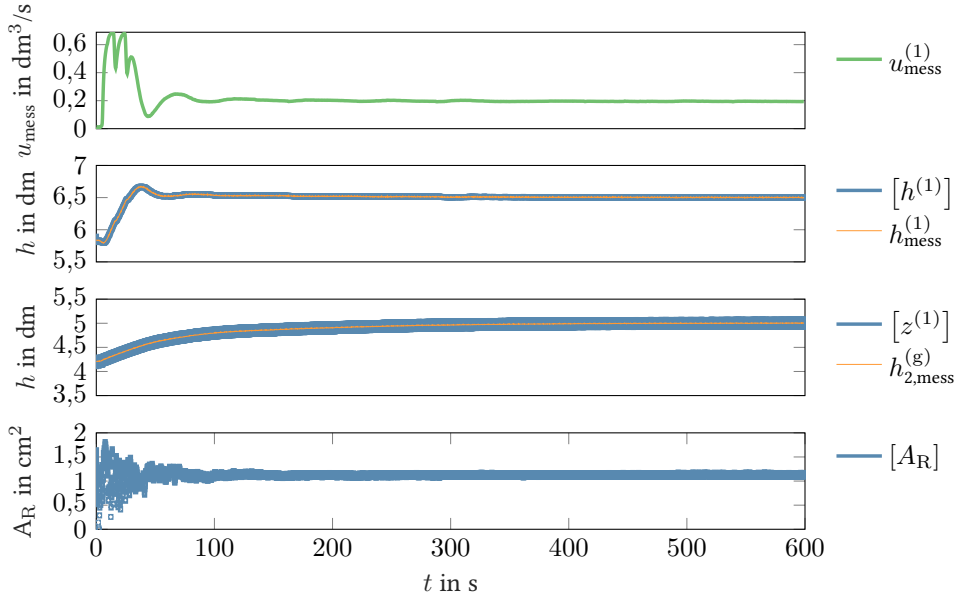


Abbildung 7.18: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

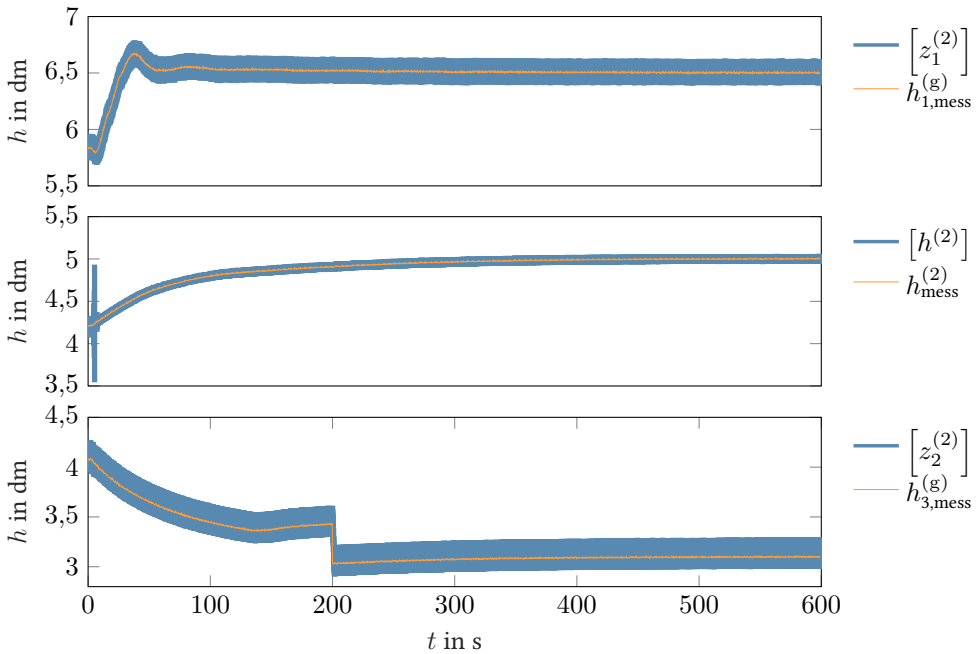


Abbildung 7.19: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

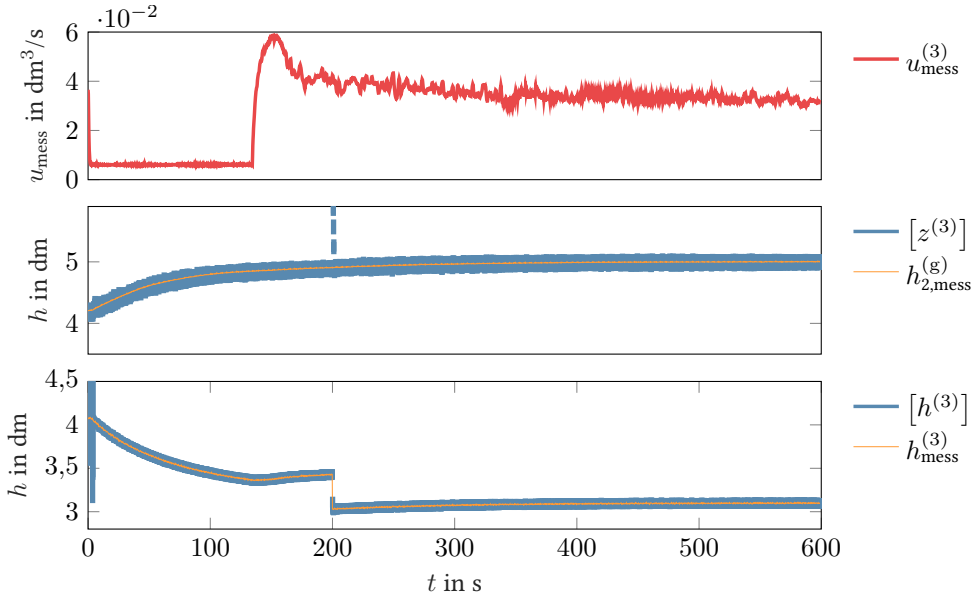


Abbildung 7.20: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

Die für die Fehlerdetektion zu bestimmende Schnittmenge der Lösungsmenge mit der Messmenge ist in Abbildung 7.21 als Balkendiagramm dargestellt. Ein grüner Balken steht dabei für eine nicht-leere Lösungsmenge dieser Schnittmengenbildung. Analog dazu stellt ein roter Balken die leere Lösungsmenge dar. Aus Abbildung 7.21 ist zu erkennen, dass unmittelbar nach Fehlerauftritt eine leere Lösungsmenge im LFD⁽³⁾ resultiert. Dieses Resultat ist aufgrund der oben beschriebenen Eigenschaft nur kurzzeitig ersichtlich. Aufgrund der leeren Schnittmenge wird eine Fehlerisolation anhand ihrer Güte (siehe Abschnitt 6.2.2) im systemfernen GFI durchgeführt. Dies ist ebenfalls in Abbildung 7.21 im unteren Diagramm ersichtlich. Zur besseren Darstellung wurde der Wert der Gütefunktion auf ihren jeweiligen maximalen Wert normiert. Nach einem kurzen Einschwingen ist der Wert der Gütefunktion $\Phi_{F_1^{(g)},*}^{(g),*}$ zum Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ am niedrigsten. Er ist somit an erster Position der aktuellen Fehlerliste $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)}(t_k)$ und folglich der Fehler mit der größten Wahrscheinlichkeit. Dies entspricht auch den tatsächlichen Bedingungen. Der additive Fehler wurde somit richtig isoliert. Ferner ist zu erkennen, dass ab Fehlerauftritt nach etwa 120 s die Gütefunktionen beider Fehlerkandidaten identisch ist. Dies ist ebenfalls auf die Rückführung des Schätzfehlers zurückzuführen. Eine sinnvolle Fehlerisolation ist daher ab diesem Zeitpunkt nicht mehr möglich.

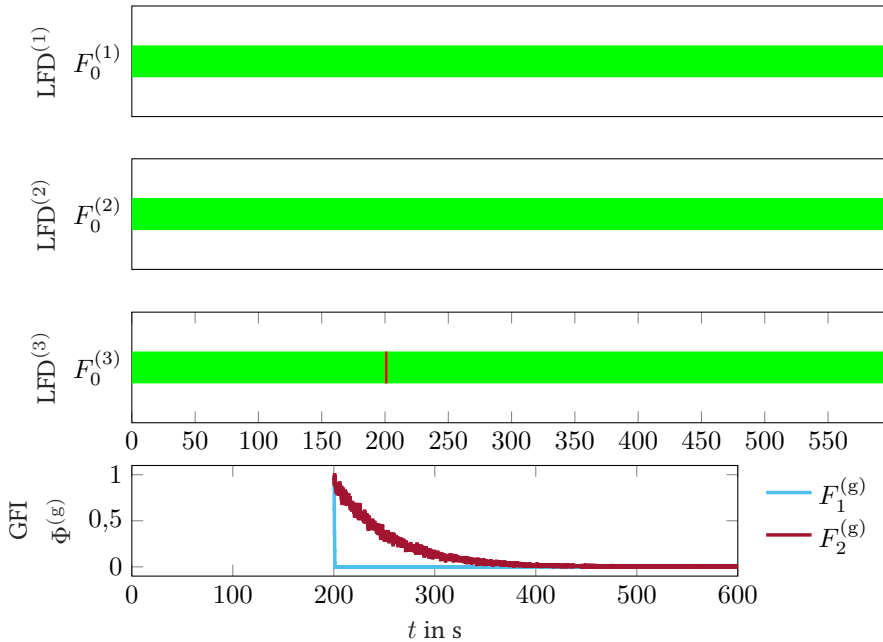


Abbildung 7.21: MHE-basierende Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems unter Einfluss von $F_1^{(g)}$

Das letzte zu analysierende Szenario ist der multiplikative Fehler $F_2^{(g)}$, welcher die Querschnittsfläche des Rohrs $[A_R]$ zwischen Tank 1 und Tank 2 ab dem Zeitpunkt $t_f = 437$ s auf 20% der nominalen Querschnittsfläche des Rohrs reduziert. Die Anfangszustandsmenge ist anhand von (??) gegeben. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts angeführt, haben die ersten Versuche gezeigt, dass eine direkte Detektion des multiplikativen Fehlers mit diesem Verfahren nicht möglich ist. Aus diesem Grund wurde die beschriebene zusätzliche Parameterschätzung eingeführt. Die Leistungsfähigkeit der Methode in Bezug auf den multiplikativen Fehler ist dargestellt in den Abbildungen 7.22 bis 7.24. Die Parameterschätzung wurde im $LFD^{(1)}$ implementiert und ist daher in Abbildung 7.22 ersichtlich. Nach Fehlerauftritt verringert sich die geschätzte Querschnittsfläche des Rohrs, was den realen Bedingungen entspricht.

Anhand des Balkendiagramms in Abbildung 7.25 ist zu erkennen, dass nach $t_d = 523,2$ s die Schnittmenge der geschätzten Querschnittsfläche des Rohrs mit der nominalen Querschnittsfläche des Rohrs aus Tabelle 7.1 in eine leere Menge resultiert. Der Fehler wurde somit erfolgreich detektiert. Es ist in diesem Fall keine zusätzliche Fehlerisolation im GFI notwendig, da aus der Fehlerdetektion bereits der fehlerhafte Parameter bekannt ist.

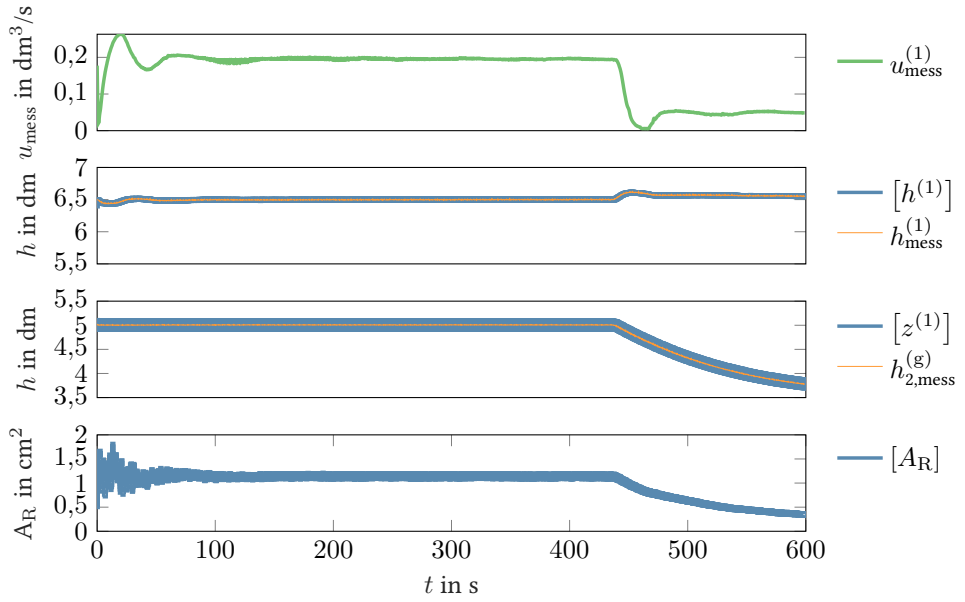


Abbildung 7.22: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

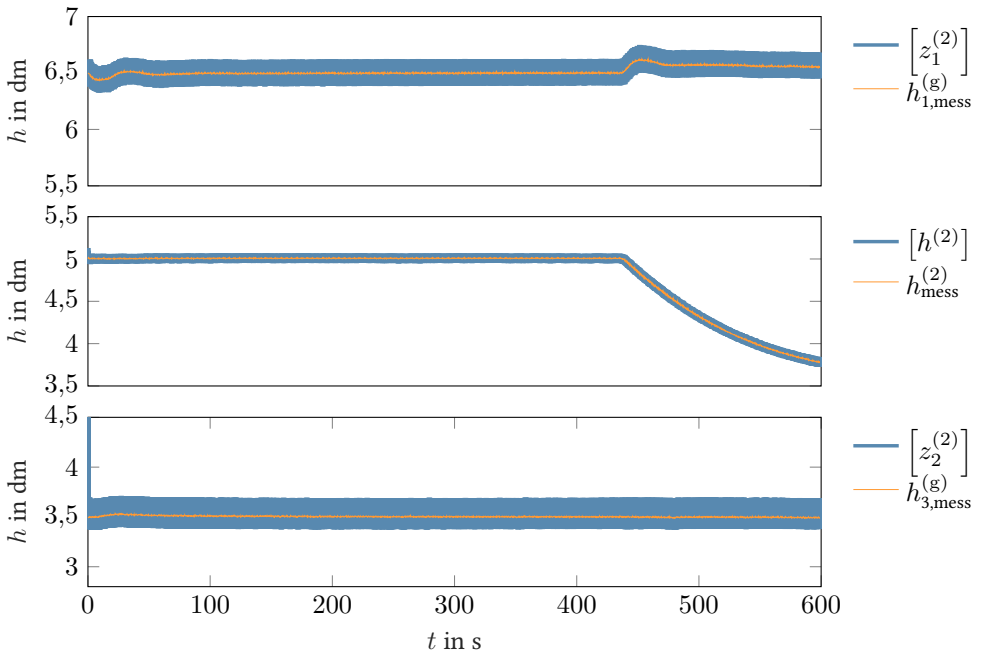


Abbildung 7.23: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

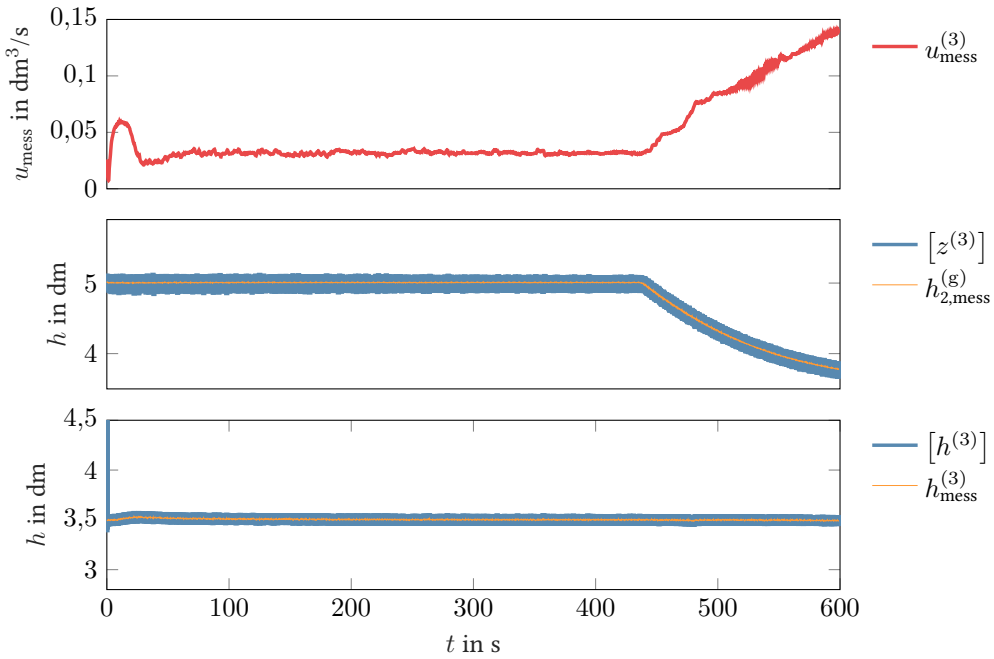


Abbildung 7.24: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (Drei-Tank-System)

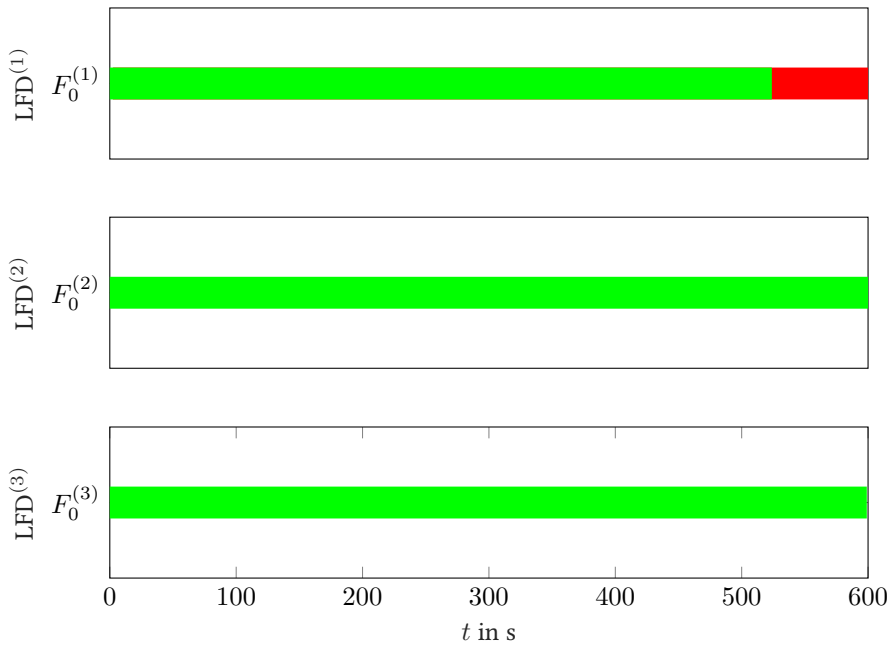


Abbildung 7.25: MHE-basierende Fehlerdiagnose des Drei-Tank-Systems unter Einfluss von $F_2^{(g)}$

7.2.4 Vergleich der Fehlerdiagnosemethoden und deren Rechenzeit

In diesem Abschnitt werden die Resultate der beiden Fehlerdiagnosemethoden gegenübergestellt und miteinander verglichen. Ferner sind zum Vergleich die jeweiligen Ergebnisse der globalen Fehlerdetektion (Global) für das monolithische System (7.3) angeben.

Im ersten Schritt werden die Zeitspannen zwischen dem Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f und Zeitpunkt der Fehlerdetektion t_d analysiert. Die Zeiten sind aus den einzelnen Fehlerbalkendiagrammen ersichtlich und in der Tabelle 7.2 zusammengefasst. Die Tabelle zeigt, dass alle

Fehler	Lokal: $t_d - t_f$	Global: $t_d - t_f$
<i>Konsistenzbasiertes Diagnoseverfahren</i>		
Additiver Fehler $F_1^{(g)}$	0 s	0 s
Multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$	14,4 s	14,2 s
<i>MHE-basiertes Diagnoseverfahren</i>		
Additiver Fehler $F_1^{(g)}$	0 s	0 s
Multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$	86,2 s	23,6 s

Tabelle 7.2: Zeitspanne zur erfolgreichen Fehlerdetektion beim Drei-Tank-System

Methoden den additiven Fehler $F_1^{(g)}$ direkt nach Fehlerauftritt detektieren. Es ist kein Unterschied zwischen den beiden verteilten Fehlerdiagnosemethoden sowie den zugehörigen globalen Methoden erkennbar. Der multiplikative Fehler $F_2^{(g)}$ wird von der konsistenzbasierten Methode schneller erkannt. Der Unterschied zwischen der lokalen und globalen Variante ist hierbei nur marginal. Die Detektion des multiplikativen Fehlers im Rahmen der MHE-basierten Fehlerdiagnosemethode benötigt deutlich mehr Zeit. Erst wenn die Schnittmengebildung der zusätzlich eingeführten Zustandsgröße, welche den Parameter $[A_R]$ repräsentiert, eine leere Lösungsmenge darstellt, kann der Fehler detektiert werden. Da die globale Variante der MHE-basierten Fehlerdiagnosemethode mehr Informationen zur Zustandsmengenschätzung zur Verfügung hat, kann eine engere Lösungseinschließung des geschätzten Parameters bestimmt werden. Aus diesem Grund erfolgt eine schnellere Detektion des Fehlers. Eine beschleunigte Fehlerdetektion wäre bei dieser Methode realisierbar, falls ein engeres Intervall zur Beschreibung des Rohrquerschnitts $[A_R]$ gefunden werden kann.

Der nächste zu analysierende Punkt ist die benötigte Rechenzeit der einzelnen Fehlerdiagnoseverfahren sowie die potenzielle Rechenzeiterparnis aufgrund der Parallelisierung und der lokalen Modellreduktion. Auch hier werden ebenfalls die Methoden in Bezug auf die Rechenzeit der globalen Variante gegenübergestellt. Zunächst erfolgt gemäß Abschnitt 4.4 eine Abschätzung der potenziellen Rechenzeiterparnis. Im Zuge der monolithischen Betrachtung des Systems werden zur Beschreibung der unsicheren Zustandsraumdarstellung (7.3) mittels Taylor-Modellen $\vartheta^{(g)} = n^{(g)} + r^{(g)} + p^{(g)} + 1 = 3 + 2 + 2 + 1 = 9$ Variablen eingesetzt. Für die jeweiligen Subsysteme (siehe (7.12) - (7.16)) werden $\vartheta^{(1)} = 6$, $\vartheta^{(2)} = 5$ sowie $\vartheta^{(3)} = 6$ Variablen benötigt. Für die Anzahl der Zustandsdifferentialgleichungen gilt jeweils

$\varsigma^{(g)} = n^{(g)} = 3$, $\varsigma^{(1)} = n^{(1)} + m^{(1)} = 2$, $\varsigma^{(2)} = 3$ und $\varsigma^{(3)} = 2$. Für den benötigten Speicheraufwand (siehe (4.44)) lässt sich somit eine potenzielle Reduzierung von etwa

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(1)} + \ell)!}{\vartheta^{(1)}! \ell!} \middle/ \frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 49,1\%, \quad (7.25)$$

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(2)} + \ell)!}{\vartheta^{(2)}! \ell!} \middle/ \frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 62\% \quad (7.26)$$

$$\text{und } 1 - \left(\frac{(\vartheta^{(3)} + \ell)!}{\vartheta^{(3)}! \ell!} \middle/ \frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 49,1\% \quad (7.27)$$

im Verhältnis zur globalen Systembetrachtung abschätzen. Für den benötigten Rechenaufwand resultiert eine potenzielle Rechenzeitersparnis von ungefähr

$$1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(1)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 67,3\%, \quad 1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(2)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 64\% \quad \text{und} \quad 1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(3)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 67,3\%. \quad (7.28)$$

In den Abbildungen 7.26 und 7.27 sind die für die konsistenzbasierte bzw. MHE-basierte Fehlerdiagnose tatsächlich benötigten Rechenzeiten dargestellt. Beide Abbildungen bestätigen

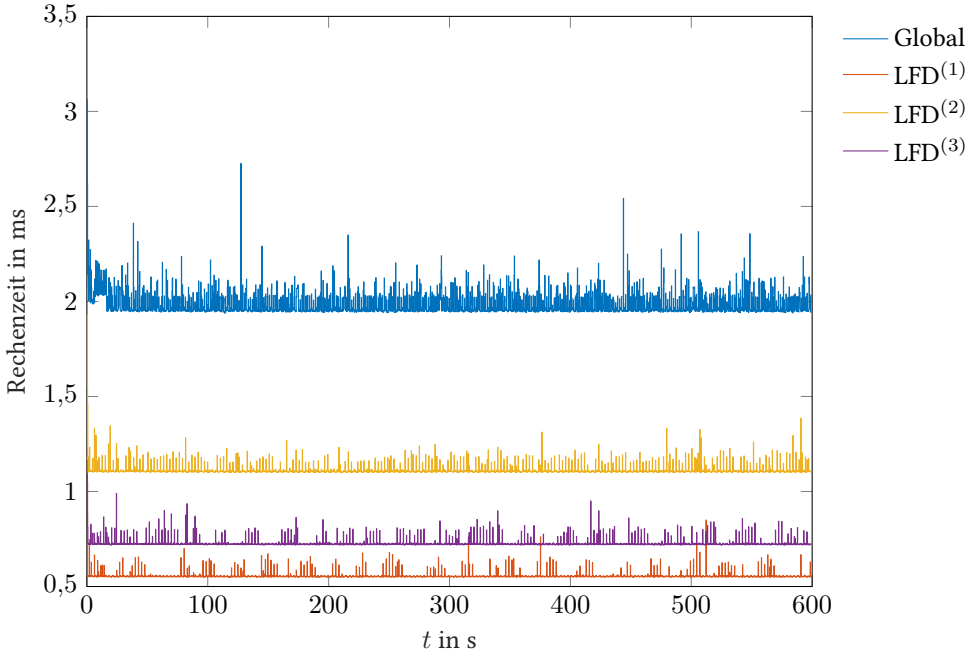


Abbildung 7.26: Rechenzeit bei der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose (Drei-Tank-System)

die berechneten potenziellen Rechenzeitabschätzungen. Es ist zu erkennen, dass die größte

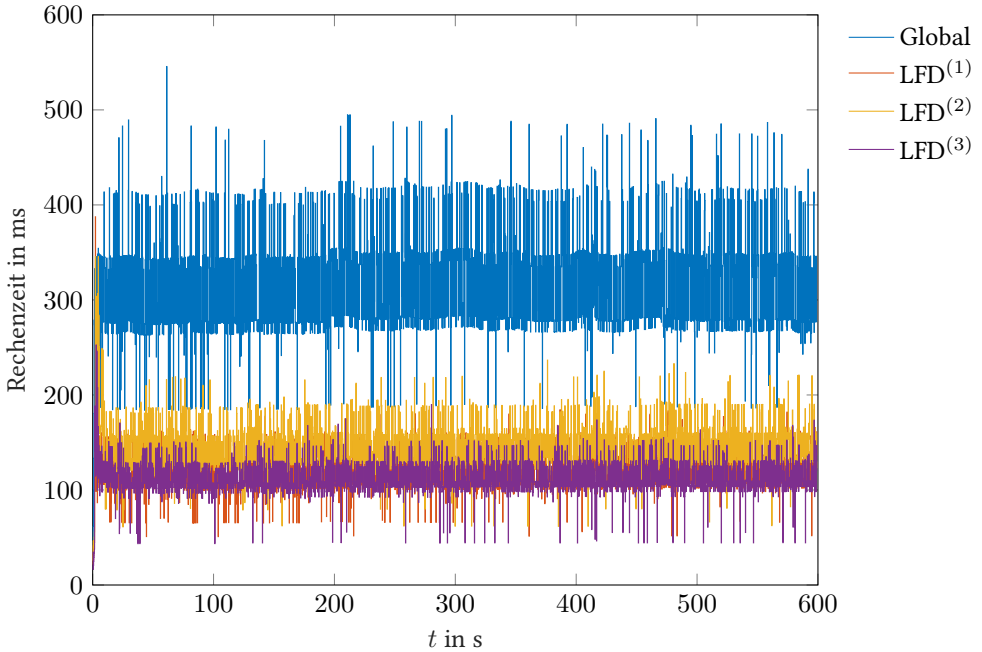


Abbildung 7.27: Rechenzeit bei der MHE-basierten Fehlerdiagnose (Drei-Tank-System)

Rechenzeiterparnis im $\text{LFD}^{(1)}$ sowie $\text{LFD}^{(3)}$ erzielt werden kann. Etwas mehr Rechenleistung als $\text{LFD}^{(1)}$ und $\text{LFD}^{(3)}$ benötigt der $\text{LFD}^{(2)}$, da dieser eine höhere Anzahl an Zustandsdifferentialgleichungen $\zeta^{(2)} = 3$ berechnen muss. Zu beachten ist, dass für die allgemeine Berechnung der potenziellen Rechenzeiterparnis ein vollbesetztes multivariates Polynom angenommen wird. In der Praxis entfallen jedoch bei der Berechnung der Taylor-Modelle mittels der Taylor-Reihe (siehe Satz 3.1) einzelne Monome. Das Polynom ist daher nicht vollständig besetzt [Wol10]. Aus diesem Grund stimmen die Ergebnisse in den Abbildungen nicht exakt mit den berechneten potenziellen Rechenzeiterparnissen überein.

Ferner ist zu erkennen, dass die MHE-basierte Fehlerdiagnose deutlich mehr Rechenzeit benötigt, um eine Lösungseinschließung zu bestimmen. Während bei der konsistenzbasierten Methode jegliche Varianten zu jedem Zeitpunkt unter 3 ms bleiben, benötigt die MHE-basierte Fehlerdiagnose kurzzeitig über 500 ms. Darüber hinaus sei angemerkt, dass der MHE-basierte Zustandsmengenbeobachter auf einem Optimierungsverfahren mit nicht-deterministischer Laufzeit beruht. Ist eine deterministische Laufzeit erforderlich, müssen besondere Maßnahmen, wie bspw. eine Limitierung der Anzahl der Funktionsauswertungen, ergriffen werden.

Weiteres Einsparpotenzial beim Rechenaufwand kann erzielt werden, wenn in den Subsystemen die Taylor-Modell-Ordnung ℓ verringert wird. Dies ist häufig möglich, da in der Regel die Subsysteme eine geringere Komplexität aufweisen als die monolithische Systembetrachtung. Um die Qualität der Fehlerdiagnose zwischen den einzelnen Subsystemen sowie zur globalen Fehlerdiagnose besser zu vergleichen, wurde hierauf in dieser Arbeit verzichtet.

7.2.5 Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten auf das Diagnoseergebnis

In diesem Abschnitt sollen die Auswirkung von Unsicherheiten auf das Resultat der beiden Fehlerdiagnoseverfahren analysiert werden. Hierfür wird zunächst die benötigte Zeitspanne zwischen Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f und Zeitpunkt der Fehlerdetektion t_d in Bezug auf variierende Unsicherheit untersucht. Ferner wird als Worst-Case-Szenario „Paketverlust bei der Kommunikation“, welcher als unendliche Unsicherheit interpretiert werden kann (siehe Abschnitt 4.3.2), zwischen den Subsystemen analysiert.

In Abbildung 7.28 ist die benötigte Detektionszeit bei unterschiedlichen Unsicherheiten für den multiplikativen Fehler dargestellt. Hierzu wird die fest vorgegebene Unsicherheit δ_y (siehe (7.22)) wie folgt variiert:

$$y_{\text{wahr}} \in [y_{\text{mess}} - \epsilon_y \delta_y, y_{\text{mess}} + \epsilon_y \delta_y] \quad (7.29)$$

mit $\epsilon_y \in [0.6, 1.2]$. Durch den Faktor ϵ_y wird folglich der Intervallradius der Messmenge verkleinert bzw. vergrößert.

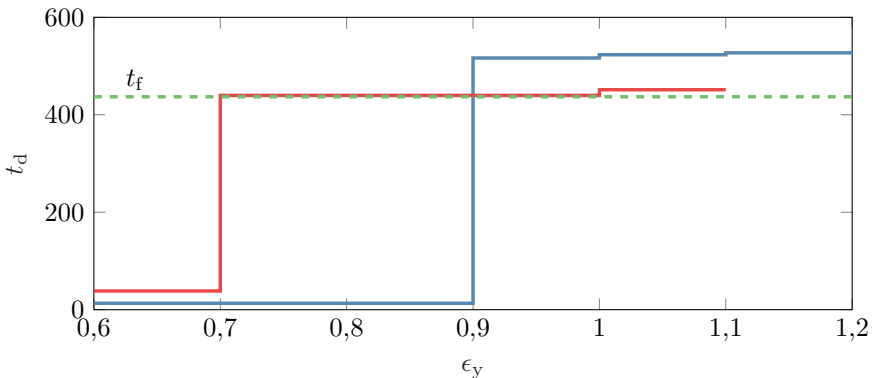


Abbildung 7.28: Analyse der Detektionszeit t_d bei variierender Unsicherheit $\epsilon_y \delta_y$ am Drei-Tank-System. Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f : grüne Linie, Detektionszeit t_d der MHE-basierten Diagnosemethode: blaue Linie, Detektionszeit t_d der konsistenzbasierten Diagnosemethode: rote Linie.

Es resultieren unerwünschte Fehlalarme, erkennbar an $t_d < t_f$, wenn die Unsicherheiten $\epsilon_y < 0,7$ bzw. $\epsilon_y < 0,9$ des jeweiligen Verfahrens zu klein werden. Im Zuge steigender Unsicherheit steigt bei beiden Methoden auch die benötigte Detektionszeit t_d . Im Rahmen der konsistenzbasierten Diagnosemethode wird ab dem Faktor $\epsilon_y > 1,1$ kein Fehler mehr detektiert. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Messunsicherheit den vorhandenen Fehler verdeckt (verdeckter Alarm nach Definition 2.15). Da bei der MHE-basierten Methode der fehlerbehaftete Parameter direkt geschätzt wird, ist der Fehler auch bei steigender Messunsicherheit detektierbar.

Das Verhalten in Bezug auf Paketverluste während der Kommunikation ist der zweite zu analysierende Punkt in diesem Abschnitt. Die Störung in der Kommunikation vom zweiten zum

dritten Subsystem wird wie folgt umgesetzt: Auf acht aufeinanderfolgende Paketverluste folgen sechs korrekte Pakete. Dieses Muster wird über die gesamte Betriebsdauer wiederholt. In Abbildung 7.29 sind die Lösungseinschließung im LFD⁽³⁾ für den Fall des additiven Fehlers und den Einsatz der konsistenzbasierten Diagnosemethode dargestellt. Analog erfolgt dazu in Abbildung 7.30 die Lösungseinschließungen der MHE-basierten Methode. Zur Vervollständigung sind in Anhang C.1 die Lösungseinschließungen beider Methoden für den fehlerfreien Fall abgebildet.

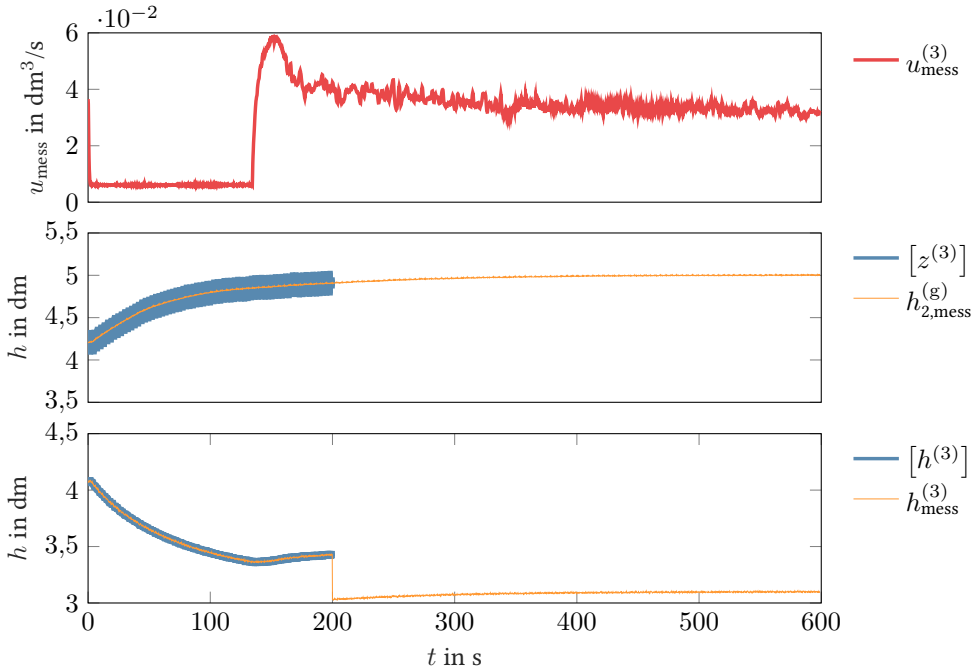


Abbildung 7.29: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: additiver Fehler $F_1^{(g)}$

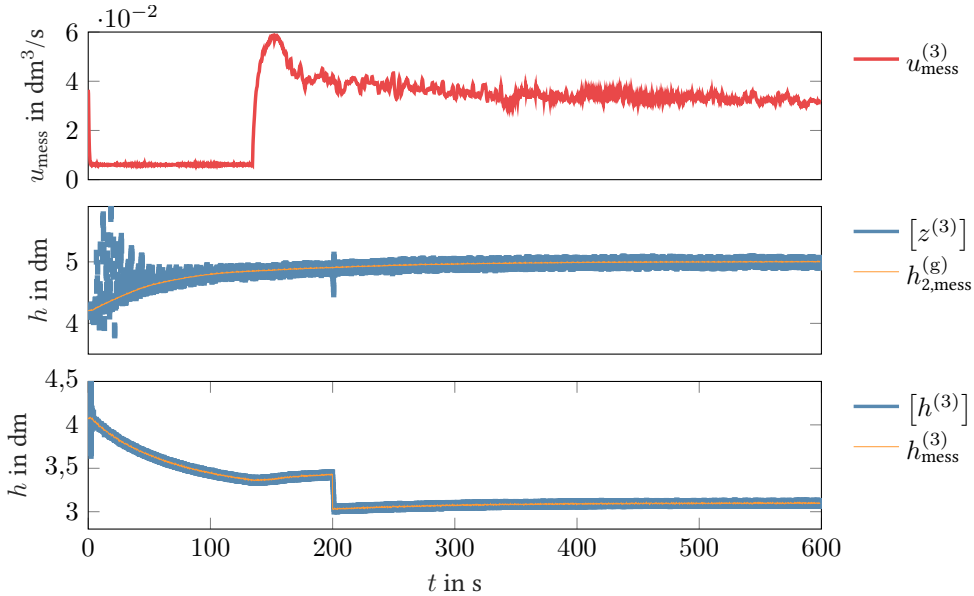


Abbildung 7.30: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: additiver Fehler $F_1^{(g)}$

Die Kommunikationsstörung verursacht – aufgrund der ausbleibenden Korrektur – eine größere Intervallbreite in der externen Zustandsgröße $[z^{(3)}]$ als im ungestörten Fall (siehe Abbildung 7.9 bzw. 7.20). Des Weiteren ist zu erkennen, dass trotz des Vorhandenseins einer Kommunikationsstörung die Fehlerdiagnose erfolgreich durchgeführt werden kann. Die Verfahren werden fortgesetzt und detektieren erfolgreich den additiven Fehler. Die Detektionszeit t_d unterschied sich hierbei nicht vom jeweiligen ungestörten Fall.

7.3 Gekoppelte Pendel

Mit dem Versuchsaufbau „gekoppelte Pendel“, welcher in Abbildung 7.31 ersichtlich ist, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein weiteres Anwendungsbeispiel realisiert. Bei diesem Aufbau sind drei kugelförmige Massen über Federn kaskadiert gekoppelt. Über diese Federkopplung kann Schwingungsenergie zwischen den drei Systemen ausgetauscht werden. Am Aufhängepunkt (auch Drehpunkt bezeichnet) der einzelnen Pendel ist ein Inkrementalgeber angebracht, um den jeweiligen Winkel der Auslenkung zu messen.

Im nachfolgenden Abschnitt erfolgt die Modellbildung des monolithischen Versuchsaufbaus.

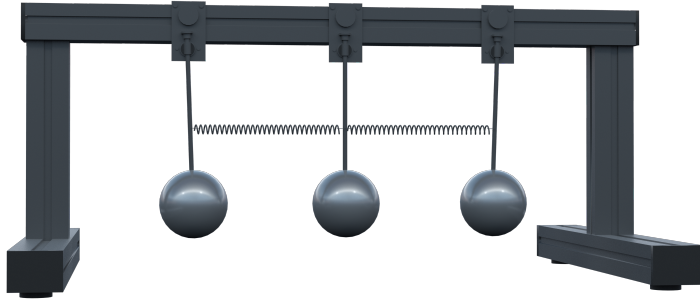


Abbildung 7.31: Versuchsaufbau gekoppelte Pendel

7.3.1 Modellbildung

Die Modellbildung der gekoppelten Pendel erfolgt anhand der in Abbildung 7.32 skizzierten Darstellung. Der Versuchsaufbau besteht aus drei identischen Kugelmassen m_p mit einem

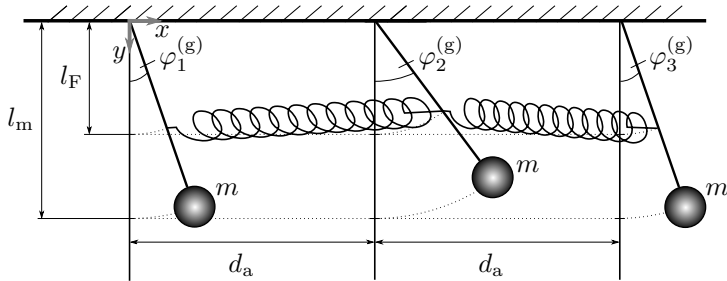


Abbildung 7.32: Schematische Darstellung der gekoppelten Pendel

Abstand l_m zum Aufhängepunkt der einzelnen Pendel. Die zwei gleichartigen Federn haben einen Abstand von l_F zum Aufhängepunkt. Die jeweiligen Aufhängepunkte weisen einen Abstand von d_a zueinander auf. Der globale Zustandsvektor ist anhand von

$$\mathbf{x}^{(g)} = \begin{pmatrix} x_1^{(g)} \\ x_2^{(g)} \\ x_3^{(g)} \\ x_4^{(g)} \\ x_5^{(g)} \\ x_6^{(g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(g)} \\ \varphi_2^{(g)} \\ \varphi_3^{(g)} \\ \dot{\varphi}_1^{(g)} \\ \dot{\varphi}_2^{(g)} \\ \dot{\varphi}_3^{(g)} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

gegeben.

Für die Parameter der gekoppelten Pendel werden im Folgenden intervallwertige Größen angenommen, die Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsgrößen werden als allgemeine men-

genbasierte Größen angeben. Insgesamt resultiert die folgende nichtlineare, unsichere, zeitkontinuierliche Zustandsraumdarstellung zu:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathcal{X}}_1^{(g)} \\ \dot{\mathcal{X}}_2^{(g)} \\ \dot{\mathcal{X}}_3^{(g)} \\ \dot{\mathcal{X}}_4^{(g)} \\ \dot{\mathcal{X}}_5^{(g)} \\ \dot{\mathcal{X}}_6^{(g)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_4^{(g)} \\ \mathcal{X}_5^{(g)} \\ \mathcal{X}_6^{(g)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,1} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,1} + \mathcal{M}_{R,t,1}) \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,2} + [l_F] (\mathcal{F}_{F,t,2,1} + \mathcal{F}_{F,t,2,2}) + \mathcal{M}_{R,t,2}) \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,3} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,3} + \mathcal{M}_{R,t,3}) \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

mit dem Massenträgheitsmoment $[J] = [m_p] [l_m]^2$, den rüctreibenden Kräften

$$\mathcal{F}_{m,t,1} = -[m] [g] \sin(\mathcal{X}_1^{(g)}) , \quad (7.32a)$$

$$\mathcal{F}_{m,t,2} = -[m] [g] \sin(\mathcal{X}_2^{(g)}) , \quad (7.32b)$$

$$\mathcal{F}_{m,t,3} = -[m] [g] \sin(\mathcal{X}_3^{(g)}) , \quad (7.32c)$$

den Federkräften auf die einzelnen Pendel

$$\mathcal{F}_{F,t,1} = ([F_0] + [k] (\mathcal{D}_{1,1} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{1,1}) , \quad (7.33a)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,2,1} = ([F_0] + [k] (\mathcal{D}_{1,1} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,1}) , \quad (7.33b)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,2,2} = ([F_0] + [k] (\mathcal{D}_{2,2} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,2}) , \quad (7.33c)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,3} = ([F_0] + [k] (\mathcal{D}_{2,2} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,3}) , \quad (7.33d)$$

den Drehmomenten aufgrund von Reibung in den Lagern der Aufhängepunkte

$$\mathcal{M}_{R,t,1} = -[c] \mathcal{X}_4^{(g)} , \quad (7.34a)$$

$$\mathcal{M}_{R,t,2} = -[c] \mathcal{X}_5^{(g)} , \quad (7.34b)$$

$$\mathcal{M}_{R,t,3} = -[c] \mathcal{X}_6^{(g)} , \quad (7.34c)$$

den Pendelwinkeln

$$\mathcal{A}_{1,1} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1}}{\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1}}\right) - \mathcal{X}_1^{(g)} , \quad (7.35a)$$

$$\mathcal{A}_{2,1} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1}}{\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1}}\right) - [\pi] - \mathcal{X}_2^{(g)} , \quad (7.35b)$$

$$\mathcal{A}_{2,2} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2}}{\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2}}\right) - \mathcal{X}_2^{(g)} , \quad (7.35c)$$

$$\mathcal{A}_{2,3} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2}}{\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2}}\right) - [\pi] - \mathcal{X}_3^{(g)} , \quad (7.35d)$$

den aktuellen Federlängen

$$\mathcal{D}_{1,1} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1})^2 + (\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1})^2}, \quad (7.36a)$$

$$\mathcal{D}_{2,2} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2})^2 + (\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2})^2}, \quad (7.36b)$$

sowie den kartesischen Koordinaten der Punkte der jeweiligen Federbefestigungen

$$\mathcal{X}_{F,1,1} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_1^{(g)}), \quad (7.37a)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,1} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_1^{(g)}), \quad (7.37b)$$

$$\mathcal{X}_{F,1,2} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_2^{(g)}) + [d_a], \quad (7.37c)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,2} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_2^{(g)}), \quad (7.37d)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,2} = \mathcal{X}_{F,1,2}, \quad (7.37e)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,2} = \mathcal{Y}_{F,1,2}, \quad (7.37f)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,3} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_3^{(g)}) + 2[d_a], \quad (7.37g)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,3} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_3^{(g)}). \quad (7.37h)$$

Für eine ausführliche Herleitung der Zustandsgleichungen wird auf [Hil12] verwiesen. Die unsichere Ausgangsgleichung ist gegeben durch:

$$\mathbf{y}^{(g)} = (\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}) \mathbf{x}^{(g)} \quad (7.38)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{I}_3 der Dimension $q = 3$ und den Anfangszuständen $\mathbf{x}_0^{(g)} = [\mathbf{x}^{(g)}(t_0)]$. Die Zustandsraumdarstellung weist somit die geforderte Gestalt nach Definition 3.3 auf. In Tabelle 7.3 sind alle unsicheren Parameter der gekoppelten Pendel beschrieben und zusammengefasst.

Anmerkung 7.1. *Am Beispiel des Massenträgheitsmoments $[J]$, welches als Punktmasse angenommen wird, ist ersichtlich, dass auch Vereinfachungen in Bezug auf die Modellbildung getroffen werden. Die daraus resultierende strukturelle Unsicherheit muss ebenfalls in den Unsicherheiten berücksichtigt werden.*

Im nächsten Abschnitt erfolgt die Verteilung der unsicheren Zustandsgleichung (7.31) sowie der Ausgangsgleichung (7.38) in mehrere Subsysteme.

7.3.2 Verteilung des unsicheren Modells

Die Verteilung der gekoppelten Pendel erfolgt unter Berücksichtigung der Annahmen 4.1 - 4.3 nach Definition 4.3 und resultiert in einer verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellung. Es erfolgt eine Zerlegung in insgesamt $N = 3$ Subsystemen ($\text{Sub}^{(i)}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$),

Symbol	Beschreibung und Wert	Einheit
$[c]$	Reibungskonstante = $[0.25, 0.3]$	N cm s/rad
$[d_a]$	Abstand Aufhängepunkte = $[0.138, 0.142]$	m
$[d_F]$	Federlänge in Ruhezustand = $[0.058, 0.062]$	m
$[F_0]$	Federvorspannung in Ruhezustand = $[0.008, 0.01]$	N
$[g]$	Erdbeschleunigung = $[97.8, 98.3]$	dm/s ²
$[k]$	Federkonstante = $[6.95, 7.05]$	N/m
$[l_F]$	Abstand Federaufnahme-Aufhängepunkt = $[0.066, 0.07]$	m
$[l_m]$	Abstand Kugelmitte-Aufhängepunkt = $[0.13, 0.14]$	m
$[m_p]$	Kugelmasse = $[0.49, 0.51]$	kg
$[\pi]$	Kreiszahl = $[3.141, 3.142]$	—

Tabelle 7.3: Unsichere Parameter der gekoppelten Pendel

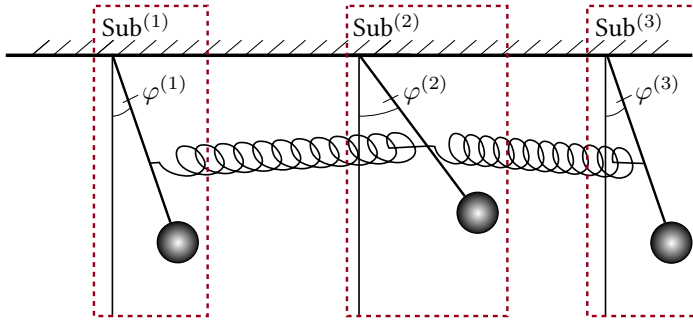


Abbildung 7.33: Schematische Darstellung der verteilten gekoppelten Pendel

wobei jedes Pendel ein eigenes Subsystem formt. Die Partitionierung basiert aufgrund der räumlichen Anordnung der Pendel und ist in Abbildung 7.33 veranschaulicht.

Die lokalen Zustände $\mathcal{H}^{(i)}$ sind die jeweiligen Pendelwinkel sowie deren Winkelgeschwindigkeit. Die Transformationsmatrizen für die einzelnen Subsysteme $i \in \{1, 2, 3\}$ resultieren daher in

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.39a)$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.39b)$$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.39c)$$

Die lokalen Ausgangsgleichungen korrespondieren zu den Ausgangsgleichungen des monolithischen Systems, was anhand der Transformationsmatrizen

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.40a)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.40b)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.40c)$$

beschrieben ist. Aus der monolithischen Systembeschreibung (7.31) ist ersichtlich, dass die Differentialgleichung für $\dot{\mathcal{X}}_4^{(g)}$ über den Term $\mathcal{F}_{F,t,1}$ (siehe (7.33a)) vom Winkel des zweiten Pendels (Sub⁽²⁾) abhängt. Gleiches gilt für $\dot{\mathcal{X}}_6^{(g)}$, welche ebenfalls vom Winkel des zweiten Pendels abhängig ist. Die Differentialgleichung für $\dot{\mathcal{X}}_5^{(g)}$ hängt sowohl vom Winkel des ersten Pendels (Sub⁽¹⁾) als auch vom dritten Pendel (Sub⁽³⁾) ab. Folglich sind die Transformationsmatrizen für die externen Zustände wie folgt gegeben:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.41a)$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.41b)$$

$$\mathbf{R}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.41c)$$

Gemäß der in Kapitel 4 vorgestellten Vorgehensweise erfolgt im nächsten Schritt die Wertebereichseinschließung der externen Zustandsgrößen $\text{bd}\{\mathcal{Z}^{(i)}\}$ mit der damit zusammenhängenden Bestimmung der unteren sowie oberen Schranken der maximal zulässigen Änderungsraten. Hierzu werden Informationen über die Systemgrenzen benötigt, welche aus dem physikalischen Aufbau der gekoppelten Pendel resultieren. Die Beschränkungen der Zustandsgrößen $\mathcal{X}_1^{(g)}$, $\mathcal{X}_2^{(g)}$ und $\mathcal{X}_3^{(g)}$ sind die jeweiligen maximalen Auslenkungen $\varphi_{\max}^{(1)} = \varphi_{\max}^{(2)} = \varphi_{\max}^{(3)} = \varphi_{\max} = \pi/4 \text{ rad}$ aus dem physikalischen Aufbau und lauten daher $\mathcal{X}_1^{(g)} = [x_1^{(g)}] = [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$, $\mathcal{X}_2^{(g)} = [x_2^{(g)}] = [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$ sowie $\mathcal{X}_3^{(g)} = [x_3^{(g)}] = [-\varphi_{\max}, \varphi_{\max}]$. Für die übrigen Zustandsgrößen $\mathcal{X}_4^{(g)}$, $\mathcal{X}_5^{(g)}$ und $\mathcal{X}_6^{(g)}$ gilt $\dot{\varphi}_{\max}^{(4)} = \dot{\varphi}_{\max}^{(5)} = \dot{\varphi}_{\max}^{(6)} = \dot{\varphi}_{\max} = 8 \text{ rad/s}$. Die Beschränkung $\dot{\varphi}_{\max}$ wurde hierbei simulativ bestimmt. Folglich sind die Schranken anhand von $\mathcal{X}_4^{(g)} = [x_4^{(g)}] = [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}]$, $\mathcal{X}_5^{(g)} = [x_5^{(g)}] = [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}]$ sowie $\mathcal{X}_6^{(g)} = [x_6^{(g)}] = [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}]$ gegeben. Werden diese intervallwertigen Systemgrenzen in die monolithische Systembeschreibung (7.31) substituiert, so ergibt sich aus der Vorschrift (4.15) und den Transformationsmatrizen (7.41) die gesuchte Wertebereichseinschließung mit den Parameterwerten aus Tabelle 7.3 zu

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathcal{Z}}^{(1)}\} &= \mathbf{R}^{(1)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left([\mathbf{x}^{(g)}] \right) \right] \\ &= [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] = [-8, 8] \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (7.42)$$

sowie analog

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(2)}\} &= \mathbf{R}^{(2)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left(\left[\mathbf{x}^{(g)} \right] \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \\ [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-8, 8] \text{ rad/s} \\ [-8, 8] \text{ rad/s} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.43)$$

und

$$\begin{aligned} \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(3)}\} &= \mathbf{R}^{(3)} \left[\mathbf{f}^{(g)} \left(\left[\mathbf{x}^{(g)} \right] \right) \right] \\ &= [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] = [-8, 8] \text{ rad/s} . \end{aligned} \quad (7.44)$$

Die insgesamt $N = 3$ verteilten, unsicheren Zustandsraumdarstellungen sind in den folgenden Abschnitten beschrieben.

Erstes Subsystem $i = 1$

Der Pendelwinkel sowie die Winkelgeschwindigkeit des ersten Pendels sind die lokalen Zustände des ersten Subsystems. Für die externen Zustände gilt (7.42). Das erste Subsystem ist somit gegeben durch:

$$\Sigma^{(1)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(1)} &= \mathbf{T}^{(1)} \dot{\mathbf{x}}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_2^{(1)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,1} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,1} + \mathcal{M}_{R,t,1}) \end{pmatrix} , \\ \dot{\mathbf{z}}^{(1)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(1)}\} = [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \end{cases} \quad (7.45)$$

wobei

$$\mathcal{F}_{m,t,1} = -[m] [g] \sin(\mathcal{X}_1^{(1)}) , \quad (7.46a)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,1} = ([F_0] + [k] (\mathcal{D}_{1,1} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{1,1}) , \quad (7.46b)$$

$$\mathcal{A}_{1,1} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1}}{\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1}}\right) - \mathcal{X}_1^{(1)} , \quad (7.46c)$$

$$\mathcal{D}_{1,1} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1})^2 + (\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1})^2} , \quad (7.46d)$$

$$\mathcal{X}_{F,1,1} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_1^{(1)}) , \quad (7.46e)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,1} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_1^{(1)}) , \quad (7.46f)$$

$$\mathcal{X}_{F,1,2} = [l_F] \sin(\mathcal{Z}^{(1)}) + [d_a] , \quad (7.46g)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,2} = [l_F] \cos(\mathcal{Z}^{(1)}) , \quad (7.46h)$$

$$\mathcal{M}_{R,t,1} = -[c] \mathcal{X}_2^{(1)} \quad (7.46i)$$

gilt sowie die lokale Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(1)} = \mathbf{M}^{(1)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_1^{(g)} . \quad (7.47)$$

Zweites Subsystem $i = 2$

Analog zum ersten Subsystem werden für das zweite Subsystem der Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit als lokale Zustände eingeführt und für die externen Zustände gilt (7.43):

$$\Sigma^{(2)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(2)} &= \mathbf{T}^{(2)} \dot{\mathbf{x}}^{(g)} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{X}_2^{(2)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,2} + [l_F] (\mathcal{F}_{F,t,2,1} + \mathcal{F}_{F,t,2,2}) + \mathcal{M}_{R,t,2}) \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(2)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(2)}\} = \begin{pmatrix} [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \\ [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (7.48)$$

wobei

$$\mathcal{F}_{m,t,2} = -[m][g] \sin(\mathcal{X}_1^{(2)}), \quad (7.49a)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,2,1} = ([F_0] + [k](\mathcal{D}_{1,1} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,1}), \quad (7.49b)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,2,2} = ([F_0] + [k](\mathcal{D}_{2,2} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,2}), \quad (7.49c)$$

$$\mathcal{A}_{2,1} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1}}{\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1}}\right) - [\pi] - \mathcal{X}_1^{(2)}, \quad (7.49d)$$

$$\mathcal{A}_{2,2} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2}}{\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2}}\right) - \mathcal{X}_1^{(2)}, \quad (7.49e)$$

$$\mathcal{D}_{1,1} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,1,2} - \mathcal{X}_{F,1,1})^2 + (\mathcal{Y}_{F,1,2} - \mathcal{Y}_{F,1,1})^2}, \quad (7.49f)$$

$$\mathcal{D}_{2,2} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2})^2 + (\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2})^2}, \quad (7.49g)$$

$$\mathcal{X}_{F,1,1} = [l_F] \sin(\mathcal{Z}_1^{(2)}), \quad (7.49h)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,1} = [l_F] \cos(\mathcal{Z}_1^{(2)}), \quad (7.49i)$$

$$\mathcal{X}_{F,1,2} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_1^{(2)}) + [d_a], \quad (7.49j)$$

$$\mathcal{Y}_{F,1,2} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_1^{(2)}), \quad (7.49k)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,2} = \mathcal{X}_{F,1,2}, \quad (7.49l)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,2} = \mathcal{Y}_{F,1,2}, \quad (7.49m)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,3} = [l_F] \sin(\mathcal{Z}_2^{(2)}) + 2[d_a], \quad (7.49n)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,3} = [l_F] \cos(\mathcal{Z}_2^{(2)}) \quad (7.49o)$$

$$(7.49p)$$

gilt sowie die lokale Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(2)} = \mathbf{M}^{(2)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_2^{(g)}. \quad (7.50)$$

Drittes Subsystem $i = 3$

Im dritten Subsystem sind ebenfalls der Pendelwinkel und die Winkelgeschwindigkeit des zugehörigen Pendels die lokalen Zustände und für die externen Zustände gilt (7.44):

$$\sum^{(3)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(3)} &= \mathbf{T}^{(3)} \dot{\mathbf{x}}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_2^{(3)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,3} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,3} + \mathcal{M}_{R,t,3}) \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{z}}^{(3)} &= \text{bd}\{\dot{\mathbf{z}}^{(3)}\} = [-\dot{\varphi}_{\max}, \dot{\varphi}_{\max}] \end{cases}, \quad (7.51)$$

wobei

$$\mathcal{F}_{m,t,3} = -[m][g] \sin(\mathcal{X}_1^{(3)}), \quad (7.52a)$$

$$\mathcal{F}_{F,t,3} = ([F_0] + [k](\mathcal{D}_{2,2} - [d_F])) \sin(\mathcal{A}_{2,3}), \quad (7.52b)$$

$$\mathcal{A}_{2,3} = \arctan\left(\frac{\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2}}{\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2}}\right) - [\pi] - \mathcal{X}_1^{(3)}, \quad (7.52c)$$

$$\mathcal{D}_{2,2} = \sqrt{(\mathcal{X}_{F,2,3} - \mathcal{X}_{F,2,2})^2 + (\mathcal{Y}_{F,2,3} - \mathcal{Y}_{F,2,2})^2}, \quad (7.52d)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,2} = [l_F] \sin(\mathcal{Z}^{(3)}) + [d_a], \quad (7.52e)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,2} = [l_F] \cos(\mathcal{Z}^{(3)}), \quad (7.52f)$$

$$\mathcal{X}_{F,2,3} = [l_F] \sin(\mathcal{X}_1^{(3)}) + 2[d_a], \quad (7.52g)$$

$$\mathcal{Y}_{F,2,3} = [l_F] \cos(\mathcal{X}_1^{(3)}), \quad (7.52h)$$

$$\mathcal{M}_{R,t,3} = -[c] \mathcal{X}_2^{(3)} \quad (7.52i)$$

gilt sowie die lokale Ausgangsgleichung

$$\mathcal{Y}^{(3)} = \mathbf{M}^{(3)} \mathcal{Y}^{(g)} = \mathcal{Y}_3^{(g)}. \quad (7.53)$$

Im Vergleich zum globalen System, welches die Systemordnung $n^{(g)} = 6$ aufweist, besitzen die lokalen Systeme eine reduzierte Systemordnung $n^{(i)} = 2$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

7.3.3 Diagnoseergebnisse des gekoppelten Pendels

In diesem Abschnitt wird anhand verschiedener Szenarien der Nachweis der Funktionsfähigkeit sowie die Gegenüberstellung der beiden neuen Fehlerdiagnoseverfahren am Beispiel der gekoppelten Pendel durchgeführt. Im ersten Schritt erfolgt die Überprüfung der Funktionsfähigkeit der jeweiligen Algorithmen am fehlerfreien System. Im nächsten Schritt wird anhand des fehlerbehafteten Systems die Funktionsfähigkeit überprüft. Dazu erfolgen Messungen am System bei dem Auftritt eines additiven Fehlers sowie eines multiplikativen Fehlers (siehe Definition 2.8 bzw. 2.9). Aus diesem Grund werden die zwei folgenden Fehlerkandidaten betrachtet:

- $F_1^{(g)}$: Winkelmessung am dritten Pendel ist eingefroren (engl. freeze fault) auf $f_1 = -\pi/8$ (additiver Fehler).
- $F_2^{(g)}$: Verdoppelung der Kugelmasse des dritten Pendels, d. h. $f_2 = 2$ (multiplikativer Fehler).

Für den ersten Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ gilt für das zugehörige fehlerhafte Systemverhalten die Zustandsraumdarstellung

$$\mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_4^{(g)} \\ \mathcal{X}_5^{(g)} \\ \mathcal{X}_6^{(g)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,1} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,1} + \mathcal{M}_{R,t,1}) \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,2} + [l_F] (\mathcal{F}_{F,t,2,1} + \mathcal{F}_{F,t,2,2}) + \mathcal{M}_{R,t,2}) \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,3} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,3} + \mathcal{M}_{R,t,3}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1^{(g)} \\ \mathcal{X}_2^{(g)} \\ f_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.54)$$

mit (7.32a) bis (7.37h). Der zweite Fehlerkandidat $F_2^{(g)}$ wirkt multiplikativ auf die Kugelmasse m_p des dritten Pendels. Die zugehörige Systembeschreibung $\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)}$ ist somit durch

$$\mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_4^{(g)} \\ \mathcal{X}_5^{(g)} \\ \mathcal{X}_6^{(g)} \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,1} + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,1} + \mathcal{M}_{R,t,1}) \\ \frac{1}{[J]} ([l_m] \mathcal{F}_{m,t,2} + [l_F] (\mathcal{F}_{F,t,2,1} + \mathcal{F}_{F,t,2,2}) + \mathcal{M}_{R,t,2}) \\ \frac{1}{f_2 [m] [l_m]^2} \left(-[l_m] f_2 [m] [g] \sin(\mathcal{X}_3^{(g)}) + [l_F] \mathcal{F}_{F,t,3} + \mathcal{M}_{R,t,3} \right) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}^{(g)} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}_1^{(g)} \\ \mathcal{X}_2^{(g)} \\ \mathcal{X}_3^{(g)} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7.55)$$

mit den übrigen Gleichungen aus (7.32a) bis (7.37h), gegeben. Insgesamt ist die Menge aller zugehörigen globalen Systembeschreibungen zur Fehlerisolation anhand von

$$\tilde{\mathcal{B}}^{(g)} = \mathcal{B}^{(g)} \setminus \mathcal{B}_{F_0^{(g)}}^{(g)} = \left\{ \mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}, \mathcal{B}_{F_2^{(g)}}^{(g)} \right\} \quad (7.56)$$

beschrieben.

Mit dem Zweck der besseren Vergleichbarkeit besitzen die beiden Fehlerdiagnoseverfahren die identischen Einstellparameter. Diese Einstellparameter gelten sowohl für die globale als auch für die verteilte Ausführung des jeweiligen Zustandsmengenbeobachters. Die Abtastzeit bzw. Schrittweite beträgt hierbei $T_a = h = 5 \text{ ms}$ und die Taylor-Modell-Ordnung wurde zu $\ell = 3$ gewählt. Die unbekannte, aber begrenzte Ausgangsgröße y_{wahr} wird durch das Intervall

$$y_{\text{wahr}} \in [y_{\text{mess}} - \delta_y, y_{\text{mess}} + \delta_y] \quad (7.57)$$

eingeschlossen, wobei $\delta_y = 0,004 \text{ rad}$ der maximalen Messabweichung aus dem Datenblatt des Inkrementalgeber sowie y_{mess} dem Messwert des Sensors entspricht. Die Anfangszustandsmenge ist durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{(g)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [0.722, 0.757] \text{ rad} \\ [0.014, 0.05] \text{ rad} \\ [0.066, 0.102] \text{ rad} \\ [-0.05, 0.05] \text{ rad/s} \\ [-0.05, 0.05] \text{ rad/s} \\ [-0.05, 0.05] \text{ rad/s} \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

gegeben und kann mittels der Transformationsvorschriften (7.39) sowie (7.41) auf das jeweilige Subsystem bezogen werden.

In den nächsten beiden Abschnitten werden verschiedene Fehlerszenarien zur Demonstration der Funktionsweise der jeweiligen Diagnosealgorithmen vorgestellt. Zunächst mittels der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose und abschließend mit der MHE-basierten Fehlerdiagnose.

Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose

Das erste Szenario ist der fehlerfreie Fall für das Drei-Tank-System. In den Abbildungen 7.34 - 7.36 sind dazu die jeweiligen Lösungseinschließungen über die Zeit $t \in [0 \text{ s}, 15 \text{ s}]$ der einzelnen LFD⁽ⁱ⁾ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ dargestellt. In allen Subsystemen liegt im betrachteten Zeitraum eine Konsistenz zwischen Modellverhalten und realem Systemverhalten vor. Es wurde somit kein Fehler detektiert, was den tatsächlichen Bedingungen entspricht.

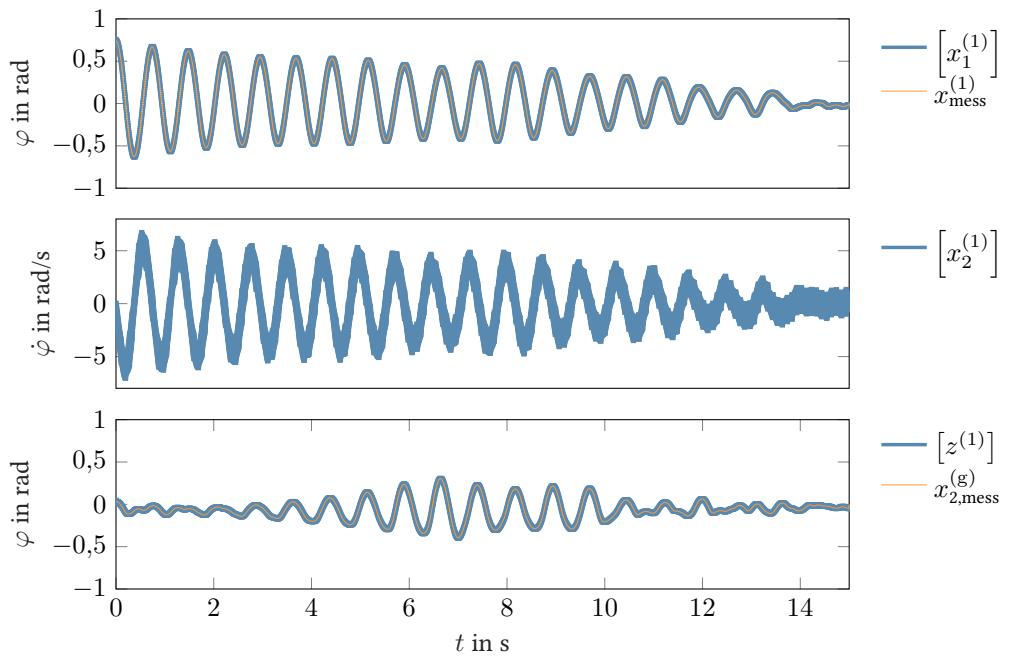


Abbildung 7.34: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

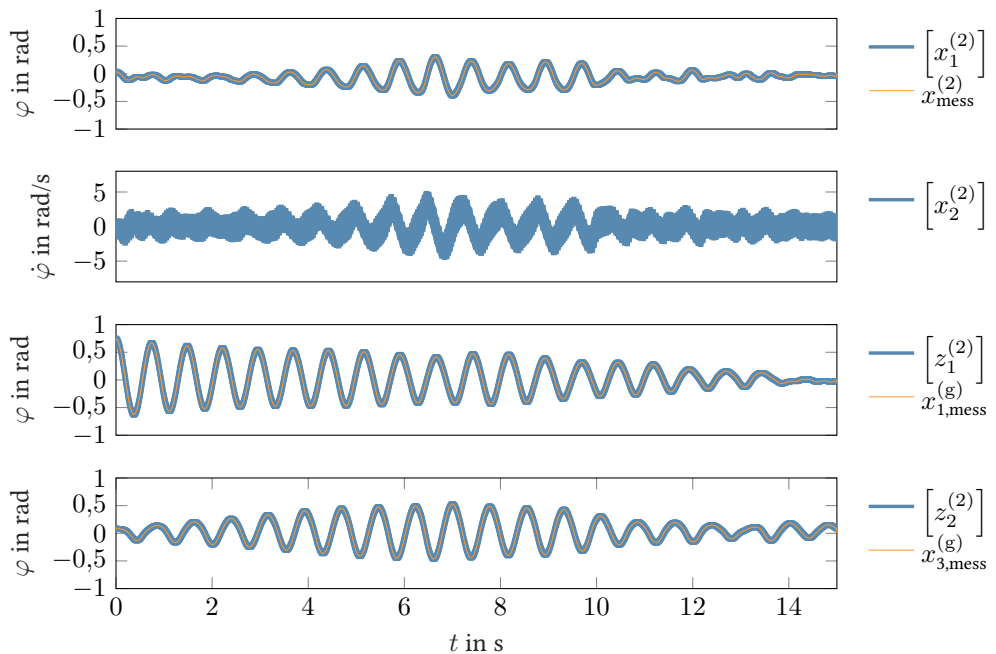


Abbildung 7.35: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

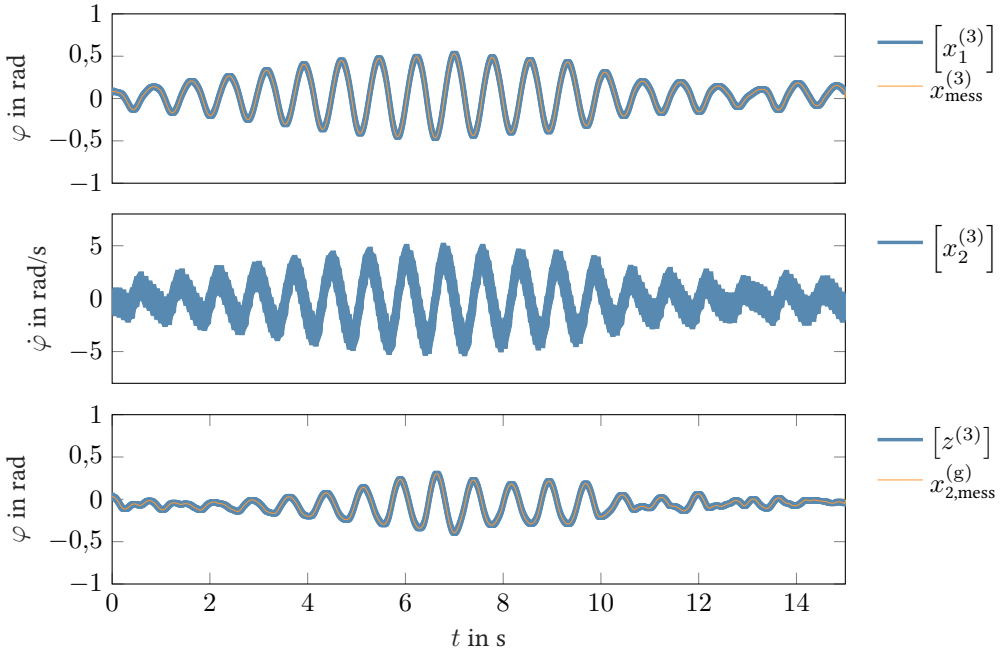


Abbildung 7.36: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

Die Existenz eines additiven Fehlers $F_1^{(g)}$ stellt das nächste zu untersuchende Szenario dar. Ab dem Zeitpunkt $t_f = 10$ s ist der Wert des dritten Winkelsensors konstant bei $f_1 = -\pi/8$ rad. Die Leistungsfähigkeit der Methode ist dargestellt in den Abbildungen 7.37 bis 7.39. Unmittelbar nach Fehlerauftritt liegt eine Inkonsistenz in allen LFDs vor und es ist folglich keine konsistente Lösungseinschließung berechenbar. Daher gilt die garantierte Aussage, dass ein Fehler im betrachteten System vorliegen muss. Dies entspricht ebenfalls den tatsächlichen Gegebenheiten.

Unmittelbar nach der festgestellten Inkonsistenz wird eine Fehlerisolation im systemfernen GFI durchgeführt. Das Resultat der Fehlerdetektion $F_0^{(i)}$ mit $i = \{1, 2, 3\}$ sowie der Fehlerisolation von $\tilde{\mathcal{F}}^{(g)} = \{F_1^{(g)}, F_2^{(g)}\}$ ist in Abbildung 7.40 in Form eines Balkendiagramms dargestellt. Nach der festgestellten Inkonsistenz in allen LFDs startet die anschließende Fehlerisolation. Hierbei zeigt ausschließlich das Systemverhalten $\mathcal{B}_{F_1^{(g)}}^{(g)}$ mit dem zugehörigen Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ eine Konsistenz mit den realen Messdaten. Der additive Fehler wurde folglich korrekt und eindeutig isoliert.

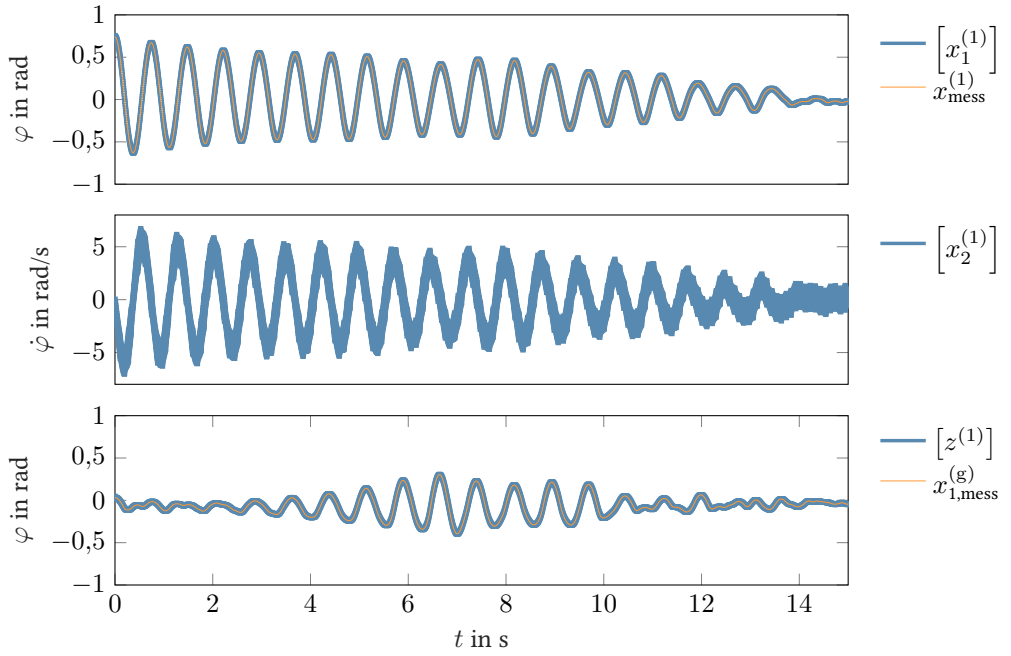


Abbildung 7.37: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

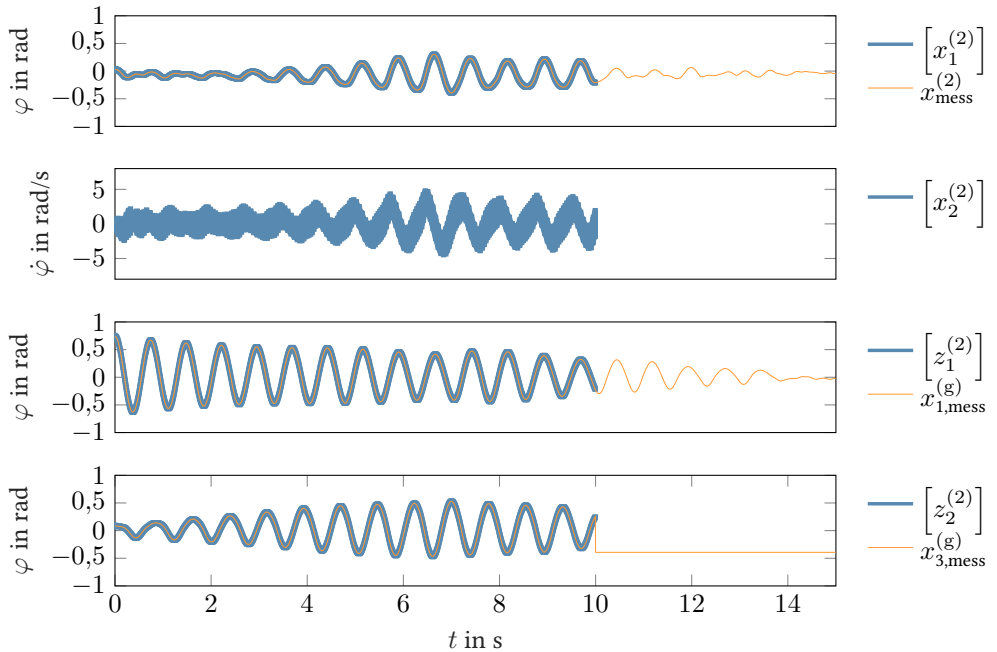


Abbildung 7.38: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

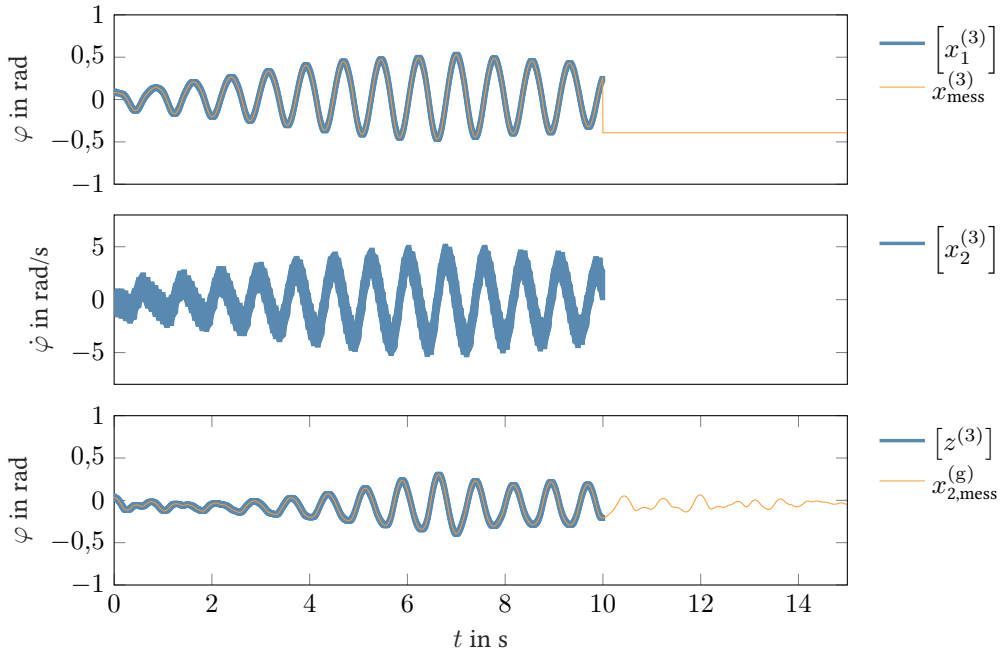


Abbildung 7.39: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

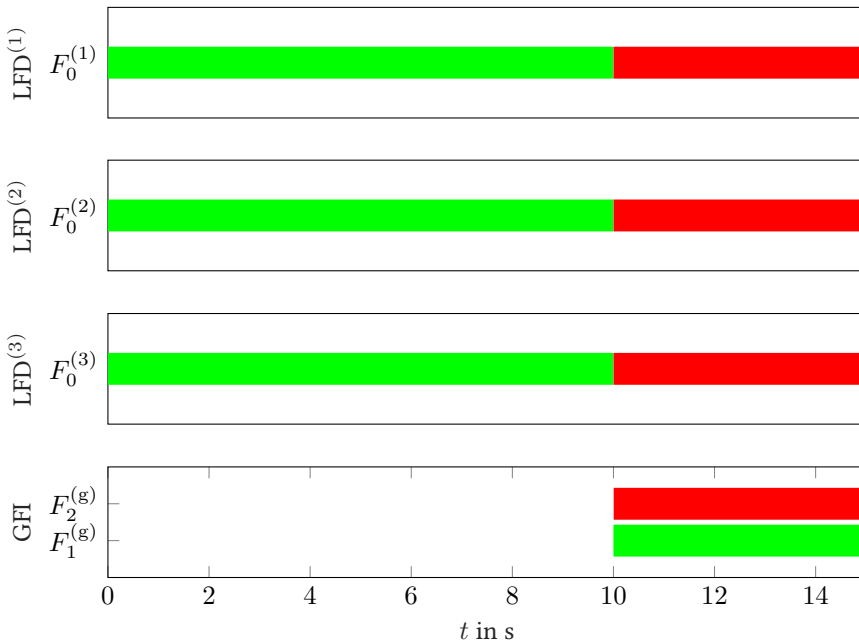


Abbildung 7.40: Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose der gekoppelten Pendel unter Einfluss von $F_1^{(g)}$

Der multiplikative Fehler $F_2^{(g)}$ ist das letzte zu analysierende Szenario im Rahmen dieser Methode. Hierbei verdoppelt sich die Kugelmasse des dritten Pendels ab dem Zeitpunkt $t_f = 8$ s. Die Leistungsfähigkeit der verteilten, konsistenzbasierten Methode in Bezug auf diesen multiplikativen Fehler ist dargestellt in den Abbildungen 7.41 bis 7.43. Auch im Rahmen dieses Beispiels ist keine zusätzliche Parameterschätzung erforderlich. Es wird erfolgreich eine Inkonsistenz und somit die Existenz eines Fehlers im $LFD^{(3)}$ nach $t_d - t_f = 0,14$ s festgestellt, was auch den realen Tatsachen entspricht.

Nach der Feststellung der Inkonsistenz wird die Fehlerisolation im GFI durchgeführt. Anhand des Balkendiagramms in Abbildung 7.44 ist zu erkennen, dass der gesuchte Fehlerkandidat $F_2^{(g)}$ eindeutig isoliert wird.

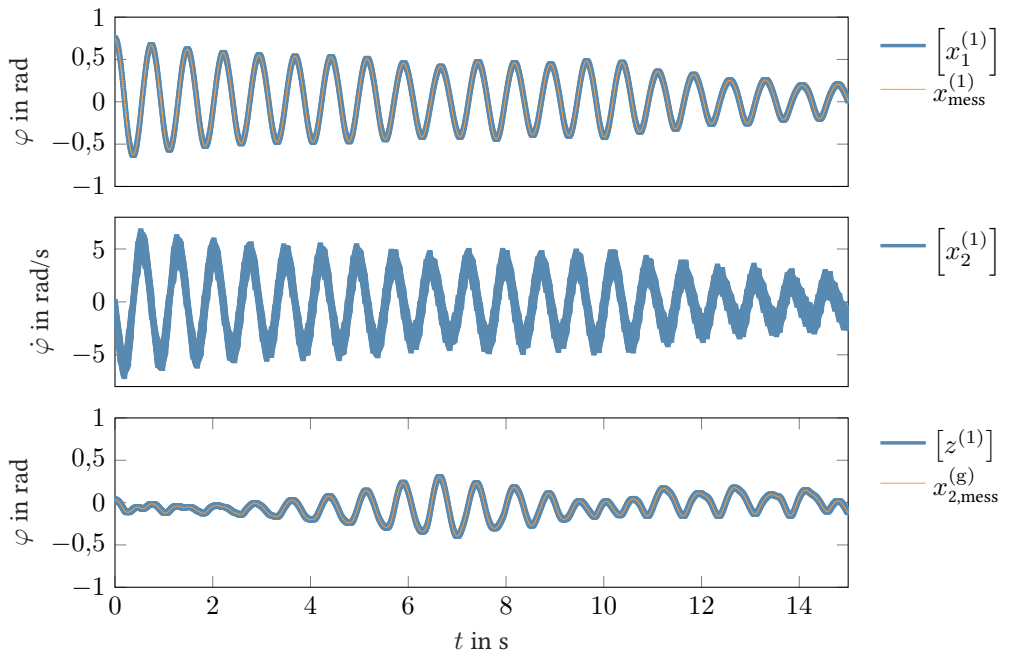


Abbildung 7.41: Resultate des konsistenzbasierten $LFD^{(1)}$: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

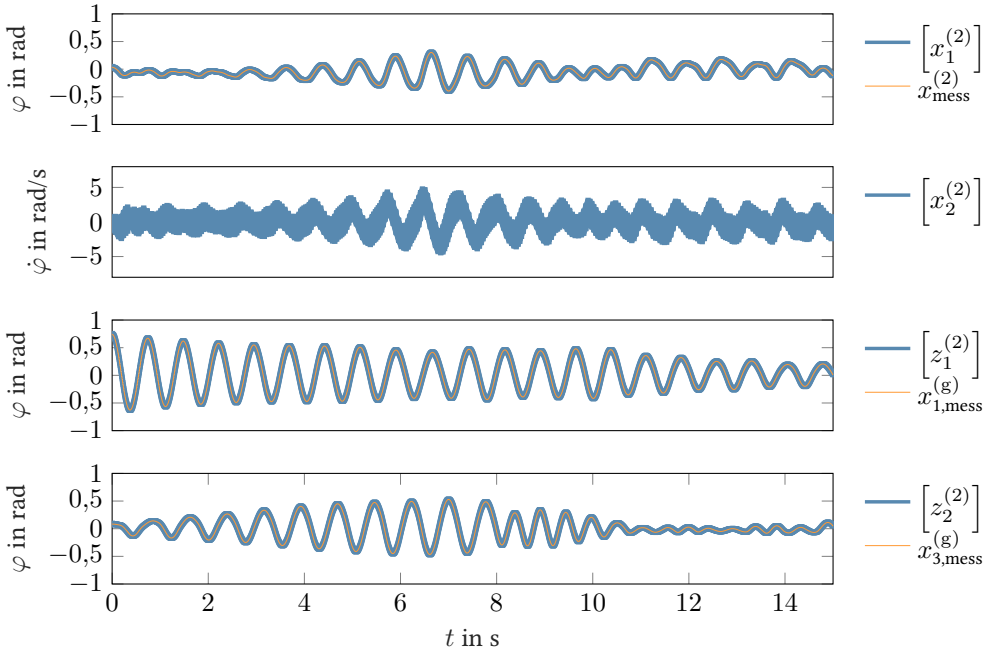


Abbildung 7.42: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

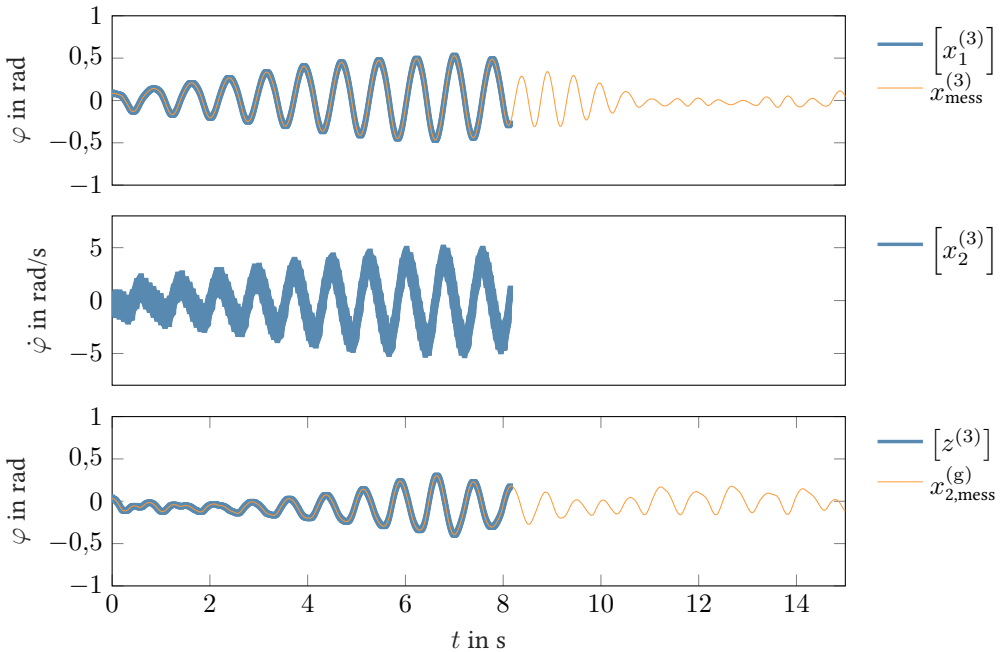


Abbildung 7.43: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾: multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

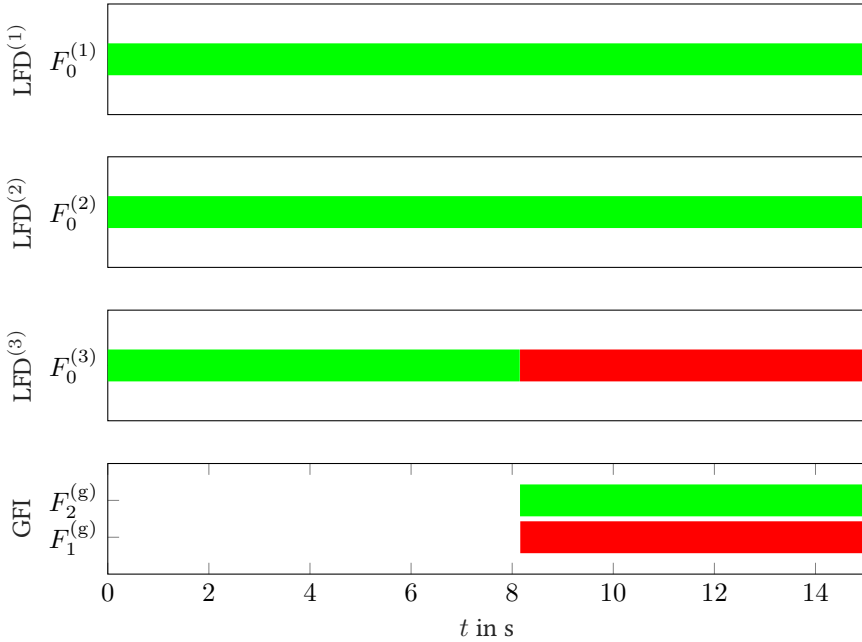


Abbildung 7.44: Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose der gekoppelten Pendel unter Einfluss von $F_2^{(g)}$

MHE-basierende Fehlerdiagnose

In diesem Abschnitt wird der MHE-basierende Diagnoseansatz anhand von Messdaten am Versuchsaufbau „gekoppelte Pendel“ untersucht. Es werden für eine bessere Vergleichbarkeit die gleichen Messreihen wie im vorherigen Abschnitt 7.3.3 verwendet. Somit gilt ebenfalls die Anfangszustandsmenge (7.58). Die Horizontlänge aller MHE-basierenden Zustandsmengenbeobachter wurde zu $\Lambda = 3$ gewählt.

In den Abbildungen 7.45 - 7.47 sind die jeweiligen Resultate der einzelnen $LFD^{(i)}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ dargestellt. Die Abbildungen zeigen die berechnete Lösungseinschließung der lokalen Zustandsgrößen sowie der externen Zustandsgrößen über die Zeit $t \in [0 \text{ s}, 10 \text{ s}]$. In sämtlichen Subsystemen liegt im betrachteten Zeitraum eine Konsistenz zwischen Modellverhalten und realem Systemverhalten vor, was den tatsächlichen Bedingungen entspricht. Es wurde folgerichtig kein Fehler detektiert.

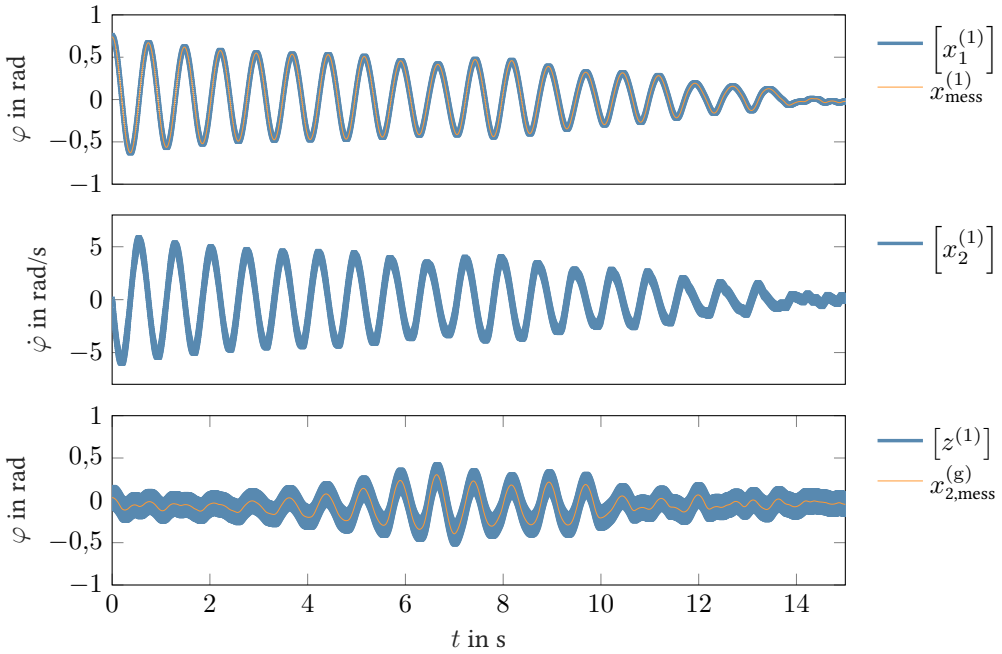


Abbildung 7.45: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

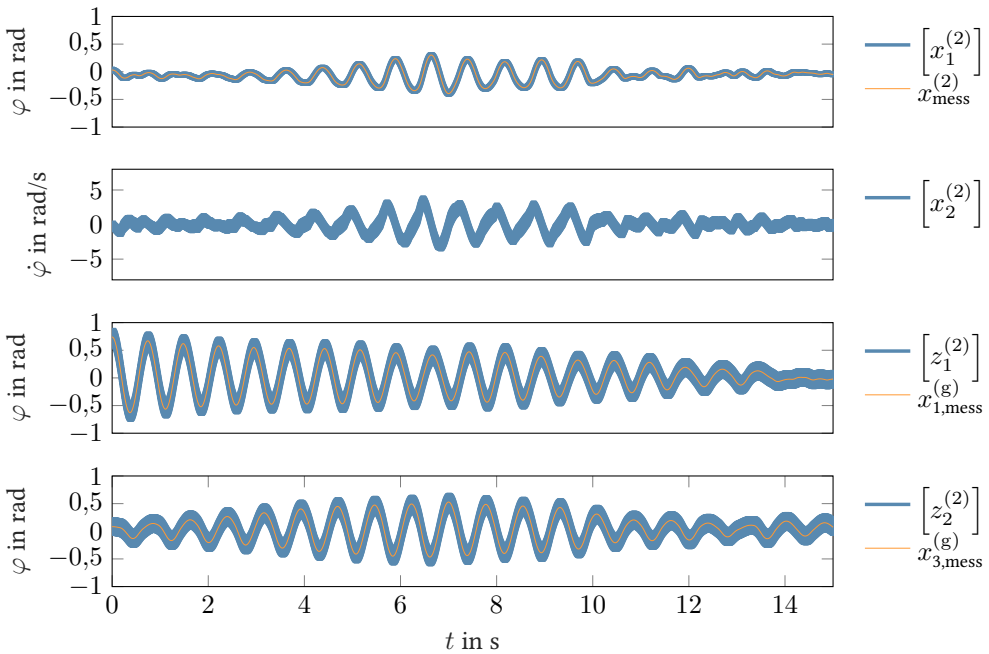


Abbildung 7.46: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

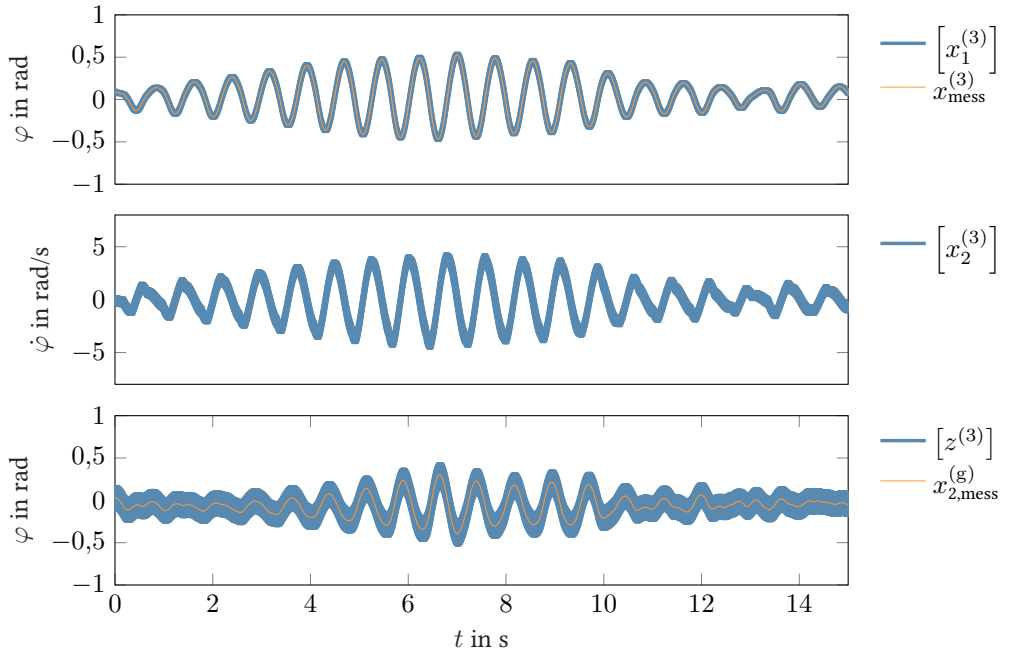


Abbildung 7.47: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾: fehlerfreier Fall (gekoppelte Pendel)

Der additive Fehler $F_1^{(g)}$ zum Zeitpunkt $t_f = 10$ s stellt das zweite zu analysierende Szenario dar. In den Abbildungen 7.48 bis 7.50 sind die Resultate der einzelnen LFDs dargestellt. Aufgrund der Rückführung des Schätzfehlers bei diesem Zustandsmengenbeobachter wird trotz des Auftretis eines Fehlers die Lösungsmenge weiter berechnet. Es liegt daher nach Fehlerauftritt keine dauerhafte Inkonsistenz vor. Dieses zu erwartende Verhalten ist ebenfalls in den Abbildungen erkennbar und entspricht den tatsächlichen Bedingungen.

Das Ergebnis der Fehlerdiagnose ist in Abbildung 7.51 als Balkendiagramm dargestellt. Unmittelbar nach Fehlerauftritt resultiert eine kurzzeitige leere Lösungsmenge im LFD⁽³⁾. Aufgrund der leeren Schnittmenge wird eine Fehlerisolation im systemfernen GFI durchgeführt, was ebenfalls in Abbildung 7.51 ersichtlich ist. Die Gütefunktionen wurden zur besseren Darstellung auf ihren jeweiligen maximalen Wert normiert. Der Wert der Gütefunktion $\Phi_{F_1^{(g)}}^{(g),*}$ zum Fehlerkandidaten $F_1^{(g)}$ ist zumeist niedriger als der Wert der Gütefunktion $\Phi_{F_2^{(g)}}^{(g),*}$. Folglich wird er in der Fehlerliste größtenteils an der ersten Position zu finden sein und stellt somit den wahrscheinlichsten Fehler dar.

Eine Fehlerdetektion des multiplikativen Fehlers war beim MHE-basierenden Ansatz nicht möglich. Die Erweiterung um eine zusätzliche Parameterschätzung der Kugelmasse am dritten Subsystem konnte nicht erfolgreich umgesetzt werden. Der Hauptgrund liegt hierbei an der mangelnden Systemanregung, da das System keine Eingangsgröße aufweist und nur durch die Anfangsauslenkung angeregt wird.

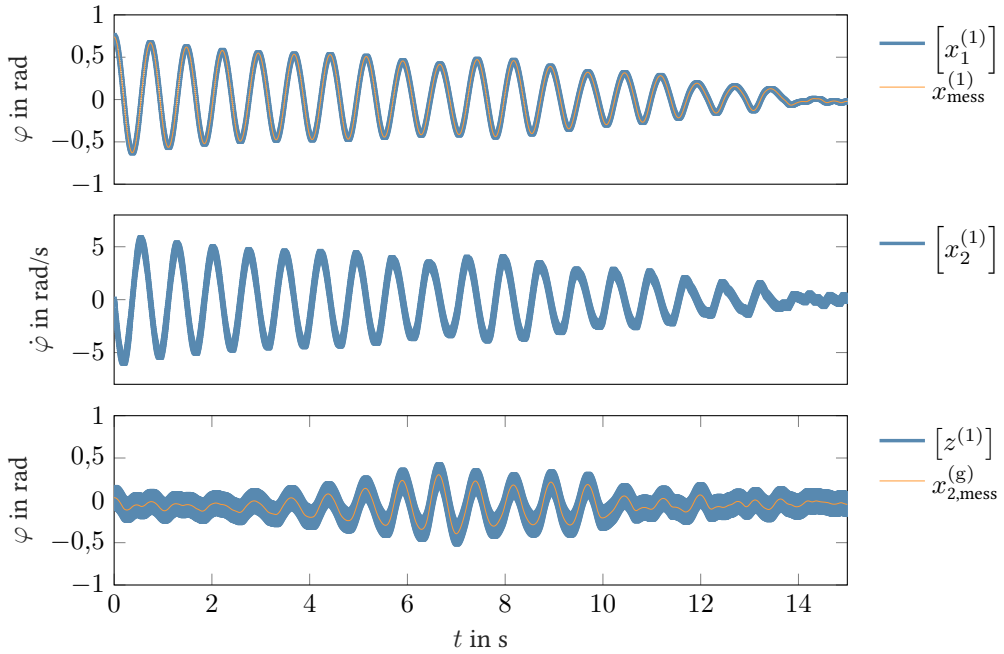


Abbildung 7.48: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

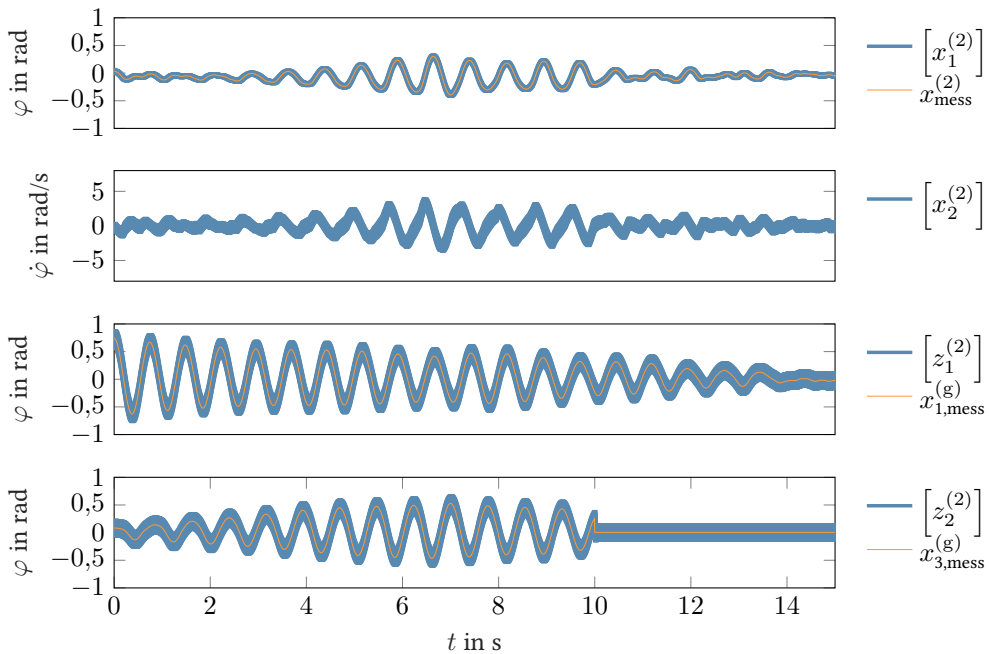


Abbildung 7.49: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

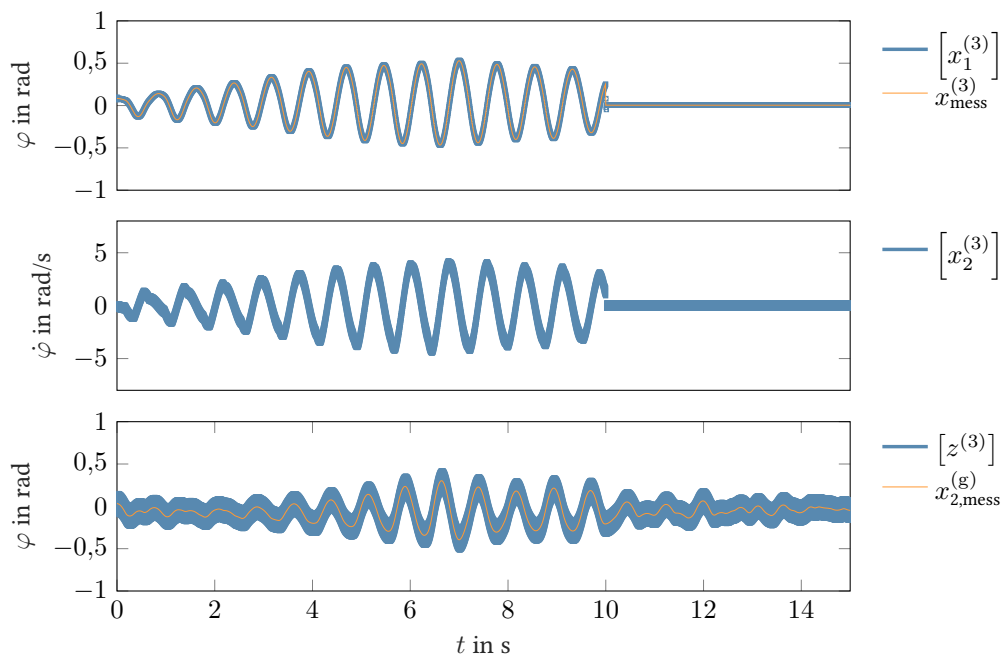


Abbildung 7.50: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾: additiver Fehler $F_1^{(g)}$ (gekoppelte Pendel)

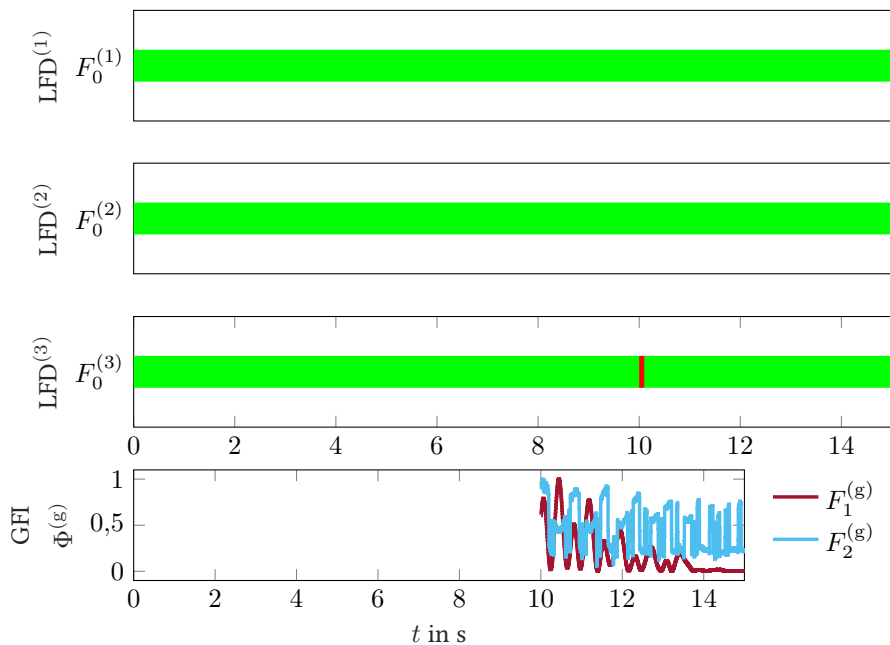


Abbildung 7.51: MHE-basierende Fehlerdiagnose der gekoppelten Pendel unter Einfluss von $F_1^{(g)}$

7.3.4 Vergleich der Fehlerdiagnosemethoden und deren Rechenzeit

Die Resultate der beiden vorgestellten Fehlerdiagnosemethoden am Versuchsaufbau „gekoppelte Pendel“ werden in diesem Abschnitt gegenübergestellt und miteinander verglichen. Zudem sind zum Vergleich die jeweiligen Ergebnisse der globalen Fehlerdetektion (Global) für das monolithische System (7.31) angeben.

Zunächst werden die Zeitspannen zwischen dem Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f und dem Zeitpunkt der Fehlerdetektion t_d analysiert. Die Zeiten sind in den einzelnen Fehlerbalkendiagramme aus Abschnitt 7.3 ersichtlich und in der Tabelle 7.4 zusammengefasst. Alle Me-

Fehler	Lokal: $t_d - t_f$	Global: $t_d - t_f$
<i>Konsistenzbasiertes Diagnoseverfahren</i>		
Additiver Fehler $F_1^{(g)}$	0 s	0 s
Multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$	0,15 s	0,14 s
<i>MHE-basiertes Diagnoseverfahren</i>		
Additiver Fehler $F_1^{(g)}$	0 s	0 s
Multiplikativer Fehler $F_2^{(g)}$	– s	– s

Tabelle 7.4: Zeitspanne zur erfolgreichen Fehlerdetektion bei den gekoppelten Pendeln

thoden erkennen den additiven Fehler $F_1^{(g)}$ direkt nach Fehlerauftritt. Hierbei ist kein Unterschied zwischen den beiden verteilten Fehlerdiagnosemethoden sowie den zugehörigen globalen Methoden ersichtlich. Der multiplikative Fehler $F_2^{(g)}$ wird ausschließlich von der konsistenzbasierten Methode erkannt. Die zeitliche Differenz zwischen der lokalen und globalen konsistenzbasierten Variante ist mit 0,01 s minimal.

Die benötigte Rechenzeit der einzelnen Fehlerdiagnoseverfahren sowie die potenzielle Rechenzeiterparnis bei der verteilten Systembetrachtung gegenüber einer monolithischen Systembetrachtung wird im Folgenden analysiert. Hierzu erfolgt zunächst eine Abschätzung der potenziellen Rechenzeiterparnis gemäß Abschnitt 4.4. Im Zuge der monolithischen Systembetrachtung werden zur Beschreibung der unsicheren Zustandsraumdarstellung (7.31) mittels Taylor-Modellen $\vartheta^{(g)} = n^{(g)} + r^{(g)} + p^{(g)} + 1 = 6 + 0 + 10 + 1 = 17$ Variablen eingesetzt. Für die jeweiligen Subsysteme (siehe (7.45) - (7.53)) werden $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)} = \vartheta^{(3)} = 13$ Variablen benötigt. Für die Anzahl der Zustandsdifferentialgleichungen gilt jeweils $\varsigma^{(g)} = n^{(g)} = 6$,

$\varsigma^{(1)} = n^{(1)} + m^{(1)} = 3$, $\varsigma^{(2)} = 4$ und $\varsigma^{(3)} = 3$. Für den benötigten Speicheraufwand (siehe (4.44)) lässt sich folglich eine potenzielle Reduzierung von ungefähr

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(1)} + \ell)!}{\vartheta^{(1)}! \ell!} \right) / \left(\frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 50,9\%, \quad (7.59)$$

$$1 - \left(\frac{(\vartheta^{(2)} + \ell)!}{\vartheta^{(2)}! \ell!} \right) / \left(\frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 50,9\% \quad (7.60)$$

$$\text{und } 1 - \left(\frac{(\vartheta^{(3)} + \ell)!}{\vartheta^{(3)}! \ell!} \right) / \left(\frac{(\vartheta^{(g)} + \ell)!}{\vartheta^{(g)}! \ell!} \right) = 50,9\% \quad (7.61)$$

im Verhältnis zur globalen Systembetrachtung abschätzen. Für den benötigten Rechenaufwand resultiert eine potenzielle Rechenzeiterparnis von etwa

$$1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(1)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 75,5\%, \quad 1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(2)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 67,3\% \quad \text{und} \quad 1 - \frac{K_{\text{ges}}^{(3)}}{K_{\text{ges}}^{(g)}} = 75,5\%. \quad (7.62)$$

Die nachfolgenden Abbildungen 7.52 und 7.53 zeigen die für die konsistenzbasierte bzw. MHE-basierte Fehlerdiagnose tatsächlich benötigten Rechenzeiten. Beide Abbildungen be-

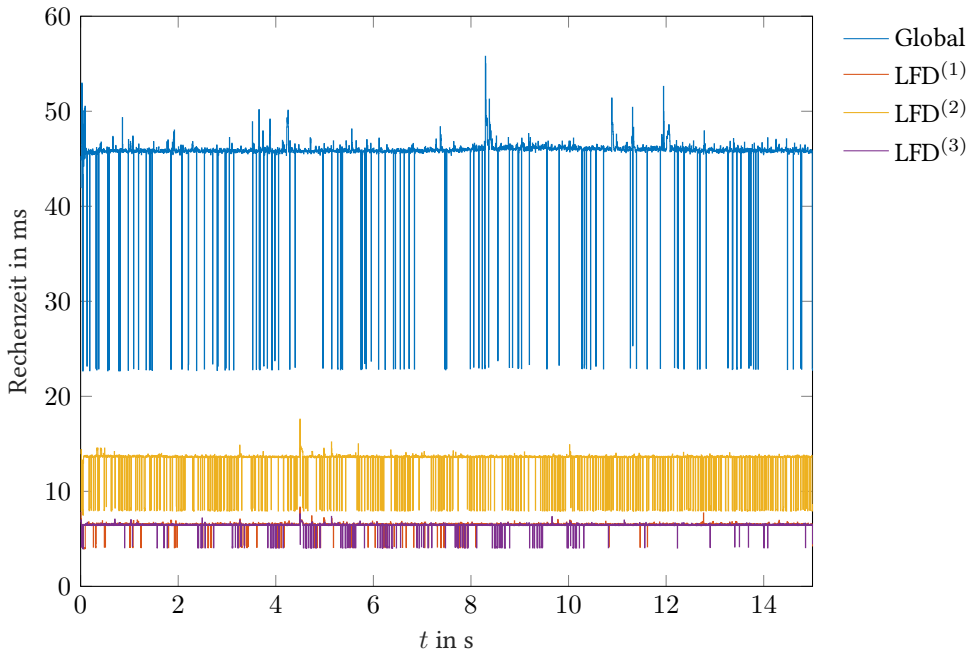


Abbildung 7.52: Rechenzeit bei der konsistenzbasierten Fehlerdiagnose (gekoppelte Pendel)

stätigen die berechneten potenziellen Rechenzeitschätzungen. Die größte Rechenzeiterparnis konnte im LFD⁽¹⁾ sowie LFD⁽³⁾ erzielt werden, wobei der LFD⁽²⁾ immer noch deutlich weniger Rechenzeit benötigt als die jeweilige globale Methode. Die höhere Rechenzeit

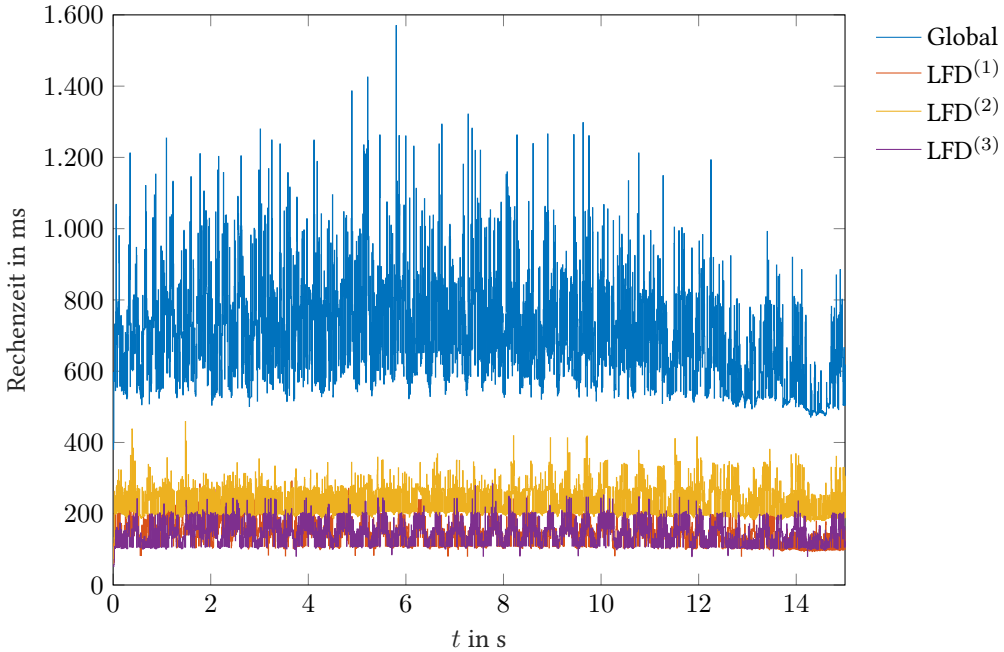


Abbildung 7.53: Rechenzeit bei der MHE-basierenden Fehlerdiagnose (gekoppelte Pendel)

im Vergleich zu $\text{LFD}^{(1)}$ und $\text{LFD}^{(3)}$ liegt an der Anzahl an Zustandsdifferentialgleichungen $\zeta^{(2)} = 4$ zur Beschreibung des zweiten Subsystems. Auch hier gilt, dass für die Bestimmung der potenziellen Rechenzeiterparnis ein vollbesetztes multivariates Polynom angenommen wurde, welches in diesem betrachteten Fall nicht vorliegt. Daher stimmen die berechneten potenziellen Rechenzeiterparnisse nicht exakt mit den tatsächlichen Rechenzeiterparnissen in Abbildung 7.53 überein. Die tatsächlichen Rechenzeiten sind noch weiter reduziert.

Des Weiteren ist aus den Abbildungen ersichtlich, dass auch beim gekoppelten Pendel die MHE-basierte Fehlerdiagnose sowohl global als auch lokal deutlich mehr Rechenzeit benötigt um eine Lösungseinschließung zu bestimmen. Der verteilte MHE-basierte Ansatz benötigt kurzzeitig über 458,5 ms, während die verteilte konsistenzbasierte Methode jederzeit unter 18 ms bleibt.

Auch hier gelten die bereits beim Drei-Tank-System angemerkten Punkte: Im Rahmen der MHE-basierten Fehlerdiagnose ist die Laufzeit nicht deterministisch. Ferner können durch eine Reduktion der Taylor-Modell-Ordnung ℓ in den Subsystemen weitere Rechenzeiterparnisse erzielt werden.

7.3.5 Analyse der Auswirkungen von Unsicherheiten auf das Diagnoseergebnis

Analog zum Drei-Tank-System soll in diesem Abschnitt die Auswirkung von Unsicherheiten auf das Resultat der beiden Fehlerdiagnoseverfahren analysiert werden. Hierzu wird im ersten Schritt die benötigte Zeitspanne zwischen Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f und Zeitpunkt der Fehlerdetektion t_d bei variierenden Unsicherheit analysiert. Zudem wird als Worst-Case-Szenario der Paketverlust im Zuge der Kommunikation, welcher als unendliche Unsicherheit interpretiert werden kann (siehe Abschnitt 4.3.2), zwischen den Subsystemen untersucht.

Die benötigte Detektionszeit t_d bei unterschiedlichen Unsicherheiten für den multiplikativen Fehler ist in Abbildung 7.54 dargestellt. Hierzu wird die fest vorgegebene Unsicherheit δ_y gemäß (7.29) mit $\epsilon_y \in [0.5, 1.5]$ variiert und somit der Intervallradius der Messmenge verkleinert für $\epsilon_y < 1$ bzw. vergrößert für $\epsilon_y > 1$. Da der multiplikative Fehler ausschließlich im Rahmen der konsistenzbasierten Diagnosemethode detektiert wurde, kann diese Analyse auch nur bei diesem Verfahren durchgeführt werden.

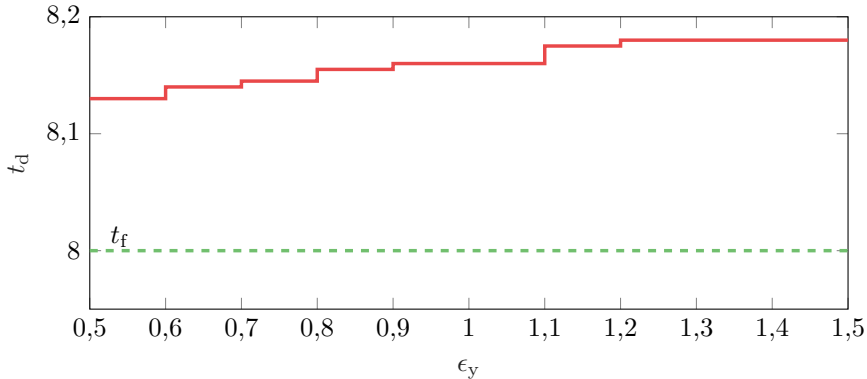


Abbildung 7.54: Analyse der Detektionszeit t_d bei variierender Unsicherheit $\epsilon_y \delta_y$ bei den gekoppelten Pendeln. Zeitpunkt des Fehlerauftritts t_f : grüne Linie, Detektionszeit t_d der konsistenzbasierten Diagnosemethode: rote Linie.

Auch aus dieser Abbildung ist zu erkennen, dass im Zuge steigender Unsicherheit ebenfalls die benötigte Detektionszeit t_d steigt. Da der betrachtete Fehler (Verdoppelung der Federmasse) eine große Fehleramplitude aufweist, ist auch bei steigender Unsicherheit der Fehler noch detektierbar. Allerdings würde auch hier bei zu großer Unsicherheit der vorhandene Fehler verdeckt werden (verdeckter Alarm nach Definition 2.15).

Der letzte zu analysierende Punkt ist das Verhalten beider Diagnosemethoden in Bezug auf Paketverluste in der Kommunikation. Die Kommunikationsstörung vom ersten zum zweiten Subsystem ist wie folgt umgesetzt: Auf fünf aufeinanderfolgende Paketverluste folgen fünf korrekte Pakete. Dieses Muster wird über die gesamte Betriebsdauer wiederholt. In Abbildung 7.55 sind die Lösungseinschließung im LFD⁽²⁾ für den Fall des additiven Fehlers sowie dem Einsatz der konsistenzbasierten Diagnosemethode dargestellt. Analog dazu erfolgt in

Abbildung 7.56 die Lösungseinschließungen der MHE-basierten Diagnosemethode. Die Lösungseinschließungen für den fehlerfreien Fall beider Methoden sind in Anhang C.2 abgebildet.

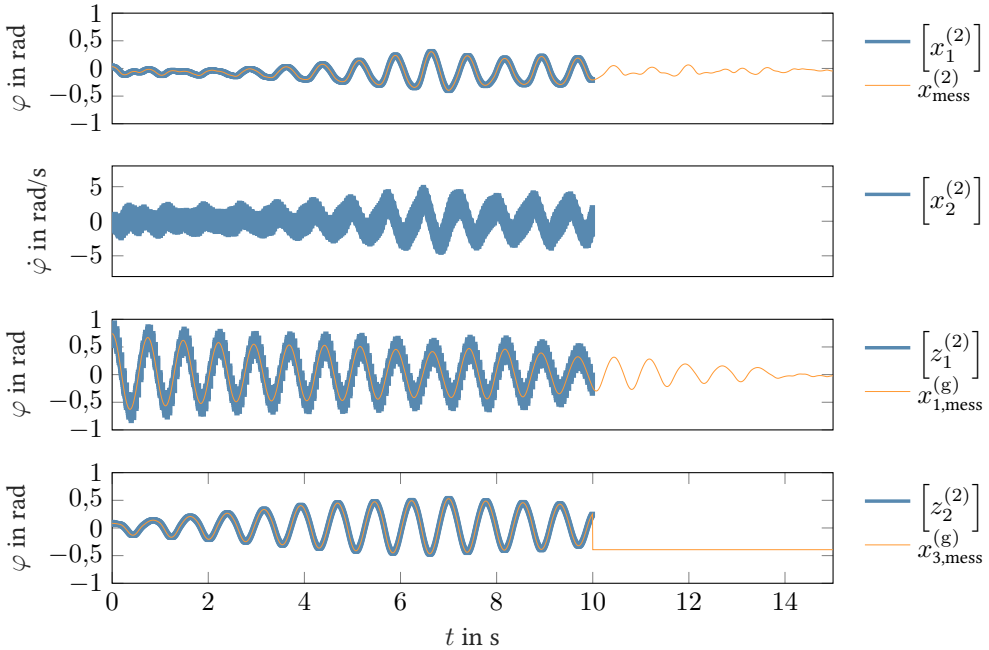


Abbildung 7.55: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: additiver Fehler $F_1^{(g)}$

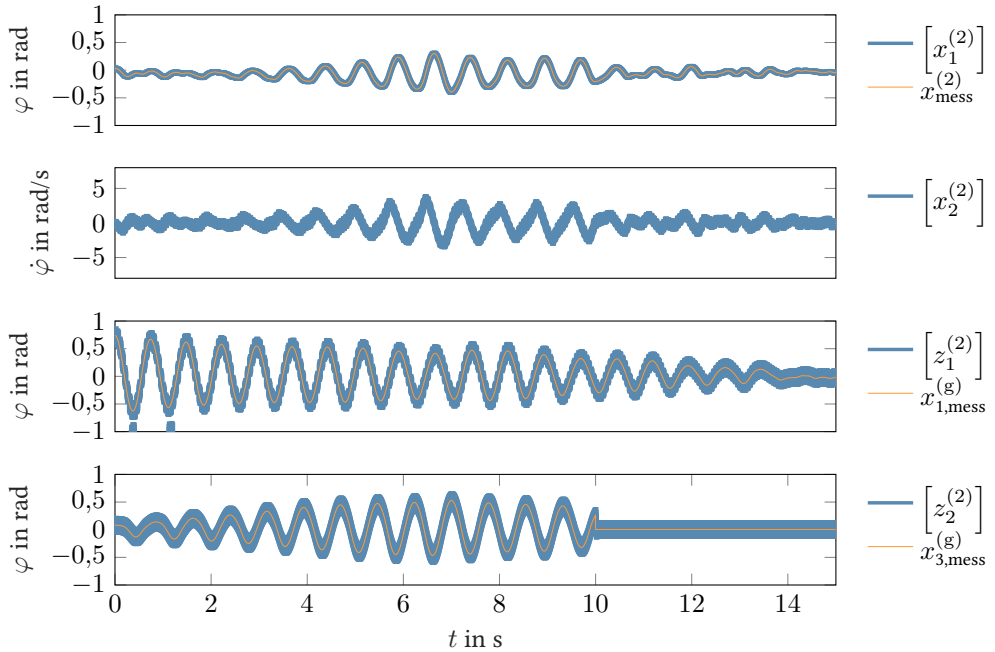


Abbildung 7.56: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: additiver Fehler $F_1^{(g)}$

Aufgrund der ausbleibenden Korrektur ist eine größere Intervallbreite der externen Zustandsgröße $z_1^{(2)}$ als im ungestörten Fall (siehe Abbildung 7.39 bzw. 7.50) zu erkennen. Dies hat allerdings keinen Einfluss auf das Diagnoseresultat. Trotz des Vorhandenseins einer Kommunikationsstörung wird die Diagnose erfolgreich durchgeführt. Die Verfahren werden fortgesetzt und detektieren erfolgreich den additiven Fehler. Die Detektionszeit t_d unterscheidet sich auch hier nicht gegenüber dem jeweiligen ungestörten Fall.

7.4 Zusammenfassung

Die in dieser Arbeit entwickelten Diagnosemethoden und Theorien wurden in diesem Kapitel an zwei realen Versuchsaufbauten angewendet und demonstriert.

Zunächst erfolgte die Demonstration der Leistungsfähigkeit der beiden Methoden am Drei-Tank-System. Hierbei war der erste Schritt die Verteilung der monolithischen Systembeschreibung in eine verteilte, unsichere Zustandsraumbeschreibung. Basierend darauf wurden die berechneten Zustandsmengen sowie das Fehlerdiagnoseresultat präsentiert. Hierbei konnte festgestellt werden, dass der konsistenzbasierte Ansatz alle Fehler (additive sowie multiplikative Fehler) erfolgreich detektiert und eindeutig isoliert hat. Im Rahmen der MHE-basierten Methode musste eine zusätzliche Parameterschätzung zur Detektion des multiplikativen Fehlers eingeführt werden. Der additive Fehler konnte ebenfalls unmittelbar nach Fehlerauftritt festgestellt werden. Die Detektion des multiplikativen Fehlers beim MHE-basierten

Verfahren dauerte etwa 70 s länger als bei der konsistenzbasierten Methode. Es konnte ebenfalls aufgezeigt werden, dass die verteilte Systembetrachtung eine signifikante Rechenzeiterparnis erbringt bei gleichbleibender Diagnosequalität in Bezug auf die Fehlerdetektionszeit. Die MHE-basierte Methode benötigt generell deutlich mehr Rechenzeit. Ferner haben die Diagnoseresultate in Bezug auf Paketverluste deutlich gemacht, dass trotz einer Störung in der Kommunikation eine zuverlässige Fehlerdiagnose möglich ist.

Anhand des zweiten Versuchsaufbaus „gekoppelte Pendel“ wurden die zuvor beschriebenen Ergebnisse bestätigt. Allerdings konnten aufgrund mangelnder Systemanregung keine Parameterschätzverfahren umgesetzt werden. Daher war in diesem Fall die Detektion des multiplikativen Fehlers bei der MHE-basierten Methode nicht möglich.

Insgesamt konnte festgestellt werden, dass die konsistenzbasierte Fehlerdiagnose unter den hier betrachteten Fehlerdiagnoseverfahren vorteilhafter ist. Es konnten alle Fehler erfolgreich detektiert und isoliert werden, wobei deutlich weniger Rechenzeit benötigt wird. Des Weiteren liefert die konsistenzbasierte Methode eine garantierte Aussage, d. h. sind alle Unsicherheiten berücksichtigt und ein Fehler wurde detektiert, liegt garantiert ein Fehler im betrachteten System vor. Auch ist der Fehler dauerhaft zu detektieren, da keine Rückführung des Schätzfehlers erfolgt. Soll zusätzlich zur verteilten Fehlerdiagnose ein verteiltes Regelungskonzept umgesetzt werden, ist mit dem MHE-basierten Ansatz eine leistungsfähige Alternative gegeben. Die Ergebnisse der Zustandsschätzung können hierbei für ein beobachterbasiertes Regelungskonzept verwendet werden. Bei der Fehlerisolation ist generell der konsistenzbasierte Ansatz vorzuziehen, da dieser Ansatz eindeutig interpretierbare Aussagen über seinen gesamten Zeitraum liefert.

8 Zusammenfassung

Aufgrund zahlreicher technischer Innovationen im Bereich der mechatronischen Systeme sind moderne Systeme zunehmend in der Lage, komplexere und umfangreichere Aufgaben zu lösen. Als ein prominentes Beispiel seien die hochautomatisierten Fahrzeuge genannt. Mit der Komplexität steigt zumeist auch die Fehleranfälligkeit derartiger Systeme. Daher sind kontinuierliche Gefährdungsvermeidung sowie eine hohe Systemverfügbarkeit wesentliche und stetig wachsende Anforderungen an ein modernes System. Um die genannten Anforderungen zu erfüllen, muss das System mittels einer Fehlerdiagnoseeinrichtung kontinuierlich auf potenziell auftretende Fehler überwacht werden. Zusätzlich zu dem beschriebenen Komplexitäts- und Leistungszuwachs ist ein weiteres Ziel moderner Systeme, eine dezentrale Entscheidungsfindung umzusetzen, um weitere Ziele wie eine Flexibilitätssteigerung in der Produktion realisieren zu können. Diese Ansätze sind insbesondere im Kontext „Industrie 4.0“ von Interesse. Dabei spielt die Vernetzung der einzelnen Komponenten untereinander eine zentrale Rolle. Insgesamt resultiert aus all diesen Punkten der Bedarf, eine Fehlerdiagnose für verteilte Systeme zu realisieren. Um diese Aufgaben zu lösen, wurden in dieser Arbeit zwei modellbasierte Fehlerdiagnoseverfahren für verteilte, nichtlineare Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung vorgestellt, welche die theoretischen Schwerpunkte dieser Arbeit bilden.

Das für die modellbasierte Fehlerdiagnose benötigte Wissen in Bezug auf das betrachtete Systemverhalten wird durch eine verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung repräsentiert. Die Unsicherheiten, welche sowohl bei der Modellierung als auch im Rahmen der Messwerterfassung auftreten, wurden durch beschränkte Mengen beschrieben und somit explizit im Zuge der Systembeschreibung berücksichtigt. Folglich wurden die Unsicherheiten rein deterministisch erfasst, was sich wesentlich von der weit verbreiteten stochastischen Unsicherheitsbeschreibung unterscheidet. Für die verteilte Zustandsmengenbeobachtung wird das monolithische System in mehrere Subsysteme zerlegt. In den resultierenden Subsystemen wird ausschließlich ein Unterraum des gesamten Zustandsmengenvektors betrachtet, welcher die lokal relevanten Zustände enthält. Neben den lokal verfügbaren Messgrößen werden auch relevante Informationen aus anderen Subsystemen mit einbezogen. Eine derartige verteilte Zustandsmengenschätzung weist diverse Vorteile auf, beispielsweise die lokale Rechenzeit- und Speicherersparnis aufgrund von Ordnungsreduktion oder auch eine Parallelisierung des Algorithmus. Diese Eigenschaften sind insbesondere für die rechenintensive Zustandsmengenbeobachtung von großem praktischen Nutzen.

Für die Verteilung der Fehlerdiagnosealgorithmen musste zunächst eine geeignete Architektur entwickelt werden. Die Grundlage hierfür bildete die eingeführte verteilte, unsichere Zustandsraumdarstellung. Diese berücksichtigt neben der lokalen Dynamik auch relevante Informationen aus anderen Subsystemen. Um hierbei die gewünschte lokale Ordnungsreduktion zu erzielen, werden die externen Zustände als unsichere Parameter in der lokalen Systembeschreibung betrachtet. Somit kann eine beliebig verknüpfbare Architektur umgesetzt

werden. Ferner konnte aufgezeigt werden, dass eine Separation der Teilaufgaben Fehlerdetektion sowie Fehlerisolation zu einer weiteren, signifikanten Reduzierung des lokalen Rechenaufwands führt. Derartige Konzepte sind als Ferndiagnose bekannt. Die Fehlerisolation wird dabei auf einer systemfernen Recheneinheit durchgeführt. Die Fehlerdetektion hingegen erfolgt in den lokalen Recheneinheiten auf Basis lokaler Messungen, externen Informationen sowie der zugehörigen Zustandsraumdarstellung. Paketverluste und Verzögerungen im Zuge der erforderlichen Kommunikation werden als zusätzliche Unsicherheiten betrachtet und ebenfalls im jeweiligen Diagnosealgorithmus explizit berücksichtigt.

Als erste Methode wurde in dieser Arbeit die konsistenzbasierte Fehlerdiagnose, welche auf einem Zustandsmengenbeobachter auf dem Prinzip der Paritätsgleichungen basiert, für verteilte, unsichere Systeme vorgestellt. Zur verteilten Zustandsmengenbeobachtung sind insgesamt drei Schritte erforderlich: Prädiktion, Korrektur und Fusion. Die Prädiktion basiert auf der aus der Literatur bekannten Vorgehensweise zur verifizierten Lösungseinschließung mittels Taylor-Modellen. Die prädizierte Zustandsmenge wird anschließend mithilfe von lokalen Messungen verkleinert. Des Weiteren werden Informationen aus anderen Subsystemen im Fusionsschritt genutzt, um das Ergebnis weiter zu verbessern. Werden alle existierenden Modell- und Messunsicherheiten durch geeignet gewählte Mengen eingeschlossen, so ist mit diesem Ansatz die folgende garantierte Aussage möglich: Sind das gemessene Systemverhalten und das prädizierte Systemverhalten nicht konsistent, ist ein Fehler im betrachteten (Sub-)System aufgetreten.

Die zweite vorgestellte neuartige Methode zur verteilten Fehlerdiagnose mittels Zustandsmengenbeobachtung basiert auf dem Prinzip des gleitenden Horizonts, welches auch als verteilte Moving Horizon Estimation bezeichnet wird. Der zentrale Unterschied zur ersten Methode liegt darin, dass diese Zustandsmengenbeobachtung eine Rückführung des Schätzfehlers aufweist und daher der Fehlerdiagnose mittels Zustandsbeobachtern zuzuordnen ist. Das bei diesem Zustandsmengenbeobachter zu lösende mengenbasierte Ausgleichsproblem wurde mithilfe der alternativen Mittelpunkt-Radius-Notation in ein nicht-intervallwertiges Ausgleichsproblem überführt. Das Ausgleichsproblem hat zunächst das Ziel, die Differenz zwischen den Intervallmittelpunkten der gemessenen lokalen Ausgangsgröße und der prädizierten Ausgangsgröße im aktuellen Schätzhorizont zu minimieren. Ferner wurden relevante Informationen aus den anderen Subsystemen in den lokalen Berechnungen berücksichtigt. Die Lösung des Ausgleichsproblems bildet die Lösungseinschließung des Zustandsmengenvektors zum aktuellen Zeitpunkt. Sie dient im Anschluss als Grundlage für den Diagnosealgorithmus zur verteilten Fehlerdiagnose.

Der Nachweis und die Veranschaulichung der Funktionsfähigkeit sowie die Gegenüberstellung der entwickelten Fehlerdiagnoseverfahren wurde anhand zweier realer Versuchsaufbauten erbracht. Hierbei wurden sowohl die Möglichkeiten als auch die Grenzen der betrachteten Verfahren aufgezeigt und ferner die Rechenzeiterparnis gegenüber einer monolithischen Systembetrachtung präsentiert.

Zusammenfassend leistet diese Arbeit durch die Entwicklung einer verteilten Architektur zur Fehlerdiagnose sowie zweier Fehlerdiagnoseverfahren einen Beitrag zur Fehlerdiagnose verteilter, unsicherer, nichtlinearer Systeme. Die Ergebnisse bieten einen signifikanten Mehrwert in Bezug auf die Fehlerdiagnose für heutige, leistungsfähige und verteilte Systeme.

A Stand der Technik zur Beobachtbarkeit unsicherer, nichtlinearer Systeme

Die Struktur unsicherer Systeme gemäß Definition 3.3 unterscheidet sich von gewöhnlichen, aus der Literatur bekannten Systemen. Daher ist es notwendig, neue Kriterien zur Untersuchung der Beobachtbarkeit unsicherer Systeme zu verwenden. Die grundlegende Definition zur Beobachtbarkeit wurde 1960 von R. E. Kalman eingeführt und ist bspw. in [Föl16] oder [Ada18] gegeben. Diese Definition lautet für nichtlineare Systeme:

Definition A.1 (Beobachtbarkeit [Ada18])

Gegeben sei ein nichtlineares System

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (\text{A.1b})$$

wobei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ sowie $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Dieses System ist beobachtbar, wenn bei bekanntem \mathbf{u} aus der Messung \mathbf{y} über ein endliches Zeitintervall $[t_0, t_1 < \infty]$ der Anfangszustand \mathbf{x}_0 eindeutig bestimmt werden kann.

Da eine eindeutige Bestimmung von \mathbf{x}_0 gefordert ist, ist diese Definition nicht auf unsichere Systeme übertragbar, bei denen eine Menge von Anfangszuständen $\mathcal{X}(t_0)$ mit $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}(t_0)$ vorliegt. Somit muss der Begriff Zustandsmengenbeobachtbarkeit neu definiert werden, welcher in der Literatur nicht eindeutig existent ist. In [Rie01] sowie [Pla07] werden neue Definitionen eingeführt, welche sich im Wesentlichen auf die nachfolgenden zwei Kriterien beziehen [Fal12]:

- Für den Beobachtungsfehler $\Delta \mathbf{x}$ wird gefordert, dass er innerhalb des endlichen Zeitintervalls $[t_0, t_1 < \infty]$ unterhalb einer endlichen Schranke $e_x < \infty$ liegt:

$$\Delta \mathbf{x} < e_x \quad (\text{A.2})$$

mit $t \in [t_0, t_1 < \infty]$. Im Fall beschränkter Zustandsmengen \mathcal{X} kann für den Beobachtungsfehler $\Delta \mathbf{x}$ eine obere Schranke angegeben werden (siehe [Fal12]). Hierbei gilt (A.2) elementweise.

- Es wird gefordert, dass mithilfe der Messinformationen \mathcal{Y} eine Verbesserung des Beobachtungsergebnisses erreicht werden soll. Auf diese Weise ist gewährleistet, dass das Beobachtungsergebnis nicht ausschließlich – ohne eine Berücksichtigung der Messinformationen – durch die Prädiktion berechnet wird. Jedoch wird in [Fal12] gezeigt, dass hierdurch alleinig ein Anwachsen des Beobachtungsfehlers nicht ausgeschlossen ist.

Darüber hinaus zeigt [Fal12] auch, dass für die im klassischen Sinne nicht beobachtbaren Systeme bei der Vorgabe einer beschränkten Anfangszustandsmenge $\mathcal{X}(t_0)$ möglicherweise eine sinnvolle Zustandsmengenbeobachtung durchgeführt werden kann. Der Beobachtungsfehler überschreitet hierbei ab einem endlichen Zeitpunkt eine obere Schranke nicht mehr.

B Herleitungen

B.1 Multiplikation und Division von Taylor-Modellen

Die Multiplikation zweier Taylor-Modelle $\mathcal{T}_{f \cdot g} = \mathcal{T}_f \mathcal{T}_g$ mit jeweils ℓ -ter Ordnung ist eine weitere zentrale Grundrechenart. Die Bestimmung ist jedoch aufwendiger als bei der Addition (3.55), was daran liegt, dass das Produkt der Taylorpolynome $\mathcal{P}_f \mathcal{P}_g$ ein Produkt der Ordnung 2ℓ ergibt [Wol10]. Diese höhere Ordnung ist unerwünscht und entspricht keinem gültigen Taylor-Modell nach Definition 3.11. Aus diesem Grund muss die Multiplikation so angepasst werden, dass das resultierende Taylor-Modell die Ordnung ℓ aufweist und weiterhin die tatsächliche Lösungsmenge vollständig einschließt. Aufgrund der Subdistributivität bei der Intervallarithmetik (siehe Definition 3.6) gilt der folgende Zusammenhang:

$$\mathcal{T}_f \mathcal{T}_g = (\mathcal{P}_f + [R_f]) (\mathcal{P}_g + [R_g]) \subseteq \mathcal{P}_f \mathcal{P}_g + [R_f] (\mathcal{P}_g + [R_g]) + \mathcal{P}_f [R_g] . \quad (\text{B.1})$$

Die Grundidee nach [Ebl07] ist, dass das multiplizierte Taylorpolynom $\mathcal{P}_f \mathcal{P}_g$ der Ordnung 2ℓ aus (B.1) entsprechend

$$\mathcal{P}_f \mathcal{P}_g = \mathcal{P}_{f \cdot g} + \tilde{\mathcal{P}} \quad (\text{B.2})$$

in einen Polynomanteil $\mathcal{P}_{f \cdot g}$ der Ordnung ℓ sowie in einen Restpolynomanteil $\tilde{\mathcal{P}}$ mit höherer Ordnung als ℓ aufgeteilt wird. Mithilfe der Wertebereichseinschließung wird anschließend der Restpolynomanteil mit den verbleibenden Termen aus (B.1) zum Intervallrest

$$[R_{f \cdot g, 1}] = \text{bd}\{\tilde{\mathcal{P}}\} + [R_f] (\text{bd}\{\mathcal{P}_g\} + [R_g]) + \text{bd}\{\mathcal{P}_f\} [R_g] \quad (\text{B.3})$$

zusammengefasst. Eine zweite Darstellungsmöglichkeit ergibt sich, wenn die Reihenfolge der Funktionen f und g in (B.1) vertauscht wird. Daraus folgt

$$[R_{f \cdot g, 2}] = \text{bd}\{\tilde{\mathcal{P}}\} + [R_g] (\text{bd}\{\mathcal{P}_f\} + [R_f]) + \text{bd}\{\mathcal{P}_g\} [R_f] , \quad (\text{B.4})$$

wobei durchaus $[R_{f \cdot g, 1}] \neq [R_{f \cdot g, 2}]$ gelten kann. Mit diesen beiden Intervallresten und dem Polynomanteil $\mathcal{P}_{f \cdot g}$ wird die Lösungsmenge vollständig eingeschlossen. Die Multiplikation zweier Taylor-Modelle ist somit durch

$$\mathcal{T}_{f \cdot g} := \mathcal{P}_{f \cdot g} + \underbrace{([R_{f \cdot g, 1}] \cap [R_{f \cdot g, 2}])}_{=: [R_{f \cdot g}]} \quad (\text{B.5})$$

definiert.

Anmerkung B.1. In [MB03] wird eine alternative Vorgehensweise zur Bestimmung der Multiplikation zweier Taylor-Modelle vorgestellt. Bei dieser Vorgehensweise wird (B.1) vollständig ausmultipliziert. Dies hat jedoch den Nachteil, dass aufgrund des Abhängigkeitseffekts im Allgemeinen ein unerwünschter, größerer Intervallrest $[R_{f \cdot g}]$ resultiert.

Für eine erfolgreiche Durchführung der Division eines Taylor-Modells $\mathcal{T}_{1/f} = 1/\mathcal{T}_f$ muss zunächst sichergestellt werden, dass eine Division durch Null ausgeschlossen ist. Dies ist erfüllt, wenn die Voraussetzung

$$0 \notin \mathcal{T}_f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}_v \quad (\text{B.6})$$

erfüllt ist. Die Grundlage für eine Division bildet die Taylor-Reihenentwicklung nach Satz 3.1 von $f(x) = 1/x$ um den Entwicklungspunkt x_0 mit $x_0 \neq 0$:

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \frac{(x - x_0)^k}{x_0^{k+1}} + (-1)^{\ell+1} \frac{(x - x_0)^{\ell+1}}{x_0^{\ell+2}} \frac{1}{\left(1 + \Theta \frac{x - x_0}{x_0}\right)^{\ell+2}}. \quad (\text{B.7})$$

Bevor x in (B.7) durch das Taylor-Modell \mathcal{T}_f substituiert wird, muss \mathcal{T}_f allerdings umgeformt werden. Der Grund hierfür liegt darin, dass der konstante Polynomanteil $c_f = \mathcal{P}_f(\mathbf{v} = \mathbf{0})$ den größten Einfluss auf das Restglied in $\mathcal{T}_{1/f}$ hätte und gegebenenfalls zu einer großen Überschätzung der Lösungsmenge führen würde. Daher ist es naheliegend, den konstanten Anteil c_f vom Polynomanteil \mathcal{P}_f abzuspalten und separat auszuwerten. Das modifizierte Taylor-Modell mit dem aufgespaltenen Polynomanteil $\mathcal{P}_f = c_f + \check{\mathcal{P}}_f$ ergibt sich somit zu:

$$\mathcal{T}_f = c_f + \check{\mathcal{P}}_f + [R_f] = c_f + \check{\mathcal{T}}_f. \quad (\text{B.8})$$

Die Division eines Taylor-Modells $\mathcal{T}_{1/f}$ wird mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = c_f$ und mithilfe von (B.7) sowie (B.8) gemäß

$$\mathcal{T}_{1/f} := \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \frac{\check{\mathcal{T}}_f^k}{c_f^{k+1}}}_{=:\mathcal{P}_{1/f}} + (-1)^{\ell+1} \underbrace{\frac{\text{bd}\{\check{\mathcal{T}}_f\}^{\ell+1}}{c_f^{\ell+2}} \frac{1}{\left(1 + [0, 1] \frac{\text{bd}\{\check{\mathcal{T}}_f\}}{c_f}\right)^{\ell+2}}}_{=:[R_{1/f}]} \quad (\text{B.9})$$

definiert.

B.2 Horner-Schema

In diesem Abschnitt wird das Horner-Schema als Methode zur Umformung von Polynomen vorgestellt. Die nachfolgenden Ausführungen orientieren sich an [Rie17] sowie [FH07].

Die Grundidee des Horner-Schemas beruht auf dem kontinuierlichen Ausklammern der Variable x aus dem beliebigen Polynom $P(x)$. Nach jedem Ausklammern verringert sich der Exponent der Variable x um den Wert eins. Das Horner-Schema ist anhand der nachfolgenden Definition B.1 gegeben:

Definition B.1 (Horner-Schema)

Sei $P(x)$ ein beliebiges Polynom n -ten Grades der Gestalt

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad (\text{B.10})$$

dann ist das Horner-Schema definiert als:

$$P(x) = (\dots (a_n x + a_{n-1}) x + \dots + a_1) x + a_0. \quad (\text{B.11})$$

Dass ausschließlich die Grundrechenarten Multiplikation sowie Addition im umgeformten Polynom (B.11) vorkommen, ist eine wesentliche Eigenschaft des Horner-Schemas. Die Erweiterung des Horner-Schemas für multivariate Polynome $P(\mathbf{x})$ ist beispielsweise in [PS00] beschrieben.

B.3 QR-Faktorisierung

Die QR-Faktorisierung (oder QR-Zerlegung) einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \geq n$) ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (\text{B.12})$$

mit der quadratischen Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sowie der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Der Zerlegungsprozess kann bspw. mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens, der Householder-Transformation oder der Givens-Rotation umgesetzt werden. Die einzelnen Verfahren werden z. B. in [RW17] detailliert vorgestellt, wobei in dieser Arbeit die Householder-Transformation angewendet wird.

Eine $(j \times j)$ -Householder-Transformation spiegelt einen Vektor an einer Hyperebene, die durch den Ursprung im euklidischen Raum verläuft. Die Transformation erfolgt anhand der symmetrischen und orthogonalen Householder-Matrix

$$\widetilde{\mathbf{H}}_j = \mathbf{I}_j - \frac{2}{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}} \mathbf{v} \mathbf{v}^\top, \quad (\text{B.13})$$

wobei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^j$ dem Vektor entspricht, der orthogonal auf der Spiegel-Hyperebene steht:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\| (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top. \quad (\text{B.14})$$

Der Vektor \mathbf{x} ist eben der Vektor, der auf ein Vielfaches des Einheitsvektors $\mathbf{e} = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top$ gespiegelt werden soll, d. h.

$$\widetilde{\mathbf{H}}_j \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \mathbf{e}. \quad (\text{B.15})$$

Der Beweis hierfür ist bspw. in [Feß11] zu finden. Die Bestimmung der QR-Faktorisierung erfolgt mittels $k = \min(m-1, n)$ Iterationen solcher Householder-Transformationen,

mit dem Ziel die gegebene Matrix \mathbf{A} in die obere Dreiecksmatrix \mathbf{R} zu überführen. In jedem Iterationsschritt wird ausschließlich der noch nicht behandelte Rest der Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ mit $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ sowie $i = 1, \dots, n$ durch sukzessiv verkleinerte Householder-Matrizen betrachtet. Im i -ten Schritt weist die Householder-Matrix die folgende Gestalt auf:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{H}}_{n-i+1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Mithilfe der Matrix \mathbf{H}_1 wird zunächst der erste Spaltenvektor \mathbf{a}_1 der Matrix \mathbf{A} auf ein Vielfaches des Einheitsvektors \mathbf{e} gespiegelt, d. h. alle Elemente von \mathbf{a}_1 unterhalb der Hauptdiagonalen werden nach null überführt:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^{(1)} & \mathbf{r}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{r}_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} & \dots & r_{1n}^{(1)} \\ 0 & r_{22}^{(1)} & \dots & r_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r_{m2}^{(1)} & \dots & r_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Anschließend werden alle Elemente von $\mathbf{r}_2^{(1)}$ aus (B.17) unterhalb der Hauptdiagonale mittels der Matrix \mathbf{H}_2 ebenfalls nach null überführt. Der bereits behandelte erste Vektor $\mathbf{r}_1^{(1)}$ bleibt unverändert. Nach insgesamt k dieser Schritte ist somit die gesuchte Dreiecksmatrix anhand von

$$\mathbf{R} := \mathbf{R}^{(k)} = \mathbf{H}_k \mathbf{H}_{k-1} \dots \mathbf{H}_1 \mathbf{A} \quad (\text{B.18})$$

gegeben, womit die quadratische Matrix in

$$\mathbf{Q} := \mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{H}_k \quad (\text{B.19})$$

resultiert.

B.3.1 QR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung

Bei der QR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung¹⁶ [GVL13] wird die QR-Faktorisierung aus Abschnitt B.3 um eine zusätzliche Spaltenpivotisierung erweitert. Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \quad (\text{B.20})$$

mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, der quadratischen Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie der Permutationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mittels der Permutationsmatrix \mathbf{P} werden die einzelnen Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ innerhalb der ursprünglichen Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ systematisch vertauscht. Die Permutationsmatrix $\mathbf{P} := \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_k$ besteht aus insgesamt k Matrizen \mathbf{P}_i mit $k = \min\{m, n\}$, deren Bestimmung auf der euklidischen Norm basiert. Grundlage hierfür bildet das Zwischenergebnis (vgl. (B.18))

$$\mathbf{R}^{(i-1)} = \mathbf{H}_{i-1} \dots \mathbf{H}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_1 \dots \mathbf{P}_{i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11}^{(i-1)} & \mathbf{R}_{12}^{(i-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22}^{(i-1)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

¹⁶ Unter Pivotisierung wird das systematische Vertauschen von Elementen innerhalb einer Matrix verstanden.

welches im i -ten Iterationsschritt bearbeitet wird. Dazu wird zunächst die j -te Spalte der Matrix $\mathbf{R}_{22}^{(i-1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{22,i}^{(i-1)} & \dots & \mathbf{r}_{22,n}^{(i-1)} \end{pmatrix}$ bestimmt, welche die größte euklidische Norm aufweist:

$$\left\| \mathbf{r}_{22,j}^{(i-1)} \right\| = \max \left\{ \left\| \mathbf{r}_{22,i}^{(i-1)} \right\|, \dots, \left\| \mathbf{r}_{22,n}^{(i-1)} \right\| \right\} \quad (\text{B.22})$$

Diese j -te Spalte bzw. $\mathbf{r}_{22,j}^{(i-1)}$ entspricht dem längsten Spaltenvektor und wird somit nach vorne sortiert. Anschließend werden alle Elemente, gemäß dem Vorgehen aus Abschnitt B.3, unterhalb der Hauptdiagonalen mittels der Householder-Matrix \mathbf{H}_i nach null überführt:

$$\mathbf{H}_i \mathbf{r}_{22,j}^{(i-1)} = \left\| \mathbf{r}_{22,j}^{(i-1)} \right\| (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top. \quad (\text{B.23})$$

Die Hauptdiagonalelemente der Matrix \mathbf{R} stellen nach der vollständigen QR-Faktorisierung mit Spaltenpivotisierung eine monoton abnehmende Folge dar.

B.4 Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren (PIGS-Verfahren)

Gegeben sei ein präkonditioniertes Intervallgleichungssystem der Form

$$\mathbf{P} [\mathbf{A}] ([\mathbf{x}] - \mathbf{c}) = \mathbf{P} [\mathbf{b}] \quad (\text{B.24})$$

mit $[\mathbf{A}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$, $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$, $[\mathbf{b}] \in \mathbb{IR}^n$, $\mathbf{c} \in [\mathbf{x}]$ sowie der Präkonditionierungsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zur Lösung des Intervallgleichungssystems (B.24) muss zunächst ein beschränkter Anfangsintervallvektor $[\tilde{\mathbf{x}}] \in \mathbb{IR}^n$ bekannt sein. Das Ziel des präkonditionierten Intervall-Gauß-Seidel-Verfahrens (PIGS-Verfahren) ist es nun, mittels einer Kontraktion eine verbesserte Einschließung $[\mathbf{x}] \subseteq [\tilde{\mathbf{x}}]$ zu bestimmen.

Für die geeignete Wahl der Präkonditionierungsmatrix \mathbf{P} existieren diverse Möglichkeiten, welche in [Bee06] ausführlich diskutiert werden. Der bekannteste und in der Literatur am häufigsten verwendete Präkonditionierer ist der *Inverse-Midpoint-Präkonditionierer*, welcher für quadratische Systeme anhand von

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_c^{-1} \quad (\text{B.25})$$

gegeben ist. Das gesamte PIGS-Verfahren zur Lösung von Intervallgleichungssystemen der Form (B.24) ist durch den in [Bee06] sowie [Wol10] beschriebenen Algorithmus gegeben: Hierbei entsprechen \mathbf{p}_k bzw. $[\mathbf{a}_k]$ in Zeile 4 dem k -ten Spaltenvektor von \mathbf{P} bzw. $[\mathbf{A}]$.

B.5 Einschließung der Matrixinversen

Die Inverse \mathbf{M}^{-1} einer beliebigen quadratischen Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist aufgrund der beschränkten Rechengenauigkeit im Computer im Allgemeinen nicht exakt berechenbar. Es gilt somit nur die Näherung

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \approx \mathbf{I}_n. \quad (\text{B.26})$$

Algorithmus 1: Präkonditioniertes Intervall-Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung von linearen Intervallgleichungssystemen

Input: $[A]$, $[\tilde{x}]$, $[b]$, c
Output: $[x]$

```

1  $[x] \leftarrow [\tilde{x}]$ 
2  $P \leftarrow A_c^{-1}$ 
3 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
4    $[x_k] \leftarrow [x_k] \cap \left( c_k - \frac{\sum_{i=1, i \neq k}^n (p_k^T [a_i]) ([x_i] - c_i) - p_k^T [b]}{p_k^T [a_k]} \right)$ 
5   if  $[x_k] = \emptyset$  then
6     | Exit                                     /* Keine Lösung in  $[\tilde{x}]$  */
7   end
8 end
```

Allerdings kann mithilfe der Intervallarithmetik eine garantierte Einschließung $[M^{-1}]$ der Matrixinversen angegeben werden. Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [Moo66] sowie [Wol10].

Zunächst wird die Supremumsnorm – auch Unendlich-Norm genannt – der Differenz zwischen der exakten Matrixinversen M^{-1} und der numerisch berechneten Näherung $M_{\text{inv}} \approx M^{-1}$ in Form von

$$\|M^{-1} - M_{\text{inv}}\|_{\infty} = \|M_{\text{inv}} M_{\text{inv}}^{-1} M^{-1} (I_n - M M_{\text{inv}})\|_{\infty} \quad (\text{B.27a})$$

$$= \|M_{\text{inv}} (M M_{\text{inv}})^{-1} (I_n - M M_{\text{inv}})\|_{\infty} \quad (\text{B.27b})$$

$$\leq \|M_{\text{inv}}\|_{\infty} \cdot \left\| (M M_{\text{inv}})^{-1} \right\|_{\infty} \cdot \underbrace{\|I_n - M M_{\text{inv}}\|_{\infty}}_{=:q} \quad (\text{B.27c})$$

angegeben. Der Term $\|I_n - M M_{\text{inv}}\|_{\infty}$ in (B.27c) kann hierbei mittels der Intervallarithmetik bestimmt werden. Aufgrund von $M_{\text{inv}} \approx M^{-1}$ gilt hierbei $q \ll 1$. Mithilfe der Neumann-Reihe [BMSM20] lässt sich der zweite Term in (B.27c) wie folgt abschätzen:

$$\left\| (M M_{\text{inv}})^{-1} \right\|_{\infty} = \left\| (I_n - (I_n - M M_{\text{inv}}))^{-1} \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (I_n - M M_{\text{inv}})^k \right\|_{\infty}. \quad (\text{B.28})$$

Zusätzlich mit der Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} (I_n - M M_{\text{inv}})^k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I_n - M M_{\text{inv}}\|_{\infty}^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad (\text{B.29})$$

ist die Abschätzung für den zweiten Term abgeschlossen. Somit resultiert für (B.27) insgesamt

$$\|M^{-1} - M_{\text{inv}}\|_{\infty} = \|M_{\text{inv}}\|_{\infty} \frac{q}{1-q} = \epsilon. \quad (\text{B.30})$$

Zur Einschließung wird die Matrix

$$[\mathbf{E}] := [-\epsilon, \epsilon] \cdot \mathbf{1}_n \quad (\text{B.31})$$

mit der Einsmatrix¹⁷ $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definiert. Die gesuchte Einschließung der Matrixinversen ist durch

$$[\mathbf{M}^{-1}] = \mathbf{M}^{-1} + [\mathbf{E}] \quad (\text{B.32})$$

gegeben und schließt aufgrund von

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_{\text{inv}} + (\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}_{\text{inv}}) \subseteq \mathbf{M}_{\text{inv}} + [\mathbf{E}] = [\mathbf{M}^{-1}] \quad (\text{B.33})$$

die exakte Inverse \mathbf{M}^{-1} garantiert ein.

¹⁷ Eine Einsmatrix ist eine reelle Matrix, bei der jedes Matricelement gleich der Zahl Eins ist.

B.6 Matrix-Inversions-Lemma

Das Matrix-Inversions-Lemma, auch als Woodbury-Matrix-Identität bekannt, lautet wie folgt:

Lemma B.1 (Matrix-Inversions-Lemma)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{k \times k}$ quadratische, invertierbare Matrizen sowie $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $D \in \mathbb{R}^{k \times n}$ dann gilt:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (\text{B.34})$$

Beweis:

Für den Beweis wird auf Boyd et al. [BV04, S. 678] verwiesen. □

Anmerkung B.2. Das Matrix-Inversions-Lemma wird häufig in numerischen Berechnungen angewendet, wenn A^{-1} bekannt ist und $(A + BCD)^{-1}$ benötigt wird.

B.7 Verallgemeinerte Gauß-Newton-Methode

Zunächst werden für eine übersichtlichere Darstellung alle Variablen in einem Vektor $\mathbf{p} = (s_L^T, \dots, s_k^T)$ und die übrigen Daten in das Argument $\mathbf{D} = (\hat{\mathbf{x}}_L, \mathbf{M}_L, \mathbf{W}, \mathbf{y}(t_L), \dots, \mathbf{y}(t_k); \mathbf{u}(t), t \in [t_L, t_k])$ zusammengefasst. Das VGN ist eine iterative Methode, welche in jedem Schritt eine Linearisierung aller Funktionen um den aktuellen Iterationswert \mathbf{p}_j durchführt. Das beschränkte lineare Ausgleichsproblem ist somit anhand von

$$\min_{\Delta \mathbf{p}_j} \|\mathbf{F}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D}) + \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{F}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D})\|^2 \quad (\text{B.35})$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{0} = \mathbf{G}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D}) + \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{G}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D}), \quad (\text{B.36a})$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{U}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D}) + \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{U}(\mathbf{p}_j; \mathbf{D}), \quad (\text{B.36b})$$

gegeben. Hierbei beschreibt der Nabla-Operator $\nabla_{\mathbf{p}}$ die partiellen Ableitungen nach \mathbf{p} . Das Resultat ist ein Inkrement $\Delta \mathbf{p}_j$, welches mit $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \Delta \mathbf{p}_j$ den nächsten Iterationsschritt berechnet. Nach Abschluss der Iterationen stellt das Ergebnis eine Schätzung \mathbf{x}^* für den zu bestimmenden Zustandsvektor \mathbf{x} dar.

C Ergänzende Resultate

In diesem Kapitel werden ergänzende Resultate zur Berechnung von Lösungseinschließungen bei gestörter Kommunikation aus Abschnitt 7.2.5 sowie 7.3.5 präsentiert.

C.1 Drei-Tank-System

In diesem Abschnitt werden die Lösungseinschließungen für den fehlerfreien Fall beim Drei-Tank-System vorgestellt. Es ist dabei eine Störung bei der Kommunikation vom zweiten zum dritten Subsystem vorhanden (siehe Abschnitt 7.2.5)

C.1.1 Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose

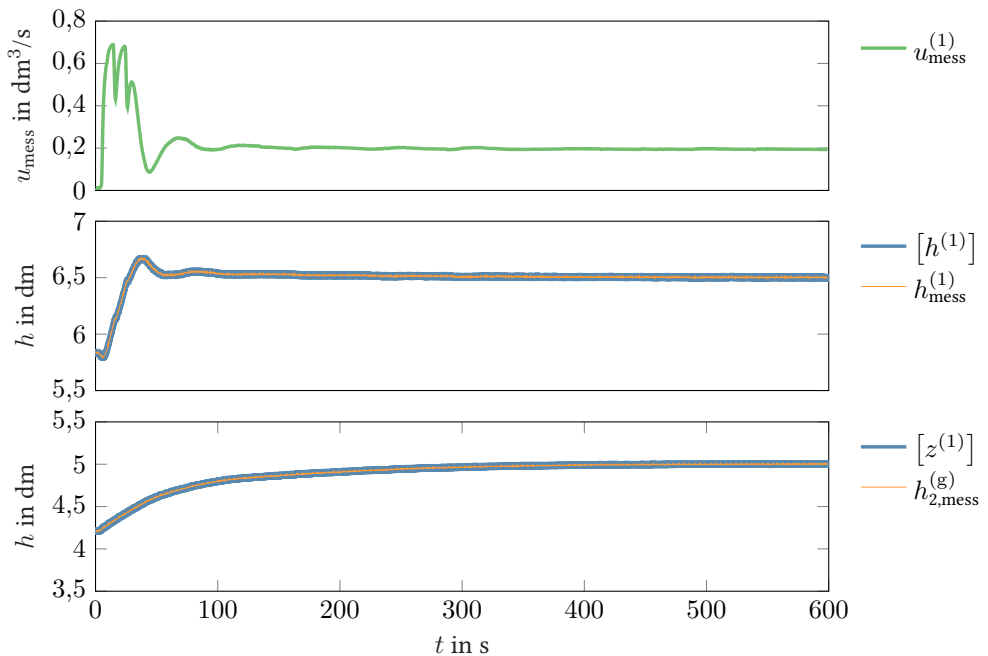


Abbildung C.1: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

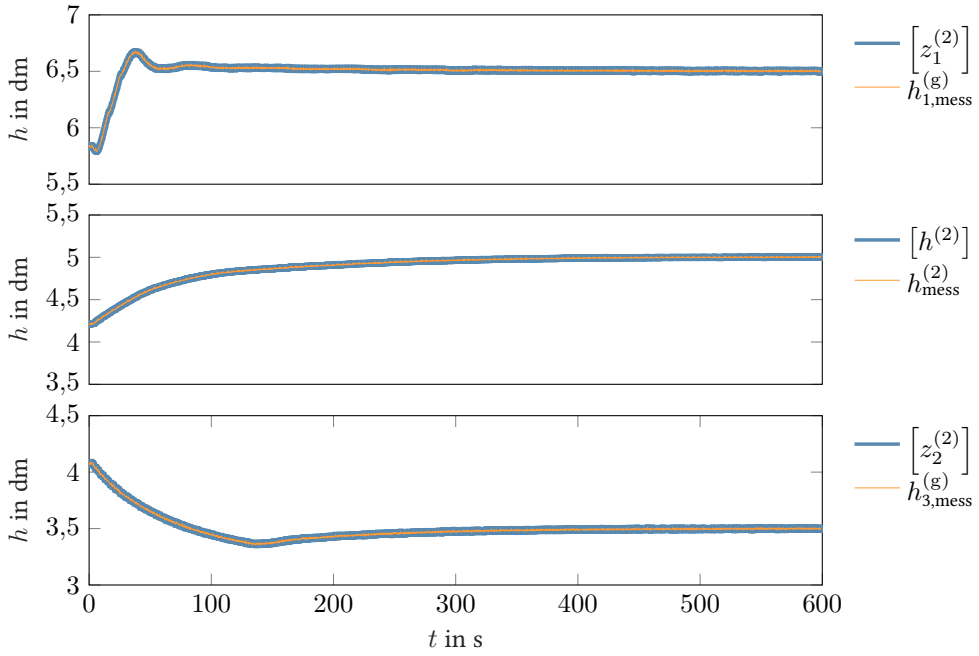


Abbildung C.2: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

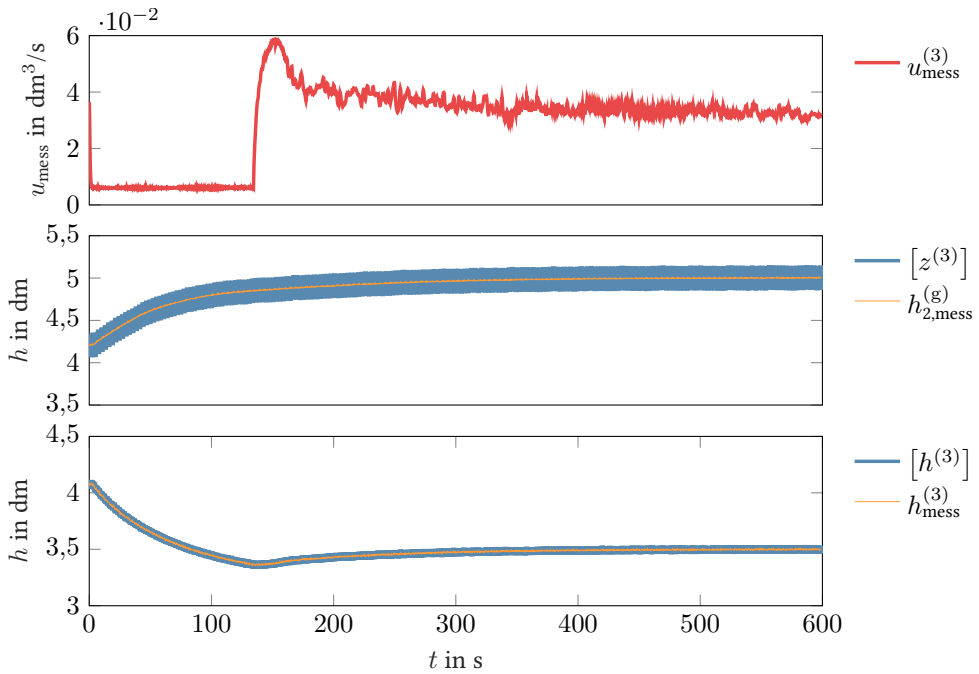


Abbildung C.3: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

C.1.2 MHE-basierende Fehlerdiagnose

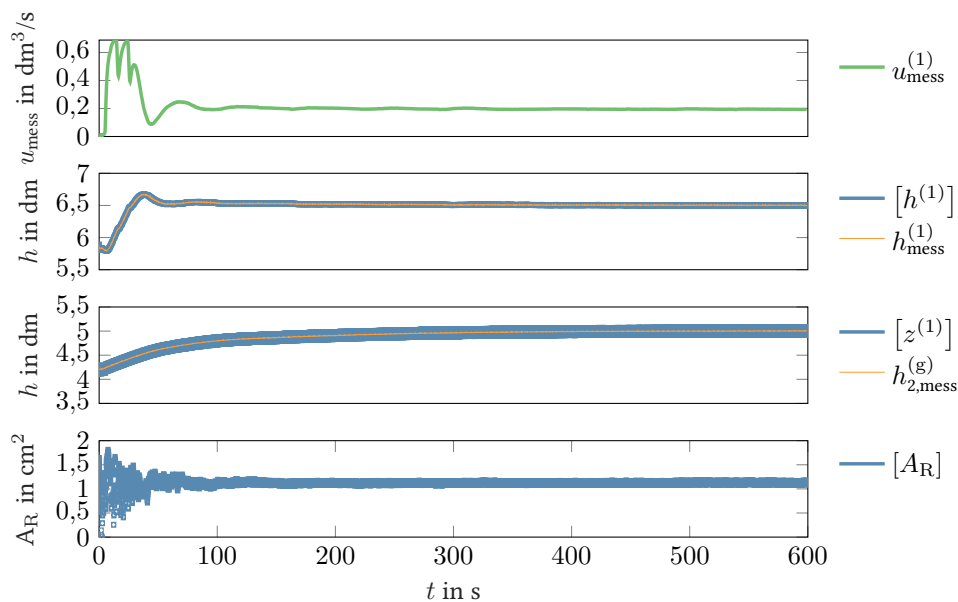


Abbildung C.4: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

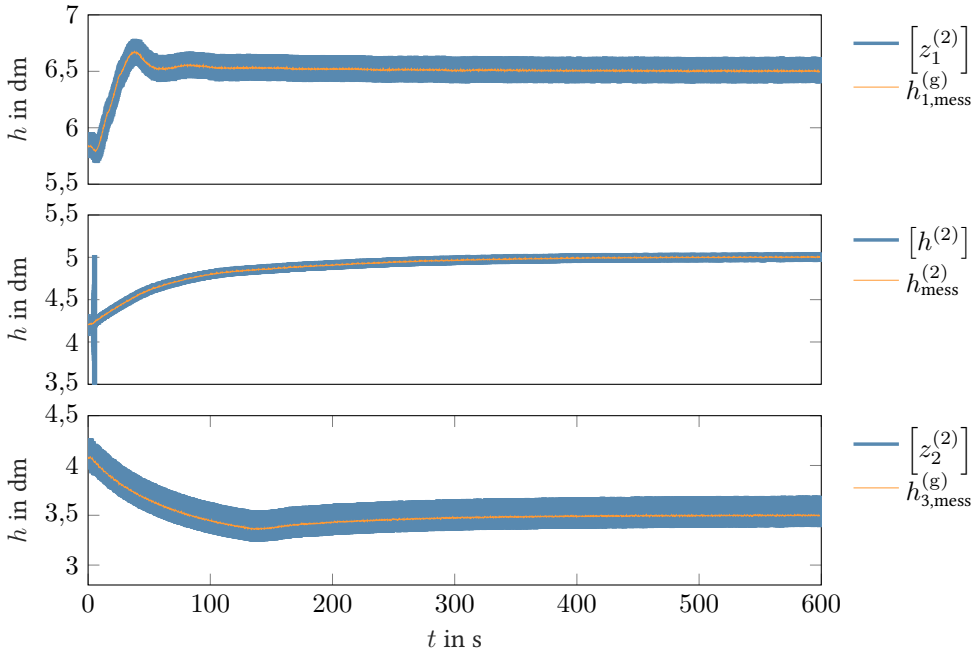


Abbildung C.5: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

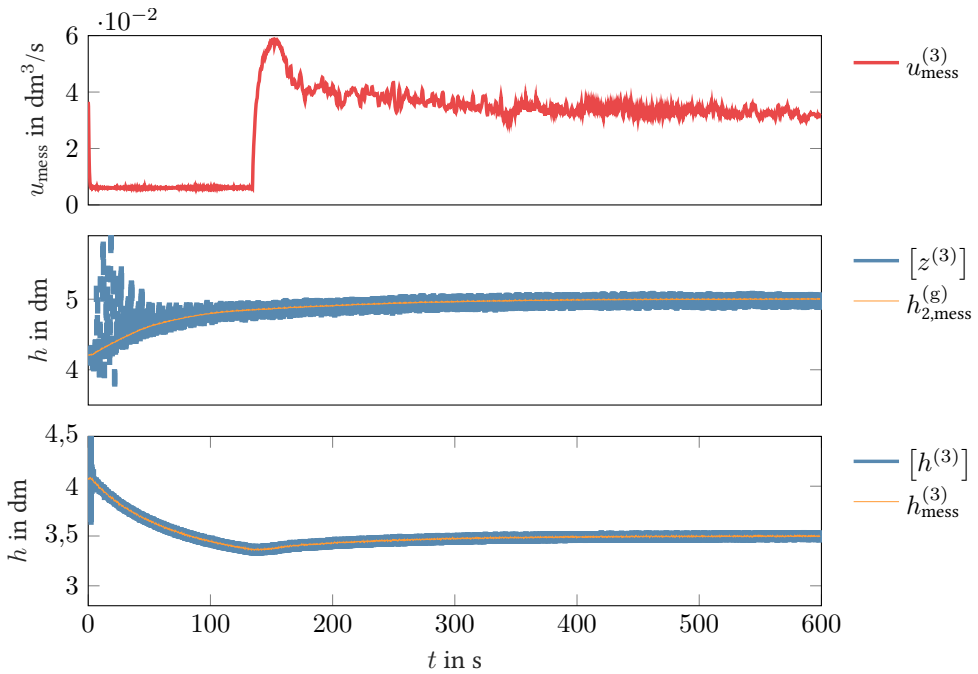


Abbildung C.6: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

C.2 Gekoppelte Pendel

In diesem Abschnitt werden die Lösungseinschließungen für den fehlerfreien Fall bei den gekoppelten Pendeln vorgestellt. Es ist dabei eine Störung bei der Kommunikation vom ersten zum zweiten Subsystem vorhanden (siehe Abschnitt 7.3.5)

C.2.1 Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose

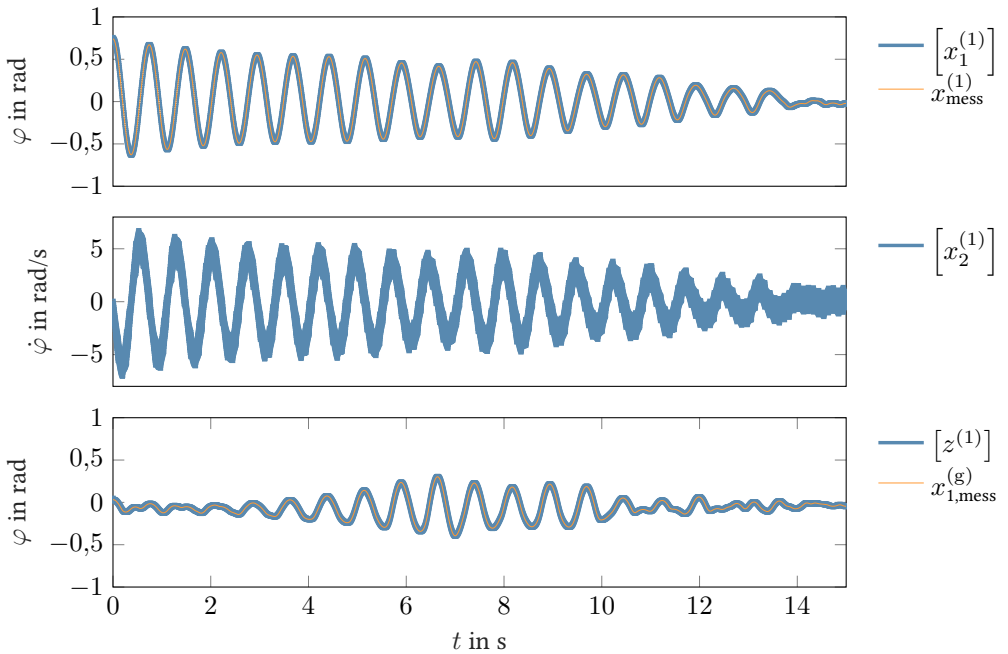


Abbildung C.7: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

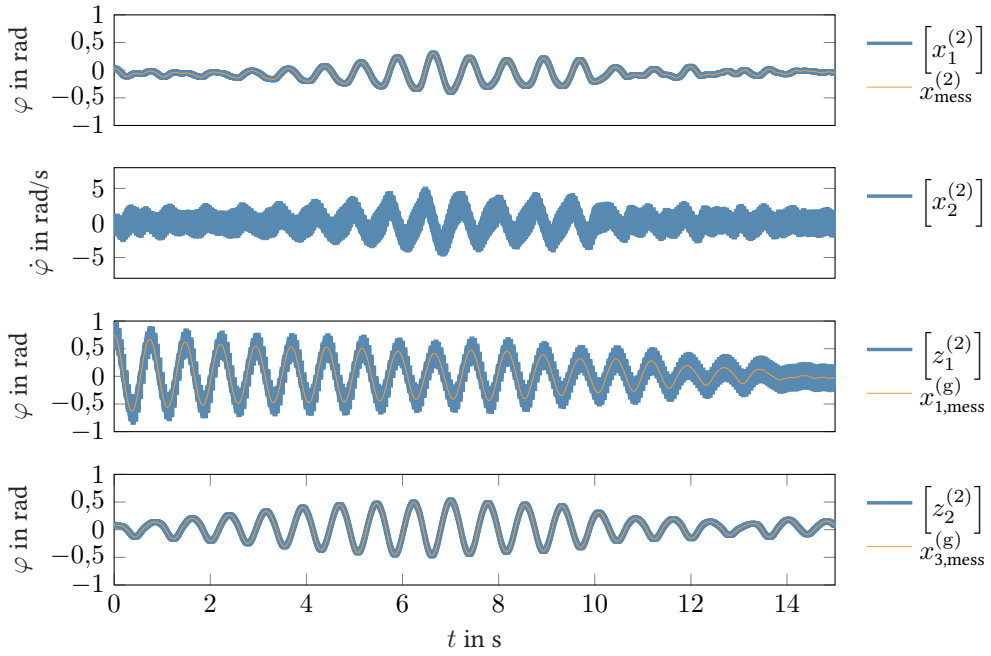


Abbildung C.8: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

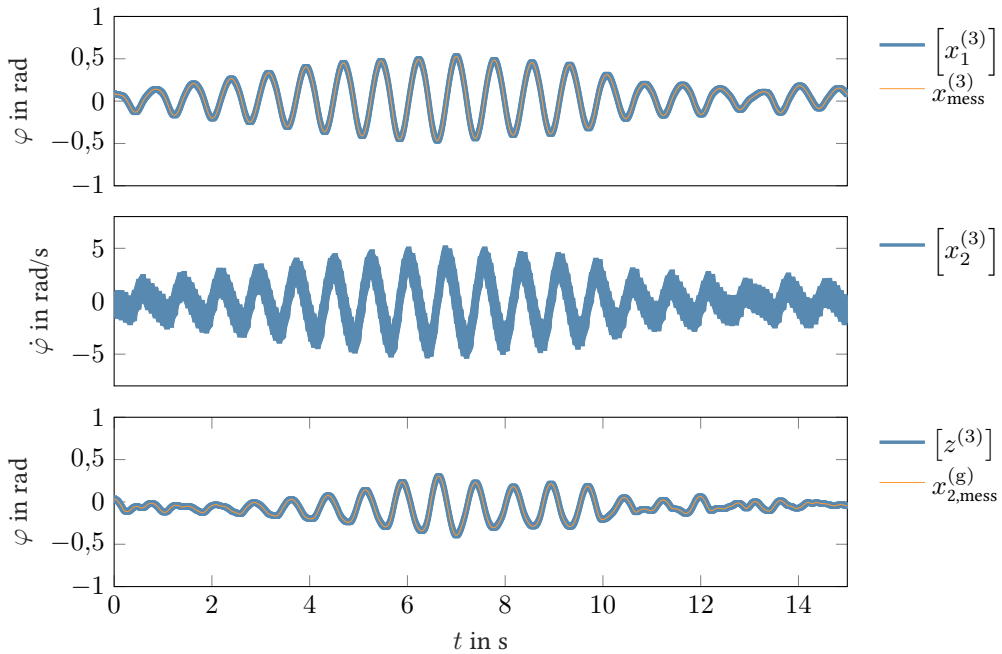


Abbildung C.9: Resultate des konsistenzbasierten LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

C.2.2 MHE-basierende Fehlerdiagnose

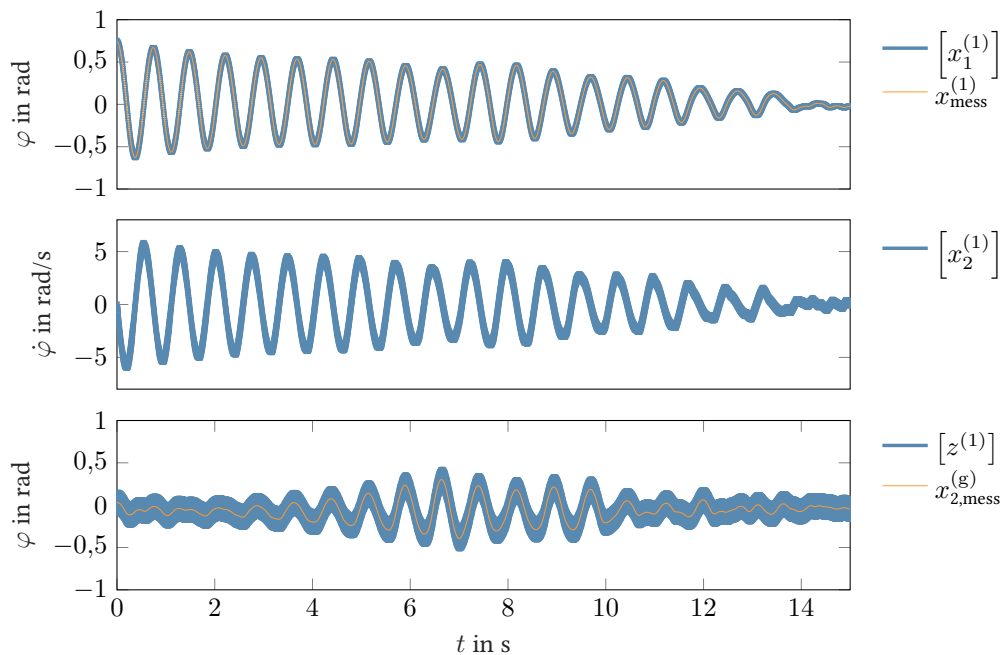


Abbildung C.10: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽¹⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

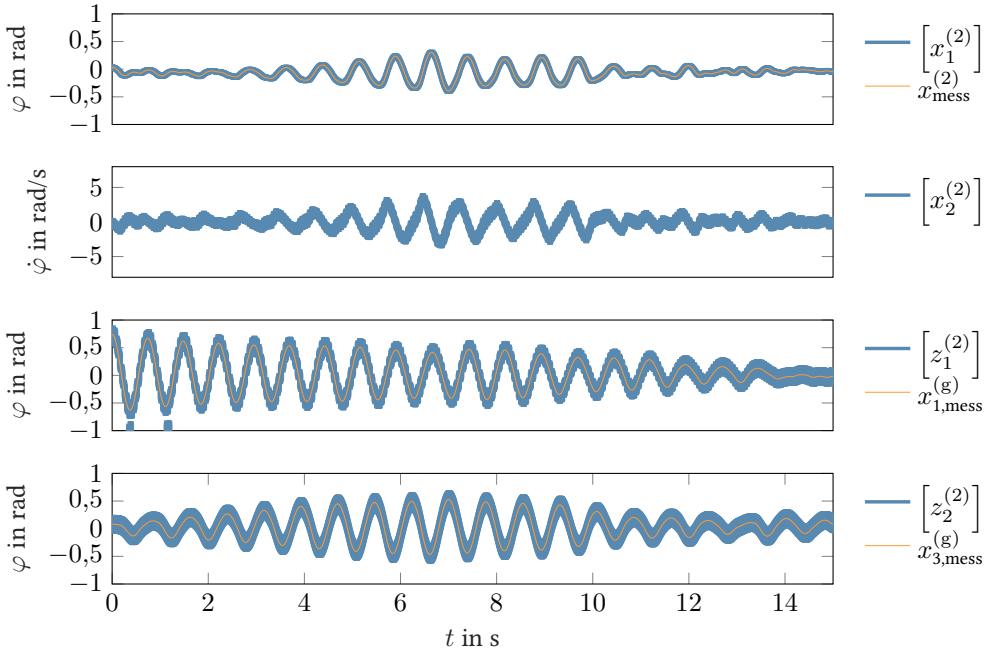


Abbildung C.11: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽²⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

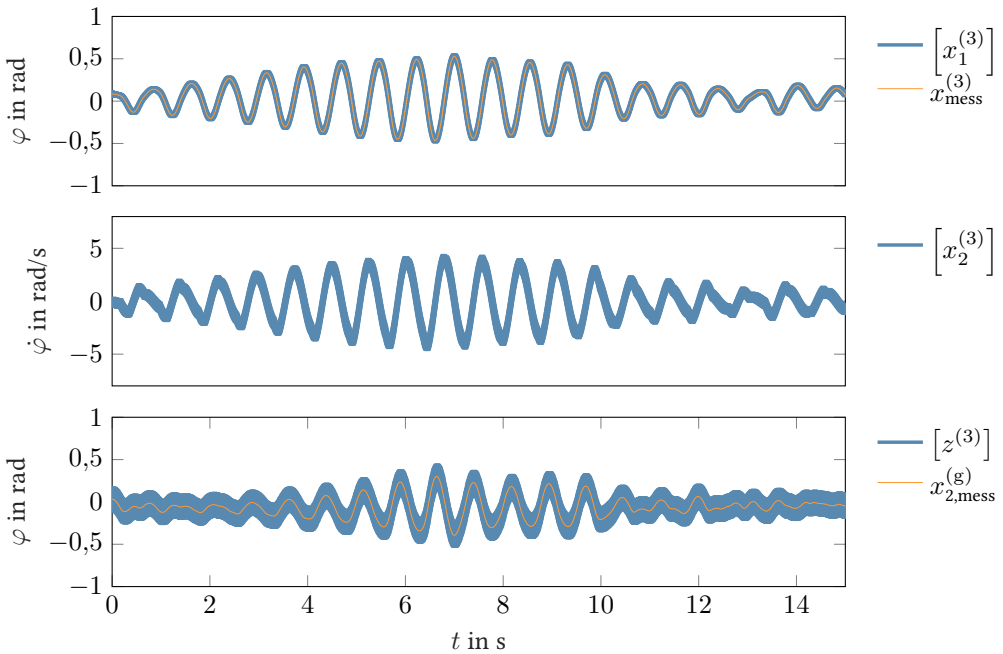


Abbildung C.12: Resultate des MHE-basierenden LFD⁽³⁾ bei Kommunikationsstörung: fehlerfreier Fall

Literaturverzeichnis

Öffentlich zugängliche Quellen

- [ABC05] ALAMO, T. ; BRAVO, J.M. ; CAMACHO, E.F.: Guaranteed state estimation by zonotopes. In: *Automatica* 41 (2005), Nr. 6, S. 1035–1043
- [Ada18] ADAMY, Jürgen: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 3th. Springer Berlin Heidelberg, 2018
- [AF97] ALCORTA GARCÍA, Efraín ; FRANK, Paul M.: Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis: A survey. In: *Control Engineering Practice* 5 (1997), Nr. 5, S. 663–670
- [AH74] ALEFELD, Götz ; HERZBERGER, Jürgen: *Einführung in die Intervallrechnung*. Bibliographisches Institut Mannheim, 1974
- [AS03] ANGELI, David ; SONTAG, Eduardo D.: Monotone control systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), Nr. 10, S. 1684–1698
- [Aßf09] AßFALG, Jochen: *Robust fault detection and isolation of nonlinear systems with augmented state models*. Universität Stuttgart, Fakultät Konstruktions-, Produktions-, und Fahrzeugtechnik, 2009
- [BC16] BATTISTELLI, Giorgio ; CHISCI, Luigi: Stability of consensus extended Kalman filter for distributed state estimation. In: *Automatica* 68 (2016), S. 169–178
- [Bee06] BEELITZ, Thomas: *Effiziente Methoden zum verifizierten Lösen von Optimierungsaufgaben und nichtlinearen Gleichungssystemen*. Universität Wuppertal, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 2006
- [Ber97] BERZ, Martin: From Taylor series to Taylor models. In: *AIP Conference Proceedings*, 1997, S. 1–23
- [BFP11] BOEM, Francesca ; FERRARI, Riccardo M. ; PARISINI, Thomas: Distributed Fault Detection and Isolation of Continuous-Time Non-Linear Systems. In: *European Journal of Control* 17 (2011), Nr. 5, S. 603–620
- [BKLS16] BLANKE, Mogens ; KINNAERT, Michel ; LUNZE, Jan ; STAROSWIECKI, Marcel: *Diagnosis and Fault-tolerant Control, 3rd Edition*. Springer Berlin Heidelberg, 2016
- [BKT14] BELIKOV, Juri ; KOTTA Ülle ; TÖNSO, Maris: Comparison of LPV and nonlinear system theory: A realization problem. In: *Systems & Control Letters* 64 (2014), S. 72–78

- [BMSM20] BRONSTEIN, Ilja N. ; MÜHLIG, Heiner ; SEMENDJAJEW, Konstantin A. ; MUSIOL, Gerhard: *Taschenbuch der Mathematik (Bronstein)*. Europa Lehrmittel Verlag, 2020 (Edition Harri Deutsch)
- [Bün21] BÜNGER, Florian: Preconditioning of Taylor models, implementation and test cases. In: *Nonlinear theory and its applications* 12 (2021), Nr. 1, S. 2–40
- [BRPN14] BLESÁ, Joaquim ; ROTONDO, Damiano ; PUIG, Vicenç ; NEJJARI, Fatiha: FDI and FTC of wind turbines using the interval observer approach and virtual actuators/sensors. In: *Control Engineering Practice* 24 (2014), S. 138–155
- [BU16] BOHN, Christian ; UNBEHAUEN, Heinz: *Modelle für nichtlineare dynamische Systeme*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016. – 229–350 S.
- [BV04] BOYD, Stephen P. ; VANDENBERGHE, Lieven: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [CDM17] CHADLI, Mohammed ; DAVOODI, Mohammadreza ; MESKIN, Nader: Distributed fault detection and isolation filter design for heterogeneous multi-agent LPV systems. In: *2017 American Control Conference (ACC)*, 2017, S. 1610–1615
- [CDW⁺22] CHI, Yuanfang ; DONG, Yanjie ; WANG, Z J. ; YU, F R. ; LEUNG, Victor C.: Knowledge-based fault diagnosis in industrial internet of things: a survey. In: *IEEE Internet of Things Journal* 9 (2022), Nr. 15, S. 12886–12900
- [Com03] COMBASTEL, Christophe: A state bounding observer based on zonotopes. In: *2003 European Control Conference (ECC)* IEEE, 2003, S. 2589–2594
- [CP99] CHEN, Jie ; PATTON, Ron J.: *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer US, 1999 (The International Series on Asian Studies in Computer and Information Science)
- [CS95] CHUNG, Walter H. ; SPEYER, Jason L.: A general framework for decentralized estimation. In: *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95* Bd. 4 IEEE, 1995, S. 2931–2935
- [CS10] CATTIVELLI, Federico S. ; SAYED, Ali H.: Distributed nonlinear Kalman filtering with applications to wireless localization. In: *2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2010, S. 3522–3525
- [DD03] D'ANDREA, Raffaello ; DULLERUD, Geir E.: Distributed control design for spatially interconnected systems. In: *IEEE Transactions on automatic control* 48 (2003), Nr. 9, S. 1478–1495
- [DEI16] DEGUE, Kwassi H. ; EFIMOV, Denis ; IGGIDR, Abderrahman: Interval estimation of sequestered infected erythrocytes in malaria patients. In: *2016 European Control Conference (ECC)* IEEE, 2016, S. 1141–1145
- [Din08] DING, Steven X.: *Model-Based Fault Diagnosis Techniques: Design Schemes, Algorithms, and Tools*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008
- [DIN15] Norm DIN EN ISO 9000 November 2015. *Qualitätsmanagementsysteme - Grundlagen und Begriffe (ISO 9000:2015)*

- [DKBS06] DIEHL, Moritz ; KÜHL, Peter ; BOCK, Hans G. ; SCHLÖDER, Johannes P.: Schnelle Algorithmen für die Zustands- und Parameterschätzung auf bewegten Horizonten (Fast Algorithms for State and Parameter Estimation on Moving Horizons). In: *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 12, S. 602–613
- [DKTM14] DAVOODI, Mohammad R. ; KHORASANI, Khashayar ; TALEBI, Heidar A. ; MOMENI, Hamid R.: Distributed Fault Detection and Isolation Filter Design for a Network of Heterogeneous Multiagent Systems. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22 (2014), Nr. 3, S. 1061–1069
- [DLSZ99] DURIEU, Cécile ; LORON, L. ; SEDDA, Emmanuel ; ZEIN, Isamil: Fault detection of an induction motor by set-membership filtering and Kalman filtering. In: *1999 European Control Conference (ECC)* IEEE, 1999, S. 4485–4490
- [DMSG20] DENIZ, Nestor ; MURILLO, Marina ; SANCHEZ, Guido ; GIOVANINI, Leonardo: Robust stability of moving horizon estimation for non-linear systems with bounded disturbances using adaptive arrival cost. In: *IET Control Theory & Applications* 14 (2020), Nr. 18, S. 2879–2888
- [Doc03] DOCHAIN, Denis: State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. In: *Journal of Process Control* 13 (2003), Nr. 8, S. 801–818
- [DW20] DEWASME, Laurent ; WOUWER, Alain V.: Experimental validation of a full-horizon interval observer applied to hybridoma cell cultures. In: *International Journal of Control* 93 (2020), Nr. 11, S. 2719–2728
- [DWDS12] DING, Derui ; WANG, Zidong ; DONG, Hongli ; SHU, Huisheng: Distributed H_∞ state estimation with stochastic parameters and nonlinearities through sensor networks: the finite-horizon case. In: *Automatica* 48 (2012), Nr. 8, S. 1575–1585
- [DWSD15] DING, Derui ; WANG, Zidong ; SHEN, Bo ; DONG, Hongli: H_∞ state estimation with fading measurements, randomly varying nonlinearities and probabilistic distributed delays. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 25 (2015), Nr. 13, S. 2180–2195
- [Ebl07] EBLE, Ingo: *Über Taylor-Modelle*. Universität Karlsruhe (TH), 2007
- [EL97] ENGSTLER, C. ; LUBICH, C.: MUR8: a multirate extension of the eighth-order Dormand-Prince method. In: *Applied Numerical Mathematics* 25 (1997), Nr. 2, S. 185–192. – Special Issue on Time Integration
- [Epp95] EPPSTEIN, David: Zonohedra and zonotopes / U.C. Irvine, Dept. of Information & Computer Science. 1995 (95-53). – Forschungsbericht
- [ERZ14] EFIMOV, Denis ; RAISSI, Tarek ; ZOLGHADRI, Ali: Set adaptive observers for linear parameter-varying systems: Application to fault detection. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 136 (2014), Nr. 2, S. 7
- [Fal12] FALKENHAIN, Jan: Zustandsmengenbeobachtung linearer zeitdiskreter Systeme mit unsicheren Parametern durch konvexe Polytope und Einsatz in der Diagnose / Ruhr-Universität Bochum. 2012. – Forschungsbericht

- [Fek14] FEKIH, Afef: Fault diagnosis and Fault Tolerant Control design for aerospace systems: A bibliographical review. In: *2014 American Control Conference*, 2014, S. 1286–1291
- [Feß11] FEBLER, Dirk K.: *Modellbasierte On-Board-Diagnoseverfahren für Drei-Wege-Katalysatoren*. Karlsruhe : KIT Scientific Publishing, 2011
- [FGM18] FINDEISEN, Rolf ; GRAICHEN, Knut ; MÖNNIGMANN, Martin: Eingebettete Optimierung in der Regelungstechnik – Grundlagen und Herausforderungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 66 (2018), Nr. 11, S. 877–902
- [FH07] FREUND, Roland W. ; HOPPE, Ronald H.: *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch)
- [FLSK06] FRITSCH, Carsten ; LUNZE, Jan ; SCHWAIGER, Matthias ; KREBS, Volker: Remote diagnosis of discrete-event systems with on-board and off-board components. In: *IFAC Proceedings Volumes* 39 (2006), Nr. 13, S. 1467–1472
- [Föll16] FÖLLINGER, Otto: *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. VDE Verlag GmbH, 2016 (Lehrbuch Studium)
- [FR11] FARINA, Lorenzo ; RINALDI, Sergio: *Positive linear systems: theory and applications*. John Wiley & Sons, 2011
- [Fra94] FRANK, Paul M.: Diagnoseverfahren in der Automatisierungstechnik. In: *at - Automatisierungstechnik* 42 (1994), Nr. 1-12, S. 47–64
- [Fra96] FRANK, Paul M.: Analytical and Qualitative Model-based Fault Diagnosis – A Survey and Some New Results. In: *European Journal of Control* 2 (1996), Nr. 1, S. 6–28
- [Fuk04] FUKUDA, Komei: From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes. In: *Journal of Symbolic Computation* 38 (2004), Nr. 4, S. 1261–1272. – Symbolic Computation in Algebra and Geometry
- [GAF⁺14] *Kapitel 4*. In: GRÜNE, Lars ; ALLGÖWER, Frank ; FINDEISEN, Rolf ; FISCHER, Jörg ; GROß, Dominic ; HANEBECK, Uwe D. ; KERN, Benjamin ; MÜLLER, Matthias A. ; PANNEK, Jürgen ; REBLE, Marcus ; STURSBURG, Olaf ; VARUTTI, Paolo ; WORTHMANN, Karl: *Distributed and Networked Model Predictive Control*. Springer International Publishing, 2014, S. 111–167
- [GCD15a] GAO, Zhiwei ; CECATI, Carlo ; DING, Steven X.: A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques—Part I: Fault Diagnosis With Model-Based and Signal-Based Approaches. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (2015), Nr. 6, S. 3757–3767
- [GCD15b] GAO, Zhiwei ; CECATI, Carlo ; DING, Steven X.: A Survey of Fault Diagnosis and Fault-Tolerant Techniques—Part II: Fault Diagnosis With Knowledge-Based and Hybrid/Active Approaches. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 62 (2015), Nr. 6, S. 3768–3774

- [GDRZ14] GUCIK-DERIGNY, David ; RAÏSSI, Tarek ; ZOLGHADRI, Ali: Interval State and Unknown Inputs Estimation for Linear Time-Invariant Systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 47 (2014), Nr. 3, S. 7375–7381. – 19th IFAC World Congress
- [GGB16] GRONAU, Norbert ; GRUM, Marcus ; BENDER, Benedict: Determining the optimal level of autonomy in cyber-physical production systems. In: *2016 IEEE 14th International Conference on Industrial Informatics (INDIN)*, 2016, S. 1293–1299
- [GRHS00] GOUZÉ, Jean-Luc ; RAPAPORT, Alain ; HADJ-SADOK, Mohamed Z.: Interval observers for uncertain biological systems. In: *Ecological modelling* 133 (2000), Nr. 1-2, S. 45–56
- [GVL13] GOLUB, Gene H. ; VAN LOAN, Charles F.: *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 2013
- [GZ17] GUO, Shenghui ; ZHU, Fanglai: Actuator fault detection and interval reconstruction based on interval observers. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), Nr. 1, S. 5061–5066. – 20th IFAC World Congress
- [HA10] HILGERS, Peter ; AMENT, Christoph: Distributed and decentralised estimation of non-linear systems. In: *2010 IEEE International Conference on Control Applications* IEEE, 2010, S. 328–333
- [Hil12] HILGERS, Peter: *Verteilte Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme*. Universitätsbibliothek Ilmenau, 2012
- [HKP03] HARIHARA, Parasuram P. ; KIM, Kyusung ; PARLOS, Alexander G.: Signal-based versus model-based fault diagnosis-a trade-off in complexity and performance. In: *4th IEEE International Symposium on Diagnostics for Electric Machines, Power Electronics and Drives, 2003. SDEMPED 2003.*, 2003, S. 277–282
- [Hla15] HLADÍK, Milan: AE solutions and AE solvability to general interval linear systems. In: *Linear Algebra and its Applications* 465 (2015), Jan, S. 221–238
- [Hoe01] HOEFKENS, Jens: *Rigorous Numerical Analysis with High-Order Taylor Models*. Michigan State University, 2001
- [HSG98a] HADJ-SADOK, Mohamed Z. ; GOUZÉ, Jean-Luc: Bounds estimations for uncertain models of wastewater treatment. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications (Cat. No. 98CH36104)* Bd. 1 IEEE, 1998, S. 336–340
- [HSG98b] HADJ-SADOK, Mohamed Z. ; GOUZÉ, Jean-Luc: Interval observers for uncertain models of wastewater treatment processes. In: *CONTROLO'98 3rd Portuguese conference on automatic control Coimbra Portugal*, 1998, S. 673–678
- [HSST78] HASSAN, Mohamed F. ; SALUT, Gérard ; SINGH, Madan G. ; TITLI, André: A decentralized computational algorithm for the global Kalman filter. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 23 (1978), Nr. 2, S. 262–268

- [HTWS19] HAN, Weixin ; TRENTelman, Harry L. ; WANG, Zhenhua ; SHEN, Yi: A Simple Approach to Distributed Observer Design for Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 64 (2019), Nr. 1, S. 329–336
- [IB97] ISERMANN, Rolf ; BALLÉ, Peter: Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes. In: *Control Engineering Practice* 5 (1997), Nr. 5, S. 709–719
- [IEC10] Norm IEC 61508 April 2010. *Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems*
- [IEE85] *IEEE standard for binary floating-point arithmetic*. New York, 1985. – Note: Standard 754–1985
- [IIAM18] IFQIR, Sara ; ICHALAL, Dalil ; AIT OUFROUKH, Naima ; MAMMAR, Said: Robust interval observer for switched systems with unknown inputs: Application to vehicle dynamics estimation. In: *European Journal of Control* 44 (2018), S. 3–14. – Advanced Control and Observer Design for Nonlinear Systems via LMIs
- [IMDK19] IQBAL, Rahat ; MANIAK, Tomasz ; DOCTOR, Faiyaz ; KARYOTIS, Charalampos: Fault Detection and Isolation in Industrial Processes Using Deep Learning Approaches. In: *IEEE Transactions on Industrial Informatics* 15 (2019), Nr. 5, S. 3077–3084
- [Ise85] ISERMANN, Rolf: Process Fault Diagnosis with Parameter Estimation Methods. In: *IFAC Proceedings Volumes* 18 (1985), Nr. 11, S. 51–60
- [Ise03] Kapitel 19. In: ISERMANN, Rolf: *Modellgestützte Überwachung und Fehlerdiagnose Technischer Systeme*. Springer Berlin Heidelberg, 2003, S. 325–358
- [Ise05] ISERMANN, Rolf: Model-based fault-Detection and Diagnosis – Status and Applications. In: *Annual Reviews in Control* 29 (2005), Nr. 1, S. 71–85
- [Ise06] ISERMANN, Rolf: *Fault-Diagnosis Systems: An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer Berlin Heidelberg, 2006
- [Ise07] ISERMANN, Rolf: *Mechatronic systems: fundamentals*. Springer Science & Business Media, 2007
- [Ise10] ISERMANN, Rolf: Modellbasierte Überwachung und Fehlerdiagnose von kontinuierlichen technischen Prozessen. 58 (2010), Nr. 06, S. 291–305
- [ISO18] Norm ISO 26262 Dezember 2018. *Road vehicles — Functional safety*
- [ISSC09] IZADI, Iman ; SHAH, Sirish L. ; SHOOK, David S. ; CHEN, Tongwen: An Introduction to Alarm Analysis and Design. In: *IFAC Proceedings Volumes* 42 (2009), Nr. 8, S. 645–650
- [Jac02] JACCARD, Paul: Lois de distribution florale dans la zone alpine. In: *Bull Soc Vaudoise Sci Nat* 38 (1902), S. 69–130

- [JKDW01] JAULIN, Luc ; KIEFFER, Michel ; DIDRIT, Olivier ; WALTER, Eric: *Applied Interval Analysis: With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer London, 2001
- [Joh70] JOHNSON, Charles R.: Positive Definite Matrices. In: *The American Mathematical Monthly* 77 (1970), Nr. 3, S. 259–264
- [Kal60] KALMAN, Rudolph E.: A new approach to linear filtering and prediction problems. (1960)
- [KM07] KHAN, Usman A. ; MOURA, José MF: Distributed Kalman filters in sensor networks: Bipartite fusion graphs. In: *2007 IEEE/SP 14th Workshop on Statistical Signal Processing* IEEE, 2007, S. 700–704
- [Kre18] KREBS, Stefan: *Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine*. Karlsruhe : KIT Scientific Publishing, 2018
- [KSC16] KIM, Taekyoo ; SHIM, Hyungbo ; CHO, Dongil D.: Distributed Luenberger observer design. In: *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, 2016, S. 6928–6933
- [Kun97] KUNZ, Ernst: *Einführung in die algebraische Geometrie : mit 145 Übungsaufgaben*. Braunschweig : Vieweg, 1997
- [Kup19] KUPPER, Martin: *Verteilte Zustandsschätzung fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf Lithium-Ionen-Batteriesysteme*. Karlsruhe : KIT Scientific Publishing, 2019
- [KXZL21] KHAN, Awais ; XIE, Wei ; ZHANG, Bo ; LIU, Long-Wen: A survey of interval observers design methods and implementation for uncertain systems. In: *Journal of the Franklin Institute* 358 (2021), Nr. 6, S. 3077–3126
- [LCD04] LANGBORT, Cédric ; CHANDRA, Ramu S. ; D’ANDREA, Raffaello: Distributed control design for systems interconnected over an arbitrary graph. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 9, S. 1502–1519
- [LFK⁺15] LASI, Heiner ; FETTKE, Peter ; KEMPER, Hans-Georg ; FELD, Thomas ; HOFFMANN, Michael: Industrie 4.0. In: *WIRTSCHAFTSINFORMATIK* (2015), S. 261–264
- [Lju99] LJUNG, Lennart: *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall PTR, 1999
- [LLMK11] LANDAU, Ioan D. ; LOZANO, Rogelio ; M’SAAD, Mohammed ; KARIMI, Alireza: *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer London, 2011 (Communications and Control Engineering)
- [LSA⁺13] LE, Vu Tuan H. ; STOICA, Cristina ; ALAMO, Teodoro ; CAMACHO, Eduardo F. ; DUMUR, Didier: *Zonotopes: From Guaranteed State Estimation to Control*. Wiley-ISTE, 2013
- [Lue64] LUENBERGER, David G.: Observing the state of a linear system. In: *IEEE transactions on military electronics* 8 (1964), Nr. 2, S. 74–80

- [Lun16] LUNZE, Jan: *Automatisierungstechnik: Methoden für die Überwachung und Steuerung kontinuierlicher und ereignisdiskreter Systeme*. De Gruyter, 2016
- [Lun20] LUNZE, Jan: *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Springer Berlin Heidelberg, 2020
- [Mak98] MAKINO, Kyoko: *Rigorous analysis of nonlinear motion in particle accelerators*. MICHIGAN STATE UNIVERSITY, 1998
- [May17] MAYER, Günter: *Interval Analysis: and Automatic Result Verification*. De Gruyter, 2017 (De Gruyter Studies in Mathematics)
- [MB96] MAKINO, Kyoko ; BERZ, Martin: Remainder differential algebras and their applications. In: *Computational differentiation: Techniques, applications, and tools* (1996), S. 63–74
- [MB03] MAKINO, Kyoko ; BERZ, Martin: Taylor models and other validated functional inclusion methods. In: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 6 (2003), S. 239–316
- [MB05a] MAKINO, Kyoko ; BERZ, Martin: Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: Long-term stabilization by preconditioning. In: *International Journal of Differential Equations and Applications* 10 (2005), Nr. 4, S. 353–384
- [MB05b] MAKINO, Kyoko ; BERZ, Martin: Verified Global Optimization with Taylor Model based Range Bounders. In: *Transactions on computers* (2005), Nr. 11
- [MB11] MAZENC, Frédéric ; BERNARD, Olivier: Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. In: *Automatica* 47 (2011), Nr. 1, S. 140–147
- [MB17] MAKINO, Kyoko ; BERZ, Martin: Verified Computations Using Taylor Models and Their Applications. In: ABATE, Alessandro (Hrsg.) ; BOLDO, Sylvie (Hrsg.): *Numerical Software Verification*. Cham : Springer International Publishing, 2017, S. 3–13
- [MBG07] MOISAN, Marcelo ; BERNARD, Olivier ; GOUZÉ, Jean-Luc: Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. In: *2007 European Control Conference (ECC) IEEE*, 2007, S. 5115–5122
- [MDW94] MUTAMBARA, Arthur G. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Modular scalable robot control. In: *Proceedings of 1994 IEEE International Conference on MFI'94. Multi-sensor Fusion and Integration for Intelligent Systems IEEE*, 1994, S. 121–127
- [Moo66] MOORE, Ramon E.: *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966 (Prentice-Hall series in automatic computation)
- [Mut98] MUTAMBARA, Arthur G.: *Decentralized Estimation and Control for Multisensor Systems*. Taylor & Francis, 1998
- [MWS⁺18] MA, Zhonghai ; WANG, Shaoping ; SHI, Jian ; LI, Tongyang ; WANG, Xingjian: Fault diagnosis of an intelligent hydraulic pump based on a nonlinear unknown input observer. In: *Chinese Journal of Aeronautics* 31 (2018), Nr. 2, S. 385–394

- [Neh05] NEHER, Markus: From Interval Analysis to Taylor Models - An Overview. (2005)
- [Neu93] NEUMAIER, Arnold: *The Wrapping Effect, Ellipsoid Arithmetic, Stability and Confidence Regions*. Springer Vienna, 1993
- [NJN07] NEHER, Markus ; JACKSON, Kenneth R. ; NEDIALKOV, Nedialko S.: On Taylor Model Based Integration of ODEs. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 45 (2007), Nr. 1, S. 236–262
- [Nyb00] NYBERG, Mattias: Criteria for Detectability and Strong Detectability of Faults in Linear Systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 33 (2000), Nr. 11, S. 617–622
- [OCM81] OSORIO-CORDERO, Antonio ; MAYNE, David Q.: Deterministic convergence of a self-tuning regulator with variable forgetting factor. In: *IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications)* 128 (1981), S. 19–23
- [OS07] OLFATI-SABER, Reza: Distributed Kalman filtering for sensor networks. In: *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007, S. 5492–5498
- [PC91] PATTON, Ron J. ; CHEN, Jie: A Review of Parity Space Approaches to Fault Diagnosis. In: *IFAC Proceedings Volumes* 24 (1991), Nr. 6, S. 65–81
- [PC97] PATTON, Ron J. ; CHEN, Jie: Observer-based fault detection and isolation: Robustness and applications. In: *Control Engineering Practice* 5 (1997), Nr. 5, S. 671–682
- [Pla07] PLANCHON, Philippe: *Guaranteed diagnosis of uncertain linear systems using state-set observation*. Logos Verlag Berlin, 2007
- [PPOM20] POURASGHAR, Masoud ; PUIG, Vicenç ; OCAMPO-MARTINEZ, Carlos: Characterisation of interval-observer fault detection and isolation properties using the set-invariance approach. In: *Journal of the Franklin Institute* 357 (2020), Nr. 3, S. 1853–1886
- [PQT00] PUIG, Vicenç ; QUEVEDO, Joseba ; TORNIL, Sebastián: Robust Fault Detection: Active Versus Passive Approaches. In: *IFAC Proceedings Volumes* 33 (2000), Nr. 11, S. 157–163
- [PS00] PEÑA, Juan M. ; SAUER, Thomas: On the multivariate Horner scheme. In: *SIAM journal on numerical analysis* 37 (2000), Nr. 4, S. 1186–1197
- [PSE⁺06] PUIG, Vicenç ; STANCU, Alexandru I. ; ESCOBET, Teresa ; NEJJARI, Fatiha ; QUEVEDO, Joseba ; PATTON, Ron J.: Passive robust fault detection using interval observers: Application to the DAMADICS benchmark problem. In: *Control Engineering Practice* 14 (2006), Nr. 6, S. 621–633. – A Benchmark Study of Fault Diagnosis for an Industrial Actuator
- [RA20] *Kapitel 1*. In: RAWLINGS, James B. ; ALLAN, Douglas A.: *Moving Horizon Estimation*. London : Springer London, 2020, S. 1–7
- [RDW91] RAO, Bobby S. ; DURRANT-WHYTE, Hugh F.: Fully decentralised algorithm for multisensor Kalman filtering. In: *IEEE Proceedings D-Control Theory and Applications* Bd. 138 IET, 1991, S. 413–420

- [RE18] RAÏSSI, Tarek ; EFIMOV, Denis: Some recent results on the design and implementation of interval observers for uncertain systems. In: *at - Automatisierungstechnik* 66 (2018), Nr. 3, S. 213–224
- [REZ12] RAÏSSI, Tarek ; EFIMOV, Denis ; ZOLGHADRI, Ali: Interval State Estimation for a Class of Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (2012), Nr. 1, S. 260–265
- [RFTK18] ROSTAMPOUR, Vahab ; FERRARI, Riccardo ; TEIXEIRA, André M. ; KEVICZKY, Tamás: Differentially-Private Distributed Fault Diagnosis for Large-Scale Nonlinear Uncertain Systems. In: *IFAC-PapersOnLine* 51 (2018), Nr. 24, S. 975–982. – 10th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes SAFEPROCESS 2018
- [RG06] RADKE, Aaron ; GAO, Zhiqiang: A survey of state and disturbance observers for practitioners. In: *2006 American Control Conference*, 2006, S. 5183–5188
- [Rie01] RIEDEL, Uta: Definition der Intervallbeobachtbarkeit und Ableitung von Beobachtbarkeitskriterien / Technische Universität Hamburg-Harburg. 2001. – Forschungsbericht
- [Rie17] RIEßINGER, Thomas: *Mathematik für Ingenieure: Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium*. Springer Berlin Heidelberg, 2017
- [RLK⁺09] RHEE, Ill-Keun ; LEE, Jaehan ; KIM, Jangsub ; SERPEDIN, Erchin ; WU, Yik-Chung: Clock Synchronization in Wireless Sensor Networks: An Overview. In: *Sensors* 9 (2009), Nr. 1, S. 56–85
- [RMR19] RIGOS, Alexandros ; MOHLIN, Erik ; RONCHI, Enrico: The cry wolf effect in evacuation: A game-theoretic approach. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 526 (2019)
- [RRSR20] REGO, Brenner S. ; RAFFO, Guilherme V. ; SCOTT, Joseph K. ; RAIMONDO, Davide M.: Guaranteed methods based on constrained zonotopes for set-valued state estimation of nonlinear discrete-time systems. In: *Automatica* 111 (2020), S. 108614. – ISSN 0005–1098
- [RSB90] RAMANATHAN, Parameswaran ; SHIN, Kang G. ; BUTLER, Ricky W.: Fault-tolerant clock synchronization in distributed systems. In: *Computer* 23 (1990), Nr. 10, S. 33–42
- [Rum99] RUMP, Siegfried M.: INTLAB-interval laboratory. In: *Developments in reliable computing*. Springer, 1999, S. 77–104
- [RVZ10] RAÏSSI, Tarek ; VIDEAU, Gaétan ; ZOLGHADRI, Ali: Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. In: *Automatica* 46 (2010), Nr. 3, S. 518–527
- [RW17] RICHTER, Thomas ; WICK, Thomas: *Einführung in die Numerische Mathematik: Begriffe, Konzepte und zahlreiche Anwendungsbeispiele*. Springer Berlin Heidelberg, 2017

- [SB17] SCHRÖDER, Dierk ; BUSS, Martin: *Intelligente Verfahren: Identifikation und Regelung nichtlinearer Systeme*. Springer Berlin Heidelberg, 2017
- [SBK⁺11] SCHUPPEN, Jan H. ; BOUTIN, Olivier ; KEMPKER, Pia L. ; KOMENDA, Jan ; MASOPUST, Tomáš ; PAMBAKIAN, Nicola ; RAN, André CM: Control of distributed systems: tutorial and overview. In: *European journal of control* 17 (2011), Nr. 5-6, S. 579–602
- [Sch19] SCHWAB, Stefan: *Guaranteed Verification of Dynamic Systems*. Karlsruhe : KIT Scientific Publishing, 2019
- [SGHE20] SCHMID, Michael ; GEBAUER, Emanuel ; HANZL, Christian ; ENDISCH, Christian: Active model-based fault diagnosis in reconfigurable battery systems. In: *IEEE Transactions on Power Electronics* 36 (2020), Nr. 3, S. 2584–2597
- [Sha86] SHAHIAN, Bahram: Decentralized control using observers. In: *International Journal of Control* 44 (1986), Nr. 4, S. 1125–1135
- [SKH21] SCHWARTZ, Manuel ; KREBS, Stefan ; HOHMANN, Sören: Guaranteed State Estimation Using a Bundle of Interval Observers with Adaptive Gains Applied to the Induction Machine. In: *Sensors* 21 (2021), Nr. 8
- [SL10] SCHLAGE, Thorsten ; LUNZE, Jan: Modelling of networked systems for remote diagnosis. In: *2010 Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, 2010, S. 795–800
- [SMB08] SALAHSHOOR, Karim ; MOSALLAEI, Mohsen ; BAYAT, Mohammadreza: Centralized and decentralized process and sensor fault monitoring using data fusion based on adaptive extended Kalman filter algorithm. In: *Measurement* 41 (2008), Nr. 10, S. 1059–1076
- [SMG17] SÁNCHEZ, Guido ; MURILLO, Marina ; GIOVANINI, Leonardo: Adaptive arrival cost update for improving moving horizon estimation performance. In: *ISA transactions* 68 (2017), S. 54–62
- [SSKL09] SCHLAGE, Thorsten ; SCHWAIGER, Matthias ; KREBS, Volker ; LUNZE, Jan: Vergleich zweier Methoden zur modellbasierten Ferndiagnose technischer Systeme. In: *at-Automatisierungstechnik* 57 (2009), Nr. 11, S. 539–551
- [STL74] SANDERS, Charles W. ; TACKER, Edgar C. ; LINTON, Thomas D.: A new class of decentralized filters for interconnected systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 19 (1974), Nr. 3, S. 259–262
- [TFW19] TIAN, Ning ; FANG, Huazhen ; WANG, Yebin: 3-D Temperature Field Reconstruction for a Lithium-Ion Battery Pack: A Distributed Kalman Filtering Approach. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 27 (2019), S. 847–854
- [TG18] TRÄCHTLER, Ansgar ; GAUSEMEIER, Jürgen: *Steigerung der Intelligenz mechatronischer Systeme*. Springer Berlin Heidelberg, 2018 (Intelligente Technische Systeme – Lösungen aus dem Spitzencluster it's OWL)

- [TM15] TIPLER, Paul A. ; MOSCA, Gene: *Physik*. 7. Aufl. 2015. Berlin, Heidelberg : Springer Spektrum, 2015
- [TSSJ14] TEIXEIRA, André ; SHAMES, Iman ; SANDBERG, Henrik ; JOHANSSON, Karl H.: Distributed Fault Detection and Isolation Resilient to Network Model Uncertainties. In: *IEEE Transactions on Cybernetics* 44 (2014), Nr. 11, S. 2024–2037
- [TW19] TALEBI, Sayed P. ; WERNER, Stefan: Distributed Kalman Filtering and Control Through Embedded Average Consensus Information Fusion. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 64 (2019), Nr. 10, S. 4396–4403
- [VGFA03] VALDÉS-GONZÁLEZ, Héctor ; FLAUS, Jean-Marie ; ACUÑA, Gonzalo: Moving horizon state estimation with global convergence using interval techniques: application to biotechnological processes. In: *Journal of Process Control* 13 (2003), Nr. 4, S. 325–336
- [VRYK03] VENKATASUBRAMANIAN, Venkat ; RENGASWAMY, Raghunathan ; YIN, Kewen ; KAVURI, Surya N.: A review of process fault detection and diagnosis: Part I: Quantitative model-based methods. In: *Computers and Chemical Engineering* 27 (2003), Nr. 3, S. 293–311. – ISSN 0098–1354
- [Wer06] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2006 (Springer-Lehrbuch)
- [WKK08] WOLFF, Florian ; KRUTINA, Patrick ; KREBS, Volker G.: Robust Consistency-Based Diagnosis of Nonlinear Systems by Set Observation. In: *IFAC Proceedings Volumes* 41 (2008), Nr. 2, S. 10124–10129. – 17th IFAC World Congress
- [Wol10] WOLFF, Florian: *Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung*. Karlsruhe : KIT Scientific Publishing, 2010
- [WVDM00] WAN, Eric A. ; VAN DER MERWE, Rudolph: The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No. 00EX373)* IEEE, 2000, S. 153–158
- [WWPC19] WANG, Ye ; WANG, Zhenhua ; PUIG, Vicenç ; CEMBRANO, Gabriela: Zonotopic Set-Membership State Estimation for Discrete-Time Descriptor LPV Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 64 (2019), Nr. 5, S. 2092–2099
- [WWZ18] WANG, Junde ; WANG, Jing ; ZHOU, Jinglin: On-line Active Fault Detection Based on Set-membership Ellipsoid and Moving Window. In: *2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS)*, 2018, S. 420–425
- [XTW⁺18] XU, Feng ; TAN, Junbo ; WANG, Xueqian ; PUIG, Vicenç ; LIANG, Bin ; YUAN, Bo: Mixed Active/Passive Robust Fault Detection and Isolation Using Set-Theoretic Unknown Input Observers. In: *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 15 (2018), Nr. 2, S. 863–871
- [Zah91] ZAHEDI, Fatemeh: An introduction to neural networks and a comparison with artificial intelligence and expert systems. In: *Interfaces* 21 (1991), Nr. 2, S. 25–38

- [Zai17] ZAISER, Stefan S.: *Mengenbasierte Black-Box-Identifikation linearer Systeme*. Open Access Repositorium der Universität Ulm, 2017
- [ZLG22] ZHAO, Zhen ; LIU, Peter X. ; GAO, Jinfeng: Model-based fault diagnosis methods for systems with stochastic process—a survey. In: *Neurocomputing* (2022)
- [ZWY15] ZHAI, Shouchao ; WANG, Wei ; YE, Hao: Fault diagnosis based on parameter estimation in closed-loop systems. In: *IET Control Theory & Applications* 9 (2015), Nr. 7, S. 1146–1153
- [ZY17] ZHANG, Zhi-Hui ; YANG, Guang-Hong: Fault detection for discrete-time LPV systems using interval observers. In: *International Journal of Systems Science* 48 (2017), Nr. 14, S. 2921–2935
- [ZZ12] ZHANG, Xiaodong ; ZHANG, Qi: Distributed fault diagnosis in a class of interconnected nonlinear uncertain systems. In: *International Journal of Control* 85 (2012), Nr. 11, S. 1644–1662
- [ZZ13] ZHANG, Qi ; ZHANG, Xiaodong: Distributed sensor fault diagnosis in a class of interconnected nonlinear uncertain systems. In: *Annual Reviews in Control* 37 (2013), Nr. 1, S. 170–179

Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

- [MF18] MEYNEN, Sönke ; FEßLER, Dirk K.: *Modellbasierte Diagnose für kooperative Plattformen*. 2018. – BW-CAR Forschungstag im Forschungsschwerpunkt "Technologien für Intelligente Systeme"
- [MF20] MEYNEN, Sönke ; FEßLER, Dirk K.: Robuste modellbasierte Fehlerdetektion für verteilte und dezentrale Systeme. In: *Forschung aktuell* (2020), S. 24–27
- [MHF19] MEYNEN, Sönke ; HOHMANN, Sören ; FEßLER, Dirk K.: Early Detection of Incipient Faults in Nonlinear Systems Based on State-Set Observation. In: *2019 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, 2019, S. 1012–1017
- [MHF20] MEYNEN, Sönke ; HOHMANN, Sören ; FEßLER, Dirk K.: Robust Fault Detection and Isolation for Distributed and Decentralized Systems. In: *2020 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*, 2020, S. 401–407
- [MHF21] MEYNEN, Sönke ; HOHMANN, Sören ; FEßLER, Dirk K.: Fault Detection for Uncertain Nonlinear Systems Based on Moving Horizon Estimation. In: *2021 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, 2021, S. 679–684
- [MHF22a] MEYNEN, Sönke ; HOHMANN, Sören ; FEßLER, Dirk K.: Fault Detection for Distributed Uncertain Systems using Moving Horizon Estimation. In: *IFAC-PapersOnLine* 55 (2022), Nr. 6, S. 234–241. – Zeitschriftenaufsatz
- [MHF22b] MEYNEN, Sönke ; HOHMANN, Sören ; FEßLER, Dirk K.: Robust Fault Detection with a Distributed and Decentralized State-Set Observer. In: ZATTONI, Elena (Hrsg.) ; SIMANI, Silvio (Hrsg.) ; CONTE, Giuseppe (Hrsg.): *15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD 2019): Proceedings of the Workshop Held in Bologna, Italy, on November 21–22, 2019*. Springer International Publishing, 2022, Kapitel 1, S. 3–23
- [NMR⁺22] NEUMANN, Angelika ; MEYNEN, Sönke ; RAHMOUN, Ahmad ; ZIEGLER, Daniel ; KIRCHARTZ, Thomas: Controlling Transformer Magnetizing Offset Current in Isolated Phase-Shift Full-Bridge Converters Using a Luenberger Observer. In: *International Transactions on Electrical Energy Systems* (2022). – Zeitschriftenaufsatz