

Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Matthias Harnau
aus Tiengen

Tag der mündlichen Prüfung : 11. Februar 2004
Hauptreferent : Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Karlsruhe 2004

Kurzfassung

Sogenannte Volumen-Schalenelemente enthalten analog zu Kontinuumselementen und im Gegensatz zu Schalenelementen, die auf klassischen Schalentheorien basieren, auch die Möglichkeit einer Dehnung in Dickenrichtung und besitzen ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgrade. Allerdings muss für einen effizienten Einsatz der 3D-Schalenelemente zwischen dem Verhalten in Dickenrichtung und in der Schalenfläche unterschieden werden. Dadurch können auf Elementebene sowohl in Dickenrichtung als auch in der Schalenfläche gezielt unterschiedliche Modifikationen zur Vermeidung spezifischer Versteifungseffekte eingeführt werden. Damit erhalten die Elemente auch einen schalentypischen Charakter, d.h. große Abmessungen in Flächenrichtung auch bei geringer Dicke.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden quaderförmige Volumen-Schalenelemente mit linearer Ansatzordnung für die Geometrie- und Verschiebungsinterpolation und dementsprechend zwei Knoten in Dickenrichtung vorgestellt. In der Schalenfläche werden bilineare (vier Knoten) und alternativ biquadratische Ansätze (neun Knoten) verwendet. Eine Diskussion der Vor- und Nachteile dieser beiden Elementtypen erfolgt anhand numerischer Beispiele. Zur Vermeidung diverser Versteifungseffekte werden geeignete Methoden wie Unterintegration und gemischte FE-Formulierungen eingesetzt, die zu weitgehend versteifungsfreien Elementformulierungen führen. Die eingesetzten Elementmodifikationen können insbesondere bei homogenen Beanspruchungszuständen zu künstlichen Elementkinematiken führen. Deshalb liegt ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit in der Untersuchung dieser sogenannten numerischen Instabilitäten. Als effiziente Stabilisierungsmaßnahme wird schließlich eine Vorgehensweise vorgestellt, die letztendlich, bei kritischen Beanspruchungszuständen, die Rückführung der modifizierten Elementformulierung auf die reine Verschiebungsformulierung beinhaltet. Ausführliche Tests der unterschiedlichen vorgestellten Elementvarianten erfolgen mit Hilfe umfangreicher Beispielberechnungen.

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit ist der Verwendung der Volumen-Schalenelemente für Spezialfälle wie die Simulation von Blechumformprozessen gewidmet. Dafür werden geeignete Kontaktformulierungen benötigt, die den Kontakt zwischen den Blechen und den starren Umformwerkzeugen beschreiben. In der vorliegenden Arbeit werden Kontaktalgorithmen, die auf dem Penalty bzw. dem Augmented Lagrange Verfahren basieren, eingesetzt und weiterentwickelt. Die Beschreibung der Geometrie der Kontaktflächen erfolgt auf der sogenannten 'Slave'-Seite mit Hilfe von Kontaktsegmenten, die den Oberflächen der Schalenelemente entsprechen. Die Geometrie der Kontaktflächen auf der sogenannten 'Master'-Seite, den Oberflächen der starren Werkzeuge, wird durch analytische Formfunktionen definiert. Dies ermöglicht eine effiziente Beschreibung einfacher Kontaktgeometrien.

Zusätzlich zum Umformen von Vollblechen liegt ein spezielles Augenmerk auf dem Umformen mehrschichtiger geklebter Verbundbleche. Zur Beschreibung der mehrschichtigen Bleche mit deutlich unterschiedlichem Materialverhalten der Schichten erfolgt eine Diskretisierung mit mehreren Elementen in Dickenrichtung. In einigen numerischen Beispielen wird das Umformen von sowohl Vollblechen als auch geklebter Verbundbleche untersucht. Anschließend an die Simulation des Umformprozesses werden die Eigenfrequenzen der umgeformten Bleche unter Einbeziehung der Vorgeschichte mit den Eigenfrequenzen von Blechen derselben Geometrie aber ohne Vorgeschichte verglichen. Es zeigt sich, dass in einigen Fällen die Vorgeschichte unbedingt zu berücksichtigen ist.

Abstract

With so-called 3D-shell-elements a continuum-like modeling of a shell structure is performed contrary to classical shell elements where no straining in the thickness direction is taken into account. The 3D-shell-elements have in analogy to continuum elements only displacement degrees of freedom. For efficient use of the 3D-elements for shell problems we have to distinguish between the surface and the thickness direction. Thus the strain components in surface and thickness direction can be treated differently to reduce the shell specific locking phenomena. Then the elements get their shell specific character, resp. large dimensions in surface direction even for very small thickness values.

Within this contribution hexahedral 3D-shell-elements are presented. In thickness direction a linear approximation for geometry and displacement interpolation is presumed, thus the elements have two nodal points in thickness direction. In the shell surface direction bilinear shape functions (four node elements) and alternatively biquadratic shape functions (nine node elements) are used. To reduce locking effects appropriate methods like underintegration and mixed FE-methods are used and finally almost locking free element formulations are presented. The introduced element modifications can lead to artificial element kinematics for homogenous stress states. Therefore an additional focus is on the discussion of these so-called numerical instabilities. As an efficient stabilization finally a procedure is suggested which reduces the modified element formulation to a pure displacement formulation in the cases when artificial kinematics are encountered. The suggested element versions are tested with different numerical examples and the advantages and disadvantages of the different element types are discussed.

Another main focus of this contribution is on special applications for the 3D-shell-elements like the numerical simulation of sheet metal forming processes. For this kind of application appropriate contact formulations are necessary to describe the contact between the work pieces and the rigid forming tools. Contact algorithms based on the penalty and the Augmented Lagrangian method have been taken and developed further. The geometry discretization of the contact surfaces on the so-called 'slave'-side is performed by contact segments which are geometrically identical to the upper and lower surfaces of the shell structure discretized by the 3D-shell-elements. The surfaces of the rigid tools on the so-called 'master'-side are defined by analytical form functions. This enables an efficient description of simple contact geometries.

In addition to the forming simulation of massive sheet metals also multilayered pasted composite sheets are treated. The kinematical description of the multilayered sheets with clearly different materials in each layer is done by discretizing the structure with more than one element in thickness direction. In the numerical examples forming simulations for massive sheet metals as well as for the composite sheets are shown. Finally the eigenfrequencies of the formed blanks considering the forming history are computed. The results are compared with the eigenfrequencies of a geometrically identical blank for which the forming history is not taken into account. It can be shown, that in some cases the consideration of the forming history is very important.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	6
Einleitung	9
1 Grundlagen	13
1.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	13
1.1.1 Die Kinematik	13
1.1.2 Das Gleichgewicht	14
1.1.3 Verzerrungen und Spannungen	15
Verzerrungs- und Spannungsmaß für Probleme großer Deforma- tionen	15
Konvektive Koordinaten	16
Der Green-Lagrange Verzerrungstensor an einer kontravarianten Basis	17
Spannungs- und Stofftensor an einer kovarianten Basis	18
Anmerkung zur programmiertechnischen Umsetzung	18
1.1.4 Das Materialgesetz	19
Linear-elastisches orthotropes Material	20
Linear-elastisches isotropes Material	20
Nichtlineare Materialgesetze	21
Transformation des Stofftensors	22
1.2 Grundlagen der Finite-Element-Methode	23
1.2.1 Die schwache Form des Gleichgewichts	23
1.2.2 Das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials	24
1.2.3 Diskretisierung	24
1.2.4 Linearisierung der Grundgleichungen	26
1.2.5 Lösungsverfahren	27
Newton-Raphson Verfahren	27

Bogenlängenverfahren	28
1.3 Unterintegration und gemischte Finite-Element-Formulierungen	29
1.3.1 Das Funktional	29
1.3.2 Methode der angenommenen Verzerrungen	30
1.3.3 Methode der erweiterten Verzerrungen	32
Numerische Aspekte der EAS-Methode	35
2 Finite Elemente für 3D Schalenprobleme	37
2.1 Das 'Solid-Shell' Konzept	37
2.1.1 Kinematik	38
2.2 Versteifungseffekte und Abhilfen	39
2.2.1 Querschub- und Membranversteifung	39
Die Methode der angenommenen Verzerrungen - bilineare Elemente	40
Methode der angenommenen Verzerrungen - biquadratische Elemente	40
2.2.2 Dickenversteifung	41
Quadratische Verschiebungsinterpolation der Verschiebung in Dickenrichtung über die Dicke	42
Erweiterung der Verzerrung in Dickenrichtung mit der EAS-Methode	43
2.2.3 Volumetrische Versteifung	44
Die Methode der erweiterten Verzerrungen	44
Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile	45
2.2.4 Trapezoidal Locking	45
2.2.5 'Solid-Shell' Elemente für große Deformationen	47
2.3 FE-Diskretisierung von 'Solid-Shell' Schalenelementen	49
2.3.1 Geometrieinterpolation	50
Eingabe der Geometriedaten	51
2.3.2 Verschiebungsinterpolation	52
2.3.3 Elementmatrizen	54
Numerische Integration	54
Die tangentielle Steifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor ohne erweiterte Verzerrungen	55
Elementmatrizen für gemischte FE-Formulierung (EAS-Methode)	57
Der Vektor der äußeren Lasten	58

	Elementsteifigkeitsmatrix und -lastvektor für verformungs- abhängige Druckbelastung	59
2.3.4	Bilineare 'Solid-Shell' Elemente	60
	DIS3D Element	61
	ANS3DL Element	61
	ANS3Dq Element	61
	ANS3DEAS Element	62
	EAS3DEAS Element	62
	eas3DEAS Element	63
	EAS3Dq und eas3Dq Element	63
	Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile	64
	Angenommene Verzerrungen für Normalverzerrung in Dicken- richtung	64
2.3.5	Biquadratische 'Solid-Shell' Elemente	64
	DI9K3D Element	65
	MI9K3DL Element	65
	MI9K3Dq Element	65
	MI9K3DEAS Element	66
	Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile	66
	Angenommene Verzerrungen für die Normalverzerrung in Dickenrichtung	66
2.3.6	Tabellarische Zusammenstellung aller 'Solid-Shell' Elementformulierungen	68
2.4	Numerische Beispiele	69
2.4.1	Untersuchung von Eigenwerten und Eigenformen	69
2.4.2	Lineare Probleme - kleine Deformationen	72
	Patchtest	72
	Zylinderschale mit Loch	74
	Kragarm mit verdrehten Elementkanten	76
	Gedrückter Ring	77
2.4.3	Nichtlineare Probleme - Große Verschiebungen	79
	Kragarm mit nahezu inkompressiblem Materialverhalten	79
	Elastoplastisch verformte quadratische Platte	81
	Durch gegenseitige Einzellasten gedrückter Zylinder	86
2.5	Untersuchung numerischer Instabilitäten	89
2.5.1	Analytische Stabilitätsuntersuchung	89

Materialgesetz	90
Problemstellung	91
Eigenformen	92
Ergebnisse	93
2.5.2 Einfache Stabilisierung durch teilweise Rückführung auf Verschiebungsformulierung	97
Methode der angenommenen Verzerrungen	97
Stabilisierungsparameter	98
2.5.3 Numerisches Beispiel Stabilisierung der ANS-Elemente	99
Scheibe unter Druckbelastung - gleichmäßiges Netz	99
Scheibe unter Druckbelastung - verzerrtes Netz	101
Biegeproblem mit stabilisierten Elementen	102
2.5.4 Einfache Stabilisierung durch Ausschalten kritischer Elementmodifikationen	104
2.5.5 Inhomogener Kompressionstest	105
2.5.6 Numerische Instabilitäten bei ANS-Elementen unter Schubbelastung	108
2.5.7 Zusammenfassung	109

3 Verwendung der 'Solid-Shell' Elemente für unilaterale Kontaktprobleme 111

3.1 Normalkontakt	112
3.1.1 Das Penaltyverfahren	112
Flächenkontaktelement	113
3.1.2 Augmented Lagrange Verfahren	117
Das Flächenkontaktelement	118
3.1.3 Kontaktintegration bei lokaler und kontinuierlicher Betrachtungsweise	119
3.1.4 Berechnung der Kontaktspannungen im Kontaktsegment	122
3.1.5 Beschreibung der Kontaktflächen	122
Kontakt zu ebener Fläche	122
Kontakt zu zylindrischer Kontaktfläche	123
3.2 Numerische Beispiele für Kontaktprobleme ohne Reibung	125
3.2.1 Ermittlung von Kontaktspannungen	125
Ebene Kontaktfläche	125
Stückweise ebene Kontaktfläche	128

	Zylindrische Kontaktfläche	129
3.2.2	Freibiegen eines auf zwei zylindrischen Kontaktkörpern gelagerten Bleches	131
3.2.3	Biegen eines Bleches zwischen zwei ebenen Kontaktflächen	134
3.2.4	Tiefziehen eines zylinderförmigen Topfes	138
3.2.5	Tiefziehen eines Vollbleches mit anschließender Eigenfrequenzuntersuchung	143
3.3	Kontakt mit Reibung	146
3.3.1	Haften	146
3.3.2	Gleiten	147
3.3.3	Allgemeine Formulierung	147
3.3.4	Reibung auf ebener Kontaktfläche	149
3.3.5	Reibung auf gekrümmter Kontaktfläche	150
3.3.6	Tiefziehen eines Vollbleches unter Berücksichtigung von Reibungseinflüssen	151
3.4	Numerische Untersuchung von geklebten Verbundblechen	154
3.4.1	Materialeigenschaften der Schichten	155
3.4.2	Eigenwertuntersuchung eines „Bondal [®] -Elementes“	159
3.4.3	Kragarm unter Einzellast	160
3.4.4	Freibiegen eines Verbundbleches	164
3.4.5	Tiefziehen eines geklebten Bleches mit anschließender Eigenfrequenzuntersuchung	171
	Zusammenfassung/Ausblick	178
	Literatur	189
	A Mathematische Grundlagen	190
A.1	Rechenregeln für Vektoren	190
A.2	Rechenregeln für Tensoren	191

Bezeichnungen

A	Fläche eines Randbereichs
A_e	Elementfläche in der Ausgangskonfiguration
a_e	Elementfläche in der aktuellen Konfiguration
α_i	Parameter der erweiterten Verzerrungen
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor mit den Komponenten α_i
\mathbf{b}	Gravitationsvektor
B_0	Körper in der unverformten Konfiguration
∂B_0	Oberfläche des Körpers in der unverformten Konfiguration
\mathbf{B}	zweistufige Matrix, enthält einfache Ableitung des Verzerrungsvektors nach dem Knotenverschiebungsvektor
\mathbf{c}	vierstufiger Stofftensor an orthonormierter Basis
c_{ijkl}	Komponenten des vierstufigen Stofftensors an orthonormierter Basis
\mathbf{C}	vierstufiger Stofftensor an kovarianter Basis
C_{ijkl}	Komponenten des vierstufigen Stofftensor an kovarianter Basis
\mathbf{C}	Stofftensor in Matrixschreibweise
\mathbf{d}	Vektor der diskreten Knotenverschiebungen
\mathbf{D}	Matrix der Ansatzfunktionen der Verschiebungsinterpolation
$\tilde{\mathbf{D}}$	Matrix im Gleichungssystem der EAS-Methode
δ	Sättigungsexponent
δ_i^j	Kronecker-Delta ($= 1$ für $i = j$ bzw. $= 0$ für $i \neq j$)
\mathbf{e}_i	orthonormierte Basisvektoren des globalen kartesischen Koordinatensystems
\mathbf{e}_N	Einheitsnormalenvektor
$\tilde{\mathbf{e}}_i$	orthonormierte Basisvektoren des lokalen kartesischen Koordinatensystems
E	E-Modul
E_1, E_2, E_3	E-Moduln für orthotropes Materialgesetz
\mathbf{E}	Green-Lagrange Verzerrungstensor
E_{ij}	Komponenten des Green-Lagrange Verzerrungstensors
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Green-Lagrange Verzerrungstensor in Vektorschreibweise
$\varepsilon_{N/T}$	Penaltyfaktor für Normal- bzw. Tangentialkontakt
\mathbf{f}	Knotenlastvektor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
F_{ij}	Komponenten des Deformationsgradienten
G	Grundgleichung aus Variationsformulierung
$\mathbf{G}_i/\mathbf{G}^i$	ko-/kontravariante Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}_i/\mathbf{g}^i$	ko-/kontravariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
$g_{N/T}$	Abstandsfunktion in Normalen-/ Tangentialrichtung

h	Elementdicke
H	Verfestigungsmodul
\mathbf{H}	dreistufige Matrix, enthält zweifache Ableitung des Verzerrungsvektors nach dem Knotenverschiebungsvektor
\mathbf{I}	Einheits-Matrix/Einstensor
j_{Ni}	diskrete Abstandswerte in Normalenrichtung an Kontaktpunkten
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix der isoparametrischen Abbildung
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
κ	Kompressionsmodul
κ_s	Schubkorrekturfaktor
$\tilde{\mathbf{L}}$	Matrix im Gleichungssystem der EAS-Methode
λ	Lagrange Multiplikator
λ_{Ni}	diskreter Lagrange Parameter für Normalkontaktkraft
$\boldsymbol{\lambda}$	Vektor der Lagrange Parameter
μ	Schubmodul
$\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$	Schubmoduln für orthotropes Materialgesetz
μ_H	Haftkoeffizient
\mathbf{n}_0	Normalenvektor auf Referenzfläche
\mathbf{n}_c	Normalenvektor auf Kontaktfläche
N_i	Lagrange Ansatzfunktionen
\mathbf{N}	Matrix der Ansatzfunktionen
p_N	Kontaktspannung für Normalkontakt
\mathbf{p}_e	Pivotvektor
\mathbf{P}	Cauchy Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{P}}$	Matrix im Gleichungssystem der EAS-Methode
Π	Gesamtpotential
Π_{int}	inneres Potential
Π_{ext}	äußeres Potential
\mathbf{Q}	Interpolationsmatrix für angenommene Verzerrungsverläufe
Q_i^l	Lineare Interpolationsfunktionen für angenommene Verzerrungsverläufe
Q_i^q	Quadratische Interpolationsfunktionen für angenommene Verzerrungsverläufe
ϑ	Parameter zur Beschreibung des Lastniveaus
r	Restglied der Taylorreihenentwicklung
ρ	materielle Dichte
ρ_0	Dichte des Ausgangsvolumens
\mathbf{S}	zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor
S_{ij}	Komponenten des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors
$\boldsymbol{\sigma}$	zweiter Piola-Kirchhoff Spannungstensor in Vektorschreibweise
t	Zeitvariable

t_0	Oberflächenlast
\mathbf{T}	erster Piola-Kirchhoff Spannungstensor
\mathbf{T}_C	Transformationsmatrix für Materialmatrix
\mathbf{T}_E	Transformationsmatrix für erweiterte Verzerrungen
\mathbf{T}_U	Transformationsmatrix für erweiterte Verschiebungsapproximation
τ_0	Anfangsfließspannung
τ_∞	Sättigungsfließspannung
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor für materiellen Punkt
\mathbf{v}	Schalendirektor
V	Volumen des Kontinuums
W_i	Wichtungsfaktoren der numerischen Gauss Integration
ν	Querkontraktionszahl
$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23},$ $\nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$	Querkontraktionszahlen für orthotropes Materialgesetz
W	Verzerrungsenergiefunktion
\mathbf{x}	Ortsvektor eines Punktes in der Momentankonfiguration
x, y, z bzw. x_1, x_2, x_3	Koordinaten eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration
\mathbf{X}	Ortsvektor eines Punktes in der Referenzkonfiguration
X, Y, Z bzw. X_1, X_2, X_3	Koordinaten eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
ξ, η, ζ bzw. ξ_1, ξ_2, ξ_3	natürliche lokale Koordinaten

Abweichend in Abschnitt 2.2.5 und 2.5.1

\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green Tensor
$\hat{\mathbf{C}}$	zu modifizierten/erweiterten Verzerrungen äquivalenter rechter Cauchy-Green Tensor
λ_i	Eigenwerte von \mathbf{C}
$\hat{\lambda}_i$	Eigenwerte von $\hat{\mathbf{C}}$
\mathbf{n}_i	Eigenvektoren von \mathbf{C}
$\hat{\mathbf{n}}_i$	Eigenvektoren von $\hat{\mathbf{C}}$
\mathbf{R}	Rotationstensor
\mathbf{U}	rechter Strecktensor
$\hat{\mathbf{U}}$	zu modifizierten/erweiterten Verzerrungen äquivalenter Rechtsstrecktensor

Einleitung

Die Verwendung Finiten-Element-Methoden erfolgt für eine Vielzahl von Berechnungsaufgaben im Bereich des Ingenieurwesens. Insbesondere gibt es für FE-Berechnungen mit Schalenelementen vielfältige Einsatzbereiche für strukturelle Probleme, sowohl im Bauingenieurwesen als auch im Maschinenbau. Ein Überblick über die gängigen Schalenmodelle, die im Rahmen von FE-Berechnungen eingesetzt werden, wird in [46] gegeben. Die Behandlung von strukturellen Problemen unter der Berücksichtigung großer Deformationen und nichtlinearen Materialverhaltens erfordert den Einsatz nichtlinearer Finite-Element-Formulierungen. Allgemeine Beschreibungen nichtlinearer Finite-Element-Methoden sind z.B. in den Büchern von Bathe [3], Zienkiewicz/Taylor [87, 88], Belytschko [7] und Wriggers [80] zu finden.

Im allgemeinen werden nach dem sogenannten Degenerationskonzept [27] [18] [43] entwickelte Schalenelemente eingesetzt, die auf klassischen Schalentheorien [51] [85] basieren. Diese erweisen sich für die meisten Schalenprobleme als sehr effizient und einfach in der Handhabung. Die Anwendungsmöglichkeiten dieser Elemente sind allerdings durch das Nichtvorhandensein einer Dickenausdehnung und den Einsatz von Rotationsfreiheitsgraden beschränkt. So ist bedingt durch die Rotationsfreiheitsgrade eine spezielle Formulierung der Materialgesetze notwendig; allgemein formulierte nichtlineare 3D-Materialgesetze, die insbesondere bei Problemen mit großen Deformationen benötigt werden, können nicht ohne weiteres eingesetzt werden. Die Erfassung der Dickenänderung und der Dickenspannung ist ebenfalls nicht möglich, was z.B. bei der Simulation von Blechumformproblemen eine Rolle spielt. Außerdem kann eine Schalenstruktur bei Verwendung der klassischen Schalenelemente nicht mit mehreren Elementen über die Dicke diskretisiert werden, was für geschichtete Schalen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften der einzelnen Schichten von Interesse ist. Auch Kontaktrandbedingungen können nur näherungsweise eingebracht werden, da nur die Mittelfläche diskretisiert wird, und die Geometrie der eigentlichen Schalenoberfläche nicht erfasst wird. In manchen Fällen wird auch eine Kombination mit auf Verschiebungsfreiheitsgraden basierenden Kontinuumselementen erforderlich, auch dies ist nicht ohne weiteres, üblicherweise nur durch den Einsatz spezieller Übergangselemente möglich.

Abhilfe versprechen hier sogenannte Volumen-Schalenelemente, die in Anlehnung an die Arbeiten von Hauptmann [37, 39, 38] in dieser Arbeit durchgängig als 'Solid-Shell' Elemente bezeichnet werden. Erste Entwicklungen in dieser Richtung sind in [55] [64] [67] enthalten. Einen umfassenden Überblick über aktuelle Entwicklungen wird in [76] gegeben. Bei den 'Solid-Shells' handelt es sich um Kontinuumselemen-

te, die ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgrade verwenden. Es erfolgt also nicht nur eine 2D-Diskretisierung einer Schalenstruktur in Form der Vernetzung der Schalenmittelfläche, sondern es erfolgt eine Betrachtung des gesamten Kontinuums d.h. es wird eine vollständige 3D-Diskretisierung durchgeführt. Dabei wird allerdings innerhalb des Volumen-Schalenelementes klar unterschieden zwischen der Dickenrichtung und der Schalenfläche; es erfolgt also eine spezielle Ausrichtung des Elementes, womit ermöglicht wird, dass auf Elementebene sowohl in Dickenrichtung als auch in der Schalenfläche gezielt unterschiedliche Modifikationen durchgeführt bzw. unterschiedliche Ansatzordnungen eingesetzt werden können. Dadurch erhalten die 'Solid-Shell' Elemente ihren schalentypischen Charakter.

Daraus ergibt sich der erste Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit: die Entwicklung von Volumen-Schalenelementen für Probleme großer Deformationen nach dem sogenannten 'Solid-Shell' Konzept. Der Schwerpunkt bei der Elemententwicklung liegt dabei auf Hexaederelementen mit bilinearen und alternativ mit biquadratischen Ansätzen in der Schalenfläche. Außerdem werden gezielte Modifikationen der Verzerrungsanteile auf Elementebene zur Vermeidung diverser Versteifungseffekte eingesetzt. Hier handelt es sich zum einen um Verfahren, die eine Erweiterung der sich aus der Verschiebungsinterpolation ergebenden Verzerrungsansätze ermöglichen, sogenannte gemischte Elementformulierungen, insbesondere die EAS-Methode (enhanced assumed strain method). Zum anderen werden Verfahren eingesetzt, die die Ansatzordnung der Verzerrungsanteile künstlich reduzieren, z.B. reduzierte Integration oder die ANS-Methode (assumed natural strain method). Somit entsteht eine Vielzahl von Elementvarianten, die in numerischen Vergleichsberechnungen getestet und einander gegenübergestellt werden.

Schließlich wird auch das Problem künstlicher Kinematiken, das Auftreten sogenannter Null-Energie-Moden, diskutiert. Die numerischen Instabilitäten sind eine unmittelbare Folge der eben genannten Modifikationen zur Vermeidung der Versteifungseffekte. Es kann allerdings auch festgestellt werden, dass solche numerischen Instabilitäten ausschließlich bei Beanspruchungszuständen auftreten, die versteifungsfrei sind und für die somit genannten Modifikationen nicht erforderlich sind. Deshalb bietet sich als einfache Lösung dieser Problematik an, entsprechende Beanspruchungszustände zu identifizieren und die überflüssigen Elementmodifikationsalgorithmen abzuschalten. Eine solche einfache Vorgehensweise wird ebenfalls vorgestellt und deren Funktionsfähigkeit anhand einfacher Beispiele demonstriert.

Der zweite Schwerpunkt der Arbeit liegt auf geeigneten Kontaktformulierungen, die auf aktuellen Publikationen zur numerischen Kontaktmechanik wie [48] [81] basieren. Die Einführung von Kontaktrandbedingungen soll es ermöglichen, die entwickelten 'Solid-Shell' Elemente zur Simulation von Umformprozessen von einschichtigen Blechen und auch geklebten Verbundblechen einzusetzen. Zur Kontaktüberprüfung werden Geometrieinformationen der Strukturoberflächen benötigt, weshalb sich die 'Solid-Shell' Elemente aufgrund ihrer 3D-Geometrieigenschaften besonders gut für eine Verwendung bei Kontaktproblemen eignen. Für die zu untersuchenden Problemstellungen genügt eine Beschränkung auf unilateralen Kontakt, d.h. es wird nicht der gegenseitige Kontakt der Schalenstruktur untersucht, vielmehr wird der Kontakt gegen starre Kontaktflächen betrachtet. Die Modellierung der Kontaktflächen erfolgt durch zusammengesetzte Ein-

zelflächen, deren Geometrie durch Formfunktionen exakt beschrieben werden kann. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil hoher Effizienz; die Modellierung beliebiger Kontaktflächen ist damit allerdings kaum möglich.

Zur Überprüfung des Kontaktes werden spezielle Kontaktsegmente entwickelt, die in ihrer Knotenzahl der Anzahl der Oberflächenknoten der verwendeten 'Solid-Shells' entsprechen. Es erfolgt somit eine Kontaktprüfung auf Elementebene und nicht knotenweise wie ansonsten oftmals üblich. Die Abprüfung an diskreten Punkten kann an den Elementknoten erfolgen, alternativ aber auch an den Integrationspunkten. Dabei kann die Zahl der Integrationspunkte beliebig erhöht werden, was bei bestimmten Geometrieigenschaften der Kontaktflächen von Vorteil sein kann und zu besseren Ergebnissen führt. Auch das Problem der erforderlichen unterschiedlichen Gewichtung der Knoten bei Elementansätzen höherer Ordnung kann mit Hilfe der Übergangselemente leicht gelöst werden.

Anhand einiger numerischer Beispiele werden die Kontaktformulierungen getestet, wobei in erster Linie verschiedene Beispiele für das Blechumformen untersucht werden. Die Möglichkeit einer Anwendung auch für das Umformen von Verbundblechen ergibt sich aus der Möglichkeit mit den 'Solid-Shell' Elementen auch geschichtete Strukturen zu diskretisieren. Es werden sowohl die beiden Deckbleche als auch die dazwischen liegende Klebeschicht mit jeweils einem 'Solid-Shell' über die Dicke diskretisiert. Dies ermöglicht eine besonders wirklichkeitsnahe Simulation des Verhaltens der geklebten Verbundbleche, die für viele Anwendungen eine bedeutende Rolle spielen, da sie z.B. aufgrund ihrer Dämpfungseigenschaften zu einer Verringerung der Schallemission beitragen. Dementsprechend werden, um Rückschlüsse auf das Schwingungsverhalten der umgeformten Werkstücke führen zu können, neben der Simulation der Umformprozesse auch Eigenwertuntersuchungen durchgeführt.

Insgesamt lässt sich die vorliegende Arbeit in drei Kapitel aufteilen:

Kapitel 1 befasst sich mit den wesentlichen Grundlagen für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Finiten-'Solid-Shell'-Elemente. Dabei werden die notwendigen Grundlagen der Kontinuumsmechanik in *Teil 1* und der Finiten-Element-Methode in *Teil 2* zusammengefasst. Auch die für die betrachteten nichtlinearen Probleme erforderliche Linearisierung und Lösungsprozedur wird erläutert. In *Teil 3* wird auf das zugrundeliegende Funktional, sowie die theoretischen Grundlagen der zur Elementmodifikation angewendeten Verfahren der Unterintegration und der gemischten Elementformulierungen näher eingegangen.

Kapitel 2 behandelt die Entwicklung von Volumen-Schalenelementen nach dem sogenannten 'Solid-Shell' Konzept. Dabei wird in den *Teilen 1&2* auf die Grundlagen wie Kinematik und Versteifungsproblematiken eingegangen, gefolgt von der FE-Diskretisierung und einer Zusammenstellung sämtlicher entwickelter Elementvarianten in *Teil 3*. In *Teil 4* folgen einige numerische Vergleichsberechnungen. Die Problematik numerischer Instabilitäten wird in *Teil 5* diskutiert.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Verwendung der 'Solid-Shells' für unilaterale Kontaktprobleme. In *Teil 1* werden geeignete Kontaktsegmente für Normalkon-

takt ohne Reibung entwickelt, wobei das Penalty und das Augmented Lagrange Verfahren verwendet werden. Die entsprechenden numerischen Beispielrechnungen folgen in *Teil 2*. Durch eine Ergänzung der Kontaktformulierung in *Teil 3* können auch Reibungseinflüsse berücksichtigt werden. Die numerische Untersuchung des Umformprozesses geklebter Verbundbleche folgt abschließend in *Teil 4* mit entsprechenden Beispielen.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, die zur Entwicklung strukturmechanischer Finite-Element-Methoden benötigt werden, zusammengestellt werden. Eine detaillierte Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik wird z.B. in [9] gegeben.

1.1.1 Die Kinematik

Die Lage eines materiellen Teilchens in der Ausgangslage (Zeitpunkt $t = 0$), die auch als Referenzkonfiguration bezeichnet wird, wird mit Hilfe eines Ortsvektors

$$\mathbf{X} = [X \ Y \ Z]^T \tag{1.1}$$

beschrieben, der sich auf ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem (siehe Abb. 1.1) bezieht. Die Verschiebung \mathbf{u} eines Teilchens wird in Lagrangschen Koordinaten

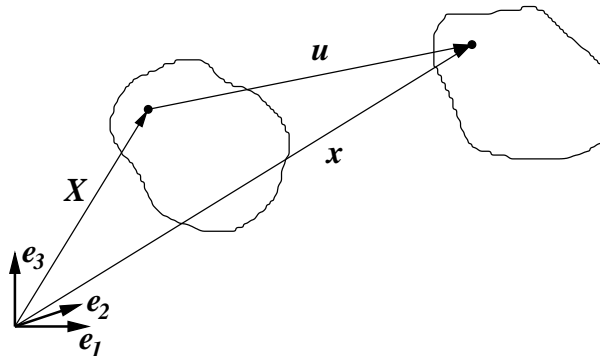


Abbildung 1.1: Verschiebung eines materiellen Teilchens im dreidimensionalen Raum

dargestellt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) , \quad (1.2)$$

abhängig vom Ortsvektor \mathbf{X} des betrachteten materiellen Punktes in der Ausgangslage und der Zeit t . Dabei ist die Zeit t hier nicht als reale Zeit zu verstehen. Es werden vielmehr ausschließlich statische Probleme betrachtet. Die Variable t dient dazu, die in Abständen Δt aufeinanderfolgenden Belastungszustände zu identifizieren.

Die Lage eines Körperpunktes für den momentanen Verformungszustand (Momentan-konfiguration) lässt sich mit dem Ortsvektor \mathbf{X} und dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} beschreiben als:

$$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) . \quad (1.3)$$

Zur Beschreibung der Deformation des Körpers wird ein Verzerrungsmaß in Form eines Tensors zweiter Stufe:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u} \quad (1.4)$$

eingeführt, der als Deformationsgradient bezeichnet wird.

1.1.2 Das Gleichgewicht

Auf die Herleitung der Gleichgewichtsbedingung mit Hilfe des Impulssatzes soll an dieser Stelle verzichtet werden. Mit dem Cauchy Spannungstensor \mathbf{P} und dem Volumenkraftvektor $\rho \mathbf{b}$ (Dichte ρ und Gravitationsvektor \mathbf{b}) ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung, die in jedem Punkt des Kontinuums erfüllt sein muss, als

$$\text{div } \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (1.5)$$

Da ausschließlich statische Probleme betrachtet werden, bleibt ein Trägheitsterm unberücksichtigt. Der Cauchy Spannungstensor beschreibt den momentanen Spannungszustand bezüglich der momentanen Konfiguration und lässt sich somit als einziges Spannungsmaß physikalisch als 'reale' Spannungen interpretieren. Für eine Betrachtung bezüglich der Referenzkonfiguration wird das Cauchy Spannungsmaß durch den ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{T} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \frac{\rho_0}{\rho} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (1.6)$$

ersetzt, der entsprechend den momentanen Spannungszustand bezüglich der Referenzkonfiguration beschreibt. Die Gleichgewichtsbedingung (1.5) lässt sich dann schreiben als

$$\text{div} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F} \mathbf{T} \right) + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

und mit (A.18) als

$$\text{Div } \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (1.8)$$

Der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor ist im allgemeinen unsymmetrisch und wird deshalb nochmals ersetzt durch den symmetrischen zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} . \quad (1.9)$$

Wird (1.9) schließlich eingesetzt in (1.8), lässt sich die Gleichgewichtsbedingung mit Hilfe des zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors darstellen als:

$$\text{Div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (1.10)$$

Der Cauchy Spannungstensor lässt sich bei Bedarf mit Hilfe des Deformationsgradienten aus dem zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor berechnen:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T . \quad (1.11)$$

Zusätzlich sind vorhandene statische Randbedingungen zu berücksichtigen, d.h. gegeben ist eine Oberflächenlast \mathbf{t}_0 auf einer Randfläche A_R , deren Orientierung in der Referenzkonfiguration durch einen Normalenvektor \mathbf{n}_0 beschrieben wird. Zur Formulierung der Randbedingung bezüglich der Referenzkonfiguration wird wiederum der erste bzw. zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor verwendet:

$$\mathbf{T} \mathbf{n}_0 = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \quad (1.12)$$

auf der Randfläche A_R .

1.1.3 Verzerrungen und Spannungen

Verzerrungs- und Spannungsmaß für Probleme großer Deformationen

Ein zur Beschreibung geometrisch nichtlinearer Probleme geeignetes Verzerrungsmaß ist der hier verwendete Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{E} , der sich mit Hilfe des in (1.4) dargestellten Deformationsgradienten \mathbf{F} berechnen lässt:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) , \quad (1.13)$$

mit dem Einheitstensor \mathbf{I} , der sich mit der Metrik der unverformten Konfiguration als

$$G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (1.14)$$

darstellen lässt. Als Spannungsmaß wird der zum Green-Lagrange Verzerrungstensor energetisch konjugierte zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (1.15)$$

verwendet. Der zweite Piola Kirchhoff Spannungstensor ergibt sich mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} und der Cauchy Spannungen \mathbf{P} , die sich als einziges Spannungsmaß als 'wirkliche' Spannungen, d.h. Kraft pro Flächeneinheit in der aktuellen Konfiguration, identifizieren lassen.

Konvektive Koordinaten

Die Schalengeometrie wird anhand eines globalen kartesischen Koordinatensystems mit den orthonormalen Basisvektoren \mathbf{e}_i beschrieben. Dabei wird zwischen der unverformten Konfiguration (Referenzkonfiguration) und der verformten Konfiguration (Momentankonfiguration) unterschieden. Die Lage eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration wird durch den Ortsvektor \mathbf{X} und in der Momentankonfiguration durch den Ortsvektor \mathbf{x} beschrieben.

Zur Beschreibung der Elementgeometrie wird ein lokales konvektives Koordinatensystem verwendet. Für dieses krummlinige Koordinatensystem können für jeden Punkt des Elementes die im Allgemeinen schiefwinkligen Basisvektoren angegeben werden. Außerdem ist zwischen kovarianten (Index unten) und kontravarianten (Index oben) Basisvektoren zu unterscheiden, die über die Bedingung

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (1.16)$$

zusammenhängen. Die kovarianten konvektiven Basisvektoren sind tangential zu den krummlinigen natürlichen Koordinaten im betrachteten Punkt und ergeben sich in der unverformten Konfiguration als

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_i} \quad (1.17)$$

und in der verformten Konfiguration als

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i}. \quad (1.18)$$

Zur Vereinfachung wird an dieser Stelle die Schreibweise $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$ und $\xi_3 = \zeta$ eingeführt. Die Komponenten der kovarianten Basisvektoren können direkt aus der Jacobi-Matrix der isoparametrischen Abbildung entnommen werden, in der die Vektoren \mathbf{G}_i zeilenweise angeordnet sind:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \mathbf{G}_1 & - \\ - & \mathbf{G}_2 & - \\ - & \mathbf{G}_3 & - \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Somit lässt sich (1.16) unter Verwendung der Jacobi-Matrix \mathbf{J} und der Matrix der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^{kontra} wie folgt schreiben:

$$\mathbf{J} \mathbf{G}^{kontra} = \mathbf{I} , \quad (1.20)$$

woraus sich dann die kontravarianten Basisvektoren berechnen lassen:

$$\mathbf{G}^{kontra} = \left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \mathbf{G}^1 & \mathbf{G}^2 & \mathbf{G}^3 \\ | & | & | \end{array} \right] = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{J}^{-1} , \quad (1.21)$$

die somit in spaltenweiser Anordnung in der inversen Jacobi-Matrix zu finden sind.

Der Green-Lagrange Verzerrungstensor an einer kontravarianten Basis

Der Deformationsgradient in globalen kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (1.22)$$

wird zur Darstellung des Green-Lagrange Verzerrungstensors an einer kontravarianten Basis auf eine Basis $\mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^l$ transformiert:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}^k) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{G}^l) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^l . \quad (1.23)$$

Das Einsetzen der Basisvektoren und entsprechendes Umformen führen dann auf folgende Darstellung für den Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i , \quad (1.24)$$

bzw. den transponierten Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i . \quad (1.25)$$

Durch Einsetzen von (1.24) und (1.25) in Glg. (1.13) und Darstellung des Einheitstensors \mathbf{I} mit der Metrik der unverformten Konfiguration (siehe Glg. (1.14)) ergibt sich der Verzerrungstensor wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i)) - G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \\ &= E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j , \end{aligned} \quad (1.26)$$

mit den kovarianten Komponenten E_{ij} . Wird die Beziehung

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} = \mathbf{G}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \quad (1.27)$$

ausgenutzt, lassen sich die kovarianten Komponenten E_{ij} folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{G}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \mathbf{G}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Auf die kovarianten Verzerrungskomponenten werden die später vorgestellten Modifikationen mit Hilfe der ANS- und der EAS-Methode angewendet.

Spannungs- und Stofftensor an einer kovarianten Basis

Der zum Green-Lagrange Verzerrungstensor energetisch konjugierte zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} wird dann sinnvollerweise in einem entsprechenden kovarianten Basissystem dargestellt:

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (1.29)$$

Die konvektiven Basisvektoren müssen dann bei der Auswertung des Potentials nicht mehr berücksichtigt werden. Dementsprechend wird auch der Stofftensor \mathbf{C} an einer kovarianten Basis dargestellt:

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (1.30)$$

Somit lässt sich der Zusammenhang zwischen den kovarianten Komponenten des Verzerrungstensors und den kontravarianten Komponenten des Spannungstensors darstellen als:

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl}. \quad (1.31)$$

Die kontravarianten Komponenten des Stofftensors C^{ijkl} lassen sich aus den Komponenten c_{mnop} des auf eine orthonormierte Basis \mathbf{e}_i bezogenen Stofftensors mit der Transformationsvorschrift

$$C^{ijkl} = (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{G}^i) (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{G}^j) (\mathbf{e}_o \cdot \mathbf{G}^k) (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{G}^l) c_{mnop} \quad (1.32)$$

berechnen.

Anmerkung zur programmiertechnischen Umsetzung

Zu einer einfacheren programmiertechnischen Umsetzung bietet sich die Anordnung der Komponenten des Verzerrungs- und des Spannungstensors in Spaltenmatrizen an. Diese Anordnung ergibt sich aus dem zur Aufstellung der inneren Energie benötigten inneren Produkt der Tensoren \mathbf{E} und \mathbf{S} , das dann formal als Matrizenmultiplikation dargestellt werden kann:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.33)$$

Daraus ergibt sich die folgende, insbesondere für die betrachteten 'Solid-Shell' Elemente gewählte, Anordnung der Komponenten in den Spaltenmatrizen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[E_{11} \quad E_{22} \quad 2E_{12} \quad E_{33} \quad 2E_{23} \quad 2E_{31} \right]^T \quad (1.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12} \quad S_{33} \quad S_{23} \quad S_{31} \right]^T . \quad (1.35)$$

Die Komponenten des vierstufigen Materialtensors lassen sich in einer Matrix \boldsymbol{C} anordnen:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C^{1111} & C^{1122} & C^{1112} & C^{1133} & C^{1123} & C^{1131} \\ C^{1122} & C^{2222} & C^{2212} & C^{2233} & C^{2223} & C^{2231} \\ C^{1112} & C^{2212} & C^{1212} & C^{1233} & C^{1223} & C^{1231} \\ C^{1133} & C^{2233} & C^{1233} & C^{3333} & C^{3323} & C^{3331} \\ C^{1123} & C^{2223} & C^{1223} & C^{3323} & C^{2323} & C^{2331} \\ C^{1131} & C^{2231} & C^{1231} & C^{3331} & C^{2331} & C^{3131} \end{bmatrix} , \quad (1.36)$$

wobei sich durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Spannungs- und Verzerrungstensors

$$C^{ijkl} = C^{ijlk} = C^{jikl} = C^{jilk} \quad (1.37)$$

und der Vertauschbarkeit der Ableitungen

$$C^{ijkl} = C^{klij} \quad (1.38)$$

die Anzahl der 81 Komponenten des Materialtensors auf 21 reduziert. Der in Glg. (1.31) beschriebene Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen lässt sich somit als Matrizenprodukt

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.39)$$

darstellen.

1.1.4 Das Materialgesetz

Das Materialgesetz stellt den Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{E} \quad (1.40)$$

her. Im linear elastischen Fall sind die Komponenten von \boldsymbol{C} konstant und lassen sich direkt aus den Materialparametern berechnen. Im Fall der nichtlinearen Elastizität bzw. Elastoplastizität entspricht \boldsymbol{C} einem tangentiellen Stofftensor, der für jeden Iterationsschritt innerhalb der nichtlinearen Lösungsprozedur neu berechnet werden muss.

Linear-elastisches orthotropes Material

Bei orthotropen Materialien handelt es sich um den Spezialfall eines anisotropen Materialgesetzes. Es wird hier unterschieden zwischen drei orthogonalen Materialrichtungen, die unterschiedliche Materialeigenschaften aufweisen. Zur Beschreibung des linear-elastischen orthotropen Materials werden insgesamt neun unabhängige Parameter benötigt. Es sind dies die E-Moduln E_1, E_2, E_3 , die Querkontraktionszahlen $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{23}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{31}$ und die Schubmoduln $\mu_{12}, \mu_{23}, \mu_{31}$, wobei die Querkontraktionszahlen über die E-Moduln zusammenhängen:

$$\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12} = n_1 \nu_{12} , \quad (1.41)$$

$$\nu_{32} = \frac{E_2}{E_3} \nu_{23} = n_2 \nu_{23} , \quad (1.42)$$

$$\nu_{13} = \frac{E_3}{E_1} \nu_{31} = n_3 \nu_{31} . \quad (1.43)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Darstellung des Materialtensors wird ein weiterer Parameter n_4 eingeführt:

$$n_4 = 1 - n_1 \nu_{12}^2 - n_2 \nu_{23}^2 - n_3 \nu_{31}^2 - 2 \nu_{12} \nu_{23} \nu_{31} . \quad (1.44)$$

Somit ergibt sich der Materialtensor

$$\tilde{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{(1-n_2\nu_{23}^2)E_1}{n_4} & \frac{(\nu_{12}+n_2n_3\nu_{23}\nu_{31})E_1}{n_4} & 0 & \frac{(n_3\nu_{31}+\nu_{12}\nu_{23})E_1}{n_4} & 0 & 0 \\ & \frac{(1-n_3\nu_{31}^2)E_2}{n_4} & 0 & \frac{(\nu_{23}+n_1n_3\nu_{12}\nu_{31})E_2}{n_4} & 0 & 0 \\ & & \mu_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{symm.} & & \frac{(1-n_1\nu_{12}^2)E_3}{n_4} & 0 & 0 \\ & & & & \mu_{23} & 0 \\ & & & & & \mu_{31} \end{bmatrix} , \quad (1.45)$$

der analog zu Glg. (1.36) als Matrix dargestellt wird.

Linear-elastisches isotropes Material

Ein Spezialfall des orthotropen Materials ist das isotrope linear-elastische Materialgesetz. Hier sind die Materialeigenschaften in alle Richtungen gleich, und die Anzahl unabhängiger Materialparameter reduziert sich auf zwei, den E-Modul E und die Quer-

kontraktionszahl ν . Die Materialmatrix aus Glg. (1.45) stellt sich dann wie folgt dar:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \lambda - 2\mu & \lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda - 2\mu & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & \lambda - 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_s \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_s \mu \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

mit den sogenannten Lamé-Konstanten λ und μ , die aus E-Modul und Querkontraktionszahl berechnet werden:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.47)$$

Bei κ_s handelt es sich um den sogenannten Schubkorrekturfaktor. Aus der gewählten Kinematik ergibt sich für die Querschubverzerrungen ein linearer Verlauf über die Schalendicke. Gefordert wäre aber zumindest ein quadratischer Verlauf, um die Spannungsrandbedingungen für die Querschubspannungen zu erfüllen, die an der Schalenober- und -unterseite gleich Null sein sollten. Um diese Abweichung im Verlauf der Querschubverzerrungen auszugleichen, wird im Allgemeinen $\kappa_s = \frac{5}{6}$ vorgeschlagen.

Nichtlineare Materialgesetze

Für die in dieser Arbeit in erster Linie betrachteten großen Deformationen werden im Allgemeinen nichtlinear elastische und elastoplastische Materialgesetze benötigt. Der nichtlinear elastische Bereich wird durch eine Verzerrungsenergiefunktion W beschrieben, deren zweite partielle Ableitung nach dem Green-Lagrangian Verzerrungstensor \mathbf{E} auf den vierstufige Materialtensor \mathbf{C} führt:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}^2}. \quad (1.48)$$

Eine ausführlichere Beschreibung der im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Materialalgorithmen ist in [25] bzw. in [40] zu finden. Es werden dabei ausschließlich dreidimensionale Materialgesetze verwendet, die für die Volumen-Schalenelemente problemlos eingesetzt werden können. Die benötigten zweiten Piola-Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die Materialmatrix \mathbf{C} werden in den in [25] beschriebenen Unterprogrammen erzeugt, wobei die Berechnung aus dem zu übergebenden Deformationsgradienten \mathbf{F} erfolgt.

Auch für elastoplastische Materialgesetze werden entsprechende Algorithmen in [25] und [40] beschrieben. Dabei erfolgt eine Berechnung eines elastischen Prädiktors aus der Verzerrungsenergiefunktion mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} . Wird eine definierte Fließbedingung erfüllt, erfolgt die Berechnung eines entsprechenden plastischen Korrektors. Außerdem wird zur korrekten Erfassung der Belastungsgeschichte der Deformationsgradient des vorigen Lastschrittes benötigt, d.h. der Deformationsgradient muss an jedem Integrationspunkt und für jeden Iterationsschritt abgespeichert werden.

Desweiteren ist für die zur Vermeidung der in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen volumetrischen Versteifung eingesetzte selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile eine Aufspaltung von Spannungs- und Stofftensor in die volumetrischen und deviatorischen Anteile erforderlich. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Materialgesetze lassen alle eine solche getrennte Berechnung der volumetrischen und deviatorischen Anteile zu. Es erfolgt also jeweils die Übergabe eines deviatorischen Spannungs-/Stofftensors und eines volumetrischen Spannungs-/Stofftensors.

Transformation des Stofftensors

Um die gewünschten kontravarianten Komponenten der Materialmatrix \mathbf{C} zu erhalten ist eine Transformation entsprechend Glg. (1.32) erforderlich. Diese Transformation kann für die Matrixdarstellung vereinfacht mit Hilfe einer Transformationsmatrix \mathbf{T}_c dargestellt werden:

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}_c^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{T}_c, \quad (1.49)$$

mit

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{22}^2 & t_{11}t_{12} & t_{33}^2 & t_{11}t_{13} & t_{12}t_{13} \\ t_{21}^2 & t_{22}^2 & t_{21}t_{22} & t_{23}^2 & t_{21}t_{23} & t_{22}t_{23} \\ 2t_{11}t_{21} & 2t_{12}t_{22} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} & 2t_{13}t_{23} & t_{11}t_{23} + t_{13}t_{21} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} \\ t_{31}^2 & t_{32}^2 & t_{31}t_{32} & t_{33}^2 & t_{31}t_{33} & t_{32}t_{33} \\ 2t_{11}t_{31} & 2t_{12}t_{32} & t_{11}t_{32} + t_{12}t_{31} & 2t_{13}t_{33} & t_{11}t_{33} + t_{13}t_{31} & t_{12}t_{33} + t_{13}t_{32} \\ 2t_{21}t_{31} & 2t_{22}t_{32} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} & 2t_{23}t_{33} & t_{21}t_{33} + t_{23}t_{31} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

und den Koeffizienten

$$t_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{G}^k, \quad (1.51)$$

die aus den kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^k und den orthonormierten Basisvektoren \mathbf{e}_i des globalen kartesischen Koordinatensystems berechnet werden. Alternativ können auch die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_i$ eines lokalen kartesischen Koordinatensystems eingesetzt werden, beispielsweise muss bei der Verwendung eines orthotropen Materials eine Transformation auf ein lokales kartesisches Koordinatensystem durchgeführt werden, das entsprechend der Materialrichtung des orthotropen Materials ausgerichtet ist.

1.2 Grundlagen der Finite-Element-Methode

1.2.1 Die schwache Form des Gleichgewichts

Einen Zugang zu einer Finite-Element-Formulierung erhält man über die sogenannte schwache Form des Gleichgewichts. Dabei wird die Gleichgewichtsbedingung aus Glg. (1.10) mit sogenannten Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und anschließend über das betrachtete Gebiet B_0 bezüglich der Referenzkonfiguration integriert:

$$\int_{B_0} \delta \mathbf{u} \cdot (\text{Div}(\mathbf{F} \mathbf{S}) + \rho_0 \mathbf{b}) \, dV = 0 . \quad (1.52)$$

Die Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ können als virtuelle Verschiebungen betrachtet werden, weshalb (1.52) auch als das Prinzip der virtuellen Verschiebungen identifiziert werden kann. Zulässig sind alle Funktionen, die die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Die Verwendung der Rechenregel (A.20) und des Gaussischen Integralsatzes (A.21) führt auf

$$\int_{B_0} (-\mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \text{Grad} \, \delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}) \, dV + \int_{\partial B_0} (\mathbf{F} \mathbf{S})^T \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_0 \, dA = 0 . \quad (1.53)$$

Mit

$$\text{Grad} \, \delta \mathbf{u} = \delta \text{Grad} \, \mathbf{u} = \delta (\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \delta \mathbf{F} \quad (1.54)$$

ergibt sich bei Ausnutzung der Symmetrie von \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F} &= \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) = \\ &= \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} . \end{aligned} \quad (1.55)$$

Werden schließlich noch die Randspannungen entsprechend Glg. (1.12) eingesetzt, lässt sich die schwache Form als

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{B_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 \quad (1.56)$$

darstellen. Wesentliche Eigenschaft der schwachen Form ist, dass Randbedingungen, Kinematik und Materialgesetz exakt erfüllt werden, während die Gleichgewichtsbedingung nur im integralen Mittel erfüllt wird.

1.2.2 Das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials

Einen weiteren Zugang zu einer Finiten-Element-Formulierung bietet bei einer Beschränkung auf konservative Problemstellungen das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials. Das Gesamtpotential einer Struktur setzt sich aus dem inneren und äußeren Potential zusammen:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} , \quad (1.57)$$

wobei sich das innere Potential Π_{int} aus dem Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{E} und dem zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} berechnet:

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_{B_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \, dV . \quad (1.58)$$

Das äußere Potential Π_{ext} setzt sich aus den Arbeitsanteilen der Volumen- und Oberflächenkräfte zusammen:

$$\Pi_{ext} = - \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA . \quad (1.59)$$

Mit dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials, das besagt, dass das Gesamtpotential eines konservativen mechanischen Systems im Hinblick auf eine virtuelle Potentialänderung einen stationären Wert annimmt, folgt daraus das Variationsproblem

$$\delta \Pi = \int_{B_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV + \delta \Pi_{ext} = 0 . \quad (1.60)$$

Diese Darstellung entspricht der schwachen Form des Gleichgewichts (1.56).

1.2.3 Diskretisierung

Grundlage der Finite-Element-Methode ist die Diskretisierung einer Struktur bzw. eines Bereiches B_0 mit Knoten und Elementen. Somit wird als Lösung der Differentialgleichung nicht mehr ein kontinuierliches Verschiebungsfeld \mathbf{u} gesucht, sondern diskrete Verschiebungsvektoren \mathbf{d}_k an diskreten Knoten mit den Ortsvektoren \mathbf{X}_k . Mehrere Knoten werden zu Teilgebieten, den sogenannten finiten Elementen, zusammengefasst. Die Teilgebiete dürfen sich nicht überlappen. Alle Teilgebiete gemeinsam bilden näherungsweise das Gesamtgebiet ab.

Die schwache Form (1.56) lässt sich nunmehr mit der im Allgemeinen notwendigen Linearisierung in ein lineares Gleichungssystem überführen. Somit kann aus mathematischer Sicht sehr einfach eine Lösung für das Problem bestimmt werden, wohingegen

das Ermitteln einer geschlossenen Lösung der Differentialgleichung im Allgemeinen nicht möglich ist.

Um die Geometriedaten bzw. die Verschiebung eines beliebigen Punktes der Struktur zu erfassen, ist eine Interpolation der diskreten Knotenwerte erforderlich. Diese Interpolation erfolgt auf der Ebene der finiten Elemente, wobei das sogenannte isoparametrische Konzept angewendet wird, das die Verwendung derselben Interpolationsordnung sowohl für die Geometrie- als auch für die Verschiebungsapproximation vorsieht. Werden auf Elementebene Ansatzfunktionen N_i und ein lokales Koordinatensystem (ξ, η, ζ) eingeführt, dann gilt bei n Knoten pro Element

$$\mathbf{X}_e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_i, \quad (1.61)$$

für die Koordinaten \mathbf{X}_e bzw.

$$\mathbf{u}_e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{d}_i \quad (1.62)$$

für die Verschiebungen \mathbf{u}_e innerhalb eines Elemente in Abhängigkeit von ξ, η und ζ . Die Ansatzfunktionen müssen der Voraussetzung genügen, dass sie am Ort des zugehörigen Knotens den Wert 1 annehmen, also $N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = 1$ für $k = i$, bzw. den Wert 0 an allen anderen Knoten, d.h. $N_i(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) = 0$ für $k \neq i$.

Die schwache Form (1.56) in diskreter Schreibweise, d.h. das kontinuierliche Verschiebungsfeld wird durch den Ansatz mit dem Vektor \mathbf{d} der diskreten Knotenverschiebungen ersetzt, nimmt somit folgende Gestalt an:

$$G(\mathbf{d}, \delta \mathbf{d}) = \delta \mathbf{d} \int_{B_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \delta \mathbf{d} \mathbf{f} = 0. \quad (1.63)$$

Voraussetzung ist die Beschränkung auf lineare Problemstellungen, die Linearisierung für nichtlineare Probleme wird im folgenden Abschnitt erläutert. Die Volumen- und Oberflächenlasten werden als diskrete Knotenlasten gemeinsam in einem Knotenlastvektor \mathbf{f} angeordnet, $\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}}$ ist die Ableitung des Verzerrungsvektors nach den diskreten Knotenverschiebungen. Die Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung, das besagt, dass (1.63) auch für $\delta \mathbf{d} \neq 0$ gelten muss, führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\int_{B_0} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}}^T \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}} dV}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} = \left(\begin{matrix} nel \\ \mathbf{A} \\ e=1 \end{matrix} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbb{C} \mathbf{B} dV^e \right) \mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (1.64)$$

mit den entsprechend der Elementzahl nel Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^e , die durch elementweises Integrieren berechnet werden und zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} zusammengefügt werden, dargestellt durch den Operator \mathbf{A} .

1.2.4 Linearisierung der Grundgleichungen

Aus dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials ergeben sich die zu lösenden Grundgleichungen, die vom Verschiebungsvektor \mathbf{u} und dessen Variation $\delta\mathbf{u}$ abhängen. Die Einführung der Diskretisierung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d})$, d.h. dass die kontinuierlichen Verschiebungen \mathbf{u} Funktion der diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d} sind, führt für die schwache Form (1.60) auf

$$G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}) = \delta\Pi(\mathbf{d}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}}\delta\mathbf{d} = 0 . \quad (1.65)$$

Sollen sogenannte gemischte Finite Elemente formuliert werden, z.B. bei Anwendung der Methode der erweiterten Verzerrungen, wird der FE-Formulierung ein gemischtes Funktional zugrunde gelegt. Die Abhängigkeit dieses Funktionals beschränkt sich nicht auf die diskreten Knotenverschiebungen, im Fall der erweiterten Verzerrungen beispielsweise werden zusätzlich unbekannte Parameter α_i eingeführt, die in einem Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ zusammengefasst sind. Gesucht wird wiederum ein stationärer Wert des Funktionals $\Pi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$ mit Hilfe der Variation $\delta\Pi = 0$. Die Grundgleichungen hängen somit auch von $\boldsymbol{\alpha}$ und dessen Variation $\delta\boldsymbol{\alpha}$ ab:

$$G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\alpha}) = \delta\Pi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{d}}\delta\mathbf{d} + \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha} = 0 . \quad (1.66)$$

Bei nichtlinearen Problemen ist eine direkte Lösung der Grundgleichungen nicht möglich. Zur Einbettung in eine iterative Lösungsprozedur wie z.B. dem Newton-Raphson Verfahren ist eine Linearisierung der Grundgleichungen erforderlich. Hierzu erfolgt eine Taylor-Reihen Entwicklung ausgehend von den Lösungsvektoren der momentanen Konfiguration $\bar{\mathbf{d}}$ und $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\alpha}) &= G(\bar{\mathbf{d}}, \delta\mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \delta\boldsymbol{\alpha}) + DG(\bar{\mathbf{d}}, \delta\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}, \delta\boldsymbol{\alpha}) \Delta\mathbf{d} \\ &+ DG(\mathbf{d}, \delta\mathbf{d}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \delta\boldsymbol{\alpha}) \Delta\boldsymbol{\alpha} + r(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 , \end{aligned} \quad (1.67)$$

wobei das Restglied der Reihenentwicklung $r(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$ vernachlässigt wird. Die Anwendung der Gateaux Richtungsableitungen (in (1.67) symbolisiert durch den Operator D) und Einsetzen von (1.66) (die partiellen Ableitungen nach \mathbf{d} und $\boldsymbol{\alpha}$ werden durch $_{,d}$ und $_{,\alpha}$ beschrieben) führt auf:

$$\delta\mathbf{d} \Pi_{,d} + \delta\boldsymbol{\alpha} \Pi_{,\alpha} + (\delta\mathbf{d} \Pi_{,dd} + \delta\boldsymbol{\alpha} \Pi_{,\alpha d}) \Delta\mathbf{d} + (\delta\mathbf{d} \Pi_{,d\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha} \Pi_{,\alpha\alpha}) \Delta\boldsymbol{\alpha} = 0 . \quad (1.68)$$

Nach Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung, das besagt, dass (1.68) auch für $\delta\mathbf{d} \neq 0$ und $\delta\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ gelten muss, führt ein Koeffizientenvergleich schließlich auf zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \Pi_{,dd} \Delta\mathbf{d} + \Pi_{,d\alpha} \Delta\boldsymbol{\alpha} &= -\Pi_{,d} \\ \Pi_{,\alpha d} \Delta\mathbf{d} + \Pi_{,\alpha\alpha} \Delta\boldsymbol{\alpha} &= -\Pi_{,\alpha} , \end{aligned} \quad (1.69)$$

mit den zwei unbekanntem Lösungsvektoren $\Delta \mathbf{d}$ und $\Delta \boldsymbol{\alpha}$. Das in Glg. (1.69) enthaltene Potential Π setzt sich aus der inneren Energie Π_{int} und dem Potential der äußeren Kräfte Π_{ext} zusammen. Das Potential der äußeren Kräfte Π_{ext} hängt bei vorhandener verformungsabhängiger Belastung vom Verschiebungsvektor \mathbf{d} ab, ist aber unabhängig von $\boldsymbol{\alpha}$. Somit lässt sich Glg. (1.69) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} (\Pi_{int} + \Pi_{ext})_{,dd} \Delta \mathbf{d} + (\Pi_{int})_{,d\boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} &= -(\Pi_{int} + \Pi_{ext})_{,d} \\ (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}d} \Delta \mathbf{d} + (\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} \Delta \boldsymbol{\alpha} &= -(\Pi_{int})_{,\boldsymbol{\alpha}} . \end{aligned} \quad (1.70)$$

Unter der Voraussetzung, dass keine verformungsabhängigen Lasten auftreten, d.h. $(\Pi_{ext})_{,dd} = 0$, und außerdem keine erweiterten Verzerrungen verwendet werden, lässt sich (1.70) auf

$$(\Pi_{int})_{,dd} \Delta \mathbf{d} = -(\Pi_{int} + \Pi_{ext})_{,d} \quad (1.71)$$

reduzieren.

1.2.5 Lösungsverfahren

Newton-Raphson Verfahren

Gegeben ist ein Gleichgewichtszustand

$$\delta \Pi_{int}(\bar{\mathbf{u}}) + \delta \Pi_{ext}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\vartheta}) = 0 , \quad (1.72)$$

mit dem aktuellen Verschiebungszustand \bar{u} und Lastniveau $\bar{\vartheta}$ (am Anfang $\bar{u} = 0$ und $\bar{\vartheta} = 0$). Gesucht wird das Verschiebungsinkrement Δu für ein neues Lastniveau ϑ^* . Eine Lösung für Δu wird iterativ mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens ermittelt. Aus dem linearisierten Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \left(D\delta \Pi_{int}(\bar{u} + \Delta u_{i-1}) + D\delta \Pi_{ext}(\bar{u} + \Delta u_{i-1}, \vartheta^*) \right) \Delta u_i = \\ -\delta \Pi_{int}(\bar{u} + \Delta u_{i-1}) - \delta \Pi_{ext}(\bar{u} + \Delta u_{i-1}, \vartheta^*) \end{aligned} \quad (1.73)$$

wird mit Hilfe eines Gleichungslösers eine Lösung für das Verschiebungsinkrement Δu_i für den i -ten Iterationsschritt bestimmt. Die Linearisierung wird mit dem neuen Verschiebungszustand wiederholt und eine neues Verschiebungsinkrement Δu_{i+1} wird ermittelt. Diese iterative Lösungsprozedur wird so lange fortgesetzt, bis näherungsweise ein neuer Gleichgewichtszustand erreicht wird:

$$\left| \delta \Pi_{int}(\bar{u} + \Delta u_i) + \delta \Pi_{ext}(\bar{u} + \Delta u_i, \vartheta^*) \right| \leq tol . \quad (1.74)$$

Diese Vorgehensweise wird in Abb. 1.2 für den eindimensionalen Fall anschaulich dargestellt.

Alternativ kann anstelle einer Steuerung über das Lastniveau auch eine Verschiebungssteuerung vorgenommen werden. In diesem Fall werden einzelne Komponenten des Verschiebungsvektors vorgegeben. Ebenso ist es natürlich eine kombinierte Steuerung über statische und geometrische Randbedingungen möglich.

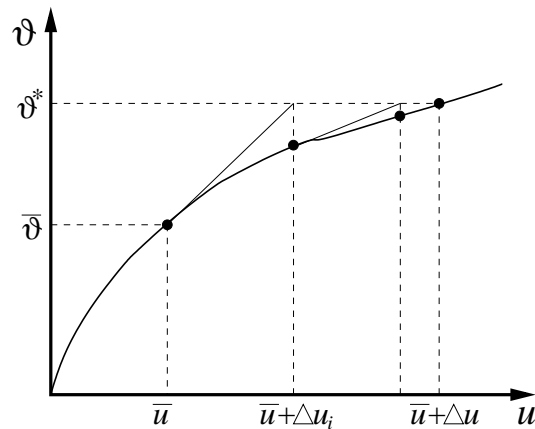


Abbildung 1.2: Grafische Darstellung der iterativen Lösungsprozedur mit dem Newton-Raphson Verfahren

Bogenlängenverfahren

Treten bei einem Problem singuläre Lösungspunkte auf, so ist bei einem lastgesteuerten Problem die iterative Bestimmung eines Gleichgewichtszustandes nicht ohne weiteres möglich. Dies ist z.B. beim Erreichen der Fließgrenze oder bei der Berechnung von Stabilitätsproblemen wie z.B. dem 'Durchschlagen' einer Struktur der Fall. Eventuell kann die Verschiebungssteuerung Abhilfe schaffen, ansonsten müssen sogenannte Pfadverfolgungsalgorithmen wie z.B. das Bogenlängenverfahren eingesetzt werden. Dabei wird der Parameter ϑ^* , der das Lastniveau des gesuchten Lösungspunktes beschreibt, als zusätzliche Unbekannte betrachtet und über eine weitere zu formulierende Nebenbedingung in das Gleichungssystem eingebracht, für das dann wiederum mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens iterativ die Lösung bestimmt wird.

Auf diese Vorgehensweise soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Verschiedene Pfadverfolgungsalgorithmen sind z.B. in [65] ausführlich beschrieben.

1.3 Unterintegration und gemischte Finite-Element-Formulierungen

Der Zugang zu einer Finite-Element-Formulierung erfolgt bei Verschiebungselementen über eine Verschiebungsapproximation, aus der die zum Verschiebungsansatz kompatiblen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ abgeleitet werden. Bei der für die Berechnung der Elementmatrizen erforderlichen numerischen Integration wird die der Ansatzordnung entsprechende erforderliche Anzahl von Gausspunkten verwendet (vollständige Integration). Diese Elemente sind zwar einerseits sehr robust, liefern aber in vielen Fällen ein zu steifes Resultat, so dass sie in der Praxis kaum verwendet werden.

Die Versteifungseffekte entstehen dadurch, dass mit den 'kompatiblen' Verzerrungen, deren Ansatzordnung sich aus der Verschiebungsapproximation ableitet, geforderte zusätzliche Nebenbedingungen nicht erfüllt werden können. Dies ist bedingt durch die unterschiedlichen und somit zueinander inkompatiblen Ansatzordnungen der einzelnen Verzerrungskomponenten. Das Ziel einer Verbesserung der Elemente muss also sein, die Ansatzordnung der Verzerrungen im Element zu verändern und somit den entsprechenden Anforderungen anzupassen, so dass entsprechende Nebenbedingungen erfüllt werden können.

Die verwendeten Verfahren können grundsätzlich in zwei Kategorien eingeordnet werden. Zum einen wird versucht, die Interpolationsordnung einzelner Verzerrungsanteile zu verringern. Hier kann allgemein von Unterintegration gesprochen werden, wobei z.B. durch die Annahme von Verzerrungsverläufen oder durch eine selektiv reduzierte Integration gezielt bestimmte Verzerrungsanteile unterintegriert werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Interpolationsordnung einzelner Verzerrungsanteile zu erhöhen. Dabei wird zusätzlich zum Ansatz für die Verschiebungen noch ein separater Verzerrungsansatz eingeführt, der gezielt die geforderten zusätzlichen Verzerrungsanteile enthält. Da diese Elemente Ansätze für Verschiebungen und Verzerrungen enthalten, wird von sogenannten gemischten Finite-Element-Formulierungen gesprochen. Alternativ kann die Erhöhung der Ansatzordnung für bestimmte Verzerrungsanteile auch durch eine entsprechende Erweiterung der Verschiebungsinterpolation mit Hilfe hierarchischer Formfunktionen erfolgen.

1.3.1 Das Funktional

Verwendet wird das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu. Zur Herleitung des Hu-Washizu Funktionals wird außer der schwachen Form des Gleichgewichts (1.56) auch die Kinematik $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(u)$ in der schwachen Form

$$-\int_{B_0} \delta \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E} \, dV + \int_{B_0} \delta \boldsymbol{S} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} (\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I})}_{\boldsymbol{E}(u)} \, dV = 0 \quad (1.75)$$

sowie das Materialgesetz $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$ ebenfalls in der schwachen Form

$$-\int_{B_0} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, dV + \int_{B_0} \delta \mathbf{E} \cdot \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}}_{\mathbf{S}(\mathbf{E})} \, dV = 0 \quad (1.76)$$

dargestellt. Werden die drei schwachen Gleichungen zu einer Variationsgleichung zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \mathbf{E}, \delta \mathbf{E}, \mathbf{S}, \delta \mathbf{S}) &= \int_{B_0} \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \, dV - \int_{B_0} \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, dV + \int_{B_0} \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(u) \, dV \\ &- \int_{B_0} \delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \, dV + \int_{B_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{E}(u)}{\partial \mathbf{u}} \, dV - \int_{B_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial B_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA = 0 . \end{aligned} \quad (1.77)$$

Gleichgewicht, Materialgesetz und Kinematik werden somit nicht in jedem Punkt sondern lediglich im integralen Mittel (schwach) erfüllt. Im Gegensatz zur schwachen Form des Gleichgewichts, bei der lediglich der Verschiebungsvektor \mathbf{u} als unbekannte Größe vorhanden ist, treten beim Funktional (1.77) zusätzlich der Spannungstensor \mathbf{S} und der Verzerrungstensor \mathbf{E} als unbekannte Größen auf. Aus (1.77) lässt sich das Dreifeldfunktional nach Hu-Washizu:

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \int_{B_0} W(\mathbf{E}) + \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{u}) - \mathbf{E}) \, dV + \Pi_{ext} \quad (1.78)$$

ableiten; die Variation von (1.78) nach \mathbf{u} , \mathbf{S} und \mathbf{E} ergibt Glg. (1.77). Dieses Funktional ist die Basis für gemischte Finite-Element-Formulierungen, wie die hier beschriebene Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS). Das Funktional von Hu-Washizu wird in [70] aber auch verwendet, um eine variationelle Herleitung für die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS) zu beschreiben.

In den folgenden Abschnitten erfolgt der Übergang auf die in Abschnitt 1.1.3 für die Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{E} beschriebene Darstellung als Vektoren $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$.

1.3.2 Methode der angenommenen Verzerrungen

Die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS-Methode) wurde von Bathe und Dvorkin [27] vorgeschlagen, um bei Schalenelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen das Problem der sogenannten Querschubversteifung zu vermeiden. Für Schalenelemente mit biquadratischen Ansatzfunktionen wurde die Methode von Bathe und Bucalem [18] weiterentwickelt, die sie ebenfalls zur Vermeidung der Querschubversteifung und außerdem zur Vermeidung der zusätzlich auftretenden Membranversteifung einsetzen.

Bei der ANS-Methode erfolgt die Auswertung der Verzerrungen, die sich aus den Verschiebungen ergeben, an einzelnen Punkten im Element (Stützstellen). Über diese

Stützstellen wird dann ein angenommener Verzerrungsverlauf interpoliert. So werden beispielsweise für bilineare Elemente die Verzerrungen an zwei Punkten im Element ausgewertet. In der einen Schalenrichtung erfolgt dann die Annahme eines linearen Verlaufs, der dem sich aus der Verschiebungsapproximation ergebenden entspricht; in der anderen Richtung wird die Verzerrung als konstant angenommen, womit gezielt in dieser Richtung eine Unterintegration dieses Verzerrungsanteils herbeigeführt wird. Eine vollständige Darstellung der angenommenen Verzerrungsverläufe mit den entsprechenden Stützstellen wird in Abschnitt 2.2.1 gegeben.

Die formale Herleitung der ANS-Methode erfolgt durch eine Aufspaltung der Verzerrungen in einen erwünschten Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ und einen unerwünschten versteifenden Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(u) = \boldsymbol{\varepsilon}_a + \boldsymbol{\varepsilon}_s . \quad (1.79)$$

Die erwünschten angenommenen Verzerrungsanteile $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ werden aus den kompatiblen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ berechnet, die an geeigneten Stützstellen ausgewertet werden. Diese Stützwerte werden in einem Vektor $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ zusammengefasst. Zwischen den Stützstellen werden die Verzerrungsverläufe mit Funktionen approximiert, die in einer Interpolationsmatrix \mathbf{Q} zusammengefasst sind. Somit lässt sich dieser Zusammenhang formal wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{Q}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (1.80)$$

Zur Ermittlung des der Methode der angenommenen Verzerrungen zugrunde liegenden Funktionals Π_{ANS} wird das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu (1.78) verwendet. Für die unabhängigen Verzerrungen des Hu-Washizu Funktionals werden dabei die erwünschten Verzerrungsanteile eingesetzt ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_a$):

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}_a, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}_a) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}_a) dV + \Pi_{ext} \\ &= \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_a^T \boldsymbol{\sigma}_a + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s dV + \Pi_{ext} , \end{aligned} \quad (1.81)$$

mit den aus den angenommenen Verzerrungen resultierenden Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_a$. Die unabhängigen Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ des Funktionals, werden so gewählt, dass das Integral

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon}_s dV = 0 \quad (1.82)$$

verschwindet, da die unerwünschten Verzerrungsanteile $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ keinen Beitrag zur Gesamtenergie leisten sollen. Durch Einsetzen von Glg. (1.80) in Glg. (1.81) ergibt sich das Funktional wie folgt:

$$\Pi_{ANS} = \int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV + \Pi_{ext} , \quad (1.83)$$

mit der Matrix \mathbf{C} , in der entsprechend Glg. 1.36 die Komponenten des linearisierten Stofftensors angeordnet sind. Diese Vorgehensweise kann nicht ohne weiteres auf Problemstellungen mit großen Deformationen übertragen werden, da hierzu die Ermittlung eines Deformationsgradienten erforderlich wird. Um dieses Problem zu umgehen, wird in Abschnitt 2.2.5 ein Algorithmus vorgestellt, mit dem aus den modifizierten Verzerrungen ein äquivalenter Deformationsgradient abgeleitet werden kann.

1.3.3 Methode der erweiterten Verzerrungen

Bei der Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS-Methode) handelt es sich um eine sogenannte gemischte Finite-Element-Formulierung, da zusätzlich zu den Verschiebungsansätzen auch erweiterte unabhängige Ansätze für die Verzerrungen eingeführt werden. Somit wird es möglich, die kompatiblen Verzerrungsanteile um erwünschte nicht kompatible Verzerrungskomponenten zu erweitern und somit quasi die Ansatzordnung künstlich zu erhöhen. Diese Methode basiert auf Arbeiten von Simo et al. [72, 68]. Auf die zur Verschiebungsapproximation kompatiblen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ werden dabei die inkompatiblen Verzerrungsanteile $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ aufaddiert:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\alpha}) , \quad (1.84)$$

wobei die Verzerrungserweiterung $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ von zusätzlichen Freiwerten α_i abhängen, die in einem Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ zusammengefasst sind. Die Basis der FE-Formulierung bildet wiederum das Dreifeldfunktional von Hu-Washizu (1.78), in das die Verzerrungen entsprechend eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) &= \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}) + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) \, dV + \Pi_{ext} \\ &= \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV + \Pi_{ext} . \end{aligned} \quad (1.85)$$

Da die unabhängigen Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ und die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ keinen Beitrag zur Gesamtenergie leisten dürfen, muss die sogenannte Orthogonalitätsbedingung

$$\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = 0 \quad (1.86)$$

erfüllt werden. Somit reduziert sich das Dreifeldfunktional (1.85) zu einem Zweifeldfunktional:

$$\Pi_{EAS}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \underbrace{\int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, dV}_{\Pi_{int}} + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) . \quad (1.87)$$

Das Anwenden der ersten Variation auf (1.87) führt auf:

$$\delta\Pi_{EAS}(\mathbf{u}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} dV + \delta\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon}_k + \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\delta\Pi_{int}} + \delta\Pi_{ext} . \quad (1.88)$$

Bei den in (1.88) vorkommenden Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, die sich aus der Ableitung der Energiedichtefunktion W nach den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ ergeben, ist anzunehmen, dass $\boldsymbol{\sigma}$ sowohl von den kompatiblen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ als auch von den erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ abhängt. Bei der Diskretisierung des Problems wird dazu übergegangen, die kompatiblen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, die eine Funktion der kontinuierlichen Verschiebungen \mathbf{u} sind, in Abhängigkeit von diskreten Knotenverschiebungen darzustellen, die im Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d} angeordnet sind. Analog dazu wird ein Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ mit weiteren Parametern α_i eingeführt, von denen die erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ linear abhängig sein sollen. Die Variation des Funktionals stellt sich ohne die Berücksichtigung verformungsabhängiger Lasten wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) &= \delta\Pi_{int}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) + \delta\Pi_{ext}(\mathbf{d}) \\ &= \delta\mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,d} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\alpha} + \delta\mathbf{d}^T (\Pi_{ext})_{,d} \\ &= \delta\mathbf{d}^T \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,d}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \delta\boldsymbol{\alpha}^T \int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{ext} , \end{aligned} \quad (1.89)$$

mit dem Vektor der äußeren Knotenlasten \mathbf{f}_{ext} . Die Linearisierung führt auf:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,d} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\alpha} + \delta\mathbf{d}^T (\Pi_{ext})_{,d} + \left(\delta\mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,dd} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\alpha d} \right) \Delta\mathbf{d} \\ + \left(\delta\mathbf{d}^T (\Pi_{int})_{,d\alpha} + \delta\boldsymbol{\alpha}^T (\Pi_{int})_{,\alpha\alpha} \right) \Delta\boldsymbol{\alpha} = 0 . \end{aligned} \quad (1.90)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\delta\mathbf{d} \neq 0$ und $\delta\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ ergibt sich aus (1.90) ein gekoppeltes Gleichungssystem für $\Delta\mathbf{d}$ und $\Delta\boldsymbol{\alpha}$:

$$\begin{aligned} (\Pi_{int})_{,dd} \Delta\mathbf{d} + (\Pi_{int})_{,d\alpha} \Delta\boldsymbol{\alpha} + (\Pi_{int} + \Pi_{ext})_{,d} &= 0 \\ (\Pi_{int})_{,\alpha d} \Delta\mathbf{d} + (\Pi_{int})_{,\alpha\alpha} \Delta\boldsymbol{\alpha} + (\Pi_{int})_{,\alpha} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.91)$$

Nach Einsetzen des inneren und äußeren Anteils des Funktionals lässt sich (1.91) schreiben als:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,dd}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,d}^T \boldsymbol{\sigma}_{,d} dV}_K \Delta\mathbf{d} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,d}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha} dV}_{\tilde{\mathbf{L}}^T} \Delta\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{f}_{ext} - \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{k,d}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_R \\ \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha}^T \boldsymbol{\sigma}_{,d} dV}_{\tilde{\mathbf{L}}} \Delta\mathbf{d} + \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha}^T \boldsymbol{\sigma}_{,\alpha} dV}_{\tilde{\mathbf{D}}} \Delta\boldsymbol{\alpha} &= - \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\alpha}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\tilde{\mathbf{P}}} . \end{aligned} \quad (1.92)$$

Die zweite Zeile in (1.92) wird nach den unbekanntem Parametern $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ aufgelöst:

$$\Delta\boldsymbol{\alpha} = -\tilde{\mathbf{D}}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{L}} \Delta\mathbf{d} + \tilde{\mathbf{P}} \right) \quad (1.93)$$

und in die erste Zeile eingesetzt. Dies führt zur tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{tang} = \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{L}} \quad (1.94)$$

und zum Residualvektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{ext} - \left(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{P}} \right) . \quad (1.95)$$

Somit sind die tangentielle Steifigkeitsmatrix und der Residualvektor für die Methode der erweiterten Verzerrungen hergeleitet. Mit Hilfe von Glg. (1.93) kann dann das Inkrement $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ der zusätzlichen Parameter für jeden Iterationsschritt innerhalb des nichtlinearen Lösungsalgorithmus bestimmt werden. Die Berechnung der Parameter $\Delta\boldsymbol{\alpha}$ erfolgt als Folge der Inkompatibilitätsannahme auf Elementebene, so dass kein Eingriff in die globale Programmstruktur und keine zusätzlichen Operationen auf globaler Ebene notwendig sind. Wie genau die EAS-Methode auf Elementebene in den nichtlinearen Lösungsalgorithmus eingebettet wird, ist ausführlich in Tab. 1.1 dargestellt.

Um die Orthogonalitätsbedingung (1.86) zu erfüllen, erfolgt die Annahme, dass die Spannungen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ im Element durch stückweise konstante Funktionen approximiert werden. Damit reduziert sich die Bedingung (1.86) zu

$$\int_V \tilde{\mathbf{E}} dV = \int_V \tilde{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j dV = 0 ; \quad (1.96)$$

mit dem Tensor der erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$, die analog zu den kompatiblen Verzerrungen in einer kontravarianten Basis dargestellt werden. Die erweiterten Verzerrungen werden in den natürlichen Koordinaten der isoparametrischen Abbildung approximiert. Da das natürlichen Koordinatensystem bei verzerrten Elementen in jedem Punkt unterschiedliche Basisvektoren aufweist wird als einheitliches Bezugssystem für die erweiterten Verzerrungen das kontravariante Basissystem im Elementmittelpunkt gewählt. Daraus ergibt sich der Tensor der erweiterten Verzerrungen

$$\tilde{\mathbf{E}}^0 = \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{G}_0^k \otimes \mathbf{G}_0^l \quad (1.97)$$

bezüglich der kontravarianten Basis im Elementmittelpunkt. Die Bedingung (1.96) lässt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} \int_V \tilde{\mathbf{E}} dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{E}_{kl}^0 \mathbf{G}_0^k \otimes \mathbf{G}_0^l \det \mathbf{J}_0 d\xi d\eta d\zeta = 0 , \end{aligned} \quad (1.98)$$

mit der Determinante $\det \mathbf{J}$, der Jacobi-Matrix der isoparametrischen Abbildung bzw. $\det \mathbf{J}_0$, der im Elementmittelpunkt ausgewerteten Jacobi-Determinante. Somit ergeben sich die kovarianten Komponenten des erweiterten Verzerrungstensors \tilde{E}_{ij} zu

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \tilde{E}_{kl}^0 (\mathbf{G}_0^k \cdot \mathbf{G}_i) (\mathbf{G}_j \cdot \mathbf{G}_0^l) . \quad (1.99)$$

Die Komponenten \tilde{E}_{ij} werden analog zu (1.34) im Vektor $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ angeordnet, der sich darstellen lässt als

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underbrace{\frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_E \mathbf{M}(\xi, \eta, \zeta)}_{\tilde{\mathbf{M}}} \boldsymbol{\alpha} . \quad (1.100)$$

Die Matrix \mathbf{M} enthält die entsprechenden erweiterten Anteile in ξ , η und ζ , wobei keine Anteile auftreten dürfen, die bereits in den kompatiblen Verzerrungen enthalten sind. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_E wird aus den Basisvektoren \mathbf{G}_i und \mathbf{G}_0^k berechnet, sie wird bei der jeweiligen Elementbeschreibung angegeben. Die Bedingung (1.96) reduziert sich dann zu

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{M} d\xi d\eta d\zeta = 0 , \quad (1.101)$$

was durch entsprechende Wahl der Ansätze in \mathbf{M} erfüllt wird.

Numerische Aspekte der EAS-Methode

Wird die eben erläuterte Vorgehensweise zur statischen Kondensation der EAS-Parameter wie beschrieben umgesetzt, kommt es zu numerischen Problemen bei der iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (1.92), d.h. die Lösung konvergiert schlecht oder gar nicht mehr. Dieses Problem wird auch in [61] beschrieben und ausführlich diskutiert. Als entscheidende Ursache für die numerischen Probleme wird in [61] die zur Berechnung des Inkrements $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ (siehe Glg. (1.93)) notwendige Invertierung der Matrix $\tilde{\mathbf{D}}$ identifiziert. Deshalb wird in [61] eine Modifikation des Verfahrens zur Berechnung von $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ vorgeschlagen. Glg. (1.93) wird dafür umgestellt zu

$$\tilde{\mathbf{D}} \Delta \boldsymbol{\alpha} = -\tilde{\mathbf{L}} \Delta \mathbf{d} - \tilde{\mathbf{P}} . \quad (1.102)$$

Die Lösung von (1.102) erfolgt mit Hilfe eines Gaußschen Eliminationsverfahrens. Zur zusätzlichen Erhöhung der numerischen Genauigkeit wird außerdem eine numerische Pivotsuche durchgeführt. Der Algorithmus mit numerischer Pivotsuche wird zweckmäßigerweise ebenfalls bei der Invertierung der Matrix $\tilde{\mathbf{D}}$ in den Glgn. (1.94) und (1.95) verwendet. Diese Vorgehensweise erfordert einen geringfügig höheren Speicheraufwand, da für jedes Element zusätzlich ein Pivotvektor \mathbf{p}_e abgespeichert werden muss. Somit können aus der EAS-Methode entstehende Konvergenzprobleme vermieden werden, was auch in [61] anhand eines Beispiels aufgezeigt wird. Diese aus numerischer Sicht verbesserte Vorgehensweise ist auch in Tab. 1.1 eingearbeitet.

<p>Iterations-schritt k</p> <p>1) Update der EAS-Parameter auf Elementebene</p> <ul style="list-style-type: none"> • Einlesen der gespeicherten Werte $\tilde{\mathbf{L}}_e^{k-1}$, $\tilde{\mathbf{D}}_e^{k-1}$, $\tilde{\mathbf{P}}_e^{k-1}$ und \mathbf{p}_e^{k-1} • Lösung des Gleichungssystems $\tilde{\mathbf{D}}_e^{k-1} \Delta \boldsymbol{\alpha}_e^k = -\tilde{\mathbf{L}}_e \Delta \mathbf{d}_e^{k-1} - \tilde{\mathbf{P}}_e^{k-1}$ • EAS-Parameter $\boldsymbol{\alpha}_e^k = \boldsymbol{\alpha}_e^{k-1} + \Delta \boldsymbol{\alpha}_e^k$ <p>2) Berechnung der Elementmatrizen</p> <ul style="list-style-type: none"> • erweiterte Verzerrungen (Auswertung an jedem Gausspunkt) $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}_e^k$ • Berechnung der Matrizen \mathbf{K}_e, \mathbf{R}_e, $\tilde{\mathbf{L}}_e^k$, $\tilde{\mathbf{D}}_e^k$ und $\tilde{\mathbf{P}}_e^k$ durch numerische Integration über Elementvolumen • Invertierung von $\tilde{\mathbf{D}}_e^k \rightarrow (\tilde{\mathbf{D}}_e^k)^{-1}$ mit Pivotsuche $\rightarrow \mathbf{p}_e^k$ • Tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{tang}^e = \mathbf{K}_e - (\tilde{\mathbf{L}}_e^k)^T (\tilde{\mathbf{D}}_e^k)^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_e^k$ • Elementresidualvektor $\mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{ext}^e - \mathbf{R}_e + (\tilde{\mathbf{L}}_e^k)^T (\tilde{\mathbf{D}}_e^k)^{-1} \tilde{\mathbf{P}}_e^k$ <p>3) Abspeichern der Werte $\tilde{\mathbf{L}}_e^k$, $\tilde{\mathbf{D}}_e^k$, $\tilde{\mathbf{P}}_e^k$ und \mathbf{p}_e^k auf Elementebene</p> <p>4) Berechnung auf globaler Ebene</p> <ul style="list-style-type: none"> • Zusammenbau der Elementmatrizen • Lösung des globalen Gleichungssystems $\mathbf{K}_{tang} \Delta \mathbf{d}^k = \mathbf{f}$ • Konvergenztest: $\ f\ < Tol: \text{nächster Lastschritt}$ $\ f\ > Tol: k = k + 1, \text{ goto } 1$

Tabelle 1.1: Nichtlinearer iterativer Lösungsalgorithmus bei Anwendung der EAS-Methode

Kapitel 2

Finite Elemente für 3D Schalenprobleme

2.1 Das 'Solid-Shell' Konzept

In vielen Finite-Element-Programmen werden, auf klassischen Schalentheorien [51] [85] basierende, sogenannte degenerierte Schalenelemente [3] [27] [18] [37] [43] eingesetzt. Als Alternative zu den klassischen Schalenelementen wurden in den letzten Jahren sogenannte Volumen-Schalenelemente entwickelt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Volumen-Schalenelemente auf Basis des sogenannten 'Solid-Shell' Konzepts [37] vorgestellt, ähnliche Vorgehensweisen sind z.B. in [10] [16] [45] [50] [55] [64] [67] zu finden. Bei dieser Art von Schalenformulierungen auf Basis der Kontinuumsmechanik wird ein dreidimensionales Kontinuum betrachtet, und es werden elementtechnische Veränderungen vorgenommen, die es ermöglichen, typische Schalenprobleme zu behandeln. Der Vorteil dieser Vorgehensweise gegenüber klassischen Schalentheorien ist, dass auch die Dickenrichtung in die Deformations- und Spannungsbetrachtung mit einbezogen wird, und damit ein Vorgehen wie bei allgemeinen dreidimensionalen Zuständen entwickelt werden kann. Damit ist die Verwendung allgemeiner dreidimensionaler Materialformulierungen möglich, und es können auch geschichtete Schalen mit sehr unterschiedlichen Materialien pro Schicht und erhöhten Anforderungen an die Kinematik diskretisiert werden. Es werden ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgrade verwendet und die Elementknoten werden an der Schalenober- und unterseite angeordnet. Somit ist auch eine Kombination mit Kontinuumsselementen bzw. ein Übergang auf 3D Kontinua, wie es z.B. bei Schalenverzweigungen lokal erforderlich ist, ohne weiteres möglich.

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen des 'Solid-Shell' Konzepts zusammengestellt werden. Insbesondere wird dabei auf die notwendigen elementtechnischen Veränderungen eingegangen, die eingesetzt werden, um jede Art von Versteifungseffekten zu vermeiden. Außerdem werden die FE-Diskretisierung diskutiert und die verschiedenen Varianten der Elementformulierungen vorgestellt. Schließlich wird anhand verschiedener numerischer Beispiele sowohl die Funktionsfähigkeit als auch deren Grenzen aufgezeigt.

Im letzten Abschnitt wird auf das Problem numerischer Instabilitäten eingegangen.

2.1.1 Kinematik

Beim 'Solid-Shell' Konzept wird die Annahme der Schalentheorie, d.h. das Geradebleiben der Normalen zur Tangentialebene bzw. des Schalendirektors, über die Annahme eines linearen Verschiebungsverlaufs zwischen Ober- und Unterseite beibehalten. Für

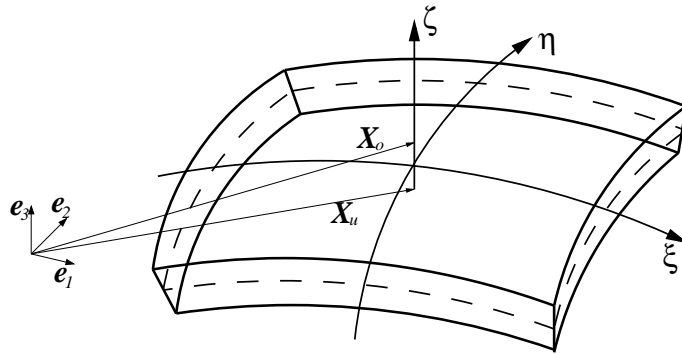


Abbildung 2.1: Geometrie eines 'Solid-Shell' Schalenelementes

die Approximation der dreidimensionalen Geometrie mit Hilfe der Geometrie der Schalenoberseite \mathbf{X}_o und der Schalenunterseite \mathbf{X}_u gilt damit:

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \left((1 + \zeta) \mathbf{X}_o(\xi, \eta) + (1 - \zeta) \mathbf{X}_u(\xi, \eta) \right), \quad (2.1)$$

wobei die Geometrieapproximation der Ober- und Unterseite \mathbf{X}_o und \mathbf{X}_u nur von den Koordinaten in der Schalenfläche ξ und η abhängt. Die Verschiebungen werden wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \Theta(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_o(\xi, \eta) \\ \mathbf{u}_u(\xi, \eta) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

mit den Verschiebungen der Schalenober- und -unterseite \mathbf{u}_o und \mathbf{u}_u abhängig von ξ und η und mit der Interpolationsmatrix $\Theta(\zeta)$. Im einfachsten Fall wird für alle Verschiebungsanteile, analog zur Geometrieapproximation, eine lineare Interpolation über die Dicke durchgeführt. Die Interpolationsmatrix Θ nimmt dann folgende Form an:

$$\Theta(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

In Abschnitt 2.2.2 wird eine um einen quadratischen Anteil erweiterte Matrix Θ beschrieben. Diese quadratische Erweiterung der Ansatzordnung wird zur Vermeidung der

sogenannten Dickenversteifung nur auf den Verschiebungsanteil in der Dickenrichtung angewendet und steht somit nicht im Widerspruch zu der Annahme vom Geradebleiben des Schalendirektors. Um die erhöhte Ansatzordnung korrekt für die Dickenverschiebung anzusetzen wird zusätzlich noch eine Transformation von Θ erforderlich.

2.2 Versteifungseffekte und Abhilfen

2.2.1 Querschub- und Membranversteifung

Bei den in dieser Arbeit zuerst betrachteten bilinearen 8-Knoten Elementen werden bei Biegebeanspruchungen unerwünschte Querschubverzerrungen aktiviert. Dieses Pro-

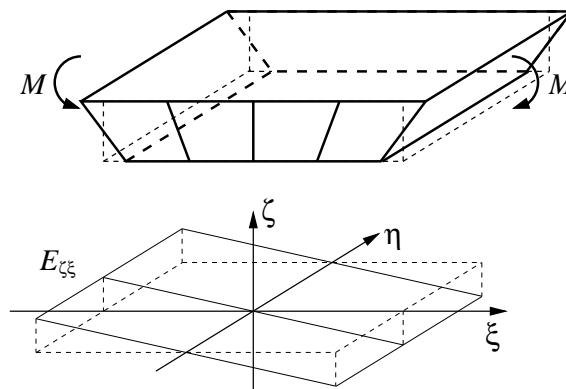


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Verlaufs der Querschubverzerrung $E_{\zeta\zeta}$ für ein 'Solid-Shell' Element unter reiner Biegebeanspruchung

blem entsteht dadurch, dass bei der Biegebeanspruchung eines Elementes die Normalen der Referenzfläche in der Ausgangskonfiguration nicht senkrecht zur Referenzfläche in der verformten Konfiguration bleiben, wodurch falsche Querschubverzerrungen aktiviert werden, wie dies auch anschaulich in Bild 2.2 für $E_{\zeta\zeta}$ dargestellt wird. Der Effekt wird dadurch verstärkt, dass bei dünnen Schalen die Querschubsteifigkeit um ein Vielfaches höher ist als die Biegesteifigkeit. In der Folge ergibt sich eine viel zu hohe Formänderungsenergie, d.h. ein hoher Widerstand infolge eines falschen Querschubs, eine künstliche Versteifung und damit eine zu kleine Verschiebung.

Dieses Problem tritt auch bei den ebenfalls in dieser Arbeit betrachteten biquadratischen 18-Knoten Elementen auf. Bei Verwendung der quadratischen Ansätze für gekrümmte Schalenträgerwerke, werden bei Biegebeanspruchungen zusätzlich falsche Membranverzerrungen aktiviert, wodurch ein weiterer Versteifungseffekt entsteht. Dieses Problem wird daher als Membranversteifung bezeichnet.

Die Methode der angenommenen Verzerrungen - bilineare Elemente

Zur Vermeidung des Effektes der Querschubversteifung wird die in Abschnitt 1.3.2 grundlegend beschriebene Methode der angenommenen Verzerrungen eingesetzt. Dieses Verfahren wurde für bilineare Ansätze von Bathe und Dvorkin [27] entwickelt und dort als ANS (**A**ssumed **N**atural **S**train) Methode bezeichnet. Anschaulich erläutert ist bei einer Biegebeanspruchung um die η -Achse für $\xi = 0$ keine Schrägstellung der ursprünglichen Normalen zur Referenzfläche zu erwarten (Bild 2.2). Deshalb erfolgt die Auswertung der Verzerrung $E_{\eta\zeta}$ an den Stützstellen ($\xi = -1, \eta = 0$) und ($\xi = 1, \eta = 0$). In ξ -Richtung wird dann ein linearer Verlauf der Verzerrung $E_{\eta\zeta}$ approximiert, in η -Richtung wird ein konstanter Verlauf angenommen. Analog dazu erfolgt die Auswertung der Verzerrung $E_{\zeta\xi}$ an den Stützstellen ($\xi = 0, \eta = -1$) und ($\xi = 0, \eta = 1$) und es erfolgt die Annahme eines konstanten Verlaufs in ξ -Richtung und eines linearen Verlaufs in η -Richtung. Somit lassen sich die angenommenen Querschubverzerrungen für die bilinearen 8-Knoten Elemente wie folgt darstellen:

$$\hat{E}_{\eta\zeta}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)E_{\eta\zeta}(\xi = -1, \eta = 0) + \frac{1}{2}(1 + \xi)E_{\eta\zeta}(\xi = 1, \eta = 0) , \quad (2.4)$$

$$\hat{E}_{\zeta\xi}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta)E_{\zeta\xi}(\xi = 0, \eta = -1) + \frac{1}{2}(1 + \eta)E_{\zeta\xi}(\xi = 0, \eta = 1) . \quad (2.5)$$

Diese Vorgehensweise der Interpolation der Querschubverzerrungen wird für alle im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten bilinearen Elementformulierungen eingesetzt. D.h. sowohl für die ANS3D...-Elemente, bei denen ansonsten in der Schalenfläche keine weiteren Modifikationen durchgeführt werden, als auch für die EAS3D...-Elemente, die noch eine zusätzliche Erweiterung für die Membranverzerrungen beinhalten. Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Elemente folgt in Abschnitt 2.3.4.

Methode der angenommenen Verzerrungen - biquadratische Elemente

Für die biquadratischen Elemente werden angenommene Verzerrungsverläufe eingesetzt, die von Bathe und Bucalem [18] für deren MITC9 Element entwickelt wurden, das ebenfalls biquadratische Ansatzfunktionen verwendet. Dementsprechend werden alle in dieser Arbeit vorgestellten biquadratischen Elementformulierungen als MI9K3D...-Elemente bezeichnet. Die Querschubverzerrungen $E_{\eta\zeta}$ und $E_{\zeta\xi}$ sowie die Membranverzerrungen $E_{\xi\xi}$, $E_{\eta\eta}$ und $E_{\xi\eta}$ werden dabei an den in Bild 2.3 dargestellten Stützstellen ausgewertet. Die Verzerrungen werden dann in Abhängigkeit der Koordinaten ξ und η wie folgt dargestellt:

$$\hat{E}_{\xi\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_i^q(\eta) Q_j^l(\xi) E_{\xi\xi}(\xi_j, \eta_i) , \quad (2.6)$$

$$\hat{E}_{\eta\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_i^q(\xi) Q_j^l(\eta) E_{\eta\eta}(\xi_i, \eta_j) , \quad (2.7)$$

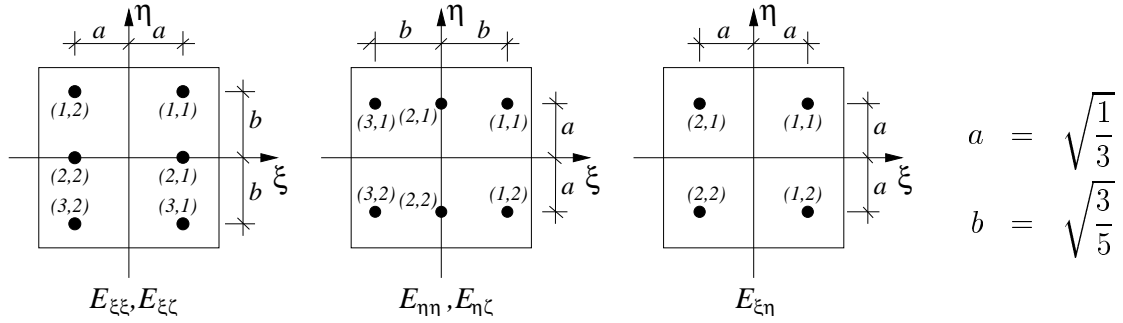


Abbildung 2.3: Stützstellen der Verzerrungsinterpolationen für 'Solid-Shell' Elemente mit biquadratischen Ansätzen

$$\hat{E}_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 Q_i^l(\xi) Q_j^l(\eta) E_{\xi\eta}(\xi_i, \eta_j) , \quad (2.8)$$

$$\hat{E}_{\eta\zeta}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_i^q(\xi) Q_j^l(\eta) E_{\eta\zeta}(\xi_i, \eta_j) , \quad (2.9)$$

$$\hat{E}_{\zeta\xi}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_i^q(\eta) Q_j^l(\xi) E_{\zeta\xi}(\xi_j, \eta_i) , \quad (2.10)$$

mit den Stützwerten der Verzerrungsinterpolation $E(\xi_i, \eta_j)$. Der Verzerrungsverlauf wird mit den Funktionen Q_i^q und Q_i^l approximiert. Diese sind so gewählt, daß sie jeweils an einer Stützstelle den Wert eins und an den anderen den Wert Null annehmen:

$$Q_1^q(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} z \left(\sqrt{\frac{5}{3}} z + 1 \right) ; \quad Q_1^l(z) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3} z) ; \quad (2.11)$$

$$Q_2^q(z) = 1 - \frac{5}{3} z^2 ; \quad Q_2^l(z) = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3} z) ; \quad (2.12)$$

$$Q_3^q(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} z \left(\sqrt{\frac{5}{3}} z - 1 \right) , \quad z = \xi, \eta . \quad (2.13)$$

Eine detaillierte Beschreibung der einzelnen biquadratischen Elemente erfolgt in Abschnitt 2.3.5.

2.2.2 Dickenversteifung

Das Problem der Versteifung in Dickenrichtung wird z.B. auch in [62] [75] diskutiert. Es entsteht durch die beim 'Solid-Shell' Konzept gewählte lineare Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung (2.3). Diese hat zur Folge, dass die Normalverzerrung in

Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ als konstant über die Dicke angenommen wird. Die Normalverzerrungen parallel zur Mittelfläche $E_{\xi\xi}$ und $E_{\eta\eta}$ dagegen werden als linear veränderlich über die Dicke approximiert. Da aber die Normalverzerrungen $E_{\xi\xi}$ und $E_{\eta\eta}$ über die Querkontraktion mit der Verzerrung in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ gekoppelt sind, sollte die Approximation aller Verzerrungen über die Dicke einheitlich erfolgen. Aufgrund dieser Inkompatibilität ist es nicht möglich, Biegebeanspruchungen korrekt darzustellen.

Zur Vermeidung dieses Versteifungseffektes ist es erforderlich, die Ansatzordnung für die Normalverzerrungen in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ so zu erhöhen, dass die erforderliche lineare Ansatzordnung erreicht wird. Hierfür gibt es zum einen die Möglichkeit direkt in die Geometrieapproximation einzugreifen, und die Ansätze dort entsprechend anzupassen, zum anderen kann das in Abschnitt 1.3.3 beschriebene Verfahren der erweiterten Verzerrungen eingesetzt werden, um die Verzerrung $E_{\zeta\zeta}$ um die geforderten Anteile zu erweitern. Beide Möglichkeiten werden in den beiden nächsten Absätzen ausführlich diskutiert.

Quadratische Verschiebungsinterpolation der Verschiebung in Dickenrichtung über die Dicke

Bei dieser Vorgehensweise wird die Ansatzordnung der Verschiebung w in Dickenrichtung für die ζ -Koordinate erhöht, was bereits in [34] und [55] in ähnlichem Zusammenhang vorgeschlagen wurde. Gewählt wird eine hierarchisch quadratische Interpolation

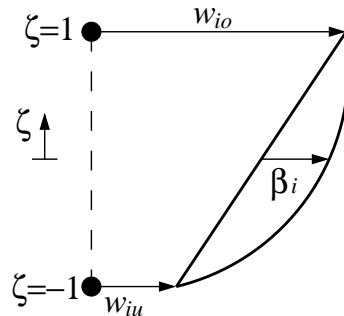


Abbildung 2.4: Quadratische Interpolation der Verschiebung w in Dickenrichtung

(siehe [37]), wie in Bild 2.4 anschaulich dargestellt. Hierfür ist die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade β_i notwendig, d.h. für jede Elementkante in Dickenrichtung mit jeweils drei Verschiebungsfreiheitsgraden für die Knoten an der Ober- und Unterseite, also sechs Freiheitsgraden, wird ein zusätzlicher siebter Freiheitsgrad eingeführt. Die Interpolationsmatrix $\Theta(\zeta)$ aus Glg. (2.3) wird dementsprechend um einen hierarchischen quadratischen Term erweitert:

$$\Theta(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \zeta & 0 & 0 & 1 - \zeta & \boxed{1 - \zeta^2} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Für die Verschiebungsapproximation aus Glg. (2.2) ist im Hinblick auf gekrümmte Tragwerke eine Transformation zur Erzielung der richtigen Interpolation in Schalendickenrichtung vorzusehen:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \mathbf{T}(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_o(\xi, \eta) \\ \mathbf{u}_u(\xi, \eta) \\ \beta(\xi, \eta) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Für die aus den Verschiebungen abgeleitete Verzerrung $E_{\zeta\zeta}$ wird somit die erforderliche lineare Approximation in ζ -Richtung erreicht. Der Aufbau der Transformationsmatrix \mathbf{T} wird in Abschnitt 2.3.2 erläutert. Nachteil dieses Vorgehens ist eindeutig die Erhöhung des Aufwands durch die Einführung der zusätzlichen, zu den Nachbar-elementen kompatiblen und somit in das globale Gleichungssystem eingehenden Freiheitsgrade, wobei alternativ auch inkompatible Freiheitsgrade eingeführt werden können, die auf Elementebene auskondensiert werden, was der im folgenden Abschnitt beschriebenen Vorgehensweise entspricht. Der Übergang zu anderen Elementtypen und Kontinuums-elementen bleibt aber nach wie vor leicht möglich, da aufgrund der hierarchischen Struktur der quadratischen Interpolationserweiterung durch einfaches Festhalten der Freiheitsgrade β_i an den Übergangsstellen die lineare Ansatzordnung wiederhergestellt werden kann.

Erweiterung der Verzerrung in Dickenrichtung mit der EAS-Methode

Bei dieser Vorgehensweise wird einem Vorschlag von Büchter et al. [19] folgend die in Abschnitt 1.3.3 beschriebene EAS-Methode eingesetzt, um die zum Verschiebungsansatz kompatible Verzerrung $E_{\zeta\zeta}^k$ um einen in ζ -Richtung linearen Anteil $\hat{E}_{\zeta\zeta}$ zu erweitern:

$$E_{\zeta\zeta} = E_{\zeta\zeta}^k + \hat{E}_{\zeta\zeta}. \quad (2.16)$$

Die erweiterte Verzerrung $\hat{E}_{\zeta\zeta}$ lässt sich wie folgt darstellen:

$$\hat{E}_{\zeta\zeta} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} T_E \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.17)$$

Die Matrix \mathbf{M} mit den Ansätzen in der Schalenfläche ist unterschiedlich für die bilinearen und die biquadratischen Elementformulierungen. Sie wird jeweils in den entsprechenden Abschnitten in Kapitel 2.3 beschrieben. Die Faktoren $\frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} T_E$ sind notwendig, um, wie schon in Abschnitt 1.3.3 erläutert, die Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ auf ein von ξ, η und ζ unabhängiges Koordinatensystem im Elementmittelpunkt zu beziehen.

Bei diesem Vorgehen werden keine zusätzlichen Freiheitsgrade in das globale Gleichungssystem eingebracht. Die zusätzlichen unbekannt Parameter $\boldsymbol{\alpha}$ werden für die Lösung auf Elementebene mittels statischer Kondensation eliminiert. Dies erfordert eine entsprechende Matrixinvertierung, die für jedes Element und jeden Iterationsschritt durchzuführen ist. Der für diese Vorgehensweise benötigte numerische Mehraufwand ist allerdings erheblich geringer als für die globale Gleichungslösung.

2.2.3 Volumetrische Versteifung

Das Problem der volumetrische Versteifung tritt auf, wenn nahezu inkompressibles Materialverhalten vorausgesetzt wird, was z.B. für gummiartiges elastisches Material oder elastoplastische Materialgesetze, bei denen im plastischen Bereich die Annahme der Inkompressibilität getroffen wird, zutrifft. Die volumetrische Versteifung bei Volumen- und Volumen-Schalenelementen wird bereits in [26] ausführlich behandelt. Die Voraussetzung, um inkompressibles Materialverhalten zu beschreiben, ist die möglichst exakte Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingung

$$\det \mathbf{F} = 1 \quad (2.18)$$

im Element, d.h. auch in allen Integrationspunkten. Zur Veranschaulichung der Ursache der volumetrischen Versteifung wird auf die lineare Theorie kleiner Verzerrungen zurückgegriffen. Dort reduziert sich die Bedingung (2.18) zu

$$\text{tr} \mathbf{E} = E_{\xi\xi} + E_{\eta\eta} + E_{\zeta\zeta} = 0 . \quad (2.19)$$

Die Normalverzerrungen lassen sich für ein Element mit bilinearem Ansatz in der Ebene wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} E_{\xi\xi} &= a_1 + a_2\eta , \\ E_{\eta\eta} &= b_1 + b_2\xi , \\ E_{\zeta\zeta} &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Bedingung (2.19) wegen der inkompatiblen Ansatzordnungen der Verzerrungen in (2.20) nicht ohne weiteres in jedem Punkt eines Elementes erfüllt werden kann. Als Lösung dieses Problems bietet sich zum einen an, die Ansatzordnung von $E_{\xi\xi}$ und $E_{\eta\eta}$ zu erhöhen, wofür wieder die in Abschnitt 1.3.3 erläuterte EAS-Methode angewendet werden kann. Alternativ dazu lässt sich die Kompatibilität der einzelnen Verzerrungsanteile zueinander auch durch eine Unterintegration herbeiführen.

Die Methode der erweiterten Verzerrungen

Die Verwendung der EAS-Methode im Zusammenhang mit volumetrischer Versteifung wurde erstmals von Simo/Armero [69] vorgeschlagen und wird z.B. in [14] ausführlich diskutiert. Aus Glg. (2.20) ist leicht ersichtlich, um welche inkompatiblen Verzerrungsanteile die kompatiblen Verzerrungen zu erweitern sind, um Glg. (2.19) zu erfüllen:

$$\begin{bmatrix} E_{\xi\xi} \\ E_{\eta\eta} \\ E_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\xi\xi}^k \\ E_{\eta\eta}^k \\ E_{\zeta\zeta}^k \end{bmatrix} + \frac{1}{\det J} \mathbf{T} \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 + \xi\eta \alpha_2 \\ \eta \alpha_3 + \xi\eta \alpha_4 \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (2.21)$$

Dabei ist aber zu beachten, dass die Erfüllung von Glg. (2.19) nur für die Theorie kleiner Verzerrungen mit der Erfüllung der Inkompressibilitätsbedingung gleichzusetzen ist. Im allgemeinen nichtlinearen Fall stellt sich die Inkompressibilitätsbedingung

wesentlich komplexer dar, so dass mit der hier vorgestellten EAS-Methode zwar eine Verbesserung zu erwarten ist, nicht aber ein vollständiges Ausbleiben des volumetrischen Versteifungseffektes. Dies soll auch anhand einiger numerischer Beispiele in den folgenden Abschnitten verdeutlicht werden.

Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile

Eine zweite Möglichkeit, volumetrisches Versteifen zu vermeiden, stellt eine Unterintegration dar. Es wird allerdings keine vollständige Unterintegration aller Steifigkeitsanteile durchgeführt, was unweigerlich zu Kinematiken führen würde, sondern die Unterintegration wird auf die volumetrischen Anteile beschränkt, die letztlich für die Volumenerhaltung zu beachten sind. Damit erfolgt, wie in [52] [73] beschrieben, die Annahme einer bei bilinearen Elementen konstanten Volumendehnung innerhalb des Elementes. Hierfür wird der Spannungstensor in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil zerlegt, was einer Aufspaltung des inneren Potentials entspricht:

$$\Pi_{int} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{dev} dV}_{\text{vollst.int.}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_{vol} dV}_{\text{red.int.}} . \quad (2.22)$$

Reduzierte Integration bedeutet dabei, dass für die bilinearen Elemente eine 1-Gausspunkt Integration anstelle einer 2×2 -Gausspunkt Integration durchgeführt wird, für die biquadratischen Elemente werden 2×2 anstelle von 3×3 Gausspunkten verwendet, d.h. es wird eine bilineare Approximation der Volumendehnung vorgenommen. Diese Methode erweist sich als sehr effizient und ist leicht zu implementieren. Der entscheidende Nachteil ist, dass dieses Verfahren auf Materialgesetze beschränkt ist, die die Aufspaltung in deviatorische und volumetrische Anteile zulassen.

2.2.4 Trapezoidal Locking

Der sogenannte Trapezoidal Locking Effekt tritt bei Vernetzungen auf, bei denen der hier als Direktor bezeichnete Vektor vom unteren zum oberen Elementknoten nicht senkrecht zur Referenzebene steht. Hierbei werden bei Biegebeanspruchungen künstliche Normalverzerrungen in Dickenrichtung aktiviert, die zu einer zu hohen Approximation der Formänderungsenergie führen. Das Trapezoidal Locking wird auch in [11], [74], [4] und [8] diskutiert; dort wird es auch als 'curvature thickness locking' oder 'artificial thickness straining' bezeichnet. D.h. dieser Versteifungseffekt ist in erster Linie bei Verwendung verzerrter Elementgeometrien zu erwarten (Abb. 2.5 (A)), wenn z.B. eine Schrägstellung der Direktoren für die Ausgangskonfiguration vorgegeben wird. Speziell bei bilinearen Elementen ist dieser Versteifungseffekt auch für gekrümmte und stark deformierte Strukturen zu erwarten (Abb. 2.5 (B)), da sich bedingt durch die lineare Approximation der Geometrie unabdingbar eine Schrägstellung der Direktoren an den Elementrändern ergibt. Bei biquadratischen Elementen ist dieser Effekt weniger

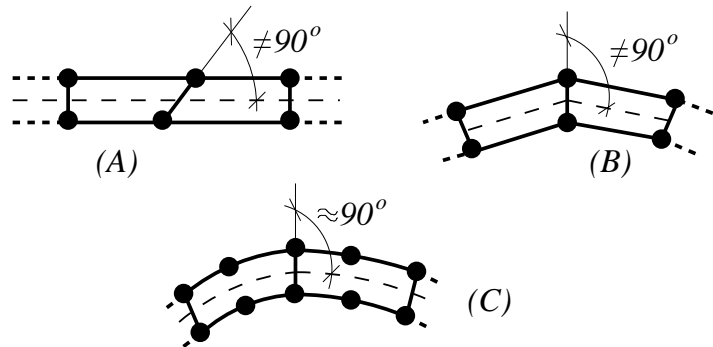


Abbildung 2.5: Seitenansicht verschiedener Beispiele für FE-Vernetzungen: (A) Ebene Struktur mit verzerrtes Elementnetz; (B) Gekrümmte Struktur mit linearen Formfunktionen; (C) Gekrümmte Struktur mit quadratischen Formfunktionen

ausgeprägt, da sich mit quadratischen Ansätzen auch gekrümmte Geometrien approximieren lassen. Dann können die Direktoren an den Elementrändern meist senkrecht zur Referenzebene bleiben (Abb. 2.5 (C)).

In Bild 2.6 wird versucht, den Trapezoidal Locking Effekt anschaulich zu erklären. Es ist dort ein einzelnes verzerrtes Element unter Biegebeanspruchung dargestellt. Dabei ist zu erkennen, dass die Drehung der Direktoren aufgrund der Biegebeanspruchung in der Elementmitte eine 'Verkürzung' der Direktoren bewirkt. Dies führt zum skizzierten

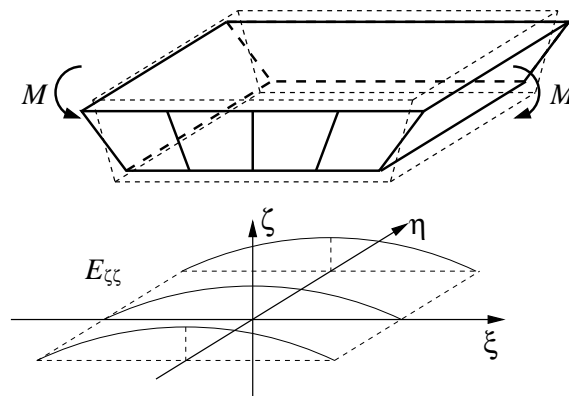


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung des Verlaufs der Normalverzerrung $E_{\zeta\zeta}$ für ein 'Solid-Shell' Element unter reiner Biegebeanspruchung

Verlauf der Normalverzerrung $E_{\zeta\zeta}$, die eigentlich im gesamten Element gleich Null sein müsste.

Zur Vermeidung des Trapezoidal Locking Effekts wird einem Vorschlag von Betsch [8] folgend wiederum die in Abschnitt 1.3.2 beschriebene Methode der angenomme-

nen Verzerrungen eingesetzt. Dabei erfolgt die Auswertung der Normalverzerrung in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ an den Knotenpunkten, an denen, wie auch in Bild 2.6 anschaulich zu erkennen, keine künstlichen Verzerrungen auftreten. Über die Elementfläche wird $E_{\zeta\zeta}$ dann mit Hilfe der Lagrange Ansatzfunktionen entsprechend der Geometrie- und Verschiebungsapproximation interpoliert.

2.2.5 'Solid-Shell' Elemente für große Deformationen

In diesem Kapitel wurde bisher die Kinematik der 'Solid-Shell' Elemente vorgestellt, und es wurden verschiedene Modifikationen diskutiert, die zur Vermeidung von Versteifungseffekten erforderlich sind. Dabei werden hier in erster Linie die zum Verschiebungsansatz kompatiblen Verzerrungen verändert bzw. erweitert. Diese Vorgehensweise ist im Allgemeinen ohne Einschränkung auch für Probleme großer Deformationen einsetzbar. Allerdings ist für die zur Untersuchung von Problemen großer Deformationen benötigten Materialgesetze die Bestimmung des Deformationsgradienten \mathbf{F} erforderlich. Dieser Deformationsgradient muss auch zu den modifizierten bzw. erweiterten Verzerrungen kompatibel sein. Dafür gibt es grundsätzlich die Möglichkeit, entsprechende Modifikationen und Erweiterungen direkt auf den Deformationsgradienten anzuwenden. Hier wird aber eine andere Vorgehensweise gewählt, bei der die bisher vorgestellten Verfahren vollständig weiter eingesetzt werden können. Es wird aus den Verzerrungen

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_k^{mod} + \tilde{\mathbf{E}} , \quad (2.23)$$

die sich aus den evtl. durch angenommene Verzerrungsverläufe modifizierten kompatiblen Verzerrungen \mathbf{E}_k^{mod} und den erweiterten Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ zusammensetzen, ein zugehöriger Deformationsgradient $\hat{\mathbf{F}}$ ermittelt. Dafür wird zunächst der zu \mathbf{E} gehörende rechte Cauchy-Green Tensor $\hat{\mathbf{C}}$ bestimmt:

$$\hat{\mathbf{C}} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I} . \quad (2.24)$$

Für den zu \mathbf{E} äquivalenten rechten Cauchy-Green Tensor $\hat{\mathbf{C}}$ gilt:

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}^2 , \quad (2.25)$$

mit dem modifizierten/erweiterten rechten Strecktensor $\hat{\mathbf{U}}$, der symmetrisch und positiv definit ist, und dem eigentlich orthogonalen Drehtensor \mathbf{R} , der in dieser Gleichung herausfällt. Der Cauchy-Green Tensor $\hat{\mathbf{C}}$ lässt sich auch über eine Spektralzerlegung darstellen als

$$\hat{\mathbf{C}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i , \quad (2.26)$$

mit den Eigenwerten λ_i und den Eigenvektoren \mathbf{n}_i . Der Strecktensor $\hat{\mathbf{U}}$ lässt sich somit berechnen als

$$\hat{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\hat{\lambda}_i} \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i . \quad (2.27)$$

Der gesuchte Deformationsgradient $\hat{\mathbf{F}}$ wird dann über die Multiplikation von $\hat{\mathbf{U}}$ mit dem Drehtensor des ursprünglichen Deformationsgradienten \mathbf{R} berechnet:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{U}} . \quad (2.28)$$

Der Drehtensor \mathbf{R} lässt sich aus dem ursprünglichen Deformationsgradienten \mathbf{F} ermitteln:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} , \quad (2.29)$$

wobei sich der ursprüngliche rechte Strecktensor \mathbf{U} wiederum aus der Spektralzerlegung von \mathbf{C}

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

ergibt. Da auf der Materialseite ausschließlich eine Abhängigkeit vom Strecktensor vorliegt, kann der modifizierte Strecktensor $\hat{\mathbf{U}}$ auch direkt übergeben werden, vorausgesetzt es liegt eine entsprechende Materialformulierung vor. Die zusätzliche Spektralzerlegung zur Berechnung des Drehtensors \mathbf{R} entfällt somit. Somit ist es möglich, einen zu den modifizierten/erweiterten Verzerrungen äquivalenten Deformationsgradienten bzw. rechten Strecktensor zu berechnen. Zusätzliche Überlegungen bzgl. Modifikationen und Erweiterungen, die direkt auf den Deformationsgradienten anzuwenden wären, entfallen dabei vollständig.

2.3 FE-Diskretisierung von 'Solid-Shell' Schalenelementen

In diesem Kapitel sollen die für eine FE-Diskretisierung nach dem 'Solid-Shell' Konzept notwendigen Grundlagen zusammengestellt werden, und es werden die zur Verfügung stehenden 'Solid-Shell' Elementformulierungen im Einzelnen vorgestellt. Mit einer Vielzahl von Elementvarianten werden die unterschiedlichen Modifikationsvorschläge umgesetzt und auf ihre Fähigkeiten zur Verbesserung des Elementverhaltens hin untersucht.

Neben den unterschiedlichen Variationen gemischter Elementformulierungen und der Variationen mit partieller Unterintegration ist das Hauptunterscheidungsmerkmal zwischen den verschiedenen 'Solid-Shell' Elementen die verwendete Ansatzordnung für die Geometrie- und Verschiebungsinterpolation. In der Dickenrichtung wird für alle Elemente eine lineare Ansatzordnung verwendet. Hierfür wird jeweils ein Knoten an der Schalenober- und unterseite angeordnet, die jeweils über drei, d.h. gemeinsam über sechs Verschiebungsfreiheitsgrade verfügen. Der Schalendirektor, der hier als der Vektor vom Knoten an der Schalenunter- zur Schalenoberseite betrachtet werden kann, hat somit die Bewegungsfreiheitsgrade entsprechend herkömmlicher Schalenformulierungen, die im Allgemeinen über drei Verschiebungs- und zwei Rotationsfreiheitsgrade für jeden Knoten der Schale verfügen. Zusätzlich ist über den sechsten Freiheitsgrad auch eine Längenänderung des Direktors, d.h. eine Dickenänderung der Schale möglich. Dies ist ein entscheidender Vorteil der 'Solid-Shells' gegenüber klassischen Schalenelementen und ermöglicht deren Anwendung für ein erweitertes Feld von Problemklassen.

In der Schalenfläche ist beginnend mit linearen Drei- bzw. Viereckelementen jede beliebige Ansatzordnung denkbar. Für die unterschiedlichen Ansatzordnungen gibt es Vor- und Nachteile. Ein wichtiger Aspekt ist die Geometrieapproximation. Hier sind eindeutig Elemente höherer Ansatzordnung von Vorteil, da bei Problemen mit gekrümmten Strukturen oder mit großen Deformationen die Geometrie wesentlich exakter abgebildet werden kann als mit linearen Elementflächen. Auch die Versteifungsproblematik tritt bei Ansätzen höherer Ordnung nur abgeschwächt auf, laut [36] sind Elemente ab der Interpolationsordnung sieben, allerdings dann auch mit höheren Ansätzen in Dickenrichtung, sogar versteifungsfrei. Nachteile für die Elemente mit höheren Ansatzordnungen gibt es z.B. in der Handhabung; so gestaltet sich z.B. das Erstellen der FE-Netze als aufwendiger. Ein noch gewichtigerer Nachteil ist im numerischen Aufwand zu sehen. So wird die Bandbreite der Gesamtsteifigkeitsmatrix ungefähr verdoppelt, wenn biquadratische anstelle von bilinearen Ansätzen verwendet werden. Bei der näherungsweise Berechnung der zur Gleichungslösung erforderlichen Anzahl arithmetischer Operationen geht die Bandbreite im Quadrat ein, somit wird der Aufwand der Gleichungslösung bei Verwendung quadratischer Elemente und Vernetzung mit derselben Anzahl von Knoten vervierfacht.

In dieser Arbeit beschränkt sich die Untersuchung verschiedener Ansatzordnungen auf die Verwendung von bilinearen Ansätzen für Elemente mit vier Knoten in der Schalenfläche bzw. biquadratische Ansätze für Elemente mit neun Knoten in der Schalenfläche.

2.3.1 Geometrieinterpolation

In Bild (2.7) ist die Lage der Knoten eines 'Solid-Shell' Elements mit der entsprechenden Zuordnung der Verschiebungsfreiheitsgrade, sowie das globale kartesische und ein lokales Koordinatensystem dargestellt. Die Lage eines beliebigen Punktes der Schale in

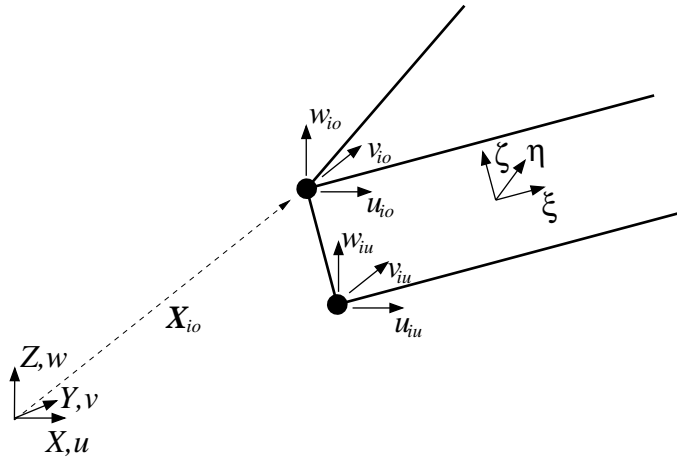


Abbildung 2.7: Darstellung der Knotenverschiebungsfreiheitsgrade bei 'Solid-Shell' Elementen für ein Knotenpaar

der unverformten Konfiguration wird für 'Solid-Shell' Element wie folgt approximiert

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) &= [X \ Y \ Z]^T \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \left((1 + \zeta) \mathbf{X}_{io} + (1 - \zeta) \mathbf{X}_{iu} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei n nicht der wirklichen Knotenanzahl, sondern der Anzahl der Knoten in der Schalenfläche entspricht. In den Vektoren \mathbf{X}_i sind die Ortsvektoren der Elementknoten in globalen Koordinaten enthalten:

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{io} \\ \mathbf{X}_{iu} \end{bmatrix} = [X_{io} \ Y_{io} \ Z_{io} \ X_{iu} \ Y_{iu} \ Z_{iu}]^T. \quad (2.32)$$

Es wird somit unterschieden zwischen den Ansätzen in der Schalenfläche, hier werden je nach Elementformulierung die entsprechenden Lagrange-Ansatzfunktionen verwendet, und dem Ansatz über die Dicke, hier wird entsprechend der gewählten Kinematik prinzipiell ein linearer Ansatz verwendet.

Die Geometrie der verformten Konfiguration ergibt sich durch die Addition

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) + \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.33)$$

mit der Geometrie der unverformten Konfiguration \mathbf{X} und der Verschiebungsapproximation \mathbf{u} .

Eingabe der Geometriedaten

Die numerische Berechnung erfordert zuerst die Eingabe der Geometriedaten, also der Knotenkoordinaten. Für die 'Solid-Shell' Elemente stehen wie im folgenden beschrieben zwei Varianten für die Eingabe der Elementgeometrie zur Verfügung. Auf Elementebene müssen dann die Geometriedaten in das entsprechende Format (2.32) überführt werden.

Die erste Variante erfordert die Eingabe der Knotenkoordinaten der Schalenmittelfläche \mathbf{X}_{im} , sowie die Eingabe der Schalendicke h . Dies entspricht der für Schalenelemente üblichen Vorgehensweise. In Abb. 2.8 wird diese Eingabevariante beispielhaft für die bilinearen '4-Knoten-Elemente' skizziert. Bei dieser Eingabevariante muss für

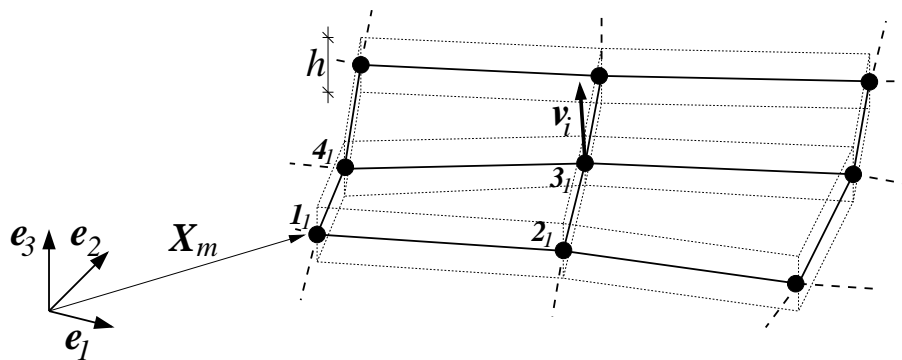


Abbildung 2.8: Beschreibung der 3D Schalengeometrie über die Eingabe von Mittel­flächenknoten und einer Schalendicke

jedes Element an jedem Knoten ein normierter Schalendirektor \mathbf{v}_i^e als Richtung der Elementkanten am Knoten ermittelt werden. Daraus wird dann für jeden Knoten ein gemittelter normierter Schalendirektor \mathbf{v}_i berechnet. Mit \mathbf{v}_i und den Koordinaten \mathbf{X}_{im} können dann die in (2.32) verwendeten Knotenkoordinaten

$$\mathbf{X}_{io} = \mathbf{X}_{im} + \frac{1}{2} h \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{iu} = \mathbf{X}_{im} - \frac{1}{2} h \mathbf{v}_i \quad (2.34)$$

bestimmt werden. Diese Eingabevariante kann nur bei einschichtigen reinen Schalenproblemen genutzt werden.

Die zweite Variante erfordert die direkte Eingabe der Knotenkoordinaten an der Schalenober- und unterseite \mathbf{X}_{io} und \mathbf{X}_{iu} , in Abb. 2.9 beispielhaft für ein biquadratisches '18-Knoten-Element' skizziert. Die Eingabereihenfolge der Knotenkoordinaten erfolgt analog zu der bei Volumenelementen gebräuchlichen Reihenfolge. Demzufolge müssen die Komponenten der Vektoren und Matrizen entsprechend der für die 'Solid-Shell' Elemente gebräuchlichen Anordnung der Knotenwerte umsortiert werden. Ansonsten können die eingegebenen Knotenkoordinaten direkt eingesetzt werden. Diese Variante ist für mehrschichtige Schalenprobleme, oder auch für eine Kombination mit Volumenelementen unumgänglich. Die Schalendicke h kann, falls sie beispielsweise in

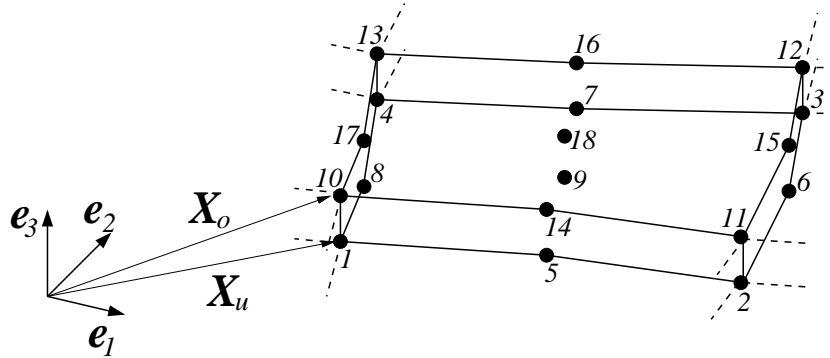


Abbildung 2.9: Beschreibung der 3D Schalengeometrie über die direkte Eingabe der Knoten an der Schalenober- und unterseite

einer Nachlaufrechnung benötigt wird, als Mittelwert der Schalendicken an den Elementknoten

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{X}_{io} - \mathbf{X}_{iu}| \quad (2.35)$$

angegeben werden.

2.3.2 Verschiebungsinterpolation

Für die Verschiebungen werden nach dem isoparametrischen Konzept die gleichen Ansätze wie für die Geometrieapproximation verwendet. Dementsprechend ergibt sich folgende Darstellung für die Verschiebungen in Abhängigkeit von den lokalen natürlichen Koordinaten ξ, η und ζ :

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = [u \ v \ w]^T = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \mathbf{d}_i \right)}_{\mathbf{D}^i} . \quad (2.36)$$

Die Verschiebungen u, v, w beziehen sich auf das globale kartesische Koordinatensystem. Die Ansatzfunktionen werden vereinfachend in der Matrix \mathbf{D}^i der Größe 3×6 zusammengefasst. Der Vektor \mathbf{d}_i beinhaltet die Verschiebungen des Knotens i an der Schalenober- und -unterseite, die sich ebenfalls auf das globale kartesische Koordinatensystem beziehen:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{io} \\ \mathbf{d}_{iu} \end{bmatrix} = [u_{io} \ v_{io} \ w_{io} \ u_{iu} \ v_{iu} \ w_{iu}]^T . \quad (2.37)$$

Als Ansatzfunktionen in der Tangentialebene N_i werden analog zur Geometrieapproximation die Lagrange-Ansatzfunktionen verwendet. Sie werden in den nächsten Ab-

schnitten für die verschiedenen Elementformulierungen erläutert. Die Interpolationsmatrix Θ für die Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung entspricht der in Glg. (2.3) dargestellten Matrix.

Für die in Abschnitt 2.2.2 beschriebene Vorgehensweise der Erhöhung der linearen Ansatzordnung für die Verschiebung w in Dickenrichtung auf eine quadratische Ansatzordnung durch Einführung zusätzlicher Knotenfreiwerte β_i ergibt sich die Verschiebungsinterpolation wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) &= [u \quad v \quad w]^T \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \mathbf{T}_u(\xi, \eta) \Theta(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d}_i \right)}_{\mathbf{D}^i}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Der Knotenverschiebungsvektor wird dann entsprechend um den Freiwert β_i erweitert:

$$\mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{i0} \\ \mathbf{d}_{iu} \\ \beta_i \end{bmatrix} = [u_{i0} \quad v_{i0} \quad w_{i0} \quad u_{iu} \quad v_{iu} \quad w_{iu} \quad \beta_i]^T. \quad (2.39)$$

Die Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{D}^i vergrößert sich entsprechend auf 3×7 Elemente. Die Interpolationsmatrix Θ für die Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung entspricht der um einen quadratischen Term erweiterten in Glg. (2.14) dargestellten Matrix. Eine Transformation der globalen Verschiebungen auf ein lokales Koordinatensystem mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{T}_u und die anschließende Rücktransformation wird erforderlich, um die nur für die Verschiebung w in Dickenrichtung bestimmte quadratische Approximationserweiterung korrekt auf diese anzuwenden. Dafür wird entsprechend der Vorgehensweise in [37] ein lokales kartesisches Koordinatensystem mit einer Achse \mathbf{z}' in Elementdickenrichtung und den Achsen \mathbf{x}' und \mathbf{y}' tangential zur Schalenmittelfläche an. Eine Transformation auf ein lokales konvекtives Koordinatensystem ist nicht erforderlich. Die Transformationsmatrix \mathbf{T}_u wird mit Hilfe der Basisvektoren des lokalen kartesischen Koordinatensystems wie folgt zusammengesetzt:

$$\mathbf{T}_u = [\mathbf{x}' \quad \mathbf{y}' \quad \mathbf{z}'] . \quad (2.40)$$

Dieses Koordinatensystem muss bei der numerischen Integration an jedem Integrationspunkt aufgestellt werden. Da es sich um ein kartesisches Koordinatensystem handelt, ist die transponierte Transformationsmatrix mit der Inversen identisch und kann deshalb, wie in Gleichung (2.38) dargestellt, auch für die Rücktransformation verwendet werden. Die Basisvektoren der verformten Konfiguration lassen sich an einem beliebigen Punkt des Elementes wie folgt angeben:

$$\mathbf{x}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \right|}, \quad \mathbf{z}' = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_m}{\partial \eta} \right|}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{x}' \times \mathbf{z}' . \quad (2.41)$$

Bei \mathbf{x}_m handelt es sich um die Koordinaten der Mittelfläche in der verformten Konfiguration. Sie werden vereinfacht in Abhängigkeit von ξ und η als

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_m(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta = 1) + \mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta = -1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(N_i(\xi, \eta) \left(\mathbf{X}_{io} + \mathbf{X}_{iu} + \mathbf{d}_{io} + \mathbf{d}_{iu} \right) \right)\end{aligned}\quad (2.42)$$

approximiert. Alternativ wäre eine Transformation auf ein lokales konvektives Koordinatensystem sinnvoll mit den Basisvektoren $\mathbf{g}_i(\xi, \eta, 0)$ bezüglich der Schalenmittelfläche, die in \mathbf{T}_u spaltenweise anzuordnen wären.

2.3.3 Elementmatrizen

In den folgenden Abschnitten sollen die auf Elementebene zu berechnenden und auszuwertenden Matrizen zusammengestellt werden. Aus den Elementunterprogrammen erfolgt immer die Übergabe einer tangentiellen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{tang}^e und eines Elementresiduums \mathbf{f}^e , die dann auf globaler Ebene entsprechend zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{tang} und dem Gesamtresiduum \mathbf{f} zusammengebaut werden.

Numerische Integration

Die Elementmatrizen werden durch Integration über das Elementvolumen berechnet, wobei eine Projektion des Verzerrungszustandes auf einen Einheitswürfel der Seitenlänge $l = 2$ erfolgt. Dadurch ergibt sich ein konstanter Integrationsbereich. Die Durchführung der Integration erfolgt wie meist üblich numerisch mit Hilfe der Gauss-Legendre Quadratur. Es werden hier die zu integrierenden Terme an den Stützstellen des Legendre Polynoms ausgewertet und entsprechend gewichtet. Die auszuwertenden Integrale können somit in leicht zu berechnende Summen diskreter Stützwerte umgewandelt werden. Beispielfhaft werden in Tab. 2.1 die Koordinaten der Stützstellen und

n	ξ_i	W_i
1	$\xi_1 = 0$	$W_1 = 2$
2	$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} ; \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$W_1 = 2 ; W_2 = 2$
3	$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} ; \xi_2 = 0 ; \xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$W_1 = \frac{5}{9} ; W_2 = \frac{8}{9} ; W_3 = \frac{5}{9}$

Tabelle 2.1: Koordinaten und Wichtungsfaktoren für numerische Gauss-Legendre Integration mit ein bis drei Integrationspunkten

die zugehörigen Wichtungsfaktoren für eine Integration mit bis zu drei Integrationspunkten dargestellt. Weitere Details zur Gauss-Quadratur oder allgemein zur numerischen Integration sind [17] zu entnehmen.

Mit der Gauss Integration können Polynome bis zu der Ordnung

$$m = 2n - 1 \tag{2.43}$$

bei Verwendung von n Gausspunkten exakt integriert werden. In der Tangentialebene der Elemente sind bei bilinearer Ansatzordnung Terme bis zu zweiter Ordnung vorhanden, d.h. es ist eine Integration mit zwei Gausspunkten in beiden Richtungen notwendig. Bei biquadratischer Ansatzordnung sind dementsprechend Terme bis zu vierter Ordnung vorhanden, weshalb für die Integration drei Gausspunkte in beide Richtungen erforderlich sind.

In Dickenrichtung ist bei Verwendung von elastischen Materialgesetzen eine Integration mit zwei Integrationspunkten sowohl für die bilinearen als auch die biquadratischen Elemente ausreichend. Alternativ ist bei Verwendung eines linear elastischen Materials zur Steigerung der Effizienz auch eine analytische Vorabintegration in Dickenrichtung möglich. Diese Vorgehensweise wird z.B. in [10] vorgeschlagen, soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit aber nicht verfolgt werden. Bei elastoplastischen Materialien wird vorgeschlagen eine, höhere Anzahl von Integrationspunkten zu verwenden. Damit kann gewährleistet werden, dass sowohl der Spannungsverlauf in der Querschnittsdickenrichtung als auch plastische Bereiche möglichst genau erfasst werden können. Alternativ bietet sich für die Integration in Dickenrichtung die Verwendung der Simpsonregel an. Bei der Simpsonregel sind Integrationspunkte am Rand ($\zeta = \pm 1$) vorhanden. Dies hat den Vorteil, dass die bei Biegebeanspruchung maximalen Spannungen an der Schalenober- und unterseite berücksichtigt werden.

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor ohne erweiterte Verzerrungen

Werden keine erweiterten Verzerrungen (EAS-Methode) eingesetzt, dann ergeben sich die Steifigkeitsmatrix und der Elementresidualvektor aus den zum Verschiebungsansatz kompatiblen Verzerrungsanteilen. Eventuell durchgeführte Modifikationen mit der Methode der angenommenen Verzerrungen haben keinen Einfluss auf die grundsätzliche Gestalt der Steifigkeitsmatrix und des Elementresidualvektors. Nach der Abbildung des Elementes auf ein quadratisches Einheitselement mit der Seitenlänge $l = 2$ und der Einführung des lokalen, natürlichen Koordinatensystems mit den Koordinaten ξ, η, ζ lässt sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix aus der Linearisierung $(\Pi_{int})_{,d_e d_e}$ und der Elementresidualvektor $(\Pi_{int})_{,d_e}$ wie folgt darstellen

$$\mathbf{K}_{tang}^e = \int_V \left(\underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{,d_e}^T}_{\mathbf{B}^T} \mathbf{C} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{,d_e}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{,d_e d_e}^T}_{\mathbf{H}} \boldsymbol{\sigma} \right) dV$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \mathbb{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^T \boldsymbol{\sigma}) \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e &= \mathbf{f}_{ext}^e - \mathbf{f}_{int}^e = \mathbf{f}_{ext}^e - \int_V \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T}_{\mathbf{B}^T} \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ &= \mathbf{f}_{ext}^e - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e}^T \boldsymbol{\sigma} \det \mathbf{J} \, d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Bei $\det \mathbf{J}$ handelt es sich um die Determinante der Jacobi-Matrix, die die partiellen Ableitungen der unverformten Schengeometrie \mathbf{X} nach den natürlichen Koordinaten ξ, η und ζ enthält:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial X}{\partial \zeta} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Die Integrale aus Gleichung (2.44) und (2.45) lassen sich mit Hilfe der Gauss Integration als Summe über die Integrationspunkte darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tang}^e &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \mathbb{C}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \mathbf{B}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{H}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \boldsymbol{\sigma}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \right) \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) W_i W_j W_k, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^e &= \mathbf{f}_{ext}^e - \\ &\quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \boldsymbol{\sigma}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) W_i W_j W_k, \end{aligned} \quad (2.48)$$

mit $m \times m$ Gausspunkten in der Schalenfläche und n Gausspunkten in Dickenrichtung. Die in (2.44) und (2.45) benötigten Matrizen werden aus dem Verschiebungsansatz berechnet, der vereinfacht als

$$\mathbf{u} = \mathbf{D} \mathbf{d}_e \quad (2.49)$$

dargestellt wird. Dabei sind in der Ansatzmatrix \mathbf{D} die Matrizen \mathbf{D}^i entsprechend Glg. (2.36) und (2.38) angeordnet, worauf sich bei nst Freiwerten pro Element eine Größe von $3 \times nst$ ergibt. Dementsprechend sind im Elementknotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e die Vektoren \mathbf{d}_i den Glgn. (2.37) und (2.39) folgend angeordnet, der somit über nst Elemente verfügt. Die Ableitungen der Verschiebungen nach den natürlichen Koordinaten ξ, η und ζ lassen sich durch Ableiten der Matrix \mathbf{D} ermitteln:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \mathbf{D}_{,\xi} \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \zeta} = \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e. \quad (2.50)$$

Somit ergibt sich der Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\xi} \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\xi} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\xi} \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e + \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\eta} \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\xi} \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\zeta} \mathbf{d}_e \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B} berechnet sich aus der Ableitung der Verzerrungen nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e :

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\xi} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\xi} \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\eta} \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\xi} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\xi} \\ \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} \\ \mathbf{G}_2^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\eta} \\ \mathbf{G}_1^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{G}_3^T \mathbf{D}_{,\xi} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{d}_e^T \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\xi} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Die zweite Ableitung von $\boldsymbol{\varepsilon}$ nach \mathbf{d}_e ergibt die dreistufige Matrix \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon}_{,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\xi} \\ \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\eta} \\ \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\xi} \\ \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} \\ \mathbf{D}_{,\eta}^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\eta} \\ \mathbf{D}_{,\xi}^T \mathbf{D}_{,\zeta} + \mathbf{D}_{,\zeta}^T \mathbf{D}_{,\xi} \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Somit stehen alle Elementmatrizen zur Verfügung, die bei einer reinen Verschiebungsformulierung mit richtungstreuen Knotenlasten benötigt werden. In den folgenden Abschnitten werden die zusätzlichen für gemischte Elementformulierungen (EAS), Volumenlasten und bei verformungsabhängiger Belastung benötigten Elementmatrizen zusammengestellt.

Elementmatrizen für gemischte FE-Formulierung (EAS-Methode)

Wird die in Abschnitt 1.3.3 ausführlich beschriebene EAS-Methode verwendet, ist die Ermittlung weiterer Elementmatrizen erforderlich, die in Glg. (1.92) enthalten sind. Die Ableitung der erweiterten Verzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ aus Glg. (1.100) nach dem Vektor der zusätzlichen Parameter $\boldsymbol{\alpha}_e$ ergibt:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{,\boldsymbol{\alpha}_e} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_E \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}. \quad (2.54)$$

Somit lassen sich die Matrizen aus Glg. (1.92) angeben:

$$\mathbf{L}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{M}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{M}} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{D}_e = \int_V \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{M}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} \tilde{\mathbf{M}} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{P}_e = \int_V \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_k + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.57)$$

Der Vektor der äußeren Lasten

Wie in Gleichung (1.59) beschrieben, setzt sich das äußere Potential aus den Arbeitsanteilen der Volumen- und Oberflächenkräfte zusammen. Aus Gleichung (1.71) ist ersichtlich, dass sich der äußere Lastvektor \mathbf{f}_{ext} als Ableitung des äußeren Potentials nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d} darstellen lässt:

$$\mathbf{f}_{ext} = -(\Pi_a)_{,\mathbf{d}} = \underbrace{\int_V \rho_0 \mathbf{u}_{,\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{b} dV}_{\mathbf{f}_{ext}^V} + \underbrace{\int_A \mathbf{u}_{,\mathbf{d}}^T \cdot \mathbf{t}_0 dA}_{\mathbf{f}_{ext}^O}, \quad (2.58)$$

wobei zwischen Oberflächenkräften \mathbf{f}_{ext}^O und Volumenkräften \mathbf{f}_{ext}^V unterschieden wird. Die Oberflächenkräfte \mathbf{f}_{ext}^O werden global als Knotenlasten bei der Beschreibung des Problems festgelegt. Sie können somit als gegeben angesehen und müssen programmiertechnisch nicht gesondert berücksichtigt werden.

Für die Volumenkräfte erfolgt die Eingabe der Dichte des Körpers ρ_0 , sowie die Eingabe der Komponenten eines Beschleunigungsvektors b_i , der die Richtung der Belastung beschreibt. Aus den Komponenten b_i wird der normierte Vektor \mathbf{b} ermittelt:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Um den Elementlastvektor der Volumenkräfte \mathbf{f}_v^e zu bestimmen, wird wieder die in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Verschiebungsapproximation verwendet. Dabei wird die Interpolation der Verschiebungen in Dickenrichtung vernachlässigt, und es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Belastungsanteile der oberen und unteren Knoten gleich groß sind. Daraus ergibt sich folgende vereinfachte Darstellung der Ableitung der Verschiebungen nach dem Knotenverschiebungsvektor:

$$\mathbf{u}_{,\mathbf{d}_e} = \mathbf{N}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots & N_n \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Die Matrix \mathbf{N} verfügt entsprechend der Gesamtanzahl der Freiheitsgrade pro Element über $n \times 6$ Spalten. Für die ...3Dq Elemente, die pro Knotenpaar über einen zusätzlichen Freiheitsgrad verfügen, erweitert sich die Matrix um je eine Spalte mit Nullen nach jeder sechsten Spalte, womit sich die Gesamtanzahl der Spalten auf $n \times 7$ vergrößert. Durch Einsetzen, Projektion auf das quadratische Einheitselement und Anwenden der Gauss-Legendre Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_v^e &= \int_V \rho_0 \frac{1}{2} \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{b} dV \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T(\xi, \eta) \mathbf{b} \det \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \frac{1}{2} \rho_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \mathbf{N}^T(\xi_i, \eta_i) \mathbf{b} \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_i, \zeta_j) W_i W_j, \tag{2.61}
 \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass die Dichte ρ_0 konstant ist.

Elementsteifigkeitsmatrix und -lastvektor für verformungsabhängige Druckbelastung

Die Verwendung verformungsabhängiger Druckbelastungen für nichtlineare FE-Berechnungen wird ausführlich in [66] behandelt. Bei der Linearisierung des Potentials der verformungsabhängigen Belastung ergibt sich ein zusätzlicher Anteil zur Elementsteifigkeitsmatrix. Hier soll der Fall einer verformungsabhängige Druckbelastung betrachtet werden, d.h. gegeben ist der Schalendruck p_0 der im Laufe der Deformation immer normal zur Schalenoberfläche gerichtet sein soll. Dementsprechend lässt sich die Druckbelastung auf das 'Solid-Shell' Element mit Hilfe eines Einheitsnormalenvektors

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{|\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}|}, \tag{2.62}$$

der senkrecht auf der Schalenoberfläche in der verformten Konfiguration steht, definieren als

$$\mathbf{p} = p_0 \mathbf{n}. \tag{2.63}$$

Die Variation des Potentialterms für die verformungsabhängige Druckbelastung ergibt sich damit zu:

$$\delta \Pi_{ext}^p = -p_0 \int_A \delta \mathbf{u} \mathbf{n} dA. \tag{2.64}$$

Es erfolgt die Transformation auf die lokalen konvektiven Koordinaten des Einheits-
elements mit $dA = |\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}| d\xi d\eta$; (2.62) wird in (2.64) eingesetzt und es folgt der
Übergang auf die diskrete Form

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}_e \quad (2.65)$$

mit der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{D} und dem Elementknotenverschiebungsvektor
 \mathbf{d}_e :

$$\delta \Pi_{ext}^p = -\delta \mathbf{d}_e^T p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta . \quad (2.66)$$

Die Linearisierung von (2.66) führt auf

$$\begin{aligned} \Delta \delta \Pi_{ext}^p &= \frac{\partial \delta \Pi_{ext}^p}{\partial \mathbf{d}_e} = -\delta \mathbf{d}_e^T p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta, \mathbf{d}_e} + \mathbf{x}_{,\xi, \mathbf{d}_e} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \\ &= -\delta \mathbf{d}_e^T p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{D}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Somit ergeben sich die zusätzlichen Anteile zur Elementsteifigkeitsmatrix aufgrund der
verformungsabhängigen Druckbelastung zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_p^e &= -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{D}_{,\eta} + \mathbf{D}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \\ &= -p_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^T(\xi_i, \eta_i) (\mathbf{x}_{,\xi}(\xi_i, \eta_i) \times \mathbf{D}_{,\eta}(\xi_i, \eta_i) + \mathbf{D}_{,\xi}(\xi_i, \eta_i) \times \mathbf{x}_{,\eta}(\xi_i, \eta_i)) W_i , \end{aligned} \quad (2.68)$$

und der Anteil zum Elementlastvektor als:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p^e &= -p_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{D}^T (\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}) d\xi d\eta \\ &= -p_0 \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^T(\xi_i, \eta_i) (\mathbf{x}_{,\xi}(\xi_i, \eta_i) \times \mathbf{x}_{,\eta}(\xi_i, \eta_i)) W_i . \end{aligned} \quad (2.69)$$

2.3.4 Bilineare 'Solid-Shell' Elemente

Als bilinear werden die 'Solid-Shell' Elemente bezeichnet, für die als Approximation
der Geometrie und der Verschiebungen in der Schalenfläche die bilinearen Lagrange-
Ansatzfunktion

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1 \dots 4 \quad (2.70)$$

verwendet werden. Sie verfügen somit über vier Knoten in der Schalenfläche und zwei Knoten über die Dicke und werden dementsprechend auch als 8-Knoten-Elemente bezeichnet.

DIS3D Element

Das DIS3D Element entspricht einem reinen Verschiebungselement mit trilinearen Ansatzfunktionen. Es verfügt über keine schalenspezifischen Modifikationen und kann somit nicht als 'Solid-Shell' Element bezeichnet werden, wird aber für Vergleichsberechnungen innerhalb dieser Arbeit eingesetzt. Die Integration der Elementmatrizen erfolgt standardmäßig mit $2 \times 2 \times 2$ Gausspunkten, im Spezialfall erfolgt eine reduzierte Integration mit nur einem Gausspunkt. Die reduziert integrierte Variante wird als DIS3D-ri Element bezeichnet.

ANS3DL Element

Beim ANS3DL Element werden die Querschubverzerrung, wie in Kapitel 2.2.1 ausführlich beschrieben, durch einen ANS-Ansatz nach Bathe und Dvorkin [27] modifiziert. Ansonsten werden keine Veränderungen im Vergleich zu einem trilinearen Kontinuumsselement vorgenommen. Das Kürzel 3D in der Elementbezeichnung deutet auf den dreidimensionalen Charakter der 'Solid-Shell' Formulierungen hin. Der Buchstabe L sagt aus, dass in Dickenrichtung ein linearer Ansatz ohne Modifikationen verwendet wird.

Mit Hilfe des ANS-Verfahrens werden die Querschubverzerrungen $E_{\eta\zeta}$ und $E_{\zeta\xi}$ verändert. Die Verzerrung $E_{\eta\zeta}$ wird als konstant in η -Richtung und als linear veränderlich in ξ -Richtung entsprechend Glg. (2.4) angenommen. Die Auswertung von $E_{\eta\zeta}$ erfolgt an den Stützstellen $(\xi = -1, \eta = 0)$ und $(\xi = 1, \eta = 0)$. Analog dazu wird die Verzerrung $E_{\zeta\xi}$ an den Stützstellen $(\xi = 0, \eta = -1)$ und $(\xi = 0, \eta = 1)$ ausgewertet und es wird ein Verlauf linear veränderlich in η -Richtung und konstant in ξ -Richtung entsprechend Glg. (2.5) angenommen. Die angenommenen Verzerrungsansätze für die Querschubverzerrungen werden für alle in den nächsten Abschnitten vorgestellten Elementformulierungen verwendet.

ANS3Dq Element

Das ANS3Dq Element basiert auf einer hierarchisch quadratischen Interpolation für die Verschiebung w' in Dickenrichtung über die Dicke. Daraus resultiert für die Verzerrung in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ ein linear veränderlicher Anteil in ζ , wie dies zur Vermeidung des Dickenversteifungseffekts gefordert wird. Dementsprechend wird die Verschiebungsinterpolation (siehe Glg. (2.36)) erweitert:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \mathbf{T}_u(\xi, \eta) \bar{\Theta}(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e^i \right), \quad (2.71)$$

mit der um einen quadratischen Anteil in ζ erweiterten Interpolationsmatrix $\bar{\Theta}(\zeta)$ (Glg. (2.14)). Der Verschiebungsvektor der Elementknotenpaare muss dementsprechend ebenfalls um einen zusätzlichen Freiheitsgrad erweitert werden:

$$\mathbf{d}_e^i = [\bar{\mathbf{u}}_{iu}^T, \bar{\mathbf{u}}_{il}^T, \beta_i]^T = [\bar{u}_{iu}, \bar{v}_{iu}, \bar{w}_{iu}, \bar{u}_{il}, \bar{v}_{il}, \bar{w}_{il}, \beta_i]^T. \quad (2.72)$$

Somit verfügt das ANS3Dq Element über sieben Freiheitsgrade pro Elementknotenpaar. Außerdem ist eine Transformation der Matrix $\bar{\Theta}(\zeta)$ erforderlich, wobei die Matrix \mathbf{T}_u (siehe Glg. (2.40)) verwendet wird.

ANS3DEAS Element

Beim ANS3DEAS Element werden die Verzerrungen in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ um einen in ζ -Richtung linear veränderlichen Anteil unter Verwendung der in Kapitel 1.3.3 beschriebenen EAS-Methode erweitert. Ziel der Erweiterung ist es, die Kompatibilität der Normalverzerrung in Dickenrichtung zu den Membranverzerrungen in der Schalenfläche herzustellen. Dementsprechend werden mit Hilfe der Erweiterungsmatrix \mathbf{M} aus Glg. (1.100) folgende drei fehlenden Anteile hinzugefügt:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ enthält demzufolge drei zusätzliche unbekannte Variablen:

$$\boldsymbol{\alpha}_e = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T, \quad (2.74)$$

Ansonsten entspricht das ANS3DEAS Element dem im Abschnitt 2.3.4 beschriebenen ANS3DL Element.

EAS3DEAS Element

Das EAS3DEAS Element enthält alle Erweiterungen des ANS3DEAS Elementes. Zusätzlich wird noch ein EAS-Ansatz für die Membranverzerrungen hinzugefügt, um auch die Membraneigenschaften des Elementes zu verbessern. Genauer gesagt werden zu den drei Anteile für die Normalverzerrung in Dickenrichtung noch vier Anteile für die Membranverzerrungen hinzugefügt, die aufgrund der gewählten Verschiebungsapproximation in den kompatiblen Verzerrungsanteilen nicht enthalten sind. Die Erwei-

terungsmatrix M ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

Dementsprechend enthält der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ sieben unbekannte Freiwerte:

$$\boldsymbol{\alpha}_e = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_7]^T, \quad (2.76)$$

eas3DEAS Element

Das eas3DEAS Element entspricht weitgehend dem EAS3DEAS Element. Es werden lediglich nochmals zwei zusätzlich Verzerrungsanteile hinzugefügt, die entsprechend Glg. (2.21) ein volumetrisches Versteifen vermeiden sollen. Die Erweiterungsmatrix M und der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ ergeben sich somit zu:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_e = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_9]^T. \quad (2.78)$$

EAS3Dq und eas3Dq Element

Eine weitere Elementvariation ergibt sich durch die alternative Verwendung der quadratischen Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung für die in den vorigen Kapiteln besprochenen beiden EAS-Elemente EAS3DEAS und eas3DEAS. Diese Elemente entsprechen somit dem ANS3Dq Element aus Abschnitt 2.3.4 zuzüglich einer EAS-Erweiterung für die Membranverzerrungen analog zum EAS3DEAS Element (Abschnitt 2.3.4) und zum eas3DEAS Element (Abschnitt 2.3.4). Dementsprechend ergibt sich für das EAS3Dq Element folgende Erweiterungsmatrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Für das eas3Dq Element ergibt sich \mathbf{M} zu:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ enthält somit vier bzw. sechs unbekannte Freiwerte.

Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile

Vorausgesetzt es ist ein Materialgesetz vorhanden, das eine Aufspaltung in deviatorische und volumetrische Anteile zulässt, dann kann, siehe Abschnitt 2.2.3, zur Vermeidung der volumetrischen Versteifung eine reduzierte Integration der volumetrischen Anteile durchgeführt werden. Für die hier betrachteten Elemente mit bilinearen Ansätzen werden bei vollständiger Integration 2×2 Gausspunkte in der Schalenfläche verwendet. Dementsprechend wird die reduzierte Integration für die volumetrischen Anteile mit nur einem Gausspunkt in der Schalenfläche durchgeführt. Die Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung bleibt unbeeinflusst. Die Elemente, die die selektiv reduzierte Integration verwenden, werden mit dem Kürzel ...-rv gekennzeichnet.

Angenommene Verzerrungen für Normalverzerrung in Dickenrichtung

Zur Vermeidung des in Abschnitt 2.2.4 diskutierten Trapezoidal Locking Effekts, wird z.B. in [11] die Verwendung der Methode der angenommenen Verzerrungen für die Normalverzerrung in Dickenrichtung vorgeschlagen. Die Auswertung der Verzerrung $E_{\zeta\zeta}$ erfolgt dabei an den Knotenpunkten, an denen ein Versteifungseffekt nicht zu erwarten ist. Die Interpolation von $E_{\zeta\zeta}$ über die Schalenfläche ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\zeta\zeta} = & N_1(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_1=-1,\eta_1=-1) + N_2(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_2=1,\eta_2=-1) + N_3(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_3=1,\eta_3=1) + \\ & N_4(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_4=-1,\eta_4=1), \end{aligned} \quad (2.81)$$

mit den bilinearen Ansatzfunktionen N_i aus Glg. (2.70). Die Elemente mit angenommener Normalverzerrung in Dickenrichtung werden mit dem Kürzel ...-at gekennzeichnet.

2.3.5 Biquadratische 'Solid-Shell' Elemente

Als biquadratisch werden die 'Solid-Shell' Elemente bezeichnet, die für die Approximation der Geometrie und der Verschiebungen in der Schalenfläche die biquadratischen Lagrange-Ansatzfunktion

$$N_i(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{2} \xi \xi_i (1 + \xi \xi_i) + (1 - \xi^2) (1 - \xi_i^2) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \eta \eta_i (1 + \eta \eta_i) + (1 - \eta^2) (1 - \eta_i^2) \right), \quad i = 1 \dots 9. \quad (2.82)$$

enthalten. Sie verfügen somit über neun Knoten in der Schalenfläche und zwei Knoten über die Dicke und werden dementsprechend auch als 9- bzw. 18-Knoten-Elemente bezeichnet.

DI9K3D Element

Das DI9K3D Element entspricht der reinen Verschiebungsformulierung und enthält bi-quadratische Ansätze in der Schalenfläche und einen linearen Ansatz in Dickenrichtung. Schalenspezifische Modifikationen werden keine genutzt, d.h. es handelt sich weniger um ein 'Solid-Shell' Element als um ein biquadratisch-lineares 18-Knoten Kontinuums-element. Die Integration der Elementmatrizen erfolgt mit $3 \times 3 \times 2$ Gausspunkten, bei der vollständig reduziert-integrierten Variante DI9K3D-ri werden $2 \times 2 \times 1$ Gausspunkte verwendet.

MI9K3DL Element

Beim MI9K3DL Element werden die Membran- und die Querschubverzerrung, wie in Kapitel 2.2.1 ausführlich beschrieben durch einen Ansatz angenommener Verzerrungen, vorgeschlagen von Bathe und Bucalem [18] für deren MITC9 Element, modifiziert. Dies führt zum Kürzel MI in der Elementbezeichnung. Das Kürzel 9K wird hier für alle biquadratischen Elemente verwendet, die neun Knoten in der Schalenfläche aufweisen. Der Buchstabe L sagt aus, dass in Dickenrichtung ein linearer Ansatz ohne weitere Modifikationen verwendet wird.

Mit Hilfe des Ansatzes angenommener Verzerrungen (ANS) werden sowohl für die Membranverzerrungen $E_{\xi\xi}$, $E_{\eta\eta}$ und $E_{\xi\eta}$ als auch für die Querschubverzerrungen $E_{\eta\zeta}$ und $E_{\zeta\xi}$ Verzerrungsverläufe entsprechend den Glgn. (2.6)-(2.10) angesetzt. Die erforderlichen Interpolationsfunktionen sind den Glgn. (2.11)-(2.13) zu entnehmen. Die Auswertung der kompatiblen Verzerrungsanteile erfolgt an den in Bild 2.3 dargestellten Stützstellen. Diese Verzerrungsansätze für die Membran- und Querschubverzerrungen werden für alle in den folgenden Abschnitten vorgestellten biquadratischen Elementformulierungen verwendet.

MI9K3Dq Element

Das MI9K3Dq Element basiert analog zum ANS3Dq Element auf einer hierarchisch quadratischen Interpolation für die Verschiebung w' in Dickenrichtung. Daraus ergibt sich direkt die zur Vermeidung des Dickenversteifungseffekts geforderte in ζ linear veränderliche Approximation für die Verzerrung in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$. Die Verschie-

bung्सinterpolation (Glg. (2.36)) wird entsprechend erweitert zu:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{1}{2} N_i(\xi, \eta) \mathbf{T}_u(\xi, \eta) \bar{\Theta}(\zeta) \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{T}_u^T(\xi, \eta) & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{d}_e^i \right). \quad (2.83)$$

Verwendet wird wiederum die Interpolationsmatrix aus Glg. (2.14) und die Transformationsmatrix \mathbf{T}_u (siehe Glg. (2.40)). Der Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e^i wird entsprechend Glg. (2.72) erweitert. Somit enthält das MI9K3Dq Element einen zusätzlichen globalen siebten Freiheitsgrad pro Elementknotenpaar.

MI9K3DEAS Element

Beim MI9K3DEAS Element werden alternativ zum MI9K3Dq Element direkt die Verzerrungen in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ um einen in ζ -Richtung linear veränderlichen Anteil unter Verwendung der in Kapitel 1.3.3 beschriebenen EAS-Methode erweitert, um wiederum die Kompatibilität der Normalverzerrung in Dickenrichtung zu den Membranverzerrungen des Elements herzustellen. Die Erweiterungsmatrix \mathbf{M} aus Glg. (1.100) enthält dementsprechend acht zusätzliche Anteile:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta & \xi\zeta & \eta\zeta & \xi\eta\zeta & \xi^2\zeta & \eta^2\zeta & \xi^2\eta\zeta & \xi\eta^2\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.84)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ enthält demzufolge acht zusätzliche unbekannte Variable:

$$\boldsymbol{\alpha}_e = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_8]^T. \quad (2.85)$$

Selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile

Wie bereits in Abschnitt 2.3.4, werden auch die biquadratischen Elemente, bei Verwendung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile mit dem Kürzel ...-rv gekennzeichnet. In der Schalenfläche erfolgt für die biquadratischen Elemente die vollständige Integration mit 3×3 Gausspunkten. Demzufolge werden bei selektiv reduzierter Integration die volumetrischen Anteile mit 2×2 Gausspunkten integriert. Die Anzahl der Integrationspunkte in Dickenrichtung bleibt davon unbeeinflusst.

Angenommene Verzerrungen für die Normalverzerrung in Dickenrichtung

Für die biquadratischen Elemente wird zur Vermeidung des 'Trapezoidal Locking' Effekts analog zum Vorgehen bei linearen Ansätzen [8] eine Verzerrungsapproximation für die Normalverzerrung in Dickenrichtung $E_{\zeta\zeta}$ vorgeschlagen. $E_{\zeta\zeta}$ wird hierfür an den

2.3. FE-DISKRETISIERUNG VON 'SOLID-SHELL' SCHALENELEMENTEN

Knotenpunkten ausgewertet und mit Hilfe der biquadratischen Ansatzfunktionen (Glg. (2.82)) in der Schalenfläche interpoliert:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\zeta\zeta} = & N_1(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_1=-1,\eta_1=-1) + N_2(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_2=1,\eta_2=-1) + N_3(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_3=1,\eta_3=1) + \\ & N_4(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_4=-1,\eta_4=1) + N_5(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_5=0,\eta_5=-1) + N_6(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_6=1,\eta_6=0) + \\ & N_7(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_7=0,\eta_7=1) + N_8(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_8=-1,\eta_8=0) + N_9(\xi,\eta) E_{\zeta\zeta}(\xi_9=0,\eta_9=0) . \quad (2.86)\end{aligned}$$

Analog zu den bilinearen Elementen werden auch die biquadratischen Elemente, die angenommene Verzerrungen für die Normalverzerrung in Dickenrichtung verwenden, mit dem Kürzel ...-at gekennzeichnet.

2.3.6 Tabellarische Zusammenstellung aller 'Solid-Shell' Elementformulierungen

In Tabelle 2.2 soll nochmals ein Überblick über alle in dieser Arbeit vorgestellten Elementformulierungen und deren Bezeichnungen gegeben werden.

Elementname	Ansatzfunktionen in der Schalenfläche	Modifikation der Membranverzerrungen	Modifikation der Normalverzerrung in Dickenrichtung	Modifikation der Querschubverzerrungen
DIS3D	bilin. Lagr.	-	-	-
ANS3DL	bilin. Lagr.	-	-	ANS
ANS3Dq	bilin. Lagr.	-	quadr. hierarch. Ansatz für w	ANS
EAS3Dq	bilin. Lagr.	4-Param.-EAS	quadr. hierarch. Ansatz für w	ANS
eas3Dq	bilin. Lagr.	6-Param.-EAS	quadr. hierarch. Ansatz für w	ANS
DI3DEAS	bilin. Lagr.	-	3-Param.-EAS	-
ANS3DEAS	bilin. Lagr.	-	3-Param.-EAS	ANS
EAS3DEAS	bilin. Lagr.	4-Param.-EAS	3-Param.-EAS	ANS
eas3DEAS	bilin. Lagr.	6-Param.-EAS	3-Param.-EAS	ANS
DI9K3D	biquad. Lagr.	-	-	-
MI9K3DL	biquad. Lagr.	ANS	-	ANS
MI9K3Dq	biquad. Lagr.	ANS	quadr. hierarch. Ansatz für w	ANS
MI9K3DEAS	biquad. Lagr.	ANS	8-Param.-EAS	ANS
...-ri	vollständig reduzierte Integration			
...-rv	selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Terme			
...-at	angenommener Verlauf für Normalverzerrungen in Dickenrichtung			

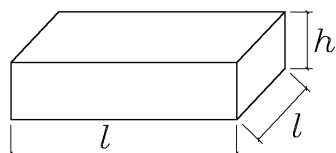
Tabelle 2.2: Tabellarische Auflistung aller Varianten von 'Solid-Shell' Elementformulierungen mit den zugehörigen Elementmodifikationen

2.4 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel sollen die in den vorigen Abschnitten vorgestellten bilinearen und biquadratischen 'Solid-Shell' Elemente anhand ausgewählter numerischer Beispiele untersucht werden. Dabei gilt ein besonderes Augenmerk dem Auftreten der verschiedenen Versteifungseffekte für die vorgeschlagenen Elementvarianten.

2.4.1 Untersuchung von Eigenwerten und Eigenformen

In diesem Abschnitt werden die Eigenwerte und Eigenformen eines einzelnen Elementes für jede der vorgestellten Elementformulierungen untersucht. Das Ziel dieser Untersuchung ist es, das eventuelle Auftreten von Kinematiken (Null-Energie-Moden) und die Neigung zu Versteifungen zu überprüfen. Die Berechnungen werden an einem einzelnen



<i>Geometrie:</i>	<i>Material:</i>
$l = 5$	$E = 10.92$
$h = 0.1$	

Abbildung 2.10: Geometrie- und Materialeigenschaften des einzelnen quaderförmigen Elementes für die Eigenwertuntersuchung; Diskretisierung erfolgt mit einem 'Solid-Shell' Element

quaderförmigen Element durchgeführt, die Geometriedaten sind Abb. 2.10 zu entnehmen.

Es erfolgt eine Variation der Querdehnzahlen mit $\nu = 0.0$, $\nu = 0.3$ und $\nu = 0.499$. Die Ergebnisse für diese Fälle sind in den Tabellen 2.3, 2.4 und 2.5 dargestellt. Mit $\nu = 0.499$ wird ein nahezu inkompressibles Verhalten erzeugt. Hierfür werden die Eigenformen des ANS3DEAS Elements für die hohen Eigenwerte (Eigenwerte 21.-24. in Tabelle 2.5) in Abb. 2.11 dargestellt. Auf der Basis analytischer Überlegungen ist nur der erste dieser vier Eigenwerte zu erwarten, da keine bzw. nur eine geringe Volumenänderung möglich ist. Die anderen drei sehr hohen Eigenwerte sollten nicht auftreten, d.h. sie sind eine Folge der Diskretisierung und führen zur sogenannten volumetrischen Versteifung. Für die Elemente mit quadratischer Verschiebungsinterpolation über die Dicke, die ...3Dq Elemente mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad β sollte analog theoretisch im nahezu inkompressiblen Fall lediglich ein zweiter hoher Eigenwert auftreten. Dies wird über eine selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile (...rv Elemente) erreicht. Die Ergebnisse lassen sich damit zusammenfassen:

- Der Unterschied der Ergebnisse zwischen den Elementen mit quadratischer Verschiebungsinterpolation über die Dicke (...3Dq Elemente) und den Elementen mit erweiterter Verzerrung in Dickenrichtung (...3DEAS Elemente) ist vernachlässigbar klein.
- Für das bilineare EAS3DEAS Element mit einer 4-Parameter Erweiterung der Membranverzerrungen weisen zwei der drei versteifenden Eigenformen (Nr. 3 und

Element	Starrkörper- bewegung	Kinematiken	Eigenwerte			
			< 0.1	< 1.0	$\approx \infty$	max
ANS3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
ANS3Dq-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
eas3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
eas3Dq-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-17.	-	1365
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
ANS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
EAS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
EAS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-11.	12.-16.	-	1365
eas3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1365
eas3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-17.	-	1365
MI9k3DEAS	1.-6.	-	7.-15.	16.-27.	-	1670
MI9k3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-15.	16.-29.	-	1557
MI9k3Dq	1.-6.	-	7.-15.	16.-27.	-	1670
MI9k3Dq-rv	1.-6.	-	7.-15.	16.-30.	-	1557

Tabelle 2.3: Eigenwerte des einzelnen quaderförmigen Elementes für verschiedene Elementformulierungen; Querdehnzahl $\nu = 0.0$

Element	Starrkörper- bewegung	Kinematiken	Eigenwerte			
			< 0.1	< 1.0	$\approx \infty$	max
ANS3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
ANS3Dq-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
eas3Dq	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
eas3Dq-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-17.	-	1838
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
ANS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
EAS3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
EAS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-11.	12.-16.	-	1838
eas3DEAS	1.-6.	-	7.-9.	10.-16.	-	1838
eas3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-17.	-	1838
MI9k3DEAS	1.-6.	-	7.-15.	16.-29.	-	2248
MI9k3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-17.	18.-29.	-	1978
MI9k3Dq	1.-6.	-	7.-15.	16.-29.	-	2248
MI9k3Dq-rv	1.-6.	-	7.-17.	18.-29.	-	1978

Tabelle 2.4: Eigenwerte des einzelnen quaderförmigen Elementes für verschiedene Elementformulierungen; Querdehnzahl $\nu = 0.3$

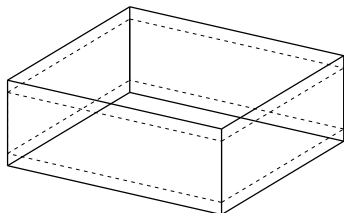
4 in Abb. 2.11) sichtbar kleinere Eigenwerte verglichen mit den Ergebnissen des ANS3DEAS Elements auf. Eine der versteifenden Eigenformen ist allerdings in voller Effektivität weiter vorhanden.

- Mit der 6-Parameter Erweiterung der Membranverzerrungen (eas3D... Element-

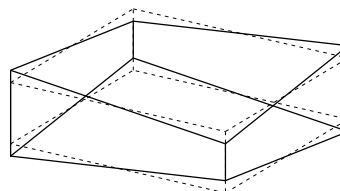
Element	Starrkörper- bewegung	Kine- matiken	Eigenwerte			
			< 0.1	< 1.0	$\approx \infty$	max
ANS3Dq	1.-6.	-	7.	8.-15.	21.-28.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
ANS3Dq-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-15.	27.-28.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
eas3Dq	1.-6.	-	7.	8.-15.	25.-28.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
eas3Dq-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-16.	27.-28.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
ANS3DEAS	1.-6.	-	7.	8.-15.	21.-24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
ANS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-9.	10.-15.	24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
EAS3DEAS	1.-6.	-	7.	8.-15.	23.-24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
EAS3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-11.	12.-15.	24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
eas3DEAS	1.-6.	-	7.	8.-15.	24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
eas3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-12.	13.-16.	24.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
MI9k3DEAS	1.-6.	-	7.-12.	13.-29.	47.-54.	$\approx 2.8 \cdot 10^5$
MI9k3DEAS-rv	1.-6.	-	7.-17.	18.-29.	51.-54.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$
MI9k3Dq	1.-6.	-	7.-12.	13.-29.	46.-63.	$\approx 2.8 \cdot 10^5$
MI9k3Dq-rv	1.-6.	-	7.-17.	18.-29.	56.-63.	$\approx 2.3 \cdot 10^5$

Tabelle 2.5: Eigenwerte des einzelnen quaderförmigen Elementes für verschiedene Elementformulierungen; Querdehnzahl $\nu = 0.499$

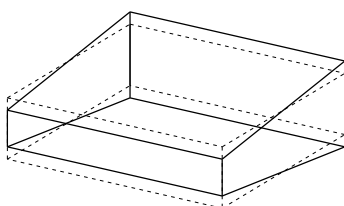
1. ∞ Eigenform



2. ∞ Eigenform



3. ∞ Eigenform



4. ∞ Eigenform

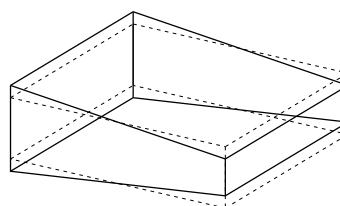


Abbildung 2.11: Darstellung der Eigenformen der vier höchsten Eigenwerte für die Eigenwertuntersuchung eines quaderförmigen ANS3DEAS Elementes im nahezu inkompressiblen Bereich

te) wird hingegen eine vollständige Elimination der volumetrischen Versteifung auch ohne reduzierte Integration erreicht. Die 6-Parameter Erweiterung enthält die in Abschnitt 2.2.3 vorgeschlagenen EAS-Anteile, die benötigt werden um die

Inkompressibilitätsbedingung (Glg. 2.19) zumindest im linearen Fall zu erfüllen.

- In Abb. 2.3 ($\nu = 0.0$) und Abb. 2.4 ($\nu = 0.3$) ist zu beobachten, dass für die EAS-Elemente mit zusätzlicher selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile im Bereich der niedrigen Eigenfrequenzen eine Verringerung der Eigenwerte stattfindet. Dies lässt auf ein zu weiches Verhalten dieser Elemente schließen.
- Für die biquadratischen Elemente kann die Anzahl der versteifenden Eigenformen ebenfalls durch die Verwendung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile (...-rv Elemente) verringert werden. Es verbleiben vier (MI9K3DEAS-rv Element) bzw. acht (MI9K3Dq-rv Element), die wiederum zu erwarten sind, da sie die Volumenänderung des biquadratischen Elementes beschreiben.

2.4.2 Lineare Probleme - kleine Deformationen

Im ersten Teil der numerischen Beispiele werden ausschließlich lineare Probleme mit kleinen Deformationen betrachtet. Dabei sollen die einzelnen Elementformulierungen, insbesondere die biquadratischen mit den bilinearen, hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens verglichen werden. Außerdem wird das Problem des sogenannten Trapezoidal Locking näher betrachtet.

Patchtest

Ein sogenannter Patchtest [44] eignet sich zur Überprüfung der Fähigkeit von Finiten Elementen zur Abbildung konstanter Verzerrungszustände auch bei verzerrten Elementgeometrien. Hierfür wird in [49] neben dem Membranspannungs-Patchtest ein Biege-Patchtest für herkömmliche Schalenelemente vorgeschlagen. Beide werden in [76] auch für Volumen-Schalenelemente eingesetzt. Dabei wird eine Scheibe bzw. Platte mit den Abmessungen $0.24 \times 0.12 \times 0.001$ und der Netzgeometrie in Abb. 2.12 untersucht. Die Diskretisierung erfolgt mit jeweils vier bilinearen bzw. vier biquadratischen Elementen.

Für den Membranspannungs-Patchtest wird folgendes Verschiebungsfeld vorgegeben:

$$u = 0.001 \left(X + \frac{1}{2}Y \right) , \quad v = 0.001 \left(Y + \frac{1}{2}X \right) , \quad w = 0 , \quad (2.87)$$

d.h. jeweils für die oberen und unteren Randknoten der Elemente gleiche Verschiebungen. Aus diesem Verschiebungszustand ergibt sich analytisch ein konstanter Spannungszustand mit:

$$\sigma_{XX} = \sigma_{YY} = 1333 , \quad \sigma_{XY} = 400 . \quad (2.88)$$

Die Berechnung mit allen bilinearen und biquadratischen 'Solid-Shell' Elementen zeigen, dass alle Elemente den Spannungszustand korrekt abbilden. Dieser Patchtest wird

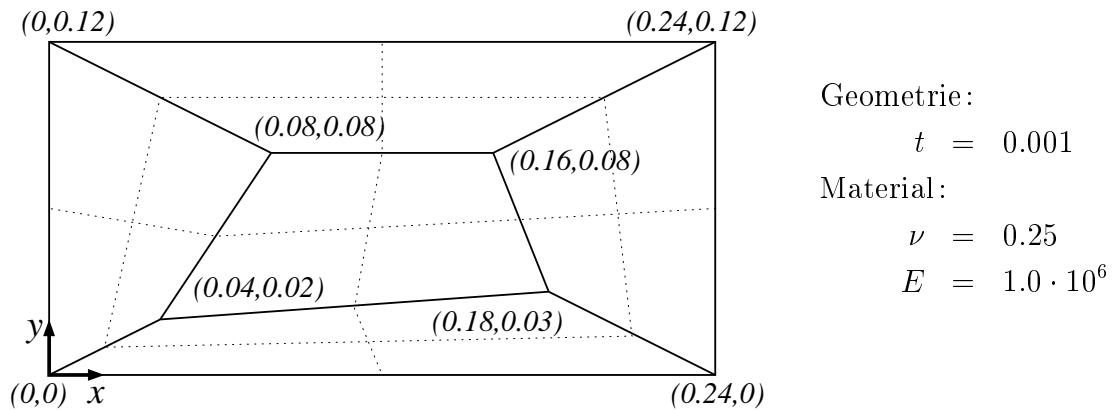


Abbildung 2.12: Knotenkoordinaten des FE-Netzes für den Patchtest; Knotenkoordinaten der Seitenmittenknoten der biquadratischen Elemente auf gepunkteter Linie

auch von den reinen Verschiebungselementen DIS3D und DI9K3D erfüllt, d.h. in Membranrichtung treten keine Defekte bei ebenen Schalenelementen auf

Als zweiter Test wird mit der gleichen Patchgeometrie ein Biegetest durchgeführt. Dafür wird das folgende Verschiebungsfeld vorgegeben, das an den Randknoten zu den entsprechenden Verschiebungsrandbedingungen führt:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= v_0 = 0, & w_0 &= 0.001 \frac{1}{2} (X^2 + XY + Y^2), \\
 \Theta_X &= 0.001 \left(Y + \frac{1}{2} X \right), & \Theta_Y &= -0.001 \left(X + \frac{1}{2} Y \right).
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

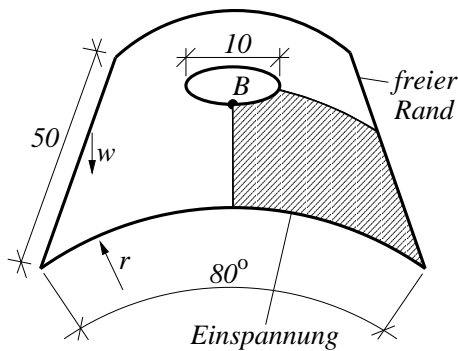
Die Verschiebungen u_0, v_0, w_0 sind hierbei Schalenmittelflächenverschiebungen, die Verdrehungen Θ_X, Θ_Y gelten für die Verdrehung der Schalennormalen. Damit ergeben sich die Verschiebungsrandbedingungen (2.89) für die Knoten an der Schalenober- und unterseite zu:

$$u = u_0 \pm \frac{t}{2} \Theta_Y, \quad v = v_0 \mp \frac{t}{2} \Theta_X, \quad w = w_0. \tag{2.90}$$

Dieser Patchtest wird als erfüllt betrachtet, wenn die für die Knoten im Inneren der Platte berechneten Verschiebungen den Verschiebungen entsprechen, die sich aus dem in (2.89) und (2.90) vorgegebenen Verschiebungsfeld ergeben. Auch dieser Test wird von allen 'Solid-Shell' Elementen sowie vom biquadratischen Verschiebungselement DI9K3D erfüllt. Nicht erfüllt wird der Test, wie erwartet, vom bilinearen Verschiebungselement DIS3D infolge der Querschubversteifung. Dies unterstützt die Wichtigkeit des ANS-Ansatzes für die bilinearen Elemente.

Zylinderschale mit Loch

Dieses Beispiel wurde gewählt, um die Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen denen mit biquadratischen Ansatzfunktionen gegenüberzustellen. Die Berechnung erfolgt geometrisch linear mit linear elastischem Materialverhalten. Die Geometrie- und Ma-



Geometrie:

$$t = 0.25$$

$$r = 25$$

Material:

$$\nu = 0.0$$

$$E = 4.32 \cdot 10^8$$

Eigengewicht:

$$q = 90$$

Abbildung 2.13: Geometrie und Materialeigenschaften der Zylinderschale mit Loch

terialdaten sind Abb. 2.13 zu entnehmen; die Belastung erfolgt durch Eigengewicht; betrachtet wird die Verschiebung w in der Mitte des freien Randes. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Geometrie genügt es, bei Verwendung der entsprechenden Symmetrierandbedingungen, ein Viertel der Struktur mit finiten Elementen zu vernetzen. In Abb. 2.14 wird exemplarisch die Draufsicht auf ein 45-Knoten Netz gezeigt.

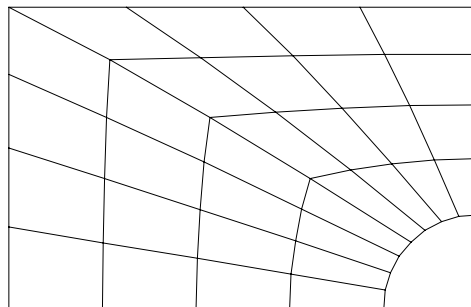


Abbildung 2.14: Zylinderschale mit Loch, 45-Knoten Netz mit 45x6 bzw. 45x7 Freiheitsgraden

Die Anzahl der Knotenpunkte in der Schalenfläche für das diskretisierte Viertel der Struktur wird von 15 bis 561 variiert.

Es handelt sich um eine gekrümmte Struktur mit verzerrtem Elementnetz; hier sollten die Vorteile der biquadratischen Ansätze bei der Geometrieapproximation besonders zum Tragen kommen. Das Resultat der Untersuchung für die Verschiebung w ist in Abb. 2.15 zu sehen, in der w über die Gesamtzahl der Knotenfreiheitsgrade aufgetragen wurde. Es ist dabei direkt ersichtlich, dass die biquadratischen Elemente im Bereich der größeren Diskretisierung zu deutlich besseren Ergebnissen führen,

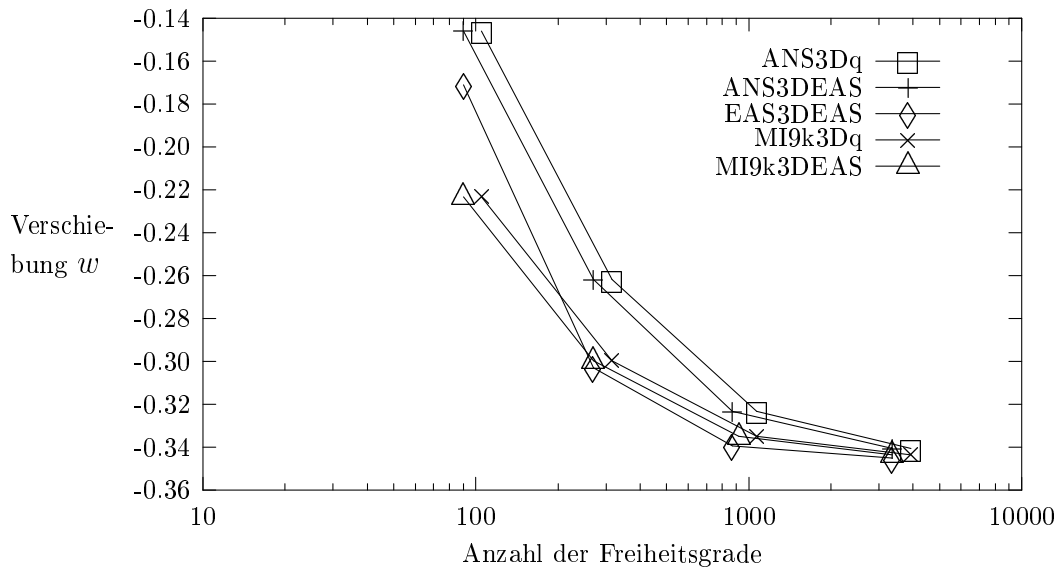


Abbildung 2.15: Zylinderschale mit Loch, Verschiebung w über Anzahl der Freiheitsgrade

womit der Vorteil quadratischer Ansätze speziell für gekrümmte Strukturen deutlich wird. Bemerkenswert ist allerdings auch das Resultat für das EAS3DEAS-Element, das bereits nach der ersten Netzverfeinerung mit 45 Knoten im Bereich der biquadratischen Elemente liegt und somit wesentlich schneller konvergiert, als die Resultate für

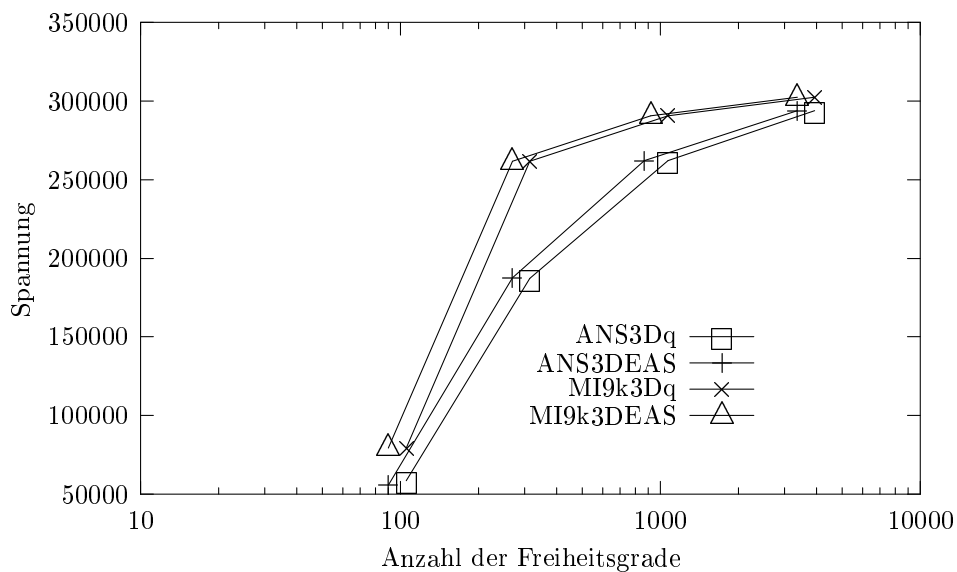


Abbildung 2.16: Zylinderschale mit Loch, Normalspannung in Querrichtung an der Schaleninnenseite am Punkt B über Anzahl der Freiheitsgrade

die bilinearen Elemente ohne zusätzliche EAS-Erweiterung der Membranverzerrungen. Werden die unterschiedlichen Ansätze zur Vermeidung der Dickenversteifung betrachtet, ist prinzipiell kein Unterschied in den Ergebnissen erkennbar, die Kurven für die ...3Dq- und die ...3DEAS-Elemente sind praktisch identisch. Die Kurven für die ...3Dq-Elemente sind lediglich leicht nach rechts verschoben, da diese Elemente über einen zusätzlichen siebten Freiheitsgrad verfügen.

Die Vorteile der quadratischen Ansätze werden auch bei der Betrachtung der Spannungen deutlich. Im Diagramm in Abb. 2.16 ist die Normalspannung in Querrichtung an der Schaleninnenseite im Punkt B über der Gesamtzahl der Knotenfreiheitsgrade aufgetragen. Die Auswertung der Spannung erfolgt allerdings nicht direkt am Punkt B sondern am Elementmittelpunkt für die Netze mit bilinearen Elementen. Bei den bi-quadratischen Elementen werden die Spannungen an 2×2 Gausspunkten ausgewertet; für die Spannung am Punkt B wird die Spannung am nächstgelegenen Gausspunkt eingesetzt. Es sei festgehalten, dass die Netzkonvergenz bezüglich der Spannungen - wie erwartet - deutlich schlechter ist als für die Verschiebungen und außerdem auch mit dem feinsten Netz noch keine endgültige Konvergenz erreicht wurde.

Kragarm mit verdrehten Elementkanten

Die Beispiele in diesem und im folgenden Abschnitt wurden [74] entnommen und dienen der Untersuchung des sogenannten 'Trapezoidal Locking' Effekts. Es wird hier ein Kragarm betrachtet, wobei, wie in einer seitlichen Ansicht in Abb. 2.17 zu sehen, der Winkel Θ der vertikalen Elementkanten variiert wird. Die Geometrie- und Materialeigenschaf-

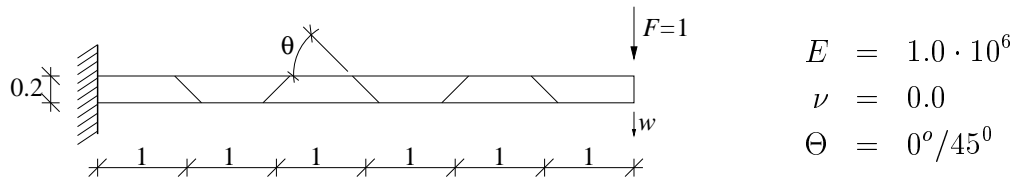


Abbildung 2.17: Geometrie- und Materialeigenschaften für den Kragarm (Seitenansicht)

ten sind ebenfalls Abb. 2.17 zu entnehmen. Die Belastung erfolgt durch eine Einzellast $F = 1$. Betrachtet wird die Durchbiegung w am Lastangriffspunkt, als Vergleichslösung wird die Durchbiegung für das entsprechende Balkenproblem analytisch mit $w = 0.108$ ermittelt.

Die Ergebnisse für die verschiedenen Elementformulierungen sind in Tabelle 2.6 dargestellt. Der sogenannte Trapezoidal Locking Effekt bei Verdrehung der vertikalen Elementkanten wird dabei sowohl für die bilinearen Elemente als auch für die bi-quadratischen Elemente deutlich sichtbar. Die Verschiebung w beträgt bei $\Theta = 45^\circ$ für die bilinearen Elemente lediglich 14% und für die bi-quadratischen Elemente lediglich 23% der zu erwartenden Durchbiegung. In Tabelle 2.6 ist ebenfalls zu sehen, dass durch die Verwendung der in Abschnitt 2.2.4 erläuterten Vorgehensweise der angenomme-

Verschiebung w	$\Theta = 0^\circ$	$\Theta = 45^\circ$
ANS3DEAS	0.107	0.017
EAS3DEAS	0.107	0.017
eas3DEAS	0.107	0.017
ANS3Dq	0.107	0.017
eas3Dq	0.107	0.017
MI9k3DEAS	0.108	0.024
MI9k3Dq	0.108	0.024
ANS3DEAS-at	0.107	0.107
EAS3DEAS-at	0.107	0.107
eas3DEAS-at	0.107	0.107
ANS3Dq-at	0.107	0.107
eas3Dq-at	0.107	0.107
MI9k3DEAS-at	0.108	0.108
MI9k3Dq-at	0.108	0.108

Tabelle 2.6: Durchbiegung des Kragarms für Winkel $\Theta = 0^\circ$ und $\Theta = 45^\circ$

nen Normalverzerrungen in Dickenrichtung (...-at Elemente) dieser Versteifungseffekt vollständig vermieden werden kann.

Gedrückter Ring

Als zweites Beispiel zur Demonstration des Trapezoidal Locking Effekts wird ein gedrückter Ring mit zwei unterschiedlichen Radien-zu-Dicken Verhältnissen betrachtet. Die Geometrie- und Materialeigenschaften sind Abb. 2.18 zu entnehmen. Dieses Beispiel eignet sich, den Einfluss des Trapezoidal Locking Effekts bei gekrümmten Struk-

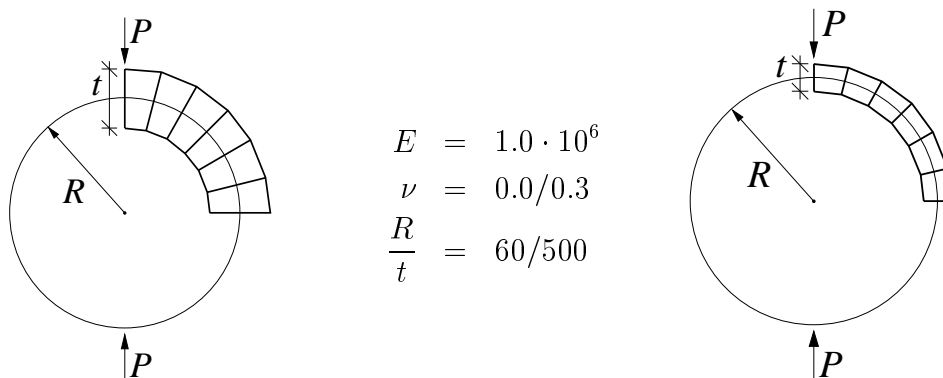


Abbildung 2.18: Geometrie- und Materialeigenschaften des gedrückten Rings (Seitenansicht)

turen unterschiedlicher Dicke zu untersuchen. Ein Versteifungseffekt ist hier insbesondere für die bilinearen Elementformulierungen zu erwarten, da die Vernetzung gekrümmter Strukturen mit abschnittsweise linearen Formfunktionen dazu führt, dass die Elementkanten an den Elementübergängen nicht mehr senkrecht auf der Schalenmittelfläche stehen. Mit den quadratischen Ansätzen hingegen können auch gekrümmte Formen wesentlich genauer modelliert werden, so dass die Elementkanten an den Elementübergängen weiterhin annähernd senkrecht zur Schalenmittelfläche bleiben. Somit sollte ein Versteifungseffekt für die biquadratischen Elemente von untergeordneter Bedeutung sein.

Diese Aussage lässt sich durch die Ergebnisse der Untersuchung, dargestellt in Tab. 2.7, bestätigen. In der ersten Zeile wird eine Referenzlösung für die Verschiebung des

Verschiebung w	$\frac{R}{t} = 60$		$\frac{R}{t} = 500$	
	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.0$	$\nu = 0.3$
Referenzlösung	0.00129	0.00117	0.744	0.677
ANS3DEAS	0.00113	0.00104	0.155	0.122
EAS3DEAS	0.00113	0.00106	0.155	0.142
eas3DEAS	0.00113	0.00106	0.155	0.142
ANS3Dq	0.00113	0.00103	0.155	0.121
eas3Dq	0.00113	0.00104	0.155	0.142
MI9k3DEAS	0.00124	0.00113	0.702	0.638
MI9k3Dq	0.00124	0.00112	0.702	0.631
ANS3DEAS-at	0.00125	0.00117	0.723	0.683
EAS3DEAS-at	0.00125	0.00117	0.723	0.684
eas3DEAS-at	0.00125	0.00117	0.723	0.684
ANS3Dq-at	0.00125	0.00116	0.723	0.679
eas3Dq-at	0.00125	0.00117	0.723	0.680
MI9k3DEAS-at	0.00135	0.00123	0.780	0.710
MI9k3Dq-at	0.00135	0.00123	0.780	0.710

Tabelle 2.7: Verschiebung des Kraftangriffspunktes für gedrückten Ring mit $\frac{R}{t} = 60$ und $\frac{R}{t} = 500$ und unterschiedlichen Querkontraktionszahlen

Kraftangriffspunktes gegeben, die mit Hilfe eines sehr feinen Netzes ermittelt wurde. Der Versteifungseffekt wird bei bilinearen Elementen deutlich sichtbar für den dünnen Ring ($\frac{R}{t} = 500$), eine geringere Tendenz zur Versteifung lässt sich hingegen für den dicken Ring ($\frac{R}{t} = 60$) beobachten. Eine deutliche Verbesserung ist wiederum durch den Einsatz des Verfahrens der angenommenen Normalverzerrung in Dickenrichtung zu erkennen. Erwartungsgemäß ist hingegen bei den biquadratischen Elementen für beide Beispiele kaum ein Versteifungseffekt zu erkennen. Der Ansatz einer angenommenen Normalverzerrung in Dickenrichtung erscheint überflüssig, bzw. dieser führt sogar zu einem zu weichen Ergebnis, wie Tab. 2.7 zu entnehmen ist.

2.4.3 Nichtlineare Probleme - Große Verschiebungen

Im zweiten Teil der numerischen Beispiele werden sowohl geometrisch als auch materiell nichtlineare Probleme untersucht.

Kragarm mit nahezu inkompressiblem Materialverhalten

Anhand des hier betrachteten einfachen Beispiels soll der volumetrische Versteifungseffekt aufgrund inkompressiblen Materialverhaltens für Biegeprobleme untersucht werden. Dafür wird die vertikale Verschiebung w des Kragarmendes für den in Abb. 2.19 dargestellten Kragarm berechnet. Die Belastung erfolgt durch eine Linienlast q am Kragarmende. Die Diskretisierung erfolgt in Längsrichtung mit 10 bilinearen bzw. 5

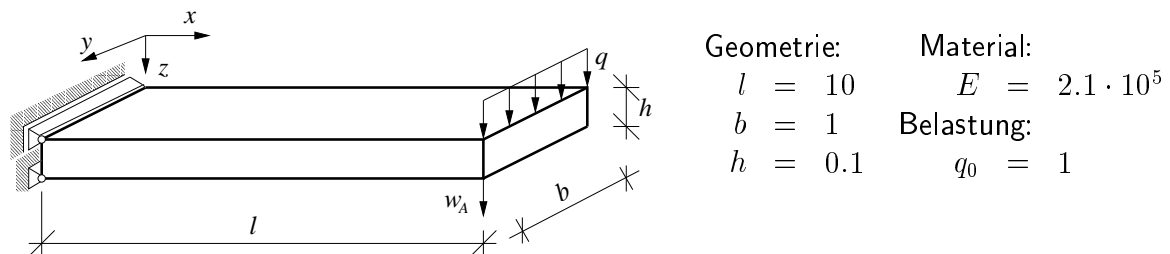


Abbildung 2.19: Geometrie- und Materialeigenschaften des Kragarms

biquadratischen Elementen. Die Geometrie- und Materialeigenschaften sowie die Auflagerbedingungen des Kragarms sind Abb. 2.19 zu entnehmen. In y -Richtung wird auf der Seite der Einspannung ein Knotenpunkt festgehalten, um eine statisch bestimmte Lagerung zu erhalten. In den Abbn. 2.20 – 2.23 sind die Last-Verschiebung-Diagramme dargestellt, die durch die Aufbringung der Last in zehn gleich großen Schritten berechnet wurden. Dabei werden jeweils die Ergebnisse für die Querkontraktionszahlen $\nu = 0.0$, $\nu = 0.3$ und $\nu = 0.499$ verglichen. Bei einer statisch bestimmten Lagerung

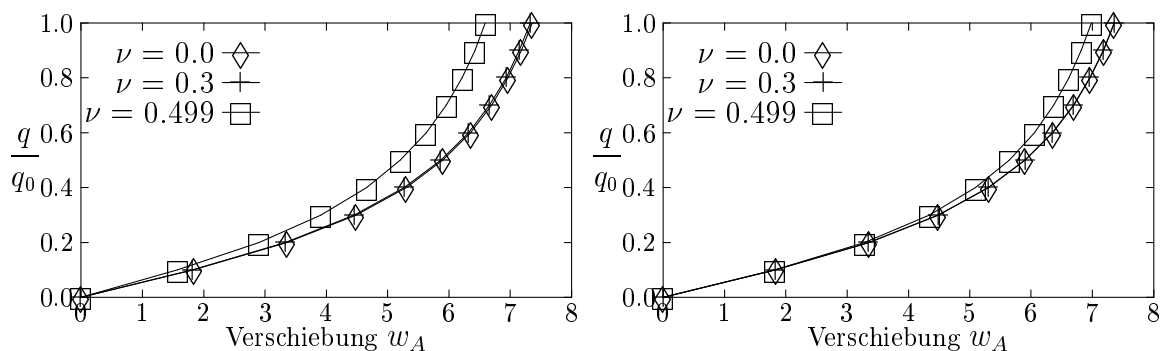


Abbildung 2.20: Last-Verformungs-Diagramm für Kragarm; $10 \times 1 \times 1$ Elemente; ANS3Dq Element (links) und ANS3DEAS Element (rechts)

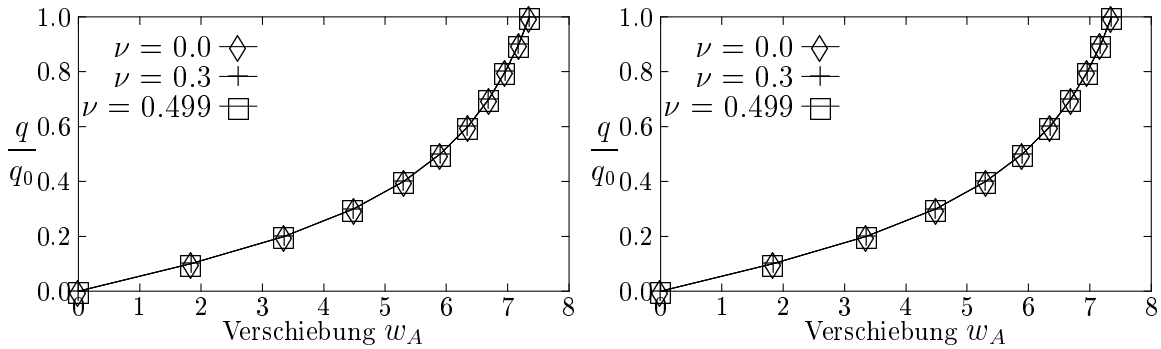


Abbildung 2.21: Last-Verformungs-Diagramm für Kragarm; $10 \times 1 \times 1$ Elemente; EAS3DEAS Element (links) und ANS3Dq-rv Element (rechts)

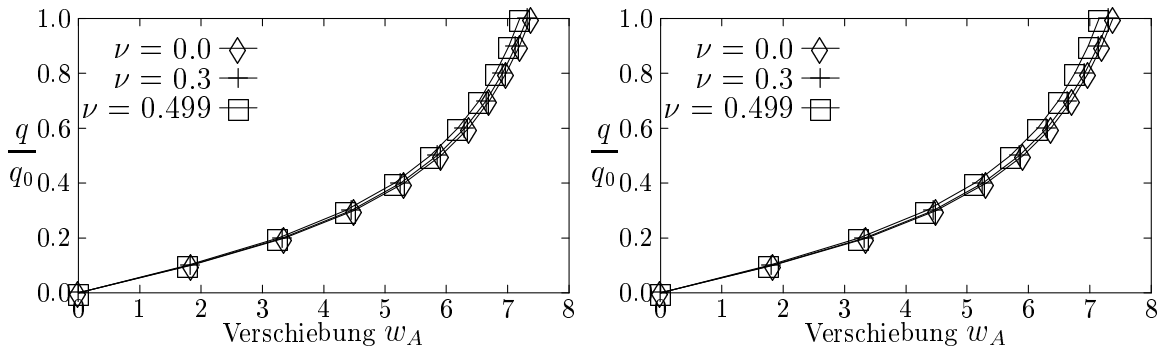


Abbildung 2.22: Last-Verformungs-Diagramm für Kragarm; $5 \times 1 \times 1$ Elemente; MI9k3DEAS Element (links) und MI9k3Dq Element (rechts)

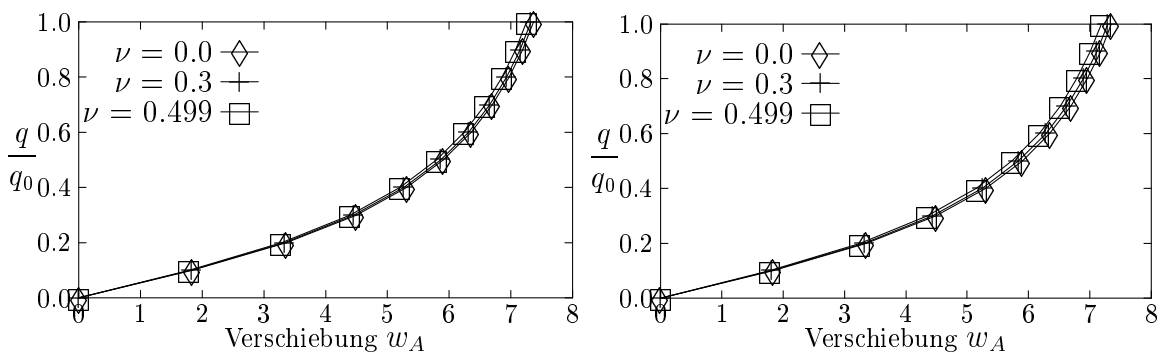


Abbildung 2.23: Last-Verformungs-Diagramm für Kragarm; $5 \times 1 \times 1$ MI9k3Dq-rv Elemente (links) und $10 \times 2 \times 1$ ANS3DEAS-rv Elemente (rechts)

wäre für alle drei Werte die gleiche Verschiebung zu erwarten. Eine steifere Antwort für den nahezu inkompressiblen Fall mit $\nu = 0.499$ deutet auf einen volumetrischen Versteifungseffekt hin.

Aus den verschiedenen Last-Verformungs-Kurven können folgende Rückschlüsse gezogen werden:

- Wie bereits der Eigenwertuntersuchung in Abschnitt 2.4.1 zu entnehmen ist, tritt bei Verwendung der erweiterten Normalverzerrung in Dickenrichtung ein deutlich geringerer volumetrischer Versteifungseffekt auf als bei der Verwendung der quadratischen Interpolation der Verschiebung in Dickenrichtung. Dies wird aus dem Vergleich der Last-Verformungs-Kurven für das ANS3DEAS und das ANS3Dq Element in Abb. 2.20 ersichtlich.
- In Abb. 2.21 wird für das EAS3DEAS Element deutlich sichtbar, dass bereits die 4-Parameter Verzerrungserweiterung für die Membranverzerrungen zu einer starken Verringerung des volumetrischen Versteifungseffektes führt. Dies gilt ebenso für das eas3DEAS Element mit einer 6-Parameter Erweiterung für die Membranverzerrungen, das einen deckungsgleichen Kurvenverlauf liefert. Demzufolge wird bei diesem Beispiel keiner der bei dem Element mit der 4-Parameter Erweiterung noch vorhandenen versteifenden Eigenformen aktiviert.
- Wird die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile verwendet, ist wie in Abb. 2.21 dargestellt für das ANS3Dq-rv Element kein volumetrischer Versteifungseffekt zu erkennen. Das Gleiche gilt auch für das ANS3DEAS-rv Element.
- Der volumetrische Versteifungseffekt für die biquadratischen Elemente ist wesentlich kleiner als für die bilinearen Elemente, wie den Diagrammen in Abb. 2.22 zu entnehmen ist. Ebenfalls ist, analog zu den bilinearen Elementen, für das MI9k3DEAS Element im Vergleich zum MI9k3Dq Element ein geringerer Versteifungseffekt zu beobachten.
- Das selektiv reduziert integrierte biquadratische MI9k3DEAS-rv Element weist noch leichte Versteifungstendenzen auf, wie aus der Last-Verformungs-Kurve in Abb. 2.23 ersichtlich wird.

Überraschend ist das Ergebnis für das MI9k3DEAS-rv Element bei dem ein versteifungsfreies Resultat erwartet wurde. Allerdings verfügen die biquadratischen Elemente über drei Knoten in Querrichtung, so dass die Lagerung an der Einspannung entsprechend angepasst werden muss, wobei wiederum lediglich ein Knoten in y -Richtung gehalten wird. Das steifere Verhalten des MI9k3DEAS-rv Elements könnte also aus zusätzlichen Zwangsbedingungen resultieren, die mit den unterschiedlichen geometrischen Randbedingungen begründet sind. Um diese Aussage zu bestätigen, wird eine zusätzliche Berechnung mit dem bilinearen ANS3DEAS-rv Element und einer Vernetzung von $10 \times 2 \times 1$ Elementen, also mit ebenfalls drei Knoten in Querrichtung, durchgeführt. Die Last-Verformungs-Kurve für diese Berechnung ist ebenfalls in Abb. 2.23 dargestellt und weist die gleichen Versteifungstendenzen auf, wie das Ergebnis des MI9k3DEAS-rv Elements, womit die getroffene Aussage bestätigt wird.

Elastoplastisch verformte quadratische Platte

In diesem Abschnitt wird eine quadratische Platte, die durch eine gleichmäßig verteilte richtungstreue Flächenlast belastet wird, betrachtet. Die Geometrie- und Materialda-

ten sind Abb. 2.24 zu entnehmen. Das Materialverhalten wird im elastischen Bereich durch eine Verzerrungsenergiefunktion nach Hencky beschrieben, das ideal plastische Verhalten wird mit Hilfe der von-Mises-Fließbedingung erfasst. Mit diesem Beispiel

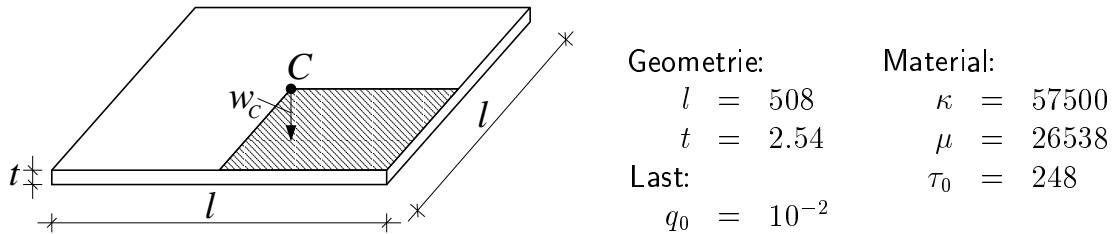


Abbildung 2.24: Geometrie- und Materialdaten der quadratische Platte

soll das Verhalten der verschiedenen Elementformulierungen beim Auftreten großer plastischer Deformationen verglichen werden.

An den Kanten der Platte sind die unteren Knoten horizontal verschieblich gelagert. Durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften genügt es, nur ein Viertel der Platte mit finiten Elementen zu vernetzen. Es wird dabei zum einen eine gröbere Diskretisierung mit 16×16 bilinearen Elementen bzw. 8×8 biquadratischen Elementen untersucht, sowie eine feinere Diskretisierung mit 32×32 bilinearen bzw. 16×16 biquadratischen Elementen. Um das plastische Verhalten möglichst genau abbilden zu können, werden für die Integration in Dickenrichtung sechs Gausspunkte verwendet. Dieses Beispiel wird mit dem größeren Netz auch in [19] und [50] vorgestellt. Die verformte Struktur nach Aufbringung der vollen Last, ist in Abb. 2.25 zu sehen.

In den Abbn. 2.26–2.29 sind die Kurven für den Belastungsfaktor aufgetragen über die Verschiebung w_C in Plattenmitte dargestellt. Wie zu erwarten stimmen die Kurven für die verschiedenen Elementformulierungen im elastischen Bereich bis ungefähr zu einer Verschiebung von $w_C = 25$ überein. Für den Bereich größerer Deformationen sind teils starke Unterschiede zu beobachten, was als Konsequenz der im plastischen Bereich zu

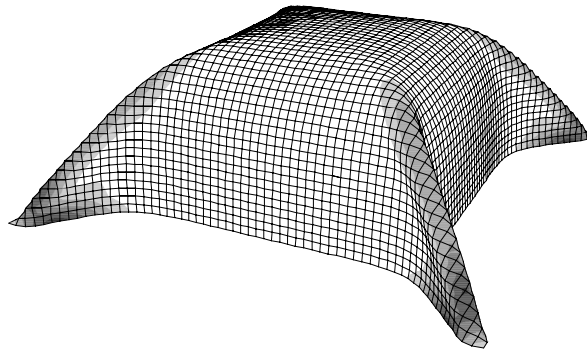


Abbildung 2.25: Verformte Geometrie und plastifizierte Bereiche der quadratischen Platte unter richtungstreuem Innendruck

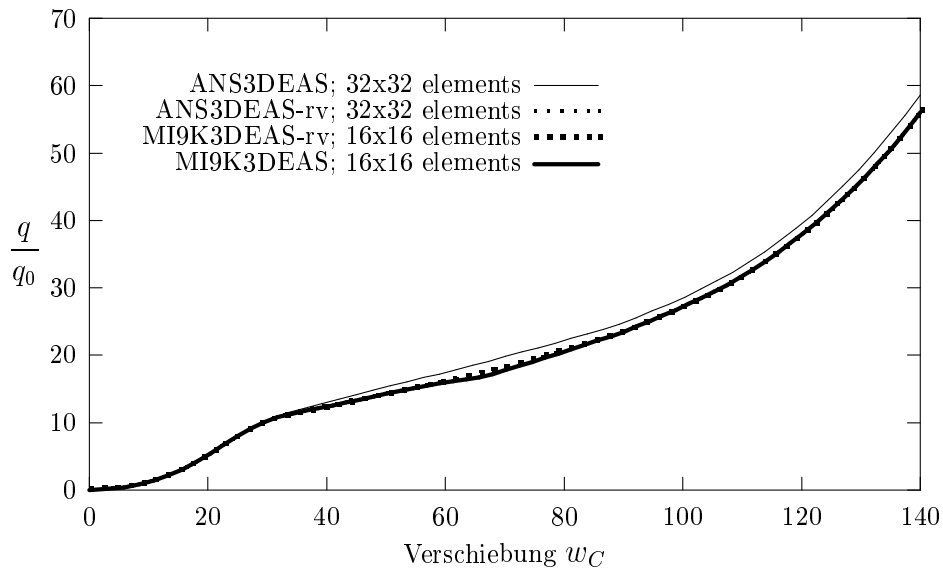


Abbildung 2.26: Last-Verformungs-Diagramm für quadratische Platte; feine Vernetzung

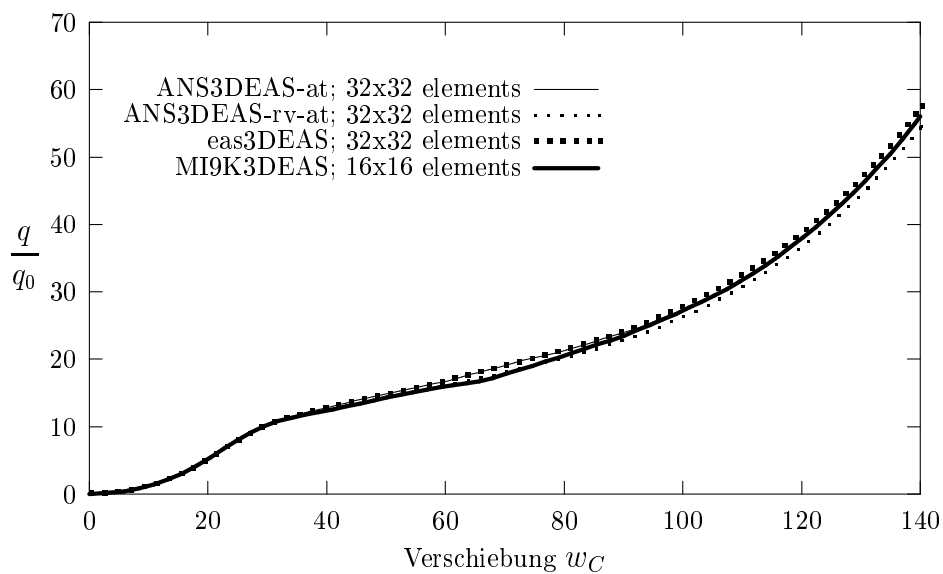


Abbildung 2.27: Last-Verformungs-Diagramm für quadratische Platte; feine Vernetzung

erwartenden volumetrischen Versteifung angesehen werden kann.

In Abb. 2.26 und 2.27 sind die Last-Verformungs-Kurven für die feinere Vernetzung dargestellt. Die einzelnen Kurven weisen dabei kaum Unterschiede auf, sie sind für die biquadratischen Elemente MI9K3DEAS und MI9K3DEAS-rv sowie das ANS3DEAS-rv

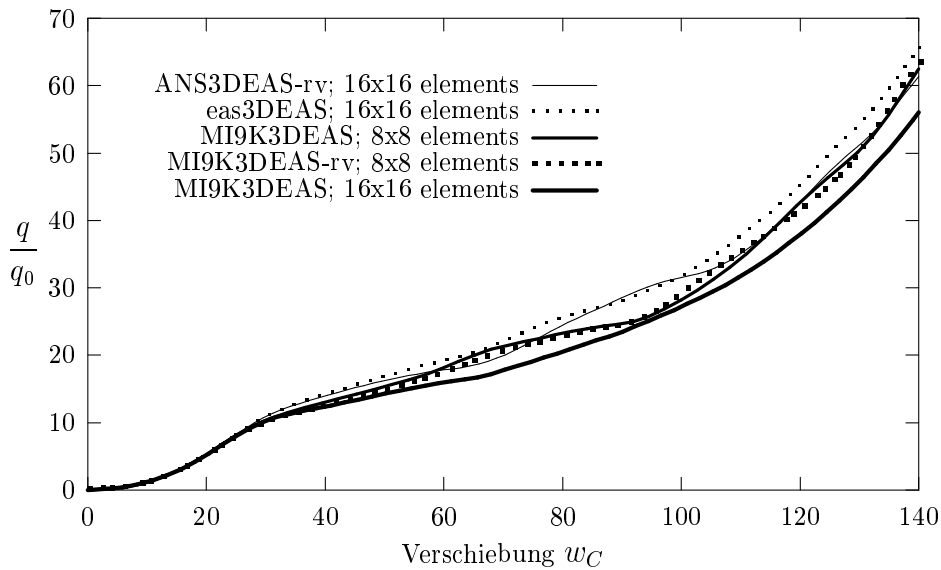


Abbildung 2.28: Last-Verformungs-Diagramm für quadratische Platte; grobe Vernetzung

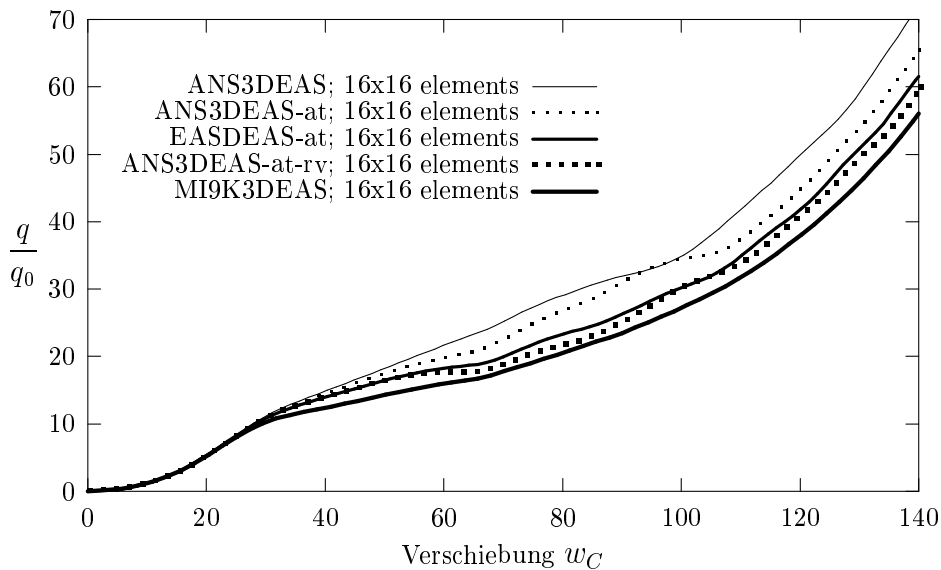


Abbildung 2.29: Last-Verformungs-Diagramm für quadratische Platte; grobe Vernetzung

Element praktisch deckungsgleich. Daraus wird ersichtlich, dass die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile für die biquadratischen Elemente keinen Vorteil bringt, da bereits die herkömmliche Formulierung zum gleichen Resultat führt, d.h. die biquadratischen Elemente neigen offensichtlich weniger zur Versteifung. Im Gegensatz dazu das bilineare ANS3DEAS Element, das im Vergleich ein leicht steiferes Resultat

liefert. Für die bilinearen Elemente scheint die selektiv reduzierte Integration also den erwarteten Vorteil zu bringen.

In Abb. 2.27 ist das Resultat für das 6-Parameter EAS-Element (eas3DEAS) dargestellt. Dieses scheint im Vergleich ebenfalls noch leicht zu versteifen, d.h. der 6-Parameter EAS-Ansatz ist nicht zu einer kompletten Vermeidung des volumetrischen Versteifungseffektes geeignet. Die Kurve für das MI9K3DEAS Element mit der Vernetzung von 16×16 Elementen wird auch in den folgenden Diagrammen für die gröbere Vernetzung jeweils als Referenzlösung abgebildet. Zusätzlich ist in Abb. 2.27 noch das Ergebnis für das bilineare ANS-Element mit angenommener Verzerrung für die Normalverzerrung in Dickenrichtung (-at) dargestellt. Dabei liefert das ANS3DEAS-at Element ein Ergebnis nahe der Referenzkurve. Das ANS3DEAS-at-rv Element, d.h. zusätzlich wird auch die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile eingesetzt, verhält sich sogar geringfügig weicher im Vergleich zur Referenzlösung. Der Effekt des sogenannten 'Trapezoidal Locking' spielt also auch im hier untersuchten Fall eine gewisse Rolle, obwohl eine gleichförmig vernetzte ebene Struktur untersucht wird, bei der es allerdings im Bereich der hier betrachteten großen Verformungen zu starken Netzverzerrungen kommt, die offensichtlich den in Abschnitt 2.2.4 diskutierten Versteifungseffekt auslösen.

Ein qualitativ ähnliches Ergebnis, dargestellt in Abb. 2.28 und 2.29, liefert die gröbere Vernetzung. Allerdings sind hier deutlichere Unterschiede zwischen den einzelnen Kurven zu erkennen. Die in Abb. 2.28 zu sehenden Kurven für das bilineare EAS-Element (eas3DEAS), das bilineare ANS3DEAS-rv Element und die biquadratischen Elemente (MI9K3DEAS und MI9K3DEAS-rv) liefern ein sichtbar steiferes Resultat. Leichte Vorteile sind bei den biquadratischen Elementen zu erkennen, wobei die zusätzliche selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile wiederum keine Verbesserung darstellt. Hier zeigen sich klar die Vorteile der besseren Geometrieapproximation der quadratischen Ansätze. Das eas3DEAS-Element erweist sich wiederum als geringfügig steifer, durch die EAS-Erweiterung kann also der volumetrische Versteifungseffekt nicht komplett eliminiert werden.

In Abb. 2.29 ist die Kurve für das bilineare ANS3DEAS Element zu finden, die sich erwartungsgemäß am steifsten verhält. Zusätzlich wird für die bilinearen Elemente noch der Einsatz der angenommenen Verzerrung für die Normalverzerrung in Dickenrichtung zur Vermeidung des 'Trapezoidal Locking' Effekts getestet. Dabei ist zu beobachten, dass für das ANS3DEAS-at und das EAS3DEAS-at Element wiederum eine Verbesserung bezüglich der Versteifung der Struktur zu beobachten ist. Das ANS3DEAS-at-rv Element, mit zusätzlich selektiv reduzierter Integration liefert eine Last-Verformungskurve, die der Referenzkurve am nächsten liegt.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die bilinearen Elemente eine starke Tendenz zur Versteifung haben, die durch die angewendeten zusätzlichen Elementmodifikationen gemildert werden kann. Die biquadratischen Elemente dagegen neigen deutlich weniger zur Versteifung.

Durch gegenseitige Einzellasten gedrückter Zylinder

Ein weiteres Beispiel mit großen elastoplastischen Deformationen ist der durch zwei gegenüberliegende Einzellasten gedrückte Zylinder, der unter anderem auch in [82] [50] untersucht wurde. Die Geometrie- und Materialeigenschaften sind in Abb. 2.30 dargestellt.

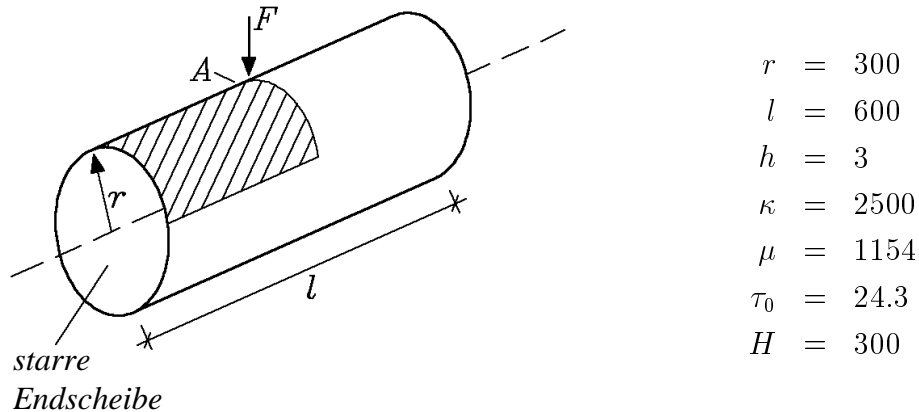


Abbildung 2.30: Geometrie-, Materialeigenschaften und Auflagerbedingungen des durch zwei Einzellasten beidseitig gedrückten Zylinders

Die Symmetrieeigenschaften des Zylinders ausnutzend, wird nur ein Achtel der Struktur diskretisiert. Dabei wird eine Vernetzung mit 32×32 bilinearen bzw. 16×16 bi-quadratischen Elementen für die Schalenfläche verwendet und jeweils ein Element in

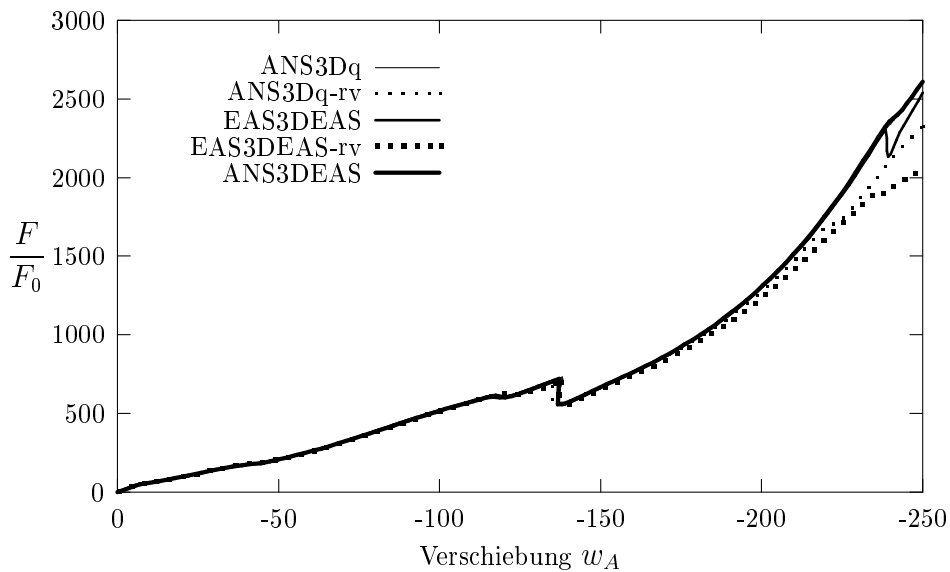


Abbildung 2.31: Last-Verformungs-Diagramm für den beidseitig gedrückten Zylinder mit starren Endscheiben; bilineare Elemente

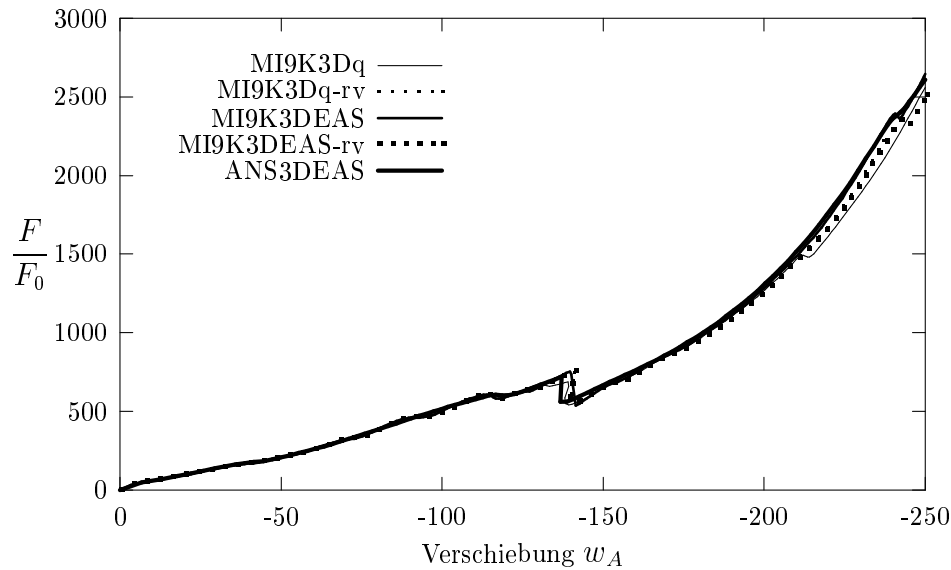
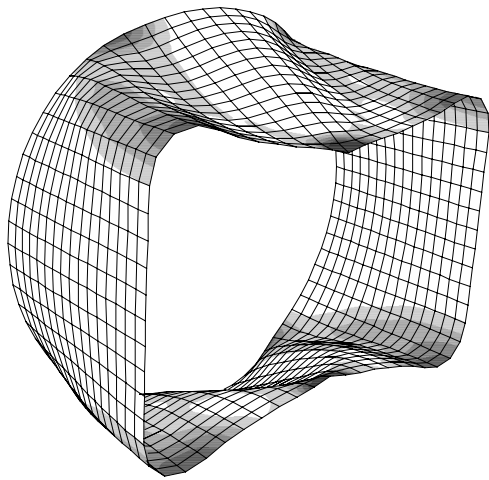


Abbildung 2.32: Last-Verformungs-Diagramm für den beidseitig gedrückten Zylinder mit starren Endscheiben; biquadratische Elemente

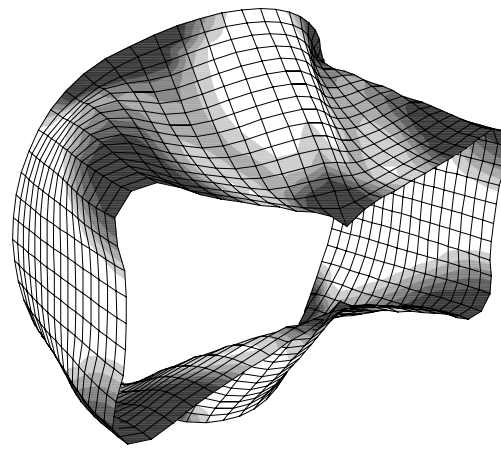
der Dickenrichtung. Für die Integration in der Dickenrichtung werden wiederum sechs Gausspunkte eingesetzt.

Die Last-Verformungs Kurven sind in Abb. 2.31 für die bilinearen Elemente und in Abb. 2.32 für die biquadratischen Elemente dargestellt. Dabei wird die Belastung durch das gegenseitige Kräftepaar aufgetragen über der Verschiebung des Punktes A . Die verformte Geometrie des Zylinders mit den plastifizierten Zonen wird für die Verschiebungszustände $w_A = 150$ und $w_A = 250$ wird in Abb. 2.33 dargestellt.

Die erzielten Resultate stimmen sehr genau mit den in [50] und [82] veröffentlichten Ergebnissen überein. Zu beobachten sind Sprünge in den Last-Verformungs-Kurven aufgrund lokaler Stabilitätsprobleme (Durchschlagprobleme), die sich teilweise auf die zu grobe Vernetzung zurückführen lassen. Besser wäre wie in [41] vorgeschlagen eine adaptive Vernetzung des Zylinders um die hohen Gradienten an den Kanten und am Lastangriffspunkt ausreichend genau abzubilden; in Abb. 2.33 wird deutlich klar, dass die seitlich entstehenden scharfen Knicke mit der gewählten Vernetzung nicht ausreichend genau abgebildet werden können. Im Fall einer lokalen Netzverfeinerung wäre wie auch in [41] zu sehen ein glatter Verlauf der Last-Verformungs-Kurven zu erwarten, da sich anstelle der lokalen Durchschlagprobleme ein biegedominiertes Problem ergibt. Ansonsten sind bis in den Bereich von $w_A = 200$ kaum Unterschiede zwischen den einzelnen Elementformulierungen zu finden. Auch die Vorteile der biquadratischen Ansätze, die zu einer deutlich verbesserten Geometrieapproximation führen, sind bei der gewählten Vernetzung kaum zu sehen. Hier wären für gröbere Netze größere Unterschiede zu erwarten. Im Bereich über $w_A = 200$ sind leichte Unterschiede zu erkennen. Insbesondere die beiden bilinearen Elementvarianten mit selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile ANS3Dq-rv und EAS3DEAS-rv liefern oberhalb der



$$w_A = 150$$



$$w_A = 250$$

Abbildung 2.33: Verformte Geometrie des beidseitig gedrückten Zylinders (halbes System); Darstellung der plastifizierte Bereiche; Vernetzung an den Kanten und am Lastangriffspunkt zu grob

Verschiebung $w_A = 200$ ein weniger steifes Resultat, was auf ein volumetrisches Versteifen der anderen Elementformulierungen schließen lässt.

2.5 Untersuchung numerischer Instabilitäten

Zur Vermeidung von Versteifungseffekten wurden in den vorigen Abschnitten verschiedene Modifikationen eingeführt und somit auf dem 3D-Verschiebungselement basierende sogenannte 'Solid-Shell' Elemente entwickelt. Dies sind insbesondere die Methode der angenommenen Verzerrungen (ANS), die Methode der erweiterten Verzerrungen (EAS) und die selektiv reduzierte Integration (SRI). In verschiedenen Untersuchungen kann gezeigt werden, dass alle diese Verfahren unter bestimmten Belastungen zu numerischen Instabilitäten führen können. Es wird also erforderlich die genannten Belastungszustände zu identifizieren und geeignete Stabilisierungsmaßnahmen zu ergreifen. Bei den kritischen Belastungszuständen handelt es sich insbesondere um homogene Verzerrungszustände, so z.B. starke Zusammendrückung der Elemente.

Diese Problematik wird auch in der Literatur in einer Vielzahl von Veröffentlichungen für unterschiedliche Elementvarianten behandelt. Armero [2, 32] beschäftigt sich mit der Stabilisierung von EAS-Elementen und schlägt eine Modifikation des erweiterten Deformationsgradienten vor, wodurch der Anteil der Schub-Rotations Steifigkeit an den Hourglass Eigenformen eliminiert und somit numerische Instabilitäten bedingt durch die EAS-Erweiterung verhindert werden, was in [2, 32] auch in ausführlichen Eigenwertuntersuchungen gezeigt werden kann. In [77] wird eine Stabilisierung von EAS-Elementen durch das Hinzufügen eines sogenannten Stabilisierungspotentials, das von Höhe und Art der Beanspruchung abhängt, vorgeschlagen. Die Steifigkeit in den kritischen Eigenformen wird somit Deformationsabhängig modifiziert. Belytschko schlägt in [6, 31] Stabilisierungsmaßnahmen für unterintegrierte Verschiebungselemente vor. Die durch die 1-Punkt Integration entstehenden Kinematiken werden dabei durch das Hinzufügen künstlicher Steifigkeiten in den entsprechenden Hourglass Eigenformen verhindert. Auf dieser Vorgehensweise aufbauend wird von Reese [59, 60] eine Stabilisierung für unterintegrierte Elemente, die zusätzlich auch erweiterte Verzerrungsanteile verwenden, entwickelt. Hier gelingt es die Steifigkeitsmatrix durch geeignet Annahmen so zu modifizieren, dass die kritischen Eigenwerte direkt ausgewertet, künstliche Kinematiken identifiziert und bei Bedarf die Steifigkeit in den entsprechenden Eigenformen verändert werden kann.

2.5.1 Analytische Stabilitätsuntersuchung

In diesem Abschnitt erfolgt die analytische Untersuchung eines einzelnen bilinearen Elementes. Eine ähnliche Untersuchung wurde z.B. in [84] durchgeführt. Ziel ist es, die Eigenwerte, welche ein Indikator für Aussagen über die Stabilität der Elemente sind, in Abhängigkeit des Deformationszustandes darzustellen. Betrachtet wird dabei ein homogener Zug-/Druckbelastungszustand, für den das Auftreten numerischer Instabilitäten zu erwarten ist. Die Materialeigenschaften werden mit Hilfe des hyperelastischen Neo-Hooke Materialgesetzes beschrieben, das zur Betrachtung der hier auftretenden großen Deformationen geeignet erscheint.

Materialgesetz

Das für die Untersuchungen zugrunde gelegte Neo-Hooke Materialgesetz basiert auf folgender Verzerrungsenergiefunktion:

$$W = \frac{1}{4}\kappa ((\det \mathbf{F})^2 - 1 - 2 \ln(\det \mathbf{F})) + \frac{1}{2}\mu (\text{tr}(\mathbf{C}) (\det \mathbf{F})^{-2/3} - 3) . \quad (2.91)$$

Der Kompressionsmodul κ und der Schubmodul μ können aus E-Modul E und Querkontraktionszahl ν berechnet werden:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} , \quad (2.92)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (2.93)$$

Mit dieser speziellen Verzerrungsenergiefunktion ist es möglich, den Spannungstensor in deviatorische und volumetrische Anteile aufzuspalten. Damit kann der Einfluss der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile untersucht werden. Der rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} wird aus dem Deformationsgradienten \mathbf{F} (Glg. (1.4)) berechnet als

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} . \quad (2.94)$$

Da bei den hier durchgeführten Untersuchungen immer ein Hauptspannungs-/verzerrungszustand in Koordinatenhaupttrichtung vorhanden ist, sind lediglich die Diagonalelemente des Deformationsgradienten (F_{ii} , $i = 1, \dots, 3$) von Null verschieden. Die Invarianten des rechten Cauchy-Green Tensors lassen sich somit wie folgt darstellen:

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) = F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2 , \quad (2.95)$$

$$I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) = (\det \mathbf{F})^2 = F_{11}^2 F_{22}^2 F_{33}^2 . \quad (2.96)$$

Der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} wird aus der Verzerrungsenergiefunktion abgeleitet als

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} . \quad (2.97)$$

Die einzelnen Komponenten des Spannungstensors, aufgeteilt in deviatorischen und volumetrischen Anteil, lassen sich somit wie folgt darstellen:

$$S_{ii} = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\kappa}{F_{ii}^2} ((\det \mathbf{F})^2 - 1)}_{vol} + \underbrace{\mu (\det \mathbf{F})^{-2/3} \left(1 - \frac{1}{3 F_{ii}^2} (F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2) \right)}_{dev} , \quad (2.98)$$

$$S_{ij} = 0 . \quad (2.99)$$

Der Materialtensor \mathbf{c} ergibt sich aus der zweiten Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach dem rechten Cauchy-Green Tensor:

$$\mathbf{c} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial^2 \mathbf{C}}, \quad (2.100)$$

mit den Komponenten

$$c_{iii}^{vol} = \frac{\kappa}{F_{ii}^4}, \quad (2.101)$$

$$c_{ijij}^{vol} = \frac{\kappa (\det \mathbf{F})^2}{F_{ii}^2 F_{jj}^2}, \quad (2.102)$$

$$c_{ijij}^{vol} = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{F_{ii}^2} ((\det \mathbf{F})^{-2} - 1), \quad (2.103)$$

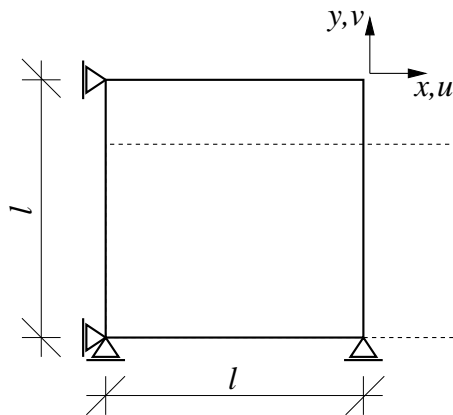
$$c_{iii}^{dev} = \mu (\det \mathbf{F})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{8 F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2}{9 F_{ii}^4} - \frac{4}{3} \frac{1}{F_{ii}^2} \right), \quad (2.104)$$

$$c_{ijij}^{dev} = \mu (\det \mathbf{F})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2 F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2}{9 F_{ii}^2 F_{jj}^2} - \frac{2}{3 F_{ii}^2} - \frac{2}{3 F_{jj}^2} \right), \quad (2.105)$$

$$c_{ijij}^{dev} = \frac{1}{3} \mu (\det \mathbf{F})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{F_{11}^2 + F_{22}^2 + F_{33}^2}{F_{ii}^2 F_{jj}^2} \right). \quad (2.106)$$

Problemstellung

In Bild 2.34 werden die Geometrie- und die Materialeigenschaften des einzelnen untersuchten Elementes dargestellt. Alle Knoten werden in z -Richtung festgehalten, so dass ein ebener Verzerrungszustand erzeugt wird. Durch das Festhalten der Knoten in z -Richtung und die in Bild 2.34 dargestellten Auflagerbedingungen in der x - y -Ebene



Geometrie :

$$l = 2$$

$$t = 2$$

Neo – Hooke Material:

$$\kappa = 1.0 \cdot 10^5$$

$$\mu = 20$$

Vorgabe einer Verschiebung y -Richtung

Abbildung 2.34: Geometrie-/Materialeigenschaften und Lagerbedingungen für ein einzelnes Element unter homogener Kompressionsbelastung

wird die Anzahl der Freiheitsgrade für das Gesamtsystem auf acht reduziert. Eine weitere Reduktion auf vier Freiheitsgrade wird durch die Vorgabe einer Verschiebung v in y -Richtung für die oberen vier Knoten erreicht.

Da nahezu inkompressibles Materialverhalten vorausgesetzt werden soll, kann die Verschiebung u in x -Richtung der Knoten auf der rechten Seite mit der Annahme der Volumenerhaltung berechnet werden. Der Grad der Volumenerhaltung wird durch die Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ angezeigt, für die entsprechend ein Wert $\det \mathbf{F} \approx 1$ angenommen wird. Die Verschiebung u wird in Abhängigkeit von v folgendermaßen dargestellt:

$$u = \frac{-1.9995v}{2 + v} . \quad (2.107)$$

Durch diese vereinfachenden Annahmen wird es möglich, den kompletten Elementverschiebungsvektor \mathbf{d}_e mit nur einer unbekanntem Variablen u darzustellen. Die Komponenten F_{ii} des Deformationsgradienten werden aus der Verschiebungsapproximation (Glg. (2.36)) abgeleitet:

$$F_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + 1 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} \mathbf{d}_e + 1 , \quad (2.108)$$

$$F_{22} = \frac{\partial u}{\partial y} + 1 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y} \mathbf{d}_e + 1 , \quad (2.109)$$

$$F_{33} = 1 . \quad (2.110)$$

Somit lassen sich Verzerrungstensor, Spannungstensor und Materialtensor berechnen und die Steifigkeitsmatrix kann aufgestellt werden.

Eigenformen

Da die Anzahl der Freiheitsgrade auf vier reduziert wurde, sind dementsprechend lediglich vier Eigenformen zu untersuchen. Davon sind ausschließlich die drei in Abb. 2.35 dargestellten Eigenformen von Interesse für die Stabilitätsuntersuchung. Der vierten möglichen Eigenform sind stets Eigenwerte die größer als Null sind zugeordnet. Diese kann somit als immer stabil bezeichnet werden.

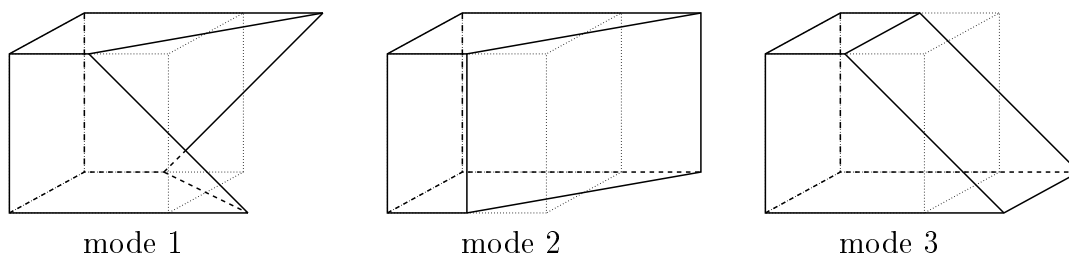


Abbildung 2.35: Untersuchte Eigenformen für das 8-Knoten Element unter homogener Kompressionsbelastung

Ergebnisse

In den Diagrammen Abb. 2.36-2.40 sind die Ergebnisse der analytischen Untersuchung zu sehen. Dabei werden die Eigenwerte der drei untersuchten Eigenformen in Abhängigkeit der Verschiebung v in y -Richtung im Bereich $-2 < v < 2$ dargestellt.

Aus Abb. 2.36, dem Resultat für das reine Verschiebungselement DIS3D, kann geschlossen werden, dass für die reine Verschiebungsformulierung keine numerischen Instabilitäten auftreten. Wird als Modifikation die selektive reduzierte Integration der

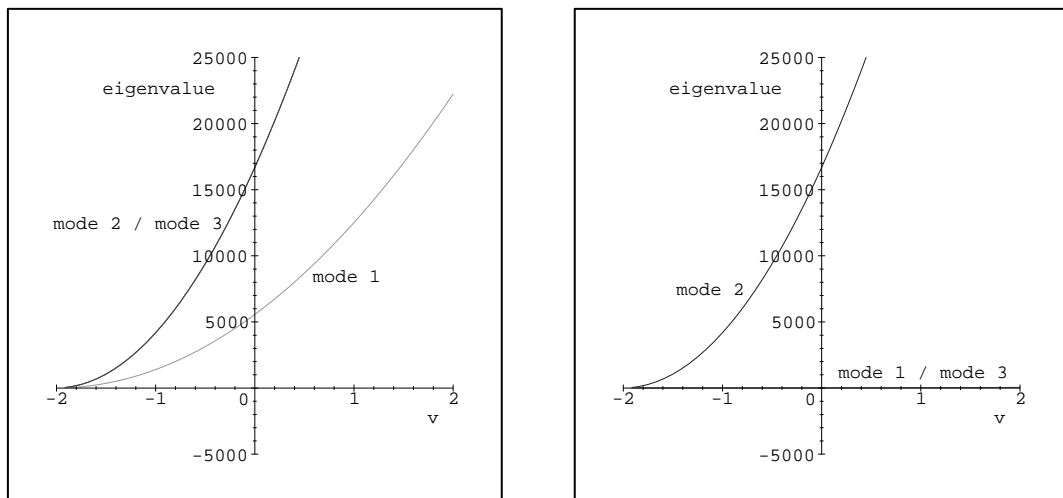


Abbildung 2.36: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; DIS3D Element (links) und DIS3D-rv Element (rechts)

volumetrischen Anteile genutzt, bleiben alle Eigenwerte weiterhin im positiven Bereich, allerdings werden die zu Eigenform 1 und 2 gehörenden Eigenwerte sehr klein.

In Abb. 2.37 werden die Ergebnisse für das ANS3DL Element, d.h. die Verschiebungsformulierung kombiniert mit der ANS-Methode, dargestellt. Dabei ist klar erkennbar, dass nun zu den Eigenformen 1 und 2 negative Eigenwerte für den Fall einer sehr starken Kompression des Elementes gehören. Dies deutet auf das erste Auftreten einer numerischen Instabilität hin, wobei eine solch starke Kompression von ca. 90% in einem realen Problem wohl seltener auftritt. Zusätzlich wird in Abb. 2.38 das Resultat für das ANS3DL-rv Element dargestellt, d.h. zusätzlich zur ANS-Methode wird auch die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile genutzt. Hier treten die eben schon beobachteten negativen Eigenwerte bereits bei einer Kompression von ca. 75% auf. Zusätzlich werden im betrachteten Bereich die Eigenwerte für die Eigenformen 1 und 3 sehr klein.

Wird die Verzerrung in Dickenrichtung durch einen zusätzlichen Verzerrungsanteil mittels der EAS-Methode erweitert, entsteht das ANS3DEAS Element, für das der Verlauf

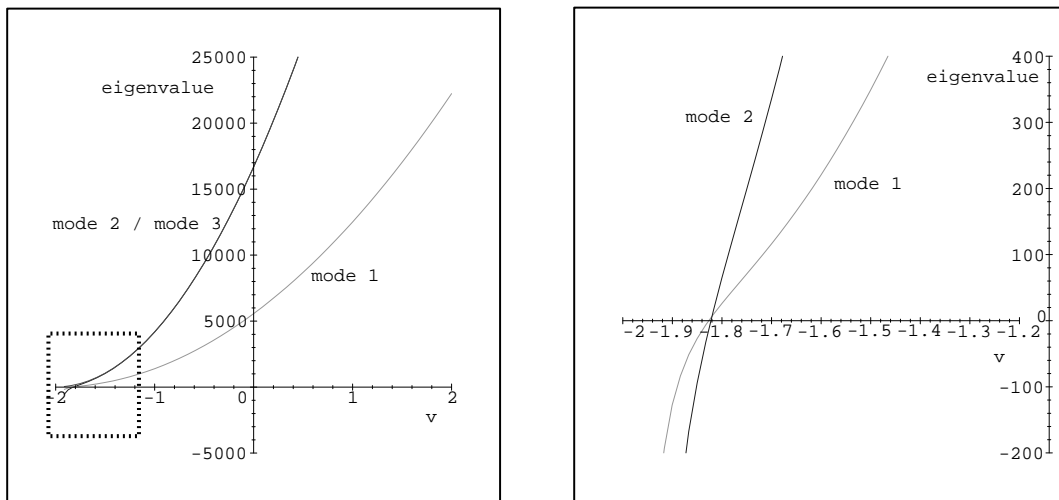


Abbildung 2.37: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; ANS3DL Element; rechtes Diagramm zeigt Ausschnitt aus linkem Diagramm markiert durch gepunkteten Rahmen

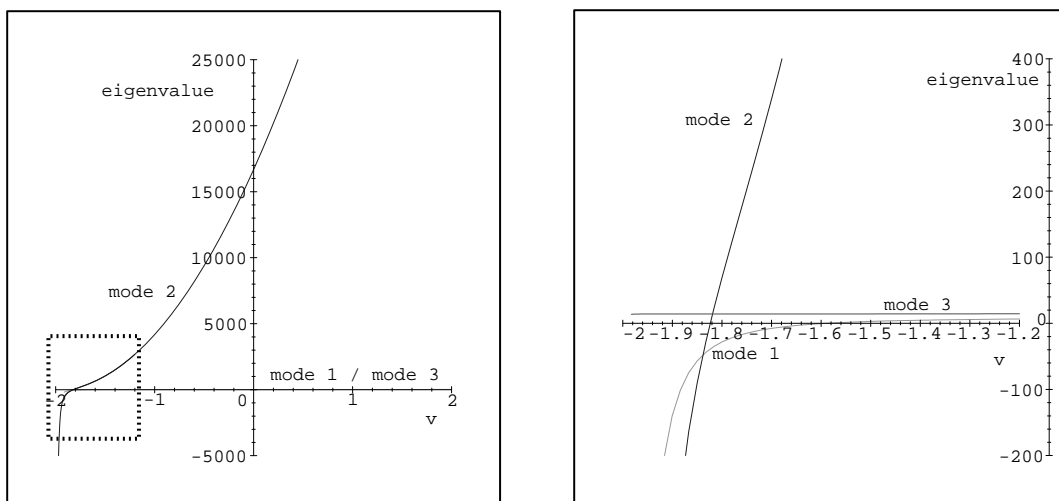


Abbildung 2.38: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; ANS3DL-rv Element; rechtes Diagramm zeigt Ausschnitt aus linkem Diagramm markiert durch gepunkteten Rahmen

der Eigenwerte in Abb. 2.39 dargestellt ist. Analog zum ANS3DL Element treten negative Eigenwerte für die Eigenformen 1 und 2 bei einer Kompression von ca. 80% auf. Außerdem sind die Eigenwerte für Eigenform 1 im gesamten Bereich sehr klein; dies

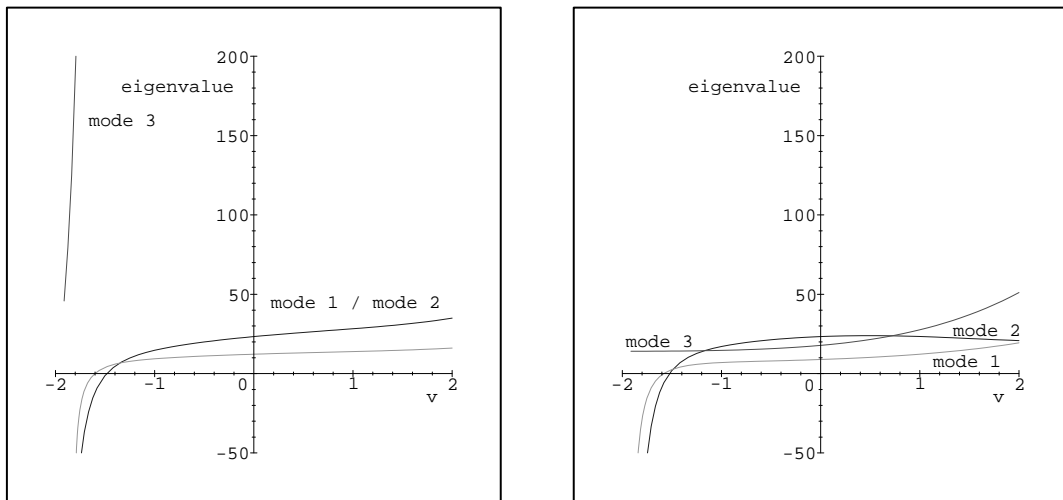


Abbildung 2.39: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; ANS3DEAS Element (links) und ANS3DEAS-rv Element (rechts)

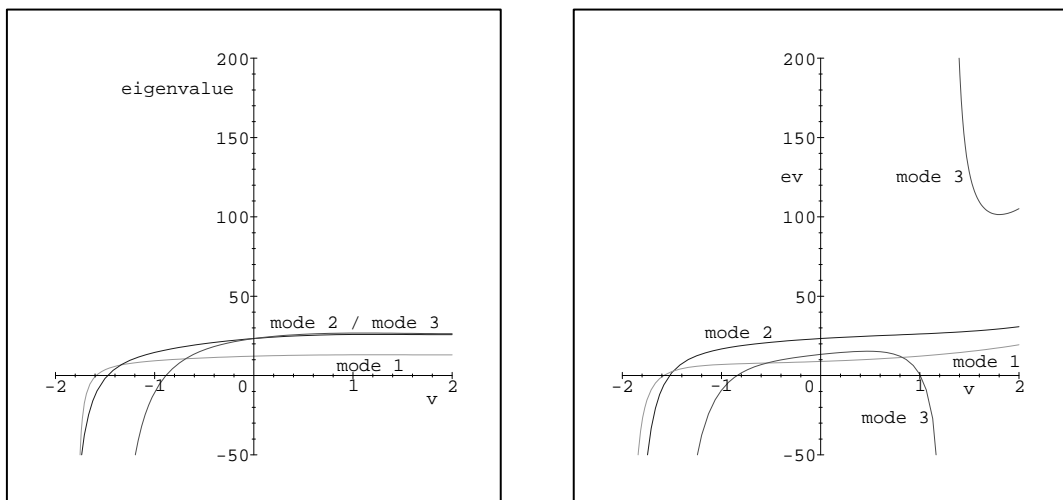


Abbildung 2.40: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; eas3DEAS Element (links) und eas3DEAS-rv Element (rechts)

trifft für das ANS3DEAS-rv Element (Abb. 2.39) zusätzlich auch für Eigenform 3 zu. In Abb. 2.40 sind die Resultate für das eas3DEAS und das eas3DEAS-rv Element dargestellt, bei denen zusätzlich auch für die Membranverzerrungen Erweiterungen mittels der EAS-Methode eingeführt werden. Hier tritt zusätzlich die typische Hourglass-Form

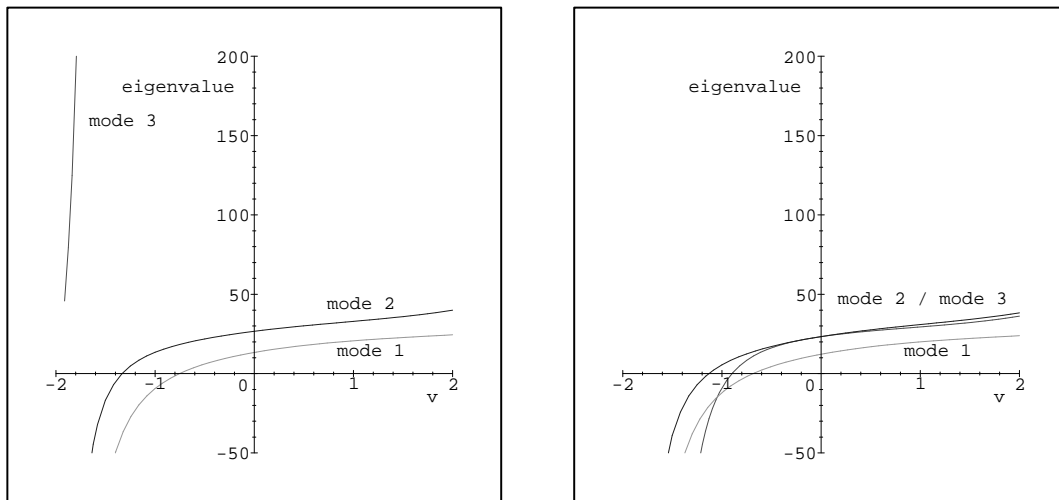


Abbildung 2.41: Eigenwerte der Eigenformen 1, 2 und 3 (Abb. 2.35) als Funktion der vertikalen Verschiebung v ; DIS3D-at Element (links) und eas3DEAS-at Element (rechts)

(Eigenform 3) auf, d.h. bereits bei einer Kompression von ca. 45% ergeben sich unerwünschte Kinematiken. Insgesamt weisen alle betrachteten Eigenformen sehr kleine Eigenwerte im gesamten Bereich auf. Bei zusätzlich eingesetzter selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile treten für die Eigenform 3 auch im Zugbereich negative Eigenwerte auf.

Abschließend wird der Ansatz der angenommenen Verzerrungen für die Normalverzerrung in Dickenrichtung (...-at Elemente) untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.41 dargestellt. Wird ausschließlich die (-at)-Option betrachtet (DIS3D-at Element), so zeigen sich analog zur ANS-Modifikation der Querschubterme negative Eigenwerte für die Eigenformen 1 und 2 und zwar bei einer Kompression von ca. 38% für Eigenform 1 und ca. 67% für Eigenform 2. D.h. bei eingeschalteter (-at)-Option sind numerische Instabilitäten für wesentlich kleinere Kompressionswerte zu erwarten als für Elemente, die ausschließlich die ANS-Modifikation der Querschubterme verwenden. Für das eas3DEAS-at Element treten analog zum eas3DEAS Element negative Eigenwerte in allen drei betrachteten Eigenformen auf. Die eingeschaltete (-at)-Option führt wiederum zu negativen Eigenwerten bei geringerer Kompression des untersuchten Elementes.

Es sind somit im Fall einer homogenen Belastung für alle vorgestellten Elementmodifikationen im Bereich großer Deformationen unerwünschte Kinematiken zu beobachten. Dies gilt analog für 'Solid-Shell' Elemente mit biquadratischen Ansätzen in der Schalenfläche.

2.5.2 Einfache Stabilisierung durch teilweise Rückführung auf Verschiebungsformulierung

Wie im vorigen Abschnitt beschrieben treten numerische Instabilitäten insbesondere bei homogenen Verzerrungszuständen auf, so z.B. bei starker Zusammendrückung der Elemente. Für einen solchen Verzerrungszustand liefert aber die reine Verschiebungsformulierung ein versteifungsfreies Ergebnis. Die Verschiebungselemente DIS3D (trilinear) und DI9K3D (biquadratisch-linear) sind außerdem frei von unerwünschten Kinematiken. Da aber bei realen Problemen meist gemischte Verzerrungszustände vorhanden sind, kann im Rahmen allgemeiner Anwendungen nicht einfach auf die reine Verschiebungsformulierung zurückgegriffen werden.

Für eine Nutzung der positiven Eigenschaften der Verschiebungselemente empfiehlt sich eine alternative Betrachtung der Modifikation der Elemente. Diesbezüglich können die eingesetzten Verfahren zur Vermeidung verschiedener Versteifungseffekte so interpretiert werden, dass ausgehend von der Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes versteifende Anteile subtrahiert werden:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{disp} - \mathbf{K}_{ANS}^* - \mathbf{K}_{EAS}^* - \mathbf{K}_{SRI}^* . \quad (2.111)$$

Die Idee einer einfachen Stabilisierung ist es nun, bei bestimmten Belastungszuständen, für die numerische Instabilitäten erwartet werden, wieder stabilisierende Anteile einzuführen, d.h. auf die Steifigkeitsmatrix aufzuzaddieren:

$$\mathbf{K}_{stab} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_{stab}^* . \quad (2.112)$$

Für die Stabilisierungsmatrix \mathbf{K}_{stab}^* kann nun angenommen werden, dass sie dabei von einem Stabilisierungsparameter φ abhängt, der wiederum eine Funktion des Deformationszustandes, also der Verschiebungen \mathbf{u} ist. Der Parameter φ kann Werte zwischen 0 und 1 annehmen; $\varphi = 0$, falls keine Stabilisierung erforderlich ist:

$$\mathbf{K}_{stab}^*(\varphi(u) = 0) = \mathbf{0} , \quad (2.113)$$

und $\varphi = 1$:

$$\mathbf{K}_{stab}^*(\varphi(u) = 1) = \mathbf{K}_{ANS}^* + \mathbf{K}_{EAS}^* + \mathbf{K}_{SRI}^* \quad (2.114)$$

für die vollständige Rückführung auf die Steifigkeitsmatrix des Verschiebungselementes.

Methode der angenommenen Verzerrungen

Eingeführt wird diese einfache Stabilisierungsmethode für Modifikationen mittels der Methode der angenommenen Verzerrungen. Der ANS-Methode liegt eine Aufspaltung des zum gewählten Verschiebungsansatzes kompatiblen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ in einen erwünschten Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ und einen unerwünschten versteifenden Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ zugrunde (siehe Kapitel 1.3.2). Unter Verwendung des in diesem Kapitel beschriebenen einfachen

Stabilisierungsverfahrens wird der versteifende Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, unter Verwendung des Stabilisierungsparameters φ , nochmals in einen stabilisierenden $\varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s$ und in einen unerwünschten Anteil $(1 - \varphi)\boldsymbol{\varepsilon}_s$ aufgespalten. Der stabilisierende Anteil wird dann wieder an die angenommenen Verzerrungen angefügt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi(u)\boldsymbol{\varepsilon}_s . \quad (2.115)$$

Das der ANS-Methode zugrundeliegende Potential ergibt sich somit folgendermaßen:

$$\Pi_{ANS} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}) + \varphi(u)\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u}))^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_a(\mathbf{u}) + \varphi(u)\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{u})) dV}_{\Pi_{int}} + \Pi_{ext} . \quad (2.116)$$

Die Linearisierung der nichtlinearen schwachen Form, die Einführung der Diskretisierung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d})$ und die Auswertung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung führen auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\underbrace{(\Pi_{int})_{,dd}}_{\mathbf{K}_{tang}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} - \underbrace{(\Pi_{int})_{,d}}_{\mathbf{f}_{int}} . \quad (2.117)$$

Durch Einsetzen von Glg. (2.116) ergeben sich für die tangentielle Steifigkeitsmatrix und den inneren Lastvektor folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{K}_{tang} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,d}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,d} + (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,dd}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s) dV , \quad (2.118)$$

$$\mathbf{f}_{int} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,d}^T \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s) dV . \quad (2.119)$$

Die Ableitungen der Verzerrungen nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d} berechnen sich zu

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,d} = \boldsymbol{\varepsilon}_{a,d} + \varphi_{,d}\boldsymbol{\varepsilon}_s + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_{s,d} , \quad (2.120)$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_a + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_s)_{,dd} = \boldsymbol{\varepsilon}_{a,dd} + \varphi_{,dd}\boldsymbol{\varepsilon}_s + 2\varphi_{,d}\boldsymbol{\varepsilon}_{s,d} + \varphi\boldsymbol{\varepsilon}_{s,dd} , \quad (2.121)$$

unter Berücksichtigung der Verformungsabhängigkeit des Stabilisierungsparameters, der somit ebenfalls von \mathbf{d} abhängt.

Stabilisierungsparameter

Eine Stabilisierung ist erforderlich bei Problemen mit großen Zug- oder Druckverformungen, bei Biegeverformungen hingegen treten keine kinematischen Eigenformen auf. Aus diesem Grund wird der Stabilisierungsparameter φ proportional zu den Spannungen in ξ - und η -Richtung gewählt, die am Elementmittelpunkt berechnet werden, wobei

die Beträge der Spannungen aufaddiert und mit einem Justierungsfaktor multipliziert werden:

$$\varphi = \frac{\tilde{\varphi}}{\kappa} (|S_{11}| + |S_{22}|) . \quad (2.122)$$

Bei einem reinen Biegezustand sollten die Spannung am Elementmittelpunkt und somit der Parameter φ identisch Null werden. Dieser Stabilisierungsparameter entspricht weitgehend den in [77] in ähnlichem Zusammenhang vorgeschlagenen Parametern. Allerdings können bei einer Betrachtung am Elementmittelpunkt gemischte Beanspruchungszustände nicht korrekt identifiziert werden. Deshalb wäre alternativ eine Auswertung der Spannungen an den Gausspunkten sinnvoll. Aus der Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert lässt sich dann auf die Art des Spannungszustandes schließen.

2.5.3 Numerisches Beispiel Stabilisierung der ANS-Elemente

Die im vorigen Abschnitt diskutierte einfache Stabilisierungsmethode durch die teilweise Rückführung auf das Verschiebungselement soll in diesem Kapitel anhand einfacher numerischer Beispiele getestet werden.

Scheibe unter Druckbelastung - gleichmäßiges Netz

Um die Funktionsfähigkeit der Stabilisierungsmaßnahmen zu testen, erscheint ein Problem mit starker homogener Kompression sinnvoll. Aus diesem Grund wird als erstes

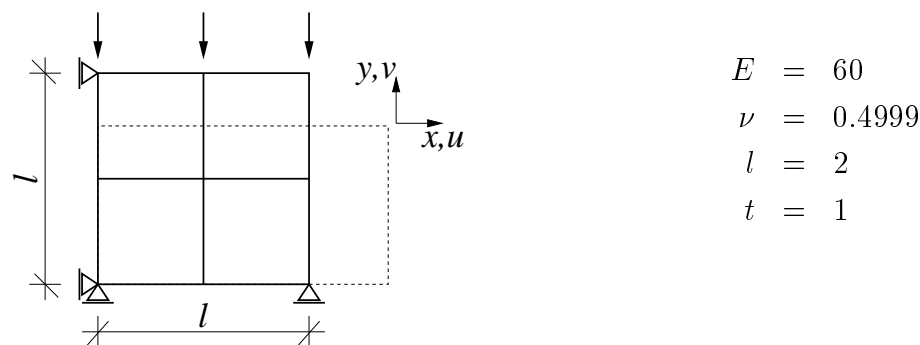


Abbildung 2.42: Ansicht der Scheibe unter Kompressionsbelastung diskretisiert mit neun Knoten; Geometrie-/Materialeigenschaften und Lagerbedingungen

Beispiel eine Scheibe (Bild 2.42) gewählt, die in der Längsrichtung durch die Vorgabe einer Verschiebung belastet wird. Die Scheibe wird diskretisiert mit vier bilinearen bzw. einem biquadratischen Element. In Dickenrichtung werden sämtliche Knoten gehalten, wodurch ein ebener Verzerrungszustand eingeführt wird. In Bild 2.42 sind die Geometrie und Materialdaten dargestellt. Es wird für dieses Beispiel inkompressibles

Materialverhalten ($\nu = 0.4999$) vorausgesetzt. Die Materialeigenschaften werden mit dem für große elastische Deformationen geeigneten Neo-Hooke Materialgesetz beschrieben.

Als Ergebnis der Berechnung werden in Abb. 2.43 und 2.44 die Eigenwerte der untersuchten und ebenfalls in Abb. 2.43 und 2.44 abgebildeten Eigenformen in Abhängigkeit der Verschiebung v dargestellt. Für die Berechnung werden das bilineare ANS3DEAS

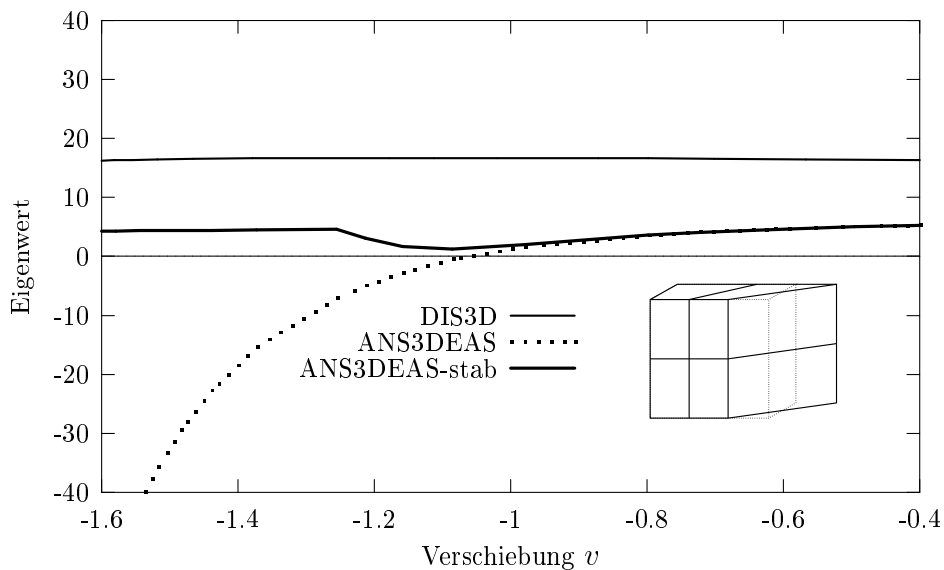


Abbildung 2.43: Eigenwerte der Scheibe für die dargestellte Eigenform für Verschiebung $-1.6 \leq v \leq -0.4$; bilineares Element

und das biquadratische MI9K3DEAS Element, bei denen als Modifikation die ANS-Methode und zusätzliche eine EAS-Erweiterung für die Dickenverzerrung eingesetzt werden. Zum Vergleich wird außerdem das Resultat für die Verschiebungselemente DIS3D und DI9K3D dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass die Verschiebungsformulierung im gesamten betrachteten Verschiebungsbereich jeweils einen konstant positiven Eigenwert liefert. Für die ANS-modifizierten Elemente sind künstliche Kinematiken zu beobachten. Für das bilineare ANS3DEAS Element ist ein negativer Eigenwert für die betrachtete Eigenform bei einer Kompression von ca. 52% zu beobachten. Das biquadratische MI9K3DEAS Element zeigt bereits bei einer Kompression von ca. 36% eine numerische Instabilität. Wird die verformungsabhängige Stabilisierung eingeschaltet, können diese Kinematiken vollständig vermieden werden. Während für kleine Deformationen die Eigenwerte der stabilisierten und der ungestabilisierten Elemente praktisch identisch sind, macht sich für größere Deformationen die Stabilisierung klar bemerkbar und der Eigenwert verbleibt im positiven Bereich.

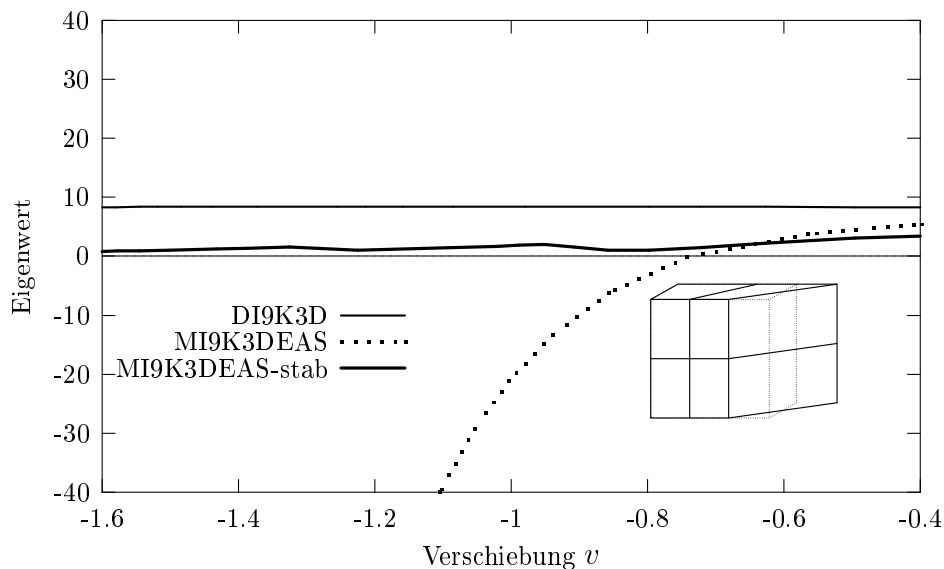


Abbildung 2.44: Eigenwerte der Scheibe für die dargestellte Eigenform für Verschiebung $-1.6 \leq v \leq -0.4$; biquadratisches Element

Scheibe unter Druckbelastung - verzerrtes Netz

Das gleiche Beispiel wie im vorigen Kapitel wird nochmals betrachtet, mit dem Unterschied, dass der Mittelknoten der Scheibe, wie in Abb. 2.45 dargestellt, leicht außermittig angeordnet wird, wodurch ein verzerrtes Elementnetz vorausgesetzt wird. Die

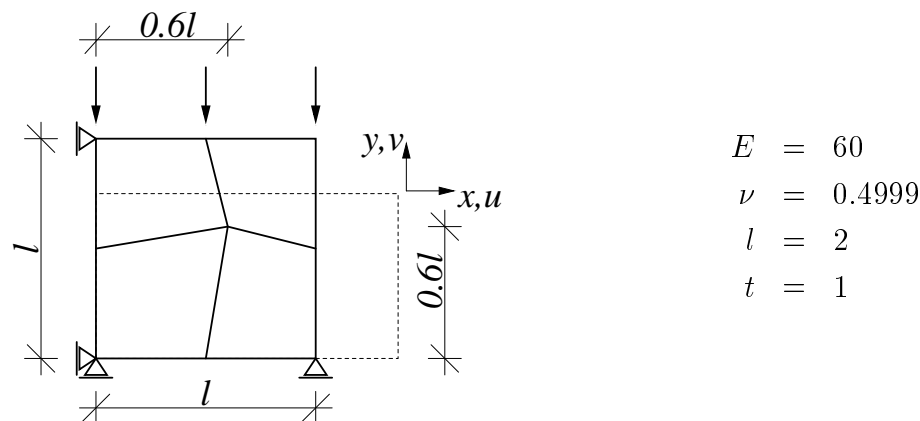


Abbildung 2.45: Ansicht der Scheibe unter Kompressionsbelastung diskretisiert mit neun Knoten; Verzerrtes Elementnetz

Diskretisierung erfolgt mit bilinearen unstabilisierten ANS3DEAS Elementen. An diesem Beispiel soll das Auftreten unerwünschter kinematischer Eigenformen für verzerrte

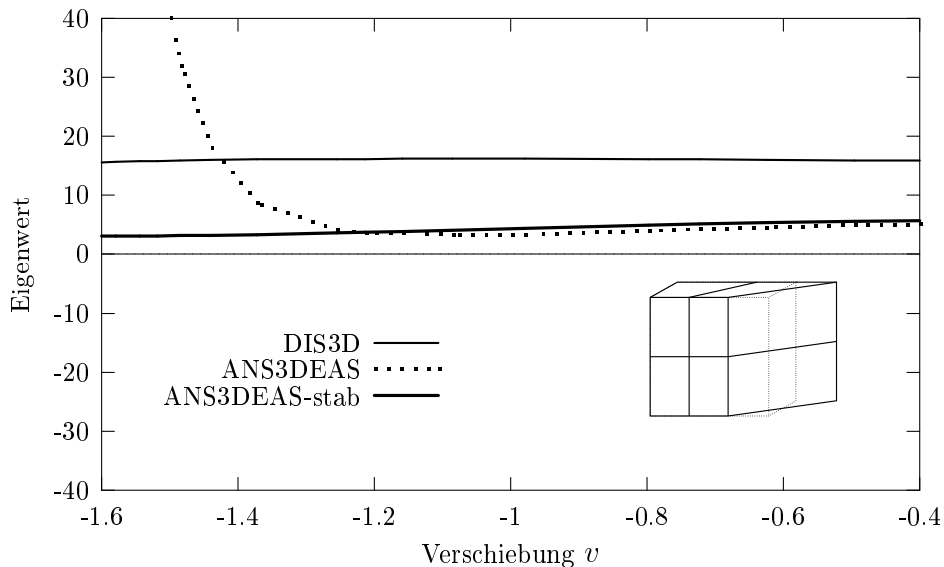


Abbildung 2.46: Eigenwerte der Scheibe für die dargestellte Eigenform für Verschiebung $-1.6 \leq v \leq -0.4$; verzerrtes Elementnetz

Elementgeometrien untersucht werden. Das Resultat dieser Untersuchung ist, dass keine Kinematiken zu beobachten sind. In Abb. 2.46 sind die Eigenwerte für die schon im vorigen Abschnitt untersuchte Eigenform dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich das Verschiebungselement DIS3D völlig analog zur Berechnung im vorigen Abschnitt mit unverzerrtem Elementnetz verhält. Im Bereich schwacher Kompression verhält sich das ANS3DEAS Element ebenfalls identisch wie bei unverzerrter Elementgeometrie. Im Bereich stärkerer Zusammendrückung ist allerdings ein starkes Anwachsen der Eigenwerte zu beobachten, was auf eine Versteifung der Elemente hindeutet. Dieses Versteifen wird offenbar verursacht durch die ANS-Modifikation im Zusammenhang mit der verzerrten Elementgeometrie und der starken Kompression der Elemente. Verdeutlicht wird dies durch den ebenfalls in Abb. 2.46 dargestellten Eigenwert eines Elementes mit Stabilisierung der ANS-Modifikation, der annähernd konstant im betrachteten Belastungsbereich verläuft.

Biegeproblem mit stabilisierten Elementen

Bei einem Biegeproblem sollte die adaptive Stabilisierung keinen Einfluss auf das Berechnungsergebnis haben. Dies wird durch die Wahl des Stabilisierungsparameters φ (Glg. (2.122)) gewährleistet, der für einen reinen Biegezustand den Wert $\varphi = 0$ annehmen sollte. Um dies zu überprüfen, wird der in Abb. 2.47 dargestellte Kragarm, der durch ein Kräftepaar am Kragarmende belastet wird, untersucht. Diskretisiert wird der Kragarm mit sechs bilinearen bzw. mit drei biquadratischen Elementen. Würde der Stabilisierungsparameter bei adaptiver Stabilisierung einen Wert deutlich größer als Null annehmen, wäre ein entsprechendes Versteifen zu erwarten, da im Fall der

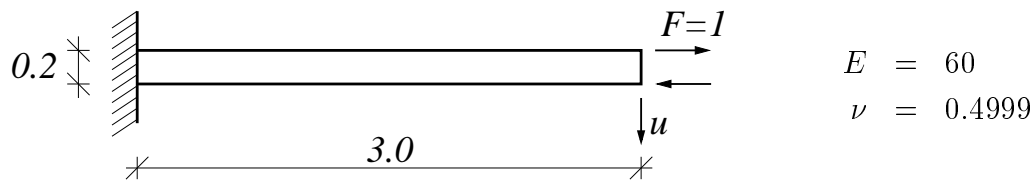


Abbildung 2.47: Seitenansicht des Kragarms unter Momentenbelastung; Geometrie- und Materialeigenschaften

Biegebelastung die ANS-Modifikation unverzichtbar ist, um ein versteifungsfreies Resultat zu erhalten.

Die aus dieser Untersuchung resultierenden Last-Verformungs Kurven sind in Abb. 2.48 dargestellt. Dabei sind kaum Unterschiede zwischen den Kurvenverläufen für die Berechnungen mit bzw. ohne adaptive Stabilisierung zu erkennen. Die vorgeschlagene Stabilisierung scheint also keinen unerwünschten versteifenden Einfluss bei biegedominierten Problemen zu haben.

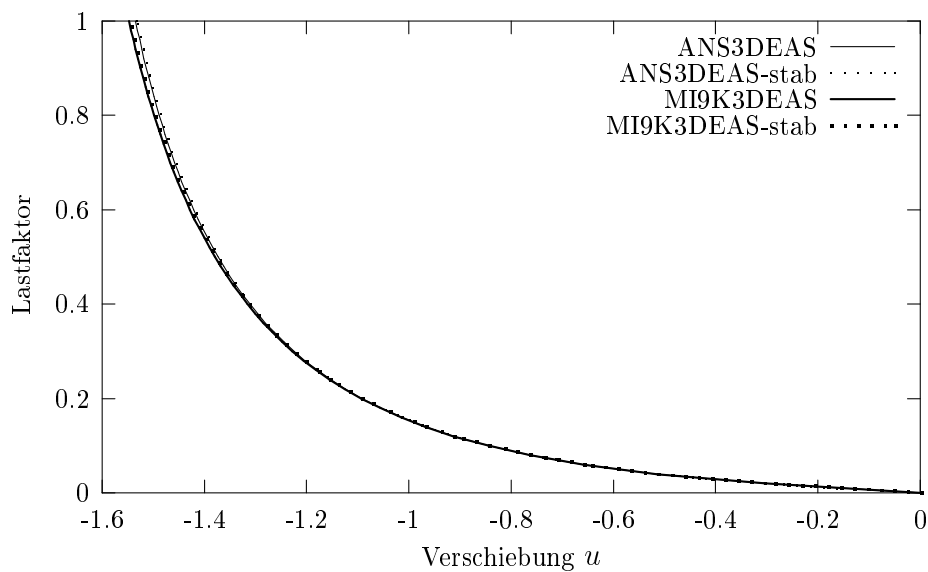


Abbildung 2.48: Last-Verformungs-Diagramm für Kragarm belastet durch Endmoment

2.5.4 Einfache Stabilisierung durch Ausschalten kritischer Elementmodifikationen

Im Gegensatz zu der im vorigen Kapitel beschriebenen Vorgehensweise einer Gewichtung der durch die ANS-Methode eliminierten versteifenden Anteile in Abhängigkeit vom Belastungszustand erfolgt bei der in diesem Abschnitt beschriebenen Stabilisierung eine komplette Abschaltung der entsprechenden Elementmodifikationen. Bei vollständiger Stabilisierung wird somit die Steifigkeitsmatrix für das reine Verschiebungselement ausgewertet.

Als Entscheidungskriterium ob die einzelnen Elementmodifikationen benötigt werden, oder ob diese im Sinne einer Stabilisierung ausgeschaltet werden sollten, dient eine Betrachtung der inneren Energie der Elemente. Diese berechnet sich aus dem Verzerrungstensor, zum einen für das reine Verschiebungselement mit den zum Verschiebungsansatz kompatiblen Verzerrungen

$$\mathbf{E}_{dis} = \mathbf{E}(\mathbf{u}) , \quad (2.123)$$

und zum anderen für die gewählte Elementformulierung, d.h. die Verzerrungen werden der ANS-Methode oder EAS-Methode entsprechend modifiziert:

$$\mathbf{E}_{mod} = \mathbf{E}_{ANS} + \mathbf{E}_{EAS} . \quad (2.124)$$

Für beide Varianten wird dann die Verzerrungsenergie berechnet:

$$\Pi_{dis} = \int_V \mathbf{E}_{dis}^T \mathbf{S}_{dis} dV , \quad \Pi_{mod} = \int_V \mathbf{E}_{mod}^T \mathbf{S}_{mod} dV , \quad (2.125)$$

wobei für Π_{mod} auch die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile eingesetzt werden kann.

Die beiden Energiewerte sollen zur Identifikation des vorhandenen Belastungszustandes dienen. Der Fall $\Pi_{mod} < \Pi_{dis}$ deutet auf eine Versteifung der Verschiebungsformulierung hin. Die entsprechende Modifikation muss dann eingeschaltet bleiben. Dahingegen gilt z.B. für einen homogenen Belastungszustand $\Pi_{dis} = \Pi_{mod}$, in diesem Fall wird auf die Verschiebungsformulierung zurückgegriffen.

Um das Ausschalten der einzelnen Elementmodifikation, die unterschiedlichen Versteifungsproblematiken zugeordnet sind, unabhängig von einander zu steuern werden bei der Berechnung von Π_{mod} nur einzelne Modifikationen berücksichtigt:

Π_{mod}^1 ... Nur angenommene Verzerrungen (ANS) für Querschubanteile

Π_{mod}^2 ... Nur erweiterte Verzerrungen (EAS) für $E_{\zeta\zeta}$

Π_{mod}^3 ... Nur EAS bzw. ANS für Membranverzerrungen

Π_{mod}^4 ... Nur selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile (-rv)

Π_{mod}^5 ... Nur angenommene Normalverzerrung in Dickenrichtung (-at)

Sollte für die betrachtete Variante n das Verhältnis $\frac{\Pi_{dis} - \Pi_{mod}^n}{\Pi_{dis}} < tol$ mit einem Wert $tol \approx 0$ sein, so zeigt dies an, dass die entsprechende Modifikation keinen Einfluss auf die Steifigkeit hat. Diese kann somit ohne Nachteil ausgeschaltet werden, wodurch automatisch durch die entsprechende Elementmodifikation bedingte numerische Instabilitäten vermieden werden.

Der Initiierung der Stabilisierung erfolgt also durch die Berechnung der Verzerrungsenergieverhältnisse $\frac{\Pi_{dis} - \Pi_{mod}^n}{\Pi_{dis}}$ für alle verfügbaren Elementmodifikationen. Dann erfolgt die Entscheidung, welche der Modifikationen ausgeschaltet wird. Dieser Vorgang wird im Programm durch ein eigenes Kommando gesteuert und kann z.B. nach jedem Iterationsschritt ausgeführt werden.

2.5.5 Inhomogener Kompressionstest

Die im vorigen Abschnitt diskutierte Stabilisierungsmethode führt bei homogenen Belastungszuständen mit jeder Geometrie zum richtigen Ergebnis, da hier $\Pi_{dis} = \Pi_{mod}$ gilt und somit automatisch und ohne Nachteil mit der reinen Verschiebungsformulierung gearbeitet wird. Deshalb wird zum Test der vorgeschlagenen Vorgehensweise ein inhomogener Kompressionstest durchgeführt, der auch in [58] genutzt wurde.

Bei diesem Test wird eine rechteckige Scheibe im mittleren Bereich durch eine Streckenlast p belastet. Geometrie, Belastung, Auflagerbedingungen und Materialdaten sind in Abb. 2.49 dargestellt, wobei das Neo-Hooke Materialmodell mit den in [58] vorgeschlagenen Materialparametern eingesetzt wird. Die Vernetzung der Scheibe erfolgt gleichförmig mit 16 bilinearen bzw. 4 biquadratischen Elementen, wobei unter Aus-

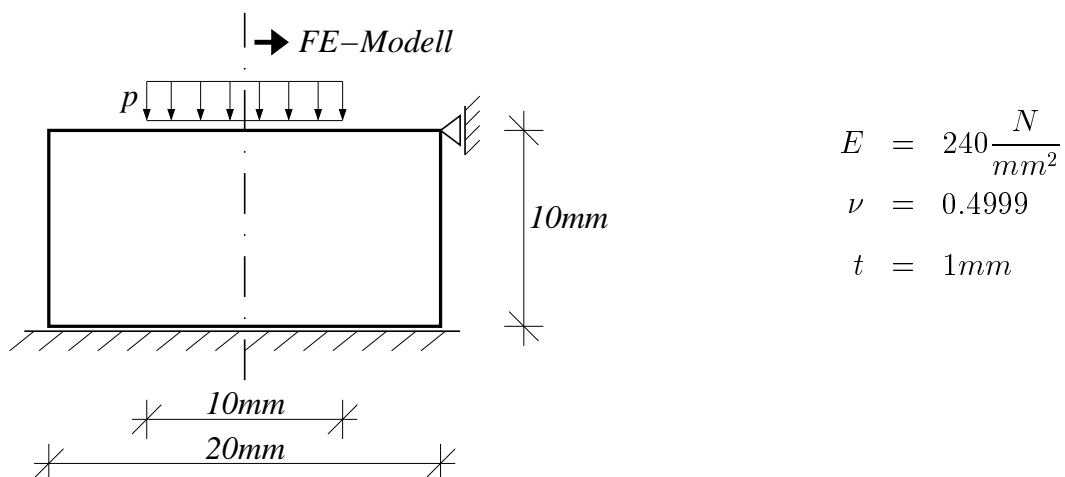


Abbildung 2.49: Seitenansicht der durch eine Streckenlast belastet Scheibe für den inhomogenen Kompressionstest; Geometrie-/materialeigenschaften und Lagerbedingungen

nutzung der Symmetrie nur die Hälfte der Scheibe betrachtet und diese entsprechend mit 5×5 Knoten diskretisiert wird. Es werden für jeden Lastschritt die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix untersucht, um das Auftreten numerischer Instabilitäten zu erkennen.

In Abb. 2.50 ist die verformte Scheibe für das bilineare EAS-Element bei einer Kompression am Ort der Symmetrieachse um 40% bzw. 46% dargestellt. Hier sind, wie aus Tab. 2.8 ersichtlich bereits für sehr kleine Belastungen negative Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix zu beobachten, bei einer Kompression von ca. 46% kann keine Konvergenz in der Gleichgewichtsiteration mehr erreicht werden, d.h. die Berechnung wird abgebrochen.

Da nahezu inkompressibles Materialverhalten vorausgesetzt wird, erscheint auch die Verwendung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile sinnvoll, weshalb zur Berechnung auch das entsprechende ANS Element (ANS3DEAS-rv) eingesetzt wird. Mit diesem Element werden Kompressionen von 40% und 65% (siehe Abb. 2.51) ohne Stabilitätsprobleme erreicht. Es verhält sich dabei deutlich weicher als das in [58] verwendete Element. Erst bei einer Kompression von ungefähr 76% ist das Auftreten eines negativen Eigenwertes der Steifigkeitsmatrix zu beobachten.

In Tabelle 2.8 sind auch die Ergebnisse für das reine Verschiebungselement DIS3D dargestellt. Hier treten, wie zu erwarten, keine negativen Eigenwerte auf, allerdings ist das Ergebnis für die beiden betrachteten Belastungszustände deutlich zu steif.

Alternativ erfolgt eine Diskretisierung der halben Scheibe mit vier biquadratischen Elementen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind ebenfalls in Tab. 2.8 dargestellt. Das biquadratisch-lineare Verschiebungselement (DI9K3D) verhält sich wiederum zu steif, ist allerdings wesentlich weicher als das trilineare Verschiebungselement DIS3D. In Abb. 2.52 ist die deformierte Struktur bei einer Kompression von 40% bzw. 48% dargestellt. Bei ca. 48% Kompression, die bei einer verhältnismäßig hohen Belastung erreicht wird, treten auch für das Verschiebungselement negative Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix auf und die Berechnung bricht ab. Aufgrund des deutlich zu steifen Verhaltens sind die beiden reinen Verschiebungselemente erwartungsgemäß zur Behandlung dieses gemischten Beanspruchungszustandes nicht geeignet.

Die Berechnung mit dem MI9K3DEAS Element führt ebenfalls zu unerwünschten Kinematiken und führt bereits bei einer Kompression von unter 30% zur Divergenz in der Gleichgewichtsiteration. Auch hier würde voraussichtlich eine feinere Vernetzung

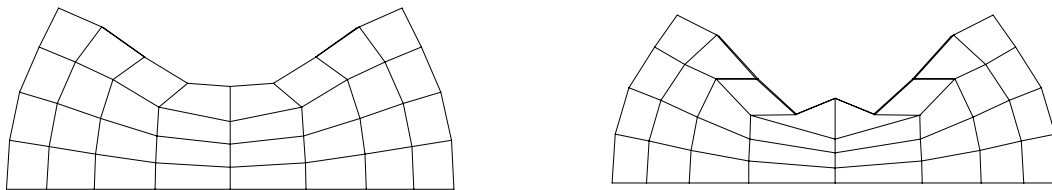


Abbildung 2.50: Deformierte Scheibe bei einer Kompression in Scheibenmitte von 40% (links) und 46% (rechts); unstabilisiertes EAS3DEAS Element

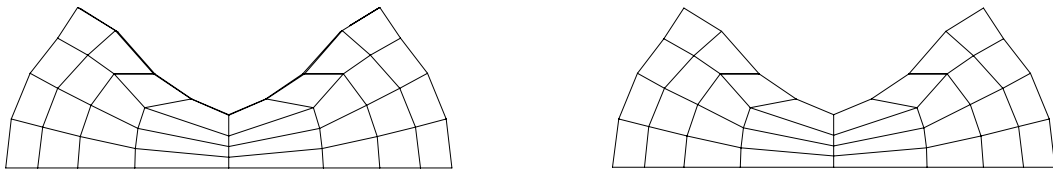


Abbildung 2.51: Deformierte Scheibe bei einer Kompression in Scheibenmitte von 65%; unstabilisiertes ANS3DEAS-rv Element (links) und $(EAS3DEAS-rv-at)_{stab}$ Element (rechts)



Abbildung 2.52: Deformierte Scheibe bei einer Kompression in Scheibenmitte von 40% (links) und 48% (rechts); unstabilisiertes DI9K3D Element

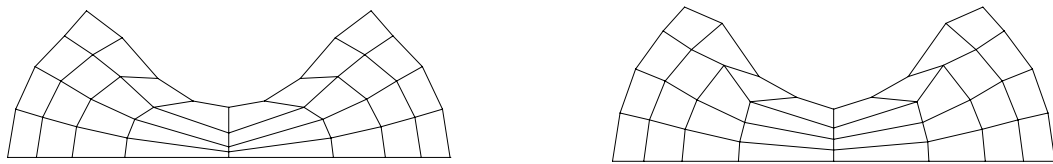


Abbildung 2.53: Deformierte Scheibe bei einer Kompression in Scheibenmitte von 65%; unstabilisiertes MI9K3DEAS-rv Element (links) und $(MI9K3DEAS-rv-at)_{stab}$ Element (rechts)

zu besseren Ergebnissen führen. Ein besseres Resultat liefert das MI9K3DEAS-rv Element mit eingeschalteter selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile, was wiederum darauf hinweist, dass der volumetrische Versteifungseffekt eine maßgebliche Rolle für das betrachtete Beispiel spielt. Außerdem sind hier keine negativen Eigenwerte zu beobachten. Die deformierte Struktur ist in Abb. 2.53 bei einer Kompression von 65% dargestellt.

Zum Test der Stabilisierung werden sowohl die bilineare als auch die biquadratische Variante der Elementformulierungen eingesetzt, die grundsätzlich alle verfügbaren Elementmodifikationen verwenden. Die nicht benötigten und evtl. zu numerischen Instabilitäten führenden Modifikationen werden dann entsprechend der im vorigen Abschnitt geschilderten Vorgehensweise partiell ausgeschaltet. Konkret erfolgt im dargestellten Beispiel eine komplette Abschaltung der ANS-Modifikation der Querschubterme, der EAS-Erweiterung der Normalverzerrung in Dickenrichtung und der angenommenen Verzerrungsverläufe für die Dickenverzerrung für alle Elemente. Die Modifikationen

	40% Kompr. bei	65% Kompr. bei	Neg. Eigw. bei
	p in $\frac{N}{mm^2}$		
Q1SP in [58]	~ 210	~ 600	-
DIS3D	5760	12480	-
EAS3DEAS	214	-	30
ANS3DEAS-rv	205	477	702
(EAS3DEAS-rv-at) _{stab}	203	477	-
DI9K3D	540	-	979
MI9K3DEAS	-	-	48
MI9K3DEAS-rv	240	917	-
(MI9K3DEAS-rv-at) _{stab}	228	533	-

Tabelle 2.8: Belastungszustände d.h. Druckwerte bei unterschiedlicher Kompression für verschiedene Elementvarianten; Auftreten negativer Eigenwerte

der Membranverzerrungen werden nur partiell für einzelne Elemente abgeschaltet und die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile bleibt komplett erhalten. Eine Darstellung der deformierten Scheibe bei einer Kompression von 65% erfolgt in Abb. 2.51 für die bilineare Variante und in Abb. 2.53 für die biquadratische Variante. Insgesamt erscheinen die bilinearen Elemente mit den vorgeschlagenen Modifikationen für die Berechnung einer in der Schalenfläche belasteten Struktur besser geeignet. Wird wie hier die Kompression der Scheibe gemessen an der Verschiebung in der Scheibenmitte betrachtet, so sind für die Elemente mit biquadratischen Ansätzen keine Vorteile zu erkennen. Als zusätzlicher Nachteil ist zu sehen, dass bereits das biquadratisch-lineare Verschiebungselement DI9K3D zwar bei hoher Belastung aber dennoch Kinematiken aufweisen kann.

2.5.6 Numerische Instabilitäten bei ANS-Elementen unter Schubbelastung

In den folgenden Kapiteln sollen auch Verformungsprozesse von Verbundblechen untersucht werden. Die Verbundbleche bestehen aus zwei Deckblechen, die über eine Kleb-/Kernschicht miteinander verbunden werden. Für die numerische Simulation sollen sowohl Deck- als auch die Kernschicht mit 'Solid-Shell' Elementen diskretisiert werden. Beim Umformen der Bleche kommt es zu hohen gegenseitigen Verschiebungen der Deckbleche, d.h. für die Kernschicht liegt in erster Linie ein Schubbeanspruchungszustand vor. Bei Voruntersuchungen musste festgestellt werden, dass insbesondere bei einer Kernschichtdiskretisierung mit mehreren ANS-Elementen in Dickenrichtung unerwünschte Kinematiken innerhalb der Kernschicht auftreten.

Zur Verdeutlichung dieses Problems wird das in Abb. 2.54 dargestellte Beispiel betrachtet. Hier wird eine geschichtete Struktur aus drei ANS3DEAS Elementen untersucht,

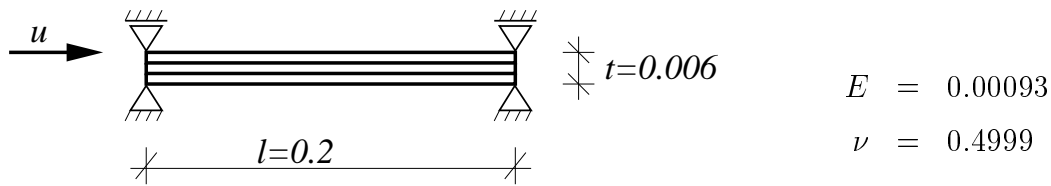


Abbildung 2.54: Schubversuch mit geschichteter Struktur; Geometrie-/materialeigenschaften und Lagerbedingungen

die durch die Verschiebung $u = 0.02$ der oberen Knoten auf Schub beansprucht wird. Die Geometrie- und Materialeigenschaften entsprechen den in Kapitel 3.4 zur Beschreibung der Kernschicht der Verbundbleche verwendeten Eigenschaften. Bereits nach dem

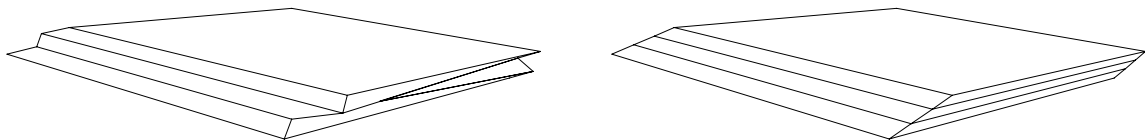


Abbildung 2.55: Geschichtete Struktur unter Schubbeanspruchung; ANS3DEAS Elemente (links) und (ANS3DEAS)_{stab} Elemente (rechts)

ersten Iterationsschritt erhält man die in Abb. 2.55 dargestellte Verformungsfigur, bei der in der linken Abbildung die auftretenden Kinematiken deutlich sichtbar werden. Offenbar führt die Unterintegration mittels ANS-Ansatz zu unerwünschten Kinematiken bei reiner Schubbeanspruchung der Elemente.

Um diese numerischen Instabilitäten zu vermeiden, wird wieder die in Abschnitt 2.5.4 vorgestellte einfache Stabilisierung durch Ausschalten kritischer Elementmodifikationen eingesetzt. Dabei wird in diesem Fall so vorgegangen, dass im ersten Iterationsschritt eine Berechnung mit dem reinen Verschiebungselement erfolgt, dann wird die Stabilisierung durch die in Abschnitt 2.5.4 beschriebene Energiebetrachtung initiiert, d.h. die benötigten Elementmodifikationen werden eingeschaltet, und die Gleichgewichtsiteration wird fortgesetzt. Bei dem betrachteten Beispiel wird durch den Stabilisierungsalgorithmus keine der zur Verfügung stehenden Elementmodifikationen zugeschaltet, d.h. die Berechnung erfolgt mit dem reinen Verschiebungselement.

2.5.7 Zusammenfassung

Offensichtlich treten die numerischen Stabilitätsprobleme insbesondere bei homogenen Beanspruchungszuständen auf. Um Stabilisierungsmaßnahmen zu initiieren ist eine Identifizierung des vorhandenen Beanspruchungszustandes notwendig. Dafür eignet sich die in Abschnitt 2.5.4 beschriebene Energiebetrachtung. Als alternative Vorge-

hensweise zur Identifizierung kritischer Zustände könnten auch die Spannungen an den Gausspunkten ausgewertet werden. Aus den Einzelwerten wäre dann ein Mittelwert zu bilden, und aus der Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert könnte dann auf die Art des Beanspruchungszustandes geschlossen werden. D.h. große Abweichungen ließen auf eine inhomogene, kleine Abweichungen auf eine homogene Beanspruchung schließen. Die Information über die Art der Beanspruchung kann dann genutzt werden, um eine Stabilisierung durch Ein- bzw. Ausschalten kritischer Elementmodifikationen zu initiieren.

Kapitel 3

Verwendung der 'Solid-Shell' Elemente für unilaterale Kontaktprobleme

Eine spezielle Problemklasse in der numerischen Simulation ist die Behandlung von Blechumformprozessen. Das Umformen geschieht mit Hilfe von starren Umformwerkzeugen, die das Blech in die gewünschte Form bringen, z.B. beim Freibiegen oder Tiefziehen. Hierfür werden numerische Kontaktformulierungen benötigt, die die Kontakt- randbedingung zwischen Blech und Werkzeug erfassen. Die benötigten Algorithmen zur numerischen Behandlung von Kontaktproblemen sind in der Literatur zu finden, insbesondere bei Laursen [48, 47] und Wriggers [79, 81].

Die im vorigen Kapitel vorgestellten Volumen-Schalen-Elemente eignen sich in besonderer Weise für die Beschreibung der Bleche. Insbesondere ist aufgrund ihres dreidimensionalen Charakters die Geometrie der Schalenoberflächen gegeben, was entscheidend ist für eine Anwendung für Kontaktprobleme, da zur Beschreibung des Kontaktes die Geometrie der Strukturoberflächen benötigt wird. Eine ähnliche Problematik wird auch in [63] diskutiert, wo sogenannte oberflächenorientierte Schalenmodelle zur Anwendung für Kontaktprobleme entwickelt wurden. In [22, 35] werden ebenfalls Schalenmodelle zur Verwendung in der numerischen Simulation von Blechumformprozessen vorgestellt.

Grundsätzlich sind zwei Arten des Kontaktes zu unterscheiden. Beim Normalkontakt werden ausschließlich die Kontaktkräfte normal zum Kontaktkörper berücksichtigt. Der Tangentialkontakt schließt zusätzlich tangentielle Kräfte ein, die aufgrund von Reibungs- bzw. Haftungseinflüssen zwischen den Kontaktkörpern entstehen. In der vorliegenden Arbeit soll in erster Linie Normalkontakt betrachtet werden.

Zur Berücksichtigung der Kontakt- randbedingung erfolgt in den meisten Fällen eine Auswertung der Kontaktbedingung an den Knotenpunkten. Bei Verwendung von Elementen höherer Ansatzordnung, wie den hier eingesetzten biquadratischen 'Solid-Shells', ist im Fall der Knotenbetrachtung eine unterschiedliche Behandlung der Eck-, Seitenmitten- und Mittenknoten erforderlich. Dieser Aspekt wird z.B. auch in [20] behandelt. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt eine Auswertung der Kontaktbedingung

auf Elementebene, d.h. es werden Kontaktelemente eingesetzt, die in ihrer Geometrie den Oberflächen der verwendeten 'Solid-Shell' Elemente entsprechen. Die Kontaktintegrale werden dann nicht knotenweise, sondern durch Integration über die Fläche des Kontaktelementes ausgewertet, wobei die Kontaktprüfung an den Elementknoten oder direkt an den Integrationspunkten erfolgen kann.

Die Beschreibung der Kontaktflächen erfolgt mit Hilfe analytischer Funktionen. Diese ermöglichen eine effiziente und exakte Darstellung einfacher Geometrien. Beliebige Geometrien können allerdings auf diese Weise nicht problemlos erfasst werden.

3.1 Normalkontakt

Als Normalkontakt wird eine Kontaktbeschreibung ohne Berücksichtigung tangentialer Kontaktkräfte aus Reibungs- bzw. Haftungseinflüssen bezeichnet, d.h. es werden nur Kontaktkräfte normal zur Kontaktfläche aufgebracht. Die Kontaktrandbedingung besagt, dass kein Eindringen eines Kontaktpunktes in eine Kontaktfläche zugelassen wird, d.h. für den Abstand g eines Punktes zur Kontaktfläche muss gelten $g \geq 0$. Als erster Schritt erfolgt somit die Auswertung der Kontaktrandbedingung. Dafür wird der Abstand $g_N(\mathbf{x})$ eines sogenannten Kontaktpunktes der einen Fläche mit dem Ortsvektor \mathbf{x} normal zur anderen, der Kontaktfläche, ermittelt als

$$g_N = \mathbf{n}_c \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) , \quad (3.1)$$

mit Hilfe eines Einheitsvektors normal zur Kontaktfläche \mathbf{n}_c im auf die Kontaktfläche projizierten Kontaktpunkt \mathbf{x}_c (siehe Abb. 3.1 bzw. 3.2). Ist ein Eindringen des Kontaktpunktes in die Kontaktfläche zu beobachten, so wird mit Hilfe der in den folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren die Variationsgleichung entsprechend modifiziert.

3.1.1 Das Penaltyverfahren

Eine einfache Möglichkeit die zusätzliche Randbedingung $g_N \geq 0$ in das Funktional (1.78) mit einzubringen, ist eine sogenannte Regularisierung mit Hilfe eines Penalty(Straf)-Terms. Dabei wird zum Gesamtpotential folgender Anteil angefügt:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{A_c} p_N \tilde{g}_N dA_c . \quad (3.2)$$

Die Integration erfolgt über den Randbereich in Kontakt A_c . Da der Potentialanteil (3.2) nur im Fall des Kontaktes einen Beitrag zum Gesamtpotential bringen soll, wird die Abstandsfunktion g_N in eine Penetrationsfunktion umformuliert mit:

$$\tilde{g}_N = \begin{cases} g_N & , g_N < 0 \\ 0 & , g_N \geq 0 \end{cases} , \quad (3.3)$$

d.h. für einen Kontaktabstand $g_N \geq 0$ verschwindet (3.2). Der Kontaktdruck p_N wird näherungsweise mit Hilfe eines Penalty Parameters ε_N berechnet:

$$p_N = \varepsilon_N \tilde{g}_N . \quad (3.4)$$

Eine Erfüllung der Randbedingung $g_N \geq 0$ wird für einen im Verhältnis zur Gesamtsteifigkeit hohen Wert für ε_N erreicht, d.h. eine exakte Erfüllung der Randbedingung erfolgt für $\varepsilon_N \rightarrow \infty$. Ein zu hoher Wert für ε_N führt aber zu numerischen Schwierigkeiten. Einzelne Einträge in der Steifigkeitsmatrix würden dann verhältnismäßig groß, mit der Folge einer hohen Konditionszahl für die Steifigkeitsmatrix sowie Problemen bei der Gleichungslösung. Es ist also stets eine kleine Eindringung zuzulassen, d.h. es muss ein Kompromiss zwischen tolerierbarer Penetration und numerisch stabiler Gleichungslösung gefunden werden. Die Wahl des Penalty Parameters wird anhand numerischer Beispiele in den folgenden Abschnitten erörtert.

Flächenkontaktelement

Die übliche Vorgehensweise zur Einbringung der Kontaktbedingungen ist eine knotenweise Formulierung, d.h. die Kontaktbedingung wird an den Knoten abgeprüft. Um eine gleichmäßige Verteilung des Kontaktdruckes zu erreichen, ist eine entsprechende Gewichtung der Knoten vorzunehmen, die von der Anzahl der dem Knoten benachbarten Elemente, der Elementgeometrie und bei den quadratischen Ansätzen auch vom Knoten selbst (Eck-, Seitenmitten- oder Mittenknoten) abhängt. Um eine korrekte

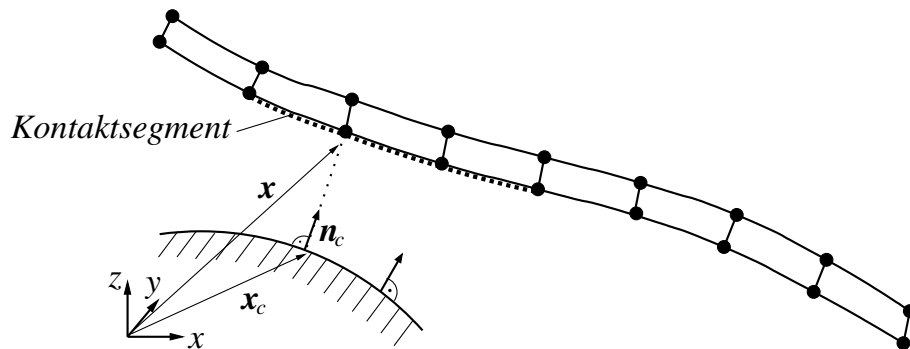


Abbildung 3.1: Darstellung der Kontaktsegmente; Auswertung der Kontaktbedingung an den Knoten

'Verteilung' der Kontaktspannung auf die Knoten zu ermöglichen, werden entsprechend der Ansatzordnung der verwendeten 'Solid-Shell' Elemente 4- bzw. 9-Knoten Kontaktelemente entwickelt. Diese in Abb. 3.1 veranschaulichten Kontaktelemente dienen als Übergangselemente an der Schalenoberfläche auf der Kontaktseite. Ein solches Verfahren der Kontaktformulierung mit Hilfe von Kontaktsegmenten wird ähnlich auch in kommerziellen FE-Programmen wie z.B. ABAQUS [1] eingesetzt. Die Auswertung

von (3.2) erfolgt somit auf Elementebene, integriert wird über die Fläche des Kontaktsegmentes a_e der aktuellen Konfiguration, um die Flächenänderung während der Deformation zu berücksichtigen. Der Penalty Term lässt sich somit auf Elementebene darstellen als:

$$\Pi_c^e = \frac{1}{2} \varepsilon_N \int_{\tilde{a}_e} g_N^e g_N^e d\tilde{a}_e . \quad (3.5)$$

Nachteil der Wahl der Elementfläche der aktuellen Konfiguration a_e als Integrationsgebiet ist, dass diese im Linearisierungsprozess berücksichtigt werden muss, da die Größe der Fläche vom momentanen Verschiebungszustand abhängt. Um dies zu umgehen, wird a_e im folgenden durch die Elementfläche \tilde{a}_e des vorigen auskonvergierten Lastschrittes ersetzt, die innerhalb der Gleichgewichtsiteration des aktuellen Lastschrittes als konstant betrachtet wird und somit bei der Linearisierung nicht berücksichtigt werden muss. Die Variation von (3.5) nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e liefert:

$$\delta \Pi_c^e = \varepsilon_N \int_{\tilde{a}_e} g_N^e \delta g_N^e d\tilde{a}_e = \varepsilon_N \delta \mathbf{d}_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_N^e |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta . \quad (3.6)$$

Dabei erfolgt die Integration über die Elementfläche über die Transformation der Fläche auf ein quadratisches Einheitselement mit der Seitenlänge $l = 2$. Die Geometrieapproximation $\tilde{\mathbf{x}}$ berechnet sich mit Hilfe der Lagrange Ansatzfunktionen N_i und den Elementknotenkoordinaten $\tilde{\mathbf{x}}_e$ des verformten Elementes des auskonvergierten vorhergehenden Lastschrittes zu

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{N} \tilde{\mathbf{x}}_e \quad (3.7)$$

mit der Matrix der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} . \quad (3.8)$$

Die Linearisierung von 3.6 führt auf:

$$\Delta \delta \Pi_c^e = \frac{\partial \delta \Pi_c^e}{\partial \mathbf{d}_e} = \varepsilon_N \delta \mathbf{d}_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_{N,\mathbf{d}_e}^e + g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e g_N^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta . \quad (3.9)$$

Daraus ergeben sich mit Hilfe der Gauss Integration die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und das Residuum \mathbf{f}_e :

$$\mathbf{K}_e = \varepsilon_N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_{N,\mathbf{d}_e}^e + g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e g_N^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta$$

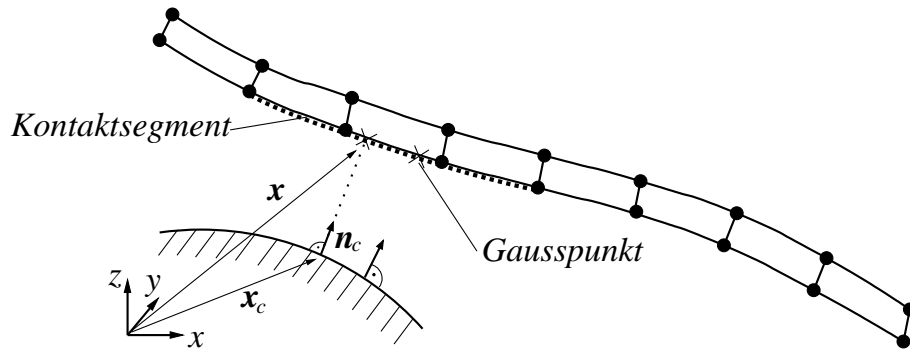


Abbildung 3.2: Darstellung der Kontaktsegmente; Auswertung der Kontaktbedingung an den Integrationspunkten

$$= \varepsilon_N \sum_{i=1}^k (j_{Ni, \mathbf{d}_e} j_{Ni, \mathbf{d}_e} + j_{Ni, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} j_{Ni}) |\tilde{\mathbf{x}}_{, \xi}(\xi_i, \eta_i) \times \tilde{\mathbf{x}}_{, \eta}(\xi_i, \eta_i)| W_i \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_e &= -\varepsilon_N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{N, \mathbf{d}_e}^e g_N^e |\tilde{\mathbf{x}}_{, \xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{, \eta}| d\xi d\eta \\ &= -\varepsilon_N \sum_{i=1}^k j_{Ni, \mathbf{d}_e} j_{Ni} |\tilde{\mathbf{x}}_{, \xi}(\xi_i, \eta_i) \times \tilde{\mathbf{x}}_{, \eta}(\xi_i, \eta_i)| W_i, \end{aligned} \quad (3.11)$$

mit den diskreten Abstandswerten j_{Ni} normal zur Kontaktfläche am Gausspunkt i und den Wichtungsfaktoren der Gauss Integration W_i . Grundsätzlich lassen sich die Abstandswerte j_N an jedem beliebigen Punkt des Elementes aus den Knotenkoordinaten in der verformten Konfiguration \mathbf{x}_i und dem zugehörigen Kontaktpunkt \mathbf{x}_{ci} berechnen:

$$j_{Ni} = \mathbf{n}_c \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{ci}) . \quad (3.12)$$

\mathbf{K}_e und \mathbf{f}_e werden entsprechend Glg. (3.3) für Werte von $j_{Ni} \geq 0$ zu Null gesetzt. Die Koordinaten \mathbf{x}_i ergeben sich aus dem Feld der Knotenkoordinaten \mathbf{X}_e und den Knotenverschiebungen \mathbf{d}_e . In dieser Arbeit werden zur Berechnung der Abstände j_{Ni} zwei Varianten vorgeschlagen:

(1) Lokale Betrachtungsweise

Die Überprüfung der Kontaktbedingung bzw. die Auswertung der Abstandsfunktion g_N erfolgt, wie auch in [86] vorgeschlagen, direkt an den Gausspunkten, anschaulich dargestellt in Abb. 3.2. Dies hat den entscheidenden Vorteil, dass eine ‘Verfeinerung’ des Kontaktes möglich wird, z.B. für den Fall, dass wie in Abb. 3.3 Kontakt gegen einen Kontaktkörper abgeprüft werden soll, der sehr klein im Verhältnis zur Elementgröße ist. Solche Fälle sollten aber im Allgemeinen vermieden werden, indem der Feinheitgrad des FE-Netzes entsprechend an die Geometrie der Kontaktfläche angepasst wird. Es muss auch beachtet werden,

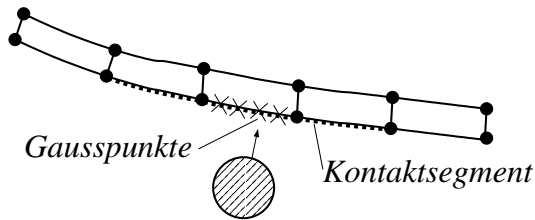


Abbildung 3.3: Überprüfung der Kontaktbedingung an den Integrationspunkten bei einem kleinen Kontaktkörper

dass in anderen Situation (siehe Abschnitt 3.1.3) die Wahl einer zu hohen Integrationsordnung zu ungewollten Zwängungen führen kann. Die Berechnung der j_{Ni} erfolgt analog zu Glg. (3.12) mit den Ortsvektoren \mathbf{x}_i der Gausspunkte:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{N}(\xi_i, \eta_i) \mathbf{x}_e = \mathbf{N}(\xi_i, \eta_i) (\mathbf{X}_e + \mathbf{d}_e) , \quad (3.13)$$

die sich mit Hilfe der Ansatzfunktionen berechnen lassen. Durch die lokale Betrachtung ist eine kontinuierliche Kontaktspannungsverteilung an den Elementübergängen nicht gewährleistet, weshalb die im Folgenden erläuterte alternative Betrachtungsweise auch als kontinuierliche Betrachtung bezeichnet wird.

(2) Kontinuierliche Betrachtungsweise

Eine alternative Vorgehensweise, die z.B. auch in [28] zusammen mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren vorgeschlagen wird, besteht darin, die Abstandsfunktion g_N wiederum an den Knoten auszuwerten und mit Hilfe der Lagrange Ansatzfunktion einen dem Elementansatz entsprechenden bilinearen bzw. biquadratischen Verlauf zu interpolieren. Die Penetrationswerte an den Gausspunkten j_{Ni} berechnen sich dann als

$$j_{Ni} = \sum_{j=1}^n N_j(\xi_i, \eta_i) j_{Nj} , \quad (3.14)$$

mit den Abstandswerten j_{Nj} an den Knoten, die entsprechend Glg. (3.12) berechnet werden. In Abb. 3.4 wird diese Vorgehensweise anhand qualitativer Funktionsverläufe für die Abstandsfunktion innerhalb der Elemente veranschaulicht. Das

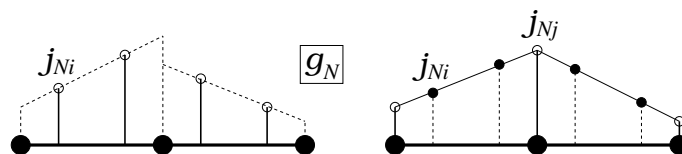


Abbildung 3.4: Auswertung der Abstandsfunktion g_N an den Integrationspunkten (links); Auswertung der Abstandsfunktion an den Knoten und Interpolation über den Elementbereich (rechts)

mögliche Auftreten von Diskontinuitäten in der Kontaktspannungsverteilung an den Elementübergängen kann hierbei ausgeschlossen werden.

3.1.2 Augmented Lagrange Verfahren

Eine klassische Vorgehensweise zur Erfüllung der Nebenbedingung $g_n \geq 0$ ist die Verwendung von Lagrange Multiplikatoren λ , die zu folgender Erweiterung des Potentials führen:

$$\Pi_L = \int_{A_c} \lambda g_N dA_c . \quad (3.15)$$

Die Lagrange Multiplikatoren können anschaulich als die Kontaktkräfte identifiziert werden, die notwendig sind, um ein Eindringen in die Kontaktfläche zu vermeiden. Die Multiplikatoren gehen als zusätzliche unbekannte Größen direkt in das globale Gleichungssystem ein. Mit dieser Methode wird die Nebenbedingung zwar exakt erfüllt, von entscheidendem Nachteil sind aber die zusätzlichen Freiwerte, die bei der Anwendung des Lagrange Verfahrens zur Erfüllung der Kontaktrandbedingung nicht auf Elementebene auskondensiert werden können und somit das globale Gleichungssystem vergrößern. Zudem treten, bedingt durch die Methode, Nullelemente auf der Hauptdiagonalen auf. Desweiteren ist die Größe des Gleichungssystems veränderlich, da die Erweiterung aus Glg. (3.15) nur für den Fall der Penetration aktiviert wird. Dies alles führt zu erheblichen organisatorischen Problemen und erhöhtem Aufwand bei der Gleichungslösung.

Deshalb wird das sogenannte Augmented Lagrange Verfahren [33] vorgeschlagen, das als eine Kombination von Penaltyverfahren und Methode der Lagrange Multiplikatoren angesehen werden kann. Eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens zur Behandlung des Kontaktproblems gibt z.B. Laursen [48, 71]. In [42] wird die Anwendung des Verfahrens auch für Reibkontaktprobleme unter transienter Beanspruchung diskutiert. Das Potential wird entsprechend um zwei Anteile erweitert:

$$\Pi_A = \int_{A_c} \lambda \tilde{g}_N dA_c + \frac{1}{2} \int_{A_c} p_N \tilde{g}_N dA_c . \quad (3.16)$$

Die Parameter λ werden innerhalb der Newton-Raphson Gleichgewichtsiteration festgehalten, so dass sie nicht als zusätzliche Variablen bei Variation und Linearisierung berücksichtigt werden müssen. Wenn die Gleichgewichtsiteration abgeschlossen ist, werden sie in einer zusätzlichen Iterationsschleife bei Bedarf angepasst:

$$\lambda = \lambda + \varepsilon_N g_N . \quad (3.17)$$

Dieses Vorgehen mit einer geschachtelten Iteration entspricht dem sogenannten Uzawa Algorithmus. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.1.1 soll auch für das Augmented Lagrange Verfahren die Abstandsfunktion direkt an den Gausspunkten ausgewertet werden bzw. alternativ die Auswertung an den Knoten mit anschließender Interpolation über die Fläche des Übergangselementes erfolgen.

Lastschritt n

- 1) Initialisierung der Lagrange Parameter
 $k = 0$ und $\boldsymbol{\lambda}_{(0)}^{(n)} = \boldsymbol{\lambda}_{(0)}^{(n-1)}$ bzw. $\boldsymbol{\lambda}_{(0)}^{(0)} = 0$
- 2) Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems nach \mathbf{d} mit dem
Newton-Raphson Verfahren ($\boldsymbol{\lambda}_{(k)}^{(n)}$ wird als konstant angenommen)
- 3) Wenn $\max j_i \leq \text{tol}$ dann nächster Lastschritt $n = n + 1$, gehe zu 1)
sonst $\boldsymbol{\lambda}_{(k+1)}^{(n)} = \boldsymbol{\lambda}_{(k)}^{(n)} + \varepsilon_N \mathbf{j}_N$, $k = k + 1$, gehe zu 3)

Tabelle 3.1: Geschachtelte Iteration (Uzawa Algorithmus) für das Augmented Lagrange Verfahren

Das Flächenkontaktelement

Der Potentialanteil lässt sich darstellen als:

$$\Pi_c^e = \frac{1}{2} \varepsilon_N \int_{\tilde{a}_e} g_N^e g_N^e d\tilde{a}_e + \int_{\tilde{a}_e} \lambda g_N^e d\tilde{a}_e . \quad (3.18)$$

Mit der Variation bzgl. \mathbf{d}_e :

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c^e &= \int_{\tilde{a}_e} \varepsilon_N g_N^e \delta g_N^e + \lambda \delta g_N^e d\tilde{a}_e \\ &= \delta \mathbf{d}_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varepsilon_N g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_N^e + \lambda g_{N,\mathbf{d}_e}^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.19)$$

folgt die Linearisierung:

$$\Delta \delta \Pi_c^e = \frac{\partial \delta \Pi_c^e}{\partial \mathbf{d}_e} = \delta \mathbf{d}_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varepsilon_N g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_{N,\mathbf{d}_e}^e + \varepsilon_N g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e g_N^e \quad (3.20)$$

$$+ \lambda g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta . \quad (3.21)$$

Dies führt mit Hilfe der Gauss Integration auf die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und das Residuum \mathbf{f}_e :

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varepsilon_N g_{N,\mathbf{d}_e}^e g_{N,\mathbf{d}_e}^e + \varepsilon_N g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e g_N^e + \lambda g_{N,\mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^k (\varepsilon_N j_{Ni, \mathbf{d}_e} j_{Ni, \mathbf{d}_e} + \varepsilon_N j_{Ni, \mathbf{d}_e} \mathbf{d}_e j_{Ni} \\
 &\quad + \lambda_{Ni} j_{Ni, \mathbf{d}_e} \mathbf{d}_e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi}(\xi_i, \eta_i) \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}(\xi_i, \eta_i)| W_i, \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_e &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varepsilon_N g_{N, \mathbf{d}_e}^e g_N^e + \lambda_{Ni} g_{N, \mathbf{d}_e}^e) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi} \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}| d\xi d\eta \\
 &= - \sum_{i=1}^k (\varepsilon_N j_{Ni, \mathbf{d}_e} j_{Ni} + \lambda_{Ni} j_{Ni, \mathbf{d}_e}) |\tilde{\mathbf{x}}_{,\xi}(\xi_i, \eta_i) \times \tilde{\mathbf{x}}_{,\eta}(\xi_i, \eta_i)| W_i. \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

3.1.3 Kontaktintegration bei lokaler und kontinuierlicher Betrachtungsweise

Die Auswertung des Kontaktintegrals erfolgt bei den hier vorgestellten Kontaktformulierungen auf der Ebene von Oberflächenkontaktelementen. In Abschnitt 3.1.1 wurden zwei mögliche Vorgehensweisen zur Auswertung des Kontaktintegrals dargestellt. Bei der sogenannten lokalen Betrachtung erfolgt die Kontaktprüfung direkt an den Integrationspunkten; bei der kontinuierlichen Betrachtung dagegen wird der Kontaktabstand an den Knoten abgeprüft und eine Abstandsfunktion über die Elementfläche interpoliert. An dieser Stelle sollen nun anhand fiktiver geometrischer Situationen die Auswirkungen unterschiedlicher Vorgehensweisen bei der Kontaktintegration anschaulich diskutiert werden.

Ähnliche Untersuchungen werden z.B. in [57] durchgeführt, wo verschiedene Integrationsverfahren für eine Penalty-Kontaktformulierung eingesetzt werden. In [28] erfolgt eine Untersuchung der Stabilität und der Leistungsfähigkeit verschiedener auf dem Verfahren Lagrange'scher Multiplikatoren basierender Kontaktalgorithmen. Bei den hier vorgestellten Beispielen wird die Verwendung des Augmented Lagrange Verfahren vorausgesetzt.

Das erste Beispiel, dargestellt in Tabelle 3.2, behandelt den Kontakt gegen eine abschnittsweise ebene Kontaktfläche. In beiden gezeigten Fällen kann die auftretende

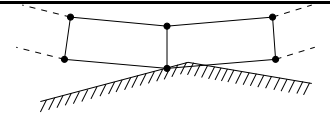
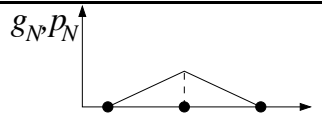
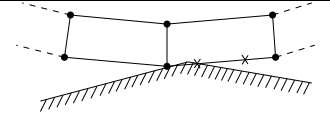
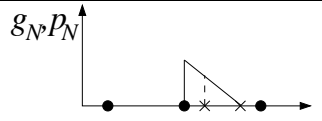
Kontinuierliche Betrachtung		
Lokale Betrachtung (2 Gp)		

Tabelle 3.2: Kontakt gegen abschnittsweise ebene Kontaktfläche; Verlauf der Abstandsfunktion g_N und des Kontaktdruckes p_N

Penetration ausreichend beschränkt werden. Bei der kontinuierlichen Betrachtung tritt der mittlere Knoten in Kontakt mit der Kontaktfläche. Beide Elemente sind involviert und man erhält einen kontinuierlichen Verlauf der Kontaktspannungen über beide Elemente hinweg. Bei der lokalen Betrachtung tritt einer der Integrationspunkte des rechten Elementes in Kontakt mit der Kontaktfläche. Dies führt zu einem diskontinuierlichen Verlauf der Kontaktspannung am Elementübergang. Allerdings kann durch die lokale Betrachtung eine lokale hohe Penetration, evtl. durch eine höhere Anzahl von Kontaktintegrationspunkten, verhindert werden, weshalb der lokale Ansatz in diesem Fall zu bevorzugen ist.

Im zweiten Beispiel (Abb. 3.3) wird Kontakt gegen eine gekrümmte Kontaktfläche betrachtet, wobei der Krümmungsradius der Kontaktfläche sehr viel kleiner als die Elementlänge der Schalenstruktur ist. In diesem besonderen Fall können sowohl bei

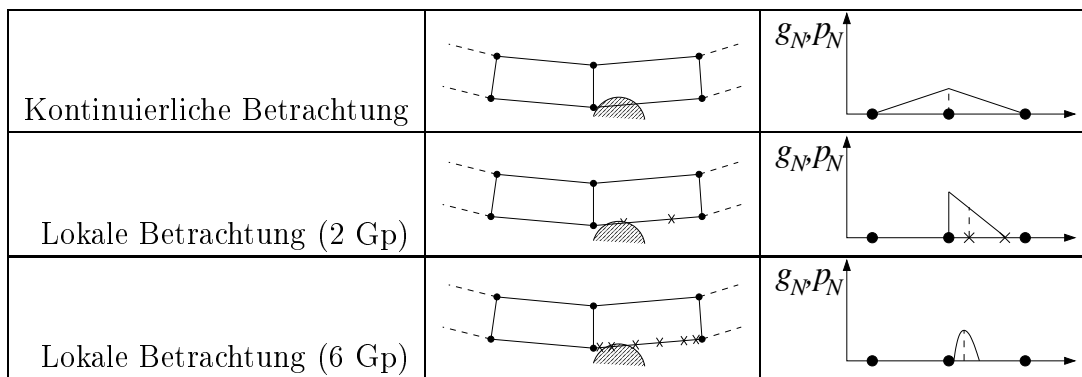


Tabelle 3.3: Kontakt gekrümmte Kontaktfläche; Verlauf der Abstandsfunktion g_N und des Kontaktdruckes p_N

kontinuierlicher Betrachtung als auch bei lokaler Betrachtung mit wenig Kontaktintegrationspunkten hohe Penetrationswerte auftreten. Unter Umständen kann der Kontakt gar nicht erfasst werden, da sich der Kontaktkörper zwischen den Kontaktpunkten hindurch bewegt. Wird der lokale Ansatz mit einer hohen Anzahl von Kontaktintegrationspunkten gewählt, in Abb. 3.3 dargestellt mit 6 Gausspunkten, kann auf einfache Weise eine befriedigende Erfüllung der Kontakttrandbedingung erreicht werden. Lokal tritt ein Kontaktspannungsverlauf auf, der dem realen zu erwartenden Verlauf entspricht.

Beim dritten Beispiel, dargestellt in Abb. 3.4, befindet sich die Schalenstruktur in beidseitigem Kontakt mit zwei kreisförmigen, konzentrischen Kontaktflächen. Eine solche Situation kann beispielsweise bei der Behandlung von Umformproblemen auftreten, wenn ein Blech zwischen zwei starren Werkzeugen geformt wird. Die kontinuierliche Betrachtung liefert hier einen kontinuierlichen, konstanten Spannungsverlauf. Wird der lokale Ansatz mit zwei Gausspunkten gewählt, entsteht für das betrachtete Beispiel mit konzentrischen Kreisen als Kontaktflächen und gleichförmiger Vernetzung der Schalenstruktur ebenfalls ein kontinuierlicher, konstanter Spannungsverlauf. Die Kontinuität der Spannungen an den Elementübergängen kann aber im Allgemeinen nicht garantiert

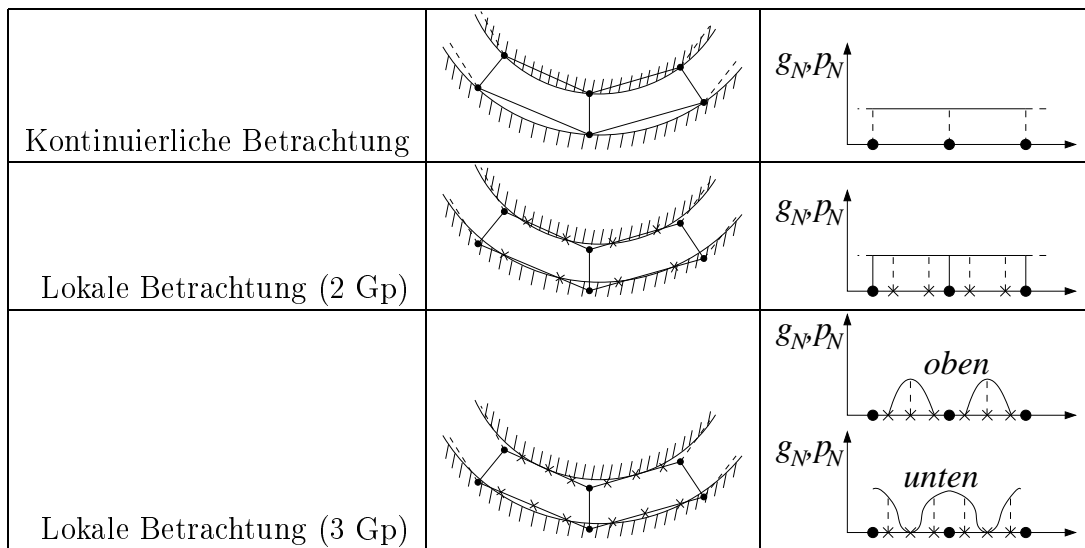


Tabelle 3.4: Kontakt zwischen zwei gekrümmten Kontaktflächen; Verlauf der Abstandsfunktion g_N und des Kontaktdruckes p_N auf der Schalenober- bzw. unterseite

werden. Die Verwendung von mehr als zwei Gausspunkten führt zu dem in Abb. 3.4 dargestellten unnatürlichen Spannungsverlauf und somit zu unerwünschten Zwängungen. Die Ursache hierfür ist in der gewählten Kontaktdiskretisierung zu finden, die nicht mit der Geometrie der Kontaktflächen harmonisiert, d.h. es können nicht mehr alle Kontaktnebenbedingungen gleichzeitig erfüllt werden. Eine genauere Untersuchung der Stabilität und der ungewollten Zwängungen erfolgt durch eine Betrachtung der Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix. Der lokale Ansatz liefert hier einen Nulleigenwert, wenn nur ein Gausspunkt verwendet wird. Bei zwei Gausspunkten ist die Konditionszahl gleich der Konditionszahl bei kontinuierlicher Betrachtung. Werden mehr Gausspunkte verwendet, wächst auch die Konditionszahl an, was auf die ungewollten Zwängungen hindeutet. Es zeigt sich somit deutlich, dass die lokale Betrachtung in einer entsprechenden Situation wenig sinnvoll ist, bzw. nur verwendet werden kann, wenn die Anzahl der Gausspunkte der Geometrie der Kontaktflächen angepasst gewählt wird.

3.1.4 Berechnung der Kontaktspannungen im Kontaktsegment

Sollen die Kontaktspannungen im Kontaktsegment dargestellt werden, müssen diese in der Nachlaufrechnung berechnet werden. Sie werden entsprechend des gewählten Kontaktelementes an den Kontaktpunkten, also an den Knoten bzw. an den Integrationspunkten, ausgewertet. Zur Berechnung der Kontaktspannung am Kontaktpunkt wird die Eindringung des Kontaktpunktes j_{Ni} sowie der Lagrange Parameter λ_i benötigt:

$$\tau_{Ni} = \varepsilon_p j_{Ni} + \lambda_i, \quad (3.24)$$

wobei der zweite Teil von (3.24) bei einer reinen Penalty Formulierung entfällt.

3.1.5 Beschreibung der Kontaktflächen

Ein schwieriges Problem ist die Beschreibung allgemeiner 3-dimensionaler Kontaktflächen sowie die Kontaktsuche. D.h. in jedem Gauss- bzw. Knotenpunkt \mathbf{x}_i muss ein zugehöriger Kontaktpunkt \mathbf{x}_{ci} auf der Kontaktfläche gefunden werden, wonach dann die Penetrationsfunktion ausgewertet werden kann. Es wird also eine Funktion für den Abstand j_{Ni} des Knoten-/Gausspunktes zur Kontaktfläche benötigt, sowie deren Ableitungen nach dem Elementknotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e für die linearisierte variationelle Formulierung. Der Kontaktpunkt \mathbf{x}_{ci} kann als der Punkt \mathbf{x}_c der Kontaktfläche mit dem minimalen Abstand zum untersuchten Knoten bzw. Gausspunkt berechnet werden:

$$j_{Ni} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{ci}| = \min |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c|. \quad (3.25)$$

Zur Beschreibung der Kontaktflächen kann beispielsweise direkt das jeweilige FE-Netz herangezogen werden. Alternativ werden auch Parameterflächen eingesetzt, bei denen mit Hilfe diskreter Punkte die Flächen durch analytische Interpolation beschrieben werden. Dadurch erfolgt eine Glättung der Kontaktgeometrie, was auch als 'smoothing' bezeichnet wird. Eine solche Vorgehensweise wird z.B. in [29, 56, 83] beschrieben. In dieser Arbeit soll die Beschreibung der Kontaktflächen mittels analytischer Funktionen erfolgen. Dies hat den Vorteil, dass eine exakte Beschreibung möglich ist und somit Fehler bzw. unerwünschte Effekte der Kontaktdiskretisierung vermieden werden. Es können allerdings nur geometrisch 'einfache' Flächen beschrieben werden, die Beschreibung beliebiger allgemeiner 3D-Flächen ist kaum möglich.

Im folgenden werden einige solcher analytisch definierbarer 3D-Kontaktflächen zusammengestellt. Die Modellierung komplexerer Kontaktflächen ist aber auch durch eine beliebige Kombination einzelner analytisch definierter Kontaktflächen möglich.

Kontakt zu ebener Fläche

Eine Ebene wird im Allgemeinen durch den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Ebene \mathbf{x}_0 und einen Normalenvektor \mathbf{n}_c (Abb. 3.5) definiert. Der Kontaktabstand

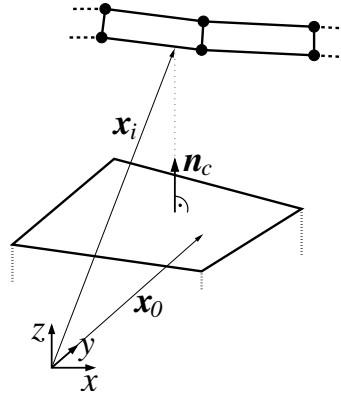


Abbildung 3.5: Analytische Beschreibung einer ebenen Kontaktfläche

j_{Ni} des betrachteten Punktes im Kontaktsegment \mathbf{x}_i normal zur Kontaktfläche kann mit einer einfachen Formel zur Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene als

$$j_{Ni} = \underbrace{\frac{\mathbf{n}_c}{|\mathbf{n}_c|}}_{\mathbf{e}_N} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_N \cdot (\mathbf{N} (\mathbf{X}_e + \mathbf{d}_e) - \mathbf{x}_0) \quad (3.26)$$

bestimmt werden. Die Identifizierung eines Kontaktpunktes \mathbf{x}_{ci} auf der Kontaktfläche ist nicht erforderlich. Aus Glg. (3.26) können dann auch die Ableitungen nach dem Knotenverschiebungsvektor

$$j_{Ni, \mathbf{d}_e} = \mathbf{e}_N^T \mathbf{N} , \quad (3.27)$$

$$j_{Ni, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} = \mathbf{0} , \quad (3.28)$$

angegeben werden, die für die Variationsformulierung und die erforderliche Linearisierung benötigt werden. Die zweite Ableitung $j_{Ni, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}$ verschwindet, da die Normale einer ebenen Fläche nicht von der aktuellen Lage des betrachteten Punktes \mathbf{x}_i abhängt.

Kontakt zu zylindrischer Kontaktfläche

Die Geometrie des zylindrischen Kontaktkörpers ist in Abb. (3.6) dargestellt. Sie wird durch die Zylinderachse, die durch einen Ortsvektor \mathbf{x}_m und einen Richtungsvektor \mathbf{r} definiert wird, sowie durch den Radius R festgelegt. Um den Kontaktabstand j_{Ni} des betrachteten Punktes im Kontaktsegment \mathbf{x}_i zu ermitteln, benötigt man zuerst eine Formel zur Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Geraden. Damit wird der Abstand von \mathbf{x}_i zur Zylinderachse bestimmt. Von diesem Wert wird dann der Radius R subtrahiert:

$$j_{Ni} = \left| \underbrace{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i + \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m)}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{r}}_{v_n} \right| - R = \sqrt{\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n} - R . \quad (3.29)$$

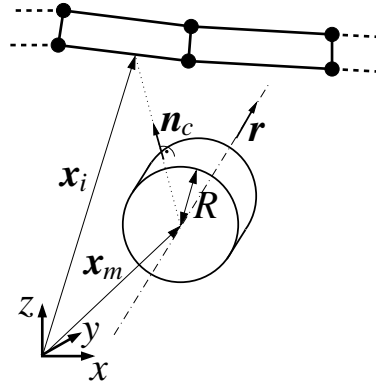


Abbildung 3.6: Analytische Beschreibung einer zylindrischen Kontaktfläche

Der Vektor \mathbf{v}_n beschreibt hier den Abstandsvektor der Zylinderachse zum Punkt \mathbf{x}_i . Die Identifizierung eines Kontaktpunktes \mathbf{x}_{ci} entfällt auch in diesem Fall, da mit Glg. (3.29) der Abstand j_{Ni} direkt bestimmt werden kann. Zur Ermittlung der Ableitungen von (3.29) nach den Knotenverschiebungen \mathbf{d}_e werden zuerst die Ableitungen nach den Koordinaten des Punktes \mathbf{x}_i bestimmt:

$$j_{Ni, \mathbf{x}_i} = -\frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n}} \mathbf{v}_n = \mathbf{n}_c, \quad (3.30)$$

$$j_{Ni, \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i} = -\frac{1}{\left(\sqrt{\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n}\right)^3} \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^T + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}_n^T \mathbf{v}_n}} \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}^T}{\mathbf{r}^T \mathbf{r}} \right). \quad (3.31)$$

Die Berücksichtigung der inneren Ableitung $\mathbf{v}_{n, \mathbf{x}_i}$ erfolgt durch den hier gültigen Zusammenhang:

$$\mathbf{v}_{n, \mathbf{x}_i} \mathbf{v}_n = -\mathbf{v}_n. \quad (3.32)$$

Die Ableitungen nach \mathbf{d}_e können dann leicht mit Hilfe der Kettenregel zu $\mathbf{x}_{i, \mathbf{d}_e} = \mathbf{N}$ ermittelt werden.

3.2 Numerische Beispiele für Kontaktprobleme ohne Reibung

3.2.1 Ermittlung von Kontaktspannungen

Zuerst sollen bei einfachen Beispielen die Kontaktspannungen im Kontaktsegment berechnet werden. Ein sogenannter Kontakt-Patchtest wie er z.B. in [23] [54] vorgeschlagen wird, ist hier nicht relevant, da ausschließlich unilateraler Kontakt betrachtet wird.

Ebene Kontaktfläche

Beim ersten Beispiel liegt eine ebene Struktur (Abb. 3.7), bestehend aus zwei bilinearen bzw. einem biquadratischen Element auf einer ebenen Kontaktfläche. Zur Beschrei-

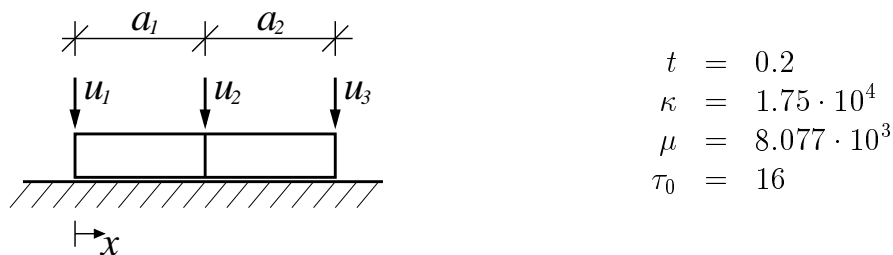


Abbildung 3.7: Geometrie-/Materialeigenschaften und Belastung einer Schalenstruktur zur Kontaktspannungsberechnung bei Kontakt mit ebener Kontaktfläche

bung des Kontaktes werden die in Abschnitt 3.1.1 bzw. 3.1.2 beschriebenen Flächenkontakt-elemente verwendet. Die Überprüfung der Kontaktbedingung im Kontaktelement erfolgt für die bilinearen Elemente an 2×2 , für die biquadratischen Elemente an 3×3 Kontaktintegrationspunkten.

Die Belastung erfolgt im ersten Fall durch die Vorgabe einer gleichmäßigen Verschiebung $u_1 = u_2 = u_3 = 0.005$ für die oberen Knoten der Struktur, die in fünf Lastschritten aufgebracht wird. Die Elementlänge wird zu $a_1 = a_2 = 1$ gewählt. Dadurch erfolgt ein gleichmäßiges Eindringen in die Kontaktfläche und es wird eine konstante Kontaktspannung in der Kontaktfläche erwartet. Die Ergebnisse für diesen Test sind in Abb. 3.8 für das bilineare ANS3DEAS Element und in Abb. 3.9 für das biquadratische MI9K3DEAS Element dargestellt. Dabei werden sechs Varianten berechnet. Zuerst wird ein reines Penalty Verfahren mit einer Variation der Penaltyparameter ε_N eingesetzt. Außerdem wird das Augmented Lagrange Verfahren mit einem Penaltyparameter von $\varepsilon_N = 1.0 \cdot 10^2$ und einer maximal zulässigen Eindringtiefe von $pen_{max} = 0.002$ bzw. $pen_{max} = 0.001$ verwendet. Wie erwartet ergibt sich ein konstanter Spannungsverlauf im Kontaktelement, wobei die Spannungen stark mit der Abnahme der Eindringtiefen anwachsen.

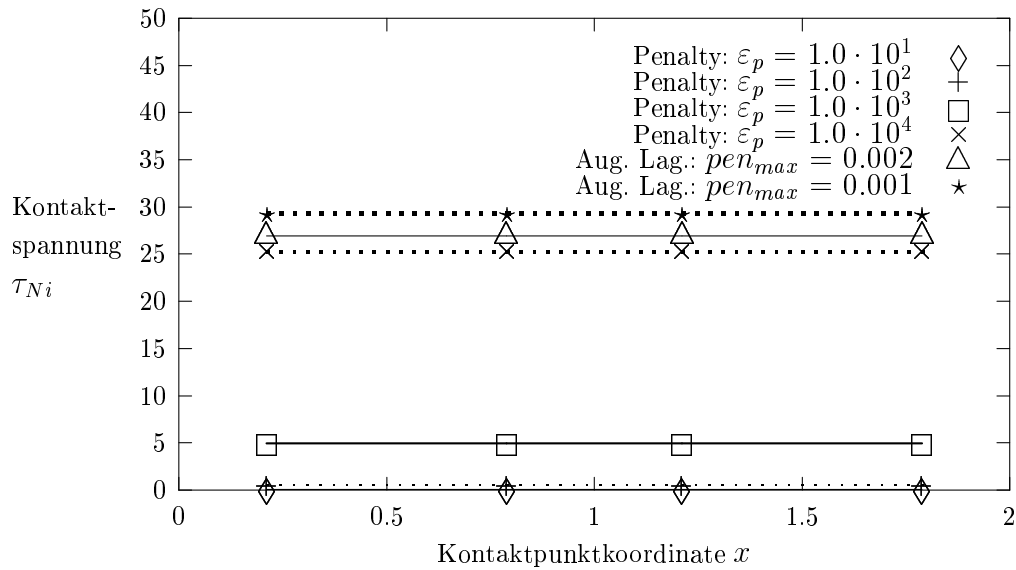


Abbildung 3.8: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche; ANS3DEAS Element

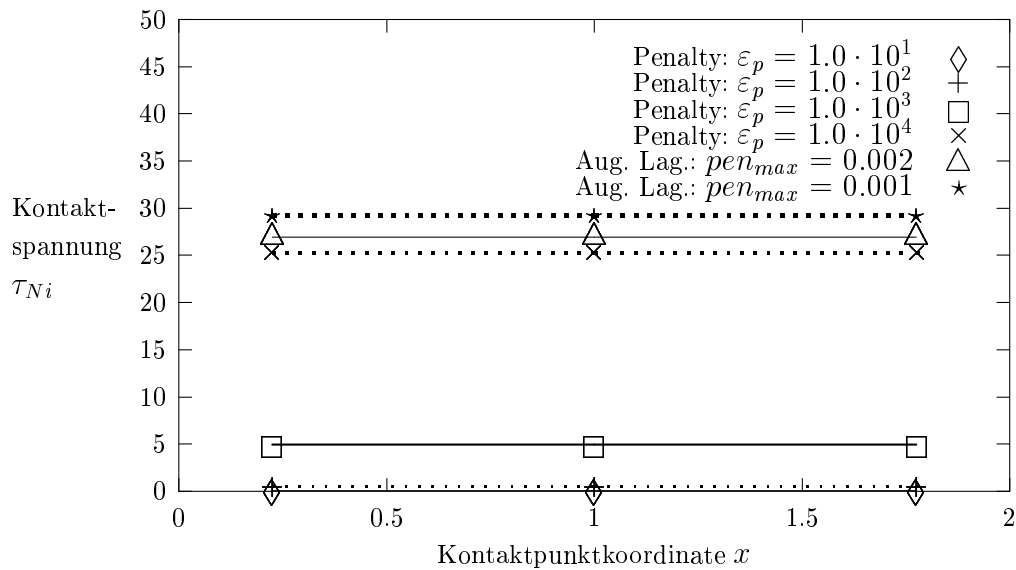


Abbildung 3.9: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche; MI9K3DEAS Element

Im zweiten Fall wird ein linearer Verschiebungsverlauf mit $u_1 = 0.005$, $u_2 = 0.0025$ und $u_3 = 0$ in fünf Lastschritten aufgebracht; die Elementlänge wird wieder zu $a_1 = a_2 = 1$ gewählt. Die Spannungen in der Kontaktfläche sind in Abb. 3.10 für das bilineare ANS3DEAS Element und in Abb. 3.11 für das biquadratische MI9K3DEAS Element dargestellt. Wie zu erwarten ergibt sich auch ein linearer Verlauf der Spannungen in

3.2. NUMERISCHE BEISPIELE FÜR KONTAKTPROBLEME OHNE REIBUNG

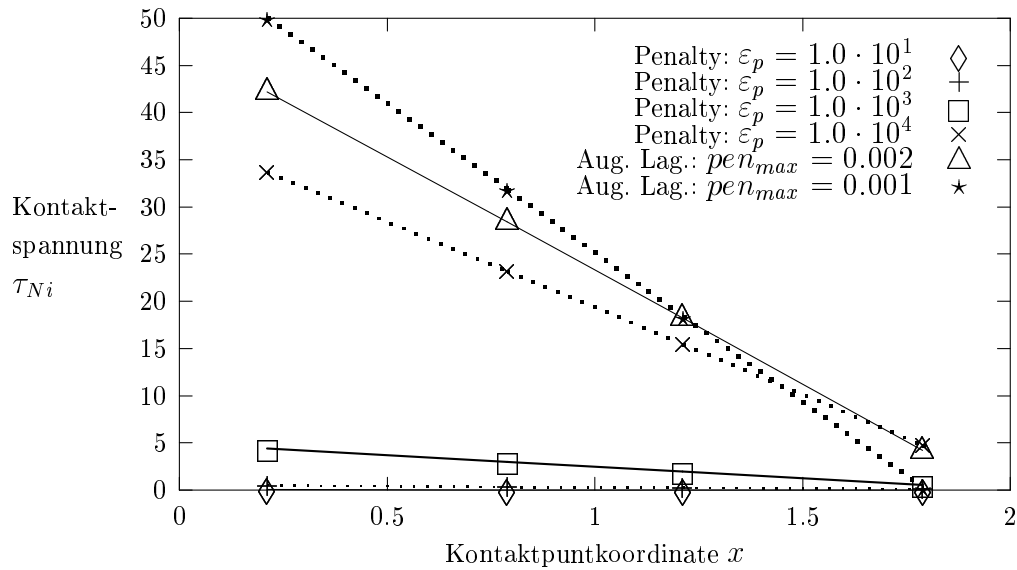


Abbildung 3.10: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche;
ANS3DEAS Element

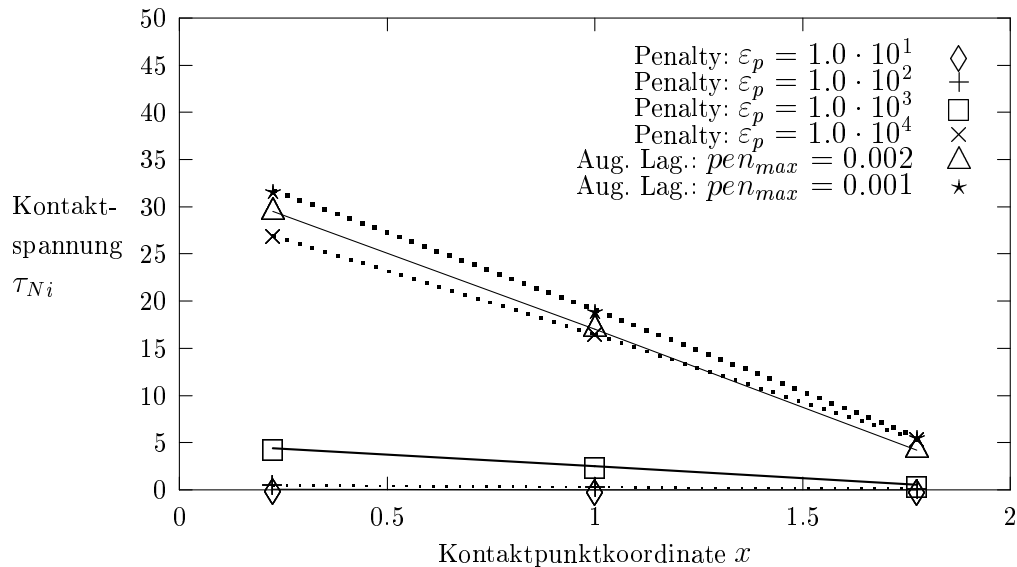


Abbildung 3.11: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche;
MI9K3DEAS Element

der Kontaktfläche.

Abschließend wird ein dritter Fall betrachtet, bei dem wiederum eine gleichmäßige Verschiebung von $u_1 = u_2 = u_3 = 0.005$ in fünf Lastschritten aufgebracht wird. Allerdings wird nun eine ungleiche Elementlänge von $a_1 = 0.6$ und $a_2 = 1.4$ gewählt. Die Vernetzung erfolgt dabei auch für das biquadratische MI9K3DEAS Element mit zwei

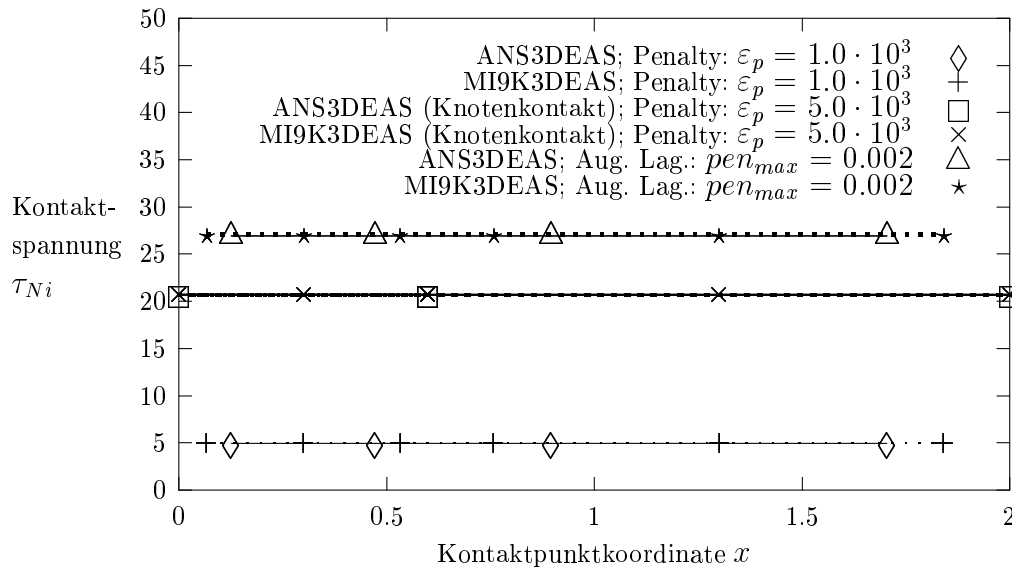


Abbildung 3.12: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche für ungleichmäßiges Netz

Elementen. Es wird erneut das Penaltyverfahren mit den in Abb. 3.12 angegebenen Penaltyparametern, und das Augmented Lagrange Verfahren mit $\varepsilon_N = 1.0 \cdot 10^2$ verwendet. Die Ergebnisse in Abb. 3.12 verdeutlichen, dass sich für alle Berechnungen der zu erwartende konstante Spannungsverlauf in der Kontaktfläche einstellt.

Stückweise ebene Kontaktfläche

Zur Verdeutlichung der Unterschiede bei Auswertung der Abstandsfunktion an den Knoten bzw. an den Gausspunkten wird als zweites Beispiel eine ebene Struktur (Abb. 3.13), bestehend aus zwei bilinearen bzw. zwei biquadratischen Elementen auf eine abschnittsweise ebene Kontaktfläche gedrückt. Die Belastung erfolgt durch die Vor-

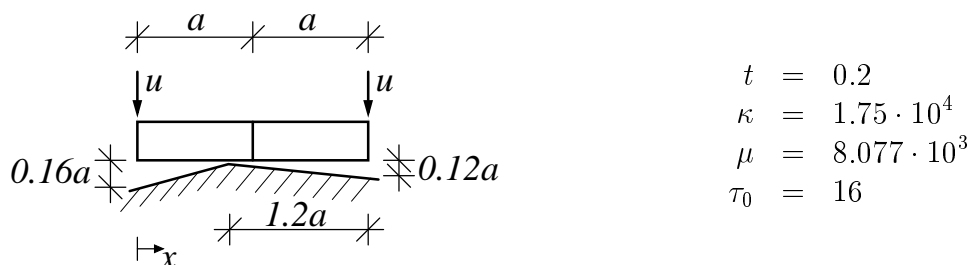


Abbildung 3.13: Geometrie-/Materialeigenschaften und Belastung einer Schalenstruktur zur Kontaktspannungsberechnung bei Kontakt mit stückweise ebener Kontaktfläche

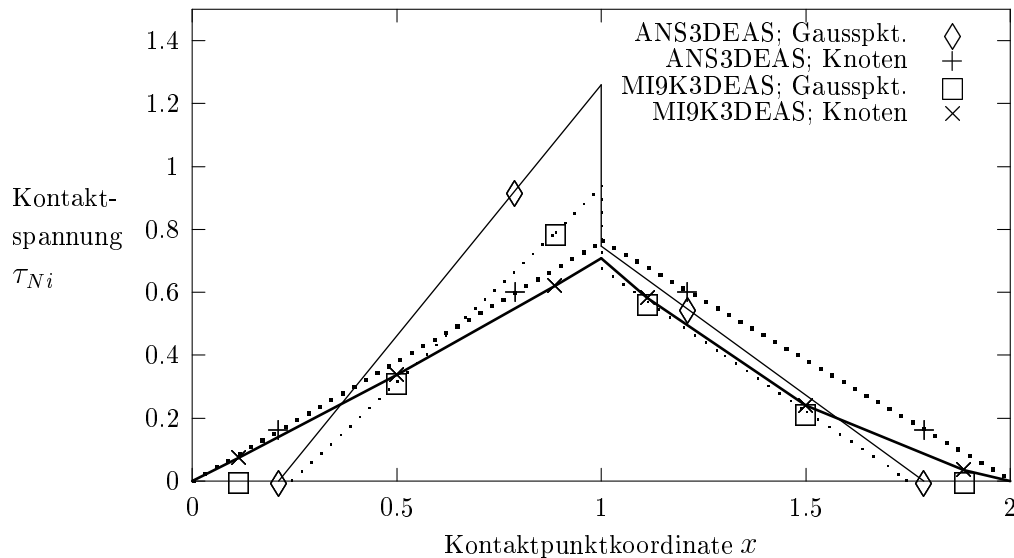


Abbildung 3.14: Spannungen an den Kontaktpunkten in der stückweise ebenen Kontaktfläche

gabe einer Verschiebung $u = 0.1$ für die oberen äußeren Knoten der Struktur, die in zehn Lastschritten aufgebracht wird. Die Elementlänge wird zu $a = 1$ gewählt. Zur Kontaktbeschreibung wird das Penalty Verfahren mit $\varepsilon_N = 10$ verwendet.

Die Ergebnisse für die Kontaktspannungen sind in Abb. 3.14 enthalten. Dargestellt sind hier die Resultate für das bilineare ANS3DEAS Element und das biquadratische MI9K3DEAS Element, jeweils bei Auswertung der Abstandsfunktion an den Gausspunkten bzw. Auswertung an den Knoten mit Interpolation über die Elementoberfläche. Erfolgt die Auswertung an den Gausspunkten, so sind aufgrund des Knickes in der Kontaktfläche Sprünge im Spannungsverlauf möglich, wie für das ANS3DEAS Element mit zwei Integrationspunkten und analog für das MI9K3DEAS Element, bei dem drei Integrationspunkte verwendet werden, zu sehen ist. Wird die Kontaktbedingung an den Knoten überprüft und über die Elementfläche mit Hilfe der Ansatzfunktionen interpoliert, so entsteht ein gleichförmiger Verlauf der Kontaktspannungen ohne Sprünge an den Elementübergängen. Die kontinuierliche Betrachtung mit der Kontaktprüfung an den Knoten ist in diesem Fall zu bevorzugen. Soll der reale Kontaktspannungsverlauf mit dem Maximum am Ort der maximalen Penetration bei $x = 0.8a$ erfasst werden, so kann auch eine verfeinerte lokale Betrachtung mit einer höheren Anzahl von Kontaktintegrationspunkten erfolgen.

Zylindrische Kontaktfläche

Beim dritten Beispiel wird eine ebene Struktur (Abb. 3.15), bestehend aus zwei bilinearen bzw. einem biquadratischen Element auf eine zylindrische Kontaktfläche gedrückt. Bei diesem Beispiel werden die Vorteile der in Abschnitt 3.1.1 bzw. 3.1.2 beschriebenen

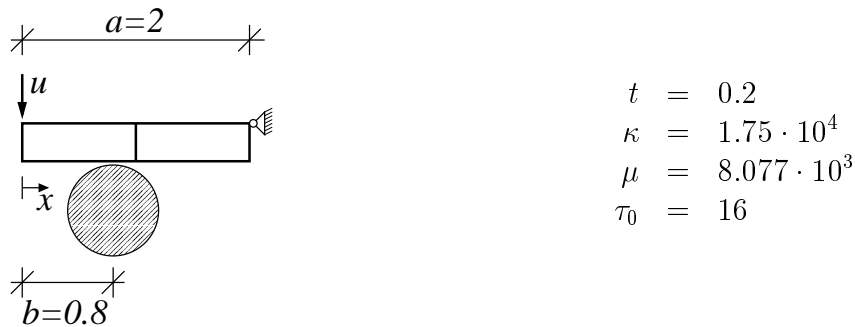


Abbildung 3.15: Geometrie-/Materialeigenschaften und Belastung einer Schalenstruktur zur Kontaktspannungsberechnung bei Kontakt mit zylindrischer Kontaktfläche

Flächenkontaktelemente deutlich. Um den Kontakt gegen den Zylinder mit einem im Vergleich zur Elementlänge sehr kleinem Durchmesser korrekt zu beschreiben, werden hier für die bilinearen Elemente 10×10 und für das biquadratische Element 20×20 Kontaktintegrationspunkte verwendet. Eingesetzt wird das Penaltyverfahren mit den in Abb. 3.16 bzw. 3.17 angegebenen Penaltyparametern, und das Augmented Lagrange Verfahren mit $\varepsilon_N = 10$.

Die numerisch ermittelten Kontaktspannungen sind in Abb. 3.16 für das bilineare ANS3DEAS Element und in Abb. 3.17 für das biquadratischen MI9K3DEAS Element dargestellt. Wird eine höhere Eindringung zugelassen, ergibt sich eine der Form des starren Zylinders entsprechende Verteilung der Kontaktspannung. Wird ein höherer

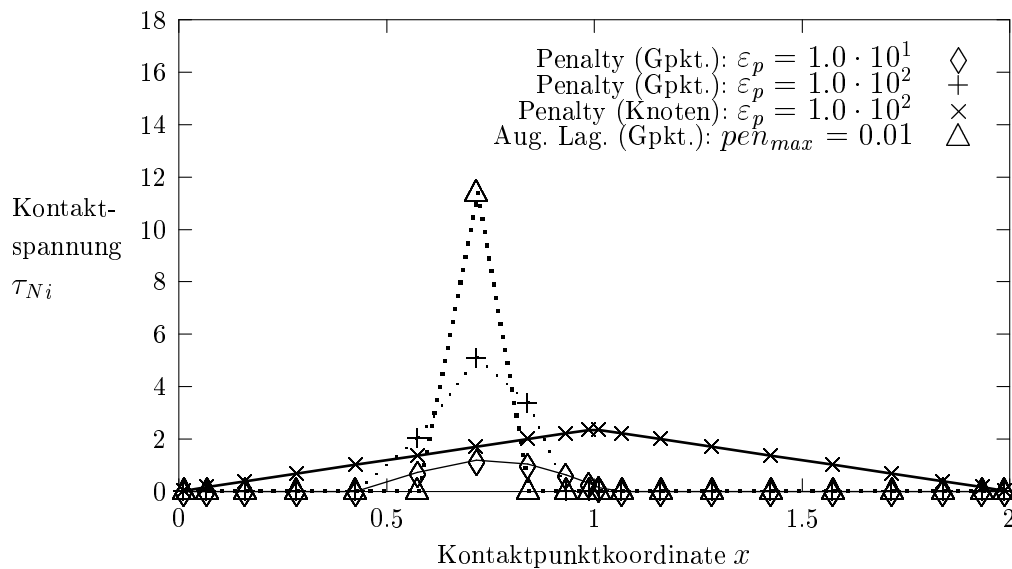


Abbildung 3.16: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche; ANS3DEAS Element

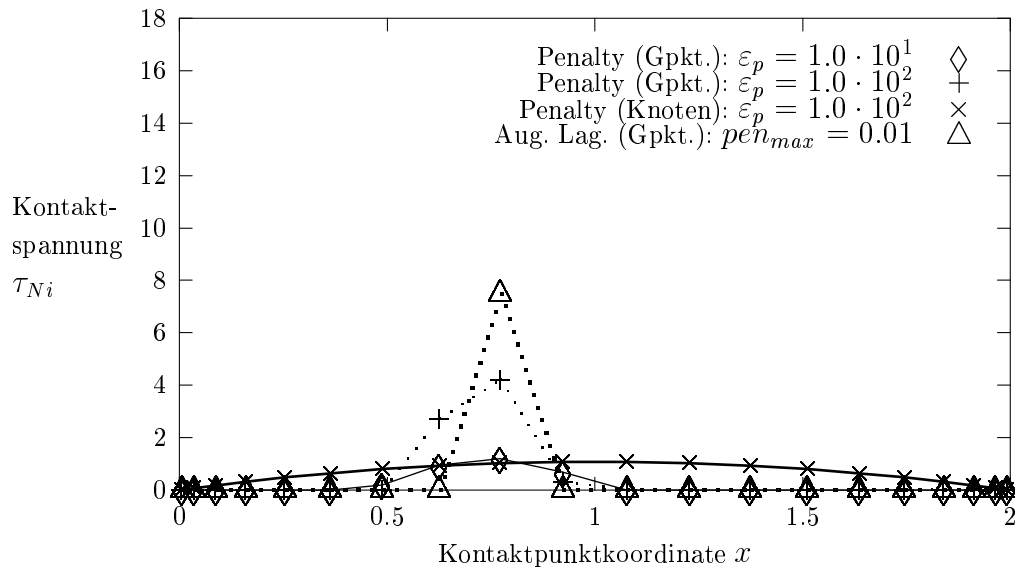


Abbildung 3.17: Spannungen an den Kontaktpunkten in der Kontaktfläche; MI9K3DEAS Element

Penaltyfaktor bzw. die Augmented Lagrange Methode gewählt, ist eine Penetration nur noch an einem einzelnen Kontaktintegrationspunkt vorhanden. Erfolgt die Berechnung der Funktionswerte an den Integrationspunkten über die Auswertung an den Knoten mit anschließender Interpolation über die Elementoberfläche, so erhält man einen nicht veränderlichen Verlauf der Kontaktspannungen über das gesamte Element. Die Kontaktbedingung wird hier nur an den Knoten überprüft, d.h. Kontakt wird nur an der Stelle $x = 1$ festgestellt; dies führt zwangsläufig zu einer hohen Penetration des Zylinders. Sollen diese hohen Penetrationswerte vermieden und ein realer Kontaktspannungsverlauf abgebildet werden, so muss in diesem Fall eine lokale Betrachtung mit einer hohen Anzahl von Kontaktintegrationspunkten erfolgen.

3.2.2 Freibiegen eines auf zwei zylindrischen Kontaktkörpern gelagerten Bleches

Es soll das Kontaktproblem des Freibiegens eines Metallbleches der Dicke t über zwei zylindrischen Körpern untersucht werden. Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird ein elasto-plastisches Materialgesetz mit den in Abb. 3.18 gezeigten Materialdaten verwendet. Das Metallblech wird auf zwei zylindrischen Starrkörpern gelagert. Als Belastung wird eine Verschiebung u in der Mitte des Bleches vorgegeben. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Systems ist die Diskretisierung des halben Bleches ausreichend. Dabei werden für eine grobe Vernetzung zwölf bilineare bzw. sechs bi-quadratische Elemente und für eine feine Vernetzung werden 100 bilineare bzw. 50 bi-quadratische Elemente verwendet.

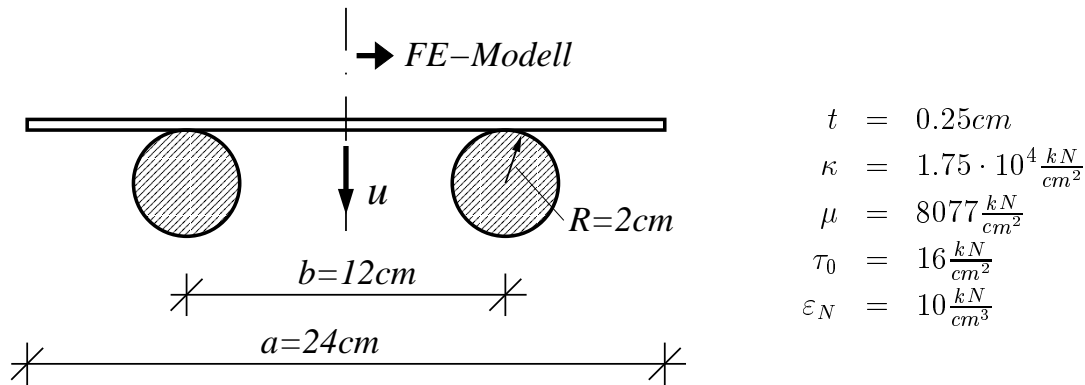


Abbildung 3.18: Geometrie-/Materialeigenschaften und Belastung des auf zylindrischen starren Kontaktkörpern gelagerten Bleches

Die verformte Struktur wird in Abb. 3.21, die Last-Verformungskurven sind in Abb. 3.19 für die bilinearen Elemente und in Abb. 3.20 für die biquadratischen Elemente dargestellt. Hierin entspricht die Belastung der zur Verschiebung u äquivalenten Kraft in der Mitte des Bleches.

Als Ergebnis der Berechnung mit der Knotenkontaktinterpolation sowie der Berechnung mit zwei Kontakt-Gausspunkten (cgp) für das bilineare Kontaktsegment bzw. mit drei Kontakt-Gausspunkten für das biquadratische Kontaktsegment sind große Sprünge in der Last-Verformungs-Kurve zu beobachten. Dies kann mit der groben Kontaktdiskretisierung erklärt werden, die im Vergleich zum Durchmesser des Zylins-

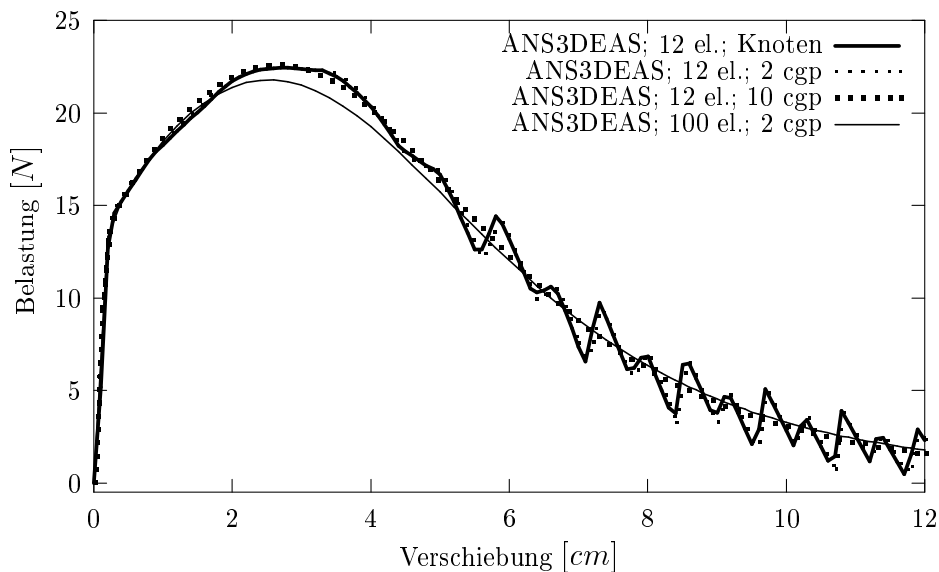


Abbildung 3.19: Last-Verformungs Diagramm, bilineare Elemente; Vergleich Kontaktverbesserung mit mehr Gausspunkten und Netzverfeinerung

3.2. NUMERISCHE BEISPIELE FÜR KONTAKTPROBLEME OHNE REIBUNG

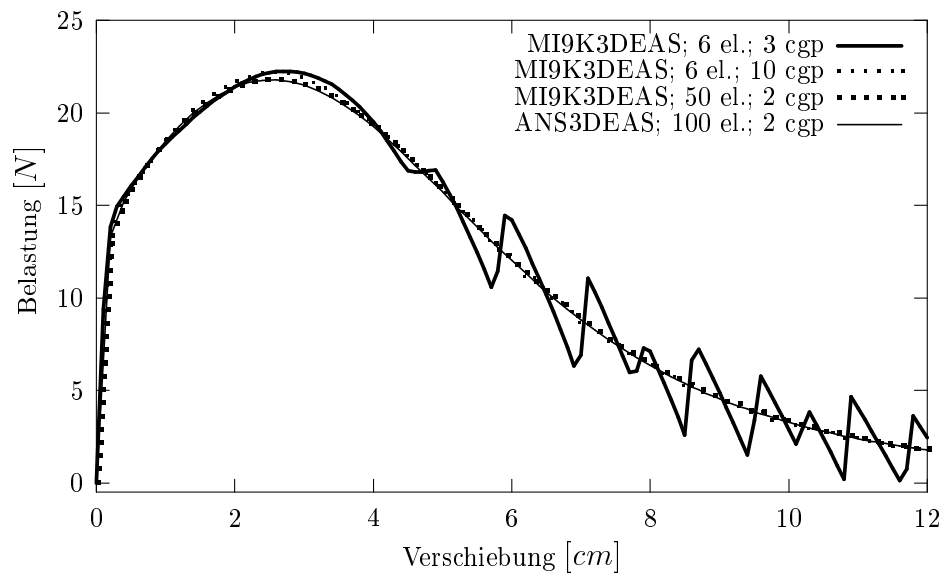


Abbildung 3.20: Last-Verformungs Diagramm, biquadratische Elemente; Vergleich Kontaktverbesserung mit mehr Gausspunkten und Netzverfeinerung

ders zu großen Abständen der einzelnen Kontaktpunkte führt. Dadurch erfolgt eine relativ starke Eindringung des Zylinders in das FE-Netz der Struktur zwischen den einzelnen Kontaktpunkten.

Wird eine feinere Kontaktdiskretisierung verwendet, können die Sprünge in der Last-

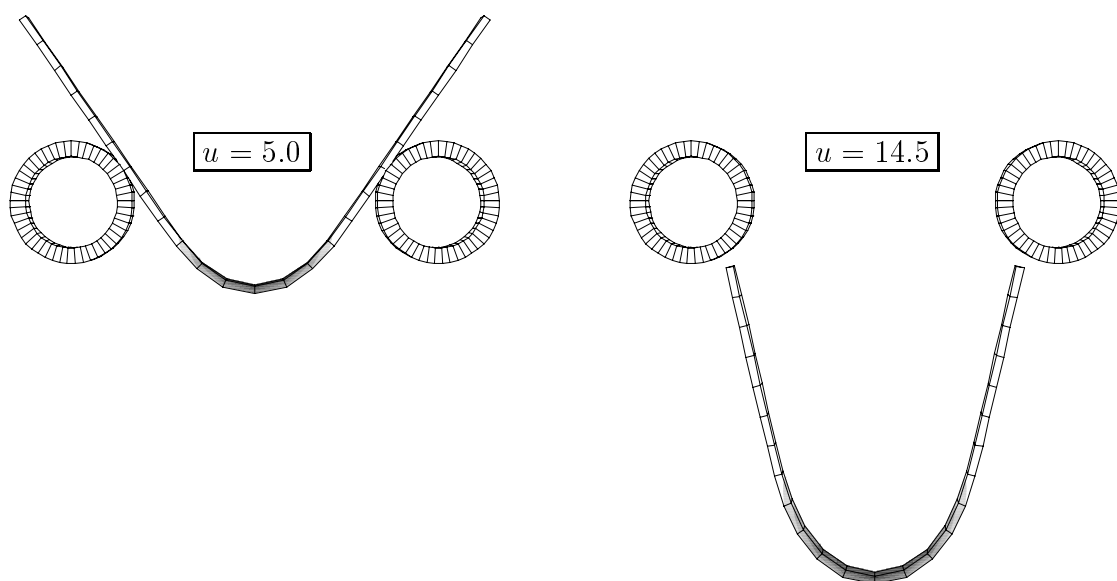


Abbildung 3.21: Plastische Deformation des Stahlbleches bei $u = 5\text{cm}$ und $u = 14.5\text{cm}$

Verformungs-Kurve stark reduziert bzw. vollständig vermieden werden, wie z.B. in Abb. 3.19 bei einer Verwendung von zehn Kontakt-Gausspunkten sichtbar wird. Die Alternative zur Verfeinerung des Kontaktes durch eine Erhöhung der Anzahl der Kontakt-Gausspunkte ist eine Netzverfeinerung bei einer konstanten Anzahl von Kontaktpunkten. Durch diese Vorgehensweise können die Sprünge in der Last-Verformungs-Kurve ebenfalls vermieden werden, wie dies in Abb. 3.19 und 3.20 für eine Diskretisierung mit 100 bilinearen bzw. 50 biquadratischen Elementen sichtbar wird. Der numerische Berechnungsaufwand ist bei dieser Vorgehensweise allerdings wesentlich größer, dafür kann mit der feineren Diskretisierung auch eine exaktere Approximation der Geometrie erfolgen.

Der Penalty Parameter darf nicht zu groß gewählt werden, um numerische Probleme zu vermeiden, ein zu kleiner Wert würde allerdings zu große Eindringungen zulassen. Mit dem hier gewählten Wert von $\varepsilon_N = 10$ tritt eine maximale Eindringung der Kontaktpunkte von $pen_{max} = 0.2mm$ auf, was akzeptabel erscheint.

Das Augmented Lagrange Verfahren wird bei diesem Beispiel nicht eingesetzt, da es keinerlei Verbesserung der Ergebnisse erwarten lässt. Auch die bilinearen EAS-Elemente mit einer zusätzlichen Erweiterung der Membranverzerrungen, wie z.B. da EAS3DEAS-Element zeigen im Ergebnis keine Unterschiede zum ANS3DEAS-Element, weshalb diese Resultate hier nicht weiter vorgestellt werden. Es muss in diesem Fall auch bemerkt werden, dass die biquadratischen Elemente im Vergleich zu den bilinearen Elementen zu keiner Verbesserung der Ergebnisse bei gleicher Knotenzahl für beide Elementtypen führen.

3.2.3 Biegen eines Bleches zwischen zwei ebenen Kontaktflächen

Bei dem in diesem Abschnitt betrachteten Beispiel handelt es sich um das Biegen eines Bleches der Dicke t zwischen zwei bereichsweise ebenen Kontaktflächen (Abb. 3.22). Ziel ist die Untersuchung der Zwängung zwischen zwei Kontaktkörpern. Es werden wiederum die Symmetrieeigenschaften ausgenutzt, und nur das halbe System wird mit finiten Elementen diskretisiert. Für diese Struktur erfolgt eine Diskretisierung mit insgesamt 40 bilinearen ANS3DEAS bzw. 20 biquadratischen MI9K3DEAS Elementen, wobei in der Mitte des Bleches ein lokal feineres Netz (Abb. 3.23) verwendet wird, da dort größere Deformationen zu erwarten sind. In vertikaler Richtung werden die Randbedingungen durch ebene Kontaktflächen beschrieben, in y -Richtung werden alle Knoten festgehalten (ebener Verzerrungszustand). Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird wiederum ein elasto-plastisches Materialgesetz mit den in Abb. 3.22 gegebenen Materialeigenschaften verwendet.

Eines der Ziele ist der Vergleich des Penalty Verfahrens mit dem Augmented Lagrange Verfahren bei Problemen mit großen Zwängungen. Für das Penalty Verfahren gilt das Ziel, die maximale Eindringungen nicht zu groß werden zu lassen, d.h. es muss ein möglichst großer Wert für den Penalty Parameter gewählt werden. Dementsprechend wurden Untersuchungen mit Werten von $\varepsilon_N = 50 \frac{kN}{cm^3}$ und $\varepsilon_N = 100 \frac{kN}{cm^3}$ durchgeführt.

3.2. NUMERISCHE BEISPIELE FÜR KONTAKTPROBLEME OHNE REIBUNG

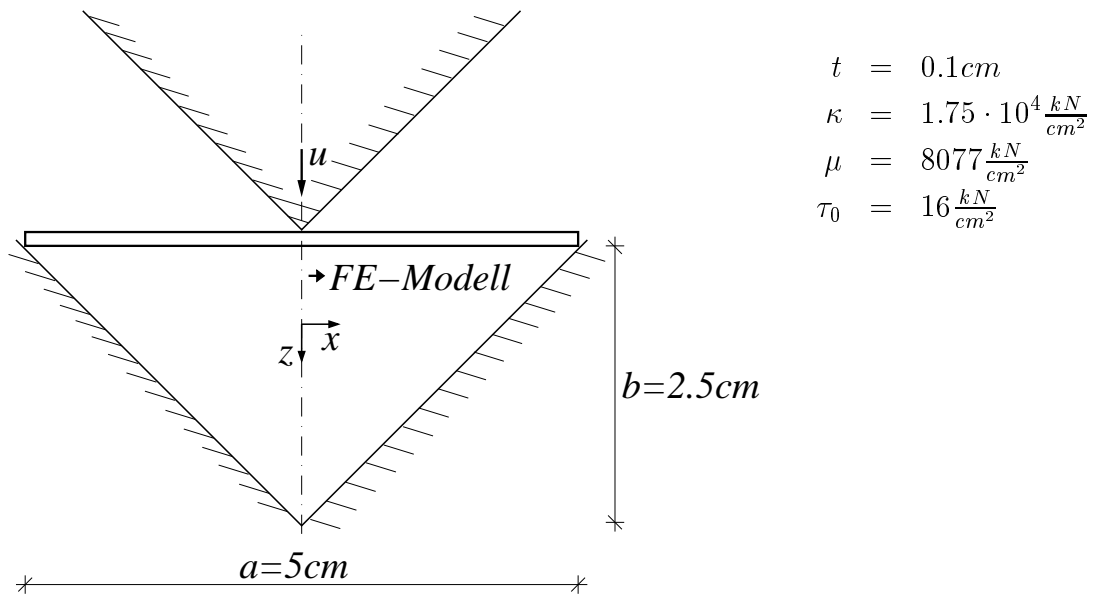


Abbildung 3.22: Geometrie- und Materialeigenschaften des Biegeproblems zwischen ebenen Kontaktflächen

Höhere Werte für ε_N führten zu numerischen Problemen in der Gleichgewichtsiteration. Für das Augmented Lagrange Verfahren ist die Wahl des Penalty Parameter nicht so bedeutend, da zu große Eindringungen durch das iterative Erhöhen der Lagrange-Parameter ausgeglichen werden. Dennoch sollte der Wert für ε_N nicht zu klein angesetzt werden, um zusätzliche Iterationen schon am Anfang der Berechnung zu vermeiden. Dementsprechend wird hier ein Wert von $\varepsilon_N = 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3}$ gewählt. Außerdem wird für das Augmented Lagrange Verfahren die maximal tolerierbare Eindringung mit $pen_{max} = 0.005\text{cm}$ festgelegt, d.h. die iterative Erhöhung der Lagrange-Parameter wird so lange fortgesetzt bis dieser Wert an jedem Kontaktpunkt unterschritten wird. Die Berechnung des Kontaktintegrals erfolgt mit 2 Integrationspunkten für das bilineare Element bzw. mit 3 Integrationspunkten für das biquadratische Element. Eine Verbesserung der Ergebnisse über die Verwendung von weiteren Kontaktintegrationspunkten ist in diesem Beispiel aufgrund der ebenen Kontaktflächen nicht zu erwarten. Auch die Verwendung der Knotenkontaktinterpolation liefert keine unterschiedlichen Ergebnisse, wie in Abb. 3.25 im Vergleich für das bilineare Element mit Augmented Lagrange Kontakt zu sehen ist.

In Abb. 3.24 ist ein Last-Verschiebungsdiagramm zu sehen. Hier wird die Summe der Kontaktkräfte in der Mitte des Bleches über die Verschiebung u der oberen Kontaktfläche aufgetragen. Am Anfang des Verformungsprozesses wird das Blech mit geringem Widerstand gegen die Kontaktflächen gedrückt, demzufolge ist die Knotenkraft relativ klein. Erst ab einer Verschiebung von $u = 2.2\text{cm}$ wächst die Knotenkraft beträchtlich an, da sich der Widerstand beim endgültigen Formen des Bleches deutlich erhöht. Bis zu einer Verschiebung von $u = 2.2\text{cm}$ liefern sowohl Penalty als auch Augmented

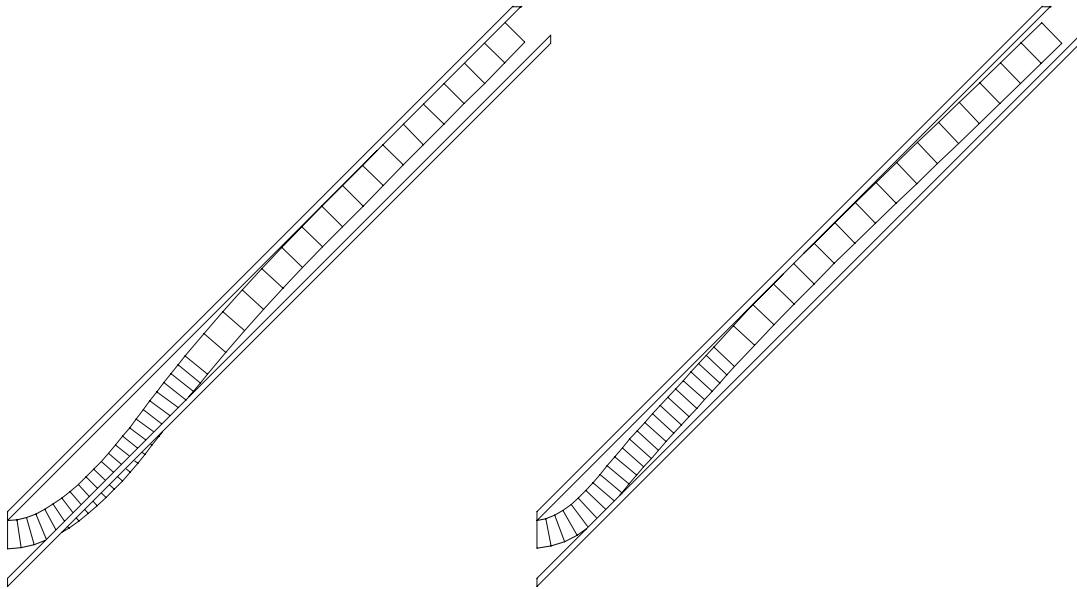


Abbildung 3.23: Vergleich des Verformungszustandes bei $u = 2.4\text{cm}$ für Penalty Verfahren (links) und Augmented Lagrange Verfahren (rechts)

Lagrange Verfahren ein identisches Ergebnis. Für Verschiebungen $u > 2.2\text{cm}$ werden deutliche Unterschiede sichtbar. Die Kontaktkräfte für die Penalty Methode sind in diesem Bereich wesentlich geringer, da hier sehr große Eindringungen zugelassen werden, wie deutlich in Abb. 3.23 zu sehen ist. Mit der Augmented Lagrange Methode kann diese starke Eindringung auf das zuvor definierte Limit beschränkt werden. Aller-

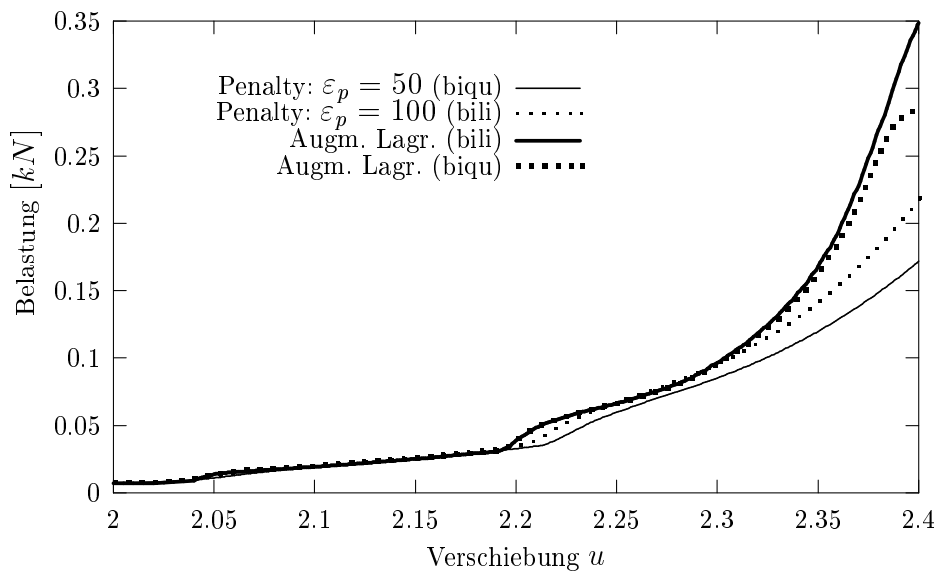


Abbildung 3.24: Last-Verformungs Kurve für $2\text{cm} \leq u \leq 2.4\text{cm}$

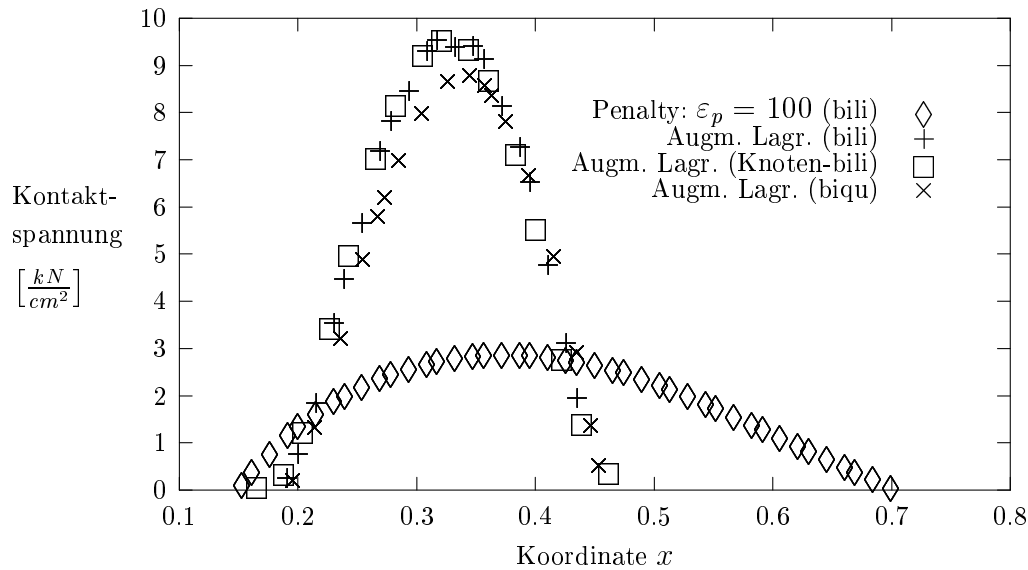


Abbildung 3.25: Kontaktspannungen Blechunterseite für $u = 2.38\text{cm}$

dings nimmt der Berechnungsaufwand in diesem Bereich für das Augmented Lagrange Verfahren beträchtlich zu. Bis zur Verschiebung $u = 2\text{cm}$ ist der Aufwand für beide Verfahren ähnlich, für das Penalty Verfahren mit $\varepsilon_N = 50 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^3}$ werden insgesamt ca. 450 Iterationsschritte benötigt, für das Augmented Lagrange Verfahren ca. 540. Bis zur Verschiebung $u = 2.4\text{cm}$ benötigt man für das Penalty Verfahren ca. 2440 Iterationsschritte, das Augmented Lagrange Verfahren ca. 3870. Für eine befriedigende Erfüllung der Kontaktrandbedingung ist in diesem Fall also ein Mehraufwand von ca. 60% notwendig. Wird alternativ zur Verbesserung der Penalty Parameter auf $\varepsilon_N = 100$ gesetzt, so ist der Aufwand ähnlich hoch wie für das Augmented Lagrange Verfahren, da hier, um numerische Probleme zu vermeiden, kleinere Lastschritte gewählt werden müssen.

Außerdem fällt in Abb. 3.24 auf, dass im Bereich $u > 2.35$ die Kontaktkraft für das bilineare Element stärker anwächst als für das biquadratische Element. Dies kann darauf zurückgeführt werden, dass in diesem Bereich der maximalen Deformation das biquadratische Element aufgrund seiner höheren Ansatzordnung für die Geometrieapproximation die geforderte Krümmung besser abbilden kann.

In Abb. 3.25 werden zusätzlich die Kontaktspannungen für $u = 2.38\text{cm}$ an der Blechunterseite im maximal belasteten Bereich $0.1\text{cm} \leq x \leq 0.8\text{cm}$ dargestellt. Wie zu erwarten sind für den Penalty Fall mit einer höheren zugelassenen Eindringung die Kontaktspannungen entsprechend kleiner, dehnen sich aber über eine größere Elementfläche aus. Im Augmented Lagrange Fall werden sehr hohe Spannungen in einem kleineren Elementbereich erreicht. Analog zur Last-Verformungskurve sind auch die Kontaktspannungen für das biquadratische Element geringfügig kleiner als für das bilineare Element.

3.2.4 Tiefziehen eines zylinderförmigen Topfes

In einem weiteren numerischen Beispiel soll der Tiefziehprozess eines zylinderförmigen Topfes simuliert werden. Ein ähnliches Beispiel wird in [5] vorgestellt. Der Zylinder soll hierfür aus einem kreisförmigen Blech der Dicke $t = 1\text{mm}$ und dem Radius $R_B = 8\text{cm}$ geformt werden. Der Verformungsprozess ist in zwei Phasen aufgeteilt. In der ersten Phase wird das auf abgerundeten Gesenkkanten aufliegende Blech mit einem Stempel, für den eine Verschiebung u vorgegeben wird, nach unten gegen einen in dieser Phase unbeweglichen Blechhalter gedrückt. Die Geometrie der Werkzeuge ist entsprechend in Abb. 3.26 dargestellt. Die erste Phase endet bei einer Verschiebung von $u = 2.5\text{cm}$,

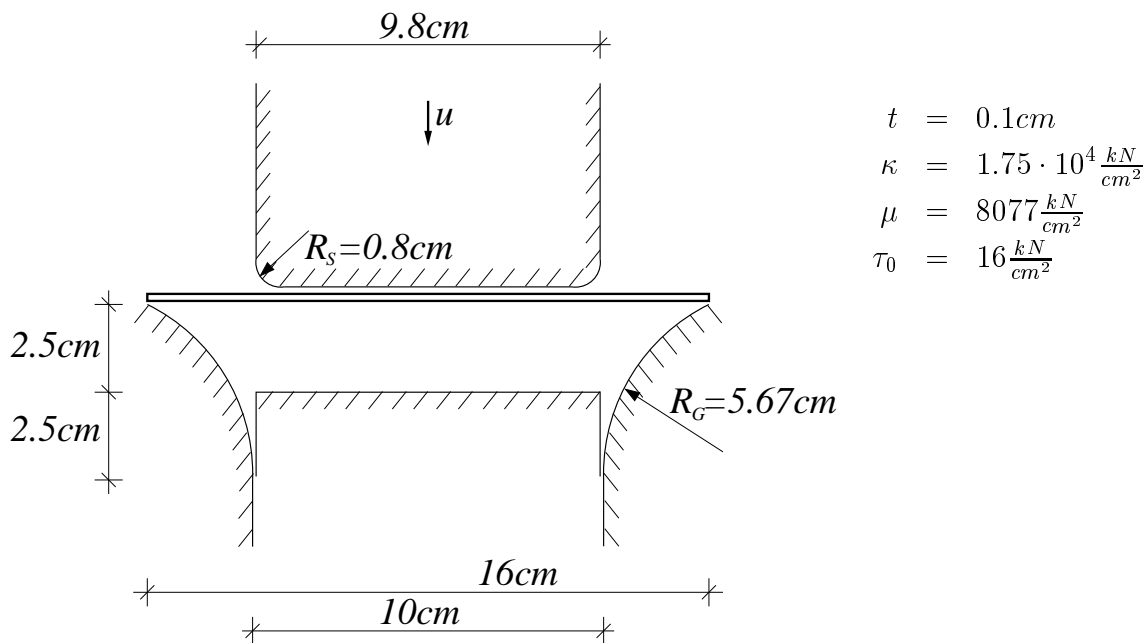


Abbildung 3.26: Geometrie- und Materialeigenschaften für Tiefziehprozess

wenn das Blech vollständig gegen den Blechhalter gedrückt ist. In der zweiten Phase der Verformung wird der Stempel nun gemeinsam mit dem Blechhalter weiter nach unten verschoben, und somit werden die Seitenwände des Topfes entlang der in diesem Bereich ebenen Gesenkkante gezogen und somit geglättet.

Bei der Diskretisierung werden die Symmetrieeigenschaften des kreisrunden Bleches ausgenutzt, und es wird lediglich ein Viertel der Struktur vernetzt. Dabei wird das Blech, wie in Abb. 3.28 dargestellt, mit 254 Knoten diskretisiert, d.h. es kommen 108 bilineare bzw. 27 biquadratische Schalenelemente zum Einsatz. Alternativ wird, wie ebenfalls Abb. 3.28 dargestellt, eine feinere Diskretisierung mit 432 bilinearen bzw. 108 biquadratischen Schalenelementen vorgenommen. Zur Beschreibung der Kontaktflächen werden drei analytisch beschriebene Flächen, respektive ebene Fläche, Zylinder und Torus kombiniert. Die Überprüfung der Kontaktbedingung erfolgt bei diesem

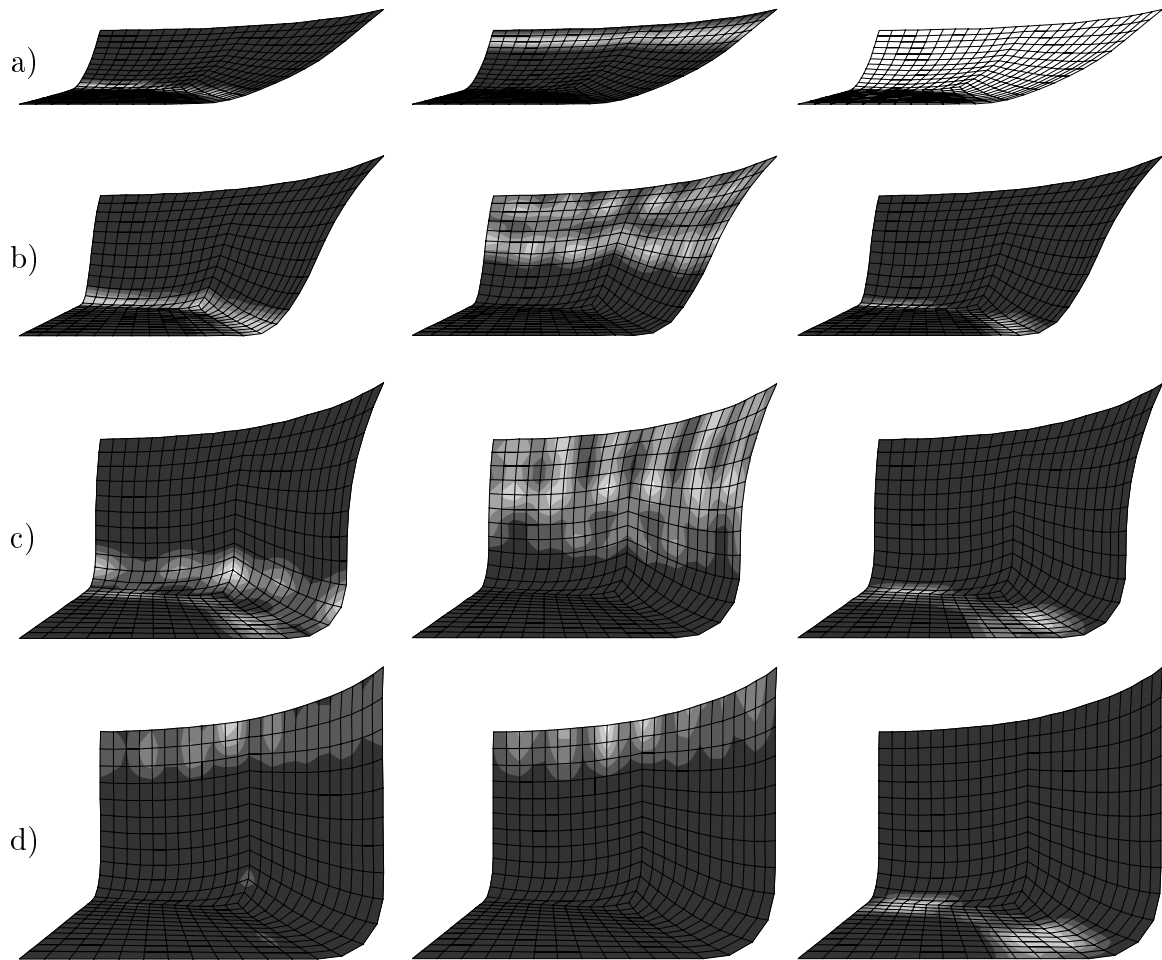


Abbildung 3.27: Kontaktspannungen am Stempel (Links), am Gesenk (Mitte) und am Blechhalter (Rechts) für a) $u = 2.15$, b) $u = 4.3$, c) $u = 6.45$ und d) $u = 8.6$

Beispiel an den Knotenpunkten des FE-Netzes des Bleches mit Interpolation der Eindringungen auf die Integrationspunkte zur Auswertung der Kontaktintegrale. Es wird außerdem die Augmented Lagrange Kontaktformulierung mit einem Penalty-Startwert von $\varepsilon_N = 20$ und einer maximalen Eindringtiefe von $pen_{max} = 0.01cm$ verwendet. Eine lokale Betrachtung mit Kontaktauswertung an den Kontaktintegrationspunkten ist in diesem Fall nicht sinnvoll, da in diesem Fall, wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben, ungewollte Zwängungen auftreten können.

In Abb. 3.27 sind die Kontaktspannungen am Stempel, am Gesenk, sowie am Blechhalter für verschiedene Verformungszustände dargestellt. Im ersten Zustand, bei $u = 2.15cm$, wird das Werkstück vom Stempel gegen die Gesenkkanten gedrückt; Kontakt mit dem Blechhalter ist noch nicht vorhanden. Bei $u = 2.5cm$ wird das Blech dann gegen den Blechhalter gedrückt, dementsprechend sind in Abb. 3.27 für die Zustände a), b) und c) auch im Blechhalter Kontaktspannungen erkennbar. Es ist erkennbar, dass

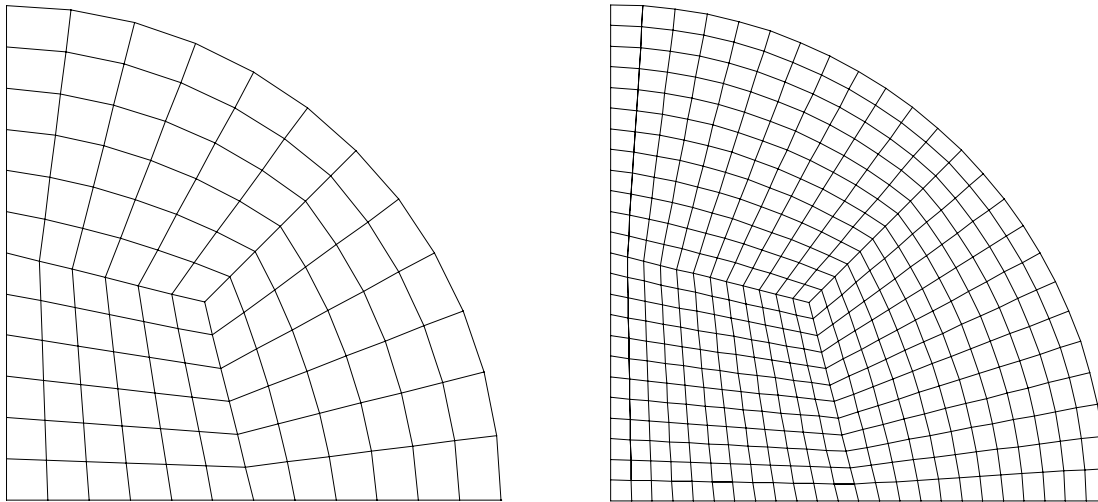


Abbildung 3.28: Unverformtes Netz für ein Viertel des kreisrunden Bleches; grobe Vernetzung mit 127 Knoten (links) und feine Vernetzung mit 469 Knoten (rechts)

sich Beulen am Gesenkrand ausbilden. Im letzten dargestellten Zustand bei $u = 8.6\text{cm}$ ist deutlich zu sehen, wie in der abschließenden Phase der Verformung die Seitenwände des Topfes von beiden Seiten gedrückt und somit bis auf einen kleinen Rest am oberen Rand des Bleches geglättet werden.

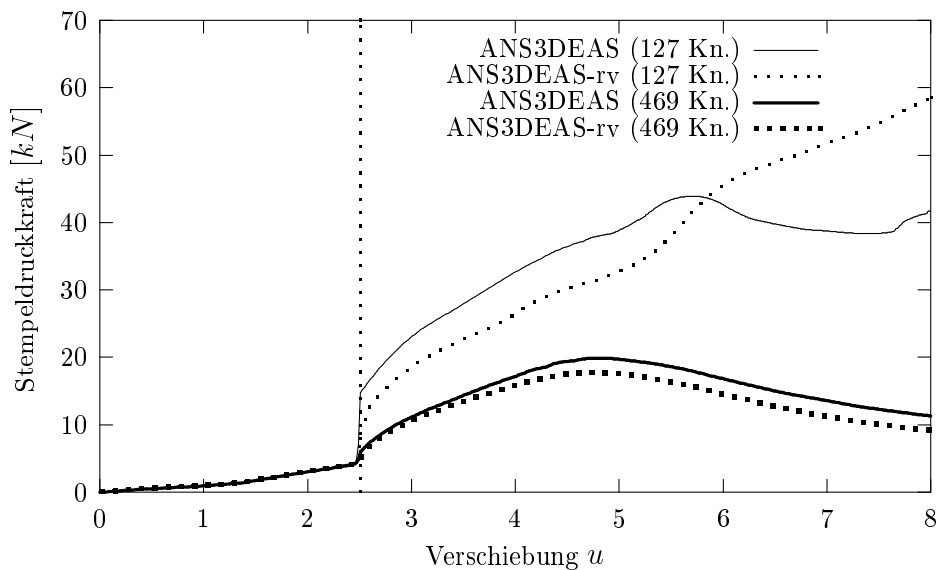


Abbildung 3.29: Last-Verformungs-Kurven für Tiefziehen eines Topfes; bilineares ANS3DEAS Element; grobe und feine Vernetzung

3.2. NUMERISCHE BEISPIELE FÜR KONTAKTPROBLEME OHNE REIBUNG

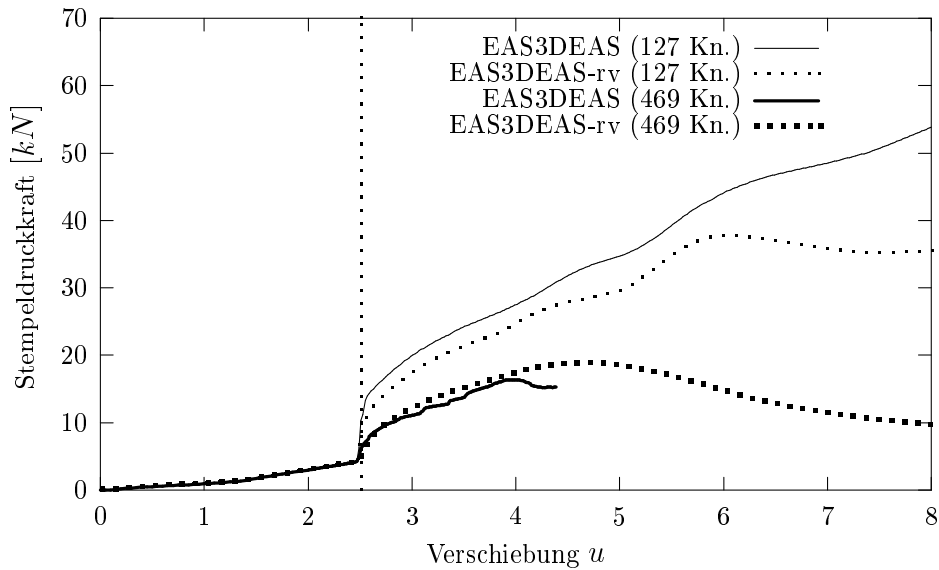


Abbildung 3.30: Last-Verformungs-Kurven für Tiefziehen eines Topfes; bilineares EAS3DEAS Element; grobe und feine Vernetzung

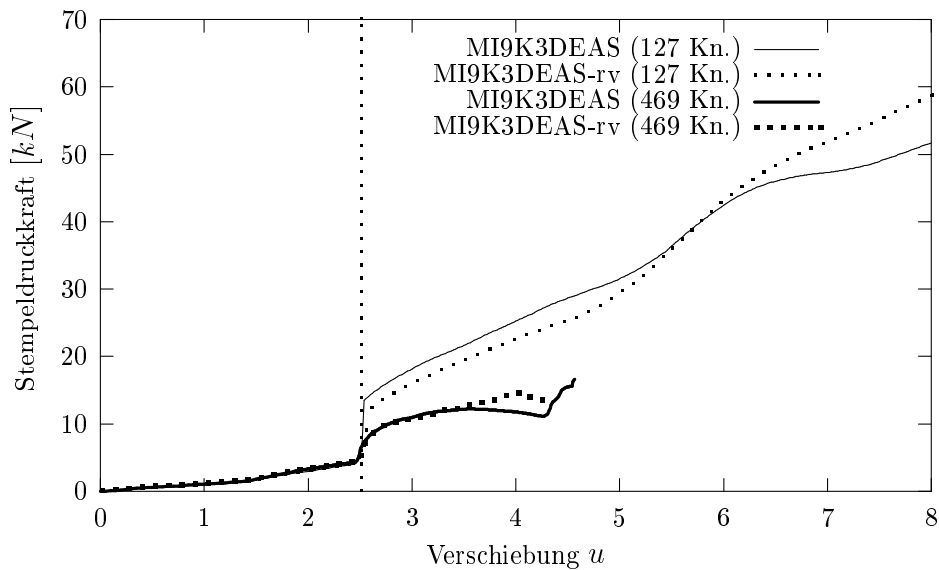


Abbildung 3.31: Last-Verformungs-Kurven für Tiefziehen eines Topfes; biquadratisches MI9K3DEAS Element; grobe und feine Vernetzung

In Abb. 3.29-3.31 werden die Last-Verformungskurven dargestellt. Der Übergang von der ersten zur zweiten Belastungsphase ist durch eine vertikale Linie gekennzeichnet. Für die Verschiebung $u < 2.5\text{cm}$ liefern alle dargestellten Varianten eine deckungsgleiche Last-Verformungskurve. Im weiteren Verlauf sind deutliche Unterschiede zu erkennen. Insbesondere weichen die Resultate der größeren Vernetzung deutlich von denen

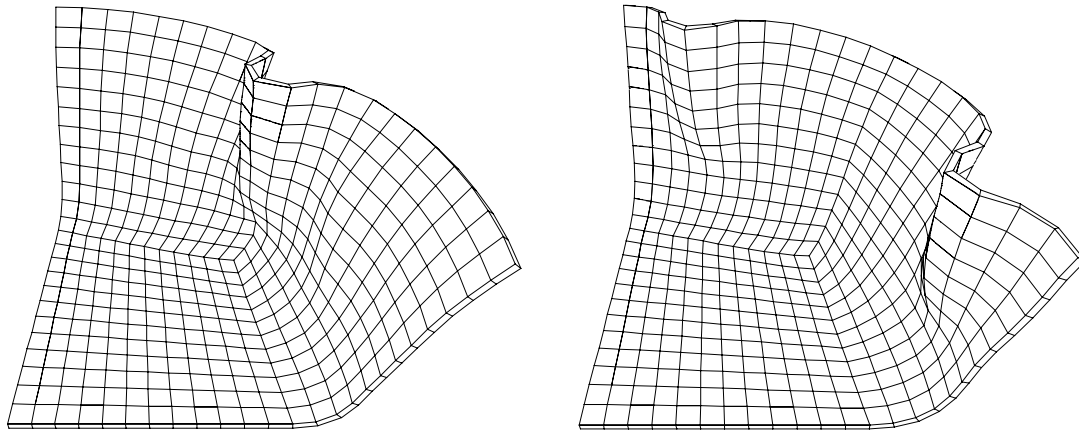


Abbildung 3.32: Verformtes Netz für $u = 4.35\text{cm}$; feine Vernetzung mit 469 Knoten; EAS3DEAS Element (links) und MI9K3DEAS Element (rechts); starkes lokales Beulen

der feineren Vernetzung ab. Die Ergebnisse der gröberen Vernetzung scheinen somit wenig aussagekräftig zu sein und sind praktisch unbrauchbar. Eine weitere Netzverfeinerung wäre sinnvoll, um die Konvergenzeigenschaften bezüglich der FE-Vernetzung genauer zu untersuchen.

Untersucht wurden die bilinearen Elemente ANS3DEAS (siehe Abb. 3.29) und EAS3DEAS (siehe Abb. 3.30), sowie das biquadratische Element MI9K3DEAS (siehe Abb. 3.31) jeweils in der Variante mit eingeschalteter selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile (-rv) und ohne. Für das ANS3DEAS Element mit der feinen Vernetzung (siehe Abb. 3.29) zeigt die Variante mit eingeschalteter selektiv reduzierter Integration ein geringfügig weiches Verhalten als die vollständig integrierte Variante, was auf ein leichtes volumetrisches Versteifen hindeutet. Das bilineare EAS3DEAS Element und die biquadratischen Elemente MI9K3DEAS und MI9K3DEAS-rv zeigen im Fall der feinen Vernetzung lokal starkes Beulen (siehe Abb. 3.32), was letztendlich zu einem vorzeitigen Abbruch der numerischen Berechnung führt. Als Ergänzung erscheint eine dynamische Betrachtung sinnvoll. Das Beulverhalten der Struktur könnte dann genauer untersucht werden. Zusätzlich wäre dann auch die Berücksichtigung der Belastungsgeschwindigkeit möglich. Berechnung könnte hier zu besseren Ergebnissen führen. Um für den realen Tiefziehprozess das Auftreten solch ausgeprägter Beulen zu verhindern, könnte beispielsweise eine Anpassung der Werkzeuge z.B. durch zusätzliche Niederhalter erfolgen.

3.2.5 Tiefziehen eines Vollbleches mit anschließender Eigenfrequenzuntersuchung

Als Beispiel mit anschließender Eigenfrequenzuntersuchung wird ein Tiefziehprozess eines Vollbleches berechnet. Das Modell ist in Abb. 3.33 dargestellt, es besteht aus einem

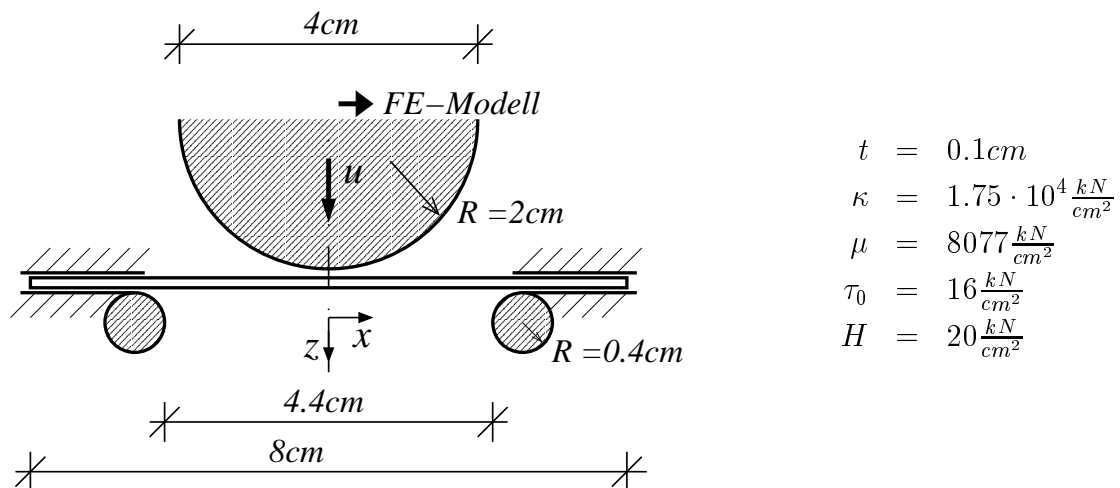


Abbildung 3.33: Geometrie- und Materialeigenschaften für Tiefziehprozess eines Bleches

Blech der Dicke t und den starren Umformwerkzeugen, einem zylinderförmigen Stempel mit dem Radius $R_s = 2\text{cm}$, den Niederhaltern an den Seiten des Bleches und dem Gesenk. Der Radius der Gesenkkanten beträgt $R_s = 0.4\text{cm}$. Die Niederhalter werden als vertikal unverschieblich angenommen. Es handelt sich hier um ein ebenes Problem, sämtliche Knoten werden in y -Richtung gehalten, wodurch ein ebener Verzerrungszustand vorausgesetzt wird.

Die Diskretisierung des halben Bleches (Symmetrie) erfolgt gleichförmig mit 50 ANS3DEAS Elementen in Längsrichtung. Die Auswertung der Kontaktbedingung erfolgt direkt an den Integrationspunkten, wobei zwei Kontakt-Gausspunkte verwendet werden. Die Belastung erfolgt durch die Vorgabe einer Verschiebung u für den Stempel

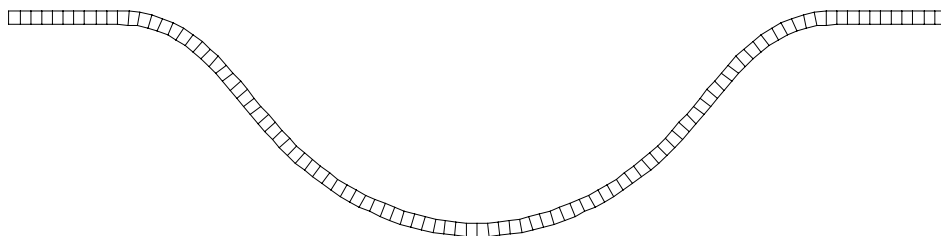


Abbildung 3.34: Verformtes Netz für tiefgezogenes Blech

bis zu einem Wert von $u = 1.5\text{cm}$. Das verformte Netz ist in Abb. 3.34 dargestellt.

Bei diesem Beispiel soll eine Eigenwertuntersuchung nach der Entlastung des geformten Bleches erfolgen. Somit kann der Einfluss der durch das Tiefziehen verursachten Eigenspannungen im Blech auf das Schwingungsverhalten untersucht werden. Zum Vergleich werden die Eigenwerte eines geometrisch identischen, aber direkt generierten und somit eigenspannungsfreien FE-Netzes ermittelt.

Die Eigenformen zu den Eigenwerten 1.-8. sind in Abb. 3.35 dargestellt. Die Eigenwerte, gerundet auf zwei Nachkommastellen, sind in Tab. 3.5 jeweils für das Werkstück nach der Entlastung und das direkt generierte Netz zu finden. Es sind in diesem Fall nur sehr geringe Unterschiede (im Nachkommabereich) bei den Eigenwerten zu beobachten. Die die Eigenspannungen des verformten Vollblechs haben also offensichtlich keinen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Bauteils.

	nach Entlastung	direkt generiert
1.EF	$2.30 \cdot 10^2$	$2.30 \cdot 10^2$
2.EF	$5.67 \cdot 10^3$	$5.66 \cdot 10^3$
3.EF	$4.08 \cdot 10^4$	$4.06 \cdot 10^4$
4.EF	$1.61 \cdot 10^5$	$1.61 \cdot 10^4$
5.EF	$3.92 \cdot 10^5$	$3.91 \cdot 10^5$
6.EF	$8.52 \cdot 10^5$	$8.50 \cdot 10^5$
7.EF	$1.14 \cdot 10^6$	$1.14 \cdot 10^6$
8.EF	$1.63 \cdot 10^6$	$1.63 \cdot 10^6$

Tabelle 3.5: Eigenfrequenzen der Eigenformen 1.-8. für tiefgezogenes Vollblech

3.2. NUMERISCHE BEISPIELE FÜR KONTAKTPROBLEME OHNE REIBUNG

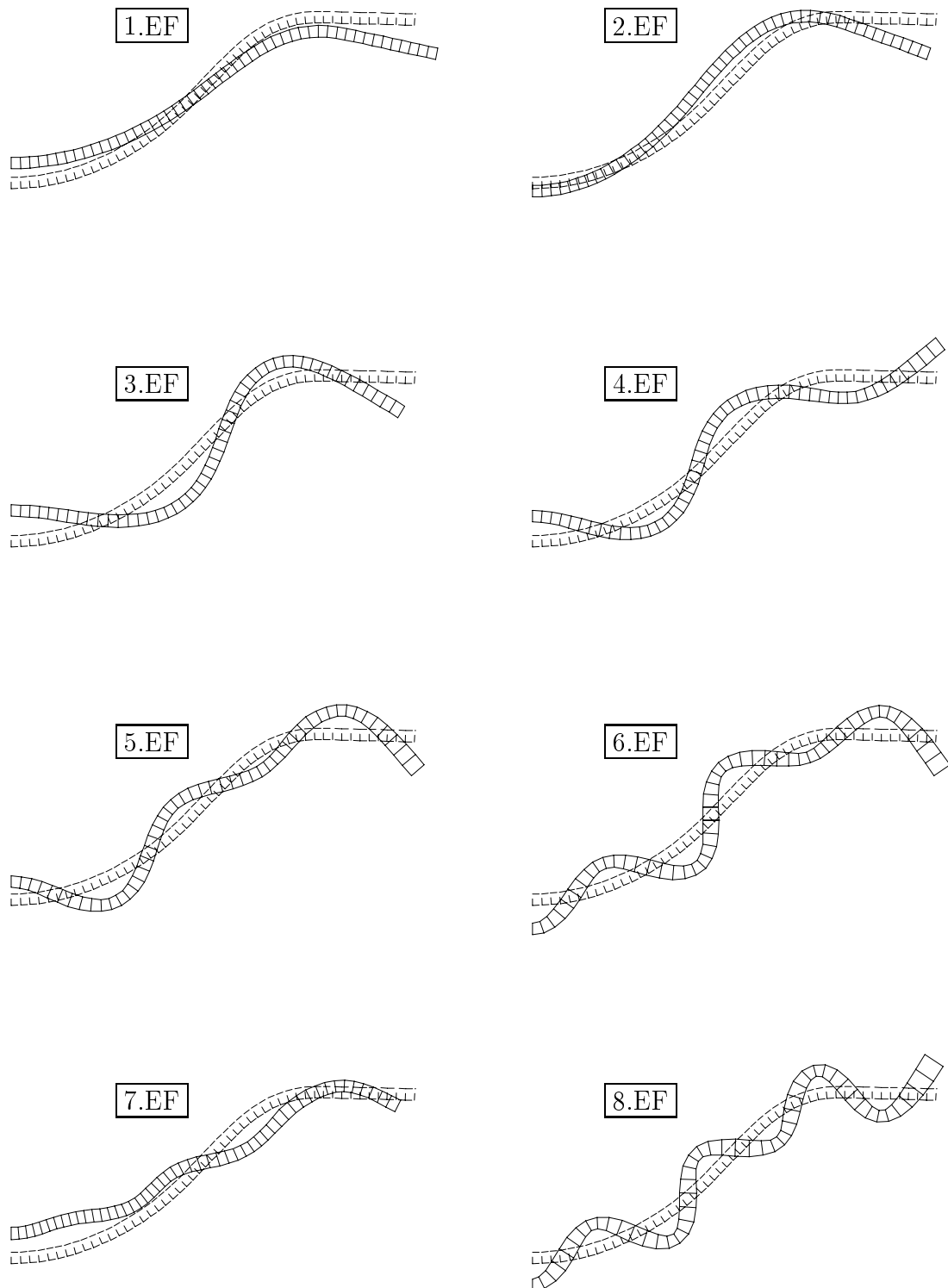


Abbildung 3.35: Eigenformen 1.-8. für tiefgezogenes Vollblech; Darstellung der verformten Geometrie überlagert mit der jeweiligen Eigenform

3.3 Kontakt mit Reibung

In den meisten realistischen Fällen ist es erforderlich, auch Reibungseinflüsse bei der Kontaktbeschreibung zu berücksichtigen. Unter dem Begriff der Reibung werden energiedissipierende Prozesse bei einer gegenseitigen tangentialen Verschiebung der Kontaktflächen verstanden, wie z.B. Wärmebildung oder ein Fließen des Materials. Alternativ kann Haften auftreten, wenn aufgrund der Rauheit der Oberflächen eine gegenseitige tangentiale Verschiebung verhindert wird. Bisher wurde ausschließlich Normalkontakt betrachtet, d.h. es waren an den Kontaktflächen nur Normalkräfte vorhanden. Wird nun Reibung berücksichtigt, treten zusätzlich tangentiale Kräfte auf. Detaillierte Untersuchungen zur numerischen Behandlung von Kontaktproblemen mit Reibung sind z.B. in [42] zu finden. Als Kraftgesetz für die tangentialen Kontaktkräfte wird das Coulomb'sche Gesetz verwendet, das wie folgt formuliert werden kann:

$$\mathbf{f}_T = \mu_H p_N \frac{\dot{\mathbf{g}}_T}{|\dot{\mathbf{g}}_T|}, \quad (3.33)$$

mit der zur Kontaktfläche tangentialen Reibkraft \mathbf{f}_T . Bei μ_H handelt es sich um den Haftkoeffizienten, der vom Material der betrachteten Kontaktflächen abhängt. Die Kontaktdruckkraft p_N ergibt sich aus Glg. (3.4) mit $p_N < 0$ im Fall des Kontaktes und $p_N = 0$ falls kein Kontakt vorhanden ist. Aus der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{g}}_T$, mit der der betrachtete Punkt auf der Kontaktfläche gleitet, wird die Richtung der gesuchten Reibkraft festgelegt. Grundsätzlich sind, falls Kontakt vorhanden ist, die Zustände Haften und Gleiten zu unterscheiden. Beim Coulomb'schen Gesetz handelt es sich um ein Kraftgesetz abhängig von Normalkontaktkräften. Im Rahmen der hier eingesetzten Kontaktformulierungen werden nicht punktweise Kontakteinzelkräfte betrachtet, sondern es erfolgt eine elementweise integrale Betrachtung der Kontaktspannung und entsprechend auch von Reibspannungen.

3.3.1 Haften

Im Fall des Haftens wird der Kontaktpunkt in tangentialer Richtung festgehalten, es wird also eine zusätzliche Randbedingung eingebracht. Somit kann Haften völlig analog zum Normalkontakt durch eine Regularisierung mit Hilfe eines Penalty Terms behandelt werden. Die tangentiale Verschiebung des betrachteten Kontaktpunktes wird durch einen tangentialen 'Gap-Vektor' \mathbf{g}_T beschrieben. Somit ergibt sich der Penalty Term:

$$\Pi_P = \frac{1}{2} \varepsilon_T \int_{A_c} \tilde{\mathbf{g}}_T^T \tilde{\mathbf{g}}_T dA_c. \quad (3.34)$$

Bei dem Vektor $\tilde{\mathbf{g}}_T$ handelt es sich um eine an die Penetrationsfunktion angebundene Größe:

$$\tilde{\mathbf{g}}_T = \begin{cases} \mathbf{g}_T & , g_N < 0 \\ \mathbf{0} & , g_N \geq 0 \end{cases}, \quad (3.35)$$

die davon abhängt, ob der Kontaktpunkt in den Kontaktkörper in der Normalenrichtung eindringt. Die Länge von \mathbf{g}_T entspricht dem Betrag der tangentialen Verschiebung. Die Haftkraft ist über das Coulomb'sche Kraftgesetz abhängig von der Normalkraft beschränkt.

3.3.2 Gleiten

Wird die zulässige Haftkraft überschritten, erfolgt der Übergang in den Zustand des Gleitens. Im Gegensatz zum Fall des Haftens oder bei Normalkontakt kann hier kein Potential angegeben werden. Es wird vielmehr die von der Reibkraft f_T verrichtete virtuelle Arbeit

$$\delta W_T = \int_{A_c} \mathbf{f}_T^T \delta \tilde{\mathbf{g}}_T dA_c \quad (3.36)$$

an das Funktional angefügt. Diese wird letztlich aus dem Potential dissipiert und in Wärme umgewandelt.

3.3.3 Allgemeine Formulierung

Allgemeine Formulierungen für das numerische Kontaktproblem mit Reibung sind z.B. im Buch von Wriggers [79] dargestellt. Als allgemeine Form für die Fälle Haften und Gleiten kann

$$G(\mathbf{u}_T, \delta \mathbf{u}_T) = \int_{A_c} \mathbf{f}_T^T \delta \mathbf{u}_T dA_c = \delta \mathbf{d}_e \int_{A_c} \mathbf{f}_T^T \mathbf{u}_{T,d_e} dA_c \quad (3.37)$$

betrachtet werden. Hierin bezeichnet \mathbf{u}_T die tangentialen Verschiebung des Kontaktpunktes. Die Reibkraft \mathbf{f}_T wird entsprechend des aktuellen Zustands festgelegt. Zuerst muss also festgestellt werden, ob der Zustand des Haftens oder des Gleitens vorliegt. Dazu wird zuerst eine angenommene Tangentialkraft $\tilde{\mathbf{f}}_{T_n}$ ermittelt, die der aktuellen Haftkraft entspricht. Diese berechnet sich für den n -ten Lastschritt aus der Tangentialkraft des letzten Lastschrittes $\mathbf{f}_{T_{n-1}}$ und der tangentialen Verschiebungen $\Delta \mathbf{u}_T$ mit:

$$\Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{u}_{T_n} - \mathbf{u}_{T_{n-1}} , \quad (3.38)$$

als

$$\tilde{\mathbf{f}}_{T_n} = \mathbf{f}_{T_{n-1}} + \varepsilon_T \Delta \mathbf{u}_T . \quad (3.39)$$

Die Reibkraft wird also über die einzelnen Lastschritte aufaddiert. Somit wird der Verlauf des Reibweges eines Kontaktpunktes näherungsweise erfasst. Mit dieser angenommenen Tangentialkraft erfolgt die Überprüfung der Haftbedingung mit Hilfe des Coulombschen Kraftgesetzes

$$\left| \tilde{\mathbf{f}}_{T_n} \right| \leq \mu_H f_{N_n} , \quad (3.40)$$

mit dem Haftkoeffizient μ_H . Die Normalkraft f_{N_n} im betrachteten Kontaktpunkt berechnet sich zu

$$f_{N_n} = \lambda_N + \varepsilon_N g_N , \quad (3.41)$$

wobei der Lagrange Parameter λ_N für den Fall einer reinen Penaltyformulierung für den Normalkontakt entfällt. Wird die Bedingung (3.40) eingehalten, kann $\mathbf{f}_{T_n} = \tilde{\mathbf{f}}_{T_n}$ gesetzt werden. Im Fall des Gleitens wird \mathbf{f}_{T_n} gleich der Reibkraft gesetzt:

$$\mathbf{f}_{T_n} = \frac{\mu_H f_{N_n}}{|\tilde{\mathbf{f}}_{T_n}|} \tilde{\mathbf{f}}_{T_n} . \quad (3.42)$$

Der Verschiebungsvektor \mathbf{u}_T wird über eine Approximation mit Hilfe der diskreten Knotenverschiebungen berechnet:

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{e}_T \mathbf{e}_T^T \mathbf{N} \mathbf{d}_e , \quad (3.43)$$

$$\Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{e}_T \mathbf{e}_T^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}_e , \quad (3.44)$$

mit einem tangentialen Einheitsvektor \mathbf{e}_T in Richtung der tangentialen Verschiebung. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e berechnet sich dann aus der Linearisierung von (3.37) zu

$$DG(\mathbf{u}_T, \delta \mathbf{u}_T) = \delta \mathbf{d}_e \underbrace{\int_{A_c} \mathbf{f}_{T,d_e}^T \mathbf{u}_{T,d_e} + \mathbf{f}_T^T \mathbf{u}_{T,d_e} dA_c}_{\mathbf{K}_e} . \quad (3.45)$$

Die Ableitung von \mathbf{f}_T nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e ergibt sich als

$$\mathbf{f}_{T,d_e} = \tilde{\mathbf{f}}_{T,d_e} = \varepsilon_T \Delta \mathbf{u}_{T,d_e} \quad (3.46)$$

im Fall des Haftens und zu

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{T,d_e} &= \mu_H \frac{1}{|\tilde{\mathbf{f}}_T|} \tilde{\mathbf{f}}_T f_{N,d_e} + \mu_H \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbf{f}}_T|} \tilde{\mathbf{f}}_T \right)_{,d_e} f_N \\ &= \frac{\mu_H}{|\tilde{\mathbf{f}}_T|} \left(\tilde{\mathbf{f}}_T f_{N,d_e} + \tilde{\mathbf{f}}_{T,d_e} f_N - \frac{\tilde{\mathbf{f}}_T \tilde{\mathbf{f}}_T^T \tilde{\mathbf{f}}_{T,d_e}}{\tilde{\mathbf{f}}_T^T \tilde{\mathbf{f}}_T} f_N \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

im Fall des Gleitens.

3.3.4 Reibung auf ebener Kontaktfläche

Die ebene Kontaktfläche wird, wie in Abschnitt 3.1.5 dargestellt, durch den Ortsvektor \mathbf{x}_0 und einen Normalenvektor \mathbf{n}_c beschrieben. Der Tangentialverschiebungsvektor \mathbf{u}_{T_i} wird mit Hilfe des aktuellen Kontaktpunktes $\mathbf{x}_{c_i}^n$ und des Kontaktpunktes des vorangehenden Lastschrittes $\mathbf{x}_{c_i}^{n-1}$ berechnet als

$$\mathbf{u}_{T_i} = \mathbf{x}_{c_i}^n - \mathbf{x}_{c_i}^{n-1} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e - (\mathbf{e}_N^T \mathbf{N} \mathbf{d}_e) \mathbf{e}_N, \quad (3.48)$$

bzw.

$$\Delta \mathbf{u}_{T_i} = \mathbf{x}_{c_i}^n - \mathbf{x}_{c_i}^{n-1} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}_e - (\mathbf{e}_N^T \mathbf{N} \Delta \mathbf{d}_e) \mathbf{e}_N. \quad (3.49)$$

Siehe hierzu auch Abb. 3.36. Aus Glg. (3.48) können dann wiederum die Ableitungen

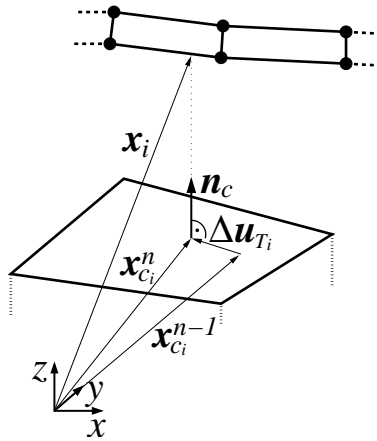


Abbildung 3.36: Ebene Kontaktfläche

nach dem Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e berechnet werden:

$$\mathbf{u}_{T_i, \mathbf{d}_e} = \mathbf{N} - \mathbf{e}_N \mathbf{e}_N^T \mathbf{N}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{u}_{T_i, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e} = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

Diese werden für die Variationsformulierung und die erforderliche Linearisierung benötigt. Die zweite Ableitung $\mathbf{u}_{T_i, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}$ verschwindet, da die Tangentialebene einer ebenen Fläche nicht von der aktuellen Lage des betrachteten Punktes \mathbf{x}_i abhängt. Somit können Elementresidualvektor

$$\mathbf{f}_e = - \int_{A_c} \mathbf{f}_T^T \mathbf{u}_{T, \mathbf{d}_e} dA_c \quad (3.52)$$

und Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_{A_c} \mathbf{f}_{T, \mathbf{d}_e}^T \mathbf{u}_{T, \mathbf{d}_e} + \underbrace{\mathbf{f}_T^T \mathbf{u}_{T, \mathbf{d}_e \mathbf{d}_e}}_{=0} dA_c \quad (3.53)$$

ermittelt werden.

3.3.5 Reibung auf gekrümmter Kontaktfläche

Bei Verwendung gekrümmter Kontaktflächen, wie z.B. die in Abschnitt 3.1.5 beschriebene zylindrische Kontaktfläche, muss zuerst ein Tangentialvektor ermittelt werden, der die Richtung der Reibkraft angibt. Vereinfachend erfolgt die Annahme einer in

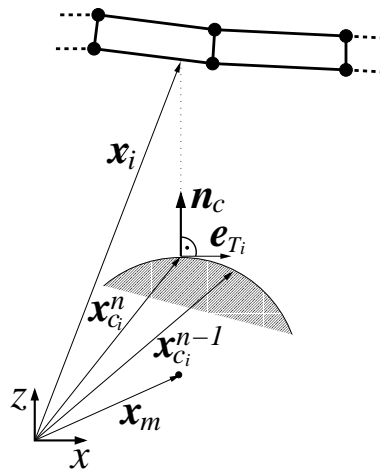


Abbildung 3.37: gekrümmte Kontaktoberfläche

der x - z -Ebene kreisförmigen Kontaktfläche (siehe Abb. 3.37) und in y -Richtung unverschieblicher Kontaktpunkte. Mit dieser Annahme lässt sich leicht ein Normalenvektor

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{x}}_{c_i}^n - \tilde{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} x_{c_i 1}^n \\ 0 \\ x_{c_i 3}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{m 1} \\ 0 \\ x_{m 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{c_i 1}^n - x_{m 1} \\ 0 \\ x_{c_i 3}^n - x_{m 3} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

bestimmen, woraus sich direkt der zugehörige Tangentialvektor ableiten lässt:

$$\tilde{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} -x_{c_i 3}^n + x_{m 3} \\ 0 \\ x_{c_i 1}^n - x_{m 1} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e}_{T_i} = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{t}}|} \tilde{\mathbf{t}}. \quad (3.55)$$

Für die Koordinaten des Kontaktpunktes auf der Kontaktfläche $\mathbf{x}_{c_i}^n$ erfolgt im Fall der Penetration die Annahme $\mathbf{x}_{c_i}^n = \mathbf{x}_i$ mit den Koordinaten des Slavepunktes \mathbf{x}_i . Die Tangentialverschiebung $\Delta \mathbf{u}_{T_i}$ wird dann entsprechend Glg. 3.44 bestimmt. Aus Glg. 3.44 lassen sich dann auch die benötigten Ableitungen \mathbf{u}_{T_i, d_e} und $\mathbf{u}_{T_i, d_e d_e}$ berechnen.

3.3.6 Tiefziehen eines Vollbleches unter Berücksichtigung von Reibungseinflüssen

Als Beispiel für ein Kontaktproblem unter Berücksichtigung von Reibungseinflüssen wird ein Tiefziehprozess eines Vollbleches berechnet. Das Modell entspricht dem in Abschnitt 3.2.5 in Abb. 3.33 dargestellten Modell bestehend aus einem Blech der Dicke t , das von einem Stempel in ein Gesenk gedrückt wird und seitlich von Niederhaltern gehalten wird. Angaben zu Geometrie- und Materialeigenschaften sind Abb. 3.33 zu entnehmen. Die Diskretisierung des halben Bleches (Symmetrie) erfolgt wie in Abschnitt 3.2.5 gleichförmig mit 51 Knoten in Längsrichtung, d.h. es werden 50 bilineare ANS3DEAS Elemente und alternativ 25 biquadratische MI9K3DEAS Elemente verwendet. Die Belastung erfolgt durch die Vorgabe einer Verschiebung u für den Stempel bis zu einem Wert von $u = 1.5\text{cm}$.

Bei diesem Beispiel soll der Einfluss der Reibung zwischen Werkzeugen und Blech berücksichtigt werden, wobei Haftkoeffizienten von $\mu_H = 0.3$ und $\mu_H = 0.5$ angenommen werden. In Abb. 3.38 ist die Last-Verformungskurven für das bilineare ANS3DEAS Element für verschiedene Haftkoeffizienten dargestellt, in Abb. 3.39 sind die entsprechenden Kurven für das biquadratische MI9K3DEAS Element zu sehen. Es wird, wie zu erwarten, ersichtlich, dass die erforderliche Stempeldruckkraft mit zunehmendem Haftkoeffizienten größer wird. Dies ist bedingt durch den zusätzlichen Widerstand, den die Reibkräfte beim Gleiten des Bleches über die Gesenkkante und am Niederhalter ausüben. Aus numerischer Sicht ist anzumerken, dass bei eingeschalteter Reibung die quadratische Konvergenz in der Gleichgewichtsiteration nicht erhalten bleibt. Außerdem werden kleinere Lastschritte für die numerische Berechnung notwendig, was

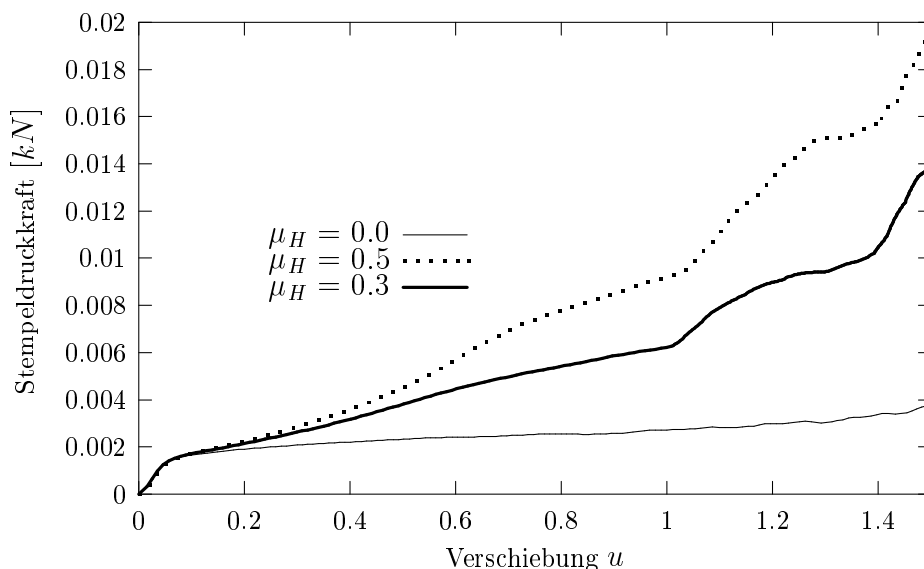


Abbildung 3.38: Last-Verformungs Diagramm für Tiefziehen eines Vollbleches; ANS3DEAS Element; verschiedene Haftkoeffizienten

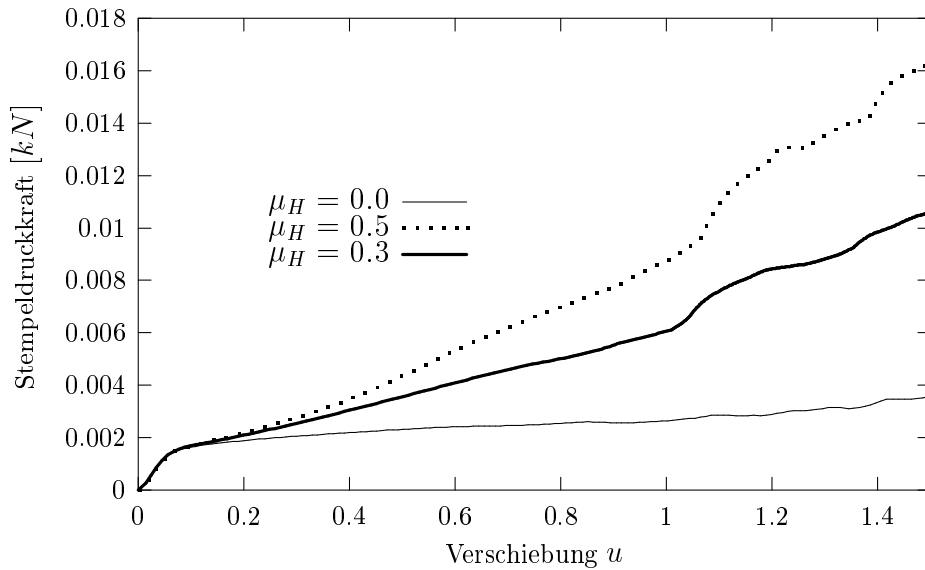


Abbildung 3.39: Last-Verformungs Diagramm für Tiefziehen eines Vollbleches; MI9K3DEAS Element; verschiedene Haftkoeffizienten

insgesamt zu einer Vervielfachung des Berechnungsaufwandes führt.

In Abb. 3.40 wird die Kontaktspannungsverteilung zwischen Stempel und Blech bei Erreichen der Stempelendverschiebung $u = 1.5\text{cm}$ dargestellt. Dabei werden Haftkoeffizienten von $\mu_H = 0.0$ und $\mu_H = 0.5$ berücksichtigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass

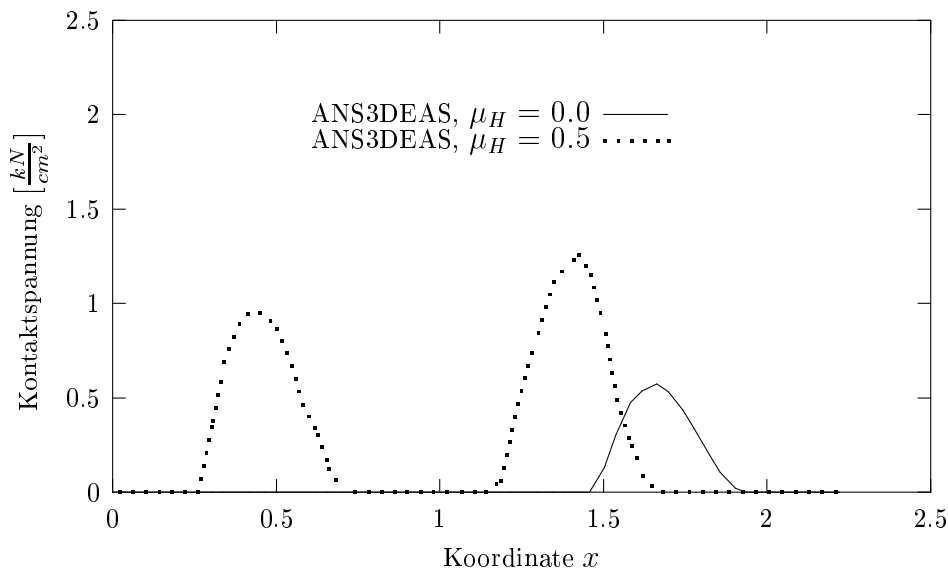


Abbildung 3.40: Kontaktspannungsverteilung zwischen Stempel und Blech für Stempelverschiebung $u = 1.5\text{cm}$

bei Berücksichtigung der Reibung Kontakt in einem breiteren Bereich des Stempels besteht. Dies ist dadurch bedingt, dass infolge der Reibung zwischen Blech und Gesenk/Niederhalter der Widerstand beim Tiefziehen des Bleches erhöht und somit das Blech gleichmäßiger gegen den Stempel gepresst wird. Dies wird noch deutlicher, wenn der Abstand des Bleches vom Stempel in der Stempelmitte ($x = 0$) betrachtet wird. Dieser beträgt 0.067cm bei $\mu_H = 0.0$ und 0.002cm bei $\mu_H = 0.5$. Der Reibungseinfluss bewirkt also eine bessere Anpassung der Geometrie des verformten Werkstückes an die Stempelgeometrie.

3.4 Numerische Untersuchung von geklebten Verbundblechen

Geklebte Verbundbleche werden in erster Linie eingesetzt, um zu einer Verringerung von Schallemissionen beizutragen. Dafür gibt es eine Vielzahl konkreter Anwendungsmöglichkeiten. So können die Verbundbleche beispielsweise zur Herstellung von Maschineneinhausungen oder Altglassammelcontainer genutzt werden, für den Fahrzeugbau werden Karosserieteile, Ölwannen, Getriebedeckel, usw. gefertigt und im Bauwesen erfolgt eine Anwendung z.B. für Türen, Garagentore, Fahrtreppen.

Bei der Verwendung von Vollblechen sind alternativ nachträglich aufwendige Dämpfungsmaßnahmen durchzuführen, um entsprechende Anforderungen an die Schwingungseigenschaften zu erfüllen. Die geklebten Verbundbleche hingegen verfügen von vornherein über hervorragende schwingungsdämpfende Eigenschaften. Weitere Angaben zu Anwendungen der geklebten Verbundbleche, sowie die Beschreibung experimenteller als auch numerischer Untersuchungen sind z.B. in einem Forschungsbericht der Studiengesellschaft Stahlanwendung e.V. [21] zu finden.

Bei der Herstellung der Verbundbleche werden zwei Stahlbleche der Dicke $0.3-1.4\text{mm}$ zusammengeklebt, somit ergibt sich der Schichtaufbau der Bleche mit zwei Deckschichten und einer Kernschicht der Dicke $0.025-0.05\text{mm}$ (siehe Abb. 3.41). Die numerische Untersuchung der Verbundbleche soll mit Hilfe der in den vorigen Kapiteln ausführlich diskutierten 'Solid-Shell' Elemente durchgeführt werden. Diese Schalenelemente eignen sich aufgrund ihres dreidimensionalen Charakters hervorragend zur Beschreibung geschichteter Strukturen. D.h. es werden sowohl die Deckschichten als auch die Kernschicht mit 'Solid-Shell' Elementen diskretisiert.

Die Materialeigenschaften der Kernschicht werden im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe eines elasto-plastischen Materialgesetzes beschrieben. Viskose Eigenschaften, d.h. eine Abhängigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit und Kriechen der Bauteile nach der Entlastung, werden vorerst nicht berücksichtigt.

Das Ziel einer numerischen Untersuchung ist es, Verformungsprozesse zu simulieren und anschließend die Schwingungseigenschaften zu untersuchen, d.h. eine Eigenfrequenz-Analyse durchzuführen. Somit wird es möglich, umfangreiche Parameterstudien ohne großen Aufwand durchzuführen, um damit die Bauteile bzgl. der geforderten Schwingungseigenschaften zu optimieren.

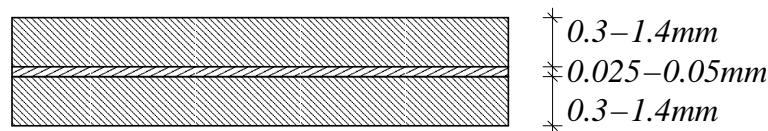


Abbildung 3.41: Schichtaufbau der geklebten Verbundbleche

3.4.1 Materialeigenschaften der Schichten

Die zur Beschreibung des Materialverhaltens der Verbundbleche benötigten dreidimensionalen Materialgesetze stehen im verwendeten Programmpaket FEAP-MeKa zur Verfügung. Eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Materialunterprogramme zur Beschreibung nichtlinear-elastischer und elasto-plastischer Deformationen ist in [25] zu finden. Vorarbeiten zur Ermittlung der Materialparameter wurden in [30] durchgeführt. Grundlage für die Ermittlung der Materialparameter sind die in [21] durchgeführten experimentellen Untersuchungen.

Für die Deckschichten wird ein elasto-plastisches Materialgesetz mit einer elastischen Verzerrungsenergiefunktion nach Hencky und einem plastischen Anteil mit von-Mises-Fließbedingung und isotroper Sättigungsverfestigung verwendet. Die Materialparame-

κ	μ	τ_0	τ_∞	H	δ
$[\frac{kN}{cm^2}]$	$[\frac{kN}{cm^2}]$	$[\frac{kN}{cm^2}]$	$[\frac{kN}{cm^2}]$	$[\frac{kN}{cm^2}]$	$[-]$
17500	8077	16.5	40	20	20

Tabelle 3.6: Materialparameter für die Deckbleche

ter sind der Tabelle 3.6 zu entnehmen. Die Parameter für den elastischen Bereich κ und μ werden aus den elastischen Stoffkonstanten $E = 21000 \frac{kN}{cm^2}$ und $\nu = 0.3$ für Stahl berechnet. Für den plastischen Bereich ist die Anfangsfließspannung τ_0 gegeben. Die isotrope Sättigungsverfestigung wird durch den Verfestigungsmodul H , die Sättigungsfließspannung τ_∞ und den Sättigungsexponent δ festgelegt.

Für die Kernschicht wird ein elasto-plastisches Materialgesetz mit der elastischen Neo-Hooke Verzerrungsenergiefunktion und einem plastischen Anteil mit von-Mises-Fließbedingung und linearer isotroper Verfestigung verwendet. Die viskosen Eigenschaften der Kernschicht werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Die Grundlage zur Ermittlung der erforderlichen Materialparameter sind die in [21] in Zug-Scher-Versuchen experimentell ermittelten Last-Verformungskurven. Der Versuchsaufbau des Zugversuchs entspricht dem in Abb. 3.42 skizzierten Modell. Die Länge a der Zugprobe wird für die experimentellen Untersuchungen in [21] mit $a = 50mm$ für den Versuch mit dem Verbundblechtyp Bondal[®]N/M¹ und mit $a = 17mm$ für den Typ Bondal[®]H angegeben. Dieser Zugversuch wird unter Verwendung von Volumen-Schalenelementen numerisch simuliert.

Die Diskretisierung der in Abb. 3.42 gezeigten Geometrie erfolgt mit vier bilinearen Elementen in der Längsrichtung für den mittleren Teil (siehe gepunktete Linie in Abb. 3.42). In der Dickenrichtung werden drei Elemente verwendet, d.h. ein Element für jede Schicht des Verbundbleches. Alternativ wird für die Kernschicht, da dort star-

¹Bondal[®] [13] ist eine geschützte Bezeichnung der ThyssenKrupp Stahl AG

ke Deformationen zu erwarten sind, eine feinere Vernetzung mit drei Elementen in Dickenrichtung gewählt. Die Beschreibung der Deckschichten erfolgt mit dem bilinearen ANS3DEAS Element. Für die Kernschicht wird ebenfalls das ANS3DEAS Element sowie alternativ das 1-Punkt-integrierte DIS3D-ri Element eingesetzt. Die Belastung erfolgt durch Vorgabe einer gegenseitigen Verschiebung u der Deckbleche.

Beim Versuch die Kernschicht mit drei ANS-Elementen bzw. drei reduziert integrierten Elementen in Dickenrichtung zu beschreiben erfolgt ein sofortiger Abbruch der numerischen Berechnung. Als Grund dafür können Kinematiken innerhalb der Kernschicht bedingt durch die reduzierte Integration bzw. den ANS-Ansatz der Kernschicht-elemente ausgemacht werden. D.h. die Verwendung der genannten Elemente für eine mehrschichtige Beschreibung der Kernschicht führt unter der gegebenen Belastung und Materialeigenschaften zu numerischen Instabilitäten innerhalb der Kernschicht. In Abschnitt 2.5 wurde bereits das Auftreten numerischer Instabilitäten aufgrund homogener Belastungszustände der Elemente diskutiert. An dieser Stelle kann nun ein weiterer Belastungszustand für die ANS-Elemente identifiziert werden, der offensichtlich unweigerlich zu einem kinematischen Versagen der Elemente führt, sofern diese nicht durch die Deckschichten „stabilisiert“ werden, wie dies bei einer einschichtigen Diskretisierung der Kernschicht der Fall ist. Es wird deshalb für die mehrschichtige Beschreibung der Kernschicht die in Abschnitt 2.5.4 vorgestellte Stabilisierung für die Kernschicht-elemente eingesetzt. Im Rahmen der Stabilisierung werden kritische Elementmodifikationen, die zu numerischen Instabilitäten führen könnten, abgeschaltet. Bei dem hier simulierten Schubversuch führt dies dazu, dass bei Kernschichtdiskretisierung mit drei Elementen in Dickenrichtung sämtliche verfügbaren Modifikationsoptionen vollständig abgeschaltet werden, so dass letztendlich das reine Verschiebungselement eingesetzt wird. Das eingesetzte stabilisierte Element wird dementsprechend in Abb. 3.43 bzw. 3.44 als DIS3D Element bezeichnet. Eine weitere Diskussion der Kernschichtdiskretisierung erfolgt im folgenden Abschnitt im Rahmen einer Eigenwertuntersuchung eines einzelnen 'Bondal®- Elementes', d.h. ein zur Diskretisierung der Verbundbleche eingesetztes geschichtetes Element, das dementsprechend aus mehreren Elementen in Dickenrichtung besteht .

Durch den hier dargestellten Zugversuch kann das Schubverhalten der Kernschicht un-

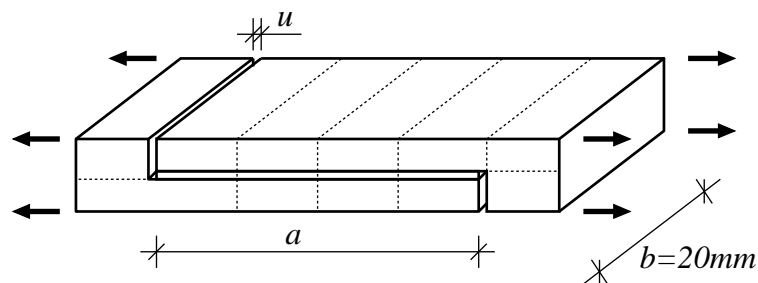


Abbildung 3.42: Geometrie der Zugprobe zur Ermittlung der Materialeigenschaften der Kernschicht; FE-Vernetzung dargestellt mit gepunkteter Linie

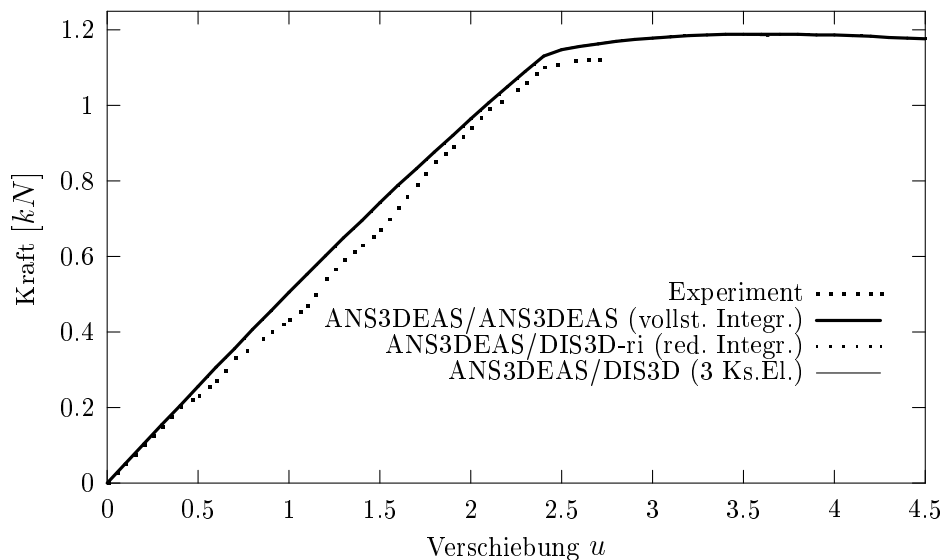


Abbildung 3.43: Last-Verformungs Diagramm; Zugversuch zur Bestimmung der Materialparameter der Kernschicht für Bondal®N/M

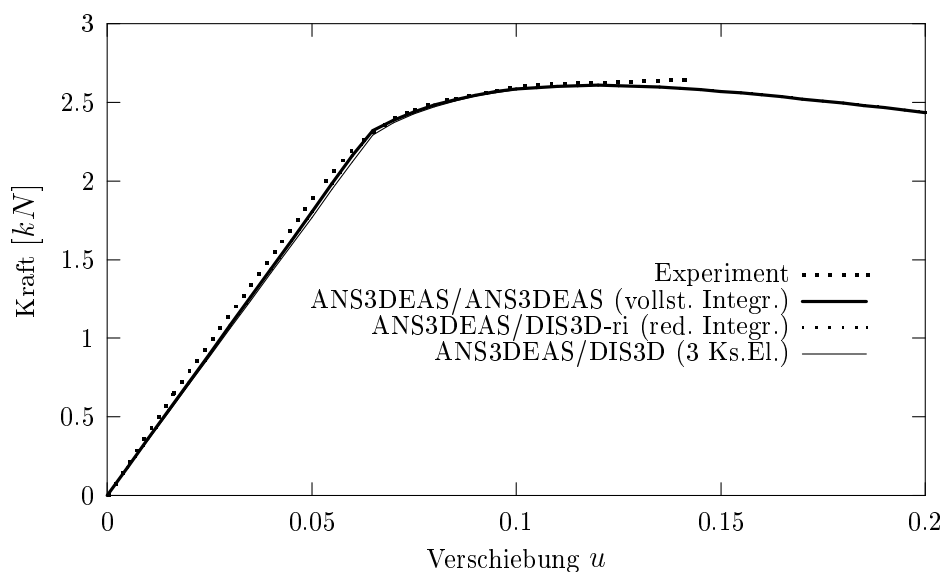


Abbildung 3.44: Last-Verformungs Diagramm; Zugversuch zur Bestimmung der Materialparameter der Kernschicht für Bondal®H

tersucht und die entsprechenden Materialparameter festgelegt werden. Bei den später folgenden Biegeversuchen mit Bondal® Blechen kommt es aufgrund der im Vergleich zu den Deckschichten relativ weichen Kernschicht zu einer gegenseitigen Verschiebung der Deckbleche, d.h. die Deckschichten der geklebten Verbundbleche gleiten auf ei-

ner inkompressiblen Klebeschicht. Die Schubbeanspruchung der Kernschicht ist somit maßgebend für das Verhalten der Verbundbleche. Für die Kernschichten wird auch im elastischen Bereich nahezu inkompressibles Materialverhalten angenommen, d.h. eine sehr großer Kompressionsmodul κ . Über den Wert des Schubmoduls μ wird das Materialverhalten im elastischen Bereich an die experimentell ermittelten Kurven in 3.43 und 3.44 angeglichen. Für den plastischen Bereich wird anhand der experimentellen Daten die Anfangsfließspannung τ_0 ermittelt. Außerdem wird eine lineare isotrope Verfestigung des Materials angenommen, die durch den Verfestigungsmodul H definiert wird.

In der Praxis werden für die Kernschicht zwei unterschiedliche Materialien eingesetzt. Die fertigen Verbundbleche werden dementsprechend mit der Bezeichnung Bondal[®]N/M bzw. Bondal[®]H versehen. Die Kernschicht von Bondal[®]H ist dabei we-

κ	μ	τ_0	H
$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$
10	0.00031	46	160

Tabelle 3.7: Materialparameter für die Kernschicht; Bondal[®]N/M

κ	μ	τ_0	H
$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$	$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$
1000	0.072	6.5	28

Tabelle 3.8: Materialparameter für die Kernschicht; Bondal[®]H

sentlich steifer als die Kernschicht von Bondal[®]N/M.

Die experimentellen und numerischen Last-Verformungskurven werden in Abb. 3.43 und 3.44 dargestellt. Die zur Beschreibung der Kernschicht verwendeten Materialparameter sind den Tabellen 3.7 und 3.8 zu entnehmen. Dabei ist zu erkennen, dass die numerisch berechneten Last-Verformungskurven die experimentell ermittelten Daten sehr gut wiedergeben. Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Varianten der Kernschichtdiskretisierung sind quasi identisch, d.h. ein Einfluß der unterschiedlichen Beschreibung der Kernschicht auf das Schubverhalten von Bondal[®] kann nicht festgestellt werden. Für die Beschreibung der reinen Schubverformung der Kernschicht ist also auch eine Diskretisierung mit nur einem Element in Dickenrichtung ausreichend. Die numerische Berechnung wird über den experimentell ermittelten Kraft-Verschiebungsverlauf

hinaus weiter geführt. Dabei ist im weiteren Verlauf der Kurven bei beiden Verbundblechtypen mit den gewählten Materialparametern ein leicht entfestigendes Verhalten zu beobachten.

3.4.2 Eigenwertuntersuchung eines „Bondal[®]-Elementes“

Zur Untersuchung unterschiedlicher Diskretisierungen für die Kernschicht wird ein „Bondal[®]-Element“, d.h. ein zur Diskretisierung der Verbundbleche eingesetztes Element, das in Dickenrichtung aus mehreren 'Solid-Shell' Elementen besteht, betrachtet (siehe Abb. 3.45). Die Blechdicke des betrachteten Elementes beträgt 1.04mm , mit

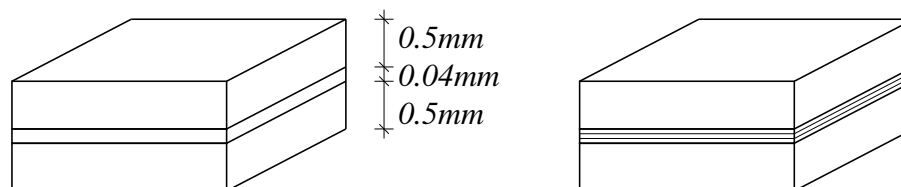


Abbildung 3.45: Einzelnes „Bondal[®]-Element“ mit unterschiedlicher Kernschichtdiskretisierung

jeweils 0.5mm für beide Deckschichten und 0.04mm für die Kernschicht. Die Deckschichten werden jeweils mit einem bilinearen ANS3DEAS Element beschrieben. Die Diskretisierung der Kernschicht erfolgt mit einem und alternativ mit drei Elementen über die Dicke (siehe Abb. 3.45). Die Länge/Breite des Elementes wird mit $l = 2\text{mm}$ angesetzt. Das untere Deckschichtelement wird statisch bestimmt gelagert. Die Materialparameter sind den Angaben in Tab. 3.6, 3.7 und 3.8 zu entnehmen.

Eigenwerte für Bondal [®] N/M			
Kernschichtelement	$EW < 10^{-4}$	$10^{-4} < EW < 10^{-3}$	$10^{-3} < EW < 10^1$
ANS3DEAS (1 Ks.El.)	-	3	-
ANS3DEAS (3 Ks.El.)	9	4	6
DIS3D (3 Ks.El.)	1	5	13
Eigenwerte für Bondal [®] H			
Kernschichtelement	$EW < 10^{-3}$	$10^{-3} < EW < 10^{-1}$	$10^{-1} < EW < 10^1$
ANS3DEAS (1 Ks.El.)	-	3	-
ANS3DEAS (3 Ks.El.)	8	3	8
DIS3D (3 Ks.El.)	-	5	14

Tabelle 3.9: Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix für ein einzelnes „Bondal[®] Element“ bei unterschiedlicher Kernschichtdiskretisierung

Um die numerischen Eigenschaften eines einzelnen „Bondal[®] Elementes“ genauer zu betrachten erfolgt eine Untersuchung der Eigenwerte der tangentiellen Gesamtsteifigkeitsmatrix. Die Ergebnisse der Eigenwertuntersuchung sind in Tab. 3.9 zu finden, wobei die Anzahl der auftretenden Eigenwerte $EW < 10$ dargestellt wird. Für die Diskretisierung der Kernschicht mit nur einem Element sind drei verhältnismäßig kleine Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix zu beobachten. Dies gilt sowohl für Bondal[®]N/M als auch für Bondal[®]H. Die zugehörigen Eigenformen beschreiben die Schubverformung der Kernschicht, d.h. die gegenseitige Verdrehung sowie die gegenseitige Verschiebung in Längs- bzw. Querrichtung der Deckschichten.

Wird die Kernschicht mit drei Elementen diskretisiert treten für Bondal[®]N/M und auch für Bondal[®]H 19 Eigenwerte im betrachteten Bereich auf. Für die Diskretisierung mit drei ANS-Elementen sind dabei Eigenwerte zu beobachten, die sehr viel kleiner sind als die Eigenwerte bei der Kernschichtdiskretisierung mit einem Element. Die zugehörigen Eigenformen beschreiben Deformationen innerhalb der Kernschicht und entsprechen den in Abschnitt 2.5.1 auftretenden Eigenformen für die ANS-Elemente. Dies deutet auf die im vorigen Abschnitt beobachteten Kinematiken aufgrund der ANS-Modifikation innerhalb der Kernschicht hin. Wird das reine Verschiebungselement DIS3D verwendet, so ergeben sich wesentlich höhere Eigenwerte für die entsprechenden Eigenformen.

Es wird aufgrund der beobachteten Eigenwerte/-formen, wie auch schon im letzten Abschnitt deutlich, dass zur Beschreibung der reinen Schubverformung der Kernschicht aufgrund der gegenseitigen Verschiebung der Deckbleche die Diskretisierung mit einem Element in Dickenrichtung ausreichend ist. Sollen Deformationen innerhalb der Kernschicht genauer untersucht werden, ist eine Diskretisierung der Kernschicht mit mehr als einem Element notwendig, da bei einer Diskretisierung mit nur einem Element die Verformungsmöglichkeiten künstlich beschränkt werden. Für die ANS-Elemente ist dann allerdings das Auftreten unerwünschten Kinematiken in der Kernschicht durch die Schubbelastung zu erwarten, weshalb diese Elemente nur in einer stabilisierten Form eingesetzt werden können.

3.4.3 Kragarm unter Einzellast

Als erster numerischer Test für eine Struktur aus geklebtem Verbundblech wird ein eingespannter Blechstreifen modelliert, der am Ende durch eine Streckenlast mit der resultierenden Kraft F belastet ist. Mit diesem Beispiel sollen die Konvergenzeigenschaften unterschiedlicher Elementvarianten und Vernetzungen untersucht werden. Die Geometriedaten des eingespannten Blechstreifens sind Abb. 3.46 zu entnehmen. Die verwendeten Materialdaten entsprechen den in Kapitel 3.4.1 festgelegten Materialeigenschaften. Die Dicke des Bleches beträgt $2.05mm$, jeweils $1mm$ für die Deckschichten und $0.05mm$ für die Verbundschicht.

Berechnet werden soll die Verschiebung w am Lastangriffspunkt für unterschiedliche Diskretisierungen in der Längsrichtung des Kragarmes. Es soll somit der Einfluss der Netzdicke auf die Verformungsberechnung untersucht werden. Die Anzahl der Elemente in der Kragarmlängsrichtung wird dabei von 15 bis 240 bilinearen bzw. 8 bis 128

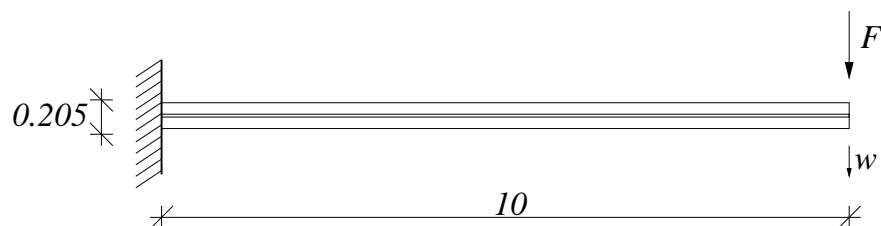


Abbildung 3.46: Seitenansicht des eingespannten Blechstreifens belastet durch Einzelast

biquadratischen Elementen variiert. Die Resultate der Untersuchung für das Verbundblech Bondal[®]N/M werden in Abb. 3.47 und Abb. 3.48 dargestellt. Die betrachtete Verschiebung w am Kragarmende, die bei einer Belastung von $F = 0.01$ erreicht wird, wurde dabei aufgetragen über die Anzahl der Knoten in Längsrichtung. Die entsprechenden Ergebnisse für das Verbundblech Bondal[®]H sind in Abb. 3.49 und Abb. 3.50 zu sehen. Die dargestellte Verschiebung w wird hier bei einer Belastung von $F = 0.016$ erreicht.

Ein unbefriedigendes Ergebnis liefert für beide Verbundblechtypen die Kombination ANS3DEAS/ANS3DEAS, d.h. zur Diskretisierung von Kernschicht und Deckschicht wird jeweils das bilineare ANS3DEAS Element verwendet. Hier zeigt die Struktur bei grober Vernetzung ein deutlich zu steifes Verhalten. Erst bei sehr feiner Vernetzung konvergiert die gesuchte Verschiebung w zur gewünschten Lösung hin. Diese zu hohe Steifigkeit lässt sich durch sogenannte volumetrische Versteifung aufgrund des nahe-

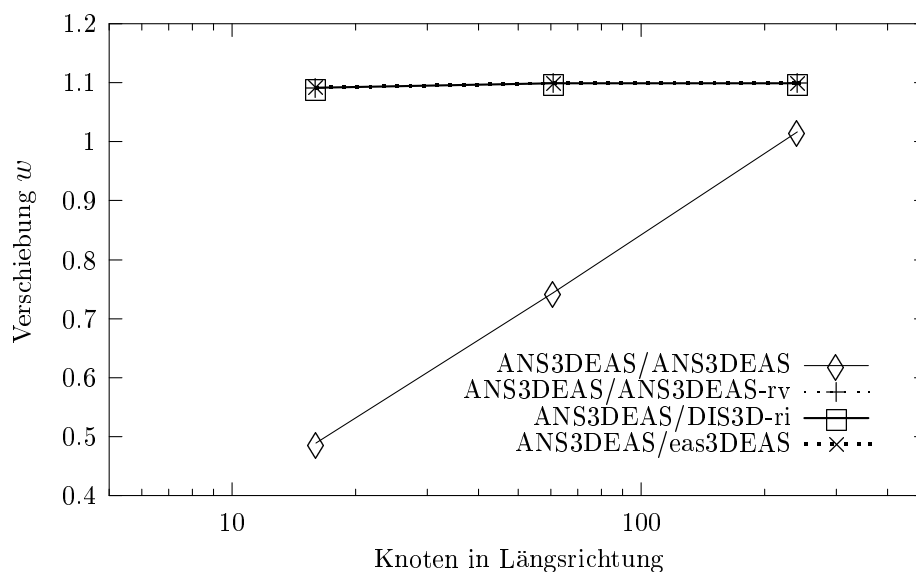


Abbildung 3.47: Verschiebung w am Lastangriffspunkt für unterschiedliche Elementierungen; Bondal[®]N/M

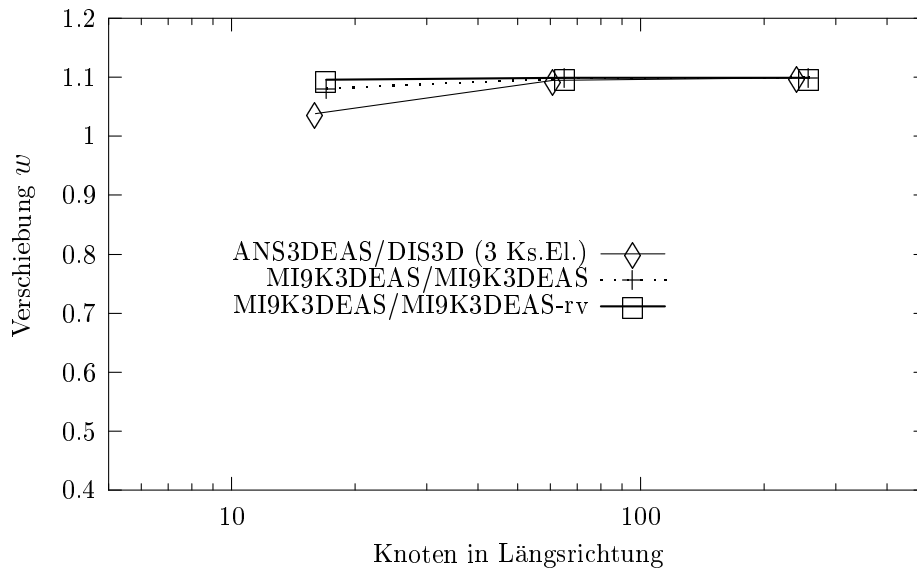


Abbildung 3.48: Verschiebung w am Lastangriffspunkt für unterschiedliche Elementierungen; Bondal[®]N/M

zu inkompressiblen Materialverhaltens der Kernschicht erklären. Eine Diskretisierung der Kernschicht mit Elementen, die weniger zur volumetrischen Versteifung neigen, führt zu deutlich besseren Resultaten. Auf die Verwendung der Elementkombination ANS3DEAS/ANS3DEAS für die in den folgenden Abschnitten durchgeführten Berech-

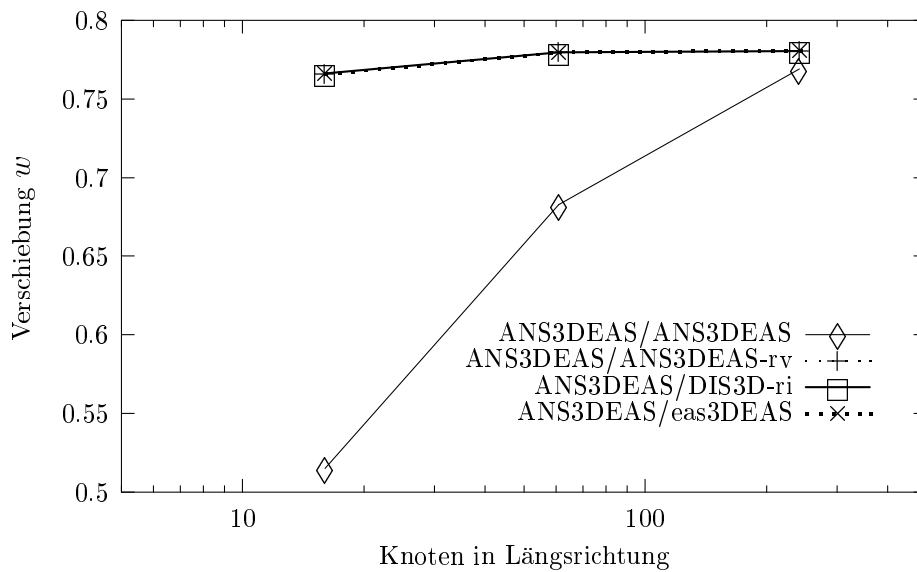


Abbildung 3.49: Verschiebung w am Lastangriffspunkt für unterschiedliche Elementierungen; Bondal[®]H

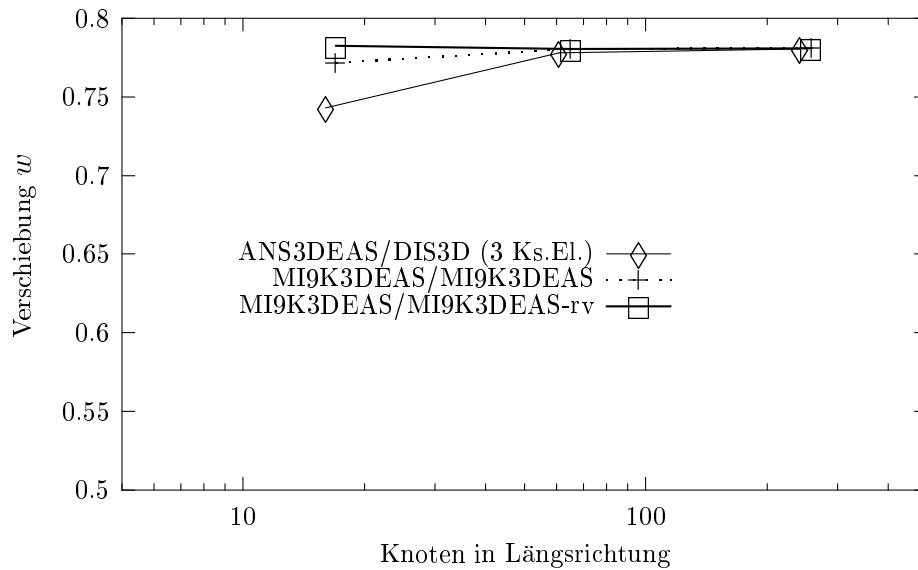


Abbildung 3.50: Verschiebung w am Lastangriffspunkt für unterschiedliche Elementierungen; Bondal[®]H

nungen wird wegen des schlechten Konvergenzverhaltens verzichtet.

Wird für die Kernschichtelemente die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile durchgeführt, so wird für Bondal[®]N/M bereits mit der größten Elementierung in Längsrichtung ein auskonvergiertes Ergebnis für die Verschiebung w erreicht. Gleiches gilt auch für die Kernschichtdiskretisierung mit dem vollständig reduziert integrierten Verschiebungselement und für die Kombination mit dem EAS-Element mit 6-Parameter Erweiterung der Membranverzerrungen (eas3DEAS). Ein geringfügig zu steifes Ergebnis bei der größten Diskretisierung liefert nur die biquadratische Elementkombination MI9K3DEAS/MI9K3DEAS und die Kernschichtdiskretisierung mit drei DIS3D Elementen über die Dicke.

Für den Biegeversuch mit Bondal[®]H führt lediglich die biquadratische Elementkombination MI9K3DEAS/MI9K3DEAS-rv bereits bei der größten Elementierung zum auskonvergierten Resultat für die Verschiebung v . Somit zeigt die MI9K3DEAS/MI9K3DEAS-rv Kombination das insgesamt beste Konvergenzverhalten. Die restlichen Elementkombinationen liefern ein geringfügig zu steifes Resultat, insbesondere auch die Version mit einer Kernschichtdiskretisierung mit drei Elementen in Dickenrichtung.

3.4.4 Freibiegen eines Verbundbleches

In diesem Abschnitt wird das Freibiegen eines 40cm langen Verbundbleches simuliert. Dieses Beispiel wird auch in [21] sowohl numerisch als auch experimentell untersucht. In [21] ist leider keine Aussage über die dort verwendete Kernschichtdicke zu finden.

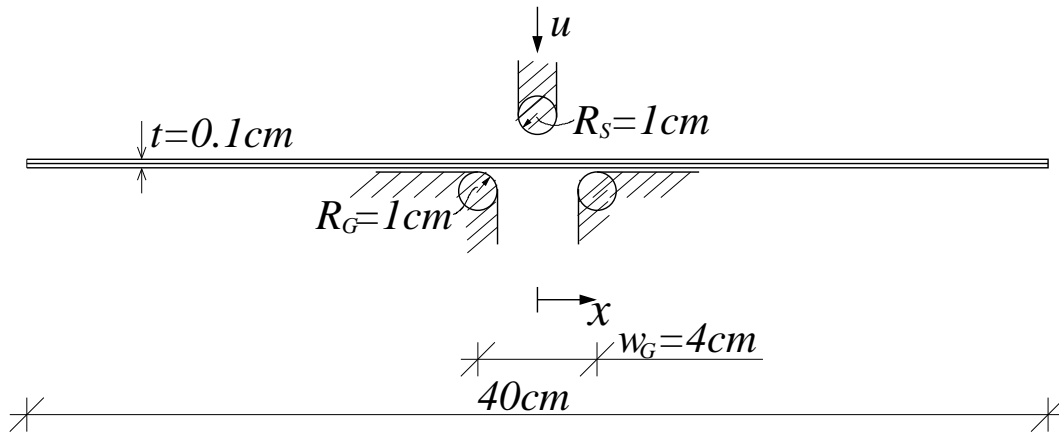


Abbildung 3.51: Stempel-/Gesenkgeometrie für Freibiegeversuch mit Verbundblech

Deshalb wird die Blechdicke mit $t = 1mm$ und die Kernschichtdicke mit $0.04mm$ angenommen. Die Breite des Bleches wird mit $b = 1cm$ festgelegt, wobei sämtliche Knoten in Querrichtung festgehalten werden, d.h. es wird ein ebener Verzerrungszustand angenommen, was mit der Annahme eines Bleches mit unendlicher Breite gleichzusetzen ist.

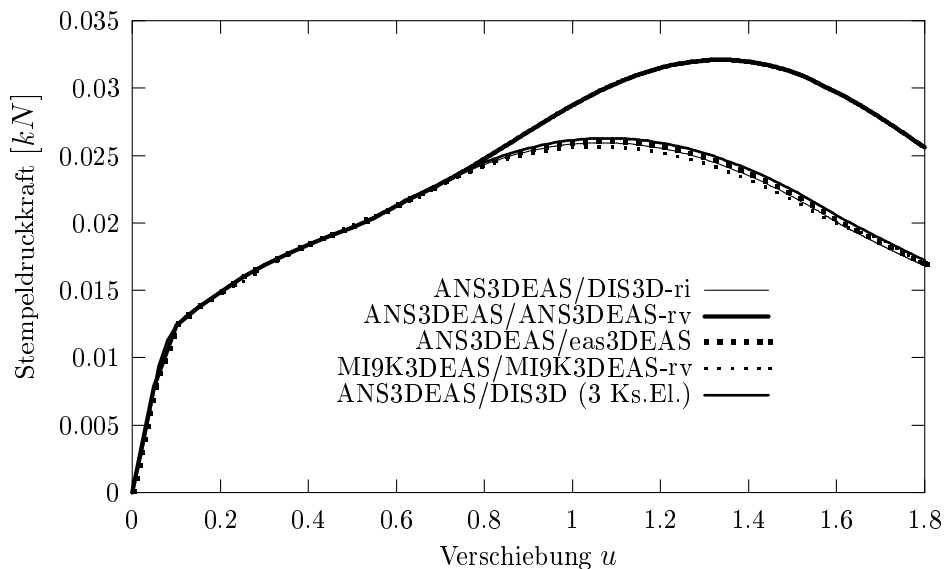


Abbildung 3.52: Stempeldruckkraft aufgetragen über Stempelverschiebung für Freibiegeversuch; Bondal®N/M

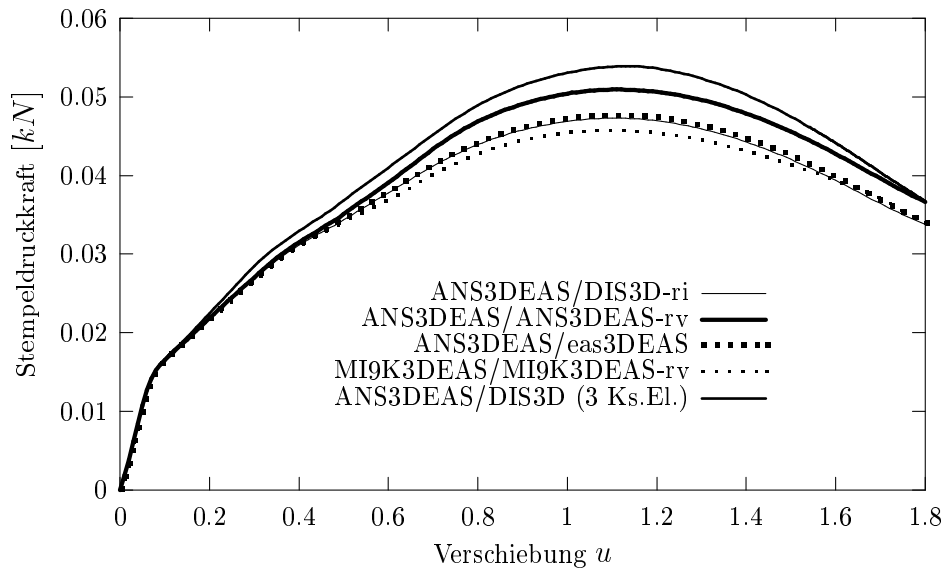


Abbildung 3.53: Stempeldruckkraft aufgetragen über Stempelverschiebung für Freibiegeversuch; Bondal[®]H

Die Ergebnisse sind somit vergleichbar mit den Ergebnissen aus [21], wo die Breite mit $b = 8\text{ cm}$ festgelegt wird. Außerdem werden wieder die in Abschnitt 3.4.1 festgelegten Materialeigenschaften für die Verbundbleche Bondal[®]N/M und Bondal[®]H verwendet und es wird das Eigengewicht der Bleche berücksichtigt.

Beim Freibiegen wird das auf den Gesenkkanten aufliegende Werkstück mit Hilfe eines

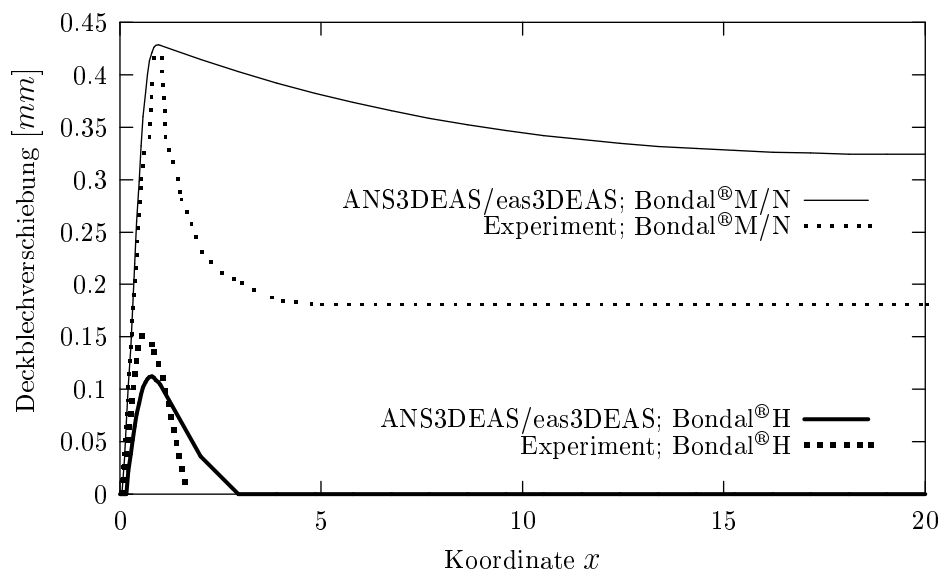


Abbildung 3.54: Gegenseitige Deckblechverschiebung nach Entlastung numerisch und experimentell durchgeführten Freibiegeversuch

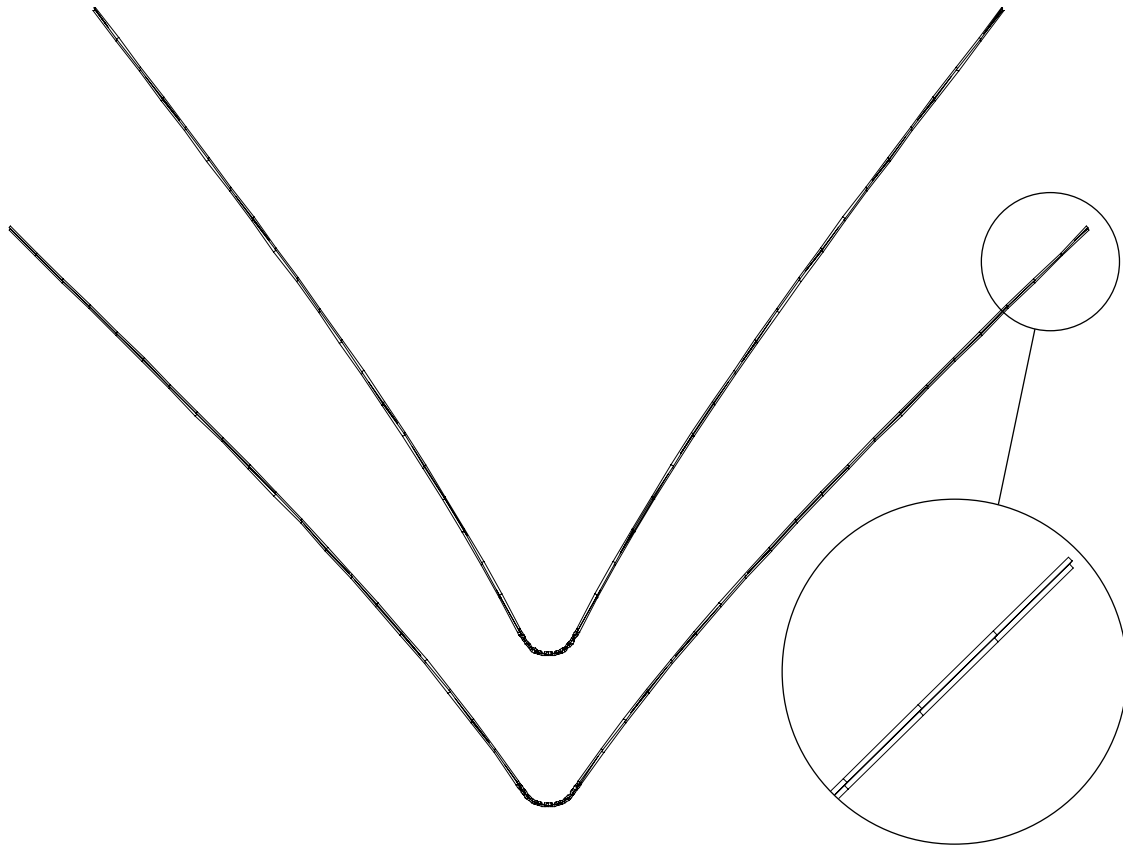


Abbildung 3.55: Verformtes Verbundblech für Freibiegeversuch (Bondal[®]N/M) bei $u = 1.8\text{ cm}$ (oben) und nach Entlastung (unten)

Stempels gebogen. Die Stempel-/Gesenkgeometrie sind Abb. 3.51 zu entnehmen. Die Gesenkweite wird mit $w_G = 4\text{ cm}$ festgelegt, die Radien am Stempel und an der Gesenkkante betragen $R_S = R_G = 1\text{ cm}$. Die Diskretisierung erfolgt in Längsrichtung mit 39 bilinearen bzw. 19 biquadratischen Elementen. Dabei wird das Netz im Bereich des Stempels stark verfeinert, da dort große Krümmungen zu erwarten sind. Das verformte Netz ist Abb. 3.55 für Bondal[®]N/M und in Abb. 3.56 für Bondal[®]H dargestellt. Dabei wird der Blechstreifen sowohl bei maximaler Belastung ($u = 1.8\text{ cm}$) als auch nach der Entlastung gezeigt, wodurch die Intensität des Rückfederns nach der Entlastung anschaulich verdeutlicht wird. Für Bondal[®]N/M ist für die gesamte Länge des Bleches eine große gegenseitige Verschiebung der Deckbleche erkennbar, wobei die Bleche außerhalb der Gesenkkanten gerade bleiben. Für Bondal[®]H tritt am Ende der Bleche keine gegenseitige Verschiebung der Deckbleche auf. Allerdings ist hier eine starke Krümmung der Bleche außerhalb der Gesenkkanten entgegen der Stempelkrümmungsrichtung zu beobachten.

Die Last-Verformungskurven (Stempeldruckkraft aufgetragen über Stempelverschiebung) für verschiedene Elementkombinationen sind in Abb. 3.52 für Bondal[®]N/M und in Abb. 3.53 für Bondal[®]H dargestellt. Für das Bondal[®]N/M sind kaum Unter-

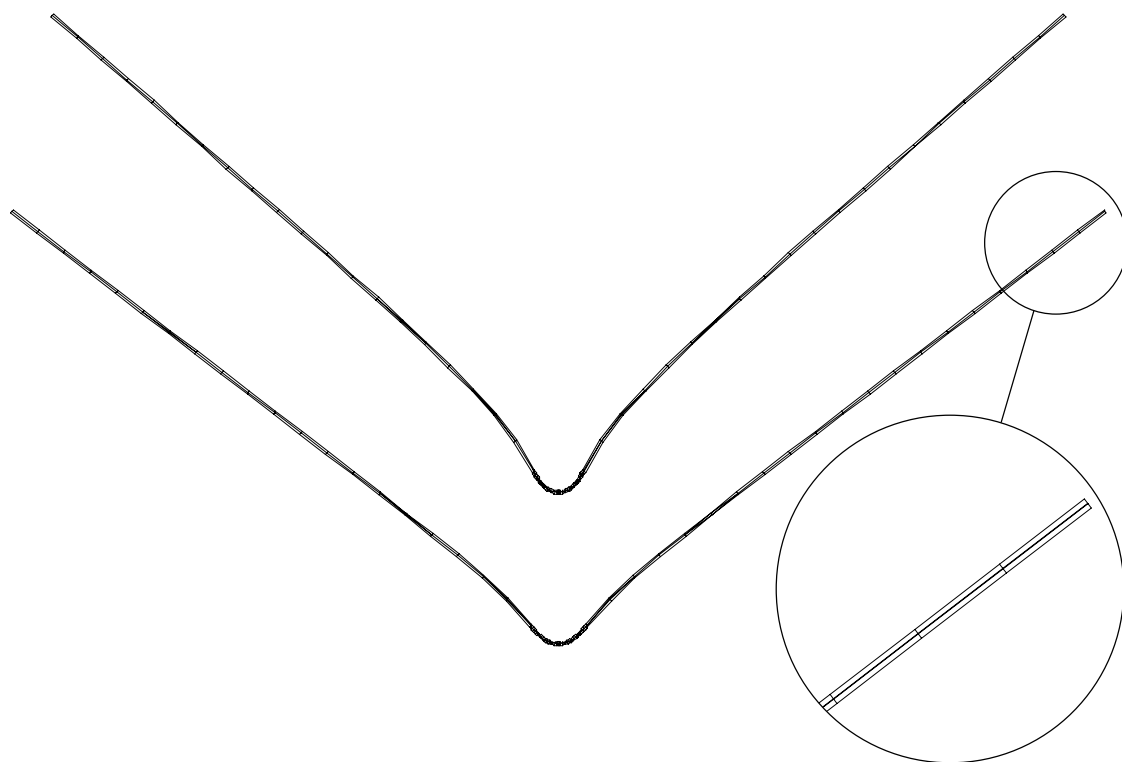


Abbildung 3.56: Verformtes Verbundblech für Freibiegeversuch (Bondal[®]H) bei $u = 1.8\text{cm}$ (oben) und nach Entlastung (unten)

schiede in den Verläufen für das bilineare ANS-Element mit dem reduziert integrierten trilinearen Verschiebungselement (ANS3DEAS/DIS3D-ri), die Kombination mit dem EAS-Element (ANS3DEAS/eas3DEAS), das biquadratische MI9K3DEAS Element mit dem selektiv reduziert integrierten MI9K3DEAS-rv Element für die Kernschicht und die Kombination ANS3DEAS/DIS3D mit drei Kernschichtelementen über die Dicke zu erkennen. Einzig die Kombination ANS3DEAS/ANS3DEAS-rv erweist sich für $u > 0.8\text{cm}$ als deutlich steifer im Vergleich zu den restlichen Elementkombinationen. Dieser Effekt muss mit der Verwendung des ANS3DEAS-rv Elements für die Diskretisierung der Kernschicht zusammenhängen. Hier spielen offenbar neben der volumetrischen Versteifung, die eigentlich durch die selektiv reduzierte Integration des ANS3DEAS-rv Elements verhindert werden sollte, andere Effekte eine Rolle, die zu einem zu steifen Verhalten führen. Ein ähnliches Verhalten ist auch für das Bondal[®]H zu beobachten. Hier zeigt sich allerdings auch die Kombination ANS3DEAS/DIS3D mit drei Kernschichtelementen über die Dicke deutlich steifer. Eine Verbesserung könnte in diesem Fall durch eine Verfeinerung der Kernschichtdiskretisierung in Dickenrichtung erzielt werden.

In Abb. 3.54 ist die gegenseitige Deckblechverschiebung sowohl für Bondal[®]N/M als auch für Bondal[®]H über die Koordinate x aufgetragen. Dargestellt wird die numerische Berechnung mit der Elementierung ANS3DEAS/eas3DEAS für eine Belastung bis $u = 1.8\text{cm}$ und anschließender Entlastung, sowie die experimentellen Ergebnisse, die

[21] entnommen wurden. Die Verschiebung ist relativ groß für Bondal[®]N/M und wird kaum kleiner außerhalb der Gesenkkanten. Für Bondal[®]H ist die Verschiebung kleiner innerhalb des Gesenkes, und sie baut sich außerhalb der Gesenkkanten vollständig ab. Diese Ergebnisse stimmen qualitativ gut mit den experimentell in [21] ermittelten gegenseitigen Deckblechverschiebung überein. Der auffälligste Unterschied ist für Bondal[®]N/M zu erkennen. Hier ergibt sich im Experiment ein deutlich stärkerer Rückgang der Verschiebungen außerhalb des Gesenkes als für die numerisch berechneten Ergebnisse zu beobachten.

Für den verformten Blechstreifen wird nach Abschluss des Umformprozesses eine Eigenfrequenzuntersuchung durchgeführt. Dazu wird das gebogene Werkstück entlastet, indem die Kontaktrandbedingungen schrittweise aufgehoben werden. Für die entlastete Struktur erfolgt dann eine Auswertung der Eigenformen und der Eigenfrequenzen. Somit lassen sich für das fertige Werkstück Rückschlüsse auf das Schwingungsverhalten unter dynamischer Beanspruchung ziehen, was beispielsweise für eine Optimierung bezüglich der Schallemission des Bauteils von Interesse sein kann. Da der geformte Blechstreifen auch nach der Entlastung noch mit Eigenspannungen behaftet ist wird zum Vergleich eine geometrisch identische direkt generierte und somit eigenspannungsfreie Struktur untersucht.

Die auftretenden Eigenformen sind in Abb. 3.57 für das Bondal[®]N/M und in Abb. 3.58 für Bondal[®]H für die erste bis zur sechsten Eigenfrequenz dargestellt. Die zugehörigen

	Bondal [®] N/M		Bondal [®] H	
	nach Entlastung	direkt generiert	nach Entlastung	direkt generiert
1.EF	$4.04 \cdot 10^{-2}$	$4.62 \cdot 10^{-2}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$1.63 \cdot 10^{-1}$
2.EF	$1.65 \cdot 10^0$	$1.70 \cdot 10^0$	$3.30 \cdot 10^0$	$3.78 \cdot 10^0$
3.EF	$1.31 \cdot 10^1$	$1.33 \cdot 10^1$	$1.89 \cdot 10^1$	$2.17 \cdot 10^1$
4.EF	$5.10 \cdot 10^1$	$5.15 \cdot 10^1$	$5.92 \cdot 10^1$	$6.89 \cdot 10^1$
5.EF	$1.42 \cdot 10^2$	$1.42 \cdot 10^2$	$1.46 \cdot 10^2$	$1.72 \cdot 10^2$
6.EF	$3.21 \cdot 10^2$	$3.22 \cdot 10^2$	$2.94 \cdot 10^2$	$3.68 \cdot 10^2$

Tabelle 3.10: Eigenfrequenzen der Eigenformen 1.-6. für geschichtetes Bleches; Freibleigerversuch

Eigenfrequenzen sind in Tabelle 3.10 aufgelistet. Beim Vergleich der Eigenfrequenzen für das verformte Netz und das spannungsfreie direkt generierte Netz ist für das Bondal[®]N/M lediglich in der ersten Eigenfrequenz ein deutlicher Unterschied erkennbar. Für die höheren Eigenformen treten Unterschiede in den Eigenfrequenzen lediglich im Nachkommabereich auf. Im Gegensatz dazu sind für das Bondal[®]H durchweg für alle Eigenfrequenzen deutliche Unterschiede zwischen der verformten und der direkt generierten Struktur zu sehen. Dieses stark unterschiedliche Verhalten der beiden Verbundblechtypen wird offensichtlich durch das unterschiedliche Materialverhalten der Kernschichten verursacht. Um dieses Verhalten genauer zu untersuchen erfolgt eine Betrachtung der Schubspannungen in der Kernschicht nach der Entlastung des ver-

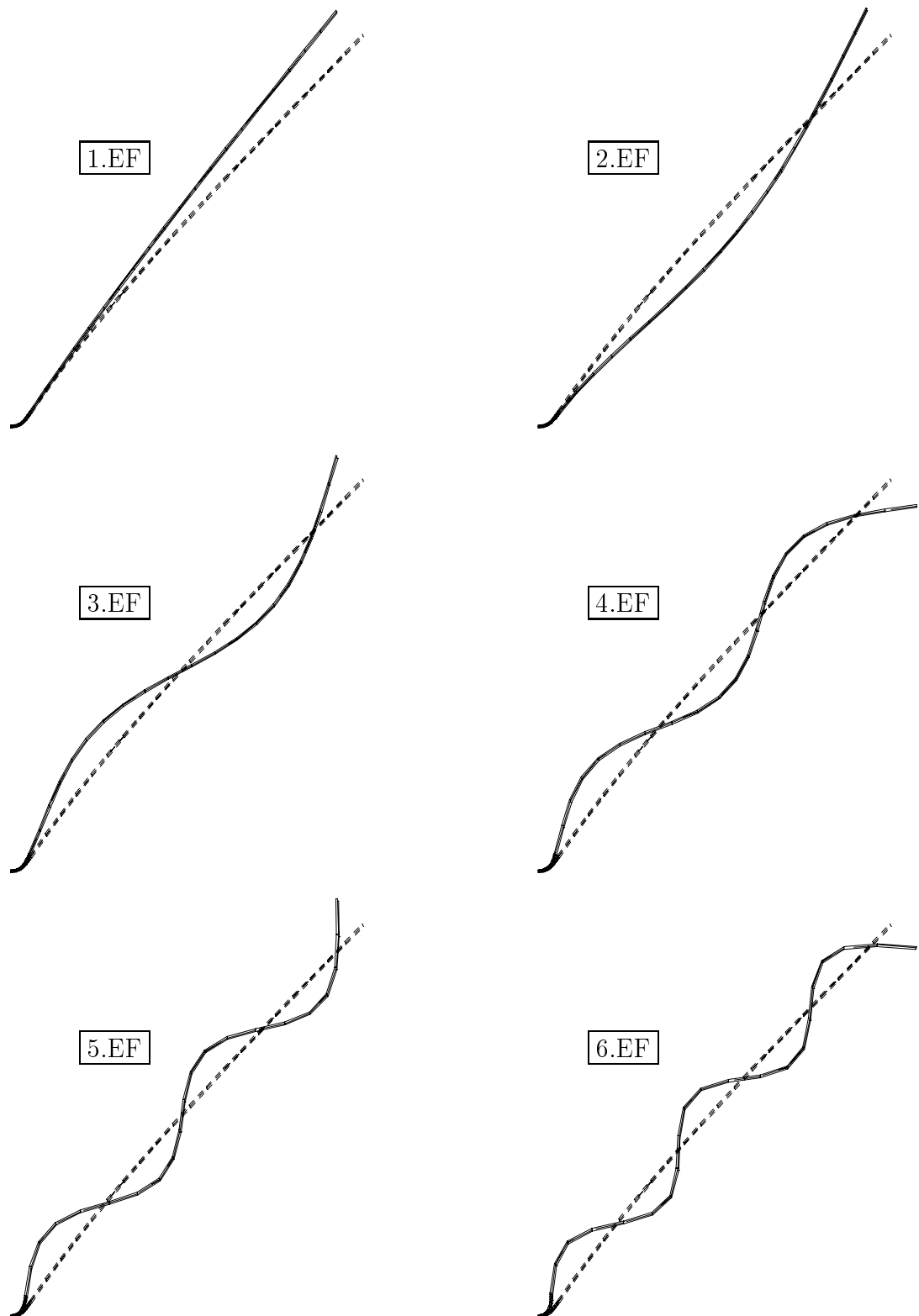


Abbildung 3.57: Eigenformen 1.-6. für Freibiegeversuch; Bondal[®]N/M; Darstellung der verformten Geometrie überlagert mit der jeweiligen Eigenform

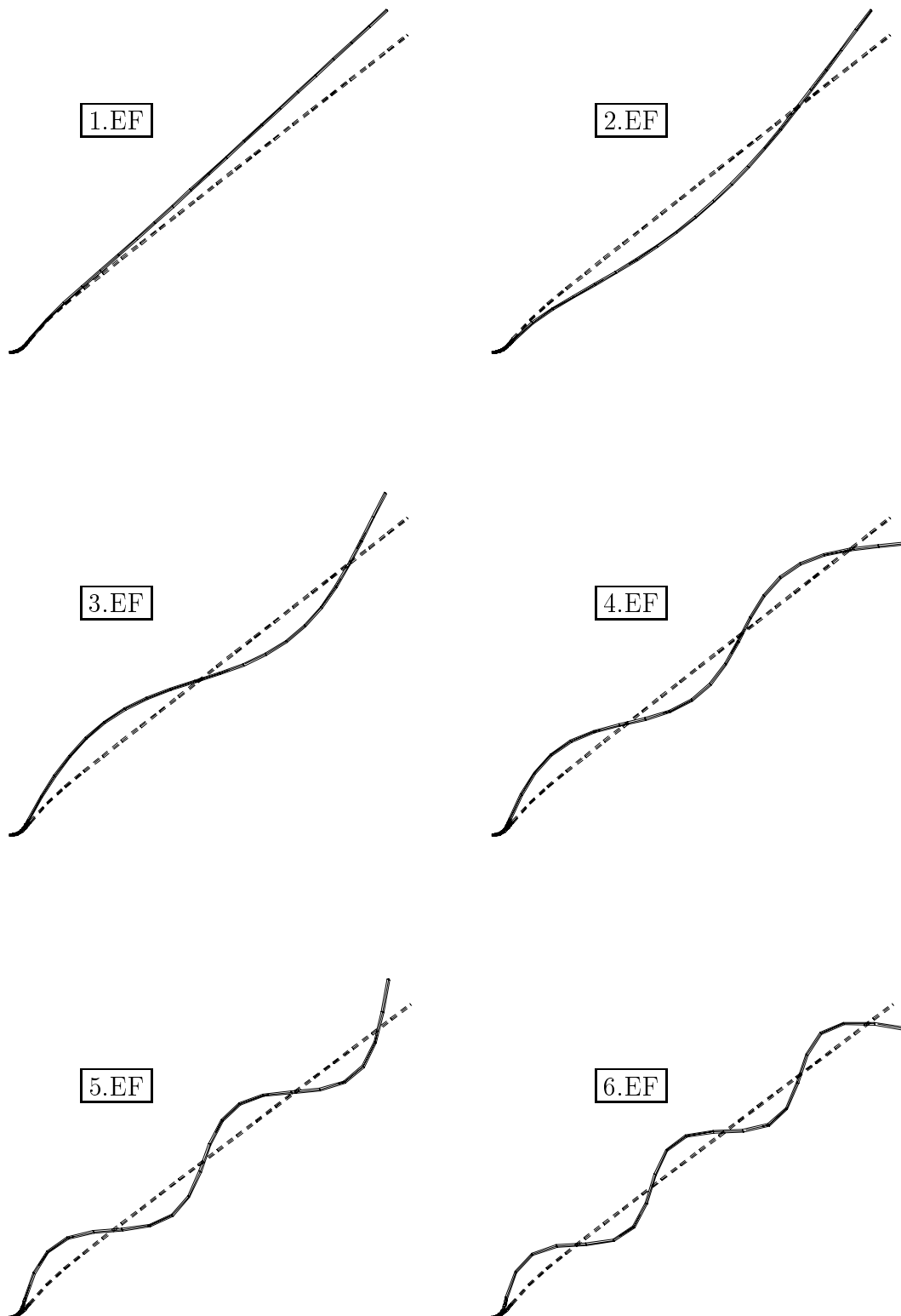


Abbildung 3.58: Eigenformen 1.-6. für Freibiegeversuch; Bondal®H; Darstellung der verformten Geometrie überlagert mit der jeweiligen Eigenform

halter an den Seiten des Bleches und das Gesenk mit einem Gesenkkantenradius von $R_G = 0.4\text{cm}$. Der Niederhalter wird als vertikal unverschieblich angenommen. Die Auswertung der Kontaktbedingung erfolgt direkt an den Integrationspunkten, wobei zwei Kontakt-Gausspunkte für die bilinearen Elemente verwendet werden. Die Diskretisierung des Bleches erfolgt gleichförmig mit 100 bilinearen bzw. 50 biquadratischen Elementen in Längsrichtung, wie auch in Abb. 3.62 bzw. Abb. 3.63 zu sehen ist. Dabei wird bei Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften nur das halbe System diskretisiert.

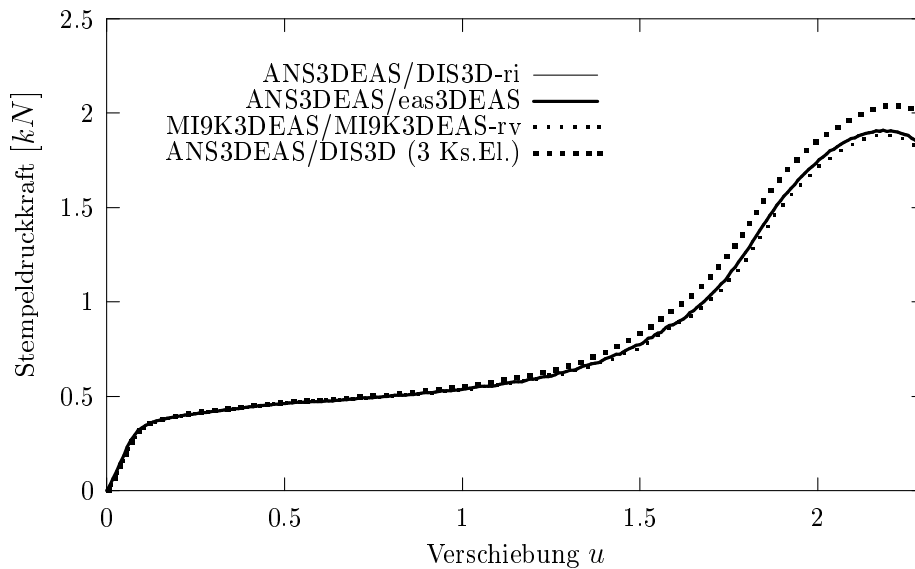


Abbildung 3.60: Stempeldruckkraft aufgetragen über Stempelverschiebung für Tiefziehprozess eines geklebten Verbundbleches; Bondal[®]N/M

In Abb. 3.60 werden die Last-Verformungskurven für Bondal[®]N/M dargestellt, wobei die Kraft im Stempel über die Stempelverschiebung u aufgetragen wird. Der Kurvenverlauf für die drei Varianten mit nur einem Kernschichtelement in Dickenrichtung ist praktisch deckungsgleich. Lediglich die biquadratische Kombination MI9K3DEAS/MI9K3DEAS-rv zeigt im Bereich $u > 1.5\text{cm}$ ein geringfügig weiches Verhalten. Für die Variante mit drei Elementen über die Kernschichtdicke ist wiederum ein sichtbar steiferes Resultat zu beobachten.

Für Bondal[®]H (siehe Abb. 3.61) verhält sich die Variante mit drei Kernschichtdickenelementen ebenfalls deutlich steifer im Vergleich zu den restlichen Elementkombinationen. Auch die biquadratische Kombination MI9K3DEAS/MI9K3DEAS-rv zeigt sich wiederum geringfügig weicher im Vergleich zur ANS3DEAS/DIS3D-ri Kombination für $u > 1.5\text{cm}$. Ein besonders auffälliges Verhalten ist für die bilineare Kombination ANS3DEAS/eas3DEAS für $u > 1.8\text{cm}$ zu beobachten. Die Last-Verformungskurve zeigt in diesem Bereich einen unnatürlichen oszillierenden Verlauf. Weitere Berechnungsversuche mit der in Abschnitt 2.5.4 diskutierten Vorgehensweise zur Elementstabilisierung durch Ausschalten kritischer Elementmodifikationen,

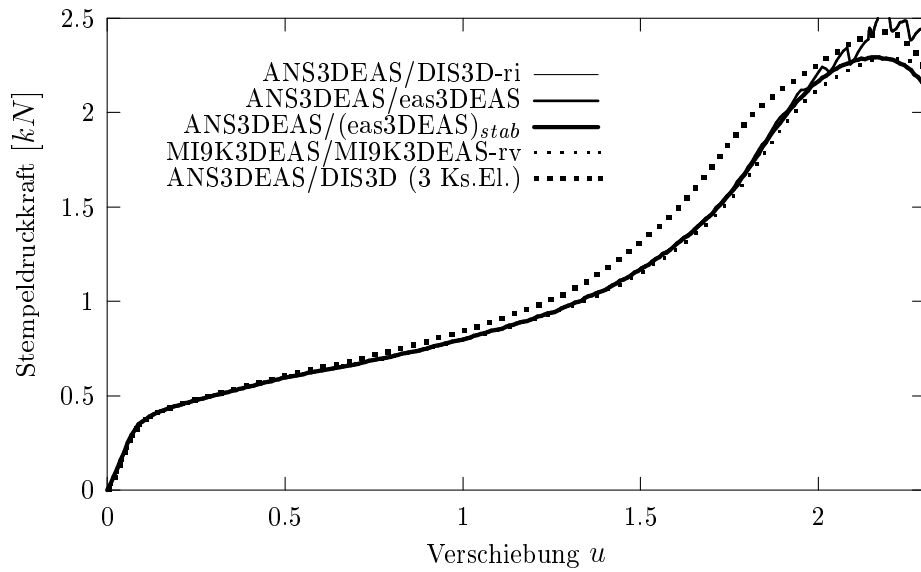


Abbildung 3.61: Stempeldruckkraft aufgetragen über Stempelverschiebung für Tiefziehprozess eines geklebten Verbundbleches; Bondal[®]H

zeigt, dass das beobachtete Verhalten auf die ANS-Modifikation des Elementes zurückzuführen ist. Offensichtlich treten hier bei Verwendung des ANS-Elementes mit zusätzlicher 6-Parameter EAS-Erweiterung für die Membranverzerrungen Kinematiken auf, die zu dem dargestellten oszillierenden Verlauf der Last-Verformungskurve führen.

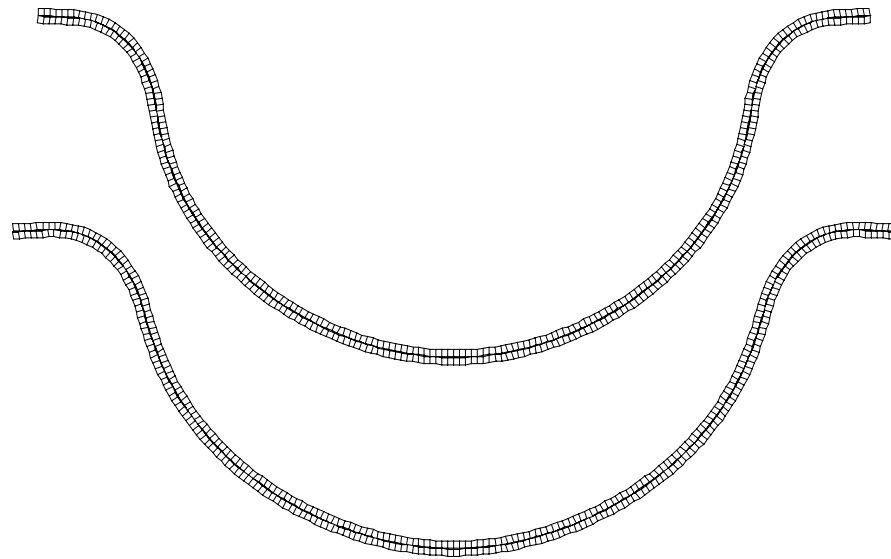


Abbildung 3.62: Verformtes Netz für tiefgezogenes Bondal[®]N/M; $u = 2.3$ cm (oben) und nach Entlastung (unten)

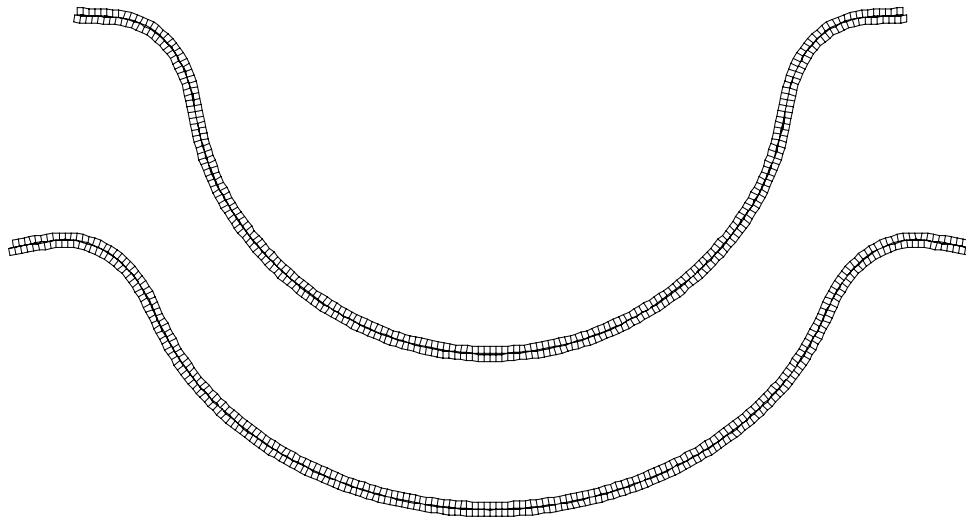


Abbildung 3.63: Verformtes Netz für tiefgezogenes Bondal®H; $u = 2.3 \text{ cm}$ (oben) und nach Entlastung (unten)

Wird zur Stabilisierung der Kernschichtelemente die ANS-Modifikation ausgeschaltet ($\text{ANS3DEAS}/(\text{eas3DEAS})_{stab}$), ergibt sich eine Kurve (siehe Abb. 3.61), die kein oszillierendes Verhalten mehr erkennen lässt und deckungsgleich mit dem Verlauf der Kurve für die $\text{ANS3DEAS}/\text{DIS3D-ri}$ Kombination ist.

In Abb. 3.62 bzw. Abb. 3.63 sind die verformten Werkstücke für die beiden Materialien Bondal®N/M und Bondal®H jeweils für die maximale Stempelverschiebung $u = 2.3 \text{ cm}$ und nach der Entlastung dargestellt. Dabei ist vor allem für das Werkstück aus Bondal®H erkennbar, dass aufgrund der Entlastung ein starkes Rückfedern der Struktur auftritt. Es ist deshalb erforderlich, auch den Entlastungsprozess in die Simulation mit einzubeziehen, um eine Aussage über die endgültige Form des Bauteils treffen zu können, und somit eine Optimierung der Werkzeuggeometrie und des Verformungsprozesses zu ermöglichen.

Für das verformte Werkstück wird nach Abschluss des Umformprozesses eine Eigenfrequenzuntersuchung durchgeführt. Dazu erfolgt nach Erreichen der maximal gewünschten Verschiebung des Stempels ein Entlastungsprozess, indem die Augmented Lagrange Kontaktkräfte bzw. der Penaltyparameter schrittweise bis auf Null herabgesetzt werden. Für die entlastete Struktur erfolgt dann eine Auswertung der Eigenformen und der Eigenfrequenzen. Dabei ist zu beachten, dass das geformte Werkstück auch nach der Entlastung evtl. noch mit Eigenspannungen behaftet ist, die einen Einfluss auf das Eigenschwingungsverhalten des Bauteils nehmen können. Deshalb wird zum Vergleich eine Struktur mit identischer Geometrie untersucht, die völlig unbelastet ist.

Die Eigenformen eins bis sechs werden in Abb. 3.64 für Bondal®N/M und in Abb. 3.65 für Bondal®H dargestellt. Die Eigenfrequenzen für die Eigenformen eins bis sechs sind Tab. 3.11 sowohl für das verformte Werkstück als auch für die direkt generierte Struk-

	Bondal [®] N/M		Bondal [®] H	
	nach Entlastung	direkt generiert	nach Entlastung	direkt generiert
1.EF	$4.65 \cdot 10^1$	$4.61 \cdot 10^1$	$4.89 \cdot 10^1$	$7.96 \cdot 10^1$
2.EF	$1.83 \cdot 10^3$	$1.82 \cdot 10^3$	$9.67 \cdot 10^2$	$2.09 \cdot 10^3$
3.EF	$9.44 \cdot 10^3$	$9.42 \cdot 10^3$	$4.80 \cdot 10^3$	$9.86 \cdot 10^3$
4.EF	$3.07 \cdot 10^4$	$3.06 \cdot 10^4$	$1.38 \cdot 10^4$	$3.16 \cdot 10^4$
5.EF	$9.11 \cdot 10^4$	$9.10 \cdot 10^4$	$3.29 \cdot 10^4$	$9.27 \cdot 10^4$
6.EF	$2.06 \cdot 10^5$	$2.06 \cdot 10^5$	$7.74 \cdot 10^4$	$2.08 \cdot 10^5$

Tabelle 3.11: Eigenfrequenzen der Eigenformen 1.-6. für tiefgezogenes Verbundblech

tur zu entnehmen. Analog zu dem in Abschnitt 3.4.4 vorgestellten Beispiel ist auch hier bei der Betrachtung der Unterschiede bei den Eigenfrequenzen der geformten und der direkt generierten Struktur ein unterschiedliches Verhalten bei den beiden verwendeten Verbundblechtypen zu erkennen. Für Bondal[®]N/M sind die Eigenfrequenzen fast identisch. Deutliche Unterschiede zwischen den Eigenfrequenzen des geformten Bleches und des direkt generierten FE-Netzes treten dagegen für Bondal[®]H auf.

Hier kommen wiederum die Werkstoffeigenschaften der Kernschicht des Bondal[®]H zum Tragen, die im Vergleich zur Kernschicht des Bondal[®]N/M steifer ist, aber über eine geringere Anfangsfließspannung verfügt. Werden nach der Entlastung wiederum die noch vorhanden Schubspannungen in der Kernschicht betrachtet, so sind für das aus Bondal[®]N/M geformte Werkstück Spannungen im elastischen Bereich des Werkstoffs zu beobachten. Ein Einfluss auf die Steifigkeit infolge des Eigenspannungszustandes ist somit nicht zu erwarten. Für das Werkstück aus Bondal[®]H treten allerdings nach der Entlastung in einem großen Bereich der Kernschicht Schubspannungen oberhalb der Anfangsfließspannung des Kernschichtmaterials auf. Die Auswertung des Materialgesetzes für diesen Spannungszustand liefert eine geringe, gegen Null gehende Steifigkeit. Dadurch lassen sich die deutlichen Unterschiede bei den Eigenfrequenzen für das Werkstück aus Bondal[®]H erklären. Durch eine zusätzliche Berechnung mit dem direkt generierten FE-Netz mit einer stark reduzierten Kernschichtsteifigkeit werden die geringen Eigenfrequenzen des eigenspannungsbehafteten Werkstücks bestätigt. Der Einfluss des durch den Umformprozess eingebrachten Eigenspannungszustandes auf das Eigenschwingungsverhalten des Bauteils macht sich also in diesem Fall besonders bemerkbar.

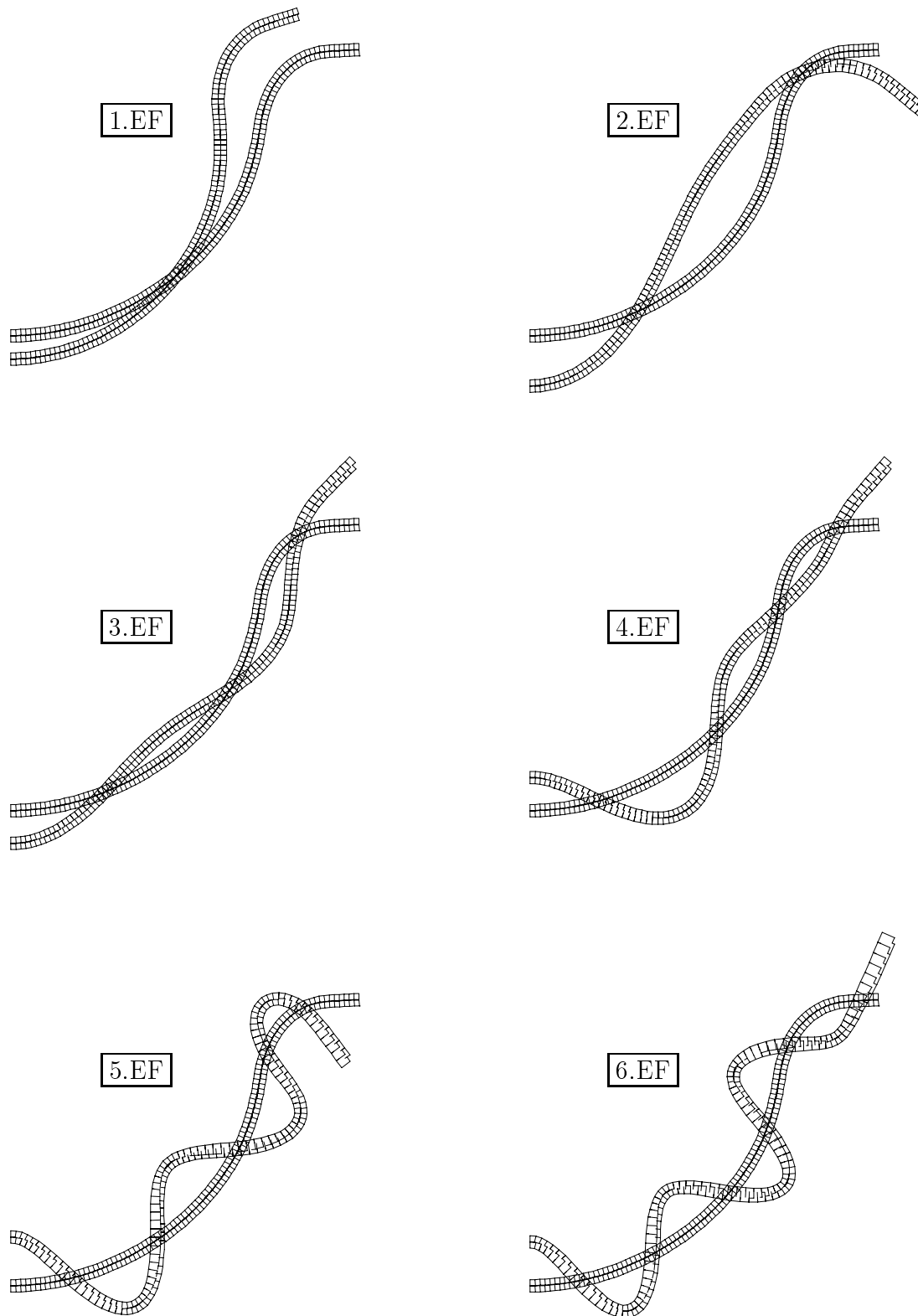


Abbildung 3.64: Eigenformen 1.-6. für tiefgezogenes Blech; Bondal[®]N/M; Darstellung der verformten Geometrie überlagert mit der jeweiligen Eigenform

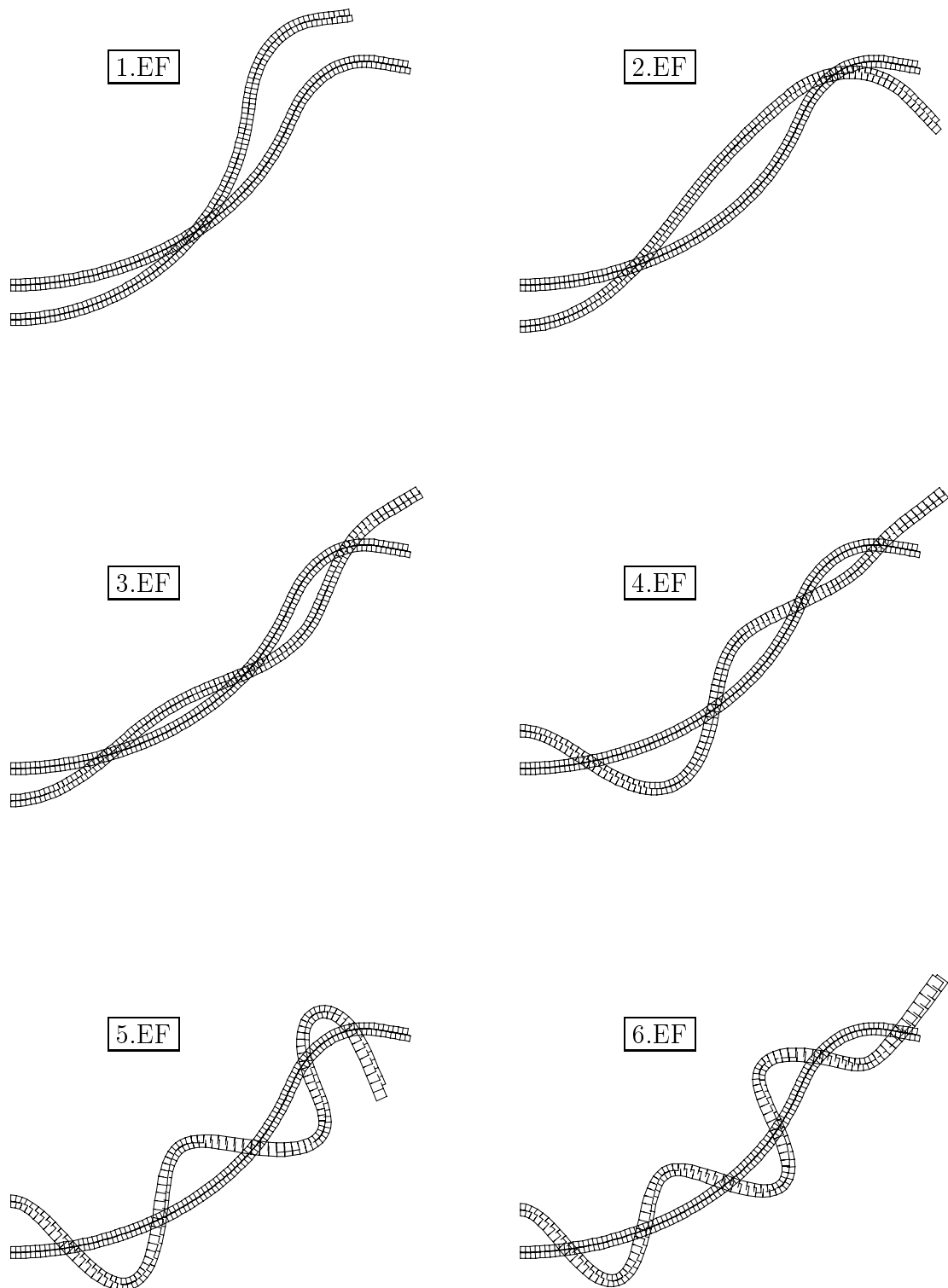


Abbildung 3.65: Eigenformen 1.-6. für tiefgezogenes Blech; Bondal®H; Darstellung der verformten Geometrie überlagert mit der jeweiligen Eigenform

Zusammenfassung/Ausblick

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf der Entwicklung finiter Volumenschalenelemente für geometrisch nichtlineare Probleme großer Deformationen. Aufgebaut sind die vorgestellten Elemententwicklungen auf dem sogenannten 'Solid-Shell' Konzept, das in [37] vorgestellt und dort zur Entwicklung geometrisch nichtlinearer Hexaederelemente mit linearen Ansätzen und linear elastischem Material verwendet wurde. Insgesamt wird ein vollständiger Überblick über aktuelle Weiterentwicklungen von auf dem 'Solid-Shell' Konzept basierenden finiten Schalenelementen gegeben. Insbesondere betrifft dies die biquadratische Erweiterung der isoparametrischen Ansätze in der Schalenfläche. Desweiteren erfolgt eine vollständige Diskussion bekannter Versteifungseffekte. Dies betrifft die Querschub-/Membranversteifungsproblematik, das Problem der Dickenversteifung, das in der Literatur oft als Poisson-thickness-Locking bezeichnet wird, das Problem der volumetrischen Versteifung auch als Incompressibility Locking bekannt und schließlich das Trapezoidal Locking, alternativ auch als curvature thickness Locking oder artificial thickness straining bezeichnet. Die Elementformulierungen werden um geeignete Verfahren zur Vermeidung der genannten Versteifungsprobleme erweitert und es werden schließlich weitgehend versteifungsfreie Elemente vorgestellt.

Eingeleitet wird die Arbeit durch eine Zusammenstellung der wesentlichen kontinuumsmechanischen Grundlagen, gefolgt von einer Einführung in die Grundlagen der Finite-Element-Methode. Insbesondere wird auf die eingesetzten Methoden zur Elementverbesserung eingegangen. Diese Verfahren können unter den Oberbegriffen „gemischte Elementformulierungen“ und „reduzierte Integration“ zusammengefasst werden. Das Ziel dieser Methoden ist es, die Approximationsordnung der Verzerrungen, die aus den Verschiebungsansätzen abgeleitet werden, zu verändern. Dies wird notwendig, da die Versteifungsproblematiken sich in inkonsistenten Verzerrungsapproximationen begründen. Die Approximationsordnung wird deshalb durch gezielte Unterintegration reduziert, was sich in Form einer selektiv reduzierten Integration einzelner Verzerrungsanteile bzw. durch Verwendung angenommener Verzerrungsverläufe durchführen lässt. Alternativ wird die Approximationsordnung durch gemischte Elementformulierungen mit sogenannten erweiterten Verzerrungsansätzen erhöht. Die genannten Verfahren werden im Rahmen der Arbeit zur Entwicklung versteifungsfreier Elementformulierungen eingesetzt, und es gelingt, geeignete Maßnahmen zur Vermeidung sämtlicher auftretender Versteifungsproblematiken zu treffen.

Im zweiten Kapitel der Arbeit wird ausführlich und konkret auf das 'Solid-Shell' Konzept eingegangen. Einleitend wird versucht, die Grundidee des 'Solid-Shell' Konzeptes

zu vermitteln, um dann auf die FE-Diskretisierung einzugehen. Die zahlreichen Elementvarianten werden vollständig zusammengestellt und ausführlich beschrieben. Den Schalencharakter erhalten die auf Volumenelementen basierenden 'Solid-Shells' durch eine unterschiedliche Behandlung für die Schalenfläche und Dickenrichtung. Ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal der Elementvarianten ist die Art der verwendeten Ansatzfunktionen in der Schalenfläche, bilinear bzw. biquadratisch. Dementsprechend entstehen quaderförmige Elemente mit vier bzw. neun Knoten in der Schalenfläche und zwei Knoten über die Dicke.

Die Vermeidung des Dickenversteifungseffekts bzw. Poisson-locking erfordert eine Erweiterung der Dickenverzerrung in Dickenrichtung um einen linearen Anteil. Hier werden zwei Lösungsvorschläge angeboten, woraus sich ein weiteres wesentliches Unterscheidungsmerkmal der Elementvarianten ergibt. Zum einen wird die Erhöhung der Ansatzordnung der Verschiebung durch einen zusätzlichen hierarchischen Freiheitsgrad vorgeschlagen, zum anderen besteht die Möglichkeit einer Verzerrungserweiterung mittels der EAS-Methode. Bei den Vergleichen der in numerischen Beispielrechnungen erzielten Resultate erscheinen beide Vorgehensweisen als gleichwertig. Die Vorgehensweise mit dem zusätzlichen Freiheitsgrad erweist sich allerdings rechentechnisch als nachteilig, da bei der hier vorgeschlagenen Vorgehensweise die Anzahl der globalen Freiheitsgrade erhöht und somit die Effizienz bei der Gleichungslösung gemindert wird. Außerdem erweist sich der zusätzliche Freiheitsgrad als unhandlich, da er auch bei der Vernetzung durch zusätzliche Knoten berücksichtigt werden muss. Zusätzlich können weitere Elementmodifikation durch Verfahren der angenommenen Verzerrungen, erweiterten Verzerrungen und selektiv reduzierter Integration zugeschaltet werden, was zu einer Vielzahl möglicher Variationen für die Elementformulierung führt.

In einigen numerischen Beispielen werden die vorgestellten Elementvarianten ausführlich getestet. Dabei werden insbesondere für die unterschiedlichen Versteifungsproblematiken typische Beispiele untersucht, und es kann gezeigt werden, dass die eingesetzten Elementverbesserungsverfahren tatsächlich zu weitgehend versteifungsfreien Elementformulierungen führen. Da sich die einfacheren unmodifizierten Elemente in der Regel als robuster erweisen, ist es sicher nicht sinnvoll, grundsätzlich immer alle Modifikationsoptionen einzusetzen. D.h. abhängig von den, bedingt durch Geometrie-, Material- und Belastungseigenschaften der untersuchten Struktur, zu erwartenden Versteifungseffekte wird eine geeignete Elementvariante ausgewählt. Einen weiteren Schwerpunkt bei den numerischen Vergleichen stellt die Gegenüberstellung der bilinearen und der biquadratischen Ansätze dar. Die biquadratischen Ansätze scheinen hier im Allgemeinen die bessere Wahl zu sein. Sie sind aufgrund der höheren Ansatzordnung in der Lage, gekrümmte Strukturen wesentlich besser zu approximieren. Allerdings muss auch erwähnt werden, dass sich die biquadratischen Elemente bei gleicher Anzahl verwendeter Gesamtfreiheitsgrade als deutlich ineffizienter im Berechnungsaufwand erweisen. Deshalb kann auch die Entscheidung für bilineare Elemente, eventuell kombiniert mit einer feineren Vernetzung, durchaus sinnvoll sein.

In einem abschließenden Abschnitt des zweiten Kapitels wird die Problematik numerischer Instabilitäten angesprochen. Solche unerwünschten Kinematiken, die aufgrund der typischen Form einer Sanduhr ähnlichen Geometrie der kinematischen Eigenformen

auch als 'Hourglassing' bezeichnet werden, treten als Folge der diversen eingesetzten Elementmodifikationen bei bestimmten Beanspruchungszuständen auf. Das Auftreten der Kinematiken wird ausführlich untersucht, wobei auch eine analytische Elementuntersuchung durchgeführt wird. Bei den kritischen Beanspruchungszuständen handelt es sich vor allem um homogene Kompression. Da bei reiner Kompressionsbeanspruchung keinerlei Versteifungseffekte zu erwarten sind, kann hier auch alternativ ein reines vollständig integriertes Verschiebungselement eingesetzt werden, das frei von kinematischen Eigenformen ist. Deshalb zielen die einfachen vorgestellten Stabilisierungsverfahren darauf hin, kritische Beanspruchungszustände zu erkennen und dann die eingesetzte Elementformulierung mit allen Modifikationen auf die reine Verschiebungsformulierung zurückzuführen. Noch naheliegender wäre es natürlich, das eventuelle Auftreten kritischer Belastungszustände von vornherein zu erkennen, um dann direkt auf robustere Elementformulierungen zurückzugreifen.

Ein zweiter Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit sind Kontaktformulierungen, die benötigt werden, um die vorgestellten 'Solid-Shell' Elemente zur Simulation von Blechumformprozessen mit starren Werkzeugen einzusetzen. Hier wird ein entscheidender Vorteil der Volumen-Schalen-Formulierung deutlich; aufgrund der dreidimensionalen Geometrieigenschaften ist automatisch die Geometrie der Flächen der Schalenober- und -unterseite gegeben, die zur Kontaktüberprüfung zwingend erforderlich ist. Zur Einbringung der Kontaktzwangsbedingung in das Funktional werden zwei alternative Methoden, das Penalty Verfahren und die Augmented Lagrange Methode vorgeschlagen, wobei das Augmented Lagrange Verfahren als Kombination von Penalty Verfahren und Methode der Lagrange Multiplikatoren zu sehen ist. Beide Vorgehensweisen werden ausführlich vorgestellt und erläutert. Die Vor- und Nachteile der beiden Methoden werden schnell ersichtlich.

Die Regularisierung mittels Penalty Verfahrens lässt sich recht einfach anwenden und erweist sich als sehr effizient. Hier wird im Falle der Penetration ein sogenannter Strafterm aktiviert, der letztendlich zu einer Veränderung der Steifigkeitsmatrix zugunsten einer erhöhten Steifigkeit am Ort des Kontaktes führt. Somit kann ein Eindringen eines Kontaktpunktes (Slavepunkt) in eine Kontaktfläche (Masterfläche) teilweise verhindert werden. Wie gut die Kontaktrandbedingung erfüllt werden kann, hängt von einem Parameter ab, der mit dem Strafterm multipliziert wird. Logisch wäre die Wahl sehr großer Werte für den Penalty Parameter, dies führt allerdings zu einer schlechten Kondition der Steifigkeitsmatrix und somit zu numerischen Problemen. Es wird erforderlich, eine geschickte Wahl des Penalty Parameters zu treffen, so dass einerseits die Penetrationen nicht zu groß werden, andererseits aber ein Abbruch der Berechnung aufgrund numerischer Probleme verhindert wird.

Das Augmented Lagrange Verfahren basiert ebenfalls auf Straftermen, mit deren Hilfe die Lagrange Parameter iterativ erhöht (augmentiert) werden. Dadurch wird es möglich, einen Wert für eine maximal zulässige Penetration zu definieren, und die Augmentierung der Lagrange Parameter solange fortzusetzen, bis dieser Wert unterschritten wird. Somit wird eine relativ gute Erfüllung der Kontaktrandbedingungen erreicht, ohne dabei die Nachteile der Lagrange Multiplikatoren Methode in Kauf nehmen zu müssen. Allerdings muss für jeden Augmentierungsschritt nochmals eine

Gleichgewichtsiteration durchgeführt werden, was insgesamt zu einer Vervielfachung des Rechenaufwands führt.

Die Formulierung der Kontaktrandbedingung erfolgt auf der Ebene von Oberflächenkontaktsegmenten, die in ihrer Geometrie den Oberflächen der Schalenstruktur entsprechen. Sie verfügen also ebenfalls über vier bzw. neun Knotenpunkte, die Integration der Kontaktterme erfolgt über die Fläche dieser Segmente. Für diese Kontaktintegration werden zwei verschiedene Optionen diskutiert. Im Rahmen der numerischen Integration gilt es den Integranden an den Gauss-Integrationspunkten auszuwerten. Deshalb ist es naheliegend, die Kontaktbedingung direkt an den Gausspunkten zu überprüfen. Dieses Vorgehen wird hier als „lokale Betrachtungsweise“ bezeichnet. Da an diesem Fall ein kontinuierlicher Kontaktspannungsverlauf über die Elementgrenzen hinaus nicht gewährleistet ist, erfolgt alternativ die Auswertung der Kontaktbedingung an den Knotenpunkten. Die Werte an den Integrationspunkten werden dann mit Hilfe der Ansatzfunktionen interpoliert. Entsprechend wird dieses Vorgehen als „kontinuierliche Betrachtungsweise“ bezeichnet.

In bestimmten Fällen, beispielsweise bei diskontinuierlichen Geometrieeigenschaften der Masterfläche, kann die lokale Betrachtungsweise von Vorteil sein. Ein anschauliches Beispiel wäre ein sehr kleiner Kontaktkörper, der sich bei einer Kontaktuntersuchung an den Knotenpunkten zwischen den Knoten hindurch bewegen könnte, ohne dass ein Kontakt erfasst würde. Um die Kontaktrandbedingung korrekt einzubringen, wäre eine feinere Vernetzung oder alternativ eine zusätzliche Aufteilung der Kontaktsegmente in Untersegmente erforderlich, was einen erheblichen Mehraufwand bedeutet. Wird die lokale Betrachtungsweise eingesetzt, kann eine verbesserte Erfassung des Kontaktes vereinfacht durch eine Erhöhung der Anzahl der Gausspunkte erfolgen. Abgesehen von solchen Ausnahmesituationen ist die kontinuierliche Betrachtungsweise vorzuziehen, da hier kontinuierliche Kontaktspannungen zwischen den Segmenten gewährleistet sind. Ein bei der lokalen Methode mögliches Auftreten ungewollter Zwängungen durch zu viele Kontaktintegrationspunkte ist ebenfalls ausgeschlossen. Dies wird auch in numerischen Beispielrechnungen, in denen auch die Vor-/Nachteile von Penalty und Augmented Lagrange Methode untersucht werden, verdeutlicht.

Ein zusätzliches Kapitel befasst sich mit der Berücksichtigung von Reibungseinflüssen. Es wird dabei eine Vorgehensweise erörtert, die es ermöglicht, für die betrachteten, analytisch definierten Kontaktflächen, tangentiale Kontaktkräfte einzubringen. Grundsätzlich muss im Fall des Kontaktes festgelegt werden, ob der Zustand des Haftens oder Gleitens vorliegt, um dann eine Haftkraft wiederum mit Hilfe eines Penalty Parameters zu ermitteln oder eine Reibkraft, die nach dem Coulombschen Kraftgesetz in Abhängigkeit von der Normalkontaktkraft berechnet wird. Anhand eines einfachen numerischen Beispiels wird der Reibungseinfluss auf ein Kontaktproblem untersucht. Im Allgemeinen wird aber bei den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Beispielen Reibung nicht berücksichtigt und es wird ausschließlich Normalkontakt betrachtet. Eine grundsätzliche Berücksichtigung von Reibungseinflüssen bei der numerischen Simulation von Umformprozessen ist für zukünftige Untersuchungen anzustreben.

Im letzten Abschnitt wird auf eine spezielle Anwendung der bisher vorgestellten und

diskutierten Verfahren eingegangen; der Simulation des Umformprozesses von Formteilen aus geklebten Verbundblechen. Formteile aus geklebtem Verbundblech, die aufgrund ihrer verbesserten Dämpfungseigenschaften günstigere Schallemissionswerte aufweisen, werden für dynamisch beanspruchte Komponenten eingesetzt. Deshalb ist auch das Eigenschwingungsverhalten der Bauteile, die durch Eigenspannungen aufgrund des Umformprozesses belastet sind, von besonderem Interesse. Hier kommt ein weiterer Vorteil der 'Solid-Shells' zur Geltung; aufgrund des dreidimensionalen Charakters der Elemente können auch geschichtete Strukturen beschrieben werden. In diesem Fall erfolgt die Diskretisierung der beiden Deckbleche mit jeweils einem Volumen-Schalenelement sowie der dazwischenliegenden Klebeschicht mit mit einem bzw. alternativ mit mehreren Elementen in Dickenrichtung. Beim Formen der Verbundbleche kommt es aufgrund der Biegung zu einer gegenseitigen Verschiebung der Deckbleche, d.h. die Kernschicht wird hauptsächlich auf Schub beansprucht. Bei der Kernschichtdiskretisierung mit mehreren ANS-Elementen sind bei dieser Beanspruchungsart unerwünschte Kinematiken innerhalb der Kernschicht zu beobachten, weshalb nur Elemente ohne die ANS-Modifikation der Querschubterme eingesetzt werden können.

Bei der numerischen Untersuchung werden einleitend Materialparameter für die Blechschichten festgelegt und Voruntersuchungen zur Wahl geeigneter Elementkombinationen für die Beschreibung von Deck- und Klebschicht durchgeführt. Schließlich folgen Beispiele zur Simulation des Umformprozesses mit anschließender Eigenfrequenzuntersuchung, wobei unterschiedliche Einflüsse der aufgrund des Umformens vorhandenen Eigenspannungen der Formteile auf das Eigenschwingungsverhalten zu beobachten sind. Dabei werden wieder die zuvor erläuterten Kontaktalgorithmen eingesetzt. Insbesondere werden die verschiedenen Varianten für die Kernschichtdiskretisierung verglichen. Hier zeigt sich, dass mit nur einem Kernschichtdickenelement die Schubverformung effizient und exakt abgebildet werden kann. Sollen allerdings Verformungen innerhalb der Kernschicht untersucht werden, erscheint eine verfeinerte Diskretisierung in Kernschichtdickenrichtung unbedingt erforderlich. Es sei festgehalten, dass im Rahmen dieser Arbeit nur einfache ebene Beispiele für das Umformen der Verbundbleche vorgestellt wurden. Hier sind sicher zukünftig noch weitere Untersuchungen durchzuführen.

Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS. Finite Element Analysis Solutions. Version 6.3 theory manual, ABAQUS Inc., 2002.
- [2] F. Armero. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Comp. Struct.*, 75:261–290, 2000.
- [3] K.J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [4] J.L. Batoz. On 8-node solid elements for linear and nonlinear analysis of shell undergoing large rotations but small strains. In *Euromech Colloquium 371*. Karlsruhe, Germany, 1997.
- [5] H. Bauer. Numerical simulation of the two-stage deep drawing process of a coupling box. In *2nd International LS-DYNA3D Conference*, San Francisco, USA, Sept. 1994.
- [6] T. Belytschko and L.P. Bindemann. Assumed strain stabilization for the eight node hexahedral element. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 105:225–260, 1993.
- [7] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2000.
- [8] P. Betsch and E. Stein. An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element. *Commun. Numer. Methods Engng.*, 11:899–909, 1995.
- [9] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [10] M. Bischoff. Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung. Dissertation, Report No. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1999. (in German).
- [11] M. Bischoff and E. Ramm. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 40:4427–4449, 1997.
- [12] M. Bischoff, E. Ramm, and D. Braess. A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements. *Comput. Mech.*, 22:443–449, 1999.

- [13] Bondal®. Körperschalldämpfender Verbundwerkstoff. Technical report, Thyssen Krupp Stahl AG, 2001.
- [14] D. Braess. Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 165:155–174, 1998.
- [15] B. Brank, J. Korelc, and A. Ibrahimbegovic. Shell Formulations with Through-the-thickness Stretching. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *WCCM V. Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, July 2002.
- [16] M. Braun. Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken. Dissertation, Report No. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1995. (in German).
- [17] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1991.
- [18] E.N. Bucalem and K.J. Bathe. Higher-order MITC general shell elements. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 36:3729–3754, 1993.
- [19] N. Büchter, E. Ramm, and D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 37:2551–2568, 1994.
- [20] R. Buczkowski, M. Kleiber, and U. Gabbert. On linear and higher order standard finite elements for 3d-nonlinear contact problems. *Comp. Struct.*, 53(4):817–823, 1994.
- [21] M. Büscher, E.-J. Drewes, E. Finckenstein, L. Keßler, W. Nester, V. Steiniger, and H.U. Weigel. Simulation der Umformung von oberflächenveredelten Feinblech-Verbundwerkstoffen. Forschungsbericht Projekt 222, Studiengesellschaft Stahlanwendung e.V., 1995.
- [22] J.W. Cho, D.Y. Yang, and W.J. Chung. A simplified approach for incorporating thickness stress in the analysis of sheet metal forming using shell elements. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 53:2311–2327, 2002.
- [23] M.A. Crisfield. Re-visiting the contact patch test. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 48:435–449, 2000.
- [24] R. de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1982.
- [25] S. Doll. Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1998. (in German).

- [26] S. Doll, R. Hauptmann, C. Freischläger, and K. Schweizerhof. On volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscoplastic deformations. *Engng. Comput.*, 17(7):874–902, 2000.
- [27] E. Dvorkin and K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engng. Comput.*, 1:77–88, 1984.
- [28] N. El-Abbasi and K.J. Bathe. Stability and patch test performance of contact discretization and new solution algorithm. *Comp. Struct.*, 79(16):1473–1486, 2001.
- [29] N. El-Abbasi, S.A. Meguid, and A. Czekanski. On the modelling of smooth contact surfaces using cubic splines. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 50:953–967, 2001.
- [30] E. Ewert. Untersuchung eines Verformungsprozesses an einem Mehrschichtproblem und dessen Einfluss auf Eigenfrequenzen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2000.
- [31] D.P. Flanagan and T. Belytschko. A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 17:679–706, 1981.
- [32] S. Glaser and F. Armero. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engng. Comput.*, 14(7):759–791, 1997.
- [33] R. Glowinski and P. Le Tallec. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.
- [34] F. Gruttmann. Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen. Habilitation, Report No. F96/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1996. (in German).
- [35] Y.Q. Guo, W. Gati, H. Naceur, and J.L. Batoz. An efficient DKT rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. *Comp. Struct.*, 80(27):2299–2312, 2002.
- [36] H. Hakula, Y. Leino, and J. Pitkäranta. Scale resolution, locking, and high-order finite element modelling of shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 133(3-4):157–182, 1996.
- [37] R. Hauptmann. Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1997. (in German).
- [38] R. Hauptmann, S. Doll, M. Harnau, and K. Schweizerhof. 'Solid-Shell' elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials. *Comp. Struct.*, 79(18):1671–1685, 2001.

- [39] R. Hauptmann and K. Schweizerhof. A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 42:49–70, 1998.
- [40] R. Hauptmann, K. Schweizerhof, and S. Doll. Extension of the solid-shell concept for large elastic and large elastoplastic deformations. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 49:1121–1141, 2000.
- [41] T. Hesse. Adaptive Finite Element Methoden zur Analyse von Flächentragwerken mit nichtlinearem Verhalten. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2001.
- [42] D. Hoffmann. Das Augmented-Lagrange-Verfahren bei Reibkontaktproblemen unter transienter Beanspruchung. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2003.
- [43] H.C. Huang and E. Hinton. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 22:72–93, 1986.
- [44] B.M. Irons and S. Ahmad. *Techniques of Finite Elements*. Wiley, 1986.
- [45] S. Klinkel. Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen. Dissertation, Report No. 7, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 2000. (in German).
- [46] W.B. Krätzig and D. Jun. On best shell models - From classical shells, degenerated and multi-layered concepts to 3d. *Arch. of Appl. Mech.*, 73:1–25, 2003.
- [47] T.A. Laursen. Formulation and treatment of frictional contact problems using finite elements. Dissertation, SUDAM Report No. 92-6, Stanford University, 1992.
- [48] T.A. Laursen. *Computational contact and impact mechanics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [49] R.H. MacNeal and R.L. Harder. Proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements Anal. Des.*, 1(1):3–20, 1985.
- [50] C. Miehe. A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 155:193–234, 1998.
- [51] P.M. Naghdi. *Foundations of Elastic Shell Theory*, volume 4 of *Progress in Solid Mechanics*. North-Holland Publ. Comp., 1963.
- [52] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, and J.R. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 4:153–177, 1974.

- [53] P. Papadopoulos, R.J. Jones, and J.M. Solberg. A novel Finite Element formulation for frictionless contact problems. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38:2603–2617, 1995.
- [54] P. Papadopoulos and R.L. Taylor. A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 94:373–389, 1990.
- [55] H. Parisch. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38:1855–1883, 1995.
- [56] M.A. Puso and T.A. Laursen. A 3D contact smoothing method using Gregory patches. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 54:1161–1194, 2002.
- [57] X. Qiu, M.E. Plesha, and D.W. Meyer. Stiffness matrix integration rules for contact-friction finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 93:385–399, 1991.
- [58] S. Reese. Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymerstrukturen. Habilitation, Report No. F01/4, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2001. (in German).
- [59] S. Reese, M. Kuessner, and B.D. Reddy. A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 44:1617–1652, 1999.
- [60] S. Reese and P. Wriggers. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 48:79–109, 2000.
- [61] T. Rottner. Sensitivitätsanalysen stabiler Gleichgewichtslagen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Lösungsverfahren für Parallelrechner. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 2000. (in German).
- [62] C. Sansour. A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change. *Arch. of Appl. Mech.*, 65:194–216, 1995.
- [63] R. Schleich, J. Matheas, and B.W. Zastrau. A Three-Dimensional Surface-Related Shell Theory for the Treatment of Contact Problems. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *WCCM V. Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, July 2002.
- [64] H. Schoop. Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. *Ingenieur-Archiv*, 56:427–437, 1986.
- [65] K. Schweizerhof. Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik. Bericht, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 1989. (in German).

- [66] K. Schweizerhof and E. Ramm. Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. *Comp. Struct.*, 18:1099–1114, 1984.
- [67] B. Seifert. Zur Theorie und Numerik finiter elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen. Dissertation, Report No. F 96/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1996. (in German).
- [68] J.C. Simo and F. Armero. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 33:1413–1449, 1992.
- [69] J.C. Simo, F. Armero, and R.L. Taylor. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3d finite deformation problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 110:359–386, 1993.
- [70] J.C. Simo and T.J. R. Hughes. On variational foundations of assumed strain methods. *J. Appl. Mech.*, 53:51–54, 1986.
- [71] J.C. Simo and T.A. Laursen. An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Comp. Struct.*, 42(1):97–116, 1992.
- [72] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 29:1595–1638, 1990.
- [73] J.C. Simo, R.L. Taylor, and K.S. Pister. Variational and projection methods for volume constraint in finite deformation elasto-plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 51:177–208, 1985.
- [74] K.Y. Sze and L.Q. Yao. A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. part I – solid-shell element formulation. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 48(4):545–564, 2000.
- [75] H. Verhoeven. Geometrisch und physikalisch nichtlineare Finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung. Dissertation, reihe maschinenbau, Technische Universität Berlin, 1992. (in German).
- [76] L. Vu-Quoc and X.G. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 192:975–1016, 2003.
- [77] W.A. Wall, M. Bischoff, and E. Ramm. A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 188:859–871, 2000.
- [78] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty, and J. Ghaboussi. Incompatible displacement models. In Fenves et al., editor, *Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics*, pages 43–57. Academic Press, 1973.

- [79] P. Wriggers. Finite element algorithms for contact problems. *Arch. of Comput. Methods in Engng.*, 2:1–49, 1995.
- [80] P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [81] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Wiley, 2002.
- [82] P. Wriggers, R. Eberlein, and S. Reese. A comparison of 3-dimensional continuum and shell elements for finite plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 33:3309–3326, 1996.
- [83] P. Wriggers, L. Krstulovic-Opara, and J. Korelc. Smooth C^1 -interpolations for two-dimensional frictional contact problem. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 51:1469–1495, 2001.
- [84] P. Wriggers and S. Reese. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 135:201–209, 1996.
- [85] W. Zerna. Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen. *ZAMM*, 42:333–341, 1964.
- [86] Y. Zhu. ANSYS nonlinear contact analysis technology. In *Course Notes Contact*. ANSYS, Inc. Corporated, 2001.
- [87] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The basics*, volume 1 of *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [88] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *Solid mechanics*, volume 2 of *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000.

Anhang A

Mathematische Grundlagen

Der Vollständigkeit halber und zum besseren Verständnis der verwendeten Notationen sollen an dieser Stelle die wesentlichen mathematischen Grundlagen zusammengefasst werden. Eine ausführlichere Darstellung ist z.B. in [24] zu finden.

A.1 Rechenregeln für Vektoren

Die Rechenregeln für Vektoren werden erläutert anhand zweier Vektoren

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = v_i w_i \quad (\text{A.2})$$

Das Vektorkreuzprodukt

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Das dyadische Produkt

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \mathbf{w}^T = v_i w_j = \begin{bmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Gradient eines Vektors

Der Gradient des Vektors \mathbf{v} ist definiert als

$$\mathit{grad}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (\text{A.5})$$

mit dem Ortsvektor \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration oder mit dem Ortsvektor \mathbf{X} der Referenzkonfiguration als

$$\mathit{Grad}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}. \quad (\text{A.6})$$

Divergenz eines Vektors

$$\mathit{div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \quad (\text{A.7})$$

bzw.

$$\mathit{Div}\mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial X_i}. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Rechenregeln für Tensoren

Ein Tensor \mathbf{T} kann über das dyadische Produkt zweier Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} definiert werden:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \quad (\text{A.9})$$

Darstellung eines Tensors an einer Vektorbasis

Ausgehend von der Darstellung der Vektoren

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{g}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = w^i \mathbf{g}_i, \quad (\text{A.10})$$

mit den linear unabhängigen kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i und den kontravarianten Vektorkomponenten v^i bzw. w^i , lässt sich der Tensor \mathbf{T} bei einer kovarianten Basis darstellen:

$$\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = v^i \mathbf{g}_i \otimes w^j \mathbf{g}_j = v^i w^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j, \quad (\text{A.11})$$

mit den kontravarianten Tensorkomponenten T^{ij} . Analog kann eine Darstellung kovarianter Komponenten an einer kontravarianten Basis erfolgen. Mit den ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i bzw. \mathbf{g}^i ergibt sich der Fundamentaltensor oder Einstensor

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \delta_i^j, \quad (\text{A.12})$$

mit dem Kroneckersymbol δ_i^j . \mathbf{I} entspricht formal der Einheitsmatrix.

Das Tensorprodukt

Das Tensorprodukt zweier Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{T} , die formal als Matrizen betrachtet werden können, entspricht dem Matrizenprodukt:

$$\mathbf{S} \mathbf{T} = S_{ik} T_{kj}. \quad (\text{A.13})$$

Das innere Produkt zweier Tensoren

Das innere Produkt zweier Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{T} ergibt einen Skalar α :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \text{trace}(\mathbf{S} \mathbf{T}^T) = S_{ij} T_{ij} = \alpha, \quad (\text{A.14})$$

mit

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \alpha. \quad (\text{A.15})$$

Divergenz eines Tensors

Die Divergenz eines Tensors \mathbf{T} ist definiert als

$$\text{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}, \quad (\text{A.16})$$

mit dem Ortsvektor \mathbf{x} der aktuellen Konfiguration oder mit dem Ortsvektor \mathbf{X} der Referenzkonfiguration als

$$\text{Div} \mathbf{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_i}, \quad (\text{A.17})$$

mit

$$\text{Div} \mathbf{T} = \frac{\partial x_k \partial X_i}{\partial X_i \partial x_k} \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_i} = \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_i}}_{\mathbf{F}} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = \text{div}(\mathbf{F} \mathbf{T}) \quad (\text{A.18})$$

und

$$\text{div} \mathbf{T} = \text{Div}(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}), \quad (\text{A.19})$$

mit dem Tensor \mathbf{F} , der als Deformationsgradient bezeichnet wird.

Rechenregeln zur Divergenz

$$\operatorname{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) = \mathbf{v} \operatorname{div}(\mathbf{T}^T) + \mathbf{T}^T \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad (\text{A.20})$$

Gausscher Integralsatz

Mit dem Gausschen Integralsatz wird ein Volumenintegral in ein Flächenintegral transformiert:

$$\int_V \operatorname{Div} \mathbf{T} \, dV = \int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA, \quad (\text{A.21})$$

mit A als der Außenfläche des Volumens mit dem Flächennormalenvektor \mathbf{n} .