



# Die Strahlensätze und ihre Umkehrung – Eine Analyse der Darstellungen in Schulbüchern

Peter Kaiser 

Eingegangen: 28. Oktober 2024 / Angenommen: 11. Juni 2025 / Online publiziert: 31. Juli 2025  
© The Author(s) 2025

**Zusammenfassung** Dieser Artikel betrachtet die Darstellung der Strahlensätze und deren Umkehrungen in verschiedenen Schulbüchern. Diese Darstellungen werden dabei auf ihre fachliche Korrektheit und ihre Konsistenz überprüft. Insbesondere wird die zeitliche Entwicklung der Darstellungen im Lehrwerk Lambacher Schweizer betrachtet. Ergänzt wird die Betrachtung durch Hinzunahme weiterer Quellen. Ausgehend von den Beobachtungen wird eine Charakterisierung der Fehlertypen erstellt und versucht eine Ursache für diese herauszuarbeiten.

## 1 Einleitung

Das Thema Strahlensätze ist ein fest im Curriculum verankertes Thema, es finden sich daher in fast allen Schulbüchern entsprechende Formulierungen. Diese Formulierungen variieren in ihrer fachlichen Genauigkeit und ihrer Vollständigkeit. Wir wollen in diesem Artikel auf einige Tücken in diesen Darstellungen hinweisen und herausarbeiten, welche Argumente besonders fehleranfällig sind. Insbesondere liegt ein Fokus auf der Umkehrbarkeit der Sätze, in dieser verbirgt sich die hauptsächliche Hürde. Zusätzlich zu Schulbüchern, betrachten wir einige weitere Quellen, um die Breite der möglichen Darstellungen zu erweitern.

Zunächst formulieren wir die Strahlensätze und ihre Umkehrungen in fachlich korrekter Form und weisen auf einige Subtilitäten hin. Daraufhin betrachten wir eine exemplarische Auswahl an Schulbüchern, aus diesen extrahieren wir die auftretenden Fehlerquellen und diskutieren Gründe für deren Auftreten.

Die Betrachtung von Strahlensätzen taucht sowohl in fachlichen Werken wie auch in einigen didaktischen auf, siehe zum Beispiel [8, 11, 15]. Eine Auseinandersetzung

---

✉ Peter Kaiser

Fakultät für Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie, 76131 Karlsruhe, Deutschland  
E-Mail: [peter.kaiser2@kit.edu](mailto:peter.kaiser2@kit.edu)

mit den Darstellungen, wie sie in Schulen geläufig sind, ist dem Autor jedoch nicht bekannt. Gerade da im Rahmen der Mittelstufen-Geometrie das deduktive Arbeiten geübt und erlernt werden soll, ist hier eine rigide und fachlich saubere Formulierung und Notation entscheidend. Die in diesem Beitrag stark auf einen kleinen Ausschnitt konzentrierte Analyse bietet nur einen kleinen Einblick in eine Problematik, welche weiterer Untersuchung bedarf.

Wir wollen kurz die in diesem Artikel verwendete Notation fixieren. Mit Großbuchstaben  $A, B, C$ , usw. bezeichnen wir Punkte in der Ebene. Es bezeichne weiter  $\overline{AB}$  die durch die Punkte  $A$  und  $B$  verlaufende Gerade. Weiter sei  $|AB|$  die Länge der Strecke zwischen  $A$  und  $B$ , wobei wir die Strecke als solche mit  $AB$  bezeichnen.

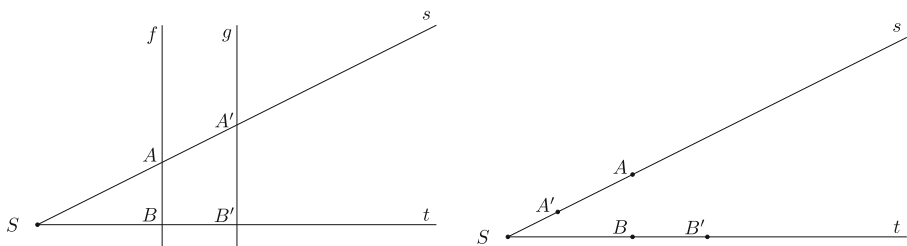
## 2 Die Strahlensätze

Im aktuellen schulischen Kontext werden der erste und der zweite Strahlensatz thematisiert. In älteren Schulbüchern wird auch der dritte Strahlensatz betrachtet, welchen wir allerdings aus unserer Analyse ausschließen, da er heute nicht mehr Teil des Curriculums ist. Im aktuellen Bildungsplan von Baden-Württemberg für das Gymnasium findet sich für die Klassenstufen 7/8 unter der Leitidee Raum und Form der Lerninhalt „Mit zentrischer Streckung und den Strahlensätzen arbeiten“, und dazu werden folgende Unterpunkte genannt: (12) Streckenlängen unter Nutzung der Strahlensätze bestimmen, (13) die Nichtumkehrbarkeit des zweiten Strahlensatzes durch Angabe eines Gegenbeispiels begründen.

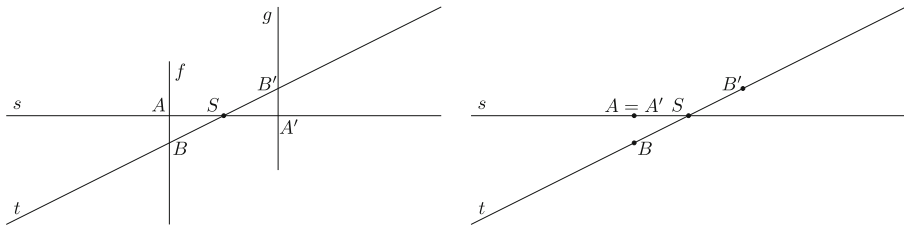
Punkt (12) befasst sich mit der Anwendung der Strahlensätze. Der Punkt (13) ist subtiler, als man vermuten würde, wie wir im Folgenden sehen werden.

Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes findet sich nicht im Bildungsplan, ist aber dennoch in den Schulbüchern vorhanden, weshalb wir diese in unsere Analyse miteinbeziehen wollen. Wir werden im Folgenden die Kriterien für die Umkehrbarkeit des ersten und zweiten Strahlensatzes genauer diskutieren.

Weiterhin macht es Sinn bei den beiden Sätzen zwischen den zugehörigen Figuren zu unterscheiden, einerseits gibt es die Strahlen-Figur, bzw. V-Figur, siehe Abb. 1. Andererseits lassen sich die Sätze auch für eine Figur mit Geraden formulieren, diese Figur bezeichnen wir als X-Figur, siehe Abb. 2. Die Bezeichnungen V- bzw.



**Abb. 1** In der linken Figur folgt aus der Parallelität von  $f$  und  $g$ , dass sowohl  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  wie auch  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  gültig sind. In der rechten Figur gilt auch  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  jedoch ist offensichtlich  $\overline{AB} \nparallel \overline{A'B'}$



**Abb. 2** In der linken Figur folgt aus der Parallelität von  $f$  und  $g$ , dass sowohl  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  wie auch  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  gültig sind. In der rechten Figur gilt auch  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  jedoch ist offensichtlich  $\overline{AB} \nparallel \overline{A'B'}$

X-Figur sind im alltäglichen Unterricht gebräuchlich, sind aber in der Fachliteratur nicht üblich, wir wollen in diesem Artikel trotzdem diese Bezeichnungen nutzen.

Wir werden zunächst die einzelnen Sätze formulieren und trennen dabei bewusst nach den beiden möglichen Figuren. Diese Darstellung ist nicht als Vorschlag für eine schulische Auseinandersetzung mit den Strahlensätzen zu sehen, sondern lediglich als Grundlage für die folgende Analyse. Wir verzichten an dieser Stelle auf Beweise, da diese wohlbekannt sind und an anderer Stelle in genügender Breite thematisiert werden, für eine fachlich saubere Darstellung siehe [1]. Unser Hauptaugenmerk richtet sich auf die Gegenbeispiele, die man konstruieren kann, wenn man die Voraussetzungen der Sätze leicht variiert.

**Satz 1 (1. Strahlensatz – V-Figur)** Gegeben seien zwei von einem Punkt  $S$  ausgehende Strahlen  $s$  und  $t$ , welche von zwei parallelen Geraden  $f$  und  $g$  geschnitten werden und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Dann gelten folgende Zusammenhänge:

$$1. \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} \text{ und } 2. \frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$$

Hierzu ist zu bemerken, dass sich aus Gl. 1 die Gl. 2 ableiten lässt. Umgekehrt ist das nur der Fall, wenn die Orientierung der Punkte zueinander bekannt ist, siehe hierzu Abb. 1 rechts.

**Satz 2 (1. Strahlensatz – V-Figur Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $A$  und  $A'$  Punkte auf  $s$  und  $B$  und  $B'$  Punkte auf  $t$ . Wenn  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  ist, dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ .

Hier ist hervorzuheben, dass nur die erste der beiden Verhältnisgleichungen, aus der Formulierung des ersten Strahlensatzes, hinreichend für die Umkehrung ist. Betrachtet man nämlich stattdessen  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  so kann der Fall wie in Abb. 1 rechts dargestellt auftreten. Die beiden Verhältnisgleichungen sind daher nicht gleichwertig.

**Satz 3 (1. Strahlensatz – X-Figur)** Gegeben seien zwei durch einen Punkt  $S$  laufende Geraden  $s$  und  $t$ , welche von zwei parallelen Geraden  $f$  und  $g$  geschnitten

werden und die Schnittpunkte seien wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Dann gelten folgende Zusammenhänge:

$$1. \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} \text{ und } 2. \frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$$

Hier kann aus Gln. 1 bzw. 2 jeweils die andere gefolgert werden, wenn bekannt ist, wie die relative Lage der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $A'$ ,  $B'$  und  $S$  ist, insbesondere, ob sie auf der selben Seite von  $S$  liegen oder nicht. Allerdings folgt hier, ohne die zusätzliche Information über die Orientierung der Punkte zueinander, nicht aus der ersten die zweite Gleichung, man siehe hierzu Abb. 2.

**Satz 4 (1. Strahlensatz – X-Figur Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Geraden die sich in  $S$  schneiden, weiter seien  $A$  und  $A'$  Punkte auf  $s$  und  $B$  und  $B'$  Punkte auf  $t$ . Wenn  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  und  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  ist, dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ .

Hier müssen beide Verhältnisgleichungen gefordert werden, damit die Parallelität der Geraden folgt. Dass die Verhältnisgleichung  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  alleine nicht ausreicht, sehen wir bei der V-Figur. Dass die Verhältnisgleichung  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  nicht mehr ausreicht sehen wir in Abb. 2 rechts. Die Problematik, die man hier sieht, ist, dass nicht mehr klar ist, auf welcher Seite von  $S$  sich die jeweiligen Punkte befinden. Um diesen neuen Freiheitsgrad auszugleichen bedarf es der zusätzlichen Forderung.

Im Folgenden formulieren wir den zweiten Strahlensatz jeweils für die V-Figur und die X-Figur und untersuchen, unter welchen Bedingungen eine Satzumkehr möglich ist.

**Satz 5 (2. Strahlensatz – V-Figur)** Gegeben seien zwei von einem Punkt  $S$  ausgehende Strahlen  $s$  und  $t$ , welche von zwei parallelen Geraden  $f$  und  $g$  geschnitten werden und die Schnittpunkte seien wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Dann gelten folgende Zusammenhänge:

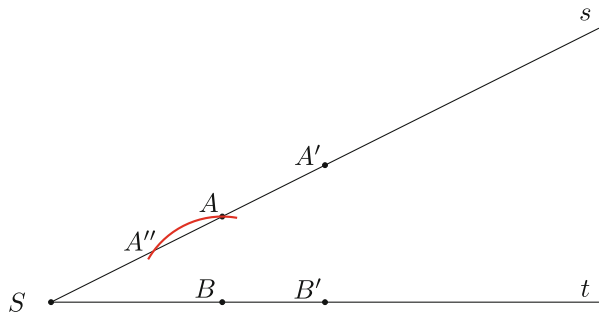
$$1. \frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|} \text{ und } 2. \frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$$

Hier lässt sich nicht direkt die eine Verhältnisgleichung aus der anderen folgern, unter Verwendung des ersten Strahlensatzes ist dies jedoch möglich.

**Satz 6 (2. Strahlensatz – V-Figur Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $A$  und  $A'$  Punkte auf  $s$  und  $B$  und  $B'$  Punkte auf  $t$ . Wenn  $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$  und  $\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$  ist, dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ .

Für die Umkehrung des 2. Strahlensatzes müssen bei der V-Figur beide Verhältnisse gefordert werden, siehe Abb. 3. Dies ist die typische Darstellung, die man in Schulbüchern findet, mit dem Zusatz, dass der zweite Strahlensatz nicht umkehrbar ist. An dieser Stelle wollen wir jedoch betonen, dass unter den gegebenen Voraus-

**Abb. 3** In der Figur ist  
 $\frac{|A'B|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$  jedoch  
 $\frac{|BA''|}{|A'B'|} \nparallel A'B'$



setzungen die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes in der V-Figur eine direkte Folgerung aus der Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der V-Figur ist.

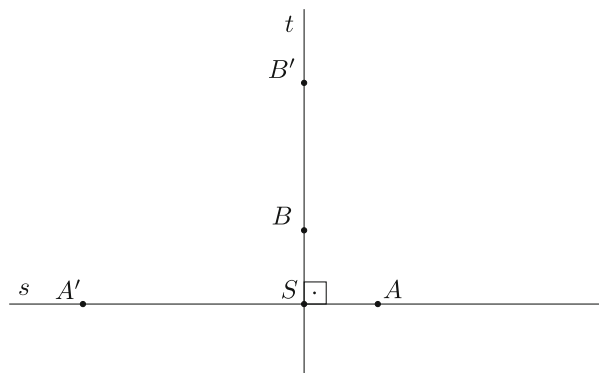
**Satz 7 (2. Strahlensatz – X-Figur)** Werden zwei sich im Punkt  $S$  schneidende Geraden  $s$  und  $t$  von zwei parallelen Geraden  $f$  und  $g$  geschnitten und die Schnittpunkte seien wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . So gilt:

$$1. \frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|} \text{ und } 2. \frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$$

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes in der X-Figur ist tatsächlich nicht möglich, siehe [1]. Das in [1] konstruierte Gegenbeispiel ist in Abb. 4 zu sehen. Insbesondere ist dies das einzig mögliche Gegenbeispiel, in dem Sinne, dass die beiden Geraden orthogonal stehen. Wir betonen hier erneut, dass wir beide Verhältnisgleichungen als Voraussetzung verwendet haben, also nicht die übliche schulische Vorgehensweise betrachten.

Wir fassen kurz die Ergebnisse unserer Betrachtung der Aussagen zusammen. Wir können bei allen vier Sätzen zwei Verhältnisgleichungen schlussfolgern, wobei nur im Fall des ersten Strahlensatzes in der V-Figur die eine Verhältnisgleichung aus der anderen folgt. In den anderen drei Fällen sind die Gleichungen unabhängig. Bei der Thematisierung der Umkehrbarkeit ist ein korrekter Umgang mit diesen

**Abb. 4** In der Figur gilt sowohl  
 $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$  wie auch  
 $\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$ , jedoch ist  
 $AB \nparallel A'B'$



Verhältnisgleichungen entscheidend. Für die Umkehrbarkeit des ersten Strahlensatzes in der V-Figur ist die stärkere Verhältnisgleichung hinreichend und notwendig. Für die Umkehrbarkeit des ersten Strahlensatzes in der X-Figur sind beide Verhältnisgleichungen als Voraussetzung nötig. Zieht man analog dazu bei der Umkehr des zweiten Strahlensatzes in der V-Figur auch beide Verhältnisgleichungen heran, so ist auch dieser umkehrbar, entgegen der üblichen Darstellung. Allein der zweite Strahlensatz in der X-Figur ist aufgrund des Spezialfalls, von sich rechtwinklig schneidenden Geraden, nicht umkehrbar.

### 3 Auswahl der Schulbücher

Wir wollen im Folgenden einige Darstellungen aus Schulbüchern betrachten, hierfür müssen wir eine Auswahl treffen, da eine Gesamtschau zu aufwendig ist. Hierbei verfolgen wir eine Mischung aus einer Längs- und einer Querschnittstudie. Wir tun dies um zu verdeutlichen, dass es sich nicht um ein neues Problem handelt, wir beschränken uns jedoch auf den Zeitraum ab 1945. Um zu verdeutlichen, dass die Darstellung zwischen den einzelnen Reihen eines Schulbuches sehr häufig geändert wird, wählen wir exemplarische Werke aus dem Zyklus des Lambacher Schweizer in Baden-Württemberg von 1947 bis heute aus, [2, 4, 5, 13, 14, 18]. Der Lambacher Schweizer (LS) bietet sich hier an, da er diesen langen Zeitraum abdeckt und so die Entwicklung gut nachvollzogen werden kann. Dies ergänzen wir durch die folgenden aktuellen Werke *mathe.delta* 8 [10], *Fundamente der Mathematik* 8 [12], *Elemente der Mathematik* 8 [7]. Hiermit betrachten wir alle aktuell in Baden-Württemberg zugelassenen Mathematik Schulbücher für die entsprechende Jahrgangsstufe des Gymnasiums. Außerdem beschränken wir uns bei allen betrachteten Büchern auf die in Baden-Württemberg verwendeten. Die Einschränkung auf ein Bundesland scheint hier sinnvoll um einerseits den Arbeitsaufwand in einem angemessenen Rahmen zu halten und andererseits zu gewährleisten, dass die Darstellungen nicht aufgrund verschiedenerer curricularer Vorgaben variieren.

Weiterhin beziehen wir noch die deutsche und die englische Wikipedia-Seite in unsere Betrachtung mit ein [16, 17], da diese eine häufig von Schülerinnen und Schülern konsultierte Quelle ist.

Anschließend werfen wir noch einen kurzen Blick in einige ausgewählte Fachpublikationen [6, 8, 11, 15, 19], dies soll zeigen, dass auch hier eine Breite in der Darstellung der Strahlensätze vorhanden ist.

### 4 Identifizierte Fehlertypen

Es konnten insgesamt sechs verschiedene Typen von Fehlern identifiziert werden, wir betrachten jeden dieser Typen im Folgenden exemplarisch, in Tab. 1 ist dann eine Übersicht zu sehen, in welchen Werken die jeweiligen Typen von Fehlern auftreten.

Den ersten Fehlertypen bezeichnen wir mit U1SV-FV, Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der V-Figur – falsche Verhältnisgleichung. Mit diesem Typen bezeichnen wir die Fälle, in denen die falsche Verhältnisgleichung zum Beweis der

**Tab. 1** In der Tabelle sind die einzelnen Aussagen aufgelistet

| –            | Eigenschaft      | LS 1947  | LS 1972 | LS 1985 | LS 2005 | LS 2015 | LS 2017 |
|--------------|------------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1.<br>S-Satz | Aussage V-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |
|              | Aussage X-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |
|              | Umkehr V-Fi-gur  | U1SV-FV  | U1S-FF  | U1S-FF  | U1S-FF  | Nein    | U1SV-FV |
|              | Umkehr X-Fi-gur  | Nein     | U1S-FF  | U1S-FF  | U1S-FF  | Nein    | Nein    |
| 2.<br>S-Satz | Aussage V-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |
|              | Aussage X-Fi-gur | Aufg     | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      | Nein    |
|              | Umkehr V-Fi-gur  | Ja       | U2SV    | Nein    | Nein    | Nein    | U2SV    |
|              | Umkehr X-Fi-gur  | Nein     | Nein    | US2X    | US2X    | Nein    | Nein    |
| –            | Eigenschaft      | m.d 8    | FdM 8   | EdM 8   | Wiki-D  | Wiki-E  |         |
| 1.<br>S-Satz | Aussage V-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |         |
|              | Aussage X-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |         |
|              | Umkehr V-Fi-gur  | U1SV-FB. | Ja      | Ja      | Ja      | U1SV-FV |         |
|              | Umkehr X-Fi-gur  | Nein     | Nein    | Nein    | U1SX    | U1SX    |         |
| 2.<br>S-Satz | Aussage V-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |         |
|              | Aussage X-Fi-gur | Ja       | Ja      | Ja      | Ja      | Ja      |         |
|              | Umkehr V-Fi-gur  | U2SV     | U2SV    | U2SV    | U2SV    | U2SV    |         |
|              | Umkehr X-Fi-gur  | Nein     | Nein    | Nein    | Nein    | Nein    |         |

Ein „ja“ bedeutet, dass die Aussage vorhanden und richtig dargestellt ist

Ein „nein“ bedeutet, dass die Aussage nicht dargestellt wird

Einer der Fehlercodes bedeutet, dass die Aussage zwar dargestellt ist, jedoch mit dem entsprechenden Fehler

Umkehrung des ersten Strahlensatzes herangezogen wird, siehe dazu die Bemerkung nach Abschn. 2. Ein Beispiel ist in Abb. 5 zu sehen, nach der Behauptung heißt es im Buch weiter: „Beweis: Zieht man durch  $A$  die Parallele zu  $A'B'$ , so teilt diese  $OB'$  nach dem 1. Strahlensatz im Verhältnis  $\overline{OA} : \overline{AA'}$ . Dasselbe tut nach Voraussetzung auch Punkt  $B$ . Also liegt  $B$  auf der Parallelen.“ Hierbei ist die letzte Folgerung, wie wir oben durch das Gegenbeispiel gesehen hatten falsch.

Ein weiterer mehrfach auftretender Fehlertyp ist U1S-FF, bei diesem Fehler-typ wird dem ersten Strahlensatz eine Umkehrung zugeordnet, welche nicht dem Kehrsatz entspricht. Dies ist beispielsweise im LS 1972 [13] der Fall, dort heißt

**Abb. 5** Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes im LS von 1947, zwischen den beiden dargestellten Bildern gibt es einen Seitenumbruch

Umkehrung des 1. Strahlensatzes: Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von zwei Geraden so geschnitten, daß sich die Abschnitte auf dem einen Strahl ebenso verhalten wie die entsprechenden auf dem andern, so sind die schneidenden Geraden parallel (Abb. 306).

5 Lambacher-Schweizer II/3 (704)

Voraussetzung:

$$\overline{OA} : \overline{AA'} = \overline{OB} : \overline{BB'}$$

Behauptung:

$$AB \parallel A'B'$$

es: „Während die Umkehrung des Strahlensatzes 1 der Satz 4 von § 63 ist ...“. Der referenzierte Satz 4 ist jedoch die geraden- und paralleentreue der zentrischen Streckung, welche nicht dem Kehrsatz des ersten Strahlensatzes entspricht. Es ist möglich mit dieser Eigenschaft der zentrischen Streckung die Umkehrung zu zeigen, diese bildet jedoch selbst nicht den Kehrsatz.

Ein weiterer Typ, welcher allerdings nur ein mal beobachtet wurde, ist U1SV-B. Hier wurde der Beweis der Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der V-Figur in eine Aufgabe ausgelagert, siehe Abb. 6. Hier soll der Kehrsatz mit Hilfe einer Abbildung begründet werden, es ist jedoch nicht klar, wie dies gehen soll. Ein „Messen“ der Parallelität von Seiten der Schüler in der Abbildung entspricht keiner Begründung einer allgemeinen Aussage. Selbst, wenn man an dieser Stelle auf einen formalen Beweis verzichten will, könnte die Aufgabe besser gestellt sein, in dem Sinne, dass der Schüler für mehrere selbstgewählte Beispiele von im gleichen Verhältnis geteilten Schenkeln prüft, ob die entstehenden Geraden parallel sind. Durch die Beliebigkeit der Beispiele würde so eine Generalisierbarkeit der Situation untermauert.

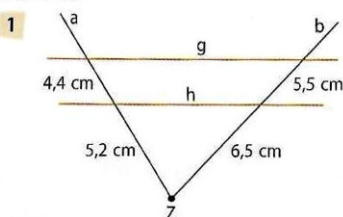
Ein weiterer Fehlertyp ist U1SX, dieser wird verwendet, wenn die Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der X-Figur als falsch erachtet wird, obwohl beide Verhältnisgleichungen in der Aussage des Satzes angenommen werden.

12

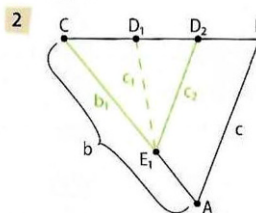
Zu einem mathematischen Satz kann dessen Umkehrung, der Kehrsatz, formuliert werden. Dazu werden die Voraussetzungen und die Behauptung des Satzes vertauscht. Die Gültigkeit des Kehrsatzes muss dann überprüft werden.

a) Formuliere den Kehrsatz zum 1. Strahlensatz bzw. 2. Strahlensatz.

b) Begründe mithilfe von Abbildung 1, dass der Kehrsatz zum 1. Strahlensatz wahr ist.



c) Begründe mithilfe von Abbildung 2, dass der Kehrsatz zum 2. Strahlensatz nicht gilt.



**Abb. 6** Aufgabe zur Umkehrbarkeit der Strahlensätze

Ein ähnlicher Fehlertyp ist U2SV, hier wird die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes in der V-Figur als falsch erachtet, obwohl beide Verhältnisgleichungen in der Aussage des Satzes stehen. Dieser Fehlertyp ist der am häufigsten auftretende.

Der dazu quasi inverse Fehlertyp U2SX tritt auf, wenn die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes in der X-Figur als richtig erachtet wird.

Wir sehen in der Tab. 1, dass die Aussagen an sich nicht problematisch sind, diese sind, wenn abgebildet, immer korrekt. Die Schwierigkeiten treten bei den Umkehrungen der Sätze auf. Bei der Umkehr des ersten Strahlensatzes in der V-Figur treten drei verschiedene Fehlertypen auf. Erstens: Die Umkehr an sich ist schon falsch formuliert, also nicht die Umkehr des ersten Strahlensatzes. Zweitens: In der Aussage wird die falsche Voraussetzung getroffen. Dies sind beides Fehler, die durch eine klare Formulierung des ersten Strahlensatzes vermieden werden können, ist in diesem die Voraussetzung und die Behauptung klar formuliert, so lässt sich die Umkehrung direkt ableiten. Der dritte auftretende Fehler wurde nur einmal entdeckt, hier wurde die Aussage auf solche Art in eine Aufgabe ausgelagert, dass die Voraussetzungen und die Behauptung vermengt werden. Diese drei Fehler weisen eine gewisse Ähnlichkeit auf, in dem Sinne, dass eine klare Formulierung des Satzes selbst den Fehlern vorbeugt.

Die Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der X-Figur wurde nicht in allen Büchern betrachtet, sie wurde aber in allen Büchern, in denen sie betrachtet wurde, falsch präsentiert. Der häufigste Fehler resultiert darin, dass der Beweis der Umkehrung in der V-Figur auch als Beweis zur Umkehrung in der X-Figur angesehen wird, ohne zu erkennen, dass es einen weiteren Freiheitsgrad gibt. Der zweite Fehler ist die Annahme, dass der Satz in der X-Figur nicht umkehrbar ist, dies resultiert darin, dass die Behauptung des ersten Strahlensatzes nicht komplett in die Voraussetzung der Umkehr übernommen wird. Auch hier stoßen wir auf die Problematik, dass die Behauptung des ersten Strahlensatzes klar formuliert sein sollte.

Der Fehler bei der Umkehr des zweiten Strahlensatzes in der V-Figur ist konsequent in dem Sinne, wenn nur eine der Verhältnisgleichungen für die Umkehr benutzt wird, die Aussage falsch ist. Das widerspricht jedoch dem Konzept der Umkehrung eines Satzes. Und noch bedeutender ist es, da hier beide Verhältnisgleichungen gleichberechtigt auftauchen, also keine kanonische Auswahl möglich ist. Natürlich muss an dieser Stelle diskutiert werden, dass eine der Verhältnisgleichungen als Voraussetzung der Umkehr nicht ausreicht, dies resultiert jedoch nicht in der Nichtumkehrbarkeit des Satzes. Auch hier ist die korrekte Formulierung der Aussage entscheidend.

Zu der Umkehrbarkeit des zweiten Strahlensatzes in der X-Figur ist wenig zu sagen, da diese fast nie betrachtet wird. Dies ist natürlich, wenn schon die Umkehrung in der V-Figur als falsch erachtet wird. Die beiden einzigen Bücher, die den Fall betrachten, haben nur das Argument von der V-Figur zur X-Figur verschoben und die Umkehrung in der V-Figur nicht betrachtet.

Wir erkennen, dass sich die Fehler alle durch eine klare Formulierung der Aussagen und eine klare Unterscheidung der Fälle beheben lassen. Die Fälle werden in den Büchern auf verschiedene Weise gruppiert.

Eine Variante besteht darin, die Aussagen nach der Nummerierung der Strahlensätze zu sortieren, daher die V- und die X-Figur gemeinsam zu behandeln [5,

13, 14, 18]. Dies hat den Nachteil, dass bei der Umkehrung die beiden Figuren unterschieden werden müssen.

Eine weitere Vorgehensweise gruppiert anhand der Figuren und behandelt den ersten und zweiten Strahlensatz gemeinsam [2, 7, 12]. Hieran ist vorteilhaft, dass alle Aussagen zu einer Figur gebündelt thematisiert werden und beim Übergang von der V- zur X-Figur der zusätzliche Freiheitsgrad thematisiert werden kann. In den betrachteten Büchern, die diese Unterteilung verwenden, wird jedoch die Umkehrung der Aussage zur X-Figur nicht betrachtet. An dieser Stelle müsste man dann wieder klar zwischen dem ersten und dem zweiten Strahlensatz trennen.

Als dritte Variante lassen sich alle vier Fälle gemeinsam betrachten, also der erste und zweite Strahlensatz direkt mit beiden Figuren [10]. Hier tritt der gleiche Nachteil wie bei Variante eins auf und zusätzlich ist die Darstellung so überladen, dass sie zur Unübersichtlichkeit neigt.

Eine weitere Variante besteht darin, die Aussage des Satzes mit seiner Umkehrung zusammen zu packen [4]. Der Charme an diesem Ansatz ist, dass man hier direkt erkennen sollte, dass Voraussetzung und Behauptung vertauscht werden. Dieser Ansatz lässt sich mit den oben genannten kombinieren, in dem Sinne, dass auch hier nach erstem und zweitem Strahlensatz, bzw. nach Figuren, getrennt werden kann.

## 5 Betrachtung weiterer Literatur

Das Problem beschränkt sich nicht nur auf Schulbücher oder Internetquellen, auch Fachpublikationen weisen Unstimmigkeiten auf. Wir betrachten einige exemplarische Beispiele, in denen unter anderem zusätzliche Voraussetzungen eingeführt werden, um die Freiheitsgrade zu beschränken.

So findet sich bei Krauter und Bescherer [11] folgende Formulierung für die Umkehr des ersten Strahlensatzes: „Wir formulieren die Umkehrung zum 1. Strahlensatz: Sind D und E Punkte auf den Seitengeraden CB bzw. CA eines Dreiecks ABC und teilt D die Strecke CB im selben Verhältnis wie E die Strecke CA, dann sind DE und AB zueinander parallel.“ Hier wird die Lage der Punkte vorab schon eingeschränkt, also eine weitere Voraussetzung bei der Umkehr eingefügt. Diese Darstellung entspricht im wesentlichen der bei Euklid, Buch VI Proposition 2, siehe beispielsweise [3].

Bei Halbeisen, Hungerbühler und Lächli [8] wird als zusätzliche Voraussetzung formuliert: „Die Geraden  $AA'$  und  $BB'$  seien zwei sich schneidende Geraden, wobei deren Schnittpunkt  $S$  entweder auf beiden oder auf keiner der Strecken  $AA'$  und  $BB'$  liegt.“ Damit lassen sich auch die Gegenbeispiele bei der Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der X-Figur, siehe Abb. 2, vermeiden, was zu einer einfacheren Umkehrung des ersten Strahlensatzes führt, in dem Sinne, dass für diese die erste Verhältnisgleichung hinreichend ist. Man umgeht damit auch die Problematik, wann eine und wann beide Verhältnisgleichungen für die Umkehrung betrachtet werden. In dieser Anschauung ist dann der zweite Strahlensatz konsequenterweise nicht umkehrbar, und zwar sowohl in der V- als auch in der X-Figur.

Bei Weigand [15] wird bei der Umkehrung des ersten Strahlensatzes in der X-Figur nur eine Verhältnisgleichung vorausgesetzt: „Beim 1. Strahlensatz gilt auch die Umkehrung. Das heißt, in obigen V- bzw. X-Figuren gilt die Implikation  $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} \Rightarrow c \parallel d$ .“ Das dies bei der X-Figur nicht ausreicht sehen wir in Abb. 2.

Auch im Buch „Leitfaden Geometrie: Für Studierende der Lehrämter“ [6], findet sich zur Umkehrung des ersten Strahlensatzes: „Werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden, von zwei anderen Geraden in A und B bzw. A' und B' geschnitten und gilt  $l(ZA') : l(AZ) = l(ZB') : l(BZ)$ , dann sind AB und A'B' parallel.“ Hier wird der Beweis für die Umkehrung bei der V-Figur auch für die X-Figur genutzt, was jedoch nicht möglich ist, es fehlt die zweite Verhältnisgleichung in der Voraussetzung.

Abseits der didaktischen Literatur findet sich bei Zeuge [19] folgende Aussage: „Für den ersten Strahlensatz gilt auch die Umkehrung: Wenn eine der beiden Gleichungen gilt, dann gilt auch die andere und die Geraden AB und A'B' sind parallel.“ Hier wird von einer der Verhältnisgleichungen im ersten Strahlensatz auf die andere geschlossen, darin geht jedoch die Lage der Schnittpunkte ein, welche bei der Umkehr nicht bekannt ist.

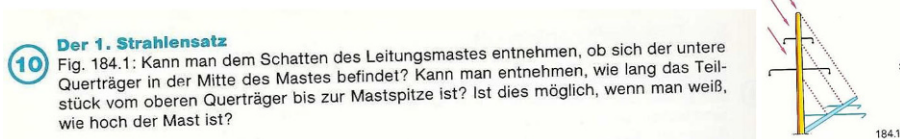
## 6 Einbettung in den Kontext der Lerneinheit

In diesem Abschnitt wollen wir den Blick etwas weiten und auch den Kontext beleuchten, in welchem die Strahlensätze präsentiert werden. Hierfür fokussieren wir uns auf die zeitliche Entwicklung der betrachteten Werke der Reihe LS.

Bei der Analyse lässt sich nicht nur beobachten, dass sich die Formulierung der Strahlensätze häufig ändert, sondern auch, dass die Gewichtung im Kontext der zentrischen Streckung und der Ähnlichkeitslehre wechselt. Im ältesten LS bilden die Strahlensätze den Ausgangspunkt zur Behandlung der Ähnlichkeitslehre, wobei die zentrische Streckung hier nur eine marginale Rolle spielt und nach der Ähnlichkeit thematisiert wird. Mit den späteren Büchern verschiebt sich der Fokus mehr zu einer abbildungsgeometrischen Perspektive, hier wird stets von der zentrischen Streckung ausgegangen und mithilfe dieser zunächst die Strahlensätze und dann die Ähnlichkeit thematisiert und insbesondere auch der erste Strahlensatz jeweils bewiesen. Im neusten LS ist mittlerweile wieder eine stärker figurengeometrische Sichtweise vorherrschend, hier ist zwar beispielsweise die Definition der Ähnlichkeit noch abbildungsgeometrisch, es wird mit dieser dann jedoch in einer hauptsächlich figurengeometrischen Art gearbeitet.

Interessant ist auch zu sehen, dass alle Bücher der Reihe als Einstieg in den Themenblock Strahlensätze eine Schattenwurf-Aufgabe verwenden. Insbesondere verwenden dafür alle bis auf das neuste Werk den Schatten eines Strommastes, die Details der Aufgabe variieren zwar, doch im Kern bleibt es die selbe Aufgabe, siehe Abb. 7.

Deutlich wird die Verschiebung der Gewichtung in der Sichtweise auch bei der Bezeichnung der Kapitel, so heißt dieses im Werk von 1970 „Zentrische Streckung. Perspektive Ähnlichkeit“ in dem von 1985 und 2005 „Zentrische Streckung“ und in dem von 2015 „Ähnliche Figuren – Strahlensätze“ und in dem von 2017 „Strah-



**Abb. 7** Einstiegsaufgabe zu den Strahlensätzen aus dem LS von 1985

lensätze“. Die Strahlensätze nehmen gegenüber der zentrischen Streckung in den neueren Büchern wieder eine prominentere Rolle ein.

Hervorzuheben ist auch, dass die Aussagen der Strahlensätze stets auf einen Beweis gestützt werden, es handelt sich hier um eine Stelle im Unterricht, in welcher das formale Arbeiten eine vorrangige Rolle spielt. Dies unterstreicht insbesondere die Notwendigkeit, sich kritisch mit den Formulierungen auseinanderzusetzen.

Weiter lässt sich auch feststellen, dass die Anzahl der Aufgaben zwar relativ konstant bleibt, deren Vielfalt jedoch zurückgeht. Gerade die Anwendung der Strahlensätze in technischen Geräten oder zur maßstabsgetreuen Vergrößerung bzw. Verkleinerung, sei es mittels Projektion oder Konstruktion, verschwindet schrittweise aus den Büchern. Häufig finden sich Aufgaben, welche zwar in einen Kontext eingebettet sind, jedoch im Kern rein mathematisch sind.

## 7 Genese

Nachdem wir die Strahlensätze in den verschiedensten Darstellungen betrachtet und die üblichen Fallstricke diskutiert haben, werden wir eine gegenüber Abschn. 2 sowohl didaktisch wie auch im Umfang reduzierte Darstellung für den schulischen Kontext präsentieren. Da es verschiedene Möglichkeiten gibt, welche alle ihre Berechtigung haben, werden wir zwei verschiedene Ansätze präsentieren. Aus unserer Sicht ist eine Überarbeitung der betrachteten Darstellungen nötig, da diese dem Anspruch von Vereinfachen ohne zu verfälschen [9] widersprechen. Hier wird zwar eine Vereinfachung vorgenommen, diese führt jedoch zu einer Verfälschung der Aussagen.

Die Unterscheidung in alle vier mögliche Fälle erscheint uns für die Schule als zu kleinschrittig und zu zeitintensiv, da die einzelnen Argumente stark miteinander verwandt sind. Diesen Ansatz wollen wir nicht weiter verfolgen. Die Trennung nach Sätzen hat den Nachteil, dass man in der Argumentation trotzdem beide Figuren unterscheiden muss. Wir präferieren daher die Variante nach den Figuren zu trennen oder mit Hilfe von zusätzlichen Voraussetzungen eine parallele Behandlung der Figuren zu ermöglichen.

Besondere Rücksicht legen wir an dieser Stelle auch auf die Benennung der Punkte. Da die Strahlensätze häufig im Zusammenhang mit der zentrischen Streckung thematisiert werden, nutzen wir eine Notation, die in beiden Kontexten einheitlich verwendbar ist. Daher werden in den betrachteten Figuren Punkte auf einem Strahl bzw. einer Geraden als  $A$  und  $A'$  bezeichnet, auf dem anderen Strahl bzw. der an-

deren Geraden als  $B$  und  $B'$ . So lassen sich Brüche vermeiden, wie sie in den betrachteten Schulbüchern gelegentlich beobachtbar waren.

Als letzter Punkt ist noch anzumerken, dass die Formulierung der Aussage auch ohne eine Abbildung verständlich sein sollte. Bezieht sich beispielsweise die Benennung der Punkte auf die Grafik, wird diesen die vorgegebene Konstellation unbewusst aufgeprägt, die Aussage als solche wird also nicht mehr in ihrer Allgemeinheit erfasst. Klar ist, dass Abbildungen zur Veranschaulichung und Plausibilisierung notwendig sind, deren Einsatz sollte jedoch bewusst gewählt werden um die verschiedenen möglichen Situationen abzubilden.

## 7.1 Variante 1: Trennung nach Figuren

Wir präsentieren die Sätze, wenn man eine strikte Trennung nach Figuren betrachtet. Es ergeben sich damit folgende Sätze, die dann noch visuell unterstützt werden müssen.

**Satz 8 (V-Figur)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen, die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ .

1. Strahlensatz: Wenn  $f \parallel g$  ist, dann gilt  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  und  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$ ,
2. Strahlensatz: Wenn  $f \parallel g$  ist, dann gilt  $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$  und  $\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$ .

Hervorzuheben ist hier, dass zunächst die Situation beschrieben ist und dann eine klare Trennung von Voraussetzung und Behauptung erfolgt. Diese Formulierung lässt sich einfach dadurch umkehren, dass Behauptung und Voraussetzung die Rollen tauschen.

**Satz 9 (V-Figur Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen, die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ .

1. Strahlensatz Umkehrung: Wenn  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  und  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  ist, dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ , bzw.  $f \parallel g$ .
2. Strahlensatz Umkehrung: Wenn  $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$  und  $\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$  ist, dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ , bzw.  $f \parallel g$ .

Hierbei werden bewusst bei der Umkehrung des ersten Strahlensatzes beide Verhältnisgleichungen vorausgesetzt. Dies ist nur konsequent, da ja beide Verhältnisgleichungen aus dem ersten Strahlensatz folgen, zusätzlich lassen sich dann alle

Umkehrungen in der gleichen Form präsentieren. Natürlich steht im Unterrichtsgang die Frage im Raum, ob jedes der beiden Verhältnisse für sich allein bereits eine hinreichende Bedingung darstellt, dies ist, wie wir wissen, nicht der Fall. Es bietet sich aber ein Anlass, über hinreichende und notwendige Bedingungen zu diskutieren. Aus mathematischer Sicht ist das Hinzufügen von unnötigen Bedingungen in Sätzen unerwünscht, für den schulischen Kontext ist dieses Vorgehen dennoch vorstellbar.

**Satz 10 (X-Figur)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Geraden, die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ .

1. Strahlensatz: Wenn  $f \parallel g$  ist, dann gilt  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  und  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$ ,
2. Strahlensatz: Wenn  $f \parallel g$  ist, dann gilt  $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$  und  $\frac{|AB|}{|SB|} = \frac{|A'B'|}{|SB'|}$ .

Hier ist nur die erste Aussage umkehrbar, die zweite jedoch nicht.

**Satz 11 (X-Figur Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Geraden, die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ .

3. Strahlensatz Umkehrung: Wenn  $\frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$  und  $\frac{|AA'|}{|SA|} = \frac{|BB'|}{|SB|}$  ist,

dann gilt  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ , bzw.  $f \parallel g$ .

4. Strahlensatz Umkehrung: Diese ist nicht gültig, als Gegenbeispiel siehe Abb. 4.

Aus didaktischer Perspektive ist dieser Zugang von Vorteil, da bei den Umkehrungen immer alle aus dem Satz folgenden Verhältnisgleichungen betrachtet werden. Es muss also keine Auswahl getroffen werden, welche Verhältnisgleichungen für die Umkehrung herangezogen werden müssen. Zusätzlich sind nach dieser Unterscheidung die Fälle nach der zugrunde liegenden Figur getrennt, bei der Thematisierung der Umkehrung spielen diese auch die entscheidende Rolle. Nochmals hervorzuheben ist, dass die klare Strukturierung von Voraussetzung und Behauptung maßgeblich für die Fehlervermeidung ist.

## 7.2 Variante 2: Zusätzliche Voraussetzung

Wir haben in unserer ersten Variante gesehen, dass die Problematik von unnötigen Voraussetzungen in den Kehrsätzen auftaucht, begründet war dies durch die konsequente Darstellung. Wir wollen nun, wie bereits oben bei Halbeisen, Hungerbüler und Lächli [8] gesehen, eine zusätzliche Voraussetzung einführen, welche die Pro-

blematik erheblich reduziert. Es wird daher zusätzlich gefordert, dass  $S$  entweder auf  $AA'$  und  $BB'$  liegt oder auf keiner der beiden Strecken. Mit dieser zusätzlichen Forderung können wir zwei der Gegenbeispiele aus Abschn. 2 außer Kraft setzen, siehe Abb. 2 rechts und Abb. 4. Es ergeben sich die folgenden Sätze, hier in der Trennung nach Sätzen dargestellt.

**Satz 12 (1. Strahlensatz)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen(Geraden), die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Außerdem liege  $S$  entweder auf  $AA'$  und  $BB'$  oder auf keiner der beiden Strecken.

$$1. \text{ Strahlensatz: Wenn } f \parallel g \text{ ist, dann gilt } \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|}$$

**Satz 13 (1. Strahlensatz – Umkehrung)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen(Geraden), die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Außerdem liege  $S$  entweder auf  $AA'$  und  $BB'$  oder auf keiner der beiden Strecken.

$$1. \text{ Strahlensatz: Wenn } \frac{|SA'|}{|SA|} = \frac{|SB'|}{|SB|} \text{ ist, dann gilt } f \parallel g.$$

**Satz 14 (2. Strahlensatz)** Es seien  $s$  und  $t$  zwei Strahlen(Geraden), die vom gemeinsamen Punkt  $S$  ausgehen, weiter seien  $f$  und  $g$  zwei Geraden, die  $s$  und  $t$  schneiden (aber nicht in  $S$ ), und die Schnittpunkte wie folgt benannt:  $A = s \cap f$ ,  $A' = s \cap g$ ,  $B = f \cap t$  und  $B' = g \cap t$ . Außerdem liege  $S$  entweder auf  $AA'$  und  $BB'$  oder auf keiner der beiden Strecken.

$$2. \text{ Strahlensatz: Wenn } f \parallel g \text{ ist, dann gilt } \frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|}$$

Die Umkehrung des zweiten Strahlensatzes ist dann nicht gültig, da nur eine der Verhältnisgleichungen betrachtet wird. Dies ist an dieser Stelle konsequent, da beim ersten Strahlensatz auch nur eine der Verhältnisgleichungen betrachtet wird, diese aufgrund der zusätzlichen Forderung aber hinreichend für die Umkehr ist. Man erhält so die typischen Aussagen, die sich auch in den Schulbüchern finden, nur dass dort die zusätzliche Voraussetzung nicht thematisiert wird. Charmant an diesem Ansatz ist, dass die Aussage für die X-Figur auf die Aussage für die V-Figur zurückgeführt werden kann, durch eine  $180^\circ$ -Drehung. Dieses Argument bietet sich an dieser Stelle natürlich für den Unterricht an und findet sich zum Beispiel in [5].

### 7.3 Abschließende Bemerkung

Egal für welche der Varianten man sich entscheidet, hervorzuheben ist, dass eine konsequente Darstellung erfolgen sollte. Diese Darstellung sollte in den Sätzen klar zwischen der Situation, der Voraussetzung und der Folgerung trennen. Außerdem sollten die verschiedenen Sätze in einer einheitlichen Darstellung präsentiert werden, dies bedeutet aus meiner Sicht auch, dass die Anzahl der betrachteten Verhältnissgleichungen konstant sein sollte.

**Funding** Open Access funding enabled and organized by Projekt DEAL.

**Open Access** Dieser Artikel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Artikel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen. Weitere Details zur Lizenz entnehmen Sie bitte der Lizenzinformation auf <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>.

### Literatur

1. Agricola, I., Friedrich, T.: Elementargeometrie: Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. Springer (2014)
2. Baum, M., et al.: Lambacher Schweizer 5 Mathematik für Gymnasien Baden. Wurtemberg. Stuttgart: Ernst Klett Verl. GmbH, (2015)
3. Euclides: The thirteen books of Euclid's Elements. Hrsg. von Thomas L. (Hrsg.) Heath. Dover Publ, New York, NY (1956)
4. Freudigmann, H., et al.: Lambacher Schweizer 8 Mathematik für Gymnasien Baden-Wurtemberg. Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart (2017)
5. Buck, H., Brästle, G.: Lambacher Schweizer 9 Baden-Wurtemberg. Klett, Stuttgart (2005)
6. Gorski, H.-J.: Leitfaden Geometrie : Für Studierende der Lehrämter. Hrsg. von Susanne Mäller-Philipp. 6., überarb. u. erw. Aufl. SpringerLinkSpringer eBook Collection, Wiesbaden (2014)
7. Griesel, H., et al.: Elemente der Mathematik 8. Westermann Druck GmbH, (2017)
8. Halbeisen, L., Hungerbühler, N., Läubli, J.: Anhang: Zentrische Streckung und Strahlensätze. In: Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten: Perlen der klassischen Geometrie, S. 189–208. (2016)
9. Kirsch, A.: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. (Aspects de la simplification dans l'enseignement des mathématiques). In: Westermanns Pädagogische Beiträge Braunsch. **29**(4), 151–157 (1977)
10. Kleine, M., Zwölfer, A.: mathe.delta Mathematik für das Gymnasium 8. C.c. Buchner Verl., (2018)
11. Krauter, S., Bescherer, C.: „Projektionssatz und Strahlensätze“. In: Erlebnis Elementargeometrie: Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, S. 147–157 (2013). ISBN 978-3-8274-3026-7
12. Pallack, A.: Fundamente der Mathematik, Bd. 8. Cornelsen Verlag, GmbH (2018)
13. Schweizer, W.W.G., et al.: Lambacher Schweizer Geometrie, Bd. 2. Klett, Stuttgart (1970)
14. Schweizer, W., Lambacher, T.: Mathematik für höhere Schulen – Mittelstufe Teil, Bd. 3. Klett, Geometrie. Stuttgart: Verlag von (1947)
15. Weigand, H.-G., et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Springer (2018)
16. [https://en.wikipedia.org/wiki/Intercept\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Intercept_theorem). Zugriff
17. <https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz>. Zugriff
18. Schmid, A., Schweizer, W.: Geometrie, Bd. 2. Klett, Stuttgart (1985)

19. Zeuge, W.: Nützliche und schöne Geometrie: Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. SpringerLinkSpringer eBook Collection. Springer Spektrum, Wiesbaden (2018)

**Hinweis des Verlags** Der Verlag bleibt in Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutsadressen neutral.