

FORTSCHRITT-  
BERICHTE **VDI**

DIPL.-ING. HELMUT KELLER, KARLSRUHE

**ENTWURF NICHTLINEARER  
BEOBACHTER  
MITTELS NORMALFORMEN**

REIHE 8: MESS-, STEUERUNGS-  
UND REGELUNGSTECHNIK NR. 124

**VDI** VERLAG

ENTWURF NICHTLINEARER BEOBACHTER  
MITTELS NORMALFORMEN

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für Elektrotechnik  
der Universität Fridericiana Karlsruhe  
(Technische Hochschule)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Helmut Keller

Tag des Kolloquiums: 24. Juni 1986

Hauptreferent: Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E.h. O. Föllinger

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. D. Franke



## VORWORT

Gerade bei der Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme spielen die Zustandsraummethoden eine zentrale Rolle. Auf ihrer Basis entstanden in den siebziger Jahren die ersten systematischen Reglersyntheseverfahren von E. FREUND und R. SOMMER. Deren theoretisch wertvolle Arbeiten gaben den Anstoß, das nichtlineare Beobachtungsproblem in ähnlicher Weise anzugehen, zumal beide Regelungsverfahren die Kenntnis sämtlicher Zustandsvariablen voraussetzen.

Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Beobachterentwurfsmethode stellt eine Verallgemeinerung der aus der linearen Theorie bekannten Verfahren auf den nichtlinearen, zeitvarianten Fall dar. Sie bedient sich verschiedener Normalformen (auch kanonische Formen genannt), welche eine für den Entwurf geeignete Struktur besitzen.

Diese Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme der Universität Karlsruhe. Dem Institutsleiter, meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E.h. O. Föllinger, danke ich ganz herzlich für die stete Förderung meiner Arbeit und für seine konstruktive Kritik, mit der er mir oftmals zur Seite stand. Ebenso gilt mein aufrichtiger Dank Herrn Professor Dr.-Ing. D. Franke für die spontane Übernahme des Korreferats und für sein Interesse an meiner Arbeit. Weiterhin danke ich meinen lieben Kollegen am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme für die kameradschaftliche Zusammenarbeit und ihre stete Hilfsbereitschaft. Herzlicher Dank gebührt auch Frau Rita Bellm, Frau Marlene Nold sowie Herrn Rüdiger Beilharz für die sorgfältige Erstellung des Textes und der Bilder.

Nicht zuletzt hat meine liebe Frau Iris durch ihre verständnisvolle Unterstützung und Ausdauer ganz wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Karlsruhe, im Mai 1986

*H. Keller*

Die Furcht des HERRN  
ist der Weisheit Anfang;  
das ist eine feine Klugheit,  
wer danach tut; des Lob  
bleibt ewiglich.

Die Bibel, Psalm 111,10

## INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG UND ÜBERBLICK .....	1
2	DIE BEOBACHTBARKEIT NICHTLINEARER, ZEITVARIANTER SYSTEME ..	5
2.1	Lokale und globale Beobachtbarkeitskriterien aus der Literatur .....	6
2.2	Die Beobachtbarkeit im großen .....	7
2.3	Definition der "Nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormal- form (NBKNF)" .....	9
2.4	Die Transformation auf NBKNF und ihre Jacobi-Matrix ..	13
2.5	Definition der Beobachtbarkeitsmatrix .....	18
2.6	Eine Auswahlstrategie für linear unabhängige Zeilen- vektoren aus der Beobachtbarkeitsmatrix .....	20
2.7	Ein hinreichendes Kriterium für die Beobachtbarkeit im großen .....	22
2.8	Beobachtbarkeitsanalyse verschiedener Systeme .....	24
2.8.1	Räuber-Beute-Beziehung .....	24
2.8.2	Rührkesselreaktor .....	25
2.8.3	Drehstromsynchronmaschine .....	27
2.9	Wertung des Beobachtbarkeitskriteriums .....	30
3	BEOBACHTERENTWURF FÜR SYSTEME MIT EINER AUSGANGSGRÖSSE ....	31
3.1	Definition der "Nichtlinearen Beobachternormalform (NBNF)" .....	31
3.2	Bestimmung des Beobachters für ein System in NBNF ....	33
3.3	Transformation auf NBNF .....	35
3.3.1	Bestimmungsgleichungen der Transformation auf NBNF und die "Nichtlineare Charakteristische Gleichung (NCG)" .....	35
3.3.2	Lösung der NCG zur Bestimmung der Transforma- tion für lineare, zeitinvariante Systeme .....	39
3.3.3	Lösung der NCG zur Bestimmung der Transforma- tion für ein nichtlineares Beispiel .....	45

3.3.4	Motivation einer Zwei-Schritt-Transformation ..	50
3.3.5	Transformation der NBKNF auf NBNF .....	54
3.3.6	Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 2. Ordnung .....	58
3.3.7	Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 3. Ordnung .....	61
3.3.8	Bestimmung der Gesamttransformation $\underline{v}$ und die Existenz ihrer Inversen $\tilde{\underline{v}}$ .....	65
3.4	Bestimmung des Beobachters für das Originalsystem ....	66
3.5	Beobachterentwurf für zwei Beispiele .....	68
3.5.1	Räuber-Beute-Beziehung .....	68
3.5.2	Rührkesselreaktor .....	74
4	BEOBSACHTERENTWURF FÜR SYSTEME MIT MEHREREN AUSGANGSGRÖSSEN	82
4.1	Definition der NBNF .....	82
4.2	Bestimmung des Beobachters für ein System in NBNF ....	84
4.3	Transformation auf NBNF .....	86
4.3.1	Motivation einer Zwei-Schritt-Transformation ..	87
4.3.2	Transformation der NBKNF auf NBNF .....	90
4.3.3	Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 3. Ordnung mit zwei Ausgangsgrößen .....	92
4.3.4	Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 4. Ordnung mit zwei Ausgangsgrößen .....	95
4.3.5	Bestimmung der Gesamttransformation $\underline{v}$ und die Existenz ihrer Inversen $\tilde{\underline{v}}$ .....	100
4.4	Bestimmung des Beobachters für das Originalsystem ....	102
4.5	Beobachterentwurf am Beispiel einer Drehstromsynchron- maschine .....	103
5	BEOBSACHTERENTWURF MIT HILFE DER "VERALLGEMEINERTEN BEOB- ACHTERNORMALFORM (VBNF)" .....	110
5.1	Definition der VBNF .....	110
5.2	Bestimmung des Beobachters für ein System in VBNF ....	112
5.3	Transformation auf VBNF .....	112

5.3.1	Bestimmungsgleichungen der Transformation auf VBNF .....	113
5.3.2	Existenz und Herleitung der VBNF für Systeme 2. Ordnung .....	114
5.3.3	Ein Kriterium für die Unabhängigkeit der Transformation $\underline{v}$ von $\hat{\underline{u}}_n$ .....	115
5.4	Bestimmung des Beobachters für das Originalsystem ....	116
6	DER BEOBACHTER IM GESCHLOSSENEN REGELKREIS .....	118
6.1	Eine Plausibilitätsbetrachtung zur Stabilität eines Regelkreises mit Beobachter .....	119
6.2	Regelung des Rührkesselreaktors über den Beobachter ..	121
7	ZUSAMMENFASSUNG UND WERTUNG .....	126
ANHANG A	.....	129
ANHANG B	.....	132
ANHANG C	.....	135
LITERATUR	.....	138

---

Alle für diese Arbeit erforderlichen Simulationen wurden mit Hilfe des Programmverbundes PILAR [2;40] auf einer LSI 11-Rechenanlage des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme der Universität Karlsruhe durchgeführt.

## 1 EINLEITUNG UND ÜBERBLICK

Eine Vielzahl der in Natur und Technik vorkommenden Systeme läßt sich nur durch ein nichtlineares mathematisches Modell hinreichend genau beschreiben. Will man deren dynamisches Verhalten gezielt durch eine Regelung beeinflussen, so muß auf ihren nichtlinearen Systemcharakter Rücksicht genommen werden. Die bislang einzigen systematischen Reglersyntheseverfahren, die dieser Forderung Rechnung tragen und im Zustandsraum arbeiten, wurden 1973 von E. FREUND [13] und 1979 von R. SOMMER [54] angegeben. Beide Verfahren erfordern jedoch die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors, weil zur Realisierung der resultierenden Regelgesetze im allgemeinen sämtliche Zustandsvariablen benötigt werden. Da meist nur wenige Zustandsgrößen mit vertretbarem technischem Aufwand meßbar sind, wird der Einsatz eines Beobachters unumgänglich. Dabei sei unter einem Beobachter ein dynamisches System verstanden, dem die Meß- und Steuergrößen der Strecke laufend zugeführt werden und das an seinem Ausgang einen Schätzwert für den tatsächlichen Zustandsvektor der Strecke liefert, wobei der Schätzfehler mit zunehmender Zeit gegen Null strebt.

Bereits Mitte der sechziger Jahre führte D.G. LUENBERGER [41;42] den nach ihm benannten Zustandsbeobachter für lineare, zeitinvariante Systeme ein. Für den Entwurf eines solchen Luenberger-Beobachters erweist sich die 1963 von R.E. KALMAN [22] vorgestellte *Beobachternormalform* (siehe auch [1]) als günstiger Ausgangspunkt. Sie gestattet nämlich über eine direkte Vorgabe der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Fehlerdifferentialgleichung die gezielte Beeinflussung der Eigenwerte des Beobachters. Wenn das zu beobachtende System nicht unmittelbar in dieser speziellen kanonischen Form vorliegt, kann es - falls das System beobachtbar ist - durch eine lineare, zeitinvariante Transformation auf die Beobachternormalform (BNF) gebracht werden.

Die direkte Übertragung dieser Entwurfsmethode auf den linearen, zeitvarianten Fall gelang O. FÖLLINGER [8] im Jahre 1978. Er löste diese Aufgabenstellung, indem er eine zeitvariante BNF definierte und die dazu erforderliche Transformation angab. Da nämlich in der erweiterten BNF die Zeitvarianz an genau einer Stelle konzentriert ist, kann sie in einfacher Weise kompensiert werden. Übrig bleibt eine lineare, zeitinvariante Fehlerdifferentialgleichung, deren Dynamik dann mit den üblichen Methoden vorgegeben werden kann.

Die Veröffentlichung von O. FÖLLINGER, die auch das hierzu duale Regelungsproblem für lineare, zeitvariante Systeme behandelt, veranlaßte R. SOMMER [54], das Reglersyntheseverfahren auf nichtlineare und zeitvariante Systeme zu verallgemeinern. Er bedient sich ebenfalls einer kanonischen Form, nämlich der "Nichtlinearen Regelungsnormalform (NRNF)". Dazu ist eine nichtlineare, zeitvariante Transformation notwendig. Liegt dann die NRNF vor, so ist ähnlich wie im linearen, zeitvarianten Fall eine gezielte Kompensation der Nichtlinearitäten sowie der Zeitvarianz und darüber hinaus die Vorgabe eines gewünschten Zeitverhaltens möglich.

Der Erfolg von R. SOMMER läßt hoffen, auch den Entwurf *nichtlinearer Beobachter* \*) mit Hilfe einer kanonischen Form besser in den Griff zu bekommen. Dieser Versuch liegt nahe, zumal die nichtlineare Beobachtertheorie keineswegs als ausgereift bezeichnet werden kann:

- Die mathematisch strengen Entwürfe von F.E. THAU [58] und S.R. KOU, D.L. ELLIOTT und T.J. TARN [35] arbeiten mit Lipschitz-Bedingungen und der Ljapunow-Theorie. Sie sind deshalb schwer handhabbar und liefern unter Umständen nur sehr kleine Stabilitätsbereiche.
- Der nichtlineare Beobachter von M. ZEITZ [62], der aus einer Linearisierung um die geschätzte Trajektorie hervorgeht, ist zwar für hinreichend kleine Anfangsfehler sehr effektiv, liefert jedoch keine Aussage über das Einzugsgebiet, in dem der Zustands-Schätzer stabil arbeitet, in dem also der geschätzte Zustandsvektor gegen den tatsächlichen konvergiert.
- Eine ähnliche Vorgehensweise für den Beobachterentwurf schlagen D. BESTLE und M. ZEITZ in [3] vor. Im Gegensatz zu [62] bedienen sie sich dabei einer nichtlinearen kanonischen Form; jedoch gelingt es nicht, die Transformation auf diese Form vollständig durchzuführen. Durch eine Linearisierung der Fehlerdifferentialgleichung umgehen sie dieses Problem und erhalten einen Beobachter, dessen Stabilität sich jedoch im allgemeinen nicht sichern läßt.

---

\*) Hier wie auch in der einschlägigen Literatur wird unter einem *nichtlinearen Beobachter* der Beobachter für ein nichtlineares, zeitvariantes oder zeitinvariantes System verstanden.

- Die Transformationsverfahren von A.J. KRENER und A. ISIDORI [36] sowie A.J. KRENER und W. RESPONDEK [37] verwenden Methoden der modernen Differentialgeometrie, die den Ingenieuren nicht geläufig sind.

Einige der genannten Verfahren weisen den zusätzlichen Nachteil auf, daß sie auf Systeme ohne Eingangsgrößen beschränkt sind oder zumindest die Zeitabhängigkeit der Steuergrößen als bekannt voraussetzen.

Der vorliegenden Arbeit liegt nun die folgende Zielrichtung zugrunde:

Für die allgemeine Klasse nichtlinearer, zeitvarianter Mehrgrößensysteme soll ein Beobachterentwurfsverfahren entwickelt werden, welches weder eine Linearisierung (im Sinne der Approximation eines nichtlinearen Systems durch ein lineares System) noch irgendeine Ljapunow-Abschätzung benötigt. Darüber hinaus soll das Verfahren eine Aussage über das Einzugsgebiet ermöglichen, in dem der geschätzte Zustandsvektor gegen den tatsächlichen konvergiert. Außerdem soll es im Hinblick auf die Ingenieursanwendung mit den klassischen analytischen Hilfsmitteln auskommen.

Seine Grundlage bildet eine geeignet definierte kanonische Form, die sogenannte "Nichtlineare Beobachternormalform (NBNF)". Sie besitzt eine für den Beobachterentwurf besonders geeignete Struktur und führt - falls der Beobachter entsprechend angesetzt wird - auf eine homogene, lineare, zeitinvariante Fehlerdifferentialgleichung. Das zentrale Problem besteht somit in der Berechnung einer nichtlinearen, zeitvarianten Transformation, die das gegebene System in diese NBNF überführt.

Vor der Herleitung dieser Transformation auf NBNF wird im *Kapitel 2* zunächst auf die Beobachtbarkeit nichtlinearer, zeitvarianter Systeme eingegangen. Es wird die "Beobachtbarkeit im großen" definiert sowie ein Kriterium zu deren Überprüfung angegeben. Dieses Kriterium basiert auf einer zweiten kanonischen Form, der "Nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF)", welche für Eingrößensysteme von M. ZEITZ [64] eingeführt wurde und in der vorliegenden Arbeit auf Mehrgrößensysteme ausgedehnt wird.

Die Beobachtersynthese ist Gegenstand der beiden folgenden Kapitel, wobei im 3. *Kapitel* Systeme mit nur einer und im 4. *Kapitel* Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen behandelt werden. Beide Kapitel sind in gleicher Weise untergliedert: Zunächst wird die NBNF definiert und aufgezeigt, wie man den Beobachter entwirft, wenn das System in NBNF vorliegt. Das Hauptaugenmerk richtet sich jedoch auf die anschließende Herleitung der Transformation auf NBNF sowie deren Existenzbedingungen. Weiterhin wird beschrieben, wie man von dem für die NBNF entworfenen Beobachter zu dem Beobachter für das Originalsystem gelangt. Abschließend erfolgt die Anwendung des Verfahrens auf verschiedene Beispiele.

Bei der Bestimmung der NBNF müssen die eventuell auftretenden zeitlichen Ableitungen der Eingangsgrößen eliminiert werden. Gelingt dies nicht, so kann die NBNF nicht existieren, dafür jedoch eine "Verallgemeinerte Beobachternormalform (VBNF)". Sie ist Gegenstand des 5. *Kapitels*. Ein mit Hilfe der VBNF entworfener Beobachter unterscheidet sich von den herkömmlichen Beobachtern dadurch, daß ihm neben den Ein- und Ausgangsgrößen des zu beobachtenden Systems zusätzlich noch zeitliche Ableitungen der Eingangsgrößen zugeführt werden müssen.

Die Einbeziehung des Beobachters in den geschlossenen Regelkreis erfolgt im 6. *Kapitel*. Dort werden Bedingungen für die Stabilität eines über den Beobachter geregelten Systems angegeben. Für ein konkretes System wird die Stabilität der Gesamtanordnung anhand von Simulationen nachgewiesen.

Den Abschluß der Arbeit bildet *Kapitel 7* mit einer Zusammenfassung und Wertung des Verfahrens.

## 2 DIE BEOBACHTBARKEIT NICHTLINEARER, ZEITVARIANTER SYSTEME

Ausgangspunkt aller in dieser Arbeit angestellten Untersuchungen ist die umfassende Klasse *nichtlinearer* und darüber hinaus noch *zeitvarianter* Systeme mit konzentrierten Parametern, welche durch die vektorielle Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (2.1a)$$

mit dem Anfangswert

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2.1b)$$

und die vektorielle Ausgangsgleichung

$$\underline{y} = \underline{h}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (2.1c)$$

beschrieben werden. Darin ist  $\underline{x}$  der  $n$ -dimensionale Zustands-,  $\underline{u}$  der  $p$ -dimensionale Eingangs-,  $\underline{y}$  der  $q$ -dimensionale meßbare Ausgangsvektor und  $t$  die Zeit. Die  $(n,1)$ - bzw.  $(q,1)$ -dimensionalen Systemvektoren  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$  und  $\underline{h}(\underline{x}, \underline{u}, t)$  seien hinreichend oft nach  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$  und  $t$  differenzierbar.

Das Beobachtungsproblem entspringt unmittelbar aus dem Steuerungsproblem. Da die Steuerfunktion  $\underline{u}(t)$ , die ein System in endlicher Zeit von dem beliebigen Anfangszustand  $\underline{x}_0$  in den vorgegebenen Endzustand  $\underline{x}_e$  überführt, von dem Anfangswert  $\underline{x}_0$  abhängt, muß dieser bekannt sein, um  $\underline{u}(t)$  im realen System erzeugen zu können [10]. Nun sind aber in den seltensten Fällen alle Zustandsvariablen meßbar. Zwangsläufig erhebt sich dann die Frage, ob aus der Messung von  $\underline{y}(t)$  über einen endlichen Zeitraum der Anfangszustand  $\underline{x}_0$  ermittelt werden kann. Ist dies der Fall, so ist der Zustand  $\underline{x}_0$  beobachtbar.

Bei der vollständigen Beobachtbarkeit linearer Systeme handelt es sich stets um globale Beobachtbarkeit, d.h. wird ein lineares System beobachtbar genannt, so ist *jeder* Zustand des Zustandsraums beobachtbar. Anders verhält sich dies im Nichtlinearen. Dort wird - ähnlich wie bei der Stabilität [9;19;38;59] und der Steuerbarkeit [7;18;39;45;47;56] - zwischen der *lokalen* und der *globalen* Systemeigenschaft unterschieden.

Der folgende Abschnitt 2.1 gibt einen groben Überblick über die aus der einschlägigen Literatur bekannten lokalen und globalen Beobachtbarkeitskriterien. Er ist jedoch für das Verständnis der weiteren Ausführungen nicht erforderlich.

Anmerkung:

Unter der *globalen Beobachtbarkeit* wird in dieser Arbeit die Beobachtbarkeit im gesamten Zustandsraum verstanden, wogegen in der Literatur (siehe etwa [5]) die *globale Beobachtbarkeit* als Gegenstück zur *lokalen Beobachtbarkeit* angesehen wird und sich deshalb auch auf Bereiche bezieht, die nicht den ganzen Zustandsraum umfassen. Auf diese "Beobachtbarkeit im großen" wird im übernächsten Abschnitt näher eingegangen.

## 2.1 LOKALE UND GLOBALE BEOBACHTBARKEITSKRITERIEN AUS DER LITERATUR

Die *lokale* Beobachtbarkeit gibt Aufschluß über die Beobachtbarkeit von Zuständen eines nichtlinearen Systems in der Umgebung eines Punktes. Hierfür werden in der Literatur verschiedene Analysemethoden angegeben, welche allesamt auf einer Linearisierung beruhen:

- LEE und MARKUS [39] erhalten notwendige und hinreichende Bedingungen in der Umgebung eines stationären Punktes, indem sie das System linearisieren und das KALMAN-Kriterium [21] anwenden.
- Die Beobachtbarkeitsbedingungen von ROITENBERG [53] basieren auf der Konstruktion einer Ljapunow-Funktion für die um eine Modelltrajektorie linearisierte Differentialgleichung für die Abweichung zwischen System- und Modellzustand.
- HWANG und SEINFELD [20] wenden die für lineare, zeitvariante Systeme geltenden Beobachtbarkeitsbedingungen auf das um eine Referenztrajektorie linearisierte System an. Aus der linearisierten Meßgleichung erhalten sie einen Zusammenhang zwischen den auf die Referenzgrößen bezogenen Abweichungen des Meßsignals und des Anfangszustandes. Unter bestimmten Bedingungen ist die eindeutige Umkehrbarkeit dieses Zusammenhangs und damit die Beobachtbarkeit gesichert.

Weil die lokale Beobachtbarkeit nur Auskunft über die Beobachtbarkeit in der Umgebung eines Punktes gibt, ist sie kaum von praktischem Nutzen, zumal über die Größe dieser Umgebung nichts ausgesagt werden kann und selbst ein in jedem Punkt des Zustandsraums

lokal beobachtbares System noch nicht global beobachtbar zu sein braucht [5]. Weit mehr Aufschluß gibt eine *globale* Beobachtbarkeitsanalyse, die jedoch erheblich schwieriger und aufwendiger durchzuführen ist als eine lokale Überprüfung. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werden im folgenden lediglich das Grundprinzip globaler Analyseverfahren erläutert und die wichtigsten Literaturquellen angegeben. Näheres kann in den Originalaufsätzen nachgelesen werden.

Die globale Beobachtbarkeitsanalyse basiert auf einer aus der Meßgleichung hergeleiteten Abbildung zwischen den Anfangszuständen und den Meßinformationen des zu beobachtenden Systems. Viele Verfahren (siehe etwa [4;33;34]) bedienen sich dazu einer hinreichend großen Anzahl totaler zeitlicher Ableitungen der Meßgleichung. Weitere solcher möglichen Abbildungen sind in [5] zusammengefaßt.

Die anschließende Frage nach der eindeutigen Umkehrbarkeit dieser "Beobachtbarkeitsabbildungen" ist ein rein mathematisches Problem.

- PALAIS [52] sowie WU und DESOER [61] geben strenge Bedingungen für eine eindeutige Umkehrbarkeit an, welche nach [5] nur hinreichend sind: Neben dem Höchststrang für die Jacobi-Matrix der Abbildung im gesamten Zustandsraum muß noch eine schwierig zu überprüfende Monotonie-Bedingung erfüllt sein (siehe [5;63]).
- Eine Modifikation dieser Bedingungen wird von OHTSUKI und WATANABE in [51] vorgestellt. Die Autoren zeigen, daß die schwer überprüfbare Monotonie-Bedingung immer dann erfüllt ist, wenn die Jacobi-Matrix der Abbildung gleichmäßig positiv (oder negativ) definit ist.
- KOU, ELLIOTT und TARN geben in [34] ein etwas praktikableres Kriterium für die eindeutige Umkehrbarkeit der "Beobachtbarkeitsabbildung" an, welches auf einer Untersuchung der Hauptabschnittsdeterminanten der Jacobi-Matrix basiert.

## 2.2 DIE BEOBACHTBARKEIT IM GROSSEN

So bemerkenswert die *globale* Beobachtbarkeit vom theoretischen Standpunkt ist, für die Praxis ist sie ebenso unbefriedigend wie die *lokale* in der Umgebung eines Punktes, da ihre Analyse viel zu strenge und schwer überprüfbare Forderungen an das zu beobachtende

System stellt. Der praktische Regelungstechniker dürfte eher an der Frage interessiert sein, ob das System in einem für den realistischen Betriebsfall in Betracht kommenden Gebiet des Zustandsraums beobachtbar ist. Diese Frage kann sicherlich häufiger bejaht werden als die nach der globalen Beobachtbarkeit und führt zu dem neuen Begriff der "Beobachtbarkeit im großen":

Das nichtlineare, zeitvariante System (2.1) heiße im Gebiet  $G$  des Zustandsraums und im Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ ,  $t_0 < t_1 \leq \infty$ , *vollständig beobachtbar im großen*, wenn der Anfangszustand  $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$  jeder Trajektorie  $\underline{x}(t)$ , die für  $t \in [t_0, t_1]$  ganz in  $G$  verläuft, eindeutig aus der Kenntnis des Systemeingangs  $\underline{u}(t)$  und des Systemausgangs  $\underline{y}(t)$  in dem Intervall  $[t_0, t_1]$  bestimmt werden kann.

Mit anderen Worten bedeutet dies: Sofern die Trajektorien während des Intervalls  $[t_0, t_1]$  innerhalb des Gebietes  $G$  verlaufen, muß aus der Identität zweier Ausgangsgrößen  $\underline{y}(t)$  und  $\underline{y}'(t)$  bei gleicher Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  eindeutig die Identität der Anfangszustände  $\underline{x}(t_0)$  und  $\underline{x}'(t_0)$  folgen. Dann ist das System in  $G$  vollständig beobachtbar im großen.

Bis auf die Beschränkung der Trajektorie  $\underline{x}(t)$  auf das Gebiet  $G$ , welche nebenbei bemerkt auch bei der in [55] und [66] definierten "Steuerbarkeit im großen" auftritt, stimmt die obige Definition mit der für lineare, zeitvariante Systeme überein [14]. Weshalb die Systemtrajektorie  $\underline{x}(t)$  das Gebiet  $G$  während des Intervalls  $[t_0, t_1]$  nicht verlassen darf, wird an späterer Stelle noch verdeutlicht.

Die Beobachtbarkeit in Teilgebieten des Zustandsraums wird zwar verschiedentlich in der Literatur behandelt, jedoch tritt dort die oben angeführte Trajektorienbedingung nicht auf. Die angegebenen Kriterien beruhen wie die für die globale Eigenschaft auf der eindeutigen Umkehrbarkeit einer Abbildung zwischen den Anfangszuständen und den Meßinformationen des Systems, wobei diese Umkehrbarkeit jedoch nur in einem abgrenzbaren Teilgebiet des Zustandsraums eindeutig zu sein braucht. In [5] werden Bedingungen angegeben, die auf eine Arbeit von NIKAIDO [50] zurückgehen und mit Hilfe derer die Beobachtbarkeit in *konvexen* Teilgebieten des Zustandsraums überprüft werden kann. Dabei wird die Zeitabhängigkeit der Ein-

gangsgröße  $\underline{u}(t)$  als bekannt vorausgesetzt, denn wie die globalen Beobachtbarkeitskriterien bezieht sich auch dieses Kriterium auf *autonome* Systeme, d.h. auf Systeme, in deren Zustandsdifferentialgleichung nur der Zustandsvektor  $\underline{x}$  und die Zeit  $t$ , nicht jedoch die Eingangsgröße  $\underline{u}$ , explizit auftreten. Dies hat den schwerwiegenden Nachteil, daß das Kriterium für jede in Frage kommende Steuerfunktion  $\underline{u}(t)$  erneut überprüft werden muß, denn die Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme hängt im allgemeinen von der Zeitfunktion  $\underline{u}(t)$  ab [16;17;49], wie später noch deutlich wird.

Von GAUTHIER und BORNARD wird in [16] ein Kriterium angegeben, welches eine Beobachtbarkeitsaussage ermöglicht, ganz unabhängig vom zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$ . Jedoch eignet sich dieses Kriterium nur für Systeme, die linear von der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  abhängen. Gemäß [16] sind solche Systeme für jede beliebige Zeitfunktion  $\underline{u}(t)$  in demjenigen Gebiet des Zustandsraums beobachtbar, in dem sie umkehrbar eindeutig auf eine speziell definierte Normalform transformiert werden können (siehe auch [30]).

Das im Abschnitt 2.7 dieser Arbeit angegebene Kriterium läßt sich dagegen auf Systeme anwenden, die auch von  $\underline{u}$  nichtlinear abhängen. Die Anregungen hierfür stammen aus den Arbeiten von GRIFFITH und KUMAR [17] sowie ZEITZ [64]. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber den Kriterien aus [5] besteht darin, daß hier die Eingangsgröße  $\underline{u}$  explizit mitberücksichtigt wird, ohne daß deren Zeitverlauf von vornherein bekannt sein muß. Dafür muß jedoch gewährleistet sein, daß die Trajektorie des zu beobachtenden Systems während des betrachteten Zeitintervalls  $[t_0, t_1]$  ganz innerhalb eines gewissen später noch spezifizierten Gebietes  $G$  des Zustandsraums verläuft.

### 2.3 DEFINITION DER "NICHTLINEAREN BEOBACHTBARKEITSNORMALFORM (NBKNF)"

Vor der Formulierung des neuen Kriteriums für die Beobachtbarkeit im großen soll zunächst eine nichtlineare kanonische Form definiert werden, welche die Beobachtbarkeitseigenschaft unmittelbar erkennen läßt und deshalb für das im Abschnitt 2.7 angegebene Kriterium von zentraler Bedeutung ist. Da diese Form als eine Verallgemeinerung der linearen Beobachtbarkeitsnormalform [1] aufgefaßt werden kann, wird sie im folgenden als die "Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF)" bezeichnet. Um die Betrachtungen mög-

lichst einfach und übersichtlich zu halten, wird sie zunächst für Systeme mit einer Ausgangsgröße ( $q=1$ ) definiert. Sie ergibt sich durch Erweiterung der in [64] eingeführten Form auf mehrere Eingangsgrößen zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} \\ \dot{\bar{x}}_n \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ -\bar{a}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\bar{f}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)}, \quad \bar{a} \text{ beliebig,} \quad (2.2a)$$

$$y = \underbrace{\bar{x}_1}_{\bar{h}(\bar{x})}. \quad (2.2b)$$

Anmerkung:

Hier wie auch im folgenden wird die  $n$ -malige Differenzierbarkeit der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  nach der Zeit vorausgesetzt, obwohl dies für die Beobachtbarkeitsanalyse konkreter Systeme (siehe Abschnitt 2.8) meist nicht erforderlich ist.

Um die Konsistenz mit der Form (2.2) zu wahren, wird die NBKNF mit *mehreren* Ausgangsgrößen in  $q$  verkoppelte Subsysteme mit den Ordnungen  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , eingeteilt, von denen jedes nur *eine* Ausgangsgröße besitzt und die Struktur der Form (2.2) aufweist. Selbstverständlich muß dabei die Beziehung

$$\sum_{j=1}^q n_j = n \quad (2.3)$$

erfüllt sein. Werden zur Erleichterung der Systemdarstellung noch die natürlichen Zahlen

$$m_j := \sum_{v=1}^j n_v, \quad m_0 := 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (2.4)$$

und

$$m := \max_{v=1, \dots, q} n_v \quad (2.5)$$

eingeführt, so läßt sich die NBKNF im Falle mehrerer Ausgangsgrößen definieren als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_q \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{f}_1(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) & (v_1) \\ \bar{f}_2(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) & (v_2) \\ \vdots & \\ \bar{f}_q(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) & (v_q) \end{bmatrix}}_{\bar{f}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)} \quad , \quad (2.6a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{h}_1(\bar{x}) \\ \bar{h}_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \bar{h}_q(\bar{x}) \end{bmatrix}}_{\bar{h}(\bar{x})} \quad , \quad (2.6b)$$

wobei das  $j$ -te Subsystem ( $j=1, \dots, q$ ) den Aufbau

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{m_j-1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_j} \end{bmatrix}}_{\dot{\bar{x}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{m_{j-1}+2} \\ \bar{x}_{m_{j-1}+3} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_j} \\ -\bar{a}_j(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) & (v_j) \end{bmatrix}}_{\bar{f}_j(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)} \quad , \quad n_j \leq v_j \leq m \quad , \quad (2.6c)$$

$$y_j = \underbrace{\bar{x}_{m_{j-1}+1}}_{\bar{h}_j(\bar{x})} \quad (2.6d)$$

besitzt, wie später noch deutlich werden wird. Auf die Wahl der Subsystemordnungen  $n_j$  wird im Abschnitt 2.6 näher eingegangen.

Ein wesentlicher Unterschied dieser NBKNF gegenüber der wohlbekannteren linearen Beobachtbarkeitsnormalform [1] sticht sofort ins Auge: Die letzte Zustandsdifferentialgleichung des Systems (2.2a) bzw. des Subsystems (2.6c) hängt von den ersten  $n$  bzw.  $v_j$  zeitlichen Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  ab. Dennoch ist die Bezeichnung "Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform" durchaus gerechtfertigt, denn die Systemdarstellungen (2.2) und (2.6) lassen die Beobachtbarkeitseigenschaft unmittelbar erkennen. Sind nämlich von der NBKNF (2.2) der Zeitverlauf der Meßgröße  $y(t)$  sowie dessen zeitliche Ableitungen bekannt, so kann aufgrund des einfachen Aufbaus der Ausgangsgleichung (2.2b) sowie der ersten  $n-1$  Zustandsdifferentialgleichungen des Systems (2.2a) in eindeutiger Weise auf die Zeitverläufe sämtlicher Zustandsgrößen  $\bar{x}_i(t)$  und damit auch auf die Anfangswerte  $\bar{x}_{i0} = \bar{x}_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , geschlossen werden. Entsprechendes gilt für die NBKNF (2.6) bei Kenntnis der Zeitverläufe der Meßgrößen  $y_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, q$ ; das  $j$ -te Subsystem (2.6c) ist also über die  $j$ -te Ausgangsgröße  $y_j$  beobachtbar. Wie die in [64] angegebene Normalform weist auch die NBKNF (2.2) bzw. (2.6) die folgenden drei charakteristischen Eigenschaften auf:

- *Konsistenz*: Die lineare Beobachtbarkeitsnormalform ist einer Systemdarstellung äquivalent, die als Spezialfall in der NBKNF enthalten ist. Für Systeme mit einer Ein- und einer Ausgangsgröße wird dies in [64] gezeigt, der allgemeinere Beweis für den Mehrgrößenfall ist im Anhang A angegeben.
- *Streng strukturelle Beobachtbarkeit*: Diese Eigenschaft bezieht sich auf die spezielle Struktur der  $(nq, n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix (Definition s. Abschnitt 2.5) der NBKNF, welche im Falle  $q = 1$  mit der  $(n, n)$ -Einheitsmatrix identisch ist [64] und im Falle  $q > 1$  alle  $n$  Zeilen dieser Einheitsmatrix enthält [DA4].
- *Äquivalenz*: Es läßt sich für eine gewisse Systemklasse eine umkehrbar eindeutige Transformation angeben, die ein gegebenes System in die NBKNF abbildet und umgekehrt (s. Abschnitt 2.4).

Als nächstes muß die Transformation auf NBKNF angegeben werden. Dies ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

## 2.4 DIE TRANSFORMATION AUF NBKNF UND IHRE JACOBI-MATRIX

Die Abbildungsvorschrift zur Überführung eines nichtlinearen, zeitvarianten Systems in die NBKNF läßt sich in einfacher Weise angeben. Für Systeme mit einer Ausgangsgröße lautet sie

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} h(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ M h(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ M^{n-1} h(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

(n-1)  
q(\underline{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)

wobei das Symbol M für einen auf die skalare Funktion  $h(\underline{x}, \underline{u}, t)$  anzuwendenden Differentialoperator steht, der die totale zeitliche Ableitung des Operanden bewirkt. Es gilt also bei 1-facher Anwendung des Operators M auf  $h(\underline{x}, \underline{u}, t)$

$$Mh := \frac{\partial h}{\partial t} + \left[ \frac{\partial h}{\partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \left[ \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f} \quad (2.8a)$$

und bei i-facher Anwendung

$$M^i h := M\{M^{i-1} h\} = \quad (2.8b)$$

$$= \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial t} + \left[ \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \dots + \left[ \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial \underline{u}} \right]^T \binom{i}{i-1} \underline{u} + \left[ \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f},$$

$i = 2, \dots, n-1,$

wenn statt  $\dot{\underline{x}}$  die rechte Seite  $\underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$  der Zustandsdifferentialgleichung (2.1a) eingesetzt wird. Mit der Abkürzung

$$\hat{\underline{u}}_i = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \dot{\underline{u}} \\ \vdots \\ \binom{i-1}{i-1} \underline{u} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

läßt sich die Operatordefinition (2.8) kompakter in der Form

$$M^0 h := h, \quad (2.10a)$$

$$M^i h := \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial t} + \left[ \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial \hat{u}_i} \right]^T \hat{u}_i + \left[ \frac{\partial M^{i-1} h}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}, \quad (2.10b)$$

$i = 1, \dots, n,$

schreiben.

Die Abbildungsvorschrift zur Überführung nichtlinearer, zeitvarianter Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen in die NBKNF ergibt sich durch Verallgemeinerung der Abbildung (2.7) zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_q \end{bmatrix}}_{\bar{\underline{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(\underline{x}, \hat{u}_{n_1}, t) \\ q_2(\underline{x}, \hat{u}_{n_2}, t) \\ \vdots \\ q_q(\underline{x}, \hat{u}_{n_q}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)} \quad (2.11a)$$

mit  $\hat{u}_i$  gemäß Gl. (2.9) und  $m$  gemäß Gl. (2.5). Dabei entspricht die Transformationsgleichung für das  $j$ -te Subsystem wieder derjenigen für Systeme mit einer Ausgangsgröße:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_{m_{j-1}+1} \\ \bar{x}_{m_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_j} \end{bmatrix}}_{\bar{\underline{x}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_j(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ M h_j(\underline{x}, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ M^{n_j-1} h_j(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{q}_j(\underline{x}, \hat{u}_{n_j}, t)} \quad (2.11b)$$

Die Funktion  $h_j(\underline{x}, \underline{u}, t)$  stellt dabei die rechte Seite der  $j$ -ten Ausgangsgleichung

$$y_j = h_j(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (2.12)$$

des Systems (2.1) dar.

Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, werden die folgenden Ausführungen dieses Abschnitts auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen bezogen. Dies ist insofern zulässig, als der Fall mit einer Ausgangsgröße im Fall mit mehreren Ausgangsgrößen enthalten ist. Die Festlegung der noch unbekannt Dimensionen  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , wird dabei weiterhin zurückgestellt.

Damit sich das Originalsystem (2.1) umkehrbar eindeutig in die NBKNF (2.6) überführen läßt, muß die Inverse

$$\underline{x} = \tilde{q}(\underline{\bar{x}}, \hat{u}_m, t) \quad (2.13)$$

der Abbildung (2.11) existieren. Dies geht auch deutlich aus der Berechnungsvorschrift für die letzten Systemvektorkomponenten  $-\bar{a}_j$  der Subsysteme (2.6c) hervor. Diese lautet nämlich

$$-\bar{a}_j(\underline{\bar{x}}, \hat{u}_{v_j}^{(v_j)}, \underline{u}, t) = M^{n_j} h_j(\underline{x}, \underline{u}, t) \Big|_{\underline{x} = \tilde{q}(\underline{\bar{x}}, \hat{u}_m, t)}, \quad (2.14)$$

$j = 1, \dots, q.$

Die inverse Abbildung (2.13) wird darin benötigt, um die  $\underline{x}$ -Abhängigkeit der Funktion  $M^{n_j} h_j(\underline{x}, \underline{u}, t)$  zu eliminieren.

Um eine Aussage über das Existenzgebiet der Transformation machen zu können, muß die rein mathematische Frage geklärt werden, in welchem Gebiet  $G$  des Zustandsraums die Abbildung

$$\underline{\bar{x}} = q(\underline{x}, \hat{u}_m, t) \quad (2.15)$$

bezüglich  $\underline{x}$  eindeutig umkehrbar ist. Die NBKNF existiert dann im Bildgebiet  $\bar{G}$  von  $G$ .

Anmerkung:

Es sei darauf hingewiesen, daß wegen der Abhängigkeit der Abbildung (2.15) von der Zeit  $t$  sowie von der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  und deren zeitlichen Ableitungen auch die eindeutige Umkehrbarkeit und damit das Bildgebiet  $\bar{G}$  von diesen Größen abhängen kann. Daß diese Abhängigkeit jedoch keineswegs immer vorhanden sein muß, zeigen die Beispiele des Abschnitts 2.8, wo die eindeutige Umkehrbarkeit für jedes beliebige  $\underline{u}$  und  $t$  gesichert ist und das Gebiet  $\bar{G}$  konstant bleibt.

Für die im Abschnitt 2.8 behandelten Beispiele wird auf die Anwendung irgendwelcher aus der Literatur bekannter Umkehrbarkeitskriterien verzichtet, zumal die "bloße" Existenz der inversen Abbildung noch nichts darüber aussagt, ob die Abbildung (2.15) *explizit* nach dem Vektor  $\underline{x}$  aufgelöst werden kann. Ist jedoch eine Auflösung möglich, so beantwortet sich die Frage nach dem Gebiet, in dem die Abbildung (2.15) eindeutig umkehrbar ist, von selbst.

Da die Jacobi-Matrix

$$\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t) = \frac{\partial q(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad h_1 \right]^T \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad M h_1 \right]^T \\ \vdots \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad M^{n_1-1} h_1 \right]^T \\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad h_q \right]^T \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad M h_q \right]^T \\ \vdots \\ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \quad M^{n_q-1} h_q \right]^T \end{bmatrix} \quad *) \quad (2.16)$$

der Abbildung (2.15) für die nachfolgende Festlegung der Subsystemordnungen  $n_j$  von grundlegender Bedeutung ist, erweist es sich als zweckmäßig, sie in einer etwas anderen Form anzuschreiben. Dazu wird für die Zeilenvektoren von  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  die Umformung

\*) Unter den Vektoren  $\frac{\partial}{\partial \underline{x}} M^i h_j$ ,  $i=0, \dots, n_j-1$ ,  $j=1, \dots, q$ , werden Spaltenvektoren verstanden.

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial}{\partial \underline{x}} M^i h_j \right)^T &= \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} M(M^{i-1} h_j) \right]^T = \\
 &= \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial t} \right) \right]^T + \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\{ \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \hat{u}_i} \right)^T \dot{\underline{u}}_i \right\} \right]^T + \\
 &+ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\{ \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \underline{f} \right\} \right]^T = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T + \dot{\underline{u}}_i^T \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{u}_i} \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right) \right]^T + \\
 &+ \underline{f}^T \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right) + \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} , \tag{2.17}
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, q ,$$

vorgenommen, bei der die im Anhang B.2 angegebene Differentiationsregel anzuwenden ist. Wird zur besseren Übersichtlichkeit ein neuer Differentialoperator  $\hat{M}$  eingeführt, dessen Wirkung auf einen von  $\underline{x}$ ,  $\hat{u}_i$  und  $t$  abhängigen Zeilenvektor  $\underline{z}^T(\underline{x}, \hat{u}_i, t)$  aus der Definitionsgleichung

$$\hat{M} \underline{z}^T := \frac{\partial}{\partial t} \underline{z}^T + \dot{\underline{u}}_i^T \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{u}_i} \underline{z} \right]^T + \underline{f}^T \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{z} + \underline{z}^T \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \tag{2.18}$$

hervorgeht, so folgt aus der letzten Beziehung

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial M^i h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T &= \hat{M} \left( \frac{\partial M^{i-1} h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T = \hat{M}^2 \left( \frac{\partial M^{i-2} h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T = \\
 &= \dots = \hat{M}^i \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T , \quad i = 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, q.
 \end{aligned}$$

Damit läßt sich die Jacobi-Matrix  $Q(\underline{x}, \hat{u}_m, t)$  in der Form

$$\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hat{M} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \hat{M}^{n_1-1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hline \vdots \\ \hline \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hat{M} \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \hat{M}^{n_q-1} \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

darstellen.

## 2.5 DEFINITION DER BEOBACHTBARKEITSMATRIX

Von den Subsystemordnungen  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , der NBKNF (2.6) ist bisher nur bekannt, daß sie der Beziehung (2.3) genügen müssen. Ihre genaue Festlegung basiert auf der Untersuchung einer speziellen Matrix, der *Beobachtbarkeitsmatrix* für nichtlineare, zeitvariante Systeme. Für Systeme mit einer Ein- und Ausgangsgröße wurde sie bereits von M. ZEITZ in [64] eingeführt. Während sie dort die Dimension  $(n,n)$  hat, handelt es sich im Mehrgrößenfall ( $q > 1$ ) um eine  $(nq,n)$ -Matrix, welche hier definiert wird als

$$\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t) := \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hline \hat{M} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \hat{M} \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hline \vdots \\ \hline \hat{M}^{n-1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \hat{M}^{n-1} \left(\frac{\partial h_q}{\partial \underline{x}}\right)^T \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

wobei  $\hat{M}$  den in Gl. (2.18) definierten Differentialoperator darstellt. Daß diese Matrix die aus dem Linearen bekannte Beobachtbarkeitsmatrix [10]

$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C} \quad \underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C} \quad \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

als Spezialfall enthält, wird deutlich, wenn in Gl. (2.20) für die nichtlinearen Funktionen  $h_j(\underline{x}, \underline{u}, t)$  die linearen Beziehungen  $\underline{c}_j^T \underline{x} + \underline{d}_j^T \underline{u}$  eingesetzt werden. Es gilt nämlich

$$\hat{M}^i \left( \frac{\partial (\underline{c}_j^T \underline{x} + \underline{d}_j^T \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right)^T = \hat{M}^i \underline{c}_j^T = \underline{c}_j^T \underline{A}^i,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, q.$$

Ein Vergleich der  $(nq, n)$ -Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  aus Gl. (2.20) mit der  $(n, n)$ -Jacobi-Matrix  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  aus Gl. (2.19) läßt den folgenden Zusammenhang erkennen: Für Systeme mit einer Ausgangsgröße ( $q=1$ ) gilt die Identität

$$\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t) = \underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \hat{M} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)^T \\ \vdots \\ \hat{M}^{n-1} \left(\frac{\partial h}{\partial \underline{x}}\right)^T \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

während im Falle mehrerer Ausgangsgrößen ( $q > 1$ ) sämtliche Zeilenvektoren von  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  in der Matrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  enthalten sind.

An dieser Stelle scheint es angebracht, an das gesteckte Ziel zu erinnern: Es sind die  $q$  Dimensionen  $n_j$  der Subsysteme so zu bestimmen, daß die Abbildung (2.11) bzw. (2.15) umkehrbar eindeutig ist. Dies setzt aber voraus, daß die Zeilenvektoren der Jacobi-Matrix  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  gemäß Gl. (2.19) linear unabhängig sind. Ob bzw. in welchem Gebiet diese Forderung erfüllt ist, hängt im Falle  $q > 1$  davon ab, aus welchen  $n$  der insgesamt  $nq$  Zeilenvektoren von  $\underline{Q}_B$  die Matrix  $\underline{Q}$  aufgebaut wird. Ist dies entschieden, so sind auch die Ordnungen  $n_j$  festgelegt.

Es ist deshalb - entsprechend der Vorgehensweise im Linearen - die  $(nq, n)$ -Matrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  gemäß Gl. (2.20) bezüglich linear unabhängiger Zeilenvektoren zu untersuchen, wofür im folgenden Abschnitt eine Strategie angegeben wird.

## 2.6 EINE AUSWAHLSTRATEGIE FÜR LINEAR UNABHÄNGIGE ZEILENVEKTOREN AUS DER BEOBACHTBARKEITSMATRIX

Das Problem der Wahl linear unabhängiger Zeilenvektoren aus der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  ist formal identisch mit dem in [56] behandelten, wo es darum geht,  $n$  linear unabhängige Spaltenvektoren aus der  $(n, np)$ -dimensionalen *Steuerbarkeitsmatrix* auszuwählen. Aus diesem Grunde kann die dort vorgeschlagene *Auswahl-*

*strategie* auch für das vorliegende Beobachtungsproblem herangezogen werden. Eine Auswahl nach der in [56] beschriebenen Strategie erweist sich als vorteilhaft, weil sie etwa gleich große Subsysteme erzeugt (siehe auch [43]). Dies hat zur Folge, daß die Meßinformationen der  $q$  Ausgangsgleichungen (2.12) möglichst "gleichmäßig" ausgenutzt werden.

Die Untersuchung der Zeilen von  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  erfolgt von oben nach unten, also genau in der Reihenfolge, wie sie in der Beobachtbarkeitsmatrix (2.20) auftreten. In die Matrix  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$ , welche die Bedeutung einer *Auswahlmatrix* hat, wird jeder Zeilenvektor übernommen, der sich als linear unabhängig von allen oberhalb von ihm stehenden erweist. Der jeweils *erste* aus  $h_j(\underline{x}, \underline{u}, t)$  erzeugte, *linear abhängige* Zeilenvektor wird mit  $\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  bezeichnet. Wie im Anhang C gezeigt wird, sind dann auch alle weiteren, auf der Basis von  $h_j(\underline{x}, \underline{u}, t)$  erzeugten Zeilenvektoren von allen oberhalb davon stehenden Zeilenvektoren linear abhängig.

Lassen sich auf diese Weise  $n$  linear unabhängige Zeilenvektoren in der Matrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  auffinden, dann zeigt die Auswahlmatrix  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  (nach entsprechendem Umsortieren der Zeilenvektoren) den Aufbau, wie er in Gl. (2.19) dargestellt ist. Damit sind auch die NBKNF-Subsystemordnungen  $n_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , festgelegt, und die Bedingung (2.3) ist zwangsläufig erfüllt.

Sollte dies nicht gelingen, so ist es entgegen den Verhältnissen im Linearen (siehe [43]) möglich, daß man durch Umordnen der Zeilenvektoren von  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  und erneuter Durchführung des Verfahrens dennoch zu  $n$  linear unabhängigen Zeilenvektoren gelangt. Erst wenn man auf diese Weise alle Möglichkeiten ausgeschöpft hat, ohne eine reguläre Auswahlmatrix zu finden, kann die Untersuchung abgebrochen werden. Es existiert dann keine umkehrbar eindeutige Abbildung, die das betrachtete System in die NBKNF (2.6) überführt.

Umgekehrt kann durchaus der Fall eintreten, daß mehrere verschiedene Anordnungen von Zeilenvektoren aus  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  auf reguläre Auswahlmatrizen  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  führen. Da sich dabei die Gebiete, für die  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  regulär ist, im allgemeinen unterscheiden, ist es naheliegend, sich die für das vorliegende Problem günstigste Konstellation auszuwählen.

Selbstverständlich treten die hier erwähnten Freiheiten in der Wahl der Matrix  $\underline{Q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$  nur im Falle  $q > 1$ , also bei Systemen mit mehreren Ausgangsgrößen, auf. Im Falle  $q = 1$  ist die Matrix  $\underline{Q}$  eindeutig festgelegt und hat den Aufbau (2.21).

## 2.7 EIN HINREICHENDES KRITERIUM FÜR DIE BEOBACHTBARKEIT IM GROSSEN

Nachdem die NBKNF definiert ist und die Transformationsgleichungen angegeben sind, läßt sich ein hinreichendes Kriterium für die vollständige Beobachtbarkeit im großen formulieren, welches im Unterschied zu den meisten aus der Literatur bekannten Kriterien die Systemeingangsgröße  $\underline{u}$  explizit mitberücksichtigt. Auch wenn die Überprüfung des nachfolgend angegebenen Kriteriums auf die gewohnten Umkehrbarkeitsuntersuchungen führt, so wird sie spätestens im Abschnitt 3.3.4 ihre Rechtfertigung erfahren. Dort wird nämlich gezeigt, daß das Erfülltsein des Kriteriums in einem gewissen Gebiet notwendige Voraussetzung für die Existenz des im 3. Kapitel vorgestellten Beobachters ist.

Für die folgenden Überlegungen sei vorausgesetzt, daß das zu beobachtende System (2.1) eindeutige Lösungen besitzt, d.h. daß zu jeder Eingangsfunktion  $\underline{u}(t)$  und Anfangsbedingung  $\underline{x}(t_0)$  nur eine Ausgangsfunktion  $\underline{y}(t)$  gehört. Bei praktischen Systemen ist dies im allgemeinen erfüllt. Dann läßt sich das hinreichende Kriterium für die vollständige Beobachtbarkeit im großen wie folgt formulieren:

Das nichtlineare, zeitvariante System

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) , \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 , \\ \underline{y} &= \underline{h}(\underline{x}, \underline{u}, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

ist in dem Gebiet  $G$  des Zustandsraums und im Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ ,  $t_0 < t_1 \leq \infty$ , *vollständig beobachtbar im großen*, wenn

- die Abbildung (2.11), die das System (2.1) in die NBKNF (2.6) überführt, in  $G$  bezüglich des Zustandes *umkehrbar eindeutig* ist und
- die Systemtrajektorie  $\underline{x}(t)$  während des gesamten Intervalls  $[t_0, t_1]$  innerhalb von  $G$  verläuft.

Das Gebiet  $G$  heiße Beobachtbarkeitsgebiet.

Es bedarf noch einer näheren Erläuterung, weshalb das Beobachtbarkeitsgebiet  $G$  während des Zeitintervalls  $[t_0, t_1]$  nicht verlassen werden darf: Aufgrund der eindeutigen Umkehrbarkeit der Transformation wird jeder Trajektorie  $\bar{x}(t)$  aus dem Gebiet  $\bar{G}$  in eindeutiger Weise eine Trajektorie  $x(t)$  im Gebiet  $G$  zugeordnet. Werden jedoch die Gebiete  $\bar{G}$  bzw.  $G$  während des Intervalls  $[t_0, t_1]$  von den Trajektorien  $\bar{x}(t)$  bzw.  $x(t)$  verlassen, so geht der umkehrbar eindeutige Zusammenhang verloren, weil außerhalb der Gebiete *ein* Bildpunkt beispielsweise *zwei* Urbilder haben kann, von denen jeder zu einer anderen Trajektorie gehört. Somit kann nicht mehr in eindeutiger Weise auf den Anfangswert  $x_0 = x(t_0)$  der ursprünglichen Trajektorie  $x(t)$  geschlossen werden, womit das Ziel der Beobachtungsaufgabe verfehlt ist. Aus der Beobachtbarkeit der NBKNF in  $\bar{G}$  folgt also die Beobachtbarkeit des zugehörigen Originalsystems in  $G$  nur dann, wenn die Trajektorien  $\bar{x}(t)$  bzw.  $x(t)$  die Gebiete  $\bar{G}$  bzw.  $G$  nicht verlassen.

An dieser Stelle ist einzusehen, weshalb auch die hier definierte Beobachtbarkeit im großen zumindest mittelbar von der Eingangsgröße  $u(t)$  abhängig ist. Von der Steuergröße  $u(t)$  kann es nämlich ganz wesentlich abhängen, ob die Trajektorie  $x(t)$  in dem Gebiet  $G$  bleibt oder nicht.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß das angegebene Kriterium *nur hinreichend*, jedoch nicht notwendig für die Beobachtbarkeit im großen ist. Es ist nämlich durchaus denkbar, daß ein nichtlineares System in einem bestimmten Gebiet beobachtbar ist, ohne daß es sich dort auf NBKNF transformieren läßt. Dies liegt darin begründet, daß bei dem angegebenen Kriterium die *spezielle* Abbildung (2.11) herangezogen wird, welche auf den mehrfachen totalen Ableitungen der Ausgangsgleichungen (2.12) nach der Zeit beruht. Es sind aber neben dieser auch noch andere "Beobachtbarkeitsabbildungen" zwischen den Anfangszuständen und den Meßinformationen des zu beobachtenden Systems möglich, von denen einige in [5] angeführt werden.

## 2.8 BEOBSACHTBARKEITSANALYSE VERSCHIEDENER SYSTEME

Das oben angegebene Beobachtbarkeitskriterium soll zum Abschluß dieses Kapitels auf drei Beispiele angewandt werden.

### 2.8.1 Räuber-Beute-Beziehung

Beim ersten Beispiel handelt es sich um die bekannte Räuber-Beute-Beziehung, ein nichtlineares, zeitinvariantes Populationsmodell 2. Ordnung. Mit den Zustandsgrößen  $x_1$  und  $x_2$  für die normierten Anzahlen von Beutetieren und Räubern lautet die Zustandsdarstellung

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ cx_1x_2 - dx_2 - fx_2u \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2 \geq 0, \quad u \geq 0, \quad (2.22a)$$

wenn für die Räuber eine zu ihrer Anzahl proportionale Abschußquote  $-fx_2u$  zugelassen und überdies angenommen wird, daß sich die Räuber ausschließlich von der Beutetierart ernähren [11;DA2]. Die Geburten- bzw. Todesraten der Tierarten sind in den konstanten Koeffizienten  $a, b, c, d$  und  $f$  enthalten. Die Anzahl der Räuber sei ständig ermittelbar; deshalb lautet die Ausgangsgleichung

$$y = x_2. \quad (2.22b)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, zu untersuchen, ob das System (2.22) in dem interessierenden Gebiet  $x_1, x_2 \geq 0$  der Zustandsebene beobachtbar ist. Hierzu ist die nach Gl. (2.7) berechnete Abbildung

$$\bar{x}_1 = x_2, \quad (2.23a)$$

$$\bar{x}_2 = (cx_1 - d - fu)x_2 \quad (2.23b)$$

auf ihre eindeutige Umkehrbarkeit hin zu überprüfen. Die Auflösung der Gleichungen (2.23) nach  $x_1$  und  $x_2$  liefert die inverse Abbildung

$$x_1 = \frac{1}{c} \left( \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} + d + fu \right), \quad (2.24a)$$

$$x_2 = \bar{x}_1, \quad (2.24b)$$

welche nur für  $\bar{x}_1 = x_2 = 0$ , d.h. für den Fall, daß die Räuber ausgestorben sind, nicht existiert. Da die Systemtrajektorie  $\underline{x}(t)$  unabhängig von der Eingangsgröße  $u(t)$  und dem betrachteten Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  immer nur im physikalisch sinnvollen Bereich  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  verlaufen kann, ist die Räuber-Beute-Beziehung (2.22) nach dem im vorigen Abschnitt angegebenen Kriterium im Gebiet  $x_2 > 0$  *beobachtbar im großen*, und zwar für jedes beliebige  $u(t)$  und jedes beliebige Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ .

Wendet man die Transformation (2.23) auf das Originalsystem (2.22) an, so ergibt sich die NBKNF unter Berücksichtigung der inversen Abbildung (2.24) zu

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{x}_1} + (a-b\bar{x}_1)\bar{x}_2 + (a-b\bar{x}_1)(d+fu)\bar{x}_1 - f\bar{x}_1\dot{u} \end{bmatrix}, \quad (2.25a)$$

$$y = \bar{x}_1. \quad (2.25b)$$

Diese Form wird an späterer Stelle noch benötigt.

### 2.8.2 Rührkesselreaktor

Ein weiteres typisches Beispiel eines nichtlinearen Systems stellt der kontinuierlich betriebene Rührkesselreaktor dar, wie er in [56] und [62] beschrieben wird. Er dient dazu, einen laufend zufließenden Stoff A unter der Einwirkung eines Katalysators in seine Zerfallsprodukte zu zerlegen. Seine Zustandsgrößen sind die im Abfluß vorhandene Temperatur  $T$  und Konzentration  $c$  des Stoffes A. Als Stellgröße zur Beeinflussung des Reaktors kann die Kühlmitteltemperatur  $T_K$  aufgefaßt werden, die mit dem verstellbaren Kühlmittelfluß über eine bekannte Kennlinie verknüpft ist. Üblicherweise definiert man die Zustands- und Steuervariablen als

$$x_1 := \frac{c_0 - c}{c_0}, \quad x_2 := \frac{T - T_0}{T_0}, \quad u := \frac{T_K - T_0}{T_0},$$

wobei  $c_0$  die Zulaufkonzentration und  $T_0$  die Zulauftemperatur darstellen. Damit läßt sich der Reaktor in guter Näherung durch das Zustandsraummodell

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -ax_1 + r(\underline{x}) \\ -bx_2 + dr(\underline{x}) + fu \end{bmatrix} \quad (2.26a)$$

mit

$$r(\underline{x}) = k(1-x_1)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+x_2}\right) \quad (2.26b)$$

beschreiben. Als Meßgröße steht die Temperatur  $x_2$  zur Verfügung; folglich lautet die Ausgangsgleichung

$$y = x_2 \quad . \quad (2.26c)$$

Auch hier wird zunächst wieder die Abbildungsvorschrift berechnet, welche das System (2.26) in die NBKNF (2.2) überführt. Nach Gl. (2.7) erhält man

$$\bar{x}_1 = x_2 \quad , \quad (2.27a)$$

$$\bar{x}_2 = -bx_2 + dr(\underline{x}) + fu \quad . \quad (2.27b)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach  $x_1$  und  $x_2$  liefert

$$x_1 = 1 - \frac{1}{kd} (\bar{x}_2 + b\bar{x}_1 - fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+\bar{x}_1}\right) \quad , \quad (2.28a)$$

$$x_2 = \bar{x}_1 \quad . \quad (2.28b)$$

Da diese Umkehrung außer auf der Geraden  $\bar{x}_1 = x_2 \neq -1$  für jeden Punkt der Zustandsebene existiert, ist das System (2.26) im physikalisch sinnvollen Gebiet  $G = \{\underline{x} | x_1 < 1; x_2 > -1\}$  mit Sicherheit *beobachtbar im großen*. ( $x_1 = 1$  entspricht der Konzentration  $c = 0$  mol/l des Stoffes A,  $x_2 = -1$  entspricht dem absoluten Temperaturnullpunkt  $T = 0K$ .) Diese Beobachtbarkeit im Gebiet  $G$  des Zustandsraums ist für jede beliebige Eingangsgröße  $u(t)$  und für jedes beliebige Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  gesichert, denn die Systemtrajektorie  $\underline{x}(t)$  kann sich immer nur innerhalb des physikalisch sinnvollen Gebiets  $G$  bewegen.

Die NBKNF ergibt sich durch Einsetzen der Gln. (2.28) in die totalen zeitlichen Ableitungen der Gln. (2.27) zu

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\bar{a}(\bar{x}, u, \dot{u}) \end{bmatrix}, \quad (2.29a)$$

$$y = \bar{x}_1 \quad (2.29b)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{a}(\bar{x}, u, \dot{u}) = & -\frac{\epsilon}{(1+\bar{x}_1)^2} \bar{x}_2^2 + \left[ a+b - \frac{\epsilon(b\bar{x}_1-fu)}{(1+\bar{x}_1)^2} + k \exp\left(-\frac{\epsilon}{1+\bar{x}_1}\right) \right] \bar{x}_2 + \\ & + k(b\bar{x}_1-fu-ad) \exp\left(-\frac{\epsilon}{1+\bar{x}_1}\right) + a(b\bar{x}_1-fu) - f\dot{u}. \end{aligned} \quad (2.29c)$$

### 2.8.3 Drehstromsynchronmaschine

Als drittes Anwendungsbeispiel wird die in [12] bzw. [48] beschriebene Drehstromsynchronmaschine betrachtet, die sich durch das vereinfachte Zustandsraummodell

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B_1 - A_1 x_2 - A_2 x_3 \sin x_1 - 0,5 B_2 \sin 2x_1 \\ u - D_1 x_3 + D_2 \cos x_1 \end{bmatrix} \quad (2.30a)$$

beschreiben läßt. Darin ist  $x_1$  der Polradwinkel,  $x_2$  die Frequenzabweichung zwischen Netz und Polrad und  $x_3$  die Flußverkettung zwischen Rotor und Stator. Als Steuergröße  $u$  dient die Spannung an der Felderregewicklung des Rotors. Das von außen aufgebrachte Drehmoment  $B_1$  wird als konstant angenommen und demnach nicht als Eingangsgröße aufgefaßt.

Die Synchronmaschine soll über die meßbare Frequenzabweichung  $x_2$  und den mit Hilfe einer Rechenschaltung ermittelbaren Polradwinkel  $x_1$  beobachtet werden. Somit steht die vektorielle Ausgangsgleichung

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{h(x)} \quad (2.30b)$$

zur Verfügung.

Da das System (2.30) zwei Ausgangsgrößen besitzt, muß es in die NBKNF (2.6) überführt werden, wobei zunächst die Ordnungen  $n_1$  und  $n_2$  der beiden Subsysteme festzulegen sind. Hierzu wird die Beobachtbarkeitsmatrix (2.20) herangezogen. Für den vorliegenden Fall ergibt sie sich aufgrund der Beziehungen  $h_1(\underline{x}) = x_1$  und  $h_2(\underline{x}) = x_2$  zu

$$\underline{Q}_B(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 1 & 0 \\ -A_2 x_3 \cos x_1 - B_2 \cos 2x_1 & -A_1 & -A_2 \sin x_1 \end{bmatrix} .$$

Geht man bei der Wahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren nach der im Abschnitt 2.6 angegebenen Strategie vor, so ergibt sich die Auswahlmatrix

$$\underline{Q}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 1 & 0 \\ -A_2 x_3 \cos x_1 - B_2 \cos 2x_1 & -A_1 & -A_2 \sin x_1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

mit den Subsystemordnungen

$$n_1 = 1 \quad , \quad n_2 = 2 \quad .$$

Jetzt läßt sich gemäß Gl. (2.11) die Abbildungsvorschrift zur Überführung des Systems (2.30) in die NBKNF angeben. Sie lautet

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \text{---} \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \text{---} \\ x_2 \\ B_1 - A_1 x_2 - A_2 x_3 \sin x_1 - 0,5 B_2 \sin 2x_1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Ihre Umkehrung

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \frac{1}{A_2 \sin \bar{x}_1} (B_1 - A_1 \bar{x}_2 - 0,5 B_2 \sin 2\bar{x}_1 - \bar{x}_3) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

existiert außer für die Werte

$$\bar{x}_1 = x_1 = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

des Polradwinkels im gesamten Zustandsraum. Nach dem im Abschnitt 2.7 angegebenen Kriterium ist die Synchronmaschine somit sowohl im Gebiet  $G_M = \{\underline{x} | -\pi < x_1 < 0, x_2, x_3 \text{ beliebig}\}$  (Motorbetrieb) als auch im Gebiet  $G_G = \{\underline{x} | 0 < x_1 < +\pi, x_2, x_3 \text{ beliebig}\}$  (Generatorbetrieb) *beobachtbar im großen*, und zwar wieder für jede beliebige Eingangsgröße  $u(t)$  und für jedes beliebige Zeitintervall  $[t_0, t_1]$ .

Auch für die Synchronmaschine soll abschließend noch die NBKNF angegeben werden, da diese für den späteren Beobachterentwurf noch benötigt wird. Dazu wird Gl. (2.33) in die zeitliche Ableitung von Gl. (2.32) eingesetzt. Dann erhält man die NBKNF zu

$$\dot{\underline{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1(\bar{x}) \\ - & - & - \\ & & \bar{x}_3 \\ -\bar{a}_2(\bar{x}, u) \end{bmatrix}, \quad (2.34a)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.34b)$$

mit

$$\bar{a}_1 = -\bar{x}_2 \quad (2.34c)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 = & -(\bar{x}_2 \cot \bar{x}_1 - A_1 - D_1)\bar{x}_3 + A_2(u + D_2 \cos \bar{x}_1) \sin \bar{x}_1 + \\ & + B_2(D_1 \cos \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sin \bar{x}_1) \sin \bar{x}_1 + (\bar{x}_2 \cot \bar{x}_1 - D_1)(B_1 - A_1 \bar{x}_2) \end{aligned} \quad (2.34d)$$

## 2.9 Wertung des Beobachtbarkeitskriteriums

Vom praktischen Standpunkt befriedigt das hier vorgestellte Beobachtbarkeitskriterium ebensowenig wie die aus der Literatur bekannten Kriterien, da die Umkehrung der Abbildung (2.7) bzw. (2.11) schon bei niedriger Systemordnung sehr aufwendig sein kann - falls sie überhaupt existiert. Jedoch bietet das Kriterium aus Abschnitt 2.7 den wesentlichen Vorteil, daß es einen eindeutigen Bezug zwischen der Beobachtbarkeit und der Existenz des in den folgenden Kapiteln eingeführten Beobachters herstellt.

Aus der linearen Theorie ist bekannt, daß sich die Stabilität eines vollständigen Beobachters, d.h. eines Beobachters  $n$ -ter Ordnung, im gesamten Zustandsraum sichern läßt, falls das zu beobachtende System vollständig beobachtbar ist. Im Nichtlinearen fehlte bislang ein solcher Zusammenhang zwischen den beobachtbaren Teilgebieten des Zustandsraums und dem Einzugsgebiet, in dem der Beobachter stabil arbeitet. Hier schafft das im folgenden vorgestellte Syntheseverfahren Abhilfe. Für eine spezielle Klasse nichtlinearer, zeitvarianter Systeme wird ein Beobachter entworfen, welcher *genau* in denjenigen Gebieten des Zustandsraums stabil arbeitet, in denen das zu beobachtende System nach dem im Abschnitt 2.7 angegebenen Kriterium beobachtbar im großen ist.

Um die Betrachtungen möglichst einfach und übersichtlich zu halten, behandelt das nächste Kapitel zunächst den Beobachterentwurf für Systeme mit einer Ausgangsgröße. Der weitaus kompliziertere Fall bei mehreren Ausgangsgrößen würde die Übersichtlichkeit an dieser Stelle unnötig gefährden und wird deshalb erst im 4. Kapitel betrachtet.

### 3 BEOBACHTERENTWURF FÜR SYSTEME MIT EINER AUSGANGSGRÖSSE

Diesem Kapitel liegen nichtlineare, zeitvariante Systeme zugrunde, welche durch die Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (3.1a)$$

und die *skalare* Ausgangsgleichung

$$y = h(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (3.1b)$$

beschrieben werden. Um das von Luenberger entwickelte Entwurfsverfahren [42] auf den nichtlinearen, zeitvarianten Fall zu übertragen, muß zunächst eine geeignete kanonische Form für nichtlineare, zeitvariante Systeme definiert werden, die sogenannte "Nichtlineare Beobachternormalform (NBNF)".

#### 3.1 DEFINITION DER "NICHTLINEAREN BEOBACHTERNORMALFORM (NBNF)"

Damit bei einer kanonischen Form für nichtlineare, zeitvariante Systeme von einer "Beobachternormalform" gesprochen werden kann, muß sie wie die NBKNF aus Kapitel 2 gewisse charakteristische Eigenschaften aufweisen. Diese lassen sich wie folgt verbal formulieren [DA5]:

- Die lineare Beobachternormalform [1] muß in der NBNF als Spezialfall enthalten sein (*Konsistenz*).
- Mit Hilfe der NBNF muß ein systematischer Beobachterentwurf möglich sein, der Stabilität gewährleistet (*Verwendbarkeit*).
- Es muß sich für eine gewisse Systemklasse eine umkehrbar eindeutige Transformation angeben lassen, die ein gegebenes System in die NBNF abbildet und umgekehrt (*Äquivalenz*).

Entsprechende für den *Reglerentwurf* entscheidende Eigenschaften weist auch die in [56] definierte "Nichtlineare Regelungsnormalform" auf.

In Anlehnung an die Struktur der Beobachternormalform für lineare Systeme wird die NBNF mit einer Ausgangsgröße definiert als<sup>\*</sup>)

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{f}^*(\underline{x}^*, \underline{u}, t), \quad (3.2a)$$

$$y = h^*(x_n^*, \underline{u}, t) \quad (3.2b)$$

mit

$$\underline{f}^*(\underline{x}^*, \underline{u}, t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underline{x}^* - \underbrace{\begin{bmatrix} a_0^*(x_n^*, \underline{u}, t) \\ a_1^*(x_n^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ a_{n-1}^*(x_n^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{a}^*(x_n^*, \underline{u}, t)}. \quad (3.2c)$$

Diese Schreibweise für  $\underline{f}^*(\underline{x}^*, \underline{u}, t)$  ermöglicht eine Trennung des linearen und nichtlinearen Systemanteils, wodurch die Konsistenz der NBNF mit der linearen Beobachternormalform (BNF) unmittelbar ersichtlich wird. Ersetzt man nämlich den Vektor  $\underline{a}^*(x_n^*, \underline{u}, t)$  durch die Linearkombination  $\underline{a}^* x_n^* - \underline{B}^* \underline{u}$ , so können die beiden Summanden  $\underline{E} \underline{x}^*$  und  $-\underline{a}^* x_n^*$  zu einem Produkt  $\underline{A}^* \underline{x}^*$  zusammengefaßt werden, bei dem  $\underline{A}^*$  die wohlbekannte Struktur der BNF-Systemmatrix aufweist. Auch die nichtlineare Ausgangsgleichung (3.2b) stellt eine Verallgemeinerung der in der linearen Form auftretenden Ausgangsbeziehung  $y = x_n^* + \underline{d}^T \underline{u}$  dar.

Von der Gleichung (3.2b) wird für die folgenden Betrachtungen vorausgesetzt, daß sie in dem für  $x_n^*$ ,  $\underline{u}$  und  $t$  in Frage kommenden Gebiet die stetige Inverse

$$x_n^* = c(y, \underline{u}, t)$$

besitzt. Dann läßt sich die NBNF (3.2) in der Form

\*) Im Gegensatz zu der in [26;30] und [DA2] angegebenen Normalform wird hier eine nichtlineare Abhängigkeit von der Eingangsgröße  $\underline{u}$  zugelassen.

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{E} \underline{x}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, t) , \quad (3.3a)$$

$$x_n^* = c(y, \underline{u}, t) \quad (3.3b)$$

angeben, wenn die Umformung

$$\underline{a}^*(x_n^*, \underline{u}, t) = \underline{a}^*(c(y, \underline{u}, t), \underline{u}, t) = \underline{a}(y, \underline{u}, t)$$

vorgenommen wird. Die Gl.n. (3.3) verdeutlichen die spezielle Struktur der NBNF: Das transformierte System hängt nur nichtlinear von der meßbaren Ausgangsgröße  $y$ , der Eingangsgröße  $\underline{u}$  und der Zeit  $t$  in den Funktionen  $\underline{a}(y, \underline{u}, t)$  und  $c(y, \underline{u}, t)$  ab, während die transformierten Zustandsvariablen  $x_1^*, \dots, x_{n-1}^*$  linear eingehen.

### 3.2 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR EIN SYSTEM IN NBNF

Zunächst wird davon ausgegangen, daß die zu beobachtende Strecke in NBNF vorliegt. Dann lassen sich die Verhältnisse auf die wohlbekannten linearen zurückführen:

Unter der Zielsetzung, eine homogene, lineare und zeitinvariante Differentialgleichung für den Schätzfehler

$$\underline{\tilde{x}}^* = \underline{x}^* - \underline{\hat{x}}^* \quad (3.4)$$

zu erhalten, wird der Beobachter in der Form

$$\dot{\underline{\hat{x}}}^* = \underline{E} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, t) + \underline{k} [c(y, \underline{u}, t) - \hat{x}_n^*] \quad (3.5a)$$

mit der konstanten Beobacherverstärkung

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_0 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

angesetzt. Der Vektor  $\underline{\hat{x}}^*$  bezeichnet hierbei den geschätzten Zustandsvektor der NBNF. Da sich der Klammerausdruck in Gl. (3.5a) wegen der Beziehungen (3.3b) und (3.4) gerade zu  $\tilde{x}_n^*$  ergibt, liefert die Subtraktion der Gl. (3.5a) von Gl. (3.3a) die homogene, lineare, zeitinvariante Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\tilde{x}}^* = (\underline{E} - \underline{k} \underline{e}_n^T) \tilde{x}^* \quad (3.6)$$

mit

$$\underline{e}_n^T = [0, \dots, 0, 1] \quad .$$

|  
n-tes Element

Die konstante Matrix

$$\underline{F} := \underline{E} - \underline{k} \underline{e}_n^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -k_0 \\ 1 & \dots & 0 & -k_1 \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -k_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

weist dabei die Struktur der BNF-Systemmatrix auf [1].

Von hier an unterscheidet sich der Entwurf nicht mehr von dem eines linearen Beobachters [10]:

Die Koeffizienten  $k_0, \dots, k_{n-1}$  der Matrix  $\underline{F}$  werden so bestimmt, daß das homogene System (3.6) stabil ist. Dies hat zur Folge, daß der Fehler  $\tilde{x}^*$  mit zunehmender Zeit gegen Null und damit die geschätzte Größe  $\hat{x}^*$  gegen den wahren Wert  $x^*$  strebt.

Am nächstliegenden ist ein Polvorgabe-Entwurf. Dann erfolgt die Berechnung der  $k_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , durch einen Koeffizientenvergleich in der Gleichung

$$\prod_{\nu=1}^n (s - \lambda_{\nu}) \stackrel{!}{=} s^n + k_{n-1} s^{n-1} + \dots + k_1 s + k_0 ; \operatorname{Re} \lambda_{\nu} < 0, \quad (3.8)$$

da die  $k_i$  gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms  $\det(s\underline{I} - \underline{F})$  von  $\underline{F}$  darstellen. Der Fehler  $\tilde{x}^*$  wird um so schneller abklingen, je weiter man die Eigenwerte  $\lambda_{\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ , nach links in die komplexe Ebene legt. Es ist jedoch darauf zu achten, daß der Beobachter nicht zu sehr als differenzierendes System arbeitet.

Hat man den Vektor  $\underline{k}$  festgelegt, so ist der durch Gl. (3.5a) beschriebene Beobachter vollständig dimensioniert. Mit Hilfe der in Gl. (3.7) eingeführten Matrix  $\underline{F}$  kann er auch in der Form

$$\dot{\underline{\hat{x}}^*} = \underline{F} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, t) + \underline{k}c(y, \underline{u}, t) \quad (3.9)$$

angeschrieben werden. Er liefert einen Näherungswert  $\underline{\hat{x}}^*$  für den Zustandsvektor  $\underline{x}^*$  des in NBNF vorliegenden Systems.

### 3.3 TRANSFORMATION AUF NBNF

In den seltensten Fällen wird das zu beobachtende System in NBNF vorliegen. Dann bleibt nichts anderes übrig, als diese kanonische Form durch eine geeignete, stetige Transformation der Zustandsvariablen zu erzeugen. Eine solche Transformation wird angesetzt in der Form

$$\underline{x}^* = \underline{v}(\underline{x}, t) . \quad (3.10)$$

Von ihr wird gefordert, daß sie in dem Gebiet  $G$  und dem Intervall  $[t_0, t_1]$ , in dem das betrachtete System beobachtbar im großen ist, die stetige Inverse

$$\underline{x} = \tilde{\underline{v}}(\underline{x}^*, t)$$

besitzt. Darüber hinaus sollen  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  im Gebiet  $G$  und  $\tilde{\underline{v}}(\underline{x}^*, t)$  im Bildgebiet  $G^*$  von  $G$  für  $t \in [t_0, t_1]$  hinreichend oft differenzierbar sein.

#### 3.3.1 Bestimmungsgleichungen der Transformation auf NBNF und die "Nichtlineare Charakteristische Gleichung (NCG)"

Zur Herleitung der Bestimmungsgleichungen der Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  wird in die totale zeitliche Ableitung von Gl. (3.10),

$$\dot{\underline{x}}^* = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \dot{\underline{x}} ,$$

die Zustandsdifferentialgleichung (3.1a) eingesetzt, womit sich

$$\dot{\underline{x}}^* = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

ergibt. Ein Vergleich dieser Beziehung mit Gl. (3.3a) liefert die partielle Vektordifferentialgleichung

$$\frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \stackrel{!}{=} \underline{E} \underline{v}(\underline{x}, t) - \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t), \quad (3.11)$$

wenn man in Gl. (3.3a)  $\underline{x}^*$  durch die zu berechnende Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  ersetzt.

Zunächst wird die Gleichung (3.11) komponentenweise angeschrieben. Unter Berücksichtigung des speziellen Aufbaus der Matrix  $\underline{E}$  und des Vektors  $\underline{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T$  (siehe Gl. (3.2c)) ergibt sich

$$\frac{\partial v_1(\underline{x}, t)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial v_1(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) = 0 - a_0(\underline{y}, \underline{u}, t), \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial v_i(\underline{x}, t)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial v_i(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) = v_{i-1}(\underline{x}, t) - a_{i-1}(\underline{y}, \underline{u}, t),$$

$$i = 2, \dots, n. \quad (3.12b)$$

Der Zeilenvektor  $\left[ \frac{\partial v_i(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \right]^T$  stellt hierbei die  $i$ -te Zeile der in den obigen Gleichungen auftretenden Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}$  dar.

Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, den linearen Differentialoperator  $N$  einzuführen, der definiert ist als

$$Nv_i(\underline{x}, t) := \frac{\partial v_i(\underline{x}, t)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial v_i(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t). \quad (3.13)$$

Damit lassen sich die Gln. (3.12) in der kompakteren Form

$$0 = Nv_1(\underline{x}, t) + a_0(\underline{y}, \underline{u}, t), \quad (3.14a)$$

$$v_{i-1}(\underline{x}, t) = Nv_i(\underline{x}, t) + a_{i-1}(\underline{y}, \underline{u}, t), \quad i = 2, \dots, n, \quad (3.14b)$$

darstellen. Setzt man die Gleichung für  $v_{n-1}(\underline{x}, t)$  in diejenige für  $v_{n-2}(\underline{x}, t)$  ein, so ergibt sich

$$v_{n-2}(\underline{x}, t) = N\{Nv_n(\underline{x}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t)\} + a_{n-2}(y, \underline{u}, t)$$

oder

$$v_{n-2}(\underline{x}, t) = N^2v_n(\underline{x}, t) + Na_{n-1}(y, \underline{u}, t) + a_{n-2}(y, \underline{u}, t) .$$

Diese Beziehung in die Gleichung für  $v_{n-3}(\underline{x}, t)$  eingesetzt, liefert

$$v_{n-3}(\underline{x}, t) = N^3v_n(\underline{x}, t) + N^2a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + Na_{n-2}(y, \underline{u}, t) + a_{n-3}(y, \underline{u}, t) .$$

So fortfahrend erhält man aus den Gln. (3.14) schließlich das Gleichungssystem

$$0 = N^n v_n(\underline{x}, t) + N^{n-1} a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + \dots + Na_1(y, \underline{u}, t) + a_0(y, \underline{u}, t) \quad (3.15a)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(\underline{x}, t) &= N^{n-1} v_n(\underline{x}, t) + N^{n-2} a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + \dots + a_1(y, \underline{u}, t) , \\ &\vdots \\ v_{n-2}(\underline{x}, t) &= N^2 v_n(\underline{x}, t) + Na_{n-1}(y, \underline{u}, t) + a_{n-2}(y, \underline{u}, t) , \\ v_{n-1}(\underline{x}, t) &= Nv_n(\underline{x}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) , \end{aligned} \right\} \quad (3.15b)$$

wenn die Schreibweise  $N^k v_i(\underline{x}, t)$  für die  $k$ -fache Anwendung des Operators  $N$  auf die Funktion  $v_i(\underline{x}, t)$  benutzt wird. Für die letzte Komponente  $v_n(\underline{x}, t)$  gilt aufgrund der Gln. (3.10) und (3.3b)

$$v_n(\underline{x}, t) = x_n^* = c(y, \underline{u}, t) . \quad (3.15c)$$

Wie man sieht, muß hierbei die  $\underline{u}$ -Abhängigkeit der gesuchten Funktion  $c(y, \underline{u}, t)$  derart beschaffen sein, daß die  $\underline{u}$ -Abhängigkeit von  $y = h(\underline{x}, \underline{u}, t)$  gerade kompensiert wird, so daß  $v_n$  nur von  $\underline{x}$  und  $t$  abhängt.

Durch die Gln. (3.15b) und (3.15c) ist der Aufbau der gesuchten Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  vorgeschrieben:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \begin{bmatrix} N^{n-1}c(y, \underline{u}, t) + \dots + Na_2(y, \underline{u}, t) + a_1(y, \underline{u}, t) \\ N^{n-2}c(y, \underline{u}, t) + \dots + a_2(y, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ Nc(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) \\ c(y, \underline{u}, t) \end{bmatrix} . \quad (3.16)$$

Diese Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  ist festgelegt, wenn es gelingt, die Funktionen  $a_1(y, \underline{u}, t), \dots, a_{n-1}(y, \underline{u}, t)$  und  $c(y, \underline{u}, t)$ , welche über  $y = h(\underline{x}, \underline{u}, t)$  mittelbar von  $\underline{x}$  abhängen, so zu bestimmen, daß sich die  $\underline{u}$ -Abhängigkeiten auf der rechten Seite von Gl. (3.16) wegheben. Dann nämlich hängt die Transformation  $\underline{v}$ , wie gefordert, nur von  $\underline{x}$  und  $t$  ab. Zur Berechnung dieser unbekannt Funktionen  $a_i(y, \underline{u}, t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , und  $c(y, \underline{u}, t)$  muß die noch unberücksichtigte Gleichung (3.15a) herangezogen werden. Durch Einsetzen der Beziehung (3.15c) ergibt sich aus ihr die Gleichung

$$0 = N^n c(y, \underline{u}, t) + \sum_{i=0}^{n-1} N^i a_i(y, \underline{u}, t) , \quad (3.17)$$

eine partielle Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung. Wegen ihrer wesentlichen Bedeutung und weil sie als eine Verallgemeinerung der wohlbekannt "Charakteristischen Gleichung" angesehen werden kann (siehe Abschnitt 3.3.2), wird sie im folgenden die "Nichtlineare Charakteristische Gleichung (NCG)" genannt.

Die Berechnung der  $n+1$  Funktionen  $a_i(y, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , und  $c(y, \underline{u}, t)$  aus einer einzigen Gleichung, nämlich der NCG (3.17), scheint zunächst aussichtslos, da der Operator  $N$  in der NCG auf die unbekannt Funktionen angewandt wird. Trotzdem ist - vorausgesetzt, die geforderte NBNF existiert - eine Bestimmung dieser Funktionen möglich. Bevor dies im Abschnitt 3.3.3 an einem konkreten nichtlinearen Beispiel gezeigt wird, soll die NCG zunächst auf die Klasse linearer, zeitinvarianter Systeme angewandt werden, um zu beweisen, daß die nichtlineare Transformationsmethodik die lineare Theorie als Sonderfall beinhaltet.

### 3.3.2 Lösung der NCG zur Bestimmung der Transformation für lineare, zeitinvariante Systeme

Im Spezialfall linearer, zeitinvarianter Systeme der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} , \quad (3.18a)$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{u} \quad (3.18b)$$

wird man die in der NCG auftretenden Funktionen  $c(y, \underline{u}, t)$  und  $a_i(y, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , als zeitunabhängig sowie linear in  $y$  und  $\underline{u}$  ansetzen dürfen, also in der Form

$$c(y, \underline{u}, t) = \gamma y + \underline{\delta}^T \underline{u} , \quad (3.19a)$$

$$a_i(y, \underline{u}, t) = \alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u} , \quad i = 0, \dots, n-1 . \quad (3.19b)$$

Damit nimmt die NCG (3.17) die spezielle Gestalt

$$0 = N^n(\gamma y + \underline{\delta}^T \underline{u}) + \sum_{i=0}^{n-1} N^i(\alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u}) \quad (3.20)$$

an. Aus dieser Gleichung sollen nun die unbekannt Parameter  $\alpha_i$ ,  $\underline{\beta}_i^T$ ,  $\gamma$  und  $\underline{\delta}^T$  berechnet werden.

Für die einfache Anwendung des Operators  $N$  auf den Ausdruck  $\alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u}$  ergibt sich mit Gl. (3.18b) und unter Berücksichtigung der Operatordefinition (3.13)

$$N(\alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u}) = N(\alpha_i \underline{c}^T \underline{x} + \alpha_i \underline{d}^T \underline{u} + \underline{\beta}_i^T \underline{u}) = \alpha_i \underline{c}^T (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) ,$$

wenn statt  $f(\underline{x}, \underline{u}, t)$  die rechte Seite der Gl. (3.18a) eingesetzt wird. Die zweifache Operatoranwendung liefert

$$N^2(\alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u}) = N(\alpha_i \underline{c}^T \underline{A} \underline{x} + \alpha_i \underline{c}^T \underline{B} \underline{u}) = \alpha_i \underline{c}^T \underline{A} (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) ,$$

und dementsprechend ergibt sich für die  $i$ -fache Anwendung

$$N^i(\alpha_i y + \underline{\beta}_i^T \underline{u}) = \alpha_i \underline{c}^T \underline{A}^{i-1} (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) .$$

Damit folgt aus der Gleichung (3.20)

$$0 = \underline{\gamma} \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underline{c}^T \underline{A}^{i-1} (\underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u}) + \alpha_0 (\underline{c}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{u}) + \underline{\beta}_0^T \underline{u}$$

oder

$$0 = \underline{c}^T (\underline{\gamma} \underline{A}^n + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{I}) \underline{x} + \left[ \underline{c}^T (\underline{\gamma} \underline{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1 \underline{I}) \underline{B} + \underline{d}^T \alpha_0 + \underline{\beta}_0^T \right] \underline{u} .$$

Um die  $\underline{u}$ -Abhängigkeit in dieser Gleichung zu eliminieren, wird zunächst  $\underline{\beta}_0^T$  zu

$$\underline{\beta}_0^T = -\underline{c}^T (\underline{\gamma} \underline{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1 \underline{I}) \underline{B} - \underline{d}^T \alpha_0 \quad (3.21)$$

gewählt. Die darin auftretenden unbekannt Koeffizienten  $\gamma$  und  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  müssen aus der verbleibenden Gleichung

$$0 = \underline{c}^T (\underline{\gamma} \underline{A}^n + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{I}) \underline{x}$$

bestimmt werden, welche für alle  $\underline{x}$  erfüllt ist, wenn

$$\underline{c}^T (\underline{\gamma} \underline{A}^n + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{I}) = \underline{0}^T$$

gilt. Diese vektorielle Gleichung besteht aus  $n$  skalaren Gleichungen für die  $n+1$  Unbekannten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma$ , ist also unterbestimmt und besitzt unendlich viele Lösungen. Wählt man der Einfachheit halber

$$\gamma = 1 , \quad (3.22)$$

so bleibt die Gleichung

$$\underline{c}^T (\underline{A}^n + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1 \underline{A} + \alpha_0 \underline{I}) = \underline{0}^T$$

mit nur noch  $n$  Unbekannten  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  zu lösen. Nach dem *Theorem*

von Cayley-Hamilton [67] wird diese Gleichung aber von den Koeffizienten  $\alpha_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , des charakteristischen Polynoms

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (3.23)$$

von  $\underline{A}$  für beliebige  $\underline{c}^T$  erfüllt. Damit ist der Zusammenhang zwischen der NCG und der wohlbekannteren Charakteristischen Gleichung hergestellt.

Nachdem die Parameter  $\alpha_i$ ,  $\underline{\beta}_0^T$  und  $\gamma$  festgelegt sind, lassen sich auch die Bestimmungsgleichungen für  $\underline{\beta}_i^T$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , und  $\underline{\delta}^T$  angeben. Dazu werden die Gln. (3.19) in die Transformationsbeziehungen (3.14b) und (3.15c) eingesetzt. Bei Weglassen des Zeitarguments ergibt sich mit  $\gamma = 1$

$$\begin{aligned} v_1(\underline{x}) &= Nv_2(\underline{x}) + (\alpha_1 y + \underline{\beta}_1^T \underline{u}) , \\ v_2(\underline{x}) &= Nv_3(\underline{x}) + (\alpha_2 y + \underline{\beta}_2^T \underline{u}) , \\ &\vdots \\ v_{n-1}(\underline{x}) &= Nv_n(\underline{x}) + (\alpha_{n-1} y + \underline{\beta}_{n-1}^T \underline{u}) , \\ v_n(\underline{x}) &= (y + \underline{\delta}^T \underline{u}) . \end{aligned}$$

Die gesuchten Parameter  $\underline{\delta}^T$ ,  $\underline{\beta}_{n-1}^T, \dots, \underline{\beta}_1^T$  werden hieraus nun so bestimmt, daß jede Komponente  $v_i(\underline{x})$  von  $\underline{u}$  unabhängig ist. Aus der Beziehung für die letzte Transformationskomponente  $v_n(\underline{x})$  folgt nach Einsetzen von Gl. (3.18b)

$$v_n(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} + (\underline{d}^T + \underline{\delta}^T) \underline{u} .$$

Damit die  $\underline{u}$ -Abhängigkeit verschwindet, muß  $\underline{\delta}^T$  zu

$$\underline{\delta}^T = -\underline{d}^T \quad (3.24)$$

gewählt werden. Damit gilt

$$v_n(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x} ,$$

und die Beziehung für  $v_{n-1}(\underline{x})$  lautet

$$\begin{aligned} v_{n-1}(\underline{x}) &= N(\underline{c}^T \underline{x}) + \alpha_{n-1}(\underline{c}^T \underline{x} + \underline{d}^T \underline{u}) + \underline{\beta}_{n-1}^T \underline{u} \\ &= \underline{c}^T (\underline{A} + \alpha_{n-1} \underline{I}) \underline{x} + (\underline{c}^T \underline{B} + \underline{d}^T \alpha_{n-1} + \underline{\beta}_{n-1}^T) \underline{u} . \end{aligned}$$

Auch hier muß die  $\underline{u}$ -Abhängigkeit eliminiert werden, weshalb für  $\underline{\beta}_{n-1}^T$

$$\underline{\beta}_{n-1}^T = -\underline{c}^T \underline{B} - \underline{d}^T \alpha_{n-1}$$

gelten muß. So fortfahrend erhält man für die  $(n-i)$ -te Transformationskomponente

$$v_{n-i}(\underline{x}) = \underline{c}^T (\underline{A}^i + \alpha_{n-1} \underline{A}^{i-1} + \dots + \alpha_{n-i} \underline{I}) \underline{x} , \quad i = 1, \dots, n-1 ,$$

wenn der  $(n-i)$ -te Zeilenvektor  $\underline{\beta}_{n-i}^T$  zu

$$\underline{\beta}_{n-i}^T = -\underline{c}^T (\underline{A}^{i-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{i-2} + \dots + \alpha_{n-i+1} \underline{I}) \underline{B} - \underline{d}^T \alpha_{n-i} , \quad (3.25)$$

$$i = 1, \dots, n-1 ,$$

gewählt wird.

Es wird deutlich, daß die Transformation für lineare, zeitinvariante Systeme die lineare Form

$$\underline{x}^* = \underline{V} \underline{x} \quad (3.26a)$$

annimmt, wobei sich die Matrix  $\underline{V}$  nach der Gleichung

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{c}^T (\underline{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1 \underline{I}) \\ \underline{c}^T (\underline{A}^{n-2} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-3} + \dots + \alpha_2 \underline{I}) \\ \vdots \\ \underline{c}^T (\underline{A} + \alpha_{n-1} \underline{I}) \\ \underline{c}^T \end{bmatrix} \quad (3.26b)$$

berechnet. Die  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , stellen dabei die Koeffizienten der Potenzen  $s, s^2, \dots, s^{n-1}$  des charakteristischen Polynoms (3.23) von  $\underline{A}$  dar.

Die Anwendung der Transformation (3.26) auf das lineare, zeitinvariante System (3.18) führt tatsächlich zur linearen Beobachternormalform

$$\dot{\underline{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0^* \\ 1 & \dots & 0 & -a_1^* \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1}^* \end{bmatrix} \underline{x}^* + \begin{bmatrix} \underline{b}_0^{*T} \\ \underline{b}_1^{*T} \\ \vdots \\ \underline{b}_{n-1}^{*T} \end{bmatrix} \underline{u}, \quad (3.27a)$$

$$y = [0 \dots 0 \ 1] \underline{x}^* + \underline{d}^{*T} \underline{u}, \quad (3.27b)$$

deren Parameter  $a_i^*$ ,  $\underline{b}_i^{*T}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , und  $\underline{d}^{*T}$  es noch zu bestimmen gilt. Dazu wird die Normalform zunächst in der Form (3.3) angeschrieben, deren Funktionen  $a_i(y, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , und  $c(y, \underline{u}, t)$  ja über die Beziehungen (3.19) und (3.21) bis (3.25) bekannt sind:

$$\dot{\underline{x}}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underline{x}^* - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 y - \underline{c}^T (A^{n-1} + \alpha_{n-1} A^{n-2} + \dots + \alpha_1 I) \underline{B} \underline{u} - \underline{d}^T \alpha_0 \underline{u} \\ \alpha_1 y - \underline{c}^T (A^{n-2} + \alpha_{n-1} A^{n-3} + \dots + \alpha_2 I) \underline{B} \underline{u} - \underline{d}^T \alpha_1 \underline{u} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} y - \underline{c}^T \underline{B} \underline{u} - \underline{d}^T \alpha_{n-1} \underline{u} \end{bmatrix}}_{\underline{a}(y, \underline{u})}, \quad (3.28a)$$

$$\underline{x}_n^* = \underbrace{y - \underline{d}^T \underline{u}}_{c(y, \underline{u})}. \quad (3.28b)$$

Die Auflösung der inversen Ausgangsgleichung (3.28b) nach  $y$  liefert

$$y = \underline{x}_n^* + \underline{d}^T \underline{u}.$$

Setzt man diese Beziehung in Gl. (3.28a) ein, so ergibt sich die lineare Beobachternormalform zu

$$\dot{\underline{x}}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underline{x}^* - \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \underline{x}_n^* - \underline{c}^T (\underline{A}^{n-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-2} + \dots + \alpha_1 \underline{I}) \underline{B} \underline{u} \\ \alpha_1 \underline{x}_n^* - \underline{c}^T (\underline{A}^{n-2} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-3} + \dots + \alpha_2 \underline{I}) \underline{B} \underline{u} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \underline{x}_n^* - \underline{c}^T \underline{B} \underline{u} \end{bmatrix}}_{\underline{a}^*(\underline{x}_n^*, \underline{u})}, \quad (3.29a)$$

$$\underline{y} = \underline{x}_n^* + \underline{d}^T \underline{u}. \quad (3.29b)$$

Durch einen Vergleich der beiden Darstellungen (3.27) und (3.29) ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Parameter  $\underline{d}^{*T}$ ,  $\underline{a}_i^*$  und  $\underline{b}_i^{*T}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ :

$$\underline{a}_i^* = \alpha_i,$$

$$\underline{b}_i^{*T} = \underline{c}^T (\underline{A}^{n-i-1} + \alpha_{n-1} \underline{A}^{n-i-2} + \dots + \alpha_{i+1} \underline{I}) \underline{B},$$

$$\underline{d}^{*T} = \underline{d}^T.$$

Es ist das folgende Resultat festzuhalten: Die im Abschnitt 3.3.1 angegebenen Bestimmungsgleichungen der Transformation auf NBNF können auch auf lineare, zeitinvariante Systeme angewandt werden, um die lineare Beobachternormalform (3.27) zu berechnen. Dabei spielt die NCG (3.17) eine entscheidende Rolle, da aus ihr die Koeffizienten  $\alpha_i$  berechnet werden können, welche zur Bestimmung der Transformation (3.26) notwendig sind.

Anmerkung:

Die eindeutige Umkehrung der linearen Transformation (3.26) existiert nur dann, wenn das zu transformierende System (3.18) vollständig beobachtbar ist, wenn also die lineare Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{Q}_B$  den Höchststrang  $n$  hat. Dann nämlich hat aufgrund der leicht herleitbaren Beziehung

$$\det \underline{V} = \det \underline{Q}_B$$

auch die Transformationsmatrix  $\underline{V}$  den Höchststrang  $n$ .

### 3.3.3 Lösung der NCG zur Bestimmung der Transformation für ein nichtlineares Beispiel

Nun soll das vorgestellte Transformationsverfahren auf nichtlineare Systeme angewandt werden. Weil sich in allgemeiner Form keine geschlossene Lösung angeben läßt, wird die Vorgehensweise an einem konkreten Beispiel, nämlich der im Abschnitt 2.8.1 behandelten Räuber-Beute-Beziehung, verdeutlicht. Die Aufgabe besteht darin, das zeitinvariante System (2.22) in die NBNF

$$\dot{\underline{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} - \begin{bmatrix} a_0(y,u) \\ a_1(y,u) \end{bmatrix}, \quad (3.30a)$$

$$x_n^* = c(y) \quad (3.30b)$$

zu überführen. Weil die Räuber-Beute-Beziehung ein nichtsprungfähiges System darstellt, wird auch die Funktion  $c$  in Gl. (3.30b) als unabhängig von  $u$  angesetzt. Die unbekannt Funktionen  $a_0(y,u)$ ,  $a_1(y,u)$  sowie  $c(y)$  sollen nun aus der NCG (3.17) berechnet werden, welche sich für  $n = 2$  zu

$$0 = N^2 c(y) + N a_1(y,u) + a_0(y,u) \quad (3.31)$$

vereinfacht. Dazu werden zunächst die Operatoren auf die Funktionen  $c(y)$  und  $a_1(y,u)$  angewandt. Für den zweiten Summanden ergibt sich unter Berücksichtigung der Definition (3.13)

$$N a_1(y,u) = \left[ \frac{\partial a_1(y,u)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x},u) = \frac{\partial a_1(y,u)}{\partial y} \left[ \frac{\partial y}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x},u).$$

Aufgrund der Ausgangsgleichung (2.22b) folgt hieraus

$$N a_1(y,u) = \frac{\partial a_1(y,u)}{\partial y} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{f}(\underline{x},u)$$

und nach Einsetzen der rechten Seite von Gl. (2.22a)

$$N a_1(y,u) = \frac{\partial a_1(y,u)}{\partial y} (c x_1 - d - f u) x_2. \quad (3.32)$$

Ganz entsprechend berechnet sich die Anwendung des Operators N auf  $c(y)$ . Man erhält

$$Nc(y) = \frac{dc(y)}{dy} (cx_1 - d - fu)x_2 . \quad (3.33)$$

Für die zweifache Anwendung von N auf  $c(y)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} N^2c(y) &= N\{Nc(y)\} \\ &= N\left\{\frac{dc(y)}{dy} (cx_1 - d - fu)x_2\right\} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left[\frac{dc(y)}{dy} (cx_1 - d - fu)x_2\right]\right]^T \underline{f}(\underline{x}, u) . \end{aligned}$$

Die Ausführung der Differentiation mit Hilfe der Ketten- und der Produktregel liefert wegen  $y = x_2$  die Beziehung

$$\begin{aligned} N^2c(y) &= \left[\frac{d^2c(y)}{dy^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (cx_1 - d - fu)x_2\right]^T \underline{f}(\underline{x}, u) + \\ &+ \left[\frac{dc(y)}{dy} \begin{bmatrix} cx_2 \\ cx_1 - d - fu \end{bmatrix}\right]^T \underline{f}(\underline{x}, u) . \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der rechten Seite von Gl. (2.22a) erhält man für  $N^2c(y)$  schließlich den Ausdruck

$$\begin{aligned} N^2c(y) &= \frac{d^2c(y)}{dy^2} (cx_1 - d - fu)^2 x_2^2 + \\ &+ \frac{dc(y)}{dy} \left[ cx_1 x_2 (a - bx_2) + (cx_1 - d - fu)^2 x_2 \right] . \quad (3.34) \end{aligned}$$

Nun werden die Gl'n. (3.32) und (3.34) in die NCG (3.31) eingesetzt und  $x_2$  durch  $y$  ersetzt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2c(y)}{dy^2} (cx_1 - d - fu)^2 y^2 + \frac{dc(y)}{dy} \left[ cx_1 y (a - by) + (cx_1 - d - fu)^2 y \right] + \\ &+ \frac{\partial a_1(y, u)}{\partial y} \left[ cx_1 y - (d + fu)y \right] + a_0 . \quad (3.35) \end{aligned}$$

Verwendet man die Abkürzungen

$$c_{yy} := \frac{d^2 c(y)}{dy^2}, \quad c_y := \frac{dc(y)}{dy},$$

$$a_{1y} := \frac{\partial a_1(y,u)}{\partial y}, \quad a_0 := a_0(y,u)$$

und ordnet die Gl. (3.35) nach Potenzen von  $x_1$ , so resultiert die Beziehung\*)

$$\begin{aligned} 0 = & x_1^2 [c_{yy}y + c_y] c^2 y + & (3.36) \\ & + x_1 [-2c_{yy}(d+fu)y + c_y(a-by-2(d+fu)) + a_{1y}] cy + \\ & + [c_{yy}(d+fu)^2 y^2 + c_y(d+fu)^2 y - a_{1y}(d+fu)y + a_0]. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle  $x$  erfüllt, wenn sämtliche eckige Klammern verschwinden. Somit hat man die *drei* folgenden Gleichungen zur Bestimmung der *drei* gesuchten Funktionen  $c(y)$ ,  $a_1(y,u)$  und  $a_0(y,u)$ :

$$\frac{c_{yy}}{c_y} = -\frac{1}{y}, \quad (3.37)$$

$$a_{1y} = 2c_{yy}(d+fu)y - c_y(a-by-2(d+fu)), \quad (3.38)$$

$$a_0 = -c_{yy}(d+fu)^2 y^2 - c_y(d+fu)^2 y + a_{1y}(d+fu)y. \quad (3.39)$$

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich noch wesentlich vereinfachen. Aus Gl. (3.38) folgt durch Einsetzen von Gl. (3.37)

$$a_{1y} = c_y(by-a), \quad (3.40)$$

und aus Gl. (3.39) ergibt sich durch Einsetzen der beiden anderen

$$a_0 = c_y(by-a)(d+fu)y. \quad (3.41)$$

---

\*) Achtung: Der in Gl. (3.36) auftretende Buchstabe  $c$  ohne Index steht für den *konstanten Modellparameter* der Systemgleichung (2.22a), hat also nichts mit der zu bestimmenden Funktion  $c(y)$  zu tun.

Zunächst wird aus Gl. (3.37), einer Differentialgleichung 2. Ordnung, die Funktion  $c(y)$  berechnet. Durch beidseitige Integration erhält man

$$c_y = \frac{C_1}{y} \quad (3.42)$$

und daraus

$$c(y) = C_1 \ln y + C_2, \quad (3.43)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  beliebige Integrationskonstanten darstellen.\*)  
Mit dem Ergebnis für  $c_y(y)$  lassen sich nun auch die Funktionen  $a_1(y,u)$  und  $a_0(y,u)$  bestimmen. Die Integration der Gleichung

$$a_{1y}(y,u) = C_1 \left( b - \frac{a}{y} \right),$$

die sich durch Einsetzen von Gl. (3.42) in Gl. (3.40) ergibt, liefert

$$a_1(y,u) = C_1 (by - a \ln y) + C_3(u), \quad (3.44)$$

wobei der Integrationsparameter  $C_3(u)$  beliebig von  $u$  abhängen darf. Schließlich ist durch die Gln. (3.41) und (3.42) auch die Funktion  $a_0(y,u)$  festgelegt, nämlich zu

$$a_0(y,u) = C_1 (by - a)(d + fu). \quad (3.45)$$

Nachdem es gelungen ist, die drei Funktionen  $c(y)$ ,  $a_1(y,u)$  und  $a_0(y,u)$  bis auf die auftretenden Integrationsparameter zu berechnen, kann mit Hilfe der Gl. (3.16) die Transformation  $\underline{v}(\underline{x})$  bestimmt werden. Sie ergibt sich für das betrachtete Beispiel zu

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} Nc(y) + a_1(y,u) \\ c(y) \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

---

\*) Der Betrag des Arguments von  $\ln$  in Gl. (3.43) kann weggelassen werden, da die Anzahl  $y = x_2$  der Räuber immer größer als Null ist, wenn man von dem Trivialfall  $y = 0$ , daß die Räuber ausgestorben sind, absieht.

Wie im linearen Fall des letzten Abschnitts muß auch hier dafür gesorgt werden, daß die rechte Gleichungsseite von  $\underline{u}$  unabhängig ist. Die zeitliche Ableitung einer Transformation der Form

$$\underline{x}^* = \underline{v}(\underline{x}, \underline{u})$$

würde nämlich nicht auf die NBNF (3.3) führen, sondern auf eine von  $\dot{\underline{u}}$  abhängige Form (siehe 5. Kapitel).

Wegen der Ausgangsgleichung (2.22b) ergibt sich für die zweite Transformationskomponente die Beziehung

$$v_2(\underline{x}) = c(x_2) = C_1 \ln x_2 + C_2 ,$$

welche von vornherein unabhängig von  $u$  ist. Für  $v_1(\underline{x})$  folgt aus Gl. (3.46) unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.22b), (3.33), (3.42) und (3.44) zunächst

$$v_1(\underline{x}) = C_1(cx_1 - d - fu) + C_1(bx_2 - a \ln x_2) + C_3(u) .$$

Wählt man die Funktion  $C_3(u)$  zu

$$C_3(u) = C_1 fu ,$$

so kompensiert sich die  $u$ -Abhängigkeit, und es bleibt

$$v_1(\underline{x}) = C_1(cx_1 - d + bx_2 - a \ln x_2)$$

übrig. Legt man die beliebig wählbaren Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu

$$C_1 = 1 , \quad C_2 = 0$$

fest, so lautet die Transformation  $\underline{v}(\underline{x})$  schließlich

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} cx_1 - d + bx_2 - a \ln x_2 \\ \ln x_2 \end{bmatrix} . \quad (3.47)$$

Sie überführt das System (2.22) in die NBNF

$$\dot{\underline{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 - (by-a)(d+fu) \\ x_1^* - (by-a \ln y + fu) \end{bmatrix}, \quad (3.48a)$$

$$x_2^* = \ln y. \quad (3.48b)$$

Wie bei den linearen Systemen wurden auch bei der Behandlung der nichtlinearen Räuber-Beute-Beziehung die unbekannt Funktionen bis auf die Integrationsparameter aus der NCG (3.17) berechnet. Für das System 2. Ordnung ergaben sich durch Ordnen nach Potenzen der nichtmeßbaren Zustandsgröße *drei* Gleichungen für die *drei* zu bestimmenden Funktionen  $c(y)$ ,  $a_1(y,u)$  und  $a_0(y,u)$ . Ganz entsprechend kann auch bei Systemen höherer Ordnung vorgegangen werden. Allgemein gilt die folgende *Faustregel*:

Für die Existenz der Transformation eines Systems  $n$ -ter Ordnung auf NBNF ist es notwendig, daß sich durch Ordnen der NCG nach Potenzen oder anderen Funktionen der nichtmeßbaren Zustandsgrößen maximal  $n+1$  Gleichungen für die  $n+1$  Unbekannten  $c(y,\underline{u},t)$ ,  $a_{n-1}(y,\underline{u},t), \dots, a_0(y,\underline{u},t)$  ergeben.

So praktikabel die beschriebene Vorgehensweise auch sein mag, vom theoretischen Standpunkt ist sie insofern recht unbefriedigend, als sich die Berechnung der Transformation nicht näher schematisieren läßt. In den folgenden Abschnitten wird deshalb eine geeignetere Methode vorgestellt. Sie führt auf konkrete Existenzbedingungen der NBNF, welche unmittelbar mit der Beobachtbarkeit in Verbindung stehen.

### 3.3.4 Motivation einer Zwei-Schritt-Transformation

Wie sich im folgenden zeigen wird, stellt die Beobachtbarkeit des gegebenen Systems eine notwendige Voraussetzung für die Existenz des mit Hilfe der NBNF entworfenen Beobachters dar. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, zunächst eine Beobachtbarkeitsanalyse durchzuführen, d.h. zu untersuchen, ob bzw. in welchem Gebiet das System beobachtbar ist. Dazu überführt man das System in die im Kapitel 2 vorgestellte NBKNF. Das System ist nämlich auf jeden Fall in demjenigen Gebiet beobachtbar, in dem die Transformation auf NBKNF umkehrbar eindeutig ist - vorausgesetzt, die Trajekto-

rie bleibt innerhalb dieses Gebiets. Erst in einem zweiten Schritt wird dann die NBKNF in die NBNF überführt. Eine solche *Zwei-Schritt-Transformation* bietet gegenüber der im letzten Abschnitt vorgestellten Vorgehensweise den Vorteil, daß sie konkrete Bedingungen für die Existenz der NBNF liefert, die im Anwendungsfall unmittelbar nach dem ersten Schritt überprüft werden können.

Nun ist aber die Frage berechtigt, ob durch den Umweg über die NBKNF nicht irgendwelche Lösungen verlorengehen, die bei einer direkten Transformationsberechnung möglich wären. Diese Frage kann verneint werden, da mit der NBNF auch immer die NBKNF existiert, sofern im betrachteten Gebiet nur die Bedingung

$$\frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} \neq 0 \quad (3.49)$$

erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung kann nämlich jedes in NBNF vorliegende System *umkehrbar eindeutig* in die NBKNF überführt werden. Dies wird im folgenden gezeigt.

Um von der NBNF (3.2) zur NBKNF (2.2) zu gelangen, muß die Abbildungsvorschrift (2.7) wie folgt modifiziert werden:

$$\underline{\bar{x}} = \begin{bmatrix} h^*(x_n, \underline{u}, t) \\ M^* h^*(x_n^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ M^{*n-1} h^*(x_n^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix} . \quad (3.50)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{w}(\underline{x}^*, \hat{\underline{u}}_n, t)}$

Darin ist  $h^*(x_n^*, \underline{u}, t)$  die rechte Seite der NBNF-Ausgangsgleichung (3.2b) und  $M^*$  der für ein in NBNF vorliegendes System anzuwendende Operator. Für ihn gilt analog zu den Gln. (2.10)

$$M^{*0} h^* := h^* ,$$

$$M^{*i} h^* := \frac{\partial M^{*i-1} h^*}{\partial t} + \left[ \frac{\partial M^{*i-1} h^*}{\partial \hat{u}_j} \right]^T \dot{\hat{u}}_j + \left[ \frac{\partial M^{*i-1} h^*}{\partial x_j^*} \right]^T \underline{f}^* , \quad i=1, \dots, n ,$$

mit  $\hat{u}_i$  gemäß Gl. (2.9). Aufgrund der speziellen NBNF-Struktur ergeben sich nach Ausführen der Operatoranwendungen in der Abbildungsvorschrift (3.50) die Transformationsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= h^*(x_n^*, \underline{u}, t) , \\ \bar{x}_2 &= \frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} x_{n-1}^* + \zeta_2(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) , \\ \bar{x}_3 &= \frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} x_{n-2}^* + \zeta_3(x_n^*, x_{n-1}^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) , \\ &\vdots \\ \bar{x}_n &= \frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} x_1^* + \zeta_n(x_n^*, \dots, x_2^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) , \end{aligned} \right\} (3.51)$$

wenn die bei diesen Operatoranwendungen entstehenden restlichen Terme abkürzend mit  $\zeta_2, \dots, \zeta_n$  bezeichnet werden. Da die Funktion  $h^*(x_n^*, \underline{u}, t)$  stets von  $x_n^*$  abhängt, ist die Bedingung (3.49) allenfalls in einzelnen Punkten nicht erfüllt. Sieht man von diesen Punkten ab, so läßt sich die Abbildung (3.51) eindeutig nach den Komponenten von  $\underline{x}^*$  auflösen, denn auch die Beziehung für  $\bar{x}_1$  ist nach [46] zumindest in Teilgebieten der für  $x_n^*$ ,  $\underline{u}$  und  $t$  in Frage kommenden Bereiche eindeutig nach  $x_n^*$  auflösbar.

Für  $x_n^*$  ergibt sich eine von  $x_1$ ,  $\underline{u}$  und  $t$  abhängige Funktion  $w_n$ , die wegen der Ausgangsbeziehung

$$y = \bar{x}_1 \tag{2.2b}$$

gerade gleich der Funktion  $c(y, \underline{u}, t)$  der inversen Ausgangsgleichung (3.3b) ist. Demnach ist

$$x_n^* = c(y, \underline{u}, t) =: w_n(\bar{x}_1, \underline{u}, t) . \tag{3.52}$$

Die Auflösung der zweiten Abbildungsgleichung nach  $x_{n-1}^*$  liefert

$$x_{n-1}^* = \left[ \frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} \right]^{-1} \left[ \bar{x}_2 - \zeta_2(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \right] ,$$

woraus durch Einsetzen von Gl. (3.52)

$$x_{n-1}^* = w_{n-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, t)$$

folgt. So fortfahrend erhält man für die Transformation der NBKNF auf NBNF schließlich den Aufbau

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_{n-1}^* \\ x_n^* \end{bmatrix}}_{\underline{x}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n-1)} \\ \vdots \\ w_{n-1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, t) \\ w_n(\bar{x}_1, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{w}(\underline{\bar{x}}, \underline{\hat{u}}_n, t)}$$

Man hat somit das folgende Resultat:

*Die Existenz der NBKNF gemäß den Gln. (2.2) ist notwendige Voraussetzung für die Existenz der NBNF (3.2).*

Dieser Sachverhalt rechtfertigt es, die Transformation auf NBNF gemäß Bild 3.1 in zwei Schritten vorzunehmen:

- Zunächst wird das Originalsystem (3.1) hinsichtlich seiner Beobachtbarkeit untersucht, indem es mit Hilfe der Transformation (2.7) in die NBKNF (2.2) überführt wird. Läßt sich die NBKNF nicht erreichen, so existiert auch keine NBNF und die Untersuchungen können abgebrochen werden.
- Läßt sich die NBKNF im ersten Transformationsschritt erzeugen, so kann man versuchen, von der NBKNF ausgehend, die Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\underline{\bar{x}}, \underline{\hat{u}}_n, t)$$

auf NBNF zu berechnen, wobei allerdings noch nicht sicher ist, daß diese existiert.

Die Bestimmungsgleichungen dieser zweiten Transformation sowie deren Existenzbedingungen werden in den folgenden Abschnitten hergeleitet.



Bild 3.1 Transformation auf NBNF in zwei Schritten

### 3.3.5 Transformation der NBKNF auf NBNF

Ist es im ersten Transformationsschritt gelungen, die geforderte NBKNF zu erzeugen, so muß im zweiten Schritt der Übergang von der NBKNF zur NBNF vollzogen werden. Gesucht ist also eine im Beobachtbarkeitsbildgebiet  $\bar{G}$  umkehrbar eindeutige, stetige und hinreichend oft differenzierbare Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t) , \quad (3.53)$$

die ein in NBKNF vorliegendes System der Form (2.2) in die NBNF gemäß den Gln. (3.2) bzw. (3.3) überführt. Die Abhängigkeit der Transformation (3.53) von  $\hat{u}_n$  ist dabei so zu bestimmen, daß die  $\hat{u}_n$ -Abhängigkeit der ersten Transformation

$$\bar{x} = \underline{q}(\underline{x}, \hat{u}_n, t)$$

gerade kompensiert wird, so daß die gesuchte Gesamttransformation

$$\underline{x}^* = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad (3.10)$$

nur von  $\underline{x}$  und  $t$ , nicht aber von  $\underline{u}$  und dessen zeitlichen Ableitungen abhängt. Nur dann ist nämlich gewährleistet, daß in der NBNF keine Ableitungen von  $\underline{u}$  auftreten. Es muß also gelten

$$\underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t) = \underline{w}(\underline{q}(\underline{x}, \hat{u}_n, t), \hat{u}_n, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) . \quad (3.54)$$

Zur Herleitung der Bestimmungsgleichungen der Transformation  $\underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t)$  wird in die totale zeitliche Ableitung von Gl. (3.53),

$$\dot{\underline{x}}^* = \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial t} + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \underline{\bar{x}}} \dot{\underline{x}},$$

die Zustandsgleichung (2.2a) der NBKNF eingesetzt:

$$\dot{\underline{x}}^* = \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial t} + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \underline{\bar{x}}} \underline{\bar{f}}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, \underline{u}, t)^{(n)}. \quad (3.55)$$

Ein Vergleich der Gl. (3.55) mit Gl. (3.3a) liefert die partielle Vektordifferentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial t} + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \frac{\partial w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)}{\partial \underline{\bar{x}}} \underline{\bar{f}}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, \underline{u}, t)^{(n)} \\ \stackrel{!}{=} \underline{E} w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t) - \underline{a}(y, \underline{u}, t), \end{aligned} \quad (3.56)$$

wenn in Gl. (3.3a)  $\underline{x}^*$  durch  $w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  ersetzt wird. Hieraus ist die Transformation  $w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  zu berechnen.

Zunächst wird die Gleichung (3.56) komponentenweise angeschrieben. Läßt man die Argumente hinter den Komponenten  $w_i$  von  $w(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  weg und berücksichtigt den speziellen Aufbau der Matrix  $\underline{E}$ , so ergibt sich

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial w_1}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \right]^T \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \left[ \frac{\partial w_1}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T \underline{\bar{f}}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, \underline{u}, t)^{(n)} = 0 - a_0(y, \underline{u}, t), \quad (3.57a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial t} + \left[ \frac{\partial w_i}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \right]^T \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \left[ \frac{\partial w_i}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T \underline{\bar{f}}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_n, \underline{u}, t)^{(n)} = w_{i-1} - a_{i-1}(y, \underline{u}, t), \\ i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.57b)$$

Die Vektoren  $\left[ \frac{\partial w_i}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \right]^T$  und  $\left[ \frac{\partial w_i}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T$  stellen hierbei die  $i$ -ten Zeilen

der in den obigen Gleichungen auftretenden Jacobi-Matrizen

$\frac{\partial w}{\partial \hat{\underline{u}}_n}$  und  $\frac{\partial w}{\partial \underline{\bar{x}}}$  dar.

Für die weiteren Betrachtungen erweist es sich als zweckmäßig, den linearen Differentialoperator  $\bar{M}$  einzuführen, der die totale zeitliche Ableitung seines Operanden bewirkt und definiert ist als

$$\bar{M}w_i := \frac{\partial w_i}{\partial t} + \left[ \frac{\partial w_i}{\partial \hat{u}_n} \right]^T \dot{\hat{u}}_n + \left[ \frac{\partial w_i}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{f}(\bar{x}, \hat{u}_n, \underline{u}, t) \quad (n)$$

Damit lassen sich die Gln. (3.57) in der kompakteren Form

$$0 = \bar{M}w_1 + a_0(y, \underline{u}, t) \quad (3.58a)$$

$$w_{i-1} = \bar{M}w_i + a_{i-1}(y, \underline{u}, t) \quad , \quad i = 2, \dots, n \quad (3.58b)$$

darstellen. Für die letzte Komponente  $w_n$  der Transformation  $w(\bar{x}, \hat{u}_n, t)$  gilt wegen der Beziehung (3.52)

$$w_n = c(y, \underline{u}, t) \quad (3.59a)$$

Setzt man diese Gleichung in diejenige für  $w_{n-1}$  ein, so ergibt sich

$$w_{n-1} = \bar{M}c(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) \quad .$$

Diese Beziehung in die Gleichung für  $w_{n-2}$  eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} w_{n-2} &= \bar{M} \{ \bar{M}c(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) \} + a_{n-2}(y, \underline{u}, t) \\ &= \bar{M}^2 c(y, \underline{u}, t) + \bar{M}a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + a_{n-2}(y, \underline{u}, t) \quad . \end{aligned}$$

So fortfahrend erhält man schließlich aus den Gln. (3.58) das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} w_{n-1} &= \bar{M} c(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) \quad , \\ w_{n-2} &= \bar{M}^2 c(y, \underline{u}, t) + \bar{M}a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + a_{n-2}(y, \underline{u}, t) \quad , \\ &\vdots \\ w_1 &= \bar{M}^{n-1} c(y, \underline{u}, t) + \bar{M}^{n-2} a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + \dots + a_1(y, \underline{u}, t) \quad , \\ 0 &= \bar{M}^n c(y, \underline{u}, t) + \bar{M}^{n-1} a_{n-1}(y, \underline{u}, t) + \dots + a_0(y, \underline{u}, t) \quad . \end{aligned} \right\} (3.59b)$$

$$(3.59c)$$

Für die mehrfache Anwendung des Operators  $\bar{M}$  gilt entsprechend den Definitionen für  $M$  und  $M^*$

$$\bar{M}^0 c := c ,$$

$$\bar{M}^i c := \frac{\partial \bar{M}^{i-1} c}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1} c}{\partial \hat{u}_i} \right]^T \dot{\hat{u}}_i + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1} c}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{f} , \quad i = 1, \dots, n .$$

Durch die Gln. (3.59a) und (3.59b) ist der Aufbau der gesuchten Transformation  $\underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t)$  festgelegt:

$$\underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t) = \begin{bmatrix} \bar{M}^{n-1} c(y, \underline{u}, t) + \dots + \bar{M} a_2(y, \underline{u}, t) + a_1(y, \underline{u}, t) \\ \bar{M}^{n-2} c(y, \underline{u}, t) + \dots + a_2(y, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ \bar{M} c(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, t) \\ c(y, \underline{u}, t) \end{bmatrix} . \quad (3.60)$$

Sie läßt sich jedoch erst bestimmen, nachdem die Funktionen  $a_1(y, \underline{u}, t), \dots, a_{n-1}(y, \underline{u}, t)$  und  $c(y, \underline{u}, t)$  aus der NCG (3.59c), die sich auch in der Form

$$0 = \bar{M}^n c(y, \underline{u}, t) + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{M}^i a_i(y, \underline{u}, t) \quad (3.61)$$

anschreiben läßt, berechnet worden sind. Wie später noch deutlich wird, kompensieren sich die  $\hat{u}_n$ -Abhängigkeiten der Transformationen  $\underline{q}(\bar{x}, \hat{u}_n, t)$  und  $\underline{w}(\bar{x}, \hat{u}_n, t)$  in Gl. (3.54) zwangsläufig, wenn die Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  unabhängig von Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  bestimmt werden können.

Obwohl die auf die NBKNF bezogene NCG (3.61) formal mit der auf das Originalsystem bezogenen NCG (3.17) identisch ist, lassen sich aus ihr konkretere Bedingungen für die Existenz der NBNF gewinnen. Diese werden in den beiden folgenden Abschnitten für Systeme 2. und 3. Ordnung hergeleitet.

### 3.3.6 Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 2. Ordnung

Gemäß den Gl.n. (3.3) lautet die NBNF 2. Ordnung

$$\underline{\dot{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_0(y, \underline{u}, t) \\ x_1^* & -a_1(y, \underline{u}, t) \end{bmatrix}, \quad (3.62a)$$

$$x_2^* = c(y, \underline{u}, t), \quad (3.62b)$$

und die NCG (3.61) vereinfacht sich für  $n = 2$  zu

$$0 = \bar{M}^2 c(y, \underline{u}, t) + \bar{M} a_1(y, \underline{u}, t) + a_0(y, \underline{u}, t). \quad (3.63)$$

Der Operator  $\bar{M}$  wird hierin auf die unbekannt Funktionen  $c(y, \underline{u}, t)$  und  $a_1(y, \underline{u}, t)$  angewandt. Nun gilt aber für die Anwendung des Operators  $\bar{M}$  auf die Funktion  $a_1(y, \underline{u}, t)$ , die nur von  $y = \bar{x}_1$ ,  $\underline{u}$  und  $t$ , nicht aber vom gesamten Vektor  $\underline{\bar{x}}$  abhängt,

$$\begin{aligned} \bar{M} a_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial a_1}{\partial \underline{u}} \right]^T \underline{\dot{u}} + \left[ \frac{\partial a_1}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T \underline{\bar{f}} \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial a_1}{\partial \underline{u}} \right]^T \underline{\dot{u}} + \frac{\partial a_1}{\partial y} \left[ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T \underline{\bar{f}}. \end{aligned}$$

Wegen des speziellen Aufbaus des NBKNF-Systemvektors  $\underline{\bar{f}}(\bar{x}, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \underline{\ddot{u}}, t)$  in Gl. (2.2a) ergibt sich daraus

$$\bar{M} a_1 = \frac{\partial a_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial a_1}{\partial \underline{u}} \right]^T \underline{\dot{u}} + \frac{\partial a_1}{\partial y} \bar{x}_2.$$

Ganz entsprechend erhält man

$$\bar{M} c = \frac{\partial c}{\partial t} + \left[ \frac{\partial c}{\partial \underline{u}} \right]^T \underline{\dot{u}} + \frac{\partial c}{\partial y} \bar{x}_2$$

und bei zweifacher Anwendung des Operators  $\bar{M}$

$$\begin{aligned} \bar{M}^2_c &= \bar{M} \{ \bar{M}_c \} \\ &= \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial \underline{u}^2} \right] \dot{\underline{u}} + \left[ \frac{\partial c}{\partial \underline{u}} \right]^T \ddot{\underline{u}} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial y} \bar{x}_2 + 2 \left[ \frac{\partial^2 c}{\partial \underline{u} \partial y} \right]^T \dot{\underline{u}} \bar{x}_2 + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \bar{x}_2^2 + \frac{\partial c}{\partial y} (-\bar{a}) , \end{aligned}$$

wobei  $-\bar{a}$  die letzte Komponente des NBKNF-Systemvektors  $\bar{f}$  darstellt.\*) Für die folgenden Betrachtungen erweist es sich als sinnvoll, die Variablen, nach denen abgeleitet wird, als Index hinter die abzuleitende Funktion zu schreiben. Dann erhält man für die NCG (3.63) den Ausdruck

$$\begin{aligned} 0 &= c_{tt} + 2(c_{t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + 2c_{ty} \bar{x}_2 + \\ &+ 2(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} \bar{x}_2 + c_{yy} \bar{x}_2^2 - c_y \bar{a} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y} \bar{x}_2 + a_0 . \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach  $\bar{a}$  und gleichzeitiges Ordnen nach Potenzen von  $\bar{x}_2$  liefert

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{x}_2^2 \left[ c_{yy} \right] \frac{1}{c_y} + \bar{x}_2 \left[ 2c_{ty} + 2(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y} \right] \frac{1}{c_y} + \\ &+ \left[ c_{tt} + 2(c_{t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 \right] \frac{1}{c_y} . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Da die Funktionen  $c$ ,  $a_1$  und  $a_0$  sowie deren partielle Ableitungen nur von  $y = \bar{x}_1, \underline{u}$  und  $t$  abhängen, führt die letzte Gleichung auf folgende *notwendige Bedingung* für die Existenz der NBNF 2. Ordnung:

Die Funktion  $\bar{a}(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  in der letzten Komponente des NBKNF-Systemvektors  $\bar{f}(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  muß die Forderung

$$\bar{a} \stackrel{!}{=} K_2(\bar{x}_1, \underline{u}, t) \bar{x}_2^2 + K_1(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_2 + K_0(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \quad (3.65)$$

erfüllen.

\*) Die hierbei angewandte Differentiationsregel ist im Anhang B.2 angegeben.

Falls die NBKNF und damit auch die Funktion  $\bar{a}$  aus dem ersten Transformationsschritt bekannt ist, kann diese Bedingung direkt überprüft werden. Ist sie erfüllt, so sind die Funktionen  $K_0$ ,  $K_1$  und  $K_2$  festgelegt, und man erhält durch einen Vergleich mit Gl. (3.64) und unter Berücksichtigung der NBKNF-Ausgangsgleichung (2.3b) die *drei* folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung der *drei* unbekanntenen Funktionen  $c(y, \underline{u}, t)$ ,  $a_1(y, \underline{u}, t)$  und  $a_0(y, \underline{u}, t)$ :

$$c_{yy} = K_2(y, \underline{u}, t)c_y, \quad (3.66a)$$

$$2c_{ty} + 2(c_{\underline{u}y})^T \underline{\dot{u}} + a_{1y} = K_1(y, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, t)c_y, \quad (3.66b)$$

$$\begin{aligned} c_{tt} + 2(c_{t\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \underline{\dot{u}} + (c_{\underline{u}})^T \underline{\ddot{u}} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + \alpha_0 = \\ = K_0(y, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \underline{\ddot{u}}, t)c_y. \end{aligned} \quad (3.66c)$$

Zunächst wird aus der Differentialgleichung (3.66a)  $c(y, \underline{u}, t)$  zu

$$c(y, \underline{u}, t) = C_1(\underline{u}, t) \int e^{\int K_2(y, \underline{u}, t) dy} dy + C_2(\underline{u}, t) \quad (3.67)$$

berechnet. Die dabei auftretenden Integrationsparameter  $C_1(\underline{u}, t)$  und  $C_2(\underline{u}, t)$  sind beliebige Funktionen von  $\underline{u}$  und  $t$ . Setzt man Gl. (3.67) in Gl. (3.66b) ein, so hat man eine Differentialgleichung 1. Ordnung für  $a_1(y, \underline{u}, t)$ . Es muß jetzt versucht werden, die beliebig angesetzten Integrationsparameter so zu wählen, daß sich die eventuell vorhandene  $\underline{\dot{u}}$ -Abhängigkeit in Gl. (3.66b) gerade heraushebt. Nur wenn dies gelingt, kann  $a_1$  als Funktion von  $y$ ,  $\underline{u}$  und  $t$  allein angegeben werden. Ansonsten hängt  $a_1$  zusätzlich von  $\underline{\dot{u}}$  ab, und die NBNF gemäß den Gln. (3.62) kann nicht existieren. Schließlich müssen die berechneten Funktionen  $c(y, \underline{u}, t)$  und  $a_1(y, \underline{u}, t)$  in Gl. (3.66c) eingesetzt werden. Damit hat man eine rein algebraische Gleichung für die Funktion  $a_0(y, \underline{u}, t)$ . Auch hier muß eine eventuelle Abhängigkeit von  $\underline{\dot{u}}$  und  $\underline{\ddot{u}}$  beseitigt werden, indem die bei den vorangegangenen Integrationen entstandenen, noch freien Integrationsparameter geeignet gewählt werden. Es wird auf jeden Fall immer eine Lösung  $a_0(y, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \underline{\ddot{u}}, t)$  gefunden, falls sich die  $\underline{\dot{u}}$ - und  $\underline{\ddot{u}}$ -Abhängigkeiten nicht eliminieren lassen. Dieser Fall wird in Kapitel 5 noch näher angesprochen.

### 3.3.7 Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 3. Ordnung

Nun sollen entsprechende Bedingungen für die Existenz der NBNF 3. Ordnung hergeleitet werden. Als Ausgangspunkt dient auch hier wieder die NCG (3.61), welche sich für  $n = 3$  zu

$$0 = \bar{M}^3 c(y, \underline{u}, t) + \bar{M}^2 a_2(y, \underline{u}, t) + \bar{M} a_1(y, \underline{u}, t) + a_0(y, \underline{u}, t)$$

reduziert. Durch Ausführen der Operatoranwendungen<sup>\*)</sup>, Auflösen der Gleichung nach der Funktion  $\bar{a}$  des NBKNF-Systemvektors

$$\bar{f}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, \ddot{\ddot{\underline{u}}}, t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ -\bar{a}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, \ddot{\ddot{\underline{u}}}, t) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

und Ordnen der auftretenden Summanden nach Potenzen bzw. Produkten der nichtmeßbaren Zustandsgrößen  $\bar{x}_2$  und  $\bar{x}_3$  erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \bar{x}_2^3 \left[ c_{yyy} \right] \frac{1}{c_y} + \bar{x}_2^2 \left[ 3c_{tyy} + 3(c_{\underline{u}yy})^T \dot{\underline{u}} + a_{2yy} \right] \frac{1}{c_y} + \quad (3.69) \\ & + \bar{x}_2 \left[ 3c_{tty} + 6(c_{t\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + 3\dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}y}) \dot{\underline{u}} + 3(c_{\underline{u}y})^T \ddot{\underline{u}} + \right. \\ & \quad \left. + 2a_{2ty} + 2(a_{2\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y} \right] \frac{1}{c_y} + \\ & + \bar{x}_3 \left[ 3c_{ty} + 3(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{2y} \right] \frac{1}{c_y} + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \left[ 3c_{yy} \right] \frac{1}{c_y} + \\ & + \left[ c_{ttt} + 3(c_{tt\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + 3(c_{t\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + 3\dot{\underline{u}}^T (c_{t\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^p \dot{u}_i \dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}\underline{u}_i}) \dot{\underline{u}} + 3\dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \ddot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\ddot{\underline{u}}} + a_{2tt} + \right. \\ & \quad \left. + 2(a_{2t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (a_{2\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (a_{2\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 \right] \frac{1}{c_y} . \end{aligned}$$

\*) Die hierzu erforderlichen Differentiationsregeln sind im Anhang B angegeben.

Hieraus ist eine *notwendige Bedingung* für die Existenz der NBNF 3. Ordnung abzulesen, die sich aufgrund der Ausgangsbeziehung  $y = \bar{x}_1$  wie folgt formulieren läßt:

Die Funktion  $\bar{a}(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  der letzten Komponente des NBKNF-Systemvektors (3.68) muß die Forderung

$$\bar{a} \stackrel{!}{=} K_5(\bar{x}_1, \underline{u}, t) \bar{x}_2^3 + K_4(x_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_2^2 + K_3(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \bar{x}_2 + \quad (3.70)$$

$$+ K_2(\bar{x}_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_3 + K_1(\bar{x}_1, \underline{u}, t) \bar{x}_2 \bar{x}_3 + K_0(x_1, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$$

erfüllen.\*)

Ist diese Forderung erfüllt, so sind die  $K_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$ , festgelegt. Durch einen Vergleich der Gln. (3.69) und (3.70) ergeben sich *sechs* Bestimmungsgleichungen zur Bestimmung der *vier* unbekannt Funktionen  $c$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  und  $a_0$  :

$$c_{yyy} = K_5(y, \underline{u}, t) c_y, \quad (3.71a)$$

$$3c_{tyy} + 3(c_{\underline{u}yy})^T \dot{\underline{u}} + a_{2yy} = K_4(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_y, \quad (3.71b)$$

$$3c_{tty} + 6(c_{t\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + 3\dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}uy}) \dot{\underline{u}} + 3(c_{\underline{u}y})^T \ddot{\underline{u}} + 2a_{2ty} +$$

$$+ 2(a_{2\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y} = K_3(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) c_y, \quad (3.71c)$$

$$3c_{ty} + 3(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{2y} = K_2(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_y, \quad (3.71d)$$

$$3c_{yy} = K_1(y, \underline{u}, t) c_y, \quad (3.71e)$$

$$c_{ttt} + 3(c_{t\underline{t}u})^T \dot{\underline{u}} + 3(c_{t\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + 3\dot{\underline{u}}^T (c_{t\underline{u}u}) \dot{\underline{u}} + \sum_{i=1}^p \dot{\underline{u}}_i \dot{\underline{u}}_i^T (c_{\underline{u}u_i}) \dot{\underline{u}} +$$

$$+ 3\dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}u}) \ddot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{2tt} + 2(a_{2t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (a_{2\underline{u}u}) \dot{\underline{u}} + (a_{2\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} +$$

$$+ a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 = K_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) c_y. \quad (3.71f)$$

\*) Die Abhängigkeiten der "Koeffizienten"  $K_0, \dots, K_5$  ergeben sich notwendigerweise aus Gl. (3.69).

Dieses Gleichungssystem für die *vier* Unbekannten  $c$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  und  $a_0$  ist überbestimmt und somit im allgemeinen nicht lösbar. Eindeutige Lösungen können nur dann existieren, wenn zweimal je zwei Gleichungen miteinander *verträglich* sind. Tatsächlich gelingt es, Bedingungen für die "Koeffizienten"  $K_1$  anzugeben, unter denen Gl. (3.71a) mit Gl. (3.71e) und Gl. (3.71b) mit Gl. (3.71d) verträglich ist.

Die *erste Verträglichkeitsbedingung* erhält man durch Einsetzen der Gl. (3.71a) in die partiell nach  $y$  abgeleitete Gl. (3.71e). Es ergibt sich

$$3K_5(y, \underline{u}, t)c_y = \frac{\partial}{\partial y} K_1(y, \underline{u}, t)c_y + K_1(y, \underline{u}, t)c_{yy}$$

bzw. nach Substitution der Gl. (3.71e) und Division durch  $c_y$

$$3K_5(y, \underline{u}, t) = \frac{\partial}{\partial y} K_1(y, \underline{u}, t) + \frac{1}{3} K_1^2(y, \underline{u}, t) . \quad (3.72a)$$

Ganz entsprechend läßt sich die *zweite Verträglichkeitsbedingung* bestimmen. Einsetzen der Gl. (3.71b) in die partiell nach  $y$  abgeleitete Gl. (3.71d) liefert

$$K_4(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)c_y = \frac{\partial}{\partial y} K_2(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)c_y + K_2(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)c_{yy}$$

bzw., wenn Gl. (3.71e) eingesetzt und durch  $c_y$  dividiert wird,

$$K_4(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) = \frac{\partial}{\partial y} K_2(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) + \frac{1}{3} K_1(y, \underline{u}, t)K_2(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) . \quad (3.72b)$$

Diese beiden Bedingungen (3.72) stellen *zwei weitere notwendige Bedingungen* für die Existenz der NBNF 3. Ordnung dar. Sind sie erfüllt, so zieht man die *vier* Gleichungen (3.71c) bis (3.71f) zur Bestimmung der *vier* Funktionen  $c$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  und  $a_0$  heran, wobei aufgrund der "einseitigen Verkopplung" dieser Gleichungen die folgende Reihenfolge einzuhalten ist: Zunächst wird  $c(y, \underline{u}, t)$  aus Gl. (3.71e) berechnet, danach  $a_2(y, \underline{u}, t)$  aus Gl. (3.71d), dann  $a_1(y, \underline{u}, t)$  aus Gl. (3.71c) und schließlich  $a_0(y, \underline{u}, t)$  aus Gl. (3.71f). Auch hier sind die frei wählbaren Integrationsparameter auszunutzen, um eine Abhängigkeit der Funktionen von  $\dot{\underline{u}}$ ,  $\ddot{\underline{u}}$  und  $\ddot{\underline{u}}$  zu verhindern.

Es ist folgendes Ergebnis festzuhalten: Die Transformation von Systemen 3. Ordnung auf NBNF ist wesentlich komplizierter und aufwendiger als bei Systemen 2. Ordnung. Die Existenzbedingungen der NBNF verschärfen sich insbesondere durch die zwei Verträglichkeitsbedingungen (3.72), die von den "Koeffizienten"  $K_1, K_2, K_4$  und  $K_5$  des "Polynoms" (3.70) erfüllt werden müssen, damit das Gleichungssystem (3.71) nicht überbestimmt ist.

Auch für höhere Ordnungen ist eine systematische Berechnung der in der NCG auftretenden Funktionen möglich, jedoch wächst der von Hand durchzuführende Rechenaufwand aufgrund der erforderlichen Operatoranwendungen erheblich an. In der Forderung für die Funktion

$\bar{a}(\bar{x}, \underline{u}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)}$  treten mit steigender Ordnung immer mehr Kombinationen von Potenzen bzw. Produkten der nichtmeßbaren Zustandsgrößen  $\bar{x}_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , auf, und die Anzahl der sich ergebenden Gleichungen wächst stärker an als die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten. Somit wird das Gleichungssystem in zunehmendem Maße überbestimmt, und die Anzahl der zu erfüllenden Verträglichkeitsbedingungen erhöht sich dementsprechend.

Sind die Forderung an die Funktion  $\bar{a}$  sowie alle auftretenden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, so muß schließlich noch durch geeignete Wahl der Integrationsparameter dafür gesorgt werden, daß die gesuchten Funktionen  $a_{n-1}, \dots, a_0$  von Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  unabhängig sind. Auch diese Forderung ist im allgemeinen um so schwieriger zu erfüllen, je höher die Ordnung des zu transformierenden Systems ist, es sei denn, das System hat maximale Differenzordnung [15]. Dann nämlich greift die Eingangsgröße  $\underline{u}$  erst auf die n-te zeitliche Ableitung der Ausgangsgröße  $y$  direkt durch, was zur Folge hat, daß die Funktion  $\bar{a}$  in der NBKNF (2.3) und damit auch die in der Forderung für  $\bar{a}$  auftretenden "Koeffizienten"  $K_i$

nur von  $\underline{u}$ , nicht jedoch von  $\dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(n)}$  abhängen. In diesem Fall lassen sich auch die Funktionen  $a_{n-1}, \dots, a_0$  unabhängig von Ableitungen der Eingangsgröße angeben. Wie sich in den beiden Beispielen des Abschnitts 3.5 zeigen wird, ist die maximale Differenzordnung jedoch nur hinreichend und nicht notwendig für die Unabhängigkeit der Funktionen  $a_{n-1}, \dots, a_0$  von Ableitungen der Eingangsgröße.

### 3.3.8 Bestimmung der Gesamttransformation $\underline{y}$ und die Existenz ihrer Inversen $\tilde{\underline{y}}$

Sind die Funktionen  $c, a_{n-1}, \dots, a_0$  bestimmt, so kann mit Hilfe von Gl. (3.60) die Transformation  $\underline{w}(\bar{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  und daraus über die Beziehung (3.54) die Gesamttransformation  $\underline{y}$  berechnet werden. Geschickter ist es jedoch, die Gesamttransformation nach Gl. (3.16) direkt zu bestimmen. Falls die Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  so bestimmt werden konnten, daß sie nur von der Eingangsgröße  $\underline{u}$ , nicht jedoch von deren Ableitungen abhängen, ergibt sich die Transformation  $\underline{y}$  zwangsläufig als eine Funktion von  $\underline{x}$  und  $t$  allein, d.h. die  $\hat{\underline{u}}_n$ -Abhängigkeiten der Transformationen  $\underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  und  $\underline{w}(\bar{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  kompensieren sich gegenseitig. Dies ist einleuchtend, denn die totale zeitliche Ableitung einer von  $\underline{u}$  abhängigen Transformation  $\underline{y}$  würde nie auf eine Normalform führen, deren rechte Seite von  $\dot{\underline{u}}$  unabhängig ist. Der exakte Beweis wird im Kapitel 5 angegeben.

Läßt sich die NBKNF (2.2) im ersten Schritt erreichen, so gibt es ein Gebiet  $G$  des Original-Zustandsraumes, das durch die nach Gl. (2.7) zu berechnende Transformation

$$\bar{\underline{x}} = \underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$$

umkehrbar eindeutig in das Gebiet  $\bar{G}$  des NBKNF-Koordinatenraumes abgebildet wird. Ist darüber hinaus die in den beiden vorigen Abschnitten geforderte Beziehung für die Funktion  $\bar{a}(\bar{\underline{x}}, \underline{u}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)}$  samt den für  $n \geq 3$  notwendigen Verträglichkeitsbedingungen erfüllt, und lassen sich die gesuchten Funktionen  $a_0, \dots, a_{n-1}$  unabhängig von Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  bestimmen, so wird das Gebiet  $\bar{G}$  durch die nach Gl. (3.60) zu berechnende Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\bar{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}_n, t) \tag{3.53}$$

umkehrbar eindeutig in das Gebiet  $G^*$  des NBNF-Koordinatenraumes abgebildet, denn gemäß Abschnitt 3.3.4 existiert immer die Umkehrtransformation

$$\bar{\underline{x}} = \underline{w}(\underline{x}^*, \hat{\underline{u}}_n, t)$$

der NBNF in die NBKNF, sofern im Gebiet  $G^*$

$$\frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{x_n^*} \neq 0$$

gilt. Sind aber die beiden Transformationen  $\underline{q}$  und  $\underline{w}$  in den genannten Gebieten *umkehrbar eindeutig*, so ist auch die Gesamttransformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t), \hat{\underline{u}}_n, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) ,$$

die das Originalsystem (2.1) *direkt* in die NBNF (3.2) überführt, im Gebiet  $G$  *umkehrbar eindeutig* [60]. Folglich existiert im Gebiet  $G^*$  des NBNF-Koordinatenraumes die *inverse Transformation*

$$\underline{x} = \tilde{\underline{v}}(\underline{x}^*, t) , \tag{3.73}$$

welche die NBNF-Koordinaten in Originalkoordinaten zurückführt.

#### 3.4 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR DAS ORIGINALSYSTEM

Zu einem auf NBNF transformierten System kann mit Hilfe der Gl.(3.9) unmittelbar der zugehörige Beobachter in transformierten Koordinaten angegeben werden. Diesem werden als Eingangsgrößen  $\underline{u}$  und  $y$  laufend zugeführt, während er an seinem Ausgang einen Schätzwert  $\hat{\underline{x}}^*$  für den transformierten Zustandsvektor  $\underline{x}^*$  liefert. Der Schätzwert  $\hat{\underline{x}}$  des Originalzustandsvektors  $\underline{x}$  muß daraus mit Hilfe der inversen Transformation

$$\hat{\underline{x}} = \tilde{\underline{v}}(\hat{\underline{x}}^*, t) \tag{3.74}$$

bestimmt werden. Die Anregung des Beobachters für das transformierte System erfolgt mit dem Anfangswert  $\hat{\underline{x}}_0^*$ , der über die vorgeschaltete Transformation  $\hat{\underline{x}}_0^* = \underline{v}(\hat{\underline{x}}_0, t_0)$  aus dem Original-Anfangswert  $\hat{\underline{x}}_0 = \hat{\underline{x}}(t_0)$  erzeugt wird. Der Beobachter kann somit nach der im Bild 3.2 angegebenen Struktur realisiert werden.

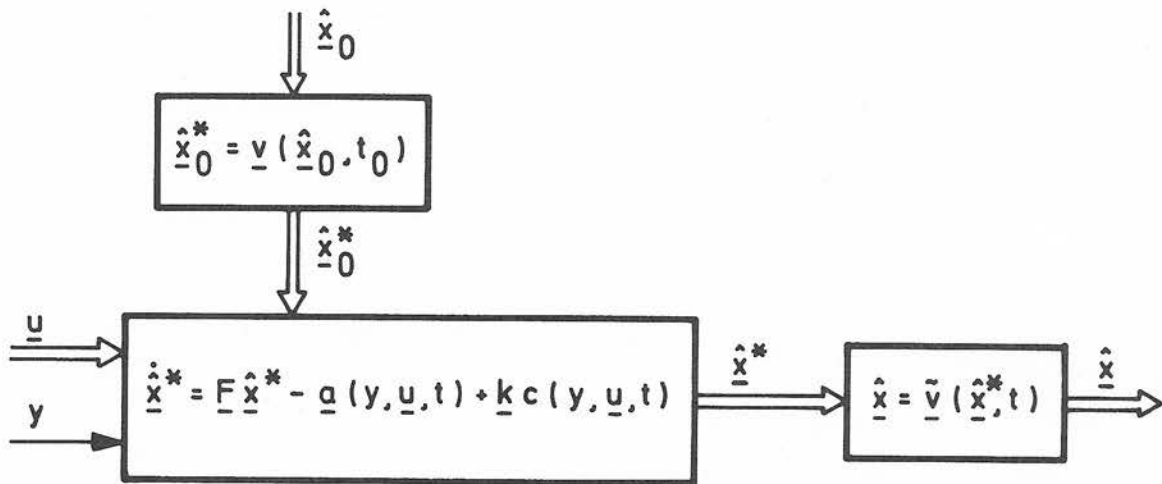


Bild 3.2 NBNF-Beobachter mit vorgeschalteter Transformation und nachgeschalteter inverser Transformation

Nun soll der Beobachter aber direkt in Originalkoordinaten angegeben werden. Dazu leitet man die inverse Transformationsgleichung (3.74) total nach der Zeit ab und setzt für die auftretende Ableitung  $\dot{\hat{x}}^*$  den in NBNF vorliegenden Beobachter nach Gl. (3.9) ein. Damit erhält man

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, t)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, t)}{\partial \hat{x}^*} \left[ F \hat{x}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, t) + \underline{k} c(y, \underline{u}, t) \right].$$

Nach Ausführen der partiellen Ableitungen ist noch die Abhängigkeit dieser Gleichung von  $\hat{x}^*$  zu eliminieren. Dies erreicht man durch Einsetzen der Transformationsgleichung

$$\hat{x}^* = \underline{v}(\hat{x}, t).$$

Damit ergibt sich der Beobachter in Originalkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, t)}{\partial t} \Bigg|_{\hat{x}^* = \underline{v}(\hat{x}, t)} + & (3.75) \\ & + \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, t)}{\partial \hat{x}^*} \Bigg|_{\hat{x}^* = \underline{v}(\hat{x}, t)} \cdot \left[ F \underline{v}(\hat{x}, t) - \underline{a}(y, \underline{u}, t) + \underline{k} c(y, \underline{u}, t) \right]. \end{aligned}$$

Er liefert an seinem Ausgang einen Schätzwert  $\hat{x}$  für den Original-Zustandsvektor  $x$ .

### 3.5 BEOBSACHTERENTWURF FÜR ZWEI BEISPIELE

Als Anwendungsbeispiele zur Erprobung des vorgestellten Syntheseverfahrens dienen die Räuber-Beute-Beziehung und der Rührkesselreaktor aus Abschnitt 2.8. Für jedes dieser beiden Systeme soll ein Beobachter entworfen werden, der einen Näherungswert für die nichtmeßbare Zustandsgröße liefert. Da es sich um einen vollständigen Beobachter handelt, wird jeweils auch die meßbare Zustandsgröße mitgeschätzt.

#### 3.5.1 Räuber-Beute-Beziehung

Der erste Entwurfsschritt, nämlich die Überführung des Systems (2.22) in die NBKNF (2.25), wurde bereits im Abschnitt 2.8.1 vollzogen. Ein Vergleich der Gln. (2.2a) und (2.25a) liefert für die Funktion  $\bar{a}$  die Beziehung

$$\bar{a}(\bar{x}, u, \dot{u}) = -\frac{1}{\bar{x}_1} \bar{x}_2^2 - (a - b\bar{x}_1)\bar{x}_2 - \bar{x}_1(a - b\bar{x}_1)(d + fu) + f\bar{x}_1\dot{u} .$$

Sie erfüllt die Forderung (3.65) mit

$$K_2(\bar{x}_1) = -\frac{1}{\bar{x}_1} ,$$

$$K_1(\bar{x}_1) = b\bar{x}_1 - a ,$$

$$K_0(\bar{x}_1, u, \dot{u}) = \bar{x}_1(b\bar{x}_1 - a)(d + fu) + f\bar{x}_1\dot{u} .$$

Diese Beziehungen werden nun unter Berücksichtigung der Ausgangsgleichung  $y = \bar{x}_1$  in die Gln. (3.66) eingesetzt. Beachtet man zusätzlich, daß wegen der Zeitinvarianz und der Nichtsprungfähigkeit des Originalsystems (2.22) die Funktionen  $a_0, a_1$  und  $c$  zeitunabhängig sein müssen und die Funktion  $c$  allein von  $y$  abhängen darf, so erhält man die folgenden *drei* Bestimmungsgleichungen für die *drei* gesuchten Funktionen:

$$c_{yy} = -\frac{1}{y} c_y, \quad (3.76a)$$

$$a_{1y} = (by-a)c_y, \quad (3.76b)$$

$$a_0 = \left[ y(by-a)(d+fu) + fy\dot{u} \right] c_y - a_{1u}\dot{u}. \quad (3.76c)$$

Für die Funktionen  $c(y)$  und  $a_1(y,u)$  ergeben sich wie im Abschnitt 3.3.3 die Lösungen

$$c(y) = C_1 \ln y + C_2$$

und

$$a_1(y,u) = C_1(by-a \ln y) + C_3(u).$$

Durch Einsetzen dieser Ergebnisse in Gl. (3.76c) erhält man für die Funktion  $a_0$  zunächst die von  $\dot{u}$  abhängige Beziehung

$$a_0(y,u,\dot{u}) = C_1(by-a)(d+fu) + C_1 f \dot{u} - \frac{dC_3(u)}{du} \dot{u}.$$

Wählt man jedoch den Integrationsparameter  $C_3(u)$  zu

$$C_3(u) = C_1 f u,$$

so kompensiert sich die  $\dot{u}$ -Abhängigkeit, und es folgt

$$a_0(y,u) = C_1(by-a)(d+fu).$$

Legt man die frei wählbaren Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  wie im Abschnitt 3.3.3 zu

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0$$

fest, so ergibt sich nach Gl. (3.16) die von  $u$  unabhängige Gesamttransformation

$$\underline{x}^* = \underbrace{\begin{bmatrix} cx_1^{-d+bx_2-a \ln x_2} \\ \ln x_2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}(\underline{x})}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach  $\underline{x}$  erhält man die inverse Transformation

$$\underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{c} \left( x_1^* + d + a x_2^* - b e^{x_2^*} \right) \\ e^{x_2^*} \end{bmatrix}}_{\tilde{v}(\underline{x}^*)}.$$

Nachdem die NBNF sowie die Funktionen  $\underline{v}(\underline{x})$  und  $\tilde{v}(\underline{x}^*)$  bestimmt sind, kann der Beobachter gemäß Bild 3.2 realisiert werden. Im Hinblick auf die anschließende Simulation ist es jedoch zweckmäßiger, den Beobachter in Originalkoordinaten anzugeben. Mit Hilfe der Gl. (3.75) ergeben sich die Beobachtergleichungen zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= a\hat{x}_1 - b\hat{x}_1\hat{x}_2 + \frac{1}{c} [k_0 + (k_1 + a)(a - b\hat{x}_2)] [\ln y - \ln \hat{x}_2] + \\ &\quad - \frac{1}{c} b [a - b\hat{x}_2 + d + fu] [y - \hat{x}_2], \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \underbrace{c\hat{x}_1\hat{x}_2 - d\hat{x}_2 - f\hat{x}_2 u}_{\text{Streckenmodell}} + \underbrace{(k_1 + a)\hat{x}_2 [\ln y - \ln \hat{x}_2] - b\hat{x}_2 [y - \hat{x}_2]}_{\text{Korrekturterm}}, \end{aligned}$$

wenn man den Aufbau des Vektors  $\underline{k}$  und der Matrix  $\underline{F}$  gemäß den Gln. (3.5b) und (3.7) berücksichtigt.

Es sind zwei interessante Ergebnisse festzustellen:

- Wie der Beobachter (3.5) für das transformierte System setzt sich auch der Beobachter für das Originalsystem aus einem Modell der Strecke und einem additiven für  $\hat{\underline{x}} = \underline{x}$  verschwindenden Korrekturterm zusammen.
- Die Beobachtergleichungen sind nur für Werte  $x_2, \hat{x}_2 > 0$  definiert, also gerade in dem nach Abschnitt 2.8.1 beobachtbaren Gebiet.

Abschließend soll die Eignung des Beobachters anhand von Simulationen nachgewiesen werden. Um zu zeigen, daß die vom Beobachter gelieferten Zeitverläufe auch bei nichtkonstanter Eingangsgröße mit zunehmender Zeit gegen die wahren Verläufe streben, wird das zu beobachtende System über einen Zweipunktregler rückgekoppelt: Ist die normierte Anzahl  $x_2$  der Räuber größer als der Wert 1, so wird die Systemeingangsgröße  $u$  auf 0,5 gesetzt. Sinkt sie unter die Marke 1, so wird  $u$  zu Null gesetzt, d.h. es wird nicht mehr gejagt.

In den Bildern 3.3 und 3.4 sind die Originalzustandsgrößen  $x_1$  und  $x_2$  sowie die beiden geschätzten Zustandsgrößen  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$  über der Zeit aufgetragen; alle Größen sind normiert. Es wurde die folgende Parametereinstellung zugrunde gelegt:  $a = 1,5$ ;  $b = 1$ ;  $c = 0,3$ ;  $d = 1$ ;  $f = 1$ . Die beiden Eigenwerte wurden zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$  gewählt, womit sich nach Gl. (3.8) die Koeffizienten  $k_0 = 25$  und  $k_1 = 10$  ergaben. Die Anfangswerte von System und Beobachter liegen recht weit voneinander entfernt:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0,5 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\hat{x}}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} .$$

Um die Leistungsfähigkeit des Beobachters zu demonstrieren, wurde auch für die Meßgröße  $x_2$  ein durch etwa eine Störung verursachter Anfangsfehler angenommen. Aus den beiden Bildern ist zu erkennen, daß der Beobachter dem System schon nach kurzer Einschwingzeit exakt folgt und auch den durch die Umschaltungen der Steuergröße bedingten Knicken in der  $x_2$ -Kurve mühelos "nachfährt". Wie man sieht, nimmt  $\hat{x}_1$  vorübergehend negative Werte an, die geschätzte Trajektorie  $\hat{\underline{x}}(t)$  liegt jedoch vollständig in dem nach Abschnitt 2.8.1 beobachtbaren Gebiet  $x_2 > 0$ .

Die Bilder 3.5 und 3.6 zeigen das Einschwingverhalten des Beobachterfehlers bei unterschiedlicher Wahl der Eigenwerte. Es kommt deutlich zum Ausdruck, daß die Dynamik des *Originalfehlers*  $\tilde{\underline{x}} = \underline{x} - \hat{\underline{x}}$  über die Eigenwertvorgabe in der *transformierten* Fehlerdifferentialgleichung (3.6) gezielt beeinflussbar ist.

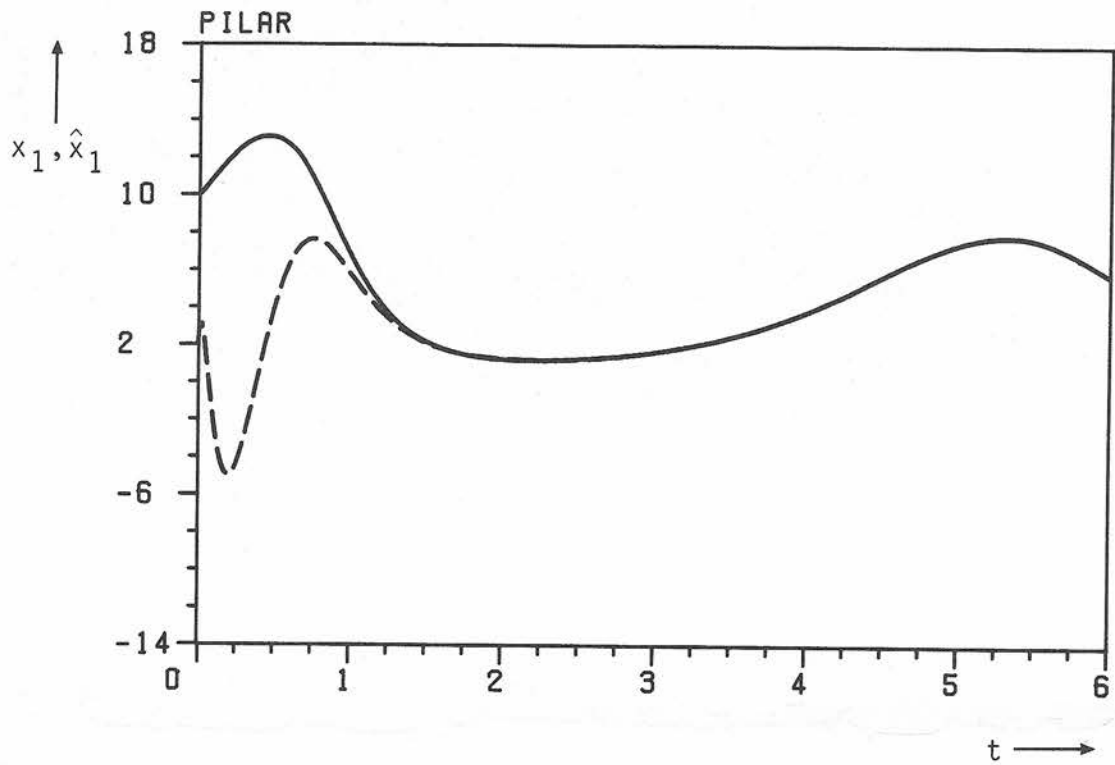


Bild 3.3 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Beutetieranzahl  $x_1(t)$  bzw.  $\hat{x}_1(t)$

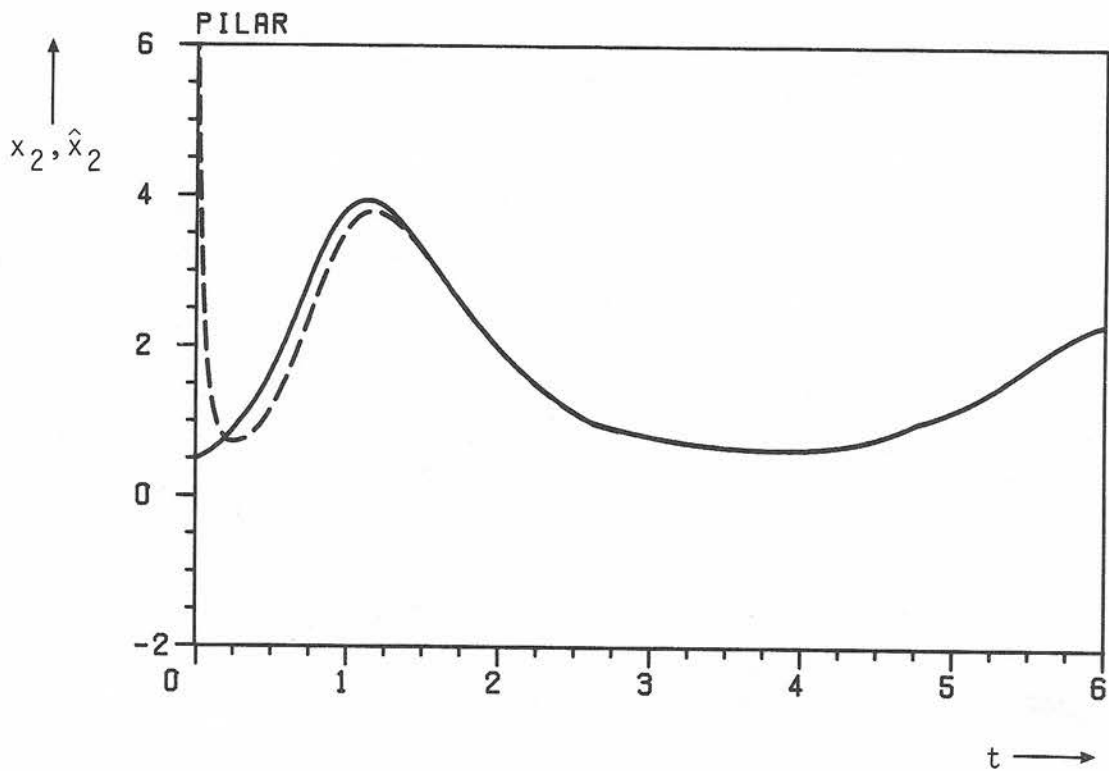


Bild 3.4 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Räuberanzahl  $x_2(t)$  bzw.  $\hat{x}_2(t)$

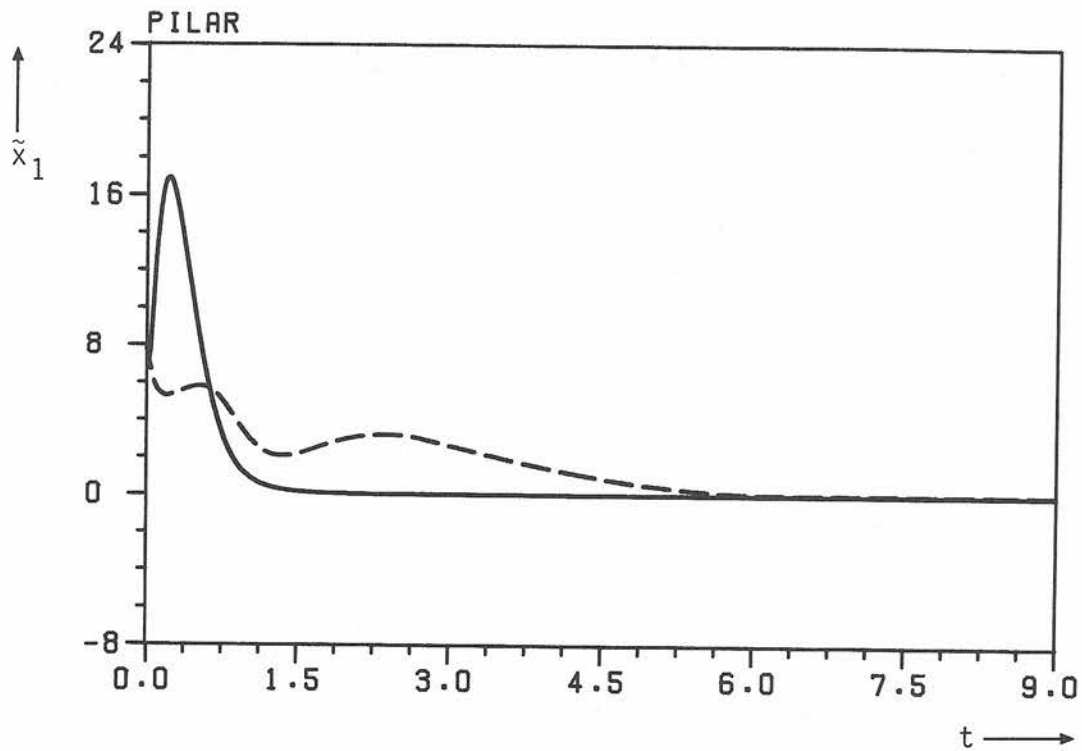


Bild 3.5 Verlauf des Schätzfehlers  $\tilde{x}_1(t)$  für  $\lambda_{1,2} = -5$  (—) und für  $\lambda_{1,2} = -1$  (---)

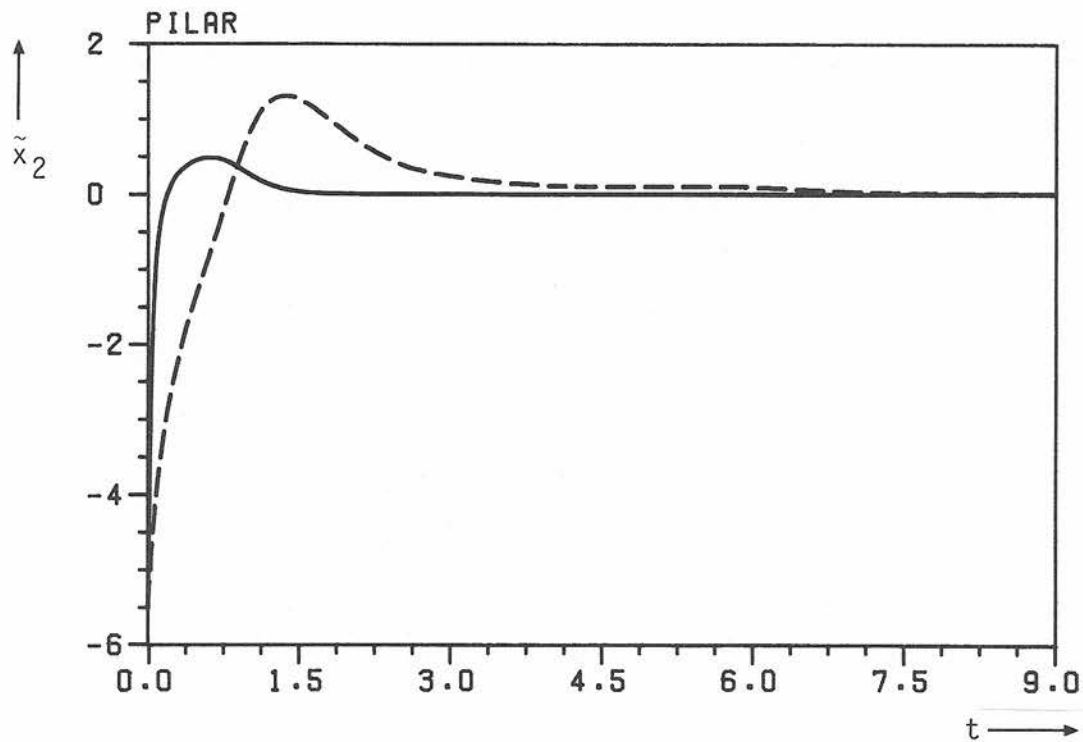


Bild 3.6 Verlauf des Schätzfehlers  $\tilde{x}_2(t)$  für  $\lambda_{1,2} = -5$  (—) und für  $\lambda_{1,2} = -1$  (---)

### 3.5.2 Rührkesselreaktor

Auch für das Beispiel des Rührkesselreaktors wurde die Transformation auf NBKNF bereits im Abschnitt 2.8.2 bestimmt. Die dort erhaltene Beziehung (2.29c) für die Funktion  $\bar{a}(\bar{x}, u, \dot{u})$  erfüllt die Forderung (3.65) mit

$$K_2(\bar{x}_1) = - \frac{\varepsilon}{(1+\bar{x}_1)^2} ,$$

$$K_1(\bar{x}_1) = a + b - \frac{\varepsilon(b\bar{x}_1 - fu)}{(1+\bar{x}_1)^2} + k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\bar{x}_1}\right) ,$$

$$K_0(\bar{x}_1, u, \dot{u}) = k(b\bar{x}_1 - fu - ad) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\bar{x}_1}\right) + a(b\bar{x}_1 - fu) - f\dot{u} .$$

Setzt man diese von  $\bar{x}_1 = y$  abhängigen "Koeffizienten" in die Gln. (3.66) ein, so ergeben sich wegen der Zeitinvarianz und der Nichtsprungfähigkeit des Systems (2.26) die drei Bestimmungsgleichungen

$$c_{yy} = - \frac{\varepsilon}{(1+y)^2} c_y , \quad (3.77a)$$

$$a_{1y} = \left[ a + b - \frac{\varepsilon(by - fu)}{(1+y)^2} + k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+y}\right) \right] c_y , \quad (3.77b)$$

$$a_0 = \left[ k(by - fu - ad) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + a(by - fu) - f\dot{u} \right] c_y - a_{1u} \dot{u} . \quad (3.77c)$$

Integration der Gl. (3.77a) liefert zunächst

$$c_y(y) = C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) . \quad (3.78)$$

Daraus ergibt sich durch nochmalige Integration

$$c(y) = C_1 \int \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) dy + C_2 , \quad (3.79)$$

wobei  $C_1$  und  $C_2$  beliebig wählbare Integrationskonstanten darstellen. Da die Auswertung des Integrals in Gl. (3.79) auf die unendliche Reihe

$$c(y) = C_1(y+1)\exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + \quad (3.80)$$

$$- C_1 f \left[ \ln\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + \left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + \frac{1}{2 \cdot 2!} \left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 3!} \left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right)^3 + \dots \right] + C_2 .$$

führt [6;DA3], wird im folgenden versucht, ohne diese Lösung für  $c(y)$  auszukommen. Für die Funktion  $a_1(y,u)$  folgt nach Einsetzen der Beziehung (3.78) in Gl. (3.77b)

$$a_1(y,u) = \int a C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) dy + \underbrace{\int \left[ b - \frac{\varepsilon(by-fu)}{(1+y)^2} \right] C_1 \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) dy}_{I} + \int k C_1 dy + C_3(u) , \quad (3.81)$$

wobei die Funktion  $C_3(u)$  ein weiterer Integrationsparameter darstellt. Mit der Substitution

$$\frac{\varepsilon}{1+y} = z$$

ergibt sich für den zweiten Integralausdruck in Gl. (3.81)

$$I = -C_1 \int \left[ \frac{b\varepsilon}{z^2} - \left( \frac{b\varepsilon}{z} - b - fu \right) \right] \exp(z) dz = C_1 \left[ \frac{b\varepsilon}{z} - (b+fu) \right] \exp(z)$$

und nach der Rücksubstitution

$$I = C_1 (by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) .$$

Aus Gl. (3.81) folgt somit unter Berücksichtigung der Gl. (3.79)

$$a_1(y,u) = a \left[ c(y) - C_2 \right] + C_1 (by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + k C_1 y + C_3(u) .$$

Nun muß noch die Funktion  $a_0(y,u)$  berechnet werden. Durch Einsetzen der Beziehung

$$a_{1u}(y,u) = -C_1 f \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + \frac{dC_3(u)}{du}$$

in Gl. (3.77c) erhält man

$$a_0(y, u) = C_1 k(by-fu-ad) + C_1 a(by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) - \frac{dC_3(u)}{du} \dot{u} .$$

Wählt man die Integrationsparameter zu

$$C_1 = \frac{1}{k} , \quad C_2 = 0 , \quad C_3(u) = 0 ,$$

so ist die NBNF (3.3) bis auf die Funktion  $c(y)$  festgelegt, und der Beobachter für das transformierte System ergibt sich gemäß Gl. (3.9) zu

$$\dot{\hat{x}}_1^* = -k_0 \hat{x}_2^* - \left[ (by-fu-ad) - \frac{a}{k} (by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) \right] + k_0 c(y) , \quad (3.82a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2^* = \hat{x}_1^* - k_1 \hat{x}_2^* - \left[ ac(y) + \frac{1}{k} (by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon}{1+y}\right) + y \right] + k_1 c(y) . \quad (3.82b)$$

Um den Beobachter gemäß Gl. (3.75) in Originalkoordinaten angeben zu können, muß zunächst die Transformation  $\underline{v}(\underline{x})$  bestimmt werden. Durch Einsetzen der berechneten Funktion  $a_1(y, u)$  in Gl. (3.16) ergibt sie sich zu

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} ac(x_2) + d(1-x_1) + x_2 \\ c(x_2) \end{bmatrix} .$$

Wegen der gültigen Beziehung

$$\underline{\hat{x}}^* = \underline{v}(\underline{\hat{x}})$$

folgt damit für die Schätzwerte  $\hat{x}_1^*$  und  $\hat{x}_2^*$

$$\hat{x}_1^* = ac(\hat{x}_2) + d(1-\hat{x}_1) + \hat{x}_2 , \quad (3.83a)$$

$$\hat{x}_2^* = c(\hat{x}_2) . \quad (3.83b)$$

Weil eine Auflösung der Gl. (3.83b) nach  $\hat{x}_2$  analytisch nicht möglich ist, wird von der zeitlichen Ableitung

$$\dot{\hat{x}}_2^* = \frac{dc(\hat{x}_2)}{d\hat{x}_2} \dot{\hat{x}}_2 \quad (3.84)$$

dieser Gleichung ausgegangen. Da die Ableitung

$$\frac{dc(\hat{x}_2)}{d\hat{x}_2} = c_y(y) \Big|_{y=\hat{x}_2}$$

aus Gl. (3.78) bekannt ist, kann die Beziehung (3.84) nach  $\dot{\hat{x}}_2$  aufgelöst werden. Mit dem vereinbarten Wert  $\frac{1}{k}$  für die Konstante  $C_1$  ergibt sich

$$\dot{\hat{x}}_2 = k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right) \hat{x}_2^* . \quad (3.85)$$

Auch für  $\dot{\hat{x}}_1$  läßt sich eine Beziehung herleiten, ohne die Umkehrung der Gl. (3.83b) zu benötigen. Dazu wird Gl. (3.83a) nach  $\hat{x}_1$  aufgelöst und die Funktion  $c(\hat{x}_2)$  durch  $\hat{x}_2^*$  ersetzt. Man erhält

$$\hat{x}_1 = 1 + \frac{1}{d} \left[ \hat{x}_2 - \hat{x}_1^* + a\hat{x}_2^* \right] .$$

Zeitliches Ableiten dieser Gleichung und Einsetzen der Beziehung (3.85) liefert

$$\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{1}{d} \left[ \dot{\hat{x}}_1^* - \left[ a + k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right) \right] \dot{\hat{x}}_2^* \right] . \quad (3.86)$$

Abschließend setzt man die NBNF-Beobachtergleichungen (3.82) in die Beziehungen (3.85) und (3.86) ein und ersetzt die transformierten Schätzgrößen  $\hat{x}_1^*$  und  $\hat{x}_2^*$  durch die rechten Seiten der Gln. (3.83). Dann erhält man nach geeignetem Zusammenfassen und Ausklammern den Beobachter in Originalkoordinaten zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 = & \underline{-a\hat{x}_1 + r(\hat{x})} + \frac{1}{d} \left[ [a^2 - ak_1 + k_0] + (a - k_1)k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right) \right] [c(\hat{x}_2) - c(y)] + \\ & + \frac{1}{d} \left[ a + k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right) \right] [\hat{x}_2 - y] + \\ & + \frac{1}{d} (by - fu) \left[ 1 - \exp\left(\frac{\varepsilon(\hat{x}_2 - y)}{(1+\hat{x}_2)(1+y)}\right) \right] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 = & \frac{dr(\hat{x}) - (by-fu) \exp\left(\frac{\varepsilon(\hat{x}_2-y)}{(1+\hat{x}_2)(1+y)}\right) +}{+ k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right) \left[ (\hat{x}_2-y) + (a-k_1) [c(\hat{x}_2)-c(y)] \right]} \end{aligned}$$

mit

$$r(\hat{x}) = k(1-\hat{x}_1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+\hat{x}_2}\right)$$

und der Funktion  $c$  gemäß Gl. (3.80).

Auch diese Beobachtergleichungen besitzen die bedeutsame Eigenschaft, daß für  $\hat{x} = \underline{x}$  der Korrekturterm verschwindet und nur noch das unterstrichene Streckenmodell übrigbleibt.

Für die Simulation wurden die Daten des in [62] angegebenen Modells zugrunde gelegt. Bei einer Normierung der Zeit auf 1 Minute ergeben sich die Parameter  $a, b, d, f, \varepsilon, k$  zu

$$\begin{aligned} a &= 0,2674 , \\ b &= 1,815 , \\ d &= 0,4682 , \\ f &= 1,5476 , \\ \varepsilon &= 34,2583 , \\ k &= 1,05 \cdot 10^{14} . \end{aligned}$$

Ferner wurde aufgrund des schlechten Konvergenzverhaltens der unendlichen Reihe (3.80), was durch das große  $\varepsilon$  bedingt ist, die Funktion  $c(y)$  im interessierenden Bereich  $-0,1 < y < 0,3$  durch das Newtonsche Interpolationspolynom

$$\tilde{c}(y) = \sum_{i=0}^{10} p_i y^i$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} p_0 &= 0,786755 \cdot 10^1, & p_1 &= 0,720385 \cdot 10^1, \\ p_2 &= -0,123458 \cdot 10^3, & p_3 &= 0,147210 \cdot 10^4, \\ p_4 &= -0,137727 \cdot 10^5, & p_5 &= 0,117208 \cdot 10^6, \\ p_6 &= -0,954924 \cdot 10^6, & p_7 &= 0,617075 \cdot 10^7, \\ p_8 &= -0,255945 \cdot 10^8, & p_9 &= 0,578356 \cdot 10^8, \\ p_{10} &= -0,535882 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

angenähert [6]. Die dazu benötigten elf signifikanten Stützstellen wurden durch numerische Integration der Ableitung

$$c_y(y) = \frac{1}{k} \exp \frac{\varepsilon}{1+y}$$

mit dem Anfangswert

$$c(-0,1) = 0$$

erhalten. Wie gut die Näherung  $\tilde{c}(y)$  im Bereich  $-0,1 < y < 0,3$  mit der durch numerische Integration gewonnenen Funktion  $c(y)$  übereinstimmt, wird aus Bild 3.7 ersichtlich.

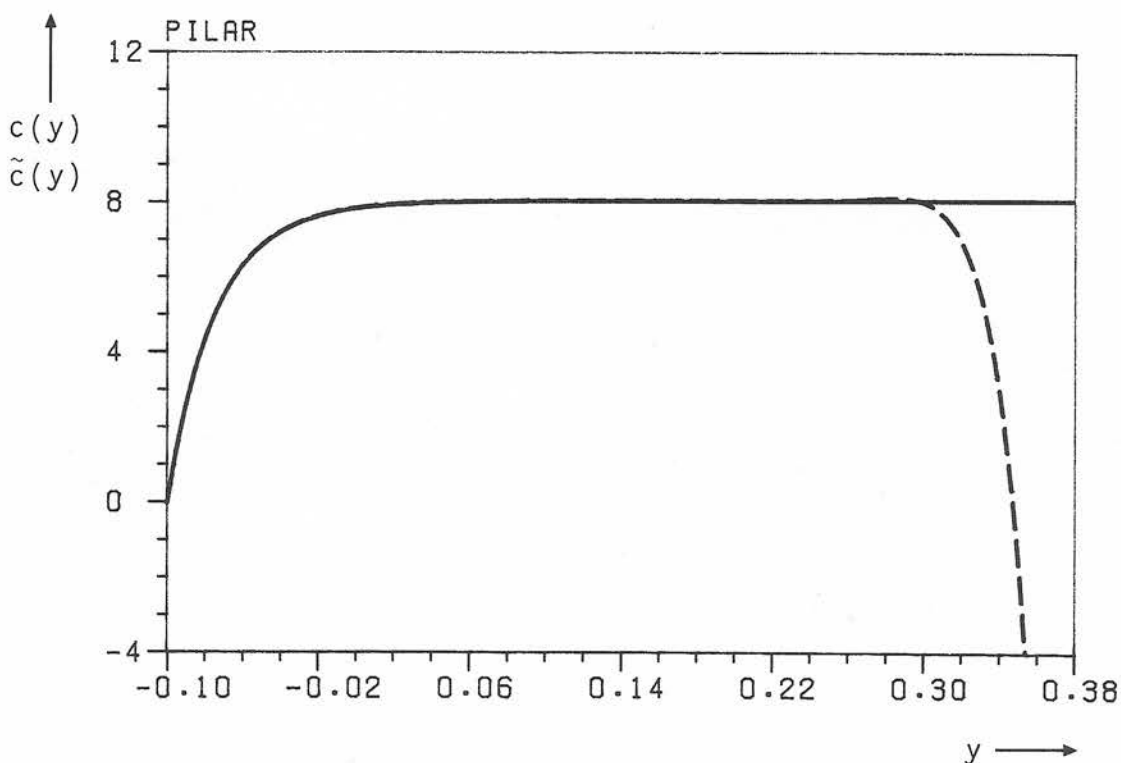


Bild 3.7 Vergleich der Funktionen  $c(y)$  (—) und  $\tilde{c}(y)$  (- - -)

Die Bilder 3.8 und 3.9 zeigen die Zeitverläufe der Originalzustandsgrößen zusammen mit den entsprechenden geschätzten Zustandsgrößen. Dabei wurden die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix  $\underline{F}$  zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$  gewählt, was nach Gl. (3.8) auf die Koeffizienten  $k_0 = 25$  und  $k_1 = 10$  führt. Den Simulationen liegt zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  die sprunghafte Änderung der zur stabilen Ruhelage

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,504 \\ 0,02 \end{bmatrix}$$

gehörenden Eingangsgröße  $u_0 = -0,0173$  auf den Wert  $u_e = -0,0065$  zugrunde, worauf der Zustand des Rührkesselreaktors auf einen *stabilen Grenzzyklus* um die instabile Ruhelage

$$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,04 \end{bmatrix}$$

einschwingt. Da die Temperatur  $x_2$  einer Messung zugänglich ist, wurde der Anfangswert  $\hat{x}_{02}$  des Beobachters gleich dem Anfangswert  $x_{02}$  der Strecke gesetzt, während für die Konzentration  $x_1$  der von  $x_{01}$  verschiedene Anfangswert  $\hat{x}_{01} = 0$  vorgegeben wurde. Auch hier liefert der Beobachter ein zufriedenstellendes Ergebnis. Schon nach 1 Minute stimmen die wahren Zustandsgrößen mit den geschätzten überein.

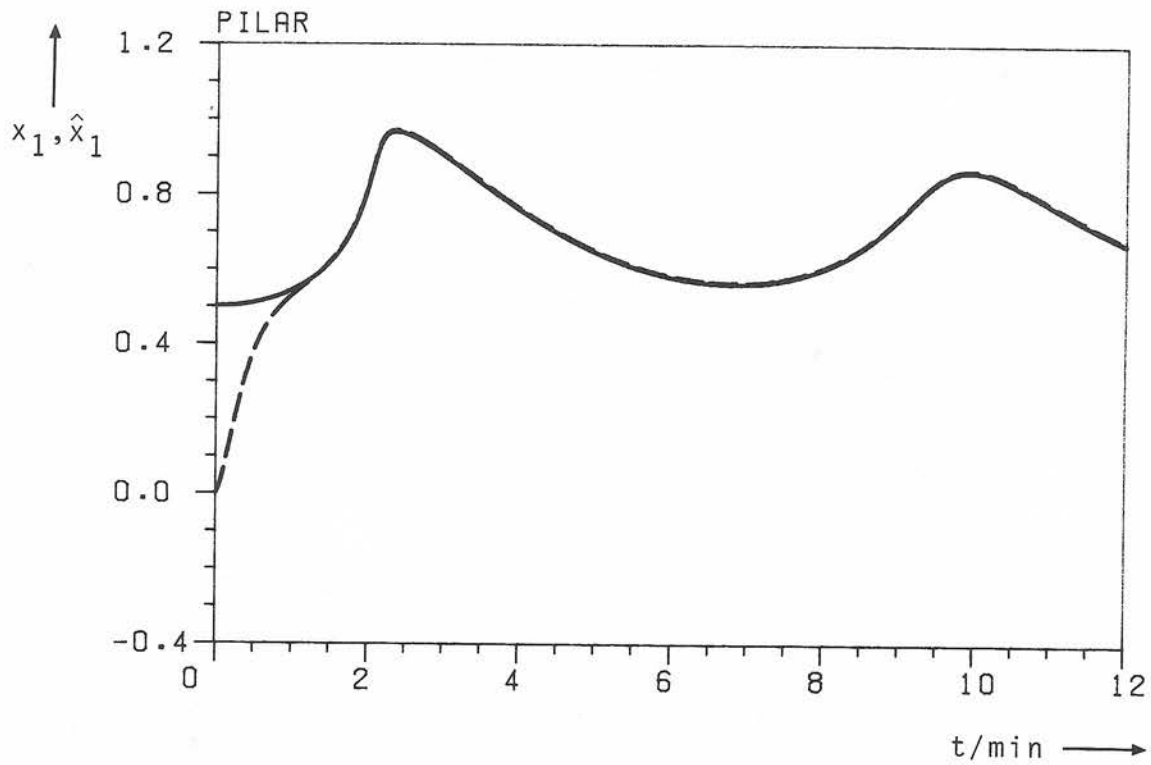


Bild 3.8 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Konzentration  $x_1(t)$  bzw.  $\hat{x}_1(t)$

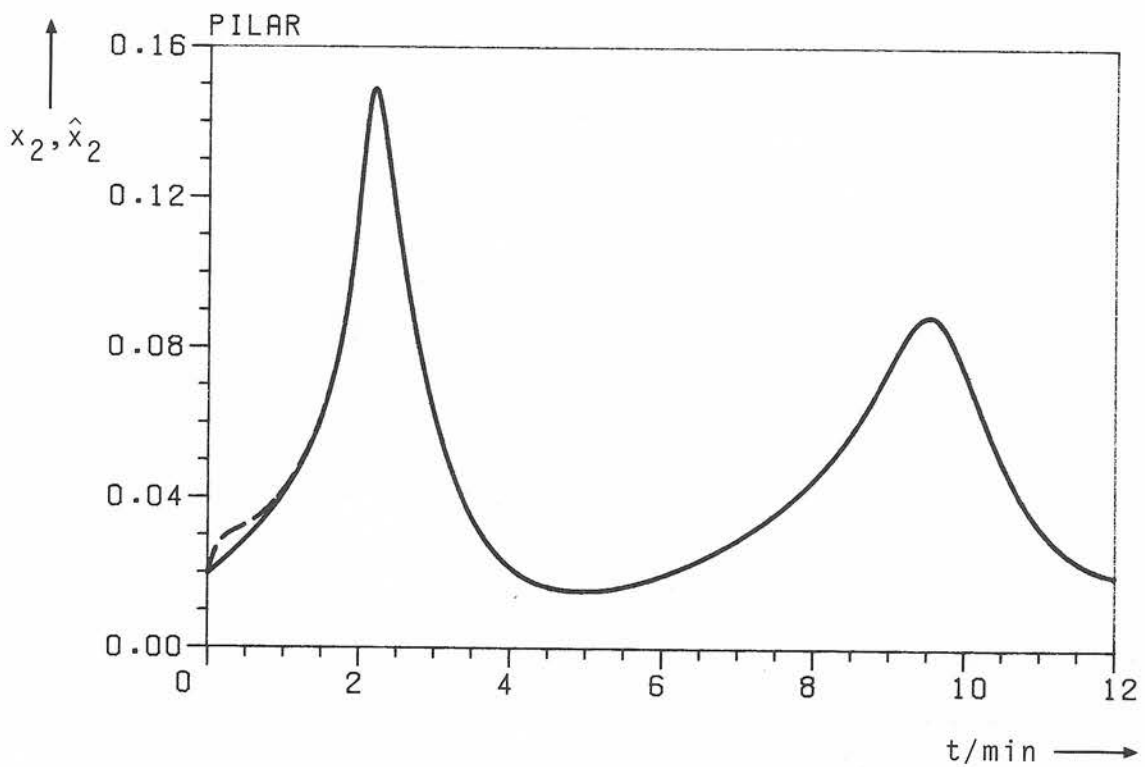


Bild 3.9 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Temperatur  $x_2(t)$  bzw.  $\hat{x}_2(t)$

#### 4 BEOBSACHTERENTWURF FÜR SYSTEME MIT MEHREREN AUSGANGSGRÖSSEN

Die Herleitung der Beobachtergleichungen für Systeme mit mehr als einer Ausgangsgröße folgt soweit wie möglich dem Weg, der auch im Eingrößenfall ( $q = 1$ ) beschritten wurde. Somit können die Ausführungen des 3. Kapitels bei den folgenden Betrachtungen als Wegweiser dienen.

##### 4.1 DEFINITION DER NBNF

Die NBNF mit mehreren Ausgangsgrößen wird in Verallgemeinerung der NBNF (3.2) definiert als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1^* \\ \dot{x}_2^* \\ \vdots \\ \dot{x}_q^* \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{E}_1 & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{E}_2 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{E}_q \end{bmatrix}}_{\underline{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_q^* \end{bmatrix}}_{\underline{x}^*} - \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{a}_1^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \\ \underline{a}_2^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ \underline{a}_q^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{a}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t)}, \quad (4.1a)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1^*(x_{m_1}^*, \underline{u}, t) \\ h_2^*(x_{m_2}^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ h_q^*(x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{h}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t)}, \quad (4.1b)$$

wobei das  $j$ -te Subsystem ( $j = 1, \dots, q$ )

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_{m_{j-1}+1}^* \\ \dot{x}_{m_{j-1}+2}^* \\ \vdots \\ \dot{x}_{m_j}^* \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}_j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \diagdown & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{E}_j} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{m_{j-1}+1}^* \\ x_{m_{j-1}+2}^* \\ \vdots \\ x_{m_j}^* \end{bmatrix}}_{\underline{x}_j} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{m_{j-1}}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \\ a_{m_{j-1}+1}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ a_{m_j-1}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{a}_j^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t)}, \quad (4.1c)$$

$$y_j = h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t) \quad (4.1d)$$

von der Ordnung  $n_j$  ist und die NBNF (3.2) als Sonderfall enthält. Die natürlichen Zahlen  $m_j$  berechnen sich gemäß Gl. (2.4).

Wie von der Ausgangsgleichung (3.2b) wird auch von den  $q$  Ausgangsgleichungen (4.1d) die Existenz ihrer stetigen Inversen

$$x_{m_j}^* = c(y_j, \underline{u}, t), \quad j = 1, \dots, q, \quad (4.2)$$

in dem für  $x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}$  und  $t$  in Frage kommenden Gebiet vorausgesetzt. Dann läßt sich die NBNF (4.1) in der Form

$$\underline{\dot{x}}^* = \underline{E} \underline{x}^* - \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t), \quad (4.3a)$$

$$\underline{x}_\mu^* = \underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.3b)$$

mit

$$\underline{x}_\mu^* = \begin{bmatrix} x_{m_1}^* \\ \vdots \\ x_{m_q}^* \end{bmatrix} \quad (4.3c)$$

und

$$\underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t) = \begin{bmatrix} c_1(y_1, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ c_q(y_q, \underline{u}, t) \end{bmatrix} \quad (4.3d)$$

angeben, wenn die Umformung

$$\begin{aligned} \underline{a}^*(x_{m_1}^*, \dots, x_{m_q}^*, \underline{u}, t) &= \underline{a}^*(c(y_1, \underline{u}, t), \dots, c(y_q, \underline{u}, t), \underline{u}, t) \\ &= \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

vorgenommen wird.

#### 4.2 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR EIN SYSTEM IN NBNF

Auch im Mehrgrößenfall läßt sich der Beobachter in einfacher Weise angeben, wenn das zu beobachtende System in NBNF vorliegt. Damit eine homogene, lineare und zeitinvariante Differentialgleichung für den Schätzfehler

$$\underline{\tilde{x}}^* = \underline{x}^* - \underline{\hat{x}}^* \quad (3.4)$$

resultiert, wird er in der Form

$$\dot{\underline{\hat{x}}}^* = \underline{E} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t) + \underline{K} [\underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t) - \underline{\hat{x}}_{\mu}^*] \quad (4.5a)$$

mit der konstanten Beobacherverstärkung

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{k}_1 & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{k}_2 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{k}_q \end{bmatrix}, \quad \underline{k}_j = \begin{bmatrix} k_{m_j-1} \\ k_{m_j-1+1} \\ \vdots \\ k_{m_j-1} \end{bmatrix}, \quad (4.5b)$$

angesetzt. Dieser Beobachter läßt sich in q Teilbeobachter zerlegen, von denen jeder die gleiche Struktur wie der Beobachter (3.5) für ein System mit nur einer Ausgangsgröße aufweist. So liefert beispielsweise der j-te Teilbeobachter

$$\dot{\hat{x}}_j^* = \underline{E}_j \hat{x}_j^* - \underline{a}_j(\underline{y}, \underline{u}, t) + \underline{k}_j \left[ c_j(\underline{y}_j, \underline{u}, t) - \hat{x}_{m_j}^* \right] \quad (4.5c)$$

einen Näherungswert  $\hat{x}_j^*$  für den Zustandsvektor  $\underline{x}_j^*$  des j-ten Subsystems (4.1c), (4.1d). Bildet man für den Schätzfehler

$$\tilde{x}_j^* = \underline{x}_j^* - \hat{x}_j^* \quad (4.6)$$

des j-ten Subsystems die Fehlerdifferentialgleichung durch Subtraktion der Gl. (4.5c) von Gl. (4.1c), so erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (4.4)

$$\dot{\tilde{x}}_j^* = \underline{E}_j \tilde{x}_j^* - \underline{k}_j \left[ c_j(\underline{y}_j, \underline{u}, t) - \hat{x}_{m_j}^* \right].$$

Da sich der Ausdruck in den eckigen Klammern aufgrund der Beziehungen (4.2) und (4.6) gerade zu  $\tilde{x}_{m_j}^*$  ergibt, folgt aus der letzten Gleichung die homogene, lineare, zeitinvariante Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{\tilde{x}}_j^* = \left[ \underline{E}_j - \underline{k}_j \underline{e}_{n_j}^T \right] \tilde{x}_j^* =: \underline{F}_j \tilde{x}_j^* \quad (4.7)$$

mit

$$\underline{e}_{n_j}^T = [0, \dots, 0, 1] \quad .$$

|  
n<sub>j</sub>-tes Element

Die gesamte Fehlerdifferentialgleichung lautet demnach

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1^* \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_q^* \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{F}_1 & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \diagdown & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{F}_q \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1^* \\ \vdots \\ \tilde{x}_q^* \end{bmatrix}}_{\tilde{x}^*} \quad (4.8)$$

Wie im Eingrößenfall bestimmen die Koeffizienten  $k_0, \dots, k_{n-1}$  der konstanten Matrix  $\underline{F}$  die Lage der Pole des homogenen Fehlersystems (4.8), welche im Sinne einer gewünschten Fehlerdynamik gezielt

vorgeschrieben werden können. Da diese  $k_j$  gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

$$\det(s\underline{I} - \underline{F}) = \prod_{j=1}^q \det(s\underline{I}_j - \underline{F}_j) \quad *)$$

darstellen, erhält man sie nach Vorgabe von  $n$  Eigenwerten  $\lambda_v$  durch Ausmultiplizieren der  $q$  Produkte

$$\prod_{v=1}^{n_j} (s - \lambda_v) = s^{n_j} + k_{m_j-1} s^{n_j-1} + \dots + k_{m_j-1+1} s + k_{m_j-1}, \quad (4.9)$$

$$j = 1, \dots, q; \operatorname{Re} \lambda_v < 0.$$

Mit der durch die Gln. (4.7) und (4.8) definierten Matrix  $\underline{F}$  kann der Beobachter gemäß den Gln. (4.5) auch in der Form

$$\dot{\underline{\hat{x}}^*} = \underline{F} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t) + \underline{K} \underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.10)$$

angeschrieben werden. Nach Festlegung der Beobachterverstärkung  $\underline{K}$  ist er vollständig dimensioniert, da die Vektoren  $\underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t)$  und  $\underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t)$  bei Vorliegen des Systems in NBNF bekannt sind.

#### 4.3 TRANSFORMATION AUF NBNF

Da auch nichtlineare Mehrgrößensysteme im allgemeinen nicht in NBNF vorliegen, muß zunächst wieder eine stetige und hinreichend oft differenzierbare Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{v}(\underline{x}, t)$$

bestimmt werden, die ein System der allgemeinen Form (2.1) *umkehrbar eindeutig* in die NBNF (4.1) überführt.

---

\*)  $\underline{I}_j$  stellt die  $(n_j, n_j)$ -dimensionale Einheitsmatrix dar.

#### 4.3.1 Motivation einer Zwei-Schritt-Transformation

Bevor die Bestimmungsgleichungen der Transformation angegeben werden können, sind zunächst die Ordnungen  $n_j$  der  $q$  NBNF-Subsysteme (4.1c) festzulegen. Hierfür bietet sich die im Abschnitt 2.6 angegebene Strategie an. Wie nämlich im folgenden gezeigt wird, ist die Existenz der NBKNF (2.6) notwendige Voraussetzung für die Existenz der NBNF (4.1) mit denselben Teilordnungen. Der Beweis läßt sich auf formal gleiche Weise führen wie der im Abschnitt 3.3.4 angegebene für den Fall  $q = 1$ .

Um von der NBNF (4.1) zur NBKNF (2.6) zu gelangen, muß die Abbildungsvorschrift (2.11b) für das  $j$ -te Subsystem wie folgt modifiziert werden:

$$\bar{\underline{x}}_j = \underbrace{\begin{bmatrix} h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t) \\ M^* h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ M^{*n_j-1} h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\tilde{w}_j(\underline{x}^*, \underline{u}, t)} \quad (4.11)$$

Der darin auftretende Operator  $M^*$  ist wie im Abschnitt 3.3.4 definiert als

$$M^{*0} h_j^* := h_j^* ,$$

$$M^{*i} h_j^* := \frac{\partial M^{*i-1} h_j^*}{\partial t} + \left[ \frac{\partial M^{*i-1} h_j^*}{\partial \hat{\underline{u}}_i} \right]^T \hat{\underline{u}}_i + \left[ \frac{\partial M^{*i-1} h_j^*}{\partial \underline{x}^*} \right]^T \underline{f}^* , \quad i=1, \dots, n_j ,$$

mit  $\hat{\underline{u}}_i$  gemäß Gl. (2.9). Die Ausführung der Operatoranwendungen in Gl. (4.11) liefert die Abbildung

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{x}_{m_{j-1}+1} &= h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t) , \\
 \bar{x}_{m_{j-1}+2} &= \frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*} x_{m_{j-1}}^* + \zeta_{j2}(x_{\mu}^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) , \\
 \bar{x}_{m_{j-1}+3} &= \frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*} x_{m_{j-2}}^* + \zeta_{j3}(x_{\mu}^*, x_{\mu-1}^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) , \\
 &\vdots \\
 \bar{x}_{m_j} &= \frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*} x_{m_{j-1}+1}^* + \\
 &\quad + \zeta_{jn_j}(x_{\mu}^*, \dots, x_{\mu-(n_j-2)}^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) ,
 \end{aligned} \right\} (4.12)$$

wobei der Vektor  $\underline{x}_{\mu-i}^*$  nach dem Schema

$$\underline{x}_{\mu-i}^* = [x_{m_{1-i}}^*, \dots, x_{m_{q-i}}^*]^T , \quad i = 0, \dots, n_j - 2 ,$$

mit

$$x_{m_{j-i}}^* = 0 \quad \text{für} \quad i \geq n_j$$

aufgebaut ist. Da die Bedingung

$$\frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*} \neq 0$$

allenfalls in einzelnen Punkten nicht erfüllt ist, läßt sich die Abbildung (4.12) gemäß [46] zumindest in Teilgebieten der für  $x_{m_j}^*, \underline{u}$  und  $t$  in Frage kommenden Bereiche eindeutig nach den Komponenten von  $\underline{x}_j^*$  auflösen.

Aufgrund der j-ten Ausgangsbeziehung

$$y_j = \bar{x}_{m_{j-1}+1} \quad (2.6d)$$

der NBKNF (2.6) liefert die Umkehrung der ersten Abbildungsgleichung gerade die inverse Ausgangsbeziehung

$$x_{m_j}^* = c_j(y_j, \underline{u}, t) =: w_{m_j}(\bar{x}_{m_{j-1}+1}, \underline{u}, t) \quad (4.13)$$

Die Auflösung der zweiten Abbildungsgleichung nach  $x_{m_{j-1}}^*$  ergibt

$$x_{m_{j-1}}^* = \left[ \frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*} \right]^{-1} \left[ \bar{x}_{m_{j-1}+2} - \zeta_{j2}(x_{m_j}^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \right],$$

woraus durch Einsetzen der für  $j = 1, \dots, q$  gültigen Beziehung (4.13)

$$x_{m_{j-1}}^* = w_{m_{j-1}}(\bar{x}_{m_0+1}, \dots, \bar{x}_{m_{q-1}+1}; \bar{x}_{m_{j-1}+2}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)$$

folgt. So fortfahrend erhält man für die j-te Teiltransformation der NBKNF auf NBNF die Abhängigkeit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{m_{j-1}+1}^* \\ x_{m_{j-1}+2}^* \\ \vdots \\ x_{m_{j-1}}^* \\ x_{m_j}^* \end{bmatrix}}_{\underline{x}_j^*} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{m_{j-1}+1}(\bar{x}_{v+1}, \dots, \bar{x}_{v+(n_j-1)}; \bar{x}_{m_j}, \underline{u}, \dots, \underline{u}, t)^{(n_j-1)} \\ w_{m_{j-1}+2}(\bar{x}_{v+1}, \dots, \bar{x}_{v+(n_j-2)}; \bar{x}_{m_{j-1}+(n_j-1)}, \underline{u}, \dots, \underline{u}, t)^{(n_j-2)} \\ \vdots \\ w_{m_{j-1}}(\bar{x}_{v+1}; \bar{x}_{m_{j-1}+2}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \\ w_{m_j}(\bar{x}_{m_{j-1}+1}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}}_{\underline{w}_j(\bar{x}, \hat{\underline{u}}_{n_j}, t)},$$

wobei der Vektor  $\bar{x}_{v+i}$  nach dem Schema

$$\bar{x}_{v+i} = \left[ \bar{x}_{m_0+i}, \dots, \bar{x}_{m_{q-1}+i} \right]^T, \quad i = 1, \dots, n_{j-1},$$

mit

$$\bar{x}_{m_{j-1}+i} = 0 \quad \text{für } i > n_j$$

aufgebaut ist.

Somit hat man auch im Mehrgrößenfall das Resultat:

*Die Existenz der NBKNF gemäß den Gln. (2.6) ist notwendige Voraussetzung für die Existenz der NBNF (4.1).*

Damit ist auch im Mehrgrößenfall die Zwei-Schritt-Transformation über die NBKNF gerechtfertigt.

#### 4.3.2 Transformation der NBKNF auf NBNF

Die Herleitung der Transformationsgleichungen erfolgt für jedes der  $q$  Subsysteme nach dem gleichen Prinzip. Zunächst wird die  $j$ -te Teiltransformation

$$\underline{x}_j^* = \underline{w}_j(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_{n_j}, t) \tag{4.14}$$

total nach der Zeit abgeleitet. Läßt man die Argumente von  $\underline{w}_j$  weg und setzt für  $\dot{\underline{x}}$  die rechte Seite der NBKNF (2.6) ein, so erhält man die Beziehung

$$\dot{\underline{x}}_j^* = \frac{\partial \underline{w}_j}{\partial t} + \frac{\partial \underline{w}_j}{\partial \hat{\underline{u}}_{n_j}} \dot{\hat{\underline{u}}}_{n_j} + \frac{\partial \underline{w}_j}{\partial \underline{\bar{x}}} \underline{f}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_m, \underline{u}, t)^{(m)}.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit Gl. (4.1c) liefert die partielle Vektordifferentialgleichung

$$\frac{\partial \underline{w}_j}{\partial t} + \frac{\partial \underline{w}_j}{\partial \hat{\underline{u}}_{n_j}} \dot{\hat{\underline{u}}}_{n_j} + \frac{\partial \underline{w}_j}{\partial \underline{\bar{x}}} \underline{f}(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_m, \underline{u}, t)^{(m)} \stackrel{!}{=} \underline{E}_j \underline{w}_j - \underline{a}_j(\underline{y}, \underline{u}, t),$$

wenn statt  $\underline{x}_j^*$  die rechte Seite von Gl. (4.14) eingesetzt und für  $\underline{a}_j^*$  die Umformung (4.4) vorgenommen wird. Hieraus ergibt sich bei

entsprechender Vorgehensweise wie im Abschnitt 3.3.5 der folgende Aufbau für die Transformation  $\underline{w}_j$  des j-ten Subsystems:

$$\underline{w}_j(\underline{\bar{x}}, \hat{\underline{u}}_{n_j}, t) = \begin{bmatrix} \bar{M}^{n_j-1} c_j(y_j, \underline{u}, t) + \dots + \bar{M} a_{m_{j-1}+2}(\underline{y}, \underline{u}, t) + a_{m_{j-1}+1}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ \bar{M}^{n_j-2} c_j(y_j, \underline{u}, t) + \dots + a_{m_{j-1}+2}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ \bar{M} c_j(y_j, \underline{u}, t) + a_{m_{j-1}}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ c_j(y_j, \underline{u}, t) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Die zugehörige NCG lautet

$$0 = \bar{M}^{n_j} c_j(y_j, \underline{u}, t) + \sum_{i=0}^{n_j-1} \bar{M}^i a_{m_{j-1}+i}(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.16)$$

Für die mehrfache Anwendung des Operators  $\bar{M}$  auf die Funktionen  $c_j(y_j, \underline{u}, t)$  und  $a_{m_{j-1}+i}(\underline{y}, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n_j$ , gilt entsprechend der im Abschnitt 3.3.5 angegebenen Definition

$$\bar{M}^0(\dots) := (\dots) \quad (4.17a)$$

$$\bar{M}^i(\dots) := \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial \hat{\underline{u}}_j} \right]^T \dot{\hat{\underline{u}}}_j + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial \underline{\bar{x}}} \right]^T \underline{\bar{f}} \quad (4.17b)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, die  $n+q$  unbekannt Funktionen  $c_j(y_j, \underline{u}, t)$  und  $a_{m_{j-1}+i}(\underline{y}, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n_j-1$ ,  $j = 1, \dots, q$ , aus den insgesamt  $q$  NCGen (4.16) zu bestimmen. Gelingt dies, so ist die NBNF (4.1) festgelegt, und die  $q$  Teiltransformationen  $\underline{w}_j$  lassen sich mit Hilfe der Gl. (4.15) berechnen.

In den beiden folgenden Abschnitten werden Bedingungen hergeleitet, unter denen sich Systeme 3. und 4. Ordnung mit zwei Ausgangsgrößen in die NBNF (4.1) überführen lassen.

4.3.3 Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 3. Ordnung mit zwei Ausgangsgrößen

Wie in den Abschnitten 3.3.6 und 3.3.7 wird auch hier davon ausgegangen, daß das Originalsystem im ersten Transformationsschritt in die NBKNF überführt werden konnte. Mit den Subsystemordnungen  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 2^*$  weist die NBKNF dann gemäß den Gln. (2.6) die Form

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\bar{a}_1(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \bar{x}_3 \\ -\bar{a}_2(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.18a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \bar{x}_1, \\ y_2 &= \bar{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.18b)$$

auf. Im zweiten Schritt soll dieses System nun in die NBNF

$$\dot{x}^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_0(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ 0 & -a_1(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ x_2^* & -a_2(\underline{y}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.19a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= c_1(y_1, \underline{u}, t), \\ x_3^* &= c_2(y_2, \underline{u}, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.19b)$$

überführt werden. Den Ausgangspunkt für die Berechnung der unbekannt Funktionen  $c_1, c_2, a_0, a_1$  und  $a_2$  bilden die beiden NCGen

$$0 = \bar{M}c_1(y_1, \underline{u}, t) + a_0(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.20a)$$

\*) Die Überführung der NBKNF in die NBNF läßt sich in gleicher Weise auch für den alternativen Fall  $n_1 = 2$  und  $n_2 = 1$  durchführen.

und

$$0 = \bar{M}^2 c_2(y_2, \underline{u}, t) + \bar{M} a_2(\underline{y}, \underline{u}, t) + a_1(\underline{y}, \underline{u}, t) , \quad (4.20b)$$

die sich für  $j = 1$  und  $j = 2$  aus Gl. (4.16) ergeben. Daraus erhält man unter Berücksichtigung der Operatordefinition (4.17) und der im Anhang B.2 angegebenen Differentiationsregel die Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial c_1}{\partial t} + \left[ \frac{\partial c_1}{\partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \frac{\partial c_1}{\partial y_1} (-\bar{a}_1) + a_0 , \\ 0 &= \frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2} + 2 \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial t \partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial \underline{u}^2} \right] \dot{\underline{u}} + \left[ \frac{\partial c_2}{\partial \underline{u}} \right]^T \ddot{\underline{u}} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 c_2}{\partial t \partial y_2} \bar{x}_3 + 2 \left[ \frac{\partial^2 c_2}{\partial \underline{u} \partial y_2} \right]^T \dot{\underline{u}} \bar{x}_3 + \frac{\partial^2 c_2}{\partial y_2^2} \bar{x}_3^2 + \frac{\partial c_2}{\partial y_2} (-\bar{a}_2) + \\ &+ \frac{\partial a_2}{\partial t} + \left[ \frac{\partial a_2}{\partial \underline{u}} \right]^T \dot{\underline{u}} + \frac{\partial a_2}{\partial y_1} (-\bar{a}_1) + \frac{\partial a_2}{\partial y_2} \bar{x}_3 + a_1 . \end{aligned}$$

Löst man die erste Gleichung nach  $\bar{a}_1$  und die zweite nach  $\bar{a}_2$  auf, und schreibt man die Variablen, nach denen abgeleitet wird, als Index hinter die abzuleitende Funktion, so ergeben sich die Beziehungen

$$\bar{a}_1 = \left[ c_{1t} + (c_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 \right] \frac{1}{c_{1y_1}} , \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \bar{x}_3^2 \left[ c_{2y_2y_2} \right] \frac{1}{c_{2y_2}} + \\ &+ \bar{x}_3 \left[ 2c_{2ty_2} + 2(c_{2\underline{u}y_2})^T \dot{\underline{u}} + a_{2y_2} \right] \frac{1}{c_{2y_2}} + \\ &+ \left[ c_{2tt} + 2(c_{2t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{2\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{2\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + \right. \\ &\left. + a_{2t} + (a_{2\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_{2y_1} (-\bar{a}_1) + a_1 \right] \frac{1}{c_{2y_2}} . \end{aligned} \quad (4.21b)$$

Hieraus läßt sich unter Berücksichtigung der beiden Ausgangsgleichungen (4.18b) eine *notwendige Bedingung* für die Existenz der NBNF (4.19) ablesen:

Die Funktionen  $\bar{a}_1(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)$  und  $\bar{a}_2(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  in der NBKNF (4.18) müssen die Forderungen

$$\bar{a}_1 \stackrel{!}{=} K_{10}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \quad (4.22a)$$

und

$$\bar{a}_2 \stackrel{!}{=} K_{22}(\bar{x}_2, \underline{u}, t) \bar{x}_3^2 + K_{21}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_3 + K_{20}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \quad (4.22b)$$

erfüllen.

Sind diese beiden Forderungen erfüllt, so sind die Funktionen  $K_{10}, K_{20}, K_{21}$  und  $K_{22}$  festgelegt. Durch einen Vergleich der Gln. (4.22) mit den Gln. (4.21) erhält man die *vier* folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung der *fünf* unbekannt Funktionen  $c_1, c_2, a_0, a_1$  und  $a_2$ :

$$c_{1t} + (c_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 = K_{10}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_{1y_1}, \quad (4.23a)$$

$$c_{2y_2 y_2} = K_{22}(y_2, \underline{u}, t) c_{2y_2}, \quad (4.23b)$$

$$2c_{2ty_2} + 2(c_{2\underline{u}y_2})^T \dot{\underline{u}} + a_{2y_2} = K_{21}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_{2y_2}, \quad (4.23c)$$

$$c_{2tt} + 2(c_{2t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{2\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{2\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{2t} + (a_{2\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} +$$

$$-a_{2y_1} K_{10}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) + a_1 = K_{20}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) c_{2y_2}. \quad (4.23d)$$

Die Gl. (4.23a) ist von den übrigen entkoppelt. Aus ihr sind die zwei Unbekannten  $c_1(y_1, \underline{u}, t)$  und  $a_0(y_1, y_2, \underline{u}, t)$  zu bestimmen. Für die Bestimmung der restlichen Unbekannten  $c_2, a_1$  und  $a_2$  wird genauso vorgegangen wie im Abschnitt 3.3.6: Zunächst wird aus Gl. (4.23b) die Funktion  $c_2(y_2, \underline{u}, t)$  berechnet. Damit kann aus Gl. (4.23c) die Funktion  $a_2(y_1, y_2, \underline{u}, t)$  bestimmt werden. Durch Einsetzen der Ergeb-

nisse für  $c$  und  $a_2$  in Gl. (4.23d) erhält man schließlich eine rein algebraische Gleichung für die Funktion  $a_1(y_1, y_2, \underline{u}, t)$ . Die bei der Lösung der Differentialgleichungen auftretenden Integrationsparameter sind wie im 3. Kapitel so zu wählen, daß eine Abhängigkeit der Funktionen von  $\dot{\underline{u}}$  und  $\ddot{\underline{u}}$  verhindert wird.

#### 4.3.4 Existenz und Herleitung der NBNF für Systeme 4. Ordnung mit zwei Ausgangsgrößen

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, daß das Originalsystem durch den ersten Transformationsschritt in eine NBKNF mit den Subsystemordnungen  $n_1 = n_2 = 2$  überführt wurde. Diese besitzt gemäß den Gln. (2.6) den Aufbau

$$\dot{\underline{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\bar{a}_1(\underline{\bar{x}}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \bar{x}_4 \\ -\bar{a}_2(\underline{\bar{x}}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.24a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \bar{x}_1, \\ y_2 &= \bar{x}_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.24b)$$

Als Ausgangspunkt für die Überführung dieses Systems in die NBNF

$$\dot{\underline{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_0(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ x_1^* & -a_1(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ 0 & -a_2(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ x_3^* & -a_3(\underline{y}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}, \quad (4.25a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_2^* &= c_1(y_1, \underline{u}, t), \\ x_4^* &= c_2(y_2, \underline{u}, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.25b)$$

dienen die beiden NCGen

$$0 = \bar{M}^2 c_1(y_1, \underline{u}, t) + \bar{M} a_1(\underline{y}, \underline{u}, t) + a_0(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.26a)$$

und

$$0 = \bar{M}^2 c_2(y_2, \underline{u}, t) + \bar{M} a_3(\underline{y}, \underline{u}, t) + a_2(\underline{y}, \underline{u}, t) . \quad (4.26b)$$

Führt man die Operatoranwendungen unter Zuhilfenahme der im Anhang B.2 angegebenen Differentiationsregel aus und löst Gl. (4.26a) nach  $\bar{a}_1$  und Gl. (4.26b) nach  $\bar{a}_2$  auf, so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 = & \bar{x}_4 \left[ a_{1y_2} \right] \frac{1}{c_{1y_1}} + \bar{x}_2^2 \left[ c_{1y_1 y_1} \right] \frac{1}{c_{1y_1}} + \\ & + \bar{x}_2 \left[ 2c_{1ty_1} + 2(c_{1y_1 \underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + a_{1y_1} \right] \frac{1}{c_{1y_1}} + \\ & + \left[ c_{1tt} + 2(c_{1t\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{u}}^T (c_{1\underline{u}\underline{u}}) \underline{\dot{u}} + (c_{1\underline{u}})^T \underline{\ddot{u}} + \right. \\ & \left. + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + a_0 \right] \frac{1}{c_{1y_1}} , \end{aligned} \quad (4.27a)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 = & \bar{x}_2 \left[ a_{3y_1} \right] \frac{1}{c_{2y_2}} + \bar{x}_4^2 \left[ c_{2y_2 y_2} \right] \frac{1}{c_{2y_2}} + \\ & + \bar{x}_4 \left[ 2c_{2ty_2} + 2(c_{2y_2 \underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + a_{3y_2} \right] \frac{1}{c_{2y_2}} + \\ & + \left[ c_{2tt} + 2(c_{2t\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{u}}^T (c_{2\underline{u}\underline{u}}) \underline{\dot{u}} + (c_{2\underline{u}})^T \underline{\ddot{u}} + \right. \\ & \left. + a_{3t} + (a_{3\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + a_2 \right] \frac{1}{c_{2y_2}} . \end{aligned} \quad (4.27b)$$

Aufgrund der Ausgangsgleichungen (4.24b) läßt sich hieraus die folgende *notwendige Bedingung* für die Existenz der NBNF (4.25) ablesen:

Die Funktionen  $\bar{a}_1(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  und  $\bar{a}_2(\bar{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  in der NBKNF (4.24) müssen die Forderungen

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 \stackrel{!}{=} & K_{13}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, t) \bar{x}_4 + K_{12}(\bar{x}_1, \underline{u}, t) \bar{x}_2^2 + \\ & + K_{11}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_2 + K_{10}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \end{aligned} \quad (4.28a)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 \stackrel{!}{=} & K_{23}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, t) \bar{x}_2 + K_{22}(\bar{x}_3, \underline{u}, t) \bar{x}_4^2 + \\ & + K_{21}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \bar{x}_4 + K_{20}(\bar{x}_1, \bar{x}_3, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) \end{aligned} \quad (4.28b)$$

erfüllen.

Sind diese Forderungen erfüllt, so sind die Funktionen  $K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{20}, K_{21}, K_{22}, K_{23}$  festgelegt. Durch einen Vergleich der Gln. (4.28) mit den Gln. (4.27) erhält man die *acht* folgenden Differentialgleichungen zur Bestimmung der *sechs* unbekanntenen Funktionen  $c_1, c_2, a_0, a_1, a_2$  und  $a_3$ :

$$a_{1y_2} = K_{13}(y_1, y_2, \underline{u}, t) c_{1y_1}, \quad (4.29a)$$

$$c_{1y_1y_1} = K_{12}(y_1, \underline{u}, t) c_{1y_1}, \quad (4.29b)$$

$$2c_{1ty_1} + 2(c_{1y_1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y_1} = K_{11}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_{1y_1}, \quad (4.29c)$$

$$\begin{aligned} c_{1tt} + 2(c_{1t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{1\underline{u}\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + (c_{1\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + \\ + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_0 = K_{10}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) c_{1y_1}, \end{aligned} \quad (4.29d)$$

$$a_{3y_1} = K_{23}(y_1, y_2, \underline{u}, t) c_{2y_2}, \quad (4.29e)$$

$$c_{2y_2y_2} = K_{22}(y_2, \underline{u}, t) c_{2y_2}, \quad (4.29f)$$

$$2c_{2ty_2} + 2(c_{2y_2\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + a_{3y_2} = K_{21}(y_1, y_2, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_{2y_2}, \quad (4.29g)$$

$$c_{2tt} + 2(c_{2t\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{u}}^T (c_{2\underline{u}\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + (c_{2\underline{u}})^T \underline{\ddot{u}} + \\ + a_{3t} + (a_{3\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} + a_2 = K_{20}(y_1, y_2, \underline{u}, \underline{\dot{u}}, \underline{\ddot{u}}, t) c_{2y_2} \quad (4.29h)$$

Aus der Gl. (4.29b) wird zunächst die Funktion  $c_1$  berechnet. Dabei ist der von  $\underline{u}$  abhängige Integrationsparameter so zu wählen, daß die durch Gl. (4.29c) festgelegte Ableitung

$$a_{1y_1} = K_{11} c_{1y_1} - 2c_{1ty_1} - 2(c_{1y_1\underline{u}})^T \underline{\dot{u}} =: \tilde{K}_{11}(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.30a)$$

unabhängig von  $\underline{\dot{u}}$  ist. Da mit bekannter Funktion  $c_1$  auch die Ableitung  $a_{1y_2}$  gemäß Gl. (4.29a) festgelegt ist, muß außer der Gl.

(4.30a) auch die Gleichung

$$a_{1y_2} = K_{13} c_{1y_1} =: \tilde{K}_{13}(\underline{y}, \underline{u}, t) \quad (4.30b)$$

zur Berechnung der Funktion  $a_1(\underline{y}, \underline{u}, t)$  herangezogen werden. Dies führt auf das aus der *Potentialtheorie* bekannte Problem, die Funktion  $a_1(\underline{y}, \underline{u}, t)$  aus ihrem Gradienten

$$\frac{\partial a_1(\underline{y}, \underline{u}, t)}{\partial \underline{y}} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ \tilde{K}_{13}(\underline{y}, \underline{u}, t) \end{bmatrix}$$

zu bestimmen. Gemäß [23] existiert eine Lösung genau in demjenigen einfach zusammenhängenden Gebiet  $H_1$  der  $(y_1, y_2)$ -Ebene, in dem die *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial \tilde{K}_{11}(y_1, y_2, \underline{u}, t)}{\partial y_2} \equiv \frac{\partial \tilde{K}_{13}(y_1, y_2, \underline{u}, t)}{\partial y_1} \quad (4.31)$$

identisch erfüllt ist. Die Eingangsgröße  $\underline{u}$  sowie die Zeit  $t$  sind hierbei als Parameter aufzufassen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ergibt sich die Funktion  $a_1(\underline{y}, \underline{u}, t)$  durch Lösen des *wegunabhängigen Kurvenintegrals*

$$a_1(\underline{y}, \underline{u}, t) = \int_{\underline{y}_0}^{\underline{y}} \left[ \tilde{K}_{11}(\underline{\xi}, \underline{u}, t) d\xi_1 + \tilde{K}_{13}(\underline{\xi}, \underline{u}, t) d\xi_2 \right] + C_1(\underline{u}, t), \quad (4.32)$$

wobei darauf zu achten ist, daß der Integrationsweg vollständig innerhalb des Gebietes  $H_1$  verläuft.  $C_1(\underline{u}, t)$  stellt eine beliebige von  $\underline{u}$  und  $t$  abhängige Funktion dar.

Nachdem die Funktion  $a_1(\underline{y}, \underline{u}, t)$  bestimmt ist, kann mit Hilfe der Gl. (4.29d) die Funktion  $a_0(\underline{y}, \underline{u}, t)$  berechnet werden, sofern es gelingt, die  $\dot{\underline{u}}$ - und  $\ddot{\underline{u}}$ -abhängigen Terme zu eliminieren.

Die Funktionen  $c_2$ ,  $a_2$  und  $a_3$  lassen sich auf die gleiche Weise wie die Funktionen  $c_1$ ,  $a_0$  und  $a_1$  berechnen, vorausgesetzt, auch die zweite *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial \tilde{K}_{21}(y_1, y_2, \underline{u}, t)}{\partial y_2} \equiv \frac{\partial \tilde{K}_{23}(y_1, y_2, \underline{u}, t)}{\partial y_1} \quad (4.33)$$

ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $H_2$  der  $(y_1, y_2)$ -Ebene identisch erfüllt:  $c_2(\underline{y}, \underline{u}, t)$  wird aus Gl. (4.29f) bestimmt,  $a_3(\underline{y}, \underline{u}, t)$  aus dem *wegunabhängigen Kurvenintegral*

$$a_3(\underline{y}, \underline{u}, t) = \int_{\underline{y}_0}^{\underline{y}} \left[ \tilde{K}_{21}(\underline{\xi}, \underline{u}, t) d\xi_1 + \tilde{K}_{23}(\underline{\xi}, \underline{u}, t) d\xi_2 \right] + C_2(\underline{u}, t), \quad (4.34)$$

$$\underline{y}_0, \underline{y}, \underline{\xi} \in H_2,$$

mit

$$\tilde{K}_{21}(\underline{y}, \underline{u}, t) := K_{21} c_{2y_2} - 2c_{2ty_2} - 2(c_{2y_2u})^T \dot{\underline{u}},$$

$$\tilde{K}_{23}(\underline{y}, \underline{u}, t) := K_{23} c_{2y_2}$$

und  $a_2(\underline{y}, \underline{u}, t)$  schließlich aus Gl. (4.29h). Eine eventuelle Abhängigkeit der Gln. (4.29g) und (4.29h) von  $\dot{\underline{u}}$  und  $\ddot{\underline{u}}$  ist durch geeignete Wahl der Integrationsparameter zu unterbinden.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Sind

- die an die NBKNF (4.24) gestellten *Forderungen* (4.28) sowie
- die beiden *Integrabilitätsbedingungen* (4.31) und (4.33) erfüllt, und
- läßt sich eine eventuelle *Abhängigkeit der Gln.* (4.29) von  $\dot{u}$  und  $\ddot{u}$  durch geeignete Wahl der Integrationsparameter *eliminieren*,

so können die in der NBNF (4.25) auftretenden Funktionen mit Hilfe der Gln. (4.29), (4.32) und (4.34) berechnet werden.

#### 4.3.5 Bestimmung der Gesamttransformation $\underline{v}$ und die Existenz ihrer Inversen $\tilde{v}$

Sind die Funktionen  $c_j(y_j, \underline{u}, t)$  und  $a_{m_{j-1}+i}(\underline{y}, \underline{u}, t)$ ,  $i = 0, \dots, n_j-1$ ,  $j = 1, \dots, q$ , bestimmt, so können mit Hilfe der Gl. (4.15) die  $q$  Teiltransformationen  $\underline{w}_j(\underline{x}, \hat{u}_{n_j}, t)$  und daraus über die Beziehung

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{w}(\underline{x}, \hat{u}_m, t) = \underline{w}(q(\underline{x}, \hat{u}_m, t), \hat{u}_m, t)$$

die Gesamttransformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  berechnet werden. Wie im Eingrößenfall  $q = 1$  läßt sich die Gesamttransformation  $\underline{v}$  aber auch direkt bestimmen, und zwar durch Auswertung der Gleichung

$$\underline{v}_j(\underline{x}, t) = \begin{bmatrix} N^{n_j-1} c_j(y_j, \underline{u}, t) + \dots + N a_{m_{j-1}+2}(\underline{y}, \underline{u}, t) + a_{m_{j-1}+1}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ N^{n_j-2} c_j(y_j, \underline{u}, t) + \dots + a_{m_{j-1}+2}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ \vdots \\ N c_j(y_j, \underline{u}, t) + a_{m_{j-1}}(\underline{y}, \underline{u}, t) \\ c_j(y_j, \underline{u}, t) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

für  $j = 1, \dots, q$ .  $N$  steht dabei für den im Abschnitt 3.3.1 eingeführten Operator

$$N^0(\dots) := (\dots), \quad (4.36a)$$

$$N^i(\dots) := \frac{\partial N^{i-1}(\dots)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial N^{i-1}(\dots)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t). \quad (4.36b)$$

Den in Gl. (4.35) dargestellten Aufbau des Teilvektors  $\underline{v}_j$  erhält man durch entsprechendes Vorgehen wie im Abschnitt 3.3.1, nämlich durch Gleichsetzen der totalen zeitlichen Ableitung von  $\underline{v}_j(\underline{x}, t)$  mit der rechten Seite des  $j$ -ten Subsystems (4.1c) und Auflösen dieser Gleichung nach den linear auftretenden Komponenten des Vektors  $\underline{v}_j(\underline{x}, t)$ .

Beim Nachweis für die eindeutige Umkehrbarkeit der Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  kann genauso argumentiert werden wie im Fall mit einer Ausgangsgröße (s. Abschnitt 3.3.8): Gibt es ein Gebiet  $G$  des Original-Zustandsraumes, das durch die nach Gl. (2.11) zu berechnende Transformation

$$\bar{\underline{x}} = \underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t)$$

umkehrbar eindeutig in das Gebiet  $\bar{G}$  des NBKNF-Koordinatenraumes abgebildet wird, und lassen sich die Funktionen  $c_j$  und  $a_{m_{j-1}+i}$ ,

$i = 0, \dots, n_j - 1$ ,  $j = 1, \dots, q$ , unabhängig von Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  aus den  $q$  NCGen (4.16) bestimmen, so wird das Gebiet  $\bar{G}$  durch die nach Gl. (4.15),  $j = 1, \dots, q$ , zu berechnende Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\bar{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}_m, t)$$

umkehrbar eindeutig in das Gebiet  $G^*$  des NBNF-Koordinatenraumes abgebildet. Es existiert nämlich gemäß Abschnitt 4.3.1 immer die Inverse

$$\bar{\underline{x}} = \tilde{\underline{w}}(\underline{x}^*, \hat{\underline{u}}_m, t),$$

sofern im Gebiet  $G^*$  die Ableitungen

$$\frac{\partial h_j^*(x_{m_j}^*, \underline{u}, t)}{\partial x_{m_j}^*}, \quad j = 1, \dots, q,$$

von Null verschieden sind. Wenn aber die Transformationen  $\underline{q}$  und  $\underline{w}$  in den genannten Gebieten *umkehrbar eindeutig* sind, so ist auch die Gesamttransformation

$$\underline{x}^* = \underline{w}(\underline{q}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_m, t), \hat{\underline{u}}_m, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) ,$$

die das Originalsystem (2.1) *direkt* in die NBNF (4.1) überführt, im Gebiet G *umkehrbar eindeutig* [60]. Somit existiert im Gebiet G\* des NBNF-Koordinatenraumes die *inverse Transformation*

$$\underline{x} = \tilde{\underline{v}}(\underline{x}^*, t) ,$$

welche die NBNF-Koordinaten in Originalkoordinaten zurückführt.

#### 4.4 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR DAS ORIGINALSYSTEM

Für ein in NBNF vorliegendes System mit mehreren Ausgangsgrößen wurde der Beobachter bereits im Abschnitt 4.2 angegeben. Er liefert Schätzwerte für die Zustandsgrößen  $x_i^*$  der NBNF. Wie im Eingrößensfall (s. Bild 3.2) lassen sich daraus mit Hilfe der inversen Transformation die Schätzwerte für die Originalzustandsgrößen  $x_i$  bestimmen.

Der Beobachter in Originalkoordinaten läßt sich entsprechend der im Abschnitt 3.4 beschriebenen Vorgehensweise berechnen: Durch Einsetzen der Gleichung (4.10) und der Transformationsgleichung  $\hat{\underline{x}}^* = \underline{v}(\hat{\underline{x}}, t)$  in die totale zeitliche Ableitung der inversen Transformationsgleichung  $\hat{\underline{x}} = \tilde{\underline{v}}(\hat{\underline{x}}^*, t)$  ergibt er sich zu

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \left. \frac{\partial \tilde{\underline{v}}(\hat{\underline{x}}^*, t)}{\partial t} \right|_{\hat{\underline{x}}^* = \underline{v}(\hat{\underline{x}}, t)} + \quad (4.37)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\underline{v}}(\hat{\underline{x}}^*, t)}{\partial \hat{\underline{x}}^*} \right|_{\hat{\underline{x}}^* = \underline{v}(\hat{\underline{x}}, t)} \cdot \left[ \underline{F} \underline{v}(\hat{\underline{x}}, t) - \underline{a}(\underline{y}, \underline{u}, t) + \underline{K} \underline{c}(\underline{y}, \underline{u}, t) \right] .$$

#### 4.5 BOBACHTERENTWURF AM BEISPIEL EINER DREHSTROMSYNCHRONMASCHINE

Das Modell der Drehstromsynchronmaschine, für das bereits im 2. Kapitel eine Beobachtbarkeitsanalyse durchgeführt wurde, soll nun als Beispiel dienen, um das Beobachterentwurfsverfahren für Systeme mit mehr als einer Ausgangsgröße zu erproben. Dabei besteht die Aufgabe des Beobachters darin, aus den zur Verfügung stehenden Ausgangsgrößen Polradwinkel  $y_1 = x_1$  und Frequenzabweichung  $y_2 = x_2$  einen Schätzwert für die Flußverkettung  $x_3$  zu liefern.

Der erste Entwurfsschritt, nämlich die Überführung des Systems (2.30) in die NBKNF (2.34) mit den Subsystemordnungen  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 2$ , wurde bereits im Abschnitt 2.8.3 vollzogen. Die dort erhaltenen Funktionen  $\bar{a}_1$  und  $\bar{a}_2$  erfüllen die Forderungen (4.22) mit

$$K_{10}(\bar{x}) = -\bar{x}_2 ,$$

$$K_{22}(\bar{x}_2) = 0 ,$$

$$K_{21}(\bar{x}) = A_1 + D_1 - \bar{x}_2 \cot \bar{x}_1 ,$$

$$K_{20}(\bar{x}, u) = A_2(u + D_2 \cos \bar{x}_1) \sin \bar{x}_1 + B_2(D_1 \cos \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sin \bar{x}_1) \sin \bar{x}_1 + \\ + (\bar{x}_2 \cot \bar{x}_1 - D_1)(B_1 - A_1 \bar{x}_2) .$$

Diese Beziehungen werden nun unter Berücksichtigung der Ausgangsgleichungen  $y_1 = \bar{x}_1$  und  $y_2 = \bar{x}_2$  in die Gln. (4.23) eingesetzt. Da die Synchronmaschine ein zeitinvariantes, nicht sprungfähiges System darstellt, erhält man die vier Bestimmungsgleichungen

$$a_0 = -y_2 c_1 y_1 , \quad (4.38a)$$

$$c_2 y_2 y_2 = 0 , \quad (4.38b)$$

$$a_2 y_2 = (A_1 + D_1 - y_2 \cot y_1) c_2 y_2 , \quad (4.38c)$$

$$a_1 = A_2(u + D_2 \cos y_1) \sin y_1 + B_2(D_1 \cos y_1 - y_2 \sin y_1) \sin y_1 + \\ + (y_2 \cot y_1 - D_1)(B_1 - A_1 y_2) - a_2 y_1 y_2 - (a_{2u})^T \dot{u} \quad (4.38d)$$

für die *fünf* in der NBNF

$$\underline{\dot{x}}^* = \begin{bmatrix} 0 - a_0(\underline{y}, u) \\ 0 - a_1(\underline{y}, u) \\ x_2^* - a_2(\underline{y}, u) \end{bmatrix}, \quad (4.39a)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^* &= c_1(y_1) \\ x_3^* &= c_2(y_2) \end{aligned} \right\} \quad (4.39b)$$

auftretenden Funktionen. Durch die willkürliche Festlegung der von  $y_1$  abhängigen Funktion  $c_1$  zu

$$c_1(y_1) = y_1$$

erhält man aus Gl. (4.38a) für  $a_0$  die Beziehung

$$a_0(y_2) = -y_2.$$

Aus Gl. (4.38b) folgt für die Funktion  $c_2$

$$c_2(y_2) = C_1 y_2 + C_2,$$

womit sich nach Gl. (4.38c) die Funktion  $a_2$  zu

$$a_2(\underline{y}, u) = (A_1 + D_1)y_2 - \frac{1}{2} y_2^2 \cot y_1 + C_3(u)$$

ergibt. Wählt man die Integrationsparameter

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3(u) = 0,$$

so erhält man für die Funktion  $a_1$  schließlich

$$\begin{aligned} a_1(\underline{y}, u) &= A_2(u + D_2 \cos y_1) \sin y_1 + B_2(D_1 \cos y_1 - y_2 \sin y_1) \sin y_1 + \\ &+ (y_2 \cot y_1 - D_1)(B_1 - A_1 y_2) - \frac{y_2^3}{2 \sin^2 y_1}. \end{aligned}$$

Damit ist die NBNF nach Gl. (4.39) festgelegt. Die zugehörige Transformation

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \end{bmatrix},$$

die das Originalsystem *direkt* in diese NBNF überführt, setzt sich aus den zwei nach Gl. (4.35) für  $j = 1$  und  $j = 2$  zu bestimmenden Teiltransformationen

$$v_1(\underline{x}) = c_1(x_1) = x_1$$

und

$$\begin{aligned} \underline{v}_2(\underline{x}) &= \begin{bmatrix} Nc_2(x_2) + a_2(x_1, x_2) \\ c_2(x_2) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} B_1 - A_2 x_3 \sin x_1 - 0,5 B_2 \sin 2x_1 + D_1 x_2 - 0,5 x_2^2 \cot x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

zusammen. Man erhält somit die Abbildungsgleichung

$$\underline{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ B_1 - A_2 x_3 \sin x_1 - 0,5 B_2 \sin 2x_1 + D_1 x_2 - 0,5 x_2^2 \cot x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\underline{v}(\underline{x})}$

aus welcher sich durch Auflösen nach  $\underline{x}$  die Inverse

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_3^* \\ \frac{1}{A_2 \sin x_1^*} \left[ B_1 - 0,5B_2 \sin 2x_1^* + D_1 x_3^* - 0,5x_3^{*2} \cot x_1^* - x_2^* \right] \end{bmatrix}$$

$\tilde{v}(x^*)$

ergibt. Damit läßt sich gemäß Gl. (4.37) der Beobachter in Originalkoordinaten bestimmen. Nach einiger Rechnung erhält man nach geeignetem Zusammenfassen und Ausklammern die Beobachtergleichungen [DA1]

$$\dot{\hat{x}}_1 = y_2 + k_0(y_1 - \hat{x}_1) ,$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = B_1 - A_1 y_2 - A_2 \hat{x}_3 \sin \hat{x}_1 - 0,5B_2 \sin 2\hat{x}_1 +$$

$$+ (k_2 - D_1)(y_2 - \hat{x}_2) + 0,5(y_2^2 \cot y_1 - \hat{x}_2^2 \cot \hat{x}_1) ,$$

$$\dot{\hat{x}}_3 = -D_1 \hat{x}_3 + (u + D_2 \cos y_1) \frac{\sin y_1}{\sin \hat{x}_1} +$$

$$- \hat{x}_3 \cot \hat{x}_1 \left[ (y_2 - \hat{x}_2) + k_0(y_1 - \hat{x}_1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{A_2 \sin \hat{x}_1} \left[ 0,5B_2 D_1 (\sin 2y_1 - \sin 2\hat{x}_1) - B_2 y_2 (\sin^2 y_1 - \sin^2 \hat{x}_1) + \right.$$

$$- 0,5y_2 \left( \frac{y_2^2}{\sin^2 y_1} - \frac{\hat{x}_2^2}{\sin^2 \hat{x}_1} \right) + (B_1 - A_1 y_2)(y_2 \cot y_1 - \hat{x}_2 \cot \hat{x}_1) +$$

$$+ 0,5(D_1 - \hat{x}_2 \cot \hat{x}_1)(y_2^2 \cot y_1 - \hat{x}_2^2 \cot \hat{x}_1) +$$

$$- \left[ B_2 \cos^2 \hat{x}_1 + k_1 + (k_2 - D_1)(\hat{x}_2 \cot \hat{x}_1 - D_1) \right] (y_2 - \hat{x}_2) +$$

$$\left. + \left( \frac{\hat{x}_2^2}{2 \sin^2 \hat{x}_1} - B_2 \cos 2\hat{x}_1 \right) k_0 (y_1 - \hat{x}_1) \right] .$$

Führt man den Grenzübergang  $\hat{x} \rightarrow x$  durch, so bleibt wie bei den Beispielen des 3. Kapitels nur noch das unterstrichene Streckenmodell übrig. Es fällt weiterhin auf, daß die beiden letzten Beobachtergleichungen für  $x_1, \hat{x}_1 = \pm k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$ , nicht definiert sind, da in ihnen der Kotangens sowie der Kehrwert der Sinusfunktion auftreten. Der Beobachter ist demnach nur brauchbar, falls die "verbotenen" Ebenen  $x_1 = \pm k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$ , des Zustandsraums weder von der wahren noch von der geschätzten Trajektorie durchstoßen werden. Diese Einschränkung steht im Einklang mit den Ergebnissen der im Abschnitt 2.8.3 durchgeführten Beobachtbarkeitsanalyse.

Den folgenden Simulationen liegen die Daten aus [12] zugrunde:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,2703 , \\ A_2 &= 12,01 , \\ B_1 &= 39,19 , \\ B_2 &= -48,04 , \\ D_1 &= 0,3222 , \\ D_2 &= 1,9 . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Fehlerdynamikmatrix wurden zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -10$  gewählt. Durch Auswerten der Gl. (4.9) für  $j = 1$  und  $j = 2$  erhält man damit die Koeffizienten  $k_0 = 10, k_1 = 100$  und  $k_2 = 20$  der Beobachterverstärkungsmatrix  $\underline{K}$ . Bei den Simulationen wurde davon ausgegangen, daß sich die Synchronmaschine (hier Generatorbetrieb) zu Beginn in dem stationären Zustand

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,873 \\ 0 \\ 6,83 \end{bmatrix} , \quad u_0 = 0,979$$

befindet. Für den Beobachter wurde der Anfangszustand

$$\hat{\underline{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0,873 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gewählt, der sich lediglich in seiner dritten Komponente von dem Anfangswert  $\underline{x}_0$  unterscheidet, da die Flußverkettung  $x_3$  die einzige unbekannte Größe darstellt.

Die Bilder 4.1 bis 4.3 zeigen die Übergangsvorgänge der Zustandsvariablen von System und Beobachter bei einer zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  erfolgenden sprunghaftigen Änderung der Eingangsgröße von  $u_0$  auf  $u_e = 1,933$ , worauf der Generator dem neuen stationären Zustand

$$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 0,436 \\ 0 \\ 11,345 \end{bmatrix}, \quad u_e = 1,933$$

zustrebt. Bereits nach 1 Sekunde stimmen die geschätzten Zustandsgrößen mit den tatsächlichen überein. Daß der geschätzte Verlauf  $\hat{x}_1(t)$  schon von Beginn an mit dem wahren Verlauf  $x_1(t)$  zusammenfällt, liegt zunächst daran, daß im "Streckenmodell" der ersten Beobachtergleichung statt des geschätzten Wertes  $\hat{x}_2$  der exakte Wert  $y_2 = x_2$  auftritt. Da zum zweiten der Anfangswert  $\hat{x}_{01}$  des Beobachters gleich dem Anfangswert  $x_{01}$  der Strecke gewählt wurde, stimmt der geschätzte Verlauf  $\hat{x}_1(t)$  für alle Zeiten mit dem wahren Verlauf  $x_1(t)$  überein: Der Korrekturterm  $k_0(y_1 - \hat{x}_1)$  verschwindet identisch.

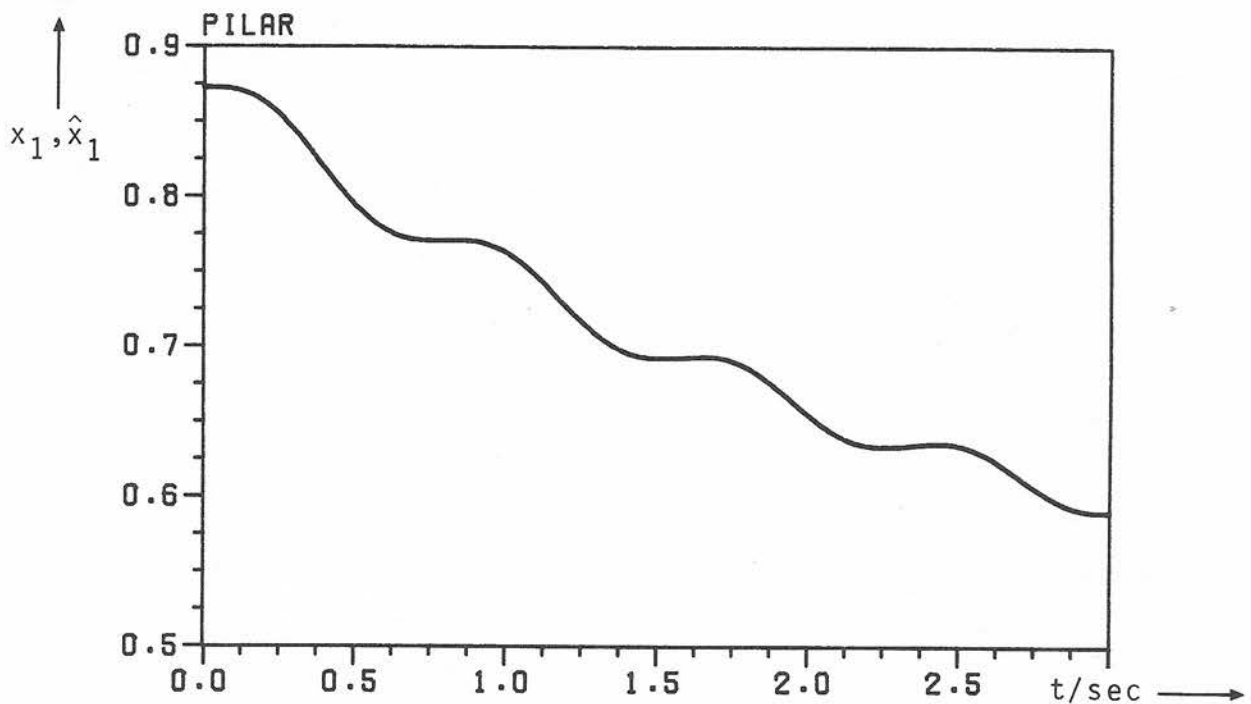


Bild 4.1 Verläufe des wahren (—) und des geschätzten (---) Polradwinkels  $x_1(t)$  bzw.  $\hat{x}_1(t)$

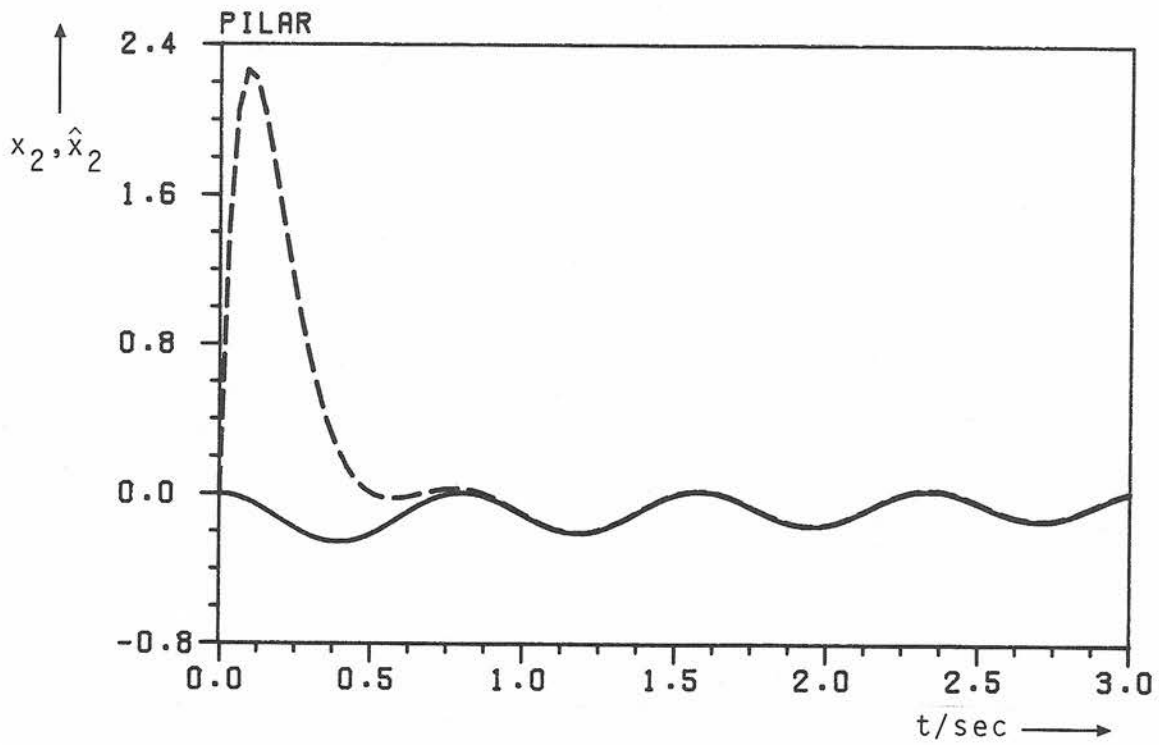


Bild 4.2 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Frequenzabweichung  $x_2(t)$  bzw.  $\hat{x}_2(t)$

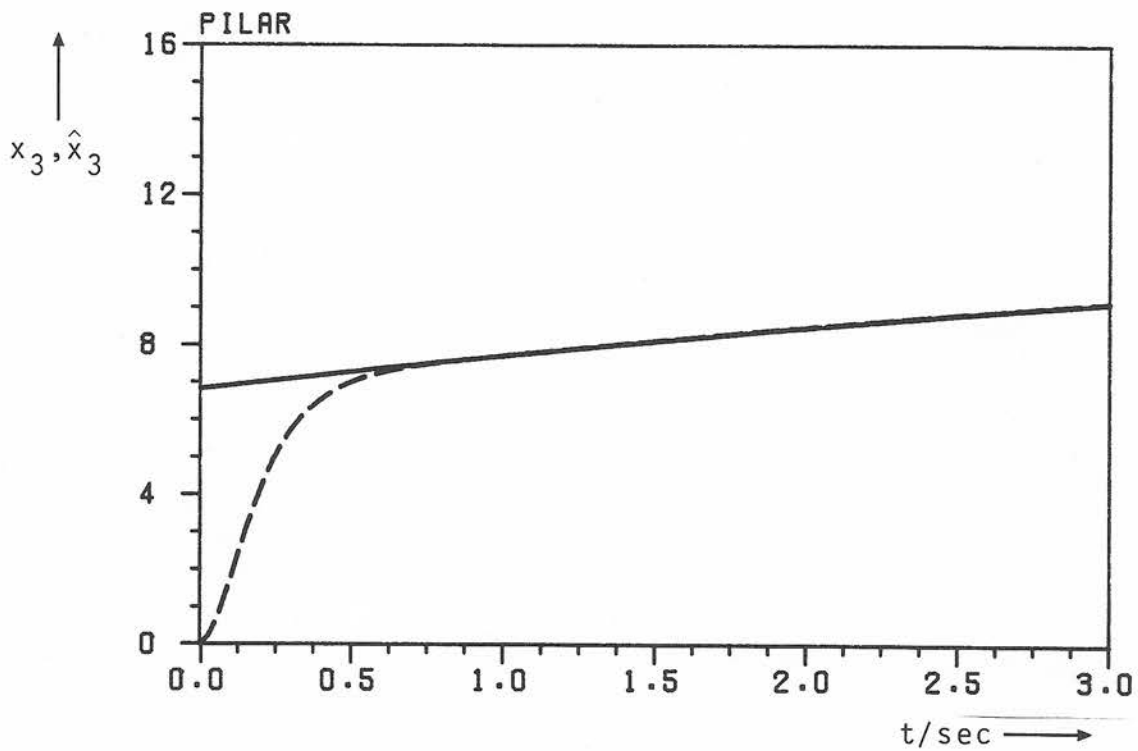


Bild 4.3 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Flußverkeftung  $x_3(t)$  bzw.  $\hat{x}_3(t)$

## 5. BEOACHTERENTWURF MIT HILFE DER "VERALLGEMEINERTEN BEOACHTER-NORMALFORM (VBNF)"

Bisher wurde stillschweigend davon ausgegangen, daß die bei der Bestimmung der NBNF auftretenden zeitlichen Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}(t)$  durch geeignete Wahl der Integrationsparameter eliminiert werden können. Diese Elimination muß jedoch keineswegs immer gelingen. Dann scheitert der Beobachterentwurf mit Hilfe der NBNF selbst dann, wenn alle anderen Existenzbedingungen erfüllt sind.

Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn man dem Beobachterentwurf eine etwas allgemeinere Normalform zugrunde legt [31;32;DA4], deren rechte Seite auch von *Ableitungen* der Eingangsgröße abhängen darf. Die Definition dieser "Verallgemeinerten Beobachternormalform (VBNF)", die Herleitung der Transformationsgleichungen sowie die Bestimmung des resultierenden Beobachters sind Gegenstand der folgenden Abschnitte. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, beschränken sich die Ausführungen auf Systeme mit nur einer Ausgangsgröße. Sie lassen sich jedoch geradlinig auf den Mehrgrößenfall ( $q > 1$ ) übertragen.

### 5.1 DEFINITION DER VBNF

Auch die "Verallgemeinerte Beobachternormalform (VBNF)" soll die drei im Abschnitt 3.1 genannten charakteristischen Eigenschaften der *Konsistenz*, der *Verwendbarkeit* und der *Äquivalenz* aufweisen. In Verallgemeinerung der NBNF (3.2) wird sie definiert als

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{E} \underline{x}^* - \underline{a}^*(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t), \quad (5.1a)$$

$$y = h^*(x_n^*, \underline{u}, t) \quad (5.1b)$$

mit der konstanten Matrix  $\underline{E}$  aus Gl. (3.2c) und dem in spezieller Weise von  $\underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(n)}$  abhängigen Vektor

$$\underline{a}^*(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, \underline{u}, t) = \begin{bmatrix} a_0^*(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, \underline{u}, t)^{(n-1)(n)} \\ a_1^*(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n-1)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^*(x_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \end{bmatrix} \quad (5.1c)$$

Wie von der NBNF (3.2) im Abschnitt 3.3.4 gezeigt wurde, läßt sich auch die VBNF (5.1) *umkehrbar eindeutig* in die NBKNF (2.2) überführen, sofern im interessierenden Gebiet die Bedingung

$$\frac{\partial h^*(x_n^*, \underline{u}, t)}{\partial x_n^*} \neq 0 \quad (3.49)$$

erfüllt ist. Dies wird deutlich, wenn man die Transformation (3.50) auf die VBNF (5.1) anwendet. Die resultierenden Abbildungsgleichungen haben nämlich dieselbe Struktur wie die Gleichungen (3.51), welche die NBNF in die NBKNF überführen. Die Abhängigkeit des Vektors  $\underline{a}^*$  von den Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  wurde so allgemein wie möglich zugelassen, wobei jedoch berücksichtigt wurde, daß die Anwendung der Transformation (3.50) auf eine Form führt, in der maximal die n-te zeitliche Ableitung von  $\underline{u}$  auftritt.

Setzt man die Existenz der inversen Ausgangsgleichung

$$x_n^* = c(y, \underline{u}, t)$$

voraus, so läßt sich die VBNF (5.1) auch in der Form

$$\dot{\underline{x}}^* = \underline{E} \underline{x}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)}, \quad (5.2a)$$

$$x_n^* = c(y, \underline{u}, t) \quad (5.2b)$$

mit

$$\underline{a}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)} = \begin{bmatrix} a_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \end{bmatrix} \quad (5.2c)$$

anschreiben, wenn die Umformung

$$\begin{aligned} \underline{a}^*(\underline{x}_n^*, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) &= \underline{a}^*(c(y, \underline{u}, t), \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) \\ &= \underline{a}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) \end{aligned} \quad (n)$$

vorgenommen wird.

## 5.2 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR EIN SYSTEM IN VBNF

Für ein in VBNF vorliegendes System ist der Beobachteransatz

$$\dot{\underline{\hat{x}}}^* = \underline{E} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) + \underline{k} [c(y, \underline{u}, t) - \hat{x}_n^*] \quad (5.3)$$

mit der konstanten Beobacherverstärkung  $\underline{k}$  naheliegend. Die Subtraktion der Gl. (5.3) von der Gl. (5.2a) führt nämlich auf die homogene, lineare und zeitinvariante Fehlerdifferentialgleichung (3.6), der mittels Polvorgabe eine gewünschte Dynamik aufgeprägt werden kann. Mit Hilfe der in Gl. (3.7) eingeführten Matrix  $\underline{F}$  läßt sich der Beobachter auch in der Form

$$\dot{\underline{\hat{x}}}^* = \underline{F} \underline{\hat{x}}^* - \underline{a}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t) + \underline{k} c(y, \underline{u}, t) \quad (5.4)$$

anschreiben.

## 5.3 TRANSFORMATION AUF VBNF

Will man ein System der Form (3.1) in die VBNF (5.1) bzw. (5.2) überführen, so kommt man nicht mehr mit einer *reinen Zustands-  
transformation* aus. Für diese Aufgabe benötigt man vielmehr eine von der Eingangsgröße  $\underline{u}$  und deren n-1 ersten zeitlichen Ableitungen abhängige Transformation

$$\underline{x}^* = \underline{v}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t) \quad (5.5)$$

mit  $\hat{\underline{u}}_n$  gemäß Gl. (2.9). Sie selbst sowie ihre stetige Inverse

$$\underline{x} = \tilde{\underline{v}}(\underline{x}^*, \hat{\underline{u}}_n, t) \quad (5.6)$$

seien im interessierenden Gebiet stetig und hinreichend oft differenzierbar.

### 5.3.1 Bestimmungsgleichungen der Transformation auf VBNF

Bei der Herleitung der Transformationsbestimmungsgleichungen kann entsprechend vorgegangen werden wie in den vorangehenden Kapiteln (siehe auch [32]): Zunächst wird Gl. (5.5) total nach der Zeit abgeleitet und für  $\dot{\underline{x}}$  die rechte Seite der Zustandsdifferentialgleichung (3.1) eingesetzt. Durch Vergleich der so erhaltenen Gleichung mit der VBNF (5.2) erhält man nach einigen Umformungen den Transformationsaufbau [DA4]

$$\underline{v}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t) = \begin{bmatrix} M^{n-1}c(y, \underline{u}, t) + \dots + a_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n-1)} \\ \vdots \\ Mc(y, \underline{u}, t) + a_{n-1}(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) \\ c(y, \underline{u}, t) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

mit

$$M^0(\dots) := (\dots),$$

$$M^i(\dots) := \frac{\partial M^{i-1}(\dots)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial M^{i-1}(\dots)}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \right]^T \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \left[ \frac{\partial M^{i-1}(\dots)}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t).$$

Die unbekanntenen Funktionen  $a_i(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n-i)}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , und  $c(y, \underline{u}, t)$  der VBNF sind aus der "Verallgemeinerten Charakteristischen Gleichung (VCG)"

$$0 = M^n c(y, \underline{u}, t) + \dots + M a_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n-1)} + a_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}, t)^{(n)} \quad (5.8)$$

zu berechnen.

Um Bedingungen für die Existenz der VBNF angeben zu können, wird auch hier wieder davon ausgegangen, daß das System in der NBKNF (2.2) vorliegt, deren Existenz ja notwendig für die Existenz der VBNF ist. Dann sind die unbekanntenen Funktionen  $a_i$  und  $c$  aus der VCG

$$0 = \bar{M}^n c(y, \underline{u}, t) + \dots + \bar{M} a_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(n-1)}, t) + a_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(n)}, t) \quad (5.9)$$

mit

$$\bar{M}^0(\dots) := (\dots),$$

$$\bar{M}^i(\dots) := \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial \hat{\underline{u}}_n} \right]^T \dot{\hat{\underline{u}}}_n + \left[ \frac{\partial \bar{M}^{i-1}(\dots)}{\partial \bar{\underline{x}}} \right]^T \bar{f}(\bar{\underline{x}}, \hat{\underline{u}}_n, \underline{u}^{(n)}, t)$$

zu bestimmen. Es ist einleuchtend, daß die aus der VCG (5.9) berechneten Funktionen  $a_i$  und  $c$  zwangsläufig auch die VCG (5.8) erfüllen, denn die beiden Operatoren  $M$  und  $\bar{M}$  bewirken das gleiche, nämlich die totale zeitliche Ableitung ihrer Operanden. Der Unterschied besteht nur darin, daß den beiden Operatordefinitionen verschiedene Systemdarstellungen zugrunde liegen, die jedoch zueinander äquivalent sind.

### 5.3.2 Existenz und Herleitung der VBNF für Systeme 2. Ordnung

Für  $n = 2$  lautet die VCG (5.9)

$$0 = \bar{M}^2 c(y, \underline{u}, t) + \bar{M} a_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) + a_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t).$$

Führt man die Operatoranwendungen aus, so läßt sich die Gleichung nach der letzten Komponente  $\bar{a}$  des NBKNF-Systemvektors auflösen. Man erhält

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \bar{x}_2^2 [c_{yy}] \frac{1}{c_y} + \bar{x}_2 [2c_{ty} + 2(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y}] \frac{1}{c_y} + \\ & + [c_{tt} + 2(c_{t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + (a_{1\dot{\underline{u}}})^T \ddot{\underline{u}} + a_0] \frac{1}{c_y}. \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß diese Gleichung bis auf den zusätzlichen Term  $(a_{1\dot{\underline{u}}})^T \ddot{\underline{u}}$  mit der Gleichung (3.64) übereinstimmt. Somit kann auch die VBNF nur dann existieren, wenn die letzte Komponente  $\bar{a}$  des NBKNF-Systemvektors die "Polynom"struktur (3.65) aufweist. Diese Polynombedingung ist aber *nicht nur notwendig*, sondern *sogar hinreichend* dafür, daß mit der NBKNF auch die VBNF existiert. Ist sie erfüllt, so können die *drei* Funktionen  $c(y, \underline{u}, t)$ ,  $a_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t)$

und  $a_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t)$  aus den *drei* folgenden Differentialgleichungen berechnet werden:

$$c_{yy} = K_2(y, \underline{u}, t) c_y, \quad (5.10a)$$

$$2c_{ty} + 2(c_{\underline{u}y})^T \dot{\underline{u}} + a_{1y} = K_1(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, t) c_y, \quad (5.10b)$$

$$c_{tt} + 2(c_{t\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + \dot{\underline{u}}^T (c_{\underline{u}\underline{u}}) \dot{\underline{u}} + (c_{\underline{u}})^T \ddot{\underline{u}} + a_{1t} + (a_{1\underline{u}})^T \dot{\underline{u}} + (a_{1\dot{\underline{u}}})^T \ddot{\underline{u}} + a_0 = K_0(y, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \ddot{\underline{u}}, t) c_y. \quad (5.10c)$$

Hat man die drei Funktionen berechnet, so ist die VBNF gemäß den Gln. (5.2) festgelegt und die Transformation  $\underline{v}$  kann mit Hilfe der Gl. (5.7) berechnet werden.

Auch für höhere Ordnungen lassen sich *notwendige und hinreichende* Bedingungen für die Existenz der VBNF angeben. Die VBNF 3. Ordnung existiert beispielsweise *genau dann*, wenn die NBKNF existiert und die Bedingungen (3.70) und (3.72) erfüllt sind.

### 5.3.3 Ein Kriterium für die Unabhängigkeit der Transformation $\underline{v}$ von $\hat{\underline{u}}_n$

Wie bereits im 3. Kapitel angedeutet, läßt sich das folgende *notwendige und hinreichende* Kriterium für die Unabhängigkeit der Transformation  $\underline{v}$  von der Eingangsgröße  $\underline{u}$  und deren zeitlichen Ableitungen formulieren:

*Die Transformation  $\underline{v}$  ist genau dann eine Funktion von  $\underline{x}$  und  $t$  allein, wenn es gelingt, die  $n$  Funktionen  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , unabhängig von Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  zu bestimmen, d.h. wenn die NBNF existiert.*

Dies soll im folgenden bewiesen werden.

Falls  $a_0$  nur von  $y, \underline{u}$  und  $t$  abhängt, muß dies auch für den Ausdruck

$$M^n c + \dots + M a_1 = M(M^{n-1} c + \dots + a_1)$$

gelten, da andernfalls die VCG (5.8) nicht erfüllt ist. Dann kann aber die erste Komponente

$$v_1 = M^{n-1}c + \dots + a_1$$

der Transformation (5.7) nur eine Funktion von  $\underline{x}$  und  $t$  allein sein, da der Operator  $M$  die totale zeitliche Ableitung des Operanden bewirkt. Daraus folgt aber, daß auch

$$M^{n-1}c + \dots + Ma_2 = M(M^{n-2}c + \dots + a_2)$$

von  $\dot{u}, \dots, u^{(n)}$  unabhängig sein muß, sofern  $a_1$  ebenfalls nur von  $y$ ,  $u$  und  $t$  abhängt. Somit kann auch

$$v_2 = M^{n-2}c + \dots + a_2$$

nur eine Funktion von  $\underline{x}$  und  $t$  allein sein. Führt man diesen Gedankengang fort, so kommt man zu dem Ergebnis, daß sämtliche Komponenten  $v_i$  der Transformation  $\underline{v}$  nur von  $\underline{x}$  und  $t$  abhängen können, sofern alle  $n$  Funktionen  $a_i$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , von Ableitungen der Eingangsgröße  $u$  unabhängig sind. Auch die Notwendigkeit des Kriteriums ist plausibel. Hängt nämlich beispielsweise die Funktion  $a_i$  von  $\dot{u}$  ab, so kann die VCG (5.8) nur erfüllt sein, wenn die Transformationskomponente  $v_{i-1}$  von  $u$  abhängig ist.

Da in der obigen Beweisführung der Operator  $M$  immer nur auf Funktionen angewandt wird, die nur von  $\underline{x}$  und  $t$  abhängen, ist er gleichbedeutend mit dem in Gl. (3.13) definierten Operator  $N$ . Somit kann für den Fall, daß sich alle  $a_i$  unabhängig von  $\dot{u}, \dots, u^{(n)}$  bestimmen lassen, die Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  auch nach Gl. (3.16) berechnet werden.

#### 5.4 BESTIMMUNG DES BEOBACHTERS FÜR DAS ORIGINALSYSTEM

Um den Beobachter für das Originalsystem angeben zu können, muß zunächst die inverse Transformation (5.6) berechnet werden, deren Existenz durch entsprechende Überlegungen wie im Abschnitt 3.3.8 nachgewiesen werden kann. Damit ist es möglich, die vom VBNF-Beobachter (5.4) gelieferten Schätzwerte  $\hat{x}_i^*$  in Schätzwerte  $\hat{x}_i$  der Originalzustandsgrößen umzurechnen.

Der Beobachter in Originalkoordinaten ergibt sich durch Einsetzen der Gl. (5.4) und der Transformationsgleichung  $\hat{x}^* = v(\hat{x}, \hat{u}_n, t)$  in die totale zeitliche Ableitung der inversen Transformationsgleichung  $\hat{x} = \tilde{v}(\hat{x}^*, \hat{u}_n, t)$  zu

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & \left[ \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, \hat{u}_n, t)}{\partial t} + \frac{\tilde{v}(\hat{x}^*, \hat{u}_n, t)}{\partial \hat{u}_n} \dot{\hat{u}}_n + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{v}(\hat{x}^*, \hat{u}_n, t)}{\partial \hat{x}^*} \left[ \underline{F} \hat{x}^* - \underline{a}(\underline{y}, \hat{u}_n, \underline{u}, t) + \underline{k}c(\underline{y}, \underline{u}, t) \right] \right]_{\hat{x}^* = v(\hat{x}, \hat{u}_n, t)} \end{aligned}$$

Dieser Beobachter unterscheidet sich von dem mit Hilfe der NBNF entworfenen Beobachter dadurch, daß ihm neben den Ein- und Ausgangsgrößen des zu beobachtenden Systems zusätzlich noch zeitliche Ableitungen der Eingangsgröße  $\underline{u}$  zugeführt werden müssen.

## 6 DER BEOBACHTER IM GESCHLOSSENEN REGELKREIS

In den Beispielen der Kapitel 3 und 4 wurde der Beobachter *im offenen Kreis* zur Rekonstruktion nichtmeßbarer Zustandsgrößen eingesetzt. Solche reine *Meßbeobachter* dienen in der Praxis dazu, den Ablauf von Prozessen zu überwachen, da mit ihrer Hilfe z.B. gefährliche Reaktionszustände frühzeitig erkannt werden können [63].

Dieses Kapitel wendet sich nun dem Einsatz des Beobachters *im geschlossenen Regelkreis* zu. Die Einbeziehung eines Zustandsschätzers in den Regelkreis ist immer dann erforderlich, wenn für die Realisierung des Reglers Zustandsgrößen benötigt werden, die entweder überhaupt nicht oder nur mit sehr hohem Aufwand meßtechnisch zu erfassen sind. Dann muß dem Regler anstelle des wahren Zustandsvektors  $\underline{x}(t)$  der vom Beobachter gelieferte Näherungswert  $\hat{\underline{x}}(t)$  zugeführt werden.

Für die Betrachtungen dieses Kapitels wird davon ausgegangen, daß außer dem Beobachter auch der Regler nach einem systematischen, *stabilitätsichernden* Verfahren entworfen wird. Hierzu bietet sich, falls die zu regelnde Strecke linear in der Eingangsgröße  $\underline{u}$  ist, das Verfahren von R. SOMMER [54] an. Ist die Strecke sowohl im Zustands- als auch im Steuervektor nichtlinear, so können die verallgemeinerten Verfahren von H. KELLER [28] und K. ZIMMER [65] herangezogen werden. Der Unterschied der beiden letztgenannten Arbeiten besteht darin, daß man in [65] mit einem *statischen*, jedoch *impliziten* Regelungsgesetz der Form

$$\underline{p}(\underline{x}, \underline{u}, t) = \underline{r}(\underline{x}, \underline{w}, t)$$

auskommt, während in [28] der Regler als *dynamische* Rückführung

$$\dot{\underline{u}} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{w}, t) , \quad \underline{u}(0) = \underline{u}_0 ,$$

angesetzt wird.  $\underline{w}$  ist dabei der Vektor der Führungsgrößen. Alle drei Verfahren [54;28;65] basieren auf einer Transformation der zu regelnden Strecke auf eine geeignet definierte Regelungsnormalform. Dadurch wird eine Kompensation der Zeitvarianz und der Nichtlinearitäten ermöglicht, so daß die Dynamik des geschlosse-

nen Regelkreises letztendlich mit Hilfe linearer Methoden vorgeschrieben werden kann, entweder durch Polvorgabe [54], mittels der Forderung nach endlicher Einstellzeit [57] oder durch Minimieren eines quadratischen Gütemaßes [24;25;27;29;DA6].

### 6.1 EINE PLAUSIBILITÄTSBETRACHTUNG ZUR STABILITÄT EINES REGELKREISES MIT BEOBACHTER

Beim Einsatz des Beobachters im geschlossenen Kreis stellt sich unmittelbar die Frage, welchen Einfluß der Beobachter auf das Stabilitätsverhalten des Regelkreises hat. Zur Klärung dieser Frage soll das Strukturbild 6.1 dienen. Es gibt an, in welcher Weise der Beobachterfehler  $\tilde{x}^*$  auf die ohne Beobachter geschlossene Regelung einwirkt.

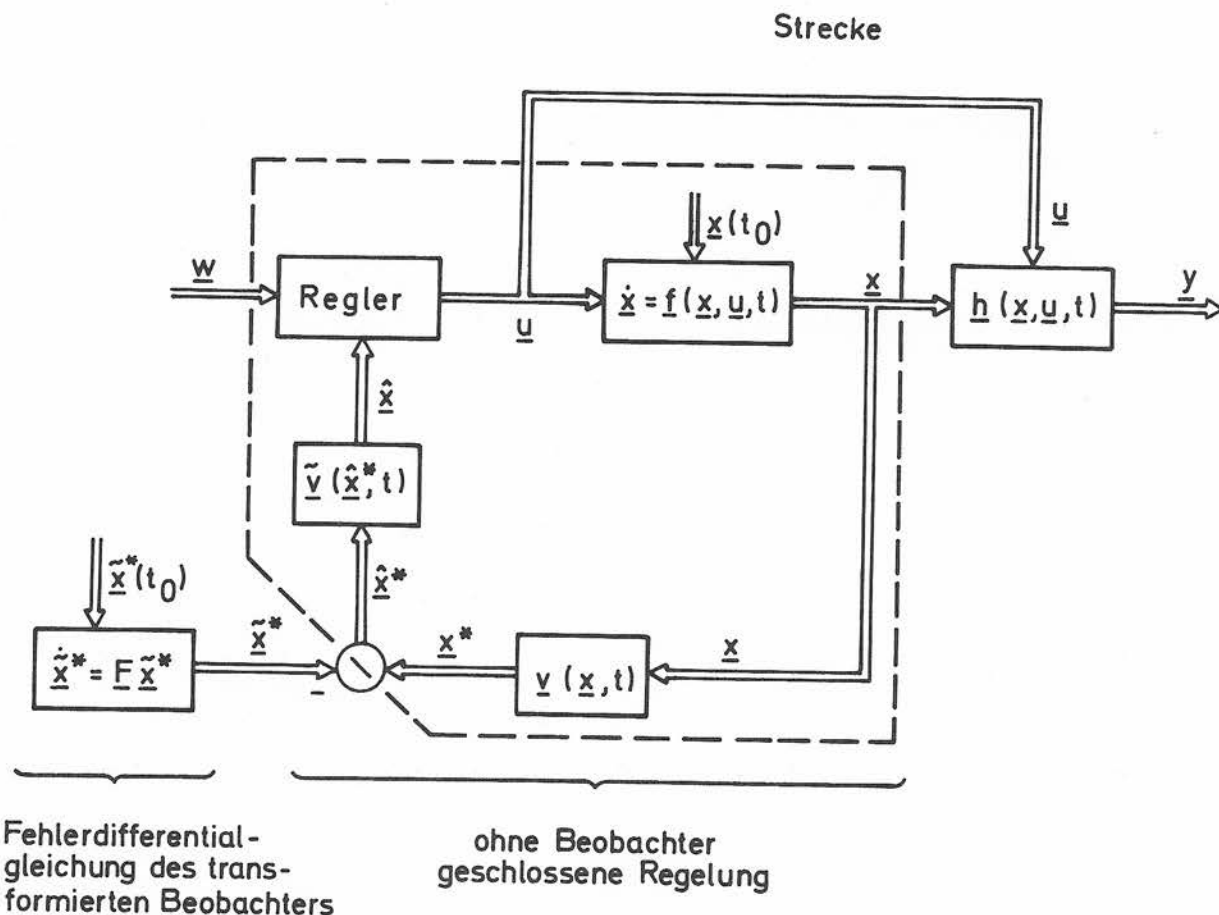


Bild 6.1 Struktur eines nichtlinearen Regelkreises mit Beobachter

Dem Regler wird statt dem wahren Zustandsvektor  $x$  der Näherungswert  $\hat{x}$  zugeführt, der mit Hilfe der inversen Transformation

$\tilde{v}(\hat{x}^*, t)$  aus dem transformierten Schätzwert  $\hat{x}^* = \underline{x}^* - \tilde{x}^*$  erzeugt wird. Der wahre transformierte Zustandsvektor  $\underline{x}^*$  ergibt sich mit Hilfe der Transformation  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  aus dem wahren Zustandsvektor  $\underline{x}$ . Ist der gesamte Zustandsvektor  $\underline{x}$  meßbar, also ein Beobachter unnötig, so ist  $\hat{x}^* = \underline{x}^*$ , und das Summierglied im Bild 6.1 entfällt. Da  $\tilde{v}$  die Inverse von  $\underline{v}$  darstellt, gilt dann weiterhin  $\hat{x} = \underline{x}$ . Somit stellt die gestrichelt umrahmte Struktur den ohne Beobachter geschlossenen Regelkreis dar.

Man stellt zweierlei fest:

- In Analogie zum Separationstheorem für lineare Systeme [44] wird die Fehlerdifferentialgleichung durch den ohne Beobachter geschlossenen Regelkreis nicht beeinflusst.
- Der in seiner Dynamik gezielt beeinflussbare Schätzfehler  $\tilde{x}^*$  wirkt als äußere Störgröße auf den ohne Beobachter geschlossenen Regelkreis ein.

Was die Einbettung des Beobachters in den Regelkreis betrifft, so kann man aufgrund dieser beiden Tatsachen, die auch im Bild 6.1 zum Ausdruck kommen, folgende Plausibilitätsbetrachtung anstellen: Falls man die Eigenwerte der Fehlerdifferentialgleichung genügend weit links legt, kann man den als Störgröße wirkenden Beobachterfehler  $\tilde{x}^*$  näherungsweise als Anfangsstörung auffassen, von der man annehmen darf, daß sie durch eine stabil ausgelegte Zustandsrückführung ausgeregelt wird - zumindest dann, wenn der ohne Beobachter geschlossene Kreis *global* asymptotisch stabil ist. Nun gewährleisten aber die nichtlinearen Reglerentwurfsverfahren [54;28;65] im allgemeinen keine globale asymptotische Stabilität, sondern nur Stabilität in einem bestimmten Gebiet des Zustandsraums (siehe [56]). Doch selbst dann ist *unabhängig von dem als äußere Störung einwirkenden Schätzfehler*  $\tilde{x}^*$  ein stabiles Verhalten des über den Beobachter geschlossenen Regelkreises gesichert, falls die wahre und die geschätzte Trajektorie  $\underline{x}(t)$  und  $\hat{x}(t)$  in einem Gebiet verlaufen, in dem sowohl die Voraussetzungen für den Reglerentwurf als auch die Voraussetzungen für den Beobachterentwurf erfüllt sind. Dann nämlich arbeitet der Beobachter stabil, d.h. der Fehler  $\tilde{x}^*$  strebt gegen Null, und man darf annehmen, daß auch die *Übertragungsstabilität* des Gesamtregelkreises gewährleistet bleibt, obwohl der Fehler zunächst von Null verschieden ist.

Somit ist die folgende Stabilitätsaussage plausibel:

Entwirft man Regler und Beobachter durch Transformation der Strecke auf Nichtlineare Regelungs- bzw. Beobachter-normalform, so ist das über den Beobachter geregelte System stabil, wenn wahre und geschätzte Trajektorie  $\underline{x}(t)$  und  $\hat{\underline{x}}(t)$  der Regelung für alle  $t \geq t_0$  in einem Gebiet des Zustandsraums verlaufen, in dem sowohl die Voraussetzungen für den Regler- als auch die Voraussetzungen für den Beobachterentwurf erfüllt sind.

Obwohl die Trajektorienbedingung erst im Nachhinein überprüft werden kann, so erscheint es dennoch gerechtfertigt, den Regelkreis über den Beobachter zu schließen. Weil dabei Regler und Beobachter unabhängig voneinander entworfen werden können, kann man wie im Linearen von einer Art *Separation* der beiden Aufgabenstellungen sprechen.

## 6.2 REGELUNG DES RÜHRKESSELREAKTORS ÜBER DEN BEOBACHTER

Wie sich der Beobachter im geschlossenen Regelkreis auswirkt, soll abschließend am Beispiel einer für den Rührkesselreaktor aus Abschnitt 2.8.2 entworfenen Regelung demonstriert werden. Da der Entwurf des Reglers ausführlich in [56] behandelt wurde, soll hier lediglich das Ergebnis angegeben werden. Wählt man für den geschlossenen Regelkreis die Eigenwerte  $\lambda_{R1} = \lambda_{R2} = -1$ , so erhält man das nichtlineare Regelungsgesetz

$$u = - \frac{1}{fr_2(\underline{x})} \left[ [-ax_1+r(\underline{x})] [-a+2+r_1(\underline{x})] + r_2(\underline{x}) [-bx_2+dr(\underline{x})] + x_1-w \right]$$

mit

$$r(\underline{x}) = k(1-x_1) \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+x_2}\right),$$

$$r_1(\underline{x}) := \frac{\partial r(\underline{x})}{\partial x_1} = -k \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+x_2}\right),$$

$$r_2(\underline{x}) := \frac{\partial r(\underline{x})}{\partial x_2} = k(1-x_1) \frac{\varepsilon}{(1-x_2)^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1+x_2}\right).$$

Die Beobachtergleichungen sind dem Abschnitt 3.5.2 zu entnehmen. Damit der Beobachtungsfehler schneller abklingt als die Zeitvorgänge im geregelten System, werden die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  der Fehlerdynamikmatrix  $\underline{F}$  links von den Eigenwerten  $\lambda_{R1}, \lambda_{R2}$  der Regelung vorgegeben. Die Wahl von  $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$  führt wie im Abschnitt 3.5.2 auf die Koeffizienten  $k_0 = 25$  und  $k_1 = 10$ .

Für die nachfolgenden Simulationen wird von der im Bild 6.2 wiedergegebenen Regelkreisstruktur ausgegangen. Anstelle des nicht vollständig meßbaren Zustandsvektors  $\underline{x}(t)$  wird dem Regler der Schätzwert  $\hat{\underline{x}}(t)$  zugeführt. Der Beobachter ermittelt diesen aus der gemessenen Zustandsvariablen  $x_2(t)$  und der bekannten Steuergröße  $u(t)$ .

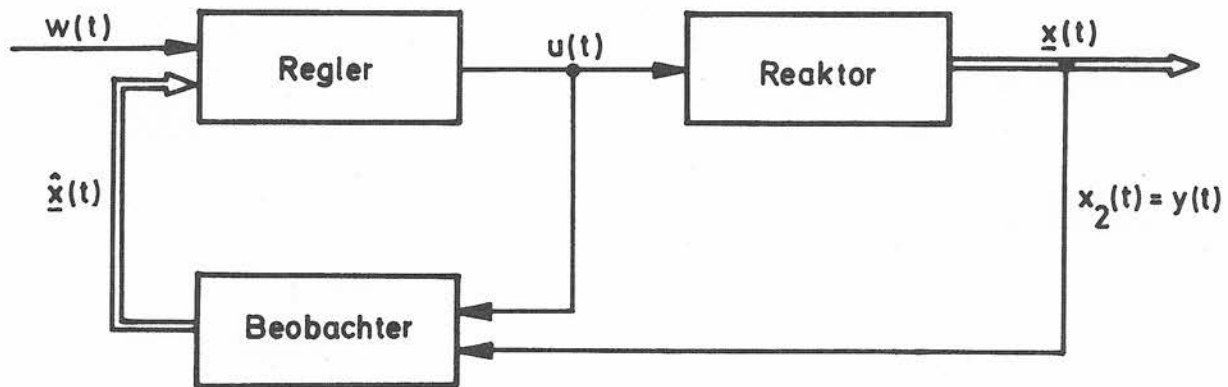


Bild 6.2 Regelung des Rührkesselreaktors mit Beobachter

Die Bilder 6.3 bis 6.5 zeigen das Verhalten des geregelten Reaktors einmal ohne Beobachter, also unter der unrealistischen Annahme, daß neben der Temperatur  $x_2(t)$  auch die Konzentration  $x_1(t)$  laufend gemessen wird, und einmal mit Beobachter bei Realisierung der Regelung nach der im Bild 6.2 angegebenen Struktur.

Wie bei der Simulation des unregulierten Reaktors im Abschnitt 3.5.2 wurde auch hier davon ausgegangen, daß sich das System zu Beginn in dem stationären Betriebspunkt

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0,504 \\ 0,02 \end{bmatrix}, \quad u_0 = -0,0173$$

befindet. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  wird der Sollwert für die Konzen-

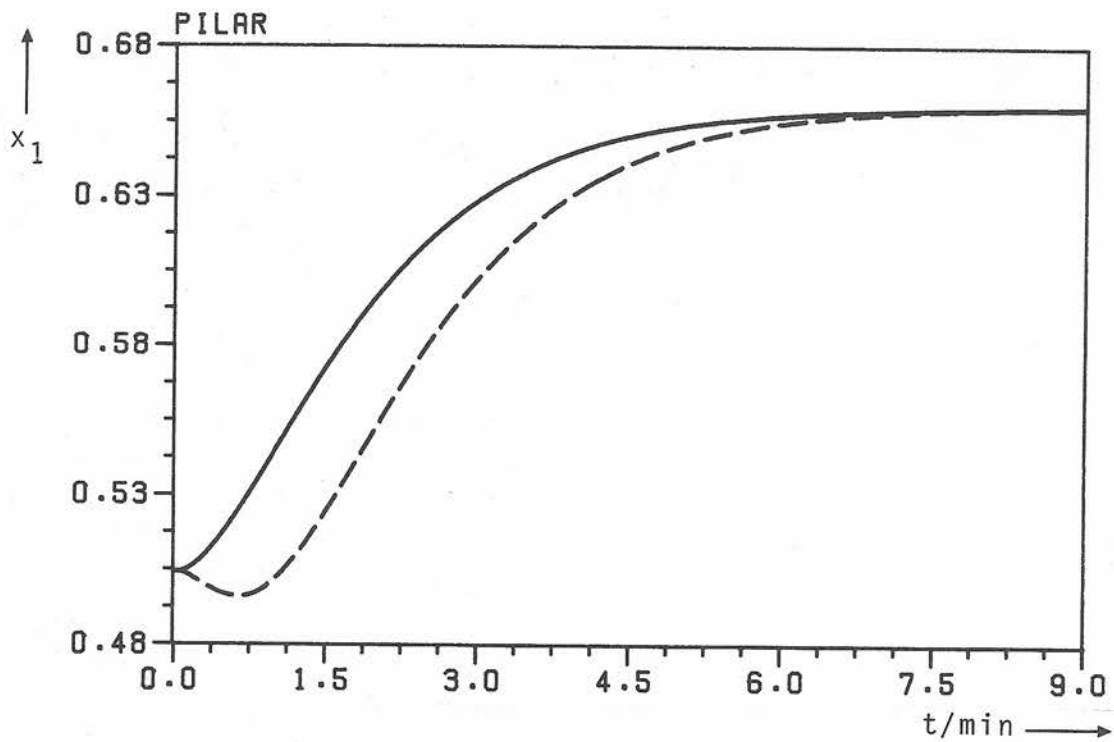


Bild 6.3 Konzentrationsverlauf  $x_1(t)$  bei Regelung des Reaktors ohne Beobachter (—) und mit Beobachter (---)

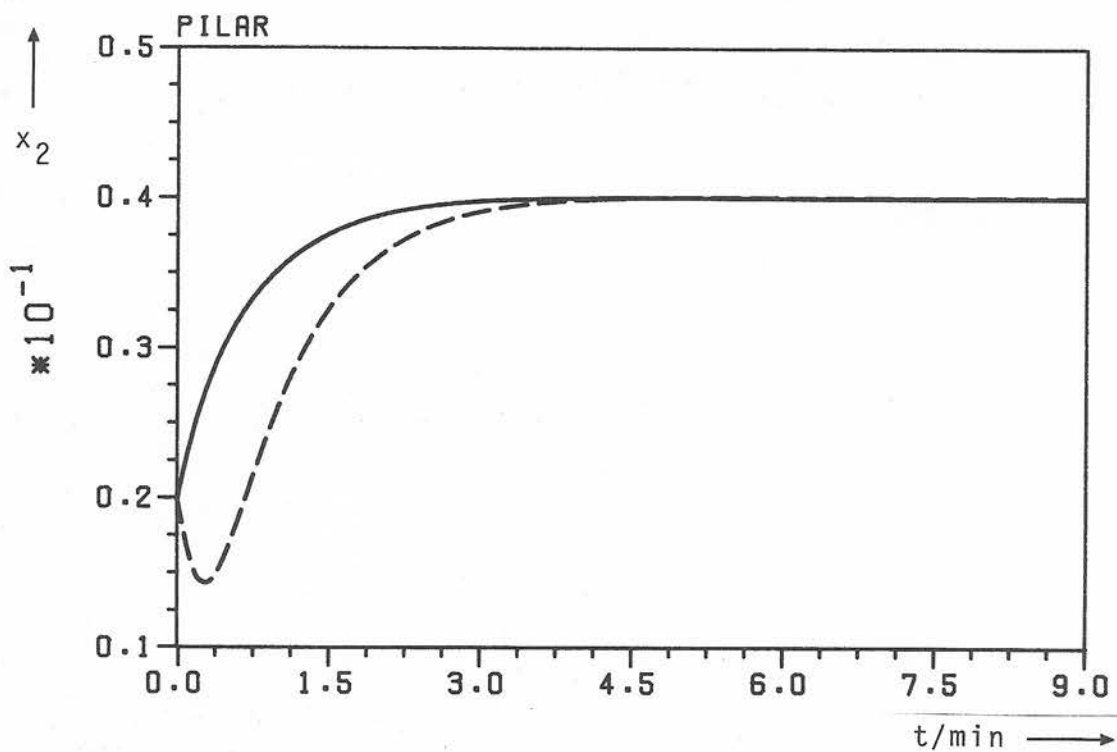


Bild 6.4 Temperaturverlauf  $x_2(t)$  bei Regelung des Reaktors ohne Beobachter (—) und mit Beobachter (---)

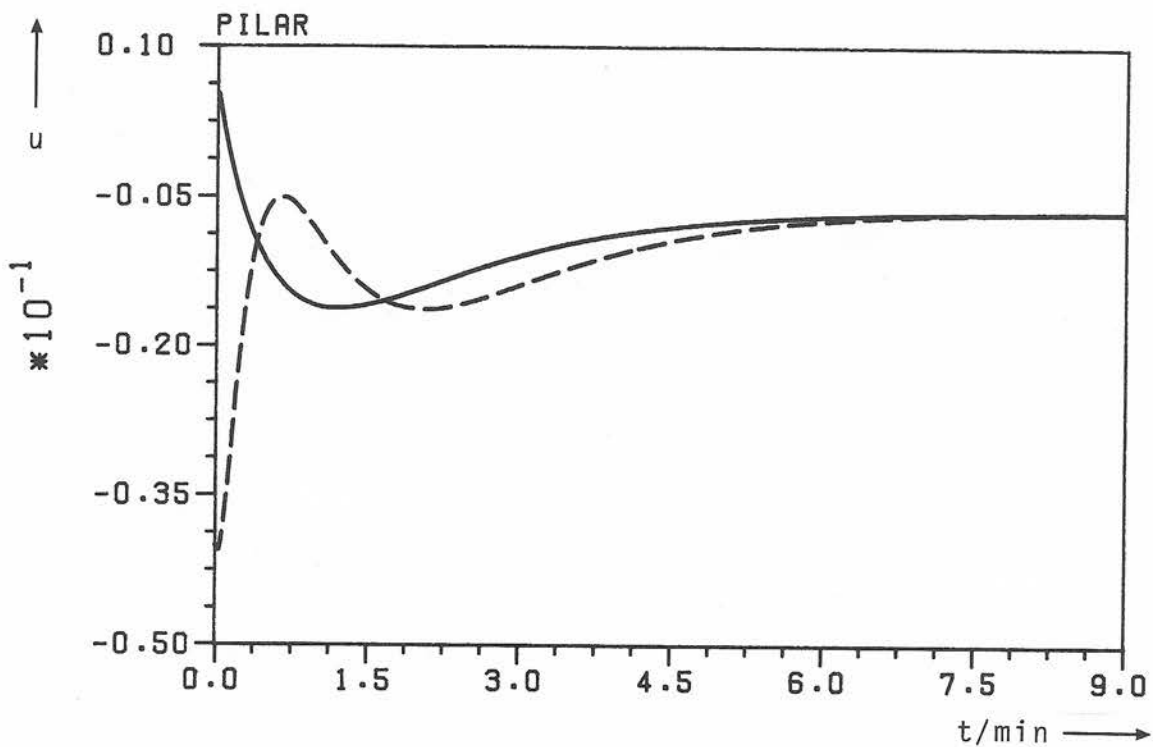


Bild 6.5 Stellgrößenverlauf  $u(t)$  bei Regelung des Reaktors ohne Beobachter (—) und mit Beobachter (---)

tration  $x_1(t)$  sprunghaft auf  $w = 0,66$  erhöht, worauf der Reaktor in den neuen stationären Zustand

$$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 0,66 \\ 0,04 \end{bmatrix}, \quad u_e = -0,0065$$

übergeht.

Das Verhalten des über den Beobachter geregelten Reaktors ist zufriedenstellend. Die Annäherung an den neuen stationären Zustand  $\underline{x}_e$  erfolgt zwar etwas langsamer als bei der Regelung ohne Beobachter, jedoch bewegt sich sowohl die Trajektorie  $\underline{x}(t)$  als auch die Stellgröße  $u(t)$  innerhalb physikalisch sinnvoller Grenzen.

Wie man aus den Bildern 6.6 und 6.7 ersieht, verläuft neben der wahren Trajektorie  $\underline{x}(t)$  auch die beobachtete Trajektorie  $\hat{\underline{x}}(t)$  vollständig innerhalb des Gebietes  $G = \{\underline{x} | x_1 < 1; x_2 > -1\}$ , in dem sowohl die Voraussetzungen für den Reglerentwurf (siehe [56]) als auch die Voraussetzungen für den Beobachterentwurf (siehe Abschnitte 2.8.2 und 3.5.2) erfüllt sind. Somit ist das im vorigen Abschnitt angegebene Kriterium erfüllt.

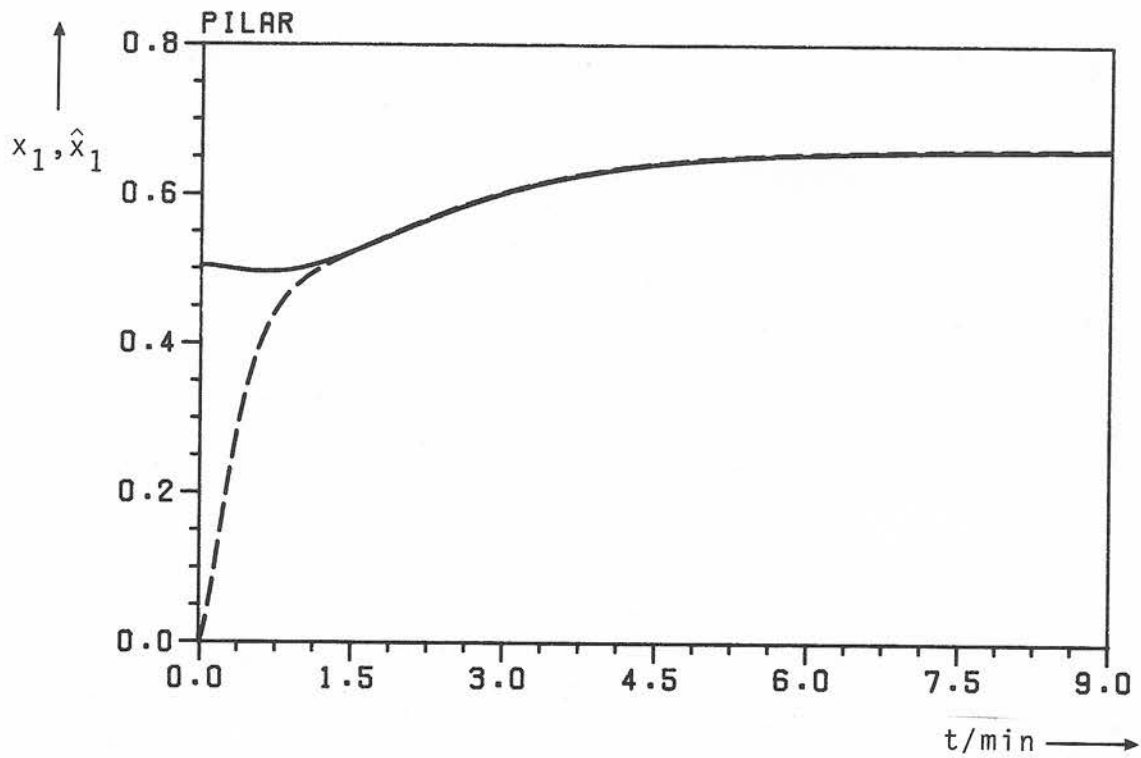


Bild 6.6 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Konzentration  $x_1(t)$  bzw.  $\hat{x}_1(t)$  des geregelten Reaktors

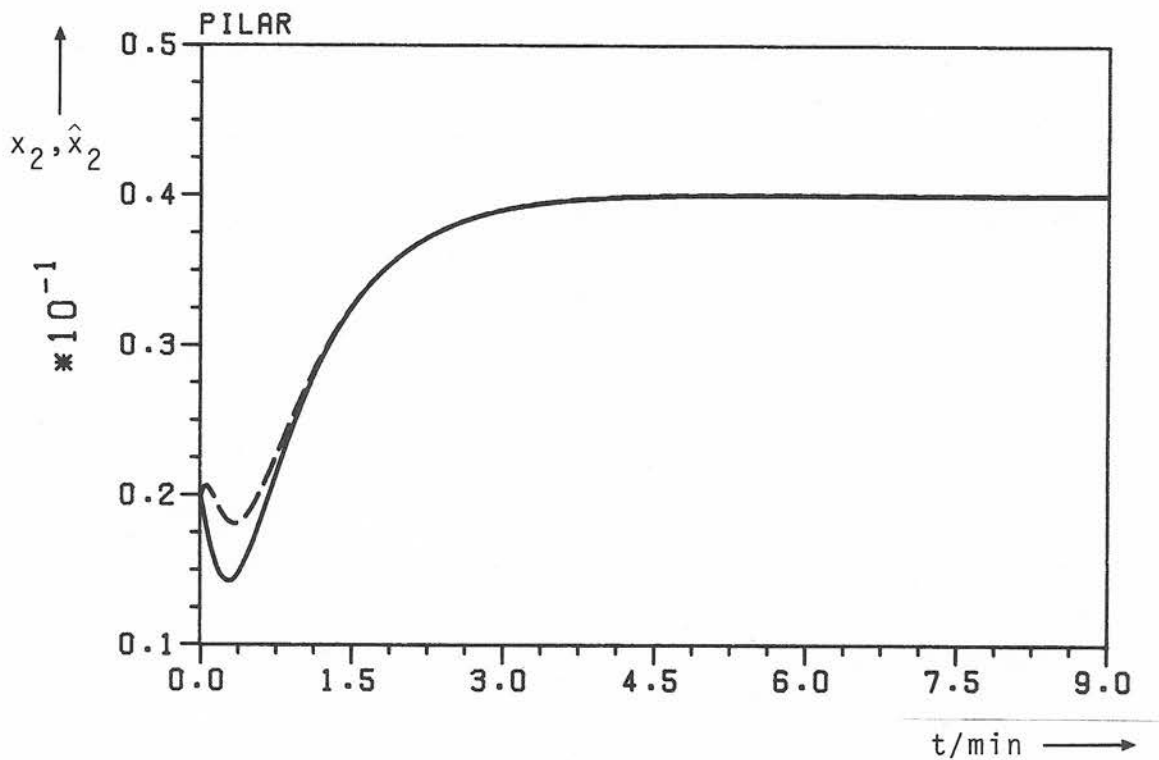


Bild 6.7 Verläufe der wahren (—) und der geschätzten (---) Temperatur  $x_2(t)$  bzw.  $\hat{x}_2(t)$  des geregelten Reaktors

## 7 ZUSAMMENFASSUNG UND WERTUNG

Der aus der linearen Theorie bekannte Luenberger-Beobachter läßt sich in besonders eleganter Weise entwerfen, wenn das zu beobachtende System zuvor auf Beobachternormalform gebracht wird. Der in dieser Arbeit vorgestellte Beobachterentwurf erfolgt durch Verallgemeinerung dieser Vorgehensweise auf den nichtlinearen, zeitvarianten Fall:

Zunächst wird die gegebene Strecke in eine hierzu eingeführte "Nichtlineare Beobachternormalform (NBNF)" transformiert. Der Transformationsansatz führt auf eine oder - bei Systemen mit mehreren Ausgangsgrößen - mehrere "Nichtlineare Charakteristische Gleichungen", woraus sich die in der NBNF auftretenden Funktionen unter speziellen Bedingungen berechnen lassen. Damit ist auch die Transformation festgelegt. Für das in NBNF vorliegende System läßt sich dann in naheliegender Weise ein vollständiger Beobachter angeben, welcher Schätzwerte für die transformierten Zustandsvariablen liefert. Die resultierende Fehlerdifferentialgleichung ist hierbei homogen, linear und zeitinvariant, so daß dem Fehler mittels Polvorgabe ein stabiles Zeitverhalten aufgeprägt werden kann. Die Schätzwerte für die Originalzustandsgrößen erhält man schließlich mit Hilfe der inversen Transformation aus den Schätzwerten für die transformierten Variablen oder durch Umrechnen des für das transformierte System entworfenen Beobachters in Originalkoordinaten.

Die Bestimmung der Transformation auf NBNF kann auch in zwei Schritten erfolgen, nämlich über den Zwischenschritt der "Nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF)". Dieser "Umweg" ist insofern gerechtfertigt, als die Existenz der NBKNF eine notwendige Voraussetzung für die Existenz der geforderten NBNF und damit des Beobachters darstellt. Im konkreten Anwendungsfall empfiehlt es sich deshalb, das gegebene System zunächst in die NBKNF zu überführen. In demjenigen Gebiet des Zustandsraums, in dem die hierzu benötigte Transformation existiert, ist das gegebene Originalsystem beobachtbar (im großen). Falls die NBKNF spezielle weitergehende Bedingungen erfüllt, läßt sich aus ihr die für den Beobachterentwurf erforderliche NBNF berechnen. Dadurch ist auch die Transformation auf NBNF festgelegt, welche in genau demselben Ge-

biet des Zustandsraums existiert wie die im ersten Schritt berechnete Transformation auf NBKNF. Aus diesem Grund arbeitet der mit Hilfe der NBNF entworfene Beobachter gerade in diesem "Beobachtbarkeitsgebiet" stabil.

Scheitert die Berechnung der NBNF nur daran, daß sich eventuell auftretende zeitliche Ableitungen der Eingangsgrößen nicht eliminieren lassen, so kann man auf die "Verallgemeinerte Beobachternormalform (VBNF)" ausweichen. Mit Hilfe dieser Form läßt sich ein Beobachter angeben, dem neben den Ein- und Ausgangsgrößen des zu beobachtenden Systems zusätzlich noch zeitliche Ableitungen der Eingangsgrößen zugeführt werden müssen. Dabei wird allerdings gefordert, daß die Eingangsgrößen hinreichend oft differenzierbar sind. In seiner grundsätzlichen Wirkungsweise unterscheidet sich dieser Beobachter nicht von dem mit Hilfe der NBNF entworfenen. Auch hier wird der Beobachter des transformierten Systems so angesetzt, daß sich in der Fehlerdifferentialgleichung die zeitvarianten Nichtlinearitäten kompensieren. Somit läßt sich dem Fehler mittels linearer Methoden eine gewünschte Dynamik aufprägen.

Bei allen Entwurfsverfahren müssen gewisse Einschränkungen in Kauf genommen werden. So ist man bei der hier vorgestellten Methode auf eine recht eng begrenzte Klasse nichtlinearer, zeitvarianter Systeme beschränkt. Diese Einschränkung, die bei nichtlinearen Problemen nichts Ungewöhnliches ist, wird um so gewichtiger, je höher die Ordnung des betrachteten Systems ist, denn mit steigender Ordnung wächst auch die Anzahl der zu erfüllenden Verträglichkeits- bzw. Integrabilitätsbedingungen.

Demgegenüber steht jedoch die Tatsache, daß es sich bei der vorliegenden Methode um das bislang einzige systematische Beobachterentwurfsverfahren handelt, das für eine Klasse nichtlinearer, zeitvarianter Systeme die gezielte Vorgabe einer gewünschten Schätzfehlerdynamik mit elementaren Methoden ermöglicht und ohne jegliche Linearisierung (im Sinne der Annäherung eines nichtlinearen Sachverhalts durch einen linearen) auskommt. Aufgrund ihrer theoretischen Exaktheit erlaubt die vorgestellte Methode eine allgemeingültige Aussage über das Einzugsgebiet, in dem der Beobachter stabil arbeitet, in dem also der geschätzte Zustandsvektor gegen den

tatsächlichen konvergiert. Dies ist gerade das Gebiet, in welchem das zu beobachtende System nach dem in dieser Arbeit angegebenen Beobachtbarkeitskriterium beobachtbar (im großen) ist.

Was die konkrete Anwendung der Entwurfsmethode betrifft, so ist festzustellen, daß der Rechenaufwand mit steigender Ordnung erheblich anwächst. Dafür verantwortlich sind zum einen die erforderlichen Operatoranwendungen und zum anderen die aufwendigen Berechnungen der inversen Abbildungen in beiden Transformationsschritten. Aus diesem Grund wird der praktische Einsatz dieser Methode auf relativ kleine Ordnungen (etwa  $n < 4$  bei Systemen mit einer Ausgangsgröße) beschränkt bleiben, zumindest solange die erforderlichen Berechnungen von Hand durchgeführt werden müssen. Im Zuge der rapiden Weiterentwicklung auf dem Gebiet der Computer-Algebra darf man jedoch erwarten, daß diese Berechnungen schon in naher Zukunft mit Rechnerunterstützung ausgeführt werden können [2] und damit die Ordnungsbeschränkung hinfällig wird.

Bei der Einbeziehung des hier vorgestellten Beobachters in den geschlossenen Regelkreis stellt man eine gewisse Ähnlichkeit zu dem für lineare, zeitinvariante Systeme gültigen Separationstheorem fest: Die Fehlerdifferentialgleichung des transformierten Systems wird durch den ohne Beobachter geschlossenen Regelkreis nicht beeinflußt. Tatsächlich lassen sich auch im Nichtlinearen Bedingungen angeben, unter denen die Stabilität des über den Beobachter geschlossenen Regelkreises plausibel ist, auch wenn Regler und Beobachter unabhängig voneinander entworfen werden.

Eine für alle Beobachterentwurfsverfahren grundlegende Annahme ist die eines hinreichend genau bekannten Modells des zu beobachtenden Systems. Nur wenn diese erfüllt ist, wird überhaupt erst die hier notwendige Kompensation der zeitabhängigen Nichtlinearitäten ermöglicht. (Dies gilt übrigens in gleichem Maße für die systematischen Reglerentwurfsverfahren von E. FREUND [13] und R. SOMMER [54], die ebenfalls auf einer exakten Kompensation der Zeitvarianz und der Nichtlinearitäten beruhen.) Wie man im konkreten Anwendungsfall die Güte der Schätzung beurteilen kann, falls die Kompensation aufgrund irgendwelcher Modellungenauigkeiten nur näherungsweise erfolgt, ist sicher eine weiterführende Untersuchung wert.

ANHANG A

Beweis für die Konsistenz der NBKNF mit der linearen Beobachtbarkeitsnormalform

Die Beobachtbarkeitsnormalform für lineare Mehrgrößensysteme wird definiert als [1]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_q \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} & \cdots & \underline{A}_{1q} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} & \cdots & \underline{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{A}_{q1} & \underline{A}_{q2} & \cdots & \underline{A}_{qq} \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underline{B} \underline{u}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}}_{\underline{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{c}_1^T & \underline{0}^T & \cdots & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{c}_2^T & \cdots & \underline{0}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \cdots & \underline{c}_q^T \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underline{D} \underline{u}. \quad (\text{A.1b})$$

Die Untermatrizen  $\underline{A}_{jj}$ ,  $j = 1, \dots, q$ , auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\underline{A}$  sind  $n_j$ -reihige *Frobenius-Matrizen* der Form

$$\underline{A}_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{j,m_j-1} & -a_{j,m_j-1+1} & \cdots & -a_{j,m_j-1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1c})$$

während die  $(n_j, n_i)$ -Untermatrizen  $\underline{A}_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, q$ ,  $i \neq j$ , die Gestalt

$$\underline{A}_{ji} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \diagdown & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{j,m_i-1} & -a_{j,m_i-1+1} & \dots & -a_{j,m_i-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1d})$$

aufweisen. Die natürlichen Zahlen  $m_j$  berechnen sich nach Gl. (2.4). Die  $n_j$ -dimensionalen Zeilenvektoren  $\underline{c}_j^T$  in der Matrix  $\underline{C}$  besitzen nur ein von Null verschiedenes Element und haben das Aussehen

$$\underline{c}_j^T = [1, 0, \dots, 0] .$$

Die Matrizen  $\underline{B}$  und  $\underline{D}$  schließlich sind beliebige konstante Matrizen der Dimensionen  $(n,p)$  bzw.  $(q,p)$ .

Bevor die Konsistenz der NBKNF (2.6) mit der linearen Beobachtbarkeitsnormalform (A.1) bewiesen wird, soll zunächst die *Definition des Konsistenzbegriffs* angegeben werden:

Die Systemdarstellung A ist mit der Systemdarstellung B *konsistent*, wenn B selbst oder eine zu B äquivalente Darstellung C als Spezialfall in der Darstellung A enthalten ist. (Äquivalent sind zwei Systemdarstellungen genau dann, wenn sie umkehrbar eindeutig ineinander überführbar sind.)

Um den Konsistenzbeweis zu erbringen, wird die Abbildungsvorschrift (2.11) auf die lineare Beobachtbarkeitsnormalform (A.1) angewandt. Die Transformationsgleichungen für das  $j$ -te Subsystem lauten

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{m_{j-1}+1} &= x_{m_{j-1}+1} + \underline{d}_j^T \underline{u} , \\ \bar{x}_{m_{j-1}+2} &= x_{m_{j-1}+2} + \underline{b}_{m_{j-1}+1}^T \underline{u} + \underline{d}_j^T \dot{\underline{u}} , \\ &\vdots \\ \bar{x}_{m_j-1} &= x_{m_j-1} + \underline{b}_{m_j-2}^T \underline{u} + \dots + \underline{d}_j^T \overset{(n_j-2)}{\underline{u}} , \\ \bar{x}_{m_j} &= x_{m_j} + \underline{b}_{m_j-1}^T \underline{u} + \dots + \underline{b}_{m_{j-1}+1}^T \overset{(n_j-2)}{\underline{u}} + \underline{d}_j^T \overset{(n_j-1)}{\underline{u}} . \end{aligned} \right\} (\text{A.2})$$

Damit ergibt sich das j-te Teilsystem der transformierten Darstellung zu

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{m_j-1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{m_{j-1}+2} \\ \bar{x}_{m_{j-1}+3} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_j} \\ -\underline{a}_j^T \underline{x} + \underline{b}_{m_j}^T \underline{u} + \underline{b}_{m_j-1}^T \dot{\underline{u}} + \dots + \underline{d}_j^T \underline{u} \end{bmatrix}^{(n_j)}, \quad (\text{A.3})$$

wenn die rechte Seite der letzten Zustandsdifferentialgleichung als Funktion von  $\underline{x}$  (nicht  $\bar{\underline{x}}$ ) angegeben wird. Setzt man für  $\underline{x}$  die inverse Transformation ein, welche sich in eindeutiger Weise aus dem für  $j = 1, \dots, q$  gültigen Gleichungssystem (A.2) bestimmen läßt, so erhält man schließlich das j-te Teilsystem der transformierten Darstellung in der Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{m_j-1} \\ \dot{\bar{x}}_{m_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{m_{j-1}+2} \\ \bar{x}_{m_{j-1}+3} \\ \vdots \\ \bar{x}_{m_j} \\ -\underline{\bar{a}}_j^T \bar{\underline{x}} - \underline{\bar{b}}_0^T \underline{u} - \underline{\bar{b}}_1^T \dot{\underline{u}} - \dots - \underline{\bar{b}}_{v_j}^T \underline{u} \end{bmatrix}^{(v_j)}, \quad (\text{A.4})$$

wobei  $v_j$  der Ungleichung  $n_j \leq v_j \leq m$  genügt.

Aufgrund der umkehrbar eindeutigen Transformation (A.2) ist das Subsystem (A.4) zum j-ten Subsystem der linearen Normalform (A.1) *äquivalent*. Da es gerade den linearen *Spezialfall* des Subsystems (2.6c) darstellt, ist die Konsistenz der NBKNF (2.6) mit der linearen Beobachtbarkeitsnormalform bewiesen, denn der obige Nachweis läßt sich selbstverständlich für alle  $q$  Subsysteme erbringen.

ANHANG B

B.1 Differentiationsregel für die Ableitung des Produkts aus einer skalaren Funktion und einem Zeilenvektor nach einem Vektor

Um die Ableitung des Produkts

$$\underline{w}^T(\underline{x}) = c(\underline{x})\underline{z}^T(\underline{x})$$

aus der skalaren Funktion  $c(\underline{x})$  und dem  $m$ -dimensionalen Zeilenvektor  $\underline{z}^T(\underline{x})$  nach dem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\underline{x}$  angeben zu können, muß bekannt sein, wie der Zeilenvektor  $\underline{w}^T(\underline{x})$  nach dem Vektor  $\underline{x}$  differenziert wird. Es gilt definitionsgemäß

$$\frac{\partial \underline{w}^T(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \left[ \frac{\partial \underline{w}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

Wegen der Beziehung

$$w_k(\underline{x}) = c(\underline{x})z_k(\underline{x})$$

für die  $k$ -te Komponente von  $\underline{w}^T(\underline{x})$  ergibt sich die  $k$ -te Spalte der Matrix (B.1) zu

$$\frac{\partial w_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial \underline{x}} z_k(\underline{x}) + c(\underline{x}) \frac{\partial z_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} .$$

Damit erhält man insgesamt die *Differentiationsregel*

$$\frac{\partial \underline{w}^T(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial c(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \underline{z}^T(\underline{x}) + c(\underline{x}) \left[ \frac{\partial \underline{z}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T \quad (B.2)$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (B.2) stellt das dyadische Produkt aus dem Gradienten von  $c(\underline{x})$  und dem Zeilenvektor  $\underline{z}^T(\underline{x})$  dar. Der zweite Summand hingegen ist das Produkt aus  $c(\underline{x})$  und der transponierten Jacobi-Matrix des Vektors  $\underline{z}(\underline{x})$ .

B.2 Differentiationsregel für die Ableitung eines inneren Produkts nach einem Vektor

Die Ableitung des inneren Produkts

$$f(\underline{x}) = \underline{z}^T(\underline{x})\underline{s}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m z_i(\underline{x})s_i(\underline{x}) \quad (\text{B.3})$$

aus den beiden m-dimensionalen Vektoren  $\underline{z}(\underline{x})$  und  $\underline{s}(\underline{x})$  nach dem n-dimensionalen Vektor  $\underline{x}$  ergibt den Gradienten

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

also einen Spaltenvektor. Seine k-te Komponente lautet mit Gl. (B.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_i(\underline{x})}{\partial x_k} s_i(\underline{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial s_i(\underline{x})}{\partial x_k} z_i(\underline{x}) \\ &= \left[ \frac{\partial \underline{z}(\underline{x})}{\partial x_k} \right]^T \underline{s}(\underline{x}) + \left[ \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial x_k} \right]^T \underline{z}(\underline{x}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Nun stellt aber der Vektor  $\frac{\partial \underline{z}(\underline{x})}{\partial x_k}$  gerade die k-te Spalte der (m,n)-

Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \underline{z}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$  des Vektors  $\underline{z}(\underline{x})$  dar. Entsprechendes gilt für  $\frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial x_k}$ . Folglich erhält man aus Gl. (B.4) die *Differentiationsregel*

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \left[ \frac{\partial \underline{z}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{s}(\underline{x}) + \left[ \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{z}(\underline{x}). \quad (\text{B.5})$$

B.3 Differentiationsregel für die Ableitung des Produkts aus einer Matrix und einem Vektor nach einem Vektor

Unter der Ableitung des Produkts

$$\underline{p}(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{x})\underline{s}(\underline{x})$$

aus der  $(r,m)$ -Matrix  $\underline{M}(\underline{x})$  und dem  $m$ -dimensionalen Vektor  $\underline{s}(\underline{x})$  nach dem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\underline{x}$  versteht man die Jacobi-Matrix

$\frac{\partial \underline{p}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$ . Ihre  $k$ -te Zeile ist der transponierte Gradient der skalaren Funktion  $p_k(\underline{x})$ , also  $\left[ \frac{\partial p_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T$ . Bezeichnet man die  $k$ -te Zeile der Matrix  $\underline{M}(\underline{x})$  mit  $\underline{m}_k^T(\underline{x})$ , so kann man  $p_k(\underline{x})$  als das innere Produkt

$$p_k(\underline{x}) = \underline{m}_k^T(\underline{x})\underline{s}(\underline{x})$$

ausdrücken. Der Gradient  $\frac{\partial p_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$  der Funktion  $p_k(\underline{x})$  berechnet sich mit Hilfe der Regel (B.5) zu

$$\frac{\partial p_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \left[ \frac{\partial \underline{m}_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{s}(\underline{x}) + \left[ \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T \underline{m}_k(\underline{x}) .$$

Hieraus erhält man die benötigte  $k$ -te Zeile der Jacobi-Matrix

$\frac{\partial \underline{p}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}$  durch einfache Transposition zu

$$\left[ \frac{\partial p_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T = \underline{s}^T(\underline{x}) \frac{\partial \underline{m}_k(\underline{x})}{\partial \underline{x}} + \underline{m}_k^T(\underline{x}) \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} .$$

Die gesuchte *Differentiationsregel* lautet somit

$$\frac{\partial \underline{p}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \underline{s}^T(\underline{x}) \frac{\partial \underline{m}_1(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \\ \vdots \\ \underline{s}^T(\underline{x}) \frac{\partial \underline{m}_r(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \end{bmatrix} + \underline{M}(\underline{x}) \frac{\partial \underline{s}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} .$$

ANHANG C

Beweis für die lineare Abhängigkeit der Zeilenvektoren

$$\hat{M}^{n_{j+1}} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T, \hat{M}^{n_{j+2}} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right), \dots, \hat{M}^{n-1} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T, j = 1, \dots, q,$$

von den Zeilen der Auswahlmatrix  $Q(\underline{x}, \hat{u}_m, t)$

Der folgende Beweis wird formal genauso geführt wie der in [56] erbrachte Nachweis für die lineare Abhängigkeit bestimmter Spaltenvektoren:

Jeder der  $q$  Zeilenvektoren  $\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T, j = 1, \dots, q,$  ist definitionsgemäß linear abhängig von allen in der Beobachtbarkeitsmatrix  $Q_B(\underline{x}, \hat{u}_n, t)$  oberhalb von ihm stehenden Zeilenvektoren, er läßt sich also als Linearkombination aus diesen ausdrücken:

$$\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T = \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{\nu\mu} \hat{M}^{\nu} \left( \frac{\partial h_{\mu}}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_{\mu}}{\partial \underline{x}} \right)^T. \quad (C.1)$$

Die auftretenden Koeffizienten  $c_{\nu\mu}$  sind keine konstanten Größen, sondern stehen abkürzend für Funktionen, die von  $\underline{x}, \underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots, \underline{u}^{(n_j)}$  und  $t$  abhängen können. Es sollen in Gl. (C.1) diejenigen  $c_{\nu\mu}(\underline{x}, \hat{u}_{n_{j+1}}, t) \equiv 0$  sein, deren zugehörige Zeilenvektoren nicht in der Auswahlmatrix  $Q(\underline{x}, \hat{u}_m, t)$  nach Gl. (2.19) auftreten.

Der nächste auf der Basis von  $h_j$  erzeugte Zeilenvektor  $\hat{M}^{n_{j+1}} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  entsteht aus  $\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  durch Anwendung des Operators  $\hat{M}$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{n_{j+1}} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T &= \hat{M} \left\{ \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T + \dot{\underline{u}}_{n_{j+1}}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{u}_{n_{j+1}}} \left\{ \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\} \right]^T + \\
 &+ \underline{f}^T \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\{ \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\}^T + \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} .
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gl. (C.1) und unter Berücksichtigung der Beziehung  $\frac{\partial \underline{w}^T(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \left[ \frac{\partial \underline{w}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right]^T$  (siehe Anhang B.1) folgt weiter

$$\begin{aligned}
 \hat{M}^{n_{j+1}} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T &= \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{v=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{v\mu} \hat{M}^v \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\} + \\
 &+ \dot{\underline{u}}_{n_{j+1}}^T \frac{\partial}{\partial \hat{u}_{n_{j+1}}} \left\{ \sum_{v=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{v\mu} \hat{M}^v \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\} + \\
 &+ \underline{f}^T \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \left\{ \sum_{v=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{v\mu} \hat{M}^v \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right\} \right]^T + \\
 &+ \left[ \sum_{v=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{v\mu} \hat{M}^v \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right] \frac{\partial f}{\partial \underline{x}} .
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der im Anhang B.1 angegebenen Differentiationsregel lassen sich die partiellen Differentiationen ausführen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \hat{M}^{n_j+1} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T = \\
 & = \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q \frac{\partial c_{\nu\mu}}{\partial t} \hat{M}^\nu \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial t} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} \frac{\partial c_{n_j\mu}}{\partial t} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \\
 & + \hat{\underline{u}}_{n_j+1}^T \left[ \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q \frac{\partial c_{\nu\mu}}{\partial \hat{\underline{u}}_{n_j+1}} \hat{M}^\nu \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} \frac{\partial c_{n_j\mu}}{\partial \hat{\underline{u}}_{n_j+1}} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right] + \\
 & + \underline{f}^T \left[ \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q \frac{\partial c_{\nu\mu}}{\partial \underline{x}} \hat{M}^\nu \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} \frac{\partial c_{n_j\mu}}{\partial \underline{x}} \hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T \right]^T + \\
 & + \sum_{\nu=0}^{n_j-1} \sum_{\mu=1}^q c_{\nu\mu} \hat{M}^{\nu+1} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T + \sum_{\mu=1}^{j-1} c_{n_j\mu} \hat{M}^{n_j+1} \left( \frac{\partial h_\mu}{\partial \underline{x}} \right)^T .
 \end{aligned}$$

Sämtliche Funktionen  $c_{\nu\mu}(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_{n_j+1}, t)$  sind bereits aus der zugrundegelegten Linearkombination (C.1) bekannt, in der die Zeilenvektoren  $\left( \frac{\partial h_1}{\partial \underline{x}} \right)^T$  bis  $\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_{j-1}}{\partial \underline{x}} \right)^T$  auftreten. Die in Gl. (C.2) neu hinzugekommenen Vektoren  $\hat{M}^{n_j} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  bis  $\hat{M}^{n_j+1} \left( \frac{\partial h_{j-1}}{\partial \underline{x}} \right)^T$ , die in der Beobachtbarkeitsmatrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  oberhalb von  $\hat{M}^{n_j-1} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  stehen, sind entweder linear unabhängig oder, falls linear abhängig, können sie ihrerseits als Linearkombinationen aus linear unabhängigen Zeilenvektoren ausgedrückt werden.

Somit ist die lineare Abhängigkeit des Vektors  $\hat{M}^{n_j+1} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$  von allen in der Matrix  $\underline{Q}_B(\underline{x}, \hat{\underline{u}}_n, t)$  oberhalb von ihm stehenden Zeilen nachgewiesen. Entsprechend gelingt der Beweis für die übrigen Vektoren  $\hat{M}^{n_j+2} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T, \dots, \hat{M}^{n-1} \left( \frac{\partial h_j}{\partial \underline{x}} \right)^T$ .

## LITERATUR

- [1] ACKERMANN, J.:  
Abtastregelung, Bd. I: Analyse und Synthese. 2. Auflage,  
Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [2] BENNINGER, N.F., und KONIGORSKI, U.:  
Simulation und Linearisierung nichtlinearer Systeme im Rah-  
men des Programmverbundes PILAR. Automatisierungstechnik,  
erscheint demnächst.
- [3] BESTLE, D., und ZEITZ, M.:  
Canonical form observer design for non-linear time-variable  
systems. Int. J. Control 38 (1983), S. 419-431.
- [4] BRANDIN, V.N., und RAZORENOV, G.N.:  
Observability conditions of nonlinear dynamic systems.  
Automation and Remote Control 34 (1973), S. 1367-1373.
- [5] BRANDIN, V.N., KOSTYUKOVSKII, Y.M.-L., und RAZORENOV, G.N.:  
Global observability conditions for nonlinear dynamic  
systems. Automation and Remote Control 36 (1975),  
S. 1585-1591.
- [6] BRONSTEIN, I.N., und SEMENDJAJEW, K.A.:  
Taschenbuch der Mathematik. 19. Auflage, Verlag Harri Deutsch,  
Frankfurt/Main 1980.
- [7] DAVISON, E.J., und KUNZE, E.G.:  
Some sufficient conditions for the global and local control-  
lability of nonlinear time-varying systems.  
SIAM J. Control 8 (1970), S. 489-497.
- [8] FÖLLINGER, O.:  
Entwurf zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. Regelungs-  
technik 26 (1978), S. 189-196.
- [9] FÖLLINGER, O.:  
Nichtlineare Regelungen II. 3. Auflage, R. Oldenbourg Ver-  
lag, München 1980.

- [10] FÖLLINGER, O.:  
Regelungstechnik, Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 5. Auflage, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg 1985.
- [11] FÖLLINGER, O., und FRANKE, D.:  
Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme. R. Oldenbourg Verlag, München 1982.
- [12] FRELEK, B.:  
Über die quadratische Näherung zur Beschreibung nichtlinearer dynamischer Systeme. Automatisierungstechnik 33 (1985), S. 184-189.
- [13] FREUND, E.:  
Decoupling and pole assignment in nonlinear systems. Electronics Letters 9 (1973), S. 373-374.
- [14] FREUND, E.:  
Zeitvariable Mehrgrößensysteme. Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [15] FREUND, E., und HOYER, H.:  
Das Prinzip nichtlinearer Systementkopplung mit der Anwendung auf Industrieroboter. Regelungstechnik 28 (1980), S. 80-87 und 116-126.
- [16] GAUTHIER, J.P., und BORNARD, G.:  
Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. IEEE Trans. Autom. Control 26 (1981), S. 922-926.
- [17] GRIFFITH, E.W., und KUMAR, K.S.P.:  
On the observability of nonlinear systems: I. Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971), S. 135-147.
- [18] GÜNTHER, H.:  
Zur Steuerbarkeit nichtlinearer Systeme vom Lurje-Typ. Dissertation am Fachbereich 10 der Technischen Universität Berlin, Berlin 1973.

- [19] HAHN, W.:  
Stability of motion. Springer-Verlag, Berlin 1967.
- [20] HWANG, M., und SEINFELD, J.H.:  
Observability of nonlinear systems. Journal of Optimization Theory and Applications 10 (1972), S. 67-77.
- [21] KALMAN, R.E.:  
On the general theory of control systems. Proc. IFAC Congress, S. 2020-2030. Butterworths and Co. Ltd., London 1961.
- [22] KALMAN, R.E.:  
Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM J. Control 1 (1963), S. 152-192.
- [23] KAMKE, E.:  
Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. 8. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1967.
- [24] KELLER, H.:  
Eine zweistufige Entwurfsstrategie für nichtlineare, zeitvariante Systeme. Interner Bericht, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe 1983.
- [25] KELLER, H.:  
Entwurf nichtlinearer Regler für nichtlineare Strecken. 1. Zwischenbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Fo 71/15, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe 1983.
- [26] KELLER, H.:  
Entwurf nichtlinearer Regler für nichtlineare Strecken. 2. Zwischenbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Fo 71/15, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe 1984.
- [27] KELLER, H.:  
Riccati-Entwurf für nichtlineare, zeitvariante Systeme mit Hilfe einer zweistufigen Entwurfsstrategie. Automatisierungstechnik 33 (1985), S. 288-289.

- [28] KELLER, H.:  
Synthese nichtlinearer, zeitvarianter Systeme der allgemeinen Form  $\dot{x} = f(x, u, t)$ . Automatisierungstechnik 33 (1985), S. 323-324.
- [29] KELLER, H.:  
Stellungnahme zum Diskussionsbeitrag von P. Ronge und A. Munack über den "Riccati-Entwurf für nichtlineare, zeitvariante Systeme mit Hilfe einer zweistufigen Entwurfsstrategie". Automatisierungstechnik 34 (1986), S. 127-128.
- [30] KELLER, H.:  
Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. Automatisierungstechnik 34 (1986), S. 271-274 und 326-331.
- [31] KELLER, H.:  
Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. Int. J. Control, zur Veröffentlichung eingereicht.
- [32] KELLER, H., und FRITZ, H.:  
Design of nonlinear observers by a two-step-transformation. S. 89-98 in  
FLIESS, M., und HAZEWINDEL, M.:  
Algebraic and geometric methods in nonlinear control theory. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1986.
- [33] KOSTYUKOVSKII, Y.M.-L.:  
Observability of nonlinear controlled systems. Automation and Remote Control 29 (1968), S. 1384-1396.
- [34] KOU, S.R., ELLIOTT, D.L., und TARN, T.J.:  
Observability of nonlinear systems. Information and Control 22 (1973), S. 89-99.
- [35] KOU, S.R., ELLIOTT, D.L., und TARN, T.J.:  
Exponential observers for nonlinear dynamic systems. Information and Control 29 (1975), S. 204-216.

- [36] KRENER, A.J., und ISIDORI, A.:  
Linearization by output injection and nonlinear observers. Systems and Control Letters 3 (1983), S. 47-52.
- [37] KRENER, A.J., und RESPONDEK, W.:  
Nonlinear observers with linearizable error dynamics. SIAM J. Control and Optimization 23 (1985), S. 197-216.
- [38] LA SALLE, J., und LEFSCHETZ, S.:  
Die Stabilitätstheorie von Ljapunow. BI-Taschenbuch. Bibliographisches Institut, Mannheim 1967.
- [39] LEE, E.B., und MARKUS, L.:  
Foundations of optimal control theory. John Wiley & Sons, Inc., New York 1967.
- [40] LITZ, L., und BENNINGER, N.F.:  
PILAR Programmsystem zur Interaktiven Lösung von Aufgabenstellungen der Regelungstechnik. Regelungstechnik 32 (1984), S. 335-342.
- [41] LUENBERGER, D.G.:  
Observing the state of a linear system. IEEE Trans. Milit. Electronics 8 (1964), S. 74-80.
- [42] LUENBERGER, D.G.:  
Observers for multivariable systems. IEEE Trans. Autom. Control 11 (1966), S. 190-197.
- [43] LUENBERGER, D.G.:  
Canonical forms for linear multivariable systems. IEEE Trans. Autom. Control 12 (1967), S. 290-293.
- [44] LUENBERGER, D.G.:  
An introduction to observers. IEEE Trans. Autom. Control 16 (1971), S. 596-602.
- [45] LUKES, D.L.:  
Global controllability of nonlinear systems. SIAM J. Control 10 (1972), S. 112-126.

- [46] MANGOLDT, H. v., und KNOPP, K.:  
Einführung in die Höhere Mathematik, Bd. II. 12. Auflage,  
S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1965.
- [47] MIRZA, K.B., und WOMACK, B.F.:  
On the controllability of a class of nonlinear systems.  
IEEE Trans. Autom. Control 16 (1971), S. 497-498.
- [48] MUKHOPADHYAY, B.K., und MALIK, O.P.:  
Optimal control of synchronous-machine excitation by quasi-  
linearisation techniques. Proc. IEE 119 (1972), S. 91-98.
- [49] NIJMEIJER, H.:  
Observability of a class of nonlinear systems: a geometric  
approach. Recherche di Automatica 12 (1981), S. 50-68.
- [50] NIKAIDO, H.:  
Convex structures and mathematical economic theory.  
Academic Press, New York 1968.
- [51] OHTSUKI, T., und WATANABE, H.:  
State-variable analysis of RLC networks containing nonlinear  
coupling elements. IEEE Trans. Circuit Theory 16 (1969),  
S. 26-38.
- [52] PALAIS, R.S.:  
Natural operation of differential forms. Trans. Amer. Math.  
Soc. 92 (1959), S. 125-141.
- [53] ROITENBERG, Y.Y.:  
Observability of nonlinear systems. SIAM J. Control 8  
(1970), S. 338-345.
- [54] SOMMER, R.:  
Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Systeme durch Polvor-  
gabe. Regelungstechnik 27 (1979), S. 393-399.
- [55] SOMMER, R.:  
Ein hinreichendes Kriterium für die Steuerbarkeit einer  
Klasse nichtlinearer, zeitvarianter Systeme. Regelungstech-  
nik 28 (1980), S. 30-31.

- [56] SOMMER, R.:  
Synthese nichtlinearer, zeitvarianter Systeme mit Hilfe einer kanonischen Form. Dissertation. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 36, VDI-Verlag, Düsseldorf 1981.
- [57] SOMMER, R.:  
Entwurf nichtlinearer Systeme auf endliche Einstellzeit. Regelungstechnik 31 (1983), S. 223-230.
- [58] THAU, F.E.:  
Observing the state of non-linear dynamic systems. Int. J. Control 17 (1973), S. 471-479.
- [59] WILLEMS, J.L.:  
Stabilität dynamischer Systeme. R. Oldenbourg Verlag, München 1973.
- [60] WOLF, H.:  
Lineare Analysis für Ingenieure. Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Nachrichtensysteme, Universität Karlsruhe 1983.
- [61] WU, F.F., und DESOER, C.A.:  
Global inverse function theorem. IEEE Trans. Circuit Theory 19 (1972), S. 199-201.
- [62] ZEITZ, M.:  
Nichtlineare Beobachter für chemische Reaktoren. Habilitationsschrift. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 27, VDI-Verlag, Düsseldorf 1977.
- [63] ZEITZ, M.:  
Nichtlineare Beobachter. Regelungstechnik 27 (1979), S. 241-249.
- [64] ZEITZ, M.:  
Observability canonical (phase-variable) form for non-linear time-variable systems. Int. J. Systems Sci. 15 (1984), S. 949-958.

- [65] ZIMMER, K.:  
Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Systeme durch Transformation auf Verallgemeinerte Regulationsnormalform. Automatisierungstechnik, erscheint demnächst.
- [66] ZIMMER, K.:  
Ein Steuerbarkeitskriterium für nichtlineare, zeitvariante Systeme. Automatisierungstechnik, erscheint demnächst.
- [67] ZURMÜHL, R.:  
Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1964.

AM INSTITUT FÜR REGELUNGS- UND STEUERUNGSSYSTEME DER UNIVERSITÄT  
KARLSRUHE ANGEFERTIGTE DIPLOMARBEITEN:

- [DA1] BRETSCHNEIDER, A.:  
Beobachtbarkeitsanalyse und Beobachtersynthese nichtlinearer Mehrgrößensysteme. Diplomarbeit D 367, Karlsruhe 1986.
- [DA2] BÜHLER, C.:  
Untersuchung eines Beobachterentwurfsverfahrens für nichtlineare Systeme. Diplomarbeit D 305, Karlsruhe 1984.
- [DA3] FEHRENBACH, M.:  
Erweiterung und Erprobung eines Beobachterentwurfsverfahrens für nichtlineare Systeme. Diplomarbeit D 356, Karlsruhe 1985.
- [DA4] FRITZ, H.:  
Erweiterung eines Verfahrens zum Entwurf nichtlinearer Beobachter. Diplomarbeit D 345, Karlsruhe 1985.
- [DA5] GOEBEL, J.:  
Untersuchung kanonischer Formen für nichtlineare Systeme. Diplomarbeit D 323, Karlsruhe 1984.
- [DA6] SCHNEIDER, E.:  
Erweiterung eines Reglersyntheseverfahrens für nichtlineare Systeme. Diplomarbeit D 303, Karlsruhe 1984.