

Forschungszentrum Karlsruhe  
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte  
FZKA 6709

**Bruchmechanische Untersuchungen für  
elastische mikropolare Kontinua**

Rainer Elsässer  
Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte  
Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe  
2002



# Bruchmechanische Untersuchungen für elastische mikropolare Kontinua

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

an der Fakultät für Maschinenbau der  
Universität Karlsruhe

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Phys. Rainer Elsässer  
aus Pforzheim

Tag der mündlichen Prüfung:

16.11.2001

Hauptreferent:

Prof. Dr. rer. nat. D. Munz

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Ch. Tsakmakis

# Kurzfassung

Gegenstand des vorliegenden Berichtes ist die Untersuchung verschiedener bruchmechanischer Probleme für elastische mikropolare Kontinua. Nach der Darstellung der mikropolaren Theorie für linear elastische Materialien wird deren Implementierung mittels benutzereigener Elemente in das Finite-Elemente-Programm ABAQUS erläutert. Für einen scharfen Riss erfolgt mit Hilfe eines Reihenansatzes für die Spannungen die analytische Herleitung der Rissspitzennahfelder bei Mode-I- und Mode-II-Belastung. Durch Finite-Elemente-Simulationen eines Risses in homogenem Material wird zum einen die Implementierung in ABAQUS verifiziert und zum anderen die Bestimmung der vier auftretenden Spannungsintensitätsfaktoren in Abhängigkeit von den Materialparametern durchgeführt. Anhand von Rissen in einem Zweistoff- bzw. Schicht-Substrat-Verbund erfolgt die Untersuchung des Einflusses charakteristischer Längen auf die Kraftspannungsintensitätsfaktoren.

## Abstract

### Fracture Mechanical Investigations of Elastic Micropolar Continua

The aim of this report is to investigate linear elastic micropolar models with respect to fracture problems. To this end user-defined elements are implemented into the finite element code ABAQUS. Also, by using appropriate series expansions, the near-tip fields for mode-I and mode-II are analytically derived for a sharp crack. In order to verify the implementation in the finite element code a crack in a homogeneous material is simulated. Moreover, the stress intensity factors entering into the analytical solutions are determined for various material parameters. For two-material and layer-substrate composites some crack problems are investigated with respect to the characteristic length involved in the micropolar model.

# Inhaltsverzeichnis

Notation und Operatoren	iv
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie des mikropolaren Kontinuums</b>	<b>3</b>
2.1 Literaturüberblick . . . . .	3
2.2 Grundlagen der Kinematik . . . . .	6
2.3 Definition des mikropolaren Kontinuums . . . . .	8
2.4 Bilanzgleichungen . . . . .	10
2.4.1 Erhaltungssatz der Masse . . . . .	10
2.4.2 Impulssatz . . . . .	11
2.4.3 Drehimpulssatz . . . . .	12
2.4.4 Bilanz der mechanischen Leistung . . . . .	14
2.4.5 Erster Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	16
2.4.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	17
2.5 Lineare, mikropolare Elastizität . . . . .	19
2.5.1 Elastische freie Energiefunktion und geometrische Linearisierung . .	19
2.5.2 Konstitutive Gleichungen . . . . .	21
2.6 Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	23
2.7 Vergleich zur klassischen Theorie und zur Couple–Stress–Theorie . . . . .	23

<b>3</b>	<b>Finite-Elemente-Methode</b>	<b>26</b>
3.1	Starke und schwache Formulierung des stationären Randwertproblems . . . . .	26
3.2	Galerkin-Verfahren und Diskretisierung . . . . .	29
3.3	Implementierung in UEL . . . . .	34
3.3.1	3d-Formulierung . . . . .	35
3.3.2	2d-Formulierung . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Analytische Bestimmung der Rissspitzenfelder</b>	<b>48</b>
4.1	Grundgleichungen in Polarkoordinaten . . . . .	49
4.2	Rand- und Symmetriebedingungen . . . . .	50
4.3	Singuläre Terme . . . . .	52
4.4	Konstante Terme . . . . .	58
4.5	Spannungsintensitätsfaktoren und Zusammenfassung . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Finite-Elemente-Analysen</b>	<b>65</b>
5.1	Materialparameter . . . . .	65
5.2	Riss in homogenem Material . . . . .	67
5.2.1	Zur FE-Modellierung und Auswertung . . . . .	67
5.2.2	Ergebnisse zu Mode I . . . . .	72
5.2.3	Ergebnisse zu Mode II . . . . .	83
5.3	Riss in Zweistoffverbund . . . . .	91
5.4	Riss in dünner Schicht . . . . .	99
5.5	Abschließende Bemerkungen . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>104</b>

<b>A</b>	<b>Zur Theorie des mikropolaren Kontinuums</b>	<b>107</b>
A.1	Kinetische Energie durch Rotation des Mikrokontinuums . . . . .	107
A.2	Prinzip der materiellen Objektivität . . . . .	108
A.3	Positive Definitheit der freien Energie . . . . .	110
<b>B</b>	<b>Zur FE-Formulierung</b>	<b>111</b>
B.1	Identität der Lösung der starken und schwachen Formulierung . . . . .	111
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>114</b>

# Notation und Operatoren

Vektoren und Tensoren werden in Fettdruck dargestellt. In wenigen Fällen sind unterschiedliche Größen mit demselben Symbol bezeichnet. Gleichungen in Indexschreibweise unterliegen der Einstein'schen Summationskonvention. Die Anwendung der Rechenregeln erfolgt in Analogie zu den Lehrbüchern von de Boer [17] und Klingbeil [66].

## Lateinische Buchstaben

<b>1</b>	Einheitstensor 2. Stufe ( $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )
<b><math>\mathcal{A}, \mathbf{A}</math></b>	Materialtensor/-matrix für die Kraftspannungen (4. Stufe)
<b><math>\mathcal{B}, \mathbf{B}</math></b>	Materialtensor/-matrix für die Momentenspannungen (4. Stufe)
<b>B</b>	Kompatibilitätsmatrix
<b>b</b>	spezifische Volumenkraft
<b>C</b>	Rechter Cauchy–Green–Verzerrungstensor
<b>D</b>	Drehimpulsvektor
<b>d</b>	Verschiebungs- und Rotationsvektor
<b>E</b>	Green'scher Verzerrungstensor
<i>e, E</i>	(spezifische) innere Energie
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<b>F</b>	Deformationsgradient, Kraftvektor
<b>H</b>	Verschiebungsgradient
<i>H</i>	Entropie
<b>I</b>	Impuls
<i>j</i>	Jacobideterminante
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<i>K</i>	kinetische Energie
<i>K<sub>I</sub>, K<sub>II</sub></i>	klassischer Spannungsintensitätsfaktor für Mode I bzw. II
<i><math>\tilde{K}_I, \tilde{K}_{II}</math></i>	Kraftspannungsintensitätsfaktor für Mode I bzw. II



$\mathcal{L}_a, \mathcal{L}_i$	Leistung der äußeren bzw. inneren Kräfte
$\mathbf{L}$	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
$L_I, l_{II}$	Momentenspannungsintensitätsfaktor für Mode I bzw. II
$l$	spezifisches Volumenmoment
$\mathbf{M}$	Momentenspannungstensor
$\mathbf{m}$	Momentenspannungsvektor
$m$	Masse
$\mathbf{N}$	Formfunktionsmatrix
$N$	Formfunktionen
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$p$	Spannungsexponent
$Q$	Wärmezufuhr
$\mathbf{q}$	Wärmeflussvektor
$\mathcal{R}_R$	Referenzkonfiguration
$\mathcal{R}_R^{(l)}$	Referenzkonfiguration des Mikrokontinuums
$\mathcal{R}_t$	Momentankonfiguration
$\mathcal{R}_t^{(l)}$	Momentankonfiguration des Mikrokontinuums
$\mathbf{R}$	Rotationstensor der polaren Zerlegung
$\mathbf{r}$	aus dem Verschiebungsfeld resultierender Rotationsvektor
$r$	Wärmestrahlung
$\mathbf{T}$	Kraftspannungstensor
$\mathbf{t}$	Kraftspannungsvektor
$t$	Zeit
$\mathbf{U}$	rechter Strecktensor der polaren Zerlegung
$\mathbf{u}$	Verschiebung
$\mathbf{V}$	linker Strecktensor der polaren Zerlegung
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeit
$\mathbf{X}, \mathbf{x}$	Ortsvektor zu einem materiellen Punkt in $\mathcal{R}_R$ bzw. $\mathcal{R}_t$

### Griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	Materialparameter
$\mathbf{\Gamma}$	Krümmungstensor 3. Stufe
$\gamma$	spezifische Entropieproduktion
$\boldsymbol{\epsilon}$	Dehnungstensor
$\boldsymbol{\Theta}$	Trägheitstensor des Mikrokontinuums
$\eta$	spezifische Entropie

$\theta$	Temperatur
$\lambda, \mu$	Lamé'schen Konstanten
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Xi, \xi$	Ortsvektor in $\mathcal{R}_R^{(l)}$ bzw. $\mathcal{R}_t^{(l)}$
$\kappa$	Krümmungstensor
$\rho$	Dichte
$\varphi$	Rotationsvektor
$\sigma$	Eigendrehimpuls des Mikrokontinnums
$\psi$	spezifische freie Energie
$\Phi$	Verschiebungsgradient des Mikrokontinuums
$\Omega$	Geschwindigkeitsgradient des Mikrokontinuums
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit

## Indizes

$()_M$	Bezug auf das Mikrokontinuum
$()^u$	Bezug auf die Verschiebung
$()^\varphi$	Bezug auf die Rotation
$()^0$	Bezug auf die Randbedingung
$()^{(0)}$	Term nullter Ordnung
$()^{(1)}$	Term erster Ordnung
$()^I$	Bezug auf Mode I
$()^{II}$	Bezug auf Mode II

## Operatoren

Grad, grad	Gradient bzgl. $\mathcal{R}_R$ bzw. $\mathcal{R}_t$
div	Divergenz bzgl. der Momentankonfiguration
rot	Rotation bzgl. der Momentankonfiguration
Sp	Spur
det	Determinante
$()^{-1}$	Inverse
$()^T$	Transponierte
$\dot{()}$	materielle Zeitableitung
$\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}$	dyadisches Produkt ( $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} = m_i n_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt ( $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = A_{ij}B_{ij}$ )
$\mathbf{A}\mathbf{B}$	Tensorprodukt ( $\mathbf{A}\mathbf{B} = A_{ip}B_{pj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ )

# Kapitel 1

## Einleitung

Bei klassischer kontinuumsmechanischer Betrachtungsweise eines rein mechanischen Prozesses werden jedem Körperpunkt Verschiebungen als Freiheitsgrade zugewiesen und Wechselwirkungen mit der äußeren Umgebung ausschließlich durch Kräfte übertragen. In den letzten Jahrzehnten wurde eine Vielzahl phänomenologischer Modelle erstellt, die durch unterschiedliche Annahmen eine Erweiterung des klassischen Konzeptes erzielten. Stellvertretend für diese Entwicklungen seien hier Begriffe wie orientierte und polare Medien, nicht-einfache und nichtlokale Materialien, mikromorphe und Cosserat-Kontinua, Theorien vom Grade  $N$  und Gradiententheorien genannt.

Die verschiedenen Ansätze, die dabei verwendet werden können, fasste Kröner in einer anschaulichen Darstellung [71] mit den drei Begriffen Nichtlokalität, Spinfreiheitsgrade und Durchschnittstheorien zusammen. Er beschreibt damit die Einbeziehung von Wechselwirkungen endlicher Reichweite, die Verwendung rotatorischer Freiheitsgrade und die Berücksichtigung der Mikrostruktur des Kontinuums. Durch Umsetzung dieser Ideen gelang es, sich von den starren Vorstellungen der klassischen Kontinuumsmechanik zu lösen und somit die Beschreibung einer Vielzahl zusätzlicher Phänomene zu ermöglichen, die bisher nicht erfasst werden konnten.

Eine Reihe solcher Effekte ergeben sich auch für das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete mikropolare Kontinuum. Erwähnt seien beispielsweise die verbleibende Reststeifigkeit gegenüber Biegung bei verschwindender Materialdicke [101], die Dispersion bei Wellenausbreitung [30] und die Verringerung des Spannungskonzentrationsfaktors eines runden Loches [64]. Da die mikropolare Theorie durch ihre Materialparameter eine inhärente Längenabhängigkeit aufweist, ermöglicht sie ebenfalls die Beschreibung von Größeneffek-

ten. Diese konnten bereits in verschiedenen Experimenten, wie z. B. durch Torsion von dünnen Kupferdrähten [37], nachgewiesen werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene bruchmechanische Aspekte des mikropolaren Kontinuums mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen einiger Rissprobleme zu beleuchten. Risse sind in diesem Zusammenhang von Interesse, da auf Grund des hohen Spannungsgradienten an der Rissspitze möglicherweise Effekte der mikropolaren Theorie zum Tragen kommen. Untersucht wird dies anhand eines Risses in homogenem Material. Weitere potentielle Einflussfaktoren stellen charakteristische Längen dar, die durch die Geometrie vorgegeben sind. Ein solcher Fall wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit zum einen durch einen Zweistoffverbund mit einem Riss parallel zum Materialübergang realisiert. Dabei entspricht der Abstand des Risses zur Grenzschicht der charakteristischen Größe. Zum anderen wird am Beispiel eines Schicht-Substrat-Verbundes, dessen Riss sich senkrecht zur Oberfläche der dünnen Schicht befindet, der Einfluss der Risslänge bzw. des Abstandes der Rissspitze vom Materialübergang analysiert.

Nach einem Literaturüberblick bezüglich der verallgemeinerten Kontinuumstheorien werden im zweiten Kapitel zunächst die kinematischen Beziehungen sowie der Bilanzgleichungen des mikropolaren Kontinuums aufgestellt. Mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik erfolgt darauf die Ableitung der konstitutiven Gleichungen für elastisches Materialverhalten. Das dritte Kapitel befasst sich mit der Implementierung der Theorie in den FE-Code ABAQUS. Aus der schwachen Formulierung resultiert über das Galerkin-Verfahren und eine geeignete Diskretisierung die Finite-Elemente-Formulierung. Die Implementierung benutzereigener Elemente wird sowohl für drei- als auch für zweidimensionale Kontinuumselemente erläutert. Über einen Reihenansatz für die Spannungen gelingt im vierten Kapitel die Herleitung einer analytischen Lösung für die Nahfelder einer Rissspitze. Dabei werden sowohl die singulären als auch die konstanten Terme berechnet und die Definition der Spannungsintensitätsfaktoren für das mikropolare Kontinuum vorgenommen. Das fünfte Kapitel zeigt schließlich die Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulationen. Nach Verifikation der Implementierung anhand des analytischen Ergebnisses erfolgt für den Riss in homogenem Material die Bestimmung der verschiedenen Spannungsintensitätsfaktoren in Abhängigkeit von den Materialparametern. Abschließend werden die oben genannten Beispiele des Zweistoff- bzw. Schicht-Substrat-Verbundes betrachtet. Durch Variation der jeweiligen charakteristischen Länge wird dabei die Veränderung der Spannungsintensitätsfaktoren im Vergleich zu den klassischen Resultaten untersucht.

# Kapitel 2

## Theorie des mikropolaren Kontinuums

Im Anschluß an einen kurzen historischen Überblick über die Entwicklung verallgemeinerter Kontinua widmet sich dieses Kapitel der Darstellung der Theorie des mikropolaren Kontinuums [27, 30, 34, 93, 115]. Nach Einführung grundlegender Begriffe [51, 77] wird das mikropolare Kontinuum definiert. Darauf erfolgt die Aufstellung der Bilanzgleichung und die Ableitung thermodynamisch konsistenter Materialgleichungen aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Abschließend werden die Kompatibilitätsbedingungen bestimmt und die wichtigsten Eigenschaften bzw. Gleichungen zusammengefasst.

### 2.1 Literaturüberblick

Erste Ansätze für eine allgemeinere Formulierung der klassischen Elastizitätstheorie gehen bis ins 19. Jahrhundert zurück. Während Voigt [116] bereits die Bedeutung von Rotationen und Momentenspannungen innerhalb eines Mediums erkannte, schlug Duhem [20] vor, den einzelnen Körperpunkten Richtungen zuzuweisen. Die Gebrüder Cosserat, über deren Leben einiges in dem Übersichtsartikel [102] nachzulesen ist, schufen mit ihrer umfassenden Arbeit [14] einen Meilenstein. Trotzdem wurde ihr Werk fünf Jahrzehnte lang nahezu vergessen, wahrscheinlich begründet durch die Komplexität und die schwer zugängliche Notation der Arbeit. Nur in wenigen Veröffentlichungen [53, 55, 106] fanden ihre Ideen Erwähnung. Sie wurden nahezu zeitgleich von Günther [48] sowie Erickson & Truesdell [24] wiederentdeckt. Letztere formulierten nach den Vorstellungen der Gebrüder Cosserat die Kinematik bzw. Statik für endlich verformte Stäbe und Schalen, während Günther die Theorie des dreidimensionalen Körpers für kleine Deformationen in eine zeitgemäße

Tensorarstellung übertrug. Wesentliches Merkmal des Cosserat–Kontinuums ist die Berücksichtigung von Rotationsfreiheitsgraden. Die Gebrüder Cosserat betrachteten diese in Form von sogenannten Direktoren, die ein an den Körperpunkt angeheftetes Dreibein repräsentieren. Aus den Rotationen resultieren Momente, die, bezogen auf ein Flächenelement, als Momentenspannungen in die Drehimpulsbilanz eingehen und dadurch die Symmetrie der Kraftspannungen aufheben.

Initiiert durch die Arbeiten [48] und [24] folgte in den sechziger Jahren eine wahre Flut von Veröffentlichungen. Das damalige Interesse zeigt sich auch in der Durchführung eines IUTAM–Symposiums über verallgemeinerte Kontinua [72]. Wie dessen Vorwort zu entnehmen ist, war ein ursprüngliches Ziel dieser Theorien, die Lücke zwischen atomistischen und kontinuumsmechanischen Betrachtungen zu schließen. Da es auf Grund der parallelen Entwicklungen zu verschiedenen Begriffsbildungen und resultierende Fehlinterpretationen kam (siehe hierzu [16]), stellte eine Vereinheitlichung ein weiteres Anliegen dieses Symposiums dar.

In Anlehnung an die Arbeit von Günther untersuchten Kröner und Hehl [69, 70, 52] anhand des Cosserat–Kontinuums ebenfalls den Zusammenhang zwischen Momentenspannungen und Versetzungen. Schaefer [101] konnte durch Benutzung von Spannungsfunktionen erste analytische Ergebnisse bestimmen. Mit Hilfe von rein intuitiv aufgestellten Materialgleichungen zeigte er, dass die Theorie bei reiner Biegung auch dann noch eine Reststeifigkeit liefert, wenn die Dicke der Probe nahezu verschwindet.

Von Toupin [110, 111] stammt die Theorie nicht–einfacher Materialien, die er auch als Materialien  $N$ -ten Grades bezeichnete. Dabei werden in der Energiefunktion zusätzlich zum Deformationsgradienten noch höhere Gradienten bis zur Ordnung  $N$  berücksichtigt. Als Sonderfall leitete er eine Theorie ab, die auf unterschiedliche Weise ebenfalls von Grioli [47] und Aero & Kuvshinskii [1] entwickelt wurde. Sie wird im Rahmen dieser Arbeit Couple–Stress–Theorie genannt und zeichnet sich im Vergleich zur Cosserat–Theorie dadurch aus, dass die Rotation keine unabhängige Größe darstellt, sondern mit der aus dem Verschiebungsfeld resultierenden Drehung übereinstimmt. Aus diesem Grund wird in der Literatur unter anderem auch die Bezeichnung Cosserat–Theorie mit eingeschränkter Rotation oder Pseudo–Cosserat–Theorie verwendet. Ein Vergleich der Herleitungen aus [47], [1] und [110] wurde von Mindlin & Tiersten [86] sowie Koiter [67] durchgeführt. Des Weiteren werden in deren Arbeiten verschiedene Probleme für die Couple–Stress–Theorie gelöst. Beispielsweise konnte gezeigt werden, dass bei der Ausbreitung von Transversalwellen Dispersion auftritt. Die Bestimmung des Spannungskonzentrationsfaktors eines

kreisrunden Loches gelang Mindlin [81]. Die beiden letztgenannten Beispiele konnten von Neuber [90, 91, 92] sowie Kaloni & Ariman [64] für die Cosserat–Theorie gelöst werden.

Eine weitere Verallgemeinerung des Cosserat–Kontinuums bildet die Arbeit von Mindlin [82]. Er ordnete jedem materiellen Punkt ein sogenanntes Mikrovolumen zu, das nicht nur rotieren kann, sondern auch deformierbar ist. Allerdings wird dessen Verschiebungsgradient als konstant vorausgesetzt, wodurch nur eine homogene Deformation der Substruktur möglich ist. Als Sonderfälle lassen sich einerseits die Cosserat–Theorie andererseits eine Gradiententheorie ableiten (siehe hierzu auch [83] bzw. [85]). Ihr Hauptmerkmal besteht darin, dass die freie Energie nicht nur vom Dehnungstensor sondern auch von dessen Gradienten abhängt. In einer weiteren Arbeit von Mindlin [84] wird in der Energiefunktion zusätzlich noch der Dehnungsgradient zweiter Ordnung berücksichtigt, woraus eine Theorie resultiert, die besonders zur Beschreibung von Oberflächeneffekten geeignet ist.

Parallel zur Arbeit von Mindlin entwickelten Eringen & Suhubi [36, 107] eine nichtlineare Theorie mit ähnlichem Ansatz. Wiederum wird jedem Punkt des Körpers eine Substruktur zugewiesen, die jedoch beliebig deformierbar ist. Ein solches Kontinuum wurde zunächst als einfach mikroelastisch bezeichnet, und nach Hinzunahme einer Bilanzgleichung bezüglich der Trägheit der Substruktur wurde es mikromorph genannt [26]. Aus der Einschränkung, dass sich die Substruktur wie ein starrer Körper verhält, leitete Eringen [27] aus der mikromorphen die mikropolare Theorie ab. Bis auf die eben erwähnte zusätzliche Bilanzgleichung ist sie mit der Cosserat–Theorie identisch. Obwohl im Rahmen dieser Arbeit beide Bezeichnungen gleichberechtigt sind, wird im Folgenden stets der Begriff der mikropolaren Theorie verwendet. In weiteren Arbeiten übertrug Eringen seine theoretischen Ansätze auf Fluide und Platten [25, 28, 29]. Ausführliche Darstellungen des mikropolaren bzw. mikromorphen Kontinuums sind [30, 33, 34] zu entnehmen.

Ebenfalls Mitte der sechziger Jahre schufen Green & Rivlin [44, 45] mit der Theorie des multipolaren Kontinuums ein übergeordnetes Werk. Dabei werden Multipolentwicklungen der Kräfte und Spannungen sowie der zugehörigen Verschiebungsfelder betrachtet, wobei die klassische bzw. mikromorphe Theorie den Sonderfall des monopolen bzw. dipolaren Kontinuums darstellen [43]. Zu Beginn der siebziger Jahre erfolgte durch Edelen et al. [21, 22, 35] die Formulierung einer nichtlokalen Theorie, bei der jeder materielle Punkt nicht nur mit einer infinitesimalen Umgebung sondern mit jedem Teil des Körpers wechselwirkt. Diese Annahme erfordert in den Bilanzgleichungen die Berücksichtigung von Residuen, die bei Lokalisierung dem Einfluss dieser Wechselwirkungen Rechnung tragen. Des Weiteren sind die konstitutiven Beziehungen Funktionale der Bewegung und Defor-

mation aller Körperpunkte. Eringen [32, 33] leitete daraus einerseits die linearisierte Form ab und schuf andererseits die Verbindung der nichtlokalen Theorie zu einer mikromorphen Theorie höheren Grades [31], bei der Momente beliebiger Ordnung berücksichtigt werden.

All diese Theorien geben die wesentlichen Schritte bei der Entwicklung verallgemeinerter Kontinua wieder. Die Angabe von konstitutiven Gleichungen beschränkte sich dabei auf elastisches Materialverhalten. Erste Ansätze zur Berücksichtigung der Plastizität stammen von Lippmann [78] und Besdo [9]. Weitere Entwicklungen in dieser Richtung wurden z. B. von de Borst [18], Steinmann [104] und Grammenoudis & Tsakmakis [42] durchgeführt.

Der vorliegenden Arbeit wird das elastische mikropolare Kontinuum zu Grunde gelegt. Durch die Berücksichtigung von Rotationsfreiheitsgraden und Momentenspannungen bietet es weitreichende zusätzliche Möglichkeiten im Vergleich zur klassischen Elastizität, bleibt jedoch trotzdem mathematisch handhabbar.

## 2.2 Grundlagen der Kinematik

Grundlage der folgenden kontinuumsmechanischen Betrachtungen ist der materielle Körper  $\mathcal{B}$ , der aus einer Menge materieller Punkte  $\mathcal{X}$  gebildet wird. Im dreidimensionalen Euklidischen Punktraum  $E$  kann nach Festlegung eines Ursprungs  $O$  in  $E$  und eines raumfesten Koordinatensystems mit dem Nullpunkt  $O$  jedem materiellen Punkt  $\mathcal{X}$  ein Ortsvektor  $\mathbf{X}$  zugeordnet werden. Der so erhaltene Bildbereich  $\mathcal{R}_R$  ist der Raumbereich, den der Körper in der zeitlich konstanten Referenzkonfiguration einnimmt. Bezüglich der Momentankonfiguration, die von der Zeit  $t$  abhängt, wird der zugehörige Raumbereich mit  $\mathcal{R}_t$  bezeichnet und jeder materielle Punkt  $\mathcal{X}$  mit einem Ort  $\mathbf{x}$  identifiziert (siehe Abb. 2.1). Dieser lässt sich als einparametrische Schar von Konfigurationen durch die Bewegung

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

beschreiben. Es wird angenommen, dass zu einem festen Zeitpunkt  $t$  die Inverse der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

existiere. Die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  eines Punktes ergibt sich aus der materiellen Zeitableitung der Bewegung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (2.3)$$



Die Deformation des Körpers kann mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ ,

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad , \quad (2.4)$$

beschrieben werden, wobei Grad der Gradientenoperator bezüglich der Referenzkonfiguration ist. Gemäß

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

bildet der Deformationsgradient ein materielles Linienelement der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{X}$  in ein materielles Linienelement der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$  ab. Es wird  $\det \mathbf{F} > 0$  vorausgesetzt. Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  ist durch

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) := \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.6)$$

definiert. Mit Hilfe des Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) := \text{Grad } \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.7)$$

und des Einheitstensors  $\mathbf{1}$  kann der Deformationsgradient durch

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{1} \quad (2.8)$$

ausgedrückt werden.

Alle bisherigen Aussagen gelten für das klassische Kontinuum, das im Folgenden als Makrokontinuum bezeichnet wird. Um in einer rein phänomenologischen Theorie die Mikrostruktur berücksichtigen zu können, wird jedem materiellen Punkt  $\mathcal{X}$  zunächst als Substruktur ein materieller Körper  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{X})$  zugewiesen (siehe z. B. [30, S. 628ff.] und [36]). Dieser wird als eigenständiges Kontinuum, das sogenannte Mikrokontinuum, behandelt. Er nimmt in einer lokalen Umgebung um  $\mathcal{X}$  in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{R}_R^{(l)}$  und in der Momentankonfiguration  $\mathcal{R}_t^{(l)}$  als Raumbereich ein. Der Ort eines Punktes des Mikrokontinuums wird ausgehend von  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{x}$  durch den lokalen Ortsvektor  $\Xi$  in  $\mathcal{R}_R^{(l)}$  bzw.  $\xi$  in  $\mathcal{R}_t^{(l)}$  beschrieben (siehe Abb. 2.1). Die Bewegungsgleichung für das Mikrokontinuum lautet

$$\xi = \hat{\xi}(\mathbf{X}, \Xi, t) = \bar{\xi}(\mathbf{x}, \Xi, t) \quad . \quad (2.9)$$

Ähnlich wie für das Makrokontinuum wird angenommen, dass dazu die Inverse relativ zu  $\Xi$

$$\Xi = \hat{\Xi}(\mathbf{X}, \xi, t) = \bar{\Xi}(\mathbf{x}, \xi, t) \quad (2.10)$$

existiere. Die zugehörige Geschwindigkeit ergibt sich aus

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t) = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\Xi}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Xi}, t) = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{v}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) \quad . \quad (2.11)$$

Sie kann für festes  $\mathbf{X}$  und  $t$  um  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  in eine Taylorreihe

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, \mathbf{0}, t) + \left. \frac{\partial \mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \boldsymbol{\xi} + \dots \quad (2.12)$$

entwickelt werden. Es wird vorausgesetzt, dass die Punkte  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{x}$  jeweils im Massenschwerpunkt des Körpers  $\mathcal{M}$  liegen. Somit gilt

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

und daraus folgend

$$\mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{X}, \mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \quad . \quad (2.14)$$

Definiert man für das Mikrokontinuum den Geschwindigkeitsgradienten an der Stelle  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  als

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}, t) := \left. \frac{\partial \mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \quad , \quad (2.15)$$

ergibt sich für die Geschwindigkeit in linearer Näherung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi} \quad . \quad (2.16)$$

## 2.3 Definition des mikropolaren Kontinuums

Die Vereinbarung, dass jedem einzelnen materiellen Punkt wiederum ein materieller Körper zugeordnet wird, ist Ausgangspunkt für eine Reihe verschiedener kontinuumsmechanischer Modelle, wie z.B. den mikromorphen Kontinua [26, 31] oder einer von Mindlin entwickelten Theorie [82] (vergleiche Kapitel 2.1). Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit beschäftigen sich mit dem Spezialfall des mikropolaren Kontinuums. Es zeichnet sich dadurch aus, dass als Bewegung des Mikrokontinuums lediglich eine eigentliche Rotation zugelassen wird. Da es sich hierbei um eine homogene Deformation innerhalb der lokalen Umgebung handelt, kann das mikropolare Kontinuum über die Eigenschaft

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{R}_M \boldsymbol{\Xi} \quad (2.17)$$

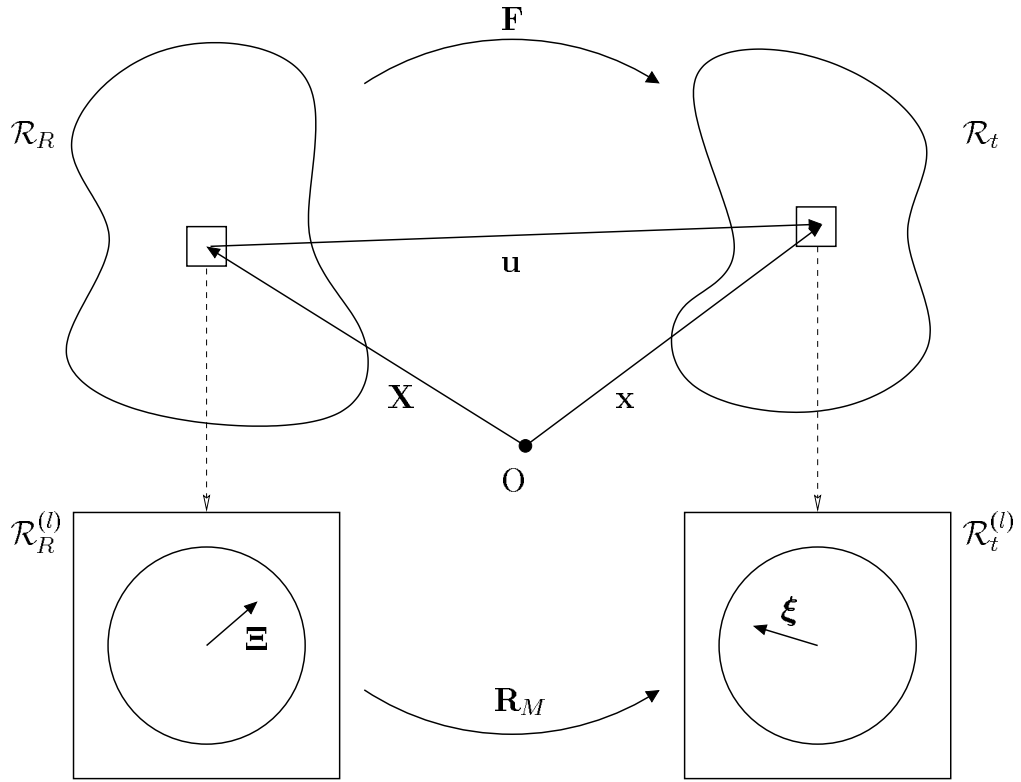


Abbildung 2.1: Konfiguration und Deformation des mikropolaren Kontinuums

mit

$$\mathbf{R}_M = \hat{\mathbf{R}}_M(\mathbf{X}, t) \quad , \quad \mathbf{R}_M^T = \mathbf{R}_M^{-1} \quad , \quad \det \mathbf{R}_M^T = 1 \quad (2.18)$$

definiert werden. Dabei wird durch den eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}_M$  lokal am materiellen Punkt  $\mathcal{X}$  die Rotation des materiellen Körpers  $\mathcal{M}$  des Mikrokontinuums vermittelt.

In Analogie zum Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$  (2.8) wird der Verschiebungsgradient des Mikrokontinuums  $\boldsymbol{\Phi} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{X}, t)$  so eingeführt, dass

$$\mathbf{R}_M = \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{1} \quad (2.19)$$

gilt. Die materielle Zeitableitung von Gleichung (2.17) liefert

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{R}}_M \boldsymbol{\Xi} = \dot{\mathbf{R}}_M \mathbf{R}_M^T \boldsymbol{\xi} \quad . \quad (2.20)$$

Mit Hilfe der Identität  $\frac{d}{dt} \mathbf{1} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_M \mathbf{R}_M^T) = \dot{\mathbf{R}}_M \mathbf{R}_M^T + \mathbf{R}_M \dot{\mathbf{R}}_M^T = \mathbf{0}$  und den Gleichungen (2.20) und (2.16) folgt schließlich

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}_M \mathbf{R}_M^T = -\boldsymbol{\Omega}^T \quad . \quad (2.21)$$

Allgemein kann die Abbildung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{d}$  durch einen antisymmetrischen Tensor  $\mathbf{P} = -\mathbf{P}^T$  gemäß

$$\mathbf{P} \mathbf{d} = \mathbf{p} \times \mathbf{d} \quad , \quad p_k = \frac{1}{2} e_{ijk} P_{ji} \quad , \quad P_{ji} = e_{ijk} p_k \quad (2.22)$$

mit einem zugeordneten axialen Vektor  $\mathbf{p}$  dargestellt werden. Auf diese Art wird im Folgenden der antisymmetrische Tensor  $\boldsymbol{\Omega}$  durch seinen axialen Vektor

$$\boldsymbol{\omega}_k = \frac{1}{2} e_{ijk} \Omega_{ji} \quad (2.23)$$

ersetzt. Wie in Kapitel 2.5.1 zu sehen sein wird, stellt  $\boldsymbol{\omega}$  in der linearen Theorie die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Mikrokontinuums dar.

## 2.4 Bilanzgleichungen

### 2.4.1 Erhaltungssatz der Masse

Sowohl für das Makro- als auch für das Mikrokontinuum wird der materielle Körper oder Teilkörper als geschlossenes System betrachtet. Es gibt keine Erzeugung oder Vernichtung von Masse und keinen Massenfluss durch materielle Flächen. Somit besagt der Erhaltungssatz der Masse, dass die Masse des Makrokontinuums  $m$  bzw. des Mikrokontinuums  $m_M$  zeitlich konstant ist. Dies ergibt

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} dm = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} m_M = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} dm_M = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Der Zusammenhang zwischen  $m$  und  $m_M$  ergibt sich aus der Definition, dass ein infinitesimales Volumenelement  $dm$  des Makrokontinuums am Ort  $\mathbf{X}$  der Gesamtmasse  $m_M(\mathbf{X})$  des zugeordneten materiellen Körpers  $\mathcal{M}$  entspricht:

$$dm := m_M \quad . \quad (2.25)$$

Nach Einführung der Massendichten  $\rho_R = \hat{\rho}_R(\mathbf{X}, t)$  in  $\mathcal{R}_R$  und  $\rho = \bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$  in  $\mathcal{R}_t$  sowie den entsprechenden infinitesimalen Volumenelementen  $dV$  und  $dv$  und Anwendung des Lokalisationssatzes (siehe [49], S. 38) ergibt sich für das Makrokontinuum in lokaler Form die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$dm = \rho_R dV = \rho dv = \text{const.} \quad . \quad (2.26)$$

## 2.4.2 Impulssatz

Um die Impulsbilanz für das Makrokontinuum aufstellen zu können, wird zunächst der Impuls des Mikrokontinuums  $\mathbf{I}_M$  durch

$$\mathbf{I}_M = \hat{\mathbf{I}}_M(\mathbf{X}, t) := \int_{\mathcal{M}} \frac{d}{dt} (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) dm_M \quad (2.27)$$

definiert. Da vorausgesetzt wird, dass  $\mathbf{x}$  dessen Schwerpunkt bildet, gilt [41, S. 73]

$$\int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{\xi} dm_M = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{M}} \dot{\boldsymbol{\xi}} dm_M = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

und man erhält

$$\mathbf{I}_M = \int_{\mathcal{M}} \dot{\mathbf{x}} dm_M = \dot{\mathbf{x}} m_M \quad . \quad (2.29)$$

Dem materiellen Punkt  $\mathcal{X}$  wird als Impuls  $d\mathbf{I}$  derjenige des zugehörigen Körpers  $\mathcal{M}$  zugeordnet

$$d\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{X}, t) := \dot{\mathbf{x}} \rho dv = \mathbf{I}_M \quad (2.30)$$

und durch Integration über den gesamten materiellen Körper  $\mathcal{B}$  erhält man den Gesamtimpuls des Makrokontinuums

$$\mathbf{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{I}_M = \int_{\mathcal{R}_t} \dot{\mathbf{x}} \rho dv \quad . \quad (2.31)$$

Das Axiom der Erhaltung des Impulses besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der auf den Körper einwirkenden äußeren Kräfte ist. Das in der vorliegenden Theorie betrachtete System von Kräften und Momenten ist Tab. 2.1 zu entnehmen. Resultierende Kräfte werden lediglich durch den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  und die Volumenkraftdichte  $\mathbf{b}$  erzielt, so dass der Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{t} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} dv \quad (2.32)$$

lautet, wobei  $\partial\mathcal{R}_t$  die Oberfläche von  $\mathcal{B}$  in  $\mathcal{R}_t$  symbolisiert. Somit entspricht die Impulsbilanzgleichung des mikropolaren Kontinuums exakt derjenigen der klassischen Theorie. Nach Einführung des Spannungstensors  $\mathbf{T} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$ , der gemäß

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (2.33)$$

	Bezeichnung	Symbol	Einwirkung
Kräfte	Volumenkraftdichte	$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$	in $\mathcal{R}_t$
	Spannungsvektor	$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$	auf $\partial\mathcal{R}_t$
Momente	Volumenmomentendichte	$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}}(\mathbf{x}, t)$	in $\mathcal{R}_t$
	Momentenspannungsvektor	$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$	auf $\partial\mathcal{R}_t$

Tabelle 2.1: System der äußeren Kräfte und Momente die auf den materiellen Körper  $\mathcal{B}$  einwirken

den äußeren Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  auf den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  abbildet, lässt sie sich in die lokale Form

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.34)$$

überführen.

### 2.4.3 Drehimpulssatz

Wie schon bei der Herleitung der Impulsbilanz, wird zunächst das Mikrokontinuum betrachtet. Dessen Drehimpuls bezogen auf den Nullpunkt  $\mathbf{O}$  ist durch

$$\mathbf{D}_M = \hat{\mathbf{D}}_M(\mathbf{X}, t) := \int_{\mathcal{M}} (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) \times \frac{d}{dt} (\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}) dm_M \quad (2.35)$$

definiert. Da  $\mathbf{x}$  für  $\mathcal{M}$  fest vorgegeben ist, folgt unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.28) und (2.16)

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} m_M + \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi} dm_M \quad . \quad (2.36)$$

Nach Übergang zur Indexnotation (in der gesamten Arbeit gilt die Einstein'sche Summenkonvention) ergibt der letzte Term

$$\int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi} dm_M = e_{ijk} \Omega_{jn} \left( \int_{\mathcal{M}} \xi_i \xi_n dm_M \right) \mathbf{e}_k \quad , \quad (2.37)$$

wobei  $e_{ijk}$  das Permutationssymbol und  $\mathbf{e}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) Vektor einer Orthonormalbasis ist. Der Klammerausdruck ist die Matrixdarstellung des Trägheitstensors des Mikrokontinuums, der durch den symmetrischen Tensor ( $\otimes$  symbolisiert das dyadische Produkt)

$$\Theta = \Theta^T = \hat{\Theta}(\mathbf{X}, t) := \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi} dm_M \quad (2.38)$$

definiert ist (siehe [8, S. 70]). Somit lässt sich Gleichung (2.36) als

$$\mathbf{D}_M = (\mathbf{D}_M)_k \mathbf{e}_k = e_{ijk} (x_i \dot{x}_j m_M + \Theta_{in} \Omega_{jn}) \mathbf{e}_k \quad (2.39)$$

schreiben.

In analoger Weise zur Herleitung des Impulses berechnet sich der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{D}$  des Makrokontinuums durch Integration über alle materiellen Punkte  $\mathcal{X}$ , denen jeweils der Drehimpuls des Mikrokontinuums zugeordnet wird. Wird der Eigendrehimpuls (oder Spin)  $\boldsymbol{\sigma}$  von  $\mathcal{X}$  durch

$$\boldsymbol{\sigma} \rho dv := \int_{\mathcal{M}} \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\xi} dm_M \quad (2.40)$$

definiert, gilt

$$\mathbf{D}(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{D}_M = \int_{\mathcal{R}_t} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\sigma}) \rho dv \quad . \quad (2.41)$$

Das Axiom der Erhaltung des Drehimpulses lautet: die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich der Summe der auf den Körper wirkenden Momente. Diese können, wie in der klassischen Theorie, durch die äußeren Kräfte  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  entstehen. Des Weiteren werden nun aber noch direkt Momente an der Oberfläche und im Inneren des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  berücksichtigt. Wie dem Kraftsystem in Tab. 2.1 zu entnehmen ist, werden diese durch den Momentenspannungsvektor  $\mathbf{m}$  und die Volumenmomentendichte  $\mathbf{l}$  repräsentiert. Auf den Nullpunkt  $\mathbf{O}$  bezogen lautet der Drehimpulssatz

$$\frac{d}{dt} \mathbf{D}(\mathcal{B}, t) = \int_{\partial \mathcal{R}_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{t} + \mathbf{m}) da + \int_{\mathcal{R}_t} (\mathbf{x} \times \mathbf{b} + \mathbf{l}) dv \quad . \quad (2.42)$$

Um die lokale Form bestimmen zu können, wird der Momentenspannungstensor  $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t)$  gemäß

$$\mathbf{m} = \mathbf{M} \mathbf{n} \quad (2.43)$$

eingeführt. Analog zum Spannungstensor  $\mathbf{T}$  (siehe z. B. [112, S. 138ff.]) kann seine Existenz aus der Drehimpulsbilanz (2.42) durch Betrachtung einer Folge ähnlicher Tetraeder bewiesen werden. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes kann nun das Oberflächenintegral in (2.42) auf gewohnte Weise in ein Volumenintegral umgewandelt werden. Durch Anwendung des Lokalisationssatzes und Berücksichtigung der lokalen Form der Impulsbilanz (2.34) gilt

$$M_{kl,l} + e_{ijk}T_{ji} + l_k = \rho\dot{\sigma}_k \quad , \quad (2.44)$$

wobei  $(\cdot)_{,l}$  für die partielle Ableitung  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_l}$  steht. Nach Definition des Vektors  $\mathbf{t}^*$  durch

$$t_k^* := e_{ijk}T_{ji} \quad (2.45)$$

erhält man

$$\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{t}^* + \mathbf{l} = \rho\dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.46)$$

als lokale Form der Drehimpulsbilanz. Vergleich mit Gleichung (2.22) zeigt, dass  $\mathbf{t}^*$  genau dem Doppelten des axialen Vektors entspricht, der dem antisymmetrischen Teil des Spannungstensors zugeordnet werden kann.

In der klassischen Elastizitätstheorie lautet die Drehimpulsbilanz  $e_{ijk}T_{ji} = 0$ , woraus sich die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors ergibt. Wie man an Gleichung (2.44) erkennt, entsteht durch Hinzunahme von Momentenspannungen eine zusätzliche Feldgleichung und die Symmetrie des Spannungstensors wird aufgehoben.

Es gilt zu beachten, dass die Definition des mikropolaren Kontinuums (2.17) weder in die Impuls- noch in die Drehimpulsbilanz eingegangen ist. Deshalb gelten alle bisherigen Erhaltungssätze allgemein für Kontinua, denen beliebig deformierbare Körper als materielle Punkte zugeordnet werden.

#### 2.4.4 Bilanz der mechanischen Leistung

Die Bilanz der mechanischen Leistung stellt keine unabhängige Gleichung dar, sondern ist eine direkte Folgerung aus der Impuls- und der Drehimpulsbilanz. Allerdings wird sie in Kapitel 2.4.5 benötigt, um den ersten Hauptsatz der Thermodynamik geeignet formulieren zu können.

Der Anteil des Impulses zur mechanischen Leistung wird aus Gleichung (2.34) durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{x}}$  und anschließender Integration über  $\mathcal{B}$  berechnet.



Unter Berücksichtigung von  $\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}}$  und der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} := \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}} \quad (2.47)$$

ergibt sich

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} dv + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rho dv \quad . \quad (2.48)$$

Hierbei handelt es sich auf der linken Seite um die Leistung der äußeren Kräfte, während auf der rechten Seite der erste Term die Spannungsleistung der inneren Kräfte und der zweite die zeitliche Änderung der kinetischen Energie infolge von Translationen repräsentieren.

Durch Multiplikation der Drehimpulsbilanz mit  $\boldsymbol{\omega}$  lässt sich analog der Beitrag des Drehimpulses herleiten. Dieser lautet

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} da + \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} dv = \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} dv - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega} dv + \int_{\mathcal{R}_t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} \rho dv \quad . \quad (2.49)$$

Hier steht auf der linken Seite die Leistung der äußeren Momente. Die ersten beiden Terme der rechten Seite stammen von den inneren Momenten und der letzte Term beschreibt die zeitliche Änderung der kinetischen Energie, die durch die Rotation des Mikrokontinuums erzeugt wird.

Es lässt sich zeigen (siehe Anhang A.1), dass

$$\int_{\mathcal{R}_t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} \rho dv = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} \rho dv \quad (2.50)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}} := (\operatorname{Sp} \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{1} - \boldsymbol{\Theta} \quad (2.51)$$

gilt.

Die Gesamtbilanz der mechanischen Leistung erhält man durch Addition der beiden Beiträge (2.48) und (2.49). Dies führt zur Definition der kinetischen Energie

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \left( \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} \right) \rho dv \quad , \quad (2.52)$$

der Leistung der äußeren Kräfte und Momente

$$\mathcal{L}_a = \int_{\partial\mathcal{R}_t} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) da + \int_{\mathcal{R}_t} (\mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}) dv \quad (2.53)$$

und der Leistung der inneren Kräfte und Momente

$$\mathcal{L}_i = \int_{\mathcal{R}_t} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega}) dv \quad . \quad (2.54)$$

Somit lautet die Gesamtbilanz der mechanischen Leistung

$$\frac{d}{dt} K = \mathcal{L}_a - \mathcal{L}_i \quad . \quad (2.55)$$

## 2.4.5 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Im Rahmen der sogenannten rationalen Thermodynamik, deren Gültigkeit in dieser Arbeit vorausgesetzt wird, wird gefordert, dass die Materialgleichungen stets den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen. Im Folgenden wird zunächst der erste Hauptsatz der Thermodynamik aufgestellt, der die Erhaltung der totalen Energie des betrachteten Systems postuliert. Mit dessen Hilfe wird der zweite Hauptsatz in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung geeignet formuliert und daraus Restriktionen für die Materialgleichungen abgeleitet (siehe hierzu z. B. [13] und [114, Kap. E]). Hierfür werden zu den bisher rein mechanischen Größen einige neue Größen eingeführt, die sich im Weiteren stets auf das Makrokontinuum beziehen.

Die Gesamtenergie ist die Summe der kinetischen Energie  $K$  und der inneren Energie  $E$ , die sich mit der spezifischen inneren Energie  $e = \bar{e}(\mathbf{x}, t)$  durch

$$E = \int_{\mathcal{R}_t} e \rho dv \quad (2.56)$$

darstellen lässt. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt, dass die zeitliche Änderung der totalen Energie gleich der von außen zugeführten Energieänderung ist. Diese Energiezufuhr besteht einerseits aus einem mechanischen Anteil, der Leistung der äußeren Kräfte  $\mathcal{L}_a$ , andererseits aus einem thermischen Anteil, der sogenannten Wärmezufuhr  $Q$ . Diese ergibt sich aus

$$Q = \int_{\partial\mathcal{R}_t} q da + \int_{\mathcal{R}_t} r \rho dv \quad . \quad (2.57)$$

Die Wärmestrahlung  $r$  beschreibt den Anteil, der im Inneren erzeugt wird, während die Wärmeflussdichte  $q$  den Fluss durch die Oberfläche repräsentiert. Mit Hilfe des Wärmeflussvektors  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$  lässt sich

$$q = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (2.58)$$

schreiben.

Mathematisch formuliert lautet der erste Hauptsatz

$$\frac{d}{dt} (K + E) = \mathcal{L}_a + Q \quad . \quad (2.59)$$

Zusammen mit der Bilanzgleichung der mechanischen Leistung (2.55) liefert dies

$$\dot{E} - \mathcal{L}_i - Q = 0 \quad . \quad (2.60)$$

Einsetzen der Gleichungen (2.54), (2.56) und (2.57) liefert

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{R}_t} e \rho \, dv - \int_{\mathcal{R}_t} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega}) \, dv - \int_{\partial \mathcal{R}_t} q \, da - \int_{\mathcal{R}_t} r \rho \, dv = 0 \quad . \quad (2.61)$$

Nach Berücksichtigung von Gleichung (2.58) lässt sich dies mit Hilfe des Lokalisationsatzes in die lokale Form des ersten Hauptsatzes

$$\rho \dot{e} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{M} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\omega} + \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega} + \text{div } \mathbf{q} - \rho r = 0 \quad (2.62)$$

überführen.

## 2.4.6 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Der Theorie des mikropolaren Kontinuums soll ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell zu Grunde liegen. Dies bedeutet, dass die Materialgleichungen stets den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik erfüllen müssen. Zu seiner Formulierung wird zunächst die Entropie  $H$  benötigt, die als Integral über die spezifische Entropie  $\eta$  dargestellt werden kann:

$$H = \int_{\mathcal{R}_t} \eta \rho \, dv \quad . \quad (2.63)$$

Mit  $\theta$  als absoluter Temperatur ( $\theta > 0$ ) lautet die Bilanzgleichung der Entropie

$$\dot{H} = - \int_{\partial \mathcal{R}_t} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\mathcal{R}_t} \left( \frac{r}{\theta} + \gamma \right) \rho \, dv \quad . \quad (2.64)$$

Zusätzlich zur Entropieproduktion durch die Umgebung, repräsentiert durch  $\mathbf{q}/\theta$  und  $r/\theta$ , werden durch die spezifische Entropieproduktion  $\gamma$  irreversible Prozesse im Inneren des Körpers berücksichtigt [114, §258]. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius–Duhem–Ungleichung besagt, dass

$$\int_{\mathcal{R}_t} \gamma \rho \, dv \geq 0 \quad (2.65)$$

erfüllt sein muss.

Wird die Bilanzgleichung (2.64) unter Berücksichtigung von  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta$  in ihre lokale Form überführt, erhält man mit Hilfe der Energiebilanz (2.62)

$$\theta \dot{\eta} - \dot{e} + \frac{1}{\rho} \left( \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad} \theta \right) \geq 0 \quad . \quad (2.66)$$

Mittels einer Legendre–Transformation kann die innere Energie  $e$  durch die Helmholtz’sche freie Energie  $\psi$ ,

$$\psi = e - \theta \eta \quad , \quad (2.67)$$

ersetzt werden (siehe z. B. [7, S. 8ff.]). Unter der Annahme, dass im Folgenden rein isotherme Prozesse mit homogener Temperaturverteilung betrachtet werden, lautet die Clausius–Duhem–Ungleichung:

$$-\rho \dot{\psi} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0 \quad . \quad (2.68)$$

Abschließend sei auf eine alternative Herleitung der Bilanzgleichungen durch Eringen und Suhubi [36] verwiesen. Ausgangspunkt hierbei ist die Annahme, dass für das Mikrokontinuum die klassischen Bilanzgleichungen gelten. Aus der Impulsbilanz multipliziert mit einer Gewichtsfunktion wird durch eine integrale Mittelung sowohl die Impuls– als auch die Drehimpulsbilanz für das Makrokontinuum hergeleitet. Erstere entspricht Gleichung (2.34), während die Drehimpulsbilanz allgemeineren Charakter als (2.46) besitzt.

Des Weiteren sei erwähnt, dass Eringen [25] für den mikropolaren Körper noch eine zusätzliche Bilanzgleichung formuliert, die die Erhaltung der Trägheitsmomente des Mikrokontinuums besagt. Ihr kommt in der linearen Theorie jedoch keine Bedeutung zu [34, S. 116].

## 2.5 Lineare, mikropolare Elastizität

### 2.5.1 Elastische freie Energiefunktion und geometrische Linearisierung

Alle bisherigen Gleichungen sind allgemein für mikropolare Kontinua gültig. Das Verhalten des betrachteten Materials wird durch das Materialgesetz, den sogenannten konstitutiven Gleichungen, ausgedrückt, wobei im Rahmen dieser Arbeit reine Elastizität behandelt wird.

Es wird angenommen, dass für die spezifische freie Energie eines elastischen, mikropolaren Kontinuums

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{R}_M, \text{Grad } \mathbf{R}_M) \quad (2.69)$$

gilt. Neben dem Einfluss des klassischen Deformationsgradienten und des Rotationstensors des Mikrokontinuums wird durch dessen Gradient, einem Tensor dritter Stufe, eine zusätzliche Abhängigkeit von der Nachbarschaft des materiellen Punktes berücksichtigt. Wie in Anhang A.2 gezeigt wird, kann Gleichung (2.69) durch Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität in

$$\psi = \check{\psi}(\mathbf{F}^T \mathbf{R}_M, \mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{R}_M) \quad (2.70)$$

überführt werden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Theorie unter Voraussetzung kleiner Deformationen verwendet. Dies hat zur Folge, dass für die Verschiebungsgradienten des Makrokontinuums  $\mathbf{H}$  bzw. des Mikrokontinuums  $\mathbf{\Phi}$

$$\|\mathbf{H}\| \ll 1, \quad \|\dot{\mathbf{H}}\| \ll 1, \quad \|\mathbf{\Phi}\| \ll 1, \quad \|\dot{\mathbf{H}}\| \ll 1 \quad (2.71)$$

gelten muss. Dasselbe gilt für alle räumlichen Ableitungen dieser Größen.  $\|\cdot\|$  stellt hierbei die euklidische Norm dar, die für einen Tensor  $\mathbf{P}$  durch  $\|\mathbf{P}\| := \sqrt{\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}}$  definiert ist.

Mit den eben genannten Bedingungen kann nun die geometrische Linearisierung vorgenommen werden, bei der Terme ab zweiter Ordnung in den oben genannten Größen vernachlässigt werden. Diese ergibt für den Geschwindigkeitsgradienten der Mikrostruktur (2.15) zusammen mit Gleichungen (2.19) und (2.21)

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{\Phi}} (\mathbf{\Phi} + \mathbf{1})^T \approx \dot{\mathbf{\Phi}} = -\dot{\mathbf{\Phi}}^T \quad . \quad (2.72)$$

Somit ist auch  $\Phi = -\Phi^T$  antisymmetrisch und kann durch seinen axialen Vektor  $\varphi$  ersetzt werden:

$$\varphi_k = \frac{1}{2} e_{ijk} \Phi_{ji} \quad \text{bzw.} \quad \Phi_{ji} = e_{ijk} \varphi_k \quad . \quad (2.73)$$

Jedem materiellen Punkt wird dadurch ein Drehvektor zugeordnet, der die Rotation des Mikrokontinuums charakterisiert. Daraus ergibt sich als weitere wichtige Eigenschaft des mikropolaren Kontinuums, dass jeder materielle Punkt neben den Verschiebungsfreiheitsgraden zusätzlich Rotationsfreiheitsgrade besitzt, die durch  $\varphi$  beschrieben werden.

$\dot{\varphi}$  ist die zugehörige Winkelgeschwindigkeit und nach (2.72) und (2.23) gilt

$$\dot{\varphi} = \omega \quad . \quad (2.74)$$

Die Linearisierung der in der freien Energiefunktion (2.70) vorkommenden Terme führt zu:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{R}_M = (\mathbf{H}^T + \mathbf{1}) (\Phi + \mathbf{1}) \approx \mathbf{H}^T + \Phi + \mathbf{1} \quad , \quad (2.75)$$

$$\mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{R}_M = (\mathbf{H}^T + \mathbf{1}) \text{Grad } \mathbf{R}_M \approx \text{Grad } \Phi \quad . \quad (2.76)$$

Zur Beschreibung des Deformationszustandes lassen sich schließlich mit Gleichung (2.73) für die lineare Theorie zwei Tensoren definieren, die als Verzerrungstensor  $\epsilon$  und Krümmungstensor  $\kappa$  bezeichnet werden:

$$\epsilon := \mathbf{H}^T + \Phi \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{ij} = u_{j,i} - e_{ijk} \varphi_k \quad , \quad (2.77)$$

$$\kappa := \text{Grad } \varphi \quad \text{bzw.} \quad \kappa_{ij} = \varphi_{i,j} \quad . \quad (2.78)$$

Bei Elastizität liefert die lineare Theorie für die spezifische freie Energie folgende Abhängigkeit:

$$\psi = \tilde{\psi}(\epsilon, \kappa) \quad . \quad (2.79)$$

Zur Herleitung der konstitutiven Gleichungen wird nun noch die Clausius–Duhem–Ungleichung (2.68) in linearisierter Form benötigt. Aus den Gleichungen (2.23), (2.45) und (2.72)–(2.74) folgt:

$$\mathbf{t}^* \cdot \omega = \frac{1}{2} e_{imn} e_{ijk} T_{nm} \Omega_{kj} \approx -T_{nm} \dot{\Phi}_{mn} = -\mathbf{T} \cdot \dot{\Phi}^T \quad . \quad (2.80)$$

Mit der Beziehung  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  [51, S. 16] gilt  $\mathbf{L} \approx \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{1} - \mathbf{H}) \approx \dot{\mathbf{H}}$ , womit

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{t}^* \cdot \boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{T} \cdot (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\boldsymbol{\Phi}}^T) = \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \quad (2.81)$$

geschrieben werden kann. Somit lautet die Clausius–Duhem–Ungleichung der linearen Theorie:

$$-\rho \dot{\psi} + \mathbf{T} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T + \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad -\rho \dot{\psi} + T_{kl} \cdot \dot{\epsilon}_{lk} + M_{kl} \cdot \dot{\kappa}_{kl} \geq 0 \quad . \quad (2.82)$$

## 2.5.2 Konstitutive Gleichungen

Analog zur spezifischen freien Energie wird für den Kraft– und den Momentenspannungstensor

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \quad , \quad \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (2.83)$$

angenommen. Einsetzen von Gleichung (2.79) in die Clausius–Duhem–Ungleichung liefert

$$\left( T_{lk} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{kl}} \right) \cdot \dot{\epsilon}_{kl} + \left( M_{kl} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_{kl}} \right) \cdot \dot{\kappa}_{kl} \geq 0 \quad . \quad (2.84)$$

Diese Ungleichung muss für alle zulässigen thermomechanischen Prozesse stets erfüllt sein. Da die Terme in den beiden Klammern geschwindigkeitsunabhängig sind und die Deformationsgeschwindigkeiten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  und  $\dot{\boldsymbol{\kappa}}$  beliebig gewählt werden können, sind die Potentialbeziehungen

$$T_{lk} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_{kl}} \quad , \quad (2.85)$$

$$M_{kl} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_{kl}} \quad (2.86)$$

notwendige und hinreichende Bedingungen für die Erfüllung der Clausius–Duhem–Ungleichung.

Als Ansatz für die spezifische freie Energie wird ein Potential gewählt, das quadratisch in den Deformationsmaßen ist:

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (A_{klmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + B_{klmn} \kappa_{kl} \kappa_{mn}) \quad . \quad (2.87)$$

Bei den Tensoren vierter Stufe  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  handelt es sich um Materialtensoren, die die Eigenschaften des jeweiligen Werkstoffes modellieren. Für sie gelten die Symmetrieeigenschaften

$$A_{klmn} = A_{mnkl} \quad , \quad B_{klmn} = B_{mnkl} \quad . \quad (2.88)$$

Während ein konstanter Term in Ansatz (2.87) keine Rolle spielt, entfällt der in  $\epsilon$  lineare Term auf Grund der angenommenen Spannungsfreiheit des undeformierten Körpers. Da bei Anwendung des Prinzips der materiellen Objektivität (siehe Anhang A.2) auch un- eigentlich orthogonale Tensoren zugelassen sind, verschwinden ebenfalls der lineare und gemischte Term mit  $\kappa$ . Denn bei einer Spiegelung des Raumes würden sie ihr Vorzeichen ändern und die Invarianz von  $\psi$  wäre verletzt [34, S. 110].

Einsetzen in die Potentialbeziehungen (2.85) und (2.86) liefert schließlich

$$T_{lk} = A_{klmn}\epsilon_{mn} \quad , \quad (2.89)$$

$$M_{kl} = B_{klmn}\kappa_{mn} \quad (2.90)$$

als konstitutive Gleichungen. Im Folgenden werden isotrope Materialien betrachtet. Dies hat zur Folge, dass  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  isotrope Tensoren vierter Stufe sind und sich die Anzahl ihrer unabhängigen Komponenten von 45 auf 3 reduziert (siehe [62, S. 302]). Diese werden so gewählt [93, S. 8], dass  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  mit Hilfe des Kroneckersymbols  $\delta_{ij}$  durch

$$A_{klmn} = \lambda \delta_{kl}\delta_{mn} + (\mu + \alpha) \delta_{km}\delta_{ln} + (\mu - \alpha) \delta_{kn}\delta_{lm} \quad , \quad (2.91)$$

$$B_{klmn} = \beta \delta_{kl}\delta_{mn} + (\gamma + \delta) \delta_{km}\delta_{ln} + (\gamma - \delta) \delta_{kn}\delta_{lm} \quad (2.92)$$

darstellbar sind. Einsetzen in (2.89) bzw. (2.90) liefert

$$T_{lk} = \lambda \epsilon_{nn}\delta_{kl} + (\mu + \alpha)\epsilon_{kl} + (\mu - \alpha)\epsilon_{lk} \quad , \quad (2.93)$$

$$M_{kl} = \beta \kappa_{nn}\delta_{kl} + (\gamma + \delta)\kappa_{kl} + (\gamma - \delta)\kappa_{lk} \quad . \quad (2.94)$$

Das isotrope, linear-elastische Materialmodell des mikropolaren Kontinuums besitzt also die sechs Materialparameter  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ , wobei  $\lambda$  und  $\mu$  den aus der klassischen Elastizitätstheorie bekannten Lamé'schen Konstanten entsprechen. Aus der Forderung, dass die spezifische freie Energie positiv definit ist, ergeben sich für die Parameter folgende Ungleichungen (siehe Anhang A.3):

$$0 \leq 3\lambda + 2\mu \quad , \quad 0 \leq \mu \quad , \quad 0 \leq \alpha \quad , \quad (2.95)$$

$$0 \leq 3\beta + 2\gamma \quad , \quad 0 \leq \gamma \quad , \quad 0 \leq \delta \quad . \quad (2.96)$$



## 2.6 Kompatibilitätsbedingungen

Nicht alle beliebigen Tensoren  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  beschreiben einen physikalisch möglichen Deformationszustand. Um sicherzustellen, dass zu vorgegebenem  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  für das Makrokontinuum ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und ein Rotationsfeld  $\boldsymbol{\varphi}$  existiert, werden die sogenannten Kompatibilitätsbedingungen benötigt. Ausgangspunkt für die Herleitung aus dem Verschiebungsfeld ist die Gleichung

$$u_{j,ik} - u_{j,ki} = 0 \quad . \quad (2.97)$$

Nach Definition des dreistufigen Krümmungstensor  $\boldsymbol{\Gamma}$  durch

$$\Gamma_{jik} := -e_{jim}\varphi_{m,k} = -e_{jim}\kappa_{mk} \quad (2.98)$$

ergibt sich aus (2.97) mit Hilfe von (2.77)

$$\epsilon_{ij,k} - \epsilon_{kj,i} + \Gamma_{jik} - \Gamma_{jki} = 0 \quad (2.99)$$

als Kompatibilitätsbedingung.

Eine weitere Forderung kann man aus dem Rotationsfeld ableiten, für das analog zu (2.97)

$$\varphi_{j,ik} - \varphi_{j,ki} = 0 \quad (2.100)$$

gelten muss. Multiplikation von Gleichung (2.98) mit  $e_{jil}$  führt zu  $\varphi_{l,k} = -\frac{1}{2}e_{jil}\Gamma_{jik}$  und Einsetzen in (2.97) liefert schließlich die zweite Kompatibilitätsbedingung:

$$\epsilon_{mnj}(\Gamma_{mni,k} - \Gamma_{mnk,i}) = 0 \quad . \quad (2.101)$$

Für den bisher verwendeten Krümmungstensor  $\boldsymbol{\kappa}$  lassen sich unter Berücksichtigung der Definition (2.98) die Kompatibilitätsbedingungen (2.99) und (2.101) folgendermaßen formulieren:

$$\epsilon_{ij,k} - \epsilon_{kj,i} - e_{jim}\kappa_{mk} + e_{jkm}\kappa_{mi} = 0 \quad , \quad (2.102)$$

$$\kappa_{mi,k} - \kappa_{mk,i} = 0 \quad . \quad (2.103)$$

## 2.7 Vergleich zur klassischen Theorie und zur Couple–Stress–Theorie

Das mikropolare Kontinuum kann als konsequente Erweiterung der klassischen Theorie betrachtet werden. Dem materiellen Punkt werden zusätzlich zu den Translationsfrei-

heitsgraden  $\mathbf{u}$  noch Rotationsfreiheitsgrade  $\boldsymbol{\varphi}$  zugeschrieben. Er erhält somit alle Freiheitsgrade eines starren Körpers. Während die Impulsbilanz unverändert bleibt, liefert die Drehimpulsbilanz durch Berücksichtigung der auftretenden Momentenspannungen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{l}$  sowie des Eigendrehimpulses  $\boldsymbol{\sigma}$  eine neue Feldgleichung. Gleichzeitig verliert der Spannungstensor seine Symmetrieeigenschaft der klassischen Theorie.

Durch den Übergang zur linearen Theorie kann für elastisches Material die Abhängigkeit der freien Energiefunktion von Tensoren bis dritter Stufe auf solche zweiter Stufe reduziert werden. Dies führt zur Definition der Deformationstensoren  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$ . Während die Krümmung  $\boldsymbol{\kappa}$  die relative Verdrehung benachbarter materieller Punkte beschreibt und somit rein aus der Rotation des Mikrokontinuums resultiert, hängt  $\boldsymbol{\epsilon}$  sowohl von  $\mathbf{u}$  als auch von  $\boldsymbol{\varphi}$  ab. Zerlegung des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_A$  in symmetrischen Teil und antisymmetrischen Teil, der nach  $(\mathbf{H}_A)_{ij} = \epsilon_{jik}r_k$  wiederum durch seinen axialen Vektor  $\mathbf{r}$  ersetzt werden kann, liefert mit (2.77)

$$\epsilon_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})}_{=: E_{ij}} + \epsilon_{ijk}(r_k - \varphi_k) \quad . \quad (2.104)$$

Wie hier zu erkennen ist, fällt der symmetrische Anteil von  $\boldsymbol{\epsilon}$  mit dem klassischen linearisierten Green'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  zusammen.

Die Clausius–Duhem–Ungleichung liefert die Potentialbeziehungen für die beiden Spannungsvektoren  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{M}$ . Aus dem quadratischen Ansatz für das Potential  $\psi$  folgen bei Isotropie zwei unabhängige Materialgleichungen mit je drei Parametern. Darunter befinden sich die beiden aus der klassischen Elastizitätslehre bekannten Lamé'schen Konstanten. Werden die vier neu hinzugekommenen Materialparameter gleich Null gesetzt, so reduziert sich die mikropolare Theorie auf die klassische Elastizität. In Tabelle 2.2 werden noch einmal die wichtigsten Gleichungen zusammengefasst.

Die mikropolare Elastizität ist des Weiteren eng mit der sogenannten Couple–Stress–Theorie, u. a. auch Cosserat–Theorie mit eingeschränkter Rotation genannt, verbunden (siehe z. B. [1], [110], [86]) . Da sie in Kapitel 4 Erwähnung findet, werden hier ihre wesentlichen Merkmale erläutert. Die Couple–Stress–Theorie zeichnet sich dadurch aus, dass zwar Momentenspannungen berücksichtigt werden und somit ebenfalls das Momentengleichgewicht (2.44) gilt, die Rotation jedoch keine unabhängige Größe mehr darstellt. Vielmehr wird sie mit der Rotation des Verschiebungsfeldes gleichgesetzt, d. h.

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad . \quad (2.105)$$

Aus (2.104) folgt somit, dass der Dehnungstensors mit dem Green'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  übereinstimmt, und das Materialgesetz der Kraftspannungen reduziert sich auf das klassische Hook'sche Gesetz. Wie in [30, S. 698ff.] gezeigt wird, ergibt sich als Konsequenz aus Gleichung (2.105), dass die antisymmetrischen Teile sowohl der Kraft- als auch der Momentenspannungen nicht aus den Grundgleichungen berechnet werden können und somit unbestimmt bleiben.

Die Couple-Stress-Theorie ist als Sonderfall für  $\alpha \rightarrow \infty$  ebenfalls in der mikropolaren Elastizität enthalten (siehe [16]). Da der Materialparameter  $\alpha$  die Steifigkeit des Mikrokontinuums bezüglich lokaler Rotation beschreibt, kann dieser Grenzübergang als völlige Behinderung dieser Rotation angesehen werden und jeder materielle Punkt erfährt lediglich die aus dem Verschiebungsfeld resultierende globale Rotation.

<u>Impulsbilanz</u>	
$T_{kl,l} + b_k = \rho \ddot{x}_k$	(2.106)
<u>Drehimpulsbilanz</u>	
$M_{kl,l} + e_{ijk} T_{ji} + l_k = \rho \dot{\sigma}_k$	(2.107)
<u>Kinematische Beziehungen</u>	
Verzerrungstensor: $\epsilon_{kl} = u_{l,k} - e_{klm} \varphi_m$	(2.108)
Krümmungstensor: $\kappa_{kl} = \varphi_{k,l}$ (bzw. $\Gamma_{ijl} := -e_{ijk} \kappa_{kl}$ )	(2.109)
<u>Konstitutive Gleichungen für isotrope, lineare Elastizität</u>	
Kraftspannungen : $T_{lk} = \lambda \epsilon_{nn} \delta_{kl} + (\mu + \alpha) \epsilon_{kl} + (\mu - \alpha) \epsilon_{lk}$	(2.110)
Momentenspannungen: $M_{kl} = \beta \kappa_{nn} \delta_{kl} + (\gamma + \delta) \kappa_{kl} + (\gamma - \delta) \kappa_{lk}$	(2.111)
<u>Kompatibilitätsbedingungen</u>	
$\epsilon_{ij,k} - \epsilon_{kj,i} + \Gamma_{jik} - \Gamma_{jki} = 0$	(2.112)
$\kappa_{mi,k} - \kappa_{mk,i} = 0$ (bzw. $e_{mnj} (\Gamma_{mni,k} - \Gamma_{mnk,i}) = 0$ )	(2.113)

Tabelle 2.2: Feldgleichungen des mikropolaren Kontinuums in der linearen Theorie

# Kapitel 3

## Finite–Elemente–Methode

Um beliebige strukturmechanische Randwertprobleme mikropolarer Kontinua lösen zu können, muss die in Kapitel 2 beschriebene Theorie in ein numerisches Verfahren umgesetzt werden. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies mit Hilfe der Finiten–Elemente–Methode (im Folgenden auch durch FEM oder FE abgekürzt). Hierzu wird die mikropolare Theorie über die Benutzerschnittstelle UEL durch eigenständig entwickelte Elemente in den kommerziellen FE-Code ABAQUS [57, 58] implementiert.

Zu Beginn des Kapitels wird die schwache Formulierung des Randwertproblems hergeleitet, auf deren Basis die Diskretisierung in Form des Galerkin–Verfahrens vorgenommen wird. Anschließend wird auf die programmtechnische Umsetzung eingegangen. Dabei werden zunächst Elemente zur Berechnung dreidimensionaler Probleme vorgestellt und darauf Elemente zur Charakterisierung des ebenen Spannungs- bzw. Dehnungszustandes abgeleitet.

### 3.1 Starke und schwache Formulierung des stationären Randwertproblems

Neben den in Tabelle 2.2 aufgeführten Gleichungen (2.106)–(2.111) werden zur vollständigen Formulierung eines stationären Problems Bedingungen für die Oberfläche des materiellen Körpers  $\partial\mathcal{R}_t$  benötigt. Auf den Teilflächen  $\partial\mathcal{R}_t^{u_i}$  und  $\partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i}$  werden Dirichlet–Randbedingungen für Verschiebungen und Rotationen und auf  $\partial\mathcal{R}_t^{t_i}$  und  $\partial\mathcal{R}_t^{m_i}$  Neumann–

Randbedingungen für Kraft- und Momentenspannungen vorgegeben:

$$u_i = u_i^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \quad , \quad \varphi_i = \varphi_i^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i} \quad , \quad (3.1)$$

$$T_{ij}n_j = t_i^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{t_i} \quad , \quad M_{ij}n_j = m_i^0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{R}_t^{m_i} \quad . \quad (3.2)$$

Dabei müssen die Beziehungen

$$\partial\mathcal{R}_t^{u_i} \cup \partial\mathcal{R}_t^{t_i} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \cap \partial\mathcal{R}_t^{t_i} = \emptyset \quad , \quad (3.3)$$

$$\partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i} \cup \partial\mathcal{R}_t^{m_i} = \partial\mathcal{R}_t \quad \wedge \quad \partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i} \cap \partial\mathcal{R}_t^{m_i} = \emptyset \quad (3.4)$$

erfüllt sein. Da im weiteren Verlauf nur stationäre Prozesse betrachtet werden, legen die Gleichgewichtsbedingungen

$$T_{ij,j} + b_i = 0 \quad , \quad (3.5)$$

$$M_{ij,j} + e_{kli}T_{lk} + l_i = 0 \quad , \quad (3.6)$$

und die Randbedingungen (3.1), (3.2) zusammen mit den kinematischen und konstitutiven Gleichungen (2.108)–(2.111) das zu lösende gemischte Randwertproblem in seiner starken Formulierung fest. Für gegebenes  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{l}$  können somit die gesuchten Größen  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  bestimmt werden.

Grundlage der Methode der finiten Elemente ist die sogenannte schwache Formulierung. Mit Hilfe der Variationsrechnung folgt sie aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (siehe z. B. [38, Kap. 10], das für die vorliegende Theorie zusätzlich unabhängige virtuelle Rotationen beinhaltet [105]). Ausgangspunkt ist das Funktional der potentiellen Energie

$$\Pi(u_i, \varphi_i) := \int_{\mathcal{R}_t} \psi(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) \rho \, dv - W_a \quad , \quad (3.7)$$

wobei die Arbeit der äußeren Einwirkungen  $W_a$  durch

$$W_a := \int_{\partial\mathcal{R}_t^{\ddagger}} t_i^0 u_i \, da + \int_{\partial\mathcal{R}_t^m} m_i^0 \varphi_i \, da + \int_{\mathcal{R}_t} (b_i u_i + l_i \varphi_i) \, dv \quad (3.8)$$

gegeben ist. Die Integration über  $\partial\mathcal{R}_t^{\ddagger}$  symbolisiert dabei in verkürzter Schreibweise die Summation der einzelnen Integrale über die im Allgemeinen unterschiedlichen Flächen  $\partial\mathcal{R}_t^{t_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (Analoges gilt für  $\partial\mathcal{R}_t^m$ ). Durchführung der ersten Variation bezüglich  $u_i$  und  $\varphi_i$ , dargestellt durch  $\delta$ , ergibt unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.77), (2.78),

(2.85) und (2.86) (vergleiche [65]):

$$\begin{aligned}\delta\Pi(u_i, \varphi_i) &= \int_{\mathcal{R}_t} \left( \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon_{ij}} \delta\epsilon_{ij} + \frac{\partial\psi}{\partial\kappa_{ij}} \delta\kappa_{ij} \right) dv - \delta W_a \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \left[ T_{ji} (\delta u_{j,i} - e_{ijk} \delta\varphi_k) + M_{ij} \delta\varphi_{i,j} \right] dv - \delta W_a\end{aligned}\quad (3.9)$$

mit

$$\delta W_a = \int_{\partial\mathcal{R}_t^0} t_i^0 \delta u_i da + \int_{\partial\mathcal{R}_t^m} m_i^0 \delta\varphi_i da + \int_{\mathcal{R}_t} (b_i \delta u_i + l_i \delta\varphi_i) dv \quad . \quad (3.10)$$

Dabei gilt es zu beachten, dass die Variation und die partielle Differentiation vertauscht werden können (siehe [46, S. 69]). Das Theorem vom Minimum der potentiellen Energie liefert für den Gleichgewichtszustand die notwendige Bedingung

$$\delta\Pi = 0 \quad , \quad (3.11)$$

woraus schließlich die Grundgleichung der schwachen Formulierung

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{R}_t} \left[ T_{lk} (\delta u_{l,k} - e_{klm} \delta\varphi_m) + M_{kl} \delta\varphi_{k,l} \right] dv \\ &= \int_{\partial\mathcal{R}_t^0} t_k^0 \delta u_k da + \int_{\partial\mathcal{R}_t^m} m_k^0 \delta\varphi_k da + \int_{\mathcal{R}_t} (b_k \delta u_k + l_k \delta\varphi_k) dv\end{aligned}\quad (3.12)$$

resultiert.

Die gesuchten Lösungsfunktionen  $u_i$  und  $\varphi_i$  entstammen den Funktionenräumen

$$\mathcal{S}_i = \{ u_i \mid u_i \in \mathcal{H}^1, u_i = u_i^0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \} \quad , \quad (3.13)$$

$$\mathcal{T}_i = \{ \varphi_i \mid \varphi_i \in \mathcal{H}^1, \varphi_i = \varphi_i^0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i} \} \quad , \quad (3.14)$$

während die Mengen aller möglichen Variationen  $\delta u_i$  und  $\delta\varphi_i$  durch

$$\mathcal{V}_i = \{ \delta u_i \mid \delta u_i \in \mathcal{H}^1, \delta u_i = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}_t^{u_i} \} \quad , \quad (3.15)$$

$$\mathcal{W}_i = \{ \delta\varphi_i \mid \delta\varphi_i \in \mathcal{H}^1, \delta\varphi_i = 0 \text{ auf } \partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i} \} \quad (3.16)$$

gegeben sind.  $\mathcal{H}^1$  ist dabei die Menge aller Funktionen, deren erste partielle Ableitungen über  $\mathcal{R}_t$  quadrat-integrabel sind. Von den Lösungsfunktionen wird also lediglich die Erfüllung der sogenannten wesentlichen Randbedingungen gefordert. Für die Variationen gelten die entsprechenden homogenen Randbedingungen. Somit ist durch Gleichung (3.12) zusammen mit (2.108)–(2.111) und (3.13)–(3.16) die schwache Formulierung des Randwertproblems charakterisiert. In Anhang B.1 wird gezeigt, dass deren Lösung identisch zur starken Formulierung ist.

## 3.2 Galerkin–Verfahren und Diskretisierung

Es gibt verschiedene Ansätze zur Bestimmung einer Näherungslösung der schwachen Formulierung (siehe hierzu [98, Kap. 2.3]). Durch Einschränkung der Funktionenräume  $\mathcal{S}_i$ ,  $\mathcal{T}_i$ ,  $\mathcal{V}_i$  und  $\mathcal{W}_i$  auf endlich dimensionale Näherungen  $\mathcal{S}_i^G$ ,  $\mathcal{T}_i^G$ ,  $\mathcal{V}_i^G$  und  $\mathcal{W}_i^G$  folgt die Äquivalenz der schwachen Formulierung zur Methode der gewichteten Residuen, wobei die Variationen den Gewichtsfunktionen entsprechen. Die Forderung an die Näherungslösung besteht also darin, dass ihre Residuen im integralen Mittel verschwinden. Das im Folgenden verwendete Galerkin–Verfahren ist eine spezielle Form der Methode der gewichteten Residuen. Hierbei erfolgt eine Zerlegung der Näherungslösungen  $u_i^G \in \mathcal{S}_i^G$  und  $\varphi_i^G \in \mathcal{T}_i^G$  gemäß

$$u_i^G = \tilde{u}_i^G + u_i^{0G} \quad , \quad \varphi_i^G = \tilde{\varphi}_i^G + \varphi_i^{0G} \quad . \quad (3.17)$$

Kennzeichnend für das Galerkin–Verfahren ist die Tatsache, dass  $\tilde{u}_i^G$  und  $\tilde{\varphi}_i^G$  aus demselben Funktionenraum stammen wie ihre zugehörigen Gewichtsfunktionen  $\delta u_i^G$  und  $\delta \varphi_i^G$ , d.h.  $\tilde{u}_i^G, \delta u_i^G \in \mathcal{V}_i^G$  und  $\tilde{\varphi}_i^G, \delta \varphi_i^G \in \mathcal{W}_i^G$ .  $u_i^{0G}$  und  $\varphi_i^{0G}$  hingegen ergeben sich aus der im Allgemeinen näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen auf  $\partial \mathcal{R}_t^{u_i}$  bzw.  $\partial \mathcal{R}_t^{\varphi_i}$ . Durch Einsetzen der Gleichungen (3.17), (2.108), (2.109) sowie (2.89) und (2.90) (wegen der kürzeren Schreibweise im Vergleich zu (2.110) und (2.111)) ergibt sich als Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Größen  $\tilde{u}_i^G$  und  $\tilde{\varphi}_i^G$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{R}_t} \left[ (\delta u_{i,j}^G - e_{jin} \delta \varphi_n^G) A_{jikl} (\tilde{u}_{l,k}^G - e_{klm} \tilde{\varphi}_m^G) + \delta \varphi_{i,j}^G B_{ijkl} \tilde{\varphi}_{k,l}^G \right] dv \\
&= \int_{\partial \mathcal{R}_t^i} \delta u_i^G t_i^0 da + \int_{\partial \mathcal{R}_t^m} \delta \varphi_i^G m_i^0 da + \int_{\mathcal{R}_t} (\delta u_i^G b_i + \delta \varphi_i^G l_i) dv \quad (3.18) \\
& - \int_{\mathcal{R}_t} \left[ (\delta u_{i,j}^G - e_{jin} \delta \varphi_n^G) A_{jikl} (u_{l,k}^{0G} - e_{klm} \varphi_m^{0G}) + \delta \varphi_{i,j}^G B_{ijkl} \tilde{\varphi}_{k,l}^{0G} \right] dv \quad .
\end{aligned}$$

Die Besonderheit der Methode der finiten Elemente, deren Formulierung im Folgenden für die mikropolare Elastizität basierend auf dem Galerkin–Verfahren hergeleitet wird, liegt in der Diskretisierung des Problems durch Zerlegung des materiellen Körpers in sich nichtüberlappende Teilgebiete, die als finite Elemente bezeichnet werden. Die gesuchten Variablen werden lediglich an diskreten Stellen, den Knotenpunkten, berechnet. Zur Interpolation zwischen diesen Knoten werden für die verschiedenen Elementtypen sogenannte Formfunktionen verwendet, in der Regel Polynome eines bestimmten Grades. Der gesamte Lösungsansatz resultiert durch Linearkombination dieser Formfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten. Insgesamt ergibt sich dadurch eine stückweise stetige Lösung, zu der die Formfunktion eines Knotens nur einen Beitrag durch die unmittelbar benachbarten Elemente beisteuert.

Zur Umsetzung der Theorie der mikropolaren Elastizität werden Ansatzfunktionen für die Verschiebung  $\mathbf{u}$  und die Rotation  $\boldsymbol{\varphi}$  sowie den Ort  $\mathbf{x}$  benötigt. Im Folgenden werden  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{x}$  stets durch dieselben Formfunktionen interpoliert, d. h. es werden ausschließlich isoparametrische Elemente benutzt. Bezüglich der Rotation werden zwei verschiedene Möglichkeiten realisiert. Abhängig von der Verschiebung werden deren Ansatzfunktionen gleich oder um eine Ordnung niedriger gewählt. Letzteres scheint gerechtfertigt, da im Dehnungsmaß der Verschiebungsgradient direkt mit der Rotation verknüpft wird und beide Größen somit die gleiche Ordnung besitzen. Als Konsequenz folgt hieraus, dass nicht jedem Knotenpunkt Rotationsfreiheitsgrade zugeschrieben werden. Diese Realisierung der Elemente ist jedoch nicht in der Lage, den Spezialfall  $\alpha \neq 0, \beta, \gamma, \delta = 0$  exakt wiederzugeben. Analytisch ergibt sich dabei das klassische Verschiebungsfeld und für  $\boldsymbol{\varphi}$  die daraus resultierende Rotation. Mit Ansatzfunktionen gleicher Ordnung für  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  gelingt dies jedoch (siehe [19, S. 32ff.]).

Für die FE–Formulierung werden deshalb zunächst verschiedene Knotenmengen eingeführt:



$\mathcal{K}_u$  : Menge der Knoten mit Verschiebungsfreiheitsgrad  
 ( $\hat{=}$  Menge aller Knoten)

$\mathcal{K}_\varphi$  : Menge der Knoten mit Rotationsfreiheitsgrad

$\mathcal{K}_{u_i}^0$  : Menge der Knoten mit Verschiebungsrandbedingung auf  $\partial\mathcal{R}_t^{u_i}$

$\mathcal{K}_{\varphi_i}^0$  : Menge der Knoten mit Rotationsrandbedingung auf  $\partial\mathcal{R}_t^{\varphi_i}$

Damit lassen sich die Ansatzfunktionen folgendermaßen formulieren (vgl. Gleichung (3.17)):

$$u_i^G = \sum_{A \in \mathcal{K}_u \setminus \mathcal{K}_{u_i}^0} N_A^u d_{iA}^u + \sum_{A \in \mathcal{K}_{u_i}^0} N_A^u u_{iA}^0 \quad , \quad (3.19)$$

$$\varphi_i^G = \sum_{A \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{K}_{\varphi_i}^0} N_A^\varphi d_{iA}^\varphi + \sum_{A \in \mathcal{K}_{\varphi_i}^0} N_A^\varphi \varphi_{iA}^0 \quad , \quad (3.20)$$

$$x_i^G = \sum_{A \in \mathcal{K}_u} N_A^u x_{iA} \quad . \quad (3.21)$$

Summiert wird über die mit  $A$  bezeichneten Knoten des diskretisierten Gebietes, die in der jeweiligen Menge enthalten sind ( $\setminus$  liefert das Komplement zweier Mengen).  $N_A^u$  ist die vorgegebene Formfunktion eines Knotens für die Interpolation der Verschiebung und des Ortes,  $N_A^\varphi$  entsprechend für die Rotation. Je nach Wahl des Ansatzes sind  $N_A^u$  und  $N_A^\varphi$  identische Polynome oder unterscheiden sich um eine Ordnung. Die zu bestimmende Knotenpunktverschiebung und -rotation des  $A$ -ten Knotens in Richtung  $i$  ist mit  $d_{iA}^u$  und  $d_{iA}^\varphi$  bezeichnet. Der letzte Term in (3.19) bzw. (3.20) dient zur näherungsweisen Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen, so dass für die Knoten des vorgegebenen Oberflächenabschnitts die zugehörigen Verschiebungs- und Rotationswerte  $u_{iA}^0$  und  $\varphi_{iA}^0$  direkt gegeben sind. Da, wie schon erwähnt, das Galerkin-Verfahren zur Herleitung der FE-Formulierung benutzt wird, ergibt sich mit beliebigen Koeffizienten  $c_{iA}^u$  und  $c_{iA}^\varphi$  für die Gewichtsfunktionen der Ansatz

$$\delta u_i^G = \sum_{A \in \mathcal{K}_u \setminus \mathcal{K}_{u_i}^0} N_A^u c_{iA}^u \quad , \quad (3.22)$$

$$\delta \varphi_i^G = \sum_{A \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{K}_{\varphi_i}^0} N_A^\varphi c_{iA}^\varphi \quad . \quad (3.23)$$

Durch Einsetzen der Ansätze (3.19)–(3.23) in Gleichung (3.18) resultiert

$$\begin{aligned}
& c_{iA}^u \left[ \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{jikl} N_{B,k}^u dv d_{lB}^u - \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{jikl} e_{klm} N_E^\varphi dv d_{nE}^\varphi \right] + \\
& c_{mD}^\varphi \left[ - \int_{\mathcal{R}_t} N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} N_{B,k}^u dv d_{lB}^u \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathcal{R}_t} (N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} e_{klm} N_E^\varphi + N_{D,j}^\varphi B_{mjnl} N_{E,l}^\varphi) dv d_{nE}^\varphi \right] = \tag{3.24} \\
& c_{iA}^u \left[ \int_{\mathcal{R}_t} N_A^u b_i dv + \int_{\partial \mathcal{R}_t^i} N_A^u t_i da - \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{jikl} (N_{C,k}^u u_{lC}^0 - e_{klm} N_F^\varphi \varphi_{nF}^0) dv \right] + \\
& c_{mD}^\varphi \left[ \int_{\mathcal{R}_t} N_D^\varphi l_m dv + \int_{\partial \mathcal{R}_t^m} N_D^u m_m da \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} N_{C,k}^u u_{lC}^0 - (N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} e_{klm} N_F^\varphi + N_{D,j}^\varphi B_{mjnl} N_{F,l}^\varphi) \varphi_{nF}^0 \right\} dv \right]
\end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht wird auf Summenzeichen verzichtet. Es gilt jedoch zu beachten, dass  $A, B \in \mathcal{K}_u \setminus \mathcal{K}_{u_i}^0$ ,  $C \in \mathcal{K}_{u_i}^0$ ,  $D, E \in \mathcal{K}_\varphi \setminus \mathcal{K}_{\varphi_i}^0$  und  $F \in \mathcal{K}_{\varphi_i}^0$  gilt.

Da Gleichung (3.24) für beliebig gewählte Koeffizienten der Gewichtsfunktionen erfüllt sein muss, liefert Koeffizientenvergleich, dass die eckigen Klammern nach  $c_{iA}^u$  bzw.  $c_{mD}^\varphi$  auf beiden Seiten identisch sein müssen. Um diese Gleichung in Matrixschreibweise darstellen zu können, werden zunächst die folgenden Matrixkomponenten definiert:

$$K_{pq}^{uu} := \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{jikl} N_{B,k}^u dv \tag{3.25}$$

$$K_{ps}^{u\varphi} := - \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{jikl} e_{klm} N_E^\varphi dv \tag{3.26}$$

$$K_{rq}^{\varphi u} := - \int_{\mathcal{R}_t} N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} N_{B,k}^u dv \tag{3.27}$$

$$K_{rs}^{\varphi\varphi} := \int_{\mathcal{R}_t} (N_D^\varphi e_{mji} A_{jikl} e_{klm} N_E^\varphi + N_{D,j}^\varphi B_{mjnl} N_{E,l}^\varphi) dv \tag{3.28}$$

$$\mathbf{F}_p^u := \int_{\mathcal{R}_t} N_A^u b_i dv + \int_{\partial\mathcal{R}_t^i} N_A^u t_i da - \int_{\mathcal{R}_t} N_{A,j}^u A_{ijkl} (N_{C,k}^u u_{iC}^0 - e_{klm} N_F^\varphi \varphi_{nF}^0) dv \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r^\varphi := & \int_{\mathcal{R}_t} N_D^\varphi l_m dv + \int_{\partial\mathcal{R}_t^m} N_D^\varphi m_m da + \int_{\mathcal{R}_t} \left\{ N_D^\varphi e_{mj} A_{ijkl} N_{C,k}^u u_{iC}^0 \right. \\ & \left. - (N_D^\varphi e_{mji} A_{ijkl} e_{klm} N_F^\varphi + N_{D,j}^\varphi B_{mjnl} N_{F,l}^\varphi) \varphi_F^0 \right\} dv \end{aligned} \quad (3.30)$$

Der Übergang von den freien Indizes der rechten zur linken Seite folgt aus einer frei wählbaren, aber eindeutigen Zuordnungsvorschrift. Dies ist ein Teil der sogenannten Assemblierung, die jedem Paar  $(A, i)$ ,  $(B, l)$ ,  $(E, m)$  bzw.  $(F, n)$  bestehend aus Knotennummer und Freiheitsgrad eine Nummer des globalen Gleichungssystems  $p$ ,  $q$ ,  $r$  bzw.  $s$  zuweist (siehe hierzu auch Kapitel 3.3.1). In analoger Weise erfolgt der Übergang für die Verschiebungsfreiheitsgrade  $d_{iB}^u \rightarrow d_q^u$  und die Rotationsfreiheitsgrade  $d_{nE}^\varphi \rightarrow d_s^\varphi$ .

Somit ist es möglich, das zu lösende Problem als Matrixgleichung

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (3.31)$$

zu formulieren. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  des Systems ist dabei als Blockmatrix

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{u\varphi} \\ \mathbf{K}^{\varphi u} & \mathbf{K}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

definiert, während der gesuchte Lösungsvektor  $\mathbf{d}$  und der verallgemeinerte Kraftvektor  $\mathbf{F}$  durch

$$\mathbf{d} := \begin{bmatrix} \mathbf{d}^u \\ \mathbf{d}^\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} := \begin{bmatrix} \mathbf{F}^u \\ \mathbf{F}^\varphi \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

gegeben sind.

Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente lässt sich durch die Diskretisierung des betrachteten materiellen Körpers also die Lösung des Randwertproblems, das durch die Differentialgleichungen (3.5), (3.6) und die Randbedingungen (3.1), (3.2) beschrieben wird, auf die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.30) reduzieren.

### 3.3 Implementierung in UEL

Die lineare mikropolare Elastizität wurde in den kommerziellen FE-Code ABAQUS implementiert. Da der Theorie eine neue Gleichgewichtsbedingung in Form der Drehimpulsbilanz (2.107) zu Grunde liegt, mussten hierbei eigens definierte Elemente programmiert werden. Diese Möglichkeit ist durch die Benutzerschnittstelle UEL (siehe [58, Kap. 25.2.19]) gegeben. Sie ermöglicht es, weitgehend unabhängig von ABAQUS eine Elementsteifigkeitsmatrix und den zugehörigen Kraftvektor zu bestimmen. Neben weiteren Variablen bzw. Steuergrößen werden diese übergeben und ABAQUS führt anschließend lediglich die Assemblierung des Gesamtgleichungssystems durch und berechnet dessen Lösung. Auf deren Grundlage werden in einem weiteren Aufruf des benutzereigenen Programmes die gewünschten Zustandsvariablen berechnet.

Die Möglichkeit, den Anteil jedes Elementes des FE-Modells einzeln zu berechnen und anschließend die Assemblierung durchzuführen, ist gegeben, da die Formfunktion eines Knotens nur in den unmittelbar angrenzenden Elementen ungleich null ist und sonst überall verschwindet. Für die Integration über das Volumen bzw. die Oberfläche eines bestimmten Elementes liefern somit nur die zu diesem Element gehörigen Knoten einen Beitrag. Zur Vereinfachung der numerischen Auswertung der Integrale werden Elemente gleichen Typs auf ein entsprechendes einheitliches Referenzelement transformiert, für das dann die numerische Integration durchgeführt wird. Pro Elementtyp genügt somit die einmalige Angabe der Formfunktionen und der Integrationspunkte für das jeweilige Referenzelement. Hierfür werden sogenannte lokale Koordinaten eingeführt, die durch  $\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{x}_k \tilde{\mathbf{e}}_k$  bezüglich der kartesischen Orthonormalbasis  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) gegeben sind.

Für die im Folgenden angegebenen isoparametrischen Elemente werden zur Interpolation des Ortes und der Verschiebung stets die linearen und quadratischen Ansatzfunktionen der Serendipity-Klasse verwendet (siehe [61, S. 138f.]). Alle Knoten befinden sich also auf dem Elementrand. Wie bereits erwähnt, erfolgt die Interpolation der Rotationen mit denselben Funktionen oder durch Polynome, deren Grad im Vergleich zu den Verschiebungen um eine Ordnung niedriger ist. Insgesamt besitzen diese isoparametrischen Elemente  $C^0$ -Stetigkeitseigenschaften, d. h. die Formfunktionen sind innerhalb des Elementgebietes glatt und liefern an den Rändern einen stetigen Übergang zu den Nachbarelementen.

Im Folgenden wird genauer darauf eingegangen, wie die FE-Formulierung für die Implementierung in ABAQUS umgesetzt wurde. Dies erfolgt zunächst allgemein für dreidimensionale Probleme und im darauf folgenden Abschnitt für die Beschreibung des ebenen

Dehnungs- und Spannungszustandes des elastischen mikropolaren Kontinuums.

### 3.3.1 3d-Formulierung

Zur Berechnung allgemeiner dreidimensionaler Randwertprobleme wurden Quader-, Keil- und Tetraederelemente implementiert. Dabei wurden Elemente mit unterschiedlichen Interpolationen für  $\mathbf{u}$  und  $\boldsymbol{\varphi}$  nicht berücksichtigt, so dass jeder Knoten drei Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgrade besitzt. Alle Elemente stehen mit vollständiger und die Quaderelemente auch mit reduzierter Gaußintegration zur Verfügung. Ihre Formfunktionen sind [57, Kap. 3.2.4-2/3.2.6-1 f.] zu entnehmen und die Lage der Stützstellen, auch Integrationspunkte genannt, sowie deren Gewichtungsfaktoren sind z. B. in [6, S. 304/308] zu finden. Tabelle 3.1 gibt einen Überblick über die implementierten dreidimensionalen Strukturelemente.

Typ	Ansatzfunktion	Integrationsordnung	Anzahl der Stützstellen	Bezeichnung in UEL
Tetraeder	linear	vollständig	1	U11
Tetraeder	quadratisch	vollständig	4	U12
Keil	linear	vollständig	2·3	U13
Keil	quadratisch	vollständig	3·7	U14
Quader	linear	vollständig	2·2·2	U15
Quader	quadratisch	vollständig	3·3·3	U16
Quader	linear	reduziert	1	U17
Quader	quadratisch	reduziert	2·2·2	U18

Tabelle 3.1: Implementierte 3d-Kontinuumselemente

Ebenso wie dem Referenzelement lokale Koordinaten zugewiesen werden, erhalten dessen Knoten lokale Knotennummern von 1 bis  $n_e$ , der Gesamtanzahl der Elementknoten. Ihre

Zuordnung zu den globalen Knoten des Gesamtmodells ist wiederum Teil der Assemblierung und wird von ABAQUS übernommen. Die Größe der quadratischen Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors ist durch  $6 \cdot n_e$  festgelegt. Die entsprechenden Bestimmungsgleichungen lassen sich einfach aus den Gleichungen in Kapitel 3.2 für den Spezialfall herleiten, dass das Modell nur aus einem einzigen Element besteht. Zunächst erfolgt die Anordnung der Knotenverschiebungen und -rotationen eines Elementes im Lösungsvektor gemäß

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= [\bar{\mathbf{d}}^u, \bar{\mathbf{d}}^\varphi]^T \\ &= [\bar{d}_{11}^u, \bar{d}_{21}^u, \bar{d}_{31}^u, \dots, \bar{d}_{1n_e}^u, \bar{d}_{2n_e}^u, \bar{d}_{3n_e}^u, \bar{d}_{11}^\varphi, \bar{d}_{21}^\varphi, \bar{d}_{31}^\varphi, \dots, \bar{d}_{1n_e}^\varphi, \bar{d}_{2n_e}^\varphi, \bar{d}_{3n_e}^\varphi]^T \quad . \quad (3.34) \end{aligned}$$

Der Querbalken wird im Folgenden bei allen auf Elementbasis formulierten Größen benutzt, für die eine Unterscheidung zu ihrem globalen Pendant nötig ist. Außerdem werden ab sofort die lokalen Knotennummern verwendet, die im weiteren Verlauf durch die Kleinbuchstaben  $a, b, c, d, e$  und  $f$  gekennzeichnet werden. Vergleicht man (3.34) mit den Gleichungen (3.25)–(3.30) so folgt daraus die Assemblierung der Elementfreiheitsgrade nach

$$p = 3(a - 1) + i \quad , \quad q = 3(b - 1) + l \quad , \quad (3.35)$$

$$r = 3(d - 1) + m \quad , \quad s = 3(e - 1) + n \quad , \quad (3.36)$$

wobei  $0 \leq i, l, m, n \leq 3$  sowie  $1 \leq a, b, d, e, \leq n_e$  und damit  $1 \leq p, q, s, t \leq 3n_e$  gilt.

Um die den Gleichungen (3.25)–(3.30) entsprechenden Ausdrücke in eine symbolische Darstellung überführen zu können und somit einer einfachen Programmierung zugänglich zu machen, werden die vorkommenden Größen in zweifachindizierten Matrizen angeordnet. Dabei werden aus den partiellen Ableitungen der Formfunktionen  $N_a^u$  und  $N_a^\varphi$  die sogenannten Kompatibilitätsmatrizen der Verschiebung  $\mathbf{B}^u$  bzw. der Rotation  $\mathbf{B}^\varphi$  gebildet, die nach

$$\mathbf{B}^u = [\mathbf{B}_1^u, \mathbf{B}_2^u, \dots, \mathbf{B}_{n_e}^u] \quad , \quad \mathbf{B}^\varphi = [\mathbf{B}_1^\varphi, \mathbf{B}_2^\varphi, \dots, \mathbf{B}_{n_e}^\varphi] \quad (3.37)$$

bezüglich der Elementknoten in Untermatrizen aufgespalten werden können. Diese haben folgende Gestalt:

$$\mathbf{B}_a^u = \begin{bmatrix} N_{a,1}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,2}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,3}^u \\ N_{a,2}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,3}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,1}^u \\ N_{a,3}^u & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,1}^u & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,2}^u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_b^\varphi = \begin{bmatrix} N_{a,1}^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,2}^\varphi & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,3}^\varphi \\ 0 & N_{a,1}^\varphi & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,2}^\varphi \\ N_{a,3}^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,1}^\varphi \\ N_{a,2}^\varphi & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,3}^\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

mit  $1 \leq a \leq n_e$ . Zwar wird hier zur Kennzeichnung der obere Index immer beibehalten, natürlich gilt jedoch  $N_a^u = N_a^\varphi$ . Im Gegensatz zur Umsetzung der klassischen Theorie, in der  $\mathbf{B}_a^u$  als  $6 \times 3$ -Matrix dargestellt werden kann, wird hier auf Grund der im Allgemeinen nicht symmetrischen Dehnungen bzw. Spannungen eine  $9 \times 3$ -Matrix benötigt.

Die Formfunktionsmatrizen

$$\mathbf{N}^u = [\mathbf{N}_1^u, \mathbf{N}_2^u, \dots, \mathbf{N}_{n_e}^u] \quad , \quad \mathbf{N}^\varphi = [\mathbf{N}_1^\varphi, \mathbf{N}_2^\varphi, \dots, \mathbf{N}_{n_e}^\varphi] \quad (3.39)$$

werden aus Diagonalmatrizen der zu dem jeweiligen Knoten gehörenden Formfunktion

$$\mathbf{N}_a^u = \begin{bmatrix} N_a^u & 0 & 0 \\ 0 & N_a^u & 0 \\ 0 & 0 & N_a^u \end{bmatrix}, \quad 1 \leq a \leq n_e, \quad (3.40)$$

gebildet (Analoges gilt für  $\mathbf{N}_a^\varphi$ ). Aus der Aufstellung der Kompatibilitätsmatrix  $\mathbf{B}^u$  laut (3.38) resultiert für den Materialtensor 4. Stufe  $\mathcal{A}$  die in Tabelle 3.2 erläuterte Zuordnung  $A_{ijkl} \rightarrow A_{IJ}$ . Die somit gebildete Matrix  $\mathbf{A}$  ist durch

$I$ bzw. $J$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$i$ bzw. $k$	1	2	3	2	3	1	3	1	2
$j$ bzw. $l$	1	2	3	1	2	3	1	2	3

Tabelle 3.2: Zuordnungsvorschrift der Indexpaare  $(i, j)$  bzw.  $(k, l)$  zu  $I$  bzw.  $J$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
\lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu + \alpha & 0 & 0 & 0 & \mu - \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \alpha & 0 & 0 & 0 & \mu - \alpha \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \alpha & \mu - \alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - \alpha & \mu + \alpha & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu - \alpha & 0 & 0 & 0 & \mu + \alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu - \alpha & 0 & 0 & 0 & \mu + \alpha
\end{bmatrix} \quad (3.41)$$

gegeben. Bei der Implementierung in ABAQUS werden als Materialkonstanten die Querkontraktionszahl  $\nu$  und der Elastizitätsmodul  $E$  verwendet. Sie sind mit den Lamé'schen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  über die Beziehungen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad . \quad (3.42)$$

verknüpft (siehe z. B. [89, S. 71]).

Auf Grund der in Gleichung (3.38) getroffenen Wahl für die Kompatibilitätsmatrix  $\mathbf{B}^\varphi$  erfolgt in analoger Weise der Übergang des Materialtensors  $\mathbf{B}$  gemäß  $B_{ijkl} \rightarrow B_{IJ}$  zur



Materialmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta + 2\gamma & \beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta + 2\gamma & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta + 2\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma + \delta & 0 & 0 & 0 & \gamma - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \delta & 0 & 0 & 0 & \gamma - \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \delta & \gamma - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \delta & \gamma + \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma - \delta & 0 & 0 & 0 & \gamma + \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma - \delta & 0 & 0 & 0 & \gamma + \delta \end{bmatrix} . \quad (3.43)$$

Für das Permutationssymbol liefert die Zuweisung  $e_{ijk} \rightarrow \hat{e}_{Ik}$

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.44)$$

Werden dessen Produkte mit der Materialmatrix  $\mathbf{A}$  aus den Gleichungen (3.26)–(3.28)

direkt ausgeführt, so resultiert

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{A})^T = 2\alpha \hat{\mathbf{e}} \quad , \quad \hat{\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{e}} = 4\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.45)$$

Hier ist deutlich zu erkennen, dass lediglich der Materialparameter  $\alpha$  in  $\hat{\mathbf{A}}$  auftaucht und somit alleinig für die Kopplung der aus den Verschiebungs- und Rotationsfreiheitsgraden abgeleiteten Größen verantwortlich ist.

Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{K}}$  kann mit (3.37)–(3.45) kompakt durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}} &:= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^{uu} & \bar{\mathbf{K}}^{u\varphi} \\ \bar{\mathbf{K}}^{\varphi u} & \bar{\mathbf{K}}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} (\mathbf{B}^u)^T \mathbf{A} \mathbf{B}^u dv & - \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} (\mathbf{B}^u)^T \hat{\mathbf{A}} \mathbf{N}^\varphi dv \\ - \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} (\mathbf{N}^\varphi)^T \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}^u dv & \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} [4\alpha (\mathbf{N}^\varphi)^T \mathbf{N}^\varphi + (\mathbf{B}^\varphi)^T \mathbf{B} \mathbf{B}^\varphi] dv \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.46)$$

ausgedrückt werden, wobei die Integration auf das Elementvolumen  $\bar{\mathcal{R}}_t$  beschränkt ist. Anhand dieser Gleichung kann man leicht die Symmetrie der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}^T \quad (3.47)$$

erkennen. Da die Materialmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  symmetrisch sind, gilt dasselbe für die Untermatrizen der Diagonalen  $\bar{\mathbf{K}}^{uu}$  und  $\bar{\mathbf{K}}^{\varphi\varphi}$ , während für die beiden anderen Untermatrizen  $\bar{\mathbf{K}}^{u\varphi} = (\bar{\mathbf{K}}^{\varphi u})^T$  gilt.

Mit Hilfe von (3.39), (3.40) und (3.46) lässt sich der Elementkraftvektor  $\bar{\mathbf{F}}$  folgendermaßen darstellen:

$$\bar{\mathbf{F}} := \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}^u \\ \bar{\mathbf{F}}^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{b} dv + \int_{\partial \bar{\mathcal{R}}_t^t} (\mathbf{N}^u)^T \mathbf{t} da - \bar{\mathbf{K}}^{uu} \bar{\mathbf{u}}^0 - \bar{\mathbf{K}}^{u\varphi} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^0 \\ \int_{\bar{\mathcal{R}}_t} (\mathbf{N}^\varphi)^T \mathbf{1} dv + \int_{\partial \bar{\mathcal{R}}_t^m} (\mathbf{N}^\varphi)^T \mathbf{m} da - \bar{\mathbf{K}}^{\varphi u} \bar{\mathbf{u}}^0 - \bar{\mathbf{K}}^{\varphi\varphi} \bar{\boldsymbol{\varphi}}^0 \end{bmatrix} \quad . \quad (3.48)$$

Die darin vorkommenden Vektoren  $\bar{\mathbf{u}}^0$  und  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}^0$  entsprechen in der Anordnung der Freiheitsgrade  $\bar{\mathbf{d}}^u$  und  $\bar{\mathbf{d}}^\varphi$  und beinhalten für Knoten mit Dirichlet-Randbedingung den vorgegebenen Wert und sind ansonsten Null.

Da die numerische Integration mittels Gaußintegration für das Referenzelement mit Volumen  $V_r$  durchgeführt wird, erfolgt eine Transformation der globalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  auf die lokalen  $\tilde{\mathbf{x}}$ , wozu die Jacobideterminante

$$j := \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tilde{\mathbf{x}}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \tilde{x}_3} \end{vmatrix} \quad (3.49)$$

benötigt wird. Für eine beliebige skalare Funktion  $f(\mathbf{x})$ , die zu integrieren ist, gilt

$$\int_{\bar{\mathcal{R}}_t} f(\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})) dv = \int_{V_r} \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) j(\tilde{\mathbf{x}}) d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 d\tilde{x}_3 \approx \sum_{i=1}^s \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_i) j(\tilde{\mathbf{x}}_i) w_i \quad . \quad (3.50)$$

Der Integrand wird also nur an den  $s$  verschiedenen Stützstellen mit den lokalen Koordinaten  $\tilde{x}_i$  bestimmt und nach Gewichtung mit dem Faktor  $w_i$  aufsummiert.

Die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementkraftvektor werden in einem ersten Durchlauf für jedes Element des gesamten FE-Modells bestimmt. Daraus bestimmt ABAQUS den Gesamtlösungsvektor  $\mathbf{d}$ , aus dem in einem zweiten Aufruf der Elemente die Verzerrungen und Spannungen an den Integrationspunkten abgeleitet werden. Die Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}$  und die Krümmung  $\boldsymbol{\kappa}$  sowie die Kraftspannungen  $\mathbf{T}$  und Momentenspannungen  $\mathbf{M}$  innerhalb eines Elementes folgen aus

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}^u \bar{\mathbf{d}}^u - \hat{\mathbf{e}} \mathbf{N}^\varphi \bar{\mathbf{d}}^\varphi \quad , \quad \bar{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{B}^\varphi \bar{\mathbf{d}}^\varphi \quad , \quad (3.51)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad , \quad \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{B} \bar{\boldsymbol{\kappa}} \quad . \quad (3.52)$$

Für die Matrizen werden hier der Einfachheit halber die Symbole der Tensoren verwendet. Die Anordnung der einzelnen Komponenten entspricht nach Tabelle 3.2 den Zuordnungsvorschriften  $\epsilon_{ij} \rightarrow \bar{\epsilon}_I$ ,  $\kappa_{ij} \rightarrow \bar{\kappa}_I$ ,  $T_{ji} \rightarrow \bar{T}_I$  und  $M_{ij} \rightarrow \bar{M}_I$ .

### 3.3.2 2d-Formulierung

Für das mikropolare Kontinuum gibt es zwei Arten zur Beschreibung einer zweidimensionalen Theorie, die in [94] als erstes bzw. zweites ebenes Problem bezeichnet werden. Letzterer Fall, bei dem für die Verschiebung  $\mathbf{u} = (0, 0, u_3)$  und für die Rotation  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, 0)$

gilt (entspricht klassisch dem „out-of-plane“-Problem), wird im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Das erste ebene Problem verallgemeinert die klassische „in-plane“-Elastizität. Alle Feldgrößen sind unabhängig von der  $z$ -Koordinate, und zur Berechnung werden die Verschiebungskomponenten  $u_1$  und  $u_2$  sowie die in der  $x, y$ -Ebene wirkende Rotation  $\varphi_3$  herangezogen. Analog zur klassischen Theorie gilt es zwischen ebenem Spannungszustand (ESZ) und ebenem Dehnungszustand (EDZ) zu unterscheiden ([34, S. 120ff.]).

## Ebene Dehnung

Für den ebenen Dehnungszustand gelten die Bedingungen

$$u_3 = \varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0 \quad . \quad (3.53)$$

Des Weiteren verschwinden die äußeren Kräfte in  $z$ -Richtung sowie die Momente um die  $x$ - bzw.  $y$ -Achse, d. h.

$$b_3 = t_3 \equiv 0 \quad , \quad l_1 = l_2 = m_1 = m_2 \equiv 0 \quad . \quad (3.54)$$

Aus den Bedingungen (3.53) und den kinematischen Beziehungen (2.108), (2.109) folgt direkt

$$\epsilon_{\alpha 3} = \epsilon_{3\alpha} = \epsilon_{33} \equiv 0 \quad , \quad \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha 3} = \kappa_{33} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (3.55)$$

und über die Materialgesetze (2.110) und (2.111)

$$T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} \equiv 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta} = M_{33} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad . \quad (3.56)$$

Die noch zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen sind durch

$$T_{11,1} + T_{12,2} + b_1 = 0 \quad , \quad (3.57)$$

$$T_{21,1} + T_{22,2} + b_2 = 0 \quad , \quad (3.58)$$

$$M_{31,1} + M_{32,2} + T_{21} - T_{12} + l_3 = 0 \quad (3.59)$$

gegeben.

Die Umsetzung mittels FEM erfolgt durch zweidimensionale Elemente mit den Freiheitsgraden  $u_1$ ,  $u_2$  sowie  $\varphi_3$ . Einerseits wurden die in Tabelle 3.3 aufgelisteten Dreiecks- und Rechteckselemente implementiert. Sie beinhalten dieselben Ansatzfunktionen für die

Typ	Ansatz- funktion	Integrations- ordnung	Anzahl der Stützstellen	Bezeichnung in UEL	
				bei ESZ	bei EDZ
Dreieck	linear	vollständig	1	U21	U31
Dreieck	quadratisch	vollständig	3	U22	U32
Rechteck	linear	vollständig	2·2	U23	U33
Rechteck	quadratisch	vollständig	3·3	U24	U34
Rechteck	linear	reduziert	1	U25	U35
Rechteck	quadratisch	reduziert	2·2	U26	U36

Tabelle 3.3: Implementierte 2d-Kontinuumselemente mit gleichen Ansatzfunktionen für  $\mathbf{u}$  und  $\varphi_3$

Verschiebungen und die Rotation und besitzen somit an jedem Knoten die angegebenen Freiheitsgrade. Zum anderen wurden in einer zweiten Version der UEL-Subroutine Elemente verwirklicht, die die Rotation im Vergleich zu den Verschiebungen mit um eine Ordnung niedrigeren Polynomen interpolieren (siehe Tabelle 3.4). Dafür wurden Elemente mit quadratischem Verschiebungsansatz herangezogen. Für  $\varphi_3$  werden also lineare Formfunktionen verwendet, wodurch die Knoten der Kantenmitten lediglich die beiden Verschiebungsfreiheitsgrade besitzen. Die Formfunktionen aller Elemente können in [57, Kap. 3.2.4-2/3.2.6-1 f.] nachgeschlagen werden. Die Stützstellen sowie deren Gewichtungsfaktoren sind z. B. [6, S. 304/308] zu entnehmen. Die Größe der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementkraftvektors reduziert sich im Vergleich zu den dreidimensionalen Elementen von  $3 \cdot (n_e + n_r)$  auf  $2n_e + n_r$ , wobei  $n_r$  die Anzahl der Elementknoten mit Rotationsfreiheitsgrad angibt. Werden die Gleichungen (3.24)–(3.30) als Ausgangsbasis der FE-Formulierung genommen, so beschränken sich die Werte der Indizes auf  $i, j, k, l = 1, 2$  bzw.  $m, n = 3$ . Der gesuchte Lösungsvektor eines Elementes hat im ebenen Fall folgende Gestalt:

$$\bar{\mathbf{d}} = [\bar{\mathbf{d}}^u, \bar{\mathbf{d}}^\varphi]^T = [\bar{d}_{11}^u, \bar{d}_{21}^u, \dots, \bar{d}_{1n_e}^u, \bar{d}_{2n_e}^u, \bar{d}_{31}^\varphi, \dots, \bar{d}_{3n_r}^\varphi]^T \quad . \quad (3.60)$$

Dadurch ist in Bezug auf die Gleichungen (3.25)–(3.30) die Assemblierung innerhalb eines

Typ	Integrations- ordnung	Anzahl der Stützstellen	Bezeichnung in UEL	
			bei EDZ	bei ESZ
Dreieck	vollständig	3	$\bar{U}32$	$\bar{U}22$
Rechteck	vollständig	3·3	$\bar{U}34$	$\bar{U}24$
Rechteck	reduziert	2·2	$\bar{U}36$	$\bar{U}26$

Tabelle 3.4: Implementierte 2d-Kontinuumsэлеmente mit quadratischem Ansatz für  $\mathbf{u}$  und linearem Ansatz für  $\varphi_3$

Elementes durch

$$p = 2(a - 1) + i \quad , \quad q = 2(b - 1) + l \quad , \quad (3.61)$$

$$r = d \quad , \quad s = e \quad (3.62)$$

vorgegeben. Die Anpassung der in (3.46) und (3.48) vorhandenen Matrizen bzw. Vektoren erfolgt durch Streichen überflüssiger Zeilen und Spalten. Auf diese Weise reduzieren sich die Kompatibilitätsmatrizen auf

$$\mathbf{B}_a^u = \begin{bmatrix} N_{a,1}^u & 0 \\ 0 & N_{a,2}^u \\ N_{a,2}^u & 0 \\ 0 & N_{a,1}^u \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_b^\varphi = \begin{bmatrix} N_{b,2}^\varphi \\ N_{b,1}^\varphi \end{bmatrix} \quad , \quad (3.63)$$

und für die Formfunktionsmatrizen erhält man

$$\mathbf{N}_a^u = \begin{bmatrix} N_a^u & 0 \\ 0 & N_a^u \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{N}_b^\varphi = [N_b^\varphi] \quad , \quad (3.64)$$

$I$ bzw. $J$	1	2	3	4
$i$ bzw. $k$	1	2	2	1
$j$ bzw. $l$	1	2	1	2

Tabelle 3.5: Zuordnungsvorschrift der Indexpaare  $(i, j)$  bzw.  $(k, l)$  zu  $I$  bzw.  $J$  für  $A_{ijkl} \rightarrow A_{IJ}$ ,  $e_{ij3} \rightarrow \hat{e}_I$ ,  $\epsilon_{ij} \rightarrow \bar{\epsilon}_I$  und  $T_{ji} \rightarrow \bar{T}_I$  bei ebenem Problem

mit  $1 \leq a \leq n_e$  und  $1 \leq b \leq n_r$ . Die Materialmatrizen des ebenen Dehnungszustandes lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \alpha & \mu - \alpha \\ 0 & 0 & \mu - \alpha & \mu + \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} + \alpha & \frac{E}{2(1+\nu)} - \alpha \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} - \alpha & \frac{E}{2(1+\nu)} + \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.65)$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma + \delta & 0 \\ 0 & \gamma + \delta \end{bmatrix} . \quad (3.66)$$

Dabei gilt es zu beachten, dass bei der Matrix  $\mathbf{B}$  den Zeilen- und Spaltenindizes 1 bzw. 2 jeweils die Indexpaare (3,2) bzw. (3,1) zugeordnet sind. Die Zuweisung für  $\mathbf{A}$  kann Tabelle 3.5 entnommen werden. Aus dem reduzierten Permutationssymbol

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

ergibt sich

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{A})^T = 2\alpha \hat{\mathbf{e}} \quad , \quad \hat{\hat{\mathbf{A}}} = \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{A}\hat{\mathbf{e}} = 4\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.68)$$

Mit den in diesem Abschnitt angegebenen Matrizen behalten die Gleichungen (3.46)–(3.50) weiterhin ihre Gültigkeit. Die Integration über die  $z$ -Richtung entfällt jedoch und die Jacobideterminante ist durch

$$j := \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \tilde{x}_2} \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

definiert.

Aus den Gleichungen (3.51)–(3.52) ergeben sich die in Tabelle 3.5 erwähnten Zustandsvariablen sowie die Krümmungen  $\bar{\boldsymbol{\kappa}} = [\kappa_{32}, \kappa_{31}]^T$  und die Momentenspannungen  $\bar{\mathbf{M}} = [M_{32}, M_{31}]^T$ . Zusätzlich sind die Spannungen  $T_{33}$ ,  $M_{13}$  und  $M_{23}$  zu bestimmen. Aus den Materialgesetzen (2.110) und (2.111) folgt direkt

$$T_{33} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) = \nu(T_{11} + T_{22}) \quad , \quad (3.70)$$

$$M_{13} = (\gamma - \delta)\kappa_{31} \quad , \quad M_{23} = (\gamma - \delta)\kappa_{32} \quad . \quad (3.71)$$

Wie anhand (3.66) und (3.71) zu sehen ist, taucht der Materialparameter  $\beta$  auf Grund der identisch verschwindenden Normalkomponenten der Momentenspannungen nicht auf und spielt deshalb bei der zweidimensionalen Formulierung keine Rolle.

## Ebene Spannung

Die Bedingungen für den ebenen Spannungszustand des mikropolaren Kontinuums lauten

$$T_{\alpha 3} = T_{3\alpha} = T_{33} \equiv 0 \quad , \quad M_{\alpha\beta} = M_{33} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad . \quad (3.72)$$

Sie ersetzen die Gleichungen (3.53), während die Beziehungen (3.54) weiterhin gültig sind und daraus dieselben Gleichgewichtsbedingungen (3.57)–(3.59) wie bei ebener Dehnung resultieren. Mit Hilfe der konstitutiven Gleichung (2.110) zeigt sich, dass für die Komponenten des Dehnungstensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  Folgendes gilt:

$$\epsilon_{\alpha 3} = \epsilon_{3\alpha} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad . \quad (3.73)$$

Hiermit ergibt sich über die kinematischen Beziehungen (2.108) aus der Unabhängigkeit der Feldgrößen von der  $z$ -Koordinate

$$\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0 \quad , \quad (3.74)$$

weshalb für den Krümmungstensor  $\boldsymbol{\kappa}$  wiederum die in (3.55) angegebenen Komponenten identisch verschwinden. Damit bleibt das Materialgesetz der Momentenspannungen im Vergleich zum ebenen Dehnungszustand unverändert. Wie in der klassischen Elastizitätstheorie erhält man die konstitutive Gleichung des ebenen Spannungszustandes durch Invertieren der Gleichung (2.110), Einsetzen der Bedingungen (3.72) für die Kraftspannungen sowie Rückinvertieren der zu den nichtverschwindenden Komponenten gehörenden Restmatrix.



Für die Umsetzung in die FE-Formulierung bedeutet dies, dass die Gleichungen (3.60)–(3.69) mit Ausnahme von (3.65) übernommen werden können. Die Materialmatrix  $\mathbf{A}$  der ebenen Spannung ist durch

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} & \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \alpha & \mu - \alpha \\ 0 & 0 & \mu - \alpha & \mu + \alpha \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{E}{1 - \nu^2} & \frac{E\nu}{1 - \nu^2} & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1 - \nu^2} & \frac{E}{1 - \nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1 + \nu)} + \alpha & \frac{E}{2(1 + \nu)} - \alpha \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1 + \nu)} - \alpha & \frac{E}{2(1 + \nu)} + \alpha \end{bmatrix} \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

gegeben. Neben den Momentenspannungen  $M_{13}$  und  $M_{23}$  aus Gleichung (3.71) muss bei ebener Spannung des Weiteren die Dehnung  $\epsilon_{33}$  bestimmt werden. Sie berechnet sich nach

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(T_{11} + T_{22}) = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad . \quad (3.76)$$

Ebenso wie die Spannungskomponente  $T_{33}$  der ebenen Dehnung berechnet sich  $\epsilon_{33}$  gleich wie im entsprechenden klassischen Fall (vergleiche [50, S. 194ff.]).

Bei der Implementierung von Elementen zur Beschreibung des ebenen Spannungszustandes wurden dieselben Elementtypen wie bei ebener Dehnung verwendet (siehe Tabellen 3.3 und 3.4).

# Kapitel 4

## Analytische Bestimmung der Rissspitzenfelder

Als Grundlage für die folgenden FE–Untersuchungen verschiedener Rissprobleme werden in diesem Kapitel die Rissspitzenfelder des elastischen mikropolaren Kontinuums analytisch bestimmt. Erste analytische Rechnungen für Singularitätsprobleme unter Berücksichtigung von Momentenspannungen führten Muki & Sternberg [87] anhand der Couple–Stress–Theorie (vergleiche Kapitel 2.7) durch. Dabei wurde die Einwirkung von Einzelkräften sowie un stetigen Belastungen auf eine Halbebene untersucht (siehe hierzu auch Bogy & Sternberg [10, 11]). Cowin [15] übertrug diese Resultate auf die mikropolare Theorie. Die allgemeine Lösung eines Risses, der sich in einem unendlichen Medium befindet und senkrecht zu den Rissflanken auf Zug belastet wird, leiteten Muki & Sternberg [88] für den ebenen Dehnungszustand der Couple–Stress–Theorie ab. Die Lösung mittels Spannungsfunktionen und Fouriertransformation lieferte als Endergebnis eine inhomogene Fredholm’sche Integralgleichung zweiter Art. Während deren vollständige Lösung nur numerisch möglich ist, konnte der führende, singuläre Spannungsterm an der Rissspitze durch Grenzwertbetrachtungen analytisch abgeleitet werden. Auf ähnliche Art lösten Paul & Sridharan [95, 96] das entsprechende axialsymmetrische Problem des mikropolaren Kontinuums. Wiederum für die Couple–Stress–Theorie bestimmten Huang et al. [59, 60] die asymptotische Lösung an der Rissspitze für Zug- und Schubbelastung. Dies gelang über einen Reihenansatz für die Komponenten der beiden Spannungstensoren, wobei der Berechnung der ebene Dehnungszustand zu Grunde gelegt wurde.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte die Vorgehensweise aus [88] auf das mikropolare Kontinuum übertragen werden. Da für die weiteren Untersuchungen jedoch nur die Nahfelder

der Rissspitze bei beliebiger Belastung von Interesse sind, wird in diesem Kapitel die Methode von Huang et al. [60] angewandt.

## 4.1 Grundgleichungen in Polarkoordinaten

Im Folgenden wird der Riss als zweidimensionales Problem betrachtet, für das ein ebener Dehnungszustand angenommen wird (siehe hierzu die Diskussion in [2, Kap. 2.9]). Da die Berechnung in Polarkoordinaten  $r, \theta, z$  erfolgt, werden zunächst die entsprechenden Grundgleichungen formuliert. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten (siehe [60])

$$T_{rr,r} + \frac{1}{r}T_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \quad , \quad (4.1)$$

$$T_{\theta r,r} + \frac{1}{r}T_{\theta\theta,\theta} + \frac{1}{r}(T_{r\theta} + T_{\theta r}) = 0 \quad , \quad (4.2)$$

$$M_{zr,r} + \frac{1}{r}M_{z\theta,\theta} + \frac{1}{r}M_{zr} - T_{r\theta} + T_{\theta r} = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Da die Lösung über einen Reihenansatz für die Komponenten der Spannungstensoren bestimmt wird, werden bei der Herleitung die Kompatibilitätsbedingungen benötigt. Sie können analog zur Vorgehensweise in Kapitel 2.6 aus den Komponenten der Verzerrungstensoren in Polarkoordinaten (siehe [34, S. 126])

$$\epsilon_{rr} = u_{r,r} \quad , \quad \epsilon_{r\theta} = u_{\theta,r} - \varphi_z \quad , \quad (4.4)$$

$$\epsilon_{\theta r} = \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta) + \varphi_z \quad , \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r) \quad , \quad (4.5)$$

$$\kappa_{zr} = \varphi_{z,r} \quad , \quad \kappa_{z\theta} = \frac{1}{r}\varphi_{z,\theta} \quad (4.6)$$

bestimmt werden. Daraus resultieren als Kompatibilitätsbedingungen

$$\epsilon_{\theta r,r} - \frac{1}{r}\epsilon_{rr,\theta} + \frac{\epsilon_{r\theta} + \epsilon_{\theta r}}{r} - \kappa_{zr} = 0 \quad , \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{\theta\theta,r} - \frac{1}{r}\epsilon_{r\theta,\theta} + \frac{\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{rr}}{r} - \kappa_{z\theta} = 0 \quad , \quad (4.8)$$

$$\kappa_{zr,\theta} - (r\kappa_{z\theta})_{,r} = 0 \quad . \quad (4.9)$$

Die Inversion der Materialgesetze für den ebenen Dehnungszustand liefert

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) T_{\beta\alpha} + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) T_{\alpha\beta} - \frac{2}{\mu} \nu \delta_{\alpha\beta} T_{\gamma\gamma} \right] \quad , \quad (4.10)$$

$$\kappa_{z\alpha} = \frac{1}{\gamma + \delta} M_{z\alpha} \quad , \quad (4.11)$$

wobei für die Indizes  $\alpha, \beta, \gamma = r, \theta$  gilt. Mit Hilfe dieser Gleichungen folgen für die Spannungen aus den Kompatibilitätsbedingungen (4.7)–(4.9) die Beziehungen

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) T_{r\theta,r} + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) T_{\theta r,r} - \frac{2}{\mu} \frac{1}{r} \left[ (1 - \nu) T_{rr,\theta} - \nu T_{\theta\theta,\theta} \right] \\ & + \frac{2}{\mu} \frac{1}{r} (T_{r\theta} + T_{\theta r}) - \frac{4}{\gamma + \delta} M_{zr} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\mu} \left[ (1 - \nu) T_{\theta\theta,r} - \nu T_{rr,r} \right] - \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) T_{\theta r,\theta} + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) T_{r\theta,\theta} \right] \\ & + \frac{2}{\mu} \frac{1}{r} (T_{\theta\theta} - T_{rr}) - \frac{4}{\gamma + \delta} M_{z\theta} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$M_{zr,\theta} - M_{z\theta} - r M_{z\theta,r} = 0 \quad . \quad (4.14)$$

Zur Bestimmung der Spannungsfelder in Nähe der Risspitze wird die in der klassischen Theorie von Williams eingeführte Methode benutzt [117]. Im Fall der mikropolaren Elastizität wird zusätzlich zu den Kraftspannungen ein Reihenansatz für die Momentenspannungen benötigt:

$$T_{\alpha\beta}(r, \theta) = T_{\alpha\beta}^{(0)}(\theta) r^p + T_{\alpha\beta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} + T_{\alpha\beta}^{(2)}(\theta) r^{p+1} + \dots \quad (4.15)$$

$$M_{z\beta}(r, \theta) = M_{z\beta}^{(0)}(\theta) r^p + M_{z\beta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} + M_{z\beta}^{(2)}(\theta) r^{p+1} + \dots \quad . \quad (4.16)$$

Der Spannungsexponent  $p$  ( $p < 0$ ) der zu erwartenden Singularität sowie  $T_{\alpha\beta}^{(i)}(\theta)$  und  $M_{z\beta}^{(i)}(\theta)$ , die winkelabhängigen Anteile  $i$ -ter Ordnung, sind zu bestimmen. In den folgenden Unterkapiteln geschieht dies bis zu den Termen erster Ordnung.

## 4.2 Rand- und Symmetriebedingungen

Grundlage der folgenden Berechnungen ist ein scharfer Riss in einem unendlichen Medium. Seine beiden Rissflanken, die sich bei  $\theta = \pm\pi$  befinden (siehe Abb. 4.1), werden in Richtung ihrer äußeren Normalen als kraft- und momentenspannungsfrei angenommen. Anwendung der Spannungstensoren auf die entsprechende Normale liefert somit die

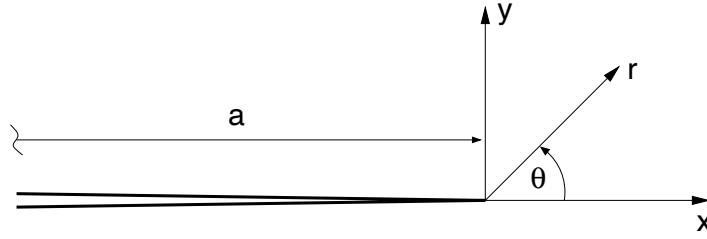


Abbildung 4.1: Koordinatensystem an der Rissspitze

Randbedingungen

$$T_{\theta\theta}(\theta = \pm\pi) = 0 \quad , \quad (4.17)$$

$$T_{r\theta}(\theta = \pm\pi) = 0 \quad , \quad (4.18)$$

$$M_{z\theta}(\theta = \pm\pi) = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Es gilt zu beachten, dass auf Grund der im Allgemeinen nicht symmetrischen Spannungstensoren die Randbedingungen (4.18) bzw. (4.19) nicht auf die Komponenten  $T_{\theta r}$  bzw.  $M_{\theta z}$  übertragen werden können.

Wie in der klassischen Theorie kann mit Hilfe von Symmetriebedingungen eine Zuordnung der berechneten Vektor- und Tensorcomponenten zu den verschiedenen Rissmoden erfolgen. Wie sich zeigen wird, werden diese Überlegungen vor allem bei den zusätzlich auftretenden Größen eine wichtige Rolle spielen. Da die Berechnung in Polarkoordinaten erfolgt, werden die Aussagen über die Symmetrie bezüglich der Koordinate  $\theta$  getroffen. Diese geschieht zunächst für Mode I, der sich aus einer reinen Zugbelastung senkrecht zu den Rissflanken ergibt. Hierbei ist die Verschiebung  $u_r$  symmetrisch und  $u_\theta$  sowie die Rotation  $\varphi_z$  sind antisymmetrisch bezüglich  $\theta$ :

$$u_r(r, \theta) = u_r(r, -\theta) \quad , \quad u_\theta(r, \theta) = -u_\theta(r, -\theta) \quad , \quad (4.20)$$

$$\varphi_z(r, \theta) = -\varphi_z(r, -\theta) \quad . \quad (4.21)$$

Aus den kinematischen Beziehungen (4.4) und (4.5) und dem Materialgesetz lässt sich damit die Symmetrie der Normalkomponenten der Dehnung  $\epsilon_{rr}$  und  $\epsilon_{\theta\theta}$  sowie der Spannung  $T_{rr}$  und  $T_{\theta\theta}$  ableiten. Entsprechend folgt die Antisymmetrie der Schubkomponenten  $\epsilon_{r\theta}$ ,  $\epsilon_{\theta r}$ ,  $T_{r\theta}$  und  $T_{\theta r}$  bezüglich  $\theta$ . Des Weiteren liefert Bedingung (4.21) die Symmetrie

der Krümmung  $\kappa_{z\theta}$  sowie der zugehörigen Momentenspannung  $M_{z\theta}$ , während die beiden anderen Komponenten  $\kappa_{zr}$  und  $M_{zr}$  wiederum antisymmetrisch sind.

Mode II resultiert aus einer reinen Schubbeanspruchung in Richtung des Risses. Dies ergibt die Symmetriebedingungen

$$u_r(r, \theta) = -u_r(r, -\theta) \quad , \quad u_\theta(r, \theta) = u_\theta(r, -\theta) \quad , \quad (4.22)$$

$$\varphi_z(r, \theta) = \varphi_z(r, -\theta) \quad , \quad (4.23)$$

d. h. in diesem Fall sind Symmetrie und Antisymmetrie im Vergleich zu Mode I gerade vertauscht. Dies gilt folglich auch für die Komponenten der Verzerrungs- und Spannungstensoren.

### 4.3 Singuläre Terme

Zur Bestimmung des Nahfeldes werden auf Grund seines singulären Charakters zunächst die Terme der niedrigsten Ordnung in  $r$ , die das Verhalten für  $r \rightarrow 0$  bestimmen, betrachtet. Einsetzen der Reihen (4.15) und (4.16) in die Gleichgewichtsbedingungen (4.1)–(4.3) ergibt bei Berücksichtigung der ersten beiden Terme

$$\begin{aligned} p T_{rr}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left(p + \frac{1}{2}\right) T_{rr}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} + T_{r\theta,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \\ + \left(T_{rr}^{(0)}(\theta) - T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta)\right) r^{p-1} + \left(T_{rr}^{(1)}(\theta) - T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta)\right) r^{p-\frac{1}{2}} + \dots = 0 \quad , \quad (4.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p T_{\theta r}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left(p + \frac{1}{2}\right) T_{\theta r}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} + T_{\theta\theta,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{\theta\theta,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \\ + \left(T_{r\theta}^{(0)}(\theta) + T_{\theta r}^{(0)}(\theta)\right) r^{p-1} + \left(T_{\theta r}^{(1)}(\theta) - T_{\theta r}^{(1)}(\theta)\right) r^{p-\frac{1}{2}} + \dots = 0 \quad , \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p M_{zr}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left(p + \frac{1}{2}\right) M_{zr}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} + M_{z\theta,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + M_{z\theta,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \\ + M_{zr}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + M_{zr}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} + \left(T_{\theta r}^{(0)}(\theta) - T_{r\theta}^{(0)}(\theta)\right) r^p \\ + \left(T_{r\theta}^{(1)}(\theta) - T_{r\theta}^{(1)}(\theta)\right) r^{p+\frac{1}{2}} + \dots = 0 \quad . \quad (4.26) \end{aligned}$$

Entsprechend resultieren aus den Kompatibilitätsbedingungen (4.12)–(4.14) die zusätzlichen Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[ p T_{r\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left( p + \frac{1}{2} \right) T_{r\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) \left[ p T_{\theta r}^{(0)}(\theta) r^{p-1} \right. \\
& \quad \left. + \left( p + \frac{1}{2} \right) T_{\theta r}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] - \frac{2}{\mu} \left[ (1 - \nu) \left( T_{rr,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{rr,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \nu \left( T_{\theta\theta,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{\theta\theta,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right) \right] + \frac{2}{\mu} \left[ \left( T_{r\theta}^{(0)}(\theta) + T_{\theta r}^{(0)}(\theta) \right) r^{p-1} + \left( T_{r\theta}^{(1)}(\theta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + T_{\theta r}^{(1)}(\theta) \right) r^{p-\frac{1}{2}} \right] - \frac{4}{\gamma + \delta} \left( M_{zr}^{(0)}(\theta) r^p + M_{zr}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} \right) + \dots = 0 \quad , \quad (4.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\mu} \left\{ (1 - \nu) \left[ p T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left( p + \frac{1}{2} \right) T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] - \nu \left[ p T_{rr}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + \left( p + \frac{1}{2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot T_{rr}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] \right\} + \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) \left[ T_{\theta r,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{\theta r,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] + \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) \\
& \quad \cdot \left[ T_{r\theta,\theta}^{(0)}(\theta) r^{p-1} + T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p-\frac{1}{2}} \right] + \frac{2}{\mu} \left[ \left( T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) - T_{rr}^{(0)}(\theta) \right) r^{p-1} + \left( T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + T_{rr}^{(1)}(\theta) \right) r^{p-\frac{1}{2}} \right] - \frac{4}{\gamma + \delta} \left( M_{z\theta}^{(0)}(\theta) r^p + M_{z\theta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} \right) + \dots = 0 \quad , \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{zr,\theta}^{(0)}(\theta) r^p + M_{zr,\theta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} - M_{z\theta}^{(0)}(\theta) r^p - M_{z\theta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} \\
& \quad - p M_{z\theta}^{(0)}(\theta) r^p - \left( p + \frac{1}{2} \right) M_{z\theta}^{(1)}(\theta) r^{p+\frac{1}{2}} + \dots = 0 \quad . \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Werden die Terme in (4.24)–(4.29) bezüglich ihrer Ordnung in  $r$  sortiert, erhält man zur Bestimmung des singulären Anteils der Lösung folgendes System von Differentialgleichungen für die Terme nullter Ordnung:

$$T_{r\theta,\theta}^{(0)}(\theta) = -(p+1) T_{rr}^{(0)}(\theta) + T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) \quad , \quad (4.30)$$

$$T_{\theta\theta,\theta}^{(0)}(\theta) = -(p+1) T_{\theta r}^{(0)}(\theta) - T_{r\theta}^{(0)}(\theta) \quad , \quad (4.31)$$

$$M_{z\theta,\theta}^{(0)}(\theta) = -(p+1) M_{zr}^{(0)}(\theta) \quad , \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\mu} \left[ (1 - \nu) T_{rr,\theta}^{(0)}(\theta) - \nu T_{\theta\theta,\theta}^{(0)}(\theta) \right] \\
& \quad = \left[ \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha} \right) p + \frac{2}{\mu} \right] T_{r\theta}^{(0)}(\theta) + \left[ \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha} \right) p + \frac{2}{\mu} \right] T_{\theta r}^{(0)}(\theta) \quad , \quad (4.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha}\right) T_{\theta r, \theta}^{(0)}(\theta) + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha}\right) T_{r \theta, \theta}^{(0)}(\theta) \\ &= \frac{2}{\mu} \left\{ \left[ (1 - \nu) p + 1 \right] T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta) - (\nu p + 1) T_{r r}^{(0)}(\theta) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$M_{z r, \theta}^{(0)}(\theta) = (p + 1) M_{z \theta}^{(0)}(\theta) \quad . \quad (4.35)$$

Wie zu erkennen ist, sind dabei die Komponenten der Kraftspannung völlig von den Momentenspannungen entkoppelt sind.

Zur Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen der Kraftspannungen, wird zunächst (4.34) mit (4.30) zu

$$T_{\theta r, \theta}^{(0)}(\theta) - T_{r \theta, \theta}^{(0)}(\theta) = p \frac{2\alpha(1 - \nu)}{\mu + \alpha} \left( T_{r r}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta) \right) \quad (4.36)$$

verknüpft. Analog liefern (4.33) und (4.31)

$$T_{r r, \theta}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta, \theta}^{(0)}(\theta) = -p \frac{\mu + \alpha}{2\alpha(1 - \nu)} \left( T_{\theta r}^{(0)}(\theta) - T_{r \theta}^{(0)}(\theta) \right) \quad . \quad (4.37)$$

Durch Differenzieren von (4.37) nach  $\theta$  erhält man mit Hilfe von (4.36) die Differentialgleichung einer freien, ungedämpften Schwingung für die Summe  $T_{r r}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta)$ :

$$\left( T_{r r}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta) \right)_{, \theta \theta} = -p^2 \left( T_{r r}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta) \right) \quad . \quad (4.38)$$

Deren Lösung mit zwei freien Konstanten  $A_1$  und  $A_2$  lautet

$$T_{r r}^{(0)}(\theta) + T_{\theta \theta}^{(0)}(\theta) = A_1 \cos p\theta + A_2 \sin p\theta \quad (4.39)$$

und mittels Gleichung (4.37) folgt direkt

$$T_{\theta r}^{(0)}(\theta) - T_{r \theta}^{(0)}(\theta) = \frac{2\alpha(1 - \nu)}{\mu + \alpha} (A_1 \sin p\theta - A_2 \cos p\theta) \quad . \quad (4.40)$$

Zur vollständigen Entkopplung des Differentialgleichungssystems wird nun Gleichung (4.30) differenziert und durch Einsetzen von (4.31) ergibt sich mit (4.39) und (4.40)

$$\begin{aligned} & T_{r \theta, \theta \theta}^{(0)}(\theta) + (p + 2) T_{r \theta}^{(0)}(\theta) \\ &= (p + 1) \left[ p - \frac{2\alpha(1 - \nu)}{\mu + \alpha} (p + 2) \right] (A_1 \sin p\theta - A_2 \cos p\theta) \quad . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Es handelt sich hierbei um die Differentialgleichung einer ungedämpften, erzwungenen Schwingung (siehe [56, S. 204ff.]), deren Gesamtlösung sich als Summe  $T_{r \theta}^{(0)}(\theta) =$



$T_{r\theta}^{(0)h}(\theta) + T_{r\theta}^{(0)p}(\theta)$  der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung  $T_{r\theta}^{(0)h}(\theta)$  und einer Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung  $T_{r\theta}^{(0)p}(\theta)$  darstellen lässt. Es gilt

$$T_{r\theta}^{(0)h}(\theta) = A_3 \cos [(p+2)\theta] + A_4 \sin [(p+2)\theta] \quad (4.42)$$

und für die Partikulärlösung wird als Ansatz

$$T_{r\theta}^{(0)p}(\theta) = a_1 \cos (p\theta) + a_2 \sin (p\theta) \quad (4.43)$$

gewählt. Einsetzen von  $T_{r\theta}^{(0)p}(\theta)$  in (4.41) liefert für die freien Parameter  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$  die Relationen

$$a_1 = -\frac{1}{4} \left[ p - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha}(p+2) \right] A_2, \quad a_2 = \frac{1}{4} \left[ p - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha}(p+2) \right] A_1. \quad (4.44)$$

Damit lassen sich aus den Gleichungen (4.40) und (4.30) die winkelabhängigen Teile der Kraftspannungen zunächst durch

$$\begin{aligned} T_{rr}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{4(p+2)} \left[ 4 - p^2 + \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha} p(p+2) \right] \\ &\cdot (A_1 \cos p\theta + A_2 \sin p\theta) + A_3 \sin [(p+2)\theta] - A_4 \cos [(p+2)\theta], \quad (4.45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{r\theta}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{4} \left[ p - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha}(p+2) \right] \\ &\cdot (A_1 \sin p\theta - A_2 \cos p\theta) + A_3 \cos [(p+2)\theta] + A_4 \sin [(p+2)\theta], \quad (4.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\theta r}^{(0)}(\theta) &= \frac{1}{4} \left[ p - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha}(p-2) \right] \\ &\cdot (A_1 \sin p\theta - A_2 \cos p\theta) + A_3 \cos [(p+2)\theta] + A_4 \sin [(p+2)\theta], \quad (4.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) &= \frac{p+1}{4} \left[ \frac{p+4}{p+2} - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha} \right] \\ &\cdot (A_1 \cos p\theta + A_2 \sin p\theta) - A_3 \sin [(p+2)\theta] + A_4 \cos [(p+2)\theta] \quad (4.48) \end{aligned}$$

darstellen.

Die Benutzung der Randbedingungen (4.18) und (4.17) liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[ p - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha}(p+2) \right] \cdot (\pm \sin p\pi A_1 - \cos p\pi A_2) \\ + \cos p\pi A_3 \pm \sin p\pi A_4 = 0, \quad (4.49) \end{aligned}$$

$$\frac{p+1}{4} \left[ \frac{p+4}{p+2} - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha} \right] \cdot (\cos p\pi A_1 \pm \sin p\pi A_2) \mp \sin p\pi A_3 + \cos p\pi A_4 = 0 \quad . \quad (4.50)$$

Dieses homogene, lineare Gleichungssystem für die Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$  besitzt nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Aus deren Berechnung folgt die Bedingung

$$\left[ \frac{1}{2} - \frac{2\alpha(1-\nu)}{\mu+\alpha} \right]^2 \cos^2 p\pi \sin^2 p\pi = 0 \quad . \quad (4.51)$$

Mit  $\cos^2 p\pi \sin^2 p\pi = 1/2 \cdot \sin(2p\pi)$  erkennt man sofort, dass diese nur durch  $p = 1/2 \cdot z$ ,  $z \in \mathbb{Z}$  (Menge der ganzen Zahlen) zu erfüllen ist. Eine weitere Forderung folgt aus der Tatsache, dass die Lösung physikalisch sinnvoll sein muss. Da die Verschiebung an der Rissspitze endlich bleiben soll und in  $r$  um eine Potenz höher ist als die entsprechenden Spannungen, ist  $z = -1$  die kleinste mögliche Zahl. Somit ergibt sich für die singulären Terme der Kraftspannungen derselbe Spannungsexponent

$$p = -\frac{1}{2} \quad (4.52)$$

wie in der klassischen Elastizitätstheorie. Auf Grund der verschwindenden Determinante sind die Zeilen der Koeffizientenmatrix aus (4.49) und (4.50) mit  $p = -1/2$  nicht mehr linear unabhängig und zwischen den gesuchten Konstanten gelten die Beziehungen

$$A_4 = \left[ \frac{3\alpha(1-\nu)}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{8} \right] A_1 \quad , \quad (4.53)$$

$$A_3 = \left[ \frac{\alpha(1-\nu)}{4(\mu+\alpha)} + \frac{3}{8} \right] A_2 \quad . \quad (4.54)$$

Im Vorgriff auf das Endresultat und dessen Interpretation werden die verbleibenden Konstanten gemäß

$$A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_I \quad , \quad A_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_{II} \quad (4.55)$$

umbenannt. Durch die Indizes  $I$  und  $II$  wird hier und auch im Folgenden die Zuordnung des jeweiligen Termes zu Mode I bzw. Mode II vorgenommen. Dies geschieht anhand der in Kapitel 4.2 formulierten Symmetriebedingungen (4.20)–(4.23).

Durch Benutzung der Gleichungen (4.52)–(4.55) resultieren für die winkelabhängigen Anteile der Kraftspannungen aus (4.45)–(4.48) schließlich

$$T_{rr}^{(0)}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{A_I}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 5 - 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ + \frac{1}{4} \frac{A_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( -5 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \sin \frac{\theta}{2} - \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \sin \frac{3\theta}{2} \right], \quad (4.56)$$

$$T_{r\theta}^{(0)}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{A_I}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right] \\ + \frac{1}{4} \frac{A_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right], \quad (4.57)$$

$$T_{\theta r}^{(0)}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{A_I}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 1 - 10\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ + \frac{1}{4} \frac{A_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 1 - 10\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right], \quad (4.58)$$

$$T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta) = \frac{1}{4} \frac{A_I}{\sqrt{2\pi}} \left[ \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ + \frac{1}{4} \frac{A_{II}}{\sqrt{2\pi}} \left[ - \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right]. \quad (4.59)$$

Somit sind die singulären Terme der Kraftspannungen bis auf die beiden Konstanten  $A_I$  und  $A_{II}$ , die im nächsten Kapitel mit Hilfe der Methode der finiten Elemente berechnet werden, bestimmt.

Die Winkelfunktionen der Momentenspannungen lassen sich durch die beiden restlichen Differentialgleichungen (4.32) und (4.35) berechnen. Aus ihnen folgt nach Differenzieren von (4.32)

$$M_{z\theta,\theta\theta}^{(0)}(\theta) = -\frac{1}{4} M_{z\theta}^{(0)}(\theta) \quad . \quad (4.60)$$

Mit der Randbedingung (4.19) und der Differentialgleichung (4.32) lässt sich hieraus leicht die Winkelabhängigkeit der Momentenspannung zu

$$M_{zr}^{(0)}(\theta) = \frac{L_I}{\sqrt{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad , \quad (4.61)$$

$$M_{z\theta}^{(0)}(\theta) = \frac{L_I}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.62)$$

bestimmen. Durch die Konstante  $L_I$  ist bereits angedeutet, dass die singulären Terme der Momentenspannungen Mode I zugeordnet sind. Dies folgt direkt aus den Symmetriebedingungen (4.21) und (4.23). Bei Mode-II-Belastung existieren somit keine singulären

Momentenspannungen und der führende Term ergibt sich in diesem Fall aus einer höheren Ordnung in  $r$ . Deswegen wird im folgenden Teilabschnitt die analytische Lösung um den bezüglich  $r$  konstanten Term erweitert. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse inklusive Verzerrungstensoren, Verschiebung und Rotation erfolgt nach Bestimmung des konstanten Terms am Ende dieses Kapitels.

## 4.4 Konstante Terme

Für die  $r$ -Abhängigkeit ergeben sich aus dem Spannungsexponenten  $p = -1/2$  als nächst höhere Beiträge zur Näherungslösung des Rissspitzenfeldes konstante Terme. Diese werden ausschließlich aus Termen erster Ordnung gebildet, wie aus den Gleichgewichtsbedingungen (4.1)–(4.3) und Kompatibilitätsbedingungen (4.12)–(4.14) sowie den Ansätzen (4.15) und (4.16) ersichtlich wird. Die zu lösenden Differentialgleichungen für  $T_{\alpha\beta}^{(1)}$  und  $M_{\alpha\beta}^{(1)}$  sind analog zu (4.30)–(4.35), wobei  $p = 0$  zu setzen ist:

$$T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) = -T_{rr}^{(1)}(\theta) + T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) \quad , \quad (4.63)$$

$$T_{\theta\theta,\theta}^{(1)}(\theta) = -T_{\theta r}^{(1)}(\theta) - T_{r\theta}^{(1)}(\theta) \quad , \quad (4.64)$$

$$M_{z\theta,\theta}^{(1)}(\theta) = -M_{zr}^{(1)}(\theta) \quad , \quad (4.65)$$

$$(1 - \nu) T_{rr,\theta}^{(1)}(\theta) - \nu T_{\theta\theta,\theta}^{(0)}(\theta) = T_{r\theta}^{(1)}(\theta) + T_{\theta r}^{(1)}(\theta) \quad , \quad (4.66)$$

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha}\right) T_{\theta r,\theta}^{(1)}(\theta) + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha}\right) T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) = \frac{2}{\mu} \left(T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) - T_{rr}^{(1)}(\theta)\right) \quad , \quad (4.67)$$

$$M_{zr,\theta}^{(1)}(\theta) = M_{z\theta}^{(1)}(\theta) \quad . \quad (4.68)$$

Wiederum sind Kraft- und Momentenspannungen entkoppelt und können unabhängig voneinander bestimmt werden. Erst bei Anteilen, die proportional zu  $\sqrt{r}$  sind, kommt es über (4.3), (4.12) und (4.13) zu solch einer Kopplung jeweils von Termen nullter und zweiter Ordnung.

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems der Kraftspannungen werden zunächst (4.63) und (4.67) bzw. (4.64) und (4.66) zu

$$T_{\theta r,\theta}^{(1)}(\theta) = T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) \quad , \quad (4.69)$$

$$T_{rr,\theta}^{(1)}(\theta) = -T_{\theta\theta,\theta}^{(1)}(\theta) \quad (4.70)$$

kombiniert. Daraus folgt unter Berücksichtigung von (4.64) durch zweifaches Differenzieren von (4.63)

$$T_{r\theta,\theta\theta\theta}^{(1)}(\theta) = 2T_{\theta\theta,\theta\theta}^{(1)}(\theta) = -4T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta) \quad . \quad (4.71)$$

Lösen dieser Differentialgleichung für  $T_{r\theta,\theta}^{(1)}(\theta)$  und anschließende Integration liefert

$$T_{r\theta}^{(1)}(\theta) = -k_I \sin(2\theta) + k_{II} \cos(2\theta) + c_1 \quad . \quad (4.72)$$

Von den drei auftretenden Konstanten  $k_I$ ,  $k_{II}$  und  $c$  kann mit Hilfe der Randbedingung (4.18) die Integrationskonstante  $c_1 = -k_{II}$  eliminiert werden und es gilt

$$T_{r\theta}^{(1)}(\theta) = -k_I \sin(2\theta) - 2k_{II} \sin^2(2\theta) \quad . \quad (4.73)$$

Aus einmaligem Ableiten von (4.64) und Benutzung von (4.69) resultiert nach zweifacher Integration

$$T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) = -k_I \cos(2\theta) - k_{II} \sin(2\theta) + c_2\theta + c_3 \quad (4.74)$$

und mit Hilfe der Randbedingung (4.17), die  $c_2 = 0$  und  $c_3 = k_I$  erfordert, schließlich

$$T_{\theta\theta}^{(1)}(\theta) = 2k_I \sin^2(2\theta) - k_{II} \sin(2\theta) \quad . \quad (4.75)$$

Mit den bisherigen Ergebnissen aus den Gleichungen (4.63) und (4.64) ergibt sich

$$T_{rr}^{(1)}(\theta) = 2k_I \cos^2(2\theta) + k_{II} \sin(2\theta) \quad , \quad (4.76)$$

$$T_{\theta r}^{(1)}(\theta) = -k_I \sin(2\theta) + 2k_{II} \cos^2(2\theta) \quad . \quad (4.77)$$

für die beiden verbleibenden Kraftspannungskomponenten.

Die Winkelabhängigkeit der Momentenspannungen lässt sich aus den beiden Differentialgleichungen (4.65) und (4.68) und der Randbedingung (4.19) gemäß

$$M_{zr}^{(1)}(\theta) = l_{II} \cos \theta \quad , \quad (4.78)$$

$$M_{z\theta}^{(1)}(\theta) = -l_{II} \sin \theta \quad (4.79)$$

festlegen. Die Konstante  $l_{II}$  bringt wiederum zum Ausdruck, dass die bezüglich  $r$  konstanten Terme der Momentenspannungen nur bei Mode II auftreten, was aus den Symmetriebedingungen (4.21) und (4.23) hervorgeht.

## 4.5 Spannungsintensitätsfaktoren und Zusammenfassung

Bisher wurde auf die Interpretation der in der Lösung auftretenden Konstanten verzichtet. Für die Kraftspannungen ist durch den Vergleich mit der klassischen Lösung (siehe [108, S. 1.4b]) sofort eine Verwandtschaft von  $A_I$  und  $A_{II}$  zu den klassischen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  für Mode-I- und Mode-II-Belastung zu erkennen. Auffälligster Unterschied ist die explizite Abhängigkeit der Lösung von den Materialparametern  $\mu$ ,  $\nu$  und  $\alpha$ .

Da es sich bei der mikropolaren Theorie um eine Erweiterung der klassischen Theorie handelt, ist der Begriff des Spannungsintensitätsfaktors ebenso in diesem verallgemeinerten Rahmen zu betrachten. Im klassischen Fall ergibt sich für die Spannungen eine Darstellung der singulären Terme gemäß

$$\lim_{r \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} T_{\alpha\beta}^I \\ T_{\alpha\beta}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} K_I f_{\alpha\beta}^I(\theta) \\ K_{II} f_{\alpha\beta}^{II}(\theta) \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{für Mode I} \\ \text{für Mode II} \end{array}, \quad (\alpha, \beta = r, \theta) \quad (4.80)$$

mit den Winkelfunktionen  $f_{\alpha\beta}^I(\theta)$  und  $f_{\alpha\beta}^{II}(\theta)$ . Zwar lässt sich diese Darstellung auf die mikropolare Theorie übertragen, eine eindeutige Definition der Spannungsintensitätsfaktoren wird jedoch erst durch die Bedingungen

$$f_{\theta\theta}^I(\theta = 0) = 1, \quad f_{r\theta}^{II}(\theta = 0) = 1 \quad (4.81)$$

möglich. Mit ihrer Hilfe können die Spannungsintensitätsfaktoren  $\check{K}_I$  und  $\check{K}_{II}$  des mikropolaren Kontinuums durch die Grenzwerte

$$\check{K}_I := \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} T_{\theta\theta}(r, \theta = 0) \right], \quad (4.82)$$

$$\check{K}_{II} := \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} T_{r\theta}(r, \theta = 0) \right] \quad (4.83)$$

definiert werden. Durch Einsetzen der Spannungskomponenten  $T_{\theta\theta}$  sowie  $T_{r\theta}$ , deren singulären Terme des jeweiligen Modes

$$T_{\theta\theta}^{(0)}(r, \theta) = \frac{1}{4} \frac{A_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right], \quad (4.84)$$

$$T_{r\theta}^{(0)}(r, \theta) = \frac{1}{4} \frac{A_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \left( 1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \left( 3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} \right) \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4.85)$$

lauten, zeigt es sich, dass  $\tilde{K}_I$  und  $\tilde{K}_{II}$  über die Beziehungen

$$\tilde{K}_I = \left(1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) A_I \quad , \quad (4.86)$$

$$\tilde{K}_{II} = \left(1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) A_{II} \quad (4.87)$$

mit den bisher benutzten Konstanten  $A_I$  und  $A_{II}$  verknüpft sind. Der für Mode I und Mode II identische Faktor  $1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}$  wird also durch die Normierung (4.81) den Spannungsintensitätsfaktoren zugeordnet.

Die sich aus dem singulären und konstanten Term ergebende Lösung für die Kraft- und Momentenspannungen ist in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Dabei wurden die Winkelfunktionen mit Hilfe der Identitäten (siehe [12, S. 181])  $\cos(3\theta/2) = \cos(\theta/2)(1 - 4\sin^2(\theta/2))$  sowie  $\sin(3\theta/2) = -\sin(\theta/2)(1 - 4\cos^2(\theta/2))$  umformuliert. Aus den Spannungen lassen sich mit den Materialgesetzen (4.10) und (4.11) die Dehnungen (siehe Tabelle 4.2) sowie die Krümmungen bestimmen. Letztere sowie die aus (4.6) und (4.4) bestimmten Rotationen und Verschiebungen sind Tabelle 4.3 zu entnehmen. Wie bereits in Kapitel 2.7 erwähnt wurde, enthält die mikropolare Elastizität als Spezialfall für  $\alpha = 0$  die klassische Elastizität und für den Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$  liefert sie die Couple-Stress-Theorie. Diese Aussagen können auch direkt auf die Lösung des Nahfeldes der Risspitze (4.90)–(4.95) übertragen werden, wie der Vergleich mit Tada [108, S. 1.4b] bzw. Huang et al. [60, S. 448ff.] zeigt. Des Weiteren stimmen für  $\alpha = 0$  die Spannungsintensitätsfaktoren  $\tilde{K}_I$  und  $K_I$  sowie  $\tilde{K}_{II}$  und  $K_{II}$  jeweils überein.

Die bisherigen Ausführungen beschränkten sich auf Spannungsintensitätsfaktoren, die sich aus den Kraftspannungen ergeben. Analog hierzu können für die Momentenspannungen Intensitätsfaktoren festgelegt werden. Da in den beiden verschiedenen Moden die führenden Terme eine unterschiedliche Ordnung in  $r$  haben, werden sie für Mode I durch  $L_I$  und für Mode II durch  $l_{II}$  gemäß

$$L_I := \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2\pi r} M_{z\theta}(r, \theta = 0) \right] \quad , \quad (4.88)$$

$$l_{II} := \lim_{r \rightarrow 0} M_{zr}(r, \theta = 0) \quad (4.89)$$

definiert.  $L_I$  und  $l_{II}$  stellen also ein Maß für die Größe der Momentenspannungen direkt an der Risspitze dar.

Kraftspannungen

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T_{rr} \\ T_{r\theta} \\ T_{\theta r} \\ T_{\theta\theta} \end{bmatrix} &= \frac{\tilde{K}_I}{\sqrt{2\pi r} \left(1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right)} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} + \left(1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] \\ \left(1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \left[-4\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} + \left(1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2}\right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[-4\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} + \left(1 + 6\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2}\right] \end{bmatrix} \\
 &+ k_I \begin{bmatrix} 2 \cos^2 \theta \\ -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) \\ 2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \\
 &+ \frac{\tilde{K}_{II}}{\sqrt{2\pi r} \left(1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right)} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left[1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} - \left(3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} - \left(3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] \\ \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha} - \left(3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] \\ - \left(3 + 2\alpha \frac{1-\nu}{\mu+\alpha}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \\
 &+ k_{II} \begin{bmatrix} \sin(2\theta) \\ -2 \sin^2 \theta \\ 2 \cos^2 \theta \\ -\sin(2\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix} \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

Momentenspannungen

$$\begin{bmatrix} M_{zr} \\ M_{z\theta} \end{bmatrix} = \frac{L_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + l_{II} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix} \tag{4.91}$$

Tabelle 4.1: Spannungen des Nahfeldes der Risspitze für Mode I und Mode II.



Dehnungen

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{r\theta} \\ \epsilon_{\theta r} \\ \epsilon_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \\
 & \frac{\tilde{K}_I}{2\sqrt{2\pi r}\mu[\mu + \alpha(3 - 2\nu)]} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(1 - 2\nu) - \alpha + [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ - \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(\mu + \alpha)(1 - \nu) - [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(\mu - \alpha)(1 - \nu) + [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(1 - 2\nu) + \alpha(3 - 4\nu) - [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{k_I}{2\mu} \begin{bmatrix} 2(\cos^2 \theta - \nu) \\ -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) \\ 2(\sin^2 \theta - \nu) \end{bmatrix} \\
 & + \frac{\tilde{K}_{II}}{2\sqrt{2\pi r}\mu[\mu + \alpha(3 - 2\nu)]} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(\mu - \alpha)(1 - \nu) - [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(1 - 2\nu) - \alpha + [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(3 - 2\nu) + \alpha - [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2\nu(\mu + \alpha) - [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{bmatrix} \\
 & + \frac{k_{II}}{2\mu\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sin(2\theta) \\ \alpha \cos 2\theta - \mu \\ \alpha \cos 2\theta + \mu \\ -\alpha \sin(2\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix} \tag{4.92}
 \end{aligned}$$

Tabelle 4.2: Dehnungen des Nahfeldes der Riss Spitze für Mode I und Mode II.

### Krümmungen

$$\begin{bmatrix} \kappa_{zr} \\ \kappa_{z\theta} \end{bmatrix} = \frac{L_I}{\sqrt{2\pi r}(\gamma + \delta)} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{l_{II}}{\gamma + \delta} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(\sqrt{r}) \\ O(\sqrt{r}) \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

### Rotation

$$\varphi_z = \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \frac{L_I}{\gamma + \delta} \sin \frac{\theta}{2} + r \frac{l_{II}}{\gamma + \delta} \cos \theta + O(r^{3/2}) \quad (4.94)$$

### Verschiebung

$$\begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{K}_I}{\mu [\mu + \alpha(3 - 2\nu)]} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(1 - 2\nu) - \alpha + [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(\mu + \alpha)(1 - \nu) - [\mu + \alpha(7 - 6\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{bmatrix} + r \frac{k_I}{2\mu} \begin{bmatrix} 2(\cos^2 \theta - \nu) \\ -\sin(2\theta) \end{bmatrix} + \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \frac{\tilde{K}_{II}}{\mu [\mu + \alpha(3 - 2\nu)]} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(\mu - \alpha)(1 - \nu) - [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \left\{ \mu(1 - 2\nu) - \alpha + [3\mu + \alpha(5 - 2\nu)] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \end{bmatrix} + r \frac{k_{II}}{2\mu\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sin(2\theta) \\ \alpha \cos 2\theta - \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O(r^{3/2}) \\ O(r^{3/2}) \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

Tabelle 4.3: Krümmungen, Rotation und Verschiebungen des Nahfeldes der Risspitze für Mode I und Mode II.

# Kapitel 5

## Finite-Elemente-Analysen

Als Anwendungsbeispiele werden in diesem Kapitel verschiedene Rissprobleme betrachtet und mittels der in ABAQUS implementierten Elemente berechnet. Zunächst wird ein Riss in homogenem Material untersucht, wobei entweder eine reine Mode-I- oder Mode-II-Belastung aufgebracht wird. Die Ergebnisse dieser FE-Rechnungen können einerseits durch Vergleich mit der analytischen Lösung (4.90)–(4.95) zur Verifikation der selbst programmierten Elemente herangezogen werden. Andererseits ermöglichen sie die Bestimmung der Intensitätsfaktoren sowohl der Kraft- als auch der Momentenspannungen in Abhängigkeit von den verschiedenen Materialparametern. Des Weiteren wird anhand dieses Beispiels der Einfluss der verschiedenen Formfunktionen sowie der Integrationsordnung der implementierten Elementtypen untersucht.

Daraufhin wird ein Zweistoffverbund mit einem Riss betrachtet, der parallel zur Grenzfläche der beiden Materialien liegt und eine senkrechte Zugbelastung erfährt. Dabei wird neben dem Einfluss der Materialparameter die Abhängigkeit der Intensitätsfaktoren vom Abstand des Risses zur Grenzschicht betrachtet. Abschließend erfolgt die Berechnung eines Schicht-Substrat-Verbundes, bei dem sich ein unter Mode-I-Belastung stehender Riss senkrecht zur Oberfläche in der dünnen Schicht befindet. In diesem Beispiel wird zusätzlich zu den Materialparametern die Länge des Risses variiert.

### 5.1 Materialparameter

Wie aus Kapitel 2.5.2 hervorgeht, besitzt die mikropolare Elastizität außer den beiden klassischen Konstanten  $E$  und  $\nu$  die vier neuen Materialparameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ . Da im

Folgenden rein zweidimensionale Analysen durchgeführt werden, entfällt der Parameter  $\beta$  und bezüglich des Materialgesetzes der Momentenspannungen ist für die Berechnungen primär nur die Summe  $\gamma + \delta$  von Bedeutung (vergleiche Kapitel 3.3.2). Die jeweiligen Einzelwerte von  $\gamma$  und  $\delta$  bestimmen lediglich die Aufteilung des Momentenspannungstensors in symmetrischen und antisymmetrischen Anteil. Da dies nicht gesondert betrachtet wird, kann generell  $\delta = 0$  gesetzt werden. Für die FE-Rechnungen werden somit neben  $E$  und  $\nu$  die beiden mikropolaren Materialparameter  $\alpha$  und  $\gamma$  verwendet.

Wie den Materialgleichungen (2.110) und (2.111) entnommen werden kann, stimmt die Dimension von  $\alpha$  mit dem Elastizitätsmodul überein.  $\gamma$  sowie die beiden anderen Materialparameter im Materialgesetz der Momentenspannungen besitzen die Einheit einer Kraft. Bildet man den Quotienten  $\gamma/E$  oder  $\gamma/\alpha$ , so ergibt sich ein Parameter, der das Quadrat einer intrinsischen Länge darstellt. Die mikropolare Theorie verfügt somit über eine inhärente Längenabhängigkeit, die die Beschreibung von Größeneffekten erlaubt. Wie eine Dimensionsanalyse anhand der Grundgleichungen (2.106)–(2.111) zeigt, ergeben sich bei Änderung der geometrischen Abmessungen um den Faktor  $c$  und Beibehaltung der Neumann-Randbedingungen nur dann dieselben Kraftspannungen und Dehnungen, wenn  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  mit  $c^2$  multipliziert werden. Die Momentenspannungen bzw. die Krümmungen ändern sich um den Faktor  $c$  bzw.  $1/c$ . Da der Größeneffekt bei Vernachlässigung von  $\beta$  und  $\delta$  also rein über  $\gamma$  darstellbar ist, kann die Variation dieses Materialparameters ebenso als Betrachtung geometrisch ähnlicher Bauteile interpretiert werden.

In der Literatur sind nur wenige experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Materialparameter der mikropolaren bzw. Couple-Stress-Theorie zu finden. Ihre Ermittlung erfolgt dabei meist über den eben beschriebenen Größeneffekt. Im Gegensatz zu Zugversuchen werden solche Einflüsse für die Torsion von Kreiszyklindern sowie bei Biegung von Platten und gekrümmten Balken vorausgesagt [39, 40, 68]. Bei derartigen Experimenten mit den Werkstoffen Stahl bzw. Aluminium konnte jedoch praktisch kein Größeneffekt festgestellt werden [103, 23]. Die Bestimmung der mikropolaren Materialparameter gelang für menschliche Knochen [118, 73] und Kunststoffschäume, wie z. B. Polyurethan-Schaum, [74, 75, 3]. Eine weitere Möglichkeit ist die Messung der Ausbreitung von Transversalwellen in einem mikropolaren Medium, das sich im Gegensatz zum klassischen durch auftretende Dispersion auszeichnet [30]. Versuche mit Kaliumnitrat lieferten hier nur bedingt einen Nachweis [4]. Der Einfluss der Momentenspannungen konnte hingegen durch Schwingungsexperimente zur Schermodulbestimmung einer PVC-Schicht, die zwischen zwei starren Zylinder eingebettet ist, demonstriert werden [97]. Eine systematische Darstellung der experimentellen Untersuchungen ist [76] zu entnehmen.

Da keine ausreichende Kenntnis der möglichen Werte von  $\alpha$  und  $\gamma$  gegeben ist, werden die mikropolaren Materialparameter im Rahmen der folgenden FE-Rechnungen über mehrere Größenordnungen hinweg variiert und ihr Einfluss auf die Intensitätsfaktoren und Winkelfunktionen studiert. Für das Verhältnis  $\alpha/E$  wird der Bereich  $10^{-5} \leq \alpha/E \leq 10^3$  ausgewählt, wobei sich die mikropolare Theorie für  $\alpha = 0$  auf die klassische Theorie reduziert und der Grenzfall  $\alpha \rightarrow \infty$  die Couple-Stress-Theorie repräsentiert. Die Werte von  $\gamma$  liegen zwischen  $1 \text{ N} < \gamma < 10^8 \text{ N}$ .

Restriktionen bezüglich der Wahl der Parameter ergeben sich auch aus der numerischen Berechnungsmethode. So wurde in [19, S. 43ff.] durch eine grobe Fehlerabschätzung gezeigt, dass die Genauigkeit bei Bestimmung der Schubspannungen vom kleineren der beiden Werte  $\sqrt{\gamma/E}/l$  und  $\sqrt{\gamma/\alpha}/l$  abhängt. Dieses Verhältnis sollte größer als Eins sein, wobei für die folgenden Beispiele  $l$  die Länge des kleinsten Elementes an der Risspitze darstellt. Somit kann rein aus numerischen Gründen der Grenzübergang  $\gamma \rightarrow 0$  nicht vollzogen werden. Durch Betrachten der Grundgleichungen (2.106)–(2.111) erkennt man, dass in diesem Fall die Momentenspannungen verschwinden und sich das klassische Resultat ergibt (siehe auch [19, S. 33]).

Letztere Aussage lässt sich allerdings nicht auf die analytische Lösung der Rissspitzenfelder (4.90)–(4.95) übertragen. Wie deren Abhängigkeit von den Materialparametern zeigt, konvergiert sie nur für  $\alpha \rightarrow 0$  gegen die klassische Lösung. Offensichtlich liefert die Durchführung des Grenzprozesses  $\gamma \rightarrow 0$  in den zu lösenden Differentialgleichungen (4.12)–(4.13) ein anderes Resultat als die Lösung (4.90)–(4.95) für  $\gamma = 0$ . Der mathematische Hintergrund dieses Problems der singulären Störungsrechnung kann im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht detailliert beleuchtet werden.

## 5.2 Riss in homogenem Material

### 5.2.1 Zur FE-Modellierung und Auswertung

In diesem Abschnitt wird ein Riss betrachtet, der sich senkrecht an der Oberfläche eines homogenen, mikropolaren Materials befindet. Eine schematische Darstellung ist Abbildung 5.1 zu entnehmen. Die Generierung eines zweidimensionalen FE-Modells des Risses erfolgt mit Hilfe des kommerziellen Pre- und Post-Prozessors PATRAN [80]. Um mit PATRAN die Visualisierung und Verarbeitung der FE-Resultate, die mit den implementierten Elementen erzeugt werden, zu ermöglichen, bedarf es der Realisierung einer eigenen

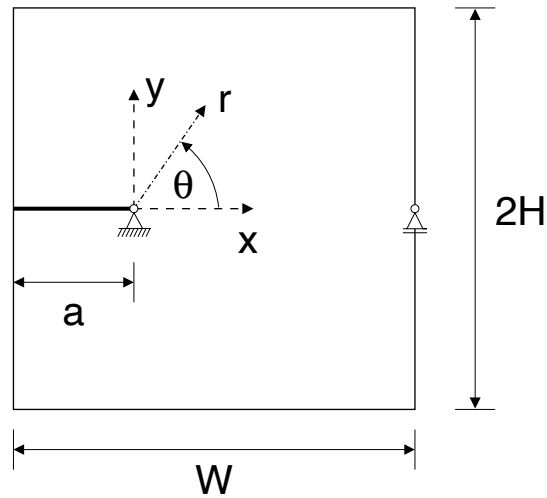


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Risses in homogenem Material

Benutzerschnittstelle. Diese wandelt zusammen mit einigen ABAQUS-Routinen (siehe [58, 5.1.3]) die Ergebnisdatei derart um, dass alle lösungsabhängigen Variablen eingelesen und interpretiert werden können.

Das in Abbildung 5.2 dargestellte Netz besteht aus insgesamt 1040 achtknotigen Elementen. Analog zur analytischen Lösung wird ein ebener Dehnungszustand zu Grunde gelegt (siehe Kapitel 3.3.2). Breite und Höhe des Modells betragen  $W = 11 \text{ mm}$  und  $2H = 20 \text{ mm}$  und der Riss hat eine Länge von  $a = 1 \text{ mm}$ . Wie zu erkennen ist, wird auf Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft entlang der Risskante verzichtet. Auf Grund der groben Elementierung in Umfangsrichtung würde dies zu wesentlich größeren Extrapolationsfehlern bei Bestimmung der Spannungen an den Knoten für  $\theta = 0$  führen.

Die Materialkonstanten der klassischen Elastizitätstheorie sind im Folgenden durch  $E = 100 \text{ GPa}$  und  $\nu = 0,3$  festgelegt, während  $\alpha$  und  $\gamma$  variiert werden (siehe Kapitel 5.1). Als Dirichlet-Randbedingungen werden

$$u_r(r = 0) = u_\theta(r = 0) = 0 \quad , \quad u_\theta(r = 10 \text{ mm}, \theta = 0) = 0 \quad (5.1)$$

vorgegeben, wobei sich der Koordinatenursprung an der Risspitze befindet (vergleiche Abb. 5.1). Dort sind somit für alle Knoten die beiden Verschiebungsfreiheitsgrade beschränkt und zur Unterdrückung einer möglichen Starrkörperrotation wird der Knoten am rechten Rand bei  $\theta = 0$  in  $y$ -Richtung festgehalten. Bezüglich der Rotationsfreiheitsgrade werden keinerlei Einschränkungen vorgenommen.

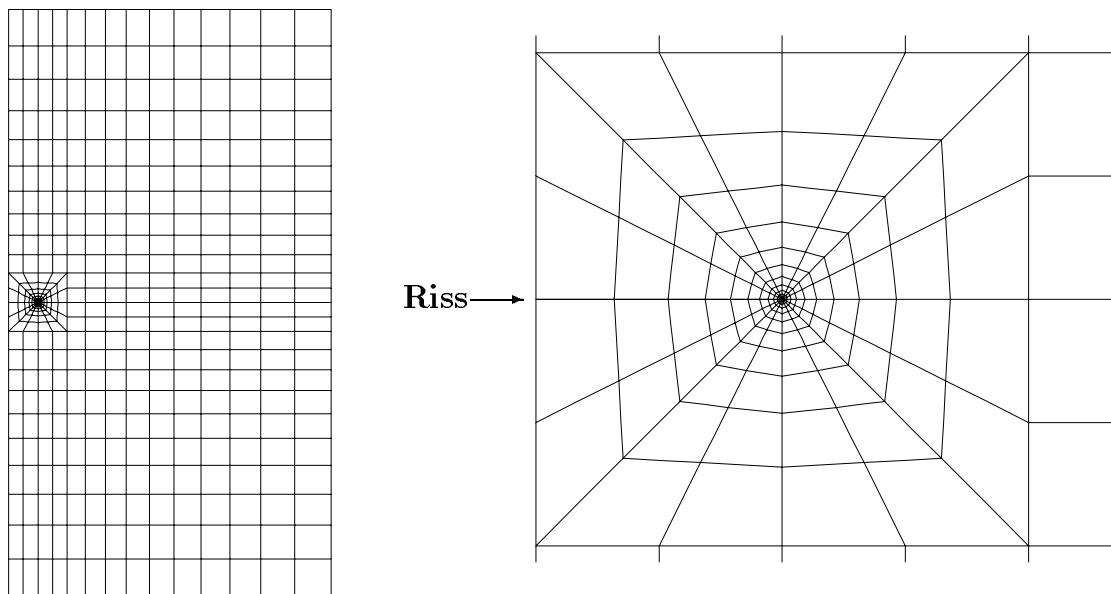


Abbildung 5.2: Netz des Risses in homogenem Material (links: gesamtes Netz, rechts: Ver-netzung der Risszone)

Die Aufbringung der Spannungsrandbedingungen erfolgt direkt am Riss. Bei Mode I werden beide Flanken mit einem Innendruck von  $P = 100 \text{ MPa}$  belastet. Auf Grund des Superpositionsprinzips (siehe [2, S. 79]) ergibt sich auf diese Weise derselbe Spannungsexponent wie bei Zugbelastung am oberen und unteren Rand des Modells. Zur Realisierung einer reinen Mode-II-Belastung hingegen müssen die Schubspannungen direkt auf die Rissflanken aufgebracht werden, da ansonsten stets ein Mode-I-Anteil resultieren würde. Bei den folgenden Rechnungen für Mode II wirkt auf die obere bzw. untere Rissflanke eine Schubspannung von  $100 \text{ MPa}$  in positiver bzw. negativer  $x$ -Richtung. Da in der UEL-Subroutine lediglich das Äquivalent zur von ABAQUS verwendeten Dload-Karte (siehe [58, 23.4.15-1]) für senkrechten Druck implementiert ist, werden entsprechende Knotenkräfte aufgebracht, die vorab aus der gegebenen Schubbelastung ermittelt werden.

Durch die Aufbringung einer reinen Mode-I- bzw. Mode-II-Belastung besteht die Möglichkeit, die in Kapitel 3 vorgestellte Programmierung benutzereigener Elemente durch Vergleich mit dem analytischen Ergebnis des Rissspitzennahfeldes (4.90)–(4.95) zu verifizieren. Dies geschieht sowohl durch Bestimmung des Spannungsexponenten als auch durch Betrachten der Winkelfunktionen. Wie in Kapitel 4 gezeigt wurde, gelten bezüglich der singulären Terme des mikropolaren Kontinuums funktionale Zusammenhänge der

Form

$$T_{\alpha\beta}^{(0)} = (2\pi r)^p \left[ \tilde{K}_I f_{\alpha\beta}^I(\theta) + \tilde{K}_{II} f_{\alpha\beta}^{II}(\theta) \right] \quad , \quad (5.2)$$

$$M_{\alpha\beta}^{(0)} = (2\pi r)^p L_I g_{\alpha\beta}^I(\theta) \quad (5.3)$$

mit  $f_{\alpha\beta}^I$ ,  $f_{\alpha\beta}^{II}$  und  $g_{\alpha\beta}^I$  als Winkelfunktionen der Kraft- bzw. Momentenspannungen. Für den Winkel  $\theta = 0$  lassen sich daraus durch Logarithmieren unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.90) und (4.91) die Beziehungen

$$\log T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta = 0) = p \log(2\pi r) + \log \tilde{K}_I \quad , \quad (5.4)$$

$$\log T_{r\theta}^{(0)}(\theta = 0) = p \log(2\pi r) + \log \tilde{K}_{II} \quad , \quad (5.5)$$

$$\log M_{z\theta}^{(0)}(\theta = 0) = p \log(2\pi r) + \log L_I \quad (5.6)$$

ableiten. Im Falle negativer Spannungen und Intensitätsfaktoren werden entsprechend die Beträge der Größen benutzt. Bei doppelt logarithmischer Auftragung der jeweiligen Spannung über dem Radius ergibt sich somit eine Gerade mit dem Spannungsexponenten  $p$  als Steigung. Auf Basis der Spannungswerte an den Knoten in Rissspitzennähe kann für die FE-Ergebnisse eine lineare Regression durchgeführt werden [109] (siehe Abb. 5.3). Zur Verifikation der numerischen Resultate anhand des Spannungsexponenten (siehe Kapitel 5.2.2 und 5.2.3) werden dabei sowohl die Steigung als auch der Achsenabschnitt nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt. Ihre Ermittlung erfolgt mit Hilfe des Computeralgebrasystems MAPLE [99]. Bei der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren (siehe Kapitel 5.2.2 und 5.2.3), die in der analytischen Lösung freie Parameter darstellen und nur numerisch ermittelt werden können, wird hingegen  $p = -1/2$  fest vorgegeben und lediglich der Achsenabschnitt mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate angepasst. Dies dient zur Vermeidung möglicher Ungenauigkeiten auf Grund unterschiedlicher Spannungsexponenten bei Variation der Materialparameter.

Wie im klassischen Fall ist durch (5.4) und (5.5) auch bei mehrmodaler Beanspruchung eine Möglichkeit zur Festlegung der Größen  $\tilde{K}_I$  und  $\tilde{K}_{II}$  gegeben, da die Spannungskomponenten  $T_{\theta\theta}$  bzw.  $T_{r\theta}$  für Mode II bzw. Mode I bei  $\theta = 0$  identisch verschwinden. Für die Momentenspannungen kann auf die beschriebene Weise nach (5.6) der Intensitätsfaktor  $L_I$  berechnet werden, während sich der für Mode II führende Faktor  $l_{II}$  direkt aus dem arithmetischen Mittel der Werte für  $M_{zr}(\theta = 0)$  an den Knoten in Nähe der Rissspitze



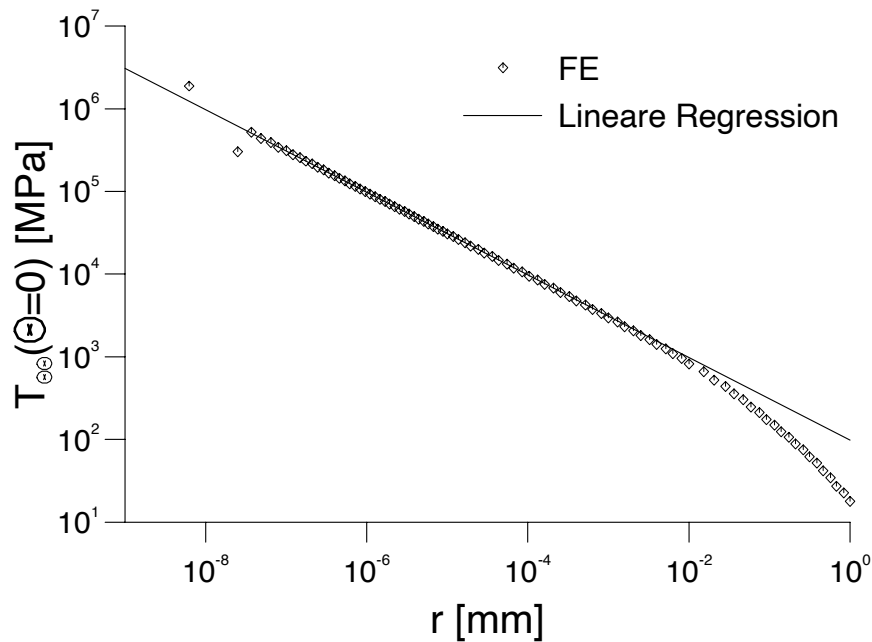


Abbildung 5.3: Beispiel einer linearen Regression

ergibt. Somit können also auch bei den Momentenspannungen die Intensitätsfaktoren zu Mode I und Mode II für eine beliebige Last getrennt voneinander bestimmt werden.

Wie die FE-Analysen zeigen, reagieren die Rechnungen des mikropolaren Kontinuums bedeutend empfindlicher auf die Vernetzung als im klassischen Fall. Aus diesem Grund wird die Rissspitze extrem verfeinert, so dass sich für die Kantenlänge  $l$  der Elemente an der Rissspitze und die Breite  $W$  des Modells ein Verhältnis von  $l/W \approx 10^{-9}$  ergibt. Des Weiteren spielt die Vernetzung der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze eine wichtige Rolle. Die in Abbildung 5.4 a) dargestellte Elementierung führt für bestimmte Kombinationen von Materialparametern zu numerischen Schwierigkeiten. Diese äußern sich in Rissspitzennähe durch Oszillationen der Spannungswerte zwischen den Knoten der Elementecken und -mitten und durch eine Abweichung vom erwarteten linearen Verlauf bei doppelt logarithmischer Auftragung. Dies wiederum führt zu einer deutlichen Differenz von bis zu 15% zwischen analytisch und mittels FEM bestimmten Spannungsexponenten. Zwar können diese Mängel durch Verkleinerung der ersten beiden Elemente an der Rissspitze verringert werden, zufriedenstellende Resultate ergibt jedoch erst die Vernetzung gemäß Abbildung 5.4 b). Hierbei degeneriert bei  $r = 0$  eine Kante der acht innen liegenden Elemente zu einem Punkt, wobei dort aus numerischen Gründen trotzdem pro Element drei verschiedene Knoten liegen. Des Weiteren werden auf den radial verlauf-

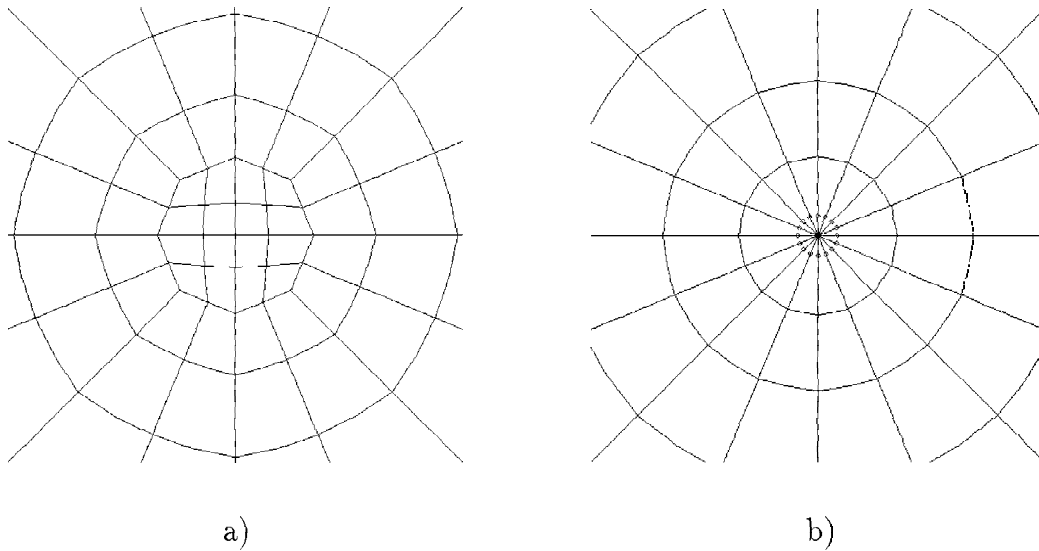


Abbildung 5.4: Vernetzung der Risspitze

fenden Kanten die Mittelknoten um ein Viertel der Kantenlänge in Richtung Risspitze verschoben (angedeutet durch die Punkte in Abbildung 5.4). Daraus ergibt sich eine Wurzelabhängigkeit in den Formfunktionen und die Elemente sind besser in der Lage, die analytische Lösung (4.94) und (4.95) für  $u$  und  $\varphi$  abzubilden (siehe [5], [54]).

Anhand von Abbildung 5.3 ist zu erkennen, dass sich der lineare Verlauf der Kurve wegen der extremen Verfeinerung des Netzes an der Risspitze über einige Größenordnungen von  $r$  erstreckt. Für die Bestimmung des Spannungsexponenten sowie der Intensitätsfaktoren wird in allen folgenden Rechnungen der Bereich  $8 \cdot 10^{-8} \text{ mm} < r < 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$  gewählt. Er umfasst insgesamt 20 Knoten, wobei die ersten beiden Elemente an der Risspitze auf Grund ihrer höheren numerischen Ungenauigkeiten unberücksichtigt bleiben.

## 5.2.2 Ergebnisse zu Mode I

### Spannungsexponent und Winkelabhängigkeit

Zur Verifikation der implementierten Elemente wird zunächst der Spannungsexponent aus den FE-Rechnungen berechnet und mit der analytischen Lösung  $p = -1/2$  verglichen. Dies erfolgt bei Mode I gemäß Gleichung (5.4) bzw. (5.6) mit Hilfe der Komponenten  $T_{\theta\theta}$  und  $M_{z\theta}$ . Bei allen vier zur Verfügung stehenden Achtknotenelementen für ebene Dehnung

(U34, U36,  $\bar{U}34$ ,  $\bar{U}36$ ; siehe Kapitel 3.3.2) kann innerhalb der angegebenen Bereiche der Materialparameter  $\alpha$  und  $\gamma$  eine sehr gute Übereinstimmung des Spannungsexponenten erzielt werden. Dies gilt sowohl für die Auswertung der Kraft- als auch der Momentenspannungen. Aus den Elementen mit vollständiger Integration ergibt sich stets ein zu kleiner Exponent, der je nach Wahl der Materialparameter einen relativen Fehler von 2 bis 6‰ aufweist. Dieser kann mit den Elementen reduzierter Integration auf Werte kleiner 1,5‰ verkleinert werden. Wie diese Analysen auch zeigen, ist das Verhalten bezüglich des Spannungsexponenten unabhängig von der Art der Formfunktion für die Rotationen. Linearer und quadratischer Ansatz liefern praktisch identische Spannungsexponenten.

Im Folgenden wird die Winkelabhängigkeit der Kraftspannungskomponenten betrachtet. Aus der analytischen Lösung (4.90) und Gleichung (4.80) ergeben sich mit Berücksichtigung von (3.42) die Winkelfunktionen

$$\begin{bmatrix} f_{rr}^I(\theta) \\ f_{r\theta}^I(\theta) \\ f_{\theta r}^I(\theta) \\ f_{\theta\theta}^I(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+4C} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} [1 - 4C + (1 + 12C) \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ (1 + 12C) \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} [-8C + (1 + 12C) \cos^2 \frac{\theta}{2}] \\ \cos \frac{\theta}{2} [-8C + (1 + 12C) \cos^2 \frac{\theta}{2}] \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

wobei

$$C := \frac{\alpha(1 - \nu^2)}{E + 2\alpha(1 + \nu)} \quad (5.8)$$

gilt. Während der Vorfaktor auf der rechten Seite lediglich für die Normierung von  $T_{\theta\theta}^{(0)}(\theta = 0)$  eine Rolle spielt, ist  $C$  wesentlich für die Gestalt der Funktionen verantwortlich. Er hängt bei festem  $\nu$  lediglich vom Verhältnis  $\alpha/E$  ab und sein Wertebereich liegt zwischen 0 und  $\frac{1-\nu}{2}$ . Wie Abbildung 5.5 zu entnehmen ist, beschränkt sich der Übergangsbereich zwischen diesen Grenzwerten im Wesentlichen auf  $0,01 < \alpha/E < 10$ .

In den Abbildungen 5.6–5.11 werden die mittels FEM bestimmten Winkelfunktionen mit den analytischen verglichen. Hierzu werden für den Radius  $r = 10^{-5}$  mm, bei dem der singuläre Term noch führend ist (vergleiche Abb. 5.3), die Spannungswerte an den Knoten in Umfangsrichtung für  $0 \leq \theta \leq \pi$  verwendet und mit dem aus der linearen Regression stammenden  $\tilde{K}_I$ -Faktor (vergleiche Kapitel 5.2.2) normiert. Es sei darauf hingewiesen, dass für die Winkelfunktionen stets die in Kapitel 4.2 angegebenen Symmetriebedingungen gelten. Die Abhängigkeit der Winkelfunktionen von  $\alpha/E$  ist den Abbildungen 5.6–5.9 zu entnehmen. Zusätzlich zu den Grenzfällen  $\alpha/E = 0$  und  $10^3$  werden im Übergangsbereich die Werte  $\alpha/E = 1/10$  und der Fall  $C = 1/4$ , d. h.  $\alpha/E \approx 0,9615$ , betrachtet.

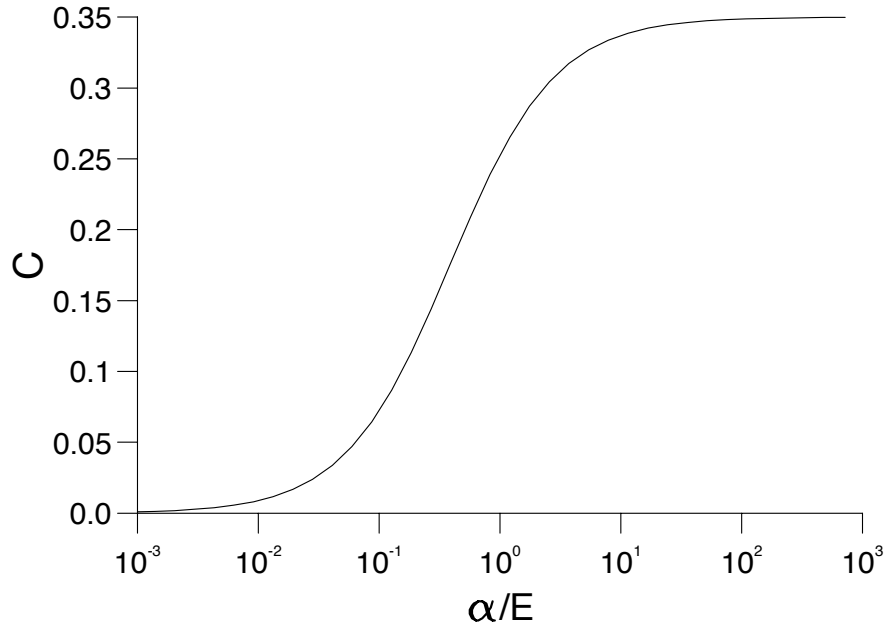


Abbildung 5.5: Faktor  $C$  in Abhängigkeit von  $\alpha/E$  für  $\nu = 0,3$

Neben der Symmetrie des Spannungstensors zeichnet den klassischen Fall die Tatsache aus, dass im Bereich  $0 < \theta < \pi$  keine negativen Werte existieren. Gilt  $\alpha > 0$ , so ergeben sich für  $2 \arccos \sqrt{\frac{8\alpha(1-\nu^2)}{E+2\alpha(7+\nu-\nu^2)}} < \theta < \pi$  negative Spannungen  $T_{\theta\theta}^{(0)}$  und  $T_{\theta r}^{(0)}$ . Besondere Verhältnisse liefert  $C = 1/4$ , was  $\alpha = \frac{E}{2(1-\nu-2\nu^2)}$  entspricht (siehe Abb. 5.8). Im betrachteten Bereich  $0 < \theta < \pi$  weisen dabei die Paare  $T_{\theta\theta}^{(0)}$  und  $T_{\theta r}^{(0)}$  bzw.  $T_{rr}^{(0)}$  und  $T_{r\theta}^{(0)}$  eine wechselseitige Punkt- bzw. Achsensymmetrie bezüglich  $\theta = \pi/2$  auf. Für negative Winkel sind die Symmetrien bezüglich  $\theta = -\pi/2$  gerade vertauscht. Des Weiteren verschwinden in diesem Fall bis auf  $T_{\theta\theta}^{(0)}$  alle Spannungskomponenten bei  $\theta = 0$  und eine weitere Erhöhung des Materialparameters  $\alpha$  führt schließlich zu negativen Normalspannungen  $T_{rr}^{(0)}$  im Bereich  $0 < \theta < 2 \arcsin \sqrt{\frac{-E+2\alpha(1-\nu-2\nu^2)}{E+2\alpha(7+\nu-\nu^2)}}$  (siehe Abb. 5.9).

Die FE-Analysen, die den Abbildungen 5.6–5.9 zu Grunde liegen, wurden mit dem Elementtyp  $\bar{U}36$  durchgeführt und liefern eine sehr gute Übereinstimmung zu den analytischen Berechnungen. Des Weiteren kann bestätigt werden, dass die Kurven unabhängig vom Wert des Materialparameters  $\gamma$  sind ( $\gamma = 10^4$  N bei Abbildungen 5.6–5.11) und sich dessen Einfluss rein auf die Größe der Intensitätsfaktoren beschränkt. Wie zuvor beim Spannungsexponenten kann zwischen den Elementen mit linearem und quadratischem Ansatz für die Rotation kein signifikanter Unterschied festgestellt werden. Die verschiedenen Integrationsordnungen hingegen liefern deutliche Unterschiede. Einerseits können

mit den Elementen voller Integration die teilweise zu beobachtenden Oszillationen (siehe z. B.  $T_{rr}$  in Abbildung 5.6) stark vermindert werden. Da die Ursache dieses Effektes wohl in der groben Elementierung in Umfangsrichtung zu suchen ist, bringt dies jedoch keine unmittelbaren Vorzüge. Andererseits zeigen sich ab  $\alpha/E \geq 10$  numerische Schwierigkeiten bei der Berechnung der Spannungen wie anhand der Abbildungen 5.10 und 5.11 für das Element U34 verdeutlicht wird. Zwar zeigen die Normalkomponenten eine gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, den Schubspannungen dagegen werden völlig falsche Werte zugewiesen. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass letztere Aussage auf den antisymmetrischen Teil des Spannungstensors bezogen werden muss, da der symmetrische Anteil richtig berechnet wird (siehe Abb. 5.11). Bei den Elementen reduzierter Integration kann dieser Effekt zwar auch beobachtet werden, allerdings tritt er hier erst für  $\alpha/E > 1000$  und somit außerhalb des betrachteten Bereiches in Erscheinung. Das Auftreten dieses Effektes deckt sich mit der in Kapitel 2.7 gemachten Aussage, dass im Rahmen der Couple–Stress–Theorie der antisymmetrische Teil des Kraftspannungstensors unbestimmt bleibt.

Ebenso wie bei den Kraftspannungen liegen die FE–Werte für die Winkelabhängigkeit der Momentenspannungen sehr dicht am analytischen Ergebnis. Nach Gleichung (4.91) sind die Winkelfunktionen bei Mode II für  $M_{zr}$  und  $M_{z\theta}$  durch  $\sin \theta/2$  und  $\cos \theta/2$  gegeben und somit völlig unabhängig von Materialparametern. Dies kann für alle vier betrachteten Elementtypen bestätigt werden. Numerische Schwierigkeiten wie bei Bestimmung der Schubkomponenten der Kraftspannungen sind nicht beobachtet worden.

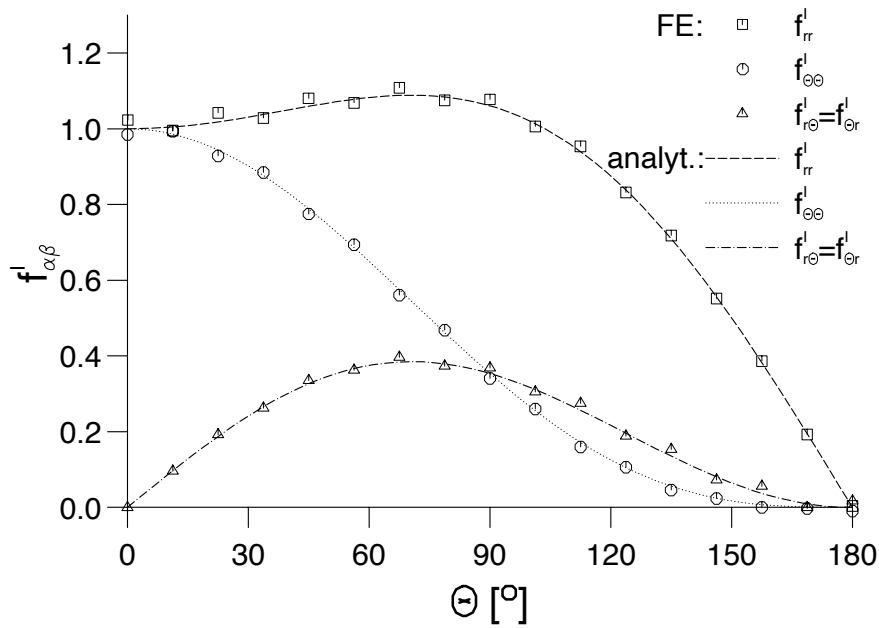


Abbildung 5.6: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.7) mit den FE-Ergebnissen eines Elementes reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0$

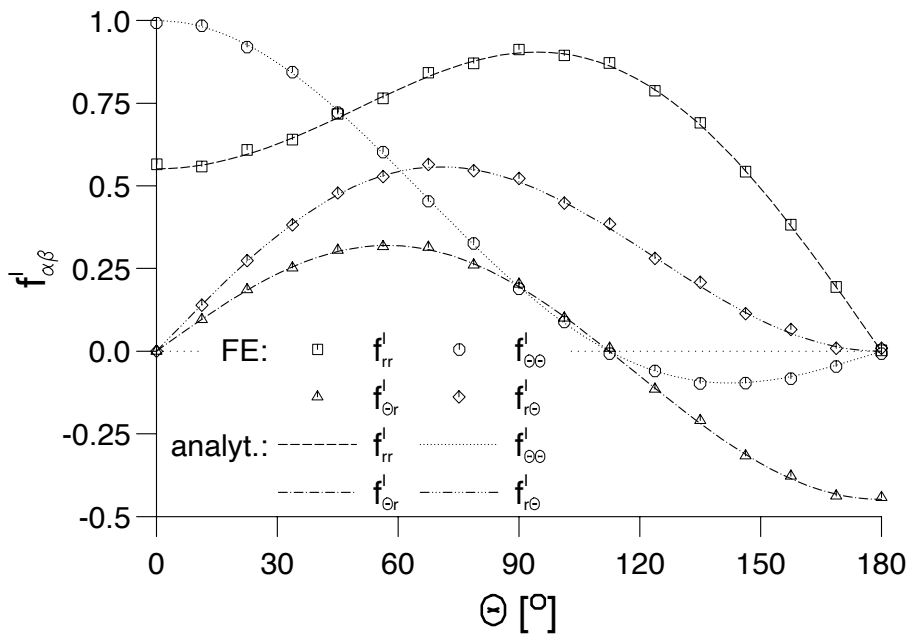


Abbildung 5.7: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.7) mit den FE-Ergebnissen eines Elementes reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0,1$

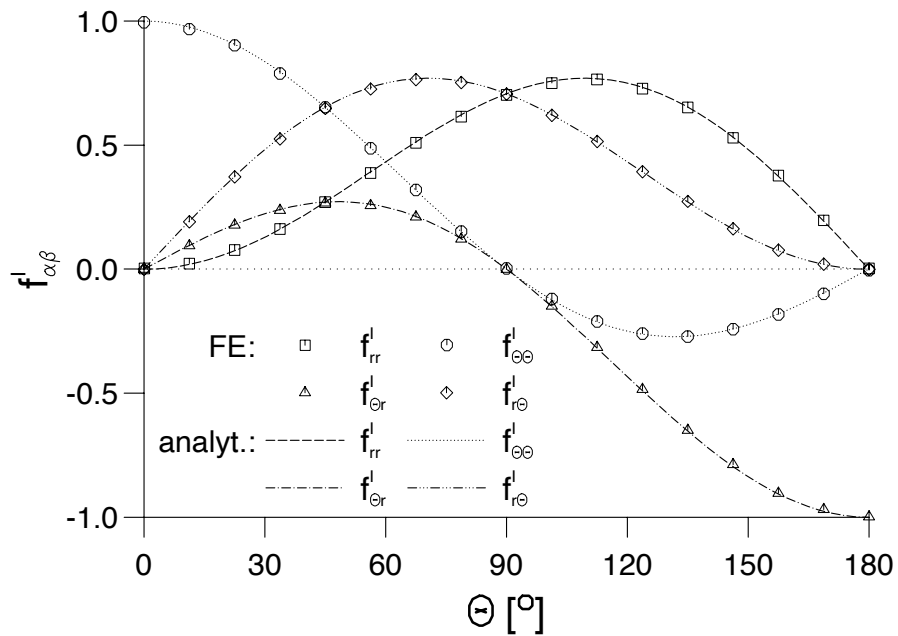


Abbildung 5.8: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.7) mit den FE-Ergebnissen eines Elementes reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0,9615$  (entspricht  $C = 1/4$ )

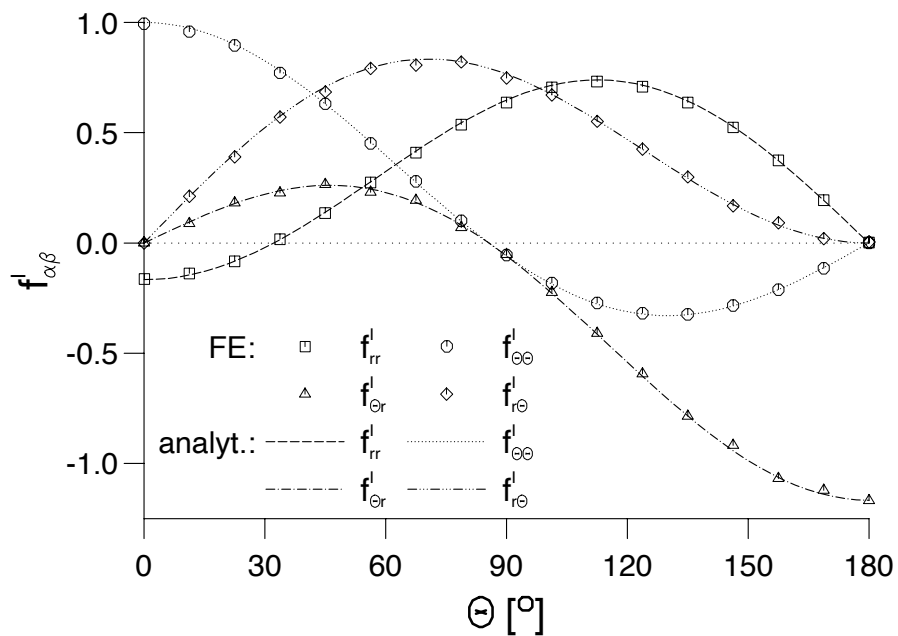


Abbildung 5.9: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.7) mit den FE-Ergebnissen eines Elementes reduzierter Integration für  $\alpha/E = 1000$

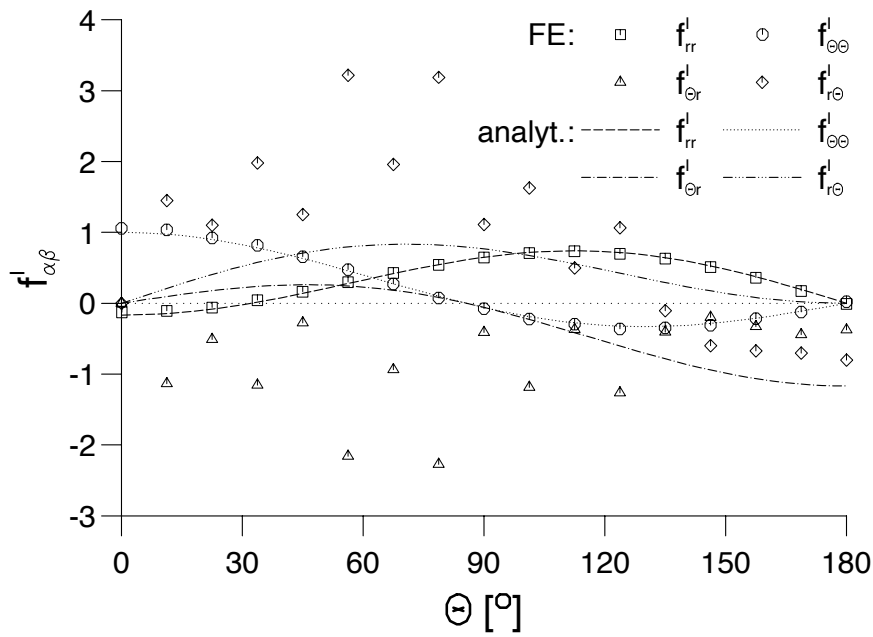


Abbildung 5.10: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.7) mit den FE-Ergebnissen eines Elementes vollständiger Integration für  $\alpha/E = 1000$

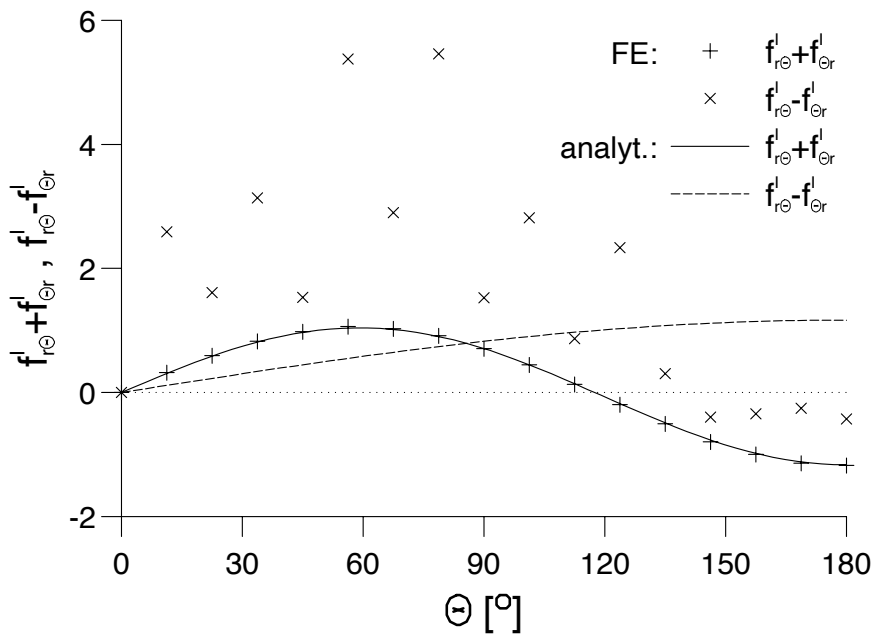


Abbildung 5.11: Vergleich der Winkelfunktionen des symmetrischen bzw. antisymmetrischen Teils der Spannungen aus Abbildung 5.10



## Spannungsintensitätsfaktoren $\tilde{K}_I$ und $L_I$

Die Bestimmung der Intensitätsfaktoren sowie die Charakterisierung des Einflusses der Materialparameter  $\alpha$  und  $\gamma$  ist nur mit numerischen Verfahren durchführbar. Dies geschieht auf die in Abschnitt 5.2.1 beschriebene Weise, wobei die dargestellten Ergebnisse mit dem Elementtyp  $\bar{U}36$  mit linearem Ansatz für die Rotation und reduzierter Integration erzielt wurden.

Im klassischen Fall liefert die Auswertung einen Wert von  $K_I = 205,6 \text{ MPa mm}^{1/2}$ . Zum Vergleich kann die in Tada [108, S. 2.11] angegebene empirische Formel herangezogen werden, mit deren Hilfe sich  $K_I = 208,1 \text{ MPa mm}^{1/2}$  ergibt. Die Abweichung von 1,2% liegt dabei im Rahmen der zu erwartenden Genauigkeit. Wie weitere Untersuchungen zeigen, kann die Übereinstimmung dadurch verbessert werden, dass  $\tilde{K}_I$  direkt aus dem Verschiebungsfeld bestimmt wird. Dies geschieht durch Auswertung der Verschiebung  $u_\theta$  bei  $\theta = \pi$  unter Berücksichtigung von Gleichung (4.95). Auf diese Weise wird ein Wert von  $K_I = 209,1 \text{ MPa}$  und damit eine Abweichung von 0,5% berechnet. Da für den eigentlich interessanten Fall  $\alpha \neq 0$  und  $\gamma \neq 0$  die Unterschiede der beiden Varianten jedoch lediglich in einem Bereich kleiner 0,5% liegen, werden im Folgenden weiterhin die Spannungswerte zur Bestimmung von  $\tilde{K}_I$  benutzt.

Die Abbildungen 5.12 und 5.13 stellen die Abhängigkeit des Intensitätsfaktors  $\tilde{K}_I$  von den Materialparametern  $\alpha$  und  $\gamma$  dar. Um die Abweichung vom klassischen Resultat zu veranschaulichen, wird  $K_I$  zur Normierung der Werte eingesetzt. Da  $\alpha$  ein Maß für die Kopplung zwischen den aus der Verschiebung bzw. Rotation abgeleiteten Größen darstellt, macht sich der Einfluss der mikropolaren Theorie für  $\alpha/E < 10^{-3}$  praktisch nicht bemerkbar. Dies gilt für beliebige Werte von  $\gamma$ . Erst bei ausreichend großer Kopplung bewirken die Momentenspannungen über das Momentengleichgewicht eine Veränderung des Kraftspannungsfeldes und damit von  $\tilde{K}_I$ . Im Bereich  $10^{-3} < \alpha/E < 10$  findet in Abhängigkeit von  $\gamma$  eine Aufspaltung statt, die mit größer werdendem  $\alpha$  zunimmt. Während sich für die Werte  $\gamma = 1 \text{ N}$  und  $100 \text{ N}$  ein monoton steigender Verlauf ergibt, bildet sich bei den restlichen dargestellten Kurven ein kleines Minimum aus, das sich mit zunehmendem  $\gamma$  bei höheren Werten von  $\alpha/E$  befindet. Für  $\alpha/E > 10$  wird schließlich ein Grenzwert erreicht, der dem Spannungsintensitätsfaktor der Couple–Stress–Theorie entspricht. Wie die Abbildungen zeigen, beträgt die maximale Abweichung relativ zum klassischen Wert rund 26% nach oben bzw. 13% nach unten.

Abbildung 5.13 ist die Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors von  $\gamma$  zu entnehmen. Der  $\tilde{K}_I$ -Faktor scheint auch hier für  $\gamma \rightarrow 0$  und  $\gamma \rightarrow \infty$  einen Sättigungswert zu erreichen.

Wie die Diskussion bezüglich des Grenzübergangs  $\gamma \rightarrow 0$  in Kapitel 5.1 zeigt, verliert hier einerseits die analytische Lösung ihre Gültigkeit und andererseits stößt die Numerik an ihre Grenzen. Eine genauere Untersuchung dieses Grenzfalles wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt.

Im betrachteten Bereich ist zu erkennen, dass für kleine Werte von  $\gamma$  stets  $\tilde{K}_I > K_I$  gilt, für  $\alpha/E = 10^{-5}$  und  $10^{-3}$  jedoch nur marginal. Dagegen ergeben sich für sehr große  $\gamma$  kleinere Spannungsintensitäten als klassisch. Dazwischen liegt ein breiter Übergangsbereich, in dem zu jedem Verhältnis  $\alpha/E$  ein bestimmter Wert von  $\gamma$  existiert, der den klassischen K-Faktor liefert.

Auch bei den Spannungsintensitätsfaktoren kann im Rahmen der numerischen Genauigkeit kein Unterschied zwischen den Ergebnissen der Elementtypen mit unterschiedlichem Rotationsansatz festgestellt werden. Der Vergleich der verschiedenen Integrationen zeigt, dass die Elemente vollständiger Integration bis zu einem Wert von  $\alpha/E = 1$  um maximal 1% niedrigere Werte ergeben, während diese Abweichung für größeres  $\alpha$  bis zu 6% beträgt. Trotz der guten Übereinstimmung des Spannungsexponenten in diesem Bereich wirken sich somit die Fehler bei Berechnung der Schubspannungen negativ auf die Bestimmung von  $\tilde{K}_I$  aus.

Die Berechnung des Intensitätsfaktors  $L_I$  der Momentenspannungen wird mit Hilfe von Gleichung (5.6) durchgeführt. Die Auswertung verläuft dabei analog zu derjenigen von  $\tilde{K}_I$ . Die Abhängigkeit von  $\alpha$  ist Abbildung 5.14 zu entnehmen. Wie zu erkennen ist, gilt prinzipiell  $L_I \leq 0$ . Wie bei den Kraftspannungen macht sich der Einfluss des Kopplungsparameters  $\alpha$  erst ab  $\alpha/E > 10^{-3}$  bemerkbar und nach einem Übergangsbereich, in dem der Betrag von  $L_I$  monoton zunimmt, stellt sich bei  $\alpha/E > 10$  der Grenzwert der Couple-Stress-Theorie ein. Einen ähnlichen Verlauf liefert die Variation des Materialparameters  $\gamma$  (siehe Abb. 5.15). Auf Grund des Materialgesetzes (2.111) verschwinden bei  $\gamma \rightarrow 0$  die Momentenspannungen und damit auch  $L_I$ . Für sehr hohe  $\gamma$  hingegen, führen schon geringe Rotationsgradienten zu hohen Momentenspannungen, die ihrerseits der Verdrehung benachbarter Punkte entgegenwirken.

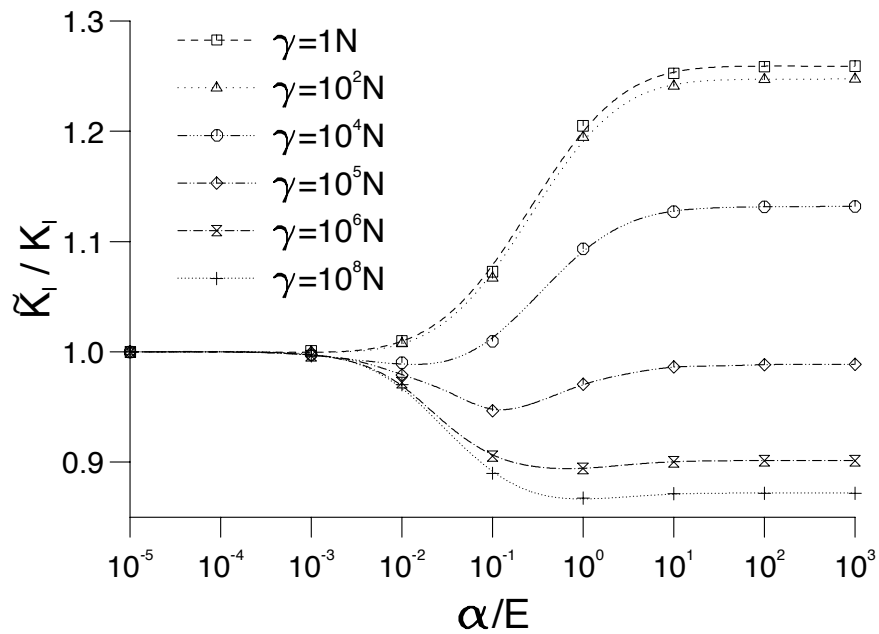


Abbildung 5.12: Abhängigkeit des Kraftspannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_I$  vom Materialparameter  $\alpha$

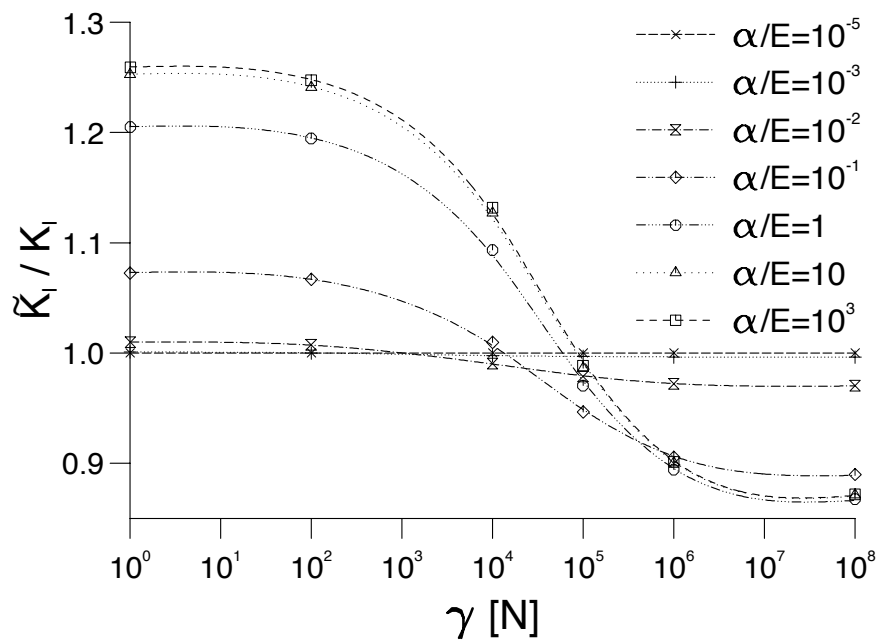


Abbildung 5.13: Abhängigkeit des Kraftspannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_I$  vom Materialparameter  $\gamma$

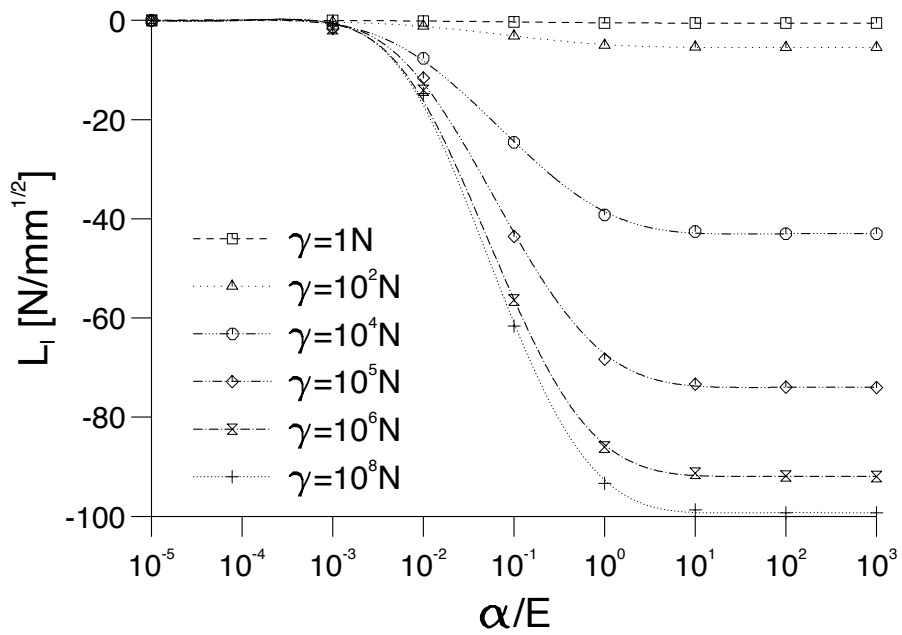


Abbildung 5.14: Abhängigkeit des Momentenspannungsintensitätsfaktors  $L_I$  vom Materialparameter  $\alpha$

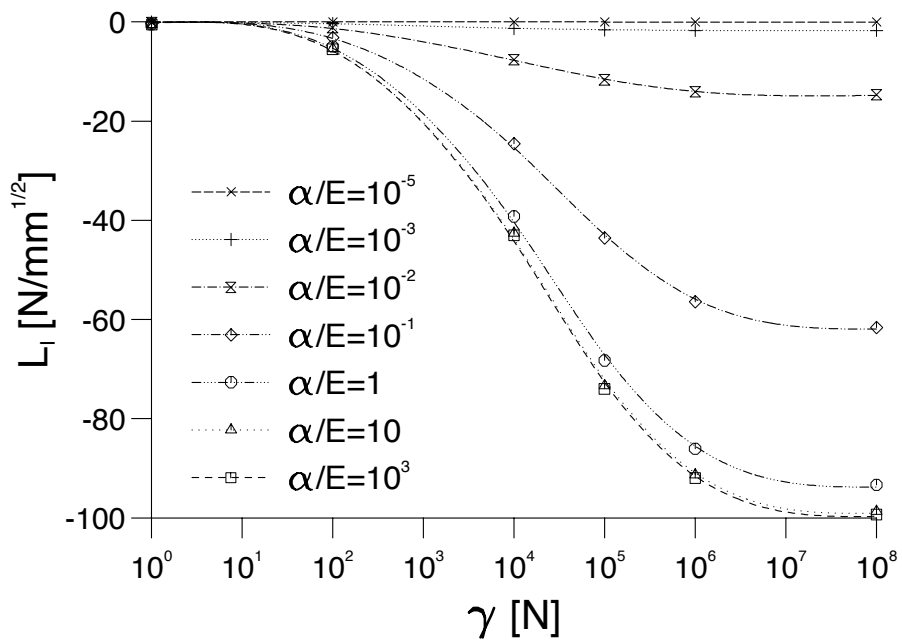


Abbildung 5.15: Abhängigkeit des Momentenspannungsintensitätsfaktors  $L_I$  vom Materialparameter  $\gamma$

### 5.2.3 Ergebnisse zu Mode II

#### Spannungsexponent und Winkelabhängigkeit

Die Bestimmung des Spannungsexponenten  $\tilde{K}_{II}$  wird über die Spannungskomponente  $T_{r\theta}$  mit Hilfe von Gleichung (5.5) durchgeführt. Die erzielten Ergebnisse bestätigen im Wesentlichen die bereits für Mode I gemachten Aussagen. Für die Elemente mit vollständiger Integration gilt es zu beachten, dass die im vorigen Abschnitt erwähnten Schwierigkeiten bei Bestimmung der Schubspannungen ebenfalls im Mode II auftreten und dazu führen, dass eine sinnvolle Auswertung der Komponente  $T_{r\theta}$  nicht mehr gewährleistet ist. Die Momentenspannungen sind für  $r \rightarrow 0$  nicht singulär, sondern werden durch den konstanten Term bestimmt. Wie Abbildung 5.16 zeigt, wird dies durch die FE-Resultate gut wiedergegeben.

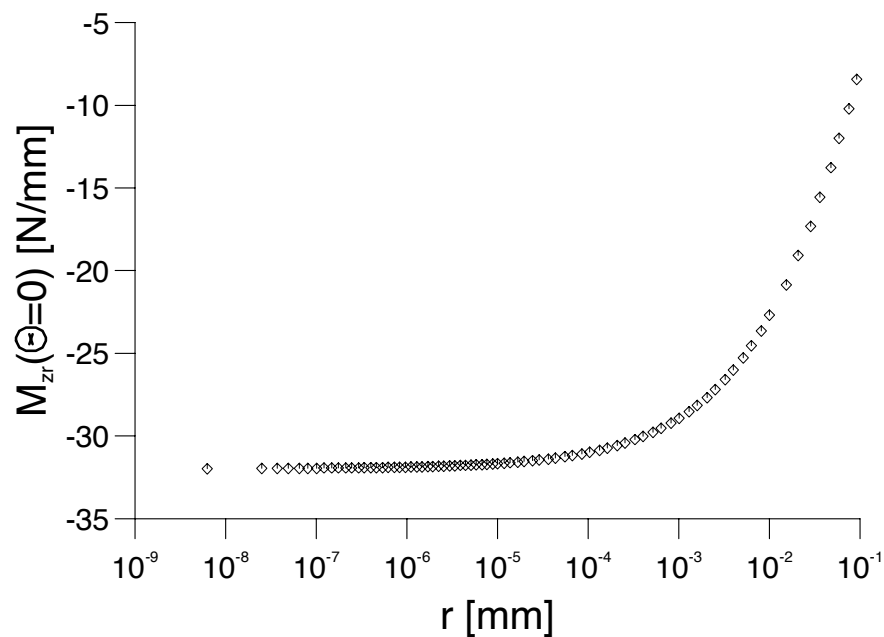


Abbildung 5.16: FE-Ergebnis der Momentenspannung  $M_{zr}(\theta = 0)$  für  $r \rightarrow 0$

Die Winkelfunktionen der Kraftspannungen für Mode II folgen direkt aus Gleichung (4.90)

unter Berücksichtigung von (4.80) und (3.42):

$$\begin{bmatrix} f_{rr}^{II}(\theta) \\ f_{r\theta}^{II}(\theta) \\ f_{\theta r}^{II}(\theta) \\ f_{\theta\theta}^{II}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+4C} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} [1+4C - (3+4C) \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ \cos \frac{\theta}{2} [1+4C - (3+4C) \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ \cos \frac{\theta}{2} [1-4C - (3+4C) \sin^2 \frac{\theta}{2}] \\ -(3+4C) \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Wie bei Mode I prägt der in Abbildung 5.5 dargestellte Faktor  $C$  entscheidend die Gestalt der Funktionen. Diese sind den Graphen 5.17–5.20 für die Werte  $\alpha/E = 0$  und  $1/10$ ,  $C = 1/4$  sowie  $\alpha/E = 1000$  zu entnehmen. Die über  $\tilde{K}_{II}$  (siehe Kapitel 5.2.3) normierten FE-Ergebnisse, die mit dem Element  $\bar{U}36$  und  $\gamma = 10^4 \text{ N}$  berechnet wurden, decken sich wiederum sehr gut mit den analytischen Funktionen.

Aus Gleichung (5.9) ergeben sich bei beliebigem  $\alpha$  und  $0 < \theta < 2 \arcsin \sqrt{\frac{E+2\alpha(3+\nu-2\nu^2)}{3E+2\alpha(5+3\nu-2\nu^2)}}$  positive Kraftspannungen  $T_{rr}$  sowie  $T_{r\theta}$ , wobei für die Diskussion ein positiver  $\tilde{K}_{II}$ -Faktor vorausgesetzt sei. Im Falle  $\alpha \neq 0$  sind die Schubspannungen  $T_{\theta r}(0 \leq \theta < \pi)$  stets kleiner als  $T_{r\theta}$ .  $T_{\theta r}$  bleibt für  $0 < \theta < 2 \arcsin \sqrt{\frac{E+2\alpha(3+\nu-2\nu^2)}{E-2\alpha(1-\nu-2\nu^2)}}$  positiv, wenn  $C < 1/4$  bzw.  $\alpha < \frac{E}{2(1-\nu-2\nu^2)}$  gilt. Erreicht  $\alpha$  diesen Wert, so ergeben sich im betrachteten Bereich wie bei Mode I gewisse Symmetrien bezüglich  $\theta = \pi/2$ .  $T_{\theta\theta}$  und  $T_{\theta r}$  sind achsensymmetrisch zueinander und  $T_{rr}$  und  $T_{r\theta}$  besitzen eine wechselseitige Punktsymmetrie. Für entsprechende negative Winkel ist die Art der Symmetrie wieder vertauscht. Dieser spezielle Fall führt mit Ausnahme von  $T_{r\theta}$  zum Verschwinden aller Spannungen bei  $\theta = 0$ . Bei noch höheren Werten von  $\alpha$  treten dort schließlich negative Schubspannungen  $T_{\theta r}$  auf.

Die beiden Winkelfunktionen  $\cos \theta$  und  $-\sin \theta$  für die Momentenspannungen  $M_{zr}$  und  $M_{z\theta}$  können durch die FE-Werte, die mit Hilfe von  $l_{II}$  (vergleiche Kapitel 5.2.3) normiert werden, ebenfalls gut reproduziert werden. Der Vergleich der verschiedenen Elementtypen ergibt bezüglich der Winkelabhängigkeit sowohl für die Kraft- als auch Momentenspannungen dieselben Beobachtungen wie bei Mode I.

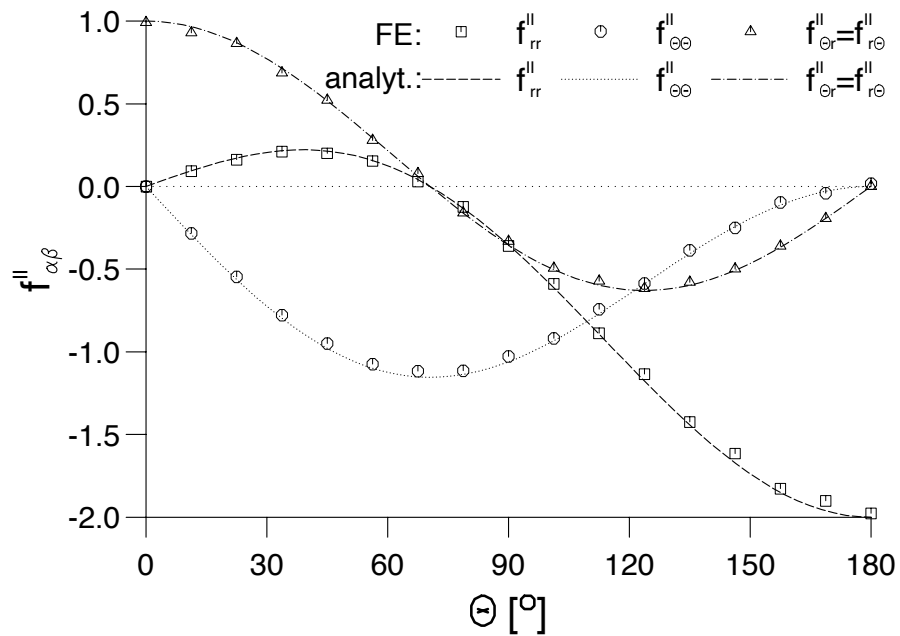


Abbildung 5.17: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.9) mit den FE-Ergebnissen der Elemente reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0$

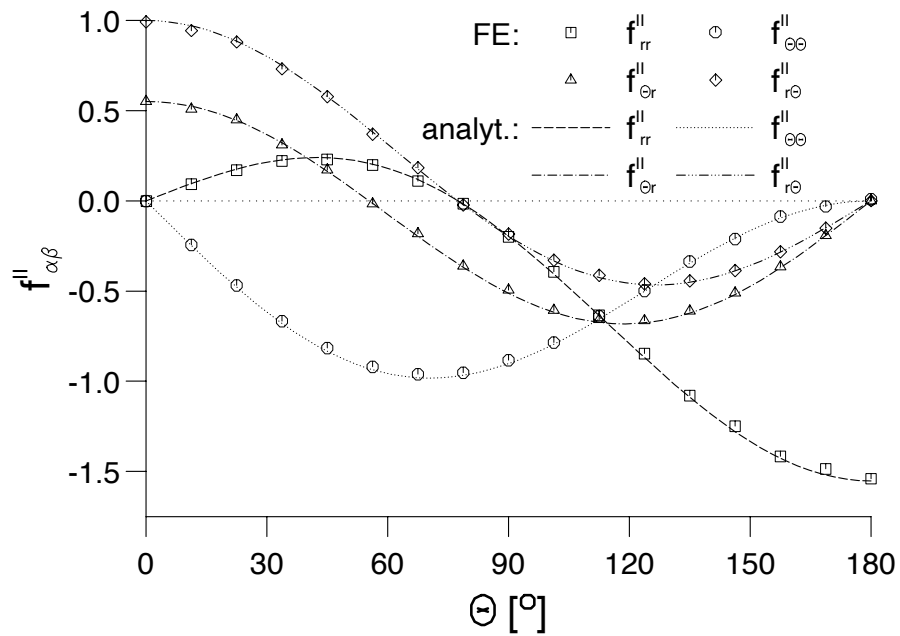


Abbildung 5.18: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.9) mit den FE-Ergebnissen der Elemente reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0,1$

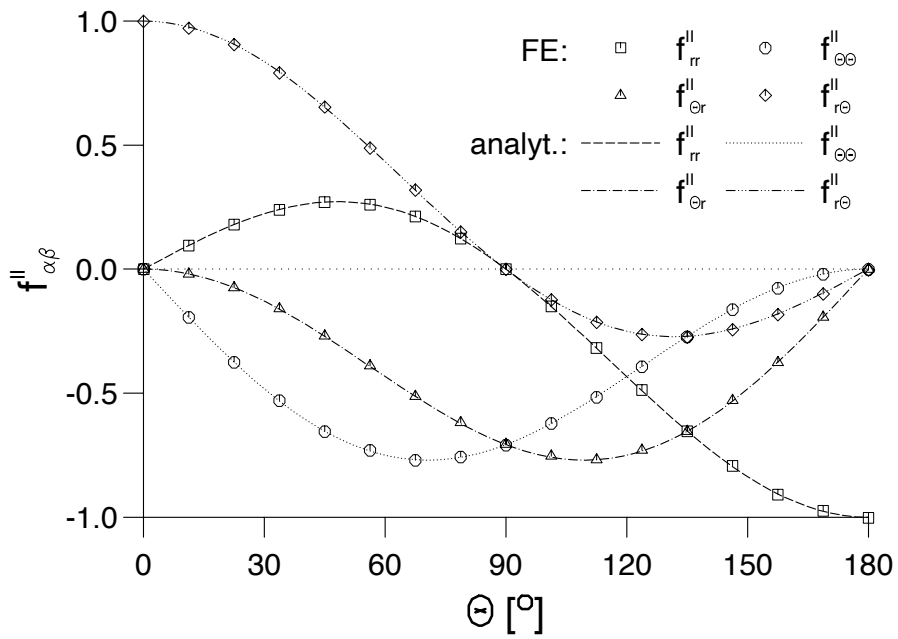


Abbildung 5.19: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.9) mit den FE-Ergebnissen der Elemente reduzierter Integration für  $\alpha/E = 0,9615$  (entspricht  $C = 1/4$ )

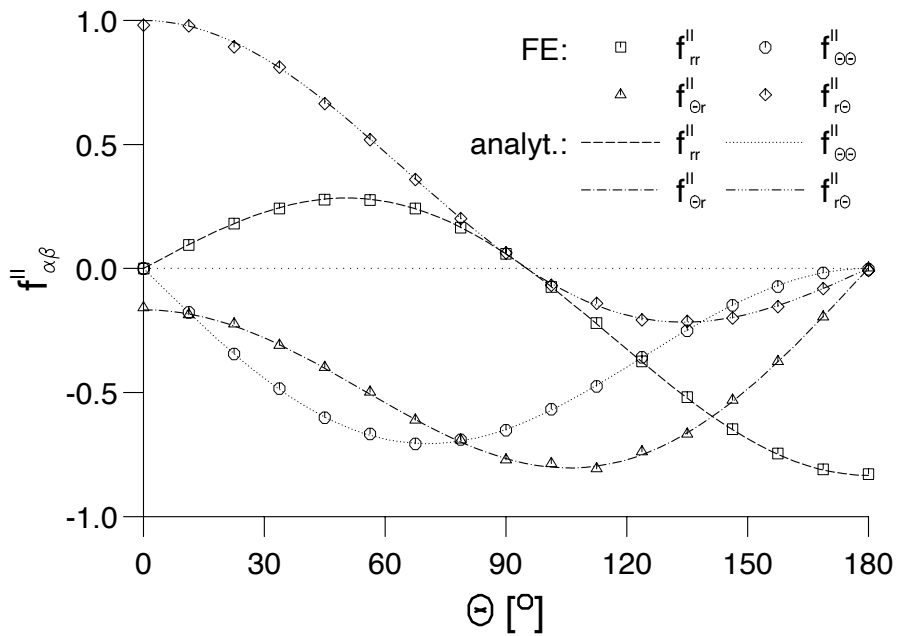


Abbildung 5.20: Vergleich der analytischen Winkelfunktionen (5.9) mit den FE-Ergebnissen der Elemente reduzierter Integration für  $\alpha/E = 1000$



## Spannungsintensitätsfaktoren $\tilde{K}_{II}$ und $l_{II}$

Aus Gleichung (5.5) wird für fest vorgegebenen Spannungsexponent  $p = -1/2$  der Spannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_{II}$  und dessen Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $\gamma$  bestimmt. Aus der FE-Analyse resultiert im klassischen Fall der Wert  $K_{II} = 202,8 \text{ MPa mm}^{1/2}$ . Die Berechnung mit Hilfe der in Tada [108, S. 2.29] angegebenen Formel liefert  $K_{II} = 199,3 \text{ MPa mm}^{1/2}$ . Dies entspricht einer Abweichung von rund 1,8%, was im Bereich der zu erwartenden Genauigkeit liegt.

In den Abbildungen 5.21 und 5.22 ist die Abhängigkeit des Intensitätsfaktors  $\tilde{K}_{II}$  von den Materialparametern  $\alpha$  und  $\gamma$  für das Element  $\bar{U}36$  dargestellt. Wie der Vergleich mit den Abbildungen 5.12 und 5.13 zeigt, haben die Kurven im Wesentlichen denselben Verlauf wie bei Mode I. Unterschiede zeigen sich jedoch in der Spreizung des Wertebereichs. Für sehr große  $\alpha$  und  $\gamma$  sind bei Mode I bzw. II die Verhältnisse zu den entsprechenden klassischen K-Faktoren nahezu identisch. Im Gegensatz dazu, zeigt  $\tilde{K}_{II}$  für kleine  $\gamma$  eine deutlich höhere Abweichung von  $K_{II}$ , die für  $\alpha/E \geq 10^{-1}$  näherungsweise doppelt so groß ist wie die vergleichbaren Werte bei Mode I.

Wie bei den restlichen Größen zuvor zeigen die Spannungsintensitätsfaktoren bei Mode II keinen entscheidenden Unterschied zwischen linearem und quadratischem Ansatz für die Rotation. Die Elemente mit vollständiger Integration ergeben im Vergleich zur reduzierten wiederum um rund 1% kleinere Werte. Dies gilt nur für  $\alpha \leq 100 \text{ GPa}$ , da ansonsten auf Grund der erwähnten numerischen Schwierigkeiten die Bestimmung von  $\tilde{K}_I$  bei  $U34$  und  $\bar{U}34$  nicht mehr sinnvoll ist.

Der Intensitätsfaktor  $l_{II}$  der Momentenspannungen ergibt sich aus dem für  $r \rightarrow 0$  konstanten Anteil in Gleichung (4.91). Zu seiner Bestimmung wird bei der Auswertung der FE-Ergebnisse die Momentenspannung  $M_{zr}$  an zehn Knoten im nahezu konstanten Bereich bei  $3,7 \cdot 10^{-8} \text{ mm} < r < 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$  und  $\theta = 0$  ermittelt (vergleiche Abb. 5.16) und aus diesen Werten das arithmetische Mittel gebildet. Wie den Abbildungen 5.23 und 5.24 zu entnehmen ist, ergeben sich ähnliche Kurven wie beim Intensitätsfaktor  $L_I$ , obwohl dieser zum singulären Term gehört. Auffälligster Unterschied ist die Tatsache, dass für kleine  $\gamma$  im betrachteten Bereich  $l_{II}$  noch deutlich von Null verschieden ist.

Auf Grund der bisher gesammelten Erfahrungen kann festgestellt werden, dass die Ansatzfunktion der Rotation keinen signifikanten Einfluss auf die betrachteten Größen des Risses in homogenem Material hat. Dagegen zeigt sich deutlich, dass die Elemente vollständiger Integration zur Berechnung für Verhältnisse von  $\alpha/E > 1$  nicht mehr geeignet

sind. Für alle folgenden Betrachtungen wird das Element  $\bar{U}36$  mit linearem Rotationsansatz ausgewählt. Im Vergleich zum Element  $U36$  erfordert es einerseits auf Grund seiner geringeren Anzahl an Freiheitsgraden weniger Rechenzeit und es hat sich andererseits in extremen Fällen als numerisch stabiler erwiesen.

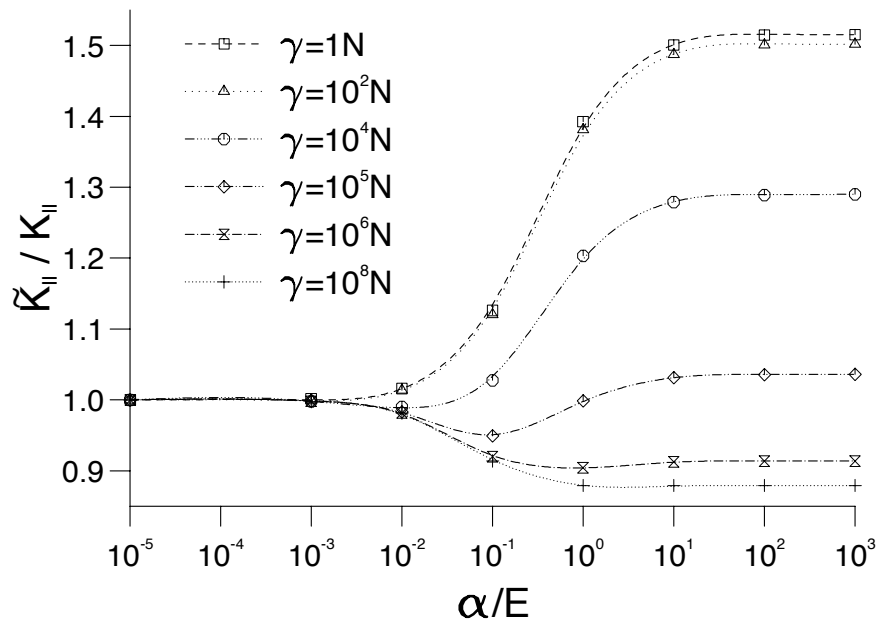


Abbildung 5.21: Abhängigkeit des Kraftspannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_{II}$  vom Materialparameter  $\alpha$

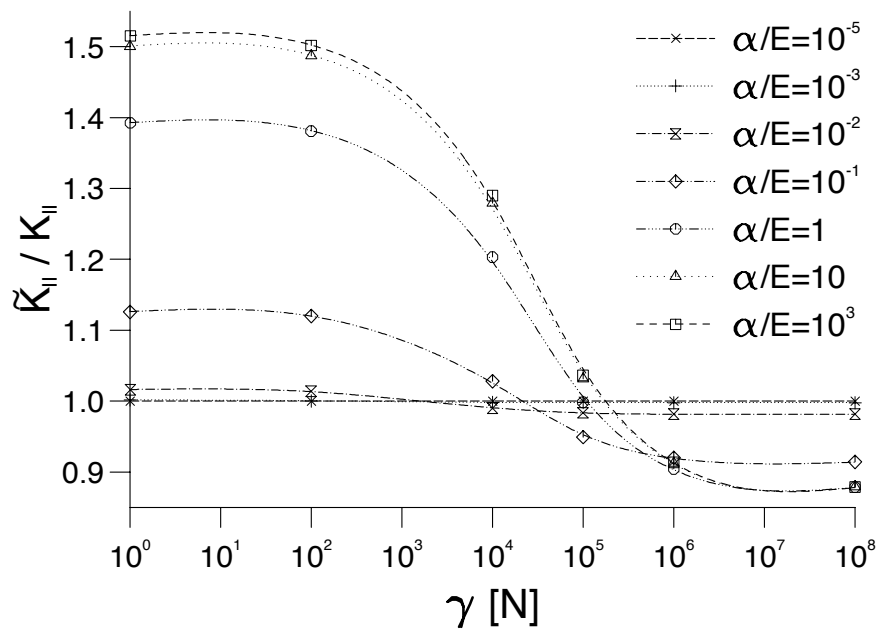


Abbildung 5.22: Abhängigkeit des Kraftspannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_{II}$  vom Materialparameter  $\gamma$

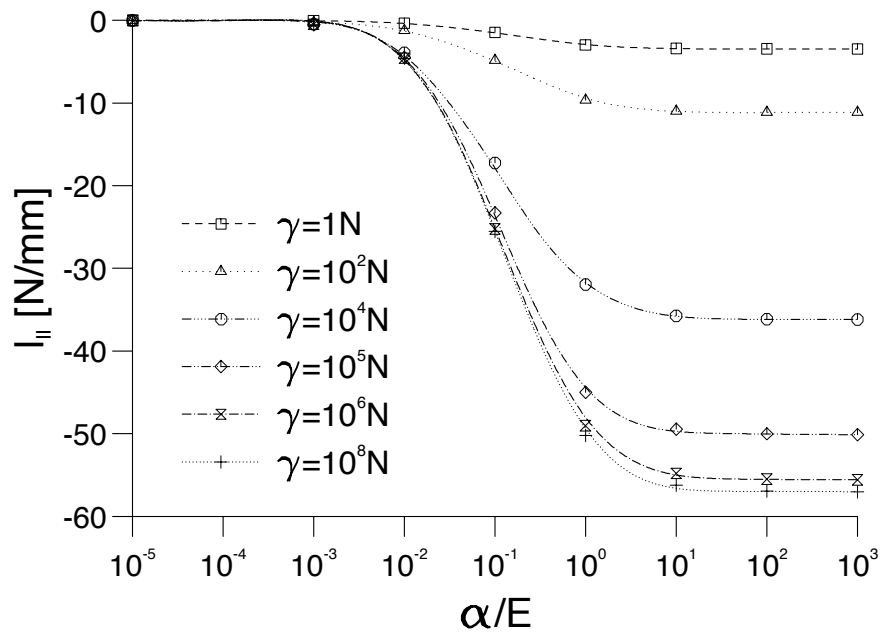


Abbildung 5.23: Abhängigkeit des Momentenspannungsintensitätsfaktors  $I_{II}$  vom Materialparameter  $\alpha$

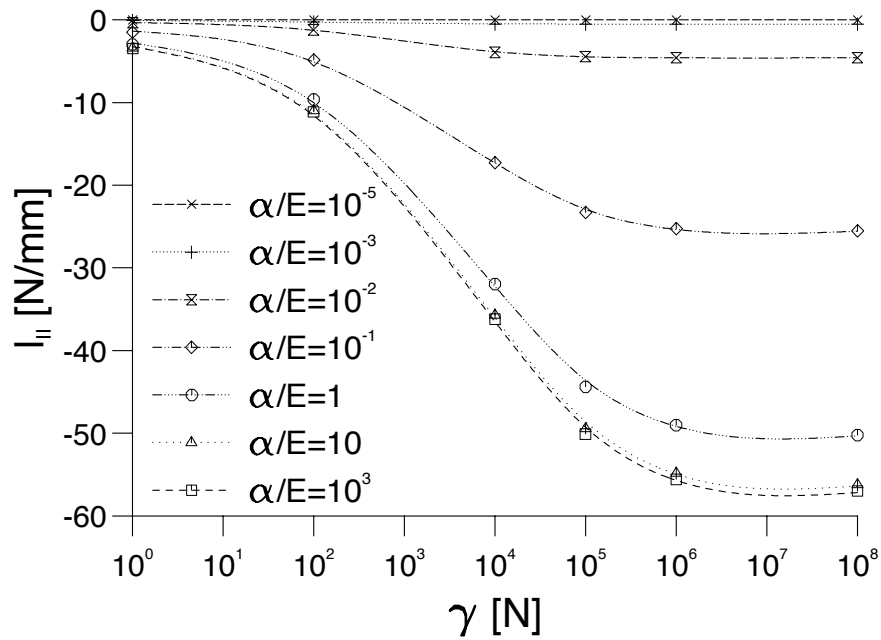


Abbildung 5.24: Abhängigkeit des Momentenspannungsintensitätsfaktors  $I_{II}$  vom Materialparameter  $\gamma$

### 5.3 Riss in Zweistoffverbund

Im Folgenden wird ein Zweistoffverbund untersucht, der einen Riss parallel zur Grenzschicht der beiden Materialien aufweist. Zum einen wird wie zuvor die Abhängigkeit der Spannungsintensitätsfaktoren bei Variation der Materialparameter studiert. Das eigentliche Interesse gilt jedoch der Untersuchung des Einflusses von geometrischen Abmessungen des Bauteils. Die wesentliche Größe bei diesem Beispiel ist der Abstand des Risses vom Materialübergang. Bei dessen Variation ist mit einer Abweichung vom klassischen Verhalten zu rechnen, da die mikropolare Theorie eine inhärente Längenabhängigkeit besitzt (siehe Kapitel 5.1) und geometrische Größen diesbezüglich charakteristische Längen darstellen können. Dieser mögliche Einfluss wird anhand der beiden Intensitätsfaktoren  $\tilde{K}_I$  und  $\tilde{K}_{II}$  untersucht.

Eine schematische Skizze des Rissproblems ist Abbildung 5.25 zu entnehmen. Die zugehörigen FE-Modelle haben die Breite  $W = 10$  mm und jede Materialschicht eine konstante Höhe von  $H = 10$  mm. Während die Risslänge stets  $a = 1$  mm beträgt, wird der Abstand

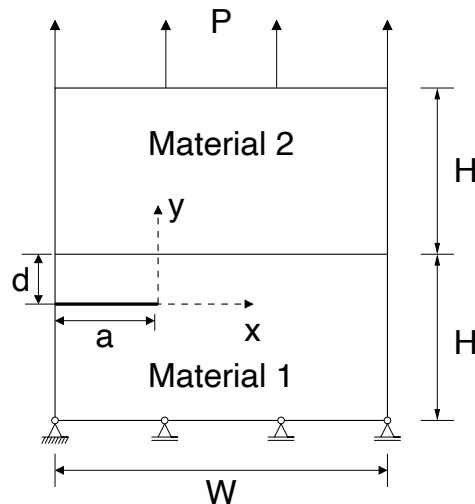


Abbildung 5.25: Schematische Darstellung des Risses im Zweistoffverbund

$d$  des Risses vom Materialübergang verändert. Abbildung 5.26 zeigt das FE-Modell für  $d = 0,2$  mm. Ähnliche Netze wurden für die Werte  $d = \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1$  und  $2$  mm erzeugt, wobei die Anzahl der verwendeten Elemente zwischen 1506 und 1816 liegt. Die Vernetzung der Risspitze ist identisch zum Riss in homogenem Material (siehe Kapitel 5.2.1 und Abb. 5.4 b)).

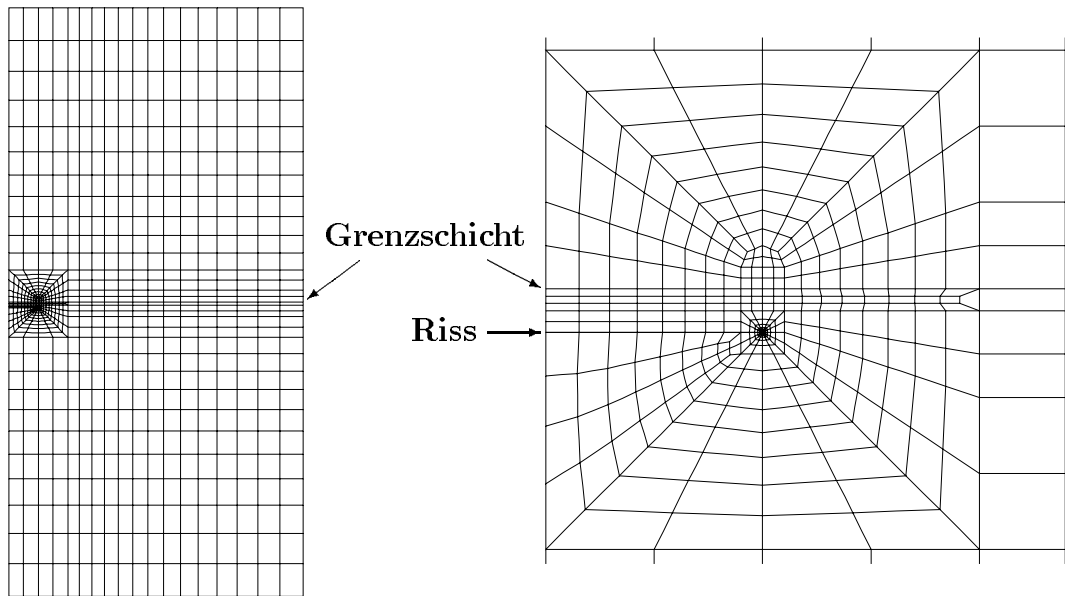


Abbildung 5.26: Netz des Risses im Zweistoffverbund mit  $d = 0,2$  mm (links: gesamtes Netz, rechts: Vernetzung der Risszone)

Die klassischen Materialparameter  $E$  und  $\nu$  werden für beide Materialien fest vorgegeben. Der Riss befindet sich im weicheren Werkstoff, dem  $E_1 = 100$  GPa zugewiesen wird. Das andere Material erhält den vierfachen Wert des Elastizitätsmoduls, also  $E_2 = 400$  GPa. Die Querkontraktionszahlen  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  werden für beide gleich gewählt. Um die Anzahl der zu variierenden Parameter zu reduzieren, sei des Weiteren vorausgesetzt, dass  $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$  gelte, sich der obere Werkstoff also klassisch verhalte. Für den Parameter  $\alpha_1$  werden drei Werte festgelegt, die den Beginn der mikropolaren Effekte, den Übergangsbereich und den Grenzfall der Couple–Stress–Theorie erfassen sollen. Hierfür werden die Verhältnisse  $\alpha_1/E_1 = \frac{1}{100}$ , 1 und 100 ausgewählt. Der Materialparameter  $\gamma_1$  nimmt im Folgenden die Werte 10,  $10^3$ ,  $10^5$  und  $10^7$  N an. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass prinzipiell  $\delta = 0$  gilt.

Auf Grund der unterschiedlichen Materialien erfährt der Riss bei einer äußeren Zugbelastung eine mehrmodale Beanspruchung. Deshalb wird die Last nicht auf die Rissflanken aufgebracht, sondern die Randbedingungen wie folgt formuliert. Als Verschiebungsrandbedingungen wird

$$u_y(y = d - 10 \text{ mm}) = 0 \quad ; \quad u_x(y = d - 10 \text{ mm}, x = -1 \text{ mm}) = 0 \quad (5.10)$$

vorgegeben (vergleiche Abb. 5.25), d. h. die untere Kante wird in  $y$ -Richtung festgehalten

		$\gamma$ [N]			
		10	$10^3$	$10^5$	$10^7$
$\alpha/E$	1/100	1,009	1,002	0,977	0,967
	1	1,207	1,171	0,968	0,866
	100	1,261	1,220	0,986	0,872

Tabelle 5.1: Grenzwert  $\tilde{K}_I^\infty/K_I^\infty$  des Quotienten  $\tilde{K}_I/K_I$  für  $d \rightarrow \infty$

und ihr linker Randknoten zusätzlich in  $x$ -Richtung. Die Zugbelastung in Höhe von  $P = 100$  MPa wird auf die gegenüberliegende Kante in  $y$ -Richtung aufgebracht. Die spezielle Art der Risspitzenvernetzung (vergleiche Kapitel 5.2.1) erfordert zusätzliche, dass alle Knoten bei  $r = 0$  dieselbe Verschiebung und Rotation auszuführen haben. Mit Ausnahme dieser Zwangsbedingung an der Risspitze werden für die Rotationsfreiheitsgrade keine Einschränkungen vorgenommen.

Die Bestimmung von  $\tilde{K}_I$  und  $\tilde{K}_{II}$  für den Zweistoffverbund erfolgt analog zum Riss in homogenem Material (siehe Kapitel 5.2.1). In den Abbildungen 5.27–5.29 ist  $\tilde{K}_I$  für die drei verschiedenen Werte von  $\alpha$  dargestellt. Der linke Graph zeigt jeweils die Normierung auf den klassischen Wert für das jeweilige Verhältnis  $d/a$ . Hieraus wird die Abweichung von  $\tilde{K}_I$  zu  $K_I$  ersichtlich, wobei zu beachten ist, dass diese schon im homogenen Material von Null verschieden ist (siehe Kapitel 5.2). Deshalb hat jede einzelne Kurve für  $d \rightarrow \infty$  einen anderen Grenzwert, der Tabelle 5.1 entnommen werden kann. Die Werte  $\tilde{K}_I^\infty$  und  $K_I^\infty$ , die sich aus  $\tilde{K}_I$  und  $K_I$  für  $d \rightarrow \infty$  ergeben, werden dabei aus dem entsprechenden Modell für homogenes Material 1 bestimmt. In der zweiten Darstellung auf der rechten Seite wird durch Division mit dem entsprechenden  $\tilde{K}_I^\infty$  erreicht, dass für  $d \rightarrow \infty$  alle Kurven gegen den Grenzwert 1 laufen, wodurch der Einfluss des Geometrieparameters  $d$  sichtbar wird. Hierbei wird zum Vergleich die klassische Kurve für  $\alpha = 0$  dargestellt.

Wie anhand von Abbildung 5.27 zu erkennen ist, liegen die Unterschiede zwischen  $\tilde{K}_I$  und  $K_I$  bei  $\alpha_1/E_1 = 1/100$  in der Größenordnung von 1%. Somit können die bisherigen Erkenntnisse, dass die Effekte der mikropolaren Theorie bei diesem Materialparameterverhältnis nur schwach in Erscheinung treten, bestätigt werden. Bei allen Kurven steigt das Verhältnis  $\tilde{K}_I/K_I$  für abnehmendes  $d/a$  an, was für  $\gamma = 10$  N allerdings nur schwach beobachtet werden kann. Außerdem liegen alle Werte höher als ihr Grenzwert bei  $d \rightarrow \infty$

$$\alpha_1/E_1 = 1/100$$

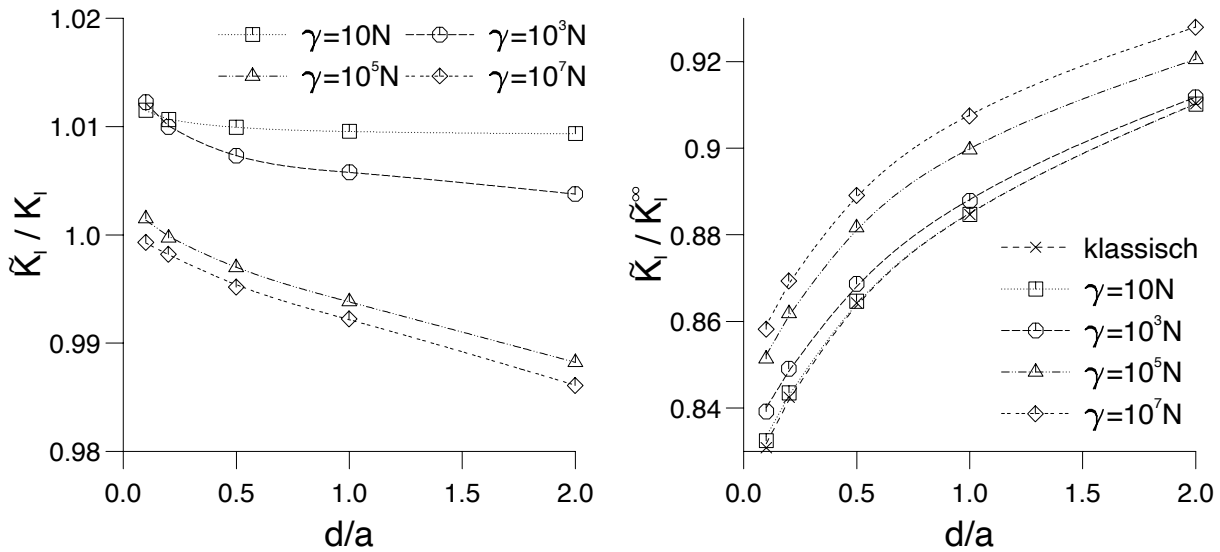


Abbildung 5.27: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. zum Wert  $\tilde{K}_I^\infty$  für  $d = \infty$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

(vergleiche Tabelle 5.1). Da Letzterer größer oder kleiner als Eins sein kann, kommt es entweder zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung der Abweichung zu  $K_I$ . Dem rechten Schaubild ist zu entnehmen, dass bei Verringerung von  $d$  der Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  für alle Werte von  $\gamma$  wie im klassischen Fall stetig abnimmt. Dabei ist die klassische Kurve mit derjenigen für  $\gamma = 10\text{N}$  nahezu identisch und die Änderung von  $\tilde{K}_I$  im Vergleich zu  $\tilde{K}_I^\infty$  wird mit steigendem  $\gamma$  geringer.

Bei  $\alpha_1/E_1 = 1$  (siehe Abbildung 5.28 links) sind die Kurven für  $\gamma = 10, 10^3$  und  $10^5\text{N}$  bezüglich des Verlaufs sowie der Lage zu ihrem Grenzwert  $\tilde{K}_I^\infty/K_I^\infty$  mit denjenigen aus Abbildung 5.27 vergleichbar, wobei die dargestellten Werte wesentlich höher liegen und eine deutlich größere Streuung aufweisen. Die Vergrößerung des  $\tilde{K}_I/K_I$ -Verhältnisses bei kleinem  $d/a$  führt bei  $\gamma = 10^5\text{N}$  dazu, dass im Gegensatz zum homogenen Material  $\tilde{K}_I/K_I > 1$  gilt. Ein gänzlich anderes Verhalten zeigt die Kurve des Wertes  $\gamma = 10^7\text{N}$ . Für kleiner werdendes  $d/a$  liefert sie im betrachteten Bereich eine Abnahme von  $\tilde{K}_I/K_I$ . Wie der Vergleich mit Tabelle 5.1 zeigt, wird dabei der Grenzwert  $\tilde{K}_I^\infty/K_I^\infty$  in der Umgebung von  $d/a = 0,2$  unterschritten. Daraus kann gefolgert werden, dass die Kurve insgesamt nicht monoton verläuft und ein Maximum besitzt. Im rechten Schaubild kann ein sehr



$$\alpha_1/E_1 = 1$$

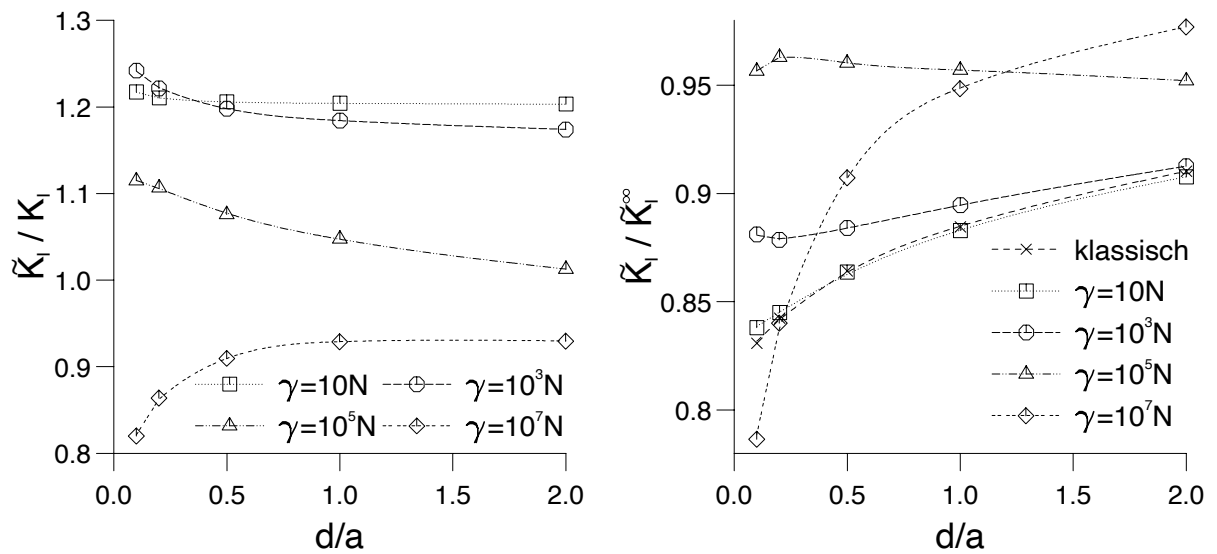


Abbildung 5.28: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. zum Wert  $\tilde{K}_I^\infty$  für  $d = \infty$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

$$\alpha_1/E_1 = 100$$

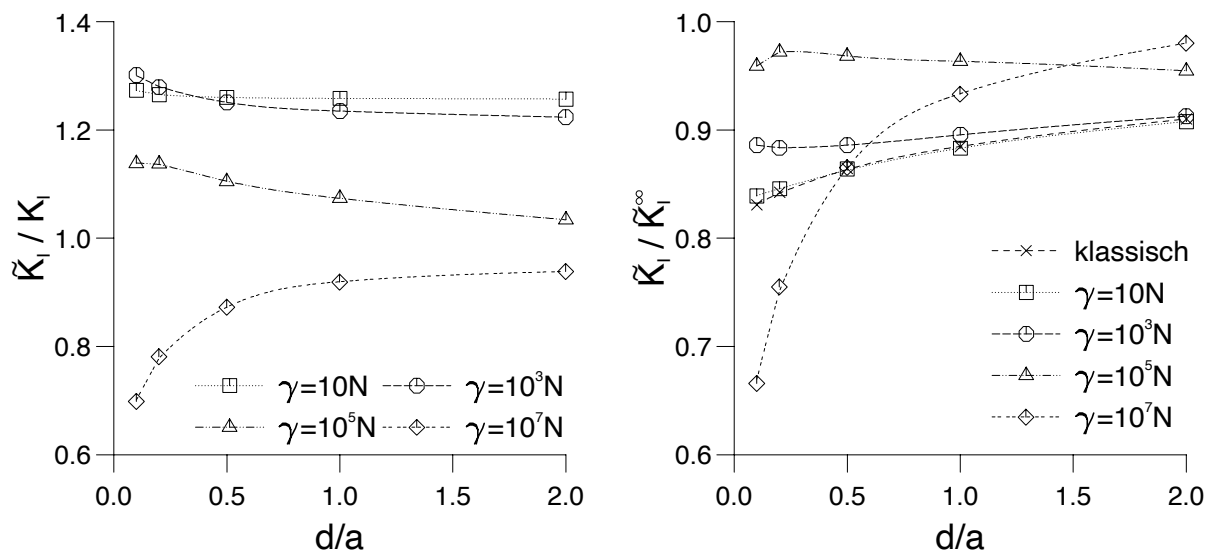


Abbildung 5.29: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. zum Wert  $\tilde{K}_I^\infty$  für  $d = \infty$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

uneinheitliches Verhalten für die verschiedenen Werte von  $\gamma$  beobachtet werden, für dessen genauere Interpretation eine Vergrößerung des betrachteten  $d/a$ -Bereiches sinnvoll wäre.

Qualitativ nahezu identische Ergebnisse ergeben sich für  $\alpha_1/E_1 = 100$  (siehe Abbildung 5.29). Die beobachteten Abweichungen von  $\tilde{K}_I$  zu  $K_I$  bzw.  $\tilde{K}_I^\infty$  nehmen dabei allerdings nochmals zu. Dies liegt zum einen an den unterschiedlichen Grenzwerten für  $d \rightarrow \infty$  (vergleiche Tabelle 5.1) und zum anderen am größeren Einfluss des Geometrieparameters  $d$ .

Die Abbildungen 5.30–5.32 zeigen die Ergebnisse für den Mode-II-Anteil. Analog zu Mode I wird links das Verhältnis zum klassischen Wert  $K_{II}$  dargestellt. Da der Grenzwert von  $\tilde{K}_{II}$  für  $d \rightarrow \infty$  verschwindet, wird im rechten Schaubild alternativ das Verhältnis  $\tilde{K}_{II}/\tilde{K}_I$  der Anteile der beiden Moden zueinander abgebildet.

Obwohl bei  $\alpha_1/E_1 = 1/100$  die beobachteten Abweichungen bedeutend kleiner sind als bei  $\alpha_1/E_1 = 1$  bzw. 100, zeigt sich anhand des rechten Schaubildes bereits der Trend, dass der Einfluss der mikropolaren Theorie den Mode-II-Anteil verringert. Die Momentenspannungen wirken den im klassischen vorhandenen Schubspannungen am Riss entgegen und, wie die negativen Werte zeigen, kommt es sogar zur Umkehrung der Belastung. Die Verkleinerung des Abstandes  $d$  ergibt für  $\gamma = 10\text{ N}$  unabhängig von  $\alpha$  fast keinen Einfluss auf das Verhältnis  $\tilde{K}_{II}/K_{II}$  und der Mode-II-Anteil nimmt in ähnlichem Maße zu wie im klassischen Fall. Die Werte von  $\tilde{K}_{II}/K_{II}$  liegen dabei für jeden Wert von  $\alpha_1/E_1$  in Nähe des Resultats, das für homogenes Material bestimmt wird (siehe Abbildung 5.21).

Die Werte  $\alpha_1/E_1 = 1$  und 100 liefern wiederum nahezu denselben Verlauf der einzelnen Kurven bei unterschiedlichem Wertebereich. Auffällig ist, dass im gesamten Bereich der Mode-II-Anteil für  $\gamma = 10^3$  nahezu verschwindet. Für größeres  $\gamma$  weist die Abweichung von  $\tilde{K}_{II}$  zu  $K_{II}$  ein Minimum auf und die dargestellten Ergebnisse liegen vollständig im negativen Bereich. Das  $\tilde{K}_{II}/K_I$ -Verhältnis hingegen zeigt mit kleiner werdendem  $d$  einen monoton fallenden Verlauf, der  $\tilde{K}_{II}$  betragsmäßig bis an die Größenordnung von  $\tilde{K}_I$  anwachsen lässt.

$$\alpha_1/E_1 = 1/100$$

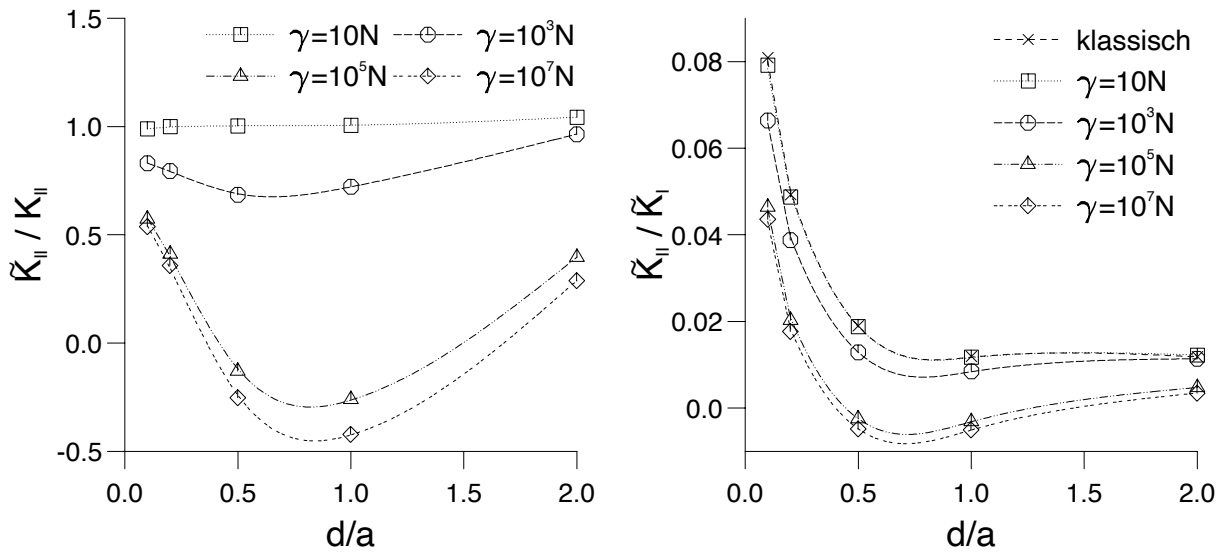


Abbildung 5.30: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_{II}$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_{II}$  bzw. zu  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

$$\alpha_1/E_1 = 1$$

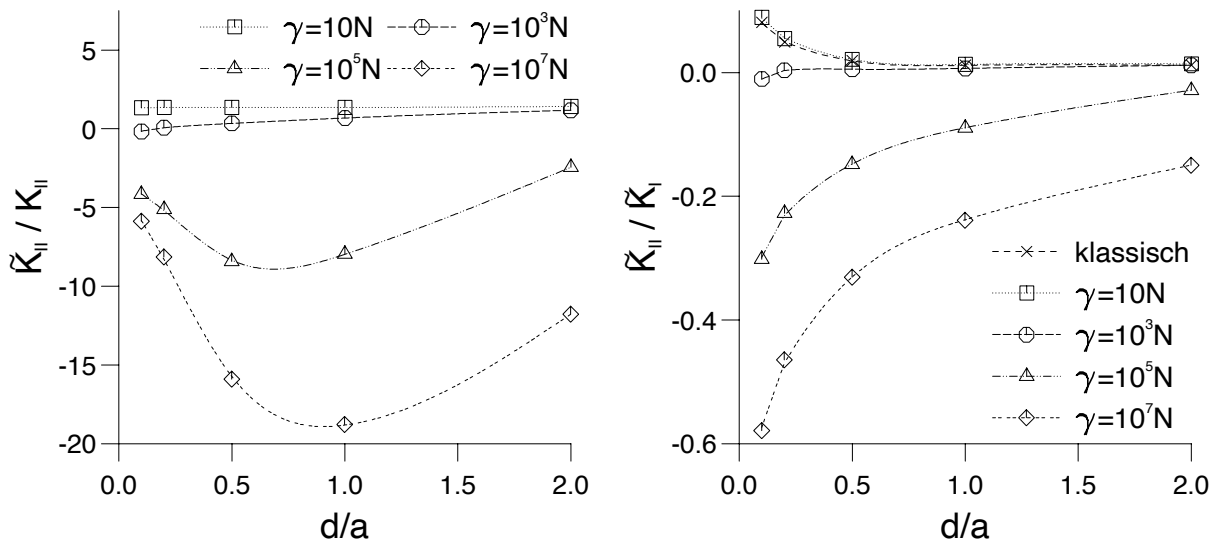


Abbildung 5.31: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_{II}$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_{II}$  bzw. zu  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

$$\alpha_1/E_1 = 100$$

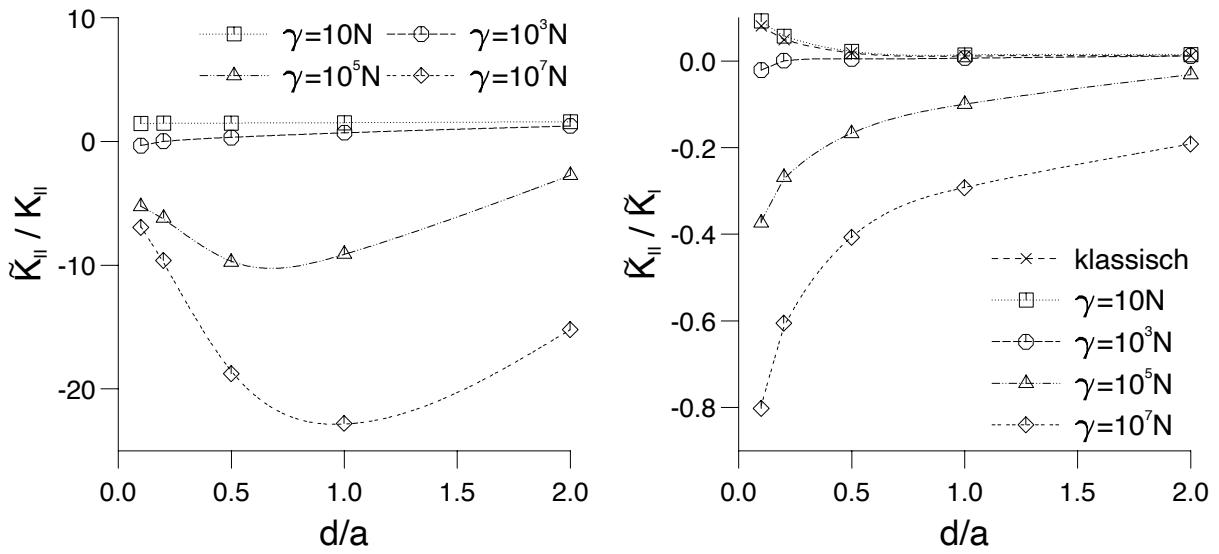


Abbildung 5.32: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_{II}$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_{II}$  bzw. zu  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

## 5.4 Riss in dünner Schicht

Abschließend erfolgt die Betrachtung eines sich unter Zugbelastung befindlichen Risses in einer dünnen Schicht, die sich auf einem wesentlich dickeren Substrat befindet. Wie in Abbildung 5.33 skizziert, verläuft der Riss senkrecht zum Materialübergang und befindet sich vollständig im Schichtmaterial. Bei einer konstanten Schichtdicke  $t = 0,1 \text{ mm}$  wird durch Variation der Risslänge  $a$  wiederum die Abhängigkeit des Spannungsintensitätsfaktors vom Verhältnis  $d/a$  untersucht, wobei  $d$  den Abstand zwischen der Risspitze und dem Materialübergang darstellt.

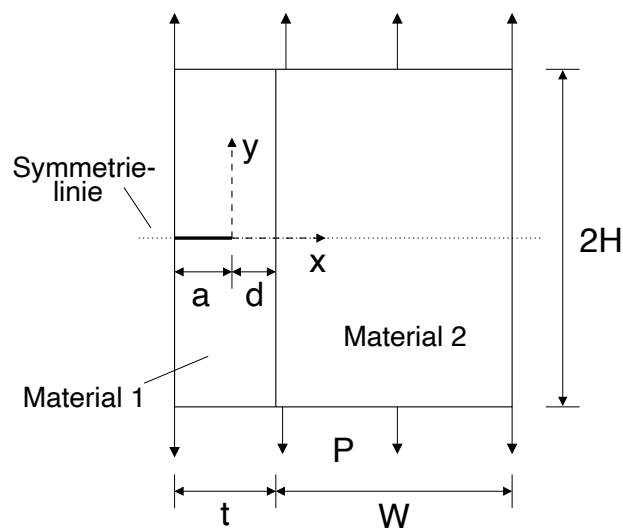


Abbildung 5.33: Schematische Darstellung des Risses in einer dünnen Schicht

Auf Grund der Annahme, dass sich der Riss in der Mitte des Bauteils befindet, ergibt sich bei Zug eine reine Mode-I-Belastung, und durch Berücksichtigung von Symmetrierandbedingungen in der Rissebene reicht es aus, nur eine Hälfte zu modellieren. Abbildung 5.34 zeigt das FE-Modell für  $d/a = \frac{1}{4}$ , was einer Risslänge von  $a = 80 \mu\text{m}$  entspricht. Sowohl die Dicke  $W$  des Substrates als auch die Höhe  $H$  des Modells betragen  $10 \text{ mm}$ . Mit denselben geometrischen Abmessungen wurden außerdem FE-Modelle für die Werte  $d/a = \frac{1}{9}$ ,  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{9}{11}$  und  $\frac{13}{7}$  erstellt. Zur Vernetzung wurden wegen der Verfeinerung in Richtung der Schicht insgesamt 2678 Elemente verwendet.

Für das Material des Substrates sei ein Verhalten gemäß der klassischen Elastizität vorausgesetzt. Deshalb werden ihm  $E_2 = 100 \text{ GPa}$  und  $\nu_2 = 0,3$  zugewiesen, während alle

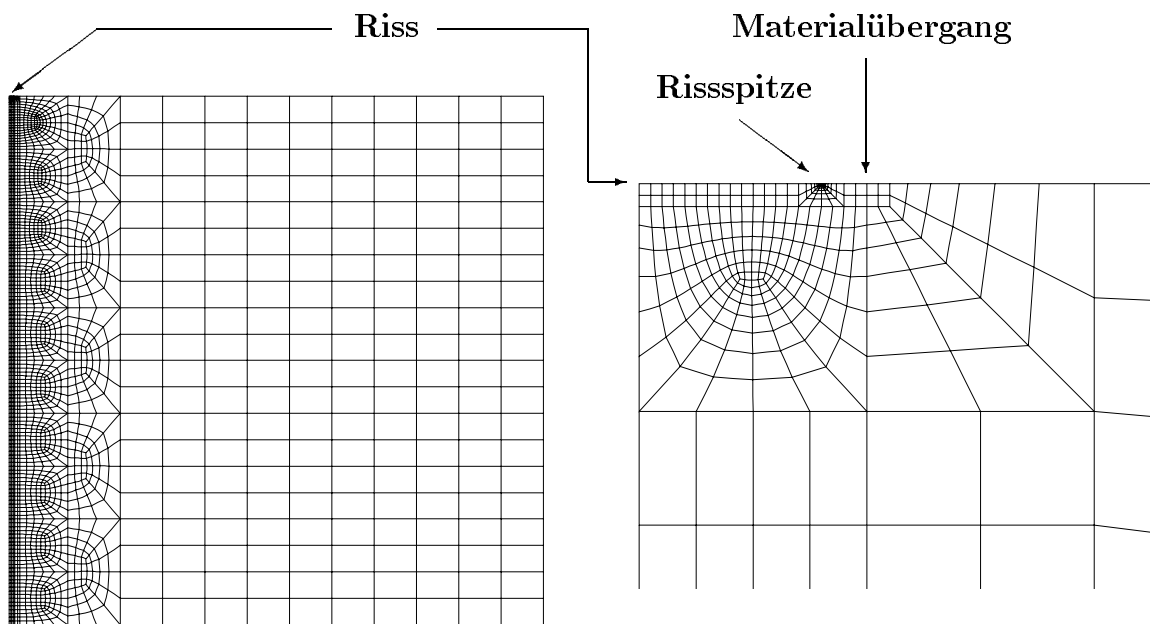


Abbildung 5.34: Netz des Risses im Zweistoffverbund mit  $d = 0,2$  mm (links: gesamtes Netz, rechts: Vernetzung der Risszone)

anderen Materialparameter gleich Null gesetzt werden. Die dünne Schicht erhält einen E-Modul von  $E_1 = 400$  GPa, so dass sich im Gegensatz zum vorigen Beispiel der Riss nun im steiferen Material befindet. Für die Querkontraktionszahl gilt  $\nu_1 = \nu_2$ . Die Werte von  $\alpha_1 = 1, 100$  und  $10^4$  GPa sowie  $\gamma_1 = 10, 10^3, 10^5$  und  $10^7$  N werden wie zuvor gewählt, wodurch sich die Verhältnisse  $\alpha_1/E_1 = \frac{1}{400}, \frac{1}{4}$  und  $25$  ergeben.

Wie beim homogenen Riss werden bei Formulierung der Randbedingungen die Knoten an der Risspitze in  $x$ - und  $y$ -Richtung festgehalten:

$$u_x(x = y = 0) = u_y(x = y = 0) = 0 \quad . \quad (5.11)$$

Die Zuglast von  $P = 100$  MPa wird auf die untere Kante bei  $y = -10$  mm aufgebracht. Da nur die untere Hälfte des Bauteils modelliert wird, werden des Weiteren die Symmetrierandbedingungen

$$u_y(x > 0, y = 0) = 0 \quad , \quad \varphi_z(x > 0, y = 0) = 0 \quad (5.12)$$

benötigt (vergleiche Kapitel 4.2).

In Abhängigkeit von  $d/a$  zeigen die Abbildungen 5.35–5.37 jeweils das Verhältnis des Spannungsintensitätsfaktors  $\tilde{K}_I$  zum klassischen Wert  $K_I$  für dieselbe Geometrie sowie

den Absolutwert  $\tilde{K}_I$ . Wie zu erkennen ist, steigt letzterer bei allen betrachteten Materialparameterkombinationen für abnehmendes  $d/a$  an. Einen nahezu konstanten Verlauf mit leichten Abweichungen bei kleinerem  $d/a$  weisen die Ergebnisse von  $\tilde{K}_I/K_I$  für  $\gamma = 10\text{ N}$  auf. Deren Höhe liegt dabei in allen drei Schaubildern nahe dem jeweiligen Wert für homogenes Material (vergleiche Abb. 5.13), so dass angenommen werden kann, dass die Resultate wesentlich durch die Abhängigkeit von den Materialparametern bestimmt werden. Deutlicher wird der Einfluss der geometrischen Abmessungen erst bei den größeren Werten von  $\gamma$ . Dabei durchlaufen die Kurven bei Verkleinerung von  $d/a$  zunächst ein Minimum und anschließend folgt ein deutlicher Anstieg. Dieses Verhalten ist bei  $\alpha_1/E_1 = 1/400$  am stärksten ausgeprägt, jedoch liegen die Werte, wie erwartet, insgesamt viel enger beieinander als bei den anderen  $\alpha_1/E_1$ -Verhältnissen. Entgegen den bisherigen Erkenntnissen gilt bei diesem Beispiel für  $\gamma_1 = 10^3\text{ N}$  fast immer  $\tilde{K}_I/K_I < 1$  und die Kurven für  $\gamma_1 = 10^5\text{ N}$  und  $10^7\text{ N}$  sind nahezu identisch.

$$\alpha_1/E_1 = 1/400$$

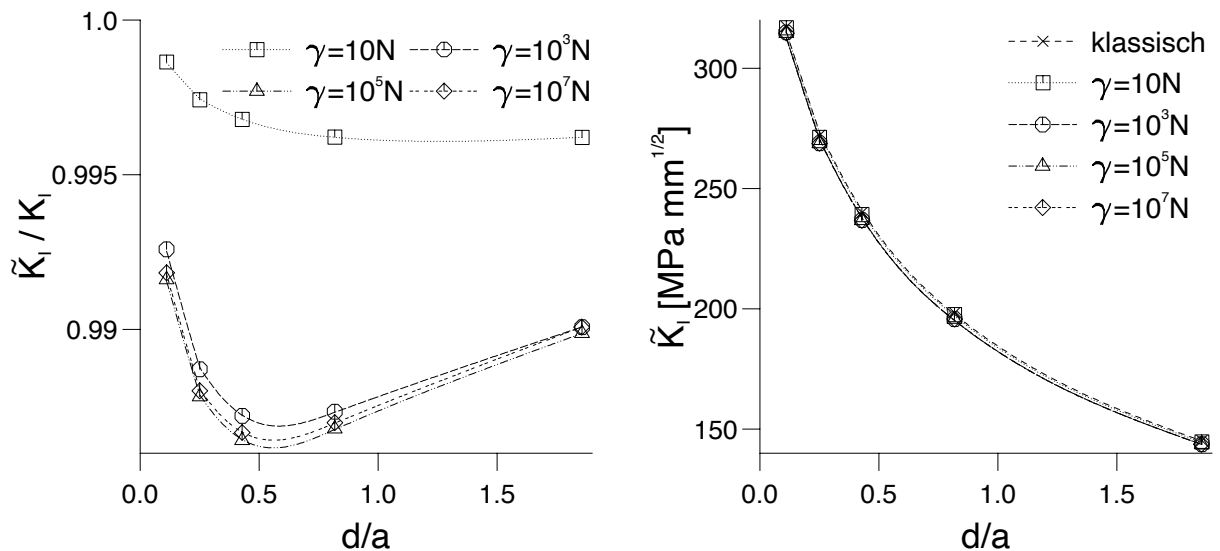


Abbildung 5.35: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. Absolutwert von  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

$$\alpha_1/E_1 = 1/4$$

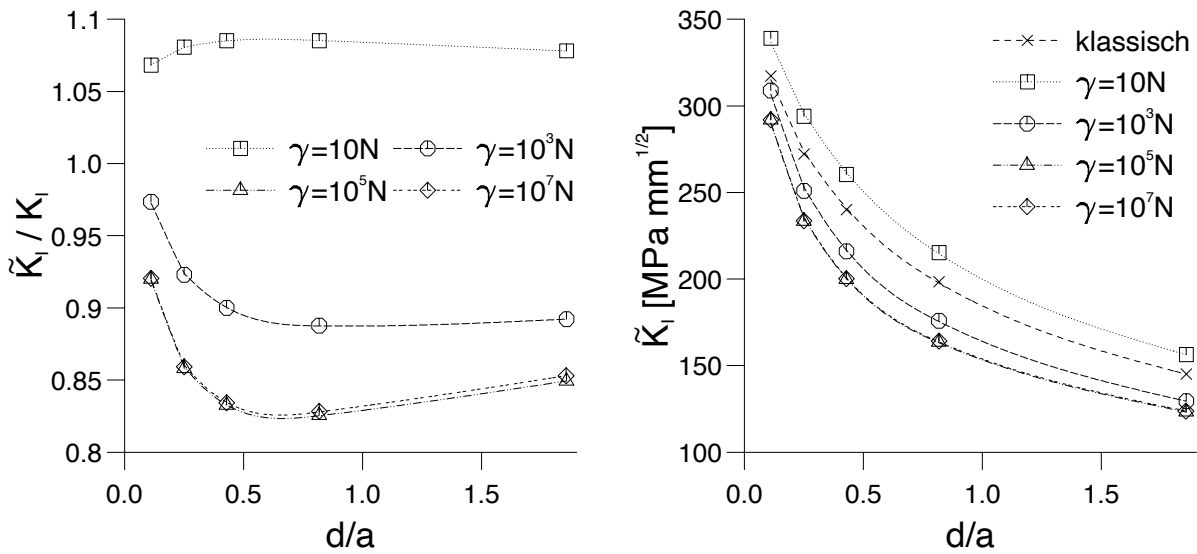


Abbildung 5.36: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. Absolutwert von  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$

$$\alpha_1/E_1 = 25$$

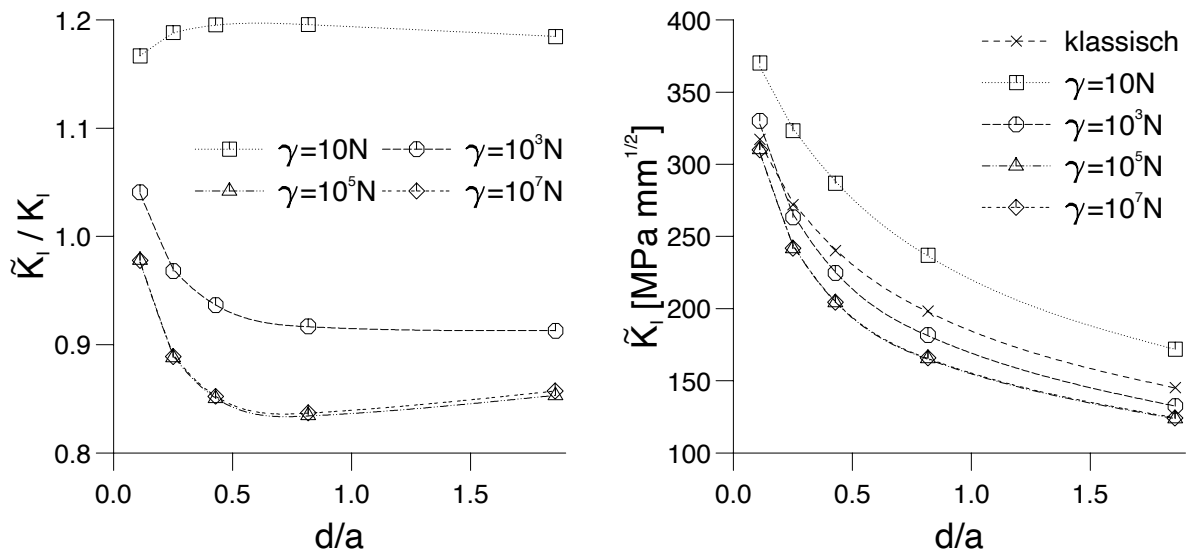


Abbildung 5.37: Spannungsintensitätsfaktor  $\tilde{K}_I$  im Verhältnis zum entsprechenden klassischen Wert  $K_I$  bzw. Absolutwert von  $\tilde{K}_I$  (klassisch:  $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$ ) in Abhängigkeit von  $d/a$



## 5.5 Abschließende Bemerkungen

Wie die FE-Analysen zeigen, können für den Riss in homogenem Material die Effekte der mikropolaren Theorie erst ab einem Verhältnis von  $\alpha/E > 10^{-3}$  beobachtet werden. Unabhängig von der Wahl des Materialparameters  $\gamma$  erfahren alle Intensitätsfaktoren nur zwischen  $10^{-3} < \alpha/E < 10$  eine wesentliche Veränderung. Dieser Übergangsbereich zum Grenzwert der Couple-Stress-Theorie stimmt gut mit dem Intervall überein, in dem der Faktor  $C$  aus Gleichung (5.8) eine Änderung des Verlaufs der Winkelfunktionen bewirkt (vergleiche Abb. 5.5).

Sowohl bei der Analyse des Zweistoffverbundes als auch des Risses in der dünnen Schicht kann eine Abhängigkeit von der charakteristischen Geometriegröße  $d/a$  aufgezeigt werden, die im Vergleich zum Verhalten des entsprechenden klassischen Mediums teilweise deutlich verschieden ist. Diese Abweichungen weisen kein einheitliches Verhalten auf, sondern unterscheidet sich je nach Wahl der Materialparameter.

Da sich alle dargestellten Effekte und Abweichungen vom klassischen Ergebnis aus rein theoretischen Betrachtungen ergeben und die Materialparameter dabei um mehrere Größenordnungen variiert werden, kann keine abschließende Aussage über die praktische Bedeutung dieser Phänomene gemacht werden. Hierzu bedarf es genauerer Kenntnisse über die Werte der mikropolaren Materialparameter.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Die Untersuchungen dieser Arbeit basieren auf der linearen Theorie des elastischen mikropolaren Kontinuums. Es zeichnet sich dadurch aus, dass jedem materiellen Punkt neben Verschiebungs- auch Rotationsfreiheitsgrade zugeordnet sind. Dies hat das Auftreten von Momentenspannungen zur Folge und deren Einfluss auf die Drehimpulsbilanz bewirkt für die Kraftspannungen den Verlust ihrer Symmetrieeigenschaft. Bei isotropem Material wird in den konstitutiven Gleichungen der Kraftspannungen zusätzlich zu den Lamé'schen Konstanten ein Materialparameter benötigt, der die Kopplung des antisymmetrischen Teils der Dehnung und der Spannung vermittelt. Das Materialgesetz der Momentenspannungen enthält ebenfalls drei Parameter.

Nach ausführlicher Darstellung der Theorie des mikropolaren Kontinuums, konnte aus der schwachen Form mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens eine Finite-Elemente-Formulierung erstellt werden. Ihre Implementierung in den kommerziellen FE-Code ABAQUS erfolgte durch benutzereigene Elemente. Sowohl für dreidimensionale Analysen als auch für den ebenen Spannungs- bzw. Dehnungszustand wurden verschiedene Elementtypen bereitgestellt. Während alle Elemente mit Formfunktionen gleicher Ordnung für die Verschiebungs- bzw. Rotationsfreiheitsgrade zur Verfügung stehen, wurden im zweidimensionalen Fall ebenfalls Elemente realisiert, deren Rotationsansatz im Vergleich zur Verschiebung um eine Ordnung niedriger ist.

Hauptziel der Arbeit war die Untersuchung verschiedener Rissprobleme. Durch eine Verallgemeinerung der von Williams eingeführten Methode zur Bestimmung der Rissspitzennahfelder konnte eine analytische Lösung für den singulären und konstanten Term bei Mode-I- und Mode-II-Belastung bestimmt werden. Es zeigte sich, dass bei den Kraftspannungen die Singularitätsordnung der mikropolaren Theorie mit der klassischen über-

einstimmt. Die Momentenspannungen weisen bei Mode I ebenfalls denselben Spannungsexponenten auf. Im Falle einer reinen Mode-II-Beanspruchung hingegen sind sie nicht singulär, sondern werden an der Rissspitze durch den konstanten Term bestimmt. Für die Winkelfunktionen ergibt sich im Gegensatz zum klassischen Resultat eine Abhängigkeit von den Parametern des Materialgesetzes der Kraftspannungen.

Mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wurde zunächst das Verhalten eines Risses in homogenem Material unter Mode-I- bzw. Mode-II-Belastung untersucht. Anhand der analytischen Lösung konnte die Implementierung der Elemente verifiziert werden. Der Vergleich der einzelnen Elementtypen zeigte, dass die unterschiedlichen Ansatzfunktionen für die Rotation keinen signifikanten Einfluss haben. Bei Unterscheidung zwischen vollständiger und reduzierter Integration erwiesen sich die Elemente mit reduzierter Integration als numerisch wesentlich stabiler.

In Abhängigkeit von den Materialparametern erfolgte sowohl für die Kraft- als auch für die Momentenspannungen die Bestimmung der Intensitätsfaktoren. Die Variation des zusätzlichen mikropolaren Materialkennwertes des Kraftspannungsgesetzes liefert als Grenzfall für sehr kleine bzw. große Werte die Ergebnisse der klassischen bzw. der Couple-Stress-Theorie. Deren Lage zueinander wird von den Parametern der konstitutiven Gleichungen für die Momentenspannungen bestimmt. Nur wenn deren Werte hoch sind, ergibt sich eine Verringerung der Kraftspannungsintensitätsfaktoren im Vergleich zum klassischen Resultat. Kleine Parameterwerte führen hingegen zu einer deutlichen Erhöhung. Wie die Untersuchungen auch zeigten, ist der Einfluss der verschiedenen Materialkennwerte qualitativ nahezu unabhängig vom betrachteten Mode. Diese Aussage gilt sowohl für die Intensitätsfaktoren der Kraft- als auch der Momentenspannungen.

Abschließend wurde der Einfluss von geometrischen Bauteilabmessungen auf die Kraftspannungsintensitätsfaktoren untersucht. Einerseits geschah dies anhand eines Zweistoffverbundes mit einem Riss parallel zur Grenzschicht, wobei dessen Abstand zum Materialübergang bei konstant gehaltener Risslänge variiert wurde. Des Weiteren wurde ein Schicht-Substrat-Verbund betrachtet, der einen Riss senkrecht zur Oberfläche der dünnen Schicht aufweist. Hier wurde die Risslänge und somit der Abstand der Rissspitze zur Grenzschicht verändert. Bei Variation der genannten Geometrie Größen konnte ein Verhalten beobachtet werden, das teilweise deutlich von den Resultaten der klassischen Elastizitätstheorie abweicht. Allerdings hängt der zu beobachtende Effekt in Art und Größe sehr von der Wahl der Materialparametern ab.

In der Vergangenheit blieben bruchmechanische Probleme im Rahmen der verallgemeiner-

ten Kontinua nahezu unberücksichtigt. Aus diesem Grund kann die vorliegende Arbeit bei der Untersuchung grundlegender Aspekte nur einen ersten Schritt darstellen. Wie bereits erwähnt, können keine Aussagen über die Signifikanz der aus rein theoretischen Betrachtungen abgeleiteten Phänomene gemacht werden. Dafür bedarf es entsprechender experimenteller Untersuchungen, die bislang nicht durchgeführt wurden.

# Anhang A

## Zur Theorie des mikropolaren Kontinuums

### A.1 Kinetische Energie durch Rotation des Mikrokontinuums

In diesem Abschnitt soll die Gültigkeit der Gleichung

$$\int_{\mathcal{R}_t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} \rho \, dv = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \check{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} \rho \, dv \quad (\text{A.1})$$

bewiesen werden. Ausgehend von der rechten Seite ergibt sich mit Hilfe der Definition (2.51) zunächst

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \check{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} = \Theta_{mm} \omega_k \omega_k - \Theta_{kl} \omega_k \omega_l \quad . \quad (\text{A.2})$$

Die materielle Zeitableitung liefert unter Berücksichtigung der Symmetrie des Trägheitstensors  $\boldsymbol{\Theta}$

$$\frac{d}{dt} \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \check{\boldsymbol{\Theta}} \boldsymbol{\omega} \right) = \dot{\Theta}_{mm} \omega_k \omega_k + 2\Theta_{mm} \dot{\omega}_k \omega_k - \dot{\Theta}_{kl} \omega_k \omega_l - 2\Theta_{kl} \dot{\omega}_k \omega_l \quad . \quad (\text{A.3})$$

Für  $\dot{\Theta}_{kl}$  folgt aus den Gleichungen (2.38) und (2.16)

$$\dot{\Theta}_{kl} = \int_{\mathcal{M}} (\Omega_{km} \xi_m \xi_l + \xi_k \Omega_{ln} \xi_n) \, dm_M = \Omega_{km} \Theta_{ml} + \Omega_{ln} \Theta_{nk} \quad . \quad (\text{A.4})$$

Hiermit gilt für die Spur von  $\dot{\Theta}$

$$\dot{\Theta}_{kk} = 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} = 0 \quad , \quad (\text{A.5})$$

da das innere Produkt eines symmetrischen mit einem antisymmetrischen Tensor identisch verschwindet. Der dritte Term in Gleichung (A.3) kann mit (A.4), (2.22) und den Symmetrien von  $\boldsymbol{\Omega}$  und  $\boldsymbol{\Theta}$  folgendermaßen umgeformt werden:

$$\dot{\Theta}_{kl}\omega_k\omega_l = 2\Omega_{km}\omega_k\Theta_{ml}\omega_l = -2\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} = -2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} = 0 \quad (\text{A.6})$$

Durch Zusammenfassen dieser Ergebnisse kann die rechte Seite von (A.1) als

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\omega} \rho \, dv = \int_{\mathcal{R}_t} (\Theta_{mm}\dot{\omega}_k\omega_k - \Theta_{kl}\dot{\omega}_k\omega_l) \rho \, dv \quad (\text{A.7})$$

dargestellt werden.

Andererseits folgt mit der Definition von  $\boldsymbol{\sigma}$  (2.40) und Benutzung des axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega}$  gemäß (2.22)

$$\sigma_k \rho \, dv = e_{ijk} \int_{\mathcal{M}} \xi_i e_{mjn} \omega_n \xi_m \, dm_M = e_{ijk} e_{mjn} \omega_n \Theta_{im} = \Theta_{mm}\omega_k - \Theta_{ik}\omega_i \quad . \quad (\text{A.8})$$

Die Zeitableitung hiervon ergibt zusammen mit Gleichung (A.5)

$$\dot{\sigma}_k \rho \, dv = \Theta_{mm}\dot{\omega}_k - \Theta_{ik}\dot{\omega}_i - \dot{\Theta}_{ik}\omega_i \quad . \quad (\text{A.9})$$

Somit erhält man schließlich für die linke Seite von Gleichung (A.1)

$$\int_{\mathcal{R}_t} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega} \rho \, dv = \int_{\mathcal{R}_t} (\Theta_{mm}\dot{\omega}_k\omega_k - \Theta_{ik}\dot{\omega}_i\omega_k) \rho \, dv \quad , \quad (\text{A.10})$$

wobei Gleichung (A.6) zu benutzen ist.

Mit (A.7) und (A.10) ist damit die Gültigkeit von Gleichung (A.1) bewiesen.

## A.2 Prinzip der materiellen Objektivität

Das Prinzip der materiellen Objektivität besagt in seiner aktiven Formulierung, dass die konstitutiven Gleichungen unabhängig von überlagerten Starrkörperbewegungen sind [8, S. 139]. Hierzu werden zwei Bewegungen  $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  und  $\hat{\mathbf{x}}^*(\mathbf{X}, t^*)$  betrachtet, die durch

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad , \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad , \quad t^* = t - a \quad (a = \text{const.}) \quad (\text{A.11})$$

miteinander verknüpft sind. Da der orthogonale Tensor  $\mathbf{Q}$  eine Rotation und  $\mathbf{c}$  eine Translation des Körpers beschreibt, unterscheiden sich die Bewegungen nur durch eine Starrkörperbewegung. Für die spezifische freie Energiefunktion des elastischen, mikropolaren Kontinuums (2.69) und den Deformationsgradienten muss gelten:

$$\psi^* = \bar{\psi}(\mathbf{F}^*, \mathbf{R}_M^*, \text{Grad } \mathbf{R}_M^*) = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{R}_M, \text{Grad } \mathbf{R}_M) = \psi \quad , \quad \mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Des Weiteren wird angenommen, dass sich der Rotationstensor der Mikrostruktur gemäß

$$\mathbf{R}_M^* = \mathbf{Q}\mathbf{R}_M \quad (\text{A.13})$$

transformiert. Da die Gleichungen (A.12) und (A.13) für beliebige Rotationstensoren  $\mathbf{Q}$  erfüllt sein müssen, gilt dies insbesondere auch für

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T \quad , \quad (\text{A.14})$$

wobei  $\mathbf{R}$  den eigentlich orthogonalen Rotationstensor darstellt, der aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten [51, S. 17]

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{A.15})$$

folgt. Bei  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  handelt es sich dabei um den rechten bzw. linken Strecktensor, die beide symmetrisch und positiv definit sind. Schließlich wird durch

$$\mathbf{C} := \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \quad (\text{A.16})$$

der rechte Cauchy–Green Tensor definiert. Durch Einsetzen von (A.14) – (A.16) in Gleichung (A.12) unter Berücksichtigung von  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{R}_M(\mathbf{F}^T\mathbf{R}_M)^T$  gilt für die freie Energiefunktion

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{\psi}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\mathbf{R}_M, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{R}^T\text{Grad } \mathbf{R}_M) \\ &= \check{\psi}(\mathbf{U}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{R}_M, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\text{Grad } \mathbf{R}_M) = \check{\psi}(\mathbf{C}, \mathbf{F}^T\mathbf{R}_M, \mathbf{F}^T\text{Grad } \mathbf{R}_M) \\ &= \check{\psi}(\mathbf{F}^T\mathbf{R}_M, \mathbf{F}^T\text{Grad } \mathbf{R}_M) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Somit ist die Abhängigkeit der spezifischen freien Energie auf die zwei unabhängigen Terme  $\mathbf{F}^T\mathbf{R}_M$  und  $\mathbf{F}^T\text{Grad } \mathbf{R}_M$  reduziert.

### A.3 Positive Definitheit der freien Energie

Aus der Tatsache, dass die spezifische freie Energie positiv definit ist [113, S. 153ff.]

$$\psi > 0 \quad , \quad (A.18)$$

ergeben sich Restriktionen für die Materialparameter. Aus den Gleichungen (2.87), (2.91) und (2.92) folgt

$$\begin{aligned} \psi = \frac{1}{2\rho} & \left[ \lambda (\text{Sp } \boldsymbol{\epsilon})^2 + (\mu + \alpha) \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + (\mu - \alpha) \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^T \right. \\ & \left. + \beta (\text{Sp } \boldsymbol{\kappa})^2 + (\gamma + \delta) \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \delta) \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\kappa}^T \right] \quad . \end{aligned} \quad (A.19)$$

Es gilt nun, die Tensoren  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  in unabhängige Anteile aufzuspalten. Allgemein kann ein beliebiger Tensor  $\mathbf{P}$  additiv in seinen symmetrischen Anteil  $\mathbf{P}_S := \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)$  und antisymmetrischen Anteil  $\mathbf{P}_A := \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T)$  zerlegt werden. Des Weiteren muss der Spuranteil separiert werden. Dies geschieht durch die Zerlegung  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^K + \mathbf{P}^D$  in Kugelanteil  $\mathbf{P}^K := \frac{1}{3}(\text{Sp } \mathbf{P})\mathbf{1}$  und Deviator  $\mathbf{P}^D := \mathbf{P} - \frac{1}{3}(\text{Sp } \mathbf{P})\mathbf{1}$ . Da  $\text{Sp } \mathbf{P}^D = \text{Sp } \mathbf{P}_A = 0$  und damit  $(\mathbf{P}_A)^D = \mathbf{P}_A$  bzw.  $(\mathbf{P}_S)^K = \mathbf{P}^K$  gilt, kann  $\mathbf{P}$  gemäß  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_S)^D + \mathbf{P}^K + \mathbf{P}_A$  aufgespalten werden. Hieraus können die beiden inneren Produkte

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{P}_S)^D \cdot (\mathbf{P}_S)^D + \mathbf{P}^K \cdot \mathbf{P}^K + \mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_A \quad , \quad (A.20)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P}_S)^D \cdot (\mathbf{P}_S)^D + \mathbf{P}^K \cdot \mathbf{P}^K - \mathbf{P}_A \cdot \mathbf{P}_A \quad (A.21)$$

gebildet werden ( $(\mathbf{P}_S)^D \cdot \mathbf{P}^K = (\mathbf{P}_S)^D \cdot \mathbf{P}_A = \mathbf{P}^K \cdot \mathbf{P}_A \equiv 0$ ). Anwenden dieser Formeln für  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  liefert zusammen mit Gleichung (A.19)

$$\begin{aligned} 2\rho\psi = & (3\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\epsilon}^K \cdot \boldsymbol{\epsilon}^K + \mu (\boldsymbol{\epsilon}_S)^D \cdot (\boldsymbol{\epsilon}_S)^D + \alpha \boldsymbol{\epsilon}_A \cdot \boldsymbol{\epsilon}_A \\ & + (3\beta + 2\gamma) \boldsymbol{\kappa}^K \cdot \boldsymbol{\kappa}^K + \gamma (\boldsymbol{\kappa}_S)^D \cdot (\boldsymbol{\kappa}_S)^D + \delta \boldsymbol{\kappa}_A \cdot \boldsymbol{\kappa}_A \quad . \end{aligned} \quad (A.22)$$

Da die einzelnen Summanden unabhängig voneinander sind, muss zur Erfüllung von (A.18)

$$0 \leq 3\lambda + 2\mu \quad , \quad 0 \leq \mu \quad , \quad 0 \leq \alpha \quad , \quad (A.23)$$

$$0 \leq 3\beta + 2\gamma \quad , \quad 0 \leq \gamma \quad , \quad 0 \leq \delta \quad (A.24)$$

gelten.



# Anhang B

## Zur FE–Formulierung

### B.1 Identität der Lösung der starken und schwachen Formulierung

Es soll bewiesen werden, dass die Lösung  $u_i$  und  $\varphi_i$  der starken Formulierung auch Lösung der schwachen Formulierung ist und umgekehrt (vgl. hierzu Kapitel. 3.1).

Einerseits ergibt sich ausgehend von den Differentialgleichungen (3.5) und (3.6) durch Multiplikation mit den Gewichtsfunktionen  $\delta u_i$  bzw.  $\delta \varphi_i$ , Integration über den betrachteten Körper und Summation der beiden Gleichungen:

$$\int_{\mathcal{R}_t} \left[ (T_{ij,j} + b_i) \delta u_i + (M_{ij,j} + e_{kli} T_{lk} + l_i) \delta \varphi_i \right] dv = 0 \quad . \quad (\text{B.1})$$

Partielle Integration des ersten Terms (analog für den dritten Term) liefert

$$\int_{\mathcal{R}_t} T_{ij,j} \delta u_i dv = - \int_{\mathcal{R}_t} T_{ij} \delta u_{i,j} dv + \int_{\partial \mathcal{R}_t} T_{ij} n_j \delta u_i da \quad . \quad (\text{B.2})$$

Einsetzen und Benutzung der Randbedingungen (3.2) liefert die Grundgleichung der schwachen Formulierung (3.12). Die Gebiete der Oberflächenintegrale folgen dabei aus der Tatsache, dass die Gewichtsfunktionen  $\delta u_i$  bzw.  $\delta \varphi_i$  auf  $\partial \mathcal{R}_t^{u_i}$  bzw.  $\partial \mathcal{R}_t^{\varphi_i}$  verschwinden (siehe Gleichung (3.13)), und die Beziehungen (3.4) erfüllt sein müssen. Somit sind  $u_i$  und  $\varphi_i$  auch Lösung der schwachen Formulierung.

Andererseits ergibt sich durch partielle Integration von (3.12) aus der schwachen Formulierung

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{R}_t} \left[ \overbrace{(T_{ij,j} + b_i)}{=:a_i} \delta u_i + \overbrace{(M_{ij,j} + e_{kli} T_{lk} + l_i)}{=:b_i} \delta \varphi_i \right] dv \\ & - \int_{\partial \mathcal{R}_t^i} \left[ \underbrace{(T_{ij} n_j - t_i^0)}_{=:a_i^0} \delta u_i - \underbrace{(M_{ij} n_j - m_i^0)}_{=:b_i^0} \delta \varphi_i \right] da = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Die Gleichung soll für beliebige Variationen erfüllt sein, weshalb zunächst  $\delta u_i$  und  $\delta \varphi_i$  so gewählt werden können, dass

$$\delta u_i = a_i f(x_n) \quad , \quad \delta \varphi_i = b_i g(x_n) \quad (\text{B.4})$$

gilt, wobei  $f(x_n)$  und  $g(x_n)$  glatte Funktionen mit folgenden Eigenschaften sind:

$$f(x_n) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ in } \mathcal{R}_t \\ = 0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t \end{array} \right. \quad , \quad g(x_n) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ in } \mathcal{R}_t \\ = 0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t \end{array} \right. \quad . \quad (\text{B.5})$$

Dies führt zu der Gleichung

$$\int_{\mathcal{R}_t} (a_i^2 f + b_i^2 g) dv = 0 \quad , \quad (\text{B.6})$$

die nur für  $a_i = b_i = 0$  erfüllt werden kann, wodurch die Gültigkeit der Gleichgewichtsbedingungen (3.5) und (3.6) bewiesen ist.

Für die Randbedingungen erfolgt der Beweis komponentenweise, weshalb zunächst

$$\delta u_i = \delta_{i1} a_1^0 \tilde{f}(x_n) \quad , \quad \delta \varphi_i = \delta_{i1} b_1^0 \tilde{g}(x_n) \quad (\text{B.7})$$

gesetzt werden. Für die glatten Funktionen  $\tilde{f}(x_n)$  und  $\tilde{g}(x_n)$  gelte nun

$$\tilde{f}(x_i) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ in } \partial \mathcal{R}_t^{t_1} \\ = 0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{u_1} \end{array} \right. \quad , \quad \tilde{g}(x_i) \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ in } \partial \mathcal{R}_t^{m_1} \\ = 0 \text{ auf } \partial \mathcal{R}_t^{\varphi_1} \end{array} \right. \quad . \quad (\text{B.8})$$

Mit dem vorigen Ergebnis liefert Einsetzen in Gleichung (B.3)

$$\int_{\partial \mathcal{R}_t^{t_1}} (a_1^0)^2 \tilde{f} da + \int_{\partial \mathcal{R}_t^{m_1}} (b_1^0)^2 \tilde{g} da = 0 \quad , \quad (\text{B.9})$$

woraus die Bedingungen  $a_1^0 = b_1^0 = 0$  resultieren. Nach analoger Vorgehensweise für die beiden anderen Komponenten ergeben sich schließlich die Randbedingungen (3.2). Damit ist gezeigt, dass die Lösung der schwachen und starken Formulierung identisch ist. Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass für die schwache Formulierung lediglich die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen (3.1) gefordert werden muss, da die natürlichen Randbedingungen automatisch durch Gleichung (3.12) gewährleistet sind. Für den Beweis der Eindeutigkeit der Lösung sei auf [100] bzw. [34, S. 127ff.] verwiesen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Aero, E. L., Kuvshinskii, E. V., Fundamental Equations of the Theory of Elastic Media with Rotationally Interacting Particles. *Sovjet Physics Solid State*, 2, S. 1272–1281, 1961.
- [2] Anderson, T. L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Raton, 1991.
- [3] Anderson, W. B., Lakes, R. S., Size Effects due to Cosserat Elasticity and Surface Damage in Closed-Cell Polymethacrylimide Foam. *J. Materials Science*, 29, S. 6413–6419, 1994.
- [4] Askar, A., Molecular Crystals and the Polar Theories of the Continua. Experimental Values of Material Coefficients for  $\text{KNO}_3$ . *Int. J. Engng Sci.*, 10, S. 293–300, 1972.
- [5] Barsoum, R. S., On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 10, S. 25–37, 1976.
- [6] Bathe, K.-J., *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [7] Baur, H., *Einführung in die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1984.
- [8] Becker, E., Bürger, W., *Kontinuumsmechanik*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1975.
- [9] Besdo, D., Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mechanica*, 20, S. 105–131, 1974.
- [10] Bogy, D. B., Sternberg, E., The Effect of Couple-Stresses on the Corner Singularity due to an Asymmetric Shear Loading. *Int. J. Solids Struct.*, 4, S. 159–174, 1968.
- [11] Bogy, D. B., Sternberg, E., The Effect of Couple-Stresses on Singularities due to an Discontinuous Loadings. *Int. J. Solids Struct.*, 3, S. 757–770, 1967.

- [12] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., *Taschenbuch der Mathematik* 24. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1989.
- [13] Coleman, B. D., Noll, W., The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 13, S. 167–178, 1963.
- [14] Cosserat, E., Cosserat, F., *Théorie des corps déformables*. Hermann et fils, Paris, 1909.
- [15] Cowin, S. C., Singular Stress Concentrations in Plane Cosserat Elasticity. *ZAMP*, 20, S. 979–982, 1969.
- [16] Cowin, S. C., An Incorrect Inequality in Micropolar Elasticity Theory. *ZAMP*, 21, S. 494–497, 1970.
- [17] de Boer, R., *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [18] de Borst, R., A Generalization of  $J_2$ -Flow Theory of Polar Continua, *Comp. Meth. Appl. Eng.*, 103, S. 347–362, 1993.
- [19] Dietsche, A., *Lokale Effekte in linear-elastischen und elasto-plastischen Cosserat-Kontinua*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993.
- [20] Duhem, P., Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. *Ann. école norm.*, 3 (10), S. 187–230, 1893.
- [21] Edelen, D. G. B., Laws, N., On the Thermodynamics of Systems with Nonlocality. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43, S. 24–35, 1971.
- [22] Edelen, D. G. B., Green, A. E., Laws, N., Nonlocal Continuum Mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43, S. 36–44, 1971.
- [23] Ellis, R. W., Smith, C. W., A Thin Plate Analysis and Experimental Evaluation of Couple Stress Effects. *Experimental Mechanics*, 17, S. 372–380, 1968.
- [24] Ericksen, J. L., Truesdell, C., Exact Theory of Stress and Strains in Rods and Shells. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1, S. 295–323, 1958.
- [25] Eringen, A. C., Simple Microfluids. *Int. J. Engng Sci.*, 2, S. 205–217, 1964.

- [26] Eringen, A. C., Mechanics of Micromorphic Materials. In Görtler, H. (editor): *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964*. Springer-Verlag, Berlin, S. 131–138, 1966.
- [27] Eringen, A. C., Linear Theory of Micropolar Elasticity. *J. Mat. Mech.*, 15, S. 909–923, 1966.
- [28] Eringen, A. C., Theory of Micropolar Fluids. *J. Mat. Mech.*, 15, S. 909–923, 1966.
- [29] Eringen, A. C., Theory of Micropolar Plates. *ZAMP*, 18, S. 12–30, 1967.
- [30] Eringen, A. C., Theory of Micropolar Elasticity. In Liebowitz, H. (editor): *Fracture, Volume II, Mathematical Fundamentals*. Academic Press, New York, 1968.
- [31] Eringen, A. C., Balance Laws of Micromorphic Mechanics. *Int. J. Engng Sci.*, 8, S. 819–828, 1970.
- [32] Eringen, A. C., Nonlocal Polar Elastic Continua. *Int. J. Engng Sci.*, 10, S. 1–16, 1972.
- [33] Eringen, A. C., Linear Theory of Nonlocal Elasticity and Dispersion of Plane Waves. *Int. J. Engng Sci.*, 10, S. 425–435, 1972.
- [34] Eringen, A. C., *Microcontinuum Field Theories , I. Foundations and Solids*, Springer Verlag, New York, 1999.
- [35] Eringen, A. C., Edelen, D. G. B., On Nonlocal Elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 10, S. 233–248, 1972.
- [36] Eringen, A. C., Suhubi, E. S., Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids — I. *Int. J. Engng Sci.*, 2, S. 189–203, 1964.
- [37] Fleck, N. A., Muller, G. M., Ashby, F., Hutchinson, J. W., Strain Gradient Plasticity: Theory and Experiment, *Acta Metall. Mater.*, 42/2, S. 475–487, 1994.
- [38] Fung, Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, 10. Aufl., New Jersey, 1965.
- [39] Gauthier, R. D., Jahsman, W. E., A Quest for Micropolar Elastic Constants. *J. Appl. Mech.*, 42, S. 369–374, 1975.
- [40] Gauthier, R. D., Jahsman, W. E., Bending of a Curved Bar of Micropolar Elastic Material. *J. Appl. Mech.*, 42, S. 369–374, 1975.

- [41] Gerthsen, C., Kneser, H. O., Vogel, H., *Physik*. Springer Verlag, Berlin, 16. Aufl., 1989.
- [42] Grammenoudis, P., Tsakmakis, Ch., Hardening Rules for Finite Deformation Micropolar Plasticity: Restrictions Imposed by the Second Law of Thermodynamics and the Postulate of Il'iushin. *Cont. Mech. Therm.*, 13, S. 325–363, 2001.
- [43] Green, A. E., Micro–Materials and Multipolar Continuum Mechanics. *Int. J. Engng Sci.*, 3, S. 533–537, 1965.
- [44] Green, A. E., Rivlin, R. S., Simple Force and Stress Multipoles. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, S. 325–353, 1964.
- [45] Green, A. E., Rivlin, R. S., Multipolar Continuum Mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17, S. 113–147, 1964.
- [46] Green, A. E., Zerna, W., *Theoretical Elasticity*. 2. Aufl., Clarendon Press, Oxford, 1968.
- [47] Grioli, G., Elasticità asimmetrica. *Ann. di Mat. pura ed appl.*, Ser. IV, 50, S. 389–417, 1960.
- [48] Günther, W., Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 10, S. 195–213, 1958.
- [49] Gurtin, M. E., *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, New York, 1981.
- [50] Hahn, H. G., *Elastizitätstheorie*. Teubner, Stuttgart, 1985.
- [51] Haupt, P., Foundation of Continuum Mechanics. In Hutter, K. (editor): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures No. 337. Springer Verlag, Wien, New York, 1993.
- [52] Hehl, F., Kröner, E., Zum Materialgesetz eines elastischen Mediums mit Momentenspannungen. *Z. Naturforsch.*, 20a, S. 336–350, 1965.
- [53] Hellinger, E., Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. *Enzy. d. Math. Wiss. IV*, 4, Art. 30, Teubner, Leipzig, 1914.
- [54] Henshell, H. D., Shaw, K. G., Crack Tip Finite Elements are unnecessary. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 9, S. 495–507, 1975.

- [55] Heun, K., Ansätze und allgemeine Methoden der Systemmechanik, *Enzy. d. Math. Wiss. IV*, 2, Art. 11, Teubner, Leipzig, 1914.
- [56] Heuser, H., *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [57] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., *ABAQUS Theory Manual, Version 5.8*, 1998.
- [58] Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., *ABAQUS/Standard User's Manual, Version 5.8, Volume I-III*, 1998.
- [59] Huang, Y., Zhang, L., Guo, T. F., Hwang, K.-C., Near-Tip Fields for Cracks in Materials with Strain-Gradient Effects. In Willis, J. R. (editor): *IUTAM Symposium on Nonlinear Analysis of Fracture, Cambridge, 1995*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, S. 231-243, 1997.
- [60] Huang, Y., Zhang, L., Guo, T. F., Hwang, K.-C., Mixed Mode Near-Tip Fields for Cracks in Material with Strain-Gradient Effects. *J. Mech. Phys. Solids*, 45, S. 439-465, 1997.
- [61] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Method*. Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [62] Jaunzemis, W., *Continuum Mechanics*. The Macmillan Company, New York, 1967.
- [63] Kanninen, M. F., Popelar, C. H., *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, New York, 1985.
- [64] Kaloni, P. N., Ariman, T., Stress Concentration Effects in Micropolar Elasticity. *ZAMP*, 18, S. 136-141, 1967.
- [65] Klingbeil, E., *Variationsrechnung*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1988.
- [66] Klingbeil, E., *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989.
- [67] Koiter, W. T., Couple-Stresses in the Theorie of Elasticity I/II. *Proc. Konigl. Nederl. Wetensch., Ser. B*, 67, S. 17-44, 1964.
- [68] Krishna Reddy, G. V., Venkatasubramanian, N. K., On the Flexural Rigidity of a Micropolar Elastic Circular Cylinder. *J. Appl. Mech.*, 45, S. 429-431, 1978.



- [69] Kröner, E., Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 4, S. 273–334, 1960.
- [70] Kröner, E., On the Physical Reality of Torque Stresses in Continuum Mechanics. *Int. J. Engng Sci.*, 1, S. 261–278, 1963.
- [71] Kröner, E., Das physikalische Problem der antisymmetrischen Spannungen und der sogenannten Momentenspannungen. In Görtler, H. (editor): *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964*. Springer-Verlag, Berlin, S. 153–158, 1966.
- [72] Kröner, E. (editor):, *Mechanics of Generalized Continua, Proceedings of the IUTAM-Symposium on the Generalized Cosserat Continuum and the Continuum Theory of Dislocations and Applications, Freudenstadt, Stuttgart, 1967*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- [73] Lakes, R. S., Yang, J. F. C., Micropolar Elasticity in Bone: Rotation Modulus  $\kappa$ . *Proc. 18th Midwest Mech. Conf., Developments in Mechanics*, 12, S. 239–242, 1983.
- [74] Lakes, R. S., Size Effects and Micromechanics of a Porous Solid. *J. Materials Science*, 18, S. 2572–2581, 1983.
- [75] Lakes, R. S., Experimental Microelasticity of two Porous Solids. *Int. J. Solids Struct.*, 22, S. 55–63, 1986.
- [76] Lakes, R. S., Experimental Methods for Study of Cosserat Elastic Solids and other Generalized Continua. In Mühlhaus, H.–B. (editor): *Continuum models for materials with micro-structure*, Wiley, New York, S. 1–22, 1995.
- [77] Leigh, D. C., *Nonlinear Continuum Mechanics*. McGraw-Hill Inc, New York, 1968.
- [78] Lippmann, H., Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mechanica*, 8, S. 255–284, 1969.
- [79] Ludwig, R., *Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung*. Vieweg, Braunschweig, 1969.
- [80] MacNeal-Swendler Corporation, *MSC/PATRAN User's Guide, Version 8*, Los Angeles, 1998.

- [81] Mindlin, R. D., Influence of Couple–Stresses on Stress Concentrations. *Experimental Mechanics*, 3, S. 1–7, 1963.
- [82] Mindlin, R. D., Micro–Structure in Linear Elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16, S. 51–78, 1964.
- [83] Mindlin, R. D., Stress Functions for a Cosserat Continuum. *Int. J. Solids Struct.*, 1, S. 265–271, 1965.
- [84] Mindlin, R. D., Second Gradient of Strain and Surface–Tension in Linear Elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 1, S. 417–438, 1965.
- [85] Mindlin, R. D., Eshel, N. N., On First Strain–Gradient Theories in Linear Elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 4, S. 109–124, 1968.
- [86] Mindlin, R. D., Tiersten, H. F., Effects of Couple–Stresses in Linear Elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11, S. 415–448, 1962.
- [87] Muki, R., Sternberg, E., The Influence of Couple–Stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids. *ZAMP*, 16, S. 611–648, 1963.
- [88] Muki, R., Sternberg, E., The Effect of Couple–Stresses on the Stress Concentrations around a Crack. *Int. J. Solids Struct.*, 3, S. 69–95, 1967.
- [89] Nemat–Nasser, S., Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North–Holland, Amsterdam, 1993.
- [90] Neuber, H., On the General Solution of Linear–Elastic Problems in Isotropic and Anisotropic Cosserat Continua. In Görtler, H. (editor): *Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Munich, 1964*. Springer–Verlag, Berlin, S. 153–158, 1966.
- [91] Neuber, H., Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat–Körper. *Acta Mechanica*, II/1, S. 48–69, 1966.
- [92] Neuber, H., Die schubbeanspruchte Kerbe im Cosseratkörper. *ZAMM*, 47, S. 313–318, 1967.
- [93] Nowacki, W., The linear Theory of Micropolar Elasticity. In Nowack, W., Olszak, W. (editors): *Micropolar Elasticity*. CISM Courses and Lectures, No. 151, Springer Verlag, Wien, 1972.

- [94] Ostoja–Starzewski, M., Jasiuk, I., Stress Invariance in Planar Cosserat Elasticity. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 451, S. 453–470, 1995.
- [95] Paul, H. S., Sridharan, K., The Penny–Shaped Crack Problem in Micropolar Elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 18, S. 651–664, 1980.
- [96] Paul, H. S., Sridharan, K., The Penny–Shaped Crack Problem in Micropolar Thermoelasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 18, S. 1431–1448, 1980.
- [97] Perkins, R. W., Thomson, D., Experimental Evidence of a Couple–Stress Effect. *AIAA Journal*, 11, S. 1053–1055, 1973.
- [98] Reddy, J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*. Mc Graw–Hill, New York, 1984.
- [99] Redfern, D., *The Maple Handbook, Maple V Release 4*. Springer Verlag, New York, 1996.
- [100] Scalia, A., On Some Theorems in the Theory of Micropolar Elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 28, S. 181–189, 1990.
- [101] Schaefer, H., Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat–Kontinuums. *Misz. angew. Mech., Festschrift Tollmien*, S. 277–292, 1962.
- [102] Schaefer, H., Das Cosserat–Kontinuum, *ZAMM*, 7, S. 485–498, 1967.
- [103] Schijve, J., Note on Couple Stresses. *J. Mech. Phys. Solids*, 14, S. 113–120, 1966.
- [104] Steinmann, P., A Micropolar Theory of Finite Deformation and Finite Rotation Multiplicative Elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 31, S. 1063–1084, 1994.
- [105] Steinmann, P., Stein, E., A Unifying Treatise of Variational Principles for two Types of Micropolar Continua. *Acta Mechanica*, 121, S. 215–232, 1997.
- [106] Sudria, J., L’action euclidienne de déformation et de mouvement. *Mém. des Sci. Phys. Fasc.*, Paris, 29, S. 56ff., 1935.
- [107] Suhubi, E. S. , Eringen, A. C., Nonlinear Theory of Simple Micro–Elastic Solids — II. *Int. J. Engng Sci.*, 2, S. 389–404, 1964.
- [108] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. r., *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 2. Aufl., Paris Production Inc., St. Louis, 1985.

- [109] Tilscher, M., *Singuläre Spannungen und deren bruchmechanische Bewertung in thermisch beanspruchten Zweistoffverbunden*. VDI-Fortschrittberichte, Reihe 18, Nr. 198, VDI Verlag, Düsseldorf, 1996.
- [110] Toupin, R. A., Elastic Materials with Couple-Stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 11, S. 385–414, 1962.
- [111] Toupin, R. A., Theories of Elasticity with Couple-Stress. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17, S. 85–112, 1964.
- [112] Truesdell, C., *A first Course in Rational Continuum Mechanics, Volume 1: General Concepts* Academic Press, New York, 1977.
- [113] Truesdell, C., Noll, W., The Non-Linear Field Theories of Mechanics. In Flügge, S. (editor): *Handbuch der Physik*, Vol. III/3. Springer Verlag, Berlin, 1965.
- [114] Truesdell, C., Toupin, R. A., The Classical Field Theories. In Flügge, S. (editor): *Handbuch der Physik*, Vol. III/1. Springer Verlag, Berlin, 1960.
- [115] Tsakmakis, Ch., interne Mitteilung, Forschungszentrum Karlsruhe, 1999.
- [116] Voigt, W., Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. *Abh. königl. Ges. Wiss. Göttingen*, 34, S. 3–100, 1887.
- [117] Williams, M. L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *J. Appl. Mech.*, 24, S. 109–114, 1957.
- [118] Yang, J. F. C., Lakes, R. S., Experimental Study of Micropolar and Couple-Stress Elasticity in Bone Bending. *J. Biomechanics*, 15, S. 275–279, 1981.