

# **Einfluss der thermomechanischen Kopplung auf die Reibkraft in trockenen Gleitlagern unter hochfrequenter Anregung**

---

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)**

von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

**Dissertation**

von

**M. Sc. Simon Keller**

---

Tag der mündlichen Prüfung:

23. Mai 2025

Hauptrreferent:

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Willner



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung -  
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Viele Menschen haben mich auf ganz unterschiedliche Weise dabei unterstützt, dieses sehr persönliche Projekt zu vollenden.

Mein größter Dank gilt Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin, der nach dem Tod von Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann die Betreuung meiner Arbeit übernahm. Sein offenes Ohr, die vielen hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Des Weiteren danke ich Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Willner für die Übernahme des Korreferats, den herzlichen Umgang und das gezeigte Interesse an meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe danke ich für die angenehme Zusammenarbeit am Institut. Mein besonderer Dank gilt zudem den emeritierten Professoren Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jens Wittenburg, Prof. Dr.-Ing. Jörg Wauer sowie Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig, der leider wenige Wochen vor meiner Prüfung verstarb. Ihre rege Teilnahme am Institutsleben und an den jährlichen Seminaren war eine große Bereicherung. Ihr ehrliches Interesse sowie ihre Beiträge zu den Forschungsarbeiten der wissenschaftlichen Mitarbeiter empfand ich als große Ehre.

Ein herzlicher Dank gilt allen aktuellen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen am Institut für das stets angenehme und unkomplizierte Miteinander, die Hilfsbereitschaft und die vielen fachlichen, aber auch erfrischend fachfremden Diskussionen und Gespräche. Hervorheben möchte ich meinen langjährigen Bürokollegen Matthias Fischer, mit dem mich nicht nur die Begeisterung für Forschung und Lehre, sondern auch die Leidenschaft für den Ausdauersport verbindet. Ebenso danke ich allen Hiwis und Studierenden, deren Bachelor- oder Masterarbeiten ich betreuen durfte, für die spannenden Fragen und anregenden Gespräche, die daraus entstanden sind.

Allen Freundinnen und Freunden inner- und außerhalb der Universität danke ich für viele unvergessliche und alltägliche Momente, die mir immer eine willkommene Abwechslung boten.

Zu guter Letzt möchte ich mich von Herzen bei meiner Familie für die anhaltende Unterstützung und den großen Rückhalt bedanken. Besonders meine Freundin Carissima hat mich immer wieder darin bestärkt, meinen Weg mit Entschlossenheit zu verfolgen und meinem eigenen Anspruch treu zu bleiben. Ihre Geduld, ihr Verständnis und ihr Vertrauen haben mich durch diese intensive Zeit getragen.

Karlsruhe, im Mai 2025

Simon Keller

# Kurzfassung

Trockene Gleitlager sind aufgrund ihrer Vielseitigkeit und geringen Kosten in zahlreichen technischen Systemen weit verbreitet. In Anwendungen, die hohe Genauigkeit in Verbindung mit geringen Toleranzen erfordern, können reibungsinduzierte Phänomene wie Losbrechen oder selbsterregte Schwingungen problematisch sein. Ein Ansatz zur Unterdrückung dieser Effekte ist die Überlagerung hochfrequenter Schwingungen. Obwohl diese Methode seit vielen Jahren erforscht wird, wurde der Einfluss der entstehenden Reibungswärme auf das Bewegungs- und Reibverhalten des Systems bislang nicht ausreichend berücksichtigt.

Diese Arbeit untersucht die Wechselwirkung zwischen hochfrequenten Schwingungen, Reibkraft und Wärmeentwicklung in mechanischen Systemen. Damit sollen Aussagen abgeleitet werden, inwieweit die induzierte Reibungswärme das dynamische Verhalten beeinflusst und ob trotz thermomechanischer Kopplung die hochfrequente Anregung zu einer Reduktion der Reibkraft führen kann. Zur theoretischen Untersuchung wird ein Modell eines Drehgelenks mit trockener Reibung unter hochfrequenter Anregung verwendet, in dem der Kontaktdruck über die thermische Ausdehnung mit der reibungsinduzierten Wärmeentwicklung gekoppelt ist. Ausgewählte mathematische Methoden ermöglichen eine semi-analytische Betrachtung des vollständig gekoppelten Systems. Diese Vorgehensweise gestattet es, analytische Näherungslösungen sowie numerische Lösungen zu ermitteln, wodurch der Einfluss der thermomechanischen Kopplung deutlich gemacht wird. Zusätzlich zu den Simulationen werden Experimente an einem speziell entwickelten Prüfstand durchgeführt. Neben dem Einfluss der hochfrequenten Schwingung auf das gemessene Drehmoment in einem trockenen Gleitlager wird auch die Temperaturentwicklung im Kontakt aufgezeichnet. Die Reibleistung bestimmt hauptsächlich die Temperaturerhöhung im Kontakt, allerdings kann auch eine Änderung des Reibmoments mit der Temperatur beobachtet werden. Somit kann auch experimentell die Wechselwirkung aus hochfrequenten Schwingungen, Reibung und Wärmeentwicklung evaluiert werden. Abschließend werden die simulativen und experimentellen Ergebnisse verglichen, um das theoretische Modell und den Prüfstand hinsichtlich ihrer Stärken und Schwächen zu bewerten.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> . . . . .	I
<b>Kurzfassung</b> . . . . .	III
<b>1 Einleitung</b> . . . . .	1
1.1 Motivation und Thema der Arbeit . . . . .	2
1.2 Literaturübersicht . . . . .	2
1.2.1 Trockene Gleitlager . . . . .	2
1.2.2 Reibungserregte Schwingungen . . . . .	6
1.2.3 Reibwertglättung . . . . .	9
1.2.4 Thermomechanisch gekoppelte Reibschwinger . . . . .	13
1.3 Zielsetzung . . . . .	16
1.4 Aufbau der Arbeit . . . . .	17
<b>2 Grundlagen</b> . . . . .	19
2.1 Reibung in dynamischen Systemen . . . . .	19
2.1.1 Einfaches Modell eines Gleitlagers . . . . .	21
2.2 Wärmeleitung in Festkörpern . . . . .	23
2.3 Dynamische Systeme mit unterschiedlichen Zeitskalen . . . . .	30
<b>3 Thermomechanisch gekoppelter Reibschwinger</b> . . . . .	35
3.1 Modellierung . . . . .	35
3.1.1 Mechanischer Schwinger . . . . .	36
3.1.2 Thermomechanisches Kontinuum . . . . .	38
3.1.3 Wärmeleitungsgleichung . . . . .	41
3.2 Systemgleichungen des vollen Systems . . . . .	48
3.3 Mittelung der schnellen Dynamik für schwache Anregung . . . . .	51
3.4 Stationärer Zustand . . . . .	53
3.4.1 Interpretation der Gleichungen . . . . .	55
3.4.2 Reduzierte Parameterverhältnisse . . . . .	57

<b>4 Simulationsergebnisse</b> . . . . .	59
4.1 Gleichungen des vollen Systems . . . . .	59
4.1.1 Schwache Anregung . . . . .	59
4.1.2 Starke Anregung . . . . .	62
4.1.3 Einfluss der Umlaufgeschwindigkeit . . . . .	64
4.1.4 Einfluss viskoser Dämpfung . . . . .	66
4.1.5 Zustandsabhängiger Reibungskoeffizient . . . . .	66
4.2 Gemitteltes System . . . . .	68
4.2.1 Schwache Anregung . . . . .	69
4.2.2 Starke Anregung . . . . .	70
4.3 Stationärer Zustand . . . . .	71
4.4 Schlussfolgerungen . . . . .	77
<b>5 Experimentelle Ergebnisse</b> . . . . .	79
5.1 Prüfstandsaufbau . . . . .	79
5.2 Vorbereitende Untersuchungen . . . . .	83
5.2.1 Drehwiderstand des Kugellagers und Motors . . . . .	83
5.2.2 Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes ohne Welle . . . . .	83
5.2.3 Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes bei stehender Welle .	84
5.3 Hauptuntersuchungen . . . . .	85
5.3.1 Verhalten ohne Anregung . . . . .	85
5.3.2 Verhalten mit hochfrequenter Anregung . . . . .	89
5.3.3 Vergleich mit und ohne Anregung . . . . .	95
5.4 Gegenüberstellung von experimentellen und theoretischen Ergebnissen	98
5.5 Diskussion . . . . .	101
5.5.1 Bewertung des Simulationsmodells . . . . .	101
5.5.2 Bewertung des Prüfstands . . . . .	102
5.5.3 Fazit . . . . .	104
<b>6 Zusammenfassung</b> . . . . .	105

## Anhang

<b>A Greensche Funktionen</b> . . . . .	111
A.1 Greensche Funktionen im Bildbereich . . . . .	111
A.2 Inverse Laplace-Transformation der Greenschen Funktionen . . . . .	111
<b>B Identitäten der Eigenwerte und Koeffizienten</b> . . . . .	117
<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	123
<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	127
<b>Eigene Publikationen</b> . . . . .	137
<b>Betreute Abschlussarbeiten</b> . . . . .	139



# 1 Einleitung

Stehen zwei Körper miteinander in Kontakt, so wirkt zwischen ihnen nicht nur eine Kraft senkrecht zur Berührungsfläche, sondern auch eine Kraft parallel zur Fläche. Was zunächst unspektakulär anmutet, ist bei genauerer Betrachtung jedoch ein komplexes physikalisches Phänomen und kann praktisch überall in der belebten und unbelebten Welt beobachtet werden. Beim Spazieren vertrauen wir darauf, dass unser Schuh auf dem Untergrund nicht wegrutscht, wie es auf einer Eisfläche passieren kann. Wenn wir ein Fahrzeug anhalten möchten, wird ein Bremsbelag gegen eine drehende Bremsscheibe gedrückt und das Vehikel wird abgebremst. Um das Fahrzeug zu beschleunigen oder um eine Kurve zu bewegen, müssen die Reifen Kräfte tangential zur Kontaktfläche übertragen. Ohne dieses Phänomen, das wir als Reibung bezeichnen, wäre Fortbewegung unheimlich schwer. Nur dank Reibung können wir einen Kaffeekocher halten, indem wir ihn ausschließlich umfassen anstatt seine Unterseite auf unserer Hand abzustellen. Seit Kindheitstagen haben wir gelernt mit Reibung umzugehen und sie zu nutzen. Wir wissen, wie stark wir ein Glas umgreifen müssen oder mit welcher Kraft wir gegen unsere Computermaus drücken müssen, damit sie über den Schreibtisch gleitet und den Cursor wie gewünscht bewegt. In der Technik hingegen will man die der Reibung zugrundeliegenden Mechanismen verstehen, zum einen, um die gezielte Nutzung in beispielsweise Reibungskupplungen zu verbessern. Zum anderen möchte man die unerwünschten Effekte wie Energiedissipation, Verschleiß oder Schwingungserregung auf ein Minimum reduzieren. Obwohl das Phänomen Reibung seit Jahrhunderten beobachtet und untersucht wird, gibt es immer noch kein zweckmäßiges physikalisches Modell, das alle Phänomene und Wirkzusammenhänge ganzheitlich abbilden und erklären kann.

Die vorliegende Arbeit ist dem umfangreichen Gebiet der Tribologie zuzuordnen. Diese Wissenschaft beschäftigt sich mit berührenden Festkörpern und den daraus entstehenden Wechselwirkungen. Der Fokus liegt dabei auf einem kleinen Ausschnitt, in dem der Zusammenhang von Bewegung und Reibung, daraus resultierender Wärmeentwicklung und der damit einhergehende Einfluss auf das Bewegungsverhalten beleuchtet wird.

## 1.1 Motivation und Thema der Arbeit

Der Einfluss überlagerter, hochfrequenter Schwingungen auf Systeme mit Reibkontakte ist bereits seit mehreren Dekaden Gegenstand der Forschung und wird gezielt in technischen Systemen eingesetzt. Im deutschsprachigen Raum ist dieser Effekt vor allem als „Reibwertglättung“ bekannt. In entsprechender Literatur wird der Fokus dabei auf verschiedene Aspekte wie die Orientierung der Schwingungsanregung relativ zur Bewegungsrichtung oder die Modellierung des Reibkontakte gelegt. Die weitgehenden Untersuchungen geben einen tiefen Einblick in das Phänomen und theoretische Ergebnisse werden durch Experimente bestätigt. Ein Aspekt, der bislang nicht ausreichend untersucht wurde, ist die induzierte Reibungswärme und deren Einfluss auf das Reibverhalten. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine Ausführung eines trockenen Gleitlagers als Drehgelenk vorgestellt, an welchem der Einfluss einer hochfrequenten Anregung auf das thermomechanische und dynamische Verhalten untersucht werden soll.

## 1.2 Literaturübersicht

Das Phänomen Reibung wird bereits seit Jahrhunderten untersucht, als Beispiel werden hierfür gerne die Aufzeichnungen von Leonardo da Vinci (\*1452 – †1519) genannt, die bereits zu Beginn des 16. Jahrhunderts entstanden sind [64]. Ein weiterer Meilenstein waren die Untersuchungen von Charles Augustin Coulomb (\*1736 – †1806), nach dem das wohl prominente Modell zur Formulierung der Reibkraft benannt ist [43]. Im 20. Jahrhundert erfährt die Tribologie wie viele andere Bereiche der Technik große Beachtung und es werden damit auch zahlreiche neue Erkenntnisse gewonnen. Die anschließenden Unterkapitel geben einen Überblick über die Entwicklung der Forschung in den Gebieten trockene Gleitlager, reibungserregte Schwingungen, Reibwertglättung sowie thermomechanisch gekoppelte Schwingungen.

### 1.2.1 Trockene Gleitlager

Lagerungen beschränken und ermöglichen Relativbewegungen von Maschinenelementen und sind damit die konkrete Ausformung von Gelenken [4, 129]. Die verschiedenen Lagerarten werden dabei in ihrer Bauform und in der Einschränkung der Bewegung eingeteilt. Einige Beispiele sind Linearlager, Drehlager oder Gelenklager, die unterschiedliche Freiheitsgrade zulassen. Die häufigsten Ausführungen im Maschinenbau sind Wälzlager, bei denen sich Wälzkörper wie Kugeln oder Zylinder zwischen den bewegten Körpern befinden, und Gleitlager, bei denen sich ein Schmierstoff zwischen den bewegten Teilen befinden kann [54]. Falls aufgrund von Umgebungsanforderungen

kein Schmierstoff verwendet werden kann, wie beispielsweise in der Lebensmittelindustrie, werden sogenannte Trockenlager eingesetzt, bei denen sich die bewegten Teile direkt berühren und aufeinander abgleiten [56]. Die Lagerbuchsen können dabei unter anderem aus gesintertem Eisen, Metallkeramik, Kunststoffen oder Verbundwerkstoffen bestehen [15]. Besonders Lager aus Kunststoffen sind aufgrund ihrer vielseitigen Einsatzbarkeit und der geringen Herstellungskosten sehr weit verbreitet [40]. Trockenlager haben einige Nachteile wie erhöhter Verschleiß [115] und schlechter Wärmetransport, außerdem liegt die maximale Lagerbelastung sowie die Drehzahl weit unter denen von Wälzlagern oder hydrodynamisch arbeitenden Lagern [42]. Dafür ist der konstruktive Aufwand deutlich geringer, die Konstruktion selbst günstiger, die Lager benötigen weniger Wartung und die erreichbare Führungsgenauigkeit ist sehr gut [15]. Zur Auslegung solcher Lager ist der Kontaktdruck  $p$  sowie die Gleitgeschwindigkeit  $v$  ausschlaggebend. In Abb. 1.1 ist für verschiedene Gleitlagerwerkstoffe die zulässige Pressung über der Geschwindigkeit aufgetragen. Die Belastungsgrenze ergibt sich dabei aus der Grenze zur plastischen Verformung des Lagerwerkstoffes sowie aus der zulässigen thermischen Belastbarkeit [42]. Bei kleinen Gleitgeschwindigkeiten dürfen die Lager stark belastet werden, bei zunehmender Geschwindigkeit nimmt die zulässige Belastung ab.

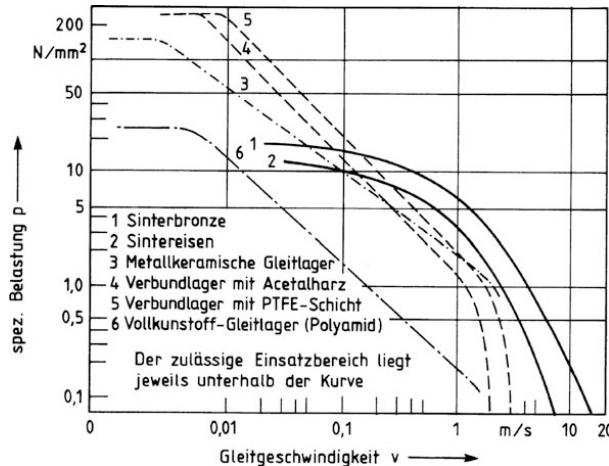


Abbildung 1.1:  $pv$ -Diagramm unterschiedlicher Gleitlager nach Czichos [42]

Für Gleitlager ist die Reibungszahl  $f$  charakterisierend. Sie gibt das Verhältnis aus Tangentialkraft und Normalkraft an und ist im Idealfall sehr klein. In der Literatur wird dieser Proportionalitätsfaktor oft auch als Reibwert oder Reibungskoeffizient  $\mu$  bezeichnet. Bei großen Reibungszahlen ist die Energiedissipation durch die Reibung hoch, bei gleichzeitigem Anstieg des Verschleißes und der Wärmeentwicklung. In Abb. 1.2 ist die Reibungszahl zweier Materialpaarungen über der Kontaktspannung

und der Gleitgeschwindigkeit aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Reibungszahl mit zunehmender Geschwindigkeit und abnehmender Pressung erhöht und Werte im Bereich von 0,05 bis 0,3 annimmt. Im Allgemeinen entspringt dieser Faktor nur einer Modellvorstellung und wird je nach Anwendungsfall angepasst, da er für unterschiedliche Materialpaarungen und Umgebungsbedingungen verschiedene Werte annimmt [65].

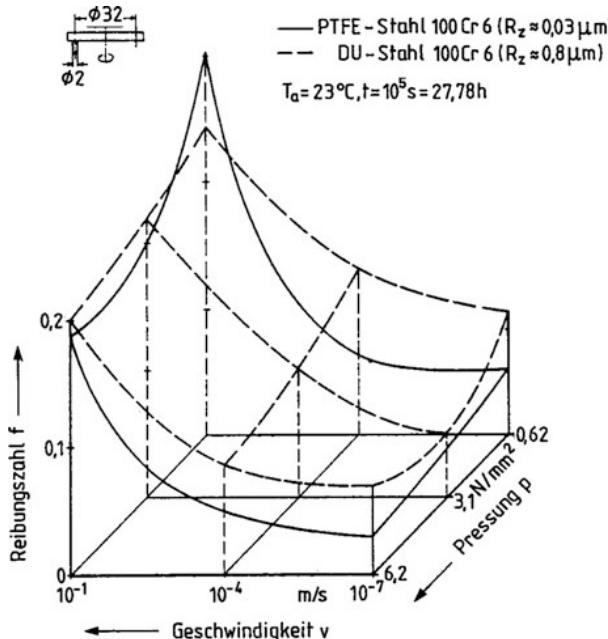


Abbildung 1.2: Reibungszahl  $f$  über Pressung  $p$  und Gleitgeschwindigkeit  $v$  nach Czichos [42]

In der Veröffentlichung von Bueche und Flom [33] wird der Reibungskoeffizient einer ungeschmierten Stahl-Plexiglas-Paarung bei unterschiedlichen Relativgeschwindigkeiten und Temperaturen experimentell erprobt. Es zeigt sich eine deutliche Abhängigkeit, wobei der Reibungskoeffizient für größere Temperaturen zunimmt. Die Autoren Chernets et al. [37] ermitteln den Einfluss der Temperatur auf den Kontaktdruck in einem Kunststoffgleitlager experimentell. Sie kommen zu dem Schluss, dass eine höhere Umgebungstemperatur das Betriebsverhalten positiv beeinflusst, da die Tragfähigkeit zunimmt. Zhu, Xie und Dwyer-Joyce untersuchen in [131] neuartige, faserverstärkte Kunststoffe als Hülsenmaterial. Sie beobachten dafür gegenüber herkömmlichen Kunststoffen verbesserte Eigenschaften bezüglich Reibungskoeffizient, Verschleiß und Reibungswärme. In [36] werden trockene Gleitlager verschiedener Durchmesser mit Buchsen aus unterschiedlichen Thermoplasten getestet. Aus den Untersuchungen geht hervor, dass der Wellendurchmesser zusammen mit Lagerspiel und Kontaktdruck eine

wichtige Eingangsgröße für das Reib- und Verschleißverhalten darstellt. In [80] wird über die Beobachtung von Reibmoment und Temperaturerhöhung auf den Verschleißzustand von selbstschmierenden, trockenen Kugelgelenken geschlossen. Dabei wird beobachtet, dass im untersuchten Gelenk größere aufgebrachte Lasten sowie höhere Belastungsfrequenzen zu einem schnelleren Verschleiß der Oberflächen und damit zu einem früheren Ausfall führen. Mosleh, Saka und Suh betrachten in [85] den Einfluss von zusätzlichen Partikeln im Reibkontakt des Lagers, die aufgrund von Verschleiß und Abrieb entstehen können. Dadurch kann sich das Reibverhalten verändern und die Reibkräfte steigen. Zudem ist Verschleiß ein zeitabhängiger Prozess, da entweder neuer Abrieb entsteht oder Partikel den Reibkontakt verlassen oder zerkleinert werden. Wie alle Lagerarten müssen auch trockene Gleitlager bezüglich ihres dynamischen Verhaltens im Betrieb ausgelegt werden. Dabei können unterschiedliche dynamische Effekte auftreten wie Losbrechen, Stick-Slip-Bewegungen und allgemein reibungserregte Schwingungen [16, 100]. Um diesen unerwünschten Effekten zu begegnen, werden unterschiedliche Maßnahmen getroffen, wie Änderung der Materialpaarung, Beschichtungen, Einbringung bestimmter Oberflächenstrukturen, Anpassung der Lagergeometrie oder die Verwendung spezieller Regelungstechnischer Konzepte [67, 110].

In [46, 47, 96, 97] werden experimentelle und theoretische Arbeiten zu einem trockenen Gleitlager vorgestellt. Im Fokus steht dabei das Design und dessen Auswirkung auf die Tragfähigkeit und das Temperaturverhalten des Gleitlagers. Mithilfe der experimentellen Untersuchungen werden Modelle zur Wärmeleitung, zur Verschleißrate und zum Reibungskoeffizienten in Abhängigkeit der Designparameter, der verwendeten Materialien und des Betriebspunkts entwickelt, um den Entwicklungsprozess von Gleitlagern zu verbessern. Dabei wird besonders der Einfluss der reibungsinduzierten Wärme herausgearbeitet und als wichtiges Auslegungskriterium bezeichnet.

Starostin et al. stellen in [111, 112] eine inverse Methode vor, mit der von Temperaturdaten eines trockenen Gleitlagers auf das Reibmoment geschlossen werden kann. Dazu wird die Wärmeleitungsgleichung für die Welle und die Lagerbuchse formuliert und mithilfe der Finite-Differenzen-Methode gelöst. Anhand gemessener Daten aus einem Prüfstand gibt das numerische Modell das Reibmoment zurück.

Die Autoren Mansouri und Khonsari [83] untersuchen in ihrer Veröffentlichung die Oberflächentemperatur des Kontakts einer Welle mit Lagerbuchse, die periodisch aneinander gleiten. Die Relativbewegung wird dabei vorgegeben und der Wärmefluss in die Welle und die Gleitbuchse wird über einen Hertzschen Kontakt mit der Wärmeleitungsgleichung und entsprechenden Rand- und Übergangsbedingungen modelliert. Die partielle Differentialgleichung wird im Radius und der Winkelkoordinate diskretisiert und das entstehende gewöhnliche Differentialgleichungssystem in der Zeit integriert. Das transiente Verhalten der Temperatur wird maßgeblich durch die Péclet-Zahl, die Biot-Zahl, die Anregungsamplitude sowie den Kontaktwinkel

beeinflusst. Mit steigender Péclet-Zahl und sinkender Biot-Zahl sinkt die maximale Oberflächentemperatur.

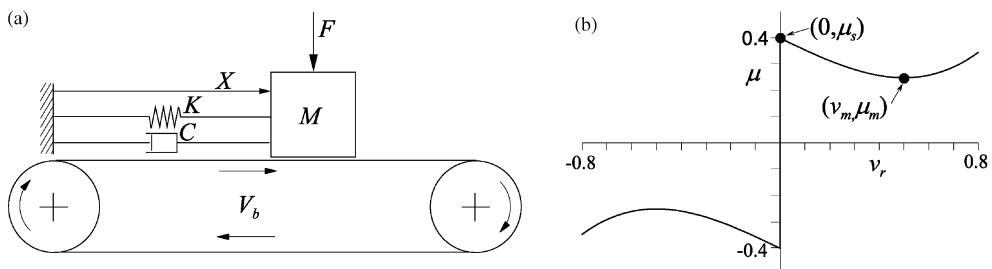
### 1.2.2 Reibungserregte Schwingungen

Im vorangegangenen Unterkapitel wurden bereits reibungsinduzierte Phänomene erwähnt, die in trockenen Gleitlagern auftreten können. Reibungserregte Schwingungen treten in vielen technischen Systemen mit Reibkontakteen auf und können ein ernstzunehmendes Problem darstellen.

Den meist unerwünschten Schwingungen liegen dabei teils komplexe Mechanismen zugrunde, die nicht in allen Fällen durch physikalische Modelle abgebildet und erklärt werden können. Als Beispiele können Werkzeugmaschinen, Verbindungsstellen von Turbinenschaufeln, Robotergelenke und Bremssysteme genannt werden [66, 101]. Die Schwingungen können dabei einfach zu Komfortverlust führen, wie beim Bremsenquietschen. Allerdings kann es auch zur Verschlechterung von Prozessen kommen, wodurch Produkte die geforderte Qualität nicht besitzen. Im schlimmsten Fall kommt es zur Schädigung von Bauteilen und dem Ausfall des gesamten Systems. Auch in den Bohrgestängen von Ölförderanlagen [125] oder der Erforschung von Erdbeben [89] können selbsterregte Schwingungen auf ähnliche Mechanismen zurückgeführt werden. Das Review von Feeny et al. [44] beleuchtet trockene Reibung in einem historischen Hintergrund und zeigt verschiedene Anwendungen, Problemstellungen und Untersuchungen von der Steinzeit bis in die Neuzeit auf. Bereits in der Steinzeit wurde Reibung gezielt genutzt, um beispielsweise Klingen mithilfe von Schnüren an Werkzeugen zu befestigen. Später mussten Reibungswiderstände reduziert werden, um den Transport schwerer Gegenstände oder den Betrieb von Geräten und Mechanismen zu vereinfachen. In der modernen Technik nehmen die Anwendungen immer komplexere Formen an, wobei Reibung gezielt eingesetzt wird, jedoch auch unerwünschte Effekte zur Folge hat. Diese Phänomene werden zunehmend erforscht, wobei Reibmodelle unterschiedlichen Komplexitätsgrades entwickelt und Ersatzmodelle zur Beschreibung und Erklärung verschiedener Beobachtungen geschaffen werden.

In den Teilen I und II des Reviews [66] wird ein umfassender Überblick über die relevanten Aspekte von Gleitreibung sowie deren Einfluss auf die Erregungsmechanismen von Schwingungen gegeben. Im ersten Teil werden sowohl Kontaktmodelle als auch experimentelle Ergebnisse zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten diskutiert. Im Fazit wird betont, wie umfangreich das Phänomen Reibung ist und dass keine einheitliche Theorie zur Beschreibung beliebiger Systeme existiert. Einflussreiche Faktoren sind dabei die Materialpaarung, Schmierung, Unsicherheiten in den Messungen, Gleitgeschwindigkeit, Zeitabhängigkeit, Temperatur und aufgebrachte Last. Der Einfluss dieser Faktoren auf die Reibkraft ist dabei hochgradig nichtlinear,

die Auswahl des Reibmodells muss immer anhand des untersuchten Systems und betrachteter Effekte erfolgen. Im zweiten Teil werden Minimalmodelle vorgestellt, anhand derer reibungserregte Schwingungen auf theoretische Weise analysiert werden können. Dabei dienen analytische Methoden zur Bestimmung von Ruhelagen und Stabilitätsbedingungen. Anhand numerischer Lösungen der Gleichungen werden verschiedene Bewegungsmuster wie Grenzzyklen oder Chaos diskutiert. Eine Ursache für die selbsterregten Schwingungen ist die abfallende Reibkennlinie für größer werdende Geschwindigkeiten. Außerdem werden experimentelle Ergebnisse aus der Literatur vorgestellt und im Rahmen der angeführten Theorien diskutiert.



**Abbildung 1.3:** Zu reibungserregten Schwingungen neigendes System, übernommen aus [120]. (a) Viskoelastisch gelagerter Körper auf einem umlaufenden Band, (b) Reibcharakteristik mit negativem Gradienten für kleine Relativgeschwindigkeiten

Die Autoren Thomsen und Fidlin [120] verwenden ein analytisches Näherungsverfahren, um die Amplitude und Frequenz reibungsinduzierter Schwingungen eines Körpers auf einem umlaufenden Band zu bestimmen, siehe Abb. 1.3. Mithilfe eines klassischen Mittelwertbildungsverfahrens werden Ausdrücke zur Beschreibung von Stick-Slip-Bewegungen und Schwingungen bei reinem Gleiten gefunden. Die ermittelten Werte sowie der Übergang zu einer stabilen Ruhelage mit stetigem Gleiten stimmen sehr gut mit den Ergebnissen aus numerischen Zeitintegrationen überein, solange der Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibungskraft klein ist. Die vorgestellte Näherungsmethode kann außerdem auf andere Reibmodelle übertragen werden. Ähnliche Untersuchungen sind auch in [119] zu finden.

Popp et al. untersuchen in [101] einen Einmassenschwinger mit Fremd- und Reibungserregung mit zwei unterschiedlichen Reibcharakteristiken. Hierzu verwenden sie numerische Integration und erstellen eindimensionale Abbildungen mit Hilfe von Pointcaré-Schnitten. Das dynamische Verhalten des untersuchten Systems ist sehr vielfältig: Es treten ein- und mehrfach periodische Grenzzyklen sowie Chaos auf. Mithilfe dieser Methoden wird das Bifurkationsverhalten des Systems untersucht.

In [130] wird die Attraktivität von Gleichgewichtslagen mechanischer Systeme mit Couloomscher Reibung untersucht. Die Autoren entwickeln Bedingungen für stückweise lineare Systeme und deren Parametrisierung, damit das Gleichgewicht stabil ist.

Systeme mit mehreren Freiheitsgraden werden zum Beispiel in [5, 49, 51, 126] untersucht. Hier liegen mehrere elastisch gekoppelte Körper auf einem umlaufenden Band auf und die Reibkraft regt das System zu Schwingungen an. Ähnliche Modelle werden in [48, 50, 52] untersucht. Hier liegt der Fokus mehr auf den numerischen Methoden zur Lösung der nichtglatten Differentialgleichungen sowie auf der Charakterisierung der Bewegungen und Grenzzyklen mithilfe von eindimensionalen Pointcaré-Abbildungen. Mit diesen Methoden kann das Bifurkationsverhalten untersucht werden. In [19] wird ein Formalismus zur Stabilitätsuntersuchung von Mehrkörpersystemen mit trockener Reibung vorgestellt und anhand eines Beispiels erläutert. Auch hier lässt sich die Selbsterregung auf die abfallende Reibkennlinie zurückführen und das System weist ein komplexes dynamisches Verhalten mit Grenzzyklen, chaotischen und quasiperiodischen Bewegungsmustern auf.

Wensrich [128] untersucht Systeme mit einem oder mehreren Körpern mit je einem Reibkontakt, die sich über eine Oberfläche bewegen. Durch eine dimensionslose Kennzahl in Abhängigkeit des Dämpfungsparameters kann die Grenze zwischen rein gleitender Bewegung und einer Bewegung mit Haftphasen angegeben werden.

In der Veröffentlichung [114] untersucht Stelter reibungserregte Schwingungen in nachgiebigen Strukturen simulativ und experimentell. Für das analytische Modell werden die beiden ersten Eigenmoden des zugrundeliegenden linearen Modells, ein Biegebalken mit Reibkontakt am Ende, herangezogen. Die numerischen Lösungen weisen ein komplexes dynamisches Verhalten mit ein- und mehrfach periodischen Lösungen sowie Chaos auf. Die experimentellen Ergebnisse werden mit der Simulation abgeglichen und weisen eine hohe Übereinstimmung auf. Des Weiteren wird aus dem Vergleich der theoretischen mit den experimentellen Ergebnissen die zugrundeliegende Reibcharakteristik bestimmt.

In [60, 61, 87] wird ein System mit zwei Freiheitsgraden untersucht, bei dem sich ein Körper in der Ebene bewegen kann und über eine Feder auf einem umlaufenden Band abgestützt ist, siehe Abb. 1.4. Bei dieser Anordnung können auch bei konstantem Reibwert reibungserregte Schwingungen auftreten. Die spezielle Struktur des Systems führt dazu, dass zwei Bewegungsformen über die Reibkraft miteinander gekoppelt sind, wodurch die Ruhelage instabil werden kann. Dieser Mechanismus wird in der Literatur daher oft als „Modenkopplung“ bezeichnet.

Sinou und Jézéquel untersuchen in [109] ein System mit Modenkopplung und zwei Reibstellen auf die Stabilität seiner Ruhelage. Als Bifurkationsparameter wird der konstante Reibwert verwendet und die Dämpfung wird als besonders wichtig herausgearbeitet.

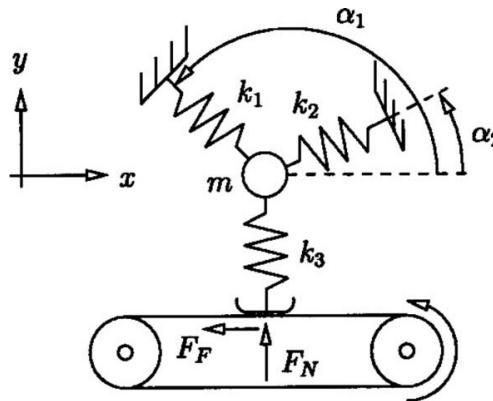


Abbildung 1.4: Zu reibungserregten Schwingungen neigendes System mit Modenkopplung, übernommen aus [60]

In [113] werden reibungserregte Schwingungen analytisch und experimentell in einem Pin-on-Disk-Aufbau untersucht. Es wird ein Prüfstand vorgestellt, an dem sich reibungsinduzierte Schwingungen beobachten und messen lassen, zudem wird ein analytisches Modell entwickelt, um das Systemverhalten theoretisch abzubilden. Das im Experiment beobachtete chaotische Verhalten taucht im Modell nicht auf und wird auf unbekannte äußere Störungseinflüsse und auf die Abhängigkeit der Reibkraft von der Beschleunigung zurückgeführt.

Tworzydlo et al. stellen in [124] ausführliche theoretische Untersuchungen vor, die mithilfe eines Pin-on-Disk-Aufbaus validiert werden. Das untersuchte Modell mit konzentrierten Parametern bildet einen Pin-on-Disk-Aufbau ab und enthält mehrere Freiheitsgrade sowie eine Reibstelle. Die numerischen Lösungen zeigen selbsterregte Schwingungen sowie Stick-Slip-Bewegungen, die auch im experimentellen Aufbau gemessen werden konnten.

### 1.2.3 Reibwertglättung

Die im vorigen Unterkapitel vorgestellten Veröffentlichungen unterstreichen die Relevanz reibungserregter Schwingungen in mechanischen Systemen. Ein Ansatz, um die effektiv wirkende Reibcharakteristik gezielt zu beeinflussen und die unerwünschten Erregungsmechanismen zu unterdrücken, ist die Überlagerung hochfrequenter Schwingungen. Da im funktionellen Zusammenhang die Reibkraft dadurch ihre Unstetigkeit verliert und einen glatten Übergang bei verschwindender Relativgeschwindigkeit aufweist, ist dieses Phänomen im deutschsprachigen Raum als „Reibwertglättung“ bekannt.

Die ersten theoretischen Untersuchungen zum Einfluss hochfrequenter Schwingungen auf Systeme mit Reibung gehen auf die Veröffentlichung [21] von Blekhman und Dzhanelidze zurück. Darin werden hochfrequente Schwingungen für den Transport von Schüttgut verwendet, die zur Reduktion der Reibung und als Antriebskraft dienen. Auf die Untersuchungen wird auch in [22] verwiesen.

Der Einfluss hochfrequenter Schwingungen auf Systeme mit Reibung wird außerdem früh in der Umformtechnik gezielt eingesetzt. Beispielsweise beim Drahtziehen kann damit die notwendige Zugkraft stark reduziert werden [98, 108].

Mit [118] erschien von Thomsen eine theoretische Arbeit, die auf den Ideen von Blekhman aufbaut und mithilfe asymptotischer Methoden sowohl reibungsinduzierte Schwingungen als auch den Einfluss hochfrequenter Anregung auf die Systemdynamik untersucht. Dabei wird gezeigt, dass die effektive Reibcharakteristik durch die hochfrequente Anregung so beeinflusst wird, dass sie dämpfend wirkt. Dadurch wird der Selbsterregungsmechanismus unterdrückt und es stellt sich eine quasistatische Ruhelage ein, in der der Körper hochfrequent bei kleiner Amplitude schwingt.

Die vorgestellte Theorie wurde daraufhin auf eine Vielzahl von Systemen angewendet. In [132, 133] wird ein System aus zwei gekoppelten Körpern auf einem umlaufenden Band unter hochfrequenter Anregung untersucht. Darin wird gezeigt, dass für die Unterdrückung reibungserregter Schwingungen ausreichend sein kann, nur einen der beiden Körper hochfrequent anzuregen.

In [68–70] wird der Einfluss hochfrequenter Anregung auf einen Körper auf einem umlaufenden Band untersucht, wobei ein dynamisches Reibmodell mit innerem Freiheitsgrad verwendet wird. Die simulativen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den Ergebnissen des Experiments überein.

Chatterjee, Singha und Karmakar untersuchen in [35] das LuGre- und das elasto-plastic-Reibmodell bei hochfrequenter Anregung. Die analytischen Ergebnisse werden mit numerischen Lösungen abgeglichen und weisen eine gute Übereinstimmung auf. Auch bei den vorgestellten dynamischen Reibmodellen ist eine Glättung der Reibkraft zu beobachten, die bei kleinen Relativgeschwindigkeiten dämpfend wirkt und damit reibungserregte Schwingungen unterdrückt und eine quasistatische Ruhelage stabilisiert.

In der Veröffentlichung [75] wird das sogenannte Dahl-Reibmodell mit innerem Freiheitsgrad verwendet und mit dem Coulomb-Modell verglichen. Die Ergebnisse variieren je nach verwendetem Modell und stimmen für das dynamische Reibmodell besser mit experimentellen Ergebnissen aus entsprechenden Veröffentlichungen überein. Zudem wird betont, dass im Gegensatz zur Formulierung mit Coulombscher Reibung die mittlere Reibkraft beim Dahl-Modell auch reduziert wird, ohne dass diese im zeitlichen Verlauf das Vorzeichen ändert.

Popov und Li [99] untersuchen die hochfrequente Anregung in Normalenrichtung, wobei ebenfalls ein dynamisches Reibmodell genutzt wird, um die Kontakt nachgiebigkeit abzubilden. Auch hier wird eine Glättung der Reibkraftkurve beobachtet und das Vorgehen wird zur Anwendung in Regelungsproblemen vorgeschlagen. In [17] wird das gleiche Reibmodell verwendet, wobei die hochfrequente Anregung transversal in der Ebene der Gleitbewegung aufgebracht wird. Der makroskopische Reibungskoeffizient kann für große und kleine Anregungsamplituden reduziert werden, wofür analytische Ausdrücke angegeben werden können. Die Reduktion wird auf zwei Mechanismen zurückgeführt: Zum einen gibt es Haftphasen, zum anderen zeigt die Reibkraft nicht immer in Richtung der aufgebrachten Gleitbewegung, weshalb durch die Projektion in diese Richtung ein kleinerer Wert entsteht.

Kumar und Hutchings präsentieren in [74] ihre Ergebnisse zu einer hochfrequenten Anregung in Bewegungsrichtung und quer dazu. Sie untersuchen einen Kontakt zwischen zwei Metallkörpern theoretisch und experimentell. Die Ergebnisse werden verglichen und decken sich weitgehend. Als wichtige Systemgrößen nennen sie das Verhältnis aus vorgeschriebener Gleitgeschwindigkeit und Geschwindigkeitsamplitude der überlagerten Schwingung.

In [95] wird eine Störungsmethode angewandt, um einen gleitenden Körper auf einer Unterlage unter Verwendung des LuGre-Reibmodells zu untersuchen. Damit kann der stabilisierende Effekt hochfrequenter Anregung gezeigt werden, wobei die effektive Reibcharakteristik allein durch die Amplitude und Frequenz der Anregung ausgedrückt werden kann. Experimentelle Untersuchungen unterstreichen die theoretischen Ergebnisse.

Die Autoren Tsai und Tseng [123] untersuchen den Einfluss hochfrequenter Anregung, die unter einem beliebigen Winkel in der Bewegungsebene auf einen Körper auf einem umlaufenden Band wirkt. Die Reibkraft wird nach dem Modell von Dahl berechnet, das zudem auf Haften erweitert wird. Die Anregung führt für alle Anregungswinkel zu einer Reduktion der Reibkraft, wobei der Effekt am stärksten ist, wenn die Anregung in Richtung der Bewegungsrichtung des umlaufenden Bands zeigt. Während die Anregung senkrecht dazu immer zu einer, wenn auch kleinen, Reduktion führt, wirkt die Anregung in Bandrichtung nur dann reduzierend, wenn die Geschwindigkeitsamplitude der überlagerten hochfrequenten Schwingung größer ist als die Bandgeschwindigkeit. Als weiteres Ergebnis wird beschrieben, dass die Berücksichtigung der Kontaktsteifigkeit zu einer Minderung des reduzierenden Effekts führt und damit experimentelle Ergebnisse aus entsprechender Literatur besser abbildet als ein starrer Kontakt gemäß dem Coulombschen Reibmodell.

In [62] wird das Modell zur Modenkopplung unter hochfrequenter Anregung untersucht. Auch für diesen Erregungsmechanismus kann die Anregung zu einer stabilen

quasistatischen Ruhelage führen, sofern die Anregung stark genug ist. Für die Stabilitätsbedingungen werden analytische Ausdrücke angegeben.

Sahoo und Chatterjee betrachten in [105] ebenfalls das Modell zur Modenkopplung, wobei Coulombsche Reibung mit fallender Reibkennlinie angenommen wird. Die hochfrequente Anregung wird in Tangential- und Normalenrichtung analytisch untersucht und die Ergebnisse mit numerischen Simulationen abgeglichen. Für die Anregung in tangentialer Richtung kann für einen bestimmten Wertebereich der Anregungsamplitude der Erregungsmechanismus unterdrückt werden und eine stabile Ruhelage entstehen. Die Anregung in Normalenrichtung führt nicht zu einer Stabilisierung, jedoch kann die Amplitude der reibungserregten Schwingungen reduziert werden.

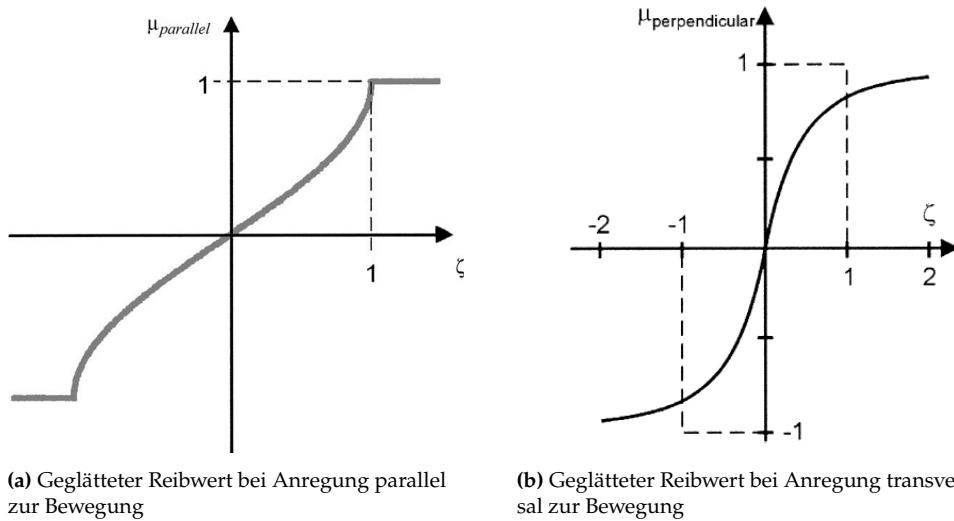


Abbildung 1.5: Geglätteter Reibwert aus [116]

Die Autoren Littmann, Storck und Wallaschek [78, 79] untersuchen den Einfluss hochfrequenter Schwingungen in Bewegungsrichtung und motivieren ihre Forschung mit der Reduktion von Prozesskräften bei Fertigungsverfahren wie Ultraschallschneiden. Zur theoretischen Untersuchung wird ein einfaches Coulomb-Reibmodell mit konstantem Reibwert verwendet und als wichtige Kenngröße das Verhältnis aus Geschwindigkeitsamplitude der Schwingung und der Gleitgeschwindigkeit benannt. Die Ergebnisse können an einem Prüfstand validiert werden. Eine Betrachtung der für die Anregung benötigten Leistung sowie der mechanischen Leistung ergibt, dass für die Reduktion der Reibkraft nur ein geringer energetischer Mehraufwand geleistet werden muss. In [116] wird zusätzlich zur longitudinalen Anregung auch die transversale Anregung theoretisch und experimentell untersucht. Auch hier wird das

Geschwindigkeitsverhältnis als wichtige Kenngröße identifiziert. Die experimentellen Ergebnisse stimmen gut mit den theoretischen überein. Das lässt darauf schließen, dass die Verwendung des einfachen Reibmodells nach Coulomb ausreichend genaue Resultate zu liefern scheint.

In der Arbeit von Michaux, Ferri und Cunefare [84] werden zwei qualitativ unterschiedliche Reibwertverläufe betrachtet, wobei eine Funktion permanent einen negativen Geschwindigkeitsgradienten aufweist und die zweite Funktion zuerst abfällt und danach wieder ansteigt. Für beide Fälle werden analytisch Stabilitätskarten ermittelt und mit numerischen Ergebnissen abgeglichen, wobei die Übereinstimmung hervorragend ist. Für den monoton fallenden Reibwertverlauf ist das Parametergebiet mit instabiler Ruhelage deutlich größer als für den Verlauf, bei dem der Reibwert für große Geschwindigkeiten wieder ansteigt.

Teidelt, Starcevic und Popov beschreiben in [117] ausführlich experimentelle Ergebnisse zum Einfluss hochfrequenter Anregung in longitudinaler, transversaler und normaler Richtung. Die Untersuchungen umspannen einen großen Parameterbereich von Anregungsgrößen und Gleitgeschwindigkeiten bei verschiedenen Materialpaarungen. Zudem werden theoretische Modelle vorgestellt und ausgewertet, um diese mit den experimentellen Ergebnissen zu vergleichen. Die Reibkraft sinkt mit steigender Schwingungsamplitude der überlagerten Schwingungen. Des Weiteren kann die Reibkraft bei kleinen Gleitgeschwindigkeiten stärker reduziert werden.

Die Autoren Rybkiewicz, Gutowski und Leus [104] stellen in ihrer Veröffentlichung experimentelle und theoretische Ergebnisse eines Reibschwingers unter hochfrequenter Anregung vor. Im Experiment wird gezeigt, wie die hochfrequente Anregung reibungs-induzierte Schwingungen unterdrückt und die Reibkraft reduziert wird. Maßgeblich hierfür ist, dass die Geschwindigkeitsamplitude der überlagerten hochfrequenten Schwingung größer ist als die Gleitgeschwindigkeit. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, werden Stick-Slip-Effekte gänzlich eliminiert und die Reibkraft kann umso mehr reduziert werden, je kleiner die Gleitgeschwindigkeit ist. Das vorgestellte und untersuchte theoretische Modell stimmt sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen überein und unterstreicht deren Relevanz.

## 1.2.4 Thermomechanisch gekoppelte Reibschwinger

Nachdem in den vorigen Abschnitten Literatur zu trockenen Gleitlagern mit Wärmeentwicklung, reibungserregten Schwingungen sowie zu deren Unterdrückung durch hochfrequente Anregung vorgestellt wurde, folgt hier ein Überblick zu Veröffentlichungen zu reibungsbehafteten dynamischen Systemen mit thermomechanischer Kopplung. Zur Wärmeleitung beim Kontakt zweier bewegter Körper gibt es eine Vielzahl von Arbeiten [7, 13, 25, 27, 28, 34, 63], die zwar Reibungswärme berücksichtigen, eine Rück-

kopplung der Erwärmung auf das mechanische Problem, also thermische Ausdehnung, allerdings vernachlässigen.

Die Autoren Boucly et al. [26] verwenden ein dreidimensionales thermoelastisch-plastisches Kontaktmodell, um die Belastung in Systemen mit rollendem oder gleitendem Kontakt zu untersuchen. Die thermische Ausdehnung und der daraus resultierende veränderte Kontaktzustand wird mit den Modellgleichungen abgebildet. Es wird herausgearbeitet, dass das Temperaturfeld den Belastungszustand unter der Kontaktfläche stark beeinflusst.

In [24] werden verschiedene Modelle aus der Literatur zur Untersuchung reibungsinduzierter Wärmeentwicklung analysiert und verglichen. Ein besonderes Augenmerk liegt auf den Temperaturspitzen (engl. „flash temperature“) im Kontakt, die besonders bei tribothermischen Problemstellungen auftreten. Außerdem wird der Einfluss reibungsbedingter Erwärmung auf das Verschleißverhalten angesprochen.

In [90–92] wird der Kontakt zweier rauer Oberflächen simuliert, die aufeinander gedrückt werden und aneinander abgleiten. Die Temperaturänderung aufgrund der Reibleistung wird dabei in der quasistatischen Impulsbilanz des modellierten Halbraums berücksichtigt, wodurch eine vollständige Kopplung zwischen dem Verschiebungs- und dem Temperaturfeld entsteht. Die Relativgeschwindigkeit ist dabei vorgegeben, sodass sich der Reibzustand nicht auf die makroskopische Bewegung der Körper auswirkt.

Die Autoren Coulibaly, Chassaing und Philippon [41] verwenden einen ähnlichen Modellierungsansatz und bestätigen die Ergebnisse aus vergleichbarer Literatur. Allerdings wird auch die Notwendigkeit experimenteller Daten zur Bestimmung der wahren Kontaktfläche zweier berührender Körper bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten betont.

Choudhry, Almqvist und Larsson verwenden in [38] ein mehrskaliges Kontaktmodell, um Temperaturspitzen in berührenden Asperiten genau zu bestimmen. Demnach beeinflusst die Oberflächenrauigkeit zwar die Temperaturspitzen, jedoch nicht die mittlere Temperatur im Kontakt. Zudem hat der Verschleißzustand einen großen Einfluss auf die Temperaturspitzen und sollte berücksichtigt werden. Der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen sowie mit bestehender Literatur bestätigt die Aussagen.

In den Veröffentlichungen [71–73] werden die thermischen Effekte in Gleitkontakten sowie deren Einfluss auf mechanische Systeme herausgearbeitet. Die Autoren verwenden hierfür experimentelle sowie numerische Methoden, um geschwindigkeitsabhängige Effekte zu untersuchen. Mithilfe dieser Ergebnisse werden die verwendeten Modelle validiert. Es wird beobachtet, dass die Verschleißrate mit zunehmender Temperatur zunimmt. Für den Einfluss der Kontakttemperatur auf den Reibungskoeffizienten kann allerdings keine eindeutige Abhängigkeit formuliert werden.

In [11, 12] werden Erkenntnisse aus experimentellen Ergebnissen vorgestellt. In den Versuchen wird der Einfluss der thermischen Ausdehnung aufgrund von Reibungswärme auf das Verschleißverhalten sowie auf die Kontaktressung untersucht. In Gebieten mit großer Flächenressung wird das Material stark erwärmt, was zu einer thermischen Ausdehnung und damit noch größerer Flächenressung führt. Da dieser Effekt selbstverstärkend wirkt, wird er als Instabilität bezeichnet. Andererseits ist der Verschleiß in Gebieten mit großem Kontaktdruck größer, was dem beschriebenen Effekt entgegenwirkt. Zur theoretischen Beschreibung werden einfache Modelle entwickelt, die das qualitative Verhalten gut abbilden.

In [81, 82] wird ein Modell untersucht, bei dem ein Körper mit konstanter Kraft über eine Fläche bewegt wird und als Widerstand allein die geschwindigkeits- und temperaturabhängige Reibkraft wirkt. Die Temperatur im Kontakt wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben, da die Wärmeleitung innerhalb des Körpers vernachlässigt wird. Mithilfe der Gleichungen werden das stationäre Gleiten bei konstanter Temperatur und Geschwindigkeit sowie Grenzyklen mit periodischer Temperatur und Geschwindigkeit untersucht. In Abhängigkeit des Gradienten des Reibungskoeffizienten können die Stabilitätsgrenzen für diese Bewegungen angegeben werden.

Nosko untersucht in [88] die Bewegung eines viskoelastisch abgestützten Körpers auf einem bewegten Untergrund, wobei der Reibungskoeffizient als temperatur- und geschwindigkeitsabhängig angenommen wird. Die Temperatur ändert sich dabei aufgrund der Reibungswärme, hat aber keinen Einfluss auf die Kontaktkraft, da eine thermische Ausdehnung nicht berücksichtigt wird. Mithilfe der Laplace-Transformation können analytische Ausdrücke für die Stabilitätsgrenzen gefunden werden. Je nach Systemparameter kann der temperaturabhängige Reibwert zur Destabilisierung der Ruhelage führen. Hierbei treten sowohl konjugiert komplexe Eigenwertpaare mit positivem Realteil als auch positive, reelle Eigenwerte auf.

In [1, 39] werden durch Reibungswärme hervorgerufene thermoelastische Instabilitäten untersucht. Dafür wird ein Kontinuum mit quasistatischem Verschiebungs- und Temperaturfeld herangezogen, an dessen einem Ende eine Wand mit vorgeschriebener Geschwindigkeit entlanggleitet. Je nach Ausdehnung wird der Kontaktdruck und damit der Wärmestrom größer. Zudem wird der Wärmeleitungswiderstand als druckabhängig modelliert. Es wird eine charakteristische Gleitgeschwindigkeit gefunden, die das Lösungsverhalten maßgeblich beeinflusst. In Abhängigkeit der Gleitgeschwindigkeit können unterschiedlich viele stabile und instabile Lösungen gefunden werden. Numerische Simulationen stützen die analytisch gefundenen Ausdrücke. In [2, 3] wird dieses Modell noch erweitert, indem auch Trägheitseffekte im Kontinuum mitberücksichtigt werden. Die Untersuchungen werden dadurch auf thermoelastisch-dynamische Instabilitäten ausgeweitet, da zusätzlich noch Kontinuumsschwingungen auftreten.

Gao et al. entwickeln in [53] ein voll gekoppeltes dynamisches System, in dem die Reibungswärme und die daraus resultierende thermische Ausdehnung in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt wird. Zur Lösung wird die Methode der harmonischen Balance verwendet und an Minimalmodellen sowie einem Modell einer Turbinenschaukel mit Reibungsdämpfer demonstriert. Daraus kann der Einfluss der Reibungswärme auf das dynamische Verhalten eines komplexen Modells mit Kontaktstellen berücksichtigt und abgeschätzt werden.

In den Veröffentlichungen [55, 121] werden voll gekoppelte thermomechanische Systeme mit Reibkontakte in Turbinen untersucht. Große Strukturmodelle werden mithilfe der Finite-Elemente-Methode diskretisiert und mithilfe spezieller Methoden reduziert, um den Rechenaufwand zu minimieren. Die Methoden erweisen sich als sehr effizient und unterstreichen die zunehmende Relevanz thermomechanisch gekoppelter dynamischer Systeme.

Die Autoren von [8–10, 93] stellen in ihren Veröffentlichungen Minimalmodelle von thermomechanisch gekoppelten Schwingungssystemen mit Reibkontakt und thermischer Ausdehnung vor. Die Wärmeleitungsgleichung und die Bewegungsgleichung können auf einen Satz von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen reduziert werden, was analytische und numerische Untersuchungen erlaubt. Zudem wird Verschleiß sowie ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungskoeffizient berücksichtigt und das Bewegungsverhalten des Systems untersucht. In [103] werden die untersuchten Modelle nochmals ausführlich vorgestellt und analysiert.

## 1.3 Zielsetzung

Das vorangehende Unterkapitel gibt einen Überblick über die Forschung und die Erkenntnisse in den Bereichen trockene Gleitlager, reibungserregte Schwingungen, Reibwertglättung und thermomechanisch gekoppelte Schwinger. Die Kombination dieser Themengebiete, also die Berücksichtigung der reibungsinduzierten Wärmeentwicklung durch hochfrequente Anregung und deren Einfluss auf das dynamische und tribologische Verhalten des betrachteten Systems, wurde dabei noch nicht hinreichend untersucht. In der vorliegenden Arbeit soll deshalb ein Modell eines mechanischen Schwingungssystems entwickelt und analysiert werden, das hochfrequente Anregung, Reibung, die daraus resultierende Erwärmung und deren Rückkopplung auf das dynamische Verhalten enthält. Hierzu soll ein einfaches Modell eines Drehgelenks mit trockener Reibung unter hochfrequenter Anregung herangezogen werden, wobei die Wärmeentwicklung über die thermische Ausdehnung den Kontaktdruck beeinflusst. Um das Systemverhalten anhand der zugrundeliegenden Differentialgleichungen für die Bewegung und die Wärmeleitung zu analysieren, liegt der Fokus auf der Entwick-

lung einer Vorgehensweise, die eine effiziente Simulation des voll gekoppelten Systems ermöglicht.

Zur Validierung der theoretischen Ergebnisse soll ein Prüfstand konzipiert und aufgebaut werden, mit dem der Einfluss der Wärmeentwicklung in einem Drehgelenk unter hochfrequenter Anregung experimentell untersucht werden kann.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit enthält sechs Kapitel und ist wie folgt strukturiert:

**Kapitel 1** gibt eine Einleitung zum Thema sowie eine Motivation, an welchem Punkt diese Arbeit im Themenkomplex mechanischer Systeme mit Reibung ansetzt und welchen Beitrag sie liefern soll. Daran schließt eine Auflistung einschlägiger Literatur an, die bereits veröffentlichte Problemstellungen und Lösungen vorstellt. Ausgehend davon wird die zu schließende Forschungslücke aufgezeigt und die Zielsetzung dieser Arbeit formuliert.

In **Kapitel 2** werden die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen theoretischen Grundlagen vorgestellt und anhand kleiner Beispiele rechnerisch illustriert.

Daran anschließend wird in **Kapitel 3** das untersuchte mechanische Modell vorgestellt. Das System sowie getroffene Annahmen werden eingeführt und Gleichungen abgeleitet. Diese werden mithilfe mathematischer Methoden umgeformt und vereinfacht, sodass sowohl analytische als auch numerische Lösungen bestimmt werden können.

In **Kapitel 4** wird das Systemverhalten anhand numerischer Lösungen der im vorigen Kapitel hergeleiteten Gleichungen diskutiert. Die Abhängigkeit systembeschreibender Größen von ausgewählten Anregungs- und Systemparametern wird vorgestellt und die wesentlichen Kenngrößen werden herausgearbeitet.

**Kapitel 5** beinhaltet die Vorstellung des experimentellen Aufbaus sowie die Auswertung der Versuche. Dazu wird zunächst der Aufbau sowie das Wirkprinzip erläutert, bevor wichtige Eigenschaften sowie die standardisierte Versuchsdurchführung erklärt werden. Schließlich werden die Ergebnisse vorgestellt, eingeordnet und interpretiert. Anschließend werden sie den theoretischen Ergebnissen gegenübergestellt und es erfolgt ein Vergleich.

Mit **Kapitel 6** schließt die Arbeit ab. Hier werden zuerst die wichtigsten Erkenntnisse dieser Forschungsarbeit nochmals kompakt erläutert, bevor ein Ausblick auf noch offene und zu untersuchende Fragestellungen gegeben wird.

# 2 Grundlagen

Dieses Kapitel widmet sich den theoretischen Grundlagen, die zum Verständnis der Arbeit benötigt werden. Zuerst wird ein kurzer Einblick in die Modellierung von Reibung in mechanischen Systemen gegeben. In diesem Zusammenhang wird zudem auf den Einfluss von überlagerten Schwingungen auf reibungsbehaftete Systeme eingegangen. Im nächsten Unterkapitel wird die Wärmeleitung in Festkörpern behandelt und anhand eines kleinen Beispiels die Lösung eines typischen Problems skizziert. Im letzten Abschnitt wird ein Mittelwertbildungsverfahren vorgestellt, das bei Systemen mit unterschiedlichen Zeitskalen verwendet werden kann.

## 2.1 Reibung in dynamischen Systemen

Um bei der Modellierung eines mechanischen Systems die Reibung zu berücksichtigen, muss eine Berechnungsvorschrift zur Bestimmung der Reibkraft festgelegt werden. In der Literatur gibt es eine Vielzahl an heuristischen Modellen, die einzelne experimentell beobachtete Phänomene gut abbilden [42, 100]. Obwohl bereits seit Jahrhunderten daran geforscht wird, existiert kein Reibungsgesetz, das alle Beobachtungen befriedigend beschreibt. Das wohl prominenteste und eines der einfachsten Reibgesetze ist die *Coulombsche Reibung* [94]. Dem Gesetz zufolge ist die Reibkraft für eine gleitende Bewegung proportional zur Normalkraft und wirkt entgegen der Bewegungsrichtung. Vektoriell lässt sich die Kraft durch

$$\vec{F}_{\text{CR}} = -\mu N \frac{\vec{v}_{\text{rel}}}{\|\vec{v}_{\text{rel}}\|}, \quad \vec{v}_{\text{rel}} \neq \vec{0} \quad (2.1)$$

angeben, wobei  $N$  für die Normalkraft steht,  $\vec{v}_{\text{rel}}$  die Relativgeschwindigkeit im Kontakt beschreibt und die Proportionalitätskonstante  $\mu$  als Reibungskoeffizient bezeichnet wird. Für eine eindimensionale Bewegung kann der Ausdruck auf einen Skalar reduziert werden mit

$$F_{\text{CR}} = -\mu N \text{sign}(v_{\text{rel}}), \quad v_{\text{rel}} \neq 0, \quad (2.2)$$

wobei  $\text{sign}(x)$  die Vorzeichenfunktion beschreibt. Für einen Haftzustand ( $v_{\text{rel}} = 0$ ) ist die Reibkraft als Reaktionskraft zu verstehen, die eine Wertemenge annehmen kann

$$F_{\text{CR}} \in [-\mu N, \mu N] , \quad v_{\text{rel}} = 0 . \quad (2.3)$$

Die in Gl. (2.2) und (2.3) dargestellte Formulierung kann zu Unstetigkeiten in den Bewegungsgleichungen führen, wodurch die Differentialgleichung nicht mehr glatt und folglich nicht Lipschitz-stetig ist. Dies hat zur Folge, dass der Satz von Picard-Lindelöf nicht mehr anwendbar ist, weshalb weder die Existenz noch die Eindeutigkeit einer Lösung garantiert werden kann. Der Satz von Peano hingegen gilt weiterhin und sichert zumindest die Existenz von Lösungen, wenn auch nicht von eindeutigen Lösungen [30]. In [57, 58, 107] werden für einen einfachen Einmassenschwinger mit trockener Reibung unter harmonischer Anregung analytische Lösungen hergeleitet und diskutiert. Bei komplexeren Systemen kann zur Lösung meist nur noch die numerische Integration verwendet werden. Dabei kann die Unstetigkeit in der Differentialgleichung den Lösungsaufwand erheblich erhöhen, da entweder spezielle Lösungsverfahren benötigt werden oder der Berechnungsaufwand unverhältnismäßig groß wird [20]. Um diese Probleme zu umgehen, wird die Unstetigkeit der Reibkraft in vielen Fällen mithilfe von Regularisierungen geglättet. Dabei wird die nicht glatte Vorzeichenfunktion durch eine glatte Funktion genähert, beispielsweise

$$\text{sign}(x) \approx \tanh(k_R x) \quad (2.4)$$

mit dem Regularisierungsparameter  $k_R \gg 1$ . Dieses Vorgehen liefert glatte Systeme mit eindeutigen Lösungen, beeinflusst jedoch die Dynamik des Systems auf unphysikalische Weise. Durch eine Regularisierung kann kein Haften mehr abgebildet werden, eine einfache mathematische Handhabbarkeit wird also durch eine schlechtere Abbildung der Physik erkauft.

Der Reibungskoeffizient  $\mu$  gibt das Verhältnis aus Reibkraft und Normalkraft an und wird im einfachsten Fall als konstant angenommen. Im Allgemeinen kann er jedoch von den Systemzuständen und den Umgebungsparametern abhängen. Beispielhaft sind hierbei die Relativgeschwindigkeit, die Temperatur und die Bewegungsrichtung zu nennen [100]. Aber auch die verwendeten Materialien der sich berührenden Körper, die Oberflächenbeschaffenheit, Verschleiß oder die Luftfeuchtigkeit können Einfluss auf den Koeffizienten haben. Bei der Untersuchung dynamischer Systeme wird häufig lediglich eine Geschwindigkeitsabhängigkeit des Reibungskoeffizienten berücksichtigt. Empirische Untersuchungen haben ergeben, dass der Koeffizient im Bereich kleiner Relativgeschwindigkeiten oftmals einen negativen Gradienten aufweist. Diese Beobachtung wird in der Literatur als *Stribeck-Effekt* bezeichnet und ist der Grund für besondere dynamische Effekte wie reibungserregte Schwingungen [29, 59, 66].

### 2.1.1 Einfaches Modell eines Gleitlagers

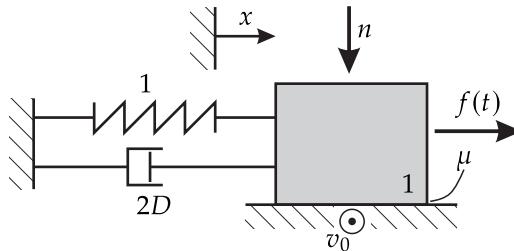


Abbildung 2.1: Einfaches physikalisches Modell eines Gleitlagers

Um den Einfluss überlagerter Schwingungen auf ein reibungsbehaftetes System zu erläutern, wird das in Abb. 2.1 dargestellte Minimalmodell betrachtet. Ein Körper ist viskoelastisch mit der Umgebung verbunden und liegt auf einer Fläche auf, die sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v_0$  senkrecht zur Bewegung des Körpers verschiebt. Die eingeprägte Kraft  $f(t)$  regt den Körper zu Schwingungen an. Das ist ein einfaches Modell für ein Gleitlager, bei dem die vorgeschriebene Bewegung in Umfangsrichtung mit einer Schwingung entlang der Achse überlagert wird. Dadurch soll die Reibkraft in Richtung der vorgeschriebenen Bewegung reduziert werden. Die Bewegungsgleichung des Körpers lautet in dimensionsloser Form

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x + n\mu \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}} = \hat{f} \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2.5)$$

wobei  $D$  den Dämpfungsparameter,  $n$  die Normalkraft,  $\mu$  den konstanten Reibungskoeffizienten,  $\hat{f}$  und  $\omega$  die Anregungsamplitude und -frequenz und  $v_0$  die Geschwindigkeit der Umgebung bezeichnet. Diese gewöhnliche Differentialgleichung ist aufgrund der zweidimensionalen Relativbewegung im Kontakt stetig und stetig differenzierbar. Außerdem gleitet der Körper aufgrund der vorgeschriebenen Bewegung permanent auf der Unterlage, wodurch sich ein Haftzustand also nicht einstellen kann. Die Kraft, die zur Aufrechterhaltung der vorgeschriebenen Bewegung  $v_0$  auf die Unterlage wirken muss, entspricht der Reibkraft zwischen Körper und Unterlage. Ohne die Anregung des Massenblocks liegt diese Reibkraft konstant bei  $f_c^0 = n\mu$ . Wird der Körper zu Schwingungen angeregt, ist die Reibkraft zeitabhängig und lautet

$$f_c = n\mu \frac{v_0}{\sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}}. \quad (2.6)$$

Um den Einfluss der Anregung einfacher zu quantifizieren, wird der Mittelwert über eine Schwingungsperiode im stationären Zustand  $\langle f_c \rangle$  herangezogen

$$\begin{aligned}\langle f_c \rangle &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_{\text{stat}}}^{t_{\text{stat}}+2\pi/\omega} f_c dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_{\text{stat}}}^{t_{\text{stat}}+2\pi/\omega} n\mu \frac{v_0}{\sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}} dt\end{aligned}\quad (2.7)$$

und mit dem Wert  $f_c^0$  ohne Anregung verglichen. Da jedoch für den zeitveränderlichen Term

$$\frac{v_0}{\sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}} \leq 1 \quad (2.8)$$

gilt, kann auch ohne Lösung der Differentialgleichung (2.5) die Aussage getroffen werden, dass die mittlere Reibkraft  $\langle f_c \rangle$  mit Anregung immer kleiner als die Reibkraft ohne Anregung  $f_c^0$  ist. Damit führt die überlagerte Schwingung mit diesen Modellgleichungen immer zu einer Reduktion der mittleren Reibkraft.

Wird für die Bewegung des Körpers beispielhaft eine harmonische Funktion der Form

$$\dot{x} = \hat{v} \sin \omega t \quad (2.9)$$

angenommen, so ergibt sich für die mittlere Reibkraft nach einigem Umformen

$$\langle f_c \rangle = n\mu \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} K\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right). \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $v = \frac{\hat{v}}{v_0}$  das Verhältnis aus Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  und Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$ . Die Funktion  $K(x)$  steht für das elliptische Integral erster Art mit

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi, \quad |m| < 1. \quad (2.11)$$

In Abb. 2.2 ist das Verhältnis der Reibkraft  $\frac{\langle f_c \rangle}{f_c^0}$  über dem Geschwindigkeitsverhältnis  $v$  dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass die mittlere Reibkraft mit zunehmendem Geschwindigkeitsverhältnis sinkt und bereits bei  $v \approx 3$  auf die Hälfte reduziert

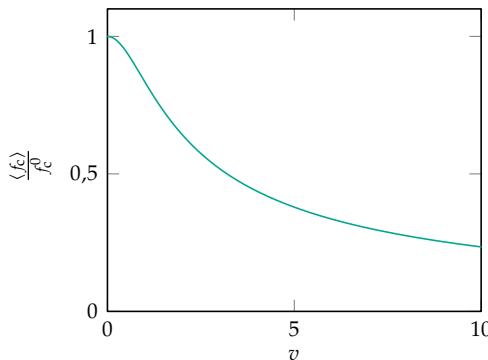


Abbildung 2.2: Verhältnis aus Reibkraft mit und ohne Anregung über dem Geschwindigkeitsverhältnis

wird. Für  $v \rightarrow \infty$  strebt die Reibkraft langsam gegen null. Für ein kleiner werdendes Geschwindigkeitsverhältnis verschwindet auch der Effekt der Reduktion.

Bezogen auf das Modell aus Abb. 2.1 ist die Reibkraft in Richtung der vorgegebenen Bewegung dann am kleinsten, wenn der Körper im Vergleich zu  $v_0$  eine Schwingung mit möglichst großer Geschwindigkeitsamplitude ausführt. Um das zu erreichen, muss die Anregung entsprechend gewählt werden. Da sich die Geschwindigkeit bei einer harmonischen Bewegung multiplikativ aus Kreisfrequenz und Amplitude ergibt, ist es vorteilhaft den Körper bei einer sehr großen Frequenz zu Schwingungen mit kleiner Amplitude anzuregen. Damit kann die Auslenkung im System klein gehalten werden, während die Reibkraft stark reduziert wird.

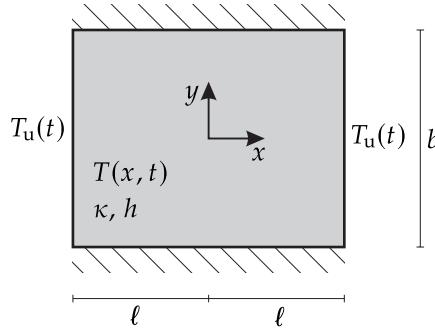
## 2.2 Wärmeleitung in Festkörpern

Wenn unterschiedliche Gebiete eines Körpers unterschiedliche Temperaturen besitzen, dann fließt Wärme von den Gebieten höherer Temperatur zu Gebieten niedrigerer Temperatur [23]. Dieser Prozess kann durch die sogenannte *Wärmeleitungsgleichung* beschrieben werden. Diese hat für ein isotropes und temperaturunabhängiges Materialverhalten ohne Wärmequelle die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T. \quad (2.12)$$

Dabei ist  $\kappa$  die Temperaturleitfähigkeit,  $\Delta$  der Laplace-Operator und  $T = T(\vec{r}, t)$  das zeitabhängige Temperaturfeld. Diese lineare, partielle Differentialgleichung beschreibt den Wärmefluss innerhalb des betrachteten Gebiets. Damit das Problem vollständig beschrieben ist, müssen allerdings noch Anfangs- sowie Randbedingungen vorgegeben

werden, die die Lösung maßgeblich beeinflussen. Somit handelt es sich um ein Anfangs-Randwertproblem. Die Wärmeleitungsgleichung wurde in der Literatur bereits ausgiebig untersucht und es existieren verschiedene Lösungsansätze [23, 34, 76]. In der vorliegenden Arbeit wird lediglich die Laplace-Transformation zur Lösung der Gleichung verwendet. Zur Demonstration des Vorgehens wird im Folgenden ein kurzes Beispiel vorgestellt.



**Abbildung 2.3:** Wärmeleitung in einer rechteckigen Platte mit Außentemperatur  $T_u(t)$  und isoliertem Rand in vertikaler Richtung

Es wird die in Abb. 2.3 dargestellte rechteckige Platte der Breite  $2\ell$  und Höhe  $b$  betrachtet, die sich in einer Umgebung mit der zeitveränderlichen Temperatur  $T_u(t)$  befindet. An den Rändern bei  $x = \pm\ell$  wird ein sogenannter linearer Wärmeübertrag ([34, Kapitel 1.9]) angenommen, bei dem der Wärmefluss linear von der Temperaturdifferenz zur Umgebung abhängt. In vertikaler  $y$ -Richtung fließt keine Wärme, da die Ränder bei  $y = 0$  und  $y = b$  perfekt isoliert sind. Die Anfangstemperatur im gesamten Körper beträgt null. Die partielle Differentialgleichung für das Temperaturfeld  $T = T(x, t)$  sowie die zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen lauten damit

$$\dot{T} = \kappa T'', \quad T(x, 0) = 0, \quad (2.13)$$

$$-T'(-\ell, t) + h(T(-\ell, t) - T_u(t)) = 0, \quad (2.14)$$

$$T'(\ell, t) + h(T(\ell, t) - T_u(t)) = 0. \quad (2.15)$$

Hier beschreibt  $h$  die Oberflächenleitfähigkeit des Problems. Der Punkt über den Größen bezeichnet eine Ableitung nach der Zeit  $t$ , ein hochgestellter Strich steht für eine Ableitung nach der Ortskoordinate  $x$ . Zur Lösung des Problems wird die Laplace-Transformation eingeführt

$$\mathcal{L}\{\cdot\} = \int_0^\infty (\cdot) \exp(-st) dt = \overline{(\cdot)}, \quad (2.16)$$

wobei  $s$  der im Allgemeinen komplexwertige Bildparameter ist [102]. Die transformierten Gleichungen haben die Form

$$\bar{T}'' - \frac{s}{\kappa} \bar{T} = 0, \quad (2.17)$$

$$-\bar{T}'(-\ell, s) + h \left( \bar{T}(-\ell, s) - \bar{T}_u(s) \right) = 0, \quad (2.18)$$

$$\bar{T}'(\ell, s) + h \left( \bar{T}(\ell, s) - \bar{T}_u(s) \right) = 0, \quad (2.19)$$

mit  $\bar{T} = \bar{T}(x, s) = \mathcal{L}\{T(x, t)\}$ . Die ursprünglich partielle Differentialgleichung wurde damit auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Ortskoordinate  $x$  reduziert. Für die folgenden Berechnungen wird der Parameter  $p^2 = \frac{s}{\kappa}$  eingeführt. Die vollständige, an die Randbedingungen angepasste Lösung im Bildbereich ergibt sich nach kurzer Rechnung zu

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, s) &= \frac{h \cosh(px)}{p \sinh(p\ell) + h \cosh(p\ell)} \bar{T}_u(s) \\ &= \bar{G}(x, s) \bar{T}_u(s) \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit

$$\bar{G}(x, s) = \frac{h \cosh(px)}{p \sinh(p\ell) + h \cosh(p\ell)}. \quad (2.21)$$

Da es sich bei Gl. (2.20) um eine Multiplikation der Funktionen  $\bar{G}$  und  $\bar{T}_u$  im Bildbereich handelt, liefert die Rücktransformation in den Zeitbereich ein Faltungsintegral

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\bar{T}(x, s)\} \\ &= G(x, t) * T_u(t) \\ &= \int_0^t G(x, t - \tau) T_u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Damit ist formal die Lösung für das Temperaturfeld im Zeitbereich  $T(x, t)$  gefunden. Zur Auswertung des Integrals wird jedoch noch die Funktion  $G(x, t)$  benötigt. Aus physikalischer Sicht entspricht diese Funktion der Antwort auf einen identischen Temperaturstoß an beiden Rändern bei linearer Wärmeleitung. Aus mathematischer Sicht wird sie als Greensche Funktion bezeichnet [18]. Um die Funktion  $G(x, t)$  zu bestimmen, wird Gl. (2.21) invers Laplace-transformiert. Da für eine derartige Funktion keine Ausdrücke

in Korrespondenztabellen vorliegen, wird für die Rücktransformation das Residuentheorem verwendet [6, 102]. Die Definition der inversen Laplace-Transformation lautet

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{G}(x, s) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{G}(x, s) \exp(st) ds , \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei  $c$  so groß gewählt werden muss, dass alle Singularitäten von  $\bar{G}(x, s)$  links von  $(c - i\infty, c + i\infty)$  liegen. Das Residuentheorem für die Funktion

$$f(s) = \bar{G}(x, s) \exp(st) \quad (2.24)$$

liefert eine Aussage über das Kurvenintegral der Funktion  $f(s)$  durch

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) ds = 2\pi i \sum_{s_n} \text{Res}_{s_n} f(s) , \quad (2.25)$$

wobei  $s_n$  die Singularitäten von  $f(s)$  sind. Durch das Residuentheorem wird das Kurvenintegral in der komplexen Ebene durch eine Summe über die Residuen ersetzt [6]. Die Singularitäten der Funktion  $f(s)$  liegen bei den Nullstellen des Nenners von  $\bar{G}(x, s)$  und können durch die Gleichung

$$p \sinh(p\ell) + h \cosh(p\ell) = 0 \quad (2.26)$$

bestimmt werden. Da es nur rein imaginäre Nullstellen gibt, wird die Transformation  $p = i\lambda$  eingeführt, wobei  $i$  die imaginäre Einheit mit  $i^2 = -1$  bezeichnet. Das führt zu der neuen Gleichung

$$h \cos(\lambda\ell) - \lambda \sin(\lambda\ell) = 0 . \quad (2.27)$$

Diese transzendenten Bestimmungsgleichung ist für  $h \neq \{0, \infty\}$  nur numerisch lösbar und liefert die abzählbar unendlich vielen Eigenwerte  $\lambda_n$ . Da die Polstellen in  $f(s)$  von erster Ordnung sind, kann das Residuum der Funktion  $f(s)$  an der Stelle  $s_n$  mit

$$\begin{aligned}\text{Res}_{s_n} f(s) &= \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n)f(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left( \frac{(s - s_n)h \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}x\right)}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right) + h \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right)} \exp(st) \right) \\ &= h \cosh\left(\sqrt{\frac{s_n}{\kappa}}x\right) \exp(s_n t) \lim_{s \rightarrow s_n} \left( \frac{s - s_n}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right) + h \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right)} \right) \quad (2.28)\end{aligned}$$

berechnet werden. Da im Limes sowohl der Zähler  $s - s_n$  als auch der Nenner  $\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right) + h \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right)$  für  $s \rightarrow s_n$  gegen null streben, wird der Satz von de l'Hospital angewendet:

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow s_n} \left( \frac{s - s_n}{\sqrt{\frac{s}{\kappa}} \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right) + h \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right)} \right) &= \lim_{s \rightarrow s_n} \left( \frac{2\sqrt{s\kappa}}{\ell \sqrt{\frac{s}{\kappa}} \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right) + \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{\kappa}}\ell\right)(\ell h + 1)} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{s_n\kappa}}{\ell \sqrt{\frac{s_n}{\kappa}} \cosh\left(\sqrt{\frac{s_n}{\kappa}}\ell\right) + \sinh\left(\sqrt{\frac{s_n}{\kappa}}\ell\right)(\ell h + 1)}. \quad (2.29)\end{aligned}$$

Werden die Eigenwerte  $s_n = -\kappa\lambda_n^2$  eingesetzt, ergibt sich für das Residuum nach kurzer Vereinfachung

$$\text{Res}_{s_n} f(s) = \frac{2h\kappa\lambda_n^2 \cos(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n \ell)(\ell\lambda_n^2 + h^2\ell + h)} \exp(-\kappa\lambda_n^2 t). \quad (2.30)$$

Daraus kann wiederum die gesuchte Funktion  $G(x, t)$  im Zeitbereich angegeben werden durch

$$\begin{aligned}
 G(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{s_n} f(s) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h\kappa\lambda_n^2 \cos(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n \ell) (\ell\lambda_n^2 + h^2\ell + h)} \exp(-\kappa\lambda_n^2 t) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos(\lambda_n x) \exp(-\kappa\lambda_n^2 t)
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

mit den Koeffizienten

$$k_n = \frac{2h\kappa\lambda_n^2}{\cos(\lambda_n \ell) (\ell\lambda_n^2 + h^2\ell + h)}. \tag{2.32}$$

Das Temperaturfeld  $T(x, t)$  lässt sich abschließend durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \int_0^t G(x, t - \tau) T_u(\tau) d\tau \\
 &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} k_n \cos(\lambda_n x) \int_0^t \exp(-\kappa\lambda_n^2(t - \tau)) T_u(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

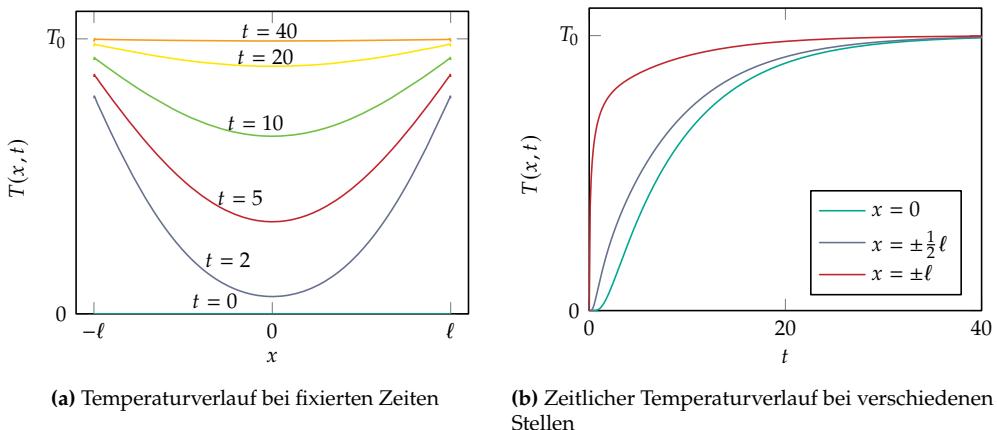
berechnen, wobei Summation und Integration vertauscht wurden und die Summe bei einer angemessenen Anzahl  $N_{\text{ew}}$  abgebrochen werden muss.

Wird für die Umgebungstemperatur ein konstanter Wert  $T_u(t) = T_0$  angenommen, kann die Lösung explizit durch

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} k_n \cos(\lambda_n x) \int_0^t \exp(-\kappa\lambda_n^2(t - \tau)) T_0 d\tau \\
 &= T_0 \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} \frac{k_n \cos(\lambda_n x)}{\kappa\lambda_n^2} (1 - \exp(-\kappa\lambda_n^2 t))
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

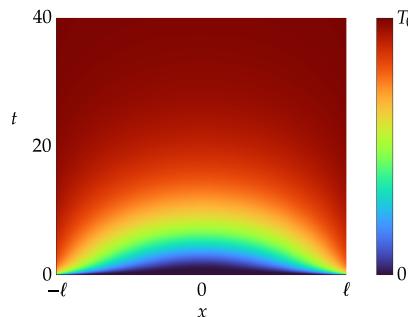
angegeben werden.

Abbildung 2.4 zeigt zwei Schaubilder der Lösung des vorgestellten Problems für eine konstante Randtemperatur  $T_0$ . Auf der linken Seite ist der Temperaturverlauf in der Platte bei fixierten Zeiten dargestellt. Zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  ist die Temperatur überall gleich null. Für  $t > 0$  wird die Platte über die Ränder erwärmt, welche sich



**Abbildung 2.4:** Temperaturverlauf in einer rechteckigen Platte, Parametersatz:  $\kappa = \frac{1}{15}$ ,  $h = 7$ ,  $\ell = 1$ ,  $T_0 = 1$ ,  $N_{\text{ew}} = 200$

schneller erwärmen als die Plattenmitte. Für  $t \rightarrow \infty$  strebt die PlattenTemperatur an allen Punkten gegen  $T_0$ . In Abb. 2.4b ist der Temperaturverlauf über 40 Sekunden an verschiedenen Stellen der Platte dargestellt. Auch hier ist zu sehen, dass die Temperatur zu Beginn bei null liegt und sich am Rand schneller erhöht als in der Mitte. In Abb. 2.5 ist das Temperaturfeld farblich über der Zeit und der Ortskoordinate dargestellt. Auch hier lassen sich die beschriebenen Eigenschaften der Lösung erkennen.



**Abbildung 2.5:** Temperaturfeld in einer rechteckigen Platte über der Längskoordinate und der Zeit

## 2.3 Dynamische Systeme mit unterschiedlichen Zeitskalen – Mittelwertbildung

In dynamischen Systemen kann es vorkommen, dass Prozesse auf verschiedenen Zeitskalen ablaufen. Ursachen für die unterschiedlichen Skalen können beispielsweise die Kopplung von Systemen verschiedener Disziplinen sein. Ein anderer Grund ist ein Systemeingang mit einer stark abweichenden Zeitkonstanten im Vergleich zur Eigendynamik des Systems. Aber auch die Modellierung oder die Problemstellung an sich können zu so einer Eigenschaft führen. Im Folgenden wird eine Näherungsmethode vorgestellt, mithilfe derer solche Systeme anhand ihrer Gleichungen analysiert werden können. Betrachtet wird das System erster Ordnung

$$\dot{x} = \varepsilon g(x, t) . \quad (2.35)$$

Hier bezeichnet die zeitabhängige Funktion  $x$  die abhängige Variable, die Zeit  $t$  ist die unabhängige Variable. Die Konstante  $\varepsilon$  ist ein kleiner Parameter, das heißt es gilt  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Die Funktion  $g(x, t)$  ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion in  $t$ , es gilt also  $g(x, t) = g(x, t + 2\pi)$  für alle  $x$  und  $t$ . Zudem ist die Funktion  $g$  glatt und beschränkt. Außerdem existiert ein zeitlicher Mittelwert gemäß Gl. (2.36). Damit ist das System in der Standardform für die Mittelwertbildung [45, 86]. Da die rechte Seite und damit die Änderungsrate  $\dot{x}$  klein ist, kann als erste Näherung der Mittelwert der rechten Seite herangezogen werden:

$$f(x) := \langle g(x, t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, t) dt . \quad (2.36)$$

Hierbei wird über die explizit auftretende Zeit  $t$  gemittelt und die abhängige Funktion  $x$  wird als konstant betrachtet. Dadurch wird das System um eine Ordnung reduziert, wodurch ein autonomes System mit lediglich impliziter Zeitabhängigkeit entsteht:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x) . \quad (2.37)$$

Die Lösung des gemittelten Systems in Gl. (2.37) liefert eine Näherungslösung für das volle System aus Gl. (2.35). Die Abweichung der Lösung des gemittelten Systems von der Lösung des vollen Systems ist für  $0 \leq t < \frac{1}{\varepsilon}$  von der Größenordnung  $\varepsilon$ . Zudem kann bei asymptotisch stabilen und instabilen Ruhelagen des gemittelten Systems auch auf die Stabilität der zugehörigen Lösung des vollen Systems geschlossen werden, da das Mittelwertbildungsverfahren die Stabilität in diesen Fällen nicht beeinflusst [45, 106].

Das Vorgehen wird im Folgenden anhand eines kleinen Beispiels skizziert. Ein thermisches Problem mit konzentrierten Parametern und temperaturabhängiger Wärmequelle kann durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} + \varepsilon x = \varepsilon k|a\omega \cos \omega t|(x + C), \quad x(0) = 0 \quad (2.38)$$

beschrieben werden. Dabei ist  $x$  die Temperatur,  $0 < \varepsilon \ll 1$  ein kleiner Parameter und  $k$ ,  $C$ ,  $a$  und  $\omega$  sind positive Konstanten, wobei  $k$ ,  $a\omega$  und  $C$  von Größenordnung 1 sind. Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit einem periodischen Koeffizienten, deren analytische Lösung nur bis auf einen Integralausdruck reduziert werden kann. Gleichung (2.38) lässt sich einfach in der Standardform für die Mittelwertbildung angeben mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon(-x + k|a\omega \cos \omega t|(x + C)) \\ &= \varepsilon g(x, t). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Die Funktion  $g(x, t)$  ist durch

$$g(x, t) = -x + k|a\omega \cos \omega t|(x + C) \quad (2.40)$$

definiert und ist periodisch in der Zeit. Die Mittelung der rechten Seite über eine Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle g(x, t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(x, t) dt \\ &= -x + k \frac{2a\omega}{\pi} (x + C). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die gemittelte Differentialgleichung

$$\dot{x} = \varepsilon f(x) \quad (2.42)$$

lässt sich dann kompakt als lineare, inhomogene, autonome Gleichung erster Ordnung schreiben

$$\dot{x} + \varepsilon \left(1 - k \frac{2a\omega}{\pi}\right) x = \varepsilon k \frac{2a\omega}{\pi} C. \quad (2.43)$$

Abgesehen von der vergleichsweise einfachen Lösung dieser gemittelten Differentialgleichung können zudem wertvolle Aussagen über das Systemverhalten gemacht werden. Die Zeitkonstante des gemittelten Systems lässt sich durch

$$T_1 = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - k \frac{2a\omega}{\pi} \right)^{-1} \quad (2.44)$$

angeben. Die Ruhelage

$$x^* = C \frac{k \frac{2a\omega}{\pi}}{1 - k \frac{2a\omega}{\pi}} \quad (2.45)$$

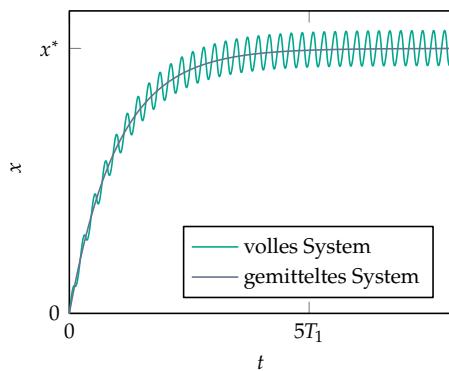
des gemittelten Systems existiert für  $k \frac{2a\omega}{\pi} \neq 1$ . Im vollen System entspricht das einem stationären Punkt, bei dem die Lösung um die Mittellage  $x^*$  schwingt. Die Stabilitätsbedingung dieser Lösung lässt sich durch

$$k \frac{2a\omega}{\pi} < 1 \quad (2.46)$$

angeben. Die analytische Lösung des gemittelten Systems für  $k \frac{2a\omega}{\pi} \neq 1$  lautet

$$\begin{aligned} x(t) &= C \frac{\frac{2ka\omega}{\pi}}{1 - \frac{2ka\omega}{\pi}} \left( 1 - \exp \left( \varepsilon \left( \frac{2ka\omega}{\pi} - 1 \right) t \right) \right) \\ &= x^* \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{T_1} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

und ist zusammen mit der numerischen Lösung des vollen Systems in Abb. 2.6 dargestellt, wobei die Stabilitätsbedingung aus Gl. (2.46) erfüllt ist. Es ist gut zu erkennen, dass die Lösung des gemittelten Systems von der des vollen Systems umschlossen wird, die Qualität der Näherung ist somit sehr gut.



**Abbildung 2.6:** Vergleich des vollen und gemittelten Systems für  $k = 1$ ,  $C = 2$ ,  $a = 4$ ,  $\omega = \frac{1}{4}$  und  $\varepsilon = \frac{1}{50}$ ,  $x^* \approx 3,5$ ,  $T_1 \approx 55$



# 3 Thermomechanisch gekoppelter Reibschwinger

In diesem Kapitel wird das untersuchte mechanische System vorgestellt und die getroffenen Annahmen erläutert. Ausgehend vom physikalischen Modell werden mathematische Gleichungen abgeleitet, die das dynamische Verhalten des vollständig gekoppelten Systems beschreiben. Anhand dieser Gleichungen kann eine Näherungslösung gefunden werden, mithilfe derer die schnelle Zeitskala des Systems eliminiert werden kann. Daraus lassen sich Aussagen über einen stationären Zustand des Systems ableiten, in dem sich das gesamte Systemverhalten auf wenige Parameterverhältnisse reduzieren lässt. Mithilfe des hergeleiteten Gleichungssystems kann das System eingehend untersucht und der Einfluss der hochfrequenten Anregung unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung bewertet werden.

## 3.1 Modellierung

In Abb. 3.1 ist die Prinzipskizze des untersuchten Drehgelenks dargestellt. Eine Welle ist in einem trockenen Gleitlager in radialer Richtung gelagert und wird durch einen Motor angetrieben. Die Drehzahl ist konstant und wird vorgegeben. Das Lager besteht aus einer Gleithülse in einem Lagersitz, der durch eine Blattfeder abgestützt wird und sich damit in axialer Richtung bewegen kann. Der Lagersitz wird durch einen piezoelektrischen Stapelaktor in axialer Richtung zu hochfrequenten Schwingungen angeregt. Durch diese überlagerte Schwingung soll das Reibmoment im Gleitlager reduziert werden, sodass der Motor zur Aufrechterhaltung der Drehbewegung ein geringeres Moment aufbringen muss. Aufgrund der Relativbewegung zwischen rotierender Welle und schwingender Gleitbuchse entsteht Reibungswärme, die zu einer thermischen Verformung in der Welle führt. Die Hülse und der umgebende Lagersitz werden dabei als starr mit konstanter Temperatur angenommen. Die thermische Ausdehnung der Welle beeinflusst die Flächenpressung im Reibkontakt und damit die wirkende

Reibkraft. Das hat Auswirkungen auf die axiale Bewegung des Lagersitzes sowie auf das Moment, das der Motor bereitstellen muss.

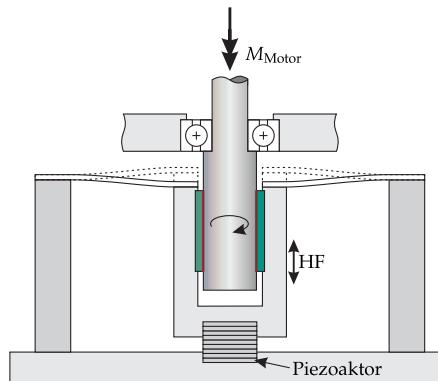


Abbildung 3.1: Prinzipskizze eines rotatorischen Gleitlagers unter hochfrequenter (HF) axialer Anregung

Ziel der Modellierung ist es, Gleichungen für ein gekoppeltes System aus schwingendem Lagersitz und thermomechanisch verformbarer Welle abzuleiten, in welchem die reibungsbedingte Wärmeentwicklung und die daraus resultierende thermische Ausdehnung in der Bewegungsgleichung des Lagersitzes berücksichtigt werden. Damit soll zum einen der Einfluss der thermomechanischen Kopplung auf das dynamische Verhalten sowie auf die Veränderung der effektiv wirkenden Reibkraft im Kontext der Reibwertglättung beurteilt werden. Zum anderen soll untersucht werden, inwiefern die hochfrequente Anregung tatsächlich zu einer Reduktion der effektiven Reibkraft führt, oder ob durch die thermomechanische Kopplung der gewünschte Effekt der Reibwertglättung eliminiert wird.

### 3.1.1 Mechanischer Schwinger

Abbildung 3.2 zeigt ein mechanisches Minimalmodell des vorgestellten Drehgelenks, bei dem die Bewegungsanteile der Rotation und der axialen Bewegung von Welle und Lagersitz vertauscht sind. Physikalisch bleibt das System äquivalent.

Ein zylindrischer Körper mit dem Radius  $R$  und der Masse  $m$  ist mit einer Feder  $c$  und einem viskosen Dämpfer  $d$  in axialer Richtung gegen eine feste Wand abgestützt. Seine Auslenkung aus der Ruhelage zum Zeitpunkt  $\tilde{t}$  wird durch die Funktion  $\tilde{x}$  beschrieben. Mit seiner Mantelfläche steht der Körper in Kontakt mit der Umgebung, die mit konstanter Geschwindigkeit  $\tilde{v}_0$  umläuft. Hierbei wird ein perfekter, flächiger Kontakt angenommen. Die Reibkraft wird gemäß des Coulombschen Reibgesetzes als Produkt aus Normalkraft und Reibungskoeffizient bestimmt und wirkt entgegen der Bewegungsrichtung. Der Reibungskoeffizient  $\mu$  wird allgemein als geschwindigkeits-

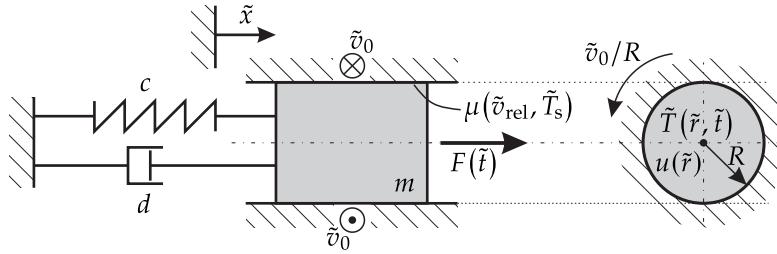


Abbildung 3.2: Minimalmodell eines Drehgelenks mit trockener Reibung unter axialem Anregung

und temperaturabhängig angenommen. Die Normalkraft hängt von der Temperaturverteilung innerhalb des Körpers ab. Zudem wird der Körper durch die periodische Kraft  $F(\tilde{t}) = \hat{F} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}$  zu Schwingungen angeregt. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2 \tilde{x}}{d \tilde{t}^2} + d \frac{d \tilde{x}}{d \tilde{t}} + c \tilde{x} + F_a = \hat{F} \cos \tilde{\Omega} \tilde{t}. \quad (3.1)$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen

$$\tilde{x}|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{d \tilde{x}}{d \tilde{t}} \right|_{\tilde{t}=0} = 0 \quad (3.2)$$

sind homogen. Der Ausdruck  $F_a$  steht für die Reibkraft in axialer Richtung, sie kann durch

$$F_a = \mu(\tilde{v}_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) N(\tilde{T}) \frac{\frac{d \tilde{x}}{d \tilde{t}}}{\tilde{v}_{\text{rel}}}, \quad \text{mit} \quad \tilde{v}_{\text{rel}} = \sqrt{\left( \frac{d \tilde{x}}{d \tilde{t}} \right)^2 + \tilde{v}_0^2} \quad (3.3)$$

angegeben werden. Dabei steht  $N(\tilde{T})$  für die Normalkraft, die durch die Verformung der Welle vom Temperaturfeld  $\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{t})$  abhängt. Die Größe  $\tilde{v}_{\text{rel}}$  steht für den Betrag der Relativgeschwindigkeit im Kontakt,  $\tilde{T}_k = \tilde{T}(R, \tilde{t})$  beschreibt die Temperatur im Kontakt und  $\tilde{v}_0$  die Geschwindigkeit der umlaufenden Umgebung. Die gesuchte Zielgröße ist die Reibkraft in Umfangsrichtung  $F_c$ , die aufgebracht werden muss, um die vorgegebene Rotation der Umgebung zu gewährleisten. Sie kann durch

$$F_c = \mu(\tilde{v}_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) N(\tilde{T}) \frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}_{\text{rel}}} \quad (3.4)$$

berechnet werden und hängt von den unbekannten Systemzuständen ab.

Zur Entdimensionierung der Gleichungen werden folgende dimensionslose Größen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\tilde{x}}{R} & \omega_0^2 &= \frac{c}{m} & t &= \omega_0 \tilde{t} \\
 \frac{d}{d\tilde{t}} &= \omega_0 \frac{d}{dt} = \omega_0 (\cdot) & r &= \frac{\tilde{r}}{R} & v_0 &= \frac{\tilde{v}_0}{\omega_0 R} \\
 v_{\text{rel}} &= \frac{\tilde{v}_{\text{rel}}}{\omega_0 R} = \sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2} & D &= \frac{d}{2m\omega_0} & \hat{f} &= \frac{\hat{F}}{cR} \\
 \omega &= \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} & f_c &= \frac{F_c}{cR} & n &= \frac{N}{cR} .
 \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung in dimensionsloser Form lautet dann

$$\ddot{x} + 2D\dot{x} + x + \mu(v_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) n(\tilde{T}) \frac{\dot{x}}{v_{\text{rel}}} = \hat{f} \cos \omega t , \quad x(0) = 0 , \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (3.5)$$

und die gesuchte Reibkraft

$$f_c = \mu(v_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) n(\tilde{T}) \frac{v_0}{v_{\text{rel}}} . \quad (3.6)$$

Die relevanten Systemparameter sind das Dämpfungsmaß  $D$ , der zustandsabhängige Reibungskoeffizient  $\mu$ , die temperaturabhängige Normalkraft  $n(T)$  sowie die Anregungsfrequenz und -amplitude  $\omega$  und  $\hat{f}$ . Zur Beurteilung des Einflusses der hochfrequenten Anregung bei thermomechanischer Kopplung wird die Größe  $f_c$  mit der Reibkraft  $f_{c,0}$  verglichen, die sich ohne Anregung ( $\hat{f} = 0$ ) einstellt. Die thermische Kopplung wird dabei weiterhin berücksichtigt. Die Reibkraft ohne Anregung lautet

$$f_{c,0} = \mu(v_0, \tilde{T}_k) n(\tilde{T}) \quad (3.7)$$

und hängt nur vom Temperaturfeld ab, das sich aufgrund der vorgeschriebenen Umlaufbewegung  $v_0$  einstellt. Der Vergleich der beiden Größen  $f_{c,0}$  und  $f_c$  ermöglicht eine Bewertung der Auswirkung der hochfrequenten Anregung.

### 3.1.2 Thermomechanisches Kontinuum

Da sowohl der Reibungskoeffizient als auch die Normalkraft vom Temperaturfeld abhängen, muss das Verschiebungs- und Temperaturfeld im elastischen Kontinuum bestimmt werden. Dafür wird ein einfaches Modell eines quasistatischen Kontinuums herangezogen, Annahmen getroffen und Gleichungen abgeleitet und ausgewertet.

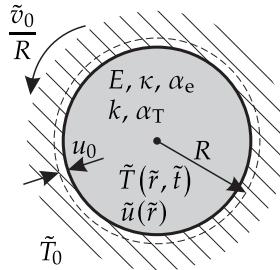


Abbildung 3.3: Querschnitt des thermomechanischen Kontinuums

Abbildung 3.3 zeigt einen Schnitt durch den zylindrischen Körper, vergleichbar zu dem in Abb. 3.2 auf der rechten Seite. Für dieses zweidimensionale Gebiet werden Gleichungen für das Verschiebungs- sowie das Temperaturfeld formuliert, um eine Schnittstelle zu der Bewegungsgleichung aus Abschnitt 3.1.1 zu schaffen. Das Problem wird als eben angenommen, sodass eine Ausdehnung oder ein Wärmefluss in axialer Richtung nicht berücksichtigt werden. Das Kontinuum wird als isotrop elastischer Körper modelliert, mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , dem Temperaturleitkoeffizienten  $\kappa$ , dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha_e$ , der Wärmeleitfähigkeit  $k$  und dem Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha_T$ . Diese Materialparameter werden als zeit-, orts-, richtungs- und temperaturunabhängig angenommen. Der kreisrunde Querschnitt hat den Radius  $R$  und ist mit dem Übermaß  $u_0$  in die starre Umgebung eingepresst, siehe Abb. 3.3. Daher wird angenommen, dass der Körper permanent perfekten Kontakt zur umlaufenden Umgebung hat. Zur Bestimmung der Normalkraft zwischen dem Körper und der Umgebung muss das radiale Verschiebungsfeld  $\tilde{u}(\tilde{r})$  berechnet werden. Hierfür wird die statische Impulsbilanz formuliert, das heißt, Trägheitswirkungen des elastischen Kontinuums werden aufgrund der deutlich unterschiedlichen Zeitkonstanten vernachlässigt. Außerdem wird von einem rotationssymmetrischen Problem ausgegangen, sodass die Winkelabhängigkeit entfällt. Die statische Impulsbilanz lautet

$$\operatorname{div} \sigma = \vec{0}, \quad (3.8)$$

wobei der Spannungstensor  $\sigma$  durch das lineare, isotrope Hookesche Gesetz

$$\sigma = E (\varepsilon - \alpha_e \tilde{T} \mathbf{1}) \quad (3.9)$$

berechnet wird. Die Querkontraktion wird nicht berücksichtigt, da diese im weiteren Vorgehen lediglich zu einem veränderten Vorfaktor führt, die Gleichungen ansonsten aber identisch sind [8–10]. Das Symbol  $\mathbf{1}$  steht für den Einheitstensor, der Dehnungs-

tensor  $\varepsilon$  wird in Polarkoordinaten formuliert. Die Auswertung der Impulsbilanz liefert dann die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} - \alpha_e \tilde{T} \right) = 0 \quad (3.10)$$

für das radiale Verschiebungsfeld  $\tilde{u}(\tilde{r})$  mit den Randbedingungen

$$\tilde{u}(R) = -u_0 \quad \text{und} \quad \tilde{u}(0) = 0. \quad (3.11)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung kann analytisch angegeben werden:

$$\tilde{u}(\tilde{r}) = -u_0 \frac{\tilde{r}}{R} + \alpha_e \left( \frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{T}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} - \frac{\tilde{r}}{R^2} \int_0^R \tilde{T}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \right). \quad (3.12)$$

Ausgehend vom analytischen Ausdruck für das Verschiebungsfeld kann die Spannung  $\sigma_{rr}(R)$  im Kontaktbereich durch

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R) &= -E \left. \left( \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{r}} - \alpha_e \tilde{T}(\tilde{r}) \right) \right|_{\tilde{r}=R} \\ &= -E \left( \frac{u_0}{R} + \frac{2\alpha_e}{R^2} \int_0^R \tilde{T}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \right) \\ &= -E \left( \frac{u_0}{R} + \alpha_e \tilde{T}_m \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

berechnet werden, wobei

$$\tilde{T}_m = \frac{2}{R^2} \int_0^R \tilde{T}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \quad (3.14)$$

die über den Querschnitt gemittelte Temperatur beschreibt. Die Normalkraft ergibt sich dann aus dem Integral der Spannung über die Mantelfläche

$$\begin{aligned} N(\tilde{T}) &= - \int_{(A)} \sigma_{rr}(R) dA \\ &= -A \sigma_{rr}(R) \\ &= AE \left( \frac{u_0}{R} + \alpha_e \tilde{T}_m \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei  $A$  die Kontaktfläche des Masseblocks mit der Umgebung ist. Das negative Vorzeichen kommt aus der Konvention, dass eine positive Spannung einem Druck entspricht. Zudem wurde berücksichtigt, dass die Spannung unabhängig von der

axialen Position und dem Winkel ist und das Integral über die Fläche der Multiplikation mit der Fläche entspricht.

Die Normalkraft hängt also nicht vom genauen Verlauf der Temperatur im Querschnitt ab, sondern lediglich von der mittleren Temperatur und zusätzlich von einem Anteil, der aus der Presspassung mit dem Übermaß  $u_0$  resultiert. Die mittlere Temperatur  $\tilde{T}_m$  wird im Folgenden als Querschnittstemperatur bezeichnet.

### 3.1.3 Wärmeleitungsgleichung

Um die Größen  $\tilde{T}_m$  und  $\tilde{T}_k$  zu berechnen, muss die Wärmeleitungsgleichung auf dem Gebiet von Abb. 3.3 gelöst werden. Für ein homogenes, isotropes Material hat diese in Polarkoordinaten die Form

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \kappa \left( \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right), \quad (3.16)$$

wobei  $\tilde{T} = \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{t})$  das rotationssymmetrische Temperaturfeld beschreibt, das von der Zeit  $\tilde{t}$  und der radialen Koordinate  $\tilde{r}$  abhängt. Die Anfangsbedingung ist eine konstante Temperatur:

$$\tilde{T}(\tilde{r}, 0) = \tilde{T}_0. \quad (3.17)$$

Zudem werden noch zwei Randbedingungen formuliert. Diese lauten

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} \left( \tilde{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \right) = 0 \quad \text{und} \quad k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=R, \tilde{t}} + \alpha_T \tilde{T}(R, \tilde{t}) = \tilde{q}(\tilde{t}). \quad (3.18)$$

Die erste Randbedingung berücksichtigt die physikalische Plausibilität in der Mitte des Gebiets, die zweite Randbedingung beschreibt den Wärmefluss über die Kontaktfläche in die Umgebung. Dieser Fluss ist als lineare Randbedingung mit zusätzlicher Wärmequelle modelliert und hängt einerseits von der Temperaturdifferenz nach außen ab. Andererseits gibt es dort den zeitabhängigen Quellterm  $\tilde{q}(\tilde{t})$ , der die flächenbezogene Reibleistung berücksichtigt. Die Reibleistung setzt sich multiplikativ aus der Reibkraft und der Relativgeschwindigkeit zusammen. Der Parameter  $\eta \in [0, 1]$  ist eine dimensionslose Kenngröße, die beschreibt, wie viel der Reibleistung in Wärme umgesetzt und in die Welle geleitet wird:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\tilde{t}) &= -\eta \tilde{v}_{\text{rel}} \mu(\tilde{v}_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) \sigma_{rr}(R) \\ &= \eta E \tilde{v}_{\text{rel}} \mu(\tilde{v}_{\text{rel}}, \tilde{T}_k) \left( \frac{u_0}{R} + \alpha_e \tilde{T}_m \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Wärmeleitungsgleichung ist über die Randbedingung mit der Bewegung des zylindrischen Körpers gekoppelt. Bevor die Gleichungen gelöst werden, werden sie mithilfe folgender Größen entdimensioniert:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\tilde{r}}{R} & \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} (\cdot)' & T &= \frac{\tilde{T}}{T_*} \\ \varepsilon &= \frac{\kappa}{\omega_0 R^2} & Bi &= \frac{\alpha_T R}{k} & C_0 &= \frac{u_0}{R \alpha_e T_*} \\ T_m &= \frac{\tilde{T}_m}{T_*} & \gamma &= \frac{E \alpha_e R^2 \omega_0^2}{k} & \hat{p} &= \frac{AE \alpha_e T_*}{cR} . \end{aligned}$$

Hierbei ist  $T_*$  eine Referenztemperatur,  $Bi$  ist die Biot-Zahl und beschreibt das Verhältnis aus Wärmeleitwiderstand innerhalb des Körpers und Wärmeübergangswiderstand nach außen. Der Parameter  $\varepsilon$  beschreibt das Verhältnis der Zeitkonstanten des thermischen und des Schwingungsproblems,  $\gamma$  ist ein Maß für die Kontaktdruckerhöhung durch die thermische Ausdehnung,  $C_0$  beschreibt den Anteil der Übermaßpassung im Kontaktdruck und  $\hat{p}$  ist ein Referenzdruck.

Die Wärmeleitungsgleichung sowie die zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen lauten dann in dimensionsloser Form

$$\dot{T} = \varepsilon \left( T'' + \frac{1}{r} T' \right) , \quad T(r, 0) = T_0 \quad (3.20)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} (r T'(r, t)) &= 0 , \\ T'(1, t) + Bi T(1, t) &= q(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

mit

$$q(t) = \eta \gamma v_{\text{rel}} \mu(v_{\text{rel}}, T_k) (C_0 + T_m) . \quad (3.22)$$

### Lösen im Laplace-Bildbereich

Zur Lösung der partiellen Differentialgleichung (3.20) wird analog zu Abschnitt 2.2 die Laplace-Transformation verwendet mit

$$\mathcal{L}\{\cdot\} = \int_0^\infty (\cdot) \exp(-st) dt = \overline{(\cdot)} . \quad (3.23)$$

Damit ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für das Temperaturfeld im Bildbereich in der radialen Koordinate

$$\bar{T}'' + \frac{1}{r}\bar{T}' - \frac{s}{\varepsilon}\bar{T} = -\frac{T_0}{\varepsilon}. \quad (3.24)$$

Die transformierten Randbedingungen lauten

$$\lim_{r \rightarrow 0} (r\bar{T}'(r, s)) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{T}'(1, s) + Bi\bar{T}(1, s) = \bar{q}(s), \quad (3.25)$$

wobei  $\bar{q}(s)$  für die Laplace-transformierte Funktion der Wärmequelle steht. Dieser Ausdruck kann zunächst in dieser Form stehen bleiben und muss nicht weiter ausgewertet werden. Bei Gl. (3.24) handelt es sich um eine modifizierte Besseldifferentialgleichung, für die eine geschlossene Lösung existiert [31, Kapitel 9.1]. Die an die Randbedingungen angepasste Gesamtlösung des Temperaturfeldes im Bildbereich lautet

$$\bar{T}(r, s) = \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}r\right)(s\bar{q}(s) - BiT_0)}{s\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)\right)} + \frac{T_0}{s}. \quad (3.26)$$

Hierbei bezeichnen  $I_0(s)$  und  $I_1(s)$  modifizierte Besselfunktionen erster Gattung mit Ordnung null und eins. Aus diesem Ausdruck lassen sich die Kontakttemperatur  $\bar{T}_k$  durch

$$\begin{aligned} \bar{T}_k(s) &= \bar{T}(1, s) = \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)(s\bar{q}(s) - BiT_0)}{s\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)\right)} + \frac{T_0}{s} \\ &= \bar{G}_{k,q}(s)\bar{q}(s) + \bar{G}_{k,0}(s)T_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

und die Querschnittstemperatur  $\bar{T}_m$  mit

$$\begin{aligned} \bar{T}_m(s) &= 2 \int_0^1 \bar{T}(r, s)r dr = \frac{2I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)(s\bar{q}(s) - BiT_0)}{s\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)\right)} + \frac{T_0}{s} \\ &= \bar{G}_{m,q}(s)\bar{q}(s) + \bar{G}_{m,0}(s)T_0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

berechnen. Beide Funktionen sind linear in der Wärmequelle  $\bar{q}(s)$  und der Anfangstemperatur  $T_0$ . Abkürzend werden die Funktionen  $\bar{G}_{k,q}(s)$ ,  $\bar{G}_{k,0}(s)$ ,  $\bar{G}_{m,q}(s)$  und  $\bar{G}_{m,0}(s)$  als Vorfaktoren eingeführt, sie sind in Anhang A.1 explizit angegeben.

### Inverse Laplace-Transformation

Die Rücktransformation der Funktionen  $\bar{T}_m(s)$  und  $\bar{T}_k(s)$  in den Zeitbereich liefert Faltungsintegrale

$$T_m(t) = G_{m,q}(t) * q(t) + G_{m,0}(t)T_0 , \quad (3.29)$$

$$T_k(t) = G_{k,q}(t) * q(t) + G_{k,0}(t)T_0 , \quad (3.30)$$

wobei die Greenschen Funktionen  $G$  im Zeitbereich bekannt sein müssen. Für deren Bestimmung kann analog zu Abschnitt 2.2 das Residuentheorem genutzt werden, welches exemplarisch für die Berechnung von  $G_{m,q}(t)$  aus

$$\bar{G}_{m,q}(s) = \frac{2I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} \left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)\right)} \quad (3.31)$$

gezeigt wird. Für die übrigen Funktionen wird an dieser Stelle auf den Anhang A.2 verwiesen.

Mithilfe des Residuentheorems wird das Kurvenintegral über die Funktion

$$f(s) = \bar{G}_{m,q}(s) \exp(st) \quad (3.32)$$

in der komplexen Ebene durch die Summe der Residuen ersetzt. Hierfür wird zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{2I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} \left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)\right)} \exp(st) \\ &= \frac{f_h(s)}{f_p(s)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

in die zwei Funktionen  $f_h$  und  $f_p$  aufgeteilt. Hier ist

$$f_h(s) = \frac{2I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}} \exp(st) \quad (3.34)$$

eine holomorphe Funktion ohne Singularitäten<sup>1</sup> und die Funktion

$$f_p(s) = \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + Bi I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) \quad (3.35)$$

enthält die Polstellen von  $f(s)$  als Nullstellen. Da diese ausschließlich rein imaginär sind, wird die Variablentransformation  $s = -\varepsilon \lambda^2$  eingeführt. Damit können die modifizierten Besselfunktionen zu Besselfunktionen umformuliert werden und die Bestimmungsgleichung für die Singularitäten lautet

$$f_p(\lambda) = Bi J_0(\lambda) - \lambda J_1(\lambda) = 0. \quad (3.36)$$

Die Funktionen  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$  sind Besselfunktionen erster Gattung von Ordnung null und eins. Gleichung (3.36) hat abzählbar unendlich viele Lösungen, nämlich die Eigenwerte  $\lambda_n$ . Da die Polstellen alle von erster Ordnung sind, kann das Residuum der Funktion  $f(s)$  bei der Singularität  $s_n = -\varepsilon \lambda_n^2$  durch

$$\text{Res}_{s_n} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n) f(s)) \quad (3.37)$$

berechnet werden. Das ergibt

$$\text{Res}_{s_n} f(s) = f_h(s_n) \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{f_p(s)}. \quad (3.38)$$

Da sowohl der Zähler  $s - s_n$  als auch der Nenner  $f_p(s)$  für den Grenzübergang  $s \rightarrow s_n$  gegen null streben, kann der Satz von de L'Hospital verwendet werden. Demnach ist

$$\lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{f_p(s)} = \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{1}{f'_p(s)} \quad (3.39)$$

mit

$$f'_p(s) = \frac{Bi I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{2\varepsilon \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}}. \quad (3.40)$$

<sup>1</sup> An der Stelle  $s = 0$  ist keine Singularität, denn es ist  $\lim_{s \rightarrow 0} f_h(s) = 1$

Nach Einsetzen der Eigenwerte ergibt sich das Residuum zu

$$\begin{aligned}\text{Res}_{s_n} f(s) &= \frac{4\varepsilon J_1(\lambda_n)}{BiJ_1(\lambda_n) + \lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t) \\ &= \varepsilon \frac{4Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t) \\ &= \varepsilon b_n \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t).\end{aligned}\quad (3.41)$$

Die Besselfunktionen werden hierbei mithilfe der Eigenwertgleichung (3.36) ersetzt und damit die Koeffizienten

$$b_n = \frac{4Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \quad (3.42)$$

definiert. Die inverse Laplace-Transformation von  $\bar{G}_{m,q}(s)$  kann abschließend durch

$$\begin{aligned}G_{m,q}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s_n} f(s) \\ &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t)\end{aligned}\quad (3.43)$$

angegeben werden. Die Bestimmung der Funktionen  $G_{m,0}(t)$ ,  $G_{k,q}(t)$  und  $G_{k,0}(t)$  verläuft analog, diese können ebenfalls als Summe von Exponentialfunktionen angegeben werden

$$G_{m,q}(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t), \quad G_{m,0}(t) = Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t), \quad (3.44)$$

$$G_{k,q}(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t), \quad G_{k,0}(t) = Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^2} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t), \quad (3.45)$$

wobei der Koeffizient  $c_n$  durch

$$c_n = \frac{2\lambda_n^2}{Bi^2 + \lambda_n^2} \quad (3.46)$$

definiert ist. Damit lassen sich die Integralgleichungen für die gesuchten Größen durch

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \int_0^t G_{m,q}(t-\tau)q(\tau)d\tau + T_0 G_{m,0}(t), \\ T_k(t) &= \int_0^t G_{k,q}(t-\tau)q(\tau)d\tau + T_0 G_{k,0}(t) \end{aligned} \quad (3.47)$$

angeben. Die Wärmequelle  $q(t) = \eta\gamma v_{\text{rel}}\mu(v_{\text{rel}}, T_k)$  ( $C_0 + T_m$ ) ist eine Funktion in Abhängigkeit der Temperatur- und Bewegungsgrößen des mechanischen Schwingers. Die Funktionen  $G_{m,q}(t)$  und  $G_{m,0}(t)$  sowie  $G_{k,q}(t)$  und  $G_{k,0}(t)$  sind sich sehr ähnlich, ihre Exponenten sind identisch und sie unterscheiden sich lediglich in einem Vorfaktor der Koeffizienten. Daraus lassen sich die Zusammenhänge

$$G_{m,0}(t) = 1 - Bi \int_0^t G_{m,q}(\tau)d\tau \quad (3.48)$$

und

$$G_{k,0}(t) = 1 - Bi \int_0^t G_{k,q}(\tau)d\tau \quad (3.49)$$

ableiten, wobei die Identitäten

$$Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2} = 1 \quad \text{und} \quad Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^2} = 1 \quad (3.50)$$

verwendet werden. Die Herleitung ist in Anhang B zu finden. Die Integralgleichungen (3.47) lassen sich dann übersichtlich durch

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \int_0^t G_{m,q}(t-\tau) (q(\tau) - Bi T_0) d\tau + T_0, \\ T_k(t) &= \int_0^t G_{k,q}(t-\tau) (q(\tau) - Bi T_0) d\tau + T_0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

angeben. Hierbei lässt sich direkt erkennen, dass sowohl die Querschnittstemperatur  $T_m(t)$  als auch die Kontakttemperatur  $T_k(t)$  die Anfangsbedingung  $T(r, 0) = T_0$  erfüllen. Für  $t > 0$  entwickeln sich die Temperaturwerte unter Berücksichtigung der Anfangstemperatur und der Wärmequelle  $q(t)$ . Die beiden Integralgleichungen (3.51) beschreiben zusammen mit der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.5) die gekoppelte Dynamik des thermomechanischen Systems. Die drei Gleichungen sind über die Zustände  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $T_m(t)$  und  $T_k(t)$  gekoppelt.

## 3.2 Systemgleichungen des vollen Systems

Die Gleichungen (3.51) zusammen mit Gl. (3.5) beschreiben die vollständig gekoppelte Systemdynamik des Reibschwingers unter Berücksichtigung der reibungsinduzierten Wärmeentwicklung und der damit einhergehenden Änderung der Reibkraft. Um diese gekoppelten Gleichungen zu lösen, müssen sie auf eine einheitliche Form gebracht werden. Entweder Gl. (3.5) muss als Integralgleichung formuliert werden, oder die Integralgleichungen (3.51) müssen als gewöhnliche Differentialgleichungen zur Verfügung stehen. Da der Umgang mit Differentialgleichungen angenehmer erscheint, werden die Integralgleichungen mithilfe eines Ansatzes aus [77, Kapitel 6] auf gewöhnliche Differentialgleichungen transformiert. Die Funktionen  $T_m(t)$  und  $T_k(t)$  ergeben sich dabei aus der Anfangstemperatur  $T_0$  und einer Linearkombination der Koeffizienten  $c_n$  beziehungsweise  $b_n$  mit den sogenannten modalen Temperaturen  $w_n$ :

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} b_n w_n(t) + T_0 \\ T_k(t) &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} c_n w_n(t) + T_0 . \end{aligned} \quad (3.52)$$

Hier bezeichnet  $N_{\text{ew}}$  die Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte, da aus numerischer Sicht nicht unendlich viele Eigenwerte verwendet werden können. Im Folgenden wird auf die Angabe der Zeitabhängigkeit bei den Funktionen  $w_n$ ,  $q$ ,  $T_m$  und  $T_k$  zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet. Für die modalen Temperaturen wird der Ansatz

$$w_n = \varepsilon \int_0^t \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 (t - \tau)) (q(\tau) - BiT_0) d\tau , \quad n = 1 \dots N_{\text{ew}} \quad (3.53)$$

verwendet. Das entspricht genau einem Summanden des Integralausdrucks in Gl. (3.51) ohne Koeffizient. Einmaliges Ableiten von  $w_n$  nach der Zeit  $t$  und Einsetzen des Ansatzes liefert

$$\dot{w}_n = \varepsilon (q - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n) , \quad w_n(0) = 0 , \quad n = 1 \dots N_{\text{ew}} , \quad (3.54)$$

wobei  $q$  von den Temperaturwerten und den Bewegungsgrößen abhängt. Die homogene Anfangsbedingung in Gl. (3.54) folgt direkt aus dem Integralansatz in Gl. (3.53). Die Anfangstemperatur  $T_0$  wird in den Definitionen in Gl. (3.52) berücksichtigt, wonach direkt  $T_m(0) = T_k(0) = T_0$  folgt.

Durch den Transformationsansatz in Gl. (3.52) und (3.53) können die zwei Volterra-Integralgleichungen (3.51) in ein System von  $N_{\text{ew}}$  gekoppelten Differentialgleichungen

erster Ordnung überführt werden. Auf den ersten Blick scheint diese Erhöhung der Ordnung die Komplexität des Problems zu steigern. Zwei Punkte sprechen jedoch klar für die Formulierung eines Differentialgleichungssystems: Zum einen steigt der Rechenaufwand beim numerischen Lösen von Volterra-Integralgleichungen wegen der verketteten Abhängigkeit überproportional mit Zunahme der oberen Integrationsgrenze an, da die Lösung zum nächsten Zeitpunkt vom gesamten Lösungsverlauf abhängt [32]. Bei Differentialgleichungen hingegen steigt der Rechenaufwand näherungsweise linear mit der Integrationszeit, da die Lösung zum nächsten Zeitpunkt nur vom Zustand des aktuellen Zeitpunkts abhängt. Zum anderen gibt es in vielen Softwarepaketen hoch performante Solver mit unterschiedlichen Ordnungen und automatischer Schrittweitensteuerung, wodurch gleichzeitig der Rechenaufwand minimiert und die Genauigkeit der Lösung verbessert wird. Für Integralgleichungen stehen keine vergleichbaren Solver zur Verfügung. Es müsste auf in der Literatur vorgestellte und selbst implementierte Solver ausgewichen werden, die mit der Leistungsfähigkeit von ODE-Solvern nicht mithalten können.

Die Gleichungen zur gekoppelten Dynamik als System gewöhnlicher Differentialgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + 2D\dot{x} + x + \hat{p}\mu(v_{\text{rel}}, T_k)(C_0 + T_m) \frac{\dot{x}}{v_{\text{rel}}} &= \hat{f} \cos \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \\
 \dot{w}_n &= \varepsilon (q - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n), \quad w_n(0) = 0, \quad n = 1 \dots N_{\text{ew}} \\
 T_m &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} b_n w_n + T_0, \quad T_k = \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} c_n w_n + T_0 \\
 q &= \eta \gamma v_{\text{rel}} \mu(v_{\text{rel}}, T_k)(C_0 + T_m), \quad v_{\text{rel}} = \sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}.
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Die Eigenwerte  $\lambda_n$  sowie die Koeffizienten  $b_n$  und  $c_n$  können durch die Gl. (3.36) und (3.47) bestimmt werden und hängen lediglich vom Parameter  $Bi$  ab. Die Reibkraft in Umfangsrichtung kann dann mit

$$f_c = \hat{p}\mu(v_{\text{rel}}, T_k)(C_0 + T_m) \frac{v_0}{v_{\text{rel}}} \tag{3.56}$$

berechnet werden. Die relevanten, dimensionslosen Systemparameter sind das Dämpfungsmaß  $D$ , der Referenzdruck  $\hat{p}$ , der Reibungskoeffizient  $\mu$ , der Übermaßparameter  $C_0$  sowie die Anregungsamplitude  $\hat{f}$  und -frequenz  $\omega$ . Aus der Formulierung des thermischen Problems kommen das Verhältnis der Zeitkonstanten  $\varepsilon$ , die Biot-Zahl  $Bi$ ,  $\gamma$  als Maß der Druckerhöhung durch thermische Ausdehnung und der Parameter  $\eta$ , der angibt welcher Anteil der Reibleistung als Wärme in den elastischen Körper fließt.

Für den zustandsabhängigen Reibungskoeffizienten  $\mu(v_{\text{rel}}, T_k)$  kann ein frei wählbarer funktionaler Zusammenhang verwendet werden, der die physikalische Abhängigkeit möglichst realitätsnah abbildet. An dieser Stelle wird die Funktion

$$\mu(v, \theta) = \mu_0 + \mu_v \left( 1 - \exp\left(-\frac{|v|}{v^*}\right) \right) + \mu_\theta \left( 1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\theta^*}\right) \right) \quad (3.57)$$

vorgeschlagen. Hierbei ist  $\mu_0 > 0$  ein konstanter Wert bei verschwindender Geschwindigkeit und Temperaturdifferenz. Die Werte  $\mu_v$  und  $\mu_\theta$  geben die maximale Änderung des Reibwerts durch die Geschwindigkeit oder die Temperatur an. Diese Werte können positiv oder negativ sein, allerdings muss  $\mu_0 > -\mu_v - \mu_\theta$  erfüllt sein, um keinen negativen Reibwert zu erhalten.

**Systemverhalten ohne Anregung** Da die Auswirkung der hochfrequenten Anregung untersucht werden soll, werden auch die Gleichungen bei einem quasistatischen Betrieb ohne Anregung betrachtet, also für  $\hat{f} = 0$ . Bei verschwindenden Anfangsbedingungen hat dies für die Bewegungsgrößen direkt

$$x(t) \equiv 0, \quad (3.58)$$

$$\dot{x}(t) \equiv 0 \quad (3.59)$$

zur Folge. Das Problem ist damit nur noch von rein thermischer Natur und die verbleibenden Systemgleichungen ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} b_n w_n + T_0, & T_k &= \sum_{n=1}^{N_{\text{ew}}} c_n w_n + T_0 \\ \dot{w}_n &= \varepsilon (q - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n), & w_n(0) &= 0, \quad n = 1 \dots N_{\text{ew}} \\ q &= \eta \gamma v_0 \mu(v_0, T_k) (C_0 + T_m). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Reibkraft in Umfangsrichtung kann dann mit

$$f_{c,0} = \hat{p} \mu(v_0, T_k) (C_0 + T_m) \quad (3.61)$$

angegeben werden. Für den Sonderfall eines konstanten Reibwerts  $\mu = \mu_0 = \text{const.}$  ergibt sich daraus ein lineares, autonomes Differentialgleichungssystem für die modalen Temperaturen  $w_n$  mit

$$\dot{w}_n = \varepsilon (\mu_0 \eta \gamma v_0 (C_0 + T_m) - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n), \quad n = 1 \dots N_{\text{ew}}. \quad (3.62)$$

Die Reibkraft in Umfangsrichtung lautet dann

$$f_{c,0} = \hat{p}\mu_0 (C_0 + T_m) . \quad (3.63)$$

### 3.3 Mittelung der schnellen Dynamik für schwache Anregung

Das dynamische System aus Gl. (3.55) wird in Kapitel 4 numerisch gelöst. An dieser Stelle soll das Gleichungssystem allerdings noch weiter vereinfacht werden, indem die physikalischen Eigenschaften gezielt genutzt werden, um daraus aussagekräftige Näherungen zu finden.

Die Bewegung des Masseblocks erfolgt auf einer deutlich schnelleren Zeitskala als die Änderung der Temperatur. Dieses Verhältnis wird in dem Parameter  $\varepsilon$  berücksichtigt, der positiv und deutlich kleiner als eins ist und als Vorfaktor der rechten Seiten die Entwicklung der modalen Temperaturen  $w_n$  als langsam charakterisiert (vgl. Gl. (3.54)). In erster Näherung kann deshalb davon ausgegangen werden, dass für die Temperaturentwicklung auch der zeitliche Mittelwert des Quellterms  $q$  herangezogen werden kann, anstatt die schnell schwingende Änderung durch die Relativgeschwindigkeit zu berücksichtigen. Die übrigen Terme ändern sich im Vergleich zur Relativgeschwindigkeit langsam. Um einen Ausdruck für die über eine Periode gemittelte Relativgeschwindigkeit zu finden, muss für die Bewegungsgleichung des Masseblocks eine Näherungslösung gefunden werden, die die veränderliche Temperatur berücksichtigt. Aus der Analyse numerischer Lösungen in Kapitel 4 wird deutlich, dass bei einer schwachen Anregung  $\hat{f} < \hat{p}\mu C_0$  die Reibkraft in der Bewegungsgleichung des Masseblocks dominant ist, sodass Trägheitswirkung, Dämpfer- und Federkraft vernachlässigt werden können. Die Bewegungsgleichung kann damit auf

$$\mu\hat{p} (C_0 + T_m) \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2}} = \hat{f} \cos \omega t \quad (3.64)$$

reduziert werden. Hierbei passen sich die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und die Temperatur  $T_m$  immer so an, dass die Reibkraft genau der Anregungskraft entspricht. Diese Gleichung kann nach  $\dot{x}^2$  aufgelöst und dann in die Relativgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}}$  eingesetzt werden:

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{\dot{x}^2 + v_0^2} = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\hat{f}}{\hat{p}\mu(C_0+T_m)}\right)^2 \cos^2 \omega t}} . \quad (3.65)$$

Dieser Schritt ist allerdings nur dann möglich, wenn  $\mu\hat{p}(C_0 + T_m) > \hat{f}$  erfüllt ist. Im physikalischen Sinne bedeutet dies, dass der Betrag der Reibkraft permanent größer als die Anregungsamplitude sein muss. Für  $\hat{f} < \mu\hat{p}C_0$  ist diese Bedingung immer erfüllt und die Näherung liefert sehr gute Ergebnisse, wie in Kapitel 4 noch zu sehen sein wird. Für eine starke Anregung  $\hat{f} > \mu\hat{p}C_0$  kann die notwendige Bedingung ebenfalls erfüllt sein, wenn die Querschnittstemperatur  $T_m$  entsprechend groß ist. Auch dann funktioniert die Näherung gut und bildet das Systemverhalten ausreichend genau ab. Die Querschnittstemperatur  $T_m$  nimmt allerdings nicht für alle Parameterkombinationen ausreichend große Werte an, weshalb die vorgestellte Näherungslösung bei großer Anregung nicht allgemein anwendbar ist. In Abschnitt 4.2.2 wird auf diesen Fall näher eingegangen.

Wird Gl. (3.65) in den Quellterm  $q$  eingesetzt, ergibt sich die folgende Differentialgleichung für die modalen Temperaturen

$$\dot{w}_n = \varepsilon \left( \eta \gamma \mu v_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p}\mu(C_0 + T_m)} \right)^2} \cos^2 \omega t} (C_0 + T_m) - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n \right). \quad (3.66)$$

Durch die Näherung wurde die Temperaturentwicklung von der Bewegung des Masseblocks entkoppelt. Die Änderung der modalen Temperaturen hängt nun noch von den modalen Temperaturen und explizit von der Zeit ab, jedoch nicht mehr von den Bewegungsgrößen des Masseblocks. An dieser Stelle wird der ursprüngliche Gedanke der unterschiedlichen Zeitskalen wieder aufgenommen: Die Temperatur, und damit auch die modalen Temperaturen, ändern sich deutlich langsamer im Vergleich zu den Bewegungsgrößen des Masseblocks. Insbesondere kann angenommen werden, dass sich die Temperaturwerte während einer Periode der Anregung  $T_A = \frac{2\pi}{\omega}$  nur geringfügig ändern, weshalb auch der über eine Periode gemittelte Einfluss herangezogen werden kann. Die nachfolgenden Schritte werden mit einem als konstant angenommenen Reibwert  $\mu = \mu_0$  durchgeführt. Hierfür kann für die Mittelung von Gl. (3.66) mit

$$\bar{w}_n = \varepsilon \left( \eta \gamma \mu_0 v_0 \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p}\mu_0(C_0 + T_m)} \right) (C_0 + T_m) - BiT_0 - \lambda_n^2 w_n \right), \quad n = 1 \dots N_{ew} \quad (3.67)$$

ein analytischer Ausdruck angegeben werden, in dem die Funktion  $K(m)$  das vollständige elliptische Integral erster Ordnung ist. Ein klassisches Mittelwertbildungsverfahren mit dem kleinen Parameter  $\varepsilon$  liefert die gleiche Näherung, denn Gl. (3.66) besitzt die Standardform für Mittelwertbildung. Damit kann als erste Näherung der Mittelwert der

rechten Seite herangezogen werden, wobei die modalen Temperaturen  $w_n$  als konstant angesehen werden.

Die Gl. (3.67) beschreiben ein autonomes Differentialgleichungssystem, das lediglich von den Parametern sowie den modalen Temperaturen  $w_n$  abhängt. Daraus lässt sich die Entwicklung der Temperaturwerte  $T_m$  und  $T_k$  ermitteln, wobei der Einfluss der Bewegung des Masseblocks über die Wärmequelle nur noch als gemittelter Wert eingeht. Hierbei ist anzumerken, dass die Frequenz der Anregung  $\omega$  durch die Mittelung eliminiert wird und nicht mehr vorkommt. Die Reibkraft in Umfangsrichtung lässt sich ebenfalls als Mittelwert angeben und hat die Form

$$f_c = \mu_0 \hat{p} (C_0 + T_m) \frac{2}{\pi} E \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m)} \right), \quad (3.68)$$

wobei die Funktion  $E(m)$  das vollständige elliptische Integral zweiter Ordnung ist

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (3.69)$$

mit  $|m| < 1$ . Im Folgenden ist nochmal das reduzierte Gleichungssystem angegeben, mit dem der Temperaturverlauf unter Berücksichtigung der gemittelten Wärmequelle auf der langsamen Zeitskala berechnet werden kann

$$\dot{w}_n = \varepsilon \left( \eta \gamma \mu_0 v_0 \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m)} \right) (C_0 + T_m) - Bi T_0 - \lambda_n^2 w_n \right), \quad n = 1 \dots N_{ew} \quad (3.70)$$

$$T_m = \sum_{n=1}^{N_{ew}} b_n w_n + T_0. \quad (3.71)$$

**Systemverhalten ohne Anregung** Da in den Systemgleichungen für verschwindende Anregung keine schnelle Dynamik enthalten ist, gehen die Gleichungen aus (3.70) für  $\hat{f} = 0$  direkt in Gl. (3.62) über.

## 3.4 Stationärer Zustand

Ausgehend von den Gleichungen des gemittelten Systems kann in der Analyse noch ein Schritt weiter gegangen werden, indem ein etwaig existierender stationärer Zustand

untersucht wird. Da es sich bei Gl. (3.70) um ein autonomes System handelt, wird nach einer Ruhelagenlösung mit  $\dot{w}_n = 0$  gesucht. Dies liefert zunächst die Gleichungen

$$0 = \varepsilon \left( \eta \gamma \mu_0 v_0 \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m)} \right) (C_0 + T_m) - Bi T_0 - \lambda_n^2 w_n \right), \quad n = 1 \dots N_{ew} . \quad (3.72)$$

Eine Multiplikation mit  $\frac{b_n}{\lambda_n^2}$  und anschließende Summation über die  $N_{ew}$  Gleichungen liefert unter Berücksichtigung der Definition (3.52) die Gleichung

$$0 = \sum_{n=1}^{N_{ew}} \frac{b_n}{\lambda_n^2} \eta \gamma \mu_0 v_0 \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m)} \right) (C_0 + T_m) - Bi T_0 \sum_{n=1}^{N_{ew}} \frac{b_n}{\lambda_n^2} - T_m - T_0 . \quad (3.73)$$

Wird der Grenzübergang  $N_{ew} \rightarrow \infty$  betrachtet, kann wiederum die Identität

$$Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2} = 1 \quad (3.74)$$

genutzt werden. Das führt auf

$$0 = \frac{\mu_0 \eta \gamma}{Bi} v_0 \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m)} \right) (C_0 + T_m) - T_m . \quad (3.75)$$

Wird nun noch der dimensionslose Ausdruck  $v_b = \frac{Bi}{\mu_0 \eta \gamma}$  eingeführt, ergibt sich nach Umstellen die prägnante Gleichung

$$T_m^* = \frac{v_0}{v_b} \frac{2}{\pi} K \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m^*)} \right) (C_0 + T_m^*) \quad (3.76)$$

für die stationäre Temperatur  $T_m^*$ . Die Anfangstemperatur kommt in dieser Gleichung nicht mehr vor, da sie wie zu erwarten keinen Einfluss auf den stationären Zustand hat. Die stationäre Reibkraft in Umfangsrichtung kann analog zu Gl. (3.68) durch

$$f_c^* = \mu_0 \hat{p} (C_0 + T_m^*) \frac{2}{\pi} E \left( \frac{\hat{f}}{\hat{p} \mu_0 (C_0 + T_m^*)} \right) \quad (3.77)$$

berechnet werden.

**Systemverhalten ohne Anregung** Aus Gl. (3.62) lässt sich analog zu dem eben skizzierten Vorgehen die Gleichung

$$0 = \frac{\eta\gamma\mu(v_0, T_k)}{Bi} (C_0 + T_m) - T_m \quad (3.78)$$

bestimmen. Im stationären Zustand ist die Temperatur über dem Querschnitt konstant gleich, es gilt also  $T_k = T_m$ . Damit ergibt sich für den allgemeinen Fall die nichtlineare Gleichung

$$T_m^0 = (C_0 + T_m^0) \frac{\eta\gamma\mu(v_0, T_m^0)}{Bi}, \quad (3.79)$$

mit der die stationäre Temperatur ohne Anregung  $T_m^0$  bestimmt werden kann. Die Reibkraft in Umfangsrichtung folgt damit aus

$$f_c^0 = \hat{\mu}\mu(v_0, T_m^0) (C_0 + T_m^0). \quad (3.80)$$

Bei konstantem Reibwert  $\mu = \mu_0 = \text{const.}$  kann aus Gl. (3.76) oder Gl. (3.79) direkt die Temperatur

$$T_m^0 = C_0 \frac{v_0}{v_b - v_0} \quad (3.81)$$

bestimmt werden, die sich aufgrund der Wärmequelle durch die umlaufende Umgebung einstellt.

Die Reibkraft in Umfangsrichtung lässt sich dann durch

$$f_c^0 = \mu_0 \hat{\mu} C_0 \frac{v_b}{v_b - v_0} \quad (3.82)$$

berechnen.

### 3.4.1 Interpretation der Gleichungen für den stationären Zustand

Gleichung (3.76) ist nicht nur wegen ihrer Kompaktheit wertvoll, sondern liefert auch noch eine Bedingung zur Existenz des stationären Zustands sowie Aussagen zu den Werten, die  $T_m^*$  annehmen kann. Auf diese Eigenschaften wird im Folgenden eingegangen.

Eine Bedingung für die Gültigkeit der Näherung wurde mit  $\mu \hat{\mu} (C_0 + T_m) > \hat{f}$  bereits gegeben. Diese Ungleichung kann aus Gl. (3.76) ermittelt werden, da ansonsten das

vollständige elliptische Integral nicht existiert. Daraus kann eine untere Schranke für die stationäre Temperatur  $T_m^*$  mit

$$T_m^* > \frac{\hat{f}}{\mu_0 \hat{p}} - C_0 \quad (3.83)$$

formuliert werden. Diese Abschätzung kann sogar noch verbessert werden, denn die sich einstellende stationäre Temperatur  $T_m^*$  muss auch größer sein als die Temperatur  $T_m^0$ , die sich aufgrund der umlaufenden Umgebung einstellt, es gilt schließlich  $v_{\text{rel}} \geq v_0$ . Damit lässt sich die untere Schranke für die stationäre Temperatur mit

$$T_{m,uS}^* = \max \left( \frac{\hat{f}}{\mu_0 \hat{p}} - C_0, C_0 \frac{v_0}{v_b - v_0} \right) \quad (3.84)$$

angeben. Diese untere Schranke kann beispielsweise als erste Schätzung beim numerischen Lösen der nichtlinearen Gl. (3.76) verwendet werden. Die Gleichung für die stationäre Temperatur liefert gleichzeitig auch die Existenzbedingung

$$v_0 < v_b = \frac{Bi}{\mu_0 \eta \gamma} \quad (3.85)$$

für den stationären Zustand. Der Parameterwert  $v_b$  wird in diesem Zusammenhang als Grenzgeschwindigkeit bezeichnet, denn wenn  $v_0$  diesen Wert überschreitet, hat Gl. (3.76) keine reelle Lösung und damit existiert kein stationärer Zustand. Gleichung (3.81) liefert einen ähnlichen Einblick, denn für  $v_0 \rightarrow v_b^-$  strebt  $T_m^0$  gegen unendlich. Für Werte größer  $v_b$  ergibt sich eine negative stationäre Temperatur, was physikalisch nicht plausibel ist. Im physikalischen Sinne lässt sich die Grenzgeschwindigkeit als Grenze zu einer thermischen Instabilität deuten [2, 100, 103]. Wenn die Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  diesen Wert überschreitet, wird durch die Reibleistung mehr Wärme in das System eingebracht als über die Grenzfläche abströmen kann. Die Erwärmung führt durch die thermische Ausdehnung zu einem höheren Kontaktdruck und dadurch zu einer noch größeren Reibkraft und damit einer höheren Reibleistung. Dieser Effekt ist also selbstverstärkend und die Temperatur strebt gegen unendlich. Die Schlüsse, die für die stationäre Temperatur gezogen werden können, lassen sich auch auf den stationären Wert der Reibkraft in Umlaufrichtung  $f_c^*$  übertragen. Mithilfe der unteren Schranke für die stationäre Querschnittstemperatur aus Gl. (3.84) lässt sich auch für die Reibkraft in Umfangsrichtung ein unterer Grenzwert angeben. Das führt auf

$$f_c^* > f_{c,\min} = \frac{2}{\pi} \max \left( \hat{f}, \hat{p} \mu_0 C_0 \frac{v_b}{v_b - v_0} \right). \quad (3.86)$$

### 3.4.2 Reduzierte Parameterverhältnisse

Zur weiteren Analyse der hergeleiteten Gleichungen werden die Parameterverhältnisse

$$T_C = \frac{T_m^*}{C_0}, \quad V = \frac{v_0}{v_b}, \quad F = \frac{\hat{f}}{f_{\text{stat}}}, \quad R_c = \frac{f_c^*}{f_{\text{stat}}} \quad (3.87)$$

eingeführt, wobei  $f_{\text{stat}} = \hat{p} C_0 \mu_0$  die statische Reibkraft ohne thermische Ausdehnung beschreibt. Der Parameter  $T_C$  ist die auf die Presspassung  $C_0$  bezogene stationäre Temperatur,  $V$  ist das Geschwindigkeitsverhältnis aus Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  und Grenzgeschwindigkeit  $v_b$ ,  $F$  bezeichnet das Verhältnis aus Anregungsamplitude  $\hat{f}$  und statischer Reibkraft  $f_{\text{stat}}$ ,  $R_c$  gibt die stationäre Reibkraft in Umlaufrichtung bezogen auf die statische Reibkraft an. Die Gleichung für die stationäre Temperatur lautet damit

$$T_C = V \frac{2}{\pi} K \left( \frac{F}{1 + T_C} \right) (1 + T_C) . \quad (3.88)$$

Die auf das Maß der Presspassung  $C_0$  bezogene Querschnittstemperatur  $T_C$  hängt also lediglich vom Geschwindigkeitsverhältnis  $V$  sowie vom Kraftverhältnis  $F$  ab. Die Existenzbedingung für einen stationären Zustand vereinfacht sich zu

$$V < 1 . \quad (3.89)$$

Für die Reibkraft in Umfangsrichtung ergibt sich

$$R_c = \frac{2}{\pi} E \left( \frac{F}{1 + T_C} \right) (1 + T_C) . \quad (3.90)$$

Unter Verwendung der Parameterverhältnisse aus Gl. (3.87) lässt sich die auf  $C_0$  bezogene Temperatur ohne Anregung  $T_C^0 = \frac{T_m^0}{C_0}$  kompakt durch

$$T_C^0 = \frac{V}{1 - V} \quad (3.91)$$

angeben. Die untere Schranke für  $T_C$  besitzt die Form

$$T_{C,\text{uS}} = \max \left( F - 1, \frac{V}{1 - V} \right) . \quad (3.92)$$

Für die Reibkraft in Umfangsrichtung kann durch

$$R_c > R_{c,\text{min}} = \frac{2}{\pi} \max \left( F, \frac{1}{1 - V} \right) \quad (3.93)$$

eine Abschätzung für die untere Grenze angegeben werden. Die Reibkraft ohne Anregung  $R_c^0$  ergibt sich zu

$$R_c^0 = \frac{f_c^0}{f_{\text{stat}}} = \frac{1}{1 - V} . \quad (3.94)$$

Ist der Wert  $R_c$  größer als eins, ist die Reibkraft in Umlaufrichtung größer als die statische Reibkraft, die sich allein durch die Presspassung ergibt. Ist der Wert kleiner als eins, ist die Reibkraft kleiner als die statische Reibkraft. Der Wert  $R_c^0$  ist stets größer als eins, da die Umlaufbewegung zu einer Temperaturerhöhung und damit einer höheren Flächenpressung führt. Ist der Wert  $R_c$  kleiner als der Wert ohne Anregung  $R_c^0$ , so ist die Anregung vorteilhaft und führt zu einer Reduktion der Reibkraft.

Für den Fall, dass die Näherung aus Gl. (3.65) zutreffend ist, lässt sich das gesamte Systemverhalten des stationären Zustands auf die beiden Parameterverhältnisse  $V$  und  $F$  reduzieren, die allein durch Material-, Geometrie- und Anregungsparameter des zugrundeliegenden Modells festgelegt sind. Anhand dieser lässt sich mit  $V < 1$  eine Bedingung für die Existenz eines stationären Zustands angeben. Mit Gl. (3.87) lässt sich die bezogene stationäre Temperatur berechnen, womit sich auch die bezogene mittlere Reibkraft in Umfangsrichtung bestimmen lässt. Auch die Systemgrößen ohne Anregung sowie die vorgestellten Abschätzungen lassen sich damit kompakt angeben. Die Analyse des stationären Zustands ist damit sehr effizient möglich.

Für  $F > 1$  stellt sich ebenfalls ein stationärer Zustand ein, dieser kann allerdings nur für bestimmte Parameterkombinationen durch die vorgestellten Gleichungen beschrieben werden. Die Schwierigkeit liegt darin, einen geschlossenen Ausdruck für die gemittelte Relativgeschwindigkeit zu finden, was für den allgemeinen Fall  $F > 1$  nicht gelungen ist.

# 4 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel werden die Lösungen der Modellgleichungen aus Kapitel 3 vorgestellt und erläutert. Zuerst wird auf die Lösung der Gleichungen des vollen Systems aus Abschnitt 3.2 eingegangen. Anschließend wird die Lösung der gemittelten Gleichungen aus Abschnitt 3.3 diskutiert. Abschließend werden die Gleichungen für den stationären Zustand aus Abschnitt 3.4 gelöst und diskutiert. Ziel ist es, das Systemverhalten zu analysieren und wesentliche Parameter zu identifizieren.

## 4.1 Gleichungen des vollen Systems

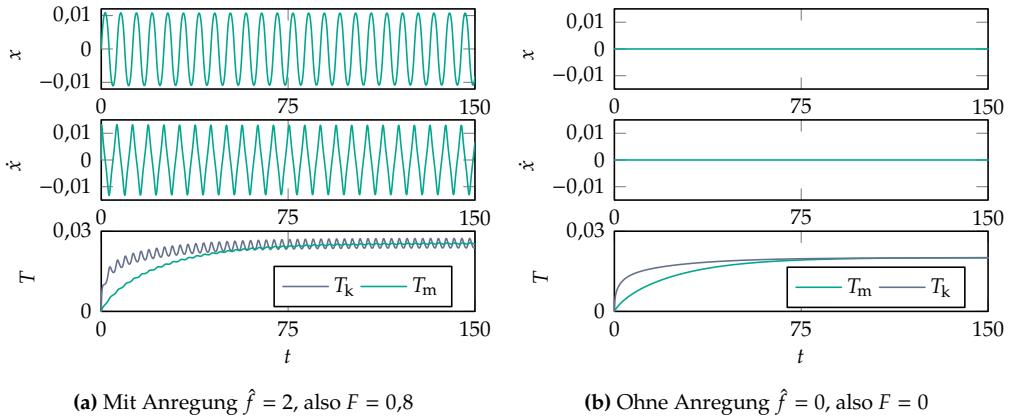
Im ersten Abschnitt wird das Verhalten des vollständig gekoppelten Systems untersucht. Dazu werden die Systemgleichungen (3.55) numerisch mithilfe des Differentialgleichungslösers `ode15s` von MatLab (Mathworks) gelöst. Um eine ausreichende Genauigkeit in den Temperaturwerten zu gewährleisten, werden  $N_{ew} = 200$  Eigenwerte herangezogen, was auf ein Differentialgleichungssystem mit der Ordnung 202 führt. Die absolute und relative Fehlertoleranz sind auf  $10^{-8}$  eingestellt.

### 4.1.1 Schwache Anregung

Wenn die Anregungsamplitude  $\hat{f}$  kleiner als die statische Reibkraft  $f_{stat} = \hat{p}C_0\mu_0$  ist, also  $F < 1$  gilt, wird die Anregung als schwach bezeichnet.

In Abb. 4.1 sind numerische Lösungen der gekoppelten Gleichungen für eine schwache Anregung dargestellt. Es sind jeweils die Position  $x$ , die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  sowie die Temperaturwerte  $T_m$  und  $T_k$  über der Zeit aufgetragen, wobei Abb. 4.1b zu Vergleichszwecken das Systemverhalten ohne Anregung darstellt. Die statische Reibkraft liegt bei  $f_{stat} = 2,5$ . Der Parametersatz der beiden Lösungen ist bis auf den Wert der Anregungsamplitude  $\hat{f}$  identisch. Die Zeitverläufe werden im Folgenden eingehend erläutert.

Die Position  $x$  und die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  des Masseblocks in Abb. 4.1a schwingen um den Wert null und erreichen nach einem kurzen transienten Bereich, in dem die



**Abbildung 4.1:** Lösung der gekoppelten Systemgleichungen für folgende Parameter:  $\omega = 1$ ,  $v_0 = 0,01$ ,  $\mu_0 = 0,1$ ,  $D = 0$ ,  $\gamma = 200$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,  $Bi = 5$ ,  $\eta = 0,2$ ,  $C_0 = 2,5$ ,  $\hat{p} = 10$ , ( $v_b = 1,25$ ,  $f_{\text{stat}} = 2,5$ ,  $V = 0,008$ ) und homogene Anfangsbedingungen

Amplituden leicht abnehmen, einen stationären Zustand mit konstanter Amplitude. Im Verlauf der Temperaturwerte ist der transiente Bereich deutlicher ausgeprägt und der stationäre Zustand wird erst bei etwa  $t \approx 100$  erreicht. Die Oberflächentemperatur  $T_k$  steigt schnell an und weist eine überlagerte Schwingung mit kleiner Amplitude und hoher Frequenz auf. Im Vergleich dazu steigt die Querschnittstemperatur  $T_m$  langsamer an. Eine hochfrequente Überlagerung ist ebenfalls zu erkennen, allerdings bei deutlich kleinerer Amplitude. Beide Temperaturwerte steigen aufgrund des Wärmeeintrags durch die Reibleistung an und nähern sich asymptotisch dem gleichen mittleren Wert von etwa 0,025. Die hochfrequente, überlagerte Schwingung hat die doppelte Frequenz der Geschwindigkeit, da diese im Ausdruck der Relativgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}}$  quadratisch eingeht. Die Oberflächentemperatur  $T_k$  reagiert schneller auf den Wärmeeintrag und schwankt stärker im stationären Zustand. Das ist darauf zurückzuführen, dass sowohl der Wärmeeintrag als auch der Wärmefluss in die Umgebung genau an der Oberfläche stattfinden und daher dort unmittelbaren Einfluss haben. Im Gegensatz dazu reagiert die Querschnittstemperatur  $T_m$  langsamer, da sich die Wärme zuerst über den Querschnitt ausbreiten muss. Im stationären Zustand stellt sich ein dynamisches energetisches Gleichgewicht ein, bei dem im zeitlichen Mittel durch die Reibleistung genau so viel Wärme in das Kontinuum strömt, wie auch an die Umgebung abgegeben wird. Gleichzeitig stellt sich die Schwingungsamplitude genau so ein, dass die dadurch generierte Reibleistung den Bolzen gerade so viel erwärmt, dass die daraus resultierende thermische Ausdehnung zu einer entsprechend großen Reibkraft führt. Eine zu große Schwingungsamplitude würde zu einer höheren Temperatur und damit einer größeren Reibkraft führen, die Schwingung würde also stärker gedämpft werden. Bei einer zu

kleinen Schwingungsamplitude hätte der Bolzen eine geringere Temperatur und damit wäre auch die Reibkraft geringer. Die Anregungskraft würde den Bolzen dann stärker beschleunigen, bis das Gleichgewicht wieder hergestellt wäre. Das System stellt sich also selbst ein. Obwohl die Anregung bei der vorgestellten Lösung in der Resonanz stattfindet ( $\omega = 1$ ) und das Dämpfungsmaß null ist ( $D = 0$ ), bleibt die Amplitude beschränkt. Die Reibkraft wirkt also im übertragenen Sinne wie ein selbstregulierender Dämpfungsmechanismus, der sich an den Systemzustand anpasst.

Zu Vergleichszwecken ist in Abb. 4.1b die numerische Lösung der Systemgleichungen (3.60) ohne Anregung dargestellt. Da das System aus der Ruhe startet, bleiben die Position und die Geschwindigkeit konstant bei null. Die Temperaturwerte steigen aufgrund des Wärmeeintrags der Reibleistung durch die vorgeschriebene Bewegung  $v_0$  an und nähern sich asymptotisch dem gleichen Wert von 0,02. In diesem stationären Zustand ist die Temperatur über dem Querschnitt konstant. Es stellt sich auch hier ein energetisches Gleichgewicht ein, bei dem genauso viel Energie in Form von Wärme an die Umgebung abgegeben wird, wie über die Reibleistung aufgenommen wird. Da der Wärmeeintrag an der Oberfläche stattfindet, erwärmt sich diese auch schneller als der Querschnitt. Im Vergleich zu Abb. 4.1a ist die stationäre Temperatur in Abb. 4.1b geringer, da die Reibleistung beim System ohne Anregung immer kleiner ist.

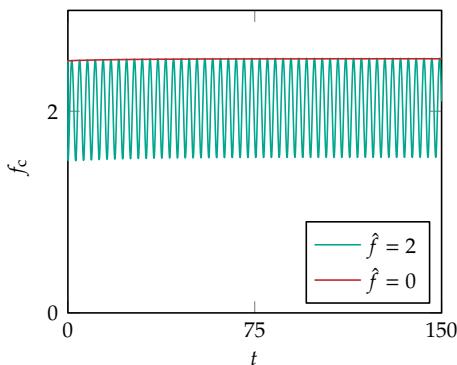


Abbildung 4.2: Vergleich der Reibkraft

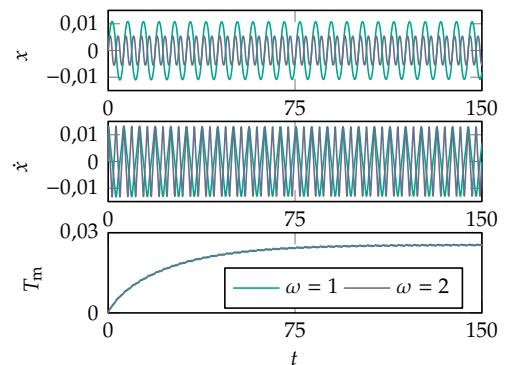


Abbildung 4.3: Einfluss der Anregungsfrequenz

In Abb. 4.2 ist die jeweilige entsprechende Reibkraft in Umfangsrichtung  $f_c$  aufgetragen, die sich aus den Systemlösungen aus Abb. 4.1 ergibt. Da die Anfangstemperatur der Lösungen bei  $T_0 = 0$  liegt, starten beide Kurven der Reibkraft beim Wert der stationären Reibkraft  $f_{\text{stat}} = 2,5$ . Bei verschwindender Anregung weist die Reibkraft einen kurzen transienten Bereich auf, bevor der konstante Wert 2,52 erreicht wird. Dieser liegt fast durchgehend oberhalb der Kurve für die Reibkraft mit Anregung, deren Mittelwert bei etwa 2,06 liegt. Der kurze transiente Bereich der Lösung mit Anregung

resultiert aus der Änderung der Querschnittstemperatur sowie der Änderung der Geschwindigkeitsamplitude. Der hochfrequente Anteil kommt aus dem oszillierenden Verlauf der Geschwindigkeit. Für diesen Parametersatz führt die Anregung zu einer Reduktion der mittleren Reibkraft in Umfangsrichtung um etwa 18 %.

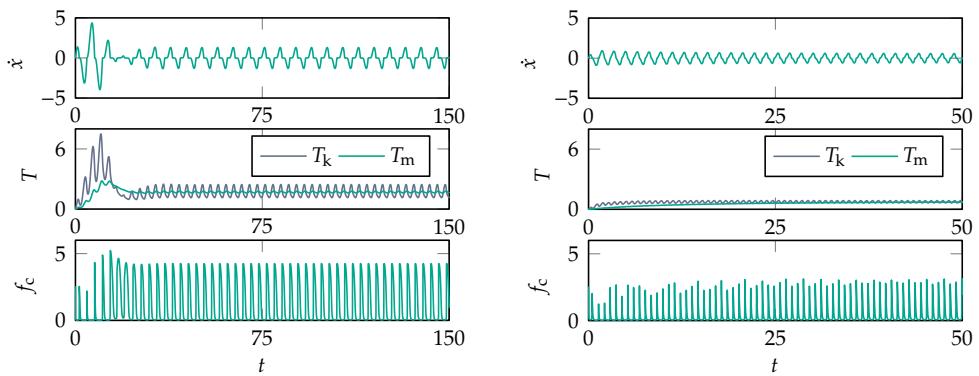
### Einfluss der Anregungsfrequenz

Anhand von Abb. 4.3 soll der Einfluss der Anregungsfrequenz  $\omega$  auf das Systemverhalten bei schwacher Anregung verdeutlicht werden. Dazu wird die Systemlösung aus Abb. 4.1a herangezogen und mit der Lösung mit doppelter Frequenz  $\omega = 2$  verglichen. Grundsätzlich verhält sich das System ähnlich. Die Schwingungsamplitude der Position  $x$  ist bei  $\omega = 2$  nur halb so groß, während die Schwingungsfrequenz doppelt so hoch ist. Der Verlauf der Geschwindigkeit ist sogar noch ähnlicher. Die Amplituden sind identisch, der Zeitverlauf sieht bis auf die Frequenz auch gleich aus. Ähnliches lässt sich beim Verlauf der Querschnittstemperatur  $T_m$  beobachten. Die Kurven liegen nahezu aufeinander, nähern sich asymptotisch demselben Grenzwert an und ein Unterschied liegt lediglich in der Frequenz der überlagerten Schwingung. Auch die resultierende Reibkraft in Umfangsrichtung ist bis auf die veränderte Frequenz gleich. Das System scheint den Wärmeeintrag so zu begrenzen, dass sich der im vorigen Abschnitt erwähnte energetische Gleichgewichtszustand einstellt. Die Schwingungsamplitude passt sich so an, dass die mittlere Relativgeschwindigkeit den entsprechenden Wärmeeintrag liefert.

#### 4.1.2 Starke Anregung

In Abb. 4.4a ist das Systemverhalten für eine größere Anregungsamplitude mit  $\hat{f} = 5$  abgebildet, während die statische Reibkraft weiterhin bei  $f_{\text{stat}} = 2,5$  liegt. Damit ist  $F > 1$  und das Systemverhalten unterscheidet sich deutlich von den Ergebnissen aus Abb. 4.1a mit schwacher Anregung.

Bei starker Anregung ist der transiente Prozess bei der Bewegung des Masseblocks stärker ausgeprägt. Durch die große Anregung sind die Ausschläge im Geschwindigkeitssignal zu Beginn groß, bis der damit einhergehende Wärmeeintrag die Reibkraft so weit erhöht, dass die Bewegung stark abgebremst wird. Hierbei kommt es sogar zu einem Überschwingen in den Temperaturwerten, wodurch die Reibkraft stark anwächst und die Bewegung fast gestoppt wird. Anschließend stellt sich ein stationärer Zustand ein, wobei der Masseblock eine periodische Bewegung ausführt und die Temperaturwerte um einen stationären Wert von etwa 1,7 schwingen. Die Geschwindigkeitsamplitude ist dabei viel größer als bei schwacher Anregung. Allerdings gibt es auch immer Phasen, in denen die Geschwindigkeit aufgrund der großen Reibkraft nahezu null wird und der Masseblock näherungsweise haftet. Die Temperaturwerte erreichen ebenso deutlich höhere Werte als bei schwacher Anregung. In der Reibkraft  $f_c$  gibt es sehr



(a) Systemlösung für  $\omega = 1$ , mittlere Reibkraft  $f_c^* = 1,24$

(b) Systemlösung für  $\omega = 4$ , mittlere Reibkraft  $f_c^* = 0,49$

Abbildung 4.4: Starke Anregung  $\hat{f} = 5$ , ( $F = 2$ ) bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen

große, kurze Ausschläge, dazwischen gehen die Werte fast auf null zurück. Die starken Ausschläge treten aufgrund der hohen Temperaturwerte in Verbindung mit kurzen Phasen mit nahezu verschwindender Geschwindigkeit auf. Abgesehen davon ist die Geschwindigkeit  $\dot{x}$  sehr viel größer als die Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$ , weshalb die Reibkraft hier sehr klein wird. Die mittlere Reibkraft in Abb. 4.4a liegt bei 1,24 und ist damit deutlich geringer als die Reibkraft ohne oder mit schwacher Anregung.

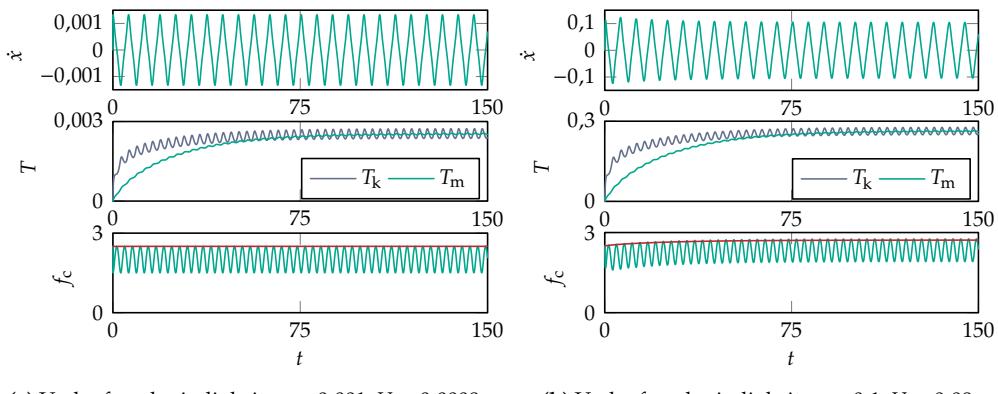
### Einfluss der Anregungsfrequenz

In Abb. 4.4b ist zum Vergleich das Systemverhalten bei  $\hat{f} = 5$  und  $\omega = 4$  dargestellt. Die Geschwindigkeitsausschläge sind bei der höheren Anregungsfrequenz etwa halb so groß, außerdem sind die Phasen mit sehr geringer Geschwindigkeit sehr kurz. Auch die Stärke der überlagerten Schwingung in den Temperaturwerten ist reduziert. Der stationäre Temperaturwert liegt bei etwa 0,75 und ist damit deutlich niedriger als der Wert bei Anregungsfrequenz  $\omega = 1$ . Die Reibkraft  $f_c$  bleibt ebenfalls bei kleineren Werten, der Mittelwert im stationären Bereich liegt bei 0,49 und damit deutlich unterhalb der Werte mit schwacher oder ohne Anregung. Im Vergleich zum Systemverhalten mit  $\omega = 1$  kann die Reibkraft durch die höhere Frequenz mit  $\omega = 4$  nochmals um 40 % reduziert werden.

Im Gegensatz zur schwachen Anregung hat die Anregungsfrequenz bei starker Anregung einen großen Einfluss auf das Systemverhalten und die interessierenden Systemgrößen. Bei höherer Frequenz sinkt sowohl die stationäre Temperatur als auch die Reibkraft in Umfangsrichtung. Zudem sind die Geschwindigkeitsausschläge geringer.

### 4.1.3 Einfluss der Umlaufgeschwindigkeit

In Abb. 4.5 sind zwei Systemlösungen bei unterschiedlichen Umlaufgeschwindigkeiten  $v_0$  und schwacher Anregung dargestellt. In Abb. 4.5b ist die Umlaufgeschwindigkeit zehn mal größer als in Abb. 4.1, qualitativ sehen die Zeitverläufe nahezu identisch aus. Die absoluten Werte der Geschwindigkeit und der Temperatur bei größerer Umlaufgeschwindigkeit sind allerdings eine Größenordnung größer. Die Geschwindigkeitsamplitude liegt im stationären Zustand bei 0,1, während der stationäre Temperaturwert etwa 0,26 beträgt. Die Reibkraft  $f_c$  ohne Anregung in rot strebt gegen 2,7, die Reibkraft mit Anregung hat den Mittelwert 2,35, was einer Reduktion von etwa 13 % entspricht.



(a) Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 = 0,001, V = 0,0008$       (b) Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 = 0,1, V = 0,08$

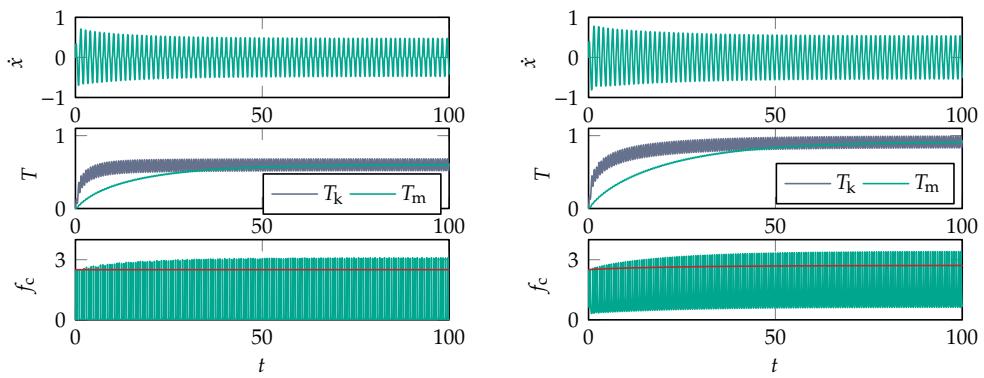
**Abbildung 4.5:** Schwache Anregung bei unterschiedlichen Werten von  $v_0$ , die übrigen Parameter entsprechen Abb. 4.1

In Abb. 4.5a beträgt die Umlaufgeschwindigkeit nur ein Zehntel im Vergleich zu Abb. 4.1. Qualitativ sind die Zeitverläufe wieder nahezu identisch. Der Unterschied liegt auch hier in den Größenordnungen: Die Geschwindigkeitsamplitude liegt bei etwa 0,001 und ist damit zehn mal kleiner als bei der größeren Umlaufgeschwindigkeit in Abb. 4.1. Auch die Temperaturwerte erreichen einen Wert, der um Faktor zehn kleiner ist. Die Reibkraft  $f_c$  ohne Anregung liegt bei etwa 2,5, mit Anregung liegt der Mittelwert bei etwa 2, die Reduktion liegt damit bei etwa 19 %.

Bei schwacher Anregung führt eine größere Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  zu einer größeren Geschwindigkeitsamplitude und höheren Temperaturwerten. Die Reibkraft in Umfangsrichtung steigt dann ebenfalls, jedoch nur gering. Es lässt sich beobachten, dass die Reibkraft bei kleineren Umfangsgeschwindigkeiten stärker reduziert wird.

Als nächstes wird der Einfluss der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  auf das Systemverhalten bei starker Anregung betrachtet. Abbildung 4.6a zeigt die Systemlösung bei starker

Anregung ( $F = 2$ ) und einer Umlaufgeschwindigkeit von  $v_0 = 0,001$ , die Lösung in Abb. 4.6b zeigt das Verhalten bei  $v_0 = 0,1$ . Die Geschwindigkeitsamplituden sind bei beiden Lösungen ähnlich groß, die größere Umlaufgeschwindigkeit führt zu etwas größeren Ausschlägen. Auch die Temperaturwerte sind bei größerem  $v_0$  höher, sie liegen in Abb. 4.6a im stationären Zustand bei etwa 0,9, bei der niedrigeren Umlaufgeschwindigkeit bei 0,6. In diesem Punkt unterscheidet sich das Systemverhalten stark von dem bei schwacher Anregung in Abb. 4.5, bei welchem sich die Amplituden und Temperaturen um eine Größenordnung unterscheiden. Die Reibkraft  $f_c$  zeigt ebenfalls eine starke Abhängigkeit von der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$ . Bei dem kleineren Wert wird die mittlere Reibkraft von 2,50 auf 0,23 reduziert, das entspricht einer Reduktion von etwa 90 %. Bei größerer Umlaufgeschwindigkeit wird die Reibkraft von 2,71 auf 1,36 reduziert, das entspricht etwa 50 %.

(a) Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 = 0,001, V = 0,0008$ (b) Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 = 0,1, V = 0,08$ 

**Abbildung 4.6:** Starke Anregung bei unterschiedlichen Werten von  $v_0$ ,  $\omega = 5$  und  $\hat{f} = 5$ ,  $F = 2$ , die übrigen Parameter entsprechen Abb. 4.1

Bei schwacher Anregung ändern sich die Geschwindigkeitsamplitude sowie die Temperaturwerte im gleichen Maßstab wie die Umlaufgeschwindigkeit. Der Einfluss auf die Reibkraft  $f_c$  und das Maß der Reibkraftreduktion ist jedoch vergleichsweise gering. Bei starker Anregung ist der Einfluss auf die Geschwindigkeit und die Temperaturwerte nicht groß, dafür beeinflusst die Umlaufgeschwindigkeit die Reibkraft in großem Maße. Für kleine Werte  $v_0$ , beziehungsweise kleine Geschwindigkeitsverhältnisse  $V$ , kann die Reibkraft um über 90 % reduziert werden. Für größer werdende Umlaufgeschwindigkeiten sinkt die Reduktion.

### 4.1.4 Einfluss viskoser Dämpfung

Für die bisher vorgestellten Ergebnisse war der Dämpfungskoeffizient  $D$  auf null gesetzt. In Abb. 4.7 ist je eine Systemlösung mit Dämpfung  $D = 0,1$  für eine starke und eine schwache Anregung dargestellt, zum Vergleich ist im Schaubild der Reibkraft  $f_c$  noch der Wert ohne Anregung in rot eingezeichnet. Die übrigen Parameter sind dabei identisch zu den bereits vorgestellten Ergebnissen aus Abb. 4.1a und 4.4a. Die Lösung aus Abb. 4.7a stimmt nicht nur qualitativ mit der Lösung ohne Dämpfung überein, sondern auch quantitativ. Die mittlere quadratische Abweichung der Geschwindigkeitswerte von Abb. 4.7a gegenüber Abb. 4.1a liegt im Bereich  $10^{-5}$ . Dieses Ergebnis unterstützt die Annahme aus Abschnitt 3.3, wonach bei schwacher Anregung die Dämpfungskraft vernachlässigt werden kann. Bei starker Anregung hat die Dämpfung zumindest einen kleinen Einfluss: Die Geschwindigkeitsamplitude ist etwa 5 % kleiner, die stationäre Temperatur liegt bei etwa 1,55 im Gegensatz zu 1,7 ohne Dämpfung. Die niedrigere Temperatur ist auf den geringeren Wärmeeintrag durch die kleineren Geschwindigkeitsamplituden zurückzuführen. Auf die mittlere Reibkraft in Umfangsrichtung hat die Dämpfung jedoch kaum Einfluss, sie wird lediglich um etwa 2 % reduziert. Insgesamt lässt sich sagen, dass die viskose Dämpfung bei der vorgestellten Modellierung nur einen untergeordneten Effekt hat und die Ergebnisse nur in kleinem Rahmen quantitativ beeinflusst.

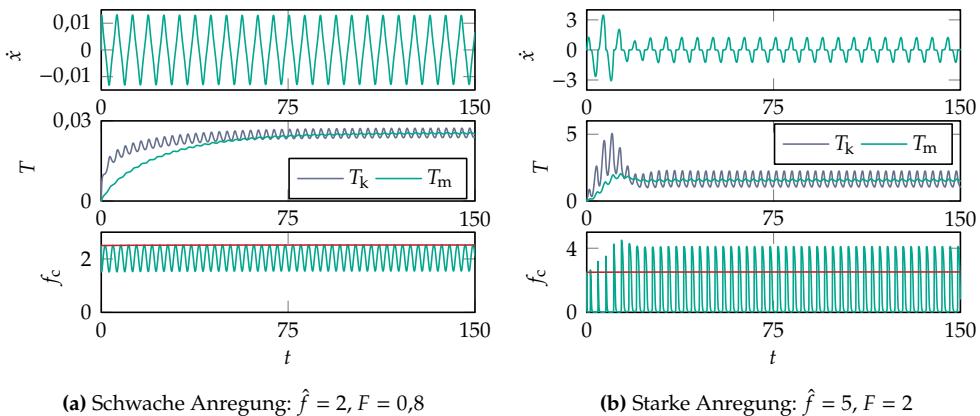
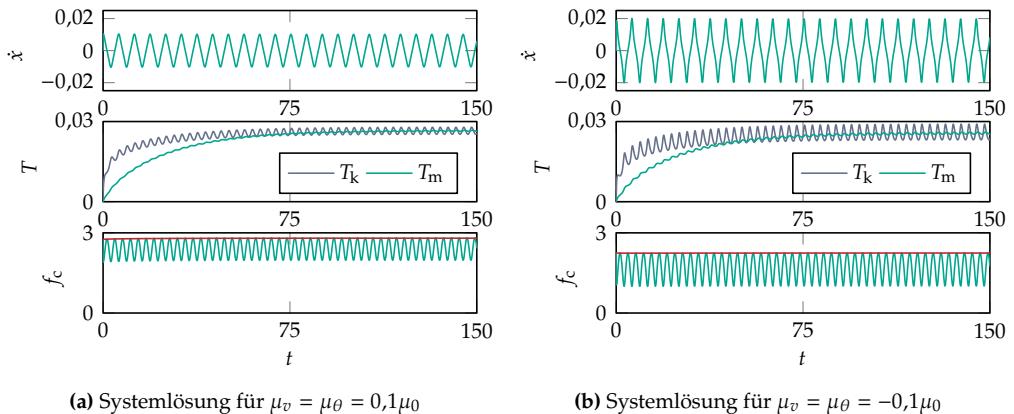


Abbildung 4.7: Einfluss viskoser Dämpfung  $D = 0,1$ , verbleibende Parameter wie in Abb. 4.1a und 4.4a

### 4.1.5 Zustandsabhängiger Reibungskoeffizient

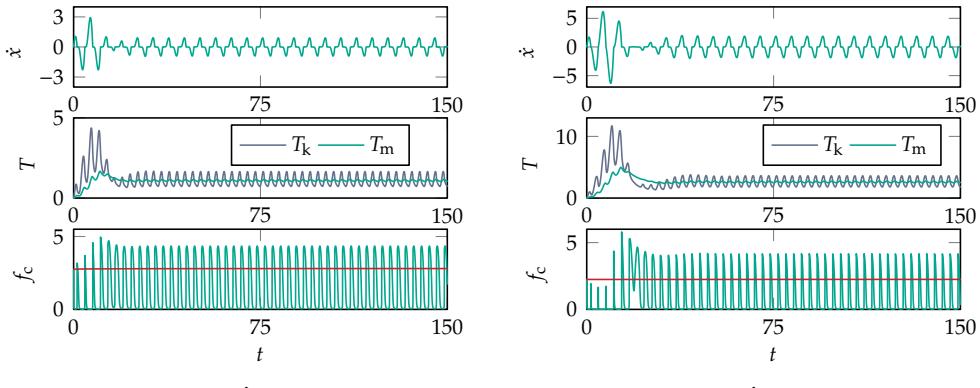
Für die vorangehend vorgestellten Ergebnisse wurde ein konstanter Reibwert  $\mu = \mu_0$  verwendet. Im Folgenden sollen nun die Auswirkungen der Temperatur- und Geschwin-

digkeitsabhängigkeit des Reibungskoeffizienten vorgestellt werden. Wie in Gl. (3.57) angegeben, wird der konstante Wert  $\mu_0$  mit einem geschwindigkeits- und einem temperaturabhängigen Anteil überlagert. Je nach Vorzeichen der Werte  $\mu_v$  und  $\mu_\theta$  hat der Reibungskoeffizient einen positiven oder negativen Gradienten.



**Abbildung 4.8:** Einfluss des zustandsabhängigen Reibwerts bei schwacher Anregung mit  $T_s = 0,2$  und  $v_s = 0,0006$

In Abb. 4.8 sind zwei Lösungen der Systemgleichungen für eine schwache Anregung dargestellt, wobei der Reibwert in Abb. 4.8a einen positiven Gradienten hat. In Abb. 4.8b nimmt der Reibwert für größere Geschwindigkeiten und Temperaturen ab, der Gradient ist also negativ. Für positive Werte von  $\mu_v$  und  $\mu_\theta$  ergeben sich kleinere Geschwindigkeitsamplituden, was durch die größere Reibkraft erklärt werden kann. Die Temperaturwerte sind ähnlich wie für den negativen Gradienten. Die Temperatur konvergiert für beide Reibwertverläufe gegen denselben stationären Wert. Einzig die Amplitude der überlagerten Schwingung ist für den negativen Gradienten größer. Dies kann durch die höhere Geschwindigkeitsamplitude und den dadurch größeren Wärmeeintrag begründet werden. Die Reibkraft in Umfangsrichtung ist für den positiven Gradienten größer als die der Systemlösungen mit oder ohne Anregung. Der Mittelwert für die Lösung mit Anregung liegt unterhalb des Werts ohne Anregung. Ein negativer Gradient führt zu kleineren Reibkräften. Außerdem sind die geschwindigkeitsbedingten Schwankungen in etwa doppelt so groß, was auf die erwähnte größere Geschwindigkeitsamplitude zurückzuführen ist. Auch für den negativen Gradienten ist der Mittelwert der Reibkraft des angeregten Systems deutlich kleiner als die Reibkraft ohne Anregung. Für beide Fälle führt die Anregung also zu einer Reduktion der Reibkraft in Umfangsrichtung, wobei der positive Gradient eine Reduktion um etwa 14 % liefert und der negative Gradient die Reibkraft um etwa 24 % reduziert.

(a) Systemlösung für  $\hat{f} = 5, \mu_v = \mu_\theta = 0,1\mu_0$ (b) Systemlösung für  $\hat{f} = 5, \mu_v = \mu_\theta = -0,1\mu_0$ Abbildung 4.9: Einfluss des zustandsabhängigen Reibwerts, mit  $T_s = 0,2$  und  $v_s = 0,0006$ 

In Abb. 4.9 sind zwei Lösungen mit starker Anregung dargestellt. Auch hier hat ein zustandsabhängiger Reibungskoeffizient nur quantitative Änderungen im Systemverhalten zur Folge. Qualitativ entsprechen die Verläufe der Lösung aus Abb. 4.4a. Ein positiver Gradient führt zu kleineren Geschwindigkeitsamplituden sowie geringeren Temperaturwerten im Vergleich zu einem negativen Gradienten. Aus Abb. 4.9a ergibt sich eine Reibkraftreduktion von 44 % für den positiven Gradienten und für den negativen Gradienten in Abb. 4.9b folgt eine Reduktion um 60 %.

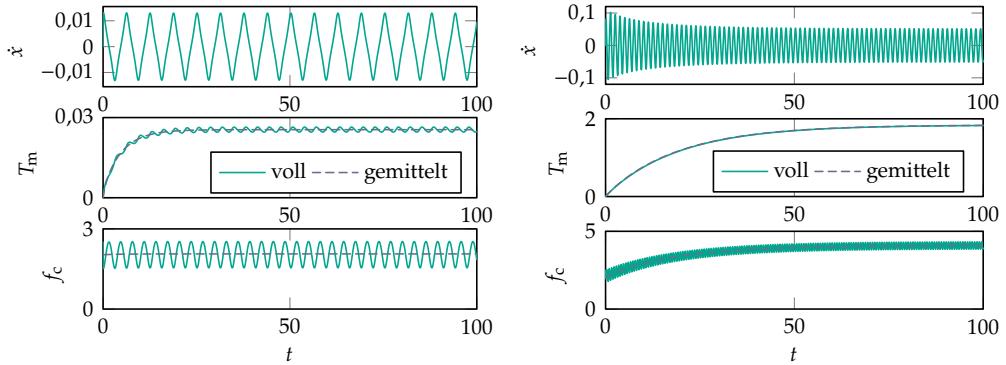
Die Betrachtung gemischter Vorzeichen für  $\mu_v$  und  $\mu_\theta$  liefert ebenfalls nur quantitative Änderungen und bringt keine zusätzliche Erkenntnis. Auf diesen Fall wird daher nicht näher eingegangen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass ein zustandsabhängiger Reibungskoeffizient mit der vorgestellten, vergleichsweise einfachen Form aus Gl. (3.57) das Systemverhalten nur geringfügig beeinflusst. Qualitativ verhält sich das System unverändert, weshalb im Folgenden nur noch Ergebnisse mit konstantem Reibungskoeffizient diskutiert werden.

## 4.2 Gemitteltes System

In diesem Unterkapitel werden die Ergebnisse aus den gemittelten Systemgleichungen aus Abschnitt 3.3 vorgestellt. Bei Betrachtung der Abbildungen des vorangehenden Unterkapitels wird die Idee der verschiedenen Zeitskalen nochmals deutlich: Zum einen ändert sich die Amplitude der Position  $x$  in Abb. 4.1a viel langsamer als die Schwingung an sich. Noch deutlicher ist der hochfrequente Anteil, der die langsam ansteigenden Temperaturwerte  $T_m$  und  $T_k$  überlagert. Durch die Mittelung des Wärmeeintrags, der diesen schnellen Anteil verursacht, entstehen die Gleichungen aus Abschnitt 3.3.

### 4.2.1 Schwache Anregung



(a) Volles und gemitteltes System für  $Bi = 5, \omega = 1, \varepsilon = 0,01, v_0 = 0,001, v_b = 1,25, f_{\text{stat}} = 2,5, F = 0,8, V = 0,008$

(b) Volles und gemitteltes System für  $Bi = 1, \omega = 5, \varepsilon = 0,05, v_0 = 0,1, v_b = 0,25, f_{\text{stat}} = 2,5, F = 0,8, V = 0,4$

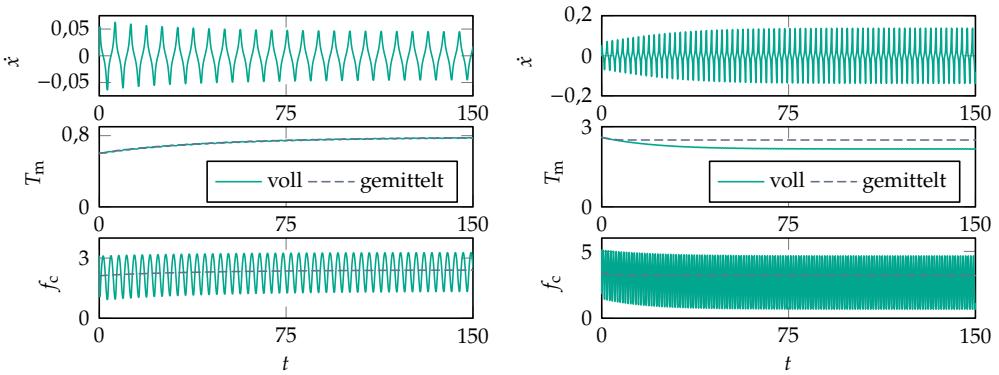
Abbildung 4.10: Vergleich der vollen und gemittelten Systemgleichungen für  $\hat{f} = 2, \gamma = 200, D = 0, \eta = 0,2, C_0 = 2,5, \hat{p} = 10, \mu_0 = 0,1$

In Abb. 4.10 sind Lösungen der vollen Systemgleichungen mit schwacher Anregung bei zwei unterschiedlichen Parametersätzen dargestellt, wobei beim Temperatur- und beim Reibkraftverlauf zusätzlich die Lösung der gemittelten Systemgleichungen (3.70) dargestellt ist. Für beide Parametersätze kann eine sehr gute Übereinstimmung des gemittelten Systems mit dem vollen System beobachtet werden. In Abb. 4.10a ist deutlich zu erkennen, dass der Temperaturverlauf und die Reibkraft des gemittelten Systems von der Lösung des vollen Systems umhüllt wird. Die gemittelten Gleichungen bilden das Systemverhalten sehr gut ab, der hochfrequente Anteil ist eliminiert und nur die Dynamik auf der langsamen Zeitskala ist sichtbar. Sowohl die Werte der Querschnittstemperatur als auch die der Reibkraft konvergieren gegen denselben stationären Wert. In Abb. 4.10b liegt die Anregungsfrequenz bei  $\omega = 5$ , im Temperatursignal ist deshalb der Unterschied zwischen vollem und gemitteltem System nicht erkennbar. Im Verlauf der Reibkraft ist jedoch gut zu erkennen, wie die Lösung des gemittelten Systems genau in der Mitte der Lösung des vollen Systems verläuft.

Auch aus numerischen Gesichtspunkten überzeugen die gemittelten Gleichungen, da die Rechenzeit nur bei etwa 5 % derer des vollen Systems liegt. Bei schwacher Anregung liefern die gemittelten Gleichungen demnach sehr gute Näherungslösungen für das Systemverhalten.

## 4.2.2 Starke Anregung

Wie bereits in Abschnitt 3.3 angemerkt, kann das Mittelungsverfahren nicht für alle Parameterwerte angewendet werden, da der Näherungsausdruck (3.65) für die Relativgeschwindigkeit nur unter bestimmten Voraussetzungen gültig ist. Für die Parameterkombination aus Abb. 4.4a kann das Verfahren nicht angewendet werden, weil die Querschnittstemperatur  $T_m$  einen stationären Wert von etwa 1,7 annimmt und damit die notwendige Bedingung  $\hat{f} < \hat{p}\mu_0 (C_0 + T_m)$  verletzt wird. Zwar kann die Anfangstemperatur  $T_0$  so gewählt werden, dass bei  $t = 0$  die Bedingung  $\hat{f} < \hat{p}\mu_0 (C_0 + T_0)$  erfüllt ist, doch die Systemdynamik führt dann zu einem Absinken der Querschnittstemperatur, wodurch die Bedingung verletzt wird. In Gl. (3.70) führt das dazu, dass das Argument im elliptischen Integral  $K$  größer als eins ist, was außerhalb des reellen Definitionsbereichs liegt. In der numerischen Berechnung wird an dieser Stelle abgebrochen oder komplexwertig weitergerechnet, die Lösungen verlieren damit jedoch ihre Sinnhaftigkeit.



(a) Gute Übereinstimmung bei starker Anregung,  $\hat{f} = 3, \omega = 1, T_0 = 0,6, F = 1,2, V = 0,16$

(b) Große Abweichung bei starker Anregung,  $\hat{f} = 5, \omega = 3, T_0 = 2,6, F = 2, V = 0,16$

Abbildung 4.11: Volles und gemitteltes System bei starker Anregung:  $D = 0, v_0 = 0,02, \gamma = 400, \varepsilon = 0,01, Bi = 1, \eta = 0,2, C_0 = 2,5, \hat{p} = 10, \mu_0 = 0,1, v_b = 0,125, f_{\text{stat}} = 2,5$

In Abb. 4.11 sind Systemlösungen bei starker Anregung dargestellt, wobei bei der Querschnittstemperatur  $T_m$  und der Reibkraft  $f_c$  in gestrichelter Linie auch die Lösungen der zugehörigen gemittelten Gleichungen eingetragen sind. In Abb. 4.11a stimmen die Lösungen sehr gut überein, die Kurven der Querschnittstemperatur liegen quasi aufeinander und auch der Mittelwert der Reibkraft wird sehr gut getroffen. Obwohl die Anregung stark ist ( $F = 1,2$ ), ist die Näherung der mittleren Relativgeschwindigkeit gültig und das gemittelte System bildet das volle System gut ab. In Abb. 4.11b wird das System stärker und bei höherer Frequenz angeregt. Hier liefert das gemittelte System eine schlechte Näherung. Zwar bleibt die Querschnittstemperatur in der Lösung des

gemittelten Systems über dem Wert 2,5 und erfüllt damit die notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Näherung. Doch das volle System zeigt ein abweichendes Verhalten, die Querschnittstemperatur sinkt auf kleinere Werte, genauso liegt die Reibkraft bei kleineren Werten. Bei der Betrachtung weiterer numerischer Lösungen des vollen und gemittelten Systems bei starker Anregung fällt auf, dass die Mittelung den Wärmeeintrag tendenziell überschätzt, was zu einer höheren Querschnittstemperatur und folglich höheren Reibkraft führen kann. Das qualitative Verhalten stimmt dabei gut überein. Für welche Parameterkombination das gemittelte System auch bei starker Anregung das Verhalten des vollen Systems gut abbildet, kann an dieser Stelle nicht geklärt werden. Es scheint jedoch so, dass sich die Qualität der Näherung bei größerem Geschwindigkeitsverhältnis  $V$  verbessert. In vielen Fällen wird jedoch die notwendige Bedingung  $\hat{f} < \hat{p}\mu_0 (C_0 + T_m)$  verletzt, sodass das numerische Lösungsverfahren abbricht oder komplexwertige, unbrauchbare Ergebnisse liefert.

## 4.3 Stationärer Zustand

In diesem Kapitel werden die Systemgrößen  $T_m$  und  $f_c$  im stationären Zustand betrachtet. Weil die gemittelten Gleichungen aus Abschnitt 4.2.2 das Systemverhalten nur für eine schwache Anregung zuverlässig abbilden, werden die Gleichungen des vollen Systems aus Abschnitt 3.2 numerisch gelöst und die Mittelwerte der Querschnittstemperatur und der Reibkraft im stationären Zustand bestimmt. Da dieses Vorgehen mit einem hohen Rechenaufwand einhergeht, wird ein konstanter Reibungskoeffizient  $\mu = \mu_0$  betrachtet, außerdem wird die Dämpfung zu null gesetzt. Damit wird der Parameterraum nicht allzu groß und eine überschaubare Anzahl von  $N_{ew} = 20$  Eigenwerten genügt, um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten.

In Abb. 4.12 sind die Querschnittstemperatur  $T_m$  sowie die Reibkraft in Umfangsrichtung  $f_c$  bei drei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen über der Anregungsamplitude  $\hat{f}$  aufgetragen. In Abb. 4.12b ist zum Vergleich in hellem Grün zusätzlich die Reibkraft  $f_c^0$  dargestellt, die sich ohne hochfrequente Anregung ergibt. Dabei ist  $f_{stat} = 2,5$  und das Geschwindigkeitsverhältnis liegt bei  $V = 0,008$ . In beiden Abbildungen ist deutlich zu erkennen, dass die Anregungsfrequenz bei schwacher Anregung, also  $\hat{f} < 2,5$ , keinen Einfluss auf die stationären Größen hat, die Kurven liegen genau aufeinander. Dieses Verhalten deckt sich mit den Aussagen aus Abschnitt 3.3 zu den gemittelten Gleichungen. Sobald die Anregungsamplitude größer als die stationäre Reibkraft  $f_{stat} = 2,5$  ist, unterscheiden sich die Verläufe deutlich. Für eine schwache Anregung ist die Querschnittstemperatur  $T_m$  klein und steigt nur minimal für eine größer werdende Anregungsamplitude. Sobald die stationäre Reibkraft  $f_{stat}$  überschritten ist, steigt auch die Querschnittstemperatur. Für Anregungsfrequenzen in der Nähe der Resonanz des linearen Oszillators steigt die Temperatur stark an, für

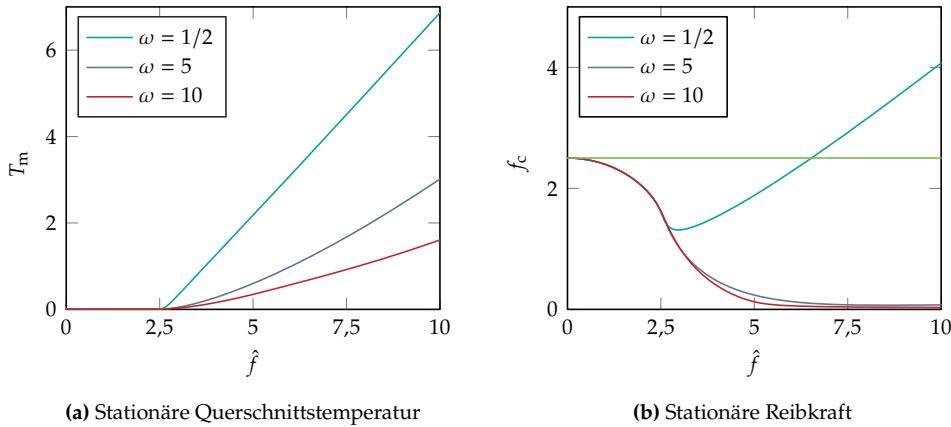


Abbildung 4.12: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungsamplitude  $\hat{f}$  bei unterschiedlichen Frequenzen  $\omega$  für  $f_{\text{stat}} = 2,5$  und  $V = 0,0008$

größere Anregungsfrequenzen deutlich langsamer. Bei der Reibkraft  $f_c$  ist der Einfluss der Anregungsfrequenz noch größer. Im Bereich der schwachen Anregung sinkt die Reibkraft für alle Anregungsfrequenzen ab. Für  $\omega = 1/2$  steigt die Reibkraft für  $\hat{f} > f_{\text{stat}}$  stark an, ab  $\hat{f} \approx 2,5f_{\text{stat}}$  ist sie sogar größer als die Reibkraft  $f_c^0$ , die sich ohne Anregung einstellt. Die hochfrequente Anregung hat in diesem Fall einen negativen Einfluss auf das Systemverhalten. Für größere Anregungsfrequenzen hingegen sinkt die Reibkraft weiterhin ab und strebt gegen den Wert  $f_c \approx 0,03$ , das entspricht einer Reduktion von fast 99 % gegenüber der Reibkraft ohne Anregung.

In Abb. 4.13 sind die stationären Werte der Querschnittstemperatur sowie der Reibkraft aufgetragen. Die Umlaufgeschwindigkeit  $v_0 = 0,1$  ist hier 100 mal größer als in Abb. 4.12, sodass das Geschwindigkeitsverhältnis  $V = 0,08$  beträgt. Im Bereich schwacher Anregung ist die stationäre Temperatur größer als in Abb. 4.12a, was auf die größere Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  zurückzuführen ist, die in diesem Bereich maßgeblich die stationäre Temperatur beeinflusst. Für eine starke Anregung zeigen die Werte in Abb. 4.13a und Abb. 4.12a ähnliches Verhalten, wobei die Temperaturwerte für  $\omega = 5$  und  $\omega = 10$  in Abb. 4.13a etwas höher sind. Die Reibkraft  $f_c$  zeigt für eine schwache Anregung das gleiche abfallende Verhalten wie bei  $V = 0,0008$ . Für  $\hat{f} > f_{\text{stat}}$  steigt die Kurve von  $\omega = 1/2$  wieder an, während die Kurven der größeren Anregungsfrequenzen weiterhin fallen. Dabei erreicht die Kurve für  $\omega = 5$  ungefähr bei  $\hat{f} \approx 2,5f_{\text{stat}}$  mit  $f_c = 1,2$  ihr Minimum, was einem Vielfachen des minimalen Werts in Abb. 4.12b entspricht. Außerdem fällt auf, dass die Kurve ab  $\hat{f} \approx 3f_{\text{stat}}$  wieder leicht ansteigt. Die Reibkraft für  $\omega = 10$  sinkt permanent leicht ab, ist aber ebenfalls um ein

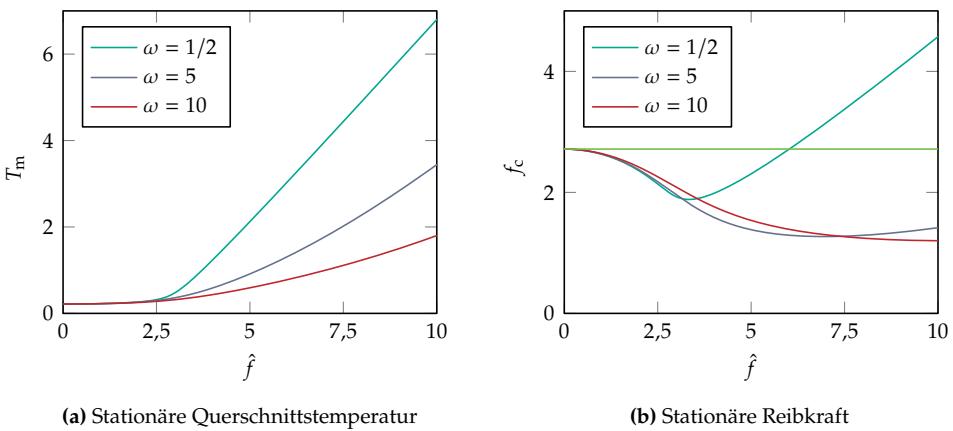


Abbildung 4.13: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungskraft  $\hat{f}$  bei unterschiedlichen Frequenzen  $\omega$  für  $f_{\text{stat}} = 2,5$  und  $V = 0,08$

Vielfaches größer als jene bei  $V = 0,0008$ . Eine größere Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  führt zu leicht höheren Querschnittstemperaturen, zudem ist der Anteil der Reibkraft in Umfangsrichtung größer. Diese Kombination hat dann eine höhere stationäre Reibkraft zur Folge.

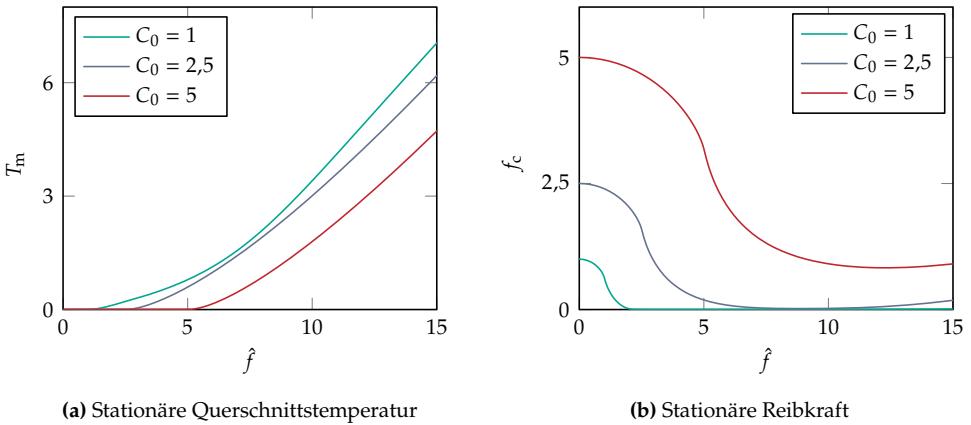


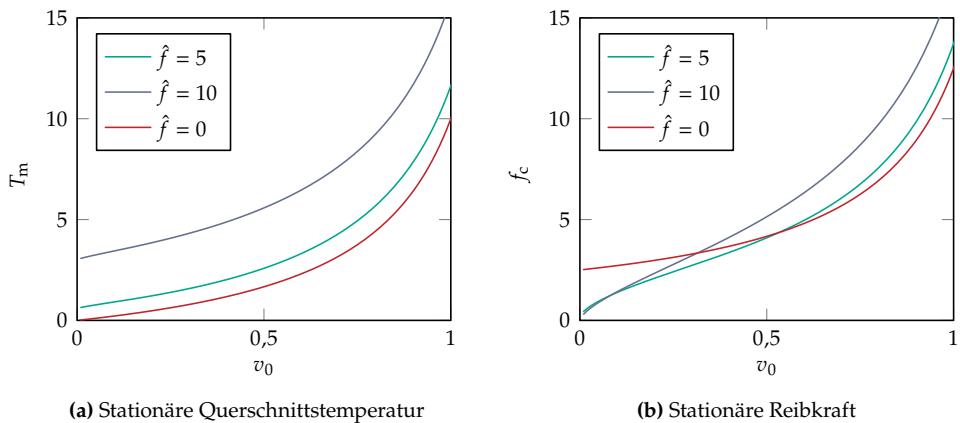
Abbildung 4.14: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungskraft  $\hat{f}$  und unterschiedlichem Übermaß  $C_0$ ,  $\omega = 5$ ,  $v_0 = 0,0001$  und  $v_b = 1,25$

In Abb. 4.14 sind die Querschnittstemperatur und die Reibkraft im stationären Zustand bei verschiedenen Werten der Übermaßgröße  $C_0$  über der Anregungskraft aufge-

tragen. Größere Werte von  $C_0$  entsprechen einem größeren radialen Übermaß und damit einer stärkeren statischen Kontaktkraft. Die statische Reibkraft  $f_{\text{stat}}$  variiert hier und beträgt 1, 2,5 und 5. Liegt die Anregungsamplitude  $\hat{f}$  unterhalb der jeweiligen statischen Reibkraft, steigt die Temperatur nur sehr langsam an. Hierbei hat ein höheres Übermaß auch eine höhere Temperatur zur Folge, was in der Abbildung allerdings aufgrund der Skalierung nicht zu erkennen ist. Übersteigt die Anregungsamplitude die statische Reibkraft, steigt die Temperatur stark an. Für ein kleineres Übermaß übersteigt die Anregungsamplitude die statische Reibkraft bereits bei einem kleineren Wert, weshalb die Querschnittstemperatur für  $C_0 = 1$  ab  $\hat{f} = 1$  die größten Werte annimmt. Die Kurven von  $C_0 = 2,5$  und  $C_0 = 5$  steigen erst bei größeren Anregungsamplituden stark an und liegen dann immer unterhalb der Kurve für  $C_0 = 1$ . Dieses Ergebnis scheint zunächst verwunderlich, denn eine größere Presspassung liefert einen größeren Kontaktdruck und damit bei gleicher Relativgeschwindigkeit eine größere Reibleistung. Für kleine Anregungsamplituden unterhalb der statischen Reibkraft trifft diese Überlegung auch zu, da die Geschwindigkeitsamplituden sehr klein sind. Sobald die Anregung jedoch stark ist, steigt die Geschwindigkeitsamplitude an und bestimmt maßgeblich die Reibleistung.

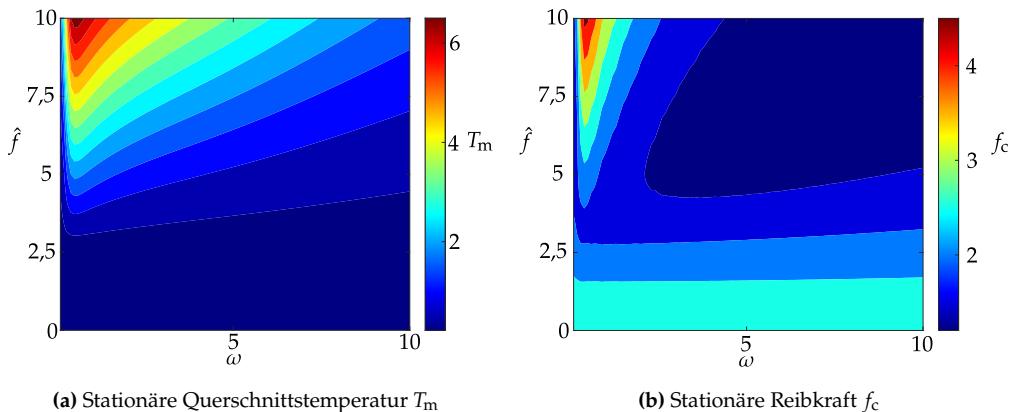
Die Kurven der Reibkraft in Umfangsrichtung starten bei  $\hat{f} = 0$  leicht oberhalb der jeweiligen statischen Reibkraft, ein größeres Übermaß führt dabei auch zu einer größeren Reibkraft. Für eine steigende Anregungsamplitude sinkt die Reibkraft für alle  $C_0$ , wobei für die vorgestellte Parameterkombination die Reibkraft für  $C_0 = 1$  und  $C_0 = 2,5$  um 99 % reduziert werden kann, bevor die Kurven wieder leicht ansteigen. Das Minimum für  $C_0 = 5$  liegt bei  $f_c = 0,83$ , was einer Reduktion von 83 % entspricht. Ein größeres Übermaß führt also immer zu größeren Reibkräften in Umfangsrichtung. Für eine schwache Anregung steigt die Querschnittstemperatur mit dem Übermaß, bei starker Anregung sind die Temperaturwerte jedoch kleiner.

In Abb. 4.15 sind der Verlauf der Querschnittstemperatur  $T_m$  und der Reibkraft  $f_c$  über der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  aufgetragen, die konstanten Parameter sind der Bildunterschrift zu entnehmen. Zum Vergleich sind jeweils in roter Farbe auch die Größen ohne Anregung  $T_m^0$  und  $f_c^0$  dargestellt. Die Temperatur steigt für kleine  $v_0$  näherungsweise linear an, ab etwa 0,5 ist die Zunahme überproportional und läuft für  $v_0 \rightarrow v_b$  gegen unendlich. Wenn die Umlaufgeschwindigkeit größer ist als die Grenzgeschwindigkeit, existiert kein stationärer Zustand. Die drei Verläufe sind qualitativ sehr ähnlich, wobei eine stärkere Anregung auch zu größeren Temperaturwerten führt. Der Wert  $T_m^0$  ohne Anregung bildet dabei die untere Grenze. Die Reibkraft in Umfangsrichtung  $f_c$  nimmt mit wachsendem  $v_0$  ebenfalls zu. Die Reibkraft  $f_c^0$  ohne Anregung strebt für kleine Umlaufgeschwindigkeiten  $v_0$  gegen die statische Reibkraft  $f_{\text{stat}}$  und liegt damit über den Kurven mit Anregung. Die Kurven mit Anregung steigen



**Abbildung 4.15:** Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  bei starker Anregung,  $\omega = 5$ ,  $f_{\text{stat}} = 2,5$  und  $v_b = 1,25$

schneller an, bei  $v_0 = 0,31$  beziehungsweise  $v_0 = 0,53$  gibt es einen Schnittpunkt mit der Kurve ohne Anregung. Unterhalb dieses Geschwindigkeitswerts führt die Anregung folglich zu einer Reduktion der Reibkraft. Oberhalb hat die Anregung einen negativen Einfluss und die Reibkraft wird aufgrund der hochfrequenten Anregung sogar vergrößert.



**Abbildung 4.16:** Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit von  $\omega$  und  $\hat{f}$  für  $V = 0,08$  und  $f_{\text{stat}} = 2,5$

In Abb. 4.16 sind die Querschnittstemperatur  $T_m$  und die Reibkraft  $f_c$  über den Anregungsgrößen  $\omega$  und  $\hat{f}$  dargestellt. Die Diagramme aus Abb. 4.13 sind Schnitte bei verschiedenen Anregungsfrequenzen  $\omega$  aus Abb. 4.16. In den beiden Abbildungen ist

zu erkennen, dass die Anregungsfrequenz für eine schwache Anregung  $\hat{f} < f_{\text{stat}} = 2,5$  keinen Einfluss auf die Systemgrößen hat. Die Werte sind unabhängig von  $\omega$  und ändern sich in horizontaler Richtung nicht. Die Querschnittstemperatur steigt für größere Anregungsamplituden an, wobei der Anstieg bei Anregungsfrequenzen im Bereich  $\omega \approx 1/2$  maximal ist. Für kleinere Anregungsfrequenzen sinkt die Querschnittstemperatur schnell ab, für größere Frequenzen sinkt der Wert langsam.

Die Reibkraft weist ein komplexeres Verhalten auf: Bis etwa  $\hat{f} \approx 1,5 f_{\text{stat}}$  sinkt die Reibkraft für alle Anregungsfrequenzen ab, im Bereich kleiner Frequenzen ( $\omega = 1/2$ ) steigt der Wert  $f_c$  danach wieder an und übertrifft sogar den Wert  $f_c^0$  ohne Anregung. In diesem Bereich führt die hochfrequente Anregung aufgrund der thermomechanischen Kopplung also zu einer Erhöhung der Reibkraft. Für größere Anregungsfrequenzen ist die stationäre Reibkraft deutlich kleiner, sie kann bei  $\hat{f} = 10$  um mehr als 50 % reduziert werden. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Querschnittstemperatur  $T_m$  mit der Anregungsamplitude zwar zunimmt, die Reibkraft  $f_c$  bei großen Anregungsfrequenzen gleichzeitig jedoch abnimmt.

Aus den beiden Abbildungen wird deutlich, dass die Gleichungen des gemittelten Systems nur einen kleinen Teil des Systemverhaltens zuverlässig abbilden. Durch die Lösung des vollen Systems wird auch das Verhalten bei starker Anregung deutlich, das im Sinne der Reibkraftreduktion mehr Potential enthält.

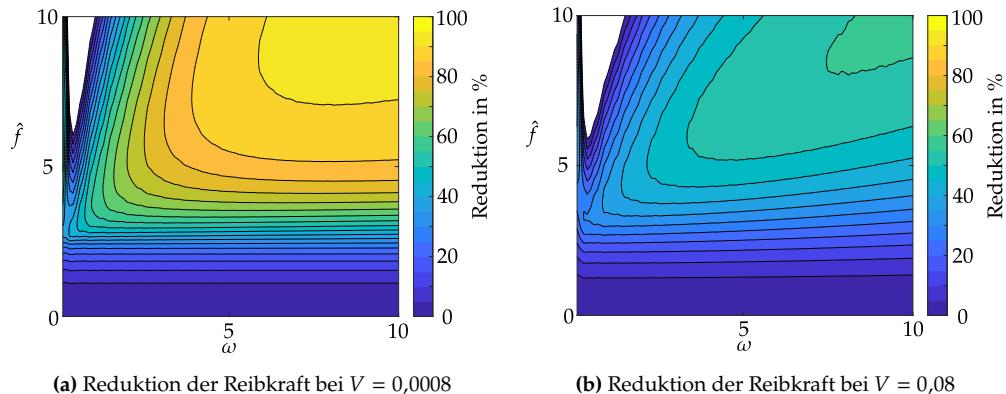


Abbildung 4.17: Prozentuale Reduktion der Reibkraft bei  $f_{\text{stat}} = 2,5$

In den beiden Diagrammen in Abb. 4.17 ist jeweils die prozentuale Reduktion der Reibkraft in Umfangsrichtung bei unterschiedlichen Geschwindigkeitsverhältnissen  $V$  farblich dargestellt. Die Reibkraft in Umfangsrichtung wird dabei jeweils auf den Wert  $f_c^0$  ohne Anregung bezogen. In den weißen Flächen ist der jeweilige Wert von  $f_c$  größer als  $f_c^0$ , die hochfrequente Anregung führt hier zu einer Zunahme der Reibkraft. Flächen in dunklem Blau führen zu einer geringen Reduktion, in den Gebieten mit hellem Gelb

wird die Reibkraft durch die hochfrequente Anregung stark verringert. Für  $V = 0,08$  in Abb. 4.17b kann für  $\omega > 5$  und  $\hat{f} > 2,5f_{\text{stat}}$  eine Reduktion von über 50 % erreicht werden. Für noch größere Anregungsfrequenzen und -amplituden ist die Reduktion sogar noch größer. Für ein kleineres Geschwindigkeitsverhältnis von  $V = 0,0008$  verhält sich das System qualitativ gleich, wobei die Reibkraft viel stärker reduziert wird. Für eine große Anregungsfrequenz und -amplitude kann die Reibkraft um über 95 % reduziert werden.

## 4.4 Schlussfolgerungen

Nachdem die in Kapitel 3 hergeleiteten Gleichungen numerisch gelöst und der Einfluss verschiedener Systemparameter herausgearbeitet wurde, werden hier die wichtigsten Erkenntnisse nochmals zusammengefasst.

Insgesamt haben die viskose Dämpfung sowie die Zustandsabhängigkeit des Reibungskoeffizienten nur geringen Einfluss auf das Systemverhalten. Zwar ändern sie die Systemgrößen quantitativ, qualitativ verhält sich das System jedoch unverändert. Insbesondere die Reduktion der Reibkraft durch die hochfrequente Anregung weist nur kleine Änderungen auf.

Den größten Einfluss auf die interessierenden Systemgrößen Querschnittstemperatur und Reibkraft haben das Kraftverhältnis  $F$  als Quotient aus Anregungssplitude  $\hat{f}$  und statischer Reibkraft  $f_{\text{stat}}$  sowie das Geschwindigkeitsverhältnis  $V$ , das die Umfangsgeschwindigkeit  $v_0$  auf die Grenzgeschwindigkeit  $v_b$  bezieht. Für eine schwache Anregung ( $F < 1$ ) lässt sich das gesamte Systemverhalten durch die Größen  $V$  und  $F$  durch die gemittelten Gleichungen aus Abschnitt 3.4.2 ausdrücken. Die Anregungsfrequenz  $\omega$  hat hier keinen Einfluss. Die Querschnittstemperatur steigt für größere  $F$  und  $V$ , die Reibkraft sinkt zunächst bis  $F = 1$  und steigt ebenfalls für größere  $V$ . Für eine starke Anregung ( $F \geq 1$ ) zeigt sich neben der Abhängigkeit von  $F$  und  $V$  auch ein starker Einfluss der Anregungsfrequenz. Im Bereich von  $\omega = 1/2$  steigt die Querschnittstemperatur sowie die Reibkraft für  $\hat{f} > f_{\text{stat}}$  stark an und die hochfrequente Anregung führt sogar zu einer Steigerung der Reibkraft. Für größere Anregungsfrequenzen sinken die Werte der Querschnittstemperatur und der Reibkraft ab. In diesem Bereich erreicht die Reibkraft ihr Minimum in Abhängigkeit der Anregungsparameter und für kleine Umfangsgeschwindigkeiten kann die Reibkraft um über 90 % reduziert werden. Für größer werdende Umfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  steigt die Querschnittstemperatur sowie die Reibkraft. Während die Reibkraft ohne Anregung langsam mit  $v_0$  ansteigt, wachsen die Werte mit Anregung viel schneller und es kann ebenfalls zu einer Überhöhung der Reibkraft kommen.

Werden die Erkenntnisse der in dieser Arbeit vorgestellten und untersuchten Modellierung kombiniert, dann liegen günstige Betriebspunkte des Gleitlagers bei einem großen Kraftverhältnis  $F \gg 1$ , hohen Anregungsfrequenzen  $\omega \gg 1$  sowie bei einem kleinen

Geschwindigkeitsverhältnis  $V \ll 1$ . Trotz der starken Kopplung der Wärmeentwicklung mit den Bewegungsgrößen und der Reibung lässt sich in diesem Bereich die mittlere Reibkraft in Umfangsrichtung um über 99 % reduzieren.

# 5 Experimentelle Ergebnisse

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluss der thermomechanischen Kopplung in trockenen Gleitlagern mit hochfrequenter Anregung auch experimentell untersucht. Im Zuge der studentischen Abschlussarbeit [140] wurde dafür ein Prüfstandskonzept erarbeitet und umgesetzt. Da die erste Version des Aufbaus deutliche Schwächen aufwies und die gewünschten Effekte nicht beobachtet werden konnten, wurde eine zweite Version mit überarbeiteter Konstruktion, aber gleicher Funktionsweise entworfen. Der Aufbau, das Funktionsprinzip sowie die Versuchsergebnisse dieses Prüfstands werden in diesem Kapitel ausführlich beschrieben. Abschließend folgt eine Einordnung und Diskussion der theoretischen und experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit.

## 5.1 Prüfstandsaufbau

Um den Einfluss der Wärmeentwicklung in Gleitlagern bei hochfrequenter Anregung experimentell zu untersuchen, wird ein Drehgelenk mit trockenem Gleitlager herangezogen, wie es in Abb. 3.1 als Prinzipskizze zu sehen ist. Die Lagereinheit mit der Gleitbuchse wird mithilfe eines piezoelektrischen Aktors zu hochfrequenten Schwingungen in axialer Richtung angeregt. Diese Bewegung wird mithilfe eines Beschleunigungssensors aufgenommen. Der Antrieb der Welle erfolgt durch einen Elektromotor, dessen anliegendes Moment mithilfe eines Drehmomentsensors gemessen wird. Zur Bestimmung der Temperatur wird ein Pyrometer verwendet, eine Ausführung eines kontaktlos messenden Thermometers, das die Temperatur an der Kontaktfläche zwischen Gleithülse und Welle misst.

In Abb. 5.1 sind drei Fotografien des Aufbaus zu sehen. Der Rahmen der Konstruktion besteht aus einer Bodenplatte aus Aluminium, die auf einem Schwingungstisch verschraubt werden kann, und einer Deckenplatte, die über vier zylindrische Stangen mit der Bodenplatte verbunden ist. Die Antriebs- und obere Lagereinheit der Welle wird von oben auf die Deckenplatte geschraubt. In der oberen Lagereinheit befindet

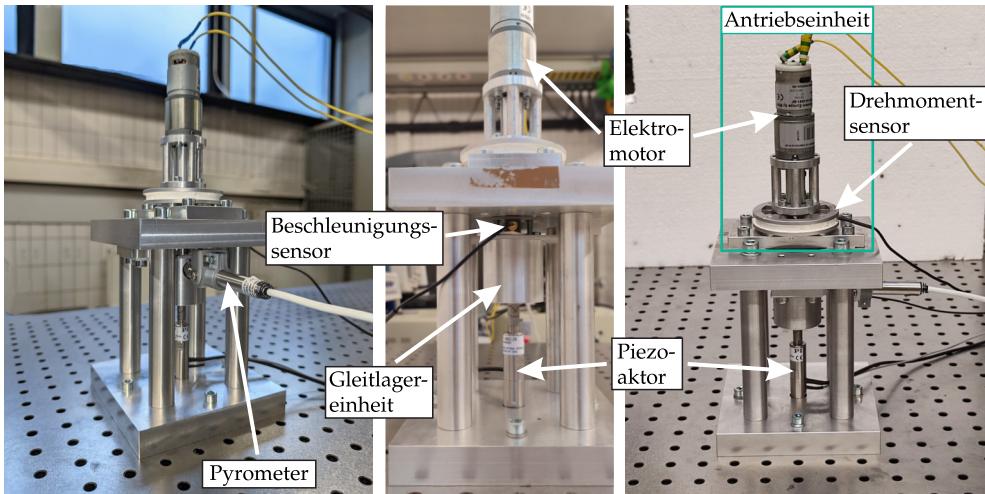


Abbildung 5.1: Fotografien des Prüfstandsaufbaus

sich ein Kugellager, welches als Festlager für die Arbeitswelle dient. Auf der Einheit ist zudem der Drehmomentsensor verschraubt, auf dem der Elektromotor über ein Verbindungsteil befestigt ist. Die Abtriebswelle des Motors ist über eine Kupplung mit der Arbeitswelle verbunden.

Weiter unten ist die Arbeitswelle in einem trockenen Gleitlager lose gelagert. Diese Gleitlagereinheit besteht aus einem zylindrischen Aluminiumteil mit axialer Bohrung und einer Gleitbuchse, die in diese Bohrung eingepresst ist. Die Gleithülse besteht aus Kunststoff und ihr Gleitreibwert gegen Stahl liegt laut Herstellerangabe im Bereich 0,06 – 0,18. Am unteren Ende des Aluminiumteils ist eine weitere axiale Bohrung eingebracht, in der die Aufnahme des Aktors eingeschraubt werden kann. Die Gleitlagereinheit ist über eine Blattfeder von unten an der Deckenplatte befestigt. Die Blattfeder erlaubt eine Bewegung in axialer Richtung, nimmt dafür aber Kräfte in radialer Richtung sowie Momente um die Hochachse auf. Auf der Lagereinheit ist außerdem ein Beschleunigungssensor befestigt (siehe Abb. 5.1 in der Mitte), der die Bewegung in axialer Richtung misst. Der Lagersitz samt Gleithülse ist in radialer Richtung durchbohrt, um die Temperatur auf der Kontaktfläche zu messen. Die Bohrung läuft in Richtung Welle konisch zu, wobei das Loch in der Gleithülse lediglich einen Durchmesser von etwa 2 mm hat. Wie in Abb. 5.1 links zu erkennen ist, steckt der Messkopf des Pyrometers in dieser seitlichen Bohrung. Das Pyrometer sendet einen Infrarotstrahl aus, der durch eine Linse gebündelt und durch das Loch in der Gleithülse auf der Wellenoberfläche auf etwa 1 mm fokussiert wird.

Der piezoelektrische Aktor ist unten mit der Bodenplatte und oben mit der Unterseite der Lagereinheit verschraubt. Da der Aktor nicht auf Biegung oder Scherung belastet

werden darf, ist die Konstruktion so realisiert, dass zuerst der Rahmen mit Piezoaktor und Gleitlagereinheit spannungsfrei montiert werden kann, bevor die obere Einheit mitamt Welle angebracht wird. Indem die Antriebseinheit leicht außermittig verschraubt wird, kann dadurch die radiale Last im Gleitlager verändert werden.

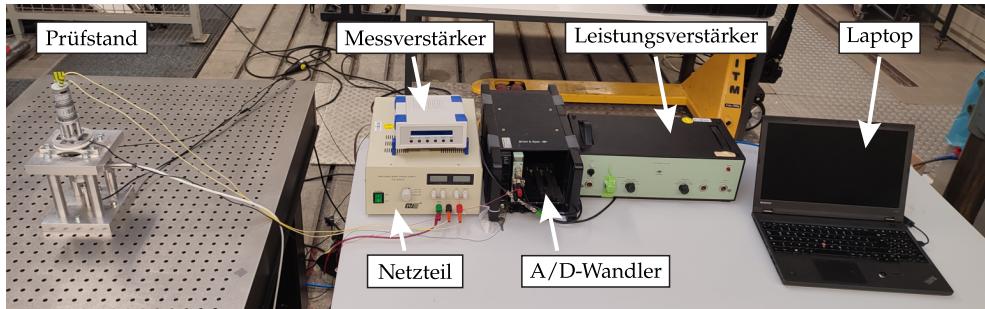


Abbildung 5.2: Fotografie des Messaufbaus

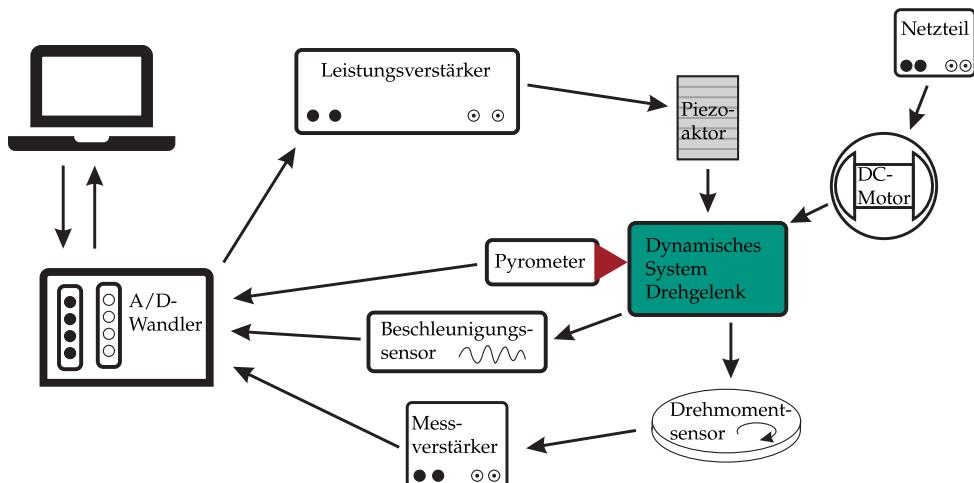


Abbildung 5.3: Informationsfluss

In Abb. 5.2 ist eine Fotografie des Prüfstands mitsamt zugehöriger Elektronik zu sehen. Der Informationsfluss zur Ansteuerung und Messgrößenverarbeitung ist in Abb. 5.3 dargestellt.

Zur Erzeugung des Anregungssignals für den Piezoaktor sowie für die Verarbeitung der gemessenen Daten wird ein Rechner mit entsprechender Software verwendet. Dieser ist mit einem Analog-Digital-Wandler (A/D-Wandler) verbunden, der den analogen Ausgang für den Aktor erzeugt und die analogen Eingänge der Sensoren bei vorgeschriebener Abtastfrequenz einliest und damit digitalisiert. Am Leistungsverstärker kann

die Spannung für den Piezoaktor eingestellt werden. Hierbei ist zu beachten, dass der Piezoaktor trotz mechanischer Vorspannung nur bis zu einem bestimmten Grenzwert mit einer negativen elektrischen Spannung beaufschlagt werden darf. Die Drehzahl des Gleichstrommotors lässt sich über die angelegte Spannung steuern, die am Netzgerät eingestellt werden kann. Das Pyrometer muss vor Inbetriebnahme des Prüfstands kalibriert werden. Da die Temperatur einer metallisch glänzenden Oberfläche nur unge nau mithilfe eines Pyrometers gemessen werden kann, ist die Welle schwarz lackiert. Dadurch wird der Reflexionsgrad reduziert und der Emissionsgrad, welcher elementar für die Messung der Temperatur ist, erhöht [122]. Das analoge Temperatursignal wird vom A/D-Wandler eingelesen und im Rechner gespeichert. Der Drehmomentsensor nutzt Dehnme ssstreifen, um das anliegende Moment zwischen An- und Abtriebsseite zu bestimmen. Der Sensor ist zwischen dem Elektromotor und einer Aluminiumplatte verschraubt und misst damit das am Motor anliegende Reaktionsmoment. Die Aluminiumplatte wiederum wird auf die Deckenplatte geschraubt. Um das Reibmoment in der Lagerbuchse zu bestimmen, müssen noch Trägheitseffekte der Welle beim Anfahren sowie die Widerstände im oberen Kugellager und im Elektromotor herausgerechnet werden. Die für die Funktion der Dehnme ssstreifen notwendige Versorgungsspannung sowie die Brückenschaltung zur Auswertung der Widerstandsänderung wird im Messverstärker realisiert. Dieser gibt ein analoges Signal aus, das wiederum vom A/D-Wandler eingelesen und abgetastet wird. Der Beschleunigungssensor sitzt auf der Gleitlagereinheit und arbeitet mit einer seismischen Masse und dem piezoelektrischen Effekt. Sein analoges Ausgangssignal wird direkt vom A/D-Wandler aufgenommen und umgerechnet.

Die Abtastraten im A/D-Wandler werden dabei je nach Sensor gemäß dem Abtasttheorem so gewählt, dass sie mindestens doppelt so groß wie die Messraten des jeweiligen Sensors sind. Die zeit- und wertdiskreten Signale werden dann im Rechner abgespeichert. Bevor die Messungen ausgewertet werden können, müssen die Daten noch gefiltert werden. Das Temperatur- und das Drehmomentsignal werden mit einem Tiefpass gefiltert, um hochfrequentes Rauschen zu eliminieren. Das Beschleunigungssignal wird mit einem Hochpass gefiltert, damit niedrfrequente Anteile wegfallen. Diese tiefen Frequenzen würden bei der Integration auf die Geschwindigkeit oder die Position zu einer Drift führen.

Wie in vielen Veröffentlichungen zur experimentellen Untersuchung von Reibung kommt es auch in den nachfolgend vorgestellten Versuchen zu einer unvermeidbaren Streuung in den Messungen. Grund hierfür können unbekannte Faktoren wie Oberflächenänderung, Verschleiß, zeitabhängige Prozesse oder Umgebungsbedingungen wie die Luftfeuchtigkeit sein. Die präsentierten Ergebnisse sind daher unter der Berücksichtigung der begrenzten Reproduzierbarkeit zu verstehen.

## 5.2 Vorbereitende Untersuchungen

Bevor umfangreiche Versuchsreihen gefahren werden können, muss der Aufbau nach Inbetriebnahme hinsichtlich seines dynamischen Verhaltens und möglicher Betriebspunkte untersucht werden. Hierfür werden bestimmte Baugruppen entfernt und Messungen durchgeführt. Ziel ist es, den Einfluss einzelner Elemente auf das dynamische und tribologische Verhalten zu untersuchen, auftretende Effekte isoliert zu betrachten und damit beim vollen Aufbau belastbare Aussagen formulieren zu können.

Dafür wird zuerst der Drehwiderstand im Elektromotor sowie im Kugellager bestimmt. Zudem wird bei ausgebautem Elektromotor und Welle das Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes ohne Reibkontakt untersucht. Anschließend wird der Einfluss des Reibkontakte auf das Schwingungsverhalten betrachtet.

### 5.2.1 Drehwiderstand des Kugellagers und Motors

Um den Beitrag des Widerstandsmoments im Kugellager und im Elektromotor zu bestimmen, wird der Gleitlagersitz entfernt und Messungen bei verschiedenen Drehgeschwindigkeiten aufgenommen. Das mittlere Drehmoment liegt bei etwa 0,005 Nm und weist keine Abhängigkeit von der Drehrate oder vom Drehwinkel auf. Im Vergleich zu den gemessenen Werten mit eingebautem Gleitlager sind diese Widerstände vernachlässigbar klein.

### 5.2.2 Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes ohne Welle

Um das Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes ohne Reibkontakt zu untersuchen, wird die Welle mitsamt Antriebseinheit ausgebaut. Die Anregung des Gleitlagersitzes erfolgt durch den Piezoaktor und das Beschleunigungssignal wird aufgezeichnet. Damit soll überprüft werden, ob beim zugrundeliegenden, reibungsfreien Schwingungssystem näherungsweise lineares Verhalten vorliegt. In Abb. 5.4 sind der Amplituden- sowie der Phasengang des elastisch befestigten Gleitlagersitzes dargestellt. Als Anregung wird ein weißes Rauschen mit dem Frequenzband 0 – 6400 Hz verwendet. In Abb. 5.4a ist die Vergrößerungsfunktion  $V$  über der Frequenz  $f$  dargestellt. Bei etwa 1990 Hz ist ein scharfer Peak zu sehen, der die Eigenfrequenz des Systems charakterisiert. Bei 650 Hz, etwa einem Drittel der Eigenfrequenz, weist das System eine zusätzliche, kleinere Amplitudenüberhöhung auf. Für Anregungsfrequenzen deutlich größer als die Eigenfrequenz konvergiert die Systemantwort gegen null. In Abb. 5.4b ist die Phasendifferenz  $\psi$  zwischen Anregung und Antwort über der Anregungsfrequenz aufgetragen. Unterhalb der Eigenfrequenz sinkt der Wert leicht, das System schwingt in Phase. Bei der Eigenfrequenz ist die Änderungsrate sehr groß, die Phase ändert sich nahezu sprunghaft von 0 zu  $-\pi$ . Oberhalb der Eigenfrequenz schwingt das System gegenphasig

zur Anregung. Im Bereich von 650 Hz weist die Phase analog zum Amplitudengang ein abweichendes Verhalten auf. Diese Abweichung im Übertragungsverhalten kann nicht erklärt werden. Bei der Auswertung von Messungen bei harmonischer Anregung mit einer einzigen Frequenz wird im Antwortsignal jedoch nur dieser Frequenzanteil beobachtet. Insgesamt kann bei dem System ohne Reibkontakt in guter Näherung also von einem linearen Verhalten ausgegangen werden.

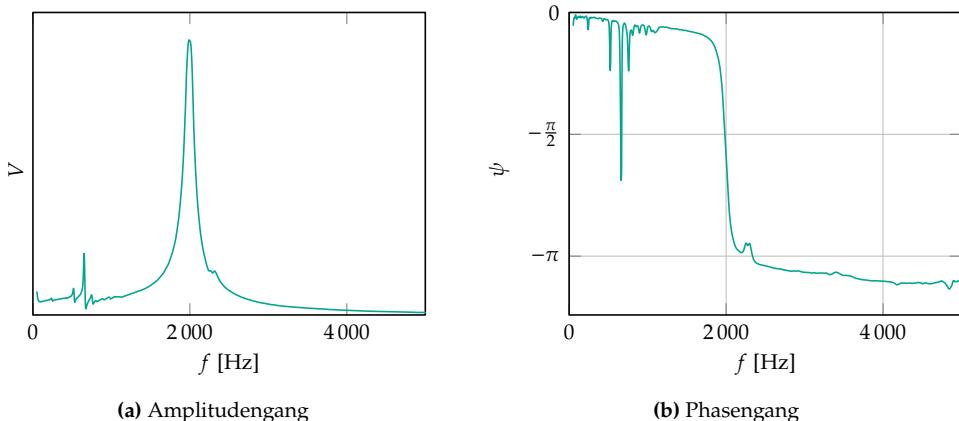


Abbildung 5.4: Amplituden- und Phasengang des Systems ohne Reibkontakt

### 5.2.3 Schwingungsverhalten des Gleitlagersitzes bei stehender Welle

Eine weitere Versuchsanordnung ist die Anregung des Gleitlagersitzes bei stehendem Motor. Dabei wird die axiale Bewegung sowie die Temperatur gemessen. In nachfolgenden Abschnitten wird noch beschrieben, dass das Reibmoment von der Winkelposition der Welle abhängig ist. Somit muss bei diesem Versuch die Winkelposition berücksichtigt werden, bei welcher die Messung durchgeführt wird. Ist das Reibmoment zu groß, kann das dazu führen, dass die Welle und die Lagerbuchse aneinander haften und die Gleitlagereinheit samt Welle Schwingungen mit etwa 2  $\mu\text{m}$  Amplitude ausführt, die das axiale Spiel im Kugellager und Motorlager aufnimmt. Das Haften wird dann nicht aufgebrochen und die Relativgeschwindigkeit zwischen Welle und Lagerhülse ist somit immer null. Die Temperatur bleibt dabei näherungsweise konstant. Wenn das Reibmoment ausreichend klein ist, schwingt der Lagersitz bei einer Anregung mit 2000 Hz mit etwa 6  $\mu\text{m}$  Amplitude, auf Geschwindigkeitsebene sind das 0,1 m/s. Die Frequenzanalyse des Positionssignals mittels Fast-Fourier-Transformation ergibt, dass auch Anteile mit der zwei- und dreifachen Anregungsfrequenz enthalten

sind, was die Nichtlinearität des Systems mit Kontakt unterstreicht. Auch wenn die Temperaturmessung immer am selben materiellen Punkt der Wellenoberfläche stattfindet, die aufgrund der kleinen Relativbewegung nie im Reibkontakt ist, lässt sich bei diesen Versuchen eine Temperaturerhöhung um 2 bis 4 °C messen. Die Reibleistung führt zu einem Wärmeeintrag in die Welle, die Wärme breitet sich dann durch die Wärmeleitung in der Welle aus.

## 5.3 Hauptuntersuchungen

Dieser Abschnitt behandelt die Durchführung und Auswertung der Versuchsreihen, aus deren Ergebnisse Zusammenhänge erschlossen werden. Zunächst wird das Reib- und Temperaturverhalten ohne hochfrequente Anregung vorgestellt und analysiert. Anschließend werden die Versuche mit hochfrequenter Anregung diskutiert und mit den Ergebnissen ohne Anregung verglichen. Daraus leiten sich Aussagen über die Wechselwirkung von dynamischem Verhalten, Reibverhalten und Temperaturentwicklung ab.

Für die Untersuchung wird folgende Versuchsdurchführung angewandt: An fünf unterschiedlichen Konfigurationen (im Folgenden auch Aufbauten genannt) werden Messungen durchgeführt, wobei für jede Konfiguration die Antriebseinheit mitsamt Arbeitswelle vom restlichen Prüfstand entfernt und mit einer radialen Last wieder montiert wird. Die Aufbauten sind von 2 bis 6 nummeriert, Aufbau 1 war in der Dokumentation für die vorbereitenden Untersuchungen. Die Messungen jeder einzelnen Konfiguration finden innerhalb weniger Stunden statt, wobei dem Prüfstand nach jeder Messung ausreichend Zeit zum Abkühlen gelassen wird. Zwischen den Messreihen verschiedener Konfigurationen vergehen teilweise mehrere Tage bis Wochen. Die Versuchsdurchführung unter unterschiedlichen äußeren Bedingungen erlaubt die Formulierung möglichst allgemeingültiger Aussagen über das Systemverhalten. So lässt sich bewerten, ob die beobachteten Effekte auf spezifische Umwelteinflüsse zurückzuführen sind oder unabhängig davon auftreten. Für jeden Aufbau werden Messungen bei fünf Motorspannungen durchgeführt, zuerst ohne und dann mit Anregung. Die Messdauer der einzelnen Versuchsdurchführungen ist auf 300 s festgelegt, da aus den vorbereitenden Untersuchungen bekannt ist, dass sich nach dieser Zeit ein stationärer Zustand eingestellt hat und sich die Messgrößen danach nur noch geringfügig ändern.

### 5.3.1 Verhalten ohne Anregung

Abbildung 5.5 zeigt zwei Ausschnitte des Messschreibs des Drehmomentsignals und des Temperaturanstiegs für zwei unterschiedliche Aufbauten bei 24 V Motorspannung.

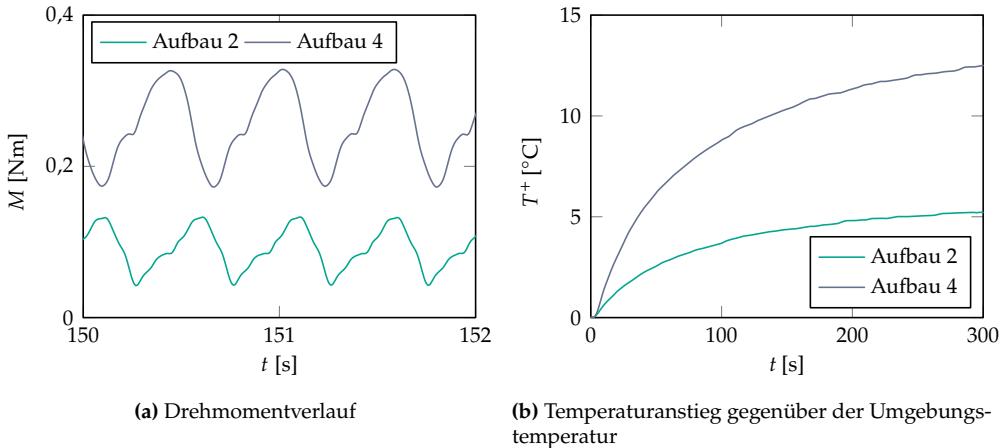


Abbildung 5.5: Momentenverlauf und Temperaturanstieg ohne Anregung von zwei Konfigurationen bei 24 V Motorspannung

In Abb. 5.5a ist das gemessene Drehmoment bei den Aufbauten 2 und 4 über einen kurzen Zeitausschnitt dargestellt. Beide Verläufe sind periodisch, die Grundfrequenz entspricht jeweils der Drehrate des Motors, welche bei Aufbau 2 bei  $2\text{ s}^{-1}$  und bei Aufbau 4 bei  $1,75\text{ s}^{-1}$  liegt. Die Umfangsgeschwindigkeit an der Welle mit dem Radius 5 mm liegt damit bei etwa 0,063 m/s für Aufbau 2 und 0,055 m/s für Aufbau 4. Das zeitabhängige Moment ist auf einen Achsen- und Winkelversatz zwischen Welle und Gleithülse zurückzuführen. Die Fertigungs- und Montagetoleranzen beim Motor, dessen Befestigung, bei der Kupplung und bei der Welle sowie beim Gleitlagersitz führen dazu, dass die Drehachse der Arbeitswelle nicht mit der Achse der Hülse zusammenfällt. Die Flächenpressung zwischen Welle und Hülse ändert sich daher mit dem Drehwinkel und führt zu dem beschriebenen periodischen Verlauf des gemessenen Drehmoments. Die in den Signalen enthaltenen höheren Frequenzanteile entsprechen ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz. Bei Konfiguration 4 wurde die Antriebseinheit mit größerer radialer Last eingebaut, weshalb das gemessene Drehmoment deutlich größer ist. Der Verlauf von Aufbau 2 hat sein Minimum bei 0,04 Nm und das Maximum bei 0,13 Nm, der Mittelwert liegt bei 0,11 Nm. Bei Konfiguration 4 liegt das Maximum bei 0,33 Nm, das Minimum bei 0,18 Nm und der Mittelwert bei 0,26 Nm. Die Werte sind also deutlich größer als bei Konfiguration 2. Die geringere Drehzahl bei gleicher Spannung resultiert aus dem größeren Reibmoment.

Während der Messung wird auch die Temperatur aufgezeichnet. In Abb. 5.5b ist der Zeitverlauf des Temperaturanstiegs gegenüber der Umgebungstemperatur für die beiden Aufbauten dargestellt. Der Temperaturanstieg  $T^+$  ergibt sich aus der Differenz zwischen der gemessenen Temperatur und der für jeden Aufbau bestimmten

Umgebungstemperatur. Auf diese Weise lässt sich feststellen, wie stark sich die Wellenoberfläche durch den Betrieb des Prüfstands erwärmt. Bei Aufbau 2 führt der Betrieb zu einem Temperaturanstieg von über  $5^{\circ}\text{C}$  gegenüber der Umgebungstemperatur. Bei Konfiguration 4 steigt die Temperatur während der Messung um mehr als  $12^{\circ}\text{C}$  an.

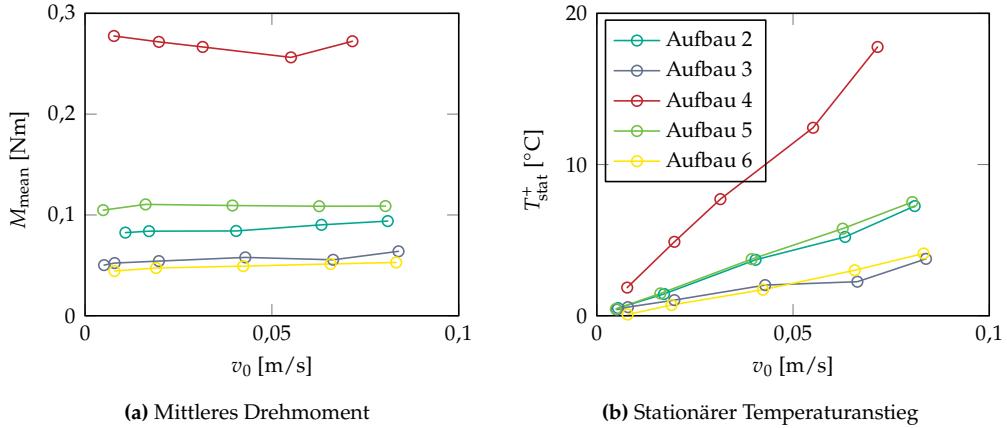
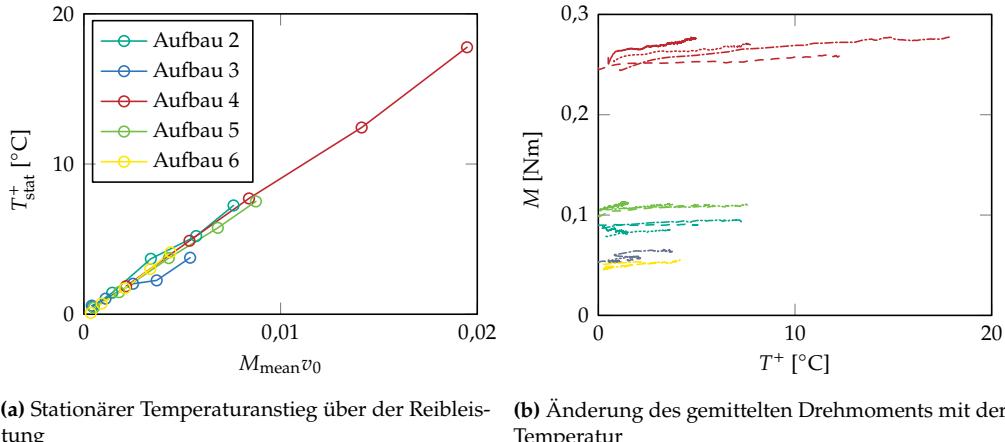


Abbildung 5.6: Mittleres Moment und stationärer Temperaturanstieg der einzelnen Konfigurationen bei verschiedenen Umlaufgeschwindigkeiten der Wellenoberfläche

In Abb. 5.6 sind das über mehrere Umdrehungen gemittelte Moment  $M_{\text{mean}}$  im stationären Zustand sowie der stationäre Temperaturanstieg  $T_{\text{stat}}^+$  für die fünf unterschiedlichen Konfigurationen über unterschiedlichen Umfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  der Wellenoberfläche aufgetragen. Jede Farbe entspricht einem Aufbau, die Zuteilung ist der Legende in Abb. 5.7b zu entnehmen und ist für alle folgenden Grafiken identisch. Die Messpunkte sind mit Kreisen markiert und durch Linien verbunden. Bei den ausgewerteten Konfigurationen steigt das gemessene Moment mit der Drehgeschwindigkeit leicht an. Diese Beobachtung deckt sich mit der Information aus Abb. 1.2, wonach der Reibungskoeffizient mit zunehmender Geschwindigkeit steigt.

In Abb. 5.6b ist deutlich zu erkennen, dass die Erwärmung näherungsweise linear mit der Drehgeschwindigkeit zunimmt. Die Steigungen der Kurven hängen mit dem gemessenen mittleren Drehmoment zusammen. Die Aufbauten, die laut Abb. 5.6a ein großes Drehmoment aufweisen, erwärmen sich viel stärker als Aufbauten mit geringer radialer Last und folglich kleinerem Drehmoment. Der maximale Temperaturanstieg bei Aufbau 4 beträgt über  $17^{\circ}\text{C}$ , während sich die Aufbauten 3 und 6 mit geringer radialer Last um lediglich  $4^{\circ}\text{C}$  erwärmen. Die angelegten Motorspannungen sind bei den einzelnen Konfigurationen jeweils gleich. In Abb. 5.6a lässt sich daher gut erkennen, dass mit größerem Reibmoment die Umlaufgeschwindigkeit kleiner ist. Die Messpunkte

bei größerem Moment liegen bei etwas kleineren Geschwindigkeiten als bei kleinem Reibmoment.



(a) Stationärer Temperaturanstieg über der Reibleistung  
 (b) Änderung des gemittelten Drehmoments mit der Temperatur

Abbildung 5.7: Zusammenhang zwischen Temperatur und Drehmoment

In Abb. 5.7a ist der stationäre Temperaturanstieg der verschiedenen Konfigurationen über dem Produkt aus mittlerem Drehmoment  $M_{\text{mean}}$  und der Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  aufgetragen. Dieser Ausdruck entspricht bis auf einen konstanten Faktor der Reibleistung. Es ist gut zu erkennen, dass der Temperaturanstieg für alle Konfigurationen in sehr guter Näherung linear mit der Reibleistung wächst. Alle Kurven weisen die gleiche Steigung auf und ihre Verlängerungen gehen durch den Ursprung, was die Plausibilität dieser Beobachtung unterstreicht. Die Erwärmung der Wellenoberfläche lässt sich demnach einfach auf die Reibleistung zurückführen, die sich wiederum aus der Drehzahl und dem Reibmoment zusammensetzt. Für den Betrieb ohne hochfrequente Anregung ist dieser recht einfache Zusammenhang eine Art Charakteristik für den Prüfstand im untersuchten Temperatur-, Drehzahl- und Belastungsbereich.

Diese Beobachtung deckt sich außerdem mit den Informationen aus der Literatur, wonach die maximale Betriebstemperatur auf die beiden Größen Flächenpressung und Gleitgeschwindigkeit zurückgeführt werden kann (vgl. Abb. 1.1).

In Abb. 5.7b ist die zeitliche Entwicklung des gemittelten Drehmoments über dem Temperaturanstieg der verschiedenen Aufbauten bei den unterschiedlichen Motorspannungen dargestellt. Jede Farbe entspricht einem Aufbau, die unterschiedlichen Motorspannungen sind durch die verschiedenen Linienstile gekennzeichnet. Der Beginn der Messungen ist jeweils am linken Ende der Kurven. Im Laufe der Messungen steigt die Temperatur an und bei einigen Aufzeichnungen damit auch das gemessene

Drehmoment. Bei Aufbauten mit großer radialer Last und folglich hohem Drehmoment ist der Temperaturanstieg aufgrund der größeren Reibleistung größer als bei Aufbauten mit kleinem Drehmoment. Dieser Zusammenhang wurde bereits eingehend beschrieben. Zusätzlich ist zu erkennen, dass bei einigen Messungen mit der Temperatur auch das Drehmoment ansteigt. Dieser Effekt ist vor allem bei großem Reibmoment ausgeprägt, was an einer vergleichsweise großen Steigung der Kurven festgemacht werden kann. Die rote Kurve mit der Strich-Punkt-Linie gehört zu Aufbau 4 bei 30 V Motorspannung. Durch die Reibleistung erwärmt sich die Wellenoberfläche um über 17 °C, währenddessen steigt das gemessene Drehmoment von 0,245 auf 0,277 Nm und damit um über 13 %. Bei Aufbau 6 in gelb und Aufbau 3 in blau ist ein solches Verhalten nur ansatzweise zu beobachten.

Eine fundierte Erklärung dieses Effekts ist an dieser Stelle nicht möglich. Die thermische Ausdehnung spielt aufgrund der Spielpassung und der vergleichsweise geringen Temperaturdifferenz vermutlich nur eine untergeordnete Rolle. Wahrscheinlicher ist eine Änderung der tribologischen Eigenschaften des Kontakts zwischen der Gleithülse aus Kunststoff und der Welle aus Metall, wodurch sich die Tangentialkraft ändert. Bei einer großen Flächenpressung scheint dieser Effekt stärker zu sein. Obwohl die Ursache nicht verlässlich geklärt werden kann, sollte das beschriebene Phänomen bei der Auslegung von Gleitlagern berücksichtigt werden.

### 5.3.2 Verhalten mit hochfrequenter Anregung

Zur Untersuchung des Einflusses hochfrequenter Anregung auf das Reib- und Temperaturverhalten des Prüfstands wurden die Versuche aus Abschnitt 5.3.1 auch mit Anregung durchgeführt. Da die gewünschten Effekte vor allem bei großen Geschwindigkeitsamplituden des Gleitlagersitzes beobachtet werden können, wird das System im Bereich der Eigenfrequenz mit 2000 Hz angeregt. Weicht die Anregungsfrequenz zu stark ab, ist die Systemantwort sehr klein und der Einfluss der hochfrequenten Anregung nicht sichtbar. In Abb. 5.8 sind dafür die Geschwindigkeitsamplitude sowie das mittlere Drehmoment bei Anregungsfrequenzen von 50 bis 5000 Hz dargestellt. Der Motor dreht sich bei dieser Messung mit einer konstanten Drehrate von etwa  $2,2 \text{ s}^{-1}$ , was einer Umlaufgeschwindigkeit von 0,068 m/s entspricht. Die Frequenz wird schrittweise erhöht und kurz gehalten. Bei einer Anregungsfrequenz von 1950 Hz ist die Geschwindigkeitsamplitude mit 0,14 m/s am größten. Diese Frequenz ist minimal kleiner als die Resonanzfrequenz bei dem System ohne Reibkontakt in Abb. 5.4a. Das mittlere Drehmoment hat bei dieser Frequenz sein Minimum, es wird hier um fast 25 % reduziert. Oberhalb dieser Frequenz kann eine Überhöhung des Drehmoments beobachtet werden, abgesehen davon hat die Anregung keinen Einfluss. Außerdem fällt auf, dass die Geschwindigkeitsamplitude unterhalb von 1000 Hz deutlich kleiner ist

als im Bereich oberhalb von 3000 Hz, das mittlere Drehmoment ist in diesen Bereichen allerdings gleich.

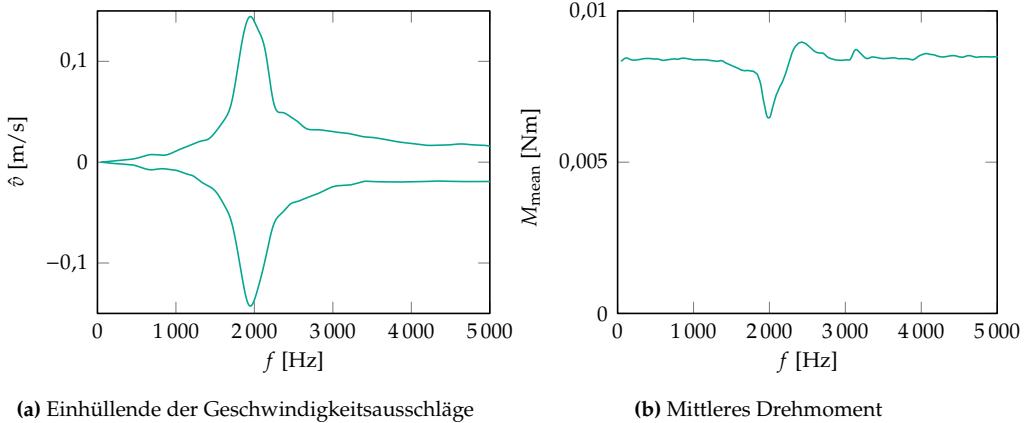


Abbildung 5.8: Systemgrößen bei einer Bandbreite von Anregungsfrequenzen

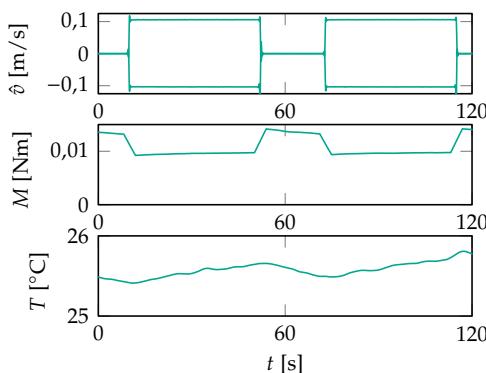
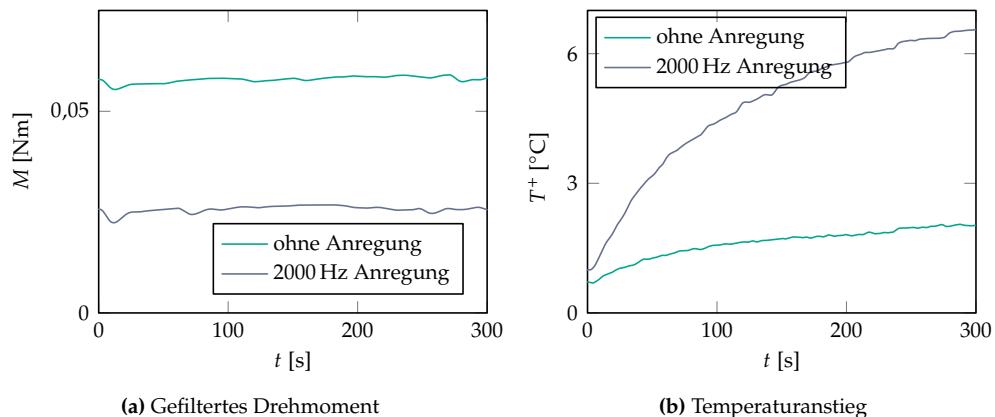


Abbildung 5.9: Ausschnitt aus einem Messschrieb

In Abb. 5.9 ist ein Ausschnitt einer Messung dargestellt, bei welcher die Welle rotiert und die hochfrequente Anregung immer wieder ein- und ausgeschaltet wird. In den drei Schaubildern sind die Einhüllende des Geschwindigkeitssignals, das über mehrere Umdrehungen gemittelte Drehmoment sowie die gemessene Temperatur über einen Zeitbereich von 120 s abgebildet. Bei eingeschalteter hochfrequenter Anregung schwingt der Lagersitz mit einer Geschwindigkeitsamplitude von etwa 0,1 m/s. Während dieser Zeitspanne beträgt das gemittelte Reibmoment etwas weniger als 0,01 Nm und steigt

leicht an. Währenddessen ist auch ein Anstieg der Temperatur zu beobachten. Im Abschnitt ohne Anregung springt das Reibmoment auf 0,014 Nm und sinkt dann wieder leicht ab. In diesem Intervall ist auch ein Absinken der Temperatur zu beobachten. Die Übergänge des Reibmoments erscheinen im Schaubild mit einer endlichen Steigung, was allerdings an der Mittelung über mehrere Umdrehungen liegt. In den unverarbeiteten Daten ist der Übergang des Reibmoments beim Zeitpunkt des Ein- und Ausschaltens nahezu sprunghaft.

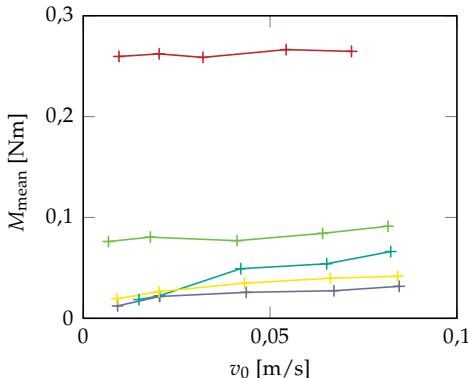
Aus diesem Messschrieb lassen sich drei Aussagen ableiten: Zum einen führt die hochfrequente Anregung zu einer Reduktion des Reibmoments. Sobald die Anregung ausgeschaltet wird, springt das Drehmoment wieder auf den Wert von vor der Anregung zurück. Außerdem führt die Anregung zu einer verstärkten Erwärmung der Wellenoberfläche. Sobald die Anregung ausgeschaltet wird, kühlt der Kontakt wieder langsam ab. Als dritte Beobachtung lässt sich festhalten, dass sich das gemessene Moment während aller Anregungszustände langsam im selben Maße wie die Temperatur ändert. Auf eine klare Abhängigkeit kann an dieser Stelle nicht geschlossen werden, allerdings scheint es einen Zusammenhang zu geben.



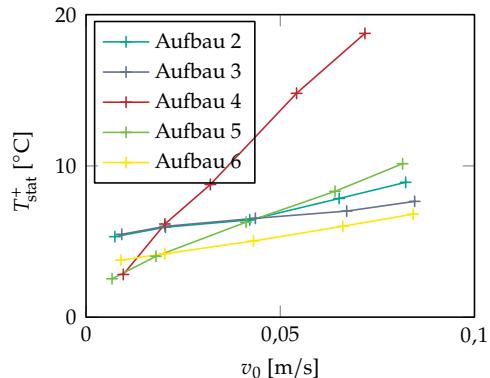
**Abbildung 5.10:** Vergleich von Drehmoment und Temperatur bei zwei Messungen an Konfiguration 3 mit 16 V Motorspannung ohne und mit Anregung

In Abb. 5.10 sind das gemittelte Drehmoment sowie der Temperaturanstieg zweier Versuchsdurchführungen an Aufbau 3 abgebildet. Die angelegte Motorspannung beträgt jeweils 16 V, eine Messung wurde ohne Anregung durchgeführt, bei der zweiten Messung liegt die Anregungsfrequenz bei 2000 Hz. Das Drehmoment in Abb. 5.10a ist dabei über mehrere Motorumdrehungen gemittelt, sodass die Winkelabhängigkeit verschwindet. Ohne Anregung liegt das Drehmoment bei etwa 0,06 Nm und bleibt

während der Messung näherungsweise konstant. Bei hochfrequenter Anregung liegt der Wert bei lediglich 0,03 Nm. Die Anregung führt damit zu einer Reduktion von etwa 50 %. Die Temperatur der Messung ohne Anregung steigt bis zum Ende der Messung um ungefähr 2 °C an, mit Anregung liegt die Temperatur zum Ende der Messung 6,5 °C über der Umgebungstemperatur und steigt weiter an. Eine Änderung des gemessenen Moments analog zur Temperatur kann bei dieser Messung nicht beobachtet werden.



(a) Mittleres Drehmoment



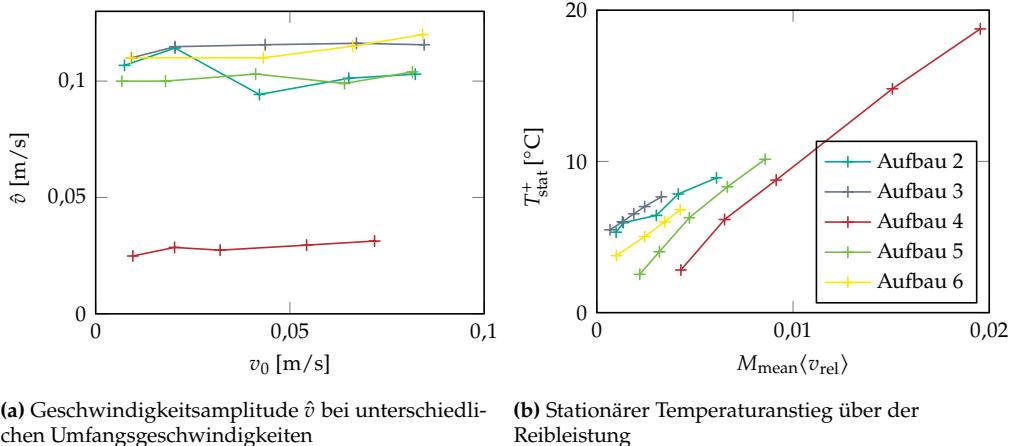
(b) Stationärer Temperaturanstieg

Abbildung 5.11: Mittleres Drehmoment und stationärer Temperaturanstieg über der Umfangsgeschwindigkeit

Abbildung 5.11a zeigt das mittlere Drehmoment der verschiedenen Aufbauten bei 2000 Hz Anregung. Die einzelnen Messungen sind durch Kreuze gekennzeichnet und durch Linien verbunden. Während einer Versuchsdurchführung an einer Konfiguration wird der Verstärkungsfaktor am Leistungsverstärker konstant gehalten. Analog zu Abb. 5.6a liegen die Kurven je nach aufgebrachter radialer Last bei unterschiedlichen Niveaus. Außerdem kann beobachtet werden, dass das Drehmoment mit zunehmender Umfangsgeschwindigkeit ansteigt. Dies kann zum einen durch den größeren Anteil der Geschwindigkeit in Umfangsrichtung erklärt werden. Zum anderen kann auch ein mit der Gleitgeschwindigkeit zunehmender Reibwert, wie in Abb. 5.6a angedeutet, dazu beitragen. Analog zu Abb. 5.6a fällt auf, dass bei gleicher angelegter Motorspannung die Umfangsgeschwindigkeit für größere Reibmomente kleiner wird.

In Abb. 5.11b ist der stationäre Temperaturanstieg über der Umfangsgeschwindigkeit mit Anregung dargestellt. Wie auch bei den Messungen ohne Anregung steigt die Temperatur mit größerer Umfangsgeschwindigkeit an. Die Steigungen der Kurven sind nicht konstant, außerdem schneiden sich die Kurven, was bei den Messungen ohne Anregung in Abb. 5.6b nicht vorkommt. Die Aufbauten 4 und 5 haben die größte radiale

Last und weisen die steilsten Anstiege der stationären Temperatur auf.



(a) Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  bei unterschiedlichen Umfangsgeschwindigkeiten

(b) Stationärer Temperaturanstieg über der Reibleistung

Abbildung 5.12: Abhängigkeit der Geschwindigkeitsgrößen und stationäre Temperatur

In Abb. 5.12a ist die Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  für die verschiedenen Konfigurationen über der Umfangsgeschwindigkeit dargestellt. Die Amplitude liegt je nach angelegter Verstärkung und radialer Last im Bereich von 0,02 – 0,1 m/s und damit im selben Geschwindigkeitsbereich wie die Umlaufgeschwindigkeit der Wellenoberfläche. Bei Aufbau 4 in rot ist die Geschwindigkeitsamplitude aufgrund der hohen aufgebrachten Last gering. Insgesamt kann beobachtet werden, dass die Amplitude für größere Umfangsgeschwindigkeiten leicht ansteigt. Das kann dadurch erklärt werden, dass die betragsmäßig begrenzte Reibkraft aufgrund der höheren Umlaufgeschwindigkeit einen geringeren Anteil in axialer Richtung hat, weshalb die axiale Bewegung schwächer gedämpft wird. Was den Verlauf der Messpunkte angeht, weist einzig Aufbau 2 ein stark abweichendes Verhalten auf, wofür an dieser Stelle keine Erklärung gegeben werden kann. Die Messungen bestätigen außerdem die Aussage, dass eine größere axiale Geschwindigkeitsamplitude die Reibung in Umfangsrichtung reduziert. Dies lässt sich daran erkennen, dass die Umlaufgeschwindigkeiten trotz gleicher angelegter Motorspannungen für zunehmende Geschwindigkeitsamplituden anwachsen.

In Abb. 5.12b ist der stationärer Temperaturanstieg der Messungen mit Anregung über dem Produkt aus mittlerem Moment und mittlerer Relativgeschwindigkeit  $\langle v_{\text{rel}} \rangle$  dargestellt. Zur Berechnung der mittleren Relativgeschwindigkeit wird der Mittelwert der Relativgeschwindigkeit

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{v_0^2 + v^2} \quad (5.1)$$

im stationären Zustand numerisch ermittelt. Der Ausdruck  $M_{\text{mean}} \langle v_{\text{rel}} \rangle$  ist an dieser Stelle zwar nur eine ungenaue Näherung der Reibleistung, im Vergleich zu anderen Berechnungsvorschriften ergeben sich daraus allerdings die Ergebnisse mit der höchsten Konsistenz. Die Relativgeschwindigkeit hat aufgrund der Anregung jeweils einen Anteil in Umfangs- und in axialer Richtung. Entsprechend besitzt die der Relativbewegung entgegenwirkende Reibkraft auch zwei Anteile. Da nur der Anteil in Umfangsrichtung gemessen wird und die Größen  $v_0$  und  $v$  die tatsächliche Relativgeschwindigkeit im Kontakt nicht genau beschreiben, gelingt es nicht, aus den Größen  $M_{\text{mean}}$ ,  $v_0$  und  $v$  einen besseren Ausdruck für die Reibleistung zu finden. Nichtsdestotrotz kann daraus ein Schaubild erzeugt werden, das ähnlich wie Abb. 5.7a einen näherungsweise linearen Zusammenhang aus der stationären Temperatur und dem Näherungsausdruck der Reibleistung erkennen lässt. Ähnlich wie bei der Auswertung der Messungen ohne Anregung steigt die Temperatur mit größerer Reibleistung an. Die Steigungen der Verbindungskurven sind ähnlich, allerdings liegen die Punkte nicht auf einer Geraden, sondern weisen einen deutlichen Versatz auf. Aus Anschauungsgründen müssten die Verlängerungen der Kurven durch den Ursprung gehen, was allerdings nur für Aufbau 5 gilt. Mögliche Ursachen für die deutlichen Abweichungen sind die fehlerbehaftete Berechnung der mittleren Reibleistung, unzuverlässige Messdaten, oder aber das Systemverhalten mit Anregung lässt sich nicht durch die gleichen Zusammenhänge wie jenes ohne Anregung beschreiben.

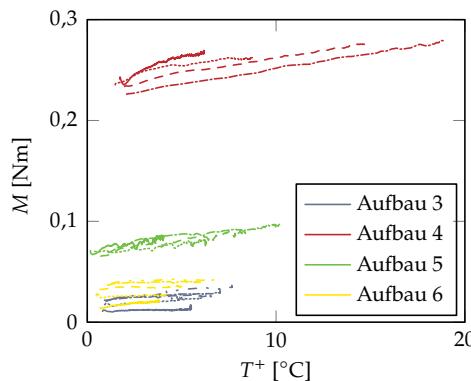


Abbildung 5.13: Momentenverlauf über Temperaturentwicklung

In Abb. 5.13 ist die Veränderung des Drehmoments über der Temperaturentwicklung während der Messungen mit Anregung der Aufbauten 3, 4, 5 und 6 dargestellt. Analog zu den Messungen ohne Anregung kann besonders bei den Aufbauten 4 und 5 mit größerer radialer Last eine Zunahme des Drehmoments mit steigender Temperatur

beobachtet werden. Bei den Aufbauten 3 und 6 ist der Effekt schwächer ausgeprägt, aber dennoch zu beobachten.

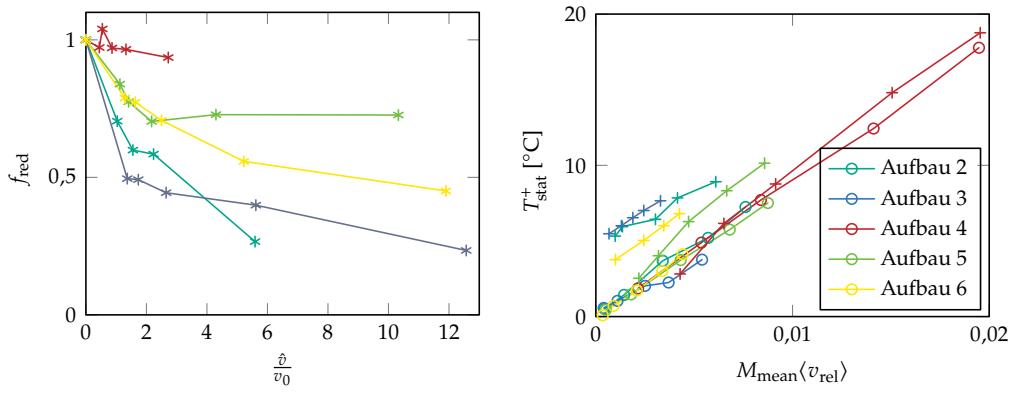
### 5.3.3 Vergleich mit und ohne Anregung

Nachdem in den vorangehenden Unterkapiteln jeweils das Verhalten mit und ohne Anregung vorgestellt und analysiert wurde, werden in diesem Unterkapitel die jeweiligen Ergebnisse einander gegenübergestellt und somit der Einfluss der hochfrequenten Anregung herausgearbeitet. Dass die hochfrequente Anregung zu einer Reduktion des Drehmoments führt, wurde bereits in einzelnen Messungen gezeigt. Zudem konnte beobachtet werden, dass die hochfrequente Anregung einen größeren Temperaturanstieg zur Folge hat. Auch eine Änderung des Drehmoments mit ansteigender Temperatur konnte bei verschiedenen Messungen beobachtet werden. Diese Effekte werden nun für alle Aufbauten und Versuchsdurchführungen systematisch betrachtet.

Zum Einfluss der Anregung auf das Drehmoment wird der dimensionslose Faktor

$$f_{\text{red}} = \frac{M_{\text{mean}}^{2000}}{M_{\text{mean}}^{\text{oA}}} \quad (5.2)$$

eingeführt. Er beschreibt das Verhältnis des mittleren Drehmoments mit Anregung  $M_{\text{mean}}^{2000}$  und ohne Anregung  $M_{\text{mean}}^{\text{oA}}$  bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit. Ein großer Wert dieses Faktors steht für eine geringe Reduktion des Drehmoments. Je kleiner der Wert ist, desto stärker führt die hochfrequente Anregung zu einer Verringerung des Drehmoments.



(a) Reduktion des Drehmoments durch hochfrequente Anregung

(b) Stationärer Temperaturanstieg

Abbildung 5.14: Einfluss der Anregung auf das Drehmoment und die Temperatur

In Abb. 5.14a ist der dimensionslose Faktor  $f_{\text{red}}$  über dem Geschwindigkeitsverhältnis aus axialer Schwingungsamplitude  $\hat{v}$  und der Umfangsgeschwindigkeit  $v_0$  aufgetragen. Bei  $\frac{\hat{v}}{v_0} = 0$  ist der Faktor per Definition gleich eins. Die einzelnen Konfigurationen streuen etwas, jedoch lässt sich eine klare Tendenz erkennen. Wenn die Geschwindigkeitsamplitude viel größer als die Umlaufgeschwindigkeit der Wellenoberfläche ist, kann das Drehmoment um bis zu 75 % reduziert werden. Ist die Geschwindigkeitsamplitude jedoch vergleichsweise klein, haben die überlagerten Schwingungen nur einen geringen reduzierenden Einfluss. Diese Beobachtung deckt sich qualitativ mit den Aussagen, die sich für eine sehr einfache Modellierung aus Abschnitt 2.1.1 ergeben. Bei Aufbau 4 mit großer Flächenpressung lässt sich nur eine geringe Reduktion beobachten. Bei Aufbau 5 führt die hochfrequente Anregung auch für ein großes Geschwindigkeitsverhältnis nur zu einer Reduktion von etwa 25 %.

In Abb. 5.14b ist der stationäre Temperaturanstieg mit und ohne Anregung über der jeweiligen Reibleistung aufgetragen. Das Schaubild enthält die Daten aus den beiden Abb. 5.7a und 5.12b. Die Messungen ohne Anregung sind durch Kreise gekennzeichnet, diejenigen mit Anregung durch Kreuze. Die verschiedenen Farben stehen für die jeweiligen Aufbauten. Insgesamt lässt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung der verschiedenen Messungen beobachten, auch wenn die Auswertung der Versuche mit Anregung abweichende Ergebnisse liefert. Davon abgesehen lässt sich festhalten, dass für den untersuchten Prüfstand der stationäre Temperaturanstieg proportional zur Reibleistung ansteigt, unabhängig von der Anregung und dem Betriebszustand.

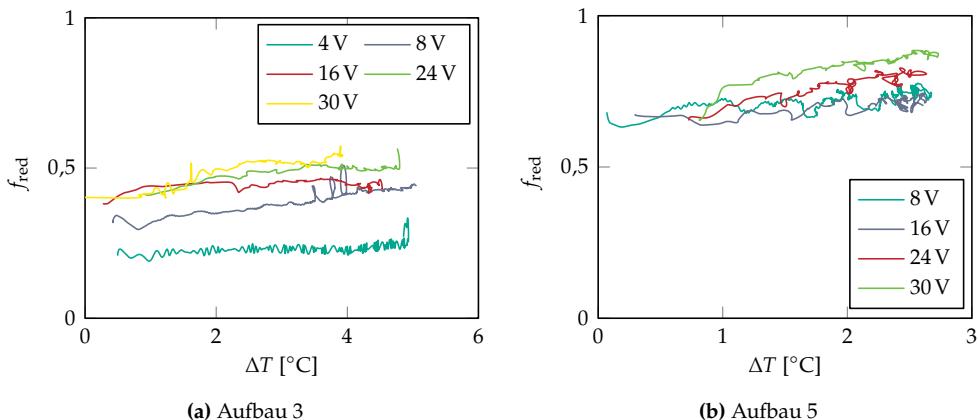


Abbildung 5.15: Reibungsreduktion über der Temperaturdifferenz bei unterschiedlichen Motorspannungen

Beim Vergleich der Abb. 5.7b und 5.13 fällt auf, dass das Drehmoment bei den Messungen mit Anregung stärker mit der Temperatur ansteigt. Während bei den Messungen

ohne Anregung nur bei Aufbau 4 mit großer radialer Last ein Anstieg des Drehmoments beobachtet werden kann, ist dieser Effekt bei den Messungen mit Anregung deutlich stärker ausgeprägt und bei allen Konfigurationen zu beobachten. Ein Erklärungsansatz liegt in den größeren Temperaturen, die durch die hochfrequente Anregung erreicht werden. Dadurch wird das tribologische Verhalten stärker beeinflusst als bei den Versuchen ohne Anregung, bei welchen die Temperaturen nicht so stark steigen. Die hochfrequente Anregung hat demnach auch einen negativen Effekt auf das tribologische Verhalten des Drehgelenks. Zwar kann das mittlere Drehmoment in ausgewählten Betriebspunkten deutlich reduziert werden, durch die größere Relativgeschwindigkeit entsteht allerdings mehr Wärme, die zum einen das Reibmoment wieder geringfügig vergrößern kann und zum anderen in der Auslegung des Lagers berücksichtigt werden muss.

In Abb. 5.15 sind für die Aufbauten 3 und 5 die Veränderung des Reduktionsfaktors  $f_{red}$  über der Temperaturdifferenz aufgetragen. Der Reduktionsfaktor als Verhältnis des Drehmoments mit und ohne Anregung wird zu jedem Zeitpunkt ausgewertet und über der jeweiligen Temperaturdifferenz aus der Temperatur mit und ohne Anregung aufgetragen. Die Messungen mit größeren Motorspannungen liegen bei höheren Werten von  $f_{red}$ , was an der größeren Umfangsgeschwindigkeit liegt und in Zusammenhang mit Abb. 5.14a erläutert wurde. Der Beginn der jeweiligen Messung ist jeweils am linken Ende der Kurven. Die einzelnen Messungen starten näherungsweise bei der gleichen Temperatur, weshalb die Temperaturdifferenz anfangs nahezu null ist. Während der Messungen erwärmt sich die Wellenoberfläche bei Anregung stärker als ohne Anregung, weshalb die Temperaturdifferenz ansteigt. Bei den dargestellten Messungen ändert sich zudem auch das Drehmoment während die Temperatur ansteigt. Dadurch ändert sich auch der Reduktionsfaktor. In beiden Abbildungen lässt sich erkennen, dass der Wert von  $f_{red}$  für eine zunehmende Temperaturdifferenz steigt. Das bedeutet, dass im Laufe der Messung der reduzierende Effekt der hochfrequenten Anregung mit dem Anstieg der Temperatur geringer wird.

Die Auswertung der Untersuchungen lässt sich in den folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Durch die hochfrequente Anregung wird das mittlere Drehmoment reduziert, wobei ein großes Verhältnis aus Geschwindigkeitsamplitude der überlagerten Schwingung und Umfangsgeschwindigkeit zu einer hohen Reduktion führt.
2. Durch die Reibung erwärmt sich die Kontaktfläche, der stationäre Temperaturanstieg wächst in guter Näherung linear mit der Reibleistung an.
3. In Aufbauten mit großer Flächenpressung steigt die Reibkraft mit zunehmender Temperatur.

4. Der temperaturbedingte Anstieg der Reibkraft mindert den reduzierenden Effekt der hochfrequenten Anregung.

## 5.4 Gegenüberstellung von experimentellen und theoretischen Ergebnissen

Nun werden die Erkenntnisse der experimentellen Ergebnisse den theoretischen Ergebnissen aus Kapitel 4 gegenübergestellt und die jeweils abgeleiteten Aussagen verglichen.

**Reduktion des Drehmoments** Die in den theoretischen Untersuchungen vorhergesagte Reduktion des Reibmoments durch die hochfrequente Anregung kann auch experimentell beobachtet werden. Die Simulationen ergeben dabei eine thermisch bedingte Zunahme der Reibkraft für größere Umfangsgeschwindigkeiten, sowohl mit als auch ohne Anregung (vgl. Abb. 4.15b). Im Experiment kann ebenfalls ein mit der Drehrate zunehmendes Reibmoment beobachtet werden (vgl. Abb. 5.6a und 5.11a). Die Zunahme ist allerdings deutlich geringer als in der Simulation und vermutlich nicht auf die thermische Ausdehnung zurückzuführen, wie es in der Simulation der Fall ist. Die Zunahme bei den Versuchen mit Anregung ist zudem auf die größere Umfangskomponente der Relativgeschwindigkeit zurückzuführen, die mit größerer Drehrate ansteigt. Was den Einfluss der Anregungsfrequenz betrifft, sind die Aussagen von Experiment und Simulation widersprüchlich. Im theoretischen Teil führt die Anregung in der Nähe der Eigenfrequenz zu sehr großen Temperaturen und damit zu großen Reibkräften, die viel größer sind als jene ohne Anregung. Im Experiment ist die Erwärmung im Betrieb nahe der Eigenfrequenz zwar auch stärker, allerdings führt die thermische Kopplung nicht zu so einer drastischen Erhöhung der Reibkraft, weshalb in diesem Frequenzbereich aufgrund der größeren axialen Geschwindigkeitsamplitude die Reduktion der Reibkraft am stärksten auftritt. Anhand der Simulationen werden außerdem Parameterbereiche gefunden, in denen die hochfrequente Anregung zu einer größeren Reibkraft führt. Die relevanten Größen sind die Anregungsamplitude und -frequenz sowie das Verhältnis aus Umfangs- zu Grenzgeschwindigkeit. Eine Überhöhung der Reibkraft in diesem Ausmaß kann im Experiment nicht beobachtet werden.

Eine qualitative Übereinstimmung kann im Einfluss der Flächenpressung beobachtet werden. Sowohl in der Simulation (Abb. 4.14b) als auch in den experimentellen Untersuchungen (Abb. 5.14a) kann für eine größere radiale Last beziehungsweise ein höheres Übermaß eine größere Reibkraft sowie eine geringere Reduktion durch die hochfrequente Anregung festgestellt werden.

Im Experiment wird die Reibkraft in einzelnen Konfigurationen um 75 % reduziert (vgl. Abb. 5.14a). In der Simulation kann die Reibkraft im günstigsten Fall um über

99 % gesenkt werden. In beiden Fällen ist dies nur bei einer vergleichsweise geringen Umfangsgeschwindigkeit möglich.

**Temperaturerhöhung** In den Simulationen kommt es aufgrund der Reibleistung immer zu einem Temperaturanstieg. Größere Umfangsgeschwindigkeiten  $v_0$  sowie eine stärkere Anregungsamplitude  $\hat{f}$  führen zu höheren stationären Temperaturen. Aus analytischen Betrachtungen kann sogar eine geometrie- und parameterabhängige Grenzgeschwindigkeit  $v_b$  ermittelt werden, die eine obere Grenze für die Umlaufgeschwindigkeit  $v_0$  darstellt. Wird diese Bedingung verletzt, existiert kein stationärer Zustand und die Temperatur steigt als Konsequenz einer thermoelastischen Instabilität ins Unendliche an. Für eine schwache Anregung  $\hat{f} < f_{\text{stat}}$  ist die Temperatur unabhängig von der Anregungsfrequenz. Für eine starke Anregung wird die Temperatur im Bereich der Eigenfrequenz sehr groß und sinkt für größere Frequenzen (vgl. Abb. 4.16a). In den experimentellen Untersuchungen steigt die Temperatur ebenfalls mit zunehmender Drehzahl. Die Anregung erhöht die Wärmezufuhr und die Werte der stationären Temperatur liegen höher. Die Temperatur steigt allerdings nicht in solchem Maße wie in der Simulation. Außerdem kann ein selbstverstärkender Effekt oder gar die Ausbildung einer thermischen Instabilität nicht beobachtet werden.

Im Experiment kann ein linearer Zusammenhang zwischen der Reibleistung und der stationären Temperatur festgestellt werden. In der Simulation steigt die Temperatur jedoch überproportional an (vgl. Abb. 4.15a), was auf die starke Rückkopplung der Temperaturerhöhung auf die Reibleistung zurückzuführen ist. Zwar kann auch im Experiment eine Rückkopplung des Temperaturanstiegs auf das Reibmoment beobachtet werden, allerdings in einem viel geringeren Ausmaß. Bei Aufbauten mit großer radialer Last steigt die stationäre Temperatur stark mit der Umfangsgeschwindigkeit an. In den Simulationen hingegen führt eine größere Flächenpressung nur für eine schwache Anregung zu höheren stationären Temperaturwerten. Bei starker Anregung liefert ein höheres Übermaß eine geringere stationäre Temperatur bei gleicher Anregungskraft (vgl. Abb. 4.14b).

**Einfluss der Temperatur auf die Reibkraft** Aufgrund der starken Kopplung zwischen Temperaturänderung und Reibverhalten ist die Reibkraft in der Simulation stark von der Temperatur abhängig. Im Experiment kann ebenfalls eine Wechselwirkung beobachtet werden (vgl. Abb. 5.7b und 5.13), die allerdings wesentlich schwächer ausfällt. Bei großer Flächenpressung und vergleichsweise starker Wärmeentwicklung aufgrund der Anregung steigt das Reibmoment um bis zu 18 % an. Ohne Anregung fällt die Erwärmung geringer aus, das Reibmoment steigt um maximal 13 %. Bei Messungen mit kleinerer Flächenpressung und geringerer Wärmeentwicklung ändert sich das Reibmoment wenig bis gar nicht. Der Einfluss der Temperatur auf das Reibverhalten

kann eher auf die Kontakteigenschaften bei hohen Flächenkraftdichten zurückgeführt werden und liegt nicht an der thermischen Ausdehnung. Grund für diese Annahme ist, dass in den Abb. 5.7b und 5.13 das Reibmoment bei den unterschiedlichen Messungen unterschiedlich stark ansteigt, obwohl die Temperaturänderung gleich groß oder noch größer ist. Käme die Änderung des Reibmoments allein aus einer größeren Flächenpressung aufgrund thermischer Ausdehnung, müssten alle Messungen einen temperaturproportionalen Anstieg des Drehmoments aufweisen, denn die Geschwindigkeitsamplituden sind nahezu identisch.

In diesem Punkt zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus Simulation und Experiment. Während das theoretische Modell die Kopplung stark berücksichtigt und sich Temperatur und Reibung wesentlich gegenseitig beeinflussen, kann im Experiment nur eine eindeutige Abhängigkeit der Temperatur von der Reibleistung beobachtet werden. Ein Einfluss der Temperatur auf das Reibverhalten ist lediglich in einzelnen Messungen zu beobachten, eine klare Abhängigkeit kann nicht festgestellt werden.

**Temperaturerhöhung verringert die Reduktion des Drehmoments** In der Simulation führt die thermomechanische Kopplung immer zu einer größeren Reibkraft als ohne diese Kopplung. Schon bei der Betrachtung des Reibverhaltens ohne hochfrequente Anregung kommt es aufgrund der umlaufenden Umgebung zu einer Erwärmung und thermischen Ausdehnung der Welle und folglich zu einer größeren Reibkraft. Mit Anregung ist die Reibleistung noch größer, die stationäre Temperatur liegt oberhalb derer ohne Anregung. Die Reibkraft kann dennoch durch den zusätzlichen Anteil der Relativgeschwindigkeit reduziert werden (vgl. Abb. 4.15b). Ohne die thermische Kopplung kann die Reibkraft theoretisch auf einen beliebig kleinen Wert reduziert werden (vgl. Abb. 2.2), mit thermischer Kopplung ist die Bestimmung eines optimalen Betriebspunktes deutlich anspruchsvoller. Bei bestimmten Betriebspunkten kann die Temperaturerhöhung demnach zu einer verminderten Reduktion oder sogar zu einer Steigerung des Drehmoments führen. Doch auch mit Kopplung scheint eine beliebig starke Reduktion möglich zu sein (vgl. Abb. 4.17a).

In den experimentellen Untersuchungen steigt in einigen Messungen das Reibmoment mit der Temperatur an, weshalb auch die Reduktion durch die Anregung im Laufe der Messung abnimmt (vgl. Abb. 5.15). Dieser Effekt kann allerdings nur in wenigen Durchführungen beobachtet werden und ist wesentlich schwächer ausgeprägt als in der Simulation. Insbesondere kann im Experiment keine Überhöhung der Reibkraft durch thermische Effekte beobachtet werden. Insgesamt weist der Prüfstand eine sehr schwache Abhängigkeit der Reibkraft und deren Reduktion durch hochfrequente Anregung von der Temperatur auf.

## 5.5 Diskussion

Nach der Gegenüberstellung der theoretischen und experimentellen Ergebnisse zum Einfluss der thermomechanischen Kopplung in einem trockenen Gleitlager unter hochfrequenter Anregung erfolgt in diesem Unterkapitel eine Bewertung des Simulationsmodells sowie des Prüfstands. Dafür werden jeweils die Stärken und Schwächen erläutert und mögliche Verbesserungen diskutiert.

### 5.5.1 Bewertung des Simulationsmodells

Das theoretische Modell berücksichtigt die beidseitige Kopplung zwischen reibungsbedingter Wärmeentwicklung und deren Einfluss auf das dynamische und tribologische Verhalten des Systems. Dank der verwendeten mathematischen Methoden kann das gesamte gekoppelte Verhalten durch einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben werden, was eine sehr effiziente Simulation erlaubt. Im Abgleich mit den Ergebnissen aus dem Experiment scheint die Kopplung allerdings zu stark auszufallen. Das Hinterfragen der Modellierung sowie das Treffen realistischerer Annahmen könnten diese Wechselwirkung abschwächen und zu einer besseren Übereinstimmung führen.

Ein Aspekt ist die Berücksichtigung einer nachgiebigen Umgebung der Reibhülse. Im Modell wird von einer starren Umgebung ausgegangen, was das System sehr steif wirken lässt. Die Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Umgebung der Hülse reduziert die Flächenpressung im Kontakt und führt damit auch zu einer geringeren Kopplung zwischen den thermomechanischen Größen und dem dynamischen und tribologischen Verhalten. Die Modellgleichungen würden dadurch an Komplexität zunehmen, allerdings könnten die gleichen Methoden verwendet werden, weshalb der Aufwand für die Simulation in der gleichen Größenordnung liegen würde.

Außerdem wird bei dem Bolzen von einem ebenen Problem ausgegangen, ein Wärme- fluss oder eine Ausdehnung in axialer Richtung wird also nicht berücksichtigt. Das Einbeziehen der axialen Dimension des Bolzens hat zum einen eine weitere Wärmesenke zur Konsequenz, weshalb die stationäre Temperatur vermutlich geringer ausfallen wird. Zum anderen kann sich der Bolzen dann auch in axialer Richtung ausdehnen, was einen geringeren Kontaktdruck und damit auch eine geringere Kopplung zur Konsequenz hätte.

Ein weiterer Aspekt ist die Annahme einer Übermaßpassung des Bolzens, weshalb permanent ein perfekter Kontakt zwischen Bolzen und Reibhülse besteht. Diese Annahme bringt vermutlich die weitreichendsten Konsequenzen mit sich. Zum einen bleiben die Modellgleichungen vergleichsweise einfach, da eine Winkelabhängigkeit im Verschiebungs- und Temperaturfeld ausgeschlossen werden kann und die mathe-

matischen Gleichungen dadurch nicht zu komplex werden, was eine analytische Verarbeitung ermöglicht. Zum anderen hat die Annahme zur Folge, dass auf physikalischer Ebene rund um den Umfang permanent ein Kontakt zwischen Bolzen und Umgebung existiert, an welchem die Reibleistung eine Wärmequelle darstellt. Dadurch wirkt einerseits rund um den Umfang immer eine Reibkraft, andererseits existiert daher auch permanent ein Wärmefluss. Bei Betrachtung der Konstruktion des Prüfstands fällt auf, dass hier zwar eine sehr genaue, allerdings keine Übermaßpassung vorliegt. Würde dieser Umstand im Simulationsmodell berücksichtigt, gäbe es immer nur an einem Sektor des Bolzens einen Kontakt mit der Umgebung, an welchem dann Kräfte in radialer und Umfangsrichtung wirken und an dem Wärme in den Bolzen fließen kann. Bei einer thermischen Ausdehnung kann die Welle aufgrund des Spiels ausweichen und der Kontaktdruck würde viel langsamer steigen. Dadurch würde die Kopplung viel schwächer ausfallen und die Simulationsergebnisse wären vermutlich näher an den experimentellen. Allerdings wären die Modellgleichungen auch um ein Vielfaches aufwendiger und es müsste vermutlich auf numerische Verfahren wie finite Differenzen oder die Finite-Elemente-Methode zurückgegriffen werden, um die Gleichungen für das Verschiebungs- und Temperaturfeld zu lösen. Eine so einfache und schnelle Simulation wie in der vorliegenden Arbeit wäre also nicht möglich.

### 5.5.2 Bewertung des Prüfstands

Der Prüfstand erlaubt die Messung der axialen Bewegung des Gleitlagersitzes, die Temperaturmessung der Wellenoberfläche sowie die Messung des Drehmoments, das am Elektromotor anliegt. Die vorzugebenden Betriebsgrößen sind die Anregungsparameter, die radiale Last am Gleitlager sowie die angelegte Motorspannung. Mit dem vorgestellten Aufbau können nicht nur qualitativ die Ergebnisse aus vorhandener Literatur reproduziert werden, wonach überlagerte hochfrequente Schwingungen die Reibkraft reduzieren können. Auch die Temperaturrentwicklung durch die Reibleistung mit und ohne Anregung wird gemessen und ausgewertet. Damit kann ein in guter Näherung linearer Zusammenhang zwischen Reibleistung und stationärer Temperatur festgestellt werden. In einigen Messungen ist außerdem eine Rückkopplung der Temperatur auf das Reibmoment zu beobachten. Daraus kann auch ein Einfluss der Temperaturrentwicklung auf die Reibkraftreduktion durch die hochfrequente Anregung abgeleitet werden. Um die beobachteten Effekte noch genauer zu analysieren oder das Simulationsmodell und den Prüfstand näher zueinander zu bringen, werden im Folgenden einige Erweiterungen und Anpassungen erläutert.

Um mit dem Prüfstand die Simulationsergebnisse zu validieren, müsste auch im Experiment eine Presspassung vorliegen. Dadurch könnte untersucht werden, ob auch im Experiment eine starke Rückkopplung der Wärmeentwicklung auf das Reibverhalten

beobachtet werden kann. Zudem würde diese Ausführung des Lagers spielfrei sein und damit Potential für eine Lagerung mit hoher Präzision enthalten. Konstruktiv müsste das Übermaß allerdings genau ausgelegt werden, um eine zu starke Pressung zu vermeiden und eine Relativbewegung weiterhin zu ermöglichen. Ein kritischer Faktor ist neben der Lackschicht auf der Welle auch die Auswahl der Gleitbuchse. Der Hersteller des im Prüfstand verwendeten Gleitlagers fordert für den Einbau eine Spielpassung.

Eine weitere konstruktive Anpassung wäre eine Vorrichtung, mit der die aufgebrachte radiale Last gemessen werden kann. Dadurch könnten die einzelnen Messungen umfangreicher ausgewertet und verglichen werden. Zudem würde dies die Bestimmung eines Reibungskoeffizienten ermöglichen, was auch den Vergleich mit vorhandener Fachliteratur einfacher zuließe.

Bei der Inbetriebnahme des Prüfstands wurde deutlich, dass als Betriebspunkt für die Untersuchungen nur eine Anregungsfrequenz in der Nähe der Eigenfrequenz infrage kommt. Außerhalb dieses Bereichs hat die Anregung aufgrund zu kleiner Geschwindigkeiten keinen Einfluss auf das tribologische Verhalten des Drehgelenks. Durch die Verwendung einer leistungsstärkeren Kombination aus piezoelektrischem Aktor und zugehörigem Leistungsverstärker könnten auch außerhalb dieses Bereichs ausreichend große Geschwindigkeitsamplituden erzeugt werden, wodurch das System umfassender untersucht und zusätzliche günstige Betriebspunkte identifiziert werden könnten. Größere Geschwindigkeitsamplituden führen zudem zu einer größeren Reibleistung und die Auswirkung der Temperaturerhöhung könnte noch deutlicher beobachtet werden. Der in den vorgestellten Untersuchungen verwendete Leistungsverstärker kann lediglich Spannungssignale mit dem Mittelwert null ausgeben. Der verwendete Piezoaktor ist vorgespannt und darf mit elektrischen Spannungen von  $-20$  bis  $120$  V betrieben werden, dabei erreicht er einen maximalen Stellweg von  $30\text{ }\mu\text{m}$ . Mit dem Leistungsverstärker kann allerdings nur der Spannungsbereich  $-20$  bis  $20$  V abgedeckt werden, wodurch neben dem Stellweg auch die Geschwindigkeitsamplitude deutlich kleiner ausfällt. Durch die Verwendung einer leistungsstärkeren Kombination könnte also ein größerer Betriebsbereich untersucht und die Analyse ausgeweitet werden.

Der verwendete Elektromotor zum Antrieb der Welle ist ein Gleichstrommotor, bei dem die angelegte Spannung über ein Netzteil eingestellt werden kann. Der elektrische Strom sowie die Drehzahl stellen sich dann anhand des anliegenden Drehmoments ein. Durch die zusätzliche Verwendung eines Drehzahlreglers könnten die einzelnen Messungen bei vorgegebenen, konstanten Drehzahlen durchgeführt werden. Eine simultane Messung des Motorwinkels beziehungsweise der Motordrehzahl liefert zusätzlich eine wichtige Systemgröße, die zur Auswertung der Ergebnisse verwendet werden kann. Dadurch werden die Messungen und die daraus abgeleiteten Aussagen noch präziser, außerdem könnten zusätzliche Effekte aus dem Antrieb wie schwankende

Drehzahlen identifiziert oder ausgeschlossen werden. Wird dieser Gedanke erweitert, könnten durch die Verwendung entsprechender Leistungselektronik beliebige Bewegungsmuster wie periodische Bewegungen und Standzeiten realisiert werden, wie sie auch in Positionierungsanlagen vorkommen.

### 5.5.3 Fazit

Auch wenn sowohl das Simulationsmodell als auch der Prüfstand Schwächen und Verbesserungspotentiale aufweisen, liefern beide Systeme wertvolle Einblicke in die Kopplung von Reibung, Wärmeentwicklung und dynamischem Verhalten. Es kann gezeigt werden, dass durch die hochfrequente Anregung die Reibkraft in einem Drehgelenk auch bei thermomechanischer Kopplung reduziert werden kann.

Das theoretische Modell berücksichtigt die Wechselwirkung stark und zeigt auf, dass für einen Betrieb in der Nähe der Eigenfrequenz die hochfrequente Anregung aufgrund der thermomechanischen Kopplung zu einer starken Überhöhung der Reibkraft führt. Für hohe Frequenzen und starke Anregungsamplituden kann die Reibkraft jedoch stark reduziert werden. Ein wichtiger Parameter ist dabei die Umlaufgeschwindigkeit, denn nur bei kleinen Drehraten kann eine starke Reduktion realisiert werden.

Im Experiment konnte ebenfalls eine Wechselwirkung festgestellt werden, wobei der Einfluss der Temperatur auf das Reibverhalten deutlich schwächer ausfällt. Die Reibleistung führt zu einer Erwärmung der Welle und in einigen Messungen konnte in diesem Zusammenhang auch ein Anstieg des Reibmoments beobachtet werden. Auch wenn dieser Effekt vermutlich nicht auf die thermische Ausdehnung zurückgeführt werden kann, zeigt es doch deutlich, dass die Erwärmung durch die hochfrequente Anregung das Systemverhalten beeinflusst und bei der Auslegung solcher Systeme berücksichtigt werden sollte.

## 6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die zentralen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst. Abschließend erfolgt ein kurzer Ausblick auf potenzielle weiterführende Forschungsansätze, die sich aus den gewonnenen Erkenntnissen ableiten lassen.

Zur Analyse des Einflusses der thermomechanischen Kopplung in einem trockenen Gleitlager unter hochfrequenter Anregung werden in dieser Arbeit theoretische und experimentelle Untersuchungen angestellt. Damit wird beurteilt, inwiefern eine Reduktion der Reibkraft durch hochfrequente Anregung möglich ist, wenn thermisch bedingte Effekte dem entgegenwirken.

Das Simulationsmodell enthält einen schwingungsfähig gelagerten Körper mit externer Anregung, der über eine Reibstelle mit der Umgebung in Kontakt steht. Die Reibleistung stellt dabei eine Wärmequelle dar, die zu einer Temperaturänderung und damit einer thermischen Verformung des Körpers führt. Die Temperaturentwicklung sowie die thermisch bedingte Ausdehnung beeinflussen wiederum die auf den Körper wirkende Reibkraft, sodass eine vollständige Kopplung aus Bewegungsgrößen, Reibkraft und Temperatur vorliegt. Mithilfe ausgewählter mathematischer Methoden wird eine Vorgehensweise entwickelt, die für den axialsymmetrischen Fall eine semi-analytische Untersuchung des voll gekoppelten Systems ermöglicht. Die Modellgleichungen lassen sich damit auf einen Satz gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen, was eine effiziente numerische Simulation erlaubt. Die Lösungen der Systemgleichungen ermöglichen einen Vergleich der mittleren Reibkraft mit und ohne hochfrequente Anregung und damit eine Aussage, ob auch mit thermomechanischer Kopplung die Reibkraft reduziert werden kann. Aus analytischen Betrachtungen können Abschätzungen für die stationäre Temperatur des Körpers sowie für die Reibkraft angegeben werden. Außerdem kann ein Ausdruck für eine geometrie- und materialabhängige Grenzgeschwindigkeit für die Drehrate gefunden werden. Überschreitet die Drehzahl des Gleitlagers diese Grenze, steigen die Temperatur und die Reibkraft aufgrund einer thermischen Instabilität ins Unendliche. Unterhalb dieser Grenze steigt die Reibkraft mit der Drehzahl kontinuierlich an und übersteigt bei einem bestimmten

Wert die Reibkraft ohne Anregung. Bei kleinen Drehzahlen kann auch mit thermischer Kopplung eine starke Reduktion erreicht werden. Weitere einflussreiche Systemgrößen sind die Anregungsamplitude und -frequenz. Für Anregungsamplituden unterhalb der statischen Reibkraft lässt sich das Systemverhalten auf wenige Parameterverhältnisse reduzieren, die Anregungsfrequenz hat hier keinen Einfluss. Dieser Betriebsbereich ist im Kontext der Reibkraftreduktion allerdings uninteressant, mit Anregung kann die Reibkraft je nach Parametersatz um maximal 40 % reduziert werden. Für deutlich größere Anregungsamplituden führt eine Anregung im Bereich der Eigenfrequenz des zugrundeliegenden linearen Systems zu einer vielfachen Überhöhung der Reibkraft, da hier hohe stationäre Temperaturen erreicht werden. Bei hohen Frequenzen kann die Reibkraft bei starker Anregung und kleiner Drehzahl um 99 % reduziert werden. Laut Simulationsergebnissen können hochfrequente überlagerte Schwingungen auch bei Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung zu einer starken Reduktion der Reibkraft führen.

Zur experimentellen Untersuchung wird ein Prüfstand herangezogen, bei dem eine Welle in einer Gleitbuchse gelagert ist, die axial zu hochfrequenten Schwingungen angeregt wird. Das Moment zum Antrieb der Welle wird mit einem Drehmomentsensor gemessen. Ein berührungsloses Thermometer misst die Temperatur der Wellenoberfläche im Reibkontakt durch eine kleine Bohrung in der Lagereinheit. Durch die überlagerte hochfrequente Schwingung im Reibkontakt der Lagerbuchse kann das Drehmoment um bis zu 75 % reduziert werden. Mit größerer Drehzahl verringert sich auch im Experiment die Reduktion. Bei den Messungen wird jeweils ein Temperaturanstieg beobachtet, wobei die stationäre Temperatur näherungsweise proportional zur Reibleistung zunimmt. In Messungen mit großer radialer Last kann mit dem Temperaturanstieg zudem auch ein Anstieg des Drehmoments beobachtet werden. Dadurch verringert sich die Reduktion, die durch die hochfrequente Anregung erreicht werden kann. Auch wenn die Wechselwirkung zwischen dem Temperaturanstieg und dem Reibverhalten im Experiment deutlich schwächer ausgeprägt ist als in der Simulation, kann dennoch eine Rückkopplung beobachtet werden, die in der Auslegung von Gleitlagern Berücksichtigung finden sollte.

Ausgehend von den gewonnenen Erkenntnissen dieser Arbeit können weitere Untersuchungen angestrebt werden. Auf Seiten der Simulation kann eine Erweiterung der Modellierung tiefere Einblicke geben. Hier können die Berücksichtigung der axialen Ausdehnung der Welle, die nachgiebige Umgebung oder die Spielpassung im Lager genannt werden. Die entwickelte Methodik lässt sich auf eine nachgiebige Umgebung und die axiale Ausdehnung erweitern. Auch wenn die Ausgangsgleichungen dann komplexer sind, lassen sich mit den vorgestellten Methoden Gleichungen für das voll gekoppelte Systemverhalten ableiten und dadurch auch umfangreichere Modelle

---

effizient simulieren. Die Berücksichtigung einer Spielpassung oder einer Schiefstellung der Welle kann nicht ohne Weiteres mit der entwickelten Methodik behandelt werden. Ob eine Erweiterung der Vorgehensweise möglich ist oder ob numerische Verfahren zur Diskretisierung notwendig sind, bedarf weiterer Untersuchungen. Alle Anpassungen hätten allerdings, in unterschiedlichem Ausmaß, eine schwächere Kopplung zwischen dem thermomechanischen und dem dynamischen System zur Folge. Mit dem erweiterten Simulationsmodell kann eine Validierung durch die experimentellen Ergebnisse angestrebt werden.

Auf Seiten des Prüfstands bieten sich Anpassungen wie ein leistungsstärkeres System aus piezoelektrischem Aktor und zugehörigem Leistungsverstärker oder eine Vorrichtung zur Einstellung und Quantifizierung der radialen Last an. Dadurch kann das Systemverhalten noch präziser analysiert und quantitative Aussagen getroffen werden. Eine weitreichendere Erweiterung bestünde aus der Realisierung einer Presspassung im Gleitlager in Verbindung mit einer Drehregelung des Elektromotors. Zum einen wäre diese Konfiguration näher am Simulationsmodell orientiert, zum anderen ließe sich dadurch eine Ausführung eines Drehgelenks realisieren, das im Stillstand aufgrund der Haftreibung ein Reaktionsmoment aufnehmen kann und für die Ermöglichung der Rotation hochfrequent angeregt wird, um das Haften aufzubrechen. Dies stellt eine interessante Anwendung der in dieser Arbeit vorgestellten Thematik dar und kann genutzt werden, um die Relevanz der thermomechanischen Kopplung in trockenen Gleitlagern weiter zu untersuchen.



# **Anhang**



# A Greensche Funktionen

## A.1 Greensche Funktionen im Bildbereich

Die Funktionen  $\bar{G}_{m,q}(s)$ ,  $\bar{G}_{m,0}(s)$ ,  $\bar{G}_{k,q}(s)$  und  $\bar{G}_{k,0}(s)$  sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\bar{G}_{m,q}(s) = \frac{2I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}f_p(s)} \quad (A.1)$$

$$\bar{G}_{m,0}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2BiI_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{s\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}f_p(s)} \quad (A.2)$$

$$\bar{G}_{k,q}(s) = \frac{I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{f_p(s)} \quad (A.3)$$

$$\bar{G}_{k,0}(s) = \frac{1}{s} - \frac{BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{sf_p(s)} \quad (A.4)$$

mit

$$f_p(s) = \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right) + BiI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right). \quad (A.5)$$

## A.2 Inverse Laplace-Transformation der Greenschen Funktionen

Im Folgenden werden die Funktionen  $\bar{G}$  aus dem Bildbereich in den Zeitbereich transformiert, wofür jeweils das Residuentheorem angewendet wird.

Die Funktion  $G_{m,0}(t)$  lässt sich durch

$$\begin{aligned} G_{m,0}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{G}_{m,0}(s) \} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s_n} (\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

berechnen, wofür die Residuen an den Polstellen bestimmt werden müssen. Die Polstellen von  $\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)$  liegen bei  $s_0 = 0$  und  $s_n = -\varepsilon \lambda_n^2$ , wobei  $\lambda_n$  die abzählbar unendlich vielen Nullstellen der transzendenten Eigenwertgleichung

$$0 = BiJ_0(\lambda) - \lambda J_1(\lambda) \quad (\text{A.7})$$

sind. Da die Polstellen alle von erster Ordnung sind, ergeben sich die Residuen zu

$$\text{Res}_{s_n} (\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) = \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n) \bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) , \quad n = 0 \dots \infty . \quad (\text{A.8})$$

Für die Polstelle  $s_0 = 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s_0} (\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s \bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) \\ &= 1 - 2 \lim_{s \rightarrow 0} \frac{I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Für die übrigen Polstellen gilt

$$\begin{aligned} \text{Res}_{s_n} (\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) &= \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n) \bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) \\ &= -\frac{2BiI_1\left(\sqrt{\frac{s_n}{\varepsilon}}\right)}{s_n \sqrt{\frac{s_n}{\varepsilon}}} \exp(s_n t) \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{f_p(s)} \\ &= \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \frac{2BiJ_1(\lambda_n)}{-\varepsilon \lambda_n^3} \frac{1}{f'_p(-\varepsilon \lambda_n^2)} , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

wobei die modifizierten Besselfunktionen zu Besselfunktionen umgeschrieben wurden. Es ist

$$f'_p(-\varepsilon \lambda_n^2) = \frac{BiJ_1(\lambda_n) + \lambda_n J_0(\lambda_n)}{2\varepsilon \lambda_n} \quad (\text{A.11})$$

und das Residuum ergibt sich nach Vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\text{Res}_{s_n}(\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) &= \frac{4BiJ_1(\lambda_n)}{\lambda_n^2(BiJ_1(\lambda_n) + \lambda_nJ_0(\lambda_n))} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t) \\ &= \frac{4Bi^2}{\lambda_n^2(Bi^2 + \lambda_n^2)} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t).\end{aligned}\quad (\text{A.12})$$

Damit lässt sich die Greensche Funktion  $G_{m,0}(t)$  im Zeitbereich durch

$$\begin{aligned}G_{m,0}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s_n}(\bar{G}_{m,0}(s) \exp(st)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Bi^2}{\lambda_n^2(Bi^2 + \lambda_n^2)} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t) \\ &= Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2} \exp(-\varepsilon\lambda_n^2 t)\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

angeben, wobei der Koeffizient

$$b_n = \frac{4Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \quad (\text{A.14})$$

eingeführt wurde.

Die Berechnung der Funktion

$$\begin{aligned}G_{k,q}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\bar{G}_{k,q}(s)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s_n}(\bar{G}_{k,q}(s) \exp(st))\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

erfolgt analog über die Berechnung der Residuen, wobei auch hier alle Polstellen von erster Ordnung sind. Diese sind identisch zu denen von  $\tilde{G}_{m,q}(s)$  und lassen sich durch Gl. (A.7) bestimmen. Die Residuen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{s_n}(\tilde{G}_{k,q}(s) \exp(st)) &= \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n) \tilde{G}_{k,q}(s) \exp(st)) \\
&= \exp(s_n t) I_0\left(\sqrt{\frac{s_n}{\varepsilon}}\right) \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{f_p(s)} \\
&= \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n) \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{1}{f_p'(s)} \\
&= \frac{J_0(\lambda_n) 2 \varepsilon \lambda_n}{Bi J_1(\lambda_n) + \lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \\
&= \frac{2 \varepsilon \lambda_n^2}{Bi^2 + \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t). \tag{A.16}
\end{aligned}$$

Schließlich lässt sich die Funktion  $G_{k,q}(t)$  durch die unendliche Summe

$$\begin{aligned}
G_{k,q}(t) &= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_n^2}{Bi^2 + \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \\
&= \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \tag{A.17}
\end{aligned}$$

ausdrücken, mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{2 \lambda_n^2}{Bi^2 + \lambda_n^2} . \tag{A.18}$$

Die Funktion  $G_{k,0}(t)$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
G_{k,0}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\tilde{G}_{k,0}(s)\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res}_{s_n}(\tilde{G}_{k,0}(s) \exp(st)) . \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Die Polstellen liegen bei  $s_0 = 0$  und den Nullstellen der Eigenwertgleichung (A.7). Das Residuum an der Stelle  $s_0$  berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{s_0} (G_{k,0}(s) \exp(st)) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s G_{k,0}(s) \exp(st)) \\
&= 1 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Bi I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\varepsilon}}\right)}{f_p(s)} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

An den übrigen Polstellen  $s_n = -\varepsilon \lambda_n^2$  ergibt sich das Residuum durch

$$\begin{aligned}
\text{Res}_{s_n} (\bar{G}_{k,0}(s) \exp(st)) &= \lim_{s \rightarrow s_n} ((s - s_n) \bar{G}_{k,0}(s) \exp(st)) \\
&= -\frac{Bi I_0\left(\sqrt{\frac{s_n}{\varepsilon}}\right)}{s_n} \exp(s_n t) \lim_{s \rightarrow s_n} \frac{s - s_n}{f_p(s)} \\
&= -\frac{Bi I_0(i \lambda_n)}{-\varepsilon \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \frac{1}{f_p'(-\varepsilon \lambda_n^2)} \\
&= \frac{Bi J_0(\lambda_n)}{\varepsilon \lambda_n^2} \frac{2 \varepsilon \lambda_n}{Bi J_1(\lambda_n) + \lambda_n J_0(\lambda_n)} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \\
&= \frac{2Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
G_{k,0}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t) \\
&= Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^2} \exp(-\varepsilon \lambda_n^2 t).
\end{aligned} \tag{A.22}$$



## B Identitäten der Eigenwerte und Koeffizienten

Die in Abschnitt 3.1.3 verwendeten Identitäten für die Summen der Koeffizienten werden im Folgenden hergeleitet. Die Identitäten lauten

$$Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi}{Bi^2 + \lambda_n^2} = 1 \quad (B.1)$$

und

$$Bi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Bi^2}{\lambda_n^2 (Bi^2 + \lambda_n^2)} = 1, \quad (B.2)$$

wobei  $Bi$  eine Konstante ist und die Eigenwerte  $\lambda_n$  mithilfe der transzendenten Gleichung

$$0 = BiJ_0(\lambda_n) - \lambda_n J_1(\lambda_n) \quad (B.3)$$

bestimmt werden.

Grundlage für die Herleitung der Identitäten ist die Theorie der Fourier-Bessel-Reihen beziehungsweise Dini-Reihen [127, Kap. 18], [14]. Demnach kann eine Funktion  $f(r)$  im Bereich  $r \in (0, 1)$  in eine Reihe der Gestalt

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n J_0(\lambda_n r) \quad (B.4)$$

entwickelt werden. Die Eigenwerte  $\lambda_n$  werden mithilfe von Gl. (B.3) bestimmt und für die Koeffizienten  $d_n$  wird die Funktion  $f(r)$  mit der Gewichtungsfunktion  $w(r) = r$  auf  $J_0(\lambda_n r)$  projiziert und mit  $N_n^2$  normiert:

$$d_n = \frac{1}{N_n^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r) dr . \quad (\text{B.5})$$

Der Normierungsfaktor  $N_n^2$  wird durch

$$\begin{aligned} N_n^2 &= \int_0^1 r J_0^2(\lambda_n r) dr \\ &= \frac{1}{2} (J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

berechnet. Als Beleg für die Identität aus Gl. (B.1) wird nun die konstante Funktion  $f(r) = 1$  gemäß Gl. (B.4) in eine Reihe entwickelt:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n J_0(\lambda_n r) . \quad (\text{B.7})$$

Die Koeffizienten ergeben sich durch

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{N_n^2} \int_0^1 r J_0(\lambda_n r) dr \\ &= \frac{1}{N_n^2} \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} \\ &= \frac{2}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Aus Gl. (B.3) folgt nach Umstellen

$$J_1(\lambda_n) = \frac{Bi}{\lambda_n} J_0(\lambda_n) . \quad (\text{B.9})$$

---

Außerdem wird ausgenutzt, dass die Reihe aus Gl. (B.7) für jedes  $r$  gegen 1 konvergieren soll, weshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $r = 1$  gesetzt werden darf. Nach Einsetzen der Koeffizienten  $d_n$  und Vereinfachen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n J_0(\lambda_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(\lambda_n) + J_1^2(\lambda_n)} \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} J_0(\lambda_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n^2}{J_0^2(\lambda_n) (\lambda_n^2 + Bi^2)} \frac{Bi}{\lambda_n^2} J_0^2(\lambda_n) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi}{\lambda_n^2 + Bi^2} ,
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

was genau Gl. (B.1) entspricht.

Für die Herleitung der zweiten Identität aus Gl. (B.2) wird wieder die konstante Funktion  $f(r) = 1$  herangezogen. Um den gewünschten Ausdruck zu erhalten, wird die Energie des Signals  $f(r)$  betrachtet, die mit

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 r f^2(r) dr \\
 &= \int_0^1 r dr \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

gegeben ist. Wird für  $f(r)$  die Reihenentwicklung aus Gl. (B.7) in das Integral eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 r f^2(r) dr \\
 &= \int_0^1 r \left( \sum_{n=1}^{\infty} d_n J_0(\lambda_n r) \right)^2 dr .
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Die Integration über das Quadrat der Summe kann aufgrund der Orthogonalität der Basisfunktionen  $J_0(\lambda_n r)$  bezüglich  $r$  beziehungsweise unter Verwendung des Satzes von Parseval [102] folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^1 r \left( \sum_{n=1}^{\infty} d_n J_0(\lambda_n r) \right)^2 dr \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \int_0^1 r J_0^2(\lambda_n r) dr \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 N_n^2.
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Der Ausdruck  $d_n^2 N_n^2$  ergibt sich zu

$$d_n^2 N_n^2 = \frac{2Bi^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + Bi^2)}. \tag{B.14}$$

Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für die Signalenergie  $E$  und anschließende Multiplikation mit zwei ergibt

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Bi^2}{\lambda_n^2 (\lambda_n^2 + Bi^2)}, \tag{B.15}$$

was genau der Identität aus Gl. (B.2) entspricht.





# Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1: <i>pv</i> -Diagramm unterschiedlicher Gleitlager nach Czichos [42] . . . . .	3
Abb. 1.2: Reibungszahl $f$ über Pressung $p$ und Gleitgeschwindigkeit $v$ nach Czichos [42] . . . . .	4
Abb. 1.3: Zu reibungserregten Schwingungen neigendes System, übernommen aus [120]. (a) Viskoelastisch gelagerter Körper auf einem umlaufenden Band, (b) Reibcharakteristik mit negativem Gradienten für kleine Relativgeschwindigkeiten . . . . .	7
Abb. 1.4: Zu reibungserregten Schwingungen neigendes System mit Modenkopplung, übernommen aus [60] . . . . .	9
Abb. 1.5: Geglätteter Reibwert aus [116] . . . . .	12
Abb. 2.1: Einfaches physikalisches Modell eines Gleitlagers . . . . .	21
Abb. 2.2: Verhältnis aus Reibkraft mit und ohne Anregung über dem Geschwindigkeitsverhältnis . . . . .	23
Abb. 2.3: Wärmeleitung in einer rechteckigen Platte mit Außentemperatur $T_u(t)$ und isoliertem Rand in vertikaler Richtung . . . . .	24
Abb. 2.4: Temperaturverlauf in einer rechteckigen Platte, Parametersatz: $\kappa = \frac{1}{15}$ , $h = 7$ , $\ell = 1$ , $T_0 = 1$ , $N_{ew} = 200$ . . . . .	29
Abb. 2.5: Temperaturfeld in einer rechteckigen Platte über der Längskoordinate und der Zeit . . . . .	29
Abb. 2.6: Vergleich des vollen und gemittelten Systems für $k = 1$ , $C = 2$ , $a = 4$ , $\omega = \frac{1}{4}$ und $\varepsilon = \frac{1}{50}$ , $x^* \approx 3,5$ , $T_1 \approx 55$ . . . . .	33
Abb. 3.1: Prinzipskizze eines rotatorischen Gleitlagers unter hochfrequenter (HF) axialer Anregung . . . . .	36
Abb. 3.2: Minimalmodell eines Drehgelenks mit trockener Reibung unter axialer Anregung . . . . .	37
Abb. 3.3: Querschnitt des thermomechanischen Kontinuums . . . . .	39

Abb. 4.1: Lösung der gekoppelten Systemgleichungen für folgende Parameter: $\omega = 1, v_0 = 0,01, \mu_0 = 0,1, D = 0, \gamma = 200, \varepsilon = 0,01, Bi = 5, \eta = 0,2, C_0 = 2,5, \hat{p} = 10, (v_b = 1,25, f_{\text{stat}} = 2,5, V = 0,008)$ und homogene Anfangsbedingungen	60
Abb. 4.2: Vergleich der Reibkraft	61
Abb. 4.3: Einfluss der Anregungsfrequenz	61
Abb. 4.4: Starke Anregung $\hat{f} = 5, (F = 2)$ bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen	63
Abb. 4.5: Schwache Anregung bei unterschiedlichen Werten von $v_0$ , die übrigen Parameter entsprechen Abb. 4.1	64
Abb. 4.6: Starke Anregung bei unterschiedlichen Werten von $v_0, \omega = 5$ und $\hat{f} = 5, F = 2$ , die übrigen Parameter entsprechen Abb. 4.1	65
Abb. 4.7: Einfluss viskoser Dämpfung $D = 0,1$ , verbleibende Parameter wie in Abb. 4.1a und 4.4a	66
Abb. 4.8: Einfluss des zustandsabhängigen Reibwerts bei schwacher Anregung mit $T_s = 0,2$ und $v_s = 0,0006$	67
Abb. 4.9: Einfluss des zustandsabhängigen Reibwerts, mit $T_s = 0,2$ und $v_s = 0,0006$	68
Abb. 4.10: Vergleich der vollen und gemittelten Systemgleichungen für $\hat{f} = 2, \gamma = 200, D = 0, \eta = 0,2, C_0 = 2,5, \hat{p} = 10, \mu_0 = 0,1$	69
Abb. 4.11: Volles und gemitteltes System bei starker Anregung: $D = 0, v_0 = 0,02, \gamma = 400, \varepsilon = 0,01, Bi = 1, \eta = 0,2, C_0 = 2,5, \hat{p} = 10, \mu_0 = 0,1, v_b = 0,125, f_{\text{stat}} = 2,5$	70
Abb. 4.12: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungsspannweite $\hat{f}$ bei unterschiedlichen Frequenzen $\omega$ für $f_{\text{stat}} = 2,5$ und $V = 0,0008$	72
Abb. 4.13: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungskraft $\hat{f}$ bei unterschiedlichen Frequenzen $\omega$ für $f_{\text{stat}} = 2,5$ und $V = 0,08$	73
Abb. 4.14: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Anregungsspannweite $\hat{f}$ und unterschiedlichem Übermaß $C_0, \omega = 5, v_0 = 0,0001$ und $v_b = 1,25$	73
Abb. 4.15: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit der Umlaufgeschwindigkeit $v_0$ bei starker Anregung, $\omega = 5, f_{\text{stat}} = 2,5$ und $v_b = 1,25$	75
Abb. 4.16: Stationäre Systemgrößen in Abhängigkeit von $\omega$ und $\hat{f}$ für $V = 0,08$ und $f_{\text{stat}} = 2,5$	75
Abb. 4.17: Prozentuale Reduktion der Reibkraft bei $f_{\text{stat}} = 2,5$	76
Abb. 5.1: Fotografien des Prüfstandsaufbaus	80
Abb. 5.2: Fotografie des Messaufbaus	81
Abb. 5.3: Informationsfluss	81
Abb. 5.4: Amplituden- und Phasengang des Systems ohne Reibkontakt	84

Abb. 5.5: Momentenverlauf und Temperaturanstieg ohne Anregung von zwei Konfigurationen bei 24 V Motorspannung . . . . .	86
Abb. 5.6: Mittleres Moment und stationärer Temperaturanstieg der einzelnen Konfigurationen bei verschiedenen Umlaufgeschwindigkeiten der Wellenoberfläche . . . . .	87
Abb. 5.7: Zusammenhang zwischen Temperatur und Drehmoment . . . . .	88
Abb. 5.8: Systemgrößen bei einer Bandbreite von Anregungsfrequenzen . . . . .	90
Abb. 5.9: Ausschnitt aus einem Messschrieb . . . . .	90
Abb. 5.10: Vergleich von Drehmoment und Temperatur bei zwei Messungen an Konfiguration 3 mit 16 V Motorspannung ohne und mit Anregung . . . . .	91
Abb. 5.11: Mittleres Drehmoment und stationärer Temperaturanstieg über der Umfangsgeschwindigkeit . . . . .	92
Abb. 5.12: Abhängigkeit der Geschwindigkeitsgrößen und stationäre Temperatur . . . . .	93
Abb. 5.13: Momentenverlauf über Temperaturentwicklung . . . . .	94
Abb. 5.14: Einfluss der Anregung auf das Drehmoment und die Temperatur . . . . .	95
Abb. 5.15: Reibungsreduktion über der Temperaturdifferenz bei unterschiedlichen Motorspannungen . . . . .	96



# Literaturverzeichnis

- [1] Afferrante, L. und M. Ciavarella (2004): Frictionally excited thermoelastic instability in the presence of contact resistance. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* **39**(4), S. 351–357.
- [2] Afferrante, L., M. Ciavarella und J. R. Barber (2006): Sliding thermoelastodynamic instability. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **462**(2071), S. 2161–2176. doi: [10.1098/rspa.2006.1676](https://doi.org/10.1098/rspa.2006.1676).
- [3] Afferrante, L. und M. Ciavarella (2007): Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **55**(4), S. 744–764. doi: [10.1016/j.jmps.2006.10.004](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.10.004).
- [4] Albers, A., L. Deters, J. Feldhusen, E. Leidich, H. Linke, G. Poll und J. Wallaschek (2012): *Konstruktionselemente des Maschinenbaus 2: Grundlagen von Maschinenelementen für Antriebsaufgaben*. 8. Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer.
- [5] Amer, T. S., M. O. Shaker und H. A. Dahab (2023): Analysis of the stick-slip behavior of coupled oscillators with dry friction. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control* **42**(3), S. 1251–1275.
- [6] Arens, T., F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel, T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn et al. (2018): Funktionentheorie–von komplexen Zusammenhängen. In: *Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- [7] Ashby, M. F., J. Abulawi und H. S. Kong (1991): Temperature Maps for Frictional Heating in Dry Sliding. *Tribology Transactions* **34**(4), S. 577–587. doi: [10.1080/10402009108982074](https://doi.org/10.1080/10402009108982074).
- [8] Awrejcewicz, J. und Y. Pyryev (2002): Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements. *International Journal of Engineering Science* **40**(10), S. 1113–1130.
- [9] Awrejcewicz, J. und Y. Pyryev (2003): Influence of tribological processes on a chaotic motion of a bush in a cylinder-bush system. *Meccanica* **38**, S. 749–761.
- [10] Awrejcewicz, J. und Y. Pyryev (2005): Thermo-mechanical model of frictional self-excited vibrations. *International journal of mechanical sciences* **47**(9), S. 1393–1408.

- [11] Barber, J. R. (1967): The influence of thermal expansion on the friction and wear process. *Wear* **10**(2), S. 155–159. doi: [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(67\)90087-7](https://doi.org/10.1016/0043-1648(67)90087-7).
- [12] Barber, J. R., W. R. Hawthorne und M. J. Lighthill (1969): Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **312**(1510), S. 381–394. doi: [10.1098/rspa.1969.0165](https://doi.org/10.1098/rspa.1969.0165).
- [13] Barber, J. R. (1970): The conduction of heat from sliding solids. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **13**(5), S. 857–869.
- [14] Baricz, Á., D. Jankov und T. K. Pogány (2013): Integral representations of Dini series of Bessel functions. *Integral transforms and special functions* **24**(8), S. 628–635.
- [15] Bartz, W. J. (1993): *Selbstschmierende und wartungsfreie Gleitlager*. Kontakt & Studium. Ehningen bei Böblingen: expert-Verlag.
- [16] Bauer, F. (2021): *Tribologie: prägnant und praxisrelevant*. Springer eBook Collection. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- [17] Benad, J., K. Nakano, V. L. Popov und M. Popov (2019): Active control of friction by transverse oscillations. *Friction* **7**, S. 74–85.
- [18] Bender, C. M. und S. A. Orszag (1978): *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. International series in pure and applied mathematics. New York, Düsseldorf: McGraw-Hill.
- [19] Bengisu, M. T. und A. Akay (1994): Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration* **171**(4), S. 557–570.
- [20] Berger, E. J. (2002): Friction modeling for dynamic system simulation. *Appl. Mech. Rev.* **55**(6), S. 535–577.
- [21] Blekhman, I. und G. Y. Dzhanelidze (1964): Vibrational displacement (auf Russisch). *Vibracionnoe peremeshchenie*, Moscow, Nauka.
- [22] Blekhman, I. I. (2000): *Vibrational mechanics: nonlinear dynamic effects, general approach, applications*. Singapore: World Scientific.
- [23] von Böckh, P. (2006): *Wärmeübertragung*. 2., bearb. Aufl. Berlin: Springer.
- [24] Bogdanovich, P. N. und D. V. Tkachuk (2009): Thermal and thermomechanical phenomena in sliding contact. *Journal of Friction and Wear* **30**(3), S. 153–163. doi: [10.3103/s1068366609030015](https://doi.org/10.3103/s1068366609030015).
- [25] Bosman, R. und M. B. de Rooij (2010): Transient Thermal Effects and Heat Partition in Sliding Contacts. *Journal of Tribology* **132**(2). doi: [10.1115/1.4000693](https://doi.org/10.1115/1.4000693).
- [26] Boucly, V., D. Ne'lias, S. Liu, Q. J. Wang und L. M. Keer (2005): Contact Analyses for Bodies With Frictional Heating and Plastic Behavior. *Journal of Tribology* **127**(2), S. 355–364. doi: [10.1115/1.1843851](https://doi.org/10.1115/1.1843851).

- [27] Bowden, F. P. und P. H. Thomas (1954): The surface temperature of sliding solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* **223**(1152), S. 29–40. doi: [10.1098/rspa.1954.0098](https://doi.org/10.1098/rspa.1954.0098).
- [28] Bowden, F. P. und D. Tabor (1959): *Reibung und Schmierung fester Körper*. Deutsche durchgearbeitete Übersetzung der zweiten Auflage. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag.
- [29] Brockley, C. A., R. Cameron und A. F. Potter (1967): Friction-induced vibration. *Journal of Lubrication Theory*, S. 101–107.
- [30] Brogliato, B. (2016): *Nonsmooth Mechanics*. 3rd ed. Communications and Control Engineering. Cham: Springer.
- [31] Bronštejn, I. N. und K. A. Semendjaev (2016): *Taschenbuch der Mathematik*. 10., überarbeitete Auflage. Edition Harri Deutsch. Haan-Gruiten: Verlag Europa-Lehrmittel - Nourney, Vollmer GmbH & Co. KG.
- [32] Brunner, H. (2004): *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.
- [33] Bueche, A. und D. Flom (1959): Surface friction and dynamic mechanical properties of polymers. *Wear* **2**(3), S. 168–182.
- [34] Carslaw, H. S. und J. C. Jaeger (1997): *Conduction of heat in solids*. 2. ed., reprinted. Oxford science publications. Oxford: Clarendon Press.
- [35] Chatterjee, S., T. Singha und S. Karmakar (2004): Effect of high-frequency excitation on a class of mechanical systems with dynamic friction. *Journal of sound and vibration* **269**(1-2), S. 61–89.
- [36] Chernets, M., A. Kornienko und Y. Chernets (2022): Investigations on Contact Pressures and Durability of Metal-Polymer Dry Sliding Bearings with Miniature, Small and Large Diameters. *Tribology in Industry* **44**(3), S. 528.
- [37] Chernets, M., M. Pashechko, A. Kornienko und A. Buketov (2022): Study of the Influence of Temperature on Contact Pressures and Resource of Metal-Polymer Plain Bearings with Filled Polyamide PA6 Bushing. *Lubricants* **10**(1). doi: [10.3390/lubricants10010013](https://doi.org/10.3390/lubricants10010013).
- [38] Choudhry, J., A. Almqvist und R. Larsson (2021): A Multi-scale Contact Temperature Model for Dry Sliding Rough Surfaces. *Tribology Letters* **69**(4). doi: [10.1007/s11249-021-01504-z](https://doi.org/10.1007/s11249-021-01504-z).
- [39] Ciavarella, M., L. Johansson, L. Afferrante, A. Klarbring und J. R. Barber (2003): Interaction of thermal contact resistance and frictional heating in thermoelastic instability. *International Journal of Solids and Structures* **40**(21), S. 5583–5597. doi: [10.1016/s0020-7683\(03\)00313-5](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(03)00313-5).
- [40] Čičinadze, A. V. (1990): *Polymere Gleitlager*. 1. Auflage. Berlin: Verlag Technik.

- [41] Coulibaly, M., G. Chassaing und S. Philippon (2014): Thermomechanical coupling of rough contact asperities sliding at very high velocity. *Tribology International* **77**, S. 86–96. doi: [10.1016/j.triboint.2014.04.014](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2014.04.014).
- [42] Czichos, H. (2020): *Tribologie-Handbuch*. 5., überarbeitete und erweiterte Auflage. Springer eBook Collection. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- [43] Desplanques, Y. (2015): Amontons-Coulomb friction laws, a review of the original manuscript. *SAE International Journal of Materials and Manufacturing* **8**(1), S. 98–103.
- [44] Feeny, B., A. s. Guran, N. Hinrichs und K. Popp (1998): A historical review on dry friction and stick-slip phenomena. *Applied Mechanics Reviews* **51**(5).
- [45] Fidlin, A. (2005): *Nonlinear oscillations in mechanical engineering*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Science & Business Media.
- [46] Floquet, A., D. Play und M. Godet (1977): Surface temperatures in distributed contacts. Application to bearing design. *Journal of Lubrication Technology*, S. 277–283.
- [47] Floquet, A. und D. Play (1981): Contact temperature in dry bearings. Three dimensional theory and verification. *Journal of Lubrication Technology* **103**, S. 243–251.
- [48] Galvanetto, U. und C. Knudsen (1997): Events maps in a stick-slip system. *Nonlinear Dynamics* **13**(2), S. 99–115.
- [49] Galvanetto, U. (1998): Dynamics of a three DOF mechanical system with dry friction. *Physics Letters A* **248**(1), S. 57–66.
- [50] Galvanetto, U. und S. R. Bishop (1998): Computational techniques for nonlinear dynamics in multiple friction oscillators. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **163**(1-4), S. 373–382.
- [51] Galvanetto, U. (1999): Non-linear dynamics of multiple friction oscillators. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **178**(3-4), S. 291–306.
- [52] Galvanetto, U. (2004): Sliding bifurcations in the dynamics of mechanical systems with dry friction—remarks for engineers and applied scientists. *Journal of Sound and Vibration* **276**(1-2), S. 121–139.
- [53] Gao, Q., Y. Fan, Y. Wu und L. Li (2023): A harmonic balance-based method to predict nonlinear forced response and temperature rise of dry friction systems including frictional heat transfer. *Nonlinear Dynamics* **111**(15), S. 14263–14291. doi: [10.21203/rs.3.rs-2391998/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2391998/v1).
- [54] Grote, K.-H. (2014): *Taschenbuch für den Maschinenbau*. 24., aktualisierte und erweiterte Auflage. Berlin: Springer Vieweg.
- [55] Guérin, N., A. Thorin, F. Thouverez, M. Legrand und P. Almeida (2018): Thermo-mechanical Model Reduction for Efficient Simulations of Rotor-Stator Contact Interaction. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **141**(2). doi: [10.1115/1.4040858](https://doi.org/10.1115/1.4040858).

- [56] Harnoy, A. (2003): *Bearing design in machinery*. Mechanical engineering. New York: Dekker.
- [57] den Hartog, J. P. (1930): LXXIII. Forced vibrations with combined viscous and coulomb damping. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **9**(59), S. 801–817. doi: [10.1080/14786443008565051](https://doi.org/10.1080/14786443008565051).
- [58] den Hartog, J. P. (1931): Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* **53**(2), S. 107–115.
- [59] Hinrichs, N., M. Oestreich und K. Popp (1998): On the modelling of friction oscillators. *Journal of sound and Vibration* **216**(3), S. 435–459.
- [60] Hoffmann, N., M. Fischer, R. Allgaier und L. Gaul (2002): A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics research communications* **29**(4), S. 197–205.
- [61] Hoffmann, N. und L. Gaul (2003): Effects of damping on mode-coupling instability in friction induced oscillations. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **83**(8), S. 524–534. doi: <https://doi.org/10.1002/zamm.200310022>.
- [62] Hoffmann, N., N. Wagner und L. Gaul (2005): Quenching mode-coupling friction-induced instability using high-frequency dither. *Journal of sound and vibration* **279**(1-2), S. 471–480.
- [63] Holm, R. (1948): Calculation of the Temperature Development in a Contact Heated in the Contact Surface, and Application to the Problem of the Temperature Rise in a Sliding Contact. *Journal of Applied Physics* **19**(4), S. 361–366. doi: [10.1063/1.1715072](https://doi.org/10.1063/1.1715072).
- [64] Hutchings, I. M. (2016): Leonardo da Vinci's studies of friction. *Wear* **360**, S. 51–66.
- [65] Hutchings, I. M. und P. Shipway (2017): *Tribology: Friction and Wear of Engineering Materials*. Kidlington, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- [66] Ibrahim, R. und E. I. Rivin (1994): Friction-induced Vibration. *Applied Mechanics Reviews* **47**(7).
- [67] Johnson, C. T. und R. D. Lorenz (1992): Experimental identification of friction and its compensation in precise, position controlled mechanisms. *IEEE transactions on industry applications* **28**(6), S. 1392–1398.
- [68] Kapelke, S., W. Seemann und H. Hetzler (2017): The effect of longitudinal high-frequency in-plane vibrations on a 1-DoF friction oscillator with compliant contact. *Nonlinear Dynamics* **88**, S. 3003–3015.
- [69] Kapelke, S. und W. Seemann (2018): On the effect of longitudinal vibrations on dry friction: Modelling aspects and experimental investigations. *Tribology Letters* **66**, S. 1–11.

- [70] Kapelke, S. (2019): *Zur Beeinflussung reibungsbehafteter Systeme mithilfe überlagerter Schwingungen*. Dissertation. Karlsruhe: KIT Scientific Publishing.
- [71] Kennedy Jr, F. E. (1981): Surface Temperatures in Sliding Systems – A Finite Element Analysis. *Journal of Lubrication Technology* **103**, S. 90–96.
- [72] Kennedy Jr, F. E. (1984): Thermal and thermomechanical effects in dry sliding. *Wear* **100**(1-3), S. 453–476.
- [73] Kennedy, F. E., S. C. Cullen und J. M. Leroy (1989): Contact temperature and its effects in an oscillatory sliding contact. *Journal of Tribology* **111**(1), S. 63–69. doi: [10.1115/1.3261880](https://doi.org/10.1115/1.3261880).
- [74] Kumar, V. C. und I. M. Hutchings (2004): Reduction of the sliding friction of metals by the application of longitudinal or transverse ultrasonic vibration. *Tribology International* **37**(10), S. 833–840.
- [75] Leus, M. und P. Gutowski (2008): Analysis of longitudinal tangential contact vibration effect on friction force using Coulomb and Dahl models. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **46**(1), S. 171–184.
- [76] Lienhard, J. H. (2004): *A heat transfer textbook*. 3. Dover books on engineering. Mineola, NY: Dover Publ.
- [77] Linz, P. (1985): *Analytical and numerical methods for Volterra equations*. SIAM studies in applied mathematics ; 7. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial und Applied Mathematics.
- [78] Littmann, W., H. Storck und J. Wallaschek (2001): Reduction of friction using piezoelectrically excited ultrasonic vibrations. In: *Smart Structures and Materials 2001: Damping and Isolation*. Bd. 4331. SPIE, S. 302–311.
- [79] Littmann, W., H. Storck und J. Wallaschek (2001): Sliding friction in the presence of ultrasonic oscillations: superposition of longitudinal oscillations. *Archive of applied mechanics* **71**, S. 549–554.
- [80] Liu, Y., G. Ma, H. Qin, C. Han und J. Shi (2022): Research on damage and failure behaviour of coated self-lubricating spherical plain bearings based on detection of friction torque and temperature rise. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* **236**(3), S. 514–526. doi: [10.1177/13506501211016664](https://doi.org/10.1177/13506501211016664).
- [81] Maksimov, I. L. und A. L. Rakhmanov (1987): The thermofrictional oscillations under sliding. *Physics Letters A* **121**(8-9), S. 399–402.
- [82] Maksimov, I. L. (1988): Thermal Instability of Sliding and Oscillations Due to Frictional Heating Effect. *Journal of Tribology* **110**, S. 69–72.
- [83] Mansouri, M. und M. M. Khonsari (2005): Surface Temperature in Oscillating Sliding Interfaces. *Journal of Tribology* **127**(1), S. 1–9.

- [84] Michaux, M. A., A. A. Ferri und K. A. Cunefare (2007): Effect of tangential dither signal on friction induced oscillations in an SDOF model. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **2**, S. 201–210.
- [85] Mosleh, M., N. Saka und N. P. Suh (2002): A mechanism of high friction in dry sliding bearings. *Wear* **252**(1-2), S. 1–8.
- [86] Nayfeh, A. H. und D. T. Mook (2008): *Nonlinear oscillations*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons.
- [87] Niknam, A. und K. Farhang (2019): Friction-induced vibration due to mode-coupling and intermittent contact loss. *Journal of Vibration and Acoustics* **141**(2).
- [88] Nosko, O. (2016): Analytical study of sliding instability due to velocity-and temperature-dependent friction. *Tribology Letters* **61**, S. 1–10.
- [89] Nussbaum, J. und A. Ruina (1987): A two degree-of-freedom earthquake model with static/dynamic friction. *pure and applied geophysics* **125**, S. 629–656.
- [90] Oestringer, L. J. und C. Proppe (2022): On the transient thermomechanical contact simulation for two sliding bodies with rough surfaces and dry friction. *Tribology International* **170**.
- [91] Oestringer, L. J. (2023): *Thermomechanischer Kontakt und stochastische Dynamik gleitender Körper mit rauen Oberflächen*. Dissertation. Karlsruhe: KIT Scientific Publishing.
- [92] Oestringer, L. J. und C. Proppe (2023): On the fully coupled quasi-static equations for the thermoelastic halfspace. *Mechanics of Materials* **177**. doi: <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2022.104554>.
- [93] Olesiak, Z. S. und Y. A. Pyryev (2000): A nonlinear, nonstationary problem of frictional contact with inertia and heat generation taken into account. *Acta mechanica* **143**(1-2), S. 67–78.
- [94] Persson, B. N. J. (2000): *Sliding friction*. 2. ed. Nanoscience and technology. Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Hong Kong, London, Milan, Paris, Singapur, Tokyo: Springer.
- [95] Pervozvanski, A. A. und C. Canudas-de-Wit (2002): Asymptotic analysis of the dither effect in systems with friction. *Automatica* **38**(1), S. 105–113.
- [96] Play, D. und M. Godet (1977): Design of high performance dry bearings. *Wear* **41**(1), S. 25–44.
- [97] Play, D. (1978): Simulating contact conditions in dry bearings. *Tribology International* **11**(5), S. 295–301.
- [98] Pohlman, R. und E. Lehfeldt (1966): Influence of ultrasonic vibration on metallic friction. *Ultrasonics* **4**(4), S. 178–185.
- [99] Popov, M. und Q. Li (2018): Multimode active control of friction, dynamic ratchets and actuators. *Physical Mesomechanics* **21**, S. 24–31.

- [100] Popov, V. L. (2015): *Kontaktmechanik und Reibung*. 3., aktualisierte Auflage. SpringerLink. Berlin: Springer Vieweg.
- [101] Popp, K., N. Hinrichs und M. Oestreich (1995): Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous self and external excitation. *Sadhana* **20**, S. 627–654.
- [102] Puente León, F. und H. Jäkel (2019): *Signale und Systeme*. 7., überarbeitete Auflage. De Gruyter Studium. Berlin, Boston: De Gruyter.
- [103] Pyr'yev, Y. und J. Awrejcewicz (2009): *Nonsmooth Dynamics Of Contacting Thermoelastic Bodies*. Advances in Mechanics and Mathematics. New York: Springer.
- [104] Rybkiewicz, M., P. Gutowski und M. Leus (2020): Experimental and numerical analysis of stick-slip suppression with the use of longitudinal tangential vibration. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **58**.
- [105] Sahoo, P. und S. Chatterjee (2020): Effect of high-frequency excitation on friction induced vibration caused by the combined action of velocity-weakening and mode-coupling. *Journal of Vibration and Control* **26**(9-10), S. 735–746.
- [106] Sanders, J. A. und F. Verhulst (1985): *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer.
- [107] Shaw, S. W. (1986): On the dynamic response of a system with dry friction. *Journal of Sound and Vibration* **108**(2), S. 305–325.
- [108] Siegert, K. und J. Ulmer (2001): Superimposing Ultrasonic Waves on the Dies in Tube and Wire Drawing. *Journal of Engineering Materials and Technology* **123**(4), S. 517–523. doi: [10.1115/1.1397779](https://doi.org/10.1115/1.1397779).
- [109] Sinou, J.-J. und L. Jézéquel (2007): Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics-A/Solids* **26**(1), S. 106–122.
- [110] Stachowiak, G. W. und A. W. Batchelor (2005): *Engineering tribology*. 3rd ed. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [111] Starostin, N., A. Kondakov und M. Vasilieva (2012): Identification of friction heat generation in sliding bearing by temperature data. *Inverse Problems in Science and Engineering* **21**(2), S. 298–313. doi: [10.1080/17415977.2012.698616](https://doi.org/10.1080/17415977.2012.698616).
- [112] Starostin, N., A. Kondakov und M. Vasilieva (2015): Identification of friction torque in a sliding bearing by thermal data. *Inverse Problems in Science and Engineering* **23**(8), S. 1388–1404. doi: [10.1080/17415977.2015.1025070](https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1025070).
- [113] Stefański, A., J. Wojewoda und K. Furmanik (2001): Experimental and numerical analysis of self-excited friction oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals* **12**(9), S. 1691–1704.
- [114] Stelter, P. (1992): Nonlinear vibrations of structures induced by dry friction. *Nonlinear dynamics* **3**, S. 329–345.
- [115] Stopa, F. (2003): *Wartungsfreie Kunststoffgleitlager - ein Beitrag zum Einsatz in nicht umlaufenden Kreuzgelenken*. Fortschritt-Berichte VDI. Düsseldorf: VDI-Verlag.

- [116] Storck, H., W. Littmann, J. Wallaschek und M. Mracek (2002): The effect of friction reduction in presence of ultrasonic vibrations and its relevance to travelling wave ultrasonic motors. *Ultrasonics* **40**(1-8), S. 379–383.
- [117] Teidelt, E., J. Starcevic und V. L. Popov (2012): Influence of ultrasonic oscillation on static and sliding friction. *Tribology Letters* **48**, S. 51–62.
- [118] Thomsen, J. (1999): Using fast vibrations to quench friction-induced oscillations. *Journal of sound and vibration* **228**(5), S. 1079–1102.
- [119] Thomsen, J. J. (2003): *Vibrations and stability*. Bd. 2. Berlin: Springer.
- [120] Thomsen, J. J. und A. Fidlin (2003): Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38**(3), S. 389–403.
- [121] Thorin, A., N. Guérin, M. Legrand, F. Thouverez und P. Almeida (2018): Nonsmooth Thermoelastic Simulations of Blade–Casing Contact Interactions. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **141**(2). doi: [10.1115/1.4040857](https://doi.org/10.1115/1.4040857).
- [122] Tränkler, H.-R. und L. M. Reindl (2014): *Sensortechnik: Handbuch für Praxis und Wissenschaft*. 2., völlig neu bearb. Aufl. VDI-Buch. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg.
- [123] Tsai, C. und C. Tseng (2006): The effect of friction reduction in the presence of in-plane vibrations. *Archive of Applied Mechanics* **75**, S. 164–176.
- [124] Tworzydlo, W. W., E. B. Becker und J. T. Oden (1994): Numerical modeling of friction-induced vibrations and dynamic instabilities. *Appl. Mech. Rev.* **47**(7).
- [125] Van de Vrande, B. L., D. H. Van Campen und A. De Kraker (1999): An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics* **19**, S. 159–171.
- [126] Wang, X., X. Long, X. Yue, H. Dai und S. N. Atluri (2022): Bifurcation analysis of stick-slip vibration in a 2-DOF nonlinear dynamical system with dry friction. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **111**. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106475>.
- [127] Watson, G. N. (1922): *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge: University Press.
- [128] Wensrich, C. (2006): Slip-stick motion in harmonic oscillator chains subject to Coulomb friction. *Tribology International* **39**(6), S. 490–495.
- [129] Wittel, H. und D. Muhs (2015): *Roloff/Matek Maschinenelemente*. 22., überarb. und erw. Aufl. SpringerLink. Wiesbaden: Springer Vieweg.
- [130] van de Wouw, N. und R. I. Leine (2004): Attractivity of equilibrium sets of systems with dry friction. *Nonlinear Dynamics* **35**, S. 19–39.
- [131] Zhu, J., F. Xie und R. S. Dwyer-Joyce (2020): PEEK Composites as Self-Lubricating Bush Materials for Articulating Revolute Pin Joints. *Polymers* **12**(3). doi: [10.3390/polym12030665](https://doi.org/10.3390/polym12030665).



# Eigene Publikationen

- [132] Keller, S. und W. Seemann (2021): Analytical and numerical approach on quenching friction-induced oscillations in MDOF-systems by the use of high-frequency excitation. *PAMM* **21**(1). doi: [10.1002/pamm.202100066](https://doi.org/10.1002/pamm.202100066).
- [133] Keller, S. und W. Seemann (2021): Quenching friction-induced oscillations in multibody-systems by the use of high-frequency excitation. *PAMM* **20**(1). doi: [10.1002/pamm.202000185](https://doi.org/10.1002/pamm.202000185).
- [134] Keller, S. und W. Seemann (2022): Thermo-mechanische Betrachtung eines Drehgelenks mit trockener Reibung unter axialer Anregung. *Achte IFToMM D-A-CH Konferenz 2022: 24./25. Februar 2022, Online-Konferenz 2022*. doi: [10.17185/duepublico/43383](https://doi.org/10.17185/duepublico/43383).
- [135] Keller, S. und A. Fidlin (2023): Friction Reduction in a Revolute Joint by the Use of Axial High-Frequency Excitation. *Experimental Mechanics in Engineering and Biomechanics-Proceedings ICEM20*. Ed.: JF Silva Gomes, S. 177–178. doi: [10.5445/IR/1000167231](https://doi.org/10.5445/IR/1000167231).
- [136] Keller, S. und A. Fidlin (2023): Thermomechanical Investigation of a Friction Oscillator under High-frequency Excitation. *VDI-Berichte* **2429**, S. 171–184. doi: [10.51202/9783181024294-171](https://doi.org/10.51202/9783181024294-171).
- [137] Keller, S. und A. Fidlin (2024): Thermo-mechanical investigation of a friction oscillator under high-frequency excitation. *Forschung im Ingenieurwesen* **88**(1). doi: [10.1007/s10010-024-00753-3](https://doi.org/10.1007/s10010-024-00753-3).
- [138] Keller, S. und A. Fidlin (2024): Thermo-Mechanical Investigation of a Rotational Friction Joint Under High-Frequency Excitation. In: *Proceedings of ITS-IFToMM 2024*. Springer Nature Switzerland, S. 306–315. doi: [10.1007/978-3-031-62616-6\\_31](https://doi.org/10.1007/978-3-031-62616-6_31).



# Betreute Abschlussarbeiten

- [139] Kansoh, O. (2023): *Inbetriebnahme eines Tribometers und Entwicklung eines Auswertungstools*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [140] Schützke, R. (2023): *Konzeption und Konstruktion eines Prüfstands zur thermomechanischen Untersuchung von Gleitlagern unter hochfrequenter Anregung*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [141] Vogt, M. D. (2021): *Untersuchung ausgewählter Effekte in axial angeregten Drehgelenken mit trockener Reibung*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [142] Yu, H. (2021): *Parameterstudie zur Unterdrückung reibungserregter Schwingungen mithilfe hochfrequenter Anregung*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.