

Converse Transduction in the Presence of Strong Electrical Field Gradients in Ferroelectrics (ConTraGrad)

Final Project Report for SCHW 555/24-1 and KA 1019/16-1

Prof. Dr. Norbert Schwesinger

Prof. Dr. Marc Kamlah



1 General Information

1.1 DFG reference number

SCHW 555/24-1 and KA 1019/16-1

1.2 Project number

391065131

1.3 Project title

Converse Transduction in the Presence of Strong Electrical Field Gradients in Ferroelectrics
(ConTraGrad)

1.4 Names of the applicants

Prof. Dr. Norbert Schwesinger Principal Investigator (TUM)

Prof. Dr. Marc Kamlah Principal Investigator (KIT)

1.5 Official addresses

Professorship of Micro-Mechatronic Systems
Department of Electrical and Computer Engineering
Technical University of Munich (TUM)
Arcisstr. 21
80333 München

Institute of Applied Materials – Mechanics of Materials and Interfaces (IAM-MMI)
Division III – Mechanical and Electrical Engineering
Karlsruhe Institute of Technology (KIT)
Hermann-von-Helmholtz-Platz 1
76344 Eggenstein-Leopoldshafen

1.6 Names of the co-applicants

Dipl.-Ing. Lars Seyfert Doctoral Researcher (TUM) – experimental work

M.Sc. Felix Sutter Doctoral Researcher (KIT) – material modeling and simulation

1.7 Names of the cooperation partners

Prof. Dr. Jie Wang, Zhejiang University, China

Prof. Dr.-Ing. Werner Hemmert, Technische Universität München, Deutschland

1.8 Reporting period (entire funding period):

SCHW 555/24-1: 01.2018 – 12.2022

KA 1019/16-1: 07.2018 – 12.2023

2 Summary

The overall objective of this project is gaining a deeper insight into the behavior of the ferroelectric class of piezoelectric materials when subjected to high electric fields and strong electrical gradients covering both, the piezoelectric and flexoelectric effects.

Der inverse flexoelektrische Effekt wird in der Aktuatorik zur Umwandlung elektrischer Signale in mechanische Spannungen und damit gekoppelt in Dehnungen eingesetzt [1]. Im Gegensatz zum inversen piezoelektrischen Effekt und bei dem eine Änderung des elektrischen Feldes eine Deformation hervorruft, beschreibt der inverse flexoelektrische Effekt Veränderungen der induzierten elastischen Spannungen aufgrund von Variationen des elektrischen Feldgradienten in dielektrischen Materialien [1].

Diese elektrischen Feldgradienten zu erzeugen und deren Auswirkungen zu analysieren war das Ziel des praktischen Teils dieser Arbeit. Daneben wird die grundlegende Fragestellung untersucht, wie der Beitrag des inversen flexoelektrischen Effekts zur Energieumwandlung nachgewiesen werden kann. Hierfür wird das Konzept der Oberflächenelektroden auf einer PZT-Keramik (PIC151 von PI Ceramics) verwendet, da sich bei diesem Ansatz ein inhomogener elektrischer Feldverlauf im Material einstellt.

Durch das Anlegen von oszillierenden Spannungssignalen konnten Auslenkungen in allen Raumrichtungen beobachtet werden. Um den piezoelektrischen Effekt vom inversen flexoelektrischen Effekt zu unterscheiden, wurden die Messungen im Temperaturbereich von 20°C bis 350°C durchgeführt, d.h. einschließlich Temperaturen oberhalb der Curie-Temperatur (T_c). Dabei wurden Deformationen der Festkörperanordnung über den gesamten Temperaturbereich festgestellt. Da der piezoelektrische Effekt oberhalb der Curie-Temperatur T_c keinen Beitrag zur Verformung liefert, wies dies auf einen Beitrag des inversen flexoelektrischen Effekts hin. Die dabei auftretenden signifikanten Deformationen von 30 bis 40 % im Vergleich zur Raumtemperatur konnten nicht mehr allein durch thermische Effekte erklärt werden und deuteten stark auf das Vorhandensein eines zusätzlichen Effekts hin.

Von den ursprünglich im Antrag beschriebenen drei Strukturen wurden nur die Platte-Platte-Anordnung genauer untersucht. Die runde, radialsymmetrische, Anordnung, welche jeweils einzeln mittig kontaktiert werden musste, verhinderte auf Grund dieser Kontaktierung eine optische Erfassung der gesamten Struktur, da Teile immer verdeckt blieben. Die Spitze-Platte-Anordnung wurde nicht näher betrachtet, weil in der Platte-Platte-Anordnung die Plattenränder jeweils Spitzen im Feld bilden. Daher entspricht aus symmetrischen Gründen das Viertelfeld zwischen zwei Platten an der Plattenkante einer Spitze-Platte-Anordnung.

The scientific goal of the modelling activities in this project was to simulate the influence of the flexoelectric effect on the deformation behaviour. As a first step, a phenomenological macroscopic material model covering all relevant coupled electromechanical hysteresis properties of ferroelectric ceramics was implemented in an efficient finite element code. Then, IDE model systems with purely piezoelectric and ferroelectric responses, were simulated as a starting point for quantifying the influence of flexoelectricity. An essential work package is the development of a macroscopic continuum model including for the first time flexoelectricity in addition to ferroelectric large-signal hysteresis behavior. With this model, we could simulate the interplay of flexoelectricity and poling induced piezoelectricity in ferroelectric materials, in particular, for IDE systems.

The major goal of the project was achieved, namely a better understanding of the influence of the converse flexoelectricity on the macroscopic response of ferroelectrics in the presence of high electric field gradients.

3 Progress Report

Experimental Tasks

Um das Verhalten der sich ändernden elektrischen Feldgradienten und seine Auswirkungen experimentell zu erfassen, wurde ein grundlegendes Konzept erarbeitet, nachdem entsprechende Proben (Abschnitt 3.1) hergestellt wurden. Um die resultierenden Bewegungen zu erfassen, wurde ein messtechnische Konzept und der dafür notwendige Messaufbau erstellt (Abschnitt 3.2). Letztendlich wurden die gemessenen Daten erfasst und analysiert.

3.1 Experimentelles Konzept und Probenherstellung

Im Rahmen dieser Arbeit findet eine weiche PZT-Keramik, deren Curie-Temperatur bei 250°C liegt [2], Anwendung. Zum experimentellen Nachweis wurden kapazitive Elektrodenanordnungen einseitig auf PZT-Wafern platziert. Über diese Inter-Digitated Transducer IDT Strukturen wird eine inhomogene Feldverteilung erzeugt.

Durch das Anlegen von oszillierenden Spannungssignalen an diese Elektrodenanordnungen konnten Auslenkungen in allen Raumrichtungen erzeugt werden. Um den piezoelektrischen Effekt vom inversen flexoelektrischen Effekt zu unterscheiden, wurden die Messungen im Temperaturbereich von 20°C bis 350°C durchgeführt, d.h. einschließlich Temperaturen oberhalb der Curie-Temperatur (T_c). Hierbei sollten die Anteile des piezoelektrischen Effektes, welcher bis 250°C signifikant ist, herausgefiltert werden. Die zur Untersuchung hergestellten PZT Wafer sind in **Figure 1**.

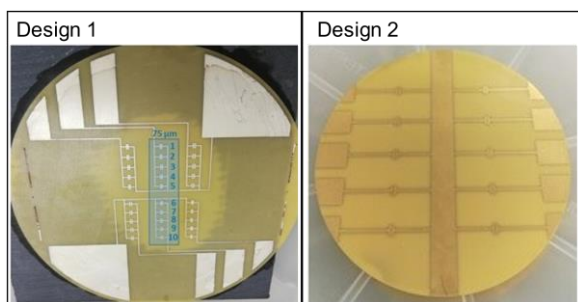


Figure 1: Erzeugte Wafer mit aufgetragten IDT-Strukturen

3.2 Messtechnisches Konzept und Messaufbau

Um die hergestellten Strukturen untersuchen zu können wurde ein messtechnische Konzept entwickelt, welches im Rahmen des Forschungsprojektes abgearbeitet wurde.

Das entscheidende Element stellt dabei die dynamische Charakterisierung der einzelnen Aktoren dar. Die dabei eingesetzten Messverfahren zur Detektierung der dreidimensionalen dynamischen Verformung sind in **Figure 2** dargestellt. Dabei wird zwischen Out-of-plane Bewegung (Auslenkung senkrecht zur Probenoberfläche) und In-plane Bewegung (laterale Verformung der Keramik selbst) unterschieden.

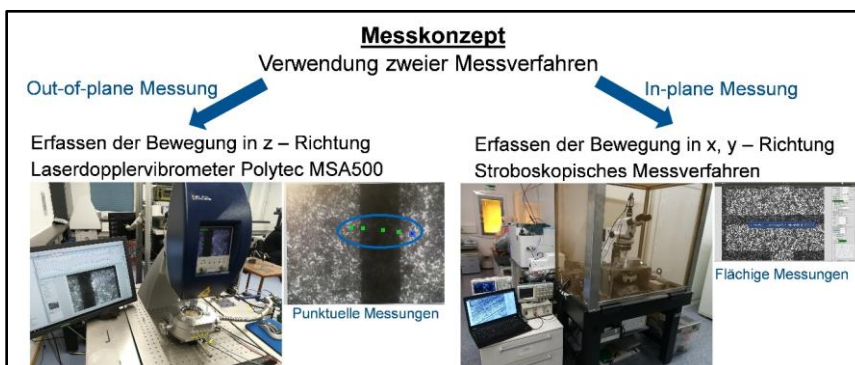


Figure 2: Eingesetzte Messverfahren zur Bewegungserfassung

Es wurden zwei verschiedene optische Messverfahren eingesetzt. Für die Erfassung der Bewegung senkrecht zur Ebene in z-Richtung (Out-of-plane-Messung) wurde ein Laserdopplervibrometer MSA500 von Polytec verwendet. Mit diesem System wurden die Auslenkungen an definierten Punkten gemessen.

Um Bewegungen innerhalb der Ebene in x- und y-Richtung (In-plane-Messung) zu detektieren, wurde ein stroboskopisches Bewegungsmesssystem in Verbindung mit einem Mikroskop und einer CCD-Kamera eingesetzt [3] [4]. Dieses System überwachte die Bewegung eines zuvor definierten Rechtecks im Bildausschnitt, das als Region of Interest (ROI) bezeichnet wird. Durch diese Methode konnte die Bewegung dieses ROI-Bereichs erfasst werden, wodurch eine flächige Messung ermöglicht wurde. Diese Methode zur Messung der In-Plane-Bewegung basiert auf der stroboskopischen Videomikroskopie, bei der schnelle Bewegungen mit Hilfe von kurzen Lichtblitzen visuell eingefroren werden.

Um die bereits in Abschnitt 3.1 beschriebene Trennung der einzelnen Effekte zu erreichen, war der Einsatz eines beheizbaren Messaufbaus erforderlich, welcher mit den zwei eingesetzten Messverfahren kompatibel war. Die bauliche Ausführung der dabei eingesetzten Messkammer gewährleistet, dass die Proben Temperaturen von mindestens 300 °C erreichen können, ohne dass die Messkammer selbst übermäßig erhitzt wird und die Optik der Messinstrumente erheblich beschädigt oder die Messung behindert wird.

3.3 Ergebnisse

Die Proben wurden, wie bereits im Abschnitt 3.1 beschrieben, charakterisiert. Die Oberflächenbeschaffenheit der Proben ist dabei beispielhaft in einer Weißlicht-Interferometermessung in **Figure 3** dargestellt.

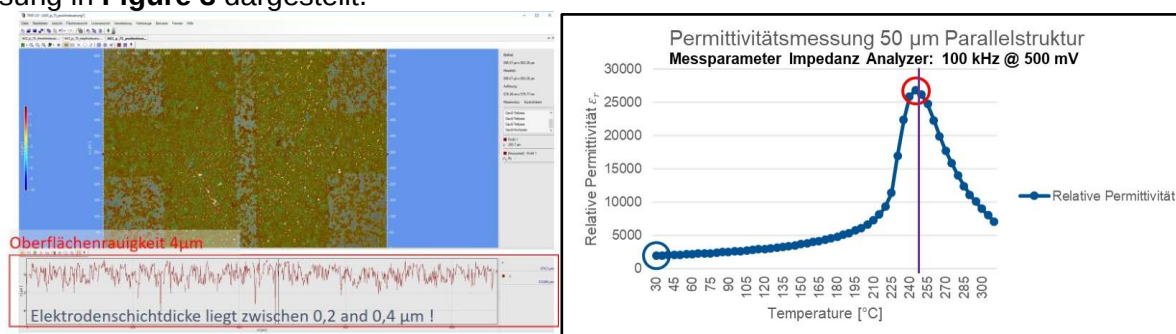


Figure 3: Oberflächenbeschaffenheit der PZT-Proben links und Permittivitätsmessung für PIC151-Keramik mit Strukturen

Im Rahmen einer dielektrischen Charakterisierung wurden die Proben in einem zweiten Schritt untersucht, um die Permittivität und ihren Verlauf über die Temperatur zu bestimmen (Figure 3: Oberflächenbeschaffenheit der PZT-Proben links und Permittivitätsmessung für PIC151-Keramik mit Strukturen **Figure 3**).

In den eigentlichen dynamischen Messungen zeigte sich ein ambivalentes Ergebnis, welches hier nochmals unterschieden werden soll.

3.3.1 Out-of-plane Messungen

Die Ergebnisse der Out-of-Plane-Messungen, zeigen eine relativ starke Streuung der Auslenkungen. Bei sinusförmiger Ansteuerung variieren sie je nach Messpunkt zwischen 3nm und 19nm, bei Pulsansteuerung zwischen 1,5nm und 12nm, jeweils bei Peak-to-Peak-Ansteuerung bei Raumtemperatur.

Die Messergebnisse hängen stark vom Messort ab und die Auslenkung an den Elektroden ist höher als in der Mitte zwischen den Elektroden. Dies kann auf größere Feldstärken und Feldstärkegradienten an den Elektroden zurückgeführt werden. Ein dreidimensionaler Bewegungsablauf ist in der **Figure 4** dargestellt.

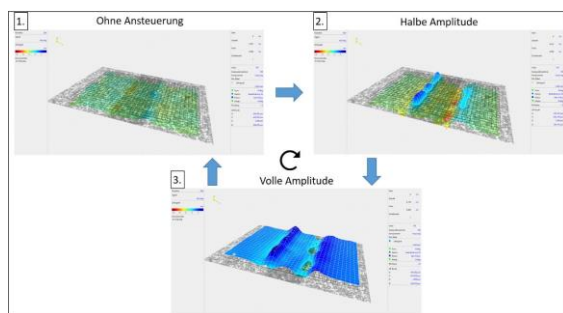


Figure 4: Bewegung des Aktors

3.3.2 In-plane Messungen

Die In-Plane-Messung basiert nicht auf Einzelpunktmessungen, sondern auf ROIs, die voneinander subtrahiert werden. Bewegungen der beiden Elektroden zueinander oder die zweidimensionale Verformung der Oberfläche können sichtbar gemacht werden. Einzelne Unregelmäßigkeiten, die an bestimmten Stellen aufgrund der Rauheit auftreten werden so gemittelt. Die Ergebnisse zeigen eine Auslenkung, die dem elektrischen Eingangssignal bei hohen und niedrigen Temperaturen folgt. Das ferroelektrische Verhalten der PZT-Keramik in Form einer Hystereseschleife verschwindet oberhalb von T_c schrittweise und ist im Bereich um 300 °C nicht mehr vorhanden, was sich mit den bekannten Materialparametern deckt [22] (**Figure 5**).

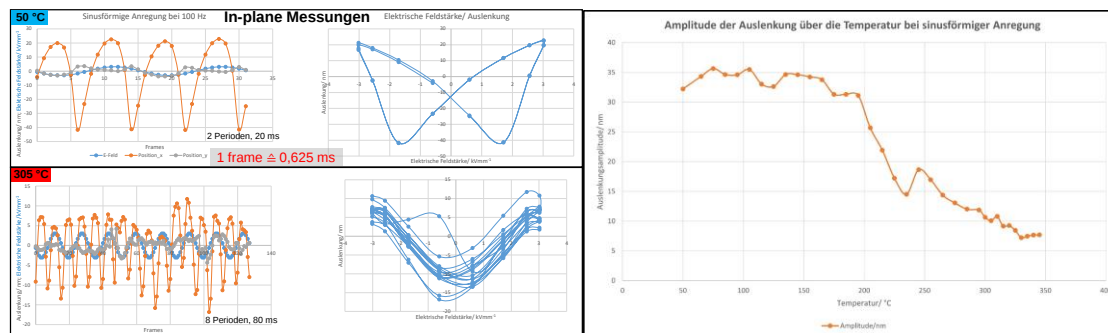


Figure 5: In-plane Auslenkungen für verschiedene Temperaturen und Auslenkung über die Temperatur für Sinusanregung

Trotz der Abnahme oberhalb von T_c ist die Auslenkung immer noch vorhanden und folgt dem elektrischen Anregungssignal. Die maximale Amplitude beträgt 35nm bei Temperaturen bis 160°C. Danach sinkt die Amplitude und stabilisiert sich auf eine Restamplitude von 5 bis 10nm bei Temperaturen über 300°C.

Die Ergebnisse der Impulssteuerung bestätigen diese Beobachtungen und sind in **Figure 6** dargestellt. Die Ergebnisse zeigen Auslenkungen von bis zu 58nm, die dann im Bereich der T_c abfallen und bei Temperaturen über 300°C zwischen 6 und 16nm liegen.

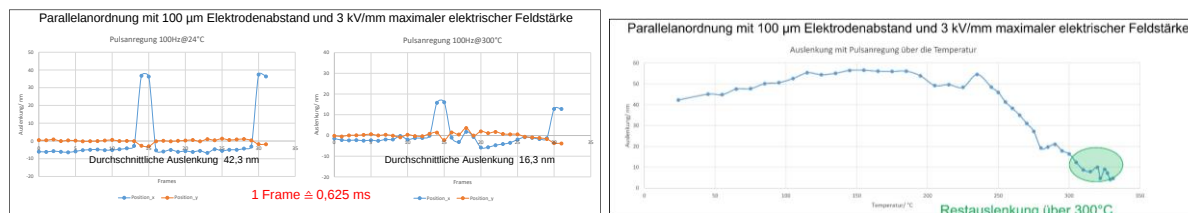


Figure 6: Auslenkungen bei Pulsanregung über unterschiedliche Temperaturen und über die Temperatur für Pulsanregung

Es zeigt sich, dass oberhalb einer Temperatur von 330°C eine klare Trennung der Auslenkungen von den thermischen Störungen schwierig wird, weshalb nur Temperaturen bis 340°C gemessen wurden. Die Ergebnisse zeigen, dass nach dem Verschwinden der Piezoelektrizität als Polarisationsmechanismus noch weitere Polarisationsmechanismen aktiv sind, von denen mit großer Wahrscheinlichkeit die Flexoelektrizität einen Mechanismus darstellt.

Simulation Tasks

3.4 Phenomenological model with microscopically motivated internal variables

Based on the class of ferroelectric models presented in [4], [5] and [6], a modified macroscopic material model for ferroelectrics has been developed. The comparison to experiments on PZT ceramic PIC 151 is shown in Figure 7. The model is thermodynamically consistently formulated in terms of a convex Helmholtz free energy and adapts the variational framework of generalized standard materials [9]. The corresponding constitutive variational principle leads to a pure minimization problem and to a stable electro-mechanical material response. The analytical expression for the algorithmic material tangent is positive definite and symmetric. A highly efficient solution procedure based on incremental variational updates [10] is used.

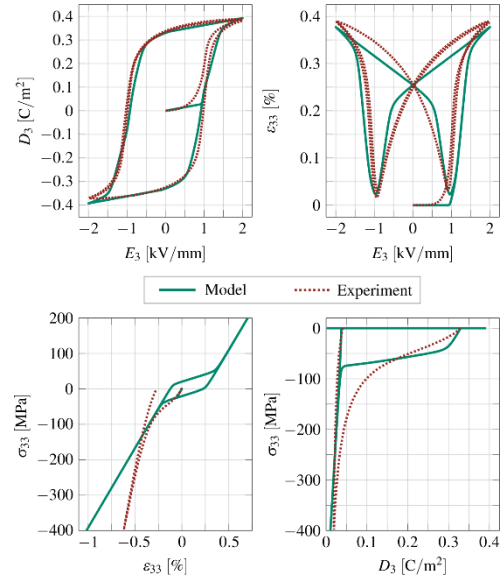


Figure 7: Comparison of the model response with the experimental hysteresses of PIC 151 measured by Zhou [8].

3.5 Mixed Helmholtz free energy based finite element formulation

A mixed finite element formulation similar to that in [11] was used which is based on a five-field variational potential. Besides the displacement field and the electric scalar potential, it contains the electric displacement, the stress and the strain as additional degrees of freedom which can be condensed out at the element level. The discussed multi-field formulation was implemented in an in-house finite element code in MATLAB [12] for the project.

3.6 Simulation of the model system actuators without flexoelectricity

Parallel electrode arrangement on PZT wafer manufactured at TUM:

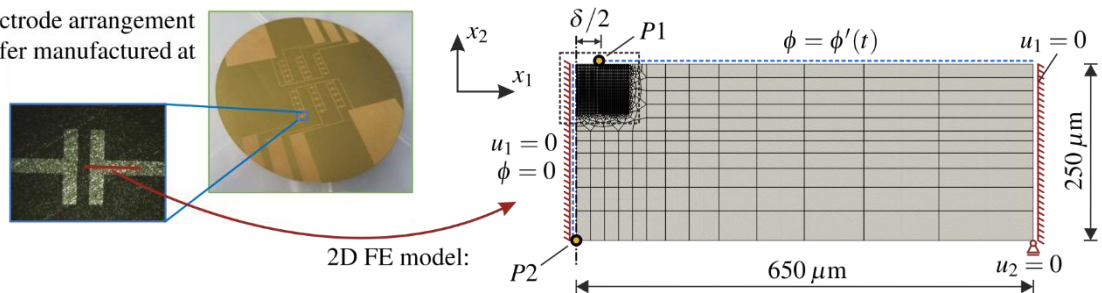


Figure 8: 2D FE model of a symmetrized cross section of the IDE model system actuator with the prescribed boundary conditions.

These simulations serve as a starting point to distinguish between the of piezoelectricity and ferroelectricity. For the results of simulations of an IDE model actuator with a parallel electrode, systems with six different electrode distances δ were considered (Figure 16). The comparison with the hysteresis measured in the experimental investigations carried out at the TUM has

shown a very good agreement (Figure 9, left). The right hand side of Figure 17 illustrates the different butterfly hystereses obtained in the simulations for the out-of-plane deformation at the bottom side of the wafer. A larger distance δ between electrodes results in higher actuation because of the increasing volume of material affected by poling processes.

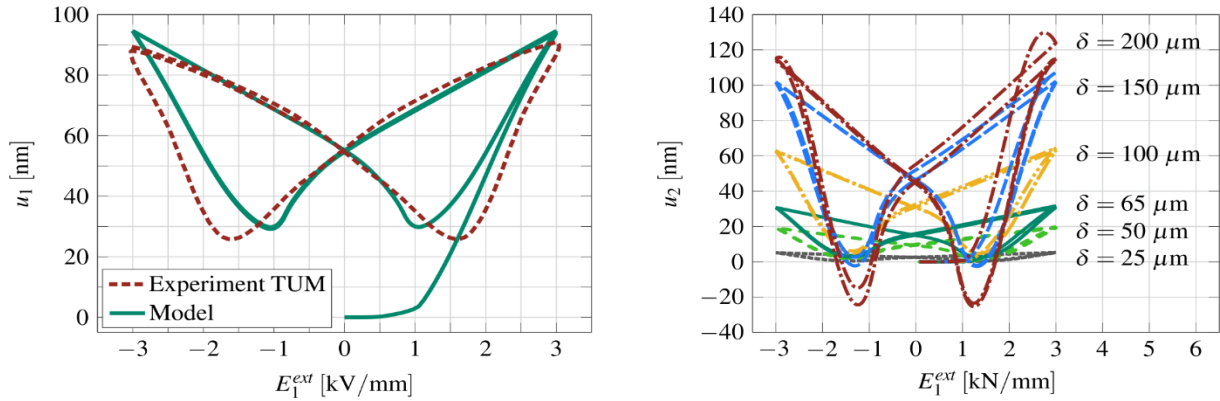


Figure 9: Left: Comparison of the butterfly hysteresis for $\delta = 65 \mu\text{m}$ of the in-plane deformation at the electrode edge (P1) with the one recorded in the experiment at TUM. Right: Butterfly hystereses of the out-of-plane deformation on the bottom (P2) for the different electrode distances δ considered.

3.7 Extension of the macroscopic continuum model by flexoelectricity

In a modified energy expression, the strain gradient is introduced as a new independent variable and, to avoid a non-unique solution of the higher-order problem due to a non-positive material tangent, an additional higher-order elasticity term was included.

3.8 Mixed flexoelectric finite element formulation

In the chosen mixed finite element formulation, the higher continuity requirements are met by introducing an independent displacement gradient field as a new nodal variable. The enforcement of the relation to the conventional displacement field is then incorporated as a constraint into the variational potential using the Lagrange multiplier method.

3.9 Estimation of realistic flexoelectric constants

The model parameters of PZT were adjusted to a four point bending test from the literature [13], see Figure 10. Hereby, a remarkably good agreement was achieved.

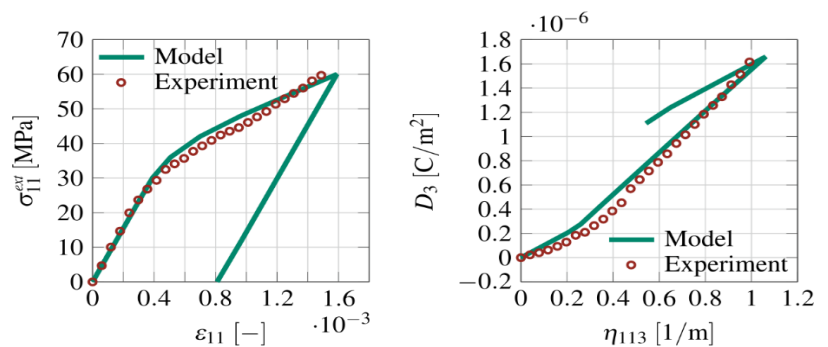


Figure 10: Adapted model response to the experimental results in [13].

3.10 Simulation of the model system actuators with flexoelectricity

Using the adapted flexoelectric material constants, the previously studied model actuator with parallel electrode arrangement was simulated employing the modified macroscopic material

model that includes flexoelectricity. Because of the electric field gradients with opposite signs at the two inner electrode edges of the model actuator, simulations with flexoelectricity accounted for must be executed on an entire model without symmetrization. However, it is still valid to assume a plane strain state in 2D. The investigation examined how the deformation behavior changes due to flexoelectricity by observing the vertical out-of-plane displacements on the bottom side of the model system (P2 in Figure 16). The simulation that includes flexoelectricity is compared to those that neglect this effect.

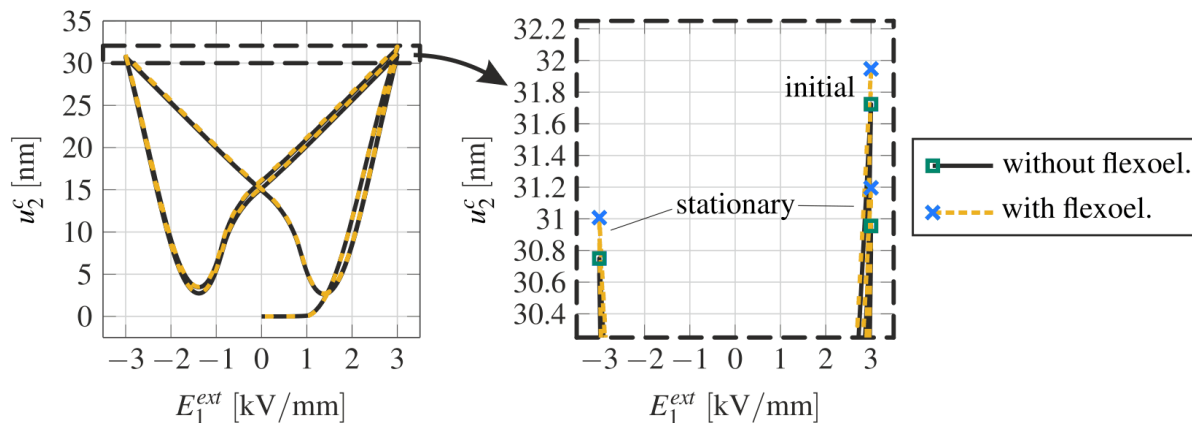


Figure 11: Comparison of the calculated hystereses of the vertical out-of-plane deformation with and without flexoelectricity.

In Figure 11 representative for this comparison, the calculated hystereses of the vertical displacement component of the IDE model system with $\delta = 65 \mu\text{m}$ is shown. It is evident that the influence of flexoelectricity on the global deformation behavior of the actuator system is very weak. In a detailed comparison of the maximum amplitudes of the hystereses, it becomes clear that a slight increase in actuation can be achieved by taking flexoelectricity into account. However, the very small increase of $< 1\%$ raises doubt about the technical use of inverse flexoelectricity in real IDE actuator systems in the dimensions considered. The reason is the small volume of the material that is affected by strong electric field gradients and therefore by the converse flexoelectric effect. For smaller sample dimensions, a more pronounced effect of flexoelectricity would certainly be expected. The magnitude of dimensions considered here was motivated by the accompanying experiments. Further systems with flexoelectricity have been simulated which is not reported here for brevity (see references 2 and 3 in Sect 4.1 and the last reference in Sect 4.2).

4 Published Project Results

4.1 Publications with scientific quality assurance

1. C. Liu, J. Wang, G. Xu, M. Kamlah, T.Y. Zhang, "An isogeometric approach to flexoelectric effect in ferroelectric materials.", International Journal of Solids and Structures, 162, 198-210 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.12.008>

2. F. Sutter, M. Kamlah, "Variational free energy based macroscopical modeling of ferroelectroelasticity.", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 178 (2023) 105341, <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2023.105341>
3. F. Sutter, "Materiell nichtlineare Kontinuumsmodellierung ferroelektrischer Funktionskeramiken mit piezoelektrischen und flexoelektrischen Eigenschaften.", Dissertation, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 2023, <https://doi.org/10.5445/IR/1000165532>
4. Seyfert, L.; Voss, A.; Hemmert, W.; Schwesinger, N.; „Contribution of converse flexoelectric effect in PZT ceramics in presence of Strong Electrical Fields“; SPIE Smart Structures + Nondestructive Evaluation; Long Beach, 2022
5. F. Sutter, M. Kamlah, "Macroscopic modeling of flexoelectricity-driven remanent polarization in piezoceramics.", European Journal of Mechanics - A/Solids 108 (2024) 105410, <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2024.105410>

4.2 Other publications and published results

TUM

Voss, A.; Seyfert, L.; Hemmert, W.; "Stroboscopic Video Microscopy for In-Plane Motion Measurements Up to 2 MHz with Picometer Resolution"; 2021 IEEE 34th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), 25-29 Jan. 2021

Voss, A.; Seyfert, L.; Schwesinger, N.; Hemmert, W.; "Stroboscopic video microscopy with sub-nanometer accuracy for characterizing and monitoring MEMS"; SPIE Smart Structures + Nondestructive Evaluation; Long Beach, 2022

KIT

F. Streich, F. Sutter, K.G. Webber, A. Martin, N. Schwesinger, L. Seyfert. M. Kamlah, "Ferroelectric Ceramics for Actuator and Sensor Applications: Finite-Element-Modeling of Lead-Free Composites and Electrode ConFigureations.", MSE/P3T1 seminar series Functionality by Information-guided Design, Karlsruhe Institute of Technology (December 2021)

F. Sutter, M. Kamlah, "Thermodynamically consistent and microscopically motivated modeling of ferroelectric materials within a variational framework.", 11th European Solid Mechanics Conference, Galway, Ireland (July 2022)

F. Sutter, M. Kamlah, "Finite Element Analysis of the Nonlinear Material Behavior of Ferroelectrics Under Complex Load Scenarios.", ASME Conference on Smart Materials, Adaptive Structures, and Intelligent Systems, Dearborn, Michigan, USA (September 2022)

F. Sutter, M. Kamlah, "Variational modeling of ferroelectric materials in a microscopically motivated framework.", 9th GACM Colloquium on Computational Mechanics, Essen, Germany (September 2022)

F. Sutter, M. Kamlah, "A variational framework for microscopically motivated modeling of ferroelectric materials.", 5th African Conference on Computational Mechanics, Cape Town, South Africa (November 2022)

F. Sutter, M. Kamlah, "Microscopically motivated continuum modeling of domain switching effects in ferroelectrics.", 2023 Spring Meeting of the European Materials Research Society (E-MRS), Strasbourg, France (May 2023)

F. Sutter, M. Kamlah, "On the continuum modeling of flexoelectricity in ferroelectric materials.", 10th GACM Colloquium on Computational Mechanics, Vienna, Austria (September 2023)

4.3 Patents (applied for and granted)

Deutsche Forschungsgemeinschaft

Kennedyallee 40 · 53175 Bonn, Germany · Postal address: 53170 Bonn, Germany
Tel.: + 49 228 885-1 · Fax: + 49 228 885-2777 · postmaster@dfg.de · www.dfg.de

References

- [1] A. K. Tagantsev and P. V. Yudin, Flexoelectricity in solids: From theory to applications. New Jersey: World Scientific, 2017.
- [2] Physik Instrumente (PI) GmbH & Co, Material Data: Specific parameters of the standard materials. [Online]. Available: https://www.piceramic.com/fileadmin/user_upload/physik_instrumente/files/datasheets/PI_Ceramic_Material_Data.pdf (accessed: Feb. 20 2024).
- [3] A. Voss, L. Seyfert, and W. Hemmert, "Stroboscopic Video Microscopy for In-Plane Motion Measurements Up to 2 MHz with Picometer Resolution," in 2021 IEEE 34th International Conference on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS), IEEE, Ed., 2021, pp. 1040–1043. [Online]. Available: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9375327>
- [4] A. Voss, L. Seyfert, N. Schwesinger, and W. Hemmert, "Stroboscopic video microscopy with sub-nanometer accuracy for characterizing and monitoring MEMS," Nondestructive Characterization and Monitoring of Advanced Materials, Aerospace, Civil Infrastructure, and Transportation XVI, 2022, doi: 10.1117/12.2612552.
- [5] M. Kamlah and Q. Jiang, "A constitutive model for ferroelectric PZT ceramics under uniaxial loading," *Smart Materials and Structures*, vol. 8, no. 4, pp. 441-459, 1999.
- [6] M. Kamlah and Z. Wang, "A thermodynamically and microscopically motivated constitutive model for piezoceramics," *Computational Materials Science*, vol. 28, no. 3-4, pp. 409-418, 2003.
- [7] V. Mehling, C. Tsakmakis and D. Gross, "Phenomenological model for the macroscopical material behavior of ferroelectric ceramics," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, no. 10, pp. 2106-2141, 2007.
- [8] D. Zhou, "Experimental investigation of non-linear constitutive behavior of PZT piezoceramics," Scientific report FZKA 6869, Forschungszentrum Karlsruhe, 2003.
- [9] B. Halphen and Q. S. Nguyen, "Sur les matériaux standard généralisés," *Journal de Mécanique*, vol. 14, no. 1, pp. 39-63, 1975.
- [10] C. Miehe, D. Rosato and B. Kiefer, "Variational principles in dissipative electro-magneto-mechanics: a framework for the macro-modeling of functional materials," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, no. 10, pp. 1225-1276, 2011.
- [11] R. Ortigosa and A. J. Gil, "A new framework for large strain electromechanics based on convex multi-variable strain energies: Finite element discretisation and computational implementation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 302, pp. 329-360, 2016.
- [12] MATLAB, Version 9.12.0.1884302 (R2022a), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2022.
- [13] W. Ma and L. E. Cross, "Strain-gradient-induced electric polarization in lead zirconate titanate ceramics," *Applied Physics Letters*, vol. 82, no. 19, pp. 3293-3295, 2003.