

Forschungszentrum Karlsruhe
in der Helmholtz-Gemeinschaft
Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6751

**Quanteninterferenzeffekte im
Nichtgleichgewichtstransport von
mesoskopischen Drähten**

Peter vom Stein
Institut für Festkörperphysik

Von der Fakultät für Physik der Universität
Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
2003

Impressum der Print-Ausgabe:

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

ISSN 0947-8620

Quanteninterferenzeffekte im Nichtgleichgewichtstransport von mesoskopischen Drähten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Peter vom Stein
aus Aachen

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Mai 2002

Referent: Prof. Dr. Hilbert von Löhneysen

Korreferent: Prof. Dr. Georg Weiß

Quanteninterferenzeffekte im Nichtgleichgewichts-transport von mesoskopischen Drähten

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden die Transporteigenschaften kurzer metallischer Drähte (Abmessungen ca. $200 \times 80 \times 20 \text{ nm}^3$) bei tiefen Temperaturen in Abhängigkeit von magnetischem Feld B und Transportspannung U_{DC} untersucht. Die metallischen Filme werden durch abschreckende Kondensation der thermisch verdampften Ausgangsmaterialien (Au, Ag, Cu oder eine Au-Cu-Legierung) bei tiefen Temperaturen ($T \sim 10 \text{ K}$) hergestellt.

Die auf Quanteninterferenzeffekten beruhenden Fluktuationen des Leitwerts dieser mesoskopischen Systeme, $\delta G(B, U_{\text{DC}})$, zeigen nicht-universelle Eigenschaften, die durch eine sorgfältige Analyse der Messdaten quantifiziert werden können. Insbesondere zeigt die Auswertung der Magnetoleitwertmessungen bei kleinen U_{DC} ein unerwartetes rasches Absinken der Fluktuationsamplitude. Verknüpft damit ist ebenfalls eine Abnahme des Korrelationsfeldes B_c , wobei bei einigen Proben das Durchlaufen eines Maximums beobachtet wird. Bei größeren Spannungen steigt die Amplitude in der Regel, wie theoretisch erwartet, an. Eine einheitliche Darstellung der Ergebnisse erhält man, wenn zur Normierung die Thouless-Spannung der jeweiligen Probe verwendet wird.

Vor allem das Verhalten des Korrelationsfeldes, aber auch die oft unkonventionelle Form der Autokorrelationsfunktion stellt den häufig angenommenen geometrischen Zusammenhang zwischen der Phasenkohärenzlänge und B_c in Frage.

Quantum Interference Effects in the Non-equilibrium Transport of Mesoscopic Wires

Abstract

In this work the transport properties of short metallic wires (dimensions approx. $200 \times 80 \times 20$ nm³) at low temperatures are examined as a function of magnetic field B and transport voltage U_{DC} . The metal films are fabricated by quenched condensation of the thermally evaporated raw materials (Au, Ag, Cu or an Au-Cu-alloy) on a cold substrate ($T \sim 10$ K).

The conductance fluctuations of these mesoscopic systems, $\delta G(B, U_{\text{DC}})$, which arise from quantum interference effects, show non-universal characteristics, which can be quantified by a careful analysis of the measured data.

In particular the evaluation of the magnetoconductance measurements reveals an unexpected rapid dropping of the fluctuation amplitude for small U_{DC} . Associated with this is an overall reduction of the correlation field B_c . With some samples, one observes that B_c passes through a maximum. At higher voltages the amplitude usually increases, as expected theoretically. A consistent representation of the results is achieved, if the Thouless voltage of the respective sample is used for normalization.

Especially the behavior of the correlation field, together with the frequently unorthodox form of the autocorrelation function, questions the commonly accepted geometrical relation between the phase-coherence length and B_c .

Inhalt

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Die elektrische Leitfähigkeit	3
1.2 Längenskalen	6
1.3 Quanteninterferenz	6
1.4 Landauerformel	10
1.5 Nichtgleichgewicht	11
2 Experimentelles	15
2.1 Probenherstellung	15
2.1.1 Strukturierung	15
2.1.2 Tieftemperaturaufdampfer	18
2.2 Messaufbau	20
2.2.1 Messstange	20
2.2.2 Messgeräte	23
3 Messungen	27
3.1 Probencharakterisierung	27
3.2 Magnetoleitwert	30
3.3 Kennlinien	33
4 Ergebnisse	35
4.1 Auswertung der Messdaten	35
4.2 Charakterisierung der Fluktuationen	38
4.3 Leitwertfluktuationen im Nichtgleichgewicht	42
Zusammenfassung	51
A Wieviel Information enthält ein Fluktuationsspektrum?	53
A.1 Einführung	53
A.2 Numerische Analyse von Fluktuationsspektren	55
A.2.1 Ziehung von Zufallsspektren	55
A.2.2 Hinzufügen von Rauschen	56
A.2.3 Auswertemethoden und Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen	57
A.3 Zusammenfassung	62

B Aspekte der Fouriertransformation	63
B.1 Die Fouriertransformation für kontinuierliche Veränderliche	63
B.2 Periodische Funktionen	64
B.3 Äquidistant abgetastete Funktionen	65
B.4 Die spektrale Dichte	65
B.5 Filter	66
B.6 Rauschen	67

Einleitung

Die in den letzten Jahrzehnten rasant ablaufende technische Entwicklung auf dem Gebiet der Mikroelektronik hat neben dem vielzitierten Beginn des *Informationszeitalters* auch der physikalischen Grundlagenforschung neue Impulse gegeben. So ist seit Beginn der achtziger Jahre die reproduzierbare Herstellung metallischer Strukturen mit lateralen Abmessungen unter $1\ \mu\text{m}$ möglich. Die seitdem weiter fortschreitende Miniaturisierung dringt mittlerweile in den Nanometerbereich vor. In diesen sogenannten *mesoskopischen* Systemen, die auf der von der Gitterkonstanten gesetzten mikroskopischen Skala groß sind, lassen sich Abweichungen vom makroskopischen Verhalten beobachten, die von der quantenmechanischen Natur der Ladungsträger und der Diskretheit der Elektronladung herrühren. Zahlreiche theoretische und experimentelle Untersuchungen an unterschiedlichen Systemen – von ungeordneten Metallen bis Halbleiterheterostrukturen – haben dieses neue Gebiet der Festkörperphysik¹ erschlossen.

Die Untersuchung vieler mesoskopischer Effekte erfordert tiefe Temperaturen, deutlich unterhalb von 1 K. Dann zeigt sich durch das Ausfrieren inelastischer Prozesse im elektronischen Transport die quantenmechanische Interferenz der das System durchlaufenden Elektronen, deren wellenartige Ausbreitung als quantenmechanisches Streuproblem betrachtet werden kann (Imry und Landauer 1999). Die Streuung an unordnungsbedingten Defekten bestimmt den spezifischen Widerstand ρ , der als Ensemblemittel über die Unordnung berechenbar ist. Die Phasenkohärenz der Elektronenwellen wird durch elastische Streuung nicht zerstört, und kann über eine charakteristische Länge L_φ aufrecht erhalten werden, die in Metallen typische Werte im μm -Bereich annimmt und somit die mittlere freie Weglänge ℓ deutlich übersteigt. Quanteninterferenzeffekte führen so bei Proben mit geometrischen Abmessungen kleiner als L_φ zu Abweichungen des Leitwerts (reziproker Widerstand) von seinem nach klassischen Regeln erwarteten Wert. Innerhalb eines solchen kohärenten Bereiches findet nämlich keine Ensemblemittelung statt, und es ergeben sich Beiträge zum Leitwert, die von der spezifischen Störstellenkonfiguration abhängen.

Ein Beispiel sind die universellen Leitwertfluktuationen (*universal conductance fluctuations*, UCF), die im Magnetoleitwert mesoskopischer Golddrähte zuerst von Umbach u. a. (1984) beobachtet und durch diagrammatische Störungsrechnung (Lee und Stone 1985; Al'tshuler 1985) theoretisch beschrieben wurden. Das magnetische Feld entspricht in seinem Einfluss auf die Interferenzbeiträge einer Änderung der Störstellenkonfiguration, so dass der Leitwert durch das Magnetfeld getriebene aperiodische, aber reproduzierbare Fluktuationen um einen geometriebedingten Mittelwert aufweist. Die Amplitude dieser Schwankungen ist unabhängig vom mittleren Leitwert und hat einen *rms*-Wert (*root mean square*) in der Größenordnung von e^2/h .

¹ im *e-Print*-Archiv des *Los Alamos National Laboratory* (<http://de.arXiv.org/>) unter der Rubrik „Condensed Matter: Mesoscopic Systems and Quantum Hall Effect“

Die typische Schwankungsperiode B_c ist über die Kohärenzfläche S_φ mit dem Flussquant h/e verknüpft: $S_\varphi \cdot B_c \sim h/e$. UCF können auch durch die Variation anderer Kontrollgrößen, wie z. B. des chemischen Potentials, der Transportspannung oder eines elektrischen Feldes, erzeugt werden.

Ein besonderer Fall ist die Variation der Transportspannung, weil man dabei den Bereich der linearen Antwort (*linear response*) verlässt. Neben der Frage, wie sich das auf die Leitwertfluktuationen auswirkt (Larkin und Khmel'nitskiĭ 1986), ist die Form der Nicht-Gleichgewichts-Verteilungsfunktion in mesoskopischen Systemen (Pothier u. a. 1997; Pierre 2001) und im Allgemeinen der Einfluss der Elektron-Elektron-Wechselwirkung von Interesse. Umgekehrt gesehen stellen die UCF eine Sonde für inelastische Streuprozesse dar. So beobachtet man einen Einfluss magnetischer Störstellen auf die Magnetoleitwertfluktuationen (Paschke 1998).

In dieser Arbeit werden die Leitwertfluktuationen von kurzen, stark ungeordneten mesoskopischen Drähten aus verschiedenen reinen Metallen in Abhängigkeit vom magnetischen Feld und der Transportspannung untersucht. Eine sorgfältige Analyse der Magnetoleitwertfluktuationen zeigt eine unerwartete Spannungsabhängigkeit der Kenngrößen *rms*-Amplitude und Korrelationsfeld B_c im Nichtgleichgewicht auf. Dabei deutet sich bei allen untersuchten Proben eine einheitliche Verhaltensweise an, die im Widerspruch zu der gängigen Beschreibung der UCF steht. Vor allem die oben angegebene direkte Beziehung zwischen Korrelationsfeld B_c und Kohärenzfläche S_φ wird dadurch in diesem Regime in Frage gestellt.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert: Nach einer kurzen Einführung der für unsere Untersuchungen relevanten theoretischen Grundlagen in Kapitel 1 folgt eine Beschreibung der verwendeten experimentellen Methoden, insbesondere der Probenherstellung und des Messaufbaus (Kapitel 2). Eine Übersicht der untersuchten Proben und der durchgeführten Messungen gibt Kapitel 3, und eine Diskussion der aus der Analyse der Messdaten gewonnenen Ergebnisse erfolgt in Kapitel 4. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung. Im Anhang A findet man die in (Schäfer u. a. 1999) veröffentlichten Ergebnisse eines numerisch gestützten Vergleichs verschiedener Auswertemethoden für UCF-Messungen. Einige Anmerkungen zu den Anwendungen der Fouriertransformation im Hinblick auf die Lock-in-Messungen enthält Anhang B.

1 Grundlagen

In den folgenden Abschnitten sollen die für diese Arbeit wesentlichen Konzepte der mesoskopischen Physik in knapper Form erläutert werden. Ausführlichere Darstellungen zu diesem Thema findet man in einer Reihe von Übersichtsartikeln (Mirlin 2000; Janssen 1998; Beenakker 1997; Washburn und Webb 1992) und Büchern (Zwerger 1998; Imry 1997; Altshuler und Aronov 1985). Die Verweise auf die entsprechenden Originalarbeiten finden sich ebenfalls dort und werden daher in diesem Kapitel meist ausgelassen.

Die Eigenschaften von Festkörpern werden in großem Ausmaß durch die Wechselwirkung der Elektronen (neben der Coulomb-Abstoßung auch indirekt über das Pauli-Prinzip) bestimmt. Im Zusammenspiel mit den massiven Atomkernen (die auch für Ladungsneutralität sorgen) bildet sich häufig kristalline Ordnung aus. Das Energiespektrum der elektronischen Zustände besteht dann aus Bändern, deren jeweilige Besetzung zu einer Unterteilung der Festkörper in Isolatoren, Halbleiter und Metalle führt. Letztere weisen auch bei tiefen Temperaturen eine nicht verschwindende Leitfähigkeit auf und erlauben die Untersuchung des elektronischen Transports in diesem in Bezug auf mesoskopische Effekte relevanten Regime. Die Anregungen des Kristallgitters spielen dann nur noch eine untergeordnete Rolle, und die thermodynamischen Eigenschaften werden durch die Leitungselektronen bestimmt. Dieses Vielteilchensystem lässt sich nach Landau in guter Näherung als Fermi-Flüssigkeit beschreiben, deren Einzelteilchen-Anregungen (Quasiteilchen) sich auf die des freien Elektronengases abbilden lassen. Neben den Auswirkungen der Quantenstatistik auf viele makroskopische Eigenschaften eines Festkörpers¹ spiegelt sich auch die quantenmechanische Natur der elektronischen Wellenfunktionen in einer Reihe von makroskopischen Phänomenen wieder, wie z. B. der Supraleitung, den Oszillationen des Magnetowiderstandes oder dem Quantenhalfeffekt. In mesoskopischen Systemen verhindert die Quantenkohärenz die übliche Ensemblemittelung. Daher zeigen sich entsprechende Interferenzkorrekturen in vielen Eigenschaften dieser Systeme.

1.1 Die elektrische Leitfähigkeit

Der Leitwert G einer makroskopischen Probe (siehe Abbildung 1.1) hängt nach dem Ohm'schen Gesetz von den geometrischen Abmessungen (Länge L und Querschnittsfläche A) und der material- und temperaturabhängigen *elektrischen Leitfähigkeit* σ ab:

$$G = I/U = \sigma \cdot A/L \quad (1.1)$$

¹ Der Spinfreiheitsgrad der Elektronen wird jedoch in den folgenden Betrachtungen trotz seiner Bedeutung z. B. für den Magnetismus der Festkörper weitgehend außer Acht gelassen.

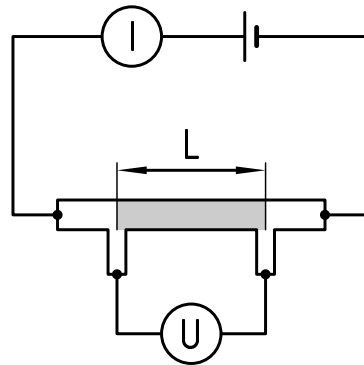


Abbildung 1.1 Schema einer konventionellen Vierpunkt-Widerstandsmessung. Ein Messstrom I wird durch die Probe geschickt und der Spannungsabfall U mit zwei zusätzlichen Kontakten gemessen. Zusammen mit dem Abstand L der Spannungsabgriffe und der Querschnittsfläche A (nicht gezeigt) bestimmt man nach (1.1) die elektrische Leitfähigkeit σ .

In einem realen Kristall wird die Leitfähigkeit für $T \rightarrow 0$ durch die Streuung der Elektronen an statischen Defekten begrenzt. Im Rahmen des Drude-Sommerfeld-Modells lässt sich der Transport durch eine semiklassische Boltzmann-Gleichung beschreiben. Unter der Annahme, dass die Streueignisse unkorreliert sind, die Elektronen sich zwischen den Stößen wie freie Teilchen bewegen und der Impuls eines Elektrons mit der mittleren Stoßzeit τ relaxiert, ergibt sich die Drudeformel

$$\sigma = ne^2\tau/m. \quad (1.2)$$

Dabei bezeichnet n die Elektronendichte, e und m die Elektronenladung bzw. -masse. Die unordnungsbedingten Streuprozesse führen zu einer diffusiven Bewegung der Elektronen. Die Einstein-Beziehung stellt den Zusammenhang zwischen der elektrischen Leitfähigkeit σ und der Diffusionskonstanten D her:

$$\sigma = e^2 D \rho(\mu). \quad (1.3)$$

Hierbei ist μ das elektrochemische Potential und $\rho = \partial n / \partial \mu$ die Zustandsdichte. Bei tiefen Temperaturen wird der Transport durch die Zustände mit Energien in der Nähe der Fermienergie E_F bestimmt. Die mittlere freie Weglänge ℓ wird dann über die Fermigeschwindigkeit v_F festgelegt und es ergibt sich eine kompakte Darstellung der Diffusionskonstanten:²

$$D = \frac{v_F \ell}{3}, \quad \ell = v_F \tau, \quad v_F = \sqrt{2E_F/m}. \quad (1.4)$$

Diese Beschreibung des elektrischen Transports ist gerechtfertigt, sofern die mittlere freie Weglänge groß ist gegenüber der Fermiwellenlänge, $\ell \gg \lambda_F$, und solange Quanteninterferenzeffekte keine Rolle spielen.

² Die hier aufgestellten Formeln gelten für ein dreidimensionales System. Für niedrigere Dimensionalität ist in der folgenden Formel die Zahl 3 durch die entsprechende Dimensionszahl zu ersetzen.

Zur Beschreibung der Kohärenzphänomene erfolgt der Zugang in der Regel unter der Annahme einer linearen Antwort (*linear response*) des Systems auf kleine äußere Störungen (siehe z. B. Kubo u. a. 1991). Dieser Ansatz, wie auch die Beschreibung durch eine Boltzmann-Gleichung, ist semiklassisch in dem Sinne, dass die externen Felder klassisch berücksichtigt werden. Das Ohm'sche Gesetz entspricht dann dem linearen, aber nichtlokalen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld E als äußerer Störung und der resultierenden lokalen Stromdichte $j(r)$:

$$j(r) = \int dr' \sigma(r, r') E(r') \quad (1.5)$$

Die Kubo-Formel stellt über das Fluktuations-Dissipations-Theorem einen Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und den zeitabhängigen Stromkorrelationen her. In anschaulicher Weise kann die DC-Leitfähigkeit vereinfachend durch die Wahrscheinlichkeitsamplituden $\mathcal{A}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')$ für die Streuung eines Elektrons mit Anfangs- und Endimpuls \mathbf{k} bzw. \mathbf{k}' ausgedrückt werden (Zwenger 1998):

$$\sigma \sim \sum_{k, k'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' |\mathcal{A}(\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}')|^2. \quad (1.6)$$

Bei einer Unordnungsmittelung dieser Terme bleiben die Beiträge der Interferenzkorrekturen (siehe Abschnitt 1.3) erhalten.³ Die weiterführenden Berechnungen erfolgen zumeist mit Hilfe der Greensfunktions-Technik in Anlehnung an die diagrammatischen Methoden der Quantenfeldtheorie. Eine Verknüpfung dieser Formulierung mit dem streutheoretischen Bild des Leitwertes nach Landauer (Abschnitt 1.3) ist ebenfalls möglich (Imry 1997; Baranger und Stone 1989).

Eine in Bezug auf den Leitwert wichtige Energieskala wurde von Thouless eingeführt. Die typische Zeit, die ein Elektron zum Durchqueren der Probe benötigt, ist $t_D = L^2/D$. Über die quantenmechanische Unschärferelation ergibt sich so die Thouless-Energie

$$E_{\text{Th}} = h/t_D = hD/L^2. \quad (1.7)$$

Der Leitwert G entspricht dann dem Verhältnis dieser Energie zum mittleren Abstand $\bar{\Delta}$ der Energieniveaus. Bestimmt man $\bar{\Delta}$ aus der thermodynamischen Zustandsdichte, $(L \cdot A)\rho = \bar{\Delta}^{-1}$, so ist nach Gleichung (1.3)

$$G = (e^2/h) \cdot E_{\text{Th}}/\bar{\Delta}. \quad (1.8)$$

Der so formulierte Zusammenhang zwischen dem Leitwert (und dessen Fluktuationen) und der Verteilung der Energieniveaus bildet den Ausgangspunkt der *Random-Matrix*-Theorie, die ihre Aussagen aus der Betrachtung der Eigenwert-Statistiken von mit Zufallszahlen bestückten Matrizen gewinnt (Beenakker 1997; Mirlin 2000).

³ Die mesoskopischen Leitwertfluktuationen ergeben sich entsprechend aus der Varianz von σ , stellen aber keine makroskopische Korrektur zur Leitfähigkeit dar. Die geometrischen Randbedingung erlauben nicht die hier verwendete Darstellung im k -Raum.

1.2 Längenskalen

Aufgrund des Einflusses der Dimensionalität eines Systems auf viele physikalische Eigenschaften ist eine Betrachtung anhand von Längenskalen oft sinnvoll. Wir wollen uns dabei auf den für gute Metalle relevanten Bereich beschränken: Die mittlere freie Weglänge ℓ der Elektronen ist deutlich größer als die mikroskopischen Skalen Gitterkonstante a und Fermiwellenlänge λ_F . Im Fall einer diffusiven Elektronenausbreitung lässt sich dann einer charakteristischen Zeit τ_x über die Diffusionskonstante eine entsprechende Länge L_x zuordnen. Die Planck'sche Konstante erlaubt analog die Umrechnung einer Energieskala E :

$$L_x = \sqrt{D\tau_x}, \quad L_E = \sqrt{\hbar D/E}. \quad (1.9)$$

Eine zentrale Rolle in der mesoskopischen Physik spielt die Phasenkohärenzzeit τ_ϕ , die angibt, wie lange bei der Ausbreitung einer Elektronenwelle eine Phasenkohärenz erhalten bleibt. Diese Zeit wird durch inelastische Prozesse begrenzt, nicht jedoch durch elastische Streuung. Die wesentlichen temperaturabhängigen Mechanismen sind dabei die Elektron-Phonon-Streuung und die Elektron-Elektron-Streuung, die bei tiefen Temperaturen dominiert. In beiden Fällen folgen die Streuzeiten in der Regel einem Potenzgesetz, $\tau_x \sim T^{-p_x}$ ($x = \text{e-ph, e-e}$), mit schwach geometrie- und unordnungsabhängigen Exponenten (für reine Metalle ist $p_{\text{e-ph}} = 3$ und $p_{\text{e-e}} = 2$).⁴ Die Phasenkohärenzlänge L_ϕ übersteigt daher bei tiefen Temperaturen die elastische freie Weglänge ℓ und erreicht bei Temperaturen unter 1 K typischerweise Werte im μm -Bereich. Ein mesoskopisches System definiert sich demnach dadurch, dass die Systemgröße L vergleichbar mit oder kleiner als L_ϕ ist.

Die wesentlichen experimentellen Parameter, die bei der Analyse von Quanteninterferenzeffekten zu berücksichtigen sind, sind die Temperatur T und die Messspannung U . Die Frage, ob sie die Phasenkohärenzeffekte beeinträchtigen, beantwortet ein Vergleich der entsprechenden Längenskalen mit $\min(L, L_\phi)$. Nach Gleichung (1.9) ist

$$L_T = \sqrt{\frac{\hbar D}{k_B T}}, \quad L_U = \sqrt{\frac{\hbar D}{eU}} \quad (1.10)$$

1.3 Quanteninterferenz

Die Kohärenz der Elektronen auf einer makroskopischen Skala hat zur Folge, dass bei der Berechnung der Leitfähigkeit die Interferenzbeiträge nicht vernachlässigt werden können. So ergibt sich nach Anderson eine mögliche Lokalisierung der Elektronen durch das Unordnungspotential, die – abhängig vom Grad der Unordnung und von der Systemgröße und -dimensionalität – zu einem Metall-Isolator-Übergang bei tiefen Temperaturen führen kann. Die Abhängigkeit des Leitwertes lässt sich dabei erfolgreich durch eine Skalentheorie beschreiben (Imry 1997; Janssen 1998).

⁴ Die interessante und in letzter Zeit rege diskutierte Frage, ob die Phasenkohärenz der Elektronen prinzipiell, d. h. auch für $T \rightarrow 0$, begrenzt ist (Golubev und Zaikin 1999; Golubev u. a. 2002), ist kein zentrales Thema dieser Arbeit und soll deshalb hier nicht näher erläutert werden.

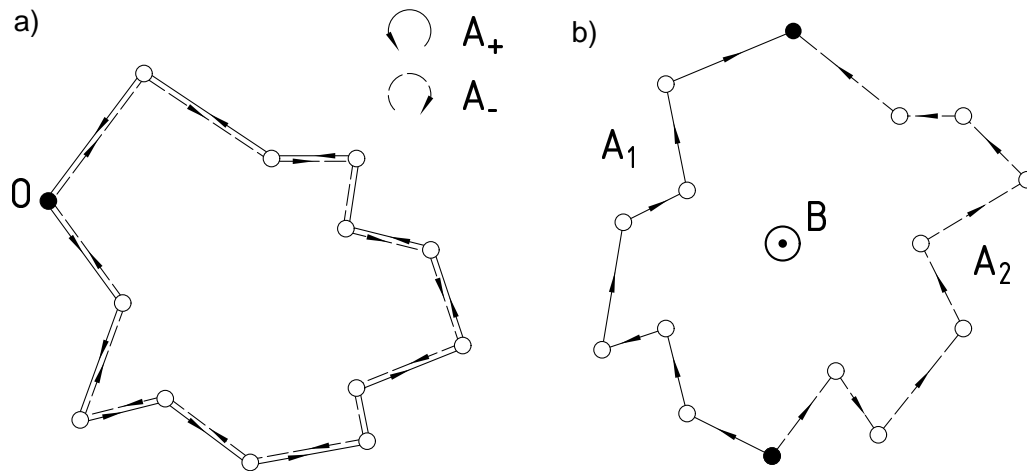


Abbildung 1.2 Interferenz diffusiver Streupfade.

Auch für nur schwach ungeordnete Systeme mit $k_F \ell \gg 1$ gibt es einen Interferenzbeitrag, der zu einer Unterdrückung der Leitfähigkeit führen kann, die sogenannte *schwache Lokalisierung*. In diesem Regime lässt sich die Propagation der Elektronen auf eine anschauliche Weise durch semiklassische Feynmanpfade darstellen: Die Elektronen folgen zwischen den Stoßereignissen den durch die klassische Wirkung bestimmten Bahnen, die zugehörigen Streuamplituden sind aber mit einem quantenmechanischen Phasenfaktor behaftet. Zur Bestimmung der Leitfähigkeit sind dann die Amplituden aller möglichen Streupfade aufzusummieren und zu quadrieren. Bei einer statistischen Verteilung der Streuzentren sind die Streupfade in der Regel unkorreliert und die Interferenzterme verschwinden bei Ensemblemittelung. Eine Ausnahme sind dabei aber die Trajektorien, die sich selbst kreuzen. Zu einem solchen Pfad gibt es nämlich stets einen weiteren, bei dem die so gebildete Schleife im umgekehrten Sinn durchlaufen wird. Ist die Zeitumkehrinvarianz nicht gebrochen, so gilt für die dem Schleifendurchlauf entsprechenden Streuamplituden \mathcal{A}_+ und \mathcal{A}_- :

$$\mathcal{A}_+ = \mathcal{A}_- = \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-|^2 = 4|\mathcal{A}|^2. \quad (1.11)$$

Man erhält also das Doppelte des nach klassischen Regeln (erst quadrieren, dann addieren) bestimmten Wertes. Die höhere Wichtung dieser zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Pfade ergibt eine Absenkung der Leitfähigkeit. Die Größe der zu berücksichtigenden Schleifen und damit die Größe der Leitwertänderung wird durch die Kohärenzlänge L_φ beschränkt.⁵ Daher dienen Messungen der schwachen Lokalisierung häufig zur Bestimmung von L_φ .

Die Zeitumkehrinvarianz wird durch ein äußeres magnetisches Feld aufgehoben. Bei nicht zu hohen Feldstärken, d. h. solange der Zyklotronradius sehr viel größer ist als die mittlere freie Weglänge, kann das Magnetfeld über einen zusätzlichen Phasenfaktor in die oben skizzierte Betrachtung der Streuamplituden integriert werden. Ist A ein entsprechendes Vektorpotential

⁵ Die feine Unterscheidung von Phasenkohärenzlänge und der inelastischen Streulänge soll hier außen vor bleiben.

$(\nabla \times A = B)$ und φ die Phase einer Streuamplitude \mathcal{A} , so gilt

$$\varphi \longrightarrow \varphi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int A(r) dr, \quad (1.12)$$

wobei $\Phi_0 = h/e$ das Flussquant ist und die Integration entlang des Pfades ausgeführt wird. Im Fall der oben betrachteten Pfade ergibt sich zwischen \mathcal{A}_+ und \mathcal{A}_- eine Phasendifferenz, die proportional zum von der Schleife eingeschlossenen Fluss ist. In Gleichung (1.11) sind dann oszillierende Beiträge zu berücksichtigen, die mit zunehmender Flussdichte im Mittel über alle Schleifenflächen zu einer Unterdrückung der schwachen Lokalisierung führen.

Im Fall einer mesoskopischen Probe ($L < L_\varphi$) ergibt sich der Gesamtleitwert G nicht mehr aus der Mittelung über eine Vielzahl von Kohärenzvolumina. Über die Interferenz der verschiedenen Streupfade hängt G von der spezifischen Konfiguration der Streuzentren ab. Im Mittel über alle Konfigurationsmöglichkeiten bei vorgegebenen Werten für Unordnungsgrad und Probengeometrie ergibt sich ein mittlerer Leitwert $\langle G \rangle$ und eine typische Schwankung des Leitwerts, die durch die Varianz $\text{Var}(G) = \langle (\delta G)^2 \rangle$ mit $\delta G = G - \langle G \rangle$ beschrieben wird. Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser interferenzbedingten Leitwertschwankungen ist deren Unabhängigkeit vom mittleren Leitwert:

$$\text{rms}(G) = \sqrt{\text{Var}(G)} = C \cdot e^2/h, \quad C = \mathcal{O}(1), \quad (1.13)$$

sie werden daher als *universelle Leitwertfluktuationen* (*universal conductance fluctuations*, UCF) bezeichnet. Die Betrachtung der Niveaustatistik (siehe Gleichung (1.8)) macht diese Aussage plausibel: Die Schwankung des Leitwertes nimmt nicht (wie klassisch zu erwarten) mit der Zahl $E_{\text{Th}}/\bar{\Delta}$ der beteiligten Energieniveaus zu. Der Grund sind die quantenmechanischen Korrelationen, die zu einer Abstoßung der Energieniveaus (*level repulsion*) führen, d. h. Δ nimmt nur selten Werte um Null an, das Spektrum weist daher eine gewisse Steifheit auf. Aus diagrammatischen Störungsrechnungen erhält man genauere Werte für die Konstante C aus Gleichung (1.13) (Lee u. a. 1987). Im gleichen Maße wie die Änderung der Unordnungskonfiguration bewirkt ein Magnetfeld über die Phasenverschiebung nach Gleichung (1.12) eine zufällige Variation des Leitwertes.⁶ Betrachtet man ein Paar von Streupfaden mit den Wahrscheinlichkeitsamplituden \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 , die die gleichen Anfangs- und Endpunkte haben, dann gilt entsprechend den oben aufgeführten Phasenbeziehungen für die Kombination dieser Beiträge:

$$|\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 + 2|\mathcal{A}_1||\mathcal{A}_2| \cos(\varphi_0 + 2\pi\Phi/\Phi_0). \quad (1.14)$$

φ_0 ist dabei die anfängliche Phasendifferenz der beiden Pfade und Φ der von ihnen eingeschlossene magnetische Fluss,⁷ dessen Betrag und Vorzeichen von den betrachteten Pfaden abhängt. Die Überlagerung aller Beiträge führt zu aperiodischen Fluktuationen des Magnetoleitwertes $G(B)$. Das Fluktuationsmuster hängt in komplexer Weise von der zu Grunde liegenden Unordnungskonfiguration ab (im oben angeführten Beispiel durch φ_0 veranschaulicht) und wird

⁶ Die Gültigkeit dieser Äquivalenz (Ergodenhypothese) kann bewiesen werden.

⁷ Genauer: der Anteil des Flusses parallel zur Flächennormale.

daher auch als *magnetischer Fingerabdruck* der untersuchten Probe bezeichnet. Auf Grund der Universalität ist die Betrachtung des dimensionslosen Fluktuationsbeitrags zum Leitwert,

$$g(B) = (G(B) - \langle G \rangle_B) / (e^2/h), \quad (1.15)$$

häufig sinnvoll. Die Fluktationsfrequenz wird durch die größte kohärent abgetastete Fläche S_φ begrenzt, die im hier diskutierten Fall der Probenfläche entspricht. Als ein Maß für die typische Fluktationsperiode wird das Korrelationsfeld B_c über die Autokorrelationsfunktion

$$F_g(\Delta B) \equiv \langle g(B + \Delta B) \cdot g(B) \rangle_B = \lim_{B_0 \rightarrow \infty} \int_{-B_0}^{B_0} dB g(B + \Delta B) \cdot g(B) \quad (1.16)$$

definiert: diese Funktion hat eine Lorentz-artige Glockenform mit

$$F_g(B_c) = \frac{1}{2} F_g(0), \quad F_g(0) = C^2. \quad (1.17)$$

Die Verknüpfung des Korrelationsfeldes nach $B_c = C' \cdot \Phi_0 / S_\varphi$ mit den relevanten Längenskalen ist (ebenso wie die theoretisch erwartete Form von F_g) ein Thema weitergehender störungstheoretischer und numerischer Berechnungen (Lee u. a. 1987; Jalabert u. a. 1990).

Die Untersuchung von UCF kann auf gleiche Weise durch die Variation anderer Parameter geschehen. So zeigen sich in Halbleiterheterostrukturen Fluktuationen als Funktion der Fermienergie E_F . Wie im Folgenden noch ausgeführt (siehe Abschnitt 1.5), bewirkt auch eine Erhöhung der Transportspannung reproduzierbare Fluktuationen des differentiellen Leitwertes. Eine Unterdrückung der UCF kann durch verschiedene Mittelungsprozesse erfolgen. Bei höheren Temperaturen führt die Verbreiterung der Fermifunktion zu einer Reduktion der Fluktuationsamplitude. Wenn die Phasenkohärenzlänge die Probenabmessungen unterschreitet, kommt es zu einer inkohärenten Überlagerung der kohärenten Teilbereiche und somit ebenfalls zu einer Verringerung der Amplitude. Die Unterdrückung verläuft dabei nicht exponentiell, sondern folgt (dimensionalitätsabhängigen) Potenzgesetzen für die Verhältnisse der relevanten Längenskalen L_φ , L und L_T . Daher lassen sich auch in dreidimensionalen Proben mit makroskopischen Abmessungen noch durch die thermische Bewegung von Störstellen verursachte UCF nachweisen (Raychaudhuri u. a. 2002). Für den hier zutreffenden Fall $L_T > L > L_\varphi$ ergibt sich:

$$rms(G) = C \cdot (e^2/h) \cdot (L_\varphi/L)^{d/2}, \quad B_c = C' \cdot \Phi_0 \cdot \begin{cases} L_\varphi^{-2} & (d = 2, 3) \\ (wL_\varphi)^{-1} & (d = 1) \end{cases} \quad (1.18)$$

Dabei ist d die Zahl der Dimensionen, für die $L < L_\varphi$ ist, und w bezeichnet die Breite eines eindimensionalen Drahtes senkrecht zur Feldrichtung.

In der bisherigen Darstellung der Interferenzeffekte ist der Elektronenspin vernachlässigt worden. Vor allem bei den relativ schweren Edelmetallen Gold und Silber (aber auch bei Kupfer) kommt es jedoch aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung zu einer Modifikation der Interferenzbeiträge. So kehrt sich das Vorzeichen der durch die zeitumgekehrten Pfade verursachten Leitfähigkeitskorrektur um, es ergibt sich also eine *schwache Anti-Lokalisierung*. Die Größe

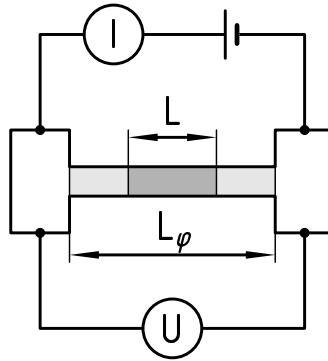


Abbildung 1.3 Schema einer mesoskopischen Zweipunkt-Messung

des Effekts ist dabei um den Faktor 2 reduziert. Die Leitwertfluktuationen zeigen hingegen eine um den Faktor 4 erhöhte Varianz im Nullfeld.

Ebenso ist die Elektron-Elektron-Wechselwirkung nicht nur als der bei tiefen Temperaturen dominierende kohärenzbrechende Mechanismus für die Interferenzbeiträge von Bedeutung. Das Zusammenspiel mit der elastischen Unordnungsstreuung führt zu einer Verstärkung der Elektron-Elektron Streuung, die sich in einer Divergenz der Zustandsdichte an der Fermikante manifestiert. So ergibt sich ein Korrekturterm zur makroskopischen Leitfähigkeit, ähnlich dem der schwachen Lokalisierung (Altshuler und Aronov 1985). Die relevanten Beiträge stammen hier jedoch nicht von zeitumgekehrten Pfaden, so dass der Altshuler-Aronov-Beitrag nicht durch ein Magnetfeld unterdrückt wird.

1.4 Landauerformel

Die mit der Phasenkohärenz verknüpften Transportphänomene in mesoskopischen Systemen erfordern auch eine quantenmechanische Betrachtung des Messprinzips. Dies betrifft die adäquate Modellierung der als Strom- und Spannungskontakte fungierenden Zuleitungen und die Berücksichtigung der durch die Kohärenz eingeführten Nichtlokalität: Der durch den elektrischen Widerstand beschriebene Ladungstransport ist prinzipiell mit Dissipation verbunden. Da in einer mesoskopischen Probe im Idealfall keine inelastische Streuung auftritt, finden die dissipativen Prozesse in den makroskopischen Zuleitungen statt. Der Widerstand resultiert jedoch, wie in den vorausgehenden Abschnitten beschrieben, aus der Unordnungsstreuung in der Probe.

Die im Folgenden beschriebenen, an die Streutheorie angelehnte Beschreibung der Leitwertbestimmung geht auf Arbeiten von Landauer und Büttiker zurück. Die makroskopischen Zuleitungen werden als Teilchenreservoir beschrieben. Eine angelegte Spannung entspricht dann der Differenz der elektrochemischen Potentiale der entsprechenden Zuleitungen. Die Verbindungen zur eigentlichen mesoskopischen Probe werden als ideale Elektronenwellenleiter betrachtet, in denen keine Streuung stattfindet. Die aus den Reservoirs kommenden Elektronenwellen werden an der mesoskopischen Probe gestreut. Es findet sowohl Transmission in andere Zuleitungen als auch Reflexion statt. Die in die Reservoirs einlaufenden Elektronen werden

dort inelastisch gestreut und kehren nicht mehr phasenkohärent zur Probe zurück.

Bezeichnen die Indizes n, m die verschiedenen Zuleitungen, so verknüpft der Leitwerttensor \mathbf{G} die Ströme I_m mit den Zuleitungspotentialen V_n :

$$I_m = \sum_n G_{mn} V_n \quad (1.19)$$

Die Koeffizienten G_{mn} lassen sich durch die Streumatrix \mathbf{S}_{mn} ausdrücken, die die Amplituden für die Streuung der Eigenmoden der Zuleitung n in die Moden der Zuleitung m enthält:

$$G_{mn} = \frac{2e^2}{h} \text{Spur}(\mathbf{S}_{mn} \mathbf{S}_{mn}^\dagger). \quad (1.20)$$

Die Spurbildung erfolgt dabei über die zu berücksichtigenden transversalen Moden der Zuleitungen. Die Symmetrie in Bezug auf ein magnetisches Feld B wird durch die Onsager-Relation

$$G_{nm}(B) = G_{mn}(-B) \quad (1.21)$$

beschrieben.

Diese Betrachtung führt zu einer korrekten Beschreibung der sogenannten mesoskopischen Vierpunkt-Messung, bei der die Probe mit jeweils zwei Strom- und Spannungskontakten versehen ist. Sie ist auch für die Beschreibung anderer Probleme (Quanten-Hall-Effekt, ballistische Systeme) relevant. In dieser Arbeit wurde jedoch stets eine Zweikontakt-Anordnung gewählt.⁸ In diesem einfachen Fall ist der longitudinale Leitwert $G = G_{12} = G_{21}$ symmetrisch im Magnetfeld und die so gemessenen Fluktuationen sollten den im letzten Abschnitt angegebenen Gesetzmäßigkeiten folgen.

1.5 Nichtgleichgewicht

Bei der Messung des elektronischen Transports befindet sich das untersuchte System nicht im thermodynamischen Gleichgewicht. Solange die den Stromfluss treibende Spannung U klein ist, kann sie, wie bereits erwähnt, als lineare Störung behandelt werden. Im Allgemeinen ist jedoch zu erwarten, dass für größere Transportspannungen auch nichtlineare Terme signifikant zum Strom beitragen. Die Frage nach der korrekten Beschreibung des elektronischen Transportes im Nichtgleichgewicht im Rahmen der statistischen Mechanik ist nicht trivial (Kubo u. a. 1991, Abschnitt 4.7). Für Metalle bei tiefen Temperaturen liefert der Keldysh-Formalismus auch hier eine semiklassische Beschreibung des Leitwertes durch Greensfunktionen (Schwab und Rainmond 2001). Analog zur Linear-Response-Theorie kann eine Verbindung zur Drude-Boltzmann-Theorie hergestellt werden. Eine zentrale Größe ist dabei die Verteilungsfunktion $f(E, x)$, die ein anschauliches Maß für die ortsabhängige Besetzung der elektronischen Zustände darstellt.

⁸ Eine Auftrennung von zwei auf vier Zuleitungen erfolgt dabei außerhalb des kohärenten Bereiches. Im Hinblick auf den Messaufbau (siehe Kapitel 2) handelt es sich also stets um eine konventionelle Vierpunktmessung nach Abbildung 1.1

Fällt eine statische Spannung U linear über einer makroskopischen Probe der Länge L ab, so ist eine plausible Annahme, dass die Verteilungsfunktion näherungsweise der Gleichgewichtsverteilung entspricht:

$$f_0(E, x) = \left[1 + e^{(E - \mu(x))/k_B T} \right]^{-1}, \quad (1.22)$$

wobei x die Position in Längsrichtung parametrisiert und $\mu(x) = \mu(L) - (x/L) \cdot U$ das lokale elektrochemische Potential beschreibt. Die inelastischen Streuprozesse, die für ein lokal definiertes elektrochemisches Potential sorgen, können ein Aufheizen der Probe bewirken. Durch die Unterdrückung der Elektron-Phonon-Streuung kann die dissipierte Energie bei tiefen Temperaturen nicht mehr effizient an das Kristallgitter abgegeben werden. So bildet sich bei höheren Stromdichten ein zur Probenmitte hin ansteigendes Temperaturprofil aus.

Im Fall einer mesoskopischen Probe verhindert das Fehlen der inelastischen Streuprozesse einen solchen Energieaustausch. Man erwartet dann, dass die Nichtgleichgewichtsverteilungsfunktion eine einfache Überlagerung der Verteilungsfunktionen der an die Probe gekoppelten Reservoirs ist. So ist

$$f(E, x) = (1 - x/L) \cdot f_0(E, 0) + (x/L) \cdot f_0(E, L) \quad (1.23)$$

eine Lösung der Boltzmann-Gleichung. Unterschreitet, z. B. aufgrund der angelegten Spannung, die Elektron-Elektron-Streulänge die Probenlänge, so kommt es zu einer Verschmierung dieser Doppelstufe. Die detaillierte Form der Verteilungsfunktion spiegelt sich in einigen Messgrößen, wie z. B. dem Schrotrauschen, wieder. In jüngster Zeit konnte die Energieabhängigkeit der Verteilungsfunktion in längeren mesoskopischen Drähten mit Hilfe der Tunnelspektroskopie auch direkt bestimmt werden (Pothier u. a. 1997; Pierre 2001).

Natürlich sind die in Abschnitt 1.3 beschriebenen Interferenzeffekte auch für den Nichtgleichgewichtstransport relevant. So führt die Unterdrückung des Altshuler-Aronov-Beitrags zu einer Nullpunktsanomalie (*zero bias anomaly*) des spannungsabhängigen Leitwerts. Eine solche Anomalie wird häufig experimentell beobachtet (Weber u. a. 2001; Schäfer u. a. 1996; Ralph u. a. 1993).

Auch die universellen Leitwertfluktuationen wirken sich auf die Spannungsabhängigkeit des Leitwertes aus. Die Interferenzbeiträge hängen von der Energie der interferierenden Elektronen ab. Bei kleinen Spannungen sind die beteiligten Elektronen nahezu monochrom mit $E = E_F$. Bei endlichen Spannungen entstammen sie einem Energieintervall der Breite eU . Ähnlich wie bei der Betrachtung der Magnetoleitwertfluktuationen sind die Beiträge von Streupfaden mit der Energiedifferenz ΔE für kleine ΔE korreliert. Diese Korrelationen gehen verloren, wenn die typische Phasendifferenz $\Delta\varphi = \Delta E \cdot t/\hbar$ den Wert 2π übersteigt. Ein Maß für die charakteristische Laufzeit ist die Diffusionszeit t_D (siehe Gleichung (1.7)). So ergeben sich bei einer Variation der Spannung U auch aperiodische Fluktuationen des Leitwerts mit einer Korrelationsspannung $U_c \sim E_{Th}/e$. Die Amplitude der Fluktuationen ist nach einem Argument von Larkin und Khmel'nitskiĭ (1986) spannungsabhängig: Das zur Verfügung stehende Energieintervall besteht aus ungefähr $N = eU/E_{Th}$ kohärenten Teilbereichen. Jeder dieser Bereiche trägt mit der universellen Amplitude zu den Fluktuationen bei. Die inkohärente Überlagerung aller

Beiträge führt zu einer Gesamtamplitude

$$\text{rms}(G) = \sqrt{N} \cdot C \cdot e^2/h = \sqrt{U/U_c} \cdot C \cdot e^2/h. \quad (1.24)$$

Die Zunahme der Amplitude, die theoretisch Fluktuationen in der Größenordnung des mittleren Leitwerts vorhersagt, wird in der Regel bei höheren Spannungen durch Heizeffekte unterdrückt.

2 Experimentelles

2.1 Probenherstellung

Bei den hier untersuchten Proben handelt es sich um dünne, stark ungeordnete Metallfilme, die auf einem Siliziumsubstrat abgeschieden werden. Die laterale Strukturierung erfolgt mittels einer elektronenstrahlolithographisch erzeugten Plexiglasmaske. Die Metallisierung geschieht durch abschreckende Kondensation in einem Tieftemperaturaufdampfer. Die einzelnen Schritte sollen im Folgenden kurz erläutert werden. Viele Details finden sich auch in den Arbeiten von Wallisser (1997, 2002).

2.1.1 Strukturierung

Im Rahmen einer Zusammenarbeit mit dem Institut für Mikrostrukturtechnik (IMT) des Forschungszentrums Karlsruhe konnten die in dieser Arbeit untersuchten Proben mit dem Elektronenstrahlenschreiber des IMT (Modell EBPG5-HR der Firma Leica-Cambridge) strukturiert werden. Die Vorbereitung (Säuberung und Belackung) der verwendeten 10-cm-Wafer erfolgte ebenfalls im Reinraum des IMT.¹ Das dotierte Siliziumsubstrat hat einen spezifischen Widerstand von $40\ \Omega\text{cm}$, der zum einen eine Aufladung beim Beschreiben verhindert und andererseits die metallischen Mikrostrukturen bei Raumtemperatur vor Zerstörung durch elektrostatische Entladungen schützt. Bei tiefen Temperaturen ist das Substrat in sehr guter Näherung isolierend.

Auf die Wafer werden zwei Schichten von Polymerlacken unterschiedlicher molarer Masse aufgebracht: eine untere, ca. 230 nm dicke Schicht aus Polymethylmethacrylat (PMMA) mit 495 kg/mol (gelöst in Chlorbenzol mit 4 % Feststoffanteil) und eine obere Schicht von ca. 100 nm aus PMMA mit 950 kg/mol (gelöst in Anisol mit 2 % Feststoffanteil). Der Elektronenstrahlenschreiber belichtet die Bereiche, die mit Metall belegt werden sollen. Dort werden die kettenartigen Polymermoleküle durch die Einwirkung der hochenergetischen Elektronen (Beschleunigungsspannung 100 kV) in kürzere Stücke geteilt. Diese werden in einem nasschemischen Entwicklungsschritt mit einem Lösungsmittel (Methylisobutylketon, MIBK) selektiv herausgelöst. Der untere, kurzkettingere Lack wird dabei stärker angelöst, so dass sich ein sogenannter *Unterschnitt* ausbildet, der beim Aufdampfen einen Kontakt zwischen dem Metallfilm auf dem Substrat und dem auf der oberen Lackschicht verhindert. So vermeidet man beim letzten Schritt, dem Entfernen der Lackmaske im Acetonbad (*Lift-off*), ein Abreißen der Metallstrukturen vom Substrat.

¹ Für die Ausführung dieser Arbeiten möchte ich an dieser Stelle Christoph Wallisser und Bernhard Limbach ausdrücklich danken.

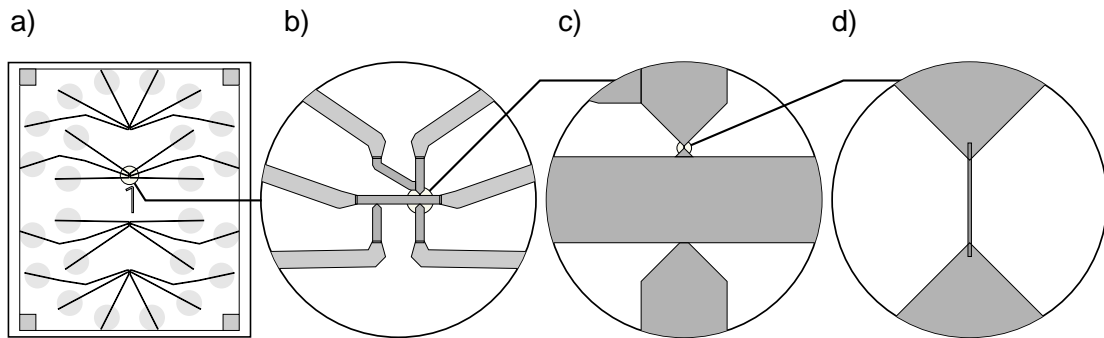


Abbildung 2.1 Probenlayout mit Ausschnittsvergrößerungen in den Schritten (von links nach rechts, relativ zum vorhergehenden) $\sim 17\times$, $10\times$ und $40\times$. Dem äußeren Rahmen in Bild a) entspricht im Original eine Fläche von $7,5 \times 8,5 \text{ mm}^2$. Im Einzelnen zeigen die Ausschnitte: a) gesamter Probenchip mit vier Unterproben (dunkelgrau) und den 24 Kontaktflächen (hellgrau); die Ziffer 1 in der Mitte dient zur Orientierung – b) innerer Bereich einer Unterprobe; die Zuleitungsbreite beträgt $20 \mu\text{m}$ (hellgrau) bzw. $10 \mu\text{m}$ (dunkelgrau), die unteren Kontakte haben einen Abstand von $50 \mu\text{m}$ – c) Zuleitungen des mesoskopischen Drahtes – d) der Draht wird mit dem Elektronenstrahl als einzelne Linie geschrieben; die Spitzen der dreieckigen Kontaktflächen sind 250 nm auseinander.

Der Probenhalter unseres Top-Loading-Mischkryostaten ist mit 24 Messleitungen bestückt und hat einen Durchmesser von 12 mm . Das Probenlayout (Abbildung 2.1) wird auf einen rechteckigen Bereich der Größe $7,5 \times 8,5 \text{ mm}^2$ geschrieben. Ein solcher Probenchip besteht aus vier getrennten Unterproben, die im inneren Bereich identisch ausgelegt sind und mit jeweils sechs Zuleitungen kontaktiert werden. Um die Kontaktierung, die im Kryostaten mit Federkontaktstiften erfolgt, zu ermöglichen, werden in einem separaten Aufdampfschritt mit Hilfe einer Edelstahlmaske größere, dicke Kontaktflächen hergestellt (Durchmesser $0,8 \text{ mm}$, Dicke $30 \dots 50 \text{ nm}$). Jede Unterprobe besteht aus einem mit trichterförmigen Zuleitungen versehenen mesoskopischen Draht (Abbildung 2.1d) und einem makroskopischen Film, einem rechteckigen Streifen von $10 \times 50 \mu\text{m}^2$ (Abbildung 2.1b). Diese zwei Strukturen lassen sich jeweils in 4-Kontakt-Anordnung messen oder zu einer Kompensationsschaltung kombinieren (siehe Abschnitt 2.2).

Der Elektronenstrahl schreibt dieses Probenlayout 36 Mal auf einen Siliziumwafer: in jedem der vier Quadranten des Wafers werden neun Probenchips in einer 3×3 -Matrix angeordnet. Dabei kann die Belichtungsdosis von Quadrant zu Quadrant, aber auch innerhalb der Matrizen variiert werden. Typische Werte sind $1400 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ mit *beam step size* (BSS) 120 nm bzw. 20 nm für die gröberen und mittelfeinen Bereiche der Zuleitungen und $2000 \dots 4000 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ mit BSS 5 nm für den Draht. Jedem so beschriebenen Quadranten wird vom Datenverarbeitungssystem des IMT eine eindeutige sogenannte *TIN-Nummer* zugeordnet. Zur weiteren Identifikation werden die Probenchips in der zugehörigen 3×3 -Matrix mäandrisch, der Schreibreihenfolge nach nummeriert und diese Zahl der TIN-Nummer angehängt. Die Nummerierung der Unterproben erfolgt von oben nach unten.² Vor dem Entwickeln wird der Wafer durch Ritzen mit einem

² Dieses Nummerierungsschema ist eher für den Abgleich mit der gruppenintern geführten Dokumentation gedacht.

Diamantschneider und anschließendem Brechen in die einzelnen Probenchips zerteilt.

Die nasschemischen Schritte (Entwicklung und Lift-Off) werden im staubfreien Luftstrom einer *Reinraumbox* am IFP durchgeführt. Zur schonenden Trocknung der Proben wird eine kleine, auf das Probenmaß abgestimmte Schleuder benutzt. Vor der Entwicklung wird die Probe kurz (10 s) mit Isopropanol (IPA) abgespült, um Staub und Siliziumkrümel zu entfernen. Typischerweise 45 s lang wird die Probe in das Entwicklerbad (MIBK/IPA im Verhältnis 1:3) gelegt, das dabei mit einer Pipette bewegt wird, und abschließend ebensolang in ein Stoppbad (IPA). Die Dauer des nach dem Metallisieren der Probe (siehe Abschnitt 2.1.2) in reinem Aceton durchgeführten Lift-off-Prozesses hängt stark von der Art und Güte des Metallfilms ab. Um organische Rückstände auf der Probe zu verringern und ein Abtrocknen des schnell verdampfenden Acetons beim Transfer der Probe auf die Schleuder zu vermeiden, wurden die Proben danach in einem Ethanol/Toluol-Gemisch abgespült. Das ist jedoch eher für eine folgende Untersuchung mit einem Rasterkraft- oder Rasterelektronenmikroskop relevant und weniger für die Eigenschaften des elektronischen Transports, die Hauptanliegen dieser Arbeit sind.

Das zunächst angestrebte Ziel, mit dieser Strukturierungsmethode relativ kurze (Länge $L \approx 200$ nm) und schmale (Breite $w \lesssim 50$ nm) Drähte zu erhalten, konnte trotz einer Reihe von Optimierungsversuchen nicht erreicht werden. Häufig wiesen die fertigestellten Proben durchgerissene Drähte auf, oder diese fehlten ganz. Eine aussagekräftige Analyse mit den oben erwähnten Rastersondenverfahren lässt sich erst nach dem letzten Prozessschritt, der Metallisierung, durchführen. Da man in der Regel eine potentiell intakte Probe möglichst wenigen Behandlungsschritten unterwerfen möchte, erfolgt eine Probencharakterisierung meist erst nach dem Einbau in die Messapparatur. Daher ist eine schnelle Fehlerdiagnose nur begrenzt möglich und ein fehlertoleranter Herstellungsprozess erwünscht. Eine Verringerung der Ausschussrate ließ sich lediglich durch eine deutliche Erhöhung der Belichtungsdosis für die kritischen Bereiche der Strukturen erzielen. Das führt jedoch zu einer Überbelichtung dieses Bereiches (*Proximity-Effekt*) und damit zu einer Verbreiterung der Strukturen. Die so hergestellten Drähte sind Einschnürungen mit Abmessungen von näherungsweise 100×100 nm² bis 150×80 nm² zwischen den trichterförmigen Zuleitungen. Eine ausführliche Optimierung der Prozessparameter (Lackdicke und -material, Belichtungsdosis, Entwicklungszeit) ist auch aufgrund von deutlich feststellbaren Schwankungen der erzielten Resultate mit unklarer Ursache (möglicherweise z. B. jahreszeitlich bedingte Schwankungen des Raumklimas, Betriebszustand des Elektronenstrahlschreibers) nicht möglich. Nicht auszuschließen sind auch materialspezifische Probleme beim Tieftemperatur-Aufdampfen, wie schlechte Haftung auf dem Substrat, ein Zuwachsen der Maske durch das auf dem Lack deponierte Material oder das Auftreten mechanischer Spannungen beim Tempern der Probe.

Diese Ergebnisse stellen weder die gewählte Strukturierungsmethode prinzipiell in Frage, noch sind die auf diese Art hergestellten Proben unzureichend – die durch die Einschnürung erzielten Widerstände lassen auch hochauflösende Messungen zu. Vielmehr spiegelt sich möglicherweise darin wider, dass die Herstellung solcher Nanostrukturen mit einem ISO-9000-zertifizierten und auf großen Durchsatz ausgelegten Produktionsprozess (noch) nicht vereinbar ist.

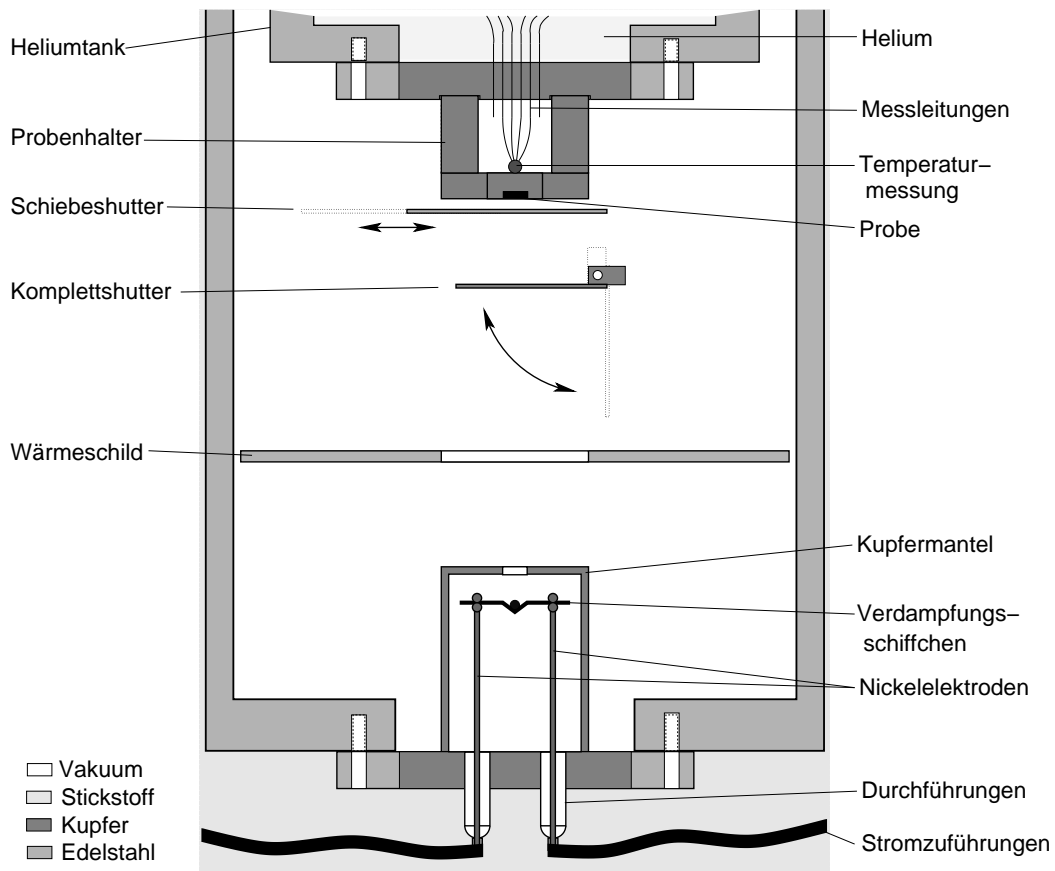


Abbildung 2.2 Schnitt durch den Experimentierbereich des Tieftemperaturaufdampfers. Der Innendurchmesser des Vakuumbehälters ist ca. 15 cm. Die einzelnen Bauteile werden im Text beschrieben. Weitere Details findet man bei Wallisser (1997).

2.1.2 Tieftemperaturaufdampfer

Für den Restwiderstand dünner Metallfilme ist (neben der Reinheit des Materials) die Substrattemperatur bei der Deposition bestimmend. Wird das Metall bei Raumtemperatur aufgedampft, so liegt die mittlere freie Weglänge ℓ in der Regel im Bereich der Schichtdicke (falls diese $\lesssim 50$ nm ist). Eine deutliche Erhöhung der strukturellen Unordnung erreicht man durch Kühlung des Substrats auf tiefe Temperaturen. Der Metaldampf wird abschreckend kondensiert (*quench condensed*). Eine Umordnung der Metallatome wird dabei durch die fehlende thermische Aktivierung unterdrückt. Gerade bei der Untersuchung von UCF, deren *universelle* Amplitude mit ca. $(25,8 \text{ k}\Omega)^{-1}$ eine Sub-Promill-Korrektur zum typischerweise in mesoskopischen Proben realisierten Widerstand ist, hilft eine so erzielte Widerstandserhöhung beim experimentellen Nachweis. Auch wird durch die Verringerung von ℓ ein möglicher Einfluss der Grenzflächen reduziert.

Am Institut für Festkörperphysik (IFP) wurde im Rahmen einer Diplomarbeit (Wallisser

1997) ein Tieftemperaturaufdampfer aufgebaut (siehe Abbildung 2.2), der ein Abkühlen des zu bedampfenden Probenchips auf Heliumtemperatur (ca. 10 K während des Aufdampfens) ermöglicht. Zugleich erlaubt die durch das Kryopumpen erzielte hohe Güte des Vakuums im Probenbereich die Herstellung hochreiner Metallfilme.

Die verwendeten Metalle (Gold, Silber, Kupfer) werden thermisch verdampft. Als Quellen dienen kleine, zu Schiffchen geformte Metallstreifen (Breite ca. 5 mm) aus Wolfram oder Tantal, deren Enden an entsprechend geformte Nickelelektroden geklemmt werden. Mit Strömen von bis zu 20 A werden die dünnen Schiffchen (typische Dicke 50 μm) zum Glühen gebracht. In einer separaten Apparatur werden die Aufdampfquellen vorbehandelt: Nickelelektroden und Schiffchen werden zur Reinigung im Vakuum bei Temperaturen oberhalb der Aufdampftemperatur ausgeglüht und dann die Aufdampfmaterialien in den Schiffchen aufgeschmolzen. Es können bis zu drei Schiffchen benutzt werden. Trennbleche zwischen ihnen verhindern eine gegenseitige Verunreinigung. Die Quellen, die beim Aufdampfen auf über 1000 °C erhitzt werden, sind mit einem Kupferbecher, der guten thermischen Kontakt zum den Aufdampfer umgebenden Stickstoffbad hat, abgeschirmt.

Der Abstand der Aufdampfquellen zum Probenchip beträgt 10 cm. In der Nähe des Probenchips ist ein Schwingquarz angebracht. Aus der während des Aufdampfens gemessenen Änderung der Schwingungsfrequenz wird die Schichtdicke und die momentane Aufdampfrate ermittelt.³ Die Aufdampfrate liegt typischerweise im Bereich von 0,05 bis 0,1 nm/s. Mit Hilfe eines ebenfalls in Probennähe angebrachten, mit vier Kontakten versehenen Siliziumplättchens wird eine *In-Situ*-Widerstandsmessung während des Aufdampfens und beim Aufwärmen der Apparatur ermöglicht. Durchgehend leitfähige Schichten beobachtet man ab ca. 10 nm Dicke. Beim Aufwärmen auf Raumtemperatur sinkt der Widerstand aufgrund des Ausheilens von Defekten auf ungefähr ein Fünftel des Tieftemperaturwertes. Ein Teil der Unordnung bleibt jedoch erhalten, so dass sich im Vergleich zur Metalldeposition bei Raumtemperatur ein ungefähr fünf-fach höherer spezifischer Widerstand ergibt.

Schichtdicke und Materialabfolge werden beim Aufdampfen mit zwei mechanisch kontrollierten Verschlusssystemen (*shutter*) geregelt. Ein Komplettschutter schirmt den gesamten Probenbereich bis auf den Schwingquarz gegen die Aufdampfquellen ab. So kann zu Beginn eines Aufdampfschrittes die oberste, möglicherweise verunreinigte Materialschicht abgedampft und eine stabile Rate eingestellt werden. Bei Erreichen der gewünschten Schichtdicke kann dieser Verschluss dann schnell geschlossen werden. Ein zweiter, sogenannter *Schiebeshutter* ist direkt vor dem Probenchip angebracht und besteht aus einer mit verschiedenen fensterartigen Aussparungen versehenen Edelstahlmaske, die parallel zur Probe bewegt werden kann. Durch sukzessives Verfahren des Shutters können die vier Unterproben mit Material unterschiedlicher Dicke oder Sorte belegt werden.

Eine zweite Position des Schiebeshutters ermöglicht es, nur den inneren Bereich der Proben zu bedampfen. Dies wurde zum Aufbringen einer isolierenden Schicht zur Passivierung der Proben, d. h. zum Schutz vor Verunreinigungen und zum Konservieren der strukturellen Unordnung beim Aufwärmen auf Raumtemperatur genutzt. Als unerwartet schwierig hat sich jedoch

³ Die durch Wägung erfolgte Anfangseichung des Quarzes wurde durch die Untersuchungen der fertiggestellten Proben mit dem Rasterkraftmikroskop im Rahmen der geforderten Genauigkeit bestätigt.

das Verdampfen geeigneter Materialien (GeO_2 , SiO) aus den relativ kleinen Quellen erwiesen. Die Oxide ließen sich mit den zur Verfügung stehenden Stromstärken nicht aufschmelzen. Häufig kam es zu Reaktionen mit dem Schiffchen, das daraufhin riss. Dieses Problem konnte durch die Verwendung eines kleinen, von einem Metallstreifen gehaltenen und geheizten Saphir-Tiegels (Al_2O_3) von nur 5 mm Durchmesser gelöst werden. Die so erzielten Aufdampfpraten waren jedoch sehr gering, da sich bei pulverförmigem Ausgangsmaterial – vermutlich durch Verdampfungskühlung – eine kalte Kruste an der Tiegelöffnung bildete. Auch bei der Verwendung groberer Stückchen ergab sich eine ungünstige Abdampfcharakteristik, weil das Material hauptsächlich von deren Unterseite abdampft. Einen Ausweg bot die Wahl von elementarem Germanium als Abdeckmaterial. Die Splitter eines Germaniumwafers ließen sich im Saphir-Tiegel zu einer Pille aufschmelzen, die bei vorsichtigem Einbau des Aufdampfflansches dann beim Tieftemperaturaufdampfen verwendet wurde.

Eine ungewollte Beeinflussung der Probeneigenschaften durch die Passivierungsschicht zeigte sich nur bei einem der untersuchten Golddrähte. In den Leitwertmessungen sind Signaturen zu sehen, die auf Supraleitung hindeuten. Vermutlich hat sich an einer Schwachstelle des Drahtes, der ohne eine Abdeckschicht wahrscheinlich gerissen wäre, eine supraleitende Phase aus amorphem Gold-Germanium gebildet. Allerdings erbrachte auch eine Untersuchung mit dem Rasterelektronenmikroskop keinen eindeutigen Aufschluss über die genaue Struktur des Kontakts, und der Effekt konnte nicht mit einer weiteren Probe reproduziert werden.

2.2 Messaufbau

Die Messungen des elektrischen Transports an den so hergestellten mesoskopischen Proben erfolgten im $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungskryostaten (Modell *TLM-400* der Firma *Oxford Instruments*) des IFP, der mit einem 11-Tesla-Magneten ausgestattet ist. Die Probe wird dabei in eine Messstange (Länge ca. 3 m, Durchmesser 12 mm) eingebaut, die durch eine Vakuumschleuse direkt in die Mischkammer des Kryostaten eingeführt wird (*top loading*). Das Magnetfeld verläuft senkrecht zur Probenfläche. Zur Widerstandsmessung wird die *Lock-in*-Technik bei Frequenzen zwischen 100 Hz und 1 kHz verwendet. Eine Vorverstärkung des Messsignals findet mit einem selbstgebauten Differenzverstärker bei Raumtemperatur noch innerhalb der Schirmung des Kryostaten statt.

Einige Besonderheiten des Messaufbaus werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

2.2.1 Messstange

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine neue Messstange in Betrieb genommen, da die zuvor benutzte für die speziellen Anforderungen bei der Messung von Einzelelektroneneffekten (Wallisser 2002) angepasst wurde und deshalb für die UCF-Messungen nur begrenzt eingesetzt werden konnte. Die von *Oxford Instruments* gelieferte Stange wurde von uns mit Messleitungen und einem Probenhalter versehen. Außerdem mussten der untere *Displacer*, der Kupferkonus und der Stangenkopf modifiziert werden. Durch Messungen mit einer Hallsonde wurde die Position der maximalen Magnetfeldstärke ermittelt und die Länge der Messstange entsprechend ange-

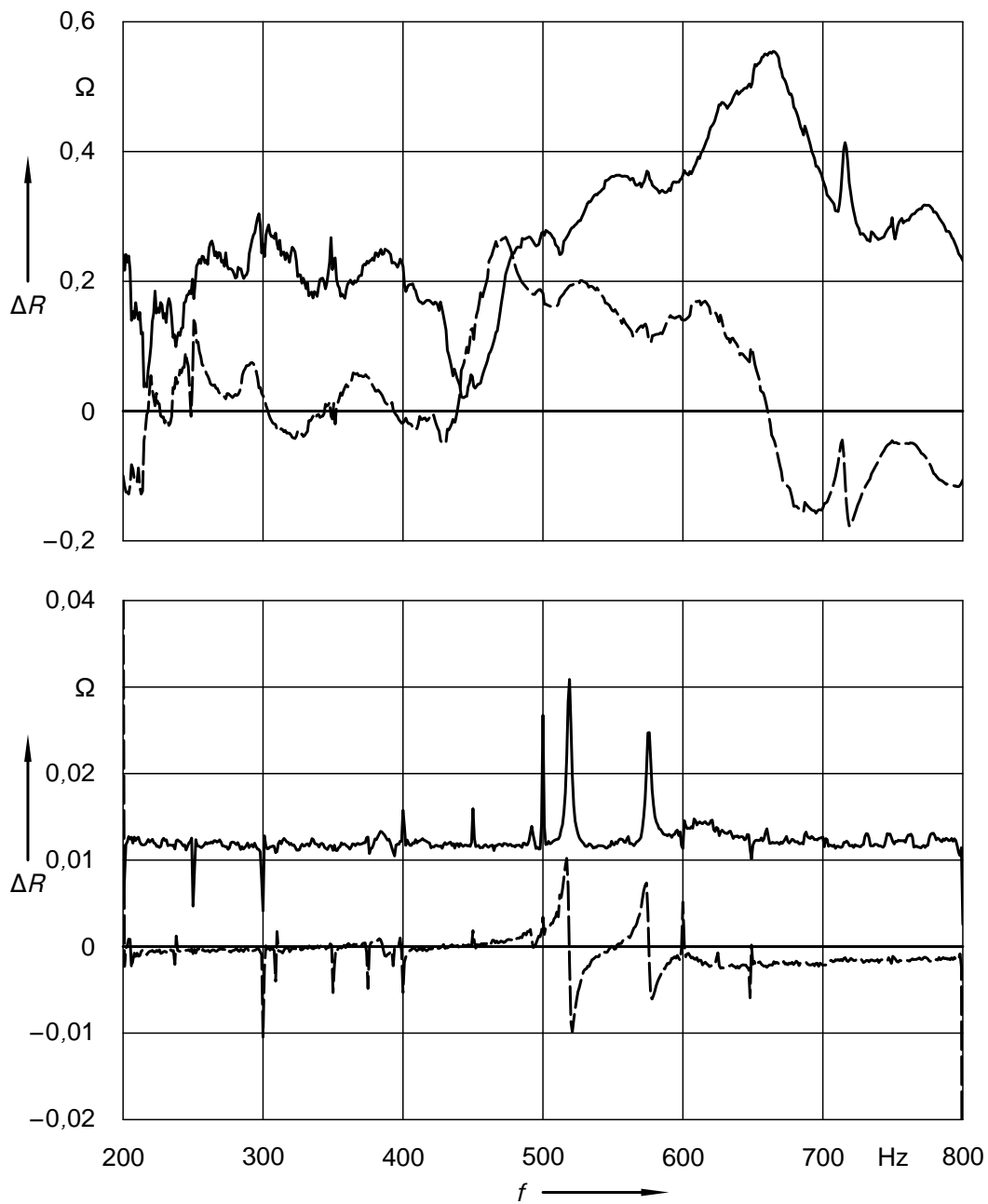


Abbildung 2.3 Einfluss mechanischer Schwingungen der Messleitungen auf den Signaluntergrund. Aufgetragen ist die scheinbare Widerstandsänderung $\Delta R = \Delta U/I$ für den X-Kanal (durchgezogene Linie) und den Y-Kanal (gestrichelte Linie) des Lock-in-Signals als Funktion der Messfrequenz. ΔU ergibt sich aus der Differenz der Messung bei maximalem Magnetfeld (oben: 10 T, unten: 11 T) und der Messung im Nullfeld. Das obere Schaubild zeigt die Untergrundbeiträge vor der Neuverkabelung (der X-Kanal-Anteil ist der Übersichtlichkeit halber um $0,25 \Omega$ nach oben verschoben worden), das untere die verbleibenden Resonanzen danach.

passt. Das bis dahin verwendete, in den Bauplänen des Kryostaten leider nicht verzeichnete Maß konnte so bestätigt werden.

Die Messleitungen, 24 zur Kontaktierung des Probenchips und vier für den Temperatursensor, bestehen aus paarweise verdrehten Konstantandrähten (Durchmesser $100\ \mu\text{m}$, $61,7\ \Omega/\text{m}$) von ca. 4 m Länge. Beim Verdrehen wurde durch entsprechendes Gegendrehen der freien Drahtenden ein unerwünschtes Verwickeln beim Entspannen der fertiggestellten Kabel verhindert. Die sechs Messleitungen, die einer der vier Unterproben zugeordnet sind, lassen sich wegen der verschiedenen Messkonfigurationen nicht eindeutig in Strom- und Spannungskontakte einteilen. Daher wurden jeweils drei Leitungspaare zu einem gemeinsamen Strang verdreht.

Die Kabel werden im oberen Stangenrohr an einem zentral verlaufenden Edelstahlröhrchen befestigt. Im Bereich des zum Einschrauben der Stange im Kryostaten dienenden Messinggewindes werden die Messleitungen zur thermischen Ankopplung nach außen geführt und mehrfach um die Stange gewickelt. Entgegen der Herstellerangaben ist eine weitere thermische Ankopplung auf der Höhe des Kupferkonus, der zum Verschluss der Mischkammer dient, wichtig, da das Messinggewinde bei sinkendem Füllstand des Heliumbades nicht mehr ausreichend gekühlt wird. Im unteren Bereich werden die Kabel durch die Zentralbohrungen zum Probenhalter geführt und dort angelötet.

Der Probenhalter besteht aus einer Edelstahlhülse, in der ein Plexiglasstempel mit 24 Federkontaktstiften sitzt. Der Probenchip wird mit ein wenig Fett (*Apiezon*) auf einem Kupferzylinder befestigt, der mit einer Schraube gegen die Kontaktstifte gepresst wird. Da der Probenhalter nicht völlig dicht ist, befindet sich die Probe beim Einbau in den Kryostaten in direktem Kontakt mit der Helium-Mischung.

Ein Problem ergab sich aus der relativ ungeführten Verlegung der Messleitungen im unteren Bereich der Stange: Das zur Widerstandsmessung aufgeprägte Wechselstromsignal regt die Messleitungen in einem starken Magnetfeld zu mechanischen Schwingungen an, die wiederum ein Störsignal auf den Spannungsabgriffen induzieren (siehe Abbildung 2.3). Das Störsignal ist stark frequenzabhängig und wird mit steigendem Magnetfeld größer. Es steht in fester Phasenbeziehung zum Anregungssignal und führt daher nicht zu Schwebungen (*beats*) auf dem Ausgangssignal, sondern zu konstanten Beiträgen in beiden Kanälen des Lock-in-Verstärkers. Diese Beiträge liegen zwar bezogen auf die an der Probe abfallende Spannung typischerweise nur im Prozentbereich, sind damit aber größer als das Signal der UCF. Das Resonanzspektrum hängt von der Wahl der verwendeten Messleitungen ab und zeigt sich auch bei galvanisch getrennten Strom- und Spannungskreisen. Zur Beseitigung dieser Störung wurde die Messstange erneut verkabelt. Dabei wurden die gebündelten Messleitungen durch Bestreichen mit einem Lack (*GE insulating varnish*) zusätzlich versteift. Damit wirken sich die noch vorhandenen Resonanzen nur auf begrenzte Frequenzbereiche aus (Abbildung 2.3 unten), die durch eine entsprechende Wahl der Messfrequenz vermieden werden können.

Am Kopf der Messstange ist ein Metallkästchen angebracht, das hochfrequenzdicht verschließbar ist und in dem die Beschaltung der Messleitungen erfolgt. Über eine Reihe von Schaltern und Steckkontakten lassen sich die einzelnen Leitungen auf eine von außen herangeführte Spannung oder auf Erdpotential legen. Der Schaltvorgang erfolgt dabei elektronisch geregelt, um eine Zerstörung der empfindlichen Proben zu vermeiden. Hier befindet sich auch der bereits erwähnte Vorverstärker. Die Ein- und Ausgänge des Kästchens sind mit RF-Filtern versehen.

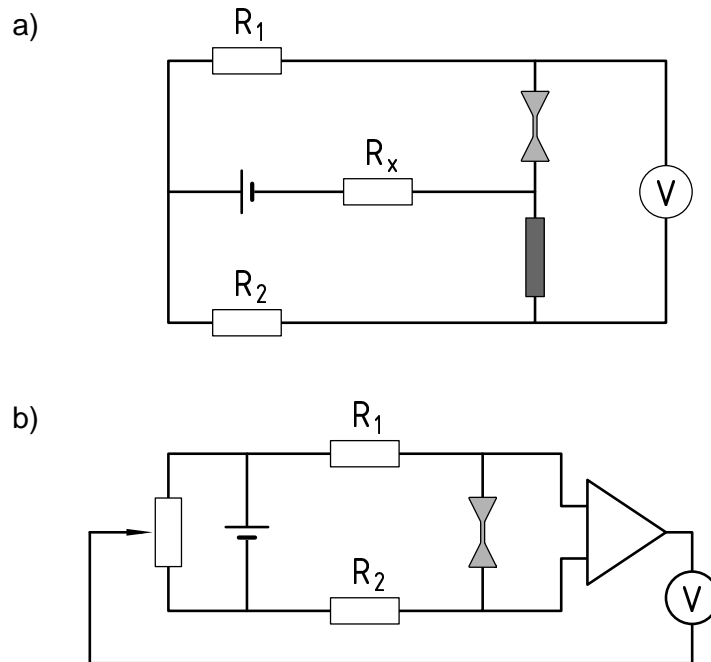


Abbildung 2.4 Schematische Darstellung der verwendeten Kompensationsschaltungen: a) Bei dieser 5-Punkt-Schaltung wird der Spannungsabfall über dem mesoskopischen Draht (hellgrau) und dem makroskopischen Film (dunkelgrau), die beide eine Temperatur von ca. 30 mK haben, auf Null abgeglichen. Dazu sind die Widerstände R_2 und R_x als Potentiometer ausgeführt. Die Vorwiderstände $R_1, R_2 \gg R_D, R_F$ gewährleisten einen konstanten Probenstrom. Im abgeglichenen Zustand ist $R_2 = R_1 \cdot R_F / R_D$ und $R_x^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$. Dabei bezeichnen R_D und R_F die Widerstände des Drahtes bzw. des Films. Zur Spannungsmessung dient ein Lock-in-Verstärker mit vorgeschaltetem Vorverstärker (nicht gezeigt). b) Mit dem Vorverstärker wird der Widerstand des mesoskopischen Drahtes in 4-Punkt-Geometrie gemessen. Der Lock-in-Verstärker misst die Differenz zwischen diesem Signal und einer durch das Potentiometer geregelten Referenzspannung. Im abgeglichenen Zustand ist diese Differenz Null. Die festen Vorwiderstände R_1 und R_2 sind gleich groß und dienen erneut zum Aufprägen des Messstromes.

2.2.2 Messgeräte

Zur Widerstandsmessung wird die Lock-in-Technik verwendet: Ein frequenzstabiler Oszillator prägt der Probe einen AC-modulierten Strom auf und liefert ein Referenzsignal für den Lock-in-Verstärker. Dieser detektiert den Anteil des an der Probe abgegriffenen Spannungssignals, der in Phasenlage und Frequenz dem Referenzsignal entspricht (*X-Kanal*). Mit dieser Modulationstechnik ist die Messung nur in einem schmalbandigen Bereich um die Messfrequenz sensitiv. Störende Einflüsse, z. B. von $1/f$ -Rauschen oder Netzfrequenz (50 Hz), können so minimiert werden. Außerdem stört ein zusätzlicher DC-Strom die Messung nicht, so dass auf einfache Weise auch der differentielle Widerstand, d. h. die Ableitung der Strom-Spannungs-Kennlinie, gemessen werden kann.

Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten Lock-in-Verstärker, Modell 5302 und 7220 der Firma *PerkinElmer* (ehemals *EG&G*), besitzen einen eingebauten Vorverstärker und messen als zweiten Kanal (*Y-Kanal*) auch den gegenüber der Referenz um 90° phasenverschobenen Anteil des Signals. Die interne Signalverarbeitung erfolgt teilweise (5302) bzw. vollständig (7220) digital.

Bei den verwendeten Messschaltungen wurde ein möglichst symmetrischer Aufbau angestrebt. Der verwendete Oszillator (Modell *DS360* von *Stanford Research*) bietet, neben einer sehr guten Signalqualität, dafür zwei gegenphasig operierende Spannungsquellen. Zum Aufprägen eines Gleichstroms wurden zusätzlich zwei digital steuerbare Spannungsquellen einer *quad voltage source* (Modell *213* der Firma *Keithley*) davorgesaltet. Zwei Vorwiderstände, die deutlich größer als der Widerstand von Messleitungen und Probe gewählt wurden (typischerweise $150\text{ k}\Omega$), sorgen für einen konstanten Messstrom.

Um einerseits lange Kabelwege für die schwachen Signale zu vermeiden und andererseits die geschlossene Schirmung des Kryostaten zu nutzen, wird ein Vorverstärker am Kopf des Kryostaten verwendet. Dazu wird der verzerrungs- und rauscharme Verstärkerbaustein *INA103* der Firma *Burr Brown* eingesetzt. Der mit Bipolareingängen versehene Baustein hat ein Eingangsspannungsrauschen von nur $1\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ (auf Kosten eines höheren Eingangsruhestroms von typischerweise $12\text{ }\mu\text{A}$.) und ist somit zum Messen niederohmiger Proben geeignet (*Burr Brown Corp.* 1990). Die damit realisierte Schaltung hat einen Verstärkungsfaktor von 1000, die Eingänge sind AC-gekoppelt.

Mit der so erreichbaren Messgenauigkeit kann man die UCF zwar auch mit einer üblichen 4-Punkt-Widerstandsmessung nachweisen, jedoch nicht mit hinreichender Auflösung. Daher wird in einer Brückenschaltung der mittlere Probenwiderstand durch einen Referenzwiderstand kompensiert und lediglich die Widerstandsänderungen in einem empfindlicheren Messbereich detektiert. Die von uns verwendete sogenannte *5-Punkt-Schaltung* (siehe Abbildung 2.4a) benutzt den auf dem Probenchip strukturierten Widerstandsfilm (siehe Abschnitt 2.1.1) als kalten Referenzwiderstand. Zusätzlich sollen so auch Draht und Film gemeinsame (klassische) Magnetowiderstandsbeiträge kompensiert werden. Die Schaltung wird so abgeglichen, dass über Draht und Film jeweils die gleiche Spannung abfällt. Das zusätzliche Potentiometer R_x dient zur Symmetrisierung der Schaltung. Der auf niederohmigem Weg nicht erreichbare Punkt zwischen Film und Draht wird somit *virtuell* geerdet.

Diese Schaltung konnte nicht in allen Fällen eingesetzt werden. So kommt es vor, dass nicht alle Zuleitungen auf dem Probenchip erfolgreich kontaktiert werden können. Außerdem machen die oben beschriebenen Schwingungsprobleme die gewünschte Kompensation der Untergrundbeiträge zunichte. Dann wurde eine alternative Messschaltung verwendet (siehe Abbildung 2.4b): Der Probenwiderstand wird mit dem Vorverstärker in 4-Punkt-Geometrie gemessen und das (unsymmetrische) Ausgangssignal auf einen der Differenzeingänge des Lock-in-Verstärkers gelegt. Auf den anderen Differenzeingang wird zur Kompensation mit Hilfe eines Potentiometers ein Teil der Anregungsspannung gegeben.

Bei beiden Methoden kann durch den rein resistiven Abgleich eine von Blindwiderständen verursachte Phasenverschiebung zwischen Referenz- und Messsignal nicht kompensiert werden. Eine solche Verschiebung führt in der Regel zu einem konstanten Beitrag im *Y-Kanal*. Dieser begrenzt dann zwar zumeist die Wahl des Messbereiches, nicht jedoch die erreichbare Auflösung.

Die Steuerung des Experiments (Fahren des Magnetfeldes, Variation der DC-Spannung) und die Erfassung der Messdaten erfolgt mit einem Rechner (*PC*) unter dem Betriebssystem *Linux*. Die Messgeräte sind über den *GPIB-Bus* mit dem PC verbunden.

3 Messungen

In diesem Kapitel werden die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Messungen an mesoskopischen Proben exemplarisch vorgestellt. Es handelt sich bei diesen um kurze, diffusive metallische Drähte aus Gold, Silber oder Kupfer. In einem $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungskryostaten wurde bei Temperaturen von ca. 30 mK der differentielle Leitwert in Abhängigkeit von magnetischem Feld und angelegter DC-Spannung untersucht. Zur Verfügung standen magnetische Flussdichten von ± 11 T.

3.1 Probencharakterisierung

Bei der Mehrheit der untersuchten Proben handelt es sich um möglichst reine, dünne und ungeordnete Metallfilme, die wie in Abschnitt 2.1 beschrieben hergestellt wurden. Es wurden dabei Aufdampfmaterialien mit möglichst hohem Reinheitsgrad verwendet: 99,9999% bei Gold und 99,999% für Silber und Kupfer. Eine Übersicht gibt Tabelle 3.1. Die Widerstände R_D und R_F des mesoskopischen Drahtes bzw. des makroskopischen Films (siehe Abschnitt 2.1.1) wurden durch Vierpunkt-Messungen bei tiefen Temperaturen bestimmt. Die Schichtdicke d wurde

Tabelle 3.1 Zusammenstellung der wesentlichen Parameter der untersuchten Proben. Die ersten beiden Spalten geben zur eindeutigen Zuordnung die waferbezogene Nomenklatur nach Abschnitt 2.1.1 an. Die materialbezogene Bezeichnung aus Spalte drei wird im Folgenden zur Benennung der Proben verwendet. Bei den mit * markierten Proben wurde der innere Bereich mit Ge (Au-a und Au-c) bzw. GeO_2 (Cu-b) bedeckt. Die weiteren Einträge werden im Text näher erläutert.

TIN	Draht Nr.	Probe	R_D Ω	R_F Ω	d nm	D cm^2/s	ϱ nm
1568_3	2	Cu-a	113	77	(20)	11,2	2,1
1568_2	3	Cu-b*	53	37	30	15,7	3,0
1568_5	2	Au-a*	(33)	31	20	32	6,8
1692_8	1	Au-b	42	20	20	49	10,5
1692_8	3	Au-c*	56	25	20	38	8,3
1692_9	1	Ag-a	42	32	15	38	8,2
1692_9	2	Ag-b	21	—	20	(57)	12
1694_4	2	AuCu	67	50	20	18,5	3,8
1694_4	4	Au-d	35	26	20	37,9	8,2
1693_6	3	Au(Fe)	13	4	25	195	30

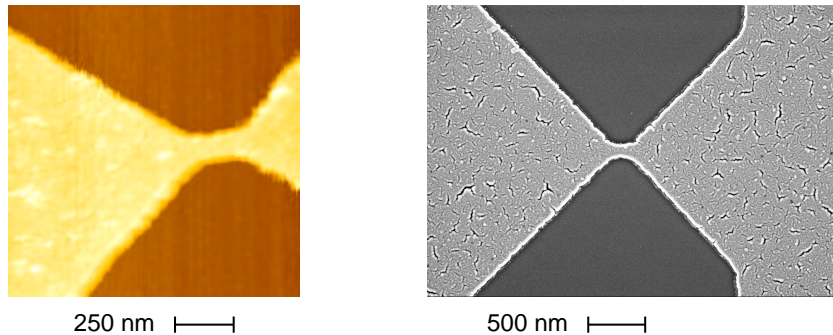


Abbildung 3.1 Aufnahmen im Bereich des mesoskopischen Drahtes bei zwei verschiedenen Proben mit dem AFM (links) und dem REM (rechts). Die hellen Bereiche zeigen den Metallfilm, die dunklen Bereiche das Silizium-Substrat. Die hier gezeigten Proben wurden gesondert hergestellt, die erzielte Geometrie ist jedoch vergleichbar mit der bei tiefen Temperaturen untersuchten Proben.

beim Aufdampfen mit dem Schwingquarz bestimmt (siehe Abschnitt 2.1.2). Diese Werte wurden bei einigen Proben durch Untersuchungen mit dem Rasterkraftmikroskop (*atomic force microscope*, AFM) kontrolliert. Die Diffusionskonstante D und die mittlere freie Weglänge ℓ ergeben sich aus R_F nach den Gleichungen (1.3) und (1.4). Dazu wurden die benötigten Materialkonstanten der Literatur (Ashcroft und Mermin 1976) entnommen. Falls eine Bestimmung der Parameter auf diese Weise nicht möglich war, sind die auf andere Art abgeschätzten Werte in Klammern angegeben.

Beim Vergleich der materialspezifischen Probenparameter lässt sich beobachten, dass die Proben mit Kupfer im Allgemeinen einen deutlich höheren Restwiderstand aufweisen. Ein Einfluss der Oxidation des Kupferfilms ist dabei trotz der Bemühung, die Zeitspanne zwischen dem Ausbau aus dem Aufdampfer und dem Einbau in die Probenstange kurz zu halten, nicht auszuschließen. Ein deutlicher Unterschied zwischen Kupfer und Gold bzw. Silber wurde auch bei den Untersuchungen zum Energieaustausch im Nichtgleichgewicht und zur Sättigung der Phasenkohärenz von Pierre (2001) festgestellt. In diesem Zusammenhang wurde auch inelastische Streuung an Zwei-Niveau-Systemen als mögliche Ursache diskutiert. Durch Einlegieren von Gold sollte sich das Streuverhalten beeinflussen lassen (Kroha 2000). Aus diesem Grund wurden auch Proben aus einer Kupfer-Gold-Legierung hergestellt. Als Aufdampfquelle diente dabei ein Schiffchen, in dem zuvor eine Mischung aus Kupfer und Gold aufgeschmolzen wurde. Wegen der deutlichen Unterschiede im Dampfdruck muss die Schmelze einen höheren Goldanteil aufweisen. Anhand von Literaturdaten (Landolt-Börnstein) lässt sich abschätzen, dass ein Goldanteil von ca. 50% zu einer Konzentration von ungefähr 10% in dem deponierten Metallfilm führt. Bei dieser Herstellungsmethode ist schon aufgrund der geringen Menge des Aufdampfmaterials eine genaue Bestimmung der erzielten Zusammensetzung schwierig.

Es ist auch festzustellen, dass eine isolierende Deckschicht hilft, den Unordnungsgrad über den Temperschnitt von Helium- zu Raumtemperatur hin zu erhalten. Eine bemerkenswerte Auswirkung der Germaniumschicht auf die Transporteigenschaften zeigte sich bei der Probe Au-a.

Wie eine Untersuchung mit dem Rasterelektronenmikroskop (REM) ergab, ist bei dieser Probe der mesoskopische Draht stark beschädigt.¹ Dennoch konnten auch an dieser Probe Leitwertfluktuationen nachgewiesen werden. Dabei traten aber zusätzlich markante Widerstandsschwankungen in Abhängigkeit von magnetischem Feld und Transportstrom auf, deren Ursache möglicherweise auf Supraleitung in Teilen der Probe beruht. Man könnte vermuten, dass sich im Bereich der Einschnürung eine amorphe Gold-Germanium-Legierung gebildet hat. Dieses Material ist supraleitend, mit einer Sprungtemperatur von ungefähr 3,6 K (Stritzker und Wühl 1971). Solche Effekte wurden nur bei dieser einen Probe beobachtet und eine gezielte Reproduktion erscheint schwierig.

Bei der als letztes in Tabelle 3.1 aufgeführten Probe Au(Fe) wurde versucht, einen Goldfilm kontrolliert mit einer geringen Menge Eisen zu belegen, um den Einfluss dieser magnetischen Verunreinigungen auf die Leitwertfluktuationen zu untersuchen. Dazu wurde ein Eisendraht zum Glühen gebracht und der Komplettschutter des Aufdampfers nur kurz geöffnet. Auffällig ist bei dieser Probe jedoch vor allem der für abschreckend kondensierte Metallfilme geringe Widerstand.

Untersuchungen der Proben mit dem Rasterelektronenmikroskop² und dem Rasterkraftmikroskop (Abbildung 3.1) zeigen, dass die mit dem Elektronenstrahl erzeugten Strukturen im Laufe des Strukturierungsprozesses deutlich verbreitert werden (siehe auch Abschnitt 2.1.1). Die im Rahmen dieser Arbeit hergestellten Proben konnten nicht durchgängig mit dem REM charakterisiert werden. Mit der Anschaffung eines institutseigenen AFM ist nun eine effiziente bildgebende Analyse möglich. Dabei führte jedoch eine merkliche Verrundung der verwendeten Spitzen zu einer zusätzlichen, scheinbaren Verbreiterung der nanoskaligen Strukturen.

Eine weitere Möglichkeit, die Breite des strukturierten Drahtes abzuschätzen, besteht aus dem Vergleich der gemessenen Widerstände mit den Ergebnissen einer einfachen geometrischen Betrachtung. Im Fall eines lateral strukturierten Metallfilms einheitlicher Dicke d hängt der Widerstand einer rechteckigen Fläche nicht von den absoluten Werten der Länge L und der Breite w ab, sondern nur von deren Verhältnis:

$$R = \rho \cdot L / (w \cdot d) = R_{\square} \cdot L / w. \quad (3.1)$$

Den Quadratwiderstand R_{\square} erhält man für unsere Proben aus dem Widerstand des mit vier Zuleitungen kontaktierten Films ($L = 50 \mu\text{m}$, $d = 10 \mu\text{m}$). Der Vierpunkt-Widerstand des mesoskopischen Drahtes setzt sich zusammen aus dem Beitrag der näherungsweise rechteckigen Einschnürung und dem Beitrag der trapezförmigen Zuleitungsflächen. Es ist leicht zu zeigen, dass deren Widerstand logarithmisch vom Längenverhältnis der parallelen Kanten abhängt.³ Wenn man davon ausgeht, dass die herstellungsbedingten Verbreiterungen der metallischen

¹ Das Abreißen des Metallfilms an dieser Stelle zählt zu den häufigsten Defekten, die bei der Probenherstellung auftraten.

² Für diese am Institut für technische Physik des Forschungszentrums durchgeführten Untersuchungen möchte ich Herrn B. Obst herzlich danken.

³ Dies gilt unter der Annahme einer konstanten Stromdichte entlang einer Schnittfläche senkrecht zur Stromrichtung. Das kann streng nicht gelten, da die Äquipotentiallinien senkrecht auf den Rand der Struktur münden müssen. Als Näherungslösung dürfte jedoch die angegebene logarithmische Formel ausreichen.

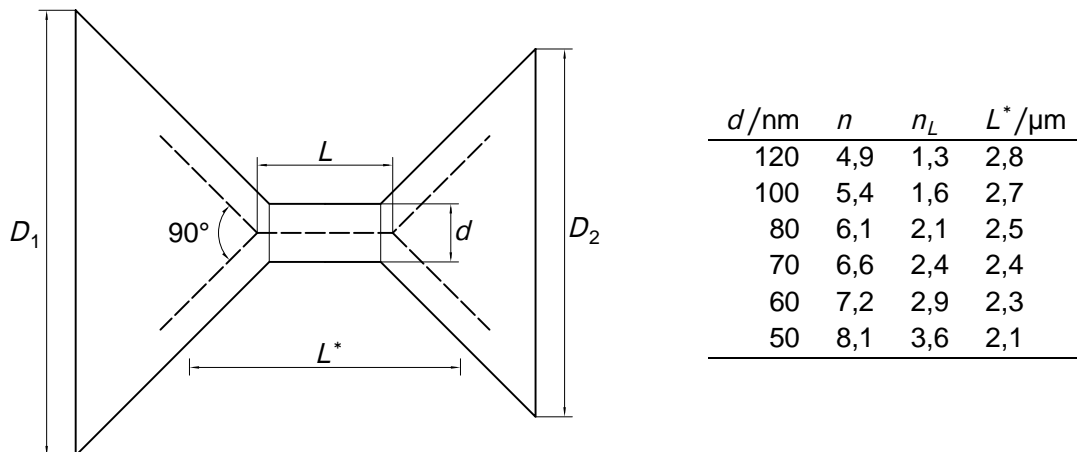


Abbildung 3.2 Skizze der Probengeometrie und Widerstandswerte für verschiedene Drahtbreiten d . Die nicht maßstabsgetreu gezeichneten trapezförmigen Zuleitungen haben einen Öffnungswinkel von 90° und eine Basislänge von $D_1 = 10\ \mu\text{m}$ bzw. $D_2 = 2\ \mu\text{m}$. Gestrichelt eingezeichnet ist das vom Elektronenstrahl geschriebene Muster mit dem linienförmigen Draht der Länge $L = 200\ \text{nm}$. Die Tabelle gibt einige Zahlenwerte für typische Strukturbreiten an. Die normierten Flächenwiderstände der Gesamtprobe (n) und des rechteckigen Bereiches (n_L) wurden nach Gleichung (3.2) bestimmt. L^* ist die Abmessung des Bereichs, über dem 90% der Spannung abfällt.

Strukturen bezogen auf die vom Elektronenstrahl geschriebene Vorlage in alle Richtungen gleichmäßig erfolgt, so ergibt sich für den normierten Flächenwiderstand $n = R_D/R_\square$:

$$n = n_{D_1} + n_{D_2} + n_L, \quad n_{D_i} = (1/2) \ln(D_i/d), \quad n_L = L/d - \cot(3\pi/8). \quad (3.2)$$

Abbildung 3.2 zeigt schematisch die dabei angenommene Probengeometrie und gibt tabellarisch einige Zahlenwerte an. Es ist jedoch anzumerken, dass der Unordnungsgrad des Metallfilms in der Nähe der Einschnürung wahrscheinlich größer ist als in den breiteren Zuleitungsbereichen und daher die Annahme einer einheitlichen Diffusionskonstanten nicht gerechtfertigt ist. Der Widerstandsbeitrag des mesoskopischen Drahtes wird also durch die oben aufgeführten Formeln eher unterschätzt. Dennoch zeigen diese Abschätzungen, dass die trichterförmigen Zuleitung zu einem guten Teil zum gemessenen Probenwiderstand beitragen. Dabei ist jedoch die logarithmische Abhängigkeit des Zuleitungswiderstandes zu beachten. So fällt 90% der angelegten Spannung auf einem Bereich der Länge $L^* \approx 2,4\ \mu\text{m}$ ab (siehe Abbildung 3.2).

3.2 Magnetoleitwert

Die Leitwertmessungen an den vorstehend beschriebenen Proben erfolgten wie in Abschnitt 2.2 beschrieben bei der Basistemperatur des Mischkryostaten ($< 30\ \text{mK}$). Die wesentliche Schwierigkeit (neben den bereits auf Seite 22 erwähnten Schwingungsproblemen) stellte dabei die Kontaktierung der Proben mit den Federkontaktstiften dar. In der Regel konnten nicht alle 24

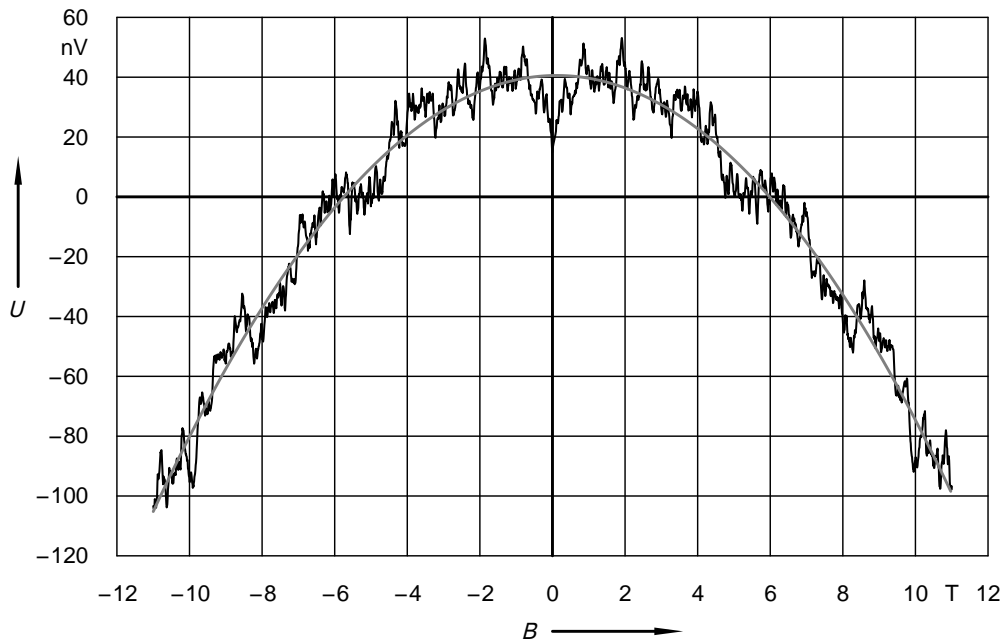


Abbildung 3.3 Typische Magnetoleitwertmessung (Probe Au-b, $I_{AC} = 1 \mu\text{A}$). Der Untergrund wird näherungsweise durch eine Parabel beschrieben (graue Kurve).

Kontakte hergestellt werden⁴ und in einigen Fällen zeigten sich Instabilitäten beim Anlegen eines Magnetfeldes. Einige Ausfälle können allerdings durch Anpassung der Messschaltung toleriert werden. Bei einer einmal gefundenen Konfiguration erwiesen sich die Messbedingungen zudem als außerordentlich stabil.

Die Frequenz des bei der Lock-in-Messung verwendeten AC-Signals wurde nach Abfahren eines Bereiches von ca. 100 bis 1000 Hz abseits von Störsignalen zumeist in der Nähe von 500 Hz gewählt. Genauere Beachtung verdient die Amplitude des Messsignals. Diese ist so klein wie möglich zu halten, da sonst ungewollt eventuell vorhandene nicht-lineare Anteile des Leitwertes die Messung verfälschen. Die hinreichende Bedingung, die Messspannung klein im Vergleich zur thermischen Energie zu wählen, ist bei einer Temperatur von $30 \text{ mK} \approx (e/k_B) \cdot 2,6 \mu\text{V}$ eine messtechnische Herausforderung, da das aufzulösende Fluktuationssignal einer Änderung dieser Spannung im Promillbereich entspricht. Das eigentliche Signal steht deshalb in Konkurrenz zum Verstärkerrauschen. Wir haben daher die Amplitude soweit erhöht, bis eine akzeptable Messauflösung erzielt wurde, ohne dass die dabei als empfindliche Nachweismethode eingesetzten universellen Leitwertfluktuationen Anzeichen einer unerwünschten Mittelung aufwiesen. Die so gewählte Modulationsamplitude des aufgeprägten Messstroms betrug in der Regel $1 \mu\text{A}$ (*rms*). Bei höherohmigen Proben konnte die Amplitude weiter reduziert werden.

⁴ Die (erwünschte) Leitfähigkeit des Substrats verhindert zudem eine entsprechende Überprüfung bei Raumtemperatur.

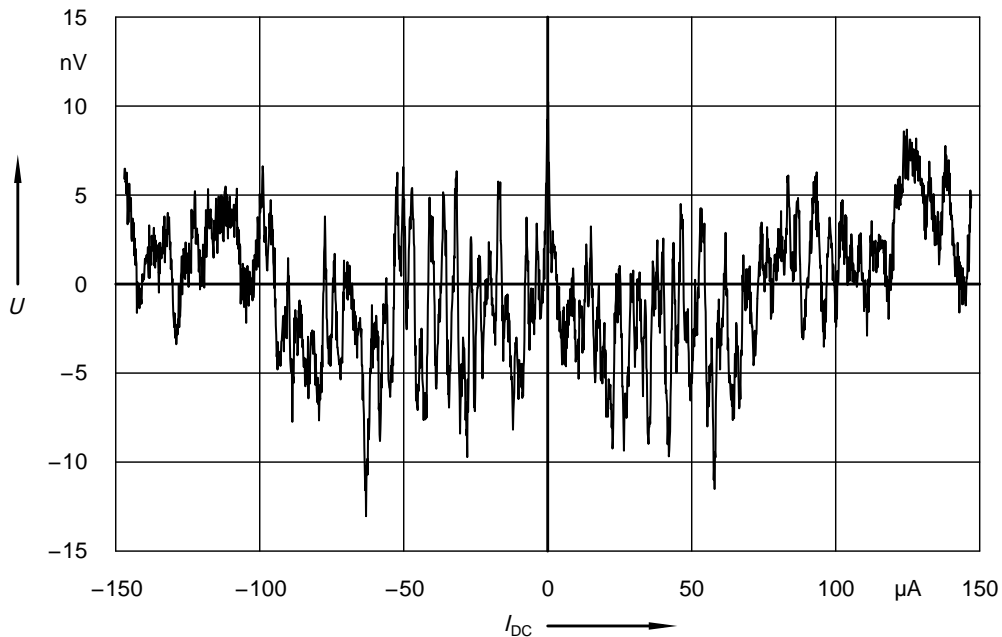


Abbildung 3.4 Rohdaten einer Kennlinien-Messung über einen großen Spannungsbereich (Probe Au-d, $I_{AC} = 0,5 \mu\text{A}$). Die Nullpunktanomalie fällt auf dieser Skala mit der Nulllinie zusammen.

Wie in Anhang A näher erläutert wird, kann man (bei gegebenem Messrauschen) eine weitere Steigerung in der Auflösung der Magnetoleitwertfluktuationen nur durch die Erhöhung der Messzeit erreichen. Natürliche Grenzen sind dabei die Standzeit des Kryostaten und (bei der Variation weiterer Parameter, wie z. B. des DC-Stroms) die Dauer der Gesamtmesszeit. So ergibt sich eine minimale *Sweep-Rate* von 1 T/h und ein praktikabler Wert von 4 T/h. Die Messwerte wurden in der Regel im Abstand von 1 s aufgenommen. Die Zeitkonstante des Tiefpassfilters des Lock-in-Verstärkers wurde entsprechend im Bereich von 1 . . . 5 s gewählt. Es macht dabei durchaus Sinn, eine zu starke Glättung des Messsignals zu vermeiden, um eine möglichst gute Trennung zwischen Signal und Rauschen im Frequenzraum zu erreichen. Dies ist auch bei der Wahl der Filtercharakteristik (siehe Abschnitt B.5) zu berücksichtigen.⁵

Wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, sind die durchgeführten Magnetoleitwertmessungen nicht immer frei von Untergrundbeiträgen. Bei der Verwendung der 5-Punkt-Kompensationschaltung war in der Regel ein zusätzlicher Hall-Beitrag vorhanden, der durch das einfache Abziehen einer Geraden entfernt werden kann. Die unregelmäßigeren Beiträge der mechanischen Schwingungen wurden durch die Anpassung von Polynomen oder Spline-Interpolationen berücksichtigt. Ein Abzug solcher langwelliger Beiträge ist auch sinnvoll, um die Einflüsse des endlichen Messintervalls zu unterdrücken. In Abbildung 3.3 ist eine typische Messkurve dargestellt.

⁵ Gegebenenfalls kann man diese überprüfen, z. B. indem man die Amplitude des AC-Signals pulsartig moduliert. Die Ausgangsspannung des Lock-in-Verstärkers entspricht dann direkt der Filterfunktion. Auf diese Art hat sich gezeigt, dass der ‚12 dB exponential‘-Filter des EG&G 5302 deutlich von der erwarteten Form abweicht.

3.3 Kennlinien

Zur Untersuchung der Strom-Spannungs-Charakteristik wurden Leitwertmessungen bei variierendem DC-Strom durchgeführt. Der Messaufbau konnte dazu auf einfache Weise erweitert werden (siehe Seite 24). Der Lock-in-Verstärker misst dabei den differentiellen Widerstand, also die Ableitung der Strom-Spannungs-Kennlinie. Die Kennlinie ist in guter Näherung eine Ohm'sche Gerade und weist zusätzlich die aus der Phasenkohärenz resultierenden Korrekturen und Fluktuationsbeiträge auf (siehe Abschnitt 1.5). Da dieser Anteil der Kennlinien im Rahmen dieser Arbeit von Interesse ist und in den Messungen direkt bestimmt wird, sollen die $\delta G(U_{DC})$ -Messungen hier (leicht inkorrekt) als Kennlinien bezeichnet werden.

Die Messungen wurden wie folgt durchgeführt: Nach dem Einstellen eines festen Magnetfeldes wurde die DC-Spannung über den zur Verfügung stehenden Bereich in kleinen Schritten fortgeschaltet und über mehrere Messpunkte hinweg konstant gehalten, um mögliche Schalteffekte abklingen zu lassen. Bei der Auswertung wurde in der Regel nur der letzte Messpunkt einer solchen Spannungsstufe verwendet. Der maximale DC-Strom lag meistens bei $66 \mu\text{A}$. Aufgrund der Zuleitungswiderstände auf dem Probenchip ergibt sich, je nach Flächenwiderstand des Metallfilms, dabei eine Erwärmung der Mischkammer auf bis zu 100 mK . Zumeist zeigt sich dann auch eine deutliche Unterdrückung der UCF-Phänomene, wie in der Messung in Abbildung 3.4 ab ca. $70 \mu\text{A}$ zu erkennen ist.

4 Ergebnisse

Im Rahmen dieser Arbeit wurden umfangreiche Messungen an den im vorausgehenden Kapitel vorgestellten Proben durchgeführt. Die zur Analyse der Daten vorgenommenen Auswertungsschritte sollen zunächst beschrieben und anhand von Beispielen exemplarisch dargestellt werden. Die so gewonnenen Ergebnisse werden dann diskutiert und mit den Beobachtungen anderer Arbeitsgruppen verglichen. Im Zentrum stehen dabei die ungewöhnlichen Variationen der die Leitwertfluktuationen charakterisierenden Größen im Bereich kleiner Transportspannung und insbesondere die Deutung des Korrelationsfeldes B_c .

4.1 Auswertung der Messdaten

Beim überwiegenden Anteil der Messungen wurden die Fluktuationen im Leitwert der mesoskopischen Drähte untersucht. Die Details der Vorgehensweise wurden bereits in den Abschnitten 2.2, 3.2 und 3.3 beschrieben. Hier sollen nun die einzelnen Schritte der Datenanalyse erläutert werden.

Zunächst erfolgt eine Umrechnung der gemessenen Spannungsschwankungen $U(B, I_{DC})$ in die entsprechende Änderung des dimensionslosen Leitwertes g (siehe Gleichung (1.15)). Dazu wird zuerst durch den Abzug von eventuell vorhandenen Untergrundbeiträgen die Spannungsänderung δU mit $\langle \delta U \rangle = 0$ berechnet. Für die untersuchten metallischen Proben mit $|\delta G|/G \ll 1$ gilt dann in guter Näherung

$$\delta G = -\delta U / (I \cdot R_D^2), \quad g = \delta G / (e^2/h), \quad (4.1)$$

wobei δU und I die entsprechenden AC-Amplituden bezeichnen. Der zusätzlich aufgeprägte DC-Strom wird in die über dem Draht abfallende Spannung umgerechnet:

$$U_{DC} = R_D \cdot I_{DC}. \quad (4.2)$$

Die Magnetfeld- und Spannungsabhängigkeit des so berechneten Leitwertes $g(B, U_{DC})$ wurde in Form von Magnetleitwert- und Kennlinienfeldern aufgenommen.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen diese Daten für die Probe Cu-a, die einen hohen Widerstand aufwies und die ausführlich (Sweep-Rate 1 T/h) untersucht wurde. Die Reproduzierbarkeit der Fluktuationen als Zeichen der zugrunde liegenden Quanteninterferenz erkennt man hier an der Symmetrie im Magnetfeld: die $g(B)$ -Kurven in Abbildung 4.1 sind spiegelsymmetrisch zu $B = 0$ und in Abbildung 4.2 sind die $g(U_{DC})$ -Kurven für betragsgleiche Magnetfelder deckungsgleich.¹ Die Amplitude der Fluktuationen liegt deutlich unterhalb des

¹ Die Reproduzierbarkeit wurde auch stets durch die Wiederholung einer Messung überprüft. Eine Änderung des ‚Fingerabdrucks‘, z. B. durch das Anlegen von hohen DC-Spannungen, wurde in aller Regel nicht beobachtet.

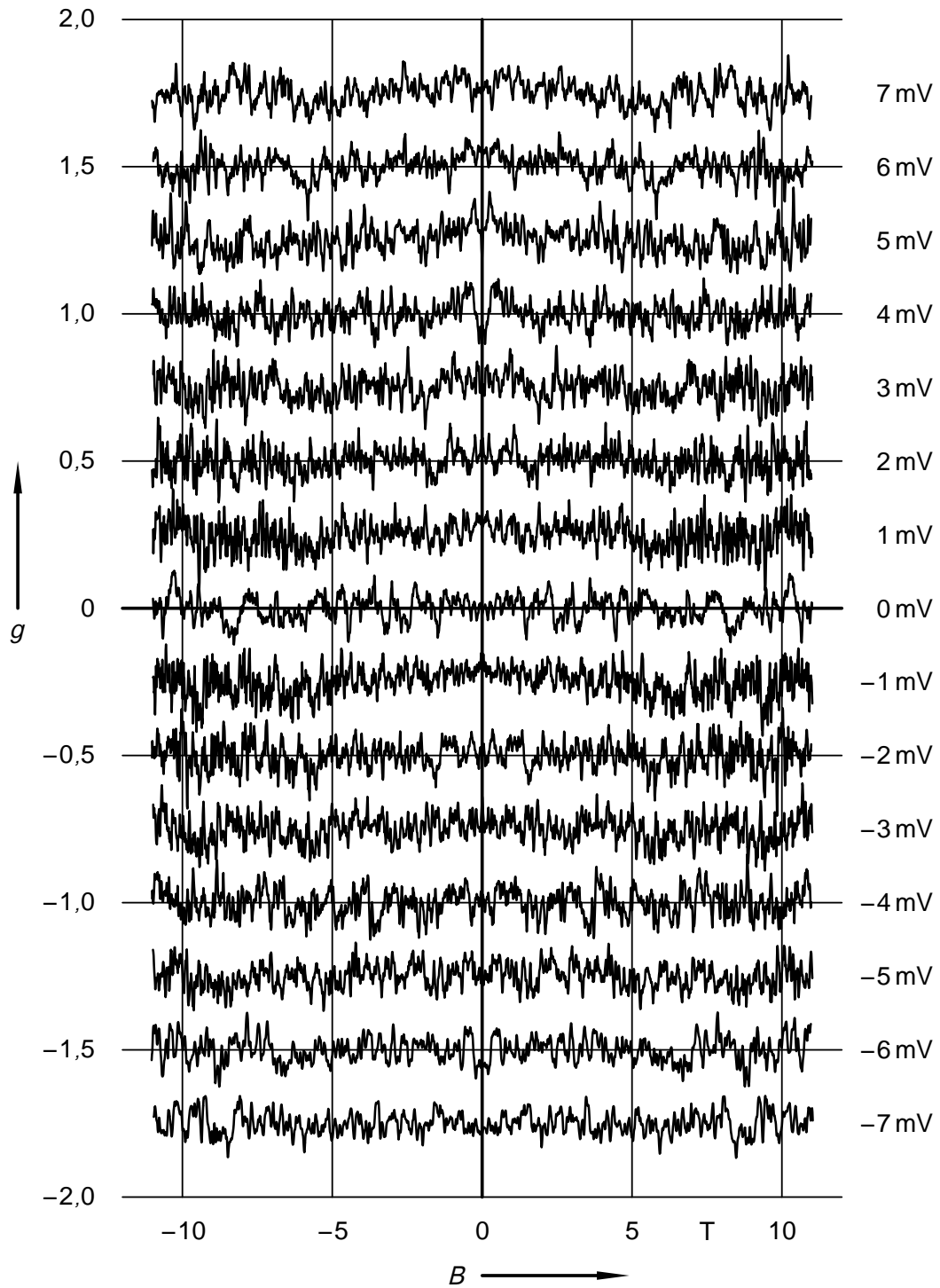


Abbildung 4.1 Magnetoleitwertmessungen $g(B)$ an der Probe Cu-a für verschiedene Spannungen $U_{DC} = -7 \dots +7$ mV (die Messungen sind vertikal um je 0,25 verschoben).

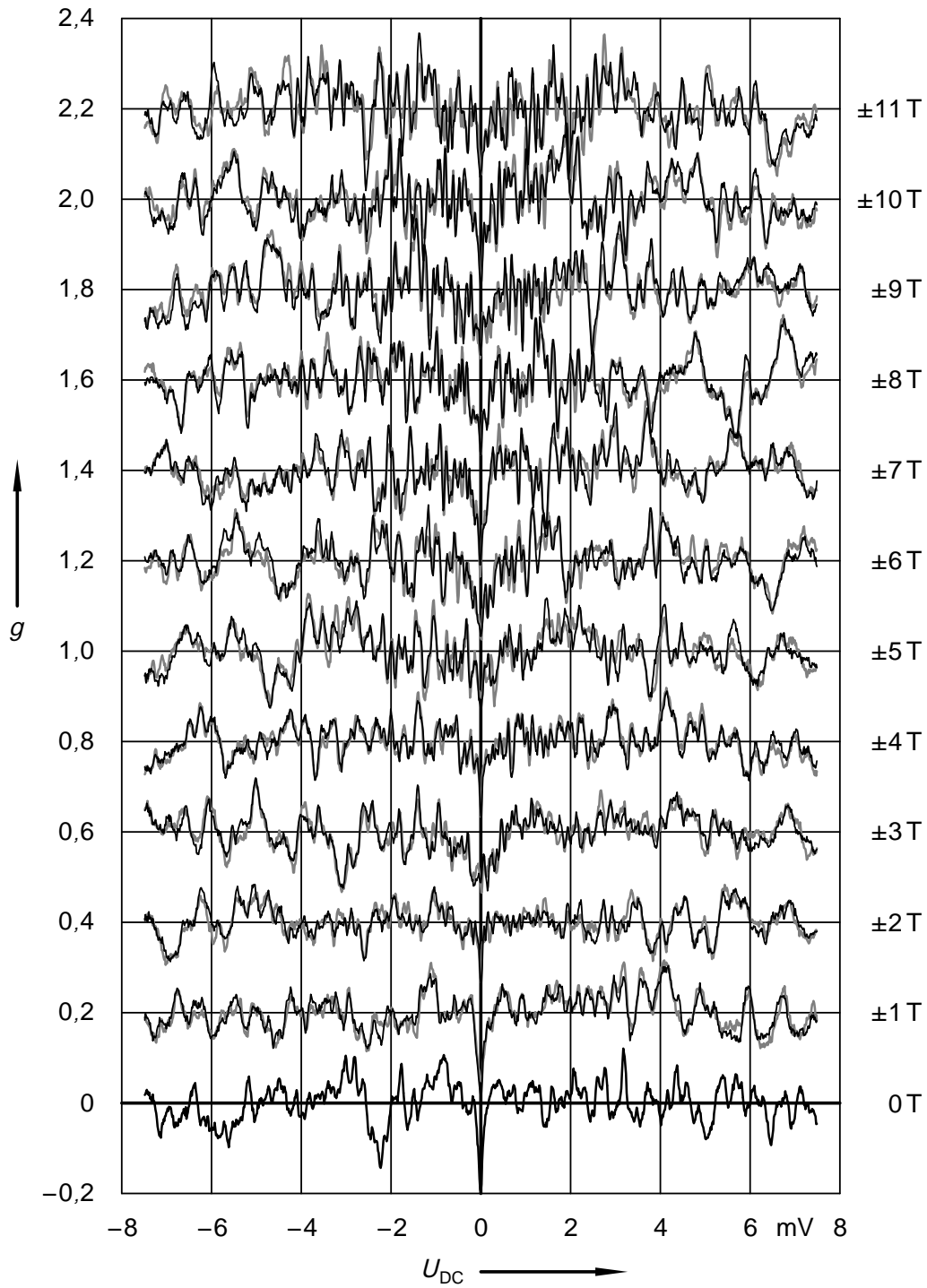


Abbildung 4.2 Kennlinien $g(U_{DC})$ gemessen an der Probe Cu-a für verschiedene Magnetfelder $B = -11 \dots +11$ T (die Messungen sind vertikal um je 0,2 verschoben). Die Kurven für $B < 0$ sind in Grau dargestellt.

universellen Wertes von ca. 0,3, was darauf hindeutet, dass die wirksame Probenlänge L größer als L_φ ist. Zudem ist offensichtlich, dass die Leitwertvariationen von den beiden Parametern B und U_{DC} abhängen. Die Spannungsabhängigkeit (Abbildung 4.2) zeigt dabei die in Abschnitt 1.5 diskutierten Phänomene: Im Bereich um $U_{\text{DC}} = 0$ deutet die charakteristische Unterdrückung des Leitwertes auf eine Zero-Bias-Anomalie hin, die hier allerdings stark von den UCF überlagert wird. Eine Zunahme der Fluktuationsamplitude bei zunehmender Spannung, wie nach dem Argument von Larkin und Khmel'nitskiĭ erwartet, ist in den Messungen bei höheren Magnetfeldern im Bereich bis ungefähr 3 mV andeutungsweise zu erkennen. Bei höheren DC-Spannungen nehmen die Amplitude und die typische Fluktuationsfrequenz sowohl in den $g(U_{\text{DC}})$ - als auch in den $g(B)$ -Messungen ab, ein Anzeichen für die Unterdrückung der Kohärenzeffekte durch die im Nichtgleichgewicht zunehmende inelastische Streuung.

Bemerkenswert ist die in Abbildung 4.1 bei den Messungen mit $U_{\text{DC}} \neq 0$ festzustellende Magnetfeldabhängigkeit der Fluktuationsamplitude und des Korrelationsfeldes. Der Anstieg der Amplitude und zugleich die Abnahme von B_c für $|B| \gtrsim 4\text{ T}$ deutet auf eine Unterdrückung von kohärenzbrechenden Streuprozessen in diesem Feldbereich hin. Eine naheliegende Ursache ist das Vorliegen magnetischer Verunreinigungen, die im schwachen Magnetfeld die Phasenkohärenz durch Spin-Flip-Streuung einschränkt. Durch das Ausrichten der Verunreinigungsspins im Bereich höherer Felder wird dieser Streumechanismus unterdrückt. Schon geringste Mengen magnetischer Fremdatome sind ausreichend, um solche Effekte zu erzeugen (siehe z. B. Paschke 1998). Trotz der Bemühung, das zum Aufdampfen verwendete Kupfer hochrein zu halten, ist dieser Erklärungsansatz nicht auszuschließen. Eine derartige Magnetfeldabhängigkeit wurde durchgehend in den Proben beobachtet, die Kupfer enthalten, nicht jedoch bei den Gold- und Silberdrähten. Ein möglicher Grund für die Sonderrolle von Kupfer könnte in der Oberflächenoxidation liegen, die beim Transfer der Probe vom Aufdampfer zum Kryostaten unvermeidlich ist.

Unerwartet ist allerdings der auffällige Unterschied zwischen der Magnetoleitwertmessung für $U_{\text{DC}} = 0$ und denen für $U_{\text{DC}} \neq 0$. Wie die im Folgenden vorgestellten Analysen zeigen, haben wir markante Änderungen der UCF im Bereich kleiner DC-Spannungen bei allen vermessenen Proben feststellen können. Der Bereich unterhalb von 1 mV wurde dabei detaillierter untersucht.

4.2 Charakterisierung der Fluktuationen

Die aus den Messungen gewonnenen Fluktuationsmuster bilden die probenspezifische Unordnungskonfiguration ab. Über diese lassen sich jedoch nur im Ensemblemittel Aussagen machen. So betrachtet ist der Leitwert g eine statistische Größe, vergleichbar mit einem Rauschsignal oder der Ortskoordinate eines Teilchens, das eine Brown'sche Bewegung ausführt. Die Leitwertfluktuationen werden somit durch eine kleine Zahl von Kenngrößen charakterisiert. Aus diesen kann man dann Informationen, z. B. über die Art der inelastischen Streuprozesse, gewinnen.

Eine wichtige Voraussetzung für den Erfolg einer solchen statistischen Analyse ist das Vorliegen einer aussagekräftigen Stichprobe. Für die Untersuchung der Leitwertfluktuationen be-

deutet dies, dass der in einer Messung erfasste Parameterbereich möglichst groß im Vergleich zu der charakteristischen Korrelationslänge sein sollte. Problematisch ist daher die im letzten Abschnitt diskutierte Situation, in der die Kenngrößen eines Fluktuationsmusters nicht einfache Zahlen darstellen, sondern offensichtlich eine Abhängigkeit vom betrachteten Messbereich aufweisen. Da keine Auswertungsmethode bekannt ist, die eine solche Variation der Kenngrößen berücksichtigt, kann man sich in einem solchen Fall nur dadurch behelfen, dass man die Auswertung auf Teilintervalle beschränkt. Die dabei zunehmenden Unsicherheiten bei der Bestimmung der charakteristischen Parameter wird in Anhang A auf einem quantitativen Niveau untersucht. Bei dem hier verfolgten Ziel, Aussagen über die Leitwertfluktuationen im Bereich kleiner DC-Spannungen zu gewinnen, ist der naheliegende Schritt, eine Analyse der $g(B)$ -Messungen für verschiedene U_{DC} -Werte durchzuführen. Der experimentell zugängliche Magnetfeldbereich von 22 T überdeckt im Vergleich zu den Kennlinien-Messungen eine größere Zahl von Fluktuationsperioden. Außerdem ist die Annahme einer konstanten Fluktuationsamplitude und -frequenz hierbei in der Regel gerechtfertigt.²

Wie in Abschnitt 1.3 und im Anhang A näher erläutert, lassen sich die Magnetoleitwertfluktuationen durch ihre *rms*-Amplitude und durch das Korrelationsfeld B_c beschreiben. Einen direkten Zugang zu diesen Größen ermöglicht die Berechnung der Autokorrelationsfunktion $F_g(\Delta B)$, die nach Gleichung (1.16) eine Faltung der Funktion $g(B)$ mit der gleichen, um ΔB verschobenen Funktion $g(B + \Delta B)$ darstellt. Für $\Delta B = 0$ erhält man so die Varianz von g , die dem Quadrat der *rms*-Amplitude entspricht. Da die Interferenzbeiträge zum Leitwert für kleine Magnetfeldänderungen ΔB korreliert sind, diese Korrelationen für große Verschiebungen jedoch verschwinden, fällt die Funktion F_g mit wachsendem ΔB monoton auf Null ab. Als empirisches Maß für das Korrelationsfeld B_c verwendet man die Halbwertsbreite dieses Abfalls: $F_g(B_c) = F_g(0)/2$.

Die aperiodische Natur des UCF-Signals und dessen messtechnisch bedingter niedriger Signalpegel legen nahe, bei der Auswertung auch das Messrauschen zu berücksichtigen. Dieses weist in dem mit der Lock-in-Technik abgetasteten Frequenzbereich die Charakteristik von weißem Rauschen auf. Die Bandbreite des Rauschens wird durch die Zeitkonstante τ und die Filtercharakteristik des im Lock-in-Verstärker eingesetzten Tiefpassfilters bestimmt (siehe Abschnitt B.5). Die Filterung führt zu Korrelationen der zeitabhängigen Spannungsschwankungen auf der Skala der Zeitkonstanten. Diese resultieren in einem nicht reproduzierbaren Beitrag in den $g(B)$ -Messungen, die durch die Variation des Magnetfeldes mit einer konstanten Rate $r_B = dB/dt$ aufgenommen werden. In der Autokorrelationsfunktion manifestiert sich das Rauschen in einem additiven Beitrag um $\Delta B = 0$, dessen Höhe von der Rauschamplitude abhängt und dessen Breite von der Größenordnung $\tau \cdot r_B$ ist. Dieser Beitrag lässt sich unterdrücken, indem man die Symmetrie der UCF ausnutzt: für ein Signal mit $g(B) = g(-B)$ ist die Autokorrelationsfunktion F_g gleich der Anti-Autokorrelationsfunktion

$$\bar{F}_g(\Delta B) \equiv \langle g(-B + \Delta B) \cdot g(B) \rangle_B. \quad (4.3)$$

Der Rauschanteil einer Messung ist jedoch mit seinem Spiegelbild völlig unkorreliert und trägt

² Die Magnetoleitwertfluktuationen der Probe Cu-a bilden so gesehen eine Ausnahme.

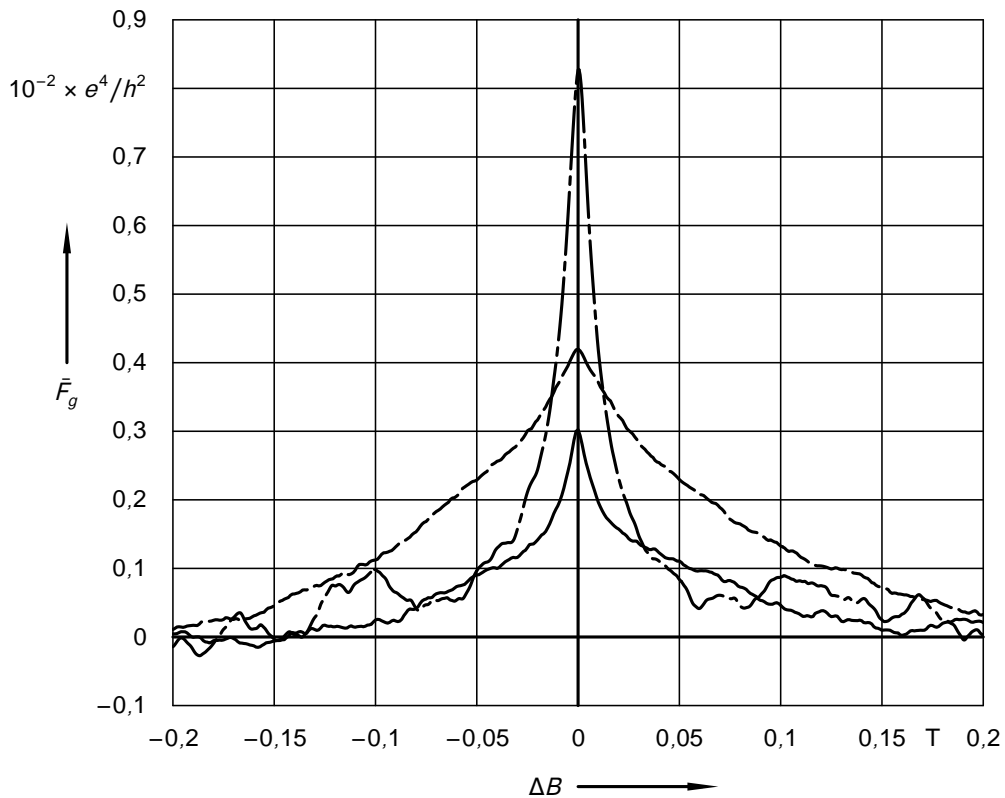


Abbildung 4.3 Anti-Autokorrelationsfunktionen für verschiedene U_{DC} . Die Kurven entsprechen Messungen an der Probe Ag-a bei 0 mV (gestrichelte Linie), 0,3 mV (durchgezogene Linie) und 1,9 mV (strichpunktierte Linie). Eine Verschiebung in ΔB , die durch eine Hysterese des Magneten bedingt ist, wurde kompensiert, so dass die Maxima bei $\Delta B = 0$ liegen.

daher zu \bar{F}_g nicht bei. Abbildung 4.3 zeigt typische Anti-Autokorrelationsfunktionen für verschiedene DC-Spannungen.

Die Analyse der Autokorrelationsfunktion wird häufig durch Artefakte beeinträchtigt, die von der Endlichkeit des verfügbaren Feldbereiches herrühren. Durch die unzureichende Mittelung läuft F_g nicht monoton gegen Null, sondern weist einen oszillierenden Untergrund auf. Eine komplementäre Darstellung der Messdaten bietet die spektrale Dichte $\mathcal{P}(\nu)$, die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion (siehe Abschnitt B.4).³ Die Fouriertransformation einer UCF-Messung liefert eine ebenfalls aperiodisch fluktuierende Funktion, deren Einhüllende zu höheren Frequenzen hin exponentiell abfällt. Die Abklingkonstante wird dabei durch B_c bestimmt. Geht man von theoretischen Vorhersagen über die genaue Form dieser Einhüllenden aus und berücksichtigt die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fourierkomponen-

³ Die Berechnung des Faltungsintegrals erfolgt üblicherweise mit Hilfe der Fouriertransformation, mit der spektralen Dichte als Zwischenergebnis. Die Frequenzvariable ν ist hier komplementär zu ΔB definiert und hat also die Einheit $1/T$.

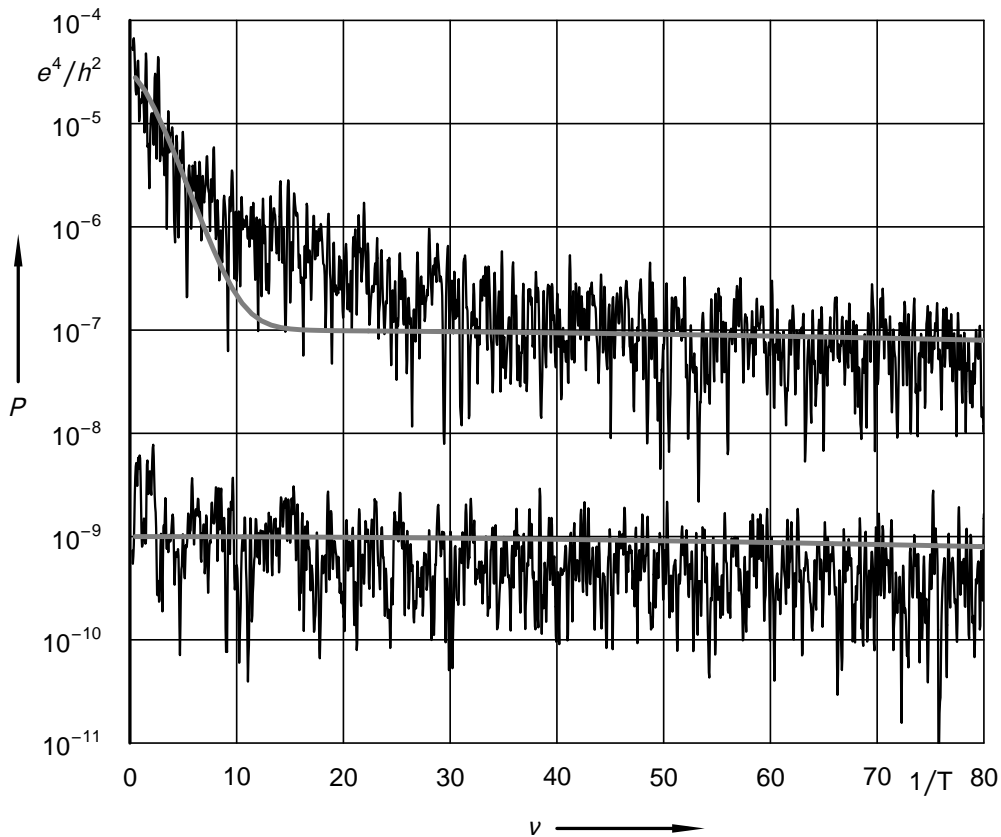


Abbildung 4.4 Spektrale Dichte des symmetrischen Anteils (oben) und des antisymmetrischen Anteils (unten, durch Multiplikation mit 10^{-2} in der logarithmischen Auftragung verschoben) des Magnetleitwerts für $U_{DC} = 0$, gemessen an der Probe Ag-a. Die Streuung der Messdaten (schwarz) wurde zur besseren Darstellung durch Mittelung über benachbarte Fourierkomponenten reduziert. Die grauen Kurven stellen den theoretischen Verlauf der Einhüllenden der spektralen Dichte dar. Dabei wurde für beide das gleiche Rauschniveau angenommen. Die obere Kurve zeigt die Beiträge der UCF nach Formel (4.4) (mit $n = 2$), angepasst auf dem Intervall $0,5 \dots 5 \text{ T}^{-1}$. Im Bereich von $10 \dots 40 \text{ T}^{-1}$ sind deutliche Abweichungen zu sehen, die der anomalen Form der Autokorrelationsfunktion entsprechen. Der gezeigte Frequenzbereich befindet sich im Passband des Tiefpassfilters.

ten, so lassen sich *rms*-Amplitude und B_c aus der spektralen Dichte zuverlässiger bestimmen als durch die Anpassung der korrespondierenden Peak-Form an die Autokorrelationsfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dies wird in Anhang A näher erläutert. Bei der Analyse der spektralen Dichte bietet es sich auch an, die Symmetrie des Messsignals auszunutzen, indem man den symmetrischen Anteil $g_{\text{sym.}} = \{g(B) + g(-B)\}/2$ und den antisymmetrischen Anteil $g_{\text{asym.}} = \{g(B) - g(-B)\}/2$ getrennt betrachtet (siehe Abbildung 4.4). Der Rauschbeitrag verteilt sich gleichmäßig auf beide Anteile, während das UCF-Signal nur zu $g_{\text{sym.}}$ beiträgt. Bei entsprechender Wahl der Zeitkonstanten kann man Signal und Rauschen im Frequenzraum gut voneinander trennen.

Der Vergleich der spektralen Dichte (oder auch der Autokorrelationsfunktion) mit einer aus theoretischen Betrachtungen abgeleiteten funktionalen Form kann also zu einer zuverlässigeren Bestimmung der Kenngrößen genutzt werden. In der Literatur wird für F_g in der Regel eine der Lorentz-Verteilung entsprechende Form angegeben:

$$F_g(\Delta B) = F_g(0) \cdot [1 + (\alpha \Delta B / B_c)^2]^{-n}, \quad (4.4)$$

mit $n = 2$ (Jalabert u. a. 1990) oder $n = 3/2$ (Scheer 1995). Anstelle dieser glockenartigen Form beobachten wir häufig, dass die Autokorrelation um $\Delta B = 0$ nahezu linear abfällt (siehe Abbildung 4.3). Es ist einleuchtend, dass in diesen Fällen die Anpassung einer Kurve nach (4.4) nicht vorteilhaft ist. Eine theoretische Beschreibung der Korrelationsfunktion, die unseren Beobachtung besser entspricht, ist uns nicht bekannt. Aus diagrammatischen Störungsrechnungen folgt, dass F_g für kleine Feldunterschiede ΔB näherungsweise parabelförmig ist (Lee und Stone 1985): $F_g \approx 1 - C \cdot (\Delta B / B_c)^2$. Es ist schwierig, aus den Lock-in-Messungen Aussagen über die Krümmung im Ursprung zu gewinnen, da die Korrelationen dort von der Charakteristik des Tiefpassfilters bestimmt werden. So ist der Abfall der Autokorrelationsfunktion bei der Verwendung mehrpoliger Filter ebenfalls parabelförmig, bei einpoligen Filtern, die eine direkte Antwort liefern, jedoch linear. Versuche von Bauch (2000), diese inhärenten Grenzen durch den Einsatz einer sehr rauscharmen, SQUID-basierten Messtechnik zu überwinden, zeigen ebenfalls keine direkte Übereinstimmung mit den einfachen Theorien. Um diese Fragestellungen von grundsätzlichem Interesse zunächst jedoch auszuklammern, haben wir bei der Auswertung der im nächsten Abschnitt diskutierten Messreihen die *rms*-Amplitude und das Korrelationsfeld durch das Ermitteln des Maximums und der Halbwertsbreite der Anti-Autokorrelationsfunktion bestimmt.

4.3 Leitwertfluktuationen im Nichtgleichgewicht

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Datenanalyse vorgestellt und die an einer Reihe von Proben beobachteten Anomalien verglichen. Dazu wurden *rms*-Amplitude und Korrelationsfeld aus den bei fester DC-Spannung gemessenen Fluktuationen des Magnetoleitwerts bestimmt. Diese Kenngrößen sind in der Abbildung 4.5 in Abhängigkeit von U_{DC} aufgetragen. Dabei haben wir fünf hinreichend gut untersuchte, repräsentative Proben ausgewählt. Zum weiteren Vergleich werden analog ausgewertete Messungen aus der Dissertation von Bauch (2000) gezeigt.⁴ Untersucht wurde dort ein $2 \mu\text{m}$ langer, bei Raumtemperatur präparierter Golddraht ($R_D = 11 \Omega$, $L = 2 \mu\text{m}$, Breite $w = 80 \text{ nm}$, Dicke $d = 25 \text{ nm}$), der ebenfalls bei tiefen Temperaturen mit einer vergleichbaren Lock-in-Methode vermessen wurde.

Die beobachteten Phänomene lassen sich wie folgt kategorisieren:

1. Die *rms*-Amplitude zeigt bei Spannungen $U_{DC} \lesssim 0,5 \text{ mV}$ einen raschen Abfall.

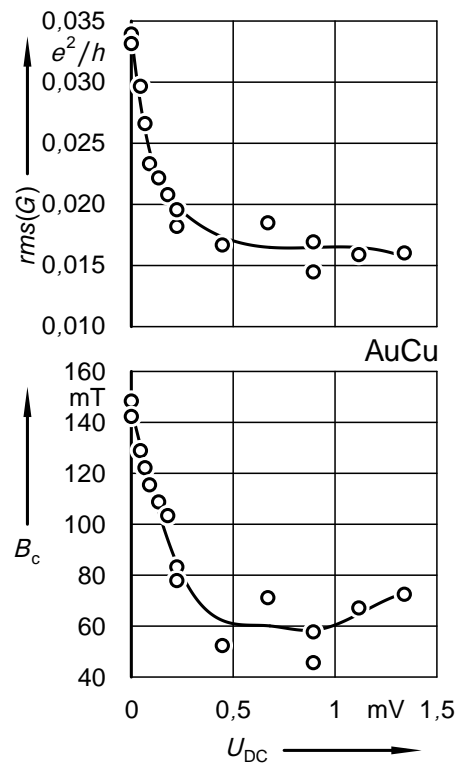
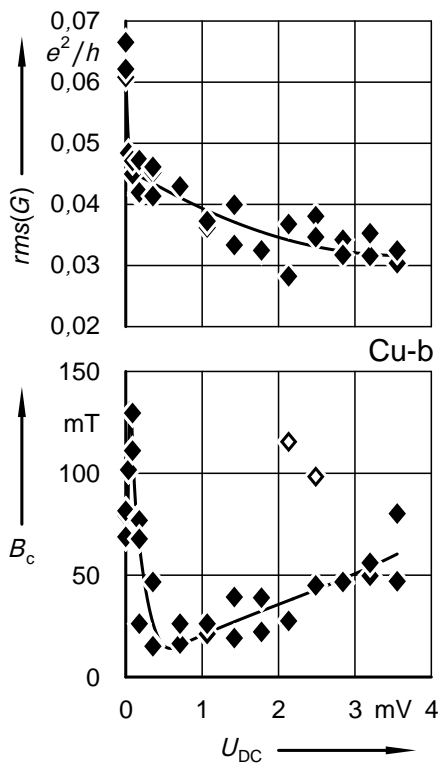
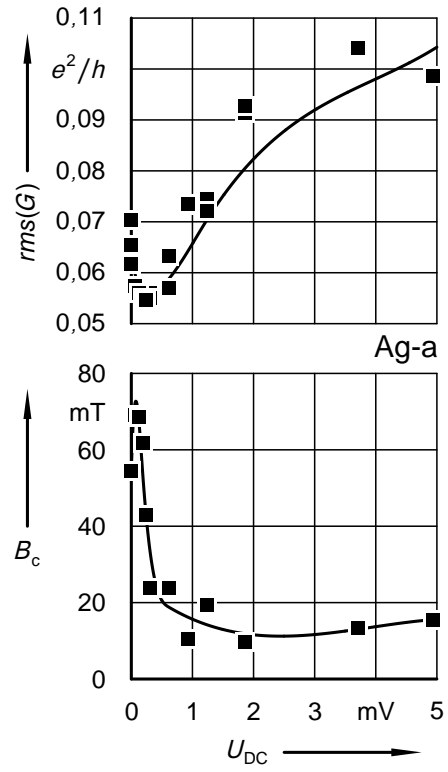
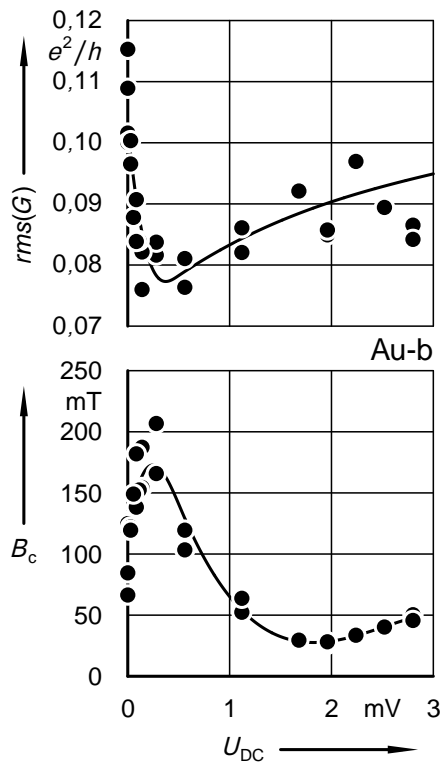
⁴ Es handelt sich um die Probe Au106 aus (Bauch 2000), hier mit Au-e bezeichnet. Für die Bereitstellung der Messdaten danke ich Thilo Bauch und Achim Marx herzlich.

2. Im gleichen Spannungsbereich ist häufig zu beobachten, dass das Korrelationsfeld B_c nach raschem Anstieg ein Maximum durchläuft und dann bei einem Wert unterhalb von $B_c(0)$ sättigt.
3. Bei einigen der untersuchten Proben weist $B_c(U_{DC})$ kein solches Maximum auf, sondern fällt, wie die *rms*-Amplitude, monoton ab.
4. Mit zunehmendem U_{DC} beobachtet man in der Regel einen erneuten Anstieg der *rms*-Amplitude.
5. In den Fällen, bei denen ein entsprechend großer Spannungsbereich erfasst wurde, werden die Fluktuationen zu höheren Spannungen hin erneut unterdrückt. Parallel dazu zeigt sich ein Ansteigen des Korrelationsfeldes.

Als *generisch* wollen wir das in den Punkten 1 und 2 genannte Verhalten bei kleinen DC-Spannungen bezeichnen. Das dafür charakteristische Maximum in $B_c(U_{DC})$ liegt zumeist sehr nah bei $U_{DC} = 0$. Daher könnte, trotz der Bemühung, die zur Lock-in-Detektion benötigte AC-Spannung möglichst gering zu halten, eine entsprechende Mittelung zu dem unter 3. erwähnten Verhalten führen. Einheitlich ist auf jeden Fall eine Abnahme der *rms*-Amplitude bei kleinen DC-Spannungen. Ein solches Verhalten wird üblicherweise mit einer Zunahme von inelastischen Streueignissen assoziiert, die zu einer Abnahme der Phasenkohärenzlänge führen.

Tabelle 4.1 Zusammenstellung der an den untersuchten Proben beobachteten Spannungsabhängigkeiten. Das in den Spalten 2 und 3 aufgeführte *generische* Verhalten bzw. das Ansteigen der Amplitude wird im Text näher erläutert. In Fällen, bei denen die Messdaten keine eindeutige Aussage zulassen, ist das tendenziell beobachtete Verhalten in Klammern angegeben. Einige Probenparameter aus Tabelle 3.1 sind hier wiederholt (siehe sonst Seite 27). Die Berechnung von U_{Th} für die in Abbildung 4.5 gezeigten Proben wird im Text diskutiert. Bei einigen Proben konnte die Korrelationsspannung U_c aus den Kennlinien-Messungen bestimmt werden. Die in der letzten Zeile aufgeführte Probe Au-e wurde von Bauch (2000) untersucht.

Probe	Anstieg	generisch	R_D Ω	D cm^2/s	U_{Th} μV	U_c μV
Cu-a	nein	(ja)	113	11,2		
Cu-b*	nein	(ja)	53	15,7	53	23
Au-b	ja	ja	42	49	165	24
Au-c*	ja	ja	56	38		
Ag-a	ja	ja	42	38	128	66
Ag-b	ja	ja	21	(57)		
AuCu	(nein)	nein	67	18,5	63	
Au-d	ja	nein	35	37,9	128	47
Au(Fe)	ja	ja	13	195		
Au-e	ja	nein	10,7	300	81	



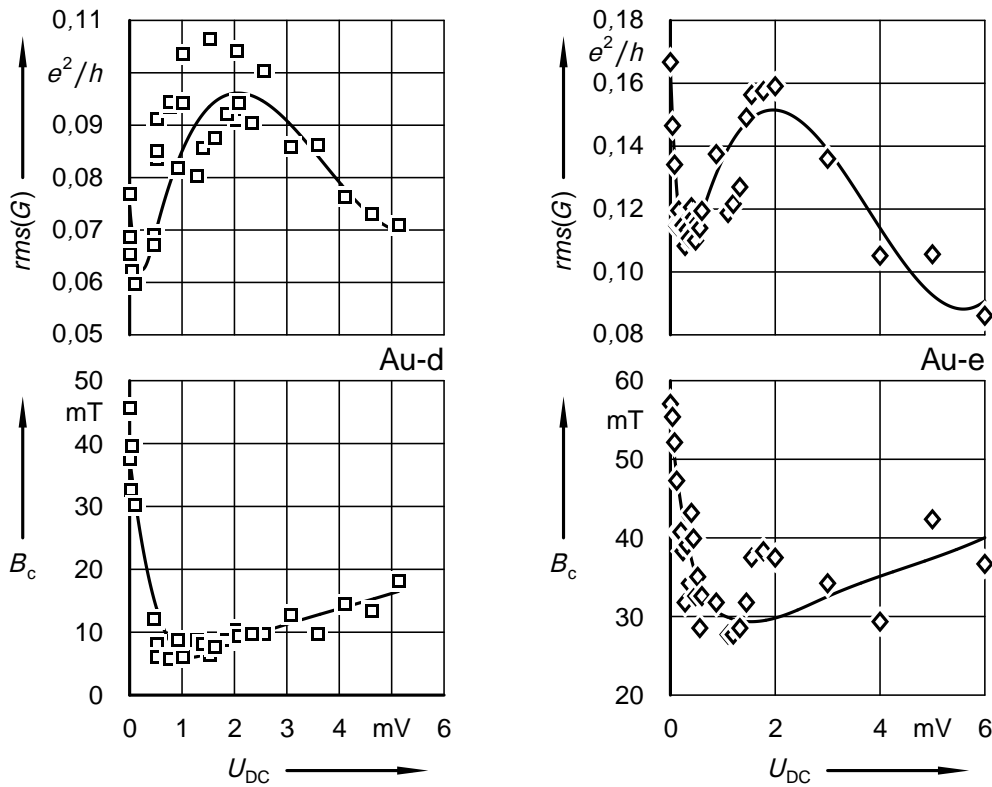


Abbildung 4.5 Auswertungen der Anti-Autokorrelation der Magnetoleitwertmessungen bei verschiedenen DC-Spannungen. Gezeigt sind jeweils rms -Amplitude (oben) und Korrelationsfeld B_c (unten) als Funktion von U_{DC} für die Proben Au-b (●), Ag-a (■), Cu-b (◆), AuCu (○), Au-d (□) und Au-e (◇). Die durchgezogenen Linien dienen lediglich zur Hervorhebung der durch die Datenpunkte aufgezeigten Trends. Bei zwei Messpunkten der Probe Cu-b handelt es sich um offensichtliche Ausreißer, die daher mit unausgefüllten Symbolen markiert sind.

Für Proben mit $L > L_\varphi$ bedeutet dies eine größere Anzahl von Kohärenzvolumina, über deren Beiträge gemittelt wird, also eine Abnahme der resultierenden Fluktuationsamplitude. Im Nichtgleichgewicht erwartet man eine Zunahme der Elektron-Elektron-Streuung durch das Anwachsen des verfügbaren Phasenraums. Falls dieser Mechanismus für das rasche Abfallen der Fluktuationsamplitude verantwortlich ist, bleibt noch zu klären, warum diese bei weiterer Erhöhung der DC-Spannung nicht vollständig unterdrückt wird. Unter Berücksichtigung unserer speziellen Probengeometrie (vergleiche Abschnitt 3.1) ist denkbar, dass der anfängliche Abfall der *rms*-Amplitude auf eine Unterdrückung der Fluktuationen in den breiteren Bereichen der Zuleitungstrichter zurückzuführen ist. Der verbleibende Beitrag der eigentlichen Einschnürung (mit $L \sim 200 \text{ nm} \lesssim L_\varphi$) bleibt zunächst erhalten und könnte – nach dem Argument von Larkin und Khmel'nitskiĭ – auch für den erneuten Anstieg verantwortlich sein (Mirlin 2001). Allerdings zeigen die Messungen an der Probe Au-e (Bauch 2000), dass sehr ähnliche Effekte auch mit der eher konventionellen Geometrie eines langen Drahtes zu beobachten sind.

Im direkten Widerspruch zu einem Erklärungsansatz, der von einer spannungsgetriebenen Reduktion der Phasenkohärenzlänge ausgeht, steht die Spannungsabhängigkeit von B_c . Im Allgemeinen wird angenommen, dass das Korrelationsfeld umgekehrt proportional zu der typischen Größe der phasenkohärent abgetasteten Fläche ist. Bei Proben mit $L > L_\varphi$ sollte also, je nach Verhältnis der Breite w zur Phasenkohärenzlänge L_φ , $B_c \sim L_\varphi^{-2}$ (breiter Draht) bzw. $B_c \sim (wL_\varphi)^{-1}$ (schmaler Draht) gelten. Eine Unterdrückung der UCF-Amplitude durch eine Abnahme von L_φ müsste demnach mit einer Zunahme von B_c einher gehen. Statt dessen liegt B_c (oft nach Durchlaufen eines Maximums) bei endlichen Spannungen unterhalb des Linear-Response-Wertes. Von Seiten der Theorie ist uns keine Vorhersage über das Verhalten von B_c im Nichtgleichgewicht bekannt. Aufgrund der bereits erwähnten direkten Verknüpfung dieser Größe mit einer geometrischen Fläche ist auch nicht offensichtlich, welchen Einfluss einer (relativ kleinen) DC-Spannung zu erwarten wäre. Erneut konnte auch in den Untersuchungen anderer Arbeitsgruppen an längeren, bei Raumtemperatur präparierten Drähten ein Abfall von B_c nachgewiesen werden (Bauch 2000; Strunk 2002).

Die Verknüpfung der *rms*-Amplitude mit dem Quantenleitwert e^2/h und des Korrelationsfeldes mit dem Flussquant h/e gilt jedoch nur bis auf Konstanten (in Abschnitt 1.3 mit C bzw. C' bezeichnet), die zusätzliche Dimensionalitätsabhängigkeiten berücksichtigen. Deren konkreter Wert hängt von der vorliegenden Hierarchie der relevanten Längenskalen L , L_φ , L_T , etc. ab (siehe Abschnitt 1.2). Durch Variation des entsprechenden Kontrollparameters ist es möglich, die mit einem dimensional Übergang verbundenen Änderungen der Fluktuationseigenschaften experimentell nachzuweisen. Denkbar wäre also, dass die hier beschriebenen Phänomene auf einen solchen, durch U_{DC} induzierten Übergang zurückzuführen sind. Entsprechende theoretische Arbeiten, die diese Fragestellung im Nichtgleichgewichts-Regime behandeln und ein physikalisches Bild des zugrundeliegenden Mechanismus liefern (wie etwa Larkin und Khmel'nitskiĭ im Fall von $\text{rms}(G)$), stehen allerdings noch aus.

Schließlich ist in diesem Zusammenhang auf die bereits bei der Bestimmung von B_c (Abschnitt 4.2) diskutierte ungewöhnliche Form der Autokorrelationsfunktion F_g hinzuweisen. Der Peak um $\Delta B = 0$ fällt für mittlere Werte von ΔB weitaus weniger rasch ab als eine entsprechende Lorentz-Kurve. Das hier gezeigte Korrelationsfeld, das über das Kriterium $F_g(B_c) = F_g(0)/2$ bestimmt wurde, spiegelt möglicherweise eine durch U_{DC} bedingte Ver-

änderung der Halbwertsbreite dieser charakteristischen Form wieder. Ein systematischer Zusammenhang der Peakform mit den Parametern der verschiedenen untersuchten Proben ist im Rahmen dieser Arbeit nicht zu belegen. Für eine zukünftige Systematisierung der Untersuchungen ist auch hier ein weitergehendes theoretisches Verständnis unabdingbar.

Die in den Punkten 4 und 5 zusammengefasste Spannungsabhängigkeit bei höheren U_{DC} deckt sich mit den schon im letzten Abschnitt diskutierten Beobachtungen: Ein Anstieg der *rms*-Amplitude ist nach Larkin und Khmel'nitskiĭ (1986) zu erwarten und bereits von Schäfer u. a. (1996) in ähnlichen Experimenten beobachtet. Bei höheren Spannungen ist dann mit dem Einsetzen von Heizeffekten zu rechnen. Die damit verknüpfte Abnahme von L_φ spiegelt sich, wie erwartet, auch in $B_c(U_{\text{DC}})$ wieder. Einen Vergleich der Temperatur- und Spannungsabhängigkeit dieser Effekte in Kombination mit der Untersuchung von Aharonov-Bohm-Oszillationen findet man bei Terrier u. a. (2001).

Tabelle 4.1 belegt die Beobachtung der hier geschilderten Phänomene für die von uns untersuchten Proben.

Ein wesentlicher Schritt bei dem Versuch einer einheitlichen Deutung der in Abbildung 4.5 gezeigten Daten besteht in der Identifizierung einer gemeinsamen Spannungsskala. Bei der Diskussion von Quanteninterferenzeffekten liegt die Betrachtung der Thouless-Spannung $U_{\text{Th}} = E_{\text{Th}}/e$ nahe. Die Thouless-Energie E_{Th} wird in der Regel (wie in Abschnitt 1.1 beschrieben) aus der Zeit-Energie-Unschärferelation abgeleitet. Diese wird in der Literatur uneinheitlich mit $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$ oder $\sim \hbar$ formuliert.⁵ Entsprechend unterscheiden sich die verwendeten Definitionen von E_{Th} (Gleichung (1.7)) um den Faktor 2π . Wir haben dort \hbar als Konstante gewählt, um in Gleichung (1.8) den Leitwert G in Einheiten von e^2/h zu schreiben – einige Autoren verwenden hier hingegen e^2/\hbar (Thouless 1977; Larkin und Khmel'nitskiĭ 1986). Ähnlich verhält es sich auch bei der Abschätzung des Korrelationsfeldes B_c über die durch das magnetische Feld verursachte Phasenverschiebung. Bei den in Kapitel 1 angesetzten Abschätzungen wurde versucht, eine in dieser Hinsicht konsistente Wahl zu treffen. Auf dem Niveau qualitativer Abschätzungen stellen die unterschiedlichen Faktoren $\sim \mathcal{O}(1)$ kein Problem dar. Die ‚richtige‘ natürliche Einheit ergibt sich bei konkreten physikalischen Fragestellungen (UCF, schwache Lokalisierung, Leitwertquantisierung) aus den entsprechenden quantitativen Berechnungen. So folgt aus diagrammatischen Störungsrechnungen und numerischen Simulationen für die UCF (Lee u. a. 1987):

$$U_c \approx \pi^2 \hbar D / (eL^2) = (\pi/2) \cdot U_{\text{Th}}. \quad (4.5)$$

Bei der angestrebten probenunabhängigen Skalierung der Spannung U_{DC} geht es uns nicht um eine präzise Bestimmung dieser numerischen Faktoren, sondern um die Frage, ob sich eine einheitlichere Darstellung ergibt, wenn man nach Gleichung (1.7) die jeweilige Diffusionskonstante D und die relevante Längenskala berücksichtigt. Letztere ist bei den hier untersuchten Proben die Phasenkohärenzlänge L_φ . Für die kurzen Drähte (Proben Au-b, Ag-a, Cu-b, Au-Cu und Au-d) ist die Abschätzung $L_\varphi \approx 350 \text{ nm}$ nach Gleichung (1.18) (mit $d = 2$ zur

⁵ Eine alternative Definition über den Einfluss der quantenmechanischen Randbedingungen auf den Leitwert liefert ebenfalls keine eindeutige Aussage (Hegger 1997).

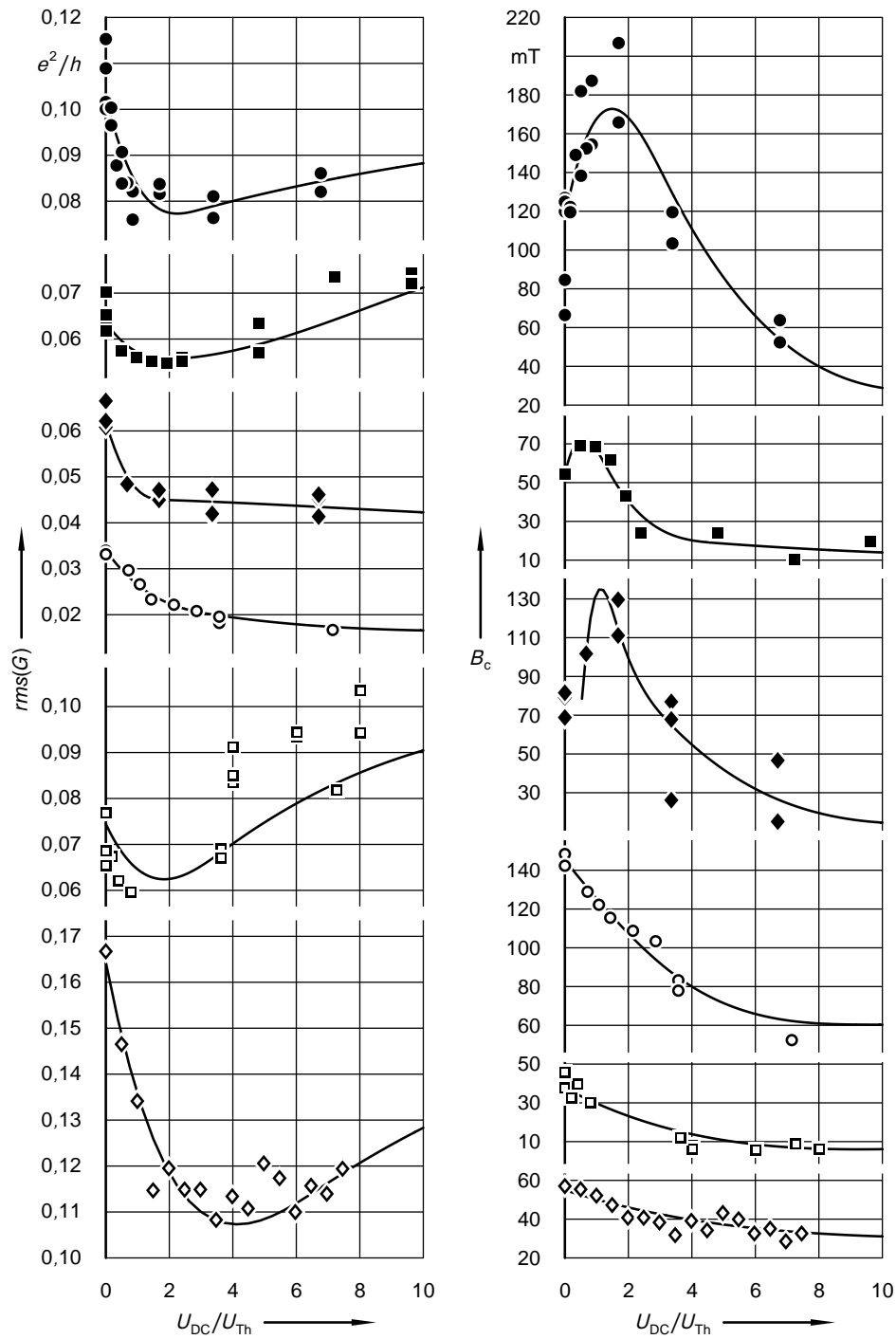


Abbildung 4.6 Skalierter Auftragung der Daten aus Abbildung 4.5 im Bereich kleiner DC-Spannung. Gezeigt sind rms -Amplitude (links) und Korrelationsfeld (rechts) als Funktion der normierten Spannung U_{DC}/U_{Th} für die Proben Au-b (●), Ag-a (■), Cu-b (◆), AuCu (○), Au-d (□) und Au-e (◇). Die jeweiligen Werte für U_{Th} sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

Berücksichtigung der Zuleitungsbeiträge) konsistent mit den typischen Werten $B_c \approx 50$ mT und $rms(G) \approx 0,07 e^2/h$. Die so bestimmten Thouless-Spannungen sind in qualitativer Übereinstimmung mit der Korrelationsspannung U_c , die für einige der Proben aus den Kennlinien ermittelt werden konnte (siehe Tabelle 4.1). Für die Probe Au-e wurde der Wert $L_\varphi = 1 \mu\text{m}$ angenommen (Bauch 2000).

Abbildung 4.6 zeigt die Daten für alle sechs Proben bei kleinen DC-Spannungen auf einer gemeinsamen Skala. Es ist eine gute Übereinstimmung der Spannungsabhängigkeit von $rms(G)$ und B_c für die in Material bzw. Geometrie recht verschiedenen Proben zu beobachten. Die Werte für U_{Th} liegen allerdings relativ nah beieinander, so dass das hier vermutete Skalenverhalten nicht über mehrere Größenordnungen hin getestet werden kann. Die auf einer absoluten Skala dargestellten Kenngrößen rms -Amplitude und Korrelationsfeld zeigen, dass die beobachteten Effekte bei allen untersuchten Proben von ähnlicher Größe sind. Diese Messungen belegen also, dass die universellen Leitwertfluktuationen im Nichtgleichgewicht bei Spannungen im Bereich von U_{Th} charakteristische Veränderungen aufweisen, die nicht auf einfache Weise von den vorhandenen theoretischen Beschreibungen erfasst werden. Insbesondere das Verhalten des Korrelationsfeldes B_c weist auf einen komplexeren Zusammenhang zwischen dieser Größe und inelastischen Streuprozessen hin.

Die Auswertung der Magnetoleitwertmessungen erfolgte mit dem Ziel, den statistischen Fehler der Parameterbestimmung möglichst klein zu halten (siehe Anhang A). Das zeigt sich in der verhältnismäßig geringen Streuung der Datenpunkte, die aus Messreihen stammen, bei denen allein die DC-Spannung U_{DC} variiert wurde. Daher lässt sich das in diesem Abschnitt diskutierte ungewöhnliche Verhalten der Parameter bei kleinen DC-Spannungen in der überwiegenden Mehrzahl der untersuchten Proben mit ausreichender Sicherheit belegen (siehe Tabelle 4.1). Es wurde ebenfalls sichergestellt, dass diese Ergebnisse robust gegenüber der Wahl der Auswertemethode sind. Die in diesem Zusammenhang diskutierten Abweichungen der Form der Autokorrelationsfunktion weisen auf eine zusätzliche systematische Unsicherheit der Datenauswertung hin. Eine definitive Aussage in Bezug auf die feineren Details, wie etwa das anfängliche Ansteigen von $B_c(U_{DC})$, wird dadurch erschwert. Insgesamt ist jedoch festzuhalten, dass das ungewöhnliche Nichtgleichgewichtsverhalten der UCF – der anfängliche Abfall der rms -Amplitude und die damit korrelierte Reduzierung von B_c – außerhalb der experimentellen Fehlergrenzen liegt.

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der elektronische Transport in kurzen, stark ungeordneten mesoskopischen Drähten mit den ungefähren Abmessungen $200 \times 80 \times 20 \text{ nm}^3$ untersucht. Die Strukturen wurden durch Elektronenstrahlolithographie erzeugt. Die Herstellung der Metallfilme aus Gold, Silber und Kupfer erfolgte durch abschreckende Kondensation im Isoliervakuum eines Tieftemperaturaufdampfers. Die Transportmessungen wurden mittels einer empfindlichen Lock-in-Methode im $^3\text{He}/^4\text{He}$ -Mischungskryostaten bei ca. 30 mK durchgeführt. Untersucht wurden dabei die Fluktuationen des Leitwertes in Abhängigkeit vom magnetischen Feld (senkrecht zur Stromrichtung) auf einem Bereich von $\pm 11 \text{ T}$ und in Abhängigkeit der angelegten DC-Spannung von bis zu $\pm 7 \text{ mV}$.

Die beobachteten aperiodischen Schwankungen, die *universellen Leitwertfluktuationen* (UCF), entstehen aufgrund der Quantenkohärenz der Leitungselektronen bei tiefen Temperaturen. Das Fluktuationmuster spiegelt einerseits die probenspezifische Störstellenkonfiguration wieder, besitzt aber andererseits proben- und materialunabhängige Eigenschaften. Sie lassen sich durch die zwei Parameter Fluktuationsamplitude und Korrelationsfeld charakterisieren. Die verschiedenen Methoden zur Bestimmung dieser Kenngrößen aus den experimentellen Daten wurden im Rahmen dieser Arbeit eingehend untersucht. Dabei dienten numerische Simulationen zur Abschätzung der statistischen Unsicherheiten, die sich durch die experimentellen Randbedingungen, wie z. B. die Beschränkung auf ein endliches Feldintervall, ergeben. Zudem wurde eine Analyseverfahren entwickelt, die eine zuverlässige Bestimmung der Parameter durch die Anpassung einer Theoriekurve an das Fourierspektrum der Messdaten ermöglicht.

Die Analyse der gewonnenen Messdaten zeigt eine ungewöhnliche Abhängigkeit der Fluktuationsparameter im Bereich kleiner DC-Spannungen auf: Die *rms*-Amplitude nimmt als Funktion von U_{DC} rasch ab, zugleich fällt das Korrelationsfeld B_c – häufig nach einem ersten Ansteigen – ebenfalls ab. Dieses Verhalten wurde für fünf der untersuchten Proben eingehender analysiert und mit den ähnlichen Ergebnissen aus anderen Arbeiten (Bauch 2000; Strunk 2002) verglichen. Eine entsprechende Skalierung der Messdaten deutet darauf hin, dass die Thouless-Energie E_{Th} den für diese Phänomene relevanten Maßstab liefert. Zu höheren DC-Spannungen hin beobachten wir in der Regel den von Larkin und Khmel'nitskiĭ (1986) prognostizierten Anstieg der *rms*-Amplitude und im Folgenden die Unterdrückung der Fluktuationen durch Heizeffekte.

Vor allem der Verlauf von $B_c(U_{\text{DC}})$ wirft Fragen über die Gültigkeit der direkten Verknüpfung dieser Größe mit der Phasenkohärenzlänge L_φ auf. Möglicherweise besteht hier ebenfalls ein Zusammenhang mit dem häufig beobachteten Abweichen der Autokorrelationsfunktion von der üblichen Lorentz-artigen Form.

Die Sensitivität der UCF auf Wechselwirkungsprozesse, die die Phasenkohärenz der Elektronen beeinflussen, macht sie umgekehrt zu einem geeigneten Nachweisinstrument für solche Mechanismen bei tiefen Temperaturen. Die Untersuchung von Leitwertfluktuationen kann daher neue Aspekte aufzeigen und zur Klärung von aktuellen Fragestellungen beitragen. Zu nennen sind hier Schlagworte wie *dephasing* (Mohanty u. a. 1997; Golubev und Zaikin 1999) und mesoskopisches Nichtgleichgewicht (Pothier u. a. 1997; Schwab und Rainmondi 2001). Unsere Arbeit zeigt jedoch, dass dazu zunächst noch Lücken im Verständnis des Nichtgleichgewichtsverhaltens der reinen Metalle zu schließen sind. Des weiteren scheint uns z. B. ein Studium der Streuprozesse in stark verdünnten magnetischen Legierungen lohnenswert.

Anhang A

Wieviel Information enthält ein Fluktuationsspektrum?

Leitwertfluktuationen werden üblicherweise durch ihre *rms*-Amplitude und durch die Halbwertsbreite p_c ihrer Autokorrelationsfunktion charakterisiert. Da jedoch diese Größen auch innerhalb des Messintervalls Variationen aufweisen können, müssen zu deren Analyse gegebenenfalls kurze, nur wenige Oszillationen umfassende Teilstücke ausgewertet werden. Bei der Berechnung der Autokorrelationsfunktion solcher kurzen Intervalle ergeben sich jedoch häufig große Schwankungsbreiten der Parameter *rms*-Amplitude und p_c . Hier bedarf es ausgefeilterer Methoden und auch einer quantitativen Betrachtung der statistischen Fehler. Dazu wurden verschiedene Auswertemethoden mit Hilfe des Computers simuliert. Die Ergebnisse dieser numerischen Experimente, die bereits als Tagungsbeitrag veröffentlicht sind (Schäfer u. a. 1999), werden im Folgenden dargestellt.

A.1 Einführung

Die durch Quanteninterferenz hervorgerufenen Fluktuationen des Leitwerts einer mesoskopischen Probe können auf verschiedene Weise beobachtet werden (siehe Kapitel 1). Daher wird hier der Kontrollparameter, der die Fluktuationmuster hervorbringt, mit p bezeichnet – in unseren Messungen entspricht diesem das Magnetfeld B oder die Spannung V_{dc} . Als Fluktuationsspektrum wird hier $g(p)$ betrachtet, wobei g die Abweichungen vom mittleren Leitwert $\langle G \rangle_p$, gemessen in Einheiten von e^2/h , ist.

$g(p)$ ist eine aperiodische Zufallsfunktion und ähnelt auf den ersten Blick einfachem Messrauschen. Die Fluktuationen sind jedoch wohldefinierte Funktionen des externen Parameters p und stellen somit einen eindeutigen *Fingerabdruck* der zu Grunde liegenden Störstellenkonfiguration dar. Allerdings kann man die genaue Konfiguration der Störstellen nicht aus $g(p)$ ableiten.

Ein Fluktuationsspektrum wird gängigerweise durch seine Autokorrelationsfunktion $F_g(\Delta p) = \langle g(p) \cdot g(p + \Delta p) \rangle_p$ charakterisiert. Im Allgemeinen ist $F_g(\Delta p)$ eine glockenförmige Funktion mit einem Maximum F_{max} bei $\Delta p = 0$ und der Korrelationsfeld genannten Halbwertsbreite p_c . F_{max} entspricht der Varianz von $g(p)$ und ist somit ein Maß für die Amplitude der Fluktuationen, für die jedoch meist der *rms*-Wert $\sqrt{F_{max}}$ angegeben wird. p_c entspricht der typischen Fluktuationsfrequenz.

Theoretisch gesehen führen die verschiedenen Störstellenkonfigurationen zwar zu unterschiedlichen Fluktuationmustern $g(p)$, deren Autokorrelationsfunktionen $F(\Delta p)$ sollten jedoch strikt identisch sein. $F(\Delta p)$ wird auf gleiche Weise durch die zwei Parameter F_{\max} und p_c charakterisiert wie die komplexe brownische Bewegung eines Kolloid-Teilchens in einer Flüssigkeit im statistischen Sinne vollständig durch seine mittlere Geschwindigkeit und seine mittlere freie Weglänge beschrieben wird.

Eine Betrachtung des Problems in der Gegenrichtung ist hier hilfreich: Zu einer gegebenen Autokorrelationsfunktion $F(\Delta p)$ gehört eine Menge G aller möglichen Fingerabdrücke mit $F_g = F$. Jede Funktion $g(p) \in G$ entspricht einer unbekanntenen Störstellenkonfiguration. Dabei ist p unbeschränkt, im Gegensatz zur realen experimentellen Situation, in der nur ein eingeschränkter Bereich von p zugänglich ist. Das heißt, eine Messung stellt nur eine Stichprobe $g_s(p)$ einer für beliebige p definierten Funktion $g(p)$ dar. Daher liefert die Berechnung der Autokorrelationsfunktion aus der lediglich auf einem endlichen Intervall bekannten Funktion $g_s(p)$ nur einen Schätzwert für die wirkliche Autokorrelationsfunktion. Die so bestimmten Werte für F_{\max} und p_c sind also mit Fehlern behaftet und nur im besten Fall trendfrei.

Bisher wurde implizit angenommen, dass alle möglichen p -Intervalle zur Abschätzung von $g(p)$ gleich gut geeignet sind. Das ist im Allgemeinen aber nicht der Fall und würde umgekehrt bedeuten, dass die typische Frequenz und die Amplitude der Fluktuationen nicht von p abhängen. Dies ist zwar in bestimmten Fällen möglich, so z. B. bei Magnetoleitwertfluktuationen in reinen, schwach ungeordneten Metallen, sofern das Magnetfeld größer ist als das Korrelationsfeld und zugleich nicht groß genug, um die Elektronenbahnen zwischen Stoßereignissen signifikant zu krümmen (Lee u. a. 1987). Meistens ist jedoch eine p -Abhängigkeit der Kenngrößen zu beobachten. So zum Beispiel bei verdünnten magnetischen Legierungen (Paschke 1998): für kleine magnetische Feldstärken bewirken die magnetischen Verunreinigungen inelastische Streuung der Leitungselektronen, was zu einer Reduzierung der Fluktuationsamplitude und einer Erhöhung des Korrelationsfeldes führt. Mit zunehmendem Magnetfeld werden die Momente der magnetischen Störstellen ausgerichtet und so die inelastische Streuung unterdrückt, entsprechend zeigt sich ein kleineres Korrelationsfeld und ein Wiederanstieg der Amplitude.

Ein weiteres interessantes Beispiel für eine p -Abhängigkeit von F_{\max} und p_c sind die durch Variation der Transportspannung hervorgerufenen Fluktuationen. In diesem Fall wird eine mit der Spannung anwachsende Fluktuationsamplitude vorhergesagt (Larkin und Khmel'nitskiĭ 1986), was für gemäßigte Spannungsbereiche experimentell bestätigt wurde (Schäfer u. a. 1996). Bei größeren Spannungen beobachtet man eine Abnahme der Amplitude und einen Anstieg der Korrelationsspannung aufgrund von Heizeffekten.

Da also im Allgemeinen weder die Korrelationsbreite noch die Fluktuationsamplitude konstant ist, ist die Auswertung von Fluktuationsspektren kompliziert. Die natürliche Vorgehensweise, die bisher bei der Analyse von experimentellen Daten gewählt wurde, besteht in der Berechnung der Autokorrelationsfunktion für kurze, nur wenige Perioden umfassende Teilstücke der Messungen und sukzessiver Verschiebung dieses Auswertintervalls über den insgesamt erfassten p -Bereich. Auf diese Weise erhält man Abschätzungen für F_{\max} und p_c als kontinuierliche Funktion des Mittelwertes \bar{p} des Auswertintervalls, $F_{\max}(\bar{p})$ und $p_c(\bar{p})$, die eventuell die p -Abhängigkeit der Kenngrößen in dem untersuchten Bereich wiedergeben. Jedoch verschlechtert eine zu klein gewählte Intervallbreite die Statistik und führt zu verrauschten Funk-

tionen $F_{\max.}(\bar{p})$ und $p_c(\bar{p})$, während durch ein zu großes Auswertintervall die Kurven zu stark geglättet werden. In beiden Fällen ist *per se* nicht klar, inwieweit die durch die zugrunde liegenden physikalischen Prozesse hervorgerufenen Variationen nachgewiesen werden können.

Daher soll hier die Frage betrachtet werden, wie viel Information man aus gemessenen Fluktuationsspektren extrahieren kann, und ein Vergleich verschiedener numerischer Methoden zur Gewinnung dieser Information erfolgen.

A.2 Numerische Analyse von Fluktuationsspektren

In diesem Abschnitt wird folgende Vorgehensweise verfolgt: Ausgehend von einer theoretischen Form der Autokorrelationsfunktion $F(\Delta p)$ mit der zugehörigen Menge G von Fluktuationsspektren $g(p)$ mit $F_g = F$ werden Stichproben $g_i(p_j)$ mit $g_i(p) \in G$ und $p_j = p_{\min.} + j\delta p$, $0 \leq j < N$ erzeugt. Jedes $\{g_i(p_j) | 0 \leq j < N\}$ stellt ein numerisches Experiment dar, d. h. liefert Werte für $g_i(p)$ an diskreten Stützstellen im Intervall $p_{\min.} \leq p \leq p_{\max.}$, wobei $p_{\max.} = p_{\min.} + (N - 1) \cdot \delta p$ ist. Dabei wird ein $\delta p \ll p_c$ gewählt. Es wird eine Anzahl M solcher numerischer Experimente ausgeführt, wobei M typischerweise in der Größenordnung von 100 liegt. Jedes numerische Experiment wird, wie im realen Experiment, einer bestimmten Analyseverfahren unterworfen. So erhält man jeweils M Schätzwerte für $F_{\max.}$ und p_c . Diese zwei Mengen sind Stichproben einer durch die Analyseverfahren bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Aus den erhaltenen Schätzwerten werden Histogramme erzeugt, die diese Wahrscheinlichkeitsverteilung wiedergeben. Diese Verteilungen können durch ihre Mittelwerte $\overline{F_{\max.}}$ und $\overline{p_c}$ und die Standardabweichungen $\Delta F_{\max.}$ und Δp_c charakterisiert werden. Es ist zu beachten, dass $\overline{F_{\max.}}$ und $\overline{p_c}$ nicht zwangsläufig $F_{\max.}$ und p_c entsprechen.

Diese Prozedur ist eine Monte-Carlo-Simulation, die es erlaubt, festzustellen, ob eine vorgegebene Analyseverfahren trendfrei ist. Gleichzeitig erhält man eine Abschätzung der Fehlerbalken für die experimentell ermittelten Werte von $F_{\max.}$ und p_c , die sonst schwer zu bestimmen sind. Unser Ziel ist ein Vergleich verschiedener Auswertemethoden, der nun detailliert beschrieben werden soll.

A.2.1 Ziehung von Zufallsspektren

Die genaue Form der Autokorrelationsfunktion $F(\Delta p)$ der Leitwertfluktuationen hängt von der Probengeometrie ab (Lee u. a. 1987). Da jedoch die hier vorgestellte numerische Analyse nicht allzu empfindlich von der genauen Form von $F(\Delta p)$ abhängt, stellt

$$F(\Delta p) = \frac{F_{\max.}}{(1 + (\alpha \Delta p / p_c)^2)^2}, \quad (\text{A.1})$$

mit $\alpha = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$, einen sinnvollen Ausgangspunkt dar (Jalabert u. a. 1990). Die Fouriertransformierte von $F(\Delta p)$ wird mit $P(q)$ bezeichnet.

$$P(q) = P_0 (1 + \beta 2\pi q) \exp(-\beta 2\pi q), \quad (\text{A.2})$$

ist die sogenannte *spektrale Dichte* (englisch *power spectral density*, PSD) des Fluktuationsspektrums. Dabei ist $P_0 = \pi F_{\max} p_c / (2\alpha)$ und $\beta = p_c / \alpha$.

Einem numerischen Experiment $\{g(p_j)\}$ wird mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation ein Satz von Fourierkoeffizienten $G(q_j)$ mit $q_j = j/(N\delta p)$, $0 \leq j \leq N/2$ zugeordnet. Hierbei kann man sich auf die Betrachtung von positiven Frequenzen beschränken, da $g(p)$ eine reellwertige Funktion ist. Das Auftreten von diskreten q -Werten ist eine direkte Folge des endlichen p -Intervalls der numerischen Experimente. Zur Erzeugung eines numerischen Experiments werden Zufallswerte für den Realteil $R(q_j)$ und den Imaginärteil $I(q_j)$ der Koeffizienten $G(q_j) = R(q_j) + iI(q_j)$ bestimmt, wobei für beide die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung zugrunde gelegt wird:

$$\Pr\{x < H(q_j) < x + dx\} = \frac{1}{\sqrt{\pi P(q_j)}} \exp\left(-\frac{x^2}{P(q_j)}\right) dx. \quad (\text{A.3})$$

Dabei bezeichnet $\Pr\{x < H < x + dx\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass H einen Wert im Intervall zwischen x und $x + dx$ annimmt, und $H(q_j)$ ist stellvertretend für $R(q_j)$ bzw. $I(q_j)$. Gleichung A.3 stellt eine Normalverteilung mit einer Standardabweichung, die der PSD entspricht, und einem Mittelwert von Null dar.

Eine weitere Bemerkung ist möglicherweise zum Verständnis von Gleichung A.3 hilfreich. Angenommen man betrachtet eine Stichprobe $g_s(p)$, $p_{\min.} < p < p_{\max.}$ von $g(p)$ und kennt die PSD P_g . Die diskreten Fourierkomponenten sind definiert als

$$G(q) = \int_{p_{\min.}}^{p_{\max.}} g_s(p) \exp(i2\pi qp) dp. \quad (\text{A.4})$$

$g_s(p)$ ist eine Zufallsfunktion mit Mittelwert Null, daher ist auch der Erwartungswert von Real- und Imaginärteil von Gleichung A.4 Null. Deren Varianz bestimmt sich jedoch aus der PSD.

Da die Phase der Fourierkoeffizienten $G(q_j)$ beliebig ist, ist ein Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Amplitude $|G(q_j)|$ nützlich:

$$\Pr\{x < |G(q_j)| < x + dx\} = \frac{2x}{P(q_j)} \exp\left(-\frac{x^2}{P(q_j)}\right) dx. \quad (\text{A.5})$$

A.2.2 Hinzufügen von Rauschen

In den meisten experimentellen Situationen stellen Leitwertfluktuationen kleine Korrekturen zur mittleren Leitfähigkeit dar. Das bedingt, dass selbst durch hohen messtechnischen Aufwand eine merkliche Störung des Signals durch Rauschen nicht zu vermeiden ist. Das Rauschen wirkt sich auch auf die Zuverlässigkeit aller hier beschriebenen Auswertemethoden aus. Das kann sich sowohl in einer Vergrößerung der Fehlerbalken $\Delta F_{\max.}$ und Δp_c als auch in einem Trend in $\overline{F_{\max.}}$ und $\overline{p_c}$ ausdrücken.

Zur Untersuchung des Einflusses von Rauschen auf die Datenanalyse addieren wir Zufallszahlen R aus der Normalverteilung

$$\Pr\{x < R < x + dx\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{x^2}{N_0}\right) dx \quad (\text{A.6})$$

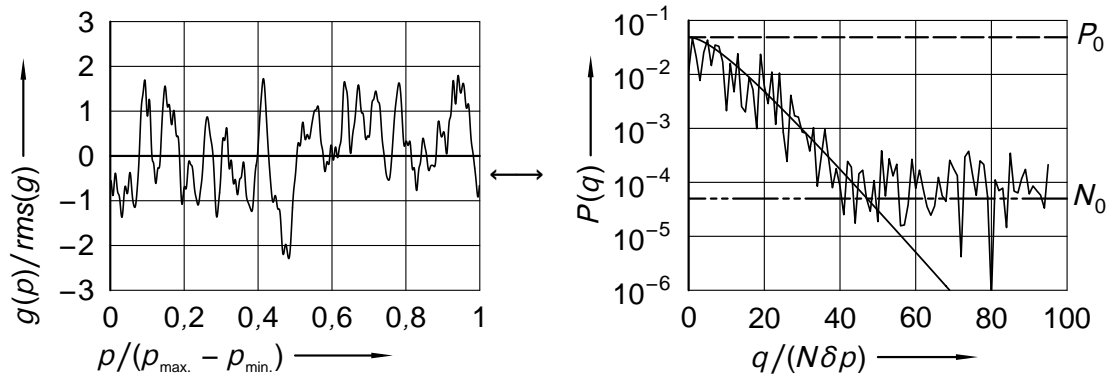


Abbildung A.1 Beispiel für ein numerisches Experiment. Die Parameter des Experiments sind $N_0/P_0 = 0,0001$, $p_c = 0,02 \cdot N\delta p$, $F_{\max.} = 1$. Die rechte Seite zeigt die zugehörige spektrale Dichte $P(q)$.

zum Real- und Imaginärteil von $G(q_j)$. Dies entspricht weißem Rauschen mit einem Rauschpegel N_0 und der Bandbreite B , die der Nyquist-Frequenz $N\delta q/2$ entspricht. Als Maß für die Rauschamplitude verwenden wir das Verhältnis N_0/P_0 . N_0/P_0 muss deutlich kleiner als Eins sein, damit das Signal nicht vollständig vom Rauschen überdeckt wird. Bei mittleren Werten für N_0/P_0 kreuzt $P(q)$ bei einer Frequenz q_{rausch} den Rauschpegel N_0 . Das Signal liegt dann für Frequenzen unterhalb von q_{rausch} über dem Rauschniveau, und nur dieser Frequenzbereich enthält die zugängliche Information. Die simulierte Rauschbandbreite B ist größer als in den meisten realen Experimenten, wo sie stets zur Erhöhung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses absichtlich begrenzt wird. Es ist nicht schwierig, dies durch Verwendung eines digitalen Filters auch bei den numerischen Experimenten zu tun. Jedoch sollte die Abschneidefrequenz des Filters stets deutlich größer als q_{rausch} sein, da sonst das Signal selbst reduziert wird. Das Signal-zu-Rausch-Verhältnis E_{sn} wird üblicherweise als Verhältnis der *rms*-Amplituden von Signal und Rauschen definiert. E_{sn} hängt von der Bandbreite ab und ist (solange diese nicht zu klein gewählt wurde) mit N_0/P_0 verknüpft:

$$E_{\text{sn}}^2 = \frac{2\alpha}{\pi p_c} \cdot \frac{1}{B} \cdot \frac{P_0}{N_0}. \quad (\text{A.7})$$

Abbildung A.1 zeigt beispielhaft ein numerisches Experiment.

A.2.3 Auswertemethoden und Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen

Die gängigste Methode bei der Analyse eines Fluktuationsspektrums ist die Berechnung der Autokorrelationsfunktion $F_g(\Delta p)$ auf einem begrenzten p -Intervall und die Bestimmung von *rms*-Amplitude und p_c aus dem Maximum bzw. aus der Halbwertsbreite. Das ist die einfachste Methode, die wir verwendet haben. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation ohne zusätzliche Rauschbeiträge sind in Abbildung A.2a dargestellt. Die Simulationen wurden für eine Reihe von p_c -Werten durchgeführt, die den Bereich von $p_c \ll N\Delta p$, mit vielen Fluktuationismustern im vorgegebenen p -Bereich, bis $p_c = 0,3 \cdot N\delta p$, mit nur wenigen Fluktuationsperioden,

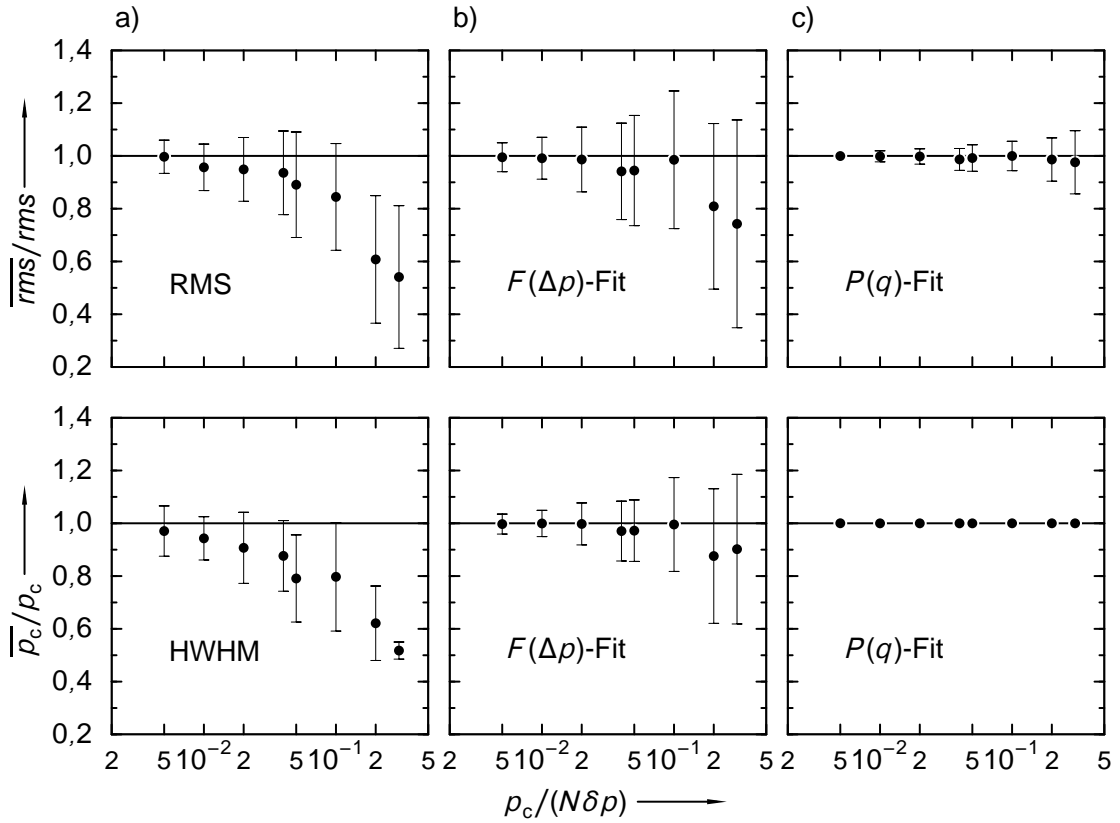


Abbildung A.2 Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen ohne Rauschen. Dargestellt sind Erwartungswert und Standardabweichung (als Fehlerbalken) für die drei verschiedenen Analysemethoden, angewendet auf einen Satz von Zufallsspektren mit vorgegebenen Werten für rms -Amplitude und p_c . Oben: \overline{rms} -Amplitude als Funktion von p_c . Unten: $\overline{p_c}$ als Funktion von p_c . a), b) und c) entsprechen den verschiedenen im Text erläuterten Auswerteverfahren.

abdecken. Diese Methode ist ausreichend, solange $p_c/(N\delta p)$ deutlich kleiner als 0,05 ist. Bei größeren Werten ist weder $\overline{p_c}$ noch \overline{rms} trendfrei.

Die Datenanalyse wird wesentlich verbessert, wenn man die theoretische Form von $F(\Delta p)$ nach der Methode der kleinsten Quadrate an die Autokorrelationsfunktion $F_g(\Delta p)$ anpasst. Das lässt sich anhand der in Abbildung A.2b gezeigten Ergebnisse verdeutlichen. Dabei wurden die \overline{rms} - und $\overline{p_c}$ -Werte durch die Anpassung von drei Parametern bestimmt – neben den Parametern F_{\max} und p_c von $F(\Delta p)$ wurde noch ein zusätzlicher Untergrundterm F_o eingeführt: $F_{\text{fit}}(F_{\max}, p_c, F_o; \Delta p) = F(\Delta p) + F_o$. Dieser Untergrundterm berücksichtigt eine mögliche vertikale Verschiebung des gesamten Spektrums: Dem Experiment ist zumeist der mittlere Leitwert nicht anders zugänglich als durch Mittelung über die Daten selbst. Da jedoch das Fluktuationsspektrum auch niederfrequente Anteile mit nennenswerter Amplitude umfasst, die durch die Betrachtung eines eingeschränkten Intervalls nicht erfasst werden können, weicht der so bestimmte Mittelwert möglicherweise vom wirklichen Wert ab. Das führt zu einer Verschiebung

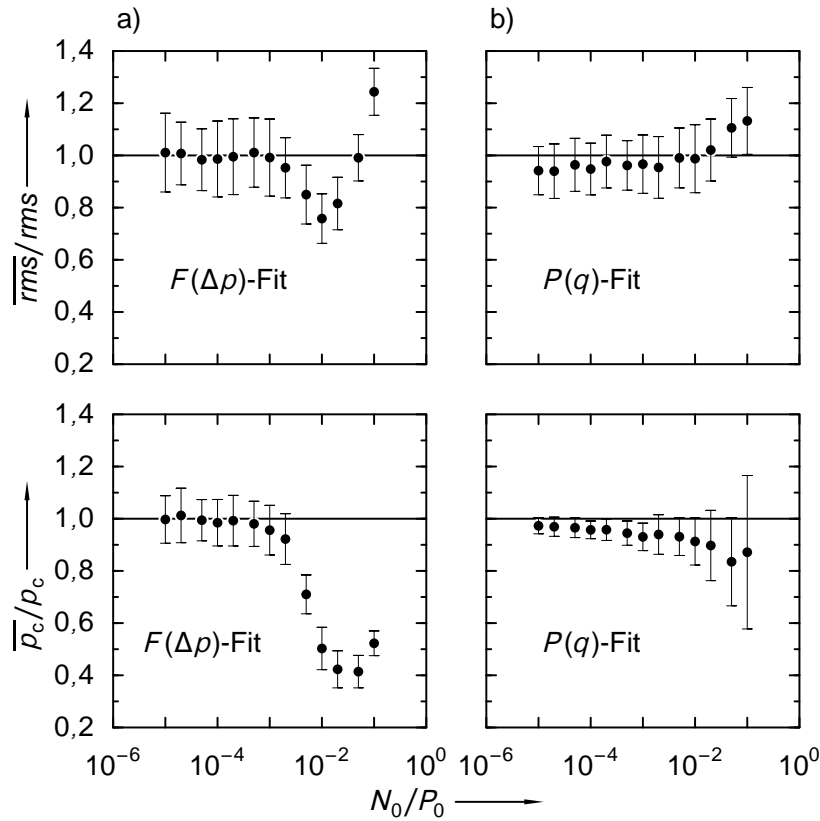


Abbildung A.3 Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation mit zusätzlichem Rauschen. Dargestellt sind Erwartungswert und Standardabweichung (als Fehlerbalken) für zwei verschiedene Analysemethoden, angewendet auf einen Satz von Zufallsspektren mit vorgegebener rms -Amplitude und $p_c = 0,02 \cdot N \delta p$. Oben: \overline{rms}/rms -Amplitude als Funktion des Rauschpegels N_0 bezogen auf das Signalniveau P_0 . Unten: $\overline{p_c}/p_c$ als Funktion von N_0/P_0 . a) und b) entsprechen zwei verschiedenen im Text erläuterten Auswerteverfahren.

der Autokorrelationsfunktion und zu einer systematischen Unterschätzung der rms -Amplitude. diese Tendenz zeigt sich auch in Abbildung A.2a. Der soeben beschriebene $F(\Delta p)$ -Fit kann die Abschätzung der rms -Amplitude deutlich verbessern, da die charakteristische Form der Autokorrelationsfunktion nur durch eine Funktion $F_{\text{fit}}(F_{\text{max.}}, p_c, F_o; \Delta p)$ mit dem richtigen Untergrundterm F_o angepasst werden kann. Allerdings funktioniert dies nur, solange $F_g(\Delta p)$ der Form nach $F(\Delta p)$ sehr ähnlich ist, was bei den numerischen Experimenten ohne Rauschen sichergestellt ist. Es ist jedoch zu erwarten, dass dieser Vorteil der Analysemethode beim Hinzufügen von Rauschen verloren geht.

Abbildung A.2c stellt die Ergebnisse einer neu entwickelten Analysemethode dar. Dabei werden rms -Amplitude und p_c mit Hilfe einer *maximum-likelihood*-Schätzung aus der spektralen Dichte der Fluktuationen gewonnen. Aus Gleichung A.5 erhält man die Wahrscheinlichkeits-

verteilung der PSD-Koeffizienten $P_g(q_i) = |G(q_i)|^2$ des numerischen Experiments:

$$\Pr\{x < P_g(q_i) < x + dx\} = \frac{1}{P(q_i)} \exp\left(-\frac{x}{P(q_i)}\right) dx \equiv \mathcal{P}(q_i; x) dx \quad (\text{A.8})$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit des numerischen Experiments ist gegeben durch

$$\mathcal{P}_g(P_0, \beta) = \prod_i \mathcal{P}(q_i; P_g(q_i)), \quad (\text{A.9})$$

wobei die Abhängigkeit von P_0 und β über $P(q_i) = P_0(1 + \beta 2\pi q_i) \exp(-\beta 2\pi q_i)$ in Gleichung A.8 eingeht. Die *maximum-likelihood*-Schätzung besteht in der Maximierung von

$$\ln \mathcal{P}_g = - \sum_i \left[P_g(q_i) / \mathcal{P}(q_i; P_g(q_i)) + \ln \mathcal{P}(q_i; P_g(q_i)) \right] \quad (\text{A.10})$$

in Bezug auf P_0 und β . Wie in Abbildung A.2c zu sehen, liefert diese Methode erstaunlich gute Ergebnisse, solange man zusätzliches Rauschen außer acht lässt. Vor allem Δp_c ist vernachlässigbar klein. Dies folgt aus der Tatsache, dass p_c der asymptotischen Steigung $-2\pi\beta$ von $P(g)$ auf einer logarithmischen Skala entspricht. Die *maximum-likelihood*-Schätzung entspricht daher der Anpassung einer Geraden für hohe Frequenzen q . Ohne Rauschen erstreckt sich dieser Bereich bis zur Nyquist-Frequenz.

Direkteren Bezug zum Experiment als die bisher diskutierten Ergebnisse ergibt die Betrachtung der Auswirkung von zusätzlichem Rauschen auf die Datenanalyse. Abbildung A.3 zeigt Ergebnisse für $p_c = 0,02 \cdot N\delta p$ als Funktion des Parameters N_0/P_0 . Die einfache Analyseemethode aus Abbildung A.2a wurde ausgespart, da sie in dieser Situation sehr unzuverlässig funktioniert und auf jeden Fall durch den $F(\Delta p)$ -Fit (Abbildung A.2b) übertroffen wird. N_0/P_0 deckt den im Experiment typischerweise vorliegenden Bereich ab. Als Zahlenbeispiel diene eine typische experimentelle Bandbreite von ca. $500\delta q$. Nach Gleichung A.7 ergibt sich ein Signal-zu-Rausch-Verhältnis von $E_{\text{sn}} \approx 65$ für $N_0/P_0 = 10^{-5}$ und $E_{\text{sn}} \approx 0,65$ für $N_0/P_0 = 0,1$. Experimente werden gängigerweise im Bereich $10 > E_{\text{sn}} > 1$ durchgeführt. Abbildung A.3a zeigt die Ergebnisse der Datenanalyse durch Anpassung der Funktion F_{fit} an die Autokorrelationsfunktion der Spektren. Diese Methode versagt für $N_0/P_0 \gtrsim 0,02$. Da sich die Lage mit wachsendem p_c sicherlich weiter verschlechtert, muss man diese Methode in Situationen, wo es auf eine Auflösung der p -Abhängigkeit von *rms*-Amplitude oder p_c ankommt, mit äußerster Sorgfalt einsetzen.

Ein *maximum-likelihood*-Fit an die PSD der Spektren, wie in Abbildung A.3b dargestellt, ist stabiler und liefert über den gesamten hier untersuchten N_0/P_0 -Bereich hinreichend gute Ergebnisse. Abbildung A.3b zeigt jedoch auch, das mit dieser Methode *rms*-Amplitude und p_c tendenziell unterschätzt werden. In Bezug auf die Fehlerbalken ist der Trend der p_c -Schätzung auffällig groß. Bei den Simulationen wurden alle PSD-Koeffizienten $P_g(q_i)$ mit $q_i < q_{\text{rausch}}$ benutzt, wobei die Abschneidefrequenz q_{rausch} wie oben beschrieben definiert ist. Für q_i in der Nähe von q_{rausch} könnten die Koeffizienten $P(q_i)$ jedoch schon vom Rauschen beeinträchtigt sein und daher zu größeren Werten tendieren. Das führt zu einer kleineren Steigung der angepassten Funktion $P(q)$ und so zu kleineren Wert für p_c und *rms*-Amplitude. Andererseits kann

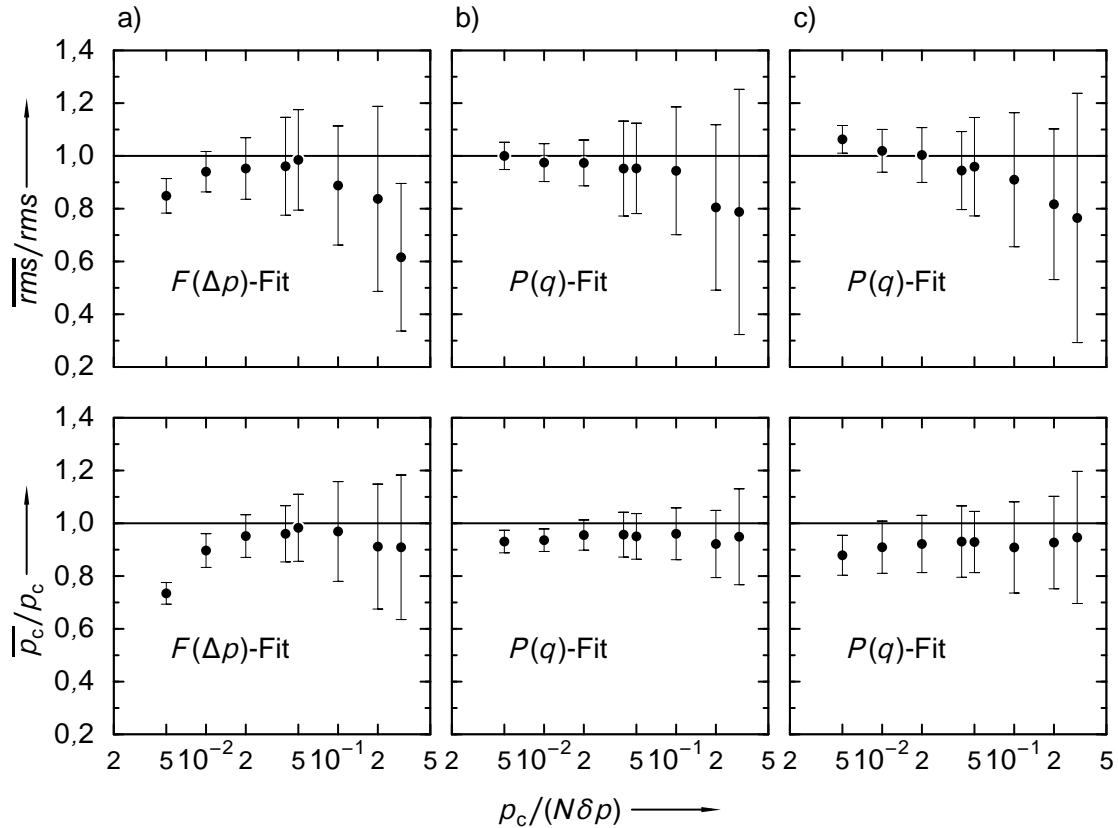


Abbildung A.4 Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen mit konstantem Rauschpegel. Dargestellt sind Erwartungswert und Standardabweichung (als Fehlerbalken) für zwei verschiedene Analysemethoden, angewendet auf einen Satz von Zufallsspektren mit vorgegebener rms -Amplitude und $p_c = 0,02 \cdot N \delta p$. Oben: \overline{rms} -Amplitude als Funktion von p_c . Unten: $\overline{p_c}$ als Funktion von p_c . a) und b) entsprechen zwei der im Text beschriebenen Auswertemethoden bei einem Rauschpegel $N_0 = 50 \cdot 10^{-6} \cdot P_0$. c): gleiche Methode wie bei b), jedoch mit erhöhtem Rauschpegel $N_0 = 500 \cdot 10^{-6} \cdot P_0$.

das Rauschen nicht zu einer Erhöhung der Steigung führen, da bei kleineren Frequenzen das Signalniveau exponentiell ansteigt. Bei der praktischen Verwendung der $P(q)$ -Fit-Methode sollte man also stets einen möglichst kleinen Fit-Bereich wählen und die PSD-Koeffizienten in der Nähe des Rauschniveaus außer acht lassen.

Abbildung A.4 zeigt die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen mit festem Rauschpegel als Funktion von p_c . Für ein Rauschniveau $N_0 = 50 \cdot 10^{-6} \cdot N \delta p$ werden in Abbildung A.4a und A.4b die Ergebnisse des $F(\Delta p)$ -Fit mit denen des $P(q)$ -Fits verglichen. Erneut liefert der $P(q)$ -Fit im gesamten untersuchten Bereich die besseren Resultate. Auf den ersten Blick erstaunt das Versagen des $F(\Delta p)$ -Fit für kleine p_c . Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass P_0 proportional zu p_c ist und daher eine Verringerung von p_c bei fester rms -Amplitude das Verhältnis N_0/P_0 erhöht. Abbildung A.4c zeigt, dass die PSD-Fit-Methode auch noch bei bedeutend höheren Rauschpegeln und kleinem p_c benutzt werden kann.

A.3 Zusammenfassung

In diesem Anhang haben wir mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen einen Vergleich verschiedener Auswertemethoden zur Abschätzung der *rms*-Amplitude und des Korrelationsfeldes p_c von Fluktuationsspektren erstellt. Die Simulationsergebnisse liefern Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diese Abschätzungen, die durch ihren Mittelwert und ihre Standardabweichung charakterisiert werden. Diese Methode ermöglicht es, einen Trend der Schätzwerte nachzuweisen.

Drei Methoden wurden verglichen. Als erstes wurde eine auf diesem Gebiet gängige Methode untersucht, bei der die *rms*-Amplitude und p_c direkt aus der Autokorrelationsfunktion des Fluktuationsspektrums bestimmt werden. Diese Methode ist nicht zu empfehlen, da sie bereits versagt, wenn p_c größer als etwa $1/20$ des Messintervalls ist, selbst bei Messdaten mit sehr geringem Signal-zu-Rausch-Verhältnis. Die Datenanalyse kann durch eine Anpassung der theoretischen Form der Autokorrelationsfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate deutlich verbessert werden. Um jedoch die meiste Information aus einem Fluktuationsspektrum zu gewinnen, ist eine hier entwickelte *maximum-likelihood*-Schätzung der spektralen Dichte zu empfehlen, die sich im Vergleich zu den anderen Methoden als robuster erwiesen hat.

Anhang B

Aspekte der Fouriertransformation

Bei der Analyse von Fluktuationmessungen spielen Fouriermethoden eine wesentliche Rolle. Im Folgenden sollen die für unsere Untersuchungen relevanten Aspekte kurz zusammengestellt werden. Eine ansprechende Einführung zu diesem Thema findet man bei Butz (2000), eine ausführlichere Diskussion der diskreten Fouriertransformation bei Brigham (1992).

B.1 Die Fouriertransformation für kontinuierliche Veränderliche

Die Fouriertransformation ordnet jeder Funktion¹ $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion $F(\nu) = \mathcal{F}[f(t)]$ zu:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)e^{2\pi i\nu t} d\nu \quad (\text{B.1a})$$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t} dt \quad (\text{B.1b})$$

Wie schon die suggestive Namensgebung andeutet, sehen wir in den Variablen t und ν die physikalische Größen Zeit und Frequenz. Das ist natürlich in keiner Weise zwingend. Auch gilt entsprechendes für andere Paare physikalischer Größen (A, B) mit $[A \cdot B] = 1$.

Das Wesentliche der Fouriertransformation liegt in der Darstellung einer Funktion durch ebene Wellen der Art $\phi_\nu = e^{2\pi i\nu t}$. Mehrere Spielarten sind dabei jedoch denkbar, sodass ein Satz von Konventionen zu vereinbaren ist.

Eine grundsätzliche Forderung ist schon in (B.1b) und (B.1a) enthalten: $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)]$. D. h. die ϕ_ν sollen orthonormiert und vollständig sein:

$$\int \phi_\nu^*(t)\phi_{\nu'}(t)dt = \delta(\nu - \nu') \quad \text{und} \quad \int \phi_\nu^*(t)\phi_\nu(t')d\nu = \delta(t - t')$$

Bei der ebenfalls naheliegenden Wahl der Winkelfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ als Frequenzraum-Variablen ergibt sich so der bekannte Faktor $1/2\pi$ in den Transformationsvorschriften. Eine beliebige

¹ jeder ‚geeigneten‘ Funktion — mathematische Strenge wird hier nicht betont!

Aufteilung dieses Faktors auf Hin- und Rücktransformation ist dabei möglich. Das sogenannte Parseval-Theorem verknüpft die Normen in Zeit- und Frequenzraum:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{B.1c})$$

Eine Konventionsfrage ist auch die Wahl des Vorzeichens im Exponenten von ϕ_ν . Die hier benutzte ist in der Physik gebräuchlich und entspricht der in den von uns verwendeten FFT-Algorithmen. Es gilt dann $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}f\right) = 2\pi i\nu \cdot \mathcal{F}(f)$, und das ist z. B. die Grundlage der bekannten Merkgeln für die Impedanzen elektrischer Bauteile ($Z_{\text{Spule}} = 2\pi i\nu L$, etc.).

In der eher mathematisch orientierten Literatur findet sich häufig die Wahl von $\phi_\nu = e^{-2\pi i\nu t}$. Dann ergibt sich z. B. für $f(t) = \sin(2\pi\nu_0 t)$ die Transformierte $F(\nu) = \frac{i}{2}(\delta(\nu - \nu_0) - \delta(\nu + \nu_0))$, mit $\text{Im } F(\nu) > 0$ für $\nu > 0$.

Bei physikalischen Fragestellungen hat man es in der Regel mit einheitenbehafteten Größen zu tun. In welchen Einheiten ist dann im Fourierraum zu rechnen? Aus (B.1b) liest man ab: $[F] = [f] \cdot [t]$. Das ist jedoch eine recht unschöne Mischung der Einheiten einer Funktion und ihres Arguments. Daher ist es wohl sinnvoller, $[f] = [F]$ zu setzen und auf den rechten Seiten von (B.1b) und (B.1a) implizit durch $[t]$ bzw. $[\nu]$ zu teilen.

Bestimmte Eigenschaften der Funktion f können zu weiteren Vereinfachungen führen. So gilt für reellwertige Funktionen $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$\text{Re } F(\nu) = \text{Re } F(-\nu) \quad \text{und} \quad \text{Im } F(\nu) = -\text{Im } F(-\nu).$$

B.2 Periodische Funktionen

Einen besonderen Fall stellen periodische Funktionen dar. Wenn $f(t + T) = f(t)$ ist, zeigt ein Blick auf (B.1a), dass dann nur die Frequenzen $\nu_k = k/T$ mit $k \in \mathbb{Z}$ in Frage kommen. Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f(t)]$ ist also ein Satz von Fourierkomponenten F_k , mit denen $f(t)$ als Fourierreihe dargestellt wird:

$$f(t) = \sum_k F_k e^{2\pi i k t / T} \quad (\text{B.2a})$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i k t / T} dt \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{B.2b})$$

Häufig ist eine Funktion nur auf einem beschränkten Intervall bekannt: $f(t) : [0, T] \mapsto \mathbb{C}$. Auch in diesem Fall kann man eine Darstellung als Fourierreihe erhalten. Hierzu wird f periodisch fortgesetzt: $f(t + T) = f(t)$.

Der in (B.2b) eingeführte Faktor $1/T$ ergibt sich dabei aus der für periodische Funktionen adäquaten Normierung der Basisfunktionen $\phi_k = e^{2\pi i k t / T}$:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \phi_k^*(t) \phi_l(t) dt = \delta_{kl}$$

So sind auch die Fourierkomponenten unabhängig von der Intervalllänge T , und es ist (wie schon in Abschnitt B.1 erwähnt) sinnvollerweise $[F_k] = [f]$. Analog ergibt sich auch das Parseval-Theorem:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_k |F_k|^2 \quad (\text{B.2c})$$

B.3 Äquidistant abgetastete Funktionen

Bei vielen Anwendungen, z. B. bei der computergestützten Datenaufnahme, kennt man die Funktionswerte von $f(t)$ nur für diskrete, jedoch äquidistante Werte $t_n = n \cdot \Delta t$ mit $n = 0, 1, \dots, (N - 1)$. Zunächst entspricht dies dem im vorangehenden Abschnitt diskutierten Fall mit $T = N \cdot \Delta t$. Hinzu kommt, dass sich aus der Abtastrate $1/\Delta t$ eine obere Schranke für die Frequenz der so darstellbaren Basisfunktionen ϕ_k ergibt, die sogenannte Nyquist-Frequenz $\nu_N = 1/(2\Delta t)$. Die Funktionen f und F werden also dargestellt durch Sätze von jeweils N komplexen Zahlen:

$$f_n = \sum_k F_k e^{2\pi i k n / N} \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (\text{B.3a})$$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_n f_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (k = -N/2 + 1, \dots, 0, \dots, N/2) \quad (\text{B.3b})$$

$$\frac{1}{N} \sum_n |f_n|^2 = \sum_k |F_k|^2 \quad (\text{B.3c})$$

Bemerkenswert ist, dass in diesem Fall die Fouriertransformation völlig unabhängig von den Größen t und ν ist.

B.4 Die spektrale Dichte

Oft kann bei einer Fourieranalyse die Phase von F außer Acht gelassen werden. Die relevanten Informationen enthält dann die sogenannte spektrale Dichte $\mathcal{P}(\nu) = |F(\nu)|^2$ (*power spectral density*, PSD). $\mathcal{P}(\nu) = \mathcal{P}(\nu) d\nu$ entspricht dem spektralen Gewicht der Frequenzen im Intervall $[\nu, \nu + d\nu]$, physikalisch meist also der Intensität oder Leistung.

Im Fall diskreter Fourierkoeffizienten entspricht dieser Größe das Power-Spektrum $P_k = |F_k|^2$. Die spektrale Dichte ist dann näherungsweise $P_k/\Delta\nu = P_k \cdot T$. Wichtig wird diese Unterscheidung, wenn man es mit eigentlich aperiodischen Funktionen zu tun hat. Die Werte der P_k hängen dann von der Intervalllänge T ab: für $T \rightarrow \infty$ geht dann $P_k \cdot T \rightarrow \mathcal{P}$.

Für reelwertige Funktionen f ist das spektrale Gewicht für positive und negative Frequenzen gleich. Daher ist es üblich, nur positive Frequenzwerte zu betrachten. Unter der einseitigen spektralen Dichte versteht man die Summe $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(\nu) + \mathcal{P}(-\nu)$ für $\nu > 0$. Hier ist also ein Faktor 2 zu beachten!

Die Bandbreite B einer im Frequenzraum begrenzten Funktion (siehe Abschnitt B.5) definiert man in der Regel in Bezug auf die eine ‚Seite‘ des Spektrums. Nach (B.1c) ist:

$$\text{Var}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu = \int_0^B \mathcal{P}_+(\nu) d\nu$$

B.5 Filter

Bei der diskreten Fouriertransformation ist eine Begrenzung der Bandbreite - die Funktion $f(t)$ sollte keine spektralen Anteile oberhalb der Nyquistfrequenz besitzen - wichtig, um *Aliasing*-Effekte zu vermeiden. Das wird durch eine Tiefpass-Filterung erreicht, die als Faltung von f mit einer Filterfunktion g dargestellt werden kann:

$$\tilde{f}(t) = [g * f](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')f(t') dt', \quad \tilde{F}(\nu) = G(\nu) \cdot F(\nu) \quad (\text{B.4a})$$

Insbesondere ist $\tilde{f} = g$ für $f(t) = \delta(t)$. Ein Filter sollte den Mittelwert von f erhalten, begrenzt andererseits die spektrale Dichte auf eine bestimmte Bandbreite B :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = G(0) = 1 \quad (\text{B.4b})$$

$$\int_0^{\infty} |G(\nu)|^2 d\nu = B \quad (\text{B.4c})$$

Eine weitere Kenngröße ist die Abschneidefrequenz ν_c (sie wird auch als 3-dB-Punkt bezeichnet):

$$|G(\nu_c)|^2 = \frac{1}{2} \quad (\text{B.4d})$$

Ein einfacher Tiefpass ist das RC-Glied. Wendet man die bekannten Regeln für die Impedanzen an, so ist für unsere Vorzeichenkonvention (siehe Abschnitt B.1) mit $\tau = R \cdot C$:

$$G(\nu) = \frac{1}{1 + 2\pi i \tau \nu} \quad (\text{B.1a}) \Rightarrow \quad g(t) = \frac{1}{\tau} \theta(t) e^{-t/\tau}$$

Die Bandbreite $B = (4\tau)^{-1}$ lässt sich leicht mit (B.1c) aus $g(t)$ berechnen. Die Abschneidefrequenz ist $\nu_c = (2\pi\tau)^{-1}$ und somit $B = \frac{\pi}{2}\nu_c$.

Ein anderes Beispiel ist ein Rechteck-Filter (*moving average*):

$$g(t) = \frac{1}{2\tau} \{\theta(t) - \theta(t - 2\tau)\} \quad (\text{B.1b}) \Rightarrow \quad G(\nu) = e^{-2\pi i \tau \nu} \frac{\sin(2\pi \tau \nu)}{2\pi \tau \nu}$$

Die Bandbreite ist hier – wie beim RC-Glied – $B = (4\tau)^{-1}$, daher die Wahl von 2τ als ‚Kantenlänge‘ des Rechtecks. Für die Abschneidefrequenz muss man die transzendente Gleichung $\sin(2\pi\tau\nu_c) = \sqrt{2}\pi\tau\nu_c$ lösen. Näherungsweise ist $\nu_c = 1,39156 \cdot (2\pi\tau)^{-1}$.

Gemeinsam ist diesen einpoligen Filtern, dass für $\nu \gg \nu_c$ die spektrale Dichte näherungsweise mit 6 dB/Oktave abfällt, d. h. $\mathcal{P}(2 \cdot \nu) = \mathcal{P}(\nu)/4$.

		$n =$	1	2	3	4
RC-Glied	$\tau \cdot B_n =$		1/4	1/8	3/32	5/64
	$\tau \cdot B_n \approx$		0,250	0,125	0,094	0,078
	$\tau \cdot v_c^{(n)} \approx$		0,159	0,102	0,081	0,069
Rechteck	$\tau \cdot B_n =$		1/4	1/6	11/80	151/1260
	$\tau \cdot B_n \approx$		0,250	0,167	0,138	0,120
	$\tau \cdot v_c^{(n)} \approx$		0,221	0,159	0,131	0,114

Tabelle B.1 Bandbreite B_n und Abschneidefrequenz v_c für Tiefpassfilter n -ter Ordnung. τ ist die nominelle Zeitkonstante.

Mehrpulige Filter

Höhere Flankensteilheit erreicht man durch Hintereinanderschalten von mehreren Filtern. Die Steigung ist dann $n \cdot 6$ dB/Oktave für n Pole. Nach (B.4a) ist die Fouriertransformierte der Filterfunktion dann $G_n(\nu) = (G(\nu))^n$, $g_n(t)$ ergibt sich entsprechend durch n -fache Faltung von $g(t)$.

Für n -polige RC-Filter lassen sich leicht allgemeine Lösungen angeben:

$$g_n(t) = \frac{\theta(t)}{\tau(n-1)!} (t/\tau)^{n-1} e^{-t/\tau}, \quad B_n = \frac{1}{4^n \tau} \frac{[2(n-1)]!}{[(n-1)!]^2} = \frac{1}{4^n \tau} \binom{2(n-1)}{n-1}$$

Die ersten Binominalkoeffizienten $\binom{2n}{n}$ sind 1, 2, 6, 20, 70, 252. Die Abschneidefrequenz ist $v_c^{(n)} = (2\pi\tau)^{-1} \sqrt{2^{1/n} - 1}$.

Für Rechteckfilter sind die entsprechenden Angaben für beliebige n schwierig. Für $n \leq 4$ ist mit $x = t/(2\tau)$ und $R(x) = \theta(x) - \theta(x-1)$:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{1}{2\tau} R(x) \\ g_2(t) &= \frac{1}{2\tau} \{xR(x) + (2-x)R(x-1)\} \\ g_3(t) &= \frac{1}{4\tau} \{x^2R(x) + [1 - 2((x-1)^2 - (x-1))]R(x-1) + (3-x)^2R(x-2)\} \\ g_4(t) &= \frac{1}{12\tau} \{x^3R(x) + [1 - 3((x-1)^3 - (x-1)^2 - (x-1))]R(x-1) \\ &\quad + [1 - 3((3-x)^3 - (3-x)^2 - (3-x))]R(x-2) + (4-x)^3R(x-3)\} \end{aligned}$$

Mit (B.4c) und (B.4d) lassen sich die zugehörigen Bandbreiten und Abschneidefrequenzen (diese nur näherungsweise) bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tabelle B.4 zusammengestellt.

B.6 Rauschen

Bei der Analyse experimenteller Daten spielen statistische Schwankungen der Messgröße stets eine Rolle. Diese Rauschbeiträge lassen sich charakterisieren durch ihre Intensität und durch die typische Frequenzabhängigkeit des Power-Spektrums.

Ein einfaches Beispiel ist sogenanntes *weißes Rauschen*: die zeitlich unkorrelierten Schwankungen weisen ein frequenzunabhängiges Spektrum auf. Ohne Bandbreitenbeschränkung wäre die Varianz des Rauschens nach (B.1c) daher unendlich groß, die Intensität einer solchen Rauschquelle wird deshalb pro Bandbreite angegeben. So beträgt das thermische Rauschen eines Widerstands $4k_B T R$ (in V^2/Hz), es ergibt sich z. B. für $R = 100 \text{ M}\Omega$ und $T = 300 \text{ K}$ ein Spannungsrauschen mit $\mathcal{P}_+ \approx (0,13 \mu\text{V})^2/\text{Hz}$. Am Ausgang eines 6-dB-Tiefpassfilters mit einer Zeitkonstante von 1 s (siehe Abschnitt B.5) erwartet man eine Rauschamplitude von $V_{\text{rms}} \approx 64 \text{ nV}$.

Wie bereits in Abschnitt B.4 erwähnt, muss man aufgrund der für diskrete Fourierspektren gewählten Normierung (Gleichungen (B.2b) und (B.3b)) die Intervalllänge T berücksichtigen: $\langle |F_k|^2 \rangle = \mathcal{P}_+ / (2T)$.

Entsprechend sind auch die aperiodischen UCF zu behandeln, auch wenn sie im Gegensatz zum Rauschen reproduzierbar und z. B. symmetrisch im B -Feld sind. Das Korrelationsfeld B_c ist ein Maß für die intrinsische Bandbreite der Fluktuationen. So ergibt sich für die Fourierkomponenten G_k einer Magnetoleitwertmessung $g(B)$ über einen Feldbereich T_B :

$$\langle |G_k|^2 \rangle = \frac{\pi}{2} \text{Var}(g)(\tilde{B}_c / T_B) (1 + 2\pi\nu_k \tilde{B}_c) \exp(-2\pi\nu_k \tilde{B}_c),$$

$$\tilde{B}_c = \frac{B_c}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}, \quad \nu_k = k / T_B$$

Dies entspricht der üblicherweise für die Autokorrelationsfunktion angenommene Form einer quadrierten Lorentzkurve.

Literaturverzeichnis

- Al'tshuler 1985** AL'TSHULER, B. L.: Fluctuations in the extrinsic conductivity of disordered conductors. In: *JETP Lett.* 41 (1985), Nr. 12, S. 648–651
- Altshuler und Aronov 1985** ALTSHULER, B. L. ; ARONOV, A. G.: *Electron-Electron Interaction In Disordered Conductors*. In: EFROS, A. L. (Hrsg.) ; POLLAK, M. (Hrsg.): *Electron-Electron Interactions in Disordered Systems*. Amsterdam : North-Holland, 1985 (Modern Problems in Condensed Matter Sciences). – ISBN 0-444-86916-6
- Ashcroft und Mermin 1976** ASHCROFT, Neil W. ; MERMIN, N. D.: *Solid State Physics*. internationale Ausgabe. Saunders College Publishing, 1976. – ISBN 0-03-049346-3
- Baranger und Stone 1989** BARANGER, Harold U. ; STONE, A. D.: Electrical linear-response theory in an arbitrary magnetic field: A new Fermi-surface formation. In: *Phys. Rev. B* 40 (1989), Nr. 12, S. 8169–8193
- Bauch 2000** BAUCH, Thilo: *Quanteninterferenzeffekte und zeitabhängiger elektronischer Transport in metallischen Nanostrukturen*, Universität zu Köln, Dissertation, 2000. – URL <http://www.ub.uni-koeln.de/ediss/archiv/abstract/bauchthilo.htm>
- Beenakker 1997** BEENAKKER, C. W. J.: Random-matrix theory of quantum transport. In: *Rev. Mod. Phys.* 69 (1997), Nr. 3, S. 731–808
- Brigham 1992** BRIGHAM, Elbert O.: *FFT : Schnelle Fourier-Transformation*. München ; Wien : R. Oldenbourg, 1992 (Einführung in die Nachrichtentechnik). – ISBN 3-486-22242-2
- Burr Brown Corp. 1990** BURR BROWN CORP.: *INA103 : Low Noise, Low Distortion Instrumentation Amplifier*. 1990. – URL <http://www-s.ti.com/sc/ds/ina103.pdf>. – Produkt-Datenblatt PDS-1016H
- Butz 2000** BUTZ, Tilman: *Fouriertransformation für Fußgänger*. 2. Auflage. Stuttgart ; Leipzig : B. G. Teubner, 2000. – 168 S. – ISBN 3-519-10202-1
- Golubev u. a. 2002** GOLUBEV, D. S. ; ZAIKIN, A. D. ; SCHÖN, Gerd: On Low-Temperature Dephasing by Electron-Electron Interaction. In: *J. Low Temp. Phys.* 126 (2002), Nr. 3–4, S. 1355–1376. – Preprint arXiv:cond-mat/0110495
- Golubev und Zaikin 1999** GOLUBEV, Dmitri S. ; ZAIKIN, Andrei D.: Quantum decoherence and weak localization at low temperatures. In: *Phys. Rev. B* 59 (1999), Nr. 14, S. 9195–9213

- Hegger 1997** HEGGER, Helmut: *Experimente zum elektronischen Transport in mesoskopischen Metallstrukturen*. Aachen : Shaker, 1997 (Berichte aus der Physik). – zugl. Universität Köln, Dissertation, 1997. – ISBN 3-8265-2661-9
- Imry 1997** IMRY, Yoseph: *Introduction to Mesoscopic Physics*. New York ; Oxford : Oxford University Press, 1997 (Mesoscopic Physics and Nanotechnology)
- Imry und Landauer 1999** IMRY, Yoseph ; LANDAUER, Rolf: Conductance viewed as transmission. In: *Rev. Mod. Phys.* 71 (1999), Nr. 2, S. S306–S312
- Jalabert u. a. 1990** JALABERT, R. A. ; BARANGE, H. U. ; STONE, A. D.: Conductance fluctuations in the ballistic regime: A probe of quantum chaos? In: *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990), Nr. 19, S. 2442–2445
- Janssen 1998** JANSSEN, Martin: Statistics and scaling in disordered mesoscopic electron systems. In: *Phys. Rep.* 295 (1998), Nr. 1–2, S. 1–91
- Kroha 2000** KROHA, Johann: 2000. – private Mitteilung
- Kubo u. a. 1991** KUBO, R. ; TODA, M. ; HASHITSUME, N.: *Statistical Physics II : Nonequilibrium Statistical Mechanics*. 2. Auflage. Berlin ; Heidelberg : Springer, 1991 (Solid State Sciences 31). – ISBN 3-540-53833-X
- Larkin und Khmel'nitskiĭ 1986** LARKIN, A. I. ; KHMEL'NITSKIĬ, D. E.: Mesoscopic fluctuations of current-voltage characteristics. In: *Sov. Phys. JETP* 64 (1986), Nr. 5, S. 1075–1077
- Lee und Stone 1985** LEE, P. A. ; STONE, A. D.: Universal conductance fluctuations in metals. In: *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985), Nr. 15, S. 1622–1625. – UCF, fundamental
- Lee u. a. 1987** LEE, P. A. ; STONE, A. D. ; FUKUYAMA, H.: Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field. In: *Phys. Rev. B* 35 (1987), Nr. 3, S. 1039–1070
- Mirlin 2001** MIRLIN, Alexander: 2001. – private Mitteilung
- Mirlin 2000** MIRLIN, Alexander D.: Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems. In: *Phys. Rep.* 326 (2000), Nr. 5–6, S. 259–382
- Mohanty u. a. 1997** MOHANTY, P. ; JARIWALA, E. M. Q. ; WEBB, R. A.: Intrinsic Decoherence in Mesoscopic Systems. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), Nr. 17, S. 3366–3369
- Paschke 1998** PASCHKE, Christian: *Zum elektronischen Transport in nanostrukturierten Cu:Mn-Metallschichten*. Göttingen : Cuvillier, 1998. – zugl. Universität Karlsruhe, Dissertation, 1998. – ISBN 3-89712-261-8

- Pierre 2001** PIERRE, Frédéric: Interactions électron-électron dans les fils mésoscopiques. In: *Ann. Phys. Fr.* 26 (2001), Nr. 4, S. 1–192. – URL <http://www-drecom.cea.fr/drecom/spec/Pres/Quantro/Qsite/archives/theses/theseFP.pdf>. – zugl. Université de Paris 6, Dissertation, 2000
- Pothier u. a. 1997** POTHIER, H. ; GUÉRON, S. ; BIRGE, Norman O. ; ESTEVE, D. ; DEVORET, M. H.: Energy Distribution Function of Quasiparticles in Mesoscopic Wires. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), Nr. 18, S. 3490–3493
- Ralph u. a. 1993** RALPH, D. C. ; RALLS, K. S. ; BUHRMAN, R. A.: Ensemble Studies of Nonlinear Conductance Fluctuations in Phase Coherent Samples. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), Nr. 7, S. 986–989
- Raychaudhuri u. a. 2002** RAYCHAUDHURI, A. K. ; GHOSH, Arindam ; KAR, Swastik: Flicker noise in degenerately doped Si single crystals near the metal-insulator transition. In: *Pramana J. Phys.* 58 (2002), Nr. 2, S. 343–359
- Schäfer u. a. 1996** SCHÄFER, Roland ; HECKER, Klaus ; HEGGER, Helmut: Experimental study of mesoscopic fluctuations in nonlinear conductance and magnetoconductance. In: *Phys. Rev. B* 53 (1996), Nr. 23, S. 15964–15970
- Schäfer u. a. 1999** SCHÄFER, Roland ; VOM STEIN, Peter ; WALLISSER, Christoph: How much Information is Carried by Fluctuation Spectra? In: KRAMER, Bernhard (Hrsg.): *Advances in Solid State Physics* Bd. 39. Braunschweig ; Wiesbaden : Vieweg, 1999, S. 583–593. – ISBN 3-528-03129-8
- Scheer 1995** SCHEER, Elke: *Zur Geometrieabhängigkeit der Leitwertfluktuationen in nanostrukturierten Metallschichten*. Aachen : Shaker, 1995 (Berichte aus der Physik). – zugl. Universität Karlsruhe, Dissertation, 1995. – ISBN 3-8265-0885-8
- Schwab und Rainondi 2001** SCHWAB, P. ; RAINMONDI, R.: Coherent transport in disordered metals out of equilibrium. In: *Eur. Phys. J. B* 24 (2001), Nr. 4, S. 525–540
- Stritzker und Wühl 1971** STRITZKER, B. ; WÜHL, H.: Supraleitung und Tempverhalten abschreckend kondensierter Germanium-Edelmetall-Legierungen. In: *Z. Physik* 243 (1971), S. 361–372
- Strunk 2002** STRUNK, Christoph: 2002. – private Mitteilung
- Terrier u. a. 2001** TERRIER, C. ; BABIĆ, D. ; STRUNK, C. ; NUSSBAUMER, T. ; SCHÖNENBERGER, C.: *Non-Equilibrium Quantum Interference in Metallic Mesoscopic Systems*. 2001. – zur Veröffentlichung in *Europhys. Lett.* angenommen, Preprint arXiv:cond-mat/0103486
- Thouless 1977** THOULESS, D. J.: Maximum Metallic Resistance in Thin Wires. In: *Phys. Rev. Lett.* 39 (1977), Nr. 18, S. 1167–1169

- Umbach u. a. 1984** UMBACH, C. ; WASHBURN, S. ; WEBB, R. L. R.: Magnetoresistance of small, quasi-one-dimensional, normal metal rings and lines. In: *Phys. Rev. B* 30 (1984), S. 4048
- Wallisser 1997** WALLISSER, Christoph: *Universelle Leitwertfluktuationen in metallischen Nanostrukturen*, Universität Karlsruhe, Diplomarbeit, 1997
- Wallisser 2002** WALLISSER, Christoph: Einzelelektronentransistoren im Regime kleiner Widerstände / Forschungszentrum Karlsruhe, Institut für Festkörperphysik. Karlsruhe : Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 2002 (FZKA 6712). – Forschungsbericht. – 124 S. – URL <http://bibliothek.fzk.de/zb/berichte/FZKA6712.pdf>. zugl.: Universität Karlsruhe, Dissertation, 2002. – ISSN 0947-8620
- Washburn und Webb 1992** WASHBURN, S. ; WEBB, R. A.: Quantum transport in small disordered samples from the diffusive to the ballistic regime. In: *Rep. Prog. Phys.* 55 (1992), Nr. 8, S. 1311–1383
- Weber u. a. 2001** WEBER, H. B. ; HÄUSSLER, R. ; LÖHNEISEN, H. v. ; KROHA, J.: Nonequilibrium electronic transport and interaction in short metallic nanobridges. In: *Phys. Rev. B* 63 (2001), Nr. 16, S. 165426
- Zwenger 1998** ZWENGER, Wilhelm: *Theory of Coherent Transport*. In: DITTRICH, Thomas (Hrsg.) ; HÄNGGI, Peter (Hrsg.) ; INGOLD, Gert-Ludwig (Hrsg.) ; KRAMER, Bernhard (Hrsg.) ; SCHÖN, Gerd (Hrsg.) ; ZWENGER, Wilhelm (Hrsg.): *Quantum Transport and Dissipation*. Weinheim : Wiley-VCH, 1998