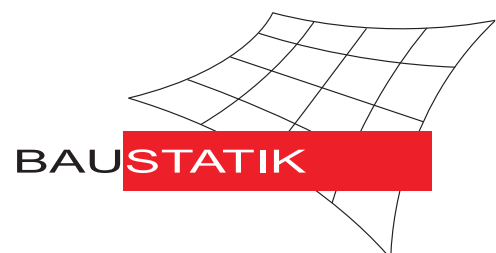


**Theorie und Numerik
spektraler stochastischer
Finite-Elemente-Formulierungen
bei geometrisch nichtlinearem
Deformationsverhalten**

Lukas Panther



**Theorie und Numerik spektraler
stochastischer Finite-Elemente-Formulierungen
bei geometrisch nichtlinearem
Deformationsverhalten**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)

von der KIT-Fakultät für
Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
DISSERTATION

von
Lukas Michael Panther, M.Sc.
aus Lahr/Schwarzwald

Tag der mündlichen Prüfung: 23. Oktober 2025

Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. habil. Philipp Junker
Prof. Dr.-Ing. Steffen Freitag

Karlsruhe 2026

Herausgeber:

Prof. Dr.-Ing. Steffen Freitag
Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner

Organisation und Verwaltung:

Institut für Baustatik
Karlsruher Institut für Technologie
Kaiserstr. 12
76131 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608–42280
Telefax: (0721) 608–46015
E-Mail: info@ibs.kit.edu

© 2026 Lukas Michael Panther
Institut für Baustatik
Karlsruher Institut für Technologie
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Das vorliegende Werk darf von der KIT-Bibliothek frei im Internet angeboten werden. Die Nutzung erfolgt ausschließlich zu wissenschaftlichen Zwecken und zum Eigengebrauch. Die Urheberrechte liegen bei den Autorinnen bzw. Autoren. Für den Inhalt sind alleine die Autorinnen und Autoren verantwortlich. Jegliche Formen der kommerziellen Nutzung und Abänderung der Publikation sind ohne vorherige Zustimmung und Absprache mit den Autorinnen bzw. Autoren ausdrücklich verboten. Die Namen der Autorinnen und Autoren müssen stets genannt werden. Die Nutzerinnen und Nutzer sind für die Einhaltung der Rechtsvorschriften selbst verantwortlich und können bei Missbrauch haftbar gemacht werden.

ISBN 978–3–935322–30–0

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik des Karlsruher Instituts für Technologie.

Mein besonderer Dank gilt meinem Hauptreferenten und ehemaligen Institutsleiter, Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner, der mir die Möglichkeit eröffnete, an seinem Institut zu promovieren. Seine fachliche Unterstützung und das von ihm geschaffene angenehme Arbeitsumfeld trugen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Eigene Ideen und Ziele konnte ich während meiner Tätigkeit dank des gewährten wissenschaftlichen Freiraums stets aktiv verfolgen.

Ebenso danken möchte ich dem neuen Institutsleiter und Korreferenten, Prof. Dr.-Ing. Steffen Freitag, für das mir entgegengebrachte Vertrauen, für sein Interesse an meinem Forschungsthema und dafür, dass er mir die Teilnahme an unterschiedlichen Fachtagungen ermöglicht hat. Ein weiterer Dank gilt Prof. Dr.-Ing. habil. Philipp Junker für sein Interesse an meiner wissenschaftlichen Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

In den vergangenen Jahren durfte ich am Institut für Baustatik stets eine angenehme Arbeitsatmosphäre und ein freundschaftliches Miteinander erfahren, wozu alle Mitarbeiter beigetragen haben. Besonders hervorheben möchte ich meine Mitdoktoranden sowie den wertvollen fachlichen Austausch untereinander, aus dem zahlreiche neue Forschungsimpulse hervorgingen. Ein weiterer Dank gilt meinen Hiwis für die stets tolle Zusammenarbeit und die Unterstützung bei der Forschung. Zusätzlich durfte ich durch die Betreuung verschiedener Abschlussarbeiten Einblicke in neue Themengebiete gewinnen, die über mein eigenes Forschungsthema hinausgingen, was mir stets große Freude bereitete. Eine willkommene Abwechslung zur täglichen Arbeit waren zahlreiche Freizeitaktivitäten mit den Kollegen. All dies hat die Tätigkeit am Institut für Baustatik auf angenehme Weise bereichert, sodass mir die vergangenen Jahre stets in bester Erinnerung bleiben.

Von ganzem Herzen danke ich meinen Eltern Claudia und Martin sowie meiner Schwester Klara für ihre beständige Unterstützung und ihren Rückhalt während der gesamten Zeit. Ganz besonders danke ich meiner Freundin Antonia, die mich mit ihrer uneingeschränkten Unterstützung, Liebe und Ermutigung stets durch diese Zeit begleitet hat.

Karlsruhe, im Februar 2026

Lukas Panther

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der spektralen stochastischen Finite-Elemente-Methode (SSFEM) im Kontext geometrisch nichtlinearer Problemstellungen. Im Fokus stehen spektrale stochastische FE-Formulierungen verschiedener Strukturelemente sowie die Weiterentwicklung geeigneter Pfadverfolgungsalgorithmen.

Die SSFEM verbindet die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) und stellt eine Erweiterung der herkömmlichen FEM dar. Ausgangspunkt für die Entwicklung stochastischer FE-Formulierungen ist eine erweiterte Variationsformulierung. Diese wird im stochastischen Raum mittels PCE und in der räumlichen Dimension mittels FEM diskretisiert.

Anhand von drei Strukturelementen werden unterschiedliche Aspekte der SSFEM im Kontext geometrischer Nichtlinearität beleuchtet. Die stochastische Schalenformulierung basiert auf einem isoparametrischen 4-Knoten-Element mit bilinearen Ansatzfunktionen. Zur Vermeidung von Querschubversteifungen wird die *Assumed-Natural-Strain*-Methode konsistent in die erweiterte FE-Formulierung integriert. Ausgehend von einem Zweifeldfunktional wird eine gemischt-hybride Scheibenformulierung vorgestellt. Dabei werden für die stochastischen Verschiebungen und die stochastischen Spannungen jeweils unabhängige Ansätze gewählt. Abschließend wird die Thematik endlicher Rotationen im Rahmen der SSFEM anhand eines geometrisch exakten Stabelements behandelt. Die einheitliche und kompakte Notation der entwickelten Strukturelemente folgt jenen herkömmlicher FE-Formulierungen. Mit der konsistenten Linearisierung aller Zusammenhänge wird eine quadratische Konvergenz im Rahmen des NEWTON-Verfahrens erzielt.

Für die Berechnung nichtlinearer Gleichgewichtspfade werden inkrementell-iterative Lösungsalgorithmen verwendet. Ergänzend zu bereits bestehenden Verfahren wird in der vorliegenden Arbeit eine verallgemeinerte Verschiebungssteuerung im Rahmen der SSFEM weiterentwickelt. Dieser Algorithmus erlaubt es, Problemstellungen zu berechnen, die mit bestehenden Verfahren im Kontext der SSFEM bisher nicht untersucht werden können.

Im Rahmen stochastischer Analysen wird der Einfluss unscharfer Material- und Geometrieeigenschaften auf das mechanische Verhalten von Tragstrukturen untersucht. Für die numerischen Berechnungen werden die spektralen stochastischen FE-Formulierungen sowie die entwickelten Lösungsalgorithmen verwendet. Im Fokus stehen Problemstellungen mit großen Verformungen, bei denen eine geometrisch nichtlineare Formulierung zwingend erforderlich ist. Die Ergebnisse der numerischen Beispiele zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der SSFEM und der Monte-Carlo-Simulation (MCS).

Abstract

This work is dedicated to the spectral stochastic finite element method (SSFEM) in the context of geometrically nonlinear problems. The focus is on spectral stochastic FE formulations for various structural elements, as well as on the further development of suitable path-following algorithms.

The SSFEM combines the polynomial chaos expansion (PCE) with the finite element method (FEM) and represents an extension of the conventional FEM. The development of stochastic FE formulations is based on an extended variational formulation, which is discretized in the stochastic dimension by means of the PCE and in the spatial dimension using the FEM.

Three structural elements are used to highlight different aspects of the SSFEM in the context of geometric nonlinearity. The stochastic shell formulation is based on an isoparametric 4-node element with bilinear ansatz functions. To avoid shear locking, the assumed natural strain method is consistently integrated into the extended FE formulation. Based on a two-field functional, a mixed-hybrid membrane element is presented. The stochastic displacements and stochastic stresses are approximated using independent ansatz functions. Finally, the issue of finite rotations in the context of the SSFEM is addressed using a geometrically exact beam element. The unified and compact notation of the developed structural elements follows those of conventional FE formulations. By consistently linearizing all governing equations, quadratic convergence is obtained within the NEWTON iteration scheme.

Incremental-iterative solution algorithms are employed to trace nonlinear equilibrium paths. In addition to existing methods, a generalized displacement control in the context of the SSFEM is further developed in this work. This algorithm facilitates the calculation of problems that have not been investigated with existing methods in the context of the SSFEM.

Stochastic analyses are used to investigate the influence of uncertain material and geometric properties on the mechanical behavior of structures. The spectral stochastic FE formulations and the developed solution algorithms are used for the numerical calculations. The focus is on problems with large deformations where a geometrically nonlinear formulation is mandatory. The results of the numerical examples show a very good agreement between the SSFEM and the Monte Carlo simulation (MCS).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Methoden der Unschärfequantifizierung	2
1.3	Stand der Forschung	4
1.4	Ziele und Gliederung der Arbeit	6
2	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	9
2.1	Kinematik	9
2.2	Spannungen	13
2.3	Bilanzgleichungen	14
2.4	Konstitutivbeziehungen	16
2.5	Variationsformulierungen	20
2.5.1	Die schwache Form des Gleichgewichts	20
2.5.2	Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials	22
2.5.3	Variationsprinzip nach Hellinger-Reissner	23
2.6	Linearisierung der Variationsformulierungen	24
2.6.1	Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts	24
2.6.2	Linearisierung des Hellinger-Reissner-Variationsprinzips	25
3	Grundlagen der Schalentheorie	26
3.1	Schalenkinematik	26
3.2	Schalenschnittgrößen	32
3.3	Materialgesetz für Flächentragwerke	34
3.4	Materialmatrix für geschichtete Schalenstrukturen	36
3.5	Variationsformulierung und Linearisierung	37
4	Generalisierte Unschärfemodellierung	41
4.1	Aleatorische Unschärfemodelle	41
4.1.1	Stetige Zufallsvariable	41
4.1.2	Ausgewählte stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	43
4.1.3	Multivariate Verteilungen	49

4.1.4	Modellierung räumlicher Variabilität	49
4.2	Epistemische Unschärfemodelle	51
4.3	Polymorphe Unschärfemodelle	53
4.4	Strukturanalyse mit unscharfen Parametern	54
4.4.1	Monte-Carlo-Simulation	55
4.4.2	α -Level Optimierung & Monte-Carlo-Simulation	56
5	Polynomielle Chaosesentwicklung	58
5.1	Orthogonale Polynombasis	59
5.1.1	Univariate Polynome	61
5.1.2	Dreitermrekursion für orthogonale Polynome	66
5.1.3	Multivariate Polynome	67
5.2	Verallgemeinerte Chaosesentwicklung	68
5.2.1	Spezielle Abbruchkriterien für PC-Entwicklungen	69
5.3	Berechnung der Chaoskoeffizienten	71
5.3.1	Orthogonalprojektion	71
5.3.2	Polynomregression	78
5.4	Stochastische Approximation mit der polynomiellen Chaosesentwicklung	80
5.4.1	Approximation stetiger Zufallsvariablen	81
5.4.2	Approximation räumlich korrelierte Zufallsfelder	83
5.4.3	Approximation polymorph unscharfer Variablen	85
5.5	Rechenoperationen mit Chaosesentwicklungen	87
5.5.1	Addition und Subtraktion	87
5.5.2	Multiplikation	88
5.5.3	Division	90
5.5.4	Quadratwurzel	91
5.5.5	Berechnung des Multiplikationstensors	93
5.5.6	Weitere Rechenoperationen	97
5.6	Post-Processing der Chaosesentwicklung	97
5.6.1	Stochastische Momente	98
5.6.2	Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse	98

5.6.3	Prinzipbeispiel für das Post-Processing einer Chaosentwicklung	101
5.6.4	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Zuverlässigkeitsanalyse	102
5.7	Post-Processing der erweiterten PC-Entwicklung im Rahmen polymorpher Unschärfe	103
5.7.1	Unschärfe stochastische Momente	104
5.7.2	Unschärfe PCE-basierte Sobol' Indizes	105
5.7.3	Prinzipbeispiel der erweiterten PC-Entwicklung	105
6	Spektrale stochastische FE-Formulierungen ausgewählter Strukturelemente	110
6.1	Variationsformulierung und Diskretisierung	110
6.2	Ein Schalenelement mit moderaten Rotationen	112
6.2.1	Stochastische Diskretisierung mit der PCE	112
6.2.2	Räumliche Diskretisierung mit der FEM	118
6.2.3	Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)	126
6.2.4	Zusammenhang zwischen der stochastischen und der deterministischen Variations- und FE-Formulierung	129
6.2.5	Berücksichtigung einer stochastischen Ausgangsgeometrie	130
6.3	Ein gemischtes Scheibenelement	131
6.3.1	Stochastische Diskretisierung mit der PCE	132
6.3.2	Diskretisierung mit der FEM	135
6.3.3	Gleichgewicht und statische Kondensation	139
6.3.4	Spannungsrückrechnung	140
6.4	Ein geometrisch exaktes Stabelement	141
6.4.1	Stochastische Diskretisierung mit der PCE	141
6.4.2	Räumliche Diskretisierung mit der FEM	146
7	Iterative Lösungsverfahren für die SSFEM	149
7.1	Klassische Lösungsverfahren	149
7.1.1	Die Laststeuerung	151
7.1.2	Die Einzelverschiebungssteuerung	155

7.1.3	Abschließende Bemerkungen	158
7.2	Die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung	159
7.2.1	Zusammenhang zwischen dem stochastischen und dem de- terministischen Lösungsverfahren	167
7.2.2	Abschließende Bemerkungen	168
8	Numerische Beispiele	169
8.1	PC-Entwicklung einer stochastischen Materialmatrix	170
8.2	Brettsper Holzplatte unter Gleichlast	174
8.2.1	Ergebnisse der SSFEM	177
8.2.2	Konvergenz der Monte-Carlo-Simulation und der SSFEM .	180
8.2.3	Rechenzeiten	184
8.2.4	Sobol'-Indizes	184
8.2.5	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Quantilwerte	185
8.3	Zylindersegment unter Einzellast	187
8.3.1	Ergebnisse der SSFEM	189
8.3.2	Konvergenz der Monte-Carlo-Simulation und der SSFEM .	192
8.3.3	Rechenzeiten	193
8.3.4	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	195
8.3.5	Berücksichtigung epistemischer Unschärfe	196
8.4	Zylindersegment unter Gleichlast	199
8.4.1	Unschärfe stochastische Momente	202
8.4.2	Unschärfe SOBOL'-Indizes	206
8.4.3	Abschließende Bemerkungen	208
8.5	Patchtest für das stochastische Scheibenelement	209
8.5.1	Reine Zugbeanspruchung	211
8.5.2	Reine Schubbeanspruchung	213
8.6	Bogenträger unter Gleichlast	215
8.6.1	Ergebnisse der SSFEM	217
8.6.2	Sobol' Indizes	219
8.6.3	Abschließende Bemerkungen	222
8.7	Aluminiumscheibe mit Loch	222

8.7.1	Modellierung räumlicher Variabilität	223
8.7.2	Ergebnisse der SSFEM und Einfluss der Korrelationslänge	224
8.7.3	Sobol' Indizes entlang eines Schnittes	226
8.7.4	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Quantilwerte	227
8.8	Einhüftiger Rahmen unter Gleichlast	229
8.8.1	Berücksichtigung unscharfer Materialparameter und Belastung	230
8.8.2	Ergebnisse der SSFEM	230
8.8.3	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	234
8.8.4	Abschließende Bemerkungen	234
9	Zusammenfassung und Ausblick	236
A	Orthogonalprojektion	240
B	Rechenoperationen mit PC-Entwicklungen	241
C	Anhang zur stochastischen Schalenformulierung	244
C.1	Variation und Linearisierung der Schalenverzerrungen	244
C.2	Behandlung coplanarer Knoten	245
D	Anhang zur stochastischen Stabformulierung	248
	Literaturverzeichnis	251

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Verwendung filigraner und schlanker Tragkonstruktionen geht mit einer zunehmenden Komplexität struktureller Fragestellungen einher. Gerade in Leichtbauanwendungen erweisen sich dünnwandige Bauteile als besonders vorteilhaft. Typische Leichtbauwerkstoffe sind Faserverbundwerkstoffe, Aluminiumlegierungen und Kunststoffe, da sie eine hohe Festigkeit bei sehr geringem Eigengewicht aufweisen. Trotz ihrer herausragenden Eigenschaften sind Bauteile aus diesen Materialien aufgrund ihrer Schlankheit oftmals stabilitätsgefährdet. Darüber hinaus kann es bereits vor dem Stabilitätsversagen zu großen Verformungen kommen. Für die numerische Berechnung schalenartiger Strukturen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) sind effiziente und robuste FE-Formulierungen erforderlich. Dabei müssen geometrisch nichtlineare Effekte im Rahmen der FE-Formulierungen berücksichtigt werden, um das Stabilitäts- und Verformungsverhalten der Tragkonstruktionen korrekt abzubilden.

Für die Entwicklung eines geeigneten FE-Modells werden üblicherweise deterministische Werte für die Geometrie- und Materialeigenschaften sowie für die äußere Belastung verwendet. In der Realität sind solche Größen jedoch mit Unsicherheiten behaftet, die im Rahmen numerischer Simulationen entsprechend berücksichtigt werden müssen. Gerade bei stabilitätsgefährdeten Strukturen können geringe Streuungen in den Geometrie- und Materialeigenschaften zu signifikanten Abweichungen der Zielgröße, z.B. der Stabilitätslast, führen. Abbildung 1.1 veranschaulicht den grundlegenden Ablauf zur Berücksichtigung stochastischer Eingangsgrößen im Rahmen einer Strukturanalyse in Anlehnung an SUDRET [111].

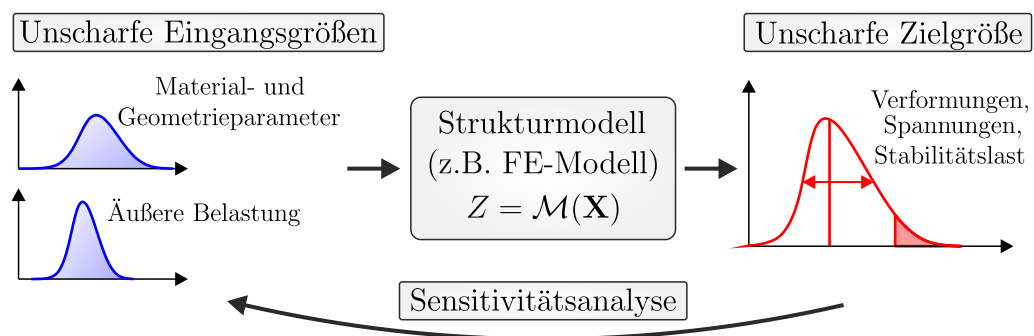


Abbildung 1.1: Schematischer Ablauf einer stochastischen Strukturanalyse

Die Quantifizierung der unscharfen Zielgrößen wie Verformungen und Spannungen

gen kann beispielsweise anhand stochastischer Momente wie Mittelwert und Standardabweichung oder durch Quantilwerte erfolgen. Darüber hinaus wird im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse untersucht, inwiefern einzelne Eingangsparameter die Streuung der Zielvariablen beeinflussen. Das Forschungsgebiet der Unschärfequantifizierung (engl.: *uncertainty quantification*) beschäftigt sich unter anderem mit den genannten Aspekten. Im Laufe der Zeit haben sich in diesem weitreichenden Forschungsgebiet eine Vielzahl verschiedener Methoden entwickelt und etabliert. Die vorliegende Dissertation widmet sich der von GHANEM & SPANOS [45] entwickelten *spektralen stochastischen Finite-Elemente-Methode* (SSFEM). Eine thematische Einordnung dieser Methode sowie einen groben Überblick über die zahlreichen Verfahren im Bereich der Unschärfequantifizierung zeigt der folgende Abschnitt.

1.2 Methoden der Unschärfequantifizierung

Grundsätzlich lassen sich die verschiedenen Ansätze in **nicht-intrusive** und **intrusive** Verfahren unterteilen. Nicht-intrusive Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass für ihre Anwendung im Kontext einer stochastischen Strukturanalyse keine oder nur geringe Modifikationen des zugrunde liegenden Strukturmodells, vgl. Abbildung 1.1, erforderlich sind. In diesem Zusammenhang lässt sich das Berechnungsmodell als sogenannte *black box* auffassen. Im Gegensatz dazu erfordert eine intrusive Vorgehensweise einen umfassenden Eingriff in die Grundgleichungen des zu untersuchenden Problems. Abbildung 1.2 zeigt eine Darstellung der wesentlichen Verfahren beider Herangehensweisen.

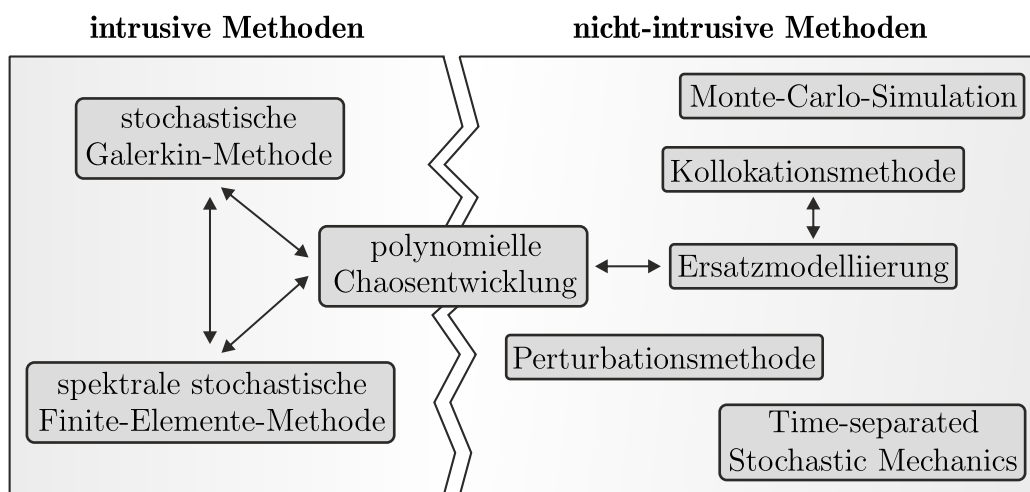


Abbildung 1.2: Verschiedene Methoden im Bereich der Unschärfequantifizierung

Die spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode (SSFEM) ist dem Bereich der intrusiven Verfahren zugeordnet. Da die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) sowohl in intrusiver als auch nicht-intrusiver Form Anwendung findet, fungiert sie in der schematischen Darstellung als Bindeglied zwischen den beiden Vorgehensweisen. Die in Abbildung 1.2 dargestellten Pfeile veranschaulichen zudem engere Verknüpfungen zwischen den einzelnen Methoden.

Der folgende Abschnitt gibt einen kurzen Einblick in die nicht-intrusiven Verfahren und ihre Anwendung in der Unschärfequantifizierung.

- Die **Monte-Carlo-Simulation** ist eine universell einsetzbare Methode im Bereich der Unschärfequantifizierung, siehe LIU [74]. Sie wird zur Berechnung stochastischer Momente, wie z.B. Mittelwert und Standardabweichung, zur Bestimmung von Quantilwerten sowie zur Ermittlung von Versagenswahrscheinlichkeiten herangezogen. Dabei wird das zugrunde liegende Strukturmodell für zufällige Realisierungen der unscharfen Eingangsgrößen ausgewertet. Der universellen Einsetzbarkeit der MCS steht jedoch eine vergleichsweise langsame Konvergenzrate gegenüber, die zu einem hohen Berechnungsaufwand führen kann.
- Im Gegensatz zur MCS werden die Auswertungsstellen für das Berechnungsmodell bei **Kollokationsmethoden** nicht zufällig, sondern systematisch gewählt. Auf Basis der berechneten Lösungen an den Kollokationspunkten wird eine Interpolation mit LAGRANGE-Polynomen durchgeführt. Für eine ausführliche Diskussion dieses Verfahrens wird auf XIU [129–131] und XIU & HESTHAVEN [132] verwiesen.
- Die Idee der **Ersatzmodellierung** besteht darin, das meist komplexe Berechnungsmodell durch ein einfach auszuwertendes Ersatzmodell, vgl. Abbildung 1.2, z.B. eine **polynomielle Chaosentwicklung** zu approximieren. Die Kalibrierung der PCE erfolgt entweder über eine Orthogonalprojektion, siehe BERVEILLER ET AL. [17] oder einen Regressionsansatz, siehe BERVEILLER ET AL. [18]. Beide Verfahren basieren auf einzelnen Auswertungen des Berechnungsmodells. Dabei ist die Orthogonalprojektion eng mit der angesprochenen Kollokationsmethode verwandt, wie beispielsweise in BLATMAN [19] beschrieben.
- Ein Näherungsverfahren, welches vorwiegend zur Bestimmung des Mittelwerts und der Varianz herangezogen wird, ist die **Perturbationsmethode**. Dabei erfolgt eine Approximation des Berechnungsmodells durch eine TAYLOR-Reihenentwicklung um den Erwartungswert der stochastischen Eingangsgrößen, siehe KAMIŃSKI [66] und KLEIBER [67].

- Eine weitere Methode im Bereich der Unschärfequantifizierung bietet der Ansatz **Time-separated Stochastic Mechanics**. Die Methode wird in JUNKER & NAGEL [64, 65] zur Berücksichtigung von Unschärfen bei viskoelastischen Materialien verwendet. Einen umfassenden Überblick über weitere Anwendungsbereiche dieses Verfahrens findet sich in GEISLER ET AL. [38].

Abbildung 1.2 zeigt zudem zwei intrusive Methoden, welche im Folgenden kurz erläutert sind:

- Die **stochastische Galerkin-Methode** (SGM) wird zur Lösung stochastischer Differentialgleichungen verwendet, siehe beispielsweise XIU & SHEN [137] und XIU [130]. Dabei erfolgt die Approximation in der stochastischen Dimension mit der polynomiellen Chaosentwicklung.
- Die **spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode** (SSFEM) verbindet die Vorgehensweise der SGM mit der Finite-Elemente-Methode. Das Verfahren ist eine effiziente Möglichkeit, die stochastische Beschreibung der Material- und Geometrieparameter sowie der Belastung direkt in die FE-Berechnung zu integrieren.

Im Folgenden wird nicht mehr explizit zwischen den zwei Verfahren unterschieden, da beide Methoden im Kern die gleiche Vorgehensweise beinhalten. Fortan wird deshalb der Begriff spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode (SSFEM) verwendet.

1.3 Stand der Forschung

Im Fokus der vorliegenden Dissertation steht die **spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode**. Dieses Verfahren wurde im Jahr 1991 von GHANEM & SPANOS [45] in dem Buch *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach* erstmals veröffentlicht. Dieser Meilenstein ist Ausgangspunkt zahlreicher Forschungsarbeiten. Da die Methode in vielen Disziplinen Verwendung findet, sind im folgenden Abschnitt nur ausgewählte Forschungsarbeiten genannt. Im Hinblick auf die vorliegende Arbeit ist die Anwendung der SSFEM auf nichtlineare Problemstellungen von zentraler Rolle.

Mit GHANEM & SPANOS [45] findet die Methode zunächst Anwendung in der linear elastischen Festkörpermechanik. Dabei wird das Verhalten von Strukturen wie Scheiben und Stäben unter dem Einfluss räumlich variierender Materialeigenschaften untersucht. In den Veröffentlichungen von GHANEM [42] und XIU & KARNIADAKIS [136] wird die Wärmeleitung in Werkstoffen mit zufälliger

Wärmeleitfähigkeit analysiert. Darüber hinaus untersuchen die genannten Autoren Transportvorgänge in heterogenen Materialien, siehe GHANEM [41], sowie stochastische Diffusionsprobleme, siehe XIU & KARNIADAKIS [133]. In XIU & KARNIADAKIS [135] wird die SSFEM zur Unschärfequantifizierung bei der Simulation inkompressibler Strömungen eingesetzt. Einen umfassenden Überblick über die Anwendung der Methode im Bereich der Strömungssimulation bietet das Buch von LE MAÎTRE & KNIO [70]. In den Veröffentlichungen von SEPAHVAND ET AL. [97] und MEIDANI & GHANEM [77] werden Eigenschwingungen von Systemen unter dem Einfluss variierender Strukturparameter mit der SSFEM analysiert. Dabei sind stochastische Eigenwertprobleme zu lösen. Diese Thematik wird beispielsweise in Veröffentlichungen von GHANEM & GOSH [43], MULANI ET AL. [80], SOUSEDÍK & ELMAN [107], MEIDANI & GHANEM [78] und VERHOOSSEL ET AL. [120] genauer untersucht. Für einen umfassenden Überblick über die SSFEM und ihre Anwendung wird an dieser Stelle auf die Veröffentlichungen von STEFANOUE [108], ARREGUI-MENA ET AL. [12], SCHUËLLER [95] und SUDRET & DER KIUEREHIAN [113] verwiesen.

Im Hinblick auf die vorliegende Dissertation steht die Anwendung der SSFEM auf nichtlineare Problemstellungen in der Festkörpermechanik im Vordergrund. Die folgenden Abschnitte fassen die bisherigen Veröffentlichungen zusammen, die sich mit materiell und geometrisch nichtlinearen Fragestellungen im Kontext der SSFEM befassen.

Im Bereich der **materiellen Nichtlinearität** liegt der Schwerpunkt von Forschungsarbeiten zur Anwendung der SSFEM vornehmlich auf elastoplastischem Materialverhalten. Erste Ansätze hierzu stammen von ANDERS & HORI [9, 10]. Die Autoren untersuchen unter anderem einen Bruchvorgang im Boden unter dem Einfluss eines räumlich variierenden E-Moduls. Zudem werden in ANDERS & HORI [10] Lösungsverfahren im Rahmen der SSFEM diskutiert. Ein anderer Ansatz zur Behandlung von Elastoplastizität basiert auf der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung, siehe SETT ET AL. [99, 100] und JEREMERIC & SETT [63]. In SETT ET AL. [98] wird beispielsweise die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer elastoplastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung gezeigt. Die Autoren ARNST & GHANEM [11] untersuchen Randwertprobleme mit stochastischen Ungleichheits-Nebenbedingungen. Der Ansatz wird anhand einer elastoplastischen Lochscheibe und eines Kontaktproblems analysiert. Die Dissertation von FINK [36] widmet sich einer spektralen stochastischen FE-Formulierung für elastoplastisches Materialverhalten. Es werden geometrisch lineare und materiell nichtlineare Problemstellungen unter dem Einfluss räumlich streuender Größen, wie z.B. des E-Moduls, der Fließgrenze oder des Verfestigungsmoduls, untersucht. Ein weiteres Vorgehen ist in den Veröffentlichungen von ROSIC & MATTHIES [90] und ROSIC [89] zu finden. Hier wird ein spektraler

stochastischer *Closest-Point*-Projektionsalgorithmus vorgestellt und ausführlich diskutiert.

In ACHARJEE & ZABARAS [2] wird erstmals die SSFEM im Zusammenhang mit **geometrischer Nichtlinearität** formuliert. Anhand einer Zugprobe wird der Einfluss einer unscharfen Referenzkonfiguration analysiert. Zudem wird untersucht, inwiefern sich Streuungen in der Faserausrichtung eines orthotropen Verbundmaterials auf das mechanische Verhalten der Zugprobe auswirken. In der zuvor genannten Arbeit von ROSIĆ [89] werden neben elastoplastischem Materialverhalten auch geometrisch nichtlineare Effekte kurz andiskutiert. Als Beispiel wird hierfür eine COOK's Membran untersucht. Eine geometrisch exakte, stochastische Stabformulierung für die Anwendung in der SSFEM wird von PAPADOPOULOS ET AL. [85] vorgestellt. Es werden verschiedene zweidimensionale Stabtragwerke unter dem Einfluss unscharfer Materialparameter analysiert. Dabei wird der E-Modul als räumlich korreliertes Zufallsfeld modelliert. Ausgehend von der Stabformulierung wird für zukünftige Forschungsarbeiten die Erweiterung auf andere Strukturelemente, wie z.B. Schalenelemente, angesprochen. Zudem werden die beiden inkrementell-iterativen Lösungsalgorithmen, Laststeuerung und Verschiebungssteuerung, sowie deren Anwendung im Rahmen der SSFEM diskutiert. Für zukünftige Arbeiten wird die Erweiterung der vorgestellten Lösungsverfahren vorgeschlagen. Zwei weitere aktuelle Arbeiten im Kontext geometrisch nichtlinearer Problemstellungen stammen von AMMOUCHE & JÉRUSALEM [7, 8]. Unter anderem wird das Knickverhalten eines Stabes untersucht. Für die Approximation der stochastischen Dimension werden neben den Basispolynomen der PCE auch sogenannte *Wavelet*-Funktionen verwendet.

1.4 Ziele und Gliederung der Arbeit

Aus dem vorherigen Abschnitt wird deutlich, dass die Anwendung der SSFEM im Kontext geometrisch nichtlinearer Problemstellungen bislang verhältnismäßig wenig untersucht ist. Im Kontext geometrischer Nichtlinearität beschränkt sich die SSFEM bisher auf verhältnismäßig einfache Strukturelemente, wie z.B. Scheiben- und Volumenelemente. Eine Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Schalenelemente gibt es nach bestem Wissen des Autors derzeit noch nicht. Die Konvergenz nichtlinearer FE-Formulierungen innerhalb eines inkrementell-iterativen Lösungsverfahrens ist ein wichtiger Bestandteil. Dieser Aspekt wird in den vorher genannten Veröffentlichungen bisher nicht untersucht oder diskutiert. Die vorliegende Dissertation geht unter anderem auf die genannten Punkte ein. Die wesentlichen Ziele lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- **Entwicklung spektraler stochastischer FE-Formulierungen** für geometrisch nichtlineare Strukturelemente: Im Fokus steht ein allgemeines 4-

Knoten-Schalenelement mit moderaten Rotationen. Zur Vermeidung von Querschubversteifungen wird der *Assumed-Natural-Strain*-Ansatz verwendet. Zudem werden ein gemischt-hybrides Scheibenelement sowie eine geometrisch exakte Stabformulierung vorgestellt. Ein zentraler Punkt der stochastischen Elementformulierungen ist die **konsistente Linearisierung** der zugrunde liegenden Gleichungen. Die erforderlichen Berechnungsschritte werden systematisch erläutert und anschaulich dargestellt.

- **Einheitliche und kompakte Notation** der entwickelten Elementformulierungen: Die Schreibweise der stochastischen Strukturelemente orientiert sich an derjenigen herkömmlicher FE-Formulierungen. Weiterhin wird der nahtlose Übergang zwischen stochastischen und zugehörigen, deterministischen Elementformulierungen dargestellt. Die kompakte Notation in dieser Arbeit erlaubt eine einfache und effiziente Implementierung der Elementformulierungen in ein bestehendes Finite-Elemente-Programm.
- **Weiterentwicklung von Lösungsverfahren** im Rahmen der SSFEM: In dieser Arbeit wird eine verallgemeinerte Verschiebungssteuerung für die Anwendung im Kontext der SSFEM vorgestellt. Klassischerweise werden inkrementell-iterative Lösungsalgorithmen wie die Last- oder die Einzelverschiebungssteuerung zur Verfolgung nichtlinearer Gleichgewichtspfade verwendet. Die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung ermöglicht es, eine größere Bandbreite an Problemstellungen im Rahmen der SSFEM zu untersuchen. Nach bestem Wissen des Autors wurde solch ein Lösungsalgorithmus noch nicht im Zusammenhang mit der SSFEM formuliert.
- **Anwendung der stochastischen FE-Formulierungen** anhand geometrisch nichtlinearer Problemstellungen: Durchschlagprobleme stabilitätsgefährdeter Strukturen sowie Beispiele mit großen Verformungen werden unter dem Einfluss unscharfer Material- und Geometrieparameter analysiert. Darüber hinaus wird ein Ansatz zur **Berücksichtigung polymorpher Unschärfe** im Rahmen einer SSFEM-Berechnung vorgestellt. Hierzu wird das bereits bestehende Konzept einer erweiterten PC-Entwicklung aufgegriffen und für die Anwendung in der SSFEM aufbereitet.

Zu Beginn werden in **Kapitel 2** die grundlegenden kontinuumsmechanischen Zusammenhänge beschrieben. Mit Hinblick auf numerische Lösungsverfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) werden zwei Variationsprinzipien und die zugehörigen Linearisierungen dargestellt. Diese Gleichungen sind Ausgangspunkt für die Entwicklung entsprechender FE-Formulierungen.

Die wesentlichen Grundlagen zur Beschreibung einer Schalenstruktur folgen in **Kapitel 3**. Hierzu gehören die Kinematik, das Stoffgesetz sowie die Variations-

formulierung. Besonderes Augenmerk gilt der Beschreibung geschichteter Strukturen. Das dargestellte Variationsprinzip wird für die Entwicklung der spektralen stochastischen Schalenformulierung benötigt.

Kapitel 4 gibt einen Überblick über die generalisierte Unschärfemodellierung. Es werden aleatorische, epistemische sowie polymorphe Unschärfemodelle beschrieben. Mit Hinblick auf die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) und die SSFEM liegt der Fokus auf der aleatorischen Unschärfe. Neben kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden auch Zufallsfelder zur Modellierung räumlicher Variabilität erläutert. Abschließend ist der grundlegende Ablauf einer Strukturanalyse unter Berücksichtigung polymorpher Unschärfe skizziert.

Eine umfassende Einführung in die Thematik der polynomiellen Chaosentwicklung (PCE) bietet **Kapitel 5**. Es werden unterschiedliche Methoden zur Bestimmung der PC-Koeffizienten vorgestellt, wobei der intrusive Ansatz im Vordergrund steht. Die PC-Approximation von stochastischen bzw. polymorph unscharfen Variablen wird ausführlich dargestellt. Mit Hinblick auf die SSFEM werden zudem spezielle Rechenoperationen mit PC-Entwicklungen definiert. Zum besseren Verständnis und zur Veranschaulichung der theoretischen Zusammenhänge dienen ausgewählte Prinzipbeispiele. Das Kapitel endet mit dem Post-Processing der PCE im Kontext aleatorischer und polymorpher Unschärfe.

In **Kapitel 6** werden drei spektrale stochastische FE-Formulierungen für geometrisch nichtlineare Strukturelemente entwickelt. Diese umfassen ein allgemeines Schalen-, ein gemischt-hybrides Scheiben- sowie ein geometrisch exaktes Stabelement. Besondere Aspekte wie eine stochastische Referenzkonfiguration, die Umrechnung stochastischer Spannungsmaße und der Zusammenhang mit einer deterministischen FE-Formulierung werden anschaulich erläutert.

Kapitel 7 gibt einen Überblick über verschiedene Lösungsalgorithmen im Kontext der SSFEM. Klassische Lösungsverfahren wie die Last- und die Einzelverschiebungssteuerung und ihre Anwendung bei Berechnungen mit der SSFEM werden ausführlich behandelt. Im Fokus steht die in dieser Arbeit weiterentwickelte, verallgemeinerte Verschiebungssteuerung. Für alle Algorithmen wird ein Ablaufplan zur effizienten Implementierung bereitgestellt.

In **Kapitel 8** wird die Anwendung der stochastischen FE-Formulierungen und der Lösungsalgorithmen anhand verschiedener numerischer Beispiele untersucht. Im Fokus stehen Stabilitätsprobleme und Problemstellungen mit großen Verformungen, bei denen eine geometrisch nichtlineare Formulierung erforderlich ist.

In **Kapitel 9** folgen eine Zusammenfassung der Arbeit sowie ein Ausblick auf weitere Forschungsaktivitäten.

2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Um das mechanische Verhalten eines Körpers beschreiben zu können, ist es notwendig, die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik zu definieren. Die materialunabhängigen Gleichungen umfassen die *Kinematik* und die *Bilanzgleichungen*. Ersteres befasst sich mit der geometrischen Beschreibung der Bewegung und Deformation eines Kontinuums. Ausgehend von den Bilanzgleichungen werden die erforderlichen Gleichgewichtsbedingungen zwischen inneren und äußeren Kräften formuliert. Im Rahmen dieser Arbeit werden quasi-statische Problemstellungen im Bereich der Festkörpermechanik betrachtet. Die *Konstitutivbeziehungen* sind den materialabhängigen Gleichungen zugeordnet. Mit ihnen können materialspezifische Effekte beschrieben werden, wobei die lineare Elastizität im Vordergrund steht. Das folgende Kapitel orientiert sich im Wesentlichen an Standardwerken von ALTENBACH [6], HOLZAPFEL [58], TRUESDELL & NOLL [118] und WRIGERS [127].

2.1 Kinematik

Das Kontinuum beschreibt einen Körper $\mathcal{B}$, welcher als zusammenhängende Menge materieller Punkte $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ definiert ist. Begrenzt wird dieser durch seinen Rand $\partial\mathcal{B}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ in der Referenzkonfiguration und nimmt den Bereich B_0 mit dem zugehörigen Rand ∂B_0 ein. Die Beschreibung dieser und aller folgenden Konfigurationen erfolgt ausgehend von dem Punkt O mit den Basisvektoren $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$, siehe Abbildung 2.1. In der Ausgangskonfiguration wird ein materieller Punkt durch seinen Ortsvektor $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{e}_i$ beschrieben. Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ befindet sich der Körper in der Momentankonfiguration und beschreibt nun das Gebiet B_t . Der zugehörige Rand ist ∂B_t . Aufgrund der Bewegung und Deformation des Körpers ändert sich die Lage des betrachteten materiellen Punktes, welcher nun durch die räumliche Koordinate $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ definiert ist. Mithilfe der Funktion $\chi(\mathbf{X}, t)$ bzw. ihrer Umkehrfunktion $\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ können Punkte aus der Referenz- in die Momentankonfiguration überführt werden und umgekehrt:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.1)$$

Die Abbildung χ ist bijektiv und stetig differenzierbar.

Um Deformationen des Kontinuums zu beschreiben, werden die konvektiven Koordinaten $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ verwendet, siehe Abbildung 2.1. Sie sind fest mit dem Kontinuum verbunden und können als in den Körper eingeritzte Linien betrachtet

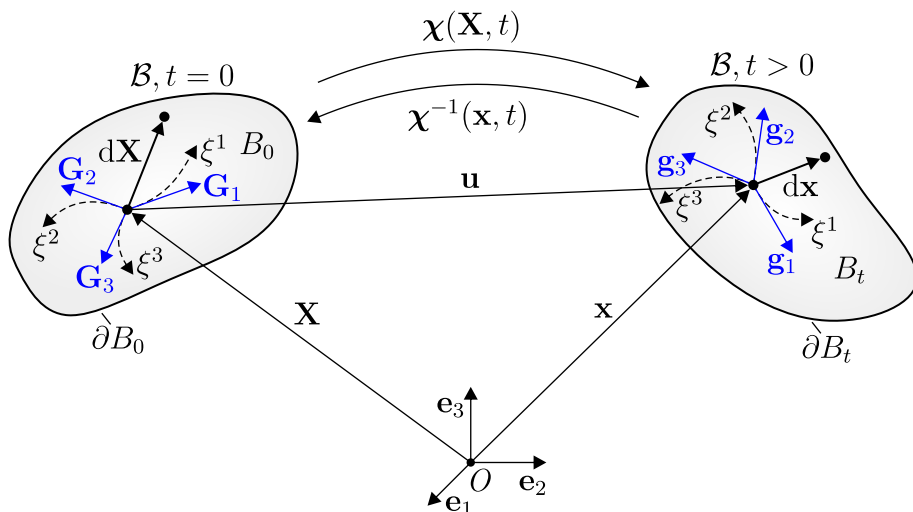


Abbildung 2.1: Körper $\mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration ($t = 0$) und in der Momentankonfiguration ($t > 0$)

werden. Die kovarianten Basisvektoren (tiefgestellter Index)

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi^i} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

sind als Tangentenvektoren an die konvektiven Koordinatenlinien $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ definiert und sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Für die dazugehörigen kontravarianten Basisvektoren (hochgestellter Index) gelten die Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^k = \delta_i^k \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k = \delta_i^k. \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet δ_i^k das KRONECKER-Delta mit

$$\delta_i^k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{falls } i \neq k \end{cases}. \quad (2.4)$$

Die Metriktensoren in der Referenz- und Momentankonfiguration können bezüglich der ko- und kontravarianten Basis formuliert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ik} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^k = G^{ik} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_k, \\ \mathbf{g} &= g_{ik} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k = g^{ik} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Über das Skalarprodukt der Basisvektoren werden die zugehörigen Koeffizienten bestimmt:

$$\begin{aligned} G_{ik} &= \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_k, & G^{ik} &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^k, \\ g_{ik} &= \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_k, & g^{ik} &= \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Im Rahmen der Schalenformulierung in Kapitel 3 werden ko- und kontravariante Größen verwendet.

Für die Beschreibung von Verschiebungen wird der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}$ wie folgt eingeführt:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (2.7)$$

Dieser ist in Abhängigkeit des materiellen Punktes $\mathbf{X}$ und der Prozessvariable t formuliert. Eine derartige Darstellung mit Bezug auf die Ausgangskonfiguration wird als LAGRANGE'sche Formulierung bezeichnet.

Für die Beschreibung lokaler Deformationen wird der materielle Deformationsgradient $\mathbf{F}$ definiert, welcher materielle und räumliche Linienelemente $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$ miteinander verknüpft. Dabei gilt $d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Es wird die lineare TAYLOR-Reihenentwicklung der räumlichen Position $\mathbf{x}$ in der Umgebung von $\mathbf{X}$ betrachtet:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} . \quad (2.8)$$

Der materielle Deformationsgradient $\mathbf{F}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} . \quad (2.9)$$

Anhand der Gleichung (2.8) lässt sich erkennen, dass die lineare Abbildung zwischen den Linienelementen $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ gerade dem Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ entspricht. Die Wegelemente beider Konfigurationen können mit den Beziehungen

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad \text{und} \quad d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

ineinander überführt werden. Die Existenz der inversen Abbildung $\mathbf{F}^{-1}$ in Gleichung (2.10) setzt voraus, dass die JACOBI-Determinante des Deformationsgradienten ungleich null ist:

$$J := \det \mathbf{F} \neq 0 . \quad (2.11)$$

Um eine Selbstdurchdringung während einer Deformation des Körpers auszuschließen, wird zusätzlich $J > 0$ gefordert. Mit der JACOBI-Determinante können weiterhin Flächenelemente $d\mathbf{A}$ der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration überführt werden:

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} . \quad (2.12)$$

Die Flächennormalenvektoren beider Konfigurationen werden mit $\mathbf{n}$ bzw. $\mathbf{N}$ bezeichnet. Gleichung (2.12) ist auch bekannt als NANSON-Formel. Für die Transformation von Volumenelementen dV der Referenzkonfiguration gilt

$$dv = J dV . \quad (2.13)$$

Mit dem in Gleichung (2.7) eingeführten Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ lässt sich der Deformationsgradient wie folgt umschreiben:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t))}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) , \quad (2.14)$$

wobei $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)$ der Verschiebungsgradient ist. Dieser wird definiert mit

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} . \quad (2.15)$$

Der Deformationsgradient bildet den gesamten Bewegungsvorgang eines Linienelementes ab und beinhaltet somit sowohl Starrkörperbewegungen als auch Deformationen. Für die Beschreibung von Verzerrungen eines Körpers sind hingegen nur Deformationen von Interesse. Im Falle einer reinen Starrkörperbewegung entspricht $\mathbf{F}$ gerade dem Einheitstensor $\mathbf{1}$ und ist damit nicht als Verzerrungsmaß geeignet. Reine Starrkörperbewegungen wie Translationen und Rotationen verursachen in einem Kontinuum keine Verzerrungen. Der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor ist definiert als

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.16)$$

und erfüllt die Eigenschaften eines geeigneten Verzerrungsmaßes. Bei einer reinen Translation oder Rotation entspricht der Verzerrungstensor in Gleichung (2.16) dem Nulltensor, da in diesem Fall $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ gleich dem Einheitstensor $\mathbf{1}$ ist. Im Gegensatz zu dem im Allgemeinen unsymmetrischen Deformationsgradienten ist der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor symmetrisch. Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.14) kann der Verzerrungstensor in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten formuliert werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) . \quad (2.17)$$

Der GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor kann zusätzlich in lineare und nichtlineare Anteile aufgeteilt werden:

$$\mathbf{E}_{\text{lin}} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\text{nlin}} = \frac{1}{2}\mathbf{H}^T \mathbf{H} . \quad (2.18)$$

Werden die nichtlinearen Anteile vernachlässigt, so reduziert sich der nichtlineare Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ zum linearen Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}_{\text{lin}} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) . \quad (2.19)$$

2.2 Spannungen

Ein Körper deformiert sich aufgrund äußerer, auf ihn wirkenden Belastungen. Die auftretenden Relativverschiebungen benachbarter materieller Punkte rufen Spannungen in dem Kontinuum hervor. Durch einen gedanklichen Schnitt können die inneren Kräfte veranschaulicht werden, siehe Abbildung 2.2.

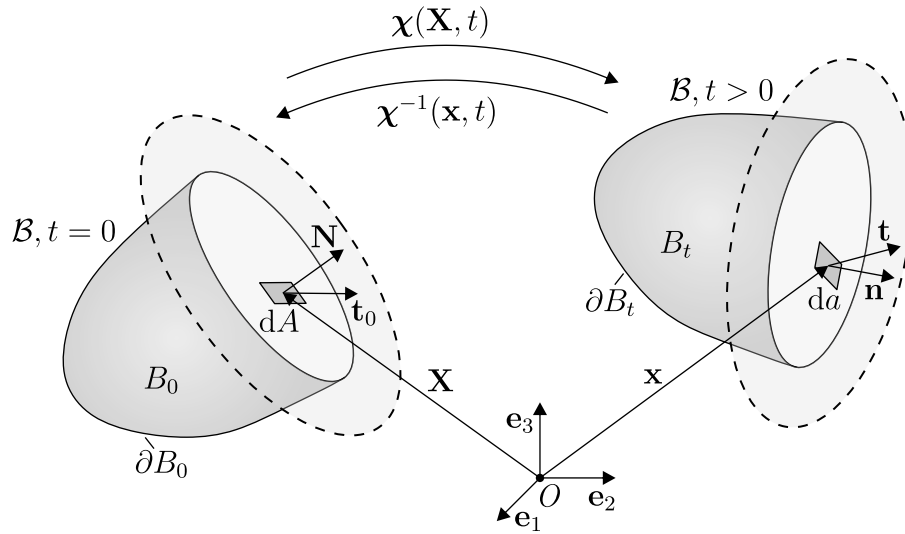


Abbildung 2.2: Schnitt durch einen Körper $\mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration ($t = 0$) und in der Momentankonfiguration ($t > 0$)

Die Schnittfläche in der Momentankonfiguration ist durch den Ortsvektor $\mathbf{x}$ und den Flächennormalenvektor $\mathbf{n}$ definiert. Am Flächenelement Δa wirkt der Kraftvektor $\Delta \mathbf{f}$. Der CAUCHY-Spannungsvektor $\mathbf{t}$ ist mit dem folgenden Grenzwert definiert:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) := \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta a} = \frac{d\mathbf{f}}{da} . \quad (2.20)$$

Das CAUCHY'sche Fundamentaltheorem

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)^T \mathbf{n} \quad (2.21)$$

verknüpft den Spannungsvektor $\mathbf{t}$ mit dem symmetrischen CAUCHY-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, welcher nur von dem Ortsvektor $\mathbf{x}$ und von der Prozessvariable t abhängig ist. Die CAUCHY-Spannungen werden auch als *wahre Spannungen* bezeichnet, da sie den momentan wirkenden Kraftvektor $d\mathbf{f}$ auf das deformierte Flächenelement da beziehen. Somit ist dieser Spannungstensor vollständig in der Momentankonfiguration definiert.

Das CAUCHY-Theorem in der Referenzkonfiguration lautet

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)^T \mathbf{N} . \quad (2.22)$$

Dabei ist $\mathbf{t}_0 = d\mathbf{f}/dA$ der 1. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungsvektor, der den Kraftvektor der Momentankonfiguration auf das unverformte Flächenelement der Referenzkonfiguration bezieht. Weiterhin bezeichnet $\mathbf{P}$ den zugehörigen 1. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor. Über den infinitesimalen Kraftvektor $d\mathbf{f}$ können die auf die Flächenelemente dA und da bezogenen Spannungsvektoren $\mathbf{t}_0$ und $\mathbf{t}$ miteinander in Verbindung gebracht werden:

$$\mathbf{t}_0 dA = d\mathbf{f} = \mathbf{t} da \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}^T \mathbf{N} dA = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} da . \quad (2.23)$$

Zusammen mit der NANSON-Formel, siehe Gleichung (2.12), können die eingeführten Spannungstensoren ineinander überführt werden:

$$\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{P} . \quad (2.24)$$

Die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen werden als *technische Spannungen* bezeichnet. Sie beziehen den Kraftvektor $d\mathbf{f}$ der Momentankonfiguration auf das unverformte Flächenelement dA der Referenzkonfiguration. Aufgrund der einseitigen Transformation ist der 1. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor im Allgemeinen unsymmetrisch. Es gilt $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$.

Wird $\mathbf{P}$ mit der Umkehrabbildung $\mathbf{F}^{-1}$ des Deformationsgradienten vollständig in die Referenzkonfiguration transformiert, lässt sich der symmetrische 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor definieren:

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}^T = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T . \quad (2.25)$$

Aus der Beziehung $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ folgt die Symmetrie des 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors. Im Gegensatz zu dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor ist $\mathbf{S}$ infolge der beidseitigen Transformation vollständig in der Referenzkonfiguration definiert. Diese Spannungen werden als *Pseudo-Spannungen* bezeichnet, da sie nicht physikalisch interpretierbar sind. Dennoch findet dieses Spannungsmaß Anwendung, da es zusammen mit dem symmetrischen GREEN-LAGRANGE'schen-Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ eine arbeitskonforme Paarung bildet.

2.3 Bilanzgleichungen

Die Bilanzgleichungen stellen zusammen mit dem Konzept der Spannungen aus Kapitel 2.2 einen weiteren Bestandteil der materialunabhängigen Grundgleichungen dar. Dazu gehören die Massenerhaltung, die Impulsbilanz und die Drehimpulsbilanz.

Der Körper $\mathcal{B}$ nimmt in der Momentankonfiguration den Bereich B_t mit der Berandung ∂B_t ein und ist durch äußere Einwirkungen belastet, siehe Abbildung 2.3. Die auf den Körper einwirkenden Kräfte in der Momentankonfiguration setzen sich aus Volumenkräften $\rho_t \bar{\mathbf{b}}$ und Oberflächenbelastungen $\bar{\mathbf{t}}$ zusammen. Ist auf dem Rand die Verschiebung $\bar{\mathbf{u}}$ vorgegeben, so handelt es sich um einen DIRICHLET-Rand ∂B_t^u . Im Gegensatz dazu ist der NEUMANN-Rand durch die Vorgabe eines Spannungsvektors $\bar{\mathbf{t}}$ definiert. Für die Ränder gilt $\partial B_t = \partial B_t^u \cup \partial B_t^\sigma$ und $\partial B_t^u \cap \partial B_t^\sigma = \emptyset$.

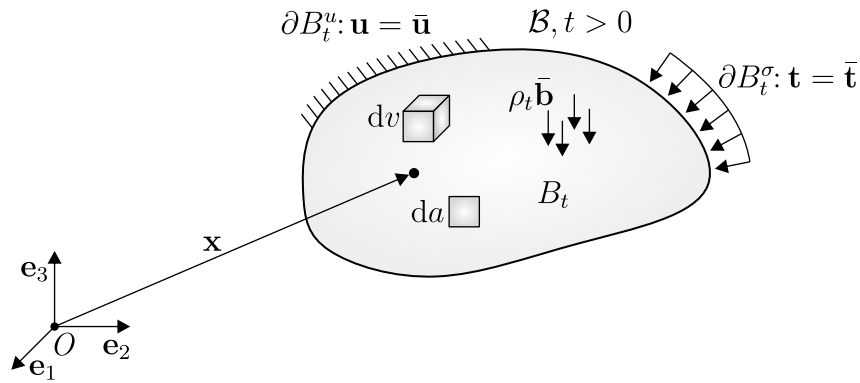


Abbildung 2.3: Körper $\mathcal{B}$ in der Momentankonfiguration ($t > 0$)

Die Impulsbilanz besagt, dass die Summe aller von außen wirkenden Kräfte der zeitlichen Änderung des Impulses entspricht. Bezogen auf die Momentankonfiguration wird dieser Zusammenhang formal beschrieben durch

$$\dot{\mathbf{I}} = \frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho_t \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{B_t} \rho_t \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial B_t^\sigma} \bar{\mathbf{t}} da . \quad (2.26)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{I}$ den Impuls und $\dot{\mathbf{x}}$ die Geschwindigkeit des räumlichen Punktes $\mathbf{x}$. Für quasi-statische Prozesse ist die zeitliche Änderung des Impulses gleich null, weshalb sich die Impulsbilanz auf das Kräftegleichgewicht

$$\int_{B_t} \rho_t \bar{\mathbf{b}} dv + \int_{\partial B_t^\sigma} \bar{\mathbf{t}} da = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

reduziert. Unter Verwendung des CAUCHY-Theorems in Gleichung (2.21) und des GAUSS'-schen Integralsatzes wird das globale Kräftegleichgewicht in Gleichung (2.27) umgeformt zu

$$\int_{B_t} (\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) + \rho_t \bar{\mathbf{b}}) dv = \mathbf{0} . \quad (2.28)$$

Da Gleichung (2.28) für beliebige Volumen Gültigkeit besitzt, muss der Integrand an jedem Punkt $\mathbf{x}$ null sein. Ohne das Integral über das Volumen folgt die lokale Form des Kräftegleichgewichts bezogen auf die Momentankonfiguration

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) + \rho_t \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} , \quad (2.29)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ der symmetrische CAUCHY'sche Spannungstensor ist. Die Symmetrie des Spannungsmaßes $\boldsymbol{\sigma}$ kann über die lokale Form der Drehimpulsbilanz bezüglich der Momentankonfiguration gezeigt werden. Bezüglich der Referenzkonfiguration lautet Gleichung (2.27) wie folgt:

$$\int_{B_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, dV + \int_{\partial B_0^g} \bar{\mathbf{t}}_0 \, dA = \mathbf{0} . \quad (2.30)$$

Aus der integralen Form in Gleichung (2.30) folgt schließlich die lokale Form des Gleichgewichts bezüglich der Ausgangskonfiguration:

$$\operatorname{Div}(\mathbf{P}^T) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} . \quad (2.31)$$

Hier bezeichnet $\mathbf{P}$ den bereits eingeführten unsymmetrischen 1. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor. Ein Zusammenhang der Massendichte der Referenzkonfiguration und der Massendichte der Momentankonfiguration folgt aus der lokalen Form der Massenerhaltung. Bleibt die Masse konstant gilt $\rho_0 = J\rho_t$, wobei J die JACOBI-Determinante des Deformationsgradienten ist. Gleichung (2.31) wird auch als *starke Form des Gleichgewichts* bezeichnet, da sie in jedem Punkt $\mathbf{X}$ erfüllt sein muss.

2.4 Konstitutivbeziehungen

Die in den vorherigen Kapiteln dargestellten Zusammenhänge sind unabhängig vom betrachteten Material. Zur Beschreibung der Materialantwort eines Körpers während einer Deformation ist die Formulierung konstitutiver Gleichungen erforderlich. Sie verknüpfen den im Material herrschenden Verzerrungs- mit dem Spannungszustand. Das zugrundeliegende Materialmodell sollte in der Lage sein, das tatsächliche Werkstoffverhalten möglichst realitätsnah abzubilden. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf rein elastisches Materialverhalten, welches auch als GREEN-Elastizität bezeichnet wird.

Für GREEN-elastische Materialien existiert eine Verzerrungsenergiedichtefunktion $W(\mathbf{E})$. Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor folgt aus der einfachen Ableitung der Funktion $W(\mathbf{E})$ nach dem Verzerrungstensor $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} . \quad (2.32)$$

Weiterhin führt die zweifache Ableitung auf den vierstufigen Materialtensor

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} . \quad (2.33)$$

Die einfachste Form der GREEN-Elastizität ist das SAINT-VENANT-Materialmodell mit der zugehörigen Verzerrungsenergiedichtefunktion

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} . \quad (2.34)$$

Es beschreibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Verzerrungs- und Spannungstensor der Form

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.35)$$

und ist nur gültig für kleine Verzerrungen. Der vierstufige Materialtensor $\mathbb{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ verknüpft den 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor $\mathbf{S} = S_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ mit dem GREEN-LAGRANGE'schen-Verzerrungstensor $\mathbf{E} = E_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$. Das SAINT-VENANT-Materialmodell in Gleichung (2.35) stellt eine Erweiterung des allgemeinen HOOKE'schen Gesetzes auf nichtlineare Verzerrungs- und Spannungsmaße dar.

Im Allgemeinen besitzt der vierstufige Materialtensor $\mathbb{C}$ insgesamt $3^4 = 81$ unabhängige Konstanten. Unter Berücksichtigung der bereits beschriebenen Symmetrieeigenschaften von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{E}$ reduzieren sich die 81 Einträge auf 36. Durch die Existenz der Verzerrungsenergiedichtefunktion $W(\mathbf{E})$ verbleiben im allgemeinen anisotropen Fall letztlich noch 21 unabhängige Konstanten. Die Symmetrieeigenschaften von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{E}$ erlauben eine kompakte Darstellung der Tensoren in VOIGT-Notation:

$$\mathbf{S} = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]^T , \quad (2.36)$$

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T . \quad (2.37)$$

Der vierstufige Materialtensor wird unter Berücksichtigung der beschriebenen Symmetrien ebenfalls in VOIGT-Notation als Matrix geschrieben:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} . \quad (2.38)$$

Unter Verwendung der reduzierten Notation der Tensoren lautet das linear elastische Materialverhalten in Gleichung (2.35)

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} . \quad (2.39)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Buchstaben $\mathbf{S}$ bzw. $\mathbf{E}$ sowohl für die Tensor- als auch für die Vektornotation der Spannungen bzw. der Verzerrungen verwendet werden. Ob die entsprechenden Größen als Tensoren oder Vektoren vorliegen, erschließt sich in den folgenden Kapiteln aus den mathematischen Operationen.

Die 21 unabhängigen Konstanten von $\mathbf{C}$, siehe Gleichung (2.38), können durch Symmetrieeigenschaften des Materials weiter reduziert werden. Ein Material besitzt entsprechende Symmetrien, wenn die zugehörigen Werkstoffeigenschaften bei Transformationen wie beispielsweise Drehungen und Spiegelungen unverändert bleiben, siehe Abbildung 2.4.

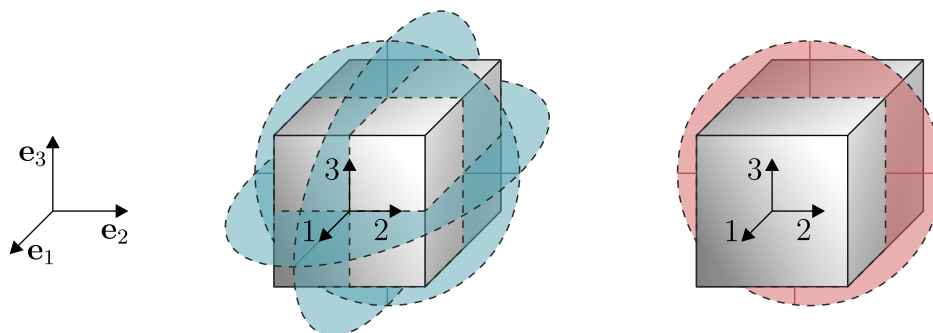


Abbildung 2.4: Orthotropes Material mit orthogonalen Symmetrieebenen (links), Transversale Isotrope mit isotroper Ebene (rechts)

Besitzt der betrachtete Werkstoff drei senkrecht zueinander stehende Symmetrieebenen, handelt es sich um orthotropes Materialverhalten, siehe Abbildung 2.4 (links). Aufgrund der orthogonalen Symmetrieebenen gilt für die Materialmatrix:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Es ist zu erkennen, dass die Normalspannungen und Schubverzerrungen vollständig voneinander entkoppelt sind. Für die Beschreibung dieses Materialverhaltens sind 9 Konstanten erforderlich. In diesem Fall sind das drei E-Moduln, drei Schubmoduln und drei Querdehnzahlen. Auf eine Darstellung der Materialmatrix in Abhängigkeit dieser Ingenieurkonstanten wird an dieser Stelle verzichtet.

Transversale Isotropie liegt vor, wenn das Material eine Vorzugsrichtung aufweist, wobei senkrecht zu dieser Richtung unendlich viele Symmetrieebenen existieren. Ein Beispiel hierfür sind unidirektional verstärkte Faserverbundwerkstoffe, wobei die Vorzugsrichtung gerade der Faserrichtung entspricht. Orthogonal zu dieser Vorzugsrichtung besitzt das Material eine isotrope Ebene, siehe Abbildung 2.4 (rechts). In dieser Ebene sind die Materialeigenschaften richtungsunabhängig. Dies führt zu den folgenden Abhängigkeiten der Konstanten:

$$C_{13} = C_{12} , \quad C_{33} = C_{22} , \quad C_{55} = C_{44} , \quad C_{66} = (C_{22} - C_{23})/2 . \quad (2.41)$$

Damit verbleiben 5 unabhängige Einträge in der Materialmatrix. Da die Darstellung von $\mathbf{C}$ in den Ingenieurkonstanten unübersichtlich ist, wird stattdessen die Nachgiebigkeitsmatrix $\mathbf{C}^{-1}$ angegeben. Im Fall transversaler Isotropie gilt

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\text{mit } G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})} .$$

Für die vollständige Beschreibung dieses Materialverhaltens sind die 5 Ingenieurkonstanten

$$E_1, \quad E_2, \quad \nu_{12}, \quad G_{12}, \quad \text{und } \nu_{23} \quad (2.43)$$

erforderlich. Der E-Modul parallel bzw. senkrecht zur Vorzugsrichtung wird mit E_1 bzw. E_2 bezeichnet.

Sind die Werkstoffeigenschaften richtungsunabhängig, wird das Material als isotrop bezeichnet. Dies führt zu weiteren Abhängigkeiten:

$$C_{22} = C_{11} , \quad C_{23} = C_{12} , \quad C_{55} = (C_{11} - C_{12})/2 = C_{44} . \quad (2.44)$$

Für den Fall der Isotropie sind nur die beiden Materialkonstanten E und ν erforderlich. Die Nachgiebigkeitsmatrix für isotropes Materialverhalten lautet

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$\text{mit } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} .$$

2.5 Variationsformulierungen

Mit den dargestellten Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik lässt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen das Randwertproblem eines Körpers vollständig beschreiben, siehe Tabelle 2.1. Da die Gleichungen an jedem materiellen Punkt erfüllt sein müssen, wird das Problem auch als *starke Form* bezeichnet. Eine analytische Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen ist im Allgemeinen nicht mehr möglich. Aus diesem Grund wird die starke Form in eine *schwache Form* überführt, welche den Ausgangspunkt für numerische Lösungsverfahren wie die Finite-Elemente-Methode (FEM) darstellt.

Kinematik	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$	in B_0
Gleichgewicht	$\text{Div}(\mathbf{P}^T) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$	in B_0
Stoffgesetz	$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$	in B_0
DIRICHLET-RBen	$\mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}_0$	auf ∂B_0^u
NEUMANN-RBen	$\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0$	auf ∂B_0^σ

Tabelle 2.1: Grundgleichungen des Randwertproblems eines Körpers

2.5.1 Die schwache Form des Gleichgewichts

Die lokale Form der Impulsbilanz, siehe Gleichung (2.31), wird auch als starke Form des Gleichgewichts bezeichnet. Alle folgenden Formulierungen in diesem Kapitel beziehen sich stets auf die Referenzkonfiguration. Die lokale Form der Impulsbilanz wird durch die Multiplikation mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ und anschließender Integration über das Gebiet des Körpers in die schwache Form überführt:

$$\int_{B_0} (\text{Div}(\mathbf{P}^T) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0. \quad (2.46)$$

Die Testfunktionen werden auch als virtuelle Verschiebungen oder Verschiebungsvariation bezeichnet. Sie sind beliebig, erfüllen jedoch die DIRICHLET-Randbedingungen und es gilt $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{X} \in \partial B_0^u$. In Gleichung (2.46) wird die lokale Impulsbilanz nur im integralen Mittel eingefordert, weshalb diese Gleichung auch als *schwache Form des Gleichgewichts* bezeichnet wird. Für die folgenden Herleitungen wird der erste Summand in Gleichung (2.46) umgeformt zu

$$\int_{B_0} \text{Div}(\mathbf{P}^T) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{B_0} \text{Div}(\mathbf{P} \delta \mathbf{u}) - \mathbf{P}^T : \text{Grad} \delta \mathbf{u} \, dV. \quad (2.47)$$

Die 1. Variation einer Größe $(\bullet)$ nach den Verschiebungen $\mathbf{u}$ entspricht einer Richtungsableitung in Richtung der Größe $\delta\mathbf{u}$ und lässt sich berechnen mit

$$\delta(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} . \quad (2.48)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.48) und der Definition des Verschiebungsgradienten wird der Ausdruck $\text{Grad } \delta\mathbf{u}$ aus Gleichung (2.47) umgeformt zu

$$\text{Grad } \delta\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}}(\delta\mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial\mathbf{X}} \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} \right) = \underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}}}_{\mathbf{H}} \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} \right) = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{u}} \delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{H} . \quad (2.49)$$

Unter Verwendung dieses Zusammenhangs und des GAUSS'schen Integralsatzes wird folgende Umformung vorgenommen:

$$\int_{B_0} \text{Div}(\mathbf{P}\delta\mathbf{u}) dV = \int_{\partial B_0} (\mathbf{P}\delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} dA = \int_{\partial B_0} (\mathbf{P}^T \mathbf{N}) \cdot \delta\mathbf{u} dA . \quad (2.50)$$

Da die Testfunktionen $\delta\mathbf{u}$ auf dem DIRICHLET-Rand ∂B_0^u gleich null sind, reduziert sich das Randintegral zu

$$\int_{\partial B_0} (\mathbf{P}^T \mathbf{N}) \cdot \delta\mathbf{u} dA = \int_{\partial B_0^\sigma} (\mathbf{P}^T \mathbf{N}) \cdot \delta\mathbf{u} dA . \quad (2.51)$$

Unter Berücksichtigung des CAUCHY-Theorems, siehe Gleichung (2.22) und der NEUMANN-Randbedingung $\mathbf{t}_0 = \bar{\mathbf{t}}_0$, $\forall \mathbf{X} \in \partial B_0^\sigma$ wird das Randintegral weiter umgeformt zu

$$\int_{\partial B_0^\sigma} (\mathbf{P}^T \mathbf{N}) \cdot \delta\mathbf{u} dA = \int_{\partial B_0^\sigma} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dA = \int_{\partial B_0^\sigma} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dA . \quad (2.52)$$

Mit den bisherigen Berechnungsschritten lässt sich Gleichung (2.46) wie folgt schreiben:

$$\int_{B_0} \mathbf{P}^T : \delta\mathbf{H} dV - \int_{B_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta\mathbf{u} dV - \int_{\partial B_0^\sigma} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dA . \quad (2.53)$$

Weiterhin wird mit der Beziehung $\mathbf{P}^T = \mathbf{F}\mathbf{S}^T$ aus Gleichung (2.25) der erste Summand umformuliert zu

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^T : \delta\mathbf{H} &= \mathbf{F}\mathbf{S}^T : \delta\mathbf{H} = \mathbf{S}^T : \mathbf{F}^T \delta\mathbf{H} \\ &= \mathbf{S}^T : \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta\mathbf{H}) + \underbrace{\mathbf{S}^T : \text{skw}(\mathbf{F}^T \delta\mathbf{H})}_{= \mathbf{0}} \\ &= \mathbf{S}^T : \frac{1}{2} \left(\delta\mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta\mathbf{H} \right) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Es verbleibt nur der Summand mit dem symmetrischen Anteil von $\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}$. Die 1. Variation des Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ wird mit Gleichung (2.17) folgendermaßen geschrieben:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{H} + \delta \mathbf{H}^T + \delta \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T \delta \mathbf{H} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{H}^T (\mathbf{1} + \mathbf{H}) + (\mathbf{1} + \mathbf{H}^T) \delta \mathbf{H} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\delta \mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{H} \right) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Es ist zu erkennen, dass der symmetrische Anteil von $\mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}$ gerade der 1. Variation $\delta \mathbf{E}$ entspricht. Schließlich wird die *schwache Form des Gleichgewichts* bezüglich der Referenzkonfiguration geschrieben als

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \underbrace{\int_{B_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV}_{\delta \pi_i} - \underbrace{\int_{B_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0^\sigma} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA}_{-\delta \pi_a} = 0 \\ &= \delta \pi_i - \delta \pi_a = 0 . \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte wird mit $\delta \pi_i$ bezeichnet und die der äußeren Lasten mit $\delta \pi_a$. Gleichung (2.56) bildet den Ausgangspunkt für numerische Lösungsverfahren wie beispielsweise die Finite-Elemente-Methode (FEM).

2.5.2 Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials

Unter Annahme eines elastischen Werkstoffverhaltens kann die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.56) alternativ auch über die Minimierung des Gesamtpotentials hergeleitet werden. Die in Gleichung (2.34) eingeführte Verzerrungsenergiedichtefunktion beschreibt die im Körper gespeicherte Energie. Unter Berücksichtigung der äußeren Belastung lässt sich das *Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials* formulieren als

$$\pi(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{B_0} \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \, dV}_{\pi_i} - \underbrace{\int_{B_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0^\sigma} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA}_{-\pi_a} \rightarrow \text{stat.} . \quad (2.57)$$

Von Interesse ist der Deformationszustand $\mathbf{u}$, für den das Gesamtpotential $\pi(\mathbf{u})$ minimal bzw. stationär wird. Hierfür wird die 1. Variation des Potentials benötigt, welche sich berechnen lässt mit

$$\delta \pi = \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}} \pi \cdot \delta \mathbf{u} . \quad (2.58)$$

Die Richtungsableitung des Potentials in Richtung der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ führt zu

$$\delta \pi(\mathbf{u}) = \int_{B_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{B_0} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0^g} \bar{\mathbf{t}}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 . \quad (2.59)$$

Es lässt sich erkennen, dass die 1. Variation des Potentials in Gleichung (2.59) gerade der schwachen Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.56) entspricht. Die zugehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind

$$\text{Div}(\mathbf{P}^T) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } B_0 \quad (\text{Gleichgewicht}) , \quad (2.60)$$

was bedeutet, dass nur die Gleichgewichtsbedingungen schwach formuliert sind. Die Kinematik und das Stoffgesetz werden weiterhin stark eingefordert.

2.5.3 Variationsprinzip nach Hellinger-Reissner

Da in dieser Arbeit sowohl verschiebungsbasierte als auch gemischte Elementformulierungen behandelt werden, wird zusätzlich das Variationsprinzip nach HELLINGER-REISSNER [55, 87] vorgestellt. Ausgangspunkt ist das folgende Zweifeldfunktional

$$\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_{B_0} \mathbf{S} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\mathbf{S} : \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S}}_{\mathbf{E}^s}) \, dV - \pi_a \rightarrow \text{stat.} , \quad (2.61)$$

wobei die unabhängigen Variablen der Deformationszustand $\mathbf{u}$ und die Spannungen $\mathbf{S}$ sind. Die physikalischen Verzerrungen sind mit $\mathbf{E}^s$ gekennzeichnet. Dieses Variationsprinzip ist auf elastisches Materialverhalten beschränkt, da die Inverse $\mathbb{C}^{-1}$ des Materialensors zwingend erforderlich ist. Um die Stationaritätsbedingung in Gleichung (2.61) zu erfüllen, muss die 1. Variation des Zweifeldfunktionals gleich null sein:

$$\begin{aligned} \delta \pi_{\text{HR}} &= \frac{\partial \pi_{\text{HR}}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \pi_{\text{HR}}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \delta \mathbf{S} \\ &= D_{\mathbf{u}} \pi_{\text{HR}} \cdot \delta \mathbf{u} + D_{\mathbf{S}} \pi_{\text{HR}} \cdot \delta \mathbf{S} = 0 . \end{aligned} \quad (2.62)$$

Es ist zu erkennen, dass für die Variation sowohl die Richtungsableitung in Richtung der virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ als auch in Richtung der virtuellen Spannungen $\delta \mathbf{S}$ erforderlich ist. Diese lauten

$$D_{\mathbf{u}} \pi_{\text{HR}} \cdot \delta \mathbf{u} = \int_{B_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV - \delta \pi_a \quad \text{und} \quad (2.63)$$

$$D_{\mathbf{S}} \pi_{\text{HR}} \cdot \delta \mathbf{S} = \int_{B_0} \delta \mathbf{S} : (\mathbf{E} - \mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S}) \, dV . \quad (2.64)$$

Damit gilt für die 1. Variation des Zweifeldfunktionals

$$\delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) = \int_{B_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{S} : \left(\mathbf{E} - \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S}}_{\mathbf{E}^s} \right) dV - \delta\pi_a = 0 . \quad (2.65)$$

Es ist zu erkennen, dass Gleichung (2.63) gerade wieder der schwachen Form in Gleichung (2.56) entspricht. Die zugehörigen EULER-LAGRANGE-Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathbf{P}^T) + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} &= \mathbf{0} \quad \text{in } B_0 \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad \text{und} \\ \mathbf{E} - \mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S} &= \mathbf{0} \quad \text{in } B_0 \quad (\text{Kinematik}) . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Sowohl die Gleichgewichtsbedingungen als auch die Kinematik sind schwach formuliert, sodass nur das Stoffgesetz stark eingefordert wird.

2.6 Linearisierung der Variationsformulierungen

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten Variationsformulierungen sind im Allgemeinen nichtlineare Funktionen in den gesuchten Variablen. Die schwache Form in Gleichung (2.56) ist eine nichtlineare Funktion der Verschiebungen $\mathbf{u}$. Bei dem Variationsprinzip nach HELLINGER-REISSNER in Gleichung (2.65) sind sowohl die Verschiebungen $\mathbf{u}$ als auch die Spannungen $\mathbf{S}$ die gesuchten Variablen. Die Nichtlinearitäten resultieren aus dem nichtlinearen GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensor (geometrische Nichtlinearität) und/oder aus nichtlinearem Materialverhalten (materielle Nichtlinearität). Letzteres ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, da nur linear elastisches Materialverhalten betrachtet wird. Für die Lösung der nichtlinearen Gleichungen wird das NEWTON-Verfahren verwendet. Hierfür ist eine Linearisierung der entsprechenden Gleichungen erforderlich. Die notwendige Linearisierung entspricht dabei einer TAYLOR-Reihenentwicklung an einer festen Entwicklungsstelle mit Abbruch nach dem linearen Glied.

2.6.1 Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

Wird die schwache Form des Gleichgewichts in Gleichung (2.56) an der Entwicklungsstelle $\mathbf{u}$ linearisiert, so lässt sich das formal schreiben als

$$\mathbb{L}[\delta\pi(\mathbf{u})] = \delta\pi(\mathbf{u}) + \Delta\delta\pi(\mathbf{u}) = \delta\pi(\mathbf{u}) + \frac{\partial\delta\pi(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} = 0 . \quad (2.67)$$

Es ist zu erkennen, dass der Summand $\Delta\delta\pi(\mathbf{u})$ gerade der Richtungsableitung von $\delta\pi(\mathbf{u})$ in Richtung der inkrementellen Verschiebung $\Delta\mathbf{u}$ entspricht. Für die Berechnung von $\Delta\delta\pi$ kann deshalb analog Gleichung (2.48) vorgegangen werden.

Unter Berücksichtigung der Produktregel führt die Richtungsableitung von $\delta\pi$ zu folgendem Ausdruck:

$$\Delta\delta\pi = \int_{B_0} \Delta\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E} \, dV . \quad (2.68)$$

Die Linearisierung der Spannungen lautet

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}} \Delta\mathbf{E} = \frac{\partial(\mathbb{C} : \mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} \Delta\mathbf{E} = \mathbb{C} : \Delta\mathbf{E} . \quad (2.69)$$

Damit lässt sich Gleichung (2.68) umformen zu

$$\Delta\delta\pi = \int_{B_0} \delta\mathbf{E} : \mathbb{C} : \Delta\mathbf{E} + \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E} \, dV . \quad (2.70)$$

Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich konservative Belastungen betrachtet werden, gilt

$$\bar{\mathbf{b}} \neq \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{u}) \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{t}}_0 \neq \bar{\mathbf{t}}_0(\mathbf{u}) . \quad (2.71)$$

Dies hat zur Folge, dass die Linearisierung der virtuellen äußeren Arbeit verschwindet:

$$\Delta\delta\pi_a = 0 . \quad (2.72)$$

2.6.2 Linearisierung des Hellinger-Reissner-Variationsprinzips

Die 1. Variation des Zweifeldfunktionals nach HELLINGER-REISSNER wird an der Entwicklungsstelle $(\mathbf{u}, \mathbf{S})$ in eine lineare TAYLOR-Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} L[\delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S})] &= \delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) + \Delta\delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) \\ &= \delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) + \frac{\partial\delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S})}{\partial\mathbf{u}} \cdot \Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\delta\pi_{\text{HR}}(\mathbf{u}, \mathbf{S})}{\partial\mathbf{S}} \cdot \Delta\mathbf{S} = 0 . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Aufgrund der zwei unabhängigen Variablen sind die Richtungsableitungen in Richtung der inkrementellen Verschiebungen $\Delta\mathbf{u}$ und in Richtung der inkrementellen Spannungen $\Delta\mathbf{S}$ notwendig. Es folgt

$$\Delta\delta\pi_{\text{HR}} = \int_{B_0} \mathbf{S} : \Delta\delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{S} : \Delta\mathbf{E} \, dV + \int_{B_0} \Delta\mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, dV - \delta\mathbf{S} : \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \Delta\mathbf{S}}_{\Delta\mathbf{E}^s} \, dV . \quad (2.74)$$

Wie bereits beschrieben, ist die Linearisierung der virtuellen äußeren Arbeit aufgrund der Annahme konservativer Belastungen gleich null.

3 Grundlagen der Schalentheorie

Dünnwandige Strukturen aus Faserverbundmaterial finden aufgrund ihres sehr geringen Gewichts besonders im Bereich des Leichtbaus Verwendung. Der Lastabtrag solcher Tragstrukturen erfolgt hauptsächlich über Membranspannungen, so dass auch bei sehr dünnen Bauteilen hohe mechanische Beanspruchbarkeiten erzielt werden können. Das folgende Kapitel gibt die grundlegenden kontinuumsmechanischen Zusammenhänge der Schalentheorie wieder. Auf Basis der hier dargestellten Variationsformulierung der Schale wird in Kapitel 6.2 die spektrale stochastische FE-Formulierung eines Schalenelementes entwickelt.

Im Rahmen der klassischen Schalentheorie wird eine Mittel- bzw. Referenzfläche definiert. Hierfür müssen die dargestellten Zusammenhänge aus Kapitel 2, welche für das dreidimensionale Kontinuum gültig sind, auf das Schalenkontinuum übertragen werden. Da die Struktur allein durch ihre Mittelfläche beschrieben wird, ist es notwendig, neben den Verschiebungen zusätzlich Rotationen zu definieren. Über Direktoren, die Funktionen der eingeführten Verdrehungen sind, kann die ursprüngliche Ausrichtung der Schalenebene und das zugehörige Rotationsverhalten während der Deformation eindeutig beschrieben werden.

Die nachstehende Formulierung beschränkt sich auf ebene Schalen mit mäßigen bzw. moderaten Rotationen. Folgende Annahmen und Voraussetzungen werden für die nachstehende Schalenformulierung definiert.

- Es wird eine REISSNER-MINDLIN-Kinematik vorausgesetzt.
- Die Querschnitte bleiben eben.
- Es wird ein inextensibles Direktorfeld mit $||\mathbf{d}|| = 1$ vorausgesetzt.
- Die Schale wird mit konvektiven Koordinaten $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3 = \zeta\}$ beschrieben.
- Die Verdrehungen beschränken sich auf mäßige Rotationen mit $\beta \leq 7^\circ - 8^\circ$. Es gilt $\cos \beta \approx 1$ und $\sin \beta \approx \beta$.
- Die Spannung in Dickenrichtung S^{33} wird vernachlässigt.

3.1 Schalenkinematik

Für die Beschreibung der Schalenkinematik wird eine Referenzfläche für die Schale definiert. In der Ausgangskonfiguration wird diese Bezugsebene mit Ω_0 und in der Momentankonfiguration mit Ω_t bezeichnet, siehe Abbildung 3.1. Durch die Definition der Referenzfläche kann die Schale durch zwei konvektive Flächenkoordinaten ξ^1, ξ^2 und eine konvektive Dickenkoordinate ζ beschrieben werden. Die

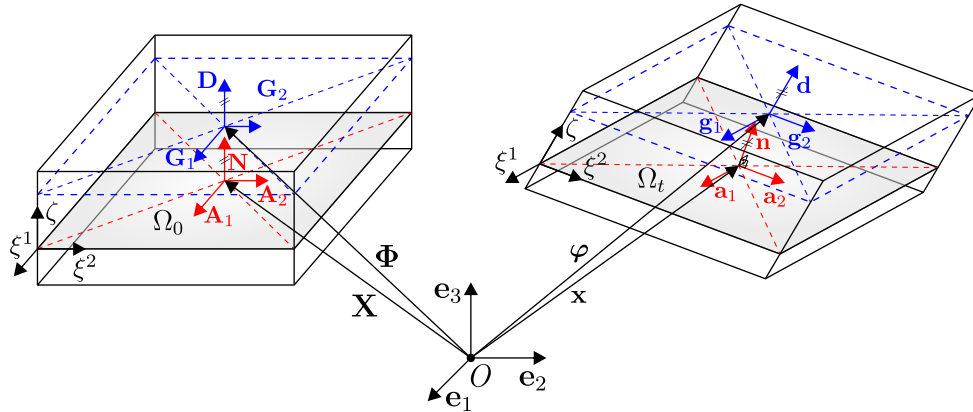


Abbildung 3.1: Schale in der Referenzkonfiguration ($t = 0$) und in der Momentankonfiguration ($t > 0$)

Ortsvektoren $\mathbf{X}(\xi^1, \xi^2)$ und $\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2)$ definieren Punkte in den entsprechenden Konfigurationen auf der Referenzfläche der Schale. Die zugehörigen Tangentenvektoren in diesen Punkten sind als Ableitung der Ortsvektoren nach den konvektiven Koordinaten definiert:

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.1)$$

Über das Kreuzprodukt der Tangentenvektoren werden die Normalenvektoren berechnet:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} = \mathbf{A}_3, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|}. \quad (3.2)$$

Für die Beschreibung von Punkten außerhalb der Referenzfläche werden die Direktoren $\mathbf{D}(\xi^1, \xi^2)$ und $\mathbf{d}(\xi^1, \xi^2)$ definiert. Unter der bereits erwähnten Annahme, dass der Querschnitt während der Deformation eben bleibt, können beliebige Punkte außerhalb der Bezugsebene beschrieben werden durch

$$\Phi(\xi^1, \xi^2, \zeta) = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \zeta \mathbf{D}(\xi^1, \xi^2) \quad \text{und} \quad (3.3)$$

$$\varphi(\xi^1, \xi^2, \zeta) = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) + \zeta \mathbf{d}(\xi^1, \xi^2). \quad (3.4)$$

Die Ableitungen der Ortsvektoren $\Phi(\xi^1, \xi^2, \zeta)$ und $\varphi(\xi^1, \xi^2, \zeta)$ nach den konvektiven Flächenkoordinaten definieren die Tangentenvektoren in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{G}_\alpha = \Phi_{,\alpha} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.5)$$

und in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{g}_\alpha = \varphi_{,\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^\alpha} = \mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.6)$$

Die partielle Ableitung der Ortsvektoren nach der Dickenkoordinate ζ liefert die Direktoren:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \mathbf{D} = \mathbf{N} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \mathbf{d} \neq \mathbf{n} . \quad (3.7)$$

In der Referenzkonfiguration entspricht der Normalenvektor $\mathbf{N}$ dem unverformten Direktor $\mathbf{D}$. Aufgrund der Annahme einer REISSNER-MINDLIN-Kinematik muss der verformte Direktor $\mathbf{d}$ nicht mehr zwingend senkrecht auf der Referenzfläche der Momentankonfiguration stehen, siehe Abbildung 3.1. Somit entspricht der Direktor $\mathbf{d}$ in der Momentankonfiguration im Allgemeinen nicht mehr dem Normalenvektor $\mathbf{n}$, siehe Gleichung (3.7).

Um die Kinematik der Schale beschreiben zu können, muss der Direktor $\mathbf{d}$ definiert werden. Die bereits angesprochene Beschränkung auf moderate Rotationen hat zur Folge, dass für die Beschreibung des Direktors $\mathbf{d}$ keine Winkelfunktionen notwendig sind. Abbildung 3.2 zeigt eine schematische Darstellung des Direktors. Der verformte Direktor $\mathbf{d}$ setzt sich aus dem unverformten Direktor $\mathbf{D}$ und den lokalen Verdrehungen β_1 und β_2 der Referenzfläche zusammen:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} + \underbrace{\beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_2}_{=: \boldsymbol{\beta}} = \mathbf{D} + \boldsymbol{\beta} . \quad (3.8)$$

Die lokalen Verdrehungen β_α mit $\alpha = 1, 2$ in Gleichung (3.8) sind bezüglich des lokalen tangentialen Basissystems $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ definiert, sodass β_α eine positive Verschiebung in der α -Richtung erzeugt. Es ist zu erkennen, dass die Bedingung $\|\mathbf{d}\| = 1$ für ein inextensibles Direktorfeld aufgrund der linearisierten Kinematik nicht exakt erfüllt wird. Die angesprochene Beschränkung auf moderate Rotationen führt dazu, dass $\|\mathbf{d}\| \approx 1$ näherungsweise erfüllt ist.

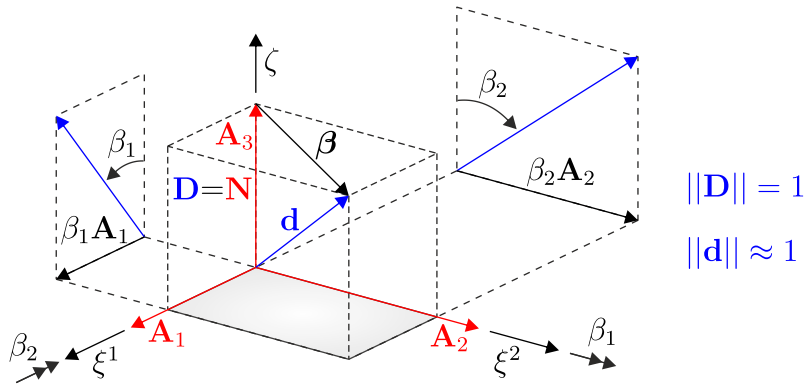


Abbildung 3.2: Verformter Direktor $\mathbf{d}$ in der Momentankonfiguration ($t > 0$)

Der in Kapitel 2 eingeführte GREEN-LAGRANGE'sche Verzerrungstensor wird un-

ter Berücksichtigung der Schalenkinematik definiert:

$$\mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_{,i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,j} - \boldsymbol{\Phi}_{,i} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,j}) , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (3.9)$$

Die zugehörigen Komponenten E_{ij} werden in Matrixschreibweise wie folgt angeordnet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ \hline E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{array} \right] \quad \text{mit} \quad \begin{array}{ll} E_{\alpha\beta} & \alpha, \beta = 1, 2 \\ E_{\alpha 3} & \alpha = 1, 2 \\ E_{33} & \end{array} . \quad (3.10)$$

Für die Beschreibung der Schalenebene werden die Indizes $\alpha, \beta = 1, 2$ verwendet. Die einzelnen Komponenten des Verzerrungstensors werden in Membranverzerrungen $E_{\alpha\beta}$, Querschubverzerrungen $E_{\alpha 3}$ und Dickenverzerrungen E_{33} unterteilt. Unter Berücksichtigung der eingeführten Tangentenvektoren in den Gleichungen (3.5) und (3.6) lassen sich die Komponenten der Membranverzerrungen bestimmen zu

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,\beta} - \boldsymbol{\Phi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,\beta}) \\ &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{x}_{,\beta} + \zeta \mathbf{d}_{,\beta}) - (\mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{X}_{,\beta} + \zeta \mathbf{D}_{,\beta}) \right) \\ &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \zeta \kappa_{\alpha\beta} + \zeta^2 \varrho_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die Membranverzerrungen setzen sich aus Dehnungen $\varepsilon_{\alpha\beta}$, Krümmungen erster Ordnung $\kappa_{\alpha\beta}$ und Krümmungen zweiter Ordnung $\varrho_{\alpha\beta}$ zusammen und sind definiert mit

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}) , \quad (3.12)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}) , \quad (3.13)$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}) . \quad (3.14)$$

Für dünne Schalen werden die Krümmungen zweiter Ordnung vernachlässigt. Die Querschubverzerrungen lauten

$$\begin{aligned} 2E_{\alpha 3} &= \boldsymbol{\varphi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{,3} - \boldsymbol{\Phi}_{,\alpha} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{,3} \\ &= (\mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{d} - (\mathbf{X}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{D} \\ &= (\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}) + \zeta(\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}) \\ &= \gamma_{\alpha 3} + \zeta \hat{\gamma}_{\alpha 3} , \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei zu erkennen ist, dass sich die Querschubverzerrungen aus zwei Anteilen zusammensetzen. Aufgrund des inextensiblen Direktorfeldes mit $\|\mathbf{D}\| = \|\mathbf{d}\| = 1$ gilt

$$\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} = 0 , \quad \alpha = 1, 2 . \quad (3.16)$$

Dies führt dazu, dass der zweite Term $\hat{\gamma}_{\alpha 3}$ gleich null ist und es folgt

$$\gamma_{\alpha 3} = 2E_{\alpha 3} = \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} . \quad (3.17)$$

Infolge des inextensiblen Direktorfeldes tritt zudem keine Dickenverzerrung E_{33} auf. Formal lässt sich das zeigen mit

$$E_{33} = \frac{1}{2}(\varphi_{,3} \cdot \varphi_{,3} - \Phi_{,3} \cdot \Phi_{,3}) = \frac{1}{2}(\underbrace{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}}_{=1} - \underbrace{\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}}_{=1}) = 0 . \quad (3.18)$$

Die erforderlichen Komponenten des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors aus Gleichung (3.10) werden im Vektor

$$\mathbf{E} = [E_{11}, E_{22}, 2E_{12}, 2E_{13}, 2E_{23}]^T \quad (3.19)$$

zusammengefasst. Da die Dickenverzerrung E_{33} gleich null ist, wird sie in dem Vektor $\mathbf{E}$ nicht berücksichtigt. Analog dazu werden die eingeführten Schalenverzerrungen in Vektorschreibweise definiert als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}]^T . \quad (3.20)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ kann über eine Transformation in den Vektor der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen überführt werden:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} . \quad (3.21)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.12), (3.13) und (3.17) lauten die Schalenverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{x}_{,1} - \mathbf{X}_{,1} \cdot \mathbf{X}_{,1}) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{x}_{,2} - \mathbf{X}_{,2} \cdot \mathbf{X}_{,2}) \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{x}_{,2} - \mathbf{X}_{,1} \cdot \mathbf{X}_{,2} \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{d}_{,1} - \mathbf{X}_{,1} \cdot \mathbf{D}_{,1} \\ \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{d}_{,2} - \mathbf{X}_{,2} \cdot \mathbf{D}_{,2} \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{d}_{,2} + \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{d}_{,1} - \mathbf{X}_{,1} \cdot \mathbf{D}_{,2} - \mathbf{X}_{,2} \cdot \mathbf{D}_{,1} \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,1} \cdot \mathbf{D} \\ \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,2} \cdot \mathbf{D} \end{bmatrix} . \quad (3.22)$$

Um diese in Abhängigkeit der lokalen Verschiebungen und Verdrehungen formulieren zu können, wird zunächst der Ortsvektor $\mathbf{x}$ ausgedrückt mit

$$\mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \mathbf{u}(\xi^1, \xi^2) . \quad (3.23)$$

Für die Schalendehnungen aus Gleichung (3.12) gilt somit:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\alpha} \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta} \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha})}_{= \varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{lin}}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta})}_{= \varepsilon_{\alpha\beta}^{\text{nlin}}} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aufgrund des orthogonalen Basissystems ist die Vereinfachung $\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta} = u_{\alpha,\beta}$ gültig. Anhand der Gleichung (3.24) ist zu erkennen, dass sich die Schalendehnungen aus linearen und nichtlinearen Anteilen zusammensetzen.

Analog dazu vereinfachen sich die Schalenkrümmungen aus Gleichung (3.13):

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}}_{= 0} - \underbrace{\mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}}_{= 0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} \right) + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha})}_{\approx 0} \\ &= \frac{1}{2} (\beta_{\alpha,\beta} + \beta_{\beta,\alpha}) . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Für dünne Schalen und moderate Rotationen werden die nichtlinearen Krümmungsanteile $\mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}$ und $\mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}$ vernachlässigt. Die Summanden $\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta}$ und $\mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha}$ sind gleich null, da der Direktor der Referenzkonfiguration gerade dem Normalenvektor entspricht. Anhand der Gleichung (3.25) wird ersichtlich, dass die Krümmungen linear in den Verdrehungen sind.

Schließlich werden auch die Querschubverzerrungen der Schale aus Gleichung (3.17) in Abhängigkeit der Verschiebungen und Verdrehungen formuliert. Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha 3} &= (\mathbf{X} + \mathbf{u})_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \underbrace{\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}}_{= 0} \\ &= \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} \\ &= \beta_{\alpha} + u_{3,\alpha} , \end{aligned} \quad (3.26)$$

wobei der Summand $\mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}$ gleich null ist. Unter Berücksichtigung der Gleichun-

gen (3.24), (3.25) und (3.26) lauten die Schalenverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2) \\ u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2) \\ u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2} \\ \beta_{1,1} \\ \beta_{2,2} \\ \beta_{1,2} + \beta_{2,1} \\ \beta_1 + u_{3,1} \\ \beta_2 + u_{3,2} \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Die Verschiebungen und Verdrehungen bezüglich des lokalen orthogonalen Basissystems $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ sind in Abbildung 3.3 grafisch dargestellt.

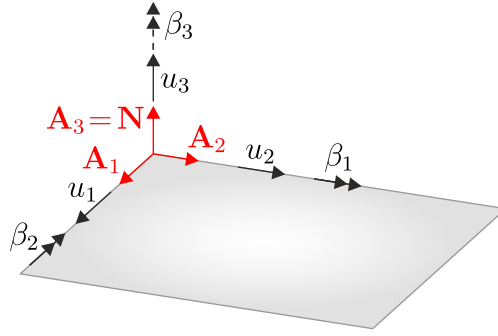


Abbildung 3.3: Lokale Verschiebungsgrößen der Schale

3.2 Schalenschnittgrößen

Im Rahmen der Schalentheorie müssen neben den Verzerrungen auch die Spannungen bezüglich der Referenzfläche formuliert werden. Die Schnittgrößen der Schale werden im Folgenden basierend auf der schwachen Form in Gleichung (2.56) hergeleitet. Die virtuelle innere Arbeit ist gegeben durch

$$\delta\pi_i = \int_{B_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, dV, \quad (3.28)$$

wobei $\mathbf{S}$ und $\mathbf{E}$ Tensoren 2. Stufe sind. Unter Verwendung der VOIGT-Notation wird Gleichung (3.28) umgeschrieben:

$$\delta\pi_i = \int_{B_0} \delta\mathbf{E}^T \mathbf{S} \, dV. \quad (3.29)$$

Die GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen in VOIGT-Notation sind in Gleichung (3.19) gegeben. Analog zu den Verzerrungen werden die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen in Vektornotation definiert:

$$\mathbf{S} = [S^{11}, S^{22}, S^{12}, S^{13}, S^{23}]^T. \quad (3.30)$$

Die Annahme eines ebenen Spannungszustandes führt auf $S^{33} = 0$. Aus diesem Grund wird diese Komponente nicht berücksichtigt. Zunächst wird Gleichung (3.29) umformuliert zu

$$\delta\pi_i = \int_{\Omega_0} \int_{\zeta} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} \mu \, d\zeta \, dA, \quad (3.31)$$

mit der Determinante des *Shifter*-Tensors μ . Für dünne Schalen kann in erster Näherung $\mu \approx 1$ angenommen werden. Unter der Berücksichtigung des Zusammenhangs in Gleichung (3.21) lautet die virtuelle innere Arbeit

$$\delta\pi_i = \int_{\Omega_0} \int_{\zeta} (\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{S} \, d\zeta \, dA = \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \underbrace{\int_{\zeta} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \, d\zeta}_{=\boldsymbol{\sigma}} \, dA. \quad (3.32)$$

Der Vektor der Schalenschnittgrößen wird mit $\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet und ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\sigma} = [n^{11}, n^{22}, n^{12}, m^{11}, m^{22}, m^{12}, q^{13}, q^{23}]^T. \quad (3.33)$$

In Abbildung 3.4 sind die auf die Referenzfläche bezogenen Schnittgrößen grafisch dargestellt.

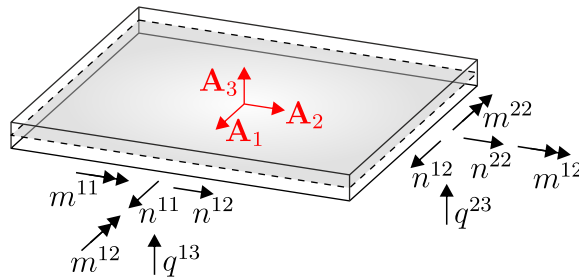


Abbildung 3.4: Resultierende Schnittgrößen der Schale

Generell wird zwischen Normalkräften $\mathbf{n}$, Biegemomenten $\mathbf{m}$ und Querkraften $\mathbf{q}$ unterschieden:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n^{11} \\ n^{22} \\ n^{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q^{13} \\ q^{23} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Die einzelnen Komponenten resultieren aus der Dickenintegration der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen:

$$n^{\alpha\beta} = \int_{\zeta} S^{\alpha\beta} d\zeta, \quad m^{\alpha\beta} = \int_{\zeta} \zeta S^{\alpha\beta} d\zeta, \quad q^{\alpha 3} = \int_{\zeta} S^{\alpha 3} d\zeta, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.35)$$

3.3 Materialgesetz für Flächentragwerke

Da es sich bei der Schale um ein Flächentragwerk handelt, müssen die in Kapitel 2.4 dargestellten dreidimensionalen konstitutiven Beziehungen angepasst werden. Der Zusammenhang in Gleichung (2.39) wird unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes mit $S^{33} = 0$ und unter Berücksichtigung der Querschubverzerrungen $2E_{13}$ und $2E_{23}$ vereinfacht.

Um das Werkstoffverhalten langfaserverstärkter Lamine beschreiben zu können, werden nachfolgend die Zusammenhänge für transversale Isotropie dargestellt. Aufgrund der Richtungsabhängigkeit dieses Materialverhaltens muss zwischen einer Betrachtung im lokalen und im globalen Koordinatensystem unterschieden werden. Die Beschreibung des Materials erfolgt zunächst bezüglich des lokalen Koordinatensystems $\{\mathbf{t}_i^k\}_{i=1}^3$ einer einzelnen Laminatschicht k , siehe Abbildung 3.5. Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen im lokalen Koordinatensystem, gekennzeichnet mit $[\bullet]_L$, lautet

$$\mathbf{S}_L = \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_L \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix}_L = \mathbf{C}_L \mathbf{E}_L. \quad (3.36)$$

Bezogen auf das lokale Koordinatensystem $\{\mathbf{t}_i^k\}_{i=1}^3$, siehe Abbildung 3.5, lautet die Materialmatrix für transversal isotropes Materialverhalten

$$\mathbf{C}_L = \begin{bmatrix} E_1/\Delta & \nu_{12}E_2/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{12}E_2/\Delta & E_2/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \Delta = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}. \quad (3.37)$$

Für die vollständige Beschreibung von $\mathbf{C}_L$ sind fünf Materialparameter erforderlich. Dabei kennzeichnet E_1 den E-Modul in Faserrichtung und E_2 den E-Modul senkrecht dazu. Außerdem müssen die Querdehnzahl ν_{12} und die zwei Schubmoduln G_{12} und G_{23} angegeben werden.

Da das lokale Koordinatensystem $\{\mathbf{t}_i^k\}_{i=1}^3$ der Schicht k im Allgemeinen nicht mit dem globalen Koordinatensystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ übereinstimmt, siehe Abbildung 3.5, ist

eine Transformation erforderlich. Die Transformationsbeziehung für eine Schicht k ist gegeben durch

$$\mathbf{t}_\alpha^k = \begin{bmatrix} \cos \varphi_k & \sin \varphi_k & 0 \\ -\sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_3^k = \mathbf{A}_3. \quad (3.38)$$

Dabei bezeichnet φ_k den Winkel zwischen den Achsen $\mathbf{t}_1^k$ und $\mathbf{A}_1$ für die Schicht k , siehe Abbildung 3.5.

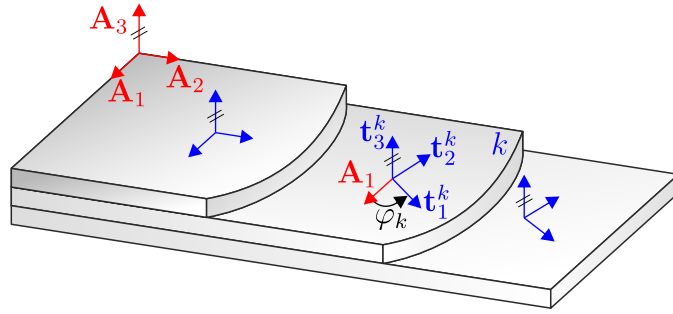


Abbildung 3.5: Aufbau eines Mehrschichtverbundes

Für eine kompaktere Schreibweise werden die Abkürzungen

$$c := \cos \varphi_k \quad \text{und} \quad s := \sin \varphi_k \quad (3.39)$$

eingeführt. Mit der Definition der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} := \left[\begin{array}{ccc|cc} c^2 & s^2 & sc & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & -sc & 0 & 0 \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{array} \right] \quad (3.40)$$

wird das Materialgesetz bezüglich des globalen Koordinatensystems formuliert. Es gilt

$$\mathbf{S}_L = \mathbf{C}_L \mathbf{E}_L \quad \rightarrow \quad \mathbf{S}_G = \mathbf{C}_G \mathbf{E}_G \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_L \mathbf{T}, \quad (3.41)$$

wobei die Materialmatrix $\mathbf{C}_G$ die auf das globale Koordinatensystem bezogenen Steifigkeiten beinhaltet. Schließlich lässt sich das Materialverhalten bezüglich des globalen Koordinatensystems, gekennzeichnet mit $[\bullet]_G$, wie folgt schreiben:

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \\ S^{13} \\ S^{23} \end{bmatrix}_G = \left[\begin{array}{ccc|cc} C_{11} & C_{12} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{44} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{array} \right]_G \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{bmatrix}_G. \quad (3.42)$$

In Gleichung (3.42) ist zu erkennen, dass aufgrund der Transformation die Einträge C_{14G} , C_{24G} und C_{56G} im Allgemeinen ungleich null sind.

Im Falle der Isotropie ist die Materialmatrix mit den Materialparametern E und ν vollständig beschrieben und lautet

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc|cc} E & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{array} \right]. \quad (3.43)$$

Da isotropes Material richtungsunabhängig ist, ist eine Unterscheidung zwischen dem lokalen und globalen Koordinatensystem nicht erforderlich. Schließlich sei noch erwähnt, dass sich die Materialmatrix in einen Membrananteil $\mathbf{C}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und einen Schubanteil $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ unterteilen lässt:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_m & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{array} \right]. \quad (3.44)$$

3.4 Materialmatrix für geschichtete Schalenstrukturen

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Zusammenhänge werden verwendet, um ein zweidimensionales Stoffgesetz für die Schale zu formulieren, welches die Schalenschnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}$ und die Schalenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ miteinander verknüpft. Die Definition der Schalenschnittgrößen in Gleichung (3.32) wird unter Verwendung von Gleichung (3.21) und des linear elastischen Materialverhaltens mit $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E}$ umgeformt zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{\zeta} \mathbf{A}^T \mathbf{S} \, d\zeta = \int_{\zeta} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{E} \, d\zeta = \underbrace{\int_{\zeta} \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \, d\zeta}_{=\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.45)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{D}$ die Materialmatrix der Schale.

Um das Werkstoffverhalten allgemeiner Mehrschichtverbunde beschreiben zu können, wird ein mehrschichtiges Laminat betrachtet, siehe Abbildung 3.6. Die Schale mit der Gesamthöhe h besteht aus insgesamt $nlay$ Einzelschichten, wobei die k -te Schicht die Dicke h_k aufweist. Der Abstand vom Mittelpunkt der Schicht k zu der Referenzfläche wird mit ζ_{sk} bezeichnet. Unter der Annahme eines vollständigen Verbundes der einzelnen Schichten wird die Materialmatrix berechnet mit

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^{nlay} \mathbf{D}_k = \sum_{k=1}^{nlay} \int_{h_k^-}^{h_k^+} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_m^k & \zeta \mathbf{C}_m^k & \mathbf{0} \\ \zeta \mathbf{C}_m^k & \zeta^2 \mathbf{C}_m^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_s^k \end{array} \right] d\zeta, \quad (3.46)$$

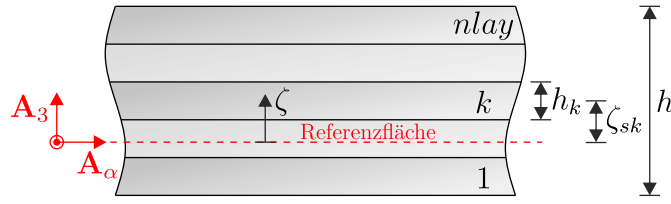


Abbildung 3.6: Schnitt durch einen Mehrschichtverbund

wobei h_k^- und h_k^+ die untere bzw. obere Begrenzung der k -ten Schicht angeben. Die Matrizen $\mathbf{C}_m^k$ und $\mathbf{C}_s^k$ beschreiben die Membran- bzw. Schubanteile der Materialmatrix $\mathbf{C}^k$ der Schicht k , siehe Gleichung (3.44). Da die Materialmatrizen unabhängig von der Dickenkoordinate ζ sind, wird die Integration vorab durchgeführt. Somit berechnen sich die einzelnen Integrale zu

$$\int_{h_k^-}^{h_k^+} 1 \, d\zeta = h_k, \quad \int_{h_k^-}^{h_k^+} \zeta \, d\zeta = h_k \zeta_{sk}, \quad \int_{h_k^-}^{h_k^+} \zeta^2 \, d\zeta = \frac{h_k^3}{12} + h_k \zeta_{sk}^2. \quad (3.47)$$

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge in Gleichung (3.47) werden die folgenden Teilmatrizen definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m &:= \sum_{k=1}^{nlay} \mathbf{C}_m^k h_k, & \mathbf{D}_b &:= \sum_{k=1}^{nlay} \mathbf{C}_m^k \left(\frac{h_k^3}{12} + h_k \zeta_{sk}^2 \right), \\ \mathbf{D}_{mb} &:= \sum_{k=1}^{nlay} \mathbf{C}_m^k h_k \zeta_{sk}, & \mathbf{D}_s &:= \sum_{k=1}^{nlay} \mathbf{C}_s^k h_k. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Schließlich lautet die Materialmatrix der Schale mit einem beliebigen Mehrschichtverbund

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb}^T & \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

In dieser Matrix lassen sich die Membran-, Biege- und Schubanteile erkennen, die mit $\mathbf{D}_m$, $\mathbf{D}_b$ bzw. $\mathbf{D}_s$ bezeichnet werden. Im Allgemeinen sind auch die Kopplungsterme $\mathbf{D}_{mb}$ vorhanden. Liegt ein symmetrischer Laminataufbau vor und wird zusätzlich die Laminatmittelebene als Referenzfläche gewählt, so entfallen die Kopplungssteifigkeiten $\mathbf{D}_{mb}$. In diesem Fall sind Normalkräfte und Krümmungen bzw. Biegemomente und Dehnungen vollständig voneinander entkoppelt.

3.5 Variationsformulierung und Linearisierung

Die schwache Form des Gleichgewichts wird in Kapitel 2.5.1 für das dreidimensionale Kontinuum hergeleitet. Im Rahmen der Schalenformulierung müssen alle

Gleichungen auf das Schalenkontinuum übertragen werden. Zunächst wird Gleichung (2.56) in Vektornotation geschrieben als

$$\delta\pi(\mathbf{u}) = \int_{B_0} \delta\mathbf{E}^T \mathbf{S} dV - \int_{B_0} \delta\mathbf{u}^T \rho_0 \bar{\mathbf{b}} dV - \int_{\partial B_0^\sigma} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}}_0 dA = 0, \quad (3.50)$$

wobei das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]^T \quad (3.51)$$

die gesuchte Feldgröße ist. Die schwache Form in Gleichung (3.50) wird unter Berücksichtigung der in den vorherigen Kapiteln dargestellten Zusammenhänge umgeschrieben. Das gesuchte Verschiebungsfeld $\mathbf{v}$ der Schale ist gegeben mit

$$\mathbf{v} = [u_1, u_2, u_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3]^T \quad (3.52)$$

und umfasst neben den drei Verschiebungen zusätzlich drei Verdrehungen. Die virtuelle innere Arbeit für das Schalenkontinuum lässt sich mit den GREEN-LAGRANGE'schen Schalenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und den arbeitskonformen 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Schalenschnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}$ schreiben als

$$\delta\pi_i(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA. \quad (3.53)$$

In Abbildung 3.7 ist eine Schale mit den zugehörigen Randbedingungen dargestellt.

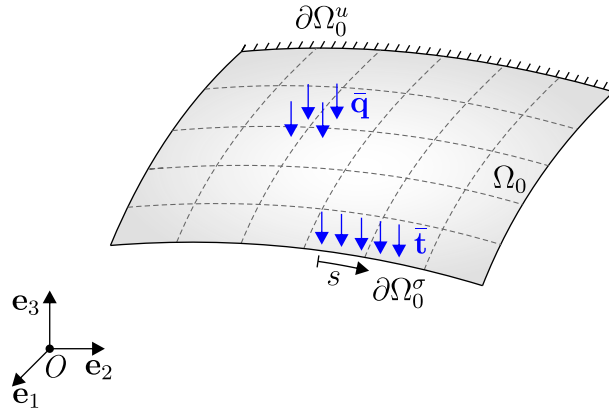


Abbildung 3.7: Schale mit Randbedingungen

Äußere Beanspruchungen wie Flächenlasten $\bar{\mathbf{q}}$ oder Randlasten $\bar{\mathbf{t}}$ wirken auf die Schale. Die virtuelle äußere Arbeit lautet

$$\delta\pi_a = \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} dA + \int_{\partial\Omega_0^\sigma} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} ds. \quad (3.54)$$

Insgesamt ist die schwache Form des Gleichgewichts für das Schalenkontinuum gegeben mit

$$\delta\pi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} \, dA - \int_{\partial\Omega_0^c} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} \, ds = 0 . \quad (3.55)$$

Die Variation der Schalenverzerrungen $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ wird über die Richtungsableitung in Richtung $\delta\mathbf{v}$ bestimmt. Es gilt

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{v}} \delta\mathbf{v} . \quad (3.56)$$

Somit lauten die virtuellen Schalenverzerrungen

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{11} \\ \delta\varepsilon_{22} \\ 2\delta\varepsilon_{12} \\ \hline \delta\kappa_{11} \\ \delta\kappa_{22} \\ 2\delta\kappa_{12} \\ \hline \delta\gamma_{13} \\ \delta\gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+u_{1,1})\delta u_{1,1} + u_{2,1}\delta u_{2,1} + u_{3,1}\delta u_{3,1} \\ u_{1,2}\delta u_{1,2} + (1+u_{2,2})\delta u_{2,2} + u_{3,2}\delta u_{3,2} \\ u_{1,2}\delta u_{1,1} + (1+u_{1,1})\delta u_{1,2} + (1+u_{2,2})\delta u_{2,1} \\ + u_{2,1}\delta u_{2,2} + u_{3,2}\delta u_{3,1} + u_{3,1}\delta u_{3,2} \\ \hline \delta\beta_{1,1} \\ \delta\beta_{2,2} \\ \delta\beta_{1,2} + \delta\beta_{2,1} \\ \hline \delta\beta_1 + \delta u_{3,1} \\ \delta\beta_2 + \delta u_{3,2} \end{bmatrix} . \quad (3.57)$$

Aufgrund der nichtlinearen Verzerrungsmaße ist Gleichung (3.55) nichtlinear in den gesuchten Verschiebungen $\mathbf{v}$. Die Linearisierung von Gleichung (3.55) wird analog zu Gleichung (2.67) bestimmt. Unter Verwendung der Produktregel lautet das lineare Inkrement

$$\Delta\delta\pi = \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA . \quad (3.58)$$

Aufgrund des linear elastischen Materialverhaltens der Schale lautet die Linearisierung der Schalenschnittgrößen

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} . \quad (3.59)$$

Damit kann Gleichung (3.58) umgeschrieben werden zu

$$\Delta\delta\pi = \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA . \quad (3.60)$$

Die Linearisierung der virtuellen Schalenverzerrungen $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ berechnet sich über die Richtungsableitung von $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ in Richtung $\Delta\mathbf{v}$ mit

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial(\delta\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\mathbf{v}} \Delta\mathbf{v} . \quad (3.61)$$

Dies führt auf die linearisierten virtuellen Schalenverzerrungen

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta\delta\varepsilon_{11} \\ \Delta\delta\varepsilon_{22} \\ 2\Delta\delta\varepsilon_{12} \\ \hline \Delta\delta\kappa_{11} \\ \Delta\delta\kappa_{22} \\ 2\Delta\delta\kappa_{12} \\ \hline \Delta\delta\gamma_{13} \\ \Delta\delta\gamma_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_{1,1}\Delta u_{1,1} + \delta u_{2,1}\Delta u_{2,1} + \delta u_{3,1}\Delta u_{3,1} \\ \delta u_{1,2}\Delta u_{1,2} + \delta u_{2,2}\Delta u_{2,2} + \delta u_{3,2}\Delta u_{3,2} \\ \delta u_{1,2}\Delta u_{1,1} + \delta u_{1,1}\Delta u_{1,2} + \delta u_{2,2}\Delta u_{2,1} \\ + \delta u_{2,1}\Delta u_{2,2} + \delta u_{3,2}\Delta u_{3,1} + \delta u_{3,1}\Delta u_{3,2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (3.62)$$

Da die Krümmungen und Schubverzerrungen lineare Funktionen der Verschiebungen sind, ist die Linearisierung der Variation dieser Größen gleich null. Insgesamt lautet die linearisierte schwache Form der Schale

$$\begin{aligned} L[\delta\pi] &= \delta\pi + \Delta\delta\pi \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} \, dA - \int_{\partial\Omega_0^g} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} \, ds \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dA = 0 . \end{aligned} \quad (3.63)$$

4 Generalisierte Unschärfemodellierung

Materialeigenschaften sowie Geometrieparameter einer Tragstruktur unterliegen in der Realität gewissen Streuungen. Diese können im Rahmen numerischer Strukturanalysen berücksichtigt werden. Grundsätzlich wird zwischen *aleatorischer* und *epistemischer* Unschärfe unterschieden. Die inhärente Variabilität wird der aleatorischen Unschärfe zugeordnet und kann mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie erfasst werden. Im Gegensatz dazu lassen sich mit epistemischen Unschärfemodellen sowohl die Ungenauigkeit als auch die Unvollständigkeit vorhandener Daten erfassen, die etwa durch Messfehler oder unzureichende Datensätze entstehen. Für die Modellierung dieser Art der Unschärfe finden Methoden der *Fuzzy-Theorie* Verwendung. Epistemische Unschärfe kann durch das Hinzufügen weiterer Informationen reduziert werden, während dies bei der aleatorischen Unschärfe nicht möglich ist.

Zu Beginn werden die beiden Basisunschärfemodelle näher erläutert. Die Verknüpfung beider Methoden führt auf sogenannte *polymorphe* Unschärfemodelle, die in Abschnitt 4.3 dargestellt sind. Schließlich wird in Abschnitt 4.4 beschrieben, wie die Unschärfen im Rahmen numerischer Strukturanalysen berücksichtigt werden können.

4.1 Aleatorische Unschärfemodelle

Für die Modellierung natürlicher Variabilität werden in dieser Arbeit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie herangezogen. Das folgende Kapitel erläutert die grundlegenden Zusammenhänge von *Zufallsvariablen* und orientiert sich im Wesentlichen an Standardwerken von FAHRMEIR ET AL. [34], HENZE [56], OLOFF [83] und TAPPE [114].

4.1.1 Stetige Zufallsvariable

Für eine stetige Zufallsvariable X ist der zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum definiert mit $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. Dabei ist $\Omega = \{\omega \mid \omega \in \Omega\}$ die Grundgesamtheit der Elementarereignisse ω . Weiterhin bezeichnet Σ die σ -Algebra von Ω und $\mathbb{P} \in [0, 1]$ das Wahrscheinlichkeitsmaß. Eine Zufallsgröße X ordnet jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ zu. Damit kann eine Zufallsvariable als Funktion

$$X(\omega) : \Omega \mapsto D_X \subset \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto x, \quad (4.1)$$

definiert werden, welche die Grundgesamtheit Ω auf die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ abbildet. Da X eine stetige Variable ist, wird die Menge D_X in Gleichung (4.1) auch als

überabzählbar bezeichnet. Beispielsweise entspricht D_X im Falle einer stetigen Gleichverteilung einem abgeschlossenen Intervall. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ordnet jedem Ereignis der Zufallsvariablen genau einen Wert zwischen 0 und 1 zu. In Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $F_X(x)$ (engl.: *cumulative distribution function*, cdf) ist das Wahrscheinlichkeitsmaß definiert als

$$\mathbb{P}[X \leq x] = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (4.2)$$

und entspricht gerade der Fläche unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ (engl.: *probability distribution function*, pdf) im linksseitig unendlich abgeschlossenen Intervall $(-\infty, x]$. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4.1 grafisch dargestellt. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}[X \leq x]$ definiert die Unterschreitungswahrscheinlichkeit eines gegebenen Wertes x . Für die Dichtefunktion gilt zusätzlich zu der Nichtnegativität mit $f_X(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ die Normierungseigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 . \quad (4.3)$$

Anschaulich lässt sich das damit erklären, dass im offenen Intervall $(-\infty, \infty)$ jedes Ereignis der Zufallsvariablen auftreten muss, das heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß entspricht gerade eins.

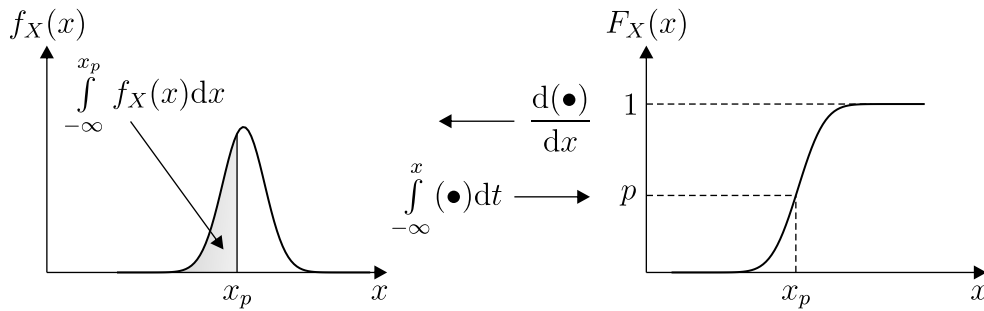


Abbildung 4.1: Zusammenhang zwischen der Dichtefunktion $f_X(x)$ und der Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer stetigen Zufallsvariablen X

Das sogenannte *erste Moment* einer Zufallsgröße ist der *Erwartungswert*. Dieser ist definiert als

$$\mu_X := \mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{P}(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx . \quad (4.4)$$

Mit *zentralen Momenten* wird die Verteilung einer Zufallsvariablen um ihren Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ beschrieben. Das zweite zentrale Moment ist die *Varianz*

$$\sigma_X^2 := \text{Var}[X] = \mathbb{E}[(x - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx . \quad (4.5)$$

Mit der *Standardabweichung*

$$\sigma_X := \sqrt{\text{Var}[X]} \quad (4.6)$$

wird die mittlere Streuung einer Zufallsgröße um ihren Erwartungswert angegeben. Für die Beurteilung der relativen Streuung wird zusätzlich der *Variationskoeffizient* eingeführt. Dieser bezieht die Standardabweichung auf den Mittelwert und ist definiert mit

$$\nu_X := \frac{\sigma_X}{\mu_X} , \quad \forall \mu_X \neq 0 . \quad (4.7)$$

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen Kenngrößen in Gleichung (4.4) und (4.6) ist das relative Streuungsmaß dimensionslos. Aufgrund der Normierung können mit dem Variationskoeffizienten Aussagen über die relative Streuung einer stochastischen Größe gemacht werden. Die *Schiefte* ist definiert durch

$$\delta_X := \frac{1}{\sigma_X^3} \mathbb{E}[(x - \mu_X)^3] = \frac{1}{\sigma_X^3} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^3 f_X(x) dx \quad (4.8)$$

und stellt das dritte zentrale Moment dar. Mit dieser Kenngröße lassen sich Asymmetrien einer Verteilung identifizieren. Im Falle einer positiven bzw. einer negativen Schiefe ist die Verteilung nach links bzw. nach rechts geneigt. Das vierte zentrale Moment wird als *Wölbung* bezeichnet und lautet

$$\kappa_X := \frac{1}{\sigma_X^4} \mathbb{E}[(x - \mu_X)^4] = \frac{1}{\sigma_X^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^4 f_X(x) dx . \quad (4.9)$$

Neben der Wölbung wird der sogenannte *Exzess* mit

$$\gamma_X := \kappa_X - 3 , \quad (4.10)$$

definiert, wobei die Zahl drei gerade der Wölbung einer Normalverteilung entspricht. Ist der Exzess positiv bzw. negativ, dann wird die entsprechende Verteilung als steilgipflig bzw. flachgipflig bezeichnet.

4.1.2 Ausgewählte stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Im folgenden Abschnitt werden vier stetige Verteilungen erläutert, die in dieser Arbeit zur Modellierung aleatorischer Unschärfe verwendet werden. Diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden im Kontext der polynomiellen Chaosentwicklung in Kapitel 5 für die Konstruktion orthogonaler Basispolynome erneut aufgegriffen.

Normalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsgröße wird angegeben mit

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) , \quad X \in D_X = (-\infty, \infty) , \quad (4.11)$$

wobei die beiden Parameter μ und σ der Verteilung gerade dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Zufallsvariablen X entsprechen. Die zugehörige Dichte- und Verteilungsfunktion lauten

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{und} \quad F_X(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right) \quad (4.12)$$

und sind in Abbildung 4.2 für verschiedene Werte der Parameter μ und σ dargestellt. Da die Dichtefunktion nicht elementar integrierbar ist, kann keine explizite Darstellung von $F_X(x)$ angegeben werden. Der Ausdruck $\operatorname{erf}(\bullet)$ in Gleichung (4.12) ist die sogenannte *Fehlerfunktion*.

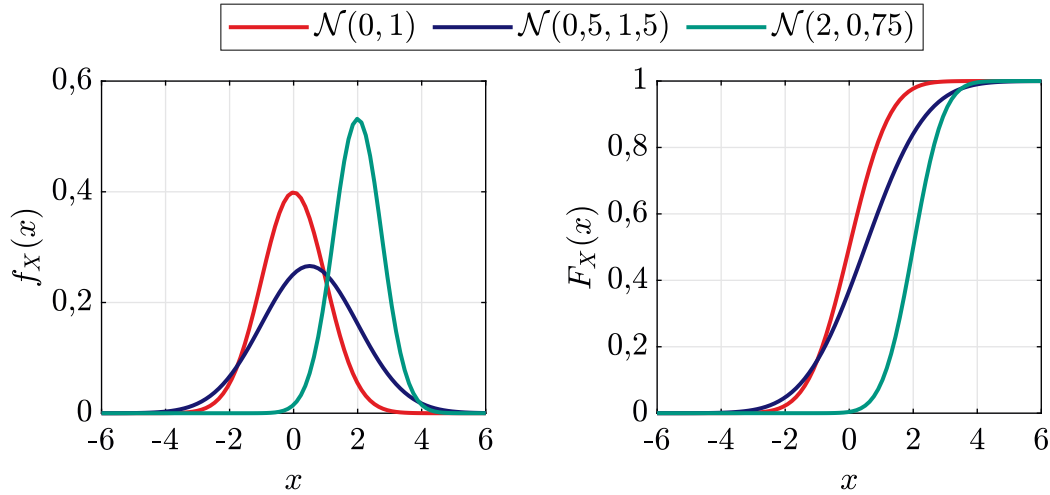


Abbildung 4.2: Dichte- und Verteilungsfunktionen stetiger Normalverteilungen

Mit den Definitionen der zentralen Momente in Abschnitt 4.1.1 werden die vier stochastischen Kenngrößen der Normalverteilung bestimmt zu

$$\mu_X = \mu , \quad \sigma_X^2 = \sigma^2 , \quad \delta_X = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_X = 3 . \quad (4.13)$$

Für die Standardnormalverteilung $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ gilt $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Die zugehörige Dichtefunktion in Gleichung (4.12) vereinfacht sich somit zu

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) . \quad (4.14)$$

Die Standardnormalverteilung $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$ kann mit

$$X = \mu + \sigma \cdot U \quad (4.15)$$

in die Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ transformiert werden.

Gleichverteilung

Eine stetige Gleichverteilung, auch Uniformverteilung genannt, wird beschrieben durch

$$X \sim \mathcal{U}(a, b), \quad X \in D_X = [a, b], \quad (4.16)$$

wobei die Parameter a und b gerade der unteren bzw. oberen Grenze des Definitionsbereichs D_X entsprechen. Die zugehörige Dichte- und Verteilungsfunktion sind in Abhängigkeit der beiden Parameter gegeben mit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad \text{und} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (4.17)$$

In Abbildung 4.3 sind diese grafisch dargestellt.

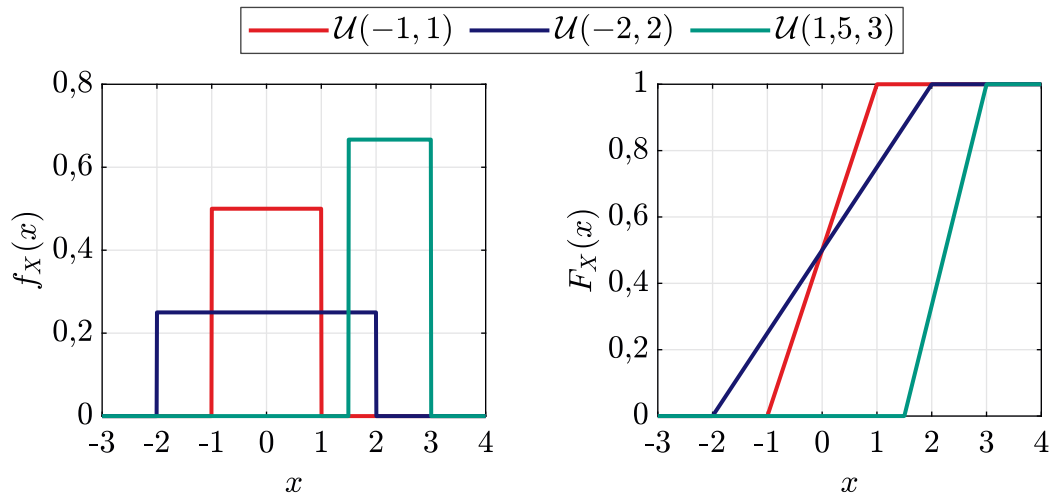


Abbildung 4.3: Dichte- und Verteilungsfunktionen stetiger Gleichverteilungen

Die stochastischen Momente dieser Verteilung lauten

$$\mu_X = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \delta_X = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_X = 1,8. \quad (4.18)$$

Die Standardgleichverteilung $U \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ ist definiert im Intervall $[-1, 1]$ mit der Dichtefunktion

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & u \in [-1, 1] \\ 0, & u \notin [-1, 1] \end{cases} \quad (4.19)$$

Über die lineare Beziehung

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot U \quad (4.20)$$

wird die gleichverteilte Zufallsvariable $U \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ in die Gleichverteilung $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ transformiert.

Gammaverteilung

Eine weitere Verteilung ist die sogenannte Gammaverteilung

$$X \sim \Gamma(s, t, r), \quad X \in D_X = (r, \infty), \quad (4.21)$$

welche einseitig begrenzt ist. Im Allgemeinen ist diese in Abhängigkeit von drei Parametern formuliert, für die $r \in \mathbb{R}$ und $s, t > 0$ gilt. Der Lageparameter r definiert die untere Grenze der Verteilung. Die Form der Verteilung steuert der Parameter s , während t die Streuung bzw. die Skala bestimmt. In Abhängigkeit dieser drei Parameter lauten die Dichte- und Verteilungsfunktion der Gammaverteilung

$$f_X(x) = \frac{\left(\frac{x-r}{t}\right)^{s-1} \exp\left(\frac{-(x-r)}{t}\right)}{\Gamma(s) t} \quad \text{und} \quad F_X(x) = \frac{\gamma(s, \frac{x-r}{t})}{\Gamma(s)}, \quad x > r. \quad (4.22)$$

Dabei bezeichnet $\gamma(\bullet, \circ)$ die unvollständige Gammafunktion, während der Ausdruck $\Gamma(\circ)$ die vollständige Gammafunktion beschreibt. Formal werden die beiden Ausdrücke berechnet mit

$$\gamma(s, \frac{x-r}{t}) = \int_0^{\frac{x-r}{t}} y^{s-1} \exp(-y) dy \quad \text{und} \quad \Gamma(s) = (s-1)! . \quad (4.23)$$

Der Einfluss der unterschiedlichen Parameter auf die Dichte- und Verteilungsfunktion ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

Wie in den vorherigen Abschnitten können auch hier die vier stochastischen Momente bestimmt werden. In Abhängigkeit der Lage-, Form- und Skalenparameter lauten diese wie folgt:

$$\mu_X = r + st, \quad \sigma_X^2 = st^2, \quad \delta_X = \frac{2}{\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad \kappa_X = \frac{3(2+s)}{s}. \quad (4.24)$$

Die allgemeine Gammaverteilung geht für $t = 1$ und $r = 0$ in die Standardgammaverteilung $U \sim \Gamma(s, 1, 0)$ über mit der Dichtefunktion

$$f_U(u) = \frac{u^{s-1} \exp(-u)}{\Gamma(s)}. \quad (4.25)$$

Die Standardgammaverteilung $U \sim \Gamma(s, 1, 0)$ wird mit einer Translation und einer Skalierung in die Gammaverteilung $X \sim \Gamma(s, t, r)$ transformiert. Es gilt

$$X = r + t \cdot U. \quad (4.26)$$

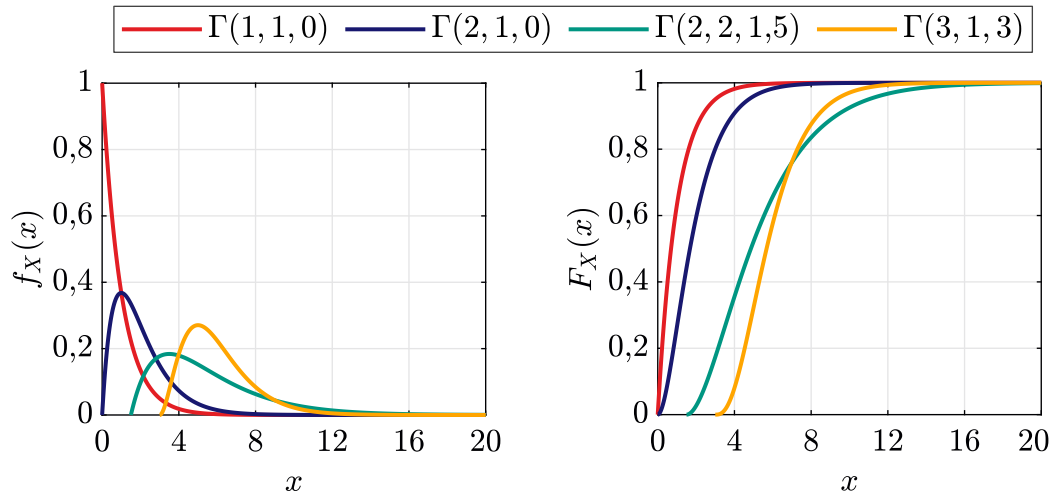


Abbildung 4.4: Dichte- und Verteilungsfunktionen stetiger Gammaverteilungen

Betaverteilung

Schließlich wird noch die Betaverteilung erläutert. Diese wird angegeben mit

$$X \sim \mathcal{B}(s, t, a, b), \quad X \in D_X = [a, b], \quad (4.27)$$

wobei für die beiden Parameter die Bedingung $s, t > 0$ gilt. Sie ist, wie auch die Gleichverteilung, in einem abgeschlossenen Intervall definiert und ist daher beidseitig begrenzt. Mit den beiden Formparametern s und t kann die Gestalt der Verteilung variiert werden. Die Lage und Skalierung hingegen werden mit den Intervallgrenzen a und b gesteuert. Alle Parameter beeinflussen die Dichte- und die Verteilungsfunktion, siehe Abbildung 4.5. Die Dichtefunktion ist gegeben mit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-a)^{s-1}(b-x)^{t-1}}{B(s, t)(b-a)^{s+t-1}}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}, \quad (4.28)$$

wobei $B(\circ, \bullet)$ die vollständige Betafunktion ist, welche in Abhängigkeit der vollständigen Gammafunktion geschrieben werden kann:

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}. \quad (4.29)$$

Die Integration der Dichtefunktion führt auf die Verteilungsfunktion mit

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{B(s, t)(b-a)^{s+t-1}} \int_a^x (y-a)^{s-1}(b-y)^{t-1} dy, & x \in [a, b] \\ 1, & x > b \end{cases}. \quad (4.30)$$

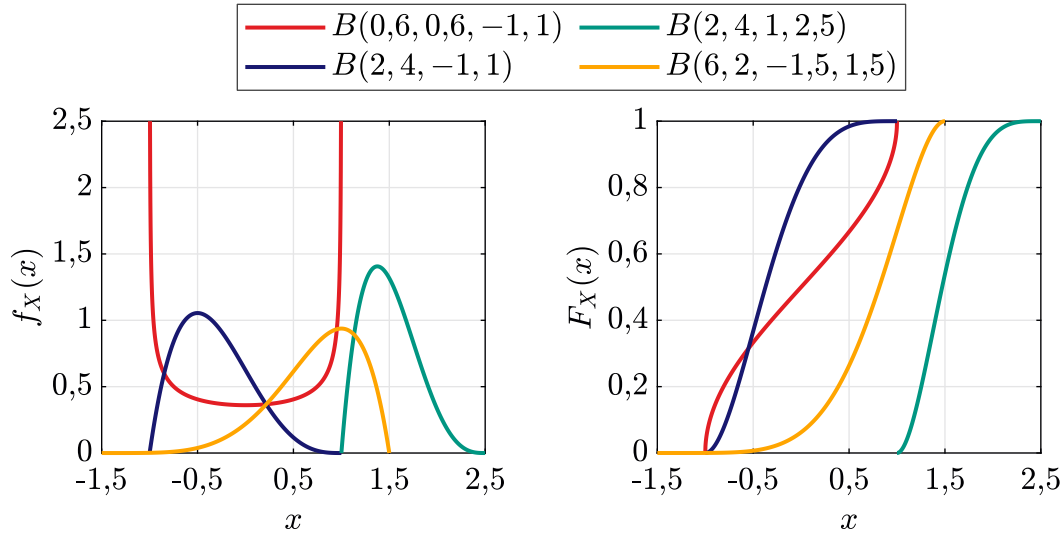


Abbildung 4.5: Dichte- und Verteilungsfunktionen stetiger Betaverteilungen

Dabei wird das auftretende Integral in Gleichung (4.30) auch als unvollständige Betafunktion bezeichnet.

Die zentralen Momente werden in Abhängigkeit der vier Parameter bestimmt. Für den Erwartungswert und die Varianz folgt

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)(s-t)}{2(s+t)} \quad \text{und} \quad \sigma_X^2 = \frac{(a-b)^2 st}{(s+t)^2(s+t+1)}. \quad (4.31)$$

Weiterhin gilt für die Schiefe und die Wölbung

$$\delta_X = -\frac{2(s-t)\sqrt{s+t+1}}{(s+t+2)\sqrt{st}} \quad \text{und} \quad \kappa_X = \frac{3(s^2t + st^2 + 2s^2 - 2st + 2t^2)(s+t+1)}{(s+t+3)(s+t+2)st}. \quad (4.32)$$

Ist die Betaverteilung im Intervall $[-1, 1]$ definiert, so handelt es sich um die Standardbetaverteilung $U \sim \mathcal{B}(s, t, -1, 1)$. Die zugehörige Dichtefunktion lautet

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{(u+1)^{s-1}(1-u)^{t-1}}{B(s, t)2^{s+t-1}}, & u \in [-1, 1] \\ 0, & u \notin [-1, 1] \end{cases}. \quad (4.33)$$

Mit der Transformation

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot U \quad (4.34)$$

wird die Standardbetaverteilung $U \sim \mathcal{B}(s, t, -1, 1)$ in die allgemeine Betaverteilung $U \sim \mathcal{B}(s, t, a, b)$ transformiert.

4.1.3 Multivariate Verteilungen

Neben den univariaten Verteilungen, die in Abschnitt 4.1.2 dargestellt sind, werden zusätzlich die grundlegenden Zusammenhänge multivariater Verteilungen erläutert. Analog zu der Definition einer Zufallsvariablen in Gleichung (4.1) wird der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ als folgende Abbildung definiert:

$$\mathbf{X}(\omega) : \Omega \mapsto D_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}^M . \quad (4.35)$$

Der Vektor $\mathbf{X}$ beinhaltet insgesamt M Zufallsvariablen, die wie folgt angeordnet sind:

$$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_i, \dots, X_M]^T . \quad (4.36)$$

Dabei besitzt die i -te Zufallsvariable X_i die zugehörige Dichtefunktion $f_{X_i}(x_i)$. Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ des Zufallsvektors ist definiert mit

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M f_{X_i}(x_i) . \quad (4.37)$$

Der Zusammenhang in Gleichung (4.37) gilt unter der Voraussetzung, dass die einzelnen Größen in $\mathbf{X}$ stochastisch unabhängig sind. In dieser Arbeit werden keine Abhängigkeiten zwischen den Zufallsvariablen berücksichtigt.

4.1.4 Modellierung räumlicher Variabilität

Zur Beschreibung der räumlichen Variabilität von Material- oder Geometrieigenschaften werden *Zufallsfelder* verwendet. Die Theorie zu diesem Themengebiet findet sich beispielsweise in VANMARCKE ET AL. [119] und SUDRET & DER KIUREGHIAN [113].

Im Rahmen der Arbeit werden ausschließlich GAUSS'sche bzw. normalverteilte Felder betrachtet. Ein stetiges Zufallsfeld ist definiert mit

$$H(\mathbf{x}, \omega) := \{X(\mathbf{x}, \omega) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \omega \in \Omega\} , \quad (4.38)$$

wobei $\mathbf{x}$ einen Punkt im Raum $\mathcal{D}$ bezeichnet. Im Fall stationärer Zufallsfelder sind die stochastischen Momente wie Erwartungswert und Varianz unabhängig vom Ort $\mathbf{x}$ und es gilt

$$\mu_H := \mathbb{E}[H(\mathbf{x}, \omega)] \quad \text{und} \quad \sigma_H^2 := \text{Var}[H(\mathbf{x}, \omega)] \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D} . \quad (4.39)$$

An einem festen Ort $\mathbf{x}_0$ beschreibt $H(\mathbf{x}_0, \omega)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit $H(\mathbf{x}_0, \omega) \sim \mathcal{N}(\mu_H, \sigma_H)$, siehe Abschnitt 4.1.2. Die Verallgemeinerung der Varianz ist die Kovarianz bzw. Kovarianzfunktion

$$C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbb{E} \left[\left(H(\mathbf{x}_i, \omega) - \mu_H \right) \left(H(\mathbf{x}_j, \omega) - \mu_H \right) \right] . \quad (4.40)$$

Sie gibt die Abhängigkeit der zwei Zufallsvariablen an den Punkten $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ an. Die Normierung der Kovarianz mit den jeweiligen Standardabweichungen führt auf die Korrelation bzw. Korrelationsfunktion

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \frac{C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{\sigma_H^2} \in [-1, 1] . \quad (4.41)$$

Ist $\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ ausschließlich vom Abstand der Punkte $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ abhängig, so wird das resultierende Feld als isotrop bezeichnet.

Damit ein Zufallsfeld im Rahmen einer numerischen Simulation beispielsweise einer FE-Berechnung verwendet werden kann, ist eine Diskretisierung erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit wird hierfür die sogenannte *Karhunen-Loève-Entwicklung* (KLE) verwendet, siehe SUDRET & DER KIUREGHIAN [113] und ALEXANDERIAN [4]. Die Methode basiert auf einer Spektralzerlegung der Kovarianzfunktion in Gleichung (4.40), siehe GHANEM & SPANOS [45]. Wird der Raum $\mathcal{D}$ mit N Punkten diskretisiert, so geht die Funktion in Gleichung (4.40) über in die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C} = \sigma_H^2 \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & \rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) & \vdots \\ \rho(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \dots & \rho(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} . \quad (4.42)$$

Mit der Vorgabe der Varianz σ_H^2 und der Definition einer Korrelationsfunktion $\rho(\bullet)$ ist $\mathbf{C}$ vollständig definiert. In dieser Arbeit wird in allen Berechnungen die Korrelationsfunktion mit quadratisch exponentiellem Verlauf verwendet:

$$\rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \exp \left(- \frac{d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)}{\ell_c^2} \right) . \quad (4.43)$$

Dabei entspricht $d^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ dem quadratischen Abstand zwischen zwei Punkten $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ und ℓ_c bezeichnet einen Korrelationsparameter. Mit dieser Größe kann der Verlauf der Korrelationsfunktion gesteuert werden. Die diskrete Form eines mit der KLE diskretisierten Zufallsfeldes lautet

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_H + \sum_{i=1}^N \xi_i(\omega) \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) , \quad (4.44)$$

wobei μ_H der konstante Erwartungswert ist und $\xi_i(\omega)$ standardnormalverteilte Zufallsvariablen mit $\xi_i(\omega) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ darstellen. Weiterhin bezeichnen λ_i und $\boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})$ den i -ten Eigenwert und -vektor der Kovarianzmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ aus Gleichung (4.42). Da die Größe der Eigenwerte λ_i für stark korrelierte bzw. glatte Zufallsfelder im Allgemeinen schnell abfällt, können die N Terme in Gleichung (4.44) auf $K \leq N$ reduziert werden:

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_H + \sum_{i=1}^K \xi_i(\omega) \sqrt{\lambda_i} \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) . \quad (4.45)$$

Ein geeignetes Maß für die Abschätzung der erforderlichen Terme K lautet

$$Q = \left(\sum_{i=1}^K \lambda_i \right) / \text{Spur}(\mathbf{C}) , \quad (4.46)$$

wobei für Q meistens Werte im Bereich $0,95 - 0,99$ gewählt werden. Das so konstruierte diskrete Zufallsfeld $\hat{H}(\mathbf{x}, \omega)$ kann nun im Rahmen einer FE-Berechnung zur Beschreibung räumlich streuender Material- oder Geometrieeigenschaften verwendet werden.

Eine weitere effiziente Möglichkeit für die Diskretisierung von Zufallsfeldern ist die sogenannte *Expansion Optimal Linear Estimation* (EOLE), die von LI & DER KIUREGHIAN [73] entwickelt wurde. Diese Methode wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet.

4.2 Epistemische Unschärfemodelle

Zur Beschreibung epistemischer Unschärfe werden in dieser Arbeit die *Fuzzy-Variable* und die *Intervallvariable* herangezogen, die im folgenden Abschnitt näher erläutert werden. Die sogenannte *Fuzzy-Set*-Theorie wurde 1965 von ZADEH [139] entwickelt. Grundlegende Zusammenhänge zu diesem Themengebiet sind beispielsweise in BOTHE [23] und DUBOIS & PRADE [30] zu finden. Der folgende Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an MÖLLER & BEER [82].

Fuzzy-Mengen und α -Level-Diskretisierung

In der klassischen Mengenlehre beschreibt

$$A = \{x \mid x \in D_X\} \quad (4.47)$$

eine scharfe Menge, siehe Abbildung 4.6 (links). Abhängig davon, ob ein Element x Teil des Definitionsbereichs D_X ist, gehört es entweder vollständig oder gar nicht zur scharfen Menge A . Wird die Zugehörigkeit mit einer sogenannten *Zugehörigkeitsfunktion* $\mu_A(x)$ beschrieben, so nimmt diese im Falle einer scharfen Menge nur die binären Werte 0 (nicht zugehörig) oder 1 (zugehörig) an. Wird der Begriff der Zugehörigkeit erweitert, so lässt sich die Fuzzy-Menge bzw. unscharfe Menge

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in D_X\} , \quad (4.48)$$

eingeführen, siehe Abbildung 4.6 (rechts). Im Gegensatz zu den binären Zugehörigkeitswerten bei der scharfen Menge A wird jedem Element x der unscharfen Menge $\tilde{A}$ eine Zugehörigkeit $\mu_A(x) \geq 0$ zugewiesen. Fällt die Zugehörigkeitsfunktion zu beiden Seiten monoton ab, wird die Fuzzy-Menge als konvex bezeichnet.

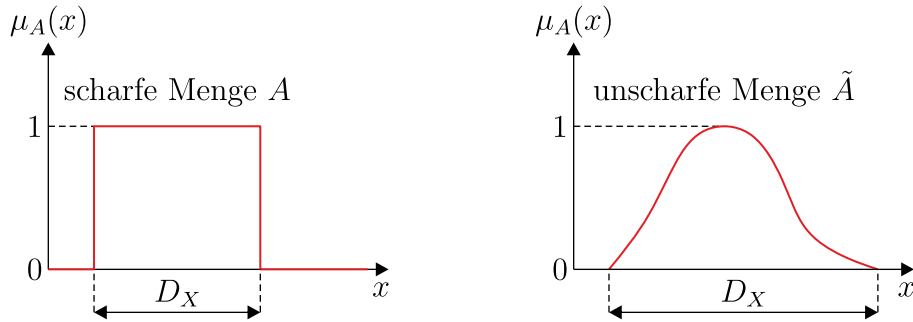


Abbildung 4.6: Scharfe und unscharfe Menge

Die Zugehörigkeitsfunktion wird als normiert bezeichnet, wenn

$$\sup_{x \in D_X} [\mu_A(x)] = 1 \quad (4.49)$$

gilt. Mit der Funktion $\mu_A(x)$ wird die Zugehörigkeit der Elemente x graduell bewertet:

- $\mu_A(x) = 0$: nicht zugehörig ,
- $0 < \mu_A(x) < 1$: teilweise zugehörig ,
- $\mu_A(x) = 1$: vollständig zugehörig .

Im Rahmen der numerischen Umsetzung ist es zweckmäßig, die unscharfe Menge $\tilde{A}$ in sogenannte α -Niveau Mengen zu unterteilen. Hierfür wird der Parameter $\alpha \in (0, 1]$ eingeführt. Die k -te α -Niveau Menge wird der unscharfen Menge $\tilde{A}$ wie folgt entnommen:

$$A_{\alpha_k} = \{x \in D_X \mid \mu_A(x) \geq \alpha_k\} . \quad (4.50)$$

Das Intervall A_{α_k} ist eine scharfe Menge mit den Grenzen $[\underline{x}_{\alpha_k}, \bar{x}_{\alpha_k}]$, siehe Abbildung 4.7. Die größtmögliche α -Menge wird auch als Stützmenge

$$S(\tilde{A}) = \{x \in D_X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (4.51)$$

bezeichnet und ist ebenfalls in Abbildung 4.7 dargestellt.

Fuzzy-Variable und Intervallvariable

Eine Möglichkeit, eine Fuzzy-Variable zu beschreiben, ist die sogenannte dreiecksförmige Fuzzy-Variable, siehe Abbildung 4.8 (links). Diese Größe lässt sich kompakt darstellen mit

$$\tilde{x} = \langle \underline{x}, x_m, \bar{x} \rangle . \quad (4.52)$$

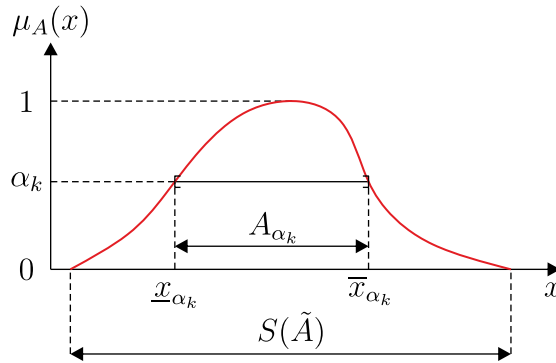


Abbildung 4.7: Fuzzy-Menge $\tilde{A}$ mit α -Niveau Menge A_{α_k} und Stützmenge $S(\tilde{A})$

Dabei kennzeichnen $\underline{x}$ und $\bar{x}$ die untere bzw. obere Grenze der Stützmenge und x_m steht für den sogenannten Trendwert. Da in dieser Arbeit ausschließlich die dreiecksförmige Fuzzy-Variable verwendet wird, wird sie der Einfachheit halber im Folgenden als Fuzzy-Variable bezeichnet. Gilt für die Zugehörigkeitsfunktion

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\underline{x}, \bar{x}] \\ 0, & x \notin [\underline{x}, \bar{x}] \end{cases}, \quad (4.53)$$

so vereinfacht sich die Fuzzy-Variable zu einer Intervallvariablen, siehe Abbildung 4.8 (rechts). Im Rahmen dieser Arbeit wird hierfür die Notation $\hat{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ verwendet, wobei $\underline{x}$ die untere und $\bar{x}$ die obere Grenze kennzeichnen.

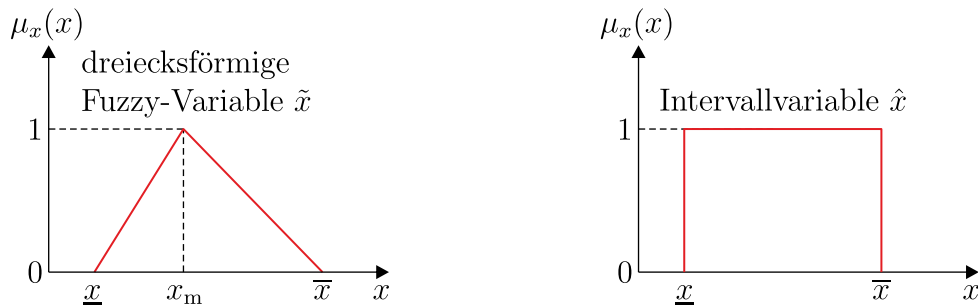


Abbildung 4.8: Dreiecksförmige Fuzzy-Variable und Intervallvariable

4.3 Polymorphe Unschärfemodelle

Polymorphe Unschärfemodelle resultieren aus der Kombination der beiden Basisunschärfemodelle aus den Abschnitten 4.1 und 4.2. Im Folgenden wird ausschließlich die Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (engl.: *fuzzy probability*

based random variable, fp-r) erläutert. Hierfür wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Abschnitt 4.1.2 durch die Einbeziehung einer Fuzzy-Variablen erweitert. Dies erfolgt, indem mindestens ein Verteilungsparameter der Verteilungsfunktion als Fuzzy-Variable definiert wird. Mit den polymorphen Unschärfemodellen können die natürliche Variabilität und die Unvollständigkeit bzw. Ungenauigkeit vorhandener Daten berücksichtigt werden. Die hier dargestellten Unschärfemodelle lassen sich auch auf Zufallsfelder übertragen. Dieser Aspekt wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht betrachtet. Der folgende Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an MÖLLER [81].

In Abbildung 4.9 ist zu erkennen, dass die Fuzzy-wertige Verteilungsfunktion einem bestimmten Wert x_p ein Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{F}_X(x_p)$ zuordnet. In Anlehnung an MÖLLER & BEER [82] wird die Fuzzy-wertige Funktion $\tilde{F}_X(x)$ mithilfe der Scharparameterdarstellung formuliert:

$$\tilde{F}_X(x) = F_X(\tilde{s}, x) . \quad (4.54)$$

Dabei sind alle Fuzzy-Variablen in dem Vektor $\tilde{s}$ zusammengefasst. Im Fall einer Fuzzy-Normalverteilung könnte $\tilde{s} = [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]^T = [\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}]^T$ lauten, wobei $\tilde{\mu}$ den Fuzzy-Mittelwert und $\tilde{\sigma}$ die Fuzzy-Standardabweichung darstellt.

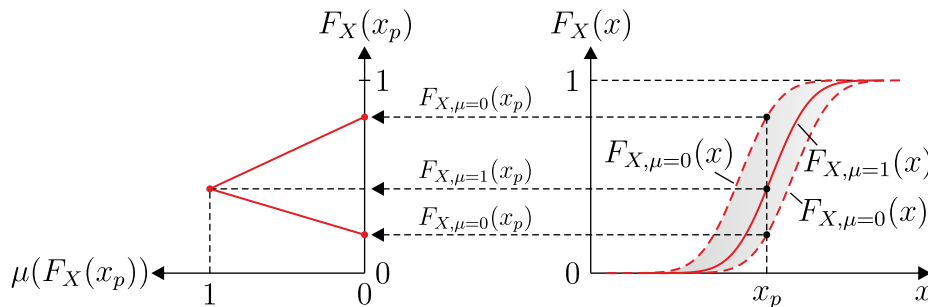


Abbildung 4.9: Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable (fp-r)

Werden anstelle von Fuzzy-Variablen Intervallvariablen verwendet, so vereinfacht sich die Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsvariable zu einer Intervallwahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariablen. Dieses Unschärfemodell wird auch als Wahrscheinlichkeitsbox (engl.: *probability box*, p-box) bezeichnet.

4.4 Strukturanalyse mit unscharfen Parametern

Im Rahmen einer numerischen Strukturanalyse können die verschiedenen Unschärfemodelle aus den vorherigen Abschnitten berücksichtigt werden. Standardmethoden, die hier Anwendung finden, sind die Monte-Carlo-Simulation (MCS)

und die α -Level Optimierung (ALO). Werden ausschließlich stochastische Größen berücksichtigt, so kann die MCS verwendet werden. Eine Kombination aus MCS und ALO wird für Berechnungen mit polymorph unscharfen Variablen benötigt. Im Rahmen dieser Arbeit ist das zugrundeliegende Berechnungsmodell ein FE-Modell, welches M Eingangsgrößen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ auf die N Ausgangsgrößen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ abbildet:

$$\mathcal{M} : \mathbf{x} \in D_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}^M \mapsto \mathbf{z} \in D_{\mathbf{Z}} \subset \mathbb{R}^N . \quad (4.55)$$

Im Folgenden wird ein Modell mit skalarer Ergebnisgröße z betrachtet:

$$\mathcal{M} : \mathbf{x} \in D_{\mathbf{X}} \subset \mathbb{R}^M \mapsto z \in D_Z \subset \mathbb{R} . \quad (4.56)$$

Ist der Eingangsvektor $\mathbf{x}$ mit aleatorischer Unschärfe behaftet, so entspricht dieser einem Zufallsvektor $\mathbf{X}$, siehe Gleichung (4.36). Dies führt dazu, dass die Zielvariable z ebenfalls eine stochastische Größe ist:

$$Z = \mathcal{M}(\mathbf{X}) . \quad (4.57)$$

Eine zufällige Realisierung (k) des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ wird mit

$$\mathbf{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}, \dots, x_M^{(k)}]^T \quad (4.58)$$

bezeichnet und die zugehörige Ergebnisgröße lautet

$$z^{(k)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) . \quad (4.59)$$

4.4.1 Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation (MCS) ist ein Standardverfahren aus dem Bereich der Stochastik. Gemäß der gemeinsamen Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ werden N Realisierungen des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ generiert und in der Menge

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(k)}, k = 1, \dots, N\} \quad (4.60)$$

zusammengefasst. Die zugehörigen Ergebnisgrößen werden in der Menge

$$\mathcal{Z} = \{z^{(k)}, k = 1, \dots, N\} , \quad z^{(k)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) , \quad (4.61)$$

gruppiert. Auf Basis der Menge $\mathcal{Z}$ werden stochastische Momente, Quantilwerte und Versagenswahrscheinlichkeiten bestimmt. Auch im Bereich der Sensitivitätsanalyse, beispielsweise für die Bestimmung sogenannter SOBOL'-Indizes, findet die MCS Anwendung. Ein Nachteil der Methode ist das langsame Konvergenzverhalten, sodass insbesondere für die Bestimmung von Quantilwerten und Versagenswahrscheinlichkeiten eine große Anzahl N an Auswertungen des Modells $\mathcal{M}$

erforderlich ist. Im Allgemeinen ist dies mit einem hohen Berechnungsaufwand verbunden.

Beinhaltet die Menge $\mathcal{Z}$ insgesamt N Realisierungen, sind die erwartungstreuen MCS-Schätzer der stochastischen Momente aus den Gleichungen (4.4), (4.5), (4.8) und (4.9) gegeben mit

$$\bar{\mu}_Z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N z^{(k)} , \quad (4.62)$$

$$\bar{\sigma}_Z^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (z^{(k)} - \bar{\mu}_Z)^2 , \quad (4.63)$$

$$\bar{\delta}_Z = \frac{N}{(N-1)(N-2)} \sum_{k=1}^N \frac{(z^{(k)} - \bar{\mu}_Z)^3}{\bar{\sigma}_Z^3} \quad \text{und} \quad (4.64)$$

$$\bar{\kappa}_Z = \frac{N(N+1)}{(N-1)(N-2)(N-3)} \sum_{k=1}^N \frac{(z^{(k)} - \bar{\mu}_Z)^4}{\bar{\sigma}_Z^4} . \quad (4.65)$$

4.4.2 α -Level Optimierung & Monte-Carlo-Simulation

Werden bei einer Strukturanalyse polymorph unscharfe Eingangsvariablen oder eine Kombination aus aleatorischen und epistemischen Variablen berücksichtigt, ist sowohl die Monte-Carlo-Simulation aus Abschnitt 4.4.1 als auch die α -Level Optimierung erforderlich. Die Unschärfecharakteristiken der Eingangsgrößen übertragen sich auf die Zielvariable.

Mit der MCS werden beispielsweise stochastische Momente wie der Erwartungswert oder die Varianz, aber auch Quantilwerte der polymorph unscharfen Zielgröße auf Basis einer ausreichend großen Stichprobe bestimmt, siehe Abschnitt 4.4.1. Weiterhin wird die ALO verwendet, um die Minimal- bzw. Maximalwerte dieser unscharfen stochastischen Kenngrößen zu ermitteln. In Abbildung 4.10 ist der Ablaufplan einer Strukturanalyse mit polymorph unscharfen Variablen exemplarisch dargestellt.

Ziel der ALO ist es, die Minimal- und Maximalwerte der Zielgröße $\tilde{z}$ auf jedem α -Level zu finden. Die zugehörigen Optimierungsprobleme lauten

$$\underline{z}_{\alpha_k} = \min_{\tilde{\mathbf{s}} \in D_{\tilde{\mathbf{s}}, \alpha_k}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \bar{z}_{\alpha_k} = \max_{\tilde{\mathbf{s}} \in D_{\tilde{\mathbf{s}}, \alpha_k}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) , \quad (4.66)$$

wobei diese mit heuristischen Optimierungsverfahren gelöst werden können. Anhand Abbildung 4.10 ist zu erkennen, dass in jedem Optimierungsschritt der ALO eine MCS mit dem Berechnungsmodell $\mathcal{M}$ durchgeführt werden muss. Die Suche

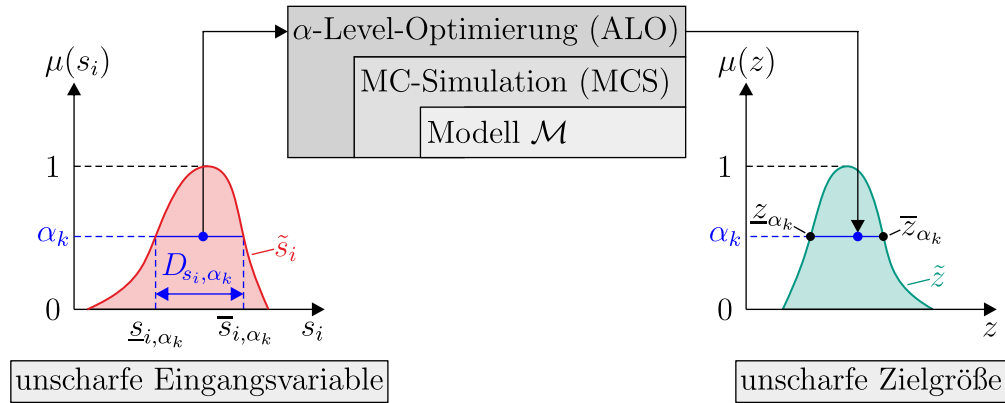


Abbildung 4.10: Ablauf einer Strukturanalyse mit polymorph unscharfen Variablen

nach den Extremalwerten $\underline{z}_{\alpha_k}$ und $\bar{z}_{\alpha_k}$ beschränkt sich dabei auf dem k -ten α -Level auf den Bereich $D_{\tilde{s}, \alpha_k}$. Beinhaltet der Vektor $\tilde{s}$ insgesamt N epistemische Variablen, so definiert $D_{\tilde{s}, \alpha_k}$ den N -dimensionalen Suchraum mit

$$D_{\tilde{s}, \alpha_k} = [\underline{s}_{1, \alpha_k}, \bar{s}_{1, \alpha_k}] \times \dots \times [\underline{s}_{i, \alpha_k}, \bar{s}_{i, \alpha_k}] \times \dots \times [\underline{s}_{N, \alpha_k}, \bar{s}_{N, \alpha_k}] \in \mathbb{R}^N. \quad (4.67)$$

5 Polynomielle Chaosentwicklung

Das grundlegende Konzept der *polynomiellen Chaosentwicklung* (PCE) (engl.: *polynomial chaos expansion*) wurde von WIENER [126] im Jahr 1938 unter dem Namen *homogeneous chaos* eingeführt. Es sei $Z(X(\omega))$ eine Zufallsgröße mit endlicher Varianz, die von einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $X(\omega)$ abhängt. Gemäß WIENER [126] lässt sich die Größe $Z(X(\omega))$ exakt als unendliche Summe mit HERMITE-Polynomen in der standardnormalverteilten Zufallsvariablen $X(\omega)$ darstellen, siehe Gleichung (5.1). Eine derartige Zerlegung einer Zufallsgröße wird als PC-Entwicklung bezeichnet. Im weiteren Sinne kann diese auch als verallgemeinerte FOURIER-Reihe interpretiert werden, bei der die Basisfunktionen *orthonormale Polynome* sind. Die Bezeichnung *orthonormal* bedeutet in diesem Kontext, dass die Polynome eine vollständige *Orthonormalbasis* bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes der Zufallsvariablen $X(\omega)$ bilden.

Gemäß SOIZE & GHANEM [106] kann die PC-Entwicklung einer Zufallsgröße $Z(X(\omega))$ allgemein formuliert werden mit

$$Z(X(\omega)) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(X(\omega)) = z_0 \Psi_0(X(\omega)) + z_1 \Psi_1(X(\omega)) + \dots \quad (5.1)$$

Dabei sind z_{α} die deterministischen PC-Koeffizienten und $\Psi_{\alpha}(X(\omega))$ die zugehörigen orthonormalen Basispolynome. Die PC-Entwicklung in Gleichung (5.1) ist in Abbildung 5.1 graphisch veranschaulicht. Die Begrifflichkeiten PCE, PC-Entwicklung, PC-Variable und Chaosentwicklung werden im folgenden Kapitel synonym verwendet.

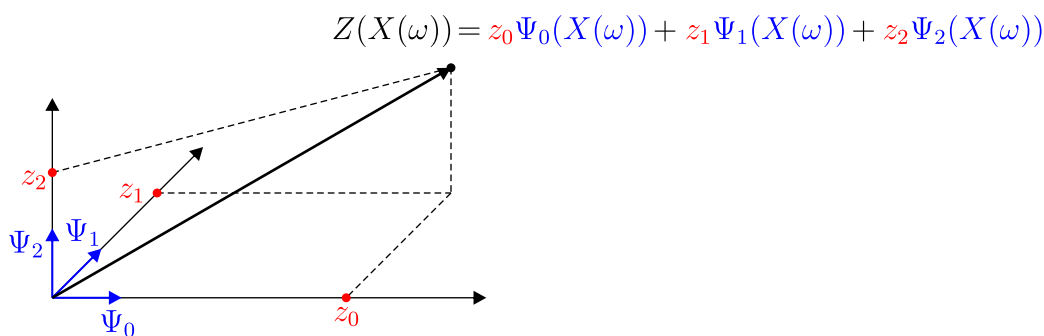


Abbildung 5.1: Approximation einer Zufallsvariablen $Z(X(\omega))$ mittels orthogonaler Basispolynome $\Psi_{\alpha}(X(\omega))$ im Rahmen der PCE gemäß SUDRET [109]

Im Jahr 1991 entwickelten GHANEM & SPANOS [45] die *spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode* (SSFEM), die eine Brücke zwischen der FEM und der

PCE schlägt. Einen weiteren bedeutenden Fortschritt in der Entwicklung der PCE erzielten XIU [128] und XIU & KARNIADAKIS [134] im Jahr 2002. Sie führten die sogenannte *verallgemeinerte polynomielle Chaosentwicklung* (engl.: *generalized polynomial chaos expansion*) ein und erweiterten damit die von WIENER im Jahr 1938 entwickelte PCE auf andere Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgröße $X(\omega)$. Die von XIU & KARNIADAKIS [134] verwendeten orthonormalen Polynome lassen sich in das ASKEY-Schema einordnen, siehe ASKEY & WILSON [13]. Dieses Schema stellt die Beziehungen zwischen verschiedenen Familien orthogonaler Polynome in Form einer hierarchischen Struktur graphisch dar. Mit der verallgemeinerten polynomiellen Chaosentwicklung wird auch für Zufallsgrößen, die von beliebigen Zufallsvariablen abhängen, eine optimale Konvergenzrate der PCE erreicht, siehe XIU & KARNIADAKIS [134] und ERNST ET AL. [33].

Im Bereich der Ingenieurwissenschaften findet die PCE vor allem Anwendung bei der Unschärfequantifizierung und -propagierung. In diesem Kontext dient die Methode als sogenanntes *Ersatzmodell* des ursprünglichen Berechnungsmodells, beispielsweise eine Finite-Element-Berechnung. Sind die PC-Koeffizienten z_α einer PC-Entwicklung bekannt, so kann anstelle des numerischen Modells die Polynomapproximation mit vergleichsweise geringem Aufwand ausgewertet werden. Aufgrund der speziellen Polynombasis bietet die PCE eine für Ingenieure aufschlussreiche Darstellung des Berechnungsmodells, die wichtige Kenngrößen bereitstellt. Dies führt dazu, dass berechnungsintensive Verfahren wie die Monte-Carlo-Simulation (MCS) mit der polynomiellen Chaosentwicklung umgangen werden können. Das nachfolgende Kapitel orientiert sich im Wesentlichen an Veröffentlichungen von SUDRET [111], BLATMAN & SUDRET [22] und SCHÖBI & SUDRET [96].

5.1 Orthogonale Polynombasis

Auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist die nicht-negative Funktion $w(x) : I \mapsto \mathbb{R}_0^+$ definiert. Sofern $w(x)$ die Bedingung

$$\int_I x^n w(x) dx < \infty \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.2)$$

erfüllt, wird die Funktion als *Gewichtsfunktion* bezeichnet. Weiterhin beschreibt

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_I f(x) g(x) w(x) dx \quad (5.3)$$

das Skalarprodukt der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bezüglich $w(x)$.

Für jede Gewichtsfunktion existiert eine eindeutig bestimmte Folge orthogonaler Polynome $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, mit

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_I P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0 \quad \text{für } n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \quad (5.4)$$

Das Polynom $P_n(x)$ hat dabei den Grad n . In Tabelle 5.1 sind klassische orthogonale Polynome mit den zugehörigen Gewichtsfunktionen $w(x)$ und ihren Definitionsbereichen I dargestellt.

Orthogonale Polynome	Gewichtsfunktion $w(x)$	Definitionsbereich I
LEGENDRE	$1/2$	$[-1, 1]$
HERMITE	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$(-\infty, \infty)$
LAGUERRE	$x^s \exp(-x), \quad s > -1$	$(0, \infty)$
JACOBI	$(1-x)^s(1+x)^t, \quad s, t > -1$	$[-1, 1]$

Tabelle 5.1: Klassische orthogonale Polynome mit zugehöriger Gewichtsfunktion und Definitionsbereich in Anlehnung an SOIZE & GHANEM [106]

Wird eine stetige Zufallsvariable X betrachtet, so kann die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ als Gewichtsfunktion interpretiert werden. Gleichung (5.4) lautet somit

$$\langle P_n(x), P_m(x) \rangle = \int_{D_X} P_n(x) P_m(x) f_X(x) dx, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (5.5)$$

wobei D_X der Definitionsbereich der Zufallsvariablen X ist. Mit der Definition des Erwartungswertes in Gleichung (4.4) wird das Integral in Gleichung (5.5) umgeformt zu

$$\int_{D_X} P_n(x) P_m(x) f_X(x) dx = \mathbb{E}[P_n(X) P_m(X)] = h_n \delta_{nm}. \quad (5.6)$$

Dabei ist δ_{nm} das KRONECKER-Delta und

$$h_n = \int_{D_X} P_n(x) P_n(x) f_X(x) dx = \|P_n(x)\|^2 \quad (5.7)$$

die quadratische Norm des Polynoms $P_n(x)$ bezüglich $f_X(x)$. Damit werden die orthonormalen Polynome eingeführt mit

$$\psi_n(x) := \frac{P_n(x)}{\sqrt{h_n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.8)$$

Diese erfüllen die Bedingung

$$\int_{D_X} \psi_n(x) \psi_m(x) f_X(x) dx = \delta_{nm} . \quad (5.9)$$

Zudem bildet die Folge $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}(dx) = f_X(x)$. Die Normierung in Gleichung (5.8) lässt sich für jede Folge orthogonaler Polynome durchführen. Im nächsten Abschnitt wird die Verknüpfung der orthonormalen Basispolynome $\psi_n(x)$ mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsvariablen näher erläutert.

5.1.1 Univariate Polynome

Die Gewichtsfunktionen $w(x)$ in Tabelle 5.1 entsprechen in ihrer Form den Dichtefunktionen $f_X(x)$ der stetigen Standardverteilungen aus Kapitel 4.1.2. Aus diesem Grund können diesen Wahrscheinlichkeitsverteilungen die orthonormalen Basispolynome aus dem vorherigen Abschnitt zugeordnet werden. Diese Verknüpfungen sind in Anlehnung an XIU & KARNIADAKIS [134] in Tabelle 5.2 dargestellt.

Standardverteilung	Definitionsbereich D_X	Orthonormale Polynombasis $\psi(x)$
Uniform $\mathcal{U}(-1, 1)$	$[-1, 1]$	LEGENDRE $L(x)$
Normal $\mathcal{N}(0, 1)$	$(-\infty, \infty)$	HERMITE $H(x)$
Gamma $\Gamma(s, 1, 0)$	$(0, \infty)$	LAGUERRE $L^{(s)}(x)$
Beta $\mathcal{B}(s, t, -1, 1)$	$[-1, 1]$	JACOBI $J^{(s,t)}(x)$

Tabelle 5.2: Zusammenhang zwischen den stetigen Standardverteilungen aus Kapitel 4.1.2 und den klassischen orthonormalen Basispolynomen in Tabelle 5.1 in Anlehnung an XIU & KARNIADAKIS [134]

Weiterhin zeigt Tabelle 5.3 eine Gegenüberstellung der Dichte- und Gewichtsfunktionen $f_X(x)$ und $w(x)$. Es ist zu erkennen, dass im Falle der Gleich- und Normalverteilung beide Funktionen übereinstimmen. Die Dichtefunktionen der Gamma- und Betaverteilung werden durch geeignete Variablentransformationen in die Gewichtsfunktionen der LAGUERRE- und JACOBI-Polynome überführt:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\hat{s} + 1)} \cdot x^{\hat{s}} \exp(-x) , \quad \hat{s} = s - 1 , \quad (5.10)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\hat{t}, \hat{s}) 2^{\hat{s} + \hat{t} + 1}} \cdot (1 - x)^{\hat{s}} (1 + x)^{\hat{t}} , \quad \hat{s} = t - 1, \quad \hat{t} = s - 1 .$$

Verteilung	Dichtefunktion $f_X(x)$	Polynome $\psi(x)$	Gewichtsfunktion $w(x)$
Uniform	$1/2$	LEGENDRE	$1/2$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	HERMITE	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
Gamma	$\frac{x^{s-1} \exp(-x)}{\Gamma(s)}$	LAGUERRE	$x^s \exp(-x)$
Beta	$\frac{(1+x)^{s-1}(1-x)^{t-1}}{B(s, t)2^{s+t-1}}$	JACOBI	$(1-x)^s(1+x)^t$

Tabelle 5.3: Gegenüberstellung der Dichtefunktionen $f_X(x)$ der stetigen Standardverteilungen und den Gewichtsfunktionen $w(x)$ der orthonormalen Basispolynome

Damit entsprechen die transformierten Dichtefunktionen in Gleichung (5.10) bis auf konstante Vorfaktoren den Gewichtsfunktionen in Tabelle 5.3.

Legendre-Polynome & Gleichverteilung

Für die stetige Standardgleichverteilung $\mathcal{U}(-1, 1)$ bilden die LEGENDRE-Polynome eine orthonormale Polynombasis und erfüllen die Orthonormalitätsbedingung

$$\int_{-1}^1 L_a(x) L_b(x) \frac{1}{2} dx = \delta_{ab} . \quad (5.11)$$

Die ersten vier Polynome lauten

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 , & L_2(x) &= \sqrt{5} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} \right) , \\ L_1(x) &= \sqrt{3} x \quad \text{und} \quad L_3(x) &= \sqrt{7} \left(\frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x \right) . \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sie sind in Abbildung 5.2 dargestellt.

Hermite-Polynome & Normalverteilung

Die sogenannten HERMITE-Polynome genügen der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_a(x) H_b(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \delta_{ab} \quad (5.13)$$

und bilden somit ein vollständiges Orthonormalsystem bezüglich der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung. Abbildung 5.3 zeigt die ersten vier Polynome. Sie lauten

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 , & H_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x^2 - 1) , \\ H_1(x) &= x \quad \text{und} \quad H_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (x^3 - 3x) . \end{aligned} \quad (5.14)$$

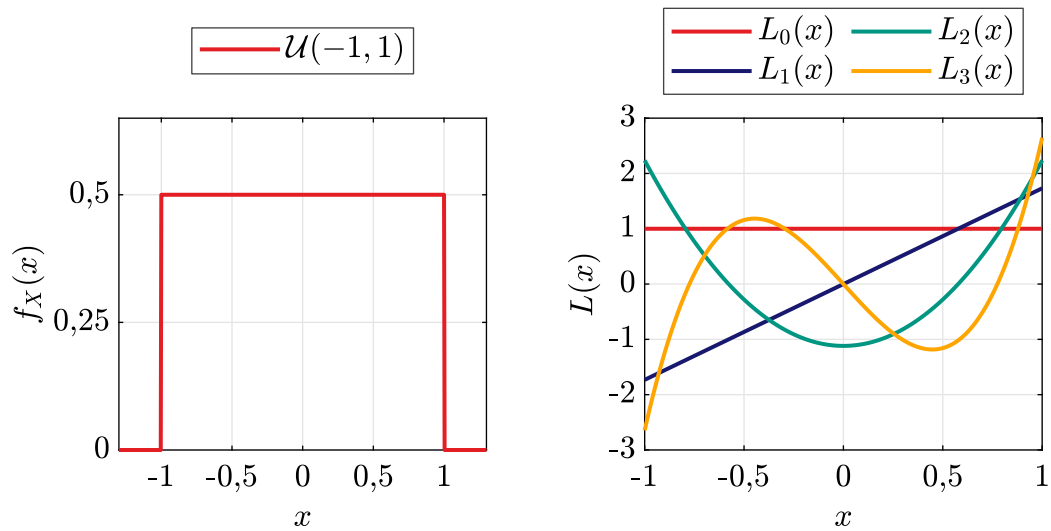


Abbildung 5.2: Dichtefunktion der Standardgleichverteilung (links) und die zugehörigen ersten vier orthonormalen LEGENDRE-Polynome (rechts)

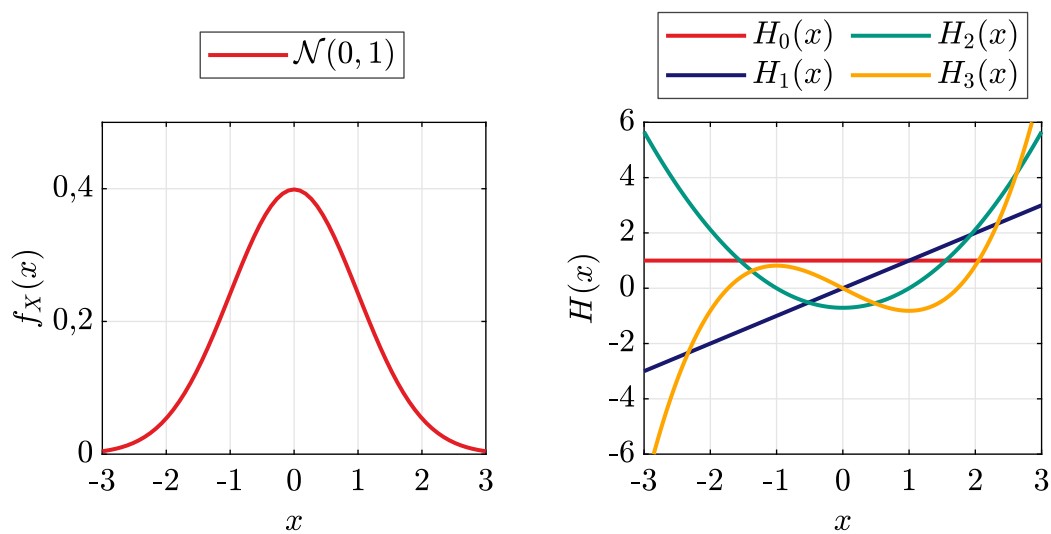


Abbildung 5.3: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung (links) und die zugehörigen ersten vier orthonormalen HERMITE-Polynome (rechts)

Laguerre-Polynome & Gammaverteilung

Die Form der Standardgammaverteilung $\Gamma(s, 1, 0)$ wird durch den Formparameter s bestimmt, siehe Abbildung 5.4 (oben). Für diese Art der Verteilung bilden

die LAGUERRE-Polynome ein orthonormales Polynomsystem:

$$\int_0^{\infty} L_a^{(s)}(x) L_b^{(s)}(x) \frac{x^{s-1} \exp(-x)}{\Gamma(s)} dx = \delta_{ab} . \quad (5.15)$$

Abbildung 5.4 (unten) zeigt die ersten vier LAGUERRE-Polynome für zwei Standardgammaverteilungen. Die Polynome für die Verteilung $\Gamma(2, 1, 0)$ lauten

$$\begin{aligned} L_0^{(2)}(x) &= 1 , & L_2^{(2)}(x) &= \frac{\sqrt{3}}{6}(x^2 - 6x + 6) , \\ L_1^{(2)}(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 2) \quad \text{und} \quad L_3^{(2)}(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x^2 - 3x + 2 . \end{aligned} \quad (5.16)$$

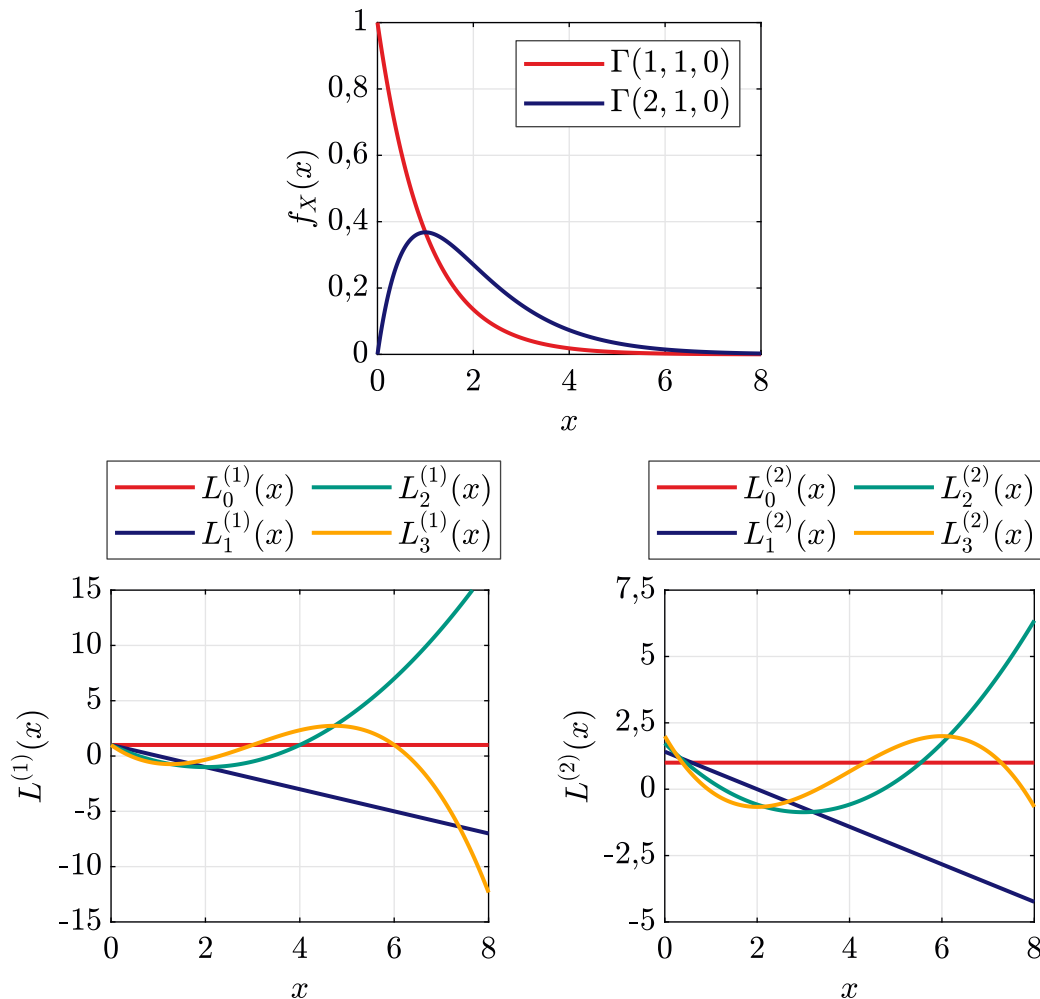


Abbildung 5.4: Dichtefunktionen zweier Standardgammaverteilungen mit den Parametern $s = 1$ und $s = 2$ (oben) sowie die zugehörigen ersten vier orthonormalen LAGUERRE-Polynome (unten)

Jacobi-Polynome & Betaverteilung

Die Gestalt der Betaverteilung wird durch die zwei Formparameter s und t charakterisiert, siehe Abbildung 5.5 (oben). Die zugehörigen JACOBI-Polynome erfüllen die Orthonormalitätsbedingung

$$\int_{-1}^1 J_a^{(s,t)}(x) J_b^{(s,t)}(x) \frac{(1+x)^{s-1} (1-x)^{t-1}}{B(s,t) 2^{s+t-1}} dx = \delta_{ab} . \quad (5.17)$$

Abbildung 5.5 (unten) zeigt die ersten vier JACOBI-Polynome für zwei Standardbetaverteilungen. Es ist zu erkennen, dass sich die Symmetrien bzw. Asymmetrien der Dichtefunktionen, siehe Abbildung 5.5 (oben), in den Polynomen widerspie-

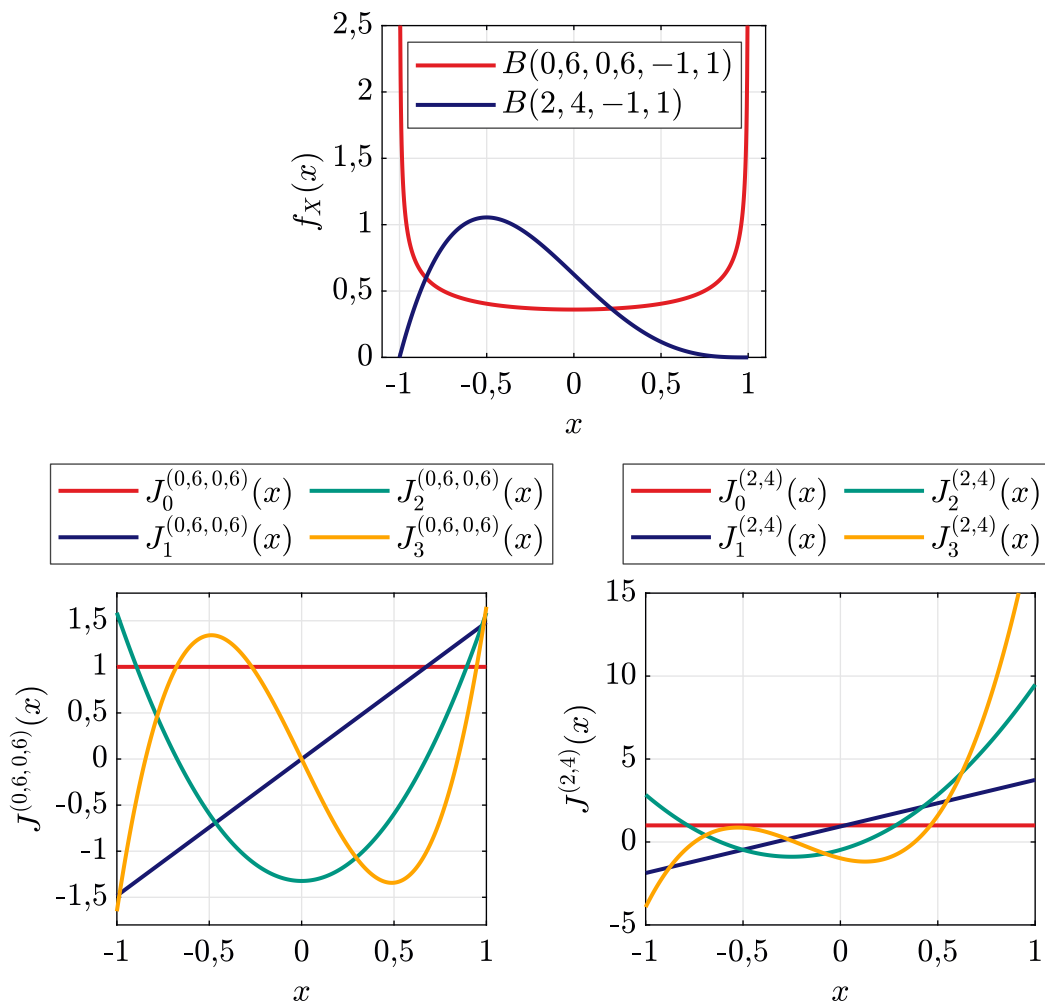


Abbildung 5.5: Dichtefunktionen zweier Standardbetaverteilung mit den Parametern $s = t = 0,6$ und $s = 2, t = 4$ (oben) sowie die zugehörigen ersten vier orthonormalen JACOBI-Polynome (unten)

geln. Für die Verteilungen $\mathcal{B}(2, 4, -1, 1)$ lauten die ersten vier JACOBI-Polynome

$$\begin{aligned} J_0^{(2,4)}(x) &= 1, & J_2^{(2,4)}(x) &= \frac{3\sqrt{10}}{20}(14x^2 + 7x - 1), \\ J_1^{(2,4)}(x) &= \frac{\sqrt{14}}{4}(3x + 1) \quad \text{und} \quad J_3^{(2,4)}(x) &= \frac{\sqrt{385}}{20}(15x^3 + 9x^2 - 3x - 1). \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.1.2 Dreitermrekursion für orthogonale Polynome

Neben der Orthonormalitätsbedingung in Gleichung (5.9) genügen orthonormale Polynome einer sogenannten *Dreitermrekursion*, siehe GAUTSCHI [37] und DEUFLHARD & HOHMANN [28]. Diese lautet

$$\sqrt{b_{n+1}} \psi_{n+1}(x) = (x - a_n) \psi_n(x) - \sqrt{b_n} \psi_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.19)$$

wobei die ersten beiden Polynome definiert sind mit

$$\psi_{-1}(x) := 0 \quad \text{und} \quad \psi_0 := 1. \quad (5.20)$$

Die Rekursionskoeffizienten a_n und b_n werden wie folgt berechnet:

$$a_n = \frac{\langle x\psi_n, \psi_n \rangle}{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad b_n = \frac{\langle \psi_n, \psi_n \rangle}{\langle \psi_{n-1}, \psi_{n-1} \rangle}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \quad (5.21)$$

Für den ersten Koeffizienten b_0 gilt per Definition $b_0 := 1$. Dabei beschreibt $\langle \bullet \rangle$ das Skalarprodukt, siehe Gleichung (5.4). Mit der Dreitermrekursion in Gleichung (5.19) können beliebige, orthonormale Polynome effizient und numerisch stabil ausgewertet werden. Für die Basispolynome aus dem vorherigen Abschnitt 5.1.1 sind die Rekursionskoeffizienten a_n und b_n in Tabelle 5.4 angegeben.

Basispolynome $\psi(x)$	$a_n, n \in \mathbb{N}_0$	$\sqrt{b_0}$	$\sqrt{b_n}, n \in \mathbb{N}^+$
LEGENDRE $L(x)$	0	1	$\sqrt{\frac{n^2}{4n^2-1}}$
HERMITE $H(x)$	0	1	$\sqrt{n}$
LAGUERRE $L^{(s)}(x)$	$2n + s$	1	$-\sqrt{n(n+s-1)}$
JACOBI $J^{(s,t)}(x)$	$\frac{(s-1)^2(t-1)^2}{(2n+s+t-2)(2n+s+t)}$	1	$\sqrt{\frac{4n(n+s-1)(n+t-1)(n+s+t-2)}{(2n+s+t-2)^2((2n+s+t-2)-1)}}$

Tabelle 5.4: Rekursionskoeffizienten a_n und b_n für die Dreitermrekursion in Anlehnung an GAUTSCHI [37] und SHEN ET AL. [101]

5.1.3 Multivariate Polynome

Der vorherige Abschnitt 5.1.1 beschränkt sich auf eine stochastische Variable X und zeigt die zugehörigen orthonormalen Basispolynome $\psi(x)$. Werden mehrere Zufallsgrößen betrachtet, so wird die zugehörige Polynombasis aus mehrdimensionalen Polynomen aufgespannt. Für einen Zufallsvektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ mit M Zufallsvariablen berechnet sich die gemeinsame Dichtefunktion

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^M f_{X_i}(x_i) \quad (5.22)$$

aus dem Produkt der einzelnen Randverteilungen. An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass der Zusammenhang in Gleichung (5.22) die stochastische Unabhängigkeit aller Zufallsgrößen $X_i, i = 1, \dots, M$ voraussetzt. Die zum Zufallsvektor $\mathbf{X}$ zugehörigen mehrdimensionalen, orthonormalen Basispolynome werden wie folgt eingeführt:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}^{(i)}(x_i), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0. \quad (5.23)$$

Dabei wird die Abhängigkeit der eindimensionalen Polynome von der i -ten Zufallsvariable X_i mit dem hochgestellten Index $\psi^{(i)}(x_i)$ gekennzeichnet. In Gleichung (5.23) erfolgt die Bezeichnung des mehrdimensionalen Polynoms mit einem linearen Index $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist jedem Index α ein sogenannter Multiindex

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{N}^M \quad (5.24)$$

zugeordnet. Der Multiindex in Gleichung (5.24) gibt mit α_i den Grad des Polynoms in der i -ten Dimension an. Mit der Einführung von $\boldsymbol{\alpha}$ lautet eine alternative Schreibweise des Polynoms in Gleichung (5.23)

$$\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) := \prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}^{(i)}(x_i), \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^M, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0. \quad (5.25)$$

Je nach Anwendung ist die Notation in Gleichung (5.23) oder die in Gleichung (5.25) vorteilhafter. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit beide Darstellungen verwendet. Die Orthonormalitätseigenschaft der Polynome in Gleichung (5.9) bleibt weiterhin erhalten und es gilt

$$\int_{D_{\mathbf{X}}} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Psi_{\beta}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{bzw.} \quad \int_{D_{\mathbf{X}}} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \Psi_{\beta}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.26)$$

Dabei bezeichnet $D_{\mathbf{X}}$ den M -dimensionalen Definitionsbereich des Zufallsvektors $\mathbf{X}$.

5.2 Verallgemeinerte Chaosentwicklung

Der Zufallsvektor $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ mit der Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ wird durch ein Modell $\mathcal{M}$ auf die zufällige Ausgangsgröße $Z = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ abgebildet. Die Zufallsvariable Z ist quadratisch integrierbar:

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[\mathcal{M}^2(\mathbf{X})] = \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}^2(\mathbf{X}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty . \quad (5.27)$$

Gemäß SOIZE & GHANEM [106] ermöglicht dies eine exakte PC-Entwicklung der Form

$$Z = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) , \quad (5.28)$$

wobei die Polynome $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ eine orthonormale Basis bezüglich der Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ des Eingangsvektors $\mathbf{X}$ aufspannen. Wird die unendliche Summe in Gleichung (5.28) nach $P + 1$ Polynomen abgebrochen, so folgt die Approximation

$$Z \approx \hat{Z} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) , \quad (5.29)$$

wobei die Menge $\mathcal{A}$ alle $P + 1$ Multiindizes α beinhaltet. Die Genauigkeit der PCE hängt maßgeblich von dem maximalen Grad p der Polynome bzw. der Polynombasis ab. Grundsätzlich gilt, je komplexer der Zusammenhang, desto mehr Polynome werden für eine genauere Approximation benötigt.

In Tabelle 5.2 sind ausgewählte standardisierte Zufallsgrößen und die zugehörigen Basispolynome dargestellt. Die Variablen in dem Zufallsvektor $\mathbf{X}$ entsprechen im Allgemeinen nicht den Standardverteilungen, wie sie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben werden. Im Hinblick auf die numerische Umsetzung erfordert dies die Transformation

$$\mathbf{X} = \mathcal{T}(\mathbf{U}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U} = \mathcal{T}^{-1}(\mathbf{X}) , \quad (5.30)$$

wobei die Variablen des Vektors $\mathbf{U}$ den Standardverteilungen aus Abschnitt 5.1.1 entsprechen. Eine derartige Abbildung wird als *isoprobabilistische Transformation* bezeichnet, siehe SUDRET [111]. Die PC-Approximation in Gleichung (5.29) lautet somit

$$\hat{Z} = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{U}) . \quad (5.31)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden jedoch auf die Unterscheidung zwischen den Zufallsvektoren $\mathbf{X}$ und $\mathbf{U}$ verzichtet und es wird die Schreibweise mit $\mathbf{X}$ verwendet.

5.2.1 Spezielle Abbruchkriterien für PC-Entwicklungen

Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über verschiedene Abbruchkriterien, die von BLATMAN & SUDRET [22] im Rahmen der PCE eingeführt wurden. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^M$, siehe Gleichung (5.24), werden folgende Größen definiert:

- Grad eines Multiindex:

$$\|\alpha\|_1 := \sum_{i=1}^M \alpha_i, \quad (5.32)$$

- q-Norm eines Multiindex:

$$\|\alpha\|_q := \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i^q \right)^{1/q}, \quad q \in (0, 1]. \quad (5.33)$$

Für das Standardabbruchkriterium wird ein maximaler Polynomgrad p für die PCE vorgegeben. Es werden alle Multiindizes α mit einem Grad $\|\alpha\|_1$ kleiner gleich p in der Menge

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}^{M,p} = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_1 \leq p \right\} \quad (5.34)$$

berücksichtigt, siehe Abbildung 5.6 (links). Die Mächtigkeit der Menge $\mathcal{A}$ wird im Rahmen dieser Arbeit definiert als

$$\bar{P} := |\mathcal{A}| = P + 1. \quad (5.35)$$

Für das Standardabbruchkriterium lautet die Anzahl der verwendeten Multiindizes

$$\bar{P} = \frac{(M+p)!}{M!p!}, \quad (5.36)$$

wobei p den maximalen Polynomgrad und M die Anzahl der Eingangsvariablen in dem Zufallsvektor $\mathbf{X}$ bezeichnen. Für große Werte von M und p nimmt die Anzahl $\bar{P}$ der Basispolynome exponentiell zu. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, führten BLATMAN & SUDRET [22] die sogenannte *q-Norm*, siehe Gleichung (5.33), und das damit verbundene hyperbolische Abbruchkriterium ein, das eine Verallgemeinerung des Standardabbruchkriteriums darstellt. Die Menge

$$\mathcal{A}_q^{M,p} := \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^M : \|\alpha\|_q \leq p \right\} \quad (5.37)$$

beinhaltet alle Multiindizes α , deren q-Norm $\|\alpha\|_q$ kleiner gleich dem maximalen Polynomgrad p ist. Für $q = 1$ entspricht Gleichung (5.37) dem Standardabbruchkriterium in Gleichung (5.34). Das Prinzip des hyperbolischen Abbruchkriteriums ist in Abbildung 5.6 (mitte & rechts) veranschaulicht.

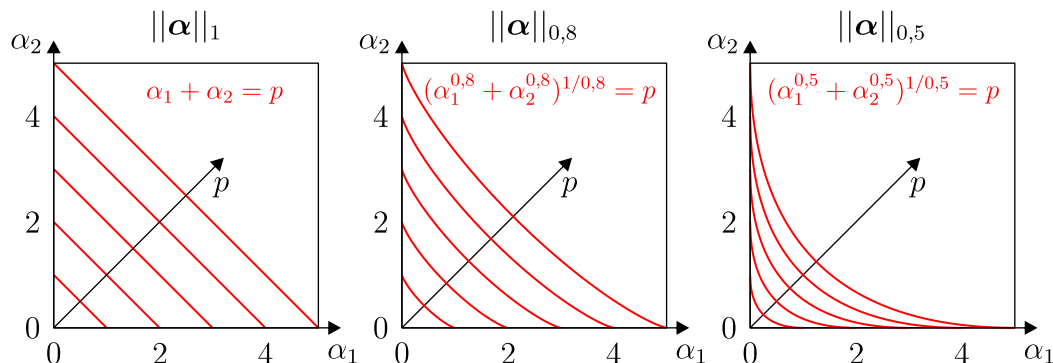


Abbildung 5.6: Standardabbruchkriterium (links) und hyperbolisches Abbruchkriterium (mittig & rechts) nach BLATMAN & SUDRET [22] für den zweidimensionalen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

Abbildung 5.7 zeigt den Einfluss der q-Norm am Beispiel von $M = 2$ Variablen und einem maximalen Polynomgrad von $p = 5$. Im Falle des Standardabbruchkriteriums ($q = 1$) werden insgesamt 21 Multiindizes berücksichtigt. Werden für q die Werte 0,8 bzw. 0,5 gewählt, so verbleiben 17 bzw. 12 Indizes. Für den markierten Multiindex ($\bullet$) mit $\bar{\alpha} = (1, 3)$ in Abbildung 5.7 lautet die Berechnung der q-Norm

$$\begin{aligned}
 q = 1 : \quad (1 + 3) &= 4 < 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{A}_1^{2,5}, \\
 q = 0,8 : \quad (1^{0,8} + 3^{0,8})^{1/0,8} &= 4,63 < 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} \in \mathcal{A}_{0,8}^{2,5} \quad \text{und} \\
 q = 0,6 : \quad (1^{0,5} + 3^{0,5})^{1/0,5} &= 7,46 > 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} \notin \mathcal{A}_{0,5}^{2,5}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

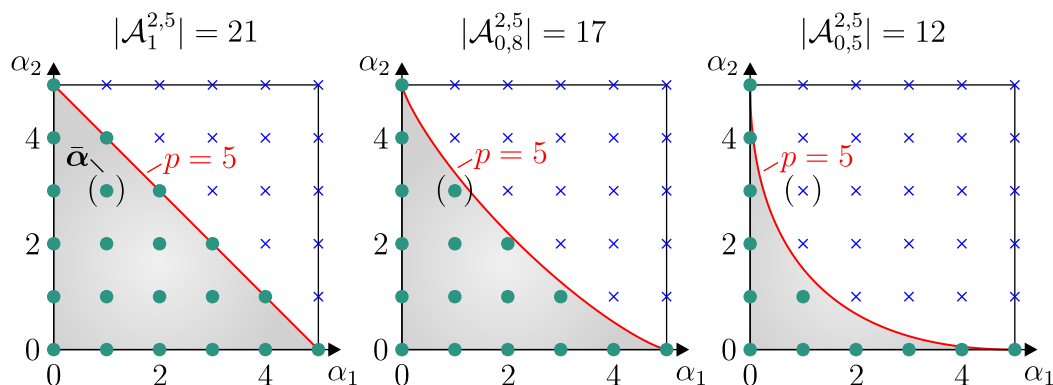


Abbildung 5.7: Reduktion der verbleibenden Multiindizes bzw. der zugehörigen Basispolynome mittels der q-Norm in Anlehnung an BLATMAN & SUDRET [22]

5.3 Berechnung der Chaoskoeffizienten

Nachdem eine endliche Menge an Basispolynomen für die PC-Entwicklung definiert sind, müssen die zugehörigen Koeffizienten bestimmt werden. Grundsätzlich wird dabei zwischen *intrusiven* und *nicht-intrusiven* Methoden unterschieden, siehe LE MAÎTRE & KNIO [70].

Für den intrusiven Berechnungsansatz müssen die Grundgleichungen des zu lösenden Problems neu formuliert werden. Dies führt auf die notwendigen Bestimmungsgleichungen für die unbekannten PC-Koeffizienten. Der intrusive Ansatz findet beispielsweise Anwendung in der spektralen stochastischen Finite-Elemente-Methode (SSFEM), siehe GHANEM & SPANOS [40, 44, 45]. In dieser Arbeit wird das Konzept der SSFEM anhand ausgewählter Strukturelemente in Kapitel 6 ausführlich erläutert.

Im Gegensatz hierzu beruhen nicht-intrusive Methoden auf wiederholten Auswertungen des ursprünglichen Berechnungsmodells. Die Kalibrierung der PC-Entwicklung erfolgt anschließend auf Basis dieser generierten Datenpunkte. Hierzu wird das Berechnungsmodell im Rahmen der *Orthogonalprojektion* auf den sogenannten Unterraum $\mathcal{L}(\Psi_0, \dots, \Psi_P)$ projiziert, der durch die Polynombasis $\Psi_\alpha, \alpha = 0, \dots, P$ aufgespannt wird. Die auftretenden Integrale werden mithilfe einer GAUSS-Quadratur numerisch gelöst, siehe LE MAÎTRE ET AL. [71] und GHIOCEL & GHANEM [46]. Alternativ können die PC-Koeffizienten auch über eine *Polynomregression* bestimmt werden. Dieser Ansatz wird beispielsweise von BERVEILLER & SUDRET [18], Choi et al. [24] und Blatman & Sudret [20] verwendet.

5.3.1 Orthogonalprojektion

Im Rahmen der *Funktionalanalysis* wird die Orthogonalprojektion für die Approximation funktionaler Zusammenhänge verwendet. Ziel ist es, die PC-Koeffizienten in Gleichung (5.29) so zu bestimmen, dass mit einer gegebenen Polynombasis die bestmögliche Approximation der Abbildung $Z = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ erreicht wird. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft in Gleichung (5.9) gilt für die Koeffizienten der PCE

$$z_\alpha = \mathbb{E}[Z\Psi_\alpha(\mathbf{X})] = \int_{D_{\mathbf{X}}} Z\Psi_\alpha(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} . \quad (5.39)$$

Unter der Annahme einer endlichen Varianz von Z existiert eine exakte Darstellung dieser Größe in Form einer PC-Entwicklung. Damit lässt sich der Zusam-

menhang in Gleichung (5.39) wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z\Psi_\alpha(\mathbf{X})] &= \mathbb{E}\left[\sum_{\beta=0}^{\infty} z_\beta \Psi_\beta(\mathbf{X}) \Psi_\alpha(\mathbf{X})\right] \\ &= \sum_{\beta=0}^{\infty} z_\beta \underbrace{\mathbb{E}[\Psi_\beta(\mathbf{X}) \Psi_\alpha(\mathbf{X})]}_{\delta_{\beta\alpha}} = \sum_{\beta=0}^{\infty} z_\beta \delta_{\beta\alpha} = z_\alpha. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Für die Abbildung $Z = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ existiert im Allgemeinen keine geschlossene analytische Form, weshalb das Integral in Gleichung (5.39) mittels GAUSS-Quadratur numerisch gelöst wird:

$$\int_{D_{\mathbf{X}}} Z\Psi_\alpha(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}} z^{(k)} \Psi_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) w^{(k)}, \quad z^{(k)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}). \quad (5.41)$$

Entspricht $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ der Dichtefunktion einer Gleich- oder Normalverteilung, wird die GAUSS-LEGENDRE- bzw. GAUSS-HERMITE-Integration verwendet. Für gamma- oder betaverteilte Zufallsgrößen ist die GAUSS-LAGUERRE- bzw. GAUSS-JACOBI-Quadratur optimal. Ein numerisch effizienter Algorithmus für die Bestimmung der Integrationspunkte $\mathbf{x}^{(k)}$ und Wichtungsfaktoren $w^{(k)}$ in Gleichung (5.41) wird im folgenden Abschnitt näher erläutert. Im Anschluss wird das Prinzip der Orthogonalprojektion anhand einer analytischen Funktion beschrieben.

Numerische Integration im Rahmen der Orthogonalprojektion

Der sogenannte GOLUB-WELSCH-Algorithmus [47] wird in dieser Arbeit verwendet, um die Stützstellen und Gewichte für die GAUSS-Quadratur zu bestimmen. Im Folgenden wird der eindimensionale Fall näher betrachtet. Mit den Rekursionskoeffizienten aus Tabelle 5.4 wird die unendlich große, symmetrische *Tridiagonalmatrix* definiert:

$$\mathbf{J}_\infty := \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & \\ & \sqrt{b_2} & a_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & \\ & J_{32} & J_{33} & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty}. \quad (5.42)$$

Für die numerische Integration werden L Stützstellen verwendet, weshalb nur die ersten L Zeilen und Spalten der Matrix aus Gleichung (5.42) benötigt werden. Die reduzierte Tridiagonalmatrix der Größe L wird eingeführt mit

$$\mathbf{J}_L := \begin{bmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{L-1}} \\ 0 & & \sqrt{b_{L-1}} & a_{L-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times L}. \quad (5.43)$$

Im Rahmen des Algorithmus müssen alle Eigenvektoren $\{\varphi_j\}_{j=1}^L$ und alle Eigenwerte $\{\lambda_j\}_{j=1}^L$ der reduzierten Matrix in Gleichung (5.43) bestimmt werden. Diese Größen berechnen sich aus dem speziellen Eigenwertproblem

$$\mathbf{J}_L \varphi = \lambda \varphi, \quad (5.44)$$

wobei für alle Eigenvektoren $\|\varphi_j\| = 1$, $j = 1, \dots, L$ gilt. Die Stützstellen für die numerische Integration entsprechen gerade den Eigenwerten, die in dem Vektor $\hat{\mathbf{x}}$ angeordnet werden:

$$\hat{\mathbf{x}} := [\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_L]^T = [x_1, \dots, x_j, \dots, x_L]^T \in \mathbb{R}^L. \quad (5.45)$$

Die L Wichtungsfaktoren folgen aus den quadrierten ersten Komponenten der jeweiligen Eigenvektoren und werden im Vektor

$$\mathbf{w} := [\varphi_{11}^2, \dots, \varphi_{j1}^2, \dots, \varphi_{L1}^2]^T = [w_1, \dots, w_j, \dots, w_L]^T \in \mathbb{R}^L \quad (5.46)$$

zusammengefasst. Dabei bezeichnet φ_{j1} die erste Komponente des Eigenvektors φ_j . Der Zusammenhang zwischen den Stützstellen und den Basispolynomen der PCE besteht darin, dass die Werte des Vektors $\hat{\mathbf{x}}$ gerade den Nullstellen des Polynoms Ψ_L entsprechen.

Als Beispiel wird das eindimensionale Integral der Form

$$\int_{D_X} (x+1)^2 \Psi_1(x) f_X(x) dx \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}} (x^{(k)}+1)^2 \Psi_1(x^{(k)}) w^{(k)} \quad (5.47)$$

betrachtet. Je nach Verteilung der Zufallsvariablen X ist $\Psi_1(x)$ das lineare LEGENDRE- oder HERMITE-Polynom. Im Fall der Gleichverteilung $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ ist $\Psi_1(x) = \sqrt{3}x$, während für eine Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ das Polynom $\Psi_1(x) = x$ verwendet wird. Insgesamt ist der Integrand in Gleichung (5.47) kubischer Natur. Mit der GAUSS-Quadratur werden Polynomausdrücke bis zu einem Grad $2N_{\text{int}} - 1$ exakt integriert. Daher sind hier mindestens $N_{\text{int}} = 2$ Integrationspunkte erforderlich. In Tabelle 5.5 sind für beide Fälle die Tridiagonalmatrix $\mathbf{J}_2$ mit den daraus berechneten Gewichten $\mathbf{w}$ und Stützstellen $\hat{\mathbf{x}}$ dargestellt. Die optimalen Stützstellen der GAUSS-Quadratur richten sich nach der Verteilung der Zufallsvariablen X bzw. nach der verwendeten Polynombasis. Die Ergebnisse der numerischen Integration für die Fälle der Gleich- und der Normalverteilung der Variablen X lauten

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+1)^2 \sqrt{3}x \frac{1}{2} dx &= \sum_{k=1}^2 (x^{(k)}+1)^2 \sqrt{3}x^{(k)} w^{(k)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x+1)^2 x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx &= \sum_{k=1}^2 (x^{(k)}+1)^2 x^{(k)} w^{(k)} = 2. \end{aligned} \quad (5.48)$$

$X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$	$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$
$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$ $\varphi_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow \mathbf{w} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$	$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = [-1, 1]^T$ $\varphi_{11} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightsquigarrow \mathbf{w} = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$

Tabelle 5.5: Tridiagonalmatrix $\mathbf{J}_2$, Stützstellen $\hat{\mathbf{x}}$ und Wichtungsfaktoren $\mathbf{w}$ für eine GAUSS-LEGENDRE-Integration (links) und eine GAUSS-HERMITE-Integration (rechts)

Sie stimmen mit den Ergebnissen einer analytischen Integration überein.

Der Zufallsvektor $\mathbf{X}$ in Gleichung (5.39) umfasst im Allgemeinen M unabhängige Zufallsgrößen. Im Rahmen der Orthogonalprojektion erfordert dies die numerische Berechnung eines M -dimensionalen Integrals. Die Gewichte und Stützstellen in der i -ten Dimension werden mit $\mathbf{w}^{(i)}$ und $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ bezeichnet. Die Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &:= \hat{\mathbf{x}}^{(1)} \times \cdots \times \hat{\mathbf{x}}^{(i)} \times \cdots \times \hat{\mathbf{x}}^{(M)} \\ &= \left\{ \underbrace{(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_M})}_{\mathbf{x}^{(k)}, k \in \{1, 2, \dots, N_{\text{int}} = L^M\}} \mid j_1, j_2, \dots, j_M \in \{1, 2, \dots, L\} \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

beinhaltet alle Integrationspunkte im M -dimensionalen Raum. Analog hierzu wird die Menge der zugehörigen Gewichte definiert mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &:= \mathbf{w}^{(1)} \times \cdots \times \mathbf{w}^{(i)} \times \cdots \times \mathbf{w}^{(M)} \\ &= \{(w_{j_1}, w_{j_2}, \dots, w_{j_M}) \mid j_1, j_2, \dots, j_M \in \{1, 2, \dots, L\}\}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Schließlich lautet das für den Integrationspunkt $\mathbf{x}^{(k)}$ zugehörige Gewicht

$$w^{(k)} = w_{j_1} \cdot w_{j_2} \cdot \dots \cdot w_{j_M}, \quad k \in \{1, 2, \dots, N_{\text{int}} = L^M\}. \quad (5.51)$$

Mit diesen Definitionen folgt die kompakte Schreibweise der numerischen Integration in Gleichung (5.41). Im Rahmen dieser Arbeit werden stets $L = p + 1$ Integrationspunkte pro Richtung verwendet, wobei p der maximale Polynomgrad der Chaosentwicklung ist, vgl. Abschnitt 5.2.1. Es ist zu erkennen, dass mit steigender Anzahl M an Zufallsgrößen und Stützstellen $L = p + 1$ pro Richtung, die Zahl der Integrationspunkte N_{int} exponentiell zunimmt. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, können sogenannte *Dünngitter-Verfahren* verwendet werden, siehe SMOLYAK [102] und GERSTNER & GRIEBEL [39]. An dieser Stelle sei auf weiterführende Literatur von CONSTANTINE ET AL. [26] und CONRAD & MARZOUK [25] verwiesen.

Prinzipbeispiel für die Orthogonalprojektion

In diesem Abschnitt wird das Prinzip der Orthogonalprojektion anhand einer Beispielfunktion näher erläutert. Hierfür wird die quadratische Polynomfunktion

$$Z = \mathcal{M}(X) = 5X^2 - 4X + \frac{2}{3} \quad (5.52)$$

betrachtet, wobei X eine Zufallsvariable ist. Um den Einfluss der zugehörigen Dichtefunktion $f_X(x)$ auf das Approximationsverhalten der PCE zu verdeutlichen, wird die Zufallsvariable X zuerst als Gleichverteilung und anschließend als Normalverteilung modelliert.

Gleichverteilung Die Zufallsvariable X folgt einer Standardgleichverteilung mit $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$. Für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gilt $f_X(x) = 1/2$. Aufgrund der gleichverteilten Zufallsvariable X werden für die Approximation LEGENDRE-Polynome verwendet. Die lineare PC-Entwicklung lautet

$$\widehat{\mathcal{M}}(X) = z_0\Psi_0(X) + z_1\Psi_1(X) \quad \text{mit} \quad \Psi_0(X) = 1 \quad \text{und} \quad \Psi_1(X) = \sqrt{3}X. \quad (5.53)$$

Für die Bestimmung der noch unbekannten Koeffizienten z_0 und z_1 wird die Polynomfunktion $\mathcal{M}(X)$ orthogonal auf den durch die beiden Polynome Ψ_0 und Ψ_1 aufgespannten Unterraum $\mathcal{L}(\Psi_0, \Psi_1)$ projiziert, siehe Abbildung 5.8 (links). Die berechneten Koeffizienten der PC-Entwicklung $\widehat{\mathcal{M}}(X)$ führen zu der bestmöglichen Approximation, die mit der linearen Polynombasis erreicht werden kann, unter der Annahme, dass X einer Gleichverteilung folgt. Abbildung 5.8 (rechts) zeigt die lineare Approximation der quadratischen Polynomfunktion.

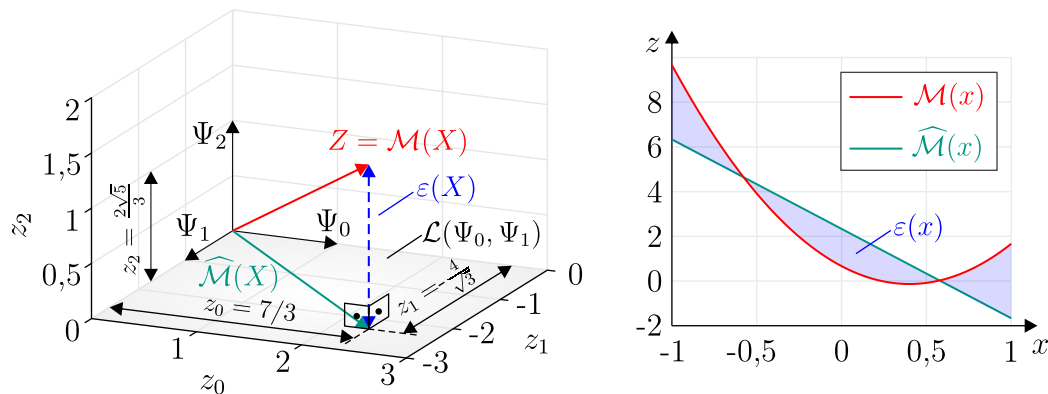


Abbildung 5.8: Orthogonalprojektion auf den Unterraum $\mathcal{L}(\Psi_0, \Psi_1)$ (links) in Anlehnung an SUDRET [109] und der entsprechenden Funktionsapproximation (rechts)

Die Orthogonalprojektion auf den Unterraum $\mathcal{L}(\Psi_0, \Psi_1)$ führt auf die Koeffizienten

$$z_0 = \int_{-1}^1 1 \cdot \left(5x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{7}{3} \quad \text{und} \quad (5.54)$$

$$z_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{3}x \cdot \left(5x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} dx = -\frac{4}{\sqrt{3}} . \quad (5.55)$$

Unter Berücksichtigung der gleichverteilten Variable X lautet die bestmögliche lineare Approximation der Funktion in Gleichung (5.52)

$$\widehat{\mathcal{M}}(X) = \frac{7}{3} \cdot 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}X = \frac{7}{3} - 4X . \quad (5.56)$$

Anhand Abbildung 5.8 (rechts) wird deutlich, dass mit der Approximation in Gleichung (5.56) alle Bereiche gleichermaßen gewichtet werden. Dies ist damit zu erklären, dass die Dichtefunktion der Gleichverteilung konstant ist. Der Approximationsfehler in Abhängigkeit der Variablen X lautet

$$\varepsilon(X) = \mathcal{M}(X) - \widehat{\mathcal{M}}(X) = 5X^2 - \frac{5}{3} , \quad (5.57)$$

wobei dieser senkrecht auf dem Unterraum $\mathcal{L}(\Psi_0, \Psi_1)$ steht, siehe Abbildung 5.8 (links) und somit die Bedingung

$$\int_{-1}^1 \varepsilon(x) \Psi_\alpha(x) \frac{1}{2} dx = 0 \quad \text{für } \alpha = 0, 1 \quad (5.58)$$

erfüllt. Für das mit der Dichtefunktion gewichtete integrale Mittel des Fehlers gilt

$$\mathbb{E}[\varepsilon(X)] = \int_{-1}^1 \varepsilon(x) \frac{1}{2} dx = 0 . \quad (5.59)$$

Der Erwartungswert der Fehlernorm lautet

$$\mathbb{E}[||\varepsilon(X)||] = \sqrt{\int_{-1}^1 \varepsilon^2(x) \frac{1}{2} dx} = \frac{2\sqrt{5}}{3} . \quad (5.60)$$

Für eine exakte Darstellung der Zufallsvariablen Z ist zusätzlich zu dem konstanten und linearen Polynom das quadratische LEGENDRE-Polynom $\Psi_2(X)$ erforderlich. Eine Orthogonalprojektion führt auf den zugehörigen Koeffizienten $z_2 = 2\sqrt{5}/3$, der gerade der Fehlernorm in Gleichung (5.60) entspricht. Da die Funktion in Gleichung (5.52) einen maximalen Polynomgrad von zwei hat, gilt für alle Projektionen auf höherwertige Basispolynome

$$\int_{-1}^1 \mathcal{M}(x) \Psi_\alpha(x) \frac{1}{2} dx = 0 , \quad \forall \alpha > 2 . \quad (5.61)$$

Normalverteilung Wird die Zufallsvariable X als Standardnormalverteilung mit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ modelliert, so lautet die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2)$. Für die Approximation der Zufallsgröße Z werden HERMITE-Polynome verwendet. Allgemein lässt sich die lineare PC-Entwicklung schreiben als

$$\widehat{\mathcal{M}}(X) = z_0 \Psi_0(X) + z_1 \Psi_1(X) \quad \text{mit} \quad \Psi_0(X) = 1 \quad \text{und} \quad \Psi_1(X) = X . \quad (5.62)$$

Wie auch im Abschnitt zuvor, werden die zugehörigen Koeffizienten mit der Orthogonalprojektion bestimmt:

$$z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \left(5x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{17}{3} , \quad (5.63)$$

$$z_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(5x^2 - 4x + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = -4 . \quad (5.64)$$

Damit lautet die bestmögliche lineare Approximation der Zufallsvariablen Z unter Annahme einer Normalverteilung von X wie folgt:

$$\widehat{\mathcal{M}}(X) = \frac{17}{3} - 4X . \quad (5.65)$$

Diese PC-Entwicklung und der zugehörige Fehler

$$\varepsilon(X) = 5X^2 - 5 \quad (5.66)$$

sind in Abbildung 5.9 (links) dargestellt. Anhand Abbildung 5.9 (rechts) ist zu erkennen, dass die Dichtefunktion $f_X(x)$ der Normalverteilung ausgehend vom Mittelwert bei $\mu_X = 0$ nach außen hin abfällt. Die abnehmende Wichtung wird in Abbildung 5.9 (links) deutlich. Es ist erkennbar, dass die Approximation im Bereich des Mittelwerts μ_X höhergewichtet wird als am Rand. Für den Fehler in Gleichung (5.66) gilt

$$\mathbb{E}[\varepsilon(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = 0 . \quad (5.67)$$

Beinhaltet die PC-Entwicklung in Gleichung (5.62) neben dem konstanten und linearen Polynom das quadratische HERMITE-Polynom $\Psi_2(X) = 1/\sqrt{2}(X^2 - 1)$ skaliert mit dem Koeffizienten $z_2 = 5\sqrt{2}$, resultiert eine exakte Darstellung der Zufallsvariablen Z .

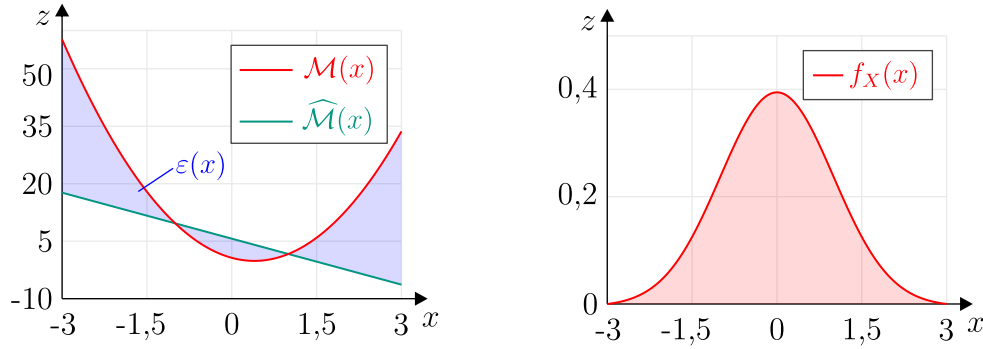


Abbildung 5.9: Funktionsapproximation (links) und Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(x)$ einer Standardnormalverteilung (rechts)

5.3.2 Polynomregression

Der folgende Abschnitt orientiert sich im Wesentlichen an SUDRET [111]. Wird die PC-Entwicklung gemäß Gleichung (5.29) nach einer finiten Anzahl an Basispolynomen abgebrochen, führt dies zu dem Residuum bzw. Fehler

$$\varepsilon(\mathbf{X}) = \mathcal{M}(\mathbf{X}) - \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) . \quad (5.68)$$

Ziel ist es, die $\bar{P} = P + 1$ PC-Koeffizienten in dem Vektor

$$\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_{\alpha}, \dots, z_P]^T \in \mathbb{R}^{\bar{P}} \quad (5.69)$$

so zu bestimmen, dass der Erwartungswert des quadratischen Fehlers $\varepsilon(\mathbf{X})$ minimal wird. Das zugehörige Minimierungsproblem lautet

$$\mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}} \mathbb{E} [\varepsilon(\mathbf{X})^2] = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] . \quad (5.70)$$

In Anhang A wird gezeigt, dass die Lösung des kontinuierlichen Minimierungsproblems in Gleichung (5.70) gerade Gleichung (5.39) entspricht. Der Erwartungswertoperator wird im Folgenden durch den MCS-Schätzer

$$\widehat{\mathbf{z}} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^2 \quad (5.71)$$

ersetzt. Hierfür werden N Realisierungen des Zufallsvektors $\mathbf{X}$, auch Datenpunkte genannt, generiert und in der Menge

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(k)}, k = 1, \dots, N\} \quad (5.72)$$

zusammengefasst. Die Lösung der diskreten Fehlerfunktion in Gleichung (5.71) wird über die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{\alpha=0}^P z_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) \right)^2 \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.73)$$

bestimmt und lautet

$$\mathbf{z} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T \mathbf{Z}. \quad (5.74)$$

Die Formel für den Schätzer in Gleichung (5.74) wird auch als *gewöhnlicher Kleinst-Quadrate-Schätzer* (engl.: *ordinary least square solution*, OLS) bezeichnet. Dabei beinhaltet die Matrix

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0(\mathbf{x}^{(1)}) & \cdots & \Psi_\alpha(\mathbf{x}^{(1)}) & \cdots & \Psi_P(\mathbf{x}^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\mathbf{x}^{(k)}) & \cdots & \Psi_\alpha(\mathbf{x}^{(k)}) & \cdots & \Psi_P(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(\mathbf{x}^{(N)}) & \cdots & \Psi_\alpha(\mathbf{x}^{(N)}) & \cdots & \Psi_P(\mathbf{x}^{(N)}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times \bar{P}} \quad (5.75)$$

die an den Stützstellen bzw. Datenpunkten $\mathbf{x}^{(k)}, k = 1, \dots, N$ ausgewerteten Basispolynome. Außerdem sind in dem Vektor

$$\mathbf{Z} = [z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, \dots, z^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^N, \quad z^{(k)} = \mathcal{M}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (5.76)$$

die N Ergebnisgrößen des Berechnungsmodells an den Datenpunkten zusammengefasst. Damit die Inverse $(\Psi^T \Psi)^{-1}$ in Gleichung (5.74) berechnet werden kann, ist es erforderlich, dass $N \geq P$ gilt.

Für die Datenpunkte der Menge $\mathcal{X}$ in Gleichung (5.72) werden zunächst gleichverteilte Zufallszahlen im Einheitswürfel $[0, 1]^M$ generiert. Die Transformation dieser Zufallsgrößen in die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Variablen $X_i, i = 1, \dots, M$ erfolgt mit der Inversionsmethode, siehe DEVROYE [29]. Die Generierung der Datenpunkte im Einheitswürfel kann entweder rein zufällig (engl.: *random sampling*) oder quasi-zufällig (engl.: *quasi-random sampling*) erfolgen. Letzteres hat den Vorteil, dass insbesondere bei mehrdimensionalen Problemstellungen ($M > 1$) der Raum gleichmäßiger ausgefüllt wird. Eine verbreitete Methode zur Generierung von Quasi-Zufallszahlen ist das *Latin-Hypercube-Stichprobenverfahren* (LHS), siehe MCKAY ET AL. [76]. Weitere Ansätze sind *Sobol'-Sequenzen* und *Halton-Sequenzen*, siehe SOBOL' [103] und HALTON [52].

Für eine ausreichend genaue Approximation glatter funktionaler Zusammenhänge genügen meistens wenige Terme einer PC-Entwicklung. Dies äußert sich darin, dass bei einer großen Anzahl an Basispolynomen viele PC-Koeffizienten nahezu null sind. Nachfolgend werden ausgewählte Regularisierungstechniken beschrieben, die sich im Rahmen linearer Regressionen etabliert haben. Ein Überblick der

Methoden findet sich beispielsweise in HASTIE ET AL. [54]. Grundsätzlich besteht der Gedanke darin, die Fehlerfunktion in Gleichung (5.70) um einen Strafterm zu erweitern. Bei der sogenannten *Ridge Regression*, siehe HOERL ET AL. [57], lautet die restringierte Optimierungsaufgabe

$$\mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^P} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] + \lambda \|\mathbf{z}\|_2^2. \quad (5.77)$$

Dabei wird die quadratische, euklidische Norm $\|\mathbf{z}\|_2^2$ des Koeffizientenvektors mit dem *Penalty-Parameter* $\lambda > 0$ bestraft. Der Wert von λ muss problemabhängig gewählt werden. Die Bestrafung führt im Allgemeinen zu einer glatteren PC-Entwicklung, wodurch ihre Tendenz zu *Overfitting* verringert wird. Eine weitere Möglichkeit der Regularisierung ist die sogenannte *Lasso-Regression* (engl.: *least absolute shrinkage and selection operator*, LASSO), die von TIBSHIRANI [117] eingeführt wurde. Die zugehörige Fehlerfunktion lautet

$$\mathbf{z} = \arg \min_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^P} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] + \lambda \|\mathbf{z}\|_1. \quad (5.78)$$

Diese Art des Strafterms hat eine spärliche PC-Entwicklung zu Folge, da die Koeffizienten nicht benötigter Polynome exakt zu null gesetzt werden. Eine weitere Variante ist die *schrittweise Regression*, siehe HASTIE ET AL. [53]. Die bereits beschriebenen Regularisierungstechniken wurden von Blatman & Sudret [21] und ABRAHAM ET AL. [1] für die Konstruktion spärlicher PC-Entwicklungen angewendet.

Im Jahr 2004 entwickelte EFRON ET AL. [32] die sogenannte *Least Angle Regression* (engl.: *least angle regression*, LAR). Dieses Verfahren bietet eine effiziente Lösung der in Gleichung (5.78) dargestellten Optimierungsaufgabe. Die *Least Angle Regression* wurde von Blatman & Sudret [22] für die Kalibrierung spärlicher PC-Entwicklungen eingesetzt. In der umfangreichen Software UQLAB [75] sind die genannten Verfahren zur nicht-intrusiven Anwendung der PCE implementiert.

5.4 Stochastische Approximation mit der polynomiellen Chaosentwicklung

Mit Hinblick auf die intrusive Anwendung der polynomiellen Chaosentwicklung ist es notwendig, die PC-Entwicklung von Zufallsgrößen genauer zu betrachten. Im Folgenden werden die Chaosentwicklungen der stetigen Zufallsvariablen aus Abschnitt 4.1.2 detailliert beschrieben.

Da die Zufallsgrößen im Allgemeinen nicht den Standardverteilungen in Abschnitt 4.1.2 entsprechen, ist die bereits angesprochene Transformation $\mathcal{T}$ erforderlich. Dies hat zur Folge, dass die PC-Entwicklung einer Zufallsvariablen

ebenfalls transformiert werden muss. Eine standardisierte Zufallsvariable U besitzt die PC-Entwicklung

$$U = \sum_{\alpha=0}^{\infty} u_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (5.79)$$

Die lineare Transformation von U mit den Parametern n für eine Skalierung und m für eine Translation führt auf die neue Variable bzw. PC-Entwicklung

$$X = m + n \cdot U = \sum_{\alpha=0}^{\infty} x_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (5.80)$$

Anhand der in Abschnitt 4.1.2 dargestellten Transformationen in den Gleichungen (4.15), (4.20), (4.26) und (4.34) können die Parameter m und n bestimmt werden. Für die PC-Koeffizienten x_{α} gilt

$$x_0 = m + n u_0 \quad \text{und} \quad x_{\alpha} = n u_{\alpha} , \quad \forall \alpha > 0 . \quad (5.81)$$

Es ist zu erkennen, dass die Translation mit dem Parameter m ausschließlich den ersten Koeffizienten betrifft, während die Skalierung mit n alle Terme beeinflusst. Dieser Sachverhalt wird im Abschnitt 5.5 im Rahmen intrusiver Rechenoperationen mit PC-Entwicklungen erläutert.

5.4.1 Approximation stetiger Zufallsvariablen

Für die Bestimmung der PC-Koeffizienten der standardisierten Zufallsvariablen U wird die in Abschnitt 5.3.1 beschriebene Orthogonalprojektion verwendet, wobei die Integrale hier analytisch gelöst werden können. Die für die Approximation verwendeten Polynome richten sich wie bereits erwähnt nach der Verteilung von U . Für alle Projektionen auf quadratische oder höherwertige Polynome gilt

$$\mathbb{E}[U \Psi_{\alpha}(U)] = 0 , \quad \forall \alpha > 1 . \quad (5.82)$$

Gleichverteilung

Für eine Standardgleichverteilung $U \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ bilden LEGENDRE-Polynome die zugehörige Basis. Die PC-Koeffizienten für das konstante und lineare Polynom lauten

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbb{E}[U L_0(U)] = \int_{D_U} u \frac{1}{2} du = 0 \quad \text{und} \\ u_1 &= \mathbb{E}[U L_1(U)] = \int_{D_U} u \frac{\sqrt{3}}{2} u du = \frac{1}{\sqrt{3}} . \end{aligned} \quad (5.83)$$

Alle restlichen Koeffizienten sind gleich null. Wird die Standardgleichverteilung von $[-1, 1]$ auf das Intervall $[a, b]$ transformiert, vgl. Gleichung (4.20), so werden die beiden PC-Koeffizienten wie folgt transformiert:

$$x_0 = \underbrace{\frac{a+b}{2}}_m + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_n u_0 = \frac{a+b}{2}, \quad x_1 = \frac{b-a}{2} u_1 = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (5.84)$$

Normalverteilung

Betrachtet wird eine Standardnormalverteilung $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$, die mit HERMITE-Polynomen dargestellt wird. Die Projektionen der Variablen U auf die ersten beiden Polynome lauten

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbb{E}[UH_0(U)] = \int_{D_U} u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 0 \quad \text{und} \\ u_1 &= \mathbb{E}[UH_1(U)] = \int_{D_U} u^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsbeziehung in Gleichung (4.15) lauten die PC-Koeffizienten einer normalverteilten Zufallsgröße mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$$x_0 = \underbrace{\mu}_m + \underbrace{\sigma}_n u_0 = \mu \quad \text{und} \quad x_1 = \sigma u_1 = \sigma. \quad (5.86)$$

Gammaverteilung

Mit den LAGUERRE-Polynomen wird die Standardgammaverteilung $U \sim \Gamma(s, 1, 0)$ approximiert. Die ersten beiden Polynome lauten

$$L_0^{(s)}(u) = 1 \quad \text{und} \quad L_1^{(s)}(u) = \frac{-u + s}{\sqrt{s}} \quad (5.87)$$

und sind orthonormal zu der Dichtefunktion in Gleichung (4.25). Die zugehörigen Koeffizienten werden folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbb{E}[UL_0^{(s)}(U)] = \int_{D_U} u L_0^{(s)}(u) \frac{u^{s-1} \exp(-u)}{\Gamma(s)} du = s \quad \text{und} \\ u_1 &= \mathbb{E}[UL_1^{(s)}(U)] = \int_{D_U} u L_1^{(s)}(u) \frac{u^{s-1} \exp(-u)}{\Gamma(s)} du = -\sqrt{s}. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Es ist zu erkennen, dass beide Koeffizienten von dem Formparameter s abhängen. Für die Approximation der verallgemeinerten Verteilung $X \sim \Gamma(s, t, r)$ lauten die Koeffizienten

$$x_0 = \underbrace{r}_m + \underbrace{t}_n u_0 = r + ts \quad \text{und} \quad x_1 = t u_1 = -t\sqrt{s}, \quad (5.89)$$

wobei die Parameter m und n anhand Gleichung (4.26) bestimmt werden. Weiterhin beschreiben t und r den Skalen- bzw. Lageparameter der Gammaverteilung.

Betaverteilung

JACOBI-Polynome werden für die Approximation von Betaverteilungen verwendet. Die Form der Standardbetaverteilung $U \sim \mathcal{B}(s, t, -1, 1)$ wird durch die beiden Parameter s und t beeinflusst. In Abhängigkeit dieser Größen lauten das konstante und das lineare JACOBI-Polynom

$$J_0^{(s,t)}(u) = 1 \quad \text{und} \quad J_1^{(s,t)}(u) = \frac{\sqrt{s+t+1}}{2\sqrt{st}}(u(s+t) - s + t). \quad (5.90)$$

Eine Orthogonalprojektion der Variablen U führt auf die zugehörigen Koeffizienten

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbb{E} [U J_0^{(s,t)}(U)] = \int_{D_U} u \frac{(u+1)^{s-1}(1-u)^{t-1}}{B(s,t)2^{s+t-1}} du = \frac{s-t}{s+t} \quad \text{und} \\ u_1 &= \mathbb{E} [U J_1^{(s,t)}(U)] = \int_{D_U} u J_1^{(s,t)}(u) \frac{(u+1)^{s-1}(1-u)^{t-1}}{B(s,t)2^{s+t-1}} du \\ &= \frac{2\sqrt{st}}{\sqrt{s+t+1}(s+t)}, \end{aligned} \quad (5.91)$$

die abhängig von den beiden Formparametern s und t sind. Für die Approximation der Verteilung $X \sim \mathcal{B}(s, t, a, b)$ werden die transformierten Koeffizienten

$$\begin{aligned} x_0 &= \underbrace{\frac{a+b}{2}}_m + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_n u_0 = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)(s-t)}{2(s+t)} = \frac{at+bs}{s+t} \quad \text{und} \\ x_1 &= \frac{b-a}{2} u_1 = \frac{(b-a)\sqrt{st}}{\sqrt{s+t+1}(s+t)} \end{aligned} \quad (5.92)$$

benötigt, wobei die Parameter m und n aus Gleichung (4.34) bestimmt werden. In Tabelle 5.6 sind zusammenfassend nochmal die Koeffizienten und die zugehörigen Basispolynome für die vier stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt.

5.4.2 Approximation räumlich korrelierte Zufallsfelder

Für die Modellierung räumlicher Variabilität werden Zufallsfelder verwendet, siehe Abschnitt 4.1.4. Werden diese im Rahmen einer intrusiven Anwendung der PCE verwendet, so ist eine explizite Darstellung des Zufallsfeldes mittels der polynomiellen Chaosentwicklung erforderlich.

Verteilung	Basispolynome $\Psi(x)$	x_0	x_1
Uniform $\mathcal{U}(a, b)$	LEGENDRE $L(u)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	HERMITE $H(u)$	μ	σ
Gamma $\Gamma(s, t, r)$	LAGUERRE $L^{(s)}(u)$	$r + ts$	$-t\sqrt{s}$
Beta $\mathcal{B}(s, t, a, b)$	JACOBI $J^{(s,t)}(u)$	$\frac{at+bs}{s+t}$	$\frac{(b-a)\sqrt{st}}{\sqrt{s+t+1}(s+t)}$

Tabelle 5.6: Zusammenstellung der PC-Koeffizienten x_0 und x_1 für die exakte Darstellung einer stochastischen Variablen $X = x_0\Psi_0 + x_1\Psi_1$

Es sei $\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) \sim \mathcal{N}(\mu_H, \sigma_H)$ ein GAUSS'sches Zufallsfeld, welches wie folgt mit der Karhunen-Loève-Entwicklung diskretisiert wird:

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) = \mu_H + \sum_{i=1}^K \xi_i(\omega) \sqrt{\lambda_i} \varphi_i(\mathbf{x}) . \quad (5.93)$$

Mit der PCE lässt sich das räumlich korrelierte Feld $\hat{H}(\mathbf{x}, \omega)$ angeben mit

$$\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{\alpha=0}^K h_{\alpha}(\mathbf{x}) \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) , \quad (5.94)$$

wobei im Vektor $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_K]^T \in \mathbb{R}^K$ alle standardnormalverteilten Zufallsvariablen ξ_i zusammengefasst sind. Für die Darstellung des GAUSS'schen Zufallsfeldes mit der PCE werden HERMITE-Polynome verwendet. Die räumliche Variabilität des Zufallsfeldes führt dazu, dass die PC-Koeffizienten $h_{\alpha}(\mathbf{x})$ in Gleichung (5.94) ebenfalls vom Ort $\mathbf{x}$ abhängig sind. Mit der Orthogonalprojektion werden die Koeffizienten $h_{\alpha}(\mathbf{x})$ bestimmt. Für den ersten PC-Koeffizienten gilt

$$h_0(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) \Psi_0(\boldsymbol{\xi}) \right] = \int_{D_{\Xi}} \hat{H}(\mathbf{x}, \omega) \underbrace{\Psi_0(\boldsymbol{\xi})}_{=1} f_{\Xi}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \mu_H . \quad (5.95)$$

Die jeweiligen Projektionen des Zufallsfeldes auf die insgesamt K linearen HERMITE-Polynome mit $\Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_{\alpha}, \alpha \in \{1, \dots, K\}$ führen auf

$$h_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left[\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) \Psi_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \right] = \int_{D_{\Xi}} \hat{H}(\mathbf{x}, \omega) H_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}) f_{\Xi}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \sqrt{\lambda_{\alpha}} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) . \quad (5.96)$$

Da die K Zufallsgrößen $\xi_i, i = 1, \dots, K$ in der KLE in Gleichung (5.93) linear auftreten, lässt sich das Zufallsfeld mit einer linearen Polynombasis exakt darstellen. Somit sind die Projektionen auf alle höherwertigen Basispolynome gleich null, vgl. Abschnitt 5.4.1.

5.4.3 Approximation polymorph unscharfer Variablen

Im Rahmen dieser Arbeit werden neben Zufallsvariablen auch polymorph unscharfe Parameter berücksichtigt. Für die Approximation solcher Größen mit der PCE wird der von SCHÖBI [94] vorgestellte Ansatz einer erweiterten PC-Entwicklung aufgegriffen. Das in Abschnitt 4.3 eingeführte polymorphe Unschärfemodell erlaubt eine klare Trennung aleatorischer und epistemischer Unschärfe. Diese Tatsache ermöglicht eine künstliche Erweiterung des Eingangsvektors $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$, welcher in dem folgenden Abschnitt mindestens eine polymorph unscharfe Variable gemäß Abschnitt 4.3 beinhaltet. Hierfür wird die erweiterte Transformation

$$\mathbf{X} = \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{C}) = \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{U}, \mathbf{s}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} = (\mathbf{U}, \mathbf{s}) = \bar{\mathcal{T}}^{-1}(\mathbf{X}) \quad (5.97)$$

eingeführt. Dabei setzt sich der erweiterte Eingangsvektor $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(M+N)}$ aus den zwei Vektoren $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^M$ und $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$ zusammen. Ersteres beinhaltet, wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, die M standardisierten Zufallsvariablen bzw. aleatorische Eingangsgrößen. Die N epistemischen Variablen sind in dem Vektor $\mathbf{s}$ enthalten. Die erweiterte Transformation in Gleichung (5.97) wird anhand einer Intervallwahrscheinlichkeitsbasierten Normalverteilung veranschaulicht. Für die Variable

$$X \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \mathcal{N}([\underline{\mu}, \bar{\mu}], [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]) \quad (5.98)$$

werden sowohl der Mittelwert als auch die Standardabweichung als Intervallvariablen modelliert. Die zuvor genannte erweiterte Transformation $\bar{\mathcal{T}}$ lautet

$$X = \bar{\mathcal{T}}(U, \mathbf{s}) = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot U \quad \text{mit} \quad U \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{und} \quad \mathbf{s} = [\hat{\mu}, \hat{\sigma}]^T. \quad (5.99)$$

Alle Variablen werden in $\mathbf{C} = [U, \hat{\mu}, \hat{\sigma}]^T$ zusammengefasst. Auf Basis des erweiterten Eingangsvektors $\mathbf{C}$ wird nun die erweiterte PC-Entwicklung $\sum_{\alpha} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{C})$ konstruiert.

Die künstliche Erweiterung führt im Allgemeinen dazu, dass der Eingangsvektor $\mathbf{C}$ mehr Variablen enthält als der ursprüngliche Vektor $\mathbf{X}$. Anhand Gleichung (5.36) wird deutlich, dass somit die Anzahl an erforderlichen Basispolynomen zunimmt. Dafür bietet diese PC-Entwicklung den Vorteil, dass unscharfe stochastische Momente aber auch unscharfe SOBOL'-Indizes effizient berechnet werden können, siehe Abschnitt 5.7.

Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierte Normalverteilung

Im Folgenden wird die erweiterte PC-Entwicklung der Intervall-wahrscheinlichkeitsbasierten Normalverteilung

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \hat{\sigma}), \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma} \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}] \quad (5.100)$$

gezeigt, bei der die Standardabweichung $\hat{\sigma}$ als Intervall-Variable modelliert wird. Die erweiterte Transformation $\bar{\mathcal{T}}$ lautet $X = \mu + \hat{\sigma} \cdot U$. Für die Approximation der Variablen $\hat{\sigma} \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}]$ mit LEGENDRE-Polynomen ist es notwendig, $\hat{\sigma}$ in Abhängigkeit der Variablen $s \in [-1, 1]$ darzustellen:

$$X = \mu + \underbrace{\left(\frac{\underline{\sigma} + \bar{\sigma}}{2} + \frac{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}{2} \cdot s \right)}_{\hat{\sigma}} U, \quad U \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad s \in [-1, 1]. \quad (5.101)$$

Die normalverteilte Zufallsgröße U wird mit HERMITE-Polynomen approximiert. Alle Variablen werden in $\mathbf{C} = [U, s]^T$ zusammengefasst. Über das Produkt der eindimensionalen Basispolynome

$$\psi_0^{(1)}(u) = 1, \quad \psi_1^{(1)}(u) = u, \quad \psi_0^{(2)}(s) = 1 \quad \text{und} \quad \psi_1^{(2)}(s) = \sqrt{3}s \quad (5.102)$$

wird die für die PC-Entwicklung benötigte zweidimensionale, lineare Polynombasis konstruiert, siehe Tabelle 5.7.

$\alpha \in \{0, \dots, 3\}$	$\alpha \in \mathcal{A}$	$\Psi_\alpha(\mathbf{C}) = \psi_{\alpha_1}^{(1)}(U) \cdot \psi_{\alpha_2}^{(2)}(s) = \Psi_\alpha$
0	(0, 0)	1
1	(1, 0)	u
2	(0, 1)	$\sqrt{3}s$
3	(1, 1)	$\sqrt{3}su$

Tabelle 5.7: Zweidimensionale Polynombasis für die Approximation der Intervallwahrscheinlichkeitsbasierten Normalverteilung

Die Koeffizienten der PC-Entwicklung $\sum_\alpha x_\alpha \Psi_\alpha$ folgen aus der Orthogonalprojektion

$$x_\alpha = \mathbb{E}[X \Psi_\alpha(U, s)] = \int_{D_U} \int_{D_s} X \Psi_\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \right) ds du \quad (5.103)$$

und lauten

$$x_0 = \mu, \quad x_1 = \frac{\underline{\sigma} + \bar{\sigma}}{2}, \quad x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}}{2\sqrt{3}}. \quad (5.104)$$

Für die restlichen Koeffizienten gilt $x_\alpha = 0$, $\forall \alpha > 3$. Diese erweiterte PC-Entwicklung ist eine exakte Darstellung der Intervallwahrscheinlichkeitsbasierten Normalverteilung in Gleichung (5.100). Auf Basis dieser PC-Entwicklung können die intervallwertigen stochastischen Momente der polymorph unscharfen Variablen X bestimmt werden. Ein anschauliches Beispiel dazu wird in Abschnitt 5.7 gezeigt.

5.5 Rechenoperationen mit Chaosentwicklungen

Im Rahmen der intrusiven Anwendung sind verschiedene Rechenoperationen wie z.B. Addition und Multiplikation von PC-Entwicklungen erforderlich. Die Approximation einer Zufallsvariablen mit der PCE wird in dieser Arbeit auch als PC-Variable bezeichnet. Eine ausführliche Diskussion zu den Rechenoperationen im Rahmen der PCE findet sich in DEBUSSCHERE ET AL. [27] und LE MAÎTRE ET AL. [71].

Gegeben sind die zwei Zufallsvariablen B und C mit ihren zugehörigen PC-Approximationen, die mit $\hat{B}$ bzw. $\hat{C}$ eingeführt werden:

$$B \approx \sum_{\alpha=0}^P b_{\alpha} \Psi_{\alpha} =: \hat{B} \quad \text{und} \quad C \approx \sum_{\alpha=0}^P c_{\alpha} \Psi_{\alpha} =: \hat{C} . \quad (5.105)$$

Dabei wird angenommen, dass die Koeffizienten b_{α} und c_{α} bekannt sind. Die Funktion $A = \mathcal{P}(B, C)$ bildet die beiden Zufallsvariablen in Gleichung (5.105) auf die neue Zufallsgröße A ab. Diese wird ebenfalls als PC-Entwicklung

$$A \approx \sum_{\alpha=0}^P a_{\alpha} \Psi_{\alpha} =: \hat{A} \quad (5.106)$$

dargestellt, wobei die Koeffizienten a_{α} noch zu bestimmen sind.

In den folgenden Abschnitten entspricht die Funktion $\mathcal{P}$ den Grundrechenoperationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Schließlich wird die Berechnung der Quadratwurzel einer PC-Entwicklung beschrieben.

5.5.1 Addition und Subtraktion

Die Addition bzw. Subtraktion zweier PC-Variablen lautet

$$\hat{A} = \hat{B} \pm \hat{C} . \quad (5.107)$$

Unter Berücksichtigung der vorher eingeführten PC-Approximationen folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha} &= \sum_{\alpha} b_{\alpha} \Psi_{\alpha} \pm \sum_{\alpha} c_{\alpha} \Psi_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} (b_{\alpha} \pm c_{\alpha}) \Psi_{\alpha} . \end{aligned} \quad (5.108)$$

Für die Koeffizienten a_{α} gilt

$$a_{\alpha} = b_{\alpha} \pm c_{\alpha} , \quad \forall \alpha \in \{0, \dots, P\} . \quad (5.109)$$

In Vektor-Matrix-Notation lautet Gleichung (5.109)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} \pm \mathbf{c}, \quad (5.110)$$

wobei die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ die jeweiligen PC-Koeffizienten beinhalten. Ein Sonderfall der Gleichung (5.107) ist die Addition bzw. Subtraktion einer Konstanten f :

$$\hat{A} = \hat{B} \pm f. \quad (5.111)$$

In diesem Fall gilt für die Koeffizienten von $\hat{A}$

$$a_\alpha = b_\alpha \pm \delta_{\alpha 0} \cdot f, \quad \forall \alpha \in \{0, \dots, P\}, \quad (5.112)$$

wobei $\delta_{\alpha 0}$ das KRONECKER-Delta ist mit

$$\delta_{\alpha 0} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = 0 \\ 0, & \text{falls } \alpha \neq 0 \end{cases}. \quad (5.113)$$

In Vektor-Matrix-Notation lautet Gleichung (5.112)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \pm \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{b} \pm \mathbf{f}. \quad (5.114)$$

5.5.2 Multiplikation

Die Multiplikation zweier PC-Variablen lautet

$$\hat{A} = \hat{B} \cdot \hat{C} \Leftrightarrow \sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha} = \left(\sum_{\alpha} b_{\alpha} \Psi_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta} c_{\beta} \Psi_{\beta} \right). \quad (5.115)$$

Die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_{α} erfolgt mit der Orthogonalprojektion. Hierfür wird Gleichung (5.115) zunächst mit dem Polynom Ψ_{γ} multipliziert und anschließend wird auf beiden Seiten der Erwartungswert gebildet:

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{\alpha} a_{\alpha} \Psi_{\alpha} \right) \Psi_{\gamma} \right] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\alpha} b_{\alpha} \Psi_{\alpha} \right) \left(\sum_{\beta} c_{\beta} \Psi_{\beta} \right) \Psi_{\gamma} \right]. \quad (5.116)$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft der Polynombasis vereinfacht sich Gleichung (5.116) zu

$$a_{\gamma} \mathbb{E} [\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mathbb{E} [\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}] b_{\alpha} c_{\beta}, \quad (5.117)$$

welche schließlich auf die folgende Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten a_γ führt:

$$a_\gamma = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}]}{\mathbb{E}[\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}]} b_{\alpha} c_{\beta} , \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\} . \quad (5.118)$$

Der Erwartungswert des Dreifachprodukts der Polynome in Gleichung (5.118) wird im Rahmen der Arbeit als *Multiplikationstensor* bezeichnet. Für den Tensor 3. Stufe wird die folgende Kurzschreibweise eingeführt:

$$D_{\alpha\beta\gamma} := \frac{\mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}]}{\mathbb{E}[\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}]} = \mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}] , \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \{0, \dots, P\}^3 . \quad (5.119)$$

Aufgrund der Normierung der Basispolynome, siehe Gleichung (5.9), gilt für den Nenner $\mathbb{E}[\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}] = 1$. Da die Reihenfolge der Polynome in Gleichung (5.119) beliebig ist, besitzt der Multiplikationstensor die folgenden Symmetrien:

$$D_{\alpha\beta\gamma} = D_{\alpha\gamma\beta} = D_{\beta\alpha\gamma} = D_{\beta\gamma\alpha} = D_{\gamma\alpha\beta} = D_{\gamma\beta\alpha} . \quad (5.120)$$

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft $\mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}] = \delta_{\alpha\beta}$ sind viele Einträge des Tensors gleich null. Weiterhin ist zu erkennen, dass $D_{\alpha\beta\gamma}$ ausschließlich von der verwendeten Polynombasis abhängig ist. Mit Hinblick auf die Implementierung erweisen sich diese Eigenschaften als sehr vorteilhaft. Die Berechnungsvorschrift für die Koeffizienten der PC-Variablen $\hat{A}$ lautet

$$a_\gamma = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta\gamma} b_{\alpha} c_{\beta} = D_{\alpha\beta\gamma} b_{\alpha} c_{\beta} , \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\} , \quad (5.121)$$

wobei der Übersicht wegen die EINSTEIN'sche Summenkonvention verwendet wird. Die Summation erfolgt dabei über alle $\bar{P}$ PC-Koeffizienten, also von 0 bis P . In Vektor-Matrix-Notation lautet Gleichung (5.121)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \sum_{\alpha} D_{\alpha 00} b_{\alpha} & \dots & \sum_{\alpha} D_{\alpha 0 P} b_{\alpha} \\ \vdots & \sum_{\alpha} D_{\alpha \beta \gamma} b_{\alpha} & \vdots \\ \sum_{\alpha} D_{\alpha P 0} b_{\alpha} & \dots & \sum_{\alpha} D_{\alpha P P} b_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_P \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} D_{\alpha 00} b_{\alpha} & \dots & D_{\alpha 0 P} b_{\alpha} \\ \vdots & D_{\alpha \beta \gamma} b_{\alpha} & \vdots \\ \text{sym.} & \dots & D_{\alpha P P} b_{\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{c} , \quad (5.123)$$

mit den Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ und der Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$. Die Symmetrieeigenschaften des Multiplikationstensors, siehe Gleichung (5.120), übertragen sich ebenfalls

auf die Matrix $\mathbf{B}$. In Anhang B Tafel B.1 ist ein Ablaufplan zur effizienten Implementierung der Multiplikation dargestellt.

Für die Multiplikation von mehr als zwei PC-Variablen wird im Rahmen dieser Arbeit der sogenannte *pseudo-spektrale* Ansatz verwendet, siehe DEBUSSCHERE ET AL. [27]. Dabei wird die Berechnung des Produkts mehrerer PC-Entwicklungen stets auf die Multiplikation von zwei PC-Variablen reduziert, indem Gleichung (5.121) wiederholt angewendet wird. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass unabhängig davon, wieviele Faktoren miteinander multipliziert werden, nur ein Tensor 3. Stufe berechnet werden muss. Ein Nachteil hingegen ist, dass aufgrund der wiederholten Orthogonalprojektion zusätzliche Fehler entstehen. Wird die Polynombasis jedoch zu Beginn groß genug gewählt, so sind die Fehler in der Regel vernachlässigbar klein.

Wird die PC-Entwicklung $\hat{C}$ in Gleichung (5.115) durch eine Konstante f ausgetauscht, so lautet die Multiplikation

$$\hat{A} = \hat{B} \cdot f . \quad (5.124)$$

Damit lässt sich die Berechnung in Gleichung (5.118) vereinfachen zu

$$a_\gamma = \sum_\alpha \sum_\beta D_{\alpha\beta\gamma} b_\alpha \delta_{\beta 0} f = D_{\alpha 0 \gamma} b_\alpha f = D_{0\alpha\gamma} b_\alpha f . \quad (5.125)$$

Die Orthonormalitätseigenschaft der Polynome hat zur Folge, dass sich $D_{0\alpha\gamma}$ vereinfachen lässt:

$$D_{0\alpha\gamma} = \mathbb{E} \left[\underbrace{\Psi_0}_{=1} \Psi_\alpha \Psi_\gamma \right] = \mathbb{E} [\Psi_\alpha \Psi_\gamma] = \delta_{\alpha\gamma} . \quad (5.126)$$

Damit lautet Gleichung (5.125) wie folgt:

$$a_\gamma = \delta_{\alpha\gamma} b_\alpha f = b_\gamma f , \quad \forall \alpha, \gamma \in \{0, \dots, P\} . \quad (5.127)$$

Anhand Gleichung (5.127) ist zu erkennen, dass bei der Multiplikation einer PC-Variablen mit einem konstanten Faktor jeder PC-Koeffizient gleichermaßen skaliert wird.

5.5.3 Division

Für die Division zweier PC-Variablen wird diese zunächst in eine Multiplikation überführt:

$$\hat{A} = \hat{C} / \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B} \cdot \hat{A} = \hat{C} . \quad (5.128)$$

Anschließend werden die PC-Entwicklungen aller Größen eingesetzt:

$$\left(\sum_\alpha b_\alpha \Psi_\alpha \right) \left(\sum_\beta a_\beta \Psi_\beta \right) = \sum_\alpha c_\alpha \Psi_\alpha . \quad (5.129)$$

Die Koeffizienten von b_α und c_α sind bereits bekannt, während die Faktoren a_β noch bestimmt werden müssen. Durch die Multiplikation mit Ψ_γ und Anwendung des Erwartungswertoperators wird Gleichung (5.129) umgeformt zu

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}] b_{\alpha} a_{\beta} &= c_{\gamma} \mathbb{E}[\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}] \\ \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta} \Psi_{\gamma}]}{[\Psi_{\gamma} \Psi_{\gamma}]} b_{\alpha} a_{\beta} &= c_{\gamma}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\}. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Gleichung (5.130) entspricht einem linearen Gleichungssystem (LGS) für die unbekannten Koeffizienten a_β und lautet in Vektor-Matrix-Notation

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D_{\alpha 00} b_{\alpha} & \dots & D_{\alpha 0P} b_{\alpha} \\ \vdots & D_{\alpha \beta \gamma} b_{\alpha} & \vdots \\ \text{sym.} & \dots & D_{\alpha PP} b_{\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}}, \quad (5.131)$$

wobei die Matrix und die Vektoren analog zu dem vorherigen Abschnitt definiert sind. Die Lösung des LGS führt auf die gesuchten Koeffizienten:

$$\mathbf{B} \mathbf{a} = \mathbf{c} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{c}. \quad (5.132)$$

Tafel B.2 in Anhang B zeigt einen Ablaufplan zur effizienten Implementierung der Division. Ein Sonderfall der Rechenoperation in Gleichung (5.128) ist die Division einer Konstanten f durch eine PC-Entwicklung:

$$\hat{A} = f / \hat{B} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{B} \cdot \hat{A} = f. \quad (5.133)$$

Dies führt dazu, dass die rechte Seite $\mathbf{c}$ in Gleichung (5.131) dem Vektor $\mathbf{f}$ in Gleichung (5.114) entspricht.

Wird in Gleichung (5.128) die PC-Variable $\hat{B}$ durch die Konstante f ersetzt, lautet die Rechenoperation

$$\hat{A} = \hat{C} / f \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = \frac{1}{f} \cdot \hat{C}. \quad (5.134)$$

Dies entspricht gerade wieder einer Multiplikation mit einem konstanten Faktor $1/f$. Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, führt dies dazu, dass jeder PC-Koeffizient gleichermaßen skaliert wird.

5.5.4 Quadratwurzel

Eine weitere Rechenoperation ist die Bestimmung der Quadratwurzel einer PC-Variablen:

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A}^2 = \hat{B}. \quad (5.135)$$

Die Orthogonalprojektion der Gleichung (5.135) führt auf mehrere nichtlineare Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten a_α :

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} a_{\beta} = D_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} a_{\beta} = b_{\gamma} , \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\} . \quad (5.136)$$

Gleichung (5.136) wird zunächst als Residuum formuliert:

$$g_{\gamma} = D_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} a_{\beta} - b_{\gamma} = 0 . \quad (5.137)$$

Für die Lösung der Gleichung (5.137) mit dem NEWTON-Verfahren wird die Linearisierung

$$L[g_{\gamma}] = g_{\gamma} + \underbrace{\frac{\partial g_{\gamma}}{\partial a_{\mu}}}_{K_{\gamma\mu}} \Delta a_{\mu} = 0 \quad (5.138)$$

benötigt. Die partielle Ableitung des Residuums nach den gesuchten Koeffizienten führt auf die Tangente

$$K_{\gamma\mu} = \frac{\partial}{\partial a_{\mu}} (D_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} a_{\beta} - b_{\gamma}) = 2D_{\alpha\gamma\mu} a_{\mu} . \quad (5.139)$$

In Vektor-Matrix-Notation lautet Gleichung (5.138)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2D_{\alpha 00} a_{\alpha} & \dots & 2D_{\alpha 0P} a_{\alpha} \\ \vdots & 2D_{\alpha\gamma\mu} a_{\alpha} & \vdots \\ \text{sym.} & \dots & 2D_{\alpha PP} a_{\alpha} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta a_0 \\ \vdots \\ \Delta a_P \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{a}} = \mathbf{0} , \quad \Delta \mathbf{a} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{g} . \quad (5.140)$$

Dabei sind $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ der Residualvektor, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$ die Tangentenmatrix und $\Delta \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ das Inkrement der unbekannten PC-Koeffizienten. In Tafel 5.1 ist der Ablauf der lokalen NEWTON-Iteration dargestellt.

$i = 0 , \quad \mathbf{a}^{(0)} = [\sqrt{b_0}, \dots, 0, \dots, 0]^T$	▷ Startwerte
$\mathbf{g}(\mathbf{a}^{(0)})$	
while $ \mathbf{g}(\mathbf{a}^{(i)}) > TOL$ do	▷ NEWTON-Iteration
$\mathbf{K}(\mathbf{a}^{(i)}) \Delta \mathbf{a}^{(i)} = -\mathbf{g}(\mathbf{a}^{(i)})$	▷ Inkrement der PC-Koeffizienten
$\mathbf{a}^{(i+1)} = \mathbf{a}^{(i)} + \Delta \mathbf{a}^{(i)}$	▷ Update der PC-Koeffizienten
$i \leftarrow i + 1$	
end while	
$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(i)}$	▷ PC-Koeffizienten der Quadratwurzel

Tafel 5.1: NEWTON-Iteration für die Berechnung der Quadratwurzel einer PC-Entwicklung

5.5.5 Berechnung des Multiplikationstensors

Für die Multiplikation und Division von PC-Variablen wird der Multiplikationstensor, siehe Gleichung (5.119), benötigt. Im Folgenden werden analytische Berechnungsvorschriften gezeigt, mit denen der Tensor $D_{\alpha\beta\gamma}$ für LEGENDRE- und HERMITE-Polynome bestimmt werden kann. Für LAGUERRE- und JACOBI-Polynome existieren jedoch keine geschlossen analytische Lösungen. Aus diesem Grund wird zusätzlich eine numerisch effiziente Methode beschrieben, die auf der Dreitermrekursion in Gleichung (5.19) basiert und für beliebige Basispolynome anwendbar ist.

Wie bereits in Abschnitt 5.1.3 angedeutet, kann es je nach Kontext zweckmäßig sein, die Polynome entweder mit einem linearen Index α oder mit einem Multiindex $\boldsymbol{\alpha}$ zu bezeichnen. Für den Multiplikationstensor gilt

$$D_{\alpha\beta\gamma} = D_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} = \mathbb{E}[\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{\boldsymbol{\gamma}}] \quad , \quad (5.141)$$

wobei die drei Multiindizes $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{N}^M$ definiert sind mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_0, \dots, \alpha_i = j, \dots, \alpha_M) \quad , \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_i = k, \dots, \beta_M) \quad \text{und} \\ \boldsymbol{\gamma} &= (\gamma_0, \dots, \gamma_i = \ell, \dots, \gamma_M) \quad . \end{aligned} \quad (5.142)$$

Wie bereits in vorherigen Abschnitten erläutert, werden im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich stochastisch unabhängige Variablen $X_i, i = 1, \dots, M$ betrachtet. Dies hat zur Folge, dass für den Multiplikationstensor einer mehrdimensionalen Polynombasis folgende Umformungen gültig sind:

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}} &= \mathbb{E}[\Psi_{\boldsymbol{\alpha}}\Psi_{\boldsymbol{\beta}}\Psi_{\boldsymbol{\gamma}}] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^M \psi_{\alpha_i}^{(i)} \psi_{\beta_i}^{(i)} \psi_{\gamma_i}^{(i)}\right] = \prod_{i=1}^M \mathbb{E}\left[\psi_{\alpha_i}^{(i)} \psi_{\beta_i}^{(i)} \psi_{\gamma_i}^{(i)}\right] \\ &= \prod_{i=1}^M \mathbb{E}\left[\psi_j^{(i)} \psi_k^{(i)} \psi_{\ell}^{(i)}\right] = \prod_{i=1}^M D_{j k \ell}^{(i)} \quad . \end{aligned} \quad (5.143)$$

Wird der Erwartungswertoperator in Gleichung (5.143) als Integral geschrieben, folgt die Darstellung

$$D_{j k \ell}^{(i)} = \mathbb{E}\left[\psi_j^{(i)} \psi_k^{(i)} \psi_{\ell}^{(i)}\right] = \int_{D_{X_i}} \psi_j^{(i)}(x) \psi_k^{(i)}(x) \psi_{\ell}^{(i)}(x) f_{X_i}(x) dx \quad . \quad (5.144)$$

Die Polynome für den Tensor $D_{j k \ell}^{(i)}$ richten sich nach der jeweiligen Randverteilung der Eingangsvariablen X_i .

Im Falle von HERMITE-Polynomen können analytische Lösungen für das Integral in Gleichung (5.144) angegeben werden, siehe FIELD & GRIGORIU [35] und

SUDRET ET AL. [112]:

$$D_{jkl}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{j!k!\ell!}}{(n-j)!(n-k)!(n-\ell)!} , & j+k+\ell = 2n \\ 0 , & \text{sonst} . \end{cases} \quad j, k, \ell \leq n , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.145)$$

In ADAMS [3] ist eine geschlossene Lösung des Multiplikationstensors für LEGENDRE-Polynome gegeben:

$$D_{jkl}^{(i)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{(2j+1)(2k+1)(2\ell+1)}}{(2k+1)} \\ \cdot \frac{n!^2(2n-2j)!(2n-2k)!(2n-2\ell)!}{(2n)!(n-i)!^2(n-j)!^2(n-\ell)!^2} , & j+k+\ell = 2n \\ 0 , & \text{sonst} . \end{cases} \quad j, k, \ell \leq n , \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (5.146)$$

Die Darstellungen in den Gleichungen (5.145) und (5.146) sind auch in MUGLER [79] zu finden. Für LAGUERRE- und JACOBI-Polynome können solche analytischen Lösungen nicht mehr bestimmt werden.

Das Integral in Gleichung (5.144) kann alternativ auch numerisch mittels GAUSS-Quadratur, siehe Abschnitt 5.3.1, gelöst werden:

$$\begin{aligned} D_{jkl}^{(i)} &= \int_{D_{X_i}} \psi_j^{(i)}(x) \psi_k^{(i)}(x) \psi_\ell^{(i)}(x) f_{X_i}(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^L \psi_j^{(i)}(x^{(n)}) \psi_k^{(i)}(x^{(n)}) \psi_\ell^{(i)}(x^{(n)}) w^{(n)} . \end{aligned} \quad (5.147)$$

Da der Integrand in Gleichung (5.147) polynomieller Natur ist, liefert die numerische Integration das exakte Ergebnis, vorausgesetzt, dass ausreichend Auswertungspunkte verwendet werden. Dieser Ansatz wird im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Eine weitere effiziente Möglichkeit für die Bestimmung des Multiplikationstensors $D_{jkl}^{(i)}$ basiert auf der Dreitermrekursion in Gleichung (5.19) und ist in Anlehnung an ALHAIDARI [5] beschrieben. Die Rekursionsformel in Gleichung (5.19) wird zunächst umgeschrieben zu

$$x \psi_k = a_k \psi_k + \sqrt{b_k} \psi_{k-1} + \sqrt{b_{k+1}} \psi_{k+1} , \quad k \in \mathbb{N}_0 . \quad (5.148)$$

Der Index $(\bullet)^{(i)}$, der die Abhängigkeit der eindimensionalen Polynome ψ von der Zufallsvariablen X_i bezeichnet, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit fallengelassen. Weiterhin können die Einträge der in Gleichung (5.42) eingeführten symmetrischen Tridiagonalmatrix $\mathbf{J}_\infty$ in Indexnotation formuliert werden:

$$J_{k+1,\ell+1} = a_k \delta_{k\ell} + \sqrt{b_k} \delta_{k,\ell+1} + \sqrt{b_{k+1}} \delta_{k+1,\ell} , \quad k, \ell \in \mathbb{N}_0 . \quad (5.149)$$

Dabei bezeichnet $\delta_{k,\ell+1}$ das KRONECKER-Delta, welches für den Fall $k = \ell + 1$ den Wert eins annimmt. Damit wird Gleichung (5.148) kompakt geschrieben als

$$x \psi_k = \sum_{\ell=0}^{\infty} J_{k+1,\ell+1} \psi_{\ell} = \sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} \psi_{\ell} , \quad (5.150)$$

wobei die Summe aufgrund der Tridiagonalstruktur der Matrix $\mathbf{J}_{\infty}$ nur drei Terme beinhaltet. Wird Gleichung (5.150) mit dem Polynom ψ_m multipliziert und anschließend der Erwartungswert gebildet, so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x \psi_k \psi_m] &= \mathbb{E}\left[\sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} \psi_{\ell} \psi_m\right] = \sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} \mathbb{E}[\psi_{\ell} \psi_m] \\ &= \sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} \delta_{\ell m} = J_{k+1,m+1} , \end{aligned} \quad (5.151)$$

wobei die Orthonormalitätseigenschaft der Polynome genutzt wird. Wird das Monom x in Gleichung (5.150) durch x^2 ersetzt, kann der Ausdruck $x^2 \psi_k$ unter Berücksichtigung von Gleichung (5.150) wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} x^2 \psi_k &= x(x \psi_k) = x\left(\sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} \psi_{\ell}\right) = \sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} (x \psi_{\ell}) \\ &= \sum_m \sum_{\ell} J_{k+1,\ell+1} J_{\ell+1,m+1} \psi_m = \sum_m [\mathbf{J}_{\infty} \mathbf{J}_{\infty}]_{k+1,m+1} \psi_m \\ &= \sum_m [\mathbf{J}_{\infty}^2]_{k+1,m+1} \psi_m . \end{aligned} \quad (5.152)$$

Ausgehend von Gleichung (5.152) kann gezeigt werden, dass für ein allgemeines Monom der Form x^p mit $p \geq 0$ folgendes gilt:

$$x^p \psi_k = \sum_{\ell} [\mathbf{J}_{\infty}^p]_{k+1,\ell+1} \psi_{\ell} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[x^p \psi_k \psi_m] = [\mathbf{J}_{\infty}^p]_{k+1,m+1} . \quad (5.153)$$

Dabei bezeichnet der Ausdruck $\mathbf{J}_{\infty}^p$ eine Matrixpotenz mit

$$\mathbf{J}_{\infty}^p = \prod_{i=1}^p \mathbf{J}_{\infty} = \underbrace{\mathbf{J}_{\infty} \cdot \mathbf{J}_{\infty} \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_{\infty}}_{p\text{-mal}} . \quad (5.154)$$

Ein orthonormales Polynom ψ_n mit führendem Exponenten p besitzt im Allgemeinen die Darstellung

$$\psi_n = \sum_{i=0}^p a_i x^i , \quad (5.155)$$

wobei a_i konstante Koeffizienten sind. In Gleichung (5.153) wird nun das Monom x^p durch das orthonormale Polynom ψ_n ersetzt:

$$\psi_n \psi_k = \sum_{i=0}^p a_i x^i \psi_k = \sum_{\ell} \underbrace{\sum_{i=0}^p a_i [\mathbf{J}_{\infty}^i]_{k+1,\ell+1}}_{[\psi_n(\mathbf{J}_{\infty})]_{k+1,\ell+1}} \psi_{\ell} . \quad (5.156)$$

Dabei beschreibt der Ausdruck $[\psi_n(\mathbf{J}_\infty)]$ das an der unendlich großen Tridiagonalmatrix $\mathbf{J}_\infty$ ausgewertete Polynom ψ_n . Der Index $(\bullet)_{k+1,\ell+1}$ bezeichnet den entsprechenden Eintrag. Schließlich kann eine alternative Darstellung für den Multiplikationstensor angegeben werden:

$$\mathbb{E}[\psi_n \psi_k \psi_m] = [\psi_n(\mathbf{J}_\infty)]_{k+1,m+1} = D_{nkm} . \quad (5.157)$$

Im Rahmen der Implementierung wird die infinite Matrix reduziert:

$$\mathbf{J}_\infty \rightarrow \mathbf{J}_N \in \mathbb{R}^{N \times N} , \quad N = \lceil 3(p+1)/2 \rceil . \quad (5.158)$$

Dabei richtet sich N nach dem maximalen Polynomgrad p , welcher für die Basispolynome der PC-Entwicklung gewählt wird. Mit der reduzierten Matrix $\mathbf{J}_N$ ist sichergestellt, dass für die ersten $p+1$ Zeilen und Spalten der benötigten Matrixpotenz in Gleichung (5.154)

$$[\mathbf{J}_N^p]_{(1:p+1,1:p+1)} = [\mathbf{J}_\infty^p]_{(1:p+1,1:p+1)} \quad (5.159)$$

gilt. Für die Berechnung des Multiplikationstensors wird die Rekursionsformel in Gleichung (5.19) in Vektor-Matrix-Notation geschrieben:

$$\psi_{k+1}(\mathbf{J}_N) = \frac{(\mathbf{J}_N - a_k \mathbf{1})\psi_{k+1}(\mathbf{J}_N) - \sqrt{b_k} \mathbf{1} \psi_{k-1}(\mathbf{J}_N)}{\sqrt{b_{k+1}}} \quad (5.160)$$

$$\text{mit } \psi_{-1}(\mathbf{J}_N) := \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{und} \quad \psi_0(\mathbf{J}_N) := \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{N \times N} .$$

Der zur eindimensionalen Polynombasis ψ_k , $k \in \{0, \dots, p\}$ zugehörige Multiplikationstensor kann angegeben werden mit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} D_{k00} & \dots & D_{k0p} \\ \vdots & D_{k\ell m} & \vdots \\ D_{kp0} & \dots & D_{kpp} \end{bmatrix}}_{=: \mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}} = \psi_k(\mathbf{J}_N)_{(1:p+1,1:p+1)} , \quad k, \ell, m \in \{0, \dots, p\} . \quad (5.161)$$

An dieser Stelle wird zusätzlich die Notation $\mathbf{D}_k \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ eingeführt, auf die im Rahmen der Implementierung zurückgegriffen wird. In Indexnotation lässt sich der Multiplikationstensor wie folgt angeben:

$$D_{k\ell m} = \psi_k(\mathbf{J}_N)_{\ell+1,m+1} , \quad k, \ell, m \in \{0, \dots, p\} . \quad (5.162)$$

Sind die Tensoren $D_{k\ell m}$ für die eindimensionale Polynombasis bekannt, so lässt sich der vollständige Multiplikationstensor für die M -dimensionalen Polynome gemäß Gleichung (5.143) berechnen.

Mit den PC-Entwicklungen aus Abschnitt 5.4 und den Rechenoperationen aus Abschnitt 5.5 sind alle notwendigen Grundlagen gelegt, um intrusive Berechnungen mit PC-Variablen durchführen zu können.

5.5.6 Weitere Rechenoperationen

Im Rahmen einer intrusiven Anwendung der PCE kann es auch erforderlich sein, komplexere, nicht-polynomielle Rechenoperationen $\hat{A} = \mathcal{F}(\hat{B})$ einer PC-Variablen zu bestimmen. Im Hinblick auf die FE-Formulierungen in Kapitel 6 sind insbesondere Funktionen $\mathcal{F}(\hat{B})$ wie $\sin(\hat{B})$ und $\cos(\hat{B})$ von Interesse. Ziel ist es, die noch unbekannten Koeffizienten der PC-Entwicklung

$$\hat{A} = \sum_{\alpha=0}^P a_{\alpha} \Psi_{\alpha} \quad (5.163)$$

zu bestimmen. Die dafür benötigte Orthogonalprojektion lautet

$$a_{\alpha} = \mathbb{E}[\mathcal{F}(\hat{B})\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})] = \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{F}(\hat{B})\Psi_{\alpha}(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \alpha \in \{0, \dots, P\}. \quad (5.164)$$

Aufgrund der nicht-polynomiellen Abbildung $\mathcal{F}(\hat{B})$ ist Gleichung (5.164) nicht mit den Methoden aus den vorherigen Abschnitten lösbar. Daher wird das Integral in Gleichung (5.164) numerisch mittels GAUSS-Quadratur, siehe Abschnitt 5.3.1, berechnet:

$$a_{\alpha} \approx \sum_{k=1}^{N_{\text{int}}} \mathcal{F}\left(\sum_{\beta} b_{\beta} \Psi_{\beta}(\mathbf{x}^{(k)})\right) \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}^{(k)}) w^{(k)}. \quad (5.165)$$

Dabei findet die Integration auf dem Definitionsbereich $D_{\mathbf{X}}$ des Zufallsvektors $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ statt. Die Integration kann ebenso für die Berechnung der zuvor genannten Rechenoperationen wie Multiplikation, Division usw. verwendet werden.

5.6 Post-Processing der Chaosentwicklung

Eine PC-Entwicklung der Form

$$\hat{Z} = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \approx \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad (5.166)$$

stellt eine leicht auszuwertende Approximation des Modells $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ dar. Aufgrund der speziellen Basispolynome liefert die Darstellung in Gleichung (5.166) zusätzlich aufschlussreiche Informationen über den approximierten Zusammenhang. So lassen sich stochastische Momente wie Mittelwert, Standardabweichung und höhere zentrale Momente direkt aus einer PC-Entwicklung bestimmen. Zusätzlich können varianzbasierte Sensitivitätsmaße wie die SOBOL'-Indizes auf Basis der PC-Koeffizienten ohne weiteren Berechnungsaufwand ermittelt werden. Darüber hinaus kann die Approximation in Gleichung (5.166) verwendet werden, um eine MCS mit der PCE als Ersatzmodell anstatt mit einem aufwendigen numerischen Modell durchzuführen.

5.6.1 Stochastische Momente

Aufgrund der Orthonormalitätseigenschaft der Basispolynome in Gleichung (5.26) können die in Abschnitt 4.1.1 diskutierten stochastischen Momente direkt aus den PC-Koeffizienten bestimmt werden. Der Erwartungswert entspricht dem Koeffizienten z_0 , welcher dem konstanten Polynom $\Psi_0 = 1$ zugeordnet ist:

$$\mu_{\hat{Z}} = z_0 . \quad (5.167)$$

Die restlichen Koeffizienten beschreiben die Varianz der approximierten Zufallsgröße $\hat{Z}$:

$$\sigma_{\hat{Z}}^2 = \sum_{\alpha=1}^P z_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} z_{\alpha}^2 \quad (5.168)$$

Mit dem in Abschnitt 5.5.5 beschriebenen Multiplikationstensor kann die Schiefe bestimmt werden mit

$$\delta_{\hat{Z}} = \frac{1}{\sigma_{\hat{Z}}^3} \sum_{\alpha=1}^P \sum_{\beta=1}^P \sum_{\gamma=1}^P D_{\alpha\beta\gamma} z_{\alpha} z_{\beta} z_{\gamma} . \quad (5.169)$$

Um die aufwendige Berechnung und Speicherung des vierstufigen Tensors $D_{\alpha\beta\gamma\delta}$ zu vermeiden, wird für die Bestimmung der Krümmung der pseudo-spektrale Ansatz verwendet, vgl. Abschnitt 5.5.2:

$$\kappa_{\hat{Z}} = \frac{1}{\sigma_{\hat{Z}}^4} \sum_{\alpha=1}^P \sum_{\beta=1}^P \sum_{\gamma=1}^P \sum_{\delta=1}^P D_{\alpha\beta\gamma\delta} z_{\alpha} z_{\beta} z_{\gamma} z_{\delta} \quad (5.170)$$

$$\approx \frac{1}{\sigma_{\hat{Z}}^4} \sum_{\alpha=1}^P \sum_{\beta=1}^P \sum_{\epsilon=1}^P D_{\alpha\beta\epsilon} z_{\alpha} z_{\beta} \underbrace{\left(\sum_{\gamma=1}^P \sum_{\delta=1}^P D_{\gamma\delta\epsilon} z_{\gamma} z_{\delta} \right)}_{\tilde{z}_{\epsilon}} \quad (5.171)$$

5.6.2 Varianzbasierte Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse gibt Aufschluss darüber, welchen Einfluss einzelne Eingangsvariablen auf eine Ergebnisgröße haben. Ein umfassender Überblick zu diesem Thema ist beispielsweise in SALTELLI ET AL. [93] zu finden. In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich die sogenannte *varianzbasierte* Sensitivitätsanalyse betrachtet, da sie in direkter Verbindung mit der PCE steht. Die Notation orientiert sich im Wesentlichen an SUDRET [110, 111].

Sobol'-Zerlegung

Die Abbildung bzw. das Modell $z = \mathcal{M}(\mathbf{x})$ beschreibt eine M -dimensionale Funktion, welche die Eingangsgrößen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ auf die skalare Variable z abbildet.

Gemäß SOBOL' [104] existiert eine sogenannte SOBOL'-Zerlegung der Form

$$\mathcal{M}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_0 + \sum_{i=1}^M \mathcal{M}_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < k \leq M} \mathcal{M}_{ik}(x_i, x_k) + \dots + \mathcal{M}_{1,2,\dots,M}(\mathbf{x}) , \quad (5.172)$$

wobei die einzelnen Summanden jeweils Teilfunktionen mit steigender Dimension darstellen. $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ ist der stochastische Eingangsvektor und $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ die zugehörige gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Der Erwartungswert des Modells ist definiert mit

$$\mathcal{M}_0 := \mathbb{E}[\mathcal{M}(\mathbf{X})] = \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \quad (5.173)$$

Für die einzelnen Summanden in Gleichung (5.172) wird die Bedingung

$$\int_{D_{X_{i_s}}} \mathcal{M}_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) f_{X_{i_s}}(x_{i_s}) dx_{i_s} = 0 , \quad 1 \leq s \leq k \quad (5.174)$$

gefordert. Dies bedeutet, dass das Integral der Teilfunktion $\mathcal{M}_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ über eine ihrer Variablen $X_{i_s} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ gleich null ist. Diese Bedingung hat zur Folge, dass die einzelnen Summanden in Gleichung (5.172) die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}_{i_1, \dots, i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \mathcal{M}_{j_1, \dots, j_\ell}(x_{j_1}, \dots, x_{j_\ell}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 , \quad (5.175)$$

falls $\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_\ell\}$

erfüllen, siehe HOMMA & SALTELLI [59]. Die Orthogonalitätseigenschaft von Funktionen wurde bereits in den vorherigen Abschnitten im Rahmen der polynomiellen Chaosesentwicklung ausführlich diskutiert. Für die Varianz der Abbildung $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ gilt aufgrund der orthogonalen Teilfunktionen

$$V = \text{Var}[Z] = \text{Var}[\mathcal{M}(\mathbf{X})] = \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}^2(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \mathcal{M}_0^2 . \quad (5.176)$$

Analog zu Gleichung (5.172) kann die Varianz V in eine Summe zerlegt werden:

$$V = \sum_{i=1}^M V_i + \sum_{1 \leq i < k \leq M} V_{ik} + \dots + V_{1,2,\dots,M} . \quad (5.177)$$

Für die Berechnung der Teilvarianzen in Gleichung (5.177) gilt

$$V_{i_1, \dots, i_k} = \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}_{i_1 \dots i_k}^2(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} , \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq M . \quad (5.178)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (5.177) werden schließlich die SOBOL'-Indizes definiert:

$$S_{i_1 \dots i_k} := \frac{V_{i_1 \dots i_k}}{V} . \quad (5.179)$$

Das Sensitivitätsmaß $S_{i_1 \dots i_k}$ gibt den prozentualen Anteil der Teilvarianz $V_{i_1 \dots i_k}$ an der Gesamtvarianz V an, der auf die Eingangsvariablen $\{X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\}$ zurückzuführen ist. Von besonderem Interesse ist der Einfluss einzelner Variablen X_i , der durch den zugehörigen SOBOL'-Index 1. Ordnung S_i quantifiziert wird. Der SOBOL'-Index 2. Ordnung S_{ij} erfasst den Anteil der Gesamtvarianz V , der ausschließlich auf die Interaktion der Eingangsvariablen X_i und X_j zurückzuführen ist. Der totale SOBOL'-Index

$$S_i^T = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \supset \{i\}} S_{i_1 \dots i_k} \quad (5.180)$$

beinhaltet zudem etwaige Interaktionen der Variablen X_i mit den übrigen Eingangsparametern.

Für die Berechnung der SOBOL'-Indizes bzw. der Teilvarianzen ist es erforderlich, Integrale zu lösen, siehe Gleichung (5.178). Eine gängige Methode hierfür ist die Monte-Carlo-Simulation (MCS), siehe SOBOL' [105] und SALTELLI [92]. Für die Bestimmung der M SOBOL'-Indizes 1. Ordnung mit den Ansatz von SALTELLI [92] sind insgesamt $N = L(M + 2)$ Auswertungen des Modells $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ erforderlich. Dabei bezeichnet L die Basisanzahl an zufälligen Stichproben der M Eingangsvariablen. Die gleiche Anzahl $N = L(M + 2)$ wird für die Berechnung der M totalen SOBOL'-Indizes benötigt. Für auskonvergierte Werte der Sensitivitätsmaße sind viele Auswertungen des Modells erforderlich, was auf die langsame Konvergenzrate der MCS zurückzuführen ist.

PCE-basierte Sobol'Indizes

Einen deutlich effizienteren Ansatz im Vergleich zur MCS bietet die polynomielle Chaosentwicklung. In SUDRET [110] wird gezeigt, dass die SOBOL'-Indizes direkt aus den Koeffizienten einer PC-Entwicklung

$$\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{X}) \approx \mathcal{M}(\mathbf{X}) \quad (5.181)$$

im Rahmen einer Nachlaufrechnung bestimmt werden können. Hierfür wird die Menge $\mathcal{I}_{i_1 \dots i_k}$ definiert, die nur die Multiindizes α beinhaltet, bei denen die Einträge $i_1, \dots, i_k$ ungleich null sind:

$$\mathcal{I}_{i_1 \dots i_k} = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \begin{array}{ll} \alpha_j > 0, & \text{falls } j \in \{i_1, \dots, i_k\} \\ \alpha_j = 0, & \text{falls } j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \end{array} \right\}. \quad (5.182)$$

Mit der Menge $\mathcal{I}$ wird die PC-Entwicklung in Gleichung (5.181) folgendermaßen umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = & z_0 + \sum_{i=1}^M \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_i} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x_i) \right) \\ & + \sum_{1 \leq i < k \leq M} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{ik}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x_i, x_k) \right) + \dots + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{1,2,\dots,M}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (5.183)$$

Aufgrund der orthogonalen Basispolynome entspricht Gleichung (5.183) gerade der SOBOL'-Zerlegung der PC-Approximation $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$. Nun können die Summanden der SOBOL'-Zerlegung in Gleichung (5.172) in Abhängigkeit der Polynome Ψ_{α} identifiziert werden mit

$$\mathcal{M}_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1 \dots i_k}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) . \quad (5.184)$$

Wie bereits in Gleichung (5.168) gezeigt, ist die Varianz einer PC-Entwicklung aufgrund der orthonormalen Basispolynome allein durch die Koeffizienten gegeben. Damit lauten die PCE-basierten SOBOL'-Indizes

$$S_{i_1 \dots i_k}^{(pc)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{i_1 \dots i_k}} z_{\alpha}^2 \bigg/ \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{\mathbf{0}\}} z_{\alpha}^2 \quad \text{und} \quad S_i^{T(pc)} = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \supset \{i\}} S_{i_1 \dots i_k}^{(pc)} . \quad (5.185)$$

5.6.3 Prinzipbeispiel für das Post-Processing einer Chaosesentwicklung

Anhand des Prinzipbeispiels

$$Z = X_1 \cdot X_2 \quad \text{mit} \quad X_1 \sim \mathcal{N}(1, 1) \quad \text{und} \quad X_2 \sim \mathcal{N}(2, 0.5) \quad (5.186)$$

wird die Multiplikation zweier PC-Variablen und das Post-Processing der PC-Entwicklung gezeigt. Für eine exakte Darstellung der Funktion ist die Menge

$$\mathcal{A} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\} \quad (5.187)$$

an konstanten, linearen und bilinearen HERMITE-Polynomen erforderlich. Die Koeffizienten für die PC-Entwicklungen der Eingangsvariablen

$$X_1 = \sum_{\alpha=0}^3 x_{1\alpha} \Psi_{\alpha} \quad \text{und} \quad X_2 = \sum_{\alpha=0}^3 x_{2\alpha} \Psi_{\alpha} \quad (5.188)$$

werden direkt aus Tabelle 5.6 abgelesen und in den Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = [1, 0, 1, 0]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = [2, 1/2, 0, 0]^T \quad (5.189)$$

zusammengefasst. Die vier Koeffizienten der PC-Entwicklung $Z = \sum_{\alpha=0}^3 z_{\alpha} \Psi_{\alpha}$ werden mit der Berechnungsvorschrift in Gleichung (5.123) bestimmt und lauten

$$\mathbf{z} = [2, 1/2, 2, 1/2]^T . \quad (5.190)$$

Aufgrund der orthonormalen Basispolynome gilt $\mathbf{D}_0 = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Die übrigen Einträge des verwendeten Multiplikationstensors $D_{\alpha\beta\gamma}$ lauten

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.191)$$

wobei sich die Darstellung hier an der in Gleichung (5.161) eingeführten Notation orientiert. Auf Basis der PC-Koeffizienten z_α und des Multiplikationstensors werden die stochastischen Momente der Zufallsvariablen Z bestimmt:

$$\mu_Z = 2, \quad \sigma_Z^2 = \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} = \frac{9}{2} \quad \text{und} \quad \delta_Z = \frac{2\sqrt{2}}{9}. \quad (5.192)$$

Da die PC-Entwicklung die Funktion in Gleichung (5.186) exakt abbildet, entsprechen diese Ergebnisse analytisch ermittelten Lösungen. Die PCE-basierten SOBOL'-Indizes 1. Ordnung lauten

$$S_1^{(pc)} = \frac{4}{9/2} = \frac{8}{9} \quad \text{und} \quad S_2^{(pc)} = \frac{1/4}{9/2} = \frac{1}{18}. \quad (5.193)$$

Der deutlich größere Einfluss der Eingangsvariablen X_1 lässt sich mit der höheren Standardabweichung dieser Variablen erklären. Neben den beiden SOBOL'-Indizes 1. Ordnung in Gleichung (5.193) entsteht ein SOBOL'-Index 2. Ordnung mit

$$S_{12}^{(pc)} = \frac{1/4}{9/2} = \frac{1}{18}. \quad (5.194)$$

Dieser erfasst den Anteil der Varianz, der auf die Interaktion der Eingangsvariablen X_1 und X_2 zurückzuführen ist. Da in diesem Prinzipbeispiel lediglich zwei Eingangsvariablen vorhanden sind, treten keine weiteren Effekte auf. Aus der Normierung von Gleichung (5.177) mit der Gesamtvarianz folgt, dass die Summe aller SOBOL'-Indizes gerade eins ist. Für das hier betrachtete Prinzipbeispiel gilt

$$S_1^{(pc)} + S_2^{(pc)} + S_{12}^{(pc)} = \frac{8}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 1. \quad (5.195)$$

5.6.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Zuverlässigkeitsanalyse

Erfordern simulationsbasierte Analysen wiederholte Auswertungen des komplexen Modells $\mathcal{M}$, so können die Rechenressourcen durch den Einsatz der PC-Entwicklung $\widehat{\mathcal{M}}$ signifikant reduziert werden. Dabei fungiert $\widehat{\mathcal{M}}$ als Ersatzmodell, das mit sehr geringem Rechenaufwand wiederholt ausgewertet werden kann. Zu

Beginn werden wie bei einer MCS N Realisierungen des Zufallsvektors $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ gemäß der gemeinsamen Dichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ generiert und in der Menge

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(k)}, k = 1, \dots, N\} \quad (5.196)$$

zusammengefasst. In Abschnitt 5.3.2 wird die Konstruktion der Stichprobenmenge $\mathcal{X}$ im Kontext der Polynomregression näher erläutert. Die Ergebnisgrößen resultieren aus der Auswertung der PC-Entwicklung:

$$\hat{z}^{(k)} = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}^{(k)}) = \sum_{\alpha} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}^{(k)}) \rightsquigarrow \widehat{\mathcal{Z}} = \{\hat{z}^{(k)}, k = 1, \dots, N\} . \quad (5.197)$$

Auf Basis der Menge $\widehat{\mathcal{Z}}$ kann beispielsweise die empirische Häufigkeitsverteilung der approximierten Zufallsvariablen $\widehat{Z}$ ermittelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Ergebnisgröße zusätzlich eine *Kerndichteschätzung* (engl.: *kernel smoothing*), siehe WAND & JONES [124], durchgeführt. Hierfür wird die MATLAB [116] eigene Funktion *ksdensity* verwendet. Auf Basis der Stichprobenmenge $\widehat{\mathcal{Z}}$ können zudem Quantilwerte und Versagenswahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $\widehat{Z}$ bestimmt werden.

5.7 Post-Processing der erweiterten PC-Entwicklung im Rahmen polymorpher Unschärfe

Auf Basis der erweiterten PC-Entwicklung der Form

$$\widehat{Z} = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{C}) \quad (5.198)$$

können im Rahmen des Post-Processings ebenfalls wichtige Kenngrößen bestimmt werden. In den Arbeiten von SCHÖBI [94] und SCHÖBI & SUDRET [96] werden sogenannte unscharfe SOBOL'-Indizes eingeführt, die im Folgenden näher erläutert werden. Die Notation orientiert sich dabei im Wesentlichen an der genannten Literatur. Für das Post-Processing ist es erforderlich, die PC-Entwicklung in Gleichung (5.198) umzuformulieren. Dies ist damit zu begründen, dass stochastische Momente und SOBOL'-Indizes ausschließlich bezüglich aleatorischer Variablen definiert sind.

In dem erweiterten Eingangsvektor $\mathbf{C} = (\mathbf{U}, \mathbf{s})$ lassen sich aleatorische und epistemische Variablen klar voneinander trennen. Dies ermöglicht eine entsprechende Aufspaltung des Multiindex

$$\alpha = (\alpha_{\mathbf{u}}, \alpha_{\mathbf{s}}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \alpha_{\mathbf{s}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{s}} , \quad (5.199)$$

wobei $\mathcal{A}_{\mathbf{u}}$ und $\mathcal{A}_{\mathbf{s}}$ die jeweiligen Multiindexmengen beschreiben. Mit dem Split in Gleichung (5.199) werden auch die Basispolynome multiplikativ zerlegt:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{C}) = \Psi_{\alpha_{\mathbf{u}}}(\mathbf{U}) \Psi_{\alpha_{\mathbf{s}}}(\mathbf{s}) . \quad (5.200)$$

In Abhängigkeit der epistemischen Variablen $\mathbf{s}$ werden die neuen PC-Koeffizienten definiert als

$$z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{s}) := \sum_{i=0}^{\bar{P}} \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathbf{u}}^{(i)} = \alpha_{\mathbf{u}}^*\}} z_{\alpha^{(i)}} \Psi_{\alpha_{\mathbf{s}}^{(i)}}(\mathbf{s}) , \quad (5.201)$$

wobei der $(i + 1)$ -te Multiindex der Menge $\mathcal{A}$ mit $\alpha^{(i)}$ bezeichnet wird. Zudem beschreibt $\mathbb{1}_{\{\alpha=\beta\}}$ die Indikatorfunktion, die nur dann den Wert eins annimmt, wenn $\alpha = \beta$ und ansonsten null ist. Mit der Definition in Gleichung (5.201) lautet die kompakte Schreibweise der erweiterten PCE

$$\hat{Z} = \sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^*} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{s}) \Psi_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{U}) . \quad (5.202)$$

Dabei beinhaltet die Menge $\mathcal{A}_{\mathbf{u}}^*$ alle Multiindizes $\alpha_{\mathbf{u}} \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}$, jedoch ohne etwaige Duplikate von $\alpha_{\mathbf{u}}$. Anhand Gleichung (5.202) ist zu erkennen, dass die Polynome $\Psi_{\alpha_{\mathbf{u}}}(\mathbf{U})$ nur noch von den aleatorischen Eingangsgrößen abhängen, während der Einfluss epistemischer Variablen in den zugehörigen Koeffizienten erfasst wird. Basierend auf dieser Darstellung kann das Post-Processing in ähnlicher Weise, wie in Abschnitt 5.6 bereits beschrieben, durchgeführt werden.

5.7.1 Unscharfe stochastische Momente

Die Unschärfecharakteristiken der epistemischen Variablen $\mathbf{s}$ übertragen sich auf stochastische Kenngrößen wie Erwartungswert, Varianz und weitere zentrale Momente, wobei in dem folgenden Abschnitt nur die Momente erster und zweiter Ordnung betrachtet werden. Das Post-Processing der erweiterten PC-Entwicklung erfolgt ausschließlich bezüglich der aleatorischen Eingangsparameter $\mathbf{U}$. Somit gilt für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mu_{\hat{Z}}(\mathbf{s}) &= \mathbb{E} \left[\sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^*} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{s}) \Psi_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{U}) \right] \\ &= z_{\mathbf{0}}(\mathbf{s}) = \sum_{i=0}^{\bar{P}} \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathbf{u}}^{(i)} = \mathbf{0}\}} z_{\alpha^{(i)}} \Psi_{\alpha_{\mathbf{s}}^{(i)}}(\mathbf{s}) . \end{aligned} \quad (5.203)$$

Die untere ($\bullet$) und obere ($\bar{\bullet}$) Grenze des Erwartungswertes in Gleichung (5.203) können durch Lösen der Optimierungsprobleme

$$\underline{\mu}(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} \mu_{\hat{Z}}(\mathbf{s}) \quad \text{und} \quad \bar{\mu}(\mathbf{s}) = \max_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} \mu_{\hat{Z}}(\mathbf{s}) \quad (5.204)$$

gefunden werden. Beinhaltet der Eingangsvektor $\mathbf{s}$ mindestens eine Fuzzy-Variable, siehe Abschnitt 4.2, so müssen die Optimierungsaufgaben in Gleichung (5.204) im Rahmen der ALO für jedes α -Level gelöst werden. Dabei reduziert sich der Bereich $D_{\mathbf{s}}$ der epistemischen Variablen mit zunehmendem α -Level. Die Berechnung

der Varianz lautet

$$\sigma_{\hat{Z}}^2(\mathbf{s}) = \text{Var} \left[\sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^*} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{s}) \Psi_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}(\mathbf{U}) \right] = \sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^* \setminus \{\mathbf{0}\}} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}^2(\mathbf{s}) . \quad (5.205)$$

Durch das Lösen der beiden Optimierungsprobleme

$$\underline{\sigma}^2(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} \sigma_{\hat{Z}}^2(\mathbf{s}) \quad \text{und} \quad \overline{\sigma}^2(\mathbf{s}) = \max_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} \sigma_{\hat{Z}}^2(\mathbf{s}) \quad (5.206)$$

werden die untere und obere Grenze der Zielgröße gefunden.

5.7.2 Unschärfe PCE-basierte Sobol' Indizes

Sogenannte unscharfe PCE-basierte SOBOL'-Indizes wurden von SCHÖBI & SUDRET [96] vorgestellt. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.201) und (5.202) lautet die erweiterte PC-Entwicklung

$$\hat{Z} = \sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^*} \left(\sum_{i=0}^{\bar{P}} \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathbf{u}}^{(i)} = \alpha_{\mathbf{u}}^*\}} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^{(i)}} \Psi_{\alpha_{\mathbf{s}}^{(i)}}(\mathbf{s}) \right) . \quad (5.207)$$

Mit der Definition einer weiteren Indexmenge $\mathcal{I}_{i_1 \dots i_k}$, siehe Gleichung (5.182) in Abschnitt 5.6.2, werden die PCE-basierten SOBOL'-Indizes kompakt formuliert. In Abhängigkeit der epistemischen Variablen $\mathbf{s}$ lauten die PCE-basierten SOBOL'-Indizes

$$S_{i_1 \dots i_k}^{(pc)}(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{I}_{i_1 \dots i_k}} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}^2(\mathbf{s}) \Bigg/ \sum_{\alpha_{\mathbf{u}}^* \in \mathcal{A}_{\mathbf{u}}^* \setminus \{\mathbf{0}\}} z_{\alpha_{\mathbf{u}}^*}^2(\mathbf{s}) , \quad (5.208)$$

wobei der Nenner gerade der unscharfen Varianz in Gleichung (5.205) entspricht. Wie im vorherigen Abschnitt auch, können die zwei Optimierungsprobleme

$$\underline{S}_{i_1 \dots i_k}^{(pc)}(\mathbf{s}) = \min_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} S_{i_1 \dots i_k}^{(pc)}(\mathbf{s}) \quad \text{und} \quad \overline{S}_{i_1 \dots i_k}^{(pc)}(\mathbf{s}) = \max_{\mathbf{s} \in D_{\mathbf{s}}} S_{i_1 \dots i_k}^{(pc)}(\mathbf{s}) \quad (5.209)$$

formuliert werden.

Alle zu lösenden Optimierungsaufgaben in den Gleichungen (5.204), (5.206) und (5.209) sind hinsichtlich des erforderlichen Rechenaufwandes sehr gering, da nur die Auswertung der PC-Entwicklung erforderlich ist. Für das Lösen dieser Optimierungsprobleme werden im Rahmen dieser Arbeit die MATLAB [116] eigenen Optimierungsalgorithmen *particleswarm* und *ga* verwendet.

5.7.3 Prinzipbeispiel der erweiterten PC-Entwicklung

Anhand der Beispielfunktion

$$Z = \mathcal{M}(\mathbf{x}) = X_1(X_2 + \tilde{x}_3) \quad (5.210)$$

wird das Post-Processing der erweiterten PC-Entwicklung detailliert beschrieben. Die Eingangsvariablen sind wie folgt definiert:

- $X_1 \sim \mathcal{N}(2, \tilde{\sigma}_1)$, $\tilde{\sigma}_1 = \langle 1, 1, 2, 2 \rangle$, (f-pr-Variable) ,
- $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 1, 5)$ (Zufallsvariable) und
- $\tilde{x}_3 = \langle 2, 2, 8, 3 \rangle$ (Fuzzy-Variable) .

(5.211)

Mit der erweiterten Transformation $\bar{\mathcal{T}}$ gilt für die Beispielfunktion

$$Z = \mathcal{M}(\mathbf{U}, \mathbf{s}) = \underbrace{\left(2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}s_1\right)U_1\right)}_{X_1} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{2}U_2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}s_2\right)}_{X_2} \underbrace{\tilde{x}_3}_{\tilde{x}_3} \quad (5.212)$$

$$\text{mit } \mathbf{s} = [s_1, s_2]^T \text{ und } \mathbf{U} = [U_1, U_2]^T ,$$

wobei $s_1, s_2 \in [-1, 1]$ und $U_1, U_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Die PC-Entwicklung der in Gleichung (5.212) gezeigten Funktion lautet

$$Z = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{C}) , \quad \mathbf{C} = (\mathbf{U}, \mathbf{s}) . \quad (5.213)$$

Zur Approximation der epistemischen Variablen $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ werden LEGEN-DRE-Polynome verwendet, während die aleatorischen Variablen $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ mit HERMITE-Polynomen dargestellt werden. Für die exakte PC-Entwicklung der in Gleichung (5.212) dargestellten Funktion sind neun Basispolynome erforderlich, die zusammen mit den PC-Koeffizienten in Tabelle 5.8 aufgeführt sind. Im Rahmen des Post-Processing ist es erforderlich, die Multiindexmenge $\mathcal{A}$ gemäß der beschriebenen Trennung in Gleichung (5.199) in die zwei Teilmengen $\mathcal{A}_s$ und $\mathcal{A}_u$ zu unterteilen, siehe Tabelle 5.9. Werden alle in der Menge $\mathcal{A}_u$ auftretenden Duplikate von α_u entfernt, so gilt für die Menge $\mathcal{A}_u^*$:

$$\mathcal{A}_u^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 1 \\ 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_u^{*(0)} \\ \alpha_u^{*(1)} \\ \alpha_u^{*(2)} \\ \alpha_u^{*(3)} \end{pmatrix} \right\} . \quad (5.214)$$

Mit den Multiindizes α_u^* werden nun die von den epistemischen Variablen $\mathbf{s}$ abhängigen PC-Koeffizienten bestimmt. Im Rahmen dieses Prinzipbeispiels lauten diese

$$\begin{aligned} z_{\alpha_u^{*(0)}}(\mathbf{s}) &= \sum_{i \in \{0,1\}} z_{\alpha^{(i)}} \Psi_{\alpha_s^{(i)}}(\mathbf{s}) , & z_{\alpha_u^{*(1)}}(\mathbf{s}) &= z_{\alpha^{(2)}} \Psi_{\alpha_s^{(2)}}(\mathbf{s}) , \\ z_{\alpha_u^{*(2)}}(\mathbf{s}) &= \sum_{i \in \{3,4,6,7\}} z_{\alpha^{(i)}} \Psi_{\alpha_s^{(i)}}(\mathbf{s}) \quad \text{und} \quad z_{\alpha_u^{*(3)}}(\mathbf{s}) &= \sum_{i \in \{5,8\}} z_{\alpha^{(i)}} \Psi_{\alpha_s^{(i)}}(\mathbf{s}) . \end{aligned} \quad (5.215)$$

i	$\alpha \in \mathcal{A}$	Ψ_α	z_α	$\alpha_u \in \mathcal{A}_u$	$\alpha_s \in \mathcal{A}_s$	$\Psi_{\alpha_s}(\mathbf{s})$
0	(0, 0, 0, 0)	1	7	(0, 0)	(0, 0)	1
1	(0, 0, 0, 1)	$\sqrt{3}s_2$	$1/\sqrt{3}$	(0, 0)	(0, 1)	$\sqrt{3}s_2$
2	(0, 1, 0, 0)	U_2	3	(0, 1)	(0, 0)	1
3	(1, 0, 0, 0)	U_1	21/4	(1, 0)	(0, 0)	1
4	(1, 0, 0, 1)	$\sqrt{3}U_1s_2$	$\sqrt{3}/4$	(1, 0)	(0, 1)	$\sqrt{3}s_2$
5	(1, 1, 0, 0)	U_1U_2	9/4	(1, 1)	(0, 0)	1
6	(1, 0, 1, 0)	$\sqrt{3}U_1s_1$	$7\sqrt{3}/12$	(1, 0)	(1, 0)	$\sqrt{3}s_1$
7	(1, 0, 1, 1)	$3U_1s_1s_2$	1/12	(1, 0)	(1, 1)	$3s_1s_2$
8	(1, 1, 1, 0)	$\sqrt{3}U_1U_2s_1$	$\sqrt{3}/4$	(1, 1)	(1, 0)	$\sqrt{3}s_1$

Tabelle 5.8: Menge $\mathcal{A}$ der Multiindizes α , zugehörige Basispolynome Ψ_α und entsprechende PC-Koeffizienten z_α

Tabelle 5.9: Teilmengen $\mathcal{A}_u$ und $\mathcal{A}_s$ sowie die zugehörigen Basispolynome $\Psi_{\alpha_s}(\mathbf{s})$

Schließlich wird die ursprüngliche PC-Entwicklung in Gleichung (5.213) kompakt geschrieben mit

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{C}) = \sum_{\alpha_u^* \in \mathcal{A}_u^*} z_{\alpha_u^*}(\mathbf{s}) \Psi_{\alpha_u^*}(\mathbf{U}) . \quad (5.216)$$

Auf Basis dieser Darstellung kann das Post-Processing für die Bestimmung der stochastischen Momente und der SOBOL'-Indizes durchgeführt werden. Der Mittelwert und die Varianz der Zielgröße Z in Abhängigkeit von $\mathbf{s}$ lauten

$$\begin{aligned} \mu_Z(\mathbf{s}) &= z_{\alpha_u^*(0)} = 7 + s_2 \quad \text{und} \\ \sigma_Z^2(\mathbf{s}) &= z_{\alpha_u^*(1)}^2 + z_{\alpha_u^*(2)}^2 + z_{\alpha_u^*(3)}^2 \\ &= 3^2 + \left(\frac{21}{4} + \frac{21}{12}s_1 + \frac{3}{4}s_2 + \frac{1}{4}s_1s_2 \right)^2 + \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}s_1s_2 \right)^2 . \end{aligned} \quad (5.217)$$

Sind die Minimal- und Maximalwerte der Funktionen in Gleichung (5.217) auf jedem α -Level gefunden, so können diese als Fuzzy-Größe dargestellt werden. Abbildung 5.10 zeigt den Fuzzy-Mittelwert (links) und die Fuzzy-Varianz (rechts).

Die SOBOL'-Indizes 1. Ordnung werden mit den modifizierten Koeffizienten angegeben:

$$\begin{aligned} S_1^{(pc)}(\mathbf{s}) &= \frac{z_{\alpha_u^*(2)}^2}{z_{\alpha_u^*(1)}^2 + z_{\alpha_u^*(2)}^2 + z_{\alpha_u^*(3)}^2} \quad \text{und} \\ S_2^{(pc)}(\mathbf{s}) &= \frac{z_{\alpha_u^*(1)}^2}{z_{\alpha_u^*(1)}^2 + z_{\alpha_u^*(2)}^2 + z_{\alpha_u^*(3)}^2} . \end{aligned} \quad (5.218)$$

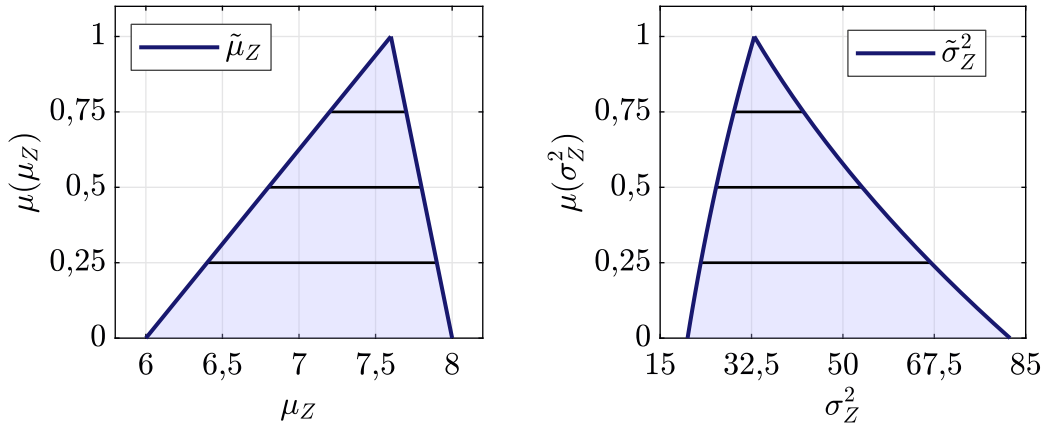


Abbildung 5.10: Zugehörigkeitsfunktionen des Fuzzy-Mittelwerts $\mu(\mu_Z)$ (links) sowie der Fuzzy-Varianz $\mu(\sigma_Z^2)$ (rechts)

Für den SOBOL'-Index 2. Ordnung folgt mit den modifizierten Koeffizienten

$$S_{12}^{(pc)}(\mathbf{s}) = \frac{z_{\alpha_{\mathbf{u}}^{*(3)}}^2}{z_{\alpha_{\mathbf{u}}^{*(1)}}^2 + z_{\alpha_{\mathbf{u}}^{*(2)}}^2 + z_{\alpha_{\mathbf{u}}^{*(3)}}^2}. \quad (5.219)$$

Auf eine explizite Darstellung der SOBOL'-Indizes in Abhängigkeit von s_1 und s_2 wird an dieser Stelle aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Im Anschluss an die ALO können die Ergebnisse, wie in Abbildung 5.11 dargestellt, graphisch veranschaulicht werden.

Die Erweiterung der klassischen SOBOL'-Indizes ermöglicht nun eine tiefere und aufschlussreichere Interpretation der Ergebnisse, siehe SCHÖBI [96]. Der Wert eines unscharfen SOBOL'-Indizes auf dem obersten α -Level mit $\alpha = 1$ gibt den Einfluss einer Variablen an, welcher auf ihre aleatorische Unschärfe zurückzuführen ist. Zusätzlich kann auf jedem α -Level eine Intervallbreite des SOBOL'-Indizes bestimmt werden. Inwiefern der Einfluss einer Eingangsvariablen von den epistemischen Größen bestimmt wird, kann mit dieser Intervallbreite erfasst werden.

Auf das Prinzipbeispiel übertragen, lässt sich erkennen, dass der Einfluss aleatorischer Unschärfe von Variable X_1 deutlich größer ist, als der von Variable X_2 . Bei genauerer Betrachtung der Intervallbreite fällt auf, dass diese für beide SOBOL'-Indizes nahezu identisch ist, unabhängig von dem betrachteten α -Level. Daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass die epistemischen Variablen die Bedeutung von X_1 und X_2 gleichermaßen beeinflussen. Anhand von Abbildung 5.11 wird zudem deutlich, dass der SOBOL'-Index 2. Ordnung nur eine untergeordnete Rolle spielt. Sowohl der Wert auf dem obersten α -Level mit $\alpha = 1$ als auch die Intervallbreite auf jedem α -Level sind deutlich geringer als bei beiden SOBOL'-Indizes 1. Ordnung. Schließlich sei noch erwähnt, dass die Intervallbreite aller unscharfen

Sensitivitätsmaße mit zunehmenden α -Level abnimmt, was auf den immer kleiner werdenden Bereich D_s zurückzuführen ist.

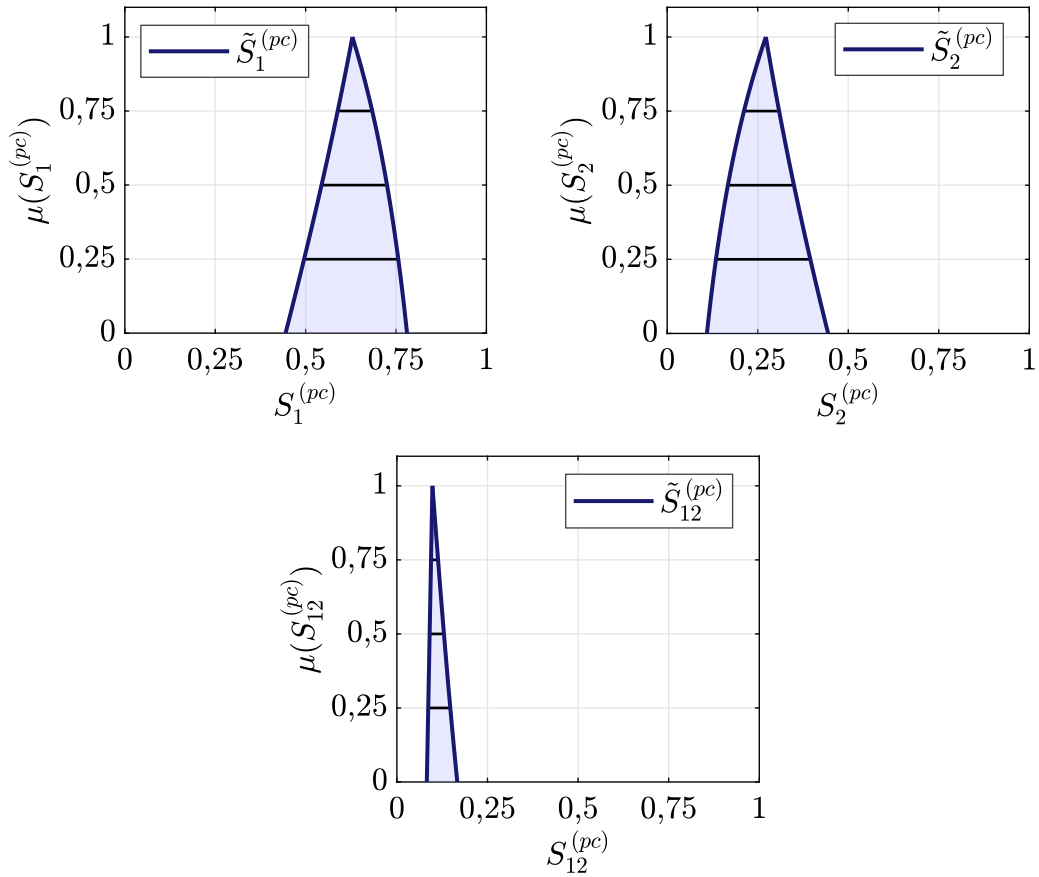


Abbildung 5.11: Zugehörigkeitsfunktionen der Fuzzy-SOBOL'-Indizes $\mu(S_1^{(pc)})$ und $\mu(S_2^{(pc)})$ (oben) sowie des Fuzzy-SOBOL'-Index $\mu(S_{12}^{(pc)})$ (unten)

6 Spektrale stochastische FE-Formulierungen ausgewählter Strukturelemente

Im Jahr 1991 veröffentlichten GHANEM & SPANOS [45] das Buch *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, in welchem die beiden Autoren die spektrale stochastische Finite-Elemente-Methode (SSFEM) erstmals vorstellten. Die SSFEM verbindet die polynomielle Chaosentwicklung (PCE) mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) und kann somit als Erweiterung der deterministischen FEM betrachtet werden.

Im folgenden Kapitel werden spektrale stochastische FE-Formulierungen für ausgewählte geometrisch nichtlineare Strukturelemente vorgestellt. Ausgehend von den Grundlagen der Schalentheorie in Kapitel 3 und der polynomiellen Chaosentwicklung in Kapitel 5 wird eine stochastische Schalenformulierung abgeleitet. Neben dieser rein verschiebungsbasierten Formulierung wird zusätzlich ein gemischt-hybrides, stochastisches Scheibenelement entwickelt. Anschließend folgt eine geometrisch exakte, zweidimensionale Stabformulierung, anhand derer die Thematik endlicher Rotationen im Rahmen der SSFEM diskutiert wird. Bei allen hier vorgestellten Formulierungen wird stets von einer deterministischen Referenzkonfiguration ausgegangen.

Alle entwickelten stochastischen Elementformulierungen sind in MATLAB [116] und in einer erweiterten Version des FE-Programms FEAP (*Finite Element Analysis Program*) [115] implementiert.

6.1 Variationsformulierung und Diskretisierung

Werden die Eigenschaften eines Körpers, wie z.B. Steifigkeiten, als Zufallsgrößen beschrieben, so zeigt sich der stochastische Charakter in der starken Form des Gleichgewichts. Die Gleichungen des *stochastischen Randwertproblems* entsprechen bis auf die Zufälligkeit aller Größen denen des deterministischen Problems, siehe Tabelle 2.1. Für die Anwendung numerischer Lösungsverfahren wird die *stochastische starke Form*, wie auch im deterministischen Fall, in eine schwache Form überführt. Gemäß LE MAÎTRE & KNIO [70] lautet die schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} \delta \pi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[\delta \pi(\omega)] = 0, \quad (6.1)$$

wobei Ω die Grundgesamtheit des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ beschreibt. Weiterhin kennzeichnet die Abhängigkeit von ω den stochastischen Charakter einer Größe. Mit der Formulierung in Gleichung (6.1) wird die stochastische starke

Form sowohl in der räumlichen Dimension als auch in der stochastischen Dimension nur im integralen Mittel eingefordert. Das Variationsprinzip in Gleichung (6.1) ist der Ausgangspunkt für die *zweistufige Diskretisierung*, die im Rahmen der SSFEM verwendet wird.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst das rein verschiebungsbasierte Variationsprinzip

$$\mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] = \mathbb{E}[\delta\pi(\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega))] \quad (6.2)$$

betrachtet. Dies ist im Allgemeinen eine nichtlineare Funktion in der gesuchten Feldgröße, dem stochastischen Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega)$. Dabei kennzeichnet $\mathbf{X}$ die örtliche Abhängigkeit von $\mathbf{u}$. Die Linearisierung von Gleichung (6.2) wird unter Berücksichtigung der Linearität des Erwartungswertes $\mathbb{E}[\bullet]$ sowie der Linearisierung $L[\bullet]$ geschrieben als

$$L[\mathbb{E}[\delta\pi(\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega))]] = \mathbb{E}[\delta\pi(\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega))] + \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i(\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega))] = 0 . \quad (6.3)$$

In dieser Arbeit wird stets von konservativen Belastungen ausgegangen und es gilt $\mathbb{E}[\Delta\delta\pi_a(\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega))] = 0$. Im Rahmen einer verschiebungsbasierten Formulierung wird die Feldvariable $\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega)$ sowohl mit der PCE als auch mit der FEM diskretisiert. Zunächst erfolgt die Approximation in der stochastischen Dimension mit der PCE:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\alpha=0}^P \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{X}) \Psi_{\alpha}(\omega) . \quad (6.4)$$

Dabei sind $\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{X})$ die räumlich veränderlichen PC-Koeffizienten des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega)$ und $\Psi_{\alpha}(\omega)$ die zugehörigen Basispolynome, siehe Kapitel 5. Die Diskretisierung der PC-Koeffizienten in der räumlichen Dimension lautet

$$\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{X}) = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\mathbf{X}) \mathbf{v}_{I\alpha} , \quad (6.5)$$

wobei $N_I(\mathbf{X})$ klassische FE-Ansatzfunktionen sind und nel die Anzahl an Knoten pro Element e bezeichnet. Der Vektor $\mathbf{v}_{I\alpha}$ beinhaltet die zum Knoten I und Basispolynom $\Psi_{\alpha}(\omega)$ zugehörigen Knotenverschiebungen. Zusammengefasst lautet die vollständige Approximation der stochastischen Feldgröße im Rahmen der SSFEM

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, \omega) = \sum_{\alpha=0}^P \sum_{I=1}^{nel} \Psi_{\alpha}(\omega) N_I(\mathbf{X}) \mathbf{v}_{I\alpha} . \quad (6.6)$$

Anhand der Darstellung in Gleichung (6.6) ist die zweistufige Diskretisierung zu erkennen. In den folgenden Abschnitten werden drei stochastische FE-Formulierungen für ausgewählte Strukturelemente detailliert hergeleitet.

6.2 Ein Schalenelement mit moderaten Rotationen

In Kapitel 3 wurden die Grundlagen der Schalentheorie und die zugehörige Variationsformulierung dargestellt. Diese bilden die Grundlage für die hier weiterentwickelte, spektrale stochastische Schalenformulierung, die in PANTHER ET AL. [84] veröffentlicht ist. Die ursprüngliche FE-Formulierung orientiert sich im Wesentlichen an WAGNER & GRUTTMANN [121,122] und GRUTTMANN & WAGNER [49].

Das zugrundeliegende Variationsprinzip folgt aus Gleichung (3.55):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] &= \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\omega)\boldsymbol{\sigma}(\omega) dA\right] - \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T(\omega)\bar{\mathbf{q}}(\omega) dA + \int_{\partial\Omega_0^g} \delta\mathbf{v}^T(\omega)\bar{\mathbf{t}}(\omega) ds\right] \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die zugehörige Linearisierung lautet

$$\begin{aligned} L\left[\mathbb{E}[\delta\pi(\omega)]\right] &= \mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] + \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i(\omega)] \\ &= \mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] + \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\omega)\Delta\boldsymbol{\sigma}(\omega) + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\omega)\boldsymbol{\sigma}(\omega) dA\right] = 0 . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Das stochastische Verschiebungsfeld $\mathbf{v}(\omega)$ der Schale umfasst, analog zu $\mathbf{v}$, drei Verschiebungen und drei Rotationen, siehe Gleichung (3.52):

$$\mathbf{v}(\omega) = [u_1(\omega), u_2(\omega), u_3(\omega), \beta_1(\omega), \beta_2(\omega), \beta_3(\omega)]^T . \quad (6.9)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die räumliche Abhängigkeit aller Größen verzichtet.

6.2.1 Stochastische Diskretisierung mit der PCE

Mit der PCE erfolgt die stochastische Diskretisierung des Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{v}(\omega) = \sum_{\alpha=0}^P \mathbf{v}_\alpha \Psi_\alpha(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_\alpha \Psi_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_\alpha = [u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, u_{3\alpha}, \beta_{1\alpha}, \beta_{2\alpha}, \beta_{3\alpha}]^T, \quad (6.10)$$

wobei die Anzahl der Basispolynome $\bar{P} = P + 1$ von der Zahl der stochastischen Eingangsvariablen M und dem gewählten Polynomgrad p der PC-Entwicklung abhängt, siehe Gleichung (5.36). Zur besseren Übersichtlichkeit wird die Abhängigkeit der Basispolynome von ω zukünftig nicht mehr explizit angegeben. Der Vektor $\mathbf{v}_\alpha$ beinhaltet die zum Polynom Ψ_α zugehörigen PC-Koeffizienten des Verschiebungsfeldes. An dieser Stelle sei angemerkt, dass $\mathbf{v}_\alpha$ weiterhin kontinuierlich in der räumlichen Dimension ist. Das virtuelle und linearisierte stochastische Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{v}(\omega)$ und $\Delta\mathbf{v}(\omega)$ wird analog zu Gleichung (6.10) diskretisiert mit

$$\delta\mathbf{v}(\omega) = \sum_{\alpha} \delta\mathbf{v}_\alpha \Psi_\alpha \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{v}(\omega) = \sum_{\alpha} \Delta\mathbf{v}_\alpha \Psi_\alpha . \quad (6.11)$$

Die Vektoren $\delta \mathbf{v}_\alpha$ und $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ beinhalten wie auch $\mathbf{v}_\alpha$ die entsprechenden PC-Koeffizienten.

Auf gleiche Weise werden die Schalenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ als PC-Entwicklung dargestellt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = \sum_{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} \Psi_{\gamma} . \quad (6.12)$$

Die PC-Koeffizienten $\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}$ werden unter Berücksichtigung von Gleichung (3.27) und der Berechnungsvorschrift für die Multiplikation zweier PC-Variablen, siehe Gleichung (5.121), wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11\gamma} \\ \varepsilon_{22\gamma} \\ 2\varepsilon_{12\gamma} \\ \kappa_{11\gamma} \\ \kappa_{22\gamma} \\ 2\kappa_{12\gamma} \\ \gamma_{13\gamma} \\ \gamma_{23\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\gamma,1} + (1/2)D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,1}u_{1\beta,1} + u_{2\alpha,1}u_{2\beta,1} + u_{3\alpha,1}u_{3\beta,1}) \\ u_{2\gamma,2} + (1/2)D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,2}u_{1\beta,2} + u_{2\alpha,2}u_{2\beta,2} + u_{3\alpha,2}u_{3\beta,2}) \\ u_{1\gamma,2} + u_{2\gamma,1} + D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,1}u_{1\beta,2} + u_{2\alpha,1}u_{2\beta,2} + u_{3\alpha,1}u_{3\beta,2}) \\ \beta_{1\gamma,1} \\ \beta_{2\gamma,2} \\ \beta_{1\gamma,2} + \beta_{2\gamma,1} \\ \beta_{1\gamma} + u_{3\gamma,1} \\ \beta_{2\gamma} + u_{3\gamma,2} \end{bmatrix} . \quad (6.13)$$

Dabei bezeichnet $D_{\alpha\beta\gamma}$ den erforderlichen Multiplikationstensor. An dieser Stelle sei angemerkt, dass alle auftretenden griechischen Indizes einer PC-Variablen stets aus der Menge $\{0, \dots, P\}$ sind. Aus der schwachen Form in Gleichung (6.7) geht hervor, dass zudem die Approximation der virtuellen Schalenverzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ benötigt wird. Unter Berücksichtigung der PC-Entwicklung von $\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ in Gleichung (6.12) wird die PC-Entwicklung von $\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\omega)$ formal bestimmt durch

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\lambda}} \left(\sum_{\gamma} \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} \Psi_{\gamma} \right) \delta \mathbf{v}_{\lambda} = \sum_{\gamma} \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}}{\partial \mathbf{v}_{\lambda}} \delta \mathbf{v}_{\lambda}}_{\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}} \Psi_{\gamma} = \sum_{\gamma} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} \Psi_{\gamma} . \quad (6.14)$$

Die Größe $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}$ entspricht gerade der Richtungsableitung des PC-Koeffizienten $\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma}$ in Richtung der Größe $\delta \mathbf{v}_{\lambda}$, vgl. Gleichung (2.48). Anhand der Komponente $\varepsilon_{11\gamma}$, siehe Gleichung (6.13), wird die Berechnung der Richtungsableitung im Detail beschrieben. Die partielle Ableitung dieser Verzerrungskomponente nach den

Koeffizienten der einzelnen Verschiebungen führt auf

$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon_{11\gamma} &= \frac{\partial\varepsilon_{11\gamma}}{\partial u_{1\lambda,1}} \delta u_{1\lambda,1} + \frac{\partial\varepsilon_{11\gamma}}{\partial u_{2\lambda,1}} \delta u_{2\lambda,1} + \frac{\partial\varepsilon_{11\gamma}}{\partial u_{3\lambda,1}} \delta u_{3\lambda,1} \\
 &= \delta_{\gamma\lambda} \delta u_{1\lambda,1} + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{\alpha\lambda} u_{1\beta,1} + \delta_{\beta\lambda} u_{1\alpha,1}) \delta u_{1\lambda,1} \\
 &\quad + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{\alpha\lambda} u_{2\beta,1} + \delta_{\beta\lambda} u_{2\alpha,1}) \delta u_{2\lambda,1} \\
 &\quad + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta\gamma} (\delta_{\alpha\lambda} u_{3\beta,1} + \delta_{\beta\lambda} u_{3\alpha,1}) \delta u_{3\lambda,1} .
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Dabei bezeichnet $\delta(\bullet)$ die Variation einer Größe, wohingegen $\delta_{\alpha\beta}$ das KRONECKER-Delta darstellt. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Tensors $D_{\alpha\beta\gamma}$, siehe Gleichung (5.120) vereinfacht sich die Darstellung in Gleichung (6.15) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \delta\varepsilon_{11\gamma} &= (\delta_{\gamma\lambda} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,1} \\
 &\quad + (D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{2\beta,1}) \delta u_{2\lambda,1} + (D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{3\beta,1}) \delta u_{3\lambda,1} .
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Wird der Multiplikationstensor ausgeklammert, so gilt für den PC-Koeffizienten der virtuellen Schalenverzerrung

$$\delta\varepsilon_{11\gamma} = D_{\lambda\beta\gamma} [(\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,1} + u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,1} + u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,1}] . \tag{6.17}$$

Eine ausführliche Herleitung der restlichen Variationen ist in Anhang C zu finden. Die Vektor $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$ beinhaltet den γ -ten Koeffizienten der virtuellen Schalenverzerrungen und lautet

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_{11\gamma} \\ \delta\varepsilon_{22\gamma} \\ 2\delta\varepsilon_{12\gamma} \\ \delta\kappa_{11\gamma} \\ \delta\kappa_{22\gamma} \\ 2\delta\kappa_{12\gamma} \\ \delta\gamma_{13\gamma} \\ \delta\gamma_{23\gamma} \end{bmatrix} = D_{\lambda\beta\gamma} \begin{bmatrix} (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,1} + u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,1} + u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,1} \\ u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,2} + u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,2} \\ u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,1} + (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,1} \\ \quad + u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,2} + u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,1} + u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,2} \\ \delta_{\beta 0} \delta\beta_{1\lambda,1} \\ \delta_{\beta 0} \delta\beta_{2\lambda,2} \\ \delta_{\beta 0} \delta\beta_{1\lambda,2} + \delta_{\beta 0} \delta\beta_{2\lambda,1} \\ \delta_{\beta 0} \delta\beta_{1\lambda} + \delta_{\beta 0} \delta u_{3\lambda,1} \\ \delta_{\beta 0} \delta\beta_{2\lambda} + \delta_{\beta 0} \delta u_{3\lambda,2} \end{bmatrix} . \tag{6.18}$$

Da die Berechnungsvorschrift für die erste Variation $\delta(\bullet)$ und die Linearisierung $\Delta(\bullet)$ einer Größe identisch sind, lautet die PC-Entwicklung der linearisierten Schalenverzerrungen

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = \sum_{\gamma} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma \Psi_\gamma \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma}{\partial \mathbf{v}_\mu} \Delta \mathbf{v}_\mu . \tag{6.19}$$

Für die stochastische Diskretisierung des linearen Inkrements $\mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i(\omega)]$ in Gleichung (6.8) wird zusätzlich die PC-Entwicklung der linearisierten virtuellen stochastischen Schalenverzerrungen $\Delta\delta\epsilon(\omega)$ benötigt. Formal wird diese bestimmt durch

$$\Delta\delta\epsilon(\omega) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\mu} \left(\sum_\gamma \delta\epsilon_\gamma \Psi_\gamma \right) \Delta \mathbf{v}_\mu = \sum_\gamma \underbrace{\frac{\partial \delta\epsilon_\gamma}{\partial \mathbf{v}_\mu} \Delta \mathbf{v}_\mu}_{\Delta\delta\epsilon_\gamma} \Psi_\gamma = \sum_\gamma \Delta\delta\epsilon_\gamma \Psi_\gamma . \quad (6.20)$$

Für den Koeffizienten $\Delta\delta\epsilon_{11\gamma}$ der linearisierten virtuellen Membranverzerrung gilt

$$\begin{aligned} \Delta\delta\epsilon_{11\gamma} &= \frac{\partial \delta\epsilon_{11\gamma}}{\partial u_{1\mu,1}} \Delta u_{1\mu,1} + \frac{\partial \delta\epsilon_{11\gamma}}{\partial u_{2\mu,1}} \Delta u_{2\mu,1} + \frac{\partial \delta\epsilon_{11\gamma}}{\partial u_{3\mu,1}} \Delta u_{3\mu,1} \\ &= D_{\lambda\beta\gamma} \delta_{\beta\mu} [\delta u_{1\lambda,1} \Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1} \Delta u_{2\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1} \Delta u_{3\mu,1}] \\ &= D_{\lambda\mu\gamma} [\delta u_{1\lambda,1} \Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1} \Delta u_{2\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1} \Delta u_{3\mu,1}] . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die übrigen Herleitungen sind ebenfalls detailliert in Anhang C beschrieben. Im Vektor $\Delta\delta\epsilon_\gamma$ sind die γ -ten PC-Koeffizienten der linearisierten virtuellen Schalenverzerrungen zusammengefasst:

$$\Delta\delta\epsilon_\gamma = \begin{bmatrix} \Delta\delta\epsilon_{11\gamma} \\ \Delta\delta\epsilon_{22\gamma} \\ 2\Delta\delta\epsilon_{12\gamma} \\ \Delta\delta\kappa_{11\gamma} \\ \Delta\delta\kappa_{22\gamma} \\ 2\Delta\delta\kappa_{12\gamma} \\ \Delta\delta\gamma_{13\gamma} \\ \Delta\delta\gamma_{23\gamma} \end{bmatrix} = D_{\lambda\mu\gamma} \begin{bmatrix} \delta u_{1\lambda,1} \Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1} \Delta u_{2\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1} \Delta u_{3\mu,1} \\ \delta u_{1\lambda,2} \Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2} \Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2} \Delta u_{3\mu,2} \\ \delta u_{1\lambda,2} \Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{1\lambda,1} \Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2} \Delta u_{2\mu,1} \\ + \delta u_{2\lambda,1} \Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2} \Delta u_{3\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1} \Delta u_{3\mu,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (6.22)$$

In Gleichung (6.22) ist zu erkennen, dass nur die Linearisierung der virtuellen Membranverzerrungen ungleich null ist, vgl. Gleichung (3.62). Dies lässt sich damit begründen, dass die restlichen Verzerrungen, wie Krümmungen und Schubverzerrungen, nur lineare Funktionen der Verschiebungsgrößen sind.

Mit der stochastischen Diskretisierung der Schalenschnittgrößen

$$\sigma(\omega) = \sum_\gamma \sigma_\gamma \Psi_\gamma \quad (6.23)$$

wird die PC-Entwicklung der Linearisierung $\Delta\sigma(\omega)$ bestimmt. Die Berechnungsvorschrift lautet

$$\Delta\sigma(\omega) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_\mu} \left(\sum_\gamma \sigma_\gamma \Psi_\gamma \right) \Delta \epsilon_\mu = \sum_\gamma \underbrace{\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \epsilon_\mu} \Delta \epsilon_\mu}_{\Delta\sigma_\gamma} \Psi_\gamma = \sum_\gamma \Delta\sigma_\gamma \Psi_\gamma . \quad (6.24)$$

Allgemein gilt für die Koeffizienten des Schnittgrößeninkrements

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_\gamma = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_\gamma}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_\mu} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\mu = \mathbf{D}_{\gamma\mu} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_\mu , \quad (6.25)$$

wobei $\mathbf{D}_{\gamma\mu}$ Einträge der erweiterten Materialtangente beschreiben. Im Kontext der stochastischen Formulierung wird das linear elastische Materialverhalten der Schale geschrieben als

$$\boldsymbol{\sigma}(\omega) = \mathbf{D}(\omega) \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) . \quad (6.26)$$

Die PC-Entwicklung der stochastischen Materialmatrix lautet

$$\mathbf{D}(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{D}_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (6.27)$$

Für eine geschichtete Schalenstruktur kann der PC-Koeffizient $\mathbf{D}_{\alpha}$ allgemein angegeben werden mit

$$\mathbf{D}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{D}_{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{mb}^T & \mathbf{D}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}_{\alpha} , \quad (6.28)$$

wobei die Teilmatrizen gemäß Gleichung (3.48) definiert sind. Die explizite Berechnung der PC-Koeffizienten einer stochastischen Materialmatrix wird in Kapitel 8 anhand eines Prinzipbeispiels gezeigt. Mit den PC-Entwicklungen in den Gleichungen (6.12), (6.23) und (6.27) und unter Anwendung der Orthogonalprojektion, vgl. Abschnitt 5.5.2, führt Gleichung (6.26) auf

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta} . \quad (6.29)$$

Für linear elastisches Materialverhalten gilt für die Einträge der Materialtangente

$$\mathbf{D}_{\gamma\mu} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mu}} \left(\sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta} \right) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\mu\gamma} \mathbf{D}_{\alpha} = \sum_{\alpha} D_{\alpha\gamma\mu} \mathbf{D}_{\alpha} . \quad (6.30)$$

Schließlich wird die äußere Belastung, die sich aus Oberflächen- und Randlasten zusammensetzt, wie folgt mit der PCE diskretisiert:

$$\bar{\mathbf{q}}(\omega) = \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{q}}_{\alpha} \Psi_{\alpha} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{t}}(\omega) = \sum_{\alpha} \bar{\mathbf{t}}_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (6.31)$$

Unter Berücksichtigung aller beschriebenen PC-Entwicklungen wird die linearisierte schwache Form in Gleichung (6.8) in der stochastischen Dimension diskretisiert. Die semidiskrete virtuelle innere Arbeit lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta \pi_i(\omega)] &\approx \mathbb{E}[\delta \pi_i^{pc}] = \mathbb{E} \left[\int_{\Omega_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^T \Psi_{\alpha}) (\boldsymbol{\sigma}_{\beta} \Psi_{\beta}) dA \right] \\ &= \mathbb{E}[\Psi_{\alpha} \Psi_{\beta}] \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^T \boldsymbol{\sigma}_{\beta} dA = \int_{\Omega_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}^T \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} dA , \end{aligned} \quad (6.32)$$

wobei die Orthonormalitätseigenschaft $\mathbb{E}[\Psi_\alpha \Psi_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$ der Basispolynome verwendet wird. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Summenzeichen bei den PC-Entwicklungen nicht mehr dargestellt. Die Summation erfolgt gemäß der EINSTEIN'schen Summenkonvention über alle doppelt vorkommenden Indizes, wobei alle griechischen Indizes stets aus der Menge $\{0, \dots, P\}$ sind. Weiterhin kennzeichnet der Index $(\bullet)^{pc}$ die PCE-Diskretisierung. Für die virtuelle äußere Arbeit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta\pi_a(\omega)] &\approx \mathbb{E}[\delta\pi_a^{pc}] = \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} (\delta\mathbf{v}_\alpha^T \Psi_\alpha)(\bar{\mathbf{q}}_\beta \Psi_\beta) dA + \int_{\partial\Omega_0^\sigma} (\delta\mathbf{v}_\alpha^T \Psi_\alpha)(\bar{\mathbf{t}}_\beta \Psi_\beta) ds\right] \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}_\alpha^T \bar{\mathbf{q}}_\alpha dA + \int_{\partial\Omega_0^\sigma} \delta\mathbf{v}_\alpha^T \bar{\mathbf{t}}_\alpha ds . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Für das semidiskrete lineare Inkrement der virtuellen inneren Arbeit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i(\omega)] &\approx \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i^{pc}] = \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \Psi_\alpha)(\Delta\boldsymbol{\sigma}_\beta \Psi_\beta) + (\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \Psi_\alpha)(\boldsymbol{\sigma}_\beta \Psi_\beta) dA\right] \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \Delta\boldsymbol{\sigma}_\alpha + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha dA \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \mathbf{D}_{\alpha\beta} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_\beta + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha dA . \end{aligned} \quad (6.34)$$

Werden alle PC-Koeffizienten der einzelnen Größen in den Vektoren

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{v} &:= [\delta\mathbf{v}_0^T, \dots, \delta\mathbf{v}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{6\bar{P}} , & \delta\boldsymbol{\varepsilon} &:= [\delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T, \dots, \delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}} , \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} &:= [\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T, \dots, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}} , & \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon} &:= [\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^T, \dots, \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}} , \\ \boldsymbol{\sigma} &:= [\boldsymbol{\sigma}_0^T, \dots, \boldsymbol{\sigma}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}} , & \bar{\mathbf{q}} &:= [\bar{\mathbf{q}}_0^T, \dots, \bar{\mathbf{q}}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{6\bar{P}} \text{ und} \\ \bar{\mathbf{t}} &:= [\bar{\mathbf{t}}_0^T, \dots, \bar{\mathbf{t}}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{6\bar{P}} \end{aligned} \quad (6.35)$$

zusammengefasst, so lautet die kompakte Darstellung der semidiskreten Linearisierung in Gleichung (6.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc}]] &= \mathbb{E}[\delta\pi^{pc}] + \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i^{pc}] \\ &= \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA - \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{q}} dA - \int_{\partial\Omega_0^\sigma} \delta\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} ds \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = 0 . \end{aligned} \quad (6.36)$$

Dabei werden alle Einträge $\mathbf{D}_{\gamma\mu}$ der Materialtangente in der erweiterten Materialmatrix

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \dots & \mathbf{D}_{0P} \\ \vdots & \mathbf{D}_{\gamma\mu} & \vdots \\ \mathbf{D}_{P0} & \dots & \mathbf{D}_{PP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \dots & \mathbf{D}_{0P} \\ \vdots & \mathbf{D}_{\gamma\mu} & \vdots \\ \text{sym.} & \dots & \mathbf{D}_{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\bar{P} \times 8\bar{P}} \quad (6.37)$$

angeordnet. Die Symmetrieeigenschaften des Multiplikationstensors übertragen sich dabei auf die Matrix $\mathbf{D}$. Eine effiziente Implementierung zur Berechnung der erweiterten Materialmatrix in Gleichung (6.37) ist in Anhang B Tafel B.3 dargestellt.

6.2.2 Räumliche Diskretisierung mit der FEM

Die Diskretisierung der bislang in der räumlichen Dimension kontinuierlichen Gleichung (6.36) mittels der Finite-Elemente-Methode (FEM) wird im Folgenden dargestellt. Für einen umfassenden Einblick in die Methode wird an dieser Stelle auf die Bücher von ZIENKIEWICZ ET AL. [140] und BATHE [14] verwiesen.

Im Rahmen der FEM wird ein kontinuierlicher Körper $\mathcal{B}$ in endlich kleine Teilkörper unterteilt, die als Elemente bezeichnet werden. Die FE-Diskretisierung der deterministischen Referenzkonfiguration Ω_0 in *numel* Teilkörper lautet

$$\Omega_0 \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{numel} \Omega_e . \quad (6.38)$$

Dabei beschreibt Ω_e das Gebiet eines einzelnen Elements und der hochgestellte Index $(\bullet)^h$ kennzeichnet die FE-Diskretisierung. Unter Berücksichtigung der FE-Approximation lautet die vollständige Diskretisierung der semidiskreten Linearisierung $L[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc}]]$ in Gleichung (6.36)

$$\begin{aligned} L[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc}]] &\approx L[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc,h}]] = \mathbb{E}[\delta\pi^{pc,h}] + \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i^{pc,h}] \\ &= \bigcup_{e=1}^{numel} \left(\mathbb{E}[\delta\pi^{pc,h,e}] + \mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i^{pc,h,e}] \right) = 0 . \end{aligned} \quad (6.39)$$

Die FE-Diskretisierung der elementbezogenen Größen $\mathbb{E}[\delta\pi^{pc,h,e}]$ und $\mathbb{E}[\Delta\delta\pi_i^{pc,h,e}]$ wird im Folgenden detailliert beschrieben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Indizes $(\bullet)^{pc,h,e}$ verzichtet.

Im Rahmen der entwickelten stochastischen FE-Formulierung werden 4-Knoten-Elemente verwendet, für die $nel = 4$ gilt. Für jedes Schalenelement wird ein lokales, orthonormales Basissystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ eingeführt, vgl. Abschnitt 3.1. Der Mittelpunkt eines Elements berechnet sich über

$$\mathbf{X}_c^g = \frac{1}{4} \sum_{I=1}^4 \mathbf{X}_I^g , \quad (6.40)$$

wobei $\mathbf{X}_I^g$ die globalen Koordinaten des Knotens I sind. Mit den beiden normierten Diagonalvektoren

$$\mathbf{d}_1 := \frac{\mathbf{X}_3^g - \mathbf{X}_1^g}{\|\mathbf{X}_3^g - \mathbf{X}_1^g\|} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_2 := \frac{\mathbf{X}_2^g - \mathbf{X}_4^g}{\|\mathbf{X}_2^g - \mathbf{X}_4^g\|} \quad (6.41)$$

lässt sich das lokale orthonormale Basissystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ mit den Basisvektoren

$$\mathbf{A}_1 := \frac{\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2\|}, \quad \mathbf{A}_2 := \frac{\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2}{\|\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2\|} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{N} := \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \quad (6.42)$$

im Mittelpunkt $\mathbf{X}_c^g$ eines Schalenelements definieren. Bei unregelmäßigen bzw. verzerrten FE-Netzen führt die Berechnungsvorschrift gemäß Gleichung (6.42) zu unterschiedlichen Basissystemen in den einzelnen Elementen. Für isotropes Materialverhalten stellt dies kein Problem dar. Bei richtungsabhängigem Werkstoffverhalten, wie etwa transversaler Isotropie, ist das nicht zulässig, sofern die Faserorientierung an den Basisvektoren $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ gebunden ist. Es kann auch eine sogenannte Lamina-Basis verwendet werden, siehe HUGHES [60]. Dabei liegen die Basisvektoren $\mathbf{A}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ möglichst nahe an den Koordinaten ξ und η . Diese Koordinaten sind in Abbildung 6.2 veranschaulicht.

Die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} := [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \mathbf{A}_3]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (6.43)$$

bildet das globale Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ auf das lokale Basissystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ eines Schalenelements ab. Für die Koordinaten lautet die Transformation

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}(\mathbf{X}^g - \mathbf{X}_c^g), \quad (6.44)$$

wobei $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3 = 0]^T$ den Ortsvektor bezüglich der lokalen Basis $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ bezeichnet, siehe Abbildung 6.2. Aufgrund der Transformation sind nur noch die ersten beiden Einträge des Vektors $\mathbf{X}$ ungleich null. Im Gegensatz dazu weist der Ortsvektor im globalen KOS $\mathbf{X}^g = [X_1^g, X_2^g, X_3^g]^T$ im Allgemeinen Einträge in allen drei Raumrichtungen auf.

Im Rahmen einer fünfparametrischen Schalenformulierung werden lokal nur drei Verschiebungen und zwei Rotationen berücksichtigt. Dies ist daran zu erkennen, dass für die Berechnung der Schalenverzerrungen nur fünf Verschiebungsgrößen benötigt werden, siehe Gleichung (6.13). Die PC-Koeffizienten des lokalen Verschiebungsfeldes lauten

$$\mathbf{v}_\alpha = [u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, u_{3\alpha}, \beta_{1\alpha}, \beta_{2\alpha}, 0]^T = [\mathbf{u}_\alpha, \boldsymbol{\beta}_\alpha]^T, \quad \alpha = 0, \dots, P. \quad (6.45)$$

Dabei werden die lokalen Rotationsfreiheitsgrade der Schale im Rahmen der FE-Formulierung mit

$$\beta_{1\alpha} = -\beta_{2\alpha}^{\text{konti}} \quad \text{und} \quad \beta_{2\alpha} = \beta_{1\alpha}^{\text{konti}}, \quad \alpha = 0, \dots, P \quad (6.46)$$

definiert. Somit beschreibt $\beta_{i\alpha}$ eine Verdrehung um die lokale Achse $\mathbf{A}_i$, siehe Abbildung 6.1. Im globalen Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ hingegen beinhaltet der

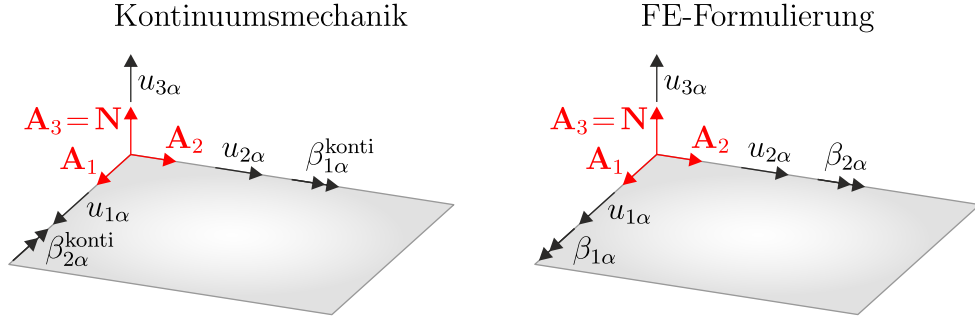


Abbildung 6.1: Definition der Verschiebungsgrößen der Schale in der Kontinuumsmechanik (links) und im Rahmen der FE-Formulierung (rechts)

Vektor

$$\mathbf{v}_\alpha^g = [u_{1\alpha}^g, u_{2\alpha}^g, u_{3\alpha}^g, \beta_{1\alpha}^g, \beta_{2\alpha}^g, \beta_{3\alpha}^g]^T = [\mathbf{u}_\alpha^g, \boldsymbol{\beta}_\alpha^g]^T, \quad \alpha = 0, \dots, P \quad (6.47)$$

sowohl drei Verschiebungen als auch drei Verdrehungen. Die Transformation zwischen den PC-Koeffizienten des lokalen und des globalen Verschiebungsfeldes lautet

$$\mathbf{v}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \boldsymbol{\beta}_\alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^6} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\alpha^g \\ \boldsymbol{\beta}_\alpha^g \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{v}_\alpha^g, \quad \alpha = 0, \dots, P. \quad (6.48)$$

In bestimmten Fällen kann es erforderlich sein, die Transformation in Gleichung (6.48) zu modifizieren, siehe Anhang C. Die einzelnen PC-Koeffizienten $\mathbf{v}_\alpha$ in Gleichung (6.45) werden mit bilinearen Ansatzfunktionen $N_I, I = 1, \dots, 4$ approximiert:

$$\mathbf{v}_\alpha = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{v}_{I\alpha} = \sum_I N_I \mathbf{v}_{I\alpha}. \quad (6.49)$$

Dabei beinhaltet

$$\mathbf{v}_{I\alpha} = [u_{1I\alpha}, u_{2I\alpha}, u_{3I\alpha}, \beta_{1I\alpha}, \beta_{2I\alpha}, 0]^T = [\mathbf{u}_{I\alpha}, \boldsymbol{\beta}_{I\alpha}]^T. \quad (6.50)$$

die zum Knoten I und Basispolynom Ψ_α zugehörigen PC-Koeffizienten der Knotenverschiebungen. Die Koeffizienten des virtuellen und des linearisierten Verschiebungsfeldes werden analog zu Gleichung (6.49) mit

$$\delta \mathbf{v}_\alpha = \sum_I N_I \delta \mathbf{v}_{I\alpha} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{v}_\alpha = \sum_K N_K \Delta \mathbf{v}_{K\alpha} \quad (6.51)$$

approximiert. Dabei sind die Ansatzfunktionen $N_I(\xi, \eta)$ in Gleichung (6.49) in einem natürlichen Raum mit den Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ definiert. In Abhängigkeit von ξ und η lauten die Interpolationsfunktionen

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta), \quad \xi_I \in \{-1, 1, 1, -1\}, \quad \eta_I \in \{-1, -1, 1, 1\}. \quad (6.52)$$

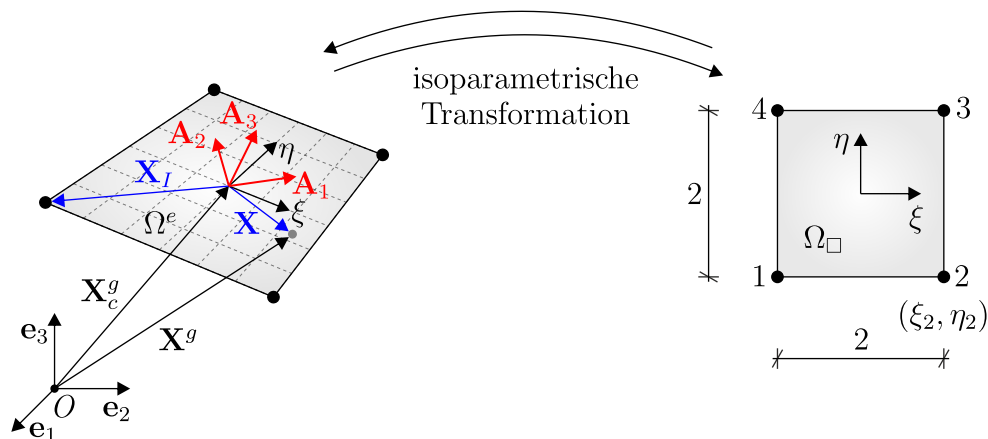


Abbildung 6.2: Schalenelement im physikalischen Raum mit dem lokalen Basissystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ im Mittelpunkt $\mathbf{X}_c^g$ (links) sowie das zugehörige Referenzelement im natürlichen Raum mit den Koordinaten ξ (rechts)

Die natürlichen Koordinaten des Knotens I werden mit ξ_I und η_I bezeichnet. Ein Schalenelement mit der Fläche Ω^e entspricht im natürlichen Raum einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $\Omega_{\square} = 4$, siehe Abbildung 6.2.

Im Rahmen des *isoparametrischen Konzepts* wird sowohl für das Verschiebungsfeld als auch für die Geometrie der gleiche Interpolationsansatz verwendet. Die Approximation des lokalen, deterministischen Ortsvektors $\mathbf{X}$ lautet

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{X}_I = \sum_I N_I \mathbf{X}_I, \quad (6.53)$$

wobei $\mathbf{X}_I = [X_{I1}, X_{I2}, X_{I3} = 0]^T$ die zugehörigen Knotenkoordinaten im lokalen Basissystem bezeichnet.

Im Rahmen der FE-Formulierung werden die Ableitungen des Verschiebungsfeldes nach den lokalen Koordinatenrichtungen $\mathbf{A}_j, j = 1, 2$ benötigt:

$$\mathbf{v}_{\alpha,j} = \sum_I N_{I,j} \mathbf{v}_{I\alpha}, \quad \alpha = 0, \dots, P, \quad j = 1, 2. \quad (6.54)$$

Mithilfe der JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \begin{bmatrix} X_{1,\xi} & X_{1,\eta} \\ X_{2,\xi} & X_{2,\eta} \end{bmatrix} = \sum_I \begin{bmatrix} N_{I,\xi} X_{I1} & N_{I,\eta} X_{I1} \\ N_{I,\xi} X_{I2} & N_{I,\eta} X_{I2} \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

werden die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_{I,j}, j = 1, 2$ nach den lokalen Koordinatenrichtungen $\mathbf{A}_j, j = 1, 2$ berechnet. Es gilt

$$\begin{bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{bmatrix}, \quad (6.56)$$

wobei $N_{I,\xi}$ und $N_{I,\eta}$ die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten bezeichnen. Weiterhin verknüpft die Determinante der JACOBI-Matrix $\det \mathbf{J}$ die folgenden Integrale miteinander:

$$\int_{\Omega^e} (\bullet) d\Omega^e = \int_{\Omega_\square} (\bullet) \det \mathbf{J} d\Omega_\square \quad (6.57)$$

Mit dem Interpolationsansatz in Gleichung (6.51) wird die Diskretisierung der PC-Koeffizienten der virtuellen Schalenverzerrungen aus Gleichung (6.18) formuliert. Für den Koeffizienten $\delta\varepsilon_{11\gamma}$ aus Gleichung (6.17) lautet die Approximation

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{11\gamma} &= D_{\lambda\beta\gamma} \left((\delta\beta_0 + u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,1} + u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,1} + u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,1} \right) \\ &= \sum_I D_{\lambda\beta\gamma} \left((\delta\beta_0 + u_{1\beta,1}) N_{I,1} \delta u_{1I\lambda} + u_{2\beta,1} N_{I,1} \delta u_{2I\lambda} + u_{3\beta,1} N_{I,1} \delta u_{3I\lambda} \right) \\ &= \sum_I D_{\lambda\beta\gamma} \begin{bmatrix} (\delta\beta_0 + u_{1\beta,1}) N_{I,1} & u_{2\beta,1} N_{I,1} & u_{3\beta,1} N_{I,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{v}_{I\lambda} . \end{aligned} \quad (6.58)$$

Insgesamt gilt für die Interpolation des PC-Koeffizienten $\delta\varepsilon_\gamma$:

$$\delta\varepsilon_\gamma = \sum_I \underbrace{D_{\lambda\beta\gamma} \mathbf{B}_{I\beta}}_{\mathbf{B}_{I\gamma\lambda}} \delta \mathbf{v}_{I\lambda} = \sum_I D_{\lambda\beta\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I\beta}^m & \mathbf{0}_{3 \times 2} & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{B}_{I\beta}^b & 0 \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{B}_{I\beta}^s & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{I\beta}} \delta \mathbf{v}_{I\lambda} . \quad (6.59)$$

Die B-Matrix $\mathbf{B}_{I\beta}$ in Gleichung (6.59) für den Knoten I lässt sich dabei in einen Membrananteil $\mathbf{B}_{I\beta}^m$, einen Biegeanteil $\mathbf{B}_{I\beta}^b$ und einen Schubanteil $\mathbf{B}_{I\beta}^s$ aufteilen. Für die einzelnen Teilmatrizen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{I\beta}^m &= \begin{bmatrix} (\delta\beta_0 + u_{1\beta,1}) N_{I,1} & u_{2\beta,1} N_{I,1} & u_{3\beta,1} N_{I,1} \\ u_{1\beta,2} N_{I,2} & (\delta\beta_0 + u_{2\beta,2}) N_{I,2} & u_{3\beta,2} N_{I,2} \\ (\delta\beta_0 + u_{1\beta,1}) N_{I,2} & u_{2\beta,1} N_{I,2} & u_{3\beta,1} N_{I,2} \\ + u_{1\beta,2} N_{I,1} & + (\delta\beta_0 + u_{2\beta,2}) N_{I,1} & + u_{3\beta,2} N_{I,1} \end{bmatrix} , \\ \mathbf{B}_{I\beta}^b &= \begin{bmatrix} 0 & \delta\beta_0 N_{I,1} \\ -\delta\beta_0 N_{I,2} & 0 \\ -\delta\beta_0 N_{I,1} & \delta\beta_0 N_{I,2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{I\beta}^s = \begin{bmatrix} \delta\beta_0 N_{I,1} & 0 & \delta\beta_0 N_{I,1} \\ \delta\beta_0 N_{I,2} & -\delta\beta_0 N_{I,1} & 0 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (6.60)$$

Mit der Definition $\mathbf{B}_{I\gamma\lambda} := D_{\lambda\beta\gamma} \mathbf{B}_{I\beta}$ in Gleichung (6.59) wird die Approximation der virtuellen Schalenverzerrungen geschrieben als

$$\delta\varepsilon = \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_0 \\ \vdots \\ \delta\varepsilon_P \end{bmatrix} = \sum_I \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I00} & \dots & \mathbf{B}_{I0P} \\ \vdots & \mathbf{B}_{I\gamma\lambda} & \vdots \\ \mathbf{B}_{IP0} & \dots & \mathbf{B}_{IPP} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_{I0} \\ \vdots \\ \delta \mathbf{v}_{IP} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{v}_I} = \sum_I \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I , \quad (6.61)$$

wobei in dieser Darstellung die zum Knoten I zugehörige, erweiterte B-Matrix $\mathbf{B}_I \in \mathbb{R}^{8\bar{P} \times 6\bar{P}}$ eingeführt wird. Der Vektor $\delta \mathbf{v}_I \in \mathbb{R}^{6\bar{P}}$ beinhaltet alle PC-Koeffizienten der virtuellen Knotenverschiebungen des Knotens I . Anhand Gleichung (6.61) ist ersichtlich, dass die Approximation der virtuellen Schalenverzerrungen in der gleichen Form wie in einer herkömmlichen FE-Formulierung dargestellt werden kann. Die Größe der B-Matrix $\mathbf{B}_I$ und die des Vektors $\delta \mathbf{v}_I$ richten sich nach der Anzahl der Basispolynome $\bar{P}$. Die vollständige Diskretisierung der schwachen Form auf Elementebene lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta \pi^{pc,h,e}] &= \mathbb{E}[\delta \pi_i^{pc,h,e}] - \mathbb{E}[\delta \pi_a^{pc,h,e}] \\ &= \sum_I \delta \mathbf{v}_I^T \left\{ \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} \, dA}_{\mathbf{f}_I} - \underbrace{\left(\int_{\Omega^e} N_I \bar{\mathbf{q}} \, dA + \int_{\partial\Omega^e} \bar{N}_I \bar{\mathbf{f}} \, ds \right)}_{\mathbf{p}_I} \right\} \\ &= \sum_I \delta \mathbf{v}_I^T (\mathbf{f}_I - \mathbf{p}_I) = \sum_I \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{g}_I \\ &= \delta \mathbf{v}^{eT} (\mathbf{f}^e - \mathbf{p}^e) = \delta \mathbf{v}^{eT} \mathbf{g}^e, \end{aligned} \quad (6.62)$$

wobei $\mathbf{g}^e$ den Elementresidualvektor bezeichnet. Dieser beschreibt die Differenz zwischen dem Vektor der inneren Kräfte $\mathbf{f}^e$ und dem Elementlastvektor $\mathbf{p}^e$. Der Fehlkraftvektor $\mathbf{g}^e$ setzt sich aus den knotenbezogenen Anteilen $\mathbf{g}_I, I = 1, \dots, 4$ zusammen, die wiederum alle zugehörigen PC-Koeffizienten $\mathbf{g}_{I\alpha}, \alpha = 0, \dots, P$ enthalten:

$$\mathbf{g}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_I \\ \vdots \\ \mathbf{g}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24\bar{P}} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{I0} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{I\alpha} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{IP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\bar{P}}. \quad (6.63)$$

Die Integrale in Gleichung (6.62) werden numerisch mit der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur gelöst, vgl. Abschnitt 5.3.1. Dabei findet die numerische Integration auf dem Referenzelement $\Omega_{\square} \in [-1, 1]^2$ statt. Für 4-Knoten-Elemente werden standardmäßig zwei Integrationspunkte pro Richtung verwendet.

Die Diskretisierung des linearen Inkrements $\mathbb{E}[\Delta \delta \pi_i^{pc,h,e}]$ wird im Folgenden erläutert. Da die Berechnungsvorschrift für die erste Variation und die Linearisierung einer Größe gleich sind, lautet die Approximation der linearisierten Schalenverzerrungen

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \vdots \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P \end{bmatrix} = \sum_K \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{K00} & \dots & \mathbf{B}_{K0P} \\ \vdots & \mathbf{B}_{K\gamma\mu} & \vdots \\ \mathbf{B}_{KP0} & \dots & \mathbf{B}_{KPP} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_K} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_{K0} \\ \vdots \\ \delta \mathbf{v}_{KP} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{v}_K} = \sum_K \mathbf{B}_K \Delta \mathbf{v}_K. \quad (6.64)$$

Der Arbeitsanteil $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}$ in Gleichung (6.36) wird zunächst vereinfacht zu

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^T\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \Delta\delta\varepsilon_{11\alpha}n_\alpha^{11} + 2\Delta\delta\varepsilon_{12\alpha}n_\alpha^{12} + \Delta\delta\varepsilon_{22\alpha}n_\alpha^{22} . \quad (6.65)$$

Die Komponente $\Delta\delta\varepsilon_{11\alpha}$ wird mit den Verschiebungsansätzen folgendermaßen diskretisiert:

$$\begin{aligned} \Delta\delta\varepsilon_{11\alpha} &= D_{\lambda\mu\alpha} [\delta u_{1\lambda,1}\Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1}\Delta u_{2\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1}\Delta u_{3\mu,1}] \\ &= D_{\lambda\mu\alpha} \left[\sum_I \sum_K N_{I,1}N_{K,1} (\delta u_{1I\lambda}\Delta u_{1K\mu} + \delta u_{2I\lambda}\Delta u_{2K\mu} + \delta u_{3I\lambda}\Delta u_{3K\mu}) \right] \\ &= \sum_I \sum_K D_{\lambda\mu\alpha} \delta \mathbf{u}_{I\lambda}^T (N_{I,1}N_{K,1}) \Delta \mathbf{u}_{K\mu} . \end{aligned} \quad (6.66)$$

Dabei beinhalten die beiden Vektoren

$$\delta \mathbf{u}_{I\lambda}^T = [\delta u_{1I\lambda}, \delta u_{2I\lambda}, \delta u_{3I\lambda}]^T \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{u}_{K\mu}^T = [\Delta u_{1K\mu}, \Delta u_{2K\mu}, \Delta u_{3K\mu}]^T \quad (6.67)$$

nur Verschiebungsfreiheitsgrade. Unter Berücksichtigung von Gleichung (6.66) gilt für den ersten Arbeitsanteil aus Gleichung (6.65)

$$\Delta\delta\varepsilon_{11\alpha}n_\alpha^{11} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{u}_{I\lambda}^T (D_{\lambda\mu\alpha} N_{I,1}N_{K,1}n_\alpha^{11}) \Delta \mathbf{u}_{K\mu} . \quad (6.68)$$

Werden die übrigen Summanden in Gleichung (6.65) sinngemäß approximiert, so gilt für das diskretisierte Skalarprodukt

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_{I\lambda}^T \mathbf{G}_{IK\lambda\mu} \Delta \mathbf{v}_{K\mu} , \quad (6.69)$$

wobei die Vektoren $\delta \mathbf{v}_{I\lambda}^T$ und $\Delta \mathbf{v}_{K\mu}$ drei Verschiebungen und drei Rotationen beinhalten. Für die zu den Knoten I und K und den PC-Koeffizienten λ und μ zugehörige Matrix gilt

$$\mathbf{G}_{IK\lambda\mu} = D_{\lambda\mu\alpha} \begin{bmatrix} \hat{n}_{IK\alpha} \mathbf{1}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

$$\text{mit } \hat{n}_{IK\alpha} = N_{I,1}N_{K,1}n_\alpha^{11} + (N_{I,1}N_{K,2} + N_{I,2}N_{K,1})n_\alpha^{12} + N_{I,2}N_{K,2}n_\alpha^{22} .$$

Mit der Definition der erweiterten Matrix

$$\mathbf{G}_{IK} := \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{IK00} & \dots & \mathbf{G}_{IK0P} \\ \vdots & \mathbf{G}_{IK\lambda\mu} & \vdots \\ \mathbf{G}_{IKP0} & \dots & \mathbf{G}_{IKPP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\bar{P} \times 6\bar{P}} \quad (6.71)$$

lautet die kompakte Darstellung von Gleichung (6.69)

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{G}_{IK} \Delta \mathbf{v}_K . \quad (6.72)$$

Schließlich folgt auf Elementebene die vollständige Diskretisierung des linearen Inkrements

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\Delta \delta \pi_i^{pc,h,e}] &= \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_I^T \left(\underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK} \, dA}_{\mathbf{k}_{TIK}} \right) \Delta \mathbf{v}_K \\
 &= \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{k}_{TIK} \Delta \mathbf{v}_K \\
 &= \delta \mathbf{v}^{eT} \mathbf{k}_T^e \Delta \mathbf{v}^e,
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

wobei $\mathbf{k}_{TIK}$ den Knotenanteil der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_T^e$ beschreibt. Die Integrale in Gleichung (6.73) werden ebenfalls mit der GAUSS-LEGENDRE-Quadratur berechnet. Der auf das Knotenpaar IK bezogene Anteil $\mathbf{k}_{TIK}$ lässt sich weiterhin in die Paare der PC-Koeffizienten $\alpha\beta$ unterteilen:

$$\mathbf{k}_{TIK} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{TIK00} & \dots & \mathbf{k}_{TI0P} \\ \vdots & \mathbf{k}_{TIK\alpha\beta} & \vdots \\ \mathbf{k}_{TIKP0} & \dots & \mathbf{k}_{TIKPP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\bar{P} \times 6\bar{P}}. \tag{6.74}$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix für ein Element e setzt sich schließlich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{k}_T^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{T11} & \dots & \mathbf{k}_{T14} \\ \vdots & \mathbf{k}_{TIK} & \vdots \\ \mathbf{k}_{T41} & \dots & \mathbf{k}_{T44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24\bar{P} \times 24\bar{P}}. \tag{6.75}$$

Bevor die elementbezogenen Größen $\mathbf{g}^e$ und $\mathbf{k}_T^e$ assembliert werden können, müssen diese in das globale KOS mit den zugehörigen Basisvektoren $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ transformiert werden. Die Transformation der globalen Knotenverschiebungen $\mathbf{v}_I^g$ in das lokale Basissystem eines Schalenelements lautet

$$\mathbf{v}_I = \bar{\mathbf{T}}_I \mathbf{v}_I^g, \quad \bar{\mathbf{T}}_I = \text{diag}(\underbrace{\bar{\mathbf{T}}, \dots, \bar{\mathbf{T}}}_{\bar{P}\text{-mal}}) \in \mathbb{R}^{6\bar{P} \times 6\bar{P}}, \tag{6.76}$$

wobei $\bar{\mathbf{T}}_I$ eine Blockdiagonalmatrix ist. Die Matrix $\bar{\mathbf{T}}$ ist in Gleichung (6.48) definiert. Mit den Transformationsbeziehungen

$$\mathbf{g}_I^g = \bar{\mathbf{T}}_I^T \mathbf{g}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_{TIK}^g = \bar{\mathbf{T}}_I^T \mathbf{k}_{TIK} \bar{\mathbf{T}}_K \tag{6.77}$$

werden das Elementresiduum $\mathbf{g}^{e,g}$ und die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_T^{e,g}$ im globalen Koordinatensystem $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ ermittelt. Der Zusammenbau aller elementbezogenen Größen führt auf Systemebene zu den globalen Vektoren und Matrizen:

$$\delta \mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{numel} \delta \mathbf{v}^{e,g}, \quad \Delta \mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{numel} \Delta \mathbf{v}^{e,g}, \quad \mathbf{G} = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{g}^{e,g}, \quad \mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{k}_T^{e,g}. \tag{6.78}$$

Die vollständig diskrete Form von Gleichung (6.39) lautet

$$\mathbf{L}[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc,h}]] = \delta\mathbf{v}^T (\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{v} + \mathbf{G}) = 0 . \quad (6.79)$$

Die Beliebigkeit der PC-Koeffizienten der virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{v}$ führt zum globalen Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{v} = -\mathbf{G} , \quad (6.80)$$

welches im Rahmen eines iterativen Lösungsverfahrens in jedem Iterationsschritt gelöst werden muss. In Kapitel 7 werden verschiedene Verfahren vorgestellt, die im Rahmen einer Berechnung mit der SSFEM Anwendung finden.

6.2.3 Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)

Aufgrund der bilinearen Ansatzfunktionen und der zugrundeliegenden REISSNER-MINDLIN-Kinematik der Schale führt eine vollständige Integration der Elementsteifigkeitsmatrix zu einem Querschub-Versteifungseffekt (engl.: *locking*). Bei sehr dünnwandigen Strukturen werden die Querschubverzerrungen vernachlässigbar klein und es gilt $\gamma_{\alpha 3} \rightarrow 0, \alpha = 1, 2$. Mit den gewählten Interpolationsfunktionen kann diese Bedingung nicht an allen diskreten Integrationspunkten erfüllt werden. Die so entstehenden parasitären Schubverzerrungen führen dazu, dass die Verformungen der Struktur deutlich zu klein sind. Eine selektiv reduzierte Integration (SRI) der Elementsteifigkeitsmatrix löst diese Problematik, führt aber zu sogenannten Nullenergiemoden (engl.: *zero-energy-modes*).

Eine weitere Möglichkeit, um dem Querschub-Versteifungseffekt entgegenzuwirken, bietet der von BATHE & DVORKIN [15, 31] entwickelte Ansatz, welcher im Folgenden im Rahmen der SSFEM formuliert wird. Damit ist eine vollständige Integration der Elementmatrizen möglich, ohne dass die Locking-Problematik auftritt. In den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = [\xi, \eta]^T$ lautet die lineare Interpolation der lokalen Querschubverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma} \\ \tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 - \eta) \tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma}^B + (1 + \eta) \tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma}^D \\ (1 - \xi) \tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma}^A + (1 + \xi) \tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma}^C \end{bmatrix} , \quad \gamma \in \{0, \dots, P\} . \quad (6.81)$$

Dabei bezeichnen $\tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma}$ und $\tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma}$ den γ -ten PC-Koeffizienten der lokalen Schubverzerrungen $\tilde{\gamma}_{\xi 3}$ bzw. $\tilde{\gamma}_{\eta 3}$ im Referenzelement $\Omega_{\square}$, siehe Abbildung 6.3. Für den Interpolationsansatz in Gleichung (6.81) werden die an den Kollokationspunkten A, B, C und D ausgewerteten Querschubverzerrungen benötigt. Diese lauten in Abhängigkeit der lokalen Verschiebungsgrößen

$$\tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma}^M = [X_{1,\xi}^M \beta_{1\gamma}^M + X_{2,\xi}^M \beta_{2\gamma}^M + u_{3\gamma,\xi}^M] \quad M \in \{B, D\} \quad \text{und} \quad (6.82)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma}^L = [X_{1,\eta}^L \beta_{1\gamma}^L + X_{2,\eta}^L \beta_{2\gamma}^L + u_{3\gamma,\eta}^L] \quad L \in \{A, C\} . \quad (6.83)$$

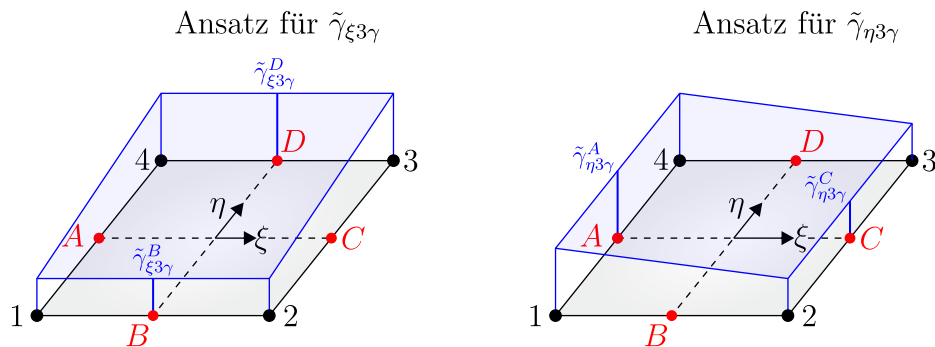


Abbildung 6.3: Lokale Interpolationsansätze gemäß BATHE & DVORKIN [15, 31] für den γ -ten PC-Koeffizienten der Schubverzerrungen $\tilde{\gamma}_{\xi 3}$ und $\tilde{\gamma}_{\eta 3}$

In den Gleichungen (6.82) und (6.83) werden unter anderem die Ableitungen der lokalen Koordinaten $\mathbf{X}$ nach den natürlichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi}$ in allen Kollokationspunkten benötigt. Unter Berücksichtigung der bilinearen Geometrieinterpolation in Gleichung (6.53) lauten diese wie folgt:

$$\begin{aligned}
 X_{1,\eta}^A &= (X_{14} - X_{11})/2, & X_{2,\eta}^A &= (X_{24} - X_{21})/2, \\
 X_{1,\xi}^B &= (X_{12} - X_{11})/2, & X_{2,\xi}^B &= (X_{22} - X_{21})/2, \\
 X_{1,\eta}^C &= (X_{13} - X_{12})/2, & X_{2,\eta}^C &= (X_{23} - X_{22})/2, \\
 X_{1,\xi}^D &= (X_{13} - X_{14})/2, & X_{2,\xi}^D &= (X_{23} - X_{24})/2.
 \end{aligned} \tag{6.84}$$

Auf ähnliche Weise werden die in den Kollokationspunkten ausgewerteten Verdrehungen $\beta_{(1,2)\gamma}^{(M,L)}$ und Verschiebungsgradienten $u_{3\gamma,(\xi,\eta)}^{(M,L)}$ ermittelt. Schließlich lautet die Interpolation der lokalen kompatiblen Schubspannungsverläufe in Gleichung (6.81) wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma} &= \frac{1}{4} (1 - \eta) \left[X_{1,\xi}^B (\beta_{11\gamma} + \beta_{12\gamma}) + X_{2,\xi}^B (\beta_{21\gamma} + \beta_{22\gamma}) + (u_{32\gamma} - u_{31\gamma}) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} (1 + \eta) \left[X_{1,\xi}^D (\beta_{13\gamma} + \beta_{14\gamma}) + X_{2,\xi}^D (\beta_{23\gamma} + \beta_{24\gamma}) + (u_{33\gamma} - u_{34\gamma}) \right], \\
 \tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma} &= \frac{1}{4} (1 - \xi) \left[X_{1,\eta}^A (\beta_{14\gamma} + \beta_{11\gamma}) + X_{2,\eta}^A (\beta_{24\gamma} + \beta_{21\gamma}) + (u_{34\gamma} - u_{31\gamma}) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{4} (1 + \xi) \left[X_{1,\eta}^C (\beta_{12\gamma} + \beta_{13\gamma}) + X_{2,\eta}^C (\beta_{22\gamma} + \beta_{23\gamma}) + (u_{33\gamma} - u_{32\gamma}) \right].
 \end{aligned} \tag{6.85}$$

Ausgehend von der Darstellung in Gleichung (6.85) kann die Variation der beiden

Querschubverzerrungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\gamma}_{\xi 3\gamma} = D_{\lambda\beta\gamma}\delta_{\beta 0} & \left\{ \frac{1}{4}(1-\eta) \left[X_{1,\xi}^B (\delta\beta_{11\lambda} + \delta\beta_{12\lambda}) + X_{2,\xi}^B (\delta\beta_{21\lambda} + \delta\beta_{22\lambda}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\delta u_{32\lambda} - \delta u_{31\lambda}) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4}(1+\eta) \left[X_{1,\xi}^D (\delta\beta_{13\lambda} + \delta\beta_{14\lambda}) + X_{2,\xi}^D (\delta\beta_{23\lambda} + \delta\beta_{24\lambda}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\delta u_{33\lambda} - \delta u_{34\lambda}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.86)$$

und

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\gamma}_{\eta 3\gamma} = D_{\lambda\beta\gamma}\delta_{\beta 0} & \left\{ \frac{1}{4}(1-\xi) \left[X_{1,\eta}^A (\delta\beta_{14\lambda} + \delta\beta_{11\lambda}) + X_{2,\eta}^A (\delta\beta_{24\lambda} + \delta\beta_{21\lambda}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\delta u_{34\lambda} - \delta u_{31\lambda}) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4}(1+\xi) \left[X_{1,\eta}^C (\delta\beta_{12\lambda} + \delta\beta_{13\lambda}) + X_{2,\eta}^C (\delta\beta_{22\lambda} + \delta\beta_{23\lambda}) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\delta u_{33\lambda} - \delta u_{32\lambda}) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.87)$$

Mithilfe der JACOBI-Matrix $\mathbf{J}$, siehe Gleichung (6.55), werden nun die lokalen Querschubverzerrungen in den physikalischen Raum transformiert:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13\gamma} \\ \gamma_{23\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_{13\gamma} \\ \tilde{\gamma}_{23\gamma} \end{bmatrix} . \quad (6.88)$$

Die Interpolation der virtuellen Schubspannungen lässt sich wie folgt formulieren:

$$\begin{bmatrix} \delta\gamma_{13\gamma} \\ \delta\gamma_{23\gamma} \end{bmatrix} = \sum_I D_{\lambda\beta\gamma} \bar{\mathbf{B}}_{I\beta}^s \begin{bmatrix} \delta u_{3\lambda} \\ \delta\beta_{1\lambda} \\ \delta\beta_{2\lambda} \end{bmatrix} . \quad (6.89)$$

Der modifizierte Schubanteil der B-Matrix lautet

$$\bar{\mathbf{B}}_{I\beta}^s = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \delta_{\beta 0} N_{I,\xi} & \delta_{\beta 0} N_{I,\xi} \xi_I X_{1,\xi}^M & \delta_{\beta 0} N_{I,\xi} \xi_I X_{2,\xi}^M \\ \delta_{\beta 0} N_{I,\eta} & \delta_{\beta 0} N_{I,\eta} \eta_I X_{1,\eta}^L & \delta_{\beta 0} N_{I,\eta} \eta_I X_{2,\eta}^L \end{bmatrix} , \quad (6.90)$$

wobei jedem Eckknoten I jeweils zwei der insgesamt vier Kollokationspunkte wie folgt zugeordnet werden:

$$(I, M, L) \in \{(1, B, A), (2, B, C), (3, D, C), (4, D, A)\} . \quad (6.91)$$

Für eine schublockingfreie FE-Formulierung der Schale wird die B-Matrix $\mathbf{B}_{I\beta}^s$ in Gleichung (6.60) durch die modifizierte $\bar{\mathbf{B}}_{I\beta}^s$ in Gleichung (6.90) ausgetauscht.

6.2.4 Zusammenhang zwischen der stochastischen und der deterministischen Variations- und FE-Formulierung

Werden keine stochastischen Parameter berücksichtigt, so vereinfacht sich das zugrundeliegende Variationsprinzip und die daraus abgeleitete stochastische FE-Formulierung. Dieser Übergang wird im Folgenden anhand ausgewählter Zusammenhänge erläutert.

Wird die deterministische Verschiebung u_1 als PC-Entwicklung dargestellt, so ist nur der erste PC-Koeffizient ungleich null und es gilt

$$u_1 = \sum_{\alpha} u_{1\alpha} \Psi_{\alpha} , \quad u_{1\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0 . \quad (6.92)$$

Unter Verwendung des KRONECKER-Deltas lauten die Koeffizienten

$$u_{1\alpha} = u_{10} \delta_{\alpha 0} , \quad \alpha \in \{0, \dots, P\} . \quad (6.93)$$

Sind alle Verschiebungen deterministische Größen, so vereinfacht sich die Berechnung der Membranverzerrung $\varepsilon_{11\gamma}$ in Gleichung (6.13) zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11\gamma} &= u_{10,1} \delta_{\gamma 0} + \frac{1}{2} D_{\alpha\beta\gamma} (u_{10,1} \delta_{\alpha 0} u_{10,1} \delta_{\beta 0} + u_{20,1} \delta_{\alpha 0} u_{20,1} \delta_{\beta 0} + u_{30,1} \delta_{\alpha 0} u_{30,1} \delta_{\beta 0}) \\ &= u_{10,1} \delta_{\gamma 0} + \frac{1}{2} D_{00\gamma} (u_{10,1} u_{10,1} + u_{20,1} u_{20,1} + u_{30,1} u_{30,1}) \\ &= \delta_{\gamma 0} \left(u_{10,1} + \frac{1}{2} (u_{10,1}^2 + u_{20,1}^2 + u_{30,1}^2) \right) . \end{aligned} \quad (6.94)$$

Es ist zu erkennen, dass aufgrund des KRONECKER-Deltas $\delta_{\gamma 0}$ nur der erste Koeffizient ε_{110} ungleich null ist. Zudem fällt auf, dass Gleichung (6.94) gerade der Berechnung im deterministischen Fall entspricht, vgl. Gleichung (3.27). Für den Vektor ε gilt

$$\varepsilon = \left[\delta_{00} \varepsilon_0^T, \dots, \underbrace{\delta_{\gamma 0} \varepsilon_0^T}_{\varepsilon_{\gamma}^T}, \dots, \delta_{P0} \varepsilon_0^T \right]^T = \left[\varepsilon_0^T, \dots, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} \right]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}} . \quad (6.95)$$

Werden keine streuenden Materialparameter berücksichtigt, so gilt für die PC-Koeffizienten der Materialmatrix

$$\mathbf{D}_{\alpha} = \mathbf{D}_0 \delta_{\alpha 0} , \quad \alpha \in \{0, \dots, P\} . \quad (6.96)$$

Unter Berücksichtigung dieses Zusammenhangs gilt für die erweiterte Materialmatrix aus Gleichung (6.37)

$$\mathbf{D} = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_0 \delta_{\alpha 0} = \delta_{\beta\gamma} \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_0 \end{bmatrix} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{D}_0, \dots, \mathbf{D}_0}_{\bar{P}\text{-mal}}) . \quad (6.97)$$

Die Matrix vereinfacht sich zu einer Blockdiagonalmatrix, auf dessen Hauptdiagonalelemente jeweils der erste PC-Koeffizient $\mathbf{D}_0$ steht. Für die Koeffizienten der Schalenschnittgrößen, siehe Gleichung (6.29), gilt

$$\boldsymbol{\sigma}_\gamma = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_0 \delta_{\alpha 0} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \delta_{\gamma 0} = \delta_{\gamma 0} \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\}. \quad (6.98)$$

Es ist ersichtlich, dass nur der erste Koeffizient $\boldsymbol{\sigma}_0$ ungleich null ist. Die dargestellten Zusammenhänge lassen sich analog auf alle anderen Größen der semidiskreten Linearisierung in Gleichung (6.36) übertragen. Werden keine stochastischen Parameter berücksichtigt, entspricht die semidiskrete Formulierung in Gleichung (6.36), unabhängig von der verwendeten Polynombasis, der Linearisierung in Gleichung (3.63).

Die zulässigen Vereinfachungen im deterministischen Fall spiegeln sich auch in der stochastischen FE-Formulierung wieder. Für den Knotenanteil des Elementresiduums in Gleichung (6.63) gilt

$$\mathbf{g}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{I0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\bar{P}}. \quad (6.99)$$

Die Blockdiagonalform ist im knotenbezogenen Anteil der Elementsteifigkeitsmatrix erkennbar:

$$\mathbf{k}_{TIK} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{TIK00} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{k}_{TTIK00} & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{k}_{TIK00} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\bar{P} \times 6\bar{P}}. \quad (6.100)$$

In diesem Fall entspricht die stochastische FE-Formulierung, unabhängig vom Polynomgrad, einer deterministischen FE-Formulierung.

6.2.5 Berücksichtigung einer stochastischen Ausgangsgeometrie

Wäre die Ausgangsgeometrie bzw. die Referenzkonfiguration stochastisch, dann gälte $\Omega_0 = \Omega_0(\omega)$ und der Ortsvektor $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$ in Gleichung (6.53) wäre ebenfalls zufällig. Die stochastische Diskretisierung lautet dann $\mathbf{X}(\omega) = \sum_\alpha \mathbf{X}_\alpha \Psi_\alpha$, wobei die einzelnen PC-Koeffizienten $\mathbf{X}_\alpha$ gemäß Gleichung (6.53) interpoliert werden können. An dieser Stelle sei angemerkt, dass eine stochastische Ausgangsgeometrie zusätzlich Auswirkungen auf das lokale Basissystem $\{\mathbf{A}_i\}_{i=1}^3$ und die damit verbundene Transformation hat. Wie bereits erwähnt, wird eine stochastische Referenzkonfiguration im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet.

6.3 Ein gemischtes Scheibenelement

Die in Abschnitt 6.2 beschriebene Schalenformulierung weist aufgrund des ANS-Ansatzes keine Querschubversteifung auf. Wird das 4-Knoten-Schalenelement jedoch als Scheibe beansprucht, so kann bei biegedominanten Problemstellungen ein zu steifes Verhalten festgestellt werden. Dieser Effekt wird als Schubversteifung (engl.: *locking*) bezeichnet und lässt sich, wie auch die Querschubversteifung, auf parasitäre Verzerrungen zurückführen.

Abbildung 6.4 (links) veranschaulicht die Ursache des künstlichen Versteifungseffekts anhand eines 4-Knoten-Elements in Anlehnung an HAHN & RECK [51]. Der reine Biegezustand ist frei von Schubverzerrungen und es gilt $\gamma = 0$, siehe Abbildung 6.4 (mittig). Das 4-Knoten-Element kann diesen Verformungszustand nicht abbilden, siehe Abbildung 6.4 (rechts). Bei einer vollständigen Integration führt dies zu parasitären Schubverzerrungen $\gamma \neq 0$, welche die künstliche Versteifung hervorrufen. Um diesem Effekt entgegenzuwirken, kann eine reduzierte Integration verwendet werden, die jedoch aufgrund zusätzlicher Kinematiken nicht universell einsetzbar ist.

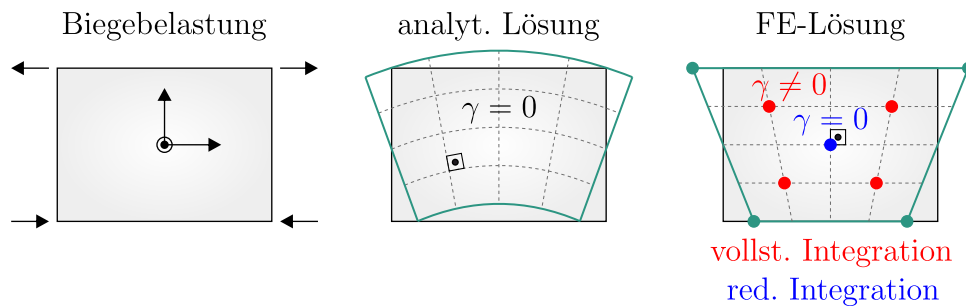


Abbildung 6.4: Scheibe unter reiner Biegung (links) mit der zugehörigen analytischen Lösung (mittig) sowie die FE-Lösung eines 4-Knoten-Scheibenelements

Eine alternative Möglichkeit bietet der von PIAN & SUMIHARA [86] entwickelte Ansatz. Dabei werden neben den Verschiebungen $\mathbf{u}$ auch die Spannungen $\mathbf{S}$ als zusätzliche unabhängige Variablen berücksichtigt. Eine zugehörige gemischte Scheibenformulierung kann ausgehend vom Variationsprinzip nach HELLINGER-REISSNER, siehe Abschnitt 2.5.3, abgeleitet werden. Im Folgenden wird eine entsprechende Scheibenformulierung im Rahmen der SSFEM hergeleitet.

In der Referenzkonfiguration nimmt die Scheibe das Gebiet Ω_0 ein. Die Abmessung der Struktur in Dickenrichtung beträgt d . Zudem wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) angenommen. Das Variationsprinzip nach HELLINGER-REISSNER

für eine Scheibe lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta\pi_{\text{HR}}(\omega)] &= \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} \delta\mathbf{E}^T(\omega)\mathbf{S}(\omega) + \delta\mathbf{S}^T(\omega)(\mathbf{E}(\omega) - \mathbf{E}^s(\omega)) d\mathbf{d}A\right] \\ &\quad - \mathbb{E}[\delta\pi_a(\omega)] = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}^s(\omega) = (\mathbf{C}(\omega))^{-1}\mathbf{S}(\omega) . \end{aligned} \quad (6.101)$$

Dabei sind $\mathbf{E}^s(\omega)$ die physikalischen stochastischen Verzerrungen. Die virtuelle stochastische äußere Arbeit $\mathbb{E}[\delta\pi_a(\omega)]$ wird im Folgenden nicht näher betrachtet. Weiterhin ist die zugehörige Linearisierung von Gleichung (6.101) gegeben mit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}[\mathbb{E}[\delta\pi_{\text{HR}}(\omega)]] &= \mathbb{E}[\delta\pi_{\text{HR}}(\omega)] + \mathbb{E}\left[\int_{\Omega_0} \Delta\delta\mathbf{E}^T(\omega)\mathbf{S}(\omega) + \delta\mathbf{S}^T(\omega)\Delta\mathbf{E}(\omega) d\mathbf{d}A\right. \\ &\quad \left.+ \int_{\Omega_0} \delta\mathbf{E}^T(\omega)\Delta\mathbf{S}(\omega) - \delta\mathbf{S}^T(\omega)\Delta\mathbf{E}^s(\omega) d\mathbf{d}A\right] , \end{aligned} \quad (6.102)$$

wobei $\Delta\mathbf{E}^s(\omega) = (\mathbf{C}(\omega))^{-1}\Delta\mathbf{S}(\omega)$ gilt. Das stochastische Verschiebungsfeld der Scheibe lautet

$$\mathbf{u}(\omega) = [u_1(\omega), u_2(\omega)]^T . \quad (6.103)$$

Gemäß VOIGT-Notation werden die stochastischen GREEN-LAGRANGE-Verzerrungen und die stochastischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen in den Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= [E_{11}(\omega), E_{22}(\omega), 2E_{12}(\omega)]^T \quad \text{und} \\ \mathbf{S}(\omega) &= [S_{11}(\omega), S_{22}(\omega), S_{12}(\omega)]^T \end{aligned} \quad (6.104)$$

zusammengefasst.

6.3.1 Stochastische Diskretisierung mit der PCE

Zunächst erfolgt die Diskretisierung in der stochastischen Dimension mit der polynomiellen Chaosentwicklung. Die Approximation des stochastischen Verschiebungsfeldes lautet

$$\mathbf{u}(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \Psi_{\alpha} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_{\alpha} = [u_{1\alpha}, u_{2\alpha}]^T . \quad (6.105)$$

Das virtuelle und linearisierte Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{u}(\omega)$ und $\Delta\mathbf{u}(\omega)$ werden auf die gleiche Weise diskretisiert. Für die Approximation der Verzerrungen

$$\mathbf{E}(\omega) = \sum_{\gamma} \mathbf{E}_{\gamma} \Psi_{\gamma} \quad (6.106)$$

werden die PC-Koeffizienten benötigt, die sich wie folgt berechnen:

$$\mathbf{E}_\gamma = \begin{bmatrix} E_{11\gamma} \\ E_{22\gamma} \\ 2E_{12\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\gamma,1} + (1/2)D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,1}u_{1\beta,1} + u_{2\alpha,1}u_{2\beta,1}) \\ u_{2\gamma,2} + (1/2)D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,2}u_{1\beta,2} + u_{2\alpha,2}u_{2\beta,2}) \\ u_{1\gamma,2} + u_{2\gamma,1} + D_{\alpha\beta\gamma}(u_{1\alpha,1}u_{1\beta,2} + u_{2\alpha,1}u_{2\beta,2}) \end{bmatrix}. \quad (6.107)$$

Ausgehend von Gleichung (6.107) wird die PC-Entwicklung der virtuellen Verzerrungen

$$\delta\mathbf{E}(\omega) = \sum_\gamma \delta\mathbf{E}_\gamma \Psi_\gamma \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{E}_\gamma = \frac{\partial\mathbf{E}_\gamma}{\partial\mathbf{u}_\lambda} \delta\mathbf{u}_\lambda \quad (6.108)$$

bestimmt. Die zugehörigen Koeffizienten lauten

$$\delta\mathbf{E}_\gamma = \begin{bmatrix} \delta E_{11\gamma} \\ \delta E_{22\gamma} \\ 2\delta E_{12\gamma} \end{bmatrix} = D_{\lambda\beta\gamma} \begin{bmatrix} (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1})\delta u_{1\lambda,1} + u_{2\beta,1}\delta u_{2\lambda,1} \\ u_{1,2\beta}\delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2})\delta u_{2\lambda,2} \\ u_{1,2\beta}\delta u_{1\lambda,1} + (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1})\delta u_{1\lambda,2} \\ + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2})\delta u_{2\lambda,1} + u_{2\beta,1}\delta u_{2\lambda,2} \end{bmatrix}. \quad (6.109)$$

Für die Approximation der linearisierten stochastischen Verzerrungen gilt

$$\Delta\mathbf{E}(\omega) = \sum_\gamma \Delta\mathbf{E}_\gamma \Psi_\gamma \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{E}_\gamma = \frac{\partial\mathbf{E}_\gamma}{\partial\mathbf{u}_\mu} \Delta\mathbf{u}_\mu. \quad (6.110)$$

Weiterhin wird die Linearisierung der virtuellen stochastischen Verzerrungen benötigt. Die PC-Entwicklung lautet

$$\Delta\delta\mathbf{E}(\omega) = \sum_\gamma \Delta\delta\mathbf{E}_\gamma \Psi_\gamma \quad \text{mit} \quad \Delta\delta\mathbf{E}_\gamma = \frac{\partial\delta\mathbf{E}_\gamma}{\partial\mathbf{u}_\mu} \Delta\mathbf{u}_\mu, \quad (6.111)$$

wobei die zugehörigen Koeffizienten wie folgt angegeben werden können:

$$\Delta\delta\mathbf{E}_\gamma = \begin{bmatrix} \Delta\delta E_{11\gamma} \\ \Delta\delta E_{22\gamma} \\ 2\Delta\delta E_{12\gamma} \end{bmatrix} = D_{\lambda\mu\gamma} \begin{bmatrix} \delta u_{1\lambda,1}\Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1}\Delta u_{2\mu,1} \\ \delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,2} \\ \delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{1\lambda,1}\Delta u_{1\mu,2} \\ + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,1} + \delta u_{2\lambda,1}\Delta u_{2\mu,2} \end{bmatrix}. \quad (6.112)$$

Für eine kompakte Schreibweise werden die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &:= [\mathbf{E}_0^T, \dots, \mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, & \delta\mathbf{E} &:= [\delta\mathbf{E}_0^T, \dots, \delta\mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, \\ \Delta\mathbf{E} &:= [\Delta\mathbf{E}_0^T, \dots, \Delta\mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, & \Delta\delta\mathbf{E} &:= [\Delta\delta\mathbf{E}_0^T, \dots, \Delta\delta\mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} \end{aligned} \quad (6.113)$$

definiert. Neben dem stochastischen Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\omega)$ sind auch die stochastischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen $\mathbf{S}(\omega)$ primäre Feldgrößen. Die zugehörige PC-Entwicklung lautet

$$\mathbf{S}(\omega) = \sum_\gamma \mathbf{S}_\gamma \Psi_\gamma \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_\gamma = [S_{11\gamma}, S_{22\gamma}, S_{12\gamma}]^T. \quad (6.114)$$

Auf gleiche Weise werden die Variation $\delta \mathbf{S}(\omega)$ und die Linearisierung $\Delta \mathbf{S}(\omega)$ approximiert. Zur kompakten Darstellung werden analog zu Gleichung (6.113) die Vektoren $\mathbf{S}$, $\delta \mathbf{S}$ und $\Delta \mathbf{S}$ mit allen PC-Koeffizienten eingeführt. Anhand Gleichung (6.101) ist zu erkennen, dass die PC-Entwicklung der physikalischen stochastischen Verzerrungen $\mathbf{E}^s(\omega)$ benötigt wird. Allgemein lautet diese

$$\mathbf{E}^s(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{E}_{\alpha}^s \Psi_{\alpha} . \quad (6.115)$$

Für die Bestimmung der Koeffizienten $\mathbf{E}_{\alpha}^s$ wird das stochastische inverse Stoffgesetz wie folgt umgeschrieben:

$$\mathbf{E}^s(\omega) = \left(\mathbf{C}(\omega) \right)^{-1} \mathbf{S}(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}(\omega) = \mathbf{C}(\omega) \mathbf{E}^s(\omega) . \quad (6.116)$$

Weiterhin wird die Materialmatrix als PC-Entwicklung dargestellt:

$$\mathbf{C}(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (6.117)$$

Unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes (ESZ) und isotropen Materialverhaltens können die zugehörigen PC-Koeffizienten allgemein angegeben werden mit

$$\mathbf{C}_{\alpha} = \left\{ \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \right\}_{\alpha} . \quad (6.118)$$

Mit den PC-Entwicklungen in den Gleichungen (6.114), (6.115) und (6.117) und unter der Anwendung der Orthogonalprojektion führt Gleichung (6.116) auf den Zusammenhang

$$\mathbf{S}_{\gamma} = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{C}_{\alpha} \mathbf{E}_{\beta}^s = \mathbf{C}_{\gamma\beta} \mathbf{E}_{\beta}^s \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\gamma\beta} = D_{\alpha\gamma\beta} \mathbf{C}_{\alpha} . \quad (6.119)$$

Damit können die PC-Koeffizienten $\mathbf{E}_{\beta}^s$ bestimmt werden. In Vektor-Matrix-Notation lautet Gleichung (6.119)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_P \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{00} & \dots & \mathbf{C}_{0P} \\ \vdots & \mathbf{C}_{\gamma\beta} & \vdots \\ \mathbf{C}_{P0} & \dots & \mathbf{C}_{PP} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E}_0^s \\ \vdots \\ \mathbf{E}_P^s \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}^s} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} \mathbf{S}, \mathbf{E}^s \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} \\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 3\bar{P}} \end{matrix} . \quad (6.120)$$

Die Koeffizienten der physikalischen stochastischen Verzerrungen im Vektor $\mathbf{E}^s$ berechnen sich über

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} . \quad (6.121)$$

Für die Diskretisierung der Linearisierung in Gleichung (6.102) wird zusätzlich die PC-Entwicklung der linearisierten physikalischen Verzerrungen

$$\Delta \mathbf{E}^s(\omega) = \sum_{\alpha} \Delta \mathbf{E}_{\alpha}^s \Psi_{\alpha} . \quad (6.122)$$

benötigt. Die zugehörigen PC-Koeffizienten werden im Vektor $\Delta \mathbf{E}^s \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}$ zusammengefasst und analog zu Gleichung (6.121) mit $\Delta \mathbf{E}^s = \mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}$ bestimmt. Damit lautet die stochastische Diskretisierung von Gleichung (6.101)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}(\omega)] &\approx \mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc}] = \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{S}^T \left(\mathbf{E} - \underbrace{\mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}}_{\mathbf{E}^s} \right) dA - \mathbb{E}[\delta \pi_a^{pc}] \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (6.123)$$

Für die Approximation des linearen Inkrements $\mathbb{E}[\Delta \delta \pi_{\text{HR}}(\omega)]$ werden zusätzlich die Vektoren

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} &:= [\Delta \mathbf{E}_0^T, \dots, \Delta \mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} , \\ \Delta \delta \mathbf{E} &:= [\Delta \delta \mathbf{E}_0^T, \dots, \Delta \delta \mathbf{E}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} , \\ \Delta \mathbf{S} &:= [\Delta \mathbf{S}_0^T, \dots, \Delta \mathbf{S}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} \quad \text{und} \\ \Delta \mathbf{E}^s &:= [\Delta \mathbf{E}_0^{sT}, \dots, \Delta \mathbf{E}_P^{sT}]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}} \end{aligned} \quad (6.124)$$

eingeführt. Schließlich lautet die semidiskrete Linearisierung des stochastischen Variationsprinzips, siehe Gleichung (6.102), wie folgt:

$$\begin{aligned} L[\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}(\omega)]] &\approx L[\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc}]] = \int_{\Omega_0} \Delta \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} + \delta \mathbf{S} \Delta \mathbf{E}^T dA \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E}^T \Delta \mathbf{S} - \delta \mathbf{S}^T \underbrace{\mathbf{C}^{-1} \Delta \mathbf{S}}_{\Delta \mathbf{E}^s} dA . \end{aligned} \quad (6.125)$$

6.3.2 Diskretisierung mit der FEM

Die FE-Diskretisierung der deterministischen Ausgangskonfiguration Ω_0 in *numel* Elemente ist gegeben mit

$$\Omega_0 \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \Omega_e , \quad (6.126)$$

wobei Ω_e das Gebiet eines einzelnen Elements beschreibt und der hochgestellte Index $(\bullet)^h$ die FE-Diskretisierung kennzeichnet, siehe Abbildung 6.5. Allgemein wird die vollständige Diskretisierung der semidiskreten Linearisierung $L[\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc}]]$ in Gleichung (6.102) wie folgt formuliert:

$$\begin{aligned} L[\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc}]] &\approx L[\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h}]] = \mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h}] + \mathbb{E}[\Delta \delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h}] \\ &= \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \left(\mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h,e}] + \mathbb{E}[\Delta \delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h,e}] \right) = 0 . \end{aligned} \quad (6.127)$$

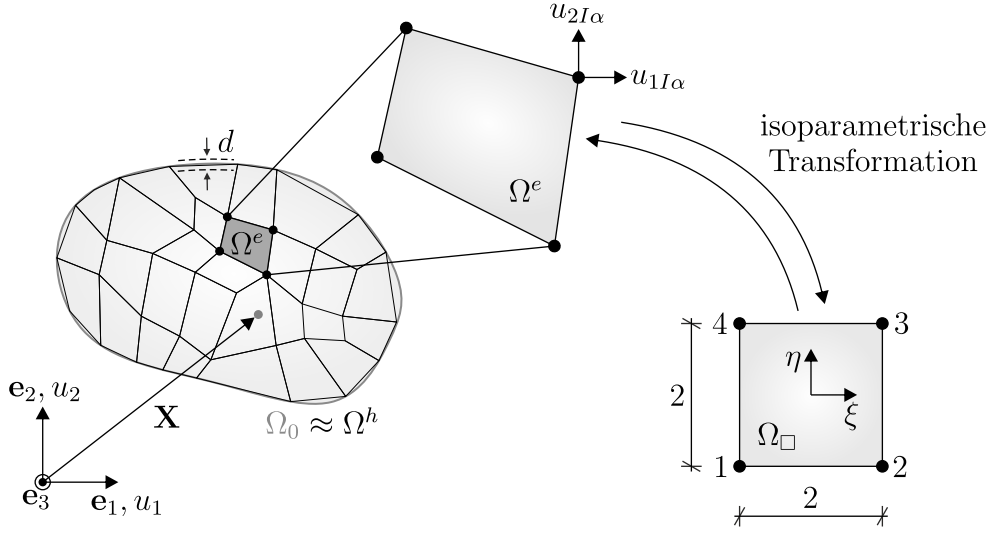


Abbildung 6.5: FE-Diskretisierung einer Scheibe sowie ein 4-Knoten-Element im physikalischen und im natürlichen Raum

Die Interpolation der einzelnen PC-Koeffizienten $\mathbf{u}_\alpha$ des Verschiebungsfeldes lautet

$$\mathbf{u}_\alpha = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{v}_{I\alpha} = \sum_I N_I \mathbf{v}_{I\alpha}, \quad \mathbf{v}_{I\alpha} = [u_{1I\alpha}, u_{2I\alpha}]^T, \quad (6.128)$$

wobei $N_I(\xi, \eta)$ die bilinearen Ansatzfunktionen aus Abschnitt 6.2.2 sind. Der Vektor $\mathbf{v}_{I\alpha}$ beinhaltet die zum Knoten I und Basispolynom Ψ_α zugehörigen PC-Koeffizienten der Knotenverschiebungen, siehe Abbildung 6.5. Für das hier vorgestellte 4-Knoten-Element gilt $nel = 4$. Im Rahmen der isoparametrischen FE-Formulierung wird der Ortsvektor $\mathbf{X}$ mit den gleichen bilinearen Ansatzfunktionen approximiert:

$$\mathbf{X} = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{X}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_I = [X_{1I}, X_{2I}]^T. \quad (6.129)$$

An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass auch hier von einer deterministischen Referenzkonfiguration mit $\Omega_0 \neq \Omega_0(\omega)$ ausgegangen wird. Zunächst werden die folgenden Vorwerte $\{a_i\}_{i=1}^3$ und $\{b_i\}_{i=1}^3$ mit den Koordinaten der Eckknoten eines Elementes bestimmt:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ X_{13} & X_{23} \\ X_{14} & X_{24} \end{bmatrix}. \quad (6.130)$$

Mit diesen Werten wird die JACOBI-Matrix folgendermaßen geschrieben:

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} = \begin{bmatrix} X_{1,\xi} & X_{1,\eta} \\ X_{2,\xi} & X_{2,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2\eta & a_3 + a_2\xi \\ b_1 + b_2\eta & b_3 + b_2\xi \end{bmatrix}. \quad (6.131)$$

Sie verknüpft die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den natürlichen Koordinaten $\{\xi, \eta\}$ mit den Ableitungen nach den physikalischen Koordinaten $\{X_1, X_2\}$, siehe Gleichung (6.56).

Die Interpolation der PC-Koeffizienten der virtuellen Verzerrungen lautet

$$\delta\mathbf{E}_\gamma = \sum_I \underbrace{D_{\lambda\beta\gamma} \mathbf{B}_{I\beta}}_{\mathbf{B}_{I\gamma\lambda}} \delta\mathbf{v}_{I\lambda}, \quad (6.132)$$

wobei die Matrix $\mathbf{B}_{I\beta}$ definiert ist mit

$$\mathbf{B}_{I\beta} = \begin{bmatrix} (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1})N_{I,1} & u_{2\beta,1}N_{I,1} \\ u_{1\beta,2}N_{I,2} & (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2})N_{I,2} \\ (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1})N_{I,2} + u_{1\beta,2}N_{I,1} & u_{2\beta,1}N_{I,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2})N_{I,1} \end{bmatrix}. \quad (6.133)$$

Für eine kompakte Schreibweise der Interpolation der virtuellen Verzerrungen werden die knotenbezogenen B-Matrizen $\mathbf{B}_I \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 2\bar{P}}$ in der B-Matrix $\mathbf{B}$ zusammengefasst:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I00} & \dots & \mathbf{B}_{I0P} \\ \vdots & \mathbf{B}_{I\gamma\lambda} & \vdots \\ \mathbf{B}_{IP0} & \dots & \mathbf{B}_{IPP} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4] \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 8\bar{P}} \quad (6.134)$$

Damit wird Gleichung (6.132) umgeschrieben zu

$$\delta\mathbf{E} = \sum_I \mathbf{B}_I \delta\mathbf{v}_I = \mathbf{B} \delta\mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{v} = [\delta\mathbf{v}_1^T, \delta\mathbf{v}_2^T, \delta\mathbf{v}_3^T, \delta\mathbf{v}_4^T]^T \in \mathbb{R}^{8\bar{P}}. \quad (6.135)$$

Der von PIAN & SUMIHARA [86] entwickelte Spannungsansatz wird nun im Rahmen der SSFEM formuliert. Für die PC-Koeffizienten der Spannungen lautet die Interpolation

$$\mathbf{S}_\gamma = \begin{bmatrix} S_{11\gamma} \\ S_{22\gamma} \\ S_{12\gamma} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1^2\eta & a_3^2\xi \\ 0 & 1 & 0 & b_1^2\eta & b_3^2\xi \\ 0 & 0 & 1 & a_1b_1\eta & a_3b_3\xi \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}} \underbrace{\begin{bmatrix} s_{1\gamma} \\ s_{2\gamma} \\ s_{3\gamma} \\ s_{4\gamma} \\ s_{5\gamma} \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_\gamma \in \mathbb{R}^5} = \bar{\mathbf{M}} \mathbf{s}_\gamma. \quad (6.136)$$

Werden die Koeffizienten der Ansatzparameter im Vektor $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_0^T, \dots, \mathbf{s}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{5\bar{P}}$ zusammengefasst, so lautet die kompakte Schreibweise von Gleichung (6.136)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{S}_P \end{bmatrix} = \text{diag}(\underbrace{\bar{\mathbf{M}}, \dots, \bar{\mathbf{M}}}_{\bar{P}\text{-mal}}) \mathbf{s} = \mathbf{M} \mathbf{s} , \quad (6.137)$$

wobei die erweiterte Ansatzmatrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 5\bar{P}}$ eine Blockdiagonalform aufweist. Analog dazu werden die virtuellen Spannungen mit $\delta \mathbf{S} = \mathbf{M} \delta \mathbf{s}$ und die linearisierten Spannungen mit $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{s}$ interpoliert.

Auf Elementebene lautet die vollständige Diskretisierung der schwachen Form

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h,e}] &= \delta \mathbf{v}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} dA - \mathbb{E}[\delta \pi_a^{pc,h,e}] + \delta \mathbf{s}^{eT} \int_{\Omega^e} (\mathbf{M}^T \mathbf{E} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S}) dA \\ &= \delta \mathbf{v}^{eT} \underbrace{(\mathbf{f}^e - \mathbf{p}^e)}_{\mathbf{g}_v^e} + \delta \mathbf{s}^{eT} \mathbf{g}_s^e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}^e \\ \delta \mathbf{s}^e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{g}_v^e \\ \mathbf{g}_s^e \end{bmatrix} , \end{aligned} \quad (6.138)$$

wobei zu erkennen ist, dass der Residualvektor aus zwei Anteilen besteht. Die Indizes $(\bullet)_v$ und $(\bullet)_s$ kennzeichnen die Zugehörigkeit zu den Knotenverschiebungen $\mathbf{v}^e$ bzw. Spannungsfreiheitsgraden $\mathbf{s}^e$.

Im Folgenden wird die Diskretisierung des linearen Inkrements $\mathbb{E}[\Delta \delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h,e}]$ erläutert. Da die Berechnungsvorschrift für die erste Variation und die Linearisierung einer Größe gleich sind, lautet die Approximation der linearisierten Verzerrungen

$$\Delta \mathbf{E} = \sum_K \mathbf{B}_K \Delta \mathbf{v}_K = \mathbf{B} \Delta \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{v} = [\Delta \mathbf{v}_1^T, \Delta \mathbf{v}_2^T, \Delta \mathbf{v}_3^T, \Delta \mathbf{v}_4^T]^T . \quad (6.139)$$

Das Skalarprodukt der linearisierten virtuellen Verzerrungen $\Delta \delta \mathbf{E}$ und den Spannungen $\mathbf{S}$ kann nach Einsetzen des Verschiebungsansatzes geschrieben werden als

$$\Delta \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{G}_{IK} \Delta \mathbf{v}_K , \quad (6.140)$$

wobei die knotenbezogenen Anteile $\mathbf{G}_{IK}$ wie folgt aufgebaut sind:

$$\mathbf{G}_{IK} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{IK00} & \dots & \mathbf{G}_{IK0P} \\ \vdots & \mathbf{G}_{IK\lambda\mu} & \vdots \\ \mathbf{G}_{IKP0} & \dots & \mathbf{G}_{IKPP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\bar{P} \times 2\bar{P}} . \quad (6.141)$$

Der auf das Knotenpaar IK bezogene Anteil $\mathbf{G}_{IK}$ lässt sich weiterhin in das Paar der PC-Koeffizienten $\lambda\mu$ unterteilen:

$$\mathbf{G}_{IK\lambda\mu} = D_{\lambda\mu\alpha} \begin{bmatrix} \hat{S}_{IK\alpha} & 0 \\ 0 & \hat{S}_{IK\alpha} \end{bmatrix} \quad (6.142)$$

$$\text{mit} \quad \hat{S}_{IK\alpha} = N_{I,1} N_{K,1} S_{11\alpha} + (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) S_{12\alpha} + N_{I,2} N_{K,2} S_{22\alpha} .$$

gilt. Werden alle knotenbezogenen Anteile $\mathbf{G}_{IK}$ in der Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \dots & \mathbf{G}_{14} \\ \vdots & \mathbf{G}_{IK} & \vdots \\ \mathbf{G}_{41} & \dots & \mathbf{G}_{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\bar{P} \times 8\bar{P}} \quad (6.143)$$

zusammengefasst, so folgt für den Arbeitsanteil in Gleichung (6.140) die kompakte Darstellung mit

$$\Delta \delta \mathbf{E}^T \mathbf{S} = \delta \mathbf{v}^T \mathbf{G} \Delta \mathbf{v} . \quad (6.144)$$

Die vollständig diskrete Form des linearen Inkrements auf Elementebene lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta \delta \pi_{\text{HR}}^{pc,h,e}] &= \delta \mathbf{v}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{G} d dA \Delta \mathbf{v}^e + \delta \mathbf{s}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{M}^T \mathbf{B} d dA \Delta \mathbf{v}^e \\ &\quad + \delta \mathbf{v}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} d dA \Delta \mathbf{s}^e - \delta \mathbf{s}^{eT} \int_{\Omega^e} \mathbf{M}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} d dA \Delta \mathbf{s}^e \\ &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}^e \\ \delta \mathbf{s}^e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{k}_G & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^e \\ \Delta \mathbf{s}^e \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (6.145)$$

Dabei sind die Teilmatrizen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_G &:= \int_{\Omega^e} \mathbf{G} d dA , \quad \mathbf{F}^T := \int_{\Omega^e} \mathbf{M}^T \mathbf{B} d dA \\ \mathbf{F} &:= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{M} d dA \quad \text{und} \quad \mathbf{H} := \int_{\Omega^e} \mathbf{M}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{M} d dA . \end{aligned} \quad (6.146)$$

6.3.3 Gleichgewicht und statische Kondensation

Die PC-Koeffizienten der virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{v}^e$ und die der virtuellen Spannungsparameter $\delta \mathbf{s}^e$ sind beliebig. Auf Elementebene lässt sich das Gleichgewicht angeben mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_G & \mathbf{F}^T \\ \mathbf{F} & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^e \\ \Delta \mathbf{s}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_v \\ \mathbf{g}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_s \end{bmatrix} , \quad (6.147)$$

wobei $\mathbf{r}_v$ und $\mathbf{r}_s$ Reaktionskräfte der Verschiebungs- bzw. Spannungsfreiheitsgrade sind. Da der Spannungsansatz in Gleichung (6.136) über die Elementgrenzen hinweg diskontinuierlich ist, gilt $\mathbf{r}_s = \mathbf{0}$. Damit können die Inkremente der Spannungsparameter $\Delta \mathbf{s}^e$ auf Elementebene auskondensiert werden. Aus der 2. Zeile von Gleichung (6.147) folgt

$$\Delta \mathbf{s}^e = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{g}_s + \mathbf{F} \Delta \mathbf{v}^e) . \quad (6.148)$$

Mit dieser Beziehung wird die 1. Zeile von Gleichung (6.147) umgeformt zu

$$\underbrace{(\mathbf{k}_G + \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F})}_{\mathbf{k}_T^e} \Delta \mathbf{v}^e + \underbrace{(\mathbf{g}_v + \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_s)}_{\mathbf{g}^e} = \mathbf{r}_v . \quad (6.149)$$

Dabei ist $\mathbf{g}^e \in \mathbb{R}^{8\bar{P}}$ das auskondensierte Elementresiduum und $\mathbf{k}_T^e \in \mathbb{R}^{8\bar{P} \times 8\bar{P}}$ die zugehörige tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix. Die Assemblierung der elementbezogenen Größen gemäß Gleichung (6.78) führt schließlich auf das globale Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{G} . \quad (6.150)$$

Die numerische Umsetzung der gemischten FE-Formulierung im Rahmen eines inkrementell-iterativen Lösungsalgorithmus wird in Kapitel 7 beschrieben.

6.3.4 Spannungsrückrechnung

Anhand der stochastischen Scheibenformulierung wird die Rückrechnung verschiedener Spannungsmaße im Rahmen der SSFEM näher erläutert. Die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen $\mathbf{S}$ können bei der Rückrechnung mit dem Ansatz in Gleichung (6.137) oder alternativ mit den GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungen $\mathbf{E}$ über das linear elastische Stoffgesetz bestimmt werden. Da $\mathbf{S}$ nicht physikalisch interpretierbar ist, müssen zudem die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen $\mathbf{P}$, siehe Gleichung (2.24), berechnet und ausgegeben werden. Hierfür wird der Verschiebungsgradient $\mathbf{H}$, siehe Gleichung (2.15), in Abhängigkeit seiner Komponenten geschrieben:

$$\mathbf{H} = H_{ik} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k , \quad \text{mit} \quad H_{ik} = u_{i,k} . \quad (6.151)$$

Im Kontext der stochastischen Formulierung ist auch dieser Tensor stochastisch. Für den zweidimensionalen Fall lautet die PC-Entwicklung des stochastischen Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha} \Psi_{\alpha} = \sum_{\alpha} \begin{bmatrix} u_{1\alpha,1} & u_{1\alpha,2} \\ u_{2\alpha,1} & u_{2\alpha,2} \end{bmatrix} \Psi_{\alpha} . \quad (6.152)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.14) wird die PC-Entwicklung des stochastischen Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\omega)$ mit den zugehörigen Koeffizienten bestimmt:

$$\mathbf{F}(\omega) = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} \Psi_{\alpha} , \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}_{\alpha} = \delta_{\alpha 0} \mathbf{1} + \mathbf{H}_{\alpha} . \quad (6.153)$$

Da die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ deterministisch ist, wird diese nur beim ersten PC-Koeffizienten mit $\alpha = 0$ addiert. Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.25) werden die Koeffizienten des stochastischen 1. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors

$$\mathbf{P}(\omega) = \sum_{\gamma} \mathbf{P}_{\gamma} \Psi_{\gamma} \quad (6.154)$$

bestimmt. Die Berechnungsvorschrift lautet

$$\mathbf{P}_\gamma^T = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{F}_\alpha \mathbf{S}_\beta^T = D_{\alpha\beta\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_{\alpha 0} + u_{1\alpha,1} & u_{1\alpha,2} \\ u_{2\alpha,1} & \delta_{\alpha 0} + u_{2\alpha,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_\alpha} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11\beta} & S_{12\beta} \\ S_{12\beta} & S_{22\beta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_\beta^T}. \quad (6.155)$$

6.4 Ein geometrisch exaktes Stabelement

Im folgenden Abschnitt wird eine geometrisch exakte, zweidimensionale, stochastische Stabformulierung vorgestellt. Die zugrunde liegende Theorie nach TIMOSHENKO berücksichtigt Schubverformungen des Stabes. Für eine schubweiche, zweidimensionale Balkenformulierung wird an dieser Stelle auf die Veröffentlichung von REISSNER [88] hingewiesen. Eine dreidimensionale Formulierung findet sich in GRUTTMANN ET AL. [48]. Im Folgenden wird von linear elastischem Materialverhalten ausgegangen.

Ausgangspunkt für die stochastische Stabformulierung ist das Variationsprinzip

$$\mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] = \mathbb{E}\left[\int_{X_1} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\omega) \boldsymbol{\sigma}(\omega) dX_1\right] - \mathbb{E}[\delta\pi_a(\omega)] = 0, \quad (6.156)$$

wobei die Koordinate X_1 der Schwereachse des Stabes entspricht, siehe Abbildung 6.6. Die stochastischen GREEN-LAGRANGE'schen Stabverzerrungen und die stochastischen 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Schnittgrößen werden in den Vektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = [\varepsilon(\omega), \kappa(\omega), \gamma(\omega)]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma}(\omega) = [N(\omega), M(\omega), Q(\omega)]^T \quad (6.157)$$

zusammengefasst. Das stochastische Verschiebungsfeld des Balkens $\mathbf{v}(\omega)$ setzt sich aus der Längsverschiebung $u(\omega)$, der Querverschiebung $w(\omega)$ und der Verdrehung des Querschnitts $\beta(\omega)$ zusammen und ist in Abbildung 6.6 veranschaulicht.

6.4.1 Stochastische Diskretisierung mit der PCE

Die Diskretisierung von Gleichung (6.156) mit der PCE führt auf die semidiskrete schwache Form

$$\mathbb{E}[\delta\pi(\omega)] \approx \mathbb{E}[\delta\pi^{pc}] = \int_{X_1} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dX_1 - \mathbb{E}[\delta\pi_a^{pc}] = 0. \quad (6.158)$$

Im Folgenden wird ausschließlich die virtuelle innere Arbeit betrachtet. Die einzelnen Komponenten des stochastischen Verschiebungsfeldes $\mathbf{v}(\omega)$ werden zunächst in der stochastischen Dimension diskretisiert:

$$u(\omega) \approx u = \sum_\gamma u_\gamma \Psi_\gamma, \quad w(\omega) \approx w = \sum_\gamma w_\gamma \Psi_\gamma, \quad \beta(\omega) \approx \beta = \sum_\gamma \beta_\gamma \Psi_\gamma. \quad (6.159)$$

Alle PC-Koeffizienten werden wie folgt im Vektor

$$\mathbf{v} := [\mathbf{v}_0^T, \dots, \mathbf{v}_\gamma^T, \dots, \mathbf{v}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, \quad \mathbf{v}_\gamma = [u_\gamma, w_\gamma, \beta_\gamma]^T \quad (6.160)$$

zusammengefasst. Die Komponenten der Stabverzerrungen und der Schnittgrößen werden analog angeordnet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &:= [\boldsymbol{\varepsilon}_0^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma^T, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = [\varepsilon_\gamma, \kappa_\gamma, \gamma_\gamma]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &:= [\boldsymbol{\sigma}_0^T, \dots, \boldsymbol{\sigma}_\gamma^T, \dots, \boldsymbol{\sigma}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\gamma = [N_\gamma, M_\gamma, Q_\gamma]^T. \end{aligned} \quad (6.161)$$

Auf gleiche Weise werden die PC-Koeffizienten virtueller und linearisierter Größen zusammengefasst. Damit lautet die kompakte Darstellung der semidiskreten Linearisierung

$$\mathbb{L}[\mathbb{E}[\delta\pi^{pc}]] = \mathbb{E}[\delta\pi^{pc}] + \mathbb{E}\left[\int_{X_1} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dX_1\right] = 0, \quad (6.162)$$

wobei die Materialmatrix definiert ist mit

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \dots & \mathbf{D}_{0P} \\ \vdots & \mathbf{D}_{\alpha\beta} & \vdots \\ \text{sym.} & \dots & \mathbf{D}_{PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 3\bar{P}}. \quad (6.163)$$

Für linear elastisches Materialverhalten lauten die Teilmatrizen in Gleichung (6.163)

$$\mathbf{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_\gamma = D_{\alpha\beta\gamma} \underbrace{\begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & \kappa GA \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_\gamma} \gamma, \quad (6.164)$$

wobei E den E-Modul und G den Schubmodul des Materials beschreiben. Der Stabquerschnitt hat die Fläche A und das Flächenträgheitsmoment I . Weiterhin bezeichnet κ den vom Querschnitt abhängigen Schubkorrekturfaktor.

Für die Beschreibung der geometrisch exakten Kinematik sind die trigonometrischen Funktionen wie $\sin(\bullet)$ und $\cos(\bullet)$ erforderlich, siehe Abbildung 6.6. Die PC-Koeffizienten der Balkenverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma$ in Gleichung (6.161) können nicht mehr mit dem Multiplikationstensor $D_{\alpha\beta\gamma}$ bestimmt werden. Aus diesem Grund wird für die vorgestellte Stabformulierung der in Abschnitt 5.5.6 beschriebene Integrationsansatz verwendet.

Im Folgenden wird die vollständig nichtlineare Kinematik des Stabes im Kontext der PCE-Diskretisierung formuliert. In der Referenzkonfiguration wird ein beliebiger Punkt P_0 auf dem Querschnitt des Stabes mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{\Phi}$ beschrieben. Dieser setzt sich aus einem Vektor $\mathbf{X}$ zur Schwereachse des Stabes

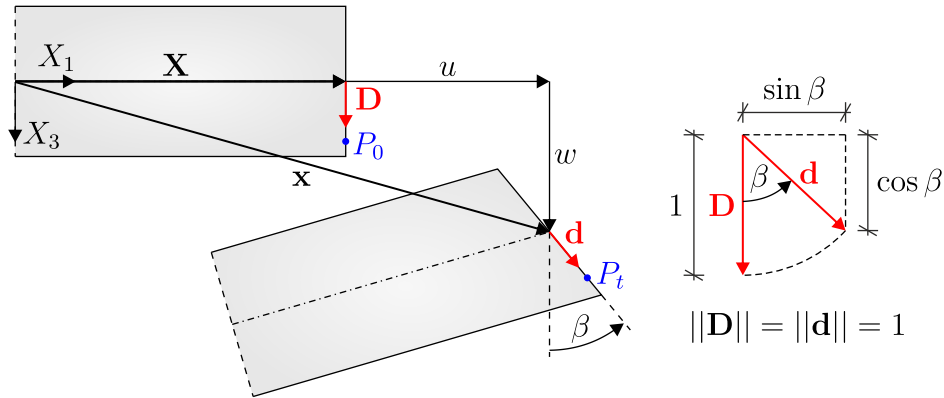


Abbildung 6.6: Stabelement in der Referenz- und Momentankonfiguration mit unverformtem Direktor $\mathbf{D}$ und verformtem Direktor $\mathbf{d}$

und einem Direktor $\mathbf{D}$ zusammen, siehe Abbildung 6.6. Die PC-Entwicklung des deterministischen Ortsvektors Φ wird wie folgt formuliert:

$$\Phi = \sum_{\alpha} (\mathbf{X}_{\alpha} + X_3 \mathbf{D}_{\alpha}) \Psi_{\alpha}, \quad \mathbf{X}_{\alpha} = \delta_{\alpha 0} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\alpha} = \delta_{\alpha 0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.165)$$

Aufgrund der deterministischen Referenzkonfiguration sind nur die Koeffizienten $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{D}_0$ ungleich null. Die Beschreibung des Punktes P_t in der Momentankonfiguration erfolgt mit dem Ortsvektor φ . Die PC-Entwicklung von φ lautet

$$\varphi = \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} + X_3 \mathbf{d}_{\alpha}) \Psi_{\alpha}, \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_{\alpha} &= \delta_{\alpha 0} \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle u, \Psi_{\alpha} \rangle \\ \langle w, \Psi_{\alpha} \rangle \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}_{\alpha} &= \begin{bmatrix} \langle \sin \beta, \Psi_{\alpha} \rangle \\ \langle \cos \beta, \Psi_{\alpha} \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.166)$$

Der Ausdruck $\langle u, \Psi_{\alpha} \rangle$ entspricht gerade dem Koeffizienten u_{α} in der PC-Entwicklung $u(\omega) \approx \sum_{\alpha} u_{\alpha} \Psi_{\alpha}$. Das zu lösende Integral hinter dem Ausdruck $\langle u, \Psi_{\alpha} \rangle$ wird wie folgt numerisch integriert:

$$\begin{aligned} \langle u, \Psi_{\alpha} \rangle &= \int_{D_{\mathbf{x}}} u \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_k u(\mathbf{x}^{(k)}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}^{(k)}) w^{(k)} = \sum_k \sum_{\beta} u_{\beta} \Psi_{\beta}(\mathbf{x}^{(k)}) \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}^{(k)}) w^{(k)}. \end{aligned} \quad (6.167)$$

Dabei beschreibt $u(\mathbf{x}^{(k)})$ der am Integrationspunkt $\mathbf{x}^{(k)}$ ausgewerteten PC-Entwicklung der Längsverschiebung $u(\omega)$. Der Ausdruck in Gleichung (6.167) entspricht der bereits beschriebenen Orthogonalprojektion, siehe Gleichung (5.39). Es sei angemerkt, dass die numerische Integration im M -dimensionalen Raum $D_{\mathbf{x}}$ stattfindet, wobei M der Anzahl stochastischer Eingangsparameter entspricht.

Die Integrationspunkte $\mathbf{x}^{(k)}$ und die zugehörigen Wichtungsfaktoren $w^{(k)}$ richten sich nach den Randverteilungen der stochastischen Eingangsvariablen. Sowohl die Stützstellen als auch die Gewichte werden mit dem in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen GOLUB-WELSCH-Algorithmus [47] bestimmt. Anhand Gleichung (6.166) wird deutlich, dass die Ausdrücke $\sin \beta$ bzw. $\cos \beta$ ebenfalls an den Integrationspunkten $\mathbf{x}^{(k)}$ ausgewertet werden müssen.

Zur Formulierung der Balkenverzerrungen werden zunächst die Tangentenvektoren $\mathbf{G}$ und $\mathbf{g}$ benötigt. Für den Tangentenvektor der Referenzkonfiguration gilt

$$\mathbf{G} = \Phi' = \sum_{\alpha} (\mathbf{X}'_{\alpha} + X_3 \mathbf{D}'_{\alpha}) \Psi_{\alpha}, \quad \mathbf{X}'_{\alpha} = \delta_{\alpha 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}'_{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (6.168)$$

wobei $(\bullet)'$ die Ableitung nach der deterministischen Koordinaten X_1 kennzeichnet. Für die Berechnung der Größe $\mathbf{X}'_{\alpha}$ wird der Ausdruck $\mathbf{X}_{\alpha}$ komponentenweise nach X_1 abgeleitet. Analog dazu wird der Tangentenvektor in der Momentankonfiguration bestimmt zu

$$\mathbf{g} = \varphi' = \sum_{\alpha} (\mathbf{x}'_{\alpha} + X_3 \mathbf{d}'_{\alpha}) \Psi_{\alpha}, \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathbf{x}'_{\alpha} &= \delta_{\alpha 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle u', \Psi_{\alpha} \rangle \\ \langle w', \Psi_{\alpha} \rangle \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}'_{\alpha} &= \begin{bmatrix} \langle \cos \beta \beta', \Psi_{\alpha} \rangle \\ \langle -\sin \beta \beta', \Psi_{\alpha} \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.169)$$

In Abschnitt 3.1 wurden bereits die Verzerrungsmaße einer schubelastischen Schale in Abhängigkeit von Tangentenvektoren angegeben. Analog zu den Gleichungen (3.12), (3.13) und (3.17) werden die vollständig nichtlinearen Verzerrungsmaße für das Stabelement formuliert. Für die PC-Koeffizienten der Stabverzerrungen gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\gamma} \\ \kappa_{\gamma} \\ \gamma_{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1/2)(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}'), \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \mathbf{x}' \cdot \mathbf{d}', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \mathbf{x}' \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}' \cdot \mathbf{D}, \Psi_{\gamma} \rangle \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

$$= \begin{bmatrix} \langle u' + (1/2)u'^2 + (1/2)w'^2, \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle ((1+u') \cos \beta - w' \sin \beta) \beta', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle (1+u') \sin \beta + w' \cos \beta, \Psi_{\gamma} \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.171)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im Folgenden die Notation in Gleichung (6.170) verwendet. Die Koeffizienten der virtuellen Verzerrungen lauten

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}' \cdot \delta \mathbf{x}', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \mathbf{d}' \cdot \delta \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \cdot \delta \mathbf{d}', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{x}' + \mathbf{x}' \cdot \delta \mathbf{d}, \Psi_{\gamma} \rangle \end{bmatrix}, \quad (6.172)$$

wobei für die beiden Variationen $\delta \mathbf{X}' = \delta \mathbf{D} = \mathbf{0}$ gilt. Dies folgt aus den beiden Gleichungen (6.165) und (6.168). Anhand Gleichung (6.172) ist zu erkennen,

dass die Variationen verschiedener Größen erforderlich sind. Für ein besseres Verständnis der gezeigten Zusammenhänge wird hier die Berechnung von $\delta \mathbf{d}$ näher erläutert. Die restlichen Größen sind in Anhang D zu finden. Allgemein lautet die Variation des verformten Direktors

$$\delta \mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\lambda} \left(\sum_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha} \Psi_{\alpha} \right) \delta \mathbf{v}_{\lambda} = \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{d}_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}_{\lambda}} \delta \mathbf{v}_{\lambda}}_{\delta \mathbf{d}_{\alpha}} \Psi_{\alpha} = \sum_{\alpha} \delta \mathbf{d}_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (6.173)$$

Für die Ableitung der ersten Komponente des Direktors in Gleichung (6.166) in Richtung der Größe $\delta \mathbf{v}_{\lambda}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_{\lambda}} \langle \sin \beta, \Psi_{\alpha} \rangle \delta \beta_{\lambda} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{\lambda}} \langle \sin(\sum_{\beta} \beta_{\beta} \Psi_{\beta}), \Psi_{\alpha} \rangle \delta \beta_{\lambda} \\ &= \langle \cos(\underbrace{\sum_{\beta} \beta_{\beta} \Psi_{\beta}}_{\beta}) \delta \beta_{\lambda} \Psi_{\beta}, \Psi_{\alpha} \rangle \delta \beta_{\lambda} = \langle (\cos \beta \delta \beta_{\lambda}) \Psi_{\lambda}, \Psi_{\alpha} \rangle . \end{aligned} \quad (6.174)$$

Schließlich folgt für die PC-Koeffizienten der Variation des verformten Direktors

$$\delta \mathbf{d}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \langle (\cos \beta \delta \beta_{\lambda}) \Psi_{\lambda}, \Psi_{\alpha} \rangle \\ \langle (-\sin \beta \delta \beta_{\lambda}) \Psi_{\lambda}, \Psi_{\alpha} \rangle \end{bmatrix} . \quad (6.175)$$

Die Linearisierung $\Delta \mathbf{d}_{\alpha}$ wird analog zur Variation $\delta \mathbf{d}_{\alpha}$ bestimmt. Die PC-Koeffizienten der linearisierten virtuellen Stabverzerrungen lauten

$$\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\gamma} = \begin{bmatrix} \langle \delta \mathbf{x}' \cdot \Delta \mathbf{x}', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \delta \mathbf{x}' \cdot \Delta \mathbf{d}' + \delta \mathbf{d}' \cdot \Delta \mathbf{x}' + \Delta \delta \mathbf{d}' \cdot \mathbf{x}', \Psi_{\gamma} \rangle \\ \langle \delta \mathbf{x}' \cdot \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \cdot \Delta \mathbf{x}' + \Delta \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{x}', \Psi_{\gamma} \rangle \end{bmatrix} , \quad (6.176)$$

wobei anhand Gleichung (6.169) zu erkennen ist, dass $\Delta \delta \mathbf{x}' = \mathbf{0}$ gilt. Im Folgenden wird nur die Berechnung der Linearisierung der Variation des verformten Direktors $\mathbf{d}$ gezeigt. Allgemein gilt

$$\Delta \delta \mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_{\mu}} \left(\sum_{\alpha} \delta \mathbf{d}_{\alpha} \Psi_{\alpha} \right) \Delta \mathbf{v}_{\mu} = \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{\partial \delta \mathbf{d}_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}_{\mu}} \Delta \mathbf{v}_{\mu}}_{\Delta \delta \mathbf{d}_{\alpha}} \Psi_{\alpha} = \sum_{\alpha} \Delta \delta \mathbf{d}_{\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (6.177)$$

Die Richtungsableitung der Variation in Gleichung (6.174) in Richtung der Größe $\Delta \beta_{\mu}$ lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_{\mu}} \langle (\cos \beta \delta \beta_{\lambda}) \Psi_{\lambda}, \Psi_{\alpha} \rangle \Delta \beta_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial \beta_{\mu}} \langle \cos(\sum_{\beta} \beta_{\beta} \Psi_{\beta}) \delta \beta_{\lambda} \Psi_{\lambda}, \Psi_{\alpha} \rangle \Delta \beta_{\mu} \\ &= \langle \Psi_{\lambda} (-\delta \beta_{\lambda} \sin \beta \Delta \beta_{\mu}) \Psi_{\mu}, \Psi_{\alpha} \rangle . \end{aligned} \quad (6.178)$$

Insgesamt gilt für die PC-Koeffizienten des linearisierten virtuellen Direktors

$$\Delta \delta \mathbf{d}_\alpha = \begin{bmatrix} \langle \Psi_\lambda (-\delta \beta_\lambda \sin \beta \Delta \beta_\mu) \Psi_\mu, \Psi_\alpha \rangle \\ \langle \Psi_\lambda (-\delta \beta_\lambda \cos \beta \Delta \beta_\mu) \Psi_\mu, \Psi_\alpha \rangle \end{bmatrix}. \quad (6.179)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind alle verbleibenden Größen in Anhang D angegeben. Eine Darstellung der Gleichungen (6.172) und (6.176) in Abhängigkeit von den Verschiebungsgrößen u, w und β ist ebenfalls in Anhang D zu finden.

6.4.2 Räumliche Diskretisierung mit der FEM

Für die FE-Diskretisierung werden 2-Knoten-Elemente ($nel = 2$) mit linearen Ansatzfunktionen verwendet. Die Interpolation der PC-Koeffizienten $\mathbf{v}_\alpha$ des Verschiebungsfeldes in Gleichung (6.160) lautet

$$\mathbf{v}_\alpha = \begin{bmatrix} u_\alpha \\ w_\alpha \\ \beta_\alpha \end{bmatrix} = \sum_I N_I \mathbf{v}_{I\alpha} = \sum_I N_I \begin{bmatrix} u_{I\alpha} \\ w_{I\alpha} \\ \beta_{I\alpha} \end{bmatrix}. \quad (6.180)$$

Auf gleiche Weise werden die virtuellen und linearisierten Größen $\delta \mathbf{v}_\alpha$ und $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ approximiert. Unter Berücksichtigung von Gleichung (6.180) wird der Verschiebungsgradient mit $\mathbf{v}'_\alpha = \sum_I N'_I \mathbf{v}_{I\alpha}$ interpoliert, wobei $(\bullet)'$ die Ableitung nach der Koordinaten X_1 beschreibt.

Anhand der Größe $\delta \varepsilon_\gamma$, siehe Gleichung (D.2), wird die Interpolation der virtuellen Verzerrungen gezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_\gamma &= \langle (1 + u') \delta u'_\lambda + w' \delta w'_\lambda, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \\ &= \langle (1 + u') \sum_I N'_I \delta u_{I\lambda} + w' \sum_I N'_I \delta w_{I\lambda}, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \\ &= \sum_I \left[\langle (1 + u') N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \quad \langle w' N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \quad 0 \right] \underbrace{\begin{bmatrix} \delta u_{I\lambda} \\ \delta w_{I\lambda} \\ \delta \beta_{I\lambda} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{v}_{I\lambda}}. \end{aligned} \quad (6.181)$$

Es ist zu erkennen, dass Gleichung (6.181) gerade der ersten Zeile der Matrix in Gleichung (D.5) entspricht. Insgesamt wird die FE-Diskretisierung der virtuellen Stabverzerrungen in Gleichung (6.172) bzw. Gleichung (D.2) geschrieben als

$$\delta \varepsilon = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_0 \\ \vdots \\ \delta \varepsilon_P \end{bmatrix} = \sum_I \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{I00} & \dots & \mathbf{B}_{I0P} \\ \vdots & \mathbf{B}_{I\gamma\lambda} & \vdots \\ \mathbf{B}_{IP0} & \dots & \mathbf{B}_{IPP} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_{I0} \\ \vdots \\ \delta \mathbf{v}_{IP} \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{v}_I} = \sum_I \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I. \quad (6.182)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die Teilmatrix $\mathbf{B}_{I\gamma\lambda}$ in Anhang D, siehe Gleichung (D.5), dargestellt. Anhand Gleichung (D.5) ist zu erkennen, dass für jeden Eintrag der Matrix $\mathbf{B}_{I\gamma\lambda}$ Integrale der Form $\langle \bullet, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle$ numerisch integriert werden müssen. Für den ersten Eintrag in Gleichung (6.181) lautet die numerische Integration im stochastischen Raum

$$\langle (1 + u')N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \approx N'_I \sum_k (1 + u'(\mathbf{x}^{(k)})) \Psi_\lambda(\mathbf{x}^{(k)}) \Psi_\gamma(\mathbf{x}^{(k)}) w^{(k)}, \quad (6.183)$$

wobei $u'(\mathbf{x}^{(k)})$ die am Integrationspunkt $\mathbf{x}^{(k)}$ ausgewertete PC-Entwicklung des Gradienten der Längsverschiebung beschreibt.

Die Interpolation des Skalarprodukts der linearisierten virtuellen Verzerrungen $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ mit den Schnittgrößen $\boldsymbol{\sigma}$ wird im Folgenden erläutert. Der Ausdruck $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$ wird zunächst in die einzelnen Komponenten aufgeteilt:

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \Delta\delta\varepsilon_\alpha N_\alpha + \Delta\delta\kappa_\alpha M_\alpha + \Delta\delta\gamma_\alpha Q_\alpha. \quad (6.184)$$

Die Approximation des ersten Summanden lautet

$$\begin{aligned} \Delta\delta\varepsilon_\alpha N_\alpha &= \langle \delta u'_\lambda \Delta u'_\mu + \delta w'_\lambda \Delta w'_\mu, \Psi_\mu \Psi_\lambda \Psi_\alpha \rangle \langle N, \Psi_\alpha \rangle \\ &= \langle (\delta u'_\lambda \Delta u'_\mu + \delta w'_\lambda \Delta w'_\mu) N, \Psi_\mu \Psi_\lambda \rangle \\ &= \delta u_{I\lambda} \langle N'_I N'_K N, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \Delta u_{K\mu} + \delta w_{I\lambda} \langle N'_I N'_K N, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \Delta w_{K\mu}. \end{aligned} \quad (6.185)$$

Es ist zu erkennen, dass die beiden Summanden in Gleichung (6.185) den ersten beiden Hauptdiagonalelementen der Matrix $\mathbf{G}_{IK\lambda\mu} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in Gleichung (D.6) entsprechen. Die vollständig diskrete Form des Skalarprodukts $\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$ lautet

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_{I\lambda}^T \mathbf{G}_{IK\lambda\mu} \Delta \mathbf{v}_{K\mu}. \quad (6.186)$$

Die Matrix $\mathbf{G}_{IK\lambda\mu}$ ist ebenfalls in Anhang D, siehe Gleichung (D.6), zu finden. Die auszuwertenden Integrale besitzen auch die Form $\langle \bullet, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle$ und werden analog Gleichung (6.183) numerisch integriert. Mit der Definition der erweiterten Matrix

$$\mathbf{G}_{IK} := \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{IK00} & \dots & \mathbf{G}_{IK0P} \\ \vdots & \mathbf{G}_{IK\lambda\mu} & \vdots \\ \mathbf{G}_{IKP0} & \dots & \mathbf{G}_{IKPP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\bar{P} \times 3\bar{P}} \quad (6.187)$$

folgt schließlich die kompakte Schreibweise von Gleichung (6.186) zu

$$\Delta\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \sum_I \sum_K \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{G}_{IK} \Delta \mathbf{v}_K. \quad (6.188)$$

Die vollständig diskrete Form der Linearisierung in Gleichung (6.162) führt auf Elementebene zu dem Elementresidualvektor $\mathbf{g}^e \in \mathbb{R}^{6\bar{P}}$ und der Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_T^e \in \mathbb{R}^{6\bar{P} \times 6\bar{P}}$. Die knotenbezogenen Anteile der beiden Größen lauten

$$\mathbf{g}_I = \int_{X_1} \mathbf{B}_I^T \boldsymbol{\sigma} dX_1 - \mathbf{p}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_{TIK} = \int_{X_1} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK} dX_1. \quad (6.189)$$

Weiterhin bezeichnet $\mathbf{p}_I \in \mathbb{R}^{3\bar{P}}$ den knotenbezogenen Anteil des Elementlastvektors.

Werden die Integrale in Gleichung (6.189) mit zwei GAUSS-Punkten exakt integriert, so tritt die gleiche Problematik des Querschublockings auf, wie sie bei der Schalenformulierung in Abschnitt 6.2 bereits diskutiert wurde. Um diesen künstlichen Versteifungseffekt zu vermeiden, werden $\mathbf{g}^e$ und $\mathbf{k}_T^e$ jeweils mit einem GAUSS-Punkt integriert. Dies führt zu einer Unterintegration des Schubanteils, während die Dehn- und Biegeanteile weiterhin exakt integriert werden. Beim Stabelement kann dies ohne Einschränkungen gemacht werden, da im Gegensatz zu dem Schalenelement keine zusätzlichen Kinematiken entstehen.

Da der Elementresidualvektor $\mathbf{g}^e$ und die Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_T^e$ auf das lokale Koordinatensystem des Stabes bezogen sind, müssen beide Größen vor der Assemblierung auf ein gemeinsames, globales Koordinatensystem transformiert werden. Die Transformation erfolgt analog einer linearen Stabformulierung und wird an dieser Stelle nicht explizit angegeben. Die entsprechenden Transformationsbeziehungen sind beispielsweise in WERKLE [125] zu finden.

7 Iterative Lösungsverfahren für die SSFEM

Im folgenden Abschnitt werden bereits bestehende sowie neu entwickelte Lösungsverfahren vorgestellt, die im Rahmen einer Berechnung mit der spektralen stochastischen Finite-Elemente-Methode Anwendung finden. Zu Beginn werden zwei Standardalgorithmen, die Last- und die Einzelverschiebungssteuerung, beschrieben. Diese Verfahren und ihre Anwendung im Rahmen der SSFEM werden auch von PAPADOPOULOS ET AL. [85] näher erläutert. In WAGNER & WRIGGERS [123] wird eine verallgemeinerte Verschiebungssteuerung beschrieben. Die Weiterentwicklung dieses Lösungsverfahrens für die Anwendbarkeit im Rahmen der SSFEM wird im folgenden Kapitel detailliert dargestellt.

Alle in diesem Kapitel beschriebenen Lösungsalgorithmen sind in MATLAB [116] und in einer erweiterten Version des FE-Programms FEAP (*Finite Element Analysis Program*) [115] implementiert.

7.1 Klassische Lösungsverfahren

Die zweistufige Diskretisierung der Variationsformulierung in Gleichung (6.1) führt auf globaler Ebene auf ein System nichtlinearer Gleichungen der Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{P} = \mathbf{0} . \quad (7.1)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{G}(\mathbf{v})$ den globalen Residualvektor, der die Differenz zwischen dem Vektor der inneren Kräfte $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ und dem Vektor der äußeren Kräfte $\mathbf{P}$ darstellt. Der globale Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$ umfasst alle Freiheitsgrade des diskreten Systems und ist folgendermaßen aufgebaut:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_0^T, \dots, \mathbf{v}_\beta^T, \dots, \mathbf{v}_P^T]^T \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}} , \quad \mathbf{v}_\beta \in \mathbb{R}^{ndof} . \quad (7.2)$$

Dabei beinhaltet $\mathbf{v}_\beta$ die zum Polynom Ψ_β zugehörigen PC-Koeffizienten des globalen Verschiebungsvektors $\mathbf{v}$. Die Anzahl an Knotenverschiebungen eines deterministischen Systems wird mit $ndof$ bezeichnet. Eine stochastische Diskretisierung mit $\bar{P}$ Polynomen führt zu insgesamt $ndof \cdot \bar{P}$ Freiheitsgraden. Dabei ist $\bar{P}$ abhängig von der Zahl stochastischer Eingangsvariablen M und dem Polynomgrad p , siehe Gleichung (5.36).

Für die folgenden Lösungsalgorithmen wird Gleichung (7.1) umgeschrieben zu

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}} . \quad (7.3)$$

Dabei wird die äußere Belastung $\mathbf{P}$ mit dem sogenannten Lastfaktor λ gesteigert. In Abhängigkeit von den einzelnen PC-Koeffizienten lautet Gleichung (7.3) wie

folgt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{G}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{F}_P \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{P}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_\alpha \in \mathbb{R}^{ndof}. \quad (7.4)$$

Für die Lösung des Systems nichtlinearer, algebraischer Gleichungen in Gleichung (7.3) im Rahmen des NEWTON-Verfahrens wird die diskrete Linearisierung

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{v})\Delta\mathbf{v} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda), \quad \mathbf{K}_T(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{(ndof \cdot \bar{P}) \times (ndof \cdot \bar{P})} \quad (7.5)$$

benötigt. Diese kann ebenfalls in Abhängigkeit von den einzelnen Komponenten formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T00} & \cdots & \mathbf{K}_{T0\beta} & \cdots & \mathbf{K}_{T0P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{T\alpha 0} & \cdots & \mathbf{K}_{T\alpha\beta} & \cdots & \mathbf{K}_{T\alpha P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{TP0} & \cdots & \mathbf{K}_{TP\beta} & \cdots & \mathbf{K}_{TPP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v}_0 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{v}_\beta \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{v}_P \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_\alpha \\ \vdots \\ \mathbf{G}_P \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

Dabei gilt für die Teilmatrizen $\mathbf{K}_{T\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{ndof \times ndof}$. Ausgehend von Gleichung (7.3) und der zugehörigen diskreten Linearisierung in Gleichung (7.5) werden nachfolgend zwei inkrementell-iterative Lösungsverfahren beschrieben.

Anhand eines eindimensionalen Gleichgewichtspfades in Abbildung 7.1 werden die Unterschiede einer Last- bzw. einer Verschiebungssteuerung verdeutlicht. Ab dem Gleichgewichtspunkt L_1 in Abbildung 7.1 (links) fällt der Lastparameter λ wieder ab. Mit der Laststeuerung kann somit ausschließlich der blau markierte Teil des Gleichgewichtspfades verfolgt werden. In Abbildung 7.1 (rechts) wird deutlich, dass mit der Steuerung der Verschiebung v über den Punkt L_1 hinweg gerechnet werden kann. Am Punkt L_2 geht die Verschiebung v wieder zurück, was dazu führt, dass nun ab dieser Stelle die Verschiebungssteuerung versagt.

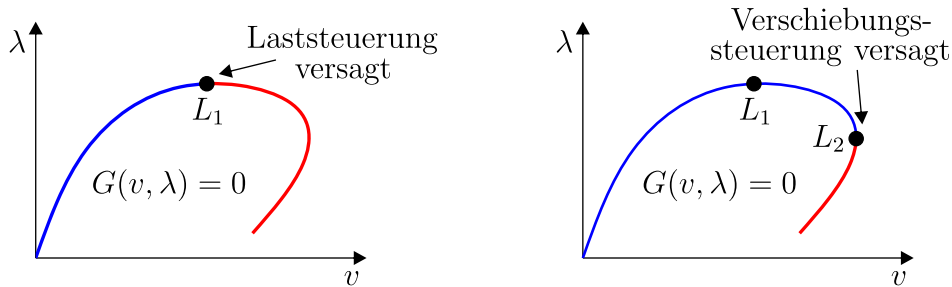


Abbildung 7.1: Gleichgewichtspfad mit zwei Gleichgewichtspunkten L_1 und L_2

7.1.1 Die Laststeuerung

Bei einer Laststeuerung wird die äußere Belastung $\lambda \mathbf{P}$ mit dem Lastparameter λ gesteuert. Um die lokale quadratische Konvergenz des NEWTON-Verfahrens in der Nähe eines Lösungspunktes auszunutzen, wird die Belastung nicht in einem Schritt aufgebracht, sondern inkrementell gesteigert.

Ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand $\mathbf{G}(\mathbf{v}^{(n)}, \lambda^{(n)}) = \mathbf{0}$ wird zunächst die Belastung mit $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \Delta\lambda$ gesteigert. Dabei kennzeichnet der Zähler n den Belastungszustand. Der zu $\lambda^{(n+1)}$ zugehörige Verschiebungszustand $\mathbf{v}^{(n+1)}$ ist bisher noch unbekannt und wird nun iterativ bestimmt. Zu Beginn der NEWTON-Iteration ist der zugehörige Zähler i gleich null. Im i -ten Iterationsschritt wird das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_i^{(n)}) \Delta \mathbf{v}_i^{(n)} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i^{(n)}, \lambda^{(n+1)}) \quad (7.7)$$

gelöst und damit das aktuelle Verschiebungskrement $\Delta \mathbf{v}_i^{(n)}$ bestimmt. Die Verschiebungen werden mit

$$\mathbf{v}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{v}_i^{(n)} + \Delta \mathbf{v}_i^{(n)} \quad (7.8)$$

aktualisiert. Als Abbruchkriterium für die NEWTON-Iteration wird die Norm des Residualvektors $\|\mathbf{G}\|$ herangezogen. Sobald diese kleiner ist als ein vorgegebener Toleranzwert TOL , ist der entsprechende Gleichgewichtspunkt erreicht.

Eine schematische Darstellung der Laststeuerung anhand eines 1-Freiheitsgrad-Systems ist in Abbildung 7.2 veranschaulicht. Ausgehend vom bekannten Gleichgewichtspunkt $\bullet$ wird durch Steigerung des Lastfaktors und anschließender NEWTON-Iteration der nächste Gleichgewichtspunkt $\bullet$ gefunden. Die einzelnen, sich nicht im Gleichgewicht befindenden Zwischenlösungen während der NEWTON-Iteration, sind mit $\circ$ markiert, siehe Abbildung 7.2.

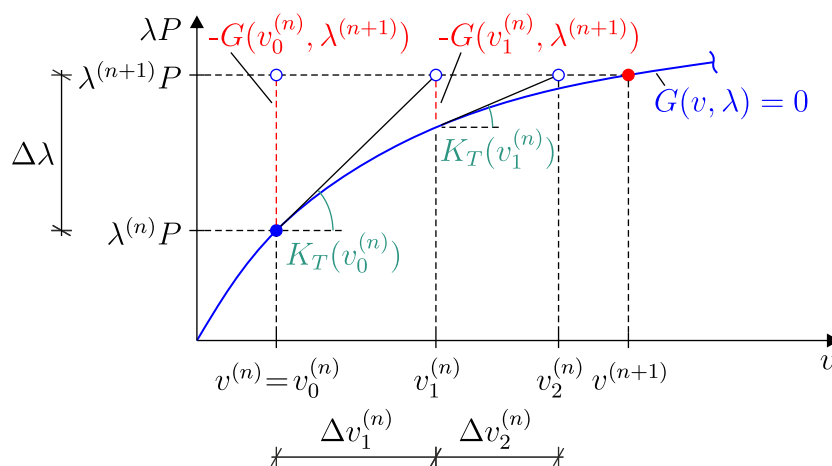


Abbildung 7.2: NEWTON-Verfahren für ein 1-Freiheitsgrad-System

Ein schematischer Ablaufplan der Laststeuerung im Rahmen eines FE-Programms ist in Tafel 7.1 dargestellt. Für eine Berechnung mit der in Kapitel 6 vorgestellten stochastischen Schalen- und Stabformulierung kann der in Tafel 7.1 dargestellte Ablaufplan verwendet werden.

$\lambda^{(1)} = 0, \mathbf{v}_0^{(1)} = \mathbf{0}$	▷ Initialisierung
for $n = 1, \dots, N$ do	▷ Lastschleife
$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \Delta\lambda$	
$i = 0$	
while $\ \mathbf{G}\ > TOL$ do	▷ NEWTON-Iteration
for $e = 1, \dots, numel$ do	▷ Elementschleife
$\mathbf{g}^e$ und $\mathbf{k}_T^e$	▷ Elementresiduum und -tangente
$\mathbf{K}_T \leftarrow \mathbf{K}_T + \bigcup_e \mathbf{k}_T^e, \mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G} + \bigcup_e \mathbf{g}^e$	▷ Assemblierung
end for	
$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_i^{(n)} = -\mathbf{G}$	▷ Verschiebungsinkrement
$\mathbf{v}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{v}_i^{(n)} + \Delta \mathbf{v}_i^{(n)}$	▷ Update
$i \leftarrow i + 1$	
end while	
$\mathbf{v}_i^{(n+1)} = \mathbf{v}_i^{(n)}$	
end for	

Tafel 7.1: Ablaufplan der Laststeuerung

In Abschnitt 6.3 wurde zudem eine gemischt-hybride, stochastische Scheibenformulierung beschrieben. Aufgrund der statischen Kondensation sind zusätzliche Anpassungen für die NEWTON-Iteration innerhalb des inkrementell-iterativen Lösungsalgorithmus erforderlich. Der modifizierte Ablaufplan für eine gemischt-hybride FE-Formulierung ist in Tafel 7.2 dargestellt, wobei alle Änderungen rot markiert sind. Es ist zu erkennen, dass zusätzlich zu den Verschiebungen $\mathbf{v}$ auch die entsprechenden Verschiebungsinkremente $\Delta \mathbf{v}$ während der NEWTON-Iteration abgespeichert werden müssen. Auf Elementebene wird gemäß Gleichung (6.148) das aktuelle Inkrement $\Delta \mathbf{s}^e$ der Spannungsfreiheitsgrade berechnet. Hierfür werden zusätzliche Matrizen und Vektoren aus dem letzten Iterationsschritt in Geschichtsfeldern abgespeichert. Somit kann das Update der Spannungsfreiheitsgrade während der NEWTON-Iteration auf Elementebene durchgeführt werden.

```

 $\lambda^{(1)} = 0, \mathbf{v}_0^{(1)} = \mathbf{0}$  ▷ Initialisierung
for  $n = 1, \dots, N$  do ▷ Lastschleife
     $\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \Delta\lambda$ 
     $i = 0, \Delta\mathbf{v}_{i-1}^{(n)} = \mathbf{0}$ 
    while  $\|\mathbf{G}\| > TOL$  do ▷ NEWTON-Iteration
        for  $e = 1, \dots, numel$  do ▷ Elementschleife
             $\Delta\mathbf{v}_{i-1}^e \in \Delta\mathbf{v}_{i-1}^{(n)}$ 
             $\Delta\mathbf{s}_{i-1}^e, \{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{g}_s, \mathbf{F}\}_{i-1}$  ▷ Geschichtsvariablen
             $\mathbf{s}_i^e = \Delta\mathbf{s}_{i-1}^e + \{\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{g}_s + \mathbf{F}\Delta\mathbf{v}^e)\}_{i-1}$  ▷ Update
             $\{\mathbf{g}_v, \mathbf{g}_s\}_i$  und  $\{\mathbf{k}_G, \mathbf{F}, \mathbf{H}\}_i$  ▷ Aktuelle Werte für  
statische Kondensation
             $\mathbf{g}^e = \mathbf{g}_v + \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_s$  ▷ Elementresiduum und -tangente
             $\mathbf{k}_T^e = \mathbf{k}_G + \mathbf{F}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{F}$ 
             $\mathbf{s}_i^e, \{\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{g}_s, \mathbf{F}\}_i$  ▷ Geschichtsvariablen
             $\mathbf{K}_T \leftarrow \mathbf{K}_T + \bigcup_e \mathbf{k}_T^e, \mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G} + \bigcup_e \mathbf{g}^e$  ▷ Assemblierung
        end for
         $\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{v}_i^{(n)} = -\mathbf{G}$  ▷ Verschiebungsinkrement
         $\mathbf{v}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{v}_i^{(n)} + \Delta\mathbf{v}_i^{(n)}, \Delta\mathbf{v}_{i+1}^{(n)} = \Delta\mathbf{v}_i^{(n)}$  ▷ Update
         $i \leftarrow i + 1$ 
    end while
     $\mathbf{v}_i^{(n+1)} = \mathbf{v}_i^{(n)}$ 
end for

```

Tafel 7.2: Ablaufplan der Laststeuerung für eine gemischt-hybride Elementformulierung

Prinzipbeispiel für die Laststeuerung

Als Prinzipbeispiel für die Laststeuerung dient ein Einfeldträger unter einer konstanten Gleichlast, siehe Abbildung 7.3. Der E-Modul $E(\omega)$ wird als Normalverteilung mit

$$E(\omega) \sim \mathcal{N}(1000, 100) \text{ kN/cm}^2 \quad (7.9)$$

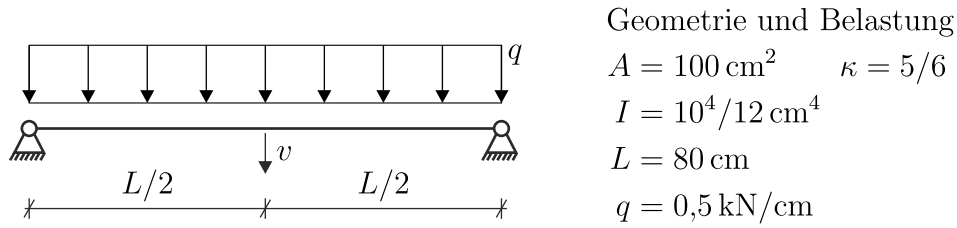


Abbildung 7.3: Einfeldträger unter Gleichlast: System, Geometrie und Belastung

modelliert. Für den Schubmodul gilt $G(\omega) = E(\omega)/2$. Dies führt dazu, dass die resultierenden Verformungen der Struktur Zufallsgrößen sind. Die Berechnung erfolgt mit der in Abschnitt 6.4 beschriebenen stochastischen Stabformulierung. Dabei wird der Träger mit 20 Stabelementen diskretisiert. Für die PCE wird eine quadratische Polynombasis mit $p = 2$ verwendet. Die Belastung q wird mit dem Lastfaktor λ gesteigert. Für die Berechnung wird ein Lastinkrement von $\Delta\lambda = 1$ verwendet.

In Abbildung 7.3 ist der deterministische Lastfaktor λ über dem Mittelwert μ_v der stochastischen Verschiebungsgröße v aufgetragen. Um die Streuung der variierenden Verschiebung v zu verdeutlichen, ist zusätzlich der Mittelwert μ_v plus/minus dreimal die Standardabweichung σ_v dargestellt. Für ein bestimmtes Lastniveau $\tilde{\lambda}$ lautet die zugehörige Verschiebung $\tilde{v}$. Diese Zufallsgröße ist durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\tilde{v}|\lambda = \tilde{\lambda})$ charakterisiert, siehe Abbildung 7.4.

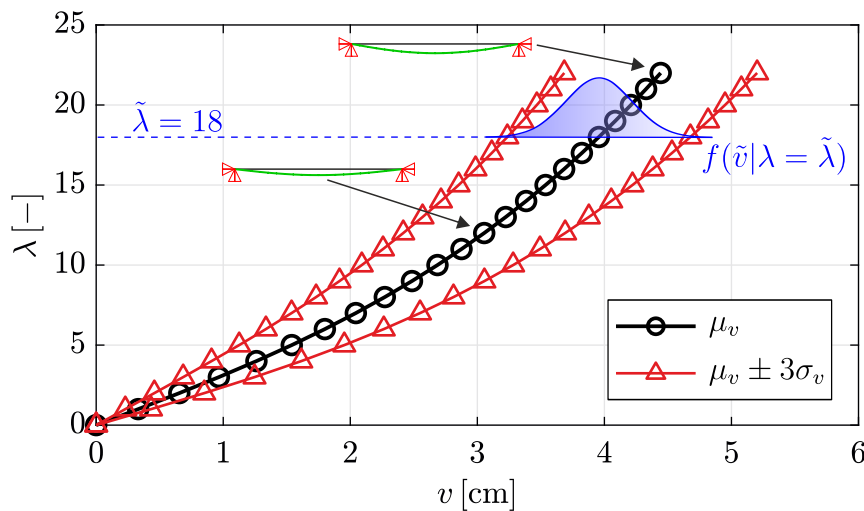


Abbildung 7.4: Deterministischer Lastfaktor λ über der stochastischen Verschiebung v sowie eine qualitative Dichtefunktion der Verschiebung $\tilde{v}$ bei dem Lastniveau $\tilde{\lambda} = 18$

7.1.2 Die Einzelverschiebungssteuerung

Im Rahmen dieses Verfahrens wird eine vom Anwender gewählte Verschiebung gesteuert. Um auch hier die lokale quadratische Konvergenz des NEWTON-Verfahrens ausnutzen zu können, wird die vorgegebene Verschiebung nicht in einem Schritt aufgebracht, sondern inkrementell gesteigert.

Für die Einzelverschiebungssteuerung wird zunächst der globale Verschiebungsvektor bzw. das Inkrement $\Delta \mathbf{v}$ in freie (f) und vorgegebene (c) Verschiebungen unterteilt:

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^f \\ \Delta \mathbf{v}^c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}}. \quad (7.10)$$

In Abhängigkeit von den einzelnen PC-Koeffizienten werden die beiden Vektoren in Gleichung (7.10) wie folgt dargestellt:

$$\Delta \mathbf{v}^f = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_0^f \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_\alpha^f \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_P^f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(ndof-1)\bar{P}} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{v}^c = \begin{bmatrix} \Delta v_0^c \\ \vdots \\ \Delta v_\alpha^c \\ \vdots \\ \Delta v_P^c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}. \quad (7.11)$$

Der Vektor $\Delta \mathbf{v}^c$ beinhaltet alle PC-Koeffizienten der zu steuernden Verschiebung. Im Rahmen des inkrementell-iterativen Lösungsalgorithmus ist diese Verschiebung deterministisch. Für die einzelnen Komponenten des Vektors $\Delta \mathbf{v}^c$ in Gleichung (7.11) gilt somit

$$[\Delta v_0^c, \dots, \Delta v_\alpha^c, \dots, \Delta v_P^c]^T = [\Delta v^c, \dots, 0, \dots, 0]^T. \quad (7.12)$$

Analog Gleichung (7.10) wird die diskrete Linearisierung in Gleichung (7.5) unterteilt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^{ff} & \mathbf{K}_T^{fc} \\ \mathbf{K}_T^{cf} & \mathbf{K}_T^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^f \\ \Delta \mathbf{v}^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^f \\ \mathbf{G}^c \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Die Teilmatrizen in Gleichung (7.13) haben die folgenden Größen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^{ff} &\in \mathbb{R}^{((ndof-1)\bar{P}) \times ((ndof-1)\bar{P})}, & \mathbf{K}_T^{fc} &\in \mathbb{R}^{((ndof-1)\bar{P}) \times \bar{P}} \\ \mathbf{K}_T^{cf} &\in \mathbb{R}^{\bar{P} \times ((ndof-1)\bar{P})} & \text{und} & \mathbf{K}_T^{cc} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Symmetrie der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ führt außerdem dazu, dass für die beiden Nebendiagonalmatrizen der Zusammenhang $\mathbf{K}_T^{cf} = \mathbf{K}_T^{fc^T}$ gilt. In Abhängigkeit von den einzelnen PC-Koeffizienten lautet die detaillierte Darstellung

von Gleichung (7.13)

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T00}^{\text{ff}} & \dots & \mathbf{K}_{T0P}^{\text{ff}} \\ \vdots & \mathbf{K}_{T\alpha\beta}^{\text{ff}} & \vdots \\ \mathbf{K}_{TP0}^{\text{ff}} & \dots & \mathbf{K}_{TPP}^{\text{ff}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T0}^{\text{fc}} & \dots & \mathbf{K}_{TP}^{\text{fc}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T0}^{\text{fc}^T} \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{TP}^{\text{fc}^T} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{T00}^{\text{cc}} & \dots & K_{T0P}^{\text{cc}} \\ \vdots & K_{T\alpha\beta}^{\text{cc}} & \vdots \\ K_{TP0}^{\text{cc}} & \dots & K_{TPP}^{\text{cc}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_0^{\text{f}} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_P^{\text{f}} \\ \Delta v^{\text{c}} \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0^{\text{f}} \\ \vdots \\ \mathbf{G}_P^{\text{f}} \\ G_0^{\text{c}} \\ \vdots \\ G_P^{\text{c}} \end{bmatrix} . \quad (7.15)$$

Im Rahmen des Lösungsverfahrens ist die äußere Belastung gleich null und es gilt $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Damit vereinfacht sich der globale Residualvektor in Gleichung (7.13) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^{\text{f}} \\ \mathbf{G}^{\text{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{\text{f}} - \mathbf{P}^{\text{f}} \\ \mathbf{F}^{\text{c}} - \mathbf{P}^{\text{c}} - \mathbf{R}^{\text{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{\text{f}} \\ \mathbf{F}^{\text{c}} - \mathbf{R}^{\text{c}} \end{bmatrix} , \quad (7.16)$$

wobei $\mathbf{R}^{\text{c}}$ die Reaktionskraft ist, die aus der vorgegebenen Verschiebung $\Delta \mathbf{v}^{\text{c}}$ resultiert:

$$\mathbf{R}^{\text{c}} = [R_0^{\text{c}}, \dots, R_\alpha^{\text{c}}, \dots, R_P^{\text{c}}]^T \in \mathbb{R}^{\bar{P}} . \quad (7.17)$$

Diese Reaktionskraft entspricht der äußeren Belastung, welche auf die Struktur aufgebracht werden müsste, damit an der Stelle (c) die Verschiebung $\Delta \mathbf{v}^{\text{c}}$ auftritt. Die 1. Zeile von Gleichung (7.13) wird geschrieben als

$$\mathbf{K}_T^{\text{ff}} \Delta \mathbf{v}^{\text{f}} + \mathbf{K}_T^{\text{fc}} \Delta \mathbf{v}^{\text{c}} = -\mathbf{G}^{\text{f}} , \quad (7.18)$$

wobei das Produkt von $\mathbf{K}_T^{\text{fc}}$ und $\Delta \mathbf{v}^{\text{c}}$ als effektiver Lastvektor interpretiert werden kann. Damit wird Gleichung (7.18) umgeformt und die Bestimmungsgleichung für die freien Verschiebungssinkremente $\Delta \mathbf{v}^{\text{f}}$ lautet

$$\mathbf{K}_T^{\text{ff}} \Delta \mathbf{v}^{\text{f}} = - \underbrace{(\mathbf{G}^{\text{f}} + \mathbf{K}_T^{\text{fc}} \Delta \mathbf{v}^{\text{c}})}_{\bar{\mathbf{G}}^{\text{f}}} . \quad (7.19)$$

Dabei kennzeichnet $\bar{\mathbf{G}}^{\text{f}}$ den modifizierten Residualvektor. Anschließend wird über die 2. Zeile von Gleichung (7.13) die Reaktionskraft wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{R}^{\text{c}} = \mathbf{K}_T^{\text{cf}} \Delta \mathbf{v}^{\text{f}} + \mathbf{K}_T^{\text{cc}} \Delta \mathbf{v}^{\text{c}} + \mathbf{F}^{\text{c}} . \quad (7.20)$$

Ein schematischer Ablaufplan der Verschiebungssteuerung ist in Tafel 7.3 dargestellt. Die in Tafel 7.2 gezeigten Modifikationen für die NEWTON-Iteration können auch bei diesem Lösungsverfahren berücksichtigt werden.

```

 $\mathbf{v}_0^{(0)} = \mathbf{0}$  ▷ Initialisierung
for  $n = 1, \dots, N$  do ▷ Schleife über Verschiebungsinkremente
     $i = 0$ 
     $\mathbf{v}_i^{c,(n)} = \mathbf{v}_i^{c,(n-1)} + \Delta \mathbf{v}^c$  ▷ Update vorgebene Verschiebung
    while  $\|\mathbf{G}\| > TOL$  do ▷ NEWTON-Iteration
        if  $i > 0$  then
             $\Delta \mathbf{v}^c = \mathbf{0}$  ▷ Verschiebungsinkrement nur im ersten Schritt
        end if
        for  $e = 1, \dots, numel$  do ▷ Elementschleife
             $\mathbf{g}^e$  und  $\mathbf{k}_T^e$  ▷ Elementresiduum und -tangente
             $\mathbf{K}_T \leftarrow \mathbf{K}_T + \bigcup_e \mathbf{k}_T^e, \mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G} + \bigcup_e \mathbf{g}^e$ 
        end for
         $\bar{\mathbf{G}}^f = \mathbf{G}^f + \mathbf{K}_T^{fc} \Delta \mathbf{v}^c$  ▷ Modifizierter Residualvektor
         $\mathbf{K}_T^{ff} \Delta \mathbf{v}_i^{f,(n)} = -\bar{\mathbf{G}}^f$  ▷ Verschiebungsinkrement
         $\mathbf{R}^{c,(n)} = \mathbf{K}_T^{cf} \Delta \mathbf{v}_i^{f,(n)} + \mathbf{K}_T^{cc} \Delta \mathbf{v}^c + \mathbf{F}^c$  ▷ Reaktionskraft
         $\mathbf{v}_{i+1}^{f,(n)} = \mathbf{v}_i^{f,(n)} + \Delta \mathbf{v}_i^{f,(n)}$  ▷ Update freie Verschiebungen
         $i \leftarrow i + 1$ 
    end while
     $\mathbf{v}_i^{(n+1)} = \mathbf{v}_i^{(n)}$ 
end for

```

Tafel 7.3: Ablaufplan der Einzelverschiebungssteuerung

Prinzipbeispiel für die Einzelverschiebungssteuerung

Als Prinzipbeispiel für die Einzelverschiebungssteuerung dient ein Zweischlag, siehe Abbildung 7.5. Der E-Modul der Struktur wird als Normalverteilung modelliert, siehe Gleichung (7.9). Die räumliche und stochastische Diskretisierung sind identisch zum Prinzipbeispiel für die Laststeuerung. Die äußere Belastung wird durch die Vorgabe der Verschiebung v^c aufgebracht. Dabei wird diese Größe mit einem Verschiebungsinkrement von $\Delta v^c = 1 \text{ cm}$ gesteigert. An dieser Stelle sei nochmals angemerkt, dass die gesteuerte Verschiebung deterministisch ist.

Aufgrund der variierenden Materialeigenschaft der Struktur ist die Reaktionskraft $R^c(v^c)$ eine stochastische Größe. In Abbildung 7.6 ist der Mittelwert μ_{R^c}

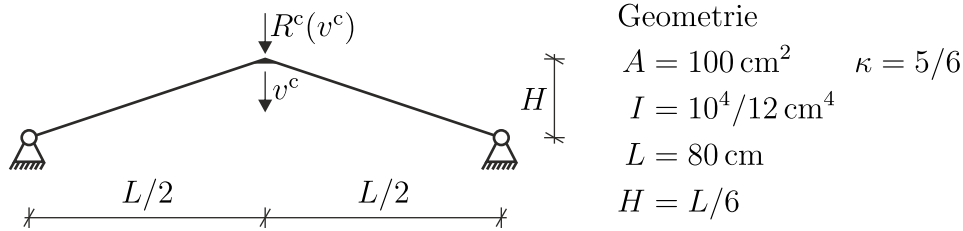


Abbildung 7.5: Zweischlag unter Einzellast: System und Geometrie

der stochastischen Reaktionskraft $R^c(v^c)$ über der deterministischen Verschiebung v^c aufgetragen. Um die Streuung der Reaktionskraft $R^c(v^c)$ zu visualisieren, ist zusätzlich der Mittelwert μ_{R^c} plus/minus dreimal die Standardabweichung σ_{R^c} dargestellt. Für einen bestimmten Wert der gesteuerten Verschiebung $\tilde{v}^c$ lautet die zugehörige stochastische Reaktionskraft $\tilde{R}^c$. Diese Größe ist durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\tilde{R}^c|v^c = \tilde{v}^c)$ charakterisiert, siehe Abbildung 7.6.

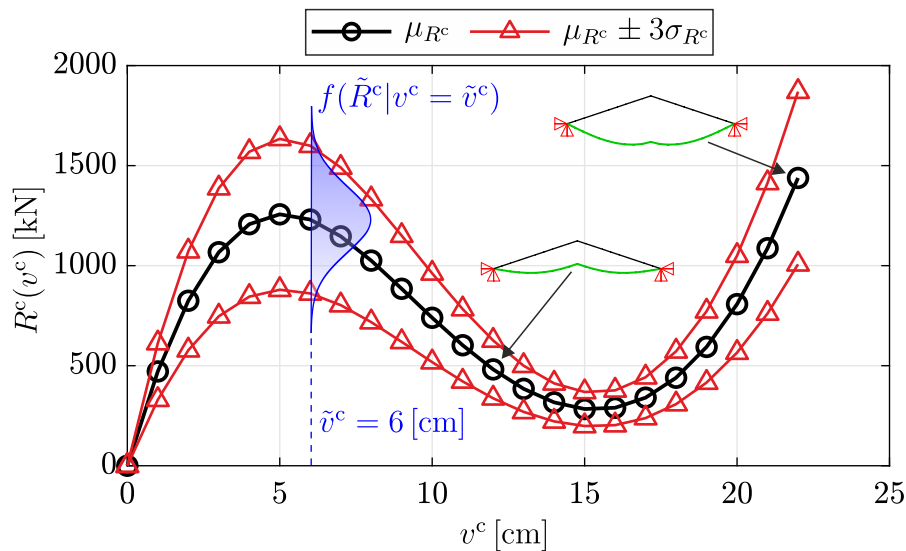


Abbildung 7.6: Variierende Reaktionskraft R^c über der deterministisch gesteuerten Verschiebung v^c sowie eine qualitative Dichtefunktion der Reaktionskraft $\tilde{R}^c$ bei dem Verschiebungsniveau $\tilde{v}^c = 6 \text{ cm}$

7.1.3 Abschließende Bemerkungen

Anhand der beschriebenen Last- und Einzelverschiebungssteuerung ist zu erkennen, dass beide Verfahren ohne weitere Anpassungen im Rahmen einer SSFEM-

Berechnung verwendet werden können. Die folgende Auflistung fasst wichtige abschließende Bemerkungen zu den Lösungsverfahren zusammen.

- Bei einer Berechnung mit der Laststeuerung können sowohl Unschärfen von Material- und Geometrieeigenschaften als auch der äußeren Belastung berücksichtigt werden. Dabei wird eine stochastische Belastung mit dem deterministischen Lastfaktor λ gesteigert.
- Eine Einschränkung der Einzelverschiebungssteuerung ist, dass der zu steuernde Freiheitsgrad nicht unabhängig vom Belastungszustand gewählt werden kann. So gibt die Stelle der Belastung auch direkt den Freiheitsgrad vor, welcher vom Anwender gesteuert wird.
- Bei der hier beschriebenen Einzelverschiebungssteuerung wird eine maßgebende Verschiebung vorgegeben. In manchen Fällen ist es auch möglich, mehrere Verschiebungen auf einer Kante zu steuern, z.B. ein axial belasteter Zylinder. Dies entspricht dann einer konstanten Streckenlast auf jener Kante. Die gesamte Reaktionskraft wird über die Summe aller Teilreaktionskräfte an den gesteuerten Freiheitsgraden berechnet. An dieser Stelle sei erwähnt, dass dieses Vorgehen nur möglich ist, wenn durch die Vorgabe mehrerer Verschiebungen keine ungewollten kinematischen Einschränkungen in das System eingebracht werden, siehe RUST [91].

Anhand der genannten Punkte wird deutlich, dass gewisse Problemstellungen im Rahmen der SSFEM mit den bisher beschriebenen Verfahren nicht untersucht werden können. Im folgenden Abschnitt wird deshalb ein verallgemeinertes Lösungsverfahren vorgestellt, welches für Berechnungen mit der SSFEM verwendet werden kann, um die andiskutierten Einschränkungen zu umgehen.

7.2 Die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung

Nachfolgend wird eine verallgemeinerte Verschiebungssteuerung für die Anwendung im Rahmen der SSFEM entwickelt. Für die ursprüngliche Version dieses Lösungsverfahrens wird auf die Arbeiten von BATOZ & DHATT [16] und WAGNER & WRIGGERS [123] verwiesen. Die Notation folgt im Wesentlichen der Darstellung in WAGNER & WRIGGERS [123].

Wie der Name des Verfahrens vermuten lässt, wird hier ebenfalls eine Verschiebungsgröße gesteuert. Im Gegensatz zu der Einzelverschiebungssteuerung aus dem vorherigen Abschnitt wird hier aber keine Reaktionskraft, sondern ein Lastfaktor für die äußere Belastung rückgerechnet. Damit ist der Lastfaktor λ in Gleichung (7.3) im Allgemeinen keine deterministische Größe mehr. Wie auch

die Reaktionskraft R^c in Gleichung (7.17) wird nun auch der Lastfaktor durch seine PC-Koeffizienten $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=0}^P$ beschrieben. Aus diesem Grund muss zunächst der globale Residualvektor in Gleichung (7.3) angepasst werden. Bisher galt für den α -ten Koeffizienten des Residuums $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha - \lambda \mathbf{P}_\alpha$. Dieser Koeffizient wird nun geschrieben als

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha - \bar{\mathbf{P}}_\alpha , \quad (7.21)$$

wobei der Vektor $\bar{\mathbf{P}}_\alpha$ die bereits mit dem Lastfaktor skalierte äußere Belastung beinhaltet. Da im Allgemeinen sowohl der Lastparameter als auch die Belastung stochastische Größen sind, werden die Koeffizienten $\bar{\mathbf{P}}_\alpha$ wie folgt berechnet:

$$\bar{\mathbf{P}}_\alpha = D_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\beta \mathbf{P}_\gamma . \quad (7.22)$$

Ist die äußere Belastung deterministisch, so vereinfacht sich die Berechnungsvorschrift in Gleichung (7.22) zu

$$\bar{\mathbf{P}}_\alpha = D_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\beta \delta_{\gamma 0} \mathbf{P}_0 = \lambda_\alpha \mathbf{P}_0 . \quad (7.23)$$

Im Folgenden wird von der allgemeingültigen Form in Gleichung (7.22) ausgegangen. Für spätere Umformungen ist es zweckmäßig, alle PC-Koeffizienten des stochastischen Lastfaktors im Vektor

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \dots, \lambda_\alpha, \dots, \lambda_P]^T \in \mathbb{R}^{\bar{P}} \quad (7.24)$$

zusammenzufassen. Für den globalen Residualvektor wird fortan die Notation $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ verwendet.

Die grundlegende Idee des Verfahrens besteht nun darin, diesen Vektor mit einer geeigneten Zusatzbedingung f zu erweitern. Damit die gesteuerte Verschiebung v^c einen vom Anwender vorgegebenen Verschiebungswert $\bar{v}^c$ annimmt, wird die folgende Bedingung formuliert:

$$f = v^c - \bar{v}^c \stackrel{!}{=} 0 . \quad (7.25)$$

Im Rahmen der SSFEM wird die Verschiebungsgröße v^c vollständig durch ihre $\bar{P}$ Koeffizienten $\{v_\alpha^c\}_{\alpha=0}^{\bar{P}}$ beschrieben. Aus diesem Grund muss die Zusatzbedingung in Gleichung (7.25) im Rahmen der SSFEM für alle PC-Koeffizienten der Verschiebungsgröße v^c formuliert werden:

$$f_\alpha = (v_\alpha^c - \bar{v}_\alpha^c) \stackrel{!}{=} 0 , \quad \forall \alpha \in \{0, \dots, P\} . \quad (7.26)$$

Wie auch bei der Verschiebungssteuerung ist die vom Anwender vorgegebene Verschiebung deterministisch. Für die Koeffizienten $\bar{v}_\alpha^c$ gilt somit $\bar{v}_\alpha^c = \delta_{\alpha 0} \bar{v}^c$. Die

$\bar{P}$ Zusatzbedingungen in Gleichung (7.26) werden in dem Vektor

$$\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_\alpha \\ \vdots \\ f_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^c \\ \vdots \\ v_\alpha^c \\ \vdots \\ v_P^c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{v}^c \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}^c - \bar{\mathbf{v}}^c, \quad \mathbf{f}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^{\bar{P}} \quad (7.27)$$

zusammengefasst. Dabei wird $\bar{v}^c$ vom Anwender vorgegeben.

Werden die $\bar{P}$ Gleichungen zum globalen Residualvektor $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ hinzugefügt, so lautet das erweiterte System nichtlinearer Gleichungen

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{w}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}) \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{(ndof+1)\bar{P}}, \quad (7.28)$$

wobei der verallgemeinerte Vektor $\mathbf{w}$ alle PC-Koeffizienten der Verschiebungen und des Lastfaktors beinhaltet. Um das erweiterte System nichtlinearer Gleichungen in Gleichung (7.28) im Rahmen eines NEWTON-Verfahrens zu lösen, muss zunächst die zugehörige Linearisierung bestimmt werden. Allgemein lässt sich diese angeben mit

$$\begin{aligned} L[\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{w})] &= \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{w}) + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{w}} \Delta \mathbf{w} \\ &= \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{w}) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}}_{\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{v}} \Delta \mathbf{v}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Delta \boldsymbol{\lambda} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Delta \boldsymbol{\lambda}}_{\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \Delta \boldsymbol{\lambda}}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Die partielle Ableitung des erweiterten Residualvektors $\bar{\mathbf{G}}$ nach den Verschiebungen $\mathbf{v}$ lautet in Abhängigkeit von den einzelnen Komponenten wie folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\mu} = \mathbf{K}_{T\alpha\mu} \in \mathbb{R}^{ndof \times ndof} \quad \text{und} \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}_\mu} &= \frac{\partial (v_\alpha^c - \bar{v}_\alpha^c)}{\partial \mathbf{v}_\mu} = \delta_{\alpha\mu} \mathbf{f}_v^T \\ \text{mit } \mathbf{f}_v^T &= [0, \dots, \underbrace{1}_{\text{Position c}}, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{ndof}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Dabei entspricht $\mathbf{K}_{T\alpha\mu}$ einer Teilmatrix der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ in Gleichung (7.6). Der Vektor $\mathbf{f}_v^T$ besitzt nur an der Position (c) den Eintrag eins und ist sonst gleich null.

Die Ableitung des erweiterten Residuums $\bar{\mathbf{G}}$ nach den PC-Koeffizienten des Lastfaktors $\boldsymbol{\lambda}$ kann komponentenweise angegeben werden mit:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\alpha}{\partial \lambda_\mu} = \frac{\partial (\mathbf{F}_\alpha - D_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\beta \mathbf{P}_\gamma)}{\partial \lambda_\mu} = -D_{\alpha\mu\gamma} \mathbf{P}_\gamma = -\mathbf{P}_{\alpha\mu} \in \mathbb{R}^{ndof} \quad \text{und} \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \lambda_\mu} = \delta_{\alpha\mu} 0 . \quad (7.33)$$

Da die Zusatzbedingung $\mathbf{f}$ nicht vom Lastfaktor $\boldsymbol{\lambda}$ abhängt, ist die entsprechende Ableitung in Gleichung (7.33) gleich null.

Die einzelnen Teilmatrizen $\mathbf{K}_{T\alpha\mu}$ in Gleichung (7.30) werden analog Gleichung (7.6) in der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ angeordnet. Auf gleiche Weise werden die einzelnen Vektoren $\delta_{\alpha\mu} \mathbf{f}_v^T$ in Gleichung (7.31) in der Matrix

$$\hat{\mathbf{f}}_v^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_v^T & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{f}_v^T & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{f}_v^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{f}}_{v0}^T & - \\ \vdots & \\ -\hat{\mathbf{f}}_{v\beta}^T & - \\ \vdots & \\ -\hat{\mathbf{f}}_{vP}^T & - \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_{v\beta}^T \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}}, \quad (7.34)$$

angeordnet. Dabei entspricht $\hat{\mathbf{f}}_{v\beta}^T$ der $(\beta + 1)$ -Zeile der Matrix $\hat{\mathbf{f}}_v^T \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times (ndof \cdot \bar{P})}$. Aufgrund des KRONECKER-Deltas entspricht $\hat{\mathbf{f}}_v^T$ einer Blockdiagonalmatrix.

Die Matrix $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{(ndof \cdot \bar{P}) \times \bar{P}}$ beinhaltet die Vektoren $\mathbf{P}_{\alpha\mu}$ aus Gleichung (7.32):

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{00} & \cdots & \mathbf{P}_{0\mu} & \cdots & \mathbf{P}_{0P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{\alpha 0} & \cdots & \mathbf{P}_{\alpha\mu} & \cdots & \mathbf{P}_{\alpha P} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{P0} & \cdots & \mathbf{P}_{P\mu} & \cdots & \mathbf{P}_{PP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \hat{\mathbf{P}}_0 & \cdots & \hat{\mathbf{P}}_\mu & \cdots & \hat{\mathbf{P}}_P \\ | & & | & & | \end{bmatrix}. \quad (7.35)$$

Hierbei entspricht der Vektor $\hat{\mathbf{P}}_\mu \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}}$ gerade der $(\mu + 1)$ -ten Spalte der Matrix $\hat{\mathbf{P}}$. Anhand Gleichung (7.35) ist zu erkennen, dass die Matrix $\hat{\mathbf{P}}$ gerade $\bar{P}$ Spalten beinhaltet, welche ausschließlich von der äußeren Belastung abhängig sind. Ist die äußere Last deterministisch, gilt für die Koeffizienten $\mathbf{P}_\gamma = \delta_{\gamma 0} \mathbf{P}_0$. Dies führt zu

$$\mathbf{P}_{\alpha\mu} = D_{\alpha\mu\gamma} \mathbf{P}_\gamma = D_{\alpha\mu\gamma} \delta_{\gamma 0} \mathbf{P}_0 = \delta_{\alpha\mu} \mathbf{P}_0 . \quad (7.36)$$

Damit vereinfacht sich die Struktur der Matrix in Gleichung (7.35):

$$\hat{\mathbf{P}} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_0}_{\bar{P}\text{-mal}}) . \quad (7.37)$$

Mit den eingeführten Matrizen kann die vollständige Linearisierung von Gleichung (7.28) kompakt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\hat{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{f}}_v^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{v}) \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

mit $\mathbf{K}_T \in \mathbb{R}^{(ndof \cdot \bar{P}) \times (ndof \cdot \bar{P})}$, $\hat{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{(ndof \cdot \bar{P}) \times \bar{P}}$
 $\hat{\mathbf{f}}_v^T \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times (ndof \cdot \bar{P})}$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$.

Analog Gleichung (7.24) werden die Inkremente der PC-Koeffizienten des Lastfaktors im Vektor $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ zusammengefasst. Die vollständige Linearisierung des erweiterten Residuums $\tilde{\mathbf{G}}$ führt im Allgemeinen auf eine unsymmetrische Koeffizientenmatrix, siehe Gleichung (7.38).

Aus diesem Grund wird für die Bestimmung der Inkremente $\Delta \mathbf{v}$ und $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ eine Blockelimination verwendet. In einem ersten Schritt wird die 1. Zeile von Gleichung (7.38) umgeschrieben zu

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = \hat{\mathbf{P}} \Delta \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{G}. \quad (7.39)$$

Die Trennung der rechten Seite in $\hat{\mathbf{P}}$ und $\mathbf{G}$ führt auf die beiden Gleichungssysteme

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}^G = -\mathbf{G} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{v}}^P = \hat{\mathbf{P}}. \quad (7.40)$$

Das Verschiebungsincrement $\Delta \mathbf{v}^G$ ist wie folgt aufgebaut:

$$\Delta \mathbf{v}^G = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_0^G \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_\alpha^G \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_P^G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}}. \quad (7.41)$$

Wie bereits erwähnt, ist $\hat{\mathbf{P}}$ eine Matrix mit $\bar{P}$ Spalten. Die führt dazu, dass das Inkrement $\Delta \hat{\mathbf{v}}^P$ ebenfalls eine Matrix ist:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\mathbf{v}}^P &= \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_{00}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{0\alpha}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{0P}^P \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_{\beta 0}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{\beta \alpha}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{\beta P}^P \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \mathbf{v}_{P0}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{P\alpha}^P & \cdots & \Delta \mathbf{v}_{PP}^P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(ndof \cdot \bar{P}) \times \bar{P}} \\ &= \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ \Delta \hat{\mathbf{v}}_0^P & \cdots & \Delta \hat{\mathbf{v}}_\alpha^P & \cdots & \Delta \hat{\mathbf{v}}_P^P \\ | & & | & & | \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{\mathbf{v}}_\alpha^P \in \mathbb{R}^{ndof \cdot \bar{P}}. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Dabei beschreibt $\Delta \hat{\mathbf{v}}_\alpha^P$ die $(\alpha+1)$ -Spalte der Matrix $\Delta \hat{\mathbf{v}}^P$. Das rechte Gleichungssystem in Gleichung (7.40) kann alternativ auch in Abhängigkeit der einzelnen rechten Seiten formuliert werden:

$$\mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{v}}_\alpha^P = \hat{\mathbf{P}}_\alpha, \quad \forall \alpha \in \{0, \dots, P\}. \quad (7.43)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (7.39) und (7.40) berechnet sich das vollständige Verschiebungsinkrement zu

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta \hat{\mathbf{v}}^P \Delta \boldsymbol{\lambda} + \Delta \mathbf{v}^G. \quad (7.44)$$

Im einem zweiten Schritt wird nun das Inkrement des Lastfaktors $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ bestimmt. Die 2. Zeile von Gleichung (7.38) lautet

$$\hat{\mathbf{f}}_v^T \Delta \mathbf{v} + \mathbf{0} = -\mathbf{f}. \quad (7.45)$$

Da die lineare Zusatzbedingung direkt erfüllt ist, gilt $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Wird für $\Delta \mathbf{v}$ die Beziehung aus Gleichung (7.44) eingesetzt, folgt

$$\hat{\mathbf{f}}_v^T (\Delta \hat{\mathbf{v}}^P \Delta \boldsymbol{\lambda} + \Delta \mathbf{v}^G) = \hat{\mathbf{f}}_v^T \Delta \hat{\mathbf{v}}^P \Delta \boldsymbol{\lambda} + \hat{\mathbf{f}}_v^T \Delta \mathbf{v}^G = \mathbf{0}. \quad (7.46)$$

An dieser Stelle ist es zweckmäßig, die folgenden Größen zu definieren:

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c} := \hat{\mathbf{f}}_v^T \Delta \hat{\mathbf{v}}^P \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{v}^{G,c} := \hat{\mathbf{f}}_v^T \Delta \mathbf{v}^G. \quad (7.47)$$

Damit lässt sich Gleichung (7.46) schreiben als

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c} \Delta \boldsymbol{\lambda} + \Delta \mathbf{v}^{G,c} = \mathbf{0}. \quad (7.48)$$

Die Matrix $\hat{\mathbf{f}}_v^T$ enthält nur Nullen und Einsen. Weiterhin lassen sich die eingeführten Größen in Gleichung (7.47) in Abhängigkeit von den einzelnen Komponenten darstellen:

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c} = \begin{bmatrix} \Delta v_{00}^{P,c} & \dots & \Delta v_{0P}^{P,c} \\ \vdots & \Delta v_{\alpha\beta}^{P,c} & \vdots \\ \Delta v_{P0}^{P,c} & \dots & \Delta v_{PP}^{P,c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}, \quad \Delta \mathbf{v}^{G,c} = \begin{bmatrix} \Delta v_0^{G,c} \\ \vdots \\ \Delta v_P^{G,c} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{P}}. \quad (7.49)$$

Für die Bestimmung des Inkrements $\Delta \boldsymbol{\lambda}$ muss die Matrix $\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$ invertiert werden:

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} = -(\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c})^{-1} \Delta \mathbf{v}^{G,c}. \quad (7.50)$$

Der vollständige Ablaufplan der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung ist in Tafel 7.4 dargestellt. Die in Tafel 7.2 gezeigten Modifikationen für eine gemischt-hybride FE-Formulierung können auch bei diesem Lösungsverfahren mit berücksichtigt werden.

```

 $\lambda_0^{(1)} = \mathbf{0}, \mathbf{v}_0^{(1)} = \mathbf{0}$  ▷ Initialisierung
for  $n = 1, \dots, N$  do ▷ Schleife über Verschiebungsinkremente
     $i = 0$ 
    while  $\|\mathbf{G}\| > TOL$  do ▷ NEWTON-Iteration
        for  $e = 1, \dots, numel$  do ▷ Elementschleife
             $\mathbf{g}^e$  und  $\mathbf{k}_T^e$  ▷ Elementresiduum und -tangente
             $\mathbf{K}_T \leftarrow \mathbf{K}_T + \bigcup_e \mathbf{k}_T^e, \mathbf{G} \leftarrow \mathbf{G} + \bigcup_e \mathbf{g}^e$  ▷ Assemblierung
        end for
        if  $i = 0$  then
             $\mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{v}}_i^P = \hat{\mathbf{P}}$ 
             $\Delta \lambda_i^{(n)} = (\Delta \hat{\mathbf{v}}_i^{P,c})^{-1} \Delta \bar{\mathbf{v}}^c$  ▷ Inkrement Lastfaktor
             $\Delta \mathbf{v}_i^{(n)} = \Delta \hat{\mathbf{v}}_i^P \Delta \lambda_i^{(n)}$  ▷ Verschiebungsinkrement
        else
             $\mathbf{K}_T \Delta \hat{\mathbf{v}}_i^P = \hat{\mathbf{P}}, \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_i^G = -\mathbf{G}$ 
             $\Delta \lambda_i^{(n)} = -(\Delta \hat{\mathbf{v}}_i^{P,c})^{-1} \Delta \mathbf{v}_i^{G,c}$  ▷ Inkrement Lastfaktor
             $\Delta \mathbf{v}_i^{(n)} = \Delta \hat{\mathbf{v}}_i^P \Delta \lambda_i^{(n)} + \Delta \mathbf{v}_i^G$  ▷ Verschiebungsinkrement
        end if
         $\mathbf{v}_{i+1}^{(n)} = \mathbf{v}_i^{(n)} + \Delta \mathbf{v}_i^{(n)}$  ▷ Update Verschiebungen
         $\lambda_{i+1}^{(n)} = \lambda_i^{(n)} + \Delta \lambda_i^{(n)}$  ▷ Update Lastfaktor
         $i \leftarrow i + 1$ 
    end while
     $\mathbf{v}_i^{(n+1)} = \mathbf{v}_i^{(n)}, \lambda_i^{(n+1)} = \lambda_i^{(n)}$ 
end for

```

Tafel 7.4: Ablaufplan der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung

Prinzipbeispiel für die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung

Als Prinzipbeispiel für die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung dient der Zweischlag unter einer Gleichlast, siehe Abbildung 7.7. Der E-Modul der Struktur folgt auch hier der Normalverteilung in Gleichung (7.9). Zusätzlich wird die Gleichlast $q(\omega)$ als stochastische Variable mit

$$q(\omega) \sim \mathcal{N}(0,015, 0,0015) [\text{kN/cm}] \quad (7.51)$$

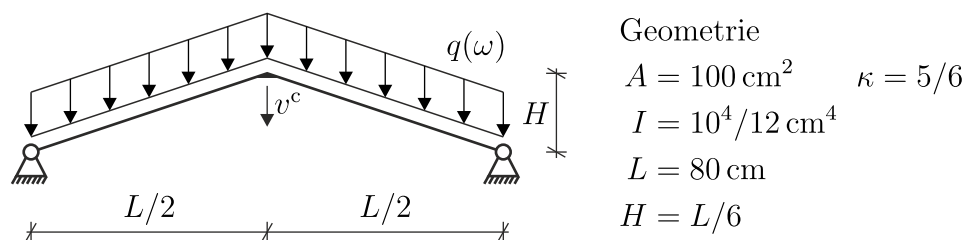


Abbildung 7.7: Zweischlag unter Gleichlast: System, Geometrie und Belastung

modelliert. Die räumliche und stochastische Diskretisierung sind identisch zum Prinzipbeispiel für die Laststeuerung. Wie auch bei der Einzelverschiebungssteuerung wird die Verschiebung v^c mit einem Inkrement von $\Delta v^c = 1 \text{ cm}$ gesteigert.

Aufgrund der stochastischen Materialeigenschaft und der streuenden Belastung ist der Lastparameter eine stochastische Größe. Im Last-Verschiebungsdiagramm, siehe Abbildung 7.8, ist der qualitative Verlauf des Mittelwerts μ_λ über der deterministischen Verschiebung v^c aufgetragen. Um die Streuung des stochastischen Lastfaktors λ zu visualisieren, ist zusätzlich der Mittelwert μ_λ plus/minus dreimal die Standardabweichung σ_λ dargestellt. Für einen bestimmten Wert $\tilde{v}^c$ lautet der zugehörige stochastische Lastparameter $\tilde{\lambda}$. Diese Zufallsgröße ist durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\tilde{\lambda}|v^c = \tilde{v}^c)$ charakterisiert, siehe Abbildung 7.8.

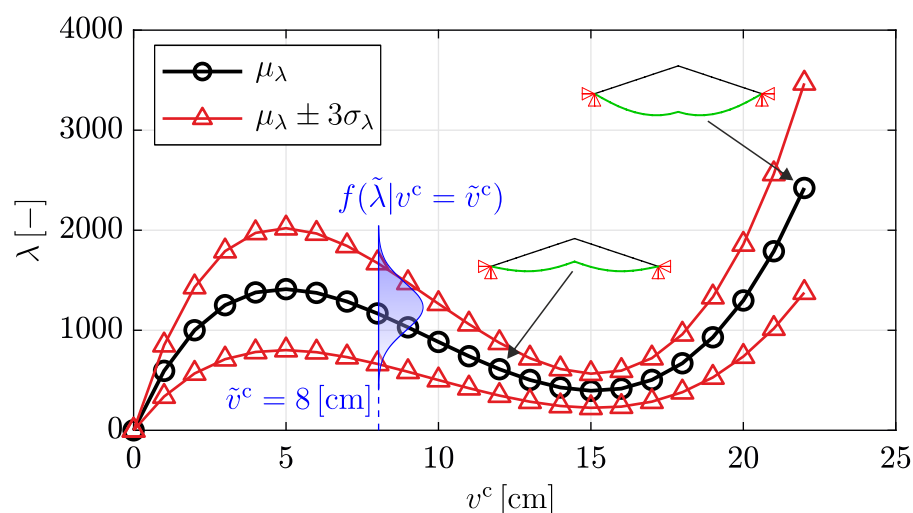


Abbildung 7.8: Streuender Lastfaktor λ über der deterministisch gesteuerten Verschiebung v^c sowie eine qualitative Dichtefunktion des Lastfaktors $\tilde{\lambda}$ bei dem Verschiebungsniveau $\tilde{v}^c = 8 \text{ cm}$

7.2.1 Zusammenhang zwischen dem stochastischen und dem deterministischen Lösungsverfahren

Werden keine stochastischen Größen bei einer Berechnung mit der SSFEM berücksichtigt, so lassen sich die hier gezeigten Zusammenhänge vereinfachen. Analog zu Abschnitt 6.2.4 werden nachfolgend einige Vereinfachungen anhand der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung diskutiert.

Für den Fall, dass keine Unschärfe berücksichtigt wird, gilt für die Teilmatrizen der globalen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{T\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{K}_{T0} . \quad (7.52)$$

Damit ist $\mathbf{K}_T$ eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$\mathbf{K}_T = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{K}_{T0}, \dots, \mathbf{K}_{T0}}_{\bar{P}\text{-mal}}) . \quad (7.53)$$

Analog hierzu vereinfacht sich die Matrix $\hat{\mathbf{P}}$ in Gleichung (7.35). Mit $\mathbf{P}_{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\mu} \mathbf{P}_0$ folgt

$$\hat{\mathbf{P}} = \text{diag}(\underbrace{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_0}_{\bar{P}\text{-mal}}) . \quad (7.54)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (7.53) und (7.54) folgt aus Gleichung (7.40), dass die Matrix $\Delta \hat{\mathbf{v}}^P$ ebenfalls eine Blockdiagonalform aufweist:

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}^P = \text{diag}(\underbrace{\Delta \mathbf{v}_{00}^P, \dots, \Delta \mathbf{v}_{00}^P}_{\bar{P}\text{-mal}}) . \quad (7.55)$$

Für das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{v}^G$ gilt

$$\Delta \mathbf{v}^G = [(\Delta \mathbf{v}_0^G)^T, \dots, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]^T . \quad (7.56)$$

Die Vereinfachungen übertragen sich sinngemäß auf die beiden Größen in Gleichung (7.47):

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c} = \begin{bmatrix} \Delta v_{00}^{P,c} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \Delta v_{00}^{P,c} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{v}^{G,c} = \begin{bmatrix} \Delta v_0^{G,c} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (7.57)$$

Aus Gleichung (7.57) folgt, dass das Inkrement $\Delta \boldsymbol{\lambda} = -(\Delta \hat{\mathbf{v}}^{P,c})^{-1} \Delta \mathbf{v}^{G,c}$ nur auf dem ersten PC-Koeffizienten ungleich null sein kann. Somit entspricht die erweiterte Version der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung, unabhängig vom Polynomgrad der PC-Entwicklung, dem Verfahren, wie es in WAGNER & WRIGERS [123] beschrieben ist.

7.2.2 Abschließende Bemerkungen

Die in dieser Arbeit weiterentwickelte, verallgemeinerte Verschiebungssteuerung besitzt gegenüber den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Lösungsverfahren die folgenden Vorteile.

- Mit der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung können beliebige Belastungszustände einer Gleich-, Strecken- oder Einzellast untersucht werden.
- Die zu steuernde Verschiebung kann unabhängig von der äußeren Belastung gewählt werden.
- Das Verfahren erlaubt die Berücksichtigung stochastischer Belastungen.

8 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird der Einfluss unscharfer Material- und Geometrieeigenschaften auf das mechanische Verhalten verschiedener Tragstrukturen anhand numerischer Beispiele untersucht. Für die Berechnungen mit der SSFEM werden die in Kapitel 6 entwickelten stochastischen Elementformulierungen verwendet. Ebenso finden die verschiedenen Lösungsalgorithmen aus Kapitel 7 ihre Anwendung. Zur Verifizierung der SSFEM-Ergebnisse werden diese den Ergebnissen einer Monte-Carlo-Simulation (MCS) gegenübergestellt.

Anhand des ersten Beispiels wird die PC-Approximation für verschiedene Verteilungsarten einer unscharfen Eingangsgröße untersucht. Die dort gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf die nachfolgenden Untersuchungen in diesem Kapitel übertragen. Eine Übersicht der numerischen Beispiele zeigt Abbildung 8.1.

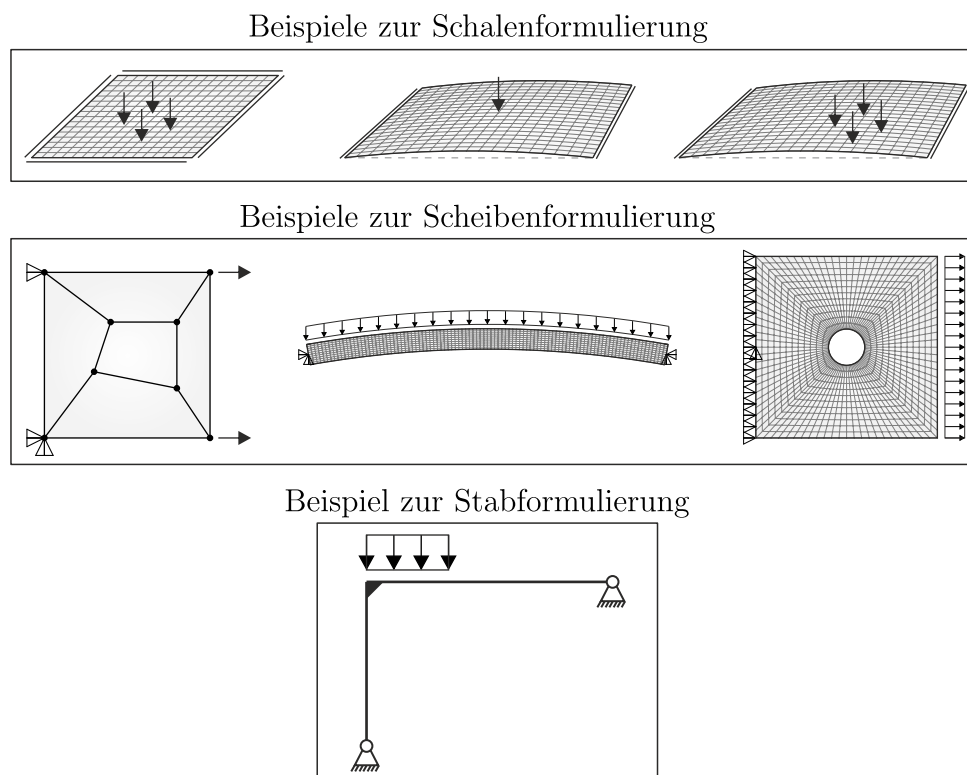
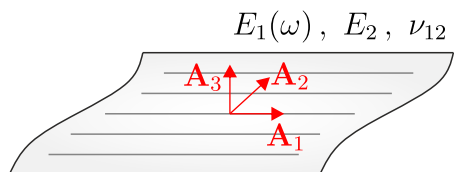


Abbildung 8.1: Übersicht der numerischen Beispiele in Kapitel 8

Zu Beginn werden drei Beispiele zur Schalenformulierung aus Abschnitt 6.2 untersucht. Die Anwendung der gemischt-hybriden Scheibenformulierung, vgl. Abschnitt 6.3, wird anschließend an drei weiteren Beispielen gezeigt. Abschließend folgt ein Beispiel zur geometrisch exakten Stabformulierung aus Abschnitt 6.4.

8.1 PC-Entwicklung einer stochastischen Materialmatrix

Anhand eines Einführungsbeispiels wird die PC-Entwicklung einer stochastischen Materialmatrix, wie in Gleichung (6.27) dargestellt, genauer untersucht. Hierfür wird eine transversal isotrope Einzelschicht unter dem Einfluss eines unscharfen Materialparameters betrachtet, siehe Abbildung 8.2 (links).



The diagram on the left shows a cross-section of a transversally isotropic layer. Three red arrows, labeled A_1 , A_2 , and A_3 , originate from a central point. A_1 points horizontally to the right, A_2 points diagonally up and to the right, and A_3 points diagonally up and to the left. Above the layer, the parameters $E_1(\omega)$, E_2 , and ν_{12} are listed.

$$\mathbf{C}_m(\omega) = \begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) & 0 \\ C_{12}(\omega) & C_{22}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}(\omega) \end{bmatrix}$$

Abbildung 8.2: Einzelschicht (links) und zugehörige stochastische Materialmatrix $\mathbf{C}_m$ (rechts), vgl. Gleichung (3.44)

Im Folgenden sei nur der Eintrag $C_{12}(\omega)$ von Interesse, welcher in Abbildung 8.2 (rechts) markiert ist. Für die deterministischen Materialparameter werden die Werte $E_2 = 1100 \text{ N/mm}^2$ und $\nu_{12} = 0,25$ angenommen. Damit lautet der analytische Zusammenhang zwischen dem stochastischen E-Modul $E_1(\omega)$ und des resultierenden Steifigkeitseintrages $C_{12}(\omega)$ wie folgt:

$$C_{12}(\omega) = C_{12}(E_1(\omega)) = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - (\nu_{12}^2 E_2)/E_1(\omega)} = \frac{275}{1 - 68,75/E_1(\omega)} . \quad (8.1)$$

Zur Modellierung des Parameters $E_1(\omega)$ werden im Folgenden die vier unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus Abschnitt 4.1.2 herangezogen. Die Verteilungsparameter der einzelnen Verteilungen werden dabei so gewählt, dass der Mittelwert und die Standardabweichung des stochastischen E-Moduls $E_1(\omega)$ für alle vier Verteilungen die folgenden Werte annimmt:

$$\mu_{E_1} = 3300 \text{ N/mm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{E_1} = 330 \text{ N/mm}^2 .$$

Eine Zusammenstellung der einzelnen Verteilungsparameter ist in Tabelle 8.1 gegeben. Um die unterschiedlichen Verteilungen des E-Moduls zu visualisieren, sind in Abbildung 8.3 die zu Tabelle 8.1 zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_{E_1}(E_1)$ dargestellt.

Ausgangspunkt für die PC-Entwicklung der Steifigkeit $C_{12}(\omega)$ ist die Chaotentwicklung der Zufallsvariablen $E_1(\omega)$ mit

$$E_1(\omega) = \sum_{\alpha} E_{1\alpha} \Psi_{\alpha} . \quad (8.2)$$

Verteilung von $E_1(\omega)$	Verteilungsparameter			
GAUSS $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\mu = 3300$	$\sigma = 330$	—	—
Uniform $\mathcal{U}(a, b)$	$a = 2728,42$	$b = 3871,58$	—	—
Gamma $\Gamma(s, t, r)$	$s = 4$	$t = 165$	$r = 2640$	—
Beta $B(s, t, a, b)$	$s = 4,67$	$t = 2,33$	$a = 1980$	$b = 3960$

Tabelle 8.1: Verteilungsparameter der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen des E-Moduls $E_1(\omega)$

Die verwendeten Basispolynome Ψ_α richten sich nach der Verteilung von $E_1(\omega)$, vgl. Abschnitt 5.4. Mit Tabelle 5.6 werden die zugehörigen PC-Koeffizienten bestimmt. Unter Berücksichtigung der Rechenoperationen in Abschnitt 5.5 werden die Koeffizienten der PC-Entwicklung

$$\hat{C}_{12} = \sum_{\alpha} C_{12\alpha} \Psi_{\alpha} \approx C_{12}(\omega) \quad (8.3)$$

bestimmt.

Im Folgenden wird die Approximation des funktionalen Zusammenhangs in Gleichung (8.1) genauer betrachtet. Der E-Modul $E_1(\omega)$ folgt hierfür der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 3300 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma = 330 \text{ N/mm}^2$. In Tabelle 8.2 sind die berechneten PC-Koeffizienten für unterschiedliche Polynomgrade der PCE dargestellt. Es ist zu erkennen, dass alle Koeffizienten gegen einen individuellen Grenzwert konvergieren.

Koeffizienten $C_{12\alpha}$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
C_{120}	280,9127	280,9141	280,9141	280,9141	280,9141
C_{121}	−0,6039	−0,6169	−0,6173	−0,6173	−0,6173
C_{122}	—	0,0892	0,0920	0,0922	0,0922
C_{123}	—	—	−0,0163	−0,0170	−0,0171
C_{124}	—	—	—	0,0035	0,0037
C_{125}	—	—	—	—	−0,0008

Tabelle 8.2: PC-Koeffizienten der Chaosentwicklung $\hat{C}_{12} = \sum_{\alpha} C_{12\alpha} \Psi_{\alpha}$

Um das Approximationsverhalten der PCE besser zu veranschaulichen, ist der analytische Zusammenhang und die jeweilige Polynomapproximation für unterschiedliche Polynomgrade p in Abbildung 8.4 dargestellt. Die analytische Funktion wird bereits mit einem Polynomgrad von $p = 3$ nahezu korrekt erfasst.

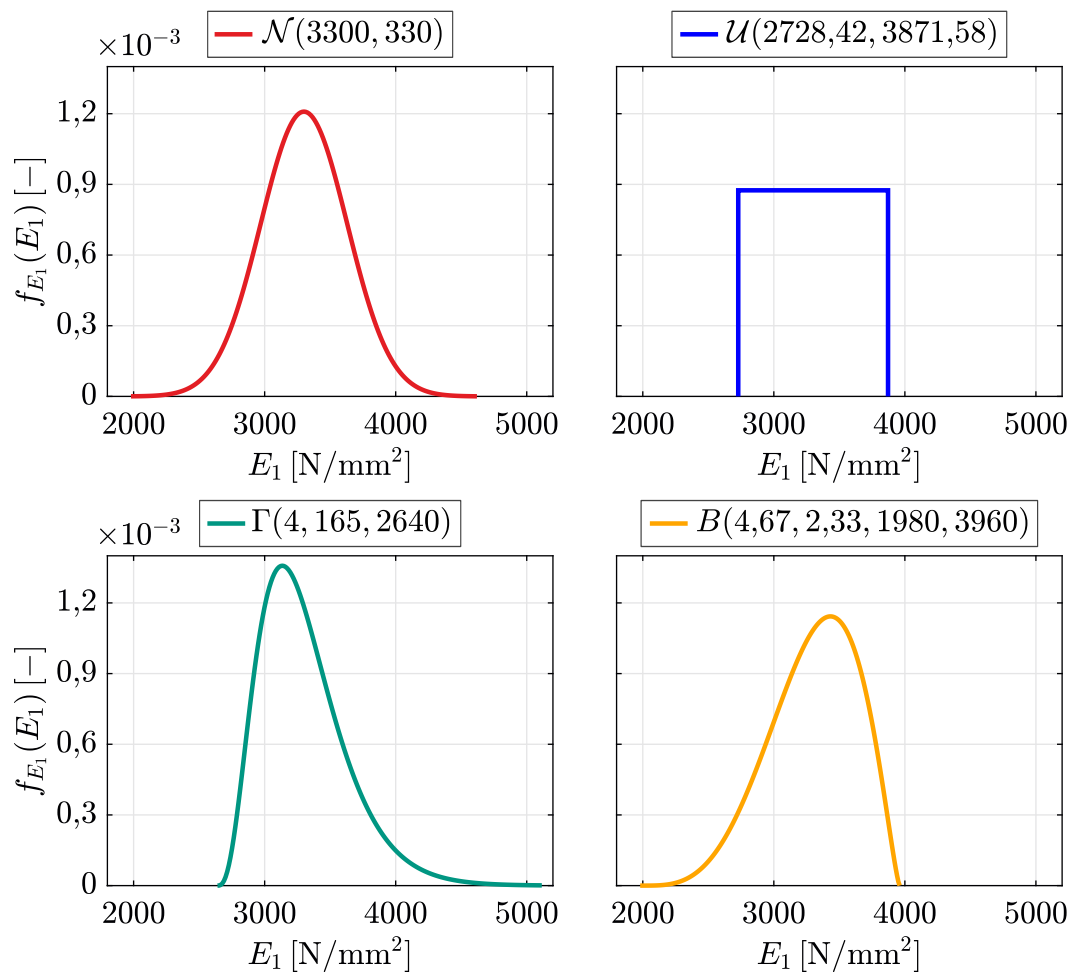


Abbildung 8.3: Verschiedene Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für die stochastische Modellierung der Zufallsvariablen $E_1(\omega)$

Des Weiteren wird untersucht, wie sich die PC-Approximation der ersten vier stochastischen Momente der Zufallsgröße $C_{12}(\omega)$ mit steigendem Polynomgrad p verhält. Um das Konvergenzverhalten der PCE zu quantifizieren, wird der prozentuale Fehler

$$\varepsilon_{(\bullet)} = \frac{|(\bullet)^{pc} - (\bullet)^{ref}|}{|(\bullet)^{ref}|} \cdot 100 [\%] \quad (8.4)$$

für eine Größe $(\bullet)$ eingeführt, wobei $(\bullet)^{pc}$ das Ergebnis der PCE kennzeichnet. Für die Referenzlösung $(\bullet)^{ref}$ der stochastischen Momente werden die zugehörigen Integrale aus Abschnitt 4.1.1 numerisch integriert.

In den Abbildungen 8.5 und 8.6 ist zu erkennen, dass der relative Fehler für alle stochastischen Momente mit höher werdendem Polynomgrad geringer wird. Zudem wird deutlich, dass die verschiedenen stochastischen Momente unterschiedliche Konvergenzraten aufweisen. Erwartungsgemäß konvergiert das erste stochas-

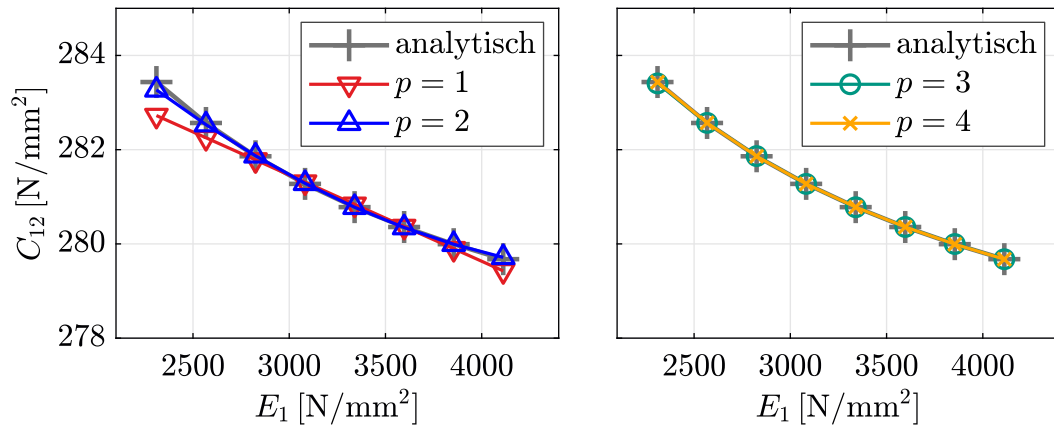


Abbildung 8.4: Funktionaler Zusammenhang zwischen E_1 und C_{12} sowie verschiedene PC-Approximationen für unterschiedliche Polynomgrade p

tische Moment am schnellsten, wohingegen höhere Momente wie die Schiefe δ und die Wölbung κ langsamer gegen die Referenzlösung konvergieren. Da sich die verwendete Polynombasis nach der Verteilung von $E_1(\omega)$ richtet, kann ein optimales Konvergenzverhalten der PCE erreicht werden. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Erhöhung des Polynomgrades p für alle betrachteten Verteilungsarten von $E_1(\omega)$ zu einer genaueren Erfassung von allen vier stochastischen Momenten führt. Die in diesem Einführungsbeispiel gewonnenen Erkenntnisse zeigen sich auch in den folgenden numerischen Beispielen.

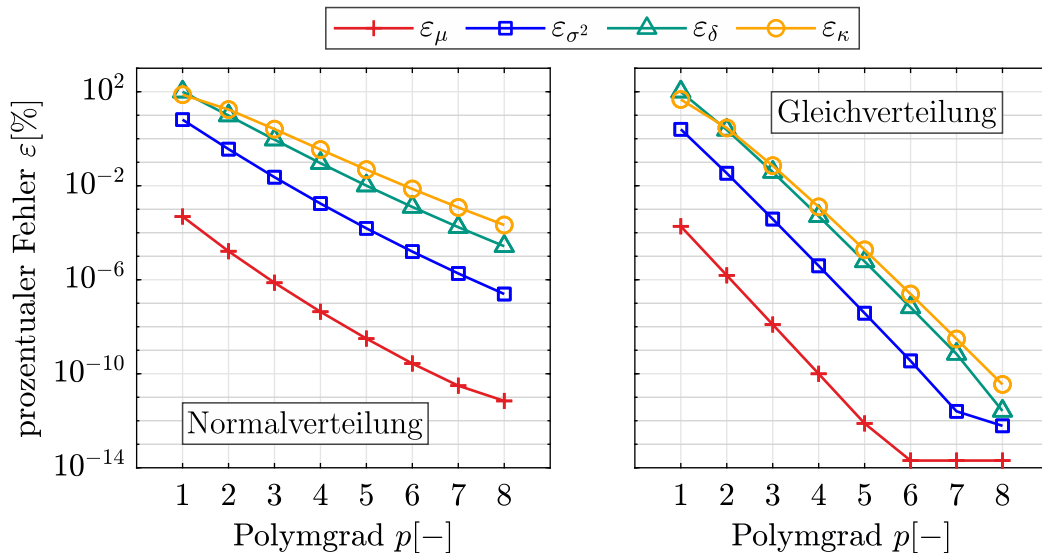


Abbildung 8.5: Konvergenzverhalten der stochastischen Momente für verschiedene Polynomgrade p : Normalverteilung (links) und Gleichverteilung (rechts)

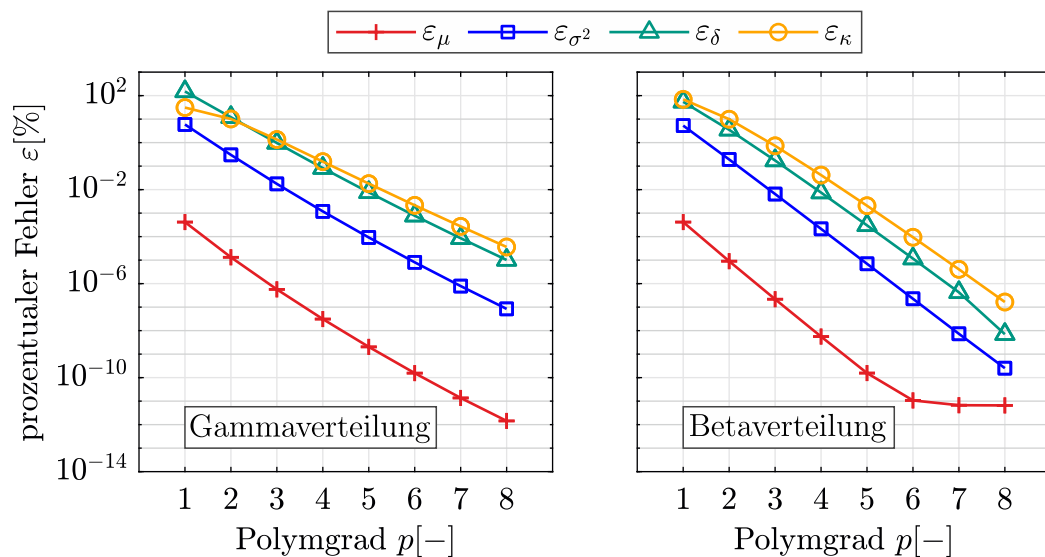


Abbildung 8.6: Konvergenzverhalten der stochastischen Momente für verschiedene Polynomgrade p : Gammaverteilung (links) und Betaverteilung (rechts)

8.2 Brettsperrholzplatte unter Gleichlast

Als numerisches Beispiel dient eine geschichtete Brettsperrholzplatte (BSP), welche durch eine konstante Gleichlast q_0 belastet ist. Die Quadratplatte mit einer Kantenlänge von $L = 400$ cm und einer Gesamtdicke von d ist rundum gelenkig gelagert, siehe Abbildung 8.7. Hierfür werden alle Verschiebungen entlang der Kanten gehalten, sodass $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ gilt. Die Verdrehungen φ_1 um die Achse $\mathbf{e}_1$ sowie φ_2 um die Achse $\mathbf{e}_2$ sind frei. Für die Diskretisierung der Struktur werden $20 \times 20 = 400$ Schalelemente verwendet. Die Berechnungen erfolgen mit der in Abschnitt 6.2 beschriebenen Elementformulierung.

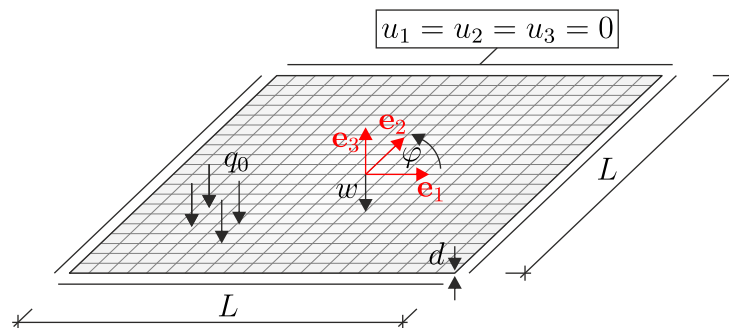


Abbildung 8.7: Gelenkig gelagerte Quadratplatte unter Gleichlast: Abmessungen, Belastung sowie FE-Diskretisierung

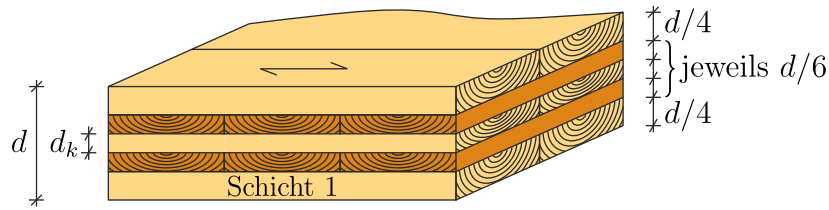


Abbildung 8.8: Fünfschichtiger Aufbau der Brettsperrholzplatte

Um das Materialverhalten von BSP beschreiben zu können, wird im numerischen Modell transversale Isotropie angenommen. Hierfür sind die fünf Materialparameter $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ und G_{23} erforderlich, siehe Abschnitt 3.3. Dabei kennzeichnet der Index 1 die Vorzugsrichtung des Materials. Die Brettsperrholzplatte besitzt einen fünfschichtigen Aufbau, der in Abbildung 8.8 dargestellt ist. Dabei sind die einzelnen Brettlagen $k = 1, \dots, 5$ durch den Winkel φ_k und die Schichtdicke d_k gekennzeichnet. Der Winkel $\varphi = 0^\circ$ entspricht der Richtung von $\mathbf{e}_1$. Der Schichtaufbau der Platte lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Winkel :} & \quad [0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ] \\ \text{Schichtdicken :} & \quad [d/4 / d/6 / d/6 / d/6 / d/4] . \end{aligned} \quad (8.5)$$

Im Rahmen der stochastischen Analyse werden Unschärfen in den Material- und Geometrieeigenschaften sowie in der Belastung berücksichtigt. Die als GAUSS-Verteilung modellierten Parameter sind vollständig durch den jeweiligen Mittelwert und die Standardabweichung charakterisiert. In Tabelle 8.3 sind alle stochastischen Variablen zusammengefasst. Es wird angenommen, dass der E-Modul E_1 und E_2 vollständig miteinander korreliert sind. Aus diesem Grund ist es möglich, die beiden Parameter durch eine Zufallsvariable X_2 zu beschreiben. Die Gesamtdicke d der Platte wird ebenfalls als Zufallsvariable modelliert. Dabei bleibt das Verhältnis der Dicken der einzelnen Schichten zur Gesamtdicke, wie in Abbildung 8.8 gezeigt, jedoch unverändert. Zudem wird die konstante Gleichlast q_0 als Zu-

Parameter	Einheit	Variable X_i	Verteilung	μ_{X_i}	σ_{X_i}
$\Delta\varphi$	$[\circ]$	X_1	GAUSS	0	1,5
E_1	$[\text{kN}/\text{cm}^2]$	X_2	GAUSS	1160	116
E_2	$[\text{kN}/\text{cm}^2]$			39	3,9
d	$[\text{cm}]$	X_3	GAUSS	12	1,2
q_0	$[\text{kN}/\text{m}^2]$	X_4	GAUSS	2	0,2

Tabelle 8.3: Stochastische Variablen mit den jeweiligen Verteilungsparametern

fallsgröße modelliert. Die variierende Faserorientierung der Schichten wird über die Abweichung $\Delta\varphi$ berücksichtigt. Der modifizierte Schichtaufbau lautet

$$[0^\circ + \Delta\varphi / 90^\circ + \Delta\varphi / 0^\circ + \Delta\varphi / 90^\circ + \Delta\varphi / 0^\circ + \Delta\varphi] . \quad (8.6)$$

Dabei ist die Abweichung der Faserorientierung über alle Schichten vollständig korreliert. Für die verbleibenden Materialparameter werden die folgenden deterministischen Werte angenommen:

$$G_{12} = 72 \text{ kN/cm}^2 , \quad G_{23} = 10 \text{ kN/cm}^2 \quad \text{und} \quad \nu_{12} = 0,03 . \quad (8.7)$$

Aufgrund der variierenden Faserorientierung kann bei der Berechnung keine Symmetrie ausgenutzt werden. Im deterministischen Fall führt die FE-Diskretisierung der gesamten Struktur mit 20×20 Schalenelementen auf insgesamt 1965 Freiheitsgrade.

Die Approximation der stochastischen Dimension wird durch die Polynombasis mit $\bar{P}$ Polynomen bestimmt. In Abhängigkeit von dem gewählten Polynomgrad p und der q-Norm q entstehen zusätzliche Freiheitsgrade, siehe Tabelle 8.4. Um den Einfluss von p und q auf die Größe der Polynombasis zu verdeutlichen, wird die Größe $\bar{p} = \bar{P}/\bar{P}_{\max}$ eingeführt. Dabei entspricht $\bar{P}_{\max}$ der maximalen Anzahl an Basispolynomen, die für das Beispiel verwendet werden. In diesem Fall sind das 70 Polynome. Anhand Tabelle 8.4 ist zu erkennen, dass mit einem höheren Polynomgrad die Anzahl an Basispolynomen $\bar{P}$ und somit auch die Anzahl an Freiheitsgraden $ndof$ stark zunehmen. Mit dem hyperbolischen Abbruchkriterium, vgl. Abschnitt 5.2.1, kann die Größe der Polynombasis reduziert werden. Im Rahmen dieses numerischen Beispiels wird der Einfluss der q-Norm genauer untersucht.

Die stochastische Gleichlast q_0 wird mit dem deterministischen Lastfaktor λ gesteigert. Für die Berechnung werden insgesamt 15 Lastschritte mit einem Lastinkrement von $\Delta\lambda = 1$ verwendet.

Polynomgrad p	q-Norm q	Bezeichnung	$\bar{P}$	$\bar{p}$ [%]	$ndof$
1	1	sfem p1q1	5	7,14	9825
2	1	sfem p2q1	15	21,43	29475
3	1	sfem p3q1	35	50,00	68775
4	1	sfem p4q1	70	100,00	137550
4	0,8	sfem p4q0,8	39	55,71	76635
4	0,6	sfem p4q0,6	23	32,86	45195

Tabelle 8.4: Freiheitsgrade $ndof$ in Abhängigkeit vom Polynomgrad p und der q-Norm q sowie die zugehörigen Bezeichnungen der jeweiligen Konfigurationen

8.2.1 Ergebnisse der SSFEM

Um die Ergebnisse der SSFEM beurteilen zu können, wird zunächst eine auskonvergierte Referenzlösung mit der Monte-Carlo-Simulation erzeugt. Hierfür werden insgesamt $N = 5 \times 10^5$ Realisierungen der Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, 4$ in Tabelle 8.3 generiert. Für die Erzeugung von Pseudozufallszahlen wird in dieser Arbeit das Latin-Hypercube-Stichprobenverfahren (LHS) verwendet, vgl. Abschnitt 5.3.2. Im folgenden Abschnitt wird die stochastische Verschiebung w in Plattenmitte betrachtet, siehe Abbildung 8.7. Die nachstehenden Abbildungen zeigen den deterministischen Lastfaktor λ über den verschiedenen stochastischen Momenten der Mittendurchbiegung w , wie Mittelwert, Standardabweichung usw.

Die Ergebnisse für den Mittelwert μ_w sind in Abbildung 8.9 (oben) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass diese Größe bereits mit einem Polynomgrad von $p = 1$ nahezu exakt abgebildet werden kann. Anhand der Last-Verschiebungskurven in Abbildung 8.9 (oben) wird deutlich, dass sich das System mit zunehmender Belastung aufgrund der geometrischen Nichtlinearität versteift. Grund hierfür sind die zunehmenden Zugspannungen in der Struktur. In Abbildung 8.9 (unten) sind die Ergebnisse für die Standardabweichung σ_w dargestellt. Die Polynombasis mit $p = 2$ ist ausreichend, um die Standardabweichung der Durchbiegung w korrekt zu erfassen. Werden nur lineare Polynome für die Approximation verwendet, so sind geringe Abweichungen in der Standardabweichung zu erkennen.

Anhand Abbildung 8.10 (oben) wird der Einfluss der verwendeten Polynombasis deutlich. Mit linearen HERMITE-Polynomen kann die Schiefe einer Zufallsgröße, welche von normalverteilten Zufallsvariablen abhängig ist, nicht erfasst werden. Die Last-Verschiebungskurven zeigen, dass die Asymmetrie der Verteilung der stochastischen Durchbiegung w mit zunehmender Belastung kleiner wird. Es wird zudem deutlich, dass für verschiedene Werte des Lastfaktors λ unterschiedliche Polynombasen ausreichend sind, um die Schiefe der Verschiebung w korrekt abzubilden. In Abbildung 8.10 (oben) sind für die Konfiguration sfem p2q1 im Bereich $1 \leq \lambda \leq 5$ noch Abweichungen in der Schiefe erkennbar. Mit zunehmender Belastung werden diese geringer. Anhand Abbildung 8.10 (oben rechts) wird der Einfluss der q-Norm deutlich. Für den Lastfaktor $\lambda = 1$ sind die Ergebnisse von sfem p4q1 und mcs für die Schiefe nahezu identisch. Im Vergleich mit sfem p4q1 werden bei den Konfigurationen sfem p4q0,6 und sfem p4q0,8 nur noch 32,86% bzw. 55,71% der Polynome berücksichtigt. Es ist zu erkennen, dass das Vernachlässigen gewisser Basispolynome zu Abweichungen in der Schiefe führt. Anhand Abbildung 8.10 (unten) wird deutlich, dass die SSFEM auch in der Lage ist, die Wölbung der betrachteten Verschiebungsgröße abzubilden. Für das vierte stochastische Moment ist ein ähnliches Konvergenzverhalten der SSFEM zu beobachten.

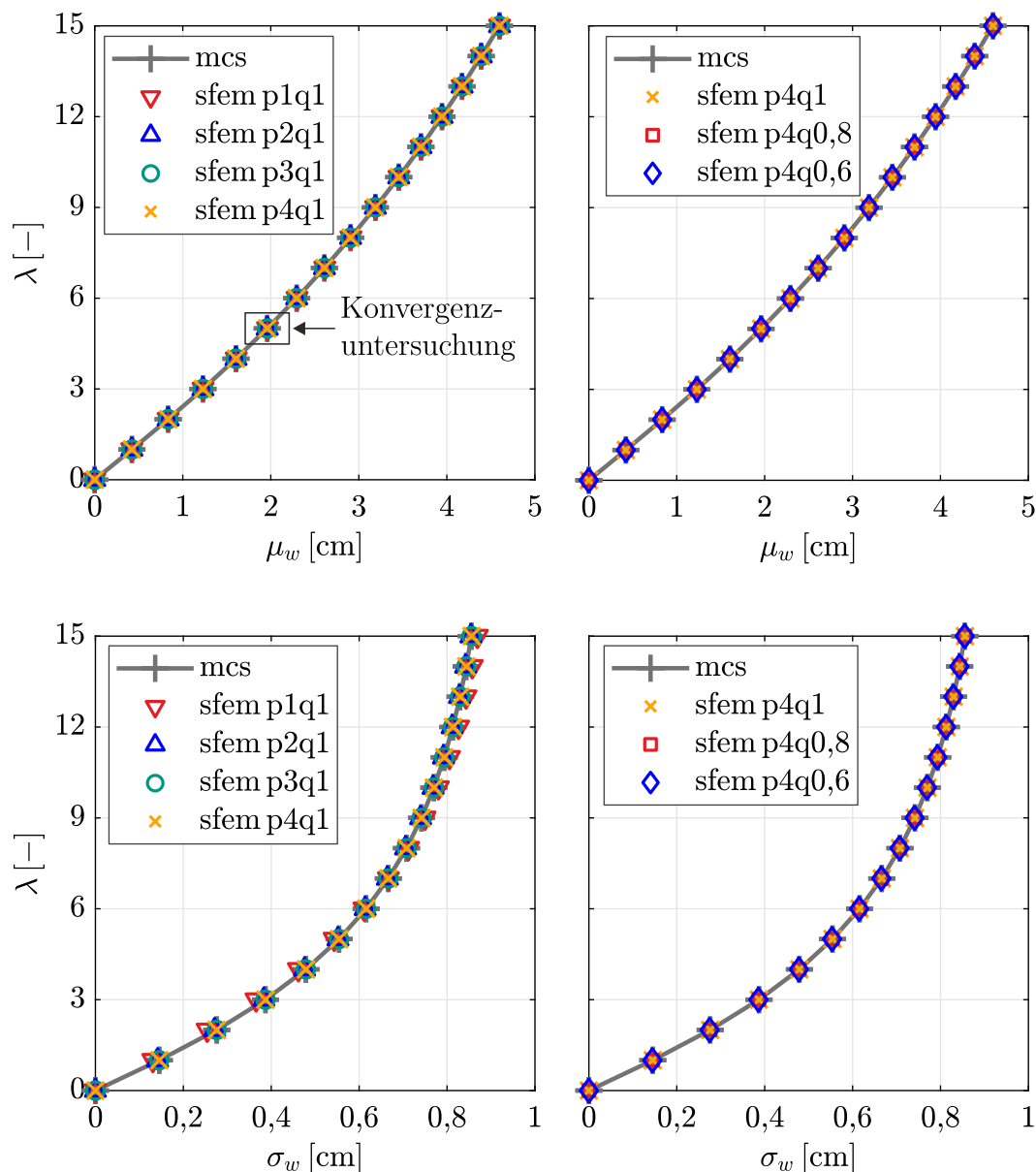


Abbildung 8.9: Mittelwert μ_w (oben) und Standardabweichung σ_w (unten) der Mittendurchbiegung w für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q-Norm q

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die SSFEM die betrachteten stochastischen Attribute der zufälligen Verschiebung wie Mittelwert, Standardabweichung usw. abbilden kann. Dabei ist zu erkennen, dass für höhere stochastische Momente auch höherwertige Basispolynome erforderlich sind.

Für den Lastschritt $\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 5$ wird das Konvergenzverhalten der SSFEM genauer untersucht, siehe Abbildung 8.9 (oben links). In Tabelle 8.5 ist die Norm

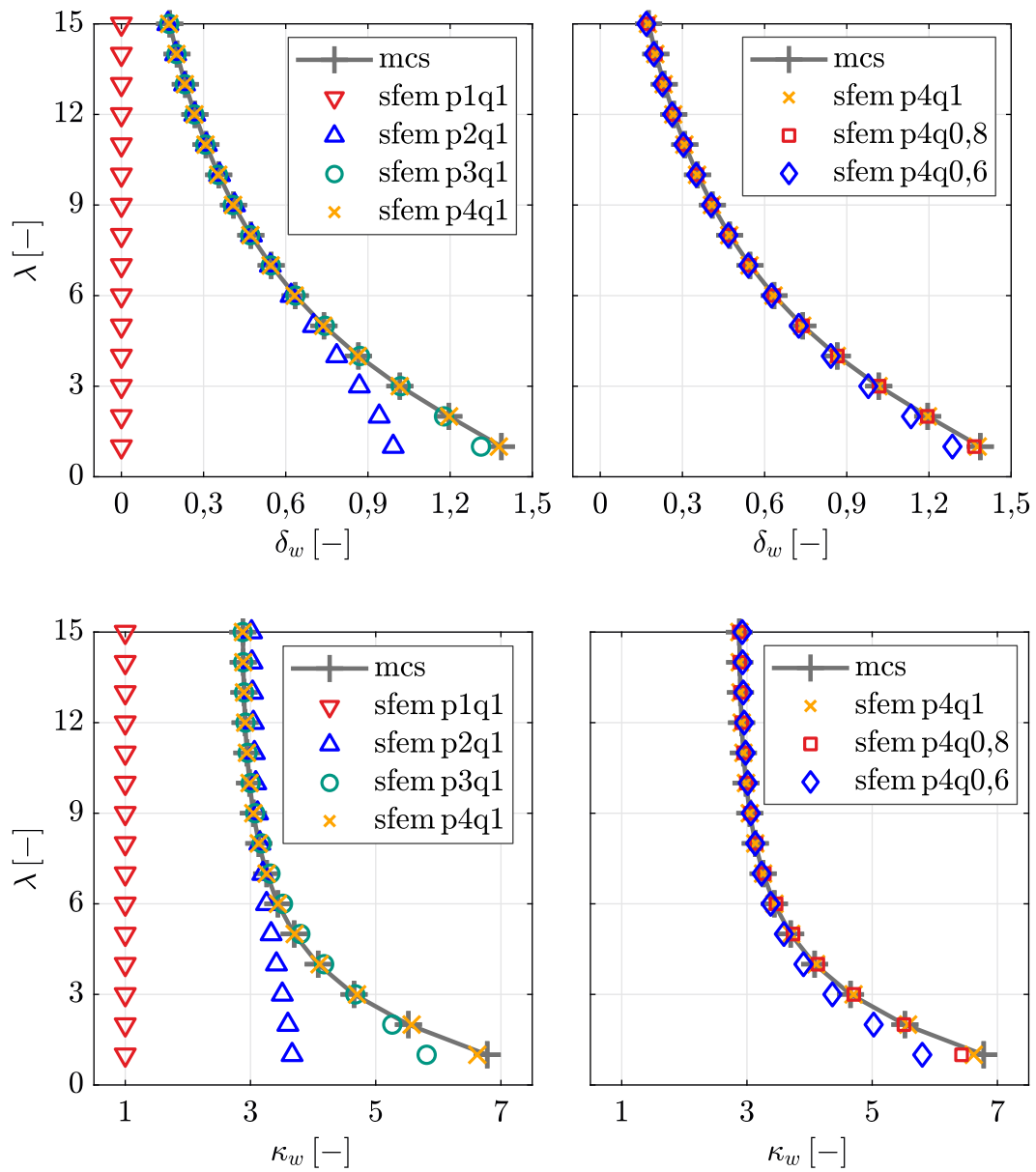


Abbildung 8.10: Schiefe δ_w (oben) und Wölbung κ_w (unten) der Mittendurchbiegung w für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

des Residualvektors $\|\mathbf{G}\|$ für unterschiedliche Konfigurationen der SSFEM dargestellt. Die deutlich zu erkennende quadratische Konvergenz ist auf die konsistent linearisierte Formulierung zurückzuführen. Das Iterationsverhalten ist nahezu unabhängig von der verwendeten Polynombasis. An dieser Stelle sei erwähnt, dass für die nicht dargestellten Konfigurationen sfem p2q1 und sfem p4q0,6 ein ähnliches Konvergenzverhalten zu beobachten ist.

Im Rahmen der SSFEM liegen alle Variablen als PC-Entwicklung vor. Damit kön-

Iterationsschritt	sfem p1q1	sfem p3q1	sfem p4q1	sfem p4q0,8
1	1,5276E+00	1,5276E+00	1,5276E+00	1,5276E+00
2	1,5886E+00	1,5651E+00	1,5660E+00	1,5658E+00
3	1,9142E−03	2,5538E−03	2,4924E−03	2,5041E−03
4	2,3170E−08	1,4282E−07	1,3204E−07	1,3511E−07
5	6,4161E−12	6,8519E−12	6,6630E−12	6,7660E−12

Tabelle 8.5: Konvergenzverhalten der SSFEM für den Lastschritt $\lambda = 4 \rightarrow \lambda = 5$

nen die stochastischen Momente beispielsweise von Spannungen direkt aus den PC-Koeffizienten dieser Größen ermittelt werden. Im Folgenden wird die Normalspannung S_{11} am unteren Rand der Schicht 1 betrachtet, siehe Abbildung 8.8. Mit einem Glättungsalgorithmus werden die an den Integrationspunkten berechneten Spannungswerte auf die FE-Knoten extrapoliert. Es werden nur die Ergebnisse der Konfiguration sfem p4q1 und die Referenzlösung der MCS gezeigt. Die Verläufe der stochastischen Momente der Größe S_{11} sind in Abbildung 8.11 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die SSFEM in der Lage ist, auch den Spannungsverlauf korrekt abzubilden. Neben den ersten beiden stochastischen Momenten können zudem die Schiefe $\delta_{S_{11}}$ und die Wölbung $\kappa_{S_{11}}$ der Spannung ohne weiteren Berechnungsaufwand bestimmt werden. Auch für diese Größen stimmen die Ergebnisse der SSFEM mit denen der MCS überein. Auf eine Darstellung der Ergebnisse wird an dieser Stelle jedoch verzichtet.

8.2.2 Konvergenz der Monte-Carlo-Simulation und der SSFEM

Für eine auskonvergierte Referenzlösung mit der Monte-Carlo-Simulation werden $N = 5 \times 10^5$ Realisierungen verwendet. Im Folgenden wird das Konvergenzverhalten der MCS und der SSFEM genauer untersucht. Hierfür werden die stochastischen Attribute aus dem vorherigen Abschnitt betrachtet. Die prozentuale Abweichung $\varepsilon_{(\bullet)}$ einer Größe $(\bullet)$ bezieht sich auf die Referenzlösung der MCS mit $N = 5 \times 10^5$ Realisierungen und wird wie folgt berechnet:

$$\varepsilon_{(\bullet)} = \frac{|(\bullet) - (\bullet)_{\text{mcs}5e5}|}{|(\bullet)_{\text{mcs}5e5}|} \cdot 100 [\%] . \quad (8.8)$$

Für die folgenden Auswertungen wird die Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$ betrachtet. Es werden drei unabhängige Durchläufe einer MCS durchgeführt, welche in den Abbildungen 8.12, 8.13, 8.14 und 8.15 mit den drei durchgezogenen Linien dargestellt sind. Um das Konvergenzverhalten der MCS beurteilen zu können, wird sukzessiv die Anzahl verwendeter Datenpunkte N von 10^2

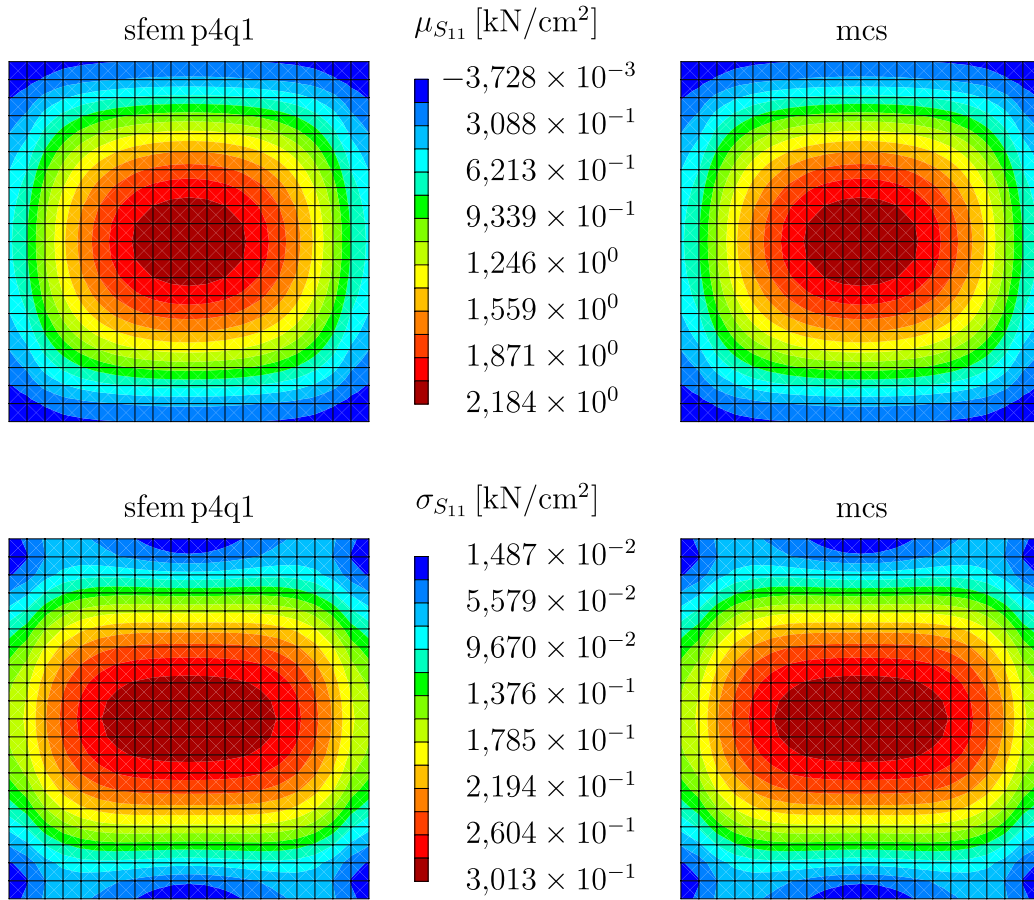


Abbildung 8.11: Mittelwert $\mu_{S_{11}}$ (oben) und Standardabweichung $\sigma_{S_{11}}$ (unten) der Normalspannung S_{11} am unteren Rand von Schicht 1

bis 10^5 gesteigert. Dabei werden zur ursprünglichen Menge mit 10^2 Realisierungen immer weitere Stichproben hinzugefügt. Die prozentualen Abweichungen der SSFEM-Ergebnisse werden ebenfalls gemäß Gleichung (8.8) bestimmt. Diese sind in den folgenden Abbildungen als gestrichelte horizontale Linien eingezeichnet.

Anhand Abbildung 8.12 ist zu erkennen, dass für den Mittelwert μ_w mit ungefähr 5×10^3 Samples eine prozentuale Abweichung kleiner 1% erreicht werden kann. Die Ergebnisse der SSFEM zeigen, dass bereits die Konfiguration sfem p1q1 eine deutlich kleinere Abweichung als 1% aufweist. Mit höher werdendem Polynomgrad p verbessert sich die Approximation des Mittelwertes μ_w .

Für die Standardabweichung ist ein ähnliches Verhalten erkennbar, siehe Abbildung 8.13. Ab ungefähr 5×10^3 Realisierungen kann die Größe σ_w mit einer Abweichung kleiner 1% bestimmt werden. Die Konfiguration sfem p2q1 liefert in diesem Fall eine geringere Abweichung im Vergleich zur MCS mit 5×10^3 Stichproben.

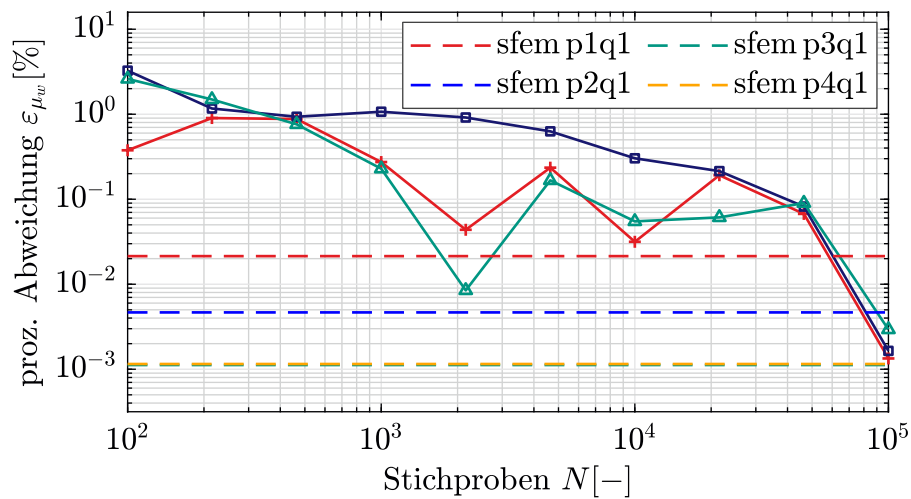


Abbildung 8.12: Prozentuale Abweichung ε_{μ_w} des Mittelwerts μ_w der Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$

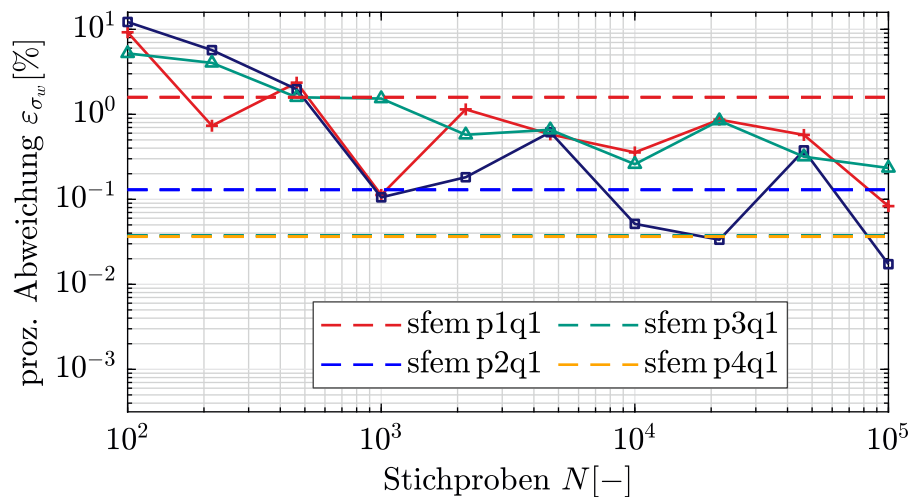


Abbildung 8.13: Prozentuale Abweichung ε_{σ_w} der Standardabweichung σ_w der Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$

In Abbildung 8.14 wird deutlich, dass die Schiefe δ_w langsamer konvergiert als der Mittelwert und die Standardabweichung. Es ist zudem erkennbar, dass mit einem Polynomgrad von $p = 3$ bzw. $p = 4$ die SSFEM die Schiefe mit einer prozentualen Abweichung kleiner 2% abbilden kann. Zudem fällt auf, dass die Abweichung ε_{δ_w} der Konfiguration sfem p4q1 im Vergleich zu sfem p3q1 leicht größer ist. Dies lässt sich damit erklären, dass auch bei der Verwendung von 5×10^5 Stichproben für die Referenzlösung minimale Schwankungen der stochastischen Momente auftreten können. Bei einer analytischen Lösung ist dies nicht der Fall.

Hier wäre eine kontinuierliche Verbesserung der SSFEM-Ergebnisse mit höher werdendem Polynomgrad erkennbar, vgl. Abschnitt 8.1.

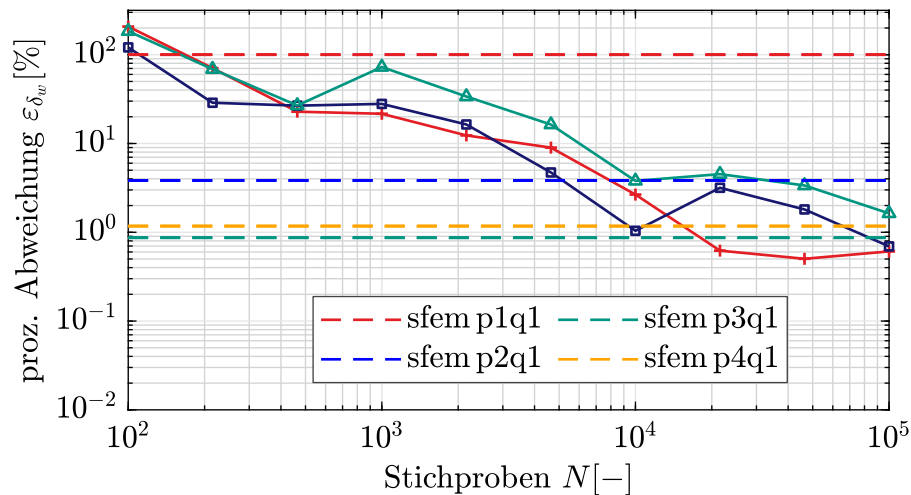


Abbildung 8.14: Prozentuale Abweichung ε_{δ_w} der Schiefe δ_w der Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$

In Abbildung 8.15 sind die Ergebnisse für die Wölbung κ_w dargestellt. Wie auch zuvor ist ein ähnliches Konvergenzverhalten der MCS und der SSFEM zu erkennen.

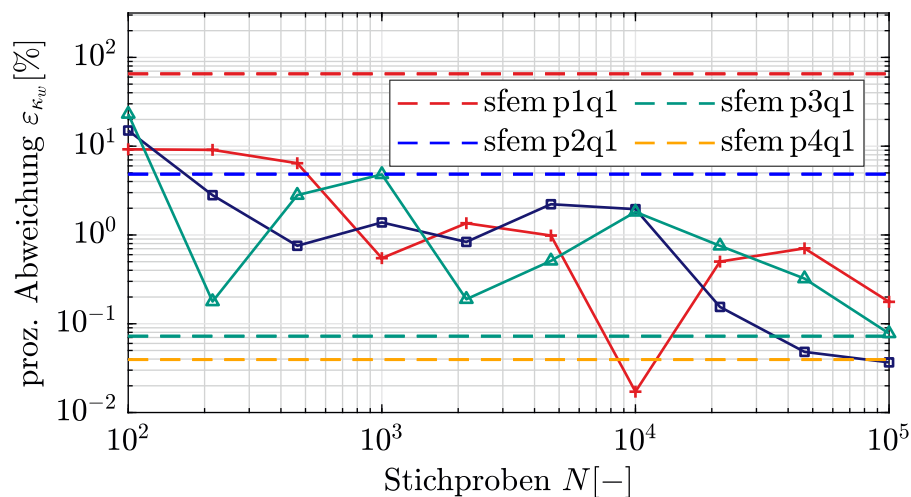


Abbildung 8.15: Prozentuale Abweichung ε_{κ_w} der Wölbung κ_w der Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$

8.2.3 Rechenzeiten

Wie aus dem vorherigen Abschnitt hervorgeht, steigt der Bedarf an MC-Samples mit der Ordnung der zu bestimmenden stochastischen Momente. Damit auch höhere stochastische Attribute mit der SSFEM richtig erfasst werden können, ist in der Regel auch ein höherer Polynomgrad erforderlich. Für einen Vergleich der Rechenzeiten wird der sogenannte *Speedup* mit

$$S_{\text{sfem}} = T_{\text{mcs}} / T_{\text{sfem}} \quad (8.9)$$

definiert, wobei T_{mcs} und T_{sfem} die Rechenzeiten der MCS und der SSFEM sind. In Tabelle 8.4 ist zu erkennen, dass für höhere Polynomgrade die Anzahl an Freiheitsgraden $ndof$ stark zunimmt. Im Rahmen des NEWTON-Verfahrens muss in jedem Iterationsschritt die aktuelle, globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ invertiert werden. Dieser Vorgang beeinflusst maßgebend die Rechenzeit der SSFEM.

In Tabelle 8.6 ist der Speedup verschiedener Konfigurationen der SSFEM gegenüber der MCS mit 5×10^3 Samples dargestellt. Es wird deutlich, dass die Faktoren S_{sfem} mit größer werdender Polynombasis drastisch abnehmen. Durch das hyperbolische Abbruchkriterium lässt sich der steigenden Rechenzeit der SSFEM entgegenwirken. Dies lässt sich am Vergleich der beiden Konfigurationen sfem p4q0,8 und sfem p4q1 erkennen.

Konfiguration	sfem p1q1	sfem p2q1	sfem p3q1
Speedup S_{sfem}	622,45	74,33	13,29

Konfiguration	sfem p4q1	sfem p4q0,8	sfem p4q0,6
Speedup S_{sfem}	1,77	9,82	32,48

Tabelle 8.6: Vergleich der Rechenzeiten der SSFEM und der MCS für $N = 5 \times 10^3$ Stichproben

8.2.4 Sobol'-Indizes

Wie in Abschnitt 5.6 beschrieben, können auf Basis einer PC-Entwicklung varianzbasierte Sensitivitätsmaße bestimmt werden. Im Rahmen der folgenden Auswertung wird die Mittendurchbiegung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$ betrachtet. Für die Berechnung der SOBOL'-Indizes erster Ordnung mittels MCS werden $L = 10^5$ Stichproben als Basisanzahl gewählt. Insgesamt sind für die

Monte-Carlo-Schätzer der SOBOL'-Indizes $N = 10^5(4 + 2) = 6 \times 10^5$ Auswertungen des deterministischen FE-Modells erforderlich, vgl. Abschnitt 5.6.2. In Tabelle 8.7 sind die SOBOL'-Indizes erster Ordnung auf Basis der MCS sowie der verschiedenen SSFEM-Berechnungen dargestellt.

Bezeichnung	S_1	S_2	S_3	S_4
mcs	$5,640 \times 10^{-3}$	0,0710	0,8325	0,1028
sfem p1q1	0	0,0716	0,8353	0,0931
sfem p2q1	$2,793 \times 10^{-6}$	0,0661	0,8306	0,0979
sfem p3q1	$1,125 \times 10^{-6}$	0,0664	0,8306	0,0972
sfem p4q1	$1,212 \times 10^{-6}$	0,0664	0,8306	0,0971
sfem p4q0,8	$1,125 \times 10^{-6}$	0,0664	0,8306	0,0971
sfem p4q0,6	$2,818 \times 10^{-6}$	0,0658	0,8315	0,0974

Tabelle 8.7: SOBOL'-Indizes erster Ordnung für die Verschiebung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 15$

Bereits ab einem Polynomgrad von $p = 1$ sind kaum mehr Änderungen in den Sensitivitätsmaßen erkennbar. Zudem kann eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der SSFEM und der MCS festgestellt werden. Es wird deutlich, dass die Variablen $\Delta\varphi = X_1$ und $E_1, E_2 = X_2$ nur einen geringen Einfluss auf die Varianz der Verschiebung w haben. Der Einfluss des Parameters $d = X_3$ ist etwa achtmal so groß wie der der Variablen $q_0 = X_4$. Die unterschiedlich großen Sensitivitätsmaße lassen sich damit begründen, dass der E-Modul nur linear in die Steifigkeit der BSP-Platte einfließt, während die Dicke d kubisch in die Berechnung der Biegesteifigkeit eingeht.

8.2.5 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Quantilwerte

Im Folgenden werden die Dichtefunktion und die Quantilwerte der stochastischen Mittendurchbiegung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 5$ genauer betrachtet. Wie bereits in Abschnitt 5.6.4 erwähnt, wird für die Schätzung der Dichtefunktion die MATLAB [116] eigene Funktion *ksdensity* verwendet.

Für die Referenzlösung mit der MCS werden $N = 5 \times 10^5$ Samples verwendet. Nach der Berechnung mit der SSFEM wird die PC-Entwicklung der Mittendurchbiegung w ebenfalls mit $N = 5 \times 10^5$ zufälligen Stichproben ausgewertet. Die Ergebnisse der MCS und der SSFEM in Abbildung 8.16 zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

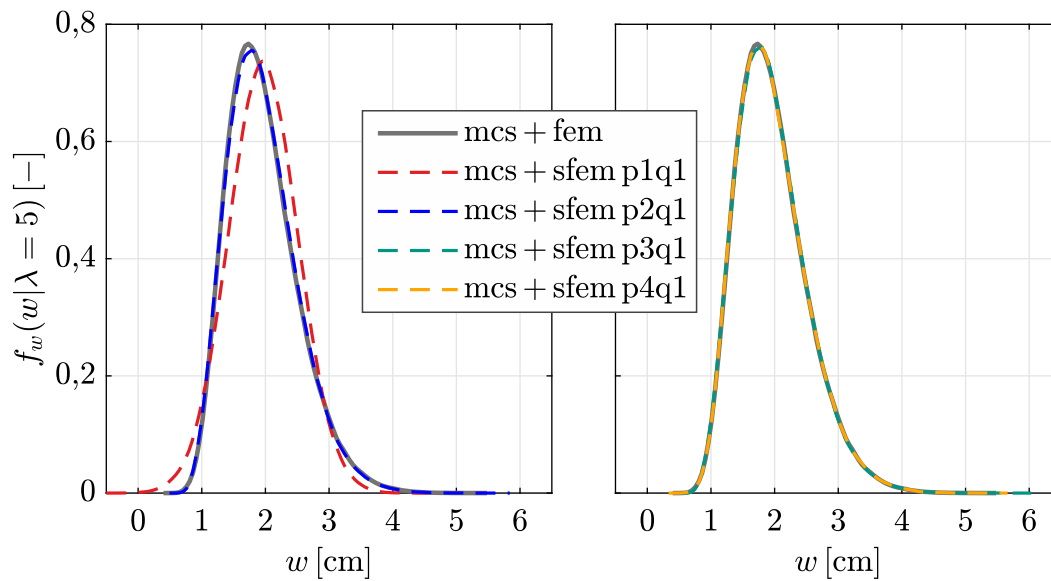


Abbildung 8.16: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_w(w|\lambda = 5)$ der Mittendurchbiegung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 5$

Zudem werden die 95%- und 99%-Quantilwerte der Verschiebung w betrachtet, siehe Tabelle 8.8. Für die Bestimmung dieser Größen werden stets $N = 5 \times 10^5$ Samples verwendet. Die prozentuale Abweichung ε_w bezogen auf die Referenzlösung von mcs + fem ist ebenfalls in Tabelle 8.8 dargestellt und wird analog zu Gleichung (8.8) berechnet. Es lässt sich erkennen, dass die Ergebnisse der SSFEM mit zunehmendem Polynomgrad gegen die Referenzlösung der MCS konvergieren.

Bezeichnung	$w_{0,95}$ [cm]	$\varepsilon_{w_{0,95}}$ [%]	$w_{0,99}$ [cm]	$\varepsilon_{w_{0,99}}$ [%]
mcs + fem	2,9799	—	3,5394	—
mcs + sfem p1q1	2,8571	4,1209	3,2321	8,6823
mcs + sfem p2q1	2,9650	0,5000	3,5199	0,5509
mcs + sfem p3q1	2,9727	0,2416	3,5463	0,1949
mcs + sfem p4q1	2,9798	0,0034	3,5437	0,1215

Tabelle 8.8: Quantilwerte der Mittendurchbiegung w bei einem Lastniveau von $\lambda = 5$

8.3 Zylindersegment unter Einzellast

Als weiteres numerisches Beispiel dient ein flaches Zylindersegment unter einer Einzellast. Die Schalenstruktur wurde beispielsweise von YEOM & LEE [138] und GRUTTMANN & WAGNER [50] untersucht. Am linken und rechten Rand ist das Schalensegment gelenkig gelagert, siehe Abbildung 8.17. Hierfür werden alle Verschiebungen entlang diesen beiden Kanten gehalten, sodass $u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ gilt. Die Verdrehungen φ_1 um die Achse $\mathbf{e}_1$ sowie φ_2 um die Achse $\mathbf{e}_2$ sind frei. Das Zylindersegment mit der Gesamtdicke d hat einen dreischichtigen Aufbau, wobei jede Schicht eine Dicke von $d/3$ aufweist. Im numerischen Modell wird für die einzelnen Schichten transversal isotropes Materialverhalten angenommen. Ein Winkel von 0° entspricht gerade der Richtung von $\mathbf{e}_1$.

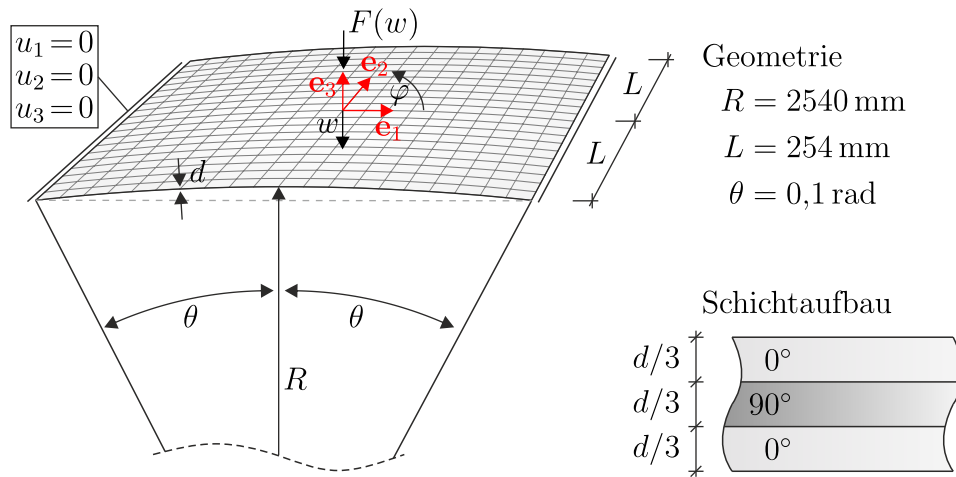


Abbildung 8.17: Geschichtetes Zylindersegment unter Einzellast: Abmessungen, FE-Diskretisierung und Schichtaufbau

Der Einfluss unscharfer Material- und Geometrieeigenschaften auf das mechanische Verhalten des Zylindersegments wird im Rahmen einer stochastischen Analyse untersucht. In Tabelle 8.9 sind die als Zufallsgrößen modellierten Parameter zusammengefasst. Für die normalverteilten Zufallsvariablen ist jeweils der Mittelwert μ und die Standardabweichung σ angegeben, während die gleichverteilte Zufallsgröße durch die untere bzw. obere Grenze a und b gekennzeichnet ist.

Analog zum vorherigen Beispiel, siehe Abschnitt 8.2, wird angenommen, dass die beiden E-Module E_1 und E_2 vollständig korreliert sind. Beide Parameter werden deshalb durch die gleiche Zufallsvariable X_2 beschrieben. Die Gesamtdicke der Schale wird als eine Gleichverteilung modelliert. Wie auch im vorherigen Beispiel bleibt das Verhältnis der einzelnen Schichtdicken zur Gesamtdicke unverändert.

Parameter	Einheit	Variable X_i	Verteilung	μ_{X_i} / a_{X_i}	σ_{X_i} / b_{X_i}
$\Delta\varphi$	[°]	X_1	GAUSS	0	1,5
E_1	[N/mm ²]	X_2	GAUSS	3300	330
E_2	[N/mm ²]			1100	110
d	[mm]	X_3	Uniform	11,2	14,2

Tabelle 8.9: Stochastische Variablen mit den jeweiligen Verteilungsparametern

Zudem werden die Orientierungen der Schichten mit der normalverteilten Abweichung $\Delta\varphi$ wie folgt variiert:

$$[0^\circ + \Delta\varphi / 90^\circ + \Delta\varphi / 0^\circ + \Delta\varphi] . \quad (8.10)$$

Dieser Schichtaufbau führt dazu, dass keine Symmetrie am System ausgenutzt werden kann. Aus diesem Grund findet die Berechnung an der Gesamtstruktur statt.

In diesem numerischen Beispiel sind die Eingangsgrößen X_1 und X_2 normalverteilt, während die Variable X_3 einer Gleichverteilung genügt. Die Approximation der stochastischen Dimensionen erfolgt mit einer dreidimensionalen Polynombasis. Dabei werden für die ersten beiden Richtungen HERMITE-Polynome und für die dritte Richtung LEGENDRE-Polynome verwendet.

Für die deterministischen Materialparameter werden folgende Größen angesetzt:

$$G_{12} = 660 \text{ N/mm}^2 , \quad G_{23} = 450 \text{ N/mm}^2 \quad \text{und} \quad \nu_{12} = 0,25 . \quad (8.11)$$

Die Diskretisierung der Gesamtstruktur mit $20 \times 20 = 400$ Schalenelementen, siehe Abbildung 8.17, führt im deterministischen Fall zu insgesamt 2520 unbekannten Verschiebungen. In Abhängigkeit der gewählten Polynombasis entstehen zusätzliche Freiheitsgrade, siehe Tabelle 8.10. Die Größe $\bar{p}$ gibt dabei das Verhältnis der verwendeten Anzahl an Basispolynomen $\bar{P}$ zur maximalen Anzahl $\bar{P}_{\max} = 35$ an.

Anhand der Last-Verschiebungskurve in Abbildung 8.18 (oben) ist zu erkennen, dass die Struktur einen Durchschlagpunkt aufweist. Um den vollständigen Gleichgewichtspfad verfolgen zu können, wird die Einzelverschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.1.2 verwendet. Die Belastung wird durch die Vorgabe der Verschiebung w auf das System aufgebracht. Diese Größe wird mit dem Inkrement $\Delta w = 1 \text{ mm}$ von 0 bis 30 mm gesteigert. Die rückgerechnete Reaktionskraft $F(w)$ ist in Abbildung 8.17 dargestellt.

Polynomgrad p	q-Norm q	Bezeichnung	$\bar{P}$	$\bar{p}$ [%]	$ndof$
1	1	sfem p1q1	4	11,43	10080
2	1	sfem p2q1	10	28,57	25200
3	1	sfem p3q1	20	57,14	50400
4	1	sfem p4q1	35	100,00	88200

Tabelle 8.10: Freiheitsgrade $ndof$ in Abhängigkeit vom Polynomgrad p sowie die zugehörigen Bezeichnungen der jeweiligen Konfigurationen

8.3.1 Ergebnisse der SSFEM

Zunächst folgt ein Vergleich der Ergebnisse der SSFEM mit denen einer Monte-Carlo-Simulation. Für die MCS werden insgesamt $N = 5 \times 10^5$ Realisierungen der Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \dots, 3$ mit dem Latin-Hypercube-Stichprobenverfahren (LHS) generiert. Bei diesem Beispiel werden die vier verschiedenen Konfigurationen der SSFEM aus Tabelle 8.10 untersucht. In den folgenden Abbildungen sind die verschiedenen stochastischen Momente der Reaktionskraft $F(w)$ über der vorgegebenen Verschiebung w dargestellt.

Anhand Abbildung 8.18 (oben) ist zu erkennen, dass die SSFEM den Mittelwert μ_F der Reaktionskraft nahezu unabhängig vom gewählten Polynomgrad korrekt abbilden kann. Ein ähnliches Verhalten der SSFEM ist für die Standardabweichung σ_F zu beobachten, siehe Abbildung 8.18 (unten). Der Lastzustand $w = 19$ mm zeigt, dass mit zunehmendem Polynomgrad eine bessere Approximation der Standardabweichung erzielt wird.

Wie auch im vorherigen Beispiel ist eine lineare Polynombasis nicht in der Lage, die Schiefe einer Zufallsgröße, welche von normal- und gleichverteilten Zufallsvariablen abhängig ist, zu beschreiben. Dies geht aus Abbildung 8.19 (oben) hervor. Anhand des Belastungszustandes $w = 19$ mm wird deutlich, dass ein höherer Polynomgrad der PCE zu einer genaueren Approximation der Schiefe δ_F führt. Des Weiteren zeigt Abbildung 8.19 (oben), dass die Verteilung der stochastischen Reaktionskraft für die einzelnen Verschiebungszustände unterschiedliche Asymmetrien aufweist. Bis zu dem Verschiebungszustand $w = 17$ mm nimmt die Schiefe kontinuierlich zu und fällt anschließend bis $w = 19$ mm deutlich ab. Wie in Abbildung 8.19 (unten) zu sehen ist, kann mit der SSFEM auch die Wölbung κ_F nahezu korrekt erfasst werden. Es wird deutlich, dass hierfür mindestens eine kubische Polynombasis erforderlich ist. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für die Approximation höherer stochastischer Momente auch höherwertige Basispolynome erforderlich sind.

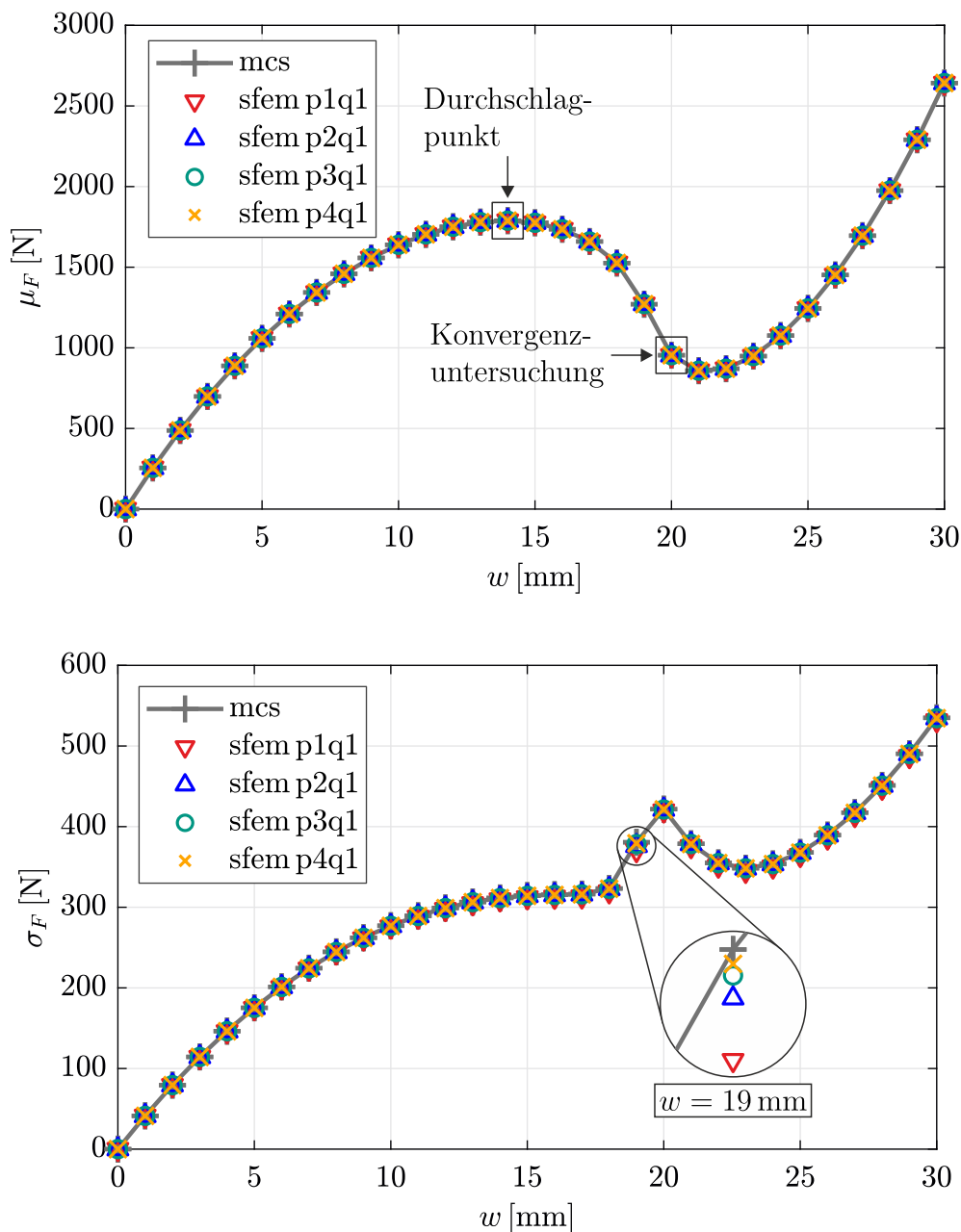


Abbildung 8.18: Mittelwert μ_F (oben) und Standardabweichung σ_F (unten) der Reaktionskraft $F(w)$ für verschiedene Polynomgrade p

Für den Lastschritt von $w = 19$ mm $\rightarrow$ $w = 20$ mm, siehe Abbildung 8.18 (oben), wird das Konvergenzverhalten der stochastischen FE-Formulierung im Rahmen der NEWTON-Iteration untersucht. Aus Abbildung 8.18 (oben) geht hervor, dass das Durchschlagen der Struktur im betrachteten Lastschritt zu einem deutlichen Abfall des Mittelwerts der Reaktionskraft führt. Die Norm des Residualvektors

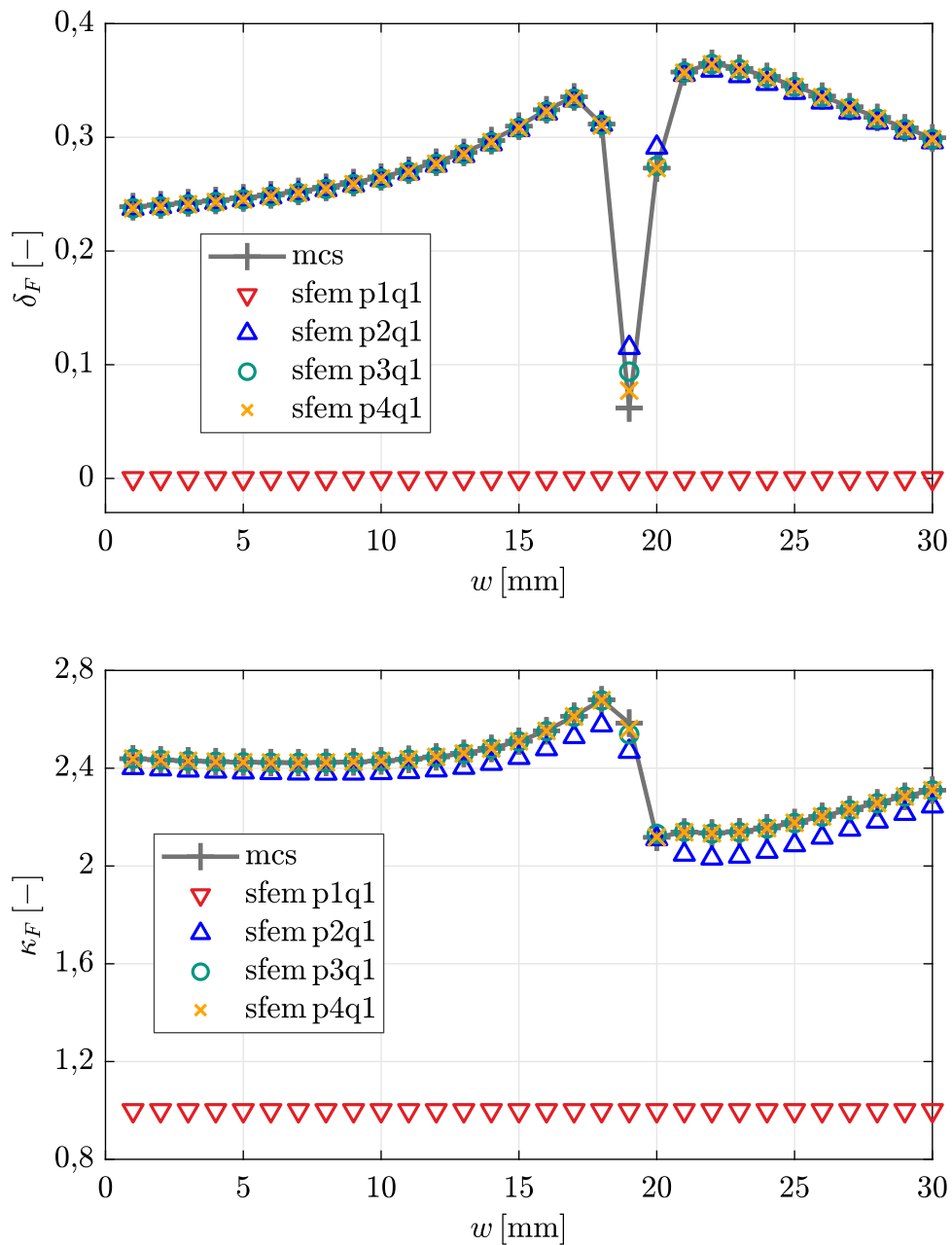


Abbildung 8.19: Schiefe σ_F (oben) und Wölbung κ_F (unten) der Reaktionskraft $F(w)$ für verschiedene Polynomgrade p

$\|\mathbf{G}\|$ ist in Tabelle 8.11 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Polynombasis ein oder zwei zusätzliche Iterationsschritte notwendig sind, bis der nächste Gleichgewichtspunkt gefunden ist. Dies lässt sich damit begründen, dass für höhere Polynomgrade die Anzahl an unbekannten Verschiebungen größer wird. Dennoch zeigt sich in der Nähe des Gleichgewichtspunktes, unabhängig von der

Konfiguration der SSFEM, eine lokale quadratische Konvergenz. Dies ist auf die konsistente Linearisierung der Elementformulierung zurückzuführen.

Iterationsschritt	sfem p1q1	sfem p2q1	sfem p3q1	sfem p4q1
1	1,0610E+05	1,0610E+05	1,0610E+05	1,0610E+05
2	8,6179E+02	9,8995E+02	1,1528E+03	1,2520E+03
3	1,2813E+01	4,4409E+01	6,5974E+01	7,7408E+01
4	4,7061E+00	3,7769E+01	6,8152E+01	8,6486E+01
5	1,1931E−02	1,4301E+00	4,6781E+00	8,1623E+00
6	6,0295E−07	1,3124E−02	2,0930E−01	7,4329E−01
7	—	3,8658E−07	1,6971E−04	2,3717E−03
8	—	—	3,5842E−08	4,6869E−08

Tabelle 8.11: Konvergenzverhalten verschiedener SSFEM-Konfigurationen für den Lastschritt $w = 19 \text{ mm} \rightarrow w = 20 \text{ mm}$

8.3.2 Konvergenz der Monte-Carlo-Simulation und der SSFEM

Analog zum vorherigen Beispiel wird auch hier das Konvergenzverhalten der Monte-Carlo-Simulation und der SSFEM genauer untersucht. Die auskonvergier-ten Referenzlösungen der MCS basieren auf 5×10^5 Stichproben. Der prozentuale Fehler $\varepsilon_{(\bullet)}$ einer Größe $(\bullet)$ wird gemäß Gleichung (8.8) berechnet. Das restliche Vorgehen gleicht dem wie in Abschnitt 8.2 bereits beschrieben. Für die folgenden Auswertungen werden die stochastischen Momente der Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Verschiebungszustand $w = 20 \text{ mm}$ betrachtet, siehe Abbildung 8.18 (oben).

Anhand Abbildung 8.20 wird ersichtlich, dass sich die Approximation des Mittelwertes mit zunehmender Polynombasis kontinuierlich verbessert. Dabei weisen alle Konfigurationen der SSFEM bis zu einer Stichprobenanzahl von $N = 2 \times 10^3$ eine geringere Abweichung auf als die MCS. Für die MCS lässt sich erkennen, dass die prozentualen Abweichungen zur Referenzlösung mit zunehmender Stichprobenanzahl kleiner werden. Bei der Standardabweichung kann ein ähnliches Verhalten der SSFEM und der MCS beobachtet werden, siehe Abbildung 8.21.

Die zunehmend bessere Approximation der stochastischen Momente mit steigendem Polynomgrad zeigt sich insbesondere bei der Schiefe und der Wölbung, wie in den Abbildungen 8.22 und 8.23 dargestellt.

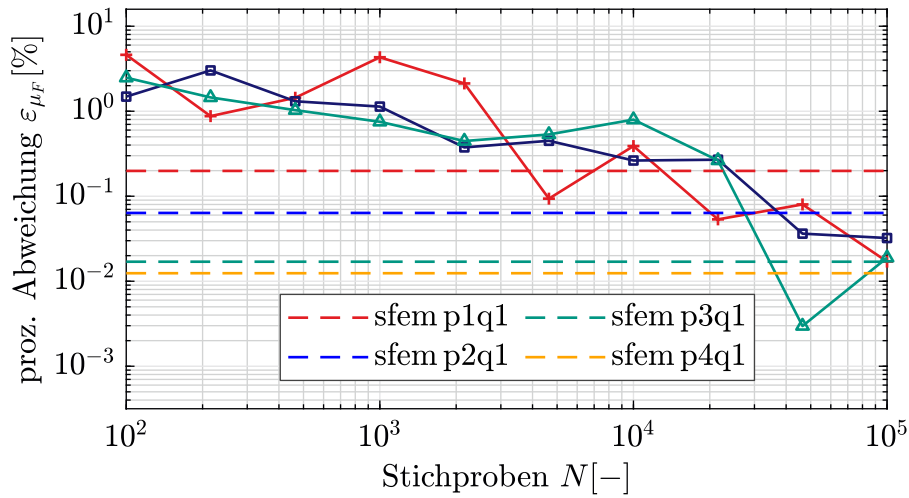


Abbildung 8.20: Prozentuale Abweichung ε_{μ_F} des Mittelwerts μ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei einem Verschiebungswert von $w = 20$ mm

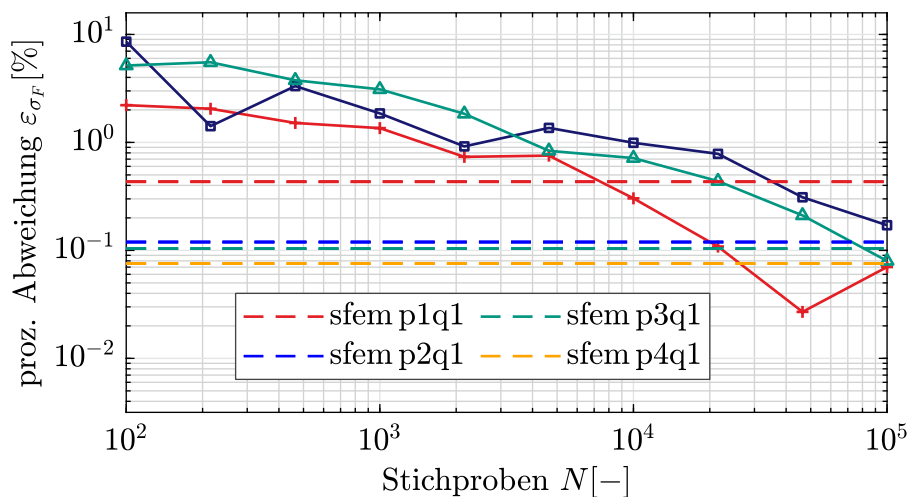


Abbildung 8.21: Prozentuale Abweichung ε_{σ_F} der Standardabweichung σ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei einem Verschiebungswert von $w = 20$ mm

8.3.3 Rechenzeiten

Zum Vergleich der Rechenzeiten der verschiedenen SSFEM-Konfigurationen mit der MCS wird der Speedup gemäß Gleichung (8.9) herangezogen. Die Rechenzeit der Monte-Carlo-Simulation T_{mcs} bezieht sich dabei auf 5×10^3 Stichproben. In Tabelle 8.12 sind die Ergebnisse für den Speedup S_{sfem} dargestellt. Es zeigt sich, dass eine größere Polynombasis zu einem deutlichen Anstieg der Berechnungszeit der SSFEM führt, was sich in einem abnehmenden Speedup widerspiegelt.

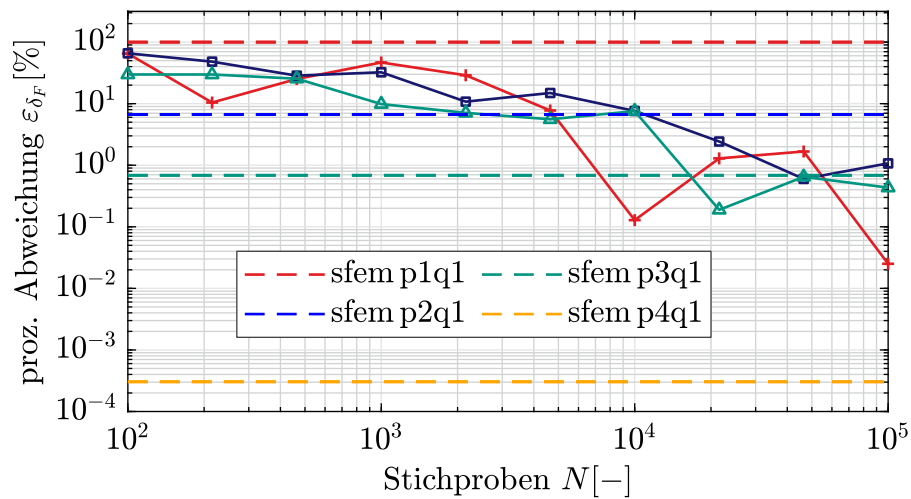


Abbildung 8.22: Prozentuale Abweichung ε_{δ_F} der Schiefe δ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei einem Verschiebungswert von $w = 20$ mm

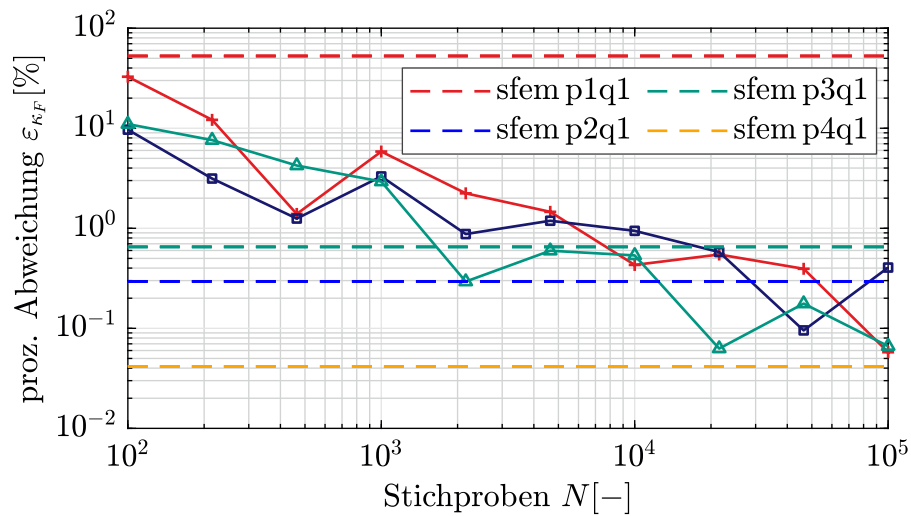


Abbildung 8.23: Prozentuale Abweichung ε_{κ_F} der Wölbung κ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei einem Verschiebungswert von $w = 20$ mm

Konfiguration	sfem p1q1	sfem p2q1	sfem p3q1	sfem p4q1
Speedup S_{sfem}	586,32	105,94	23,46	5,92

Tabelle 8.12: Vergleich der Rechenzeiten der SSFEM und der MCS für $N = 5 \times 10^3$ Stichproben

Analog zum vorherigen Beispiel in Abschnitt 8.2 kann das hyperbolische Abbruchkriterium verwendet werden, um die Größe der Polynombasis und damit auch die Rechenzeit zu verringern. Dies würde sich insbesondere bei der Konfiguration sfem p4q1 bemerkbar machen. Die Auswirkungen einer q-Norm werden im Rahmen dieses Beispiels jedoch nicht weiter untersucht.

8.3.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Abschließend wird die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stochastischen Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Verschiebungszustand $w = 20$ mm betrachtet. Das Vorgehen für die Schätzung der Dichtefunktion gleicht dem in Abschnitt 8.2. Für die Referenzlösung mit der MCS werden 5×10^5 Stichproben verwendet. Die PC-Entwicklung der Reaktionskraft wird ebenfalls mit 5×10^5 Realisierungen der Zufallsvariablen in Tabelle 8.9 ausgewertet. In Abbildung 8.24 sind die Ergebnisse dargestellt.

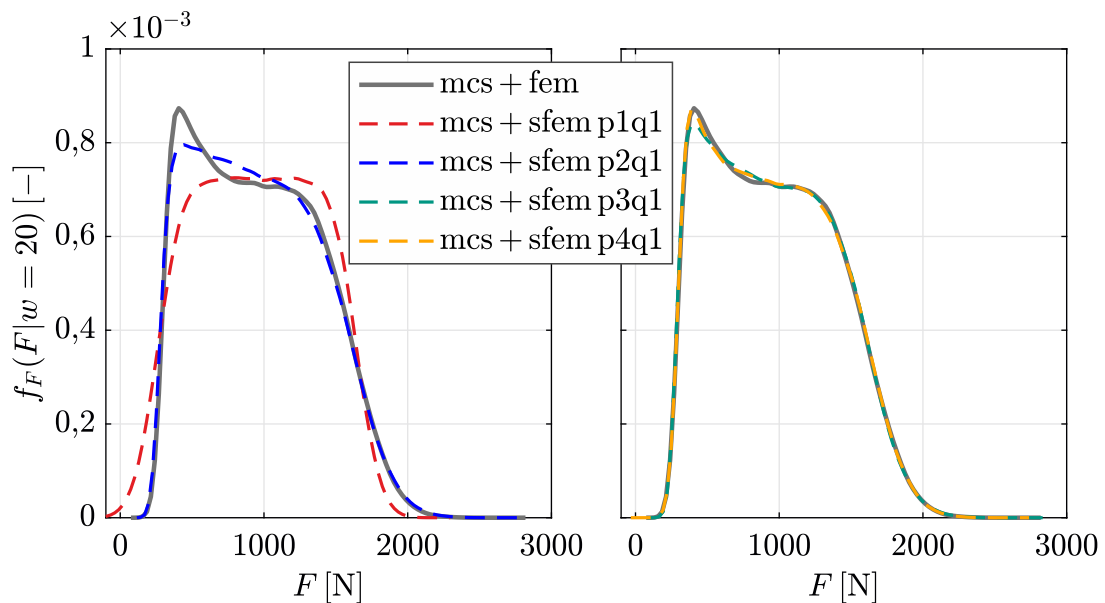


Abbildung 8.24: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_F(F|w = 20)$ der Reaktionskraft $F(w)$ bei einer Verschiebung von $w = 20$ mm

Es ist zu erkennen, dass mit den Konfigurationen sfem p1q1 und sfem p2q1 die Dichtefunktion nicht korrekt abgebildet werden kann. Erst mit einer kubischen bzw. quartischen Polynombasis ist eine gute Übereinstimmung zwischen der SS-FEM und der MCS erkennbar. Abbildung 8.24 zeigt, dass die Dichtefunktionen stark von der Gestalt einer Normalverteilung abweichen. Dies ist unter anderem

auf die Kombination von normal- und gleichverteilten Eingangsgrößen in Tabelle 8.9 zurückzuführen, die im Rahmen der stochastischen Analyse berücksichtigt werden. Hinzu kommt die nichtlineare Abbildung dieser Eingangsvariablen auf die Reaktionskraft $F(w)$.

8.3.5 Berücksichtigung epistemischer Unschärfe

Anhand des Zylindersegments, siehe Abbildung 8.17, wird zudem die Anwendung der erweiterten PC-Entwicklung aus Abschnitt 5.4.3 gezeigt. Die Gesamtdicke d der Struktur wurde zuvor als gleichverteilte Zufallsvariable modelliert. Für die Anwendung der erweiterten PC-Entwicklung wird diese Größe nun als Fuzzy-Variable definiert und im Folgenden mit $\tilde{d}$ bezeichnet. Alle Eingangsvariablen sind in Tabelle 8.13 zusammengefasst.

Parameter	Einheit	Variable X_i	Typ	Bezeichnung
$\Delta\varphi$	[°]	X_1	GAUSS	$\mathcal{N}(0, 1,5)$
E_1	[N/mm ²]	X_2	GAUSS	$\mathcal{N}(3300, 330)$
E_2	[N/mm ²]			$\mathcal{N}(1100, 110)$
$\tilde{d}$	[mm]	X_3	Fuzzy	$< 11,2, 13,5, 14,2 >$

Tabelle 8.13: Zusammenstellung der stochastischen und epistemischen Variablen

Die Abmessungen des Systems, die Belastung sowie die deterministischen Materialparameter bleiben unverändert. Die untere und obere Grenze der Fuzzy-Dicke $\tilde{d}$ in Tabelle 8.13 entsprechen gerade den Grenzen der gleichverteilten Größe d in Tabelle 8.9.

Die Reaktionskraft $F(w)$ weist aufgrund der aleatorischen und epistemischen Eingangsvariablen beide Unschärfecharakteristiken auf. Für die folgenden Untersuchungen wird die polymorph unscharfe Reaktionskraft am Durchschlagpunkt bei $w = 14$ mm betrachtet, vgl. Abbildung 8.18 (oben). Die erweiterte PC-Entwicklung liefert direkt die stochastischen Momente wie Mittelwert und Standardabweichung der Größe $F(w)$ in Abhängigkeit von der epistemischen Eingangsvariable $\tilde{d}$, siehe Gleichung (5.203) und Gleichung (5.205).

In Abbildung 8.25 ist die Approximation des Mittelwerts μ_F in Abhängigkeit der Dicke d dargestellt. Ab der Konfiguration sfemp2q1 zeigt sich eine Konvergenz in den PC-Approximationen.

Die Standardabweichung σ_F in Abhängigkeit der Dicke d ist in Abbildung 8.26 veranschaulicht. Mit einer linearen Polynombasis kann diese Größe nicht korrekt

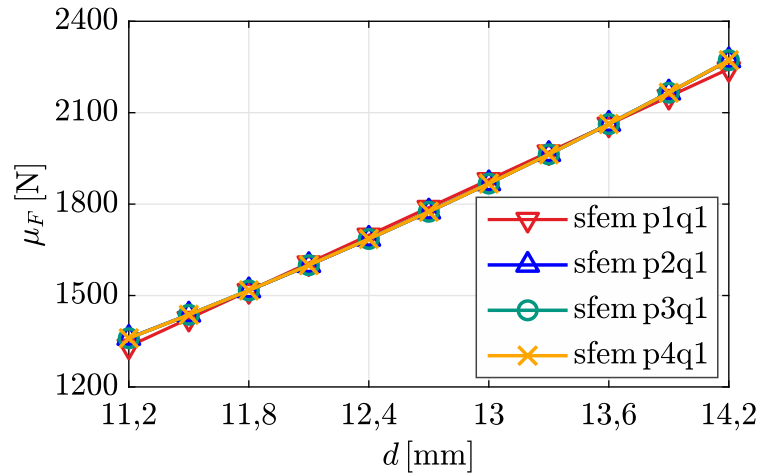


Abbildung 8.25: Mittelwert μ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Verschiebungszustand $w = 14$ mm in Abhängigkeit der Dicke d

erfasst werden. Grund hierfür ist, dass bei der Konfiguration sfem p1q1 keine Interaktionen zwischen den Eingangsvariablen berücksichtigt werden. Auch hier ist eine Konvergenz der Approximationen mit zunehmendem Polynomgrad zu beobachten.

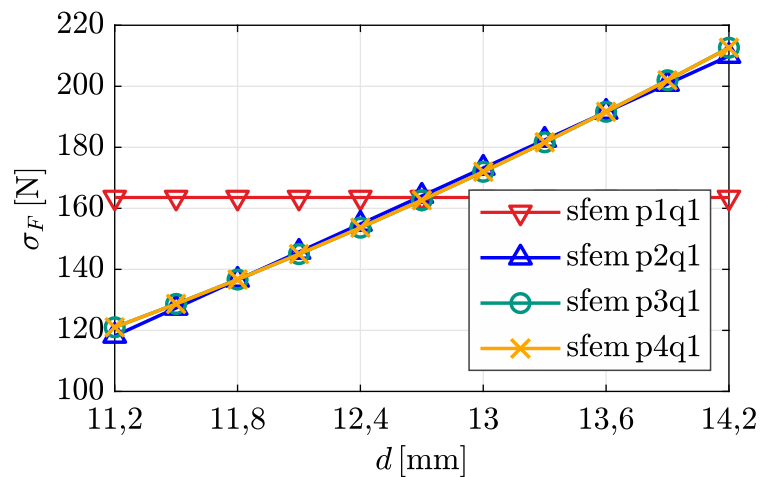


Abbildung 8.26: Standardabweichung σ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Lastschritt $w = 14$ mm in Abhängigkeit der Dicke d

Um die SSFEM-Ergebnisse beurteilen zu können, wird für ausgewählte Werte der Dicke d der Mittelwert μ_F und die Standardabweichung σ_F der Reaktionskraft mit der MCS bestimmt. Hierfür werden $N = 10^5$ Stichproben verwendet. Ein

Vergleich der MCS- und der SSFEM-Ergebnisse ist in Tabelle 8.14 dargestellt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse beider Methoden.

Bezeichnung	$d = 11,2 \text{ mm}$		$d = 13,5 \text{ mm}$	
	$\mu_F [\text{N}]$	$\sigma_F [\text{N}]$	$\mu_F [\text{N}]$	$\sigma_F [\text{N}]$
mcs	1359,782	121,023	2029,145	188,292
sfem p1q1	1333,431	163,562	2031,428	163,562
sfem p2q1	1360,488	118,181	2029,507	188,508
sfem p3q1	1359,743	121,018	2029,153	188,275
sfem p4q1	1359,780	121,025	2029,145	188,282

Tabelle 8.14: Mittelwert μ_F und der Standardabweichung σ_F der Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Verschiebungszustand $w = 14 \text{ mm}$ für ausgewählte Werte der Dicke d

Die Bestimmung der Fuzzy-wertigen stochastischen Momente der Reaktionskraft erfolgt mit dem Post-Processing der erweiterten PC-Entwicklung, vgl. Abschnitt 5.7. Dabei finden die Optimierungsaufgaben im Rahmen der α -Level-Optimierung (ALO) zur Bestimmung der Extremalwerte von μ_F bzw. σ_F auf den Funktionen in den Abbildungen 8.25 und 8.26 statt. Aufgrund der Monotonie des zugrundeliegenden Problems führen die Minimal- bzw. Maximalwerte der Fuzzy-Dicke $\tilde{d}$ auf jedem α -Level auch zu den entsprechenden Extremalwerten von μ_F und σ_F .

In Abbildung 8.27 sind die Ergebnisse für die Fuzzy-wertigen stochastischen Momente dargestellt. Der Vergleich von sfem p1q1 mit den restlichen Konfigurationen der SSFEM, wie sfem p2q1 etc. zeigt, dass gerade in der Stützmenge der Fuzzy-Variable Abweichungen erkennbar sind, siehe Abbildung 8.27 (links). Ab einer quadratischen Polynombasis sind so gut wie keine Änderungen in der Fuzzy-Größe zu beobachten.

Die unzureichende Approximation von σ_F mit der linearen Polynombasis, siehe Abbildung 8.26, macht sich insbesondere in der Fuzzy-Standardabweichung bemerkbar, siehe Abbildung 8.27 (rechts). Dies führt dazu, dass die Konfiguration sfem p1q1 für die Fuzzy-Standardabweichung nur einen Wert liefert. Erst mit einer quadratischen Approximation ist die Fuzzy-Größe zu erkennen. Eine Konvergenz in der Stützmenge der Fuzzy-Standardabweichung ist ab einer kubischen Polynombasis zu beobachten.

Das Beispiel zeigt, dass das Konzept der erweiterten PCE im Rahmen der SSFEM angewendet werden kann. Die Berücksichtigung polymorph unscharfer Eingangsgrößen wie einer Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierten Zufallsvariable wird anhand

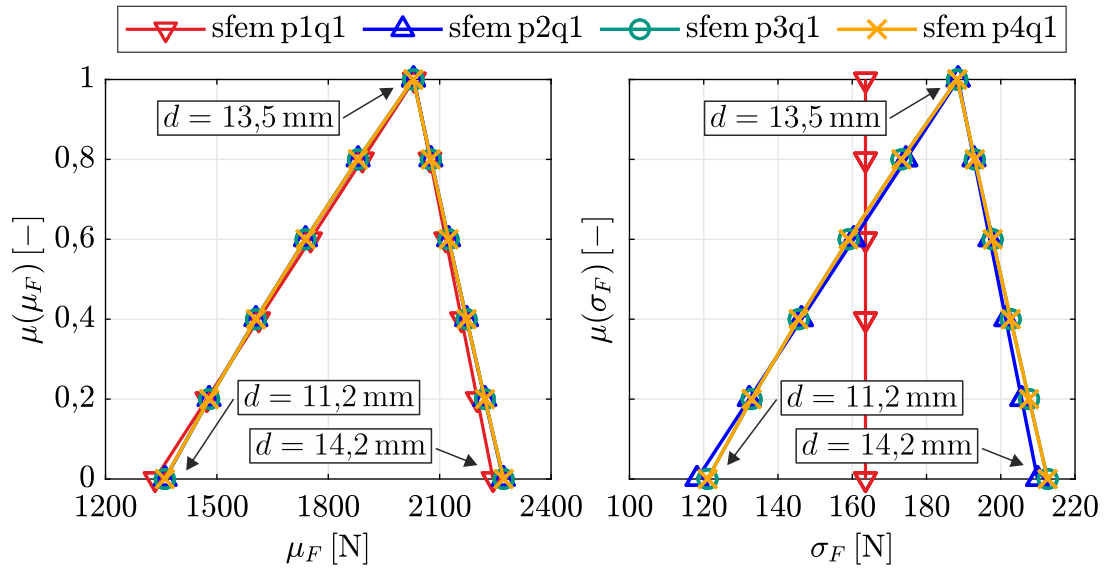


Abbildung 8.27: Zugehörigkeitsfunktion des Fuzzy-Mittelwerts $\mu(\mu_F)$ (links) und der Fuzzy-Standardabweichung $\mu(\sigma_F)$ (rechts) der Reaktionskraft $F(w)$ bei dem Verschiebungszustand $w = 14$ mm

des nächsten Beispiels veranschaulicht. Dies beinhaltet zudem die bereits angesprochene künstliche Erweiterung des Eingangsvektors $\mathbf{X}$, vgl. Abschnitt 5.4.3.

8.4 Zylindersegment unter Gleichlast

Der Einfluss aleatorischer, epistemischer und polymorph unscharfer Material- und Geometrieigenschaften auf das mechanische Verhalten einer Schalenstruktur wird anhand des folgenden Beispiels untersucht. Das flache Zylindersegment aus dem vorherigen Abschnitt wird nun durch eine Gleichlast q_0 in negative $\mathbf{e}_3$ -Richtung belastet, siehe Abbildung 8.28. Die Abmessungen der Struktur sowie die Systemrandbedingungen bleiben unverändert. Der dreilagige Schichtaufbau ist in Abbildung 8.28 dargestellt. Die Dicke der inneren Schicht beträgt d_1 , die der beiden äußeren Schichten jeweils d_2 . Ein Winkel von 90° entspricht gerade der Richtung von $\mathbf{e}_2$.

In Tabelle 8.15 sind die als Zufallsvariablen modellierten Material- und Geometrieparameter zusammengefasst. Der E-Modul E_1 wird als Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte GAUSS'sche Zufallsvariable modelliert. Dabei werden sowohl der Mittelwert μ_{E_1} als auch die Standardabweichung σ_{E_1} der zugrundeliegenden Normalverteilung als Fuzzy-Variable beschrieben. Die untere bzw. obere Grenze der Stützmenge $S(\tilde{\bullet})$ einer Fuzzy-Variablen $\tilde{\bullet}$ werden mit $\bullet$ bzw. $\bullet$ bezeichnet. Für den E-Modul E_2 wird eine Normalverteilung angenommen. Anders als im Beispiel

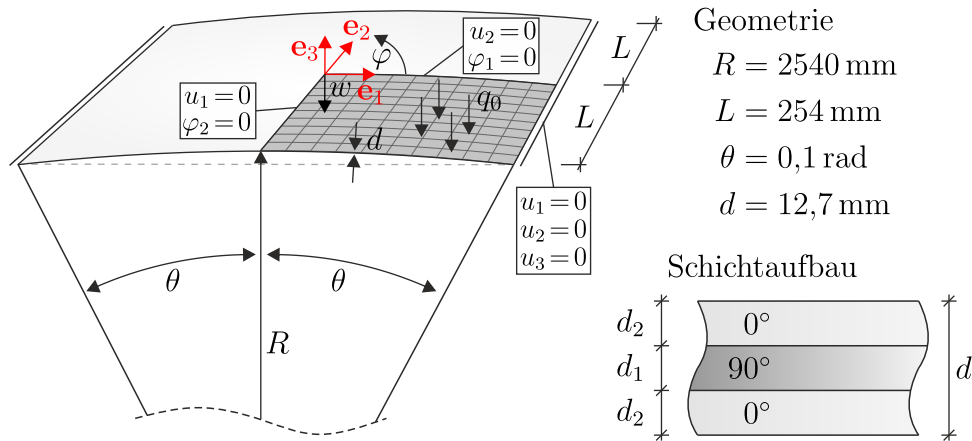


Abbildung 8.28: Geschichtetes Zylindersegment unter Gleichlast: Abmessungen, FE-Diskretisierung und Schichtaufbau

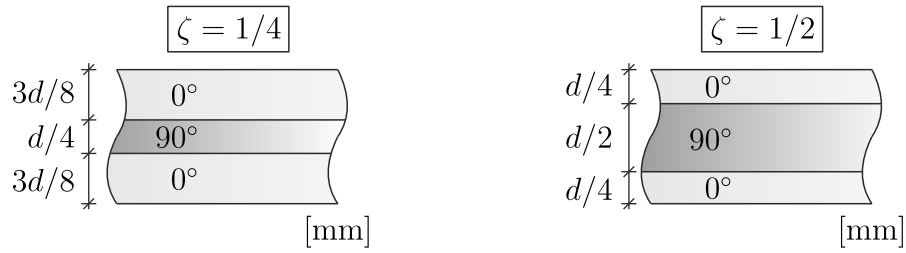
aus dem Abschnitt 8.3 besteht keine Korrelation zwischen den beiden E-Moduln E_1 und E_2 . Die Größe ζ ist definiert als Verhältnis der Dicke d_1 zur Gesamtdicke d und wird als Fuzzy-Variable modelliert. Mit der Variablen ζ lassen sich die Schichtdicken d_1 und d_2 wie folgt angeben:

$$d_1 = \zeta d \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{1 - \zeta}{2} d. \quad (8.12)$$

Die Gesamtdicke d der Schale ist deterministisch und beträgt $d = 12,7$ mm. Der Einfluss des Schichtdickenparameters ζ ist in Abbildung 8.29 dargestellt.

Variable	Typ	aleatorisch	epistemisch
E_1 [N/mm ²]	fp-r (GAUSS)	$\mathcal{N}(\tilde{\mu}_{E_1}, \tilde{\sigma}_{E_1})$	$\tilde{\mu}_{E_1} = \langle \underbrace{3000}_{\underline{\mu}_{E_1}}, 3500, \underbrace{3700}_{\bar{\mu}_{E_1}} \rangle$ $\tilde{\sigma}_{E_1} = \langle \underbrace{280}_{\underline{\sigma}_{E_1}}, 300, \underbrace{340}_{\bar{\sigma}_{E_1}} \rangle$
E_2 [N/mm ²]	GAUSS	$\mathcal{N}(1100, 110)$	—
ζ [—]	Fuzzy	—	$\tilde{\zeta} = \langle \underbrace{0,25}_{\underline{\zeta}}, 0,3, \underbrace{0,5}_{\bar{\zeta}} \rangle$
q_0 [N/mm ²]	Gamma	$\Gamma(4, 7,5 \times 10^{-5}, 1,7 \times 10^{-3})$	—

Tabelle 8.15: Zusammenstellung der aleatorischen, epistemischen und polymorph unscharfen Eingangsvariablen des Vektors $\mathbf{X} = [E_1, E_2, \zeta, q_0]^T$

Abbildung 8.29: Einfluss des Schichtdickenparameters ζ

Weiterhin wird die Gleichlast q_0 mit einer Gamma-Verteilung beschrieben, siehe Tabelle 8.15. Die gammaverteilte Zufallsgröße q_0 hat einen Mittelwert von $\mu_{q_0} = 2 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ und eine Standardabweichung von $\sigma_{q_0} = 1,5 \times 10^{-4} \text{ N/mm}^2$.

Für die Berücksichtigung polymorph unscharfer Eingangsvariablen im Rahmen der SSFEM wird das Konzept der erweiterten PC-Entwicklung aus Abschnitt 5.4.3 herangezogen. Hierfür ist zunächst eine künstliche Erweiterung des Eingangsvektors $\mathbf{X} = [E_1, E_2, \zeta, q_0]^T$ erforderlich. Die in Gleichung (5.97) gezeigte Transformation ist in Abbildung 8.30 grafisch veranschaulicht. Dabei ist die Verknüpfung der Variablen des ursprünglichen Vektors $\mathbf{X}$ mit den Größen aus dem Vektor $\mathbf{C} = [\mathbf{U}, \mathbf{s}]$ farblich gekennzeichnet.

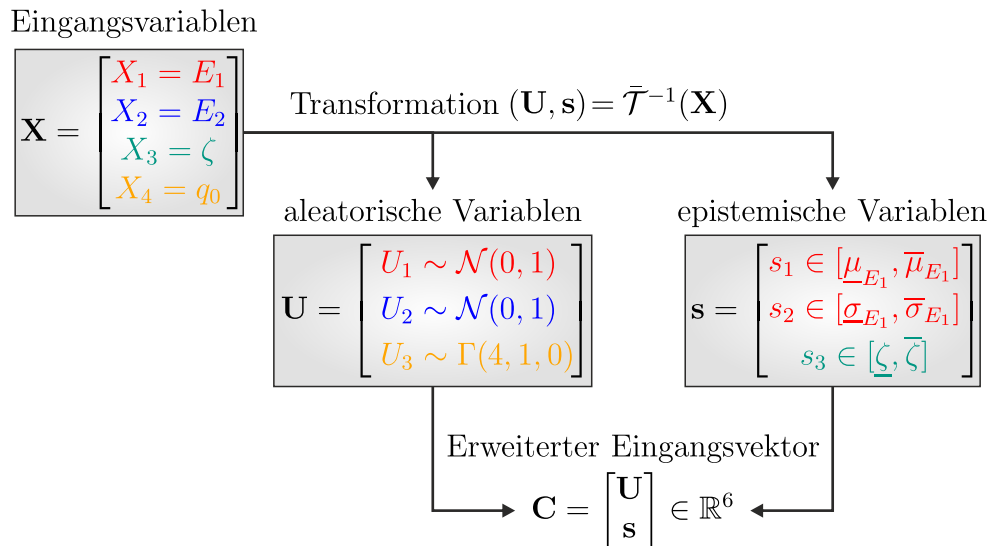


Abbildung 8.30: Künstliche Erweiterung des Eingangsraums

Es ist erkennbar, dass sich die Dimension von $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^4$ auf $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^6$ erhöht. Die sechsdimensionalen Basispolynome, die für die SSFEM verwendet werden,

sind das Produkt von drei LEGENDRE-, zwei HERMITE- und einem LAGUERRE-Polynom. Dabei werden die LEGENDRE-Polynome ausschließlich für die Approximation in Richtung der epistemischen Variablen verwendet. Diese sind im Vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ zusammengefasst.

Anders als im Beispiel aus dem Abschnitt 8.3 bleibt die Faserorientierung der einzelnen Schichten in diesem Beispiel konstant. Aufgrund der Geometrie, der Belastung und des Materials kann daher die Doppelsymmetrie des Systems ausgenutzt werden. Daher erfolgt die Berechnung nur an einem Viertel der Gesamtstruktur. Hierfür werden in beiden Symmetrieebenen die entsprechenden Symmetriestandbedingungen gesetzt, siehe Abbildung 8.28. Für die Diskretisierung werden $10 \times 10 = 100$ Schalenelemente verwendet, vgl. Abschnitt 6.2. Im deterministischen Fall führt dies zu insgesamt 650 Freiheitsgraden. In Tabelle 8.16 sind die verwendeten Konfigurationen der SSFEM, die Anzahl an Basispolynomen sowie die Anzahl an Freiheitsgraden zusammengefasst.

Polynomgrad p	q-Norm q	Bezeichnung	$\bar{P}$	$ndof$
2	1	sfem p2q1	28	18200
3	0,8	sfem p3q0,8	34	22100
4	0,8	sfem p4q0,8	90	58500
5	0,8	sfem p5q0,8	141	91650

Tabelle 8.16: Freiheitsgrade $ndof$ in Abhängigkeit vom Polynomgrad p und der q-Norm q sowie die zugehörigen Bezeichnungen der jeweiligen Konfigurationen

Wie auch das Zylindersegment in Abschnitt 8.3 weist die Struktur einen Durchschlagpunkt auf, siehe Abbildung 8.31. Für die vollständige Berechnung des Gleichgewichtspfades wird die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2 verwendet. Hierfür wird die vertikale Verschiebung w , siehe Abbildung 8.28, mit einem Inkrement von $\Delta w = 1$ mm von 0 bis 30 mm gesteigert. Im Rahmen des Lösungsverfahrens werden die PC-Koeffizienten $\lambda_\alpha, \alpha = 0, \dots, P$ des Lastfaktors für die stochastische Gleichlast q_0 rückgerechnet.

8.4.1 Unscharfe stochastische Momente

Die polymorphen Unschärfecharakteristiken der Eingangsvariablen in Tabelle 8.15 übertragen sich auf den Lastfaktor λ , welcher im Rahmen des Lösungsalgorithmus berechnet wird. Um die Extremalwerte der Fuzzy-wertigen stochastischen

Momente des Lastfaktors zu ermitteln, wird die α -Level-Optimierung (ALO) verwendet. Diese erfolgt auf dem durch die SSFEM konstruierten Ersatzmodell, siehe Abschnitt 5.7. Im Gegensatz zu Abschnitt 8.3.5 liegt hier keine Monotonie des Optimierungsproblems vor, weshalb für die ALO ein heuristisches Optimierungsverfahren eingesetzt wird. Hierfür wird die MATLAB [116] eigene Funktion *particleswarm* verwendet.

In Abbildung 8.31 ist der Fuzzy-wertige Mittelwert μ_λ für die Konfiguration sfem p5q0,8 dargestellt. Die untere und obere Grenze der Stützmenge des Fuzzy-Mittelwerts μ_λ sind durch die beiden roten Linien gekennzeichnet, welche mit $\mu_{\lambda,\alpha=0}$ bezeichnet werden. Auf dem obersten α -Level mit $\alpha = 1$ reduziert sich der Fuzzy-Mittelwert zu einer deterministischen Größe, welche in Abbildung 8.31 blau markiert ist. Die epistemische Unschärfe im Fuzzy-Mittelwert μ_λ ist deutlich zu erkennen.

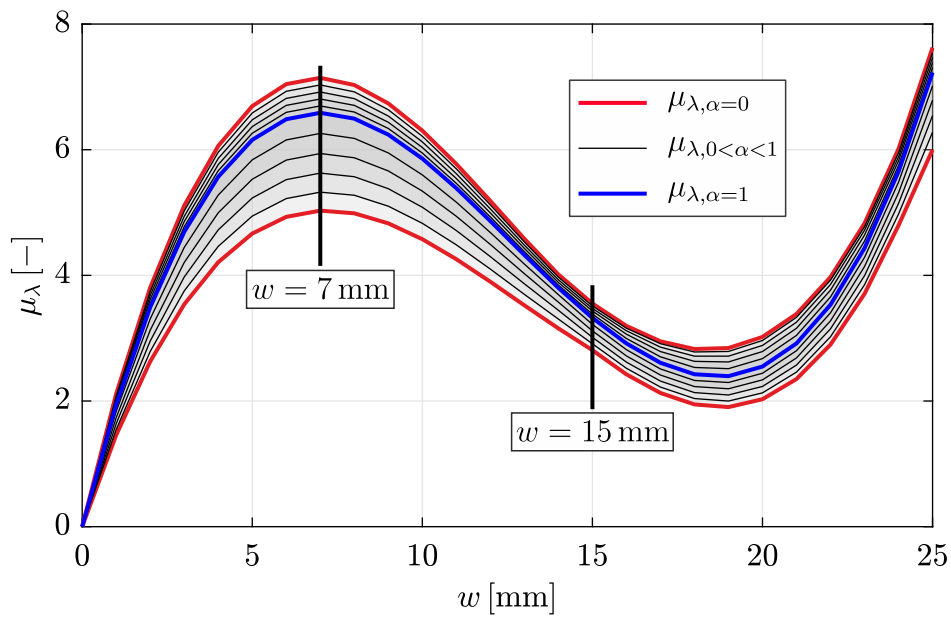


Abbildung 8.31: Fuzzy-Mittelwert μ_λ des unscharfen Lastfaktors λ für die Konfiguration sfem p5q0,8

Wie die Konfiguration der SSFEM die Approximation der Größe μ_λ beeinflusst, wird anhand der zwei gekennzeichneten Lastzustände bei $w = 7$ mm und $w = 15$ mm untersucht. Abbildung 8.32 zeigt die beiden Zugehörigkeitsfunktionen des Fuzzy-Mittelwerts $\mu(\mu_\lambda)$. Alle gewählten SSFEM-Konfigurationen führen zu vergleichbaren Ergebnissen. Dies spricht dafür, dass die gewählten Polynomgrade p für die PC-Approximation ausreichend sind.

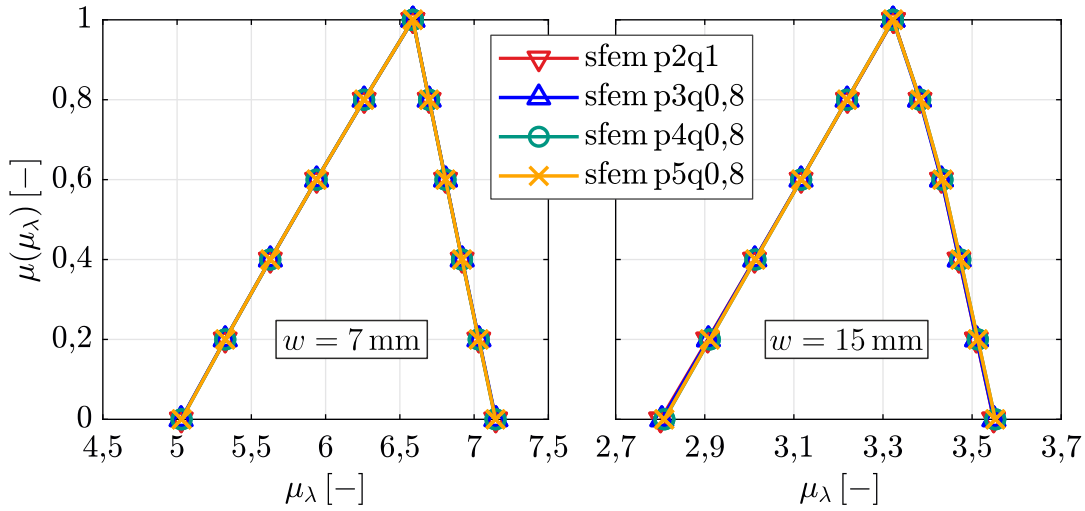


Abbildung 8.32: Zugehörigkeitsfunktion des Fuzzy-Mittelwerts $\mu(\mu_\lambda)$ des Lastfaktors λ für die Lastzustände $w = 7 \text{ mm}$ (links) und $w = 15 \text{ mm}$ (rechts)

Auch die Fuzzy-wertige Standardabweichung σ_λ des Lastfaktors λ lässt sich im Anschluss an die Berechnung mit der SSFEM ohne größeren Berechnungsaufwand bestimmen. Das Ergebnis für die Konfiguration sfem p5q0,8 ist in Abbildung 8.33 dargestellt. Der qualitative Verlauf der Fuzzy-Größe gleicht dem des Fuzzy-Mittelwerts in Abbildung 8.31.

Anhand der zwei Schnitte bei $w = 7 \text{ mm}$ und $w = 15 \text{ mm}$ wird deutlich, dass die Größe σ_λ mit sfem p2q1 und sfem p3q0,8 nur unzureichend erfasst werden kann, siehe Abbildung 8.34. Trotz des höheren Polynomgrades zeigt sfem p3q0,8 im Lastschritt $w = 15 \text{ mm}$ nahezu identische Ergebnisse für die Fuzzy-Standardabweichung wie sfem p2q1. Dies ist damit zu begründen, dass mit der q-Norm $q = 0,8$ Interaktionen zwischen den Eingangsvariablen vernachlässigt werden, die für eine bessere Approximation mit der PCE jedoch benötigt werden. Die Konfiguration sfem p4q0,8 scheint ausreichend zu sein, da im Vergleich zu sfem p5q0,8 keine wesentlichen Änderungen zu erkennen sind.

Für einen Vergleich der SSFEM-Ergebnisse mit denen einer MCS wird das oberste α -Level mit $\alpha = 1$ betrachtet. Hier reduziert sich die Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte GAUSS'sche Zufallsvariable zu einer Normalverteilung. Für den E-Modul E_1 gilt somit

$$E_{1,\alpha=1} \sim \mathcal{N}(3500, 300) \text{ N/mm}^2. \quad (8.13)$$

Weiterhin vereinfacht sich der Fuzzy-Schichtdickenparameter ζ zu einer deterministischen Größe mit dem Wert $\zeta = 0,3$. Für die MCS werden $N = 10^5$ Stichproben verwendet. Anhand Tabelle 8.17 ist eine sehr gute Übereinstimmung der

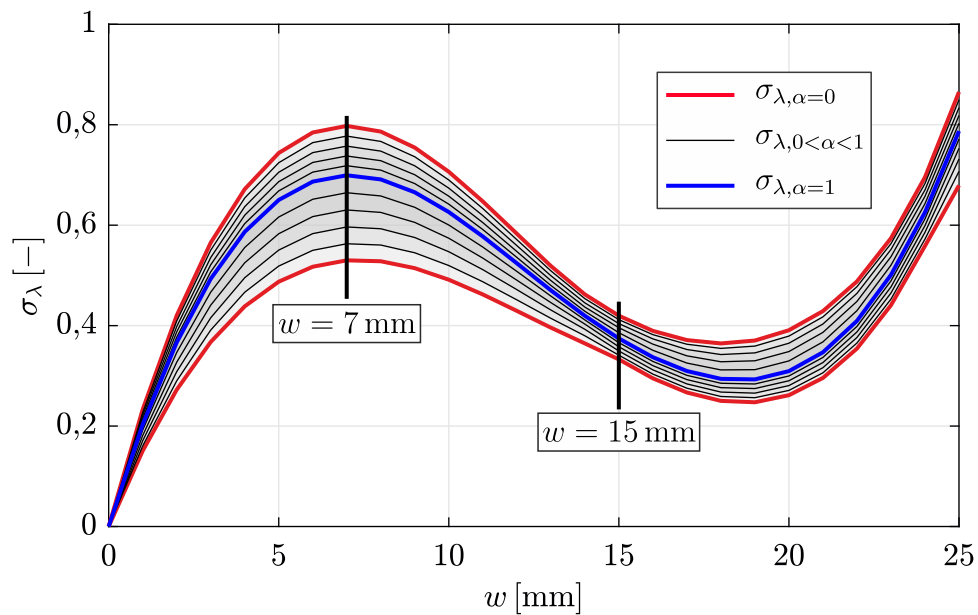


Abbildung 8.33: Fuzzy-Standardabweichung σ_λ des unscharfen Lastfaktors λ für die Konfiguration sfem p5q0,8

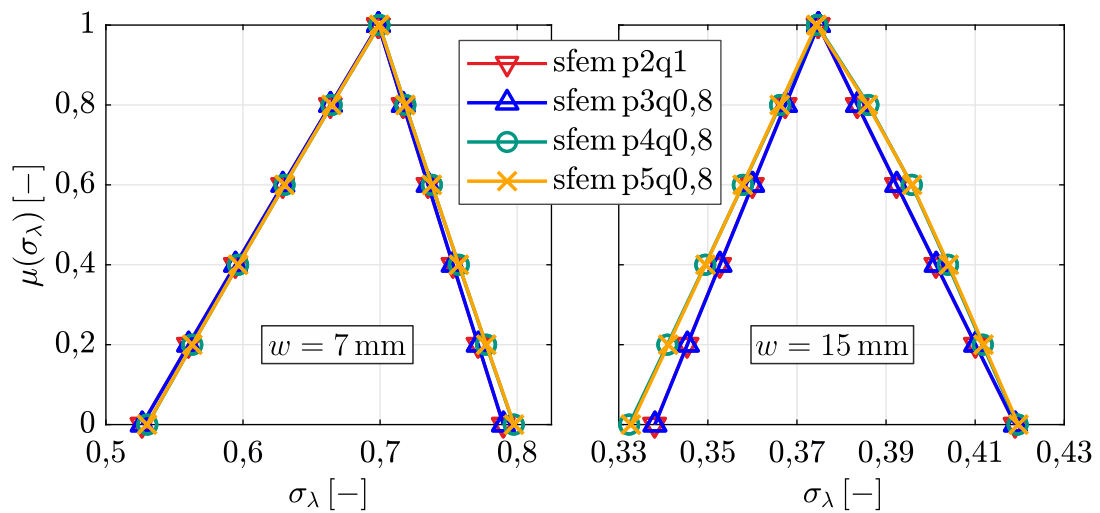


Abbildung 8.34: Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-Standardabweichung $\mu(\sigma_\lambda)$ des Lastfaktors λ für die Lastzustände $w = 7$ mm (links) und $w = 15$ mm (rechts)

Ergebnisse beider Methoden zu erkennen. Die nicht dargestellten Konfigurationen sfem p4q0,8 und sfem p5q0,8 führen zu nahezu gleichen Werten für $\mu_{\lambda,\alpha=1}$ und $\sigma_{\lambda,\alpha=1}$, siehe Abbildung 8.32 und 8.34.

Bezeichnung	$w = 7 \text{ mm}$		$w = 15 \text{ mm}$	
	$\mu_{\lambda,\alpha=1}$	$\sigma_{\lambda,\alpha=1}$	$\mu_{\lambda,\alpha=1}$	$\sigma_{\lambda,\alpha=1}$
mcs	6,5891	0,6972	3,3231	0,3734
sfem p2q1	6,5878	0,6987	3,3235	0,3747
sfem p3q0,8	6,5874	0,6988	3,3225	0,3748

Tabelle 8.17: Mittelwert $\mu_{\lambda,\alpha=1}$ und Standardabweichung $\sigma_{\lambda,\alpha=1}$ auf dem obersten α -Level für die Lastzustände $w = 7 \text{ mm}$ und $w = 15 \text{ mm}$

8.4.2 Unscharfe Sobol'-Indizes

Wie in Abschnitt 5.7 beschrieben, ermöglicht die erweiterte PC-Entwicklung die Bestimmung unscharfer SOBOL'-Indizes. Die zugrundeliegenden Optimierungsprobleme werden analog dem Vorgehen in Abschnitt 8.4.1 gelöst. Die Sensitivitätsmaße werden ausschließlich bezüglich der mit aleatorischer Unscharfe behafteten Variablen bestimmt. In diesem Beispiel sind das der E-Modul E_1 , der E-Modul E_2 und die Gleichlast q_0 , vgl. Tabelle 8.15.

Die Abbildung 8.35 zeigt die totalen PCE-basierten Fuzzy-SOBOL'-Indizes $S_i^{T(pc)}$ für diese drei Eingangsgrößen. Es fällt auf, dass die Variable $X_2 = E_2$ im Vergleich

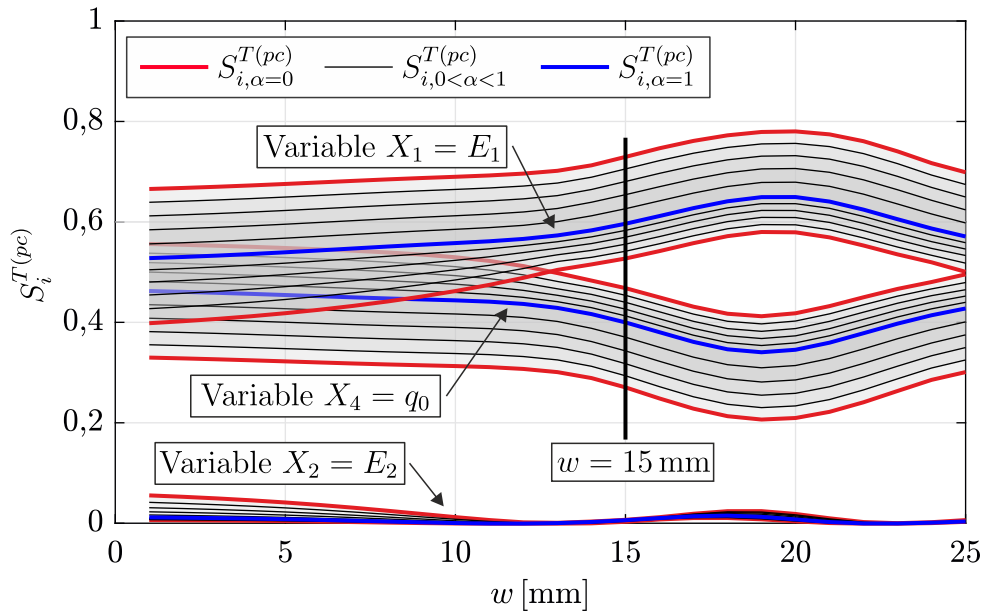


Abbildung 8.35: Totale Fuzzy-SOBOL'-Indizes $S_i^{T(pc)}$ der Variablen E_1, E_2 und q_0 für die Konfiguration sfem p5q0,8

zu den beiden anderen Größen kaum einen Einfluss auf den Lastfaktor λ hat. Der geringe Einfluss von E_2 lässt sich mit dem Schichtaufbau $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ sowie dem Lastabtrag der Struktur begründen. Die Haupttragrichtung entspricht gerade $\mathbf{e}_1$, in der die zwei Randschichten mit dem E-Modul E_1 maßgeblich zur Steifigkeit des Zylindersegments beitragen. Aus diesem Grund werden nachfolgend nur noch die Variablen E_1 und q_0 genauer betrachtet.

Der E-Modul E_1 hat den größten Einfluss, siehe Abbildung 8.35. Dabei ist zu erkennen, dass der zugehörige totale SOBOL'-Index $S_{1,\alpha=1}^{T(pc)}$ bis zu einem Lastzustand von $w = 20$ mm zunimmt und anschließend wieder abfällt. Ein gegenläufiges Verhalten zeigt sich für das Sensitivitätsmaß $S_{4,\alpha=1}^{T(pc)}$ der Variablen $X_4 = q_0$. Inwieweit die epistemische Unscharfe, die SOBOL'-Indizes $S_1^{T(pc)}$ und $S_4^{T(pc)}$ beeinflusst, ist anhand Abbildung 8.35 zu erkennen. Die Intervallbreite auf dem untersten α -Level mit $\alpha = 0$ ist für diese beiden Sensitivitätsmaße ungefähr gleich. Daraus lässt sich ableiten, dass die epistemische Unscharfe in den Eingangsvariablen den Einfluss der Variablen E_1 und q_0 gleichermaßen beeinflusst.

Eine Darstellung der Zugehörigkeitsfunktion der Fuzzy-SOBOL'-Indizes für den gekennzeichneten Lastzustand $w = 15$ mm ist in Abbildung 8.36 gezeigt. Für beide Größen zeigt sich ein ähnliches Approximationsverhalten der SSFEM, wie es bei der Fuzzy-Standardabweichung σ_λ zu beobachten ist, vgl. Abbildung 8.34. Anhand Abbildung 8.36 wird deutlich, dass die Intervallbreite der beiden Fuzzy-

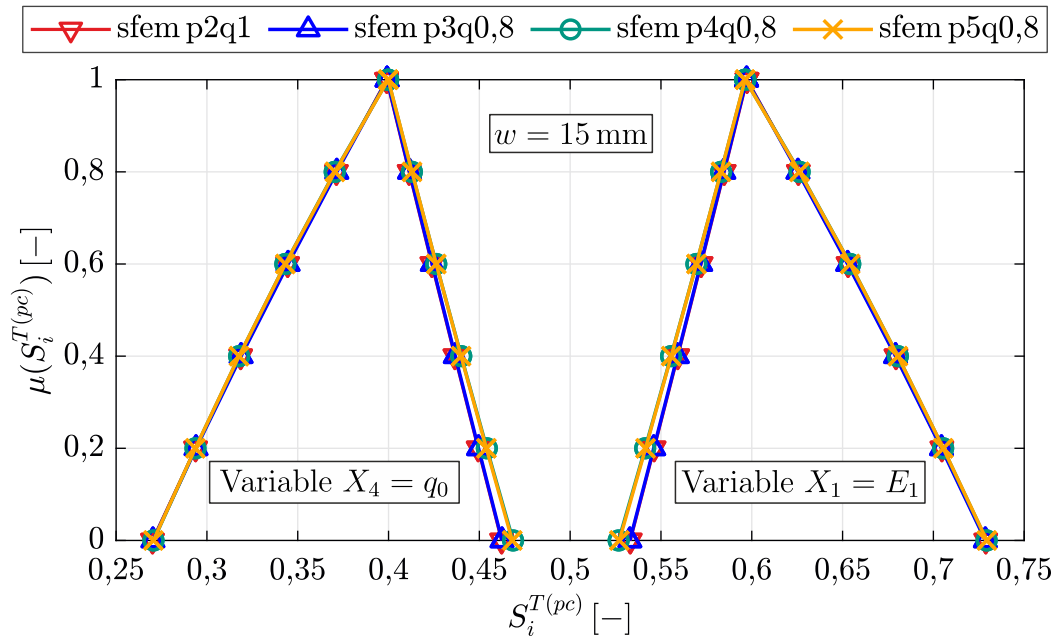


Abbildung 8.36: Zugehörigkeitsfunktionen der totalen Fuzzy-SOBOL'-Indizes $S_i^{T(pc)}$ der Variablen $X_1 = E_1$ und $X_4 = q_0$ für den Lastzustand $w = 15$ mm

SOBOL'-Indizes auf jedem α -Level nahezu gleich ist. Daraus lässt sich ableiten, dass die epistemische Unschärfe in den Eingangsvariablen beide Sensitivitätsmaße gleichermaßen beeinflusst.

Ein Vergleich der SSFEM-Ergebnisse mit denen einer MCS erfolgt auf dem obersten α -Level. Für die Bestimmung der totalen SOBOL'-Indizes mit der MCS wird eine Basisanzahl von $L = 10^5$ Stichproben verwendet. Insgesamt sind für die Monte-Carlo-Schätzer der totalen SOBOL'-Indizes $N = 10^5(2 + 2) = 4 \times 10^5$ Auswertungen des deterministischen FE-Modells erforderlich, vgl. Abschnitt 5.6.2. Die Ergebnisse beider Methoden sind in Tabelle 8.18 gegenübergestellt. Für alle Konfigurationen der SSFEM zeigen sich sehr gute Übereinstimmungen der totalen SOBOL'-Indizes mit den Ergebnissen der MCS.

Bezeichnung	$S_{1,\alpha=1}^T, S_{1,\alpha=1}^{T(pc)}$	$S_{4,\alpha=1}^T, S_{4,\alpha=1}^{T(pc)}$
mcs	0,5958	0,4004
sfem p2q1	0,5974	0,3990
sfem p3q0,8	0,5972	0,3992
sfem p4q0,8	0,5964	0,3998
sfem p5q0,8	0,5963	0,3999

Tabelle 8.18: Totale Fuzzy-SOBOL'-Indizes $S^{T(pc)}$ der Variablen $X_1 = E_1$ und $X_4 = q_0$ auf dem obersten α -Level für den Lastzustand $w = 15$ mm

8.4.3 Abschließende Bemerkungen

Anhand dieses Beispiels wird die Anwendung der von SCHOEBI ET AL. [94] vorgestellten erweiterten PC-Entwicklung im Rahmen der SSFEM gezeigt. Die folgenden Bemerkungen fassen die Vor- und Nachteile dieses Ansatzes sowie denkbare Erweiterungen im Kontext der SSFEM zusammen:

- Die zu Beginn erforderliche Erweiterung des Eingangsvektors $\mathbf{X}$ auf den Vektor $\mathbf{C} = [\mathbf{U}, \mathbf{s}]$ führt dazu, dass sich die Anzahl der Eingangsvariablen erhöht. Dies spiegelt sich in der zunehmenden Anzahl an Basispolynomen wider und führt folglich zu einem größeren globalen Gleichungssystem $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = -\mathbf{G}$.
- Aufgrund der Erweiterung $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{C}$ entstehen zusätzliche Interaktionen zwischen den Eingangsgrößen. Aus diesem Grund sind höherwertige PC-Entwicklungen erforderlich, um beispielsweise stochastische Momente in

Abhängigkeit der epistemischen Variablen korrekt erfassen zu können, vgl. Abbildung 8.34.

- Mit dem Ansatz der erweiterten PC-Entwicklung im Rahmen der SSFEM ist es möglich, unscharfe stochastische Momente sowie unscharfe SOBOL'-Indizes effizient zu bestimmen. Hierfür ist eine deterministische Berechnung mit der SSFEM ausreichend. Die α -Level-Optimierung (ALO) findet im Anschluss an die Berechnung auf dem durch die SSFEM erzeugten Ersatzmodell statt.
- Die unscharfen SOBOL'-Indizes geben Aufschluss darüber, inwiefern epistemische Variablen den Einfluss einer Eingangsgröße bestimmen. Eine mögliche Erweiterung bestünde darin, den Einfluss der einzelnen epistemischen Variablen auf die Intervallbreite eines unscharfen SOBOL'-Indizes zu untersuchen.

8.5 Patchtest für das stochastische Scheibenelement

Der sogenannte *Patchtest* wurde von IRONS & RAZZAQUE [62] als Konzept eingeführt, um entwickelte Elementformulierungen zu untersuchen. Im Folgenden wird dieser Test für die gemischte stochastische Scheibenformulierung aus dem Abschnitt 6.3 durchgeführt. Die Struktur mit den zugehörigen Randbedingungen ist in Abbildung 8.37 dargestellt. Dabei wird die Belastung so aufgebracht, dass im gesamten System konstante Verzerrungen bzw. Spannungen auftreten. Es wird ein reiner Normalspannungszustand sowie ein reiner Schubspannungszustand untersucht.

Die Knotenkoordinaten sind in Tabelle 8.19 zusammengefasst und orientieren sich an BATHE [14]. Im Rahmen des hier betrachteten Patchtests werden der E-Modul E und die Einzellasten F als Zufallsvariablen modelliert:

$$E(\omega) \sim \mathcal{N}(1000, 100) \quad \text{und} \quad F(\omega) \sim \mathcal{U}(100 - 10\sqrt{3}, 100 + 10\sqrt{3}) . \quad (8.14)$$

Dabei sind untere und obere Grenze der gleichverteilten Last gerade so gewählt, dass die Belastung einen Mittelwert von $\mu_F = 100$ und eine Standardabweichung von $\sigma_F = 10$ hat. Die verbleibenden Materialparameter der Scheibe sind gegeben mit $\nu = 0,3$ und $d = 1$.

Knoten I	1	2	3	4	5	6	7	8
(X_{1I}, X_{2I})	(0, 0)	(10, 0)	(3, 4)	(8, 3)	(4, 7)	(8, 7)	(0, 10)	(10, 10)

Tabelle 8.19: Knotenkoordinaten für den Patchtest in Abbildung 8.37

wobei A die Querschnittsfläche der Scheibe bezeichnet. Alle anderen Spannungen wie σ_{22} und σ_{12} sind gleich null. Der Belastungsfall in Abbildung 8.37 (rechts) verursacht konstante Schubspannungen

$$\sigma_{12}(\omega) = F(\omega)/(10d) \quad \text{mit} \quad \sigma_{12}(\omega) \sim \mathcal{U}(10 - \sqrt{3}, 10 + \sqrt{3}) , \quad (8.17)$$

während die restlichen Normalspannungen in die X_1 - bzw. X_2 -Richtung gleich null sind. In beiden Fällen lässt sich erkennen, dass die auftretende konstante Spannung $\sigma_{11}(\omega)$ bzw. $\sigma_{12}(\omega)$ ebenso wie die Belastung $F(\omega)$ einer Gleichverteilung folgt. Die Koeffizienten der PC-Entwicklungen von $\sigma_{11}(\omega)$ bzw. $\sigma_{12}(\omega)$ lauten

$$[10, 1, 0, 0, 0, 0]^T . \quad (8.18)$$

Sie entsprechen gerade den durch die Fläche $A = 10$ dividierten Koeffizienten F_α in Gleichung (8.15).

Das Scheibenelement muss die konstanten, aber stochastischen Spannungsverläufe mit den PC-Koeffizienten in Gleichung (8.18) sowohl für eine geometrisch lineare als auch für eine nichtlineare Berechnung abbilden können. Dies wird im Folgenden genauer untersucht. Zusätzlich wird die bereits angesprochene Umrechnung verschiedener Spannungsmaße aus Abschnitt 6.3.4 diskutiert.

8.5.1 Reine Zugbeanspruchung

Zunächst wird die Zugbeanspruchung betrachtet, siehe Abbildung 8.37 (links). Aufgrund der variierenden Parameter wie dem E-Modul und der Belastung sind die resultierenden Verschiebungen stochastisch. Um den Unterschied einer geometrisch linearen und einer geometrisch nichtlinearen Berechnung zu verdeutlichen, wird die Verschiebung u_1 in Richtung X_1 am Knoten 8 betrachtet. Die zugehörigen PC-Koeffizienten lauten

$$\mathbf{u}_1^{\text{lin}} = \begin{bmatrix} 1,0103 \times 10^{-1} \\ 1,0103 \times 10^{-2} \\ -1,0309 \times 10^{-2} \\ 0 \\ 1,4580 \times 10^{-3} \\ -1,0309 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_1^{\text{nili}} = \begin{bmatrix} 9,9510 \times 10^{-2} \\ 9,8060 \times 10^{-3} \\ -1,0000 \times 10^{-2} \\ -1,2692 \times 10^{-5} \\ 1,3935 \times 10^{-3} \\ -9,7148 \times 10^{-4} \end{bmatrix} . \quad (8.19)$$

Es ist zu erkennen, dass die geometrisch nichtlineare Berechnung zu betragsmäßig kleineren Verschiebungskoeffizienten führt. Dies ist auf die Versteifung der Struktur zurückzuführen. Weiterhin fällt auf, dass der vierte Koeffizient bei einer linearen Rechnung gleich null ist. Dieser PC-Koeffizient gehört zum Polynom, welches konstant in Richtung des E-Moduls $E(\omega)$ und quadratisch in Richtung

der Last $F(\omega)$ ist, siehe Gleichung (8.15). Für die Approximation des linearen Zusammenhangs zwischen den Verschiebungen und der Belastung bei einer geometrisch linearen Berechnung wird dieses Basispolynom nicht benötigt. Bei der geometrisch nichtlinearen Rechnung ist dieser Zusammenhang nicht mehr linear und der vierte Koeffizient ist ungleich null, siehe Gleichung (8.19).

In Abbildung 8.38 sind die ersten beiden PC-Koeffizienten u_{10} und u_{11} der Horizontalverschiebung in Richtung X_1 für die nichtlineare Berechnung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass beide Verschiebungskoeffizienten einen linearen Verlauf aufweisen. Der Wertebereich des Koeffizienten u_{10} ist ungefähr um den Faktor zehn größer als der von u_{11} .

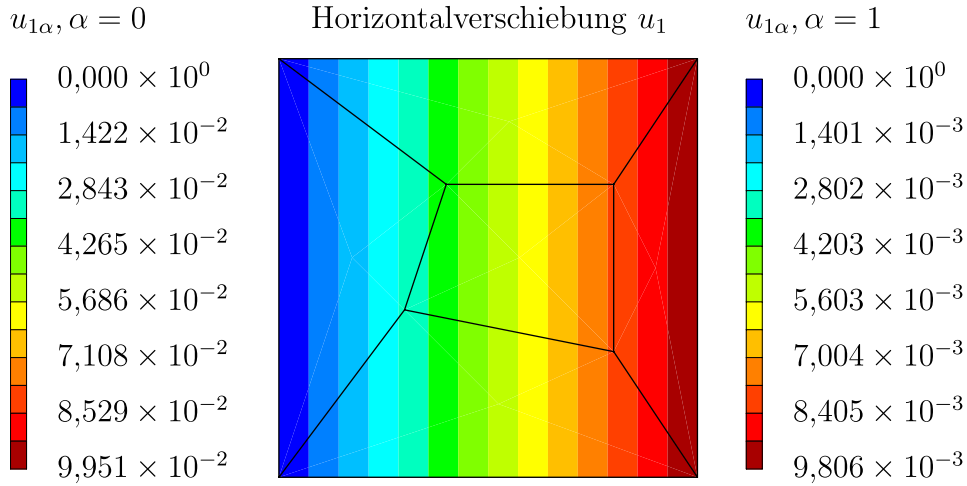


Abbildung 8.38: Verlauf der PC-Koeffizienten u_{10} und u_{11} der Verschiebung u_1

Im Folgenden werden die Spannungen für eine geometrisch lineare und nichtlineare Berechnung untersucht. Die Rückrechnung der Spannungen erfolgt dabei über den Ansatz gemäß Gleichung (6.136). Für eine kompakte Darstellung wird der Vektor

$$\bar{s}_I := [s_{I0}, \dots, s_{I\alpha}, \dots, s_{IP}]^T, \quad I = 1, \dots, 5 \quad (8.20)$$

eingeführt, welcher alle PC-Koeffizienten eines bestimmten Ansatzparameters beinhaltet. Sowohl die lineare als auch die nichtlineare Berechnung führen zu

$$\bar{s}_1 \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \bar{s}_2 = \bar{s}_3 = \bar{s}_4 = \bar{s}_5 = \mathbf{0}. \quad (8.21)$$

Aus dem Spannungsansatz in Gleichung (6.136) geht hervor, dass unter Berücksichtigung von Gleichung (8.21) die Ansatzparameter $s_{1\alpha}$ aus dem Vektor $\bar{s}_1$ gerade den Koeffizienten der Normalspannung $S_{11\alpha}$ entsprechen. Die lineare und die

nichtlineare Berechnung führen zu den Koeffizienten

$$\bar{\mathbf{s}}_1^{\text{lin}} = \begin{bmatrix} 10,0000 \\ 1,0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{s}}_1^{\text{nili}} = \begin{bmatrix} 9,9005 \times 10^0 \\ 9,8054 \times 10^{-1} \\ 9,8920 \times 10^{-3} \\ -8,3892 \times 10^{-4} \\ -1,3514 \times 10^{-3} \\ 1,9130 \times 10^{-3} \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

Es ist zu erkennen, dass im linearen Fall die Koeffizienten $\bar{\mathbf{s}}_1^{\text{lin}}$ gerade den analytisch bestimmten Werten in Gleichung (8.18) entsprechen. Bei der nichtlinearen Berechnung ist dies nicht der Fall. Grund hierfür ist, dass die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen physikalisch nicht interpretierbar sind. Für die Umrechnung dieser Spannungswerte in die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen sind die PC-Koeffizienten des Deformationsgradienten erforderlich. Diese lauten:

α	$F_{11\alpha}$	$F_{21\alpha}$	$F_{12\alpha}$	$F_{22\alpha}$
0	$1,0100 \times 10^0$	0	0	$9,9699 \times 10^{-1}$
1	$9,8060 \times 10^{-4}$	0	0	$-2,9806 \times 10^{-4}$
2	$-1,0000 \times 10^{-3}$	0	0	$3,0402 \times 10^{-4}$
3	$-1,2692 \times 10^{-6}$	0	0	$2,1479 \times 10^{-7}$
4	$1,3935 \times 10^{-4}$	0	0	$-4,2641 \times 10^{-5}$
5	$-9,7148 \times 10^{-5}$	0	0	$2,9917 \times 10^{-5}$

(8.23)

Mit der Berechnungsvorschrift gemäß Gleichung (6.155) werden die PC-Koeffizienten der stochastischen 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannung in die X_1 -Richtung

$$P_{11}(\omega) = \sum_{\alpha} P_{11\alpha} \Psi_{\alpha} \quad (8.24)$$

bestimmt. Diese lauten

$$P_{110} = 10, \quad P_{111} = 1 \quad \text{und} \quad P_{11\alpha} = 0, \quad \alpha \in \{2, 3, 4, 5\} \quad (8.25)$$

und entsprechen gerade den Werten in Gleichung (8.18). Alle restlichen Spannungen wie $P_{21}(\omega)$, $P_{12}(\omega)$ und $P_{22}(\omega)$ bzw. die zugehörigen PC-Koeffizienten sind gleich null. Die einzelnen Chaoskoeffizienten aller Spannungsmaße sind in der gesamten Struktur konstant bzw. an jedem Integrationspunkt gleich. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Rückrechnung der Spannungen über das linear elastische Stoffgesetz bei diesem Beispiel zu den gleichen Ergebnissen führt.

8.5.2 Reine Schubbeanspruchung

Die Belastung in Abbildung 8.37 (rechts) verursacht einen konstanten Schubspannungszustand in der Struktur. Wie auch im vorherigen Beispiel erfolgt die

Spannungsrückrechnung über den unabhängigen Spannungsansatz. Eine Rückrechnung der Spannungen über das linear elastische Stoffgesetz führt auch bei diesem Belastungsfall zu den gleichen Ergebnissen. Im Folgenden wird ausschließlich eine geometrisch nichtlineare Berechnung betrachtet. Diese führt auf die PC-Koeffizienten für die 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen:

α	$S_{11\alpha}$	$S_{22\alpha}$	$S_{12\alpha} = S_{21\alpha}$
0	$-1,3281 \times 10^{-1}$	$-1,3281 \times 10^{-1}$	$1,0004 \times 10^1$
1	$-2,6327 \times 10^{-2}$	$-2,6327 \times 10^{-2}$	$1,0011 \times 10^0$
2	$1,3584 \times 10^{-2}$	$1,3584 \times 10^{-2}$	$-7,5661 \times 10^{-4}$
3	$-1,1824 \times 10^{-3}$	$-1,1824 \times 10^{-3}$	$9,5605 \times 10^{-5}$
4	$-1,9083 \times 10^{-3}$	$-1,9083 \times 10^{-3}$	$1,5764 \times 10^{-4}$
5	$2,6983 \times 10^{-3}$	$2,6983 \times 10^{-3}$	$-2,1993 \times 10^{-4}$

(8.26)

Es ist zu erkennen, dass diese Spannungsgrößen nicht den tatsächlichen Spannungszustand in der Struktur wiedergeben, welcher frei von Normalspannungen ist. Für die Umrechnungen der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen in die 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen wird die PC-Entwicklung des Deformationsgradienten benötigt:

α	$F_{11\alpha}$	$F_{21\alpha}$	$F_{12\alpha}$	$F_{22\alpha}$
0	$9,9982 \times 10^{-1}$	$1,3141 \times 10^{-2}$	$1,3141 \times 10^{-2}$	$9,9982 \times 10^{-1}$
1	$-3,6290 \times 10^{-5}$	$1,3156 \times 10^{-3}$	$1,3156 \times 10^{-3}$	$-3,6290 \times 10^{-5}$
2	$3,7770 \times 10^{-5}$	$-1,3425 \times 10^{-3}$	$-1,3425 \times 10^{-3}$	$3,7770 \times 10^{-5}$
3	$-1,6218 \times 10^{-6}$	$1,9051 \times 10^{-7}$	$1,9051 \times 10^{-7}$	$-1,6218 \times 10^{-6}$
4	$-7,9867 \times 10^{-6}$	$1,9018 \times 10^{-4}$	$1,9018 \times 10^{-4}$	$-7,9867 \times 10^{-6}$
5	$7,4223 \times 10^{-6}$	$-1,3468 \times 10^{-4}$	$-1,3468 \times 10^{-4}$	$7,4223 \times 10^{-6}$

(8.27)

Mit der Transformationsbeziehung in Gleichung (6.155) berechnen sich die Koeffizienten der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungen zu

α	$P_{11\alpha}$	$P_{21\alpha}$	$P_{12\alpha}$	$P_{22\alpha}$
0	0	10,0000	10,0000	0
1	0	1,0000	1,0000	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0

(8.28)

Es ist zu erkennen, dass ausschließlich Schubspannungen im System auftreten. Die berechneten Spannungskoeffizienten stimmen mit den zuvor analytisch bestimmten Lösungen überein. Auch für diesen Belastungsfall sind die einzelnen PC-Koeffizienten aller Spannungsmaße in der gesamten Struktur konstant bzw. an jedem Integrationspunkt gleich.

8.6 Bogenträger unter Gleichlast

Die Anwendung der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2 im Rahmen der SSFEM wird zudem anhand eines Bogenträgers unter einer konstanten Gleichlast q_0 veranschaulicht. Für die Material- und Geometrieparameter werden in diesem Beispiel akademische Werte gewählt. Die Struktur mit den zugehörigen Abmessungen sowie die Belastung sind in Abbildung 8.39 dargestellt.

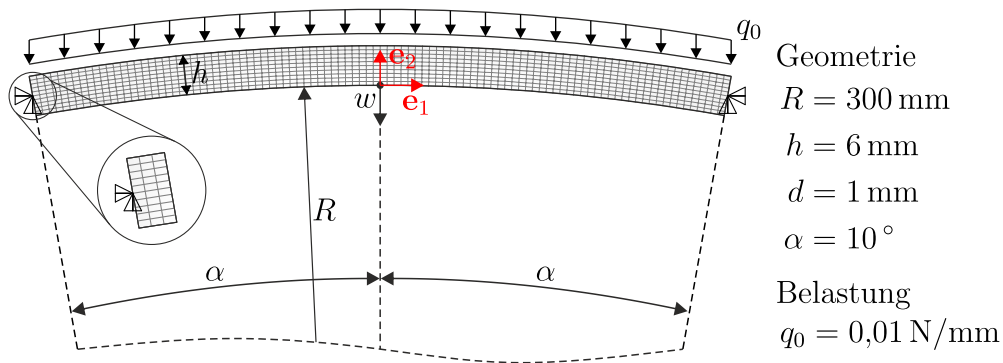


Abbildung 8.39: Bogenträger unter Gleichlast: Abmessungen, Belastung sowie FE-Diskretisierung

Die numerische Berechnung erfolgt mit dem gemischten stochastischen Scheibenelement aus Abschnitt 6.3. Dabei wird die Struktur mit 100 Elementen in Umfangsrichtung und 10 Elementen in radialer Richtung diskretisiert, siehe Abbildung 8.39. Am linken und rechten Rand ist der Bogenträger mittig gelenkig gelagert. Es wird von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen. Das Material ist isotrop und linear elastisch.

Der E-Modul der Struktur wird als räumlich korreliertes GAUSS'sches Zufallsfeld mit den Eigenschaften

$$E(\mathbf{X}, \omega) \sim \mathcal{N}(1000, 100) \text{ N/mm}^2 \quad (8.29)$$

modelliert. Die Querdehnzahl des Materials beträgt $\nu = 0,25$. Für das Zufallsfeld wird die quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion mit einer Korrelationslänge von $\ell_c = 30$ mm verwendet, siehe Gleichung (4.43). Die Diskretisierung des räumlich korrelierten Feldes erfolgt mit der Karhunen-Loève-Entwicklung (KLE), vgl. Abschnitt 4.1.4. Aufgrund der gewählten Korrelationslänge nimmt die Größe der Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, \dots, N$ mit höherer Ordnungszahl stark ab. Um die Anzahl an Termen in der KLE zu reduzieren, wird für das Qualitätsmaß ein Wert von $Q = 0,99$ gewählt. Damit verbleiben lediglich $M = 7$ Terme von insgesamt $N = 1111$. In Abbildung 8.40 sind zwei zufällige Realisierungen des räumlich variierenden E-Moduls dargestellt. Die Approximation des Zufallsfeldes mit der PCE erfolgt gemäß Abschnitt 5.4.2. Im Vektor $\mathbf{X} = [\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_7]^T$ sind alle $M = 7$ Eingangsgrößen zusammengefasst. Dabei entspricht jede Eingangsvariable $\xi_i, i = 1, \dots, 7$ einer Standardnormalverteilung, vgl. Abschnitt 4.1.2. Zur Approximation der stochastischen Dimension werden daher HERMITE-Polynome verwendet.

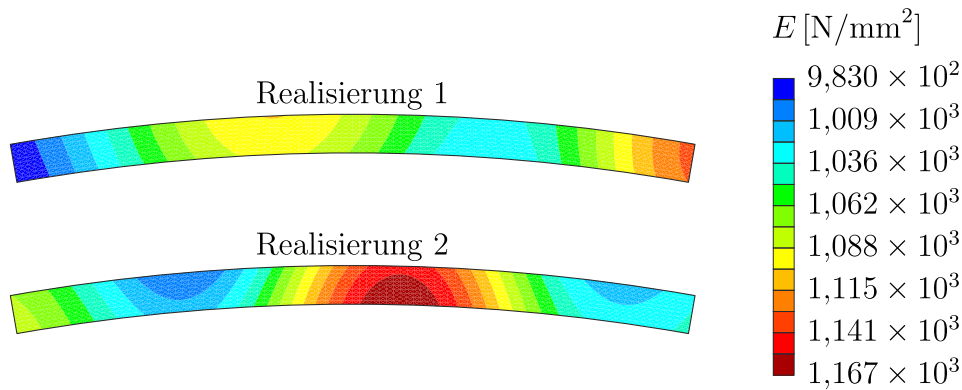


Abbildung 8.40: Zwei zufällige Realisierungen der E-Modul-Verteilung

Für die Berechnung mit der SSFEM werden vier verschiedene Kombinationen des Polynomgrades p und der q-Norm q verwendet. Tabelle 8.20 gibt analog zu den vorherigen Beispielen einen Überblick über die einzelnen Konfigurationen der SSFEM und die entsprechende Anzahl an Freiheitsgraden.

Aus der Last-Verschiebungskurve in Abbildung 8.41 geht hervor, dass die Struktur einen Durchschlagspunkt aufweist. Die vollständige Berechnung des Gleichgewichtspfades erfolgt mit der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2. Hierfür wird die vertikale Verschiebung w , siehe Abbildung 8.39 mit einem Inkrement von $\Delta w = 0,5$ mm von 0 bis 8,5 mm gesteigert. Im Rahmen des Lösungsalgorithmus werden die zur deterministischen Gleichlast q_0 zugehörigen PC-Koeffizienten $\lambda_\alpha, \alpha = 0, \dots, P$ des Lastfaktors rückgerechnet.

Polynomgrad p	q-Norm q	Bezeichnung	$\bar{P}$	$\bar{p}$ [%]	$ndof$
1	1	sfem p1q1	8	6,67	17744
2	1	sfem p2q1	36	30,00	79848
3	1	sfem p3q1	120	100,00	266160
4	0,7	sfem p4q0,7	92	76,67	204056

Tabelle 8.20: Freiheitsgrade $ndof$ in Abhängigkeit vom Polynomgrad p und der q-Norm q sowie die zugehörigen Bezeichnungen der jeweiligen Konfigurationen

8.6.1 Ergebnisse der SSFEM

Zunächst werden die Ergebnisse der SSFEM denen einer Monte-Carlo-Simulation gegenübergestellt. Für eine auskonvergierte Referenzlösung werden $N = 5 \times 10^5$ Stichproben mit dem Latin-Hypercube-Stichprobenverfahren generiert. In den folgenden Abbildungen sind die ersten drei stochastischen Momente des streuenden Lastfaktors λ über der gesteuerten Verschiebung w aufgetragen.

Anhand Abbildung 8.41 wird deutlich, dass der Mittelwert μ_λ des Lastfaktors bereits mit linearen Polynomen nahezu exakt abgebildet wird. Auch für die Standardabweichung in Abbildung 8.42 lässt sich ein ähnliches Approximationsverhalten der SSFEM erkennen. Zudem fällt auf, dass der qualitative Verlauf des Mittelwerts und der Standardabweichung ähnlich sind.

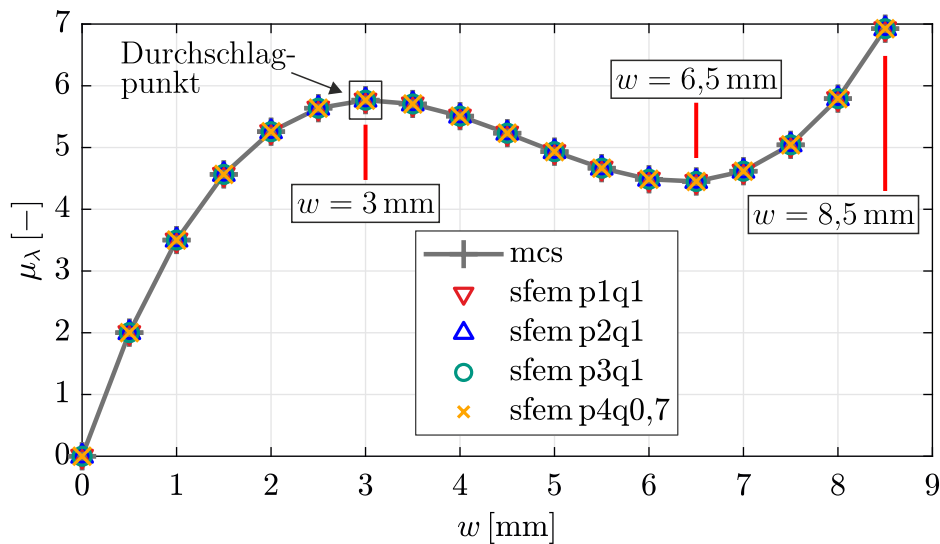


Abbildung 8.41: Mittelwert μ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q-Norm q

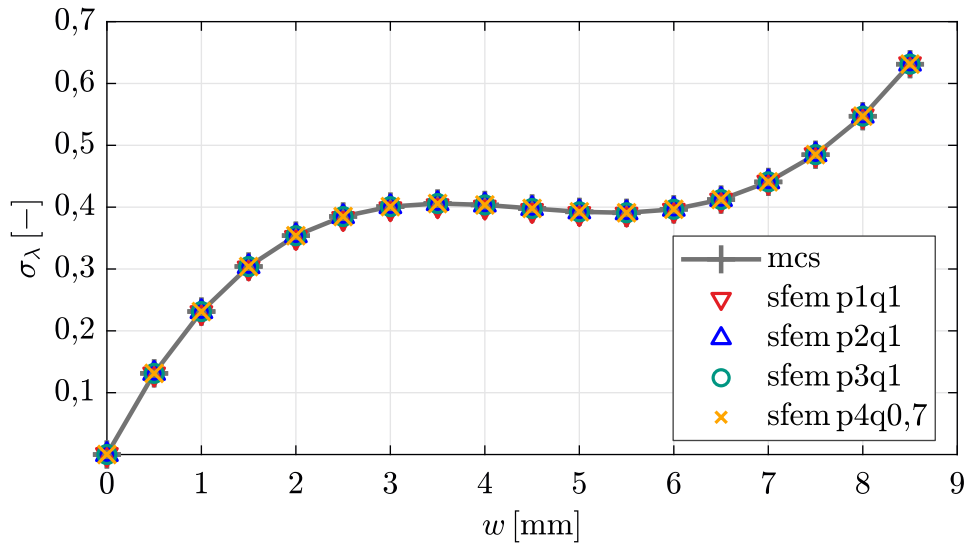


Abbildung 8.42: Standardabweichung σ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

Anhand Abbildung 8.43 wird deutlich, dass mit der SSFEM auch die Schiefe des Lastfaktors λ erfasst werden kann. Wie bereits in Abschnitt 8.2 erwähnt, ist eine lineare Polynombasis mit HERMITE-Polynomen nicht in der Lage, die Schiefe einer von normalverteilten Zufallsvariablen abhängigen Größe abzubilden. Es fällt auf, dass sich die Schiefe der Konfiguration sfem p2q1 mit größer werdender

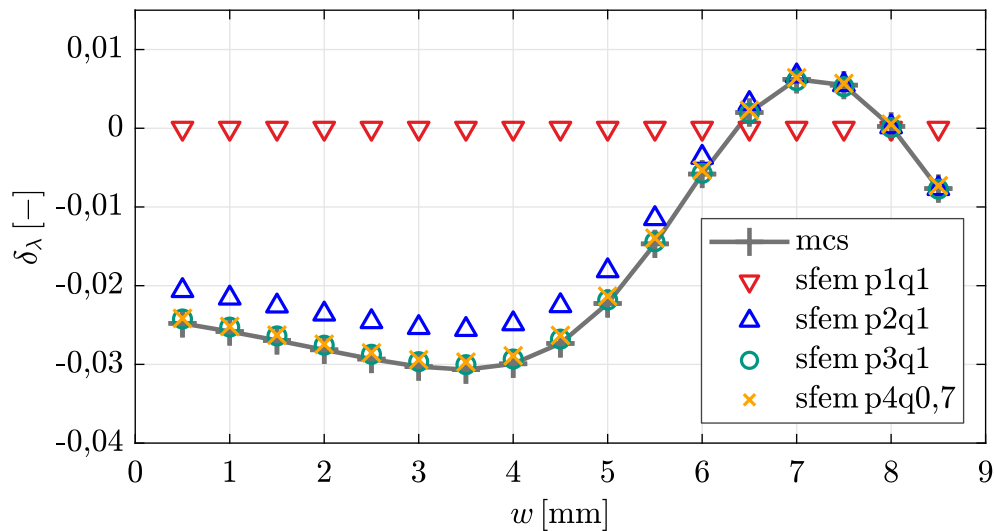


Abbildung 8.43: Schiefe δ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

Verschiebung w zunehmend der Referenzlösung der MCS annähert. Mit der Verwendung einer kubischen bzw. quartischen Polynombasis lässt sich die Schiefe δ_λ des Lastfaktors für die gesamte Berechnung mit hoher Genauigkeit erfassen.

Abbildung 8.44 zeigt den Mittelwert der verformten Struktur für die Verschiebungszustände $w = 3 \text{ mm}$ und $w = 6,5 \text{ mm}$. Anhand dieser Darstellung ist das Durchschlagen des Bogenträgers zu erkennen.

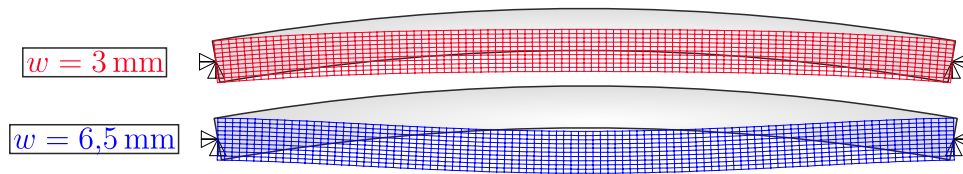


Abbildung 8.44: Mittelwert μ der verformten Struktur für die Zustände $w = 3 \text{ mm}$ (oben) und $w = 6,5 \text{ mm}$ (unten)

Für den Lastschritt $w = 3 \text{ mm} \rightarrow 3,5 \text{ mm}$ wird das Konvergenzverhalten der verschiedenen SSFEM-Konfigurationen untersucht. Die Norm des Residualvektors während der NEWTON-Iteration ist in Tabelle 8.21 dargestellt. Für alle betrachteten Konfigurationen der SSFEM ist ein quadratisches Konvergenzverhalten zu erkennen. Dies ist auf die konsistente Linearisierung des erweiterten Residualvektors in Gleichung (7.28) zurückzuführen, wie in Gleichung (7.38) dargestellt.

Iterationsschritt	sfem p1q1	sfem p2q1	sfem p3q1	sfem p4q0,7
1	1,0655E-01	1,0655E-01	1,0655E-01	1,0655E-01
2	1,3735E+00	1,3736E+00	1,3736E+00	1,3736E+00
3	1,9640E-04	1,9646E-04	1,9646E-04	1,9646E-04
4	6,8691E-11	6,9906E-11	6,9800E-11	6,9644E-11

Tabelle 8.21: Konvergenzverhalten verschiedener SSFEM-Konfigurationen für den Lastschritt $w = 3 \text{ mm} \rightarrow 3,5 \text{ mm}$

8.6.2 Sobol' Indizes

Im Folgenden wird die Sensitivität des Lastfaktors λ bezüglich den $M = 7$ Eingangsvariablen untersucht. Gemäß Gleichung (5.185) werden die totalen PCE-

basierten SOBOL'-Indizes direkt aus der PCE-Entwicklung des Lastfaktors bestimmt. In Tabelle 8.22 sind diese Sensitivitätsmaße für die Eingangsvariablen $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$ und $X_3 = \xi_3$ bei dem Verschiebungszustand $w = 3 \text{ mm}$ dargestellt. Das Konvergenzverhalten aller Indizes mit höher werdendem Polynomgrad der PCE wird deutlich. Für die totalen SOBOL'-Indizes der Variablen $X_i, i \in \{4, 5, 6, 7\}$ ist eine ähnliche Konvergenz zu beobachten. Aufgrund des vernachlässigbaren Einflusses dieser Variablen werden die zugehörigen Sensitivitätsmaße nicht explizit angegeben.

Bezeichnung	$S_1^{T(pc)}$	$S_2^{T(pc)}$	$S_3^{T(pc)}$
sfem p1q1	0,99014	0	0,00269
sfem p2q1	0,98467	0,00478	0,00339
sfem p3q1	0,98458	0,00488	0,00343
sfem p4q0,7	0,98458	0,00487	0,00343

Tabelle 8.22: Totale SOBOL'-Indizes der Eingangsvariablen $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$ und $X_3 = \xi_3$ für den Verschiebungszustand $w = 3 \text{ mm}$

Im Rahmen der folgenden Untersuchung werden die totalen SOBOL'-Indizes an den drei Lastzuständen $w = 3 \text{ mm}$, $w = 6,5 \text{ mm}$ und $w = 8,5 \text{ mm}$ betrachtet. Die einzelnen Verschiebungszustände sind in Abbildung 8.41 gekennzeichnet. Die totalen SOBOL'-Indizes werden auf Basis der Konfiguration sfem p4q0,7 bestimmt und sind in Abbildung 8.45 dargestellt. Es wird deutlich, dass die Streuung des Lastfaktors λ bei $w = 3 \text{ mm}$ maßgeblich von der ersten Eingangsvariablen $X_1 = \xi_1$ und damit vom ersten Eigenvektor φ_1 der KLE bestimmt wird. Bei den Lastschritten $w = 6,5 \text{ mm}$ und $w = 8,5 \text{ mm}$ zeigt sich, dass neben $X_1 = \xi_1$ auch die Variable $X_3 = \xi_3$ bzw. der Eigenvektor φ_3 die Streuung des Lastfaktors beeinflusst. Die Eingangsvariablen $X_i, i \in \{2, 4, 5, 6, 7\}$ zeigen bei den betrachteten Lastschritten kaum einen Einfluss auf die Ergebnisgröße. In Abbildung 8.46 sind die zu den Variablen $X_1 = \xi_1$, $X_2 = \xi_2$ und $X_3 = \xi_3$ zugehörigen Eigenvektoren und Eigenwerte dargestellt.

Eine Erklärung für den abnehmenden Einfluss der Eingangsvariablen sind die stark abfallenden Eigenwerte, siehe Abbildung 8.46. Des Weiteren sind die Eigenvektoren $\varphi_i, \{1, 3, 5, 7\}$ symmetrisch, während die Eigenformen $\varphi_i, \{2, 4, 6\}$ asymmetrisch sind. Bis zum Erreichen des Durchschlagpunktes wird die Streuung des Lastfaktors hauptsächlich von der gemittelten Steifigkeit bzw. vom gemittelten E-Modul beeinflusst. Nach dem Durchschlagen der Struktur bilden sich zunehmend große Zug- und Druckspannungen in Feldmitte. Der zunehmende totale SOBOL'-Index von Variable $X_3 = \xi_3$ ist damit zu begründen, dass der Eigenvektor φ_3 die

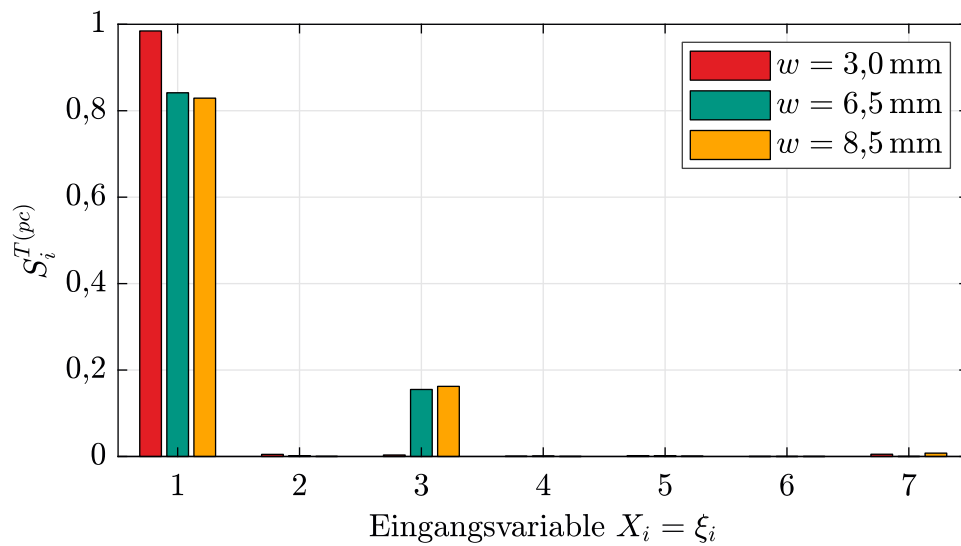


Abbildung 8.45: Totale SOBOL'-Indizes für die Lastzustände $w = 3$ mm, $w = 6,5$ mm und $w = 8,5$ mm

Steifigkeit in der Mitte des Bogenträgers beeinflusst. Im Gegensatz dazu weist die Eigenform φ_2 in Feldmitte einen Nulldurchgang auf und führt damit zu geringen Streuungen des E-Moduls in diesem Bereich.

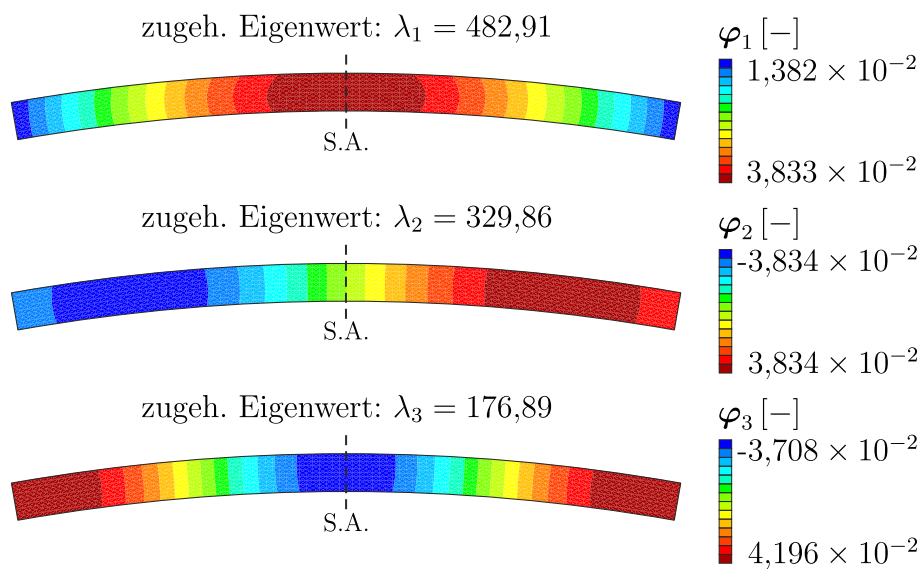


Abbildung 8.46: Eigenwerte $\lambda_i, i \in \{1, 2, 3\}$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\varphi_i, i \in \{1, 2, 3\}$

8.6.3 Abschließende Bemerkungen

- Das Beispiel zeigt die Anwendung der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2. Mit dem Lösungsalgorithmus lassen sich Stabilitätsprobleme unter dem Einfluss räumlich variierender Eingangsgrößen im Rahmen der SSFEM untersuchen.
- Die Korrelationslänge ℓ_c des Zufallsfeldes und das Qualitätsmaß Q beeinflussen maßgeblich die verbleibenden Terme in der KLE und damit auch die Anzahl M der Eingangsvariablen für die Berechnung mit der SSFEM.
- Im Verlauf der Berechnung kann der Einfluss einzelner Eingangsvariablen auf die Streuung einer Zielgröße deutlich variieren. Mit der SSFEM kann dieser Einfluss anhand der totalen SOBO-Indizes ohne weiteren Rechenaufwand quantifiziert werden.

8.7 Aluminiumscheibe mit Loch

Als weiteres numerisches Beispiel für die gemischte stochastische Scheibenformulierung aus Abschnitt 6.3 dient eine quadratische Aluminiumscheibe mit einem Loch. Die Scheibe mit einer Kantenlänge von $L = 100$ mm und einer Dicke von $d = 3$ mm wird durch eine konstante Streckenlast von $q = 50$ N/mm belastet, siehe Abbildung 8.47. Das zentrale Loch in der Scheibe hat einen Radius von $R = 10$ mm. Es wird von einem ebenen Spannungszustand und linear elastischem Materialverhalten ausgegangen.

Der variierende E-Modul wird als räumlich korreliertes GAUSS'sches Zufallsfeld modelliert. Aufgrund dieser streuenden Materialeigenschaft kann keine Symmetrie bei der Berechnung ausgenutzt werden. Für die FE-Diskretisierung der gesamten Struktur werden insgesamt 1152 gemischte Scheibenelemente verwendet, vgl. Abschnitt 6.3. Infolge des zentralen Lochs entsteht in der Umgebung dieser Aussparung eine Spannungsspitze. Dieser Effekt wird unter Berücksichtigung des variierenden E-Moduls im folgenden Abschnitt genauer untersucht. Ausgehend vom unteren Lochrand bis zum äußeren Rand der Scheibe ist ein vertikaler Schnitt gekennzeichnet, siehe Abbildung 8.47. Zusätzlich sind die zwei Knoten A und B farblich markiert.

Die Berechnung ist geometrisch linear. Aus diesem Grund entfällt bei der Spannungsberechnung die Umrechnung zwischen verschiedenen Spannungsmaßen. Die Rückrechnung der Spannungen erfolgt über den unabhängigen Spannungsansatz, vgl. Abschnitt 6.3.

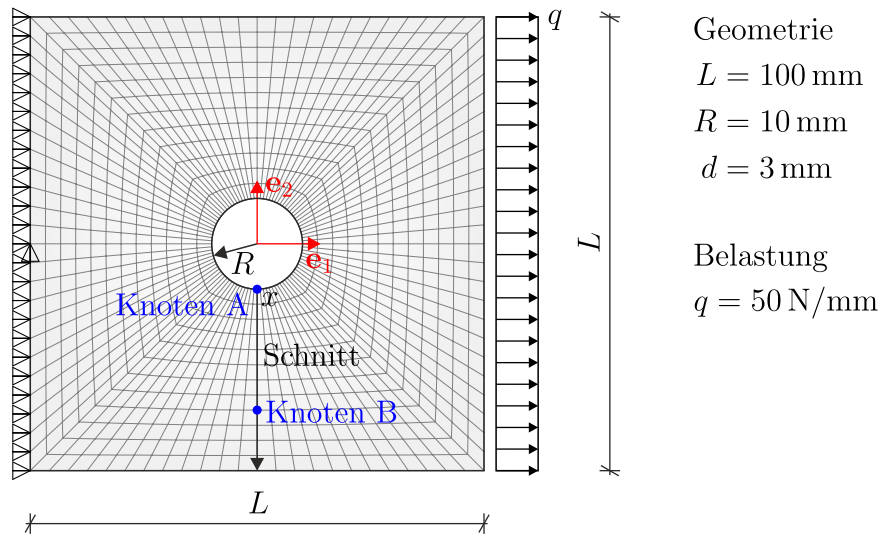


Abbildung 8.47: Aluminiumscheibe mit Loch unter konstanter Zugbelastung: Geometrie, Belastung sowie FE-Diskretisierung

8.7.1 Modellierung räumlicher Variabilität

Der E-Modul des Materials wird, wie bereits erwähnt, als räumlich korreliertes GAUSS'sches Zufallsfeld mit den Eigenschaften

$$E(\mathbf{X}, \omega) \sim \mathcal{N}(70000, 7000) \text{ N/mm}^2 \quad (8.30)$$

modelliert. Die Querkontraktionszahl von Aluminium beträgt $\nu = 0,34$. Für das Zufallsfeld wird die quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion verwendet, siehe Gleichung (4.43). Um den Einfluss der Korrelationslänge auf die stochastischen Eigenschaften der Spannungen untersuchen zu können, werden die zwei Werte

$$\ell_c = 50 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \ell_c = 100 \text{ mm} \quad (8.31)$$

für die charakteristische Länge verwendet. Um die Zahl der Eingangsvariablen zur Beschreibung des Zufallsfeldes zu reduzieren, wird für beide Korrelationslängen ein Qualitätsmaß von $Q = 0,99$ gewählt, vgl. Abschnitt 4.1.4. Für eine Korrelationslänge von $\ell_c = 50 \text{ mm}$ verbleiben damit $M = 12$ von insgesamt $N = 1248$ Reihengliedern der KLE. Bei der charakteristischen Länge von $\ell_c = 100 \text{ mm}$ reduziert sich die Anzahl an Eingangsvariablen auf $M = 5$. In Abbildung 8.48 ist jeweils eine zufällige Realisierung des Zufallsfeldes für die beiden Korrelationslängen mit einem Qualitätsmaß von $Q = 0,99$ dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit größer werdender Korrelationslänge die Glattheit des Zufallsfeldes zunimmt. Der Einfluss von ℓ_c auf die stochastischen Eigenschaften der Spannungen wird im Folgenden untersucht.

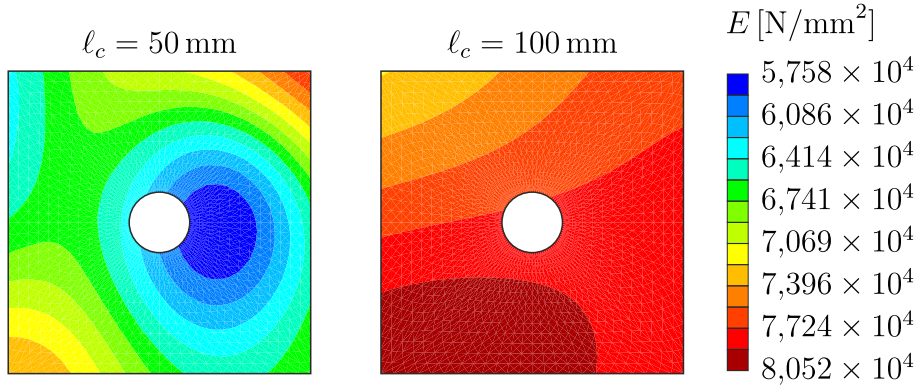


Abbildung 8.48: Zwei zufällige Realisierungen des räumlich korrelierten E-Moduls für zwei verschiedene Korrelationslängen

Die Approximation des Zufallsfeldes mit der PCE erfolgt gemäß Abschnitt 5.4.2. Im Vektor $\mathbf{X} = [\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_M]^T$ werden alle M Eingangsgrößen zusammengefasst. Dabei entspricht jede Eingangsvariable $\xi_i, i = 1, \dots, M$ einer Standardnormalverteilung mit $\mathcal{N}(0, 1)$.

8.7.2 Ergebnisse der SSFEM und Einfluss der Korrelationslänge

Für eine Beurteilung der SSFEM-Ergebnisse wird zunächst eine auskonvergierte Referenzlösung mit der Monte-Carlo-Simulation erzeugt. Die Ergebnisse der MCS basieren auf insgesamt $N = 5 \times 10^5$ Latin-Hypercube-Stichproben. In den folgenden Abbildungen sind die ersten drei stochastischen Momente der Zugspannung σ_{11} in Richtung von $\mathbf{e}_1$ entlang des zuvor definierten Schnittes dargestellt. Die stochastischen Momente sind sowohl für die Korrelationslängen $\ell_c = 50$ mm als auch für $\ell_c = 100$ mm dargestellt.

Anhand Abbildung 8.49 (oben) ist die zunehmende Spannung am Lochrand zu erkennen. Weiterhin wird deutlich, dass die SSFEM bereits mit einer linearen Polynombasis den Mittelwert $\mu_{\sigma_{11}}$ nahezu korrekt abbilden kann. Zudem zeigt der Mittelwert der Zugspannung σ_{11} keine Abhängigkeit von der gewählten Korrelationslänge. Ein ähnliches Approximationsverhalten der SSFEM zeigt sich bei der Standardabweichung der Normalspannung in Abbildung 8.49 (unten). Auffällig ist, dass die Standardabweichung $\sigma_{\sigma_{11}}$ für den größeren Wert von ℓ_c an jedem betrachteten Knoten deutlich abnimmt, siehe Abbildung 8.49 (unten).

Ursache hierfür liegt in den unterschiedlichen Korrelationseigenschaften des Zufallsfeldes. Weist der Lochrand (Knoten A) im Vergleich zum restlichen Querschnitt (Knoten B) einen höheren E-Modul auf, so zieht der Bereich um das Loch aufgrund der unterschiedlichen Steifigkeiten zusätzlich mehr Spannung an. Der

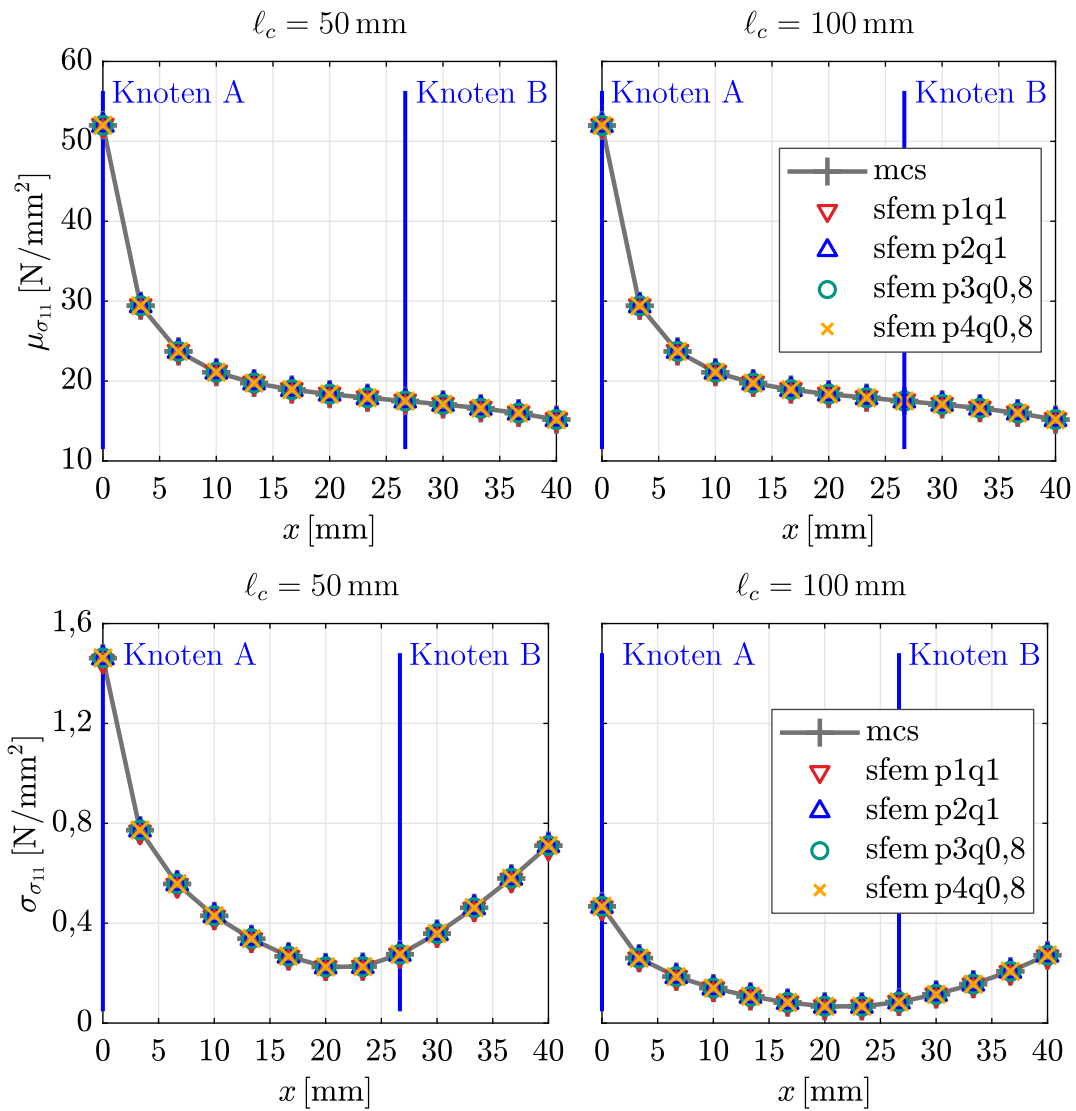


Abbildung 8.49: Mittelwert $\mu_{\sigma_{11}}$ (oben) und Standardabweichung $\sigma_{\sigma_{11}}$ (unten) der Normalspannung σ_{11} entlang des Schnittes für zwei verschiedene Korrelationslängen

halbseitige Restquerschnitt hat eine Länge von $L/2 - R = 40$ mm. Für ein Zufallsfeld mit $\ell_c = 100$ mm sind größere Gradienten im E-Modul über diese Länge eher unwahrscheinlich. Dies erklärt die geringeren Streuungen bei zunehmender Korrelationslänge. Im Gegensatz dazu können bei einer charakteristischen Länge von $\ell_c = 50$ mm ausgeprägtere Schwankungen auftreten. Dies führt wiederum zu erhöhten Streuungen der Spannung σ_{11} . Für $\ell_c \rightarrow \infty$ vereinfacht sich das Zufallsfeld zu einer Zufallsvariablen, sodass der E-Modul über die Struktur konstant ist. In diesem Fall ist die Spannung σ_{11} deterministisch, da sie unabhängig vom streuenden E-Modul ist.

Weiterhin ist zu beobachten, dass die Standardabweichung zum äußeren Rand der Scheibe hin wieder größer wird, obwohl der zugehörige Mittelwert kontinuierlich geringer wird.

Anhand Abbildung 8.50 wird deutlich, dass die Schiefe ebenfalls von der Korrelationslänge abhängig ist. In beiden Fällen ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der SSFEM und der MCS zu erkennen. Für die Korrelationslänge $\ell_c = 100$ mm zeigt die Konfiguration sfem p2q1 geringe Abweichungen in der Approximation der Schiefe. Ein höherer Polynomgrad führt zu einer Verbesserung der SSFEM-Ergebnisse, sodass für sfem p4q0,8 kaum Unterschiede in den Ergebnissen zu erkennen sind, siehe Abbildung 8.50 (rechts).

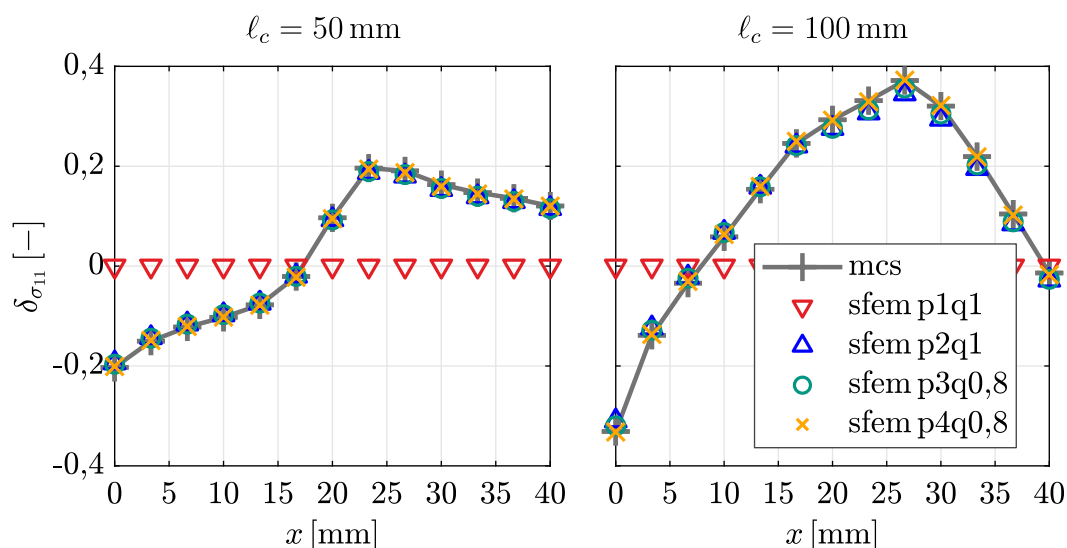


Abbildung 8.50: Schiefe $\delta_{\sigma_{11}}$ der Normalspannung σ_{11} entlang des Schnittes für zwei verschiedene Korrelationslängen

8.7.3 Sobol' Indizes entlang eines Schnittes

Um den Einfluss der einzelnen Eingangsvariablen auf die stochastische Zugspannung beurteilen zu können, werden im Folgenden die totalen PCE-basierten SOBOL'-Indizes entlang des in Abbildung 8.47 definierten Schnittes untersucht. Die Korrelationslänge des Zufallsfeldes beträgt $\ell_c = 100$ mm. Für die Auswertung wird die Konfiguration sfem p4q0,8 herangezogen. An dieser Stelle sei erwähnt, dass bereits ab sfem p2q1 nur noch marginale Unterschiede in den SOBOL'-Indizes zu erkennen sind.

Anhand Abbildung 8.51 wird deutlich, dass die Sensitivitätsmaße eine ausgeprägte räumliche Abhängigkeit aufweisen. Der vernachlässigbare Einfluss von Variable

$X_4 = \xi_4$ lässt sich damit begründen, dass der zugehörige Eigenvektor φ_4 entlang des Schnittes gleich null ist, siehe Abbildung 8.51. Zwischen den SOBOL'-Indizes $S_2^{T(pc)}$ und $S_3^{T(pc)}$ sowie zwischen $S_1^{T(pc)}$ und $S_5^{T(pc)}$ zeigt sich ein qualitativ ähnlicher Verlauf. Diese Ähnlichkeiten lassen sich darauf zurückführen, dass die jeweils zugehörigen Eigenformen vergleichbare Charakteristika aufweisen.

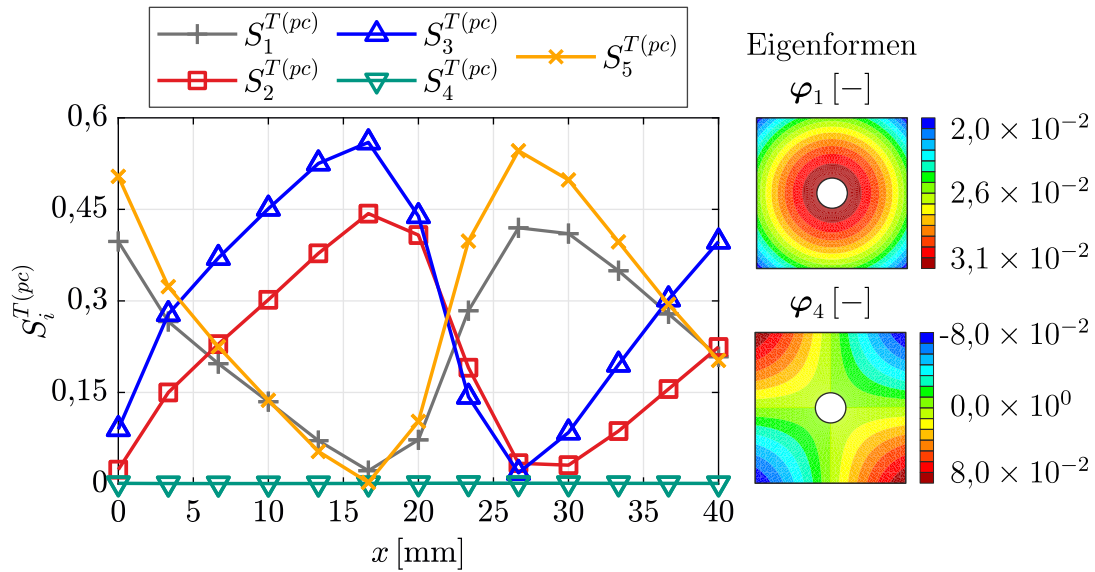


Abbildung 8.51: Totale SOBOL'-Indizes entlang des Schnittes für eine Korrelationslänge von $\ell_c = 100$ mm

8.7.4 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Quantilwerte

Schließlich wird die Dichtefunktion $f_{\sigma_{11}}(\sigma_{11})$ der stochastischen Zugspannungen an den Knoten A und B betrachtet. Für die Referenzlösung mit der MCS werden wie zuvor $N = 5 \times 10^5$ FE-Berechnungen durchgeführt. Mit der gleichen Anzahl an Stichproben wird die PC-Entwicklung der Normalspannung σ_{11} ausgewertet. Die Schätzung der Dichtefunktion erfolgt mit der MATLAB [116] eigenen Funktion *ksdensity*.

In Abbildung 8.52 (links) sind die geschätzten Dichtefunktionen der Normalspannung σ_{11} am Punkt A dargestellt. Hier sind geringe Abweichungen in der Dichtefunktion von *mcs + sfem p1q1* und *mcs + fem* zu erkennen. Bereits die quadratische Polynombasis *sfem p2q1* zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung der MCS. Ein ähnliches Verhalten ist für die Spannung am Knoten B zu beobachten, siehe Abbildung 8.52 (rechts). Für die nicht dargestellten

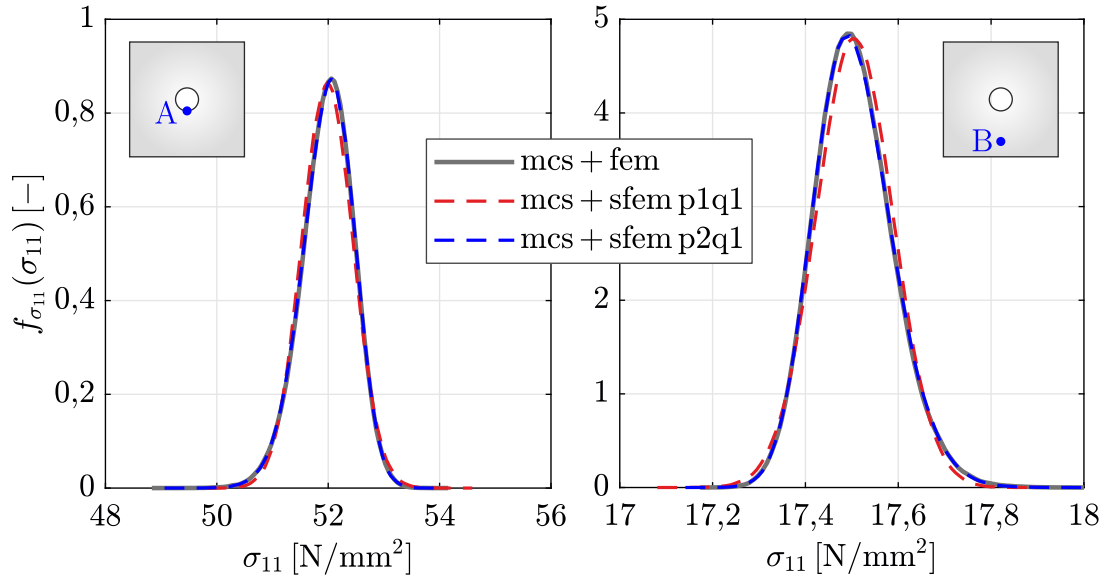


Abbildung 8.52: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\sigma_{11}}(\sigma_{11})$ der Normalspannung σ_{11} an den Knoten A (links) und B (rechts) für eine Korrelationslänge von $\ell_c = 100$ mm

Konfigurationen sfem p3q0,8 und sfem p4q0,8 zeigt sich sowohl für den Knoten A als auch für den Knoten B eine sehr gute Übereinstimmung mit der MCS.

Zudem wird der 99%-Quantilwert der Normalspannung an den beiden Knoten A und B bestimmt. Für die Berechnung werden stets $N = 5 \times 10^5$ Stichproben verwendet. In Tabelle 8.23 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Für alle Konfigurationen der SSFEM lässt sich eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der MCS erkennen. Die prozentuale Abweichung $\varepsilon_{(\bullet)}$ in Tabelle 8.23 wird, wie in Gleichung (8.8) dargestellt, berechnet. Mit steigendem Polynomgrad zeigt sich eine Konvergenz der SSFEM-Ergebnisse gegen die Referenzlösung der MCS.

Bezeichnung	Knoten A		Knoten B	
	$\sigma_{0,99}$ [N/mm²]	$\varepsilon_{\sigma_{0,99}}$ [%]	$\sigma_{0,99}$ [N/mm²]	$\varepsilon_{\sigma_{0,99}}$ [%]
mcs	52,9797	—	17,7258	—
mcs + sfem p1q1	53,0596	0,1509	17,6992	0,1497
mcs + sfem p2q1	52,9718	0,0149	17,7238	0,0113
mcs + sfem p3q0,8	52,9748	0,0092	17,7246	0,0064
mcs + sfem p4q0,8	52,9755	0,0080	17,7266	0,0048

Tabelle 8.23: 99%-Quantilwert der Normalspannung σ_{11} an den Knoten A und B für eine Korrelationslänge von $\ell_c = 100$ mm

8.8 Einhüftiger Rahmen unter Gleichlast

Als numerisches Beispiel für die geometrisch exakte Stabformulierung aus Abschnitt 6.4 dient der einhüftige Rahmen unter einer Gleichlast q_0 , siehe Abbildung 8.53. Die Struktur orientiert sich am sogenannten *Lee's frame*, siehe LEE ET AL. [72]. Dieser Rahmen wird häufig als Testbeispiel für geometrisch exakte Stabformulierungen herangezogen. Die Stütze ist 50 cm hoch und wird in 20 Stabelemente unterteilt. Der Riegel hat eine Länge von 75 cm und wird daher mit 30 Elementen diskretisiert. Dies führt zu insgesamt 50 Elementen und 51 Knoten. Ein Teil des Riegels ist durch eine konstante Gleichlast q_0 beansprucht. Die Belastung ist konservativ und wirkt stets vertikal. Für die Berechnung wird von isotropem, linear elastischem Materialverhalten ausgegangen.

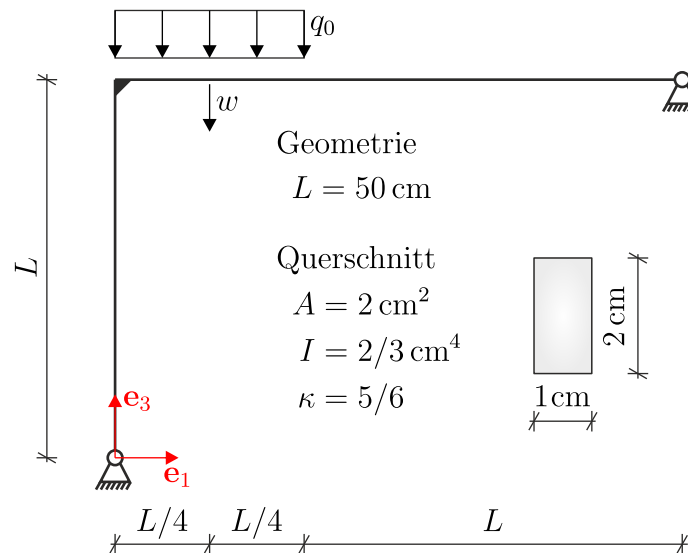


Abbildung 8.53: Einhüftiger Rahmen unter Gleichlast: Geometrie und Belastung

Für die vollständige Berechnung des Gleichgewichtspfades wird die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2 verwendet. Im Rahmen des Lösungsalgorithmus wird die Verschiebung w gesteuert, siehe Abbildung 8.53. Diese Größe wird mit einem Inkrement von $\Delta w = 2$ cm von 0 bis 50 cm gesteigert. Im Rahmen des Lösungsverfahrens werden die PC-Koeffizienten $\lambda_\alpha, \alpha \in \{0, \dots, P\}$ des stochastischen Lastfaktors zurückgerechnet. Zudem sei darauf hingewiesen, dass aufgrund der Streckenlast die Anwendung der Einzelverschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.1.2 nicht möglich ist.

8.8.1 Berücksichtigung unscharfer Materialparameter und Belastung

Der E-Modul der Struktur wird als räumlich korreliertes Zufallsfeld mit den Eigenschaften

$$E(\mathbf{X}, \omega) \sim \mathcal{N}(21000, 2100) \text{ kN/cm}^2 \quad (8.32)$$

modelliert. Die Querdehnnzahl beträgt $\nu = 0,3$. Wie auch in den vorherigen Beispielen wird für das Zufallsfeld die quadratisch exponentielle Korrelationsfunktion verwendet. Die charakteristische Länge beträgt $\ell_c = 30 \text{ cm}$. Mit einem Qualitätsmaß von $Q = 0,99$ verbleiben von den insgesamt $N = 51$ Termen in der Karhunen-Loève-Entwicklung (KLE) lediglich sechs Summanden. Die Erzeugung des Zufallsfeldes erfolgt auf einer geraden Linie der Länge $50 + 75 = 125 \text{ cm}$. Zusätzlich zum streuenden E-Modul wird die Gleichlast q_0 als GAUSS'sche Zufallsvariable mit den Eigenschaften

$$q_0(\omega) \sim \mathcal{N}(0,1, 0,01) \text{ kN/cm} \quad (8.33)$$

berücksichtigt. Somit sind in diesem Beispiel insgesamt $M = 7$ normalverteilte Zufallsvariablen vorhanden. Diese sind im Vektor $\mathbf{X} = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, q_0]^T \in \mathbb{R}^7$ zusammengefasst. Für die Approximation der stochastischen Dimension werden ausschließlich HERMITE-Polynome verwendet.

8.8.2 Ergebnisse der SSFEM

Für die SSFEM werden insgesamt vier verschiedene Konfigurationen untersucht, siehe Tabelle 8.24. Wie in Abschnitt 6.4 beschrieben, wird für die dort vorgestellte, stochastische Stabformulierung eine numerische Integration im stochastischen Raum benötigt. Die Anzahl der Integrationspunkte richtet sich nach dem Polynomgrad p der jeweiligen SSFEM-Konfiguration. Wie in Abschnitt 5.3.1 beschrieben, werden für die numerische Integration $p + 1$ Stützstellen pro Richtung

Polynomgrad p	q-Norm q	Bezeichnung	$\bar{P}$	$ndof$	N_{int}
1	1	sfem p1q1	8	1192	128
2	1	sfem p2q1	36	5364	2187
3	0,8	sfem p3q0,8	43	6407	16384
4	0,8	sfem p4q0,8	127	18923	78125

Tabelle 8.24: Freiheitsgrade $ndof$ in Abhängigkeit vom Polynomgrad p und der q-Norm q , die zugehörigen Bezeichnungen der jeweiligen Konfigurationen sowie die Anzahl N_{int} verwendeter Integrationspunkte

verwendet. Dies führt zu einer Gesamtanzahl von $N_{\text{int}} = (p + 1)^M = (p + 1)^7$ erforderlichen Integrationspunkten, siehe Tabelle 8.24. Es wird deutlich, dass die Anzahl N_{int} mit steigendem Polynomgrad p exponentiell zunimmt.

Analog zu den vorherigen Beispielen werden für die Referenzlösung mit der MCS $N = 5 \times 10^5$ Latin-Hypercube-Stichproben verwendet. In Abbildung 8.54 ist der Mittelwert μ_λ des streuenden Lastfaktors λ über der deterministischen Verschiebung w aufgetragen. Für nahezu alle Konfigurationen der SSFEM aus Tabelle 8.24 lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den MCS-Ergebnissen feststellen. In Abbildung 8.54 ist zusätzlich der Mittelwert der verformten Struktur für die zwei Lastschritte $w = 12 \text{ cm}$ und $w = 50 \text{ cm}$ dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass am Durchschlagpunkt bei $w = 12 \text{ cm}$ bereits große Verformungen und auch große Verdrehungen auftreten. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit einer geometrisch exakten Stabformulierung.

Abbildung 8.55 stellt die Standardabweichung σ_λ des Lastfaktors λ dar. Auch hier ist eine sehr gute Übereinstimmung der SSFEM- und der MCS-Ergebnisse zu beobachten. Lediglich für die Konfiguration sfem p1q1 sind geringe Abweichungen zu erkennen.

Abbildung 8.56 zeigt zusätzlich die Schiefe δ_λ des Lastfaktors λ . Das Approximationsverhalten der SSFEM hinsichtlich der Schiefe ähnelt dem der vorangegangenen, numerischen Beispiele. Die quadratische Polynombasis der Konfiguration sfem p2q1 ist nicht ausreichend, um die Schiefe vollständig zu erfassen.

Um die Streuung des Lastfaktors λ zu visualisieren, ist in Abbildung 8.57 der Mit-

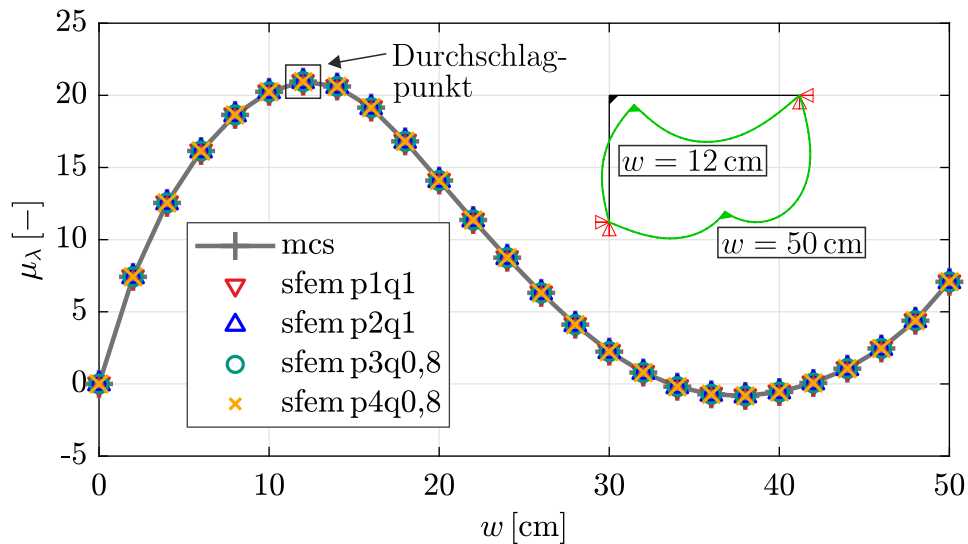


Abbildung 8.54: Mittelwert μ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

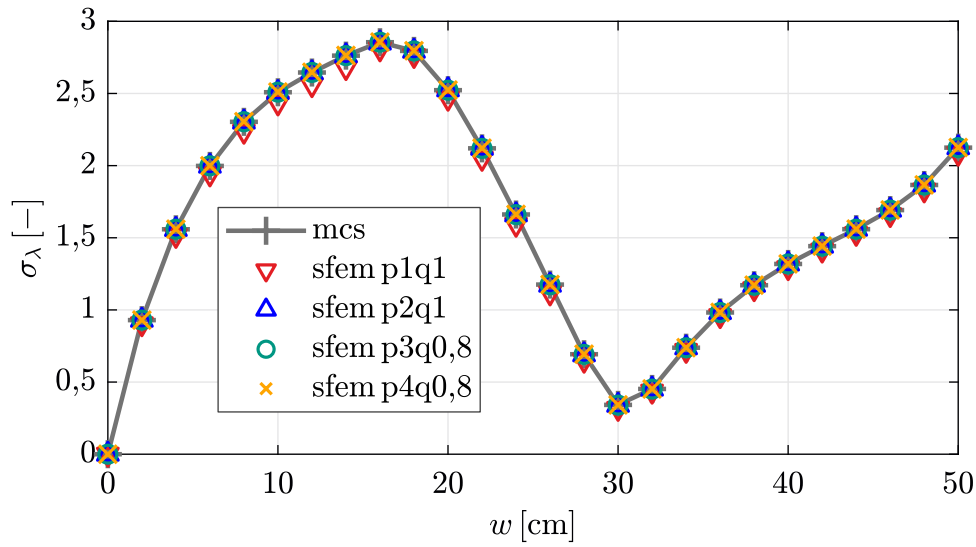


Abbildung 8.55: Standardabweichung σ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

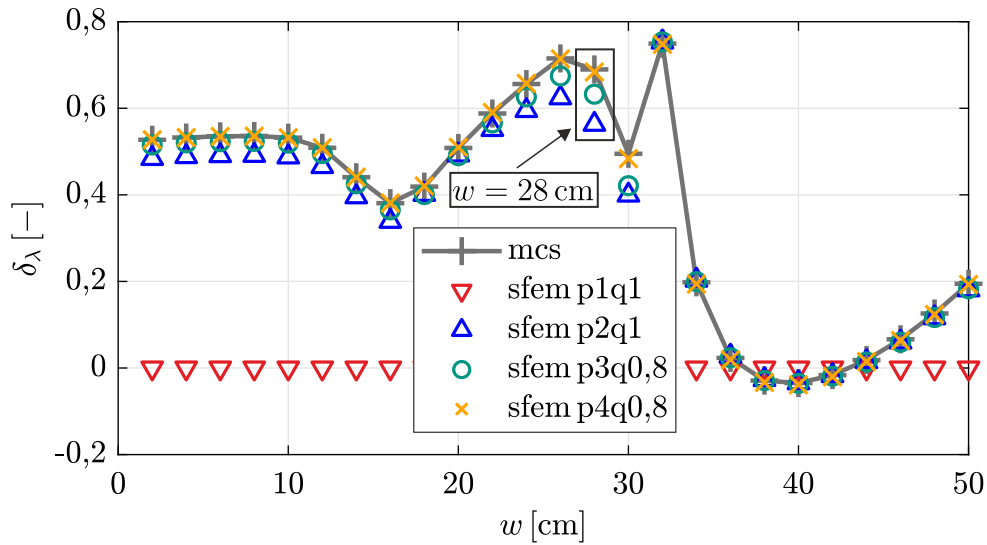


Abbildung 8.56: Schiefe δ_λ des Lastfaktors λ für verschiedene Kombinationen des Polynomgrads p und der q -Norm q

telwert μ_λ plus/minus dreimal die Standardabweichung σ_λ dargestellt. Zusätzlich zeigt diese Abbildung mehrere zufällige Last-Verschiebungskurven. Anhand dieser Darstellung ist zu erkennen, inwiefern die variierende Materialeigenschaft und die stochastische Belastung das Verhalten der Tragstruktur beeinflussen.

In Abbildung 8.58 ist zudem der Mittelwert plus/minus die dreifache Standard-

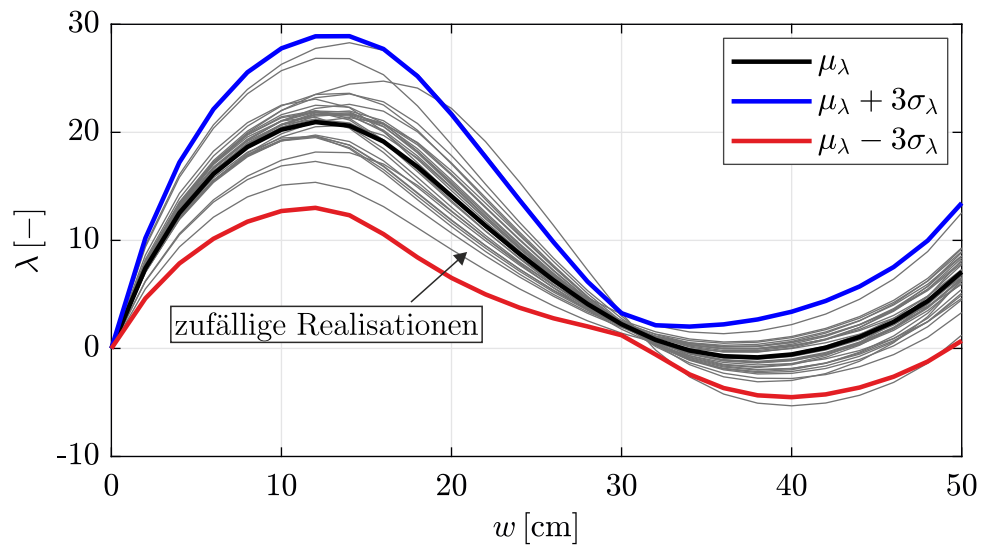


Abbildung 8.57: Mittelwert μ_λ plus/minus die dreifache Standardabweichung σ_λ sowie zufällige Last-Verschiebungskurven

abweichung der verformten Struktur zu drei unterschiedlichen Lastschritten dargestellt. Der markierte Knoten in jeder Verformungsfigur ist jener, an dem die Verschiebung w im Rahmen der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung vorgegeben wird. Da diese Verschiebungsgröße deterministisch ist, liegen die Punkte für einen Lastschritt auf einer horizontalen Linie. Aufgrund der Unschärfen des E-Moduls E und der Belastung q_0 sind die übrigen Knotenverschiebungen stochastische Größen. Die Streuung ist in Abbildung 8.58 zu erkennen.

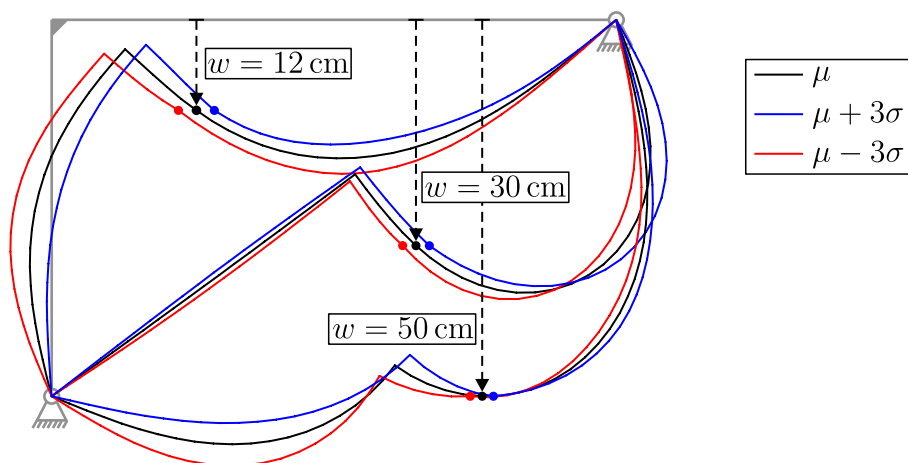


Abbildung 8.58: Mittelwert μ plus/minus die dreifache Standardabweichung σ der verformten Struktur zu drei unterschiedlichen Lastschritten

Wie auch in den vorherigen Beispielen wird hier das Konvergenzverhalten der stochastischen Elementformulierung untersucht. Hierfür wird der Lastschritt $w = 12 \text{ cm} \rightarrow w = 14 \text{ cm}$ betrachtet. In Tabelle 8.25 ist die Norm des globalen Residualvektors $\mathbf{G}$ während der NEWTON-Iteration dargestellt. Für alle Konfigurationen ist in der Nähe des Gleichgewichtspunktes eine quadratische Konvergenz zu beobachten.

Iterationsschritt	sfem p1q1	sfem p2q1	sfem p3q0,8	sfem p4q0,8
1	7,7439E−01	7,7439E−01	7,7439E−01	7,7439E−01
2	3,4474E+02	3,4474E+02	3,4475E+02	3,4473E+02
3	4,6086E+00	4,6748E+00	4,6470E+00	4,6524E+00
4	8,5383E−01	8,3198E−01	8,4026E−01	8,3851E−01
5	3,4582E−02	3,2676E−02	3,2235E−02	3,2770E−02
6	1,7791E−04	1,7320E−04	1,6247E−04	1,8214E−04
7	1,6140E−09	3,8269E−09	2,3964E−09	4,2176E−09

Tabelle 8.25: Konvergenzverhalten verschiedener SSFEM-Konfigurationen für den Lastschritt $w = 12 \text{ cm} \rightarrow w = 14 \text{ cm}$

8.8.3 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Anhand Abbildung 8.56 ist zu erkennen, dass für $w = 28 \text{ cm}$ erkennbare Abweichungen in der Approximation der Schiefe zu beobachten sind. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des Lastfaktors genauer untersucht, siehe Abbildung 8.59. Das Vorgehen für die Konstruktion der Dichtefunktion ist in Abschnitt 8.2 beschrieben. Alle folgenden Auswertungen basieren auf einer Stichprobenanzahl der Größe $N = 5 \times 10^5$.

Wie zu erwarten, kann die Konfiguration sfem p1q1 die Schiefe des streuenden Lastfaktors nicht abbilden, siehe Abbildung 8.59. Mit zunehmendem Polynomgrad der SSFEM lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den SSFEM- und den MCS-Ergebnissen feststellen.

8.8.4 Abschließende Bemerkungen

- Anhand des numerischen Beispiels wird gezeigt, dass mit der verallgemeinerten Verschiebungssteuerung aus Abschnitt 7.2 auch stochastische Belastungen im Rahmen einer Berechnung berücksichtigt werden können. Die

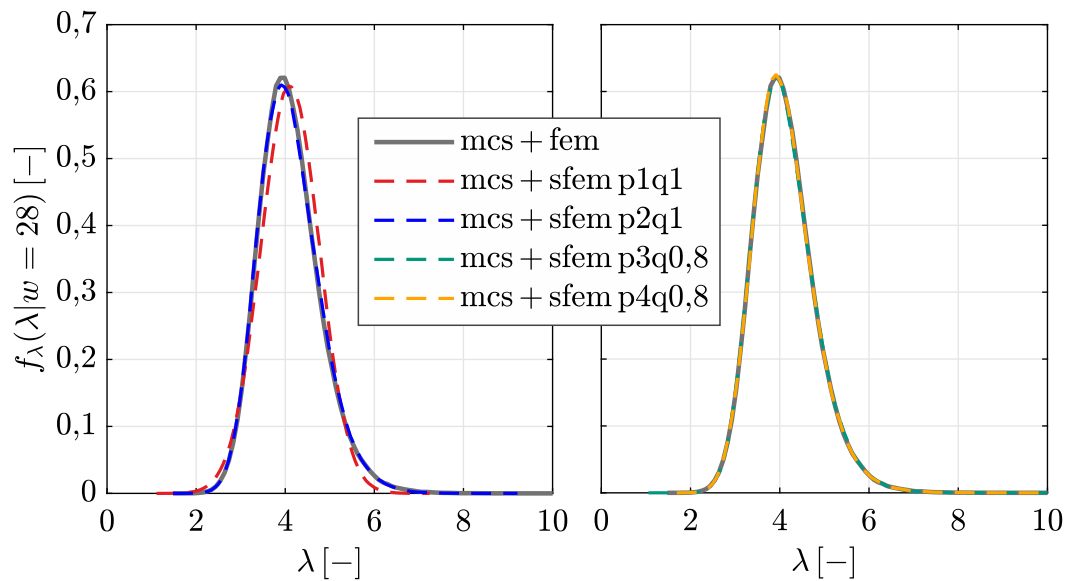


Abbildung 8.59: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_\lambda(\lambda | w = 28)$ des Lastfaktors λ bei einer Verschiebung von $w = 28$ cm

PC-Koeffizienten des globalen Lastvektors werden gemäß der Multiplikation in Gleichung (7.22) bestimmt.

- Tabelle 8.24 verdeutlicht nochmals den exponentiellen Anstieg der erforderlichen Integrationspunkte N_{int} mit steigendem Polynomgrad p . Um diesem Effekt entgegenzuwirken, können die bereits angesprochenen Dünngitter-Verfahren verwendet werden, vgl. Abschnitt 5.3.1.
- Das Approximationsverhalten der stochastischen Stabformulierung ist hinsichtlich der stochastischen Momente wie Mittelwert, Standardabweichung und Schiefe mit dem der Schalen- und Scheibenformulierung vergleichbar.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Theorie und Numerik spektraler stochastischer FE-Formulierungen bei geometrisch nichtlinearem Deformationsverhalten. Den Ausgangspunkt der Elementformulierungen bildet ein stochastisches Variationsprinzip, welches in der stochastischen Dimension mit der polynomiellen Chaosentwicklung (PCE) diskretisiert wird, während für die räumliche Diskretisierung die Finite-Elemente-Methode (FEM) zur Anwendung kommt.

Der neuartige Forschungsbeitrag der Arbeit liegt in der Entwicklung geometrisch nichtlinearer spektraler stochastischer FE-Formulierungen verschiedener Strukturelemente. Hierzu gehören eine Schale mit moderaten Rotationen, eine gemischt-hybride Scheibe sowie ein geometrisch exaktes, zweidimensionales Stabelement. Darüber hinaus werden bestehende Lösungsalgorithmen im Rahmen der SSFEM durch eine in dieser Arbeit weiterentwickelte verallgemeinerte Verschiebungssteuerung ergänzt. Die wesentlichen Punkte der vorliegenden Arbeit lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die stochastische FE-Formulierung der Schale basiert auf einem 4-Knoten-Element mit bilinearen Ansatzfunktionen. Zur Vermeidung des Querschub-Versteifungseffekts wird der Ansatz nach BATHE & DVORKIN [15] konsistent in die stochastische Schalenformulierung integriert. Der nahtlose Übergang zwischen der stochastischen und der deterministischen FE-Formulierung wird anhand ausgewählter Zusammenhänge dargestellt.
- Basierend auf einem HELLINGER-REISSNER-Funktional wird ein stochastisches, gemischt-hybrides Scheibenelement entwickelt. Hierfür wird der Spannungsansatz von PIAN & SUMIHARA [86] im Kontext der SSFEM formuliert. Die zusätzlichen Spannungsfreiheitsgrade werden mittels statischer Kondensation auf Elementebene eliminiert. Anhand der Scheibe wird zusätzlich die Umrechnung verschiedener stochastischer Spannungsmaße dargestellt.
- Die Behandlung finiter Rotationen im Rahmen der SSFEM wird am Beispiel der stochastischen Stabformulierung gezeigt. Für die erforderliche Orthogonalprojektion wird eine numerische Integration im stochastischen Raum verwendet.
- Für alle Strukturelemente erfolgt eine konsistente Linearisierung des zugrundeliegenden Variationsprinzips. Damit wird eine quadratische Konvergenz der stochastischen FE-Formulierungen im Rahmen des NEWTON-Verfahrens erzielt.

- Die Notation der in dieser Arbeit vorgestellten stochastischen Elementformulierungen folgt derjenigen herkömmlicher FE-Formulierungen. Dies ist insbesondere hinsichtlich der Implementierung der entwickelten Elemente von großem Vorteil.
- Klassische Lösungsverfahren, wie die Laststeuerung und die Einzelverschiebungssteuerung, sowie deren Anwendung im Rahmen der SSFEM werden detailliert dargestellt. Die verallgemeinerte Verschiebungssteuerung, siehe WAGNER & WRIGGERS [123] und BATOZ & DHATT [16], wird weiterentwickelt, sodass dieser Algorithmus für Berechnungen mit der SSFEM verwendet werden kann.

Die Anwendungsmöglichkeiten der entwickelten stochastischen FE-Formulierungen und der Lösungsalgorithmen werden anhand verschiedener numerischer Beispiele gezeigt. Für die einzelnen Untersuchungen lässt sich jeweils eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den SSFEM- und den MCS-Ergebnissen erkennen. Die aus den Beispielen gewonnenen wesentlichen Erkenntnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Innerhalb der NEWTON-Iteration wird eine quadratische Konvergenz erreicht, welche auf die konsistente Linearisierung zurückzuführen ist. Die Anzahl an Iterationsschritten ist nahezu unabhängig von der gewählten Polynombasis.
- Die weiterentwickelte verallgemeinerte Verschiebungssteuerung bietet die Möglichkeit, Problemstellungen im Rahmen der SSFEM zu untersuchen, bei denen die Anwendung klassischer Lösungsverfahren nicht möglich ist. Dies sind beispielsweise Durchschlagprobleme unter Belastungen wie Flächen- oder Linienlasten.
- Die FE-Diskretisierung der zugrundeliegenden Struktur sowie die Anzahl der Basispolynome beeinflussen maßgeblich die Größe der Steifigkeitsmatrix auf Systemebene. Dies zeigt sich insbesondere in der benötigten Zeit, die für das Faktorisieren der globalen Steifigkeitsmatrix benötigt wird.
- Um dem exponentiellen Anstieg an Basispolynomen bei vielen Eingangsvariablen entgegenzuwirken, wird das hyperbolische Abbruchkriterium von BLATMAN & SUDRET [22] im Rahmen der SSFEM verwendet. Damit kann die Größe der globalen Steifigkeitsmatrix und somit auch die Rechenzeit reduziert werden.
- Eine effiziente Möglichkeit für die Berücksichtigung polymorph unscharfer Eingangsgrößen bietet die erweiterte PC-Entwicklung, siehe SCHÖBI [94].

Hiermit können unscharfe Ergebnisgrößen, wie stochastische Momente und auch Sobol'-Indizes, im Anschluss an eine Berechnung mit der SSFEM ohne größeren Berechnungsaufwand bestimmt werden.

Generell bietet die SSFEM eine elegante Möglichkeit, Unschärfen im Rahmen einer Strukturanalyse zu berücksichtigen. Ob künftig die MCS oder die SSFEM für eine Problemstellung verwendet wird, hängt von verschiedenen Faktoren ab. Ein entscheidender Aspekt für die Effizienz der SSFEM ist die Zeit, die für das Faktorisieren der globalen Steifigkeitsmatrix benötigt wird. Sowohl die FE-Diskretisierung der zu untersuchenden Struktur als auch die Anzahl der Basispolynome bestimmen die Gesamtzahl der Freiheitsgrade und damit die Größe der Steifigkeitsmatrix. Dies wird besonders bei großen Problemstellungen mit einem hochdimensionalen stochastischen Eingangsraum deutlich. Daher entfaltet die SSFEM ihre Vorteile vor allem bei kleineren Strukturen mit einer moderaten Anzahl stochastischer Eingangsvariablen.

Aufbauend auf der vorliegenden Arbeit könnten weitere Punkte im Zuge zukünftiger Forschungsarbeiten untersucht werden. Diese lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die in Abschnitt 6.2 beschriebene stochastische Schalenformulierung ist auf moderate Rotationen beschränkt. Für die Behandlung finiter Rotationen ist eine numerische Integration erforderlich, wie die Stabformulierung aus Abschnitt 6.4 zeigt. Eine sinnvolle Erweiterung der Schalenformulierung aus Sicht des Autors wäre ein sogenanntes Volumen-Schalenelement, siehe KLINKEL ET AL. [68]. Da solch eine Formulierung ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgrade aufweist, entfällt die numerische Integration für die Orthogonalprojektion im Rahmen der SSFEM.
- Bei den vorgestellten FE-Formulierungen wird stets von einer deterministischen Ausgangskonfiguration ausgegangen. Die wesentlichen Änderungen bei Berücksichtigung einer stochastischen Referenzkonfiguration werden in Abschnitt 6.2.5 andiskutiert. Mit einer geeigneten Erweiterung der SSFEM könnten Strukturen auch unter dem Einfluss geometrischer Imperfektionen untersucht werden.
- Für die Verfolgung allgemeiner nichtlinearer Gleichgewichtspfade sind unter Umständen Pfadverfolgungsalgorithmen bzw. Bogenlängenverfahren erforderlich, siehe WAGNER & WRIGGERS [123]. Entsprechende Erweiterungen der in dieser Arbeit beschriebenen Lösungsalgorithmen können Gegenstand zukünftiger Forschungsaktivitäten sein.

- Für die Diskretisierung der räumlichen Dimension wird die Finite-Elemente-Methode (FEM) verwendet. Grundsätzlich können hierfür beliebige Methoden Anwendung finden, wie beispielsweise die isogeometrische Analyse (IGA), siehe HUGHES ET AL. [61], oder die Scaled-Boundary Finite-Elemente-Methode (SBFEM), siehe KLINKEL & REICHEL [69]. Die Diskretisierung des stochastischen Raums mit der polynomiellen Chaosentwicklung (PCE) wird davon nicht beeinflusst.
- In dieser Arbeit werden Zufallsfelder für die Modellierung räumlich korrelierter Materialeigenschaften verwendet. Eine Möglichkeit, epistemische Unschärfe in einem Zufallsfeld zu berücksichtigen, sind sogenannte Fuzzy-wahrscheinlichkeitsbasierte Zufallsfelder, siehe beispielsweise MÖLLER [81]. Solche polymorph unscharfen Felder können im Rahmen der SSFEM mit dem Konzept der erweiterten PC-Entwicklung berücksichtigt werden. Dies kann im Zuge zukünftiger Forschungsarbeiten untersucht werden.

A Orthogonalprojektion

Die Lösung des kontinuierlichen Minimierungsproblems in Gleichung (5.70) entspricht der Orthogonalprojektion in Gleichung (5.39), wie in SUDRET [109] gezeigt wird. Dieser Zusammenhang wird im Folgenden in Anlehnung an die genannte Literatur dargestellt. Zunächst wird das Minimierungsproblem in Gleichung (5.70) umgeformt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [\varepsilon(\mathbf{X})^2] &= \mathbb{E} \left[\left(Z - \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 + Z^2 - 2 \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) Z \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right)^2 \right] + \mathbb{E} [Z^2] - \mathbb{E} \left[2 \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) Z \right] .
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aufgrund der Orthonormalitätseigenschaft der Polynome vereinfacht sich der erste Summand und es gilt

$$\mathbb{E} [\varepsilon(\mathbf{X})^2] = \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha}^2 + \mathbb{E} [Z^2] - \mathbb{E} \left[2 \sum_{\alpha=0}^P z_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) Z \right] . \tag{A.2}$$

Das Minimum von Gleichung (A.2) wird über die Bedingung

$$\frac{\partial \mathbb{E} [\varepsilon(\mathbf{X})^2]}{\partial z_{\alpha}} = 0 , \quad \alpha = 0, \dots, P \tag{A.3}$$

bestimmt. Die Ableitung von Gleichung (A.2) nach den PC-Koeffizienten z_{α} lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbb{E} [\varepsilon(\mathbf{X})^2]}{\partial z_{\alpha}} &= \sum_{\alpha=0}^P 2z_{\alpha} - \mathbb{E} \left[2 \sum_{\alpha=0}^P Z \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \right] \\
 &= 2 \sum_{\alpha=0}^P (z_{\alpha} - \mathbb{E} [Z \Psi_{\alpha}(\mathbf{X})]) = 0 .
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Schließlich gilt für die Koeffizienten der PC-Entwicklung

$$z_{\alpha} = \mathbb{E} [Z \Psi_{\alpha}(\mathbf{X})] , \quad \alpha = 0, \dots, P , \tag{A.5}$$

wobei dieser Zusammenhang gerade Gleichung (5.39) entspricht.

B Rechenoperationen mit PC-Entwicklungen

Verschiedene arithmetische Operationen mit PC-Entwicklungen sind wesentliche Bestandteile der stochastischen FE-Formulierungen. Der folgende Abschnitt zeigt Algorithmen, die für eine effiziente Implementierung verwendet werden können.

Für die numerische Umsetzung in MATLAB [116] ist es zweckmäßig die Komponenten des Multiplikationstensors $D_{\alpha\beta\gamma}$ als Matrix abzuspeichern. Analog zu Gleichung (5.161) wird die folgende Definition eingeführt:

$$\mathbf{D}_\alpha := \begin{bmatrix} D_{\alpha 00} & \dots & D_{\alpha 0P} \\ \vdots & D_{\alpha\beta\gamma} & \vdots \\ D_{\alpha P0} & \dots & D_{\alpha PP} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}} \quad \text{mit } \alpha \in \{0, \dots, P\}. \quad (\text{B.1})$$

Damit werden alle Einträge des Multiplikationstensors in der Matrix

$$\mathbf{M} := \left[\text{vec}(\mathbf{D}_0), \dots, \underbrace{\text{vec}(\mathbf{D}_\alpha)}_{\mathbf{M}(:, \alpha+1)}, \dots, \text{vec}(\mathbf{D}_P) \right] \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times \bar{P}}. \quad (\text{B.2})$$

angeordnet. Der Ausdruck $\text{vec}(\mathbf{D}_\alpha)$ bezeichnet die Vektorisierung der Matrix $\mathbf{D}_\alpha$, siehe Gleichung (B.1). Dabei wird die Matrix $\mathbf{D}_\alpha$ spaltenweise in einen Vektor umgeformt, welche in der $(\alpha+1)$ -Spalte der Matrix $\mathbf{M}$ angeordnet wird. In Anlehnung an die Notation in MATLAB ist diese mit $\mathbf{M}(:, \alpha+1)$ gekennzeichnet. Da nur eine geringe Anzahl an Elementen von $\mathbf{M}$ ungleich null sind, handelt es sich um eine dünnbesetzte (engl.: *sparse*) Matrix. In MATLAB wird diese im *Compressed Sparse Column*-Format (CSC) abgespeichert.

Im Rahmen der numerischen Umsetzung werden PC-Variablen stets als Zeilenvektor definiert. Die $\bar{P}$ Koeffizienten der bereits bekannten PC-Entwicklungen sind in den beiden Vektoren

$$\mathbf{b} = [b_0, \dots, b_P] \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = [c_0, \dots, c_P] \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}} \quad (\text{B.3})$$

zusammengefasst. Weiterhin beinhaltet

$$\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_P] \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}} \quad (\text{B.4})$$

die unbekannten Koeffizienten.

In Tafel B.1 ist die Multiplikation $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ der beiden PC-Entwicklungen aus Gleichung (B.3) dargestellt. Der Algorithmus für die Division $\mathbf{a} = \mathbf{c}/\mathbf{b}$ ist in Tafel B.2 veranschaulicht. Der Ausdruck $\mathbf{B} = \text{vec}_{\bar{P}, \bar{P}}^{-1}(\bar{\mathbf{b}})$ bezeichnet an dieser Stelle die inverse Operation der Vektorisierung. Dabei wird der Vektor $\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times 1}$ in eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$ transformiert.

Eingang: $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times \bar{P}}$
 Ausgang: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$
funktion PCmulti($\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{M}, \mathbf{a}$)
 $\mathbf{S} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$ ▷ Dyadisches Produkt
 $\mathbf{s} = \text{vec}(\mathbf{S})$, $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times 1}$ ▷ Matrix in Vektor umformen / Vektorisierung
 $\mathbf{a} = \mathbf{s}^T \mathbf{M}$
end

Tafel B.1: Multiplikation $\mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Eingang: $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times \bar{P}}$
 Ausgang: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times \bar{P}}$
funktion PCdivis($\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{M}, \mathbf{a}$)
 $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}^T \mathbf{M}$, $\bar{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times 1}$
 $\mathbf{B} = \text{vec}_{\bar{P}, \bar{P}}^{-1}(\bar{\mathbf{b}})$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{\bar{P} \times \bar{P}}$ ▷ Vektor in Matrix umformen
 $\mathbf{a} = \mathbf{c} \mathbf{B}^{-1}$ ▷ Gleichungssystem lösen
end

Tafel B.2: Division $\mathbf{a} = \mathbf{c}/\mathbf{b}$

Eine weitere wichtige Umformung bei den stochastischen FE-Formulierungen ist die Erweiterung einer Matrix, siehe beispielsweise Gleichung (6.37). Ausgangspunkt ist die PC-Entwicklung einer stochastischen Matrix

$$\mathbf{D}(\omega) = \sum_{\alpha=0}^P \mathbf{D}_\alpha \Psi_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_\alpha \in \mathbb{R}^{\text{nr} \times \text{nc}}, \quad (\text{B.5})$$

wobei nr die Anzahl an Zeilen und nc die Anzahl an Spalten angibt. Die einzelnen Koeffizienten werden in einer erweiterten Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(\text{nr} \cdot \bar{P}) \times (\text{nc} \cdot \bar{P})}$ angeordnet, vgl. Gleichung (6.37). Für die numerische Umsetzung werden die PC-Koeffizienten $\mathbf{D}_\alpha$ in der Matrix

$$\mathbf{d} = \left[\text{vec}(\mathbf{D}_0), \dots, \text{vec}(\mathbf{D}_\alpha), \dots, \text{vec}(\mathbf{D}_P) \right] \in \mathbb{R}^{(\text{nr} \cdot \text{nc}) \times \bar{P}} \quad (\text{B.6})$$

angeordnet. Auf Basis der Matrix $\mathbf{d}$ in Gleichung (B.6) wird die erweiterte Matrix $\mathbf{D}$ bestimmt. Diese Erweiterung ist an mehreren Stelle in den stochastischen FE-Formulierungen erforderlich. Im Wesentlichen sind das

- die Berechnung der erweiterten Materialmatrix $\mathbf{D}$, siehe Gleichung (6.37),
- die Berechnung der B-Matrix $\mathbf{B}_I$, siehe Gleichung (6.61) und

- die Berechnung des Integranden $\mathbf{G}_{IK}$, siehe Gleichung (6.71).

Eine effiziente Möglichkeit diese Erweiterung durchzuführen ist in Tafel B.3 dargestellt.

```

Eingang:  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{(\text{nr} \cdot \text{nc}) \times \bar{P}}$ , nr, nc,  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{\bar{P}^2 \times \bar{P}}$ 
Ausgang:  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{(\text{nr} \cdot \bar{P}) \times (\text{nc} \cdot \bar{P})}$ 
funktion PCexp( $\mathbf{d}$ , nr, nc,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ )
     $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \mathbf{M}^T$  ▷ Matrixmultiplikation mit Multiplikationstensor
     $\mathbf{ir} = [1, \dots, \text{nr}] \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ ,  $\mathbf{ic} = [1, \dots, \text{nc}] \in \mathbb{R}^{\bar{P}}$ 
    for  $j = 1, \dots, \text{nr}$  do
         $\mathbf{ii} = \mathbf{ir} + \text{nr} \cdot (j - 1)$  ▷ Zeiger für Reihen
        for  $k = 1, \dots, \text{nc}$  do
             $\mathbf{kk} = \mathbf{ic} + \text{nc} \cdot (k - 1)$  ▷ Zeiger für Spalten
             $\text{ip} = k + \bar{P} \cdot (i - 1)$  ▷ Linearer Spaltenindex
             $\mathbf{D}(\mathbf{ii}, \mathbf{kk}) = \text{vec}_{\text{nr} \times \text{nc}}^{-1}(\bar{\mathbf{d}}(:, \text{ip}))$  ▷ Einbau der Teilmatrix
        end for
    end for
end

```

Tafel B.3: Erweiterung $\mathbf{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{D}_{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, P\}$

C Anhang zur stochastischen Schalenformulierung

In Abschnitt 6.2 wird die stochastische FE-Formulierung für eine Schale mit moderaten Rotationen vorgestellt. Der folgende Anhang fasst die verbleibenden Variationen und Linearisierungen der Schalenverzerrungen zusammen. Zudem wird die Behandlung coplanarer Knoten im Rahmen der Schalenformulierung diskutiert.

C.1 Variation und Linearisierung der Schalenverzerrungen

Die PC-Koeffizienten der virtuellen Membranverzerrung $\delta\varepsilon_{22}$ lauten

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{22\gamma} &= \frac{\partial\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{1\lambda,2}} \delta u_{1\lambda,2} + \frac{\partial\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{2\lambda,2}} \delta u_{2\lambda,2} + \frac{\partial\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{3\lambda,2}} \delta u_{3\lambda,2} \\ &= D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\gamma\lambda} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,2} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,2} \\ &= D_{\lambda\beta\gamma} [u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,2} + u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,2}] .\end{aligned}\quad (\text{C.1})$$

Für die Koeffizienten der Variation der Schubverzerrung $2\delta\varepsilon_{12}$ gilt

$$\begin{aligned}2\delta\varepsilon_{12\gamma} &= \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{1\lambda,1}} \delta u_{1\lambda,1} + \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{1\lambda,2}} \delta u_{1\lambda,2} + \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{2\lambda,1}} \delta u_{2\lambda,1} + \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{2\lambda,2}} \delta u_{2\lambda,2} \\ &\quad + \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{3\lambda,1}} \delta u_{3\lambda,1} + \frac{2\partial\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{3\lambda,2}} \delta u_{3\lambda,2} \\ &= D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,1} + (\delta_{\gamma\lambda} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,2} \\ &\quad + (\delta_{\gamma\lambda} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,1} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,2} \\ &\quad + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,1} + D_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\alpha\lambda} u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,2} \\ &= D_{\lambda\beta\gamma} [u_{1\beta,2} \delta u_{1\lambda,1} + (\delta_{\beta 0} + u_{1\beta,1}) \delta u_{1\lambda,2} + (\delta_{\beta 0} + u_{2\beta,2}) \delta u_{2\lambda,1} \\ &\quad + u_{2\beta,1} \delta u_{2\lambda,2} + u_{3\beta,2} \delta u_{3\lambda,1} + u_{3\beta,1} \delta u_{3\lambda,2}] .\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

Die PC-Koeffizienten der virtuellen Schalenkrümmungen berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\delta\kappa_{11\gamma} &= \frac{\partial\kappa_{11\gamma}}{\partial\beta_{1\lambda,1}} \delta\beta_{1\lambda,1} \\ &= \delta_{\gamma\lambda} \delta\beta_{1\lambda,1} = D_{\lambda\beta\gamma} \delta_{\beta 0} \delta\beta_{1\lambda,1} ,\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned}\delta\kappa_{22\gamma} &= \frac{\partial\kappa_{22\gamma}}{\partial\beta_{2\lambda,2}} \delta\beta_{2\lambda,2} \\ &= \delta_{\gamma\lambda} \delta\beta_{2\lambda,2} = D_{\lambda\beta\gamma} \delta_{\beta 0} \delta\beta_{2\lambda,2} ,\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
2\delta\kappa_{12\gamma} &= \frac{2\partial\kappa_{12\gamma}}{\partial\beta_{1\lambda,2}}\delta\beta_{1\lambda,2} + \frac{2\partial\kappa_{12\gamma}}{\partial\beta_{2\lambda,1}}\delta\beta_{2\lambda,1} \\
&= \delta_{\gamma\lambda}\delta\beta_{1\lambda,2} + \delta_{\gamma\lambda}\delta\beta_{2\lambda,1} = D_{\lambda\beta\gamma}(\delta_{\beta 0}\delta\beta_{1\lambda,2} + \delta_{\beta 0}\delta\beta_{2\lambda,1}) .
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Für die beiden Schubverzerrungen lauten die Variationen

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{13\gamma} &= \frac{\partial\gamma_{13\gamma}}{\partial\beta_{1\lambda}}\delta\beta_{1\lambda} + \frac{\partial\gamma_{13\gamma}}{\partial u_{3\lambda,1}}\delta u_{3\lambda,1} \\
&= \delta_{\gamma\lambda}\delta\beta_{1\lambda} + \delta_{\gamma\lambda}\delta u_{3\lambda,1} = D_{\lambda\beta\gamma}(\delta_{\beta 0}\delta\beta_{1\lambda} + \delta_{\beta 0}\delta u_{3\lambda,1})
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_{23\gamma} &= \frac{\partial\gamma_{23\gamma}}{\partial\beta_{2\lambda}}\delta\beta_{2\lambda} + \frac{\partial\gamma_{23\gamma}}{\partial u_{3\lambda,2}}\delta u_{3\lambda,2} \\
&= \delta_{\gamma\lambda}\delta\beta_{2\lambda} + \delta_{\gamma\lambda}\delta u_{3\lambda,2} = D_{\lambda\beta\gamma}(\delta_{\beta 0}\delta\beta_{2\lambda} + \delta_{\beta 0}\delta u_{3\lambda,2}) .
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Die Linearisierung der virtuellen Membranverzerrung in Gleichung (C.1) wird wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}
\Delta\delta\varepsilon_{22\gamma} &= \frac{\partial\delta\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{1\mu,2}}\Delta u_{1\mu,2} + \frac{\partial\delta\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{2\mu,2}}\Delta u_{2\mu,2} + \frac{\partial\delta\varepsilon_{22\gamma}}{\partial u_{3\mu,2}}\Delta u_{3\mu,2} \\
&= D_{\lambda\beta\gamma}\delta_{\beta\mu}[\delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2}\Delta u_{3\mu,2}] \\
&= D_{\lambda\mu\gamma}[\delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2}\Delta u_{3\mu,2}] .
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Auf gleiche Weise wird die Linearisierung der virtuellen Schubverzerrung in Gleichung (C.2) berechnet:

$$\begin{aligned}
2\Delta\delta\varepsilon_{12\gamma} &= \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{1\mu,1}}\Delta u_{1\mu,1} + \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{1\mu,2}}\Delta u_{1\mu,2} + \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{2\mu,1}}\Delta u_{2\mu,1} \\
&\quad + \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{2\mu,2}}\Delta u_{2\mu,2} + \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{3\mu,1}}\Delta u_{3\mu,1} + \frac{2\partial\delta\varepsilon_{12\gamma}}{\partial u_{3\mu,2}}\Delta u_{3\mu,2} \\
&= D_{\lambda\beta\gamma}\delta_{\beta\mu}[\delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{1\lambda,1}\Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,1} \\
&\quad + \delta u_{2\lambda,1}\Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2}\Delta u_{3\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1}\Delta u_{3\mu,2}] \\
&= D_{\lambda\mu\gamma}[\delta u_{1\lambda,2}\Delta u_{1\mu,1} + \delta u_{1\lambda,1}\Delta u_{1\mu,2} + \delta u_{2\lambda,2}\Delta u_{2\mu,1} \\
&\quad + \delta u_{2\lambda,1}\Delta u_{2\mu,2} + \delta u_{3\lambda,2}\Delta u_{3\mu,1} + \delta u_{3\lambda,1}\Delta u_{3\mu,2}] .
\end{aligned} \tag{C.9}$$

C.2 Behandlung coplanarer Knoten

Die Schalenformulierung aus Abschnitt 6.2 berücksichtigt im globalen Koordinatensystem neben den drei Verschiebungen auch drei Verdrehungen. Aus diesem Grund ist es erforderlich, Randbedingungen für alle drei Rotationsfreiheitsgrade zu definieren. In Abbildung C.1 sind drei unterschiedliche Anordnungen von zwei Schalenelementen dargestellt. Im Folgenden wird erläutert, inwiefern sich die

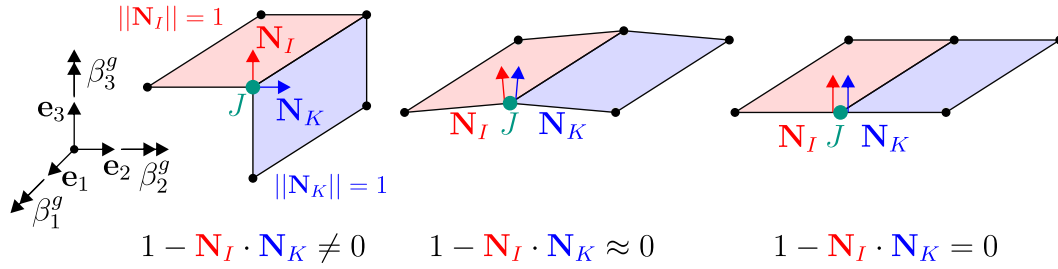


Abbildung C.1: Unterschiedliche Anordnungen zweier Schalelemente

verschiedenen Anordnungen auf die Steifigkeiten der drei Rotationsfreiheitsgrade auswirken.

Hierfür werden die zwei normierten Normalenvektoren $\mathbf{N}_I$ und $\mathbf{N}_K$ aus den Elementen I bzw. K am Knoten J betrachtet. Anhand von Abbildung C.1 (links) wird deutlich, dass bei dieser Anordnung eine Steifigkeit für alle drei Rotationen um die globalen Achsen $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ vorliegt. Es handelt sich bei Knoten J um einen nicht coplanaren Knoten. Bei der Anordnung in Abbildung C.1 (rechts) existiert keine Steifigkeit für die Verdrehung β_3^g um die globale Achse $\mathbf{e}_3$. Bei Knoten J handelt es sich deshalb um einen coplanaren Knoten. Solch eine Anordnung von Schalelementen findet sich beispielsweise bei Plattenstrukturen, siehe Abschnitt 8.2. Für eine sehr flache Schalenanordnung, wie in Abbildung C.1 (mittig) dargestellt, geht die Steifigkeit für die Verdrehung β_3^g gegen Null, was zu numerischen Problemen führen kann. Solch eine flache Schalenstruktur wird beispielsweise in Abschnitt 8.3 untersucht.

In Abbildung C.2 sind die Rotationsfreiheitsgrade der Schalenformulierung für nicht coplanare und coplanare Knoten dargestellt. An dieser Stelle sei erwähnt, dass unabhängig von der Art des Knotens stets drei globale Verschiebungsfrei-

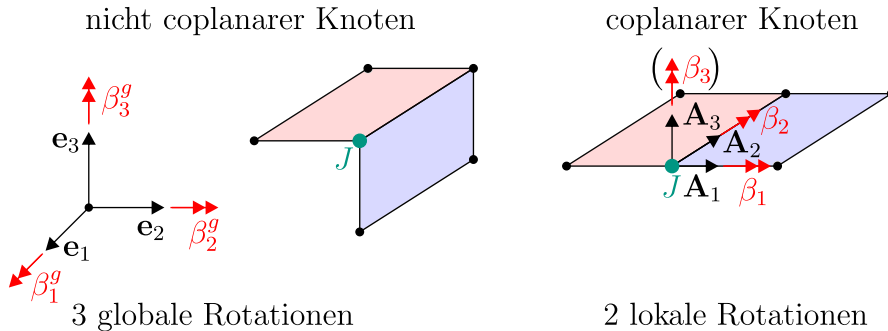


Abbildung C.2: Rotationsfreiheitsgrade an einem nicht coplanaren Knoten (links) und an einem coplanaren Knoten (rechts)

heitsgrade verwendet werden. Anhand von Abbildung C.2 wird deutlich, dass für nicht coplanare Knoten keine Modifikationen in der Schalenformulierung erforderlich sind. Für coplanare Knoten werden anstatt der drei globalen Verdrehungen nur zwei lokale Rotationen berücksichtigt. Die Unterscheidung zwischen coplanaren und nicht coplanaren Knoten erfolgt anhand der Bedingung

$$\varepsilon_{IK}^J = 1 - \mathbf{N}_I \cdot \mathbf{N}_K \begin{cases} > \varepsilon, & \text{Knoten J ist nicht coplanar} \\ \leq \varepsilon, & \text{Knoten J ist coplanar} \end{cases} . \quad (\text{C.10})$$

Dabei ist ε eine vom Anwender vorgegebene Toleranz, beispielsweise 10^{-3} , deren Absolutwert in Abhängigkeit von Strukturgröße und Netzdichte festzulegen ist.

Im Falle eines coplanaren Knotens wird die Transformationsmatrix in Gleichung (6.48) modifiziert. Die angepasste Matrix lautet

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \quad (\text{C.11})$$

Diese Anpassung führt dazu, dass die lokale Verdrehung β_3 um die Achse $\mathbf{A}_3$ in Abbildung C.2 vollständig von allen übrigen Freiheitsgraden entkoppelt ist. Die Bestimmungsgleichung für den Freiheitsgrad φ_3 lautet somit

$$K_{\varphi_3\varphi_3} \varphi_3 = 0 , \quad (\text{C.12})$$

wobei $K_{\varphi_3\varphi_3}$ die zugehörige Steifigkeit bezeichnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird für $K_{\varphi_3\varphi_3}$ ein Wert vom Anwender vorgegeben, beispielsweise $K_{\varphi_3\varphi_3} = 1000$. Alternativ könnten diese Freiheitsgrade auch gelagert werden.

D Anhang zur stochastischen Stabformulierung

In Abschnitt 6.4 wurde die stochastische FE-Formulierung eines geometrisch exakten Stabelements vorgestellt. Der folgende Anhang fasst die Variationen verschiedener Variablen und die zugehörigen Linearisierungen dieser Größen zusammen.

Die Variation des Tangentenvektors in Gleichung (6.169) führt auf die folgenden PC-Koeffizienten:

$$\delta \mathbf{x}'_\alpha = \begin{bmatrix} \langle \delta u'_\lambda \Psi_\lambda, \Psi_\alpha \rangle \\ \langle \delta w'_\lambda \Psi_\lambda, \Psi_\alpha \rangle \end{bmatrix}, \quad \delta \mathbf{d}'_\alpha = \begin{bmatrix} \langle (-\sin \beta \beta' \delta \beta_\lambda + \cos \beta \delta \beta'_\lambda) \Psi_\lambda, \Psi_\alpha \rangle \\ \langle (-\cos \beta \beta' \delta \beta_\lambda - \sin \beta \delta \beta'_\lambda) \Psi_\lambda, \Psi_\alpha \rangle \end{bmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Wird Gleichung (6.172) in Abhängigkeit der Verschiebungsgrößen angegeben, so folgt:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\langle (1 + u') \delta u'_\lambda + w' \delta w'_\lambda, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle}{\langle (\cos \beta \beta' \delta u'_\lambda - \sin \beta \beta' \delta w'_\lambda + (1 + u')(-\sin \beta \beta' \delta \beta_\lambda + \cos \beta \delta \beta'_\lambda)) + w'(-\cos \beta \beta' \delta \beta_\lambda - \sin \beta \delta \beta'_\lambda), \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle} \\ \frac{\langle \sin \beta \delta u'_\lambda + \cos \beta \delta w'_\lambda + (1 + u') \cos \beta \delta \beta_\lambda - w' \sin \beta \delta \beta_\lambda, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle}{\langle \sin \beta \delta u'_\lambda + \cos \beta \delta w'_\lambda + (1 + u') \cos \beta \delta \beta_\lambda - w' \sin \beta \delta \beta_\lambda, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Für die Linearisierung der virtuellen Verzerrungen werden die folgenden Größen benötigt:

$$\Delta \delta \mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (\text{D.3})$$

$$\Delta \delta \mathbf{d}'_\alpha = \begin{bmatrix} \langle \Psi_\lambda (-\delta \beta_\lambda \cos \beta \beta' \Delta \beta_\mu - \delta \beta'_\lambda \sin \beta \Delta \beta_\mu - \delta \beta_\lambda \sin \beta \Delta \beta'_\mu) \Psi_\mu, \Psi_\alpha \rangle \\ \langle \Psi_\lambda (\delta \beta_\lambda \sin \beta \beta' \Delta \beta_\mu - \delta \beta'_\lambda \cos \beta \Delta \beta_\mu - \delta \beta_\lambda \cos \beta \Delta \beta'_\mu) \Psi_\mu, \Psi_\alpha \rangle \end{bmatrix}.$$

Die PC-Koeffizienten der linearisierten virtuellen Stabverzerrungen in Gleichung (6.176) können ebenfalls in Abhängigkeit der Verschiebungsgrößen geschrieben werden:

$$\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{\langle \delta u'_\lambda \Delta u'_\mu + \delta w'_\lambda \Delta w'_\mu, \Psi_\mu \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle}{\langle \delta u'_\lambda (-\sin \beta \beta' \Delta \beta_\mu + \cos \beta \Delta \beta'_\mu) + \delta w'_\lambda (-\cos \beta \beta' \Delta \beta_\mu - \sin \beta \Delta \beta'_\mu) + (-\sin \beta \beta' \delta \beta_\lambda + \cos \beta \delta \beta'_\lambda) \Delta u'_\mu + (-\cos \beta \beta' \delta \beta_\lambda - \sin \beta \delta \beta'_\lambda) \Delta w'_\mu + (1 + u')(-\delta \beta_\lambda \cos \beta \beta' \Delta \beta_\mu - \delta \beta'_\lambda \sin \beta \Delta \beta_\mu - \delta \beta_\lambda \sin \beta \Delta \beta'_\mu) + w'(\delta \beta_\lambda \sin \beta \beta' \Delta \beta_\mu - \delta \beta'_\lambda \cos \beta \Delta \beta_\mu - \delta \beta_\lambda \cos \beta \Delta \beta'_\mu), \Psi_\mu \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle} \\ \frac{\langle \delta u'_\lambda (\cos \beta \Delta \beta_\mu) + \delta w'_\lambda (-\sin \beta \Delta \beta_\mu) + (\cos \beta \delta \beta_\lambda) \Delta u'_\mu + (-\sin \beta \delta \beta_\lambda) \Delta w'_\mu + (1 + u')(-\delta \beta_\lambda \sin \beta \Delta \beta_\mu) + w'(-\delta \beta_\lambda \cos \beta \Delta \beta_\mu), \Psi_\mu \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle}{\langle \delta u'_\lambda (\cos \beta \Delta \beta_\mu) + \delta w'_\lambda (-\sin \beta \Delta \beta_\mu) + (\cos \beta \delta \beta_\lambda) \Delta u'_\mu + (-\sin \beta \delta \beta_\lambda) \Delta w'_\mu + (1 + u')(-\delta \beta_\lambda \sin \beta \Delta \beta_\mu) + w'(-\delta \beta_\lambda \cos \beta \Delta \beta_\mu), \Psi_\mu \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Die für die Approximation der virtuellen bzw. linearisierten Verzerrungen benötigte B-Matrix lautet

$$\mathbf{B}_{I\gamma\lambda} = \begin{bmatrix} \langle (1+u')N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & \langle w'N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & 0 \\ \langle \cos \beta \beta' N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & \langle -\sin \beta \beta' N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & \langle ((1+u') \cos \beta - w' \sin \beta) N'_I \\ & & -((1+u') \sin \beta \beta' + w' \cos \beta \beta') N_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \\ \langle \sin \beta N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & \langle \cos \beta N'_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle & \langle ((1+u') \cos \beta - w' \sin \beta) N_I, \Psi_\lambda \Psi_\gamma \rangle \end{bmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Für den geometrischen Anteil der Elementsteifigkeitsmatrix kann der Integrand wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{G}_{IK\lambda\mu} = \begin{bmatrix} \langle (N'_I N'_K) N, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle & 0 & \begin{aligned} & \langle (N'_I \cos \beta N_K) Q \\ & - (N'_I \sin \beta \beta' N_K) M \\ & + (N'_I \cos \beta N'_K) M, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \end{aligned} \\ 0 & \langle (N'_I N'_K) N, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle & \begin{aligned} & \langle - (N_I \sin \beta N'_K) Q \\ & - (N'_I \cos \beta \beta' N_K) M \\ & - (N'_I \sin \beta N'_K) M, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \end{aligned} \\ \begin{aligned} & \langle (N'_K \cos \beta N_I) Q \\ & - (N'_K \sin \beta \beta' N_I) M \\ & + (N'_K \cos \beta N'_I) M, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \end{aligned} & \begin{aligned} & \langle - (N_K \sin \beta N'_I) Q \\ & - (N'_K \cos \beta \beta' N_I) M \\ & - (N'_K \sin \beta N'_I) M, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \end{aligned} & \begin{aligned} & \langle - (N_I ((1+u') \sin \beta + w' \cos \beta) N_K) Q \\ & - (N_I ((1+u') \cos \beta \beta' - w' \sin \beta \beta') N_K) M \\ & - (N'_I ((1+u') \sin \beta + w' \cos \beta) N_K) M \\ & - (N_I ((1+u') \sin \beta + w' \cos \beta) N'_K) M, \Psi_\lambda \Psi_\mu \rangle \end{aligned} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

Literatur

- [1] ABRAHAM, S. / RAISEE, M. / GHORBANIASL, G. / CONTINO, F. / LACOR, C.: *A robust and efficient stepwise regression method for building sparse polynomial chaos expansions*. Journal of Computational Physics 332 (2017), S. 461–474.
- [2] ACHARJEE, S. / ZABARAS, N.: *Uncertainty propagation in finite deformations - A spectral stochastic Lagrangian approach*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195(19–22) (2006), S. 2289–2312.
- [3] ADAMS, J.C.: *On the expression of the product of any two legendre's coefficients by means of a series of legendre's coefficients*. Proceedings of the Royal Society of London 27(185–189) (1878), S. 63–71.
- [4] ALEXANDERIAN, A.: *A brief note on the Karhunen-Loève expansion*. 2015.
- [5] ALHAIDARI, A.D.: *Exact and simple formulas for the linearization coefficients of products of orthogonal polynomials and physical application*. Journal of Computational and Applied Mathematics 436 (2024), S. 115368.
- [6] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik - Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. Springer Vieweg Berlin / Heidelberg, 2018.
- [7] AMMOUCHE, Y. / JÉRUSALEM, A.: *A modular nonlinear stochastic finite element formulation for uncertainty estimation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 396 (2022), S. 115044.
- [8] AMMOUCHE, Y. / JÉRUSALEM, A.: *The a posteriori finite element method (AP-FEM), a framework for efficient parametric study and Bayesian inferences*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 412 (2023), S. 115996.
- [9] ANDERS, M. / HORI, M.: *Stochastic finite element method for elasto-plastic body*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 46(11) (1999), S. 1897–1916.
- [10] ANDERS, M. / HORI, M.: *Three-dimensional stochastic finite element method for elasto-plastic bodies*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 51(4) (2001), S. 449–478.
- [11] ARNST, M. / GHANEM, R.: *A variational-inequality approach to stochastic boundary value problems with inequality constraints and its application to contact and elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 89(13) (2011), S. 1665–1690.
- [12] ARREGUI-MENA, J.D. / MARGETTS, L. / MUMMERY, P.M.: *Practical Application of the Stochastic Finite Element Method*. Archives of Computational Methods in Engineering 23 (2014), S. 171–190.

- [13] ASKEY, R. / WILSON, J.: *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. Memoirs of the American Mathematical Society 54(319) (1985).
- [14] BATHE, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Pearson, 1995.
- [15] BATHE, K.-J. / DVORKIN, E.N.: *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 21(2) (1985), S. 367–383.
- [16] BATOZ, J.-L. / DHATT, G.: *Incremental displacement algorithms for nonlinear problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 14(8) (1979), S. 1262–1267.
- [17] BERVEILLER, M. / SUDRET, B. / LEMAIRE, M.: *Comparison of methods for computing the response coefficients in stochastic finite element analysis*. 2004.
- [18] BERVEILLER, M. / SUDRET, B. / LEMAIRE, M.: *Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression*. European Journal of Computational Mechanics 15(1–3) (2006), S. 81–92.
- [19] BLATMAN, G.: *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 2009.
- [20] BLATMAN, G. / SUDRET, B.: *Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach*. Comptes Rendus Mécanique 336(6) (2008), S. 518–523.
- [21] BLATMAN, G. / SUDRET, B.: *An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics 25(2) (2010), S. 183–197.
- [22] BLATMAN, G. / SUDRET, B.: *Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression*. Journal of Computational Physics 230(6) (2011), S. 2345–2367.
- [23] BOTHE, H.-H.: *Fuzzy Logic: Einführung in die Theorie und Anwendung*. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [24] CHOI, S.-K. / GRANDHI, R.V. / CANFIELD, R.A.: *Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior*. Computers & Structures 82(13–14) (2004), S. 1113–1121.
- [25] CONRAD, P.R. / MARZOUK, Y.M.: *Adaptive Smolyak Pseudospectral Approximations*. SIAM Journal on Scientific Computing 35(6) (2013), S. A2643–A2670.
- [26] CONSTANTINE, P.G. / ELDRED, M.S. / PHIPPS, E.T.: *Sparse pseudospectral approximation method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 229–232 (2012), S. 1–12.

-
- [27] DEBUSSCHERE, B.J. / NAJM, H.N. / PÉBAY, P.P. / KNIO, O.M. / GHANEM, R.G. / LE MAÎTRE, O.P.: *Numerical Challenges in the Use of Polynomial Chaos Representations for Stochastic Processes*. SIAM Journal on Scientific Computing 26(2) (2004), S. 698–719.
 - [28] DEUFLHARD, P. / HOHMANN, A.: *Numerische Mathematik 1: Eine algorithmisch orientierte Einführung*. De Gruyter, 2018.
 - [29] DEVROYE, L.: *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer New York, 1986.
 - [30] DUBOIS, D. / PRADE, H.: *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Springer New York, 2000.
 - [31] DVORKIN, E.N. / BATHE, K.-J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*. Engineering Computations 1(1) (1984), S. 77–88.
 - [32] EFRON, B. / HASTIE, T. / JOHNSTONE, I. / TIBSHIRANI, R.: *Least angle regression*. The Annals of Statistics 32(2) (2004).
 - [33] ERNST, O.G. / MUGLER, A. / STARKLOFF, H.-J. / ULLMANN, E.: *On the convergence of generalized polynomial chaos expansions*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis 46(2) (2011), S. 317–339.
 - [34] FAHRMEIR, L. / HEUMANN, C. / KÜNSTLER, R. / PIGEOT, I. / TUTZ, G.: *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg, 2023.
 - [35] FIELD, R.V. / GRIGORIU, M.: *Convergence properties of polynomial chaos approximations for L_2 random variables*. 2007.
 - [36] FINK, S.: *Simulation of elastic-plastic material behaviour with uncertain material parameters: a spectral stochastic finite element method approach*. Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2015.
 - [37] GAUTSCHI, W.: *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Oxford University Press, 2004.
 - [38] GEISLER, H. / ERDOGAN, C. / NAGEL, J. / JUNKER, P.: *A new paradigm for the efficient inclusion of stochasticity in engineering simulations: Time-separated stochastic mechanics*. Computational Mechanics 75(1) (2025), S. 211–235.
 - [39] GERSTNER, T. / GRIEBEL, M.: *Numerical integration using sparse grids*. Numerical Algorithms 18(3–4) (1998), S. 209–232.
 - [40] GHANEM, R. G. / SPANOS, P.D.: *Spectral Stochastic Finite-Element Formulation for Reliability Analysis*. Journal of Engineering Mechanics 117(10) (1991), S. 2351–2372.

-
- [41] GHANEM, R.G.: *Probabilistic characterization of transport in heterogeneous media*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 158(3–4) (1998), S. 199–220.
 - [42] GHANEM, R.G.: *Higher-Order Sensitivity of Heat Conduction Problems to Random Data Using the Spectral Stochastic Finite Element Method*. Journal of Heat Transfer 121(2) (1999), S. 290–299.
 - [43] GHANEM, R.G. / GHOSH, D.: *Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 72(4) (2007), S. 486–504.
 - [44] GHANEM, R.G. / SPANOS, P.D.: *Polynomial Chaos in Stochastic Finite Elements*. Journal of Applied Mechanics 57(1) (1990), S. 197–202.
 - [45] GHANEM, R.G. / SPANOS, P.D.: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer New York, 1991.
 - [46] GHIOCEL, D.M. / GHANEM, R.G.: *Stochastic Finite-Element Analysis of Seismic Soil–Structure Interaction*. Journal of Engineering Mechanics 128(1) (2002), S. 66–77.
 - [47] GOLUB, G.H. / WELSCH, J.H.: *Calculation of Gauss quadrature rules*. Mathematics of Computation 23(106) (1969), S. 221–230.
 - [48] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(12) (2000), S. 1675 – 1702.
 - [49] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194(39–41) (2005), S. 4279–4300.
 - [50] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A coupled two-scale shell model with applications to layered structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 94(13) (2013), S. 1233–1254.
 - [51] HAHN, M. / RECK, M.: *Kompaktkurs Finite Elemente für Einsteiger: Theorie und Beispiele zur Approximation linearer Feldprobleme*. Springer Vieweg Wiesbaden, 2018.
 - [52] HALTON, J.H.: *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals*. Numerische Mathematik 2(1) (1960), S. 84–90.
 - [53] HASTIE, T. / TAYLOR, J. / TIBSHIRANI, R. / WALTHER, G.: *Forward stagewise regression and the monotone lasso*. Electronic Journal of Statistics 1(1) (2007), S. 1–29.

- [54] HASTIE, T. / TIBSHIRANI, R. / FRIEDMAN, J.: *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction*. Springer New York, 2009.
- [55] HELLINGER, E.: *Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua*. In: KLEIN, F. / MÜLLER, C., (HRSG.), *Mechanik*, S. 601–694, Wiesbaden, 1907 Vieweg + Teubner Verlag.
- [56] HENZE, N.: *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg, 2011.
- [57] HOERL, A.E. / KENNARD, R.W.: *Ridge Regression: Biased Estimation for Nonorthogonal Problems*. *Technometrics* 42(1) (2000), S. 80–86.
- [58] HOLZAPFEL, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 2000.
- [59] HOMMA, T. / SALTELLI, A.: *Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models*. *Reliability Engineering & System Safety* 52(1) (1996), S. 1–17.
- [60] HUGHES, T.J.R.: *The finite element method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [61] HUGHES, T.J.R. / COTTRELL, J.A. / BAZILEVS, Y.: *Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194(39–41) (2005), S. 4135–4195.
- [62] IRONS, B.M. / RAZZAQUE, A.: *Experience with the patch test for convergence of finite elements*. In: AZIZ, A.D., (HRSG.), *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, S. 557–587, 1972.
- [63] JEREMIĆ, B. / SETT, K.: *On probabilistic yielding of materials*. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 25(3) (2008), S. 291–300.
- [64] JUNKER, P. / NAGEL, J.: *An analytical approach to modeling the stochastic behavior of visco-elastic materials*. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 98(7) (2018), S. 1249–1260.
- [65] JUNKER, P. / NAGEL, J.: *Modeling of viscoelastic structures with random material properties using time-separated stochastic mechanics*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 121(2) (2019), S. 308–333.
- [66] KAMIŃSKI, M.: *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, January 2013.
- [67] KLEIBER, M.: *Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*. John Wiley & Sons, 1993.

- [68] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195(1–3) (2006), S. 179–201.
- [69] KLINKEL, S. / REICHEL, R.: *A finite element formulation in boundary representation for the analysis of nonlinear problems in solid mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 347 (2019), S. 295–315.
- [70] LE MAÎTRE, O.P. / KNIO, O.M.: *Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer Dordrecht, 2010.
- [71] LE MAÎTRE, O.P. / REAGAN, M.T. / NAJM, H.N. / GHANEM, R.G. / KNIO, O.M.: *A Stochastic Projection Method for Fluid Flow: II. Random Process*. Journal of Computational Physics 181(1) (2002), S. 9–44.
- [72] LEE, S.-L. / MANUEL, F.S. / ROSSOW, E.C.: *Large Deflections and Stability of Elastic Frame*. Journal of the Engineering Mechanics Division 94(2) (1968), S. 521–548.
- [73] LI, C.-C. / DER KIUREGHIAN, A.: *Optimal Discretization of Random Fields*. Journal of Engineering Mechanics 119(6) (1993), S. 1136–1154.
- [74] LIU, J.S.: *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer New York, 2004.
- [75] MARELLI, S. / SUDRET, B.: *UQLab: A Framework for Uncertainty Quantification in Matlab*. In: *The 2nd International Conference on Vulnerability and Risk Analysis and Management (ICVRAM 2014)*, University of Liverpool, United Kingdom, S. 2554–2563, Juni 2014.
- [76] MCKAY, M.D. / BECKMAN, R.J. / CONOVER, W.J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics 21(2) (1979), S. 239–245.
- [77] MEIDANI, H. / GHANEM, R.G.: *A Stochastic Modal Decomposition Framework for the Analysis of Structural Dynamics under Uncertainties*. In: *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [78] MEIDANI, H. / GHANEM, R.G.: *Spectral Power Iterations for the Random Eigenvalue Problem*. American Institute of Aeronautics and Astronautics 52(5) (2014), S. 912–925.
- [79] MUGLER, A.: *Verallgemeinertes polynomielles Chaos zur Lösung stationärer Diffusionsprobleme mit zufälligen Koeffizienten*. Dissertation, Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg, 2013.

-
- [80] MULANI, S. / KAPANIA, R. / WALTERS, R.: *Stochastic Eigenvalue Problem with Polynomial Chaos*. In: *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [81] MÖLLER, B.: *Fuzzy randomness – a contribution to imprecise probability*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 84(10–11) (2004), S. 754–764.
- [82] MÖLLER, B. / BEER, M.: *Fuzzy Randomness: Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [83] OLOFF, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Maßtheorie*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg, 2017.
- [84] PANTHER, L. / WAGNER, W. / FREITAG, S.: *A consistently linearized spectral stochastic finite element formulation for geometric nonlinear composite shells*. Computational Mechanics 75(5) (2025), S. 1655–1683.
- [85] PAPADOPOULOS, V. / KALOGERIS, I. / GIOVANIS, D.G.: *A spectral stochastic formulation for nonlinear framed structures*. Probabilistic Engineering Mechanics 55 (2019), S. 90–101.
- [86] PIAN, T.H.H. / SUMIHARA, K.: *Rational approach for assumed stress finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 20(9) (1984), S. 1685–1695.
- [87] REISSNER, E.: *On a Variational Theorem in Elasticity*. Journal of Mathematics and Physics 29(1–4) (1950), S. 90–95.
- [88] REISSNER, E.: *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*. ZAMP - Journal of Applied Mathematics and Physics / Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 23(5) (1972), S. 795–804.
- [89] ROSIĆ, B.V.: *Variational Formulations and Functional Approximation Algorithms in Stochastic Plasticity of Materials*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2012.
- [90] ROSIĆ, B.V. / MATTHIES, H.G.: *Variational Theory and Computations in Stochastic Plasticity*. Archives of Computational Methods in Engineering 22(3) (2014), S. 457–509.
- [91] RUST, W.: *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Springer Vieweg Wiesbaden, 2016.
- [92] SALTELLI, A.: *Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices*. Computer Physics Communications 145(2) (2002), S. 280–297.

-
- [93] SALTELLI, A. / RATTO, M. / ANDRES, T. / CAMPOLONGO, F. / CARIBONI, J. / GATELLI, D. / SAISANA, M. / TARANTOLA, S.: *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. John Wiley & Sons, 2007.
- [94] SCHÖBI, R.: *Surrogate models for uncertainty quantification in the context of imprecise probability modelling*. Dissertation, ETH Zürich, Zürich, Switzerland, 2017.
- [95] SCHUËLLER, G.I.: *A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics*. Probabilistic Engineering Mechanics 12(4) (1997), S. 197–321.
- [96] SCHÖBI, R. / SUDRET, B.: *Global sensitivity analysis in the context of imprecise probabilities (p-boxes) using sparse polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering & System Safety 187 (2019), S. 129–141.
- [97] SEPAHVAND, K. / MARBURG, S. / HARDTKE, H.-J.: *Stochastic structural modal analysis involving uncertain parameters using generalized polynomial chaos expansion*. International Journal of Applied Mechanics 03(03) (2011), S. 587–606.
- [98] SETT, K. / JEREMIĆ, B. / KAVVAS, M.L.: *Probabilistic elasto-plasticity: solution and verification in 1D*. Acta Geotechnica 2(3) (2007), S. 211–220.
- [99] SETT, K. / JEREMIĆ, B. / KAVVAS, M.L.: *The role of nonlinear hardening/softening in probabilistic elasto-plasticity*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 31(7) (2007), S. 953–975.
- [100] SETT, K. / JEREMIĆ, B. / KAVVAS, M.L.: *Stochastic elastic-plastic finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 200(9–12) (2011), S. 997–1007.
- [101] SHEN, J. / TANG, T. / WANG, L.-L.: *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [102] SMOLYAK, S.A.: *Quadrature and Interpolation Formulas for Tensor Products of Certain Classes of Functions*. Soviet Mathematics Doklady 4 (1963), S. 240–243.
- [103] SOBOLEW, I.M.: *On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 7(4) (1967), S. 86–112.
- [104] SOBOLEW, I.M.: *Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models*. Mathematical Modelling and Computational Experiments (1993), S. 407–414.
- [105] SOBOLEW, I.M.: *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates*. Mathematics and Computers in Simulation 55(1–3) (2001), S. 271–280.

-
- [106] SOIZE, C. / GHANEM, R.G.: *Physical Systems with Random Uncertainties: Chaos Representations with Arbitrary Probability Measure*. SIAM Journal on Scientific Computing 26(2) (2004), S. 395–410.
- [107] SOUSEDÍK, B. / ELMAN, H.C.: *Inverse Subspace Iteration for Spectral Stochastic Finite Element Methods*. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification 4(1) (2016), S. 163–189.
- [108] STEFANO, G.: *The stochastic finite element method: Past, present and future*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 198(9–12) (2009), S. 1031–1051.
- [109] SUDRET, B.: *Polynomial chaos expansions in 90 minutes*. 4th National Conference on Multidisciplinary design, analysis and optimization (NCMDAO), October 7–9 2021, Madras, India.
- [110] SUDRET, B.: *Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions*. Reliability Engineering & System Safety 93(7) (2008), S. 964–979.
- [111] SUDRET, B.: *Polynomial chaos expansions and stochastic finite element methods*. In: PHOON, K.-K. / CHING, J., (HRSG.), *Risk and Reliability in Geotechnical Engineering (Chap. 6)*, S. 265–300, 2014.
- [112] SUDRET, B. / BERVEILLER, M. / LEMAIRE, M.: *A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis*. European Journal of Computational Mechanics 15(7–8) (2006), S. 825–866.
- [113] SUDRET, B. / DER KIUREGHIAN, A.: *Stochastic Finite Element Methods and Reliability: A State-of-the-Art Report*. Department of Civil Environmental Engineering University of California, Berkeley, 2000.
- [114] TAPPE, S.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Spektrum Berlin Heidelberg, 2013.
- [115] TAYLOR, R.L.: *FEAP - Finite Element Analysis Program*. University of California, Berkeley, 2025, <http://projects.ce.berkeley.edu/feap/> (besucht am 16.06.25).
- [116] THE MATHWORKS INC.: *MATLAB version: 9.10.0 R2021a*. Natick, Massachusetts, United States, 2021, <https://www.mathworks.com> (besucht am 16.06.25).
- [117] TIBSHIRANI, R.: *Regression Shrinkage and Selection via the Lasso*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) 58(1) (1996), S. 267–288.
- [118] TRUESDELL, C. / NOLL, W.: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [119] VANMARCKE, E. / SHINOZUKA, M. / NAKAGIRI, S. / SCHUËLLER, G.I. / GRIGORI, M.: *Random fields and stochastic finite elements*. Structural Safety 3(3–4) (1986), S. 143–166.

- [120] VERHOOSEL, C.V. / GUTIÉRREZ, M.A. / HULSHOFF, S.J.: *Iterative solution of the random eigenvalue problem with application to spectral stochastic finite element systems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 68(4) (2006), S. 401–424.
- [121] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A simple finite rotation formulation for composite shell elements*. Engineering Computations 11(2) (1994), S. 145–176.
- [122] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 64(5) (2005), S. 635–666.
- [123] WAGNER, W. / WRIGGERS, P.: *A simple method for the calculation of postcritical branches*. Engineering Computations 5(2) (1988), S. 103–109.
- [124] WAND, M.P. / JONES, M.C.: *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall/CRC, 1994.
- [125] WERKLE, H.: *Finite Elemente in der Baustatik: Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. Springer Vieweg Wiesbaden, 2021.
- [126] WIENER, N.: *The Homogeneous Chaos*. American Journal of Mathematics 60(4) (1938), S. 897–936.
- [127] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Berlin Heidelberg, 2001.
- [128] XIU, D.: *Generalized (Wiener-Askey) polynomial chaos*. Dissertation, Brown University, 2004.
- [129] XIU, D.: *Fast Numerical Methods for Stochastic Computations: A Review*. Communications in computational physics 5(2-4) (2009), S. 242–272.
- [130] XIU, D.: *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010.
- [131] XIU, D.: *Stochastic Collocation Methods: A Survey*. In: GHANEM, R. / HIGDON, D. / OWHADI, H., (HRSG.), *Handbook of Uncertainty Quantification*, S. 1–18, Cham, 2016.
- [132] XIU, D. / HESTHAVEN, J.S.: *High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs*. SIAM Journal on Scientific Computing 27(3) (2005), S. 1118–1139.
- [133] XIU, D. / KARNIADAKIS, G.E.: *Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191(43) (2002), S. 4927–4948.

-
- [134] XIU, D. / KARNIADAKIS, G.E.: *The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*. SIAM Journal on Scientific Computing 24(2) (2002), S. 619–644.
 - [135] XIU, D. / KARNIADAKIS, G.E.: *Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos*. Journal of Computational Physics 187(1) (2003), S. 137–167.
 - [136] XIU, D. / KARNIADAKIS, G.E.: *A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty*. International Journal of Heat and Mass Transfer 46(24) (2003), S. 4681–4693.
 - [137] XIU, D. / SHEN, J.: *Efficient stochastic Galerkin methods for random diffusion equations*. Journal of Computational Physics 228(2) (2009), S. 266–281.
 - [138] YEOM, C.H. / LEE, S.W.: *An assumed strain finite element model for large deflection composite shells*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 28(8) (1989), S. 1749–1768.
 - [139] ZADEH, L.A.: *Fuzzy sets*. Information and Control 8(3) (1965), S. 338–353.
 - [140] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L. / GOVINDJEE, S.: *The finite element method - Its Basis and Fundamentals (8th Edition)*. Butterworth-Heinemann, London, 2024.

Berichte des Instituts für Baustatik, Karlsruher Institut für Technologie

Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit, Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.
- 64/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengерäten, Dissertation, Artur Deninger, 1964.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahidul Alum, 1964.

- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-Siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 69/16: Operatorenkalkül zur Berechnung von Stab- und Flächentragwerken, Dissertation, Günter Eisenbiegler, 1969.
- 72/17: Umlagerungen der Schnittkräfte und Verformungen von biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen im Zustand II infolge Kriechens und Schwindens, Dissertation, Walter H. Schneider, 1972.
- 73/18: Berechnungssystematik für Rechteckscheiben, Habilitation, Günter Eisenbiegler, 1973.
- 1/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, Jürgen Hanisch, 1975.
- 2/75 : Der Plattenbalken mit Lastangriff innerhalb des Steges, Dissertation, Hans-Erich Heining, 1975.
- 3/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Habilitation, Helmut Rubin, 1976.
- 4/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 5/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 6/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 7/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.
- 8/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.

- 9/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 10/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 11/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 12/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 13/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 14/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalentragwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarmann, 1991.
- 15/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalentragwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 978-3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 978-3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 978-3-935322-02-7.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 978-3-935322-03-4.
- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 978-3-935322-04-1.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 978-3-935322-05-8.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 978-3-935322-06-5.

- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 978-3-935322-07-2.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 978-3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 978-3-935322-09-6.
- 11 (2006) : Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung, Dissertation, Alexander Butz, 2006, ISBN: 978-3-935322-10-2.
- 12 (2007) : Nichtlineare Modellierung ferroelektrischer Keramiken und piezoelektrischer Strukturen – Analyse und Finite-Element-Formulierung, Habilitationsschrift, Sven Klinkel, 2007, ISBN: 978-3-935322-11-9.
- 13 (2007) : Ein geometrisch und materiell nichtlineares Cosserat-Modell – Theorie, Numerik und Anwendungsmöglichkeiten, Dissertation, Ingo Münch, 2007, ISBN: 978-3-935322-12-6.
- 14 (2008) : Magnetostriktive und piezoelektrische Materialien – Konstitutive Modellierung und Finite-Element-Formulierung, Dissertation, Konrad Linnemann, 2008, ISBN: 978-3-935322-13-3.
- 15 (2008) : Theorie und Numerik unidirektional verstärkter Faserverbundwerkstoffe: 3D Finite-Elemente-Untersuchungen der Faser-Matrix Mikroinstabilitäten, Dissertation, Jens Harich, 2008, ISBN: 978-3-935322-15-7.
- 16 (2009) : Finite Element Modeling of Intra- and Interlaminar Damage Growth in Composite Laminates, Dissertation, Claudio Balzani, 2009, ISBN: 978-3-935322-16-4.
- 17 (2010) : Theorie und Finite-Elemente-Modellierung geometrisch und materiell nichtlinearer piezoelektrischer Schalenstrukturen, Dissertation, Katrin Schulz, 2010, ISBN: 978-3-935322-17-1.
- 18 (2011) : Finite-Elemente-Formulierung mit abgestimmten Approximationsräumen für die Modellierung piezoelektrischer Stab- und Schalenstrukturen, Dissertation, Dieter Legner, 2011, ISBN: 978-3-935322-18-8.
- 19 (2014) : Nichtlineare elektromechanisch gekoppelte Viskoelastizität bei großen Verformungen am Beispiel dielektrischer Elastomere – Konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung, Dissertation, Alexander Büschel, 2014, ISBN: 978-3-935322-19-5.

- 20 (2014) : Duroplastische Kunststoffe mit Elastomerzusätzen - Konstitutive Modellierung und Finite-Elemente-Formulierung, Dissertation, Stefan Lacher, 2014, ISBN: 978-3-935322-20-1.
- 21 (2014) : Numerische Stabilitätsuntersuchung dünnwandiger Tragwerke unter dem Einfluss stochastischer Imperfektionen, Dissertation, Stefan Lauterbach, 2014, ISBN: 978-3-935322-21-8.
- 22 (2017) : Entwicklung robuster Ein- und Mehrskalen-Modelle zur Simulation von Delaminationsprozessen faserverstärkter Lamine, Dissertation, Tillmann Herwig, 2017, ISBN: 978-3-935322-22-5.
- 23 (2017) : Entwurf und Finite-Elemente-Modellierung ferroelektrischer Nanostrukturen zur Transformation mechanischer Deformationen in elektrische Energie, Dissertation, Matthias Krauß, 2017, ISBN: 978-3-935322-23-2.
- 24 (2018) : Entwicklung eines gradientenbasierten Modells zur netzunabhängigen Schädigungssimulation geschichteter Faserverbundstrukturen, Dissertation, Jonas Läufer, 2018, ISBN: 978-3-935322-24-9.
- 25 (2018) : Ein gemischtes FE-Modell zur Untersuchung des nichtlinearen Deformations- und Spannungsverhaltens schubweicher Lamine, Dissertation, Max Köppler, 2018, ISBN: 978-3-935322-25-6.
- 26 (2020) : Metaheuristische Form- und Systemoptimierung von Stabtragwerken mit Evolutionsstrategien, Dissertation, Alexander Keller, 2020, ISBN: 978-3-935322-26-3.
- 27 (2020) : Polymorphe Unschärfemodellierung in der nichtlinearen Strukturmechanik – Stabilität von Schalenträgwerken, räumliche Variabilität und Metamodellierung, Dissertation, Marc Fina, 2020, ISBN: 978-3-935322-27-0.
- 28 (2023) : Physikalisch konsistente Modellierung von elastischem und plastischem Materialverhalten mit künstlichen neuronalen Netzen, Dissertation, Patrick Weber, 2023, ISBN: 978-3-935322-28-7.
- 29 (2024) : Ein Phasenfeldmodell zur Simulation des Einflusses von Leitungsmechanismen in einem ferroelektrischen Nanogenerator, Dissertation, Franziska Wöhler, 2024, ISBN: 978-3-935322-29-4.

Wissenschaftlicher Lebenslauf

Persönliche Daten

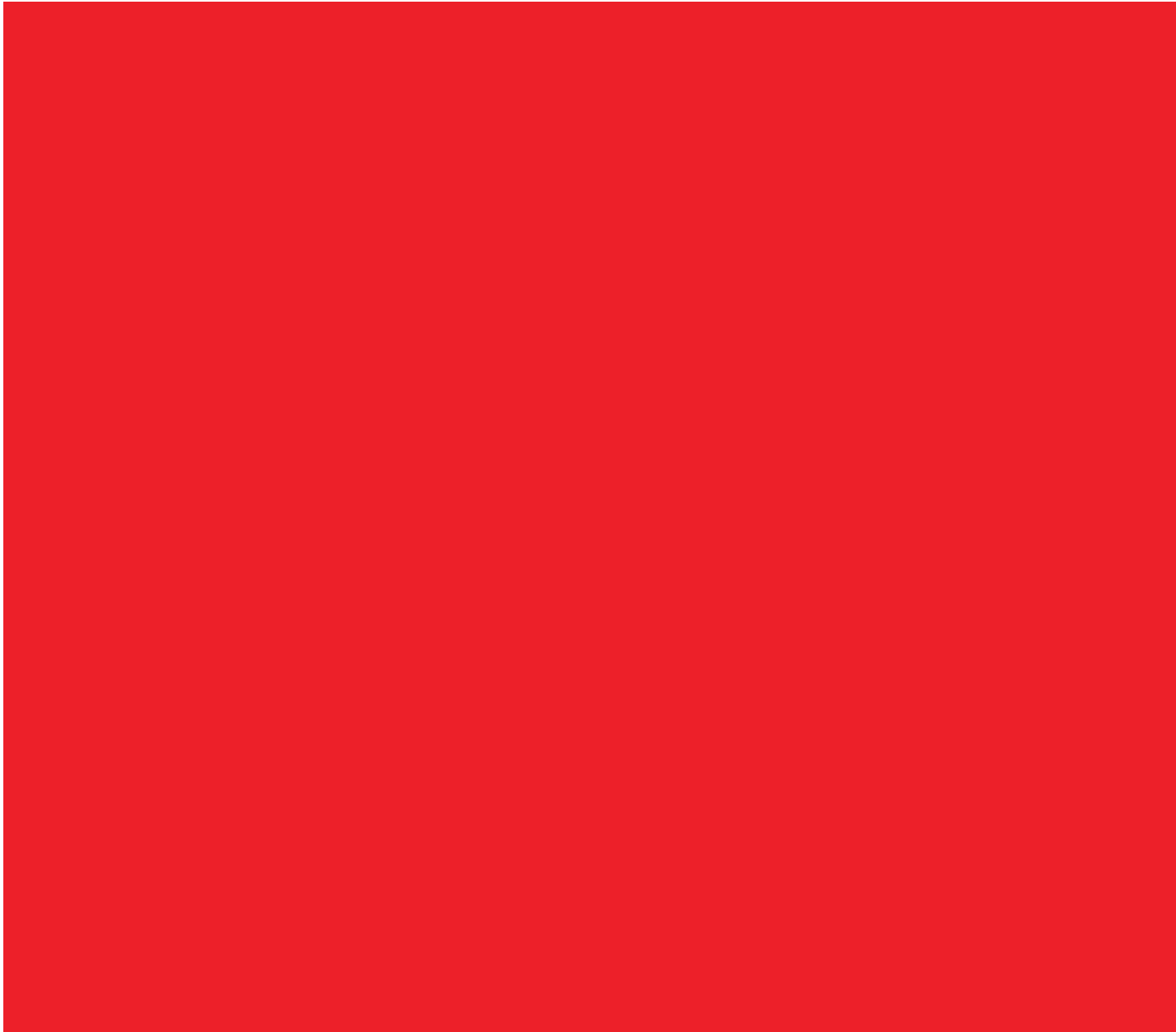
Name	Lukas Michael Panther
Geburtsdatum	7. März 1994
Geburtsort	Lahr/Schwarzwald

Ausbildung

1995–2004	Schulbildung Schiller-Gymnasium, Offenburg Abitur
2004–2005	Freiwilliges Soziales Jahr MEDICLIN Staufenburg Klinik, Durbach
2005–2007	Bachelorstudium Bauingenieurwesen Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Bachelorarbeit: Institut für Baustatik
2005–2007	Vollzeit-Praktikum als Tragwerksplaner Baustatik Relling GmbH, Singen
2007–2013	Masterstudium Funktionaler und Konstruktiver Ingenieurbau – Engineering Structures Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Profil: Modellierung und Simulation im Ingenieurbau Masterarbeit: Institut für Baustatik
2019–2025	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Institut für Baustatik

Veröffentlichungen

- Zeitschriftenartikel (Peer Review)
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: A new generalized displacement control for nonlinear spectral stochastic finite element problems, Computational Mechanics, im Druck
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: A consistently linearized spectral stochastic finite element formulation for geometric nonlinear composite shells, Computational Mechanics, 75, S. 1655–1683, 2025, <https://doi.org/10.1007/s00466-024-02583-0>
 - Fina, M., **Panther, L.**, Weber, P., Wagner, W.: Shell buckling with polymorphic uncertain surface imperfections and sensitivity analysis, ASME J. Risk Uncertainty Part B. 7(2), 020909, 2021, <https://doi.org/10.1115/1.4050165>
- Konferenzbeiträge
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: Geometrisch nichtlineare Strukturanalyse mittels stochastischer FE-Formulierung In: Klinkel, S.; Klarman, S. (Hrsg.), Forschungskolloquium FE ohne Schnee, 20.-23. Juli 2025, Hirschegg, Österreich
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: A spectral stochastic FE formulation for geometrically nonlinear shell structures, 16th World Congress on Computational Mechanics and 4th Pan American Congress on Computational Mechanics, 21.-26. Juli, 2024, Vancouver, Britisch-Kolumbien, Kanada
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: A spectral stochastic finite element formulation for geometric nonlinear shallow shells 5th International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Science and Engineering (UNCECOMP), 12.-14. Juni 2023, Athen, Griechenland
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: Geometrisch nichtlineare Strukturanalyse mittels stochastischer FE-Formulierung In: Klinkel, S.; Klarman, S. (Hrsg.), Forschungskolloquium Baustatik-Baupraxis 2021 in 2022, S. 35–36, Kloster Steinfeld, 2022
 - **Panther, L.**, Wagner, W., Freitag, S.: Structural analysis considering uncertainties using polynomial chaos expansions and proper orthogonal decomposition 8th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), 5.-9. Juni, 2022, Oslo, Norwegen



ISBN 978-3-935322-30-0