

ITERATIVE 2D-FORMVORHERSAGE ELEKTRISCH DEFORMIERBARER DIELEKTRI- SCHER TROPFEN FÜR OPTISCHE BAUTEILE

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)
von der KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
angenommene

DISSERTATION

von

Mike Dohmen, M. Sc.

Geboren in Heidenheim an der Brenz

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 2025

Hauptreferent: Prof. Dr. Cornelius Neumann

Korreferent: Prof. Dr. Andreas Heinrich

Oh, there is a light that never goes out

The Smiths

I KURZFASSUNG

Elektrisch deformierbare Polymertropfen sind ein vielversprechender Ansatz zur Fertigung von Freiform- und Mikrooptiken, jedoch fehlt ein effizientes Modell zur Konturvorhersage, um gezielte Formen zu realisieren. Diese Arbeit entwickelt eine solche Methodik, die aus einer Experimentierumgebung und einer 2D-Prozesskette besteht. Diese Prozesskette basiert auf Schattenwurfbildern der Tropfen, aus denen über eine polarraumbasierte Konturapproximation (PBCA) die Kontur extrahiert und mit einem physikalischen Modell kombiniert wird. Der Tropfen wird dabei als 2D-Kontur vereinfacht. Das Modell betrachtet die Young-Laplace-Gleichung als Krümmungsbilanz und erweitert sie um einen elektrischen Term, der durch eine Finite-Elemente-Methoden (FEM) Simulation berechnet wird. In der Simulation wird die durch Maxwell-Wagner-Polarisation beschriebene induzierte effektive Oberflächenladung σ_s berücksichtigt und iterativ berechnet. Um aus der Krümmung die 2D-Tropfenkontur zu rekonstruieren, wird eine entsprechende Methodik vorgestellt.

Ergänzend wird eine geometrische 3D-Rekonstruktion aus zwei orthogonalen Ansichten zur Validierung der Messkette implementiert. Diese ist nicht Teil des Vorhersagemodells und dient ausschließlich der Verifizierung des Aufbaus.

Die Experimente an einem verlustbehafteten dielektrischen Polymer (PR48) und einer isolierenden dielektrischen Ölsäure zeigen, dass es

mit der 2D-Methodik möglich ist, die Kontur mit einer mittleren Restabweichung von 10 - 50 μm zwischen Messkontur und Vorhersagekontur voraussagen. Zusätzlich zeigt die Untersuchung, dass die Berücksichtigung der Oberflächenladung σ_s die mittlere Abweichung der 2D-Kontur um bis zu 50 % reduziert. Raytracing-Untersuchungen zeigen dabei eine geringere Abweichung der optischen Weglängendifferenz unter Berücksichtigung der Oberflächenladung. Die Oberflächenladung σ_s korreliert im Gegensatz zur Ölsäure beim Polymer stark mit der Spannung (Korrelationskoeffizient 0,93 - 0,98).

Letztendlich bleibt die 2D-Vereinfachung die Hauptlimitation. Der nächste Schritt ist ein physikalisches 3D-Modell, um ein vollständiges inverses Design zu ermöglichen.

II ABSTRACT

Electrically deformable polymer droplets are a promising approach for manufacturing freeform and micro-optics, yet an efficient contour-prediction model for realizing targeted shapes is lacking. This work develops such a methodology, consisting of an experimental setup and a 2D processing pipeline. This pipeline is based on shadowgraph images of the droplets, from which the contour is extracted via a polar based contour approximation (PBCA) and combined with a physical model. The droplet is simplified as a 2D contour. The model treats the Young–Laplace equation as a curvature balance and augments it with an electrical term computed by a finite-element (FEM) simulation. In the simulation, the induced effective surface charge σ_s described by Maxwell–Wagner polarization is taken into account and computed iteratively. A corresponding method is presented to reconstruct the 2D droplet contour from curvature.

In addition, a geometric 3D reconstruction from two orthogonal views is implemented to validate the pipeline. It is not part of the predictive model and serves solely to verify the experimental setup.

Experiments with a leaky dielectric polymer (PR48) and with insulating dielectric oleic acid show that, with the 2D methodology, the contour can be predicted with a mean residual deviation of 10 - 50 μm between the measured and predicted contours. The study further shows that accounting for the surface charge σ_s reduces the mean

deviation of the 2D contour by up to 50 %. Ray-tracing studies show a smaller deviation of the optical path-length difference when the surface charge is taken into account. For the polymer, in contrast to oleic acid, the surface charge σ_s correlates strongly with the applied voltage (correlation coefficient 0.93 - 0.98).

Ultimately, the 2D simplification remains the main limitation. The next step is a physics-based 3D model to enable fully inverse design.

III DANKSAGUNG

An erster Stelle danke ich meinen Betreuern. Mein besonderer Dank gilt Andreas Heinrich, der mir die Promotion nahegelegt und mich auf diesem Weg stets unterstützt hat. Für seine unermüdliche Gesprächsbereitschaft und die verlässliche Unterstützung bin ich ihm sehr dankbar.

Meinem Doktorvater Cornelius Neumann danke ich für die Möglichkeit der Promotion und die ausgezeichnete fachliche Betreuung. Er hat sichergestellt, dass ich nicht vom Weg abkomme, und mir in entscheidenden Momenten wertvolle Anregungen gegeben.

Mein größter Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern. Ich danke Euch dafür, dass Ihr mir das Privileg eines Studiums ermöglicht und mich dabei stets bedingungslos unterstützt habt. Die Freiheit, meinen eigenen akademischen Weg zu wählen, ist ein Geschenk, das nicht selbstverständlich ist.

Ich möchte mich auch bei meiner Partnerin Martina bedanken und mich zugleich entschuldigen, dass die Promotion so manchen Plan durcheinandergeworfen hat. Danke, dass du mich in der ganzen Zeit und vor allem die letzten Monate so unterstützt hast.

Ich hatte das Privileg, mit meinen beiden besten Freunden Tobi und Paddy während meiner Zeit am ZOT zusammenzuarbeiten. Aus

dieser Zeit sind Freundschaften fürs Leben entstanden, und ihr wart meine mentale Unterstützung, wenn es einmal nicht so gut lief.

Ein besonderer Dank geht an meinen Freund Michi. Ohne ihn hätte ich keine Ingenieurwissenschaft studiert und hätte garantiert einen anderen Weg eingeschlagen.

Weiterhin danke ich der gesamten AG Heinrich und dem Zentrum für Optische Technologien (ZOT). Insbesondere danke ich Manu, der mir die Grundlagen des wissenschaftlichen Arbeitens vermittelt hat, stets gesprächsbereit war und meine Laufbahn am ZOT entscheidend geprägt hat.

Chris, Cordelia, Lisa, Marco, Murat, Selina und Yannick danke ich für die kollegiale Unterstützung und ihre stete Hilfsbereitschaft. Bei Murat bedanke ich mich für seine wertvollen Vorarbeiten zur FEM-Simulation in MATLAB. Sascha Wallentowitz danke ich für seine Hilfe bei der Ideenfindung für die polare Approximation. Ebenso gilt mein Dank all jenen, die ich aus Platzgründen hier nicht namentlich nennen kann.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) danke ich für die Finanzierung der Forschungsarbeiten im Rahmen des Projekts „Elektro3D“ (HE 3533/10-1, Projektnummer 440697245).

Zuletzt möchte ich Herrn Müller für die stets zeitnahe Fertigung aller mechanischen Bauteile sowie Herrn Gruber und Herrn Wilczek für die zuverlässige Unterstützung bei elektronischen Herausforderungen danken. Mein Dank gilt ebenso Felix Zeller und Lutz Autschbach von Carl Zeiss Jena für die Fertigung der Präzisionsstifte.

IV INHALTSVERZEICHNIS

I	Kurzfassung	I
II	Abstract	III
III	Danksagung	V
IV	Inhaltsverzeichnis.....	VII
1	Einleitung.....	1
1.1	Motivation	1
1.2	Forschungsfragen	6
1.3	Aufbau der Arbeit	7
2	Grundlagen und Stand der Technik	9
2.1	Grundlagen der elektrischen Tropfendeformation	9
2.1.1	Beschreibung eines liegenden Tropfens und Oberflächenspannung.....	10
2.1.2	E-Feld und dielektrische Materialien.....	17
2.2	Stand der Technik.....	29
2.2.1	Simulationsmethoden für das elektrische Feld	30
2.2.2	Elektrisch deformierte optische Bauteile.....	32
2.2.3	Tropfenkontur-Beschreibung und 3D- Rekonstruktion.....	36
3	Experimenteller Aufbau	39
3.1	Anforderungen	39

3.2	Mechanischer, optischer und elektronischer Aufbau	42
3.2.1	Gesamtaufbau	42
3.2.2	Mechanik	43
3.2.3	Optik	45
3.2.4	Hochspannung	47
3.3	Steuerung und Datenerfassung	49
3.4	Gekühlte Sicherheitseinhausung	50
3.5	Versuchsablauf	55
4	Methoden zur Konturapproximation und 3D-Rekonstruktion	59
4.1	Bildverarbeitung und Segmentierung	60
4.2	Polare Konturapproximation (PBCA)	64
4.2.1	Ausrichtung und Zentrierung der Kontur	66
4.2.2	Transformation und B-Spline-Approximation ..	68
4.2.3	Rücktransformation und finale Positionierung	69
4.3	Geometrische 3D-Rekonstruktion	70
4.3.1	Verarbeitung der 2D-Konturdaten	71
4.3.2	3D-Rekonstruktion	73
4.3.3	Volumenberechnung	75
4.4	Krümmungsbasierte Formanalyse	76
4.4.1	Krümmungsberechnung und Glättung	79
4.4.2	Konturrekonstruktion aus der Krümmung	82
4.4.3	Physikalische Kopplung	87
5	Modellierung und Simulation	97

5.1	FEM-Modell des elektrischen Feldes	101
5.1.1	Modellgeometrie und Randbedingungen	101
5.1.2	Netzgenerierung und -qualität	105
5.1.3	Berechnung der Feldkomponenten an der Grenzfläche.....	108
5.1.4	Methodenvalidierung	109
5.2	Iterative Deformationsvorhersage.....	113
5.2.1	Innere Schleife: Iterative Formfindung.....	113
5.2.2	Äußere Schleife: Optimierung der Oberflächenladung.....	118
5.3	Optische Auswertung der Tropfenkontur mittels Raytracing.....	120
5.3.1	Implementierung des Raytracers	120
5.3.2	Bestimmung des Fokuspunkts.....	122
5.3.3	Analyse der optischen Abbildungsqualität	123
5.3.4	Verifikation der Simulation.....	124
6	Experimentelle Ergebnisse und Modellvalidierung.....	125
6.1	Auswertungsmethodik und Bewertungsmetriken	126
6.1.1	Synthetische Geometrien zur Validierung	126
6.1.2	Reale Referenzobjekte zur Validierung	128
6.1.3	Methodik des Geometrievergleichs	129
6.1.4	Bewertungsparameter.....	131
6.1.5	Indirekte Messung des Volumens.....	133

6.2	Charakterisierung des Messvorgangs	134
6.3	Validierung der Konturapproximation.....	137
6.3.1	Analyse der Messunsicherheit.....	138
6.3.2	Synthetische Geometrien.....	140
6.3.3	Reale Geometrien	147
6.3.4	Diskussion	156
6.4	Validierung des physikalischen Vorhersagemodells	158
6.4.1	Oberflächenspannungsberechnung und Bewertung der Rekonstruktionsqualität.....	159
6.4.2	Versuchsplan und Durchführung.....	163
6.4.3	Ergebnisse der Rekonstruktionen	167
6.4.4	Übertrag der Vorhersagen in die Optik	171
6.4.5	Diskussion der Vorhersageergebnisse	174
7	Zusammenfassung und Ausblick.....	177
7.1	Zusammenfassung	177
7.2	Ausblick.....	182
V	Literatur.....	185
VI	Abbildungsverzeichnis	200
VII	Tabellenverzeichnis.....	213
VIII	Veröffentlichungen.....	214
IX	Erklärung zur Nutzung von KI-Werkzeugen.....	217
X	Anhang	219
	Anhang A: Abkürzungen und Formelzeichen.....	219

A.1	Abkürzungen.....	219
A.2	Formelzeichen	222
Anhang B:	Ausführliche Berechnungen	231
B.1	Herleitung Elektrischer Druck mit und ohne Oberflächenladungen	231
B.2	Projektion Punkte und E-Feld	234
Anhang C:	Zusatzinformationen zum experimentellen Aufbau	236
C.1	Verwendete mechanische Bauteile	236
C.2	Verwendete optische Bauteile	237
C.3	Intrinsische Kameraparameter	238
C.4	Spezifikationen Hochspannungsgerät.....	239
C.5	Berechnung Anstiegszeit.....	240
C.6	Verwendete Hochspannungsbauteile.....	242
C.7	Funktionsweise Autofokus.....	243
C.8	Charakterisierung Hochspannungsquelle.....	246
C.9	Verwendete elektronische Bauteile	250
C.10	Verwendete Bauteile der Sicherheitseinhausung.....	251
C.11	Position der Temperaturmesspunkte	252
C.12	Justierwerte der Temperatursensoren.....	253
C.13	Charakterisierung Kühlung.....	254
C.14	Messunsicherheit Kühlung.....	256

Anhang D: Experimente	259
D.1 Beschreibung der synthetischen Funktionen.....	259
D.2 Skalierungsfaktoren CAD- Modelle	262
D.3 Unsicherheit Indirekte Volumenmessung.....	263
D.4 Graphen zur Monte Carlo Simulation.....	265
D.5 Daten Volumenrekonstruktion Tropfen Und Experimentbilder	267
D.6 Zusätzliche Boxplots	271

Kapitel 1

EINLEITUNG

1.1 MOTIVATION

Mikrooptische Komponenten sind zu einem integralen Bestandteil moderner Technologien geworden. Moderne Anwendungsfelder wie mobile Kamerasysteme, die Medizintechnik oder das autonome Fahren stellen stetig wachsende Anforderungen an die Leistungsfähigkeit und Miniaturisierung optischer Systeme. Dabei stoßen standardisierte Komponenten oft an ihre Grenzen, denn diese Anwendungen erfordern hochspezialisierte und anwendungsspezifische Optiken. Ein vielversprechender Lösungsansatz ist der Einsatz von Freiformoptiken, die durch ihre nicht-rotationssymmetrischen Oberflächen neue Funktionalitäten ermöglichen. Jedoch sind etablierte Herstellungsverfahren für solche Optiken oft mit hohen Kosten, langen Prozesszeiten und einer geringen Flexibilität verbunden, insbesondere bei der Fertigung von Prototypen oder bei kleinen Stückzahlen. [1]

Als Antwort auf diese Herausforderungen haben sich additive Fertigungsverfahren wie die Stereolithografie (SLA) oder die Zwei-Photonen-Polymerisation (2PP) etabliert [2]. Sie bieten eine große

Designfreiheit, leiden jedoch für optische Anwendungen an einem prinzipbedingten Nachteil. Um die geforderten Geometrien des 3D-Modells in ein physisches Bauteil mittels additiver Fertigung umzuwandeln, wird dieses diskretisiert. Dabei führt die schichtweise oder voxelbasierte Erzeugung der Geometrie zu Stufeneffekten und Oberflächenrauheiten, während Übergänge im Material lokale Inhomogenitäten im Brechungsindex verursachen können. Diese Artefakte reduzieren die optische Leistung und machen oft aufwendige Nachbearbeitungsschritte notwendig. [1]

Ein alternativer Ansatz, der diese Nachteile vermeidet, stützt sich auf die physikalischen Eigenschaften eines Flüssigkeitstropfens, der im Grundzustand als Basis für eine sphärische Linse dienen kann. Im flüssigen Zustand erzeugt ein Tropfen aufgrund der Oberflächenspannung eine vollkommen glatte, durchgehende Oberfläche, die durch die Minimierung der Fläche frei von Diskretisierungsfehlern ist. In der in dieser Arbeit beschriebenen Methode dient ein solcher Tropfen aus Polymer als formbarer Rohling. Wenn dieser Tropfen einem starken elektrischen Feld ausgesetzt wird, verformt er sich. Auf diese Weise können Freiform-Mikrolinsen realisiert werden.

Eine derartige Deformation ist in Abbildung 1.1 mit drei ungleichen Tropfen und je drei Elektrodenkonfigurationen dargestellt. Die Abbildungen zeigen Tropfen mit unterschiedlichen Basisdurchmessern: a) 2 mm, b) 1 mm und c) 0,5 mm. Sie sind dabei jeweils auf einem flachen Glassubstrat aufgebracht. Die Kathode ist eine flache Metallplatte unter dem Substrat und die Anode ist im Bild mit „+“ beschriftet. Hier wird ein Stift dargestellt, der links vom Tropfen, mittig über

dem Tropfen und rechts vom Tropfen positioniert ist. Der Tropfen verformt sich je nach Position der Anode und der Größe des Tropfens unterschiedlich stark.

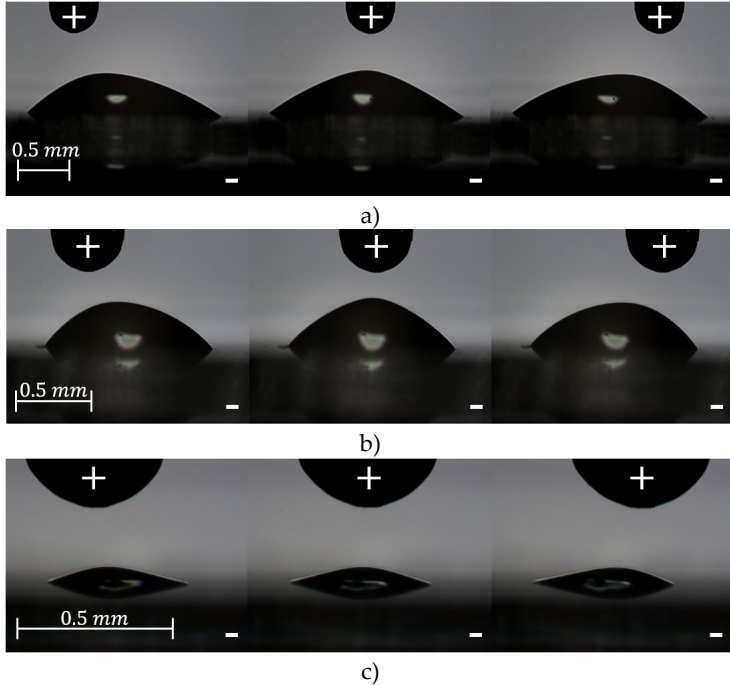


Abbildung 1.1: Verschiedene deformierte Tropfen und Anodenpositionen. a) Ein 2 mm Tropfen. b) Ein 1 mm Tropfen. c) Ein 0,5 mm Tropfen.

Um diese Deformation zu beobachten, ist ein optisches System notwendig. Wie aus Abbildung 1.1 zu hervorgeht, kann dies auf dem Prinzip des Schattenwurfs basieren. Ein solches System mit Tropfen und den Elektroden ist in Abbildung 1.2 a) schematisch dargestellt.

Wird in diesem System ein Feld zwischen den Elektroden angelegt, wie in Abbildung 1.2 b) zu sehen ist, deformiert sich der Tropfen, wie in Abbildung 1.2 c) dargestellt. Die angenommene Form kann anschließend durch eine Bestrahlung mit ultraviolett (UV) Licht polymerisiert werden und somit in eine ausgehärtete Freiformlinse überführt werden. Dies ist in Abbildung 1.2 c) und d) dargestellt.

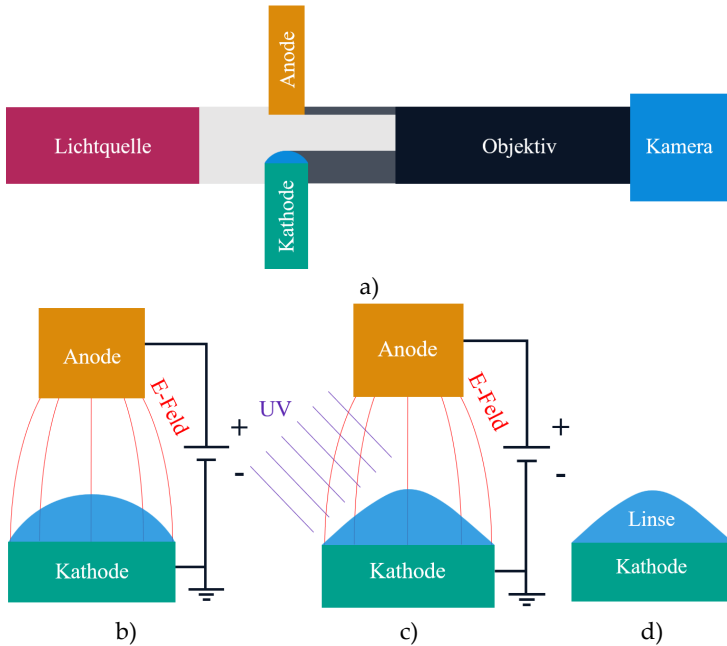


Abbildung 1.2: Optisches System und Deformationsablauf. a) Optisches System mit Elektroden und Tropfen. b) Vergrößerung des Tropfens mit elektrischen Feldlinien (rot). c) Deformierter Tropfen mit zusätzlicher UV-Strahlung (lila) zur Polymerisierung. d) Ausgehärtete Linse.

Dieser Prozess kombiniert die hohe Flexibilität der elektrischen Formgebung mit der überlegenen Oberflächenqualität des flüssigen Zustands. Bisher wurde dieser Prozess ausschließlich deskriptiv betrachtet.

Das volle Potenzial dieses Fertigungsansatzes kann jedoch nur ausgeschöpft werden, wenn der Formgebungsprozess der Linse vorhersehbar und kontrollierbar ist. Für die gezielte Herstellung einer Optik mit definierter Funktion muss daher im letzten Schritt das inverse Problem gelöst werden. Ausgehend von einer bestimmten Zielgeometrie sollen die erforderlichen elektrischen Prozessparameter ermittelt werden, einschließlich der Feldverteilung, die sich aus der Elektrodenkonfiguration und der angelegten Spannung ergibt.

Die notwendige Voraussetzung zur Lösung dieses inversen Problems ist die umfassende Beschreibung des direkten Problems der Vorhersage der Tropfendeformation auf Basis bekannter elektrischer und physikalischer Einflussgrößen. Genau hier liegt die zentrale Forschungslücke. Es fehlt an einem umfassenden, experimentell validierten Modell, im Prinzip einem digitalen Zwilling des Prozesses. Dieses Modell sollte die komplexen Wechselwirkungen zwischen dem elektrischen Feld, den Materialeigenschaften und der resultierenden Tropfenkontur präzise abbilden, insbesondere im Falle von nicht achssymmetrischen Tropfen. Die Entwicklung und Verifikation eines solchen Modells ist Gegenstand dieser Arbeit.

1.2 FORSCHUNGSFRAGEN

Um die zuvor dargelegte Forschungslücke zu schließen, adressiert diese Arbeit eine übergeordnete Hauptforschungsfrage, die durch drei untergeordnete Forschungsfragen systematisch bearbeitet wird. Die übergeordnete Forschungsfrage lautet:

„Wie lässt sich die elektrische Deformation von Fluidtropfen durch ein physikalisches Modell beschreiben, vorhersagen und in einem experimentellen Versuchsaufbau umsetzen?“

Um diese Forschungsfrage systematisch zu bearbeiten, werden die folgenden drei untergeordneten Forschungsfragen behandelt:

1. **Experimenteller Aufbau:** Welche Anforderungen muss ein experimenteller Aufbau erfüllen, um die elektrisch induzierte Deformation von Mikrotropfen reproduzierbar zu erzeugen und hochaufgelöst zu erfassen?
2. **Konturapproximation:** Welches Verfahren eignet sich zur Approximation der Tropfenkontur aus Kamerabildern, um die Tropfenkontur physikalisch plausibel in 2D zu beschreiben, und wie kann diese mittels 3D-Rekonstruktion validiert werden?

3. **Physikalische Modellierung:** Wie lässt sich ein physikalisches Modell ableiten, mit dem die Deformation von Tropfen vorhergesagt werden kann?

1.3 AUFBAU DER ARBEIT

Zur systematischen Beantwortung der im vorherigen Abschnitt formulierten Forschungsfragen gliedert sich die vorliegende Arbeit wie folgt.

Das Kapitel 2 legt die physikalischen Grundlagen für die restliche Arbeit. Dies umfasst die Beschreibung liegender Tropfen mittels der Oberflächenspannung sowie die relevanten Prinzipien der Elektrostatik. Darauf aufbauend wird der Stand der Technik zu Verfahren der elektrischen Feldberechnung, zu elektrohydrodynamischen Modellen und zu Ansätzen für die Approximation von Tropfenkonturen aus diskretisierten Daten behandelt.

Kapitel 3 widmet sich der ersten Forschungsfrage. Aus den physikalischen Gegebenheiten werden die Anforderungen an den experimentellen Aufbau hergeleitet. Anschließend wird dessen konkrete Umsetzung zur reproduzierbaren Deformation und hochauflösenden Beobachtung der Tropfen detailliert beschrieben.

Daran anknüpfend wird in Kapitel 4 die zweite Forschungsfrage behandelt. Es wird ein geeignetes Verfahren zur physikalisch

plausiblen Approximation der Tropfenkontur entwickelt und ein Ansatz zu dessen 3D-Rekonstruktion aus den Kamerabildern vorgestellt.

Aufbauend auf diesen Ergebnissen wird in Kapitel 5 die dritte Forschungsfrage adressiert. Hierzu erfolgt die Beschreibung des physikalischen Modells, mit dem die Tropfendeformation auf Basis der Konturdaten und des angelegten elektrischen Feldes vorhergesagt werden kann.

Kapitel 6 dient der Validierung und Diskussion der in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten Modelle und Verfahren. Es werden Experimente durchgeführt und die Ergebnisse vorgestellt, um die übergeordnete Hauptforschungsfrage zu beantworten.

Kapitel 7 fasst die zentralen Erkenntnisse der Arbeit zusammen, nimmt eine kritische Einordnung der Ergebnisse vor und schließt mit einem Ausblick auf weiterführendes Forschungspotenzial.

Kapitel 2

GRUNDLAGEN UND STAND DER TECHNIK

Dieses Kapitel legt die theoretischen Grundlagen und analysiert den Stand der Technik, um die in der Einleitung definierte Forschungslücke wissenschaftlich zu stützen.

Zunächst werden die relevanten physikalischen Prinzipien hergeleitet, von der Beschreibung liegender Tropfen bis zur Wirkung elektrischer Felder auf dielektrische Materialien. Abschließend beleuchtet das Kapitel den aktuellen Stand der Technik zur Berechnung elektrischer Felder, zu bestehenden Deformationsmodellen und deren Anwendung in der Mikrooptik sowie zu den etablierten Verfahren der Konturapproximation.

2.1 GRUNDLAGEN DER ELEKTRISCHEN TROPFENDEFORMATION

Zunächst werden die physikalischen Eigenschaften eines liegenden Tropfens dargestellt, gefolgt von einer Erläuterung der elektrischen Komponenten und des elektrischen Drucks.

2.1.1 BESCHREIBUNG EINES LIEGENDEN TROPFENS UND OBERFLÄCHENSPANNUNG

Ein liegender Tropfen, wie er in Abbildung 2.1 a) schematisch dargestellt ist, kann ohne zusätzliche externe Kräfte durch die klassische Young-Laplace-Gleichung beschrieben werden [3]:

$$p_{\text{innen}} - p_{\text{außen}} = \Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1(x)} + \frac{1}{R_2(y)} \right) = \text{konstant} \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnen p_{innen} und $p_{\text{außen}}$ die Drücke inner- und außerhalb des Tropfens. Diese Druckdifferenz ist konstant und wird in dieser Arbeit als Δp bezeichnet. γ ist die Oberflächenspannung der Flüssigkeit und $R_1(x)$ und $R_2(y)$ sind die beiden Hauptkrümmungsradien an jedem lokalen Punkt der Tropfenoberfläche (x, y) , wie in Abbildung 2.1 b) dargestellt. Die Höhe des Tropfens ist mit $h(x, y)$ beschrieben.



Abbildung 2.1: a) Schematische Darstellung eines 3D-Tropfens mit Schnittebenen und eingezeichneter Höhe $h(x, y)$. b) Hauptkrümmungsradien an der Oberfläche eines 3D-Tropfens.

Für die physikalische Modellierung muss zunächst geklärt werden, ob neben der Oberflächenspannung auch die Gravitation die Form der in dieser Arbeit untersuchten Tropfen signifikant beeinflusst. Ein geeignetes Maß hierfür ist die dimensionslose Bond-Zahl (Bo), die

das Verhältnis von Gravitationskräften zu Kapillarkräften beschreibt [4]. Diese wird für die in dieser Arbeit verwendeten Materialien Prototyp Resin 48 (PR48) und Ölsäure wie folgt berechnet:

$$Bo_{PR48} = \frac{\rho_{PR48} g L_c^2}{\gamma_{PR48}} = 11,9 \quad (2.2)$$

$$Bo_{\text{Ölsäure}} = \frac{\rho_{\text{Ölsäure}} g L_c^2}{\gamma_{\text{Ölsäure}}} = 9,6 \quad (2.3)$$

Dabei ist ρ die Dichte, g die Erdbeschleunigung und L_c eine charakteristische Länge. Für die Tropfen aus dem hier verwendeten Polymer PR48 und der Ölsäure mit einem typischen Basisdurchmesser von $L_c = 6$ mm wurde die Dichte mit einem Dichtemessgerät (Schmidt & Haensch, EDM 4000+) zu $\rho_{PR48} = 1050$ kg/m³ und $\rho_{\text{Ölsäure}} = 893,8$ kg/m³ bestimmt. Die Oberflächenspannung ist für PR48 unbekannt, der Hauptbestandteil Sartomer hat jedoch eine Oberflächenspannung von $\gamma_{PR48} \approx 33$ mN/m, welche hier als Abschätzung verwendet wird [5]. Die Oberflächenspannung von Ölsäure ist $\gamma_{\text{Ölsäure}} \approx 33$ mN/m [6].

Die Erdbeschleunigung g beträgt 9,81 m/s². Werden diese Werte in Gleichung (2.2) und (2.3) eingesetzt, ergibt sich für beide Materialien eine Bond-Zahl im Bereich von $Bo > 9$. Da die Bond-Zahl deutlich größer als 1 ist, dominieren die Gravitationskräfte die Form des Tropfens. Folglich muss der Einfluss der Schwerkraft im physikalischen Modell zwingend berücksichtigt werden, um die Tropfenkontur beschreiben zu können [3]. Die Young-Laplace-Gleichung ergänzt sich dann zu:

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1(x)} + \frac{1}{R_2(y)} \right) + \rho gh(x, y) = \textit{konstant} \quad (2.4)$$

Die Höhe $h(x, y)$ ist die vertikale Position auf der Tropfenoberfläche, gemessen von der Basis aus, wie in Abbildung 2.1 a) gezeigt. Die Division durch die Oberflächenspannung γ kann die Gleichung in eine reine Krümmungsformulierung überführen, die für die nachfolgenden Abschnitte vorteilhafter ist:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p}{\gamma} &= \frac{1}{R_1(x)} + \frac{1}{R_2(y)} + \frac{\rho gh(x, y)}{\gamma} \\ &= \kappa_1(x) + \kappa_2(y) + \kappa_g(x, y) = \overline{\kappa_\gamma} = \textit{konstant} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei sind $\kappa_1(x) = 1/R_1(x)$ und $\kappa_2(y) = 1/R_2(y)$ die Krümmungsanteile der beiden Hauptradien, $\kappa_g(x, y)$ den Krümmungsanteil der Gravitation und $\overline{\kappa_\gamma}$ der konstante Offset der Druckdifferenz Δp .

Eine zentrale Herausforderung bei der Modellierung ist die Bestimmung der vollständigen 3D-Geometrie des Tropfens aus seiner 2D-Abbildung. Das verwendete Messverfahren der Schattenprojektion liefert nur eine zweidimensionale Kontur des realen, dreidimensionalen Tropfens. Aus dieser Kontur lässt sich zwar die Krümmung in der Bildebene $\kappa_1(x)$ oder $\kappa_2(y)$ bestimmen, jedoch geht durch die Projektion jegliche Information über die Krümmung senkrecht zur jeweiligen Beobachtungsachse verloren. Die Rekonstruktion der exakten 3D-Form aus einem einzelnen Bild ist somit ein mathematisch unterbestimmtes Problem.

Auch die naheliegende Erweiterung auf eine zweite orthogonale Aufnahme löst diese Unterbestimmtheit nicht vollständig, da die Oberfläche zwischen den beiden bekannten Schnittprofilen undefiniert

bleibt. In Kapitel 4.3 wird ein Ansatz vorgestellt, der aus den zwei Schnittprofilen die 3D-Geometrie rekonstruiert. Dieses 3D-Rekonstruktionsverfahren dient in dieser Arbeit der Validierung der Messkette. Für das physikalische Modell für den Tropfen ist jedoch die direkt aus der 2D-Kontur extrahierte Krümmung die geeignetere Messgröße. Denn sie ist im Gegensatz zu einer 3D-Rekonstruktion aus nur zwei Ansichten nicht unterbestimmt und koppelt unmittelbar an die Modellphysik an. Deshalb wird in dieser Arbeit auf ein reduziertes Modell (engl. Reduced Order Model, ROM) zurückgegriffen [7]. Dieser Ansatz beschreibt die Tropfengeometrie mit einer reduzierten Ordnung, in diesem Fall die 2D Repräsentation.

Mathematisch wirkt sich diese physikalische Näherung aus, indem sie den Krümmungsbeitrag $\kappa_2(y)$ auf 0 setzt, was die Young-Laplace-Gleichung vereinfacht. Die Gültigkeit dieser Vereinfachung wird in späteren Kapiteln diskutiert. Diese Vereinfachung wird eine primäre Fehlerquelle der Methode darstellen. Sie wird allerdings in Kauf genommen, da sie ein Modell ermöglicht, das die wesentliche Physik in der primären Beobachtungsebene erfasst.

Anstatt eines 3D-Tropfens wird also ein 2D-Segment modelliert, dessen Form vollständig durch die im Bild erfasste 2D-Kontur definiert ist. Dies reduziert die modifizierte Young-Laplace-Gleichung zu:

$$\overline{\kappa}_Y = \kappa_1(x) + \kappa_g(x) = \kappa_{phys}(x) + \kappa_g(x) \quad (2.6)$$

Der Krümmungsbeitrag $\kappa_1(x)$ wird fortan als $\kappa_{phys}(x)$ bezeichnet, um seinen physikalischen Ursprung zu verdeutlichen.

Für die experimentellen Untersuchungen in dieser Arbeit wird der Tropfen auf das Ende eines Zylinderstifts platziert. Diese Anordnung stellt sicher, dass die Grundfläche des Tropfens immer kreisförmig ist. Im Gegensatz dazu müsste bei flachen Substraten die Form der Kontaktlinie messtechnisch erfasst werden, da sie durch Inhomogenitäten auf der Oberfläche oft von einer idealen Kreisform abweicht. Eine solche Abweichung würde eine weitere Fehlerquelle darstellen.

Die Geometrie des so positionierten Tropfens lässt sich durch die Kontaktpunkte $P_L = (x_L, z_L)$ und $P_R = (x_R, z_R)$, den Basisdurchmesser d_{basis} , den linken und rechten Kontaktwinkel ω_L und ω_R sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes ($x_{scheitel}$, $h_{scheitel}$) charakterisieren. Ein vereinfachter Tropfen mit den eingezeichneten Parametern ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

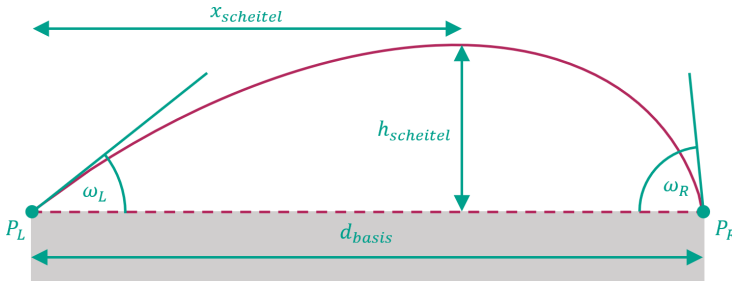


Abbildung 2.2: 2D-Vereinfachung des Tropfens mit den Parametern, welche die Kontur auf einem Zylinderstift beschreiben.

Zur quantitativen Charakterisierung der Tropfengeometrie können die Parameter aus Abbildung 2.2 aus den Konturpunkten extrahiert werden. Die Kontaktwinkel ω_L und ω_R können durch eine lineare

Kleinste-Quadrate-Anpassung über die ersten bzw. letzten zehn Konturpunkte an der Kontur ermittelt werden. Für die resultierenden Geraden ergeben sich die Steigungen m_L und m_R . Die Kontaktwinkel können daraus trigonometrisch bestimmt werden, nach den Formeln:

$$\omega_L = |\arctan(m_L)| \quad (2.7)$$

$$\omega_R = 180 - \arctan(m_R) \quad (2.8)$$

Der Tropfendurchmesser d_{basis} ist als der euklidische Abstand zwischen dem linken und dem rechten Kontaktpunkt definiert und wird berechnet als:

$$d_{basis} = \sqrt{(x_R - x_L)^2 + (z_R - z_L)^2} \quad (2.9)$$

Die Tropfenhöhen $h(x)$ für jeden Konturpunkt ist der orthogonale Abstand des Punktes von der Basislinie, die durch die beiden Kontaktpunkte verläuft. Der Scheitelpunkt mit den Koordinaten $(x_{scheitel}, h_{scheitel})$ wird als der Punkt der Kontur mit der maximalen Höhe über dieser Basislinie definiert. Diese Vorgehensweise stellt sicher, dass die Parameter auch für Tropfen korrekt bestimmt werden, deren Basislinie nicht perfekt horizontal ausgerichtet ist.

Während die modifizierte Young-Laplace-Gleichung die statische Gleichgewichtsform des Tropfens beschreibt, ist der elektrische Deformationsprozess dynamisch. Um die Verwendung eines statischen Gleichgewichtsmodells für diesen dynamischen Prozess zu rechtfertigen, ist es notwendig, dieses Verhalten des Systems zu charakterisieren. Es muss sichergestellt werden, dass Trägheitseffekte, wie

Oberflächenoszillationen, vernachlässigbar sind und der Tropfen eine stabile, nichtoszillierende Endform einnimmt.

Das dynamische Verhalten eines Tropfens unter Krafteinwirkung wird durch das Zusammenspiel von viskosen, Trägheits- und Oberflächenspannungskräften bestimmt. Dieses Verhältnis lässt sich durch die dimensionslose Ohnesorge-Zahl Oh quantifizieren [4].

$$Oh = \frac{\mu_{dyn}}{\sqrt{\rho\gamma L_h}} \quad (2.10)$$

Mit μ_{dyn} als dynamische Viskosität. Als charakteristische Länge L_h wird die Tropfenhöhe von 2 mm gewählt, da dies der primären Richtung der Krafteinwirkung während der Deformation entspricht.

Für das Polymer PR48 wurde die dynamische Viskosität mit einem Rheometer (RheoWin von Thermo Scientific) als $\mu_{PR48} = 628,1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ gemessen. Mit diesem Wert ergibt sich eine Ohnesorge-Zahl von $Oh_{PR48} = 2,39$. Da $Oh_{PR48} > 1$ ist, wird das System von viskosen Kräften dominiert. Dies impliziert ein überkritisch gedämpftes Verhalten, bei dem sich der Tropfen gleichmäßig und ohne signifikante Oszillationen verformt, bis er seine stabile Endform erreicht [8].

Im Gegensatz dazu weist Ölsäure mit einer dynamischen Viskosität von $\mu_{\text{Ölsäure}} = 37,6 \text{ mPa}\cdot\text{s}$ [9] eine Ohnesorge-Zahl von $Oh_{\text{Ölsäure}} = 0,16$ auf. Ein Wert von $Oh < 1$ deutet darauf hin, dass Trägheitskräfte dominieren und transiente Oszillationen nach Anlegen des elektrischen Feldes auftreten können. Um abzuschätzen, nach welcher Zeitspanne diese Oszillationen abklingen, wird die viskose Diffusionszeit τ_c

berechnet, welche die Zeit für den Impulstransport durch das Fluid beschreibt [10]:

$$\tau_c = \frac{\rho L_h^2}{\mu_{dyn}} = 0,095 \text{ s} \quad (2.11)$$

Für Ölsäure ergibt sich eine charakteristische Zeit von $\tau_c \approx 0,095 \text{ s}$. Bei gedämpften exponentiellen Prozessen gilt die Faustregel, dass nach einer Dauer von $5 \cdot \tau_c$ der eingeschwungene Zustand zu 99,3 % erreicht ist [11]. Dies entspricht hier einer Zeit von ca. 0,5 s.

Die Analyse der Systemdynamik legitimiert die Verwendung eines statischen Modellierungsansatzes unter Einhaltung einer spezifischen experimentellen Randbedingung. Für das Polymer PR48 ist die Annahme eines stabilen Gleichgewichts aufgrund des überkritisch gedämpften Verhaltens gerechtfertigt. Für Ölsäure hingegen gilt die Annahme nur, wenn das elektrische Feld länger als 0,5 s angeschaltet ist.

2.1.2 E-FELD UND DIELEKTRISCHE MATERIALIEN

Die in Gleichung (2.6) formulierte modifizierte Young-Laplace-Gleichung beschreibt die 2D-Kontur eines Tropfens unter dem alleinigen Einfluss von Oberflächenspannung und Gravitation. Um die gezielte Deformation durch ein externes elektrisches Feld zu modellieren, muss die Gleichung um einen Term für den elektrisch induzierte Beitrag erweitert werden. Im Rahmen der hier verwendeten Krümmungsformulierung geschieht dies durch die Einführung einer

elektrischen Krümmung κ_e . Sie repräsentiert den Anteil, der durch das elektrische Feld induziert wird. Die resultierende Krümmungsgleichung lautet somit:

$$\overline{\kappa_\gamma} = \kappa_{phys}(x) + \kappa_g(x) + \kappa_e(x) \quad (2.12)$$

Diese elektrische Krümmung κ_e ist eine äquivalente Darstellung des elektrischen Drucks p_e , der an der Grenzfläche des Tropfens wirkt. Der Zusammenhang zwischen beiden Größen ist über die Oberflächenspannung γ gegeben:

$$p_e(x) = \gamma \cdot \kappa_e(x) \quad (2.13)$$

Die physikalische Ursache dieses Drucks ist die Kraft, die das elektrische Feld auf die dielektrische Grenzfläche zwischen Luft und Fluid ausübt. Zur Herleitung dieser Kraft wird der Maxwell'sche Spannungstensor (MST) herangezogen, der die Kraftwirkung elektromagnetischer Felder auf Materie beschreibt. [12]

HERLEITUNG DES ELEKTRISCHEN DRUCKS

Die Kraft pro Flächeneinheit, die auf eine Oberfläche wirkt, wird durch den Spannungsvektor f_e mit den Komponenten $f_{e,i}$ beschrieben. Dieser ergibt sich aus dem Produkt des MST T mit dem nach außen gerichteten Normalenvektor n der Oberfläche in Indexschreibweise [13]:

$$f_{e,i} = T_{ij}n_j \quad (2.14)$$

Es gilt die Einstein'sche Summenkonvention. Dabei definiert der index i welche Komponente des resultierenden Spannungsvektor $f_{e,i}$

berechnet wird, während der Summenindex j die dafür notwendige Summation über die Tensorkomponenten und die Komponenten des Normalenvektors vorschreibt.

Die Sprungkonvention ist vom Tropfeninneren nach außen in die Luft. In seiner Minkowski-Form für isotrope Medien ist der MST T_{ij} gegeben durch [12]:

$$T_{ij} = \epsilon_{abs} \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\mu_{abs}} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right) \quad (2.15)$$

Wobei E_i und E_j die Komponenten des anliegenden elektrischen Feldes, B_i und B_j die Komponenten des magnetischen Feldes, ϵ_{abs} die absolute Permittivität, μ_{abs} die absolute Permeabilität des Materials und δ_{ij} das Kronecker-Delta sind. Da in dieser Arbeit ausschließlich statische oder quasi-statische elektrische Felder und Materialien ohne relevante magnetische Komponenten betrachtet werden, vereinfacht sich der Tensor ohne Magnetische Teile ($B = 0$) zu:

$$T_{ij} = \epsilon_{abs} \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right) \quad (2.16)$$

Die Spannungsvektor $f_{e,i}$ kann in einen Druck p als Normalkomponente und eine Scherspannung als Tangentialkomponente zerlegt werden [14]. Für die Beschreibung der statischen Gleichgewichtsform des Tropfens ist ausschließlich die Normalkomponente relevant.

Der mediumabhängige elektrische Druck ist:

$$p_e^{(m)} = n_i f_{e,i}^{(m)} = n_i (T_{ij}^{(m)} n_j) \quad (2.17)$$

Mit m als Mediumindex. Durch Einsetzen von Gleichung (2.16) in (2.17) und ausmultiplizieren ergibt sich:

$$p_e^{(m)} = n_i (T_{ij}^{(m)} n_j) = n_i \left[\epsilon_m \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right) n_j \right] \quad (2.18)$$

$$p_e^{(m)} = \epsilon_m (n_i E_i) (E_j n_j) - \frac{1}{2} \epsilon_m E^2 n_i \delta_{ij} n_j \quad (2.19)$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch die Eigenschaften der Indexnotation weiter vereinfachen. Die Terme $n_i E_i$ und $n_j E_j$ entsprechen dem Skalarprodukt $E \cdot n$ ($n_i E_i = n_j E_j = E \cdot n$). Der Term $n_i \delta_{ij} n_j$ reduziert sich durch die Wirkung des Kronecker-Deltas auf $n \cdot n$, was für einen Einheitsvektor gleich 1 ist ($n_i \delta_{ij} n_j = n_j n_j = 1$). Damit ergibt sich:

$$p_e^{(m)} = \epsilon_m (n \cdot E)^2 - \frac{1}{2} \epsilon_m E^2 \quad (2.20)$$

Um diese Gleichung anschaulicher zu interpretieren, wird das elektrische Feld E in seine Normalkomponente E_n und Tangentialkomponente E_t an der Grenzfläche zerlegt [15]:

$$E_n = (E \cdot n)n, E_t = E - (E \cdot n)n \quad (2.21)$$

$$E^2 = (E_n + E_t) \cdot (E_n + E_t) = E_n^2 + E_t^2 \quad (2.22)$$

Damit lässt sich der elektrische Druck ausdrücken als:

$$p_e^{(m)} = \frac{1}{2} \epsilon_m (E_{n,m}^2 - E_{t,m}^2), m \in \{l, f\} \quad (2.23)$$

Diese Gleichung beschreibt den elektrischen Druck an einer Grenzfläche innerhalb eines Mediums. Die Tropfenkontur stellt jedoch eine Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien dar, dem flüssigen

Polymer bzw. der flüssigen Ölsäure (Index f) und der umgebenden Luft (Index l). Der resultierende Spannungsvektor $f_{e,i}^{ges}$, der auf diese Grenzfläche wirkt, ergibt sich aus der Addition der einzelnen Spannungsvektoren von Luft $f_{e,i}^l$ und Fluid $f_{e,i}^f$, sowie der Definition der Spannungsvektors aus (2.14) [16]:

$$f_{e,i}^{ges} = f_{e,i}^l + f_{e,i}^f = T_{ij}^l n_j + T_{ij}^f (-n_j) = (T_{ij}^l - T_{ij}^f) \cdot n_j \quad (2.24)$$

Mit n_j als Normalenvektor an der Grenzfläche, der vom Fluid in die Luft zeigt. Deshalb ist er positiv in Luft und negativ in der Flüssigkeit. Für den resultierenden Druck auf die Grenzfläche ergibt sich dann:

$$p_e := \frac{1}{2} \epsilon_l (E_{n,l}^2 - E_{t,l}^2) - \frac{1}{2} \epsilon_f (E_{n,f}^2 - E_{t,f}^2) \quad (2.25)$$

Mit ϵ_l und ϵ_f als absolute Permittivität von Luft und des Fluids sowie den normalen und tangentialen elektrischen Feldkomponenten E_l und E_f geradeso außerhalb und geradeso innerhalb der Grenzfläche. Der Term p_e steht im Folgenden immer für den Druck über die Grenzfläche aus Formel (2.25).

GRENZFLÄCHENBEDINGUNGEN UND DIE ROLLE DER OBERFLÄCHENLADUNG

Um Gleichung (2.25) weiter zu vereinfachen, müssen die Randbedingungen für die elektrischen Felder an der Grenzfläche zwischen den beiden Dielektrika berücksichtigt werden. Für die tangentialen Feldkomponenten gilt die Stetigkeit [17]:

$$E_{t,l} = E_{t,f} \quad (2.26)$$

Die Normalkomponenten des elektrischen Verschiebungsfeldes $D = \epsilon_{abs} E$ sind im Allgemeinen sprunghaft, wenn freie Oberflächenladungen σ_s an der Grenzfläche vorhanden sind. Es gilt [17]:

$$\sigma_s = D_{n,l} - D_{n,f} = \epsilon_l E_{n,l} - \epsilon_f E_{n,f} \quad (2.27)$$

Das Vorhandensein einer solchen Oberflächenladung ist entscheidend für das Verhalten von realen, sogenannten verlustbehafteten Dielektrika (engl. leaky dielectrics). Diese Materialien sind keine perfekten Isolatoren, sondern besitzen eine geringe, aber endliche elektrische Leitfähigkeit σ .

An der Grenzfläche zweier solcher Materialien mit unterschiedlichen Permittivitäten ϵ und Leitfähigkeiten σ kommt es zu einer Ladungsansammlung. Dieses Phänomen ist als Maxwell-Wagner-Polarisation bekannt [10], [15], [18]. Unter Verwendung der Grenzbedingungen (2.26) und (2.27) kann die Druckgleichung (2.25) umgeformt werden. Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Im Fall eines perfekten Dielektrikums sind keine Oberflächenladungen vorhanden und es gilt $\sigma_s = 0$. Damit folgt aus Gleichung (2.27), dass die Normalkomponenten des elektrischen Felds auf beiden Seiten der Grenzfläche ineinander umgerechnet werden können:

$$E_{n,l} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f} \quad (2.28)$$

Eingesetzt in (2.25) ergibt dies den rein dielektrischen Druck [19]:

$$p_e = \frac{1}{2} (\epsilon_f - \epsilon_l) \left[\frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f}^2 + E_{t,f}^2 \right] \quad (2.29)$$

Für den realen Fall eines verlustbehafteten Dielektrikums mit Oberflächenladungen gilt $\sigma_s \neq 0$. Der Einfluss dieser Ladung auf den Druck muss explizit berücksichtigt werden. Die vollständige Gleichung lautet dann:

$$p_e = \frac{1}{2} (\epsilon_f - \epsilon_l) \left[\frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f}^2 + E_{t,f}^2 \right] + \frac{\sigma_s^2}{2\epsilon_l} + \frac{\epsilon_f \sigma_s}{\epsilon_l} E_{n,f} \quad (2.30)$$

Die detaillierte Herleitung von (2.29) und (2.30) ist in Anhang B.1.

Eine Analyse dieser Gleichung offenbart die treibenden Kräfte der Deformation. Der erste Term, der der Formel (2.29) entspricht, ist proportional zur Permittivitätsdifferenz $(\epsilon_f - \epsilon_l)$ und beschreibt den dielektrischen Druck. Ist die Permittivität des Tropfens höher als die des Umgebungsmediums ($\epsilon_f > \epsilon_l$), resultiert ein nach außen gerichteter Druck, der den Tropfen in Richtung höherer Feldstärken zieht und ihn elongiert. Die quadratische Abhängigkeit von den Feldkomponenten zeigt, dass dieser Druck unabhängig von der Polarität des Feldes ist.

Die beiden letzten Terme beschreiben den Beitrag der freien Oberflächenladungen, der sowohl von der Oberflächenladung σ_s selbst als auch von der normalen Feldkomponente E_n abhängt, welche richtungsabhängig ist. Dadurch ist der letzte Term auch abhängig von der Polarität des Feldes.

Wie aus der Formel für den elektrischen Druck hervorgeht, ist die Permittivität eine wesentliche Ursache für die Deformation. Für ein vollständiges Verständnis ist es notwendig, die physikalischen

Ursachen sowie die zugrundeliegenden Polarisationsmechanismen und deren Wirkzeiten zu betrachten.

POLARISATIONSMECHANISMEN

Entscheidend für die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld und einem Dielektrikum ist die Permittivität ϵ , welche von der Polarisierbarkeit P der verwendeten Materialien abhängt. Wirkt ein externes elektrisches Feld E_0 auf ein Dielektrikum, werden bei polaren Materialien vorhandene Dipole ausgerichtet und in unpolaren Materialien Dipole induziert. Dieser Effekt wird Polarisierung genannt. [20]

Diese ausgerichteten Dipole erzeugen ein internes, gebundenes Ladungsfeld E_1 , das dem angelegten Feld entgegenwirkt und als Depolarisierungsfeld bezeichnet wird. Das im Dielektrikum wirksame Feld E_{dielek} ist die Vektorsumme der beiden [20]:

$$E_{dielek} = E_0 + E_1 \quad (2.31)$$

Die relative Permittivität ϵ_r ist als das Verhältnis des externen Feldes zum resultierenden, schwächeren Feld im Inneren des Materials definiert. Sie beschreibt somit die charakteristische, feldabschwächende Eigenschaft des Dielektrikums [20]:

$$\frac{E_0}{E_{dielek}} = \epsilon_r \quad (2.32)$$

Diese dimensionslose Materialkonstante ϵ_r verknüpft die absolute Permittivität des Materials ϵ_{abs} mit der Permittivität im Vakuum ϵ_0 die einen konstanten Wert von $8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m hat [21]:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_{abs}}{\epsilon_0} \quad (2.33)$$

Makroskopisch wird die Polarisierung P über das elektrische Verschiebungsfeld D mit dem elektrischen Feld E verknüpft [20]:

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (2.34)$$

Für lineare, homogene und isotrope Dielektrika ist die Polarisierung proportional zum elektrischen Feld, wobei die elektrische Suszeptibilität χ_e der Proportionalitätsfaktor ist. Dies führt zu folgender Beziehung [20]:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (1 + \chi) E = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon_{abs} E \quad (2.35)$$

Sind die Materialien nicht linear, homogen und isotrop müssen weitere Einflüsse wie der Pockels-Effekt oder der Kerr-Effekt beachtet werden müssen [22]. Dies ist z. B. der Fall, wenn eine zu hohe Feldstärke wirkt und Ladungsträger im Material herausgelöst werden [15].

In dieser Arbeit werden die Materialien PR48 und Ölsäure als linear, isotrop und homogen betrachtet.

Die mikroskopische Ursache der Polarisierung liegt in vier grundlegenden Mechanismen, die additiv zur Gesamtpolarisation P_{ges} beitragen [20]:

$$P_{ges} = P_e + P_i + P_o + P_{MW} \quad (2.36)$$

Die Mechanismen sind die Elektronenpolarisation, P_e bei der die Elektronenwolke relativ zum Atomkern verschoben wird. Die Ionenpolarisation, P_i beruht auf der Verschiebung von Ionen in einem Gitter. Die Orientierungspolarisation, P_o beschreibt die Ausrichtung von Molekülen mit permanentem Dipolmoment. Die Grenzflächenpolarisation, auch Raumladungspolarisation oder Maxwell-Wagner-Polarisation, P_{MW} tritt auf, wenn sich in verlustbehafteten Dielektrika vorhandene Ladungsträger an der Grenzfläche unterschiedlicher Komponenten oder Defekte ansammeln [12], [15], [20], [23], [24], [25].

RELAXATIONSZEITEN UND RELEVANZ FÜR DIE VERSUCHSDURCHFÜHRUNG

Die bisher beschriebenen Polarisationsmechanismen unterscheiden sich grundlegend in ihrer Ansprechgeschwindigkeit und sind frequenzabhängig. Da in dieser Arbeit eine Gleichspannungsquelle (DC) verwendet wird, ist die Frequenzabhängigkeit der Permittivität nicht relevant. Es muss jedoch sichergestellt werden, dass die elektrische Anregung über einen ausreichend langen Zeitraum erfolgt, damit sich auch der langsamste Polarisationsmechanismus vollständig ausbilden kann. Um die Relevanz der Zeiten für die vorliegende Arbeit zu bewerten, müssen daher die charakteristischen Relaxationszeiten der einzelnen Mechanismen mit der Frequenz des angelegten elektrischen Feldes verglichen werden.

Elektronen- ($\tau_e \sim 10^{-15}$ s) und Ionenpolarisation ($\tau_i \sim 10^{-13}$ s) sind quasi-instantan [20]. Die Orientierungspolarisation ist mit $\tau_o \sim 10^{-10}$ s bis $\sim 10^{-8}$ s langsamer [22]. Die Maxwell-Wagner-Polarisation ist der langsamste Mechanismus und führt bei verlustbehafteten Dielektrika zu einer makroskopischen Oberflächenladung σ_s an der Grenzfläche, wie in Gleichung (2.27) beschrieben. Die Relaxationszeit τ_{MW} für die Ausbildung dieser Ladungsschicht kann für eine sphärische Annäherung des Tropfens (Index f) im Umgebungsmedium (Index l) abgeschätzt werden [18], [26]:

$$\tau_{MW} = \frac{\epsilon_f + 2\epsilon_l}{\sigma_f + 2\sigma_l} \quad (2.37)$$

Zur Berechnung der von τ_{MW} müssen die Materialparameter bekannt sein. Da PR48 eine relative Permittivität von $\epsilon_{PR48} = 12,77$ und eine Leitfähigkeit von $\sigma_{PR48} = 1,82 \cdot 10^{-6}$ S/m hat, kann es als verlustbehaftetes Dielektrika betrachtet werden. Es ist wahrscheinlich, dass bei ihm die Maxwell-Wagner-Polarisation infolge der geringen Leitfähigkeit auftreten wird. Die Materialparameter wurden von der Flucon GmbH (Bad Lauterburg, Deutschland) mit dem Dielektrizitäts-sensor EPSILON+ gemessen.

Ölsäure hat mit einer relativen Permittivität von $\epsilon_{\text{ölsäure}} = 2,46$ [27] und einer Leitfähigkeit von $\sigma_{\text{ölsäure}} < 2 \cdot 10^{-8}$ S/m [28] eine niedrige Leitfähigkeit, was keine dominante Maxwell-Wagner Polarisation hervorrufen sollte. Das umgebende Medium ist Luft, mit einer relativen Permittivität von $\epsilon_{\text{Luft}} = 1,0006$ [23] und einer Leitfähigkeit im Bereich von $\sigma_{\text{Luft}} = 10^{-13}$ bis 10^{-9} S/m [29].

Das Einsetzen der Materialwerte in (2.37) für das Luft-PR48-System ergibt $\tau_{MW} \approx 71,9 \mu\text{s}$ und für das Luft-Ölsäure-System $\tau_{MW} \approx 1,97 \text{ ms}$. Diese Zeit muss das elektrische Feld bei der Versuchsdurchführung mindestens wirken, damit sich der stationäre Zustand der Polarisation einstellen kann.

MODELLVEREINFACHUNGEN UND VERNACHLÄSSIGUNG DES TANGENTIALEN SPANNUNGSVEKTORS

Die hergeleitete Druckgleichung (2.29) bildet die Grundlage für das statische Gleichgewichtsmodell. Es müssen jedoch zwei weitere Vereinfachungen getroffen werden. Erstens ist die Oberflächenladungsdichte σ_s im Allgemeinen ortsabhängig. Für das entwickelte reduzierte Modell wird sie als eine konstante, effektive Oberflächenladung angenähert, die entlang der Tropfenkontur als konstant angenommen wird. Zweitens erzeugt die Oberflächenladung σ_s nicht nur eine Normalkraft, sondern auch eine tangentielle Kraft an der Grenzfläche, die gegeben ist durch [30]:

$$f_e = f_{e,n} + f_{e,t} = p_e + f_{e,t} \quad (2.38)$$

$$f_{e,t} = (\epsilon_l E_{n,l} - \epsilon_f E_{n,f}) E_{t,l} \quad (2.39)$$

Gilt $\sigma_s = 0$ dann ist der tangentielle Anteil der Spannungsvektor 0. Gilt $\sigma_s \neq 0$, so wird der tangentielle Anteil:

$$f_{e,t} = \sigma_s E_{t,l} \quad (2.40)$$

Dieser tangentielle Spannungsvektor ist physikalisch von Bedeutung, da er die Ursache für Fluidströmungen an der Oberfläche ist, wie sie beispielsweise im Leaky-Dielectric-Modell von Taylor und Melcher mithilfe der Stokes-Gleichungen beschrieben wird [31]. Im Modell dieser Arbeit wird sie vernachlässigt, um die Komplexität zu reduzieren, da die dynamische Fluidphysik nicht betrachtet wird.

Bevor der Versuchsaufbau und das eigene Modell detailliert vorgestellt werden, erfolgt im nachfolgenden Kapitel eine Einordnung der Arbeit in den aktuellen wissenschaftlichen Kontext.

2.2 STAND DER TECHNIK

In diesem Kapitel wird der Stand der Technik in den für diese Arbeit relevanten Bereichen beschrieben. Zuerst wird ein kurzer Überblick über verschiedene Methodiken gegeben, wie das elektrische Feld berechnet werden kann, das benötigt wird, um den elektrischen Druck p_e zu berechnen.

Anschließend wird der Stand der Technik für Ansätze zur Beschreibung der elektrischen Tropfendeformation und darauf basierender elektrooptischer Bauteile dargelegt. Mit Blick auf die Notwendigkeit einer Approximation der Tropfenkontur werden zuletzt relevante Arbeiten und Ansätze hierzu vorgestellt.

2.2.1 SIMULATIONSMETHODEN FÜR DAS ELEKTRISCHE FELD

Wie die Formeln (2.29) und (2.30) zeigen, ist es notwendig, die elektrischen Feldkomponenten im Bereich des Übergangs zwischen Tropfen und Luft zu kennen, um den elektrischen Druck p_e zu berechnen. Das elektrostatische Feld in einem Raum kann durch die Poisson-Gleichung berechnet werden [15]:

$$\nabla^2 \Phi = - \frac{\rho_{ladung}}{\epsilon_0} \quad (2.41)$$

Mit Φ als elektrischer Potentialfunktion und ρ_{ladung} als Ladungsverteilung. Das elektrische Feld ist dabei der Gradient von Φ [15]:

$$E = -\nabla \Phi \quad (2.42)$$

Mit ∇ als Nabla-Operator. Im ladungsfreien Raum bei dem $\rho_{ladung} = 0$ gilt, vereinfacht sich die Gleichung zur Laplace-Gleichung [15]:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.43)$$

Zur Ermittlung der elektrischen Feldverteilung muss diese partielle Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Geometrien und Randbedingungen gelöst werden [17]. In Bezug auf die Fragestellung dieser Arbeit beziehen sich die Geometrien auf die Tropfen und Elektroden, während die Randbedingungen durch die Materialeigenschaften der Dielektrika sowie die anliegende Spannung definiert werden.

Im Allgemeinen lassen sich die Lösungsansätze in zwei Kategorien unterteilen: analytische und numerische Methoden. Analytische

Methoden berechnen exakte Lösungen für die Feldverteilungen. Beispiele für solche Methoden wären die Bildladungsmethode [25] oder die konforme Abbildung [32]. Die Nachteile der Methoden bestehen hauptsächlich darin, dass sie nur auf sehr idealisierte Geometrien und Systeme anwendbar sind. Komplexe Geometrien, wie z. B. die wechselnden Elektrodenkonfigurationen in dieser Arbeit, sind aufwändig darzustellen. Deshalb sind diese analytischen Ansätze nicht gut geeignet, um das elektrische Feld für diese Arbeit zu berechnen.

Im Gegensatz dazu sind numerische Ansätze flexibler, da sie das Problem diskretisieren und dadurch die oben genannte Differentialgleichung in ein algebraisches Gleichungssystem überführen, das dann computergestützt gelöst werden kann [33]. Durch die Diskretisierung ist es weniger aufwändig, eine neue Geometrie im System zu implementieren. Es gibt verschiedene Ansätze, die sich auf die Elektrodynamik beziehen: Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) [34], die Randelemente-Methode (BEM) [19] und die Finite-Elemente-Methode (FEM) [33] sind die Standardmethoden.

Für die numerische Modellierung in dieser Arbeit wird FEM gewählt, da sie den spezifischen Anforderungen der Problemstellung am besten gerecht wird. Die entscheidenden Vorteile liegen in ihrer hohen geometrischen Flexibilität und der Fähigkeit, Materialinhomogenitäten gut abzubilden. Im Gegensatz zu alternativen Verfahren, wie der FDM, die bei komplexen Rändern an ihre Grenzen stößt, oder der BEM, die bei inhomogenen Materialien weniger flexibel ist, kann die FEM die asymmetrisch gekrümmte Tropfenoberfläche und die variablen Elektrodenanordnungen gut diskretisieren [35].

Gleichzeitig lassen sich die unterschiedlichen relativen Permittivitäten von Flüssigkeitstropfen und umgebender Luft problemlos in das Modell einbeziehen. Der durch die vollständige Diskretisierung des Problemraums bedingte höhere Rechenaufwand wird als notwendiger Kompromiss in Kauf genommen.

Ein weiterer praktischer Vorteil ist die nahtlose Einbindung der FEM-Berechnungen in das Gesamtsystem, das vollständig in Matrix Laboratory (MATLAB) realisiert ist. Die Summe dieser Eigenschaften erweist die FEM als die geeignete Methode, um die physikalischen Effekte der Tropfendeformation zu modellieren.

2.2.2 ELEKTRISCH DEFORMIERTE OPTISCHE BAUTEILE

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der elektrischen Deformation von auf einem Substrat liegenden Tropfen. Diese Fokussierung begründet sich dadurch, dass die zu fertigenden abbildenden Mikrooptiken eine ähnliche Geometrie aufweisen, weshalb alternative Konfigurationen wie hängende oder schwebende Tropfen nicht betrachtet werden. Dieses Kapitel gibt zunächst einen Überblick über die etablierten Modelle zur Beschreibung der Tropfendeformation und stellt anschließend darauf basierende optische Anwendungen vor.

Ein Verfahren zur elektrischen Deformation von Tropfen ist die Elektrobenetzung (engl. Electrowetting). Elektrobenetzung beschreibt den Effekt, bei dem sich der Kontaktwinkel eines flüssigen

Tropfens infolge der Veränderung der Oberflächenenergien durch das Anlegen einer elektrischen Spannung modifiziert. Eine häufig verwendete Abwandlung davon ist das „Electrowetting on Dielectric“ (EWOD), bei dem der Flüssigkeitstropfen auf einer dielektrischen Schicht liegt, wodurch ein direkter Kontakt mit den Elektroden vermieden wird, um Leckströme zu verhindern.

Die Modifizierung der Tropfenoberfläche erfolgt bei der Elektrobenetzung primär über die Änderung des Kontaktwinkels, was durch die Lippmann-Young-Gleichung beschrieben wird. Die Elektrobenetzung unterliegt praktischen Grenzen, wie der Sättigung des Kontaktwinkels, die die maximale Deformierbarkeit limitiert. [36]

Im Gegensatz zur Elektrobenetzung wird in dieser Arbeit ein Ansatz verwendet, der die gesamte Form des Tropfens und nicht nur die Kontaktwinkel modifiziert. Dafür wird eine Stift-Platte-Elektrodenkonfiguration (engl. pin-plate) verwendet, die ein inhomogenes elektrisches Feld zur Folge hat. Die daraus resultierende und auf den gesamten Tropfen wirkende Nettokraft wird in der Literatur oft als Dielektrophorese (DEP) bezeichnet. Diese Kraft ist jedoch eine Folge des MST, mit dem die gesamte Krafteinwirkung physikalisch beschrieben werden kann. Deshalb wird der Begriff der Dielektrophorese in dieser Arbeit nur hier der Vollständigkeit halber genannt.

Wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben, sind die verwendeten Polymere keine perfekten, sondern verlustbehaftete Dielektrika mit geringen Restleitfähigkeit. Die Interaktion zwischen diesen Materialien und dem elektrischen Feld wird durch das Taylor-Melcher-Modell

beschrieben. Dieses Modell berücksichtigt die Kombination von zwei Effekten. Die Kraft aus dem Permittivitätsgradienten an der Grenzfläche sowie die Kraft, die durch die Maxwell-Wagner-Polarisation entsteht, werden in diesem Modell berücksichtigt. Ursprünglich von Taylor entwickelt [37] und später von Melcher erweitert [31], gilt das Modell heute als Standard zur Beschreibung der Elektrohydrodynamik in schwach leitfähigen Fluiden. Dabei ist die Elektrohydrodynamik (EHD) ein elektrodynamisches Modell, das mit der Fluidodynamik gekoppelt ist. Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit der vereinfachte elektrostatische Fall betrachtet.

Während das Taylor-Melcher-Modell den physikalischen Mechanismus der Deformation beschreibt, finden sich in der Literatur auch numerische Verfahren, die primär der Analyse von experimentell erfassten Tropfenprofilen dienen. Ein bedeutendes Beispiel hierfür ist die „Axisymmetric Drop Shape Analysis - Electric Fields“ (ADSA-EF) [38], [39]. Dieser Ansatz dient primär der präzisen Messung der Oberflächenspannung. Dabei wird ein aufgenommenes Tropfenprofil an ein theoretisches Modell angepasst, das auf der erweiterten Young-Laplace-Gleichung basiert und um elektrische Terme erweitert wurde. Wie bereits der Name andeutet, ist dieser Ansatz jedoch ausschließlich für achssymmetrische Tropfen geeignet und daher nicht für die Analyse von Freiformoptiken geeignet.

Basierend auf den beschriebenen physikalischen Prinzipien wurde eine Vielzahl optischer Anwendungen realisiert, die von adaptiven Linsen über die Strahlsteuerung bis hin zu variablen Gittern reichen [40]. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Herstellung von

Linsen liegt, wird nachfolgend ein Überblick über adaptive (flüssige) und formstabile (ausgehärtete) Linsen gegeben.

Adaptive Linsen können ihre optischen Eigenschaften, wie beispielsweise die Brennweite, durch äußere Einflüsse verändern. Für die elektrischen Deformationen gibt es in der Literatur Arbeiten, die auf EWOD basieren und typischerweise leitfähige Flüssigkeiten nutzen [41], [42], [43]. Andere Ansätze verwenden die Formgebung mittels elektrischer Deformation (bzw. DEP), die auch bei dielektrischen Materialien anwendbar ist [44], [45].

Eine zentrale Idee dieser Arbeit ist die Herstellung von ausgehärteten Linsen nach der Deformation. Ähnlich wie bei adaptiven Linsen wird hierbei ein Tropfen aus einem aushärtbaren Polymer, meist UV-polymerisierbar, zunächst elektrisch in die gewünschte Form deformiert. Anschließend wird der Tropfen in diesem Zustand beispielsweise durch UV-Licht ausgehärtet [46], [47], [48].

Dieser Stand der Technik zeigt, dass die elektrische Deformation von Tropfen ein etabliertes Verfahren zur Herstellung von adaptiven und ausgehärteten Linsen ist. Die physikalischen Grundlagen werden durch Modelle wie das von Taylor und Melcher beschrieben. Jedoch fehlt bislang ein Modell, das die finale Linsengeometrie basierend auf den Materialeigenschaften und den elektrischen Gegebenheiten präzise vorhersagen kann und somit die Grundlage für eine gezielte Herstellung von Freiformoptiken ermöglichen würde. Dies bestätigt die formulierten Forschungsfragen 1 und 3.

2.2.3 TROPFENKONTUR-BESCHREIBUNG UND 3D-REKONSTRUKTION

Die beschriebene elektrische Deformation führt zu realen Freiformflächen, die nicht rotationssymmetrischen Geometrien entsprechen. Das Erfassen dieser Form ist entscheidend für die Entwicklung eines Modells. Allerdings stellt diese Erfassung eine Herausforderung dar, die in zwei Lösungsansätzen resultiert. Einmal muss die 2D-Kontur gut approximiert werden, und um eine 3D-Form zu ermitteln, muss ein Modell vorliegen, das es ermöglicht, die 3D-Form aus den Bildern zu generieren. Der Stand der Technik zu diesen beiden Lösungen wird im Folgenden dargelegt.

Für den einfachen Fall eines rotationssymmetrischen Tropfens existiert eine Reihe etablierter Methoden. Am weitesten verbreitet ist die im vorherigen Unterkapitel bereits genannte „Axisymmetric Drop Shape Analysis“, die die Tropfenform iterativ aus der Young-Laplace-Gleichung ableitet [39]. Alternativ gibt es rein geometrische Verfahren, die die Kontur mithilfe von Ellipsen oder Kreisanpassungen mathematisch beschreiben [49], [50], [51]. Diese Methoden sind robust, setzen jedoch eine ideale Rotationssymmetrie des Tropfens voraus, die bei Freiformen nicht gegeben ist.

Bei nicht rotationssymmetrischen Tropfen sind komplexere Ansätze erforderlich. Diese Modelle behandeln meist Tropfen auf geneigten Oberflächen und basieren häufig auf hydrodynamischen Gleichungen [52], der Anpassung von Splines [53], [54] oder Polynomen [55], [56]. Diese Methoden approximieren zwar die 2D-Konturen relativ

genau, haben jedoch oft den Nachteil, dass sie Informationen über die physikalischen Eigenschaften des Tropfens erfordern oder auf bestimmte Randbedingungen wie eine geneigte Oberfläche beschränkt sind.

Die 3D-Rekonstruktion der Form und des Volumens aus 2D-Konturen stellt eine weitere Hürde dar. Es gibt einfache Ansätze, wie die Anwendung der Guldinschen Regeln [57] oder die Integration von Kreisscheiben [58]. Diese sind jedoch auch auf rotationssymmetrische Körper beschränkt. Methoden aus anderen Anwendungsfeldern, wie dem Tintenstrahldruck, sind aufgrund völlig anderer Randbedingungen und eines Bedarfs an einer Vielzahl an Kameraperspektiven [59], [60], [61], [62], [63] nicht auf den hier vorgestellten Aufbau übertragbar.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass keiner der bestehenden Ansätze die notwendige Flexibilität für die Approximation der vielfältigen Formen elektrisch deformierter Tropfen bietet. Es existiert somit keine Methode, die eine präzise 2D-Approximation für nicht achsensymmetrische Tropfen liefert und diese mit einer 3D-Rekonstruktion aus nur zwei Bildern kombiniert, was die zweite Forschungsfrage bestätigt.

Kapitel 3

EXPERIMENTELLER AUFBAU

3.1 ANFORDERUNGEN

Aus den Forschungsfragen leitet sich eine Reihe von Anforderungen an die Experimentierumgebung ab. Das Ziel des Aufbaus besteht darin, Flüssigkeitstropfen mit variabel positionierbaren und austauschbaren Elektroden zu deformieren. Diese Deformation soll so beobachtet werden, dass eine quantitative und reproduzierbare Beschreibung des Tropfens möglich ist. Dies erfordert die Kontrolle aller relevanten Einflussgrößen und einen hohen Automatisierungsgrad.

Die folgenden Anforderungen wurden herausgearbeitet:

- **Stabile Umgebungsbedingungen:** Die Temperatur ist ein kritischer Parameter, der alle mechanischen und elektronischen Komponenten des Aufbaus beeinflusst, insbesondere das Rauschverhalten der Kameras [64], [65], [66]. Um die Reproduzierbarkeit zu gewährleisten, ist daher eine abgeschlossene Umgebung mit aktiver Temperatursteuerung zwingend erforderlich.

- **Variables elektrisches Feld:** Eine systematische Untersuchung der Tropfendeformation erfordert die präzise Variation des elektrischen Feldes, welche sich aus der angelegten Spannung und der Elektrodengeometrie ergibt. Da Vorversuche die Notwendigkeit von Spannungen im Kilovolt-Bereich zeigten [67], muss eine automatisierbare Hochspannungsquelle in Kombination mit austauschbaren und beweglichen Elektroden eingesetzt werden, um beide Anforderungen zu erfüllen.
- **Hochaufgelöste Bilderfassung:** Für die quantitative Beobachtung ist ein leistungsfähiges optisches System erforderlich, das transparente Flüssigkeitstropfen erfassen kann. Dieses muss eine metrologische Kalibrierung zur Überführung von Bilddaten in metrische Einheiten enthalten. Da insbesondere nicht-achsensymmetrische Deformationen untersucht werden sollen, sind mindestens zwei Kamerasysteme erforderlich. Um eine scharfe Abbildung zu gewährleisten, ist ein automatisierter Fokus notwendig.

- **Automatisierung und Sicherheit:** Eine zentralisierte Steuerung ist erforderlich, um alle Teilkomponenten automatisiert anzusteuern und die Versuche systematisch durchzuführen. Aus der Notwendigkeit der Hochspannung ergibt sich zudem die Anforderung an eine abgeschlossene Sicherheitsbox, die den Anwender schützt.

In den folgenden Kapiteln werden diese Anforderungen abgearbeitet und ein Aufbau und seine Komponenten vorgestellt, die diese erfüllen.

3.2 MECHANISCHER, OPTISCHER UND ELEKTRONISCHER AUFBAU

3.2.1 GESAMTAUFBAU

Der Versuchsaufbau, der in dieser Arbeit verwendet wird, ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Darüber hinaus sind die wichtigsten Komponenten, einschließlich des Koordinatensystems, abgebildet.

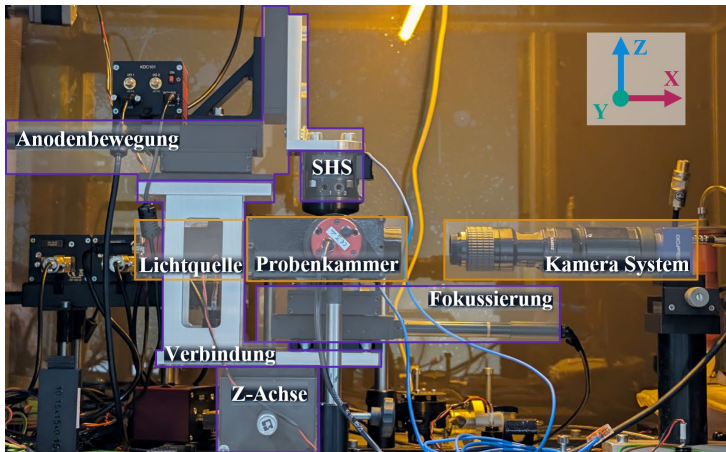


Abbildung 3.1: Fotografie des realisierten Aufbaus in der Sicherheits-einhausung mit dem verwendeten Koordinatensystem und den wichtigsten Komponenten. Baugruppe eins in lila und Baugruppe zwei in orange.

Der Aufbau wurde auf einem optischen Tisch realisiert. Das zentrale Element ist der Flüssigkeitstropfen, der auf einem Zylinderstift

platziert ist, welcher sich in der Probenkammer befindet. Dieser Zylinderstift ist gleichzeitig die Kathode und ist auf einer in X- und Y-Richtung bewegbaren Linearachse zur Fokussierung befestigt. Über dem Tropfen befindet sich die in die X-, Y- und Z-Richtung bewegliche sowie durch ein Schunk-Handwechselsystem (SHS) austauschbare Anode, die zusammen mit der Kathode ein definiertes elektrisches Feld erzeugen kann. Die resultierende Deformation der Tropfenkontur wird nach dem Prinzip der Schattenprojektion von zwei orthogonal zueinander positionierten optischen Systemen erfasst, bestehend aus einer Lichtquelle und einem Kamerasystem. Der gesamte Aufbau befindet sich in der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Sicherheitseinhausung, die für die Anwendersicherheit sowie für thermisch stabile Bedingungen sorgt.

Die einzelnen Komponenten des Gesamtaufbaus werden in den folgenden Unterkapiteln beschrieben, beginnend mit den mechanischen Bauteilen.

3.2.2 MECHANIK

Der mechanische Aufbau ist in zwei Baugruppen unterteilt, um die Vibrationen des Bewegungssystems auf die Optik möglichst gering zu halten. Eine Seitenansicht der Baugruppen ist in Abbildung 3.1 und Abbildung 3.2 a) dargestellt. Die erste Baugruppe umfasst alle Bewegungskomponenten, welche für die Verschiebung der Anode

und des Tropfens verantwortlich sind. Die Kameras, Lichtquellen und die Probenkammer sind die zweite Baugruppe.

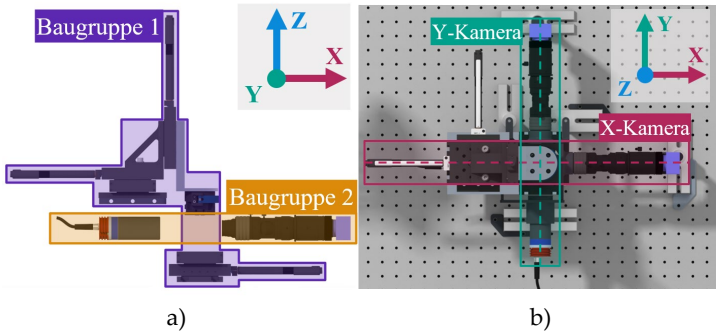


Abbildung 3.2: Ansichten des Gesamtaufbaus mit Koordinatensystem. a) Seitenansicht der Baugruppen. b) Draufsicht mit den optischen Achsen und Benennung der Kameras.

Fünf motorisierte Linearachsen von Thorlabs (PT1/PT3 mit Z825B-Aktuatoren) dienen der Positionierung der Anode und der Fokussierung der Kameras. Sie verfügen über einen Verfahrweg von 25 mm bei einer Wiederholgenauigkeit von $0,2\ \mu\text{m}$ [68]. Die Achsen sind so platziert, dass der Tropfen genau in der Mitte bei 12,5 mm an jeder Achse positioniert ist. Diese sind auf einer Z-Achse angebracht, so dass der Tropfen auch bei unterschiedlichen Höhen der Substrate in das Sichtfeld der Kameras bewegt werden kann.

Um den Einfluss unterschiedlicher Anodengeometrien zu untersuchen, ermöglicht ein manuelles Werkzeugwechselsystem SHS den schnellen und präzisen Austausch der Anodenhalter mit einer Wiederholgenauigkeit von $20\ \mu\text{m}$ [69].

Die verwendeten Bauteile sind in Anhang C.1 tabellarisch aufgelistet.

3.2.3 OPTIK

Das optische System zur Erfassung der Tropfenkontur mittels Schattenprojektion besteht aus zwei identischen, orthogonal angeordneten Systemen. In Abbildung 3.2 b) ist eine Draufsicht des Aufbaus dargestellt, einschließlich der optischen Achsen und der Bezeichnungen der Kameras.

Die Bildaufnahme erfolgt durch zwei monochrome Industriekameras von Matrix Vision (MV-1013G-1111), die mit einem 1/1,8"-CMOS-Sensor (EV76C560, 1280 x 1024 Pixel) ausgestattet sind, welcher eine quadratische Pixelgröße von 5,3 μm aufweist [70]. In dieser Arbeit wird die X-Kamera als diejenige definiert, die entlang der optischen X-Achse platziert ist, während die Y-Kamera entlang der optischen Y-Achse positioniert ist.

Die Beleuchtung erfolgt durch zwei kollimierte Lichtemittierende Dioden (LED) von Opto Engineering (LTCLHP016-W) [71]. Um Beugungsartefakte an den Tropfenkanten zu minimieren und eine robuste Konturdetektion zu gewährleisten, empfiehlt der Hersteller einen Diffusor zur Homogenisierung [72]. Abbildung 3.3 verdeutlicht den positiven Einfluss des Diffusors auf die Kantenqualität des finalen Schattenbildes. Dargestellt ist in a) das Bild mit Vergrößerung auf der Tropfenkante ohne Homogenisierung sowie das Intensitätsprofil über die Tropfenkante in b). Das Gleiche ist für die

Homogenisierung in Abbildung 3.3 c) und das Intensitätsprofil in d) gezeigt. Ohne Homogenisierung ist Beugung an der Kante zu sehen, während die Homogenisierung zu einer klaren Kante führt. Als Diffusor wird die aufgeraute Seite eines Surgipath Apex Adhesive Objektträgers (Leica) verwendet, wie in Abbildung 3.3 e) zu sehen ist.

Als Objektive dienen Thorlabs 6,5x Zoom-Objektive (MVL6X12Z), deren passende Pixelgröße für die gewählte Konfiguration im Bereich von $5\text{ }\mu\text{m}$ bis $10\text{ }\mu\text{m}$ liegt, was optimal auf die Pixelgröße des Kamerasensors abgestimmt ist [73]. Die genaue Konfiguration ist im Anhang C.2 tabellarisch aufgelistet.

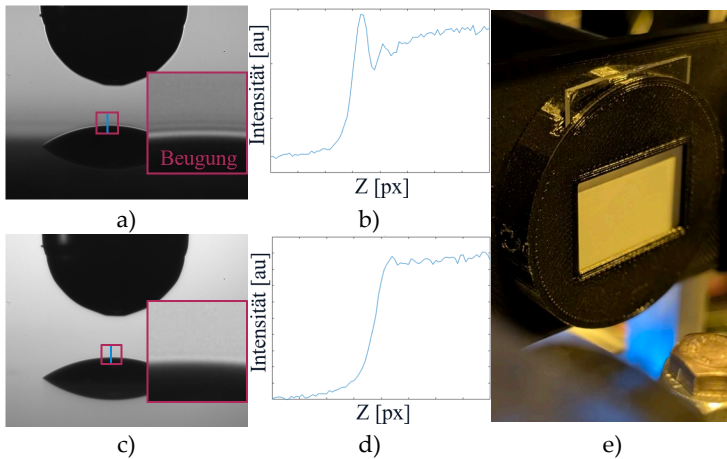


Abbildung 3.3: Wirkung eines Diffusors auf die Kantenqualität. a) Das Bild und b) das Kantenprofil zeigen starke Beugungsartefakte bei kollimierter Beleuchtung. c) Bild und d) geglättetes Kantenprofil nach Einsetzen des Diffusors. e) Fotografie des Diffusors.

Die Kalibrierung beider Kamerasysteme erfolgte nach der Methode von Zhang [74], [75], [76] unter Verwendung eines Thorlabs Kalibriertargets (R1L3S3P). Die intrinsischen Kameraparameter in Anhang C.3 zeigt eine für reale Objektive typische, leichte tonnenförmige radiale Verzeichnung ($k_1 < 0$). Die tangentielle Verzeichnung ist mit Werten nahe null vernachlässigbar gering, was auf eine präzise parallele Ausrichtung von Sensor- und Objektivenebene hindeutet, und die hohe metrische Güte des optischen Aufbaus bestätigt. [77]

Die X-Kamera hat nach der Kalibrierung eine effektive Pixelgröße von $8,4 \times 8,4 \mu\text{m}/\text{px}$, während die Y-Kamera eine effektive Pixelgröße von $8,3 \times 8,3 \mu\text{m}/\text{px}$ hat.

3.2.4 HOCHSPANNUNG

Zur Erzeugung des elektrischen Feldes wird ein Hochspannungsnetzteil von hivolt (HAR42-4 mit HA3B3-S Verstärkermodul) eingesetzt [78]. Das Gerät wurde gewählt, da es den erforderlichen Spannungsbereich von $\pm 3000 \text{ V}$ abdeckt und über analoge Steuereingänge sowie Monitorausgänge verfügt, die eine präzise Synchronisation der Tropfendeformation mit der Datenerfassung ermöglichen. Die vollständigen technischen Spezifikationen sind in Anhang C.4 zusammengefasst.

Die Anstiegszeit $t_{\text{Ramp}}^{\text{min}}$ gibt die minimale Zeit an, die das Gerät braucht, um von 0 V auf 3000 V zu schalten. Die Versuche wurden mit einer Anstiegszeit von $t_{\text{Ramp}} = 200 \mu\text{s}$ durchgeführt, wobei trotz

der Unterschreitung der im Anhang C.5 berechneten realen minimalen Zeit von $t_{Ramp} = 625 \mu s$ keine Verzerrungen im Signal zu sehen waren. Der Einfluss dieses Parameters auf das Modell wird in Kapitel 6 betrachtet.

Die räumliche Verteilung des elektrischen Feldes wird durch die Anode bestimmt, die in dieser Arbeit als modulares „Nadelkissen“ aus Präzisions-Stiftleisten mit Rastermaß 2,54 mm aufgebaut ist [79]. Dieses Design ist in Abbildung 3.4 a) bis c) dargestellt und erlaubt die einfache und reproduzierbare Konfiguration verschiedener Geometrien, wie einer Einzelanode (EA) oder Doppelanode (DA).

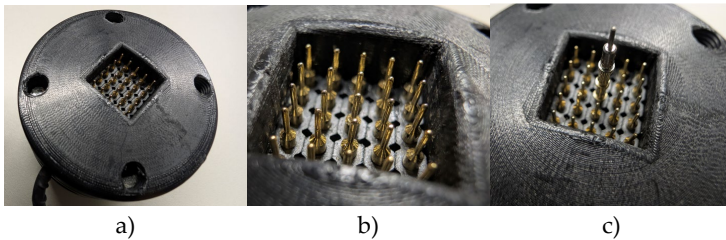


Abbildung 3.4: Anoden Nadelkissen. a) Gesamtansicht des am SHS befestigten Halters. b) Nahaufnahme des modularen Nadelkissens. c) Beispiel der Einzelanode.

Für den Ausgang des Spannungsgeräts wird das von hivolt mitgelieferte Hochspannungskabel verwendet. Für die elektrischen Anschlüsse wurden Standard-Verbindungselemente (z. B. WAGO-Klemmen) verwendet, die außerhalb ihrer Nennspannung betrieben werden. Dies war unter den kontrollierten Bedingungen des Versuchsaufbaus zulässig, da durch einen Mindestabstand von über

1 mm zwischen den hochspannungsführenden und geerdeten Bauteilen die Gefahr eines Spannungsüberschlags minimiert wurde. Dieser Abstand ist für die maximale Betriebsspannung von 3000 V in Luft ausreichend [23]. Die verwendeten Bauteile für den Hochspannungsaufbau und die spannungsführenden Bauteile sind in Anhang C.6 tabellarisch aufgelistet.

3.3 STEUERUNG UND DATENERFASSUNG

Die systematische Durchführung der Experimente erfordert ein präzises und synchronisiertes Zusammenspiel aller Komponenten, welches durch eine zentrale, in MATLAB realisierte Softwareumgebung gewährleistet wird.

Die Ansteuerung der Linearachsen erfolgt über eine Implementation der Thorlabs-API in MATLAB [80]. Diese beinhaltet alle grundlegenden Befehle, die zur Steuerung und Statusabfrage benötigt werden. Ein kontrastbasierter Autofokus wird für einen konstanten Fokus eingesetzt. Dazu wird eine Implementierung der Tenengrad-Metrik in MATLAB verwendet, um die Tropfenkontur vor jedem Versuch mittels Gradientenanstieg optimal zu fokussieren [81], [82], [83]. Die genaue Beschreibung der Funktionsweise des Autofokus ist in Anhang C.7.

Die Bildaufnahme wird softwareseitig getriggert und nutzt eine kamerainterne Mittelung über drei Bilder zur Rauschreduktion. Um die

Bilder mit den anderen Experimentdaten zeitlich zuzuordnen, wird jedes Bild mit einem Zeitstempel versehen.

Die Steuerung der Hochspannungsquelle ist durch eine Datenerfassungskarte (DAQ) von National Instruments (USB-6001) realisiert. Diese gibt die analogen Steuersignale für die Hochspannung aus und erfasst gleichzeitig die Spannungs- und Stromwerte der Monitorausgänge. Die maximale Abtastrate der Karte ist dabei insgesamt 20000 Hz, was bei vier in Verwendung befindlichen Kanälen zu einer minimalen Abtastrate von 5000 Hz führt.

Eine Charakterisierung des elektrischen Ausgangssignals bestätigt das stabile und reproduzierbare Verhalten des Systems nach einem kurzen Einschwingvorgang. Die Charakterisierung des Hochspannungssignals befindet sich im Anhang C.8. Da die Datenerfassungskarte den Signalen einen Zeitstempel zuweist, können die Daten mit der Kamera bei der Auswertung synchronisiert werden. Die exakte zeitliche Synchronisation aller Messdaten ist somit gewährleistet.

Alle verwendeten elektronischen Bauteile sind in Anhang C.9 tabellarisch aufgeführt.

3.4 GEKÜHLTE SICHERHEITSEINHAUSUNG

Der gesamte Versuchsaufbau ist in einer geschlossenen und geerdeten Einhausung untergebracht, die zwei wesentliche Funktionen erfüllt. Erstens die Gewährleistung der elektrischen Sicherheit und

zweitens die Sicherstellung einer thermisch stabilen Experimentierumgebung. Dies ist aus drei Gründen notwendig. Die physikalischen Eigenschaften der verwendeten Materialien, insbesondere die Oberflächenspannung, die Viskosität und die Dichte des Polymers, sind temperaturabhängig [84], [85], [86]. Eine weitere Fehlerquelle stellt die thermische Ausdehnung der mechanischen Komponenten des Aufbaus dar. Ferner reagieren die eingesetzten elektronischen Komponenten, allen voran die CMOS-Sensoren der Kameras, empfindlich auf Temperaturänderungen, was sich in einer Variation des Dunkelstroms und somit des Bildrauschens äußert [77].

Abbildung 3.5 a) zeigt eine Außenansicht der Kammer und b) den Anschluss des als Kaltluftquelle dienenden Klimageräts (Trotec PAC 2100X).

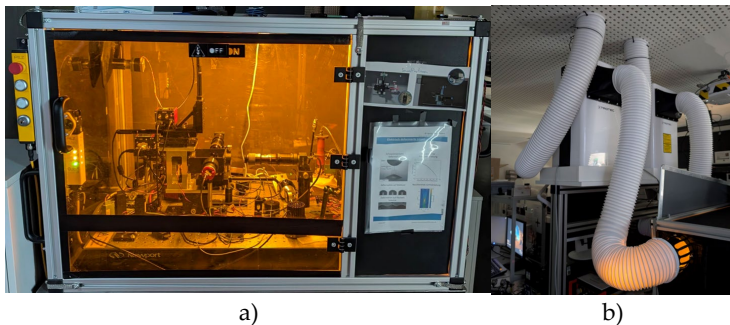


Abbildung 3.5: Die gekühlte Sicherheitseinhausung. a) Außenansicht der geschlossenen Experimentierumgebung. b) Das angeschlossene mobile Klimagerät, das als Kaltluftquelle für die Temperaturregelung dient.

Umweltsensoren (BME680) erfasst. Eine Langzeitcharakterisierung des Systems, die in Abbildung 3.7 zu sehen ist, zeigt die hohe thermische Stabilität. In der Vergrößerung ist auch zu erkennen, dass die Temperatursensoren aufgrund des Luftstroms leicht unterschiedliche Temperaturwerte anzeigen. Am primären Regelsensor s6, der direkt neben der Probenkammer platziert ist, wird die Solltemperatur von 17°C mit einer Standardabweichung von $\pm 0,14^{\circ}\text{C}$ eingehalten.

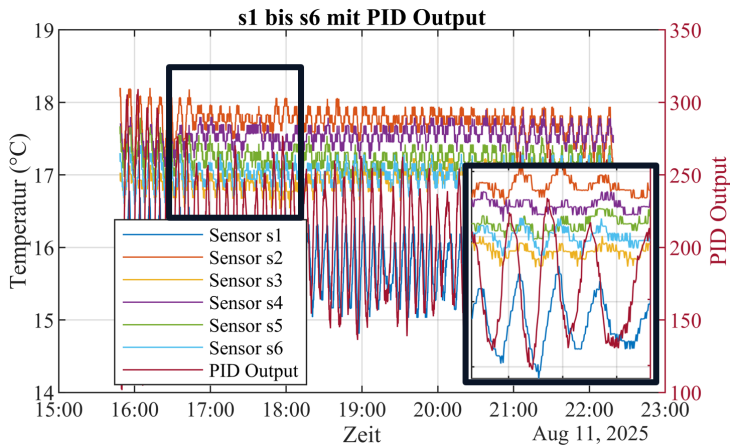


Abbildung 3.7: Langzeitmessung der sechs Temperatursensoren und des PID-Stellsignals.

Nach einer Einschwingzeit von ca. 23 Minuten ist die Solltemperatur erreicht. Die Temperaturen der Kameras sind nach dieser Einschwingzeit ebenfalls stabil (X-Kamera: $43,94 \pm 0,16^{\circ}\text{C}$; Y-Kamera: $42,00 \pm 0,17^{\circ}\text{C}$). Die erweiterte Gesamtmessunsicherheit der Temperaturmessung am Regelsensor beträgt $0,75^{\circ}\text{C}$ ($k = 2$, 95 %).

Die detailliertere Betrachtung der Kühlung ist in Anhang C.13 und C.14 dokumentiert.

3.5 VERSUCHSABLAUF

Die Steuerung und Durchführung der Experimente erfolgt zentral über eine in MATLAB App Designer entwickelte grafische Benutzeroberfläche (GUI), die in Abbildung 3.8 dargestellt ist.

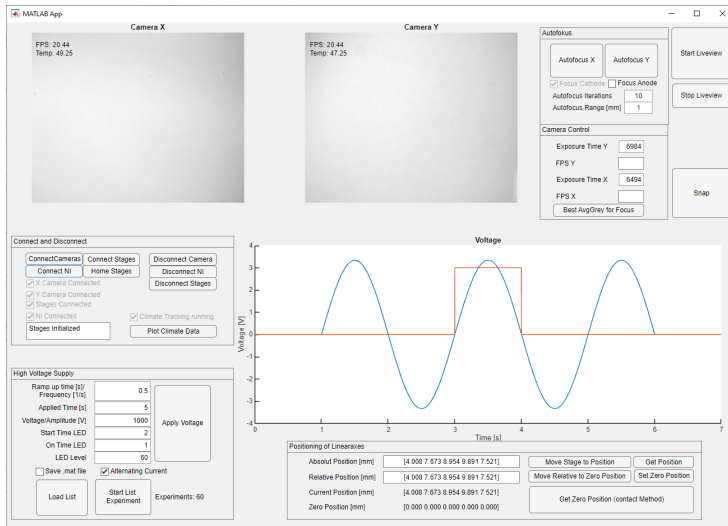


Abbildung 3.8: In MATLAB App Designer entwickelte grafische Benutzeroberfläche. Die Software ermöglicht die zentrale Steuerung aller Hardwarekomponenten, die Konfiguration der Versuchsparameter und die Live-Anzeige der Kamerabilder und Spannungssignale.

Der Ablauf einer Messung folgt stets dem folgenden Schema:

1. **Initialisierung:** Alle Hardwarekomponenten (Kameras, Linearachsen, DAQ-Karte) werden über die Software initialisiert.

2. **Fokussierung und Beleuchtung:** Der Tropfen muss in die Mitte beider Kamerabilder gebracht werden. Für beide Kameras wird dann der Autofokus-Algorithmus ausgeführt und die Beleuchtungsintensität wird für den optimalen Fokus justiert.
3. **Positionierung:** Die Anode wird an die gewünschte Position über dem Tropfen gefahren.
4. **Parametrierung:** Der Spannungsverlauf (Gleichstrom (DC) oder Wechselstrom (AC), Amplitude, Dauer) wird in der GUI konfiguriert.
5. **Sicherheitsfreigabe:** Die Hochspannung wird manuell über das Abschließen der Tür der Sicherheitseinhausung freigegeben und in der GUI gestartet.

Nach dem Startbefehl in der GUI wird der eigentliche Versuch von der Software gestartet. Dabei werden die Kameras in einen kontinuierlichen Aufnahmemodus versetzt, und das definierte Spannungsprofil wird an die Hochspannungsquelle ausgegeben. Wie in Abbildung 3.9 a) dargestellt, können dabei DC-Verläufe mit definierter Anstiegs-, Halte- und Abfallzeit erzeugt werden, oder wie in Abbildung 3.9 b) dargestellt, AC-Sinusspannungen. Synchron dazu könnte eine UV-LED zur Aushärtung angesteuert werden. Dies wird in dieser Arbeit nicht realisiert, ist jedoch für zukünftige Untersuchungen

von Relevanz. Die dargestellte Spannung ist dabei die Eingangsspannung für das Hochspannungsgerät bzw. die UV-LED.

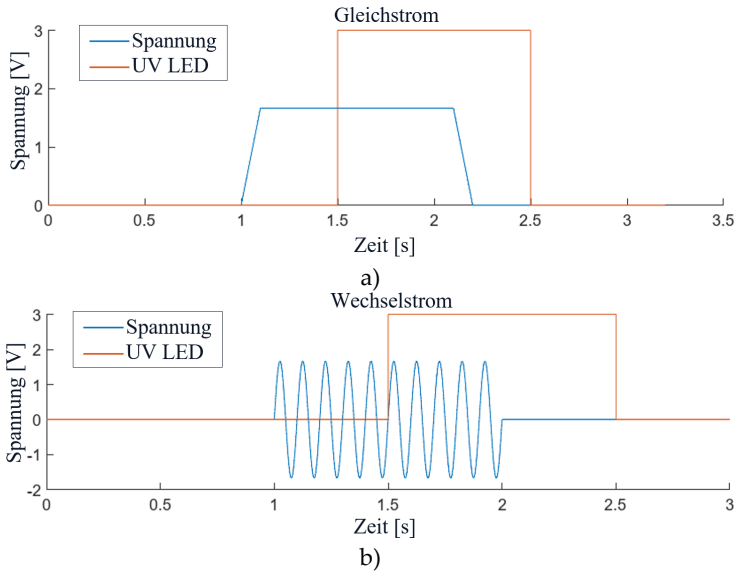


Abbildung 3.9: Generierte Spannungsprofile für die Tropfendeformation. Dargestellt sind die Steuersignale für a) einen DC-Impuls mit definierter Anstiegs-, Halte- und Abfallzeit und b) eine AC-Sinusspannung mit bestimmter Frequenz und Amplitude. Das rote Signal zeigt das zugehörige Trigger-Signal für die UV-LED.

Die zeitliche Korrelation der Bild- und Spannungsdaten ist durch die gemeinsamen Zeitstempel der Datenerfassungskarte sichergestellt.

Kapitel 4

METHODEN ZUR KONTURAPPROXIMATION UND 3D-REKONSTRUKTION

Dieses Kapitel beschreibt die mehrstufige Methodik zur Verarbeitung und Analyse der mit dem Versuchsaufbau erfassten Bilddaten. Die Bilder werden zuerst segmentiert und dann mittels der hier vorgestellten polarbasierten Konturapproximation (PBCA) approximiert. Danach werden zwei Auswertungspfade verfolgt, die auf derselben initialen Konturapproximation aus Abschnitt 4.2 aufbauen. Das Flussdiagramm der Datenverarbeitung ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

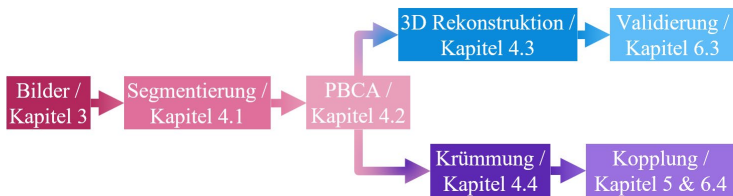


Abbildung 4.1: Schematisches Flussdiagramm der Datenverarbeitung in Kapitel 4, unterteilt in den 3D-Validierungspfad (oben) und den 2D-Krümmungspfad (unten) als Basis für Kapitel 5.

Ein geometrischer 3D-Rekonstruktionspfad dient der Validierung der Messkette. Hierbei werden die 2D-Konturen aus den beiden

orthogonalen Kameras zu einem 3D-Modell zusammengeführt, um dessen Form- und Volumenkonsistenz zu überprüfen.

Ein physikbasierter 2D-Krümmungspfad bildet die direkte Grundlage für das Vorhersagemodell der Deformation, welches in Kapitel 5 behandelt wird. Dieser Ansatz nutzt die 2D-Kontur zur Bestimmung der physikalisch plausiblen Krümmung, die unmittelbar an die Druck-Krümmungs-Balance aus Abschnitt 2.1 anknüpft.

4.1 BILDERVERARBEITUNG UND SEGMENTIERUNG

Der erste Schritt der Bildverarbeitung besteht in der Extraktion der 2D-Tropfenkontur. Da die automatische Bestimmung der Kontaktpunkte, an denen der Tropfen auf dem Substrat aufliegt, fehleranfällig ist, wird ein manuelles Verfahren gewählt. Als initialer Vorverarbeitungsschritt werden die beiden Kontaktpunkte $P_L = (x_L, z_L)$ und $P_R = (x_R, z_R)$ vom Anwender im Bild identifiziert. Der Einfluss der manuellen Auswahl der Kontaktpunkte wird in Abschnitt 6.3.1 mittels einer Monte-Carlo-Simulation systematisch quantifiziert. Aus diesen Punkten wird der Neigungswinkel β der Basislinie berechnet, um das gesamte Bild so zu rotieren, so dass diese Basislinie exakt horizontal liegt:

$$\beta = -\arctan\left(\frac{z_R - z_L}{x_R - x_L}\right). \quad (4.1)$$

Anschließend wird die obere, reale Tropfenkontur an dieser neuen horizontalen Achse nach unten gespiegelt. Diese geometrische Vorverarbeitung erzeugt eine geschlossene, linsenförmige Geometrie, wie in Abbildung 4.2 dargestellt. Oben ist der gemessene Tropfen auf dem aufgenommenen Bild, und unten ist der gespiegelte Tropfen. Dies erhöht die Robustheit der nachfolgenden Segmentierungsalgorithmen, da der Tropfen als geschlossene Fläche betrachtet werden kann.

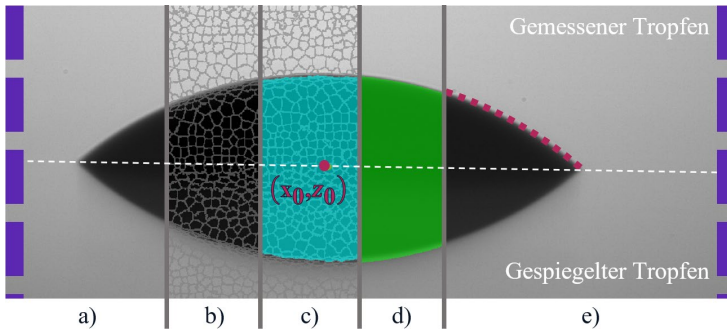


Abbildung 4.2: Prozess der Bildverarbeitung zur Segmentierung der Tropfenkontur. a) Eingangsbild nach Kontrastanpassung. b) Unterteilung in Superpixel mittels SLIC-Algorithmus. c) Initiale Maske (türkis) durch Lazy-Snapping mit Vordergrund- (rot) und Hintergrund-Markierungen (violett). d) Verfeinerte Maske nach Anwendung der Active-Contour-Methode. e) Finale, extrahierte Konturpunkte (rot gestrichelt). (modifiziert nach [88])

Der nächste Schritt ist eine Kontrastanpassung durch Histogrammspreizung des in Abbildung 4.2 a) gezeigten Eingabebilds, um den Kontrast zu erhöhen. Dieses Bild wird dann mit dem Simple Linear Iterative Clustering (SLIC) Algorithmus in Superpixel unterteilt wie

in Abbildung 4.2 b) dargestellt [89]. Eine Mindestanzahl von ca. 1000 Superpixeln wurde experimentell als notwendig identifiziert, um die Tropfengrenze mit den aus dem Aufbau aufgenommenen Bildern aufzulösen. 6916 Superpixel wurden als optimal für die speziell hier verwendeten Bilder ermittelt. Dieses Verfahren wird gewählt, da es Pixel effizient zu kleinen, kohärenten Regionen zusammenfasst und so die Komplexität für die nachfolgenden Schritte reduziert, ohne essenzielle Konturinformationen zu verlieren.

Auf Basis dieser Superpixel wird anschließend der erste grobe Segmentierungsschritt mittels eines Graph-Cut-Algorithmus (Lazy-Snapping) durchgeführt, indem eine initiale Maske des Tropfens generiert wird [90]. Der Algorithmus erfordert dabei die Definition von Vorder- und Hintergrundpixeln. Als initialer Vordergrundpunkt wird zunächst der zentrale Pixel (x_0, z_0) des Graustufenbildes angenommen. Da sich der Tropfen nicht zwangsläufig exakt im Bildzentrum befindet, wird in einem Suchbereich um diesen Punkt herum der Pixel mit der geringsten Intensität als finaler Vordergrundpixel gewählt. Dieser Ansatz stellt sicher, dass der Startpunkt zuverlässig innerhalb des dunklen Tropfenschattens liegt. Dieser Punkt, in Abbildung 4.2 c) als roter Punkt markiert, dient der Initialisierung des Vordergrundbereichs. Als Hintergrundpixel werden die Ränder des Bildes definiert, da sie immer den Hintergrund enthalten. In Abbildung 4.2 sind sie violett als gestrichelte Linie gekennzeichnet. Die aus diesem Schritt resultierende Maske ist in Abbildung 4.2 c) in türkis erkennbar.

Die nächste Verfeinerung der Maske erfolgt durch einen Active-Contour-Algorithmus, der auf der Chan-Vese-Methode basiert [54]. Dieser passt die Maske mit 50 Iterationen an die Tropfenkante an. Dabei minimiert dieser Algorithmus eine Energiefunktion entlang der Kontur und erzeugt so eine verfeinerte Binärmaske, die in Abbildung 4.2 d) in Grün dargestellt ist.

Die segmentierte Maske wird durch die morphologische Schließung unter Verwendung eines scheibenförmigen Strukturelements mit einem Radius von 10 Pixeln weiter verfeinert, um Kantenunregelmäßigkeiten zu glätten. Aus dieser finalen Maske werden die diskretisierten Konturpunkte (x_{pixel}, z_{pixel}) mithilfe des Roberts-Kantendetektors [91] extrahiert. Diese Punkte die in Abbildung 4.2 e) als rot gestrichelte Linie dargestellt sind, bilden die Ausgangskordinaten für die weiterführende Analyse der Tropfengeometrie.

Nach diesem Prozess wird die untere, gespiegelte Hälfte der Konturpunkte verworfen. Nur die obere, physikalisch relevante Tropfenkontur dient als Datengrundlage für alle folgenden Analysen.

4.2 POLARE KONTURAPPROXIMATION (PBCA)

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren der Polaren Konturapproximation (englisch „Polar-Based Contour Approximation“ PBCA) wurde vom Verfasser im Rahmen dieser Arbeit entwickelt und die grundlegenden Aspekte wurden bereits in [88] veröffentlicht.

Im Folgenden wird die Methode hergeleitet und im Kontext der gesamten Verarbeitungskette erläutert. Sie hat das Ziel, eine Tropfenkontur durch eine Approximation im polaren, statt im kartesischen Koordinatensystem zu beschreiben. Dieser Ansatz ist konzeptionell verwandt mit der Darstellung einer Signatur in der Bildverarbeitung [92].

Ein Tropfen strebt physikalisch danach, seine Oberflächenenergie zu minimieren, weshalb er eine glatte und runde Kontur annimmt. Der hier präsentierte Ansatz nutzt dieses Prinzip. Die Rekonstruktion dieser glatten Oberfläche aus Kameradaten stellt jedoch eine Herausforderung dar, da die diskrete, stufenartige Anordnung der Pixel nicht der kontinuierlichen Tropfenform entspricht. Insbesondere im Scheitelbereich des Tropfens ist die Pixelrepräsentation unzureichend, da sie aufgrund der Diskretisierung eine horizontale Linie darstellt. In Abbildung 4.3 a) ist dieser diskretisierte Scheitel eines Tropfens im kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Derselbe Scheitel im polaren Koordinatensystem ist in Abbildung 4.3 b) abgebildet.

Diese beiden Graphen veranschaulichen gut, warum die Umwandlung in den polaren Raum für eine Approximation von Vorteil ist. Im Gegensatz zur kartesischen Darstellung wird das Diskretisierungsartefakt der horizontalen Pixelreihen nahe dem Scheitelpunkt in eine gekrümmte Punktverteilung überführt.

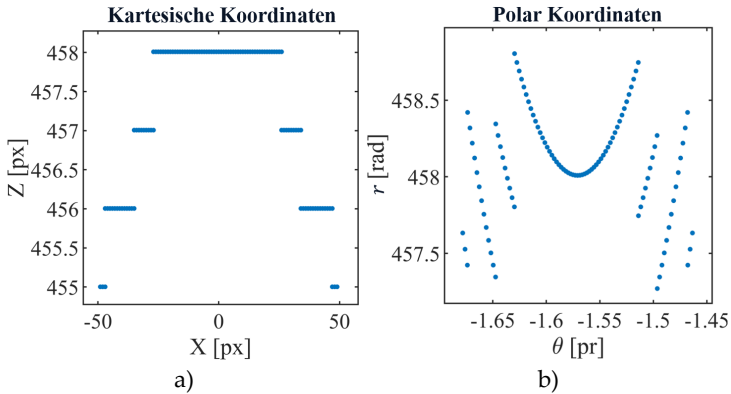


Abbildung 4.3: Vorteil der Polarkoordinatentransformation am Tropfenscheitel. a) Stufenartige Pixelrepräsentation im kartesischen Koordinatensystem. b) Transformation derselben Pixel in eine stetig gekrümmte Punktverteilung im polaren Koordinatensystem, die eine robustere Approximation ermöglicht.

Durch die Umwandlung des stufenförmigen, pixelbasierten Konturprofils in eine neu angeordnete Punktwolke werden die Artefakte der diskreten Bildaufnahme aufgelöst. Die darauf aufbauende Approximation ist somit robuster gegenüber numerischen Instabilitäten wie Oszillationen und Überschwängern, was zu einer genaueren Abbildung der physikalischen Kontur führt.

4.2.1 AUSRICHTUNG UND ZENTRIERUNG DER KONTUR

Die Umwandlung der Konturpunkte in Polarkoordinaten erfordert eine weitere Vorverarbeitung der Daten, um die polaren Winkelwerte θ auf den Bereich $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ zu beschränken und somit eine eindeutige Beschreibung der polaren Distanz $r(\theta)$ zu ermöglichen. Dafür muss sichergestellt werden, dass die Kontur nur Werte auf der „oberen“ Hälfte der polaren Achse hat. Zuerst wird die Kontur (x_{pixel}, z_{pixel}) zentriert:

$$\begin{bmatrix} x_{al} \\ z_{al} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{pixel} \\ z_{pixel} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\max(x_{pixel}) + \min(x_{pixel})}{2} \\ \max(z_{pixel}) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Mit (x_{al}, z_{al}) als zentrierte Koordinaten. Die exakte Positionsbestimmung der Kontaktpunkte ist durch die diskrete Pixelstruktur des Kamerabildes und die manuelle, fehleranfällige Auswahl mit Unsicherheiten behaftet. Um die daraus resultierenden Fehler bei der Kurvenanpassung an den Rändern zu minimieren, wird die Kontur künstlich erweitert. Hierfür wird ein 10-Pixel-Segment am Ende der Kontur gespiegelt und wieder angefügt.

Diese Technik stabilisiert den Approximations-Algorithmus an den Randpunkten, indem sie ihm eine Orientierung über den eigentlichen Endpunkt hinaus gibt. Abbildung 4.4 a) veranschaulicht diesen Schritt und zeigt die ursprüngliche Kontur in Rot und die gespiegelten Erweiterungen in Grün.

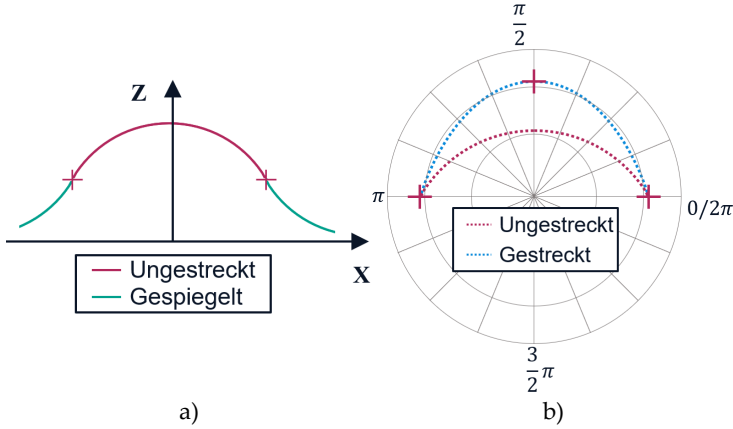


Abbildung 4.4: Verarbeitungsschritte des PBCA-Verfahrens. a) Ausrichtung und künstliche Verlängerung der Kontur. b) Streckung der Kontur zur Homogenisierung der Punktverteilung. (modifiziert nach [88])

Eine weitere Herausforderung bei der späteren Approximation im Polarraum ist die ungleichmäßige Verteilung der einzelnen Punkte über den Winkel θ . Für eine präzise Approximation ist eine möglichst äquidistante Verteilung der Stützpunkte optimal. Um dieser Verteilung möglichst nah zu kommen, wird die Kontur vor der Transformation so gestreckt, dass die maximale Höhe des Tropfens der Hälfte seines Durchmessers entspricht. Dies stellt sicher, dass die zu approximierende Kurve im Polarraum auch bei nicht-achsensymmetrischen Geometrien stets eine ähnliche Form aufweist und führt zu einer nahezu äquidistanten Verteilung der Punkte im polaren Raum.

Eine Polardarstellung der ungestreckten Kontur in Rot und der gestreckten Kontur in Blau ist in Abbildung 4.4 b) gezeigt. Die roten

Kreuze sind dabei die Kontaktpunkte und der Scheitelpunkt. Diese haben nach der Streckung alle dieselbe polare Distanz r .

4.2.2 TRANSFORMATION UND B-SPLINE-APPROXIMATION

Im nächsten Schritt werden die zentrierten und gestreckten kartesischen Konturkoordinaten (x_{al}, z_{al}) in die Polarkoordinaten bestehend aus dem Winkel θ und dem Abstand r umgewandelt:

$$\theta = \arctan\left(\frac{z_{al}}{x_{al}}\right) \quad (4.3)$$

$$r = \sqrt{x_{al}^2 + z_{al}^2}. \quad (4.4)$$

Wird der Radius r über dem zugehörigen Winkel θ aufgetragen, ergibt sich die in Abbildung 4.5 a) gezeigte Darstellung.

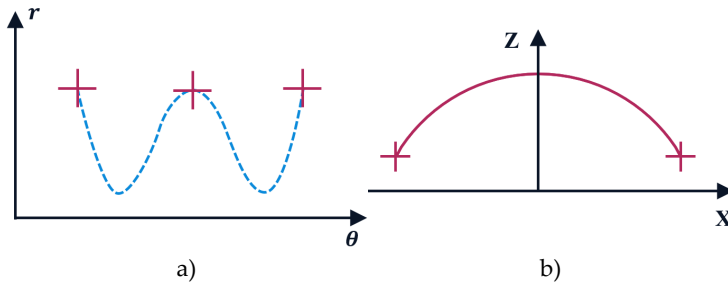


Abbildung 4.5: Verarbeitungsschritte des PBCA-Verfahrens. a) Die "abgewickelte" Kontur als Funktion des Radius r über dem Winkel θ zur Approximation mittels B-Spline. b) Rücktransformierte und final positionierte, geglättete Kontur. (modifiziert nach [88])

Hier sind die roten Kreuze wie schon in Abbildung 4.4 b) die Kontaktpunkte und der Scheitelpunkt. Durch die vorherige Streckung ist

sichergestellt, dass die Kontur immer eine Wellenform in der r über θ Darstellung hat. Anschließend wird an die Polarkoordinaten (θ, r) eine Kleinste-Quadrate Basis-Spline (B-Spline) Approximation angepasst [93].

Die Knotenpunkte für den Spline werden nach dem von de Boor entwickelten Verfahren platziert, das eine optimale Verteilung für die Approximation sicherstellt [94], [95], [96]. Für die hier untersuchten Tropfengeometrien stellt die Verwendung eines Spline-Grads von 9 bei einer Knotenanzahl von 30 einen optimalen Kompromiss dar.

4.2.3 RÜCKTRANSFORMATION UND FINALE POSITIONIERUNG

Die resultierende Spline Funktion $r_{fit}(\theta)$ wird dann auf äquidistant verteilten Winkelwerten im Bereich von $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ mit dem in dieser Arbeit definierten Sampling von 1000 Samples ausgewertet und anschließend in kartesische Koordinaten zurücktransformiert:

$$x_{mess} = r_{fit}(\theta) \cos(\theta) \quad (4.5)$$

$$z_{mess} = r_{fit}(\theta) \sin(\theta). \quad (4.6)$$

Anschließend werden alle vorhergehenden geometrischen Operationen in umgekehrter Reihenfolge rückgängig gemacht. Zuerst wird die zuvor angewendete Streckung invertiert und an ihre ursprüngliche Position im Bildkoordinatensystem verschoben. Diese finalen Koordinaten stellen eine geglättete, kontinuierliche Approximation der Tropfenkontur dar, die in Abbildung 4.5 b) gezeigt wird.

Ein entscheidender Vorteil der PBCA-Methode gegenüber Standardverfahren im kartesischen System ist die eindeutige Repräsentation von Konturen mit Kontaktwinkeln über 90° . Während eine kartesische Beschreibung hier zu Mehrdeutigkeiten führt mit mehreren Z -Werten für einen X -Wert, bleibt die Funktion $r(\theta)$ im polaren Raum stets eindeutig. Diese Eigenschaft macht den Ansatz besonders robust für die Charakterisierung von Tropfenkonturen mit komplexen Geometrien. Die Effektivität einer Polarkoordinatentransformation für solche Probleme wurde in ähnlicher Form bereits von Atefi et al. zur Schätzung von Kontaktwinkeln genutzt [97].

Die finalen Koordinaten aus dieser Methode werden im Folgenden mit (x_{mess}, z_{mess}) bezeichnet.

4.3 GEOMETRISCHE 3D-REKONSTRUKTION

Unabhängig vom primären 2D-Modellierungspfad wird zur geometrischen Validierung der Messkette, insbesondere der Volumenkonsistenz, das folgende 3D-Rekonstruktionsverfahren angewendet. Das Verfahren basiert auf der „Polar coordinate Hermite-interpolation-based Droplet Reconstruction“ (PHDR) nach Liu et al. [98] und rekonstruiert aus den beiden orthogonalen 2D-Konturen eine geschlossene 3D-Oberfläche.

Der Prozess gliedert sich in drei Schritte: die Vorverarbeitung und Ausrichtung der 2D-Konturdaten in Abschnitt 4.3.1, die Interpolation

der Querschnitte mittels PHDR in Abschnitt 4.3.2 und die anschließende Volumenberechnung in Abschnitt 4.3.3.

4.3.1 VERARBEITUNG DER 2D-KONTURDATEN

Die PBCA-Methode wird auf die beiden um 90° orthogonal angeordneten Kameras angewendet. Dies liefert zwei zweidimensionale Konturen (y_{mess}^x, z_{mess}^x) für die X-Kamera und (x_{mess}^y, z_{mess}^y) für die Y-Kamera, welche die Form des Tropfens aus der X- bzw. Y-Perspektive beschreiben. Trotz der metrischen Kalibrierung beider Kamerasysteme weisen die ermittelten numerischen Werte für den Tropfenscheitel eine Abweichung auf, die auf die verbleibende Messunsicherheit zurückzuführen ist. Um numerische Ungenauigkeiten bei der späteren Zusammenführung der Datensätze zu vermeiden, ist daher eine Skalierung der vertikalen Z-Achse erforderlich.

Die Z-Koordinaten der ersten Kontur werden an die der zweiten Kontur so skaliert, dass die Scheitelpunkte übereinstimmen. Der hierfür verwendete Skalierungsfaktor v berechnet sich aus dem Verhältnis der minimalen Z-Werte beider Konturen:

$$v = \frac{\max(z_{mess}^y)}{\max(z_{mess}^x)} = \frac{z_{max}^y}{z_{max}^x} \quad (4.7)$$

Diese Skalierung stellt sicher, dass beide Konturen dieselbe Höhe haben. Die Konturen mit den Maximalpunkten sind in Abbildung 4.6 a) und b) gezeigt.

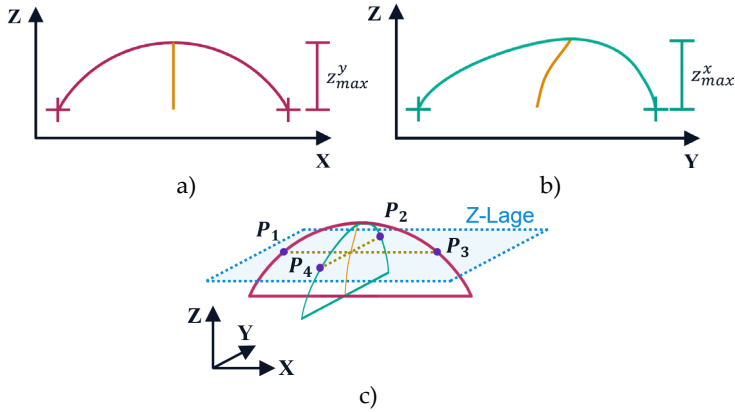


Abbildung 4.6: Mittellinien und Ausrichtung der Konturen und Hermite-Interpolation. a) Mittellinienberechnung für die X-Kontur. b) Mittellinienberechnung für die Y-Kontur. c) Skalierte und an ihren Mittellinien ausgerichtete Konturen mit den vier resultierenden Punkten auf einer exemplarischen Z-Ebene. (modifiziert nach [88])

Um die beiden zunächst unabhängigen 2D-Konturen zu einem 3D-Modell zusammenzufügen, müssen sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem ausgerichtet werden. Die Mittellinie jeder Kontur fungiert als Referenzachse für die räumliche Zusammenführung. Bei der X-Kontur werden die Y-Werte von der Mittellinie der Y-Kontur verwendet, während bei der Y-Kontur die Werte der Mittellinie der X-Kontur als X-Werte dienen. Diese Mittellinie wird numerisch bestimmt, indem für äquidistante Höhen die horizontalen Mittelpunkte zwischen dem linken und rechten Konturrand berechnet werden. Abbildung 4.6 a) und b) visualisieren die resultierenden Mittellinien in orange für die X- und Y-Kontur.

Anschließend werden die beiden Konturen entsprechend der Kameranordnung um 90° zueinander ausgerichtet. Durch die zuvor berechneten Mittellinien können die Konturen zusammengeführt werden, sodass jede Z-Ebene vier Punkte hat. Je zwei von der X-Kontur (P_1, P_3) und zwei von der Y-Kontur (P_2, P_4). Die Ebene mit den Konturen, Mittellinien und Punkten ist in Abbildung 4.6 c) zu sehen.

4.3.2 3D-REKONSTRUKTION

Aus diesen vier Punkten wird eine geschlossene und physikalisch plausible Kontur für jede Z-Ebene interpoliert. Die einfachsten Ansätze sind eine zirkuläre oder elliptische Interpolation. In der vorliegenden Arbeit wird PHDR eingesetzt. Diese Methode hat sich bei der Rekonstruktion von Tropfenformen gegenüber einfacheren Verfahren als überlegen erwiesen und basiert auf einer modifizierten kubischen Hermite-Interpolation. Der entscheidende Beitrag dieser Methode ist eine signifikante Vereinfachung, die auf einer fundamentalen Eigenschaft des Schattenwurfverfahrens basiert. [98]

Jeder Punkt der 2D-Kontur eines durch Schattenwurf aufgenommenen Kamerabildes ist der Tangentialpunkt auf der 3D-Oberfläche des Tropfens. Folglich repräsentieren die vier extrahierten Randpunkte einer Z-Ebene lokale radiale Extrema. Dies ermöglicht es, die für die Hermite-Interpolation erforderlichen Tangentenvektoren, also die ersten Ableitungen, exakt auf null zu setzen, anstatt sie numerisch schätzen zu müssen. Dadurch wird die Komplexität der

Interpolationspolynome erheblich reduziert, was die Stabilität und Effizienz des Algorithmus verbessert.

Für die Implementierung werden die vier kartesischen Punkte (P_1, P_2, P_3, P_4) jeder Z-Ebene in Polarkoordinaten (r_i, θ_i) der XY-Ebene umgerechnet. Die geschlossene Kontur in dieser Ebene wird dann mittels der folgenden modifizierten Interpolationsgleichung bestimmt [98]:

$$H_i(\phi) = r_i \left(1 + 2 \frac{\theta - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \right) \left(\frac{\theta - \theta_j}{\theta_i - \theta_j} \right)^2 + r_j \left(1 + 2 \frac{\theta - \theta_j}{\theta_i - \theta_j} \right) \left(\frac{\theta - \theta_i}{\theta_j - \theta_i} \right)^2 \quad (4.8)$$

Mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 2, 3, 4, 1$. r_i und r_j sind als die Radien der vier Punkte und $H_i(\theta)$ die Hermite-Basispolynome, die unter Berücksichtigung der verschwindenden Ableitungen vereinfacht wurden.

Diese Funktion wird dann in kartesische Koordinaten zurücktransformiert. Dies wird für alle k Z-Ebenen durchgeführt. Die Kontur einer Ebene ist dabei durch (x_k, y_k) definiert. Das Sampling ist dabei 1000 Punkte pro Ebene. Abbildung 4.7 a) zeigt die aus den vier Punkten rekonstruierte Kurve in kartesische X- und Y-Achse.

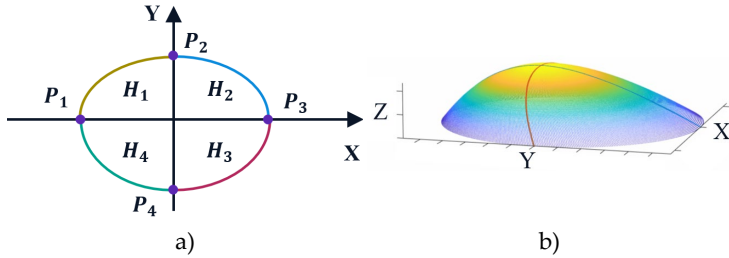


Abbildung 4.7: a) Mittels PHDR-Algorithmus interpolierte Tropfenkontur für diese Ebene. b) Rekonstruierter Tropfen. (modifiziert nach [88])

Die Gesamtheit der k interpolierten 2D-Konturen ergibt eine 3D-Punktwolke, welche die Geometrie des Tropfens repräsentiert. Das finale 3D-Modell kann anschließend für weiterführende Analysen, wie beispielsweise die Volumenberechnung, verwendet werden. Ein Beispiel eines vollständigen 3D-rekonstruierten Tropfens ist in Abbildung 4.7 b) dargestellt.

4.3.3 VOLUMENBERECHNUNG

Die Berechnung des Volumens erfolgt in Anlehnung an das von Liu et al. [98] beschriebene Verfahren durch eine numerische Summation der rekonstruierten Querschnittsflächen entlang der Z-Achse. Zunächst wird für jede einzelne Schicht k die von der Kontur umschlossene Fläche A_k berechnet. Hierfür wird die Gaußsche Trapezformel in kartesischen Koordinaten angewendet:

$$A_k = \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) \right| \quad (4.9)$$

Diese Methode erlaubt die Flächenberechnung eines Polygons, das durch die auf der Kontur liegenden Eckpunkte definiert ist.

Das Gesamtvolumen V_{ges} wird anschließend durch die Aufsummierung der einzelnen Volumensegmente zwischen den Schichten approximiert. Das Volumen eines Segments zwischen zwei benachbarten Flächen A_k und A_{k+1} wird dabei als das Produkt aus deren mittlerer Fläche und dem senkrechten Abstand Δz angenähert. Dies entspricht der Anwendung der Trapezregel für die numerische Integration:

$$V_{3D} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta z \cdot A_k \quad (4.10)$$

Mit V_{3D} als rekonstruiertes Volumen und n als die Gesamtzahl der Schichten. Die Kombination der PBCA- und PHDR-Verfahren ermöglicht somit abschließend nicht nur eine Rekonstruktion der 3D-Geometrie aus zwei Schattenbildern, sondern auch die Bestimmung des Volumens.

4.4 KRÜMMUNGSBASIERTE FORMANALYSE

Nachdem im vorherigen Abschnitt die 3D-Rekonstruktion zur Validierung der Messkette beschrieben wurde, behandeln die folgenden Abschnitte den zweiten, für das physikalische Modell wichtige

Auswertungspfad der 2D-Krümmung. In Abbildung 4.8 ist das Vorgehen als Flussdiagramm dargestellt.

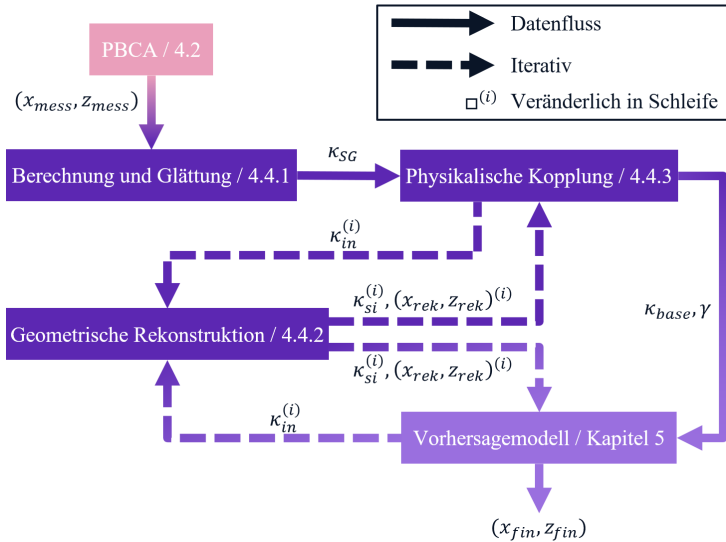


Abbildung 4.8: Schematisches Flussdiagramm von der PBCA zum Vorhersagemodell

Der gesamte Prozess umfasst die Berechnung der Krümmung κ und anschließende Glättung derselben in Abschnitt 4.4.1. Diese geglättete Krümmung κ_{SG} wird dann als Ausgangskrümmung für die Physikalische Kopplung in Abschnitt 4.4.3 verwendet. Die in Abschnitt 4.4.3 ermittelte Krümmung dient schließlich als Ausgangskrümmung für das in Kapitel 5 präsentierte Vorhersagemodell. Um aus der Krümmung eine Kontur zu rekonstruieren, wird in Abschnitt 4.4.2 eine Methodik vorgestellt, die aus einer Eingangskrümmung κ_{in} eine Kontur (x_{rek}, z_{rek}) und die korrigierte Krümmung κ_{si} rekonstruiert.

Um die Nachvollziehbarkeit der zahlreichen Krümmungen zu vereinfachen, sind alle in diesem Prozess eingeführten Symbole in Tabelle 4.1 zentral definiert.

Tabelle 4.1: Verwendete Krümmungsbezeichnungen in Abschnitt 4.4

Symbol	Krümmungsbezeichnung	Einführung
κ_{mess}	Eingangskrümmung aus der Rekonstruktion	4.4.1
κ_{SG}	Savitzky-Golay geglättete Krümmung	4.4.1
$\Delta\kappa_{lin}$	Lineare Korrektur Krümmung	4.4.2
$\Delta\kappa_{quad}$	Quadratische Korrektur Krümmung	4.4.2
κ_{si}	Resultierende Korrigierte Krümmung	4.4.2
κ_{phys}	Physikalisch informierte Gesamtkrümmung	4.4.3
κ_{γ}	Realer Oberflächenspannungsanteil	4.4.3
$\overline{\kappa_{\gamma}}$	Konstanter Offset durch Druckdifferenz	4.4.3
κ_g	Gravitationsanteil der Krümmung	4.4.3
$\Delta\kappa_{spline}$	Anteil der Spline Korrektur	4.4.3
κ_{base}	Basis Krümmung nach allen Korrekturschritten	4.4.3
κ_e	Elektrischer Anteil der Krümmung	4.4.3

Nachfolgend werden die einzelnen Schritte in den Unterkapiteln detailliert beschrieben.

4.4.1 KRÜMMUNGSBERECHNUNG UND GLÄTTUNG

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die in Abschnitt 4.2 approximierte Kontur in eine Krümmung zu überführen, die als Grundlage für weitere Analyseschritte dient. Als Eingang werden die Koordinaten der PBCA-Kontur (x_{mess}, z_{mess}) verwendet. Die Krümmung $\kappa_{mess}(x)$ der approximated Tropfenkontur lässt sich im allgemeinen wie folgt berechnen [99]:

$$\kappa_{mess}(x) = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.11)$$

Hierbei bezeichnet $\kappa_{mess}(x)$ die Krümmung, während dz/dx und d^2z/dx^2 die erste bzw. zweite Ableitung von z nach x darstellen. Aufgrund der Stützstellen der vorhergehenden Spline-Interpolation oszilliert die berechnete Krümmung κ_{mess} . Zur Veranschaulichung ist diese in Abbildung 4.9 in blau gestrichelt dargestellt. Aus physikalischer Sicht kann dies nicht die wahre Krümmung repräsentieren, da ein Flüssigkeitstropfen seine Oberflächenenergie minimiert, was zu einer Glatten, nicht-oszillierenden Krümmung führen sollte.

Um diese physikalische Tatsache zu beachten, wird die Krümmung mit einem Savitzky-Golay-Filter geglättet. Dieser Filter glättet Signale, ohne die zugrundeliegende Form wesentlich zu verändern [100]. Die Wirkungsweise des Filters wird durch drei Parameter bestimmt: die Fensterlänge w , die Polynomordnung p und die Anzahl der Kaskadierungs-Iterationen I . Da die optimalen Parameter für jede

Kontur leicht variieren, wird jedes Mal, wenn eine Krümmung geglättet wird eine systematische Gittersuche über die Parameterbereiche $p \in \{2,3,4\}$, $w = d_{basis}/q$ (mit $q \in \{4,6,8\}$) und $I \in \{1, \dots, 6\}$ durchgeführt. Die Fensterlänge w ist dabei ein Bruchteil des Tropfenbasisdurchmessers d_{basis} .

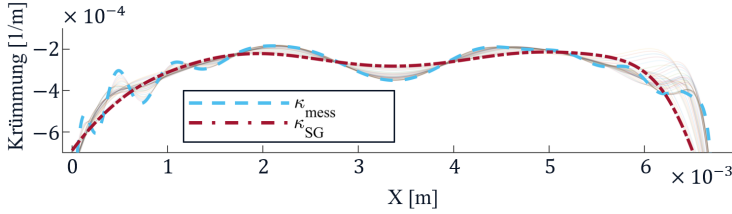


Abbildung 4.9: Anwendung des Savitzky-Golay-Filters zur Glättung des experimentellen Krümmungsprofils. Die ursprüngliche Krümmung κ_{mess} (blau gestrichelt). Die blassen Linien zeigen die gesamte Bandbreite der geglätteten Profile, die während der Gittersuche über verschiedene Filterparameter erzeugt wurden. Die geglättete Krümmung κ_{SG} ist in rot-strichpunktiert dargestellt.

Die Auswahl des optimalen Parametersatzes orientiert sich an einer kombinierten Kostenfunktion J , die eine Balance zwischen Datentreue und physikalischer Korrektheit herstellt. Sie setzt sich aus der mittleren quadratischen Abweichung (RMSE) e_{RMSE} als Genauigkeitsterm und einem Regularisierungsterm e_o zusammen, der Oszillationen durch Bestrafung der zweiten Ableitung der Krümmung unterdrückt:

$$e_o = \sum_{s_0}^{s_{end}} \left(\frac{d^2 \kappa_{SG}}{ds^2} \right)^2 \quad (4.12)$$

Hierbei repräsentiert κ_{SG} die gefilterte Krümmung, s die Bogenlänge und e_o den Regularisierungsfehler, der Oszillationen penalisiert. Die sich daraus ergebende Fehlerfunktion J ist dann definiert als:

$$J = e_{RMSE} + e_o \quad (4.13)$$

Um Fehler bei Formen mit Kontaktwinkeln über 90° zu vermeiden, bei denen es mehrere Z-Koordinaten für eine X-Koordinate gibt, wird hier die Krümmung als Funktion der Bogenlänge s beschrieben. Diese wird numerisch als die kumulative Summe der euklidischen Abstände zwischen den aufeinanderfolgenden Konturpunkten bestimmt.

Die Ausgabe dieses Schritts ist die optimal geglättete Krümmung $\kappa_{SG}(s)$. Abbildung 4.9 zeigt ein beispielhaftes Ergebnis der durchgeführten systematischen Parametersuche. Die anfängliche, oszillierende Krümmung κ_{mess} ist blau gestrichelt dargestellt und wird durch den Filterprozess effektiv geglättet, was in der finalen Kurve κ_{SG} (rot-strichpunktiert) resultiert. Die blassen Linien visualisieren die gesamte Bandbreite der Profile, die während der Gittersuche ausgewertet wurden.

Was die Abbildung jedoch auch zeigt, ist, dass die Krümmung κ_{SG} trotz der Filterung geringfügige, niederfrequente Oszillationen beibehält, die besonders an den Randpunkten hervortreten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Glättung per Filter nur ein numerischer Prozess ist und keine physikalischen Gegebenheiten berücksichtigt. Diese Herausforderung wird in Abschnitt 4.4.3 durch die Einbeziehung physikalischer Randbedingungen behandelt.

4.4.2 KONTURREKONSTRUKTION AUS DER KRÜMMUNG

Die geglättete Krümmung κ_{SG} aus dem vorherigen Abschnitt dient als Grundlage für das physikalische Modell. Dieses basiert auf einer Druck-Krümmungs-Balance, bei der die wirkenden Drücke von der Geometrie des Tropfens abhängen. Um diese wechselseitige Abhängigkeit aufzulösen, muss es möglich sein, die Krümmungsinformation wieder in eine Tropfenkontur zu rekonstruieren. Das Ziel dieses Abschnitts ist es daher, die Methodik zur Rekonstruktion einer 2D-Kontur aus der Krümmung zu beschreiben. Dieser Prozess ist als Flussdiagramm in Abbildung 4.10 dargestellt und wird im Folgenden genauer beschrieben.

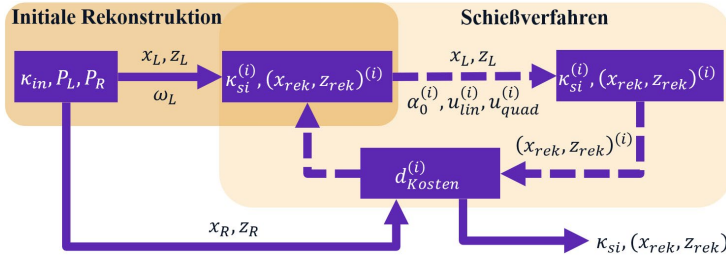


Abbildung 4.10: Schematisches Flussdiagramm von der Rekonstruktion

Die Methodik umfasst zwei Schritte. Zunächst werden die Konturkoordinaten basierend auf der Krümmung unter Verwendung der Frenet-Serret-Formeln berechnet. Danach werden die Randbedingungen der Kontaktpunkte mittels des Schießverfahrens aufgezwungen. Hierbei handelt es sich um ein numerisches Verfahren zur

Lösung von Randwertproblemen, bei dem die Anfangsbedingungen iterativ angepasst werden, um die vorgegebenen Endbedingungen zu erfüllen [101]. Dieses Verfahren wird so lange wiederholt, bis der rekonstruierte rechte Kontaktpunkt so nah wie möglich am gemessenen rechten Kontaktpunkt liegt.

Eingang ist ein beliebiges Krümmungsprofil κ_{in} , wie z. B. κ_{SG} aus dem vorherigen Schritt, sowie die Kontaktpunkte $P_L = (x_L, z_L)$ und $P_R = (x_R, z_R)$ und der linke Kontaktwinkel ω_L . Die Frenet-Serret-Formeln stellen die Beschreibung einer ebenen Kurve dar, indem sie die Krümmung κ als Funktion der Bogenlänge s bestimmen. Eine beispielhafte Kontur mit dem Tangentialvektor M , der Bogenlänge s und den Endpunkten P_L und P_R ist in Abbildung 4.11 a) dargestellt. Der Tangentenvektor M einer Kontur ist definiert als [102]:

$$M = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = (|M| \cdot \cos\alpha, |M| \cdot \sin\alpha) \quad (4.14)$$

Hierbei ist α der Winkel der Tangente zur X-Achse. Daraus ergeben sich die Ableitungen der X- und Z-Koordinaten der Kontur nach der Bogenlänge:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha \quad (4.15)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\alpha \quad (4.16)$$

Die Krümmung κ_{in} lässt sich ebenfalls als Ableitung des Tangentenwinkels nach der Bogenlänge beschreiben:

$$\kappa_{in} = \left| \frac{dM}{ds} \right| = \frac{d\alpha}{ds} \quad (4.17)$$

Dies führt zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL) erster Ordnung:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dz}{ds} = \sin\alpha, \frac{d\alpha}{ds} = \kappa_{in}(s) \quad (4.18)$$

Mit den Anfangsbedingungen am linken Kontaktpunkt $x(s_0) = x_L$, $z(s_0) = z_L$ und $\alpha(s_0) = \alpha_0 = \omega_L$, wobei ω_L der linke Kontaktwinkel des Tropfens am Punkt P_L ist. Dieses DGL-System kann mit einem Runge-Kutta-Verfahren, beispielsweise dem ode45-Löser in MATLAB, gelöst werden [103], [104].

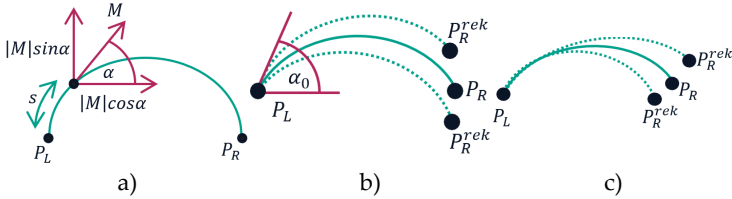


Abbildung 4.11: Rekonstruktion der Kontur aus der Krümmung. a) Definition der Konturparameter nach Frenet-Serret. b) Fehler am Endpunkt P_R^{rek} durch Integration der geglätteten Krümmung und iterative Korrektur des Startwinkels α_0 . c) Zusätzliche Anpassung des Krümmungsprofils zur Erfüllung der Randbedingungen.

Während dieser Ansatz für eine Krümmung korrekt ist, die perfekt die Kontur wiedergibt, erfordert die Anwendung auf die geglätteten Messdaten κ_{SG} aus dem vorherigen Abschnitt eine Korrektur. Das Problem ist, dass die aus κ_{SG} rekonstruierte Kontur und die Messkontur leicht unterschiedlich sind. Durch den Glättungsprozess entstehen geringfügige Abweichungen zwischen der geglätteten Krümmung κ_{SG} und der Krümmung κ_{mess} , die die Messkontur (x_{mess}, z_{mess}) exakt beschreibt.

Bei der Integration dieser leicht veränderten Krümmung entlang der Bogenlänge s akkumulieren sich diese kleinen Fehler. Dies führt dazu, dass der rekonstruierte Endpunkt P_R^{rek} nicht mit dem bekannten physikalischen Endpunkt P_R übereinstimmt, wie in Abbildung 4.11 b) und c) zu sehen ist. Zur Korrektur dieser Abweichungen wird das Schießverfahren als numerische Korrekturmethode angewendet [101].

Dieses Verfahren passt iterativ die Startbedingungen an, rekonstruiert die Kontur (x_{rek}, z_{rek}) und berechnet dann den quadrierten euklidischen Abstand d_{Kosten} zwischen dem realen Endpunkt P_R und dem rekonstruierten Endpunkt P_R^{rek} :

$$d_{Kosten} = (x_{rek}(s_f) - x_R)^2 + (z_{rek}(s_f) - z_R)^2 \quad (4.19)$$

Mit s_f als finaler Punkt entlang der Bogenlänge s . Insgesamt werden im Optimierungsprozess drei Parameter angepasst. Der naheliegendste ist der Startwinkel α_0 , der initial als der gemessenen Kontaktwinkel ω_L festgelegt wird. Der Messwert des Kontaktwinkels ist jedoch selbst mit Unsicherheiten behaftet, die aus der Kantendetektion an der pixelbasierten Kontur resultieren. Eine geringfügige Anpassung von α_0 dient daher als notwendige Feinjustierung der Startrichtung des Verfahrens.

Für eine stabile Konvergenz des Schießverfahrens müssen jedoch noch zwei weitere Parameter eingeführt werden, die die Abweichungen korrigieren können. Dazu wird zur finalen Korrektur eine Überlagerung von zwei einfachen numerischen Basisfunktionen

angewandt, eine lineare Funktion $\Delta\kappa_{lin}(s)$ und eine quadratische Funktion $\Delta\kappa_{quad}(s)$:

$$\Delta\kappa_{lin}(s) = \frac{s - s_0}{s_f - s_0} \quad (4.20)$$

$$\Delta\kappa_{quad}(s) = \left(\frac{s - s_0}{s_f - s_0} \right)^2 \quad (4.21)$$

Die Auswahl beschränkt sich auf diese beiden Polynome, da sie sich in der Praxis als ausreichend erwiesen haben, um die physikalischen Randbedingungen zu erfüllen, ohne die Rechenzeit signifikant zu erhöhen. Diese Funktionen sind als rein empirische Korrekturgrößen zu verstehen und repräsentieren keinen physikalischen Effekt.

Die Gewichtung dieser additiven Korrektur wird über zwei anpassbare Gewichtungsfaktoren u_{lin} und u_{quad} gesteuert. Somit ist die finale, korrigierte Krümmung $\kappa_{si}(s)$, die für die Rekonstruktion verwendet wird, definiert als:

$$\kappa_{si}(s) = \kappa(s) + u_{lin}\Delta\kappa_{lin}(s) + u_{quad}\Delta\kappa_{quad}(s) \quad (4.22)$$

Insgesamt werden im Optimierungsprozess also drei Parameter angepasst: der Startwinkel α_0 sowie die beiden Gewichtungsfaktoren u_{lin} und u_{quad} . Eine schematische Darstellung der Korrektur des Startwinkels ist in Abbildung 4.11 b) und die der Krümmung in Abbildung 4.11 c) gezeigt.

Da die Konturrekonstruktion in nahezu jedem Schritt des physikalischen Modells aufgerufen wird, muss sie bezüglich der Rechenzeit optimiert werden. Dafür wird ein zweistufiger Ansatz angewendet. Numerisch wird innerhalb dieser Optimierungsroutine die Kontur

zunächst auf einem groben Gitter der Bogenlänge s berechnet. Sobald die optimalen Parameter für den Startwinkel und die Gewichtungsfaktoren gefunden sind, wird die vollständige Kontur mit diesen Parametern erneut auf einem feineren, äquidistanten Gitter mit einer vorgegebenen Punktzahl berechnet.

Dieser zweistufige Ansatz reduziert die Rechenzeit um eine Größenordnung. Das Ergebnis sind die finalen Werte für $x_{rek}(s)$ und $z_{rek}(s)$ und die überlagerte Krümmung $k_{si}(s)$. Für die Optimierung wird ein gradientenbasierter Levenberg-Marquardt-Algorithmus in MATLAB verwendet.

Zusammenfassend beschreibt dieser Abschnitt einen allgemeinen Prozess, um aus einem beliebigen Krümmungsprofil eine geometrisch konsistente 2D-Kontur zu rekonstruieren. Der wesentliche Output des Prozesses sind die finalen, Konturkoordinaten (x_{rek}, z_{rek}) und die Krümmung κ_{rek} . Die Koordinaten dienen als Grundlage für die nachfolgenden Analyseschritte.

4.4.3 PHYSIKALISCHE KOPPLUNG

Das Ziel dieses finalen Schritts ist es, die bisher rein numerisch geglättete Krümmung κ_{SG} in ein physikalisch fundiertes Modell zu überführen. Anstatt die Kontur nur geometrisch zu beschreiben, wird sie nun durch die modifizierte Young-Laplace-Gleichung aus Gleichung (2.6) modelliert, die physikalischen Größen wie die Oberflächenspannung γ und den Gravitationsanteil κ_g einbezieht. Dieser

Prozess ermöglicht es, sowohl die unbekannte Oberflächenspannung γ durch einen inversen Ansatz abzuschätzen, als auch eine mathematisch glatte und physikalisch konsistente Basiskrümmung κ_{base} zu definieren. Das Vorgehen zur Berechnung von κ_{base} über die physikalisch informierte Krümmung κ_{phys} ist in Abbildung 4.12 als Flussdiagramm dargestellt.

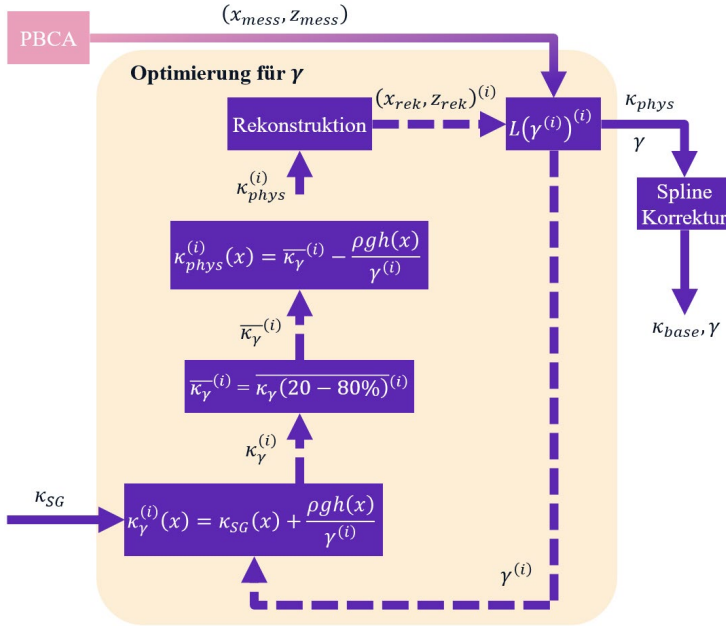


Abbildung 4.12: Schematisches Flussdiagramm zur Berechnung der Oberflächenspannung γ , κ_{phys} und κ_{base} .

Zusammengefasst durchläuft der Algorithmus die folgenden Schritte:

1. **Berechnung von κ_γ und $\overline{\kappa}_\gamma$:** Für einen geschätzten Wert der Oberflächenspannung γ wird der Krümmungsterm $\kappa_\gamma(x)$ aus der geglätteten Krümmung κ_{SG} und der Krümmung aufgrund der Gravitation κ_g berechnet und aus den zentralen 60 % davon der konstante Offset $\overline{\kappa}_\gamma$ ermittelt.
2. **Berechnung von κ_{phys} :** Aus dem ermittelten Wert $\overline{\kappa}_\gamma$ und der Gravitationskrümmung κ_g kann direkt die physikalische Krümmung κ_{phys} berechnet werden.
3. **Rekonstruktion:** Die Kontur (x_{rek}, z_{rek}) wird aus der resultierenden Krümmung κ_{phys} mithilfe der in 4.4.2 beschriebenen Methodik rekonstruiert.
4. **Fehlerberechnung:** Der RMSE zwischen der rekonstruierten und der gemessenen Kontur wird als Kostenfunktion $L(\gamma)$ berechnet.
5. **Aktualisierung:** Der Optimierer nutzt $L(\gamma)$, um einen neuen Schätzwert für die Oberflächenspannung γ zu wählen. Das Verfahren terminiert, sobald die Änderung der Oberflächenspannung γ einen Schwellenwert von 10^{-3} mN/m unterschreitet.
6. **Spline Korrektur:** Final wird κ_{phys} mittels eines Splines korrigiert um die finale Basiskrümmung κ_{base} zu erhalten.

Nachfolgend werden die einzelnen dargestellten Schritte detailliert erklärt. Als Eingangsparameter sind die geglättete Krümmung κ_{SG} , die Dichte des Tropfens ρ , die Gravitationskonstante g und die Tropfenhöhe h . Um eine physikalisch präzisere Krümmung aus der geglätteten Krümmung κ_{SG} zu erstellen, wird ein Modell auf Basis der in Kapitel 2.1.1 hergeleiteten modifizierten Young-Laplace-Gleichung mit der Formelnummer (2.6) verwendet. Die physikalisch informierte Gesamtkrümmung κ_{phys} setzt sich dabei abziehend aus einem konstanten, Druckdifferenzterm $\overline{\kappa_\gamma}$ und einem positionsabhängigen Gravitationsanteil $\kappa_g(x)$ zusammen:

$$\kappa_{phys}(x) = \overline{\kappa_\gamma} - \kappa_g(x) = \overline{\kappa_\gamma} - \frac{\rho g h(x)}{\gamma} \quad (4.23)$$

Die direkte Berechnung der Krümmungskomponenten wird jedoch durch eine unbekannte Oberflächenspannung γ verhindert. Diese wird zur Bestimmung des Gravitationsanteils $\kappa_g(x)$ benötigt. Da die Dichte ρ bei den hier verwendeten Materialien durch Messung oder Datenblatt bekannt ist, die Oberflächenspannung γ jedoch im Falle von PR48 nur schätzungsweise, wandelt sich die Aufgabe in eine inverse Problemstellung um.

Es muss der Wert für die Oberflächenspannung γ gefunden werden, bei dem das aus Gleichung (4.23) rekonstruierte Tropfenprofil (x_{rek}, y_{rek}) die geringste Abweichung von der experimentell gemessenen Tropfenkontur (x_{mess}, y_{mess}) aufweist, ausgedrückt durch die Fehlerfunktion L :

$$L(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[(x_{rek}^j(\gamma) - x_{mess}^j)^2 + (z_{rek}^j(\gamma) - z_{mess}^j)^2 \right]} \quad (4.24)$$

Laut Gleichung (4.23) wäre der konstante Krümmungsanteil der Oberflächenspannung $\overline{\kappa_\gamma}$ berechenbar, wenn die exakte physikalische Krümmung κ_{phys} bekannt wäre:

$$\overline{\kappa_\gamma} = \kappa_{phys}(x) + \frac{\rho g h(x)}{\gamma} \quad (4.25)$$

In der Praxis steht jedoch nur die geglättete, mit numerischen Restfehlern behaftete Krümmung κ_{SG} zur Verfügung. Da diese lediglich eine Annäherung an die wahre Krümmung darstellt, führt die Substitution von κ_{phys} durch κ_{SG} in Gleichung (4.25) zu keinem konstanten Wert mehr. Stattdessen ergibt sich eine nun ortsabhängige Krümmung $\kappa_\gamma(x)$:

$$\kappa_\gamma(x) = \kappa_{SG}(x) + \frac{\rho g h(x)}{\gamma} \quad (4.26)$$

In Abbildung 4.13 sind die Krümmungen geplottet. Für diesen Moment sind nur die blaue geglättete Krümmung κ_{SG} , die rote gravitative Krümmung κ_g und die gelbe Krümmung κ_γ von Bedeutung. Werden diese drei isoliert betrachtet so lässt sich beobachten, dass die geglättete Krümmung κ_{SG} und der gravitative Anteil κ_g einen ähnlichen Verlauf haben, jedoch mit Offset. Die Differenz der beiden ergibt die gelbe Krümmung κ_γ . Diese ist nicht konstant. Im mittleren Bereich jedoch nahezu. Diese Erkenntnis wird angewendet, indem ein konstanter Offset-Wert aus der Verteilung von $\kappa_\gamma(x)$ berechnet wird.

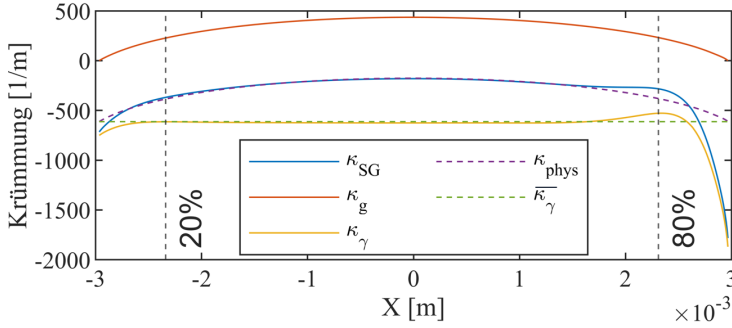


Abbildung 4.13: Zerlegung der gemessenen Krümmung in die einzelnen Krümmungsanteile.

Dieser Wert wird als getrimmtes Mittel der mittleren 60 % aller κ_γ Werte definiert. Aus den schon nach Größe sortierten Werten wird das getrimmte Mittel wie folgt berechnet:

$$\bar{\kappa}_\gamma = \frac{1}{n - 2o} \sum_{i=o+1}^{n-o} \kappa_\gamma(i) \quad (4.27)$$

mit $o = \lfloor 0,2 \cdot n \rfloor$

Mit o als gerundeter Wert von $0,2 \cdot n$. Die grün gestrichelte Linie in Abbildung 4.13 zeigt $\bar{\kappa}_\gamma$. Dies ist der theoretische Wert für den konstanten Offset, der durch die Druckdifferenz beigesteuert wird. Daraus und aus dem gravitativen Beitrag kann jetzt direkt die physikalische Krümmung berechnet werden:

$$\kappa_{phys}(x) = \bar{\kappa}_\gamma - \frac{\rho g h(x)}{\gamma} \quad (4.28)$$

Wie in Abbildung 4.13 in lila zu sehen ist, ist sie die physikalisch plausiblere Krümmung im Gegensatz zu κ_{SG} . Diese kann nun durch den Rekonstruktionsalgorithmus rekonstruiert werden und der Fehler L

kann berechnet werden. Der Graph in Abbildung 4.13 wurde mit dem korrekten Wert von γ erstellt, weshalb die Kurven so gut übereinander liegen. Der Graph zeigt nochmal gut die Feststellung aus Abschnitt 4.4.1, dass die geglättete Kontur an den Rändern abweicht.

Aus Gleichung (4.28) kann geschlussfolgert werden, dass eine Veränderung der Oberflächenspannung γ nur den Wert der Krümmung auf der Ordinate verschiebt. Der Verlauf der Krümmung ist nicht von γ abhängig.

Das heißt die Ermittlung einer unbekannten Oberflächenspannung ist ein simples iteratives Optimierungsproblem. Zur Lösung wird ein zweistufiges iteratives Optimierungsverfahren auf Basis des Quasi-Newton-Algorithmus eingesetzt. Dieser Ansatz verhindert das Konvergieren der Oberflächenspannung in lokalen Minima und beschleunigt zusätzlich den Prozess. Im ersten Schritt erfolgt eine grobe Suche, um einen Startwert für die finale Optimierung zu finden. Für diesen Vorgang wird der Algorithmus mit vordefinierten Startwerten für die Oberflächenspannung im für die Materialien erwartbaren Bereich von $\gamma_i \in \{30, \dots, 80 \text{ mN/m}\}$ ausgeführt, wobei gröbere Toleranzen verwendet werden, um die Rechenzeit zu minimieren.

Der Startwert, der zum geringsten Wert der Fehlerfunktion L zwischen rekonstruierter und gemessener Kontur führt, wird als bester Wert identifiziert. Im zweiten Schritt wird eine präzise Optimierung mit diesem optimalen Startwert und engeren Konvergenzkriterien durchgeführt, um den finalen, optimierten Wert für die Oberflächenspannung zu bestimmen. Abbildung 4.14 veranschaulicht, wie diese

iterative Optimierung die rekonstruierte Form schrittweise der in lila gestrichelt dargestellten realen Tropfenkontur annähert.

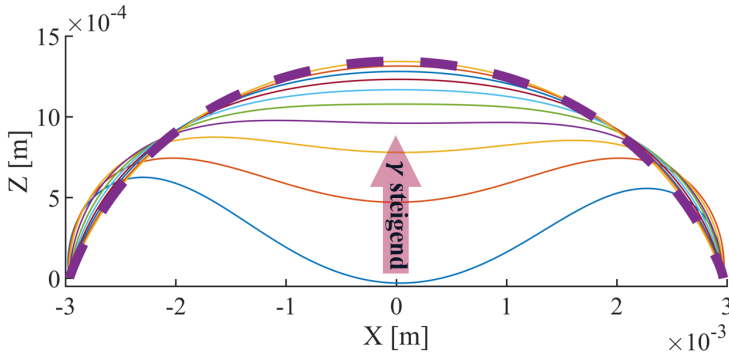


Abbildung 4.14: Optimierung der Oberflächenspannung γ durch Minimierung der Abweichung zwischen der rekonstruierten und der gemessenen Tropfenkontur.

Das Verfahren terminiert, sobald die Änderung des Parameters γ einen Schwellenwert von 10^{-3} mN/m unterschreitet.

Obwohl das physikalisch informierte Modell κ_{phys} eine wesentliche Verbesserung darstellt, verbleiben Restabweichungen zur Messkontur. Diese können aus Modellvereinfachungen oder experimentellen Unsicherheiten, wie einer nicht exakt senkrechten Ausrichtung des Zylinderstifts, resultieren. Um diese Abweichungen zu kompensieren und eine mathematisch genauere Basislinie für die Analyse der elektrischen Effekte zu schaffen, wird ein additiver, flexibler Korrekturterm $\Delta\kappa_{spline}$ eingeführt.

Die finale Basiskrümmung des undeformierten Tropfens κ_{base} ergibt sich somit als:

$$\kappa_{base}(x) = \kappa_{phys}(x) + \Delta\kappa_{spline}(x) \quad (4.29)$$

Der Korrekturterm $\Delta\kappa_{spline}$ ist ein kubischer Spline mit 10 Stützstellen ist. Zehn Stützstellen bieten eine akzeptable Genauigkeit bei einer praktikablen Rechenzeit. Die Spline-Koeffizienten werden durch Minimierung der Abweichung zwischen der aus κ_{phys} rekonstruierten Kontur $(x_{rek}, z_{rek})_{phys}$ und dem Messprofil (x_{mess}, z_{mess}) bestimmt. Abbildung 4.15 zeigt die punktwisen Differenzen zur Messkontur für die aus κ_{phys} rekonstruierte Kontur ohne Spline-Korrektur $(x_{rek}, z_{rek})_{phys}$ sowie für die Spline korrigierte Kontur $(x_{rek}, z_{rek})_{base}$.

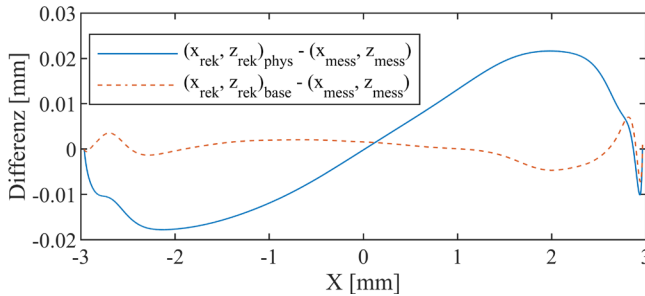


Abbildung 4.15: Vergleich der Rekonstruktionsabweichung. Dargestellt ist die punktwise Differenz zwischen der Messkontur (x_{mess}, z_{mess}) und den zwei Rekonstruktionen basierend auf der physikalisch informierten Krümmung κ_{phys} (blau, durchgezogen) und basierend auf der finalen, durch den Spline-Term korrigierten Basis­krümmung κ_{base} (rot, gestrichelt).

Der Korrekturterm reduziert die Abweichung entlang der gesamten Kontur. Die Möglichkeit der Spline Korrektur ist aus zwei Gründen

essenziell. Erstens stellt sie für die Fehlerzuordnung sicher, dass Abweichungen bei der späteren Vorhersage der elektrischen Deformation ausschließlich auf das Modell zurückzuführen sind und nicht auf Ungenauigkeiten in der Ausgangsgeometrie. Und zweitens verleiht sie dem Modell die notwendige Flexibilität, indem sie die Freiheitsgrade liefert, um die Tropfengeometrie auch dann zu beschreiben, wenn das elektrische Feld unbekannt ist. Dies ist eine entscheidende Voraussetzung für die spätere iterative Berechnung der Oberflächenladungen, bei der die deformierte Tropfengeometrie selbst Teil der Lösung ist.

Diese Spline korrigierte Krümmung κ_{base} dient somit als definitive Ausgangsbasis für das physikalische Modell, das die elektrischen Effekte berücksichtigt. Wird der Tropfen einem elektrischen Feld ausgesetzt, deformiert ein zusätzlicher elektrischer Druck die Grenzfläche. Dieser Effekt wird in das Modell integriert, indem ein elektrischer Krümmungsterm κ_e zur Basiskrümmungsgleichung addiert wird:

$$\kappa_{ges} = \kappa_{base} + \kappa_e \quad (4.30)$$

Dieser elektrische Krümmungsbeitrag kann aus dem elektrischen Druck p_e durch Division mit der Oberflächenspannung γ berechnet werden:

$$\kappa_e = \frac{p_e}{\gamma} \quad (4.31)$$

Der Druck p_e wird durch das elektrische Feld über die Grenzfläche induziert. Die Berechnung und Anwendung auf die Tropfenvorhersage werden im nächsten Kapitel 5 vorgestellt.

Kapitel 5

MODELLIERUNG UND SIMULATION

Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung eines physikalischen Modells, das in der Lage ist, die 2D-Form des deformierten Tropfens im elektrischen Feld vorherzusagen. Ein solches Modell ist die Voraussetzung für die gezielte Herstellung von Mikrooptiken mit definierten optischen Eigenschaften.

Ein erster Ansatz hierfür wurde vom Autor im Rahmen einer Vorabpublikation [105] beschrieben und basierte auf einem rein empirischen Verfahren. Bei diesem wurde die Tropfenform durch geometrische Parameter wie den Basisdurchmesser, den Kontaktwinkel oder die Scheitelkrümmung beschrieben und deren Abhängigkeit von der angelegten Spannung mittels Spline-Interpolation modelliert. Ein solches Vorgehen funktioniert jedoch als "Black Box" und ist nicht auf neue Elektroden, Geometrien oder Materialien übertragbar, da die zugrundeliegende Physik nicht abgebildet wird.

Das in diesem Kapitel vorgestellte physikalische Modell versucht diese Limitation zu überwinden. Es basiert direkt auf der in Kapitel 4 berechneten, Basiskrümmung κ_{base} auf und löst die zugrundeliegende Druck-Krümmungs-Balance an der Tropfengrenzfläche. Dadurch wird die Deformation nicht nur beschrieben, sondern

physikalisch begründet, was die Grundlage für eine spätere Übertragbarkeit schafft.

Das Modell basiert auf folgenden zentralen Annahmen:

- **2D-Vereinfachung:** Die Analyse beschränkt sich auf einen 2D-Schnitt des Tropfens auf Basis einer Kamera, um eine recheneffiziente, iterative Lösung zu ermöglichen.
- **Quasistatischer Zustand:** Es wird angenommen, dass der Tropfen nach der Deformation einen stabilen Gleichgewichtszustand einnimmt (siehe Ohnesorge-Zahl in Absatz 2.1.1 und Relaxationszeiten in Absatz 2.2.1).
- **Konstante Materialparameter:** Die Oberflächenspannung γ , die Permittivität ϵ und die Leitfähigkeit σ werden als konstant betrachtet.

Der Lösungsalgorithmus zur Ermittlung der finalen Kontur schließt direkt an die in Kapitel 4 gezeigte Datenverarbeitung in Abbildung 4.1 an. Die Prozesskette ist wie folgt:

1. **Initialisierung:** Mittels der in Kapitel 4 beschriebenen Methoden wird die initiale Krümmung κ_{base} des undeformierten Tropfens als Startwert für das Modell extrahiert sowie die Kontur des maximal deformierten Tropfens $(x_{mess}, z_{mess})_{final}$.

2. **Iterative Form- und σ_s -Optimierung:** Das Kernmodell besteht aus zwei verschachtelten Schleifen. Beide starten mit der undeformierten Krümmung κ_{base} :
 - a. **Innere Schleife (Formfindung):** Ermittelt für eine gegebene initiale Krümmung κ_{base} , eine Spannung U_{Anode} , Permittivitäten ϵ und eine gegebene Oberflächenladung σ_s die stabile Gleichgewichtsform (x_{sim}, z_{sim}) des Tropfens.
 - b. **Äußere Schleife (Bestimmung von σ_s):** Optimiert den Wert von σ_s , indem die vorhergesagte Kontur (x_{sim}, z_{sim}) mit der deformierten Messkontur $(x_{mess}, z_{mess})_{final}$ verglichen und der RMSE minimiert wird.

Dieser Ablauf bedeutet auch, dass das Modell nur Vorhersagefähig ist, wenn die Oberflächenladung bekannt ist. Da dies eine Unbekannte ist, muss die äußere Schleife bei verlustbehafteten Dielektrika verwendet werden und macht aus dem Modell ein Hybridmodell.

In Abbildung 5.1 sind zwei Beispiele des Algorithmus als Flussdiagramm dargestellt. In Abbildung 5.1 a) ist der Fall in der nur die innere Schleife verwendet wird gezeigt für eine Oberflächenladung von $\sigma_s = 0$. Abbildung 5.1 b) zeigt

dagegen den Fall in dem die Oberflächenladung iterativ bestimmt wird. Sobald die Oberflächenladung bestimmt wurde, wird die innere Schleife ein letztes Mal ausgeführt, um die endgültigen Koordinaten aus der unverformten Basiskrümmung vorherzusagen.

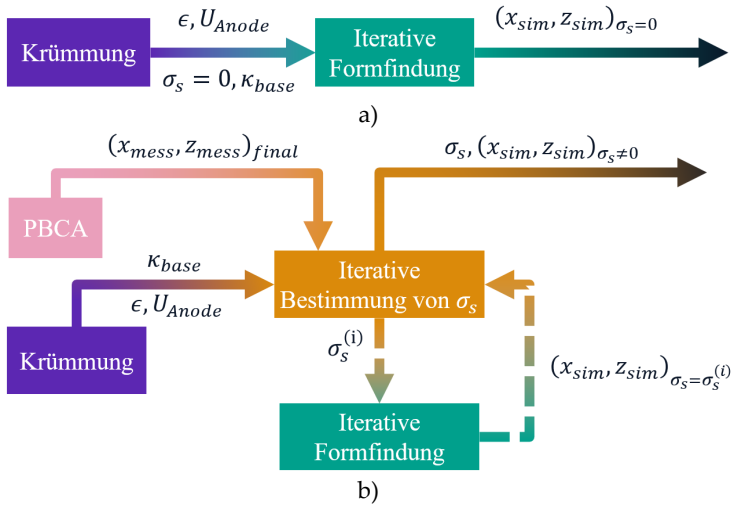


Abbildung 5.1: Schematisches Flussdiagramm des gesamten Vorhersageprozesses. a) Iterative Formfindung für definierte Eingangsparameter. b) Iterative Ermittlung der Oberflächenladung und der finalen Form.

Die folgenden Abschnitte beschreiben die einzelnen Schritte dieser numerischen Berechnung im Detail.

5.1 FEM-MODELL DES ELEKTRISCHEN FELDES

Wie in Abschnitt 2.2.1 dargelegt, wird das elektrische Feld, das den für die Deformation verantwortlichen Druck p_e erzeugt, mittels der Finiten-Elemente-Methode berechnet. Die Umsetzung dieses Ansatzes in einem numerischen Modell wird im Folgenden detailliert beschrieben. Die Umsetzung nutzt dabei die MATLAB Partial Differential Equation Toolbox.

Der Aufbau des FEM-Modells ist ein mehrstufiger Prozess, der die geometrische Abbildung des Experiments, die Definition der physikalischen Randbedingungen und Materialeigenschaften sowie die Netzgenerierung umfasst.

5.1.1 MODELLGEOMETRIE UND RANDBEDINGUNGEN

Die Modellgeometrie wird direkt aus den im Versuch gewonnenen Bilddaten abgeleitet. Dabei wird die rekonstruierte Kontur des Tropfens (x_{rek}, z_{rek}) direkt aus dem Ergebnis der in Kapitel 4 beschriebenen Basiskrümmung κ_{base} berechnet. Die Kontur der Anode wird hingegen durch den Sobel Kantendetektionsalgorithmus aus dem Bild extrahiert. Diese abweichende Behandlung hat methodische Gründe, da die Anode ein fester Körper ist. Ihre Kontur unterliegt keinen physikalischen Bedingungen wie der Minimierung der Oberflächenenergie. Der aufwändige PBCA-Ansatz ist daher nicht erforderlich, da eine simple geometrische Kantendetektion für die

Umsetzung der Anode im FEM-Modell ausreicht. Abbildung 5.2 illustriert ein Beispiel eines FEM-Modells mit den Randbedingungen. Der Inhalt der Abbildung wird im Folgenden beschrieben.

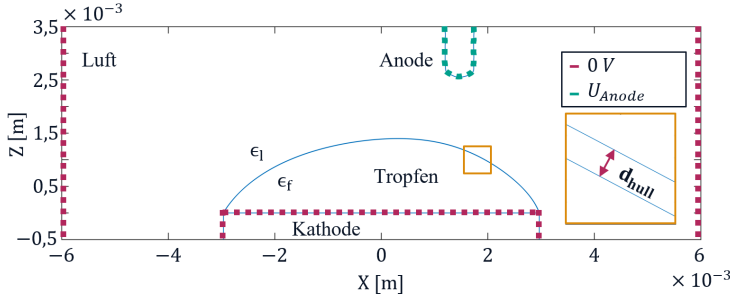


Abbildung 5.2: Grundmodell mit Definition der Geometrie und der Simulationsdomäne

Im FEM-Modell wird die Kathode als Rechteck abgebildet, welches den Querschnitt des realen Zylinderstifts darstellt. Die Breite dieses Rechtecks wird für jede Simulation individuell festgelegt und entspricht dem gemessenen Basisdurchmesser d_{basis} des Tropfens, der durch die Kontaktpunkte definiert ist.

Das Simulationsgebiet wird ausreichend groß definiert, um den offenen Charakter des experimentellen Aufbaus adäquat nachzubilden. Das im Experiment gemessene elektrische Potential U_{Anode} wird den Kanten der Anode als Dirichlet-Randbedingung zugewiesen, was in Abbildung 5.2 grün dargestellt ist. Ein Potential von 0 V wird an die Kathode und an die äußeren Grenzen der Berechnungsdomäne angelegt, was in Rot dargestellt ist. Letzteres dient der Modellierung des offenen Raumes und verhindert eine künstliche Verzerrung des

elektrischen Feldes durch die endliche Domänengröße. In Abbildung 5.2 ist die Domäne nach links und rechts abgeschnitten zur besseren Visualisierung. Des Weiteren werden dem Tropfen und der umgebenden Luft die Permittivitätswerte ϵ_f und ϵ_l zugewiesen.

Wie in Abschnitt 2.1.2 dargelegt, entsteht bei verlustbehafteten Dielektrika an der Grenzfläche zwischen einem Tropfen und der Luft eine Oberflächenladung σ_s . Die genaue Verteilung dieser Ladung im Raum ist nicht bekannt. Es wurde deshalb festgelegt, dass innerhalb dieses Modells die Oberflächenladung σ_s als Konstante effektive Oberflächenladung entlang der Tropfenkontur betrachtet wird, weshalb sie entsprechend in die Simulation integriert werden muss.

Da die Standardformulierung der PDE-Toolbox jedoch keine direkte Zuweisung einer idealisierten 2D-Ladungsschicht unterstützt, wird die effektive Oberflächenladung durch eine äquivalente Volumenladungsdichte ρ_e approximiert. Diese wird innerhalb einer dünnen, die Tropfengrenzfläche umschließenden Hülle der Dicke d_{hull} verteilt:

$$\rho_e = \frac{\sigma_s}{d_{hull}} \quad (5.1)$$

Eine Vergrößerung auf die Hülle ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Dicke dieser Hülle wird als ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Berechnungen und dem erforderlichen Rechenaufwand bestimmt, indem eine adaptive Hüllendicke festgelegt wird. Sie skaliert mit dem Sampling der Kontur und wird direkt vom mittleren X-Punktabstand $\overline{\Delta x_{tropfen}}$ der Kontur abgeleitet. Dieser berechnet sich aus dem Tropfenbasisdurchmesser d_{basis} und der Anzahl der Diskretisierungspunkte n_{punkte} der Kontur wie folgt:

$$\overline{\Delta x_{\text{tropfen}}} = \frac{d_{\text{basis}}}{n_{\text{punkte}}} \quad (5.2)$$

Die eigentliche Hüllendicke d_{hull} wird dann als ein Fünftel dieses charakteristischen Abstandes definiert:

$$d_{\text{hull}} = \frac{1}{5} \overline{\Delta x_{\text{tropfen}}}, \quad (5.3)$$

Die Sensitivitätsanalyse in Abbildung 5.3 rechtfertigt die Wahl der Hüllendicke. In Abbildung 5.3 a) ist dabei der elektrische Druck entlang der Tropfenoberfläche bei verschiedenen Hüllendicken gezeigt.

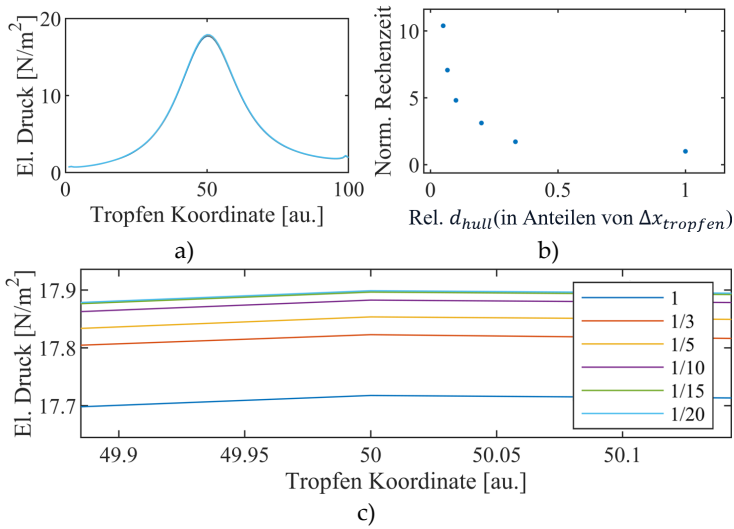


Abbildung 5.3: Sensitivitätsanalyse zur Wahl der Hüllendicke d_{hull} : a) Elektrischer Druck für verschiedene Hüllendicken, b) zugehörige Rechenzeit, c) Detailansicht der Druckverteilung an der Tropfenspitze.

Eine Vergrößerung des Bereichs um den Maximalen elektrischen Druck ist in Abbildung 5.3 c) dargestellt.

Eine Reduzierung der Dicke um das Vierfache von $1/5 \cdot \overline{\Delta x_{tropfen}}$ auf $1/20 \cdot \overline{\Delta x_{tropfen}}$ ändert den berechneten elektrischen Druck an der Tropfenspitze nur um ca. 1 %, während die Rechenzeit um ein Vielfaches ansteigt, wie in Abbildung 5.3 b) und c) dargestellt ist. Der gewählte Wert von $1/5 \cdot \overline{\Delta x_{tropfen}}$ stellt somit einen guten Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit dar.

5.1.2 NETZGENERIERUNG UND -QUALITÄT

Die Zuverlässigkeit der numerischen Simulation hängt entscheidend von der Qualität des zugrundeliegenden Netzes ab. Die Qualität Q eines einzelnen Dreieckselements wird nach [106] berechnet als:

$$Q = \frac{4\sqrt{3}A}{\sum_{i=1}^3 l_i^2} \quad (5.4)$$

wobei A die Fläche und l_i die Kantenlängen des Netz Dreiecks sind. Ein Wert von $Q > 0,6$ gilt als ausreichend [107], [108]. Wie im Histogramm der Elementqualität einer typischen Simulation in dieser Arbeit in Abbildung 5.4 zu sehen ist, liegt die Netzqualität in den durchgeführten Simulationen größtenteils über 0,9, was eine ausgezeichnete Netzqualität darstellt.

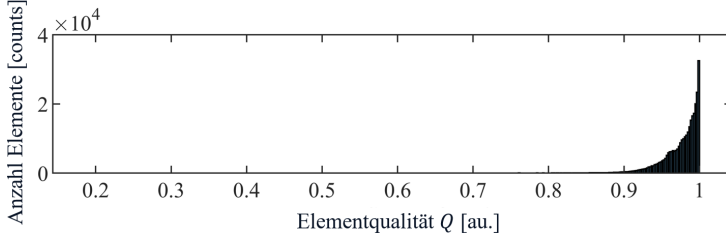


Abbildung 5.4: Typisches Histogramm der Netzqualität in den durchgeführten FEM-Simulationen.

Um die dünne Hülle der effektiven Oberflächenladung adäquat aufzulösen, wird die maximale Kantenlänge l_{hull} der Netzelemente innerhalb der Hülle auf ein Drittel der Hüllendicke begrenzt:

$$l_{hull} = \frac{d_{hull}}{3} \quad (5.5)$$

Dies gewährleistet, dass das Netz in der Hülle von mindestens drei Elementen aufgelöst wird. Das Netz innerhalb der Hülle ist in Abbildung 5.5 a) abgebildet. Um abrupte Übergänge der Elementgrößen zu vermeiden, wird die Netzwachstumsrate auf 1,1 begrenzt, während die maximale Elementgröße im restlichen Modell auf das 150-fache des mittleren Tropfen-Punkt-Abstandes $\overline{\Delta x_{tropfen}}$ gesetzt wird. Diese beiden Bedingungen stellen sicher, dass das Netz an den relevanten Stellen adäquat aufgelöst ist.

Ein Teil eines vernetzten Modells ist in Abbildung 5.5 b) dargestellt. Es ist zu sehen, dass die Oberfläche des Tropfens dicht vernetzt ist, wohingegen das Netz in der Luft und innerhalb des Tropfens gröber strukturiert ist.

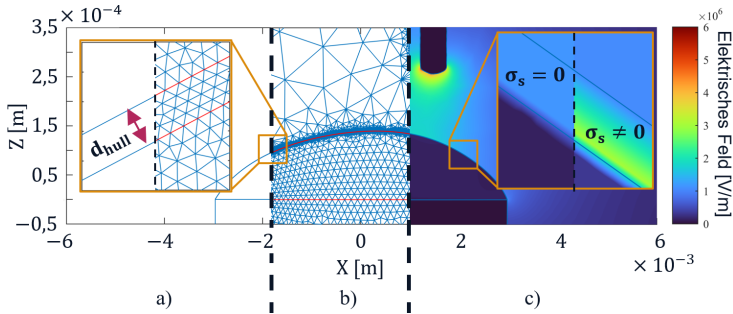


Abbildung 5.5: Gesamter Modellaufbauprozess: a) Detailansicht der vernetzten Hülle um die Tropfenkontur, b) Ausschnitt des Gesamtnetzes mit Verfeinerung an der Kontur, c) simuliertes elektrisches Potentialfeld mit und ohne Oberflächenladung σ_s .

Schließlich zeigt Abbildung 5.5 c) die Auswirkung der Oberflächenladung innerhalb des finalen FEM-Modells. Dargestellt ist das simulierte elektrische Feld, einmal ohne Oberflächenladungen ($\sigma_s = 0$) und einmal mit einer vorgegebenen Oberflächenladung ($\sigma_s \neq 0$), die gemäß Gleichung (5.1) auf die vernetzte Hülle angewendet wird. Die Vergrößerung verdeutlicht, wie diese angenommene Oberflächenladung das Feld an der Grenzfläche signifikant beeinflusst. Die iterative Bestimmung des physikalisch korrekten Werts für σ_s ist Gegenstand von Abschnitt 5.2.2.

5.1.3 BERECHNUNG DER FELDKOMPONENTEN AN DER GRENZFLÄCHE

Die direkte Berechnung des elektrischen Drucks nach Gleichung (2.29) erfordert die normalen und tangentialen Feldkomponenten auf beiden Seiten der Grenzfläche zwischen Luft und Tropfen. Da die FEM-Lösung nur an den Knotenpunkten definiert ist und der FEM-Löser an den Grenzflächen eine Mittelung über benachbarte Elemente vornimmt, treten direkt auf den Grenzflächen mit Permittivitätssprüngen numerische Ungenauigkeiten auf. Um dieses Problem zu umgehen, wird das elektrische Feld nicht direkt auf der Kontur, sondern an leicht versetzten Punkten innerhalb $P_f = (x_f, z_f)$ des Tropfens und außerhalb der Hülle $P_l = (x_l, z_l)$ interpoliert, wie in Abbildung 5.6 zu sehen.

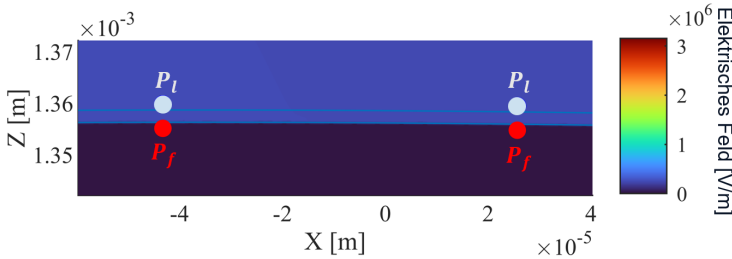


Abbildung 5.6: Darstellung der Interpolationspunkte P_l und P_f .

Aus diesen interpolierten Feldvektoren (E_x, E_z) werden anschließend durch die Projektion auf die Normalen- und Tangentenvektoren der Kontur die exakten Feldkomponenten (E_n, E_t) innen und außen

berechnet. Die detaillierte mathematische Herleitung dieses Schrittes befindet sich im Anhang B.2.

Mit diesen separierten Feldkomponenten kann der elektrische Druck nach Gleichung (2.29) an jedem Punkt der Tropfenkontur berechnet werden.

5.1.4 METHODENVALIDIERUNG

Um die Konsistenz der Simulation zu überprüfen und die korrekte Anwendung der effektiven Oberflächenladungen als Volumenladungsdichte sicherzustellen, werden die Stetigkeitsbedingungen an der dielektrischen Grenzfläche zur Validierung untersucht.

An einer dielektrischen Grenzfläche gelten, wie in den Gleichungen (2.26) und (2.27) beschrieben, spezifische Stetigkeitsbedingungen für die elektrischen Feldkomponenten [12], [17].

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes E_t ist dabei über die Grenzfläche stetig. In Abbildung 5.7 a) und b) sind die Tangentialkomponenten der elektrischen Felder einer Simulation dargestellt. Dabei sind die tangentialen Feldkomponenten innerhalb $E_{t,f}$ und außerhalb des Tropfens $E_{t,l}$ ohne und mit Oberflächenladungen aufgetragen. Gilt $E_{t,f} \approx E_{t,l}$, so kann die Bedingung als erfüllt betrachtet werden.

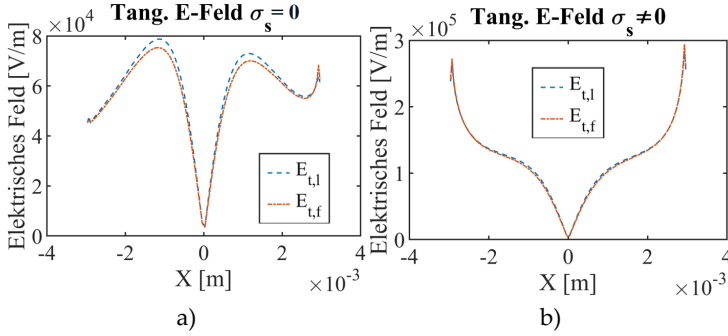


Abbildung 5.7: Die tangentialen E-Feldkomponenten entlang eines Tropfens. a) Ohne Oberflächenladungen. b) Mit Oberflächenladungen.

Obwohl eine geringfügige Diskrepanz zwischen den berechneten Tangentialfeldern besteht, ist ihre Größe im Vergleich zur Gesamtstärke der tangentialen Feldkomponente klein. Diese Abweichungen sind auf die räumliche Trennung der ausgewerteten Punkte zurückzuführen und tragen damit letztlich zum numerischen Fehler bei.

Für die Betrachtung der Normalen Komponenten des E-Felds müssen zwei Fälle betrachtet werden. Zuerst der Fall ohne Oberflächenladung und als zweites der Fall mit Oberflächenladungen.

Wenn keine Oberflächenladungen vorhanden sind ($\sigma_s = 0$), können die Normalanteile direkt über der Grenzfläche berechnet werden:

$$E_{n,f} = \frac{\epsilon_l}{\epsilon_f} E_{n,l} \quad (5.6)$$

$$E_{n,l} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f} \quad (5.7)$$

Eine Darstellung dieser Beziehungen mit realen simulierten Werten ist in Abbildung 5.8 a) und b) gezeigt. Dabei ist die blaue Kurve ($E_{n,l}$ und $E_{n,f}$) je die simulierte normale Feldkomponente und die rot gestrichelte Kurve ($E_{n,l}(2)$ und $E_{n,f}(2)$) die durch (5.6) und (5.7) berechnete normale Feldkomponente. Die verbleibende Differenz zwischen diesen ist im Verhältnis zur Gesamtgröße der Felder klein und belegen damit die Validität der Berechnung.

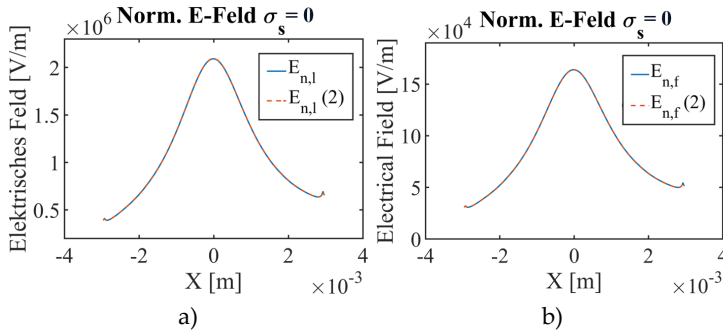


Abbildung 5.8: Normale E-Feldkomponenten. a) E_n berechnet nach (5.7) b) E_n berechnet nach (5.6).

Sind Oberflächenladungen vorhanden ($\sigma_s \neq 0$), dann sind die Normalkomponenten des Verschiebungsfelds D_n unstetig:

$$\sigma_s = D_{n,l} - D_{n,f} = \epsilon_l E_{n,l} - \epsilon_f E_{n,f} \quad (5.8)$$

Mit dieser Formel kann geprüft werden, ob die Modellierung der Oberflächenladung über eine äquivalente Volumladungsdichte physikalisch konsistent ist. Zu diesem Zweck wird ein bekannter Wert für die effektive Oberflächenladung als Eingangsparameter $\sigma_{s,in}$ in die Simulation gegeben. Nach der FEM-Berechnung wird aus den

resultierenden elektrischen Feldern an der Grenzfläche die Oberflächenladung σ_s gemäß der Randbedingung (5.8) zurückgerechnet.

Wie der Vergleich in Abbildung 5.9 zeigt, besteht eine gute Übereinstimmung zwischen dem zurückgerechneten Wert σ_s und dem ursprünglich vorgegebenen Eingangswert $\sigma_{s,in}$. Diese Übereinstimmung gilt über die gesamte Kontur, mit Ausnahme der Randpunkte, und bestätigt somit die korrekte Implementierung des Simulationsansatzes.

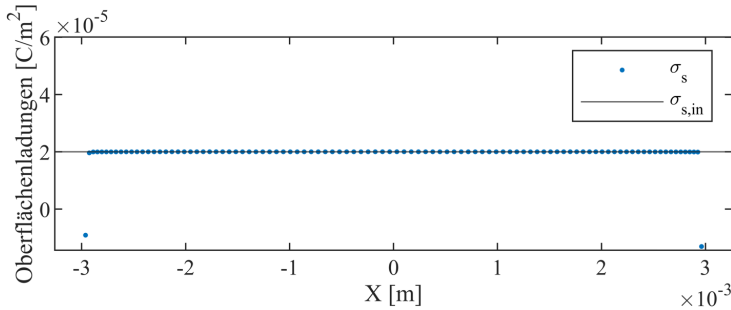


Abbildung 5.9: Vergleich zwischen dem Eingangswert $\sigma_{s,in}$ und den berechneten Werten für σ_s

Zusammenfassend bestätigt diese Validierung, dass die Modellierung der Oberflächenladung über eine volumetrische Ladungsdichte ein physikalisch konsistenter Ansatz ist.

Die in allen Graphen sichtbaren Diskontinuitäten an den Randpunkten der Kontur sind ein numerisches Artefakt. Es entsteht, weil die Start- und Endpunkte innerhalb des Tropfens in direktem Kontakt mit der geerdeten Kathode sind. Diese verzerrten Werte werden

durch Extrapolation von den letzten gültigen Datenpunkten entlang der Kontur korrigiert. Dieses Vorgehen ist gut begründet, da diese Randbereiche, wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt, den am wenigsten zuverlässigen Teil der aus den Bildern extrahierten Konturdaten darstellen.

5.2 ITERATIVE DEFORMATIONSVORHERSAGE

Dieser Abschnitt beschreibt die Kombination der zuvor dargestellten Komponenten zu einem iterativen Gesamtmodell. Das Ziel ist die Rekonstruktion der finalen, deformierten Tropfenkontur ausgehend von einem undeformierten initialen 2D-Profil und den elektrischen Randbedingungen. Wie am Anfang des Kapitels in Abbildung 5.1 beschrieben, besteht der Algorithmus aus zwei iterativen Schleifen.

5.2.1 INNERE SCHLEIFE: ITERATIVE FORMFINDUNG

Input für die innere iterative Schleife ist die in 4.4.3 berechnete, Basiskrümmung κ_{base} , sowie die absoluten Permittivitäten ϵ und die im Experimentieraufbau gemessene Spannung U_{Anode} . Die innere Schleife ermittelt iterativ die Gleichgewichtsform des Tropfens für eine gegebene Oberflächenladung $\sigma_{s,in}$. Der genaue Ablauf dieser Schleife ist in Abbildung 5.10 visualisiert. Diese iterative Schleife ist notwendig, da die durch das elektrische Feld verursachte

Deformation der Kontur die lokale elektrische Feldverteilung verändert, was wiederum eine Neuberechnung des elektrischen Drucks erfordert.

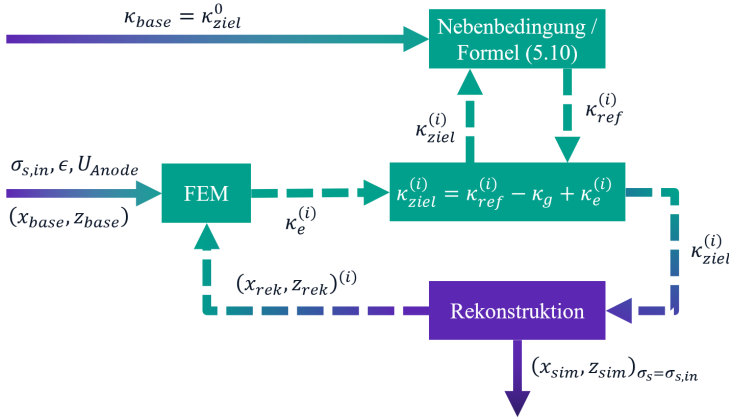


Abbildung 5.10: Flussdiagramm zur inneren Schleife

In jeder Iteration wird die neue, aus der Krümmung rekonstruierte Konturgeometrie verwendet, um eine FEM-Simulation zu lösen, die den neuen elektrischen Druck bzw. eine elektrische Krümmung κ_e liefert.

Ein entscheidender Aspekt des iterativen Prozesses ist die Gewährleistung der numerischen Stabilität bei der Konturrekonstruktion. Da diese ein Anfangswertproblem durch Integration der Krümmung löst, ist der Prozess empfindlich gegenüber konstanten Offsets im Krümmungsprofil. Ein solcher Offset führt bei der Integration zu einer Verschiebung des Tangentenwinkels, was dazu führt, dass der rekonstruierte Endpunkt stark von der Randbedingung des

Kontaktwinkels abweicht und die Konvergenz des Algorithmus ausbleibt. Die in Abschnitt 4.4.2 beschriebenen rein numerischen Korrekturen sind zur Behebung dieses Problems ungeeignet, weil sie nur kleine Anpassungen vornehmen und keinen globalen Offset korrigieren können. Um diese Instabilität zu verhindern, wird eine numerische Nebenbedingung eingeführt.

Die Zielkrümmung κ_{ziel} wird an jedem Punkt durch das Druckgleichgewicht der erweiterten Young-Laplace-Gleichung bestimmt (vergleiche Formel (4.23)):

$$\kappa_{ziel} = \kappa_{ref} - \kappa_g + \kappa_e \quad (5.9)$$

Hierbei ist κ_{ref} ein konstanter Offset (dieser entspricht dem in Abschnitt 4.4.3 verwendeten $\overline{\kappa_\gamma}$) entlang der Grenzfläche, der zu Beginn jeder Iteration unbekannt ist. Um diesen Offset-Term zu bestimmen, wird eine Nebenbedingung erzwungen, so dass das Integral der neuen Zielkrümmung κ_{ziel}^i dem Integral der bekannten Krümmung aus dem vorherigen Schritt κ_{ziel}^{i-1} entsprechen muss:

$$\int_{x_0}^{x_e} \kappa_{ziel}^{(i)}(x) dx = \int_{x_0}^{x_e} \kappa_{ziel}^{(i-1)}(x) dx \quad (5.10)$$

In der ersten Iteration gilt $\kappa_{ziel}^{(i-1)} = \kappa_{ziel}^0 = \kappa_{base}$. Durch Einsetzen von Gleichung (5.9) in diese integrale Nebenbedingung ergibt sich eine einzige Gleichung für die Unbekannte $\kappa_{ref}^{(i)}$. Der Wert für $\kappa_{ref}^{(i)}$ wird mit einem numerischen Nullstellensuchverfahren so bestimmt, dass er den folgenden Ausdruck erfüllt:

$$\int_{x_0}^{x_e} (\kappa_{ref}^{(i)} - \kappa_g(x) + \kappa_e(x)) dx - \int_{x_0}^{x_e} \kappa_{ziel}^{(i-1)}(x) dx = 0 \quad (5.11)$$

$$\kappa_{ref}^{(i)} = \frac{\left[\int_{x_0}^{x_e} \kappa_{ziel}^{(i-1)}(x) dx + \int_{x_0}^{x_e} (\kappa_g(x) - \kappa_e(x)) dx \right]}{x_e - x_0} \quad (5.12)$$

Mit x_0 als erster X-Wert der Kontur und x_e als letzter X-Wert der Kontur. Sobald $\kappa_{ref}^{(i)}$ gefunden ist, ist das vollständige Profil von $\kappa_{ziel}^{(i)}$ für die i -te Iteration durch Gleichung (5.9) definiert. Nachdem das vollständige Profil von $\kappa_{ziel}^{(i)}$ bekannt ist, wird daraus die neue Kontur $(x_{rek}, z_{rek})^{(i)}$ rekonstruiert.

Um die Anzahl der Iterationen zu wählen bis ein stabiler Zustand erreicht ist, wird die Konvergenz des Algorithmus bei 20 Iterationen betrachtet. Dies ist in Abbildung 5.11 dargestellt. Wie in a), b) und c) zu sehen ist, stellt sich nach etwa drei Iterationen ein stabiler Zustand für die elektrische Krümmung κ_e , die Krümmung des Gesamttropfens κ_{ziel} und der Tropfenform (x_{rek}, z_{rek}) ein.

Die quantitative Analyse des RMSE zur finalen Messkontur in Abbildung 5.11 d) untermauert dieses Ergebnis und zeigt, dass nach der dritten Iteration keine signifikante Verbesserung der Genauigkeit mehr erzielt wird.

Basierend auf dieser Analyse wird die innere Schleife des Algorithmus standardmäßig mit drei Iterationen ausgeführt, was einen optimalen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand darstellt.

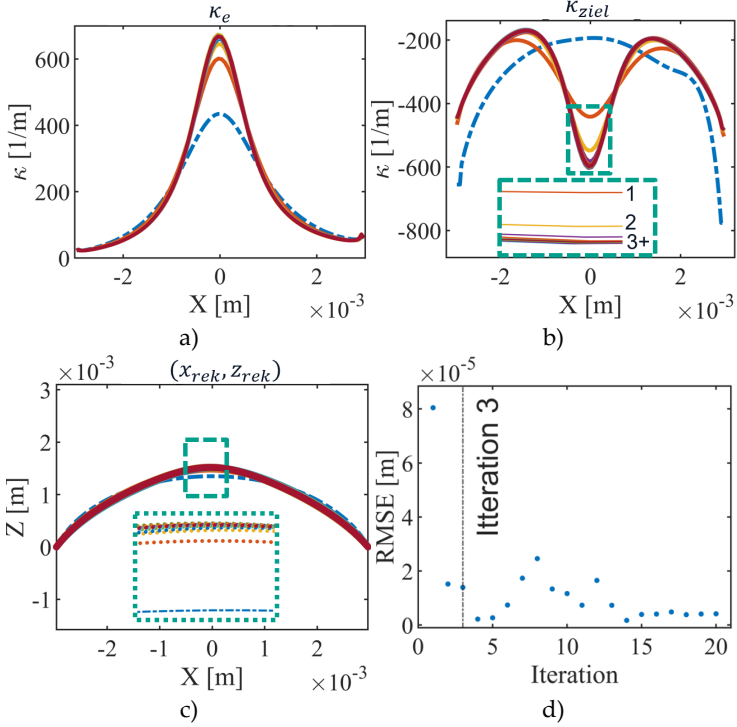


Abbildung 5.11: Konvergenz des iterativen Algorithmus zur Formvorhersage. a) Beitrag der elektrischen Krümmung κ_e für die initiale Kontur und 20 Iterationen. b) Entwicklung der Gesamt-Krümmung κ_{ziel} . c) Zugehörige Änderung der rekonstruierten Tropfenkontur. d) RMSE zwischen der vorhergesagten und der final gemessenen Form, der die Stabilisierung der Lösung nach ca. 3 Iterationen zeigt.

Damit ist das Ergebnis der Schleife die Kontur $(x_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s = \sigma_{s,in}}$.

5.2.2 ÄUßERE SCHLEIFE: OPTIMIERUNG DER OBERFLÄCHENLADUNG

Die äußere Schleife dient der numerischen Bestimmung der effektiven Oberflächenladung σ_s , die eine unbekannte Größe ist. Dieser Optimierungsprozess, der die innere Schleife als Funktion aufruft, ist in Abbildung 5.12 dargestellt. Ziel ist es, den optimalen Wert der Oberflächenladung σ_s zu finden, der den RMSE zwischen der durch die innere Schleife vorhergesagten Kontur $(x_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s \neq 0}$ und der experimentell beobachteten finalen Tropfenkontur $(x_{mess}, z_{mess})_{final}$ minimiert.

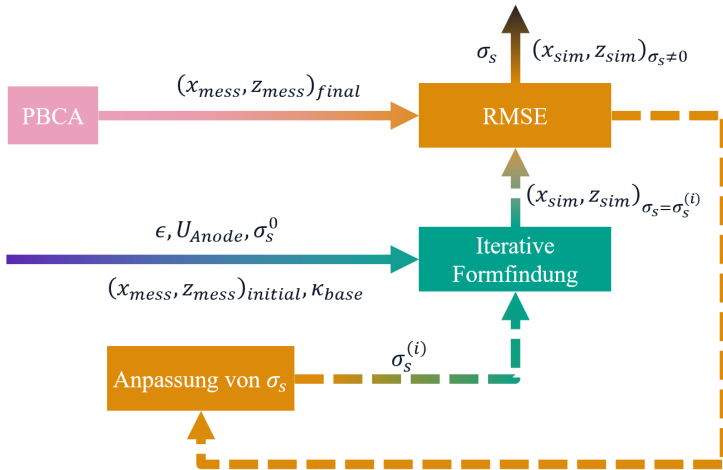


Abbildung 5.12: Flussdiagramm zur äußeren Schleife

Der Prozess verläuft wie folgt: Mit den Start Koordinaten des undeformierten Tropfens $(x_{mess}, z_{mess})_{initial}$, der Basiskrümmung κ_{basis} und den elektrischen Parametern ϵ, U_{Anode} und σ_s^0 wird zuerst die

innere Schleife durchgeführt, um die erste Vorhersage der deformierten Kontur $(x_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s = \sigma_s^0}$ zu berechnen. Diese wird dann mit der final deformierten Kontur $(x_{mess}, z_{mess})_{final}$ verglichen und der RMSE berechnet. Ist der RMSE zu groß wird die Oberflächenladung angepasst und eine weitere Iteration durchgeführt.

Für die numerische Bestimmung der effektiven Oberflächenladung σ_s wird eine Surrogate-Optimierung eingesetzt [109]. Dieser globale Optimierungsalgorithmus ist speziell für Probleme mit rechenintensiven Zielfunktionen geeignet. Da bei jeder Iteration eine vollständige FEM-Simulation durchgeführt werden muss, stellt dieser Ansatz eine effiziente Lösung für die vorliegende Aufgabenstellung dar.

Der Suchraum der Surrogate-Optimierung für σ_s wird dabei durch spannungsabhängige untere und obere Schranken zwischen $-4 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$ und $4 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$ begrenzt, um den Algorithmus auf einen physikalisch plausiblen Bereich zu beschränken, was die Rechenzeit weiter verringert. Die Größenordnung der Schranke sind aus Abschätzungen mit einem anderen langsameren Optimierer bekannt.

Dieser Optimierungsprozess verfolgt zwei Ziele: erstens die Vorhersageberechnung der Endkontur $(x_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s \neq 0}$ und zweitens die Bestimmung des effektiven Werts der Oberflächenladung σ_s unter den spezifischen experimentellen Bedingungen.

5.3 OPTISCHE AUSWERTUNG DER TROPFENKONTUR MITTELS RAYTRACING

Zur Bewertung der optischen Eigenschaften der experimentell ermittelten und vorhergesagten Tropfenkonturen wird ein numerisches 2D-Raytracing-Verfahren (X-Z-Ebene, nur Meridionalstrahlen) in MATLAB implementiert. Ein solcher Raytracer simuliert die geometrischen Pfade von Lichtstrahlen innerhalb optischer Systeme. Er basiert auf der Anwendung der physikalischen Gesetze der Reflexion und Brechung an optischen Flächen. Ein Raytracer ermöglicht unter anderem die Bestimmung der Brennweite sowie die Analyse der optischen Weglängendifferenz. [77]

Der hier genutzte Raytracer wurde künstliche Intelligenz (KI)-gestützt entwickelt. Als Ausgangspunkt diente ein bereits in MATLAB vorhandener Raytracer von Chris Hopkins [110], der für den meridionalen 2D-Fall angepasst wurde, um die speziellen Anforderungen der Tropfenkonturen abzubilden.

Nachfolgend werden die Methodik der Strahlenverfolgung, die Bestimmung der optimalen Fokusebene und die wellenoptische Analyse beschrieben.

5.3.1 IMPLEMENTIERUNG DES RAYTRACERS

Die Simulation stützt sich auf ein zweidimensionales Modell, das die Meridionalkontur der als Linse betrachteten Tropfenform analysiert.

Dabei wird untersucht, wie sich die Linse verhält, wenn kollimiertes Licht hindurchscheint. Für die Berechnungen werden die folgenden Parameter verwendet, die aus den experimentellen Rahmenbedingungen abgeleitet sind. Zum einen die Brechungsindizes des PR48 Polymertropfens $n_{PR48} = 1,509$ [111] und von Ölsäure $n_{ölsäure} = 1,46$ [112] und des umgebenden Mediums $n_{Luft} = 1,0$ [113] bei einer Wellenlänge von $\lambda = 589,6$ nm. Die Anzahl der simulierten Strahlen ist 10^4 .

Die diskrete Tropfenkontur aus der PBCA (x_{mess}, z_{mess}) oder die simulierte Tropfenkontur (x_{sim}, z_{sim}) wird mittels stückweise kubischen hermiteschen Interpolationspolynoms (PCHIP) in eine stetige, differenzierbare Kurve überführt. Diese Methode wird ausgewählt, da sie im Gegensatz zu anderen Interpolationsmethoden keine Überschwinger erzeugt und somit die Form der Kontur mit minimalem Fehler physikalisch korrekt darstellt. Dies ist hier möglich, da durch die Vorverarbeitungen die Überschwinger der Diskretisierung eliminiert wurden. Die in Abschnitt 4.2 vorgestellte PBCA ist aufgrund der Krümmungsschwingungen nicht geeignet.

Die Brechung der einzelnen Strahlen an dieser Grenzfläche folgt dem Snellius'schen Brechungsgesetz in Vektorform, wobei auch die Möglichkeit der Totalreflexion berücksichtigt wird. [77]

Eine Simulation mit der verwendeten Kontur und den Strahlen ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Es sind nur die Strahlen dargestellt, die nicht intern reflektiert werden.

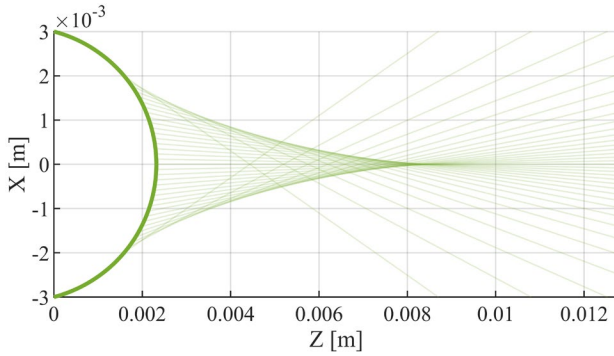


Abbildung 5.13: Simulierter Strahlengang durch die Tropfenkontur.

5.3.2 BESTIMMUNG DES FOKUSPUNKTS

Die Bestimmung der optimalen Fokusebene ist entscheidend für die Bewertung der optischen Eigenschaften. Um den Punkt der höchsten Strahlenkonzentration und somit die Fokusebene zu identifizieren, wird ein auf einem Strahldichtebild (engl. Ray Density Image) basierender Ansatz verwendet. Hierfür wird der Raum entlang der optischen Achse (Z) und der transversalen Achse (X) in ein zweidimensionales Gitter diskretisiert. Anschließend wird der Pfad jedes Strahls durch dieses Gitter verfolgt, und die Anzahl der Strahlen, die jedes einzelne Gitter-Pixel durchqueren, wird in einem 2D-Histogramm zusammengezählt. Das resultierende Bild zeigt die räumliche Dichteverteilung der Strahlen. In Abbildung 5.14 ist ein solches Strahldichtebild dargestellt.

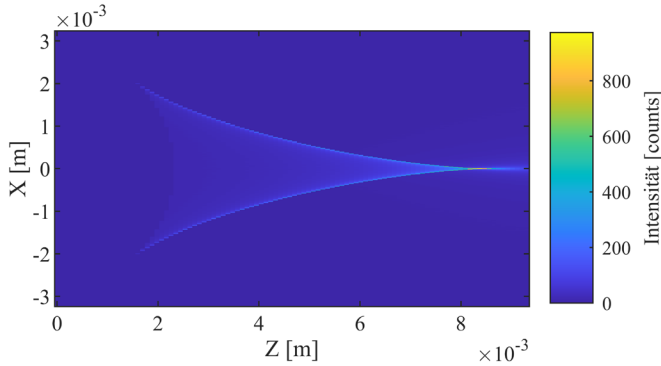


Abbildung 5.14: Strahldichtebild zur Bestimmung des Fokuspunktes als der Pixel mit der maximalen Intensität (höchste Strahlenkonzentration).

Die Koordinaten des Gitter-Pixels mit dem globalen Maximalwert in diesem 2D-Histogramm wird als Fokuspunkt definiert. Damit ist der Fokus mit $P_{focus} = (x_{focus}, z_{focus})$ bekannt.

5.3.3 ANALYSE DER OPTISCHEN ABBILDUNGSQUALITÄT

Zur quantitativen Bewertung der Abbildungsqualität und zum Vergleich der Linsengeometrien wird die optische Weglängendifferenz (OPD) in der Fokusebene herangezogen. Dazu wird die optische Weglänge (OPL) für jeden Strahl vom Eintritt in das System bis zur Fokusebene berechnet. Die OPD wird in dieser Arbeit als Abweichung der OPL jedes Strahls von der OPL des zentralen Referenzstrahls definiert.

Ein direkter Vergleich der OPD-Verläufe, die sich aus der experimentell ermittelten Tropfenkontur und der im Modell vorhergesagten Kontur ergeben, dient als optisches Kriterium zur Bewertung der Vorhersage. Eine hohe Übereinstimmung der resultierenden Wellenfronten in der Fokusebene würde die Vorhersagegenauigkeit des Modells in Bezug auf die optische Leistungsfähigkeit der deformierten Linse bestätigen.

5.3.4 VERIFIKATION DER SIMULATION

Zur Verifizierung des Modells wurde dessen Korrektheit anhand eines analytisch lösbaren Problems überprüft. Dazu wurde eine plankonvexe Linse mit Brechungsindex $n_{linse} = 1,5$ mit bekanntem Krümmungsradius $R_{Linse} = 0,0031 \text{ m}$ und Durchmesser von $d_{Linse} = 0,006 \text{ m}$ simuliert und die simulierte Brennweite mit dem Ergebnis der Linsenmacherformel für dünne Linsen verglichen. Für die dünne plankonvexe Linse im meridionalen 2D-Ansatz kann so die Brennweite f aus der Linsenmachergleichung berechnet werden [77]:

$$f = \frac{n_{Luft} R_{Linse}}{n_{linse} - n_{Luft}} = \frac{1 \cdot 0.0031 \text{ m}}{1,5 - 1} = 6,205 \text{ mm} \quad (5.13)$$

Die Simulation und anschließende Fokusfindung ergeben eine Brennweite von $f_{ray} = 5,983 \text{ mm}$. Die Brennweiten sind gemessen vom Scheitelpunkt der plankonvexen Linse. Das ist eine relative Differenz von 3,48 %. Da die Simulationen ausschließlich zum Vergleich dienen sollen, reicht diese Genauigkeit aus.

Kapitel 6

EXPERIMENTELLE ERGEBNISSE UND MODELLVALIDIERUNG

Aufbauend auf der in Kapitel 3 beschriebenen experimentellen Umgebung und den in den Kapitel 4 und Kapitel 5 entwickelten Methoden, behandelt dieses Kapitel die experimentellen Ergebnisse dazu. Ziel ist die systematische Beantwortung der in der Einleitung formulierten Forschungsfragen.

Der Aufbau des Kapitels folgt einer logischen Validierungskette. Zunächst werden in den Abschnitten 6.1 bis 6.3 die Messmethodik und die Konturapproximation untersucht.

In Abschnitt 6.4 wird das physikalische Vorhersagemodell anhand der experimentellen Daten untersucht und validiert. Der Schwerpunkt liegt einerseits darauf, zu demonstrieren, dass das Modell die Deformationen der Tropfen vorhersagen kann, und andererseits darauf, den Beweis zu erbringen, dass die Berücksichtigung der Oberflächenladung für eine genaue Vorhersage entscheidend ist. Abschließend werden die Ergebnisse zusammenfassend diskutiert.

6.1 AUSWERTUNGSMETHODIK UND BEWERTUNGSMETRIKEN

6.1.1 SYNTHETISCHE GEOMETRIEN ZUR VALIDIERUNG

Zunächst werden synthetische Geometrien verwendet, die charakteristische Merkmale realer Tropfendeformationen repräsentieren. Dies umfasst analytisch beschriebene 2D-Kurven wie Kreissegmente, Hyperbeln und rechteckige Formen, die jeweils in drei verschiedenen Ausprägungsgraden erstellt wurden. Abbildung 6.1 vergleicht diese synthetischen Kurven mit den tatsächlich beobachteten Tropfenformen, um die Bedeutung der synthetischen Testdaten für die elektrische Deformation von Tropfen zu verdeutlichen.

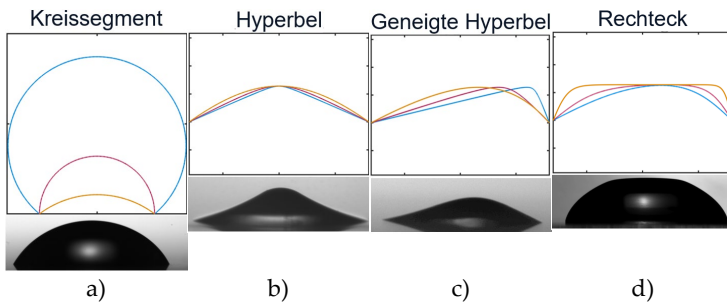


Abbildung 6.1: Verwendete synthetische Kurven im Vergleich mit real beobachteten Tropfen. a) Kreisförmige Kontur. b) Hyperbolische Kontur. c) Geneigte hyperbolische Kontur. d) Rechteckige Kontur. (modifiziert nach [88])

Die detaillierte Beschreibung der Kurven ist im Anhang D.1.

Des Weiteren werden rotationssymmetrische und nicht-rotationssymmetrische 3D-Computer-Aided-Design (CAD)-Modelle verwendet, die ebenfalls typische Deformationszustände abbilden. Aus diesen Modellen werden in der Software PTC CREO gerenderte virtuelle 2D-Schattenbilder für die X- und Y-Ansicht gerendert, die als Eingabe für die 3D-Rekonstruktionsalgorithmen dienen. Diese sind in Abbildung 6.2 dargestellt.

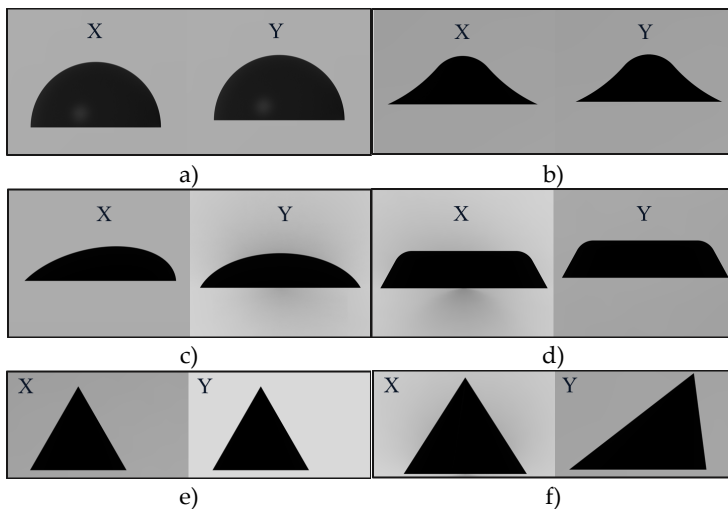


Abbildung 6.2: Synthetische Bilder der CAD-Modelle zur Validierung des Rekonstruktionsalgorithmus. Dargestellt sind die gerenderten X- und Y-Schattenansichten für: a) Halbkugel, b) achsensymmetrisch deformierter Tropfen, c) nicht-achsensymmetrisch deformierter Tropfen, d) rechteckförmiger Tropfen, e) achsensymmetrischer Kreiskegel, f) nicht-achsensymmetrische Kreiskegel. (modifiziert nach [88])

Die Darstellungen beinhalten Modelle einer Halbkugel, verschiedene verformte Tropfenformen und, um die Robustheit des Algorithmus bei scharfen Kanten zu testen, als Extremfälle einen rotationssymmetrischen sowie einen nicht-rotationssymmetrischen Kreiskegel.

6.1.2 REALE REFERENZOBJEKTE ZUR VALIDIERUNG

Für die Evaluation unter realen Messbedingungen werden reale Referenzobjekte verwendet, deren exakte Geometrie mittels eines Koordinatenmessgeräts (KMG) als Referenzdaten erfasst wurde. Hierzu dienen drei präzise gefertigte Zylinderstifte mit Kugelsegment sowie die Messkugel eines KMG. Abbildung 6.3 a) zeigt einen Stift mit Kugelsegment und b) die Messkugel.

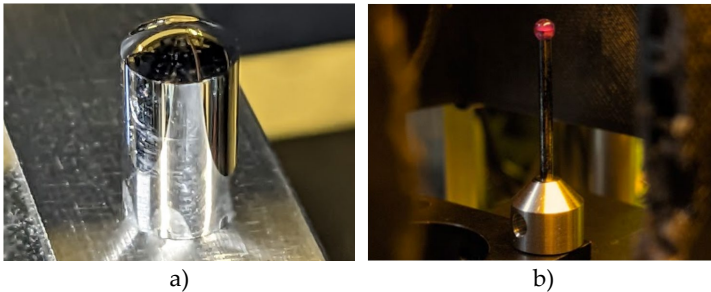


Abbildung 6.3: Reale Referenzgeometrien zur Validierung des Messsystems. a) Bild eines präzise gefertigten Zylinderstifts mit Radius 6,36 mm. b) Bild der KMG-Messkugel mit Durchmesser 3 mm. (modifiziert nach [88])

Jeder Stift hat eine Basis mit einem Durchmesser von 5 mm und die Radien der Kopfabschnitte betragen 2,56 mm, 3,63 mm bzw. 6,5 mm. Die zugehörigen Durchmesser der Stifte sind 4,86 mm, 4,87 mm und 4,9 mm. Die Messkugel des KMG hat einen Durchmesser von 3 mm. In Abbildung 6.4 a), b), c) und d) sind die mit dem experimentellen Aufbau aufgenommenen Schattenbilder, die als realistische Testbilder mit allen systembedingten Einflüssen dienen.

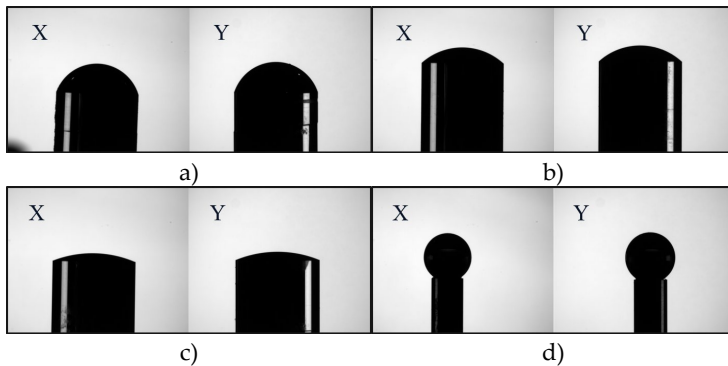


Abbildung 6.4: Reale Referenzgeometrien zur Validierung des Messsystems. a)-c) Schattenbilder der drei Zylinderstifte mit Radien von 2,56 mm, 3,63 mm und 6,5 mm, aufgenommen mit dem Messaufbau. d) Schattenbilder der KMG-Messkugel. (modifiziert nach [88])

6.1.3 METHODIK DES GEOMETRIEVERGLEICHS

Für die quantitative Bewertung werden die aus den Bildern rekonstruierten Geometrien mit den Referenzdaten abgeglichen. Die Vorgehensweise unterscheidet sich dabei für 2D- und 3D-Geometrien.

Bei 2D-Konturen wird sichergestellt, dass die rekonstruierte Kurve und die Referenzkurve an denselben Stützstellen verglichen werden, um Aliasing-Fehler durch unterschiedliche Diskretisierungen zu vermeiden. Dazu werden beide Kurven vor der Fehlerberechnung auf ein gemeinsames, äquidistantes Stützstellenraster interpoliert.

Auf die Abbildungen der CAD-Modelle und der realen Bilder wird zuerst der PBCA-Algorithmus und anschließend der PHDR-Algorithmus angewendet, um die 3D Geometrie zu rekonstruieren und das Volumen zu berechnen. Zuvor werden die Bilder in metrischen Einheiten kalibriert, entweder mit einem berechneten Skalierungsfaktor oder mittels der Zhang-Kalibrierung. Die Umrechnungsfaktoren zur Konvertierung von Bildpixeln in metrische Millimeterangaben sind in Anhang D.2.

Für den Vergleich der CAD-Modelle mit der rekonstruierten Geometrie wurden die CAD-Modelle in Stereolithografie (STL)-Dateien konvertiert und in MATLAB importiert. Um die Auswirkungen der Diskretisierung auf die Präzision der Geometrie zu reduzieren, werden die STLs mit der minimal möglichen Schrittweite im Triangulationsnetz von CREO trianguliert. In Abbildung 6.5 ist die Triangulation zwischen dem CAD-Modell und dem STL-Modell dargestellt.

In Blau ist das Triangulationsnetz dargestellt. Die importierten Modelle liegen als Punktwolken der Knotenpunkte der Triangulation vor. Für die realen Referenzobjekte Stifte und Messkugel wurden CAD-Modelle mit den Maßen der gemessenen Geometrien

angefertigt, diese dann als STLs exportiert und in MATLAB als Punktwolken importiert.

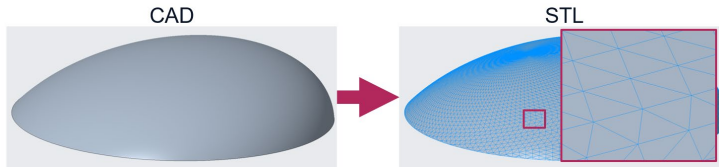


Abbildung 6.5: Diskretisierung eines CAD-Modells in eine STL-Punktwolke. Dargestellt ist die Umwandlung der glatten CAD-Geometrie in ein trianguliertes Netz (blau).

Um die STL-Punktwolke mit der rekonstruierten Punktwolke zu vergleichen, müssen beide zueinander ausgerichtet werden. Zur präzisen Überlagerung der STL-Punktwolke und der rekonstruierten Punktwolke für die Fehleranalyse werden sie mittels des Iterative-Closest-Point (ICP)-Algorithmus [114] registriert. Dieses iterative Verfahren reduziert den Abstand zwischen den Punkten der beiden Wolken und ermöglicht dadurch eine optimale Ausrichtung für den geometrischen Vergleich.

6.1.4 BEWERTUNGSPARAMETER

Zur quantitativen Bewertung der Rekonstruktionsgüte werden Metriken eingeführt, die sowohl die globale Formtreue als auch die Genauigkeit der in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen einzelnen Tropfenparameter bewerten.

Zur Evaluierung der geometrischen Übereinstimmung der 2D-Kurven und der 3D-Modelle wird über die gesamte Kontur oder Geometrie die mittlere quadratische Abweichung (RMSE) zwischen den rekonstruierten Modellen und den Referenzdaten berechnet. Der RMSE ist definiert als:

$$e_{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (G_i - A_i)^2} \quad (6.1)$$

Hierbei ist e_{RMSE} die mittlere quadratische Abweichung, n die Anzahl der Punkte auf dem gemeinsamen Gitter, G die Referenzgeometrie-Daten und A die rekonstruierten Daten.

Um die extrahierten Tropfenparameter (z. B. Kontaktwinkel, Durchmesser) trotz ihrer unterschiedlichen Einheiten und Größenordnungen vergleichen zu können, werden relative Fehler-Metriken verwendet. Der mittlere absolute prozentuale Fehler (MAPE) quantifiziert die prozentuale Abweichung jedes extrahierten Parameters vom jeweiligen Wert der Referenzgeometrie:

$$e_{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{G_i - A_i}{A_i} \right| \cdot 100, \quad (6.2)$$

Dabei steht e_{MAPE} für den mittleren absoluten prozentualen Fehler.

Eine alternative Metrik zum Vergleich der extrahierten Parameter ist der mittlere normalisierte Fehler (MNE). Hierbei wird der absolute Fehler jedes Parameters durch einen vordefinierten, für die jeweilige physikalische Größe repräsentativen Bereich R_{MNE} normalisiert. Für die Kontaktwinkel wird ein Bereich von $R_{MNE} = 180^\circ$ und für

längenbasierte Parameter wie den Durchmesser in den Bereich von $R_{MNE} = 300$ px verwendet. Der MNE berechnet sich als:

$$e_{MNE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{G_i - A_i}{R_{MNE_i}} \right|, \quad (6.3)$$

Mit e_{MNE} als mittlere normalisierte Fehler.

6.1.5 INDIREKTE MESSUNG DES VOLUMENS

Zuletzt wird noch eine Metrik benötigt, die beim realen Tropfen eine Bewertung der Rekonstruktionsgüte zulässt. Zur Bewertung dessen wird die Volumenkonstanz als indirekte Metrik herangezogen. Die grundlegende Annahme ist, dass das Volumen eines inkompressiblen Flüssigkeitstropfens während der Deformation konstant bleibt. Die Differenz zwischen dem rekonstruierten Volumen und dem gravimetrisch ermittelten Volumen des Tropfens dient als Maßstab zur Beurteilung der Rekonstruktionsqualität.

Als Flüssigkeit wurde Ölsäure verwendet, weil sie aufgrund ihrer nicht verdampfenden und nicht hygroskopischen Eigenschaften ein konstantes Volumen während des Versuchs gewährleistet. Das gravimetrische Referenzvolumen wird ermittelt durch das Gewicht der Tropfen, das mit einer Präzisionswaage (GRAM FV-120) gemessen wurde, sowie die Dichte der Ölsäure, die mit einem Dichtemessgerät bestimmt wurde.

Die erweiterte Messunsicherheit dieses indirekt gemessenen Referenzvolumens wurde nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu $0,13 \text{ mm}^3$ (bei 95 % Konfidenzniveau) bestimmt. Die Herleitung der Unsicherheit befindet sich im Anhang D.3.

6.2 CHARAKTERISIERUNG DES MESSVORGANGS

Vorversuche deuteten darauf hin, dass die Bildschärfe einen signifikanten Einfluss auf die Genauigkeit der Konturerkennung und damit auf die Volumenrekonstruktion hat. Um diesen Effekt zu quantifizieren und die Stabilität des Autofokus mittels Tenengrad-Maß zu validieren, wurden zwei Experimente mit der in Abbildung 6.6 dargestellten KMG-Messkugel durchgeführt.

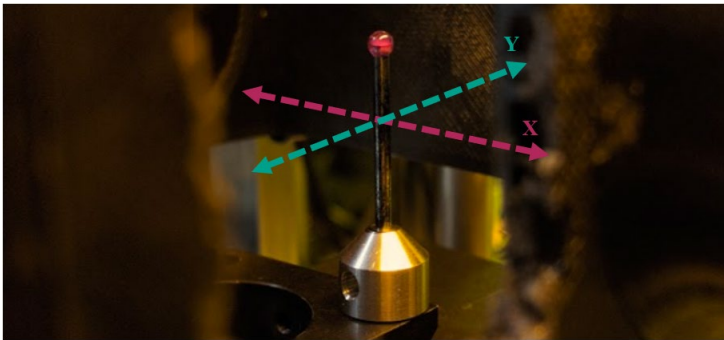


Abbildung 6.6: Bild der KMG-Messkugel mit Koordinatensystem (modifiziert nach [88]).

Im ersten Experiment wurde die Messkugel ohne Nachfokussierung entlang der beiden optischen Achsen bewegt. Die Analyse zeigt eine

starke negative Korrelation zwischen der Bildschärfe, gemessen am Tenengrad-Maß, und dem geometrischen Rekonstruktionsfehler, dargestellt durch den RMSE. Sie haben Korrelationskoeffizienten von -0,63 für die Bewegung entlang der X-Achse und -0,85 für die Bewegung entlang der Y-Achse festgestellt. Dies belegt, dass eine präzise Fokussierung für genaue Messergebnisse essenziell ist, jedoch ist die Bildschärfe entlang der X-Achse weniger Fehleranfällig gegenüber Fokusvariationen. Diese Korrelation ist auch gut in Abbildung 6.7 a) für die X-Achse und b) für die Y-Achse zu sehen. Dort sind zum einen die berechneten Volumina in blau und zum anderen das jeweils berechnete Tenengrad-Maß in Rot dargestellt. Das reale Volumen von $7,07 \text{ mm}^3$ ist mit einer horizontalen Strichpunkt Linie gekennzeichnet

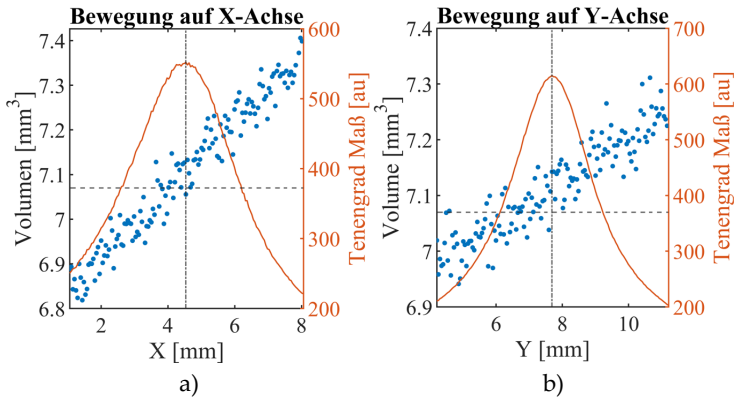


Abbildung 6.7: a) Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der X-Achse. b) Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der Y-Achse. (modifiziert nach [88])

Das maximale Tenengrad-Maß ist jeweils mit einer vertikalen Strichpunkt Linie gekennzeichnet.

Im zweiten Experiment wurde geprüft, ob dieser Fehler durch eine automatische Fokussierung vor jedem Bild minimiert werden kann, indem der Autofokus vor jeder Aufnahme durchgeführt wird. Die Ergebnisse zeigen eine deutliche Reduzierung der Abweichung. Das Volumen der Kugel beträgt $V_{Kugel} = 7,07 \text{ mm}^3$, während das rekonstruierte Volumen im Mittel $\overline{V_{3D}} = 7,05 \pm 0,03 \text{ mm}^3$ (Standardabweichung) beträgt. Der RMSE zwischen Referenzgeometrie und rekonstruierter Geometrie beträgt $2,7 \pm 0,8 \text{ }\mu\text{m}$. Die Korrelationskoeffizienten zwischen Tenengrad-Maß und RMSE sind mit Werten von 0,05 und 0,04 sehr gering. Abbildung 6.8 zeigt diese Verbesserung visuell. Das Volumen befindet sich nah beim Referenzvolumen und auch der Tenengrad schwankt nur geringfügig.

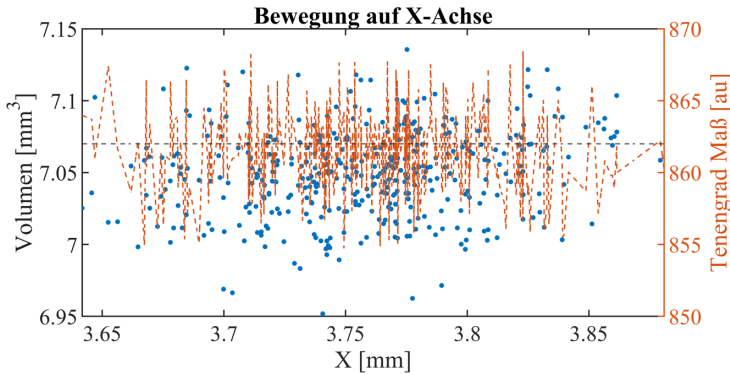


Abbildung 6.8: Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der X-Achse mit ständiger Neufokussierung.

Eine begleitende Analyse der Kamertemperaturen und deren schwache Korrelation zum Tenengrad-Maß, mit Korrelationskoeffizienten von unter 0,2, bestätigt zudem, dass thermische Schwankungen der Kameras einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Bildschärfe haben.

Die Versuche bestätigen, dass der implementierte Autofokus die durch den Fokus bedingte Variabilität der Messergebnisse erfolgreich kompensiert und eine konstant hohe Messgenauigkeit gewährleistet.

6.3 VALIDIERUNG DER KONTURAPPROXIMATION

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit des entwickelten PBCA-Algorithmus systematisch evaluiert. Eine präzise und reproduzierbare Konturbeschreibung ist eine wesentliche Voraussetzung für die spätere physikalische Analyse unter Verwendung der Druck-Krümmungs-Balance. Um die Leistungsfähigkeit des Algorithmus für diese Aufgabe zu validieren, wird die Untersuchung in drei Bereiche gegliedert.

Zunächst wird die Analyse an den künstlich erzeugten Geometrien mit bekannten Referenzen durchgeführt. Dabei wird der reine PBCA-Algorithmus aus Abschnitt 4.2 zusammen mit dem PHDR auf die Bilder angewendet.

Anschließend wird die Anwendung auf reale, messtechnisch erfasste Referenzobjekte untersucht. Die vermessenen Referenzobjekte werden ebenfalls den reinen PBCA-Algorithmus auf die Bilder an, gefolgt von der Anwendung des PHDR.

Abschließend wird die Leistungsfähigkeit an realen, deformierten Tropfen bewertet. Hierfür wird der PBCA-Algorithmus mit der physikalischen Kopplung aus Abschnitt 4.4 verbunden, da dieser auf die Tropfen anwendbar ist.

6.3.1 ANALYSE DER MESSUNSICHERHEIT

Die Genauigkeit der 3D-Rekonstruktion wird von mehreren Faktoren beeinflusst. Insbesondere die manuelle Bestimmung der Kontaktpunkte im Kamerabild sowie der angenommene 90° -Winkel zwischen den Kameras stellen potenzielle Unsicherheitsquellen dar. Um den Einfluss auf das berechnete Volumen zu bewerten, wurde eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Es handelt dabei sich um ein numerisches Verfahren, das auf der wiederholten Ziehung von Zufallsstichproben basiert, um statistisch abzuschätzen, wie Unsicherheiten in den Eingangsparametern das Ergebnis beeinflussen [115].

Als Grundlage für die Simulation dienten die Bilder des Zylinderstifts mit einem Radius von 2,56 mm. In 10.000 Iterationen wurden die Positionen der Kontaktpunkte sowie der Kamerawinkel mit einem normalverteilten Rauschen versehen, um die experimentelle Unsicherheit abzubilden. Für die Abweichung der Kontaktpunkte

wurde eine Standardabweichung von 2 Pixeln und für die des Kamerawinkels eine Standardabweichung von 5° angenommen. Für jede verrauschte Eingangsdatenkombination wurde die 3D-Form neu rekonstruiert, das Volumen berechnet und der RMSE zur Referenzgeometrie ermittelt.

Die Simulation ergab einen Mittelwert für das rekonstruierte Volumen von $\overline{V_{3D}} = 19,23 \text{ mm}^3$ bei einer Standardabweichung von $0,18 \text{ mm}^3$. Mit einem Erweiterungsfaktor von $k = 2$ für ein Konfidenzniveau von 95 % ergibt sich eine erweiterte Messunsicherheit von $U = 0,36 \text{ mm}^3$. Das finale Messergebnis von $V_{3D} = 19,23 \pm 0,36 \text{ mm}^3$ schließt den wahren Wert des Referenzobjekts $V_{Pin} = 19,21 \text{ mm}^3$ gut ein, was die grundsätzliche Validität der Rekonstruktion bestätigt. Die hohe geometrische Güte wird zudem durch den geringen mittleren RMSE von $4,9 \text{ }\mu\text{m}$ und dessen Standardabweichung $0,7 \text{ }\mu\text{m}$ belegt.

Um die Robustheit der Methode auch für den nicht achssymmetrisch deformierten Tropfen zu prüfen, wurde dieselbe Monte-Carlo-Simulation mit 3000 Iterationen auf die Messdaten eines asymmetrisch deformierten Tropfens aus Experiment 1 angewendet. Die Simulation ergab einen Volumen-Mittelwert von $\overline{V_{3D}} = 20,81 \text{ mm}^3$ bei einer Standardabweichung von $0,19 \text{ mm}^3$. Mit einem Erweiterungsfaktor von $k = 2$ für ein Konfidenzniveau von 95 % ergibt sich eine erweiterte Messunsicherheit von $U = 0,38 \text{ mm}^3$. Das finale Messergebnis von $V_{3D} = 20,81 \pm 0,38 \text{ mm}^3$ umschließt den indirekt gemessenen Referenzwert von $V_{Tropfen} = 20,81 \text{ mm}^3$ ebenfalls zuverlässig. Die relative erweiterte Unsicherheit ist für die deformierten Tropfen $1,7 \text{ } \%$.

Eine Korrelationsanalyse der Simulationsdaten zeigte in beiden Fällen, dass die Unsicherheit in der Z-Position der Kontaktpunkte der X-Kamera den dominanten Einflussfaktor darstellt. Dies ist auf die in 4.3.1 beschriebene Normierung der Höhenkoordinaten zurückzuführen (siehe Formel (4.7)).

Die Graphen der verwendeten Konturpunkte und ein Graph der berechneten Volumina sind in Anhang D.4.

6.3.2 SYNTHETISCHE GEOMETRIEN

Zur Bewertung der PBCA- und PHDR-Algorithmen unter idealisierten Bedingungen werden die in 6.1.1 beschriebenen synthetischen Geometrien verwendet.

Diese Validierung an synthetischen Geometrien dient als erster Schritt zur Prüfung der Messkette. Sie bewertet die Genauigkeit der Rekonstruktionsalgorithmen unter idealisierten, fehlerfreien Bedingungen, bevor in den folgenden Abschnitten reale Messdaten analysiert werden.

2D-KONTUREN

Zur quantitativen Bewertung der Approximationsverfahren werden RMSE, MAPE und MNE verwendet. Die Ergebnisse für die

verschiedenen Geometrien und Auswertemethoden sind in Boxplots in Abbildung 6.9 dargestellt.

Die Analyse zeigt, dass die Fourier-Approximation über alle Geometrien hinweg den geringsten Medianfehler aufweist, wie in Abbildung 6.9 a) für den RMSE und in b) und c) für die relativen Metriken MAPE und MNE zu sehen ist. Beim RMSE schneiden alle Verfahren ähnlich ab. Die PBCA-Methode erweist sich jedoch als das insgesamt robusteste Verfahren, was sich in der geringsten Varianz der Ergebnisse widerspiegelt.

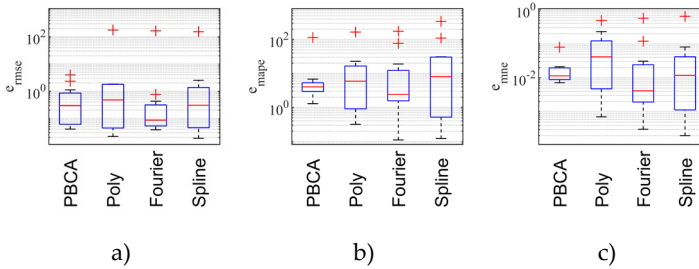


Abbildung 6.9: Vergleich der Approximationsgüte für synthetische 2D-Geometrien. Dargestellt sind die Fehler Metriken für die PBCA-Methode im Vergleich zu Polynom-, Fourier- und Spline-Anpassungen. a) Root Mean Square Error (RMSE). b) Mean Absolute Percentage Error (MAPE). c) Mean Normalized Error (MNE). (modifiziert nach [88])

Da die Metriken MAPE und MNE den Fehler direkt auf tropfenspezifische Parameter normieren, ist eine geringe Streuung und damit höhere Robustheit ein entscheidendes Kriterium. Die geringe Varianz zeigt die besondere Eignung des PBCA-Ansatzes für eine

zuverlässige Approximation, der in dieser Arbeit untersuchten, deformierten Tropfenformen.

3D MODELLE

Um die Genauigkeit des 3D-Rekonstruktionsalgorithmus unter idealisierten Bedingungen zu bewerten, wird dieser auf die synthetisch erzeugten CAD-Daten aus Abschnitt 6.1.1 angewendet. Als primäre Metriken zur Quantifizierung der Rekonstruktionsgüte dienen der RMSE der euklidischen Abstände zwischen den Referenzdaten und den rekonstruierten Punkten sowie das rekonstruierte 3D-Volumen V_{3D} und dessen absolute ΔV_{abs} und relative ΔV_{rel} Abweichung vom Soll-Volumen.

Zuerst werden die drei tropfenähnlichen Geometrien untersucht: eine Halbkugel, ein Modell des achsensymmetrisch deformierten Tropfens und eine nicht achsensymmetrische Deformation. Die analysierte Halbkugel weist die gleichen Dimensionen auf wie die verwendete reale KMG-Messkugel. Die zwei weiteren, den Tropfendeformationen nachempfundenen CAD-Modelle besitzen einen Basisdurchmesser von 9 mm bei der achsensymmetrischen bzw. eine Ausdehnung von 10 mm \times 9 mm bei der nicht achsensymmetrischen.

Die vierte getestete Geometrie, die rechteckig ist, konnte nicht untersucht werden. Der Algorithmus erfordert eine Kontur mit einem eindeutigen globalen Maximum, das in beiden Bildern sichtbar ist. Diese Bedingung wird von der Rechteckgeometrie nicht erfüllt, was eine

Einschränkung des Verfahrens darstellt. Die zusammengefassten Ergebnisse für die erfolgreich rekonstruierten Geometrien sind in Tabelle 6.1 dargestellt.

Tabelle 6.1: Metriken zum Vergleich der rekonstruierten CAD-Modelle (Halbkugel, achsensymmetrische und nicht achsensymmetrische Deformation) mit der Referenzgeometrie.

	Halbkugel	Achssymmetrisch	Nicht Achssymmetrisch
V_{Creo} [mm ³]	7,07	61,5	99,89
V_{3D} [mm ³]	7,08	61,46	96,58
ΔV_{abs} [mm ³]	0,01	0,04	3,31
ΔV_{rel} [%]	0,14	0,07	3,31
e_{RMSE} [μm]	1,05	3,19	21,16
Max. Abstand [μm]	3,72	8,7	53,7

Die Rekonstruktion der Halbkugel liefert das beste Ergebnis, mit einer maximalen lokalen Abweichung von 3,72 μm, einem e_{RMSE} von 1,05 μm und einer Volumenabweichung von 0,14 %.

In Abbildung 6.10 sind die lokalen euklidischen Abstände zwischen der Referenz und der Rekonstruktion als farbkodierte Darstellung in der Draufsicht dargestellt.

Die größte Abweichung tritt bei der nicht achssymmetrischen Geometrie auf, insbesondere in zwei gespiegelten Bereichen in Abbildung 6.10 c), wo die Abweichung bis zu 54 μm beträgt. Dies

entspricht weniger als 0,6 % des Durchmessers. Dies ist vermutlich eine Folge der Fusion der beiden 2D-Konturen im Rekonstruktionsalgorithmus und der Fakt, dass der Basisdurchmesser unterschiedlich ist. Deshalb ist der Volumenfehler mit 3,31 % im Vergleich zu den anderen beiden hoch.

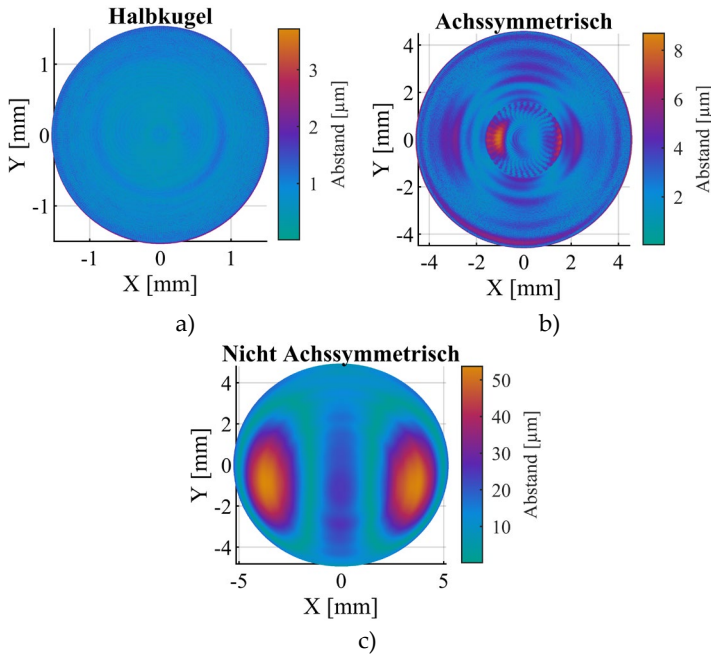


Abbildung 6.10: Abstände der rekonstruierten Modelle von den Referenzmodellen. a) Halbkugel. b) Achssymmetrisch. c) Nicht Achssymmetrisch (modifiziert nach [88])

Bei der Analyse der Abweichungsplots (Abbildung 6.10 a) bis c)) fällt eine durchgehend wellenartige Verteilung der Abweichung auf. Diese ist auf die Spline-Interpolation im Polarkoordinatensystem

zurückzuführen, da Splines zwischen den Stützpunkten zu Oszillationen neigen. In Abbildung 6.10 a) ist der Abstandsplot dargestellt, bei dem die höchsten Abweichungen am Randbereich zu sehen sind. Der Abstandsplot in Abbildung 6.10 b) zeigt eine ungleichmäßige Verteilung der Abweichungen, wobei die größten Fehler im Scheitelpunkt auftreten. Die maximale Abweichung ist mit $8,7\text{ }\mu\text{m}$ im Verhältnis zum Objektdurchmesser von 9 mm mit ca. $0,1\text{ }\%$ vernachlässigbar klein.

Das sichtbare, scharf abgegrenzte Muster ist ein Artefakt, das aus dem Zusammenspiel der diskreten Triangulierung der STL-Referenzgeometrie und des Samplings der PHDR-Methode resultiert. Da die Rekonstruktion eine hohe Genauigkeit erreicht, werden die minimalen Stufenhöhen des STL-Netzes im Abstandsplot sichtbar. Aufgrund der geringen absoluten Abweichungen kann dieser Effekt jedoch vernachlässigt werden. Die hohe Güte der Rekonstruktion wird zudem durch den geringen RMSE von $3,19\text{ }\mu\text{m}$ und eine relative Volumenabweichung von unter $0,1\text{ }\%$ bestätigt.

Um die Grenzen des Algorithmus weiter auszuloten, wird er auf zwei extreme Geometrien angewendet, die sich durch stückweise Linien anstatt durch stetige Konturen auszeichnen. Es handelt sich um einen geraden sowie um einen schiefen Kreiskegel. Die Methodik entspricht derjenigen der vorherigen Modelle. Die Ergebnisse in Abbildung 6.11 zeigen, dass die globalen Formen gut wiedergegeben werden. Wie bereits in den vorherigen Rekonstruktionen sichtbar ist, zeigt sich die wellige Natur der Spline-Interpolation in den Abständen.

Eine systembedingte Limitation wird jedoch an den Kreiskegelspitzen deutlich. Die Stetigkeitsbedingungen der Spline-basierten Anpassung führen zwangsläufig zu einer Abrundung anstelle einer scharfen Spitze, wie es im Modell ist. Die lokale Abweichung liegt im Bereich von ca. 20 μm , was angesichts der Gesamtgröße der Modelle von 3 mm mit unter 1 % ein kleiner Wert ist.

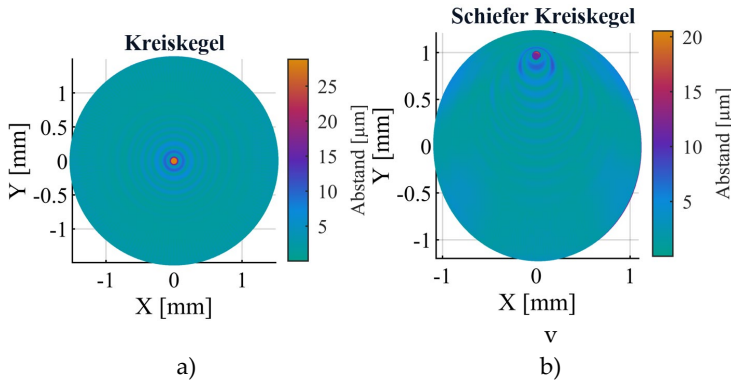


Abbildung 6.11: Abstände der rekonstruierten Modelle von den Referenzmodellen. a) Kreiskegel. b) Schiefer Kreiskegel. (modifiziert nach [88])

Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass der Algorithmus auch über die Tropfenanalyse hinaus für andere Anwendungen geeignet sein könnte. Beispielsweise könnte er für die Vermessung von Spitzen oder Kanten eingesetzt werden, sofern die Abrundung scharfer Ecken tolerierbar ist oder die Interpolation, durch z. B. stückweise Definition, erweitert wird.

6.3.3 REALE GEOMETRIEN

Nach der Validierung des Algorithmus anhand synthetischer Daten erfolgt im nächsten Schritt die Evaluierung unter realen Messbedingungen. Zuerst mit den in Kapitel 6.1.2 vorgestellten Referenzobjekten und dann mit Experimenten mit Ölsäure im Versuchsaufbau.

PINS UND MESSKUGEL

Zur Validierung des Rekonstruktionsalgorithmus unter realen Messbedingungen werden die in Kapitel 6.1.2 vorgestellten und mittels KMG vermessenen Referenzobjekte herangezogen. Die aus den Schattenprojektion-Aufnahmen rekonstruierten 3D-Geometrien werden direkt mit den aus den KMG-Daten erzeugten Modellen verglichen, um die Genauigkeit und die praktischen Limitationen des Verfahrens zu bewerten.

Die quantitativen Ergebnisse des Vergleichs sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Abbildung 6.12 visualisiert die lokalen euklidischen Abstände zwischen den Referenzmodellen und der Rekonstruktion für jedes der vier Objekte.

Tabelle 6.2: Vergleich der Metriken der rekonstruierten Geometrien mit der Referenz.

	Pin 1	Pin 2	Pin 3	KMG
$V_{\text{Creo}} [\text{mm}^3]$	19,21	9,21	4,59	7,07
$V_{3\text{D}} [\text{mm}^3]$	19,19	9,21	4,60	7,02
$\Delta V_{\text{abs}} [\text{mm}^3]$	0,02	0	0,01	0,05
$\Delta V_{\text{rel}} [\%]$	0,1	0	0,22	0,7
$e_{\text{RMSE}} [\mu\text{m}]$	4,28	4,17	11,15	2,48
Max. Abstand [μm]	14,36	14,47	292,05	9,76

Die Auswertung zeigt für die KMG-Kugel sowie für die beiden Zylinderstifte mit den Radien 3,63 mm und 6,5 mm eine hohe Rekonstruktionsgenauigkeit. Die Volumenabweichungen liegen bei unter 0,7 %, und die RMSE-Werte zwischen 2,5 μm und 4,3 μm belegen die hohe Übereinstimmung der Geometrien. Die maximale lokale Abweichung bleibt für diese drei Objekte unter 15 μm .

Die höhere Abweichung bei der Rekonstruktion der realen KMG-Messkugeln im Vergleich zu den idealisierten CAD-Modellbildern belegt den negativen Einfluss der realen Messbedingungen auf die Gesamtgenauigkeit.

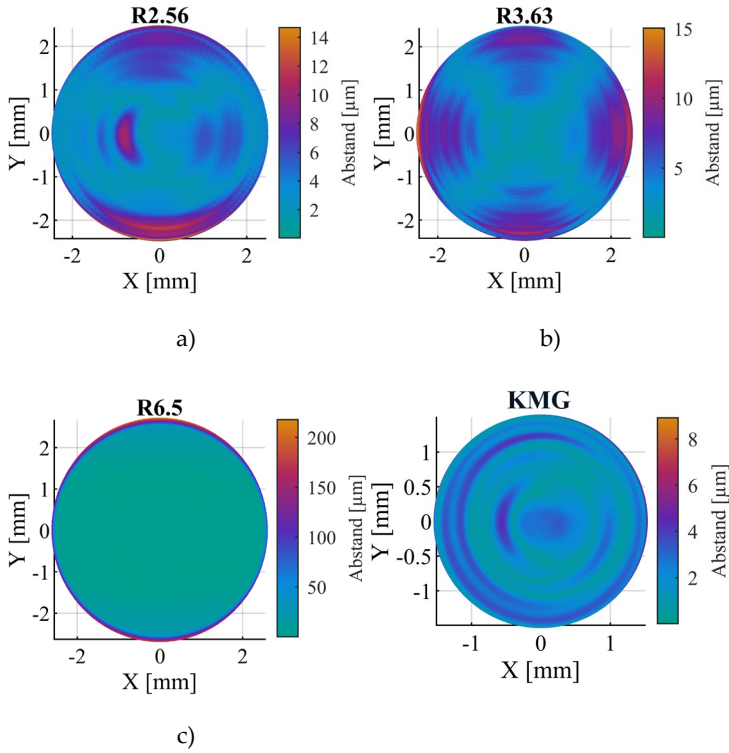


Abbildung 6.12: Lokale euklidische Abweichung zwischen KMG-Referenz und Rekonstruktion. a) Zylinderstift mit 2,56 mm, b) Zylinderstift mit 3,63 mm, c) Zylinderstift mit 6,5 mm, d) KMG Messkugel. (modifiziert nach [88])

Eine signifikante Ausnahme bildet der Zylinderstift mit dem kleinsten Radius von 2,56 mm. Wie aus Tabelle 6.2 ersichtlich ist, weist dieser mit 292,05 μm eine um mehr als den Faktor 20 höhere maximale Abweichung auf als die anderen Rekonstruktionen. Der Plot der

Abstände in Abbildung 6.12 a) lokalisiert diesen Fehler eindeutig am Übergangsbereich zwischen dem zylindrischen Stiftschaft und dem Kugelsegment.

Dieses Ergebnis deutet auf eine Limitation des Verfahrens bei Geometrien mit kleinen Kontaktwinkeln hin, bei denen die präzise Bestimmung des Übergangspunktes zur dominanten Fehlerquelle wird.

DEFORMIERTE TROPFEN

Zur Überprüfung des 3D-Rekonstruktionsalgorithmus an realen, deformierten Tropfen wird die Volumenkonstanz als indirekte Metrik zur Bewertung der Rekonstruktionsgüte herangezogen. Die zentrale Idee dieses Experiments besteht darin, die Veränderung des rekonstruierten Volumens während der Deformation zu quantifizieren. Eine Abweichung vom ursprünglichen Volumen dient als Indikator für die Qualität der Formrekonstruktion. Da die anfängliche, undeformierte Tropfenform einer Kugelkappe entspricht und die Rekonstruktion für solche achsensymmetrischen Geometrien bereits als genau validiert wurde, kann für den Ausgangszustand eine präzise Volumenbestimmung als Referenz angenommen werden.

Für die Versuchsreihe wird ein Ölsäure-Tropfen mit bekanntem gravimetrischen Referenzvolumen in den Versuchsaufbau platziert und während der Deformation beobachtet und aufgezeichnet. Die Anode, die für dieses Experiment verwendet wurde, besteht aus einer Kupferfolie, ist länglich und in Abbildung 6.13 a) dargestellt. Sie wird

verwendet, um eine Verformung hervorzurufen, die nicht achsensymmetrisch ist. Als Kathode dient der Zylinderstift, auf dem der Tropfen platziert ist.

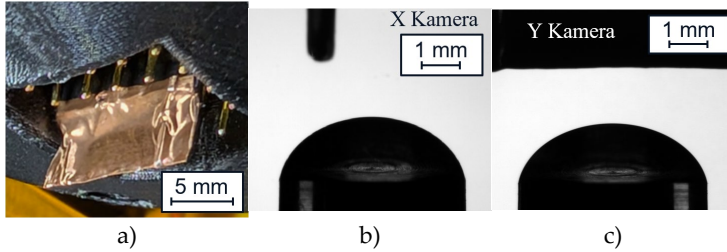


Abbildung 6.13: a) Die im Experiment verwendete längliche Anode. b) Bild der X-Kamera des undeformierten Tropfens im Versuchsaufbau. c) Bild der Y-Kamera des undeformierten Tropfens. (modifiziert nach [88])

Es wurden insgesamt neun Experimente an drei verschiedenen Ölsäure Tropfen durchgeführt, um die Rekonstruktion bei unterschiedlichen Deformationen zu bewerten. Die Tropfen hatten dabei verschiedene Volumina.

Für jeden der drei Tropfen wurden drei verschiedene, angefahrne Anodenpositionen $P_{Anode} = (y_{Anode}, z_{Anode})$ gewählt, um eine Bandbreite an Deformationen zu erzeugen. Es wurde die Anode entlang der Y-Achse bewegt, während sie auf der X-Achse fixiert blieb. In allen Experimenten zeigt die X-Ansicht die schmale und die Y-Ansicht die breite Seite der Anode, wie in Abbildung 6.13 b) und c) zu sehen ist. Die Auswahl der Anodenkoordinaten erfolgte zufällig. Die Zuordnung der Versuchsnummern zu Tropfengröße, dem gemessenen

Volumen und den jeweiligen Anodenkoordinaten ist in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

Tabelle 6.3: Versuchsplan zur Analyse der Rekonstruktion mit den jeweiligen Anodenpositionen (y_{Anode}, z_{Anode}) relativ zum Nullpunkt der Linearachsen.

Experiment	Tropfen-Nr.	V [mm ³]	Anodenposition (y, z) [mm]
1	1	20,81	(12,33; 4,44)
2	1	20,81	(13,53; 4,65)
3	1	20,81	(9,33; 1,45)
4	2	11,75	(12,33; 4,17)
5	2	11,75	(14,33; 4,17)
6	2	11,75	(14,33; 3,97)
7	3	13,99	(11,81; 4,41)
8	3	13,99	(12,84; 4,41)
9	3	13,99	(14,84; 4,21)

Alle Versuche wurden bei einer Spannung von 3000 V durchgeführt. Diese Spannung wurde gewählt, um eine maximale Deformation hervorzurufen. Die Graphen aller Versuche sowie ergänzende Bilder der Versuche sind in Anhang D.5.

Für das dritte Experiment konnte kein Volumen bestimmt werden, da der Tropfen während des Versuchs von der Anode verdeckt wurde, was eine Anwendung des Rekonstruktionsalgorithmus verhinderte.

Bei einer idealen Rekonstruktion müsste das berechnete Volumen des Ölsäuretropfens über den ganzen Versuch konstant bleiben. Die Analyse der synthetischen CAD-Modelle deutet bereits darauf hin, dass bei nicht achsensymmetrischen Deformationen ein leicht verringertes rekonstruiertes Volumen im unteren Prozentbereich zu erwarten ist.

Die Betrachtung des Volumenverlaufs während der realen Experimente bestätigt dies, zeigt aber auch einen interessanten Unterschied zwischen den einzelnen Versuchen. Abbildung 6.14 a) und b) zeigt beispielhaft die Verläufe für Experiment 7 und 8. Die rekonstruierten Volumina sind mit blauen Punkten dargestellt und das gravimetrisch gemessene Volumen in Rot gestrichelt. Die aus der Monte-Carlo-Simulation abgeleitete Unsicherheit von 1,3 % ist in blau gestrichelt dargestellt.

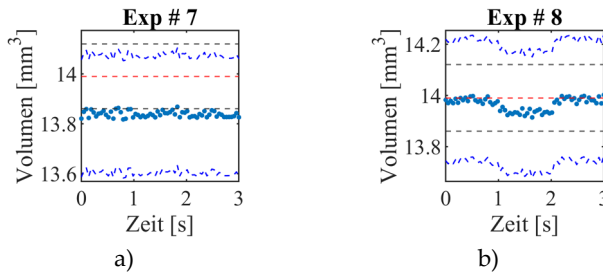


Abbildung 6.14: Analyse des Rekonstruktionsartefakts bei der Volumenberechnung. a) & b) Zeitlicher Verlauf des rekonstruierten Volumens für die Experimente 7 und 8. (modifiziert nach [88])

Versuch 8 in Abbildung 6.14 b) zeigt das aus den CAD-Modellen erwartete Verhalten mit einer sichtbaren, temporären Volumenreduktion während der Deformation. Im Gegensatz dazu weist Versuch 7

in Abbildung 6.14 a) trotz asymmetrischer Deformation keine signifikante Volumenänderung auf. Die Versuche 1 und 4 zeigen einen ähnlichen Volumenverlauf wie Versuch 7. Die anderen Versuche weisen einen Verlauf ähnlich dem von Versuch 8 auf.

Der Vergleich mit den Bildern der Deformation zeigt, dass die Genauigkeit der Volumenrekonstruktion invers vom Grad der Tropfen deformation abhängt. Stärkere Deformationen, die bei geringerem Abstand zwischen Anode und Tropfenoberfläche auftreten, führen zu einer signifikant höheren Abweichung des rekonstruierten Volumens vom Referenzwert. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 6.15 quantitativ dargestellt.

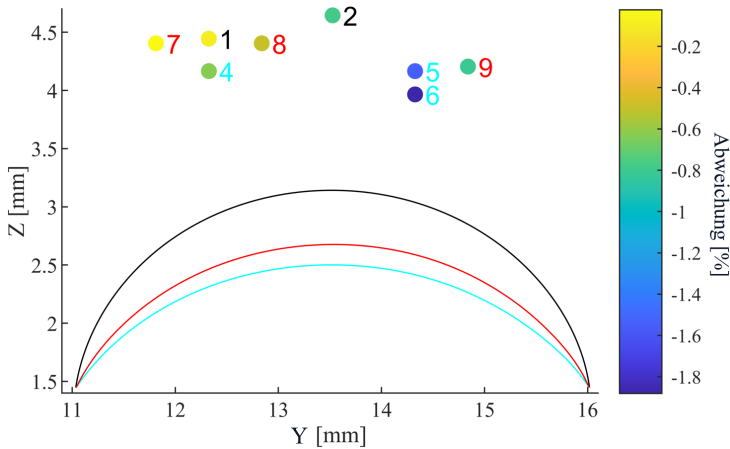


Abbildung 6.15: Darstellung der Anodenpositionen relativ zum Tropfen aus den durchgeführten Experimenten. Die Farbcodierung indiziert die maximale prozentuale Volumenabweichung bei maximaler Deformation.

Die Position der Anode ist so kodiert, dass sie der maximalen prozentualen Volumenabweichung farblich entspricht. Ebenso sind die Farben der Tropfen und die Zahlen der Experimentnummer aufeinander abgestimmt. Zusammengefasst lässt sich feststellen, dass eine geringere Distanz zwischen Anode und Kathode sowie zwischen Anode und Tropfen zu einer größeren maximalen prozentualen Volumenabweichung führt und so die Rekonstruktionsgüte beeinflusst. Ob die Deformation achssymmetrisch ist oder nicht, scheint keinen großen Einfluss zu haben.

Als primäre Fehlerursache wird die systemische Limitierung des Rekonstruktionsalgorithmus identifiziert. Komplexe, stark ausgeprägte 3D-Verformungen, die von den beiden orthogonalen 2D-Schattenprojektionen nicht vollständig erfasst werden können, führen zu Ungenauigkeiten in der geometrischen Modellierung.

Dass es sich bei der beobachteten Volumenreduktion um ein Rekonstruktionsartefakt und nicht um eine physikalische Volumenänderung handelt, wird durch die Analyse des zeitlichen Verlaufs bestätigt: Nach dem Abschalten der Spannung kehrt das berechnete Volumen präzise auf den Ausgangswert zurück, was mit der Annahme der Inkompressibilität von Flüssigkeiten übereinstimmt. Der maximale Fehler beträgt 3 %.

6.3.4 DISKUSSION

Die in diesem Abschnitt präsentierten, mehrstufigen Analysen belegen die Leistungsfähigkeit der in Kapitel 4 entwickelten Kontur- und Rekonstruktionsmethoden und verifizieren die Zuverlässigkeit der gesamten Mess- und Auswertekette.

Die Validierung an synthetischen Geometrien (6.3.2) bestätigte zunächst die hohe Genauigkeit der Algorithmen unter idealisierten Bedingungen. Hier zeigte der reine PBCA-Algorithmus die höchste Robustheit für die 2D-Approximation gegenüber generischen Approximationsverfahren, während die 3D-Rekonstruktion Formabweichungen von unter $5\text{ }\mu\text{m}$ ($< 1\%$ Volumenabweichung) bei achssymmetrischen Geometrien und unter $22\text{ }\mu\text{m}$ ($< 3\%$ Volumenabweichung) für die nicht achssymmetrische Geometrie erreichen.

Bei der Untersuchung an realen Referenzobjekten in Abschnitt 6.3.3 wurde die Unsicherheit der gesamten Messkette bestimmt. Die erweiterte Unsicherheit für die Volumenbestimmung beträgt $U = 0,36\text{ mm}^3$ ($k = 2$), was einer relativen Unsicherheit von $U_{rel} = 1,7 - 1,9\%$ entspricht. Die Korrelationsanalyse der Messunsicherheit identifizierte dabei die Z-Position der Kontaktpunkte der X-Kamera als dominanten Einflussfaktor. Die Rekonstruktionen der Referenzobjekte liegen innerhalb dieses 95 %-Konfidenzintervalls, mit einer Abweichung zum Referenzwert von unter 1 %.

Die Analyse an realen, deformierten Tropfen zeigte, dass die 2D-Konturbeschreibung auch bei asymmetrischen Formen stabil bleibt. Die 3D-Rekonstruktion stößt hier jedoch an prinzipbedingte Grenzen

durch die Verwendung von nur zwei Tropfenansichten. Dies drückt sich in einer maximalen Volumenabweichung von 3 % aus. Dieser Wert ist außerhalb der Messunsicherheit der Messkette.

Die Untersuchungen offenbaren jedoch auch praktische und inhärente Limitationen, die sich in drei Bereiche gliedern lassen.

Erstens existieren aufbaubedingte Limitationen, wie das Fehlschlagen der Rekonstruktion des dritten Versuchs belegt. Dort wurde der Tropfen durch die Anode verdeckt, was die Gestaltungsfreiheit der Elektrodenkonfiguration einschränkt. Sobald eine Kontur nicht vollständig erfasst wird, ist die Rekonstruktion unmöglich. Die untersuchte Robustheit des Verfahrens gegenüber Rauschen im Kamerawinkel und den Kontaktpunkten zeigte nur geringe Abweichungen von unter 2 %, wobei die Z-Koordinate des Kontaktpunktes den bedeutendsten Einflussfaktor darstellt.

Zweitens sind algorithmische Limitationen zu nennen. Der PBCA-Algorithmus kann spitze Geometrien nicht auflösen. Die 3D-Rekonstruktion in Kombination mit dem PHDR-Algorithmus funktioniert nur dann, wenn das zu rekonstruierende Objekt ein eindeutiges Maximum aufweist. Die signifikant größeren maximalen Abweichungen bei Pin 3 im Vergleich zu den anderen Pins, die bis zu 20-mal höher sind, weisen auf eine verminderte Genauigkeit bei Tropfen mit kleinen Kontaktwinkeln hin.

Eine letzte Einschränkung besteht darin, dass die Übertragbarkeit der Methodenparameter bei einer Änderung des Aufbaus nicht sichergestellt sind. Parameter wie die Anzahl der Superpixel oder der Spline-

Knoten sind spezifisch auf den in dieser Arbeit verwendeten Aufbau optimiert.

Methodisch bestätigen die Ergebnisse die Entscheidung für das Vorhersagemodell aus Kapitel 5 auf die Analyse der 2D-Krümmung zu setzen, statt eine aus zwei Ansichten unterbestimmte 3D-Rekonstruktion zu erzwingen. Die aus dem Aufbau gewonnenen Konturdaten sind damit als Datengrundlage für die in Abschnitt 6.4 folgende Validierung des physikalischen Modells verwendbar.

6.4 VALIDIERUNG DES PHYSIKALISCHEN VORHERSAGEMODELLS

Dieser Abschnitt untersucht das in Kapitel 5 hergeleitete, physikalische Vorhersagemodell. Der Fokus liegt auf der quantitativen Vorhersage der deformierten 2D-Kontur (x_{sim}, z_{sim}) und der Bestimmung der effektiven Oberflächenladung σ_s .

Die Untersuchung ist in mehrere Teile gegliedert. Zunächst wird die Güte der physikalisch informierten Rekonstruktion selbst bewertet, indem die Oberflächenspannung indirekt gemessen und mit Referenzwerten verglichen wird. Anschließend wird das vollständige, iterative Vorhersagemodell anhand der Deformations-Experimente untersucht. Es wird die Hypothese überprüft, dass die Berücksichtigung der effektiven Oberflächenladung σ_s für eine präzise Formvorhersage wichtig ist. Abschließend werden die Ergebnisse in die Optik übertragen. Die vorhergesagten Konturen werden mittels Raytracing

bewertet, um die funktionale Relevanz der geometrischen Abweichungen für die Abbildungsqualität zu beurteilen.

Da das Vorhersagemodell auf einer 2D-Analyse basiert, wird für die folgenden Auswertungen ausschließlich das Bild der X-Kamera verwendet, da das Modell 2D Konturbasiert ist.

6.4.1 OBERFLÄCHENSPANNUNGSBERECHNUNG UND BEWERTUNG DER REKONSTRUKTIONSQUALITÄT

Zur qualitativen Validierung des in Abschnitt 4.4.3 beschriebenen physikbasierten Rekonstruktionsansatzes wurden Messreihen mit undeformierten Tropfen aus PR48, Wasser, Glycerin und Ölsäure durchgeführt. Es wurden 96 Messungen mit PR48, 100 mit Wasser, 100 mit Glycerin und 100 mit Ölsäure durchgeführt. Die Datensätze für PR48 und die anderen drei Flüssigkeiten stammen aus unterschiedlichen und unzusammenhängenden Experimenten, was zu variierenden Aufnahmemethoden und einer unterschiedlichen Anzahl an Messungen führte. Konkret wurden die Bilder für PR48 in einem kurzen Zeitraum von wenigen Sekunden aufgenommen, während die Daten für Wasser, Glycerin und Ölsäure über einen längeren Zeitraum von mehreren Minuten erfasst wurden, was die Vergleichbarkeit der Absoluten Oberflächenspannungswerte beeinflussen könnte. Die Versuchstemperatur wurde stabil bei 17°C gehalten.

Die Oberflächenspannung γ wurde basierend auf diesen Bildern mit der beschriebenen Methodik iterativ abgeschätzt. Zur Beurteilung

der Rekonstruktionsqualität werden die aus der Basiskrümmung κ_{base} rekonstruierte Kontur (y_{rek}, z_{rek}) und die gemessene Kontur (y_{mess}, z_{mess}) mithilfe des RMSE verglichen.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.4 dargestellt. Zusätzlich zu den gemessenen Werten in der Tabelle sind die Literaturwerte der Oberflächenspannung für die Materialien notiert [6], [116], [117]. Für PR48 wird wie in Abschnitt 2.1.1 der bekannte Wert der Oberflächenspannung der Hauptkomponente Sartomer herangezogen [5].

Tabelle 6.4: Literaturwerte sowie Mittelwert und Standardabweichung der gemessenen Oberflächenspannungswerte.

	PR48	Wasser	Glycerin	Ölsäure
$\gamma_{ref} \left[\frac{\text{mN}}{\text{m}} \right]$	≈ 33	72	63,4	33
$\overline{\gamma_{mess}} \left[\frac{\text{mN}}{\text{m}} \right]$	37,82	63,15	81,46	39,4
$\sigma_{\gamma} \left[\frac{\text{mN}}{\text{m}} \right]$	0,29	4,72	1,11	0,44
Rel. Fehler $\bar{\gamma}$ [%]	14,59	– 12,29	28,49	20,12
Rel. Fehler σ_{γ} [%]	0,76	7,47	1,36	1,11
$\overline{e_{RMSE}} [\mu\text{m}]$	3,72	5,23	4,58	4,66
$\sigma_{RMSE} [\mu\text{m}]$	0,75	1,6	0,67	0,88

Die Daten zeigen, dass die Werte erhebliche Standardabweichungen von bis zu 4,72 mN/m aufweisen. Im Mittel stimmen sie qualitativ mit

der erwarteten Größenordnung der Literaturwerte überein, wenn auch mit erheblichen Abweichungen.

Abbildung 6.16 a) vergleicht die berechneten Oberflächenspannungen mit den Literaturwerten.

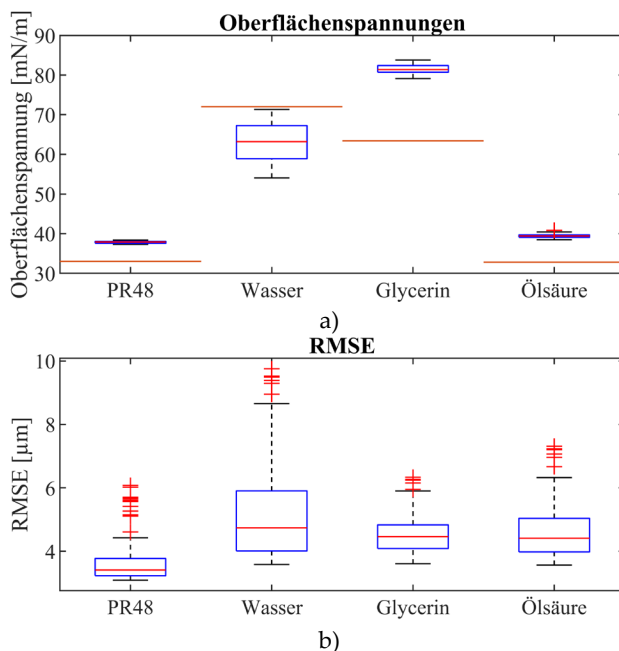


Abbildung 6.16: Ergebnisse der indirekten Oberflächenspannungsmessung. a) Boxplot der Oberflächenspannungen für jedes Material und der Literaturwert mit einer orangefarbenen Linie. b) RMSE zwischen der gemessenen Kontur und der durch das Optimierungsverfahren rekonstruierten Kontur.

Die Methode zeigt eine gute Reproduzierbarkeit, was sich in der geringen Standardabweichung von unter 1,5 % für PR48, Glycerin und

Ölsäure widerspiegelt. Die signifikant größere Streuung bei Wasser ist eine Folge der Verdunstung während des längeren Messzeitraums, die zu inkonsistenten Ausgangsgeometrien für die Berechnung geführt hat.

Die allgemeinen systematischen Abweichungen der berechneten Mittelwerte von den Literaturwerten sind methodisch bedingt. Der Algorithmus optimiert die Oberflächenspannung γ so, dass die Abweichung, zwischen der physikalisch modellierten und der gemessenen Kontur minimal wird. Dabei kompensiert der Wert von γ auch geringfügige, systematische Modell- und Messungenauigkeiten, wie z.B. Artefakte der Krümmungsglättung. Dies erklärt die konsistenten, aber leicht verschobenen Ergebnisse. Im Allgemeinen deuten die Daten darauf hin, dass das Verfahren zur Plausibilisierung geeignet ist, jedoch nicht zur quantitativen Bestimmung von Oberflächenspannungen verwendet werden kann.

Entscheidend ist jedoch nicht der Oberflächenspannungswert, sondern die Güte der resultierten Konturrekonstruktion. Dazu wurde der RMSE zwischen der gemessenen Kontur (y_{mess}, z_{mess}) und der rekonstruierten Kontur (y_{rek}, z_{rek}) ermittelt. Die Werte sind ebenfalls in Tabelle 6.4 gezeigt. Zusätzlich sind die Werte in Abbildung 6.16 b) in einem Boxplot geplottet.

Für alle untersuchten Materialien ergibt sich ein mittlerer RMSE von unter $5,5 \mu\text{m}$, was kleiner ist als die effektive Pixelgröße von $8,4 \mu\text{m}$ der X-Kamera des Messsystems.

Dies zeigt, dass der in Abschnitt 4.4.3 beschriebene physikalische Kopplungsprozess, gefolgt von einer Spline-Korrektur, die experimentellen Daten mathematisch ausreichend genau darstellt. Die erhaltene Basiskrümmung κ_{base} stellt daher eine valide Grundlage für Vorhersagen der Deformation dar. Potenzielle Fehler bei der absoluten Bestimmung von γ werden durch die Korrektur reduziert und die Konturgenauigkeit wird dadurch nicht beeinträchtigt.

6.4.2 VERSUCHSPLAN UND DURCHFÜHRUNG

Die Versuche zur Untersuchung des in Kapitel 5 entwickelten physikalischen Modells wurden mit zwei unterschiedlichen Elektrodenkonfigurationen und Materialien durchgeführt. Primäre Ziele sind zum einen die Verifizierung der inneren Schleife der iterativen Formfindung sowie die quantitative Bewertung der Verbesserung, die durch die Einbeziehung der effektiven Oberflächenladung σ_s in der äußeren Schleife erzielt wird.

Hierfür wurde eine Serie von 118 Experimenten mit den Materialien PR48 und Ölsäure durchgeführt. Die Auswahl dieser Materialien erfolgte, um gezielt die in 2.1 genannten verschiedenen Polarisierungseigenschaften der Materialien zu untersuchen. Das Polymer PR48 ist ein verlustbehaftetes Dielektrikum, bei dem eine signifikante Maxwell-Wagner-Polarisation zu erwarten ist. Im Gegensatz dazu ist Ölsäure ein guter Isolator mit geringer Leitfähigkeit, bei dem dieser Effekt minimal sein sollte. Die signifikant unterschiedlichen

Permittivitäten beider Materialien ermöglichen es, zu überprüfen, ob die Oberflächenladung ein kritischer Faktor für die Formvorhersage bei verlustbehafteten Dielektrika ist.

Für jeden der 118 Versuche dient die finale, experimentell gemessene Kontur $(y_{mess}, z_{mess})_{final}$ als Referenz. Mit dieser werden die beiden Vorhersagen mit und ohne Oberflächenladung des in Abschnitt 5.2 beschriebenen Modells verglichen. Die Kontur, die ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung berechnet wurde, wird als $(y_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s=0}$ bezeichnet, und die Kontur, bei der die effektive Oberflächenladung optimiert wurde, wird als $(y_{sim}, z_{sim})_{\sigma_s \neq 0}$ bezeichnet. Die Parameter des Versuchsplans sind in Tabelle 6.5 dargelegt. Es gibt zwei Anoden Formen, eine Einzelanode (EA) und eine Doppelanode (DA), die jeweils 5 Positionen anfahren.

Tabelle 6.5: Versuchsplan zur Modellvalidierung

Material	Form / Positio- nen	U_{max} [V]	t_{Ramp} [s]	# Exp.
PR48	EA / 5	1000, 2000, 3000	0,1; 0,002	29
Ölsäure	EA / 5	1000, 2000, 3000	0,1; 0,002	29
PR48	DA / 5	$\pm 1000, \pm 2000, \pm 3000$	0,1; 0,002	60

Die Anoden und ihre fünf Positionen sind in Abbildung 6.17 dargestellt. In Abbildung 6.17 a) und b) sind die Anoden außerhalb des Aufbaus zu sehen. Die Schattenwurfbilder von zwei Versuchen sind in Abbildung 6.17 c) für die Einzelanode und in Abbildung 6.17 d)

der Doppelanode zu sehen. Zusätzlich sind die fünf Anoden Positionen farblich kodiert in Abbildung 6.17 e) und f) abgebildet. Der Abstand zwischen zwei Positionen beträgt dabei $d_a = 1,5$ mm. Rot ist dabei Position 1, Blau Position 2, Grün Position 3, Orange Position 4 und Violett Position 5.

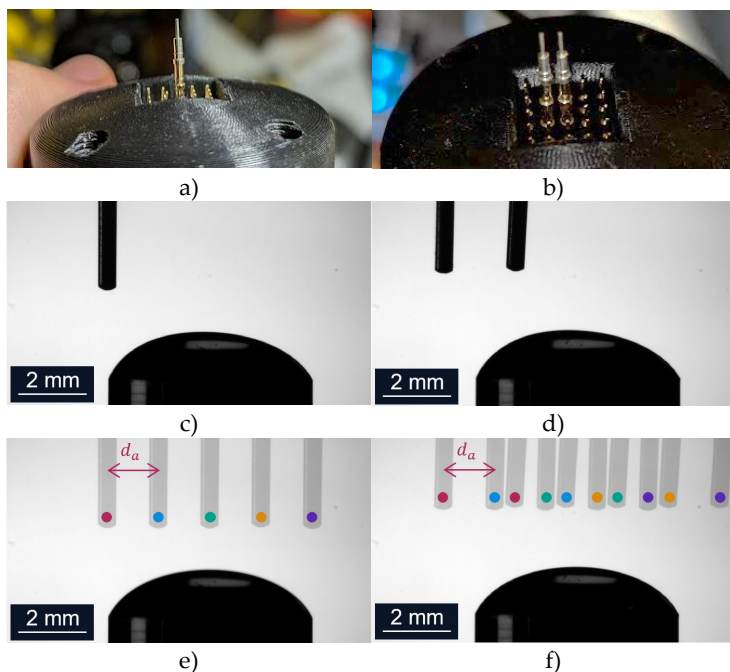


Abbildung 6.17: Experimentelle Konfigurationen. a), c) zeigen die EA und das zugehörige Schattenbild. b), d) zeigen die DA und das zugehörige Schattenbild. e), f) Schematische Darstellung der fünf Anodenpositionen für die Versuchsreihen mit EA und DA.

Die DA-Konfiguration wird verwendet, um das Modell in einem komplexeren elektrischen Feld im Vergleich zur EA-Konfiguration

zu validieren. Zudem wird überprüft, ob die effektive Oberflächenladung ihr Vorzeichen bei negativer Spannung wie vom Modell vorhergesagt umkehrt.

In jedem der Experimente wurde eine identische Gesamtdauer von drei Sekunden verwendet. Zum klareren Verständnis wird hier nochmal genauer erklärt, welche Daten für das Vorhersagemodell verwendet werden. In Abbildung 6.18 ist der Spannungsverlauf eines Experiments über die Zeit dargestellt.

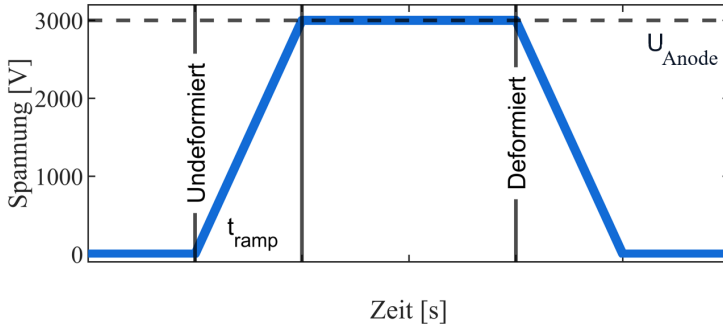


Abbildung 6.18: Beispielhafter zeitlicher Ablauf eines Deformations-experiments. Dargestellt ist das angelegte Spannungsprofil mit den Zeitpunkten zur Extraktion der initialen Kontur nach der Rampe und der abschließenden, deformierten Kontur am Ende der Haltephase.

Die initiale Kontur $(y_{mess}, z_{mess})_{initial}$ des Tropfens wird vor dem Anlegen der Spannung extrahiert. Anschließend wird die Spannung über eine definierte Anstiegszeit t_{ramp} auf den Maximalwert U_{Anode} erhöht und für eine Sekunde konstant gehalten, um sicherzustellen, dass der Tropfen ein stabiles Gleichgewicht erreicht. Die finale deformierte Kontur $(y_{mess}, z_{mess})_{final}$ wird am Ende dieser Haltephase

erfasst. Bei den Versuchen wurde die Anstiegszeit variiert. Dadurch kann ausgeschlossen werden, dass die eigentlich zu kurze Anstiegszeit t_{ramp} aus Kapitel 3 keinen Einfluss auf die Berechnung der effektiven Oberflächenladung und die Vorhersage der Tropfenkontur hat.

Die Experimente mit verschiedenen Anstiegszeiten zeigten keinen signifikanten Einfluss auf die endgültige Verformung oder die Berechnung der Oberflächenladung σ_s , wodurch der Einfluss dieses Parameters irrelevant wird. Die Boxplots dazu sind in Anhang D.6 dargestellt.

6.4.3 ERGEBNISSE DER REKONSTRUKTIONEN

Die Auswertung der experimentellen Daten erfolgt durch einen zweistufigen Vergleich. Zunächst wird die deformierte Kontur ohne Berücksichtigung einer effektiven Oberflächenladung mit nur der inneren Schleife vorhergesagt. Anschließend wird dasselbe mit der äußeren Schleife nochmals durchgeführt. Dabei wird die effektive Oberflächenladung σ_s als freier Parameter so optimiert, dass der RMSE zwischen der vorhergesagten und der gemessenen Kontur minimiert wird.

Abbildung 6.19 zeigt einen repräsentativen Vergleich für einen PR48-Tropfen mit einer Einzelanode, 3000 V und Position 2. Die Vorhersage ohne Oberflächenladung in Gelb nähert die finale Kontur in Rot nur grob an und weist insbesondere im Scheitelbereich signifikante Abweichungen auf. Die in Lila dargestellte Vorhersage mit

optimierter Oberflächenladung korrigiert diese Abweichungen und erreicht eine verbesserte Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

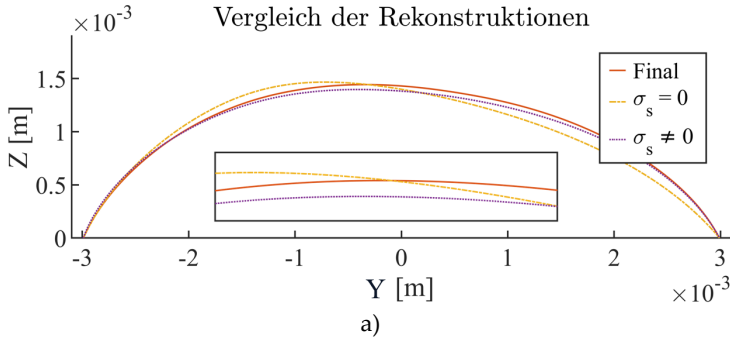


Abbildung 6.19: Vergleich der vorhergesagten Tropfenkonturen am Beispiel eines PR48-Tropfens (Einzelanode, Pos. 2, 3000 V). Dargestellt sind die finale gemessene Kontur (rot), die Vorhersage ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung (gelb) und die deutlich verbesserte Vorhersage mit optimierter Oberflächenladung (lila).

Die quantitative Auswertung aller Versuche untermauert diese Beobachtung. Es gibt eine starke lineare Abhängigkeit der optimierten Oberflächenladung σ_s von der angelegten Spannung U_{Anode} für das Polymer PR48 mit statistisch signifikanten Korrelationskoeffizienten von 0,93 mit einem p-Wert von $p < 0,0001$ für die Einzelanode und 0,98 und einem p-Wert von $p < 0,0001$ für die Doppelanode.

Die Boxplots der effektiven Oberflächenladung über den Spannungen für PR48 für die Einzelanode in Abbildung 6.20 a) veranschaulichen diese Korrelation gut. Für die Doppelanode in Abbildung 6.20 c) wird diese Korrelation ebenfalls gut veranschaulicht. Dieser Trend

kann für die Ölsäure mit einem negativen Korrelationskoeffizienten von -0,36 und einem p-Wert von $p = 0,062$ nicht in gleicher Weise beobachtet werden. Auch der Boxplot der Oberflächenladung über den Spannungen für Ölsäure in Abbildung 6.20 b) zeigt, dass der Wert der Oberflächenladung eine Größenordnung kleiner ist und keine signifikante Korrelation vorhanden ist.

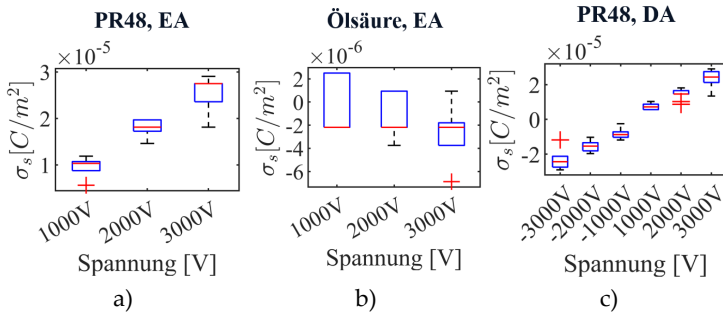


Abbildung 6.20: Zusammenfassende Ergebnisse der Vorhersageexperimente. a)-c): Werte der Optimierte Oberflächenladung σ_s als Funktion der Spannung.

Die Berücksichtigung von σ_s im Modell reduziert den Vorhersagefehler signifikant. Bei einer Spannung von 3000 V verkleinert sich der RMSE für PR48 mit Einzelanode um 53 % für Ölsäure um 26,7 % und für PR48 mit Doppelanode um 49 %, was in den Boxplots in Abbildung 6.21 a), b) und c) dargestellt ist. Der verbleibende RMSE zwischen vorhergesagter und gemessener Kontur bewegt sich im Bereich von 10 – 50 μm , was im maximum etwa einem Prozent des Tropfendurchmessers entspricht.

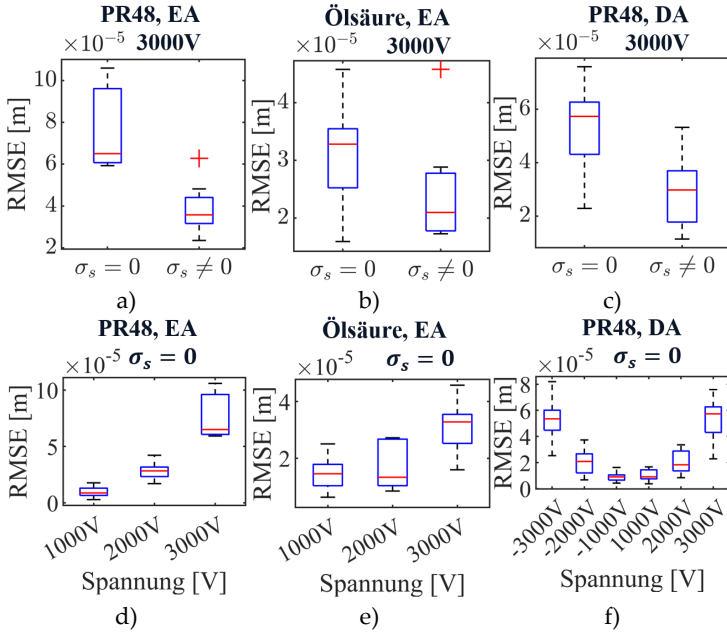


Abbildung 6.21: Zusammenfassende Ergebnisse der Vorhersageexperimente. a)-c): Vergleich des Vorhersagefehlers (RMSE) für das Modell mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung bei 3000 V. Untere Reihe d)-f): Verbleibender RMSE des optimierten Modells als Funktion der Spannung. Die Spalten gliedern sich nach den Versuchsreihen: PR48 (EA), Ölsäure (EA) und PR48 (DA).

Bei den Einzelanoden-Experimenten mit PR48 korreliert der RMSE positiv mit der angelegten Spannung, wie in Abbildung 6.21 d) sichtbar ist. Dieser Trend zeigt sich nicht bei der Doppelanoden-Konfiguration in Abbildung 6.21 f). Diese Verschiedenheit verdeutlicht die Grenzen des verwendeten 2D-Modells, gerade bei hohen Feldstärken.

Mit zunehmender Spannung und der daraus folgenden Deformation wird der dreidimensionale Charakter des elektrischen Feldes bedeutsamer und dominiert dadurch die Fehler. Das heißt je höher die Deformation ist, desto größer ist das Feld außerhalb des 2D-Schnitts. Dies ist eine Limitierung des Modells, da es die 3D-Natur nicht abbilden kann.

Die Daten der Ölsäure-Experimente unterstützen diese Annahme. Obwohl hier nur eine schwache, nicht signifikante Korrelation zwischen Oberflächenladung und Spannung besteht, steigt der RMSE trotzdem linear mit dieser, was in Abbildung 6.21 e) zu sehen ist. Dies zeigt, dass ein Teil des Vorhersagefehlers unabhängig vom Maxwell-Wagner-Effekt auf die Limitationen der 2D-Vereinfachung bei stärkerer Deformation zurückzuführen ist.

Die Ergebnisse bestätigen die Hypothese, dass im verlustbehafteten Dielektrikum die Maxwell-Wagner-Polarisation ein wichtiger Faktor ist, um die Form zu modellieren. Weitere Boxplots sind in Anhang D.6 dargestellt.

6.4.4 ÜBERTRAG DER VORHERSAGEN IN DIE OPTIK

Die geometrische Verbesserung mit σ_s spiegelt sich auch optisch in der OPD wider. In diesem Abschnitt werden mithilfe des in Abschnitt 5.3 beschriebenen Raytracers die optischen Eigenschaften der vorhergesagten Deformation untersucht. Dafür wurde die Raytracing-Simulation für alle 118 Versuche durchgeführt. Ein beispielhaftes

Simulationsergebnis für den PR48-Tropfen mit Einzelanode bei Position 4 und 3000 V ist in Abbildung 6.22 dargestellt. Man kann deutlich erkennen, dass die Strahlenverläufe in den vier Simulationen variieren.

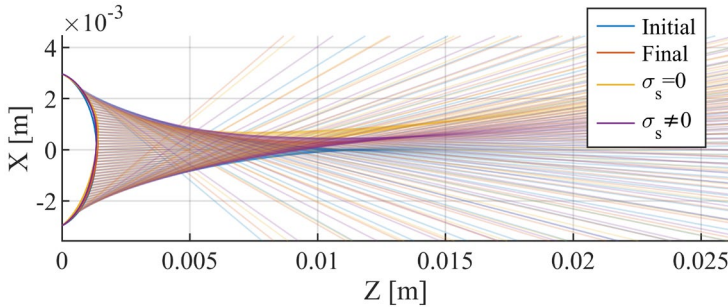


Abbildung 6.22: Raytracing-simulierter Strahlengang für die unterschiedlichen Tropfenkonturen.

Verglichen werden die initiale Kontur $(y_{mess}, z_{mess})_{initial}$, die finale gemessene Kontur $(y_{mess}, z_{mess})_{final}$ sowie die Vorhersagen mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung. Das Hauptkriterium, das dabei betrachtet wird, ist die OPD in der Fokusebene. Speziell wird der RMSE-Wert der Differenz zwischen der OPD der gemessenen Kontur und der OPD der jeweiligen Vorhersage mit und ohne Oberflächenladung analysiert.

Die OPD-Verläufe über die Pupillenkoordinate für vier Konturen desselben Versuchs sind in Abbildung 6.23 a) aufgetragen. Dort ist gut zu erkennen, dass die Abweichung der OPD zwischen der finalen, gemessenen Kontur und der Kontur, bei der die

Oberflächenladungen beachtet wurden, am geringsten ist. Dies bestätigt sich auch bei der direkten Darstellung einer OPD-Differenz in Abbildung 6.23 b).

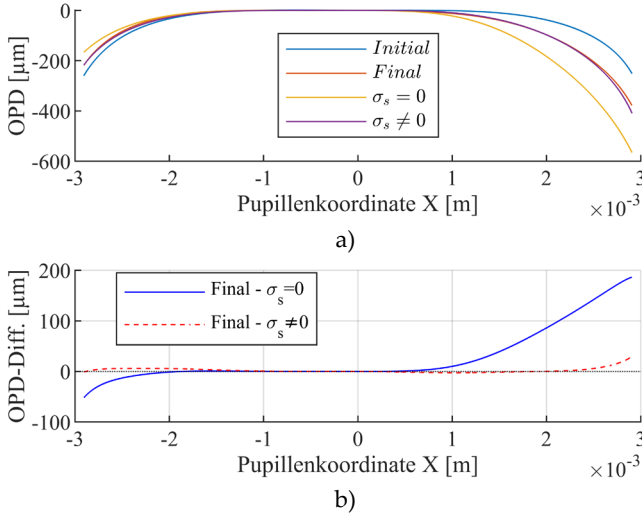


Abbildung 6.23: Analyse der OPD am Beispiel eines PR48-Tropfens (Einzelanode, Pos. 4, 3000 V). a) Verlauf der OPD über die Pupillenkoordinate für die initiale, die finale gemessene sowie die beiden vorhergesagten Konturen. b) Die Differenz der OPD zwischen der finalen Messung und den beiden Vorhersagemodellen verdeutlicht die höhere Genauigkeit des Modells mit Oberflächenladung.

Dieser Trend gilt, wie schon im vorherigen Kapitel, insbesondere im Zusammenhang mit dem Polymer. Abbildung 6.24 fasst die Ergebnisse aller Simulationen in Boxplots des OPD-RMSE zusammen: In a) sind die Ergebnisse für PR48 mit der Einzelanode dargestellt, in b) die für Ölsäure und in c) jene für PR48 mit der Doppelanode. Es ist

zu erkennen, dass bei den Polymeren der OPD-Unterschied sinkt, wenn die Oberflächenladungen in der Vorhersage beachtet werden. Bei der Ölsäure ist dies nicht der Fall.

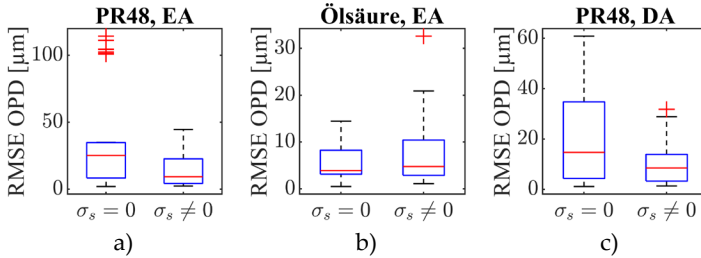


Abbildung 6.24: Boxplot-Darstellung des RMSE der OPD-Differenz zwischen Messung und Vorhersage für alle 118 Versuche. Verglichen werden die Vorhersagen mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung. a) Polymer PR48 mit Einzelanode. b) Ölsäure mit Einzelanode. c) Polymer PR48 mit Doppelanode. Die Ergebnisse zeigen eine signifikante Verbesserung der Vorhersagegüte für das Polymer durch die Berücksichtigung der Oberflächenladungen.

Die Analyse der optischen Eigenschaften bestätigt somit, dass die Vorhersagen unter Einbeziehung der Oberflächenladung eine höhere Güte aufweisen. Dies unterstreicht die Notwendigkeit, diesen physikalischen Effekt für eine genaue Vorhersage der finalen optischen Funktion der Linse im Modell zu berücksichtigen.

6.4.5 DISKUSSION DER VORHERSAGEERGEBNISSE

Die Ergebnisse validieren das in dieser Arbeit hergeleitete 2D-physikalische Modell. Es wird gezeigt, dass die Kombination aus Druck-

Krümmungs-Balance, FEM-Simulation und anschließender Kontur-rekonstruktion die Tropfendeformation vorhersagen kann. Der verbleibende RMSE von 10 bis 50 μm befindet sich dabei etwas über der effektiven Pixelgröße von 8,4 μm des optischen Systems. Die Berücksichtigung der effektiven Oberflächenladung σ_s ist dabei für verlustbehaftete Dielektrika essenziell und verbessert die Übereinstimmung systematisch, was sich in einer Reduktion des RMSE von bis zu 50 % zeigt.

Die physikalische Plausibilität des Modells wird durch die starke positive Korrelation zwischen der Oberflächenladung σ_s und der angelegten Spannung U_{Anode} für das Polymer PR48 untermauert. Diese lässt sich direkt aus der Maxwell-Wagner-Polarisation begründen ($\sigma_s \sim E \sim U$), während sich diese Proportionalität beim besseren Isolator Ölsäure erwartungsgemäß nicht beobachten lässt. Die Übertragung der Ergebnisse in die Optik bestätigt die hohe Formtreue der Vorhersage zusätzlich, da der Fehler in der OPD durch die Einbeziehung der Oberflächenladungen ebenfalls signifikant reduziert wird.

Aus der Vereinfachung zu einem 2D-Modell ergeben sich jedoch auch Limitationen. Wie in den Versuchen zu sehen ist, nimmt die Abweichung zwischen realer und vorhergesagter Kontur mit zunehmender Deformation zu. Dies ist eine inhärente Limitierung des Ansatzes, da das Modell nur das elektrische Feld in der 2D-Ebene beachtet und dessen Komponenten außerhalb dieser Ebene vernachlässigt. Diese Limitierung führt in der optischen Simulation zu einem doppelten Fehler. Erstens tritt ein Formfehler durch das unvollständig abgebildete Feld auf. Zweitens erfolgt nur eine zweidimensionale

Berechnung der OPD, was für eine reale Qualifizierung einer Linse nicht ausreichend ist.

Die Experimente haben auch gezeigt, dass die Methodik für die genaue Bestimmung der Oberflächenspannung ungeeignet ist.

Kapitel 7

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

7.1 ZUSAMMENFASSUNG

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der elektrischen Deformation von flüssigen Dielektrischen Tropfen. Hierfür wurde ein experimenteller Aufbau realisiert, der die gezielte Deformation und hochauflösende Erfassung der Tropfen ermöglicht. Die Experimentierumgebung wurde beschrieben, aufgebaut und in den folgenden Kapiteln verwendet.

Zur Beschreibung der Tropfen wurde ein Verfahren zur Approximation von deren Konturen aus Schattenbildern (PBCA) entwickelt und durch ein validiertes 3D-Rekonstruktionsverfahren aus der Literatur (PHDR) ergänzt. PBCA dient als Basisverfahren vor der Bestimmung der 2D-Krümmung, während PHDR zur Messkettenvalidierung eingesetzt wird. Darauf aufbauend wurde ein zweidimensionales physikalisches Vorhersagemodell hergeleitet und überprüft, welches die Druck-Krümmungs-Balance mit FEM-Simulationen des elektrostatischen Feldes koppelt.

Die Entscheidung, das Modell direkt an die 2D-Krümmung zu koppeln, beruht auf einer fundamentalen Limitation der Messanordnung. Eine 3D-Rekonstruktion aus nur zwei Ansichten ist ein mathematisch unterbestimmtes Problem. Sie liefert daher keine zusätzlichen Informationen für die Vorhersage, sondern würde lediglich die Artefakte und Ungenauigkeiten der 3D-Interpolation in das ansonsten auf direkten Messdaten basierende 2D-Modell übertragen.

Die experimentelle Validierung zeigt, dass die Berücksichtigung der Oberflächenladungen σ_s für eine präzise Deformationsvorhersage bei verlustbehafteten Dielektrika wie dem Polymer PR48 essenziell ist.

Im Folgenden wird dargelegt, wie die Forschungsfragen der Arbeit systematisch beantwortet wurden.

1. Experimenteller Aufbau: Welche Anforderungen muss ein Aufbau erfüllen, um die elektrisch induzierte Deformation von Mikrotropfen reproduzierbar zu erzeugen und hochaufgelöst zu erfassen?

Diese Frage wird in Kapitel 3 beantwortet. Es wurden vier zentrale Anforderungen identifiziert und im Versuchsaufbau umgesetzt:

1. präzise, stabile Positionierung von Tropfen und Elektroden mittels Präzisionsachsen
2. kontrollierbare Hochspannungsquelle

3. hochaufgelöste Bilderfassung aus zwei orthogonalen Richtungen mittels Schattenprojektion
4. Automatisierung und Synchronisation aller Komponenten

Dieser Aufbau ist die Grundlage für die reproduzierbare Durchführung der Experimente.

2. Konturapproximation: Welches Verfahren eignet sich zur Approximation der Tropfenkontur aus Kamerabildern, um die Tropfenkontur physikalisch plausibel in 2D zu beschreiben, und wie kann diese mittels 3D-Rekonstruktion validiert werden?

In Kapitel 4 wurde das polarbasierte Approximationsverfahren (PBCA) als geeignete Methode entwickelt. Zur physikalisch plausiblen Darstellung wurde es durch Glättung, die Einbeziehung der Gravitation und Oberflächenspannung sowie eine Spline-Korrektur ergänzt.

Das 3D-Rekonstruktionsverfahren baut auf der 2D-Approximation und dem aus der Literatur bekannten PHDR-Verfahren auf. Die Validierung zeigte eine hohe Genauigkeit mit Volumenabweichungen $< 3\%$ bei einer erweiterten Messunsicherheit $< 2\%$. Zu den Limitationen gehören die Notwendigkeit einer vollständig sichtbaren Kontur in beiden Perspektiven sowie Genauigkeitsverluste bei stark ausgeprägten Verformungen.

3. Physikalische Modellierung: Wie lässt sich ein physikalisches Modell ableiten, mit dem die Deformation von Tropfen vorhergesagt werden kann?

Die Herleitung wird in Abschnitt 2.1 und Kapitel 5 dargestellt. Zur Reduktion der Komplexität wurde das Modell auf 2D-Konturen vereinfacht. Die Lösung basiert auf einer Druck-Krümmungs-Balance als Erweiterung/Modifikation der Young-Laplace-Gleichung, gekoppelt über den elektrischen Druck mit einer FEM-Simulation des elektrostatischen Feldes.

Die zentrale Erkenntnis ist, dass eine deutlich genauere 2D-Vorhersage erst möglich wird, wenn die durch Maxwell-Wagner-Polarisation induzierten Oberflächenladungen im Modell berücksichtigt werden. Deren Einbeziehung führt zu einer Reduktion des Vorhersagefehlers (RMSE) um bis zu 50 %. Belegt wurde dies durch den direkten Vergleich zwischen dem verlustbehafteten Polymer PR48, bei dem dieser Effekt dominant ist, und der isolierenden Ölsäure, bei der der Effekt nicht dominant ist.

Die zentrale Limitation der Arbeit ist die 2D-Vereinfachung des physikalischen Modells: Es werden nur Feldkomponenten in der Simulationsebene berücksichtigt, Komponenten außerhalb dieser 2D-Ebene werden vernachlässigt. Dies führt insbesondere bei hohen Feldstärken und ausgeprägten Deformationen zu Abweichungen zwischen Vorhersage und Experiment. Sowohl die Rekonstruktionen mit als auch diejenigen ohne Oberflächenladungen sind davon betroffen.

In der optischen Betrachtung resultiert ein doppelter Effekt: Zusätzlich zum Formfehler fehlen bei der OPD-Bewertung Strahlen außerhalb der Ebene. Eine weitere messtechnische Limitation ist die Anforderung des Zwei-Kamera-Systems, dass die gesamte Tropfenkontur in beiden Ansichten unverdeckt sichtbar sein muss. Zudem ist das 3D-Rekonstruktionsverfahren geometrisch eingeschränkt, denn spitze Topografien können nicht präzise abgebildet werden.

Schließlich ist die Übertragbarkeit einzelner Methodenparameter nicht direkt gegeben, da diese an das spezifische optische System angepasst sind und bei Änderungen neu kalibriert werden müssen.

Trotz dieser Limitationen leistet die Arbeit mehrere entscheidende Beiträge. Der zentrale Beitrag ist ein validierter Prozess von der Messung der Tropfengeometrie bis zur Vorhersage der Deformation durch elektrische Felder. Es wird zudem der Nachweis erbracht, dass mit der Druck-Krümmungs-Balance in Kombination mit der Rekonstruktion der Kontur aus der Krümmung eine Voraussage der Tropfenform möglich ist.

Es wird experimentell gezeigt, dass Maxwell-Wagner-induzierte Oberflächenladungen der dominante physikalische Effekt bei der Deformation verlustbehafteter Dielektrika (z. B. Polymere) sind und im Modell berücksichtigt werden müssen. Messtechnisch stellt PBCA ein robustes Verfahren dar, das die diskretisierte Pixelstruktur wirksam dämpft. In Verbindung mit der 3D-Rekonstruktion fungiert es als Brücke, um perspektivisch von einem 2D- zu einem 3D-Modell zu gelangen. Das physikalische Modell bietet durch seine 2D-

Vereinfachung zudem einen Rechenzeitvorteil gegenüber vollständig gekoppelten 3D-FEM-Simulationen und ist damit für schnelle iterative Optimierungen geeignet.

7.2 AUSBLICK

Die naheliegendste Weiterentwicklung der vorliegenden Arbeit liegt in der Erweiterung des physikalischen Modells von 2D auf 3D. Die 2D-Vereinfachung stellt zwar die zentrale Limitation des Modells dar, ist aber zugleich eine Stärke, da sie einen recheneffizienten Ansatz ermöglicht. Ein vollständiges 3D-Modell würde diese validierte Grundlage aber entscheidend weiterentwickeln. Dies könnten die verbleibenden Abweichungen zwischen Vorhersage und Experiment signifikant minimieren und im Idealfall zu einer exakten Übereinstimmung der Konturen führen.

Hierfür sind drei Kernschritte notwendig: die Implementierung der E-Feld Berechnung in 3D. Die Entwicklung eines Algorithmus, der aus einer 3D-Krümmung eine 3D-Form rekonstruiert. Sowie die Etablierung eines validen Messverfahrens zur Erfassung der realen 3D-Tropfengeometrie, beispielsweise mittels eines tomographischen Ansatzes.

Einige dieser Herausforderungen könnten durch den Einsatz von physik-informierten neuronalen Netzen (PINNs) gelöst werden. Ein PINN, welches die Berechnung des elektrischen Feldes übernimmt, könnte den Rechenaufwand im Vergleich zu einer klassischen 3D-

FEM-Simulation erheblich reduzieren. Ebenso ließe sich das Messverfahren verbessern, indem die Tropfenphysik direkt in ein PINN integriert wird, um die Ergebnisse der PBCA-Methode zu optimieren. Darüber hinaus ist es denkbar, dass PINNs eine direkte 3D-Rekonstruktion aus den bestehenden zwei Kamerabildern ermöglichen oder den Modelltransfer von 2D auf 3D unterstützen, was jedoch eine 3D-Validierungsmessung voraussetzt.

Parallel zur Modellentwicklung kann der experimentelle Aufbau weiter verbessert werden. Eine Erweiterung auf mehr als zwei Kameras würde das Problem der Konturverdeckung verkleinern und die Datenbasis für 3D-Rekonstruktionen fundamental verbessern. Eine zusätzliche, von oben auf den Tropfen blickende Kamera könnte präzise Informationen über die Kontaktlinie liefern und so die Anwendung des Ansatzes auf flache Substrate erweitern.

Der Einsatz von Kameras, die zusätzliche Informationen wie Farbe oder Polarisation erfassen, könnte zudem informationsdichtere Datensätze für das Training von PINNs liefern. Beide Ansätze könnten beispielsweise die Kantenerkennung verbessern, da mehr Informationen zur Verfügung stehen, um ein PINN zu trainieren.

Um die Aushärtung der Polymere zu analysieren, muss die Probenkammer geschlossen werden, um eine Sauerstoffinhibition und folglich eine unvollständige Polymerisation zu vermeiden.

Sind diese Weiterentwicklungen adressiert, kann der in der Einleitung formulierte inverse Ansatz verfolgt werden: die gezielte Fertigung individualisierter Geometrien. Dabei wird ausgehend von

einem undeformierten Tropfen und einer gewünschten Ziel-Form die "fehlende" Krümmung über die Druck-Krümmungs-Balance berechnet. Aus dieser elektrischen Krümmung lassen sich über den Maxwell'schen Spannungstensor die erforderlichen elektrischen Feldkomponenten ableiten. Eine bedeutsame Herausforderung ist dabei die Bestimmung der optimalen Elektrodenkonfiguration aus diesen Feldkomponenten. Dieser hochkomplexe Designschrift könnte jedoch ebenfalls durch einen PINN-basierten Ansatz gelöst werden und würde den Weg für eine automatisierte Fertigung von Mikrooptiken ebnen. Dieser inverse Ansatz würde in 2D und in 3D funktionieren, sofern die oben genannten Herausforderungen gelöst werden.

V LITERATUR

- [1] A. Heinrich, Hrsg., *3D printing of optical components*. in Springer series in optical sciences, no. volume 233. Cham, Switzerland: Springer, 2021.
- [2] H. Gao, J. An, C. K. Chua, D. Bourell, C.-N. Kuo, und D. T. H. Tan, „3D printed optics and photonics: Processes, materials and applications“, *Mater. Today*, Bd. 69, S. 107–132, Okt. 2023, doi: 10.1016/j.mattod.2023.06.019.
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, und L. D. Landau, *Fluid mechanics*, 2nd ed., 2nd English ed., Rev. in Course of theoretical physics, no. v. 6. Oxford, England ; New York: Pergamon Press, 1987.
- [4] J. Berthier, *The physics of microdroplets*. Hoboken, N.J: J. Wiley & Sons, 2012.
- [5] Arkema, „SR531 Cyclic Trimethylol-Propane Formal Acrylate: Technical Data Sheet“, Arkema, 2024. [Online]. Verfügbar unter: https://americas.sartomer.arkema.com/assets/arkema/TDS_SR531_MDM-11104-00-AM_en_WW.pdf
- [6] L. D. A. Chumpitaz, L. F. Coutinho, und A. J. A. Meirelles, „Surface tension of fatty acids and triglycerides“, *J. Am. Oil Chem. Soc.*, Bd. 76, Nr. 3, S. 379–382, 1999, doi: 10.1007/s11746-999-0245-6.
- [7] Z. Dar, J. Baiges, und R. Codina, „Reduced Order Modeling“, in *Machine Learning in Modeling and Simulation: Methods and Applications*, T. Rabczuk und K.-J. Bathe, Hrsg., Cham: Springer International Publishing, 2023, S. 297–339. doi: 10.1007/978-3-031-36644-4_8.
- [8] M. A. Fardin, M. Hautefeuille, und V. Sharma, „Spreading, pinching, and coalescence: the Ohnesorge units“, *Soft Matter*, Bd. 18, Nr. 17, S. 3291–3303, 2022, doi: 10.1039/D2SM00069E.

- [9] D. Sagdeev u. a., „Densities and Viscosities of Oleic Acid at Atmospheric Pressure“, *J. Am. Oil Chem. Soc.*, Bd. 96, Nr. 6, S. 647–662, Juni 2019, doi: 10.1002/aocs.12217.
- [10] J. R. Melcher, *Continuum electromechanics*. Cambridge, Mass: MIT Press, 1981.
- [11] S. Zacher und M. Reuter, *Regelungstechnik für Ingenieure: Analyse, Simulation und Entwurf von Regelkreisen*, 17. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2024. doi: 10.1007/978-3-658-45897-3.
- [12] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, 4. ed., International ed. in Always learning. Boston: Pearson, 2013.
- [13] L. Dorfmann und R. W. Ogden, *Nonlinear Theory of Electroelastic and Magnetoelastic Interactions*. New York: Springer, 2014.
- [14] S. K. Das, A. Dalal, und G. Tomar, „Electrohydrodynamic-induced interactions between droplets“, *J. Fluid Mech.*, Bd. 915, S. A88, Mai 2021, doi: 10.1017/jfm.2021.120.
- [15] W. Demtröder, *Experimentalphysik 2*. in Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. doi: 10.1007/978-3-662-55790-7.
- [16] H. H. Woodson und J. R. Melcher, *Electromechanical Dynamics*. MIT OpenCourseWare, Massachusetts Institute of Technology. [Online]. Verfügbar unter: <http://ocw.mit.edu>
- [17] N. Kinayman und M. I. Aksun, *Modern microwave circuits*. Norwood (Mass.): Artech House, 2005.
- [18] T. B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Online-Ausg. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. doi: 10.1017/CBO9780511574498.
- [19] M. T. Harris und O. A. Basaran, „Equilibrium Shapes and Stability of Nonconducting Pendant Drops Surrounded by a Conducting Fluid in an Electric Field“, *J. Colloid Interface Sci.*, Bd. 170, Nr. 2, S. 308–319, März 1995, doi: 10.1006/jcis.1995.1107.
- [20] A. K. Bain und P. Chand, *Pyroelectric materials: physics and applications*. Newark: John Wiley & Sons, 2023.

- [21] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, und B. N. Taylor, „CO-DATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018“, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Bd. 50, Nr. 3, S. 033105, Sep. 2021, doi: 10.1063/5.0064853.
- [22] R. Gross und A. Marx, *Festkörperphysik*: OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, 2014. doi: 10.1524/9783110358704.
- [23] E. Kuffel, W. S. Zaengl, und J. Kuffel, *High voltage engineering: fundamentals*, 2nd ed. Oxford ; Boston: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [24] F. Carpi, Hrsg., *Electromechanically Active Polymers: A Concise Reference*. in *Polymers and Polymeric Composites: A Reference Series*. Cham: Springer, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-31530-0.
- [25] A. Küchler, *High voltage engineering: fundamentals, technology, applications*, 5th ed. 2018. in VDI-Buch. Berlin: Springer Vieweg, 2018.
- [26] A. Mortadi, A. E. Melouky, E. G. Chahid, R. E. Moznine, und O. Cherkaoui, „Studies of the Clausius–Mossotti factor“, *J. Phys. Stud.*, Bd. 20, Nr. 4, S. 4001, 2016, doi: 10.30970/jps.20.4001.
- [27] R. T. Kay und W. E. Beadle, „Dielectric Constants of Pure Liquids“, National Bureau of Standards, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., NBS Circular 514, 1951. Zugegriffen: 17. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://nvl-pubs.nist.gov/nistpubs/Legacy/circ/nbscircular514.pdf>
- [28] Emerson Automation Solutions, „Manual: Conductance Data for Commonly Used Chemicals“, Emerson Automation Solutions, Technisches Handbuch D351911X012, 2021. Zugegriffen: 1. August 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.emerson.com/documents/automation/manual-conductance-data-for-commonly-used-chemicals-en-68896.pdf>

- [29] E. Seran, M. Godefroy, E. Pili, N. Michielsen, und S. Bon-
diguel, „What we can learn from measurements of air electric
conductivity in²²²Rn-rich atmosphere“, *Earth Space Sci.*, Bd. 4,
Nr. 2, S. 91–106, Feb. 2017, doi: 10.1002/2016EA000241.
- [30] J. C. Baygents, N. J. Rivette, und H. A. Stone, „Electrohydro-
dynamic deformation and interaction of drop pairs“, *J. Fluid
Mech.*, Bd. 368, S. 359–375, Aug. 1998, doi:
10.1017/S00222112098001797.
- [31] D. A. Saville, „ELECTROHYDRODYNAMICS: The Taylor-
Melcher Leaky Dielectric Model“, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Bd.
29, Nr. 1, S. 27–64, Jan. 1997, doi: 10.1146/an-
nurev.fluid.29.1.27.
- [32] W. P. Calixto u. a., „Electromagnetic Problems Solving by
Conformal Mapping: A Mathematical Operator for Optimiza-
tion“, *Math. Probl. Eng.*, Bd. 2010, Nr. 1, S. 742039, Jan. 2010,
doi: 10.1155/2010/742039.
- [33] I. Koutromanos, J. McClure, und C. J. Roy, *Fundamentals of fi-
nite element analysis: linear finite element analysis*. Hoboken, NJ:
John Wiley & Sons, 2018.
- [34] J. D. Anderson, *Computational fluid dynamics: the basics with ap-
plications*, Internat. ed., [Repr.]. in McGraw-Hill Series in Me-
chanical Engineering. New York: McGraw-Hill, 20.
- [35] D. Cubric, B. Lencova, F. H. Read, und J. Zlamal, „Comparison
of FDM, FEM and BEM for electrostatic charged particle op-
tics“, *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. Sect. Accel. Spectrometers
Detect. Assoc. Equip.*, Bd. 427, Nr. 1–2, S. 357–362, Mai 1999, doi:
10.1016/S0168-9002(98)01563-0.
- [36] F. Mugele und J.-C. Baret, „Electrowetting: from basics to ap-
plications“, *J. Phys. Condens. Matter*, Bd. 17, Nr. 28, S. R705–
R774, Juli 2005, doi: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
- [37] G. I. Taylor, „Disintegration of water drops in an electric
field“, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci.*, Bd. 280, Nr. 1382,
S. 383–397, Juli 1964, doi: 10.1098/rspa.1964.0151.

- [38] A. Bateni, S. S. Susnar, A. Amirfazli, und A. W. Neumann, „Development of a New Methodology To Study Drop Shape and Surface Tension in Electric Fields“, *Langmuir*, Bd. 20, Nr. 18, S. 7589–7597, Aug. 2004, doi: 10.1021/la0494167.
- [39] S. M. I. Saad und A. W. Neumann, „Axisymmetric Drop Shape Analysis (ADSA): An Outline“, *Adv. Colloid Interface Sci.*, Bd. 238, S. 62–87, Dez. 2016, doi: 10.1016/j.cis.2016.11.001.
- [40] S. Xu, H. Ren, und S.-T. Wu, „Dielectrophoretically tunable optofluidic devices“, *J. Phys. Appl. Phys.*, Bd. 46, Nr. 48, S. 483001, Dez. 2013, doi: 10.1088/0022-3727/46/48/483001.
- [41] B. R. Acharya, T. Krupenkin, S. Ramachandran, Z. Wang, C. C. Huang, und J. A. Rogers, „Tunable optical fiber devices based on broadband long-period gratings and pumped microfluidics“, *Appl. Phys. Lett.*, Bd. 83, Nr. 24, S. 4912–4914, Dez. 2003, doi: 10.1063/1.1633331.
- [42] B. Berge und J. Peseux, „Variable focal lens controlled by an external voltage: An application of electrowetting“, *Eur. Phys. J. E*, Bd. 3, Nr. 2, S. 159–163, Okt. 2000, doi: 10.1007/s101890070029.
- [43] S. Kuiper und B. H. W. Hendriks, „Variable-focus liquid lens for miniature cameras“, *Appl. Phys. Lett.*, Bd. 85, Nr. 7, S. 1128–1130, Aug. 2004, doi: 10.1063/1.1779954.
- [44] H. Ren, H. Xianyu, S. Xu, und S.-T. Wu, „Adaptive dielectric liquid lens“, *Opt. Express*, Bd. 16, Nr. 19, S. 14954, Sep. 2008, doi: 10.1364/OE.16.014954.
- [45] H. Ren und S.-T. Wu, „Tunable-focus liquid microlens array using dielectrophoretic effect“, *Opt. Express*, Bd. 16, Nr. 4, S. 2646, Feb. 2008, doi: 10.1364/OE.16.002646.
- [46] Z. Cao, C. Cheng, und K. Wang, „Numerical simulation on aspherical lens modulated by electrostatic force“, gehalten auf der 7th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies (AOMATT 2014), L.

- Yang, E. Ruch, und S. Li, Hrsg., Harbin, China, Aug. 2014, S. 92810H. doi: 10.1117/12.2069623.
- [47] G. McHale, C. V. Brown, M. I. Newton, G. G. Wells, und N. Sampara, „Developing interface localized liquid dielectrophoresis for optical applications“, gehalten auf der Photonics Asia, Y. Wang, C. Du, H. Hua, K. Tatsuno, und H. P. Urbach, Hrsg., Beijing, China, Nov. 2012, S. 855703. doi: 10.1117/12.2001442.
- [48] K.-Y. Hung, L.-W. Chang, F.-G. Tseng, J.-C. Chiou, und Y. Chiu, „Optimum electrostatic force control for fabricating a hybrid UV-curable aspheric lens“, *J. Micromechanics Microengineering*, Bd. 20, Nr. 7, S. 075001, Juli 2010, doi: 10.1088/0960-1317/20/7/075001.
- [49] X. Wang und Y. Yu, „Analysis of the shape of heavy droplets on flat and spherical surface“, *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, Bd. 55, Nr. 6, S. 1118–1124, Juni 2012, doi: 10.1007/s11433-012-4750-5.
- [50] B. Hou u. a., „Shape approximation of sessile droplet by the equivalence between vertical capillary force and hydrostatic pressure“, *Colloids Surf. Physicochem. Eng. Asp.*, Bd. 656, S. 130203, Jan. 2023, doi: 10.1016/j.colsurfa.2022.130203.
- [51] D. T. Tran, N.-K. Nguyen, P. Singha, N.-T. Nguyen, und C. H. Ooi, „Modelling Sessile Droplet Profile Using Asymmetrical Ellipses“, *Processes*, Bd. 9, Nr. 11, Art. Nr. 11, Nov. 2021, doi: 10.3390/pr9112081.
- [52] M. L. Timm, E. Dehdashti, A. Jarrahi Darban, und H. Masoud, „Evaporation of a sessile droplet on a slope“, *Sci. Rep.*, Bd. 9, Nr. 1, Art. Nr. 1, Dez. 2019, doi: 10.1038/s41598-019-55040-x.
- [53] Y. Rotenberg, L. Boruvka, und A. W. Neumann, „The shape of nonaxisymmetric drops on inclined planar surfaces“, *J. Colloid Interface Sci.*, Bd. 102, Nr. 2, S. 424–434, Dez. 1984, doi: 10.1016/0021-9797(84)90245-5.

- [54] A. F. Stalder, G. Kulik, D. Sage, L. Barbieri, und P. Hoffmann, „A snake-based approach to accurate determination of both contact points and contact angles“, *Colloids Surf. Physicochem. Eng. Asp.*, Bd. 286, Nr. 1, S. 92–103, Sep. 2006, doi: 10.1016/j.colsurfa.2006.03.008.
- [55] A. Bateni, S. S. Susnar, A. Amirfazli, und A. W. Neumann, „A high-accuracy polynomial fitting approach to determine contact angles“, *Colloids Surf. Physicochem. Eng. Asp.*, Bd. 219, Nr. 1, S. 215–231, Juni 2003, doi: 10.1016/S0927-7757(03)00053-0.
- [56] M. A. Quetzeri-Santiago, J. R. Castrejón-Pita, und A. A. Castrejón-Pita, „On the analysis of the contact angle for impacting droplets using a polynomial fitting approach“, *Exp. Fluids*, Bd. 61, Nr. 6, S. 143, Juni 2020, doi: 10.1007/s00348-020-02971-1.
- [57] G. D. Martin, W. C. Price, I. M. Hutchings, W. C. Price, und I. M. Hutchings, „Measurement of Inkjet Drop Volume—The Role of Image Processing“, *NIP Digit. Fabr. Conf.*, Bd. 32, S. 94–102, Sep. 2016, doi: 10.2352/ISSN.2169-4451.2017.32.94.
- [58] I. M. Hutchings u. a., „High Speed Imaging and Analysis of Jet and Drop Formation“, *NIP Digit. Fabr. Conf.*, Bd. 22, S. 91–94, Jan. 2006, doi: 10.2352/ISSN.2169-4451.2006.22.1.art00023_1.
- [59] E. Portuguese, A. Alzina, P. Michaud, M. Oudjedi, und A. Smith, „Evolution of a Water Pendant Droplet: Effect of Temperature and Relative Humidity“, *Nat. Sci.*, Bd. 9, Nr. 1, Art. Nr. 1, Jan. 2017, doi: 10.4236/ns.2017.91001.
- [60] X. H. Nguyen, S.-H. Lee, und H. S. Ko, „Comparative study on basis functions for projection matrix of three-dimensional tomographic reconstruction for analysis of droplet behavior from electrohydrodynamic jet“, *Appl. Opt.*, Bd. 51, Nr. 24, S. 5834–5844, Aug. 2012, doi: 10.1364/AO.51.005834.

- [61] S. Kim, J. H. Choi, D. K. Sohn, und H. S. Ko, „The Effect of Ink Supply Pressure on Piezoelectric Inkjet“, *Micromachines*, Bd. 13, Nr. 4, Art. Nr. 4, Apr. 2022, doi: 10.3390/mi13040615.
- [62] I. Hutchings, G. Martin, S. Hoath, G. Martin, und S. Hoath, „High Speed Imaging and Analysis of Jet and Drop Formation“, *J. Imaging Sci. Technol.*, Bd. 51, S. 438–444, Sep. 2007, doi: 10.2352/J.ImagingSci.Technol.(2007)51:5(438).
- [63] K. Thurow, T. Krüger, und N. Stoll, „An Optical Approach for the Determination of Droplet Volumes in Nanodispensing“, *J. Anal. Methods Chem.*, Bd. 2009, S. e198732, Mai 2009, doi: 10.1155/2009/198732.
- [64] P. Horowitz, *The art of electronics*, Third edition. New York, NY: Cambridge University Press, 2015.
- [65] K.-H. Grote, B. Bender, und D. Göhlich, Hrsg., *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*, 25., Aktualisierte Aufl. 2018. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. doi: 10.1007/978-3-662-54805-9.
- [66] G. C. Holst und T. S. Lomheim, *CMOS/CCD sensors and camera systems*, 2nd ed. Winter Park, FL : Bellingham, Wash: JCD Publishing ; SPIE, 2011.
- [67] T. Novak, „Individual surface adaption of micro lenses with electrical fields - Approach for a mathematical model“, Masterarbeit, Hochschule Aalen, Aalen, 2019.
- [68] Thorlabs Inc., „Thorlabs - Z825B 25 mm Motorized Actuator with Ø3/8“, Z825B - 25 mm Motorized Actuator with Ø3/8" Barrel (Handbuch). Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.thorlabs.com>
- [69] SCHUNK GmbH & Co. KG, „SHS-040 - Handwechselsystem“. Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: https://schunk.com/de/de/automatisierungstechnik/werkzeugwechsler/shs/c/PGR_3365

- [70] Balluff GmbH, „EV76C560“. Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.balluff.com/de-de/vision-sensors/EV76C560>
- [71] Opto Engineering S.p.A., „LTCLHP016-W - Telecentric CORE illuminator (Datenblatt)“, Opto Engineering. Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.opto-e.com/en/>
- [72] Opto Engineering S.p.A., „Edge diffraction in telecentric illumination (Technical Article)“. Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.opto-e.com/de/>
- [73] Thorlabs Inc., „High-Magnification Zoom Lens Systems for Machine Vision“, High-Magnification Zoom Lens Systems for Machine Vision. Zugegriffen: 31. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.thorlabs.com/high-magnification-zoom-lens-systems-for-machine-vision?pn=MVL12X12Z&tabName=Specs>
- [74] The MathWorks, Inc., „MATLAB and Computer Vision Toolbox Release 2024a“. The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, USA, 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.mathworks.com>
- [75] Z. Zhang, „A flexible new technique for camera calibration“, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Bd. 22, Nr. 11, S. 1330–1334, Nov. 2000, doi: 10.1109/34.888718.
- [76] R. Szeliski, *Computer vision: algorithms and applications*, Second edition. in Texts in computer science. Cham: Springer, 2022.
- [77] F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, W. Bausch, und H. Schmidt, *Optik für Ingenieure: Grundlagen*, 3., Bearbeitete und Aktualisierte Auflage. in SpringerLink Bücher. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. doi: 10.1007/b139018.
- [78] hivolt.de GmbH, *Operating Manual: High Voltage Power Supply HAR42-4 with HA3B3-S*. Hamburg, Germany: hivolt.de GmbH, 2023. Zugegriffen: 6. August 2025. [Online]. Verfügbar

- unter: https://www.hivolt.de/fileadmin/hivolt/pdf/HA2B5-S_HA3B3-S_HAR42-4_OperatingManual_1.3.pdf
- [79] Deutsches Institut für Normung e.V., „Steckverbinder für Frequenzen unter 3 MHz - Teil 13: Bauartspezifikation für Steckverbinder im Rastermaß 2,54 mm zur Verwendung mit Flachbandkabeln“, DIN, Berlin, Norm DIN EN 60603-13:2017-09, 2017.
- [80] MathWorks File Exchange, „Driver for Thorlabs Motorized Stages (Beitrag von User: Patrick)“. November 2020. [Online]. Verfügbar unter: https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/66497-driver-for-thorlabs-motorized-stages?tab=discussions#discussions_1633173
- [81] S. Pertuz, D. Puig, und M. A. Garcia, „Analysis of focus measure operators for shape-from-focus“, *Pattern Recognit.*, Bd. 46, Nr. 5, S. 1415–1432, Mai 2013, doi: 10.1016/j.patcog.2012.11.011.
- [82] E. Krotkov, „Focusing“, *Int. J. Comput. Vis.*, Bd. 1, Nr. 3, S. 223–237, Okt. 1988, doi: 10.1007/BF00127822.
- [83] S. Pertuz, *Focus Measure*. (2. September 2011). MathWorks File Exchange. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/27314-focus-measure>
- [84] P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, und D. Quéré, *Capillarity and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, Translation of the French ed. New York, NY: Springer, 2010.
- [85] A. W. Neumann, J. K. Spelt, und A. Amirfazli, *Applied Surface Thermodynamics*. Place of publication not identified: CRC Press, 2017.
- [86] Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), „Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement“, Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), JCGM 100:2008, 2008. Zugegriffen: 8. August 2025. [Online]. Verfügbar unter:
-

- https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf
- [87] Pilz GmbH & Co. KG, *Operating Manual PSENmlock Safety gate system*. Pilz GmbH & Co. KG, 2022. Zugegriffen: 7. August 2025. [Online]. Verfügbar unter: https://cdn.logic-control.com/docs/pilz-safety/Manuals/PSEN_ml_ba_1_12_12_2_Op_Man_1005295-EN-05.pdf
 - [88] M. Dohmen, A. Heinrich, und C. Neumann, „Polar Fitting and Hermite Interpolation for Freeform Droplet Geometry Measurement“, *Metrology*, Bd. 5, Nr. 3, S. 56, Sep. 2025, doi: 10.3390/metrology5030056.
 - [89] R. Achanta, A. Shaji, K. Smith, A. Lucchi, P. Fua, und S. Süsstrunk, „SLIC superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods“, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Bd. 34, Nr. 11, S. 2274–2282, Nov. 2012, doi: 10.1109/TPAMI.2012.120.
 - [90] Y. Li, J. Sun, C.-K. Tang, und H.-Y. Shum, „Lazy snapping“, *ACM Trans. Graph.*, Bd. 23, Nr. 3, S. 303–308, Aug. 2004, doi: 10.1145/1015706.1015719.
 - [91] L. G. Roberts, „Machine perception of three-dimensional solids“, Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1963. Zugegriffen: 23. September 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/11589>
 - [92] R. Gonzalez und R. Woods, „Digital Image Processing“. Zugegriffen: 28. Oktober 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9781292223070>
 - [93] M. Unser, „Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing“, *IEEE Signal Process. Mag.*, Bd. 16, Nr. 6, S. 22–38, 1999, doi: 10.1109/79.799930.
 - [94] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, und S. Winograd, „The optimal recovery of smooth functions“, *Numer. Math.*, Bd. 26, Nr. 2, S. 191–200, Juni 1976, doi: 10.1007/BF01395972.

- [95] C. de Boor, „Computational Aspects of Optimal Recovery“, in *Optimal Estimation in Approximation Theory*, C. A. Micchelli und T. J. Rivlin, Hrsg., Boston, MA: Springer US, 1977, S. 69–91. doi: 10.1007/978-1-4684-2388-4_3.
- [96] P. W. Gaffney und M. J. D. Powell, „Optimal interpolation“, in *Numerical Analysis*, G. A. Watson, Hrsg., Berlin, Heidelberg: Springer, 1976, S. 90–99. doi: 10.1007/BFb0080117.
- [97] E. Atefi, J. A. Mann, und H. Tavana, „A Robust Polynomial Fitting Approach for Contact Angle Measurements“, *Langmuir*, Bd. 29, Nr. 19, S. 5677–5688, Mai 2013, doi: 10.1021/la4002972.
- [98] Q. Liu, J. Chen, H. Yang, und Z. Yin, „Accurate Stereo-Vision-Based Flying Droplet Volume Measurement Method“, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Bd. 71, S. 1–16, 2022, doi: 10.1109/TIM.2021.3129216.
- [99] E. W. Weisstein, *CRC concise encyclopedia of mathematics*. Boca Raton London New York [etc.]: Chapman & Hall CRC, 1999.
- [100] Abraham. Savitzky und M. J. E. Golay, „Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures.“, *Anal. Chem.*, Bd. 36, Nr. 8, S. 1627–1639, Juli 1964, doi: 10.1021/ac60214a047.
- [101] J. Stoer, R. Bulirsch, J. Stoer, und J. Stoer, *Introduction to numerical analysis*, Corrected 2. printing. New York, NY: Springer, 1983.
- [102] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, 2nd ed. New York: Dover Publications, 1988.
- [103] L. F. Shampine und M. W. Reichelt, „The MATLAB ODE Suite“, *SIAM J. Sci. Comput.*, Bd. 18, Nr. 1, S. 1–22, Jan. 1997, doi: 10.1137/S1064827594276424.
- [104] J. R. Dormand und P. J. Prince, „A family of embedded Runge-Kutta formulae“, *J. Comput. Appl. Math.*, Bd. 6, Nr. 1, S. 19–26, März 1980, doi: 10.1016/0771-050X(80)90013-3.

- [105] M. Dohmen, A. Heinrich, und C. Neumann, „Modeling and simulation of custom microlenses from electrically deformed droplets“, in *Advanced Fabrication Technologies for Micro/Nano Optics and Photonics XVIII*, E. Blasco, D. Chanda, und C. Moser, Hrsg., San Francisco, United States: SPIE, März 2025, S. 5. doi: 10.1117/12.3042017.
- [106] J. R. Shewchuk, „What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures“, 2002.
- [107] COMSOL AB, „How to Inspect Your Mesh in COMSOL Multiphysics®“, COMSOL. Zugegriffen: 4. Juli 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.comsol.com/blogs/how-to-inspect-your-mesh-in-comsol-multiphysics>
- [108] ANSYS, Inc., „Fluent Meshing Sensitivity Tutorial“. Zugegriffen: 5. Juni 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.ansys.com/content/dam/amp/2023/december/quick-request/ansys-education-resources-23q4-part-1/fluent-meshing-sensitivity-tutorial-tutmesflen24.pdf>
- [109] MathWorks, „surrogateopt | Global Optimization Toolbox“. Oktober 2025. Zugegriffen: 17. Oktober 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.mathworks.com/help/gads/surrogateopt.html>
- [110] C. Hopkins, „GeoRaytracerLite“. 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/file-exchange/81558-georaytracerlite>
- [111] M. T. Rank, „Analyse optischer Eigenschaften additiv gefertigter Polymeroptiken durch Evaluierung der Aushärtekinetik fotosensitiver UV-Harze“, doctoralthesis, Universität Augsburg, 2023.
- [112] W. M. Haynes, Hrsg., *CRC handbook of chemistry and physics: a ready-reference book of chemical and physical data*, 97th edition. Boca Raton London New York: CRC Press, 2017.

- [113] H. Lindner, „Brechung (Refraktion) des Lichtes“, in *Physik für Ingenieure*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 1991, S. 295–299. doi: 10.1007/978-3-322-86079-8_27.
- [114] The MathWorks, Inc., „pcregistericp - Register point cloud to another point cloud using ICP algorithm (MATLAB Documentation)“. Zugegriffen: 5. März 2025. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.mathworks.com/help/vision/ref/pcregistericp.html>
- [115] D. P. Kroese, T. Brereton, T. Taimre, und Z. I. Botev, „Why the Monte Carlo method is so important today“, *WIREs Comput. Stat.*, Bd. 6, Nr. 6, S. 386–392, Nov. 2014, doi: 10.1002/wics.1314.
- [116] N. B. Vargaftik, B. N. Volkov, und L. D. Voljak, „International Tables of the Surface Tension of Water“, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, Bd. 12, Nr. 3, S. 817–820, Juli 1983, doi: 10.1063/1.555688.
- [117] K. Takamura, H. Fischer, und N. R. Morrow, „Physical properties of aqueous glycerol solutions“, *J. Pet. Sci. Eng.*, Bd. 98–99, S. 50–60, Nov. 2012, doi: 10.1016/j.petrol.2012.09.003.
- [118] D. Israni, S. Patel, und A. Shah, „Comparison of Different Techniques of Camera Autofocusing“, in *Proceedings of First International Conference on Information and Communication Technology for Intelligent Systems: Volume 1*, S. C. Satapathy und S. Das, Hrsg., Cham: Springer International Publishing, 2016, S. 125–135. doi: 10.1007/978-3-319-30933-0_14.
- [119] J. F. Schlag, A. C. Sanderson, C. P. Neuman, und F. C. Wimberly, „Implementation of Automatic Focusing Algorithms for a Computer Vision System with Camera Control“, Pittsburgh, PA, CMU-RI-TR-83-14, Aug. 1983.
- [120] Trotec GmbH & Co. KG, *Thermohygrometer T210 Operating Manual*. Heinsberg, Germany: Trotec GmbH & Co. KG, 2024. [Online]. Verfügbar unter: <https://de.trotec.com/fileadmin/downloads/Messgeraete/Klima/T210/TRT-BA-T210-TC-002-EN.pdf>

VI ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1.1: Verschiedene deformierte Tropfen und Anodenpositionen. a) Ein 2 mm Tropfen. b) Ein 1 mm Tropfen. c) Ein 0,5 mm Tropfen.....	3
Abbildung 1.2: Optisches System und Deformationsablauf. a) Optisches System mit Elektroden und Tropfen. b) Vergrößerung des Tropfens mit elektrischen Feldlinien (rot). c) Deformierter Tropfen mit zusätzlicher UV-Strahlung (lila) zur Polymerisierung. d) Ausgehärtete Linse.	4
Abbildung 2.1: a) Schematische Darstellung eines 3D-Tropfens mit Schnittebenen und eingezeichneter Höhe $h(x, y)$. b) Hauptkrümmungsradien an der Oberfläche eines 3D-Tropfens.	10
Abbildung 2.2: 2D-Vereinfachung des Tropfens mit den Parametern, welche die Kontur auf einem Zylinderstift beschreiben.....	14
Abbildung 3.1: Fotografie des realisierten Aufbaus in der Sicherheitseinhausung mit dem verwendeten Koordinatensystem und den wichtigsten Komponenten. Baugruppe eins in lila und Baugruppe zwei in orange.....	42
Abbildung 3.2: Ansichten des Gesamtaufbaus mit Koordinatensystem. a) Seitenansicht der Baugruppen. b) Draufsicht mit den	

	optischen Achsen und Benennung der Kameras.	44
Abbildung 3.3:	Wirkung eines Diffusors auf die Kantenqualität. a) Das Bild und b) das Kantenprofil zeigen starke Beugungsartefakte bei kollimierter Beleuchtung. c) Bild und d) geglättetes Kantenprofil nach Einsetzen des Diffusors. e) Fotografie des Diffusors.	46
Abbildung 3.4:	Anoden Nadelkissen. a) Gesamtansicht des am SHS befestigten Halters. b) Nahaufnahme des modularen Nadelkissens. c) Beispiel der Einzelanode.	48
Abbildung 3.5:	Die gekühlte Sicherheitseinhausung. a) Außenansicht der geschlossenen Experimentierumgebung. b) Das angeschlossene mobile Klimagerät, das als Kaltluftquelle für die Temperaturregelung dient.	51
Abbildung 3.6:	Schematische Darstellung des Luftstroms durch die Versuchskammer. Eine geschlossene Klappe führt zum Luftstrom nach außen (rot), während eine geöffnete Klappe das Durchströmen kalter Luft durch die gesamte Einhausung (blau) ermöglicht.	52
Abbildung 3.7:	Langzeitmessung der sechs Temperatursensoren und des PID-Stellsignals.	53
Abbildung 3.8:	In MATLAB App Designer entwickelte grafische Benutzeroberfläche. Die Software	

	ermöglicht die zentrale Steuerung aller Hardwarekomponenten, die Konfiguration der Versuchsparameter und die Live-Anzeige der Kamerabilder und Spannungssignale.	55
Abbildung 3.9:	Generierte Spannungsprofile für die Tropfendeformation. Dargestellt sind die Steuersignale für a) einen DC-Impuls mit definierter Anstiegs-, Halte- und Abfallzeit und b) eine AC-Sinusspannung mit bestimmter Frequenz und Amplitude. Das rote Signal zeigt das zugehörige Trigger-Signal für die UV-LED.....	57
Abbildung 4.1:	Schematisches Flussdiagramm der Datenverarbeitung in Kapitel 4, unterteilt in den 3D-Validierungspfad (oben) und den 2D-Krümmungspfad (unten) als Basis für Kapitel 5.....	59
Abbildung 4.2:	Prozess der Bildverarbeitung zur Segmentierung der Tropfenkontur. a) Eingangsbild nach Kontrastanpassung. b) Unterteilung in Superpixel mittels SLIC-Algorithmus. c) Initiale Maske (türkis) durch Lazy-Snapping mit Vordergrund-(rot) und Hintergrund-Markierungen (violett). d) Verfeinerte Maske nach Anwendung der Active-Contour-Methode. e) Finale, extrahierte Konturpunkte (rot gestrichelt). (modifiziert nach [88]).....	61

Abbildung 4.3: Vorteil der Polarkoordinatentransformation am Tropfenscheitel. a) Stufenartige Pixelrepräsentation im kartesischen Koordinatensystem. b) Transformation derselben Pixel in eine stetig gekrümmte Punktverteilung im polaren Koordinatensystem, die eine robustere Approximation ermöglicht.....	65
Abbildung 4.4: Verarbeitungsschritte des PBCA-Verfahrens. a) Ausrichtung und künstliche Verlängerung der Kontur. b) Streckung der Kontur zur Homogenisierung der Punktverteilung. (modifiziert nach [88]).....	67
Abbildung 4.5: Verarbeitungsschritte des PBCA-Verfahrens. a) Die "abgewickelte" Kontur als Funktion des Radius r über dem Winkel θ zur Approximation mittels B-Spline. b) Rücktransformierte und final positionierte, geglättete Kontur. (modifiziert nach [88]).....	68
Abbildung 4.6: Mittellinien und Ausrichtung der Konturen und Hermite-Interpolation. a) Mittellinienberechnung für die X-Kontur. b) Mittellinienberechnung für die Y-Kontur. c) Skalierte und an ihren Mittellinien ausgerichtete Konturen mit den vier resultierenden Punkten auf einer exemplarischen Z-Ebene. (modifiziert nach [88]).....	72

Abbildung 4.7: a) Mittels PHDR-Algorithmus interpolierte Tropfenkontur für diese Ebene. b) Rekonstruierter Tropfen. (modifiziert nach [88]).....	75
Abbildung 4.8: Schematisches Flussdiagramm von der PBCA zum Vorhersagemodell	77
Abbildung 4.9: Anwendung des Savitzky-Golay-Filters zur Glättung des experimentellen Krümmungsprofils. Die ursprüngliche Krümmung κ_{mess} (blau gestrichelt). Die blassen Linien zeigen die gesamte Bandbreite der geglätteten Profile, die während der Gittersuche über verschiedene Filterparameter erzeugt wurden. Die geglättete Krümmung κ_{SG} ist in rot-strichpunktirt dargestellt.....	80
Abbildung 4.10: Schematisches Flussdiagramm von der Rekonstruktion	82
Abbildung 4.11: Rekonstruktion der Kontur aus der Krümmung. a) Definition der Konturparameter nach Frenet-Serret. b) Fehler am Endpunkt PR_{rek} durch Integration der geglätteten Krümmung und iterative Korrektur des Startwinkels α_0 . c) Zusätzliche Anpassung des Krümmungsprofils zur Erfüllung der Randbedingungen.....	84

Abbildung 4.12: Schematisches Flussdiagramm zur Berechnung der Oberflächenspannung γ , κ_{phys} und κ_{base}	88
Abbildung 4.13: Zerlegung der gemessenen Krümmung in die einzelnen Krümmungsanteile.....	92
Abbildung 4.14: Optimierung der Oberflächenspannung γ durch Minimierung der Abweichung zwischen der rekonstruierten und der gemessenen Tropfenkontur.....	94
Abbildung 4.15: Vergleich der Rekonstruktionsabweichung. Dargestellt ist die punktweise Differenz zwischen der Messkontur x_{mess}, z_{mess} und den zwei Rekonstruktionen basierend auf der physikalisch informierten Krümmung κ_{phys} (blau, durchgezogen) und basierend auf der finalen, durch den Spline-Term korrigierten Basiskrümmung κ_{base} (rot, gestrichelt).....	95
Abbildung 5.1: Schematisches Flussdiagramm des gesamten Vorhersageprozesses. a) Iterative Formfindung für definierte Eingangsparameter. b) Iterative Ermittlung der Oberflächenladung und der finalen Form.	100
Abbildung 5.2: Grundmodell mit Definition der Geometrie und der Simulationsdomäne.....	102
Abbildung 5.3: Sensitivitätsanalyse zur Wahl der Hüllendicke dh_{hull} : a) Elektrischer Druck für verschiedene Hüllendicken, b) zugehörige	

	Rechenzeit, c) Detailansicht der Druckverteilung an der Tropfenspitze.....	104
Abbildung 5.4:	Typisches Histogramm der Netzqualität in den durchgeführten FEM-Simulationen.....	106
Abbildung 5.5:	Gesamter Modellaufbauprozess: a) Detailansicht der vernetzten Hülle um die Tropfenkontur, b) Ausschnitt des Gesamtnetzes mit Verfeinerung an der Kontur, c) simuliertes elektrisches Potentialfeld mit und ohne Oberflächenladung σ_s	107
Abbildung 5.6:	Darstellung der Interpolationspunkte P_l und P_f	108
Abbildung 5.7:	Die tangentialen E-Feldkomponenten entlang eines Tropfens. a) Ohne Oberflächenladungen. b) Mit Oberflächenladungen.	110
Abbildung 5.8:	Normale E-Feldkomponenten. a) E_n berechnet nach (5.7) b) E_n berechnet nach (5.6).	111
Abbildung 5.9:	Vergleich zwischen dem Eingangswert σ_s, in und den berechneten Werten für σ_s	112
Abbildung 5.10:	Flussdiagramm zur inneren Schleife.....	114
Abbildung 5.11:	Konvergenz des iterativen Algorithmus zur Formvorhersage. a) Beitrag der elektrischen Krümmung κ_e für die initiale Kontur und 20 Iterationen. b) Entwicklung der Gesamt-Krümmung κ_{ziel} . c) Zugehörige Änderung der rekonstruierten Tropfenkontur. d) RMSE zwischen der vorhergesagten und	

der final gemessenen Form, der die Stabilisierung der Lösung nach ca. 3 Iterationen zeigt.	117
Abbildung 5.12: Flussdiagramm zur äußeren Schleife	118
Abbildung 5.13: Simulierter Strahlengang durch die Tropfenkontur.	122
Abbildung 5.14: Strahldichtebild zur Bestimmung des Fokuspunktes als der Pixel mit der maximalen Intensität (höchste Strahlenkonzentration).	123
Abbildung 6.1: Verwendete synthetische Kurven im Vergleich mit real beobachteten Tropfen. a) Kreisförmige Kontur. b) Hyperbolische Kontur. c) Geneigte hyperbolische Kontur. d) Rechteckige Kontur. (modifiziert nach [88]).....	126
Abbildung 6.2: Synthetische Bilder der CAD-Modelle zur Validierung des Rekonstruktionsalgorithmus. Dargestellt sind die gerenderten X- und Y- Schattenansichten für: a) Halbkugel, b) achsensymmetrisch deformierter Tropfen, c) nicht-achsensymmetrisch deformierter Tropfen, d) rechteckförmiger Tropfen, e) achsensymmetrischer Kreiskegel, f) nicht- achsensymmetrische Kreiskegel. (modifiziert nach [88]).....	127
Abbildung 6.3: Reale Referenzgeometrien zur Validierung des Messsystems. a) Bild eines präzise	

	gefertigten Zylinderstifts mit Radius 6,36 mm. b) Bild der KMG-Messkugel mit Durchmesser 3 mm. (modifiziert nach [88])....	128
Abbildung 6.4:	Reale Referenzgeometrien zur Validierung des Messsystems. a)-c) Schattenbilder der drei Zylinderstifte mit Radien von 2,56 mm, 3,63 mm und 6,5 mm, aufgenommen mit dem Messaufbau. d) Schattenbilder der KMG-Messkugel. (modifiziert nach [88])	129
Abbildung 6.5:	Diskretisierung eines CAD-Modells in eine STL-Punktwolke. Dargestellt ist die Umwandlung der glatten CAD-Geometrie in ein trianguliertes Netz (blau).	131
Abbildung 6.6:	Bild der KMG-Messkugel mit Koordinatensystem (modifiziert nach [88]).....	134
Abbildung 6.7:	a) Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der X-Achse. b) Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der Y-Achse. (modifiziert nach [88]).....	135
Abbildung 6.8:	Volumen und Tenengrad-Maß bei Bewegung auf der X-Achse mit ständiger Neufokussierung.....	136
Abbildung 6.9:	Vergleich der Approximationsgüte für synthetische 2D-Geometrien. Dargestellt sind die Fehler Metriken für die PBCA-Methode im Vergleich zu Polynom-, Fourier- und Spline-Anpassungen. a) Root Mean Square Error (RMSE). b) Mean Absolute Percentage Error (MAPE). c) Mean	

Normalized Error (MNE). (modifiziert nach [88])	141
Abbildung 6.10: Abstände der rekonstruierten Modelle von den Referenzmodellen. a) Halbkugel. b) Achssymmetrisch. c) Nicht Achssymmetrisch (modifiziert nach [88])	144
Abbildung 6.11: Abstände der rekonstruierten Modelle von den Referenzmodellen. a) Kreiskegel. b) Schiefer Kreiskegel. (modifiziert nach [88])	146
Abbildung 6.12: Lokale euklidische Abweichung zwischen KMG-Referenz und Rekonstruktion. a) Zylinderstift mit 2,56 mm, b) Zylinderstift mit 3,63 mm, c) Zylinderstift mit 6,5 mm, d) KMG Messkugel. (modifiziert nach [88])	149
Abbildung 6.13: a) Die im Experiment verwendete längliche Anode. b) Bild der X-Kamera des undeformierten Tropfens im Versuchsaufbau. c) Bild der Y-Kamera des undeformierten Tropfens. (modifiziert nach [88])	151
Abbildung 6.14: Analyse des Rekonstruktionsartefakts bei der Volumenberechnung. a) & b) Zeitlicher Verlauf des rekonstruierten Volumens für die Experiment 7 und 8. (modifiziert nach [88])	153
Abbildung 6.15: Darstellung der Anodenpositionen relativ zum Tropfen aus den durchgeführten Experimenten. Die Farbcodierung indiziert die maximale prozentuale	

	Volumenabweichung bei maximaler Deformation.	154
Abbildung	6.16: Ergebnisse der indirekten Oberflächenspannungsmessung. a) Boxplot der Oberflächenspannungen für jedes Material und der Literaturwert mit einer orangefarbenen Linie. b) RMSE zwischen der gemessenen Kontur und der durch das Optimierungsverfahren rekonstruierten Kontur.	161
Abbildung	6.17: Experimentelle Konfigurationen. a), c) zeigen die EA und das zugehörige Schattenbild. b), d) zeigen die DA und das zugehörige Schattenbild. e), f) Schematische Darstellung der fünf Anodenpositionen für die Versuchsreihen mit EA und DA.	165
Abbildung	6.18: Beispielhafter zeitlicher Ablauf eines Deformationsexperiments. Dargestellt ist das angelegte Spannungsprofil mit den Zeitpunkten zur Extraktion der initialen Kontur nach der Rampe und der abschließenden, deformierten Kontur am Ende der Haltephase.	166
Abbildung	6.19: Vergleich der vorhergesagten Tropfenkonturen am Beispiel eines PR48-Tropfens (Einzelnode, Pos. 2, 3000 V). Dargestellt sind die finale gemessene Kontur (rot), die Vorhersage ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung	

	(gelb) und die deutlich verbesserte Vorhersage mit optimierter Oberflächenladung (lila).....	168
Abbildung 6.20:	Zusammenfassende Ergebnisse der Vorhersageexperimente. a)-c): Werte der Optimierte Oberflächenladung σ_s als Funktion der Spannung.	169
Abbildung 6.21:	Zusammenfassende Ergebnisse der Vorhersageexperimente. a)-c): Vergleich des Vorhersagefehlers (RMSE) für das Modell mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung bei 3000 V. Untere Reihe d)-f): Verbleibender RMSE des optimierten Modells als Funktion der Spannung. Die Spalten gliedern sich nach den Versuchsreihen: PR48 (EA), Ölsäure (EA) und PR48 (DA).....	170
Abbildung 6.22:	Raytracing-simulierter Strahlengang für die unterschiedlichen Tropfenkonturen.	172
Abbildung 6.23:	Analyse der OPD am Beispiel eines PR48-Tropfens (Einzelanode, Pos. 4, 3000 V). a) Verlauf der OPD über die Pupillenkoordinate für die initiale, die finale gemessene sowie die beiden vorhergesagten Konturen. b) Die Differenz der OPD zwischen der finalen Messung und den beiden Vorhersagemodellen verdeutlicht die höhere Genauigkeit des Modells mit Oberflächenladung.....	173

Abbildung 6.24: Boxplot-Darstellung des RMSE der OPD-Differenz zwischen Messung und Vorhersage für alle 118 Versuche. Verglichen werden die Vorhersagen mit und ohne Berücksichtigung der Oberflächenladung. a) Polymer PR48 mit Einzelanode. b) Ölsäure mit Einzelanode. c) Polymer PR48 mit Doppelanode. Die Ergebnisse zeigen eine signifikante Verbesserung der Vorhersagegüte für das Polymer durch die Berücksichtigung der Oberflächenladungen.	174
---	-----

VII TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 4.1:	Verwendete Krümmungsbezeichnungen in Abschnitt 4.4.....	78
Tabelle 6.1:	Metriken zum Vergleich der rekonstruierten CAD-Modelle (Halbkugel, achsensymmetrische und nicht achsensymmetrische Deformation) mit der Referenzgeometrie.....	143
Tabelle 6.2:	Vergleich der Metriken der rekonstruierten Geometrien mit der Referenz.....	148
Tabelle 6.3:	Versuchsplan zur Analyse der Rekonstruktion mit den jeweiligen Anodenpositionen (y_{Anode} , z_{Anode}) relativ zum Nullpunkt der Linearachsen.	152
Tabelle 6.4:	Literaturwerte sowie Mittelwert und Standardabweichung der gemessenen Oberflächenspannungswerte.	160
Tabelle 6.5:	Versuchsplan zur Modellvalidierung.....	164

VIII VERÖFFENTLICHUNGEN

- S. Burkert; M. Dohmen; A. Heinrich – *Investigation of the dynamic response of a fluid dielectric to electric fields for controlled micro- and nanostructuring processes*, Applied Optical Metrology VI (SPIE Optics + Photonics), San Diego (USA), August 2025.
- A. Dehm; M. Dohmen; A. Heinrich – *A deep learning approach for the prediction of process parameters in the additive manufacturing of microlenses*, Digital Optical Technologies (SPIE), München (Deutschland), Juni 2025.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Polar Fitting and Hermite Interpolation for Freeform Droplet Geometry Measurement*, Metrology (Journal), —, September 2025.
- S. Burkert; M. Dohmen; A. Heinrich – *Untersuchung der Reaktion eines Dielektrikums auf elektrische Felder für die Herstellung von Freiform-Mikrolinsen*, 126. DGaO-Jahrestagung, Stuttgart (Deutschland), Juni 2025.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Empirisches Modell für elektrisch deformierte Linsen*, 126. DGaO-Jahrestagung, Stuttgart (Deutschland), Juni 2025.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Modeling and simulation of custom microlenses from electrically deformed droplets*,

Advanced Fabrication Technologies for Micro/Nano Optics and Photonics XVIII (SPIE Photonics West), San Francisco (USA), Januar 2025.

- M. Dohmen; M. Geiß; M.-J. Ilhan; A. Heinrich – *Next-generation (micro-)optic*, In: Additive Manufacturing of Glass (Elsevier), —, 2025.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Elektrisch deformierte Linsen für optimierte optische Faserkopplung*, 125. DGaO-Jahrestagung, Aachen (Deutschland), Mai 2024.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Additive manufactured and electrically deformed lenses on optical fibers for improved coupling*, Advanced Fabrication Technologies for Micro/Nano Optics and Photonics XVII (SPIE Photonics West), San Francisco (USA), Januar 2024.
- M. Dohmen; A. Heinrich; C. Neumann – *Dielektrophoretische Herstellung von Mikrolinsen*, 124. DGaO-Jahrestagung, Berlin (Deutschland), Mai/Juni 2023.
- Z. Pan; D. Xu; L. Dreyer; M. Dohmen; A. Heinrich; W. Schulz; H.-D. Junker – *Bildgebende MALDI-MS und Nanodispersing als Werkzeuge für die wirkungsbezogene HPTLC-Analytik*, Mitteilungen der Fachgruppe Umweltchemie und Ökotoxikologie, Oktober 2022.

- M. Dohmen; A. Sigel; A. Heinrich – *Additive Fertigung einer katadioptrischen Panoramalinse*, Jahrbuch der Optik und Feinmechanik, 2022.
- M.-J. Ilhan; M. Dohmen; A. Heinrich – *Additive Fertigung asphärischer Mikrolinsen mittels Dielektrophorese*, 122. DGaO-Jahrestagung, Bremen (Deutschland), September 2021.
- M. Dohmen; A. Heinrich – *Gradientindex Linsenherstellung – Anwendung eines Multimaterial-Roboter-Dispensers*, 122. DGaO-Jahrestagung, Bremen (Deutschland), September 2021.
- M. Rank; A. Sigel; Y. Bauckhage; S. Suresh-Nair; M. Dohmen; C. Eder; et al. – *3D Printing of Optics Based on Conventional Printing Technologies*, In: 3D Printing of Optical Components (Springer Series), Cham (Schweiz), November 2020.
- A. Sigel; M. Dohmen; A. Heinrich – *Evaluation of a 3D printed freeform reflector and lens*, OSA Freeform Optics (Optical Design and Fabrication Congress), Washington, DC (USA), Juni 2019.

IX ERKLÄRUNG ZUR NUTZUNG VON KI-WERKZEUGEN

Bei der Erstellung dieser Arbeit wurden zur Unterstützung KI-gestützte Werkzeuge herangezogen. Dies umfasste die Synthese von eigenem Quellenmaterial mit NotebookLM als Unterstützung für Programmieraufgaben von ChatGPT, Google Gemini und Perplexity. Außerdem beinhaltete es die sprachliche Optimierung von Formulierungen durch Writeful, Google Gemini und ChatGPT sowie Übersetzungen aus dem Englischen ins Deutsche mit DeepL und Google Gemini. Die Verantwortung für die Auswahl, Bewertung und korrekte Zitation aller Primärquellen sowie für die wissenschaftliche Validität der Inhalte und Ergebnisse verbleibt vollumfänglich beim Autor.

Anhang A: ABKÜRZUNGEN UND FORMELZEICHEN

A.1 ABKÜRZUNGEN

Abkürzung	Beschreibung	Kapitel
PBCA	Polarraumbasierte Konturapproximation; Polar Based Contour Approximation	Abstract
FEM	Finite-Elemente-Methode	Abstract
SLA	Stereolithografie	1.1
2PP	Zwei-Photonen-Polymerisation	1.1
2D	Zwei Dimensional	1.1
3D	Drei Dimensional	1.1
UV	Ultraviolett	1.1
Bo	Bond-Zahl	2.1.1
PR48	Prototype Resin 48	2.1.1
ROM	Reduced Order Model	2.1.1
MST	Maxwell'scher Spannungstensor	2.1.2
MATLAB	Matrix Laboratory	2.2.1
FDM	Finite-Differenzen-Methode	2.2.1

BEM	Randelemente-Methode; Bound- ary Element Method	2.2.1
EWOD	Electrowetting on Dielectric	2.2.2
DEP	Dielektrophorese	2.2.2
EHD	Elektrohydrodynamik	2.2.2
ADSA-EF	Axisymmetric Drop Shape Analy- sis - Electric Fields	2.2.2
SHS	Schunk Handwechselsystem	3.2.1
CMOS	Complementary Metal-Oxide-Se- miconductor	3.2.3
LED	Lichtemittierende Dioden; Light Emitting Diode	3.2.3
EA	Einzelanode	3.4.2
DA	Doppelanode	3.4.2
PID	Proportional-Integral-Derivativ	3.4
DAQ	Datenerfassungskarte; Data Ac- quisition Card	3.4
GUI	Grafische Benutzeroberfläche	3.5
DC	Gleichstrom; Direct Current	3.5
AC	Wechselstrom; Alternating Cur- rent	3.5
SLIC	Simple Linear Iterative Clustering	4.1
B-Spline	Basis-Spline	4.2.2
PHDR	Polar coordinate Hermite-interpo- lation-based Droplet Reconstruc- tion	4.3
RMSE	Mittlere quadratische Abwei- chung; Root Mean Square Error	4.4.1
PDE	Partial Differential Equation	5
KI	Künstliche Intelligenz	5.3
OPD	Optische Weglängendifferenz	5.3.3

OPL	Optische Weglänge	5.3.3
CAD	Computer-Aided-Design	6.1.1
KMG	Koordinatenmessgerät	6.1.2
STL	Stereolithografie	6.1.3
ICP	Iterative-Closest-Point	6.1.3
MAPE	Mittlere absolute prozentuale Fehler	6.1.4
MNE	Mittlere normalisierte Fehler	6.1.4

A.2 FORMELZEICHEN

Symbol	Beschreibung	Kapitel
p_{innen}	Druck innerhalb des Tropfens	2.1.1
$p_{außen}$	Druck außerhalb des Tropfens	2.1.1
Δp	Druckdifferenz	2.1.1
γ	Oberflächenspannung	2.1.1
R_1, R_2	Hauptkrümmungsradien des Tropfens	2.1.1
(x, y)	Punkte auf der Tropfenoberfläche	2.1.1
h	Höhe des Tropfens	2.1.1
Bo	Bond-Zahl	2.1.1
Bo_{PR48}	Bond-Zahl von PR48	2.1.1
$Bo_{\text{Ölsäure}}$	Bond-Zahl von Ölsäure	2.1.1
ρ_{PR48}	Dichte von PR48	2.1.1
$\rho_{\text{Ölsäure}}$	Dichte von Ölsäure	2.1.1
g	Erdbeschleunigung	2.1.1
L_c	Charakteristische Länge	2.1.1
γ_{PR48}	Oberflächenspannung von PR48	2.1.1
$\gamma_{\text{Ölsäure}}$	Oberflächenspannung von Ölsäure	2.1.1
κ_1, κ_2	Krümmungsanteile der beiden Haupttradien	2.1.1
κ_g	Krümmungsanteil der Gravitation	2.1.1
$\overline{\kappa_\gamma}$	Konstante Offset der Druckdifferenz	2.1.1
κ_{phys}	Krümmungsbeitrag der primären Beobachtungsebene	2.1.1
P_L	Linker Kontaktpunkt	2.1.1

(x_L, z_L)	Koordinaten des linken Kontaktpunktes	2.1.1
P_R	Rechter Kontaktpunkt	2.1.1
(x_R, z_R)	Koordinaten des rechten Kontaktpunktes	2.1.1
d_{basis}	Basisdurchmesser	2.1.1
ω_L	Linker Kontaktwinkel	2.1.1
ω_R	Rechter Kontaktwinkel	2.1.1
$(x_{scheitel}, h_{scheitel})$	Koordinaten des Scheitelpunktes	2.1.1
m_L	Steigung Linker Kontaktpunkt	2.1.1
m_R	Steigung Rechter Kontaktpunkt	2.1.1
Oh	Ohnesorge-Zahl	2.1.1
μ_{dyn}	Dynamische Viskosität	2.1.1
L_h	Charakteristische Länge	2.1.1
μ_{PR48}	Dynamische Viskosität PR48	2.1.1
Oh_{PR48}	Ohnesorge-Zahl PR48	2.1.1
$\mu_{\text{ölsäure}}$	Dynamische Viskosität Ölsäure	2.1.1
$Oh_{\text{ölsäure}}$	Ohnesorge-Zahl Ölsäure	2.1.1
τ_c	viskose Diffusionszeit	2.1.1
κ_e	Elektrischer Krümmungsanteil	2.1.2
p_e	Elektrischer Druck	2.1.2
f_e	Spannungsvektor	2.1.2
$f_{e,i}$	Komponente des Spannungsvektors	2.1.2
n	Normalenvektor	2.1.2
i	Komponente die berechnet wird der Einstein'sche Summenkonvention	2.1.2
j	Summenindex der Einstein'sche Summenkonvention	2.1.2

T	Maxwell'scher Spannungstensor	2.1.2
ϵ_{abs}	Absolute Permittivität	2.1.2
E	Elektrisches Feld	2.1.2
δ	Kronecker-Delta	2.1.2
μ_{abs}	absolute Permeabilität	2.1.2
B	Komponenten des magnetischen Feldes	2.1.2
m	Medium Index	2.1.2
f	Index für die Flüssigkeit	2.1.2
l	Index für die Luft	2.1.2
ϵ_l	Absolute Permittivität von Luft	2.1.2
ϵ_f	Absolute Permittivität vom Fluid	2.1.2
E_n	Normale Komponente des E- Felds	2.1.2
E_t	Tangentiale Komponente des E- Felds	2.1.2
D	Elektrisches Verschiebungsfeld	2.1.2
σ_s	Oberflächenladung	2.1.2
σ	Leitfähigkeit	2.1.2
P	Polarisierbarkeit	2.1.2
ϵ_0	Permittivität im Vakuum	2.1.2
χ_e	elektrische Suszeptibilität	2.1.2
ϵ_r	Relative Permittivität	2.1.2
P_{ges}	Gesamtpolarisation	2.1.2
P_e	Elektronenpolarisation	2.1.2
P_i	Ionenpolarisation	2.1.2
P_o	Orientierungspolarisation	2.1.2
P_{MW}	Maxwell-Wagner Polarisation	2.1.2

τ_e	Relaxationszeit Elektronenpolari- sation	2.1.2
τ_i	Relaxationszeit Ionenpolarisation	2.1.2
τ_o	Relaxationszeit Orientierungs- polarisation	2.1.2
τ_{MW}	Relaxationszeit Maxwell-Wagner- Polarisation	2.1.2
ϵ_{PR48}	Relative Permittivität PR48	2.1.2
σ_{PR48}	Leitfähigkeit PR48	2.1.2
$\epsilon_{\text{Ölsäure}}$	Relative Permittivität Ölsäure	2.1.2
$\sigma_{\text{Ölsäure}}$	Leitfähigkeit Ölsäure	2.1.2
ϵ_{Luft}	Relative Permittivität Luft	2.1.2
σ_{Luft}	Leitfähigkeit Luft	2.1.2
Φ	Elektrische Potentialfunktion	2.2.1
ρ_{ladung}	Ladungsverteilung	2.2.1
∇	Nabla-Operator	2.2.1
k_1	Tangentiale Verzeichnung	3.2.3
t_{Ramp}	Anstiegszeit	3.2.4
s_6	Primärer Regelsensor	3.4
k	Erweiterungsfaktor Messunsich- erheit	3.4
β	Neigungswinkel des Tropfens	4.1
(x_0, z_0)	Start Pixel für die Segmentierung	4.1
$(x_{\text{pixel}}, z_{\text{pixel}})$	Diskretisierte Konturpixel	4.1
θ	Polarer Winkelwert	4.2.1
r	Polare Distanz	4.2.1
$(x_{\text{al}}, z_{\text{al}})$	Zentrierte Koordinaten	4.2.1
r_{fit}	Resultierende Spline Funktion	4.2.3
$(x_{\text{mess}}, z_{\text{mess}})$	Kontur nach der PBCA	4.2.3

(y_{mess}^x, z_{mess}^x)	Kontur nach der PBCA der X-Kamera	4.2.3
(x_{mess}^y, z_{mess}^y)	Kontur nach der PBCA der Y-Kamera	4.2.3
v	Skalierungsfaktor für die Scheitelpunkte	4.3.1
(P_1, P_3)	Punkte auf der Ebene der X-Kontur	4.3.1
(P_2, P_4)	Punkte auf der Ebene der Y-Kontur	4.3.1
H	Hermite-Basispolynome	4.3.2
i	Index bei der Hermite-Interpolation	4.3.2
j	Index bei der Hermite-Interpolation	4.3.2
k	Index der Z-Ebenen bei der PHDR	4.3.2
(x_k, y_k)	Koordinaten der k -ten Ebene	4.3.2
A_k	Fläche der k -ten Ebene	4.3.3
V_{ges}	Gesamtvolumen des Tropfens nach der PHDR Methode	4.3.3
V_{3D}	Rekonstruiertes Volumen	4.3.3
n	Gesamtanzahl der Z-Ebenen	4.3.3
i	Laufvariable	4.4
κ	Ausgangskrümmung	4.4
κ_{SG}	Geglättete Krümmung	4.4
κ_{in}	Eingangskrümmung in die Konturrekonstruktion	4.4
(x_{rek}, z_{rek})	Rekonstruierte Koordinaten	4.4
κ_{si}	Korrigierte Krümmung	4.4
κ_{mess}	Krümmung aus der PBCA-Kontur	4.4.1

w	Fensterlänge des Savitzky-Golay-Filters	4.4.1
p	Polynomordnung des Savitzky-Golay-Filters	4.4.1
I	Kaskadierungs-Iterationen des Savitzky-Golay-Filters	4.4.1
q	Teiler der Fensterlänge	4.4.1
J	Kombinierte Kostenfunktion für den Savitzky-Golay-Filter	4.4.1
e_{RMSE}	Mittleren quadratischen Abweichung	4.4.1
e_o	Regularisierungsterm	4.4.1
s	Bogenlänge	4.4.1
M	Tangentenvektor in den Frenet-Serret Formeln	4.4.2
α	Winkel der Tangente zur X-Achse	4.4.2
α_0	Startwinkel der Rekonstruktion	4.4.2
p_R^{rek}	Rekonstruierter rechter Kontaktpunkt	4.4.2
d_{Kosten}	quadrierten euklidischen Abstand	4.4.2
s_f	Finaler Punkt entlang der Bogenlänge	4.4.2
$\Delta\kappa_{lin}$	Lineare Korrekturfunktion	4.4.2
$\Delta\kappa_{quad}$	Quadratische Korrekturfunktion	4.4.2
u_{lin}	Linearer Gewichtungsfaktor	4.4.2
u_{quad}	Quadratischer Gewichtungsfaktor	4.4.2
κ_{base}	Physikalische Basiskrümmung	4.4.3
κ_γ	Krümmungsterm	4.4.3
L	Kostenfunktion für die Konturrekonstruktion	4.4.3

o	Wertebereich des Getrimmten Mittels	4.4.3
$\Delta\kappa_{spline}$	Spline Korrekturterm	4.4.3
(x_{sim}, z_{sim})	Aus der Vorhersage resultierende Koordinaten	5
U_{Anode}	Gemessene Eingangsspannung	5
ρ_e	Äquivalente Volumenladungsdichte	5.1.1
d_{hull}	Dicke der umschließenden Hülle	5.1.1
n_{punkte}	Diskretisierungspunkte	5.1.1
$\overline{\Delta x_{tropfen}}$	Mittlerer X-Punktabstand	5.1.1
Q	Netzqualität	5.1.2
A	Fläche des Netzdreiecks	5.1.2
l_i	Kantenlängen des Netzdreiecks	5.1.2
l_{hull}	Maximale Kantenlänge der Netzelemente innerhalb der Hülle	5.1.2
P_f	Punkt innerhalb des Tropfens	5.1.3
(x_f, z_f)	Koordinaten von P_f	5.1.3
P_l	Punkt innerhalb der Luft	5.1.3
(x_l, z_l)	Koordinaten von P_l	5.1.3
(E_x, E_z)	Interpolierte X- und Z-Vektoren	5.1.3
(E_n, E_t)	Interpolierte Normal- und Tangential-Vektoren	5.1.3
$\sigma_{s,in}$	Definierte effektive Oberflächenladung	5.1.4
κ_{ziel}	Ziel Krümmung	5.2.1
κ_{ref}	Konstanter Krümmungs Offset	5.2.1
x_0	Erster X-Wert der Kontur	5.2.1
x_e	Letzter X-Wert der Kontur	5.2.1
n_{PR48}	Brechungsindex PR48	5.3.1

$n_{\text{ölsäure}}$	Brechungsindex Ölsäure	5.3.1
n_{Luft}	Brechungsindex Luft	5.3.1
λ	Wellenlänge der Brechungsin- dexmessung	5.3.1
P_{focus}	Fokuspunkt	5.3.1
$(x_{\text{focus}}, z_{\text{focus}})$	Fokuspunkt Koordinaten	5.3.2
n_{linse}	Brechungsindex der Beispiellinse	5.3.4
f	Brennweite der Beispiellinse	5.3.4
R_{Linse}	Krümmungsradius der Linse	5.3.4
d_{Linse}	Durchmesser der Linse	5.3.4
f_{ray}	Raytracer Simulierte Brennweite	5.3.4
n	Anzahl der Punkte auf dem ge- meinsamen Gitter	6.1.4
G	Referenzgeometrie-Daten	6.1.4
A	Rekonstruierten Daten	6.1.4
e_{MAPE}	Mittlerer absoluten prozentualen Fehler	6.1.4
R_{MNE}	Normalisierungsgröße für den re- präsentativen Bereich	6.1.4
e_{MNE}	Mittlerer normalisierte Fehler	6.1.4
V_{Kugel}	Volumen der KMG	6.2
V_{3D}	Rekonstruiertes Volumen	6.2
k	Erweiterungsfaktor	6.3.1
U	Erweiterte Messunsicherheit	6.3.1
V_{Pin}	Volumen des Pins	6.3.1
V_{Tropfen}	Volumen des Tropfens	6.3.1
ΔV_{abs}	Absolute Abweichung vom Soll- Volumen	6.3.2
ΔV_{rel}	Relative Abweichung vom Soll- Volumen	6.3.2

V_{Creo}	Volumen aus Creo	6.3.2
P_{Anode}	Angefahrene Anodenposition	6.3.3
(y_{Anode}, z_{Anode})	Angefahrene Anodenposition Ko- ordinaten	6.3.3
γ_{ref}	Literaturwerte für die Oberflä- chenspannung	6.4.1
$\overline{\gamma_{mess}}$	Mittelwert der gemessenen Ober- flächenspannung	6.4.1
σ_{γ}	Standardabweichung Oberflä- chenspannung	6.4.1
d_a	Abstand zwischen zwei Anoden- positionen	6.4.2

Anhang B: AUSFÜHRLICHE BERECHNUNGEN

B.1 HERLEITUNG ELEKTRISCHER DRUCK MIT UND OHNE OBERFLÄCHENLADUNGEN

Die allgemeine Formel für den elektrischen Druck p_e an der Grenzfläche lautet:

$$p_e = \frac{1}{2} \epsilon_l (E_{n,l}^2 - E_{t,l}^2) - \frac{1}{2} \epsilon_f (E_{n,f}^2 - E_{t,f}^2) \quad (\text{A1})$$

Im Folgenden zuerst die Herleitung von (2.29) im Fall eines perfekten Dielektrikums ohne Oberflächenladungen $\sigma_s = 0$. Für ein perfektes Dielektrikum ohne freie Oberflächenladungen gelten zwei Randbedingungen. Die tangentiale Feldkomponente ist stetig:

$$E_{t,l} = E_{t,f} \quad (\text{A2})$$

Und ohne Oberflächenladung gilt aus (2.27):

$$\epsilon_l E_{n,l} = \epsilon_f E_{n,f} \quad (\text{A3})$$

Das kann umgeformt werden in:

$$E_{n,l} = \frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f} \quad (\text{A4})$$

Einsetzen der Stetigkeit der Tangentialkomponente (A2) in (A1) und Vereinfachung:

$$p_e = \frac{1}{2}(\epsilon_l E_{n,l}^2 - \epsilon_f E_{n,f}^2) - \frac{1}{2}(\epsilon_l - \epsilon_f) E_{t,f}^2 \quad (\text{A5})$$

Einsetzen der Normalkomponente aus (A4) in (A5):

$$p_e = \frac{1}{2} \left(\epsilon_l \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f} \right)^2 - \epsilon_f E_{n,f}^2 \right) - \frac{1}{2} (\epsilon_l - \epsilon_f) E_{t,f}^2 \quad (\text{A6})$$

Nach vereinfachen ist die Formel für den elektrischen Druck ohne Oberflächenladungen:

$$p_e = \frac{1}{2} (\epsilon_f - \epsilon_l) \left[\frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f}^2 + E_{t,f}^2 \right] \quad (\text{A7})$$

Dies ist die Formel (2.29).

Als nächstes die Herleitung von (2.30) für den elektrischen Druck im Fall eines verlustbehafteten Dielektrikums $\sigma_s \neq 0$.

Die tangentielle Feldkomponente ist weiterhin stetig. Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebung ist sprunghaft nach (2.27):

$$\sigma_s = \epsilon_l E_{n,l} - \epsilon_f E_{n,f} \quad (\text{A8})$$

Dies kann umgeformt werden nach dem normalen elektrischen Feld in der Luft:

$$E_{n,l} = \frac{(\sigma_s + \epsilon_f E_{n,f})}{\epsilon_l} \quad (\text{A9})$$

Ausgangspunkt ist wieder Gleichung (A1). Nach Einsetzen der Tangentialkomponente (A2) und der allgemeinen Normalkomponente aus (A9):

$$p_e = \frac{1}{2} \left(\epsilon_l \left(\frac{(\sigma_s + \epsilon_f E_{n,f})}{\epsilon_l} \right)^2 - \epsilon_f E_{n,f}^2 \right) + \frac{1}{2} (\epsilon_f - \epsilon_l) E_{t,f}^2 \quad (\text{A10})$$

Nach vereinfachen ist die Formel für den elektrischen Druck mit Oberflächenladungen:

$$p_e = \frac{1}{2} (\epsilon_f - \epsilon_l) \left[\frac{\epsilon_f}{\epsilon_l} E_{n,f}^2 + E_{t,f}^2 \right] + \frac{\sigma_s^2}{2\epsilon_l} + \frac{\epsilon_f \sigma_s}{\epsilon_l} E_{n,f} \quad (\text{A11})$$

Dies ist die Formel (2.30).

B.2 PROJEKTION PUNKTE UND E-FELD

Die Koordinaten dieser Punkte werden entlang der Normalenvektoren \hat{n} der Tropfenkontur berechnet. Zunächst werden die Tangentenvektoren \hat{t} und daraus die Normalenvektoren \hat{n} für jeden Punkt $(x_{tropfen}, z_{tropfen})$ der Kontur bestimmt:

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta s} \\ \frac{\delta z}{\delta s} \end{pmatrix}, t = \sqrt{t_x^2 + t_z^2}, \begin{pmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_x}{t} \\ \frac{t_z}{t} \end{pmatrix} \quad (A12)$$

$$\hat{n}_x = -\hat{t}_z, \hat{n}_z = \hat{t}_x \quad (A13)$$

Die Interpolationspunkte (x_f, z_f) im Tropfen und (x_l, z_l) in der Luft werden dann wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} x_f \\ z_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{tropfen} - \delta \cdot n_x \\ z_{tropfen} - \delta \cdot n_z \end{pmatrix} \quad (A14)$$

$$\begin{pmatrix} x_l \\ z_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{tropfen} + (\delta + d_{hull}) \cdot n_x \\ z_{tropfen} + (\delta + d_{hull}) \cdot n_z \end{pmatrix} \quad (A15)$$

Der Abstand δ von der Grenzfläche wird als das 1,5-fache der minimalen Elementgröße des Netzes gewählt. Dies stellt sicher, dass die Interpolation außerhalb des direkten Grenzbereichs, aber noch in unmittelbarer Nähe dazu stattfindet. Das elektrische Feld wird an diesen neuen Koordinaten interpoliert:

$$\begin{pmatrix} E_{x,f} \\ E_{z,f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x(x_f, z_f) \\ E_z(x_f, z_f) \end{pmatrix} \quad (A16)$$

$$\begin{pmatrix} E_{x,l} \\ E_{z,l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x(x_l, y_l) \\ E_z(x_l, z_l) \end{pmatrix} \quad (\text{A17})$$

Anschließend werden die Normal- und Tangentialkomponenten E_n und E_t durch Projektion dieser interpolierten Feldvektoren auf die ursprünglichen Normalen- und Tangentenvektoren der Kontur ermittelt:

$$E_{n,f} = E_{x,f} \hat{n}_x + E_{z,f} \hat{n}_z \quad (\text{A18})$$

$$E_{t,f} = E_{x,f} \hat{t}_x + E_{z,f} \hat{t}_z \quad (\text{A19})$$

$$E_{n,l} = E_{x,l} \hat{n}_x + E_{z,l} \hat{n}_z \quad (\text{A20})$$

$$E_{t,l} = E_{x,l} \hat{t}_x + E_{z,l} \hat{t}_z E_{n,f} = E_{x,f} \hat{n}_x + E_{z,f} \hat{n}_z \quad (\text{A21})$$

Anhang C: ZUSATZINFORMATIONEN ZUM EXPERIMENTELLEN AUFBAU

C.1 VERWENDETE MECHANISCHE BAUTEILE

Komponente (Hersteller/Modell)	Wichtige Spezifikationen
Thorlabs PT1-Z8 (1-Achse), PT3M-Z8 (3-Achsen)	Verfahrweg: 25 mm, Wiederholgenauigkeit: 0,2 μm , Geschwindigkeit: 0,05 - 2,6 mm/s
Thorlabs Z825B DC Servo Aktuator	Auflösung: 29 nm, Maximaler Hub: 25 mm, Backlash: < 8 μm
Thorlabs KDC101 K-Cube DC Servo Controller	USB 3.0 Schnittstelle; Steuerbar durch Kinesis
Schunk SHA-040-000-000 & SHK-040-000-000	Wiederholgenauigkeit: 0,02 mm
Spindler & Hoyer Linearachse	Hub: 25 mm

C.2 VERWENDETE OPTISCHE BAUTEILE

Komponente (Hersteller/Modell)	Wichtige Spezifikationen
Matrix Vision (jetzt Balluff) MV-1013G-1111 (jetzt Balluff BVS CA-SF1-0013ZG)	Sensor: EV76C560 CMOS, Auflösung: 1280×1024 Pixel, Pixelgröße: 5,3 µm, Schnittstelle: USB 3.0/GigE
Thorlabs MVL6X12Z (6,5× mit 12 mm Fokus)	Vergrößerung: 0,7-4,5× (6,5× Zoom-Bereich), Fokusbereich: 12 mm, NA: 0,006-0,142, C-Mount
Thorlabs MVL10A	Länge: 10 mm, C-Mount kompatibel, für 2/3" Sensoren optimiert
Thorlabs R1L3S3P	Typ: R1L3S3P, Gitterabstand definiert für Kalibrierung
Opto Engineering LTCLHP016-W	Strahldurchmesser: 20 mm, Arbeitsabstand: 35-70 mm, Versorgung: 12-24 V
Leica Surgipath Apex Adhesive	Funktion: Diffuse Beleuchtung, Material: Aufgeraute Glasoberfläche
VISHAY VLMU3500-385-060	Wellenlänge: 385 nm, Leistung: 780 mW, LED-Typ: UV für Aushärtung
Thorlabs LEDD1B	Typ: LED-Treiber für UV-LEDs, Strom regelbar

C.3 INTRINSISCHE KAMERAPARAMETER

Die durch Zhangs Methode bestimmte intrinsische Kameraparameter der beiden verwendeten Kameras. Die metrischen Werte ergeben sich aus der Sensor Pixelgröße von $5,3\text{ }\mu\text{m}$.

Parameter	Symbol	X-Kamera [px]	Y-Kamera [px]	X-Kamera [mm]	Y-Kamera [mm]
Brennweite	f_x	2135,24	2147,29	11,32	11,38
	f_y	2133,48	2145,42	11,31	11,37
Hauptpunkt	c_x	643,08	644,03	3,41	3,41
	c_y	524,49	511,67	2,78	2,71
Radiale Verz.	k_1	-0,1293	-0,1378	-	-
	k_2	0,2235	0,3129	-	-
Tangentiale	p_1	-0,0004	-0,0008	-	-
Verz.	p_2	0,0005	0,0003	-	-

C.4 SPEZIFIKATIONEN HOCHSPANNUNGSGERÄT

Spezifikationen des Hochspannungsnetzteils hivolt HAR42-4 mit HA3B3-S [78]

Eigenschaft	Symbol	Spezifikation
Maximale Ausgangs- spannung	U_{max}	$\pm 3000\text{ V} \pm 10\text{ mV}$
Steuerungsspannung	U_{in}	$\pm 10\text{ V}$
Verstärkungsfaktor	G	$300 \pm 0,1\%$
Spannungsmonitor (Ausgang)	-	$\pm 10\text{ V} \triangleq \pm 3000\text{ V}, \pm 0,2\%$
Strommonitor (Aus- gang)	-	$\pm 10\text{ V} \triangleq \pm 3\text{ mA}, \pm 1\%$
Slew Rate ($C_L = 100\text{ pF}$)	SR	$> 25\text{ V}/\mu\text{s}$

C.5 BERECHNUNG ANSTIEGSZEIT

Ein entscheidendes Kriterium für die dynamische Ansteuerung ist die Anstiegs- bzw. Abfallzeit des Systems. Die Slew Rate SR von über $25 \text{ V}/\mu\text{s}$ führt bei einer maximalen Spannung von 3000 V zu einer minimalen Anstiegszeit von $120 \mu\text{s}$:

$$t_{Ramp}^{min} = \frac{U_{max}}{SR} = 120 \mu\text{s} \quad (\text{B22})$$

Diese Zeit darf nicht unterschritten werden, wenn das Signal ohne Verzerrungen übertragen werden soll. [78]

In den durchgeführten Versuchsreihen wurde die Anstiegszeit der an die Elektroden angelegten Spannung durch die Software auf $200 \mu\text{s}$ festgelegt. Diese Parametrierung erfolgte zu einem Zeitpunkt, zu dem die reale Lastkapazität C_L des gesamten Elektroden Aufbaus noch nicht messtechnisch ermittelt war. Die Annahme basierte daher auf den idealisierten Spezifikationen der Hochspannungsquelle ohne die reale gemessene kapazitive Last.

Eine nachträgliche messtechnische Charakterisierung des Aufbaus ergab eine signifikante Lastkapazität von $C_{L,real} = 0,52 \text{ nF}$. Dieser Wert ist ca. das fünffache der idealisierten Testbedingungen der Komponenten und führt zu einer Limitierung der realisierbaren Anstiegsgeschwindigkeit und damit der maximalen Abtastrate mit welcher der Eingang bedient werden darf. Aus der datenblattspezifischen Anstiegsgeschwindigkeit des Verstärkers von $SR_{spec} = 25 \text{ V}/\mu\text{s}$ bei einer Test-Lastkapazität von $C_{L,spec} = 100 \text{ pF}$ [78] wird zunächst der maximale interne Ladestrom I bestimmt:

$$I = SR_{spec} \cdot C_{L,spec} = 25 \cdot 10^6 \frac{V}{s} \cdot 100 \cdot 10^{-12} F = 2,5 \text{ mA} \quad (\text{B23})$$

Mit diesem Strom und der gemessenen realen Lastkapazität $C_{L,real}$ ergibt sich die für den Versuchsaufbau gültige, effektive Anstiegs-
geschwindigkeit SR_{eff} :

$$SR_{eff} = \frac{I}{C_{L,real}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} A}{0,52 \cdot 10^{-9} F} \approx 4,8 \frac{V}{\mu s} \quad (\text{B24})$$

So ergibt sich eine minimalen Anstiegszeit von $t_{ramp}^{min} = 625 \mu s$.

C.6 VERWENDETE HOCHSPANNUNGSBAUTEILE

Komponente (Hersteller/Modell)	Wichtige Spezifikationen
hivolt.de HAR42-4 Mainframe	Max. Ausgangsspannung: 3000 V (mit HA3B3-S), 4 Kanäle, Eingangsleistung: 1,3 A bei 115V
hivolt.de HA3B3-S Amplifier Module	Ausgangsspannung: ± 3000 V, Ausgangsstrom: ± 3 mA, Verstärkung: 300, Eingangsbereich: ± 10 V
Diverse Präzisions-Stiftleisten (DIN EN 60603-13, 2,54 mm Raster)	5×5 Kontakte, Rastermaß: 2,54 mm, abgerundete Kontakte zur Minimierung von Feldüberhöhungen
hivolt HSL-10S-0.5-A-2 Hochspannungsleitung	Nennspannung: 10 kV DC, spezifikationsgerechte Hochspannungsleitung für Zuleitung zur Quelle

C.7 FUNKTIONSWEISE AUTOFOKUS

Die eingesetzten Objektive weisen eine geringe Schärfentiefe auf, die im Bereich von nur 0,02 mm liegen kann. Da das Ziel der Bildaufnahme die Erfassung einer maximal scharfen Tropfenkontur ist, ist eine zuverlässige automatische Fokussierung unerlässlich. Grundsätzlich wird zwischen aktiven (z. B. abstandsmessenden) und passiven (bildbasierten) Autofokus-Systemen unterschieden. Innerhalb der passiven Verfahren existieren unter anderem der schnelle, aber hardwareintensive phasenbasierte Autofokus sowie der rechenintensivere, aber ohne Zusatzhardware realisierbare kontrastbasierte Autofokus [76], [118], [119].

Da die zu untersuchenden Tropfen für den Fokussiervorgang statisch sind und die Komplexität eines aktiven oder phasenbasierten Systems keinen signifikanten Mehrwert bieten würde, wird in dieser Arbeit ein kontrastbasierter Autofokus verwendet. Zur Auswahl einer optimalen Metrik wurden 24 verschiedene Verfahren aus dem Übersichtsartikel von Pertuz et al. [81] systematisch evaluiert. Die Implementierung der Tests erfolgte unter Nutzung der vom selben Autor bereitgestellten MATLAB-Funktion [83]. Zur Ermittlung der für das System am besten geeigneten Fokusmetrik wurde ein Experiment durchgeführt. Bei diesem Experiment wurde eine Referenzkugel entlang der optischen Achse bewegt und in definierten Abständen Bilder aufgenommen, wie in Abbildung C1 dargestellt.

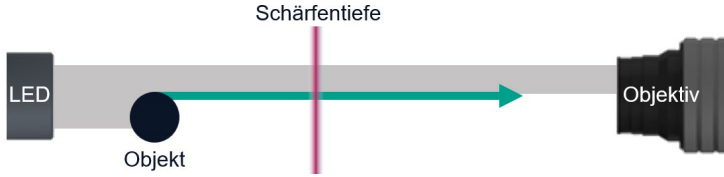


Abbildung C1: Schematischer Aufbau zur Evaluation von Fokustrismetrien. Ein Referenzobjekt wird entlang der optischen Achse durch die Schärfentiefe der Kamera bewegt, um die Leistung verschiedener bildbasierter Schärfemaße zu vergleichen.

Die Auswertung ergab, dass sich das Tenengrad-Maß aufgrund der symmetrischen Verteilung seiner Messwerte und seines glatten Signalverlaufs am besten eignet. Das Tenengrad-Maß wird nach [81], [82] wie folgt berechnet:

$$FM_{Tenengrad} = \sum_y \sum_x \left(G_x^2(x, y) + G_y^2(x, y) \right) \quad (7.1)$$

Hierbei bezeichnen $G_x(x, y)$ und $G_y(x, y)$ die Bildgradienten an der Pixelposition (x, y) , die durch eine Faltung des Bildes mit Sobel-Operatoren zur Kantendetektion ermittelt werden.

Die Suche nach dem Fokusmaximum im Versuchsaufbau erfolgt nach dem Gradientenanstiegsprinzip. Für einen Autofokusdurchlauf werden ein Suchbereich und eine Schrittzahl festgelegt. Die Steuerung bewegt die Linearachse schrittweise durch diesen Bereich. An jeder Position werden drei Bilder aufgenommen. Die einzelnen Tenengrad-Werte werden berechnet und anschließend gemittelt. Diese Mittelung erhöht die Robustheit des Verfahrens gegenüber Störungen wie Bildrauschen. Nach dem vollständigen Durchlauf wird die

Position mit dem höchsten mittleren Schärfewert als optimaler Fokus identifiziert und von den Linearachsen angefahren.

Dieses Vorgehen stellt sicher, dass vor jeder Messung eine optimale und reproduzierbare Fokussierung auf die Tropfenkontur vorliegt, was die Grundvoraussetzung für die nachfolgende präzise geometrische Analyse ist.

C.8 CHARAKTERISIERUNG HOCHSPANNUNGSQUELLE

Für die Charakterisierung der Hochspannungsquelle wurden insgesamt 70 Messungen durchgeführt, bestehend aus 7 Spannungsstufen von 0 V bis 3000 V, wobei jede Stufe 10-mal wiederholt wurde. Die Anstiegszeit war wie bereits beschrieben auf 200 μ s und die Halte-dauer der Spannungsstufe wurde auf 10 s festgelegt. Wie in Abbil-dung C2 dargestellt, zeigen die Rohdaten zu Beginn einen unerwar-teten Abklingvorgang, der im orangen Kasten hervorgehoben ist. Die statistische Auswertung aller 70 Versuche zeigt, dass es sich hierbei um ein reproduzierbares Artefakt handelt.

Die durchschnittliche Anfangsspannung dieses Offsets liegt über alle Spannungsstufen hinweg im Durchschnitt zwischen 94,1 V und 94,8 V (hivolt-Äquivalent $10\text{ V} \triangleq 3000\text{ V}$). Die Abklingzeit beträgt im Durchschnitt zwischen 168 ms und 177 ms. Da dieser Effekt nur in der MATLAB-Ansteuerung, nicht aber in der herstellereigenen NI-MAX-Software auftritt und sich im Vergleich mit anderen bauglei-chen Messkarten unterscheidet, wird er auf ein softwarebasiertes Ein-schaltverhalten der NI-DAQ-Karte zurückgeführt.

Für die weitere Analyse wird dieser vorhersagbare Offset daher kor-riert, indem der stabile Spannungswert zwischen 0,3 s und 0,7 s ge-mittelt und als individueller Nullpunkt jeder Messung definiert wird.

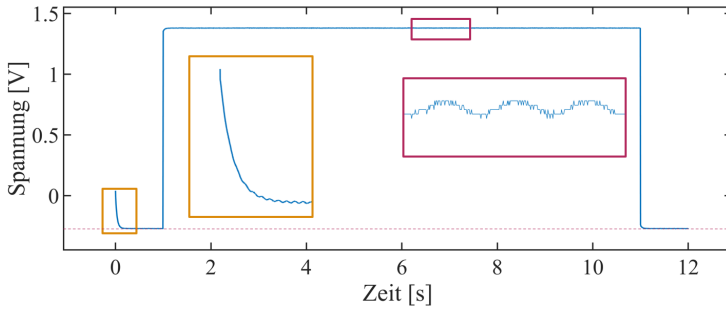


Abbildung C2: Charakterisierung des Ausgangssignals der Hochspannungsquelle. Dargestellt ist das gemessene Monitor-Spannungssignal eines Versuchs. Hervorgehoben sind der Einschwingvorgang zu Beginn des Signals (oranger Kasten) und das überlagerte 50-Hz-Störsignal während der Haltephase (lila Kasten).

Die Analyse der korrigierten Daten bestätigt, dass das System nach diesem Einschwingvorgang ein stabiles und vorhersagbares Verhalten zeigt. Das dynamische Ansprechverhalten ist mit einer konstanten Systemlatenz von ca. -3,8 ms (für die Stufen 2-7) stabil.

Eine weitere Beobachtung ist ein überlagertes Sinussignal, das auf dem konstanten Grundsignal liegt, hier rot umrahmt. Dieses ist von der Spannungsstufe unabhängig und beträgt 50 Hz mit einer Amplitude von ca. 0,58 V bezogen auf die äquivalente hivolt Spannung. Darüber hinaus sind die systematischen Abweichungen des Systems linear. Der Leckstrom in der Haltephase steigt proportional zur Spannungsstufe von nahezu 0 mA auf 0,011 mA an. Die Boxplots der einzelnen Parameter sind in Abbildung C3 und Abbildung C4 dargestellt.

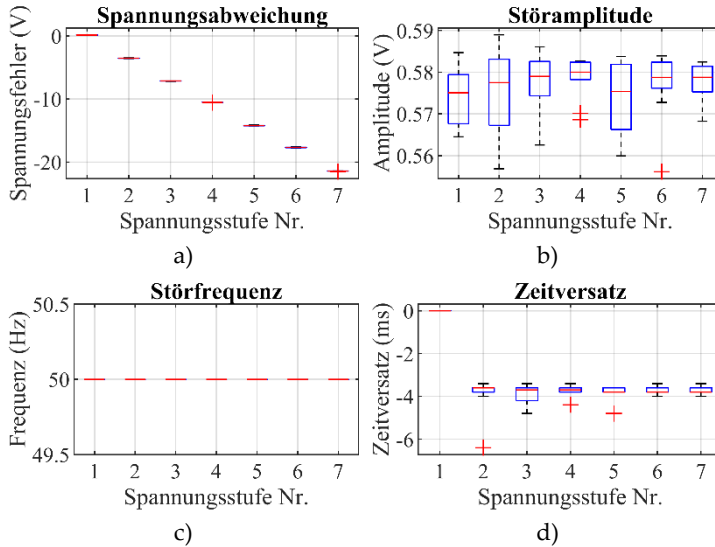


Abbildung C3: Boxplots der einzelnen Parameter über die Spannungsstufen

Eine weitere Linearität ist bei der Spannungsabweichung zwischen Eingang- und Ausgangssignal vorhanden. Es hat einen positiven Offset von +0,13 V bei der niedrigsten Stufe bis zu einem negativen Fehler von -21,43 V bei der höchsten Stufe. Diese Linearität des systematischen Fehlers, verbunden mit den geringen Standardabweichungen aller Kennzahlen, bestätigt die Zuverlässigkeit und Reproduzierbarkeit des gesamten Messaufbaus.

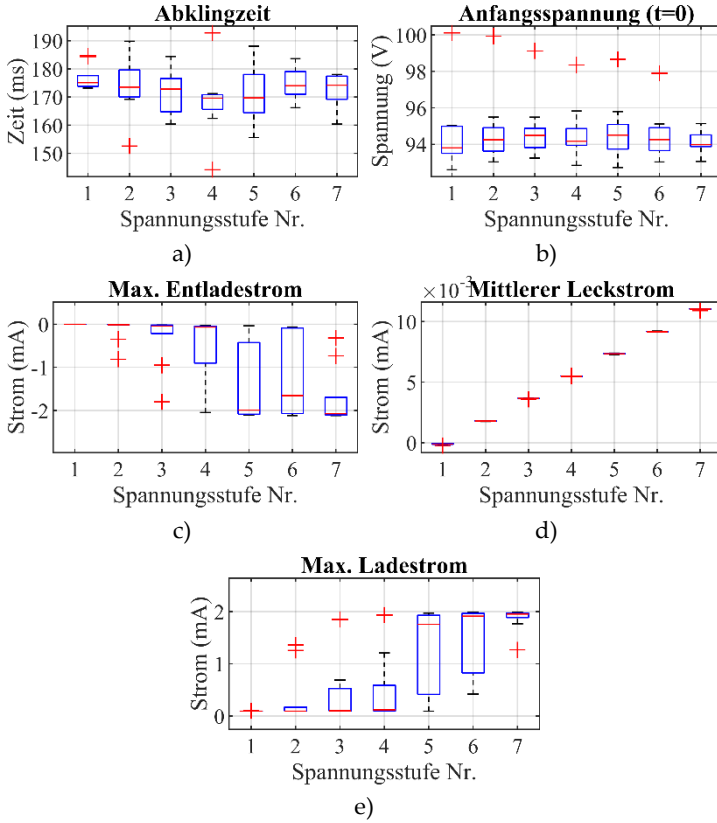


Abbildung C4: Boxplots der Einzelnen Parameter über die Spannungsstufen

C.9 VERWENDETE ELEKTRONISCHE BAUTEILE

Komponente	Wichtige Spezifikationen
National Instruments USB-6001 Multifunction DAQ	8 AI (14-bit, 20 kS/s), 2 AO (14-bit, 5 kS/s), 13 DIO, 32-bit Counter, USB-Schnittstelle
Arduino Arduino Nano	Mikrocontroller: ATmega328P, Betriebsspannung: 5V, Digitale I/O: 14, Analoge Eingänge: 8
WAGO 221-412 Verbindungsklemmen	Nennspannung: 450 V (hier bei 3000 V außerhalb Spezifikation betrieben)
H07V-K Kupferkabel (1,5 mm ²)	Nennspannung: 750 V (hier bei 3000 V außerhalb Spezifikation betrieben), Querschnitt: 1,5 mm ²
Whadda WPI453 mit ADS1115	ADC: ADS1115 16-bit, Auflösung: 0,125 mV bei $\pm 4,096$ V Bereich

C.10 VERWENDETE BAUTEILE DER SICHERHEITSEINHAUSUNG

Komponente	Wichtige Spezifikationen
Standard-Aluminium-profile	Material: Aluminium, Funktion: Geerdete Sicherheitseinhausung mit Zugangskontrolle
Pilz PSEnmlck 7482A-PSEnML	Typ: Sicherheitsschalter mit Zwangsverriegelung, Schutzart: IP67
Trotec PAC 2100X	Kühlleistung: 2 kW (7000 BTU/h), Entfeuchtung: 1,8 l/h, Betrieb: 17-35°C, Geräuschpegel: 53 dB(A)
Diverse Nema17-05GM	Typ: Schrittmotor, Schrittwinkel: 1,8°, Haltemoment: ~0,4 Nm
Diverse A4988 Stepper Driver	Mikroschritt-Treiber für Nema17 Motoren, Strom bis 2A
YAGEO Nexensos M1020 PT1000 (Klasse F 0.1)	Typ: PT1000, Toleranzklasse: $\pm 1/3B$, Temperaturbereich: -70 bis +500°C, TCR: 3850 ppm/K
Bosch Sensortec BME680	4-in-1 Sensor: Gas/Temperatur/Luftfeuchtigkeit/Luftdruck, Versorgung: 1,71-3,6 V, I ² C/SPI
Whadda WPI453 mit ADS1115	ADC: ADS1115 16-bit, Auflösung: 0,125 mV bei $\pm 4,096V$ Bereich

C.11 POSITION DER TEMPERATURMESSPUNKTE

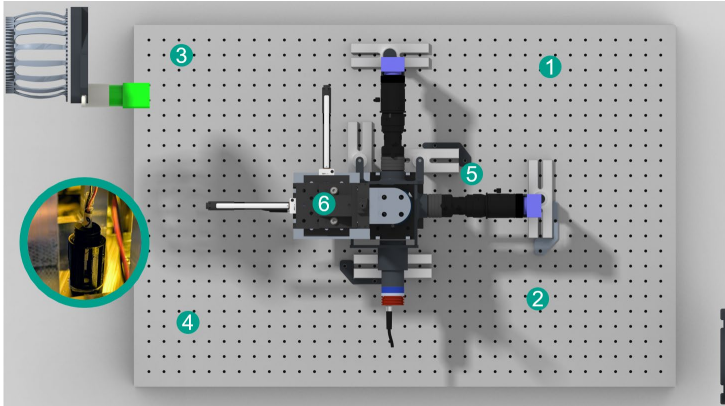


Abbildung C5: Positionierung der Temperatursensoren im Versuchsaufbau. Die nummerierten Punkte (1-6) zeigen die Positionen der sechs PT1000-Sensoren. Sensor 6 (vergrößert dargestellt) dient als primärer Regelsensor.

C.12 JUSTIERWERTE DER TEMPERATURSENSOREN

Zur Kompensation von individuellen Sensor- und Schaltungstoleranzen wurde das gesamte Messsystem justiert. Als Referenzinstrument diente ein Thermohygrometer (Trotec T210) mit einer Auflösung von 0,1°C und 0,1 % relativer Feuchte (rF). Es hat eine zertifizierte Genauigkeit von $\pm 0,4^\circ\text{C}$ und $\pm 2\%$ rF[120]. Für jeden Sensor wurde ein Korrektur-Offset empirisch bestimmt und als letzter Berechnungsschritt auf den Rohwert addiert. Die ermittelten Korrekturwerte sind in Tabelle B6 zusammengefasst.

Tabelle B6: Empirisch ermittelte Korrektur-Offsets der Temperatursensoren

Sensorbezeichnung	Offset-Wert	Einheit
Sensor 0	+0,38	°C
Sensor 1	+0,17	°C
Sensor 2	-0,19	°C
Sensor 3	-0,27	°C
Sensor 4	-0,18	°C
Sensor 5	-0,67	°C
BME 1 (Temp)	-0,71	°C
BME 1 (Hum)	+0,67	% rF
BME 2 (Temp)	-0,39	°C
BME 2 (Hum)	-0,37	% rF

C.13 CHARAKTERISIERUNG KÜHLUNG

Die Sicherheitsbox wurde durch einen Langzeitversuch charakterisiert. Da die Kameratemperaturen relevant sind, wurden diese auch aufgezeichnet. Die Kühlung wurde über 8 Stunden mit einem Sollwert von 17°C betrieben, während die Temperatur der Kameras aufgezeichnet wurde, um die Temperaturentwicklung zu ermitteln. Auf Basis dieser Daten wird eine Messunsicherheitsanalyse gemacht.

Im stabilen Betrieb wird die Solltemperatur von $17,0^{\circ}\text{C}$ am Regelsensor s6 mit einem mittleren Wert von $17,0^{\circ}\text{C}$ exakt eingehalten. Die thermische Stabilität ist mit einer Standardabweichung von $\pm 0,14^{\circ}\text{C}$ an dieser Position gegeben. Wichtig für die Versuche ist eine kleine Schwankung der Kameratemperaturen. Die X-Kamera hat einen mittleren Temperaturwert von $43,94^{\circ}\text{C}$ und eine geringe Standardabweichung von $0,16^{\circ}\text{C}$. Die X-Kamera hat einen mittleren Temperaturwert von 42°C und eine geringe Standardabweichung von $0,17^{\circ}\text{C}$. Diese beträgt $\pm 0,13^{\circ}\text{C}$ beträgt. Dies zeigt, dass eine reproduzierbare Messumgebung vorliegt.

Die Analyse des Einschwingverhaltens zeigt eine gut gedämpfte Regelung. Als eingeschwungen gilt das System, wenn es die Messunsicherheit nicht mehr verlässt. Nach einer Einschwingzeit von ca. 23 Minuten hat das System einen stationären Zustand erreicht. Eine Darstellung der Temperaturkurven ist in Abbildung C7 a) zu finden, einschließlich einer Vergrößerung. Das Einschwingverhalten ist in Abbildung C7 b) zu sehen.

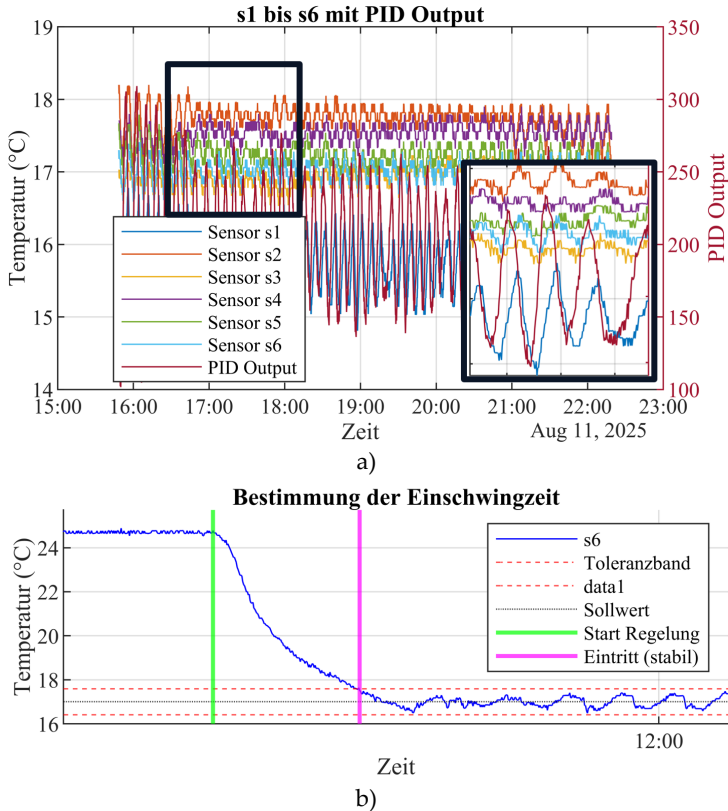


Abbildung C7: Charakterisierung der Temperaturregelung. a) Langzeitmessung der sechs Temperatursensoren und des PID-Stellsignals. b) Detailansicht des Einschwingverhaltens von Regelsensor s6 nach Aktivierung der Regelung.

C.14 MESSUNSICHERHEIT KÜHLUNG

Die Bestimmung der Gesamtmessunsicherheit der Temperaturmessung erfolgt nach den Richtlinien des "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (GUM). Die finale, korrigierte Temperaturmessgröße T ergibt sich aus dem vom Sensor ausgegebenen Wert T_{Sensor} und additiven Korrekturen. Das vereinfachte Modell der Messung lautet:

$$T = T_{\text{Sensor}} + \delta T_{\text{Kalibrierung}} + \delta T_{\text{PT1000}} + \delta T_{\text{Resistor}} + \delta T_{\text{ADC}} \quad (7.2)$$

Mit δT_{Sensor} , $\delta T_{\text{Kalibrierung}}$, δT_{PT1000} , $\delta T_{\text{Resistor}}$ und δT_{kette} als Unsicherheitsbeiträge der Kalibrierung, der zeitlichen Stabilität des Sensor 6 und der restlichen Messkette bestehend aus den Pt1000, einem $10k\Omega$ Widerstand und der Unsicherheit des ADC. Da es sich um eine rein additive Verknüpfung handelt, sind die Sensitivitätskoeffizienten $c_i = \frac{\partial T}{\partial T_i}$ für alle Beiträge gleich 1.

Das detaillierte Budget, das alle bekannten Unsicherheitsquellen quantifiziert, ist in Tabelle C8 dargestellt. Es werden die Standardunsicherheiten u_i , die Freiheitsgrade ν_i sowie die absoluten und relativen Beiträge zum Budget aufgeführt.

Tabelle C8: Messunsicherheitsbudget

Messgröße	Symbol	Unsicherheit $u(x)$ [$^{\circ}\text{C}$]	Standardunsicherheit	Wert	Freiheitsgrad ν_i	Sensitivität Koeffizient c_i	abs. Beitrag $u_i(y)$ [$^{\circ}\text{C}$]
Kal. (Typ B)	$\delta T_{\text{Kalibrie}}$	0,4 $^{\circ}\text{C}$	0,2 $^{\circ}\text{C}$	0	∞	1	0,2 $^{\circ}\text{C}$
Stabilität (Typ A)	$\delta T_{\text{Stabilität}}$	0,15	1	0	3114	1	1
Pt1000 (Typ B)	δT_{kette}	0,42	0,25	0	∞	1	0,25
10k Ω (Typ B)		0,15	0,09	0	∞	1	0,09
ADC (Typ B)		0,1	0,06	0	∞	1	0,06

Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(T)$ ergibt sich aus der quadratischen Summe der absoluten Beiträge:

$$u_c(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 c_i u_i^2(y)} = 0,37^{\circ}\text{C} \quad (7.3)$$

Zur Bestimmung des Erweiterungsfaktors k werden die effektiven Freiheitsgrade ν_{eff} nach der Welch-Satterthwaite-Formel berechnet.

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{(c_i u(x_i))^4}{v_i} \right]} \approx 116 \quad (7.4)$$

$$k = 2 \sqrt{1 + \frac{3,3}{v_{eff}}} \approx 2,03 \quad (7.5)$$

Die erweiterte Messunsicherheit $U(y)$ beträgt somit:

$$U(y) = k \cdot u_c = 2,03 \cdot 0,37 \circ C = 0,75^\circ C \quad (7.6)$$

Damit ergibt sich für die Unsicherheit $T = (17,00 \pm 0,75)^\circ C$ im Vertrauensniveau von 95 %.

Anhang D: EXPERIMENTE

D.1 BESCHREIBUNG DER SYNTHETISCHEN FUNKTIONEN

Die synthetischen Geometrien zum Testen des PBCA-Algorithmus umfassen Kreissegmente, Hyperbeln, geneigte Hyperbeln sowie eine sigmoidale Rechteckfunktion, um die bei Mehranodenanordnungen beobachteten rechteckigen Formen zu berücksichtigen. Diese Geometrien wurden gewählt, da sie charakteristische Merkmale realer Tropfendeformationen repräsentieren. Die Daten zur Bewertung des PBCA-Algorithmus werden anhand der in den folgenden Abschnitten dargelegten Gleichungen generiert.

Die Geometrien sind so dimensioniert, dass sie in ein virtuelles Bild mit einer Breite von $w_{im} = 1280$ px und einer Höhe von $h_{im} = 1024$ px passen, was der Auflösung der verwendeten Kameras entspricht. Zur Diskretisierung der Daten werden die X- und Y-Werte gerundet. Für das Kreissegment lauten die parametrischen Gleichungen:

$$x_{kreis} = r_{kreis} \cdot \cos(v_{kreis}) \quad (A25)$$

$$z_{kreis} = r_{kreis} \cdot \sin(v_{kreis}) \quad (A26)$$

Hierbei sind (x_{kreis}, z_{kreis}) die Kreiskoordinaten, r_{kreis} der Kreisradius und v_{kreis} der Winkelbereich des Kreissegments. Für die Hyperbel wird die Formel verwendet:

$$z_{hyp} = b \cdot \sqrt{1 + \frac{(x_{hyp}^2)}{a^2}} \quad (A27)$$

Mit z_{hyp} und x_{hyp} als die Hyperbelkoordinaten, a der horizontale und b der vertikale Streckungsfaktor. Die geneigte Hyperbel nutzt dieselbe Gleichung, wird aber mittels einer Rotationsmatrix um 15° verkippt.

Die rechteckige Form wird unter Verwendung einer Funktion mit sigmoidalen Eigenschaften durch die Kombination zweier Tangens hyperbolicus-Funktionen erzeugt:

$$z_{sig} = -0.5 \cdot \left(\tanh\left(\frac{x_{sig} + c}{d_1}\right) - \tanh\left(\frac{x_{sig} - c}{d_2}\right) \right) \cdot 200 \quad (A28)$$

Hierbei sind x_{sig} und z_{sig} die Koordinaten, c der Abstand der Steigung vom Ursprung und d_1 sowie d_2 Parameter zur Steuerung der Steilheiten. Die verwendeten Werte für die Parameter sind in Tabelle D9 aufgeführt. Dabei sind die a_{hyp} und b_{hyp} die Parameter für die Hyperbel und a_{ghyp} und a_{bhyp} die Parameter für die geneigte Hyperbel.

Tabelle D9: Parameter der in Abbildung 6.1 dargestellten synthetischen Kurven [px]

Farbe	r_{kreis}	a_{hyp}	b_{hyp}	a_{ghyp}	b_{ghyp}	c	d_1	d_2
Blau (1)	494	50	300	50	150	50	50	25
Rot (2)	319	150	300	100	150	100	50	25
Gelb (3)	533	600	300	300	150	300	50	25

Anschließend werden die Kurven so skaliert, dass die Tropfenbasis der halben Bildbreite und die maximale Höhe einem Fünftel der Bildhöhe entsprechen:

$$x_{\text{skaliert}} = x_{\text{unskaliert}} \cdot \frac{w_{\text{im}}}{2} \quad (\text{A29})$$

$$z_{\text{skaliert}} = z_{\text{unskaliert}} \cdot \frac{h_{\text{im}}}{5} \quad (\text{A30})$$

Dabei sind $(x_{\text{skaliert}}, z_{\text{skaliert}})$ die skalierten und $(x_{\text{unscaled}}, z_{\text{unscaled}})$ die unskalierten Koordinaten.

D.2 SKALIERUNGSFAKTOREN CAD-MODELLE

Tabelle D10: Metriken zum Vergleich der rekonstruierten CAD-Modelle (Halbkugel, achsensymmetrische und nicht achsensymmetrische Deformation) mit der Referenzgeometrie.

	Halbkugel	Achssymmet- risch	Nicht Achs- symmetrisch
px_{base} [px]	906	1040	1070
px_{ybase} [px]	906	1040	1138
mm_{base} [mm]	3 (X & Y)	9 (X & Y)	9,64 (X) 10,26 (Y)
$s_{xfactor}$ [μm/px]	3,31	8,65	9,01
$s_{yfactor}$ [μm/px]	3,31	8,65	9,02

D.3 UNSICHERHEIT INDIREKTE VOLUMENMESSUNG

Die Berechnung der Messunsicherheit für das Referenzvolumen V , das aus der gewogenen Masse m und der bekannten Dichte ρ bestimmt wird ($V = m/\rho$), folgt den Richtlinien des „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ (GUM). Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(V)$ wird mittels des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes bestimmt, was zu folgender spezifischer Beziehung führt:

$$u_c(V) = \sqrt{\left(\frac{u_m}{\rho}\right)^2 + \frac{(m \cdot u_\rho)^2}{\rho^2}} \quad (\text{A31})$$

Die Standardunsicherheiten der Eingangsgrößen, u_m (Masse) und u_ρ (Dichte), werden aus den Genauigkeitsangaben der Messgeräte ($\pm 0,1 \text{ mg}$ bzw. $\pm 0,1 \text{ kg/m}^3$) abgeleitet. Hierfür wird die konservative Annahme einer Rechteckverteilung getroffen, bei der die Standardunsicherheit aus der Grenzabweichung a mit $u = a/\sqrt{3}$ berechnet wird.

Um ein Abdeckungsintervall zu erhalten, das den wahren Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % einschließt, wird die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(V)$ mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ zur erweiterten Messunsicherheit U_{95} multipliziert.

Für die im Experiment verwendeten Tropfenmassen (10,4 mg bis 19,6 mg) und eine Ölsäuredichte von $\rho = 893,8 \text{ kg/m}^3$ ergibt diese Berechnung eine konsistente erweiterte Messunsicherheit von:

$$U_{95} \approx 0,13 \text{ mm}^3 \quad (\text{A32})$$

Dieser Wert dient in den experimentellen Auswertungen als Unsicherheitsintervall für das Referenzvolumen.

D.4 GRAPHEN ZUR MONTE CARLO SIMULATION

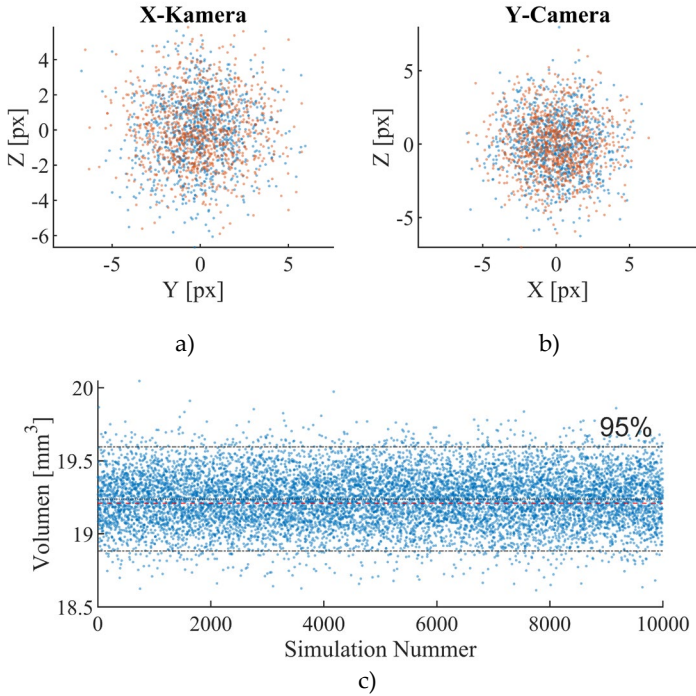


Abbildung D11: Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation zur Messunsicherheitsanalyse des Stifts. a) Normalverteiltes Rauschen der Kontaktpunkte. b) Normalverteiltes Rauschen der Kontaktpunkte. c) Normalverteilte Variation des Volumens mit dem Mittelwert in rot und den 95 % Konfidenzintervall Grenzen der Messwerte. (modifiziert nach [88])

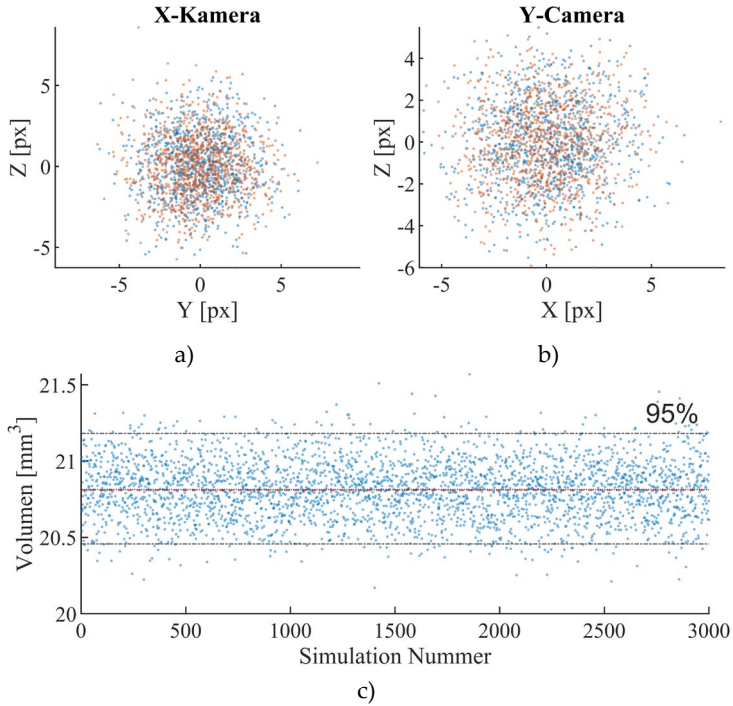


Abbildung D12: Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation zur Messunsicherheitsanalyse des Ölsäuretropfens. a) Normalverteiltes Rauschen der Kontaktpunkte. b) Normalverteiltes Rauschen der Kontaktpunkte. c) Normalverteilte Variation des Volumens mit dem Mittelwert in rot und den 95 % Konfidenzintervall Grenzen der Messwerte.

D.5 DATEN VOLUMENREKONSTRUKTION TROPFEN UND EXPERIMENTBILDER

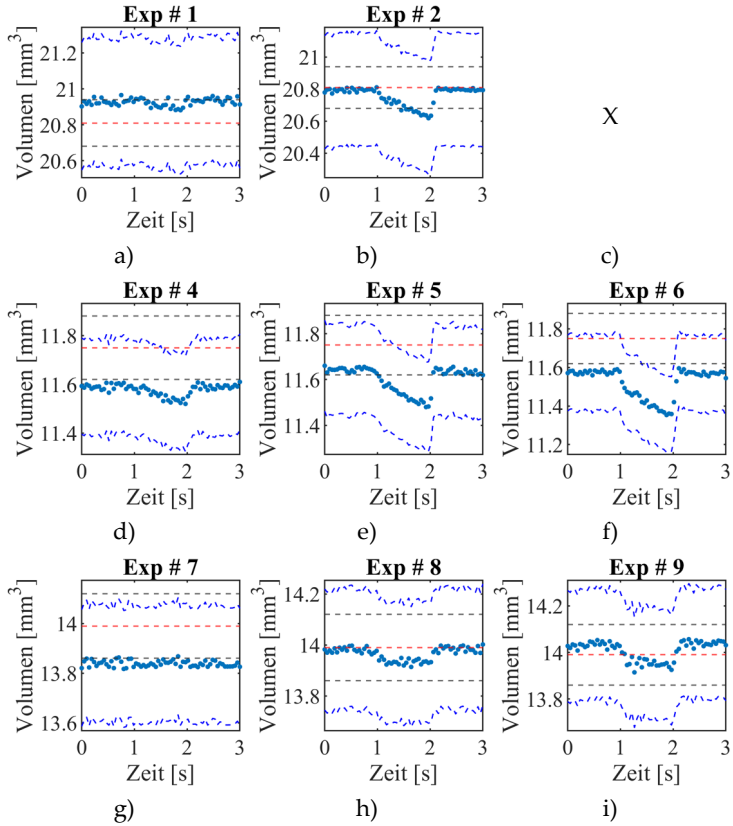
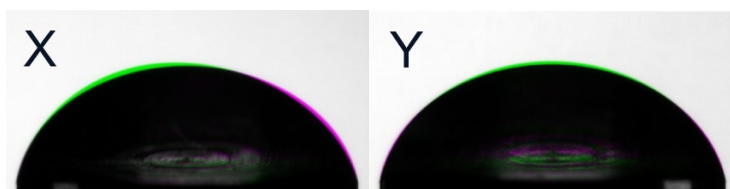
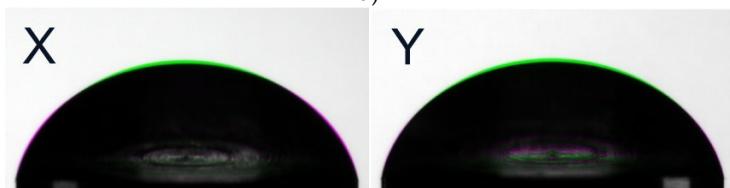


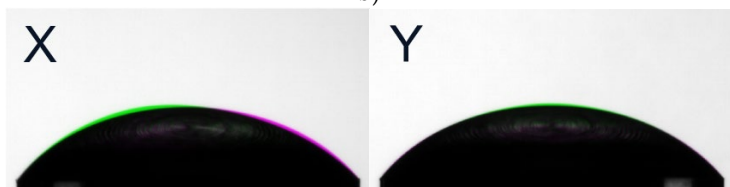
Abbildung D13: Alle Verläufe der Deformierten Tropfen



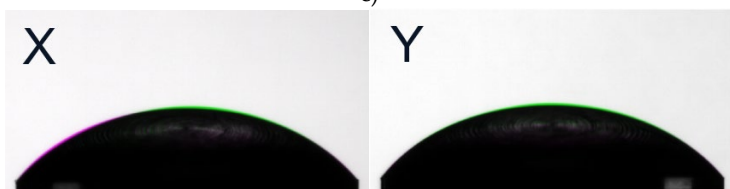
a)



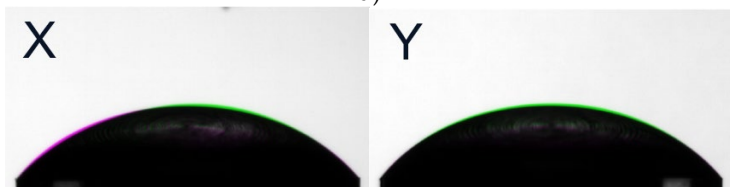
b)



c)



d)



e)

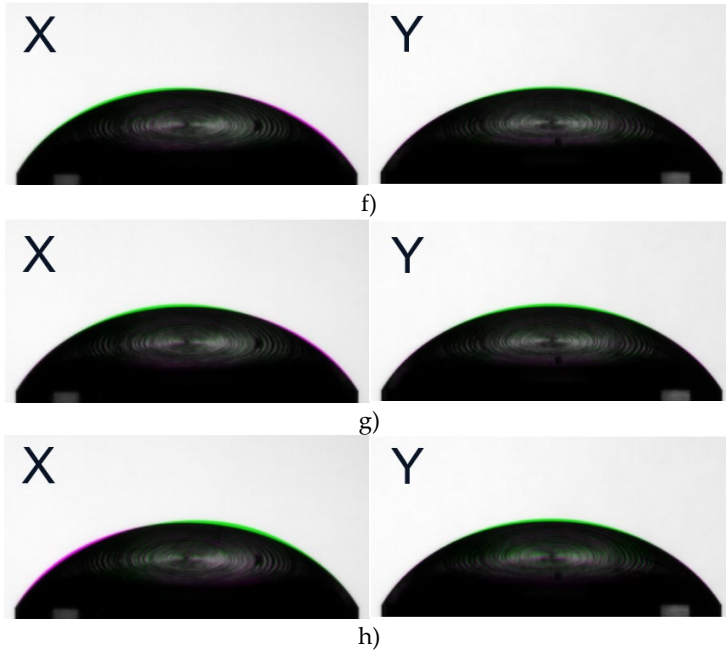


Abbildung D14: Differenzbilder aller Versuche außer Versuch 3. a) Experiment 1. b) Experiment 2. c) Experiment 4. d) Experiment 5. e) Experiment 6. f) Experiment 7. g) Experiment 8. g) Experiment 9.

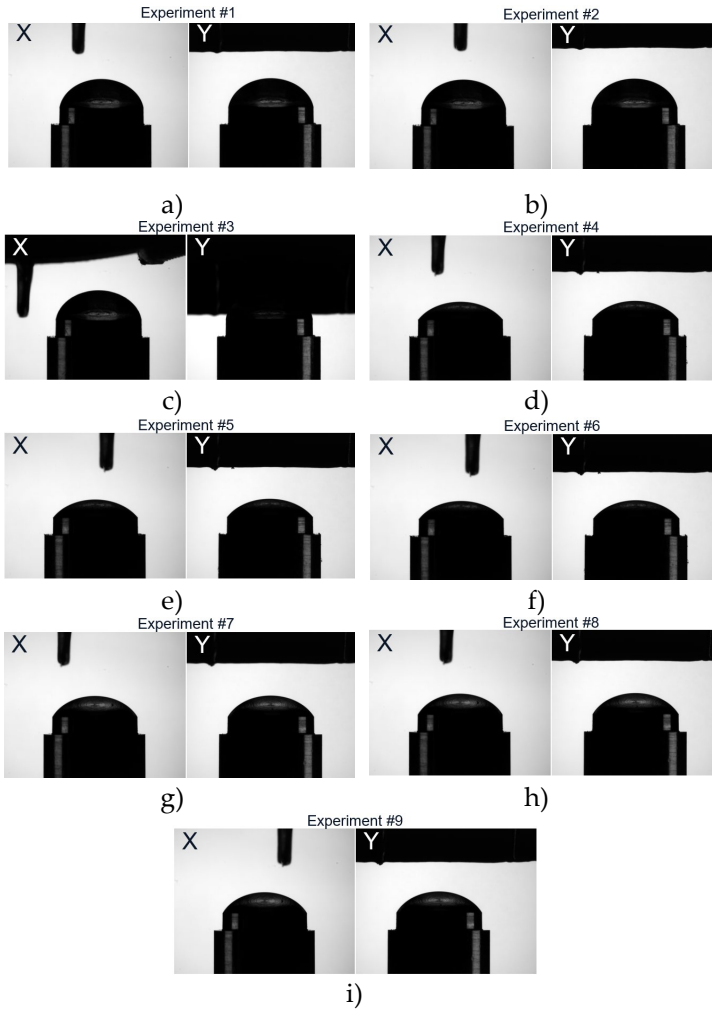


Abbildung D15: X- und Y-Bilder der Versuche mit der Anode

D.6 ZUSÄTZLICHE BOXPLOTS

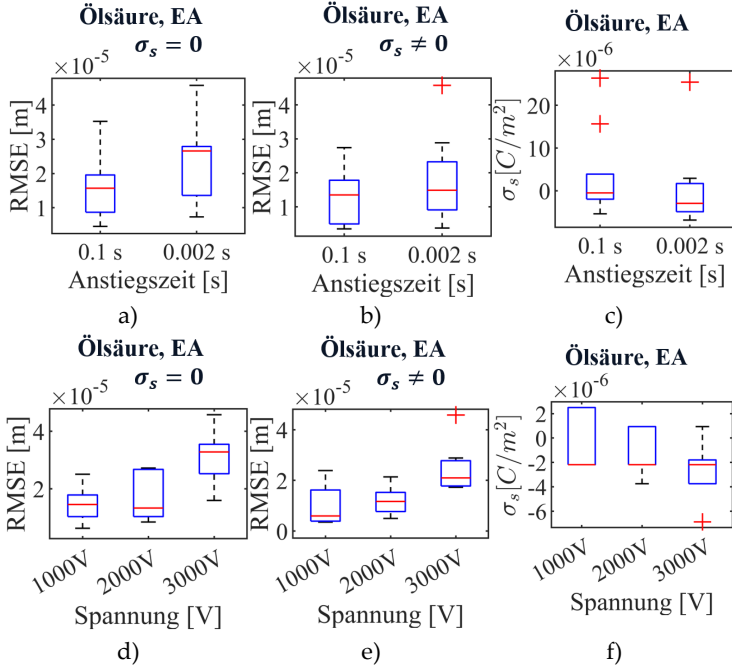


Abbildung D16: Weitere Boxplots für Ölsäure. a)-c) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Anstiegszeit. d)-f) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Spannung.

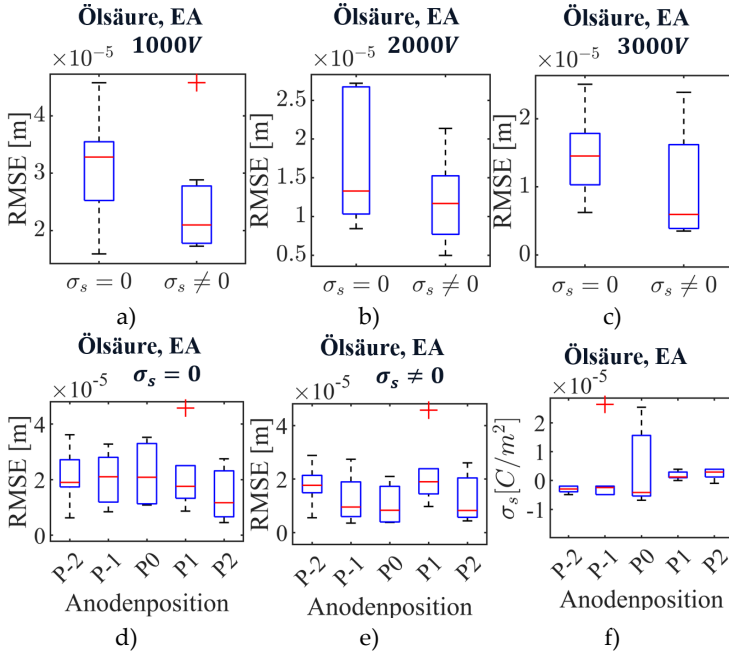


Abbildung D17: Weitere Boxplots für Ölsäure. a)-c) RMSE in Abhängigkeit der Oberflächenladung bei verschiedenen Spannungen. d)-f) RMSE und Oberflächenladung bei den verschiedenen Anodenpositionen.

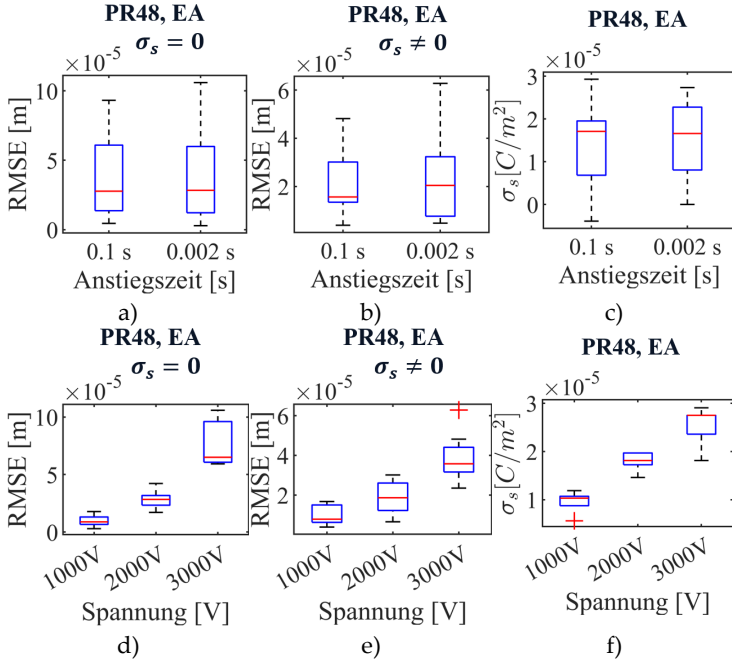


Abbildung D18: Weitere Boxplots für PR48 mit der Einzelanode. a)-c) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Anstiegszeit. d)-f) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Spannung.

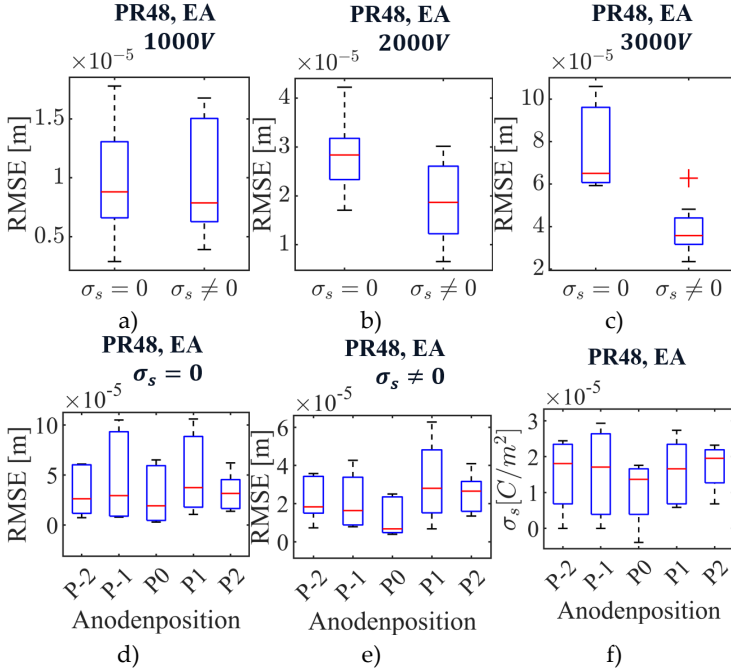


Abbildung D19: Weitere Boxplots für PR48 mit der Einzelanode. a)-c) RMSE in Abhängigkeit der Oberflächenladung bei verschiedenen Spannungen. d)-f) RMSE und Oberflächenladung bei den verschiedenen Anodenpositionen.

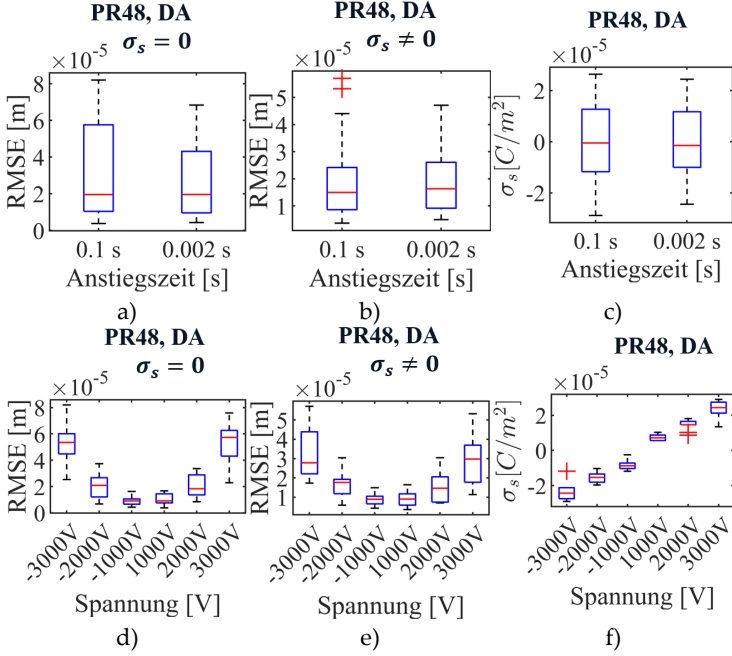


Abbildung D20: Weitere Boxplots für PR48 mit der Doppelanode. a)-c) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Anstiegszeit. d)-f) RMSE und Oberflächenladung in Abhängigkeit der Spannung.

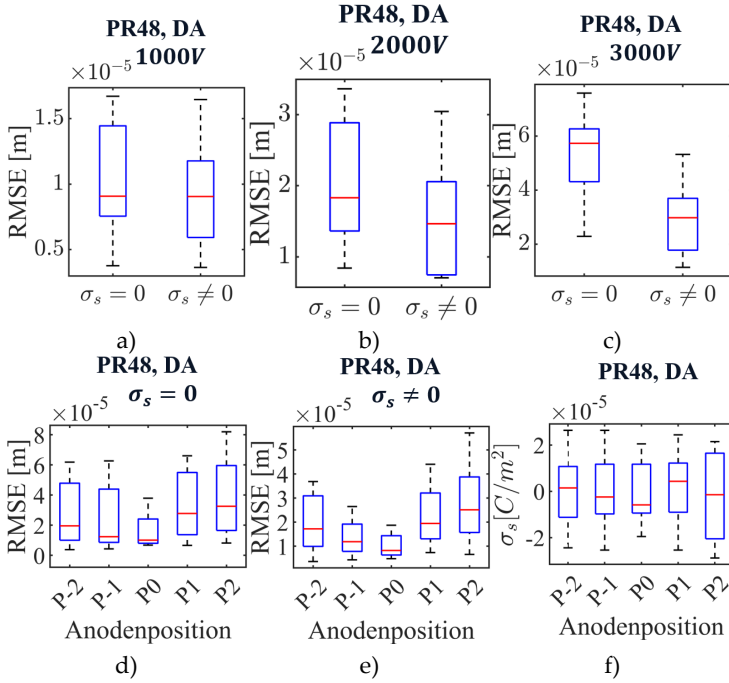


Abbildung D21: Weitere Boxplots für PR48 mit der Doppelanode. a)-c) RMSE in Abhängigkeit der Oberflächenladung bei verschiedenen Spannungen. d)-f) RMSE und Oberflächenladung bei den verschiedenen Anodenpositionen.