

# Unità didattica Computer quantistici

## Prefazione

Presentiamo qui una lezione sul tema dei computer quantistici. Si basa sul KPK (Karlsruher Physikkurs)

<https://www.karlsruher-physikkurs.de/publications/englisch.html>

e presuppone lo studio dei capitoli 3, 4 e 5 del volume Fisica atomica, fisica nucleare, fisica delle particelle. Potrebbe essere inserita dopo il capitolo 9 (Diodi e transistor).

È la prima volta che pubblico una proposta didattica che non ho provato personalmente (non inseguo più da 12 anni). Pertanto, sarei lieto di ricevere un feedback.

Il testo è il risultato di innumerevoli discussioni in un piccolo gruppo di lavoro al KIT (Karlsruhe Institute of Technology), di cui fanno parte, oltre a me, Michael Pohlig e Heinz-Georg Schneider.

Importante per questa versione è stato anche il 32° workshop di didattica di Karlsruhe, che abbiamo organizzato.

<https://www.karlsruher-physikkurs.de/tagungen.html>

*Friedrich Herrmann*

## Indice

### 15. Computer quantistico

15.1 Retrospettiva: il mondo della funzione psi	3
15.2 Qubits	4
15.3 Il mondo multidimensionale dei qubit intrecciati: i computer quantistici	5
15.4 Il fantastico mondo multidimensionale	6
15.5 Applicazioni del computer quantistico	9
<i>Materiale didattico</i>	10

## 15. Computer quantistico

### 15.1 Retrospettiva: il mondo della funzione psi

Nel capitolo 3.2 abbiamo imparato come funziona la teoria quantistica. Ricapitoliamo:

Si ha un compito da svolgere, ad esempio la domanda “Come funziona un atomo di sodio?”. Si desidera sapere tutto ciò che è fisicamente interessante riguardo all’atomo di sodio: che forma ha? Che tipo di luce assorbe? È facile da ionizzare? È magnetico? Le risposte ci vengono fornite dalla teoria quantistica.

Abbiamo visto che la teoria quantistica risolve un problema in due passi. Possiamo immaginarla come due calcolatrici M1 e M2, fig. 15.1 (raffigurate nel capitolo 3.2 da due macinacaffè). Inseriamo i dati che definiscono il nostro problema in M1. M1 però non fornisce ancora il risultato cercato. Fornisce la “funzione Psi”. Con questa funzione Psi alimentiamo poi M2 e da M2 otteniamo le risposte alle nostre domande.

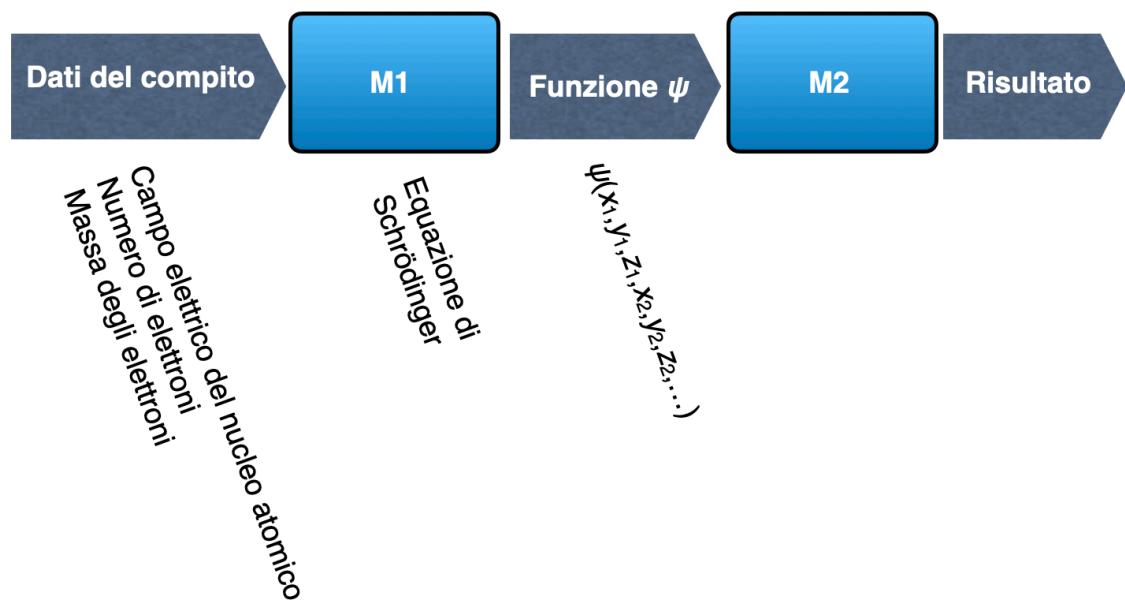


Fig. 15.1. Il funzionamento della teoria quantistica, rappresentato da due macchine calcolatrici M1 e M2. M1 calcola la funzione psi dalla descrizione del problema, mentre M2 calcola i valori numerici di interesse dalla funzione psi.

Finora non ci eravamo occupati della funzione psi. Avevamo solo appreso che si trattava di una funzione in uno spazio multidimensionale e che quindi era difficile da visualizzare. Era solo un passaggio matematico intermedio. Sapevamo che M2 ci avrebbe fornito risultati chiari.

Di seguito vogliamo approfondire la nostra comprensione del mondo descritto dalla funzione psi. In realtà, essa non rappresenta solo un risultato intermedio calcolato matematicamente, ma descrive piuttosto un mondo che esiste realmente ed è effettivamente multidimensionale.

Il fatto che descriva un mondo multidimensionale è evidente dal fatto che  $\psi$  non dipende solo dalle tre coordinate spaziali x, y e z. Il numero di variabili indipendenti è pari a 3 volte il numero di elettroni; nel caso dell’atomo di sodio sono  $11 \cdot 3 = 33$ .

Normalmente non ci accorgiamo di questa multidimensionalità. Ma come possiamo immaginarlo: viviamo in un multidimensionale, un “mondo M-D”, ma tutto ciò che percepiamo si svolge in un “mondo 3-D” tridimensionale? Lo schermo televisivo rappresenta una rozza

analoga. Tutto ciò che vediamo si svolge nel mondo 2-D dello schermo. Sappiamo però che si tratta della proiezione di un mondo 3-D.

Ora esistono possibilità di penetrare nel mondo M-D, ma solo con un grande sforzo sperimentale. Un dispositivo che funziona in questo mondo è il computer quantistico, di cui ci occuperemo di seguito.

Il mondo è ad alta dimensionalità. La funzione psi rappresenta una descrizione matematica di questo mondo.

## 15.2 Qubit

Il computer quantistico opera in un mondo M-D e ciò che fa in questo mondo lo controlliamo dal nostro mondo 3-D. Ogni operazione di calcolo del computer quantistico è un passo in una “passeggiata” in questo mondo M-D.

La struttura di un computer quantistico è semplice. È costituito da moltissimi componenti simili tra loro, chiamati qubit.

Ma cos'è un qubit? Non è facile rispondere a questa domanda, perché un qubit può essere realizzato tecnicamente in modi molto diversi. Limiteremo quindi la nostra descrizione a ciò che hanno in comune le diverse versioni di qubit.

Prima di tutto, una piccola nota: il nome Qubit è l'abbreviazione di “quantum bit”. Conosci già la parola bit: è l'unità di misura della grandezza fisica chiamata *quantità di dati*. Quindi, tieni presente che il nuovo termine 'Qubit' si riferisce a un componente elettronico, mentre il termine “bit” è un'unità di misura.

Quindi, cos'è un qubit? È un componente per il quale una determinata grandezza fisica può assumere tutti i valori compresi tra due valori limite A e B. Immagina, ad esempio, una leva che può essere inclinata avanti e indietro tra due posizioni A e B, fig. 15.2. L'angolo è la grandezza che caratterizza lo “stato” della leva.

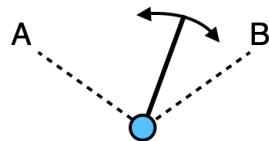


Fig. 15.2. In un qubit è possibile impostare il valore di una variabile tra un valore minimo A e un valore massimo B.

In un vero qubit, lo stato viene definito in modo diverso a seconda della realizzazione, ad esempio:

- mediante l'angolo di polarizzazione della luce (nei computer quantistici che operano otticamente)
- mediante variazioni di sovrapposizione di due stati stazionari di un atomo o di uno ione.

Per noi è sufficiente sapere che una variabile può essere impostata a piacere tra due valori limite. Si dice che il qubit si trovi in uno degli stati A o B o in uno qualsiasi degli “stati di sovrapposizione” di entrambi.

Ma manca ancora l'elemento fondamentale del computer quantistico: non solo è possibile sovrapporre gli stati A e B, ma anche gli stati di un qubit con quelli di un altro. Questo tipo

di sovrapposizione è chiamato intreccio o “entanglement”. L'elevato sforzo tecnico necessario per costruire un computer quantistico è proprio legato a questo aspetto. Affinché due qubit separati spazialmente possano essere intrecciati, devono essere molto ben schermati dall'ambiente circostante. In caso contrario, l'intreccio verrebbe immediatamente distrutto dal mondo esterno.

### 15.3 Il mondo multidimensionale dei qubit intrecciati: i computer quantistici

Come funziona il computer quantistico? È costituito da un certo numero di qubit. Un computer quantistico che deve risolvere un problema dato viene solitamente rappresentato in un diagramma come quello mostrato nella figura 15.3.

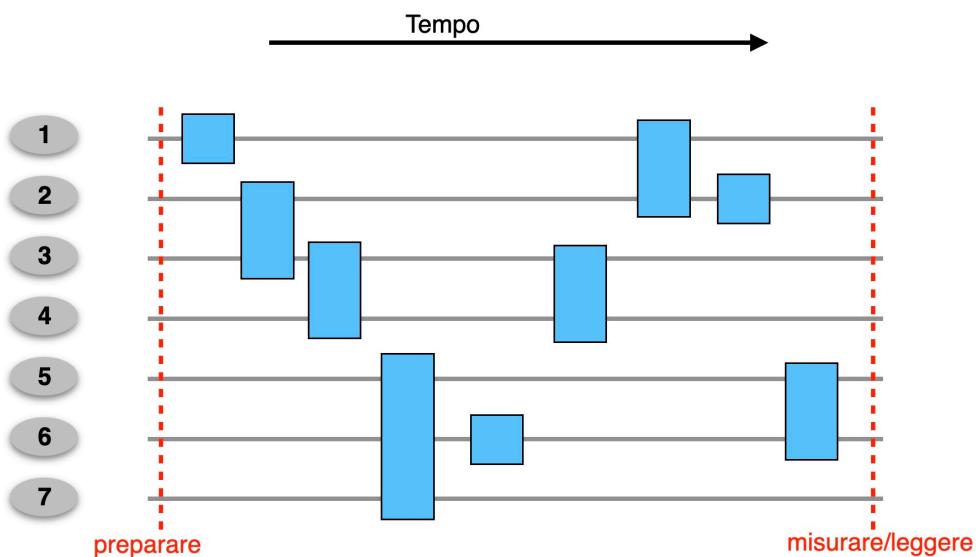


Fig. 15.3. Computer quantistico composto da 7 qubit. Casella su una linea: lo stato dei qubit corrispondenti viene modificato. Casella che attraversa più linee: l'intreccio dei qubit corrispondenti viene modificato.

Abbiamo assunto che sia composto da 7 qubit. Nell'immagine i qubit sono disposti uno sotto l'altro. La direzione orizzontale corrisponde al tempo.

Ogni qubit viene inizialmente messo in uno dei suoi stati di sovrapposizione. Si dice che lo stato dell'intero sistema viene preparato. Successivamente, questi stati vengono modificati passo dopo passo, come illustrato nella figura dalle caselle. In alto a sinistra, ad esempio, viene modificata la sovrapposizione del primo qubit (nella nostra immagine con la leva: la leva viene ruotata). Il secondo riquadro attraversa due linee di qubit. Qui viene modificata l'intreccio tra il qubit 1 e il qubit 2. Si modificano quindi passo dopo passo le sovrapposizioni e gli intrecci e alla fine si osserva il risultato, ovvero si effettua una misurazione per determinare in quale stato si trova l'intero sistema, composto da 7 qubit.

Ma perché si parla di alta dimensionalità? Si può dire che un singolo qubit opera in uno spazio unidimensionale. La direzione della leva nella figura 15.2 è determinata in modo univoco da un unico numero, ovvero l'angolo. Non appena si intreccia il qubit con un altro, lo spazio in cui collocchiamo gli stati ha due dimensioni. E ora viene il bello: con ogni ulteriore qubit intrecciato, il numero di dimensioni non aumenta di uno, come si potrebbe supporre. Raddoppia. Nella figura 15.3 avevamo ipotizzato di avere 7 qubit. Uno stato del computer è quindi determinato da un punto in uno spazio a  $2^7$  dimensioni, ovvero in uno spazio a 128 dimensioni. Ciò comporta un enorme vantaggio rispetto a un computer classico. La potenza di calcolo del computer quantistico cresce in modo esponenziale con il numero dei suoi qubit.

Il computer quantistico opera in uno spazio multidimensionale. Se il computer è composto da  $n$  qubit, questo spazio ha  $2^n$  dimensioni. La potenza di calcolo aumenta in modo esponenziale con  $n$ .

### 15.4 Il fantastico mondo multidimensionale

Come risolvere un problema concreto con un computer quantistico non è il nostro tema. È compito dell'informatica scoprire come preparare i qubit e come manipolarli in modo che la misurazione fornisca il risultato desiderato. Una tale sequenza di passaggi è chiamata algoritmo. Gli algoritmi per i computer quantistici sono complicati. Ne citiamo solo due esempi noti:

- *Algoritmo di Shor*: È in grado di scomporre un numero in fattori primi. Un computer normale non è in grado di eseguire tale scomposizione se il numero è molto grande.
- *Algoritmo di Grover*: Serve per effettuare ricerche in un elenco molto lungo, una cosiddetta banca dati. Lo fa con molti meno passaggi di calcolo rispetto a un computer tradizionale.

Anche se non prendiamo in considerazione alcun algoritmo concreto, possiamo comunque comprendere perché la proprietà dell'alta dimensionalità abbia un potenziale così grande. Cerchiamo di chiarirlo con due semplici esempi.

#### Quanti vicini?

Tu vivi in un villaggio le cui case sono tutte disposte lungo una strada. Il mondo delle case è quindi unidimensionale. In questo caso hai due case vicine, fig. 15.4a.

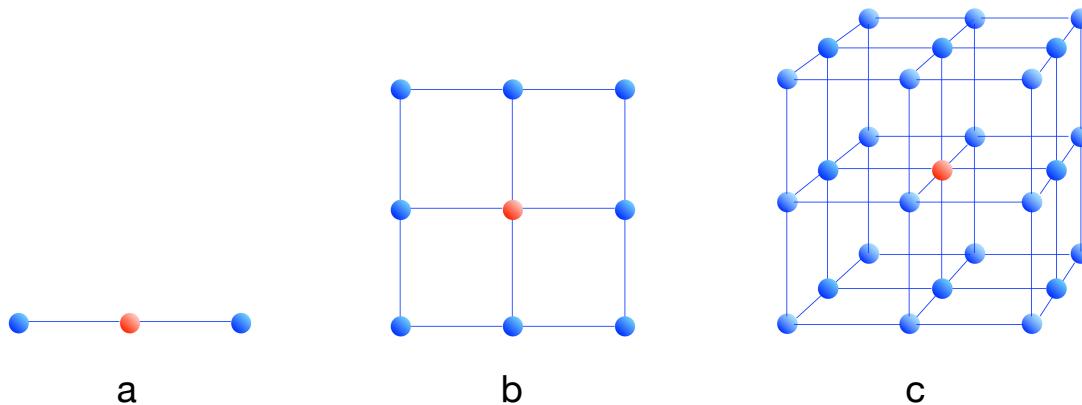


Fig. 15.4. (a) In una dimensione tu (in rosso) hai due vicini (in blu). (b) In due dimensioni hai 8 vicini. (c) In tre dimensioni sono 26.

Se le case sono disposte su una superficie piana, hai 8 vicini, fig. 15.4b, mentre se sono disposte in 3 dimensioni, ne hai 26, fig. 15.4c. Forse hai notato che il numero  $z$  dei vicini può essere calcolato in modo generale:

$$z = 3^n - 1$$

dove  $n$  indica il numero di dimensioni dello spazio. La formula vale anche se la dimensione dello spazio è ancora maggiore. Se riprendiamo lo spazio a sette dimensioni del nostro piccolo computer quantistico, otteniamo

$$z = 3^7 - 1 = 19683 - 1 = 19682 .$$

Pertanto,  $z$  cresce in modo esponenziale con  $n$ .

Nella tabella 15.1, la prima riga indica la dimensione, mentre la seconda il numero di case vicine.

Dimensione	1	2	3	4	5	6	7	...	$n$
Numero di case vicine	2	8	26	80	242	728	2186	...	$3^n - 1$

Tabella 15.1

Quindi, in uno spazio con molte dimensioni, ci sarebbe molto, molto spazio per le case vicine.

Il numero dei vicini in uno spazio ad alta dimensionalità cresce esponenzialmente con il numero delle dimensioni.

### Quanti percorsi?

Passiamo al nostro secondo esempio. Ricominciamo con i mondi a una, due e tre dimensioni che ci sono familiari.

Vogliamo andare da A a B, figura 15.

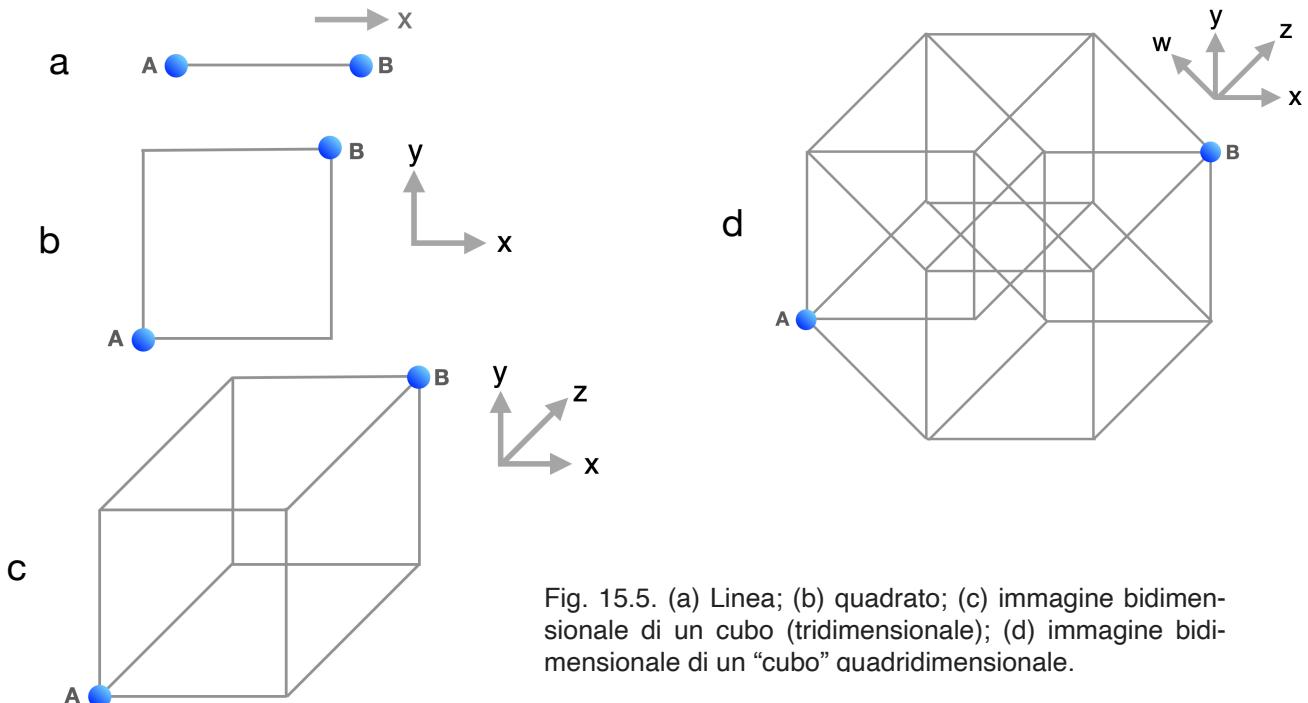


Fig. 15.5. (a) Linea; (b) quadrato; (c) immagine bidimensionale di un cubo (tridimensionale); (d) immagine bidimensionale di un ‘cubo’ quadridimensionale.

La figura 15.5a mostra un percorso. C'è solo un modo per andare da A a B.

Ora vogliamo andare da A a B nella figura 15.5b. La condizione, come in tutte le situazioni seguenti, è che possiamo muoverci solo sui bordi. Ci sono due possibilità.

Poi c'è il caso tridimensionale, un cubo. La figura 15.5c mostra una proiezione di un cubo sul piano bidimensionale. Noterai facilmente che questa volta ci sono 6 modi diversi. Dobbiamo precisare che cerchiamo solo il percorso più breve, poiché naturalmente esistono anche percorsi più lunghi. Quindi: qui ci sono 6 percorsi della stessa lunghezza.

E ora passiamo al mondo quadridimensionale. La figura 15.5d mostra un ‘cubo’ quadridimensionale, o più precisamente: la proiezione di un cubo quadridimensionale sul piano

bidimensionale. Quanti percorsi diversi ci sono da A a B? Se hai pazienza, puoi marcare questi percorsi nella figura, ad esempio con colori diversi, e poi contarli. Ne troverai 24. La figura 15.6 ne mostra alcuni.

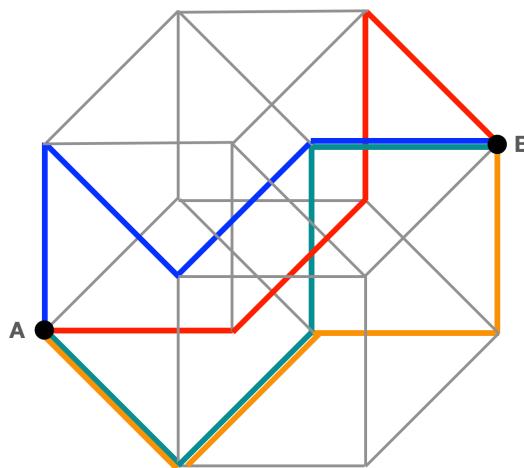


Fig. 15.6. Quattro diversi percorsi da A a B sui bordi del cubo quadridimensionale della fig. 15.5d.

Se si disegnasse l'immagine corrispondente a un cubo a cinque dimensioni e si contasse il numero dei diversi percorsi, se ne troverebbero 120. Il numero dei percorsi è riassunto nella tabella 15.2.

Dimensione	1	2	3	4	5	6	7	...	$n$
Numero dei percorsi più brevi	1	2	6	24	120	720	5040	...	$n!$

Tabella 15.2

Forse ti ricorderai di un'operazione aritmetica appresa a lezione di matematica. Le cifre nella seconda riga della tabella corrispondono alla fattoriale delle cifre nella prima riga. Questa crescita con fattoriale è chiamata crescita superesponenziale.

Il numero di percorsi possibili in una rete stradale ad alta dimensionalità aumenta in modo più che esponenziale con  $n$  (crescita superesponenziale).

I due esempi dimostrano che in un mondo multidimensionale le cose funzionano in modo diverso rispetto al familiare mondo tridimensionale. Quando la dimensione del mondo aumenta di uno, qualche altra grandezza aumenta in modo molto, molto più grande. Oppure, riferendosi al computer quantistico: quando si aumenta il numero di qubit, la potenza di calcolo del computer aumenta in modo molto, molto significativo.

È proprio questa caratteristica a costituire il vantaggio del computer quantistico ed è proprio questa che l'informatica sfrutta per risolvere determinati problemi.

I computer quantistici sono adatti alla risoluzione di problemi che hanno una caratteristica comune: possono essere suddivisi in singoli passaggi e lo sforzo necessario per risolverli cresce in modo esponenziale o superesponenziale con il numero di questi passaggi.

Nella prossima sezione vedremo alcuni di questi problemi che richiedono un computer quantistico per essere risolti.

### *15.5 Applicazioni del computer quantistico*

#### *Il problema del commesso viaggiatore*

Un esempio classico di problema in cui lo sforzo cresce in modo superesponenziale con il numero di passaggi  $n$  è il “problema del commesso viaggiatore”.

Un viaggiatore commerciale desidera visitare una serie di città e cerca il percorso più breve che passi esattamente una volta per ciascuna delle città e poi torni al punto di partenza. Supponiamo che ci siano  $n$  città. Lo sforzo necessario per confrontare tutti i percorsi possibili cresce con la fattoriale di  $n$ .

Ci sono un sacco di applicazioni nella logistica, nella pianificazione delle rotte aeree e nella gestione del traffico che sono simili al problema del commesso viaggiatore.

#### *Ripiegamento delle proteine*

Un altro compito che richiede molti passi e in cui lo sforzo cresce in modo esponenziale con il numero di passi è il calcolo del ripiegamento delle proteine.

Le proteine sono fondamentali per il funzionamento di tutti gli esseri viventi (uomini, animali, batteri, piante, funghi) e svolgono molteplici funzioni.

Si tratta di molecole a catena molto lunghe, ovvero molecole costituite da molti piccoli elementi costitutivi. Esistono 20 diversi elementi costitutivi di questo tipo. Appartengono al gruppo degli aminoacidi. La lunghezza delle catene proteiche varia tipicamente da circa 50 a diverse migliaia di molecole di aminoacidi.

Una proteina si ripiega spontaneamente in una determinata struttura tridimensionale. Il modo in cui la proteina si ripiega dipende dalla sequenza degli aminoacidi.

Il ripiegamento determina la funzione di una proteina. Se una proteina non si ripiega correttamente, può perdere la sua funzione o addirittura avere effetti dannosi che possono portare a malattie.

Prevedere questo ripiegamento per una data sequenza di aminoacidi è un importante problema di ricerca. Anche in questo caso ci troviamo di fronte a un problema la cui soluzione richiede uno sforzo che cresce in modo esponenziale con il numero dei mattoni, ovvero degli aminoacidi.

## Note per l'insegnante

### 15. Computer quantistico

#### *Il computer quantistico come tema di insegnamento*

Come molti altri colleghi, siamo convinti che il computer quantistico sia un argomento che merita di essere inserito nei programmi scolastici. È ovvio che per farlo si possono dedicare solo poche ore di lezione. Quando si introduce un nuovo argomento nel programma scolastico, un altro deve essere eliminato o rimpicciolito. Avevamo ipotizzato di avere a disposizione al massimo 3 ore di lezione. (Non vogliamo discutere qui di cosa avremmo eliminato).

Lo sviluppo dell'unità didattica è stato piuttosto difficile per diversi motivi.

Di solito si cerca di giustificare la superiorità del computer quantistico descrivendo gli algoritmi. Ma in tal caso l'argomento sarebbe più adatto a una lezione di informatica.

Inoltre, questi algoritmi presentano un problema. Si dimostra, ad esempio, che l'algoritmo di Grover è in grado di cercare in un database con  $N$  voci in  $O(\sqrt{N})$  passaggi, ma in primo luogo non è chiaro perché questo compito sia così importante e, in secondo luogo,  $O(\sqrt{N})$  non è molto impressionante.

Dovremmo quindi limitarci alle lezioni di fisica sulla realizzazione fisica dei qubit? Anche in questo caso c'è un problema: esistono diverse realizzazioni molto diverse tra loro. Si potrebbe trattarne al massimo una. E se si impiega tutto il tempo a disposizione per spiegare la fisica di un qubit, probabilmente non risulterà chiaro perché la sovrapposizione e l'entanglement determinano l'enorme superiorità del computer quantistico.

Abbiamo quindi deciso di adottare un approccio diverso. Il nostro obiettivo didattico principale è far comprendere che il computer quantistico opera in uno spazio multidimensionale e che la sua potenza di calcolo cresce in modo esponenziale con il numero di qubit.

#### *Il mondo multidimensionale*

Per comprendere il funzionamento del computer quantistico è importante usare con cautela il termine "spazio". Infatti, questa parola viene solitamente utilizzata con diversi significati e talvolta si passa da un significato all'altro senza rendersene conto.

Da un lato, lo spazio è un concetto matematico; si può anche dire che sia uno strumento matematico. In questo senso, è un'invenzione dell'uomo che si presta alla descrizione delle strutture del mondo reale. Anche in fisica il termine viene spesso utilizzato in questo senso, ad esempio quando si parla di spazio-tempo o di spazio di Hilbert.

D'altra parte, per spazio si intende una struttura del mondo reale che è intrinsecamente tridimensionale. In questo senso, lo spazio esiste anche senza gli esseri umani che lo descrivono matematicamente. E non è solo una struttura descritta da tre coordinate spaziali. Le coordinate spaziali formano uno spazio in senso matematico. Molte altre grandezze vettoriali formano anch'esse uno spazio in questo senso: la quantità di moto, la forza (il flusso di quantità di moto), l'intensità del campo elettrico e magnetico, le densità di corren-

te di ogni tipo... Tutti questi spazi matematici costituiscono gli strumenti con cui descriviamo un'unica entità del mondo reale: lo spazio in senso fisico.

Vogliamo che durante le lezioni sia chiaro che nella fisica quantistica abbiamo a che fare con uno spazio reale nel senso fisico del termine e preferiamo quindi parlare di mondo multidimensionale piuttosto che di spazio multidimensionale. Non utilizziamo il termine spazio di Hilbert.

A proposito, anche in altri contesti della fisica si riscontrano analoghe incongruenze concettuali. Ad esempio, il termine massa viene utilizzato da un lato come nome di una grandezza fisica, dall'altro come sinonimo di materia e spesso anche come sinonimo di corpo (ad esempio quando si dice che alla molla è appesa una massa).

Pertanto, affermiamo che le soluzioni dell'equazione di Schrödinger forniscono un'indicazione dell'alta dimensionalità del mondo. Abbiamo evitato la domanda su quante dimensioni abbia questo mondo, perché per rispondere occorre una comprensione più approfondita della fisica quantistica.

### *Il computer quantistico come calcolatore analogico*

Per comprendere il funzionamento del computer quantistico, è utile chiarire che si tratta fondamentalmente di un computer analogico. Chi conosce solo i computer digitali tenderà probabilmente ad aspettarsi che il computer quantistico abbia caratteristiche simili a quelle dei computer digitali classici. Ma proprio questa aspettativa può rappresentare un ostacolo alla comprensione.

Tuttavia, non abbiamo affrontato questo aspetto, poiché i giovani di oggi probabilmente non conoscono più i computer analogici.

### *La reversibilità del processo di calcolo*

Spesso si dice che il computer quantistico esegue molti calcoli in parallelo e si parla di "parallelismo quantistico". Questo modo di esprimersi è suggerito quando si descrive passo dopo passo il processo di calcolo in un registro quantistico, tenendo sempre presente ciò che si otterrebbe dopo ogni fase di calcolo in una misurazione. Riteniamo che questo approccio sia inutilmente complicato o addirittura fuorviante. La misurazione viene effettuata alla fine. Tutto ciò che accade prima della misurazione è deterministico e reversibile, quindi semplice. Solo con la misurazione lo stato viene distrutto, solo con la misurazione entra in gioco la probabilità, solo con la misurazione viene generata entropia. Solo il processo di misurazione è irreversibile.

### *Trasformazione unitaria nello spazio di Hilbert*

Se si avesse a disposizione più tempo per le lezioni, si potrebbe descrivere il computer quantistico a un livello "superiore", caratterizzando gli stati non con funzioni d'onda, ma con i simboli generali della notazione di Dirac. Si potrebbe quindi descrivere il funzionamento del computer quantistico attraverso la rotazione successiva del vettore di stato in uno spazio (matematico) ad alta dimensionalità. Questa descrizione è universale. È indipendente dal tipo di stati con cui si ha a che fare.