KINDLER, Stephan; SCHÖNBRODT, Sarah & FRANK, Martin
Karlsruhe, Deutschland, Salzburg Österreich

Moderner Mathematikunterricht: Vermittlung der mathematischen Grundlagen künstlicher Neuronaler Netze

Künstlichen Intelligenzen (KI) wie ChatGPT beruhen auf Methoden des maschinellen Lernens (ML) und werden in unserem täglichen Leben immer präsenter. Um diese effektiv nutzen und ihre Funktionsweise und Auswirkungen kritisch bewerten zu können, sollten Nutzende bereits in der Schule (Touretzky et al., 2022) bestimmte Fähigkeiten entwickeln, die Long & Magerko (2020) als KI-Kompetenzen bezeichnen.

Ganzheitliche KI-Bildung erfordert eine interdisziplinäre Betrachtung von ML-Methoden (Micheuz, 2020). Das Verständnis der mathematischen Konzepte hinter KI-Systemen kann die Fähigkeit der realistischen Einschätzung von Chancen und Risiken von KI fördern und damit zu ihrer Entmystifizierung beitragen. Der Mathematikunterricht kann somit einen wichtigen Beitrag zu KI-Bildung leisten und umgekehrt kann die Behandlung von KI auch für das Lehren und Lernen von Mathematik gewinnbringend sein. Denn zahlreiche ML-Methoden bieten die Möglichkeit einer authentischen Anwendung schulmathematischer Inhalte in relevanten Kontexten (Schönbrodt et al., 2022; Biehler & Fleischer, 2021).

Wir legen den Fokus auf künstliche Neuronale Netze (KNNs), deren mathematischen Grundlagen aufgrund ihrer Komplexität bisher nicht im Detail für Schüler:innen aufgearbeitet wurden. Bestehende Materialien und Veröffentlichungen zu KNNs konzentrieren sich primär auf den Informatikunterricht (z. B. Heinemann et al., 2020), wobei die Mathematik nicht genauer beleuchtet wird. In einem Design-Based Research Projekt untersuchen wir, wie die mathematischen Grundlagen von KNNs didaktisch sinnvoll reduziert werden können und konzipieren digitales Lehr-Lernmaterialien für Schüler:innen der Sek. II. In diesem Beitrag diskutieren wir, wieso eine mathematische Betrachtung von KNNs mit Schüler:innen sinnvoll ist. Wir umreißen die Mathematik hinter einfachen KNNs und führen anhand des Funktionsbegriffs exemplarisch aus, dass die Thematisierung von KNNs für die mathematische Bildung von Vorteil ist.

Künstliche neuronale Netze als mathematische Funktionen

KNNs werden in der Regel als Graphen dargestellt (vgl. Abb. 1), in denen Werte links eingegeben und schrittweise durch ein Netzwerk von Knoten verarbeitet werden. Es ist dabei entscheidend zu verstehen, dass dies die graphische Darstellung einer Verkettung von Funktionen ist.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

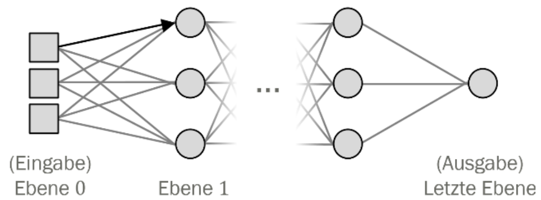

Abb. 1: Schematischer Aufbau künstlicher neuronaler Netze

In Abb. 1 repräsentiert jedes Quadrat einen Eingabewert und jeder Knoten stellt die Anwendung einer Funktion dar. Jede Verbindungslinie repräsentiert die Weitergabe von Werten an die Knoten der dahinter liegenden Ebene. Innerhalb der Knoten werden eingehende Werte x_i jeweils mit einem Parameter w_i multipliziert, bevor ein Parameter b addiert wird. Anschließend wird diese Summe in eine sogenannten Aktivierungsfunktion σ eingesetzt:

$$\sigma\left(\sum_i w_i \cdot x_i + b\right). \tag{1}$$

Die Funktionen σ können variieren, sind jedoch meist nichtlinear (z. B. die Sigmoid-Funktion mit $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$). Das gesamte Netzwerk ist folglich eine Verkettung von Funktionen, die selbst Verkettungen von linearen mit nichtlinearen Funktionen σ sind. Das Netzwerk wird durch die Anzahl und Anordnung der Funktionen, den Parametern w_i und b (zusammengefasst zu einem Vektor W) und die Wahl der Aktivierungsfunktionen σ definiert.

KNNs werden oft für überwachtes maschinelles Lernen verwendet, ein Lernparadigma, bei dem der Parameter-Vektor W anhand bekannter Datenpunkte $\left(x^{(j)}, y^{(j)}\right), j = 1, \dots, N$ mit $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ und $y^{(j)} \in \mathbb{R}$ so angepasst wird, dass bei der Übergabe eines Vektors $x^{(j)}$ an das Netzwerk der errechnete Wert $\tilde{y}^{(j)}$ möglichst dem zugehörigen Wert $y^{(j)}$ entspricht. Dazu wird eine Fehlerfunktion (z. B. Summe der kleinsten Fehlerquadrate) und letztlich ein Optimierungsproblem formuliert und gelöst:

$$\min_W \frac{1}{N} \sum_j \left(\tilde{y}^{(j)} - y^{(j)}\right)^2. \tag{2}$$

Aspekte und Grundvorstellung des Funktionsbegriffes

Der Funktionsbegriff stellt einen zentralen Inhalt der Analysis dar. Schüler:innen sollen Kompetenzen erwerben, um flexibel mit Funktionen umgehen zu können. Greefrath et al. (2016) differenzieren bei mathematischen Begriffen zwischen Aspekten (fachlicher Kern) und Grundvorstellungen (fachdidaktische Sichtweise). Dabei unterschieden sich die Aspekte in:

- Zuordnungsaspekt (ZA): Die Funktion f ist eine Zuordnung, die jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B zuordnet.

- Paarmengenaspekt (PA): f ist Teilmenge eines kartesischen Produktes zweier Mengen A, B, für die gilt: $\forall x \in A\ \exists y \in B$ mit $(x, y) \in f$.

Grundvorstellungen teilen sich nach Vollrath (1989) und Malle (2000) in:

- Zuordnungsvorstellung (ZV): Die Funktion f ordnet jedem Wert einer Größe genau einen Wert einer zweiten Größe zu.
- Kovarianzvorstellung (KV): Mit der Funktion f wird erfasst, wie sich die Änderung einer Größe auf eine zweite Größe auswirkt.
- Objektvorstellung (OV): Die Funktion f ist ein einziges Objekt, das einen Zusammenhang als Ganzes beschreibt.

Die Mathematik von KNNs als Anwendung im Analysis-Unterricht

Im Rahmen des Forschungsprojektes werden Lehr-Lern-Materialien entwickelt, welche die modernen, teilweise komplexen mathematischen Aspekte von KNNs für Schüler:innen zugänglich machen (Kindler et al., im Druck). Bei der Anwendung von KNNs zur Lösung von Problemen mit realen Datensätzen sind statistische Methoden von wesentlicher Bedeutung. Wir wollen hier aufzeigen, dass KNNs auch andere mathematische Schwerpunkte zulassen und erläutern dies exemplarisch anhand des Funktionsbegriffs.

Die gegebenen Datenpunkte stammen von einer (fehlerbehafteten) unbekannten Abbildung (PA), die durch das KNN approximiert werden soll. Der Paarmengenaspekt wird in der Schule wenig thematisiert (Greefrath et al., 2016, S. 47), findet in den Naturwissenschaften aber bspw. bei Messreihenanalysen oft Anwendung.

Die Knotenfunktionen ordnen Eingabewerten eindeutig Ausgabewerten zu (ZA & ZV), was im schulischen Kontext oft behandelt wird. Durch die Verkettung von Knotenfunktionen ergibt sich auch das KNN als Funktion. Diese ist komplizierter als aus der Schule bekannte Funktionen, aber auch diese ordnet Eingabewerten eindeutig Ausgabewerten zu (ZV). Bei der Verkettung (insb. in Abb. 1) werden die Knotenfunktionen als Objekte betrachtet und hintereinandergeschaltet (OV).

Die Formulierung der Fehlerfunktion (2) umfasst neben dem Funktionskonzept auch die Anwendung quadratischer Funktionen. Das Lösen des resultierende Minimierungsproblems ermöglicht es zudem, Konzepte aus der Differentialrechnung, z. B. Ableitung (KV) und Kettenregel, aufzugreifen.

Im entwickelten Lernmaterial wird mit einem realen Datensatz der WHO gearbeitet, mit dem die Lebenserwartung in diversen Ländern vorhergesagt werden soll. So wird die Zuordnung der Eingabewerte zu den Ausgabewerten des KNNs als Vorhersagen der Lebenserwartung interpretiert.

Im Material wird zunächst eine einzelne Knotenfunktion als Modell entwickelt, bevor mehrere dieser zu einem größeren Netz erweitert werden. Dabei vollziehen die Schüler:innen einen Perspektivwechsel und betrachten Funktionen als eigenständige Objekte (OV), die verkettet werden können.

Fazit und Ausblick

Der vorliegende Beitrag verdeutlicht, dass die Integration des Themas KNN in den Mathematikunterricht vielfältige An- und Verknüpfungspunkte schulmathematischer Inhalte der Analysis bietet. Exemplarisch wurde gezeigt, dass der Funktionsbegriff facettenreich thematisiert und unterschiedliche Aspekte und Grundvorstellungen angesprochen werden können. Aber auch andere mathematische Inhalte aus Statistik, Differenzialrechnung und analytischer Geometrie können mit Lernenden thematisiert werden.

Das entwickelte digitale Lehr-Lernmaterial zu den mathematischen Grundlagen von KNNs wird derzeit im Rahmen des Schülerprogramms CAMMP (s. www.cammp.online) mit Schüler:innen erprobt und iterativ überarbeitet.

Literatur

Biehler, R., & Fleischer, Y. (2021). Introducing students to machine learning with decision trees using CODAP and Jupyter Notebooks. *Teaching Statistics, 43*, 133–142.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H., Ulm, V. & Weigand, H. (2016). *Didaktik der Analysis - Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer-Verlag.

Heinemann, B., Budde, L., Schulte, C., Biehler, R., Frischemeier, D., Podworny, S., & Wassong, T. (2018). Data Science and Big Data in Upper Secondary Schools: What Should Be Discussed From a Perspective of Computer Science Education? *Archives of Data Science, Series A, 5*(1).

Janssen, D. (2020). *Machine learning in der Schule*. Science on Stage Deutschland e.V.

Kindler, S., Schönbrodt, S., & Frank, M. (im Druck). From school mathematics to ANNs: Developing a mathematical model to predict life expectancy. *Proceedings of CERME13*

Long, D., & Magerko, B. (2020). What is AI literacy? Competencies and design considerations. In *Proceedings of the 2020 CHI conference on human factors in computing systems*, S. 1-16.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Vieweg+Teubner.

Micheuz, P. (2020). Approaches to Artificial Intelligence as a Subject in School Education. In Brinda, T., Passey, D., Keane, T. (Hrsg.) *Empowering Teaching for Digital Equity and Agency*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59847-1_1

Schönbrodt, S., Camminady, T. & Frank, M. (2022). Mathematische Grundlagen der Künstlichen Intelligenz im Schulunterricht – In: *Mathematische Semesterberichte*, Springer, S. 73–101. https://doi.org/10.1007/s00591-021-00310-x

Touretzky, D., Gardner-McCune, C., & Seehorn, D. (2022). Machine learning and the five big ideas in AI. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 1-34.

Vollrath, H. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik 10*, 3-37.