Didaktik der Physik
Frühjahrstagung Berlin 2005

Zur Entropieerzeugung bei der Emission und Absorption von Schwarzkörperstrahlung

Friedrich Herrmann

Abteilung für Didaktik der Physik, Universität, 76128 Karlsruhe

Kurzfassung
Der Energiestrom P durch einen Wärmeleiter hängt mit dem Entropiestrom I_S zusammen gemäß $P = T \cdot I_S$. Für die gesamte, mit Schwarzkörperstrahlung transportierte Energie gilt eine ähnliche Beziehung: $P = (3/4) \cdot T \cdot I_S$. Was haben diese beiden Gleichungen miteinander zu tun? Es wird gezeigt, dass es sich um Extremfälle handelt. Die erste Beziehung gilt für den Energiefluss zwischen zwei Körpern, die sich fast im Strahlungsgleichgewicht befinden, die zweite gilt, wenn das Strahlungsgleichgewicht maximal gestört ist.

Die Gleichungen
$P = U \cdot I,$
$P = v \cdot F,$
$P = \omega \cdot M$ und
$P = \mu \cdot I_n$

beschreiben Energietransporte. Die erste beschreibt einen Energietransport mittels eines elektrischen Stroms, die zweite einen mechanischen Energietransport, etwa über eine Fahrradkette (v ist die Winkelgeschwindigkeit, F die Kraft bzw. der Impulsstrom), die dritte den Energiestrom durch eine rotierende Welle (ω ist die Winkelgeschwindigkeit und M das Drehmoment bzw. der Drehimpulsstrom) und die vierte schließlich einen chemischen Energietransport (μ ist das chemische Potenzial und I_n der Stoffstrom).

In dieser Reihe der Energietransporte fehlt nur noch der thermische Energietransport, und man erwartet, dass dieser beschrieben wird durch die analoge Gleichung:

$$P = T \cdot I_S, \tag{1}$$

wo T die absolute Temperatur und I_S der Entropiestrom ist. Tatsächlich beschreibt diese Gleichung auch die Wärmeübertragung durch Wärmeleitung, sowie konvektive Wärmetransporte. Es ist aber merkwürdig, dass sie in einem wichtigen Fall nicht gilt, nämlich für elektromagnetische Strahlung. Wir betrachten die einfachste Art von Strahlung, die es gibt: Schwarzkörperstrahlung in einem Strahlungshohlraum. Es ist diejenige Strahlung, welche im vollständigen inneren thermischen und chemischen Gleichgewicht vorliegt. Wir versehen den Hohlraum mit einem kleinen Loch, so dass Strahlung austreten kann. Für diese austretende Strahlung gilt nicht Gleichung (1), sondern es gilt

$$P = \frac{3}{4} T \cdot I_S \tag{2}$$

Gleichungen (1) und (2) sehen sich sehr ähnlich, nur steht in Gleichung (2) vor dem Produkt aus T und I_S der Faktor 3/4. Man beachte aber, dass in Gleichung (1) P nur der Anteil des Energiestroms ist, den man als Wärme bezeichnet (und der im Allgemeinen nur einen Teil des Gesamtenergiestroms darstellt), während das P der zweiten Gleichung der Gesamtenergiestrom ist.

Woher kommt Gleichung (2)? Im Wesentlichen direkt von Planck [1]. Ausgehend vom Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$j_E = \sigma \cdot T^4 \tag{3}$$

(j_E ist die Energiestromdichte, σ die Stefan-Boltzmann-Konstante) und der Gibbsschen Fundamentalform

$$dE = TdS - pdV,$$

berechnet Planck mit rein thermodynamischen Mitteln die Entropiedichte

$$\rho_S = \frac{16\sigma}{3c} \cdot T^3 .$$

Daraus folgt die Entropiestromdichte:

$$j_S = \frac{4}{3} \sigma T^3 . \tag{4}$$

Gleichung (4) für die Entropiestromdichte sieht ähnlich aus wie Gleichung (3) für die Energiestromdichte. Nur steht T hier nicht in der vierten, sondern in der dritten Potenz, und es taucht ein Faktor 4/3 auf.
Aus (3) und (4) folgt unmittelbar:

$$j_E = \frac{3}{4} T \cdot j_S ,$$

und daraus

$$P = \frac{3}{4} T \cdot I_S$$

Der Rechengang verschafft zunächst keine tiefere Einsicht in den merkwürdigen Faktor 3/4. Wir wollen trotzdem versuchen zu verstehen, ob er irgendetwas zum Ausdruck bringt, was wir kennen oder erwarten.
Wir betrachten zunächst Abbildung 1. Sie zeigt einen strahlenden schwarzen Körper. Die blauen Pfeile stellen die Energieströmung dar, die roten den Entropiestrom. Die Breite der Pfeile ist ein Maß für die jeweilige Stromstärke.
Mit der emittierten Strahlung geht Energie nach rechts weg. Sie muss von links nachgeliefert werden. Links im Körper erfolgt der Transport durch normale Wärmeleitung. Der Energiestrom berechnet sich hier nach Gleichung (1), also

$$P = T \cdot I_{S,\,\text{Körper}}. \tag{5}$$

Rechts vom Körper, also im Bereich der Strahlung gilt Gleichung (2), also

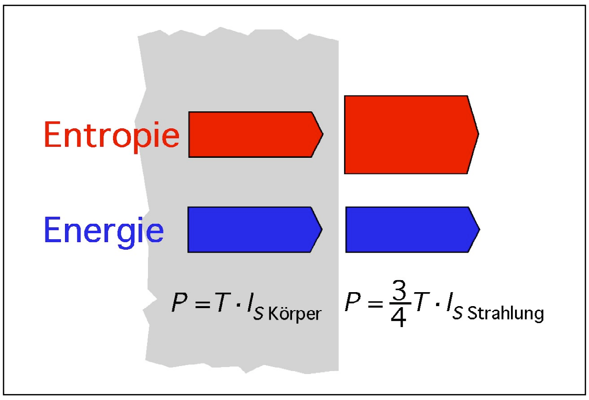

Abb. 1. Ein Körper (links) emittiert Strahlung. Der Energiestrom ist im Körper und im Strahlungsfeld derselbe. Der Entropiestrom nimmt um den Faktor 4/3 zu.

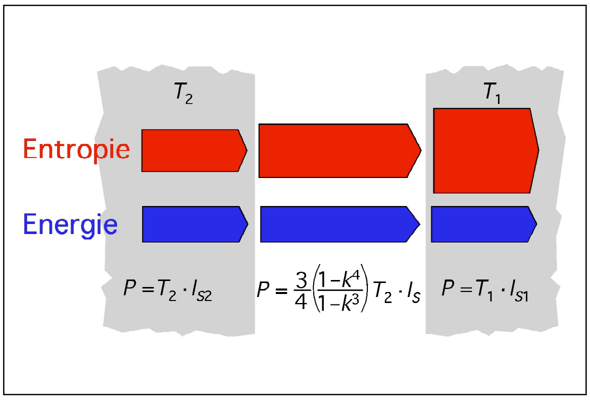

Abb. 2. Der Körper links emittiert, der rechts absorbiert Strahlung. Sowohl bei der Emission als auch bei der Absorption wird Entropie erzeugt.

$$P = \frac{3}{4} T \cdot I_{S\,\text{Strahlung}} \tag{6}$$

Da der Energiestrom links und rechts gleich ist, müssen auch die rechten Seiten der Gleichungen (5) und (6) gleich sein. Daher folgt:

$$I_{S\,\text{Strahlung}} = \frac{4}{3} I_{S,\text{Körper}} \; .$$

Der Entropiestrom nimmt also beim Übergang vom Körper ins Strahlungsfeld, d. h. bei der Emission zu:

$I_{S,\,\text{Strahlung}} > I_{S,\,\text{Körper}}$.

Man kann leicht verstehen, warum das so ist. Statt des emittierenden Körpers stellen wir uns dazu wieder den Hohlraum mit einem Loch vor. Das Loch sei zunächst geschlossen. Wir öffnen es nun ganz kurz und schließen es sofort wieder. Dabei geht eine gewisse Portion Licht hinaus. Das heißt aber, dass im Innern das Gleichgewicht gestört wurde: die Lichtverteilung ist einen Augenblick lang nicht mehr isotrop. Das Lichtfeld im Hohlraum akkomodiert sich aber sofort wieder. Es macht eine „Expansion“ in den Winkelbereich hinein, aus dem Licht entnommen wurde. Dieser Vorgang ist analog zu einem bekannteren Prozess: dem Gay-Lussac-Experiment. Ein Behälter ist durch eine Wand in zwei Teile geteilt. In dem einen Teilbehälter befindet sich ein Gas, der andere ist leer. Öffnet man nun eine Klappe zwischen den beiden Teilbehältern, so strömt Gas aus dem einen in den anderen. Dadurch wird das innere chemische und thermische Gleichgewicht wieder hergestellt. Dieser Vorgang ist stark irreversibel, d.h. es wird Entropie erzeugt. Ganz ähnlich ist es auch beim Strahlungshohlraum, dem bei der Emission Licht entnommen wird.

Wir betrachten nun eine etwas kompliziertere Anordnung. Zwei Körper, die sich auf unterschiedlichen Temperaturen befinden, stehen sich gegenüber, Abb. 2. Beide seien schwarze Strahler. Der Energiestrom ist wieder in allen Bereichen derselbe, d.h. im linken Körper, im Strahlungsfeld zwischen den Körpern und im rechten Körper. Wir fragen wieder nach dem Zusammenhang zwischen Energie- und Entropiestrom in den drei Bereichen. Links und rechts gilt Gleichung (1). Es ist also

$P = T_2 \cdot I_{S,2}$

und

$P = T_1 \cdot I_{S,1}$.

Aber auch im mittleren Bereich, also im Bereich der Strahlung, können wir den Zusammenhang zwischen P und I_S angeben. Nach Gleichung (4) berechnen wir den Entropiestrom, der zur Strahlung des linken Körpers und den der zur Strahlung des rechten gehört, und wir bilden die Differenz:

$$j_S = \frac{4}{3}\sigma (T_2^{\,3} - T_1^{\,3})$$

Damit lässt sich der Zusammenhang zwischen Energie- und Entropiestrom im Strahlungsfeld berechnen. Die Rechnung ist etwas umständlich. Wir geben hier nur das Ergebnis an:

$$P = \frac{3}{4}\left(\frac{1-k^4}{1-k^3}\right) T_2 I_S \; . \tag{7}$$

Hier wurde abkürzend $T_1/T_2 = k$ gesetzt. k ist also der Quotient aus der Temperatur T_1 des kälteren und der Temperatur T_2 des wärmeren Strahlers. Der Wert von k liegt daher zwischen null und eins.

Gleichung (7) hat wieder eine ähnliche Gestalt wie Gleichung (1), nur ist hier der Faktor vor T_2 und I_S komplizierter: Er hängt vom Verhältnis der beiden Temperaturen ab. Wir wollen diesen Faktor diskutieren. Er ist in Abb. 3 als Funktion von k darstellt. Wir betrachten die beiden Extremfälle:

1. $k = 0$. Der rechte Körper hat die Temperatur 0 K. Thermodynamisch gesehen ist das dasselbe als wäre er gar nicht vorhanden. Tatsächlich wird der Vorfaktor gleich 3/4, wie es sein muss, wenn wir nur einen Strahler haben, der einfach ins Leere strahlt.

2. $k = 1$. Jetzt wird der Vorfaktor gleich 1. Die Formel geht über in Gleichung (1), die Beziehung für die normale Wärmeleitung. Also auch für den Wärmetransport mit Strahlung kann Gleichung (1) gelten, nämlich dann, wenn der Transport über ein sehr geringes Temperaturgefälle geschieht.

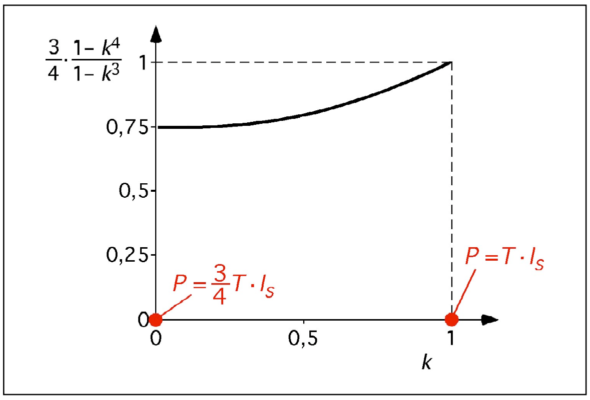

Abb. 3. Der Faktor, der den Zusammenhang zwischen Energie- und Entropiestrom regelt, hängt vom Quotienten k der Temperaturen der beteiligten Körper ab.

Auf jeden Fall ist aber der Entropiestrom nach der Absorption größer als vorher. Nicht nur bei der Emission, sondern auch bei der Absorption wird also Entropie erzeugt. Das kann man sich auf dieselbe Art plausibel machen wie die Entropieerzeugung bei der Emission. Man stellt sich den Absorber wieder als Strahlungshohlraum mit Loch vor. Dieser befindet sich auf einer niedrigeren Temperatur als die Strahlung. Es geht also ständig Strahlung durch das Loch hinein. Diese stört das Gleichgewicht im Innern des Hohlraums, und dessen Strahlung muss sich ständig irreversibel akkomodieren, um isotrop zu bleiben. Etwas gröber kann man es auch so erklären: Die Strahlung trifft auf den Absorber, so wie ein schneller Elektronenstrahl auf ein Stück Materie. Bei einem solchen Vorgang wird immer Wärme, also Entropie erzeugt.

In Abb. 4 sind die beiden Extremfälle noch einmal gegenüber gestellt. In Teilbild (a) ist die Temperaturdifferenz sehr klein, in Teilbild (b) ist sie groß. In dem Bereich zwischen den Körpern ist nicht nur der Nettoentropiestrom (rot), sondern es sind auch die Teilströme von links nach rechts bzw. von rechts nach links dargestellt. In dem Prozess von Bild (a) kompensieren sich die Teilentropieströme nahezu. Es wird fast keine Entropie erzeugt, der Prozess ist nahezu reversibel. Der Prozess wird näherungsweise durch Gleichung (1) beschrieben. In dem Prozess von Bild (b) ist der

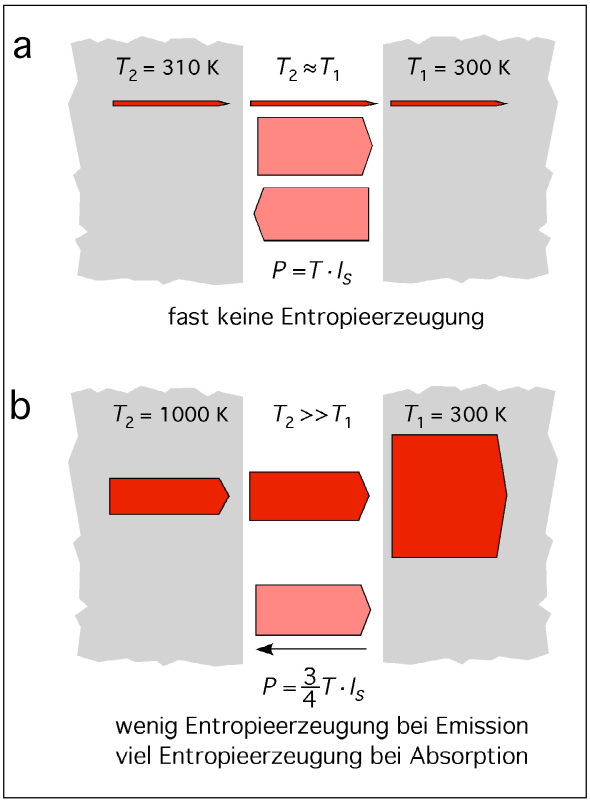

Abb. 4. (a) Die Temperaturen von emittierendem und absorbierendem Körper unterscheiden sich nur wenig, der Vorgang ist nahezu reversibel. (b) Die Temperaturen unterscheiden sich stark, der Vorgang ist stark irreversibel.

Entropiestrom, der vom linken Körper ausgeht, viel größer als der Rückstrom, der von vom rechten ausgeht. Es gilt näherungsweise Gleichung (2), die auch für die Emission ins Leere gilt. Bei der Emission und der Absorption wird Entropie erzeugt. Der Prozess ist stark irreversibel.

Literatur

[1] *Planck, M.*: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 2. Aufl., Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1913, S. 62 - 64.