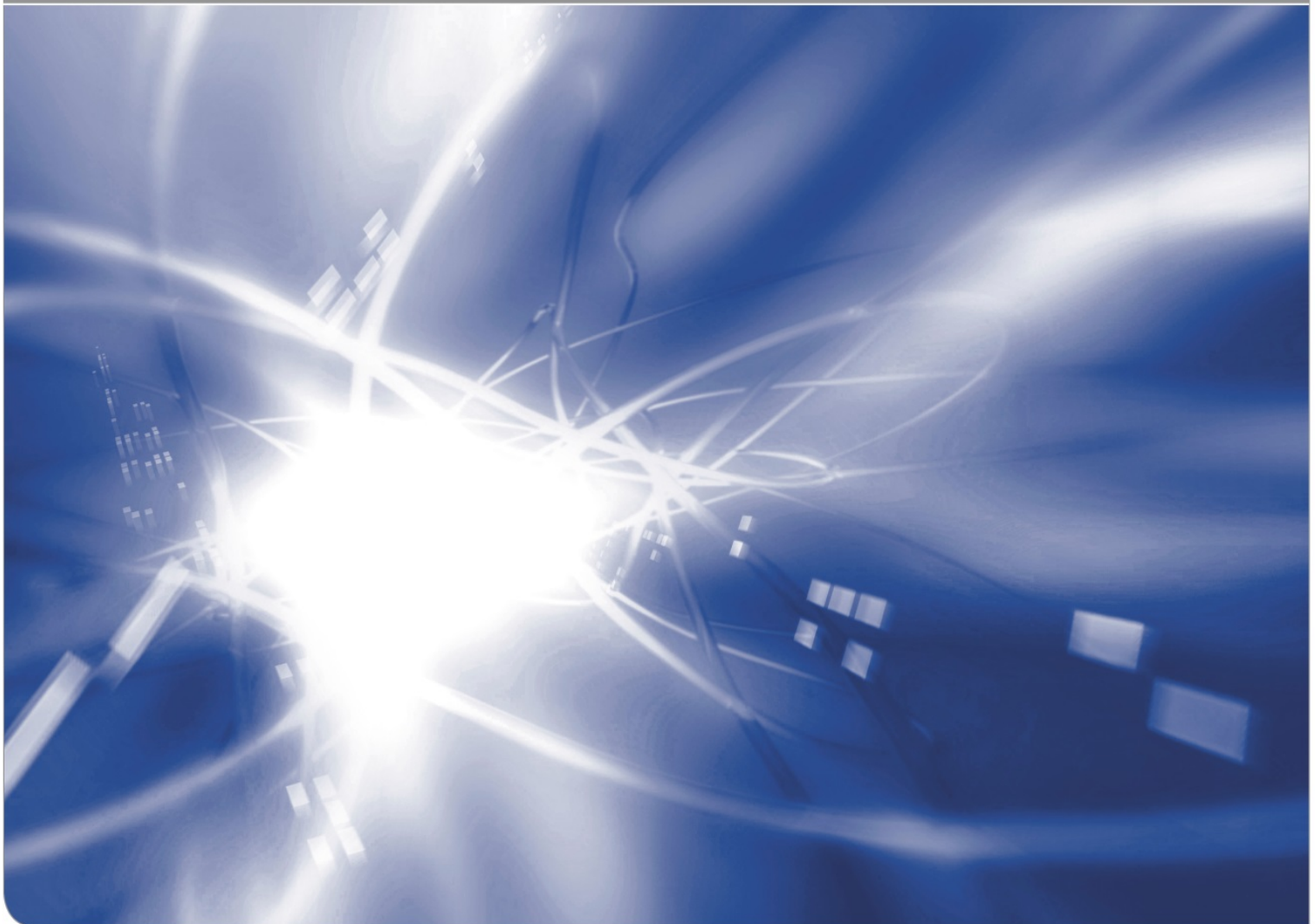


Zum Einsatz kinematischer Orbits für die zeitvariable Schwerefeldbestimmung

**On the use of kinematic orbits for time-variable gravity field
determination**

Charlotte Gschwind, Kurt Seitz, Thomas Grombein und
Hansjörg Kutterer

KIT SCIENTIFIC WORKING PAPERS 262



Geodetic Institute (GIK)
Englerstraße 7
76128 Karlsruhe
www.gik.kit.edu

Impressum

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
www.kit.edu



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung –
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

2025

ISSN: 2194-1629

Inhaltsverzeichnis

Abstract	7
1 Einleitung	9
2 Theoretische Grundlagen	11
2.1 Auszüge aus der Schwerefeldtheorie	11
2.2 Ansätze zur Gravitationsfeldbestimmung aus kinematischen Orbits von LEO-Satelliten	13
2.2.1 Celestial-Mechanics-Approach (CMA)	14
2.2.2 Short-Arc-Approach (SAA)	15
2.2.3 Point-wise und Averaged-Acceleration-Approach (PAA, AAA)	16
2.2.4 Energy-Balance-Approach (EBA)	17
2.3 Orbitbestimmung von LEO-Satelliten	18
2.3.1 Unterscheidung von Orbitrepräsentationen	18
2.3.2 Bestimmung der kinematischen Orbits aus GNSS-Beobachtungen	21
2.4 Statistische Auswertemethoden	22
2.4.1 Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell (GMM)	23
2.4.2 Varianzkomponentenschätzung (VCE)	24
3 Datengrundlage zur Gravitationsfeldbestimmung	26
3.1 Künstliche Satelliten zur Bestimmung des Schwerefelds	26
3.1.1 GRACE und GRACE-FO	26
3.1.2 Swarm	27
3.2 Datensätze der Missionen Swarm und GRACE	28
3.3 Zusammenstellung der Hintergrundmodelle	29
3.3.1 Modellierung der konservativen Kräfte	30
3.3.2 Modellierung der nicht-konservativen Kräfte	36

4	Bestimmung der Gravitationsfeldparameter nach SAA	40
4.1	Gravitationsfeldbestimmung mit GROOPS	40
4.1.1	Datenvorverarbeitung	41
4.1.2	Berechnung des Hintergrundfelds	43
4.1.3	Vorbereitung zur Formulierung des stochastischen Modells	44
4.1.4	Bestimmung der Gravitationsfeldparameter	46
4.1.5	Kombination der Lösungen mehrerer Satelliten	47
4.2	Vergleich von Gravitationsfeldlösungen	47
4.2.1	Vergleich im Ortsraum	48
4.2.2	Vergleich im Frequenzraum	49
5	Evaluierung der monatlichen Gravitationsfeldlösungen	51
5.1	Untersuchungen zum maximalen Entwicklungsgrad	51
5.2	Einfluss der Bogenlänge auf die Gravitationsfeldbestimmung	56
5.3	Einfluss der Abtastrate der kinematischen Orbits	60
5.4	Kombination der Schwerefelder verschiedener Satellitenmissionen	65
5.5	Analyse einer Zeitreihe monatlicher Gravitationsfeldlösungen	70
5.6	Vergleich der kinematischen Orbits und resultierenden Gravitationsfeldlösungen zweier Institute	77
6	Zusammenfassung und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	83
	Abbildungsverzeichnis	90
	Tabellenverzeichnis	91

Zum Einsatz kinematischer Orbits für die zeitvariable Schwerefeldbestimmung

Charlotte Gschwind, Kurt Seitz, Thomas Grombein und Hansjörg Kutterer

Kontakt:

Charlotte Gschwind

E-Mail: charlotte.gschwind@kit.edu

Geodätisches Institut (GIK), Karlsruher Institut für Technologie, Englerstraße 7, D-76128 Karlsruhe

Abstract

Physical geodesy focuses on measuring the Earth's external gravity field and analyzing its spatial and temporal variations. These variations are primarily quantified using data from dedicated satellite gravity field missions. However, observational data from other satellites in low Earth orbit (LEO) can be utilized to capture large-scale gravity field structures and their temporal changes. Gravity field information can be extracted from the kinematic positions of LEO satellites, thereby extending the observational record of dedicated satellite gravity field missions.

Kinematic orbits of various LEO satellite missions are routinely determined by independent institutions such as the Institute of Geodesy (IFG) at Graz University of Technology and the Astronomical Institute of the University of Bern (AIUB), based on GNSS code and phase observations, and are made available for further analysis. In this study, gravity field information is derived from the kinematic orbits of GRACE (2002–2017) and Swarm (since 2013) missions in the form of monthly spherical harmonic coefficients using the short-arc approach implemented in the GROOPS software. Several influencing factors are investigated, including the maximum degree of the spherical harmonic expansion, the temporal resolution of the orbits, and the arc length. The quality of the resulting solutions is evaluated through comparison with ITSG-Grace monthly solutions, which are based on inter-satellite ranging observations from the GRACE(-FO) missions. The results demonstrate that large-scale mass redistributions can be reliably detected, and that accuracy can be further improved by combining data from multiple satellite missions.

Keywords GPS-based gravity field recovery · Kinematic orbits · Swarm · GRACE · Short-arc approach · Gravity Recovery Object Oriented Programming System (GROOPS)



Anmerkung

Bei dieser wissenschaftlichen Arbeit handelt es sich um eine überarbeitete Fassung der Masterarbeit, die Charlotte Gschwind zwischen dem 01. November 2023 und dem 07. Juni 2024 am GIK angefertigt hat.

1 Einleitung

Die Beobachtung des Schwerefelds der Erde liefert wichtige Erkenntnisse über die Massenverteilung und Massentransportprozesse im Erdsystem. Massenverlagerungen stehen im Zusammenhang mit Veränderungen in der kontinentalen Hydrologie, der Kryosphäre, den Ozeanen, der Atmosphäre und der festen Erde. Die Variationen treten auf verschiedenen räumlichen und zeitlichen Skalen auf: von abrupten lokalen Änderungen, wie bei Erdbeben, bis hin zu Prozessen, die sich über Jahrhunderte oder Jahrtausende erstrecken, wie die postglaziale Landhebung. Räumlich reichen diese Skalen von wenigen Kilometern, beispielsweise bei der Betrachtung von See- oder Flusspegeln, bis zu Tausenden von Kilometern im Falle der Betrachtung des globalen Meeresspiegels (Haagmans et al., 2020). Durch die Beobachtung des Erdschwerefelds gelingt die Quantifizierung dynamischer Prozesse in den Komponenten des Erdsystems und deren Wechselwirkungen, ermöglicht so ein besseres Verständnis sowohl für subtile als auch für starke globale Veränderungen und unterstützt bei der Abschätzung der Folgen für Mensch und Umwelt (Pail et al., 2015). Darüber hinaus dient das Geoid als Äquipotentialfläche des Schwerefelds in Höhe des mittleren Meeresspiegels als Basis für global einheitliche vertikale Bezugssysteme zur Bestimmung physikalischer Höhen. In der Luft- und Raumfahrt wird das Schwerefeld der Erde benötigt, um Störkräfte zu simulieren und zuverlässige Prädiktionen für die Orbits von Raumfahrzeugen zu treffen (Ince et al., 2019). Dafür ist eine kontinuierliche Beobachtung des Erdschwerefelds auf feinen Skalen über lange Zeiträume erforderlich. Seit dem Start der ersten Globalen Navigationssatellitensysteme (GNSS) ist es möglich, die Variationen im Gravitationsfeld aus dicht abgetasteten Satellitentrajektorien zu rekonstruieren.

Die globale Beobachtung der zeitlichen Variationen des Gravitationsfelds der Erde mit homogener Genauigkeit gelingt mithilfe der Beobachtungsdaten von Satelliten in erdnahen, nahezu polaren Umlaufbahnen. Für die Bestimmung der Schwerefeldparameter werden verschiedene satellitengetragene Messsysteme eingesetzt und die Daten zu räumlich hochauflösenden Modellen kombiniert. Dabei werden Beobachtungen von GPS-Empfängern an Bord von LEO-Satelliten (Low Earth Orbit) verwendet, um die Trajektorie zu diskreten Epochen zu bestimmen. Diese Daten werden häufig zur Steigerung der Genauigkeit und räumlichen Auflösung ergänzt durch Abstandsänderungsmessungen zwischen LEO-Satelliten und/oder Gradiometermessungen in der Bahnebene, aus denen sich der vollständige Gravitationstensor des Erdgravitationsfelds rekonstruieren lässt (Beutler et al., 2010). Diese Beobachtungsverfahren sind beziehungsweise waren in den Satellitenschwerefeldmissionen CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload, 2000–2010), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment, 2002–2017), GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer, 2009–2013) und GRACE-FO (GRACE Follow-On, seit 2018) integriert. Durch die Kombination der Daten gelingt die Kartierung des Schwerefelds der Erde mit einer räumlichen Auflösung von 100 km und einer Genauigkeit in Bezug auf Geoidhöhen von wenigen Zentimetern (ESA, 2012).

Neben den Satelliten der Schwerefeldmissionen befindet sich eine Reihe weiterer kommerzieller und wissenschaftlicher Satelliten unterschiedlicher Missionen auf erdnahen Umlaufbahnen,

wie beispielsweise die Swarm-Satelliten. Das primäre Ziel dieser Mission ist die Erfassung des Erdmagnetfelds sowie dessen zeitlichen Entwicklung. Die gewonnenen Daten tragen dazu bei, das Verständnis der Wechselwirkungen in der Atmosphäre und der elektrischen Ströme in der Ionosphäre zu verbessern und können aufgrund ihrer niedrigen Flughöhe auch zur Überwachung der langwelligen Strukturen des Erdgravitationsfelds beitragen (ESA, 2024). Insbesondere in Zeiten, in denen keine Beobachtungsdaten der Satellitenschwerefeldmissionen vorliegen, kann aus den kinematischen Positionen anderer LEO-Satelliten mit GNSS-Empfängern die Zeitreihe der Beobachtung des Erdschwerefelds fortgesetzt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird, basierend auf den kinematischen Positionen von Satelliten auf erdnahen Umlaufbahnen, das zeitvariable Schwerefeld der Erde in Form von monatlichen Kugelfunktionskoeffizienten abgeleitet. Hierzu wird die frei verfügbare wissenschaftliche Auswertesoftware GROOPS eingesetzt, die am Institut für Geodäsie (IFG) der Technischen Universität Graz entwickelt wurde. Kapitel 2 erläutert die theoretischen Grundlagen des Schwerefelds. Zudem werden verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Gravitationsfeldparameter aus Satellitenorbits zusammengefasst, Methoden zur Orbitbestimmung von LEO-Satelliten vorgestellt und die allgemeine Vorgehensweise in der Ausgleichungsrechnung beschrieben. Die Datengrundlage bilden Beobachtungen der Missionen GRACE und Swarm sowie weitere Datensätze, die im Rahmen der Modellierung von Störkräften zu einem Hintergrundfeld zusammengesetzt werden (Kapitel 3). In Kapitel 4 wird der Prozess zur Ableitung vollständig normierter Kugelfunktionskoeffizienten nach dem Short-Arc-Approach zur Beschreibung des Gravitationsfelds der Erde basierend auf kinematischen Positionen der LEO-Satelliten erläutert. Die Qualität der generierten Monatslösungen wird im Vergleich zu den aus GRACE/GRACE-FO K-Band-Messungen bestimmten hochgenauen monatlichen Schwerefeldmodellen ITSG-Grace2018 (Mayer-Gürr et al., 2018) durch die Analyse der Residuen beurteilt. Abschließend beinhaltet Kapitel 6 eine Zusammenfassung der Ergebnisse und liefert einen Ausblick auf zukünftige Forschungsfelder im Bereich der Erfassung zeitlicher Variationen des Erdschwerefelds.

2 Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen zur Bestimmung der Gravitationsfeldparameter aus den kinematischen Positionen erdnaheer Satelliten zusammengestellt. Zunächst werden in Kapitel 2.1 die grundlegenden Konzepte der Schwerefeldtheorie erläutert und Formeln zur Berechnung des Schwerepotentials basierend auf den Theorien von Heiskanen und Moritz (1967) und Torge (2003) zusammengestellt. In Abschnitt 2.3 werden verschiedene Ansätze zur Gravitationsfeldbestimmung mithilfe kinematischer Orbits von LEO-Satelliten vorgestellt. Dabei werden verschiedene Orbitrepräsentationen sowie Methoden zur Berechnung der kinematischen Orbits aus GNSS-Messungen erläutert. Abschließend werden in Kapitel 2.4 die statistischen Methoden zur Bestimmung von Gravitationsfeldparametern beschrieben, mit Fokus auf Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell (GMM) und der Varianzkomponentenschätzung (VCE).

2.1 Auszüge aus der Schwerefeldtheorie

Die physikalische Geodäsie befasst sich unter anderem mit der Modellierung des äußeren Schwerefelds der Erde und in diesem Kontext mit der Beschreibung der räumlichen und zeitlichen Variation. Basierend auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz und der Zentrifugalbeschleunigung lässt sich das äußere Schwerefeld der Erde über die skalare Größe des Schwerepotentials beschreiben.

Auf einen Körper an der Erdoberfläche wirkt die Schwerkraft. Diese setzt sich zusammen aus der Gravitationskraft, aufgrund der attraktiven Wirkung von Massen, und der Zentrifugalkraft, verursacht durch die Rotation der Erde. Das Schwerepotential W entspricht der skalaren Repräsentation der Schwerkraft und setzt sich demnach aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugalpotential Z zusammen (Torge, 2003). Aufgrund der Entkopplung von Satelliten von der Erdoberfläche dienen Beobachtungsdaten von LEO-Satelliten ausschließlich zur Beschreibung des Gravitationspotentials im Außenraum der Erde. Die Grundlage für die Berechnung des Gravitationspotentials V findet sich im Newtonschen Gravitationsgesetz von 1687. Es gilt das Newtonintegral

$$V = V(\mathbf{r}) = G \iiint_{\Omega_{\text{Erde}}} \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{l_{PP'}} d\Omega \quad (2.1)$$

mit der Newtonschen Gravitationskonstanten G . Gemäß diesem Gesetz wirken zwei punktförmige Massen P und P' , abhängig von ihrem Abstand $l_{PP'}$ zueinander, eine Gravitationskraft aufeinander aus. Für das Gravitationspotential V eines Punktes P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} wird das Newtonintegral (2.1) angewendet. Dadurch wird das Gravitationspotential in einem Punkt P in Abhängigkeit von einem Quellpunkt P' mit dem Ortsvektor \mathbf{r}' angegeben. Die Integration erfolgt über die differentiellen Volumenelemente dV der Erde unter Verwendung der lokalen Dichteinformation ρ in P' (Heiskanen und Moritz, 1967).

Die Darstellung in (2.1) bezieht sich auf einen Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r} = (X, Y, Z)^T$ in einem geozentrisch-kartesischen Koordinatensystem. Der Zusammenhang zwischen dem Gravi-

tationspotential V und der Gravitationsbeschleunigung \mathbf{g} ergibt sich nach Torge (2003) aus dem Gradienten über

$$\mathbf{g} = \text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z} \right)^T. \quad (2.2)$$

Die Berechnung des Gravitationspotentials V gemäß (2.1) setzt voraus, dass die lokale Dichtefunktion $\rho(\mathbf{r}')$ bekannt ist. Aufgrund der inhomogenen Dichte im Inneren der Erde und der Herausforderung, diese global genau zu bestimmen, erweist sich die Berechnung des Gravitationspotentials über das Newtonintegral (2.1) für viele Anwendungen als zu ungenau (Torge, 2003). Alternativ zum Newtonintegral kann das Gravitationspotential im Außenraum der Erde durch eine konvergierende Reihenentwicklung des reziproken Abstands $\frac{1}{l_{PP'}}$ approximiert werden. Durch Einsetzen in das Newtonintegral (2.1) ergibt sich die Entwicklung des Gravitationspotentials in Kugelfunktionen. Die Darstellung des Gravitationspotentials bis Grad n und Ordnung m in Kugelfunktionen lautet damit für einen Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} in geozentrisch-sphärischen Koordinaten $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \lambda)^T$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \right) \quad (2.3)$$

mit

GM	geozentrische Gravitationskonstante
a	große Halbachse des Erdellipsoids
$\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$	vollständig normierte Kugelfunktionskoeffizienten (Stokes' Konstanten)

und den vollständig normierten Kugelfunktionen (Legendre Polynome) \bar{P}_{nm} . Demnach lässt sich das Gravitationspotential für den Außenraum der Erde berechnen, wenn die vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten C_{nm} und S_{nm} vorliegen. Diese können im Rahmen einer Ausgleichung aus den Beobachtungsdaten von Satelliten bestimmt werden (s. Kapitel 2.2).

Die Darstellung in (2.3) entspricht einer spektralen Zerlegung des Gravitationsfeldes, wobei die Koeffizienten der Reihenentwicklung die Amplituden der jeweiligen spektralen Anteile beschreiben. Das Feld wird in Strukturen der Wellenlänge $360^\circ/n$ zerlegt, was einer räumlichen Auflösung von $180^\circ/n$ entspricht. Mit zunehmender Entfernung r vom Geozentrum wird das Signal durch den Faktor $(a/r)^n$ abgeschwächt (Torge, 2003).

Die Figur und das Schwerfeld der Erde variieren nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich. Massenverlagerungen an oder über der Erdoberfläche sowie im Erdinneren führen zu säkularen, periodischen oder unregelmäßigen Variationen, die das Schwerfeld der Erde global, regional oder lokal beeinflussen. Großräumige säkulare Effekte entstehen beispielsweise durch die postglaziale Ausgleichsbewegung, das Abschmelzen der Polkappen und Gletscher sowie durch Meeresspiegeländerungen infolge der globalen Erwärmung. Daneben führen jahreszeitliche Variationen der kontinentalen Wasserspeicher zu regionalen, periodischen Änderungen im Gravitationsfeld (Pail et al., 2015; Torge, 2003). Die globale Beobachtung großflächiger Variationen im Gravitationsfeld gelingt über die Analyse der Zeitreihen vollständig normierter Kugelfunktionskoeffizienten,

abgeleitet aus den Beobachtungen von Satelliten auf erdnahen Umlaufbahnen.

2.2 Ansätze zur Gravitationsfeldbestimmung aus kinematischen Orbits von LEO-Satelliten

Die Grundlage für die Bestimmung des Gravitationspotentials aus kinematischen Positionen von LEO-Satelliten bildet das zweite Newtonsche Axiom. Es besagt, dass die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}$ eines Körpers direkt proportional zur resultierenden Kraft \mathbf{F} und umgekehrt proportional zu seiner Masse m ist. Damit gilt nach Mayer-Gürr (2006) der Zusammenhang

$$m \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (2.4)$$

Die auf eine Einheitsmasse bezogene Kräftefunktion \mathbf{f}

$$\mathbf{f}(t) := \frac{1}{m} \mathbf{F}(t) \quad (2.5)$$

vereinfacht die Gleichung (2.4). Somit gilt im Inertialraum für die Beschleunigung eines Satelliten $\ddot{\mathbf{r}}$ zur Zeit t die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)) = \mathbf{g}(t) + \mathbf{a}_d(t). \quad (2.6)$$

Die zeitvariable Gesamtkräftefunktion \mathbf{f} setzt sich, abhängig von der Position \mathbf{r} und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ des Satelliten, zusammen aus der gravitativen Beschleunigung \mathbf{g} , die aufgrund der Erdanziehungskraft auf den Satelliten wirkt, und weiteren Beschleunigungen \mathbf{a}_d , die aufgrund von konservativen und nicht-konservativen Störkräften auftreten und ebenfalls die Positionen des Satelliten beeinflussen. Die konservativen Störkräfte bestehen aus den Anziehungskräften, verursacht durch andere Himmelskörper (Third-Body-Forces), den Gezeitenkräften der festen Erde und der Ozeane sowie der atmosphärischen Gezeiten und relativistischen Effekten. Nicht-konservative Störkräfte entstehen durch Reibung in der Satellitenbahnebene und durch den direkten Strahlungsdruck der Sonne. Zusätzlich entstehen Störkräfte durch den Strahlungsdruck infolge der Reflexion von Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche (Erdalbedo) (Baur et al., 2014). Voraussetzung für eine zuverlässige Bestimmung des Gravitationspotentials aus kinematischen Positionen von LEO-Satelliten ist die Trennung der Kräftefunktion. Der Einfluss der Störkräfte wird mithilfe von Hintergrundmodellen (Kapitel 3.3) berechnet. Anschließend werden die Positionsdaten des Satelliten um diesen Einfluss bereinigt. Das Gravitationspotential V lässt sich dann über den Zusammenhang in (2.2) aus der Gravitationsbeschleunigung ableiten (Baur et al., 2014).

Die kinematischen Positionen der LEO-Satelliten ergeben sich aus den Code- und Phasenbeobachtungen von GNSS-Satelliten. Dieses Verfahren wird Satellite-to-Satellite-Tracking im High-Low Modus genannt. Zur Reduzierung der Komplexität und damit der Berechnungsdauer der Gravitationsfeldbestimmung, werden bei den folgenden Ansätzen nicht die Code- und Phasenmessungen der GNSS-Satelliten als Beobachtungen verwendet, sondern die daraus abgeleiteten

diskreten kinematischen Positionen mit ihren epochenweisen Kovarianzinformationen, und werden daher als Pseudo-Beobachtungen bezeichnet (Beutler et al., 2010).

Im Folgenden werden vier Ansätze, die zur Bestimmung des Gravitationsfelds der Erde aus kinematischen Positionen von LEO-Satelliten verwendet werden, vorgestellt. Der Celestial Mechanics Approach (CMA), der Short-Arc-Approach (SAA) sowie der Point-wise und Averaged-Acceleration-Approach (PAA, AAA) basieren auf der Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung. Der Energie-Balance-Approach (EBA) beschreibt den Zusammenhang zwischen Bahnbewegung und Gravitationsfeld auf Grundlage des Energieerhaltungssatzes. Laut Baur et al. (2014) liefern diese Ansätze – mit Ausnahme des EBA — im Vergleich mit State-of-the-Art Schwerefeldmodellen ähnliche Ergebnisse.

2.2.1 Celestial-Mechanics-Approach (CMA)

Der Celestial-Mechanics-Approach basiert auf dem Prinzip, dass das Gravitationsfeld der Erde und der Orbit der Satelliten gleichzeitig bestimmt werden. Dabei wird die Newtonsche Bewegungsgleichung durch numerische Integration gelöst. Die Bewegungsgleichung formuliert als Anfangswertproblem lautet

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, q_1, \dots, q_d) \quad (2.7)$$

mit den Anfangswerten zur Zeit t_0

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}(t_0; a, e, i, \Omega, \omega, u_0) \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(t_0; a, e, i, \Omega, \omega, u_0) \quad (2.9)$$

definiert durch sechs Keplersche Bahnelemente, zum Beispiel

a	Länge der großen Halbachse
e	numerische Exzentrizität
i	Inklination der Bahnebene
Ω	Länge des aufsteigenden Bahnknotens
ω	Argument des Perigäums
u_0	Argument der Breite

und bildet die Grundlage für den CMA (Dach et al., 2015). Die Parameter q_1, \dots, q_d sind die unbekannten Parameter, zum Beispiel bogenspezifische Bahnparameter und die Schwerefeldkoeffizienten.

Im ersten Schritt wird ein a priori Orbit \mathbf{r}_0 bestimmt. Basierend auf a priori Krätemodellen, unter anderem auch für das Gravitationsfeld der Erde, wird aus den kinematischen Positionen durch numerische Integration und Anpassung der bogenspezifischen Bahnparameter ein a priori

Orbit für Bögen von einem Tag bestimmt. Zusätzlich zu den sechs Keplerschen Bahnelementen können weitere bogenspezifische empirische Parameter bestimmt werden. Solche Parameter sind beispielsweise konstante oder einmal-pro-Umdrehung empirische Beschleunigungen oder instantane Geschwindigkeitsänderungen zu vordefinierten Epochen und können den Effekt der fehlerhaften oder unzureichend modellierten Störkräfte kompensieren (Baur et al., 2014; Beutler et al., 2010; Jäggi et al., 2011).

Im zweiten Schritt wird nach Jäggi et al. (2011) basierend auf den a priori Orbits \mathbf{r}_0 die Schwerefeldbestimmung als Lösung eines *Generalized-Orbit-Improvement-Problem* durchgeführt. Die tatsächlichen Orbits \mathbf{r} werden als abgebrochene Taylorreihenentwicklung in Bezug auf die unbekannten Parameter p_i

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_0(t)}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i \quad \text{mit } \Delta p_i = p_i - p_{i0} \quad (2.10)$$

um die a priori Orbits mit den Parametern p_{i0} dargestellt. Die Δp_i sind die $n = 6 + d$ Zuschläge zu den unbekannten Parametern, bestehend aus bogenspezifischen Orbitparametern und den Potentialkoeffizienten, für die täglichen Bögen. Dieser Zusammenhang entspricht den Beobachtungsgleichungen und erlaubt die Aufstellung täglicher Normalgleichungssysteme, die zu Normalgleichungssystemen zur Abdeckung längerer Zeiträume von beispielweise einem Monat oder einem Jahr akkumuliert werden können. Hierfür werden für die monatliche bzw. jährliche Gravitationsfeldbestimmung die bogenspezifischen Parameter pre-eliminiert (Jäggi et al., 2011). Das akkumulierte Normalgleichungssystem wird invertiert und es lassen sich die Korrekturen zu den Schwerefeldkoeffizienten relativ zum a priori Schwerefeld mit ihren Genauigkeitsinformationen ableiten (Kapitel 2.4).

2.2.2 Short-Arc-Approach (SAA)

Beim Short-Arc-Approach wird die Newtonsche Bewegungsgleichung in (2.6) in ein Randwertproblem überführt. Dafür wird zunächst die Bewegungsgleichung zweimal integriert und es ergibt sich

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_A + \dot{\mathbf{r}}_A (t - t_A) + \int_{t_A}^t (t - t') \mathbf{f}(t') dt' \quad (2.11)$$

als Anfangswertaufgabe mit der Anfangsposition \mathbf{r}_A bzw. -geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_A$. Mit bekanntem Anfangs- und Endpunkt wird die Bewegungsgleichung als Randwertaufgabe formuliert

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_A (1 - \tau) + \mathbf{r}_B \tau - T^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{f}(\tau') d\tau' \quad (2.12)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}(t_A) \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}(t_B) \quad (2.13)$$

und der Länge des Bahn Bogens $T = t_B - t_A$ sowie der normierten Zeit τ

$$\tau = \frac{t - t_A}{T} \quad \text{mit } \tau \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

Für den Integralkern K gilt

$$K(\tau, \tau') = \begin{cases} \tau' (1 - \tau) & \text{für } \tau' \leq \tau \\ \tau (1 - \tau') & \text{für } \tau' > \tau. \end{cases} \quad (2.15)$$

In diesem Zusammenhang sind die Randwerte \mathbf{r}_A und \mathbf{r}_B sowie die Kräftefunktion entlang des Bahn Bogens unbekannt. Dieses funktionale Modell kann analog zum CMA um empirische Parameter zur Kompensation unzureichend modellierter Störkräfte erweitert werden (Baur et al., 2014). Beim SAA werden die kinematischen Positionen der Satelliten in vergleichsweise kurze Bogenstücke unterteilt und die Beobachtungsgleichung gemäß (2.12) pro Bogen aufgestellt. Die Länge eines Bogens beeinflusst die Berechnungszeit: Je kürzer die Bogenlänge, desto größer ist der Rechenaufwand, da die Normalgleichungen pro Bogenstück aufgestellt werden. Dagegen sind kurze Bogen in dieser Methode zu bevorzugen, um den Einfluss unzureichend modellierter Störkräfte gering zu halten (Mayer-Gürr et al., 2005). Nach Mayer-Gürr (2006) und Baur et al. (2014) liefert eine Bogenlänge von etwa 30 Minuten einen guten Kompromiss zwischen Rechenaufwand und zunehmender Bogenlänge. Ein Vorteil kurzer Bahnbögen ist, dass sie Datenlücken umgehen: Nach einer Lücke wird ein neuer Bogen begonnen, sodass innerhalb eines Bogens die Daten in einer einheitlichen zeitlichen Abtastung und ohne Unterbrechungen vorliegen. Außerdem eignet sich dieser Ansatz auch zur regionalen Schwerefeldbestimmung, indem nur Bogenstücke über einer bestimmten Region verwendet werden (Mayer-Gürr, 2006).

2.2.3 Point-wise und Averaged-Acceleration-Approach (PAA, AAA)

Der Point-wise-Acceleration-Approach (PAA) ersetzt die Beschleunigung in (2.6) durch die zweite Ableitung der kinematischen Satellitenpositionen $\ddot{\mathbf{r}}$. Es gilt

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) - \mathbf{a}_d(t) = \nabla V(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

Die Beschleunigungen des Satelliten werden durch numerische Differentiation aus den diskreten Positionen berechnet (Baur et al., 2014). Der Verlauf der Bahn wird zwischen den kinematischen Positionen durch ein lokales Interpolationspolynom von Grad M approximiert und in eine kontinuierliche Funktion gewandelt (Mayer-Gürr, 2006). Ein Polynom M -ten Grades ist eindeutig durch $(M + 1)$ -Stützstellen festgelegt. Die adäquate Wahl des Grades des Interpolationspolynoms ist von entscheidender Bedeutung für die Qualität der Schwerefeldbestimmung: Ein Polynom mit $M = 6$ oder $M = 8$ bildet nach Austen et al. (2002) einen guten Kompromiss zwischen einer passablen Approximation der Bahn ohne zu starkes Schwingen, das insbesondere an den Rändern auftritt. Das Interpolationspolynom wird am mittleren Stützpunkt ausgewertet, da dort die Approximationsgenauigkeit am höchsten ist. Anschließend wird es punktwise entlang der Bahn verschoben. Zweimaliges Differenzieren liefert die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{r}}$ auf Basis der kinematischen Positionen.

Der Averaged-Acceleration-Approach (AAA) ähnelt dem PAA, unterscheidet sich jedoch in der Methode zur Ableitung der Beschleunigungen. Anstatt ein Interpolationspolynom durch die dis-

kreten Positionen zu legen, werden beim AAA die Beschleunigungen direkt aus den Positionen zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten berechnet. Das Differentiationsschema mit Abtastintervall Δt lautet für drei Punkte nach Ditmar et al. (2006)

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mathbf{r}(t - \Delta t) - 2 \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2}. \quad (2.17)$$

Die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ des Satelliten kann als mittlere Beschleunigung $\bar{\ddot{\mathbf{r}}}(t)$ nach

$$\bar{\ddot{\mathbf{r}}}(t) = \int_{-\Delta t}^{\Delta t} w(s) \ddot{\mathbf{r}}(t + s) ds \quad \text{mit } w(s) = \frac{\Delta t - |s|}{(\Delta t)^2}, \quad (2.18)$$

mit der Gewichtung $w(s)$ aufgefasst werden. Bei dicht-abgetasteten Orbits, wie sie im Fall der Missionen Swarm und GRACE vorliegen, kann dieser Mittelungseffekt vernachlässigt werden (Baur et al., 2014). Nach der Berechnung der Beschleunigungen werden diese um den Einfluss der Störkräfte reduziert und nach (2.17) zur Bestimmung der Gravitationsfeldparameter verwendet.

2.2.4 Energy-Balance-Approach (EBA)

Beim Energy-Balance-Approach (EBA) unterscheidet sich die Herangehensweise: Im Gegensatz zu den anderen Ansätzen wird hier nicht die Newtonsche Bewegungsgleichung in (2.6) als Ausgangspunkt gewählt. Stattdessen wird nach Jekeli (1999) ein Ansatz verwendet, der auf dem Prinzip der Energieerhaltung des Satelliten auf seiner Bahn beruht. Die Energie E setzt sich aus der kinetischen Energie E_{kin} und der potentiellen Energie E_{pot} in der Form

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} \quad (2.19)$$

zusammen (Baur et al., 2014). Daraus ergibt sich nach Mayer-Gürr (2006) der Zusammenhang

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}(t)^2 - \int_{t_0}^t \mathbf{f}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \text{const.} \quad (2.20)$$

Der Anteil der Arbeit, der durch das konservative Gravitationsfeld der Erde verursacht wird, kann durch dessen Potential ausgedrückt und aus den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}$ des Satelliten berechnet werden. Die Voraussetzung dafür ist, dass das Potential in jedem Punkt des Bezugsrahmens zeitlich invariant ist. Aufgrund der Erdrotation ist diese Bedingung lediglich in einem erdfesten, mitrotierenden Bezugssystem erfüllt. Folglich wird das Integral im Energieterm im erdfesten Bezugssystem formuliert. Für die Geschwindigkeit des Satelliten im erdfesten System gilt dann

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.21)$$

mit der Koordinatenänderung im bewegten System $\dot{\mathbf{r}}'$ und dem Erdrotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}$, der die Winkelgeschwindigkeiten bezüglich der Koordinatenachsen enthält. Mit dieser Transformation ergibt sich

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \int_{t_0}^t (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt - \int_{t_0}^t \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}}' dt. \quad (2.22)$$

Die auf den Satelliten wirkenden Kräfte \mathbf{f} werden aufgespalten in die gravitative Kraft der Erdanziehung und alle weiteren wirkenden Kräfte \mathbf{a} . Im erdfesten Bezugssystem ist das Gravitationsfeld der Erde konservativ. Die Gravitationskraft kann daher als Potential V ausgedrückt werden. Dies führt auf den Zusammenhang

$$\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \int_{t_0}^t (\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt - \int_{t_0}^t \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = V + E. \quad (2.23)$$

Beim EBA werden also die Gravitationsfeldparameter gemeinsam mit der Integrationskonstanten E aus den Geschwindigkeiten von LEO-Satelliten bestimmt (Mayer-Gürr, 2006). Die Geschwindigkeiten können analog zum PAA durch numerische Differentiation aus den kinematischen Positionen berechnet werden.

2.3 Orbitbestimmung von LEO-Satelliten

Die Satelliten von Low-Earth-Orbit-Missionen umkreisen die Erde in einer Höhe zwischen 160 km bis 1.000 km über der Erdoberfläche (ESA, 2020). Die Nähe des niedrigen Orbits zur Erde bietet mehrere Vorteile. Diese Umlaufbahn wird häufig für die Missionen konfiguriert, die über bildgebende Sensorik verfügen und Daten im optischen Bereich des elektromagnetischen Spektrums sammeln, da im LEO hochauflösende Bilder aufgenommen werden können. Zudem befinden sich bzw. befanden sich die Satelliten der Schwerefeldmissionen, wie beispielsweise CHAMP, GRACE, GRACE-FO und GOCE auf Low-Earth-Orbits. Die geringe Höhe ermöglicht eine genauere Erfassung von Gravitationsfeldanomalien, da die Signalstärke mit zunehmender Entfernung vom Massenzentrum der Erde abnimmt. Satelliten im LEO bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 7,8 km pro Sekunde, wodurch sie die Erde in ungefähr 90 Minuten umrunden können (ESA, 2020). Durch die hohe Wiederholrate ist eine globale Abdeckung innerhalb eines Monats gegeben, wodurch auch die zeitlichen Variationen des Gravitationsfelds der Erde beobachtet werden können.

2.3.1 Unterscheidung von Orbitrepräsentationen

Das Wissen über die Position von LEO-Satelliten ist Voraussetzung für diverse Anwendungen, so auch für die Bestimmung des Schwerefelds. Daneben werden die Positionen zur Geolokalisierung der Messwerte eines Satelliten benötigt. Künstliche Erdsatelliten kreisen auf Kepler-Bahnen um die Erde. Zur Beschreibung der Bewegung eines Satelliten gelten die drei Kepler-Gesetze (Bauer, 2018):

- (1) Die Form der Satellitenbahn entspricht einer Ellipse. In einem Brennpunkt befindet sich das Geozentrum der Erde.
- (2) Der Ortsvektor eines Satelliten bezogen auf das Geozentrum der Erde überstreicht in gleicher Zeit gleiche Flächen.

(3) Die Umlaufzeit eines Satelliten im Quadrat und die dritte Potenz der großen Halbachse verhalten sich proportional zueinander.

Mithilfe dieser Kepler-Gesetze lässt sich die Position eines Satelliten zu jedem Zeitpunkt in der Ebene der ungestörten Bahnellipse berechnen. Voraussetzung ist, dass die Ellipsenparameter und die Position des Satelliten zu einem Zeitpunkt t_0 bekannt sind (Bauer, 2018).

Es tragen maßgeblich zwei Faktoren dazu bei, dass Satelliten keine exakten Kepler-Ellipsen durchlaufen: Die Erde weicht von der idealen Kugelsymmetrie ab und die Dichteverteilung im Erdinneren ist nicht homogen (Bauer, 2018). Diese Faktoren führen dazu, dass die Bahnparameter sowohl säkulare als auch periodische Änderungen erfahren. Unter Verwendung eines bekannten Schwerfelds können die Bahnelemente als Funktion der Zeit berechnet werden. Umgekehrt kann aus Beobachtungen der Satellitenbahn die Struktur des Gravitationsfelds abgeleitet werden. Die Genauigkeitsanforderung an die Orbitbestimmung liegt in diesem Anwendungsfall bei wenigen Zentimetern und kann durch kontinuierliches Satellite-to-Satellite-Tracking im High-Low-Modus mittels GNSS-Satelliten erreicht werden (Visser und Van Den Ijssel, 2003). Im Folgenden werden drei Verfahren zur präzisen Orbitbestimmung von LEO-Satelliten vorgestellt.

Dynamische und reduziert-dynamische Orbitbestimmung

Bei der dynamischen Orbitbestimmung werden physikalische Modelle, die die Bewegung der LEO-Satelliten beschreiben, verwendet. Die Position des Antennenphasenzentrums eines LEO-Satelliten wird im Inertialrahmen ausgedrückt als

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t; a, e, i, \Omega, \omega, u_0; p_1, \dots, p_d) + \delta \mathbf{r}_{\text{ant}}(t) \quad (2.24)$$

mit

\mathbf{r}_0	Position des Massenzentrums des Satelliten im Inertialrahmen
$\delta \mathbf{r}_{\text{ant}}$	Antennenphasenzentrumsoffset im Inertialrahmen
$a, e, i, \Omega, \omega, u_0$	sechs unbekannte LEO-Bahnelemente
p_1, \dots, p_d	d unbekannte LEO dynamische Parameter.

Der Abstand des Antennenphasenzentrums zum Massenschwerpunkt $\delta \mathbf{r}_{\text{ant}}$ wird als bekannt angenommen und wird im Rahmen der Antennenkalibrierung ermittelt. Während der dynamischen Orbitbestimmung werden die sechs unbekannten Bahnparameter und zusätzliche d dynamische Parameter bestimmt (Dach et al., 2015). Die Methode basiert auf der Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, q_1, \dots, q_d) \quad (2.25)$$

unter Verwendung physikalischer Gesetze zur Beschreibung der Abweichung zur ungestörten Kepler-Bahn. Physikalische Modelle werden verwendet, um die gravitativen und nicht-gravitativen dynamischen Parameter, die die Bewegung der Satelliten beeinflussen, zu berücksichtigen und eine bestangepasste Trajektorie zu den Messungen im Sinne der Kleinsten-Quadrate zu ermitteln. Die Positionen und Geschwindigkeiten der Satelliten ergeben sich aus der Integration der

Bewegungsgleichungen über die Zeit (Dach et al., 2015). Der Vorteil der dynamischen Orbitbestimmung gegenüber einer rein geometrischen Orbitbestimmung ist, dass auch bei Lücken in den Beobachtungsdaten eine relativ hohe Präzision erreicht werden kann und dass über verrauschte Trackingdaten hinweg geglättet wird. Allerdings ist die Genauigkeit stark abhängig von den verwendeten Kräftenmodellen: Unsicherheiten in den Modellen oder nicht modellierte Kräfte verursachen große Fehler in den Satellitenpositionen. Damit einher geht auch, dass bei Verwendung hochaufgelöster und genauer Kräftenmodelle der Berechnungsaufwand steigt (Selvan et al., 2023).

Die physikalischen Modelle der dynamischen Orbitbestimmung können um empirische Parameter erweitert werden, die im Rahmen der Ausgleichung aus kinematischen Positionen mitgeschätzt werden. Diese können beispielsweise als konstante Parameter oder auch einmal-pro-Umlauf ermittelt werden. Darüber hinaus können auch pseudo-stochastische Parameter festgelegt werden, etwa um plötzliche Geschwindigkeitsänderungen zu bestimmten Epochen oder stückweise konstante Beschleunigungen in einem Zeitintervall zu bestimmen. Damit können nicht-modellierte oder fehlerhaft-modellierte Kräfte kompensiert werden. Dies führt von der dynamischen Orbitrepräsentation auf die reduziert-dynamische Repräsentation (Dach et al., 2015). Der Vorteil dieser Modellierung liegt darin, dass die Imperfektionen der Modelle durch die empirischen Beschleunigungen kompensiert werden. Allerdings entsteht durch die Kombination der dynamischen und kinematischen Ansätze sowohl eine Abhängigkeit von den Modellgenauigkeiten als auch von Fehlern in den Beobachtungsdaten. Letzteres kann durch eine entsprechende Vorverarbeitung der Beobachtungsdaten reduziert werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Beobachtungen in hoher zeitlicher Auflösung vorliegen (Selvan et al., 2023).

Kinematische Orbitbestimmung

Im Rahmen der kinematischen Orbitbestimmung werden geometrische Beobachtungen, beispielsweise Daten von Satellite-to-Satellite-Tracking im High-Low-Modus, verwendet. Die Trajektorie der Satelliten wird aus den 3D-Koordinaten diskreter Epochen rekonstruiert (Dach et al., 2015). Die Position des Antennenphasenzentrums $\mathbf{r}(t)$ eines LEO-Satelliten im Inertialrahmen ergibt sich aus

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot (\mathbf{r}_{0E}(t) + \delta\mathbf{r}_{\text{antE}}(t)) \quad (2.26)$$

mit

\mathbf{R}	Transformationsmatrix vom erdfesten Referenzrahmen in den Inertialrahmen
\mathbf{r}_{0E}	Position des Massenzentrums des Satelliten im erdfesten Referenzrahmen
$\delta\mathbf{r}_{\text{antE}}$	Antennenphasenzentrumsoffset im erdfesten Referenzrahmen.

Der Vorteil besteht darin, dass keine a priori Informationen über die Bewegung der Satelliten notwendig sind. Die kinematische Orbitbestimmung basiert allein auf geometrischen Beobachtungen und kann als Precise-Point-Positioning (PPP) Auswertung aufgefasst werden. Damit ist die Lösung unabhängig von a priori Kräftenmodellen, die die Abweichungen zu einer ungestörten Kepler-Bahn erklären, und eignen sich, um Informationen über das Gravitationsfeld der Erde abzuleiten. Allerdings ist diese Methode empfindlich gegenüber Ausreißern, schlechten Beobachtungsgeometrien und Fehlern in GNSS-Messungen. Eine adäquate Vorverarbeitung der Daten ist

daher notwendig, um fehlerhafte Messungen aus dem Beobachtungsmaterial zu eliminieren. Antennenphasenzentrumsvariation und Antennenphasenzentrumsoffset der GNSS-Empfänger und -Sender haben einen größeren Einfluss auf die Genauigkeit als bei der dynamischen Ortsbestimmung und müssen sorgfältig modelliert werden. Außerdem führen größere Datenlücken dazu, dass keine Positionen geschätzt werden können (Selvan et al., 2023).

2.3.2 Bestimmung der kinematischen Orbits aus GNSS-Beobachtungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden kinematische Orbits von LEO-Satelliten für die Gravitationsfeldbestimmung verwendet. Die im Folgenden verwendeten Orbits werden vom Institut für Geodäsie (IFG) der Technischen Universität Graz und vom Astronomischen Institut der Universität Bern (AIUB) berechnet, regelmäßig überarbeitet und kostenfrei zur Verfügung gestellt (Kapitel 3.2). Die Positionen der LEOs werden nach dem Prinzip des Satellite-to-Satellite Tracking im High-Low-Modus gewonnen. Dabei werden Satelliten auf vergleichsweise niedrigen Umlaufbahnen mithilfe von Signalen der Globalen Navigationssatellitensysteme (GNSS), die die Erde in einer Höhe von etwa 20.000 km umkreisen, getrackt. Mithilfe dieses Verfahrens gelingt die Orbitbestimmung zu diskreten Epochen mit einer Genauigkeit von wenigen Zentimetern (Suesser-Rechberger et al., 2022). Hierfür werden auf den LEO-Satelliten Dual-Frequency-Empfänger verbaut, die im Falle von Swarm und GRACE die Signale des US-amerikanischen Global Positioning Systems (GPS) empfangen. Über diese Empfänger lassen sich simultan sowohl die C-/A- und P-Codebeobachtungen empfangen als auch zwei-Frequenz-Trägerphasen beobachten (Li et al., 2017). Zur Bestimmung der kinematischen Orbits nach Suesser-Rechberger et al., 2022; Zehentner und Mayer-Gürr, 2016 werden die Phasen- und Codemessungen in allen verfügbaren Frequenzen kombiniert. Die erweiterten GNSS-Beobachtungsgleichungen lauten für Codebeobachtungen R

$$R_{ri}^t - \Delta R_{ri}^t = \rho_r^t + \delta \rho_{mul,i}^R + c \delta t_r + \Delta I_i^R STEC + \Delta T + b_{ri}^R + ACV_{ri}^R + ACV_i^{tR} \quad (2.27)$$

und für Phasenbeobachtungen ϕ

$$\phi_{ri}^t - \Delta \phi_{ri}^t = \rho_r^t + \delta \rho_{mul,i}^\Phi + \lambda_i n_{ri}^t + c \delta t_r + \Delta I_i^\Phi STEC + \Delta T + b_{ri}^\Phi + ACV_{ri}^\Phi + ACV_i^{t\Phi} \quad (2.28)$$

mit den Indizes

t	Sender
r	Empfänger
i	Frequenz
R	Beobachtungstyp Code
Φ	Beobachtungstyp Phase

und den Parametern

$\Delta R, \Delta \phi$	Korrekturen für Code- und Phasenmessungen
ρ	geometrische Distanz zwischen Sender und Empfänger
c	Lichtgeschwindigkeit
λ	Trägerwellenlänge
n	Phasenmehrdeutigkeit.

Die unbekannten geozentrisch-kartesischen Koordinaten des GPS-Empfängers $\mathbf{r} = (X_r, Y_r, Z_r)^T$ an Bord der LEO-Satelliten ergeben sich aus der geometrischen Distanz ρ zwischen Sender t und Empfänger r . Es gilt nach Hofmann-Wellenhof et al. (2008) für die Position \mathbf{r} zur Epoche t

$$\rho_r^t(t) = \sqrt{(X^t(t) - X_r(t))^2 + (Y^t(t) - Y_r(t))^2 + (Z^t(t) - Z_r(t))^2}. \quad (2.29)$$

Die Korrekturen für die Code- bzw. Phasenbeobachtungen ΔR_{ri}^t und $\Delta \phi_{ri}^t$ werden als bekannt angenommen und setzen sich zusammen aus GNSS-Satellitenuhrfehler, relativistischen Effekten, Korrekturen der Raumzeitkrümmung, Phase-Wind-Up-Korrekturen und Sender-Signal-Bias. Sie werden vor der Kleinsten-Quadrate-Ausgleichung modelliert und in Form von Reduktionen für den Beobachtungsvektor berücksichtigt. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Daten der Satelliten Swarm und GRACE umrunden die Erde in etwa 500 km Höhe. Daher kann der Einfluss der Troposphäre ΔT (obere Grenze bei ca. 11 km, Schönwiese, 2020) vernachlässigt werden. Aufgrund der Bauweise des Empfängers werden auch die Einflüsse von Mehrwegeeffekten $\delta \rho_{\text{mul},i}$ vernachlässigt. Alle weiteren rechtsseitigen Parameter der Gleichung (2.27) und (2.28), wie der Einfluss der Ionosphäre ΔI , der Empfängeruhrfehler δt und der Empfänger-Signal-Bias b werden im Rahmen einer Kleinsten-Quadrate-Anpassung aus den Code- und Phasenbeobachtungen geschätzt (Suesser-Rechberger et al., 2022).

Sowohl empfangene als auch gesendete GNSS-Signale beziehen sich auf ein mittleres Phasenzentrum. Aufgrund von unterschiedlichen Trägerfrequenzen weichen die Signale mit einem konstanten Offset vom tatsächlichen Phasenzentrum ab. Außerdem ergeben sich abhängig von Azimut und Elevation zusätzliche Abweichungen, die als Antennenzenrumsvariation (ACV) bezeichnet werden. Zur Bestimmung der kinematischen Positionen aus GNSS-Signalen mit Zentimetergenauigkeit, ist die Bestimmung der ACVs aus den Beobachtungsdaten selbst notwendig. Diese Parameter in den Gleichungen (2.27) und (2.28) werden daher vor der Bestimmung der kinematischen Positionen aus den Residuen, zum Beispiel in der reduziert-dynamischen Orbitbestimmung (Jäggi et al., 2016), abgeleitet.

2.4 Statistische Auswertemethoden

Überbestimmung durch redundante Messungen ist eine Voraussetzung für die zuverlässige Lösung vieler geodätischer Aufgaben, bei denen funktionale Zusammenhänge aus Beobachtungen hergeleitet und Parameter geschätzt werden. Das Gauß-Markov-Modell gehört zu den Verfahren der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Das Prinzip und die Vorgehensweise bei der Ausgleichung nach Gauß-Markov wird in Kapitel 2.4.1 erläutert und

die Formeln, welche die Grundlagen für die Bestimmung der Potentialkoeffizienten bilden, werden eingeführt. In vielen rechentechnisch aufwendigen Ausgleichungsaufgaben werden häufig heterogene Beobachtungsdaten kombiniert, zum Beispiel bei der Bestimmung des Gravitationsfelds, wenn unterschiedliche Mess- und Auswertemethoden verschiedener Satellitenmissionen integriert werden. Die Beobachtungsdaten bestehen dabei beispielweise aus kinematischen Positionen von Satelliten, K-Band-Entfernungsänderungsmessungen, Gradiometerdaten und terrestrischen Schweremessungen mit unterschiedlichen Genauigkeitsniveaus. Zur Kombination dieses heterogenen Beobachtungsmaterials wird die Varianzkomponentenschätzung durchgeführt. Die allgemeine Vorgehensweise wird in Kapitel 2.4.2 erläutert.

2.4.1 Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell (GMM)

Mithilfe der Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell wird unter Verwendung von Messwerten, zusammengefasst in einem Beobachtungsvektor \mathbf{l} , eine eindeutige und statistisch optimale Schätzung für die unbekannten Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ des funktionalen Zusammenhangs bestimmt. Über die Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung können Genauigkeitsaussagen $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ für die ermittelten Parameter getroffen werden. Als Verfahren der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate werden die Eingangsgrößen so ausgeglichen, dass deren gewichtete Verbesserungsquadratsumme $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ minimal ist (Derenbach et al., 2007). Zur Lösung ist die Aufstellung eines funktionalen und stochastischen Modells notwendig. Das stochastische Modell enthält Informationen zu den absoluten Genauigkeiten $\mathbf{C}_{\mathbf{l}\mathbf{l}}$ der Eingangsgrößen \mathbf{l} . Zur Bestimmung numerisch stabiler Lösungen wird ein a priori Varianzfaktor σ_0^2 faktorisiert, die Matrix $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}\mathbf{l}}$ enthält dann die Genauigkeitsrelationen und heißt Kofaktormatrix. Es gilt für die Gewichtsmatrix \mathbf{P} nach Niemeier, 2008

$$\mathbf{C}_{\mathbf{l}\mathbf{l}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}\mathbf{l}} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1}. \quad (2.31)$$

Im funktionalen Modell wird für jede Messgröße im Beobachtungsvektor \mathbf{l} eine mathematische Beziehung über Beobachtungsgleichungen zu den Parametern $\hat{\mathbf{x}}$ hergestellt. Durch Äquivalenzumformungen ergeben sich die Verbesserungsgleichungen \mathbf{v}

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}. \quad (2.33)$$

Das Einsetzen in die Zielfunktion und Minimieren führt auf die Normalgleichungen mit der quadratischen Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}

$$\mathbf{N} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.35)$$

und aus der Inversen die eindeutige Lösung für die ausgeglichenen Parameter $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}. \quad (2.36)$$

Aussagen über die Genauigkeit der geschätzten Parameter $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ ergeben sich aus der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung zu

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}. \quad (2.37)$$

Für die Bestimmung der absoluten Genauigkeitsmaße wird alternativ zum a priori Varianzfaktor σ_0^2 der a posteriori Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ bestimmt, abhängig von der gewichteten Verbesserungsquadratsumme Ω und der Redundanz r , Anzahl der Beobachtungen n und der Parameter u des Ausgleichungsproblems (Derenbach et al., 2007)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u} = \frac{\Omega}{r}. \quad (2.38)$$

2.4.2 Varianzkomponentenschätzung (VCE)

In Kapitel 2.4.1 wird das stochastische Modell \mathbf{C}_{\parallel} für alle Beobachtungen mithilfe der Kofaktormatrix \mathbf{Q}_{\parallel} und einem einzigen Varianzfaktor σ_0^2

$$\mathbf{C}_{\parallel} = \sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\parallel} \quad (2.39)$$

gebildet. Es setzt voraus, dass die Genauigkeitsrelationen zwischen den Beobachtungen bekannt sind, damit die Korrelationen korrekt modelliert und auch die Genauigkeitslevel der unterschiedlichen Beobachtungsgruppen berücksichtigt werden (Niemeier, 2008). Um das stochastische Modell nicht ausschließlich auf diesen Annahmen aufzubauen, kann mithilfe der Varianzkomponentenschätzung das relative Gewicht einzelner Beobachtungsgruppen σ_{0i}^2 iterativ aus den Residuen bestimmt werden. Das funktionale Modell der Ausgleichung wird hierfür erweitert um einen Fehlervektor bzw. Residuen \mathbf{e}_i pro Beobachtungsgruppe in der Form

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_i. \quad (2.40)$$

Mit den bekannten Kovarianzmatrizen \mathbf{Q}_i und den unbekannten Varianzkomponenten σ_{0i}^2 der einzelnen Beobachtungsgruppen gilt für das stochastische Modell

$$\mathbf{C}_{\parallel} = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_{i,0} = \sum_{i=1}^k \sigma_{0i}^2 \cdot \mathbf{Q}_i. \quad (2.41)$$

Die Varianzkomponenten werden iterativ aus den Residuen bestimmt. Der Ansatz (2.40) beinhaltet die Annahme, dass keine Modellfehler und auch keine groben Fehler in den Beobachtungsdaten vorliegen, sodass das funktionale Modell die Beobachtungsdaten adäquat beschreibt.

Die iterative Schätzung einer Varianzkomponente erfolgt in drei Schritten: Zunächst wird ei-

ne Startlösung \mathbf{C}_0 für das stochastische Modell

$$\mathbf{C}_0 = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_{0i} = \sum_{i=1}^k \alpha_{0i}^2 \cdot \mathbf{Q}_i \quad (2.42)$$

aus Näherungswerten $\alpha_{0,i}^2$ für die Varianzkomponenten σ_{0i}^2 aufgestellt. Anschließend wird eine erste Ausgleichung

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}_0^{-1} \cdot \mathbf{l} \quad (2.43)$$

durchgeführt. Die Varianzkomponente $\hat{\sigma}_{0i,1}^2$ der Beobachtungsgruppe i in der ersten Iteration ergibt sich dann aus

$$\hat{\sigma}_{0i,1}^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \cdot \mathbf{C}_{i,0}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i}{r_i} \quad (2.44)$$

mit der Summe der Redundanzanteile r_i einer Gruppe i . Anschließend werden verbesserte Näherungswerte berechnet

$$\alpha_{0i,1}^2 = \alpha_{0i,0}^2 \cdot \hat{\sigma}_{0i,1}^2 \quad (2.45)$$

und die Ausgleichung erneut durchgeführt (Niemeier, 2008). Die iterative Vorgehensweise erfordert ein vordefiniertes Abbruchkriterium, beispielsweise durch Angabe der maximalen Anzahl an Iterationen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Varianzkomponentenschätzung auf verschiedenen Ebenen angewendet: Einerseits zur Bestimmung der Gewichte einzelner Short-Arcs, um das stochastische Modell zu verfeinern, und andererseits bei der Kombination von Gravitationsfeldlösungen auf der Normalgleichungsebene.

3 Datengrundlage zur Gravitationsfeldbestimmung

Die globale Bestimmung des äußeren Schwerefelds der Erde mit homogener Genauigkeit zur Erfassung zeitlicher Variationen ist nur über Beobachtungen von Satelliten auf erdnahen Umlaufbahnen realisierbar. In Kapitel 3.1 werden die Missionen Swarm und GRACE vorgestellt, die unter anderem zur Schwerefeldbestimmung eingesetzt werden. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Datensätze des Instituts für Geodäsie (IFG) der Technischen Universität Graz und des Astronomischen Instituts der Universität Bern (AIUB) werden vorgestellt (Kapitel 3.2). Eine Zusammenstellung und Beschreibung der verwendeten Hintergrundmodelle findet sich in Kapitel 3.3.

3.1 Künstliche Satelliten zur Bestimmung des Schwerefelds

Die Stärke des Gravitationsfelds der Erde nimmt mit dem Abstand vom Massenzentrum ab. Daher werden für die globale Bestimmung des Gravitationsfelds niedrig fliegende Satelliten (LEOs) verwendet. Im Folgenden werden zwei Missionen, die unter anderem zur Beobachtung des räumlich und zeitlich variierenden Schwerefelds eingesetzt werden, vorgestellt.

3.1.1 GRACE und GRACE-FO

Das Akronym GRACE steht für *Gravity Recovery And Climate Experiment* und war ein Kooperationsprojekt der US-amerikanischen Raumfahrtbehörde (NASA) und des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR). Die GRACE-Mission umfasste zwei identische Satelliten, die sich in ca. 220 km Abstand auf derselben Umlaufbahn etwa 450 km über der Erdoberfläche befanden. Aufgrund von Reibungskräften verringerte sich die Höhe auf 350 km zum Ende der Mission hin (Abbildung 3.1). Die Umlaufzeit auf der nahezu polaren Bahn mit einer Inklination von 89° betrug 90 Minuten (ESA, 2022).

Das primäre Ziel der GRACE-Mission war die globale Beobachtung des Gravitationsfelds der Erde mit seinen zeitlichen Variationen. Aufgrund der Orbiteigenschaften gelingt die Modellierung des Gravitationsfelds mit einer räumlichen Auflösung von 400 km und einer zeitlichen Auflösung von einem Monat bis zu einer Woche (Tapley et al., 2004). Hierfür werden High-Low und Low-Low Satellite-to-Satellite-Beobachtungen kombiniert. Mithilfe der GPS-Empfänger an Bord der GRACE-Satelliten ließen sich die kinematischen Orbits der Satelliten mit Genauigkeiten im Zentimeterbereich bestimmen. In Kombination mit einem K-Band-Ranging-System wurden die Abstände bzw. Abstandsänderungen zwischen den Satelliten mit einer Genauigkeit von unter $0,1 \mu\text{m/s}$ ermittelt. Die präzisen Abstandsänderungsmessungen ermöglichen es, wichtige Erkenntnisse über verschiedene Aspekte des globalen Klimasystems zu gewinnen und lassen beispielsweise auf saisonale und sub-saisonale Veränderungen im kontinentalen Wasserkreislauf, Veränderungen in den großen Gletschersystemen und den Anstieg des Meeresspiegels schließen. Neben den GPS-Empfängern und dem K-Band-Ranging-System waren beide Satelliten mit einem Akzelerometer zur Messung der nicht-gravitativen Störkräfte, Sternsensoren zur

Überprüfung der Orientierung der Satelliten und Reflektoren für Satellite-Laser-Ranging (SLR) ausgestattet (ESA, 2022). Aufgrund von Treibstoffknappheit und Problemen mit der Batterie endete die GRACE-Mission schließlich im Oktober 2017 nach etwa 15 Jahren im Orbit (JPL, 2024).

Als Nachfolgemission von GRACE starteten im Mai 2018 die beiden Satelliten der GRACE-Follow-On-Mission (GRACE-FO) zur Fortsetzung der Beobachtungsreihe. Das GRACE-Instrumentarium wurde bei GRACE-FO um ein Laserinterferometer erweitert. Dieses testet experimentiell den Einsatz von Laserinterferometern zur Bestimmung des Schwerefelds. Aufgrund der höheren Frequenz des Lasers im Vergleich zur Frequenz des K-Band-Ranging-Systems, ist mit dem Laserinterferometer die Abstandbestimmung zwischen den Satelliten mit Nanometergenauigkeit möglich (Landerer et al., 2020).

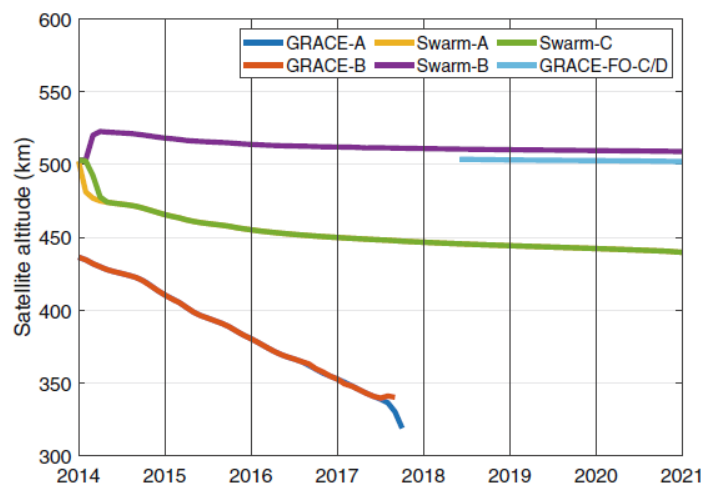


Abbildung 3.1: Höhe der Satelliten der Missionen GRACE, GRACE-FO und Swarm über der Erdoberfläche im Laufe der Zeit abgeleitet aus ihren kinematischen Positionen (Grombein et al., 2022).

3.1.2 Swarm

Swarm ist eine Mission der European Space Agency (ESA) und startete mit drei identischen Satelliten im November 2013. Zu Beginn der Mission befanden sich zwei Satelliten Swarm A und Swarm C auf einem gemeinsamen fast-polar Orbit mit einer Inklination von $87,35^\circ$ etwa 450 km und der dritte Satellit auf einer Umlaufbahn mit Inklination $87,75^\circ$ etwa 520 km über der Erdoberfläche (Abbildung 3.1). Im Laufe der Zeit hat sich die Konstellation aufgrund der Reibung in der Hochatmosphäre verändert: Swarm A und C befinden sich auf einem gemeinsamen Orbit und sinken auf eine Höhe von ca. 300 km ab. Da Swarm B höher gestartet ist, sinkt er langsamer ab (Iorfida et al., 2023; van den IJssel et al., 2016).

Das Hauptziel der Swarm-Mission ist die Untersuchung des Erdmagnetfelds und der erdnahen elektromagnetischen Umgebung. Aus den Beobachtungen lassen sich Erkenntnisse zur Kerndy-

namik und über die Wechselwirkungen zwischen Kern und Mantel ableiten. Darüber hinaus kann die lithosphärische Magnetisierung kartiert und die dreidimensionale elektrische Leitfähigkeit des Mantels ermittelt werden. Die Daten der Swarm-Satelliten werden auch genutzt, um elektromagnetische Ströme in der Magnetosphäre und Ionosphäre zu untersuchen (ESA, 2024).

Die drei Swarm-Satelliten sind jeweils mit dem gleichen Instrumentarium ausgerüstet. Die wesentlichen Sensoren zur Verfolgung der Missionsziele bestehen aus einem Vector Field Magnetometer (VFM), einem Absolute Scalar Magnetometer (ASM) und einem Electric Field Instrument (EFI). Das VFM dient zur Messung von Stärke und Richtung des Magnetfelds. Mithilfe eines ASM wird die Stärke des Magnetfelds gemessen. Darüber hinaus werden die skalaren Messungen für die Kalibrierung des VFM benötigt. Zur Charakterisierung der Ionosphäre befindet sich ein EFI an Bord der Swarm-Satelliten (ESA, 2024).

Zur Bestimmung der Position der Satelliten und damit auch zur Lokalisierung aller Messgrößen, sind auf den Plattformen GPS-Empfänger und ein Laser-Retro-Reflektor verbaut. Jeder Swarm-Satellit ist aus Redundanzgründen mit zwei GPS-Empfängern ausgestattet. Diese haben jeweils acht Kanäle wobei zwei Frequenzen L1 mit 1575 MHz und L2 mit 1227 MHz der GPS-Satelliten empfangbar sind. Zur Transformation vom Satellite-Reference-Frame in ein übergeordnetes Koordinatensystem befinden sich Star Tracker an Bord. Diese liefern Informationen über die Orientierung und Höhe der Satelliten. Mithilfe des Akzelerometers werden nicht-konservative Kräfte beobachtet (ESA, 2024). Dadurch eröffnen sich weitere Anwendungsmöglichkeiten für die Beobachtungsdaten der Swarm-Satelliten: Aufgrund der geringen Flughöhe werden die Satellitenbahnen durch die Gravitationkraft der Erde beeinflusst. Nach dem Prinzip des Satellite-to-Satellite-Tracking im High-Low-Modus können die kinematischen Positionen zur Schwerefeldbestimmung verwendet werden.

3.2 Datensätze der Missionen Swarm und GRACE

Für die Schwerefeldbestimmung nach dem Short-Arc-Approach (SAA, Kapitel 2.2.2) werden die kinematischen Positionen von LEO-Satelliten benötigt. Diese werden für die Satelliten der Missionen CHAMP, GRACE, GRACE-FO, Swarm, Jason, MetOp, Sentinel, TanDEM und TerraSAR von der Technischen Universität Graz aus Code- und Phasenbeobachtungen (Kapitel 2.3.2) mithilfe des Gravity Recovery Object Oriented Programming Systems (GROOPS) bestimmt und mit ihren Varianz-Kovarianz-Informationen kostenfrei über einen FTP-Server (<https://ftp.tugraz.at/outgoing/ITSG/satelliteOrbitProducts/>) zur Verfügung gestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die kinematischen Orbits der Missionen GRACE und Swarm der Universität Graz (Suesser-Rechberger et al., 2022) verwendet. Die GRACE-Orbits liegen pro Tag im Zeitraum von April 2002 bis Juni 2017 mit einer Auflösung von 10 s vor. Die Swarm-Orbits liegen ebenfalls pro Tag für den Zeitraum von Juli 2014 bis Dezember 2023, allerdings mit einer zeitlichen Auflösung von 1 s vor. Die $(X, Y, Z)^T$ -Koordinaten zur Epoche t beziehen sich

auf den Celestial-Reference-Frame mit Ursprung im Massenzentrum der Erde. Neben den kinematischen Positionen werden auch die vollständigen, epochenweisen Varianz-Kovarianzmatrizen zur Verfügung gestellt.

Neben den kinematischen Positionen und den Varianz-Kovarianzinformationen werden für die Gravitationsfeldbestimmung außerdem die reduziert-dynamischen Orbits, Akzelerometerdaten und Sternkameradaten der Satellitenmissionen benötigt. Darüber hinaus wird ein *Satellite-Model* benötigt. Es beinhaltet Informationen über die Masse, den Luftwiderstandskoeffizienten, die Anzahl, Form, Größe und Ausrichtung der Oberflächen sowie Reflexions- und Absorptionseigenschaften für den sichtbaren Bereich und den Infrarotbereich des elektromagnetischen Spektrums für jede einzelne Oberfläche des Satelliten (Mayer-Gürr et al., 2021b). Nicht-konservative Beschleunigungen auf den Satelliten werden mithilfe eines Akzelerometers gemessen. Aufgrund von Hardware-Problemen und einer hohen Empfindlichkeit gegenüber Temperaturschwankungen, die das Akzelerometer der Swarm-Satelliten betreffen (Bezděk et al., 2017), wird im Rahmen dieser Arbeit eine Simulation der Akzelerometerdaten durchgeführt (Kapitel 4.1.1). Die reduziert-dynamischen Orbits werden zur Simulation der Akzelerometerdaten und zur Evaluierung der Beobachtungsgleichungen verwendet. Mithilfe der Sternkameradaten gelingt die Rotation vom Satellite-Reference-Frame in den Celestial-Reference-Frame über Quaternionen. Über die Erdorientierungsparameter (EOP Rapid, IERS, 2024) des International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) kann vom Celestial-Reference-Frame in den Terrestrial-Reference-Frame transformiert werden. Die reduziert-dynamischen Orbits, die Sternkamera- und simulierten Akzelerometerdaten liegen mit einer zeitlichen Auflösung von 10 s in den gleichen Zeiträumen wie die kinematischen Positionen vor.

Zum Vergleich der Orbits und der resultierenden Gravitationsfelder werden auch die kinematischen Orbits der Swarm-Satelliten (Arnold und Jäggi, 2021) der Universität Bern verwendet. Sie werden für die Satelliten der Missionen GRACE, GRACE-FO, Swarm und Sentinel mit ihren epochenweisen Kovarianzinformationen über einen FTP-Server (http://ftp.aiub.unibe.ch/LEO_ORBITS/) zugänglich gemacht. Die Orbits werden mit der Bernese GNSS Software v5.3 (Dach et al., 2015) aus ionosphärenfreien Linearkombinationen von Phasenbeobachtungen der GPS-Satelliten über einen Precise-Point-Positioning-Ansatz bestimmt (Jäggi et al., 2016). Die $(X, Y, Z)^T$ -Koordinaten zur Epoche t werden in Bezug auf den Terrestrial-Reference-Frame angegeben.

3.3 Zusammenstellung der Hintergrundmodelle

Mithilfe der kinematischen Positionen von LEO-Satelliten ist es möglich, globale Massenverlagerungen im Erdsystem zu beobachten. Allerdings ist es nicht direkt möglich, zwischen Variationen an, über oder jenseits der Erdoberfläche zu unterscheiden. Die für die Gravitationsfeldbeobachtung verwendeten Satelliten umkreisen die Erde in einer Höhe von etwa 500 km. Kleineräumige Veränderungen im Gravitationsfeld können aufgrund der harmonischen Fortsetzung auf Satellitenhöhe schwer beobachtet werden, da das Signal stark abgeschwächt ist und von Rauschen

überlagert wird. So tritt räumliches Leakage auf, die einzelnen Effekte verschmieren in angrenzende Regionen. Für eine globale Abdeckung werden die Beobachtungsdaten mehrerer Tage, üblicherweise über einen Monat, akkumuliert, um das globale Gravitationsfeld zu bestimmen. Signale, deren Perioden kürzer als die doppelte Akkumulationszeit sind, werden nicht eindeutig repräsentiert und führen zu zeitlichem Aliasing (Dobslaw et al., 2017). Zur Reduzierung dieser Effekte werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit Hintergrundmodelle verwendet, die in Tabelle 3.1 zusammengefasst sind und nachfolgend näher erläutert werden. Die Zusammensetzung der Hintergrundmodelle zum Hintergrundfeld ist in Kapitel 4.1.2 beschrieben.

3.3.1 Modellierung der konservativen Kräfte

Bei der Modellierung der konservativen Kräfte werden ein a priori Gravitationsfeld, Gezeitenkräfte, relativistische Korrekturen und nicht-gezeitenbedingte Variationen in der Atmosphäre und den Ozeanen berücksichtigt. Der Zusammenhang zwischen einer konservativen Kraft, dem Potential und der resultierenden Beschleunigung ergibt sich über Gleichung (2.2). Eine Zusammenstellung der verwendeten Hintergrundmodelle ist in Tabelle 3.1 zu finden.

Tabelle 3.1: Zusammenstellung der Hintergrundmodelle zur Bestimmung der konservativen Kräfte mit ihren Einflüssen auf die Beschleunigungen eines LEO-Satelliten (nach Lasser et al., 2020a).

Kraft	Modell	Entwicklungsgrad	Größenordnung (m/s ²)
Gravitationsfeld der Erde (statisch, linear, jährlich)	GOCO06s ^a	0/2, ..., 180	$\sim 10^{-2}$
Astronomische Gezeiten	JPL DE432 ^b	-	$\sim 10^{-6}$
Gezeiten der festen Erde	IERS2010 ^c	-	$\sim 10^{-7}$
Gezeiten der Ozeane	FES2014b ^d	2, ..., 180	$\sim 10^{-7}$
Relativistische Korrekturen	IERS2010 ^c	-	$\sim 10^{-8}$
De-Aliasing	AOD1B RL06 ^e	2, ..., 180	$\sim 10^{-8}$
Polgezeiten auf feste Erde	IERS2010 ^c	-	$\sim 10^{-8}$
Atmosphärische Gezeiten	AOD1B RL06 ^e	2, ..., 180	$\sim 10^{-9}$
Polgezeiten auf Ozeane	IERS2010 ^c	2, ..., 180	$\sim 10^{-9}$

^a Kvas et al., 2019

^b Folkner, 2014

^c Petit und Luzum, 2010

^d Lyard et al., 2021

^e Dobslaw et al., 2017

A priori Gravitationsfeld

Als a priori Gravitationsfeld wird das globale satellite-only Gravitationsfeldmodell GOCO06s (Kvas et al., 2019) verwendet. Es handelt sich um ein hochgenaues und hochaufgelöstes Schwerefeldmodell, das aus den Daten der Missionen GOCE, GRACE und CHAMP sowie aus SLR-Daten kombiniert wurde. Die GOCO-Modelle gehören zum Projekt GOCE Data AO der ESA unter der Beteiligung der Technischen Universität München, der Universität Bonn, der Technischen Universität Graz, der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und der Universität Bern (Kvas et al., 2021). Das Modell besteht aus Potentialkoeffizienten $gfct$ bis Grad und Ordnung 300 zur Beschreibung des statischen Schwerefelds. Darüber hinaus beinhaltet es Parameter zur Beschreibung eines linearen Trends $trend$ und der Amplituden A_{\cos} und A_{\sin} einer jährlichen Schwingung mit der Periode von $P = 365.25$ d für die Koeffizienten von Grad 2 bis 200. Damit lassen sich zu einem beliebigen Interpolationszeitpunkt t die Potentialkoeffizienten berechnen über

$$gfc = gfct + trend \cdot \frac{t - t_0}{P} + A_{\cos} \cdot \cos\left(2\pi \frac{t - t_0}{P}\right) + A_{\sin} \cdot \sin\left(2\pi \frac{t - t_0}{P}\right). \quad (3.1)$$

Die Referenzepoche t_0 für das GOCO06s ist 2010-01-01 (MJD 55197, Kvas et al., 2021). Die Einführung des GOCO-Modells einschließlich der jährlichen und säkularen Variationen ist notwendig, da für monatliche Berechnungen des Gravitationsfelds die Beobachtungsdauer zu kurz ist, um diese Signale angemessen zu repräsentieren. Durch die Verwendung der zeitabhängigen Parameter wird der Effekt des zeitlichen Aliasings verringert (Mayer-Gürr et al., 2012). Mithilfe des GOCO06s wird auch das Datum definiert. Mit der Definition von $\bar{C}_{0,0} = 1$ und $\bar{C}_{1,0} = \bar{C}_{1,1} = 0$ wird die Entwicklung des Gravitationspotentials relativ zum Ursprung im Massenzentrum der Erde durchgeführt.

Modellierung der astronomischen Gezeiten

Das gezeiteninduzierte Potential und die daraus resultierende Beschleunigung auf den Satelliten aufgrund der direkten gravitativen Wirkung von Drittkörpern, werden berechnet für Mond, Sonne, Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Die Berechnung beruht auf den Ephemeriden DE432 des JPL (Jet Propulsion Laboratory). Die JPL Development Ephemerides 432 (JPL DE432, Park et al., 2021) beinhalten die Positionen von Sonne und Mond sowie die Positionen der Baryzentren der Planetensysteme von Erde, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun mit ihren jeweiligen Geschwindigkeiten. Die Ephemeriden werden vom JPL regelmäßig angepasst. Aufgrund der vergleichsweise großen Entfernung des Satelliten zu den Drittkörpern wird das Gravitationsfeld als radialsymmetrisch angenommen. Die Beschleunigung \mathbf{a}_j , die ein Satellit aufgrund eines Drittkörpers j erfährt, ergibt sich dann aus

$$\mathbf{a}_j = -GM_j \left(\frac{\mathbf{r}_{\text{sat}} - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}} - \mathbf{r}_j\|^3} + \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (3.2)$$

mit den geozentrischen Koordinaten des Satelliten \mathbf{r}_{sat} bzw. des Drittkörpers \mathbf{r}_j . Die Planeten Uranus und Neptun werden aufgrund ihrer Entfernung nicht berücksichtigt (Lasser et al., 2020a).

Modellierung der Gezeiten der festen Erde

Der Effekt der festen Erdgezeiten auf den Satelliten wird durch eine Variation der Potentialkoeffizienten abhängig von den Lovezahlen nach IERS 2010 Konventionen (Petit und Luzum, 2010) modelliert. Aufgrund der Anelastizität des Erdmantels haben die Lovezahlen auch kleine Imaginärteile und es gibt eine Frequenzabhängigkeit, die sich besonders im langperiodischen Bereich zeigt. Die Berechnung des Effekts unterteilt sich in zwei Schritte: Im ersten Schritt werden die Koeffizienten aufgrund des gezeiteninduzierten Potentials für Grad 2 und 3, sowie der Effekt des Grads 2 auf die Koeffizienten von Grad 4 berechnet. Der Effekt der Gezeiten der festen Erde hängt von der Position der Sonne $\mathbf{r}_S = (r_S, \vartheta_S, \lambda_S)^T$ und des Mondes $\mathbf{r}_M = (r_M, \vartheta_M, \lambda_M)^T$ in geozentrischen Koordinaten ab. Es gilt für die Koeffizienten von Grad 2 und Grad 4

$$c_{2m} = \left[(k_{2m}^{\text{Re}} \cos(m\lambda_M) + k_{2m}^{\text{Im}} \sin(m\lambda_M)) P_{2m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^3 \right] \quad (3.3)$$

$$+ \left[(k_{2m}^{\text{Re}} \cos(m\lambda_S) + k_{2m}^{\text{Im}} \sin(m\lambda_S)) P_{2m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^3 \right] \quad (3.4)$$

$$s_{2m} = \left[(k_{2m}^{\text{Re}} \sin(m\lambda_M) - k_{2m}^{\text{Im}} \cos(m\lambda_M)) P_{2m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^3 \right] \quad (3.5)$$

$$+ \left[(k_{2m}^{\text{Re}} \sin(m\lambda_S) - k_{2m}^{\text{Im}} \cos(m\lambda_S)) P_{2m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^3 \right] \quad (3.6)$$

$$c_{4m} = \left[(k_{2m}^{(+)} \cos(m\lambda_M)) P_{2m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^3 \right] \quad (3.7)$$

$$+ \left[(k_{2m}^{(+)} \cos(m\lambda_S)) P_{2m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^3 \right] \quad (3.8)$$

$$s_{4m} = \left[(k_{2m}^{(+)} \sin(m\lambda_M)) P_{2m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^3 \right] \quad (3.9)$$

$$+ \left[(k_{2m}^{(+)} \sin(m\lambda_S)) P_{2m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{5 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^3 \right] \quad (3.10)$$

mit $m \in \{0, 1, 2\}$, und für die Koeffizienten von Grad 3 gilt

$$c_{3m} = \left[(k_{3m}^{\text{Re}} \cos(m\lambda_M) + k_{3m}^{\text{Im}} \sin(m\lambda_M)) P_{3m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{7 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^4 \right] \quad (3.11)$$

$$+ \left[(k_{3m}^{\text{Re}} \cos(m\lambda_S) + k_{3m}^{\text{Im}} \sin(m\lambda_S)) P_{3m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{7 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^4 \right] \quad (3.12)$$

$$s_{3m} = \left[(k_{3m}^{\text{Re}} \sin(m\lambda_M) - k_{3m}^{\text{Im}} \cos(m\lambda_M)) P_{3m}(\cos(\vartheta_M)) \frac{GM_M}{7 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_M||} \right)^4 \right] \quad (3.13)$$

$$+ \left[(k_{3m}^{\text{Re}} \sin(m\lambda_S) - k_{3m}^{\text{Im}} \cos(m\lambda_S)) P_{3m}(\cos(\vartheta_S)) \frac{GM_S}{7 GM_E} \left(\frac{a_E}{||\mathbf{r}_S||} \right)^4 \right] \quad (3.14)$$

mit $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ und den Legendre Funktionen P_{nm} . Die Werte für die Lovezahlen k_{nm}^{Re} , k_{nm}^{Im} , $k_{nm}^{(+)}$

werden den Konventionen des IERS 2010 (Petit und Luzum, 2010) entnommen. Im zweiten Schritt werden auch die frequenzabhängigen Korrekturen für Koeffizienten von Grad $n = 2$ berücksichtigt. Es gilt

$$\Delta c_{20} = \sum_{f_{\text{long periodic}}} \left(A_f^{\text{ip}} \cos(\theta_f) - A_f^{\text{op}} \sin(\theta_f) \right) \quad (3.15)$$

$$\Delta c_{21} = \sum_{f_{\text{diurnal}}} \left(A_f^{\text{ip}} \sin(\theta_f) + A_f^{\text{op}} \cos(\theta_f) \right) \quad (3.16)$$

$$\Delta s_{21} = \sum_{f_{\text{diurnal}}} \left(A_f^{\text{ip}} \cos(\theta_f) - A_f^{\text{op}} \sin(\theta_f) \right) \quad (3.17)$$

$$\Delta c_{22} = \sum_{f_{\text{semi diurnal}}} \left(A_f^{\text{ip}} \cos(\theta_f) \right) \quad (3.18)$$

$$\Delta s_{22} = \sum_{f_{\text{semi diurnal}}} \left(-A_f^{\text{ip}} \sin(\theta_f) \right) \quad (3.19)$$

$$\cdot \quad (3.20)$$

Die Amplituden A_f^{ip} und A_f^{op} der frequenzabhängigen Korrekturterme werden den IERS 2010 Konventionen (Petit und Luzum, 2010) entnommen. Die Doodsonwinkel $\theta_f = \langle \mathbf{n}_f, \beta \rangle$ werden nach Doodson (1921) dabei als ganzzahlige Linearkombination aus den sechs Parametern β_i (Doodson-Elemente) der Bewegung von Sonne und Mond im erdfesten System beschrieben, wobei

$\beta_1 = \tau$	mittlere Mondzeit (Periode: 1, 0351 d)
$\beta_2 = s$	mittlere ekliptikale Länge des Mondes
$\beta_3 = h$	mittlere ekliptikale Länge der Sonne
$\beta_4 = p$	mittlere ekliptikale Länge des Mondperigäums
$\beta_5 = N'$	mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Mondknotens
$\beta_6 = ps$	mittlere ekliptikale Länge des solaren Perigäums.

und n_i den ganzzahligen Multiplikatoren der Frequenz f entsprechen (Petit und Luzum, 2010).

Die finalen Koeffizienten ergeben sich dann aus der Addition der frequenzabhängigen Korrektur

$$c_{2m}^{\text{total}} = c_{2m} + \Delta c_{2m} \quad (3.21)$$

$$s_{2m}^{\text{total}} = s_{2m} + \Delta s_{2m}. \quad (3.22)$$

Das gezeitenerzeugende Potential weist zeitlich einen Mittelwert auf, der von Null verschieden ist. Dies führt zu einer permanenten Deformation der Erde und zu einem konstanten Gezeitenpotential der festen Erde. Abhängig davon, wie dieser konstante Anteil berücksichtigt wird, können unterschiedliche Gravitationsfeldlösungen berechnet werden. Das *Zero-Tide*-Gravitationspotential beinhaltet den Effekt der permanenten Gezeitenverformung der Erde, die zeitlich variierenden Komponenten werden reduziert. Bei einer *Mean-Tide*-Lösung werden der Effekt der permanenten Gezeiten sowie die dynamischen Gezeitenkomponenten berücksichtigt. Diese Lösung entspricht

dann einem langjährigen Mittel unter dem Gezeitenzwang. Das *Tide-Free*-Gravitationspotential schließt alle Gezeitenkomponenten aus, sowohl die permanenten als auch die zeitlich variierenden (Mayer-Gürr, 2006). Nach den IERS 2010 Konventionen (Petit und Luzum, 2010) wird die Modellierung des *Zero-Tide*-Gravitationspotentials empfohlen. Die Gravitationsfeldlösungen, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet werden, beziehen sich auf eine *Zero-Tide*-Lösung.

Modellierung der Ozeangezeiten

Zur Modellierung des Effekts der Gezeiten auf die Ozeane wird das FES2014b (Lyard et al., 2021) verwendet. Das *Finite Element Solution 2014b* (FES2014b) ist ein globales Gezeitenmodell, das Informationen zu den Gezeitenhöhen in Form der Amplituden und Phasen von 34 Gezeitenkomponenten beinhaltet. Außerdem liefert es die Strömungskomponenten und Gezeitenauflastungen auf einem $1/16^\circ$ Gitter zur Berechnung der geozentrischen elastischen Gezeiten aus ozeanischen Gezeiten und Auflastungen. Die Datengrundlage bilden langzeitliche Satellitenaltimetrie-Beobachtungen, Pegelraten, Bathymetrie und hydrodynamische Modelle zur Beschreibung der Strömungsvorgänge in Oberflächengewässern und der Lösung der Gezeitengleichungen. Das FES2014b beinhaltet 34 Gezeitenfrequenzen gemeinsam mit ihren Koeffizienten $c_{nm,f}^{\cos}$, $s_{nm,f}^{\cos}$ und $c_{nm,f}^{\sin}$, $s_{nm,f}^{\sin}$ von Grad $n = 2, \dots, 180$ und Phasen θ_f . Die sphärisch harmonischen Koeffizienten c_{nm} und s_{nm} werden aus der Summe über alle Gezeitenfrequenzen f entsprechend

$$c_{nm} = \sum_f [\cos(\theta_f) c_{nm,f}^{\cos} + \sin(\theta_f) c_{nm,f}^{\sin}] \quad (3.23)$$

$$s_{nm} = \sum_f [\cos(\theta_f) s_{nm,f}^{\cos} + \sin(\theta_f) s_{nm,f}^{\sin}] \quad (3.24)$$

berechnet. Die θ_f sind die Argumente der Gezeitenkomponenten f

$$\theta_f = \sum_{i=1}^6 n_f^i \beta_i, \quad (3.25)$$

mit den Doodson-Elementen β_i und den ganzzahligen Multiplikatoren n_f^i für die Frequenz f . Mithilfe der im FES2014b-Modell zur Verfügung gestellten Hauptkomponenten werden kleinere Gezeitenkomponenten linear interpoliert.

Modellierung hochfrequenter Massenänderungen (De-Aliasing)

Zur Unterscheidung der vertikalen Massenveränderungen und zur Reduzierung des zeitlichen Aliasing wird ein zeitlich variables Hintergrundmodell eingeführt. Im Rahmen des Atmosphere and Ocean De-Aliasing Level-1B (AOD1B, Dobslaw et al., 2017) Produkts werden Potentialkoeffizienten bis Grad und Ordnung 180 mit einer zeitlichen Auflösung von drei Stunden bereitgestellt. Es repräsentiert die nicht-gezeitenbedingte hochfrequente Massenvariabilität in der Atmosphäre und den Ozeanen. Das AOD1B-Produkt wird täglich aktualisiert und ist über die Website des International System and Data Center (ISDC) abrufbar.

Modellierung der Polgezeiten

Die Polgezeiten entstehen aufgrund des Zentrifugaleffekts der Polbewegung, führen zu einer Deformation der festen Erde und beeinflussen die Koeffizienten c_{21} und s_{21} . Der Effekt lässt sich nach IERS 2010 Konventionen (Petit und Luzum, 2010) berechnen über

$$c_{21} = -1,333 \cdot 10^{-9} ((x_P - \bar{x}_P) - 0,0115 (y_P - \bar{y}_P)) \quad (3.26)$$

$$s_{21} = 1,333 \cdot 10^{-9} ((y_P - \bar{y}_P) + 0,0115 (x_P - \bar{x}_P)) \quad (3.27)$$

mit den Wobble-Variablen m_1, m_2

$$m_1 = (x_P - \bar{x}_P) \quad m_2 = -(y_P - \bar{y}_P). \quad (3.28)$$

Zur Berechnung der Korrektur wird der säkulare Pol 2018 verwendet. Nach IERS (2018) gilt für den mittleren Pol zur Zeit t relativ zur Epoche J2000.0 mit den Koordinaten (\bar{x}_P, \bar{y}_P) in Bogensekunden

$$\bar{x}_P = 55,0 \cdot 10^{-3} + 1,677 \cdot 10^{-3}t \quad (3.29)$$

$$\bar{y}_P = 320,5 \cdot 10^{-3} + 3,460 \cdot 10^{-3}t \quad (3.30)$$

mit

$$t = \frac{t_{\text{MJD}} - t_{\text{MJD}_{2000}}}{365,25} \quad \text{mit } t_{\text{MJD}_{2000}} = 51544,5. \quad (3.31)$$

Die Polgezeiten beeinflussen auch die Ozeanmassen. Der Effekt auf die Koeffizienten ergibt sich aus

$$c_{nm} = R_n [A_{nm}^{\text{Re}} (m_1 \gamma_2^{\text{Re}} + m_2 \gamma_2^{\text{Im}}) + A_{nm}^{\text{Im}} (m_2 \gamma_2^{\text{Re}} - m_1 \gamma_2^{\text{Im}})] \quad (3.32)$$

$$s_{nm} = R_n [B_{nm}^{\text{Re}} (m_1 \gamma_2^{\text{Re}} + m_2 \gamma_2^{\text{Im}}) + B_{nm}^{\text{Im}} (m_2 \gamma_2^{\text{Re}} - m_1 \gamma_2^{\text{Im}})] \quad (3.33)$$

mit dem Faktor R_n

$$R_n = \frac{\omega_E^2 a_E^4 4\pi G \rho}{\text{GM}_E g_{\ddot{A}}} \left(\frac{1 + k'_n}{2n + 1} \right), \quad (3.34)$$

wobei ω_E die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Erde ist, G die Gravitationskonstante, ρ die Dichte des Ozeanwassers, $g_{\ddot{A}}$ die Schwere am Äquator und k'_n die Load-Lovezahlen sind. Die Amplituden $A_{nm}^{\text{Re}}, A_{nm}^{\text{Im}}, B_{nm}^{\text{Re}}, B_{nm}^{\text{Im}}$ werden dem Desai2004-Modell entnommen (Centre, 2019). Für γ_2 gilt nach Petit und Luzum (2010) $\gamma_2^{\text{Re}} = 0,6870$ und $\gamma_2^{\text{Im}} = 0,0036$.

Modellierung der atmosphärischen Gezeiten

Das atmosphärische Gezeitenpotential wird mithilfe des AOD1B RL06 Produkts berechnet. Für jede Gezeitenfrequenz f werden über das AOD1B-Produkt die Koeffizienten $c_{nm,f}^{\cos}, c_{nm,f}^{\sin}, s_{nm,f}^{\cos}, s_{nm,f}^{\sin}$ bereitgestellt. Die Koeffizienten berechnen sich analog zu den Koeffizienten der ozeanischen Gezeiten (s. Gleichung (3.23)).

Bestimmung relativistischer Korrekturen

Die relative hohe Geschwindigkeit der Satelliten in Verbindung mit der hohen Genauigkeitsanforderung an die Schwerefeldbestimmung erfordert eine relativistische Beschreibung der Bewegungsgleichung. Stattdessen können die relativistischen Effekte auch modelliert werden. Nach IERS 2010 Konvention (Petit und Luzum, 2010) berechnet sich die Korrektur für die Allgemeine Relativitätstheorie über

$$\mathbf{a}_{\text{Schwarzschild}} = \frac{\text{GM}_E}{c^2 \|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3} \left[\left(4 \frac{\text{GM}_E}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|} - \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \right) \mathbf{r}_{\text{sat}} + 4 (\mathbf{r}_{\text{sat}} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}}) \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \right] \quad (3.35)$$

$$\mathbf{a}_{\text{Lense Thirring}} = 2 \frac{\text{GM}_E}{c^2 \|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|^3} \left[\frac{3}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}}\|^2} (\mathbf{r}_{\text{sat}} \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}}) (\mathbf{r}_{\text{sat}} \cdot \mathbf{J}) + (\dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \times \mathbf{J}) \right] \quad (3.36)$$

$$\mathbf{a}_{\text{de Sitter}} = 3 \left[-\dot{\mathbf{r}}_S \times \left(\frac{\text{GM}_S}{c^2 \|\mathbf{r}_S\|^3} \mathbf{r}_S \right) \right] \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}} \quad (3.37)$$

mit

c	Lichtgeschwindigkeit
GM_E	Geozentrische Gravitationskonstante
$\mathbf{r}_{\text{sat}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{sat}}$	geozentrische Position und Geschwindigkeit des Satelliten
$\mathbf{r}_S, \dot{\mathbf{r}}_S$	geozentrische Position und Geschwindigkeit der Sonne
$\mathbf{J} = (0, 0, 9.8 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s})^T$	Drehmoment der Erde pro Einheitsmasse.

Die relativistischen Korrekturen in Form von Beschleunigungen ergeben sich dann aus der Summe der einzelnen Komponenten

$$\mathbf{a}_{\text{relativistic}} = \mathbf{a}_{\text{Schwarzschild}} + \mathbf{a}_{\text{Lense Thirring}} + \mathbf{a}_{\text{de Sitter}}. \quad (3.38)$$

3.3.2 Modellierung der nicht-konservativen Kräfte

Akzelerometer an Bord von LEO-Satelliten messen die nicht-konservativen Störkräfte entlang der Satellitenbahn. Alternativ dazu können die Störkräfte auch modelliert werden. Dies umfasst die Berechnung des direkten Strahlungsdrucks der Sonne und des Strahlungsdrucks, der von der Erde reflektierten Strahlung (Erdalbedo). Darüber hinaus wird die Reibung aufgrund des Luftwiderstands in der Bahnebene modelliert. Die Eigenschaften der Satellitenoberflächen werden dem Satellite-Model entnommen.

Modellierung der Reibungskräfte

Zur Modellierung der Reibungskräfte in der Bahnebene der Satelliten werden die Dichte, Temperatur und Geschwindigkeit der Moleküle in der Thermosphäre benötigt. Für die Parameter der Thermosphäre wird das Modell NRLMSIS2[®] (*Mass Spectrometer and Incoherent Scatter Radar*, Emmert et al., 2021) des *Naval Research Laboratory* (NRL) verwendet. Dabei handelt es sich um ein zeitabhängiges Modell, das zur Beschreibung der Atmosphäre von der Erdoberfläche bis zur Exosphäre reicht, und die Temperatur sowie die Gesamtmasse und Anzahldichte verschiedener Luftmoleküle in unterschiedlichen Höhen beschreibt. Unter Angabe des geografischen

Standorts und des Zeitpunkts können diese Parameter mithilfe des NRLMSIS2[®] interpoliert und der atmosphärische Zustand bestimmt werden. Zusätzlich wird zur Berechnung der Geschwindigkeit der Moleküle das *Horizontal Wind Model 2014* (HWM14, Drob et al., 2015) verwendet. Dabei handelt es sich um ein zeitabhängiges Modell zur Beschreibung der Thermosphärenwinde. Die Datengrundlage besteht aus Messungen von bodengestützten und raumgetragenen Systemen. Die bodengestützten Messungen des FPI (*Fabry-Perot-Interferometer*) und ISR (*Incoherent Scatter Radar*) werden mit satellitengetragenen Beobachtungen der reflektierten Strahlung und In-situ-Massenspektrometermessungen kombiniert, um die Windgeschwindigkeiten in der Atmosphäre zu bestimmen (Drob et al., 2015). Die Modellierung der Reibungskräfte auf den Satelliten erfolgt nach der Vorgehensweise von Moe und Moe (2005). Die Kraftkomponente F_d aufgrund des Luftwiderstands, die auf die Along-Track-Komponente a der Beschleunigung wirkt, ist abhängig von der Masse des Satelliten m

$$F_d = m a = \frac{1}{2} \rho V_i^2 C_d A_{\text{ref}}, \quad (3.39)$$

mit

ρ	Luftdichte in der Bahnebene
V_i	Geschwindigkeit der einfallenden Luftmoleküle relativ zum Satelliten
C_d	Luftwiderstandskoeffizient
A_{ref}	Referenzfläche des Satelliten.

Modellierung des solaren Strahlungsdrucks

Der Effekt des Strahlungsdrucks der Sonne auf den Satelliten wird unter Berücksichtigung der Reflexionen und Absorption an beleuchteten Satellitenoberflächenelementen modelliert. Die Strahlungsquelle Sonne wird dabei als punktförmig angenommen. Die Kraft $\mathbf{F}_{\text{SRP},k}$, die auf eine Oberfläche k des Satelliten aufgrund des solaren Strahlungsdruck wirkt, ergibt sich nach Wöske et al. (2019) aus

$$\mathbf{F}_{\text{SRP},k} = - \frac{q_{\text{in}}}{c} \cdot f_{\text{shadow},k} \cdot A_k \cdot \mathbf{e}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{e}_{N,k} \quad (3.40)$$

$$\cdot \left((\alpha_k + \gamma_{d,k}) \mathbf{e}_{\text{inc}} + 2 \left(\frac{\gamma_{d,k}}{3} + \gamma_{s,k} \mathbf{e}_{\text{inc}} \cdot \mathbf{e}_{N,k} \right) \mathbf{e}_{N,k} \right) \quad (3.41)$$

mit

$\mathbf{e}_{N,k}$	Normalenvektor der Oberfläche k
\mathbf{e}_{inc}	Einstrahlrichtung (Richtung Sonne)
α_k	Absorptionskoeffizient
$\gamma_{s,k}, \gamma_{d,k}$	Reflexionskoeffizienten (spiegelnde und diffuse Reflexion)
A_k	Fläche
$f_{\text{shadow},k}$	Binärer Faktor
c	Lichtgeschwindigkeit.

Der Faktor $f_{\text{shadow},k}$ gibt an, ob ein Element durch ein anderes Oberflächenelement abgeschattet ist, was mithilfe der Ray-Tracing-Methode bestimmt wird. Der Faktor q_{in} repräsentiert die

einfallende Strahlung am Satelliten und ist nach Wöske et al. (2019) mit

$$q_{\text{in}} = q_0 \cdot \left(\frac{1 \text{ AU}}{\|\mathbf{r}_{\text{sat}} - \mathbf{r}_{\text{sun}}\|} \right)^2 \quad (3.42)$$

gegeben. Die einfallende Strahlung q_{in} hängt ab von der Position des Satelliten \mathbf{r}_{sat} und der Sonne \mathbf{r}_{sun} sowie von der solaren Flusskonstanten $q_0 = 1367 \text{ W/m}^2$ (Russell, 2024) in der Distanz einer Astronomischen Einheit (Astronomical Unit, AU).

Modellierung des Strahlungsdrucks aufgrund des Erdalbedos (ALB) und Infrarot-Strahlung (IR)

Die Modellierung des Erdalbedos und der thermalen Strahlung basiert auf den Daten des *Clouds and the Earth's Radiant Energy System* (CERES) Projekts (Kizer, 2024). Anders als bei der Modellierung des Strahlungsdrucks der Sonne wird keine punktförmige Strahlungsquelle angenommen. Bei der Berücksichtigung des Erdalbedos (ALB) und der Infrarot-Strahlung (IR) werden die Teile der Erdoberfläche als Strahlungsquelle modelliert, die sich im Field of View des Satelliten befinden. Jeder Auflösungszelle auf der Erdoberfläche ij wird ein diffuser Reflexionskoeffizient ρ_{ij} und ein ausgehender IR-Fluss $q_{\text{IR},ij}$ zugeordnet. Analog zu (3.40) wird die Kraft des Strahlungsdrucks auf die Satellitenoberfläche abhängig vom Einfallswinkel berechnet. Die am Satelliten auftreffende Strahlung $q_{\text{in},ij}$ ist

$$q_{\text{in},ij} = \frac{P_{ij}}{\pi \|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{\text{sat}}\|^2} \cdot \cos \Phi_{\text{out},ij} \quad (3.43)$$

mit

$$\Phi_{\text{out},ij} = \arccos \left(\frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot (\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{\text{sat}})}{\|\mathbf{r}_{ij}\| \cdot \|\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{\text{sat}}\|} \right) \quad (3.44)$$

und der Stärke P_{ij} der von der Zelle mit Ortsvektor \mathbf{r}_{ij} ausgesendeten Strahlung. Die Reflexionskoeffizienten ρ_{ij} werden aus den CERES SYN1deg *Top of Atmosphere (TOA) all-sky Albedo* Zeitreihen entnommen. Für die Berechnung der Infrarot-Strahlung (IR) werden die CERES SYN1deg *TOA all-sky Longwave Flux* als $q_{\text{CERSIR},ij}$ verwendet (Kizer, 2024). Die Stärke der ausgesendeten Strahlung berechnet sich dann nach

$$P_{ij,\text{ALB}} = q_{\text{sun},ij} A_{ij} \cos(\Phi_{\text{in},ij}) \cdot \rho_{ij} \quad (3.45)$$

$$P_{ij,\text{IR}} = q_{\text{CERSIR},ij} \cdot A_{ij} \quad (3.46)$$

mit der Fläche A_{ij} der ij -ten Auflösungszelle (Wöske et al., 2019).

Modellierung des thermalen Strahlungsdrucks (TRP)

Auch für die Berechnung des thermalen Strahlungsdrucks (TRP) wird der Teil der Erdoberfläche als Strahlungsquelle angenommen, der sich im Field of View des jeweiligen Satelliten befindet. Für die Berechnung des TRP wird die Temperatur der Satellitenoberflächen benötigt. Die Modellierung nach Wöske et al. (2019) beruht auf der Annahme diffuser Strahlung von

Satellitenflächen, was auf die Kraft, die auf ein Flächenelement k wirkt, führt

$$\mathbf{F}_{\text{TRP},k} = -\frac{2}{3} \frac{A_k \varepsilon_k \sigma}{c} T_k^4 \mathbf{e}_{N,k} \quad (3.47)$$

mit

$\mathbf{e}_{N,k}$	Normalenvektor der Oberfläche k
ε_k	Emissionskoeffizient
T_k	Temperatur der Oberfläche k
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante.

4 Bestimmung der Gravitationsfeldparameter nach SAA

Im Rahmen dieser Arbeit werden basierend auf den kinematischen Positionen von LEO-Satelliten monatliche Lösungen für das Gravitationsfeld der Erde generiert. Die Bestimmung der vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten des Gravitationspotentials erfolgt mit dem Software-Toolkit GROOPS und orientiert sich an der Vorgehensweise in Mayer-Gürr et al. (2021b). Der Prozess lässt sich in fünf Schritte unterteilen: Im ersten Schritt werden die Daten aufbereitet und in Short-Arcs zusammengefasst (Kapitel 4.1.1). Im Anschluss werden die konservativen Störkräfte modelliert und zu einem Hintergrundfeld zusammengefügt (Kapitel 4.1.2). Basierend auf den epochenweisen Varianz-Kovarianzinformationen werden Vorbereitungen zur Formulierung des stochastischen Modells durchgeführt (Kapitel 4.1.3) und abschließend die vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten im Rahmen einer Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell bestimmt (Kapitel 4.1.4). Die Kombination einzelner Satelliten-Lösungen zu einem gemeinsamen Modell ist in Kapitel 4.1.5 beschrieben.

Zur Beurteilung der Qualität der generierten Monatslösungen werden Vergleiche im Orts- und Frequenzraum mit state-of-the-art Modellen, wie die Zeitreihe der ITSG-Grace2018-Modelle (Mayer-Gürr et al., 2018), durchgeführt. Die zugrundeliegenden Berechnungen sind in Kapitel 4.2 zusammengestellt.

4.1 Gravitationsfeldbestimmung mit GROOPS

GROOPS steht für *Gravity Recovery Object Oriented Programming System* und ist ein von der Technischen Universität Graz entwickeltes Software-Toolkit zur Auswertung und Analyse von Messdaten mit Raum- und Zeitbezug. Die Software wird zur Lösung komplexer geodätischer Aufgaben, beispielsweise zur Schwerefeldbestimmung aus terrestrischen Daten und Satellitendaten, zur Verarbeitung von GNSS-Rohdaten zu GNSS-Produkten, zur Orbitbestimmung von LEO-Satelliten sowie zur statistischen Analyse von Zeitreihen und Datensätzen mit Raumbezug verwendet. Der Quellcode wird kostenlos auf GitHub (<https://github.com/groops-devs/groops>) zur Verfügung gestellt.

Bei GROOPS handelt es sich um eine Command Line Application mit grafischer Benutzeroberfläche (Graphical User Interface, GUI). Über die GUI werden Konfigurationsdateien (Config-Files) im XML-Format erstellt. Diese Dateien enthalten eine Sequenz verschiedener modularer Programme, die mithilfe von Schleifen und Bedingungen zusammengesetzt werden können, um komplexe Aufgaben effizient zu lösen (Mayer-Gürr et al., 2021a, 2021b). Es besteht die Möglichkeit, direkt über die GUI die Command Line Application aufzurufen und ein GROOPS-Skript zu starten.

In dieser Arbeit werden mithilfe von GROOPS monatliche Lösungen für das Gravitationsfeld der Erde aus den kinematischen Orbits von LEO-Satelliten der Missionen GRACE und Swarm nach dem Short-Arc-Approach generiert. Auf der Grundlage der Anleitung in der Dokumentation von

GROOPS (Mayer-Gürr et al., 2021b) lässt sich dieser Prozess in fünf Schritte unterteilen, die im Folgenden genauer erläutert werden.

4.1.1 Datenvorverarbeitung

Für die Bestimmung des Gravitationsfelds der Erde nach dem Short-Arc-Approach werden neben den kinematischen Positionen der LEO-Satelliten und den zugehörigen Varianz-Kovarianz-informationen pro Epoche auch die reduziert-dynamischen Orbits, die Sternkamera- und Akzelerometerdaten benötigt. Um eine zuverlässige Schätzung der Gravitationsfeldparameter zu gewährleisten, ist eine sorgfältige Vorverarbeitung der Daten unerlässlich. In diesem Prozess werden die Daten auf Ausreißer untersucht und synchronisiert, bevor sie als Beobachtungen in den Ausgleichungsprozess zur Gravitationsfeldbestimmung eingeführt werden.

Die Akzelerometer messen die nicht-konservativen Beschleunigungen, die auf einen Satelliten wirken. Damit helfen sie bei der Trennung der Beiträge zur Kräftefunktion. Aufgrund von Hardware-Problemen und der hohen Empfindlichkeit des Akzelerometers der Swarm-Satelliten gegenüber Temperaturschwankungen (Bezděk et al., 2017) werden die Akzelerometerdaten in dieser Arbeit simuliert. Mit dem Programm *SimulateAccelerometer* werden aus den reduziert-dynamischen Orbits der LEO-Satelliten mit einer Auflösung von 10 s für jeden Tag eines Monats die nicht-konservativen Störkräfte nach der Vorgehensweise in Wöske et al. (2019) und Moe und Moe (2005) modelliert (s. Kapitel 3.3.2). Daneben wird für jeden Satelliten ein *Satellite-Model* benötigt, das die Eigenschaften der Satellitenoberflächen beschreibt.

Die nicht-konservativen Beschleunigungen werden in Bezug auf den Satellite-Reference-Frame berechnet. Dazu werden Sternkameradaten benötigt. Mithilfe der Klasse *EarthRotation* wird die Transformation zwischen Terrestrial-Reference-Frame (TRF) und Celestial-Reference-Frame (CRF) ermöglicht. Hierfür wird aus einer Zeitreihe der Earth-Orientation-Parameter (EOP) über ein Polynom dritten Grades interpoliert. Darüber hinaus wird die Position der Sonne relativ zur Erde und zum Satelliten benötigt. Diese Information wird aus den JPL DE432 Ephemeriden entnommen. Nach der Vorgehensweise in Kapitel 3.3.2 werden mit *radiationPressure* der Strahlungsdruck aufgrund der Sonnenstrahlung und der von der Erde reflektierten Strahlung, sowie mit *atmosphericDrag* die Reibung in der Bahnebene modelliert.

Als Ergebnis liefert *SimulateAccelerometer* eine Datei pro Tag, die mit einer zeitlichen Auflösung von 10 s die nicht-konservativen Beschleunigungen in x -, y - und z -Richtung in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ in Bezug auf den Satellite-Reference-Frame enthält.

Ausreißeranalyse

Im nächsten Schritt wird eine Ausreißeranalyse durchgeführt. Dazu wird zunächst die Auflösung der kinematischen Orbits von 1 s auf 5 s reduziert (Kapitel 5.3) und zu täglichen Bögen zusammengefasst. Im Anschluss werden die reduziert-dynamischen Orbits und die Sternkameradaten neu abgetastet, sodass sie zu den gleichen Epochen vorliegen wie die kinematischen Orbits. Dafür

wird ein Interpolationspolynom siebten Grades für die reduziert-dynamischen Orbits und zweiten Grades für die Sternkameradaten verwendet. Als Nächstes werden Differenzen $\Delta \mathbf{x}$ zwischen den kinematischen Orbits \mathbf{x}_{kin} und reduziert-dynamischen Orbits \mathbf{x}_{rdyn} nach

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{kin}} - \mathbf{x}_{\text{rdyn}} \quad (4.1)$$

gebildet. Diese Differenzen werden mit den Sternkameradaten in den Satellite-Reference-Frame transformiert. Mit *InstrumentRemoveEpochsByCriteria* wird die Ausreißeranalyse durchgeführt: Die Koordinatendifferenzen Δx , Δy und Δz werden in Bezug auf den Median betrachtet und gemäß

$$|\Delta x - \text{median}(\Delta x)| > 4 \cdot 1,4826 \cdot \text{mad}(\Delta x) \quad (4.2)$$

$$|\Delta y - \text{median}(\Delta y)| > 4 \cdot 1,4826 \cdot \text{mad}(\Delta y) \quad (4.3)$$

$$|\Delta z - \text{median}(\Delta z)| > 4 \cdot 1,4826 \cdot \text{mad}(\Delta z) \quad (4.4)$$

aus dem Datensatz entfernt. Hierfür wird die Median Absolute Deviation (MAD) verwendet: Dabei wird der Median aus den Koordinatendifferenzen berechnet und der betragsmäßige Unterschied jeder Koordinatendifferenz zum entsprechenden Median bestimmt. MAD ist der Median der betragsmäßigen Abweichungen. Der Median ist im Gegensatz zum arithmetischen Mittel deutlich robuster und eignet sich daher für die Ausreißeranalyse. Der Faktor 1,4826 liefert den Zusammenhang zwischen MAD und Standardabweichung von normalverteilten Daten x_{NV} . Es gilt nach Kashif et al. (2017)

$$\text{std}(x_{\text{NV}}) = 1,4826 \cdot \text{mad}(x_{\text{NV}}). \quad (4.5)$$

Mit einem Faktor vier wird eine relativ optimistische Ausreißeranalyse durchgeführt, es werden grob fehlerhafte Positionen entfernt. Im Weiteren Verlauf wird eine Varianzkomponentenschätzung durchgeführt, um im Rahmen der Ausgleichung einzelne Bogen mit vergleichsweise hohen Unsicherheiten herunterzugewichten. Mithilfe von *InstrumentSynchronize* werden die entsprechenden Epochen aus den kinematischen Orbits und den Kovarianzmatrizen entfernt.

Formation der Short-Arcs

Nach der Ausreißerentfernung werden die täglichen reduziert-dynamischen Orbits, die Sternkameradaten, die simulierten Akzelerometerdaten und die kinematischen Orbits mit zugehörigen Varianz-Kovarianzinformationen zu monatlichen Dateien zusammengefügt. Die kinematischen Positionen und ihre Varianz-Kovarianzen liegen in einer zeitlichen Auflösung von 5 s vor. Mithilfe von *InstrumentSynchronize* werden zunächst nur die monatlichen kinematischen Orbits und die zugehörigen Kovarianzen in Bogenstücke ohne Lücken eingeteilt. Eine Lücke wird dadurch definiert, dass mindestens 50 s zwischen aufeinanderfolgenden Epochen liegen, Bögen mit weniger als 10 Epochen werden nicht berücksichtigt.

Im Folgenden werden die Bogenstücke für den Short-Arc-Approach (vgl. Kapitel 2.2.2) formiert: Die reduziert-dynamischen Orbits, Sternkamera- und Akzelerometerdaten liegen monat-

lich mit einer einheitlichen Abtastung von 10 s vor. Diese Daten werden synchronisiert und in lückenlose Bogenstücke mit mindestens $\text{arcL}_{\min} = 60 \text{ Epochen} \hat{=} 10 \text{ min}$ und höchstens $\text{arcL}_{\max} = 270 \text{ Epochen} \hat{=} 45 \text{ min}$ unterteilt. Eine Lücke wird hierbei definiert als, dass mindestens 15 s zwischen aufeinanderfolgenden Epochen liegen. Die kinematischen Orbits und die zugehörige Varianz-Kovarianzinformation liegen aufgrund der Ausreißerentfernung mit unregelmäßiger Abtastung vor und werden daher nicht mit den anderen Daten synchronisiert. Sie werden allerdings auch in die gleiche Anzahl an Bögen innerhalb der gleichen Zeitintervalle geteilt. Alle weiteren Daten außerhalb der vorher definierten Bögen werden aus den Datensätzen entfernt.

4.1.2 Berechnung des Hintergrundfelds

Voraussetzung für die Bestimmung des Gravitationsfelds aus kinematischen Positionen von LEO-Satelliten ist, dass die Kräfte aufgrund des Gravitationsfelds der Erde von allen anderen wirkenden Kräften separiert werden. Vor der Ausgleichung wird daher der Beobachtungsvektor um die Kräfte reduziert, die nicht im Modell als Unbekannte parametrisiert werden. Die Reduktionen beinhalten den Effekt konservativer Störkräfte, die während der Prozessierung eines Hintergrundfelds ermittelt werden, und nicht-konservativer Kräfte, die vom Akzelerometer gemessen oder im Rahmen der Simulation von Akzelerometerdaten modelliert werden.

Im ersten Schritt wird ein zeitvariables Hintergrundmodell für einen Monat mit einer zeitlichen Auflösung von 10 min generiert. Zur Vermeidung räumlicher Leakage-Effekte wird ein a priori Gravitationsfeld, das GOCO06s (Kvas et al., 2021), bestehend aus statischen und zeitvariablen Koeffizienten, verwendet. Die statischen Koeffizienten werden von Grad $n = 0, \dots, 180$ und die zeitabhängigen Parameter von Grad $n = 2, \dots, 180$ eingeführt. Neben dem GOCO06s gehen weitere Modelle in die Berechnung des Hintergrundfelds ein. Die Zeitreihe der Koeffizienten des AOD1B-Produkts im Release 06 wird von Grad $n = 2, \dots, 180$ mit einer zeitlichen Auflösung von drei Stunden zur Reduzierung von zeitlichem Aliasing eingelesen. Der Effekt der Gezeiten auf die Koeffizienten wird für Grad $n = 2, \dots, 180$ berücksichtigt und wird entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 3.3 für die ozeanischen und atmosphärischen Gezeiten sowie die Polgezeiten modelliert.

Das Hintergrundfeld setzt sich additiv zusammen aus den statischen und zeitvariablen Koeffizienten des GOCO06s, den zeitabhängigen Koeffizienten des AOD1B-Produkts sowie den zeitlich variablen Gezeiten (ozeanische Gezeiten, atmosphärische Gezeiten und Polgezeiten) und wird in Potentialkoeffizienten bis Grad und Ordnung $n_{\text{BF}} = 180$ konvertiert. Zunächst werden für die Beschreibung der zeitlichen Variabilität der Potentialkoeffizienten 10 min-Timesplines für einen Monat geschätzt. Dazu werden lineare Splines und Knotenpunkte für die Zeitreihe im Rahmen einer Kleinst-Quadrat-Anpassung ermittelt. Das Hintergrundfeld wird im Ortsbereich durch die sphärisch harmonischen Koeffizienten und im Zeitbereich durch die geschätzten Splines präsentiert.

Im nächsten Schritt werden die 10min-Timesplines zur Modellierung der konservativen Störkräfte verwendet. Dafür werden der Einfluss der astronomischen Gezeiten, der Gezeiten der festen Erde und Korrekturen aufgrund relativistischer Effekte (s. Kapitel 3.3) addiert. Die hierüber modellierten konservativen Störkräfte werden als Reduktion an den kinematischen Positionen angebracht und führen mit den nicht-konservativen Kräften auf den reduzierten Beobachtungsvektor (Kapitel 4.1.3 und 4.1.4).

4.1.3 Vorbereitung zur Formulierung des stochastischen Modells

Die Vorbereitung der Daten ist damit abgeschlossen: Die präzisen kinematischen Orbitdaten, die zugehörigen Kovarianzinformationen, die reduziert-dynamischen Orbits, die Sternkamera- und die Akzelerometerdaten liegen mit einer konstanten Abtastung und ohne Lücke pro Short-Arc vor. Die kinematischen Positionen liegen nicht in konstanter Abtastung vor, daher werden die Beobachtungsgleichungen mithilfe eines Interpolationspolynoms siebten Grades interpoliert.

Im nächsten Schritt wird das stochastische Modell zur Beschreibung der Genauigkeit eines Bogenstücks basierend auf den 3×3 -Varianz-Kovarianzmatrizen pro Epoche formuliert. Mithilfe des Programms *PreprocessingPOD* wird eine erste Ausgleichung durchgeführt. Hierbei werden die unbekannten Parameter, bestehend aus den Koeffizienten bis Grad und Ordnung $n_{PP} = 10$ und den Parametern für den Akzelerometer-Bias, bestimmt. Dies erfordert das Aufstellen von Beobachtungsgleichungen pro Bogenstück. Dabei wird der Short-Arc-Approach (Kapitel 2.2.2) angewendet. Die Beobachtungsgleichungen für einen Short-Arc lauten damit

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{r}_A(1 - \tau) + \mathbf{r}_B\tau - T^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') (\mathbf{f}_0(\tau') + \nabla V(\tau')) d\tau' \quad (4.6)$$

mit der Länge des Bahn Bogens $T = t_B - t_A$ sowie der normierten Zeit τ

$$\tau = \frac{t - t_A}{T} \quad \text{mit } \tau \in [0, 1]. \quad (4.7)$$

Für den Integralkern K gilt

$$K(\tau, \tau') = \begin{cases} \tau' (1 - \tau) & \text{für } \tau' \leq \tau \\ \tau (1 - \tau') & \text{für } \tau' > \tau. \end{cases} \quad (4.8)$$

Die Beobachtungen \mathbf{r} entsprechen den kinematischen Positionen und werden um den Einfluss der Störkräfte \mathbf{f}_0 , die auf den Satelliten wirken und nicht aufgrund der Erdgravitationsfelds auftreten, reduziert. Diese Kräfte werden unterteilt in konservative und nicht-konservative Kräfte und werden aus den Hintergrundmodellen (Kapitel 3.3) berechnet.

Das Integral in den Beobachtungsgleichungen (4.6) wird gelöst durch Integration eines fortlaufenden Interpolationspolynoms von Grad 7. Das unbekannte Gravitationpotential V , parametrisiert durch die Potentialkoeffizienten bis Grad und Ordnung $n_{PP} = 10$, und die auf den

Satelliten wirkenden Störkräfte werden an den reduziert-dynamischen Positionen evaluiert. Daneben werden die statischen und zeitvariablen Koeffizienten des GOCO06s, interpoliert auf die Monatsmitte, als Gradientenfeld bis Grad und Ordnung 10 eingelesen, um die Änderung der Gravitation durch die Positionsanpassung zu berücksichtigen. Zusätzlich zu den Gravitationsfeldparametern, bestehend aus den vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten, werden pro Bogenstück sechs Bahnparameter für die unbekannten Randwerte \mathbf{r}_A und \mathbf{r}_B , sowie jeweils ein Parameter zur Schätzung des Akzelerometer-Bias pro Achse und Bogen, zur Kompensation von Modellfehlern, eingeführt. Die bogenspezifischen Bahnparameter und die Akzelerometerparameter werden vor der Akkumulation der Normalgleichungen pre-eliminiert.

Das stochastische Modell setzt sich bei *PreprocessingPOD* zunächst aus den 3×3 -Varianz-Kovarianzmatrizen pro Epoche zusammen. Es wird eine erste Lösung für die Parameter $\hat{\mathbf{x}}$ aus den reduzierten kinematischen Positionen, zusammengefasst im Beobachtungsvektor \mathbf{l}_k , bestimmt. Die Residuen $\hat{\mathbf{e}}_k$ reflektieren alle stochastischen und funktionalen Modelldefizite (Lasser et al., 2020b) und ergeben sich aus der Designmatrix \mathbf{A}_k für einen Bogen k

$$\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{l}_k - \mathbf{A}_k \cdot \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.9)$$

Es werden empirische Kovarianzfunktionen für die kinematischen Satellitenpositionen und bogenweise Unsicherheiten bestimmt, um Bögen mit großer Varianz in der Ausgleichung heruntergewichtet (Kapitel 2.4.2). Darüber hinaus wird die zeitliche Korrelation der kinematischen Positionen x , y , und z ermittelt. Es werden jeweils along, across und in radiale Richtung zur Bahn zeitabhängige empirische Kovarianzfunktionen $\text{cov}_{3 \times 3}$ für das Rauschen nach

$$\text{cov}_{3 \times 3}(\Delta t_i) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 \cos\left(\frac{\pi}{T} n \Delta t_i\right) \quad \text{mit } \Delta t = 5 \text{ s} \quad (4.10)$$

geschätzt. Hierfür werden die Residuen verwendet. Mithilfe der Kosinustransformation werden die N zeitdiskreten Koordinaten in den Frequenzraum transformiert. Die Kovarianzmatrix Σ für einen Bogen setzt sich additiv nach

$$\Sigma = a_1^2 \cdot \mathbf{F}_1 + a_2^2 \cdot \mathbf{F}_2 + \dots + a_N^2 \cdot \mathbf{F}_N \quad (4.11)$$

zusammen aus den unbekannten Varianzfaktoren a_N^2 und der Kosinustransformationsmatrix \mathbf{F}_N , bestehend aus den Einträgen an der Stelle ik

$$\mathbf{F}_N = \left(\cos\left(\frac{\pi}{T} n (t_i - t_k)\right) \right)_{ik}. \quad (4.12)$$

Außerdem wird für jeden Bogen k die Varianz $\hat{\sigma}_k^2$ zur Gewichtung der Bögen mit der Redundanz r_k nach

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_k^T \Sigma^{-1} \hat{\mathbf{e}}_k}{r_k} \quad (4.13)$$

berechnet (Mayer-Gürr et al., 2021a).

4.1.4 Bestimmung der Gravitationsfeldparameter

Nach der Modellierung des Rauschens in den Beobachtungsdaten liegen nun neben den 3×3 -Varianz-Kovarianzmatrizen auch empirische Kovarianzfunktionen zur Beschreibung des Rauschens und Varianzfaktoren für die einzelnen Bögen vor. Es folgt im nächsten Schritt die Bestimmung der unbekannten Parameter im Rahmen einer Ausgleichung im linearisierten Gauss-Markov-Modell.

Analog zu Schritt 3 nach Gleichungen (4.6) bis (4.8), werden für die einzelnen Bögen k Beobachtungsgleichungen im linearisierten Gauß-Markov-Modell gebildet. Das linearisierte und dekorrelierte Beobachtungsgleichungssystem für einen Bogen k lautet

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k + \mathbf{e}_k. \quad (4.14)$$

Die bogenspezifischen Parameter \mathbf{y}_k werden eliminiert und die Normalgleichungen zu einem Normalgleichungssystem mit \mathbf{N}_s und \mathbf{n}_s für einen Satelliten s akkumuliert über

$$\mathbf{N}_s = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \quad \mathbf{n}_s = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k^T \mathbf{l}_k. \quad (4.15)$$

Das stochastische Modell für jeden Bogen k setzt sich aus verschiedenen Komponenten zusammen: Es werden die zeitabhängigen Kovarianzfunktionen along, across und radial zur Bahnrichtung sowie die epochenweisen 3×3 -Kovarianzmatrizen und bogenweise Varianzfaktoren σ_k kombiniert. Dazu werden die zeitabhängigen Kovarianzfunktionen $\text{cov}_x(t)$, $\text{cov}_y(t)$ und $\text{cov}_z(t)$, bestehend aus Diagonalmatrizen zu jeder Epoche t und für jede Achse x , y , z

$$\text{cov}_{3 \times 3}(t) = \text{diag}(\text{cov}_x(t), \text{cov}_y(t), \text{cov}_z(t)) \quad (4.16)$$

mit einer zeitlichen Auflösung von $\Delta t = 5 \text{ s}$, zu Toeplitz-Kovarianz-Matrizen zur Beschreibung der zeitlichen Korrelationen für einen Bogen kombiniert nach

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \text{cov}(t_0) & \text{cov}(t_1) & \cdots & & & \\ \text{cov}(t_1) & \text{cov}(t_0) & \text{cov}(t_1) & \cdots & & \\ \cdots & \text{cov}(t_1) & \text{cov}(t_0) & \text{cov}(t_1) & \cdots & \\ & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Die epochenweisen 3×3 -Kovarianzmatrizen $\mathbf{C}_{3 \times 3}(t)$ werden über eine Eigenwertzerlegung in eine orthogonale Matrix \mathbf{Q} und eine Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda}$ nach

$$\mathbf{C}_{3 \times 3}(t_i) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (4.18)$$

umgeformt. Im nächsten Schritt wird mit

$$\mathbf{C}_{3 \times 3}(t_i) = \mathbf{D}(t_i) \cdot \mathbf{D}(t_i)^T = \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \right) \cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{Q}^T \right)^T \quad (4.19)$$

eine Block-Diagonal-Matrix \mathbf{D}_k pro Bogen k gebildet nach

$$\mathbf{D}_k = \text{diag} (\mathbf{D}(t_1), \mathbf{D}(t_2), \dots). \quad (4.20)$$

Die vollständige Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k für einen Bogen ergibt sich dann nach Mayer-Gürr et al. (2021b) aus

$$\mathbf{C}_k = \sigma_0^2 \sigma_k^2 \cdot \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_k^T \quad \text{mit } \sigma_0^2 = 1. \quad (4.21)$$

Entsprechend der Vorgehensweise in Kapitel 2.4.1 werden anschließend die Normalgleichungen invertiert, eine Lösung für die Parameter bestimmt und Informationen zu ihren Genauigkeiten abgeleitet. Die Beobachtungen werden vor der Ausgleichung um den Einfluss der konservativen und nicht-konservativen Störkräfte reduziert. Die Modellierung der konservativen Störkräfte beinhaltet auch das a priori Gravitationsfeld GOCO06s. Demnach können die im Rahmen der Ausgleichung ermittelten vollständig normierten Koeffizienten als Zuschläge zu den Koeffizienten des GOCO06s verstanden werden. Die Koeffizienten des Gravitationspotentials ergeben sich dann aus der Addition der GOCO-Koeffizienten. Die Koeffizienten C_{00}, C_{10}, C_{11} werden nicht bestimmt. Die ersten vier Koeffizienten werden zu 1 bzw. 0 entsprechend der Konvention des GOCO06s festgelegt.

4.1.5 Kombination der Lösungen mehrerer Satelliten

Zur Bestimmung einer gemeinsamen Lösung für das Gravitationsfeld werden die einzelnen Lösungen verschiedener Satelliten s auf Normalgleichungsebene kombiniert. Zur Gewichtung der einzelnen Lösungen wird eine Varianzkomponentenschätzung durchgeführt. Mit den Varianzkomponenten σ_s^2 ergibt sich das Normalgleichungssystem dann aus

$$\mathbf{N}_{\text{total}} = \sum_{s=1}^S \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{N}_s \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_{\text{total}} = \sum_{s=1}^S \frac{1}{\sigma_s^2} \mathbf{n}_s. \quad (4.22)$$

Das Normalgleichungssystem wird gelöst und führt auf die Parameter des Gravitationspotentials in Form von vollständig normierten Koeffizienten. Durch Addition der GOCO-Koeffizienten ergeben sich Koeffizienten bis Grad und Ordnung 60 zur Beschreibung des Gravitationspotentials eines Monats, bezogen auf die Monatsmitte.

4.2 Vergleich von Gravitationsfeldlösungen

Zur Beurteilung der Qualität der mit GROOPS erstellten Gravitationsfeldlösungen für einen Monat wird das entsprechende Monatsmodell der ITSG-Grace2018 Reihe (Mayer-Gürr et al., 2018) bis Grad und Ordnung 120 verwendet. Diese können als Modelle mit übergeordneter Genauigkeit betrachtet werden, da sie zusätzlich zu den kinematischen Positionen der GRACE-Satelliten auch die K-Band-Messungen zur Bestimmung der Abstandsänderungen zwischen den GRACE-Satelliten beinhalten. Der Vergleich der Monatslösungen wird im Orts- und Frequenzraum durchgeführt. Im Ortsraum werden die Differenzen in Form von Geoidhöhen auf einem

globalen Gitter betrachtet. Im Frequenzraum gelingt der Vergleich durch Betrachtung der Gradamplituden bzw. der Differenzen der Gradamplituden zum ITSG-Grace-Modell gemeinsam mit ihren Fehlern in Bezug auf Geoidhöhen.

4.2.1 Vergleich im Ortsraum

Für die Synthese des Gravitationsfelds auf das Ellipsoid wird ein Gitter mit einer Rasterweite von $0,5^\circ$ definiert. Dadurch gelingt die Darstellung der Geoidhöhendifferenzen global und es ergeben sich 360×720 -Gitterpunkte. Die Gitterpunkte beziehen sich auf den Mittelpunkt der Breiten- und Längenblöcke.

Zur Unterdrückung des Rauschens in höheren Graden wird ein Glättungsfilter nach Jekeli (1981) und Wahr et al. (1998) verwendet. Die Gauß-Glättung wird direkt auf die vollständig normierten sphärisch harmonischen Koeffizienten C_{nm} und S_{nm}

$$\begin{Bmatrix} C_{nm}^{\text{Gauß}} \\ S_{nm}^{\text{Gauß}} \end{Bmatrix} = W_n(\psi_S) \cdot \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

angewendet. Die Gewichtung ist dabei gradabhängig und wird rekursiv definiert über

$$W_0 = 1 \quad (4.24)$$

$$W_1 = \frac{1 + e^{-2 \cdot b}}{1 - e^{-2 \cdot b}} - \frac{1}{b} \quad (4.25)$$

$$W_{n+1} = -\frac{2n+1}{b} \cdot W_n + W_{n-1} \quad (4.26)$$

mit

$$b = \frac{\ln 2}{1 - \cos(\psi_S)}. \quad (4.27)$$

Im Ortsbereich wirkt dieser Filter wie ein gewichteter Mittelwertfilter. Der Grad der Glättung ist abhängig vom Radius der Filterkappe. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die vollständig normierten Koeffizienten mit einem Filterradius von 500 km geglättet. Dies führt auf $\psi_S = 4,4966^\circ$.

Die gefilterten Koeffizienten werden anschließend auf das vorher definierte Gitter mithilfe des Zusammenhangs in Gleichung (2.3) synthetisiert. An Stelle des Faktors $\frac{GM}{r}$ wird der Radius $r = 6378137 \text{ m}$ (große Halbachse des Referenzellipsoids GRS80, Moritz, 2000) verwendet und es ergeben sich Geoidhöhen bezüglich des GRS80 bzw. Geoidhöhenunterschiede, die über die Robinson-Projektion global dargestellt werden.

Neben der Synthese auf dem Ellipsoid werden statistische Kenngrößen nach Niemeier (2008) zur Beurteilung der Übereinstimmung zweier Gravitationsfeldlösungen bestimmt. Aufgrund der unterschiedlich großen Auflösungszellen im Gitter werden die Werte gewichtet. Die Gewichtung

w_i der Gitterwerte x erfolgt dabei anhand der Breite φ

$$w_i = \cos(\varphi_i). \quad (4.28)$$

Das gewichtete arithmetische Mittel \bar{x}_w ist

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{360} \sum_{j=1}^{720} w_i \cdot x_{ij}}{\sum_{i=1}^{360} w_i}. \quad (4.29)$$

Neben dem gewichteten arithmetischen Mittelwert wird auch der gewichtete quadratische Mittelwert (Root Mean Square, RMS) nach

$$\text{RMS}_w = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{360} \sum_{j=1}^{720} (w_i \cdot x_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{360} w_i}} \quad (4.30)$$

berechnet. Zur Quantifizierung der Streuung der Unterschiede zweier Gravitationsfeldlösungen wird die Standardabweichung

$$\text{std}_w(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{360} \sum_{j=1}^{720} (w_i \cdot (x_{ij} - \bar{x}_w))^2}{\sum_{i=1}^{360} w_i}} \quad (4.31)$$

ermittelt. Entspricht $\bar{x}_w \approx 0$, so gilt für $\text{RMS}_w \approx \text{std}_w$. Darüber hinaus werden auch minimale $\min(x)$ und maximale $\max(x)$ Abweichung zur Beurteilung der Übereinstimmung zweier Gravitationsfeldlösungen im Ortsbereich betrachtet.

4.2.2 Vergleich im Frequenzraum

Die Entwicklung des Gravitationspotentials in Kugelfunktionen (Kapitel 2.1) entspricht einer spektralen Zerlegung. Die Gradamplituden charakterisieren das Signal im Frequenzbereich. Durch den Vergleich mit den zugehörigen Fehlergradamplituden lässt sich das Signal-Rausch-Verhältnis evaluieren. Für den Vergleich von Gravitationsfeldlösungen im Frequenzbereich werden daher absolute und relative Gradamplituden berechnet. Die absoluten Gradamplituden ergeben sich aus den vollständig normierten Kugelfunktionskoeffizienten C_{nm} und S_{nm} von Grad n und Ordnung m nach

$$c_n = r \cdot \sqrt{\sum_{m=0}^n (C_{nm}^2 + S_{nm}^2)} \quad (4.32)$$

und die relativen Gradamplituden einer Monatslösung zur Quantifizierung des Unterschieds zwischen zwei Gravitationsfeldlösungen entsprechend aus

$$\Delta c_n = r \cdot \sqrt{\sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2)} \quad (4.33)$$

mit

$$\Delta C_{nm} = C_{nm_1} - C_{nm_2} \quad (4.34)$$

$$\Delta S_{nm} = S_{nm_1} - S_{nm_2}. \quad (4.35)$$

Analog dazu ergeben sich die absoluten Fehlergradamplituden aus

$$\sigma_n(c_n) = r \cdot \sqrt{\sum_{m=0}^n (\sigma^2(C_{nm}) + \sigma^2(S_{nm}))} \quad (4.36)$$

als Maß für die Fehler eines Modells. Als Faktor wird der Radius r (große Halbachse GRS80) verwendet, um ein metrisches Maß in Bezug auf Geoidhöhen bzw. Geoidhöhenunterschiede zu erhalten.

Zusätzlich werden zur Betrachtung der Unterschiede im Frequenzraum auch Variationskoeffizienten berechnet. Diese ergeben sich aus den relativen Gradamplituden Δc_n im Verhältnis zu den absoluten Gradamplituden eines Modells mit übergeordneter Genauigkeit c_{n_0} . Es gilt für die Variationskoeffizienten $\text{var}(c_n)$

$$\text{var}(c_n) = \frac{\Delta c_n}{c_{n_0}}. \quad (4.37)$$

5 Evaluierung der monatlichen Gravitationsfeldlösungen

Nach der Vorgehensweise in Kapitel 4 werden mit GROOPS verschiedene Monatslösungen auf der Basis von kinematischen Orbits der Missionen GRACE und Swarm erstellt. Zur Evaluierung der Genauigkeit werden Vergleiche im Orts- und Frequenzraum mit den ITSG-Grace2018-Modellen (Mayer-Gürr et al., 2018) durchgeführt. Tabelle 5.1 enthält eine Übersicht zu den durchgeführten Untersuchungen, deren Ergebnisse in den folgenden Kapiteln dargestellt und interpretiert werden.

Tabelle 5.1: Übersicht über die durchgeführten Untersuchungen. n_{\max} steht für den maximalen Entwicklungsgrad der ermittelten Koeffizienten, n_{BF} für den Entwicklungsgrad des Hintergrundfelds und arcL_{\max} für die maximale Bogenlänge im Short-Arc-Approach.

Kapitel	Zeitraum	n_{\max}	Orbits	arcL_{\max}	n_{BF}
5.1	2016-07	20, 40, 60, 80, 100	5 s Swarm (IFG)	45 min	20, ..., 100 bzw. 180
5.2	2016-07	60	5 s Swarm (IFG)	15 bis 240 min	180
5.3	2016-07	60	1 s Swarm (IFG) 5 s Swarm (IFG) 10 s Swarm (IFG)	45 min	180
5.4	2016-07	60	5 s Swarm (IFG) 10 s Grace (IFG)	45 min	180
5.5	2015 2016	60	5 s Swarm (IFG)	45 min	180
5.6	2016-07 2021-07	60	5 s Swarm (IFG) 5 s Swarm (AIUB)	45 min	180

5.1 Untersuchungen zum maximalen Entwicklungsgrad

Mithilfe von kinematischen Positionen von LEO-Satelliten können ausschließlich langwellige Strukturen im Schwerfeld beobachtet werden. Zur Untersuchung des maximalen Entwicklungsgrads des Gravitationspotentials werden kombinierte Monatslösungen, basierend auf den kinematischen Positionen der drei Swarm-Satelliten vom IFG der Technischen Universität Graz mit

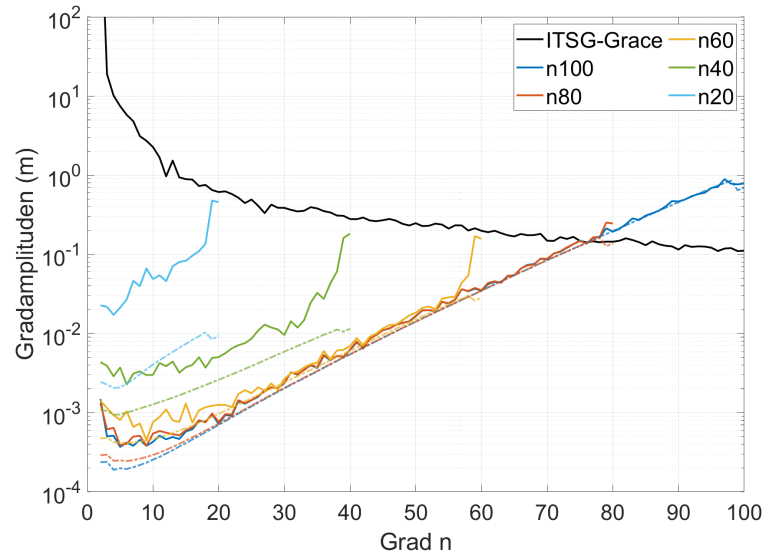
einer zeitlichen Auflösung von 5 s, für Juli 2016 mit unterschiedlichen maximalen Entwicklungsgraden bestimmt und verglichen.

Aus den kinematischen Positionen der drei Swarm-Satelliten werden monatliche Gravitationsfeldlösungen bis Grad und Ordnung $n_{\max} = 20, 40, 60, 80, 100$ generiert. Hierbei werden zwei Szenarien betrachtet: Einmal wird das Gravitationsfeld in Bezug auf ein Hintergrundfeld zur Modellierung der konservativen Kräfte mit dem gleichen maximalen Entwicklungsgrad bestimmt. Im zweiten Szenario werden die konservativen Kräfte deutlich höher entwickelt und bis Grad und Ordnung $n_{\text{BF}} = 180$ eingeführt. Die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells sowie die Differenzen der einzelnen Lösungen sind mit ihren Fehlergradamplituden in Abbildung 5.1 dargestellt. Es zeigt sich, dass die Übereinstimmung der kombinierten Swarm123-Modelle mit dem ITSG-Grace-Modell mit zunehmendem Entwicklungsgrad n_{\max} wächst. Ebenso verbessert sich die Genauigkeit der Modelle deutlich, wenn das Gravitationspotential bis zu einem höheren Grad entwickelt wird. Die Koeffizienten höheren Grades beeinflussen also auch die Koeffizienten niedriger Grade. Zu Erkennen ist auch der Effekt des Omission Errors: Der Abbruch der Kugelfunktionsentwicklung bei Grad n_{\max} verursacht einen Fehler, der das verbleibende Signal ab Grad $(n_{\max} + 1)$ repräsentiert und die Schätzung der Koeffizienten niedriger Grade beeinflusst. Die Abweichungen zum Referenzmodell steigen dann für Koeffizienten kurz vor n_{\max} stark an. Dieser Fehler kann verringert werden, wenn die konservativen Kräfte höher entwickelt werden. Unterschiede zeigen sich auch bei der Betrachtung der Fehlergradamplituden. Werden die konservativen Kräfte bis $n_{\text{BF}} = 180$ eingeführt, liegen die Fehlergradamplituden in einem Band (Abbildung 1(b)).

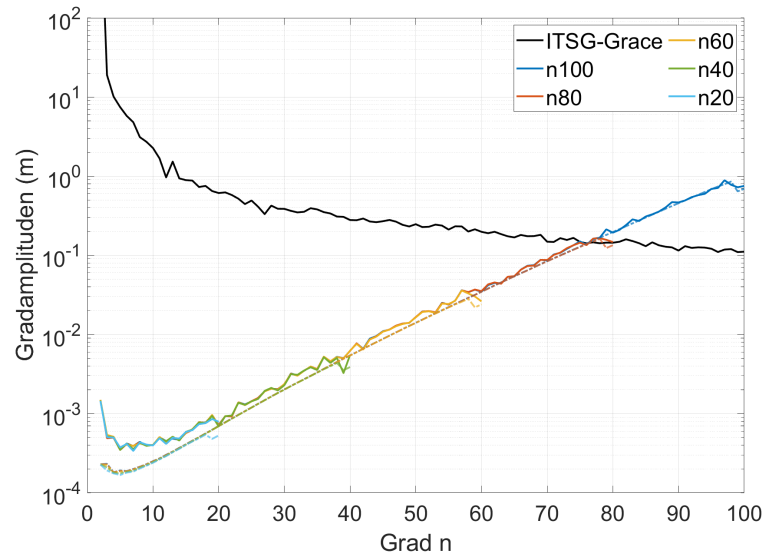
Die Untersuchungen zeigen, dass der relevante Signalgehalt des Gravitationspotentials basierend auf kinematischen Orbits bis etwa Grad und Ordnung $n = 40$ enthalten ist (Abbildung 5.1). Ab etwa Grad $n = 40$ liegen die Fehlergradamplitude und die Differenz-Gradamplituden in einem Band, das Signal wird von Rauschen überlagert. Außerdem zeigt sich, dass wenn die konservativen Kräfte hoch aufgelöst werden, die Potentialkoeffizienten besser bestimmt werden können. Zur Untersuchung weiterer Einflussfaktoren wird daher das Hintergrundfeld bis $n_{\text{BF}} = 180$ eingeführt und monatliche Lösungen für das Gravitationsfeld der Erde bis Grad und Ordnung $n = 60$ bestimmt. Damit liegt der maximale Entwicklungsgrad zwar weit über dem erwartbaren Signalgehalt, allerdings kann so verhindert werden, dass der Omission Error die Koeffizienten niedrigen Grades beeinflusst. Zur Unterdrückung des hochfrequenten Rauschens wird ein Gauß-Filter auf die vollständig normierten Koeffizienten vor der Synthese in den Ortsbereich angewendet.

Der Effekt der Filterung auf die Koeffizienten wird durch Betrachtung der Koeffizientendreiecke, die die Differenzen im Betrag zum ITSG-Grace-Modell beinhalten, ersichtlich. Ohne Filterung ergeben sich für die Koeffizienten hohen Grades starke Abweichungen (Abbildung 5.2). Dies wirkt sich im Ortsbereich durch hohe Geoidhöhenunterschiede in kleinräumigen Strukturen aus. Über eine gradabhängige Filterung (Kapitel 4) werden die Koeffizienten mit unterschiedlichen Filterradien geglättet, um hochfrequente Rauschanteile abzuschwächen. In Abbildung 5.3 ist der Effekt der Filterung im Ortsraum und der direkte Einfluss der Filterung auf die Koeffi-

zientendifferenzen visualisiert. Der Filterradius variiert zwischen 300 und 500 km. Im Ortsbereich wirkt der Filter wie ein Mittelwertfilter, mit zunehmendem Radius werden feinräumige Strukturen geglättet. In den Koeffizientendifferenzen zeigt sich der Effekt der Filterung auf die einzelnen Koeffizienten. Mit zunehmendem Radius werden Koeffizienten hohen Grades stärker abgeschwächt. Für weitere Vergleiche werden im Rahmen dieser Arbeit Gauß-Filter mit einem Radius von 500 km verwendet. Dies entspricht einer Abschwächung der Koeffizienten ab Grad 40.

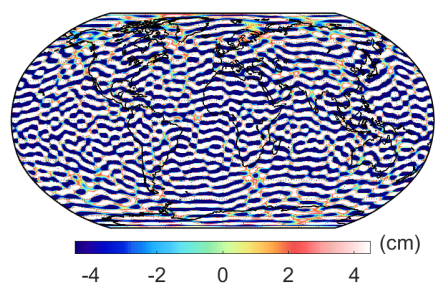


(a) Szenario 1

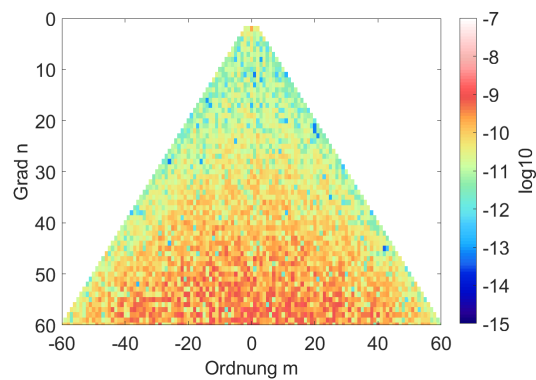


(b) Szenario 2

Abbildung 5.1: Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Swarm123-Lösungen mit unterschiedlichem maximalen Entwicklungsgrad und ihren Fehlergradamplituden (Juli 2016).

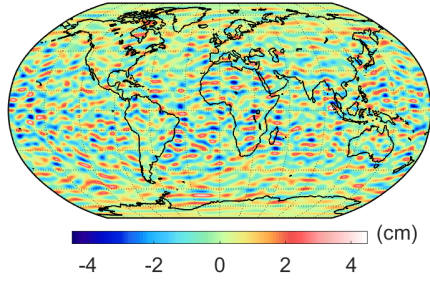


(a) Geoidhöhenunterschiede (ungefiltert)

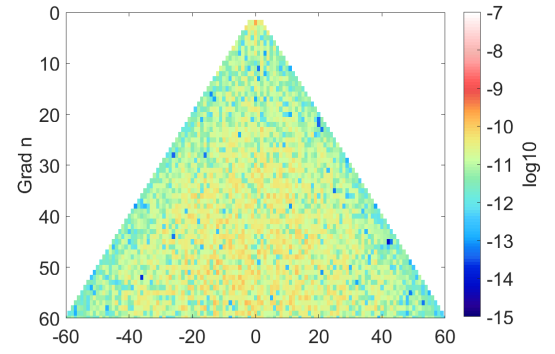


(b) Absolute Differenzen der Koeffizienten (ungefiltert)

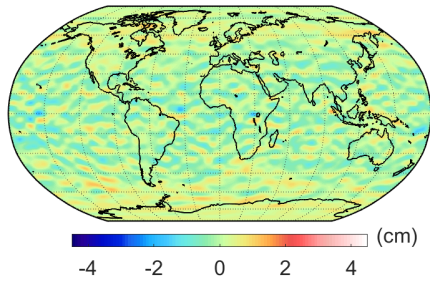
Abbildung 5.2: Darstellung ungefilterter Koeffizientendifferenzen (rechts) sowie deren Synthese in den Ortsbereich (links). Die Differenzen beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösung (Swarm123, Juli 2016).



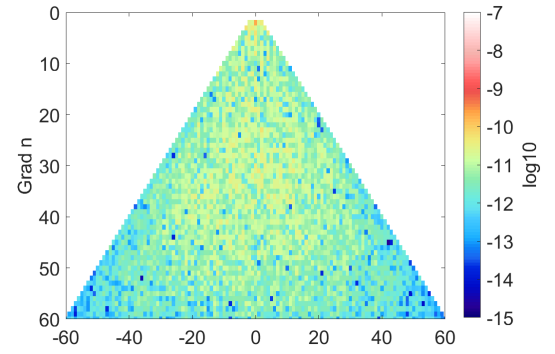
(a) Geoidhöhenunterschiede, 300 km Gauß-Filter



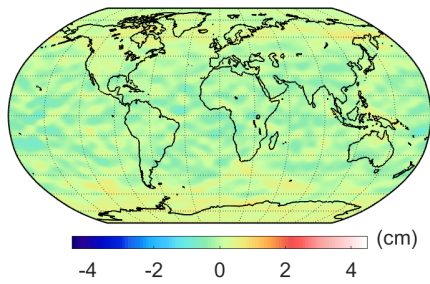
(b) Koeffizientendifferenzen, 300 km Gauß-Filter



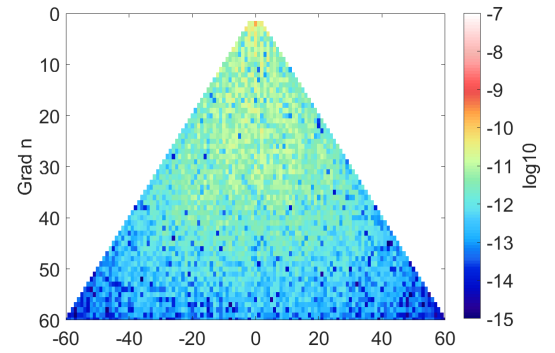
(c) Geoidhöhenunterschiede, 400 km Gauß-Filter



(d) Koeffizientendifferenzen, 400 km Gauß-Filter



(e) Geoidhöhenunterschiede, 500 km Gauß-Filter



(f) Koeffizientendifferenzen, 500 km Gauß-Filter

Abbildung 5.3: Darstellung gefilterter Koeffizientendifferenzen (rechts) sowie deren Synthese in den Ortsbereich (links). Die Differenzen beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösung (Swarm123, Juli 2016).

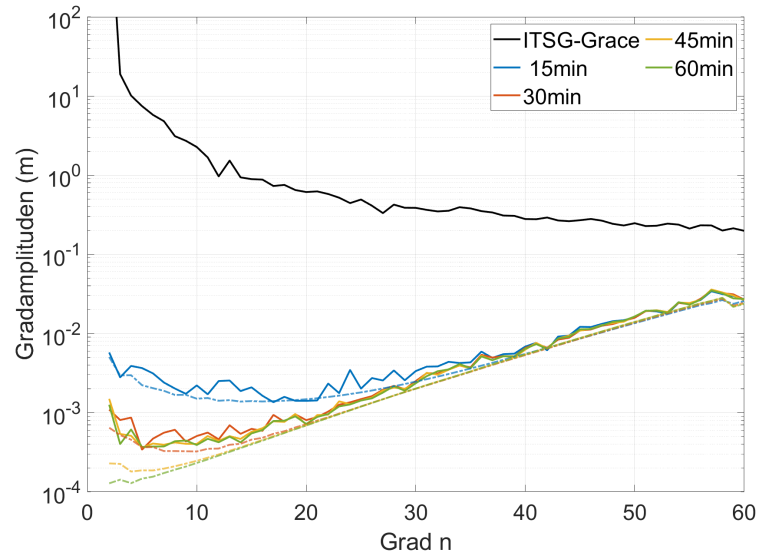
5.2 Einfluss der Bogenlänge auf die Gravitationsfeldbestimmung

Zur Untersuchung des Einflusses der maximalen Bogenlänge im Short-Arc-Approach auf die Qualität der Gravitationsfeldlösungen werden die Swarm123-Monatslösungen für Juli 2016 betrachtet. Die Monatslösungen enthalten vollständig normierte Kugelfunktionskoeffizienten bis Grad und Ordnung $n = 60$, das Hintergrundmodell ist bis Grad und Ordnung $n_{\text{BF}} = 180$ entwickelt. Die Definition der maximalen Bogenlänge reicht von 15 bis 240 Minuten. Zur Beurteilung der Qualität der generierten Monatslösungen wird ein Vergleich im Orts- und Frequenzraum mit dem ITSG-Grace2018-Modell für Juli 2016 durchgeführt.

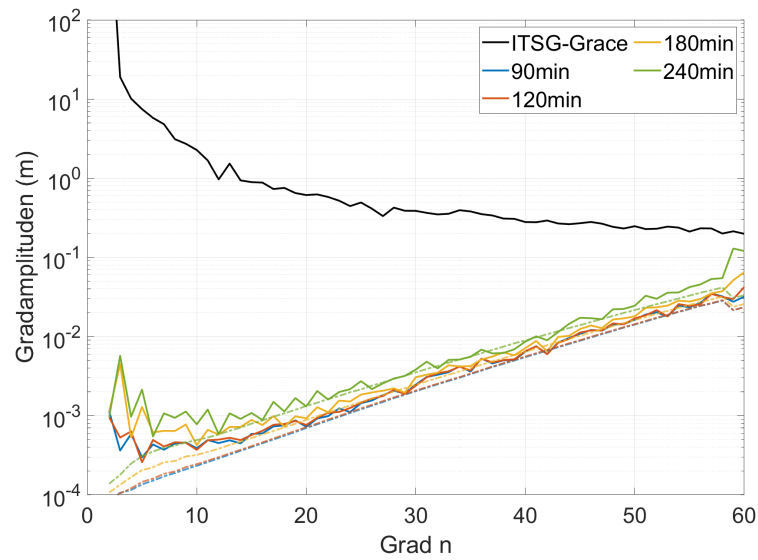
In Abbildung 5.4 sind die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace2018-Modells und die relativen Gradamplituden der Monatslösungen sowie ihre Fehlergradamplituden dargestellt. Im langwelligen Bereich bis etwa Grad 35 zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den unterschiedlichen Bogenlängen: Vergleichsweise große Abweichungen ergeben sich für kurze Bogenlängen von 15 Minuten (Abbildung 5.4, links). Die Abweichungen werden zunächst kleiner mit zunehmender Bogenlänge, die relativen Gradamplituden zeigen für Bogenlängen von 45, 60, 90 und 120 Minuten ein ähnliches Verhalten. Deutlichere Unterschiede zum Referenzmodell ergeben sich bei Bogenlängen von 180 und 240 Minuten. Vor allem die Koeffizienten dritten und fünften Grades können schlechter bestimmt werden. Auch die Abweichungen in höheren Graden steigen schneller als bei kurzen Bogenstücken. Die Differenzen zum Referenzmodell in Bezug auf Geoidhöhen bewegen sich im Mittel symmetrisch um null, daher wird das gewichtete quadratische Mittel (RMS) zur Beurteilung der Streuung verwendet. Für Bogenlängen zwischen 45 und 120 Minuten ergeben sich minimale und maximale Abweichungen um ± 1 cm zum Referenzmodell, die Abweichungen steigen mit größerer Bogenlänge auf ± 2 cm und sind am größten für sehr kurze Bögen (15 Minuten, Tabelle 5.2). Global können die Differenzen in Bezug auf Geoidhöhen in den Abbildungen 5.5 und 5.6 betrachtet werden. Die Koeffizienten wurden vor der Synthese mit einem Gauß-Filter mit Radius 500 km geglättet, daher sind die Unterschiede in den Graden ab 40 nicht ersichtlich.

Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, dass kurze Bahnbögen im Short-Arc-Approach vorzuziehen sind. Allerdings sollten Bahnbögen unter 30 Minuten vermieden werden, da in diesem Fall nicht gewährleistet ist, dass die Redundanz während der Ausgleichung groß genug ist, um die Gravitationsfeldparameter zuverlässig zu bestimmen. Im Rahmen der Ausgleichung werden empirische Parameter in Form eines Akzelerometer-Bias für jede der drei Bahnkomponenten pro Bahnbogen ermittelt. Dies dient der Kompensation unzureichend modellierter Störkräfte. Die Bahnbögen sollten weder zu kurz noch zu lang definiert werden. Eine zu kurze Bogenlänge führt zu einer unzureichenden Redundanz, während eine zu lange Bogenlänge die Akkumulation unmodellierter Störkräfte begünstigt. Die Untersuchung zeigt, dass eine Bogenlänge von mindestens 45 Minuten bei dicht abgetasteten Orbits auf eine gute Übereinstimmung mit dem ITSG-Grace-Modell führt. Die Qualität der Lösung verschlechtert sich ab einer Bogenlänge von etwa 120 Minuten. In Hinblick auf die Berechnungszeit, die mit der Anzahl an Short-Arcs wächst, werden die Gravitationsfeldparameter für alle weiteren Untersuchungen basierend auf einer maximalen

Bogenlänge von 45 Minuten bestimmt.



(a) Swarm123



(b) Swarm123

Abbildung 5.4: Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Swarm123-Lösung, generiert nach Short-Arc-Approach mit unterschiedlichen maximalen Bogenlängen, mit ihren Fehlergradamplituden (ungefiltert, Juli 2016).

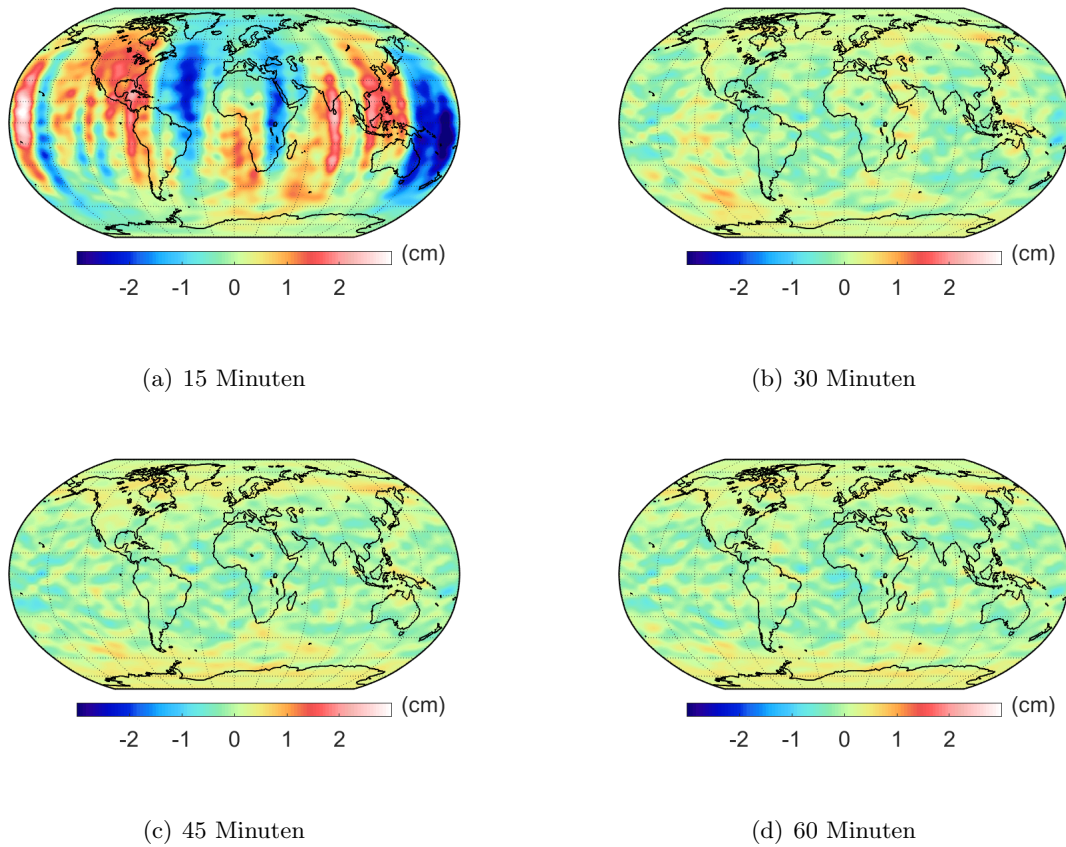


Abbildung 5.5: Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der maximalen Bogenlänge im Short-Arc-Approach auf die Gravitationsfeldbestimmung. Die Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Lösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell. Die maximale Bogenlänge variiert von 15 bis 60 Minuten (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).

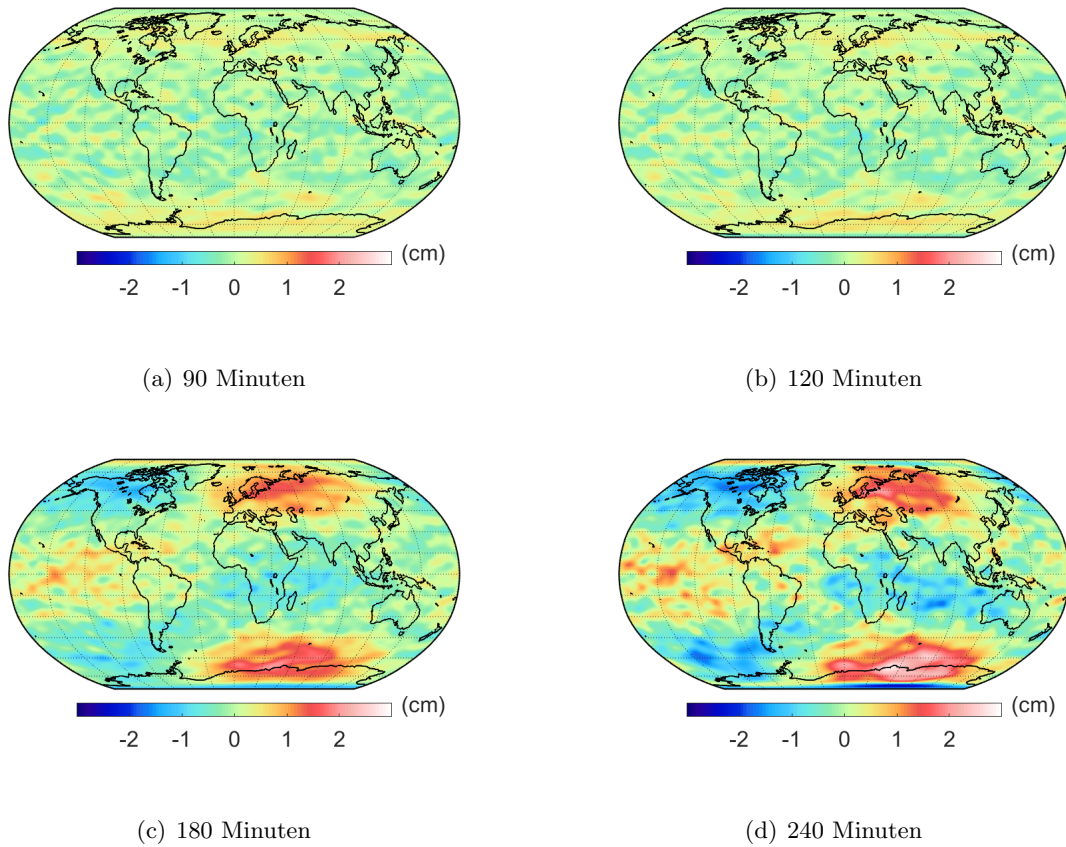


Abbildung 5.6: Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der maximalen Bogenlänge im Short-Arc-Approach auf die Gravitationsfeldbestimmung. Die Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Lösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell. Die maximale Bogenlänge variiert von 90 bis 240 Minuten (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).

Tabelle 5.2: Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage unterschiedlich langer Short-Arcs von 15 bis 240 Minuten generiert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.

Max. Bogenlänge	# Short-Arcs	RMS _w	MIN	MAX
15 Minuten	2.976	0,95	-4,21	3,13
30 Minuten	1.488	0,23	-1,10	1,04
45 Minuten	992	0,21	-0,99	0,76
60 Minuten	744	0,20	-0,91	0,74
90 Minuten	496	0,20	-0,84	0,70
120 Minuten	372	0,20	-0,81	0,72
180 Minuten	248	0,42	-1,41	2,00
240 Minuten	186	0,55	-2,54	2,77

5.3 Einfluss der Abtastrate der kinematischen Orbits

Die kinematischen Positionen der Swarm-Satelliten vom IFG der TU Graz liegen mit einer zeitlichen Auflösung von 1 s vor. Im Folgenden wird untersucht, wie die Abtastrate der kinematischen Orbits die Gravitationsfeldbestimmung beeinflusst. Hierzu werden vollständig normierte Koeffizienten bis Grad und Ordnung 60 für Juli 2016, basierend auf den kinematischen Orbits der Swarm-Satelliten mit einer zeitlichen Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s, bestimmt. Zur Beurteilung der Übereinstimmung mit einem Referenzmodell werden die Differenz-Gradamplituden der einzelnen Lösungen sowie der Kombinationslösung zum ITSG-Grace-Modell von Juli 2016 betrachtet (Abbildungen 5.7 und 5.8).

Bei Betrachtung der Gradamplituden mit ihren Fehlern sowie der Variationskoeffizienten in den Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigt sich ein ähnliches Verhalten für die Satelliten-Lösungen: Etwa bis Grad und Ordnung 20 weisen die Lösungen basierend auf den 1 s-Orbits etwas größere Abweichungen zum Referenzmodell aus, als die Modelle basierend auf 5 s und 10 s. Die Unterschiede sind allerdings sehr gering, bei der Betrachtung der Variationskoeffizienten zeigen sich keine signifikanten Unterschiede zwischen unterschiedlichen Auflösungsstufen. Beim Modell basierend auf den kinematischen Orbits von Swarm2 ergeben sich etwas größere Abweichungen zum Referenzmodell, was möglicherweise auf die größere Entfernung zur Erde zurückzuführen ist und dazu führt, dass die Positionen des Satelliten geringer von der Gravitationskraft der Erde beeinflusst wird als Swarm1 und Swarm3. Obwohl die Anzahl der Beobachtungsdaten (Tabelle 5.3) bei der Bestimmung der Koeffizienten auf Basis von 1 s-Orbits deutlich höher ist als bei Verwendung von 10 s-Orbits, liegen die Fehlergradamplituden in einem Band (Abbildungen 5.7 und 5.8). 1 s-Orbits weisen eine deutlich höhere zeitliche Korrelation als 10 s-Orbits auf, dies

wird bei der Formulierung des stochastischen Modells berücksichtigt, daher verhalten sich die Fehlergradamplituden für die drei Auflösungsstufen gleich.

Bei Betrachtung der Geoidhöhenunterschiede relativ zum ITSG-Grace im Ortsbereich zeigen sich hauptsächlich kleinräumige Unterschiede im Bereich um $\pm 1,5$ cm für die Einzel-Lösungen (Abbildung 5.9) und $\pm 1,0$ cm für die Kombinationslösung Swarm123 (Abbildung 5.10). Nach Tabelle 5.3 variieren die Unterschiede symmetrisch um null und es ergibt sich das geringste RMS sowie die geringsten minimalen und maximalen Abweichungen für eine zeitliche Auflösung von 5 s. Daher werden für alle folgenden Vergleiche die vollständig normierten Koeffizienten des Gravitationspotentials auf Basis der kinematischen Orbits mit einer Abtastung von 5 s bestimmt.

Tabelle 5.3: Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage kinematischer Orbits mit einer zeitlichen Auflösung von 1 s, 5 s und 10 s generiert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.

Zeitl. Auflösung	Beobachtungen	RMS_w	MIN	MAX
Swarm1				
1 s	7.723.722	0,34	-1,46	1,42
5 s	1.534.182	0,31	-1,48	1,23
10 s	762.333	0,34	-1,71	1,21
Swarm2				
1 s	7.759.158	0,34	-1,47	1,30
5 s	1.542.381	0,30	-1,54	1,44
10 s	766.299	0,32	-1,64	1,44
Swarm3				
1 s	7.790.721	0,34	-1,84	1,41
5 s	1.548.759	0,31	-1,56	1,21
10 s	769.587	0,33	-1,58	1,40
Swarm123				
1 s	23.273.601	0,24	-1,32	0,87
5 s	4.625.322	0,22	-0,99	0,76
10 s	2.298.219	0,23	-1,02	0,86

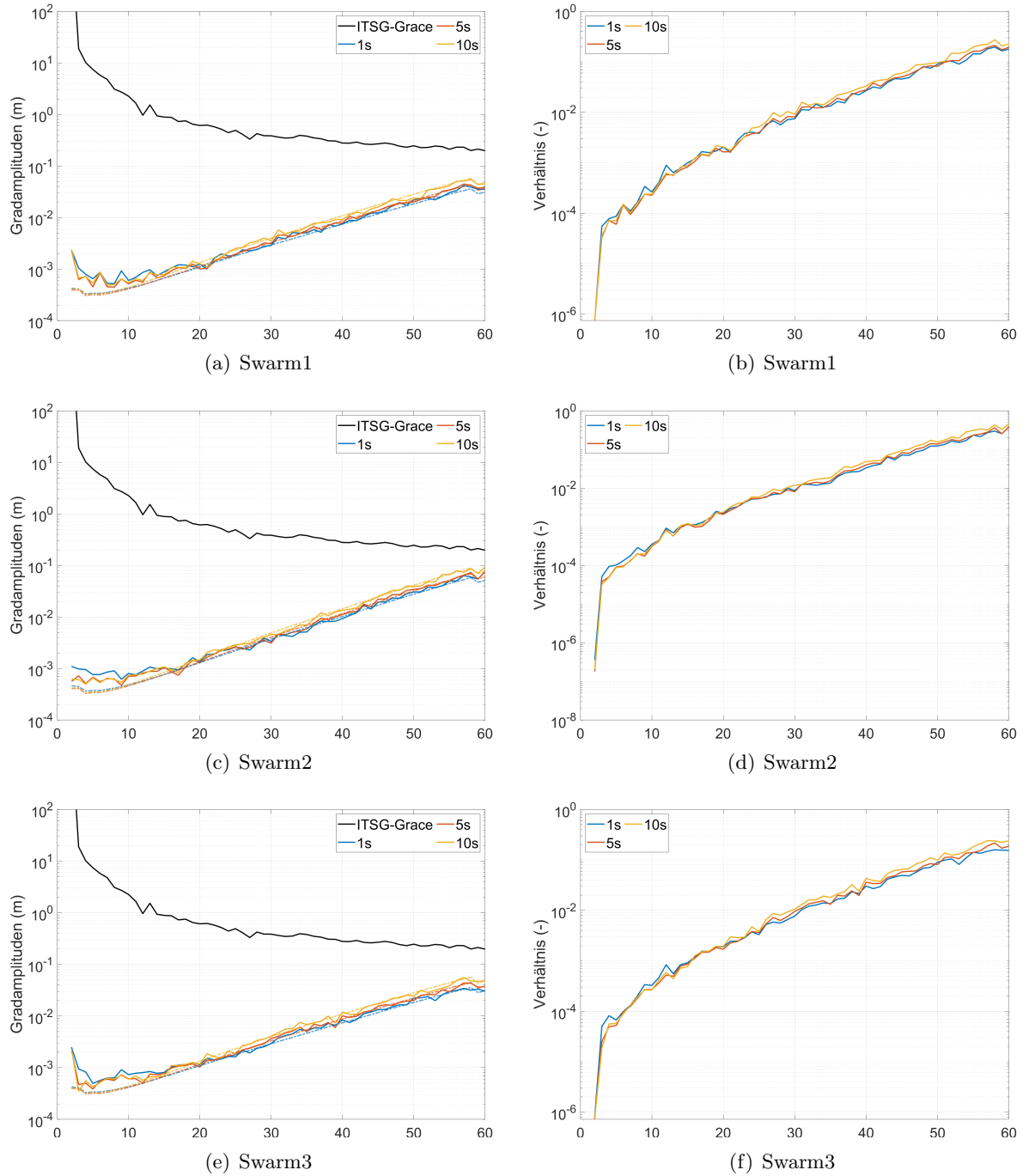


Abbildung 5.7: Vergleich im Frequenzraum durch Gradamplituden mit ihren Fehlern (links) und Variationskoeffizienten (rechts) zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten auf die Gravitationsfeldbestimmung. Dargestellt sind die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells und dazu die Differenz-Gradamplituden der einzelnen Swarm-Monatslösungen. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (ungefiltert, Juli 2016)

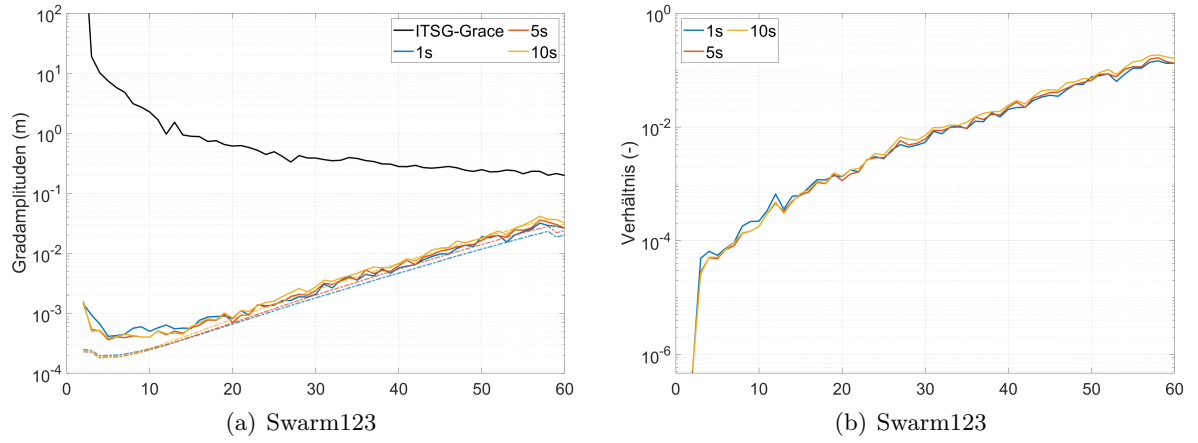


Abbildung 5.8: Vergleich im Frequenzraum durch Gradamplituden mit ihren Fehlern (links) und Variationskoeffizienten (rechts) zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten auf die Gravitationsfeldbestimmung. Dargestellt sind die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells und dazu die Differenz-Gradamplituden der kombinierten Swarm123-Monatlösung. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (ungefiltert, Juli 2016)

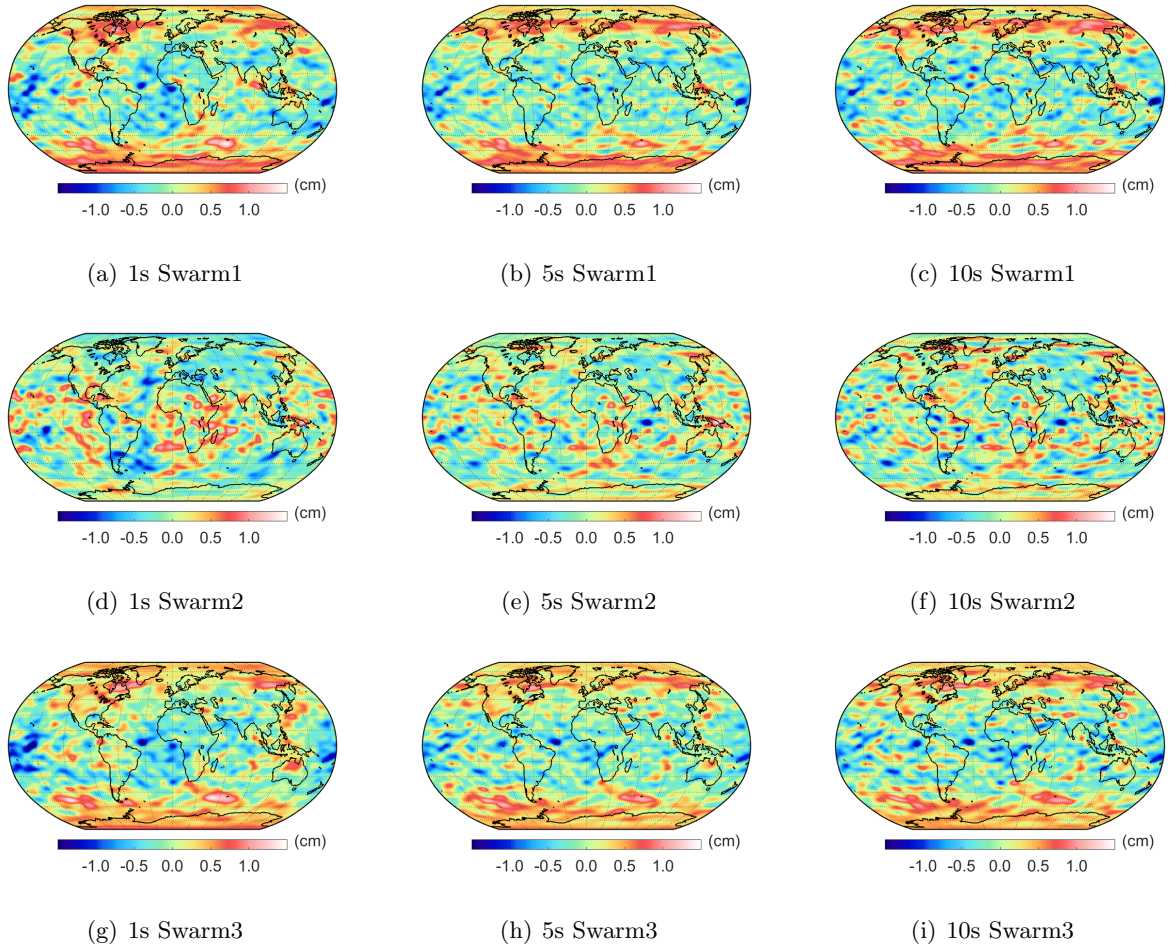


Abbildung 5.9: Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten. Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Swarm-Monatslösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell für Juli 2016. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (500 km Gauß-Filter).

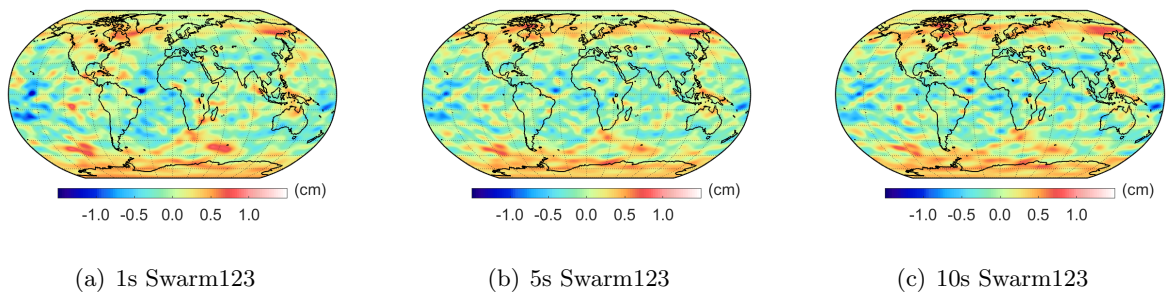


Abbildung 5.10: Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten. Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Monatslösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell für Juli 2016. Die kombinierten Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (500 km Gauß-Filter).

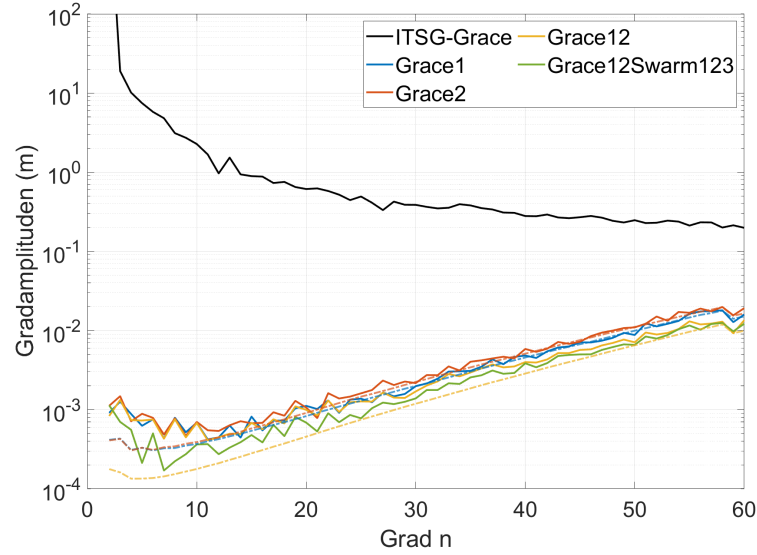
5.4 Kombination der Schwerefelder verschiedener Satellitenmissionen

In den vorstehenden Untersuchungen werden die kinematischen Positionen der einzelnen Swarm-Satelliten zu einem gemeinsamen Modell kombiniert, um das Gravitationsfeld der Erde zu beschreiben. Neben der Kombination der Daten einer Satellitenmission wie Swarm wird im Folgenden betrachtet, wie die Kombination mit den Daten weiterer Satellitenmissionen, wie beispielsweise GRACE, die Auflösung der Gravitationsfeldbestimmung verbessern kann. Hierzu werden einzelne Lösungen für die Satelliten der Missionen GRACE und Swarm generiert und anschließend auf Normalgleichungsebene zusammengefügt. Die kinematischen Positionen der GRACE-Satelliten liegen in einer zeitlichen Abtastung von 10 s vor, die Positionen von Swarm werden mit einer Abtastung von 5 s eingeführt. Die zeitlichen Korrelationen der Positionen werden im Rahmen des Preprocessings ermittelt und anschließend bei der Ausgleichung berücksichtigt.

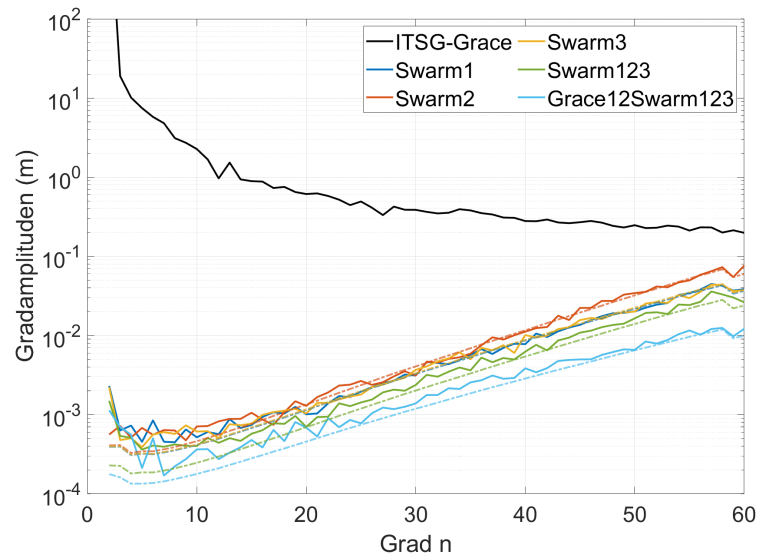
In Abbildung 5.11 sind die Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells sowie dazu die Differenzen der Monatsmodelle, basierend auf den kinematischen Positionen einzelner Satelliten, dargestellt. Für die zwei GRACE-Satelliten zeigen sich vergleichbare Abweichungen zum Referenzmodell, auch die Fehlergradamplituden unterscheiden sich nicht signifikant. Die Satelliten der GRACE-Mission befinden sich auf einem Orbit und folgen einander mit geringem Abstand. Demnach sind die Positionen vergleichbar sensitiv für Änderungen im Gravitationsfeld. Die Satelliten der Swarm-Mission befinden sich auf unterschiedlichen Höhen und umkreisen die Erde im Jahr 2016 deutlich höher als die GRACE-Satelliten (Abbildung 3.1). Die Positionen werden demnach weniger stark durch Gravitationsfeldänderungen beeinflusst, die Abweichungen der Koeffizienten zum Referenzmodell steigen schneller mit zunehmendem Entwicklungsgrad als bei GRACE. Allerdings gelingt die Bestimmung der Koeffizienten bis etwa Grad 10 schlechter als mit Swarm. Diese Beobachtungen bestätigen sich bei der Betrachtung der Koeffizientendifferenzen in Abbildung 5.12. Das Kombinationsmodell aus den kinematischen Positionen von Swarm1, Swarm2, Swarm3 sowie Grace1 und Grace2 profitiert von diesen Unterschieden und weist geringeres Rauschen in den höheren Graden auf als bei Swarm123 und ermöglicht eine bessere Bestimmung der Koeffizienten niedrigen Grades als bei Grace12 (Abbildung 12(c)). Der Vergleich im Ortsbereich gelingt durch Betrachtung der Geoidhöhenunterschiede zum ITSG-Grace (Abbildung 5.13 und 5.14). Die Abweichungen der Swarm-Lösungen bewegen sich in der Größenordnung von $\pm 1,5$ cm und die Abweichungen für die Grace-Modelle im Bereich von $\pm 1,0$ cm, die Kombinationslösung profitiert von der höheren Anzahl an Beobachtungen und unterschiedlichen Orbitkonfigurationen. Es ergeben sich Abweichungen von weniger als einem Zentimeter (Tabelle 5.4).

Diese Untersuchung zeigt, dass die Gravitationsfeldbestimmung durch die Kombination der Daten mehrerer Satellitenmissionen mit höherer Genauigkeit gelingt. Hierbei wird vor allem profitiert von einer großen Anzahl von Beobachtungsdaten in Form von kinematischen Positionen sowie von unterschiedlichen Orbitkonfigurationen. Die zunehmende Anzahl der operationellen wissenschaftlichen und kommerziellen Satelliten in LEOs macht die GPS-basierte Gravitationsfeldbestimmung durch Kombination der Daten verschiedener Missionen in Zukunft noch attraktiver. Vor allem, wenn Lücken zwischen einer abgeschlossenen Satellitenschwerefeldmission

und dem Start der nächsten Generation entstehen, kann durch die Kombination von kinematischen Positionen mehrerer LEO-Satellitenmissionen die Beobachtungszeitreihe fortgesetzt werden. Voraussetzung ist, dass hochaufgelöste Modelle zur Beschreibung der konservativen Kräfte berücksichtigt werden.



(a) GRACE



(b) Swarm

Abbildung 5.11: Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Monatslösungen, die auf den kinematischen Positionen unterschiedlicher Satelliten basieren, und ihre Fehlergradamplituden (ungefiltert, Juli 2016)

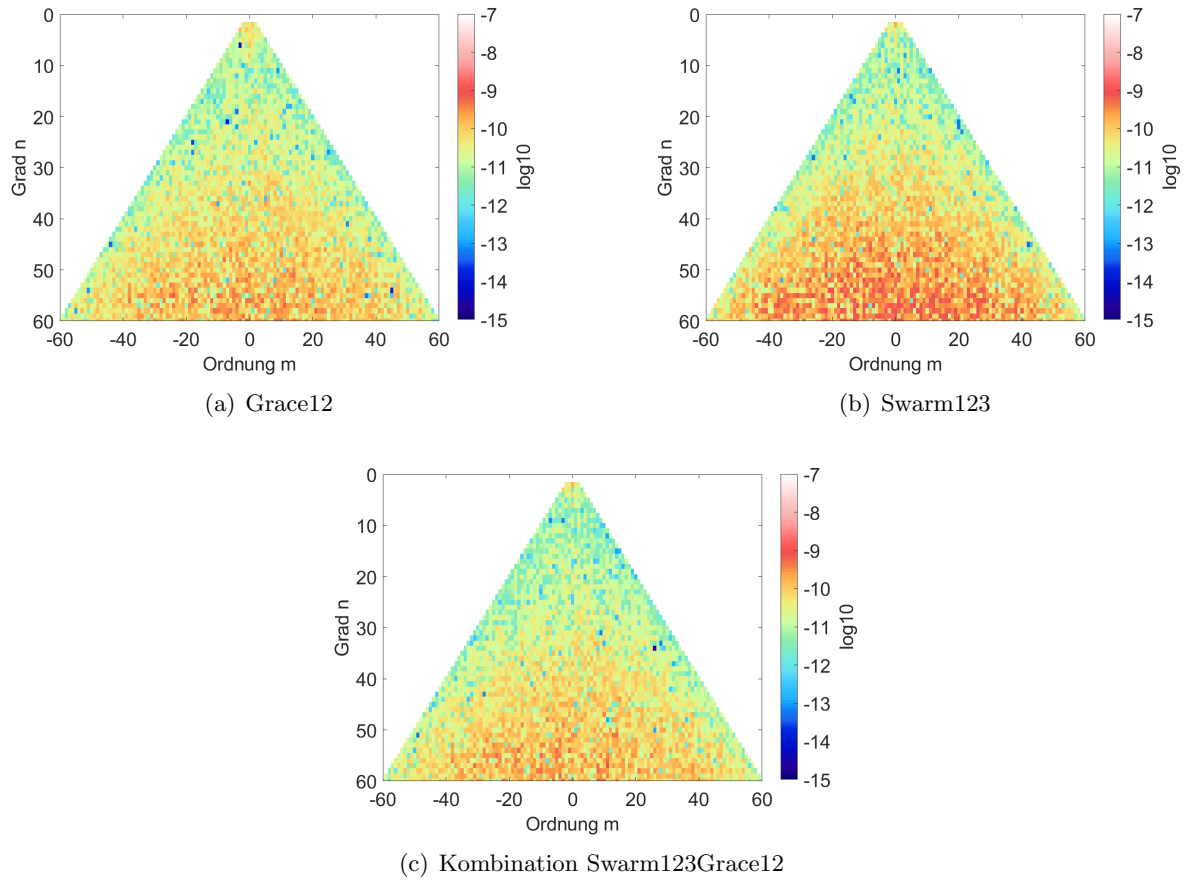


Abbildung 5.12: Darstellung der Koeffizientendifferenzen bezüglich des ITSG-Grace-Modells (ungefiltert, Juli 2016).

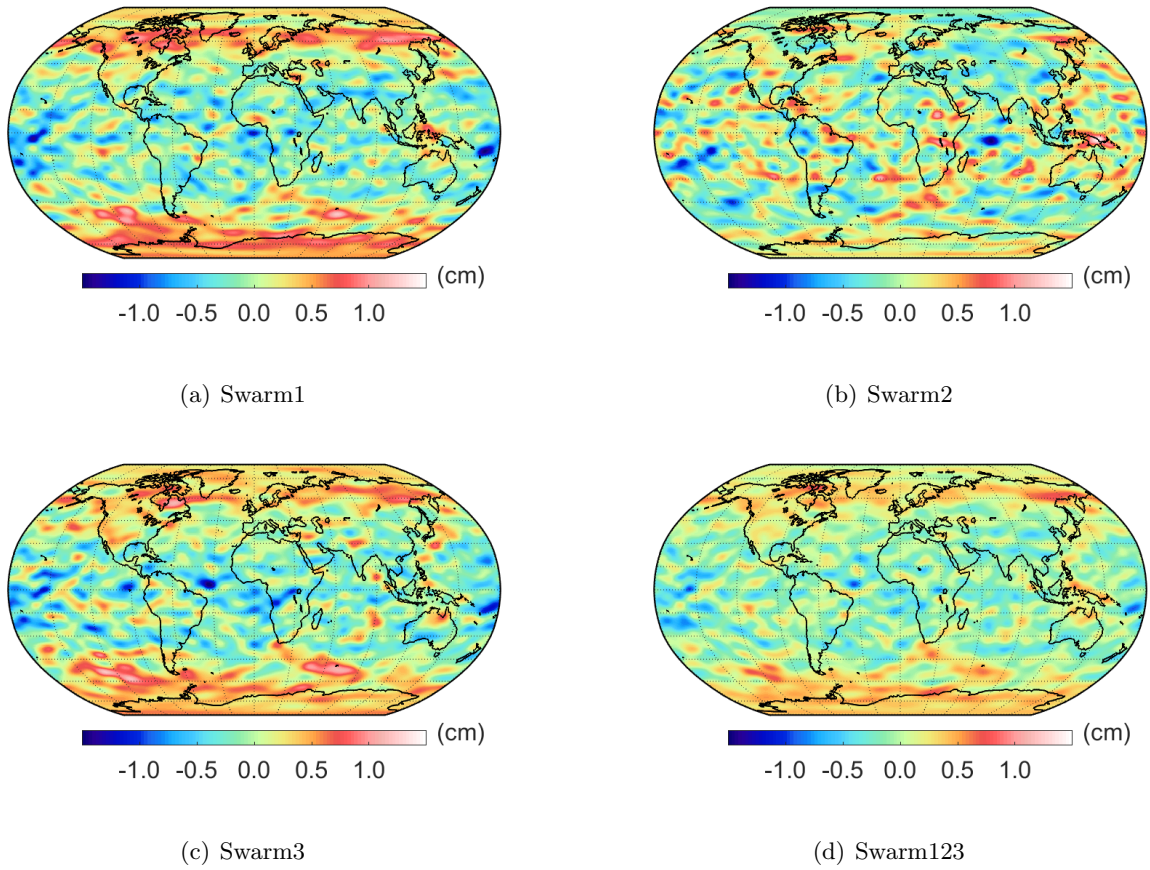


Abbildung 5.13: Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Swarm-Lösungen bzw. der kombinierten Swarm123-Lösung in Bezug auf das ITSG-Grace-Modell (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).

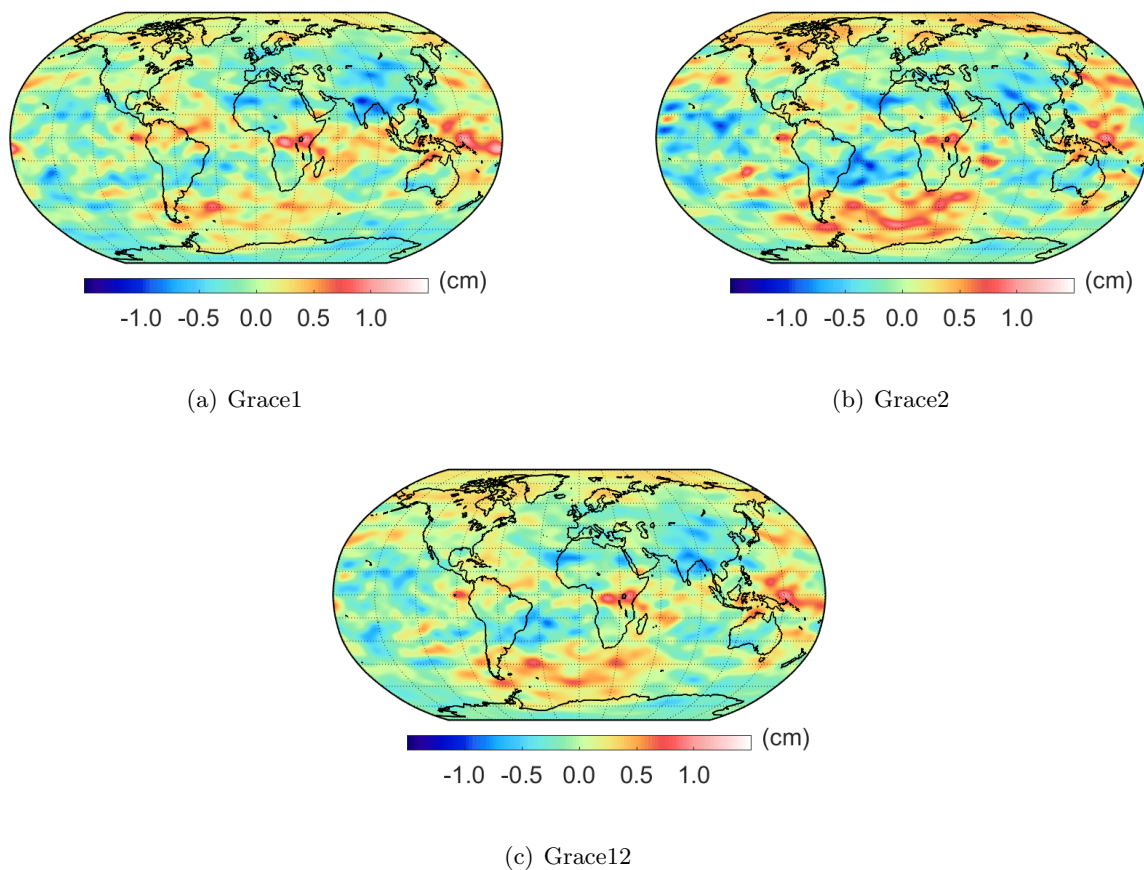


Abbildung 5.14: Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Grace-Lösungen bzw. der kombinierten Grace12-Lösung in Bezug auf das ITSG-Grace-Modell (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).

Tabelle 5.4: Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage kinematischer Positionen einzelner Satelliten der Missionen Grace und Swarm generiert und anschließend auf Normalgleichungsebene kombiniert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.

Satellit(en)	Beobachtungen	RMS _w	MIN	MAX
Einzel-Lösungen				
Swarm1	1.534.182	0,31	-1,48	1,23
Swarm2	1.542.381	0,30	-1,54	1,44
Swarm3	1.548.759	0,31	-1,56	1,21
Grace1	761.358	0,25	-1,06	1,15
Grace2	759.108	0,28	-1,07	1,04
Kombinierte Lösungen				
Swarm123	4.625.322	0,22	-0,99	0,76
Grace12	1.520.466	0,24	-0,89	1,01
Swarm123Grace12	6.145.788	0,17	-0,64	0,60

5.5 Analyse einer Zeitreihe monatlicher Gravitationsfeldlösungen

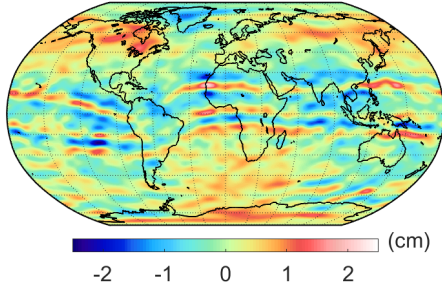
Mit den kinematischen Orbits und Beobachtungen zur Abstandsänderung der GRACE-Satelliten gelang es global, die Massenverlagerungen in der Hydrosphäre, der Kryosphäre und den Ozeanen hochauflösend zu quantifizieren. Diese Beobachtungsreihe wird aktuell durch die GRACE-FO-Mission fortgesetzt. Allerdings gibt es eine Lücke zwischen dem Ende der GRACE-Mission im Juni 2017 und dem Start von GRACE-FO im Mai 2018. Zur Beurteilung, ob die Daten der Swarm-Satelliten verwendet werden können, um Beobachtungslücken zuverlässig zu schließen, wird mithilfe von GROOPS eine Zeitreihe sphärisch harmonischer Koeffizienten für das Gravitationspotential generiert. Hierfür werden die kinematischen Orbits von Swarm mit einer Abtastung von 5 s aus den Jahren 2015 und 2016 verwendet, um monatliche Lösungen für das Gravitationsfeld der Erde zu generieren.

In Abbildung 5.15 sind die Geoidhöhenunterschiede der Swarm123- sowie der ITSG-Grace-Monatslösungen für Januar, Februar, März und April 2015 in Bezug auf das statische Modell GOCO06s mit Referenzepoche 2010-01-01 dargestellt. Die Swarm123-Monatslösungen zeigen deutliche großräumige positive und negative Anomalien in zwei Bändern um den Bereich des geomagnetischen Äquators, die die ITSG-Grace-Monatslösungen nicht aufweisen. Dies deutet darauf hin, dass es sich nicht um Merkmale des Gravitationsfelds handelt, sondern um Artefakte in den Beobachtungsdaten. Die erhöhte Aktivität der Ionosphäre im Frühjahr 2015 beeinflusste die kinematische Orbitbestimmung durch Störung der GPS-Signale (Grombein et al., 2022). Ohne Screening der Daten führt dies auf systematische Fehler in der Gravitationsfeldlösung.

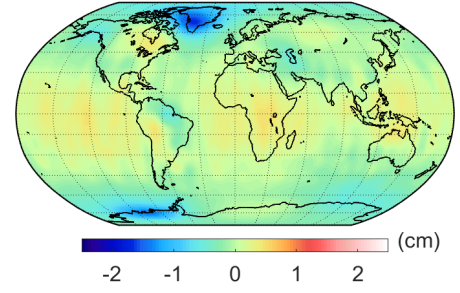
Diese Effekte überlagern das zeitvariable Signal des Gravitationsfelds und erschweren die Interpretation. Eine adäquate Vorverarbeitung der kinematischen Positionen der Satelliten ist daher unerlässlich.

Aufgrund der erhöhten ionosphärischen Aktivität im Jahr 2015 werden weitere Monatslösungen für das Jahr 2016 erstellt. In den Abbildung 5.16 und 5.17 sind die Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Monatslösungen zum statischen Gravitationsfeld GOCO06s dargestellt. Die positiven und negativen Anomalien variieren um ± 2 cm und zeigen vor allem die langzeitlichen Veränderungen im Gravitationsfeld seit dem ersten Januar 2010. In allen Monatslösungen zeigen sich die größten negativen Anomalien in Grönland und der Antarktis, mit den größten Abweichungen in den Monaten von August bis Oktober. Neben den langzeitlichen Veränderungen zeigen sich auch jahreszeitliche Effekte, vor allem in Gebieten mit großen Schwankungen im Wasseraufkommen wie dem Amazonasbecken. Negative Anomalien haben ihr Maximum in den Monaten September und Oktober während der Trockenzeit. Positive Anomalien zeigen sich vor allem im März und April in Nordamerika sowie im September und Oktober in Westafrika und Südostasien (Abbildung 5.16 und 5.17).

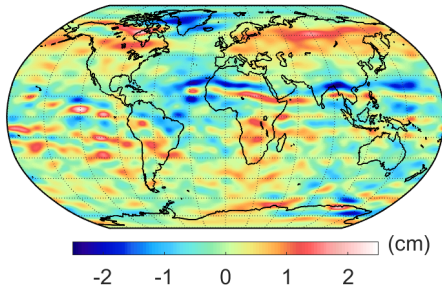
Zum Vergleich werden die Differenzen einzelner ITSG-Grace-Monatslösungen zum statischen GOCO06s betrachtet (Abbildung 5.18). Die ITSG-Grace-Reihe weist im Jahr 2016 Lücken auf, für die Monate April, September und Oktober existieren keine Lösungen aufgrund von Sensorproblemen, die die GRACE-Satelliten gegen Ende der Mission beeinflussten (Chen et al., 2021). Daher wird ein Vergleich hier anhand einzelner Monate durchgeführt. In Abbildung 5.18 sind die Geoidhöhendifferenzen bezüglich des statischen Modells GOCO06s für die Swarm123- und ITSG-Grace-Monatslösungen gegenübergestellt. Es zeigt sich in allen dargestellten Monaten ein geringeres Rauschen bei Betrachtung der ITSG-Grace-Modelle relativ zum GOCO06s. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die ITSG-Grace-Modelle bis zu einem höheren Grad entwickelt werden als die Swarm123-Modelle und neben den kinematischen Positionen auch auf Abstandsänderungsmessungen im K-Band basieren. Die Koeffizienten des Gravitationspotentials können daher genauer bestimmt werden und sind weniger stark von Rauschen behaftet. Die großräumigen Massenveränderungen in Grönland, der Antarktis und im Amazonasbecken sind sowohl im Swarm123- als auch im ITSG-Grace-Modell ersichtlich. Die statistischen Kenngrößen bezüglich der Geoidhöhenunterschiede für alle verfügbaren Monate des Jahres 2016 sind in Tabelle 5.5 gegenübergestellt.



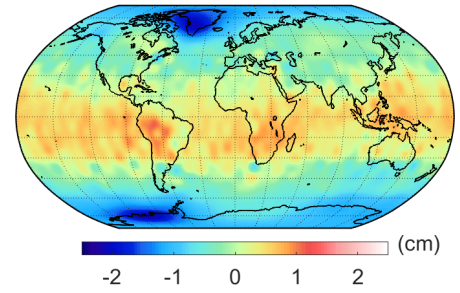
(a) Januar Swarm123



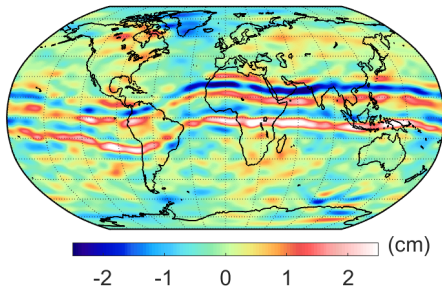
(b) Januar ITSG-Grace



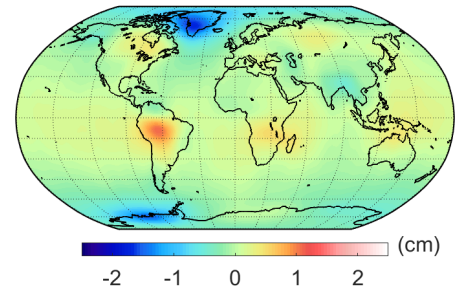
(c) Februar Swarm123



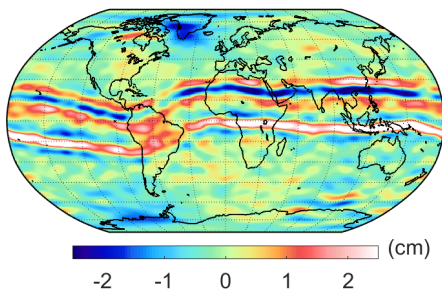
(d) Februar ITSG-Grace



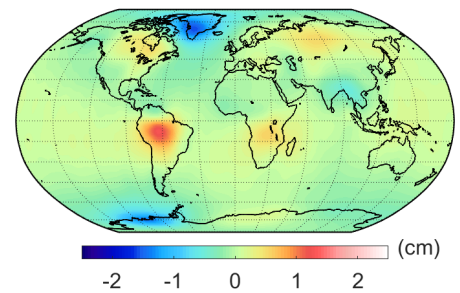
(e) März Swarm123



(f) März ITSG-Grace



(g) April Swarm123



(h) April ITSG-Grace

Abbildung 5.15: Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen sowie der ITSG-Grace-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche $t_{\text{GOCO}} : 2010-01-01$ (500 km Gauß-Filter, Januar bis April 2015).

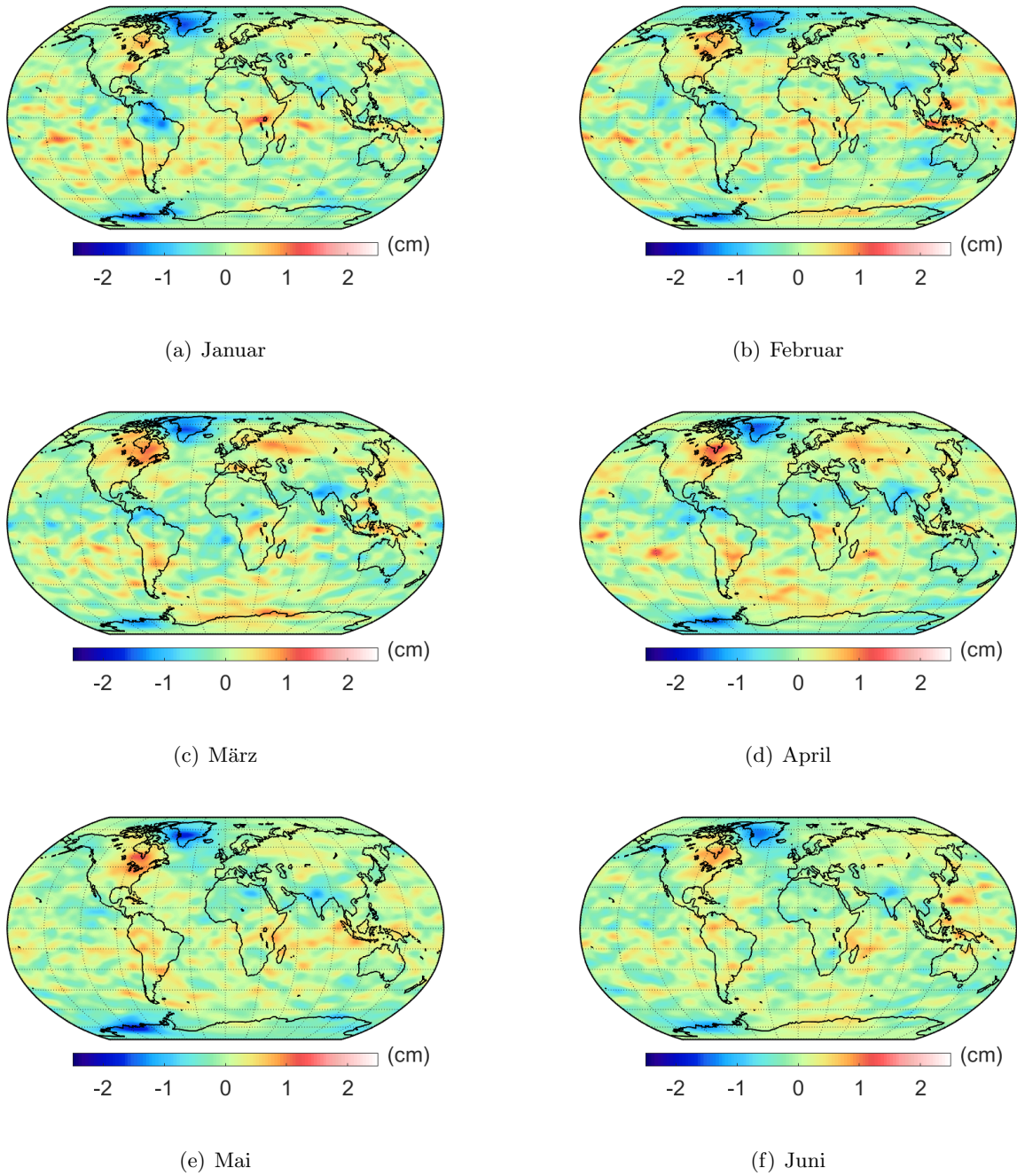


Abbildung 5.16: Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche $t_{\text{GOCO}} : 2010-01-01$ (500 km Gauß-Filter, Januar bis Juni 2016).

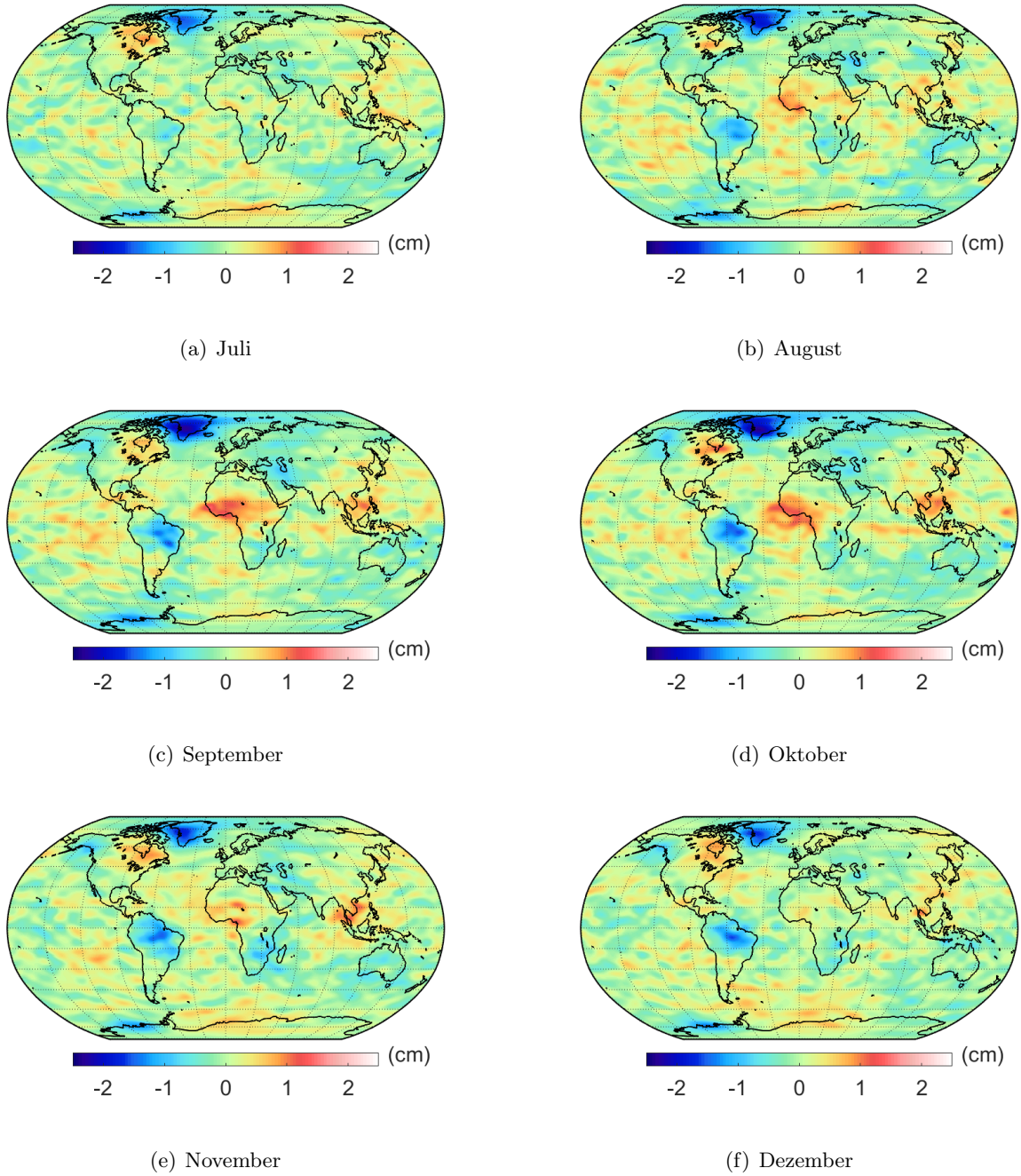
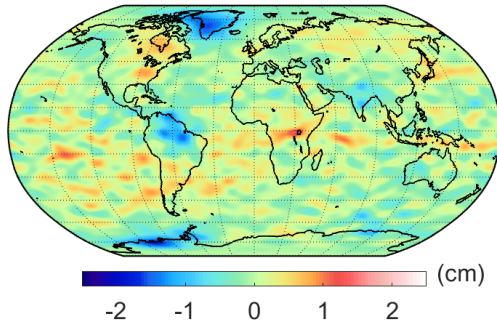
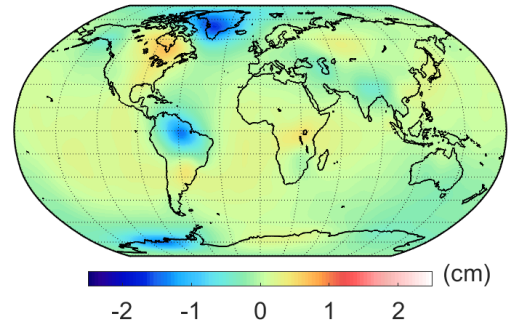


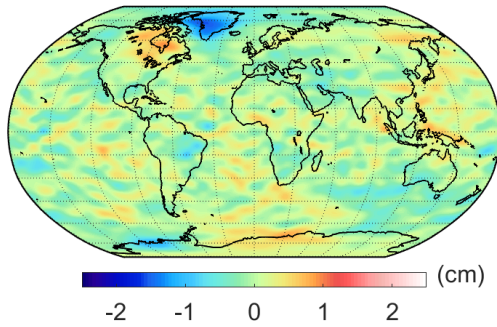
Abbildung 5.17: Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche $t_{\text{GOCO}} : 2010-01-01$ (500 km Gauß-Filter, Juli bis Dezember 2016).



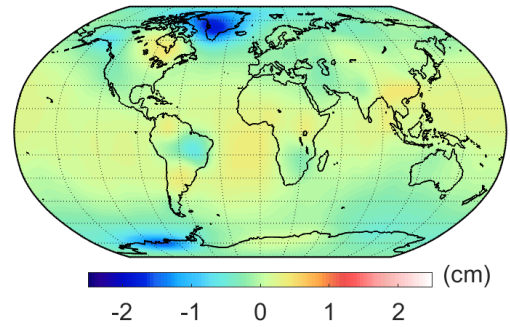
(a) Januar Swarm123



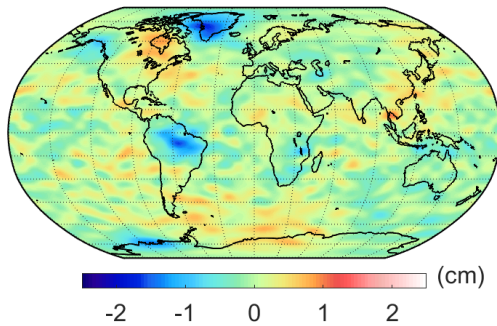
(b) Januar ITSG-Grace



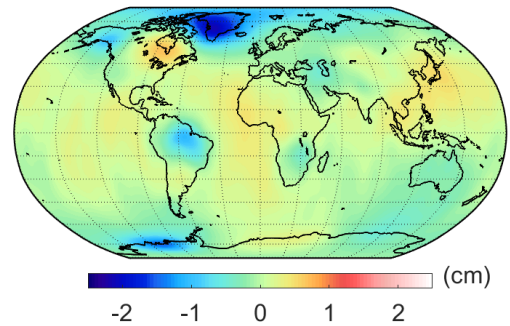
(c) Juli Swarm123



(d) Juli ITSG-Grace



(e) Dezember Swarm123



(f) Dezember ITSG-Grace

Abbildung 5.18: Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen und der ITSG-Grace-Lösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche $t_{\text{GOCO}} : 2010-01-01$ (500 km Gauß-Filter).

Tabelle 5.5: Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Referenzepoche $t_G : 2010-01-01$ für ausgewählte Monatslösungen (500 km Gauß-Filter). $\bar{x}_w \approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.

Monat 2016		RMS _w	MIN	MAX
Januar	ITSG-Grace	0,20	-1,66	0,68
	Swarm123	0,28	-1,75	1,39
Februar	ITSG-Grace	0,17	-1,64	0,76
	Swarm123	0,29	-1,60	1,15
März	ITSG-Grace	0,18	-1,69	0,76
	Swarm123	0,29	-1,63	1,08
April	ITSG-Grace	-	-	-
	Swarm123	0,29	-1,58	1,35
Mai	ITSG-Grace	0,18	-1,63	0,66
	Swarm123	0,26	-1,85	1,21
Juni	ITSG-Grace	0,18	-1,70	0,56
	Swarm123	0,24	-1,42	1,04
Juli	ITSG-Grace	0,19	-1,85	0,45
	Swarm123	0,23	-1,57	0,93
August	ITSG-Grace	0,20	-1,89	0,56
	Swarm123	0,30	-1,91	1,10
September	ITSG-Grace	-	-	-
	Swarm123	0,32	-2,34	1,40
Oktober	ITSG-Grace	-	-	-
	Swarm123	0,33	-1,80	1,16
November	ITSG-Grace	0,27	-1,56	0,89
	Swarm123	0,30	-2,54	2,77
Dezember	ITSG-Grace	0,23	-2,14	0,68
	Swarm123	0,26	-1,72	1,03

5.6 Vergleich der kinematischen Orbits und resultierenden Gravitationsfeldlösungen zweier Institute

Sowohl das Institut für Geodäsie der Technischen Universität Graz (IFG) als auch das Astronomische Institut der Universität Bern (AIUB) ermittelt die kinematischen Orbits von LEO-Satelliten basierend auf GNSS-Beobachtungen und stellen diese kostenfrei zur Verfügung. Darüber hinaus werden von den Instituten auch Monatslösungen basierend auf den kinematischen Positionen zur Verfügung gestellt. Die Kombinationslösungen aus den drei Swarm-Satelliten werden am IFG der TU Graz über den Short-Arc-Approach mit GROOPS bis Grad und Ordnung 60 und am AIUB über den Celestial-Mechanics-Approach mit der Bernese GNSS Software v5.3 bis Grad und Ordnung 70 generiert (Teixeira da Encarnação et al., 2020). In Tabelle 5.6 sind die zum Vergleich verwendeten Modelle zusammengestellt.

Tabelle 5.6: Erläuterung zur Modellbezeichnung. Modelle mit der Bezeichnung GO, GS und BO, GS wurden im Rahmen dieser Arbeit mit GROOPS generiert, die Modelle GO, GS (IFG); BO, BS (AIUB) und GO, BS (AIUB) wurden zum Vergleich zur Verfügung gestellt.

Bezeichnung	Kinematische Orbits	Software
GO, GS	Orbits des IFG	GROOPS (SAA)
BO, GS	Orbits des AIUB	GROOPS (SAA)
GO, GS (IFG)	Orbits des IFG	GROOPS (SAA)
BO, BS (AIUB)	Orbits des AIUB	Bernese GNSS Software (CMA)
GO, BS (AIUB)	Orbits des IFG	Bernese GNSS Software (CMA)

Im Folgenden werden die aus den kinematischen Positionen der Swarm-Satelliten kombinierten monatlichen Gravitationsfeldlösungen verglichen. Zunächst werden hierzu in GROOPS nach dem Short-Arc-Approach Lösungen bis Grad und Ordnung 60 für die Monate Juli 2016 und Juli 2021 anhand der kinematischen Orbits vom IFG der TU Graz und der Orbits des AIUB erstellt. Der Vergleich mit den von den Instituten generierten Lösungen im Frequenzbereich in Bezug auf die jeweiligen ITSG-Grace-Monatslösungen ist in Abbildung 5.19 dargestellt. Zu sehen sind die Differenzen der Gradamplituden von GO/GS (Orbits Graz, GROOPS), BO/GS (Orbits Bern, GROOPS) sowie den Modellen der Institute (IFG, AIUB) zum entsprechenden ITSG-Grace-Monatsmodell gemeinsam mit den Fehlergradamplituden. Bei Betrachtung der Fehlergradamplituden fällt auf, dass die mit der Bernese GNSS Software generierten Modelle im Allgemeinen niedrigere Fehler, vor allem in den niedrigen Graden, aufweisen. Die Übereinstimmung zum Modell mit übergeordneter Genauigkeit ist allerdings geringer. Dies lässt auf die Vermutung schließen, dass die stochastische Modellierung bei der Bestimmung der Koeffizienten des Gravitationspotentials in der Bernese GNSS Software nicht optimal ist. Nach Jäggi et al., 2016 wird im

Rahmen der Gravitationsfeldbestimmung mit der Bernese GNSS Software das stochastische Modell basierend auf den epochenweise Varianz-Kovarianzmatrizen gebildet und die Beobachtungen epocheweise gewichtet. Dagegen werden in GROOPS aus den Varianz-Kovarianzmatrizen pro Epoche empirische Fehler durch Analyse der Residuen abgeleitet und das stochastische Modell für die Bestimmung der Gravitationsfeldparameter erweitert (Kapitel 4.1.3). Für den Monat Juli 2021 zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie im Juli 2016: Die Lösungen basierend auf den Orbits des AIUB (rot und grün) zeigen ähnliche Abweichungen. Der Vergleich für Juli 2021 enthält eine weitere Lösung (hellblau). Diese Lösung stammt vom AIUB, wurde demnach mit der Bernese GNSS Software generiert und basiert auf den Orbits des IFG. Die Übereinstimmung dieser Lösung mit dem ITSG-Grace ist in den niedrigen Graden etwas geringer als die GROOPS-Lösungen basierend auf den Orbits aus Graz allerdings etwas besser als die Lösungen, die auf den Orbits aus Bern basieren. Bei Betrachtung der Fehler zeigen sich Unterschiede in den zwei Auswertesoftware-Paketen: Die mit der Bernese GNSS Software prozessierten Modelle weisen geringere Fehler in den niedrigen Graden auf als die mit GROOPS generierten Modelle, unabhängig von den verwendeten Orbits. Der Vergleich im Ortsraum ist in Abbildung 5.20 dargestellt, die zugehörigen statistischen Kenngröße finden sich in Tabelle 5.7.

Unterschiede zwischen den Monaten Juli 2016 und Juli 2021 zeigen sich hauptsächlich bei den Modellen, die auf den Orbits des IFG basieren. Das mit GROOPS generierte Modell aus den Orbits des IFG für Juli 2016 weist eine höhere Übereinstimmung mit dem ITSG-Grace-Modell auf als das vom IFG zur Verfügung gestellte Modell. Bei Betrachtung des Monats Juli 2021 sind die Unterschiede zwischen diesen zwei Lösungen deutlich geringer. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Orbits der Swarm-Satelliten im Jahr 2020 für die gesamte Swarm-Mission neu prozessiert wurden, die Modelle vom IFG vor diesem Zeitpunkt allerdings noch auf den vorherigen kinematischen Orbits basieren. Dies erklärt die Unterschiede zwischen den mit GROOPS generierten Monatsmodell für Juli 2016 (dunkelblau) und dem vom IFG zur Verfügung gestellten Modell (gelb, Abbildung 19(a)). Nach Suesser-Rechberger et al., 2022 wurden GNSS-Produkte des CODE Analysezentrums (Center for Orbit Determination in Europe) durch in-house prozessierte Produkte für die GNSS-Orbits, -Uhren und Signal-Biases ersetzt. Dies führt zur einer verbesserten Modellierung der ACVs und damit auf genauere kinematische Positionen der LEO-Satelliten. Das Modell des IFG von Juli 2021 basiert auf diesen neu prozessierten Orbits, das im Rahmen dieser Arbeit generierte Monatsmodell stimmt daher mit dem vom IFG zur Verfügung gestellten Modell überein (Tabelle 5.7). Die Orbits des AIUB basieren weiterhin auf den von CODE bereitgestellten GNSS-Produkten und zeigen größere Abweichungen zum ITSG-Grace-Modell in beiden Monaten.

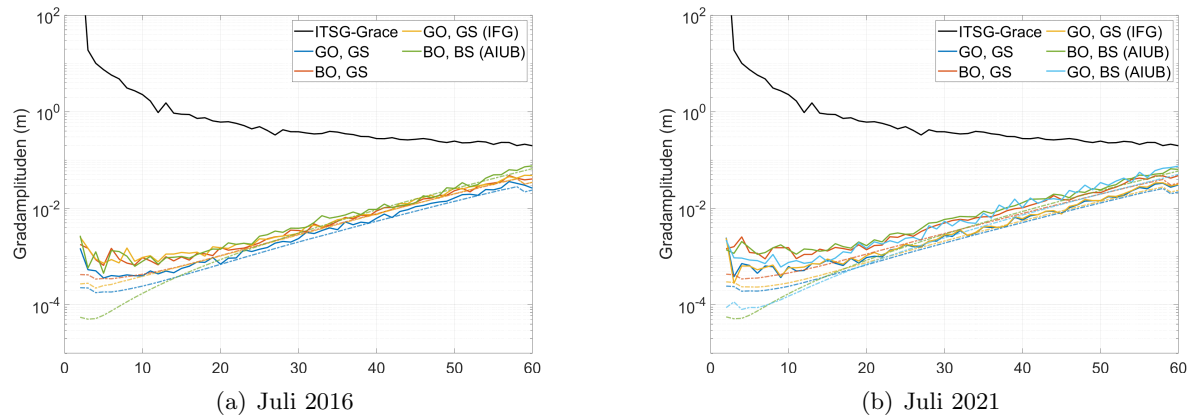
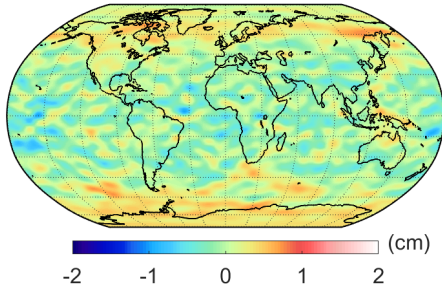


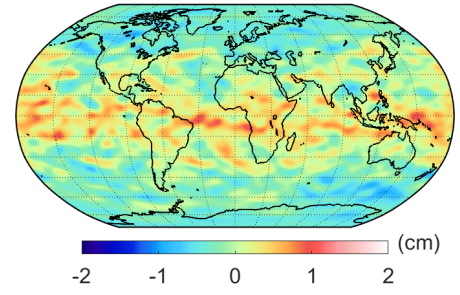
Abbildung 5.19: Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace für Juli 2016 und 2021 sowie die Differenz-Gradamplituden von GROOPS-Monatsmodellen, basierend auf den Orbits aus Graz (GO) und Bern (BO). Zum Vergleich sind außerdem die entsprechenden Modelle, die am IFG und AIUB generiert wurden, dargestellt (ungefiltert).

Tabelle 5.7: Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 und Juli 2021 werden auf der Grundlage kinematischer Positionen des IFG und des AIUB mit GROOPS generiert. zur Beurteilung der Übereinstimmung der Gravitationsfeldmodelle mit den Modellen des AIUB, IFG werden die entsprechenden Monatslösungen der Institute verwendet (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.

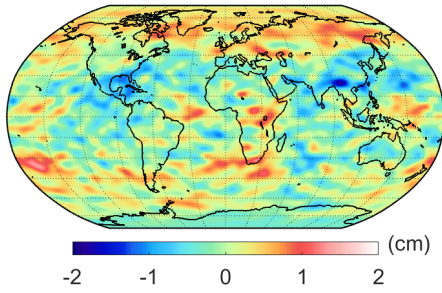
Bezeichnung	RMS _w	MIN	MAX
Juli 2016			
GO, GS	0,22	-0,99	0,76
BO, GS	0,36	-1,87	1,34
GO, GS (IFG)	0,41	-1,73	2,59
BO, BS (AIUB)	0,40	-2,20	2,40
Juli 2021			
GO, GS	0,30	-1,00	1,04
BO, GS	0,48	-1,73	2,17
GO, GS (IFG)	0,30	-1,12	1,10
BO, BS (AIUB)	0,50	-2,51	2,41
GO, BS (AIUB)	0,39	-2,42	2,66



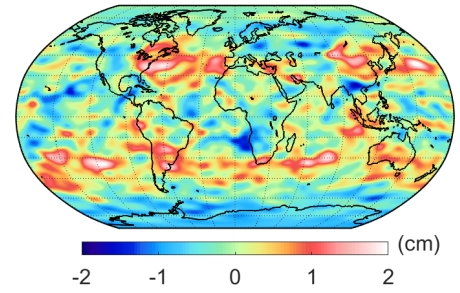
(a) GO, GS (Juli 2016)



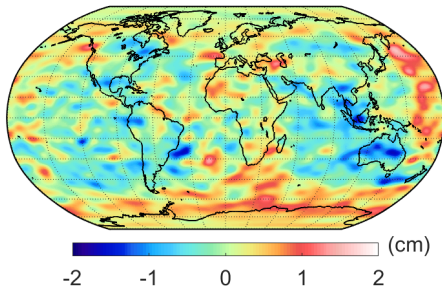
(b) GO, GS - ITSG (Juli 2021)



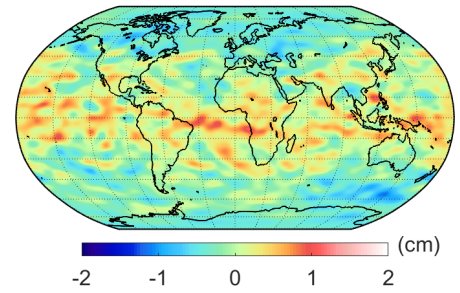
(c) BO, GS - ITSG (Juli 2016)



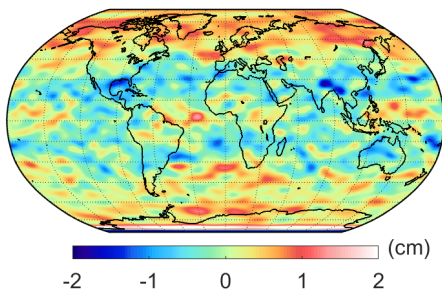
(d) BO, GS (Juli 2021)



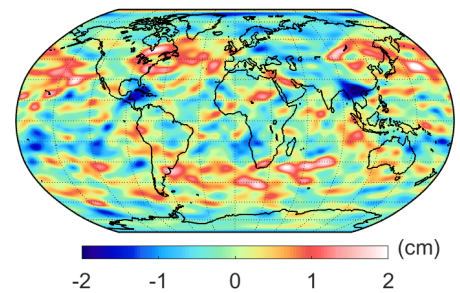
(e) GO, GS (IFG, Juli 2016)



(f) GO, GS (IFG, Juli 2021)



(g) BO, BS (AIUB, Juli 2016)



(h) BO, BS (AIUB, Juli 2021)

Abbildung 5.20: Geoidhöhenunterschiede der Swarm123-Monatslösungen basierend auf den Orbits aus Graz und Bern und die entsprechenden Lösungen der Institute. Die Geoidhöhenunterschiede beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösungen von Juli 2016 bzw. Juli 2021. (500 km Gauß-Filter)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Einsatz kinematischer Orbits von LEO-Satelliten für die Bestimmung von Gravitationsfeldparametern untersucht. Basierend auf den Positionen von Swarm werden mit GROOPS nach Short-Arc-Approach vollständig normierte Koeffizienten des Gravitationspotentials ermittelt und deren Genauigkeiten durch Vergleich mit ITSG-Grace-Monatslösungen evaluiert. Untersuchungen zum maximalen Entwicklungsgrad zeigen, dass der relevante Signalgehalt in den Koeffizienten bis Grad und Ordnung 40 enthalten ist. Wird der Entwicklungsgrad dennoch bis Grad und Ordnung 60 fortgesetzt, können die Koeffizienten niedrigeren Grades genauer bestimmt werden. Außerdem zeigt diese Untersuchung, dass bei einer kurzen Beobachtungszeit von einem Monat, das Hintergrundmodell deutlich höher entwickelt werden muss, um die konservativen Störkräfte auf die Satelliten adäquat zu beschreiben. Zur Analyse des Einflusses der zeitlichen Auflösung der kinematischen Positionen werden die Gravitationsfeldlösungen basierend auf den Orbits mit 1 s, 5 s und 10 s verglichen. Es zeigen sich nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Auflösungsstufen beim Vergleich mit den ITSG-Grace-Monatslösungen. Die größte Übereinstimmung werden mit 5 s-Orbits erreicht. Die Bogenlänge im Short-Arc-Approach hat dagegen einen größeren Einfluss auf die Rekonstruktion des Gravitationsfelds: Bogenlängen von unter 30 Minuten eignen sich nicht, da die Redundanz nicht groß genug ist, um die Gravitationsfeldparameter zuverlässig zu bestimmen. Darüber hinaus ergeben sich für lange Bögen ab 180 Minuten großräumige Abweichungen bei Betrachtung der Geoidhöhenunterschiede aufgrund der Akkumulation unzureichend modellierter Störkräfte.

Neben der Untersuchung verschiedener Einflussfaktoren wie maximaler Entwicklungsgrad, zeitliche Auflösung der kinematischen Positionen und die Länge der Bogenstücke auf die Gravitationsfeldbestimmung wird auch betrachtet, wie sich die Genauigkeit verbessert, wenn die Daten der Missionen GRACE und Swarm kombiniert werden. Die Ergebnisse zeigen, dass durch eine Kombination mit den kinematischen Positionen von GRACE das Rauschen in den höheren Koeffizienten verringert werden kann. Die Kombination der Daten verschiedener Missionen führt auf eine genauere Gravitationsfeldbestimmung aufgrund der größeren Anzahl an Beobachtungsdaten und der unterschiedlichen Orbitkonfigurationen.

Der Vergleich von Orbitprodukten aus Graz und Bern sowie der resultierenden Lösungen für das Gravitationsfeld zeigt zum Einen Differenzen zwischen den Ansätzen zur Gravitationsfeldbestimmung und zum Anderen den Effekt der Unterschiede in der Orbitbestimmung. Die optimierten Orbits des IFG führen zu einer genaueren Rekonstruktion des monatlichen Gravitationsfeldes in Bezug auf die ITSG-Grace-Modelle als die Orbits des AIUB. Darüber hinaus zeigt sich, dass die stochastische Modellierung sowohl die Genauigkeiten der vollständig normierten Koeffizienten beeinflusst als auch die Koeffizienten selbst.

Zuletzt wird aus der Zeitreihe monatlicher Lösungen betrachtet, welche Massenverlagerungen im Erdsystem auf Basis der kinematischen Positionen von LEOs aufgedeckt werden können. Aufgrund der eingeschränkten räumlichen Auflösung können nur großräumige Veränderungen mit

Ausdehnung von mehreren hundert Kilometern im Gravitationsfeld der Erde beobachtet werden. Für eine globale Abdeckung ist eine Beobachtungsdauer von mindestens einem Monat erforderlich. Daher können nur saisonale sowie langfristige Veränderungen abgeleitet werden.

Die durchgeführten Analysen zeigen, dass aus monatlichen Gravitationsfeldmodellen auf der Basis kinematischer Positionen von LEO-Satelliten durchaus großräumige Strukturen des Gravitationsfelds abgeleitet werden können. Voraussetzung ist allerdings eine detaillierte Modellierung aller Störkräfte zur Trennung der Kräftefunktion und die Einführung eines a priori Schwerefeldmodells zur Reduzierung von Aliasing-Effekten, wodurch eine Abhängigkeit von Hintergrundmodellen besteht. Die räumliche Auflösung kann durch die Kombination der Daten mehrerer Missionen erhöht werden und so Lücken in den Beobachtungsreihen der Satellitenschwerefeldmissionen überbrücken. Hierbei können in Zukunft beispielsweise auch die Daten der Missionen TerraSAR-X und TanDEM-X, MetOp, Jason und Sentinel, die sich ebenfalls in erdnahen Umlaufbahnen befinden, verwendet werden. Daneben könnte durch die Kombination der Datensätze auch die zeitliche Auflösung erhöht werden. Für eine globale Abdeckung mit den Daten einer Mission ist aufgrund der Orbitkonfiguration aktuell eine Beobachtungsdauer von mindestens einem Monat erforderlich. Die Vielzahl an Beobachtungen mehrerer Missionen könnte dies verkürzen und so auch das zeitvariable Gravitationspotential in kleineren Perioden beobachtbar machen. Darüber hinaus könnten weitere Untersuchungen zum Einfluss des Hintergrundfeldes auf die Bestimmung der Gravitationsfeldparameter durchgeführt werden, in dem beispielsweise ein älteres a priori Schwerefeldmodell, wie das EGM96, eingeführt wird. Außerdem kann aus einer längeren Zeitreihe über mehrere Monate und Jahre auch geschlossen werden, wie gut langfristige Trends und beispielsweise jährliche und saisonale Variationen der Koeffizienten des Schwerepotentials ausschließlich auf Basis von kinematischen Positionen abgeleitet werden können und so die Abhängigkeit von einem a priori Schwerefeldmodell verringern.

Literaturverzeichnis

- Arnold, D., & Jäggi, A. (2021). AIUB Swarm kinematic orbits, release 03. Published by Astronomical Institute, University of Bern. <https://doi.org/10.48350/158373>
- Austen, G., Grafarend, E. W., & Reubelt, T. (2002). Analysis of the Earth's Gravitational Field from Semi-Continuous Ephemeris of a Low Earth Orbiting GPS-Tracked Satellite of Type CHAMP, GRACE or GOCE. In J. Ádám & K.-P. Schwarz (Hrsg.), *Vistas for Geodesy in the New Millennium* (S. 309–315). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04709-5_51
- Bauer, M. (2018). *Vermessung und Ortung mit Satelliten. Globale Navigationssatellitensysteme (GNSS) und andere satellitengestützte Navigationssysteme*. Wichmann Verlag, Berlin.
- Baur, O., Bock, H., Höck, E., Jäggi, A., Krauss, S., Mayer-Gürr, T., Reubelt, T., Siemes, C., & Zehentner, N. (2014). Comparison of GOCE-GPS gravity fields derived by different approaches. *Journal of Geodesy*, 88(10), 959–973. <https://doi.org/10.1007/s00190-014-0736-6>
- Beutler, G., Jäggi, A., Mervart, L., & Meyer, U. (2010). The celestial mechanics approach: theoretical foundations. *Journal of Geodesy*, 84(10), 605–624. <https://doi.org/10.1007/s00190-010-0401-7>
- Bezděk, A., Sebera, J., & Klokočník, J. (2017). Validation of Swarm accelerometer data by modelled nongravitational forces. *Advances in Space Research*, 59(10), 2512–2521. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.02.037>
- Centre, I. C. (2019). Chapter 6 (Updated): Geopotential. Verfügbar 27. Mai 2024 unter <https://iers-conventions.obspm.fr/chapter6.php>
- Chen, J., Tapley, B., Tamisiea, M. E., Save, H., Wilson, C., Bettadpur, S., & Seo, K.-W. (2021). Error Assessment of GRACE and GRACE Follow-On Mass Change. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 126(9), e2021JB022124. <https://doi.org/10.1029/2021JB022124>
- Dach, R., Lutz, S., Walser, P., & Fridez, P. (2015). Bernese GNSS Software Version 5.2. User Manual. <https://doi.org/10.7892/BORIS.72297>
- Derenbach, H., Illner, M., Schmitt, G., Vetter, M., & Vielsack, S. (2007). *Ausgleichsrechnung - Theorie und aktuelle Anwendungen aus der Vermessungspraxis*. <https://doi.org/10.5445/KSP/1000006400>
- Ditmar, P., Kuznetsov, V., Van Der Sluijs, A. A. V. E., Schrama, E., & Klees, R. (2006). ‘DEOS_CHAMP-01C_70’: a model of the Earth's gravity field computed from accelerations of the CHAMP satellite. *Journal of Geodesy*, 79(10-11), 586–601. <https://doi.org/10.1007/s00190-005-0008-6>
- Dobslaw, H., Bergmann-Wolf, I., Dill, R., Poropat, L., Thomas, M., Dahle, C., Esselborn, S., König, R., & Flechtner, F. (2017). A new high-resolution model of non-tidal atmosphere and ocean mass variability for de-aliasing of satellite gravity observations: AOD1B RL06. *Geophysical Journal International*. <https://doi.org/10.1093/gji/ggx302>
- Doodson, A. T. (1921). *The Harmonic Development of the Tide-Generating Potential* (Bd. 100).

- Drob, D. P., Emmert, J. T., Meriwether, J. W., Makela, J. J., Doornbos, E., Conde, M., Hernandez, G., Noto, J., Zawdie, K. A., McDonald, S. E., Huba, J. D., & Klenzing, J. H. (2015). An update to the Horizontal Wind Model (HWM): The quiet time thermosphere. *Earth and Space Science*, 2(7), 301–319. <https://doi.org/10.1002/2014EA000089>
- Emmert, J. T., Drob, D. P., Picone, J. M., Siskind, D. E., Jones, M., Mlynczak, M. G., Bernath, P. F., Chu, X., Doornbos, E., Funke, B., Goncharenko, L. P., Hervig, M. E., Schwartz, M. J., Sheese, P. E., Vargas, F., Williams, B. P., & Yuan, T. (2021). NRLMSIS 2.0: A Whole-Atmosphere Empirical Model of Temperature and Neutral Species Densities. *Earth and Space Science*, 8(3), e2020EA001321. <https://doi.org/10.1029/2020EA001321>
- ESA. (2012). GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) - eoPortal. Verfügbar 5. Juni 2024 unter <https://www.eoportal.org/satellite-missions/goce#goce-gravity-field-and-steady-state-ocean-circulation-explorer>
- ESA. (2020). Types of orbits. Verfügbar 24. Januar 2024 unter https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Types_of_orbits#LEO
- ESA. (2022). GRACE - Earth Online. Verfügbar 20. Mai 2024 unter <https://earth.esa.int/eogateway/missions/grace>
- ESA. (2024). Swarm - Earth Online. Verfügbar 12. März 2024 unter <https://earth.esa.int/eogateway/missions/swarm>
- Folkner, W. A. (2014). Planetary ephemeris DE432. https://naif.jpl.nasa.gov/pub/naif/generic_kernels/spk/planets/de432.pdf
- Grombein, T., Lasser, M., Arnold, D., Meyer, U., & Jäggi, A. (2022). Determination and Combination of Monthly Gravity Field Time Series from Kinematic Orbits of GRACE, GRACE-FO and Swarm. In J. T. Freymueller & L. Sánchez (Hrsg.), *Geodesy for a Sustainable Earth* (S. 191–201, Bd. 154). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/1345_2022_163
- Haagmans, R., Siemes, C., Massotti, L., Carraz, O., & Silvestrin, P. (2020). ESA’s next-generation gravity mission concepts. *Rendiconti Lincei. Scienze Fisiche e Naturali*, 31(1), 15–25. <https://doi.org/10.1007/s12210-020-00875-0>
- Heiskanen, W. A., & Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W. H. Freeman; Company. <https://doi.org/10.1007/b139113>
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., & Wasle, E. (2008). *GNSS—global navigation satellite systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer.
- IERS. (2018). Chapter 7 (Updated): Displacement of reference points. <https://iers-conventions.obspm.fr/chapter7.php>
- IERS. (2024). IERS - IERS - Earth orientation data. Verfügbar 25. Mai 2024 unter <https://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/EarthOrientationData/eop.html>
- Ince, E. S., Barthelmes, F., Reißland, S., Elger, K., Förste, C., Flechtner, F., & Schuh, H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. *Earth System Science Data*, 11(2), 647–674. <https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019>

- Iorfida, E., Daras, I., Haagmans, R., & Strømme, A. (2023). Swarm A and C Accelerometers: Data Validation and Scientific Interpretation. *Earth and Space Science*, 10(2), e2022EA002458. <https://doi.org/10.1029/2022EA002458>
- Jäggi, A., Bock, H., Prange, L., Meyer, U., & Beutler, G. (2011). GPS-only gravity field recovery with GOCE, CHAMP, and GRACE. *Advances in Space Research*, 47(6), 1020–1028. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2010.11.008>
- Jäggi, A., Dahle, C., Arnold, D., Bock, H., Meyer, U., Beutler, G., & van den IJssel, J. (2016). Swarm kinematic orbits and gravity fields from 18 months of GPS data. *Advances in Space Research*, 57(1), 218–233. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2015.10.035>
- Jekeli, C. (1981). Alternative methods to smooth the Earth’s gravity field. Verfügbar 7. Mai 2024 unter <https://www.semanticscholar.org/paper/Alternative-methods-to-smooth-the-Earth’s-gravity-Jekeli/34ed872e15e2833b396433568dff569ee29bd8e4>
- Jekeli, C. (1999). The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 75(2), 85–101. <https://doi.org/10.1023/A:1008313405488>
- JPL. (2024). GRACE — Mission. Verfügbar 12. Februar 2024 unter <https://grace.jpl.nasa.gov/mission/grace>
- Kashif, M., Aslam, M., Jun, C.-H., Al-Marshadi, A. H., & Rao, G. S. (2017). The Efficacy of Process Capability Indices Using Median Absolute Deviation and Their Bootstrap Confidence Intervals. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 42(11), 4941–4955. <https://doi.org/10.1007/s13369-017-2699-4>
- Kizer, E. (2024). CERES Data Products – CERES. Verfügbar 24. Mai 2024 unter <https://ceres.larc.nasa.gov/data/>
- Kvas, A., Brockmann, J. M., Krauss, S., Schubert, T., Gruber, T., Meyer, U., Mayer-Gürr, T., Schuh, W.-D., Jäggi, A., & Pail, R. (2021). GOCO06s – a satellite-only global gravity field model. *Earth System Science Data*, 13(1), 99–118. <https://doi.org/10.5194/essd-13-99-2021>
- Kvas, A., Mayer-Gürr, T., Krauss, S., Brockmann, J. M., Schubert, T., Schuh, W.-D., Pail, R., Gruber, T., Jäggi, A., & Meyer, U. (2019). The satellite-only gravity field model GOCO06s. <https://doi.org/10.5880/ICGEM.2019.002>
- Landerer, F. W., Flechtner, F. M., Save, H., Webb, F. H., Bandikova, T., Bertiger, W. I., Bettadpur, S. V., Byun, S. H., Dahle, C., Dobslaw, H., Fahnstock, E., Harvey, N., Kang, Z., Kruizinga, G. L. H., Loomis, B. D., McCullough, C., Murböck, M., Nagel, P., Paik, M., ... Yuan, D.-N. (2020). Extending the Global Mass Change Data Record: GRACE Follow-On Instrument and Science Data Performance. *Geophysical Research Letters*, 47(12), e2020GL088306. <https://doi.org/10.1029/2020GL088306>
- Lasser, M., Meyer, U., Jäggi, A., Mayer-Gürr, T., Kvas, A., Neumayer, K. H., Dahle, C., Flechtner, F., Lemoine, J.-M., Koch, I., Weigelt, M., & Flury, J. (2020a). Benchmark data for verifying background model implementations in orbit and gravity field determination software. *Advances in Geosciences*. <https://doi.org/10.1093/gji/ggx302>

- Lasser, M., Meyer, U., Arnold, D., & Jäggi, A. (2020b). Stochastic noise modelling of kinematic orbit positions in the Celestial Mechanics Approach. *50*, 101–113. <https://doi.org/10.5194/adgeo-50-101-2020>
- Li, K., Zhou, X., Guo, N., Zhao, G., Xu, K., & Lei, W. (2017). Comparison of precise orbit determination methods of zero-difference kinematic, dynamic and reduced-dynamic of GRACE-A satellite using SHORDE software. *Journal of Applied Geodesy*, *11*(3), 157–165. <https://doi.org/10.1515/jag-2017-0004>
- Lyard, F. H., Allain, D. J., Cancet, M., Carrère, L., & Picot, N. (2021). FES2014 global ocean tide atlas: design and performance. *Ocean Science*, *17*(3), 615–649. <https://doi.org/10.5194/os-17-615-2021>
- Mayer-Gürr, T., Ilk, K., Eicker, A., & Feuchtinger, M. (2005). ITG-CHAMP01: a CHAMP gravity field model from short kinematic arcs over a one-year observation period. *Journal of Geodesy*, *78*(7), 462–480. <https://doi.org/10.1007/s00190-004-0413-2>
- Mayer-Gürr, T. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE* [Thesis]. Universitäts- und Landesbibliothek Bonn. Verfügbar 7. Februar 2024 unter <https://bonndoc.ulb.uni-bonn.de/xmlui/handle/20.500.11811/2388>
- Mayer-Gürr, T., Behzadpour, S., Eicker, A., Ellmer, M., Koch, B., Krauss, S., Pock, C., Rieser, D., Strasser, S., Süßner-Rechberger, B., Zehentner, N., & Kvas, A. (2021a). GROOPS: A software toolkit for gravity field recovery and GNSS processing. *Computers & Geosciences*, *155*, 104864. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2021.104864>
- Mayer-Gürr, T., Behzadpour, S., Eicker, A., Ellmer, M., Koch, B., Krauss, S., Pock, C., Rieser, D., Strasser, S., Süßner-Rechberger, B., Zehentner, N., & Kvas, A. (2021b, Oktober). GROOPS: A software toolkit for gravity field recovery and GNSS processing - Documentation. Verfügbar 4. Februar 2024 unter <https://github.com/groops-devs/groops/blob/main/docs/documentation.pdf>
- Mayer-Gürr, T., Behzadpur, S., Ellmer, M., Kvas, A., Klinger, B., Strasser, S., & Zehentner, N. (2018). ITSG-Grace2018 - Monthly, Daily and Static Gravity Field Solutions from GRACE. <https://doi.org/10.5880/ICGEM.2018.003>
- Mayer-Gürr, T., Kurtenbach, E., & Eicker, A. (2012). Different representations of the time variable gravity field to reduce the aliasing problem in GRACE data analysis. In *VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*. Springer Verlag Berlin Heidelberg.
- Moe, K., & Moe, M. M. (2005). Gas-surface interactions and satellite drag coefficients. *Planetary and Space Science*, *53*(8), 793–801. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2005.03.005>
- Moritz, H. (2000). Geodetic Reference System 1980. *Journal of Geodesy*, *74*(1), 128–133. <https://doi.org/10.1007/s001900050278>
- Niemeier, W. (2008). *Ausgleichungsrechnung - Statistische Auswertemethoden* (2., überarbeitete und erweiterte Auflage). Walter de Gruyter.
- Pail, R., Bingham, R., Braitenberg, C., Dobslaw, H., Eicker, A., Güntner, A., Horwath, M., Ivins, E., Longuevergne, L., Panet, I., & Wouters, B. (2015). Science and User Needs for

- Observing Global Mass Transport to Understand Global Change and to Benefit Society. *Surveys in Geophysics*, 36(6), 743–772. <https://doi.org/10.1007/s10712-015-9348-9>
- Park, R. S., Folkner, W. M., Williams, J. G., & Boggs, D. H. (2021). The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441. *The Astronomical Journal*, 161(3), 105. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd414>
- Petit, G., & Luzum, B. (2010). IERS Conventions (2010). *International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS)*.
- Russell, G. (2024). ModelE AR5 Simulations: Past Climate Change and Future Climate Predictions [Goddard Space Flight Center]. Verfügbar 24. Mai 2024 unter <https://data.giss.nasa.gov/modelE/ar5plots/solar.html>
- Schönwiese, C.-D. (2020, Juni). *Klimatologie* (5. Aufl.). utb. <https://doi.org/10.36198/9783838553870>
- Selvan, K., Siemuri, A., Prol, F. S., Välisuo, P., Bhuiyan, M. Z. H., & Kuusniemi, H. (2023). Precise orbit determination of LEO satellites: a systematic review. *GPS Solutions*, 27(4), 178. <https://doi.org/10.1007/s10291-023-01520-7>
- Suesser-Rechberger, B., Krauss, S., Strasser, S., & Mayer-Gürr, T. (2022). Improved precise kinematic LEO orbits based on the raw observation approach. *Advances in Space Research*, 69(10), 3559–3570. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.03.014>
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Ries, J. C., Thompson, P. F., & Watkins, M. M. (2004). GRACE Measurements of Mass Variability in the Earth System. *Science*, 305(5683), 503–505. <https://doi.org/10.1126/science.1099192>
- Teixeira da Encarnação, J., Visser, P., Arnold, D., Bezdek, A., Doornbos, E., Ellmer, M., Guo, J., van den IJssel, J., Iorfida, E., Jäggi, A., Klokocník, J., Krauss, S., Mao, X., Mayer-Gürr, T., Meyer, U., Sebera, J., Shum, C. K., Zhang, C., Zhang, Y., & Dahle, C. (2020). Description of the multi-approach gravity field models from Swarm GPS data. *Earth System Science Data*, 12(2), 1385–1417. <https://doi.org/10.5194/essd-12-1385-2020>
- Torge, W. (2003). *Geodäsie* (2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage). De Gruyter.
- van den IJssel, J., Forte, B., & Montenbruck, O. (2016). Impact of Swarm GPS receiver updates on POD performance. *Earth, Planets and Space*, 68(1), 85. <https://doi.org/10.1186/s40623-016-0459-4>
- Visser, P., & Van Den IJssel, J. (2003). Aiming at a 1-cm Orbit for Low Earth Orbiters: Reduced-Dynamic and Kinematic Precise Orbit Determination. *Space Science Reviews*, 108(1), 27–36. <https://doi.org/10.1023/A:1026253328154>
- Wahr, J., Molenaar, M., & Bryan, F. (1998). Time variability of the Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 103(B12), 30205–30229. <https://doi.org/10.1029/98JB02844>
- Wöske, F., Kato, T., Rievers, B., & List, M. (2019). GRACE accelerometer calibration by high precision non-gravitational force modeling. *Advances in Space Research*, 63(3), 1318–1335. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.10.025>
- Zehentner, N., & Mayer-Gürr, T. (2016). Precise orbit determination based on raw GPS measurements. *Journal of Geodesy*, 90(3), 275–286. <https://doi.org/10.1007/s00190-015-0872-7>

Abbildungsverzeichnis

3.1	Höhe der Satelliten der Missionen GRACE, GRACE-FO und Swarm über der Erdoberfläche im Laufe der Zeit abgeleitet aus ihren kinematischen Positionen (Grombein et al., 2022).	27
5.1	Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Swarm123-Lösungen mit unterschiedlichem maximalen Entwicklungsgrad und ihren Fehlergradamplituden (Juli 2016).	53
5.2	Darstellung ungefilterter Koeffizientendifferenzen (rechts) sowie deren Synthese in den Ortsbereich (links). Die Differenzen beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösung (Swarm123, Juli 2016).	54
5.3	Darstellung gefilterter Koeffizientendifferenzen (rechts) sowie deren Synthese in den Ortsbereich (links). Die Differenzen beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösung (Swarm123, Juli 2016).	55
5.4	Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Swarm123-Lösung, generiert nach Short-Arc-Approach mit unterschiedlichen maximalen Bogenlängen, mit ihren Fehlergradamplituden (ungefiltert, Juli 2016).	57
5.5	Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der maximalen Bogenlänge im Short-Arc-Approach auf die Gravitationsfeldbestimmung. Die Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Lösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell. Die maximale Bogenlänge variiert von 15 bis 60 Minuten (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).	58
5.6	Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der maximalen Bogenlänge im Short-Arc-Approach auf die Gravitationsfeldbestimmung. Die Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Lösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell. Die maximale Bogenlänge variiert von 90 bis 240 Minuten (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).	59
5.7	Vergleich im Frequenzraum durch Gradamplituden mit ihren Fehlern (links) und Variationskoeffizienten (rechts) zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten auf die Gravitationsfeldbestimmung. Dargestellt sind die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells und dazu die Differenz-Gradamplituden der einzelnen Swarm-Monatslösungen. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (ungefiltert, Juli 2016)	62

5.8	Vergleich im Frequenzraum durch Gradamplituden mit ihren Fehlern (links) und Variationskoeffizienten (rechts) zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten auf die Gravitationsfeldbestimmung. Dargestellt sind die absoluten Gradamplituden des ITSG-Grace-Modells und dazu die Differenz-Gradamplituden der kombinierten Swarm123-Monatslösung. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (ungefiltert, Juli 2016)	63
5.9	Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten. Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Swarm-Monatslösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell für Juli 2016. Die Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (500 km Gauß-Filter).	64
5.10	Vergleich im Ortsraum zur Betrachtung des Einflusses der zeitlichen Auflösung kinematischer Positionen von LEO-Satelliten. Geoidhöhenunterschiede der kombinierten Swarm123-Monatslösungen beziehen sich auf das ITSG-Grace-Modell für Juli 2016. Die kombinierten Modelle basieren auf den kinematischen Positionen mit einer Abtastung von 1 s, 5 s und 10 s (500 km Gauß-Filter).	64
5.11	Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace sowie die relativen Gradamplituden der Monatslösungen, die auf den kinematischen Positionen unterschiedlicher Satelliten basieren, und ihre Fehlergradamplituden (ungefiltert, Juli 2016)	66
5.12	Darstellung der Koeffizientendifferenzen bezüglich des ITSG-Grace-Modells (ungefiltert, Juli 2016).	67
5.13	Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Swarm-Lösungen bzw. der kombinierten Swarm123-Lösung in Bezug auf das ITSG-Grace-Modell (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).	68
5.14	Geoidhöhenunterschiede der einzelnen Grace-Lösungen bzw. der kombinierten Grace12-Lösung in Bezug auf das ITSG-Grace-Modell (500 km Gauß-Filter, Juli 2016).	69
5.15	Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen sowie der ITSG-Grace-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche t_{GOCO} : 2010-01-01 (500 km Gauß-Filter, Januar bis April 2015).	72
5.16	Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche t_{GOCO} : 2010-01-01 (500 km Gauß-Filter, Januar bis Juni 2016).	73
5.17	Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche t_{GOCO} : 2010-01-01 (500 km Gauß-Filter, Juli bis Dezember 2016).	74

5.18 Geoidhöhendifferenzen der Swarm123-Monatslösungen und der ITSG-Grace-Lösungen bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Bezugsepoche t_{GOCO} : 2010-01-01 (500 km Gauß-Filter).	75
5.19 Absolute Gradamplituden des ITSG-Grace für Juli 2016 und 2021 sowie die Differenz-Gradamplituden von GROOPS-Monatsmodellen, basierend auf den Orbits aus Graz (GO) und Bern (BO). Zum Vergleich sind außerdem die entsprechenden Modelle, die am IFG und AIUB generiert wurden, dargestellt (ungefiltert).	79
5.20 Geoidhöhenunterschiede der Swarm123-Monatslösungen basierend auf den Orbits aus Graz und Bern und die entsprechenden Lösungen der Institute. Die Geoidhöhenunterschiede beziehen sich auf die ITSG-Grace-Monatslösungen von Juli 2016 bzw. Juli 2021. (500 km Gauß-Filter)	80

Tabellenverzeichnis

3.1	Zusammenstellung der Hintergrundmodelle zur Bestimmung der konservativen Kräfte mit ihren Einflüssen auf die Beschleunigungen eines LEO-Satelliten (nach Lasser et al., 2020a).	30
5.1	Übersicht über die durchgeführten Untersuchungen. \mathbf{n}_{\max} steht für den maximalen Entwicklungsgrad der ermittelten Koeffizienten, \mathbf{n}_{BF} für den Entwicklungsgrad des Hintergrundfelds und \mathbf{arcL}_{\max} für die maximale Bogenlänge im Short-Arc-Approach.	51
5.2	Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage unterschiedlich langer Short-Arcs von 15 bis 240 Minuten generiert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.	60
5.3	Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage kinematischer Orbits mit einer zeitlichen Auflösung von 1 s, 5 s und 10 s generiert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.	61
5.4	Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 werden auf der Grundlage kinematischer Positionen einzelner Satelliten der Missionen Grace und Swarm generiert und anschließend auf Normalgleichungsebene kombiniert (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.	70
5.5	Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des statischen Modells GOCO06s mit Referenzepoche t_G :2010-01-01 für ausgewählte Monatslösungen (500 km Gauß-Filter). $\bar{x}_w \approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.	76
5.6	Erläuterung zur Modellbezeichnung. Modelle mit der Bezeichnung GO, GS und BO, GS wurden im Rahmen dieser Arbeit mit GROOPS generiert, die Modelle GO, GS (IFG); BO, BS (AIUB) und GO, BS (AIUB) wurden zum Vergleich zur Verfügung gestellt.	77
5.7	Statistische Kenngrößen der Geoidhöhenunterschiede bezüglich des ITSG-Grace. Die Modelle für Juli 2016 und Juli 2021 werden auf der Grundlage kinematischer Positionen des IFG und des AIUB mit GROOPS generiert. zur Beurteilung der Übereinstimmung der Gravitationsfeldmodelle mit den Modellen des AIUB, IFG werden die entsprechenden Monatslösungen der Institute verwendet (500 km Gauß-Filter). Differenzen im Mittel $\approx 10^{-6}$ cm, Einheiten in cm.	79

KIT Scientific Working Papers
ISSN 2194-1629

www.kit.edu