

Diplomarbeit
von cand. el. Helmut Keller

Bestimmung von Zustandsrückführungen bei vorgegebenem Polgebiet

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Ingenieur (Dipl.-Ing.)

Angefertigt am
Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
der Universität Karlsruhe
Prof. Dr. rer. nat. Otto Föllinger

Betreuer: Dipl.-Ing. Günter Roppenecker
Ausgabetag: 8. Juni 1982
Abgabetag: 8. Dezember 1982

D i p l o m a r b e i t D 273

Bestimmung von Zustandsrückführungen bei vorgegebenem Polgebiet

Bei der Bestimmung von Zustandsrückführungen mit Hilfe der vollständigen modalen Synthese sind sowohl die Eigenwerte des geregelten Systems als auch die invarianten Parametervektoren zu wählen. Werden dabei die Entwurfsziele durch Gütekriterien formuliert, so führt der Entwurf auf ein Parameteroptimierungsproblem mit den Eigenwerten und den invarianten Parametervektoren als freien Variablen.

Während bisher die Eigenwerte vorab festgelegt wurden und die Optimierung allein über die invarianten Parametervektoren erfolgte, sollen hier die Eigenwerte mit in die Optimierung einbezogen werden. Jedoch sind sie im Gegensatz zu den Parametervektoren nicht völlig frei, sondern auf vorgegebene Gebiete der komplexen Ebene beschränkt, so daß sich dann ein Parameteroptimierungsproblem mit Beschränkungen in den Variablen ergibt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist das bestehende Verfahren zur Polvorgabe so zu ergänzen und zu erweitern, daß die Eigenwerte unter Einhaltung der vorgegebenen Beschränkungen mit in die Optimierung einbezogen werden können, und anhand mehrerer Beispiele ist ein Vergleich zwischen den Entwürfen mit Polvorgabe und denen mit Polgebietsvorgabe durchzuführen.

O. Föllinger

Professor Dr. O. Föllinger

Bearbeiter: cand. el. Helmut Keller
Betreuer: Dipl.-Ing. G. Roppenecker
Ausgabetag: 8. Juni 1982
Abgabetag: 8. Dezember 1982

Erklärung

Ich versichere, daß ich die vorliegende Diplomarbeit bis auf die dem Aufgabensteller bereits bekannte Hilfe selbständig angefertigt habe und alles kenntlich gemacht habe, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen ist.

Karlsruhe, den 08.12.1982

Helmuth Keller

I N H A L T

	Seite
1. Einleitung	1
2. Das Reglerentwurfsverfahren	3
2.1 Die Freiheitsgrade beim Reglerentwurf	3
2.2 Die Lösung des Polvorgabeproblems für einen Spezialfall	4
2.3 Voraussetzungen und Vorgehensweise bei der Lösung des Polvorgabeproblems im allgemeinen Fall	7
2.3.1 Voraussetzungen	8
2.3.2 Die reelle Darstellungsweise	8
2.3.3 Die modifizierten Parametervektoren	9
2.3.4 Vorgehensreihenfolge bei der allgemeinen Lösung des Polvorgabeproblems	10
2.4 Die Parameterabhängigkeit der Rückführmatrix	13
2.5 Warum Polgebietsvorgabe?	14
3. Die Gütekriterien	16
3.1 Das quadratische Gütekriterium	16
3.1.1 Zustandsvektroptimierung	16
3.1.2 Ausgangsvektroptimierung	17
3.1.3 Beobachterfehler -Optimierung	17
3.2 Das Reglerstruktur -Gütekriterium	17
3.2.1 Sinn und Zweck	17
3.2.2 Mathematische Formulierung	19
3.3 Kombination beider Gütekriterien	20
3.4 Die Parameterabhängigkeit der Gütekriterien	20

	Seite
4. Die Polgebiete und ihre Transformation in einen unbeschränkten Eigenwertbereich	22
4.1 Die Polgebiete in der komplexen Ebene	22
4.2 Die Eigenwerttransformation	23
4.3 Die Eigenwertrücktransformation	26
4.4 Neue Parameterabhängigkeit der Gütekriterien . .	27
4.5 Die Eigenwertgradiententransformation	28
5. Die Gradienten der Gütekriterien bzgl. ihrer Variablen	30
5.1 Vorbemerkungen	30
5.1.1 Reelle Berechnung der Gradienten bzgl. komplexer Variablen	30
5.1.2 Die Matrix $(\hat{V}_R^{-1})^T$	31
5.1.3 Abkürzende Schreibweisen	33
5.2 Die Gradienten zum Reglerstruktur-Gütekriterium .	34
5.2.1 PV-Gradienten zu J_S	34
5.2.2 EW-Gradienten zu J_S	43
5.3 Die Gradienten zum Quadratischen Gütekriterium .	49
5.3.1 Übergang zum Erwartungswert von J_Q	50
5.3.2 PV-Gradienten zu J_Q	52
5.3.3 EW-Gradienten zu J_Q	54
5.4 Zusammenfassende Darstellung der Gradienten . . .	57
5.4.1 Die Strukturgleichheit der Gradienten	57
5.4.2 Gradienten zum Gesamtgütekriterium $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$.	60
5.4.3 Zusammenfassung der PV- und EW-Gradienten in einer erweiterten Gradientenmatrix	61

	Seite
6. Die numerische Minimierung	67
6.1 Kurze Beschreibung des verwendeten Quasi-Newton-Verfahrens	67
6.2 Minimierungsablauf beim Regler- bzw. Beobachterentwurf durch Polgebietsvorgabe	68
7. Die programmtechnische Realisierung	70
7.1 Beschreibung einiger Unterprogramme	70
7.1.1 Das übergeordnete Programm POMIX	70
7.1.2 Das UP FLEPOX	72
7.1.3 Das UP FUGRAX	74
7.1.4 Das UP KIMIQUI	77
7.1.5 Zur Bestimmung der Matrix \bar{Z} im UP FUNK1X	78
7.1.6 Das UP GRADJX	79
7.2 Die numerischen Probleme bei den Transformationsprogrammen	79
7.2.1 Das UP EWTRF	79
7.2.2 Das UP EWRTRF	80
7.2.3 Das UP EWGTRF	80
7.3 Der Programmtest	81
8. Beispiele	86
8.1 Das Dreitanksystem	86
8.1.1 Beschreibung der Anlage und mathematisches Modell	86
8.1.2 Entwurf eines quadratisch optimalen Reglers . . .	87
8.1.3 Entwurf einer unvollständigen Zustandsvektorrückführung	93
8.2 Die Doppelverdampfungsanlage	99

	Seite
8.2.1 Beschreibung der Anlage und mathematisches Modell	99
8.2.2 Vergleich der mittels Pol- und Polgebietsvorgabe erreichten Entwürfe	101
8.2.2.1 Vergleich von Pol- und Polgebietsvorgabe hinsichtlich erreichbarer Unterdrückung	102
8.2.2.2 Vergleich von Pol- und Polgebietsvorgabe hinsichtlich des Übergangsverhaltens	108
8.3 Der Spannungsregler	111
8.3.1 Mathematisches Modell	111
8.3.2 Reglerentwurf	112
9. Erfahrungen	116
9.1 Zur Wahl der Starteigenwerte und der Parameterstartvektoren	116
9.2 Zur Wahl der Gebietsgrenzen	116
9.3 Gebietsgrößeneinfluß auf die Optimierung	117
9.4 Zur Wahl der Gewichtungsmatrix \underline{G}	119
9.5 Zur Wahl des Gewichtungsverhältnisses $\alpha_1:\alpha_2$	119
9.6 Vorsicht bei Störgrößen-Simulationen !	120
9.7 Vorsicht bei Eingrößensystemen !	121
10. Rückblicke und Ausblicke	123
10.1 Vorschlag zur Reduzierung der Rechenzeit	124
10.2 Vorschlag einer Gütevektorminimierung	125
Literatur	127

1. EINLEITUNG

Der Entwurf von Zustandsrückführungen hat zunächst zum Ziel, die dynamikbestimmenden Eigenwerte eines Systems zu beeinflussen, um ein günstiges Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises zu erreichen. Eine im Zustandsraum häufig angewandte Methode besteht deshalb in der Vorgabe der Eigenwerte für das geregelte System. Man spricht von sogenannten "Polvorgabeverfahren", da die Eigenwerte im allgemeinen mit den Polen des Systems zusammenfallen.

Nach der Wahl der Eigenwerte für den geschlossenen Kreis sind bei Mehrgrößensystemen noch Freiheitsgrade beim Reglerentwurf vorhanden. Diese können mit dem in Kapitel 2 vorgestellten Reglerentwurfsverfahren ausgenutzt werden, um weitergehende Forderungen zu erfüllen. Es kann z.B. ein Regler entworfen werden, der nur einen Teil der Zustandsgrößen zurückführt - eine sogenannte "Teilzustandsvektorrückführung" - und der darüberhinaus für optimale Übergangsvorgänge sorgt.

Die beiden Entwurfsziele (günstige Dynamik und spezielle Reglerstruktur) können noch besser erreicht werden, wenn man sich von der Vorgabe der exakten Eigenwertlagen befreit. Dies soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, indem die bisher verwendete "Polvorgabe" durch eine "Polgebietsvorgabe" ersetzt wird. Statt den Polen werden geeignete Bereiche in der komplexen Ebene gewählt und über ein numerisches Optimierungsverfahren diejenigen Eigenwerte innerhalb dieser Bereiche bestimmt, für die die genannten Forderungen möglichst gut erfüllt sind. Das Problem der genauen Eigenwertwahl wird somit durch die einfachere Aufgabe, ein geeignetes Polgebiet vorzugeben, ersetzt.

Im nächsten Kapitel wird zunächst das verwendete Reglerentwurfsverfahren beschrieben, womit es möglich ist, alle Entwurfsfreiheitsgrade zu berücksichtigen. Um beurteilen zu können, wie gut die Forderungen erfüllt sind, braucht man geeignete Gütekriterien, die im 3. Kapitel erläutert werden. Anschließend wird in Kapitel 4 auf die Polgebiete eingegangen und eine Transformation dieser beschränkten Bereiche auf unbeschränkte Bereiche vorgestellt. Im darauffolgenden Kapitel 5 werden die Gradienten der Gütekriterien

bzgl. ihrer Variablen analytisch berechnet, da deren Werte für das in Kapitel 6 beschriebene numerische Gradientenverfahren zur Verfügung stehen müssen. Als nächstes (Kapitel 7) wird beschrieben, wie das bisher benutzte Programmpaket POMIQ erweitert wurde, um damit auch die Polgebietsvorgabe zu ermöglichen. Im 8. Kapitel soll an technischen Beispielen gezeigt werden, wie sich die Ersetzung der Polvorgabe durch die Polgebietsvorgabe auswirkt, während in Kapitel 9 eine Reihe von Erfahrungen zusammengestellt ist, die bei der Anwendung des für die Polgebietsvorgabe erstellten Programmpakets (POMIX) gewonnen wurden. Schließlich wird im 10. Kapitel das Wesentliche noch einmal zusammengefaßt und ein Vergleich zwischen erzielbarer Verbesserung gegenüber der Polvorgabe und dem dazu erforderlichen Aufwand angestellt. Außerdem wird ein Ausblick darauf gegeben, wie das Verfahren der Polgebietsvorgabe noch weiter verbessert werden kann.

2. DAS REGLERENTWURFSVERFAHREN

Der in dieser Arbeit behandelte Reglerentwurf durch *Polgebieten*-vorgabe basiert auf der Theorie der Polvorgabe.

Zum grundlegenden Verständnis wird deshalb in diesem Kapitel ein allgemeines Polvorgabeverfahren vorgestellt. (Von Polgebieten wird erst im 4. Kapitel die Rede sein.)

Nachdem zunächst auf die Freiheitsgrade beim Reglerentwurf eingegangen wird, soll im 2. Abschnitt die Lösung des Polvorgabeproblems für einen Spezialfall angegeben werden. Im darauffolgenden Abschnitt werden die Voraussetzungen und die Vorgehensweise zur Lösung im allgemeinen Fall angegeben. Anschließend wird im 4. Abschnitt die Abhängigkeit der Reglermatrix von den freien Parametern untersucht. Im letzten Abschnitt werden Gründe genannt, weshalb Polgebieten vorgabe überhaupt betrieben werden soll.

2.1 Die Freiheitsgrade beim Reglerentwurf

Nur für Eingrößensysteme ist der Regler nach Vorgabe der Regelungseigenwerte eindeutig bestimmt. Bei Systemen mit mehreren Eingangsgrößen läßt sich eine unbegrenzte Anzahl von Reglern bestimmen, die alle die gewünschten Eigenwerte der Regelung erzeugen.

Es gilt nun aus dieser Klasse von Rückführmatrizen diejenige Reglermatrix R auszuwählen, die vorgegebene, spezielle Entwurfsforderungen am besten erfüllt. Es ist also zunächst notwendig, die nach erfolgter Polvorgabe noch freien Entwurfsparameter zu erfassen. Dazu werden sogenannte *Parametervektoren* eingeführt, die im nächsten Abschnitt definiert werden. Die Rückführmatrix hängt damit außer von den Eigenwerten der Regelung auch von diesen Parametervektoren ab, die im Gegensatz zu den Eigenvektoren von der Gestalt der Zustandsbeschreibung des Systems unabhängig sind /1/.

Interessanterweise beruhen die bekannten Polvorgabeverfahren, wie z.B. die modale Regelung nach Rosenbrock, auf einer speziellen Wahl dieser Parametervektoren /1/.

2.2 Die Lösung des Polvorgabeproblems für einen Spezialfall /1/

Beim Polvorgabeentwurf (über Parametervektoren) geht man aus von einem linearen, zeitinvarianten System der Form

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \quad ,$$

wobei $\underline{x}(t)$ den $(n,1)$ -Zustands- und $\underline{u}(t)$ den $(p,1)$ -Eingangsvektor darstellt.

Mit der linearen Zustandsrückführung

$$\underline{u}(t) = -\underline{R} \underline{x}(t)$$

gelangt man zu dem geregelten System

$$\dot{\underline{x}}(t) = (\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) \underline{x}(t) \quad ,$$

von dessen Eigenwerten $\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}$ gefordert wird, daß sie vorgegebene Lagen in der komplexen Ebene annehmen.

Für die Systemmatrix $\underline{A} - \underline{B} \underline{R}$ des geschlossenen Regelkreises gilt im Falle einfacher Eigenwerte λ_{Ri} die Eigenwert-Eigenvektor-Beziehung

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{R} - \lambda_{Ri} \underline{I}_n) \underline{v}_{Ri} = \underline{0} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad , \quad (2.1)$$

wobei \underline{v}_{Ri} der Rechtseigenvektor zum Eigenwert λ_{Ri} und \underline{I}_n die (n,n) -Einheitsmatrix ist.

Dies ist der Ausgangspunkt für die Herleitung der Reglermatrix-Bestimmungsgleichungen.

Durch Umformen von Gl. (2.1) erhält man:

$$(\underline{A} - \lambda_{Ri} \underline{I}_n) \underline{v}_{Ri} = \underline{B} \underline{R} \underline{v}_{Ri} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (2.2)$$

Die in Abschnitt 2.1 erwähnten Parametervektoren werden nun definiert als

$$\underline{p}_i := \underline{R} \underline{v}_{Ri} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (2.3)$$

Damit wird Gl. (2.2) zu

$$(\underline{A} - \lambda_{Ri} \underline{I}_n) \underline{v}_{Ri} = \underline{B} \underline{p}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (2.4)$$

Stimmt der Eigenwert λ_{Ri} des geregelten Systems mit keinem Streckeneigenwert λ_j überein, d.h. liegt der Spezialfall

$$\lambda_{Ri} \neq \lambda_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

vor, so ist die Matrix $(\underline{A} - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)$ regulär und Gl. (2.4) kann nach \underline{v}_{Ri} aufgelöst werden:

$$\underline{v}_{Ri} = (\underline{A} - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B} \underline{p}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad . \quad (2.5)$$

Gibt man außer den n Eigenwerten λ_{Ri} der Regelung noch die n $(p,1)$ -Parametervektoren \underline{p}_i vor, so können die n Eigenvektoren \underline{v}_{Ri} mit Gl. (2.5) berechnet werden. Sie müssen linear unabhängig sein, was durch entsprechende Wahl der freien Parameter λ_{Ri} und \underline{p}_i zu gewährleisten ist.

Da die Parametervektoren wie die Eigenvektoren nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind (siehe Gl. (2.3)), werden durch die Wahl der $n \cdot p$ Elemente der n Parametervektoren nur $n \cdot (p-1)$ Entwurfsgleichheitsgrade festgelegt. Die restlichen n der $n \cdot p$ Freiheitsgrade, die für die Festlegung der $n \cdot p$ Elemente der Rückführmatrix \underline{R} zur Verfügung stehen, liegen in der Freiheit bei der Vorgabe der n Eigenwerte.

Faßt man die n Vektoren \underline{v}_{Ri} zur (n,n) -Eigenvektormatrix

$$\underline{V}_R = [\underline{v}_{R1}, \underline{v}_{R2}, \dots, \underline{v}_{Rn}]$$

und die n Parametervektoren \underline{p}_i zur (p,n) -Parametermatrix

$$\underline{P} = [\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n]$$

zusammen, so können die n Definitionsgleichungen (2.3) in Form einer Matrixgleichung geschrieben werden:

$$\underline{P} = \underline{R} \cdot \underline{V}_R \quad . \quad (2.6)$$

Sind die n Spaltenvektoren \underline{v}_{Ri} der Matrix \underline{V}_R wie gefordert linear unabhängig - genau dann bilden sie die n Rechtseigenvektoren der Regelung - so ist \underline{V}_R eine reguläre Matrix und kann invertiert werden. Die Rückführmatrix ergibt sich dann zu

$$\underline{R} = \underline{P} \cdot \underline{V}_R^{-1} \quad . \quad (2.7)$$

Durch die Beziehung (2.7) ist die Reglermatrix eindeutig bestimmt. Prinzipiell gilt sie für konjugiert komplexe Eigenwerte genauso wie für reelle Eigenwerte. Es ist nur darauf zu achten, daß zu konjugiert komplexen Eigenwerten auch konjugiert komplexe Parametervektoren vorgegeben werden, damit \underline{R} immer eine reelle Matrix bleibt (siehe Abschnitt 2.3.2, insbesondere Gl. (2.9)).

Mit Gl. (2.5) lassen sich durch geeignete Wahl der Parametervektoren \underline{p}_i auch dann linear unabhängige Rechtseigenvektoren \underline{v}_{Ri} bestimmen, wenn der Eigenwert λ_{Ri} mehrfach, aber seine Vielfachheit \leq Rang (\underline{B}) ist. Da andernfalls die Berechnung von Hauptvektoren erforderlich wäre, wird im folgenden davon ausgegangen, daß die obige Bedingung erfüllt ist. Dies hat eine diagonalähnliche Systemmatrix $\underline{A-B} \underline{R}$ der Regelung zur Folge. (Zum Begriff der Diagonalähnlichkeit: siehe /2/!)

Die Berechnung der Rechtseigenvektoren der Regelung ist weiterhin nur dann mit Gl. (2.5) möglich, wenn kein Eigenwert λ_{Ri} des geregelten Systems mit einem Eigenwert λ_j der Strecke übereinstimmt. Aber auch für den Fall, daß Eigenwerte von Strecke und Regelung zusammenfallen, ist die Herleitung entsprechender Bestimmungsgleichungen möglich. Hierauf kann allerdings nicht näher eingegangen werden, um den Rahmen dieser Diplomarbeit nicht zu verlassen. Es sei aber auf /3/ verwiesen, wo die Bestimmungsgleichungen für diesen Fall angegeben sind. Dort wird bei Gleichheit von Eigenwerten der Strecke und Regelung noch zusätzlich unterschieden, ob der Streckeneigenwert steuerbar ist oder nicht. Außerdem werden dort zwecks Erhöhung der Rechengenauigkeit und Einsparung von Rechenzeit alle Synthesegleichungen durch Trennung in Real- und Imaginärteil so umgeformt, daß auch beim Auftreten komplexer Eigenwerte, Eigenvektoren und Parametervektoren nur mit reellen Größen gerechnet werden braucht.

Im nächsten Abschnitt sollen alle in /3/ unterschiedenen Fälle zusammengefaßt und die prinzipielle Vorgehensweise bei der Polvorgabe über Parametervektoren beschrieben werden.

2.3 Voraussetzungen und Vorgehensweise bei der Lösung des Polvorgabeproblems im allgemeinen Fall

Es werden 3 reelle und 3 komplexe Fälle unterschieden, die in Tabelle 1 aufgeführt sind.

bei reellem EW λ_{Ri}	bei komplexem EW λ_{Ri}	
Fall A	Fall B	Der Eigenwert λ_{Ri} der Regelung stimmt mit keinem Eigenwert der Strecke überein.
Fall C	Fall D	Der Eigenwert λ_{Ri} der Regelung stimmt mit dem steuerbaren Eigenwert λ_j der Strecke überein.
Fall E	Fall F	Der Eigenwert λ_{Ri} der Regelung stimmt mit dem nichtsteuerbaren Eigenwert λ_j der Strecke überein.

Tabelle 2.1: Fallunterscheidungen bei der Polvorgabe

Vor der Beschreibung der Vorgehensweise bei der Polvorgabe sollen zunächst noch die getroffenen Voraussetzungen angegeben werden, unter denen die hier dargestellten Synthesegleichungen für die Rückführmatrix gültig sind. Außerdem werden eine reelle Darstellungsweise konjugiert komplexer Größen und die modifizierten Parametervektoren eingeführt.

in die reelle Darstellung

$$\underline{\hat{p}} = [\underline{p}_1, \dots, \underline{\hat{p}}_i, \underline{\hat{p}}_{i+1}, \dots, \underline{p}_n]$$

$$\text{und } \underline{\hat{v}}_R = [\underline{v}_{R1}, \dots, \underline{\hat{v}}_{Ri}, \underline{\hat{v}}_{R,i+1}, \dots, \underline{v}_{Rn}]$$

gebracht werden. Anstelle der konjugiert komplexen Vektoren \underline{p}_i und \underline{p}_{i+1} bzw. \underline{v}_{Ri} und $\underline{v}_{R,i+1}$ ist in der i -ten Spalte der Realteil und in der $(i+1)$ -ten Spalte der Imaginärteil des komplexen Vektors \underline{p}_i bzw. \underline{v}_{Ri} abgelegt. Es ist nämlich

$$\underline{\hat{p}}_i = \text{Re}(\underline{p}_i) \quad , \quad \underline{\hat{p}}_{i+1} = \text{Im}(\underline{p}_i)$$

$$\text{und } \underline{\hat{v}}_{Ri} = \text{Re}(\underline{v}_{Ri}) \quad , \quad \underline{\hat{v}}_{R,i+1} = \text{Im}(\underline{v}_{Ri}) \quad .$$

Im allgemeinen Fall ist in der Transformationsmatrix \underline{U} für jedes konjugiert komplexe Eigenwertpaar ein 2×2 -Block gemäß Gleichung (2.8) einzufügen. Es gilt dann

$$\underline{\hat{p}} = \underline{p} \cdot \underline{U} \quad \text{bzw.} \quad \underline{p} = \underline{\hat{p}} \cdot \underline{U}^{-1}$$

$$\text{und } \underline{\hat{v}}_R = \underline{v}_R \cdot \underline{U} \quad \text{bzw.} \quad \underline{v}_R = \underline{\hat{v}}_R \cdot \underline{U}^{-1} \quad .$$

Aus Gl. (2.7) folgt damit für die reellwertige Reglerberechnung:

$$\underline{R} = \underline{p} \cdot \underline{v}_R^{-1} = \underline{\hat{p}} \underline{U}^{-1} (\underline{\hat{v}}_R \cdot \underline{U}^{-1})^{-1} = \underline{\hat{p}} \cdot \underline{\hat{v}}_R^{-1} \quad . \quad (2.9)$$

2.3.3 Die modifizierten Parametervektoren /3/

In den Fällen, wo der Regelungseigenwert λ_{Ri} mit dem Streckeneigenwert λ_j übereinstimmt, muß mit modifizierten Formen der Parametervektoren \underline{p}_i gerechnet werden, welche in dieser Arbeit mit einer \sim versehen sind. In den Fällen C, D, E und F ist also nicht \underline{p}_i , sondern der modifizierte Parametervektor $\underline{\tilde{p}}_i$ frei wähl-

bar. \underline{p}_i läßt sich eindeutig aus $\tilde{\underline{p}}_i$ berechnen (siehe Gln. (2.10a-c)). Der umgekehrte Weg ist nicht möglich.

2.3.4 Vorgehensreihenfolge bei der allgemeinen Lösung des Polvorgabeproblems /3/

1. Wahl der n Eigenwerte λ_{Ri} der Regelung und der n modifizierten Parametervektoren $\tilde{\underline{p}}_i$ bzw. $\hat{\underline{p}}_i$ und $\hat{\underline{p}}_{i+1}$.
2. Bestimmung des Index' j für jeden Eigenwert λ_{Ri} der Regelung, der mit einem Eigenwert λ_j der Strecke übereinstimmt.
3. Berechnung der Matrizen \underline{M}_i^k bzw. $\hat{\underline{M}}_i^k$ und $\hat{\underline{M}}_{i+1}^k$:

- Fälle A, E: $\underline{M}_i^k = \underline{I}_p$.

- Fall C : $\underline{M}_i^k = \underline{I}_p - \underline{e}_k \frac{\underline{w}_j^T \underline{B}}{\underline{w}_j^T \underline{b}_k}$

mit k aus $|\underline{w}_j^T \underline{b}_k| = \max_{r=1, \dots, p} |\underline{w}_j^T \underline{b}_r| \neq 0$ *) .

- Fälle B, F: $\hat{\underline{M}}_i^k = \underline{I}_p$,

$\hat{\underline{M}}_{i+1}^k = \underline{0}$.

- Fall D : $\hat{\underline{M}}_i^k = \underline{I}_p - \underline{e}_k \frac{\hat{\underline{w}}_j^T \underline{b}_k \hat{\underline{w}}_j^T \underline{B} + \hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{b}_k \hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{B}}{\det}$,

$\hat{\underline{M}}_{i+1}^k = -\underline{e}_k \frac{\hat{\underline{w}}_j^T \underline{b}_k \hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{B} - \hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{b}_k \hat{\underline{w}}_j^T \underline{B}}{\det}$

mit k aus $\det = (\hat{\underline{w}}_j^T \underline{b}_k)^2 + (\hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{b}_k)^2 = \max_{r=1, \dots, p} [(\hat{\underline{w}}_j^T \underline{b}_r)^2 + (\hat{\underline{w}}_{j+1}^T \underline{b}_r)^2] \neq 0$.

4. Berechnung der Parametervektoren:

- reelle Fälle A, C, E : $\underline{p}_i = \underline{M}_i^k \tilde{\underline{p}}_i$. (2.10a)

*) Hier - wie im folgenden - sind $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p$ die Spaltenvektoren der Eingangsmatrix \underline{B} .

- komplexe Fälle B, D, F: $\hat{\underline{p}}_i = \hat{\underline{M}}_i^k \hat{\underline{p}}_i - \hat{\underline{M}}_{i+1}^k \hat{\underline{p}}_{i+1}$, (2.10b)

$$\hat{\underline{p}}_{i+1} = \hat{\underline{M}}_{i+1}^k \hat{\underline{p}}_i + \hat{\underline{M}}_i^k \hat{\underline{p}}_{i+1} . \quad (2.10c)$$

5. Berechnung der Matrizen \underline{A}_i bzw. $\hat{\underline{A}}_i$ und $\hat{\underline{A}}_{i+1}$:

- Fall A : $\underline{A}_i = \underline{A}$.

- Fälle C, E: $\underline{A}_i = \underline{A} + \underline{v}_j \underline{w}_j^T$.

- Fall B : $\hat{\underline{A}}_i = \underline{A}$,

$$\hat{\underline{A}}_{i+1} = \underline{0} .$$

- Fälle D, F: $\hat{\underline{A}}_i = \underline{A} + \frac{1}{2} (\hat{\underline{v}}_j \hat{\underline{w}}_j^T + \hat{\underline{v}}_{j+1} \hat{\underline{w}}_{j+1}^T)$,

$$\hat{\underline{A}}_{i+1} = -\frac{1}{2} (\hat{\underline{v}}_j \hat{\underline{w}}_{j+1}^T - \hat{\underline{v}}_{j+1} \hat{\underline{w}}_j^T) .$$

6. Berechnung der Matrizen \underline{B}_i bzw. $\hat{\underline{B}}_i$ und $\hat{\underline{B}}_{i+1}$:

- Fälle A, E: $\underline{B}_i = \underline{B}$.

- Fall C : $\underline{B}_i = \underline{B} \underline{M}_i^k + \underline{v}_j \underline{e}_k^T$.

- Fälle B, F: $\hat{\underline{B}}_i = \underline{B}$,

$$\hat{\underline{B}}_{i+1} = \underline{0} .$$

- Fall D : $\hat{\underline{B}}_i = \underline{B} \hat{\underline{M}}_i^k + \hat{\underline{v}}_j \underline{e}_k^T$,

$$\hat{\underline{B}}_{i+1} = \underline{B} \hat{\underline{M}}_{i+1}^k + \hat{\underline{v}}_{j+1} \underline{e}_k^T .$$

7. Berechnung der Matrizen \underline{K}_i bzw. $\hat{\underline{K}}_i$ und $\hat{\underline{K}}_{i+1}$:

- reelle Fälle A, C, E : $\underline{K}_i = (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B}_i$. (2.11a)

- komplexe Fälle B, D, F : $\hat{K}_i = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{B}_i + \hat{B}_{i+1})$, (2.11b)

$$\hat{K}_{i+1} = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{B}_{i+1} - \hat{B}_i) \quad (2.11c)$$

mit $\begin{cases} \underline{H}_i = (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \cdot (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n)^{-1} \text{ und} \\ \underline{\Delta}_i = (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n) + \underline{H}_i \cdot (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \end{cases}$.

8. Berechnung der Eigenvektoren:

- reelle Fälle A, C, E : $\underline{v}_{Ri} = \underline{K}_i \hat{p}_i + c_{Oi} \underline{v}_j$. (2.12a)

- komplexe Fälle B, D, F : $\hat{\underline{v}}_{Ri} = \hat{\underline{K}}_i \hat{p}_i - \hat{\underline{K}}_{i+1} \hat{p}_{i+1} + c_{Oi} \hat{\underline{v}}_j$, (2.12b)

$$\hat{\underline{v}}_{R,i+1} = \hat{\underline{K}}_{i+1} \hat{p}_i + \hat{\underline{K}}_i \hat{p}_{i+1} + c_{Oi} \hat{\underline{v}}_{j+1} \cdot (2.12c)$$

Dabei ist $c_{Oi} = 0$ in den Fällen A, B, C, D und

$c_{Oi} = 1$ in den Fällen E, F.

9. Berechnung der Rückführmatrix:

Es können nun alle n Parametervektoren in der reellen Matrix

$$\hat{\underline{P}} = [p_1, \dots, \hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}, \dots]$$

und alle n Eigenvektoren in der reellen Matrix

$$\hat{\underline{V}}_R = [\underline{v}_{R1}, \dots, \hat{\underline{v}}_{Ri}, \hat{\underline{v}}_{R,i+1}, \dots]$$

zusammengefaßt werden. Dabei wurde exemplarisch angenommen, daß p_1 und \underline{v}_{R1} zu dem reellen Eigenwert λ_{R1} und $\hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}, \hat{\underline{v}}_{Ri}$ und $\hat{\underline{v}}_{R,i+1}$ zu einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar $\lambda_{Ri} = \hat{\lambda}_{Ri} + j \hat{\lambda}_{R,i+1}, \lambda_{R,i+1} = \hat{\lambda}_{Ri} - j \hat{\lambda}_{R,i+1}$ gehören. Falls $\hat{\underline{V}}_R$ nicht regulär ist, gehe zurück zu Punkt 1.

Ansonsten wird die reelle Reglermatrix \underline{R} für alle 6 Fälle nach dem gleichen Prinzip berechnet, nämlich

$$\underline{R} = \hat{\underline{P}} \hat{\underline{V}}_R^{-1} \quad . \quad (2.13)$$

2.4 Die Parameterabhängigkeit der Rückführmatrix

Der besseren Überschaubarkeit wegen wird nun vorläufig die reelle Darstellungsweise verlassen. Zu einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar λ_{Ri} , $\lambda_{R,i+1}$ gehören jetzt die konjugiert komplexen Parametervektoren \underline{p}_i und \underline{p}_{i+1} und die konjugiert komplexen Eigenvektoren \underline{v}_{Ri} und $\underline{v}_{R,i+1}$, die sich aus den mit $\hat{}$ dargestellten Real- und Imaginärteilen wie folgt berechnen:

$$\lambda_{Ri} = \hat{\lambda}_{Ri} + j \hat{\lambda}_{R,i+1} : \underline{p}_i = \hat{\underline{p}}_i + j \hat{\underline{p}}_{i+1}, \quad \underline{v}_{Ri} = \hat{\underline{v}}_{Ri} + j \hat{\underline{v}}_{R,i+1}.$$

$$\lambda_{R,i+1} = \hat{\lambda}_{Ri} - j \lambda_{R,i+1} : \underline{p}_{i+1} = \hat{\underline{p}}_i - j \hat{\underline{p}}_{i+1}, \quad \underline{v}_{R,i+1} = \hat{\underline{v}}_{Ri} - j \hat{\underline{v}}_{R,i+1}.$$

Gemäß Gl. (2.13) ergibt sich für die Reglermatrix folgende Abhängigkeit:

$$\underline{R} = \underline{R}(\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n ; \underline{v}_{R1}, \dots, \underline{v}_{Rn}) \quad .$$

Die Parametervektoren \underline{p}_i lassen sich entsprechend den Gln. (2.10a-c) durch die modifizierten Parametervektoren $\tilde{\underline{p}}_i$ ausdrücken. Es gilt also:

$$\underline{p}_i = \underline{p}_i(\tilde{\underline{p}}_i) \quad .$$

Aus den Synthesegleichungen (2.11a-c) und (2.12a-c) ergibt sich für die Rechtseigenvektoren die Abhängigkeit

$$\underline{v}_{Ri} = \underline{v}_{Ri}(\lambda_{Ri}, \tilde{\underline{p}}_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad ,$$

so daß sich die Rückführmatrix letztlich als Funktion der n Eigen-

werte der Regelung und der n modifizierten Parametervektoren darstellen läßt, also

$$\underline{R} = \underline{R}(\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}; \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n) \quad . \quad (2.14)$$

Die Reglermatrix \underline{R} ist also nach Festlegung der n Eigenwerte der Regelung und der n modifizierten Parametervektoren eindeutig bestimmt.

Beachte: Bei Eingrößensystemen ist \underline{R} schon durch die Eigenwertvorgabe allein vollständig festgelegt. In /3/ wurde gezeigt, daß der Reglerentwurf in diesem Fall tatsächlich von der Wahl der Parametervektoren unabhängig ist.

2.5 Warum Polgebietsvorgabe?

Bei den bisherigen Reglerentwürfen /3, 4/ betrieb man Polvorgabe, d.h. man gab die n Eigenwerte der Regelung fest vor. Die Parametervektoren wurden über ein numerisches Optimierungsverfahren so bestimmt, daß gewünschte Forderungen (nach einer speziellen Reglerstruktur und/oder nach einer guten Dynamik des geregelten Systems) möglichst gut erfüllt wurden.

In dieser Arbeit soll nun die *Polvorgabe* von der *Polgebietsvorgabe* abgelöst werden. Ein Grund dafür ist die Vermutung, daß die gewünschten Forderungen noch besser erreicht werden können, wenn man die Eigenwerte in die Optimierung mit einbezieht. Einzige Einschränkung soll dabei sein, daß die Eigenwerte innerhalb vorgegebener Polgebiete der komplexen Ebene liegen bleiben. Ein weiterer Grund, weshalb man sich von der genauen Polvorgabe befreien möchte, ist der, daß man meistens nur ungefähre Vorstellungen über günstige Eigenwertlagen hat. Es fällt sicher leichter, anstelle der Eigenwerte geeignete Polgebiete vorzugeben, innerhalb derer die Regelungseigenwerte liegen sollen.

Näheres dazu aber erst in Kapitel 4.

Im nächsten Kapitel sollen nun 2 geeignete Gütekriterien vorgestellt werden, mit denen beurteilt werden kann, wie gut die genannten Entwurfsforderungen erfüllt sind.

3. DIE GÜTEKRITERIEN

Mit der Definition von Gütekriterien für den Regelvorgang und deren Optimierung wird ein gezielter Entwurf möglich.

Die Auswahl eines geeigneten Gütekriteriums ist wesentlich für Verfahren und Ergebnis und ist zumeist nicht kompromißlos durchzuführen: Das Gütekriterium sollte einerseits den Regelvorgang nach gewissen Gütegesichtspunkten bewerten und andererseits zu möglichst einfacher mathematischer Optimierungsbehandlung führen. Letzteres ist zum Beispiel beim quadratischen Gütekriterium und beim Struktur-Gütekriterium, die in den beiden nächsten Abschnitten vorgestellt werden, der Fall. Bei beiden Gütemaßen handelt es sich um Funktionale, da einer Funktion eine Zahl J zugeordnet wird /6/.

3.1 Das quadratische Gütekriterium

3.1.1 Zustandsvektroptimierung

Mit Hilfe des klassischen (quadratischen) Gütekriteriums

$$J_q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt \quad , \quad (3.1)$$

welches das Übergangsverhalten des geregelten Systems bewertet, können quadratisch optimale Regler entworfen werden. Bei der praktischen Anwendung ist insbesondere die relative Wahl der Bewertungsmatrizen \underline{S} und \underline{T} schwierig. Oft werden sie zu Diagonalmatrizen gewählt, womit erreicht wird, daß nur über die Summe *reinquadratischer* Produkte von Zustands- bzw. Stellgrößen integriert wird. (Häufig führt erst ein mehrmaliger Ansatz zu einer zufriedenstellenden Optimierungslösung.) Die Minimierung von J_q bewirkt, daß die Quadrate der Flächen, die die Zustands- bzw. Stellgrößenverläufe mit der Zeitachse einschließen, klein werden.

3.1.2 Ausgangsvektroptimierung

Um auch eine Ausgangsvektroptimierung zu ermöglichen, kann das obige Gütekriterium J_q in die Form

$$J_{qA} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{y}^T \underline{S}_y \underline{y} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{C}^T \underline{S}_y \underline{C} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt \quad (3.2)$$

mit dem Ausgangsvektor $\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$ abgeändert werden (C ist die Ausgangsmatrix). Es muß also in Gl. (3.1) lediglich \underline{S} durch $\underline{C}^T \underline{S}_y \underline{C}$ ersetzt werden.

3.1.3 Beobachterfehler-Optimierung /3/

Es sei noch erwähnt, daß auch für Beobachterentwürfe, die ebenfalls mit dem beschriebenen Syntheseverfahren möglich sind (siehe /3/), ein quadratisches Gütemaß verwendet werden kann.

Die Minimierung eines Gütekriteriums der Form

$$J_{qB} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underline{e}^T \underline{S}_B \underline{e} dt \quad (3.3)$$

führt auf einen Beobachter mit minimalem Beobachterfehler \underline{e} .

Anmerkung: Jede der 3 beschriebenen Optimierungsarten, Zustandsvektor-, Ausgangsvektor- oder Beobachterfehler-Optimierung, kann wahlweise mit Hilfe des Programmpaketes POMIX numerisch durchgeführt werden (siehe Kommentar zum Programm POMIX /8/).

3.2 Das Reglerstruktur-Gütekriterium

3.2.1 Sinn und Zweck

Häufig hat man das Problem, daß nicht alle Zustandsgrößen des zu regelnden Systems meßbar sind. Dann muß dafür gesorgt werden,

daß die Elemente der zugehörigen Reglerspalten sehr kleine Werte gegenüber den übrigen Elementen annehmen. Ist diese Forderung erfüllt, so kann man die kleinen Reglerelemente auch durch Nullen ersetzen, was bedeutet, daß die nicht meßbaren Zustandsgrößen nicht zurückgeführt werden brauchen.

An einem Beispiel soll dieser Sachverhalt deutlich gemacht werden:

Mit der Schreibweise $\underline{R} = [\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n]$ für die Reglermatrix \underline{R} kann man die lineare Zustandsrückführgleichung

$$\underline{u}(t) = -\underline{R} \underline{x}(t)$$

in der Form

$$\underline{u}(t) = -\underline{r}_1 x_1(t) - \dots - \overset{\substack{\downarrow \\ \text{nicht meßbar!}}}{\underline{r}_k} x_k(t) - \dots - \underline{r}_n x_n(t) \quad (3.4)$$

darstellen, wobei $x_1(t), \dots, x_n(t)$ die Zustandsgrößen sind. $x_k(t)$ sei dabei eine nicht meßbare Zustandsgröße.

Damit sie nicht in das Regelungsgesetz (3.4) eingeht, muß offensichtlich die zugehörige Reglerspalte \underline{r}_k zu Null gemacht werden, also die Bedingung $\underline{r}_k \stackrel{!}{=} \underline{0}$ erfüllt sein.

Bei dem hier betrachteten Entwurfsverfahren wird diese harte Forderung etwas abgeschwächt: Es genügt, wenn die Elemente des Vektors \underline{r}_k gegenüber den anderen Reglerelementen vernachlässigbar klein sind. Dann kann der Einfluß des nicht meßbaren Zustandes $x_k(t)$ auf den Steuervektor \underline{u} praktisch vernachlässigt werden. Setzt man anschließend die kleinen Reglerelemente zu Null, so geht die Zustandsgröße $x_k(t)$ nicht ins Regelungsgesetz (3.4) ein. $x_k(t)$ braucht dann nicht zurückgeführt werden; es liegt eine unvollständige Zustandsvektorrückführung (ZVR) vor. Die Reglermatrix hat dann die Struktur

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & \dots & x & 0 & x & \dots & x \end{bmatrix}, \quad \text{wobei die Nichtnullelemente mit einem } x \text{ gekennzeichnet sind.}$$

└─ k-te Spalte

3.2.2 Mathematische Formulierung

Im Gegensatz zu den Entwürfen unvollständiger ZVRen nach Schug /4/, bei denen das Gütemaß nur eine zeilen- oder spaltenweise Unterdrückung der Reglerelemente erlaubt, soll hier ein allgemeines Gütemaß eingeführt werden, welches die gezielte Unterdrückung jedes beliebigen Elementes der Reglermatrix und damit ganz allgemeine "Reglerstrukturen" ermöglicht.

Der Regler wird durch Minimierung der gewichteten Quadratsumme der Reglerkoeffizienten berechnet. Das sog. Reglerstruktur-Gütekriterium hat somit die Form

$$J_S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n g_{ij} r_{ij}^2 \quad . \quad (3.5)$$

Über die Gewichtungsfaktoren $g_{ij} > 0$ der Gewichtungsmatrix G kann jedes Reglerelement r_{ij} verschieden stark gewichtet werden (n ist die Systemordnung und p die Anzahl der Eingangsgrößen).

Durch Minimierung dieses Gütemaßes J_S läßt sich zweierlei erreichen:

1. Wählt man alle Gewichtungsfaktoren in der gleichen Größenordnung, so werden sich im Laufe der Optimierung *alle* Reglerelemente verkleinern. Die Folge davon sind kleine Stellgrößen, was aus dem Regelungsgesetz (3.4) deutlich wird.
2. Durch entsprechend hohe Gewichtung einzelner Reglerelemente werden diese im Verhältnis zu den andern sehr klein. Man wird nur einen unerheblichen Fehler machen, wenn man sie anschließend ganz zu Null setzt. Damit ist es z.B. möglich, dezentrale Regelungen zu entwerfen, das sind Regelungen, bei denen jede Stellgröße nur von bestimmten Zustandsgrößen beeinflusst wird.

Durch hohe Gewichtung ganzer Reglerspalten läßt sich weiterhin die unter 3.2.1 beschriebene Teil-ZVR (= unvollständige Zustandsvektorrückführung) erzeugen.

In beiden Fällen wird man eine kleine Reglernorm (Wurzel aus der Quadratsumme über alle Reglerelemente) erreichen, weshalb das Gütemaß (3.5) auch unter dem Namen *Reglernorm-Kriterium* gebraucht wird /3, 4/.

3.3 Kombination beider Gütekriterien

In den beiden vorigen Abschnitten wurden für die Entwürfe quadratisch optimaler Regler und für die Entwürfe von Zustandsrückführungen mit spezieller Reglerstruktur geeignete Gütekriterien vorgestellt. Damit es möglich ist, außer einer speziellen Reglerstruktur zusätzlich ein günstiges Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises zu erzielen, müssen beide Kriterien kombiniert werden. Es wird deshalb die Linearkombination beider Kriterien als neues Gütemaß definiert. Das Programmpaket POMIX ermöglicht es, das so entstehende Gütekriterium

$$J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$$

mit J_Q gemäß Abschnitt 5.3.1 zu minimieren.

Durch die Gewichtungsfaktoren α_Q und α_S kann über die Höhe des Beitrages jedes einzelnen Gütemaßes zum Gesamtkriterium entschieden werden. Insbesondere kann auch ein einzelnes Gütemaß allein benutzt werden, wenn der Gewichtungsfaktor des anderen Gütemaßes zu Null gewählt wird.

3.4 Die Parameterabhängigkeit der Gütekriterien

Sowohl die quadratischen Gütekriterien (3.1) - (3.3) (in der Form gemäß Abschnitt 5.3.1) als auch das Reglerstruktur-Gütekriterium (3.5) hängen von der Rückführmatrix \underline{R} ab. Wegen Gl. (2.14) gilt somit für beide Gütemaße die Funktionalbeziehung

$$J_{Q,S} = J_{Q,S} (\underline{R}(\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}; \tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)) \quad .$$

Weil die Reglermatrix \underline{R} reell ist, sind auch beide Gütekriterien reelle Funktionen der Variablen λ_{Ri} und \tilde{p}_i .

In expliziter Form können die Gütemaße direkt als Funktion der modifizierten Parametervektoren und der Eigenwerte der Regelung ausgedrückt werden. Auch für das Gesamtgütekriterium gilt dann

$$J = J(\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn} ; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad . \quad (3.6)$$

Bei dem in /3/ und /4/ angewandten Polvorgabeverfahren wurden die Eigenwerte von vorn herein fest vorgegeben und nur die Parametervektoren so bestimmt, daß das zugrundeliegende Gütemaß minimal wurde. Mit den aus der Optimierung erhaltenen Parametervektoren und den gewählten Eigenwerten wurde dann mit der in Abschnitt 2.3.4 dargestellten Vorgehensweise die Reglermatrix berechnet. In dieser Arbeit sollen nun außer den modifizierten Parametervektoren auch die Eigenwerte in die Minimierung des Gütemaßes mit einbezogen werden. Dabei wird gefordert, daß die Eigenwerte während der Optimierung innerhalb vorgegebener Bereiche in der komplexen Ebene bleiben.

Ein Überschreiten der Gebietsgrenzen wird nicht zugelassen, weil die Korrekturmaßnahme des Zurücksetzens des Eigenwerts ins Gebietsinnere einen zu großen Eingriff in die Optimierung bedeutet /7/.

4. DIE POLGEBIETE UND IHRE TRANSFORMATION IN EINEN UNBE- SCHRÄNKTEN EIGENWERTBEREICH

In dieser Arbeit soll die Polvorgabe durch eine Polgebietsvorgabe ersetzt werden. Es werden zwar wie bisher Eigenwerte (sog. Starteigenwerte) vorgegeben, die aber während der Optimierung *innerhalb* der vorgegebenen Gebiete beliebig "wandern" dürfen.

Zunächst werden im 1. Abschnitt dieses Kapitels allgemeine Aussagen über die Wahl der Polgebiete gemacht. Im 2. Abschnitt wird eine Eigenwerttransformation vorgestellt, die jedem Eigenwert innerhalb eines beschränkten Polgebietes einen transformierten Eigenwert innerhalb eines unbeschränkten Gebiets zuordnet. Danach wird die entsprechende Rücktransformation erklärt, die die transformierten Eigenwerte wieder ins vorgegebene Polgebiet zurücktransformiert. Durch die Eigenwerttransformation ergibt sich eine neue Parameterabhängigkeit der Gütekriterien, die im darauffolgenden Abschnitt beschrieben wird. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie die Gradienten des Gütemaßes bzgl. der transformierten Eigenwerte berechnet werden.

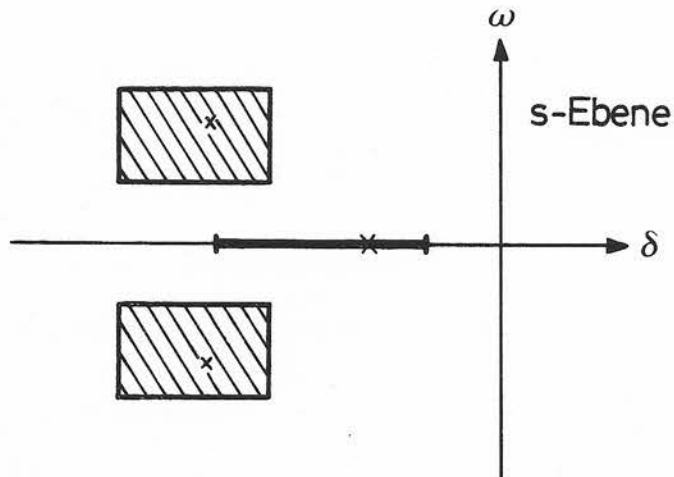
4.1 Die Polgebiete in der komplexen Ebene

Zunächst stellt sich die Frage, ob für alle Eigenwerte ein einziges oder für jeden Eigenwert ein eigenes Polgebiet vorgegeben werden soll. Es wurde sich für die zweite Alternative entschieden, da sie die allgemeinere von beiden ist: Die 1. Möglichkeit der Vorgabe eines einzigen Gebietes für alle Eigenwerte ist nämlich in der 2. Möglichkeit enthalten. Man braucht nur für jeden Eigenwert das gleiche Gebiet zu wählen, und zwar ein solches, in dem alle Pole enthalten sind.

Es wird außerdem ermöglicht, bestimmte Eigenwerte "festzuhalten", indem man ihnen nur sehr wenig Bewegungsraum läßt, und anderen Eigenwerten größere Bewegungsfreiheit zu geben, indem man größere Bereiche vorgibt.

Als nächstes muß man sich auf eine sinnvolle Geometrie für die

Polgebiete einigen. Von den in Frage kommenden Möglichkeiten, Rechteck, Kreis und Kreissektor, wurde das Rechteck gewählt. Ein einfacher Grund dafür ist, daß bei der Vorgabe der Gebietsgrenzen die kartesischen Koordinaten, die die komplexe Ebene aufspannen, beibehalten werden können.



Für einen reellen Eigenwert wird ein durch seinen Anfangs- und Endpunkt festgelegtes Intervall auf der reellen Achse, für konjugiert komplexe Eigenwerte ein durch seine Eckpunkte festgelegter Rechteckbereich vorgegeben (Eingabe der Gebietsgrenzen, siehe Beschreibung im Programmpaket POMIX /8/).

Bild 4.1: Rechtecke (bzw. Strecken) als Polgebiete

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß es prinzipiell möglich ist, auch Kreise oder Kreissektoren als Polgebiete vorzugeben. Nur muß dann mit Polarkoordinaten gearbeitet werden.

4.2 Die Eigenwerttransformation

Während die modifizierten Parametervektoren \tilde{p}_i keinen*) Beschränkungen unterworfen sind, wird von den Eigenwerten λ_{Ri} gefordert, daß sie sich während der numerischen Minimierung des Gütemaßes (3.6) nur in vorgegebenen Bereichen der komplexen Ebene bewegen. Diese numerisch schwierig zu lösende Optimierungsaufgabe mit Beschränkungen in den Variablen kann man umgehen, indem man das begrenzte Polgebiet durch eine geeignete Transformation auf einen unbeschränkten Eigenwertbereich abbildet.

*) Es ist nur zu beachten, daß zu konjugiert komplexen Eigenwerten auch konjugiert komplexe modifizierte Parametervektoren gehören und daß sich Eigenwerte und Parametervektoren während der Optimierung immer so ergeben, daß \underline{V}_R regulär wird.

a) Reeller Fall:

Diese Transformation sei zunächst für einen reellen Eigenwert erklärt. Als Polgebiet sei ein Bereich auf der reellen Achse (siehe Bild 4.2 links) vorgegeben, der links durch Re_{\min} und

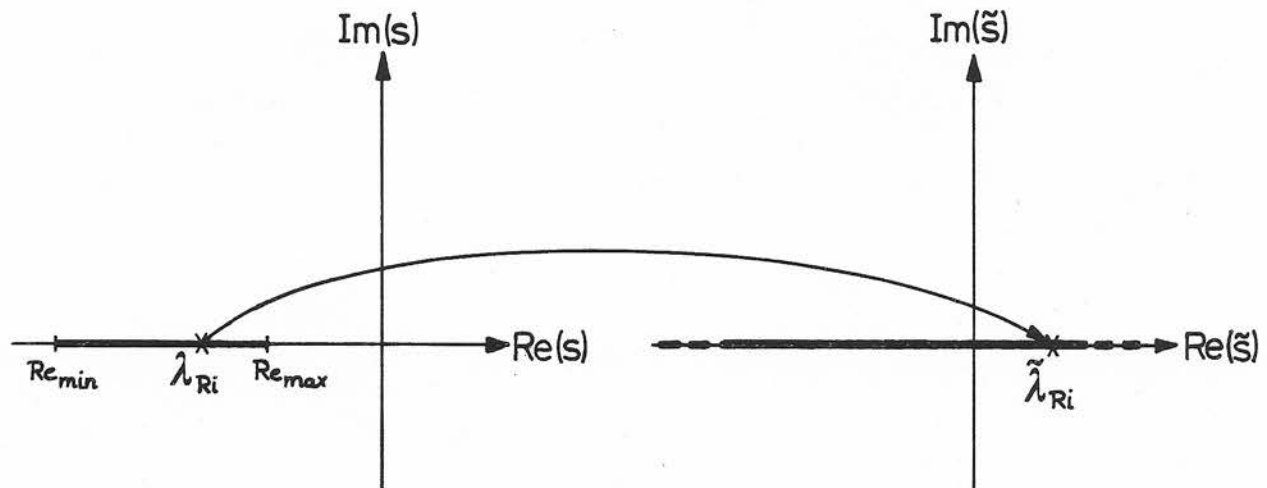


Bild 4.2: Transformation des Polgebiets eines reellen Eigenwertes auf die gesamte reelle Achse der \tilde{s} -Ebene

rechts durch Re_{\max} begrenzt wird. Mit Hilfe der Abbildungsvorschrift

$$\tilde{\lambda}_{Ri} = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_{Ri} - Re_{\min}}{Re_{\max} - \lambda_{Ri}} \quad (4.1)$$

wird dem Eigenwert λ_{Ri} des beschränkten Gebietes ein transformierter Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ des unbeschränkten Gebietes zugeordnet. Die durch Re_{\min} und Re_{\max} begrenzte Strecke wird tatsächlich auf die gesamte reelle Achse abgebildet, was durch die folgende Grenzwertbetrachtung deutlich wird: Es geht nämlich

$\tilde{\lambda}_{Ri}$ gegen $-\infty$, wenn λ_{Ri} gegen die linke Grenze Re_{\min} geht, und $\tilde{\lambda}_{Ri}$ gegen $+\infty$, wenn λ_{Ri} gegen die rechte Grenze Re_{\max} geht.

b) Komplexer Fall:

Das rechteckige Polgebiet für einen komplexen Eigenwert wird eben-

falls auf einen unbeschränkten Bereich abgebildet. Dem Original-eigenwert λ_{Ri} aus dem Rechteck wird der transformierte Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ zugeordnet, der irgendwo in der komplexen \tilde{s} -Ebene liegt (siehe Bild 4.3).

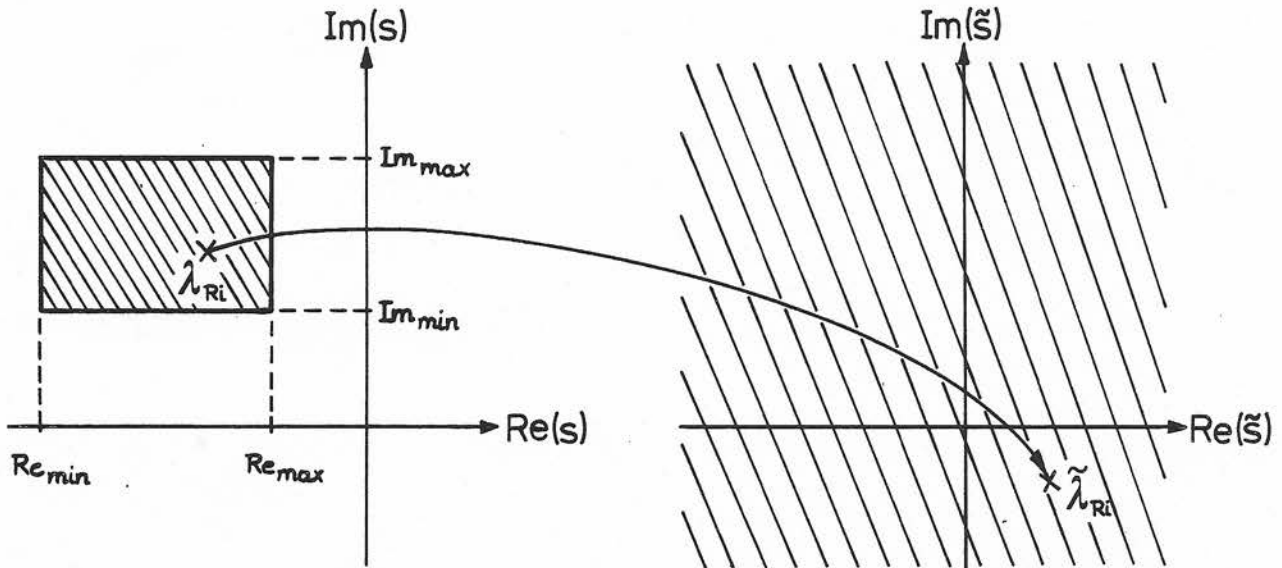


Bild 4.3: Transformation des Polgebietes eines komplexen Eigenwertes auf die gesamte komplexe \tilde{s} -Ebene

Für einen komplexen Eigenwert muß die Transformation sowohl für den Real- als auch für den Imaginärteil des Eigenwertes durchgeführt werden. Die Transformationsgleichungen, die den Original-Eigenwert $\lambda_{Ri} = \text{Re}(\lambda_{Ri}) + j \text{Im}(\lambda_{Ri})$ in den transformierten Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri} = \text{Re}(\tilde{\lambda}_{Ri}) + j \text{Im}(\tilde{\lambda}_{Ri})$ überführen, lauten ganz analog dem reellen Fall:

$$\text{Re}(\tilde{\lambda}_{Ri}) = \frac{1}{2} \ln \frac{\text{Re}(\lambda_{Ri}) - \text{Re}_{\min}}{\text{Re}_{\max} - \text{Re}(\lambda_{Ri})} \quad , \quad (4.2)$$

$$\text{Im}(\tilde{\lambda}_{Ri}) = \frac{1}{2} \ln \frac{\text{Im}(\lambda_{Ri}) - \text{Im}_{\min}}{\text{Im}_{\max} - \text{Im}(\lambda_{Ri})} \quad . \quad (4.3)$$

Re_{\min} , Re_{\max} , Im_{\min} und Im_{\max} stellen die Grenzen des rechteckigen Polgebietes dar (siehe Bild 4.3).

Anmerkung: Im Programmpaket POMIX sind die Grenzwerte Re_{\min} und Im_{\min} im Vektor EWMIN und die Werte Re_{\max} und Im_{\max} im Vektor EWMAX abgelegt (siehe /8/).

Um nicht mit Beschränkungen rechnen zu müssen, wird man vor der numerischen Minimierung des Gütemaßes die oben beschriebene Eigenwerttransformation durchführen. Nach der Optimierung müssen die Eigenwerte aber wieder in die vorgegebenen Polgebiete zurücktransformiert werden. Dazu werden im nächsten Abschnitt die Umkehrfunktionen zu den Gln. (4.1) bis (4.3) angegeben.

4.3 Die Eigenwertrücktransformation

a) Reeller Fall:

Löst man Gl. (4.1) nach dem Originaleigenwert λ_{Ri} auf, so ergibt sich

$$\lambda_{Ri} = Re_{\min} + (Re_{\max} - Re_{\min}) \cdot \frac{e^{\tilde{\lambda}_{Ri}}}{e^{\tilde{\lambda}_{Ri}} + e^{-\tilde{\lambda}_{Ri}}} [= f_i(\tilde{\lambda}_{Ri})] \quad (4.4)$$

Ganz gleich, welchen Wert der transformierte Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ annimmt, der Originaleigenwert λ_{Ri} verläßt nie das Gebiet zwischen den Grenzen Re_{\min} und Re_{\max} auf der reellen Achse:

Für $\tilde{\lambda}_{Ri} \rightarrow -\infty$ geht $\lambda_{Ri} \rightarrow Re_{\min}$ (linke Grenze) und

für $\tilde{\lambda}_{Ri} \rightarrow +\infty$ geht $\lambda_{Ri} \rightarrow Re_{\max}$ (rechte Grenze).

b) Komplexer Fall:

Für komplexe Eigenwerte muß auch die Rücktransformation für Real- und Imaginärteil getrennt durchgeführt werden. Es ergeben sich entsprechend dem reellen Fall die Beziehungen

$$Re(\lambda_{Ri}) = Re_{\min} + (Re_{\max} - Re_{\min}) \cdot \frac{e^{Re(\tilde{\lambda}_{Ri})}}{e^{Re(\tilde{\lambda}_{Ri})} + e^{-Re(\tilde{\lambda}_{Ri})}} \quad (4.5)$$

$$\operatorname{Im}(\lambda_{Ri}) = \operatorname{Im}_{\min} + (\operatorname{Im}_{\max} - \operatorname{Im}_{\min}) \cdot \frac{e^{\operatorname{Im}(\tilde{\lambda}_{Ri})}}{e^{\operatorname{Im}(\tilde{\lambda}_{Ri})} + e^{-\operatorname{Im}(\tilde{\lambda}_{Ri})}} \quad (4.6)$$

Nach der Rücktransformation liegt auch hier der Eigenwert λ_{Ri} wieder im ursprünglichen Polgebiet, ganz gleich wo der transformierte Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ während der Optimierung in der \tilde{s} -Ebene hingewandert ist.

4.4 Neue Parameterabhängigkeit der Gütekriterien

Aus den Gln. (4.4) bis (4.6) wird die Abhängigkeit des Eigenwertes λ_{Ri} von dem transformierten Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ deutlich. Es gilt also

$$\lambda_{Ri} = f(\tilde{\lambda}_{Ri}) \quad .$$

Wegen dieser Abhängigkeit kann das Gütekriterium nach Gl. (3.6) nun als Funktion der modifizierten Parametervektoren und der transformierten Eigenwerte dargestellt werden, also

$$J = J(f_1(\tilde{\lambda}_{R1}), \dots, f_n(\tilde{\lambda}_{Rn}); \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad \text{oder}$$

$$J = \bar{J}(\tilde{\lambda}_{R1}, \dots, \tilde{\lambda}_{Rn}; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad (4.7)$$

Nun lautet die Aufgabe, diejenigen modifizierten Parametervektoren \tilde{p}_i und diejenigen transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ zu finden, für die das zugrundeliegende Gütemaß minimal wird.

Bei dieser Optimierungsaufgabe sind nun die Variablen keinen Beschränkungen mehr unterworfen (siehe Anmerkung S. 23).

Im 6. Kapitel wird ein numerisches Gradientenverfahren beschrieben, das die Minimumsuche mit Hilfe der Parametervektorgradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i}$ und der Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$ bzgl. der transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ durchführt.

Weil im nächsten Kapitel aber nicht die Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$, sondern die Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}}$ bzgl. der Originaleigenwerte λ_{Ri} hergeleitet werden, zeigt der folgende Abschnitt dieses Kapitels, wie auf einfache Weise die transformierten Eigenwertgradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$ mit Hilfe der "originalen" Eigenwertgradienten $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}}$ berechnet werden können.

4.5 Die Eigenwertgradiententransformation

Für die Ableitung des Gütekriteriums J nach dem transformierten Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ gilt, sofern sie existiert (siehe Abschnitt 5.1.1):

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}} = \frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}} \cdot \frac{\partial \lambda_{Ri}}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}} \quad (4.8)$$

a) Reeller Fall:

Durch Differentiation von Gl. (4.4) nach $\tilde{\lambda}_{Ri}$ erhält man die Ableitung $\frac{\partial \lambda_{Ri}}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$. Es ergibt sich für den reellen Fall

$$\frac{\partial \lambda_{Ri}}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}} = (Re_{\max} - Re_{\min}) \cdot \frac{2}{(e^{\tilde{\lambda}_{Ri}} + e^{-\tilde{\lambda}_{Ri}})^2} \quad (4.9)$$

b) Komplexer Fall:

Für den komplexen Fall erhält man durch Ableiten der Gln. (4.5) und (4.6) ganz entsprechend

$$\frac{\partial \hat{\lambda}_{Ri}}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = (Re_{\max} - Re_{\min}) \cdot \frac{2}{(e^{\hat{\lambda}_{Ri}} + e^{-\hat{\lambda}_{Ri}})^2} \quad \text{und} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = (Im_{\max} - Im_{\min}) \cdot \frac{2}{(e^{\hat{\lambda}_{R,i+1}} + e^{-\hat{\lambda}_{R,i+1}})^2}, \quad (4.11)$$

wobei $\lambda_{Ri} = \hat{\lambda}_{Ri} + j \hat{\lambda}_{R,i+1}$ und $\lambda_{R,i+1} = \hat{\lambda}_{Ri} - j \hat{\lambda}_{R,i+1}$

sowie $\tilde{\lambda}_{Ri} = \hat{\lambda}_{Ri} + j \hat{\lambda}_{R,i+1}$ und $\tilde{\lambda}_{R,i+1} = \hat{\lambda}_{Ri} - j \hat{\lambda}_{R,i+1}$ gilt.

Um die transformierten Eigenwertgradienten zu erhalten, braucht man also nur die originalen Eigenwertgradienten mit dem entsprechenden Term zu multiplizieren.

Im nächsten Kapitel werden nun die Gradienten bzgl. der modifizierten Parametervektoren \tilde{p}_i und bzgl. der Originaleigenwerte λ_{Ri} analytisch berechnet.

5. DIE GRADIENTEN DER GÜTEKRITERIEN BZGL. IHRER VARIABLEN

Für das später beschriebene numerische Gradientenverfahren werden die Gradienten des zugrundeliegenden Gütemaßes bzgl. seiner Variablen benötigt.

Nach einigen einleitenden Vorbemerkungen in Abschnitt 5.1 werden in 5.2 die Gradienten zum Reglerstruktur-Gütekriterium (3.5) und in 5.3 die Gradienten zum quadratischen Gütekriterium (3.1) analytisch berechnet. Dabei werden jeweils zuerst die Ableitungen nach den modifizierten Parametervektoren und dann die Ableitungen nach den Originaleigenwerten der Regelung hergeleitet, wobei die Gradientengleichungen für alle der in Kapitel 2 aufgeführten Fälle gelten sollen. (Wie man zu den transformierten EW-Gradienten gelangt, wurde bereits im vorigen Kapitel beschrieben.) Bei der Berechnung wird eine einheitliche formelmäßige Struktur der beiden Gradiententypen angestrebt, damit eine einfache programmtechnische Realisierung ermöglicht wird.

In Abschnitt 5.4 wird gezeigt, wie alle Gradienten aufgrund ihrer Strukturgleichheit geeignet zusammengefaßt werden können.

5.1 Vorbemerkungen

5.1.1 Reelle Berechnung der Gradienten bzgl. komplexer Variablen

Um das Rechnen mit komplexen Größen zu vermeiden, werden im komplexen Fall die beiden Gütemaße nach Real- und Imaginärteil getrennt abgeleitet. Daraus können dann über die Beziehungen (siehe /4/, Seite 33)

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(\tilde{p}_i)} - j \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(\tilde{p}_i)} \right] \quad (5.1)$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{Ri})} - j \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(\lambda_{Ri})} \right] \quad (5.2)$$

die Gradienten bzgl. der komplexen Variablen \tilde{p}_i und λ_{Ri} berech-

net werden. Diese Gleichungen gelten, weil alle komplexen Größen konjugiert komplex auftreten.

Achtung: Die obigen Ableitungen der Funktion J nach den komplexen Variablen existieren nur für diejenigen \tilde{p}_i bzw. λ_{Ri} , für die die Cauchy-Riemann'schen Dgln. erfüllt sind. Da der Funktionswert J reell ist, haben diese Dgln. die spezielle Form

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(\tilde{p}_i)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(\tilde{p}_i)} = 0 \\ \text{bzw.} \\ \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{Ri})} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(\lambda_{Ri})} = 0 \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Die Aufgabe besteht darin, diejenigen Variablen \tilde{p}_i und λ_{Ri} zu finden, für die das Gütemaß J minimal wird. Nun sind im Minimum aber gerade die Bedingungen (5.3) erfüllt, weshalb die Gleichungen (5.1) und (5.2) gültig sind.

5.1.2 Die Matrix $(\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T$

Da in den nachfolgenden Abschnitten dieses Kapitels die Matrix $(\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T$ des öfteren auftreten wird, soll diese zunächst etwas näher betrachtet werden.

Die reelle Matrix $\hat{\underline{V}}_R$ entsteht durch Multiplikation der Original-Rechtseigenvektormatrix \underline{V}_R mit der Blockdiagonalmatrix \underline{U} nach Gl. (2.8) von rechts.

Aus der zugrundeliegenden Transformationsgleichung

$$\hat{\underline{V}}_R = \underline{V}_R \cdot \underline{U}$$

ergibt sich

$$(\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T = [\underline{U}^{-1} \cdot \underline{V}_R^{-1}]^T = (\underline{V}_R^{-1})^T \cdot (\underline{U}^{-1})^T$$

$(\underline{V}_R^{-1})^T$ ist aber gerade die Linkseigenvektormatrix \underline{W}_R (siehe

Es gilt also :

$$(\hat{V}_R^{-1})^T = [\dots, \underline{w}_{Rj}, \dots, 2 \operatorname{Re}(\underline{w}_{Ri}), -2 \operatorname{Im}(\underline{w}_{Ri}), \dots] ,$$

wobei exemplarisch \underline{w}_{Rj} als reell und \underline{w}_{Ri} als konjugiert komplex zu $\underline{w}_{R,i+1} = \underline{w}_{Ri}^*$ angenommen wurden.

Der zum reellen Eigenwert λ_{Rj} gehörende Linkseigenvektor \underline{w}_{Rj} ist in der j -ten Spalte der Matrix $(\hat{V}_R^{-1})^T$ enthalten, weshalb die Gleichung

$$\underline{w}_{Rj} = (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j \tag{5.5}$$

gilt.

Bezeichnen wir mit $\hat{\underline{w}}_{Ri}$ den Realteil und mit $\hat{\underline{w}}_{R,i+1}$ den Imaginärteil des komplexen Linkseigenvektors \underline{w}_{Ri} , so gelten für den komplexen Fall die Beziehungen

$$2 \hat{\underline{w}}_{Ri} = (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i \tag{5.6}$$

und

$$-2 \hat{\underline{w}}_{R,i+1} = (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} . \tag{5.7}$$

5.1.3 Abkürzende Schreibweisen

Die Parametervektor-Gradienten werden in dieser Arbeit mit "PV-Gradienten" abgekürzt. Es handelt sich dabei um die Ableitung des Gütemaßes nach den *modifizierten* Parametervektoren. Damit gelten die folgenden Gradientenberechnungen für alle 6 der in Kapitel 2 aufgeführten Fälle.

Unter den "EW-Gradienten" werden in dieser Arbeit die Ableitungen des Gütemaßes nach den *originalen* (nicht transformierten) Eigenwerten verstanden.

5.2 Die Gradienten zum Reglerstruktur-Gütekriterium

Der besseren Übersichtlichkeit wegen sei zunächst nochmals das Reglerstruktur-Gütekriterium (3.5) aufgeführt. Es lautet:

$$J_S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n g_{kl} r_{kl}^2, \quad g_{kl} \geq 0 \quad (5.8)$$

5.2.1 PV-Gradienten zu J_S

Bildet man die partielle Ableitung des Reglerstruktur-Gütekriteriums (5.8) nach dem j -ten Element des i -ten modifizierten Parametervektors \tilde{p}_i , so erhält man:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n g_{kl} r_{kl} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \quad (5.9)$$

Drückt man das Reglerelement r_{kl} aus durch

$$r_{kl} = \underline{e}_k^T \underline{R} \underline{e}_l \quad (5.10)$$

wobei \underline{e}_k und \underline{e}_l Einheitsvektoren sind, so kann man für $\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}}$ auch schreiben:

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underline{e}_k^T \frac{\partial \underline{R}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \underline{e}_l \quad .$$

Um im folgenden nur mit reellen Größen rechnen zu müssen, wird \underline{R} nicht durch $\underline{P} \cdot \underline{V}_R^{-1}$, sondern gemäß Gl. (2.13) durch das Produkt der reellen Matrizen $\hat{\underline{P}}$ und $\hat{\underline{V}}_R^{-1}$ ersetzt und \tilde{p}_{ji} zunächst als reell angenommen.

a) Reeller Fall:

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} &= \underline{e}_k^T \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} (\hat{\underline{P}} \hat{\underline{V}}_R^{-1}) \underline{e}_l \\ &= \underline{e}_k^T \left[\frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \hat{\underline{V}}_R^{-1} + \hat{\underline{P}} \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R^{-1}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \right] \underline{e}_l \\ &= \underline{e}_k^T \left[\frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \hat{\underline{V}}_R^{-1} + \hat{\underline{P}} (-\hat{\underline{V}}_R^{-1} \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} \hat{\underline{V}}_R^{-1}) \right] \underline{e}_l \end{aligned}$$

wobei die Differentiationsregel

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \underline{M}^{-1}(\alpha) = -\underline{M}^{-1} \frac{\partial \underline{M}}{\partial \alpha} \underline{M}^{-1} \quad (5.11)$$

Verwendung fand.

Durch nochmaliges Anwenden von Gl. (2.13) vereinfacht sich die Ableitung $\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}}$ zu

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underline{e}_k^T \left[\frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \tilde{p}_{ji}} - \underline{R} \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} \right] \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \quad (5.12)$$

Unter Berücksichtigung der für den reellen Fall gültigen Gleichungen (2.10a) und (2.12a) ergeben sich die Ableitungen

$$\frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \tilde{p}_{ji}} \text{ und } \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} \text{ zu}$$

$$\frac{\partial \hat{\underline{P}}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} [\dots, \underline{p}_i, \dots] = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} [\dots, \overset{i\text{-te Spalte}}{\underline{M}_i^k} \tilde{p}_i, \dots] = [0, \dots, 0, \underline{M}_i^k \underline{e}_j, 0, \dots, 0] = \underline{M}_i^k \underline{e}_j \underline{e}_i^T$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} [\dots, \underline{v}_{Ri}, \dots] = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} [\dots, \underline{K}_i \tilde{p}_i + c_{oi} \underline{v}_v, \dots] = \\ &= [\underline{0}, \dots, \underline{0}, \underline{K}_i \underline{e}_j, \underline{0}, \dots, \underline{0}] = \underline{K}_i \underline{e}_j \underline{e}_i^T \end{aligned}$$

Anmerkung: In den reellen Fällen A und C (siehe Abschnitt 2.3) ist jeweils $c_{oi} = 0$. Nur falls der Regelungseigenwert λ_{Ri} mit einem nichtsteuerbaren Streckeneigenwert λ_v zusammenfällt (Fall E), geht der Eigenvektor \underline{v}_v zum Eigenwert λ_v additiv in die Berechnung von \underline{v}_{Ri} ein, denn dann ist $c_{oi} = 1$. Der Eigenvektor \underline{v}_v hängt aber nicht von \tilde{p}_{ji} ab, weshalb er in der Ableitung nicht mehr auftritt.

Setzt man diese Ableitungen in Gl. (5.12) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underbrace{\underline{e}_k^T}_{\underline{a}^T} \underbrace{[\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]}_{\underline{b}} \underline{e}_j \cdot \underbrace{\underline{e}_i^T \hat{V}_R^{-1}}_{\underline{c}^T} \underbrace{\underline{e}_l}_{\underline{d}}$$

Wegen der Gültigkeit der Beziehung

$$\underline{a}^T \underline{b} \cdot \underline{c}^T \underline{d} = \underline{b}^T \underline{a} \cdot \underline{d}^T \underline{c} \quad (5.13)$$

kann die letzte Gleichung umgeschrieben werden in die Form

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underline{e}_j^T [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \underline{e}_k \cdot \underline{e}_l^T [\hat{V}_R^{-1}]^T \underline{e}_i$$

und mit Gl. (5.5) folgt

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underline{e}_j^T [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \underline{e}_k \cdot \underline{e}_l^T \underline{w}_{Ri}$$

Diese Gleichung in Gl. (5.9) eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_{ji}} &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{g_{kl} r_{kl} \underline{e}_j^T [\underline{M}_i^k \quad -\underline{R} \quad \underline{K}_i]^T \underline{e}_k \underline{e}_l^T \underline{w}_{Ri}\} = \\ &= \underline{e}_j^T [\underline{M}_i \quad -\underline{R} \quad \underline{K}_i]^T \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{g_{kl} r_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l^T\}}_{\underline{\bar{R}}} \cdot \underline{w}_{Ri} \end{aligned}$$

Der Summenausdruck $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{g_{kl} r_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l^T\}$ ist gleichbedeutend mit der Matrix $(g_{kl} r_{kl})$ und wird im folgenden mit $\underline{\bar{R}}$ abgekürzt:

$$\underline{\bar{R}} := \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{g_{kl} r_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l^T\} = (g_{kl} r_{kl})^* \quad (5.14)$$

Die Matrix $\underline{\bar{R}}$ enthält also die mit den Faktoren g_{kl} gewichteten Reglerelemente r_{kl} der Rückführmatrix \underline{R} und ist somit reell.

Ordnet man schließlich die partiellen Ableitungen nach allen Elementen des i -ten Parametervektors zum Gradientenvektor

$$\frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_i} := \begin{bmatrix} \frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_{1i}} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_{pi}} \end{bmatrix}$$

untereinander an, so folgt

$$\underline{\underline{\frac{\partial J_S}{\partial \tilde{p}_i}}} = [\underline{M}_i^k \quad -\underline{R} \quad \underline{K}_i]^T \cdot \underline{\bar{R}} \cdot \underline{w}_{Ri} \quad (5.15)$$

*) Jeder der $p \cdot n$ Matrixsummanden $g_{kl} r_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l^T$ ($k = 1, \dots, p; l = 1, \dots, n$) besitzt (jeweils an einer anderen Position) nur ein von Null verschiedenes Element.

b) Komplexer Fall:

b1) 1. Berechnungsmethode

Für die Berechnung der PV-Gradienten im komplexen Fall kann von Gl. (5.1) ausgegangen werden. Es braucht das Gütekriterium (3.5) nur nach dem Real- und Imaginärteil des modifizierten Parametervektors $\tilde{p}_i = \hat{p}_i + j \hat{p}_{i+1}$ abgeleitet zu werden, womit man wiederum nur mit reellen Größen rechnen muß.

Ganz analog zu Gl. (5.12) ergibt sich für die partielle Ableitung des Reglerelements r_{kl} nach dem Real- bzw. Imaginärteil des Parametervektor-Elements \tilde{p}_{ji}

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \tilde{p}_{ji}} = \underline{e}_k^T \left[\frac{\partial \underline{P}}{\partial \tilde{p}_{ji}} - \underline{R} \frac{\partial \underline{\hat{V}}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} \right] \cdot \underline{\hat{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \quad (5.16)$$

bzw.

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \hat{p}_{j,i+1}} = \underline{e}_k^T \left[\frac{\partial \underline{P}}{\partial \hat{p}_{j,i+1}} - \underline{R} \frac{\partial \underline{\hat{V}}_R}{\partial \hat{p}_{j,i+1}} \right] \underline{\hat{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \quad (5.17)$$

Die darin auftretenden Ableitungen berechnen sich mit den Gln. (2.10b,c) und (2.12b,c) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \tilde{p}_{ji}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} \left[\dots, \hat{p}_i, \hat{p}_{i+1}, \dots \right] = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} \left[\dots, \hat{M}_{-i}^k \hat{p}_i - \hat{M}_{-i+1}^k \hat{p}_{i+1}, \hat{M}_{-i+1}^k \hat{p}_i + \hat{M}_{-i}^k \hat{p}_{i+1}, \dots \right] = \\ &= \left[\underline{0}, \dots, \underline{0}, \hat{M}_{-i}^k \underline{e}_j, \hat{M}_{-i+1}^k \underline{e}_j, \underline{0}, \dots, \underline{0} \right] = \hat{M}_{-i}^k \underline{e}_j \underline{e}_i^T + \hat{M}_{-i+1}^k \underline{e}_j \underline{e}_{i+1}^T \quad (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\hat{V}}_R}{\partial \tilde{p}_{ji}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} \left[\dots, \hat{v}_{Ri}, \hat{v}_{R,i+1}, \dots \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_{ji}} \left[\dots, \hat{K}_{-i} \hat{p}_i - \hat{K}_{-i+1} \hat{p}_{i+1} + c_{oi} \hat{v}_v, \hat{K}_{-i+1} \hat{p}_i + \hat{K}_{-i} \hat{p}_{i+1} + c_{oi} \hat{v}_{v+1}, \dots \right] = \\ &= \left[\underline{0}, \dots, \underline{0}, \hat{K}_{-i} \underline{e}_j, \hat{K}_{-i+1} \underline{e}_j, \underline{0}, \dots, \underline{0} \right] = \hat{K}_{-i} \underline{e}_j \underline{e}_i^T + \hat{K}_{-i+1} \underline{e}_j \underline{e}_{i+1}^T \quad (5.19) \end{aligned}$$

Ganz entsprechend ergibt sich:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{p}_{j,i+1}} = -\hat{M}_{i+1}^k e_j e_i^T + \hat{M}_i^k e_j e_{i+1}^T \quad \text{und} \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \hat{V}_R}{\partial \hat{p}_{j,i+1}} = -\hat{K}_{i+1} e_j e_i^T + \hat{K}_i e_j e_{i+1}^T \quad . \quad (5.21)$$

Anmerkung: Die beiden additiven Terme $c_{oi} \hat{v}_v$ und $c_{oi} \hat{v}_{v+1}$ in Gl. (5.19) treten nur im Fall F (siehe Abschnitt 2.3) auf, in den anderen komplexen Fällen ist $c_{oi} = 0$.

Setzt man die Ableitungen (5.18) und (5.19) in Gl. (5.16) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \hat{p}_{ji}} &= e_k^T \left[(\hat{M}_i^k e_j e_i^T + \hat{M}_{i+1}^k e_j e_{i+1}^T) - \hat{R} (\hat{K}_i e_j e_i^T + \hat{K}_{i+1} e_j e_{i+1}^T) \right] \hat{V}_R^{-1} e_l \\ &= \underbrace{e_k^T}_{\underline{a}^T} \underbrace{(\hat{M}_i^k - \hat{R} \hat{K}_i)}_{\underline{b}} e_j \underbrace{e_i^T}_{\underline{c}^T} \underbrace{\hat{V}_R^{-1}}_{\underline{d}} e_l + \underbrace{e_k^T}_{\underline{a}^T} \underbrace{(\hat{M}_{i+1}^k - \hat{R} \hat{K}_{i+1})}_{\underline{b}} e_j \underbrace{e_{i+1}^T}_{\underline{c}^T} \underbrace{\hat{V}_R^{-1}}_{\underline{d}} e_l \end{aligned}$$

Mit Anwendung der Beziehung (5.13) folgt daraus

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \hat{p}_{ji}} = e_j^T (\hat{M}_i^k - \hat{R} \hat{K}_i)^T e_k e_l^T (\hat{V}_R^{-1})^T e_i + e_j^T (\hat{M}_{i+1}^k - \hat{R} \hat{K}_{i+1})^T e_k e_l^T (\hat{V}_R^{-1})^T e_{i+1} .$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (5.6) und (5.7), so ergibt sich mit Gl. (5.9) für den Gradienten $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_{ji}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_{ji}} &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{ g_{kl} r_{kl} (\hat{M}_i^k - \hat{R} \hat{K}_i)^T e_k e_l^T \cdot 2\hat{w}_{Ri} + \\ &\quad + g_{kl} r_{kl} (\hat{M}_{i+1}^k - \hat{R} \hat{K}_{i+1})^T e_k e_l^T \cdot (-2\hat{w}_{R,i+1}) \} . \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise (5.14) erhält man daraus für den Parametervektorgradienten:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i} = (\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i)^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{Ri} - (\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1})^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{R,i+1} \quad (5.22)$$

Ganz entsprechend erhält man

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_{i+1}} = -(\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1})^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{Ri} - (\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i)^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{R,i+1} \quad (5.23)$$

wenn man die Ableitungen (5.20) und (5.21) in Gl. (5.17) einsetzt und geeignet umformt.

b2) 2. Berechnungsmethode

Die Gradienten bzgl. Real- und Imaginärteil können auch auf eine andere Art berechnet werden. Zur Kontrolle der Gleichungen (5.22) und (5.23) soll nun dieser zweite Weg der Herleitung eingeschlagen werden, der wegen seiner Einfachheit auch für die Gradientenberechnungen in den folgenden Abschnitten verwendet wird.

Im Minimum, d.h. unter der Voraussetzung (5.3), ist die für den reellen Fall hergeleitete Ableitung (5.15) auch dann gültig, wenn der modifizierte Parametervektor $\tilde{\underline{p}}_i$ komplex ist - nur liegt dann keine reelle Darstellungsform vor.

Da die Gütekriterien reelle Funktionen von $\tilde{\underline{p}}_i$ und λ_{Ri} sind, folgen aus Gl. (5.1) die Beziehungen /4/

$$\frac{\partial J}{\partial \text{Re}(\tilde{\underline{p}}_i)} = \frac{\partial J}{\partial \hat{\underline{p}}_i} = 2 \text{Re} \left(\frac{\partial J}{\partial \tilde{\underline{p}}_i} \right) \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \text{Im}(\hat{\underline{p}}_i)} = \frac{\partial J}{\partial \hat{\underline{p}}_{i+1}} = -2 \text{Im} \left(\frac{\partial J}{\partial \hat{\underline{p}}_i} \right) \quad (5.25)$$

Gelingt es nun, die allgemeingültige Gleichung (5.15) in Real- und Imaginärteil aufzuspalten, so können daraus die Gradienten $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i}$ und $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_{i+1}}$ leicht bestimmt werden.

Es gilt nach Gl. (5.15) bei komplexem $\hat{\underline{p}}_i$ und somit auch komplexen \underline{M}_i^k , \underline{K}_i und \underline{w}_{Ri} :

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i} \right) + j \text{Im} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i} \right) &= \\ &= \left[\text{Re} \{ [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \} + j \text{Im} \{ [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \} \right] \cdot \bar{\underline{R}} \cdot \{ \text{Re}(\underline{w}_{Ri}) + j \text{Im}(\underline{w}_{Ri}) \} \quad (5.26) \end{aligned}$$

Für den Real- und den Imaginärteil der transponierten Matrixdifferenz $(\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i)$ ergeben sich die Beziehungen /3/

$$\text{Re} \{ [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \} = [\text{Re}(\underline{M}_i^k) - \underline{R} \text{Re}(\underline{K}_i)]^T = (\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i)^T$$

und

$$\text{Im} \{ [\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i]^T \} = [\text{Im}(\underline{M}_i^k) - \underline{R} \text{Im}(\underline{K}_i)]^T = (\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1})^T$$

Anmerkung: \underline{R} und $\bar{\underline{R}}$ sind reelle Matrizen!

Diese in Gl. (5.26) eingesetzt und ausmultipliziert, liefert für den Realteil des PV-Gradienten

$$\text{Re} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i} \right) = (\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i)^T \bar{\underline{R}} \hat{\underline{w}}_{Ri} - (\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1})^T \bar{\underline{R}} \hat{\underline{w}}_{R,i+1}$$

und für den Imaginärteil

$$\text{Im} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\underline{p}}_i} \right) = (\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1})^T \bar{\underline{R}} \hat{\underline{w}}_{Ri} + (\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i)^T \bar{\underline{R}} \hat{\underline{w}}_{R,i+1}$$

Mit den Gleichungen (5.24) und (5.25) folgt hiermit für die Ableitungen nach Real- und Imaginärteil:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_i} = (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{R} \cdot 2 \hat{w}_{Ri} - (\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{R} \cdot 2 \hat{w}_{R,i+1}$$

und

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_{i+1}} = -(\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{R} \cdot 2 \hat{w}_{Ri} - (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{R} \cdot 2 \hat{w}_{R,i+1} \cdot$$

Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie nach der 1. Berechnungsmethode (vgl. Gln. (5.22) und (5.23)). Die beiden Gleichungen unterscheiden sich durch den Faktor 2 von der Struktur der Gl. (5.15) für den reellen Fall.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.5) - (5.7) können die Gradientengleichungen in einer anderen Form geschrieben werden, womit die Strukturgleichheit wieder hergestellt ist. Es ergibt sich im reellen Fall

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_j} = (\hat{M}_j^k - \underline{R} \hat{K}_j)^T \bar{R} (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j \quad (5.27)$$

und im komplexen Fall

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_i} = (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{R} (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + (\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{R} (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_{i+1}} = -(\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{R} (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{R} (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}, \quad (5.29)$$

wobei im reellen Fall zur Unterscheidung vom komplexen Fall der Index j benutzt wurde.

5.2.2 EW-Gradienten zu J_S

Hier wird nun das Reglerstruktur-Gütekriterium nach dem Original-Eigenwert λ_{Ri} abgeleitet. Dabei wird versucht, die EW-Gradienten auf eine den PV-Gradienten ähnliche Struktur zu bringen.

Anmerkung: Bei Übereinstimmung des Eigenwertes λ_{Ri} mit einem nichtsteuerbaren Streckeneigenwert λ_j (Fälle E und F in Abschnitt 2.3) ist der zugehörige EW-Gradient gleich Null. Im Programmpaket POMIX wird dies berücksichtigt. Die EW-Gradienten brauchen daher nur für die noch verbleibenden Fälle A, B, C und D hergeleitet zu werden, für die sich die Gleichungen (2.12a-c) zu

$$\underline{v}_{Ri} = \underline{K}_i \underline{\tilde{p}}_i \quad , \quad (5.30)$$

$$\hat{v}_{Ri} = \hat{K}_i \hat{\tilde{p}}_i - \hat{K}_{i+1} \hat{\tilde{p}}_{i+1} \quad (5.31)$$

und

$$\hat{v}_{R,i+1} = \hat{K}_{i+1} \hat{\tilde{p}}_i + \hat{K}_i \hat{\tilde{p}}_{i+1} \quad (5.32)$$

vereinfachen, weil der Koeffizient c_{oi} jeweils gleich Null ist.

Ganz analog zu Gl. (5.9) ergibt sich für die Ableitung des Gütemaßes (5.8) nach dem Eigenwert λ_{Ri} der Regelung:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n g_{kl} r_{kl} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}} \quad . \quad (5.33)$$

Mit Gl. (5.10) folgt für $\frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}}$:

$$\frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}} = \underline{e}_k^T \frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{e}_l \quad .$$

Nun wird wieder eine Fallunterscheidung gemacht. Der Eigenwert λ_{Ri} wird zunächst als reell angenommen.

a) Reeller Fall

Durch Einsetzen von Gl. (2.13) in die letzte Gleichung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}} &= \underline{e}_k^T \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_{Ri}} (\hat{\underline{P}} \cdot \hat{\underline{V}}_R^{-1}) \underline{e}_l \\ &= \underline{e}_k^T \cdot \hat{\underline{P}} \cdot \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R^{-1}}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{e}_l \end{aligned}$$

und daraus mit der Differentiationsregel (5.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}} &= \underline{e}_k^T \hat{\underline{P}} \cdot (-\hat{\underline{V}}_R^{-1} \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R}{\partial \lambda_{Ri}} \hat{\underline{V}}_R^{-1}) \cdot \underline{e}_l \\ &= \underline{e}_k^T \left[-\underline{R} \frac{\partial \hat{\underline{V}}_R}{\partial \lambda_{Ri}} \right] \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \\ &= -\underline{e}_k^T \cdot \underline{R} \cdot \left[\underline{0}, \dots, \underline{0}, \frac{\partial}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{v}_{Ri}(\lambda_{Ri}), \underline{0}, \dots, \underline{0} \right] \cdot \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \end{aligned}$$

Setzt man Gl. (2.11a) in Gl. (5.30) ein, so folgt in den Fällen A und C für den Rechtseigenvektor

$$\underline{v}_{Ri} = (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B}_i \tilde{\underline{p}}_i$$

und für die Ableitung des Reglerelementes r_{kl} nach λ_{Ri} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{kl}}{\partial \lambda_{Ri}} &= -\underline{e}_k^T \cdot \underline{R} \cdot \left[\underline{0}, \dots, \underline{0}, \frac{\partial}{\partial \lambda_{Ri}} \{ (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B}_i \tilde{\underline{p}}_i \}, \underline{0}, \dots, \underline{0} \right] \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \\ &= -\underline{e}_k^T \underline{R} \left[\underline{0}, \dots, \underline{0}, -(-\underline{I}_n) \cdot (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-2} \underline{B}_i \tilde{\underline{p}}_i, \underline{0}, \dots, \underline{0} \right] \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \\ &= \underline{e}_k^T \left[-\underline{R} (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{v}_{Ri} \right] \underline{e}_l^T \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{e}_l \end{aligned} \quad (5.34)$$

Ganz analog zur Schreibweise

$$\underline{K}_i := (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B}_i$$

wird nun die Abkürzung

$$\underline{q}_i := (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{v}_{Ri} \quad (5.35)$$

eingeführt. Damit kann der EW-Gradient nach Gl. (5.33) in der Form

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \{ g_{kl} r_{kl} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \underline{e}_k^T \\ \underline{a}^T \end{array} \right]}_{\underline{a}^T} \underbrace{(-\underline{R} \underline{q}_i)}_{\underline{b}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} \underline{e}_i^T \hat{\underline{V}}_R^{-1} \\ \underline{c}^T \end{array} \right]}_{\underline{c}^T} \underbrace{\underline{e}_l]}_{\underline{d}} \} .$$

geschrieben werden.

Nach Anwendung der Beziehung (5.13) und unter Berücksichtigung der Abkürzung (5.14) ergibt sich für den EW-Gradienten schließlich

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} = [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \cdot \underline{\bar{R}} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i$$

oder mit Gl. (5.5)

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} = [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \underline{\bar{R}} \cdot \underline{w}_{Ri} \quad (5.36)$$

b) Komplexer Fall

Prinzipiell können die Gradienten bzgl. komplexer Eigenwerte auf beide der bei den PV-Gradienten beschriebenen Arten berechnet werden. Hier wird der zweite Weg der Herleitung gewählt, da die Ableitungen der reell dargestellten Rechtseigenvektoren $(\hat{\underline{v}}_{Ri}, \hat{\underline{v}}_{R,i+1})$ nach Real- und Imaginärteil des Eigenwertes λ_{Ri} sehr aufwendig werden würden.

Weil J eine reelle Funktion ist, folgen aus Gl. (5.2) die zu den Gleichungen (5.24) und (5.25) analogen Beziehungen

$$\frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{Ri})} = \frac{J}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}} \right] \quad (5.37)$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}(\lambda_{Ri})} = \frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = -2 \operatorname{Im} \left[\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}} \right] \quad (5.38)$$

Die Ableitungen von J_S nach dem Real- und Imaginärteil von λ_{Ri} können demnach aus der allgemeingültigen Gleichung (5.36) gewonnen werden, wenn man diese in Real- und Imaginärteil aufspaltet.

Zunächst werden in der oben eingeführten Gleichung

$$\underline{q}_i = (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{v}_{Ri}$$

alle komplexen Größen in Real- und Imaginärteil zerlegt /3/, womit sich

$$(\hat{q}_i + j \hat{q}_{i+1}) = [(\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) + j(\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n)]^{-1} \cdot (\hat{v}_{Ri} + j \hat{v}_{R,i+1})$$

ergibt. Um die Inversion der Matrixsumme zu umgehen, wird die Gleichung nach $\hat{v}_{Ri} + j \hat{v}_{R,i+1}$ aufgelöst:

$$\hat{v}_{Ri} + j \hat{v}_{R,i+1} = [(\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) + j(\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n)] \cdot (\hat{q}_i + j \hat{q}_{i+1})$$

Jetzt können Real- und Imaginärteil getrennt werden und es folgt

$$\hat{v}_{Ri} = (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \hat{q}_i - (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n) \hat{q}_{i+1}$$

und

$$\hat{v}_{R,i+1} = (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n) \hat{q}_i + (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \hat{q}_{i+1}$$

Löst man dieses lineare Gleichungssystem nach den Unbekannten \hat{q}_i und \hat{q}_{i+1} auf, so erhält man

$$\hat{q}_i = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{v}_{Ri} + \hat{v}_{R,i+1}) \quad (5.39)$$

und

$$\hat{q}_{i+1} = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{v}_{R,i+1} - \hat{v}_{Ri}) \quad , \quad (5.40)$$

wobei wie in Abschnitt 2.3.4 bzw. in /3/ die Abkürzungen

$$\underline{H}_i = (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \cdot (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n)^{-1}$$

und

$$\underline{\Delta}_i = (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n) + \underline{H}_i \cdot (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n)$$

verwendet werden.

Ersetzt man in den Gleichungen (5.39) und (5.40) \hat{v}_{Ri} durch \hat{B}_i und $\hat{v}_{R,i+1}$ durch \hat{B}_{i+1} , so ergeben sich die Beziehungen (2.11b) und (2.11c) für \hat{K}_i und \hat{K}_{i+1} . Hieran ist bereits eine Analogie zwischen den PV- und EW-Gradienten zu erkennen.

Schreibt man Gl. (5.36) in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} \right) + j \operatorname{Im} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} \right) &= \left[\operatorname{Re} \{ [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \} + j \operatorname{Im} \{ [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \} \right] \cdot \bar{\underline{R}} \cdot [\operatorname{Re}(\underline{w}_{Ri}) + j \operatorname{Im}(\underline{w}_{Ri})] \\ &= [(-\underline{R} \hat{q}_i)^T + j (-\underline{R} \hat{q}_{i+1})^T] \cdot \bar{\underline{R}} \cdot (\hat{w}_{Ri} + j \hat{w}_{R,i+1}) \quad , \end{aligned}$$

so ergibt sich für den Realteil des Gradienten

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} \right) = (-\underline{R} \hat{q}_i)^T \bar{\underline{R}} \hat{w}_{Ri} - (-\underline{R} \hat{q}_{i+1})^T \bar{\underline{R}} \hat{w}_{R,i+1}$$

und für den Imaginärteil

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Ri}} \right) = (-\underline{R} \hat{q}_{i+1})^T \bar{\underline{R}} \hat{w}_{Ri} + (-\underline{R} \hat{q}_i)^T \bar{\underline{R}} \hat{w}_{R,i+1} \quad .$$

Mit den Gleichungen (5.37) und (5.38) folgt daraus

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i)^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{Ri} - (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1})^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{R,i+1}$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = -(-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1})^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{Ri} - (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i)^T \underline{R} \cdot 2 \hat{\underline{w}}_{R,i+1} \quad .$$

Nach Anwendung der Gleichungen (5.5) bis (5.7) erreicht man schließlich eine dem reellen Fall analoge Struktur. Es gilt im reellen Fall (λ_{Rj} sei reell)

$$\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Rj}} = (-\underline{R} \underline{q}_j)^T \underline{R} (\hat{\underline{V}}_R^{-1}) \underline{e}_j \quad (5.41)$$

und im komplexen Fall

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i)^T \underline{R} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1})^T \underline{R} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad (5.42)$$

und

$$\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = -(-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1})^T \underline{R} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + (-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i)^T \underline{R} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad (5.43)$$

Es zeigt sich, daß die EW-Gradienten den PV-Gradienten (siehe Gln. (5.27) bis (5.29)) strukturmäßig sehr ähneln. Um zu den EW-Gradienten zu kommen, müssen bei den PV-Gradienten nur die Matrizen \underline{K}_j , $\hat{\underline{K}}_i$ bzw. $\hat{\underline{K}}_{i+1}$ durch die Vektoren \underline{q}_j , $\hat{\underline{q}}_i$ bzw. $\hat{\underline{q}}_{i+1}$ und die Matrizen \underline{M}_j^k , $\hat{\underline{M}}_i^k$ bzw. $\hat{\underline{M}}_{i+1}^k$ durch Nullvektoren ersetzt werden.

5.3 Die Gradienten zum quadratischen Gütekriterium

In diesem Abschnitt geht es um die Minimierung des quadratischen Gütekriteriums

$$J_q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt \quad (5.44)$$

beim Übergang des Zustandsvektors von

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \text{ nach } \underline{x}(\infty) = \underline{0} \quad .$$

Das einer Ausgangsvektroptimierung zugrundeliegende Gütemaß

$$J_{qA} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{y}^T \underline{S}_y \underline{y} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt$$

läßt sich auf das Gütekriterium (5.44) zurückführen, wenn man den Ausgangsvektor \underline{y} durch $\underline{C} \underline{x}$ ersetzt (\underline{C} = Ausgangsmatrix). Es ist dann

$$\underline{y}^T \underline{S}_y \underline{y} = \underline{x}^T \underline{C}^T \underline{S}_y \underline{C} \underline{x} \quad .$$

Faßt man das Matrizenprodukt $\underline{C}^T \underline{S}_y \underline{C}$ als die Gewichtungsmatrix \underline{S} auf, so ergibt sich wieder Gl. (5.44).

Auch das zur Minimierung des Beobachterfehlers notwendige Gütemaß

$$J_{qB} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underline{e}^T \underline{S}_B \underline{e} dt$$

kann auf das Kriterium (5.44) zurückgeführt werden. Setzt man nämlich in (5.44) die Gewichtungsmatrix \underline{T} zu Null, so liegt bei den Gütemaßen die formal gleiche Struktur zugrunde. (Näheres über die Minimierung des Beobachterfehler-Gütekriteriums ist in /3/ nachzulesen.)

Jedes der 3 hier aufgeführten quadratischen Gütekriterien kann mit Hilfe des Programmpakets POMIX wahlweise minimiert werden.

5.3.1 Übergang zum Erwartungswert von J_q

Wie erwähnt, soll das Gütekriterium

$$J_q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt$$

beim Übergang des Zustandsvektors von

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad \text{nach} \quad \underline{x}(\infty) = \underline{0}$$

zum Minimum gemacht werden.

Aus $\dot{\underline{x}} = (\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) \underline{x}$ folgt

$$\underline{x}(t) = e^{(\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) t} \underline{x}_0 = \underline{x}(t, \underline{x}_0, \underline{R}) \quad . \quad (5.45)$$

Für J_q folgt wegen $\underline{u} = -\underline{R} \underline{x}$

$$J_q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \underline{x}^T (\underline{S} + \underline{R}^T \underline{T} \underline{R}) \underline{x} dt$$

und mit der Beziehung (5.45) ergibt sich

$$J_q = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t, \underline{x}_0, \underline{R}) dt = J_q(\underline{x}_0, \underline{R}) \quad .$$

Betrachtet man \underline{x}_0 als Zufallsvariable mit dem Mittelwert $E\{\underline{x}_0\} = \underline{0}$ und bekanntem Erwartungswert $E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\}$, so kann die Abhängigkeit von \underline{x}_0 durch die Bildung des Erwartungswertes von J_q beseitigt werden und wegen Gl. (2.14) gilt dann

$$J_Q = E\{J_Q(\underline{x}_0, \underline{R})\} = J_Q(\lambda_{R1}, \dots, \lambda_{Rn}; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad .$$

Damit hat man genau die Abhängigkeit, wie sie bereits in Abschnitt 3.4, Gl. (3.6) dargestellt wurde.

Die analytische Berechnung des Funktionswertes J_Q wurde in /3, Seite 33ff/ durchgeführt. Es ergab sich dort

$$\begin{aligned} J_Q &= E\{J_Q\} = E\left\{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T \underline{S} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{T} \underline{u}) dt\right\} \\ &= \frac{1}{2} E\{\underline{x}_0^T \underline{Q} \underline{x}_0\} \\ &= \frac{1}{2} \text{sp}(E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} \underline{Q}) \quad . \end{aligned} \tag{5.46}$$

Der Erwartungswert $E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\}$ stellt gerade die Kovarianzmatrix des Anfangszustandes \underline{x}_0 unter der Voraussetzung $E\{\underline{x}_0\} = \underline{0}$ dar. Diese wird als bekannt vorausgesetzt und mit \underline{K} bezeichnet.

Der Funktionswert J_Q des Gütekriteriums errechnet sich also aus

$$J_Q = \frac{1}{2} \text{sp}(\underline{K} \underline{Q}) \quad ,$$

wobei \underline{Q} die Ljapunowgleichung

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T \underline{Q} + \underline{Q}(\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) = -(\underline{S} + \underline{R}^T \underline{T} \underline{R})$$

erfüllen muß (siehe /3/).

Um das Minimum des quadratischen Gütemaßes zu finden, wird ein numerisches Gradientenverfahren herangezogen. Es werden deshalb in den nächsten Abschnitten die Gradienten zu J_Q bzgl. seiner Variablen \tilde{p}_i und λ_{Ri} analytisch berechnet.

Es soll über einen unbeschränkten Variablenbereich optimiert werden. Weil aber für die Eigenwerte nur begrenzte Polgebiete zugelassen sind, muß die in Abschnitt 4.2 beschriebene Eigenwerttransformation durchgeführt werden, womit man die in Gl. (4.7) angegebene Beziehung erhält:

$$J_Q = J_Q(\tilde{\lambda}_{R1}, \dots, \tilde{\lambda}_{Rn}; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad .$$

Die "transformierten" EW-Gradienten $\frac{\partial J_Q}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$ können auch hier wieder über Gl. (4.8) aus den Ableitungen $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}}$ nach den Originaleigenwerten berechnet werden.

5.3.2 PV-Gradienten zu J_Q

Die Ableitungen des Gütekriteriums $J_Q = E\{J_Q\}$ nach den modifizierten Parametervektoren wurden bereits in /3, Kap. 8 und 9/ berechnet. Dort ergab sich die für den reellen und komplexen Fall gültige Gradientengleichung (siehe /3, S. 41 u. 42/)

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \tilde{p}_i} = [\underline{W}(\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B}) (\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i)]^T (\underline{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i$$

in nicht reell dargestellter Form.

Um eine Strukturgleichheit zu den in Abschnitt 5.2 hergeleiteten Gradientengleichungen für J_S herzustellen, wird die Abkürzung

$$\underline{\bar{Z}} = [\underline{W}(\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B})]^T \quad (p, n) \quad (5.47)$$

eingeführt. Damit kann der Gradient in der Form

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \tilde{p}_i} = (\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i)^T \underline{\bar{Z}} (\underline{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i \quad (5.48)$$

dargestellt werden.

Anmerkung: Die reellen Matrizen \underline{Q} und \underline{W} in Gl. (5.47) sind die Lösungen der beiden Ljapunowgleichungen

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T \underline{Q} + \underline{Q}(\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) = -\underline{\tilde{S}} \quad (5.49)$$

und

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{R})\underline{W} + \underline{W}(\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T = -\underline{K} \quad , \quad (5.50)$$

mit

$$\underline{\tilde{S}} = \underline{S} + \underline{R}^T \underline{T} \underline{R}$$

und

$$\underline{K} = E\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^T\} \quad .$$

Da alle Matrizen der linken Seite von Gl. (5.47) grundsätzlich reell sind, ist auch die (p,n) -Matrix $\underline{\bar{Z}}$ wie $\underline{\bar{R}}$ eine reelle Matrix.

a) Reeller Fall

Mit der reellen Darstellungsweise von \underline{V}_R und dem Index j statt i wird Gl. (5.48) zu

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \underline{\tilde{p}}_j} = (\underline{M}_j^k - \underline{R} \underline{K}_j)^T \underline{\bar{Z}} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j \quad . \quad (5.51)$$

b) Komplexer Fall

Entsprechend der Vorgehensweise in den vorigen Abschnitten spaltet man Gl. (5.48) in Real- und Imaginärteil auf und erhält über die Beziehungen (5.24) und (5.25) die Gradienten

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{p}_i} = (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{Z} (\hat{V}_R^{-1})^T e_{-i} + (\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{Z} (\hat{V}_R^{-1})^T e_{-i+1} \quad (5.52)$$

und

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{p}_{i+1}} = -(\hat{M}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{K}_{i+1})^T \bar{Z} (\hat{V}_R^{-1})^T e_{-i} + (\hat{M}_i^k - \underline{R} \hat{K}_i)^T \bar{Z} (\hat{V}_R^{-1})^T e_{-i+1} \quad (5.53)$$

Wie aus einem Vergleich der letzten 3 Gleichungen mit den Gleichungen (5.27), (5.28) und (5.29) hervorgeht, unterscheiden sich die Gradienten des quadratischen Gütekriteriums J_Q und des Reglerstruktur-Gütekriteriums J_S nur durch \bar{Z} bzw. \underline{R} . Ansonsten liegt genau der gleiche Formalismus zugrunde. Die Information, um welches Gütekriterium es sich handelt, ist nur in den Matrizen \bar{Z} bzw. \underline{R} enthalten.

5.3.3 EW-Gradienten zu J_Q

Bei der Herleitung der EW-Gradienten zur Gütefunktion J_Q ist die Vorgehensweise die gleiche wie bei der PV-Gradienten-Berechnung in /3, S. 37ff/.

Die Ableitung $\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}}$ erhält man durch Differentiation des in Gl. (5.46) angegebenen Gütemaßes

$$J_Q = E\{J_q\} = \frac{1}{2} E\{\underline{x}_0^T \underline{Q} \underline{x}_0\}$$

nach dem Eigenwert λ_{Ri} :

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = \frac{1}{2} E\left\{ \underline{x}_0^T \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{x}_0 \right\}$$

Die Ableitung von Gl. (5.49) nach λ_{Ri} ergibt

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\partial \underline{R}^T}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{B}^T \underline{Q} + (\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} + \\
 & + \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} (\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) - \underline{Q} \underline{B} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} = \\
 & = - \left[\frac{\partial \underline{R}^T}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{T} \underline{R} + \underline{R}^T \underline{T} \frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} \right] .
 \end{aligned}$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} (\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) + (\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} = \\
 & = \underbrace{\left[\frac{\partial \underline{R}^T}{\partial \lambda_{Ri}} (\underline{T} \underline{R} - \underline{B}^T \underline{Q}) + (\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B}) \frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} \right]}_{\hat{\underline{S}}_{EW}} .
 \end{aligned}$$

Analog wie bei der PV-Gradienten-Berechnung in /3, Seite 37ff/, folgt die letzte Gleichung aus dem Ansatz

$$\frac{d}{dt} \left(\underline{x}^T \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \lambda_{Ri}} \underline{x} \right) = - \underline{x}^T \hat{\underline{S}}_{EW} \underline{x} ,$$

wobei die abkürzende Schreibweise $\hat{\underline{S}}_{EW}$ benutzt wird. Ganz entsprechend zur Herleitung von $\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_{ji}}$ in /3/ folgt hier nach einiger Rechnung

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = \frac{1}{2} \text{sp}(\underline{W} \hat{\underline{S}}_{EW}) ,$$

wobei \underline{W} die Gl. (5.50) erfüllen muß.

Analog zur PV-Gradienten-Berechnung in /3/ ergibt sich daraus

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = \text{sp}(\underline{W} \underline{X}_{EW}) \quad (5.54)$$

mit

$$\underline{X}_{EW} = (\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B}) \frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} \quad (5.55)$$

und

$$\underline{X}_{EW}^T + \underline{X}_{EW} = \hat{\underline{S}}_{EW} .$$

Die Berechnung von $\frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}}$ wurde bereits in Abschnitt 5.2 durchgeführt. Für den reellen Fall gilt nach den Gleichungen (5.34) und (5.35)

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial \lambda_{Ri}} = -\underline{R} \underline{q}_i \underline{e}_i^T \hat{\underline{V}}_R^{-1} .$$

Nach Weglassen des ^-Zeichens über \underline{V}_R ist diese Gleichung auch für den komplexen Fall gültig (nichtreelle Darstellung). Mit den Gleichungen (5.54) und (5.55) ergibt sich der EW-Gradient dann zu

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = \text{sp} \left[\underbrace{-\underline{W}(\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B}) \underline{R} \underline{q}_i}_{\underline{a}} \underbrace{\underline{e}_i^T \underline{V}_R^{-1}}_{\underline{b}^T} \right] .$$

Unter Verwendung der Regel

$$\text{spur}(\underline{a} \underline{b}^T) = \underline{a}^T \underline{b}$$

erhält man

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \cdot [\underline{W}(\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B})]^T \cdot (\underline{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i$$

und mit der Abkürzung (5.47) schließlich

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = [-\underline{R} \underline{q}_i]^T \cdot \underline{Z} \cdot (\underline{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i \quad (5.56)$$

a) Reeller Fall

Um nicht mit komplexen Größen rechnen zu müssen, wird wieder zur reellen Darstellungsweise übergegangen. (\underline{V}_R wird durch $\hat{\underline{V}}_R$ ersetzt; \underline{R} und \underline{Z} sind prinzipiell reelle Matrizen; der Vektor \underline{q}_j zu einem reellen Eigenwert λ_{Rj} ist ebenfalls reell.) Es gilt:

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Ri}} = [-\underline{R} \underline{q}_j]^T \cdot \underline{Z} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j \quad (5.57)$$

b) Komplexer Fall

Spaltet man Gl. (5.56) in Real- und Imaginärteil auf, so ergeben sich mit den Beziehungen (5.24) und (5.25) die Gradienten

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = [-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i]^T \underline{Z} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1}]^T \underline{Z} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad (5.58)$$

und

$$\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = -[-\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1}]^T \underline{Z} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [-\underline{R} \hat{\underline{q}}_i]^T \underline{Z} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad (5.59)$$

Interessanterweise ergeben sich auch beim quadratischen Gütekriterium für die PV- und EW-Gradienten einheitliche Gleichungsstrukturen. Nur an der Matrix ($\underline{M}_i^k - \underline{R} \underline{K}_i$) bzw. am Vektor ($-\underline{R} \underline{q}_i$) wird deutlich, um welchen Gradiententyp es sich handelt.

Auch hinsichtlich beider Gütekriterien gibt es wieder eine Übereinstimmung. Wie die PV-Gradienten unterscheiden sich auch die EW-Gradienten zu beiden Gütemaßen nur durch \underline{Z} bzw. \underline{R} .

5.4 Zusammenfassende Darstellung der Gradienten

5.4.1 Die Strukturgleichheit der Gradienten

Für beide Gütekriterien sind die PV- und EW-Gradienten in der Tabelle 5.1 zusammengetragen.

	Parametervektor-Gradienten	Eigenwert-Gradienten
Reglerstruktur-Gütekriterium $J_S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q g_{kl} r_{kl}^2$	<u>Reeller Fall:</u> $\frac{\partial J_S}{\partial \underline{p}_j} = [\hat{M}_j^k - R \hat{K}_j] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j$ <u>Komplexer Fall:</u> $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_i} = [\hat{M}_i^k - R \hat{K}_i] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{M}_{i+1}^k - R \hat{K}_{i+1}] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$ $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{p}_{i+1}} = -[\hat{M}_{i+1}^k - R \hat{K}_{i+1}] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{M}_i^k - R \hat{K}_i] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$	<u>Reeller Fall:</u> $\frac{\partial J_S}{\partial \lambda_{Rj}} = [O - R g_j] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j$ <u>Komplexer Fall:</u> $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = [O - R \hat{g}_i] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [O - R \hat{g}_{i+1}] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$ $\frac{\partial J_S}{\partial \hat{\lambda}_{R, i+1}} = -[O - R \hat{g}_{i+1}] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [O - R \hat{g}_i] \hat{T}_R (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$
Quadratisches Gütekriterium $J_Q = E\{J_Q\} = E\left\{\int_0^{\infty} \underline{x}^T \underline{S} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{R} \underline{u} dt\right\}$	<u>Reeller Fall:</u> $\frac{\partial J_Q}{\partial \underline{p}_j} = [\hat{M}_j^k - R \hat{K}_j] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j$ <u>Komplexer Fall:</u> $\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{p}_i} = [\hat{M}_i^k - R \hat{K}_i] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{M}_{i+1}^k - R \hat{K}_{i+1}] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$ $\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{p}_{i+1}} = -[\hat{M}_{i+1}^k - R \hat{K}_{i+1}] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{M}_i^k - R \hat{K}_i] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$	<u>Reeller Fall:</u> $\frac{\partial J_Q}{\partial \lambda_{Rj}} = [O - R g_j] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j$ <u>Komplexer Fall:</u> $\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = [O - R \hat{g}_i] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [O - R \hat{g}_{i+1}] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$ $\frac{\partial J_Q}{\partial \hat{\lambda}_{R, i+1}} = -[O - R \hat{g}_{i+1}] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [O - R \hat{g}_i] \hat{T}_Z (\hat{V}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$

Tabelle 5.1: PV- und EW-Gradienten für Reglerstruktur- und quadratisches Gütekriterium

Beim genaueren Betrachten der Tabelle stellt man sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung eine einheitliche Struktur der Gradientengleichungen fest.

Horizontale Richtung:

Um von den PV-Gradienten zu den EW-Gradienten zu kommen, muß nur die Matrix \underline{M}_j^k bzw. \hat{M}_i^k und \hat{M}_{i+1}^k durch den Nullvektor und die Matrix \underline{K}_j bzw. \hat{K}_i und \hat{K}_{i+1} durch den Vektor \underline{q}_j bzw. \hat{q}_i und \hat{q}_{i+1} ersetzt werden. Ansonsten gelten für die vektoriellen PV-Gradienten und die skalaren EW-Gradienten völlig identische Beziehungen. Beim näheren Betrachten der Bestimmungsgleichungen für \underline{K}_j , \hat{K}_i , \hat{K}_{i+1} und \underline{q}_j , \hat{q}_i , \hat{q}_{i+1} fällt auf, daß auch diese sich nur durch die Größen \underline{B}_j , \hat{B}_i , \hat{B}_{i+1} und \underline{v}_{Rj} , \hat{v}_{Ri} , $\hat{v}_{R,i+1}$ unterscheiden. Es gilt nämlich (siehe Abschnitte 2.3.4 und 5.2.2) für den reellen Fall

$$\underline{K}_j = (\underline{A}_j - \lambda_{Rj} \underline{I}_n)^{-1} \underline{B}_j \quad , \quad \underline{q}_j = (\underline{A}_j - \lambda_{Rj} \underline{I}_n)^{-1} \underline{v}_{Rj}$$

und für den komplexen Fall

$$\hat{K}_i = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{B}_i + \hat{B}_{i+1}) \quad , \quad \hat{q}_i = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{v}_{Ri} + \hat{v}_{R,i+1}) \quad ;$$

$$\hat{K}_{i+1} = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{B}_{i+1} - \hat{B}_i) \quad , \quad \hat{q}_{i+1} = \underline{\Delta}_i^{-1} (\underline{H}_i \hat{v}_{R,i+1} - \hat{v}_{Ri})$$

mit

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{H}_i = (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \cdot (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n)^{-1} \quad \text{und} \\ \underline{\Delta}_i = (\hat{A}_{i+1} - \hat{\lambda}_{R,i+1} \underline{I}_n) + \underline{H}_i (\hat{A}_i - \hat{\lambda}_{Ri} \underline{I}_n) \quad . \end{array} \right.$$

Vertikale Richtung:

Auch hinsichtlich der beiden Gütekriterien unterscheiden sich die Gradientengleichungen nur durch die abkürzenden (p,n) -Matrizen $\underline{\bar{R}}$ und $\underline{\bar{Z}}$, welche folgende Bedeutung haben:

$$\underline{\bar{R}} = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n g_{kl} r_{kl} \underline{e}_k \underline{e}_l^T = (g_{kl} r_{kl}) \quad ,$$

$$\underline{\bar{Z}} = [\underline{W}(\underline{R}^T \underline{T} - \underline{Q} \underline{B})]^T \quad .$$

(Die Matrizen \underline{W} und \underline{Q} ergeben sich als Lösungen der Ljapunowgleichungen (5.49) und (5.50)).

Nur in $\underline{\bar{R}}$ und $\underline{\bar{Z}}$ ist die Information enthalten, um welches Gütekriterium es sich handelt. Während in $\underline{\bar{R}}$ die Gewichtungsfaktoren g_{kl} stecken, gehen in $\underline{\bar{Z}}$ die Gewichtungsmatrizen \underline{S} und \underline{T} ein.

Die einheitliche Struktur der Gradientengleichungen vereinfacht die programmtechnische Realisierung des Polgebietsvorgabe-Verfahrens ganz erheblich (siehe /8/).

5.4.2 Gradienten zum Gesamtgütekriterium $J = \alpha_Q \cdot J_Q + \alpha_S \cdot J_S$

Will man die Summe beider Gütekriterien minimieren, um sowohl eine günstige Dynamik als auch eine spezielle Reglerstruktur zu erreichen, so muß die Summe der Gradienten zu beiden Gütekriterien gebildet werden.

Wegen der Gleichheit in vertikaler Richtung ist es möglich, die Gradienten für das Gesamtgütekriterium

$$J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$$

in einfachster Form darzustellen. Beispielsweise gilt für die PV-Gradienten im reellen Fall

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \tilde{\underline{p}}_j} &= \alpha_Q \frac{\partial J_Q}{\partial \tilde{\underline{p}}_j} + \alpha_S \frac{\partial J_S}{\partial \tilde{\underline{p}}_j} \\ &= \alpha_Q [\underline{M}_j^k - \underline{R} \underline{K}_j]^T \underline{\bar{Z}} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j + \alpha_S [\underline{M}_j^k - \underline{R} \underline{K}_j]^T \underline{\bar{R}} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j \\ &= [\underline{M}_j^k - \underline{R} \underline{K}_j]^T \underbrace{[\alpha_Q \underline{\bar{Z}} + \alpha_S \underline{\bar{R}}]}_{\underline{E}} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\underline{E} = \alpha_Q \underline{\bar{Z}} + \alpha_S \underline{\bar{R}}$ ergibt sich

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\underline{p}}_j} = [\underline{M}_j^k - \underline{R} \underline{K}_j]^T \underline{E} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j$$

Entsprechend ergeben sich die reellen EW-Gradienten zu

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Rj}} = [-\underline{R} \underline{g}_j]^T \underline{E} \cdot (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_j \quad .$$

Ganz analog erhält man im komplexen Fall

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{p}_i} = [\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1}]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad ,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{p}_{i+1}} = - [\hat{\underline{M}}_{i+1}^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1}]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [\hat{\underline{M}}_i^k - \underline{R} \hat{\underline{K}}_i]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1}$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} = [-\underline{R} \hat{\underline{g}}_i]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [-\underline{R} \hat{\underline{g}}_{i+1}]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad ,$$

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} = [-\underline{R} \hat{\underline{g}}_{i+1}]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_i + [-\underline{R} \hat{\underline{g}}_i]^T \underline{E} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \underline{e}_{i+1} \quad .$$

Anmerkung: Da die Matrizen \underline{R} und \underline{Z} immer reell sind, gilt dies auch für die Matrix $\underline{E} = \alpha_Q \underline{Z} + \alpha_S \underline{R}$.

Durch Nullsetzen von α_Q oder α_S wird die Minimierung nur eines Gütekriteriums erreicht.

Es ist bemerkenswert, daß für die Gradienten zum Gesamtgütemaß auch wieder dieselbe Struktur zugrundeliegt. Es braucht nur die Matrix \underline{R} bzw. \underline{Z} durch die Matrix \underline{E} ersetzt zu werden. Sonst wird der Formalismus beibehalten.

5.4.3 Zusammenfassung der PV- und EW-Gradienten in einer erweiterten Gradientenmatrix

Das Ziel dieser Diplomarbeit war das Erstellen eines Programmpaketes, welches die beiden Gütekriterien sowohl bzgl. der modifizier-

ten Parametervektoren \tilde{p}_i als auch bzgl. der Eigenwerte λ_{Ri} innerhalb vorgegebener Gebiete minimiert. Wegen ihrer gleichen Struktur lassen sich auch die beiden Gradiententypen (PV- und EW-Gradienten) in einer Gleichung zusammenfassen, was zu einer einfachen programmtechnischen Realisierung beiträgt. In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, wie man durch geschickte Matrizen- und Vektorenerweiterungen zu einer *erweiterten Gradientenmatrix* gelangt, die sowohl die PV- als auch die EW-Gradienten beinhaltet.

Die Gleichungen zur Berechnung der EW-Gradienten unterscheiden sich von denen zur Berechnung der PV-Gradienten nur durch den Vektor \underline{q}_i statt der Matrix \underline{K}_i und den Nullvektor statt der Matrix \underline{M}_i^k . Erweitert man nun die Matrizen \underline{K}_i und \underline{M}_i^k um eine Spalte, indem man an \underline{K}_i den Vektor \underline{q}_i und an \underline{M}_i^k den Nullvektor anfügt, so erhält man letztlich eine erweiterte Gradientenmatrix, die in ihrer letzten Zeile die EW-Gradienten enthält. Diese Matrixerweiterungen sollen im folgenden näher erläutert werden. Es wird die reelle Darstellungsweise benutzt, so daß alle Gradienten, ganz gleich, ob sie reell oder komplex sind, zusammengefaßt werden können.

Anmerkung: Der Index j wird für den reellen Fall verwendet, während die Indizes i und $i+1$ auf den komplexen Fall hindeuten.

D1: Definition der erweiterten $(n, p+1)$ -Matrizen \underline{K}_j^e , $\hat{\underline{K}}_i^e$ und $\hat{\underline{K}}_{i+1}^e$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{K}_j^e := [\underline{K}_j, \underline{q}_j] \\ \text{bzw. } \underline{K}_i^e := [\hat{\underline{K}}_i, \hat{\underline{q}}_i] \\ \text{und } \underline{K}_{i+1}^e := [\hat{\underline{K}}_{i+1}, \hat{\underline{q}}_{i+1}] \end{array} \right\} (n, p+1)\text{-Matrizen}$$

Aufgrund dieser Definitionen handelt es sich bei den Produkten $\underline{R} \underline{K}_j^e$, $\underline{R} \underline{K}_i^e$ bzw. $\underline{R} \underline{K}_{i+1}^e$ um Matrizen der Dimension $(p, p+1)$. Sie entstehen durch Anhängen der Spalte $\underline{R} \underline{q}_j$, $\underline{R} \hat{\underline{q}}_i$ bzw. $\underline{R} \hat{\underline{q}}_{i+1}$ an die Matrizen $\underline{R} \underline{K}_j$, $\underline{R} \hat{\underline{K}}_i$ bzw. $\underline{R} \hat{\underline{K}}_{i+1}$.

D2: Definition der erweiterten (p,p+1)-Matrizen \underline{M}_j^{ke} , \underline{M}_i^{ke} und \underline{M}_{i+1}^{ke}

Um passende Dimensionen zu bekommen, werden die Matrizen \underline{M}_j^k , \underline{M}_i^k und \underline{M}_{i+1}^k ebenfalls um eine Spalte, den Nullvektor, erweitert:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{M}_j^{ke} := [\underline{M}_j^k, \underline{0}] \\ \text{bzw. } \underline{M}_i^{ke} := [\underline{M}_i^k, \underline{0}] \\ \text{und } \underline{M}_{i+1}^{ke} := [\underline{M}_{i+1}^k, \underline{0}] \end{array} \right\} (p,p+1)\text{-Matrizen}$$

D3: Definition der (p,n)-Matrix \underline{F}

Da die Matrizen $\underline{E} = \alpha_Q \underline{Z} + \alpha_S \underline{R}$ und $(\underline{V}_R^{-1})^T$ beide reell sind, gilt das auch für ihre Produktmatrix

$$\underline{F} = [\dots, \underline{f}_j, \dots, \underline{\hat{f}}_i, \underline{\hat{f}}_{i+1}, \dots] := \underline{E}(\underline{V}_R^{-1})^T$$

Jeder i-te und (i+1)-te Spaltenvektor von \underline{F} wird mit einem $\hat{}$ versehen, falls der i-te und (i+1)-te Eigenwert konjugiert komplex sind (analog der reellen Darstellung von \underline{V}_R).

D4: Definition der erweiterten (p+1,1)-Gradientenvektoren \underline{g}_j^e , $\underline{\hat{g}}_i^e$

und $\underline{\hat{g}}_{i+1}^e$ und der erweiterten (p+1,n)-Gradientenmatrix \underline{G}^e

Durch Transposition der Differenz $[\underline{M}_j^{ke} - \underline{R} \underline{K}_j^e]$ ergibt sich eine (p+1,p)-Matrix, deren letzte Zeile gerade den (1,p)-Vektor $[\underline{0} - \underline{R} \underline{q}_j]^T$ darstellt.

Demzufolge kann mit der Gleichung

$$\underline{g}_j^e := [\underline{M}_j^{ke} - \underline{R} \underline{K}_j^e]^T \underline{E}(\underline{V}_R^{-1})^T \underline{e}_j$$

der erweiterte (p+1,1)-Gradientenvektor \underline{g}_j^e berechnet werden, der

außer dem reellen PV-Gradienten als letzte Komponente den Gradienten bzgl. des reellen Eigenwertes λ_{Rj} enthält. Es gilt also

$$\underline{g}_j^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_j} \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda_{Rj}} \end{bmatrix} .$$

Ganz Entsprechendes gilt auch für das konjugiert komplexe Eigenwertpaar $\hat{\lambda}_{Ri} \pm j \hat{\lambda}_{R,i+1}$. Mit Definition D3 kann man die erweiterten Gradientenvektoren in der folgenden Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \underline{g}_j^e &:= [\underline{M}_j^{ke} \quad -\underline{R} \quad \underline{K}_j^e]^T \underline{f}_j \\ \text{bzw. } \hat{\underline{g}}_i^e &:= [\hat{\underline{M}}_i^{ke} \quad -\underline{R} \quad \hat{\underline{K}}_i^e]^T \hat{\underline{f}}_i + [\hat{\underline{M}}_{i+1}^{ke} \quad -\underline{R} \quad \hat{\underline{K}}_{i+1}^e]^T \hat{\underline{f}}_{i+1} \\ \text{und } \hat{\underline{g}}_{i+1}^e &:= -[\hat{\underline{M}}_{i+1}^{ke} \quad -\underline{R} \quad \hat{\underline{K}}_{i+1}^e]^T \hat{\underline{f}}_i + [\hat{\underline{M}}_i^{ke} \quad -\underline{R} \quad \hat{\underline{K}}_i^e]^T \hat{\underline{f}}_{i+1}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (p+1,1)\text{-} \\ \text{Vektoren} \end{array}$$

Diese Vektoren werden nun in einer erweiterten $(p+1,n)$ -Gradientenmatrix zusammengefaßt:

$$\hat{\underline{G}}^e := [\dots, \underline{g}_j^e, \dots, \hat{\underline{g}}_i^e, \hat{\underline{g}}_{i+1}^e, \dots] = \begin{bmatrix} \dots & \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_{1j}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial \hat{p}_{1i}} & , & \frac{\partial J}{\partial \hat{p}_{1,i+1}} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_{pj}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial \hat{p}_{pi}} & , & \frac{\partial J}{\partial \hat{p}_{p,i+1}} & \dots \\ \dots & \frac{\partial J}{\partial \lambda_{Rj}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{Ri}} & , & \frac{\partial J}{\partial \hat{\lambda}_{R,i+1}} & \dots \end{bmatrix} . \quad (5.60)$$

D5: Definition der erweiterten $(p+1,1)$ -Parametervektoren $\tilde{\underline{p}}_j^e, \hat{\underline{p}}_i^e$
 und $\hat{\underline{p}}_{i+1}^e$ und der erweiterten $(p+1,n)$ -Parametermatrix $\hat{\underline{P}}^e$

Letztlich werden noch die $(p,1)$ -Parametervektoren durch Anfügen des zugehörigen Eigenwertes (als letztes Vektorelement) erweitert.

Es wird definiert:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\underline{p}}_j^e := \begin{bmatrix} \tilde{p}_j \\ \lambda_{Rj} \end{bmatrix} \\ \text{bzw. } \hat{\underline{p}}_i^e := \begin{bmatrix} \hat{p}_i \\ \hat{\lambda}_{Ri} \end{bmatrix} \\ \text{und } \hat{\underline{p}}_{i+1}^e := \begin{bmatrix} \hat{p}_{i+1} \\ \hat{\lambda}_{R,i+1} \end{bmatrix} \end{array} \right\} (p+1,1)\text{-Vektoren}$$

Diese erweiterten Parametervektoren lassen sich zu der erweiterten $(p+1,n)$ -Matrix

$$\hat{\underline{P}}^e := [\dots, \tilde{\underline{p}}_j^e, \dots, \hat{\underline{p}}_i^e, \hat{\underline{p}}_{i+1}^e, \dots] = \begin{bmatrix} \dots & \tilde{p}_j & \dots & \hat{p}_i & \hat{p}_{i+1} & \dots \\ \dots & \lambda_{Rj} & \dots & \hat{\lambda}_{Ri} & \hat{\lambda}_{R,i+1} & \dots \end{bmatrix}$$

zusammenfassen, so daß man für die "vollständige Gradientenmatrix" auch

$$\hat{\underline{G}}^e = \frac{\partial J}{\partial \hat{\underline{P}}^e}$$

schreiben kann.

Es ist deutlich geworden, daß sich die PV- und EW-Gradienten mit ein und demselben Formalismus berechnen lassen, wobei mit der

Wahl der Faktoren α_Q und α_S das Verhältnis festgelegt ist, wie stark sich die Minimierung auf jedes der beiden Gütekriterien auswirkt. Im bisher angewandten Programmpaket POMIQ (\neq POMIX), welches nur in der Lage ist bzgl. der Parametervektoren zu optimieren /9/, müssen nur die Matrizen \underline{K}_i und \underline{M}_i^k durch die erweiterten Matrizen \underline{K}_i^e und \underline{M}_i^{ke} ersetzt werden und die Dimensionen angepaßt werden. Anschließend müssen dann die Elemente der letzten Zeilen der Matrizen $\underline{\hat{P}}^e$ und $\underline{\hat{G}}^e$ noch mit einem Faktor (s. Abschnitte 4.2 und 4.5) multipliziert werden, weil für die numerische Minimierung die transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und die transformierten EW-Gradienten gebraucht werden.

Im nächsten Kapitel wird näher auf das numerische Minimierungsverfahren eingegangen.

6. DIE NUMERISCHE MINIMIERUNG

Wie schon in Kapitel 4 erwähnt, ist das Ziel dieser Arbeit, Zustandsregler zu entwerfen, die das Gütekriterium der Form

$$J = J (\tilde{\lambda}_{R1}, \dots, \tilde{\lambda}_{Rn} ; \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$$

minimieren.

Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum lauten

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad .$$

Es ist nicht möglich, diese Gleichungen nach den Variablen $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und \tilde{p}_i aufzulösen, da die Gradienten stark nichtlinear von diesen Variablen abhängen (siehe voriges Kapitel).

Da jedoch Funktionswerte und Gradienten des Gütemaßes berechenbar sind, können mit Hilfe eines leistungsfähigen Gradientenverfahrens diejenigen modifizierten Parametervektoren und diejenigen transformierten Eigenwerte numerisch bestimmt werden, für die das Gütekriterium minimal wird. Hier wird deshalb ein quadratisch konvergentes Suchverfahren aus der Klasse der *Quasi-Newton-Verfahren* /10; 11/ angewendet.

Während im 1. Abschnitt das angewendete Quasi-Newton-Verfahren in seinen Grundzügen erläutert wird, gibt der 2. Abschnitt Auskunft darüber, wie bei der Minimierung für den Regler- bzw. Beobachterentwurf durch Polgebietsvorgabe vorgegangen wird.

6.1 Kurze Beschreibung des verwendeten Quasi-Newton-Verfahrens

Zu Beginn der Minimumsuche wird ein Startvektor \underline{x}_0 gewählt. Er enthält die $p \cdot n$ Elemente der modifizierten Parametervektoren \tilde{p}_i und die n transformierten Starteigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und ist sehr ent-

scheidend dafür, ob das absolute Minimum oder nur ein lokales Minimum gefunden wird.

Ausgehend von diesem Startvektor \underline{x}_0 wird zunächst in der Gradientenrichtung $\underline{g}_0 = \underline{s}_0$ eine eindimensionale Minimumsuche durchgeführt. \underline{x}_1 sei der mit der Schrittweite a_0 längs der Suchrichtung \underline{s}_0 gefundene Minimumpunkt.

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + a_0 \underline{s}_0 \quad .$$

Im zweiten und in allen weiteren Schritten wird nicht in Gradientenrichtung, sondern in der Suchrichtung \underline{s}_k gesucht.

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + a_k \underline{s}_k \quad , \quad k \geq 1 \quad .$$

a_k ist dabei immer so zu wählen, daß \underline{x}_{k+1} der Minimumpunkt längs der Geraden durch \underline{x}_k und der Richtung \underline{s}_k ist. Die Suchrichtung \underline{s}_k wird in jedem Schritt - ausgehend von der Gradientenrichtung \underline{g}_k - so modifiziert, daß das Minimum einer *quadratischen* Funktion nach m Suchschritten gefunden ist, wobei m die Anzahl der Variablen ist, nach denen optimiert wird, also die Dimension des Vektors \underline{x} (hier: $m = n(p+1)$). Näheres zu diesem Verfahren kann in /10; 11/ nachgelesen werden.

Das verwendete Programm wurde von Herrn Dr. Stehle vom Institut für Nachrichtensysteme (Uni Ka) zur Verfügung gestellt.

6.2 Minimierungsablauf beim Regler- bzw. Beobachterentwurf durch Polgebietsvorgabe

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben ist, läuft die Minimierung in mehreren Iterationsschritten ab. Nach jedem Schritt ergeben sich neue Variablenwerte für $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und \tilde{p}_i , für die der Funktionswert und die Gradienten immer wieder neu berechnet werden müssen. Da für diese Berechnung die Eigenwerte λ_{Ri} benötigt werden, müssen zuvor die transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ ins Polgebiet zurücktransformiert werden ($\tilde{\lambda}_{Ri} \rightarrow \lambda_{Ri}$).

Der genaue Minimierungsablauf geht aus dem Flußdiagramm zum
UP FLEPOX im nächsten Kapitel hervor.

7. DIE PROGRAMMTECHNISCHE REALISIERUNG /8/

Das Ziel dieser Diplomarbeit war die Erstellung eines Programmpaketes, das den Regler- bzw. Beobachterentwurf durch Polgebietsvorgabe ermöglicht. Dieses Programmpaket heißt POMIX und wird von dem Fortran-Hauptprogramm FPOMIX aufgerufen. Es ist die Erweiterung des von G. Kern erstellten Programmpaketes POMIQ /9/, das nur die Polvorgabe, d.h. nur die Optimierung bzgl. der Parametervektoren ermöglicht.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird zum grundlegenden Verständnis des Programmpaketes POMIX auf einige Unterprogramme näher eingegangen. Im zweiten Teil wird auf numerische Schwierigkeiten bei der Eigenwert- bzw. Eigenwertgradiententransformation hingewiesen und gezeigt, wie diese behoben werden können. Schließlich wird im 3. Abschnitt beschrieben, wie das fertiggestellte Programm ausgetestet wurde.

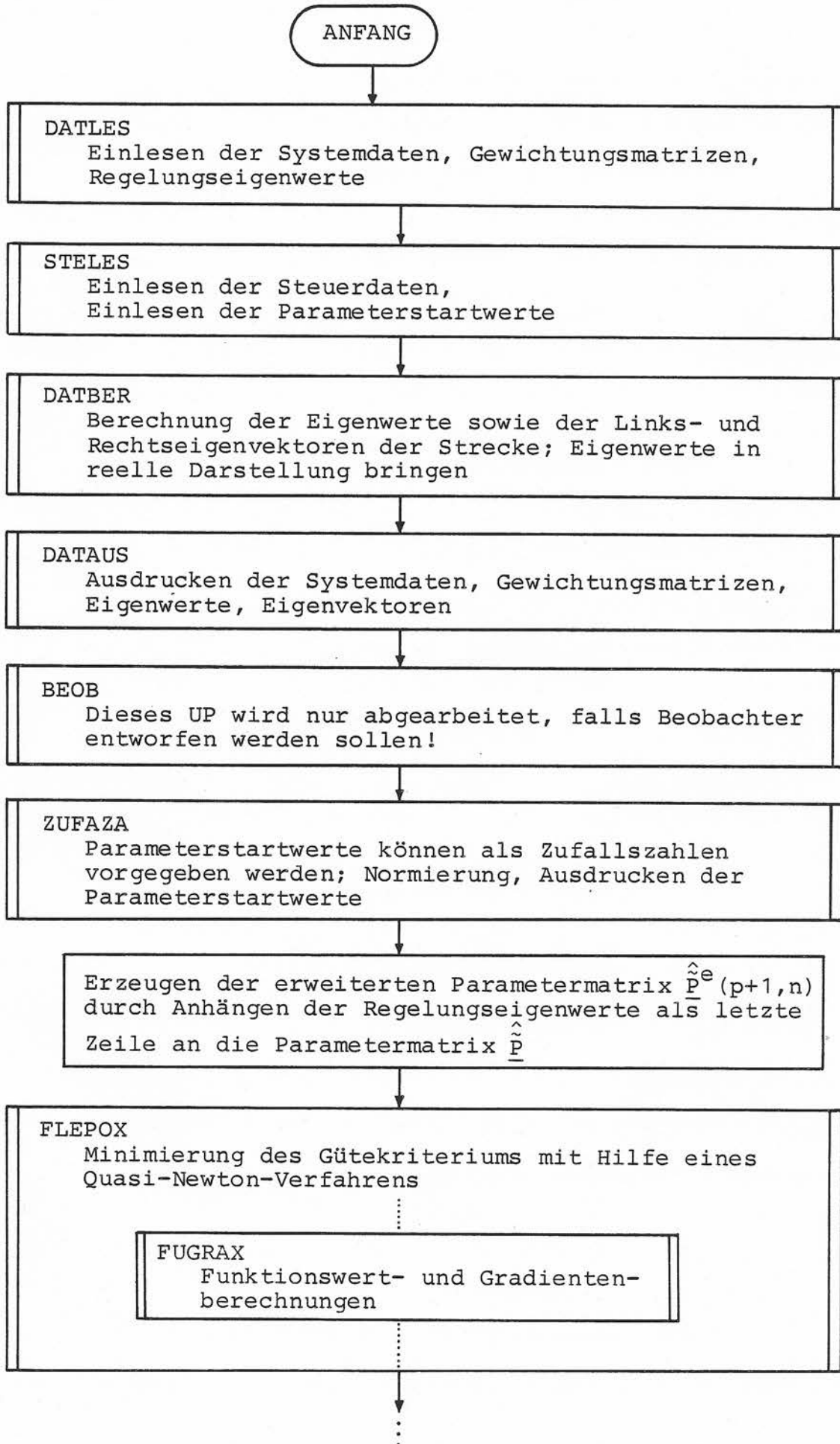
7.1 Beschreibung einiger Unterprogramme

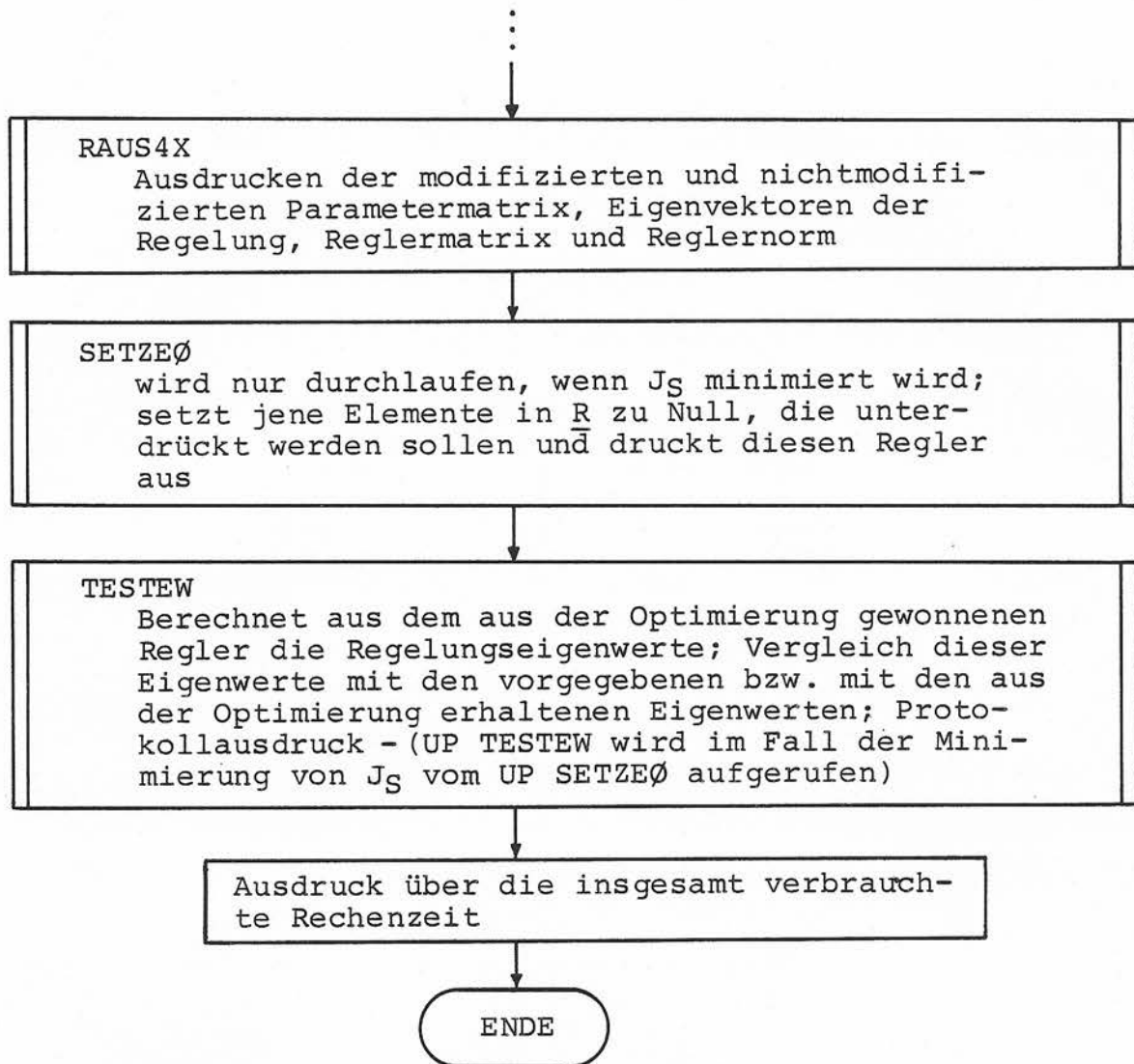
Zu den Programmen POMIX, FLEPOX, FUGRAX und KIMIQUI werden grobe Flußdiagramme angegeben. Die Unterprogramme FUNK1X und GRADJX werden nur kurz erläutert.

Ein ausführlicher Kommentar zu jedem einzelnen Unterprogramm des Paketes POMIX ist der Programmbeschreibung /8/ zu entnehmen.

7.1.1 Das übergeordnete Programm POMIX

POMIX ist ein Programmpaket zum Regler- und Beobachterentwurf. Es kann wahlweise Pol- oder Polgebietsvorgabe betrieben werden. Das folgende Flußdiagramm soll den Aufbau des Programmpaketes deutlich machen.





7.1.2 Das UP FLEPOX

Bei diesem Unterprogramm handelt es sich um eine speziell für den Regler- bzw. Beobachterentwurf geänderte Version zum Programm QNG von Dr. Stehle (Institut für Nachrichtensysteme). Es ist die programmtechnische Realisierung eines Quasi-Newton-Verfahrens, welches die Minimierung des vom UP FUGRAX berechneten Gesamtfunktionswertes $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$ durchführt.

Startwerte: $\lambda_{Ri}, \tilde{p}_i$

ANFANG

EWTRF

Eigenwerttransformation

$$\lambda_{Ri} \rightarrow \tilde{\lambda}_{Ri}$$

FUGRAX

Berechnung des Funktionswertes $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$;

Berechnung der Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i}$ und $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$

Abbruch, wenn
Iterationszahl = i_{max}

$\tilde{\lambda}_{Ri}, \tilde{p}_i$

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}, \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i}$$

Minimumsuche längs der zur Gradientenrichtung $\frac{\partial J}{\partial \underline{x}}$ gehörenden Suchrichtung \underline{s}_k
(Der Vektor \underline{x} enthält die zu optimierenden Variablen $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und \tilde{p}_{ji}):

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + a_k \underline{s}_k$$

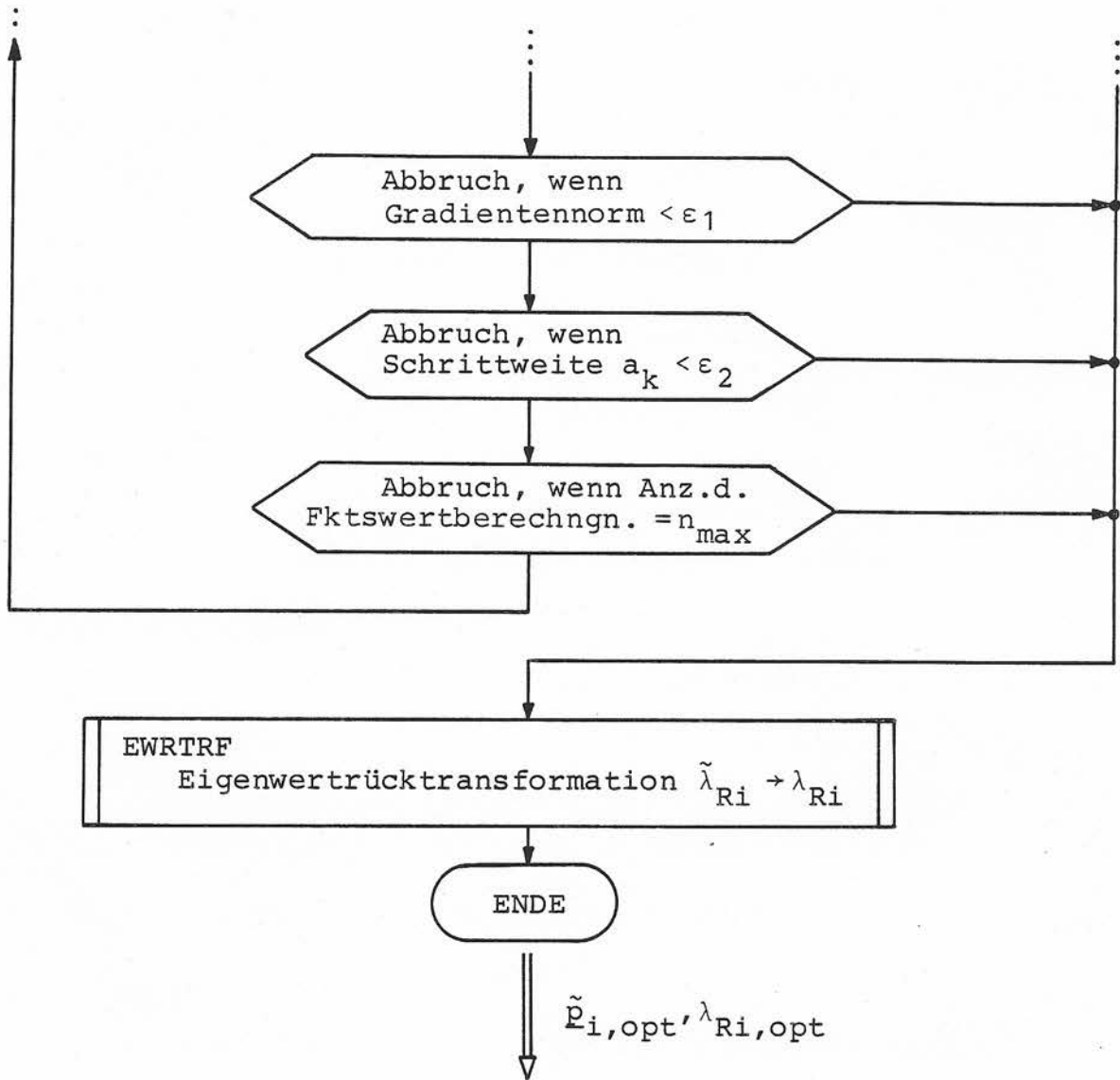
$\tilde{\lambda}_{Ri}, \tilde{p}_i$

(= neue Werte)

FUGRAX

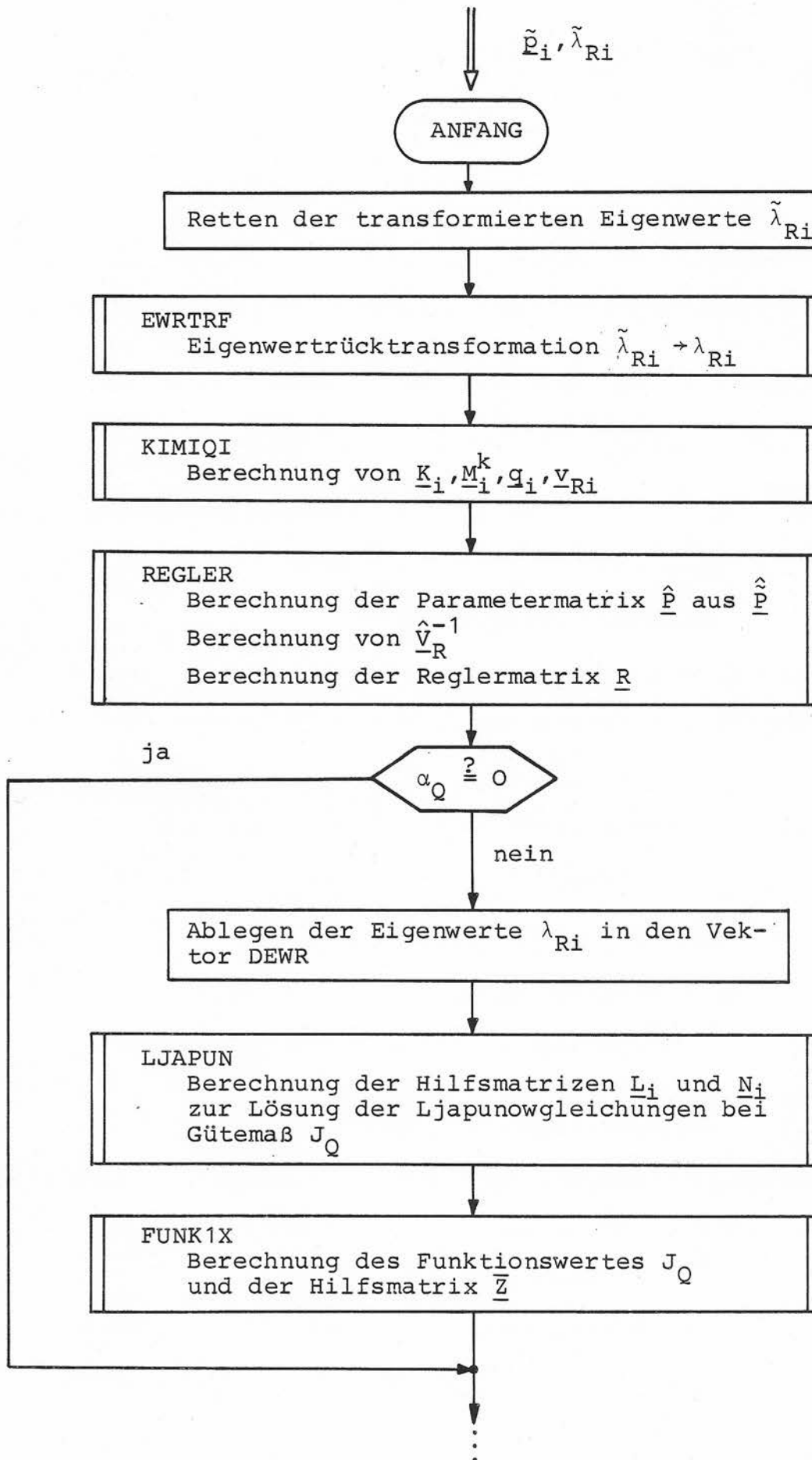
Berechnung des Funktionswertes $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$;

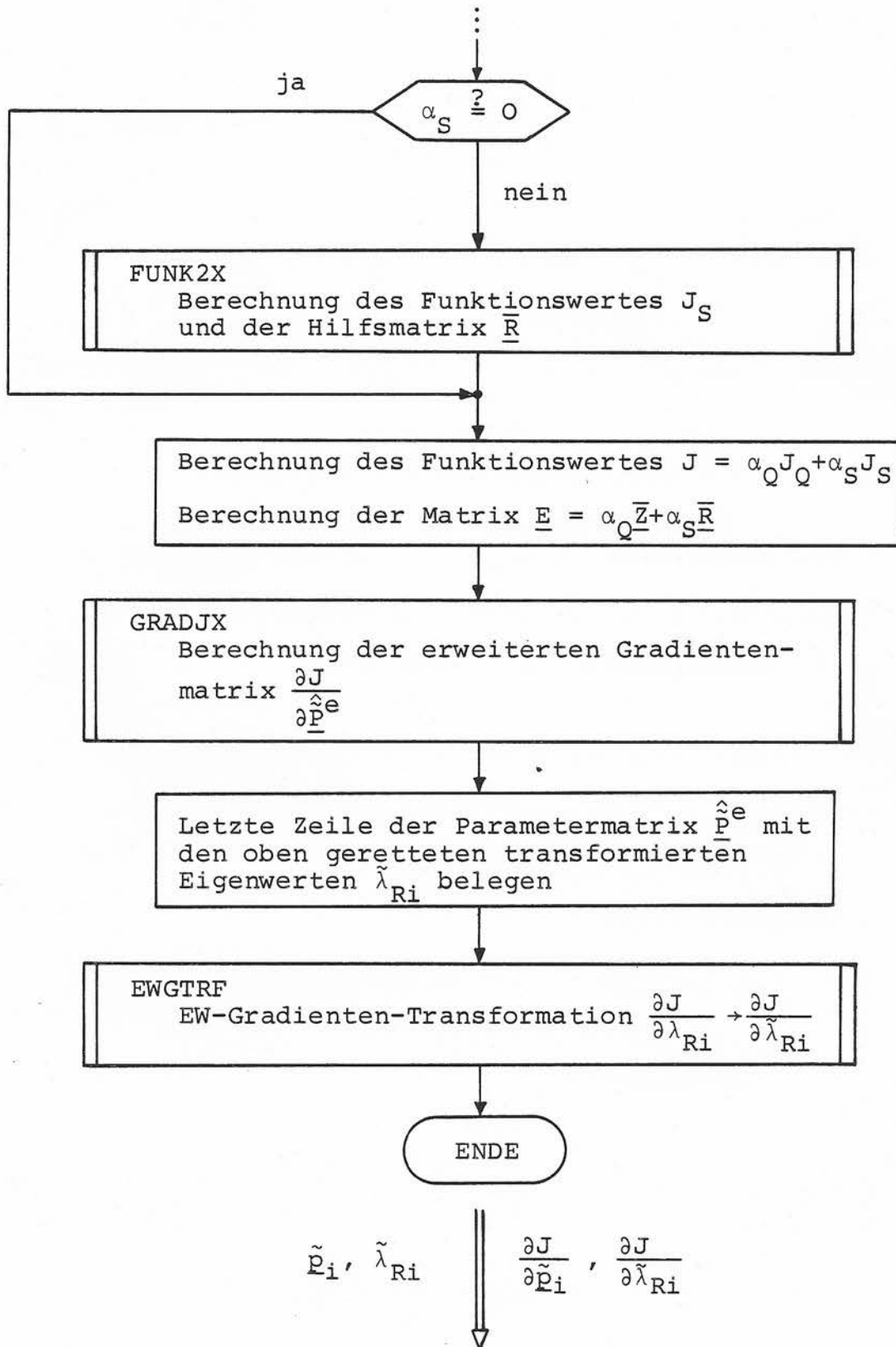
Berechnung der Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i}$ und $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$



7.1.3 Das UP FUGRAX

Dieses UP berechnet den Gesamtfunktionswert $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$ und die Gradienten bzgl. den Variablen $\tilde{\lambda}_{Ri}$ und \tilde{p}_i (siehe auch Kommentar zu UP FUGRAX in /8/).



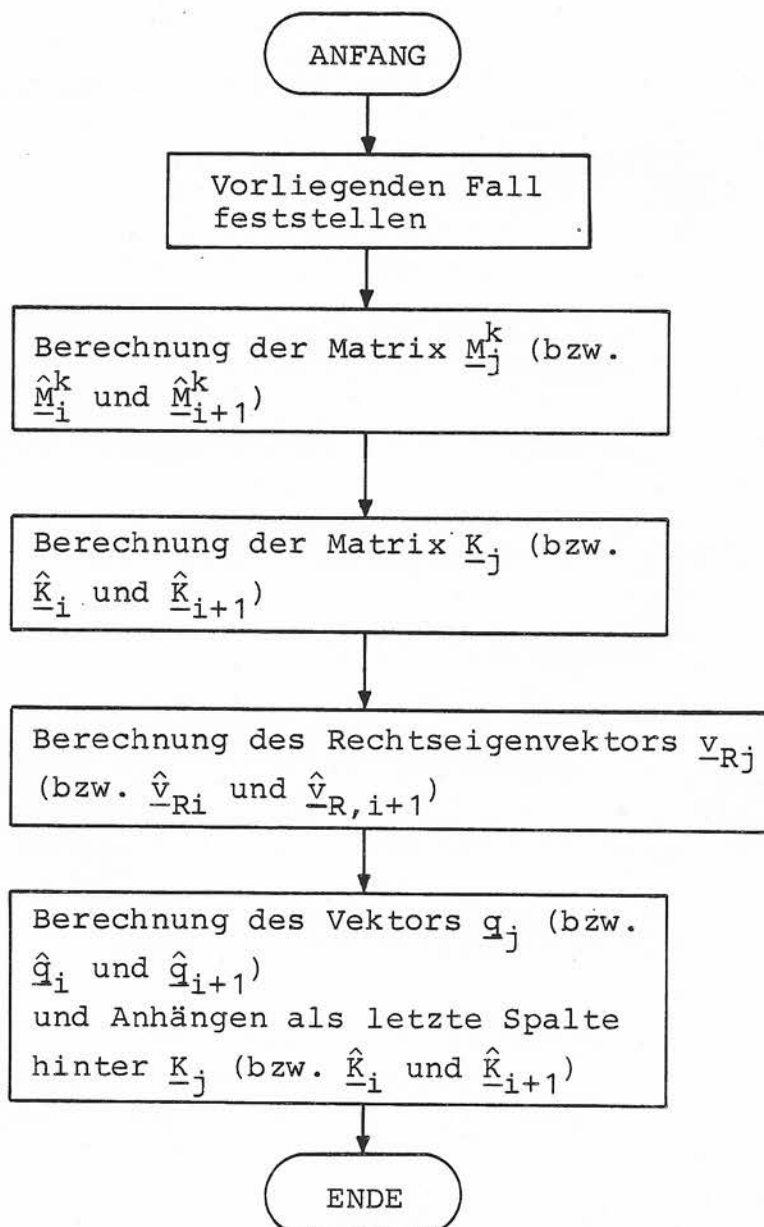


$$\tilde{p}_i, \tilde{\lambda}_{Ri} \quad \frac{\partial J}{\partial \tilde{p}_i}, \frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$$

7.1.4 Das UP KIMIQUI

Wie es aus dem Namen schon hervorgeht, berechnet dieses UP die Matrizen \underline{K}_i , \underline{M}_i^k und die Vektoren \underline{q}_i . Außerdem werden die Rechtseigenvektoren \underline{v}_{Ri} bestimmt, die auch für die Berechnung der Vektoren \underline{q}_i gebraucht werden. KIMIQUI fragt zunächst ab, ob der vorgegebene Regelungseigenwert reell oder komplex ist und ob er mit einem steuerbaren oder nichtsteuerbaren Streckeneigenwert übereinstimmt. Je nach vorliegendem Fall werden dann die oben genannten Matrizen und Vektoren berechnet (siehe Abschnitt 2.3.4).

Die prinzipielle Berechnungsreihenfolge geht aus dem nachstehenden groben Flußdiagramm hervor.



7.1.5 Zur Bestimmung der Matrix \bar{Z} im UP FUNK1X

Die numerische Berechnung des Funktionswertes J_Q und dessen Gradienten kann nach dem in /3, Seite 57ff./ angegebenen Algorithmus erfolgen.

Bei der programmtechnischen Realisierung im Programmpaket POMIX wird diese Berechnungsreihenfolge allerdings nur bis zur Bestimmungsgleichung für \hat{Z} (Punkt 11) eingehalten. Im UP FUNK1X wird aus dieser Matrix \hat{Z} über die Beziehung

$$\bar{Z} = [\underline{W} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T \hat{Z}]^T \quad (7.1)$$

die immer reelle Matrix \bar{Z} erzeugt. Daraus berechnet das UP GRADJX schließlich über die Matrix \underline{E} die J_Q -Gradienten, falls $\alpha_Q = 1$ und $\alpha_S = 0$ gesetzt wurden.

Man beachte, daß im UP FUNK1X der Variablenname W für die in /3/ verwendete Matrix

$$\hat{\underline{W}} = \hat{\underline{V}}_R^{-1} \underline{W} (\hat{\underline{V}}_R^{-1})^T$$

steht. Die letzten 2 UP-Aufrufe CALL MXMLT2 in FUNK1X berechnen demnach die transponierte \bar{Z} -Matrix nach der Beziehung

$$\bar{Z}^T = \hat{\underline{V}}_R \hat{\underline{W}} \hat{Z} \quad ,$$

welche sich durch Einsetzen des Ausdrucks für $\hat{\underline{W}}$ in die obige Gleichung (7.1) überführen läßt.

7.1.6 Das UP GRADJX

Dieses UP berechnet die Gradienten des Gesamtgütekriteriums $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$ und zwar sowohl bzgl. der Parametervektoren als auch bzgl. der Eigenwerte der Regelung. Aufgrund der geschickten Erweiterungen der Matrizen \underline{K}_i und \underline{M}_i^k ergibt sich automatisch auch eine erweiterte Gradientenmatrix, die in ihrer letzten Zeile die *noch nicht transformierten* EW-Gradienten enthält (siehe Gl. (5.60)).

7.2 Die numerischen Probleme bei den Transformationsprogrammen

Bei der Implementierung des Programmpaketes POMIX auf einer Rechenanlage ergeben sich generell Probleme aufgrund des beschränkten Zahlenbereichs. Für diese Arbeit stand die Anlage UNIVAC 1100/60 des Rechenzentrums der Universität Karlsruhe zur Verfügung, bei der der größte (kleinste) gerade noch verarbeitbare Zahlenwert 10^{+308} (10^{-308}) beträgt. Sobald eine Größe diesen Wert betragsmäßig überschreitet (unterschreitet), wird das Programm mit einer Fehlermeldung (*value out of range*) abgebrochen.

Nun ist aber aus Kapitel 4 bekannt, daß die transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ keinen Beschränkungen unterliegen. Sie nehmen unendlich große oder kleine Werte an, sobald die Originaleigenwerte λ_{Ri} an die Grenzen der Polgebiete wandern.

Um einen Programmabbruch zu vermeiden, müssen deshalb bei den Transformationsunterprogrammen EWTRF, EWRTRF und EWGTRF spezielle Vorkehrungen getroffen werden, die in den folgenden Unterabschnitten beschrieben werden.

7.2.1 Das UP EWTRF

Das UP EWTRF transformiert die in der letzten Zeile der erweiterten $(p+1, n)$ -Matrix $\hat{\underline{P}}^e$ abgelegten Regelungseigenwerte nach den Gln. (4.1) bis (4.3) in die transformierten Regelungseigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$.

Liegt ein Starteigenwert λ_{Ri} exakt auf einer Gebietsgrenze (EWMIN bzw. EWMAX), so ist das Argument des Logarithmus in einer der Gln. (4.1) bis (4.3) gleich Null bzw. Unendlich. In diesem Fall wird der transformierte Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ gleich -10^{305} bzw. $+10^{305}$ gesetzt.

Falls auch nur ein Eigenwert λ_{Ri} außerhalb der vorgegebenen Gebietsgrenzen liegt, wird das gesamte Programm mit einem entsprechenden Fehlerhinweis abgebrochen (siehe /8/, UP EWTRF).

7.2.2 Das UP EWRTRF

Das UP EWRTRF transformiert die in der letzten Zeile der erweiterten (p+1,n)-Parametermatrix abgelegten transformierten Regelungseigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ in die Originaleigenwerte λ_{Ri} zurück.

Problem: Wird der transformierte Eigenwert $\tilde{\lambda}_{Ri}$ (reeller Fall angenommen) nur wenig größer als 700, so kann die Funktion $e^{\tilde{\lambda}_{Ri}}$ in Gl. (4.4) nicht mehr berechnet werden, da die Rechnergenauigkeit von 10^{+308} nicht ausreicht. Auch bei Werten kleiner als -350 für die transformierten Eigenwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$ wird die Rechnung kritisch, da der Term

$$X = \frac{e^{\tilde{\lambda}_{Ri}}}{e^{\tilde{\lambda}_{Ri}} + e^{-\tilde{\lambda}_{Ri}}}$$

in Gl. (4.4) sehr kleine Werte annimmt, wofür die Rechnergenauigkeit von 10^{-308} nicht mehr ausreicht.

Maßnahme: Deshalb wird im ersten Fall ($\tilde{\lambda}_{Ri} > 700$) $X = 1$ und im zweiten Fall ($\tilde{\lambda}_{Ri} < -350$) $X = 0$ gesetzt.

7.2.3 Das UP EWGTRF

Das UP EWGTRF transformiert die in der letzten Zeile der erweiterten (p+1,n)-Gradientenmatrix \hat{G}^e abgelegten EW-Gradienten

$\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}}$ in die transformierten EW-Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$.

Problem: Übersteigt der Absolutbetrag des transformierten Eigenwertes $\tilde{\lambda}_{Ri}$ den Wert 350 nur wenig, so wird der Term

$$(e^{\tilde{\lambda}_{Ri}} + e^{-\tilde{\lambda}_{Ri}})^2$$

größer als 10^{+308} , also größer als die Rechengenauigkeit zuläßt.

Maßnahme: In diesem Fall wird der Term

$$X = \frac{2}{(e^{\tilde{\lambda}_{Ri}} + e^{-\tilde{\lambda}_{Ri}})^2}$$

in Gl. (4.9) zu 10^{-305} gesetzt.

Für den Fall, daß die Multiplikation dieser kleinen Zahl mit dem "originalen" EW-Gradienten $\frac{\partial J}{\partial \lambda_{Ri}}$ und der Gebietsgrendifferenz kleiner oder gleich 10^{-305} ist, wird der transformierte EW-Gradient $\frac{\partial J}{\partial \tilde{\lambda}_{Ri}}$ ebenfalls zu 10^{-305} gesetzt.

7.3 Der Programmtest

Eine sehr wesentliche und zeitraubende Teilaufgabe dieser Diplomarbeit bestand im Austesten des fertiggestellten Programmpaketes POMIX, um einen ordnungsgemäßen Reglerentwurf garantieren zu können.

Zunächst erschien es zweckmäßig, das UP KIMIQUI auszutesten, denn korrekte Matrizen (bzw. Vektoren) \underline{K}_i , \underline{M}_i^k , \underline{q}_i und \underline{v}_{Ri} sind Grundvoraussetzung für eine fehlerlose Gradientenberechnung und eine richtige Minimierung.

Es wurden für ein System 3. Ordnung (mit einem reellen Eigenwert und einem konjugiert komplexen Polpaar) alle 6 verschiedenen Fälle (siehe Abschnitt 2.3) durchgerechnet und anschließend die Er-

gebnisse mit einem Taschenrechner überprüft. (Dazu war es nötig, ein übergeordnetes Programm zu schreiben, das zu Beginn die benötigten Daten einliest, dann das UP KIMIQUI aufruft und am Ende die Ergebnisse ausgibt.)

Die übrigen Unterprogramme wurden nicht einzeln ausgetestet. Dazu wäre ein zu großer Aufwand nötig gewesen. Stattdessen wurde die Richtigkeit des gesamten Programmpaketes POMIX bewiesen, indem für ein System 3. Ordnung durch numerische Minimierung des quadratischen Gütekriteriums ($\alpha_S = 0$) ein Regler errechnet wurde, der mit dem quadratisch optimalen Riccati-Regler identisch war. Dieser Riccati-Regler ergab sich aus der Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung (siehe Gl. 7.4), wofür ein Unterprogramm (MARIC2) auf der Institutsdatei IRS*RT zur Verfügung steht.

Daß zwischen beiden Entwurfsmethoden ein Zusammenhang besteht, soll die folgende Betrachtung verdeutlichen:

Im Minimum des Funktionswertes J_Q müssen die PV- und EW-Gradienten zum quadratischen Gütemaß gleich Null sein! Verschwindende Gradienten zu J_Q erhält man, wenn die Matrix \underline{Z} gleich Null ist. Nach Gl. (5.47) genügt es, wenn gilt

$$(\underline{R}^T \quad \underline{T} - \underline{Q} \underline{B})^T = \underline{0}$$

oder - weil die Matrizen \underline{Q} und \underline{T} symmetrisch sind -

$$\underline{T} \underline{R} - \underline{B}^T \underline{Q} = \underline{0} \quad . \quad (7.2)$$

Ein optimaler Regler im Sinne des quadratischen Gütekriteriums ergibt sich also nach der Gleichung

$$\underline{R} = \underline{T}^{-1} \underline{B}^T \underline{Q} \quad (7.3)$$

mit \underline{Q} aus der Ljapunow-Gleichung

$$(\underline{A} - \underline{B} \underline{R})^T \underline{Q} + \underline{Q} (\underline{A} - \underline{B} \underline{R}) = -(\underline{S} + \underline{R}^T \underline{T} \underline{R}) .$$

Nach einer Umformung dieser Ljapunow-Gleichung ergibt sich

$$\underline{Q} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{Q} - \underline{Q} \underline{B} \underline{R} + \underline{S} = -\underline{R}^T (\underline{T} \underline{R} - \underline{B}^T \underline{Q}) .$$

Setzt man Gl. (7.3) ein und berücksichtigt die Beziehung (7.2), so erhält man schließlich die bekannte *Matrix-Riccati-Gleichung*

$$\underline{Q} \underline{A} + \underline{A}^T \underline{Q} - \underline{Q} \underline{B} \underline{T}^{-1} \underline{B}^T \underline{Q} + \underline{S} = \underline{0} . \quad (7.4)$$

Um das Programm sowohl für den reellen als auch für den komplexen Fall zu überprüfen, wird für den Test ein steuerbares System 3. Ordnung mit einem reellen Eigenwert und einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar gewählt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} , \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Für die Gewichtungsmatrizen \underline{S} und \underline{T} werden Einheitsmatrizen gewählt. Diese erfüllen die für die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung notwendigen Voraussetzungen (\underline{S} , \underline{T} symmetrisch; \underline{S} positiv semidefinit; \underline{T} positiv definit).

Löst man nun die Matrix-Riccati-Gleichung (7.4) mit Hilfe des Unterprogramms MARIC2 und setzt das erhaltene \underline{Q} in Gl. (7.3) ein, so erhält man den Riccati-Regler

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} .3876+000 & .3638-001 & .4981-002 \\ .4136-001 & .2268+000 & .3941+000 \end{bmatrix} .$$

Der über \underline{R} geschlossene Regelkreis hat dann die Eigenwerte

RE	IM
-----	-----
-.1814882979+001	.8627502162+000
-.1814882979+001	-.8627502162+000
-.1278794914+001	.0000000000

Nun wird die numerische Minimierung des quadratischen Gütemaßes mit Hilfe des Programmpaketes POMIX durchgeführt. Dazu werden $\alpha_Q = 1$, $\alpha_S = 0$ und \underline{K} gleich der Einheitsmatrix gesetzt. Die System- und Gewichtungsmatrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{S} und \underline{T} werden genauso wie oben gewählt. Als Parameterstartwerte werden Zufallszahlen verwendet und als Starteigenwerte

$$\lambda_{R1} = -1 \quad ,$$

$$\lambda_{R2} = -2 + j1$$

und

$$\lambda_{R3} = -2 - j1$$

vorgegeben. Für jeden der 3 Eigenwerte wird ein Polgebiet gewählt; die Realteilgrenzen aller 3 Eigenwerte liegen bei -100 und 0, die Imaginärteilgrenzen des konjugiert komplexen Polpaares bei 0 und ± 100 .

In jedem Optimierungsschritt ändern sich die Eigenwerte und Parametervektoren, bis sich am Ende der Minimierung die optimalen Eigenwerte

RE	IM
-1.38+000	0.00
-1.91+000	9.63-001
-1.91+000	-9.63-001

ergeben.

Sieht man von Rundungsfehlern ab, so stimmen diese Eigenwerte exakt mit den oben erhaltenen überein. Der mit diesen Eigenwerten und den ebenfalls aus der Optimierung erhaltenen Parametervektoren berechnete Regler ergibt sich zu

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} .3876+000 & .3639-001 & .4783-002 \\ .4136-001 & .2268+000 & .3941+000 \end{bmatrix} .$$

Ein Vergleich mit dem obigen Regler zeigt auch hier eine sehr gute Übereinstimmung, welche ein Beweis für eine fehlerfreie Minimierung mit Hilfe des Programmpaketes POMIX ist.

Anmerkung: POMIX wurde auch noch an anderen Beispielen ausgetestet. Für das Dampferzeugermodell ($n = 11$, $p = 2$) stimmten die beiden gefundenen Regler allerdings nicht überein. Dies liegt daran, daß der Funktionswert J_Q bei diesem System wahrscheinlich sehr viele Nebenminima hat und wahrscheinlich ein solches gefunden wurde. Ob das absolute oder irgendein relatives Minimum gefunden wird, hängt ganz entscheidend von den Startwerten ab. Die Wahrscheinlichkeit, daß das absolute Minimum gefunden wird, ist um so kleiner, je größer die Anzahl $n(p+1)$ der zu optimierenden Variablen ist.

Im nächsten Kapitel werden nun an Beispielen die Vorteile der Polgebietsvorgabe gegenüber der Polvorgabe aufgezeigt.

8. BEISPIELE

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich die Ersetzung der *Polvorgabe* durch die *Polgebietsvorgabe* auswirkt.

Als erstes Beispiel werden Reglerentwürfe für ein Dreitanksystem behandelt. Es wird zuerst ein quadratisch optimaler Regler und anschließend eine unvollständige Zustandsvektorrückführung entworfen, wobei jeweils die beiden Entwurfsmöglichkeiten Polvorgabe und Polgebietsvorgabe miteinander verglichen werden.

Im zweiten Abschnitt wird ein Regler für die Doppelverdampfungsanlage durch Polgebietsvorgabe berechnet, von dem gefordert wird, daß er nur einen Teil der Zustände zurückführt und zudem ein gutes Übergangsverhalten des geschlossenen Regelkreises erzeugt. Er wird mit dem in /12/ erreichten Polvorgabe-Regler verglichen.

Als drittes Beispiel wird eine Teilzustandsvektorrückführung für ein Eingrößensystem (Spannungsregler) entworfen, wozu man mit dem bisherigen Programmpaket POMIQ nicht in der Lage war.

8.1 Das Dreitanksystem

8.1.1 Beschreibung der Anlage und mathematisches Modell

Die Anordnung des Systems ist in Bild 8.1 schematisch dargestellt. Für alle Rohre wird ein einheitlicher Querschnitt vorausgesetzt; entsprechendes gilt für die Querschnitte der 3 Behälter. Das dynamische Verhalten des Systems wird durch ein linearisiertes und normiertes Zustandsraummodell 3. Ordnung mit den Matrizen

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -.3320+000 & .3320+000 & .0000 \\ .3320+000 & -.6640+000 & .3320+000 \\ .0000 & .3320+000 & -.5240+000 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} .7640+000 & .0000 \\ .0000 & .0000 \\ .0000 & .7640+000 \end{bmatrix}$$

beschrieben /4/.

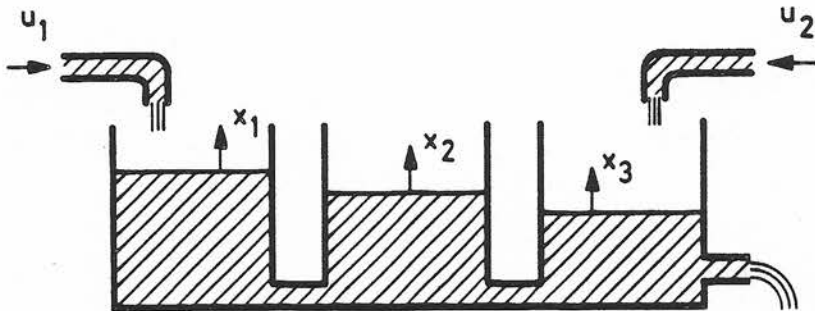


Bild 8.1: Dreitanksystem

Es bedeuten:

x_i : Abweichung vom Ruhefüllstand in Tank i ,

u_i : zufließendes Volumen pro Zeiteinheit.

8.1.2 Entwurf eines quadratisch optimalen Reglers

Es soll nur das quadratische Gütekriterium nach Gl. (3.1) minimiert werden, also wird $\alpha_Q = 1$ und $\alpha_S = 0$ gewählt. Die Gewichtungsmatrizen \underline{S} und \underline{T} sowie die Kovarianzmatrix \underline{K} sind Einheitsmatrizen.

Nun wird zunächst ein Polvorgabe-Regler entworfen. Dazu werden die 3 reellen Regelungseigenwerte

$$\lambda_{R1} = -0.27 \quad ,$$

$$\lambda_{R2} = -0.64$$

und

$$\lambda_{R3} = -1.36$$

vorgegeben. Als Parameterstartwerte (= modifizierte Parametervektoren) werden Zufallszahlen verwendet:

$$\hat{\underline{p}} = \begin{bmatrix} -.7396+000 & -.8065+000 & .6684+000 \\ .6731+000 & .5913+000 & -.7438+000 \end{bmatrix} .$$

Die Tabelle 8.1 zeigt, wie der Funktionswert $F1 = J_Q$ im Laufe der Optimierung abnimmt. Als gewünschte Iterationszahl wurde 18 ($= 2 \cdot n \cdot (p+1)$) gewählt; dies ist die 2-fache Anzahl der bei Polgebietsvorgabe zu optimierenden Variablen. Bereits nach 15 Iterationen und 28 Funktionswertberechnungen bricht das Programm aufgrund interner Rundungsfehler ab.

IT= 0	IF= 1	F1= 7.3913550958968+000
IT= 2	IF= 4	F1= 4.2381723576353+000
IT= 4	IF= 14	F1= 1.7177069182604+000
IT= 6	IF= 17	F1= 1.7173870155293+000
IT= 8	IF= 21	F1= 1.7166370699130+000
IT= 10	IF= 24	F1= 1.7164929427913+000
IT= 12	IF= 26	F1= 1.7164925529904+000
IT= 14	IF= 28	F1= 1.7164925529900+000
IT= 15	IF= 28	F1= 1.7164925529900+000

Tabelle 8.1: Abnahme des Funktionswertes $F1 = J_Q$ beim Polvorgabe-Entwurf für das Dreitanksystem

ABBRUCHKRITERIUM :
INTERNE RUNDUNGSFEHLER: NEUSTART NOTWENDIG

Als quadratisch optimale Rückführmatrix ergibt sich bei Polvorgabe

$$\underline{R}_{\text{Pol}} = \begin{bmatrix} .4489+000 & -.4421-001 & .1965+000 \\ .2126+000 & -.1118+000 & .5328+000 \end{bmatrix}$$

mit der Reglernorm 0.764.

Die zugehörigen Simulationen sind in den Bildern 8.2 und 8.3 (gestrichelte Kurven) wiedergegeben. Dabei wurde - wie bei allen folgenden Simulationen des Dreitanksystems - mit der Anfangswertstörung

$$\underline{x}_0^T = [-1, -0.6, -0.3]$$

erregt.

Für den Polgebietsvorgabe-Entwurf werden genau die gleichen Daten wie beim Polvorgabe-Entwurf eingegeben. Es müssen nur zusätzlich die Polgebietsgrenzen festgelegt werden, innerhalb derer sich die Eigenwerte während der Optimierung bewegen dürfen. Für jeden der 3 reellen Eigenwerte wird ein Abschnitt auf der linken Realteilachse vorgegeben. Die gewählten Grenzen gehen aus Tabelle 8.2 hervor, während Tabelle 8.3 die Funktionswertabnahme im Laufe der Optimierung zeigt.

Starteigenwert	EWMIN	EWMAX
$\lambda_{R1} = -0.27$	-1.0	-0.25
$\lambda_{R2} = -0.64$	-1.5	-0.6
$\lambda_{R3} = -1.36$	-2.0	-1.3

Tabelle 8.2: Gewählte Gebietsgrenzen für das Dreitanksystem

IT= 0	IF= 1	F1= 7.3913550958968+000
IT= 2	IF= 4	F1= 4.2899152359316+000
IT= 4	IF= 15	F1= 1.7204444952548+000
IT= 6	IF= 23	F1= 1.4649418871961+000
IT= 8	IF= 28	F1= 1.4387089985321+000
IT= 10	IF= 31	F1= 1.4321335565125+000
IT= 12	IF= 35	F1= 1.4295391668081+000
IT= 14	IF= 38	F1= 1.4277845183724+000
IT= 16	IF= 41	F1= 1.4262785220175+000
IT= 18	IF= 43	F1= 1.4261709418711+000

Tabelle 8.3: Abnahme des Funktionswertes $F1 = J_Q$ beim Polgebietsvorgabe-Entwurf für das Dreitanksystem

ABBRUCHKRITERIUM :
ANZAHL DER ITERATIONEN GROESSER/GLEICH MAXITN = 18

Schon nach 6 Iterationen liegt ein kleinerer Funktionswert vor, als bei Polvorgabe überhaupt erreicht wird - ein Zeichen dafür, daß die Einbeziehung der Eigenwerte in die Optimierung sehr effektiv ist.

Hier bricht das Programm erst nach der gewünschten Iterationsanzahl $2n(p+1) = 18$ ab. Eine Erhöhung der Iterationszahl führt je-

doch auf keine wesentlich kleineren Funktionswerte F_1 , da man sich nach 18 Schritten wahrscheinlich schon sehr nahe beim Minimum befindet (siehe /12/).

Die Tabelle 8.4 zeigt, wohin die Eigenwerte im Laufe der Optimierung gewandert sind.

Starteigenwerte		optimale Eigenwerte
-0.27	→	-0.52
-0.64	→	-0.88
-1.36	→	-1.31

Tabelle 8.4: Eigenwerte vor und nach der Optimierung

Mit den optimalen Eigenwerten und den ebenfalls aus der Optimierung erhaltenen Parametervektoren ergibt sich der quadratisch optimale Regler

$$\underline{R}_{\text{Geb}} = \begin{bmatrix} .8178+000 & .2973+000 & .1615+000 \\ .1822+000 & .2089+000 & .7472+000 \end{bmatrix}$$

mit der Reglernorm 1.19.

In den folgenden Bildern 8.2 und 8.3 sind die Zeitverläufe der Zustands- und Stellgrößen aufgetragen, die sich mit den durch Pol- und Polgebietsvorgabe erreichten Reglern ergeben.

Aus Bild 8.2 geht deutlich hervor, daß der mittels Polgebietsvorgabe entworfene Regler die Zustandsgrößen sehr viel schneller auf ihren Sollwert bringt als der Polvorgaberegler. Bereits nach 12 Einheiten normierter Zeit haben alle Zustandsgrößen ihren Sollwert erreicht, bei Polvorgabe jedoch noch lange nicht.

Für diese recht gute Verbesserung in der Einschwingzeit müssen allerdings erheblich höhere Stellgrößen in Kauf genommen werden (siehe Bild 8.3).

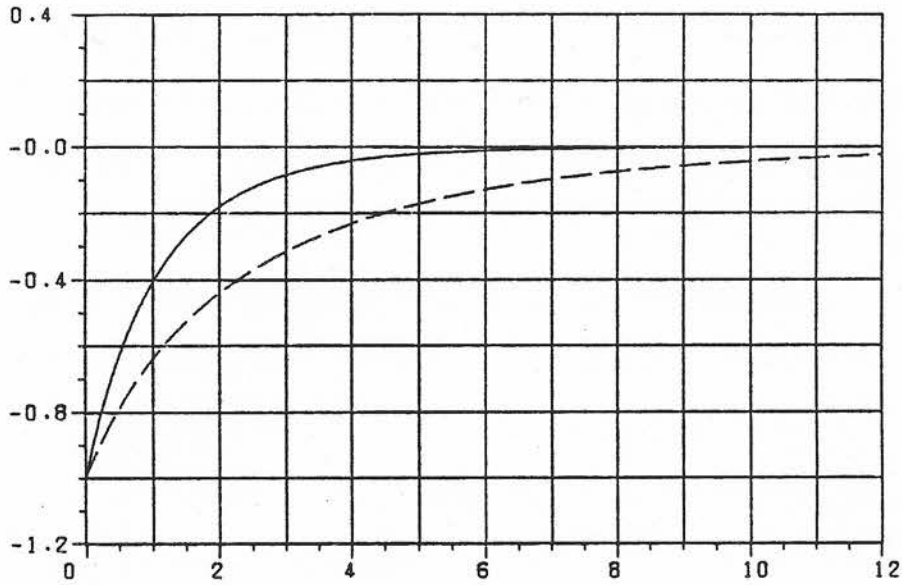


Bild 8.2a:
Zustandsgrös-
se $x_1(t)$

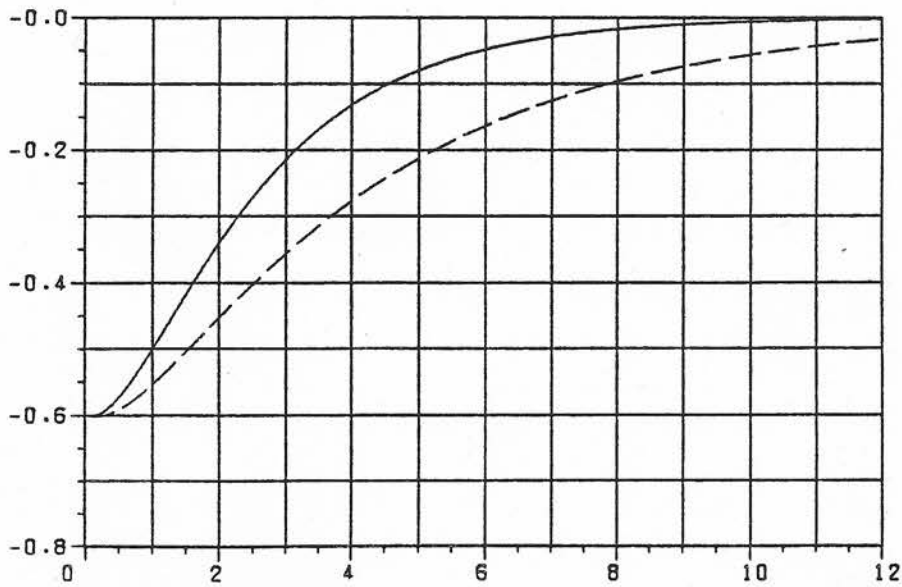


Bild 8.2b:
Zustandsgrös-
se $x_2(t)$

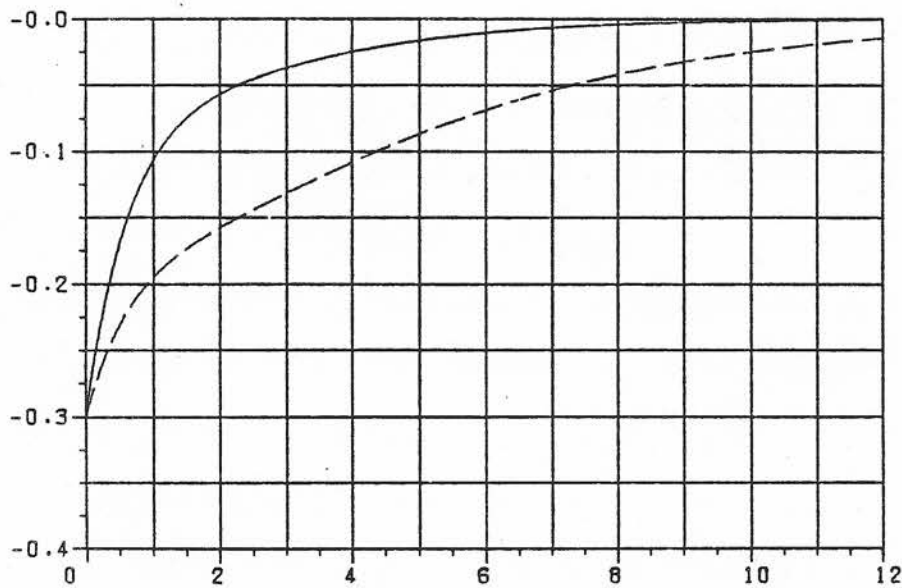


Bild 8.2c:
Zustandsgrös-
se $x_3(t)$

Bild 8.2: Zustandsgrößenverläufe des quadratisch optimal geregelten Dreitanksystems (Polvorgabe: — —, Polgebietsvorgabe: —)

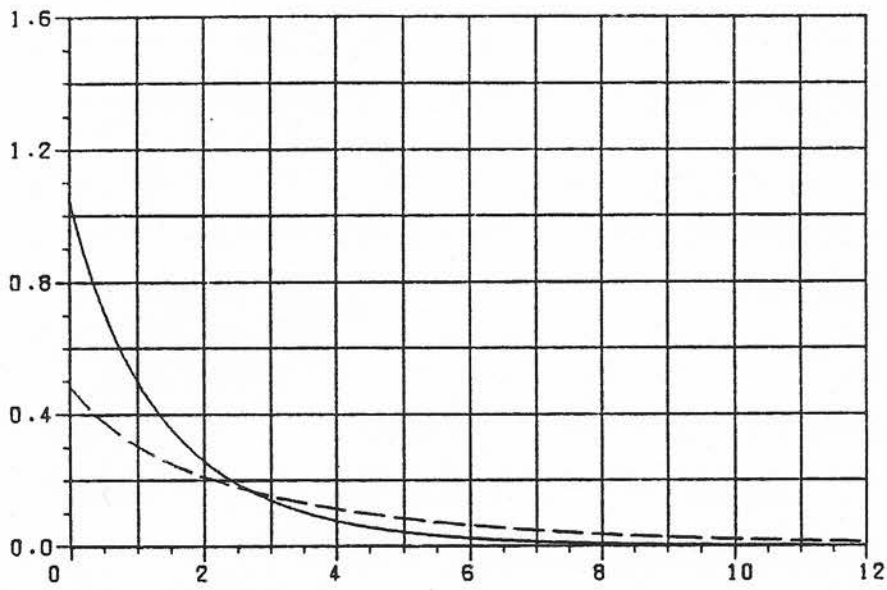


Bild 8.3a:
Stellgröße $u_1(t)$

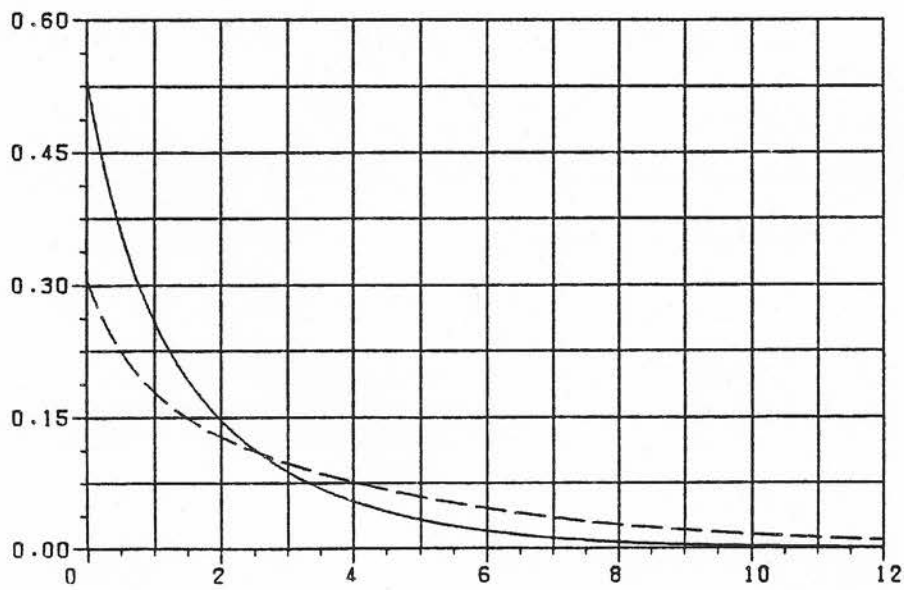


Bild 8.3b:
Stellgröße $u_2(t)$

Bild 8.3: Stellgrößenverläufe des quadratisch optimal geregelten Dreitanksystems (Polvorgabe: — —, Polgebietsvorgabe: —)

8.1.3 Entwurf einer unvollständigen Zustandsvektorrückführung

In diesem Abschnitt soll eine Teilzustandsvektorrückführung entworfen werden, die nur die Zustandsgröße x_1 zurückführt. Dazu muß das Reglerstruktur-Gütekriterium nach Gl. 3.5 minimiert werden, durch welches man gezielte Reglerelemente unterdrücken kann. Damit nur der Zustand x_1 zurückgeführt werden braucht, müssen die Elemente der Reglerspalten 2 und 3 im Verhältnis zu denen der 1. Spalte sehr klein sein, so daß sie gegenüber den andern vernachlässigt und zu Null gesetzt werden können. Dies wird durch eine hohe Gewichtung der Spalten 2 und 3 gegenüber der Spalte 1 erreicht.

Es werden wieder 2 Entwürfe gemacht: Einmal werden die Eigenwerte fest vorgegeben und einmal werden sie innerhalb bestimmter Gebiete frei gelassen. Beiden Entwürfen liegt die Gewichtungsmatrix

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 100 \\ 1 & 100 & 100 \end{bmatrix}$$

zugrunde.

Wie beim quadratisch optimalen Reglerentwurf werden die 3 reellen Eigenwerte

$$\lambda_{R1} = -0.27 \quad ,$$

$$\lambda_{R2} = -0.64$$

und

$$\lambda_{R3} = -1.36$$

gewählt. Als Parameterstartvektoren werden jene genommen, die sich als Ergebnis der sukzessiven Polvorgabe ergeben (mittels Programmpaket SUKPOV):

$$\underline{\hat{P}} = \begin{bmatrix} -.3117+000 & .5125+000 & .6408+000 \\ -.1863+000 & .1147+000 & .2380+000 \end{bmatrix}$$

Die Gewichtungsfaktoren α_Q und α_S werden wie folgt gesetzt:

$$\alpha_Q = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_S = 1 \quad .$$

Bei Polvorgabe wird die Optimierung bereits nach 11 Iterationen (Anzahl 18 ist vorgegeben) aufgrund interner Rundungsfehler abgebrochen. Der Funktionswert F2 sinkt von 2.34 auf 0.57 ab. Damit ergibt sich der Regler

$$\underline{R}_{\text{Pol}} = \begin{bmatrix} .9783+000 & -.9357-002 & .7681-002 \\ .4199+000 & .1217-002 & .3401-002 \end{bmatrix}$$

mit der Reglernorm 1.06.

Es sind alle Elemente besetzt, doch die Elemente der Spalten 2 und 3 sind wie gewünscht wesentlich kleiner (2 Zehnerpotenzen) als die Elemente der 1. Spalte. Zu diesem Regler erhält man die in den Bildern 8.4 und 8.5 gestrichelt gezeichneten Zustands- und Stellgrößenverläufe (bei Anfangswertstörung wie in Abschnitt 8.1.2). Die gleichen Verläufe ergeben sich auch bei Simulation mit dem "Nullregler"

$$\underline{R}_{0,\text{Pol}} = \begin{bmatrix} .9783+000 & .0000 & .0000 \\ .4199+000 & .0000 & .0000 \end{bmatrix} ,$$

bei dem die Reglerspalten 2 und 3 zu Null gesetzt sind. Die erreichte Unterdrückung ist demnach ausreichend, um auf die Rückführung der Zustände x_2 und x_3 verzichten zu können.

Beim Polgebietsvorgabe-Entwurf wird mit den gleichen Parametervektoren und Eigenwerten wie beim Polvorgabe-Entwurf gestartet. Die Optimierung liefert die in der Tabelle 8.5 eingetragenen optimalen Eigenwerte und den zugehörigen Regler

$$\underline{R}_{\text{Geb}} = \begin{bmatrix} .8600+000 & -.8668-002 & .6156-002 \\ .3603+000 & -.7745-003 & .2554-002 \end{bmatrix}$$

mit der Norm 0.93.

Im Laufe der Optimierung sinkt der Funktionswert von 2.34 auf 0.44 ab.

<u>Starteigenwerte</u>		<u>optimale Eigenwerte</u>
-0.27	→	-0.26
-0.64	→	-0.62
-1.36	→	-1.30

Tabelle 8.5: Eigenwerte vor und nach der Optimierung

Ein Vergleich der beiden Entwürfe zeigt eine - wenn auch nur wenig - bessere Unterdrückung der beiden letzten Reglerspalten bei der Polgebietsvorgabe. Außerdem ist die Reglernorm kleiner als beim Polvorgabe-Entwurf, was kleinere Stellgrößen zur Folge hat (siehe Bild 8.5). Das Zeitverhalten der Zustandsgrößen wird minimal schlechter (siehe Bild 8.4).

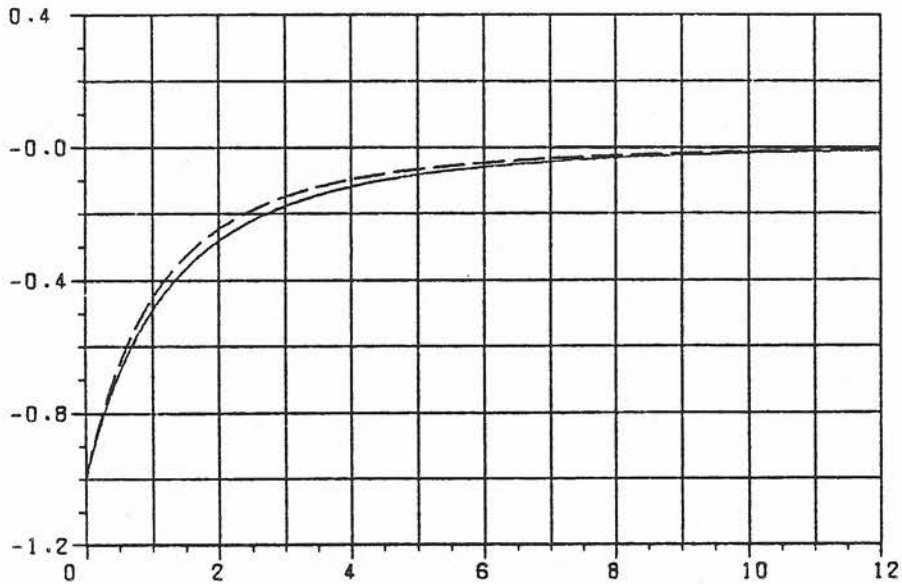


Bild 8.4a:
Zustandsgröße
 $x_1(t)$

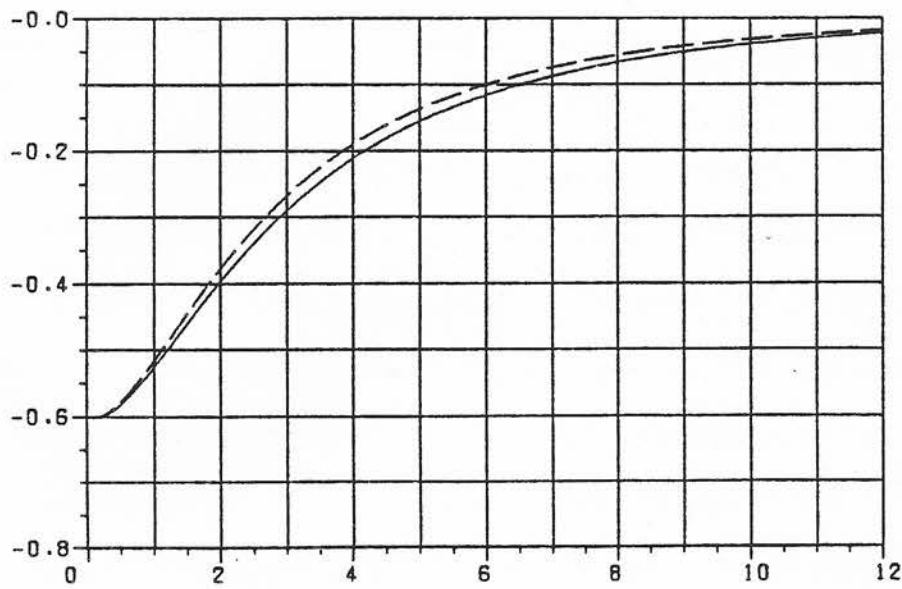


Bild 8.4b:
Zustandsgröße
 $x_2(t)$

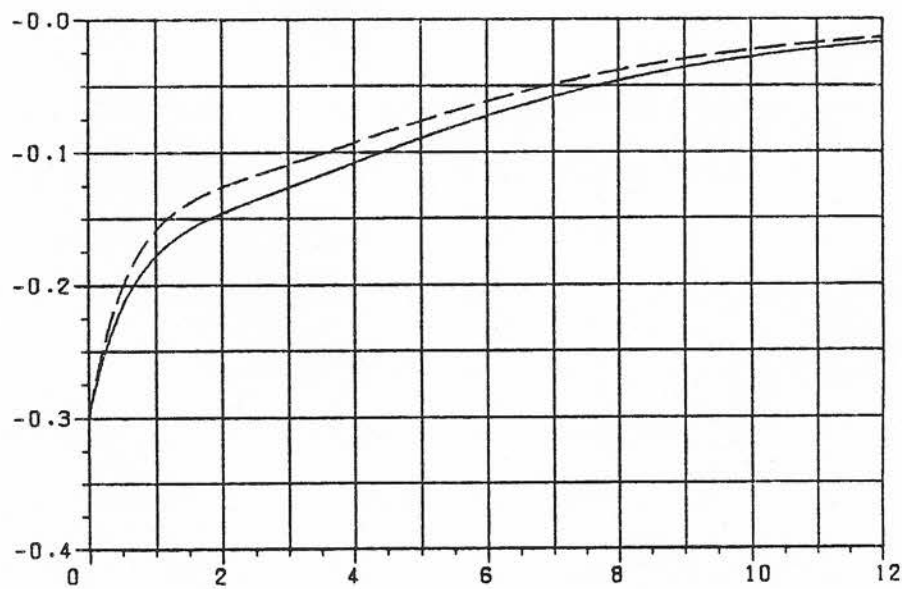


Bild 8.4c:
Zustandsgröße
 $x_3(t)$

Bild 8.4: Zustandsgrößenverläufe des geregelten Dreitanksystems bei Teilzustandsvektorrückführung (Polvorgabe: — —, Polgebietsvorgabe: —)

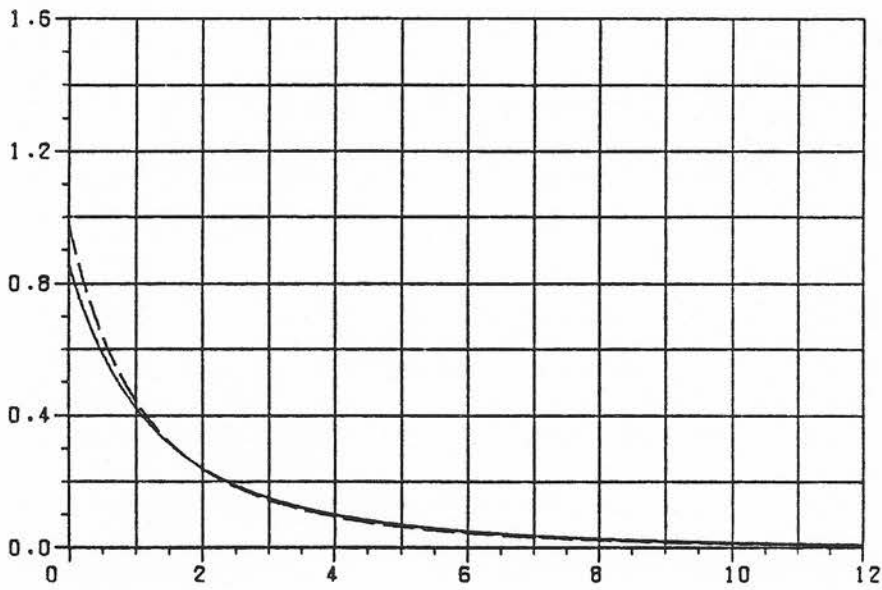


Bild 8.5a:
Stellgröße $u_1(t)$

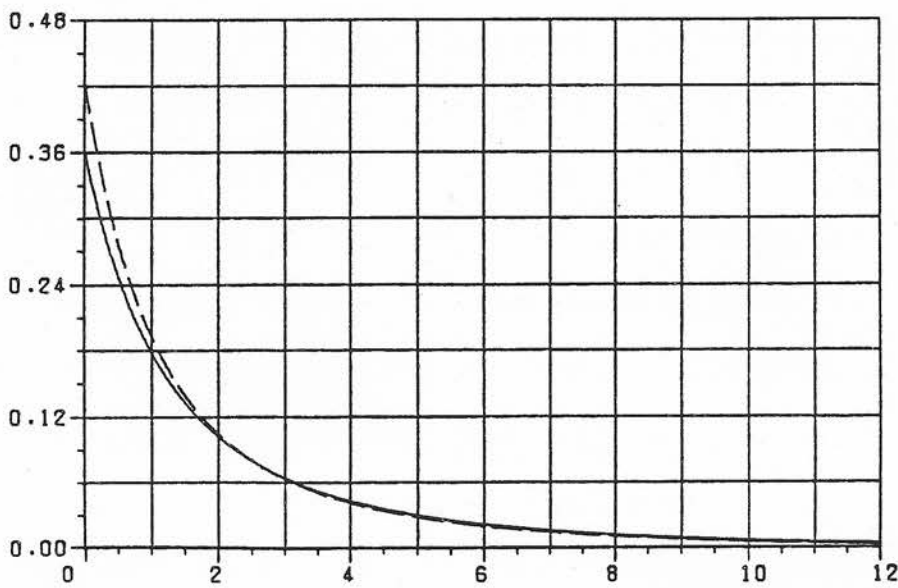


Bild 8.5b:
Stellgröße $u_2(t)$

Bild 8.5: Stellgrößenverläufe des geregelten Dreitanksystems bei Teilzustandsvektorrückführung (Polvorgabe: — —, Polgebietsvorgabe: —)

Die Ergebnisse der beiden Entwürfe machen deutlich, daß das Gewichtungsverhältnis von 100:1 gut ausreicht, um eine zufriedenstellende Unterdrückung der Reglerspalten 2 und 3 zu erreichen. Eine höhere Gewichtung ist deshalb nicht erforderlich. Dennoch

soll zum Abschluß gezeigt werden, wie unterschiedlich die beiden Entwurfsverfahren hinsichtlich erreichbarer Unterdrückung ausfallen, wenn jeweils mit $10^8:1$ gewichtet wird:

Es ergibt sich bei Polvorgabe

$$\underline{R}_{\text{Pol}} = \begin{bmatrix} .9845+000 & -.1670-002 & .1694-002 \\ .4401+000 & -.1687-002 & -.2844-002 \end{bmatrix} \quad \text{mit der Reglernorm 1.08}$$

und bei Polgebietsvorgabe

$$\underline{R}_{\text{Geb}} = \begin{bmatrix} .9780+000 & .8811-007 & .7457-007 \\ .4278+000 & .3633-007 & -.2461-007 \end{bmatrix} \quad \text{mit der Reglernorm 1.07.}$$

Die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Für beide Gütekriterien können mit Hilfe der Polgebietsvorgabe kleinere Funktionswerte erreicht werden als mit Polvorgabe: Bei Verwendung des quadratischen Gütekriteriums erhält man ein besseres Übergangsverhalten, bei Verwendung des Reglerstruktur-Gütekriteriums eine bessere Unterdrückung (kleinere Reglernorm). Daß eine erreichte Verbesserung im Übergangsverhalten eine Verschlechterung der Reglernorm und damit der Stellgrößen zur Folge hat und umgekehrt, läßt sich dadurch erklären, daß jeweils nur eines der beiden Gütemaße minimiert wurde, wovon das eine nur die Dynamik (quadratische Fläche zwischen Zustands-/Stellgrößen und Zeitachse) und das andere nur die Reglernorm bewertet.

Da die beiden Anforderungen offenbar kontrovers sind, liegt es nahe, die gewichtete Summe $J = \alpha_Q J_S + \alpha_S J_S$ zu minimieren. Ein solcher Entwurf soll am folgenden Beispiel des Doppelverdampfers durchgeführt werden.

8.2 Die Doppelverdampfungsanlage

8.2.1 Beschreibung der Anlage und mathematisches Modell

Die Verdampfungsanlage dient zur Konzentration wässriger Lösungen durch Verdampfung des Wasseranteils. Dazu durchläuft die Lösung 2 Verdampferbehälter, von denen der erste mit Heißdampf beheizt wird (siehe Bild 8.6). Der zweite Verdampferbehälter wird durch die Abwärme des ersten Behälters geheizt.

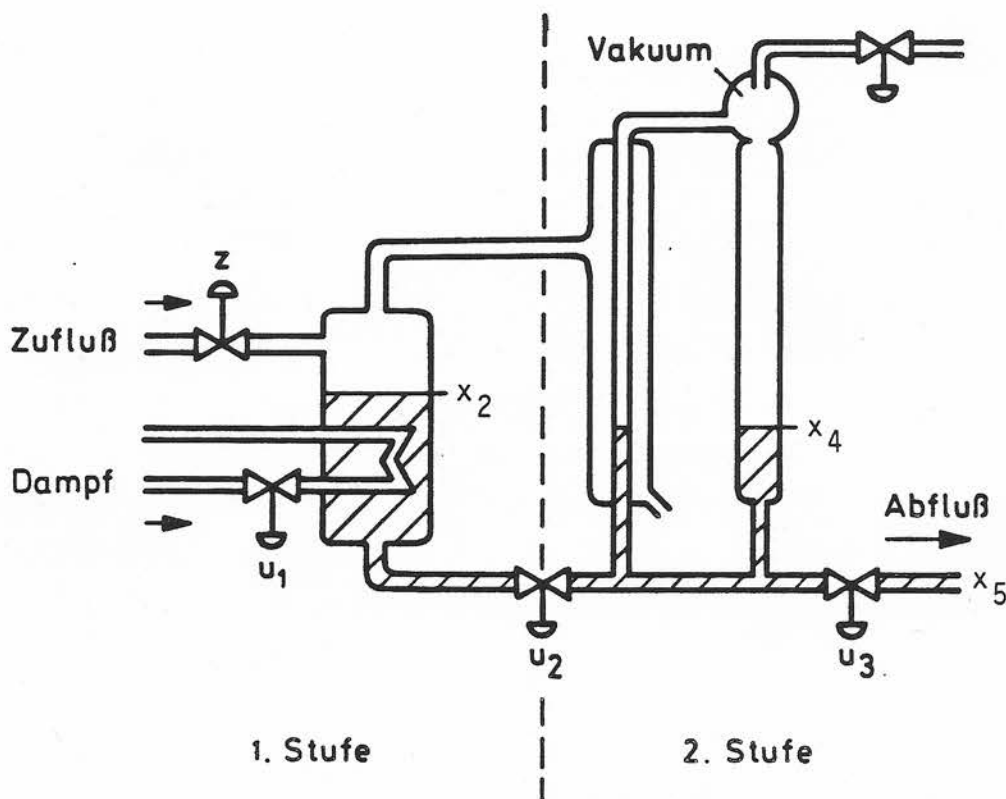


Bild 8.6: Schematischer Aufbau des Doppelverdampfers

Für diese Anlage läßt sich ein Modell 5. Ordnung erstellen mit den Zustandsgrößen

- x_1 : Temperatur in Stufe 1 (10 °C),
- x_2 : Flüssigkeitsmenge in Stufe 1 (0.5 kg),
- x_3 : Salzkonzentration in Stufe 1 (0.25 g/kg),

x_4 : Flüssigkeitsmenge in Stufe 2 (0.5 kg),

x_5 : Salzkonzentration in Stufe 2 (0.25 g/kg),

den Eingangsgrößen

u_1 : Heizdampf Temperatur (10 °C)

u_2 : Flüssigkeitsabzug aus Stufe 1 (0.1 kg/min),

u_3 : Flüssigkeitsabzug aus Stufe 2 (0.1 kg/min)

und der Störgröße

z : Flüssigkeitszulauf (0.1 kg/min).

In den Klammern sind jeweils die gewählten Normierungswerte angegeben. Die Zeit ist auf 20 min normiert.

Die Regelung soll die Salzkonzentration der Stufe 2 möglichst konstant halten und dafür sorgen, daß die Füllstände der beiden Behälter nicht zu starken Änderungen unterliegen, insbesondere nicht überlaufen. Um für stationäre Genauigkeit zu sorgen, werden als 6., 7. und 8. Zustandsgröße die Integrale von x_5 , x_2 und x_4 eingeführt. Damit kann das Modell durch die Zustandsdifferentialgleichung /12/

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} + \underline{f} z$$

beschrieben werden mit der Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -.2274+002 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ -.1360+001 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .1040+001 & .0000 & -.8200+000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ -.1440+001 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .4560+001 & .0000 & .1880+001 & .0000 & -.1020+001 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .1000+001 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .1000+001 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .1000+001 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \end{bmatrix}$$

der Eingangsmatrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} .1876+002 & .0000 & .0000 \\ .0000 & -.4000+001 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .3664+001 & -.4000+001 \\ .0000 & -.4784+001 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 \end{bmatrix}$$

und dem Störeingriffsvektor

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} -.1438+001 \\ .4000+001 \\ -.1056+001 \\ .0000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .0000 \end{bmatrix}$$

8.2.2 Vergleich der mittels Pol- und Polgebietsvorgabe erreichten Entwürfe

Beim Entwurf eines Reglers für die Verdampferanlage wird die gewichtete Summe $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$ minimiert, denn:

Einerseits sollen von den 8 Zustandsgrößen 2, nämlich x_1 und x_3 , nicht zurückgeführt werden. Deshalb werden die Elemente der Reglerspalten 1 und 3 gegenüber den anderen Elementen sehr hoch gewichtet ($10^4:1$), damit sie während der Optimierung so klein werden, daß man sie anschließend vernachlässigen kann, indem man sie zu Null setzt.

Andererseits wird auf ein gutes Übergangsverhalten (möglichst schnell und wenig schwingend) Wert gelegt.

Anmerkung: Bei beiden folgenden Entwürfen wird das quadratische Gütekriterium in der Form der Ausgangsvektroptimierung nach Gl. (3.2) verwendet, wobei die 3 Regelgrößen als Ausgangsgrößen angesehen werden. (Die Ausgangsmatrix \underline{C} ist derart mit Nullen und Einsen besetzt, daß für die Vektorkomponenten von $\underline{y} = \underline{C} \underline{x}$ gilt:

$$Y_1 = x_2, \quad Y_2 = x_4, \quad Y_3 = x_5 \quad .)$$

8.2.2.1 Vergleich von Pol- und Polgebietsvorgabe hinsichtlich erreichbarer Unterdrückung

Der von R. Busch durch Polvorgabe erreichte Regler (siehe /12/) ist hinsichtlich Unterdrückung und Dynamik der bisher beste vorliegende Entwurf.

Es ergab sich dort aus der Optimierung der Regler

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} .6060-002 & -.8437+000 & .7662-001 & .4525+001 & .2812+001 & .8274+001 & -.3972+001 & -.4291+001 \\ -.1573-001 & -.5497+000 & -.1541+000 & .3074+000 & -.3240+000 & -.2866+000 & -.2662+001 & -.4546+001 \\ -.2452-001 & -.4775+000 & .9818-001 & -.3757+001 & -.1543+001 & -.3977+001 & -.1265+001 & -.4829+001 \end{bmatrix}$$

mit der Norm 14.8.

Erregt man das mit \underline{R} geregelte System mit einem Störsprung ($z(t) = \sigma(t)$) und simuliert die Übergangsvorgänge, so ergeben sich die in den Bildern 8.7 und 8.8 gestrichelt dargestellten Zustands- und Stellgrößenverläufe.

Die Simulation mit dem "Nullregler"

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} .0000 & -.8437+000 & .0000 & .4525+001 & .2812+001 & .8274+001 & -.3972+001 & -.4291+001 \\ .0000 & -.5497+000 & .0000 & .3074+000 & -.3240+000 & -.2866+000 & -.2662+001 & -.4546+001 \\ .0000 & -.4775+000 & .0000 & -.3757+001 & -.1543+001 & -.3977+001 & -.1265+001 & -.4829+001 \end{bmatrix}$$

(Reglernorm: 14.7),

bei dem die kleinen Elemente der Spalten 1 und 3 zu Null gesetzt sind, führt auf die durchgezogenen Zustands- und Stellgrößenverläufe in den Bildern 8.7 und 8.8. Es zeigen sich merkliche Abweichungen der durchgezogenen von den gestrichelten Kurven. Offenbar ist die erreichte Unterdrückung nicht gut genug (siehe 3. Spalte der \underline{R} -Matrix).

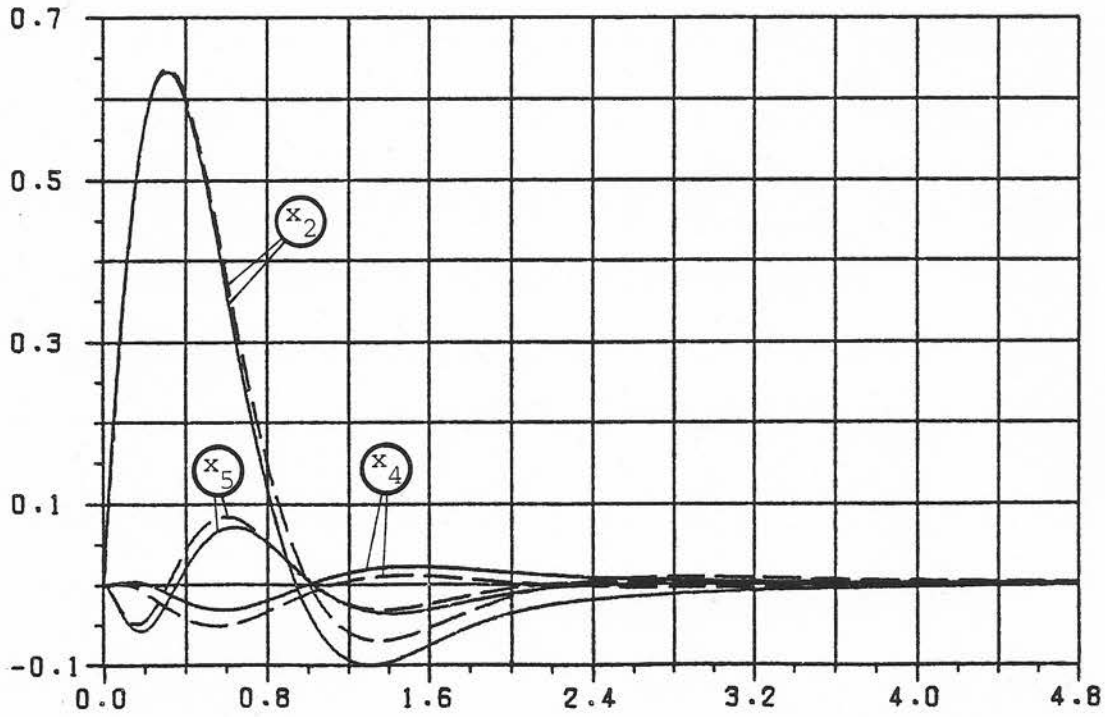


Bild 8.7: Polvorgabe-Entwurf für die Doppelverdampfungsanlage,
Zustandsgrößen.
(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

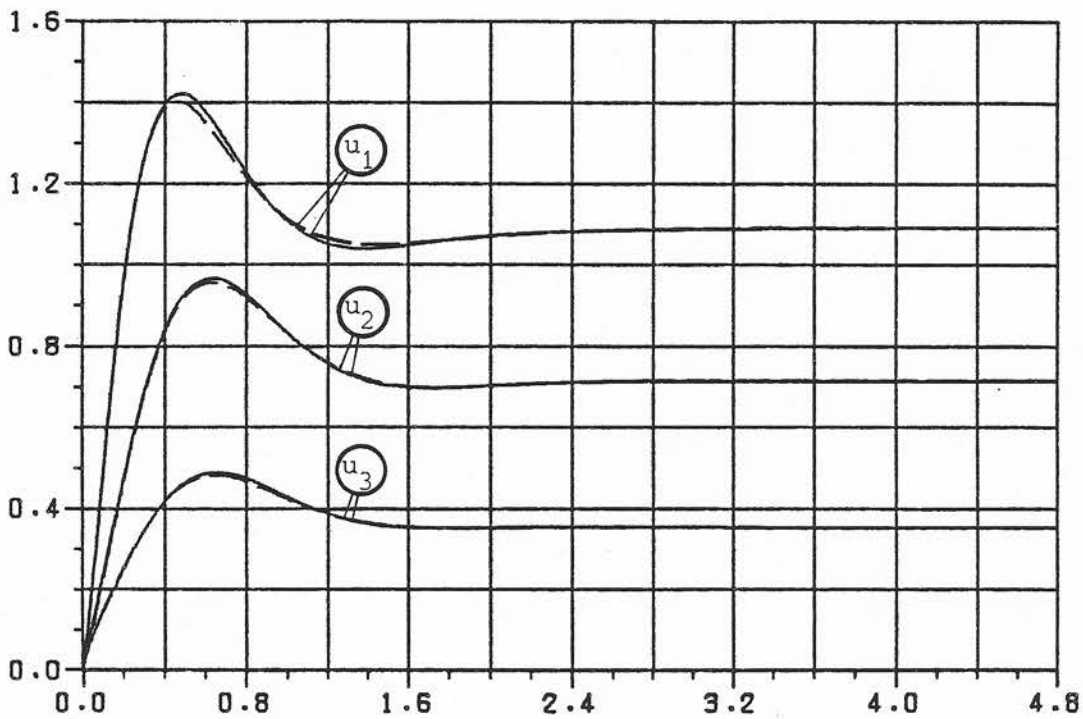


Bild 8.8: Polvorgabe-Entwurf für die Doppelverdampfungsanlage,
Stellgrößen.
(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

Nun wird der Regler mittels Polgebietsvorgabe entworfen.

Dabei werden α_Q und α_S zu 1 und das Gewichtungungsverhältnis in der Matrix \underline{G} zu $10^4:1$ gewählt.

Da in erster Linie ein gutes Übergangsverhalten von $y_3 = x_5$ interessiert, wird diese Größe höher gewichtet als die beiden anderen Ausgangsgrößen y_1 und y_2 :

$$\underline{S}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix} .$$

Für kleine Stellgrößen sorgt bereits das Reglerstruktur-Gütemaß; deshalb werden u_1 , u_2 und u_3 im Verhältnis zu den Ausgangsgrößen niedriger gewichtet:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} .$$

Für die Kovarianzmatrix \underline{K} wird die Einheitsmatrix vorgegeben. Die modifizierten Parameterstartvektoren werden durch sukzessive Polvorgabe (mittels Programmpaket SUKPOV) berechnet:

$$\hat{\underline{P}} = \begin{bmatrix} -.4803+001 & -.7439-002 & .1613+004 & .2964+003 & -.4523+004 & -.2164+004 & -.2227-002 & -.2227-002 \\ .1516+001 & .5170-001 & -.5276+003 & -.1218+003 & .1517+004 & .6747+003 & .3251-003 & -.7384-003 \\ .2870+001 & -.3932-001 & -.9533+003 & -.1739+003 & .2689+004 & .1310+004 & .1251-002 & .5851-003 \end{bmatrix}$$

Die Starteigenwerte und ihre jeweiligen Gebietsgrenzen sind aus Tabelle 8.6 zu entnehmen.

STARTEIGENWERTE DER REGELUNG		GRENZEN DER EIGENWERTGEBIETE		KENN- VEKTOR KR		
RE	IM	EWMIN	EWMAX			
I		I				
1 I	-5.0000+000	1.5000+000	1 I	-6.0000+000	-4.5000+000	1
2 I	-5.0000+000	-1.5000+000	2 I	0.0000	2.0000+000	1
3 I	-3.5000+000	1.0000+000	3 I	-5.0000+000	-3.0000+000	1
4 I	-3.5000+000	-1.0000+000	4 I	0.0000	2.0000+000	1
5 I	-3.5000+000	0.0000	5 I	-5.0000+000	-3.0000+000	0
6 I	-6.0000+000	0.0000	6 I	-8.0000+000	-5.0000+000	0
7 I	-2.0000+001	0.0000	7 I	-2.5000+001	-1.5000+001	0
8 I	-9.0000-001	0.0000	8 I	-1.5000+000	-8.9000-001	0

Tabelle 8.6: Starteigenwerte und Gebietsgrenzen

Anmerkung: Diese Tabelle muß folgendermaßen interpretiert werden (siehe auch /8/):

Für reelle Eigenwerte (KR = 0) steht unter EWMIN die linke und unter EWMAX die rechte Grenze des reellen Achsenabschnitts. Für konjugiert komplexe Eigenwertpaare (KR = 1) sind die Grenzen für Real- und Imaginärteil des zuerst auftretenden Eigenwerts aufgetragen. So sind z.B. für das Polpaar $-5 \pm j 1.5$ zuerst die Realteil- und dann die Imaginärteilgrenzen zum Eigenwert $-5 + j 1.5$ angegeben. Das Polgebiet zum Eigenwert $-5 - j 1.5$ braucht nicht angegeben zu werden, denn es liegt bzgl. der reellen Achse symmetrisch zum ersten.

Es werden insgesamt 3 Optimierungsläufe mit je 64 Iterationen gestartet, wobei jeweils die erhaltenen Eigenwerte und Parametervektoren als Startwerte für den darauffolgenden Lauf benutzt werden. Die letzte Optimierung liefert die in Tabelle 8.7 rechts angegebenen optimalen Eigenwerte.

Starteigenwerte	optimale Eigenwerte
-5 ± j 1.5	→ -4.5 ± j 0.8
-3.5 ± j 1	→ -3 ± j 0.0000014
-3.5	→ -3.7
-6	→ -5
-20	→ -15
-0.9	→ -1.1

Tabelle 8.7: Starteigenwerte und Eigenwerte nach der Optimierung

Der mit den optimalen Eigenwerten und Parametervektoren berechnete Regler ergibt sich zu

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} -.1223-001 & -.2808+001 & .7144-002 & -.3572+000 & .4148+000 & -.3427+000 & -.4299+001 & -.3459+001 \\ -.1923-001 & -.1622+001 & -.1161-001 & -.5905+000 & -.5550+000 & -.1427+001 & -.2576+001 & -.2671+001 \\ -.2186-001 & .3409+000 & -.1712-002 & -.2067+001 & -.7531+000 & -.1549+001 & .1997+001 & -.4332+001 \end{bmatrix}$$

und hat die Norm 9.38.

Gegenüber dem Polvorgabe-Entwurf aus /12/ ist hier eine um etwa ein Drittel kleinere Norm und eine wesentlich bessere Unterdrückung erreicht. Die Elemente der 3. Reglerspalte sind um mehr als eine Zehnerpotenz kleiner geworden. Es ist deshalb zu erwarten, daß hier die Ersetzung des Reglers R durch den Nullregler

$$\underline{R}_0 = \begin{bmatrix} .0000 & -.2808+001 & .0000 & -.3572+000 & .4148+000 & -.3427+000 & -.4299+001 & -.3459+001 \\ .0000 & -.1622+001 & .0000 & -.5905+000 & -.5550+000 & -.1427+001 & -.2576+001 & -.2671+001 \\ .0000 & .3409+000 & .0000 & -.2067+001 & -.7531+000 & -.1549+001 & .1997+001 & -.4332+001 \end{bmatrix}$$

(Reglernorm: 9.38)

wesentlich kleinere Abweichungen in den Übergangsvorgängen zur Folge hat als bei Polvorgabe.

Für beide Regler sind aus den Bildern 8.9 und 8.10 die Simulationsergebnisse (bei Störsprung) zu ersehen. Wie vermutet, zeigen sich nur noch kleine Abweichungen in den Zustands- und Stellgrößenverläufen.

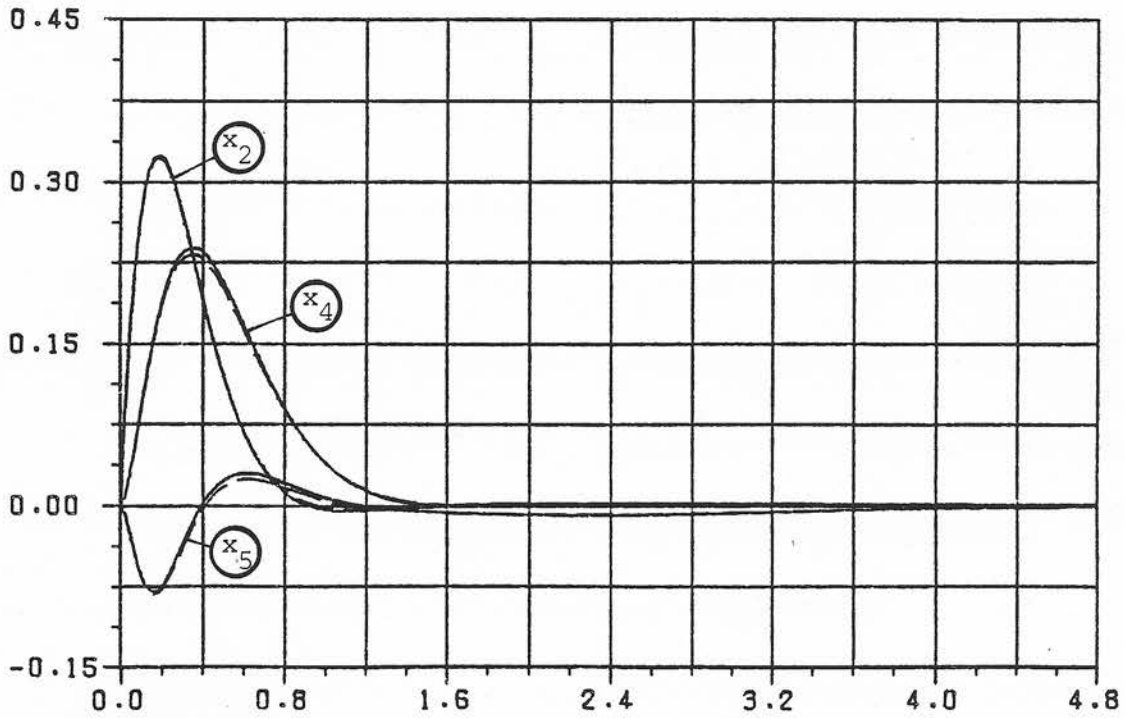


Bild 8.9: Polgebietsvorgabe-Entwurf für die Doppelverdampfungsanlage, Zustandsgrößen.

(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

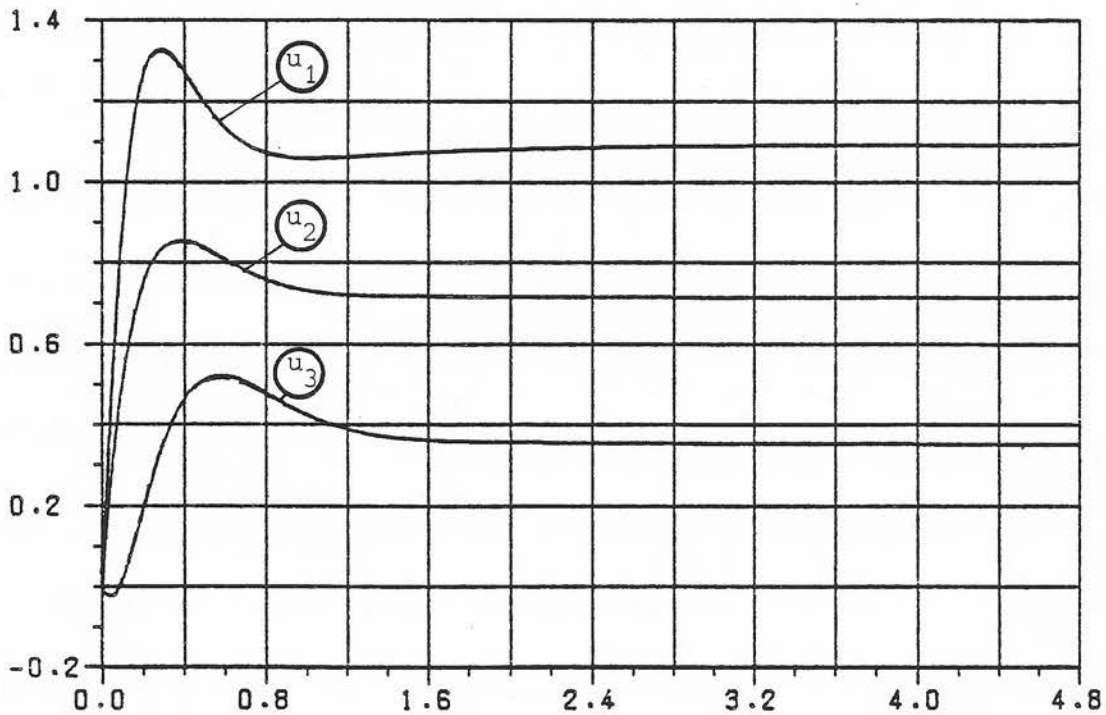


Bild 8.10: Polgebietsvorgabe-Entwurf für die Doppelverdampfungsanlage, Stellgrößen.

(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

8.2.2.2 Vergleich von Pol- und Polgebietsvorgabe hinsichtlich des Übergangsverhaltens

Nun wird ein Vergleich der beiden Entwurfsmethoden hinsichtlich des dynamischen Verhaltens des geregelten Systems angestellt. In den Bildern 8.11 und 8.12 sind die Übergangsvorgänge für die 3 Regel- und 3 Stellgrößen dargestellt. Es wurde jeweils das über den Nullregler geschlossene System für einen Störsprung simuliert. Es fällt sofort auf, daß der hohe Überschwinger der Zustandsgröße x_2 bei dem Polgebietsvorgabe-Entwurf (durchgezogene Kurve) nicht auftritt. Der Zustand x_4 hat zwar bei freigelassenen Eigenwerten einen höheren Überschwinger, dafür schwingt aber x_5 wieder weniger.

Die wesentlichste Verbesserung der Polgebietsvorgabe gegenüber der Polvorgabe zeigt sich in der kürzeren Einschwingzeit der Zustandsgrößen. Während beim Polvorgabe-Entwurf mehr als 1 Stunde ($\hat{=}$ 3 Zeiteinheiten) verstreichen muß, bis alle Zustandsgrößen eingeschwungen sind, ist dies beim Polgebietsvorgabe-Entwurf schon nach weniger als 30 Minuten ($\hat{=}$ 1.5 Zeiteinheiten) der Fall. (Man beachte die Skalierung der Ordinatenachse in Bild 8.11c!)

Auch bei den Stellgrößen (Bild 8.12) ergeben sich Verbesserungen gegenüber der Polvorgabe: Die Stellgrößen u_1 und u_2 sind kleiner, während u_3 nur minimal größer geworden ist.

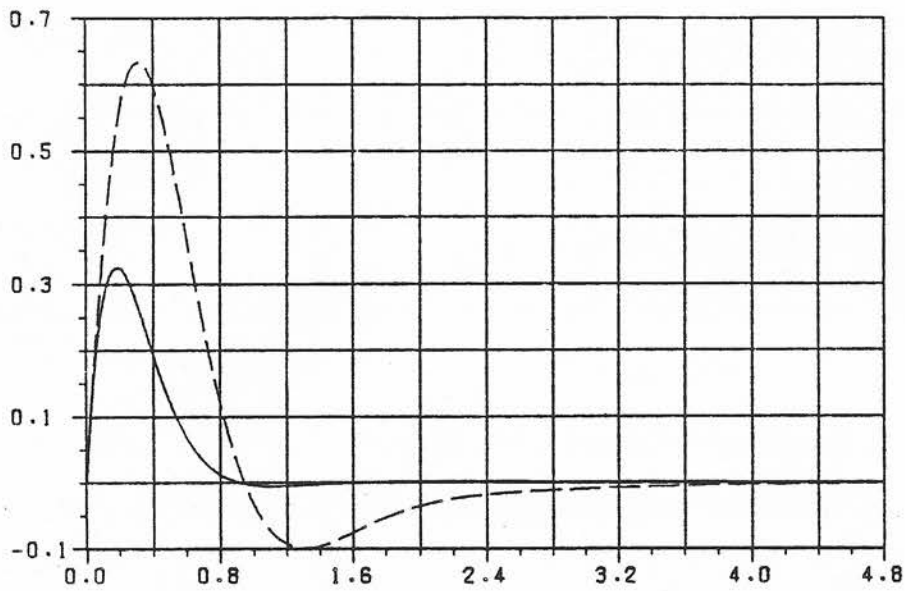


Bild 8.11a:
Zustandsgröße
 $x_2(t)$

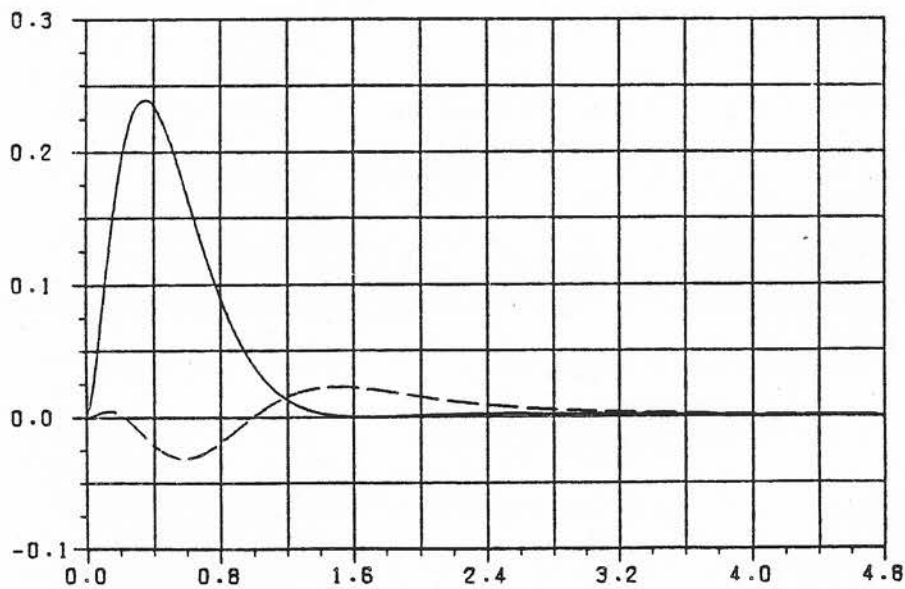


Bild 8.11b:
Zustandsgröße
 $x_4(t)$

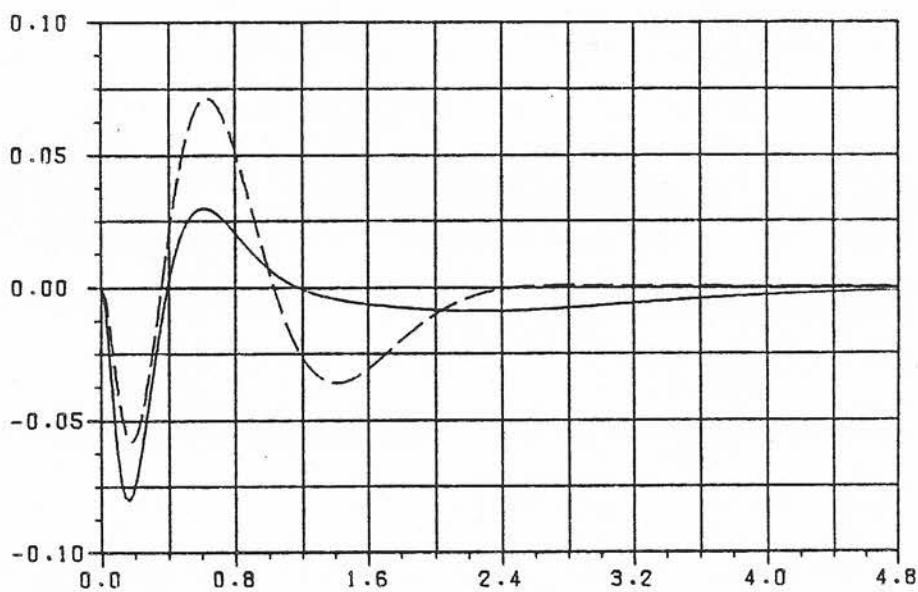


Bild 8.11c:
Zustandsgröße
 $x_5(t)$

Bild 8.11: Zustandsgrößenverläufe für die geregelte Doppelverdampfungsanlage
(Polvorgabe: - - -, Polgebietsvorgabe: —)

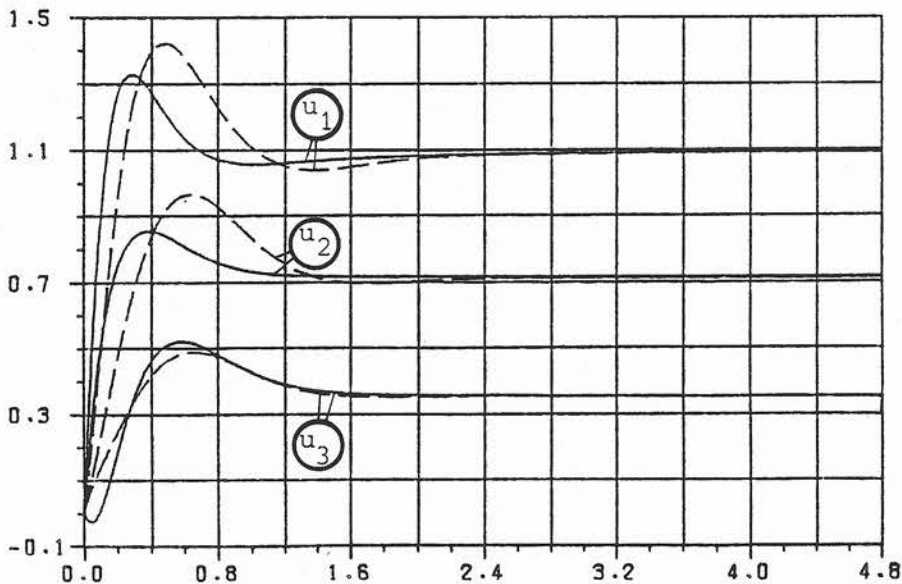


Bild 8.12: Stellgrößenverläufe für die geregelte Doppeldampfungsanlage
(Polvorgabe: - - -, Polgebietsvorgabe: —)

In Bild 8.13 ist die Eigenwertwanderung graphisch dargestellt, wobei allerdings nur die Starteigenwerte mit den optimalen Eigenwerten durch ein Geradenstück verbunden sind. Die Starteigenwerte sind mit \times gekennzeichnet. Im Laufe der Optimierung wandern die Eigenwerte und liegen am Ende an den mit \bullet gekennzeichneten Stellen.

Einige Eigenwerte liegen nach Beendigung der Optimierung noch im Gebietsinnern. Andere dagegen sind an die Grenzen gewandert, konnten diese aber nicht überschreiten.

Es muß abschließend festgestellt werden, daß mit Polgebietsvorgabe ein nach mehreren Gesichtspunkten deutlich besserer Entwurf zu erreichen ist als mit Polvorgabe. Der Grund dafür liegt darin, daß man die Eigenwerte in die Optimierung mit einbezieht und sie innerhalb vorgegebener Gebiete frei wandern läßt.

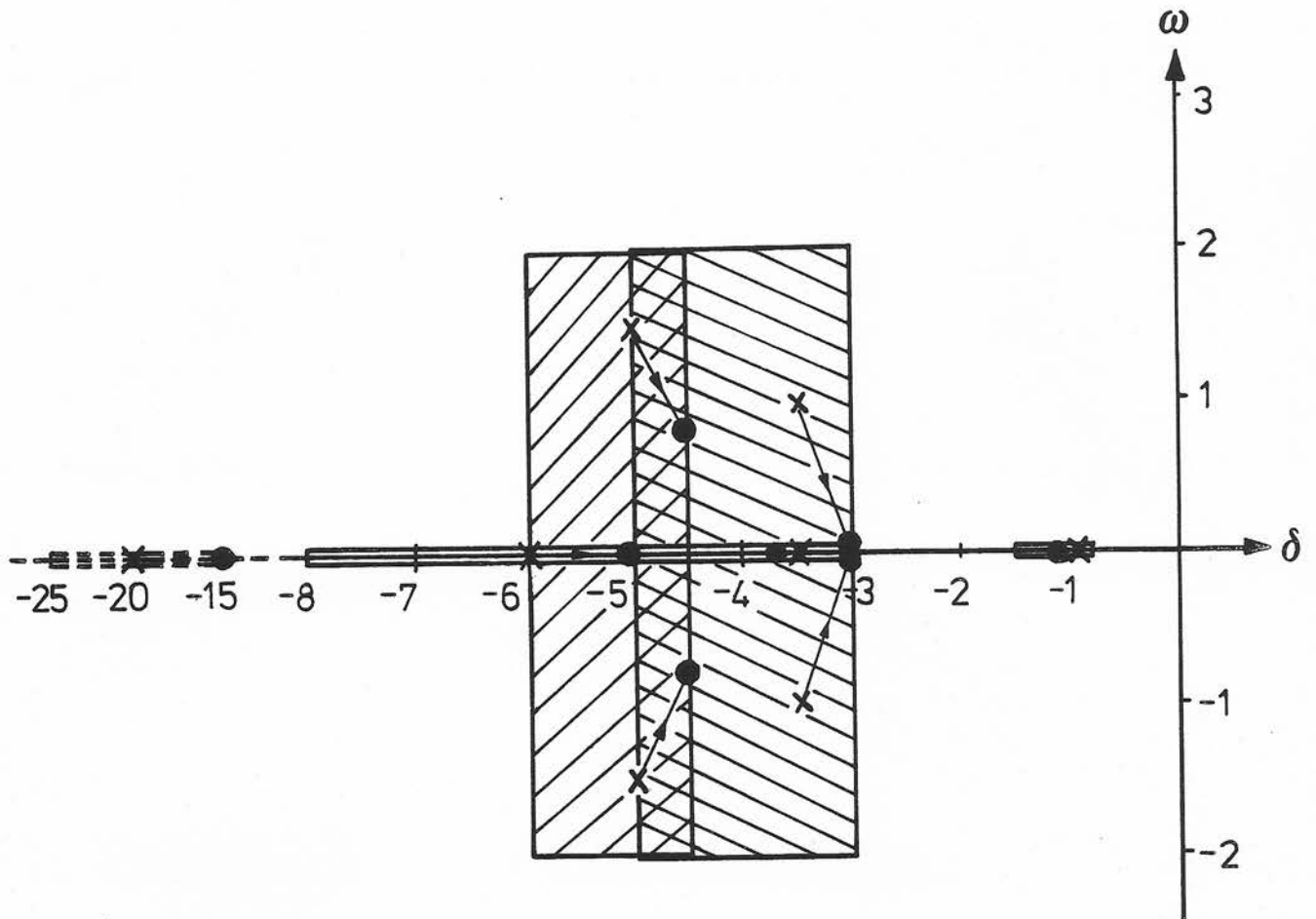


Bild 8.13: Graphische Darstellung der Eigenwertwanderung

8.3 Der Spannungsregler

8.3.1 Mathematisches Modell

Für das Eingrößensystem des Spannungsreglers existiert ein vereinfachtes Modell 5. Ordnung. Dabei handelt es sich um eine Serienschaltung von 5 VZ_1 -Gliedern mit sehr unterschiedlichen Zeitkonstanten (siehe Bild 8.14).

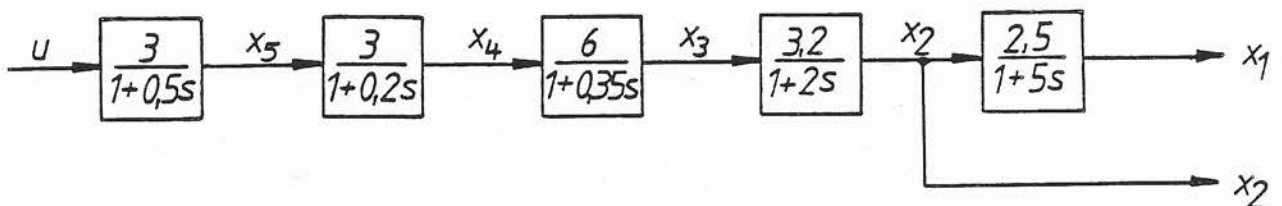


Bild 8.14: Strukturbild des Modells Spannungsregler /13/

Das Modell hat die Zustandsraum-Darstellung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \quad , \quad n = 5, \quad p = 1 \quad ,$$

mit der Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -.2000+000 & .5000+000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & -.5000+000 & .1600+001 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & -.2860+001 & .1714+002 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & -.5000+001 & .1500+002 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & -.2000+001 \end{bmatrix}$$

und dem Eingangsvektor

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} .0000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .0000 \\ .6000+001 \end{bmatrix} .$$

8.3.2 Reglerentwurf

Bei Eingrößensystemen ist der Reglerentwurf von der Wahl der Parameter"vektoren" unabhängig /3, Seite 31/. Der Regler ist allein durch die Eigenwertvorgabe eindeutig bestimmt. Deshalb kann die Minimierung eines Gütekriteriums nur erreicht werden, wenn man die Eigenwerte innerhalb vorgegebener Gebiete frei läßt. Dies aber ist gerade mit dem Polgebietsvorgabe-Verfahren möglich.

Es wird wieder die gewichtete Summe $J = \alpha_Q J_Q + \alpha_S J_S$ beider Gütekriterien minimiert, wobei α_Q und α_S zu 1 gewählt werden.

Es soll eine Teilzustandsvektorrückführung entworfen werden, die nur die Zustände x_1 und x_2 zurückführt.

Die Tabelle 8.8 enthält links die 5 reellen Eigenwerte, mit denen das Verfahren gestartet wird und rechts die jeweils zugehörigen Gebietsgrenzen. Es braucht nur bzgl. der Eigenwerte optimiert zu werden (Eingabe IV(36) = 2), da der Reglerentwurf von den Parameter"vektoren" unabhängig ist. Trotzdem müssen aber auch hier irgendwelche beliebige Startparameter $\neq 0$ vorgegeben werden. Die mittlere Spalte der Tabelle 8.8 enthält die optimalen Eigenwerte, die nach Beendigung der Optimierung vorliegen.

Starteigenwerte	optimale Eigenwerte	Gebietsgrenzen	
		links	rechts
-4	-3.64	-100	-2.9
-4.2	-4.74	-100	-3
-2.5	-0.54	-100	0
-2.9	-0.63	-100	0
-5.5	-1.00	-100	0

Tabelle 8.8: Eigenwerte vor und nach der Optimierung, Gebietsgrenzen

Das Programm berechnet den zu den optimalen Eigenwerten gehörenden Regler

$$\underline{R} = [.1493-002 \quad .2440-002 \quad .2595-005 \quad .1374-005 \quad .3722-005]$$

mit der Norm 0.0029.

Wie man sieht, wird eine sehr gute Unterdrückung der letzten 3 Reglerelemente erreicht. Dazu ist allerdings ein Gewichtungsverhältnis von $10^{10}:10^{-10}$ nötig. (Interessanterweise reichen niedrigere Gewichtungsverhältnisse nicht aus - wahrscheinlich deshalb, weil das System nicht auf gleiche Größenordnung der Zustands- und Stellgrößen normiert ist.)

Die beiden Bilder 8.15 und 8.16 zeigen die beiden simulierten Zustandsverläufe $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie den Stellgrößenverlauf $u(t)$ bei Erregung mit einem Führungssprung $w(t) = \sigma(t)$. Es sind keine Abweichungen zwischen dem mit \underline{R} und dem mit dem Nullregler

$$\underline{R}_0 = [.1493-002 \quad .2440-002 \quad .0000 \quad .0000 \quad .0000]$$

geregelt System zu erkennen.

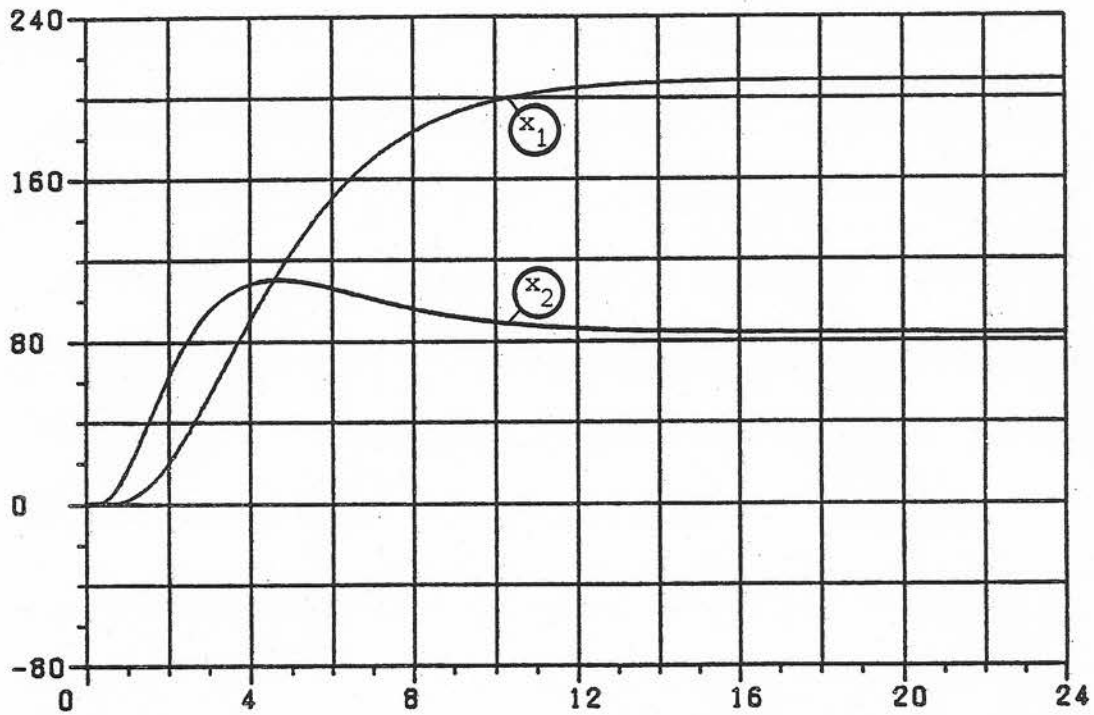


Bild 8.15: Zustandsgrößen des geregelten Spannungsreglers
(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

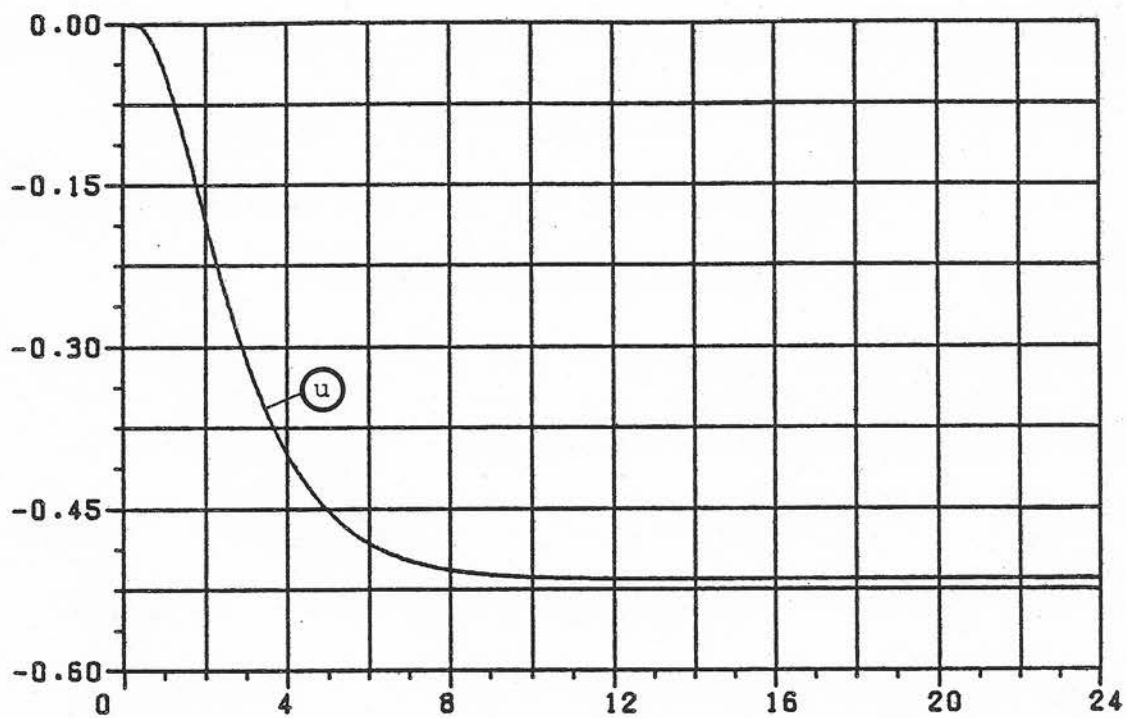


Bild 8.16: Stellgröße des geregelten Spannungsreglers
(Regler \underline{R} : - - -, Nullregler \underline{R}_0 : —)

Die 3 behandelten Beispiele sollten einen Einblick geben, welche Vorteile die Einbeziehung der Eigenwerte in die Optimierung bringt. Auch bei der Anwendung des Polgebietsvorgabe-Verfahrens auf ein Dampferzeugermodell 11. Ordnung konnten entscheidende Verbesserungen gegenüber dem Polvorgabe-Verfahren erzielt werden.

Das nächste Kapitel enthält eine Reihe von Erfahrungen und Hinweisen, die bei der Anwendung des Programmpaketes POMIX, welches die Polgebietsvorgabe ermöglicht, beachtet werden sollten.

9. ERFAHRUNGEN

Bei der Anwendung des Programmpaketes POMIX zum Reglerentwurf durch Polgebietsvorgabe wurden eine Reihe von Erfahrungen gewonnen, von denen die wichtigsten in diesem Kapitel aufgeführt werden.

9.1 Zur Wahl der Starteigenwerte und der Parameterstartvektoren

Die Wahl der *Starteigenwerte* erfolgt unter Berücksichtigung der ungefähren Vorstellungen über die Lage der dynamikbestimmenden Eigenwerte.

Die modifizierten *Parameterstartvektoren* können entweder mit Zufallszahlen belegt oder über das Verfahren der sukzessiven Polvorgabe /14/ berechnet werden (mit Hilfe des Programmpaketes SUKPOV auf der Datei IRS*ZERO). Die zweite Möglichkeit ist die wesentlich effektivere, insbesondere dann, wenn bestimmte Regler-spalten unterdrückt werden sollen. SUKPOV liefert bereits suboptimale Parametervektoren, die sehr gut als Startwerte für POMIX geeignet sind.

Beachte: SUKPOV ordnet jedem Streckeneigenwert einen bestimmten Regelungseigenwert zu. Die sich aus SUKPOV ergebende Eigenwertreihenfolge muß bei der Übergabe an POMIX unbedingt beibehalten werden, damit eine richtige Zuordnung der Parametervektoren gewährleistet ist.

9.2 Zur Wahl der Gebietsgrenzen

Bei alleiniger Minimierung des Reglerstruktur-Gütekriteriums haben die Eigenwerte die Tendenz an die rechten Gebietsgrenzen zu wandern. Es ergibt sich i.a. eine um so kleinere Reglernorm (\rightarrow kleine Stellgrößen) bzw. eine um so bessere Unterdrückung, je weiter man die rechten Grenzen in Richtung der Imaginärachse legt. Das Zeitverhalten wird dadurch allerdings schlechter.

Bei alleiniger Verwendung des quadratischen Gütekriteriums ist es günstig, die linken Gebietsgrenzen möglichst weit von der Imaginärachse entfernt zu legen, da die Eigenwerte i.a. die Tendenz haben, an die linken Grenzen zu wandern, um die Regelung schneller zu machen. Die Folge davon sind allerdings häufig höhere Stellgrößen.

Wie man sieht, ist die Wirkung der Minimierung bei beiden Gütemaßen entgegengesetzt, was die Richtung der Eigenwertwanderung betrifft. Man könnte leicht vermuten, daß es bei der Minimierung der Summe beider Gütekriterien zweckmäßig ist, große Gebiete (z.B. die gesamte negative Pol-Halbebene) vorzugeben. Dies ist jedoch nicht unbedingt sinnvoll, da das Ergebnis dann zwar sehr zu Gunsten eines Gütemaßes aber zu Ungunsten des andern ausfallen kann.

Es hat sich die folgende Vorgehensweise bewährt:

Zunächst werden relativ kleine Gebiete um die Starteigenwerte vorgegeben und das Optimierungsprogramm gestartet. Je nachdem, wie der Entwurf hinsichtlich der Stellgrößen und des Übergangsverhaltens ausfällt und wieweit die Eigenwerte an die Grenzen gewandert sind, wird eine Gebietsvergrößerung in die entsprechende Richtung vorgenommen oder nicht. In beiden Fällen kann das Programm mit den aus der Optimierung gewonnenen Eigenwerten und Parametervektoren neu gestartet werden. Im Falle der Gebietsvergrößerung kann die Minimierung auch nochmals mit den ursprünglichen Startwerten durchgeführt werden.

Es muß jedoch erwähnt werden, daß die beschriebene Vorgehensweise kein Allgemeinrezept für die Wahl der Gebietsgrenzen darstellt.

9.3 Gebietsgrößeneinfluß auf die Optimierung

Auch wenn die Eigenwerte nicht an die Gebietsgrenzen wandern, hat die Gebietsgröße einen erwähnenswerten Einfluß auf den Ablauf und das Ergebnis der Optimierung (siehe Tabelle 9.1).

kleine Polgebiete	große Polgebiete
F= 1.9332902822771+006	F= 1.9332902822770+006
F= 6.5809174770682+003	F= 3.2738115828445+005
F= 2.0008002899092+003	F= 1.9766588764662+004
F= 7.2206047927290+002	F= 1.5637646955260+004
F= 1.9594554964864+002	F= 8.9249263528185+003
F= 1.2022373402936+001	F= 1.6375454575653+003
F= 6.7502870180455-001	F= 7.0341046215382+000
F= 6.3670162708805-001	F= 5.4707944096535-001
F= 6.3663766019099-001	F= 5.4692082915870-001
F= 6.3318842641192-001	F= 5.4524627803700-001

Tabelle 9.1: Unterschiedliche Optimierungsergebnisse bei verschiedenen Gebietsgrößen, aber gleicher Anzahl von Iterationen

Bevor optimiert wird, muß der Startwert des transformierten Eigenwertes $\tilde{\lambda}_{Ri}$ nach der Beziehung (siehe Gln. (4.1) bis (4.3))

$$\tilde{\lambda}_{Ri} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda_{RI} - EW_{MIN}}{EW_{MAX} - \lambda_{RI}} \right)$$

berechnet werden. Wie man sieht, ist $\tilde{\lambda}_{Ri}$ eine Funktion der Abstände des Originaleigenwertes λ_{Ri} von den Grenzen, d.h. zu verschiedenen großen Gebieten gehören bei gleichen Originaleigenwerten λ_{Ri} unterschiedliche transformierte Startwerte $\tilde{\lambda}_{Ri}$. Dies ist jedoch nicht der Grund, weshalb sich verschiedene Resultate ergeben, denn nach wie vor beginnt die Optimierung beim gleichen Funktionswert, ganz unabhängig davon, wie groß die Gebiete gewählt werden.

Das Auftreten unterschiedlicher Optimierungsergebnisse bei verschieden großen Gebieten liegt darin begründet, daß je nach Gebietsgröße das "Gebirge" (die Hyperfläche) im unendlichen $n(p+1)$ -dimensionalen Variablenraum verschieden stark "gestreckt" wird. Die "Täler" und "Bergkuppen" können also einmal mehr und einmal weniger stark ausgeprägt sein. Dies führt zu unterschiedlichen Gradienten bei jedoch gleichem Funktionswert.

Eine mögliche Erklärung wäre die, daß im Falle größerer Gebiete das Minimum schneller gefunden wird, da bei Abbildung eines großen Bereichs in die unendliche Ebene das "Gebirge" "steilere" Gradienten aufweist als bei Abbildung eines kleinen Gebiets ins Unendliche. Nach genügend vielen Iterationen müßte aber auch im letzteren Fall das gleiche Ergebnis herauskommen - auf jeden Fall dann, wenn die Funktion unimodal ist.

Werden nach beliebig vielen Iterationen immer noch keine gleichen Resultate erreicht, so kann dies nur dadurch erklärt werden, daß im Falle des größeren Gebiets bei der eindimensionalen Minimumsuche über eine "Bergkuppe" hinweggesprungen wurde.

9.4 Zur Wahl der Gewichtungsmatrix G

Die Gewichtungsmatrix G wird so gewählt, daß die zu unterdrückenden Reglerelemente hoch gegenüber den restlichen gewichtet werden. Durch das Verhältnis der Gewichtungselemente zueinander wird auch die Höhe der erreichbaren Unterdrückung festgelegt. Man sollte bestrebt sein, sowohl die einzelnen Gewichtungselemente als auch das Gewichtungsverhältnis nicht höher zu wählen, als unbedingt nötig ist. Dazu sei auf /12/ verwiesen, wo der Einfluß verschiedener Gewichtungen auf die Optimierung untersucht wurde.

9.5 Zur Wahl des Gewichtungsverhältnisses $\alpha_1:\alpha_2$

Soll ein strukturbeschränkter, quadratisch optimaler Regler entworfen werden, d.h. soll die Summe beider Gütemaße minimiert werden, so hat es sich als zweckmäßig erwiesen, sofort mit beiden Gütekriterien in die Optimierung einzusteigen und nicht erst eine recht gute Unterdrückung durch alleinige Minimierung des Reglerstruktur-Gütemaßes anzustreben (durch SUKPOV können vorab bestimmte Spalten oder Zeilen "vor"-unterdrückt werden). Nimmt man nämlich das quadratische Gütekriterium erst später hinzu, so kann der mit dem Reglerstruktur-Gütemaß erreichte Effekt der Un-

terdrückung schlagartig zugunsten eines minimalen quadratischen Gütemaßes wieder verlorengelassen /12/.

Es sollte darauf geachtet werden, daß die gewichteten Funktionswerte $\alpha_Q J_Q$ und $\alpha_S J_S$ beim erstmaligen Start mit beiden Gütekriterien ungefähr in gleicher Größenordnung sind, damit beide Funktionswerte bei der Minimierung "gleichberechtigt" sind und somit keiner von beiden während der Optimierung zu Gunsten des anderen übermäßig ansteigt. α_Q und α_S sollten also so gewählt werden, daß für das Gewichtungsverhältnis zu Beginn der Optimierung etwa

$$\frac{\alpha_Q}{\alpha_S} = \frac{J_S}{J_Q}$$

gilt.

9.6 Vorsicht bei Störgrößen-Simulationen !

Beim Vergleichen verschiedener simulierter Übergangsvorgänge eines Systems bei Störsprungaufschaltung wurde folgende Erfahrung gemacht:

Mit kleiner werdenden Funktionswerten J_Q (quadr. Gütemaß) wird nicht unbedingt auch das Störverhalten besser, d.h. die Quadratsumme der von den Zustands- und Stellgrößenverläufen mit der Zeitachse eingeschlossenen Flächen kann für einen kleinen Funktionswert J_Q größer sein als für einen großen. Der Grund dafür liegt darin, daß das quadratische Gütekriterium nach Gl. (3.1) nur für die Bewertung von Übergangsvorgängen mit Anfangswertstörungen ($\underline{x}(0) \neq \underline{0}$) geeignet ist. Mit Störgrößen behaftete Systeme müssen daher nach jedem Optimierungslauf simuliert werden. Nur an Hand der geplotteten Zustands- und Stellgrößenverläufe kann über die Güte des Entwurfs entschieden werden, nicht aber anhand des Funktionswertes J_Q !.

Anmerkung: Es ist nicht gelungen, aber trotzdem denkbar, daß man dieses Problem mit Hilfe einer geeigneten Wahl der Kovarianzmatrix \underline{K} in den Griff bekommen kann (siehe dazu /3/).

9.7 Vorsicht bei Eingrößensystemen !

Die modifizierten Parametervektoren \tilde{p}_i haben wie die originalen Parametervektoren die Dimension p (= Anzahl der Eingangsgrößen). Deshalb müssen bei Eingrößensystemen ($p=1$) keine modifizierten Parametervektoren, sondern modifizierte *Parameterskalare* vorgegeben werden. Es gilt im reellen Fall gemäß den Glgn. (2.11a) und (2.12a) für die Eigenvektoren

$$\underline{v}_{Ri} = (\underline{A}_i - \lambda_{Ri} \underline{I}_n)^{-1} \underline{b}_i \tilde{p}_i ,$$

falls die Steuerbarkeit der Eigenwerte λ_{Ri} vorausgesetzt wird. Treten nun mehrfache Eigenwerte λ_{Ri} auf, so sind die zugehörigen Rechtseigenvektoren \underline{v}_{Ri} auf jeden Fall linear abhängig und die Matrix $\hat{\underline{V}}_R$ wird singulär.

Es ist deshalb bei Eingrößensystemen darauf zu achten, daß man nur einfache Regelungseigenwerte vorgibt. Um auszuschließen, daß die Eigenwerte auch während der Optimierung nicht zusammenwandern, ist es zweckmäßig, die Gebiete nicht überlappend zu wählen. Dies gilt vor allem für die für reelle Eigenwerte vorzugebenden Realteilachsenabschnitte. Es muß nicht schiefgehen, wenn man die Gebiete überlappen läßt, wie man am Beispiel des Spannungsreglers sieht, doch es kann dazu führen, daß ein Funktionswert plötzlich zunimmt oder sogar negativ wird (siehe Optimierungsablauf in Tabelle 9.2), wofür andere, bisher nicht geklärte Zusammenhänge, verantwortlich sind.

IT= 0	IF= 1	F1= 3.7363616929510+001	F2= 4.2172853002347+002	F= 4.5909214695298+002
IT= 2	IF= 8	F1= 4.2390502034727+001	F2= 3.3075023120588+001	F= 7.5465525155315+001
IT= 4	IF= 12	F1= 3.6580387287174+001	F2= 3.2238146545956+001	F= 6.8818533833129+001
IT= 6	IF= 17	F1= 3.8008511955056+001	F2= 7.8451688504175+000	F= 4.5853680805474+001
IT= 8	IF= 20	F1= 2.6582204689373+001	F2= 1.2761334881877+001	F= 3.9343539571251+001
IT= 10	IF= 25	F1= 2.4324268933386+001	F2= 1.2787597908173+001	F= 3.7111866841558+001
IT= 12	IF= 29	F1= 2.7132616221905+001	F2= 9.4736354613126+000	F= 3.6606251683217+001
IT= 14	IF= 32	F1= 2.6594726562500+001	F2= 9.8533433941472+000	F= 3.64480697956647+001
IT= 16	IF= 34	F1= 2.6734375000000+001	F2= 9.7011990509472+000	F= 3.6435574050947+001
IT= 18	IF= 45	F1=-4.000000000000+000	F2= 9.6743544672163+000	F= 5.6743544672163+000
IT= 19	IF= 49	F1=-3.600000000000+001	F2= 9.6743544258605+000	F=-2.6325645574139+001

ABBRUCHKRITERIUM :
 MAX(DELTA X(I)) KLEINER/GLEICH EPSX = 1.000-008

Tabelle 9.2: Negative Funktionswerte für ein Eingrößensystem, bei dem sich die Polgebiete überlappen

Es braucht bei Eingrößensystemen nur bzgl. der Eigenwerte optimiert zu werden (Eingabe: IV(36) = 2), da der Reglerentwurf von den Parameter-"vektoren" unabhängig ist. Das gleiche Ergebnis bekommt man aber auch, wenn man die Parameter-"vektoren" in die Optimierung mit einbezieht (Eingabe: IV(36) = 1).

Eine eventuelle geringfügige Abweichung der Ergebnisse für IV(36) = 1 und IV(36) = 2 ist durch rechnerinterne Rundungsfehler bedingt. (Die PV-Gradienten, die theoretisch gleich Null sein müssen, können sich beispielsweise zu einem Wert in der Größenordnung 10^{-16} ergeben.)

10. RÜCKBLICKE UND AUSBLICKE

Bei der Anwendung des Entwurfsverfahrens über Polvorgabe stellte sich die Vorgabe der Eigenwerte schon immer als sehr schwierig heraus. Die richtige Eigenwertlage stellt z.B. bei der Unterdrückung einzelner Elemente der Reglermatrix bei Verwendung des Reglerstruktur-Gütekriteriums eine wesentliche Voraussetzung dar, daß Unterdrückung überhaupt möglich ist /4/. Es genügen zum Teil Verschiebungen einzelner Regelungseigenwerte um nur wenige Prozent, um die Höhe des Gütemaßes stark zu verändern.

Dadurch, daß es in dieser Arbeit gelungen ist, auch die (transformierten) Eigenwertgradienten $\partial J / \partial \tilde{\lambda}_{Ri}$ analytisch zu berechnen, ist es nun möglich, außer den Parametervektoren auch die Regelungseigenwerte als Variablen zu betrachten und sie in die Optimierung mit einzubeziehen. Dieser Weg wurde in dieser Arbeit sowohl für das Reglerstruktur- als auch für das quadratische Gütekriterium verfolgt, wobei auch die Möglichkeit des Zusammenfallens von Strecken- und Regelungseigenwerten sowie die Fallunterscheidung nach Steuer- bzw. Nichtsteuerbarkeit mit eingeschlossen wurde. Weil nun statt Eigenwerte, Eigenwertgebiete vorgegeben werden müssen, wurde für dieses Verfahren der Name "Polgebietsvorgabe" im Gegensatz zu "Polvorgabe" gewählt. In Kap. 8 wurde an verschiedenen Beispielen gezeigt, daß die Polgebietsvorgabe gegenüber der Polvorgabe ein wesentlich effektiveres Reglersyntheseverfahren darstellt. Insbesondere hat man hiermit nun auch ein wirksames Syntheseverfahren für Eingrößensysteme, was die Polvorgabe nicht ist.

Trotz der zufriedenstellenden Ergebnisse, die mit dem Polgebietsvorgabe-Verfahren erreicht werden konnten, werden abschließend noch zwei Vorschläge zur Verbesserung des bestehenden Programmpaketes POMIX gemacht, die das Entwurfsverfahren evtl. noch effektiver machen.

10.1 Vorschlag zur Reduzierung der Rechenzeit

Geht man von den durch Polvorgabe berechneten Reglern aus und stellt einen Vergleich zwischen erzielbarer Verbesserung und dem dazu erforderlichen Aufwand an, so muß folgende Feststellung gemacht werden:

Der Reglerentwurf durch Polgebietsvorgabe ist zwar in vielen Gesichtspunkten besser geworden, allerdings ist dazu ein höherer Rechenzeitaufwand nötig. In Tabelle 10.1 ist für verschiedene Systeme die pro Iteration ($\hat{\approx}$ 2 Funktionswertberechnungen) benötigte Rechenzeit (CPU-Zeit) angeführt, wobei jeweils die Summe beider Gütekriterien minimiert wurde.

System	Polvorgabe		Polgebietsvorgabe	
	Zeit/Iteration	Anzahl der Variablen $n \cdot p$	Zeit/Iteration	Anzahl der Variablen $n \cdot (p+1)$
Dreitanksystem	0.05 sec	$3 \cdot 2 = 6$	0.08 sec	$3 \cdot 3 = 9$
Doppelverdampferanlage	0.4 sec	$8 \cdot 3 = 24$	0.81 sec	$8 \cdot 4 = 32$
Dampferzeuger	0.46 sec	$11 \cdot 2 = 22$	0.9 sec	$11 \cdot 3 = 33$
Spannungsregler	—	—	0.15 sec	$5 \cdot 2 = 10$

Tabelle 10.1: Rechenzeitaufwand pro Iteration bei Pol- und Polgebietsvorgabe

Man stellt fest, daß bei Polgebietsvorgabe ungefähr die doppelte Rechenzeit benötigt wird wie bei Polvorgabe. Dafür sind 2 Gründe verantwortlich:

1. Die Anzahl der zu optimierenden Variablen ist um die Zahl n (= Ordnung = Anzahl der Eigenwerte) angestiegen.

2. Einige Unterprogramme, wie z.B. KIMIQUI oder MALJAP müssen bei Polgebietsvorgabe für jede Funktionswert- und Gradientenberechnung wieder neu aufgerufen werden (bei Polvorgabe nur einmal). Gerade die vielen Matrixinversionen (z.B. $(A_i - \lambda_{Ri} I_n)^{-1}$ in KIMIQUI) sind aber sehr rechenzeitintensiv, wenn es sich um größere Systeme handelt, und damit wahrscheinlich hauptverantwortlich für die großen Rechenzeiten.

Eine effektive Maßnahme zur Reduzierung der Rechenzeit wäre nun die, daß man die Strecke des Systems vor dem Start der Optimierung auf Diagonalform transformiert und alle Synthesegleichungen auf die Diagonalgestalt der Strecke abstimmt. Durch eine solche Programmerweiterung wären viele Matrixinversionen unproblematisch, da es sich dann um Diagonalmatrizen handeln würde. Der Rechenzeitaufwand könnte dadurch sicherlich stark reduziert werden.

10.2 Vorschlag einer Gütevektorminimierung

Das bestehende Optimierungsprogramm hat bei Verwendung beider Gütemaße oft die negative Eigenschaft, daß nur einer der beiden Funktionswerte J_Q und J_S kleiner wird und der andere ansteigt. Dies liegt daran, daß die gewichtete Summe beider Gütekriterien minimiert wird.

Eine weitere erstrebenswerte Maßnahme zur Verbesserung des Programms wäre deshalb die Einführung der Gütevektorminimierung nach Kreißelmeier /15/. Diese beinhaltet eine iterative Vorgehensweise, wobei in jedem Iterationsschritt eine Optimierung des

Gütevektors $\begin{bmatrix} J_Q \\ J_S \end{bmatrix}$ durchzuführen ist. Die Aufgabe besteht darin,

die Eigenwerte und Parametervektoren so zu bestimmen, daß der Gütevektor *komponentenweise* genügend klein wird. Durch Anwendung dieser Vektoroptimierung wäre das stetige Kleinerwerden jedes einzelnen Gütemaßes gewährleistet.

Mit dem neu entwickelten Verfahren der *Polgebietsvorgabe* wurden

auch ohne Berücksichtigung der beiden angeführten Vorschläge sehr gute Ergebnisse erzielt. Es bleibt lediglich zu untersuchen, inwieweit sich das Entwurfsverfahren durch die entsprechenden Programmerweiterungen noch verbessern läßt.

Literatur

- / 1/ ROPPENECKER, G.:
Polvorgabe durch Zustandsrückführung. Regelungstechnik 29 (1981), S. 228-233.
- / 2/ ZURMÜHL, R.:
Matrizen und ihre technischen Anwendungen. 4. neubearbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1964.
- / 3/ KERN, G.:
Synthese quadratisch optimaler Polvorgaberegler.
Diplomarbeit D 245, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1981.
- / 4/ SCHUG, M.:
Entwurf von Polvorgaberegler mit minimaler Norm anhand der Parametervektoren. Diplomarbeit D 226, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1981.
- / 5/ ROPPENECKER, G.:
Entwurf von Ausgangsvektorrückführungen mit Hilfe der invarianten Parametervektoren. Regelungstechnik 31 (1983), S. 125-131.
- / 6/ FÖLLINGER, O.:
Optimierung dynamischer Systeme. Mitschrift zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1982.
- / 7/ BINDER, P.-M.:
Entwurf von Zustandsrückführungen durch Minimierung der Reglernorm. Diplomarbeit D 246, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1981.
- / 8/ KELLER, H.:
Programme zur Diplomarbeit D 273, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1982.

- / 9/ KERN, G.:
Programme zur Diplomarbeit D 245, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1981.
- /10/ BROYDEN, C.G., DENNIS, J.E., und MOREÉ, J.J.:
On the local and superlinear convergence of quasi-Newton methods. J.I.M.A. 12 (1973), S. 223-245.
- /11/ STEHLE, W.:
Allgemeine Optimierungsverfahren. Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Nachrichtensysteme, Universität Karlsruhe, 1980.
- /12/ BUSCH, R.:
Untersuchungen zum Entwurf von Polvorgaberegler an Beispielen. Diplomarbeit D 268, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1982.
- /13/ ROTH, H.:
Untersuchung von Ordnungsreduktionsverfahren zwecks Regelungsentwurf anhand eines reduzierten Modells. (1. Zwischenbericht, DFG-Forschungsvorhaben FO71/12). Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1980.
- /14/ RIES, G.:
Untersuchung eines Verfahrens zum Entwurf von Zustandsrückführungen durch sukzessive Polvorgabe. Diplomarbeit D 227, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, 1981.
- /15/ KREISSELMEIER, G., und STEINHAUSER, R.:
Systematische Auslegung von Reglern durch Optimierung eines vektoriellen Gütekriteriums. Regelungstechnik 27 (1979), S. 76-79.

Weitere allgemeine Literatur:

/16/ FÖLLINGER, O.:

Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 3. verbesserte Auflage, AEG-TELEFUNKEN, Berlin, Frankfurt am Main, 1980.

/17/ WITTICH, H., und GAUSS, E.:

Höhere Mathematik, Teil III. Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Mathematik, Universität Karlsruhe, 1977.

/18/ BRONSTEIN, I.N., und SEMENDJAJEW, K.A.:

Taschenbuch der Mathematik. 14. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Zürich, Frankfurt am Main, 1974.

